

Método dos Elementos de Contorno Aplicado à  
Análise de Escavações em Túneis Utilizando Modelos  
Aproximados Bidimensionais

**João César Amorim de Freitas**

Orientador: Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini



**João César Amorim de Freitas**

**MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO À  
ANÁLISE DE ESCAVAÇÕES EM TÚNEIS UTILIZANDO MODELOS  
APROXIMADOS BIDIMENSIONAIS**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia Estrutural.

Orientador: Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini

SÃO CARLOS

JUNHO 2008



## **Dedicatória**

Dedico este trabalho primeiramente a Deus; À meus pais Osmar e Assunção, que me deram a vida com amor; aos meus irmãos Ricardo, Fernanda e Marcos.



## Agradecimentos

Aos professores, especialmente ao Professor Wilson Sergio Venturini, pela contribuição, dentro de sua área, para o desenvolvimento da dissertação, e, principalmente pela dedicação e empenho que demonstrou ao longo de todo trabalho se colocando sempre a disposição.

Ao professor Tarcísio Barreto Celestino do Departamento de Geotecnia da EESC-USP, que através do seu domínio sobre o tema me proporcionou momentos importantes de reflexão, principalmente em sala de aula.

Ao professor Gernot Beer do “Institute for Structural Analysis Graz University of Technology“, Graz, Áustria, que durante três meses me acolheu e me orientou, de forma que, sem a sua valiosa ajuda, não teria sido possível a realização de um importante capítulo deste trabalho.

Aos meus amigos de turma da USP: Rafael, Antônio, Pedro, Rômulo, Vinícios, Jônatas, Wanderson, João Paulo, Fernanda, Camila, Karla, Ana Paula, Jesus, Luís Aquino, Raimundo, Rodrigão, Rodrigo de Manaus e Rodrigo Ely, além de outros como Manuel Dênis, sem eles os meus momentos na USP teriam sido mais difíceis.

Aos amigos que fiz na Áustria: Klaus Thöni, Thomas Rüberg, Jürgen Zechner, Gudrun Stettner, Eva Kavelar, Plínio Prazeres, Katharina Riederer, André e Sílvia que tornaram a minha permanência em Graz gratificante e prazerosa, em especial a Klaus Thöni que durante toda a minha estadia me ajudou prontamente na realização do meu trabalho com muita dedicação.

A Daniela da Silva Chaves pela correção final do texto.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização e divulgação deste trabalho.





## Resumo

FREITAS, J.C.A. (2008). *Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Análise de Escavação em Túneis Utilizando Modelos Aproximados Bidimensionais*. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

O método dos elementos de contorno (MEC) surgiu como uma poderosa alternativa ao método dos elementos finitos (MEF) principalmente em casos como problemas de concentração de tensões ou onde o domínio se estende para o infinito. Em virtude das potencialidades já identificadas do MEC para a solução de problemas da geotecnia, em especial para problemas de túneis, este trabalho tem como objetivo desenvolver um programa que seja capaz de analisar as variáveis envolvidas na construção de túneis profundos através de um modelo numérico bidimensional baseado no MEC, implementando técnicas numéricas tais como: subelementação, técnica da sub-região e modelagem de inclusão e enrijecedores. O modelo numérico bidimensional foi calibrado para considerar o efeito tridimensional do problema de túneis no que se refere ao avanço da frente de escavação, para dois casos a saber: i) túneis sem suporte e ii) túneis com suporte. Os resultados mostraram grande precisão quando comparados com os resultados analíticos mesmo utilizando um número pequeno de elementos, provocando uma redução significativa no tempo de processamento se comparado com outros métodos. A técnica da subelementação produziu uma suavização nos resultados dos pontos internos localizados muito próximos do contorno. A técnica da sub-região, bem como a modelagem de inclusão e enrijecedores apresentaram resultados consistentes dando ao programa uma versatilidade maior. Na calibração dos parâmetros para a consideração do efeito tridimensional na escavação de túneis sem suporte, foi proposto o método da redução do carregamento com a construção do perfil de deformação longitudinal do túnel - LDP (Longitudinal Deformation Profile). Para a escavação de túneis com suporte foram propostos quatro métodos de análise: i) Método da redução do carregamento sobre o túnel, ii) Método da redução de rigidez do suporte, iii) Método do acréscimo do carregamento sobre o túnel e iv) Método do alívio de carga sobre o suporte. Todos esses métodos foram desenvolvidos a partir do modelo Kappa ( $\kappa$ ), elaborado neste trabalho a partir dos resultados encontrados na simulação numérica tridimensional realizado nos programas BEFE e BEFE++, e comparado com o modelo de Schwartz e Einstein. Por fim, o método para a construção do gráfico de deslocamento radial para túneis circulares suportados, considerando o atraso na instalação do suporte, utilizando um método numérico ou resultado analítico do estado plano de deformação se mostra como uma alternativa simples para análise do efeito tridimensional contido no problema de túneis.

Palavras-chave: Túneis; Método dos Elementos de Contorno; Método dos Elementos Finitos; Análise tridimensional; Suporte.



## Abstract

FREITAS, J.C.A. (2008). *Boundary Element Method Applied to the Analysis of Tunnel Using Two-dimensional Approach Models*. Master Thesis – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

The boundary element method (BEM) has appeared as a powerful alternative to the finite element method (FEM) mainly in the cases where a good accuracy is required, as for problems with strain or stress concentration and problems with domain extending to infinite. The objective of this work is to develop a formulation and the corresponding computational code to analyse the variables in a design of deep tunnels, using a improved BEM two-dimensional numerical model, in which the following techniques were implemented: sub-elementation, sub-region technique, reinforcements introduced by modifying locally the domain rigidity. The two-dimensional model was calibrated to take into account the three-dimensional effects appearing around the tunnel face advance for two cases: i) tunnel without support and ii) tunnel with support. The results showed good accuracy when compared with analytical results even when obtained by using coarse discretizations and therefore requiring less computer time in comparison with other numerical procedures. The sub-elementation technique has smoothed the results for internal points near the boundary. The sub-region technique and the reinforcement inclusions lead to accurate making the computer code reliable. For the parameter calibration to take into account the three-dimensional effects applied to non lined tunnels the method of loading reductions was proposed obtaining a tunnel longitudinal deformation profile - LDP. For the excavation of lined tunnels four methods of analysis were proposed: i) load reduction model, ii) reduction support stiffness model, iii) additional load model, and iv) decrease of lining load model. All these methods were developed from the kappa ( $\kappa$ ) model, developed in this work using three-dimensional results obtained by using the computational systems BEFE and BEFE++ and compared with the Schwartz-Einstein method. Finally the method used to build the radial displacement graphic for lined circular tunnels, taking into account the support insertion delay, using either a numerical method or plane strain analytical solutions, was developed.

Key-words: Tunnels; Boundary Element Method; Finite Element Method; three-dimensional Analysis; Support.



## Lista de Figuras

Figura 1.1	Malha utilizada para o problema de túneis .....	2
Figura 1.2	Malha em: a) elementos finitos, b) elementos de contorno e c) acoplamento MEC-MEF .....	3
Figura 3.1	Fator de redução do módulo de elasticidade do núcleo $E_n$ .....	10
Figura 3.2	Fator de Redução do carregamento $\lambda$ .....	11
Figura 3.3	Redução da rigidez do núcleo modificado .....	11
Figura 4.1	Deslocamento radial (Panet,1982) .....	14
Figura 4.2	Deslocamento radial $u_r(x)$ .....	15
Figura 4.3	Efeito do atraso na instalação do suporte .....	16
Figura 4.4	Comprimento $L_d$ no modelo de Schwartz e Einstein (1980) .....	17
Figura 4.5	Fator $\lambda_d$ de atraso na instalação do suporte .....	17
Figura 5.1	Campo de tensões não uniforme em coordenadas cartesianas .....	22
Figura 5.2	Deslocamentos em coordenadas cartesianas .....	25

Figura 5.3	Distribuição Delta de Dirac	29
Figura 6.1	Região infinita $\Omega^*$ contendo a região finita $\Omega$	36
Figura 6.2	Ponto fonte $s$ localizado no contorno inscrito no semicírculo	38
Figura 6.3	Ponto fonte $s$ localizado no contorno inscrito na semi-esfera	38
Figura 6.4	Geometria de um contorno com canto	39
Figura 6.5	Domínio infinito com uma cavidade	42
Figura 6.6	Domínio semi-infinito com uma cavidade	43
Figura 7.1	Discretização do contorno	46
Figura 7.2	Sistema de coordenadas do elemento constante	48
Figura 7.3	Sistema de coordenadas do elemento linear	49
Figura 7.4	Sistema de coordenadas do elemento linear descontínuo	49
Figura 7.5	Sistema de coordenadas do elemento quadrático	50
Figura 7.6	Sistema de coordenadas do elemento quadrático descontínuo	51
Figura 7.7	Elementos Lineares	51
Figura 7.8	Aproximação Linear	52

Figura 7.9	Incógnitas do problema elástico .....	54
Figura 7.10	Pontos de integração de Gauss para elementos bidimensionais .....	56
Figura 7.11	Pontos de Gauss sobre o elemento .....	57
Figura 7.12	Tensões no contorno .....	58
Figura 7.13	Desenho esquemático do processo de subelementação .....	60
Figura 7.14	Sub-regiões .....	61
Figura 8.1	Tipos de túneis .....	65
Figura 9.1	Túnel em rocha .....	73
Figura 9.2	Discretização .....	74
Figura 9.3	Tensões .....	75
Figura 9.4	Deslocamento radial .....	76
Figura 9.5	Tensão radial e tangencial .....	77
Figura 9.6	Deslocamento radial $\theta = 0$ .....	78
Figura 9.7	Deslocamento radial $\theta = 90$ .....	78
Figura 9.8	Discretização - MEC20 .....	79

Figura 9.9	Discretização - MEC40 .....	79
Figura 9.10	Túnel com pressão interna .....	80
Figura 9.11	Túnel em maciço rochoso com suporte .....	82
Figura 9.12	Discretização .....	83
Figura 9.13	Tensão radial - túnel com suporte .....	85
Figura 9.14	Deslocamento radial - túnel com suporte .....	85
Figura 9.15	Localização dos pontos internos .....	86
Figura 10.1	Fator de Redução do carregamento $\lambda$ .....	90
Figura 10.2	Malha em Elementos de Contorno .....	92
Figura 10.3	Tipos de elementos de contorno utilizados .....	93
Figura 10.4	Deslocamento radial para um conjunto de parâmetros físicos específicos .	94
Figura 10.5	Variação de $\lambda$ .....	95
Figura 10.6	Fator de Redução do carregamento para o túnel sem suporte .....	96
Figura 10.7	Túnel modelo .....	97
Figura 10.8	Representação esquemática das variáveis envolvidas na interação entre as	



duas estruturas, suporte e maciço respectivamente. ....	97
Figura 10.9 Diagrama Convergência-Confinamento .....	98
Figura 10.10 Curva característica do suporte trabalhando como uma estrutura isolada ..	100
Figura 10.11 Gráfico de variação de $U_e$ em relação a $\kappa$ .....	101
Figura 10.12 Gráfico de variação de $U_e$ em relação a $\kappa$ generalizado .....	101
Figura 10.13 Possíveis valores $U_i$ no gráfico de interação maciço-suporte .....	102
Figura 10.14 Elemento Finito tridimensional de 20 nós .....	103
Figura 10.15 Escavação seqüencial sem suporte .....	104
Figura 10.16 Malha completa .....	104
Figura 10.17 Malha usada na simulação numérica .....	105
Figura 10.18 Escavação seqüencial com suporte .....	106
Figura 10.19 Variação de $\beta_\kappa$ em relação a $L'_d/D$ .....	107
Figura 10.20 Gráfico Kappa .....	108
Figura 10.21 Túnel modelo de Schwartz-Einstein .....	108
Figura 10.22 Avaliação do método Kappa em relação a $L'_d$ .....	109

Figura 10.23	Avaliação do método Kappa em relação a $L_d$ .....	110
Figura 10.24	Casos simulados .....	111
Figura 10.25	Diagrama Convergência-Confinamento .....	113
Figura 10.26	Avaliação $L_d$ em relação a $L'_d$ .....	113
Figura 10.27	Diagrama Convergência-Confinamento para o método da redução do carregamento .....	114
Figura 10.28	Redução do carregamento .....	115
Figura 10.29	Fator de Redução do carregamento para o túnel com suporte .....	116
Figura 10.30	Diagrama Convergência-Confinamento para o método da redução de rigidez do suporte .....	117
Figura 10.31	Diagrama Convergência-Confinamento para o método do acréscimo do carregamento .....	118
Figura 10.32	Fator de Sobrecarga .....	119
Figura 10.33	Diagrama Convergência-Confinamento para o alívio de carga .....	120
Figura 10.34	Alívio da carga .....	120
Figura 10.35	Fator de alívio do carregamento para o túnel com suporte .....	121

Figura 10.36	Fator de alívio $\alpha_a$ em função do atraso na instalação do suporte ( $L'_d/D$ )	.. 122
Figura 10.37	Deslocamento radial para diferentes $L'_d/D$	..... 123
Figura 10.38	Deslocamento radial para diferentes $L'_d/D$ parametrizado em relação a $U_e$	124



## Lista de Tabelas

Tabela 7.1	Pontos de Gauss e grau do polinômio .....	55
Tabela 7.2	Coordenadas dos pontos de Gauss e pesos .....	56
Tabela 9.1	Tensão radial - túnel com pressão interna .....	81
Tabela 9.2	Deslocamento radial $10^{-4}m$ - túnel com pressão interna .....	81
Tabela 9.3	Deslocamento radial $10^{-4}m$ .....	83
Tabela 9.4	Tensão radial $kN/m^2$ .....	84
Tabela 9.5	Deslocamentos e tensões considerando o suporte infinitamente rígido .....	84
Tabela 9.6	Ponto de equilíbrio do sistema maciço-suporte .....	86
Tabela 9.7	Deslocamento radial $10^{-4}m$ : caso $k = 0,5$ .....	87
Tabela 9.8	Tensão radial $kN/m^2$ : caso $k = 0,5$ .....	87
Tabela 10.1	Casos modelados .....	94
Tabela 10.2	Casos simulados .....	112



## Lista de Símbolos

$\sigma_0$	Tensão geostática
$P_i$	Pressão Inicial
$e$	Espessura do suporte
$L'_d$	Atraso na instalação do suporte
$\kappa$	Constante Kappa: parâmetro adimensional referente as características físicas do problema
$U_r^s$	Deslocamento final do suporte trabalhando como uma estrutura isolada
$\beta_\kappa$	$U_i/U_r^f$
$L_d$	atraso na instalação do suporte para o modelo de Schwartz-Einstein





# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b> .....	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Revisão Bibliográfica</b> .....	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Métodos Numéricos para Análise Bidimensional de Túneis</b> .....	<b>9</b>
3.1	Introdução .....	9
3.2	Método da Redução de Rigidez do Núcleo .....	9
3.3	Método da Redução do Carregamento .....	10
3.4	Método da Redução de Rigidez do Núcleo Modificado .....	11
<b>4</b>	<b>Interação Maciço-Suporte para Túneis</b> .....	<b>13</b>
4.1	Introdução .....	13
4.2	Método Convergência-Confinamento Panet .....	14
4.3	Método Convergência-Confinamento Schwartz-Einstein .....	15
<b>5</b>	<b>Teoria da Elasticidade</b> .....	<b>19</b>
5.1	Introdução .....	19
5.2	Notação Indicial .....	20
5.3	Equações de Equilíbrio .....	22
5.4	Deformações .....	24
5.5	Equações de Compatibilidade .....	26
5.6	Relações Tensão-Deformação .....	27
5.7	Equações de Navier .....	28
5.8	Delta de Dirac .....	29

5.9	Solução Fundamental de Kelvin .....	29
5.10	Teorema da Reciprocidade de Betti .....	32
<b>6</b>	<b>Equações Integrais .....</b>	<b>35</b>
6.1	Introdução .....	35
6.2	Formulação das Integrais de Contorno .....	35
6.3	Equação Integral para Pontos do Contorno .....	37
6.4	Equações Integrais de Tensão para os Pontos Internos .....	40
6.5	Regiões Infinitas e Semi-Infinitas .....	41
<b>7</b>	<b>Método dos Elementos de Contorno .....</b>	<b>45</b>
7.1	Introdução .....	45
7.2	Funções de Interpolação .....	46
7.2.1	Função de Interpolação Constante .....	48
7.2.2	Função de Interpolação Linear .....	48
7.2.3	Função de Interpolação Quadrática .....	50
7.3	Discretização Numérica .....	51
7.4	Integração de Gauss .....	55
7.5	Processos de Integração .....	56
7.6	Tensões no Contorno .....	57
7.7	Subelementação .....	59
7.8	Técnica da Sub-região .....	60
<b>8</b>	<b>Técnica de Modelagem de Inclusão e Enrijecedores .....</b>	<b>65</b>
8.1	Introdução .....	65
8.2	Equação integral dos deslocamentos para pontos dentro do domínio e para pontos no contorno .....	66
8.3	Equação integral da tensão no domínio do enrijecedor .....	68

8.4	Equações algébricas .....	68
8.4.1	Considerando a ação do esforço normal .....	68
8.4.2	Considerando a ação do esforço normal e momento .....	70
<b>9</b>	<b>Exemplos de Validação .....</b>	<b>73</b>
9.1	Introdução .....	73
9.2	Determinação dos estados deformação/tensão em um túnel circular - sem pressão interna .....	74
9.3	Determinação dos estados deformação/tensão em um túnel circular - com pressão interna .....	78
9.4	Determinação dos estados deformação/tensão em um túnel circular - com suporte ...	81
<b>10</b>	<b>Calibração dos Parâmetros que Levam em Consideração o Efeito Tridimensional do Problema de Escavação .....</b>	<b>89</b>
10.1	Introdução .....	89
10.2	Escavação sem Suporte .....	89
10.2.1	Objetivo .....	90
10.2.2	Método da Redução do Carregamento .....	90
10.3	Escavação com Suporte .....	95
10.3.1	Objetivo .....	96
10.3.2	Estudo do Gráfico de Interação Maciço-Suporte .....	96
10.3.3	Descrição do Modelo de Escavação Sequencial .....	103
10.3.4	Determinando $U_i/U_r^f$ Considerando o Atraso no Suporte $L'_d$ .....	105
10.3.5	Comparação com o Modelo de Schwartz-Einstein .....	107
10.3.6	Estudo Comparativo entre $L_d$ e $L'_d$ .....	111
10.3.7	Métodos Propostos Para Análise do Túnel com Suporte Usando um Modelo Numérico Bidimensional .....	113

10.3.8 Construção do gráfico de deslocamento radial para túneis circulares com suporte utilizando um método numérico ou resultado analítico do estado plano de deformação .....	121
<b>11 Conclusões .....</b>	<b>125</b>
<b>Referências Bibliográficas .....</b>	<b>127</b>

# 1 Introdução

O Método dos Elementos de Contorno (BEM-Boundary Element Method) é uma técnica numérica geral que resolve equações integrais no contorno. Diferentemente do Método dos Elementos Finitos (FEM-Finite Element Method) que basicamente promove uma divisão no domínio de integração do problema considerado, passando de um meio contínuo para um meio discreto provendo uma discretização do domínio da integração criando uma rede de elementos finitos que cobre todo o domínio (ver Fig. 1.1(a),1.1(b)). No Método dos Elementos de Contorno (MEC) essa rede cobre somente o contorno, ou seja, no MEC, como nos demais métodos numéricos, a solução dos problemas físicos será calculada em pontos discretos, nós, agora definidos apenas sobre o contorno. Essa característica do método leva sempre a uma redução das dimensões dos problemas analisados, o que significa menor quantidade de dados de entrada, diminuição do tempo de processamento e menor área auxiliar para armazenamento das informações necessárias no processamento. Essa é uma característica básica do Método dos Elementos de Contorno que promove uma vantagem considerada em relação aos outros métodos, principalmente em relação ao Método dos Elementos Finitos (MEF) uma vez que este é ainda comparativamente um processo lento que necessita de definição e redefinição de malhas na peça ou domínio em estudo.

Segundo Brebbia e Dominguez (1992) o MEC tem surgido como uma poderosa alternativa ao MEF principalmente em casos como problemas de concentração de tensões ou onde o domínio se estende ao infinito. Portanto assim, existem domínios bem definidos onde o MEC atua de forma bastante eficiente, entre eles: mecânica da fratura, túneis, interação solo-estrutura, perfuração, análise acústica, análise de fluidos: plataformas marítimas, aeronáutica etc.

Um dos grandes feitos do MEC é que em problemas tridimensionais a discretização é requerida somente na superfície que contem o sólido e não em todo o seu volume, como em outros métodos. De acordo com Brebbia e Dominguez (1992) Engenheiros de corrosão tem usado o método para melhor projetar sistemas de proteção catódica para estruturas offshore, barcos e tubulações. Muita dessas estruturas são basicamente tridimensionais e a região de domínio onde elas se encontram se estende para o infinito. Conseqüentemente elas não poderiam ter

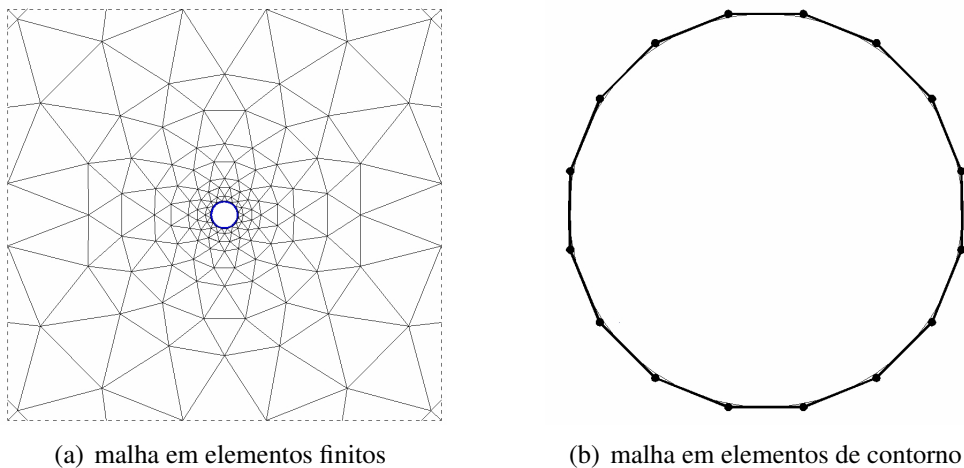


Figura 1.1: Malha utilizada para o problema de túneis

sido efetivamente analisadas antes do desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno. Em um modelo de proteção catódica seguramente o que interessa é a ação do mar ao redor da estrutura bem como a interface entre elas. Com uma análise sendo feita em MEF o problema necessitaria de uma subdivisão do domínio que cerca a estrutura, ou seja, de um domínio que tende para o infinito o que inviabilizaria qualquer processamento.

Apesar do MEC apresentar algumas vantagens sobre o MEF em muitos casos o MEF é ainda o mais apropriado como método de aproximação, principalmente em domínios heterogêneos onde é necessária a sua discretização para uma melhor resposta global do sistema, sem mencionar que MEC apesar de ser um método matematicamente mais elegante é um método que manipula equações que possuem uma dificuldade maior em sua formulação. Muitas vezes esse aspecto inibi a sua utilização como ferramenta numérica amplamente utilizada. Hoje muitos pesquisadores fazem acoplamentos entre os dois métodos, chamados de acoplamentos MEC-MEF, aproveitando assim as potencialidades de cada um (ver Fig. 1.2).

Em virtude das potencialidades já identificadas do método dos elementos de contorno para a solução de problemas da geotecnia, em especial para problemas de túneis, este trabalho tem como objetivo:

- desenvolver um programa que seja capaz de analisar as variáveis envolvidas na construção de túneis profundos através de um modelo numérico bidimensional baseado no método dos elementos de contorno;

- implementar no programa técnicas numéricas de refinamento: subelementação, técnica da sub-região e modelagem de inclusão e enrijecedores;

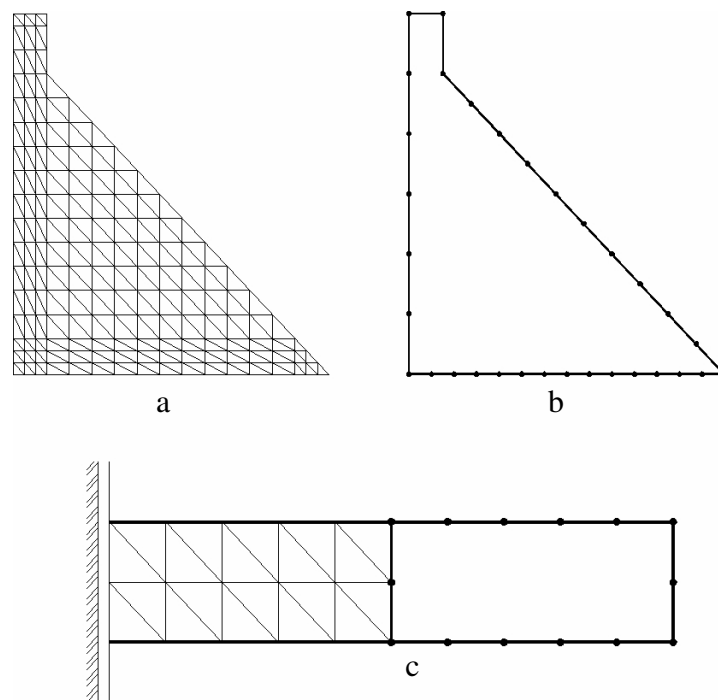


Figura 1.2: Malha em: a) elementos finitos, b) elementos de contorno e c) acoplamento MEC-MEF

- calibrar os parâmetros que levam em consideração o efeito tridimensional do problema de túneis no avanço da frente de escavação, para dois casos a saber: i) sem suporte e ii) com suporte.

- validar os resultados encontrados do método numérico com resultados analíticos.

Assim, o presente trabalho apresenta uma rápida revisão bibliográfica no segundo capítulo. No terceiro apresenta os métodos numéricos de análise bidimensionais para túneis: i) método da redução de rigidez do núcleo, ii) método da redução do carregamento e iii) método da redução de rigidez do núcleo modificado. No quarto capítulo está descrito o problema que envolve a interação maciço-suporte com a descrição do método da convergência-confinamento de Panet e o método de Schwartz-Einstein.

Os capítulos 5, 6, 7 e 8 discorrem do Método dos Elementos de Contorno. O capítulo 5 descreve os elementos da teoria de elasticidade necessários ao desenvolvimento do trabalho, até chegar as soluções fundamentais de Kelvin e teorema da reciprocidade de Betti. No capítulo 6 estão as equações integrais utilizadas para a formulação do MEC. No capítulo 7 trata especificamente do Método dos Elementos de Contorno. No final deste capítulo está descrita as técnicas de subelementação e sub-região. Finalmente no capítulo 8 contém a Técnica de Modelagem de inclusão e enrijecedores implementados no programa.

O capítulo 9 trás os exemplos de validação do modelo numérico bidimensional implementado, aplicado a análise de problemas de túneis; verificando: i) a potencialidade do modelo para análise bidimensional de túneis sem suporte e ii) a validação do modelo de sub-região para análise bidimensional de túneis com suporte.

O capítulo 10 trata especificamente dos parâmetros que levam em consideração o efeito tridimensional do problema de escavação. São propostos neste capítulo, a partir de um estudo criterioso, métodos para análise de túneis com suporte usando um modelo numérico bidimensional, principalmente no que se refere ao alívio das forças de superfície devido ao atraso na instalação do suporte. Por fim, na última seção do capítulo há uma descrição de um método de construção do gráfico de deslocamento radial para túneis suportados considerando o atraso na instalação do suporte.



## 2 Revisão Bibliográfica

Este capítulo representa uma breve revisão bibliográfica dos trabalhos com maior relevância, sendo explorado os temas específicos relacionados a métodos numéricos aplicado a análise de problemas que envolvem túneis.

Muitos são os trabalhos que utilizam os métodos numéricos para a análise de problemas que envolvem túneis. Kim e Eisenstein (2006) estudaram fatores de correção para uma melhor determinação dos carregamentos que atuam sobre o suporte, considerando o alívio na pressão provocado pelo atraso na instalação do suporte, bem como o acréscimo de pressão devido a plastificação do maciço. Os autores desse trabalho reviram o método de Schwartz e Einstein (1980a) e Schwartz e Einstein (1980b) que levam em consideração o atraso na instalação do suporte e plastificação do maciço através dos fatores  $\lambda_d$  e  $\lambda_y$  respectivamente, e propõem uma pequena alteração na equação que determina  $\lambda_d$  em virtude do processo de escavação seqüencial. Os fatores  $\lambda_d$  e  $\lambda_y$  são determinados pela formulação de Schwartz e Einstein (1980b) que através de equações empíricas definem a sua variação. As equações foram definidas a partir dos resultados das simulações realizadas através de um modelo 3-D em elementos finitos. O fator  $\lambda_d$  representa fisicamente o decréscimo de carregamento sobre o túnel provocado pelo atraso na instalação do suporte e  $\lambda_y$  representa o acréscimo de carregamento provocado pela plastificação do maciço.

