

RAFAEL ANTONIO AMARAL PEDRINI

**ANÁLISE DE PROPAGAÇÃO ARBITRÁRIA DE
DESCONTINUIDADES FORTES EM SÓLIDOS
BIDIMENSIONAIS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS
DE CONTORNO**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos para a obtenção do
Título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Osvaldo L. Manzoli

São Carlos
2008

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

P371a Pedrini, Rafael Antonio Amaral
 Análise de propagação arbitrária de descontinuidades
fortes em sólidos bidimensionais pelo método dos
elementos de contorno / Rafael Antonio Amaral Pedrini ;
orientador Osvaldo Luís Manzoli. -- São Carlos, 2008.

 Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação e Área
de Concentração em Engenharia de Estruturas) -- Escola de
Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo,
2008.

 1. Método de elemento de contorno. 2. Mecânica da
fratura. 3. Modelos coesivos. 4. Descontinuidades fortes.
5. Concreto. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO


Candidato: Engenheiro **RAFAEL ANTONIO AMARAL PEDRINI**

Dissertação defendida e julgada em 18/04/2008 perante a Comissão Julgadora:



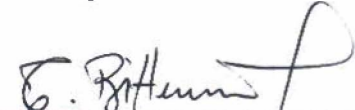
Prof. Dr. **OSVALDO LUIS MANZOLI (Orientador)**
(Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho"/UNESP-Campus de Bauru)

APROVADO



Prof. Associado **HUMBERTO BREVES CODA**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

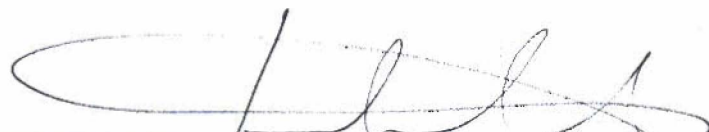


Prof. Associado **TULIO NOGUEIRA BITTENCOURT**
(Escola Politécnica/USP)

aprovado



Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)



Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelas inúmeras oportunidades e por sempre guiar meus passos por essa vida. A meus pais, Cláudio e Maria pelo carinho, conselhos e apoio que me deram durante essa fase e a meu irmão Rubens, por ser um verdadeiro companheiro. À minha namorada Marina, por estar ao meu lado durante esses anos, sempre me incentivando e motivando.

Agradeço ao professor Osvaldo, pelo tempo e dedicação despendidos durante a orientação. Aos professores do departamento pelos ensinamentos que, tenho certeza, nunca esquecerei e aos funcionários, pelo excelente trabalho.

Aos colegas de curso, com os quais aprendi muito e com os quais fiz grandes amizades. Gostaria especialmente de agradecer aos meus companheiros da sala três, Gustavo, Antonio e João César, com quem passei muitas horas estudando e dando risadas também.

À FAPESP pelo auxílio no desenvolvimento dessa pesquisa.

Em suma, agradeço a todos que direta ou indiretamente me apoiaram nesse trabalho.

"O único homem que está isento de erros, é aquele que não arrisca acertar."

Albert Einstein

Resumo

PEDRINI, R. A. A. **Análise de propagação arbitrária de descontinuidades fortes em sólidos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos. São Carlos, 2008.

O trabalho tem como objetivo trazer contribuições à simulação numérica pelo método dos elementos de contorno (MEC) de formação e propagação de descontinuidades no campo de deslocamentos (descontinuidades fortes) em sólidos bidimensionais. A formação de descontinuidades fortes caracteriza o processo de falha material, que pode estar associado ao fraturamento em materiais quase frágeis ou a superfícies de deslizamentos de materiais dúcteis. Apresenta-se uma formulação do MEC baseada na incorporação de interfaces de descontinuidade no interior de células internas, que possibilita propagação arbitrária de descontinuidades usando uma malha de células internas fixa, definida antes da análise. Comparam-se diferentes alternativas provenientes do relaxamento dos requisitos de consistência estática e analisa-se a influência do alinhamento da malha. Apresenta-se também um possível esquema de construção adaptativa de células internas com interface incorporada para capturar a trajetória arbitrária da descontinuidade que se propaga durante o processo de carregamento. Este esquema visa aumentar a robustez e reduzir o esforço computacional. As características geométricas das células internas geradas são estabelecidas em função da orientação da descontinuidade fornecida pelo critério de falha, de maneira a proporcionar melhor eficiência numérica. Os estudos são levados a cabo através da simulação numérica de testes experimentais colhidos da literatura.

Palavra-chave: Método de Elementos de Contorno, Mecânica da Fratura, Modelos Coesivos, Descontinuidades Fortes, Concreto

Abstract

PEDRINI, R. A. A. **Analysis of arbitrary propagation of strong discontinuities in bidimensional solids using the boundary elements method.** Dissertação de Mestrado, Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos. São Carlos, 2008.

Abstract

This work has the objective of bringing contributions to the numeric simulation using the boundary elements method (BEM) to model the initiation and propagation of strong discontinuities in the displacement field in bidimensional solids. The initiation process of strong discontinuities characterizes the failure process of material, which can be associated with the fracture of quasi-brittle materials and slip lines in ductile materials such as metals. The effect of the displacement jump of a discontinuity interface embedded in an internal cell is provided by an equivalent strain field over the cell. This model allows the study of arbitrary crack growth using a fixed mesh defined before the analysis. The dissipative process in the cell interface is described by an isotropic damage model in the continuum approach of strong discontinues. Alternatives that come from relaxing the static consistencies and the influence of the mesh alignment are analyzed. An adaptative algorithm for internal cells creation is also presented to capture the path of the crack growth during the loading process. This algorithm intends to overcome some convergence problems found in models with predefined meshes and also to reduce the computational efforts. The geometric characteristics of the generated internal cells are defined using the crack orientation, given by the failure criterion, to provide a better numerical efficiency. The results obtained with the proposed formulation are compared with the ones obtained with other numerical methods and also from experiments.

Keywords: Boundary Element Method, Fracture Mechanics, Cohesive Model, Strong Discontinuities, Concrete

Lista de Figuras

Figura 2.1 – Definição de dano	14
Figura 2.2 – Diagrama de tensão deformação uniaxial com modelo de dano	19
Figura 2.3 – Comportamentos distintos de endurecimento/abrandamento	22
Figura 2.4 – Largura de banda de localização k	25
Figura 2.5 – Modelo discreto coesivo	26
Figura 2.6 – Modelo de localizações de deformações (contínuo)	26
Figura 3.1 – Definição do domínio e condições de contorno	30
Figura 3.2 – Discretização do contorno em elementos e das células internas	33
Figura 3.3 – Dimensão do sistema antes da ocorrência de deformações inelásticas	35
Figura 3.4 – Dimensão do sistema não-linear das deformações	36
Figura 3.5 – Dimensão do sistema após a ocorrência de deformações inelásticas	36
Figura 3.6 – Método de Newton-Raphson	38
Figura 4.1 – Domínio bidimensional descontínuo	44
Figura 4.2 – Decomposição do campo de deslocamentos	46
Figura 4.3 – Discretização do contorno e da região Ω_ϕ em células internas	58
Figura 4.4 – Construção da função ϕ no domínio da célula	60
Figura 4.5 – Célula interna com descontinuidade incorporada	63
Figura 4.6 – Relaxamento das condições estáticas e cinemáticas	68

Figura 5.1 –	Elemento linear descontínuo	70
Figura 5.2 –	Malhas para simulação de não-linearidades	71
Figura 5.3 –	Seqüência de criação de par de células internas	72
Figura 5.4 –	Seqüência de criação do último par de células internas	73
Figura 5.5 –	Verificação quanto à posição de um ponto em relação ao contorno	74
Figura 5.6 –	Localização dos pontos fonte	76
Figura 5.7 –	Diferenciação de área e contorno	77
Figura 5.8 –	Subelemento	80
Figura 5.9 –	Técnicas de subintegração	81
Figura 6.1 –	(a) Geometria (unidades em mm) e condições de contorno; (b) Malha utilizada	85
Figura 6.2 –	Curvas de carregamento vs. deslocamento	85
Figura 6.3 –	(a) Curvas de carregamento vs. deslocamento via MEC; (b) malha deformada	87
Figura 6.4 –	Geometria (mm) e condições de contorno de GÁLVEZ et. al. (1998)	88
Figura 6.5 –	Malhas M1 e M2 originais e deformadas	90
Figura 6.6 –	Curvas de carregamento vs. deslocamento	91
Figura 6.7 –	M2 com elementos para pós-processo e células internas que participam da análise não-linear	92
Figura 6.8 –	Curvas de carregamento vs. deslocamento	94
Figura 6.9 –	Evolução da malha de 3 mm durante o processo de abertura da fratura	95
Figura 6.10 –	Diversas malhas geradas em configuração original e deformada	96
Figura 6.11 –	Isolinhas de deslocamentos verticais (malha com elementos de 3 mm)	97
Figura 6.12 –	Convergência numérica – malha com elementos de 2 mm – Curvas de carregamento vs. deslocamentos para diferentes incrementos de deformação horizontal	98
Figura 6.13 –	Detalhe do processo de convergência – malha com elementos de 2 mm – Curvas de carregamento vs. deslocamentos para incremento de deformação igual a $1.15E-04$	99
Figura 6.14 –	Geometria (mm) e condições de contorno de PETERSON (1981).	100
Figura 6.15 –	Curva de carregamento vs. deslocamento	100

Figura 6.16 –	Resultados numéricos no estágio final do processo de carga: (a) Posição da linha de descontinuidade; (b) Configuração deformada	101
Figura 6.17 –	Geometria (mm) e condições de contorno de ARREA & INGRAFFEA (1982)	102
Figura 6.18 –	Resultados numéricos no estágio final do processo de carga: (a) Posição da linha de descontinuidade; (b) Configuração deformada	103
Figura 6.19 –	Curva de carregamento vs. CMSD	104
Figura A1.1 –	Componente de tensão de um volume infinitesimal em equilíbrio (WUTZOW, 2003)	118
Figura A1.2 –	Infinitesimal de um corpo em equilíbrio com forças externas (WUTZOW, 2003)	119
Figura A1.3 –	Estado plano de tensão (EPT)	121
Figura A1.4 –	Problema do Estado plano de deformações (EPD)	123
Figura A2.1 –	Domínios e contornos de um meio contínuo	127
Figura A2.2 –	Variáveis do problema e condições de contorno	127
Figura A2.3 –	Domínio acrescido de complemento infinitesimal	133
Figura A2.4 –	Definição dos ângulos γ e α para pontos do contorno	134
Figura A2.5 –	Definição das tensões no contorno	136
Figura A3.1 –	Função Delta de Dirac	139

Lista de Tabelas

Tabela 6.1 – Dados do concreto	86
Tabela 6.2 – Dados do concreto	89
Tabela 6.3 – Incrementos de deformação horizontal	98
Tabela 6.4 – Dados do concreto	100
Tabela 6.5 – Dados do concreto	102

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	1
1.2	Revisão bibliográfica	3
2	Mecânica do Dano Contínuo	11
2.1	Introdução	11
2.2	Conceitos fundamentais	13
2.2.1	<i>Natureza física do estado sólido e do dano</i>	13
2.2.2	<i>Representação mecânica do dano</i>	13
2.2.2.1	<i>Variável unidimensional de dano</i>	14
2.2.2.2	<i>Conceito de tensão efetiva</i>	15
2.2.2.3	<i>Princípio da deformação equivalente</i>	16
2.3	Modelo constitutivo de dano isotrópico.....	17
2.3.1	<i>Critério de dano</i>	20
2.3.2	<i>Lei de evolução da variável de dano</i>	22
2.3.3	<i>Energia consumida</i>	24
3	MEC Implícito para Problemas Inelásticos	29
3.1	Introdução	29
3.2	Equações integrais do MEC para a elasticidade.....	29
3.3	Formulação do MEC para sólidos inelásticos	30
3.4	Equações algébricas.....	32
3.5	Método implícito de solução de problemas inelásticos	37
3.5.1	<i>Método de Newton-Raphson</i>	37
3.5.2	<i>Estratégia de solução incremental iterativa</i>	39
3.6	Método de controle de resposta.....	40

4	Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes	43
4.1	Introdução.....	43
4.2	Cinemática de descontinuidades fortes.....	43
4.2.1	<i>Campo de deslocamentos descontínuos</i>	44
4.2.2	<i>Campo de deformações</i>	47
4.2.3	<i>Identificação das diferentes escalas</i>	48
4.2.4	<i>Equações básicas</i>	48
4.2.5	<i>Equações básicas em termos das variáveis regulares</i>	50
4.3	Equações do MEC	52
4.3.1	<i>Equações integrais da formulação não-linear do MEC</i>	53
4.3.2	<i>Descontinuidades fortes no contexto da mecânica do contínuo</i>	57
4.4	Análise numérica	57
4.4.1	<i>Aproximação numérica</i>	57
4.4.2	<i>Modelo constitutivo regularizado</i>	58
4.4.2.1	<i>Regularização da distribuição</i>	59
4.4.2.2	<i>Construção da função Φ</i>	59
4.4.2.3	<i>Aproximação da função salto</i>	60
4.4.2.4	<i>Eliminação da escala refinada</i>	61
4.5	Formulação simétrica e parcialmente simétrica	65
5	Técnicas Numéricas.....	69
5.1	Introdução.....	69
5.2	Elemento de contorno descontínuo.....	69
5.3	Algoritmo de geração de células sobre o domínio.....	70
5.4	Integrações.....	75
5.4.1	<i>Integrações sobre elementos do contorno</i>	75
5.4.2	<i>Integração sobre células do domínio</i>	77
5.4.3	<i>Subintegração</i>	78

6	Análises Numéricas	83
6.1	Introdução	83
6.2	Análises preliminares.....	83
6.2.1	<i>Tração uniaxial com múltiplas fraturas em concreto</i>	84
6.2.2	<i>Flexão de viga entalhada submetida a forças em quatro pontos de GÁLVEZ et. al. com malha alinhada</i>	88
6.3	Análises com o algoritmo de geração de células.....	92
6.3.1	<i>Flexão de viga entalhada submetida a forças em quatro pontos de GÁLVEZ et. al. com geração de células internas</i>	92
6.3.1.1	<i>Estudo de convergência da resposta com a redução dos incrementos de carga</i>	97
6.3.2	<i>Flexão de viga entalhada submetida a forças em três pontos</i>	99
6.3.3	<i>Flexão de viga entalhada submetida a forças em quatro pontos de ARREA & INGRAFFEA com geração de células internas</i>	101
7	Conclusões	105
8	Referências Bibliográficas	109
A1	Teoria da Elasticidade.....	117
A1.1	Introdução.....	117
A1.2	Equações da teoria da elasticidade.....	117
A1.2.1	<i>Equações diferenciais de equilíbrio (Navier)</i>	118
A1.2.2	<i>Relações entre deformação e deslocamento</i>	120
A1.2.3	<i>Lei de Hooke</i>	120
A1.3	Estados planos de tensão	121
A1.3.1	<i>Estado plano de tensão (EPT)</i>	121
A1.3.2	<i>Estado plano de deformação (EPD)</i>	122

A2 MEC para Sólidos Elásticos.....	125
A2.1 Introdução.....	125
A2.2 Formulação do MEC para problemas elásticos	126
<i>A2.2.1 Variáveis do problema e condições de contorno</i>	126
<i>A2.2.2 Equação de Navier</i>	128
<i>A2.2.3 Soluções fundamentais</i>	129
A2.3 Representações integrais básicas do problema elástico bidimensional.....	131
<i>A2.3.1 Equações integrais para pontos do contorno</i>	132
<i>A2.3.2 Determinação das componentes de tensão internas</i>	135
<i>A2.3.3 Determinação das componentes de tensão no contorno</i>	136
A3 Delta de Dirac.....	139
A3.1 Função Delta de Dirac.....	139
A4 Delta de Kronecker	141
A4.1 Delta de Kronecker	141

1 Introdução

1 Capítulo

1.1 Objetivos

Com o advento da informática e o avanço das técnicas numéricas, problemas antes tratados com certas simplificações passaram a poder ser tratados com melhores modelos e métodos. Busca-se uma melhor compreensão e entendimento de fenômenos antes não levados em consideração (por falta de ferramentas práticas), tais como não-linearidade física, descontinuidades fortes, fenômenos de dano entre outros. Este trabalho visa contribuir com a proposição de um modelo capaz de representar o comportamento de materiais quase-frágeis, tais como o concreto, caracterizados pelo processo de formação de fissuras durante o processo de carregamento.

O comportamento mecânico do concreto vem sendo alvo de intensa pesquisa por engenheiros de todo o mundo durante várias décadas. O concreto tornou-se o principal material empregado em estruturas civis no século passado, e cada dia mais passa a ter novas aplicações, devido a avanços, tanto na área de cálculo das estruturas quanto na tecnologia do material. Estes avanços nos permitem a utilização de estruturas cada vez mais arrojadas e esbeltas, e com isso fenômenos antigamente desconsiderados ou simplificados passam a ter importância no cálculo de estruturas de concreto.

Assim, são de profunda importância os estudos dos modelos físico-matemáticos que irão representar o comportamento do material a nível macroscópico, tradução de fenômenos dissipativos de natureza e escala microscópicas.

No âmbito dos fenômenos de dano se insere parte importante desta dissertação. A localização e propagação das deformações inelásticas é o principal enfoque, pois se sabe que a formação e o crescimento de micro-fissuras, aliados à heterogeneidade do concreto, são responsáveis pelo comportamento não-linear deste material. Existem

diversos modelos propostos para representar tais fenômenos, e, dentre os modelos clássicos utilizados na previsão do comportamento mecânico de materiais estruturais no contexto da mecânica dos meios contínuos, os fundamentados na teoria mecânica do dano são de comprovada utilidade na representação do concreto.

Para efeito da formulação não-linear implícita do Método dos Elementos de Contorno (MEC) utilizada neste trabalho, as deformações inelásticas associadas aos efeitos da não-linearidade material são tratadas como deformações iniciais, que são aproximadas sobre o domínio do corpo. A formulação é escrita com base nas variáveis do campo de deformações, as quais são relacionadas às deformações iniciais por meio de um modelo constitutivo não-linear. Para qualquer que seja o modelo constitutivo adotado, a formulação baseada no campo de deformações iniciais pode ser aplicada.

O principal objetivo da presente dissertação é trazer contribuições para a nova formulação do Método dos Elementos de Contorno, desenvolvida por MANZOLI & VENTURINI (2004 e 2005), utilizada na representação de descontinuidades fortes em sólidos bidimensionais e baseada na incorporação de interfaces de descontinuidade no interior de células internas existentes. Para tanto, analisam-se as vantagens e desvantagens da relaxação das condições simétricas estáticas e cinemáticas, cujo estudo associa-se à geometria das células de domínio e à linha de fratura. O resultado dessa análise, como mostrado nessa dissertação, leva ao desenvolvimento de um algoritmo de geração de células internas inovador, o qual melhora a estabilidade numérica de resolução do problema.

Assim, como alternativa à inclusão de interfaces descontínuas em células existentes, desenvolve-se um procedimento de construção adaptativa de células internas com interface incorporada para capturar a trajetória arbitrária da descontinuidade que se propaga durante o processo de carregamento. Busca-se com isso, limitar a discretização espacial às regiões vizinhas às superfícies (linhas, no caso bidimensional) de descontinuidades que propagam durante a análise. Os critérios para a definição do tamanho e orientação das células internas são estabelecidos de maneira a proporcionar melhor eficiência numérica. A validação da formulação proposta é efetuada contrastando as respostas numéricas com resultados experimentais colhidos da literatura

ou provenientes de outras metodologias numéricas, tais como o método dos elementos finitos.

A dissertação divide-se em capítulos para uma melhor visualização dos tópicos nesse trabalho enfocados. O capítulo 2 apresenta uma introdução à teoria do dano contínuo e o modelo utilizado. No capítulo 3 expõem-se as formulações do método dos elementos de contorno para sólidos elásticos e inelásticos, desenvolvidas a partir do Teorema de Betti. Apresentam-se também neste capítulo as considerações utilizadas quando da presença de campos iniciais de deformação, as equações algébricas e o método de controle da resposta. O capítulo 4 tem por objetivo a explicitação das aproximações realizadas na simulação de descontinuidades fortes, sua cinemática e regularização. Este capítulo trata também do problema do relaxamento das condições estáticas do modelo. O capítulo 5 expõe as técnicas numéricas utilizadas, algoritmo de geração de células internas, métodos de integração numéricos e subintegração. O capítulo 6 mostra os resultados obtidos com a modelagem apresentada. O capítulo 7 apresenta as considerações finais e sugestões para continuidade deste trabalho.

Encontram-se ao final desta dissertação quatro apêndices com informações relativas à teoria clássica de sólidos elásticos, formulação do MEC para sólidos elásticos e delta de Kronecker e delta de Dirac.

1.2 Revisão bibliográfica

Este capítulo trata do atual estágio de desenvolvimento científico sobre o tema neste trabalho abordado: a simulação numérica de formação e propagação de descontinuidades fortes em sólidos. Esta previsão sempre foi um desafio para os pesquisadores e é uma preocupação real entre os engenheiros estruturais. O Método de Elementos de Contorno (MEC) é uma poderosa ferramenta numérica de cálculo, e vem sendo cada vez mais utilizado por suas vantagens associadas à redução das aproximações envolvidas, possibilitando maior precisão e menor esforço computacional.

Entendem-se como descontinuidades fortes os saltos no campo de deslocamentos através de uma superfície material (ou linha material em problemas bidimensionais), tais como ocorrem em processos de fraturamento em materiais frágeis ou quase-frágeis (cerâmicas, rochas, concreto, etc.) ou formação de superfícies de deslizamentos em solos. O correspondente campo de deformações, obtido mediante o gradiente material dos deslocamentos, deixa de ser limitado ao longo da superfície de descontinuidade.

No campo teórico, destacam-se duas correntes distintas para modelar a formação das descontinuidades fortes. Por um lado encontram-se os modelos fundamentados na mecânica do contínuo, nos quais se considera que a descontinuidade é o caso limite da localização de deformações em bandas estreitas. Nesses modelos contínuos, os conceitos macroscópicos de deformações e tensões são mantidos para representar o comportamento constitutivo do material. Em meios sólidos convencionais, locais e independentes da velocidade (rate independent), interpreta-se que a localização decorre da formação de descontinuidades fracas, caracterizadas por campos de deslocamentos contínuos, mas de deformações descontínuos. Associam-se as referidas descontinuidades à instabilidade do material, conduzindo à perda de elipticidade local das equações de equilíbrio incrementais, conhecida como bifurcação descontínua (OTTOSEN & RUNESSON, 1991 e RUDINICK & RICE, 1975). A ausência de um comprimento intrínseco nos meios sólidos convencionais faz com que a largura da banda de localização fique indefinida, causando as indesejadas dependências da discretização do domínio nas soluções numéricas. No âmbito do Método dos Elementos Finitos (MEF), diversas estratégias foram propostas com o intuito de resolver a dependência em função da orientação e do tamanho dos elementos da malha por autores como ORTIZ et. al. (1987), ORTIZ & QUIGLEY (1991) e ZIENKIEWICZ et. al (1995). Os meios sólidos regularizados - tais como meios contínuos não-locais descritos por BAZANT et. al. (1984) e PIJAUDIER & BAZANT (1987), meios contínuos de ordem superior (AIFANTIS, 1984 e BORST & MÜHLHAUS, 1992), meios contínuos de Cosserat (BORST, 1991 e MÜHLHAUS & VARDOULAKIS, 1987), e meios visco-plásticos (SLUYS & BORST, 1992) - são capazes de gerar soluções objetivas, independentes da discretização, uma vez que apresentam intrinsecamente a dimensão da largura da banda. Entretanto apresentam um elevado custo numérico, já que necessitam de discretização muito fina para representar adequadamente a zona de localização.

Já nos chamados modelos discretos (HILLERBORG et. al., 1976), substitui-se a zona de localização por uma superfície de descontinuidade. Nesses modelos, o comportamento não-linear da zona de localização fica reduzido a uma relação constitutiva discreta entre tensões e deslocamentos relativos (saltos) na interface. A partir do trabalho de SIMÓ et. al. (1993), ficou demonstrado que o comportamento de descontinuidades fortes (saltos de deslocamentos) também pode ser representado por relações constitutivas do tipo contínuo (entre tensões e deformações) que cumpram certos requisitos que as tornem compatíveis com campos de deformações ilimitados (OLIVER, 1996,1999 e 2000).

A forma mais comum de tratar numericamente tais modelos envolvendo descontinuidades fortes consiste em considerar os lábios da descontinuidade como fronteiras de sub-regiões elásticas do domínio do problema.

No contexto do MEF, esse tipo de tratamento exige o conhecimento prévio da linha de descontinuidade ou técnicas sofisticadas para adaptar a malha de elementos finitos aos novos contornos que se formam durante o processo de carga (INGRAFFEA & SAOUMA, 1984 e BOCCA et. al., 1990). Para evitar os processos de adaptação da malha pode-se realizar o enriquecimento do campo de deslocamentos da malha de elementos finitos existente (DOLBOW et. al., 2000 e BELYTSCHKO & MOËS, 2003) ou utilizar elementos que incorporam funções interpoladoras descontínuas, capazes de representar o comportamento da interface no interior do elemento JIRÁSEK (2000). Uma generalização da técnica para incorporar interfaces descontínuas no interior de elementos finitos convencionais foi proposta por MANZOLI & SHING (2005 e 2006), na qual, ao invés de considerar funções interpoladoras descontínuas, adicionam-se componentes inelásticas ao campo de deformações do elemento, capazes de reproduzir de forma distribuída os efeitos da interface descontínua.

Já no âmbito do MEC, os referidos problemas de adaptação da discretização são reduzidos drasticamente, visto que nas alternativas do método para simulação de fraturas só se torna necessário a adaptação de poucos elementos. Aliado à já conhecida diminuição da malha propiciada pelo MEC frente ao MEF, isto pode se uma grande vantagem neste tipo de simulação.

Dentro do Método dos Elementos de Contorno existem alternativas para a análise de fraturas. Os estudos da simulação deste problema físico pelo MEC se iniciam na década de setenta por CRUSE & VAN BUREN (1971). Eles tentaram utilizar elementos de contorno usuais na modelagem, considerando sua forma elíptica. Os resultados obtidos foram tão discrepantes que a linha de pesquisa foi abandonada. Mostrou-se depois que a utilização da aplicação direta do MEC leva a uma matriz singular no sistema, pela existência de nós de contorno coincidentes em superfícies opostas da fissura.

Na década de oitenta inicia-se uma nova linha no MEC, que trata da fissuração entre sub-regiões, com a utilização de uma equação singular. Este processo, utilizado por VENTURINI (1982) objetiva a simulação de uma separação ou deslizamento entre dois contornos e encarna um problema não-linear por ser possível a consideração de modelos elasto-plásticos. O mesmo método, utilizando a equação singular foi utilizado mais tarde por LIANG & LI (1991) e por CEN & MAIER (1992) na modelagem de fraturas coesivas. Este método foi bastante utilizado, mas sua utilização em casos nos quais não se conhecia o caminho da fissura era trabalhosa, posto que era preciso realizar a tentativa com uma interface e, com a resposta, modificá-la para tentar representar o problema real.

Outras possibilidades de utilização surgiram com a utilização da solução fundamental de Green como ponderadora por CROUCH (1976) e com a utilização das funções de Green por CRUSE (1988) na modelagem de fissuras, aplicado principalmente no estudo dos fatores de intensidade de tensão. MEWS (1987) e TELLES & GUIMARÃES (2000) utilizam este método, propondo a utilização da forma numérica da função de Green, o que resulta em um método que possui a capacidade de simular o avanço da fissura independentemente de sua geometria.

Uma alternativa ao emprego de sub-regiões consiste em usar o processo de colocação no qual se utiliza a equação integral dos deslocamentos em um lábio da descontinuidade e a equação hipersingular das forças superficiais no lábio oposto (PORTELA & ALIABADI, 1992, SALEH & A. M. II, 1995 e ALIABADI & SALEH, 2002). Foram desenvolvidos até trabalhos tridimensionais com este método, como o de GRAY et. al. (1990). Surge então o método conhecido como Método de Elementos de Contorno Dual, o qual também utiliza as equações singulares e hipersingular, mas de uma maneira

mais versátil, de modo a obter resultados melhores. O algoritmo de geração de elementos de contorno (ele modifica o contorno, abrindo-o no caminho da fissura) foi otimizado por PORTELA et. al (1991,1992) e é até hoje utilizado como referência obrigatória para este método de análise de fissuração. Este método foi também estendido a trabalhos tridimensionais que envolviam a propagação de fraturas, como pode ser visto nos trabalhos de MI & ALIABADI (1992^{a,b}, 1994^{a,b} e 1995). Pode-se dizer que este método é o mais difundido e utilizado atualmente. O método que utilizam apenas e a equação em forças de superfície e o método que utiliza as equações singulares e hipersingulares foram comparados por VICENTINI (2006). Mostrou-se que o método que utiliza as duas equações apresenta uma estabilidade muito superior, além de produzir respostas de precisão.

Este trabalho utiliza uma outra opção para modelar descontinuidades fortes, sem a necessidade de considerar interfaces que separam os corpos em duas partes. Corresponde à formulação do MEC baseada em tensões iniciais, na qual as integrais de domínio sobre as regiões estreitas de localização são transformadas em integrais sobre uma superfície de descontinuidade forte idealizada (LOPES & VENTURINI, 1997 e VENTURINI, 1994). Esta técnica tem como vantagem a fácil adaptação de um modelo inelástico para um modelo de fissura. Assim, códigos que simulam a não-linearidade podem representar problemas de fratura sem ser alterados de forma significativa.

Seguindo a mesma técnica generalizada para incorporar interfaces descontínuas em elementos finitos empregada por MANZOLI & SHING (2005 e 2006), MANZOLI & VENTURINI (2004 e 2005) propuseram uma nova formulação do MEC para representar propagação de descontinuidades no interior de células internas triangulares. Nessa nova proposta, os efeitos da interface descontínua são transformados em deformações inelásticas equivalentes sobre o domínio de cada célula interna, permitindo que a solução do problema possa ser obtida mediante o procedimento implícito do Método dos Elementos de Contorno (TELLES & CARRER, 1991 e BONNER & MUKHERJEE, 1996). Isso permite que a análise de problemas envolvendo propagação de descontinuidades possa ser realizada com ferramentas já consolidadas para a análise de meios contínuos não-lineares, tais como o emprego de operadores constitutivos consistentes para a obtenção de taxas de convergência quadráticas, e métodos de controle do processo de carregamento para efetuar análises além do limite de resistência

estrutural. Além disso, é possível aproveitar as conhecidas vantagens oferecidas pelo MEC para a solução de problemas não-lineares, tal como a redução significativa do esforço computacional proporcionado pelo fato de o sistema de equações não-lineares ser formado apenas pelas aproximações das variáveis do contorno e das células internas que contêm a interface de descontinuidade.

Os bons resultados presentes nos recentes trabalhos de MANZOLI & VENTURINI (2004 e 2005) abrem uma perspectiva promissora para o desenvolvimento de uma nova maneira de análise numérica de problemas envolvendo descontinuidades fortes no âmbito do MEC. Este trabalho pretende explorar e trazer contribuições a essa recente linha de estudos aberta.

Nos trabalhos pioneiros de MANZOLI & VENTURINI (2004 e 2005) o domínio bidimensional do problema é discretizado em células internas triangulares previamente à análise. Ao longo do processo de carregamento, segmentos de interface descontínua vão sendo inseridos no interior das células internas existentes, de acordo com os critérios de iniciação e orientação estabelecidos pela lei constitutiva adotada para a interface. A continuidade da interface entre segmentos é garantida através do uso de um algoritmo de traçado de uma linha poligonal de descontinuidade. As variáveis correspondentes à aproximação do campo de deformações inelásticas das células que passam a conter um segmento de interface são adicionadas ao sistema de equações não-lineares em um processo de solução incremental e iterativo.

Nesse trabalho pretende-se desenvolver um procedimento de construção progressiva das células internas, à medida que a linha de descontinuidade se propaga durante o processo de carregamento, ao invés de se inserir segmentos de descontinuidade em uma malha de células internas pré-existente. Dessa maneira, a discretização espacial será limitada ao contorno do problema (previamente à análise) e às células internas criadas na região da descontinuidade durante a análise. Aspectos relacionados ao tamanho e alinhamento dos contornos das células internas poderão ser controlados, de maneira a otimizar a discretização espacial.

A incorporação de segmentos de descontinuidade no interior de elementos finitos ou células internas envolve duas premissas básicas, associadas à consistência cinemática e

à estática da formulação (JIRÁSEK, 2000). A consistência cinemática é assegurada quando o campo de deformações inelásticas introduzido no domínio da célula (ou elemento finito) corresponde aos mesmos deslocamentos relativos entre os vértices da célula (ou nós dos elementos) que seriam decorrentes do deslocamento de corpo-rígido entre as duas partes da célula dividida pela interface de descontinuidade (MANZOLI & SHING, 2005). Nesse caso, a correta construção do campo de deformações inelásticas “equivalentes” exige o conhecimento da maneira como a linha de descontinuidade separa os vértices da célula. Por outro lado, a consistência estática é assegurada mediante a imposição da continuidade das forças de superfície no interior da interface e na parte contínua da célula. Para isso, intervém a orientação do segmento de descontinuidade no interior da célula. No contexto do MEF, o cumprimento dos requisitos estático e cinemático gera formulações envolvendo matrizes de rigidez não-simétricas. Formulações alternativas simétricas, mais adequadas para a solução de problemas fortemente não-lineares, podem ser obtidas relaxando-se uma das exigências de consistência. Essa simplificação pode proporcionar o aparecimento de travamento de tensões, comprometendo muito a resposta estrutural. Esse problema somente aparece quando o segmento de descontinuidade não é alinhado com um dos lados do elemento finito.

O presente trabalho avalia as conseqüências decorrentes da relaxação da condição de consistência estática ou cinemática no contexto do MEC. Também estuda as vantagens que podem decorrer da construção de células internas alinhadas com o segmento de descontinuidade. Note que, como exposto anteriormente, a formulação pelo MEC permite a discretização espacial progressiva adaptada à posição de descontinuidade. Essa facilidade será a principal linha a ser explorada neste trabalho.

2 Mecânica do Dano Contínuo **2** Capítulo

2.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo uma explanação sobre a teoria da mecânica do dano contínuo e sua aplicação no campo da engenharia. Expõem-se adiante conceitos básicos sobre a teoria em si e também o modelo empregado, o modelo de dano contínuo isotrópico.

Segundo LEMAITRE (1996), o dano em materiais é o processo físico progressivo pelo qual os materiais se degradam e rompem. A mecânica do dano é o estudo, por meio das variáveis mecânicas, dos mecanismos envolvidos nesta deterioração dos materiais submetidos a carregamentos. Em um nível de micro-escala, o dano provém do acúmulo de microtensões ao redor de defeitos ou interfaces inerentes ao material, levando ao rompimento das ligações naquele ponto existentes, o que resulta no dano ao material. Em um volume representativo do corpo do material, isto representa o crescimento de microfissuras e microvazios, podendo resultar no nascimento e crescimento de uma microfissura.

Os modelos contendo a mecânica do dano contínuo têm sido, ao longo dos últimos anos, utilizados e amplamente aceitos em todo o mundo. São utilizados para a representação de comportamentos constitutivos dos materiais que apresentam uma perda de rigidez com o decorrer da evolução de fissuração interna e conseqüente surgimento de microfissuras, caso esse perfeitamente aplicável ao concreto.

Como descrito por LEMAITRE (1996), a degradação e perda de propriedades mecânicas são oriundas do surgimento de microdefeitos em micro-escala, os quais surgem devido aos conhecidos processos de retração e cura do concreto.

Baseada nos processos irreversíveis da termodinâmica, a teoria da mecânica do dano contínuo aplicada ao concreto deve levar em consideração vários fatores, tais como a direção de orientação de fissuras, forma das fissuras, crescimento, anisotropia existente, entre outros. O acúmulo e consideração de tantos parâmetros podem levar a formulações deveras complexas. Pode-se trabalhar com formulações de alta complexidade, onde as variáveis internas são representadas por tensores de até 8ª ordem ou pode-se optar por impor-se simplificações e trabalhar-se com formulações mais simples, relevando-se certos aspectos, como por exemplo, a anisotropia, chegando-se a variáveis internas escalares. Estas formulações, apesar de mais simples, possuem grande aplicabilidade e relação com os fenômenos físicos reais.

O modelo de dano contínuo mais simples é o chamado modelo de dano isotrópico. O modelo de dano isotrópico representa a não-linearidade do material com uma variável interna de dano de ordem escalar. Sua simplicidade conceitual e aplicabilidade, bem como sua eficiência em muitos casos práticos fazem deste modelo um dos mais aceitos e aplicados na engenharia. Por ser fundamentado rigorosamente na teoria das equações termodinamicamente consistentes e por possuir capacidade de representar as características básicas do comportamento mecânico do concreto, este modelo figura entre os mais utilizados e consagrados

O modelo constitutivo de dano contínuo é fundamentado pelos princípios gerais da termodinâmica e possui as características necessárias para representar materiais com defeitos micro-estruturais. São admitidas como hipóteses fundamentais o fato dos processos irreversíveis serem levados em conta por um número definido de variáveis internas, também denominadas variáveis de estado.

2.2 Conceitos fundamentais

2.2.1 Natureza física do estado sólido e do dano

Todos os materiais são compostos de átomos, os quais se agrupam por ligações decorrentes de interações entre campos magnéticos. A elasticidade está diretamente ligada ao movimento relativo dos átomos. O estudo da física envolvida nestas “treliças” atômicas leva à teoria da elasticidade, mas é muito mais fácil, matematicamente, escreverem-se as equações constitutivas a partir de uma meso-escala, utilizando-se o princípio da reversibilidade da deformação.

Quando as ligações entre os átomos começam a se romper tem início o fenômeno do dano. Em diferentes tipos de materiais as ligações que se rompem são distintas:

- Em polímeros o dano ocorre pela quebra das ligações nas grandes cadeias poliméricas.
- Em compósitos o dano geralmente ocorre nas ligações entre as fibras e a matriz polimérica.
- Nas cerâmicas o dano ocorre principalmente do rompimento da coesão existente entre a matriz e inclusões.
- Nas madeiras o ponto fraco onde o dano se apresenta é a separação entre as células de celulose.
- Finalmente, no concreto, o processo de dano ocorre, na maioria dos casos, devido ao descolamento entre a matriz cimentícia e os agregados, ou seja, o rompimento da zona de transição existente entre eles.

2.2.2 Representação mecânica do dano

Antes da formulação do modelo de dano isotrópico existe a necessidade de explanação sobre os conceitos envolvidos na formulação deste. São três os conceitos principais: a variável unidimensional de dano, o conceito de tensão efetiva e o princípio da deformação equivalente, sem os quais o modelo proposto não pode ser desenvolvido.

2.2.2.1 Variável unidimensional de dano

Considera-se um volume representativo (dv) de um sólido submetido a efeitos de dano em um ponto M cortado por um plano de vetor normal \mathbf{n} , como mostra a Figura 2.1. Considera-se que:

- A é a área formada no volume representativo quando da intersecção do plano.
- A_D é a área com defeitos (microfissuras ou microcavidades).

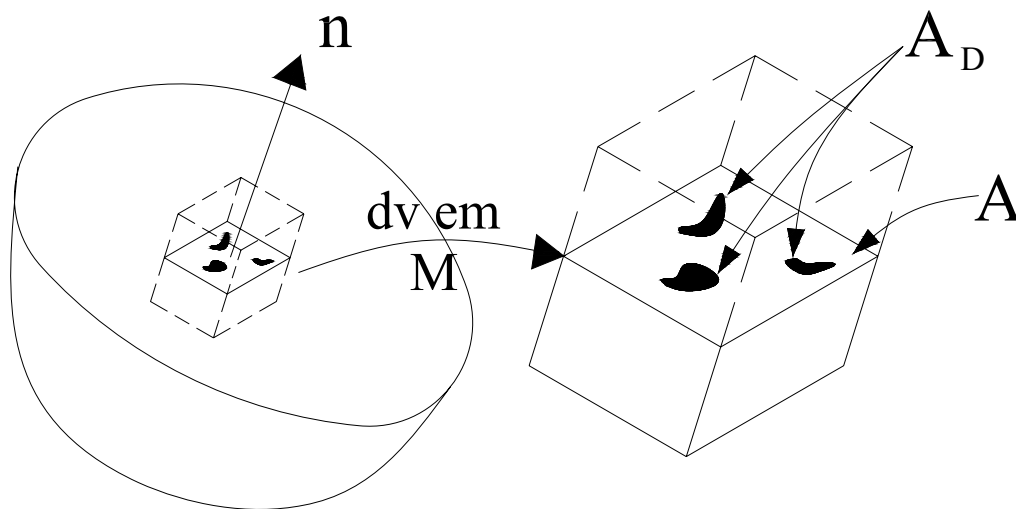


Figura 2.1 – Definição de dano.

O dano pode então ser simplesmente representado pela variável $d(M, \mathbf{n})$, e constitui-se da proporção existente entre a área com defeitos (A_D) e a área nominal (A) dependente da posição M e orientação \mathbf{n} do plano. Pode variar de um material completamente são, onde d é nulo, pois a área com defeitos é nula, até o material totalmente degradado, onde d é 1 devido ao fato da área com defeitos ser igual à área total. Estados intermediários correspondem ao material em processo de degradação.

O modelo de dano isotrópico propõe que, independente da direção, o comportamento mecânico das microfissuras e microporos são os mesmos. A relação para o caso de dano isotrópico unidimensional independe obviamente de \mathbf{n} , e está explicitada na Eq. (2.1).

$$d = \frac{A_D}{A} \quad (2.1)$$

2.2.2.2 Conceito de tensão efetiva

Considerando-se um elemento unidimensional submetido a uma força axial F , a tensão uniaxial nominal é definida por:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (2.2)$$

Para a representação do dano é exigido então um novo conceito de tensão. Caso haja microdefeitos presentes a área resistente a F deixa de ser representada pela área total (A), passando a ser representada por uma área efetiva (\bar{A}). Esta área é a diferença entre a área total e a área com microporos e microfissuras (A_D). Torna-se conveniente a introdução da chamada tensão efetiva ($\bar{\sigma}$), conceito representado pela Eq. (2.3).

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{\bar{A}} \quad (2.3)$$

onde:

$$\bar{A} = (A - A_D)$$

Introduzindo-se a variável dano e combinando-se as equações (2.2) e (2.3) chega-se a:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1-d} \quad (2.4)$$

Esta é a definição de tensão efetiva em função da tensão nominal. Este conceito pode ser estendido ao estado triaxial de tensões, sendo então definido como:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{1-d} \quad (2.5)$$

onde $\bar{\sigma}$ é o tensor de tensões efetivas e σ é o tensor de tensões de Cauchy.

2.2.2.3 Princípio da deformação equivalente

Aplicando-se conceitos da termodinâmica e segundo a representação dada ao dano pela Eq. (2.1), LEMAITRE (1986) propôs a hipótese do princípio da deformação equivalente. Este princípio determina que “qualquer equação de deformação constitutiva para materiais danificados pode ser derivada do mesmo modo que são derivadas para materiais virgens, exceto pela substituição da tensão nominal pela tensão efetiva”. Desse modo temos:

Material virgem ($d = 0$)

$$\varepsilon = f(\sigma, \dots)$$

Material danificado ($0 < d \leq 1$)

$$\bar{\varepsilon} = f\left(\frac{\sigma}{1-d}, \dots\right)$$

Isto é considerado um princípio por ter sido demonstrado em apenas alguns casos particulares de dano por técnicas de homogeneização. Este princípio pode ser aplicado tanto a regimes elásticos quanto a regimes inelásticos.

Considerando-se uma relação elástico-linear, temos:

Material virgem ($d = 0$)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$$

Material danificado ($0 < d \leq 1$)

$$\varepsilon = \frac{\bar{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{E(1-d)}$$

Com o exposto acima é possível fazer a ligação entre os dois estados, do material são ao danificado por meio da redução do módulo de elasticidade, como segue na Eq. (2.6).

$$E_D = (1-d)E \tag{2.6}$$

onde E é o módulo de elasticidade e E_D é o módulo de elasticidade degradado.

Outra consideração ainda pode ser tomada: o mesmo conceito aplicado no caso das tensões efetivas pode ser aplicado às deformações. Estendendo-se para o caso triaxial, é possível chegar à conclusão de que:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = (1-d)\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.7)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ representam os tensores de deformações do material degradado e o de deformações efetivas respectivamente.

2.3 Modelo constitutivo de dano isotrópico

Agora se dispõe de todas as premissas para a elaboração do modelo de dano anisotrópico. Como visto, a variável de dano sempre representa uma razão entre a área real resistente e a total. Com a inclusão dos conceitos de tensões e deformações efetivas e com o auxílio e da definição do módulo de elasticidade degradado chega-se à seguinte relação constitutiva para o modelo de dano isotrópico no caso uniaxial:

$$\sigma = E_D \varepsilon$$

ou

$$\sigma = (1-d)E\varepsilon \quad (2.8)$$

A Eq. (2.8) pode ser generalizada para o caso bi e tridimensional, chegando-se à Eq. (2.9).

$$\boldsymbol{\sigma} = (1-d)\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} = (1-d)\bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.9)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}$ são os tensores de tensões e deformações respectivamente e \mathbf{C} é o tensor de quarta ordem das constantes elásticas. Nota-se claramente que a isotropia do material é conservada com a utilização da relação constitutiva da Eq. (2.9), introduzindo-se apenas um multiplicador escalar $(1-d)$ de redução nos casos onde a variável d não for nula.

O modelo constitutivo que aqui foi definido fica totalmente determinado se for possível obter o valor do parâmetro de dano a cada passo do processo de carga e deformação. Assim sendo, o modelo conta com a seguinte estratégia:

- as deformações e tensões são calculadas para pequenos incrementos de carga denominados passos;
- a cada incremento, por meio de um critério em função da norma escalar τ do tensor de deformações (ou do tensor de tensões efetivas), verifica-se se o processo é de carregamento, descarregamento ou recarga;
- se verificado um processo de descarregamento, não há aumento dos microdefeitos, permanecendo assim d constante;
- caso o passo não represente uma descarga, ele representa um carregamento ou recarregamento. Verifica-se então o início do processo de deformação inelástica através do critério de dano formulado no espaço de deformações ou tensões efetivas;
- matematicamente, este critério pode ser escrito como uma função $F(\tau, r) \leq 0$, onde τ é a deformação equivalente e r o valor limite de dano. Seu valor inicial r_0 é uma propriedade do material definida em função da resistência característica deste;
- para simular a degradação, a lei de evolução do valor limite de dano r assume o maior valor da norma τ ao longo do processo de carga;
- existindo então a evolução do processo de deformação inelástica, aplica-se a lei de evolução para a variável dano d , em função do valor limite de dano r . Esta lei pode ser escrita na forma incremental ou integrada, permitindo-se definir o processo da evolução da deformação inelástica.

Uma curva de tensão versus deformação é apresentada esquematicamente na Figura 2.2. Nesta pode-se claramente notar os trechos de carga, descarga e recarga do material.

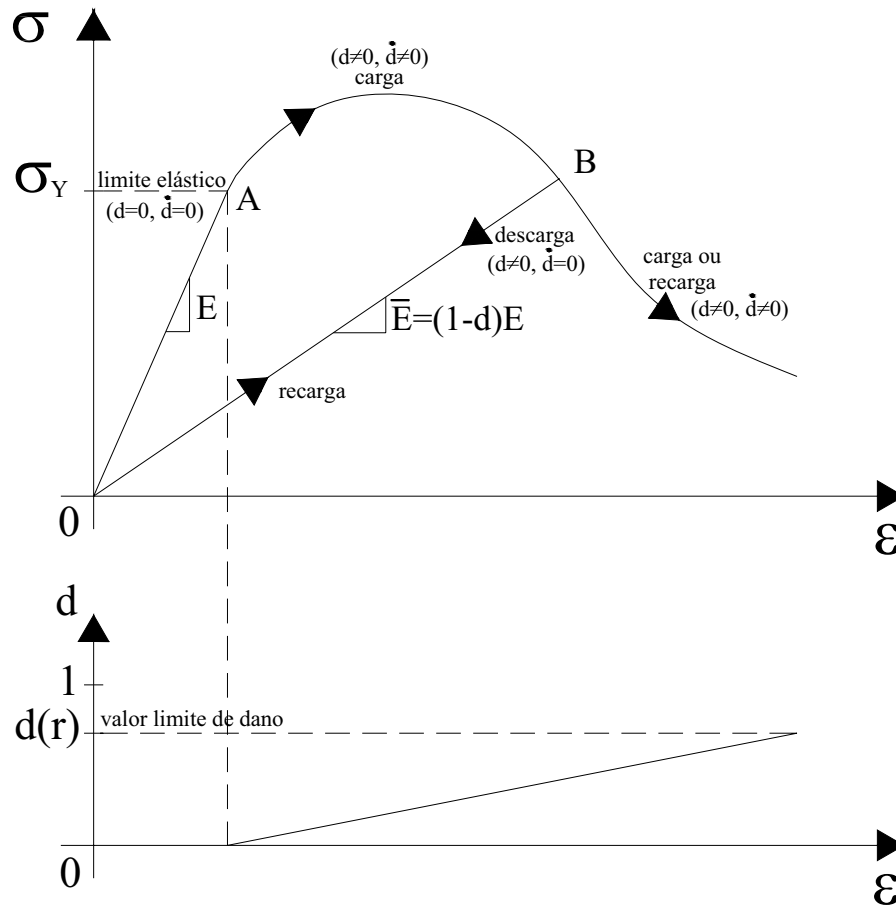


Figura 2.2 – Diagrama de tensão deformação uniaxial com modelo de dano.

Na Figura 2.2 vemos representados o trecho correspondente ao regime elástico linear sem a evolução do dano ($\overline{0A} \rightarrow \dot{d} = 0$), o trecho correspondente ao carregamento que corresponde ao regime inelástico com evolução de dano ($\overline{AB} \rightarrow \dot{d} \neq 0$) e os trechos $\overline{B0}$ e $\overline{0B}$, que correspondem, respectivamente, às situações de carga e recarga sem evolução do dano ($\dot{d} = 0$).

É importante detalhar aqui a notação utilizada. O ponto sobre a variável representa sua derivada com relação ao tempo, ou seja, sua taxa de variação com o tempo. Em problemas quase-elásticos utiliza-se na verdade um pseudotempo, usado para definir a história de carga. Assim a taxa de variação é na verdade relacionada ao processo de carga.

2.3.1 Critério de dano

O critério de dano é proposto de forma semelhante ao critério aplicado à análise de sólidos inelásticos. O critério tem como objetivo estabelecer as condições de carga, descarga e recarga do processo de degradação. Para tanto, pode-se escrever:

$$F(\tau, r) = \tau(\bar{\sigma}) - r \leq 0 \quad (2.10)$$

onde τ é a função que retorna um valor escalar conhecido como tensão efetiva equivalente, similar ao critério J2 de Von Mises, por exemplo. Esse valor nos permite então a comparação com diferentes estados de tensões efetivas tridimensionais (ou, indiretamente de deformações, visto que as tensões efetivas dependem exclusivamente das deformações). A função τ deve possuir a seguinte propriedade:

$$\tau(\alpha \cdot \bar{\sigma}) = \alpha \cdot \tau(\bar{\sigma}) \quad \forall \alpha \in R^+ \quad (2.11)$$

Oliver et. al. (1990) propõe uma norma escalar que satisfaz plenamente este requisito. Nesta é empregada uma norma energética em deformações, definida como:

$$\tau = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} = \sqrt{\bar{\boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}^{-1} : \bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \tau(\bar{\boldsymbol{\sigma}}) \quad (2.12)$$

No caso unidimensional teríamos simplesmente:

$$\tau = \varepsilon_x \sqrt{E} = \frac{\bar{\sigma}_x}{\sqrt{E}} \quad (2.13)$$

A variável interna do limite de dano corrente r controla a dimensão do domínio elástico no espaço das tensões efetivas, e é delimitado pela relação $F(\tau, r) = 0$, conhecida como superfície de dano. Antes da aplicação do carregamento, o material apresenta um valor inicial r_0 atribuído ao seu limite de dano. Com base no caso uniaxial descrito na Eq. (2.13), o valor inicial é característica do material e pode ser adotado como:

$$r_0 = \frac{f_t}{\sqrt{E}} \quad (2.14)$$

onde f_t representa a resistência uniaxial à tração.

Pode-se multiplicar a Eq. (2.10) por $(1-d)$, fazendo com que o critério passe a ser escrito no espaço das tensões, como na Eq. (2.15).

$$F(\tau, r) \cdot (1-d) = (\tau(\bar{\sigma}) - r) \cdot (1-d) = \tau(\sigma) - q \leq 0 \quad (2.15)$$

A variável q é a variável interna tipo tensão e é dada pela multiplicação de r por $(1-d)$. Na Eq. (2.15) leva-se em conta a definição de tensão efetiva da Eq. (2.9) e a propriedade da função τ exposta na Eq. (2.11).

Neste ponto cabe uma analogia à teoria da plasticidade e pode-se, portanto, definir a lei de evolução do limite de dano pela Eq. (2.16).

$$\dot{r} = \lambda \quad (2.16)$$

O parâmetro λ representa o parâmetro de consistência de dano, o qual tem como objetivo definir as condições de carga, descarga e recarga de acordo com as conhecidas relações de Kuhn-Tucker, chegando-se deste modo à condição de consistência:

$$\lambda \geq 0$$

$$F(\bar{\sigma}, r) \leq 0 \quad (2.17)$$

$$\lambda \cdot F(\bar{\sigma}, r) = 0$$

De acordo com estas relações acima expostas, estabelece-se que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } F < 0 \\ \text{Se } F = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \dot{d} = 0 \text{ (não há evolução de dano)} \quad (2.18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } \dot{F} < 0 \\ \text{Se } \dot{F} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \dot{d} = 0 \text{ (descarga)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \Rightarrow \dot{d} = 0 \text{ (carga neutra)} \\ \lambda > 0 \Rightarrow \dot{d} > 0 \text{ (carga)} \end{array} \right.$$

2.3.2 Lei de evolução da variável de dano

A evolução do dano pode ter comportamentos distintos dependendo da característica do material. Do mesmo modo que na teoria da plasticidade, o material pode apresentar distintos comportamentos depois de atingida a tensão que limita seu estado elástico. Estes comportamentos podem ser atribuídos a uma variável H chamada módulo de endurecimento/abrandamento. A Figura 2.3 mostra algumas dos possíveis comportamentos do material submetido ao regime elastodegradável. Em (a) tem-se o regime elastodegradável perfeito, em (b) o encruamento linear positivo (endurecimento), em (c) o encruamento linear negativo (abrandamento) e finalmente no item (d) o abrandamento exponencial.

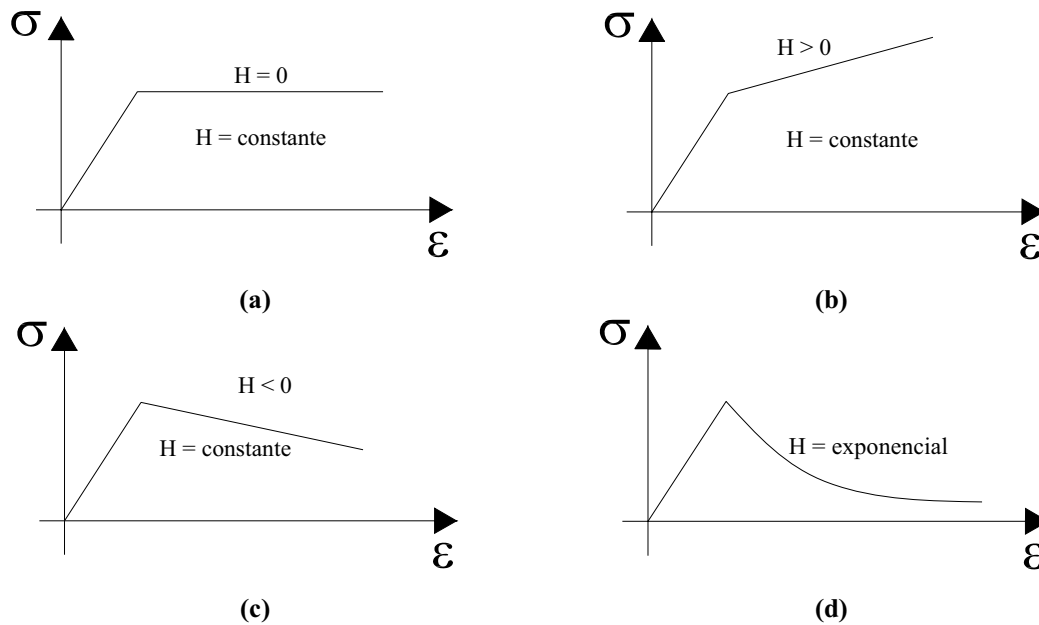


Figura 2.3 – Comportamentos distintos de endurecimento/abrandamento.

Segundo o modelo de dano isotrópico a regra de comportamento inelástico pode ser descrita pela relação entre as variáveis internas do tipo tensão e deformação, como mostra MANZOLI (1998):

$$\dot{q} = \frac{H}{1+H} \dot{r} \quad (2.19)$$

Utilizando-se a regra de endurecimento da Eq. (2.19) e levando-se em conta que $q = (1-d)r$, MANZOLI (1998) obteve uma lei de evolução variável de dano para carregamentos monotônicos, dada na Eq. (2.20).

$$\dot{d} = \left(\frac{1}{1+H} - d \right) \frac{\dot{r}}{r} \quad (2.20)$$

Novamente, voltando aos princípios da termodinâmica que regem o fenômeno do dano, o processo de deformação deve ser irreversível ($\dot{d} \geq 0$). Desse modo, para que a Eq. (2.20) seja verdadeira e cumpra os princípios termodinâmicos, o módulo de endurecimento/ abrandamento H deve estar dentro de um intervalo que fica delimitado da seguinte forma:

$$-1 < H < (1-d) \quad (2.21)$$

Supondo o módulo de endurecimento como função de r , pode-se obter a expressão fechada da evolução da variável de dano, por meio da solução da relação diferencial da Eq. (2.20).

$$d(r) = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (2.22)$$

onde:

$$q(r) = \int \frac{H(r)}{1+H(r)} dr \quad \text{e} \quad q|_{r=r_0} = r_0 \quad (2.23)$$

Em um processo incremental que utiliza passo de cargas, r pode obtido em um determinado tempo t a partir da integração da Eq. (2.16) em conjunto com as equações de Kuhn-Tucker, que levam à seguinte lei de evolução de r :

$$\left. \begin{array}{l} \dot{r} = \lambda \geq 0 \\ \dot{r} > 0 \Rightarrow r = \tau(\bar{\sigma}) \\ r|_{t=0} = r_0 \end{array} \right\} \Rightarrow r = \max(\tau(\bar{\sigma}_T), r_0) \quad T \in [0, t] \quad (2.24)$$

Assim, r assume o maior valor da função $\tau(\bar{\sigma})$ ao longo do processo de carga. E como a tensão efetiva é função da deformação, r conseqüentemente é determinada por meio das deformações no momento do dado passo.

Desse modo, conhecidas as deformações ϵ , por meio da Eq. (2.24) conhece-se r , e por meio das Eqs. (2.22) e (2.9) a variável dano d e as tensões podem ser obtidas.

Para um módulo H constante, obtêm-se, por meio das Eqs. (2.22) e (2.23), a lei linear de dano:

$$d = \frac{1}{1+H} \left(1 - \frac{r_0}{r} \right) \quad (2.25)$$

onde H pode ser definido em função das características intrínsecas do material.

Optando em utilizar a expressão exponencial de H fornecida pela Eq. (2.26) obtêm-se a Eq. (2.27) – OLIVER et. al. (1999).

$$H(r) = \frac{1}{1 + A.e^{A\left(1-\frac{r}{r_0}\right)}} - 1 \quad (2.26)$$

$$d = 1 - \frac{r_0}{r} e^{A\left(1-\frac{r}{r_0}\right)} \quad (2.27)$$

A é um parâmetro que depende da energia de fratura do material e define a forma da parte inelástica da curva tensão *versus* deformação com lei exponencial.

2.3.3 Energia consumida

Para a aplicação do modelo na simulação de fraturas, necessita-se definir uma região de localização de deformações de largura k ao longo da linha de fratura. Esta largura deve ter pequena dimensão em relação ao problema, e no limite, a região tende à própria linha de descontinuidade S dentro do sólido.

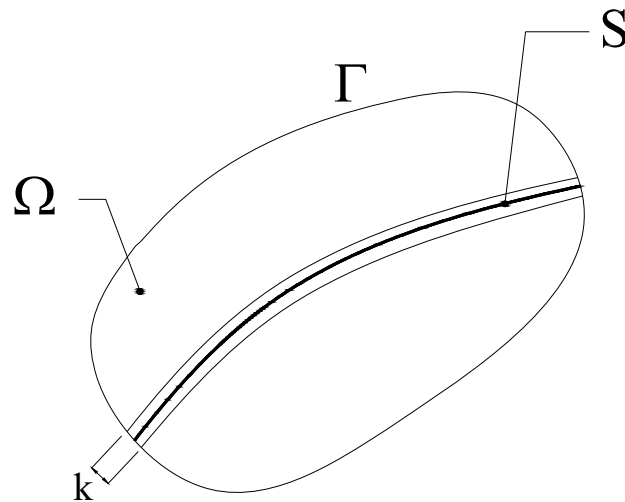


Figura 2.4 – Largura de banda de localização k .

O tratamento desse parâmetro é de suma importância e será tratado com mais detalhes durante o detalhamento das células internas utilizadas no MEC para a simulação de descontinuidades fortes. Por hora basta a definição da região de espessura k e sua ligação com as variáveis inerentes ao modelo de dano.

O processo de criação de fraturas é regido pela energia específica de fratura G_f , característica do material que representa a quantidade de energia necessária para a total separação de uma unidade de área na região da fratura.

Para um caso unidimensional de tração simples, tem-se a seguinte curva entre a força de tração aplicada σ e o salto no campo de deslocamentos $[[u]]$. A integral dessa curva fornece a energia G_f desprendida, conforme mostra a Figura 2.5.

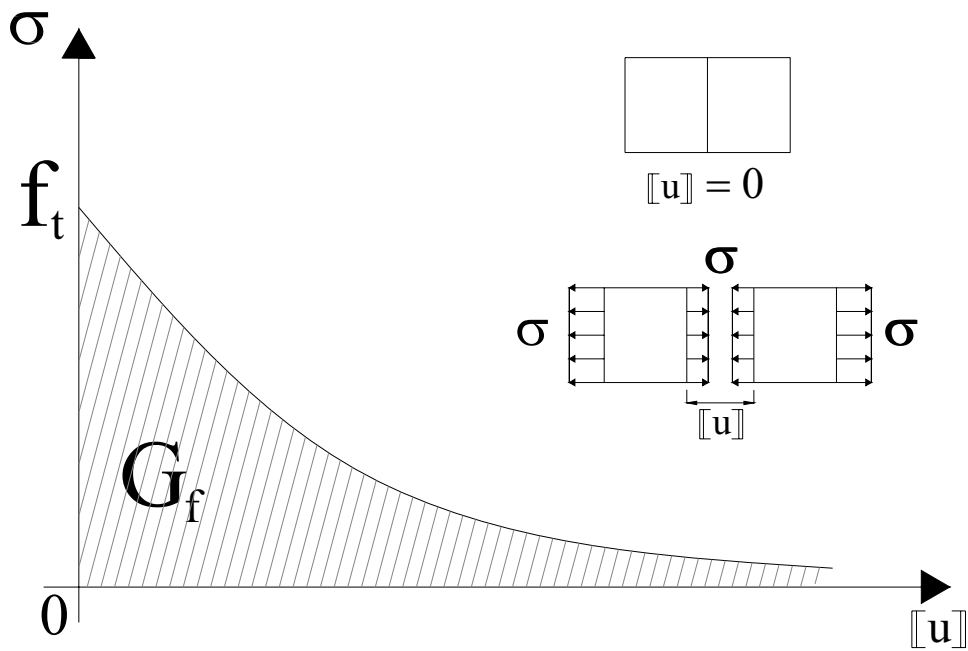


Figura 2.5 – Modelo discreto coesivo.

No caso de se trabalhar com as variáveis de tensão, deformação e com a distribuição do salto de deslocamento sobre k , a relação entre estas variáveis muda, originando a variável g_f , que representa a dissipação de energia volumétrica. Quando multiplicada pela espessura k , retorna o valor do próprio G_f , ou seja:

$$G_f = g_f \cdot k \quad (2.28)$$

A curva, neste caso, pode ser representada pela Figura 2.6.

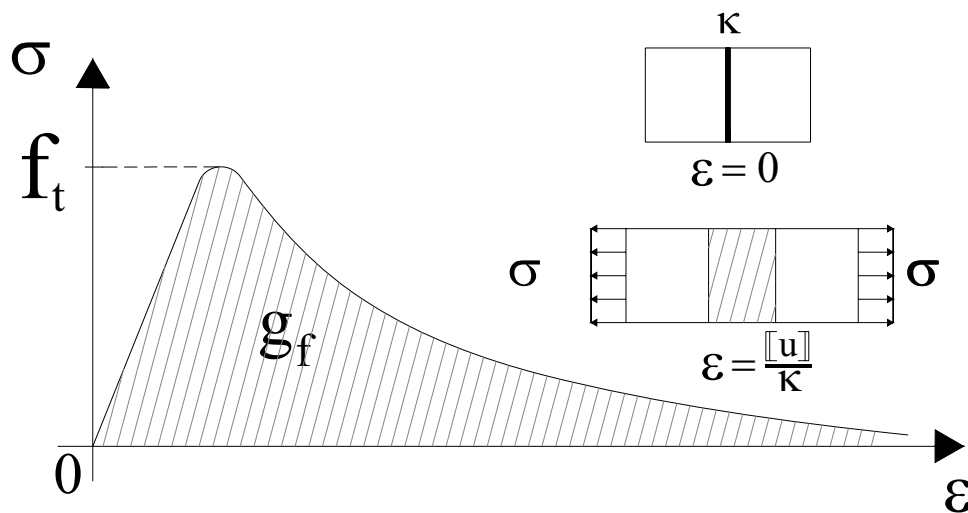


Figura 2.6 – Modelo de localizações de deformações (contínuo).

Esse balanceamento da energia é requerido em função da distribuição realizada sobre k , de modo a permitir que se mantenha a mesma quantidade de energia no processo de fratura. O módulo de abrandamento deve ser influenciado pela espessura dessa banda. Para uma lei de dano linear (Eq.(2.25)), o módulo de endurecimento deve se expresso como:

$$H = \bar{H}k \quad (2.29)$$

com

$$\bar{H} = -\frac{r_0^2}{2G_f} = -\frac{f_t^2/E}{2G_f} \quad (2.30)$$

onde r_0 é o valor inicial do limite de dano e G_f é a energia de fratura do material. O módulo de abrandamento intrínseco, \bar{H} , é negativo e está relacionado com a energia consumida na formação da unidade de superfície de descontinuidade.

Optando-se por trabalhar com a expressão de evolução de dano exponencial (Eq.(2.27)) tem-se

$$A = \frac{r_0^2}{G_f} k = \frac{f_t^2/E}{G_f} k \quad (2.31)$$

sendo o módulo H dado pela Eq. (2.26).

3 MEC Implícito para Problemas Inelásticos

3 Capítulo

3.1 Introdução

Neste capítulo é abordada a formulação e resolução dos problemas inelásticos com o Método de Elementos de Contorno (MEC). Em primeiro lugar é apresentada a equação integral para sólidos elásticos, cuja dedução pode ser vista com mais detalhes no Apêndice 2. A partir desta equação integral com a consideração dos campos de deformações iniciais (ou tensões iniciais) é possível a resolução de problemas inelásticos, podendo-se assim simular-se descontinuidades fortes. Aqui são apresentadas suas equações integrais, algébricas, o método de resolução implícito do sistema gerado pelo método e o método de controle da resposta. Esta formulação é aqui abordada, pois, como será visto no Capítulo 4, com algumas considerações simples o MEC implícito para problemas inelásticos pode ser adaptado para a resolução de problemas que simulam descontinuidades fortes. Assim, preferiu-se desenvolver primeiramente o modelo do MEC inelástico, mostrando suas peculiaridades, tratamento das deformações inelásticas, tratamento do sistema não-linear e resolução numérica deste, para, posteriormente, dissertar sobre os problemas envolvendo descontinuidades fortes.

3.2 Equações integrais do MEC para a elasticidade

A formulação do método dos elementos de contorno para problemas de elasticidade pode ser desenvolvida a partir do teorema da reciprocidade de Betti. A equação integral que representa o problema é dada por:

$$\mathbf{c}_s \cdot \mathbf{u} = - \int_{\Gamma} \mathbf{p}^* \cdot \mathbf{u} \, d\Gamma + \int_{\Gamma} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^* \, d\Gamma + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^* \, d\Omega \quad (3.1)$$

onde \mathbf{u} , \mathbf{p} e \mathbf{b} são respectivamente deslocamentos, forças de superfície e forças de corpo. A dedução desta equação pode ser vista com detalhes no Apêndice 2. A este caso mais simples é possível a adição de termos os quais tratarão de problemas mais sofisticados, como a introdução de um campo inicial de tensões ou deformações.

3.3 Formulação do MEC para sólidos inelásticos

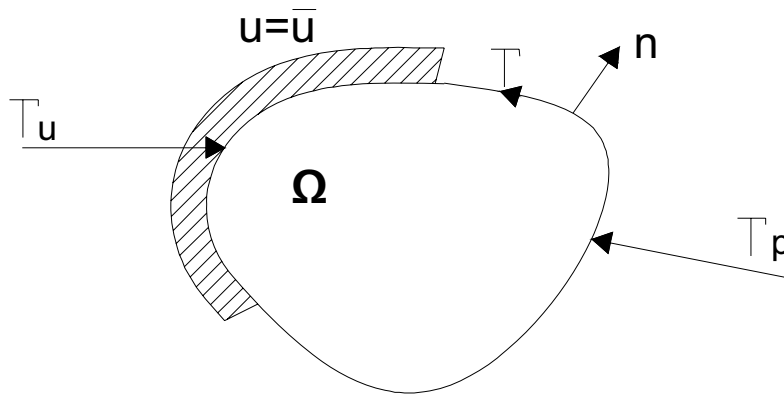


Figura 3.1 – Definição do domínio e condições de contorno.

Considera-se o corpo Ω de contorno Γ com vetor \mathbf{n} normal ao contorno. Γ_u representa a região do contorno que possui restrições quanto ao campo de deslocamentos e Γ_p restrições de forças de superfície.

Pode-se escrever para este sólido a equação de equilíbrio (Eq. (3.2)), as condições de contorno (Eq. (3.3)), a relação entre deformação e deslocamento (Eq. (3.4)) e a relação constitutiva do material (Eq. (3.5)).

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (3.3)$$

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{p}} \quad \text{em } \Gamma_p$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} \quad (3.4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \Sigma^c(\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (3.5)$$

onde σ é o tensor de tensões. Os valores \bar{u} e \bar{p} correspondem aos deslocamentos e forças de superfície prescritos no contorno em Γ_u e Γ_p respectivamente ($\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_p$ e $\emptyset = \Gamma_u \cap \Gamma_p$). A função Σ^c representa, de maneira genérica, a relação constitutiva do material, que depende localmente das deformações ϵ , assim como da história de deformações ao longo do processo de carga.

De acordo com a formulação não-linear do Método dos Elementos de Contorno baseada em deformações iniciais, as expressões integrais relativas ao deslocamento e às deformações são praticamente idênticas ao da formulação linear (Apêndice 2), acrescidas apenas de um termo integral sobre o domínio que leva em conta estas deformações iniciais. Como será visto posteriormente, a propagação de fissuras é levada em conta através de uma banda de localização de deformações inelásticas. As expressões de deslocamentos e deformações podem ser descritas como:

$$c_s \cdot u = - \int_{\Gamma} \tilde{p}^* \cdot u \, d\Gamma + \int_{\Gamma} p \cdot \tilde{u}^* \, d\Gamma + \int_{\Omega} b \cdot \tilde{u}^* \, d\Omega - \int_{\Omega} \epsilon^{in} : \sigma^* \, d\Omega \quad (3.6)$$

$$\epsilon = - \int_{\Gamma} \tilde{p}^* \cdot u \, d\Gamma + \int_{\Gamma} p \cdot \tilde{u}^* \, d\Gamma + \int_{\Omega} b \cdot \tilde{u}^* \, d\Omega - \int_{\Omega} \epsilon^{in} : \Sigma^* \, d\Omega + \epsilon^{in} : \tilde{\sigma}^* \quad (3.7)$$

As constantes contidas em c_s dependem do ponto de colocação, e pode ser visto detalhadamente no item A2.3.1 do Apêndice 2. Os termos com asterisco correspondem à solução fundamental de Kelvin. As deformações inelásticas ϵ^{in} no núcleo das integrais sobre o domínio Ω são definidas por:

$$\epsilon^{in} = C^{-1} : \Sigma^c(\epsilon) - \epsilon \quad (3.8)$$

onde C é o tensor constitutivo elástico de quarta ordem que é definido pela Eq. (3.9).

$$C = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I} \quad (3.9)$$

sendo $\mathbf{1}$ o tensor identidade de segunda ordem, \mathbf{I} o tensor simétrico de quarta ordem e λ e μ as constantes de Lamé, designadas por:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = G$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Sendo que E , G e ν representam respectivamente os conhecidos módulo de elasticidade longitudinal, módulo de elasticidade transversal (ou de cisalhamento) e o coeficiente de Poisson.

É importante notar que nas regiões de Ω onde o comportamento é elástico, as deformações ϵ^{in} são nulas. Assim, a princípio, basta que se efetuem as integrais sobre a parte do domínio que apresenta comportamento plástico. Daí nasce a necessidade de se discretizar com células internas apenas as regiões submetidas a não-linearidades.

3.4 Equações algébricas

Para que as equações integrais possam ser resolvidas, é necessário que se discretize o contorno em elementos. É importante lembrar que quando falamos de aproximação do contorno em elementos, estamos falando de dois tipos distintos de aproximação: função de aproximação das variáveis do problema e função de aproximação da geometria do contorno. Além disso, o domínio que apresentar deformações inelásticas e forças de corpo também deve ser discretizado. Os elementos utilizados (suas funções de aproximação) são descritos com mais detalhes no Capítulo 5.