Karakus (2007) avaliou métodos de análises bidimensionais, no estado plano de deformação, de túneis através de elementos finitos levando em consideração o efeito tridimensional do problema. Foram avaliados os métodos convergência-confinamento (PANET; GUENOT, 1982), método GAP (ROWE; LO; KACK, 1983) (LEE; ROWE, 1991), o método do disco (SCHIKORA; OSTERMEIER, 1988), o método do amolecimento progressivo (SWOBODA, 1979) (SWOBODA; MARENCE; MADER, 1994), o método da perda de volume controlado (POTTS; ZDRAVKOVIĆ, 2001) e o método da elasticidade hipotética (HME) (POWELL; BEVERIDGE, 1997) (KARAKUS; FOWELL, 2005). De acordo com as análises realizadas os melhores resultados foram encontrados para o método convergência-confinamento usando elementos de viga para modelar o suporte.

Nam e Bobet (2007) estudaram, através do método dos elementos finitos, deformações radiais influenciadas pelo escoamento de águas subterrâneas em túneis circulares profundos. O objeto principal desse artigo foi estudar os efeitos da infiltração nas deformações radiais em túneis profundos. Os autores concluíram que a infiltração tem uma influência significativa na deformação radial aumentando a sua magnitude e distribuição na frente e na própria face de escavação, o mesmo não ocorrendo na região atrás da face.

A resposta elastoplástica de maciços rochosos, utilizando o critério de ruptura de Hoek-Brown, foi estudado por Carranza-Torres e Fairhurst (1999). Este trabalho ilustra a relação entre os parâmetros de Hoek-Brown e a resposta mecânica de obras subterrâneas. São construídas curvas de reação do maciço para projetos de túneis cilíndricos, utilizando o método da convergência-confinamento. É discutido um caso de análise de estabilidade de cavidades esféricas, produzidos por explosões nucleares no maciço ocorridos na Polinésia Francesa.

Bernaude e Rousset (1996) propõe um 'novo' método implícito para análise de túneis baseado na interação maciço-suporte. Os autores do trabalho propõem um novo método denominado de NIM (New Implicit Method) que usa os mesmos princípios utilizados pelo método da convergência-confinamento. O desenvolvimento deste método é baseado nos resultados de um túnel axissimétrico modelado em elementos finitos que leva em consideração o efeito tridimensional do problema de túneis.

Em um outro trabalho, que demonstra as potencialidades do Método dos Elementos de Contorno, Beer e Dünser (2000) utilizam o Método dos Elementos de Contorno na análise de problemas de túneis usando células internas e multiregiões (sub-regiões) aplicado a problemas elastoplástico e viscoplástico envolvendo a escavação seqüencial. O trabalho identificou grandes vantagens desse método em relação ao Método dos Elementos Finitos. Entre eles: tempo de processamento, precisão nos resultados e remodelagem da malha.

Gomes (2006) realizou análises tridimensionais em túneis considerando o comportamento dependente do tempo na interação maciço-suporte. Neste trabalho o autor obteve expressões genéricas dos esforços de compressão e flexão em túneis profundos, considerando coeficientes de empuxo em repouso  $k \neq 1$ . As análises consideraram ainda o endurecimento do concreto ao longo do eixo do túnel. Mostrou-se, por meio de análises numéricas tridimensionais mais complexas e bem definidas, que a solução proposta por Schwartz e Einstein (1980a) para levar em conta o efeito do atraso de instalação do suporte no mecanismo de transferência de carga do maciço para a estrutura incorre em erros significativos ao não levar em conta a dimensão do lance de escavação, e a rigidez do maciço na região da frente de escavação do túnel.

Outros trabalhos de relevância são encontrados em Galli, Grimaldi e Leonardi (2004); Sterpi e Gioda (2007); Augarde e Burd (2001); Kontogianni e Stiros (2002); Graziani, Boldini e Ribacchi (2005); Pan e Hudson (1988); Eberhardt (2001); Alonso et al. (2003); Beer, Watson e Swoboda (1987).

Um trabalho importante daqueles citados é o trabalho de Karakus (2007), nele está contido todas as referências de relevância para o entendimento claro desse trabalho, bem como uma revisão bibliográfica completa sobre o assunto.



## 3 Métodos Numéricos para Análise Bidimensional de Túneis

### 3.1 Introdução

Modelagem numérica para a análise de construção de túneis se iniciou com um modelo bidimensional chamado de Modelo de Carregamento Completo. O Modelo de Carregamento Completo é baseado em um suporte de proteção rígido sobre o túnel que sofria a ação de um campo de tensões iniciais. Assim protegido, o suporte primário (concreto projetado) era erigido sem tensão. Somente, então, era removido o suporte de proteção imaginário, com a pressão estática sendo completamente redistribuída no concreto projetado. Este tipo de modelo é conservador sendo favorável a segurança. Entretanto, ele não pode ser usado em túneis com grande sobrecarga (SWOBODA, 1979).

Por esta razão, foram desenvolvidos três modelos bidimensionais que levam em consideração o efeito tridimensional do alívio de deformação na frente de escavação. Os três métodos amplamente usados para simular este efeito, são:

- Método da Redução da Rigidez do Núcleo;
- Método da Redução do Carregamento;
- Método da Redução de Rigidez do Núcleo Modificado.

### 3.2 Método da Redução de Rigidez do Núcleo

O método da Redução da Rigidez do Núcleo usa um miolo, ou seja, um núcleo de suporte com um módulo de elasticidade modificado. Para simular o efeito dos diferentes estágios da escavação o campo de tensões é aplicado sobre o miolo que, dependendo do estágio da escavação, possui um módulo de elasticidade específico.

A modificação do módulo de elasticidade original,  $E$ , para o módulo de elasticidade

do núcleo,  $E_n$ , é dado por:

$$E_n = \alpha_a E \quad (3.1)$$

Quando o valor de  $\alpha_a$  é infinito,  $\alpha_a = \infty$ , o módulo de elasticidade do núcleo é infinito e não há deslocamento radial nesse estágio, portanto a seção simulada se encontra na frente da face de escavação. Quando o valor de  $\alpha_a$  é igual a zero,  $\alpha_a = 0$ , o módulo de elasticidade do núcleo é zero e o deslocamento radial é total (cálculo de túnel aberto). Neste caso a seção simulada se encontra atrás da face de escavação.

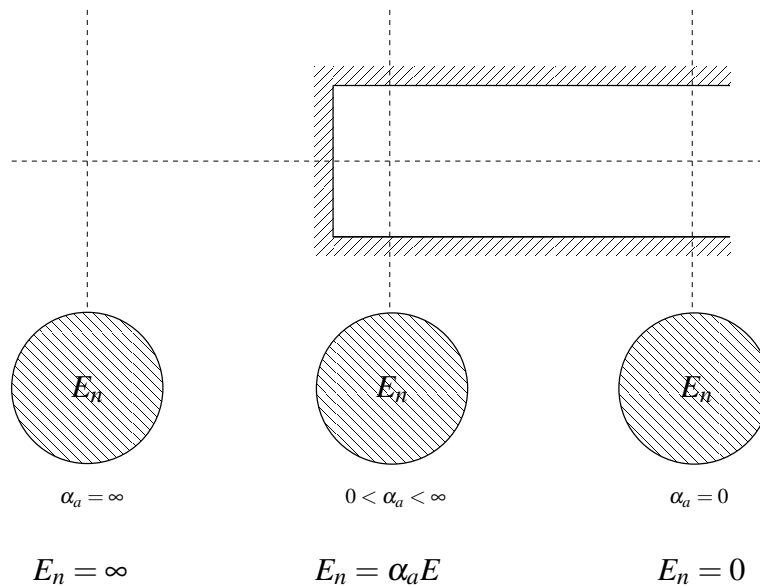


Figura 3.1: Fator de redução do módulo de elasticidade do núcleo  $E_n$

### 3.3 Método da Redução do Carregamento

No método da Redução do Carregamento, principalmente usado na Alemanha, o carregamento é inteiramente aplicado. Ao mesmo tempo, contudo, um carregamento  $(1 - \lambda)\sigma_0$  é aplicado no suporte, assim o carregamento efetivo é  $-\lambda\sigma_0$ .

Quando o valor de  $\lambda$  é igual a zero,  $\lambda = 0$ , o alívio é nulo e não há deslocamento radial nesse estágio, a seção simulada se encontra na frente da face de escavação. Quando o valor de  $\lambda$  é igual a um,  $\lambda = 1$ , o alívio é total e nesse estágio a seção simulada se encontra atrás da face de escavação.

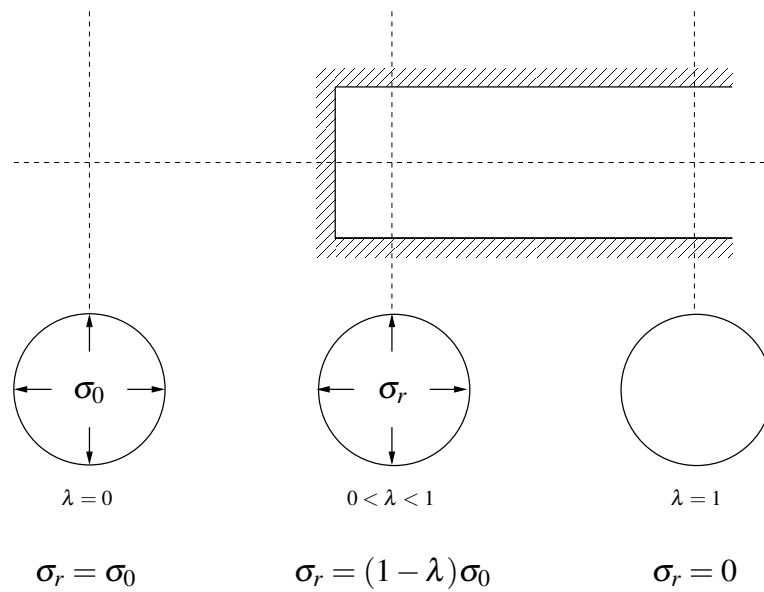


Figura 3.2: Fator de Redução do carregamento  $\lambda$

### 3.4 Método da Redução de Rigidez do Núcleo Modificado

O método da Redução de Rigidez do Núcleo Modificado é uma síntese dos dois outros métodos anteriormente descritos. Neste método o fator de descarregamento é aplicado de forma suplementar ao fator de redução do módulo de elasticidade do núcleo.

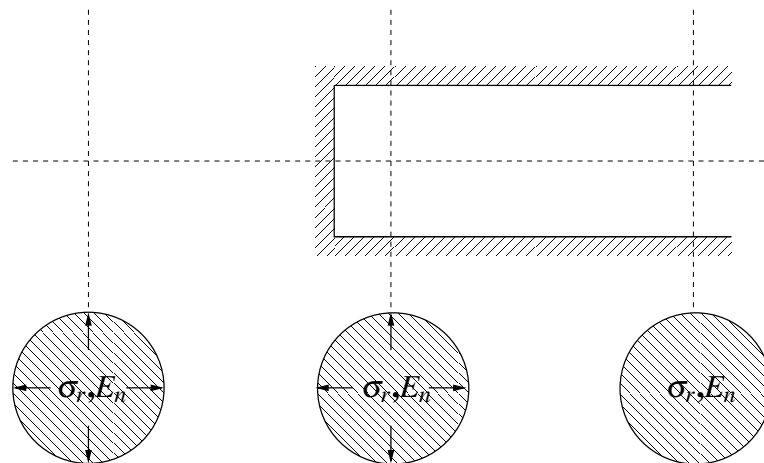


Figura 3.3: Redução da rigidez do núcleo modificado





## 4 Interação Maciço-Suporte para Túneis

### 4.1 Introdução

Neste capítulo serão tratados os métodos utilizados para estimar o carregamento sobre o suporte a ser considerado no projeto de túneis. A estimativa da real carga atuante sobre o suporte é um dos grandes assuntos ainda não totalmente solucionados e, portanto, por conta de sua importância é objeto bastante estudado por diversos autores. O problema não é facilmente resolvido devido a incertezas que cercam as condições do maciço, a redistribuição de tensões provocado pela deformação do solo antes e depois da instalação do suporte e ainda a influência dos diferentes procedimentos construtivos que podem ser adotados.

Os carregamentos podem ser calculados usando diferentes métodos existentes para o projeto de suportes em túneis. Esses métodos podem ser divididos em quatro grupos: modelos empíricos e semi-empíricos, modelos de placa e anéis, modelos de molas e anéis, e modelos numéricos.

Neste capítulo serão descritos os modelos mais utilizados. Eles levam em consideração uma das três características fundamentais de um bom método de previsão de carregamento sobre o suporte:

- i - o método deve ser simples para ser usado. Simples o necessário para aplicações práticas;
- ii - o método deve considerar o alívio de tensão que ocorre antes da instalação do suporte;
- iii - o método deve levar em conta o comportamento plástico do maciço e suporte, bem como o seu comportamento elástico;

Existem vários métodos propostos por vários autores. Nesse trabalho serão mostrados dois: i) o método da convergência-confinamento proposto por Panet, por sua simplicidade e ii) o método de Schwartz-Einstein por possuir as três características fundamentais de um bom

método, anteriormente mencionado.