É importante ressaltar que a aproximação geométrica escolhida influencia diretamente a resposta obtida pelo Método dos Elementos de Contorno, do mesmo modo como isso ocorre em outros métodos. A malha interna e discretização do domínio devem ser feitas com critério, e a resposta obtida deve ser comparada com a de malhas mais refinadas, para verificar a convergência da resposta. Esse trabalho busca como meta a otimização da discretização do domínio sob regime inelástico, de modo a evitar singularidades que podem ser causadas por malhas inconsistentes com a zona de localização de

deformações. Um exemplo ilustrativo de discretização de contorno e parte do domínio é apresentado na Figura 3.2

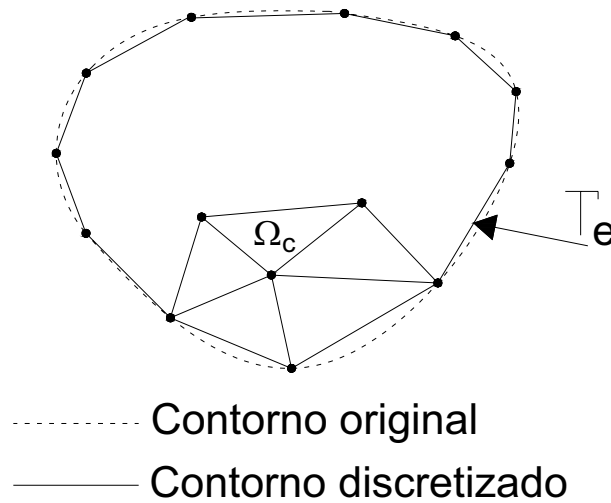


Figura 3.2 – Discretização do contorno em elementos e das células internas.

A discretização pode ser matematicamente escrita como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma = \sum_{e=1}^{ne} \Gamma_e \\ \Omega^* = \sum_{c=1}^{nc} \Omega_c \end{array} \right.$$

Sendo que o domínio Ω^* não corresponde ao domínio todo, mas sim ao domínio de interesse onde ocorreram ou podem ocorrer deformações inelásticas. Γ_e representa cada um dos ne elementos de contorno, ao passo que Ω_c representa cada uma das nc células do domínio em questão.

Assim sendo, é possível aproximar as variáveis e a geometria do problema em termos dos valores nodais, como detalhado no Capítulo 5. Escrevendo-se a forma discreta da expressão integral do deslocamento – Eq. (3.6) – para cada nó do contorno, obtém-se o seguinte conjunto de equações algébricas:

$$[H]\{u\} = [G]\{p\} + \{b\} + [Q]\left(\{C^{-1} : \Sigma^c(\epsilon)\} - \{\epsilon\}\right) \quad (3.10)$$

Os vetores $\{u\}$ e $\{p\}$ contêm os valores nodais dos deslocamentos e forças superficiais no contorno, respectivamente. O vetor $\{\varepsilon\}$ agrupa as deformações nodais das células internas. Agrupando-se então as incógnitas do contorno em um vetor $\{y\}$ na Eq. (3.10) chega-se à Eq.(3.11).

$$[A]\{y\} = \{f\} + [Q]\left(\{C^{-1} : \Sigma^c(\varepsilon)\} - \{\varepsilon\}\right) \quad (3.11)$$

O termo $\left(\{C^{-1} : \Sigma^c(\varepsilon)\} - \{\varepsilon\}\right)$ representa o vetor das componentes inelásticas das deformações. Trata-se da diferença entre a deformação e sua parte elástica. Quando da inexistência de deformações inelásticas esse termo se torna nulo, pois a equação elástica é igual à deformação total.

Por um procedimento análogo, pode-se escrever a forma discretizada da equação integral de deformações (Eq. (3.7)) para cada célula, obtendo-se:

$$\{\varepsilon\} = -[H']\{u\} + [G']\{p\} + \{b'\} + [Q']\left(\{C^{-1} : \Sigma^c(\varepsilon)\} - \{\varepsilon\}\right) \quad (3.12)$$

$$\{\varepsilon\} = -[A']\{y\} + \{f'\} + [Q']\left(\{C^{-1} : \Sigma^c(\varepsilon)\} - \{\varepsilon\}\right)$$

Substituindo-se o vetor $\{y\}$ da Eq. (3.11) na Eq. (3.12), obtém-se a seguinte equação não-linear em termos das deformações regulares:

$$\{\varepsilon\} = \{n\} + [S]\left(\{C^{-1} : \Sigma^c(\varepsilon)\} - \{\varepsilon\}\right) \quad (3.13)$$

onde:

$$\{n\} = \{f'\} - [A'] [A]^{-1} \{f\}$$

$$[S] = [Q'] - [A'] [A]^{-1} [Q]$$

É importante notar que o vetor $\{n\}$ denota a solução puramente elástica, ou seja, aquela obtida para a mesma carga quando $\Sigma^c(\varepsilon) = C:\varepsilon$, visto que nesse caso o fator que multiplica a matriz $[S]$ na Eq. (3.13) torna-se nulo.

O MEC Dual, técnica atualmente empregada por vários pesquisadores, altera o contorno do sólido durante a abertura das fissuras, conseqüentemente as matrizes $[H]$ e $[G]$ são aumentadas, visto que cada novo nó criado no contorno possui deslocamentos e forças de superfície a ele ligados. Isso gera um sistema cada vez maior, visto que o número de equações do sistema é proporcional ao número de valores discretizados no contorno.

O método de domínio se comporta de uma maneira diferente. Como pode ser visto no Capítulo 5, o dano e a propagação das fissuras ocorre por meio da discretização do domínio (geração de células ou ativação do modelo de dano sobre células pré-existentes). Desse modo, o contorno não é alterado, e as matrizes $[H]$ e $[G]$ permanecem com a mesma dimensão durante todo o processo. As deformações inelásticas nos elementos e sua alteração em relação ao sistema do passo anterior são levadas em conta na última parcela da Eq. (3.11). Antes da ocorrência de deformações inelásticas, o sistema se apresenta com a seguinte dimensão:

$$\begin{array}{c}
 \boxed{\text{A}} \\
 \text{2i x 2i}
 \end{array}
 \times
 \begin{array}{c}
 \boxed{\text{y}} \\
 \text{2i}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{c}
 \boxed{\text{f}} \\
 \text{2i}
 \end{array}$$

Figura 3.3 – Dimensão do sistema antes da ocorrência de deformações inelásticas.

onde i representa o número de nós pertencentes ao contorno.

A aproximação sobre as células para a introdução de deformações inelásticas sobre o domínio foi tomada como a mais simples possível: a constante. Assim, cada célula que possui deformação inelástica apresenta um nó fictício no meio dela onde as três

componentes de deformações (caso bidimensional) são tomadas. Ou seja, o acréscimo de uma célula ao sistema gera o acréscimo de três posições ao vetor de deformações que antes era considerado nulo.

A não-linearidade do sistema se encontra na Eq. (3.13), pois é impossível isolar as deformações. A resolução desse sistema pelo método de Newton – Raphson gera uma resposta que pode então ser levada à Eq. (3.11), sendo esse que esse sistema, montado após o conhecimento das deformações inelásticas, pode ser resolvido de modo tradicional, pois não apresenta não-linearidades (as deformações já são conhecidas).

O sistema da Eq. (3.13) pode ser representado por:

$$\begin{matrix} \varepsilon \\ \downarrow \\ 3I \end{matrix} = \begin{matrix} n \\ \downarrow \\ 3I \end{matrix} + \begin{matrix} S \\ \downarrow \\ 3I \times 3I \end{matrix} \times \begin{matrix} \varepsilon^{\text{in}} \\ \downarrow \\ 3I \end{matrix}$$

Figura 3.4 – Dimensão do sistema não-linear das deformações.

onde I representa o número de células no domínio com deformações inelásticas e $\{\varepsilon^{\text{in}}\} = (\{C^{-1} : \Sigma^c(\varepsilon)\} - \{\varepsilon\})$.

Após o início da ocorrência de deformações inelásticas sobre o domínio, o sistema antes representado pela Figura 3.3 passa a ser representado pelo sistema da Figura 3.5.

$$\begin{matrix} A \\ \rightarrow \\ 2i \times 2i \end{matrix} \times \begin{matrix} y \\ \downarrow \\ 2i \end{matrix} = \begin{matrix} f \\ \downarrow \\ 2i \end{matrix} + \begin{matrix} Q \\ \rightarrow \\ 2i \times 3i \end{matrix} \times \begin{matrix} \varepsilon^{\text{in}} \\ \downarrow \\ 3i \end{matrix}$$

Figura 3.5 – Dimensão do sistema após a ocorrência de deformações inelásticas.

3.5 Método implícito de solução de problemas inelásticos

3.5.1 Método de Newton-Raphson

O método iterativo de Newton-Raphson é um método numérico utilizado para se achar raízes de funções. Esse método apresenta velocidade de convergência bem superior a métodos como o da bisseção. Porém, ao mesmo tempo, apresenta algumas desvantagens, pois envolve a derivada da função, o que nem sempre é simples de ser calculado e, dependendo do valor inicial dado, o método pode não convergir, por esse não estar na vizinhança da raiz.

O método parte da expansão de Taylor da função, utilizando os dois primeiros termos da série. A partir da equação de reta gerada pela série e de um valor inicial estimado da raiz, por meio de iterações, procura-se um novo valor melhorado da raiz da função até que a tolerância estipulada seja atingida.

A expansão de Taylor para uma função $f(x)$ qualquer em torno de um ponto x_0 é:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x_0} + \dots \quad (3.14)$$

Mantendo-se os dois primeiros termos da expansão obtemos:

$$f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) \quad (3.15)$$
$$f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$$

Trata-se da equação de uma reta que passa pelo ponto $f(x_0)$ com inclinação igual à tangente da curva no ponto x_0 .

Supondo que a função $f(x)$ seja bem aproximada por uma reta, o ponto em que essa reta cruza o eixo x deve estar próximo ao ponto em que a função cruza o eixo x . Este ponto x para o qual a reta cruza o eixo das abscissas será:

$$0 = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) \quad (3.16)$$

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Esse ponto x é então usado no lugar de x_0 como um novo valor inicial, melhorando assim a aproximação, dando início a uma nova iteração. Genericamente pode-se escrever:

$$x^{i+1} = x^i - \frac{f(x^i)}{f'(x^i)} \quad (3.17)$$

sendo i a iteração. Graficamente podemos analisar o método para uma função qualquer, por meio da Figura 3.6 abaixo.

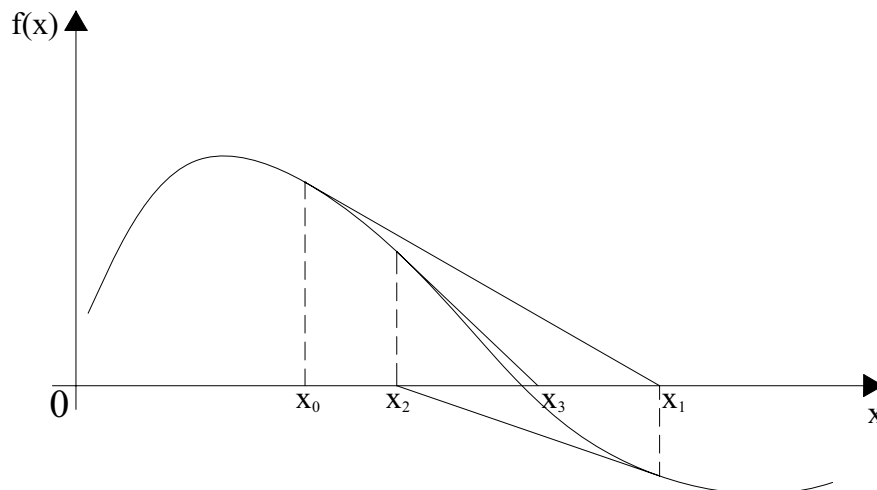


Figura 3.6 – Método de Newton-Raphson.

Como se pode ver na figura, os valores convertem rapidamente para o zero da função, sendo essa uma característica marcante deste método.

3.5.2 Estratégia de solução incremental iterativa

Para a resolução de sistemas não-lineares como o apresentado pela Eq. (3.13), utiliza-se a técnica incremental, na qual a carga é incrementada de maneira proporcional. Assim, para cada nível de carga, tem-se:

$$\{\mathbf{f}\}_n = \lambda_n \{\mathbf{f}\} \quad (3.18)$$

onde λ_n representa o fator de carga para o dito n -ésimo incremento.

O processo incremental consiste em encontrar o termo das deformações $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}\}$ que satisfaz a Eq. (3.13) para o passo de carga $n+1$, sendo conhecida a deformação $\{\boldsymbol{\varepsilon}_n\}$ do passo imediatamente anterior. Para o fator de carga λ_{n+1} pode-se reescrever a equação não-linear da Eq. (3.13) como:

$$\{\mathbf{R}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})\} = -([\mathbf{S}] + [\mathbf{I}])\{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}\} + \lambda_{n+1} \{\mathbf{n}\} + [\mathbf{S}]\{C^{-1} : \Sigma^c(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})\} = 0 \quad (3.19)$$

Na Eq. (3.19), $\{\mathbf{R}\}$ representa o resíduo. A incógnita neste caso é o vetor de deformações do passo $n+1$, que será encontrado com o incremento do passo de carga λ_{n+1} , de modo a satisfazer a condição do resíduo nulo. Obviamente o valor nulo na verdade é tomado como uma tolerância, ou seja, um valor próximo de zero.

Aplicando-se o método de Newton-Raphson à Eq. (3.19), gera-se uma resposta com uma convergência rápida. Ele consiste na obtenção da melhor aproximação da solução exata, $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1}$, a partir da aproximação anterior $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^i$ (onde $n+1$ é o passo de carga e i a iteração), mediante a Eq. (3.20).

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^i + \{\delta\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^i\} \quad (3.20)$$

Na primeira iteração a deformação $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^i$ usada como parâmetro inicial é a deformação do passo de carga anterior. Ela é levada à Eq. (3.19), e caso seu resíduo seja maior que a tolerância estabelecida, uma nova deformação da iteração $i+1$ é exigida. O incremento

dado ao valor da deformação utilizada na primeira iteração é calculado a partir do sistema formado pela expansão de Taylor da Eq. (3.19). Chega-se portanto ao sistema da Eq. (3.21), que tem como incógnita $\{\delta\epsilon_{n+1}^i\}$.

$$\left[\frac{\partial \{\mathbf{R}\}}{\partial \{\epsilon_{n+1}\}} \Big|_{\{\epsilon_{n+1}^i\}} \right] \{\delta\epsilon_{n+1}^{i+1}\} = -\{\mathbf{R}(\epsilon_{n+1}^i)\} \quad (3.21)$$

O processo segue até que se encontre uma deformação que satisfaça o critério de convergência adotado. Em suma, ele se inicia com i nulo e com $\{\epsilon_{n+1}^0\}$ igual a $\{\epsilon_n\}$ e termina quando o critério de convergência previamente estabelecido é cumprido.

Desse modo, quando determinadas as deformações para um dado passo de carga, as incógnitas do contorno podem ser encontradas pela simples aplicação da Eq. (3.11).

A matriz tangente presente no sistema linear da Eq. (3.21) tem papel fundamental na velocidade de convergência do método. Derivando-se a Eq. (3.19) tem-se:

$$\left[\frac{\partial \{\mathbf{R}\}}{\partial \{\epsilon_{n+1}\}} \right] = -\left(([\mathbf{S}] + [\mathbf{I}]) + [\mathbf{S}] \{C^{-1} : \partial\Sigma^c / \partial(\epsilon_{n+1})\} \right) = 0 \quad (3.22)$$

onde $\partial\Sigma^c / \partial(\epsilon_{n+1})$ corresponde ao operador constitutivo tangente associado à lei constitutiva Σ^c .

3.6 Método de controle de resposta

O processo clássico de passos de carga utilizado nos métodos computacionais, como visto anteriormente, consiste em se estabelecer uma história do processo de carga, fixando-se os fatores λ_n a cada passo de carga. Em processos envolvendo abrandamento de tensões (*softening*), o processo se torna incapaz de produzir respostas de equilíbrio estrutural além do ponto de ocorrência da carga crítica. Um outro processo é então

utilizado, baseado no método de controle indireto de deslocamentos, frequentemente utilizado no MEF.

Estabelece-se dessa maneira uma história de uma componente do vetor de deformação (Eq. (3.19)) no lugar da história de cargas. Impondo-se que no passo de carga $n+1$ a K -ésima componente de deformação $(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})_K$ deve ser igual ao valor previamente fixado $(\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1})_K$, surge como nova variável incógnita o fator de carga λ_n . Assim estabelece-se o controle por meio de uma variável com evolução previsível (no caso uma componente de deformação sempre crescente em algum ponto). Assim, indiretamente, acha-se o novo λ_n , que inclusive pode decrescer. Essa nova incógnita modifica a Eq. (3.19), que se torna um sistema do tipo:

$$\left\{ \bar{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \lambda_{n+1}) \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \mathbf{R}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}, \lambda_{n+1}) \right\} \\ (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1})_K - (\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1})_K \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{array} \right\} \quad (3.23)$$

Assim, do mesmo modo que anteriormente e de acordo com o processo de Newton-Raphson, uma aproximação melhorada das variáveis do problema pode ser encontrada mediante a Eq. (3.24).

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1} \\ \lambda_{n+1}^{i+1} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^i \\ \lambda_{n+1}^i \end{array} \right\} - \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial \{\mathbf{R}\}}{\partial \{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}\}} & \{\mathbf{n}\} \\ \{\mathbf{d}\}^T & 0 \end{array} \right] \left\{ \bar{\mathbf{R}}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^i, \lambda_{n+1}^i) \right\} \quad (3.24)$$

Onde os elementos do vetor $\{\mathbf{d}\}$ são dados por $d_j = \delta_{Kj}$, sendo que δ_{Kj} representa o próprio delta de Kronecker (ver Apêndice 4).

4 Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes

4 Capítulo

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta soluções para o tratamento de problemas sólidos com saltos no campo de deslocamentos através da superfície do material. No caso bidimensional ora estudado, tal superfície corresponde a uma linha de descontinuidade, que enquanto em problemas unidimensionais resumir-se-ia a um ponto. O tratamento de tais saltos pode ser feito através de duas vertentes de representação: a fundamentada na mecânica do contínuo e a baseada em modelos discretos. Aqui se utiliza um modelo baseado nas relações constitutivas locais e independente da velocidade, tratado dentro da mecânica do contínuo convencional.

4.2 Cinemática de descontinuidades fortes

O tratamento das descontinuidades fortes aqui apresentado se baseia a princípio na separação do campo de deslocamentos em uma parte regular e uma descontínua. Para apresentar os conceitos envolvidos nessa decomposição, na Figura 4.1 mostra-se um domínio bidimensional descontínuo, com a linha de descontinuidade S e o sistema de eixos curvilíneo η e ξ definidos sobre S , sendo que S corresponde à linha coordenada $\eta = 0$. A linha de descontinuidade S divide o domínio Ω em duas partes, Ω^+ e Ω^- . Define-se também um domínio Ω_ϕ tal que $\Omega_\phi \subset \Omega$ e $S \subset \Omega_\phi$. Nas próximas expressões, “\” representa exclusão.

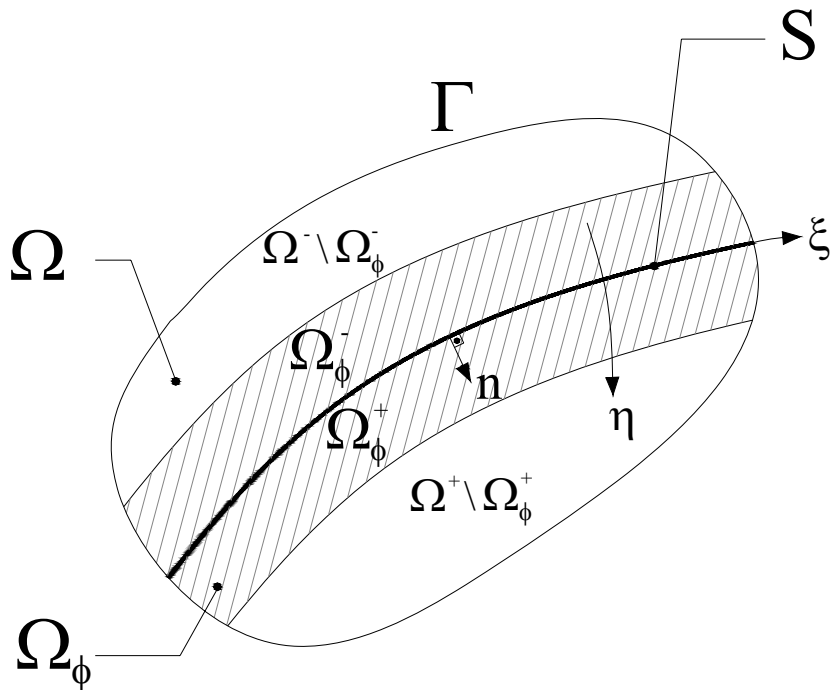


Figura 4.1 – Domínio bidimensional descontínuo.

Essa decomposição permite que as variáveis relativas ao salto interfiram apenas na região adjacente à linha de descontinuidade, região essa arbitrária. O campo de deformações compatível com deslocamentos tem caráter distribucional sobre a região definida, e deixa de ser limitado sobre a linha S .

4.2.1 Campo de deslocamentos descontínuos

Considere-se o domínio bidimensional Ω , representado na Figura 4.1, constituído pelos pontos materiais \mathbf{x} . Pode-se decompor o campo de deslocamentos em uma parte regular (contínua) e uma parte descontínua, conforme a Eq. (4.1).

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + (H_S(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x})) \llbracket \mathbf{u} \rrbracket(\xi, t) \quad (4.1)$$

Na Eq. (4.1), $\hat{\mathbf{u}}$ é a parte regular do campo de deslocamentos, sendo o último termo da expressão a parte descontínua.

Define-se a função $[[\mathbf{u}]]$ como contínua em todo o domínio, representando o salto do campo de deslocamentos ao longo de S . H_S é a função conhecida como *Heaviside*, estando esta situada sobre a linha de descontinuidade, tal que:

$$\begin{cases} H_S = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ H_S = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} \quad (4.2)$$

Já ϕ é uma função contínua que deve satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} \phi = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \setminus \Omega_\phi^- \\ \phi = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \setminus \Omega_\phi^+ \end{cases} \quad (4.3)$$

Desse modo, segundo o último termo da Eq. (4.1), a região de influência do salto do campo de deslocamentos resume-se ao subdomínio arbitrário Ω_ϕ , ficando o resto do domínio representado apenas pela parte regular $\hat{\mathbf{u}}$. De acordo com o mesmo termo, o salto de deslocamentos provém da operação da função *Heaviside* sobre a função contínua $[[\mathbf{u}]]$.

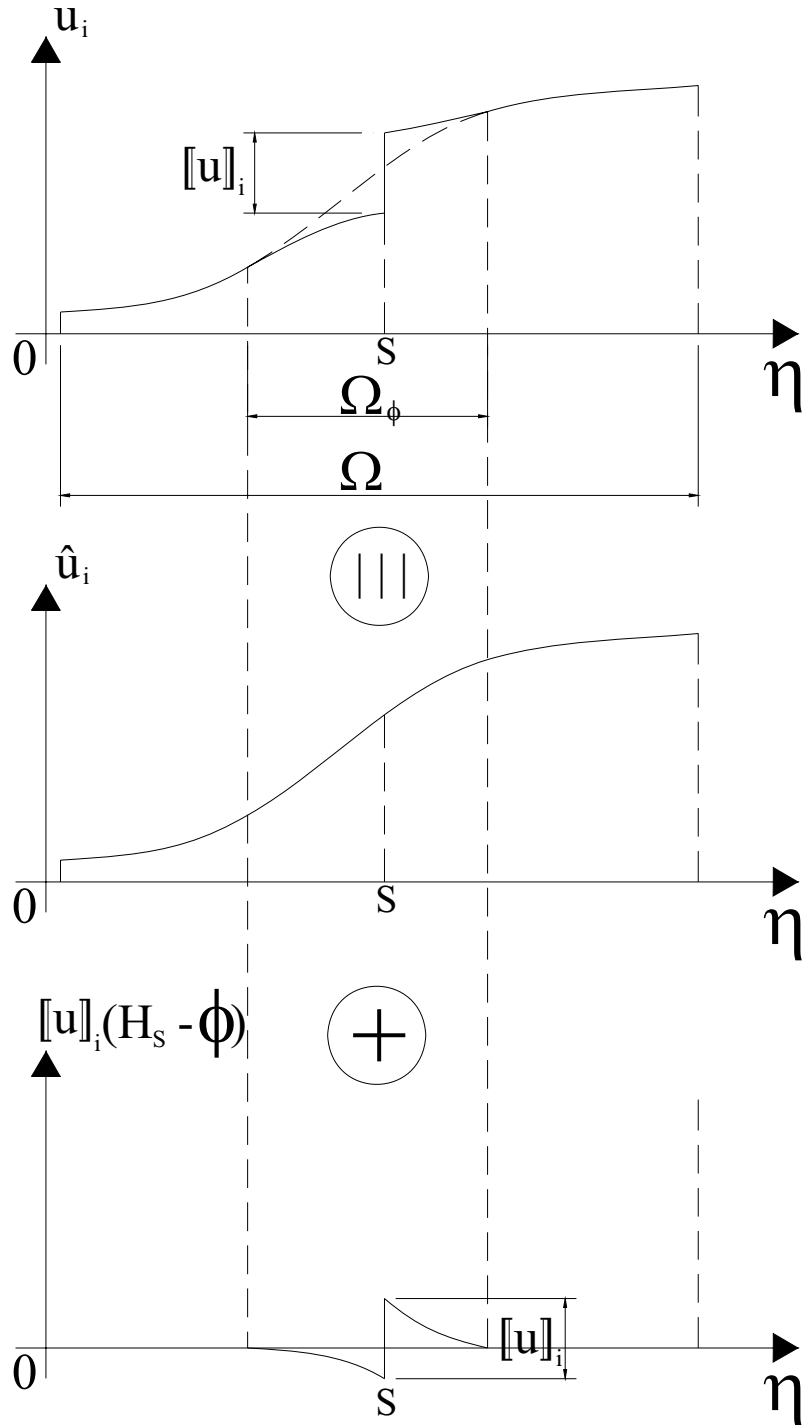


Figura 4.2 – Decomposição do campo de deslocamentos.

O desmembramento do campo de deslocamentos pode ser melhor visualizado pela Figura 4.2, a qual representa a variação de suas componentes ao longo da coordenada curvilínea η .

4.2.2 Campo de deformações

A parte simétrica do gradiente do campo de deslocamentos (Eq.(4.1)) corresponde ao campo de deformações, o qual também pode ser decomposto de maneira similar, em uma parte regular e uma parte descontínua, da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^S \mathbf{u} = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}_\phi + \boldsymbol{\varepsilon}_\delta \quad (4.4)$$

onde

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \nabla^S \hat{\mathbf{u}} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_\phi &= -(\nabla \phi \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)^S + (H_S - \phi) \nabla^S \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \\ \boldsymbol{\varepsilon}_\delta &= \delta_S (\mathbf{n} \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)^S \end{aligned}$$

O operador $(\bullet)^S$ representa a parte simétrica de (\bullet) , \mathbf{n} é o vetor unitário normal à linha de descontinuidade S e δ_S é a distribuição de Dirac situada sobre a linha S , ou seja:

$$\delta_S = \mu_S \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \quad (h \in \mathbb{R}) \quad (4.5)$$

Sendo μ_S a função de colocação situada sobre a linha de descontinuidade, tal que:

$$\begin{cases} \mu_S = 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus S \\ \mu_S = 1 & \forall \mathbf{x} \in S \end{cases}$$

A aplicação do gradiente sobre o deslocamento gera três termos distintos. A deformação regular $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ é derivada da parte regular dos deslocamentos, contínua e limitada em todo o domínio. A parte da deformação $\boldsymbol{\varepsilon}_\phi$ pode ser descontínua, porém se limita ao domínio Ω_ϕ , apresentando valores nulos fora deste. O último termo ($\boldsymbol{\varepsilon}_\delta$) contém a distribuição de Dirac. Ela é oriunda da aplicação do gradiente material sobre a função *Heaviside*. Este termo introduz uma característica distribucional ao campo de deformações, que deixa de ser limitado sobre S .

4.2.3 Identificação das diferentes escalas

As partes regulares dos campos de deslocamento e de deformação são, no contexto dos problemas de múltiplas escalas, associadas à escala grosseira. Os demais termos, representam os efeitos microestruturais na região onde há a concentração de deformação sendo associados à escala refinada. O desenvolvimento teórico a partir deste ponto busca equacionar o problema das descontinuidades apenas utilizando as variáveis regulares, obtendo-se um modelo expresso em termo da escala grosseira, mas contendo informações da escala refinada.

4.2.4 Equações básicas

Para tornar as equações adequadas à aplicação de soluções numéricas do problema, é necessário que elas sejam reescritas apenas em função da parte regular dos campos de deslocamento e deformação, eliminando-se as variáveis associadas aos saltos. Elas podem ser reescritas a partir da cinemática proposta e da equação de equilíbrio na interface da descontinuidade.

Quando existe uma descontinuidade forte, as equações de governo do problema (de equilíbrio, relação deslocamento-deformação, relação constitutiva e condições de contorno) devem ser acrescidas da condição de equilíbrio na face da descontinuidade S :

$$\begin{aligned} n \cdot \sigma_+ &= n \cdot \sigma_- \\ p_S &= n \cdot \sigma_+ \quad \text{ou} \quad (p_S = n \cdot \sigma_-) \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde σ_+ e σ_- são as tensões nos lábios da descontinuidade e p_S é o vetor de força de superfície de Cauchy (*traction*) nos pontos materiais de S .

Procura-se então estabelecer a lei constitutiva que rege o comportamento mecânico do material pertencente à linha de descontinuidade. Abrem-se dois possíveis enfoques para o tratamento desta região. Existem os chamados modelos de fratura coesiva, amplamente difundidos na simulação de aberturas em concreto e materiais quase-

frágeis. Este modelo considera uma zona de processo na frente da ponta da fratura, onde ocorrem forças coesivas ou fictícias relacionadas com a abertura da fissura. A resistência é perdida aos poucos, existindo uma tensão coesiva decrescente, simulando a degradação do material. O modelo coesivo é uma aproximação de uma zona de fratura localizada, adotada com o objetivo principal de simplificar matematicamente a representação fenômeno físico envolvido, preservando seus aspectos mais relevantes. O fenômeno na zona de processo é descrito por um comportamento não-linear com abrandamento entre a força de superfície e as componentes do salto de deslocamentos da descontinuidade, como expresso na Eq. (4.7).

$$p_s = \Sigma^d (\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) \quad (4.7)$$

A relação entre o salto e a força de superfície no lábio da descontinuidade é então definida diretamente, por meio de uma lei constitutiva Σ^d .

A outra opção utiliza a mesma lei constitutiva do domínio contínuo para representar o comportamento dos pontos no interior da descontinuidade. Esta segunda opção foi introduzida no trabalho de SIMÓ et. al. (1993). Demonstrou-se que, sob certas condições, as leis constitutivas do contínuo são compatíveis com deformações não limitadas, permitindo o tratamento de descontinuidades fortes dentro do contexto da mecânica do contínuo. Nesse caso, as tensões em S também são obtidas a partir da relação constitutiva do contínuo Σ^c , ou seja:

$$p_s = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{n} \cdot \Sigma^c (\boldsymbol{\varepsilon}_s) \quad (4.8)$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_s$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ representam os tensores de tensão e de deformação nos pontos pertencentes a S .

4.2.5 Equações básicas em termos das variáveis regulares

Para um melhor tratamento numérico, as equações básicas são então escritas somente em termos das partes regulares da cinemática proposta nas Eq. (4.1) e (4.4). Isso é feito com o intuito de se utilizar a segunda opção para o tratamento da região da descontinuidade. Esta opção se torna interessante por utilizar a mesma relação constitutiva que é utilizada para materiais inelásticos, enfocando o tratamento das componentes da deformação e deslocamento, permitindo que programas que já possuam implementadas ferramentas usuais de não-linearidade física possam ser modificados, de maneira mais simples, para a simulação de descontinuidades fortes.

Considerando-se a mesma relação constitutiva para representar o comportamento dos pontos internos e externos à descontinuidade, a condição de equilíbrio na interface (Eq. (4.6)) é dada por:

$$\mathbf{n} \cdot \left[\Sigma^c(\boldsymbol{\varepsilon}_S) - \Sigma^c(\boldsymbol{\varepsilon}_+) \right] = 0 \quad (4.9)$$

sendo que $\boldsymbol{\varepsilon}_+$ representa as deformações em um dos lábios da descontinuidade. Tem-se que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_S = \boldsymbol{\varepsilon}_+ + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\mathbf{n} \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \right)^S \quad (4.10)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_+ = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}_\phi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)$$

Considerando-se a Eq. (4.8), que relaciona a força de superfície com a deformação, e levando-se em conta as expressões que definem as deformações (Eq. (4.4) e (4.10)), pode-se se reescrever o equilíbrio local (Eq.(4.9)) em função da deformação regular $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ e das componentes do salto $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$:

$$\mathbf{n} \cdot \left[\Sigma^c \left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}_\phi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\mathbf{n} \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \right)^S \right) - \Sigma^c \left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}_\phi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) \right) \right] = 0 \quad (4.11)$$

Na Eq. (4.11), as deformações $\boldsymbol{\varepsilon}_\phi$ foram escritas como funções dos saltos de deslocamentos. As funções ϕ e H_S , bem como a normal \mathbf{n} podem ser definidas *a priori*, considerando-se a descontinuidade uma linha material previamente estabelecida.

Assim sendo, a Eq. (4.11) estabelece uma relação entre as componentes do salto de deslocamentos e a parte regular das deformações do tipo:

$$[[\mathbf{u}]] = f(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (4.12)$$

A forma explícita de tal relação pode ser de difícil obtenção, mas, para fins de aplicação numérica tal forma não se mostra essencial, pois se pode trabalhar com a relação de modo implícito.

Desse modo, podem-se obter, localmente, as componentes do salto na interface, mediante a resolução numérica da equação não-linear apresentada na Eq. (4.11).

Mediante a Eq. (4.12), pode-se também eliminar as componentes do salto das equações de governo. O problema passa a ser tratado então com base na parte regular dos deslocamentos e das deformações, sendo regido então pelo seguinte conjunto de equações:

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{em } \Omega \setminus S \quad (4.13)$$

$$u = \hat{u} = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (4.14)$$

$$p = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{p} \quad \text{em } \Gamma_p$$

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla^s \hat{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Omega \setminus S \quad (4.15)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \hat{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) \quad (4.16)$$

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+ = \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}_- \quad \text{em } S \quad (4.17)$$

As Eqs. (4.13) a (4.17) correspondem, respectivamente, à equação de equilíbrio, às condições de contorno, à relação entre deformação e deslocamento, à relação constitutiva regularizada e à equação de equilíbrio na interface de descontinuidade.

Deve-se chamar a atenção para o fato de que nessas equações de governo se utiliza apenas a parte regular do campo de deslocamentos e de deformações. Para se chegar à relação constitutiva regularizada utilizou-se a seguinte manipulação matemática:

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\sigma} &= \Sigma^c(\boldsymbol{\varepsilon}) \\
 \boldsymbol{\sigma} &= \Sigma^c(\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)) \\
 \boldsymbol{\sigma} &= \Sigma^c(\boldsymbol{\varepsilon}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, f(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}))) \\
 \boldsymbol{\sigma} &= \hat{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}})
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

4.3 Equações do MEC

Esta seção tem por objetivo apresentar a introdução do equacionamento das descontinuidades no MEC. Para tanto, considera-se como ponto de partida a equação de resíduos ponderados usual:

$$\int_{\Omega} (\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma_p} (\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{p}^* d\Gamma = 0 \quad \text{em } \Omega \setminus S \tag{4.19}$$

sendo \mathbf{u}^* e \mathbf{p}^* os deslocamentos e forças de superfície correspondentes ao campo ponderador. Integrando-se por partes a primeira integral da Eq. (4.19) tem-se:

$$\int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma \tag{4.20}$$

O problema, para ter sentido físico, deve apresentar tensões limitadas em seu domínio. Isso é garantido pela lei de abrandamento do modelo constitutivo imposto, que, com deformação crescente tende assintoticamente a zero, mantendo-se assim sempre limitada. Como a linha de descontinuidade S corresponde a um domínio de medida nula (não possui espessura) e as tensões sobre S são limitadas, a integral sobre ela pode ser desconsiderada, e a Eq. (4.20) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = - \int_{\Omega \setminus S} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (4.21)$$

Integrando-se por partes a primeira integral do segundo membro da Eq. (4.21), chega-se à Eq. (4.22). Note que a integral sobre o contorno, gerada pela integração por partes, anula-se com o segundo termo do segundo membro da Eq. (4.21) e o restante pode ser agrupado na forma da segunda integral do segundo membro da Eq. (4.22).

$$\int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = - \int_{\Omega \setminus S} \nabla \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{u}^* d\Omega + \int_S \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_+ - \boldsymbol{\sigma}_-) \mathbf{u}^* d\Gamma \quad (4.22)$$

Levando-se em conta a Eq. (4.22), a equação de resíduos ponderados (Eq. (4.19)) pode ser reescrita por:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega \setminus S} (\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Gamma_p} (\bar{\mathbf{p}} - \mathbf{p}) \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_u} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{p}^* d\Gamma + \int_S \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_+ - \boldsymbol{\sigma}_-) \mathbf{u}^* d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

A Eq. (4.23) corresponde à forma fraca da equação de equilíbrio (Eq. (4.13)), das condições de contorno (Eq. (4.14)) e da equação de equilíbrio na interface (Eq. (4.17)). As outras equações que definem o problema – as equações básicas de relação entre deformações e deslocamento (Eq. (4.15)) e a relação constitutiva (Eq. (4.16)) – são empregadas no cálculo de tensões.

4.3.1 Equações integrais da formulação não-linear do MEC

No caso em que o material do sólido apresenta comportamento não-linear, as tensões podem ser obtidas de maneira genérica por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^{in}) \quad (4.24)$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}^{in}$ é a parte inelástica do tensor de deformações e \mathbf{C} é o tensor constitutivo elástico de quarta ordem simétrico, tal que $\mathbf{C}_{ijkl} = \mathbf{C}_{klij} = \mathbf{C}_{ijlk} = \mathbf{C}_{jilk}$. A simetria deste tensor permite certa liberdade na manipulação matemática das equações.

Levando-se em conta a descrição das deformações (Eq. (4.4)), a Eq. (4.24) particularizada para os pontos do domínio externo à linha de descontinuidade fica dada por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\nabla \hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varepsilon}_\phi - \boldsymbol{\varepsilon}^{in}) \quad \text{em } \Omega \setminus S \quad (4.25)$$

Para a obtenção das equações integrais do MEC, tomam-se como campos ponderadores as soluções fundamentais elásticas de Kelvin. Os campos ponderadores devem então satisfazer a condição da Eq. (4.26).

$$\nabla \boldsymbol{\sigma}^* = \nabla \cdot (\mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}) = -\delta_\xi \mathbf{e} \quad (4.26)$$

onde \mathbf{e} agrupa os vetores unitários da base ortogonal e δ_ξ representa a distribuição de Dirac situada sobre o ponto de colocação singular ξ tal que:

$$\begin{cases} \delta_\xi(\mathbf{x}) = 0 & \text{se } \mathbf{x} \neq \xi \\ \delta_\xi(\mathbf{x}) = \infty & \text{se } \mathbf{x} = \xi \\ \int_\Omega \varphi(\mathbf{x}) \delta_\xi d\Omega = \varphi(\xi) \end{cases}$$

sendo φ uma função contínua. Substituindo-se a Eq. (4.25) na Eq. (4.21) pode-se, mediante a consideração da simetria do tensor constitutivo elástico, fazer o seguinte desenvolvimento:

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = - \int_{\Omega \setminus S} \boldsymbol{\sigma} : \nabla \mathbf{u}^* d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma$$

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = - \int_{\Omega \setminus S} \mathbf{C} : (\nabla \hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varepsilon}_\phi - \boldsymbol{\varepsilon}^{in}) : \nabla \mathbf{u}^* d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma$$

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = - \int_{\Omega \setminus S} (\nabla \hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varepsilon}_\phi - \boldsymbol{\varepsilon}^{in}) : \mathbf{C} : \nabla \mathbf{u}^* d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma$$

$$\int_\Omega \nabla \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega = - \int_{\Omega \setminus S} (\nabla \hat{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\varepsilon}_\phi - \boldsymbol{\varepsilon}^{in}) : \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega + \int_\Gamma \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma$$

Chegando-se a:

$$\int_{\Omega} \nabla \sigma \cdot u^* d\Omega = - \int_{\Omega \setminus S} \sigma^* : \nabla \hat{u} d\Omega - \int_{\Omega \setminus S} \sigma^* : (\varepsilon_{\phi} - \varepsilon^{in}) d\Omega + \int_{\Gamma} p \cdot u^* d\Gamma \quad (4.27)$$

Levando-se em conta a Eq. (4.26) e a Eq. (4.27), a Eq. (4.19) fornece a expressão integral dos deslocamentos regulares, que, de forma genérica, pode ser escrita como:

$$c_{\xi} \cdot \hat{u} = \int_{\Gamma} p \cdot u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{u} \cdot p^* d\Gamma + \int_{\Omega} b \cdot u^* d\Omega + \int_{\Omega \setminus S} (-\varepsilon_{\phi} + \varepsilon^{in}) : \sigma^* d\Omega \quad (4.28)$$

onde c_{ξ} depende da posição do ponto de colocação ξ , como pode ser visto no Apêndice 2. Chama-se a atenção para o fato da expressão integral dos deslocamentos regulares (Eq. (4.28)) ser similar à empregada na formulação usual do MEC com deformações iniciais, como visto no Capítulo 3. As deformações iniciais no núcleo da integral sobre $\Omega \setminus S$ são constituídas pela componente não-linear e pela parte não regular das deformações, ε_{ϕ} . Essa última é a componente que introduz o efeito do comportamento não-linear da interface.

Pode-se optar por se trabalhar com um modelo em que as deformações inelásticas em $\Omega \setminus S$ sejam nulas, com o intuito de se simplificar a análise. Com a componente $\varepsilon^{in} = 0$ em $\Omega \setminus S$ a não-linearidade do modelo fica contida apenas na parte não-regular das deformações, ε_{ϕ} . Sabe-se que a deformação não-regular é limitada e possui como suporte a região Ω_{ϕ} (definida na Figura 4.1). A Eq. (4.28) pode ser então reescrita como na Eq. (4.29).

$$c_{\xi} \cdot \hat{u} = \int_{\Gamma} p \cdot u^* d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{u} \cdot p^* d\Gamma + \int_{\Omega} b \cdot u^* d\Omega - \int_{\Omega_{\phi}} \varepsilon_{\phi} : \sigma^* d\Omega \quad (4.29)$$

Essa aproximação representa a distribuição consistente do salto localizado na linha de descontinuidade S sobre toda a região Ω_{ϕ} , mediante a componente das deformações ε_{ϕ} .

Levando-se em conta as expressões da relação constitutiva regularizada (Eqs. (4.16) e (4.25)) e a relação entre as deformações e deslocamentos regularizados da Eq. (4.15), pode-se reescrever a Eq. (4.29) como:

$$c_\xi \cdot \hat{u} = \int_\Gamma \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^* d\Gamma - \int_\Gamma \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{p}^* d\Gamma + \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega - \int_{\Omega_\phi} \left(\mathbf{C}^{-1} : \hat{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \boldsymbol{\sigma}^* d\Omega \quad (4.30)$$

A Eq. (4.30), como se pode notar, está escrita somente como função das variáveis regulares do problema de descontinuidade. Porém, esta formulação, apesar de ser função apenas de variáveis da escala grosseira, representa também os efeitos das variáveis presentes na escala refinada.

A expressão integral das deformações regulares de um ponto interno, compatível com a Eq. (4.30) é dada pela Eq. (4.31).

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = & \int_\Gamma \mathbf{p} \cdot \mathbf{U}^* d\Gamma - \int_\Gamma \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{P}^* d\Gamma + \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \mathbf{U}^* d\Omega + \\ & - \int_{\Omega_\phi} \left(\mathbf{C}^{-1} : \hat{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \boldsymbol{\Sigma}^* d\Omega + \left(\mathbf{C}^{-1} : \hat{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \right) : \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^* \end{aligned} \quad (4.31)$$

\mathbf{U}^* , \mathbf{P}^* e $\boldsymbol{\Sigma}^*$ representam, respectivamente, as derivadas espaciais das soluções fundamentais \mathbf{u}^* , \mathbf{p}^* e $\boldsymbol{\sigma}^*$. Já o termo independente $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^*$ provém da derivada da integral de domínio da Eq. (4.30).

Desse modo, chega-se a uma formulação integral, proposta por meio das Eqs. (4.30) e (4.31), que representa o problema de descontinuidades fortes em termos de variáveis regulares, ou seja, em termos da escala grosseira. Mas, como dito anteriormente, as informações relativas à escala refinada estão contidas na formulação por meio da componente de deformação $\boldsymbol{\varepsilon}_\phi$, a qual, de certa forma, distribui o efeito do salto em S sobre a região Ω_ϕ . Novamente, ressalta-se a grande similaridade entre as Eq. (4.30) e (4.31) do problema de descontinuidades fortes e as Eqs. (3.6) e (3.7) para problemas inelásticos convencionais. Dessa semelhança resultam as vantagens deste tratamento das descontinuidades fortes. Assim sendo, com modificações relativamente simples pode-se adaptar o tratamento computacional dado ao problema inelástico para resolver problemas de saltos de deslocamento. A partir deste ponto, o tratamento algébrico dado

ao problema é análogo ao mostrado no Capítulo 3 para sólidos inelásticos, inclusive utilizando o método de Newton-Raphson na resolução dos sistemas não-lineares. Pode-se inclusive mesclar o modelo de regime inelástico com o modelo de descontinuidades fortes, como mostram claramente as Eqs. (4.28), (4.30) e (4.31)

4.3.2 Descontinuidades fortes no contexto da mecânica do contínuo

Como apresentado anteriormente, o comportamento não-linear da descontinuidade forte pode ser representado de duas maneiras distintas. Nesta dissertação o tratamento a ela dispensado é o baseado na relação constitutiva contínua (deformação *versus* tensão). Este tratamento proporciona uma análise que acaba por recair sobre o contexto da mecânica do contínuo. Considerando-se o modelo de dano isotrópico apresentado no Capítulo 2, podem-se analisar descontinuidades fortes de maneira similar à utilizada por MANZOLI et. al. (1999) e por OLIVER (1996) para o modelo elastoplástico.

Pode-se optar pela utilização da lei linear de evolução de dano ou pela lei de evolução exponencial, ambas apresentadas no Capítulo 2. Frisa-se aqui novamente que o tratamento numérico dessa opção requer a consideração de uma banda de largura k , que deve ser muito pequena com relação ao domínio do problema. Essa banda corresponde à superfície de descontinuidade quando a espessura k tende a zero.

4.4 Análise numérica

4.4.1 Aproximação numérica

Seja um corpo bidimensional de domínio Ω e contorno Γ (Figura 4.1), atravessado por uma linha de descontinuidade S no interior de uma sub-região arbitrária Ω_ϕ , tal que $\Omega_\phi \in \Omega$.

A aproximação numérica pode ser feita à luz do tratamento dispensado às equações integrais no Capítulo 3, bastando substituir a relação constitutiva pela relação

constitutiva regularizada $\hat{\Sigma}$. Além do contorno, verifica-se que é suficiente a discretização do domínio Ω_ϕ apenas, por meio de células internas (Ω_c). Assim, o restante do domínio, onde não há incidência de linhas de descontinuidades, não precisa ser discretizado, conforme mostra a Figura 4.3.

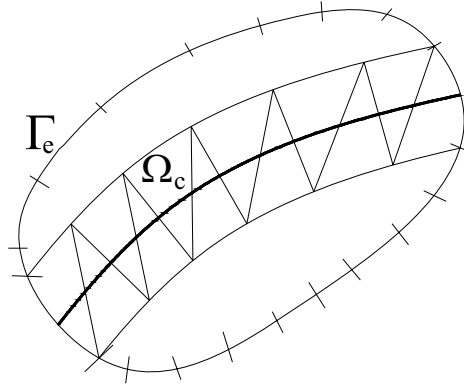


Figura 4.3 – Discretização do contorno e da região Ω_ϕ em células internas.

4.4.2 Modelo constitutivo regularizado

Na estratégia de solução da equação não-linear apresentada no capítulo 3, é necessária a obtenção das tensões no interior da célula para as sucessivas deformações regulares do processo iterativo. A formulação apresentada pode ser empregada para qualquer tipo de modelo constitutivo, bastando a substituição da relação entre deformações e tensões pela do modelo desejado.

Destaca-se aqui que, ao se trabalhar com modelos convencionais, que não contemplem o comportamento da linha de descontinuidade, as deformações regulares se igualam às deformações totais e Ω_ϕ representa a região onde o material apresenta comportamento não-linear. Daí a principal diferença entre a formulação apresentada e a convencional está contida na relação constitutiva utilizada, no caso a regularizada $\hat{\Sigma}$. Esta relação, como previamente dito, retorna as tensões em função das deformações regularizadas, levando-se em consideração a escala refinada (comportamento microestrutural no interior da linha de descontinuidade forte).

4.4.2.1 Regularização da distribuição

Objetivando o adequado tratamento numérico, a função delta de Dirac sobre S , δ_S , presente na componente de deformação não regular $\boldsymbol{\varepsilon}_\delta$ deve ser definida em função de um parâmetro de regularização k (largura da banda onde o salto de deslocamentos será distribuído), sendo que quando este tende a zero converge para a própria função delta de Dirac, tal que:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{\bar{H}} \delta_S \quad (4.32)$$

$$\delta_S^k = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x} \in S \\ k & \\ 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus S \end{cases} \quad (4.33)$$

Trabalhar com valores de k de ordem de grandeza muito inferior ao do problema já é o suficiente para aplicações práticas.

Em consequência dessa regularização, o módulo de abrandamento deve ser substituído por sua forma regularizada também.

$$H^k = \begin{cases} k \cdot \bar{H} & \forall \mathbf{x} \in S \\ \infty & \forall \mathbf{x} \in \Omega \setminus S \end{cases} \quad (4.34)$$

onde \bar{H} é o módulo de abrandamento intrínseco.

4.4.2.2 Construção da função Φ

Observa-se que a componente das deformações $\boldsymbol{\varepsilon}_\phi$ descrita na Eq. (4.4) tem como parte integrante a função ϕ descrita na Eq. (4.3). Desse modo, $\boldsymbol{\varepsilon}_\phi$ é nulo fora de Ω_ϕ , e portanto basta a definição da função ϕ no domínio de cada célula. Desse modo:

$$\phi = \sum_{c=1,nc} \phi_c \quad (4.35)$$

onde ϕ_c representa a função definida no domínio da célula Ω_c e onde nc é o número de células que contêm descontinuidade.

Utilizando-se células triangulares, ϕ_c pode ser definida com uma função linear expressa em termos das coordenadas dos vértices da célula. A Figura 4.4 ilustra as funções para os diferentes modos em que a linha de descontinuidade pode atravessar a célula.

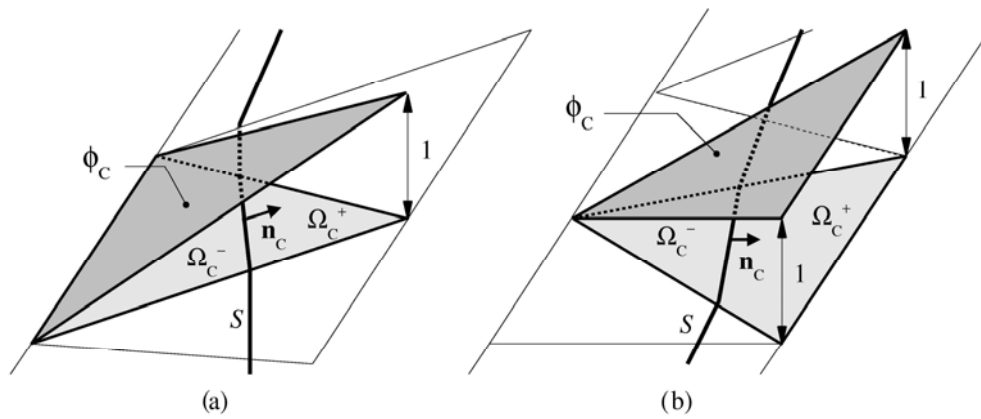


Figura 4.4 – Construção da função ϕ no domínio da célula.

4.4.2.3 Aproximação da função salto

Utiliza-se a forma mais simples de aproximação da função $[[u]]$ em Ω_ϕ que consiste na aproximação constante sobre todo o domínio da célula:

$$[[u]] \approx \sum_{c=1,nc} \alpha_c \chi_c \quad (4.36)$$

onde α_c representa as componentes do salto no campo de deslocamentos correspondente à célula Ω_c , sendo χ_c a função de colocação definida como:

$$\begin{cases} \chi_c = 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega_c \\ \chi_c = 0 & \forall \mathbf{x} \notin \Omega_c \end{cases} \quad (4.37)$$

4.4.2.4 Eliminação da escala refinada

Com a definição das funções ϕ e da função salto $[[\mathbf{u}]]$ nas Eqs. (4.35) e (4.36) pode-se escrever as deformações (Eq. (4.4)) em um ponto \mathbf{x} dentro do domínio de uma célula com uma linha de descontinuidade, conforme o desenvolvimento a seguir.

Para $\mathbf{x} \in \Omega_c \setminus S_c$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_c &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}_\phi \\ \boldsymbol{\varepsilon}_c &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left(\nabla \phi_c \otimes [[\mathbf{u}]]_c \right)^S + (H_S - \phi_c) \nabla^S [[\mathbf{u}]]_c \end{aligned}$$

Da Eq. (4.36)

$$\begin{aligned} [[\mathbf{u}]]_c &= \boldsymbol{\alpha}_c \chi_c = 1 \cdot \boldsymbol{\alpha}_c = \boldsymbol{\alpha}_c \\ \nabla^S [[\mathbf{u}]]_c &= \nabla^S \boldsymbol{\alpha}_c \chi_c = 0 \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left(\nabla \phi_c \otimes \boldsymbol{\alpha}_c \right)^S$$

Para $\mathbf{x} \in S_c$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_c &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\varepsilon}_\phi + \boldsymbol{\varepsilon}_\delta \\ \boldsymbol{\varepsilon}_c &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left(\nabla \phi_c \otimes [[\mathbf{u}]]_c \right)^S + (H_S - \phi_c) \nabla^S [[\mathbf{u}]]_c + \delta_S^k \left(\mathbf{n}_c \otimes [[\mathbf{u}]]_c \right)^S \\ \boldsymbol{\varepsilon}_c &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left(\nabla \phi_c \otimes \boldsymbol{\alpha}_c \right)^S + \delta_S^k \left(\mathbf{n}_c \otimes [[\mathbf{u}]]_c \right)^S \\ \boldsymbol{\varepsilon}_c &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \left(\nabla \phi_c \otimes \boldsymbol{\alpha}_c \right)^S + \frac{1}{k} \left(\mathbf{n}_c \otimes \boldsymbol{\alpha}_c \right)^S \\ \boldsymbol{\varepsilon}_c &= \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\left(\frac{1}{k} \mathbf{n}_c - \nabla \phi_c \right) \otimes \boldsymbol{\alpha}_c \right)^S \end{aligned}$$

Pode-se então resumir as deformações pela Eq. (4.38).

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_c = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - (\nabla \phi_c \otimes \boldsymbol{\alpha}_c)^s & \text{para } \mathbf{x} \in \Omega_c \setminus S_c \\ \boldsymbol{\varepsilon}_c = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\left(\frac{1}{k} \mathbf{n}_c - \nabla \phi_c \right) \otimes \boldsymbol{\alpha}_c \right)^s & \text{para } \mathbf{x} \in S_c \end{cases} \quad (4.38)$$

S_c é o segmento de linha de descontinuidade dentro do domínio da célula Ω_c enquanto \mathbf{n}_c é o vetor unitário normal à linha.

Na implementação computacional, ao invés de se trabalhar com os tensores simétricos de deformação e tensão, utilizam-se os seguintes vetores:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{xx} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yy} \\ \boldsymbol{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{xx} \\ \boldsymbol{\sigma}_{yy} \\ \boldsymbol{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

Pode-se então reescrever a Eq. (4.38) segundo um sistema cartesiano de coordenadas (x,y) como:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon}_c = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{l_c} \mathbf{M}_c \cdot \boldsymbol{\alpha}_c & \text{para } \mathbf{x} \in \Omega_c \setminus S_c \\ \boldsymbol{\varepsilon}_c = \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\frac{1}{k} \mathbf{N}_c - \frac{1}{l_c} \mathbf{M}_c \right) \cdot \boldsymbol{\alpha}_c & \text{para } \mathbf{x} \in S_c \end{cases} \quad (4.40)$$

com

$$\mathbf{M}_c = l_c \begin{bmatrix} \partial \phi_c / \partial x & 0 \\ 0 & \partial \phi_c / \partial y \\ \partial \phi_c / \partial y & \partial \phi_c / \partial x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_x & 0 \\ 0 & m_y \\ m_y & m_x \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N}_c = \begin{bmatrix} n_x & 0 \\ 0 & n_y \\ n_y & n_x \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\alpha}_c = \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \end{Bmatrix} \quad (4.41)$$

onde n_x e n_y são as componentes de \mathbf{n}_c , enquanto que α_x e α_y são as componentes do salto de deslocamentos através da linha de descontinuidade sobre a célula. A matriz \mathbf{M}_c é composta pelas componentes m_x e m_y do vetor normal \mathbf{m}_c , na base do triângulo da célula (Figura 4.5). Este provém da multiplicação de l_c (distância entre o nó que fica isolado pela linha de descontinuidade e a base do triângulo da célula) pela aplicação do operador diferencial ∇ sobre a função ϕ .

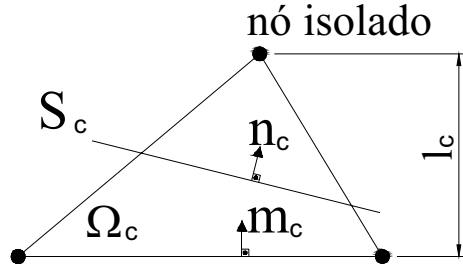


Figura 4.5 – Célula interna com descontinuidade incorporada.

Considerando que os pontos externos às descontinuidades permanecem no regime elástico e que o comportamento dos pontos do interior é não-linear, as tensões são dadas por:

$$\begin{cases} \sigma_c = \mathbf{C} \cdot \left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{1}{l_c} \mathbf{M}_c \cdot \boldsymbol{\alpha}_c \right) & \text{para } \mathbf{x} \in \Omega_c \setminus S_c \\ \sigma_c = \Sigma^c \left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\frac{1}{k} \mathbf{N}_c - \frac{1}{l_c} \mathbf{M}_c \right) \cdot \boldsymbol{\alpha}_c \right) & \text{para } \mathbf{x} \in S_c \end{cases} \quad (4.42)$$

onde \mathbf{C} é a matriz das constantes elásticas e Σ^c representa, de maneira genérica, as relações constitutivas de dano com abrandamento regularizado (ou outro modelo usado).

As forças de superfície calculadas no interior de S devem estar em equilíbrio com as calculadas em pontos externos pertencentes aos lábios da descontinuidade (σ_+). Em termos de vetor de tensões temos:

$$[N_c]^T \cdot (\sigma_s - \sigma_+) = 0 \quad \text{em } S_c \quad (4.43)$$

Combinando a Eq. (4.43) com a (4.42) chega-se à:

$$[N_c]^T \cdot \left(\Sigma^c \left(\hat{\varepsilon} + \left(\frac{1}{k} N_c - \frac{1}{l_c} M_c \right) \cdot \alpha_c \right) - C \cdot \left(\hat{\varepsilon} - \frac{1}{l_c} M_c \cdot \alpha_c \right) \right) = 0 \quad (4.44)$$

Considerando que o ponto de colocação seja sobre a linha de descontinuidade S_c , para uma dada deformação regular da célula $\hat{\varepsilon}_c$, a equação de equilíbrio não-linear (Eq. (4.44)) pode ser resolvida numericamente fornecendo os valores do salto (α_c) correspondentes. Uma vez determinadas as componentes do salto, as tensões em qualquer ponto da célula podem ser calculadas mediante a Eq. (4.42). Observa-se aqui que as matrizes M_c e N_c são consideradas constantes, visto que ϕ_c depende da geometria da célula e que as componentes de n_c permanecem inalteradas após a formação da descontinuidade forte.

Para a solução da Eq. (4.44) em um determinado estado de deformações $\hat{\varepsilon}_c$, adota-se o esquema iterativo de Newton-Raphson, buscando-se a solução da Eq. (4.45) mediante a formula recursiva da Eq. (4.46).

$$F(\alpha_c) = [N_c]^T \cdot \left(\Sigma^c \left(\hat{\varepsilon} + \left(\frac{1}{k} N_c - \frac{1}{l_c} M_c \right) \cdot \alpha_c \right) - C \cdot \left(\hat{\varepsilon} - \frac{1}{l_c} M_c \cdot \alpha_c \right) \right) = 0 \quad (4.45)$$

$$\alpha_c^{i+1} = \alpha_c^i - \left[\frac{\partial F(\alpha_c^i)}{\partial \alpha_c} \right]^{-1} \cdot F(\alpha_c^i) \quad (4.46)$$

Esta última permite a obtenção de uma aproximação melhorada α_c^{i+1} da solução, a partir da resposta da iteração anterior α_c^i . Da Eq. (4.45) obtém-se:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_c} = N_c^T \cdot \left(C^c \cdot \left(\frac{1}{k} N_c - \frac{1}{l_c} M_c \right) + C \cdot \frac{1}{l_c} M_c \right) \quad (4.47)$$

onde $C^c = \partial \Sigma^c / \partial \boldsymbol{\varepsilon}$ é a matriz constitutiva de dano (ou outro modelo qualquer, tal como o elastoplástico). Observa-se que a partir do equilíbrio na interface é possível a determinação das componentes do salto em função das partes regulares das deformações da célula.

As tensões podem ser calculadas com a Eq.(4.42), gerando a seguinte relação constitutiva regularizada:

$$\hat{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c) = \mathbf{C} \cdot \left(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c - \frac{1}{l_c} \mathbf{M}_c \cdot \boldsymbol{\alpha}_c(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c) \right) \quad (4.48)$$

O operador tangente associado à esta última relação apresentada, necessária para a construção da matriz tangente (Eq. (3.22)) pode ser obtido da Eq. (4.45), conduzindo a:

$$\frac{\partial \hat{\Sigma}(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c)}{\partial \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_c} = \begin{cases} \mathbf{C} & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega \setminus \Omega_\phi \\ \mathbf{C} + \frac{1}{l_c} \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}_c \cdot \left[\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}_c} \right]^{-1} \cdot [\mathbf{N}_c]^T \cdot (\mathbf{C}^c - \mathbf{C}) & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_\phi \end{cases} \quad (4.49)$$

4.5 Formulação simétrica e parcialmente simétrica

O tratamento aqui dispensado às células internas pode ser comparado diretamente com o dos elementos finitos com descontinuidades fortes incorporadas, pois se trata do mesmo processo. À semelhança do encontrado no MEF, existem certas peculiaridades da incorporação de descontinuidades que também aparecem no MEC. A principal refere-se à instabilidade que a diferença entre as direções dos vetores \mathbf{m}_c e \mathbf{n}_c (Figura 4.5) pode causar na solução do sistema local das deformações (Eq. (4.45)). A expressão da Eq. (4.50) mostra uma influência desses vetores supracitados na construção da matriz Jacobiana do método iterativo de Newton-Raphson:

$$\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\alpha}_c} = \frac{1}{k} \mathbf{N}_c^T \cdot \mathbf{C}^c \cdot \mathbf{N}_c - \frac{1}{l_c} \mathbf{N}_c^T \cdot \mathbf{C}^c \cdot \mathbf{M}_c + \frac{1}{l_c} \mathbf{N}_c^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{M}_c \quad (4.50)$$

Segundo SANCHO et. al. (2006), a estabilidade do sistema é dependente da simetria do tensor $\partial F/\partial \alpha_c$, que só ocorre quando m_c e n_c são paralelos. O primeiro vetor corresponde ao gradiente da função ϕ_c empregada na composição do campo de deformações na célula, sendo por isso associado à consistência cinemática. Esse vetor depende basicamente da geometria da célula. O vetor n_c depende da orientação da linha de descontinuidade e tem um papel importante na imposição da condição de equilíbrio da Eq. (4.9), sendo por isso associado à consistência estática. Obviamente, em geral esses vetores não são paralelos em malhas pré-definidas. Esta assimetria inerente se transfere à matriz de rigidez tangente da Eq. (4.49). Esse tipo de formulação não-simétrica é conhecida como SKON (Static and kinematically optimal non-symmetrical).

Apesar de ser estática e cinematicamente consistente, um inconveniente atribuído à formulação não-simétrica é que, em caso de orientação desfavorável da malha em relação à linha de descontinuidade, podem-se gerar casos extremos nos quais uma célula interna possua um vetor m_c praticamente ortogonal a n_c . Isso faz com que o tensor $\partial F/\partial \alpha_c$ tenda a ser singular, agravando a instabilidade na resolução do sistema (Eq. (4.46)) pelo método de Newton-Raphson.

Alguns subterfúgios podem ser adotados para contornar tal inconveniente. Pode-se forçar a condição cinemática sobre a estática, fazendo que durante a resolução o vetor n_c seja considerado igual ao vetor m_c , ou alterado de maneira a reduzir o ângulo entre eles. Isto é comumente utilizado no MEF. Do mesmo modo que no MEF, ao se utilizar esse recurso no MEC, podem ocorrer distorções na resposta, pois se trata de mais uma aproximação introduzida. Observa-se que o contrário também pode ser feito, alterando-se o vetor m_c (relaxamento das condições cinemáticas – Figura 4.6 (a)), mas, do mesmo modo que no MEF, essa opção pode levar a resultados piores, com fortes travamentos de tensões.

A simetria pode ser forçada de algumas maneiras diferentes. Pode-se forçá-la sobre todas as células que possuem descontinuidade (totalmente simétrico – Figura 4.6 (b)). Esse caso apresenta um aumento significativo do erro na resposta, pois muitas vezes aproximam-se células onde não havia tal necessidade.

Para diminuir tal erro, pode-se atribuir uma condição limite, um ângulo máximo entre os dois vetores citados. Nessa alternativa, só se aproximam os casos onde há a real necessidade de se fazê-lo (Figura 4.6 (c)). Neste trabalho adotou-se como ângulo limite o valor de 45° . Esse método pode ser chamado de quase-simétrico. Visando diminuir ainda mais tais aproximações, no caso limite exposto, pode-se aproximar o vetor n_c pelo vetor mais próximo que forma o ângulo limite com m_c , e não por m_c , como visto na Figura 4.6 (d). A aproximação neste caso fica mais próxima àquela totalmente consistente, e, portanto, o erro também diminui. Esse relaxamento das condições estáticas objetiva impedir o mau acondicionamento do sistema gerado pelo método, evitando a interrupção da análise numérica por falta de convergência.

As possibilidades de relaxamento das condições estáticas e cinemáticas acima descritas podem ser mais bem observadas na Figura 4.6. No capítulo 6 avaliam-se os efeitos dessas diferentes formulações alternativas na estabilidade e precisão das soluções numéricas.

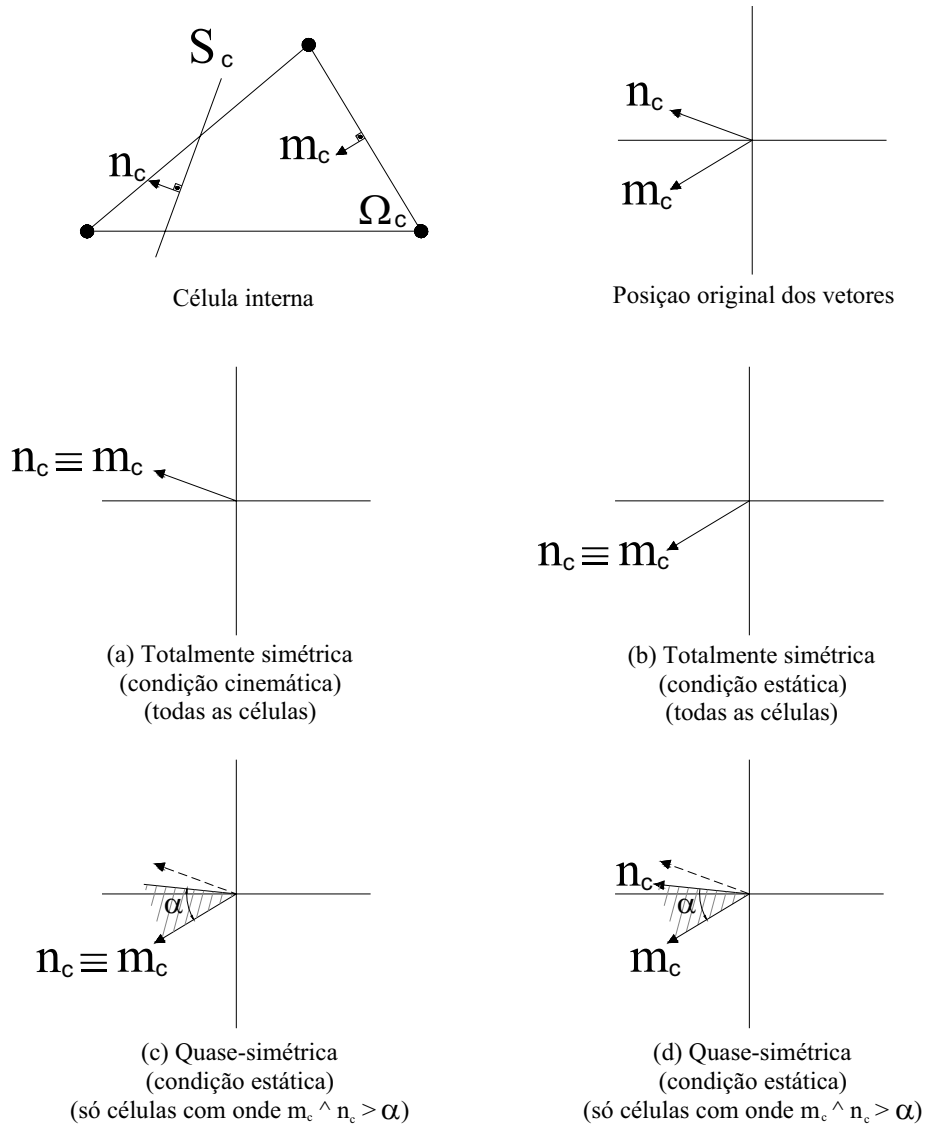


Figura 4.6 – Relaxamento das condições estáticas e cinemáticas.

5 Técnicas Numéricas

5.1 Introdução

Este capítulo tem por objetivo expor e explicar as técnicas e os algoritmos em uso no programa computacional desenvolvido. Pretende-se expor o tipo de elemento de contorno utilizado, o algoritmo desenvolvido para a geração das células internas, as técnicas de integração em elementos do contorno e em células do domínio e a técnica de subintegração.

5.2 Elemento de contorno descontínuo

O elemento de contorno utilizado pelo programa em desenvolvimento apresenta dois nós situados em seu interior, proporcionando aproximações descontínuas das variáveis de contorno, como ilustra a Figura 5.1. As funções aproximadoras das variáveis \mathbf{u} e \mathbf{p} (respectivamente o deslocamento e a força de superfície sobre nós do contorno) podem ser descritas pela Eq. (5.1), segundo a coordenada adimensional ξ . A função aproximadora ϕ_1 associada ao nó 1 vale 1 nesse nó (para $\xi = \xi_1$) e é nula no nó 2 para ($\xi = \xi_2$). Já a função aproximadora ϕ_2 , associada ao nó 2, vale 1 em ξ_2 e é nula em ξ_1 .

$$\begin{aligned}u_k &= \phi_1.U_k^1 + \phi_2.U_k^2 \\p_k &= \phi_1.P_k^1 + \phi_2.P_k^2\end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{\xi_2 - \xi_1}(\xi_2 - \xi) \\ \phi_2 &= \frac{1}{\xi_1 - \xi_2}(\xi_1 - \xi)\end{aligned}\tag{5.1}$$

U_k e P_k são os valores nodais do deslocamento e da força de contorno.

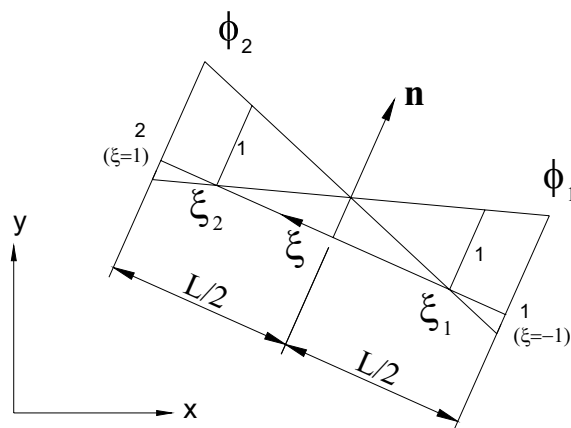


Figura 5.1 – Elemento linear descontínuo.

5.3 Algoritmo de geração de células sobre o domínio

Como já comentado, para a simulação do modelo constitutivo de dano sobre sólidos bidimensionais aplicados ao MEC, é necessário que nas regiões onde haja a não-linearidade existam células internas. Pode-se previamente gerar uma malha inicial em certa região do domínio, mesmo não se sabendo exatamente onde ocorrerá a não-linearidade. Como visto no item 4.5, isso pode acarretar algumas singularidades numéricas. Usando esse método cria-se também um número de células maior do que o necessário, pois a região da malha é maior do que a região onde de fato ocorre o fenômeno em estudo. Os resultados apresentados no Capítulo 6 justificam a adoção de um algoritmo de geração de células internas.

Aproveita-se aqui uma vantagem do MEC em relação ao MEF. O MEC só necessita da discretização do contorno, sendo o domínio discretizado apenas nas regiões que apresentam não-linearidades ou forças de corpo. Tem-se então ampla liberdade para a discretização das células internas, podendo-se alinhar a malha da melhor maneira possível, fazendo com que os vetores n_c e m_c (Figura 4.5) sejam naturalmente quase paralelos.

Na Figura 5.2 apresenta-se esquematicamente uma chapa com uma linha de fratura e duas discretizações distintas para simulá-la. A primeira discretização é do tipo pré-definida, a qual conta com um grande número de células e problemas como a passagem da linha de fratura por vértices, gerando problemas como os destacados no item 4.5. A segunda apresenta a criação de células segundo o algoritmo desenvolvido, o que conta com um número reduzido de elementos de domínio.