## 4.2 Método Convergência-Confinamento Panet

O método da convergência-confinamento, introduzido por Panet e Guenot em 1982, é um dos métodos utilizados para considerar o efeito tridimensional no avanço da frente de escavação assumindo um estado plano de deformação. De acordo com esse método, a tensão radial,  $\sigma_r$ , na borda do túnel simulado é dado por:

$$\sigma_r = (1 - \lambda)\sigma^0 \quad (4.1)$$

$$\lambda = \frac{u_r(x)}{u_r^\infty} \quad (4.2)$$

$$u_r^\infty = \frac{1 + \nu}{E}\sigma^0 r \quad (4.3)$$

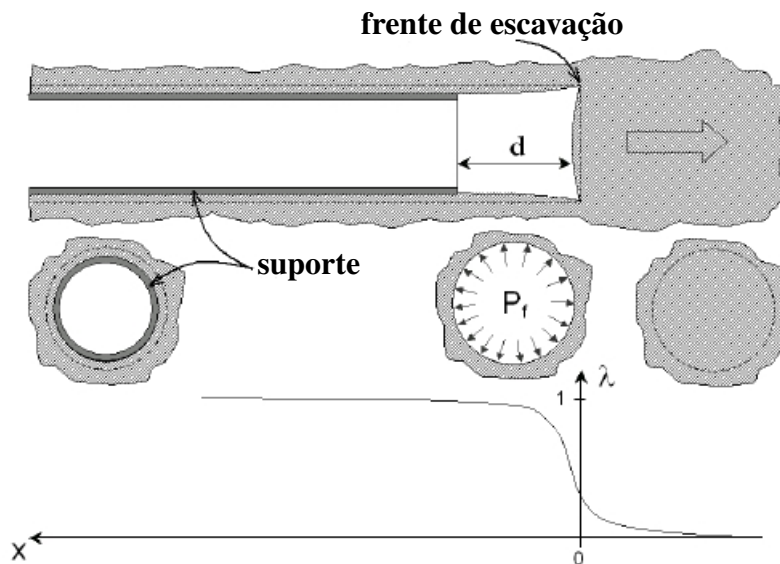


Figura 4.1: Deslocamento radial (Panet,1982)

onde  $r$  é o raio do túnel e o parâmetro  $\lambda$  é o fator de redução da tensão inicial ( $\sigma^0$ ) e varia entre 0 e 1. O problema bidimensional de túneis é ilustrado na fig. 4.1. No problema de estado plano de deformação, que ocorre na seção transversal, uma força de superfície equivalente a uma tensão radial,  $\sigma_r$ , é aplicado na borda do túnel e decresce de uma tensão inicial ( $\sigma^0$ )

até zero, no caso de um túnel sem suporte (KARAKUS, 2007).

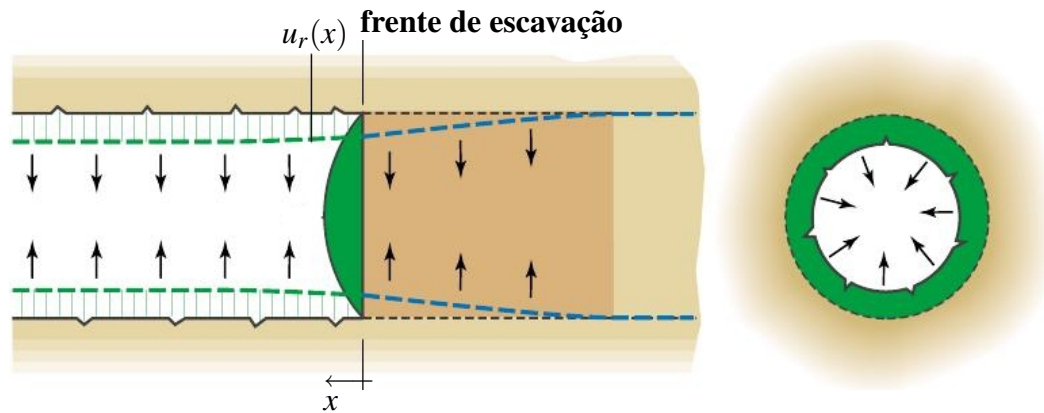


Figura 4.2: Deslocamento radial  $u_r(x)$

Na eq. 4.2,  $u_r(x)$  é o componente radial do deslocamento a uma distância  $x$ , positivo atrás da face de escavação e negativo a frente,  $u_r^\infty$  é o deslocamento radial a uma distância infinita da face, no sentido positivo do eixo  $X$ . Plotando os valores de  $\lambda$  versus a distância em relação à face do túnel, parametrizada em relação diâmetro, pode-se encontrar o fator de tensão inicial que age sobre a face do túnel. Aplicando este fator em uma análise de estado plano de deformação é possível determinar a deformação radial. Entretanto, o campo de aplicação da metodologia de Panet é restrita às seguintes condições:

- maciço que possui comportamento elástico, isotrópico e homogêneo; pressão hidrostática sobre o maciço;
- suporte elástico, homogêneo e circular.

### 4.3 Método Convergência-Confinamento Schwartz-Einstein

Einstein e Schwartz (apud KIM; EISENSTEIN, 2006) apresentaram uma solução fechada analítica para a estimativa dos carregamentos sobre o suporte, soluções que dependem principalmente do módulo de rigidez do suporte e taxa de tensão no local da escavação. O método de Einstein e Schwartz por sua simplicidade tem sido largamente usado na prática de construção de túneis. Entretanto, o método original de Einstein e Schwartz superestima o carregamento sobre o suporte porque o método é calculado baseado na pressão total exercida sobre o suporte desconsiderando o alívio na tensão provocado pelo atraso na instalação do suporte. Isto foi corrigido por Schwartz e Einstein (1980a) e Schwartz e Einstein (1980b).

Schwartz e Einstein (1980a) incluíram em sua solução analítica fechada original o alívio no carregamento sobre o suporte devido ao atraso em sua instalação e o acréscimo de carregamento devido a plastificação do maciço. Esses fatores foram denominados de fator de atraso na instalação do suporte  $\lambda_d$  e fator de plastificação  $\lambda_y$ . O fator de atraso na instalação do suporte pode ser expresso como:

$$\frac{P'_s}{P_s} = \frac{U_f^N - U_i}{U_f^N} = \lambda_d \quad (4.4)$$

onde  $P_s$  é o carregamento sobre o suporte obtido da análise em estado plano de deformação como sugerido por Einstein e Schwartz (1979) e  $P'_s$  é o carregamento sobre o suporte reduzido devido ao efeito de atraso na instalação do suporte como mostrado na fig. 4.3.

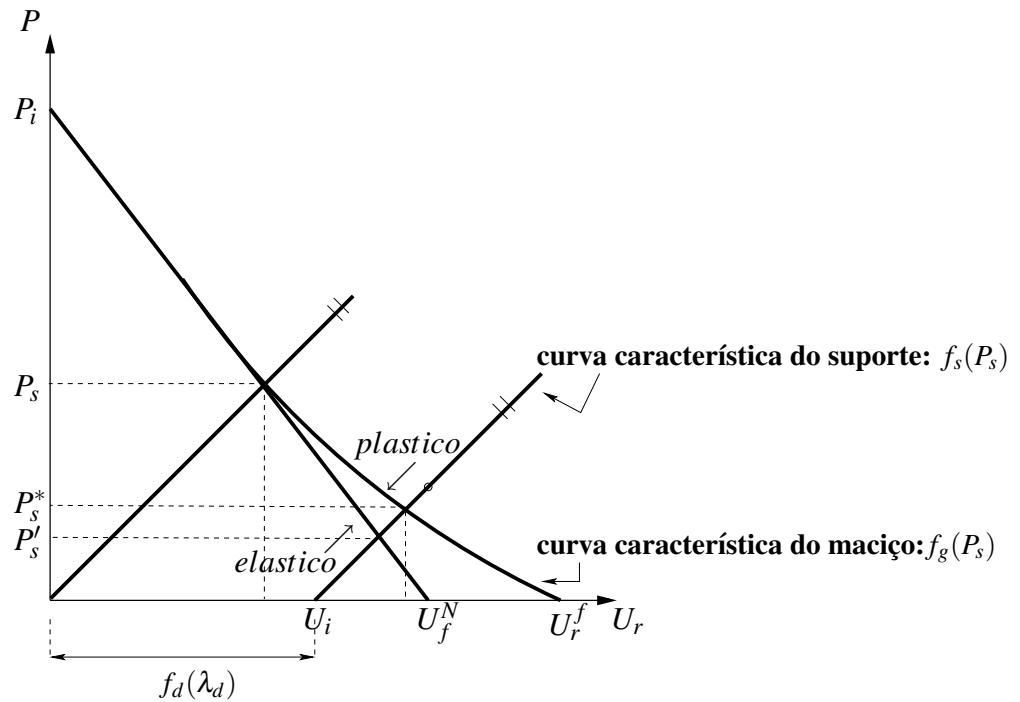


Figura 4.3: Efeito do atraso na instalação do suporte

Na fig. 4.3  $U_i$  é o deslocamento no maciço ocorrido antes da instalação do suporte,  $U_r^f$  é o deslocamento radial final no maciço caso não seja feita a instalação do suporte, considerando que o maciço sofre uma deformação plástica.  $U_f^N$  é o deslocamento final do maciço atrás da frente de escavação quando este sofre uma deformação elástica, ou seja,  $U_f^N$  é o resultado da análise do estado plano de deformação, caracterizado como o deslocamento em um ponto  $x \rightarrow \infty$  atrás da frente de escavação. O fator  $\lambda_d$  foi obtido através de uma análise utilizando o Método dos Elementos Finitos. A distância  $L_d$  é definida como a distância entre a face do túnel e o ponto médio do passe de instalação do suporte como mostrado na fig. 4.4.

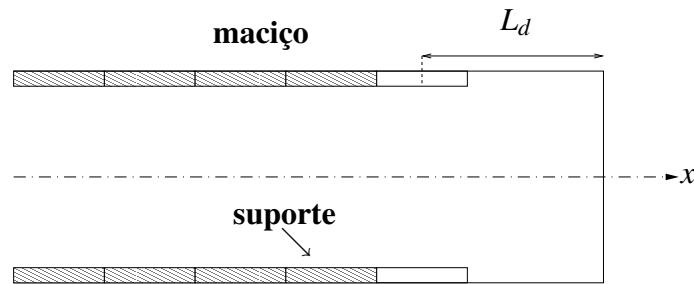


Figura 4.4: Comprimento  $L_d$  no modelo de Schwartz e Einstein (1980)

A fig. 4.5 mostra a relação entre  $\lambda_d$  e o comprimento no atraso da instalação do suporte normalizado,  $L_d/r$ , determinado através dos resultados obtidos de uma análise axisimétrica em elementos finitos usando valores de  $L_d/r$  de 0,25, 0,75 e 1,25 (SCHWARTZ; EINSTEIN, 1980a apud KIM; EISENSTEIN, 2006). A relação pode ser expressa como:

$$\lambda_d = 0,98 - 0,57(L_d/r) \quad (4.5)$$

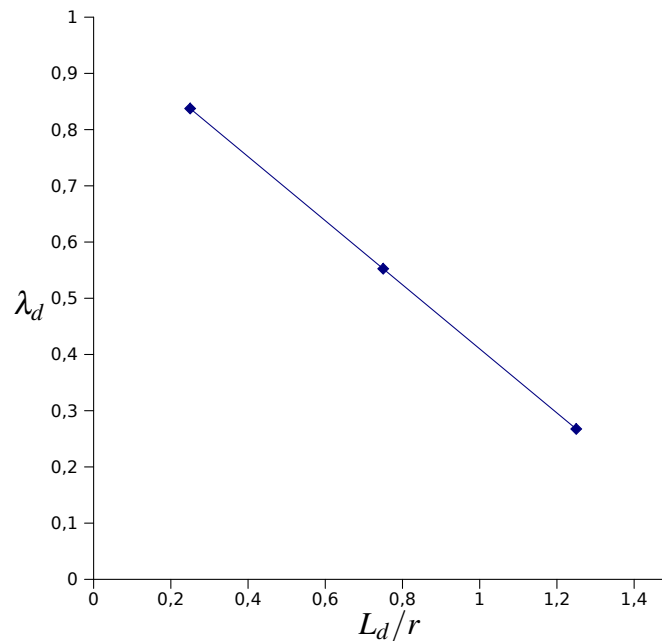


Figura 4.5: Fator  $\lambda_d$  de atraso na instalação do suporte

onde  $r$  é o raio do túnel. Schwartz e Einstein sugeriu não usar a eq. 4.5 para casos em que  $L_d/r$  é menor que 0,15 e maior que 1,5.

O equilíbrio na pressão sofrida pelo suporte considerando que o maciço deforma plasticamente, deve satisfazer a equação:

$$f_g(P_s) - f_s(P_s) - f_d(\lambda_d) = 0 \quad (4.6)$$

Como mostrado na fig. 4.3,  $f_g(P_s)$  é a curva característica do maciço e  $f_s(P_s)$  é a curva característica do suporte. O  $f_g(P_s)$  pode ser obtido de qualquer modelo padrão que considere uma plasticidade axisimétrica para o problema de túneis. Schwartz e Einstein (1980a) usaram para a determinação de  $f_g(P_s)$  o critério de plastificação de Mohr-Coulomb sem variação de volume na zona de plastificação.  $f_s(P_s)$  é a curva característica do suporte e pode ser expressa, para um suporte elástico-linear, como:

$$f_s(P_s) = \frac{P_s r^2 (1 - \nu_s^2)}{E_s A_s} \quad (4.7)$$

onde  $\nu_s$  é o coeficiente de Poisson,  $E_s$  é o módulo de elasticidade do suporte e  $A_s$  é área da seção transversal.  $f_d(\lambda_d)$  é o deslocamento da curva característica do suporte devido ao atraso na instalação do suporte.  $f_d(\lambda_d)$  pode ser expresso como:

$$f_d(\lambda_d) = \frac{Pr(1 - \nu)}{E} (1 - \lambda_d) \quad (4.8)$$

Se não existe atraso na instalação do suporte,  $\lambda_d = 1$  e  $f_d(\lambda_d)$  é igual a zero. O fator de plastificação do maciço  $\lambda_y$  é diretamente dependente da pressão que é exercida sobre o maciço e indiretamente dependente da rigidez e atraso na instalação do suporte. Para calcular  $\lambda_y$ , a eq. 4.6 é resolvida duas vezes. Primeiro,  $P_s^*$  é determinado para o caso onde o maciço tem um comportamento plástico. Segundo,  $P_s'$  é obtido para caso onde o maciço tem um comportamento elástico. O fator de plastificação  $\lambda_y$  do maciço é, portanto, a razão entre  $P_s^*/P_s'$ . Assim, o esforço de compressão no suporte,  $T$ , reduzido pelo efeito do atraso na instalação do suporte é dado por:

$$T = \lambda_d \lambda_y T_1 \quad (4.9)$$

onde  $T_1$  é o esforço básico de compressão sobre o suporte calculado pela solução analítica de Einstein e Schwartz (1979).

## 5 Teoria da Elasticidade

### 5.1 Introdução

Neste capítulo serão abordadas as equações básicas que darão sustentação ao Método dos Elementos de Contorno, aplicado a análise de problemas bidimensionais no campo da teoria da elasticidade. Para tanto, é necessário admitir algumas hipóteses simplificadoras, a saber:

1- os corpos que suportam a ação de forças externas são perfeitamente elásticos, ou seja, um corpo ao sofrer uma deformação devido à ação de uma força externa, retorna a sua forma indeformada quando essa ação deixa de atuar;

2- é admitido que a matéria de um corpo elástico é homogênea, ou seja, todo o seu volume é preenchido de forma que qualquer elemento infinitesimal do corpo possui as mesmas propriedades físicas específicas que caracterizam esse material;

3- o material elástico também é considerado isotrópico, ou seja, suas propriedades elásticas são as mesmas em todas as direções.