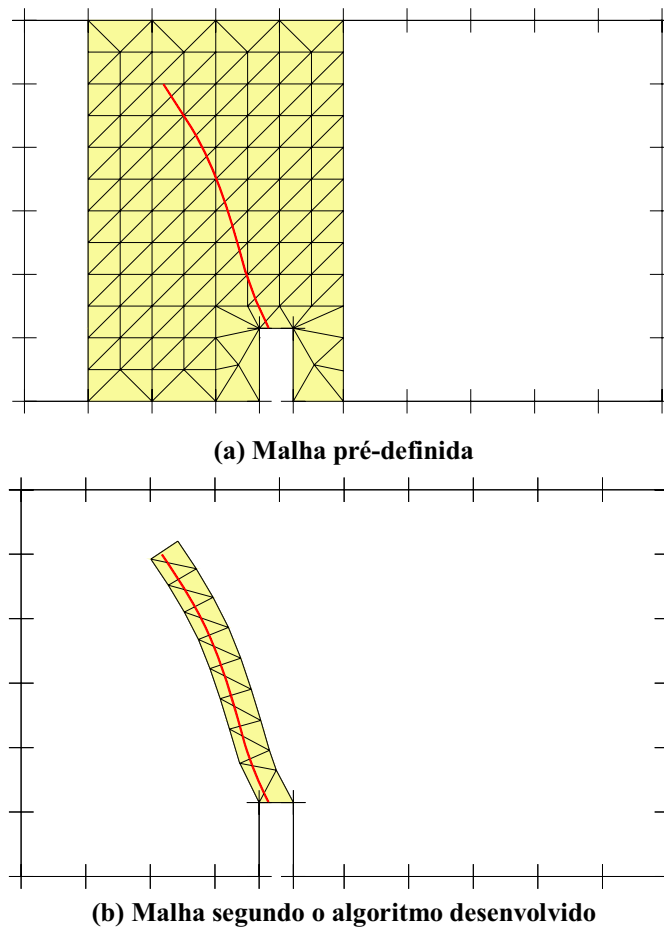


Figura 5.2 – Malhas para simulação de não-linearidades.

O algoritmo é acionado quando as tensões alcançam o critério de dano, e há a necessidade de criação das células internas para simulação das discontinuidades fortes. Optou-se pela criação de células em pares, pois esta forma de criação mostrou-se mais estável e menos sujeita a problemas de ordem geométrica, tais como diminuição excessiva da área das células e problemas com mudanças bruscas de direção. Várias tentativas de algoritmos geométricos foram executadas, sendo que o algoritmo aqui descrito é o que melhor funcionou, não apresentando nenhum dos problemas

mencionados acima. A criação dos pares de elementos de domínio é orientada pelas direções principais calculadas a partir do estado de tensões de um ponto localizado na ponta da fratura, durante o processo de carregamento. Assim, a direção de crescimento da fratura é totalmente determinada pela evolução do problema, sendo que essa direção não é imposta, mas sim calculada antes da criação de cada par de células.

Caso a descontinuidade não atravesse o sólido bidimensional completamente, como esquematizado na Figura 5.2 (a), não existe a necessidade da diferenciação na criação das últimas duas células, visto que estas não estarão ligadas a nós do contorno.

Sabendo-se a direção r da evolução da descontinuidade, acha-se um ponto no meio do lado do último triângulo gerado, e a partir deste projeta-se outro ponto na direção dada com uma distância l fornecida pelos dados de entrada do programa. A partir deste segundo ponto geram-se outros dois, os quais serão os dois nós criados para o próximo par de células, ortogonais à direção dada e distanciados de metade da distância l do segundo ponto. Deste modo forma-se um quadrilátero à frente da ponta da fissura, o qual, ao ser dividido ao meio, dá origem ao novo par de células criado. O processo pode ser visualizado na seqüência apresentada na Figura 5.3.

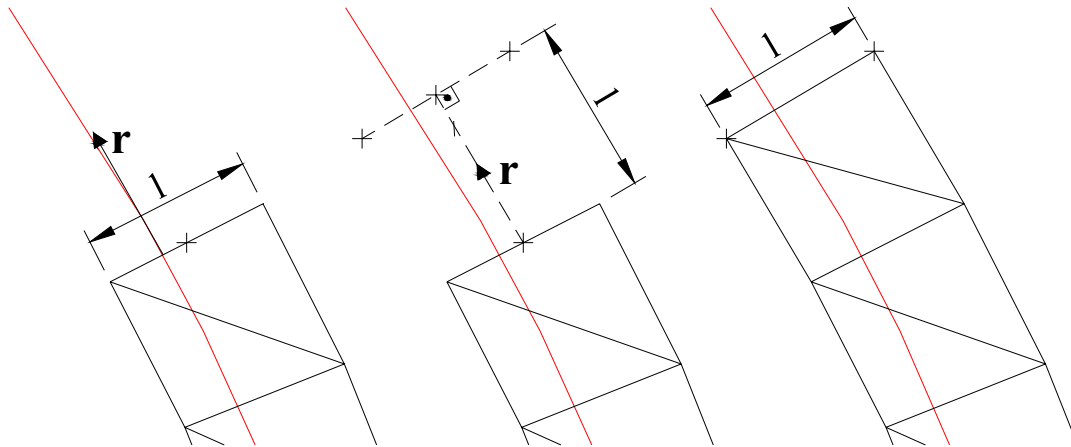


Figura 5.3 – Seqüência de criação de par de células internas.

O processo acima descrito se repete indefinidamente até que se pare a análise ou até que o avanço da fissura chegue perto do contorno. O algoritmo verifica, a cada novo par, se os dois nós criados estão dentro do contorno. Caso um dos nós se encontre fora do

domínio ou sobre o contorno, o algoritmo gera o último par de células que, como dito anteriormente, é gerado de forma diferente para se adaptar à malha do contorno existente.

Para isso, verifica-se qual elemento do contorno mais próximo à última célula é atravessado pela reta formada entre o primeiro e o segundo pontos projetados (a reta na direção r mostrada na Figura 5.3). Desse modo, utilizam-se os nós do elemento de contorno existentes para que os últimos dois elementos do contorno sejam fechados, tais como na Figura 5.4.

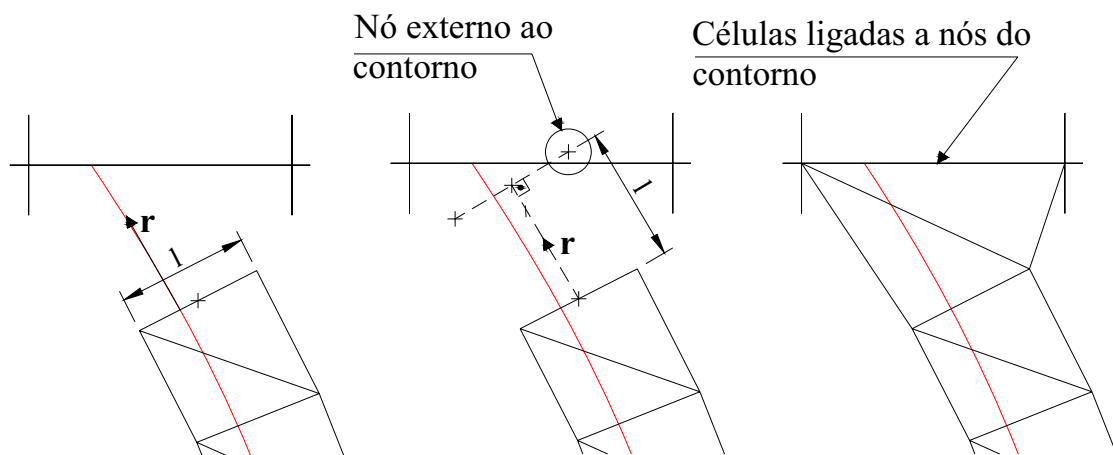


Figura 5.4 – Seqüência de criação do último par de células internas.

A verificação quanto à posição do nó criado é feita em duas etapas: a primeira verifica se o nó se encontra sobre o contorno, e a segunda, se ele está no domínio ou não. A verificação do ponto sobre o contorno é de simples execução. Acha-se a equação da reta de cada elemento do contorno e, caso o nó em verificação pertença à reta, checa-se se este está dentro do intervalo formado pelos dois nós do elemento de contorno. Se todas estas verificações voltarem positivas, significa que o nó se encontra sobre o contorno, portanto a criação de células segue o mesmo processo de quando o nó é externo ao domínio.

Caso o nó em verificação não esteja sobre o contorno, é necessário saber se este se encontra ou não no domínio. Existem vários métodos para esta verificação, dentre eles um de fácil aplicação, o qual consiste na soma de ângulos formados pelo nó e os elementos de contorno. Calcula-se o ângulo formado por eles, partindo do primeiro nó

do elemento de contorno em direção ao segundo. Caso esse ângulo seja medido no sentido horário, seu valor é considerado negativo, e caso seja no sentido anti-horário, positivo. Calculam-se todos os ângulos relativos a todos os elementos de contorno e faz-se o somatório destes com seus respectivos sinais impostos. Caso a soma resulte em 360° , o ponto encontra-se no domínio. Se esta soma apresentar valor nulo, o ponto é externo ao contorno.

Para melhor exemplificar este conceito, apresenta-se na Figura 5.5 um simples contorno formado por quatro elementos de contorno. Ângulos em azul são os considerados positivos (sentido anti-horário) ao passo que os em vermelho são negativos (sentido horário). Nota-se claramente que a soma dos ângulos na Figura 5.5 (a) é igual a 360° , enquanto a soma em (b) é nula. Este exemplo é simples, mas o processo funciona independentemente do formato do contorno.

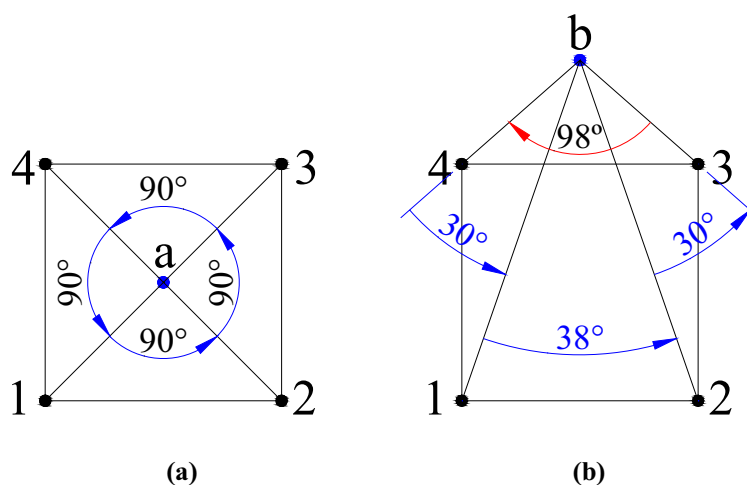
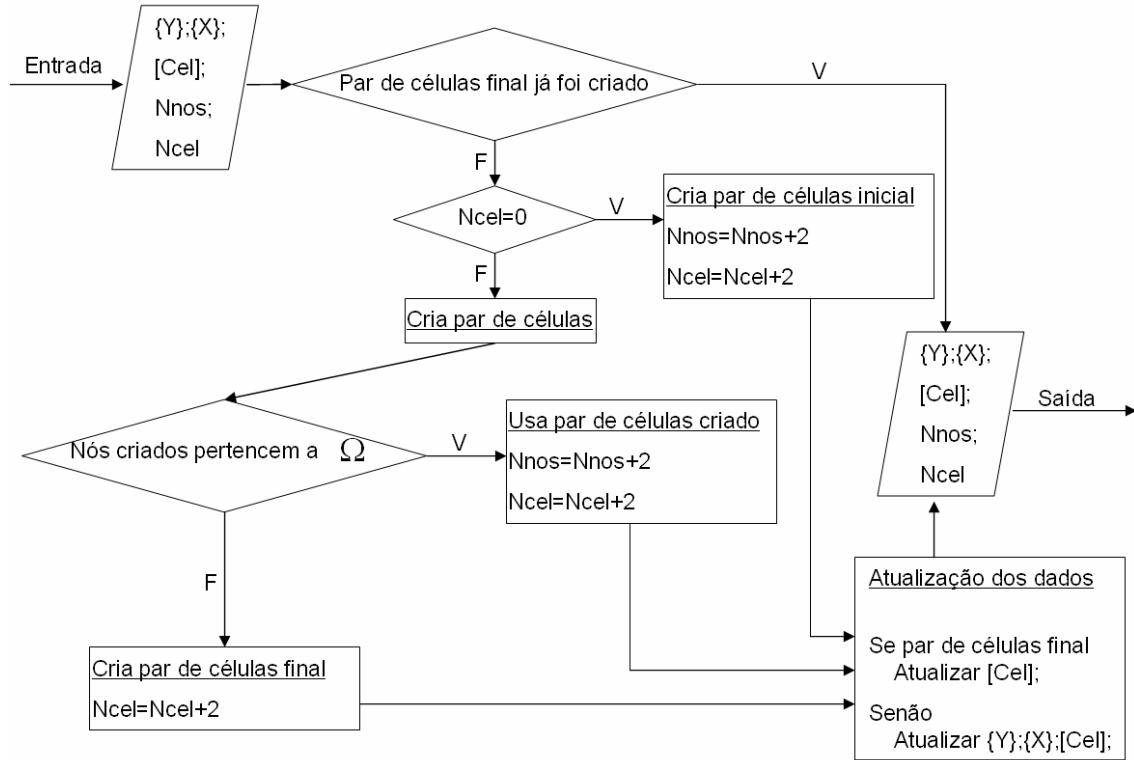


Figura 5.5 – Verificação quanto à posição de um ponto em relação ao contorno.

Assim, o esquema pode ser resumido do modo como é apresentado no Algoritmo 1. Neste apresentam-se os principais passos para a criação de elementos de domínio mediante as técnicas anteriormente apresentadas neste item, levando-se em conta que durante a criação, gera-se inicialmente uma célula, e, após esta, pares. No Algoritmo 1, $\{X\}$ e $\{Y\}$ representam os vetores com as coordenadas X e Y de cada nó. Nnos representa o número de nós existentes na discretização. $[Cel]$ é uma matriz de tamanho $N_{cel} \times 3$ que armazena a conectividade correspondente aos três nós necessários para a caracterização da célula interna (triângulo) e, finalmente, N_{cel} o número de células

existentes. O algoritmo só é acionado enquanto o par de células final não for criado, ou seja, após a criação do último par, nenhum outro é criado.

Algoritmo 1 - Criação de células internas



5.4 Integrações

Como mostrado nos capítulos anteriores, o equacionamento do problema bidimensional pelo método dos elementos de contorno gera integrais sobre todos os elementos do contorno e domínio. Existem vários modos de se resolver estas integrais, seja de modo analítico, seja de modo numérico

5.4.1 Integrações sobre elementos do contorno

As integrais sobre elementos do contorno podem ser calculadas de duas maneiras distintas. O ponto de colocação Q desempenha um papel fundamental sobre o tipo de integração que deve ser utilizado. Pontos fonte sobre o contorno geram singularidades, exigindo que as integrais sejam resolvidas analiticamente. Caso o ponto fonte esteja fora do contorno, tal singularidade desaparece, sendo possível o uso de um método numérico de integração. A Figura 5.6 ilustra elementos com pontos fonte sobre o contorno e

pontos fonte externos ao contorno, sendo o vetor \mathbf{n} o vetor unitário normal à superfície externa do elemento de contorno.

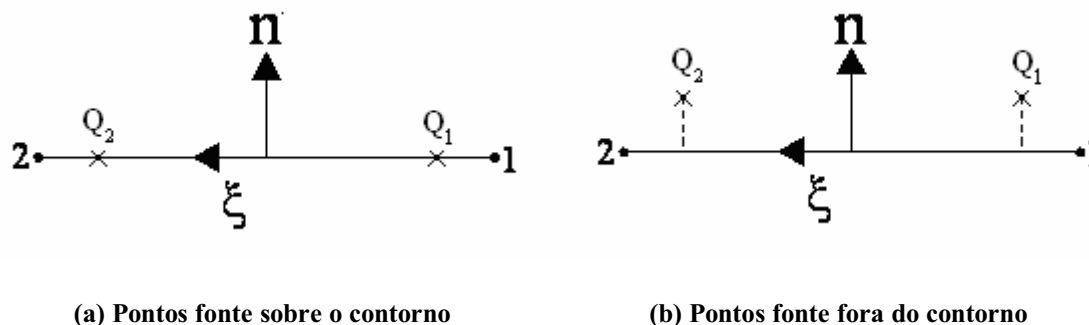


Figura 5.6 – Localização dos pontos fonte.

Caso o ponto fonte se encontre dentro do elemento em questão, a integração sobre o elemento é obtida de modo analítico, pois apresentam singularidades do tipo $1/r$. Já nos demais casos, as integrais são calculadas numericamente pelo método de Gauss, conforme a Eq. (5.2).

$$\int f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(x_k) w_k \quad (5.2)$$

A integração numérica de uma função pelo método de Gauss consiste na substituição da integral por um somatório ponderado de valores da função em alguns pontos do elemento. Obviamente, quanto maior o número de pontos de integração, maior a precisão obtida. Esta integração com número adequado de pontos apresenta um resultado preciso.

As integrais associadas a pontos fonte sobre os elementos podem ser calculadas analiticamente através das manipulações matemáticas das equações do Método dos Elementos de Contorno e com base na utilização do valor principal de Cauchy. Como neste trabalho os pontos singulares são sempre colocados fora do contorno, como ilustra a Figura (5.6 (b)), estas expressões analíticas não serão utilizadas, e por isso não são apresentadas. O trabalho computacional que seria poupado por estas integrações analíticas não chega a ser de grande monta, visto que em suas expressões aparecem termos que são calculados pelo computador pelo meio de séries, tais como termos logarítmicos.

5.4.2 Integração sobre células do domínio

A integração sobre as células do domínio é na verdade executada sobre seus contornos. Por meio de uma transformação de diferenciais é possível que a integral sobre a área seja levada ao contorno, e sobre este integrada. Assim simplifica-se todo o processo, de modo que numericamente as integrais são calculadas pelo mesmo método de Gauss exposto no item 5.4.1.

Para que a integral sobre a área seja levada para o contorno, deve-se observar a relação geométrica existente na Figura 5.7. A partir desta, as deduções da mudança serão definidas.

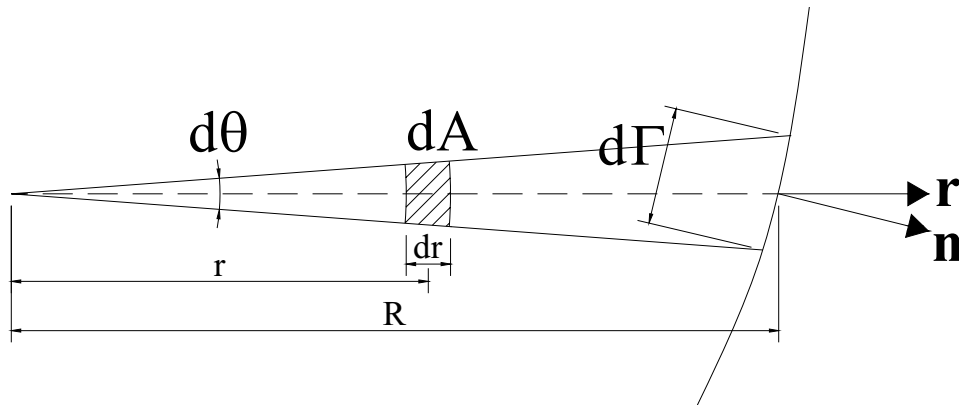


Figura 5.7 – Diferenciação de área e contorno

A Figura 5.7 apresenta vários elementos infinitesimais: angular ($d\theta$), de área (dA), da distância polar do ponto de referência (dr) e de contorno ($d\Gamma$). Apresenta também r , que representa a distância do ponto de referência até o infinitesimal de área, R , a distância do ponto de referência ao contorno e os vetores unitários \mathbf{n} e \mathbf{r} , na direção normal ao contorno e na direção da reta onde r é medido, respectivamente.

Apresentadas as variáveis, parte-se para as relações existentes entre elas. Pode-se claramente notar que:

$$dA = r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$d\theta = \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})}{R} d\Gamma \tag{5.3}$$

Chega-se então à seguinte relação

$$dA = \frac{(\mathbf{r} \bullet \mathbf{n})r}{R} dr.d\Gamma \quad (5.4)$$

onde $(\mathbf{r} \bullet \mathbf{n})$ representa o produto escalar dos vetores unitários \mathbf{n} e \mathbf{r} .

Com esta relação diferencial é possível transformar uma integral de área em uma integral de linha. Deve-se levar em conta que a função de aproximação utilizada sobre os elementos de domínio são constantes. Isso permite que a função de aproximação ($f(x, y) = f = cte$) seja levada para fora da integral sem a necessidade de integração. A partir deste simples raciocínio pode-se chegar à seguinte conclusão:

$$\int_A f(x, y)dA = \int_{\Gamma} \left(\int_0^R f(x, y) \frac{(\mathbf{r} \bullet \mathbf{n})}{R} r.dr \right) d\Gamma$$

se $f(x, y) = f = cte$

$$\int_0^R f r.dr = f \frac{R^2}{2}$$

e portanto

$$\int_A f(x, y)dA = \frac{f}{2} \int_{\Gamma} (\mathbf{r} \bullet \mathbf{n}).R.d\Gamma \quad (5.5)$$

A partir deste termo final pode-se simplesmente efetuar a integral sobre o contorno da célula do mesmo modo já apresentado, tornando o processo muito mais simples e rápido de ser executado.

5.4.3 Subintegração

O programa já possui implementado um algoritmo para a subintegração. Esse procedimento é executado quando o ponto fonte da integração numérica se encontra a

uma distância muito próxima do elemento sobre o qual ele será integrado. Quando o ponto fonte se encontra longe do elemento, a integral por Gauss apresenta um erro muito baixo, mas se o ponto fonte se encontra próximo a este, o erro aumenta de maneira considerável. Como já visto antes, quanto maior o número de pontos de Gauss, maior a precisão. Desse modo, a subelementação é uma maneira eficiente de se aumentar a precisão sem aumentar o trabalho computacional em todas as integrais, ou seja, aumenta-se o número de pontos de Gauss apenas onde este aumento for necessário.

A técnica da subintegração consiste em dividir os elementos que se encontram próximos demais do ponto fonte em trechos, ou subelementos. Nestes subelementos calculam-se as integrais com o número de pontos de Gauss definido na entrada do programa. Os resultados das integrações de cada subelemento são somados, chegando-se assim à contribuição do elemento em questão:

$$\int_{\Gamma_{elem}} f^* d\Gamma = \sum_{k=1}^{N_{sub}} \int_{\Gamma_{subelem}} f^* d\Gamma \quad (5.6)$$

Ou seja, um elemento que seria integrado com 8 pontos de Gauss, se dividido em dois subelementos passa a ser integrado com 16 pontos de Gauss, ganhando-se assim precisão na resposta.

Existem alguns modos diferentes de se realizar a subintegração. Ela pode ser definida medindo-se a distância entre o ponto fonte e o ponto médio do elemento, e, caso essa distância seja menor que um valor prescrito, divide-se o elemento em um número pré-definido de trechos de igual tamanho. O programa computacional já apresenta este tipo de subintegração.

Foi implementado no programa um método de subintegração adaptativa, o qual não divide o elemento em trechos iguais, mas sim gera trechos maiores ou menores conforme a necessidade. O critério para a aplicação ou não da subintegração adaptativa consiste no cálculo da distância d (ver Figura 5.8).

A Figura 5.8 mostra um elemento de contorno com nó inicial i e nó final j , de comprimento L_j . São calculados a distância entre o nó inicial do elemento de contorno e

o ponto fonte (R_0) e o ângulo α formado, como mostrado na Figura 5.8. Caso o cosseno do ângulo α seja maior que meio, ele é considerado como sendo meio. Com esses dois parâmetros é possível o cálculo do comprimento d . Um novo parâmetro de entrada, n , pode ser introduzido para aumentar ou diminuir o número de divisões efetuadas pelo método. A cada nova integração, um novo valor de d é calculado, até que a integral seja calculada sobre todo o elemento. O cálculo do comprimento d é dado pela Eq. (5.7).

Caso o primeiro valor de d calculado seja maior que o comprimento do elemento, não há a necessidade de subintegração.

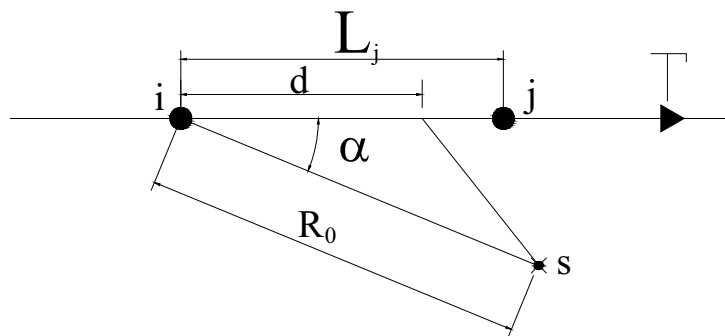


Figura 5.8 – Subelemento.

$$d = \frac{R_0}{2n \cos \alpha} \quad (5.7)$$

$$\cos \alpha \leq \frac{1}{2}$$

A Figura 5.9 ilustra a diferença entre a subintegração simples e a executada com um método adaptativo, mostrando a diferença na divisão dos trechos para integração. Nota-se que os quatro subelementos da Figura 5.9 (a) possuem mesmo comprimento, enquanto que os de 5.9 (b) são menores quando se aproximam do ponto de colocação s .

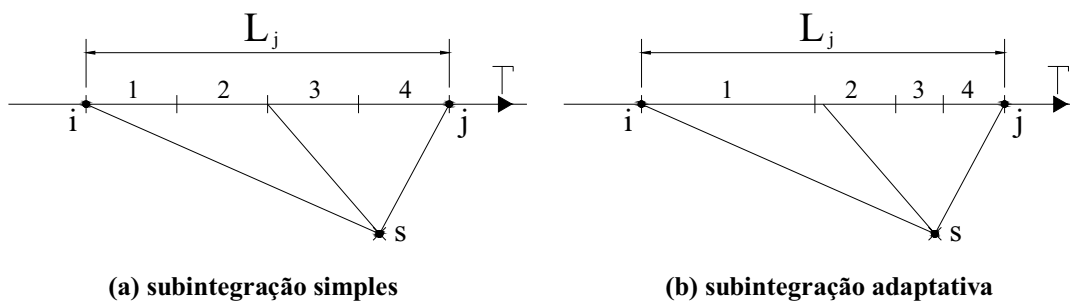


Figura 5.9 – Técnicas de subintegração

6 Análises Numéricas

6.1 Introdução

Esse capítulo apresenta-se dividido entre as análises preliminares e as análises que envolvem o algoritmo de criação de células propriamente dito. As análises preliminares foram realizadas com uma malha fixa, definida *a priori*, sem empregar o algoritmo de geração de células. Essas análises tiveram o objetivo de avaliar a influência do relaxamento da condição estática no resultado numérico. Visam também mostrar que uma malha alinhada à fratura produz resultados melhores, e a utilização da formulação simétrica sobre essa não causa grande variação dos resultados.

Após a comprovação pelas análises preliminares do efeito positivo do alinhamento da malha, o algoritmo de geração de células adaptadas à fratura foi empregado na análise de alguns exemplos, com o propósito de avaliar sua viabilidade.

6.2 Análises preliminares

Baseado em todo o conteúdo exposto nos capítulos anteriores, as análises aqui apresentadas vem corroborar as hipóteses apresentadas. Primeiramente mostra-se que a relação de simetria entre os vetores m_c e n_c realmente influencia os resultados de maneira indubitável. São avaliadas as diferentes alternativas de relaxação da condição estática apresentadas na Figura 4.6. Para tanto utiliza-se um teste de tração simples.

Comprovado que a posição das células internas realmente influencia nos resultados numéricos, foi analisada então uma viga submetida a forças em quatro pontos com uma malha pré-definida, alinhada à fratura, de modo similar ao que seria criado pelo algoritmo de geração de células internas. Isso para se avaliar, antes da implementação

do algoritmo de geração, quais os possíveis ganhos dessa técnica. Avalia-se também o efeito do relaxamento da condição estática para o caso dessa malha alinhada.

6.2.1 Tração uniaxial com múltiplas fraturas em concreto

Deve-se frisar que, nos resultados numéricos, embora todo o domínio do problema tenha sido subdividido em células triangulares, somente participam da análise da solução não-linear as que fazem parte do domínio Ω_ϕ , ou seja, as que contêm a linha de descontinuidade que progride durante o processo de carga e as células do entalhe, que são tratadas como uma linha de descontinuidade pré-definida (estas omitidas nas imagens de pós-processamento). As demais células somente servem para auxiliar na apresentação gráfica dos resultados.

Para o estudo dos efeitos da relaxação da condição estática, optou-se pela análise de um elemento de concreto entalhado submetido à tração simples. Esta análise pode ser então comparada com os resultados numéricos (obtidos pelo MEF) e experimentais colhidos da literatura (SANCHO et. al. 2006). Vários autores utilizaram este teste como referência (*benchmark*) para validação de modelos numéricos. A geometria condições de contorno e a malha de células internas adotada para o problema são ilustradas na Figura 6.1.

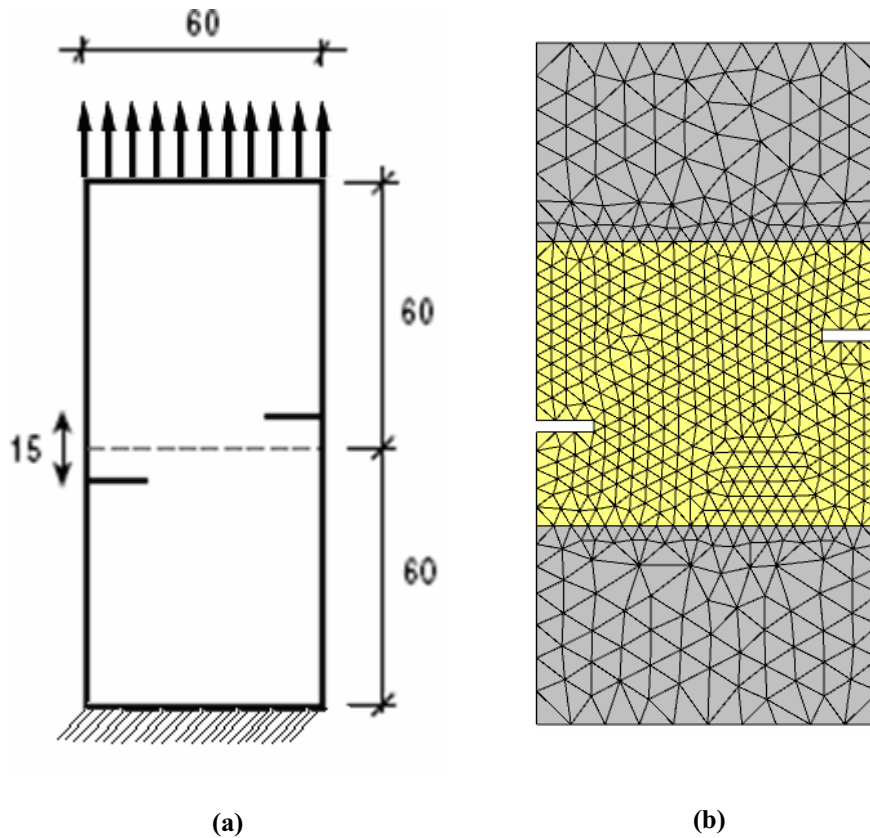


Figura 6.1 – (a) Geometria (unidades em mm) e condições de contorno; (b) Malha utilizada.

A Figura 6.2 apresenta os resultados numéricos de SANCHO et. al. (via MEF) e experimentais de resultante de carregamento de tração vs. deslocamento axial medido no topo do corpo de prova.

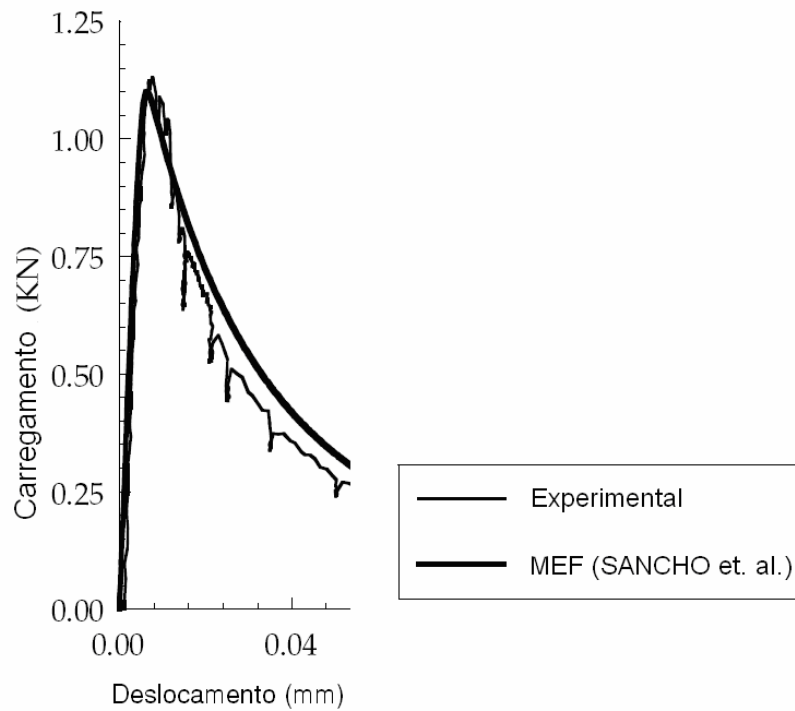


Figura 6.2 – Curvas de carregamento vs. deslocamento.

As condições de contorno consistem em impedir os deslocamentos verticais e horizontais da base e em se aplicar um carregamento na direção vertical crescente na face superior, provocando a abertura simultânea de duas fissuras laterais, a partir dos entalhes. Para efeitos numéricos, aplicaram-se deslocamentos ao invés de carga, e os incrementos de carga foram controlados mediante controle de deformações nas aberturas das fissuras (conforme item 3.6). As características adotadas para o material (concreto) são dadas na Tabela 6.1, e são as mesmas adotadas por SANCHO et. al. (2006), onde G_f é a energia específica de fratura do material, f_t é a resistência à tração, E é o módulo de elasticidade e ν é o coeficiente de Poisson.

Tabela 6.1 – Dados do concreto.

G_f ($N.m^{-1}$)	f_t (MPa)	E (GPa)	ν
80	3.0	31	0.2

A Figura 6.3 (a) apresenta as diversas respostas para o MEC, utilizando as várias possibilidades de relaxamento das condições estáticas propostas no final do Capítulo 4. A curva MEC1 representa o modelo sem relaxamento algum da condição estática. MEC2 representa uma aproximação totalmente simétrica, onde todas as células têm sua condição estática forçada (Figura 4.6 (a)). MEC3 apresenta a resposta quase-simétrica, com a condição estática forçada apenas sobre a células onde o ângulo entre n_c e m_c seja maior que o ângulo limite (45°), igualando-se n_c a m_c (Figura 4.6 (c)). Por último, MEC4 apresenta a curva quase-simétrica onde n_c é aproximado, apenas quando necessário, para a direção do ângulo limite (Figura 4.6 (d)).

A configuração do corpo deformado encontrada pela análise via MEC (Figura 6.3 (b)) apresenta-se coerente com os resultados experimentais e via MEF, sendo que a abertura das fissuras ocorreu como o esperado. Abriram-se duas fissuras simultaneamente, a partir das extremidades internas dos entalhes laterais, que se propagaram quase horizontalmente para o interior do painel.

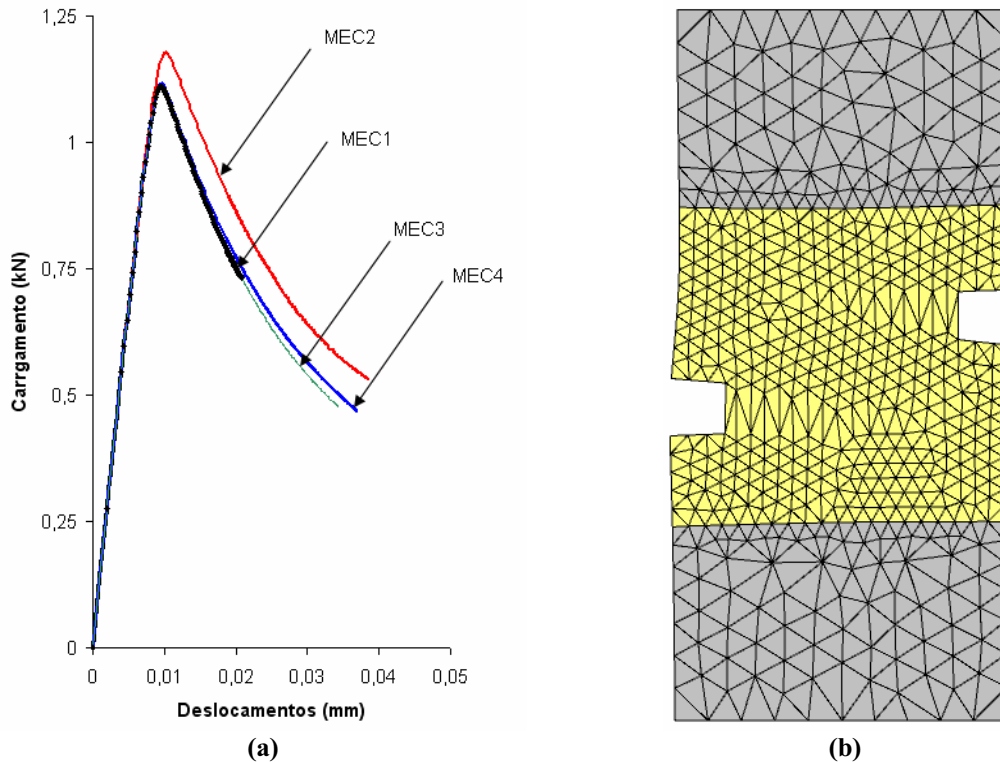


Figura 6.3 – (a) Curvas de carregamento vs. deslocamento via MEC; (b) Malha deformada.