Os materiais encontrados na natureza estão longe de se comportarem dessa forma, entretanto, para as aplicações em engenharia, a experiência mostra que as soluções da teoria da elasticidade baseada nas hipóteses da homogeneidade e da isotropia, podem ser usadas em uma grande variedade de problemas sem grandes penalizações nos resultados (SECHLER, 1952).

Este capítulo se inicia com uma revisão das equações básicas da elasticidade linear, através dos itens dispostas ao longo do capítulo e nomeadas como: equações de equilíbrio, equações de deformação, equações de compatibilidade e relação tensão/deformação. Um item referente a notação indicial se faz necessária e antecede a todas aquelas.

Em seguida, como arcabólso para a introdução do Método dos Elementos de Contorno, foi acrescentado neste mesmo capítulo as equações de Navier, uma explicação sucinta sobre o delta de Dirac, uma seção dedicada as equações da solução fundamental de Kelvin que é aplicado a problemas da elasticidade e finalmente a última seção descreve o teorema da

reciprocidade de Betti.

## 5.2 Notação Indicial

Considere símbolos que são caracterizados por um ou mais índices que podem ser tanto sobrescrito como subscrito, como  $A_i, B^i, A_{ij}, B^i_j$ , etc. Algumas vezes é necessário decidir a ordem dos índices quando uma variável qualquer é definida usando índices sobrescritos e subscritos juntos, por exemplo, quando escreve-se  $A^i_j$ , o ponto antes do  $j$  indica que  $j$  é o segundo índice e  $i$  é o primeiro.

Os índices Latinos são representados por 1,2,3. Assim,  $A^i$  representa algum dos três elementos  $A^1, A^2, A^3$ , e  $A_{ij}$  representa algum dos nove elementos  $A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33}$ .

Sistemas de elementos que, como  $A^i$ , dependem somente de um índice, são chamados de sistemas de primeira ordem, os seus termos  $A^1, A^2, A^3$  são chamados de componentes do sistema. Sistemas de primeira ordem possuem duas formas características de se apresentarem:

$$A^i, B_i \quad (5.1)$$

Sistemas de segunda ordem dependem de dois índices e podem se apresentar de três formas:

$$A_{ij}, A^i_j \text{ ou } A^{ij}, A^i_j \quad (5.2)$$

Similarmente, o mesmo ocorre aos sistemas de 3, 4, etc ordens, chamados de sistemas de ordem superior. O elemento  $\phi$ , que não possui índice, é chamado um sistema de ordem zero.

Expressões que consistem de um somatório são formados a partir de uma convenção. Quando os índices aparecem repetidos, eles representam o somatório dos componentes daquele sistema. Os exemplos abaixo ilustram esta conversão:

$$\begin{aligned} A^i B_i &= \sum_{i=1}^3 A^i B_i = A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 \\ A^i_i &= \sum_{i=1}^3 A^i_i = A^1_1 + A^2_2 + A^3_3 \end{aligned} \quad (5.3)$$



$$\begin{aligned}
A_{ij}x^i x^j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ij}x^i x^j = & A_{11}x^1 x^1 + A_{12}x^1 x^2 + A_{13}x^1 x^3 + \\
& + A_{21}x^2 x^1 + A_{22}x^2 x^2 + A_{23}x^2 x^3 + \\
& + A_{31}x^3 x^1 + A_{32}x^3 x^2 + A_{33}x^3 x^3
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Desde de que os índices permaneçam iguais é possível substituir um particular índice, identificado por um letra qualquer, por qualquer outro que o valor da expansão continua inalterado:

$$A^i B_i = A^j B_j \tag{5.5}$$

Um significado especial é dado ao símbolo  $\delta_{ij}$ , chamado de delta de Kronecker. O delta de Kronecker tem os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= 0 \quad (i \neq j) \\
\delta_{ij} &= 1 \quad (i = j)
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Dessa forma tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} &= 0, \\
\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} &= 1
\end{aligned} \tag{5.7}$$

O delta de Kronecker é também algumas vezes utilizado para substituir um operador, por exemplo:

$$\delta_{ij} a_j = a_i, \quad \delta_{ik} a_{ij} = a_{kj} \tag{5.8}$$

Pode-se também introduzir uma convenção para as derivadas parciais de uma função em relação a variável independente representado através de uma vírgula. Por exemplo,

$$A_{,i} = \frac{\partial A}{\partial \theta_i} \tag{5.9}$$

$$A_{jk,i} = \frac{\partial A_{jk}}{\partial \theta_i}$$

Textos que trazem mais detalhes da notação indicial são: (GREEN; ZERNA, 1968), (BEER, 2001), (BANERJEE, 1994), (HARTMANN, 1989) e (KANE, 1994).

### 5.3 Equações de Equilíbrio

Considere um elemento infinitesimal, de um corpo que possui um comportamento elástico, com dimensões  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ . As tensões normais e de cisalhamento atuam nesse elemento como indicado na fig. 5.1, onde também aparecem as variações dessas tensões ao longo dos eixos de coordenadas. Por exemplo, no plano  $XZ$ , passando na origem, existe a ação das tensões  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{zx}$ , enquanto no plano paralelo a uma distância  $dx$  da origem existirá a ação da mesma tensão acrescentado uma variação, nomeado como:

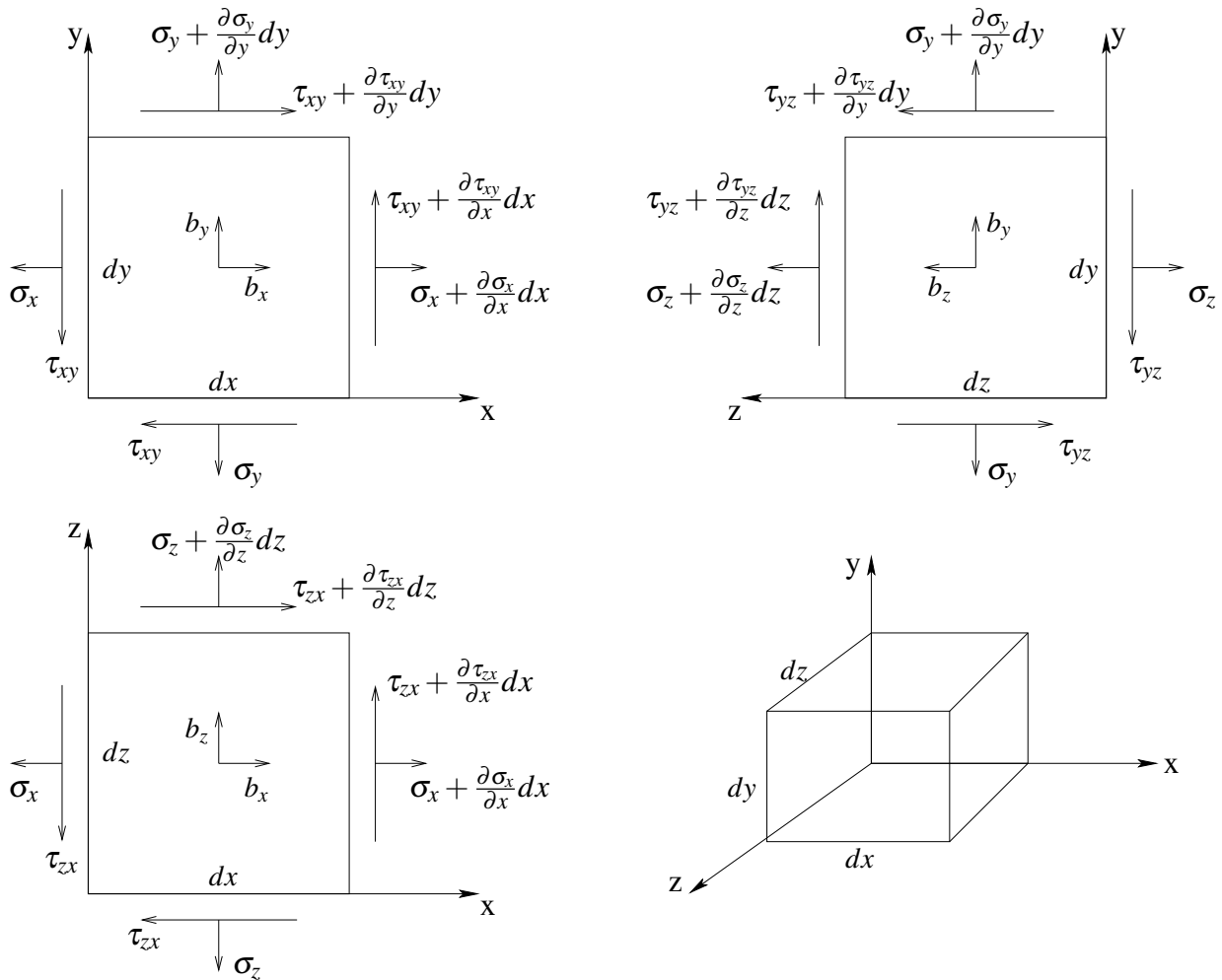


Figura 5.1: Campo de tensões não uniforme em coordenadas cartesianas

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \quad \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx \quad (5.10)$$

respectivamente. Em adição as tensões apresentadas, pode-se considerar as forças de corpo, gravidade ou inércia, no equilíbrio do elemento. Essas são nomeadas por  $b_x$ ,  $b_y$  e  $b_z$ , agindo nas direções dos três eixos coordenados. Essas forças de corpo tem como dimensão força por unidade de volume.

Escrevendo-se as equações para estabelecer o equilíbrio nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , tem-se:

$$\begin{aligned}
 \Sigma F_x &= b_x dx dy dz + \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz \\
 &\quad + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{xy} dx dz \\
 &\quad + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy = 0 \\
 \\
 \Sigma F_y &= b_y dx dy dz + \left( \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy \right) dx dz - \sigma_y dx dz \\
 &\quad + \left( \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{yz} dx dy \\
 &\quad + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{xy} dy dz = 0 \\
 \\
 \Sigma F_z &= b_z dx dy dz + \left( \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dx dy - \sigma_z dx dy \\
 &\quad + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{zx} dy dz \\
 &\quad + \left( \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yz} dx dz = 0
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Trabalhando-se com essas equações e fatorando o termo comum  $dx dy dz$ , elas se reduzem a:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + b_x &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + b_y &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z &= 0
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Essas equações são chamadas de equações de equilíbrio para um estado de tensões não uniforme nas três direções. Se não existe a ação das forças de corpo, as equações se reduzem a:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= 0 \\
 \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

e, para o caso bidimensional, as equações de equilíbrio se tornam, com a ação das forças de corpo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + b_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + b_y &= 0\end{aligned}\tag{5.14}$$

e, se as forças de corpo não estão presentes,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0\end{aligned}\tag{5.15}$$

Por fim, as equações de equilíbrio podem também ser representadas em notação indicial como:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0\tag{5.16}$$

## 5.4 Deformações

Considere a figura bidimensional representada no plano cartesiano da fig. 5.2. Considere um quadrado como sendo um elemento infinitesimal do sólido constituído de um material que possui um comportamento elástico no plano  $XY$  e sujeito a um campo de tensões bidimensional. Esse elemento infinitesimal sofrerá deformações como mostrado na figura. Os deslocamentos na direção  $x$  serão denotados por  $u$  e na direção  $y$  por  $v$ . Para o caso tridimensional, os deslocamentos na direção  $z$  serão denotados por  $w$ . Da fig. 5.2 pode-se ver que:

$$\begin{aligned}u_1 &= u + \frac{\partial u}{\partial x} & v_1 &= v + \frac{\partial v}{\partial x} \\ u_2 &= u + \frac{\partial u}{\partial y} & v_2 &= v + \frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}\tag{5.17}$$

e que o novo comprimento do lado  $a$  é dado por:

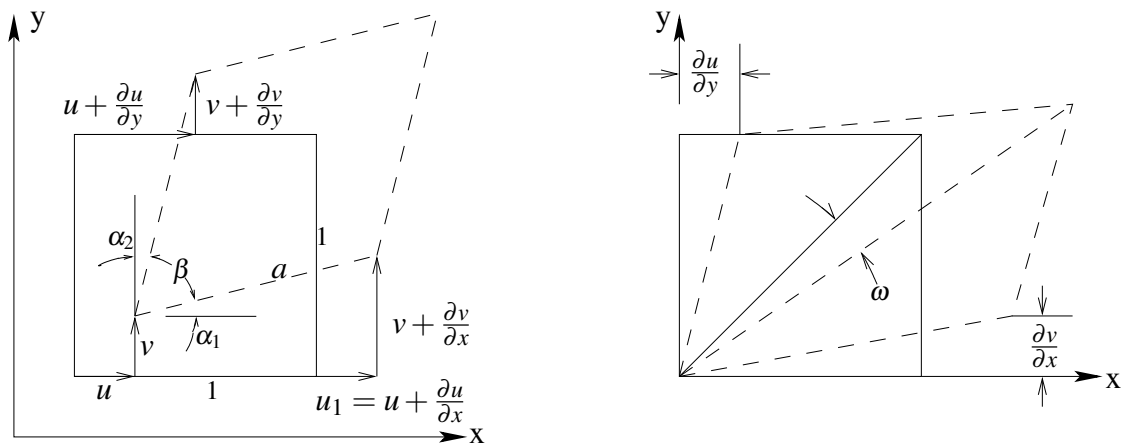


Figura 5.2: Deslocamentos em coordenadas cartesianas

$$a^2 = \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \quad (5.18)$$

Expandindo-se a eq. 5.18 e desprezando-se os termos de ordem superior da expansão, por conta da hipótese de pequenas deformações, a eq. 5.18 então se reduz:

$$a = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.19)$$

A deformação, dado pela razão entre a variação sofrida pelo lado do quadrado ( $\Delta a$ ) e  $a$ , na direção  $x$  é dado por:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.20)$$

Da mesma forma pode-se encontrar a deformação unitária na direção  $y$ .