A análise via aproximação MEC1 (sem simetria alguma) é interrompida por problemas de convergência quando o deslocamento se aproxima de 0,02 mm. O problema ocorre devido ao mau posicionamento da malha pré-definida em relação à linha de fratura. Esse problema é sanado com o relaxamento da condição estática, que como se pode ver, faz com que a análise avance mais, entretanto desviando da curva original. Observa-se que, no caso extremo MEC2 (totalmente simétrico), o desvio é de grande monta, inclusive havendo um aumento considerável do ponto de máximo da curva. Como dito anteriormente, esse erro já era esperado e, como previsto, aumenta conforme o grau de relaxamento da condição estática. Nota-se que o desvio em MEC2 é superior ao MEC4 e este superior ao de MEC3. Este último caso apresenta-se praticamente igual ao MEC1, provando ser uma aproximação viável, não distorcendo os resultados.

Mostra-se então que o relaxamento das condições estáticas consegue resolver parte dos problemas, ao custo de algum erro. O ideal seria alinhar a malha à linha de fratura. Dessa premissa parte a idéia para o algoritmo de geração de malha que acompanhe a linha de fratura à medida que essa é calculada, fazendo com que o problema da simetria seja resolvido sem que seja necessário qualquer relaxamento das condições estáticas ou cinemáticas ou que, mesmo com a utilização destes, o custo na precisão seja irrisório.

6.2.2 Flexão de viga entalhada submetida a forças em quatro pontos de GÁLVEZ et. al. com malha alinhada

Analisa-se o problema proposto por GÁLVEZ et. al. (1998), que tem como objetivo verificar a eficiência de uma malha pré-definida colocada em uma orientação favorável à fissura, de modo similar ao proposto para o algoritmo de geração de células. Essa análise busca fundamentar a aplicação de tal algoritmo como um ganho na análise das descontinuidades, de modo que mesmo com a relaxação das condições estáticas o erro encontrado seja de uma grandeza tal que possa ser considerado praticamente nulo.

Trata-se de uma viga submetida a forças em quatro pontos. Sua geometria e condições de contorno estão expostas na Figura 6.4. Sua espessura é 50 mm e os parâmetros experimentais do material estão expostos na Tabela 6.2

Para se comparar os ganhos, realizou-se a análise com duas malhas. Uma malha não estruturada, sem nenhuma orientação específica. E outra, supracitada, orientada favoravelmente à fratura, simulando o que seria gerado pelo algoritmo de criação de células. A definição da malha orientada baseou-se na linha de fissura obtida da análise com a malha não estruturada, e limitou-se à criação de elementos sobre essa linha. O relaxamento da condição estática é também avaliado nas duas malhas e seus resultados comparados aos colhidos da literatura.

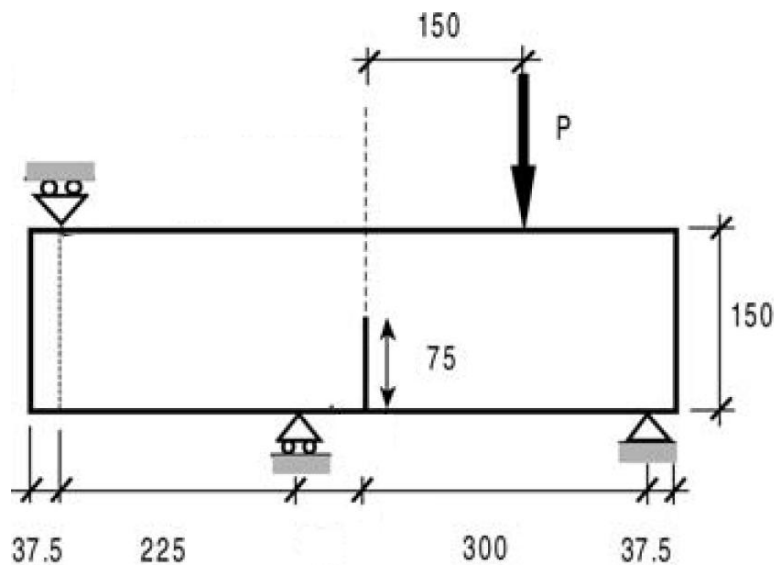


Figura 6.4 – Geometria (unidades em mm) e condições de contorno de GÁLVEZ et. al. (1998).

Tabela 6.2 – Dados do concreto.

G_f ($N.m^{-1}$)	f_t (MPa)	E (GPa)	ν
69	3.0	37	0.2

Foram monitorados experimentalmente os deslocamentos no ponto de aplicação da carga P e o carregamento aplicado. Os resultados obtidos em laboratório por GÁLVEZ et. al. (1998) correspondem às envoltórias apresentadas na Figura 6.6.

A malha não-estruturada M1 é definida previamente e mantida constante durante a análise. A malha M2 é similar à que seria gerada pelo algoritmo de geração de células internas, mas também é gerada previamente.

Sabendo-se o caminho da fratura (da análise feita com a malha M1), alinharam-se elementos internos sobrepostos à malha M1, dando origem à malha M2 (Figura 6.7). A Figura 6.5 apresenta as distintas malhas e suas correspondentes configurações deformadas após a propagação da fratura. O método de controle consistiu no monitoramento da componente horizontal da deformação da célula situada na ponta do entalhe.

Na Figura 6.6, pode-se ver que as curvas utilizando a malha M2 se adaptam melhor à envoltória experimental. Nota-se ainda que a utilização da formulação totalmente simétrica com a malha M2 não propicia um elevado desvio com relação à não simétrica, visto que os vetores n_c e m_c são praticamente paralelos. Comparando-se com os desvios de resultados apresentados no item 6.1, esta variação é ínfima. A malha M1 foi analisada por meio da formulação simétrica, pois a análise não simétrica não convergiu. A utilização da formulação simétrica sobre a malha M1 resultou na convergência, mas como se pode observar na Figura 6.6 (que apresenta a curva do carregamento P aplicado vs. o deslocamento no ponto de aplicação da carga), a curva apresenta uma grande diferença em relação às encontradas com a malha M2.

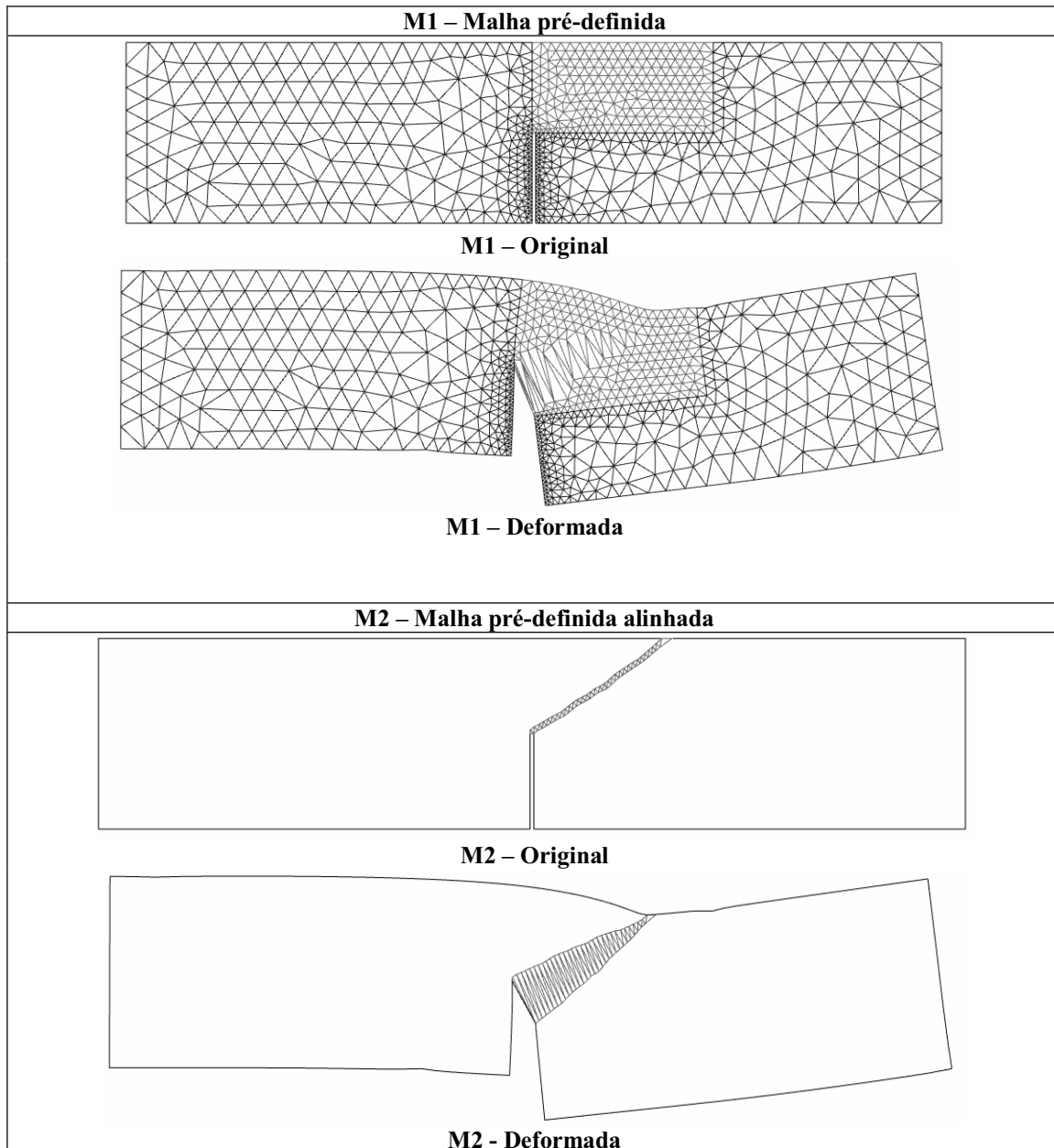


Figura 6.5 – Malhas M1 e M2 originais e deformadas.

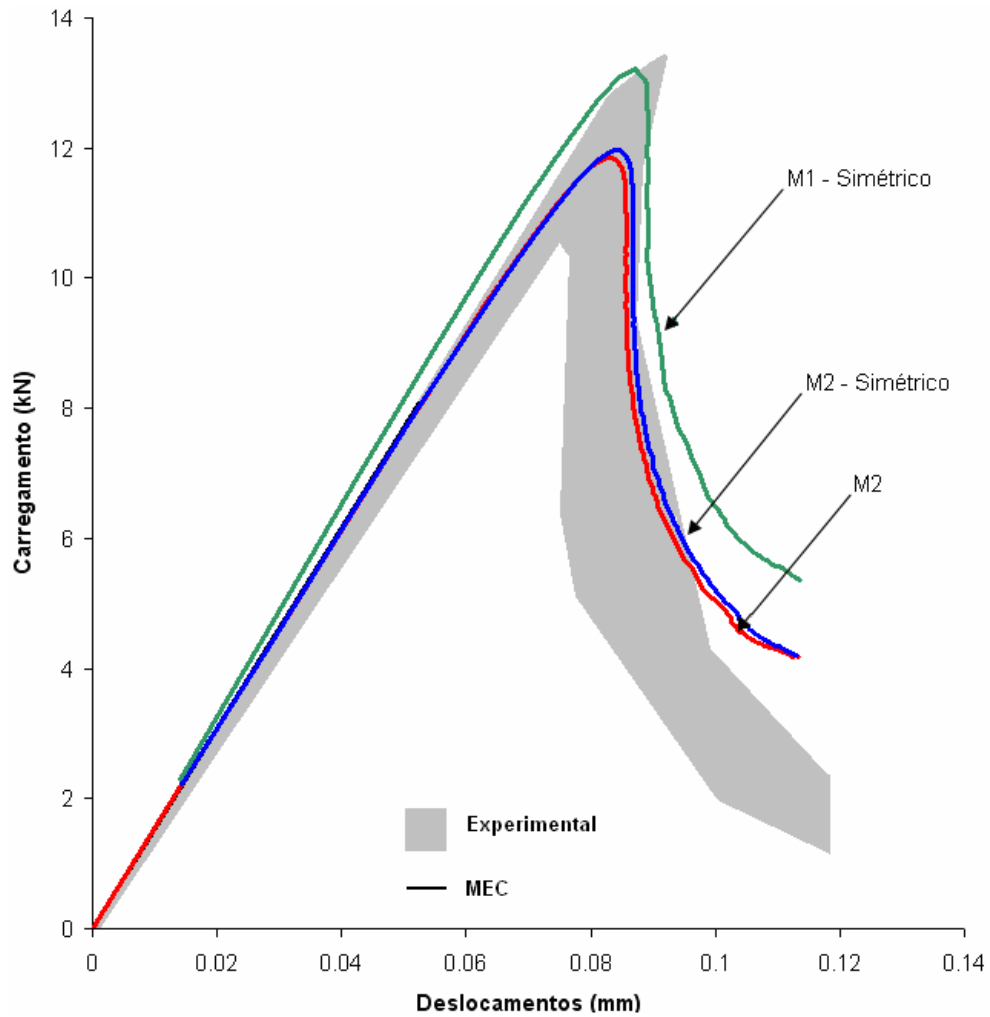


Figura 6.6 – Curvas de carregamento vs. deslocamento.

A Figura 6.5, que apresenta a malha M2, na verdade exibe apenas os elementos que foram incorporados à análise não-linear. O pós-processamento foi feito com a malha mostrada na Figura 6.7. Nota-se que da mesma maneira que no caso de M1, as células que não entram na análise são usadas apenas para efeitos de apresentação gráfica dos resultados. O entalhe também é simulado com células que representam uma linha de descontinuidade pré-definida e suas células encontram-se omitidas em todos os pós-processos, à exceção do da Figura 6.7. O método de controle de respostas exposto no item 3.6 pode ser utilizado em uma das componentes de deformação de uma das células do entalhe. Durante o processo de resolução do problema, a análise numérica utiliza apenas as células mostradas na Figura 6.5 e as do entalhe.

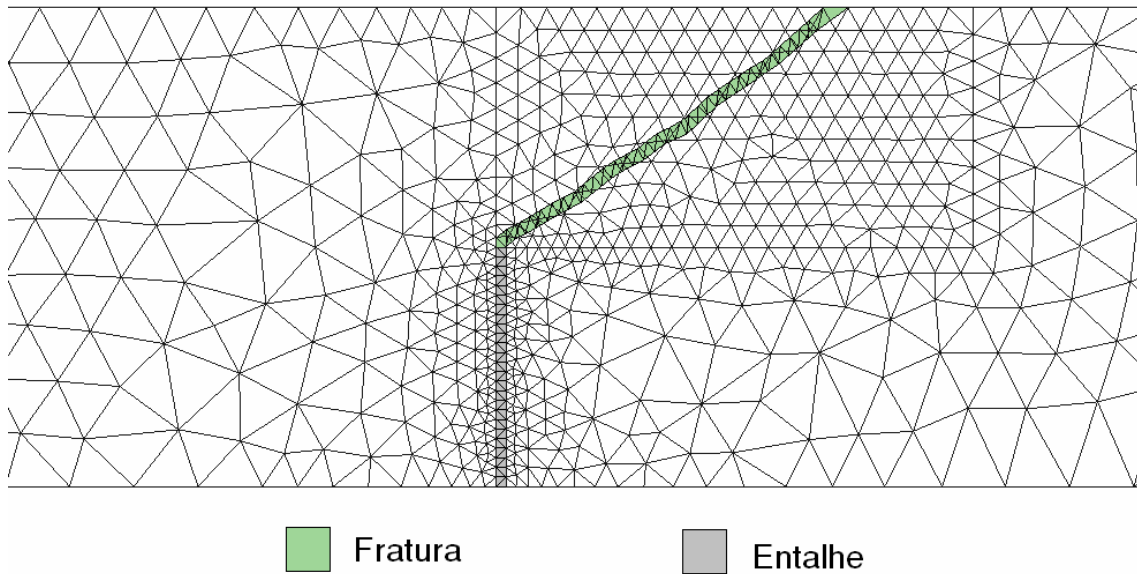


Figura 6.7 – M2 com elementos para pós-processo e células internas que participam da análise não-linear.

6.3 Análises com o algoritmo de geração de células

O item 6.2 mostra que a implementação de um algoritmo de geração de células é realmente viável e que a orientação da malha produz os benefícios esperados. Desse modo, foi implementado o algoritmo, como descrito no Capítulo 5. Sua implementação requereu atenção especial, pois o modo de montar as matrizes e o seqüenciamento de nós e células foi totalmente alterado. Similarmente à análise exposta no item 6.2.2, a malha é gerada automaticamente e sobreposta à malha existente (que é utilizada somente no pós-processo). A diferença em relação ao item 6.2.2 é que, neste caso, a malha é criada durante o processo, enquanto que anteriormente as células foram criadas previamente, com o conhecimento do caminho da fratura.

6.3.1 Flexão de viga entalhada submetida a forças em quatro pontos de GÁLVEZ et. al. com geração de células internas

Para um primeiro teste foi usada a mesma viga proposta por GÁLVEZ et. Al. (1998). Trata-se de um procedimento de verificação. Pretende-se com isso avaliar se o crescimento da malha será feito de modo a proporcionar os mesmos resultados das análises anteriores, e se o caminho da descontinuidade permanecerá inalterado ou próximo ao já verificado.

Assim sendo, utilizou-se o mesmo modelo, características do material (Tabela 6.2), geometria e condições de contorno (Figura 6.4). Realizou-se uma análise tendo como base a malha M1, sobre a qual foi gerada a malha adaptada à fissura, que participou da análise não-linear. A simulação numérica requer que a aplicação da carga seja guiada pelo controle de deformações. Esse foi aplicado a uma célula da extremidade do entalhe (não exibida nos pós-processos).

A análise envolveu células de diversos tamanhos. Foram criadas malhas com células de 2, 3, 5 e 8 milímetros (distância l , do item 5.3), e seus resultados comparados aos experimentais e aos numéricos, já apresentados. É interessante notar que a aplicação da formulação simétrica praticamente não altera os resultados, e portanto sua análise nesse ponto já não merece mais destaque, sendo já demonstrada ser uma justificativa válida para o desenvolvimento do algoritmo.

A malha mais refinada (2 mm) apresentou um limite de resistência maior que as demais malhas (Figura 6.8). Isso se deve ao processo propagação da fratura, que é muito rápido nesse caso. Por serem muito pequenas as células e pelo fato de apenas um par de células ser criado por incremento de carga, o processo de criação foi defasado com relação à progressão da fratura que demanda o problema, retardando a abertura dessa. Salienta-se que isso não possui qualquer relação com a questão da utilização da formulação simétrica ou não-simétrica. A utilização de incrementos de carga menores certamente deve corrigir tal distorção, pois permitirá a criação de células no momento correto, impedindo o ganho de resistência indevido observado. Esse assunto encontra-se mais detalhado no item 6.1.2.1. Todas dimensões de células forneceram curvas dentro da envoltória experimental da curva do carregamento P vs. o deslocamento no ponto de aplicação, como se pode verificar na Figura 6.8.

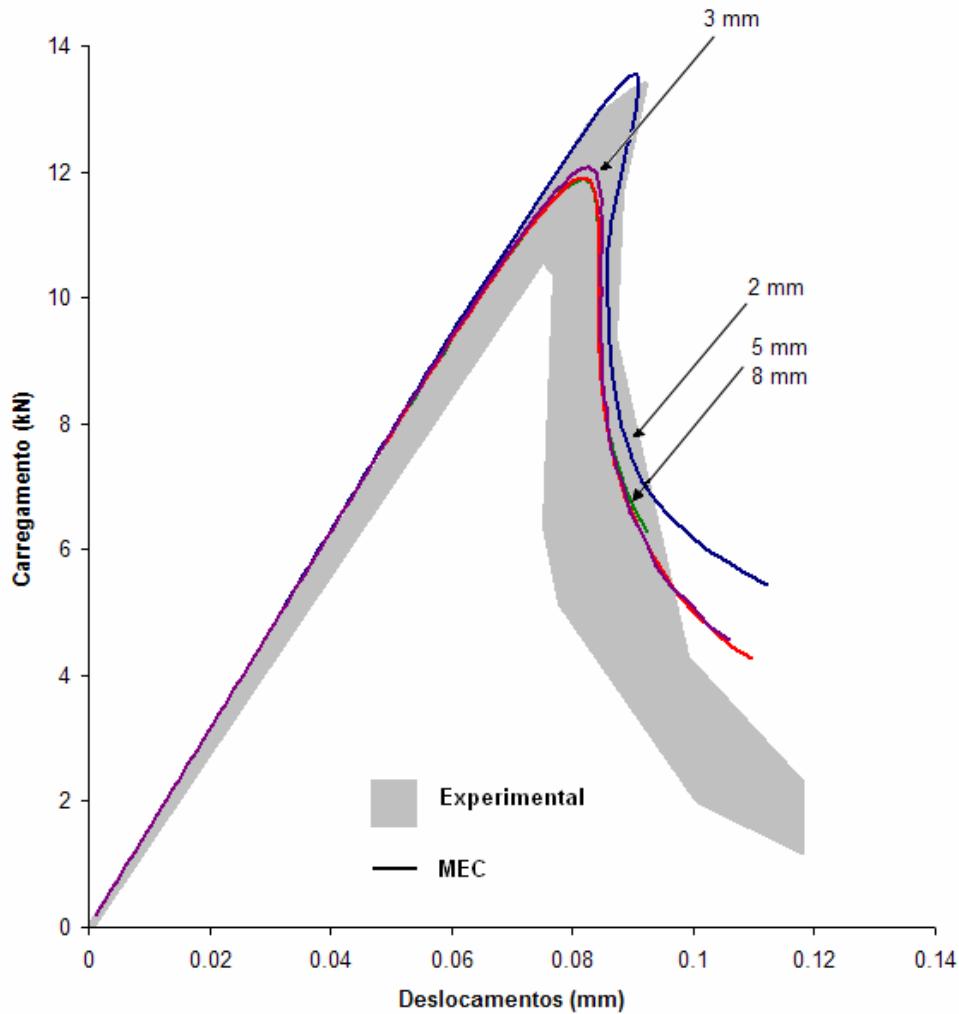


Figura 6.8 – Curvas de carregamento vs. deslocamento.

As malhas geradas pelos diferentes tamanhos de células apresentaram trajetórias similares. Obviamente as células menores captam melhor as mudanças de direção do avanço da descontinuidade, mas mesmo com as células maiores não há problemas, visto que a descontinuidade está embebida nas células internas. Por isso as configurações deformadas apresentadas na Figura 6.10 praticamente não diferem.

A evolução do avanço da descontinuidade em cinco momentos da análise pode ser vista na Figura 6.9, representando a evolução da malha (de 3 mm) em conjunto com a evolução da fratura. Já a figura 6.10 apresenta as diversas malhas geradas para os diferentes tamanhos de células e suas respectivas configurações deformadas.

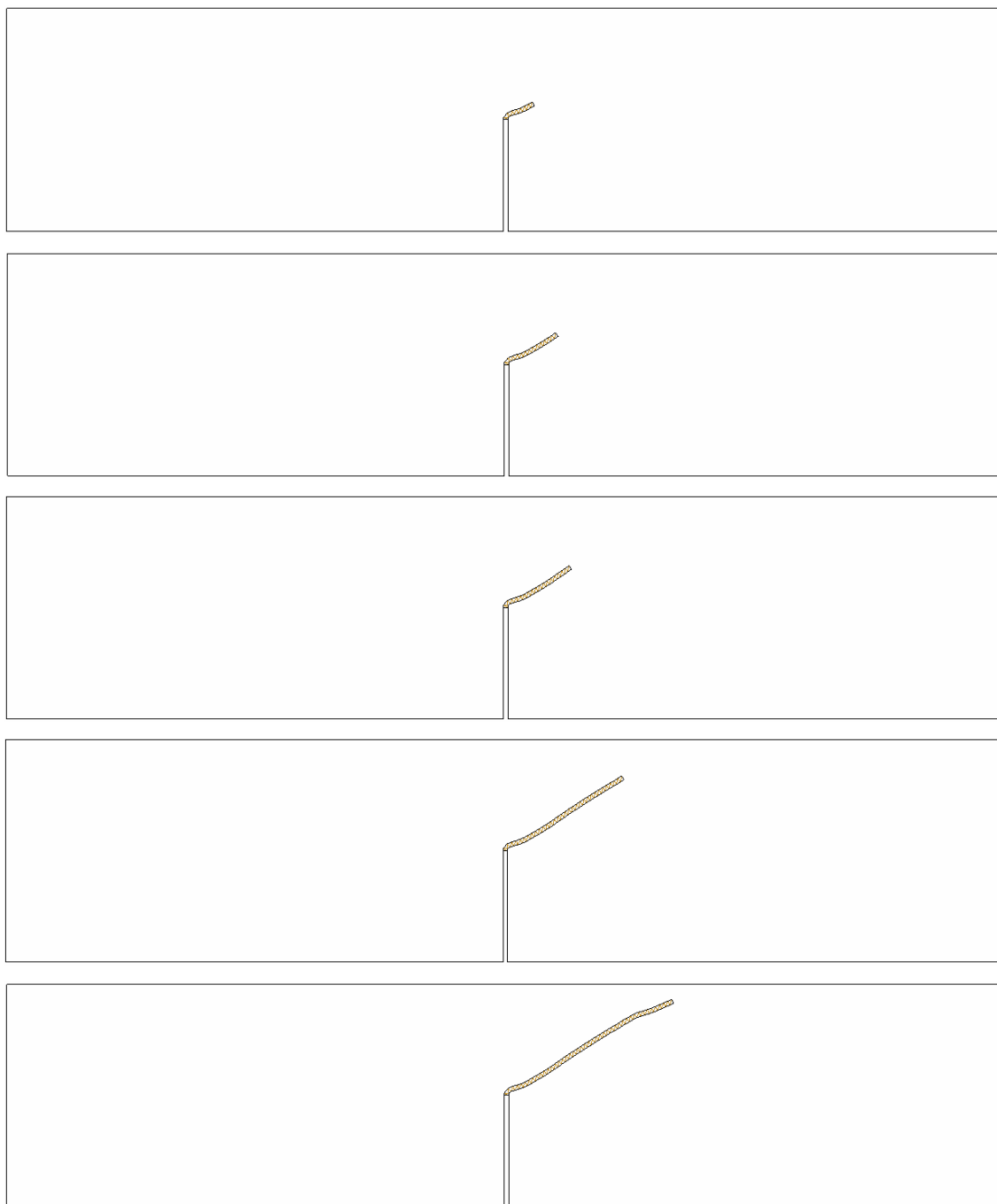


Figura 6.9 – Evolução da malha de 3 mm durante o processo de abertura da fratura.

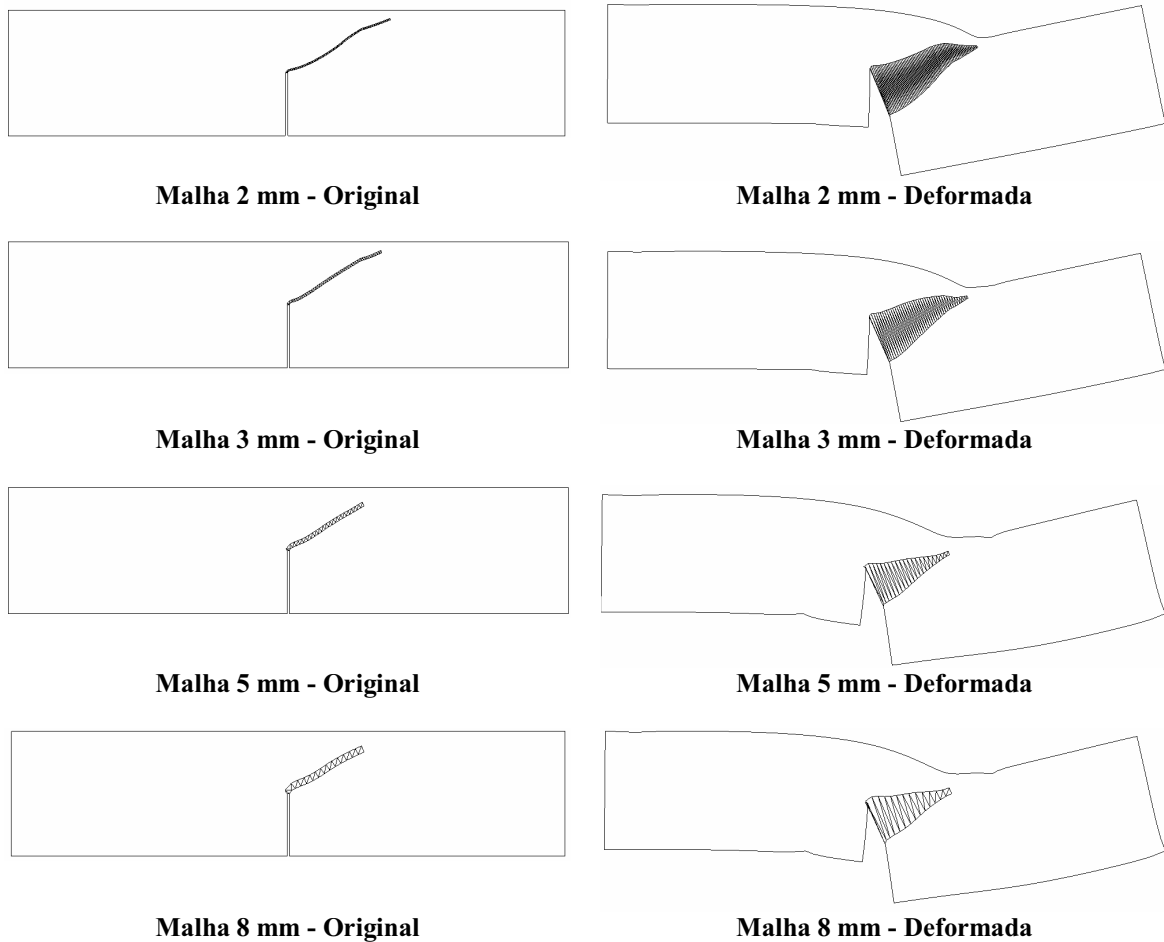


Figura 6.10 – Diversas malhas geradas em configuração original e deformada.

Pode-se ver claramente que as células criadas representam praticamente o caminho da fissura. A criação com células mais refinadas capta melhor as pequenas variações das direções do avanço da descontinuidade. Com auxílio das isolinhas de deslocamentos na direção vertical (Figura 6.11) é possível ver nitidamente o caminho da descontinuidade, e sua notória semelhança com a da malha gerada pelo algoritmo desenvolvido. As isolinhas de deslocamento concentram-se na região da descontinuidade, mostrando que lá ocorrem grandes deformações.

O algoritmo mostrou-se apto a construir a malha da maneira proposta, e a análise de seus resultados realmente aponta para o que se esperava desse desenvolvimento.

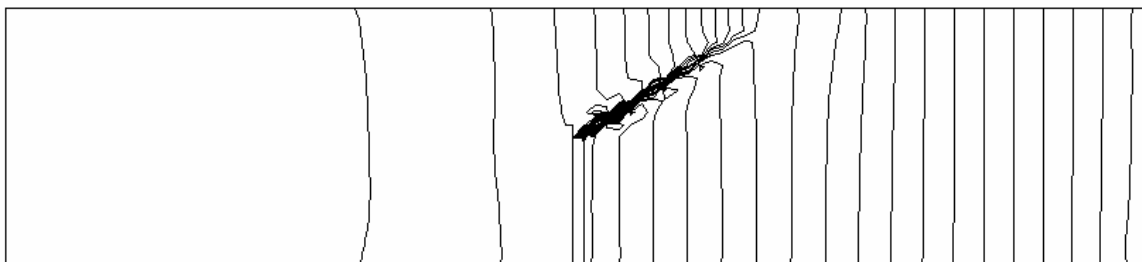


Figura 6.11 – Isolinhas de deslocamentos verticais (malha com elementos de 3 mm).

6.3.1.1 Estudo de convergência da resposta com a redução dos incrementos de carga

Como visto acima, a malha mais refinada (elementos de 2 mm) apresentou um acréscimo de resistência inesperado, discrepante com a resposta obtida com elementos de domínio maior. A explicação de tal fenômeno reside no fato da criação de células não ter avançado com a “velocidade” necessária, imposta pelos incrementos de carga. Apenas um par de células é criado durante cada iteração (quando necessário). Ou seja, se durante essa iteração a fratura avançar mais do que o comprimento desse par de células, a criação ficará defasada em relação à carga aplicada. Essa inércia resulta em um acréscimo de resistência do conjunto. Resumindo, uma região que deveria estar fora do regime elástico ainda se encontra nesse, pois não há células criadas na região que deveria estar em processo de degradação. Essas células só serão criadas na próxima iteração. O problema tende a diminuir com células maiores, pois o par criado com essas células abrangem uma maior região durante o processo.

Tal problema pode ser facilmente corrigido com a diminuição dos passos de carga utilizados. Diminuindo os incrementos de carga, essa região, que ainda continua em regime elástico quando deveria conter a descontinuidade, deixa de existir. Uma análise de convergência, diminuindo-se os passos, leva-nos à resposta esperada. A partir de tal ponto, mesmo diminuindo-se mais ainda os incrementos de carga, a resposta não é alterada.

A análise de convergência foi executada para o caso apresentado, utilizando-se a malha de 2 mm. Foram utilizadas quatro incrementos de carga distintos. Como mencionado anteriormente, foi controlada a componente horizontal da deformação de uma das

células do entalhe, no caso a célula localizada na parte inferior do entalhe. Ou seja, o incremento de carga é calculado em função da história de deformação fixada para essa célula. Isso nos permite ver as curvas intermediárias entre a obtida no item 6.1.2 e a resposta esperada (obtida com as malhas de células maiores). As quatro respostas numéricas são contrastadas na Figura 6.12, onde as curvas estão numeradas de 1 a 4, sendo 1 a com incrementos maiores e 4 a com os menores incrementos, a qual se ajustou às respostas previamente encontradas com malhas de elementos maiores. Os incrementos de deformação horizontal da célula controlados no entalhe relacionados aos números de 1 a 4 estão na Tabela 6.3.

Tabela 6.3 – Incrementos de deformação horizontal.

Curva	Incremento de deformação horizontal
1	1.50E-04
2	1.25E-04
3	1.00E-04
4	0.75E-04

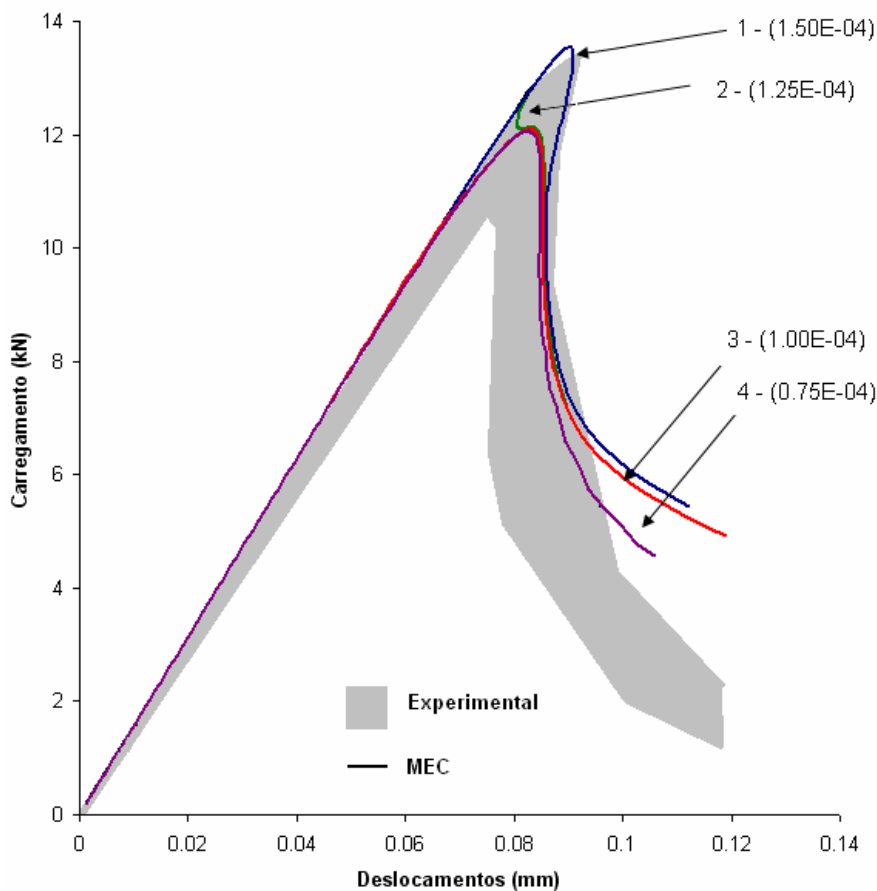


Figura 6.12 – Convergência numérica – malha com elementos de 2 mm – Curvas de carregamento vs. deslocamentos para diferentes incrementos de deformação horizontal.

Uma das curvas acima (curva 2) se destaca, pois mostra claramente o problema da falta de sincronia decorrente do atraso na criação das células. Nota-se na Figura 6.13 que ocorre um pico de resistência, e assim que a criação de células alcança o ponto correto durante a análise, a resistência cai, e a curva tende para a resposta correta. Esse fenômeno já havia sido observado em algumas análises preliminares realizados durante a implementação desse algoritmo.