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (5.21)$$

Finalmente para descrever a posição deslocada do elemento é necessário, ainda, determinar a diferença entre o novo ângulo  $\beta$  e o ângulo de  $90^\circ$  original. Essa diferença é chamada de deformação transversal,  $\gamma$ , assim:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad (5.22)$$

Desta forma, generalizando-se para o caso tridimensional as componentes do estado

de deformação de um corpo que sofre pequenas deformações, em notação indicial, é dado por:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5.23)$$

Para o caso tridimensional essa equação corresponde a seis componentes de deformação, admitindo-se  $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ , escritas em notação indicial,  $i, j = 1, 2, 3$ ; no plano cartesiano  $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$  e  $\epsilon_{zz}$  são as deformações normais e  $\epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}$  e  $\epsilon_{zx}$  são as deformações transversais.

## 5.5 Equações de Compatibilidade

As relações entre as seis deformações são definidos em termos dos deslocamentos  $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ . Derivando-se a componente  $\epsilon_{xy}$  da eq. 5.23 em relação à  $x$  e à  $y$  tem-se:

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (5.24)$$

arranjando-se os termos:

$$-2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} = 0 \quad (5.25)$$

similarmente as outras equações podem ser obtidas:

$$-2 \frac{\partial^2 \epsilon_{yz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial y^2} = 0 \quad (5.26)$$

$$-2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \epsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial z^2} = 0 \quad (5.27)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \right) \quad (5.28)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \right) \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \epsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_{xy}}{\partial z} \right) \quad (5.30)$$

As equações 5.25 a 5.30 são as seis equações de compatibilidade e podem ser escritas em notação indicial como:

$$-2\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2} = 0 \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_k} \right) = 0 \quad (5.32)$$

onde  $i, j, k = 1, 2, 3$  e  $i \neq j \neq k$ .

## 5.6 Relações Tensão-Deformação

Corpos sujeitos a campos de tensão se deformam. A primeira formulação que relaciona forças aplicadas e deformação foi feita por Hooke (WANG, 1953). Estudos experimentais do comportamento de materiais foram feitos por Robert Hooke em 1678 e mostraram que, até um certo limite, a deformação de barras eram diretamente proporcionais aos carregamentos axiais submetido a elas (ALIABADI, 2002). Em outros trabalhos, a aplicação de um carregamento normal sobre a barra, chamada de  $\sigma_{xx}$ , produziam deformações dadas pelas equações:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad \varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad \varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \quad (5.33)$$

onde  $E$  é uma constante conhecida como módulo de elasticidade ou módulo de elasticidade de Young;  $\nu$  é um termo constante chamado de coeficiente de Poisson. A equação 5.33 é uma representação da lei de Hooke. Para um elemento sujeito a um carregamento geral, as deformações são dadas por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})] & \varepsilon_{xy} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})] & \varepsilon_{yz} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})] & \varepsilon_{zx} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zx} \end{aligned} \quad (5.34)$$

A lei de Hooke generalizada acima, pode ser escrita através de sua relação inversa:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_{xx} & \sigma_{xy} &= 2G\varepsilon_{xy} \\
\sigma_{yy} &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_{yy} & \sigma_{yz} &= 2G\varepsilon_{yz} \\
\sigma_{zz} &= \lambda e + 2\mu \varepsilon_{zz} & \sigma_{xz} &= 2G\varepsilon_{xz}
\end{aligned} \tag{5.35}$$

onde  $\lambda = 2\nu G/(1 - 2\nu)$  é chamada constante de Lamé,  $G = E/2(1 + \nu)$  é o módulo de elasticidade transversal e  $e = (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})$  é a deformação volumétrica. As equações tensão-deformação ou chamadas equações constitutivas da elasticidade podem ser escritas em notação indicial como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G\varepsilon_{ij} \tag{5.36}$$

## 5.7 Equações de Navier

A equação de tensão de Navier dado em função dos deslocamentos é:

$$\sigma_{lj} = \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} u_{k,k} \delta_{lj} + 2G \left[ \frac{1}{2} (u_{l,j} + u_{j,l}) \right] \tag{5.37}$$

Derivando-se a equação de Navier em relação a  $j$  e substituindo-se a equação equilíbrio nela, chega-se a equação:

$$\frac{1}{1 - 2\nu} u_{j,jl} + u_{l,jj} + \frac{b_l}{G} = 0 \tag{5.38}$$

Para encontrar as forças sobre a superfície do sólido basta aplicar a fórmula de Cauchy, ou seja,  $P_l = \sigma_{lj} \eta_j$ , então:

$$P_l = \left\{ \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} u_{k,k} \delta_{lj} + 2G \left[ \frac{1}{2} (u_{l,j} + u_{j,l}) \right] \right\} \eta_j \tag{5.39}$$



## 5.8 Delta de Dirac

O Delta de Dirac ou, como costuma ser chamada, a função Delta de Dirac, introduzida por Paul Dirac, é uma função nula em todo o seu domínio exceto em  $x = 0$ , ponto no qual seu valor é infinito. Esta função é normalmente representada por  $\Delta(\bar{x})$  e o análogo desta função no domínio discreto é o Delta de Kronecker. Note-se que o Delta de Dirac não é uma função mas sim uma distribuição. O Delta de Dirac é dado por:

$$\Delta(\bar{x}) = \begin{cases} \infty, & \bar{x} = 0 \\ 0, & \bar{x} \neq 0 \end{cases} \quad (5.40)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(\bar{x})f(\bar{x})d\bar{x} = f(0) \quad (5.41)$$

possuindo a seguinte propriedade:

$$\int \Delta(\bar{x} - x')f(\bar{x})d\bar{x} = f(x') \quad (5.42)$$

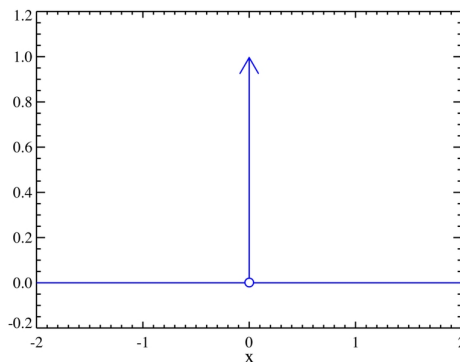


Figura 5.3: Distribuição Delta de Dirac

## 5.9 Solução Fundamental de Kelvin

A formulação das equações integrais para o Método dos Elementos de Contorno, aplicado a teoria da elasticidade, requer o conhecimento de soluções de problemas elásticos que correspondem a domínios infinitos com aplicação de um carregamento unitário. Essas soluções são conhecidas como soluções fundamentais da elasticidade ou soluções fundamentais de Kel-

vin. William Thomson (Lord Kelvin) derivou a solução fundamental da equação de equilíbrio de Navier-Cauchy para um sólido elástico tridimensional que se estendia ao infinito (GAO; DAVIES, 2002).

A solução de Kelvin é obtida da equação (5.38) quando um carregamento unitário (Delta de Dirac) é aplicado em um ponto 'i' na direção do vetor unitário  $e_l$ , isto é:

$$b_l = \Delta^i e_l \quad (5.43)$$

Uma forma de computar a solução fundamental é usar a representação dos deslocamentos em relação ao vetor de Galerkin. Assumindo-se  $\mu$  como vetor de Galerkin, as componentes de deslocamento podem ser escritos como:

$$u_j = \mu_{j,mm} - \frac{1}{2(1-\nu)} \mu_{m,jm} \quad (5.44)$$

Substituindo-se as equações (5.43) e (5.44) na equação (5.38), tem-se:

$$\mu_{l,mmjj} + \frac{1}{G} \Delta^i e_l = 0 \quad (5.45)$$

ou melhor:

$$\nabla^2(\nabla^2 \mu_l) + \frac{1}{G} \Delta^i e_l = 0 \quad (5.46)$$

Considerando-se  $F_l = \nabla^2 \mu_l$ , a equação (5.46) pode ser reescrita, para análise tridimensional ou para o estado plano de deformação, como:

$$\nabla^2 F_l + \frac{1}{G} \Delta^i e_l = 0 \quad (5.47)$$

A solução da equação (5.47) é bem conhecida do problema potencial e é dado por:

$$F_l = \frac{1}{4\pi r G} e_l \quad (5.48)$$

para o problema tridimensional, e:

$$F_l = \frac{1}{2\pi G} \ln\left(\frac{1}{r}\right) e_l \quad (5.49)$$

para o problema bidimensional. Substituindo-se as equações (5.48) ou (5.49) na expressão

$F_l = \nabla^2 \mu_l$  e sabendo-se que  $\mu_l = \mu e_l$ , encontra-se:

$$\mu = \frac{1}{8\pi G} r \quad (5.50)$$

para o problema tridimensional, e:

$$\mu = \frac{1}{8\pi G} r^2 \ln\left(\frac{1}{r}\right) \quad (5.51)$$

para o bidimensional. Substituindo-se as derivadas dos resultados de  $\mu$  em (5.44) e sabendo que  $u_k^* = u_{lk}^* e_l$ , tem-se:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} [(3-4\nu)\delta_{lk} + r_{,l}r_{,k}] \quad (5.52)$$

para problemas tridimensionais, e:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{lk} + r_{,l}r_{,k} \right] \quad (5.53)$$

para problemas bidimensionais. A tensão em qualquer ponto interno pode ser escrita usando-se as relações tensão-deformação (5.36) e as equações de deformação (5.23). Elas podem ser expressas como,

$$\sigma_{kj}^* = S_{lkj}^* e_l \quad (5.54)$$

onde  $S_{lkj}$  pode ser obtido de  $u_{lk}^*$ . As forças de superfície no contorno  $\Gamma$  com a normal  $\vec{n}$  podem ser escritas aplicando-se Cauchy e sabendo que  $p_k^* = p_{lk}^* e_l$ . Assim, a solução fundamental de Kelvin para as forças de superfície para o caso tridimensional é:

$$p_{lk}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 3r_{,l}r_{,k}] + (1-2\nu)(n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right] \quad (5.55)$$

e para o caso bidimensional, estado plano de deformação:

$$p_{lk}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l}r_{,k}] + (1-2\nu)(n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right] \quad (5.56)$$

Mais detalhes sobre a obtenção das soluções fundamentais podem ser encontrados em (DOMINGUEZ; ABASCAL, 1984).

## 5.10 Teorema da Reciprocidade de Betti

Para obterem-se as equações integrais de contorno parte-se do teorema de reciprocidade de Betti (BETTI, 1872), usando o método de integração por partes. Para a dedução da reciprocidade de Betti considere dois estados de tensão possíveis em equilíbrio em um sólido de domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$ . As tensões e deformações nesses dois estados são definidas por  $(\sigma_{kj}, \epsilon_{kj})$  e  $(\sigma_{kj}^*, \epsilon_{kj}^*)$ , respectivamente. Usando a lei de Hooke (eq. 5.36) e multiplicando-se em ambos os lados por  $\epsilon_{kj}^*$ , obtém-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{kj}\epsilon_{kj}^* &= \lambda \delta_{kj}\epsilon_{ii}\epsilon_{kj}^* + 2G\epsilon_{kj}\epsilon_{kj}^* \\ \sigma_{kj}\epsilon_{kj}^* &= \lambda \epsilon_{ii}\epsilon_{mm}^* + 2G\epsilon_{kj}\epsilon_{kj}^* \\ \sigma_{kj}\epsilon_{kj}^* &= \left( \lambda \delta_{kj}\epsilon_{mm}^* + 2G\epsilon_{kj}^* \right) \epsilon_{kj} \\ \sigma_{kj}\epsilon_{kj}^* &= \sigma_{kj}^*\epsilon_{kj}\end{aligned}\tag{5.57}$$

Considerando-se a igualdade acima válida em um ponto do sólido, pode-se integra-la no domínio  $\Omega$  deste sólido chegando-se a:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj}\epsilon_{kj}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{kj}^*\epsilon_{kj} d\Omega\tag{5.58}$$

Este resultado, conhecido como primeiro teorema de Betti, implica que o trabalho realizado pela tensão no primeiro sistema sobre a deformação do segundo sistema é igual ao trabalho realizado pela tensão no segundo sistema sobre a deformação do primeiro sistema. É possível agora integrar por partes o lado esquerdo ( $L_E$ ) da igualdade:

$$\begin{aligned}
L_E &= \int_{\Omega} \sigma_{kj} \varepsilon_{kj}^* d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \sigma_{kj} u_{k,j}^* d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} \sigma_{kj} u_k^* n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_k^* \sigma_{kj,j} d\Omega \\
&= \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Omega} u_k^* b_k d\Omega
\end{aligned}$$

Em ambas as equações, utilizam-se as relações tensão-deformação, simetria do tensor de tensões e equações de equilíbrio. De forma análoga o lado direito ( $L_D$ ) da equação (5.58) fica:

$$L_D = \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_k b_k^* d\Omega \quad (5.59)$$

Assim, igualando-se os dois lados da igualdade contidas na equação (5.58), obtém-se a seguinte identidade recíproca:

$$\int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Omega} u_k^* b_k d\Omega = \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_k b_k^* d\Omega \quad (5.60)$$

Esta equação representa o segundo teorema do trabalho recíproco de Betti, que expressa a igualdade do trabalho recíproco realizado entre dois sistemas equilibrados em relação ao domínio  $\Omega$  em termos, principalmente, dos valores de contorno. Este teorema forma as bases da identidade Somigliana que dá suporte a formulação direta para se chegar ao Método dos Elementos de Contorno.



## 6 Equações Integrais

### 6.1 Introdução

Neste capítulo é apresentada a formulação das integrais de contorno através da equação conhecida como identidade Somigliana. A identidade Somigliana é obtida a partir do teorema da reciprocidade de Betti, detalhado no capítulo anterior. Estas equações integrais não são as mesmas se integradas em relação a pontos fontes que se localizam sobre o contorno ou dentro do domínio do problema.

Em virtude disso há um item que trata dessa particularidade, intitulado: equação integral para pontos do contorno. O último item é dedicado as regiões infinitas e semi-infinitas que requerem atenção especial.