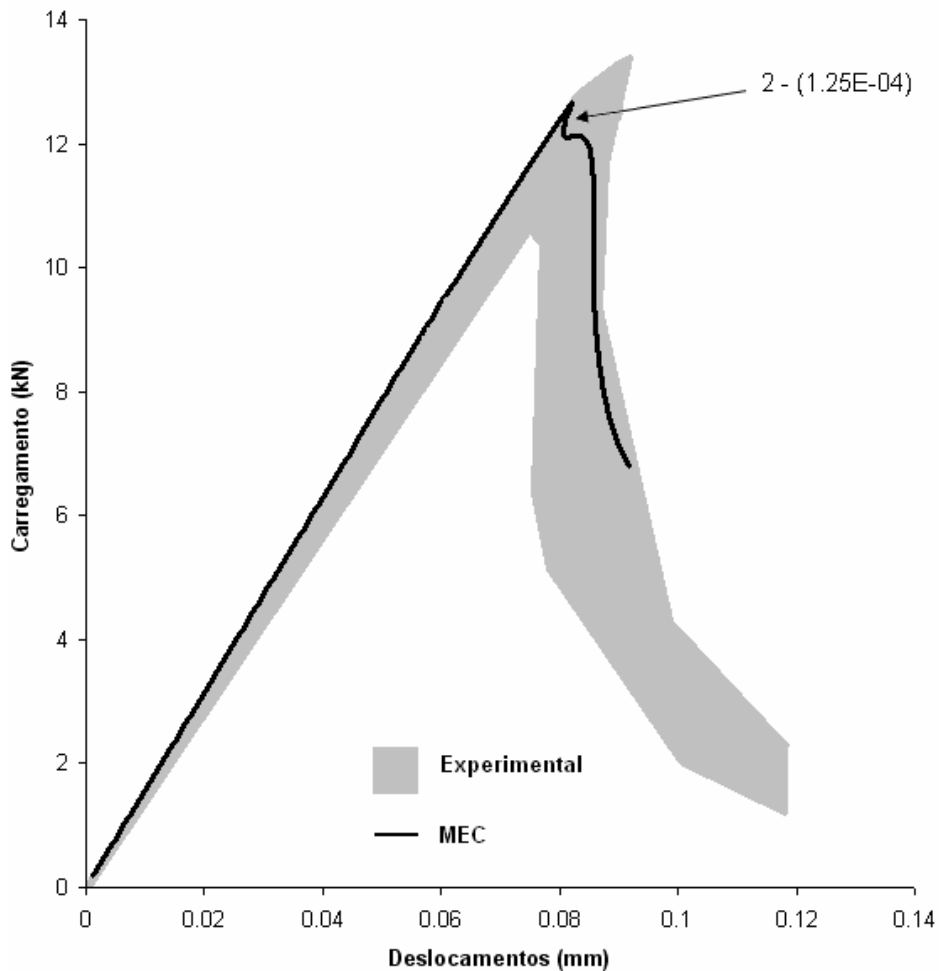


Figura 6.13 – Detalhe do processo de convergência – malha com elementos de 2 mm – Curvas de carregamento vs. deslocamentos para incremento de deformação igual a $1.15E-04$.

6.3.2 Flexão de viga entalhada submetida a forças em três pontos

Na Figura 6.14 ilustra-se a geometria e na Tabela 6.4 as características do concreto da viga de concreto proveniente dos ensaios experimentais realizados por PETERSON (1981). Novamente, durante o ensaio numérico, controlou-se a componente horizontal da deformação de umas das células do entalhe.

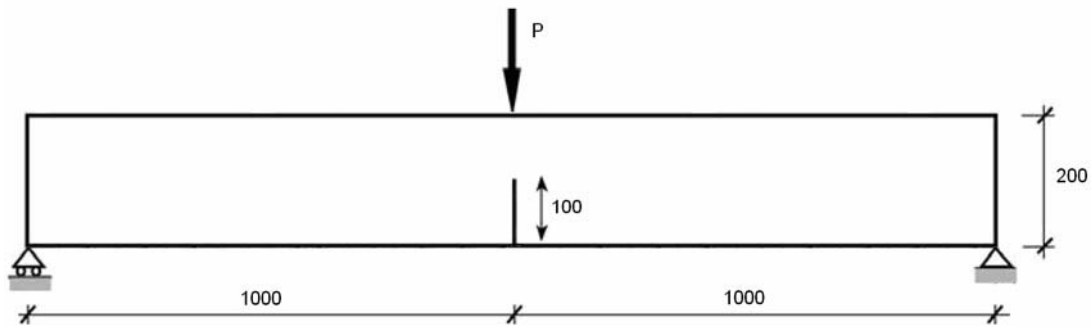


Figura 6.14 – Geometria (mm) e condições de contorno do ensaio de PETERSON (1981).

Tabela 6.4 – Dados do concreto.

G_f ($N.m^{-1}$)	f_t (MPa)	E (GPa)	ν
124	3.33	30.0	0.2

Pela simetria do problema a direção da fratura a partir do entalhe foi pré-determinada na vertical. A resposta estrutural encontrada corresponde com os resultados experimentais (do carregamento P vs. o deslocamento no ponto de aplicação da carga) de PETERSON (1981), conforme mostra a Figura 6.15.

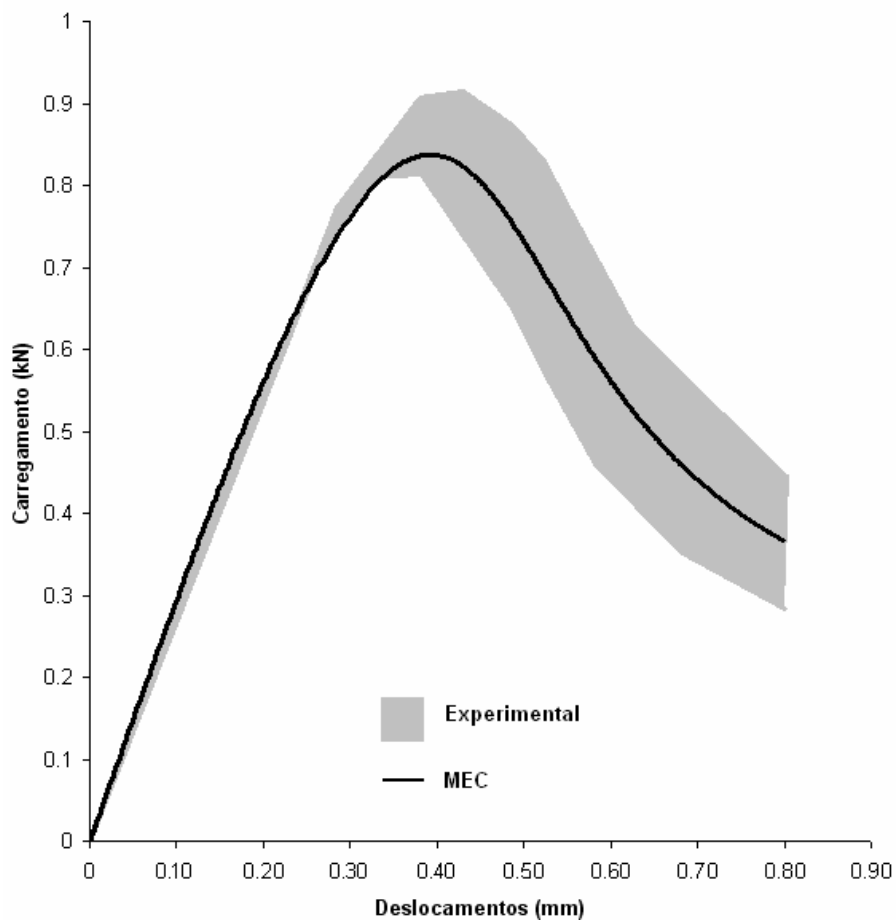


Figura 6.15 – Curva de carregamento vs. deslocamento.

Novamente o algoritmo de geração de células se mostrou aplicável, gerando uma malha coerente com o esperado. O detalhe da malha gerada (caminho da descontinuidade) e sua configuração deformada podem ser vistos na Figura 6.16.

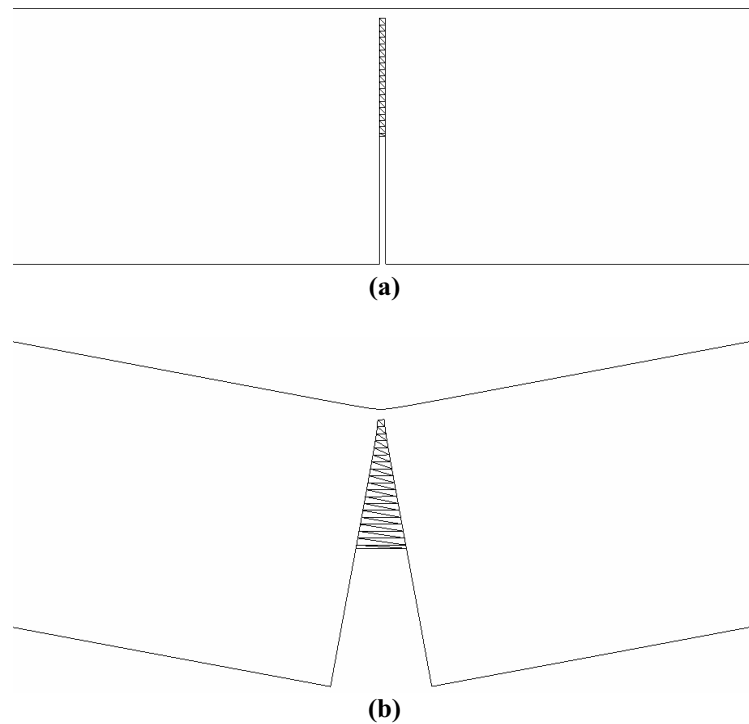


Figura 6.16 – Resultados numéricos no estágio final do processo de carga: (a) Posição da linha de descontinuidade; (b) Configuração deformada.

6.3.3 Flexão de viga entalhada submetida a forças em quatro pontos de ARREA & INGRAFFEA com geração de células internas

Apresentam-se aqui os resultados numéricos do ensaio da viga entalhada submetida a forças em quatro pontos contrastados com os resultados experimentais obtidos por ARREA & INGRAFFEA (1982). Essa viga de 155 mm de espessura tem suas características geométricas destacadas na Figura 6.17, além do caminho encontrado experimentalmente para a descontinuidade. Suas características materiais estão na Tabela 6.5.

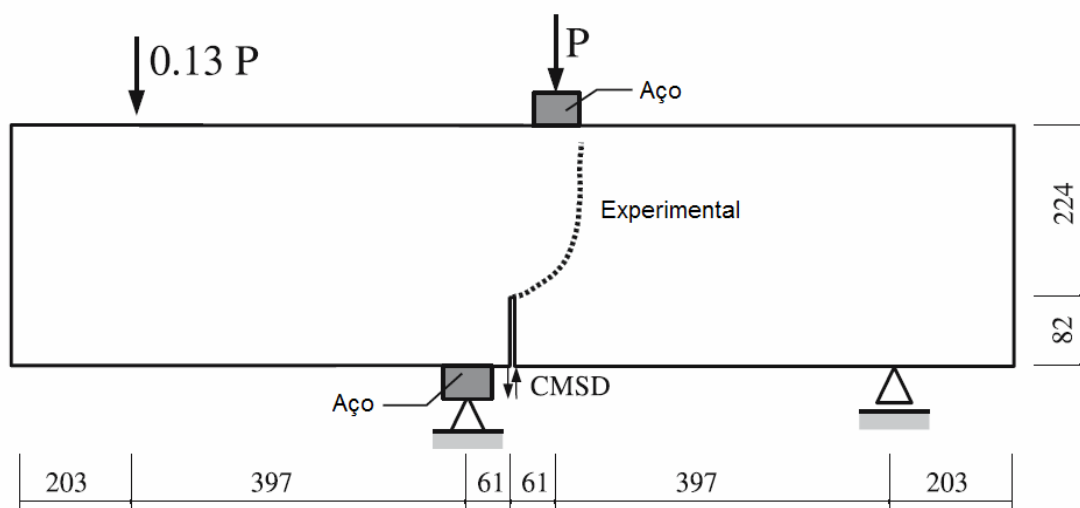


Figura 6.17 – Geometria (mm) e condições de contorno de ARREA & INGRAFFEA (1982).

Tabela 6.5 – Dados do concreto.

G_f ($N.m^{-1}$)	f_t (MPa)	E (GPa)	ν
100	3.5	32.0	0.18

Essa viga apresenta uma fissura com grande mudança de direção, que representa um desafio maior ao algoritmo de geração de células internas. Como pode ser visto na Figura 6.18, na qual são apresentadas as configurações original e deformada da malha no final da análise, obteve-se sucesso na captura do caminho da fissura.

A estratégia de controle foi alterada durante o processo de carga. Primeiramente aplicou-se a carga até o final do regime elástico. Após o início da fratura, controlou-se primeiramente a componente de cisalhamento da célula na ponta do entalhe e então a componente horizontal da deformação da mesma célula.

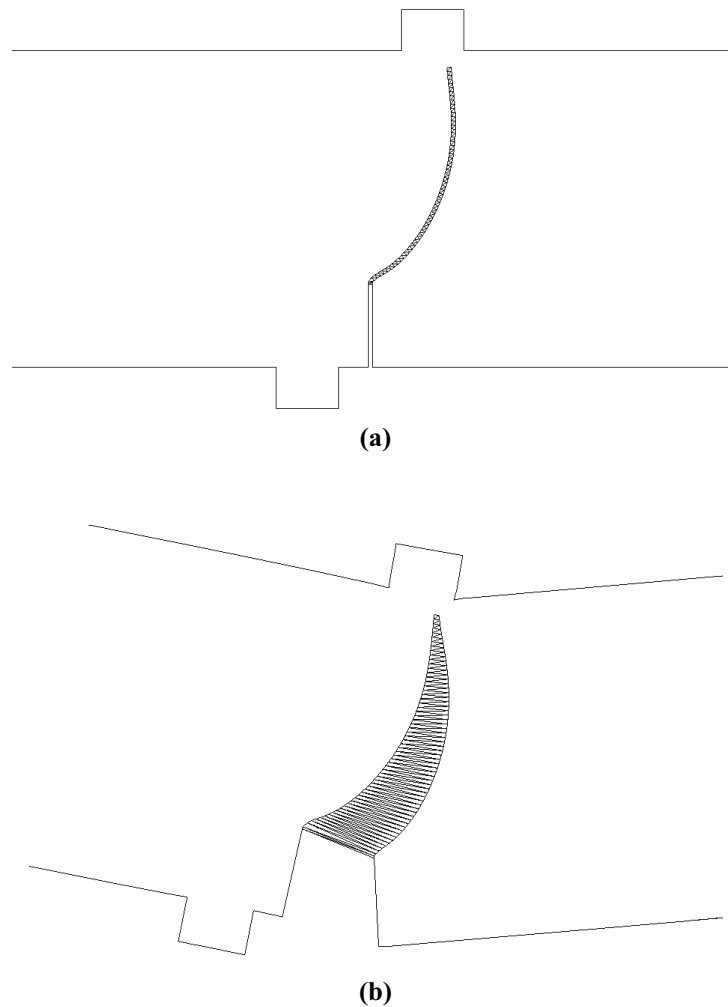


Figura 6.18 – Resultados numéricos no estágio final do processo de carga: (a) Posição da linha de descontinuidade; (b) Configuração deformada.

A Figura 6.19 mostra a evolução da carga P em relação ao deslizamento relativo da abertura da fissura – *crack mouth sliding displacement* (CMSD) – indicado na Figura 6.17. A curva estrutural reproduz bem o comportamento do experimento, apesar de não se ajustar perfeitamente à envoltória experimental. O cálculo numérico do CMSD pode ser afetado pelo efeito local do apoio próximo ao entalhe, resultando em um valor maior do que o esperado. Para um exemplo complexo como esse o método demonstra notável potencialidade.

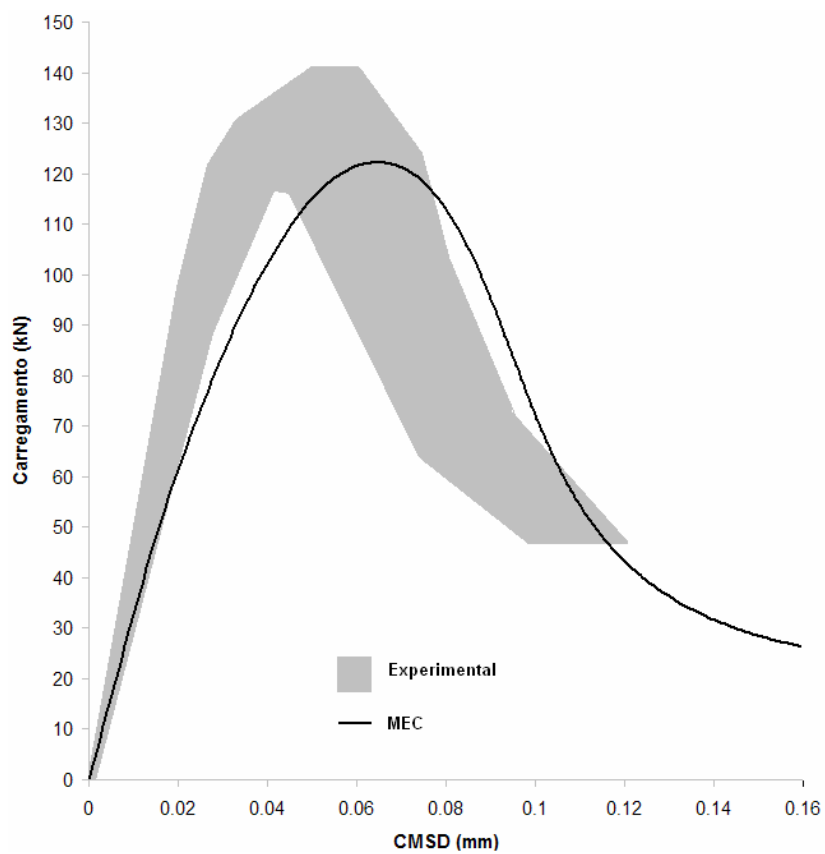


Figura 6.19 – Curva de carregamento vs. CMSD.

7 Conclusões

7 Capítulo

Abre-se com esse trabalho uma linha de pesquisa importante voltada principalmente à exploração de vantagens das formulações do MEC com relação ao MEF. A principal delas decorre do fato de que o MEC somente requer discretização do domínio em células internas nas regiões nas quais o comportamento do material deixa de ser elástico linear. Segundo a formulação proposta para problemas envolvendo propagação de descontinuidade, essas regiões correspondem a uma banda de largura arbitrária, contendo a superfície de falha.

Os conceitos básicos das formulações de elementos finitos com descontinuidades incorporadas puderam ser adaptados para representar descontinuidades mediante o método dos elementos de contorno (MEC), que atualmente constitui uma importante ferramenta de análise estrutural. Essa nova maneira de tratar descontinuidades no contexto do MEC não requer grandes alterações dos códigos computacionais implícitos existentes, desenvolvidos para solução de problemas envolvendo não-linearidade material. Além disso, dada a similaridade das aproximações envolvidas, esse tratamento propicia a integração praticamente direta ao MEC dos avanços que estão sendo desenvolvidos no contexto do método dos elementos finitos (MEF).

Constatou-se que a formulação implícita do MEC para propagação de descontinuidades fortes, em sua versão não-simétrica, estática e cinematicamente consistente, proposta por MANZOLI&VENTURINI (2005), apesar de fornecer boa precisão, pode apresentar problemas de estabilidade, traduzidas em falta de convergência da solução das equações não-lineares.

Mostrou-se que tais problemas associam-se à falta de simetria da matriz Jacobiana das equações de equilíbrio locais (similares aos do MEF). Evidenciou-se que o relaxamento

da consistência estática acaba gerando sistemas simétricos (ou mais simétricos), melhorando a estabilidade, mas com prejuízo de precisão. Entre as diferentes formas possíveis propostas de relaxar a consistência estática, a que muda o vetor normal à descontinuidade, com base em um ângulo limite de desvio relativo ao vetor normal à base da célula, é a que menos interfere na precisão da resposta.

Para solucionar tal problema, optou-se pela discretização do domínio de modo alinhado à fratura durante a análise, incluindo-se novas células à medida que a descontinuidade avança. Diferentemente do MEF, a geometria dessa região arbitrária contendo a superfície de falha pode ser construída de maneira mais ajustada à orientação da falha, proporcionando maior precisão e estabilidade dos cálculos não-lineares. Ao invés de um algoritmo de construção da trajetória da descontinuidade sobre elementos finitos pré-estabelecidos, o MEC requer um esquema de construção progressiva da malha de células internas adaptadas à superfície de falha. Assim, objetivando realizar uma análise com menos problemas de convergência numérica e sem a necessidade de aproximação nas condições estáticas, também foi proposto um algoritmo de geração de células internas.

O algoritmo de geração de malha mostra-se funcional, desempenhando seu esperado papel em resolver os problemas associados à assimetria das equações de equilíbrio locais. Assim, pode-se deixar de lado o relaxamento das condições estáticas e utilizar-se a formulação não-simétrica (consistente) com convergência praticamente garantida, visto que o alinhamento das células internas geradas é adaptado ao traçado da fratura enquanto esta se propaga, sendo posicionado da maneira mais conveniente possível. A aplicação do algoritmo em conjunto com a formulação apresentada é capaz de prever bem os resultados experimentais dos testes escolhidos. Mesmo a utilização do relaxamento das condições estáticas praticamente não introduz imprecisões.

O algoritmo de geração de células adaptadas à descontinuidade mostrou-se preciso, mas no caso de malhas com elementos muito pequenos pode ocasionar um acréscimo espúrio na curva de resposta estrutural, em função do tamanho dos incrementos de carga. Sugere-se que a criação de células seja modificada para a criação de não apenas um par de células por incremento de carga, mas sim o total de pares de células necessário para o avanço da fratura durante o processo incremental, seja ele qual for.

Tal processo requer mais estudos e tempo para a implementação, mas é totalmente viável.

Com esse trabalho fica evidente que o método dos elementos de contorno também se constitui uma promissora ferramenta numérica para análise de sólidos envolvendo localização de deformações e descontinuidades fortes. Assim, nesse tipo de análise, também se pode tirar proveito das conhecidas vantagens que o MEC apresenta com relação a outros métodos numéricos na solução de alguns tipos de problemas.

O presente trabalho abre caminho para futuras linhas de pesquisa, dentre as quais se destacam:

- utilização de modelos constitutivos discretos, que estabeleçam a relação direta entre componentes do salto e forças de superfície;
- elaboração de um algoritmo para a construção de células internas contendo a linha de descontinuidade que progride ao longo do processo de carga, com o número de pares necessários para a evolução da fratura em cada passo de carga;
- adaptação do algoritmo de criação de células para a simulação de múltiplas fraturas simultâneas;
- introdução de células internas quadrilaterais, com aproximação não-uniforme dos saltos de descontinuidade;
- desenvolvimento de métodos de controle da resposta estrutural baseados nas componentes dos saltos de deslocamentos;
- inclusão de modelos constitutivos capazes de representar o comportamento de materiais sob ação de cargas cíclicas, a fim de modelar abertura e fechamento de fissuras e progressão de fissuras por fadiga;
- extensão da formulação a problemas tridimensionais.

Assim, o algoritmo proposto apresenta-se como uma promissora técnica para análise de fraturas, podendo ser expandido para análise de múltiplas fraturas e futuramente para análises em três dimensões.

A flexibilidade na discretização do domínio, mediante geração adaptativa de células, pode substituir os esquemas de construção da trajetória da falha em malhas fixas (pré-estabelecidas), que, principalmente em problemas tridimensionais, adquirem um elevado grau de complexidade.

Outra notória vantagem provém da possibilidade de sobreposição de células internas associadas a distintas superfícies de falha. Isso permite descrever mecanismos de colapso estrutural complexos com intersecção de distintas superfícies de falha, típicos de situações envolvendo carregamentos não-proporcionais.

8 Referências Bibliográficas

8 Capítulo

- AIFANTIS, E. C. On the microstructural origin of certain inelastic models. *J. Eng. Mater. Technol. ASME*, 106:326-330, 1984.
- ALFAIATE, J.; WELLS, G. N. & SLUYS, L. J. On the use of embedded discontinuity elements with crack path continuity for mode-i and mixed-mode fracture. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:661-686, 2002.
- ALIABADI, M. & SALEH, A. Fracture mechanics analysis of cracking in plain and reinforced concrete using the boundary element method. *Eng. Fract. Mech.*, 69:267-280, 2002.
- ARREA, M & INGRAFFEA, A. R. Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete. *Dept. Struct Eng. Rep 81 - 13*, 1982.
- BAZANT, Z. P.; BELYTSCHENKO, T. B. & CHANG, T. P. Continuum theory for strain softening. *J. Engr. Mech., ASCE*, 110:1666-1692, 1984.
- BALYTSCHKO, T. B. & MOËS, N. Extended finite element method for cohesive crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, 69:813-833, 2003.
- BEER, G. *Programming the Boundary Element Method An Introduction for Engineers*. First edition. West Sussex, England: John Wiley & Sons, Ltd, 2001.
- BOCCA, P.; CARPINTERI, A. & VALENTE, S. Size effects in the mixed mode crack propagation: Softening and snap-back analysis. *Engineering Fracture Mechanics*, 35:159-170, 1990.
- BONNET, M. & MUKHERJEE, S. Implicit bem formulations for usual and sensitivity problems in elasto-plasticity using the consistent tangent operator concept. *Int. J. Solids Structures*, 33(30):4461-4480, 1996.

- BORST, R. D. Simulation of strain localization: A reappraisal of the cosserat continuum. *Engr. Comp.*, 8:317-332, 1991.
- BORST, R. D. & MÜHLAUS, H. B. Gradient-dependent plasticity: Formulation and algorithmic aspects. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 35:521-539, 1992.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements An Introductory Course*. Second edition. New York: McGraw-Hill Book Company, 1992.
- CABOT, G. P. & BAZANT, Z. Nonlocal damage theory. *Jour. Engng. Mech., A.S.C.E.*, 113:1512-1533, 1987.
- CEN, Z. & MAIER, G. Bifurcations and instabilities in fracture of cohesive-softening structures: a boundary element analysis. *Fatigue and Fract. Engng Mater.*, 15:911-928, 1992.
- CROUCH, S. L. Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 10, p. 301-342, 1976.
- CRUSE, T. A.; VAN BUREN, W.. Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. *Int. J. Frac. Mech.*, 7, p. 1-15, 1971.
- CRUSE, T. A. *Boundary element analysis in computational fracture mechanics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1988.
- DOLBOW, J.; MOËS, N. & BELYTSCHKO, T. Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Elements in Analysis and Design*, 36:235-260, 2000.
- DVORKIN, E.; CUITINO, A.M, & GIOIA, G. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *Int. Journ. Num. Meth. Engng.*, 30:541-564, 1990.
- GÁLVEZ, J. C., ELICES, M., GUINEA, G. V. and PLANAS, J. Mixed mode fracture of concrete under proportional and non-proportional loading. *Int. J. Fracture* 94, 267– 284. 1998.
- GID HOMEPAGE. Centre Internacional de Mètodes Numèrics en la Enginyeria (CIMNE) Barcelona (Spain). Disponível em: <http://gid.cimne.upc.es>. Acesso em:25 agosto. 2006.

- GONÇALVES, R. Análise de propagação de fissuras por fadiga em concreto pelo MEF mediante a mecânica do dano contínuo. São Carlos: Dissertação de mestrado apresentada à USP, 2003.
- GRAY L. J., MARTHA, L. F., INGRAFFEA, A. R. Hyper singular integrals in boundary element fracture analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 29, p. 1135-1158, 1990.
- HILLERBORG, A.; MODEER, M & PETERSSON, P. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6:773-782, 1976.
- INGRAFFEA, A. R. & SAOUMA, V. Numerical modeling fracture propagation in reinforced and plain concrete, pages 171-225. G.C. Sih and DiTommaso, 1984.
- JIRASÉK, M. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Comp. Methods Appl. Mech. Engng.*, 188:307-330, 2000.
- LEMAITRE, J. *A Course on Damage Mechanics*. Second edition. New York: Sprieger-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.
- LEMAITRE, J. How to use Damage Mechanics. *Nucl. Eng. And Design*, nº 80, 1984.
- LIANG, R. Y. & LI, Y. N. Simulations of nonlinear fracture process zone in cementitious material - a boundary element approach. *Computational Mechanics*, 7:413-427, 1991.
- LOPES Jr., M. C. & VENTURINI, W. S. Cohesive crack analysis by the boundary element method. In D. Owen, E. Onate, and H. E., editors, *Proc. International Conference on Computational Plasticity V*, pages 1057-1062, Barcelona, 1997. CIMNE.
- LOTFI, H. & SHING, P. Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements. *Int. J. Numer. Methods Engng.*, 38:1307-1325, 1995.
- MANZOLI, O. L. *Um Modelo Analítico y Numérico para la Simulación de Discontinuidades Fuertes em la Mecánica de Sólidos*. Tese de Doutorado, Escola Tècnica Superior D' Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, 1998.
- MANZOLI, O.; OLIVER, O. & CERVERA, M. Localización de deformaciones: Analisis y simulación numérica de discontinuidades em la

mecânica de sólidos. Centro Int. de Métodos Num. Em Ingeniería (CIMNE), Monografía N. 44, Barcelona, 1999.

MANZOLI, O. & SHING, P. Finite elements with embedded multiple cracks and non-uniform discontinuity modes. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2:65-76, 2005.

MANZOLI, O. & VENTURIN, W. S. Uma formulação do MEC para a simulação numérica de descontinuidades fortes. *Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, 20(3):215-234, 2004.

MANZOLI, O. & VENTURINI, W. S. A boundary element method formulation to capture strong discontinuities in solids. In D. Owen and E. Oñate, editors, *Proceedings of the VIII Internacional Conference on Computational Plasticity (COMPLAS 2005)*, Barcelona, 2005. CIMNE.

MEWS H. Calculation of stress intensity factors for various crack problems with the Boundary Element Method. In: C.A.Brebbia, W.L.Wendland and G.Kuhn (Eds). *Boundary Elements IX*, Springer Verlag, 1987.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. Dual boundary element method for threedimensional fracture mechanics analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 10, p. 161-171. 1992.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. Dual boundary element method for analysis of 3-D crack problems. In: *boundary element 14*, Brebbia C.A. (ed.), Vol. 2, p. 315- 329, 1992.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. Discontinuous crack-tip elements: application to 3-D boundary element method. *Int. J. of Fracture*, 67, R67-R71, 1994.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. Three-dimensional crack growth simulation using BEM. *Computers & Structures*, 52, p. 871-878, 1994.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. An automatic procedure for mixed-mode crack growth analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 11, p.167-177, 1995.

MÜHLAUS, H. B.& VARDOULAKIS, I. The thickness of shear bands in granular materials. *Géotechnique*, 37:271-283, 1987.

OLIVER, J. A consistent characteristic length for smeared cracking models. *Int. Journ. Num. Meth. Engng.*, 28:461-474, 1989.

- OLIVER, J. Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1: Fundamentals. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 39(21):3575-3600, 1996.
- OLIVER, J. Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1: Fundamentals. part 2: Numerical simulation. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 39(21):3575-3600, 1996.
- OLIVER, J. On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *International Journal of Solids and Structures*, 37:7207-7229, 2000.
- OLIVER, J.; CERVERA, M. & MANZOLI, O. Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. *Int. J. of Plasticity*, 15(3):319-351, 1999.
- OLIVER, J.; CERVERA, M.; OLLER, S. & LUBLINER J. Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis in Concrete. In N. B. et. Al., *SCI-C Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, Swansea, 1990.
- ORTIZ, M.; LEROY, Y. & NEEDLEMAN, A. A finite element method for localized failure analysis. *Comp. Meth. Appl. Mech. and Eng.*, 61:189-214, 1987.
- ORTIZ, M. & QUIGLEY, J. Adaptive mesh refinement in strain localization problems. *Computer Methods in Appl. Mech. and Engng.*, 90:781-804, 1991.
- OTTOSEN, N. & RUNESSON, K. Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity. *Int. J. Solids Structures*, 27(4):401-421, 1991.
- PORTELA, A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. Dual boundary element incremental analysis of crack propagation. *Computers & Structures*, Vol. 46, p. 237-247, 1991.
- PORTELA, A. & ALIABADI, M. H. The dual boundary element method: effective implementation for crack problems. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 33:1269-1287, 1992.
- RUDINICKI, J. & RICE J. Conditions for localization of deformations in pressure-sensitive dilatant materials. *J. Mech. Phys. Solids*, 23:371, 1975.

- SANCHO, J. M. et. al. Three-dimensional simulation of concrete fracture using embedded crack elements without enforcing crack path continuity. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 31:173, 2006.
- SANCHO, J. M.; PLANAS, J.; GÁLVEZ, J. C.; REYES, E.; CENDÓN, D. A.. An embedded cohesive crack model for finite element analysis of mixed mode fracture of concrete. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials and Structures* 29 (12), 1056–1065, 2006
- SALEH, A. & A. M.H. Crack growth analysis using boundary element method. *Eng. Fract. Mech*, 51:533-545, 1995.
- SIMÓ, J. C.; OLIVER, J. & ARMERO, F. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12:277-296, 1993.
- SLUYS, L. J. & BORST, R. D. Wave propagation and localisation in a rate-dependent cracked medium: Model formulation and one-dimensional examples. *Int. J. Solids Struct.*, 29:2945-2958, 1992.
- SOMIGLIANA, C. Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo. *Il nuovo Cimento*, 17-19, 1886.
- SPENCER, B. Finite Elements with Embedded discontinuities for modeling reinforced concrete members, Ph.D. Thesis. PhD thesis, University of Colorado, Boulder, Colorado, 2002.
- STEINMANN, P.& WILLIAN, K. Performace of enhanced finite element formulations in localized failure computations. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engr.*, 90:845-867, 1991.
- TELLES, J. C. F. & CARRER, J. Implicity procedures for the solution of elastoplastic problems by the boundary element method. *Math. Comput. Modelling*, 15:303-311, 1991.
- TELLES, J. C. F.; GUIMARÃES, S. Green's function: A numerical generation for fracture mechanics problems via Boundary Elements. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 188, p. 847-858, 2000.
- TIMOSHENKO, S. P. & GOODIER, J. N. Teoria da elasticidade. Terceira edição. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois S. A., 1980.

- VENTURINI, W. S. Application of the Boundary Element Formulation to Solve Geomechanical Problems. P.h.d. Thesis, University of Southampton, 1982.
- VENTURINI, W. S. Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas da engenharia. São Carlos: Tese de Livredocência apresentada à USP, 1988.
- VENTURINI, W. S. A new boundary element formulation for crack analysis. In C. A. Brebbia and et alli., editors, Boundary Element XVI, 1994.
- VICENTINI, D. F. Formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise de fraturas. São Carlos. Dissertação de Mestrado apresentadas à USP, 2006.
- WELLS, G. N.& SLUYS, L. J. Three-dimensional embedded discontinuity model for brittle fracture. *Int. J. Solids Structures*, 38(5):897-913, 2001.
- WUTZOW, W. W. Formulação do Método dos Elementos de Contorno para análises de chapas com enrijecedores. São Carlos: Dissertação de mestrado apresentada à USP, 2003.
- ZIENKIEWICZ, O.; HUANG, M. & PASTOR, M. Localization problems in plasticity using finite elements with adaptive remeshing. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 19:127-148, 1995.

A1 Teoria da Elasticidade

1 **Apêndice**

A1.1 Introdução

No Apêndice 1 são apresentadas as equações e conceitos básicos relativos à teoria da elasticidade e os conceitos de estado plano de tensão (EPT) e estado plano de deformação (EPD).

A1.2 Equações da teoria da elasticidade

A teoria da elasticidade aqui aplicada requer que algumas hipóteses básicas sejam aplicadas. Estas hipóteses são:

- Hipótese de pequenos deslocamentos
- O material é isotrópico, linear e homogêneo

As equações do problema elástico podem ser resumidas em 15 equações e 15 incógnitas:

Equações:

- 3 equações de equilíbrio
- 6 relações entre deformações e deslocamentos
- 6 relações entre tensões e deformações

Incógnitas:

- 3 componentes do campo de deslocamentos
- 6 componentes do campo de tensões (considerando a simetria do tensor)

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

- 6 componentes do campo de deformações (novamente considerando a simetria do tensor)

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$$

O problema é determinado pelas condições de contorno, as quais podem ser em deslocamentos ou em força.

A1.2.1 Equações diferenciais de equilíbrio (Navier)

Para a dedução da equação de equilíbrio, toma-se como ponto de partida um paralelepípedo infinitesimal de um corpo em equilíbrio, apresentado na Figura A1.1.

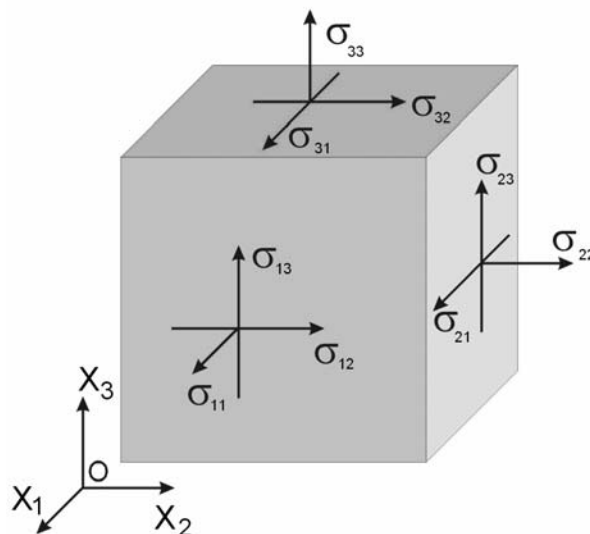


Figura A1.1 – Componente de tensão de um volume infinitesimal em equilíbrio (WUTZOW, 2003).

A partir do equilíbrio paralelepípedo infinitesimal apresentado é possível chegar à seguinte equação:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = 0$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ (simetria do tensor de tensões)} \tag{A(1.1)}$$

$$i, j = 1, 2, 3$$

onde $\boldsymbol{\sigma}$ representa o tensor de tensões e \mathbf{b} o vetor de cargas de corpo.

Para a definição de forças externas aplicadas a um corpo em equilíbrio é necessário que se parta do volume infinitesimal da Figura A1.2, que representa um ponto do corpo na superfície deste.

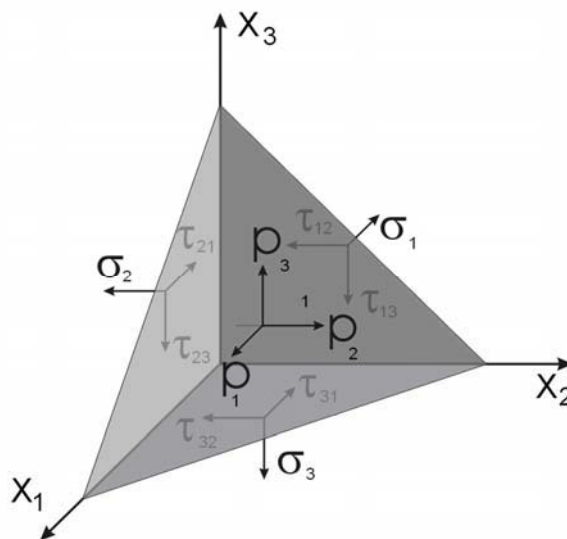


Figura A1.2 – Infinitesimal de um corpo em equilíbrio com forças externas (WUTZOW, 2003).

Estabelecendo o equilíbrio deste volume infinitesimal chega-se à relação entre as forças externas e as tensões internas:

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \tag{A(1.2)}$$

onde \mathbf{p} representa as forças externas por superfície de área e \mathbf{n} representa os vetores direcionais da superfície de aplicação de \mathbf{p} .

A1.2.2 Relações entre deformação e deslocamento

Com a hipótese de continuidade do meio e pequenas deformações (aproximação Lagrangiana), chega-se à seguinte expressão:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \boldsymbol{u}$$

em notação indicial:

A(1.3)

$$\varepsilon_{ij} = 1/2(u_{j,i} + u_{i,j})$$

onde $\boldsymbol{\varepsilon}$ representa o tensor de tensões e \boldsymbol{u} o vetor deslocamento e ∇^s a parte simétrica do gradiente aplicado.

A1.2.3 Lei de Hooke

A relação entre o tensor de tensão e o de deformação é feita pelo tensor de quarta ordem \boldsymbol{C} (tensor constitutivo de constantes elásticas), conforme mostram as Eqs. A(1.4) e A(1.5).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \boldsymbol{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad \text{A(1.4)}$$

$$\boldsymbol{C} = \lambda \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \boldsymbol{I} \quad \text{A(1.5)}$$

onde $\mathbf{1}$ é o tensor identidade de segunda ordem e \boldsymbol{I} é o tensor identidade de quarta ordem. As constantes de Lamé são então designadas por:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\mu = G$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Sendo que E , G e ν representam respectivamente os conhecidos módulo de elasticidade longitudinal, módulo de elasticidade transversal (ou de cisalhamento) e o coeficiente de Poisson.

A1.3 Estados planos de tensão

Os estados planos de tensões constituem uma simplificação das tensões do domínio tridimensional (Figura A1.1) para um domínio bidimensional, independente de z . O estado plano pode ser idealizado para corpos com espessura muito pequena ou muito grande em relação às outras dimensões, gerando respectivamente as simplificações do estado plano de tensões (EPT) e do estado plano de deformações (EPD). Estas simplificações são muito utilizadas, pois diminuem o número de variáveis e, se corretamente aplicadas, proporcionam resultados coerentes e precisos, sendo portanto vastamente aplicadas.

A1.3.1 Estado plano de tensão (EPT)

Se uma chapa fina é carregada por forças paralelas ao plano, aplicadas no contorno e distribuídas uniformemente ao longo da espessura, as componentes σ_{33} , σ_{13} e σ_{23} (considerando-se a simetria dos tensores deformação e tensão) são nulas em ambas as faces da chapa (Figura A1.3). O estado plano de tensão fica então definido apenas em função de σ_{11} , σ_{22} e σ_{12} . Sendo assim, para chapas suficientemente finas, essas três componentes de tensão são independentes da direção x_3 , dependendo apenas de x_1 e x_2 .

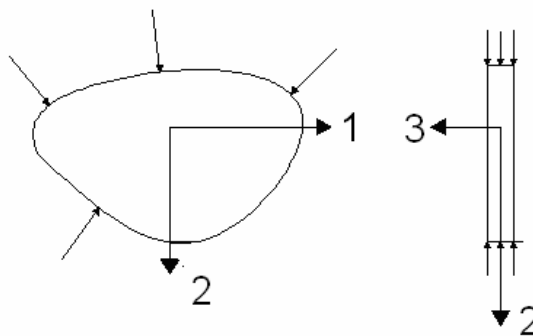


Figura A1.3 – Estado plano de tensão (EPT).

A1.3.2 Estado plano de deformação (EPD)

Semelhante simplificação pode decorrer de uma outra situação extrema, inversa a esta já apresentada. Caso um corpo longo cilíndrico ou prismático seja solicitado por forças perpendiculares ao seu eixo longitudinal e que não variam ao longo deste, pode-se admitir que todas as seções transversais estão nas mesmas condições. Considera-se que as seções nas extremidades estejam confinadas por planos rígidos fixos sem atrito, ou seja, os deslocamentos no eixo longitudinal estão impedidos. Assim, desde que não haja deslocamento axial nos extremos, e por simetria, na seção do meio, chega-se à conclusão de que isto ocorre em todas as seções transversais.

Sendo as condições ao longo do corpo as mesmas, basta considerar uma fatia de largura unitária para a análise no EPD. Os deslocamentos u_1 e u_2 são funções apenas das direções x_1 e x_2 . Considerando-se o deslocamento axial na direção x_3 como nulo, como dito anteriormente, obtêm-se das equações das componentes de deformações as Eqs. A(1.6).

$$\begin{aligned}\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0 \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0\end{aligned}\tag{A(1.6)}$$

No EPD a tensão σ_{33} não é nula, apenas a deformação ε_{33} o é. A partir das Eqs A(1.6) e da Lei de Hooke chega-se às expressões das tensões na direção z , conforme mostrado nas Eqs. A(1.7). Assim é possível calcular a tensão σ_z em função de σ_x e σ_y , e de acordo com as Eqs A(1.6) e a lei de Hooke, as τ_{xz} e τ_{yz} tensões são nulas.

$$\sigma_{13} = 2G\varepsilon_{13} = 0$$

$$\sigma_{23} = 2G\varepsilon_{23} = 0$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{E}[\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] = 0$$

A(1.7)

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

Vários problemas da engenharia podem ser representados pelo EPD, como os problemas de barragens, muros de arrimo, túneis e tubulações entre outros. A Figura A1.4 representa esquematicamente um problema de EPD.

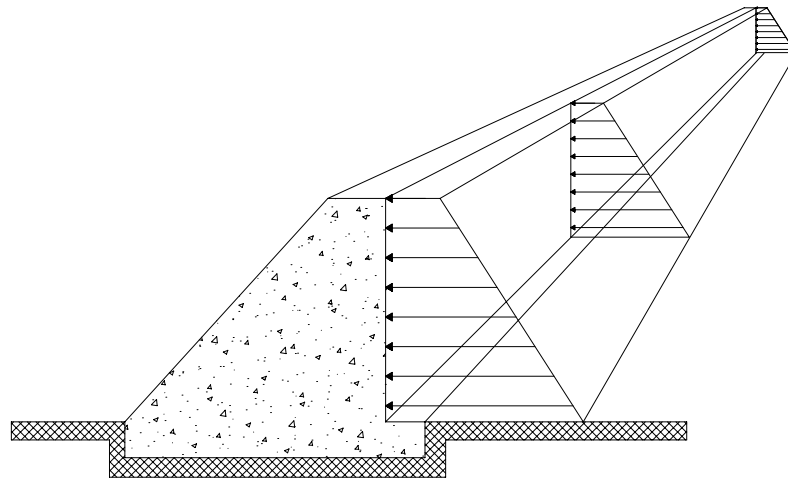


Figura A1.4 – Problema do Estado plano de deformações (EPD).

A2 MEC para Sólidos Elásticos **2** **Apêndice**

A2.1 Introdução

Durante as últimas décadas, a evolução dos computadores permitiu o amplo avanço de métodos numéricos de resolução de equações ou sistemas de equações diferenciais nos campos da engenharia e outras ciências.

O método dos elementos finitos, o qual foi precedido pelo método das diferenças finitas, surgiu com muita força em meados do século passado, devido à simplicidade e elegância de sua formulação. Este método aproxima a equação diferencial do problema físico em questão por funções que utilizam os valores das variáveis básicas do problema dentro do domínio deste. Daí ser denominado como um “método de domínio”.

O MEF utiliza funções contínuas por elementos. Divide-se o domínio em elementos e os equaciona individualmente como sub-regiões contínuas, reunindo-os para a solução do problema como um todo.

As técnicas de resolução de equações integrais de contorno permitiram a criação de uma alternativa ao MEF. O método de elementos de contorno (MEC), desenvolvido em meados da década de 70 mostrou-se uma ferramenta viável e confiável.

Pode-se perguntar o porquê de outro método além do MEF, o qual já mostrou toda sua potencialidade e facilidade de aplicação. Isto pode ser justificado pelo fato de que o MEF não se mostra adequado a certos tipos de problemas da engenharia, como problemas de domínio infinito, por exemplo, nos quais é necessário uma discretização com muitos elementos finitos, ao passo que, com o MEC, o número de elementos é reduzido drasticamente. Conseqüentemente, o sistema linear gerado pelo MEC é de dimensões reduzidas se comparado ao gerado pelo MEF. Mas o sistema é composto por

uma matriz esparsa, e não em banda, como no MEF. Problema este que vem sendo resolvido com novos métodos de resolução de sistemas lineares com matrizes esparsas.

No método de elementos de contorno, como nos demais, a solução do problema físicos será calculada em pontos discretos, os chamados nós, agora definidos apenas sobre o contorno. Por causa desta característica, o método leva a uma redução das dimensões dos problemas analisados, significando, além de menor número de dados de entrada, um menor tempo de processamento e menor uso de memória computacional.

Segundo BREBBIA & DOMINGUEZ (1992), o método de elementos de contorno pode ser classificado dentro da família dos métodos aproximados, pois, a partir de relações do método dos resíduos ponderados é possível obterem-se as equações integrais necessárias. Dessa maneira o MEC tem a mesma origem das demais técnicas numéricas, obtidas pelo princípio de minimização dos erros.

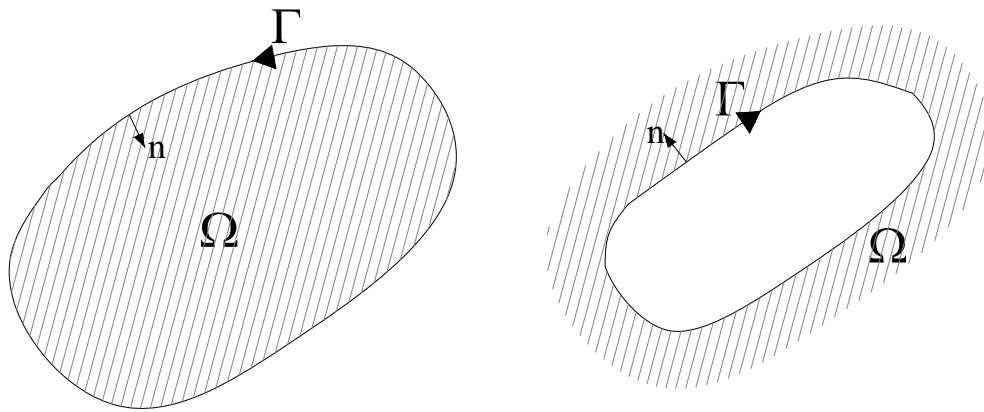
Apesar dos avanços obtidos no MEC, ainda existem muitos aspectos a serem explorados, desenvolvidos e pesquisados, como análises tridimensionais, não linearidades, anisotropia e, como descrito anteriormente, propagação de descontinuidades em sólidos.

Neste apêndice as equações são demonstradas por meio da notação indicial, pois torna-se de mais fácil entendimento com esta.

A2.2 Formulação do MEC para problemas elásticos

A2.2.1 Variáveis do problema e condições de contorno

O domínio e o contorno de um meio contínuo podem ser definidos conforme mostra a Figura A2.1.

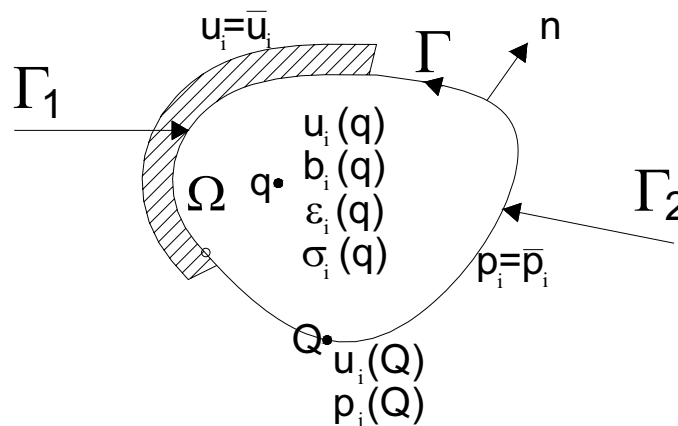


(a) Domínio interno (contorno anti-horário) (b) Domínio externo (contorno horário)

Figura A2.1 – Domínios e contornos de um meio contínuo.

Pelo método dos elementos de contorno o sentido da discretização do contorno (horário ou anti-horário) distingue a posição do domínio sólido em relação ao contorno. Caso o sentido seja horário, o domínio é considerado externo ao contorno. No sentido anti-horário este é considerado interno. O vetor n representa a direção normal à superfície do sólido elástico.

Em um sólido de domínio Ω e contorno Γ , as variáveis envolvidas correspondem aos campos de deslocamentos u_i , de tensões σ_{ij} e de deformações ε_{ij} , assim como as forças de superfície p_i e as forças de corpo b_i . A Figura A2.2 mostra os valores de contorno e as variáveis de interesse no domínio, sendo q um ponto dentro do domínio e Q um ponto sobre o contorno. Γ_1 representa trechos do contorno com deslocamentos conhecidos, ao passo que Γ_2 representa um contorno com carregamento conhecido.



Figuras A2.2 – Variáveis do problema e condições de contorno.

A2.2.2 Equação de Navier

No Apêndice 1 são apresentadas todas as expressões referentes ao problema elástico que são utilizadas para a formulação do MEC para problemas elásticos. Seguindo o procedimento análogo ao que VENTURINI (1988) utiliza para a formulação do MEC aplicado aos problemas potenciais, pretende-se neste item apresentar as equações integrais envolvidas.

As equações aqui apresentadas são desenvolvidas a partir do teorema de Betti, embora estas possam muito bem ser obtidas a partir da técnica dos resíduos ponderados. É importante ressaltar que a simetria dos tensores de tensão e deformação ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ e $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) desempenha um papel importante nas deduções.

Nos desenvolvimentos, o ponto fonte (*source point*) será representado pela letra s e o ponto campo (*field point*) pela letra q , sendo que letras maiúsculas representam pontos sobre o contorno enquanto letras minúsculas representam pontos dentro ou fora do domínio do problema.

As equações aqui descritas se aplicam ao Estado Plano de Deformação (EPD). Os estados planos de tensão e deformação são descritos detalhadamente no Apêndice 1. Para a representação do Estados Plano de Tensão (EPT), o coeficiente de Poisson (ν) é substituído na formulação por um coeficiente aparente ($\bar{\nu}$):

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + \nu}$$

Como as deformações podem ser escritas em função dos deslocamentos e as tensões elásticas podem ser escritas em função das deformações (Apêndice 1), as tensões podem ser expressas em função dos deslocamentos como na Eq. A(2.1):

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} u_{l,l} + G [u_{i,j} + u_{j,i}] \quad \text{A(2.1)}$$

onde G representa o módulo de elasticidade transversal do sólido elástico (Apêndice 1) e δ_{ki} representa a função delta de Kronecker (Apêndice 4).

A substituição de Eq. A(2.1) na equação de equilíbrio interno (Apêndice 1, Eq. A(1.1)) permite a obtenção da equação diferencial do problema elástico em termos de deslocamentos.

$$u_{i,jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{i,ij} + \frac{b_i}{G} = 0 \quad \text{A(2.2)}$$

A2.2.3 Soluções fundamentais

Na formulação das equações integrais do problema elástico é necessário o emprego de soluções fundamentais da equação diferencial Eq. A(2.2). A solução aqui empregada foi desenvolvida originalmente em meados do século 19 por Lord Kelvin (William Thomson), um matemático e físico irlandês. É, portanto, conhecida como solução de Kelvin. Esta solução representa o efeito de uma carga unitária e concentrada atuando em um ponto de um domínio infinito (ponto fonte). Tal solução pode ser deduzida resolvendo-se a Eq. A(2.2), substituindo-se o termo independente da força de corpo pela função delta de Dirac (Apêndice 3), resultando:

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{kj,ij}^*(s,q) + u_{ki,jj}^*(s,q) + \frac{1}{G} \delta(s,q) \delta_{ki} = 0 \quad \text{A(2.3)}$$

onde δ_{ki} representa a função delta de Kronecker (Apêndice 4), empregada para indicar as componentes da força unitária atuando apenas na direção k . O símbolo “*” corresponde à solução do problema fundamental e s é o ponto fonte.

Para problemas elásticos planos a solução fundamental é dada pela Eq. A(2.4), sendo que i e j variam de 1 a 2. A variável r representa a distância entre o ponto fonte e o ponto campo, r_i e r_j representam os versores de r nas direções i e j respectivamente.

$$u_{ij}^*(s,q) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_i r_j \right] \quad \text{A(2.4)}$$

A solução fundamental para problemas tridimensionais é mostrada na Eq. A(2.5), com i e j variando de 1 a 3.

$$u_{ij}^*(s,q) = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{ij} + r_i r_j \right] \quad A(2.5)$$

A expressão das deformações para o caso bidimensional é encontrada derivando-se a Eq. A(2.4) com relação a x_k , chegando-se assim a:

$$\varepsilon_{ijk}^*(s,q) = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(r_k \delta_{ij} + r_j \delta_{ik}) - r_i \delta_{jk} + 2r_i r_j r_k \right] \quad A(2.6)$$

Na forma geral tem-se:

$$\varepsilon_{ijk}^*(s,q) = \frac{-1}{8\alpha\pi G(1-\nu)r^\alpha} \left[(1-2\nu)(r_k \delta_{ij} + r_j \delta_{ik}) - r_i \delta_{jk} + \bar{\beta} r_i r_j r_k \right] \quad A(2.7)$$

onde $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são constantes. No caso bidimensional, $\bar{\alpha}$ é igual a 1 e $\bar{\beta}$ é igual a 2. Para o caso tridimensional $\bar{\alpha}$ é igual a 2 e $\bar{\beta}$ é igual a 3.

Os campos de tensões compatíveis com os campos de deformações, expressos pelas equações Eq. A(2.6) e Eq. A(2.7), podem ser obtidos mediante a lei de Hooke, obtendo-se para o caso bidimensional:

$$\sigma_{ijk}^*(s,q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(r_k \delta_{ij} + r_j \delta_{ik} - r_i \delta_{jk}) + 2r_i r_j r_k \right] \quad A(2.8)$$

e, na forma geral:

$$\sigma_{ijk}^*(s,q) = \frac{-1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left[(1-2\nu)(r_k \delta_{ij} + r_j \delta_{ik} - r_i \delta_{jk}) + \bar{\beta} r_i r_j r_k \right] \quad A(2.9)$$

Por fim, a expressão das forças de superfície no contorno para o caso bidimensional é expressa por:

$$P_{ij}^*(s,q) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j \right] r_n - (1-2\nu)(r_i n_j - r_j n_i) \right\} \quad A(2.10)$$

Na forma geral tem-se:

$$P_{ij}^*(s,q) = \frac{-1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + \bar{\beta}r_{,i}r_{,j} \right] r_{,n} - (1-2\nu)(r_{,i}n_j - r_{,j}n_i) \right\} \quad A(2.11)$$

A2.3 Representações integrais básicas do problema elástico bidimensional

De acordo com o teorema da reciprocidade de Betti, desenvolvido por SOMIGLIANA (1886), pode-se escrever:

$$\sigma_{jk}(q)\varepsilon_{ijk}^*(s,q) = \sigma_{ijk}^*(s,q)\varepsilon_{jk}(q) \quad A(2.12)$$

Visto que a Eq. A(2.12) vale para todo o domínio, sua forma integral expressa pela Eq. A(2.13) também vale.

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}(q)\varepsilon_{ijk}^*(s,q)d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(s,q)\varepsilon_{jk}(q)d\Omega \quad A(2.13)$$

Integrando-se por partes em ambos os termos da Eq. A(2.13), chega-se à expressão:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk,k}u_{ij}^*d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{jk}u_{ij}^*n_k d\Gamma = -\int_{\Omega} \sigma_{ijk,k}^*u_j d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{ijk}^*u_j n_k d\Gamma \quad A(2.14)$$

sendo que na Eq. A(2.14) que:

$$\begin{cases} P_j = \sigma_{jk}n_k \\ P_{ik}^* = \sigma_{ijk}^*n_k \end{cases}$$

obtém-se:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk,k}u_{ij}^*d\Omega + \int_{\Gamma} P_j u_{ij}^* d\Gamma = -\int_{\Omega} \sigma_{ijk,k}^*u_j d\Omega + \int_{\Gamma} u_j P_{ij}^* d\Gamma \quad A(2.15)$$

Utilizando na expressão A(2.15) a equação de equilíbrio, tanto do problema real como o do fundamental, descrita por:

$$\begin{cases} \sigma_{jk,k} = -b_j \\ \sigma_{ijk,k}^* = -\delta(s,q)\delta_{ij} \end{cases}$$

chega-se à equação:

$$\int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma} P_j u_{ij}^* d\Gamma = \int_{\Omega} \delta(s,q)\delta_{ij} u_j d\Omega + \int_{\Gamma} u_j P_{ij}^* d\Gamma \quad A(2.16)$$

Rearranjando a Eq. A(2.16) e levando-se em conta que para um ponto s pertencente ao domínio $\delta_{ij} u_j \int_{\Omega} \delta(s,q) d\Omega = \delta_{ij} u_j$, tem-se:

$$\int_{\Gamma} P_j u_{ij}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j P_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega = \delta_{ij} u_j \quad A(2.17)$$

Como $\delta_{ij} u_j = u_i$ tem-se:

$$u_i(s) = - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s,q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s,q) P_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(q) u_{ij}^*(s,q) d\Omega \quad A(2.18)$$

Para pontos fontes situados fora do domínio, $u_i(s)$ é nulo na Eq. A(2.18).

A partir da expressão integral dos deslocamentos mostrada na Eq. A(2.18), as equações integrais de deformações e tensões para pontos internos podem ser expressa por:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(s) = & - \int_{\Gamma} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} P_{lk,l}^* + G(P_{ik,j}^* + P_{jk,i}^*) \right] u_k d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{lk,l}^* + G(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] P_k d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \left[\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{lk,l}^* + G(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \right] b_k d\Omega \end{aligned} \quad A(2.19)$$

A2.3.1 Equações integrais para pontos do contorno

A expressão na Eq. A(2.18) é a representação integral para deslocamentos de pontos no interior de um sólido, também chamada de “Identidade Somigliana”. Com esta equação é possível a determinação de deslocamentos internos a partir de valores de

deslocamentos e de forças de superfície dos pontos do contorno. Mas, para tanto, é necessário que todos os valores de deslocamentos e forças de superfície sejam conhecidos no contorno. Assim, é imperativo que se escreva uma equação integral que relacione deslocamentos e forças de superfície apenas de pontos de contorno.

Seja então um ponto S pertencente ao contorno de um domínio Ω qualquer. A Eq. A(2.18) será válida para este se ao domínio Ω for adicionado um domínio infinitesimal complementar Ω_e (Figura A2.3). Assim resolve-se a singularidade da equação integral quando o ponto fonte encontra-se sobre o contorno.

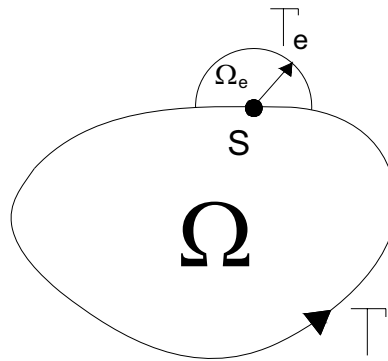


Figura A2.3 – Domínio acrescido de complemento infinitesimal.

Desse acréscimo infinitesimal e fazendo-se com que o raio e tenda a zero, obtém-se a Eq. A(2.20).

$$u_i(S) = \lim_{e \rightarrow 0} \left[- \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_e} P_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_e} u_{ij}^*(S, Q) P_j(Q) d\Gamma + \int_{\Omega + \Omega_e} b_j(q) u_{ij}^*(S, q) d\Omega \right] \quad A(2.20)$$

Fazendo-se os limites tomando-se todos os devidos cuidados, pode-se chegar à seguinte expressão:

$$c_{ij}(S) u_j(S) = - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(S, Q) u_j(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(S, Q) P_j(Q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(q) u_{ij}^*(S, q) d\Omega \quad A(2.21)$$

onde c_{ij} vale $(1/2)\delta_{ij}$ para pontos do contorno com uma única tangente; em casos de pontos em contornos não suaves, c_{ij} é definida segundo a Eq. A(2.22).

$$c_{ij}(S) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\text{sen}(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} \\ \frac{\text{sen}(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{\cos(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad A(2.22)$$

No corpo da tese a Eq. (2.21) é escrita em sua forma reduzida, pois esta é mais compacta e apresenta uma maior facilidade de visualização da expressão, como segue na Eq. (2.23).

$$c_s \cdot u = - \int_{\Gamma} p^* \cdot u \, d\Gamma + \int_{\Gamma} p \cdot u^* \, d\Gamma + \int_{\Omega} b \cdot u^* \, d\Omega \quad A(2.23)$$

onde u , p e b são respectivamente deslocamentos, forças de superfície e forças de corpo e $c_s = c_{ij}$.

A Figura A2.4 mostra os ângulos α e γ envolvidos no cálculo de c_{ij} para pontos S situados sobre contorno suave (a) e contorno com angulosidade (b), sendo α o ângulo interno definido pelas tangentes ao contorno e γ o ângulo definido pela bissetriz de α como indicado.

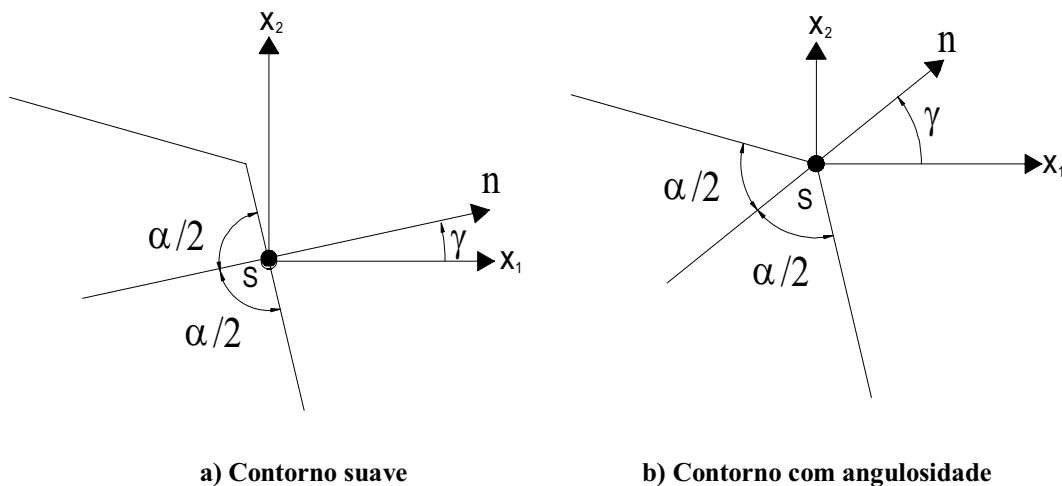


Figura A2.4 – Definição dos ângulos γ e α para pontos do contorno.

Pode-se obter também a equação integral para pontos fora do contorno, diretamente da Eq. A(2.18), como mostra a Eq. A(2.24).

$$0 = - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) P_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Omega \quad A(2.24)$$

A2.3.2 Determinação das componentes de tensão internas

Para a determinação das componentes de tensão internas e de deformações é interessante a obtenção de suas respectivas equações integrais. Determina-se uma destas duas grandezas, vista que a outra pode ser facilmente encontrada pela Lei de Hooke. A partir da diferenciação da Eq. A(2.18) em um ponto s do domínio Ω mostra-se na Eq. A(2.25) a representação integral das tensões, conforme é usualmente mostrado na literatura.

$$\sigma_{ik}(s) = - \int_{\Gamma} S_{ijk}^*(s, Q) u_j(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(s, Q) P_j(Q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(q) D_{ijk}^*(s, q) d\Omega \quad A(2.25)$$

onde os tensores S_{ijk}^* e D_{ijk}^* são dados por:

$$S_{ijk}^* = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2r_{,n} \left[(1-2\nu) \delta_{jk} r_{,i} + \nu (\delta_{ji} r_{,k} + \delta_{ik} r_{,j}) + \right. \right. \\ \left. \left. -4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + 2\nu \left[n_j r_{,k} r_{,i} + n_k r_{,j} r_{,i} \right] + (1-2\nu) \left[n_i r_{,j} r_{,k} + n_k \delta_{ji} + n_j \delta_{ki} \right] \right. \\ \left. - (1-4\nu) n_i \delta_{jk} \right\} \quad A(2.26)$$

$$D_{ijk}^* = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu) \left[r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik} - r_{,i} \delta_{jk} \right] + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \quad A(2.27)$$

onde $r_{,n}$ indica a derivada do raio r na direção do versor normal ao elemento.

A2.3.3 Determinação das componentes de tensão no contorno

A determinação das tensões nos nós dos elementos do contorno é de simples cálculo, visto que, no contorno, duas das três componentes de tensão já são conhecidas, mediante o conhecimento das forças de superfície no contorno. A Figura A2.5 (a) mostra um elemento de contorno com suas forças de superfície P_1 e P_2 , nas direções x_1 e x_2 . Pode-se decompor estas forças nas direções normais e tangentes ao elemento de contorno, conforme mostrado na Figura A2.5 (b), originando as componentes de força de superfície \bar{P}_1 e \bar{P}_2 . Define-se o elemento infinitesimal do domínio ds (Figura A2.5 (c)) como um elemento que possui um de seus lados pertencente ao elemento de contorno indicado. As duas componentes de tensão nesta superfície ($\bar{\sigma}_1$ e $\bar{\tau}_{12}$) de ds são iguais às forças de superfície decompostas sobre o elemento (\bar{P}_1 e \bar{P}_2), bastando assim a determinação da terceira componente de tensão ($\bar{\sigma}_2$).

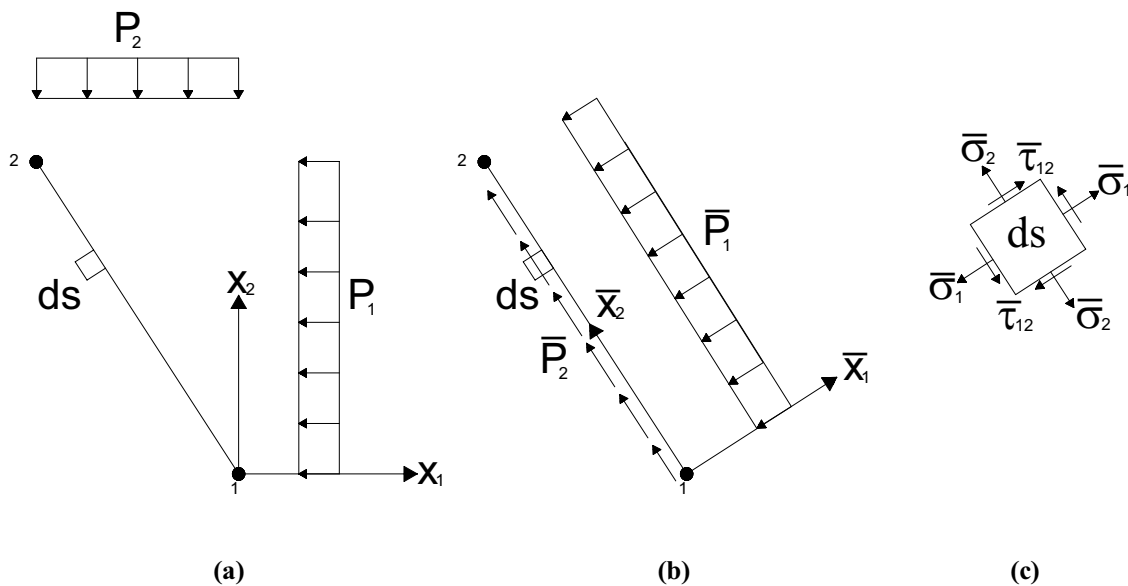


Figura A2.5 – Definição das tensões no contorno.

Para o cálculo de $\bar{\sigma}_2$ é necessária a determinação da deformação do elemento de contorno da direção \bar{X}_2 ($\bar{\epsilon}_2$) a qual é dado pela Eq. A(2.28), na qual u_i representa o deslocamento nodal no nó i ($i=1,2$) e, L_{12} , o comprimento do elemento:

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{\bar{u}_2^2 - \bar{u}_2^1}{L_{12}} \quad A(2.28)$$

Desta maneira é possível o cálculo do tensor de tensões em nós pertencentes ao contorno sem muito esforço, conforme mostra a Eq. A(2.29).

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_1 &= \bar{P}_1 \\ \bar{\tau}_{12} &= \bar{P}_2 \\ \bar{\sigma}_2 &= \frac{1}{1-\nu} (\nu \bar{\sigma}_1 + 2G \bar{\varepsilon}_2) \end{aligned} \quad A(2.29)$$

A3 Delta de Dirac

A3.1 Função Delta de Dirac

A função Delta de Dirac tem suas propriedades estudadas na Teoria de Funções Generalizadas e constitui uma ferramenta capaz de representar forças concentradas na Teoria da Elasticidade ou fontes concentradas na Teoria de Potencial. Ela pode ser facilmente deduzida a partir da diferenciação da função “Heaviside” ou função degrau. A função Delta de Dirac está representada na figura abaixo :

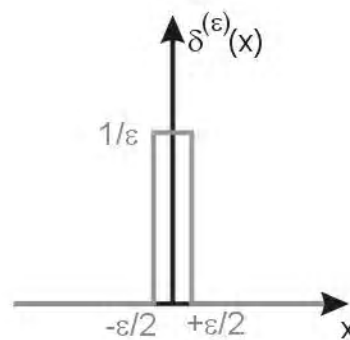


Figura A3.1 – Função Delta de Dirac.

Sendo a função $\delta^{(\varepsilon)}(X)$, podendo ser definida da seguinte forma:

$$\delta^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon, & \text{para } -\varepsilon/2 < x < \varepsilon/2 \\ 0, & \text{para } |x| > \varepsilon/2 \end{cases}$$

onde ε é um número positivo.

Tem-se a integral:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(x) \cdot f(x) \cdot dx$$

onde $f(x)$ é uma função qualquer bem definida em $x=0$. Se ε for suficientemente pequeno, a variação de $f(x)$ no intervalo efetivo de integração $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$ é negligenciável e $f(x)$ permanece praticamente igual a $f(0)$, de forma que:

$$I \cong f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x).dx = f(0)$$

A aproximação é tanto melhor quanto menor for ε . Na passagem ao limite, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtém-se a definição da função Delta de Dirac pela seguinte relação:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x).f(x)dx = f(0)$$

válida para qualquer função $f(x)$ definida na origem, uma definição mais geral seria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0).dx = f(x_0)$$

O conceito da função Delta de Dirac pode ser facilmente estendido a domínios n-dimensionais. Considerando-se uma função f que depende da localização de cada ponto no corpo, define-se $\delta(p, Q)$, como a função Delta de Dirac, quando são válidas as seguintes propriedades:

$$\delta(p, Q) = \begin{cases} \infty, & \text{se } p = Q \\ 0, & \text{se } p \neq Q \end{cases}$$

$$\int_{\Omega} g(Q).\delta(p, Q) d\Omega = g(p)$$

A função Delta de Dirac também pode ser representada da seguinte maneira:

$$\delta(p, Q) = \Delta^p$$

A4 Delta de Kronecker

A4.1 Delta de Kronecker

O símbolo δ_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, n$) é conhecido por delta de Kronecker e definido como:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Como i e j são índices livres no termo δ_{ij} e ambos variam de 1 a n , tem-se um total de n^2 valores dados segundo a definição de δ_{ij} pela expressão acima. Assim:

$$[\delta_{ij}] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1m} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nm} \end{bmatrix}$$

onde $[\delta_{ij}]$ é equivalente à matriz identidade $[I]$, ou seja, toda sua diagonal principal é preenchida por valores unitários, enquanto as demais posições da matriz são nulas.

De imediato verifica-se que, qualquer que seja a matriz quadrada M_{ij} e o vetor A_i , tem-se:

$$\delta_{ij} A_j = A_i$$

$$\delta_{ij} M_{jk} = M_{ik} = M_{ij} \delta_{jk}$$

$$\delta_{ik} \delta_{kj} = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

sendo a última expressão indicativa de que o símbolo de Kronecker é uma multiplicidade simétrica.