### 6.2 Formulação das Integrais de Contorno

As equações integrais de contorno para problemas elásticos podem ser obtidas, como dito antes, através do teorema da reciprocidade de Betti (eq. 5.60). Levando-se em consideração uma força de corpo  $b_i^*$  correspondente a uma força unitária aplicada em um domínio infinito, representado utilizando a distribuição Delta de Dirac,

$$b_i^* = \Delta(\bar{x} - x')e_l$$

onde o componente vetorial  $e_l$  corresponde a força unitária positiva na direção  $l$  e aplicada em  $x'$  com  $\bar{x}, x' \in \Omega$ . Usando a propriedade da distribuição Delta de Dirac (eq. 5.42), o último termo da equação integral (5.60) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} b_k^* u_k d\Omega = \int_{\Omega} b_l^* u_l d\Omega = \int_{\Omega} \Delta(\bar{x} - x') e_l u_l d\Omega = u_l(x') e_l \quad (6.1)$$

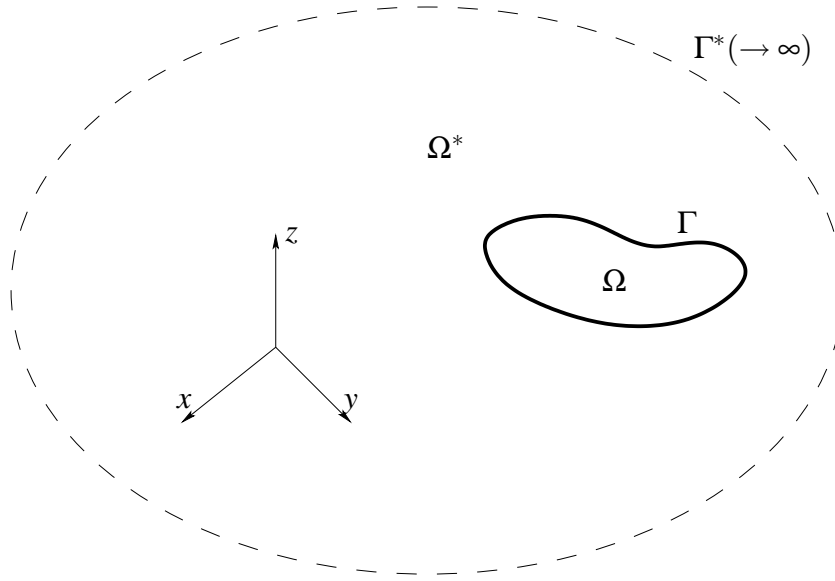


Figura 6.1: Região infinita  $\Omega^*$  contendo a região finita  $\Omega$

Os campos de deslocamento e tração correspondentes a solução da força aplicada pode ser escrita como:

$$u_k^* = u_{lk}^*(x', \bar{x}) e_l \quad (6.2)$$

e,

$$p_k^* = p_{lk}^*(x', \bar{x}) e_l \quad (6.3)$$

substituindo-se as soluções (6.1), (6.2) e (6.3) na equação (5.60) chega-se a equação:

$$u_l^i(x') = \int_{\Gamma} u_{lk}^*(x', x) p_k(x) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^*(x', x) u_k(x) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^*(x', \bar{x}) b_k(\bar{x}) d\Omega \quad (6.4)$$

onde  $x \in \Gamma$ . Esta equação é conhecida como identidade Somigliana para os deslocamentos. Ela relaciona os valores de deslocamento  $u_l^i$ , em um ponto interno  $x'$ , com os valores de contorno  $u_k$  e  $p_k$ . A equação (6.4) é válida para qualquer ponto particular  $'i'$  onde as forças são aplicadas e podem ser escrita em forma matricial como:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} d\Gamma + \\ &- \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} d\Omega \end{aligned}$$



para o problema bidimensional, e:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} &= \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{Bmatrix} d\Gamma + \\ &- \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* & p_{13}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* & p_{23}^* \\ p_{31}^* & p_{32}^* & p_{33}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} d\Gamma + \int_{\Omega} \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* & u_{13}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* & u_{23}^* \\ u_{31}^* & u_{32}^* & u_{33}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Bmatrix} d\Omega \end{aligned}$$

para o problema tridimensional. As tensões em qualquer ponto no interior do domínio podem ser obtidas derivando-se a equação (6.4) de deslocamento em relação ao ponto fonte  $x'$ . A equação de tensão será obtida posteriormente na seção “Equações Integrais de Deslocamento e Tensão para os Pontos Internos“

### 6.3 Equação Integral para Pontos do Contorno

A equação integral de contorno (6.4) é válida para qualquer ponto fonte que esteja dentro do domínio  $\Omega$ . Para se obter a solução da equação para pontos localizados sobre o contorno  $\Gamma$  é necessário considerar o limite  $x' \rightarrow s \in \Gamma$ .

Considere que no domínio do problema foi acrescentado um contorno sobre o ponto fonte  $s$  através de uma região semicircular no problema bidimensional e uma semi-esfera para o problema tridimensional, com contorno  $\Gamma_{\varepsilon}^+$ , raio  $\varepsilon$  e centro localizado em  $s$ , como ilustrado nas Figuras (6.2) e (6.3). Agora o contorno  $\Gamma^A$  é representado por:

$$\Gamma^A = (\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}) + \Gamma_{\varepsilon}^+ \quad (6.5)$$

onde  $\Gamma_{\varepsilon}$  é porção do contorno original que foi removida. O comportamento pode ser estudado impondo o limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ , ou seja,  $\Gamma^A \rightarrow \Gamma$ .

Considere-se a primeira integral da equação (6.4). No limite, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , a equação integral pode escrita:

$$\int_{\Gamma} u_{ik}^*(s, q) p_k(q) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} u_{ik}^*(s, q) p_k(q) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} u_{ik}^*(s, q) p_k(q) d\Gamma \quad (6.6)$$

a segunda integral do lado direito da igualdade da equação (6.6) contem integrais singulares de ordem  $O(\ln r)$  no bidimensional e  $O(r^{-1})$  no tridimensional; entretanto, essa integral tende a zero quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . A primeira integral depois da igualdade pode ser tratada como uma integral

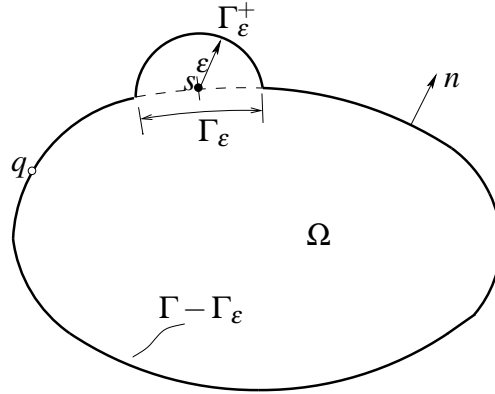


Figura 6.2: Ponto fonte  $s$  localizado no contorno inscrito no semicírculo

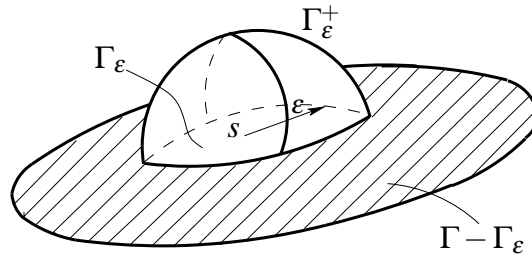


Figura 6.3: Ponto fonte  $s$  localizado no contorno inscrito na semi-esfera

regular e resulta em:

$$\int_{\Gamma} u_{ik}^*(s, q) p_k(q) d\Gamma \quad (6.7)$$

Considerando-se agora o limite formado pela segunda integral da equação (6.4), a integral pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma} p_{ik}^*(s, q) u_k(q) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_{\varepsilon}} p_{ik}^*(s, q) u_k(q) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} p_{ik}^*(s, q) u_k(q) d\Gamma \quad (6.8)$$

ambas as expressões limites do lado direito da igualdade contém integrais hipersingulares de ordem  $O(r^{-1})$  no bidimensional e  $O(r^{-2})$  no tridimensional. A primeira integral pode ser tratada como um valor principal de Cauchy e pode ser resolvida de forma direta utilizando certas transformações de coordenadas e pode ser encontrado nos trabalhos de (GUIGGIANI; GIGANTE, 1990), (GUIGGIANI et al., 1992) e (KARAMI; DERAKHSHAN, 1999). A segunda integral é regularizada pelo primeiro termo da série de Taylor para equação dos deslocamentos em relação ao ponto fonte, dado por:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} p_{ik}^*(s, q) u_k(q) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} p_{ik}^*(s, q) [u_k(q) - u_k(s)] d\Gamma \right\} + u_k(s) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma_{\varepsilon}^+} p_{ik}^*(s, q) d\Gamma \right\} \quad (6.9)$$

a primeira integral (eq. 6.9) do lado direito da igualdade é igual a zero como garantia da conti-

nuidade dos deslocamentos (ALIABADI, 2002). A segunda integral é dado por:

$$u_k(s) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon^+} p_{lk}^*(s, q) d\Gamma = C_{lk}(s) u_k(s) \quad (6.10)$$

Assim, de forma generalizada a equação (6.4) pode ser reescrita como:

$$C_{lk}(s) u_k(s) = \int_{\Gamma} u_{lk}^*(s, q) p_k(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{lk}^*(s, q) u_k(q) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^*(s, \bar{x}) b_k(\bar{x}) d\Omega \quad (6.11)$$

$$s, q \in \Gamma;$$

$$\bar{x} \in \Omega,$$

onde os pontos  $s$  e  $q$  estão no contorno  $\Gamma$  e o ponto  $\bar{x}$  está dentro domínio  $\Omega$ . A equação (6.11) é a equação integral do deslocamento para pontos localizados sobre o contorno do problema.

Os componentes da matriz  $C$  dependem das características do contorno onde o ponto fonte  $s$  está localizado. Para um contorno suave, ou seja, um contorno que não possui canto, a matriz  $C$  é dada por:

$$C_{lk}(s) = \frac{1}{2} \delta_{lk} \quad (6.12)$$

Para um contorno com canto, como mostrado na figura (6.4), a matriz, para o caso bidimensional, é dado por:

$$C_{lk}(s) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \times \begin{bmatrix} 2(1-\nu)(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{1}{2}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2) & \sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_2 \\ \sin^2 \varphi_1 - \sin^2 \varphi_2 & 2(1-\nu)(\varphi_1 - \varphi_2) - \frac{1}{2}(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2) \end{bmatrix} \quad (6.13)$$

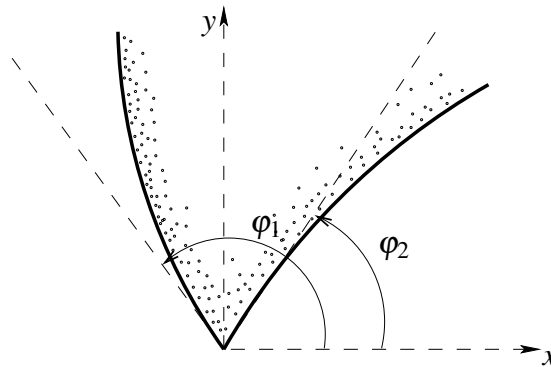


Figura 6.4: Geometria de um contorno com canto

## 6.4 Equações Integrais de Tensão para os Pontos Internos

A tensão interna em um meio isotrópico pode ser obtido derivando-se a equação integral para os deslocamentos em pontos internos e substituindo-se a deformação na equação tensão-deformação, isto é:

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + G \left( \frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6.14)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & \int_{\Gamma} \left[ \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_l} + G \left( \frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right] p_k d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \left[ \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial p_{lk}^*}{\partial x_l} + G \left( \frac{\partial p_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right] u_k d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \left[ \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_l} + G \left( \frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right] b_k d\Omega \end{aligned}$$

reescrevendo a equação acima e utilizando a solução fundamental para o cálculo das derivadas, tem-se:

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma + \int_{\Omega} D_{kij} b_k d\Omega \quad (6.15)$$

os componentes dos tensores  $D_{kij}$  e  $S_{kij}$  são dados por:

$$D_{kij} = \frac{1}{r^\alpha} \left\{ (1-2\nu) [\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}] + \beta r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} S_{kij} = & \frac{2G}{r^\beta} \left\{ \beta \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - \gamma r_{,i} r_{,j} r_{,k}] + \beta \nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) \right. \\ & \left. + (1-2\nu) (\beta n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)} \end{aligned} \quad (6.17)$$

Ambas as equações são válidas para o problema bidimensional e tridimensional. Para o caso bidimensional  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 2$  e  $\gamma = 4$  e para o caso tridimensional  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 3$  e  $\gamma = 5$ .

## 6.5 Regiões Infinitas e Semi-Infinitas

Uma das características especiais do Método dos Elementos de Contorno (MEC) é satisfazer as condições de contorno automaticamente para regiões infinitas (ALIABADI, 2002). A solução fundamental de Kelvin descrito no capítulo 5 para domínios com contorno bem definidos pode ser usado para regiões infinitas somente se certas condições de regularidade são satisfeitas em contornos que tendem ao infinito. Considere a cavidade com superfície  $\Gamma$  em um meio infinito (ver fig. 6.5). Considere ainda,  $r_0$  o raio da esfera (ou do círculo para o problema bidimensional) com superfície  $\Gamma_\infty$  e centrado no ponto  $s$ . A equação integral de contorno para o deslocamento (eq. 6.11), desconsiderando-se as forças de corpo, pode ser escrita como:

$$C_{lk}(s)u_k(s) = \int_{\Gamma} u_{lk}^*(s, q)p_k(q)d\Gamma + \int_{\Gamma_\infty} u_{lk}^*(s, q)p_k(q)d\Gamma \quad (6.18)$$

$$- \int_{\Gamma} p_{lk}^*(s, q)u_k(q)d\Gamma - \int_{\Gamma_\infty} p_{lk}^*(s, q)u_k(q)d\Gamma \quad (6.19)$$

onde  $s \in \Gamma$ . Pode-se ver que, como  $r_0 \rightarrow \infty$ , ambas as integrais que contém a região infinita ( $\Gamma_\infty$ ) podem ser expressas em termos de  $\Gamma$ , isto é:

$$\lim_{(r_0 \rightarrow \infty)} \int_{\Gamma_\infty} [u_{lk}^*(s, q)p_k(q) - p_{lk}^*(s, q)u_k(q)] d\Gamma = 0 \quad (6.20)$$

Em (6.20) está contida a condição de regularidade para o problema com o domínio  $\Gamma_\infty$ . Para o problema tridimensional, as seguintes propriedades são asseguradas:

$$\begin{aligned} u_{lk}^*(s, q) &= O(r_0^{-1}) \\ p_{lk}^*(s, q) &= O(r_0^{-2}) \\ d\Gamma(q) &= |J|d\phi d\theta \end{aligned} \quad (6.21)$$

onde  $|J| = O(r_0)^2$  é a transformada Jacobiana. As condições de regularidade da equação (6.20) são satisfeitas se o deslocamento  $u_k$  e força  $p_k$  forem proporcionais  $1/r$  e  $1/r^2$ , respectivamente. Assim, os dois termos da equação (6.20) desaparecem. Para o problema bidimensional, as soluções fundamentais são proporcionais  $\ln r$  e  $1/r$  para o deslocamento e força respectivamente. A condição de regularidade para uma região infinita neste caso implica que  $u_{lk}^*$  também depende de  $\ln r_0$  e  $p_{lk}^*$  de  $1/r_0$ . Assim, os dois termos na equação integral (6.20) cancelam-se um ao outro quando  $r_0 \rightarrow \infty$ .

Considere agora uma região semi-infinita (ver fig. 6.6), com o contorno localizado

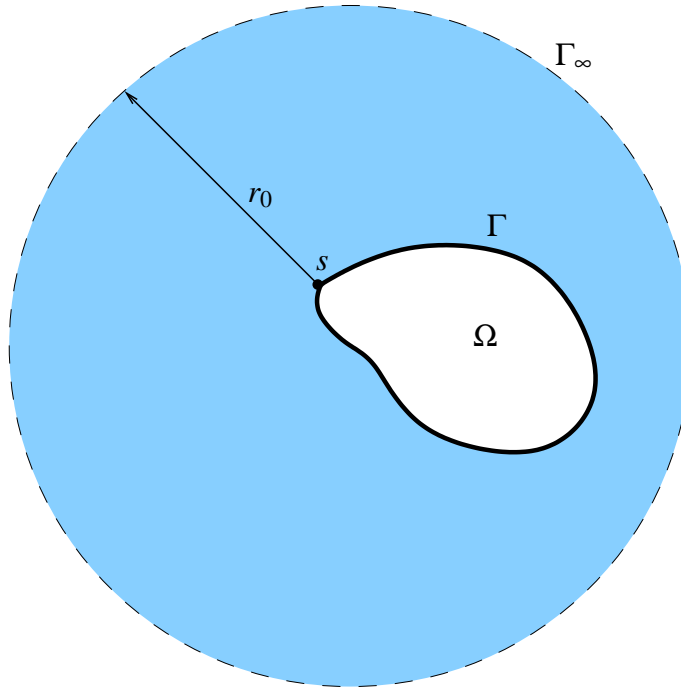


Figura 6.5: Domínio infinito com uma cavidade

no infinito e denotado por  $\Gamma_\infty$ . As integrais sobre o contorno  $\Gamma_\infty$  desaparecem em função das condições de regularidade contidas na eq. 6.20. A equação integral para os deslocamentos (eq. 6.11), desconsiderando-se as forças de corpo, podem ser escritas como:

$$C_{ik}^S(s)u_k(s) = \int_{\Gamma_0} u_{ik}^{*S}(s,q)p_k(q)d\Gamma + \int_{\Gamma_H} u_{ik}^{*S}(s,q)p_k(q)d\Gamma - \int_{\Gamma_0} p_{ik}^{*S}(s,q)u_k(q)d\Gamma \quad (6.22)$$

onde  $u_{ik}^{*S}(s,q)$  e  $p_{ik}^{*S}(s,q)$  são as soluções fundamentais para uma região semi-infinita. Pode-se notar também que a solução fundamental para força  $p_{ik}^{*S}(s,q) = 0$  no contorno plano  $\Gamma_H$  e as soluções fundamentais satisfazem as condições de regularidade. Para o caso onde não são aplicados carregamentos no plano  $\Gamma_H$ , a equação (6.22) se reduz para:

$$C_{ik}^S(s)u_k(s) = \int_{\Gamma_0} u_{ik}^{*S}(s,q)p_k(q)d\Gamma - \int_{\Gamma_0} p_{ik}^{*S}(s,q)u_k(q)d\Gamma \quad (6.23)$$

A solução fundamental para regiões semi-infinitas pode ser encontrado em (MINDLIN, 1936), (MINDLIN; CHENG, 1950) e (TIMOSHENKO; GOODIER, 1980).

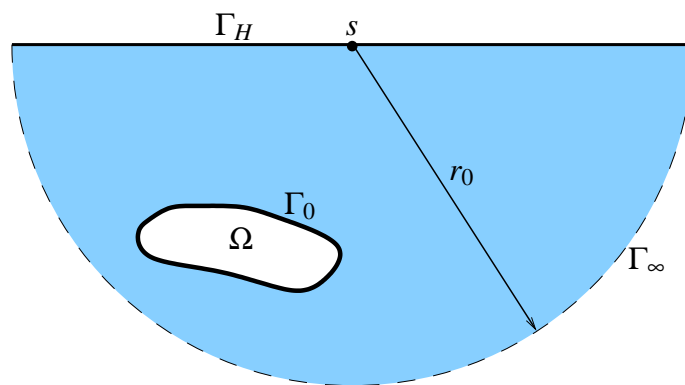


Figura 6.6: Domínio semi-infinito com uma cavidade





## 7 Método dos Elementos de Contorno

### 7.1 Introdução

Este capítulo foi elaborado a partir dos conhecimentos adquiridos pelo autor com contribuição dos trabalhos de Aliabadi (2002), Banerjee (1994), Brebbia e Dominguez (1992), Brebbia, Telles e Wrobel (1984), Venturini (1988), Venturini (1983), Gao e Davies (2002), Hartmann (1989), Kane (1994), Gaul, Kögel e Wagner (2003) e Wutzow (2003).

As equações integrais de contorno apresentadas no capítulo anterior geram a descrição exata do comportamento de um sólido em meio contínuo, e em princípio é capaz também de gerar, para um problema qualquer, a solução que pode ser encontrada para qualquer conjunto de condições de contorno bem posta. Na prática, a solução analítica fechada não é possível para a maioria dos problemas postos, daí nasce a necessidade da aplicação de técnicas de solução numérica.

As técnicas de solução numérica são técnicas de aproximação, ou seja, são técnicas que fornecem soluções aproximadas de uma possível solução, mas não menos conveniente do que estas, como dito antes, dependendo da aplicação a busca por uma solução analítica criteriosa é impossível. Nestas aplicações os métodos numéricos encontram um grande campo de atuação e entre eles está o Método dos Elementos de Contorno. A precisão dos resultados utilizando as técnicas de solução numérica são dependentes, dentre outras coisas, principalmente: i) das funções de interpolação, também chamadas de funções aproximadoras e ii) da integração numérica implementada.

Neste capítulo apresenta-se a formulação do Método dos Elementos de Contorno, para problemas da elasticidade bidimensional, a partir das equações integrais mostradas no capítulo anterior, apresentando no início os diferentes tipos de funções de interpolação, bem como a discretização numérica implementada, descrevendo logo depois os processos de integração. Em seguida é mostrado o enriquecimento da formulação utilizado neste trabalho, apresentando: i) a técnica de subelementação, ii) técnica para o cálculo das tensões no contorno, iii) técnica de

sub-regiões. Este último (iii), implementado com o objetivo de melhor representar, no MEC, as particularidades contidas no problema de túneis.

Por fim um programa é elaborado em linguagem de programação Fortran e um capítulo específico é dedicada aos exemplos de validação.

## 7.2 Funções de Interpolação

Como será visto no próxima item, as funções de interpolação são utilizadas também como ferramenta de discretização. Esta característica de relação reciprocamente dependente (tipo de elemento-discretização) está presente em todos os tipos de métodos numéricos, apesar de haver algumas particularidades inerentes a cada método. No caso do Método dos Elementos de Contorno (MEC), a particularidade inerente ao método reside na dimensão física do elemento.

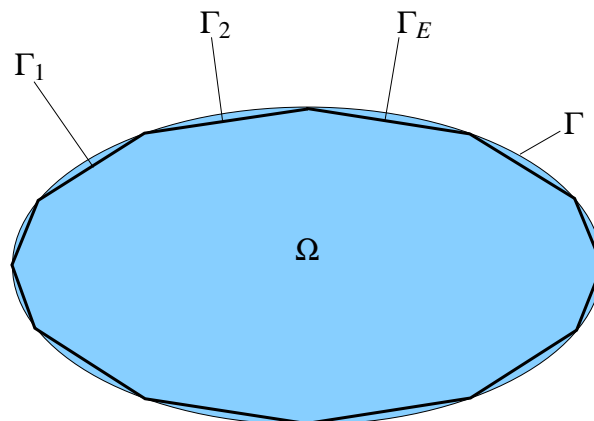


Figura 7.1: Discretização do contorno

A dimensão do elemento, no MEC, é  $n - 1$ , onde  $n$  é a dimensão do problema, ou seja, problemas bidimensionais o elemento utilizado é unidimensional, para problemas tridimensionais o elemento é bidimensional. Essa peculiaridade observada pode ser entendida a partir de sua formulação integral que transforma equações diferenciais no volume, que governam um problema específico no espaço 3-D, em equações integrais sobre a superfície, ou, para o caso 2-D, transformando equações diferenciais sobre o domínio em equações integrais sobre o contorno. O tratamento do problema utilizando equações integrais diminui a uma unidade a dimensão das equações. Assim, como neste trabalho o modelo numérico formulado é bidimensional, descrevem-se nesta seção as funções de interpolação: i) constante, ii) linear e iii)

quadrática.

Considere, por exemplo, a aproximação da geometria de um problema elástico bidimensional (fig. 7.1). O contorno  $\Gamma$  do domínio  $\Omega$  é dividido em  $E$  elementos de contorno  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_E$ . Todos os elementos possuem um ou mais nós. Para o nó  $m$ , do elemento  $e$ , o valor de  $u$  é  $U^m$  e o valor de  $p$  é  $P^m$ . A função de interpolação, também chamada de função de forma,  $\phi_m$  descreve a distribuição espacial dos valores nodais ao longo do elemento. Com  $M$  nós no elemento  $e$ , as funções aproximadas  $u_k^e(q)$  e  $p_k^e(q)$  podem ser obtidas por interpolação dos valores nodais, como:

$$\begin{aligned} u_k^e &= \sum_{m=1}^M U_k^m \phi_m(q) = \phi_1 U_k^1 + \phi_2 U_k^2 + \dots + \phi_M U_k^M \\ p_k^e &= \sum_{m=1}^M P_k^m \phi_m(q) = \phi_1 P_k^1 + \phi_2 P_k^2 + \dots + \phi_M P_k^M \end{aligned} \quad (7.1)$$

As equações contidas em (7.1) podem ser melhor representadas de forma matricial:

$$\begin{aligned} u_k^e &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_M] \begin{Bmatrix} U_k^1 \\ U_k^2 \\ \vdots \\ U_k^M \end{Bmatrix} \\ p_k^e &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_M] \begin{Bmatrix} P_k^1 \\ P_k^2 \\ \vdots \\ P_k^M \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (7.2)$$

escrevendo-se de forma mais compacta:

$$\begin{aligned} u_k^e &= [\phi] \{U_k\} \\ p_k^e &= [\phi] \{P_k\} \end{aligned} \quad (7.3)$$

onde  $\{U_k\}$  e  $\{P_k\}$  são vetores coluna de dimensão  $M \times 1$  e  $[\phi]$  é um vetor linha de dimensão  $1 \times M$ . As funções de forma mais simples são as funções de interpolação constante e linear, que possuem 1 e 2 nós por elemento respectivamente.

### 7.2.1 Função de Interpolação Constante

Considere o sistema de coordenadas do elemento constante mostrado na figura (7.2). No elemento constante só existe um nó para cada elemento, os valores de  $u_k^e(q)$  e  $p_k^e(q)$  são constantes ao longo do elemento, sendo seu valor dado pelo nó. Isso significa que  $M = 1$  e  $\phi = 1$ , ou seja:

$$\begin{aligned} u_k^e &= \phi_1 U_k^1 = u_e \\ p_k^e &= \phi_1 P_k^1 = p_e \end{aligned} \quad (7.4)$$

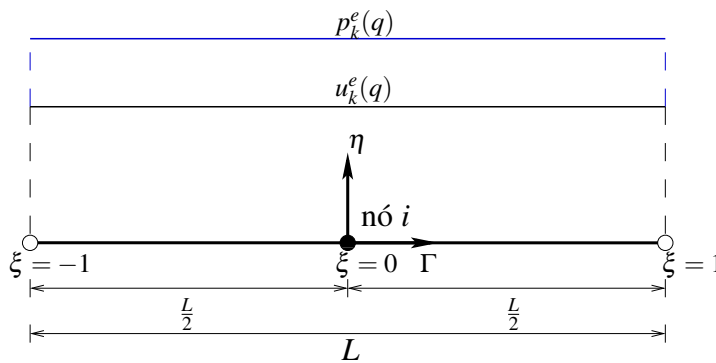


Figura 7.2: Sistema de coordenadas do elemento constante

Como mostrado no sistema de coordenadas do elemento (fig. 7.2), o elemento é descrito em função de suas coordenadas intrínsecas ( $\xi$ ), portanto para a mudança de coordenadas basta aplicar a equação:

$$\Gamma = \xi \frac{L}{2} \quad (7.5)$$

onde  $L$  é o comprimento do elemento.

### 7.2.2 Função de Interpolação Linear

Considere o sistema de coordenadas do elemento linear mostrado na figura (7.3), diferentemente do elemento constante, esse elemento possui dois nós  $i$  e  $j$ . Como nesse elemento existem dois valores nodais, os valores de  $u_k^e(q)$  e  $p_k^e(q)$  são lineares ao longo do elemento, variando de um valor nodal ao outro. Isso significa que  $M = 2$  e as funções de forma  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , são dadas por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (7.6)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

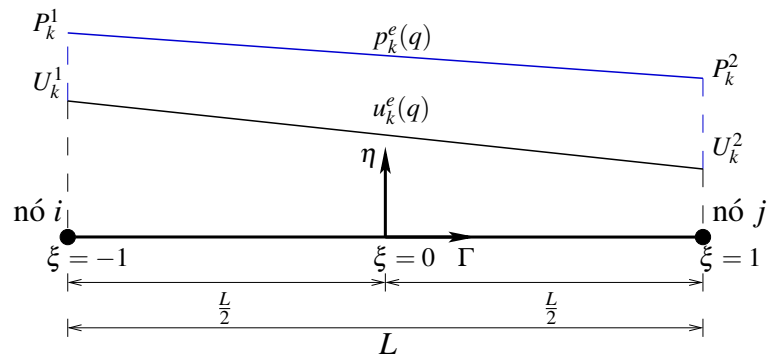


Figura 7.3: Sistema de coordenadas do elemento linear

O elemento linear pode se apresentar também como mostrado na figura (7.4). Esse tipo de elemento é chamado de elemento linear descontínuo. A sua variação é linear ao longo do elemento sendo dada pelos valores nodais nos nós que não estão localizados obrigatoriamente nas extremidades do elemento, mas a uma distância  $\bar{\xi}$  da origem.

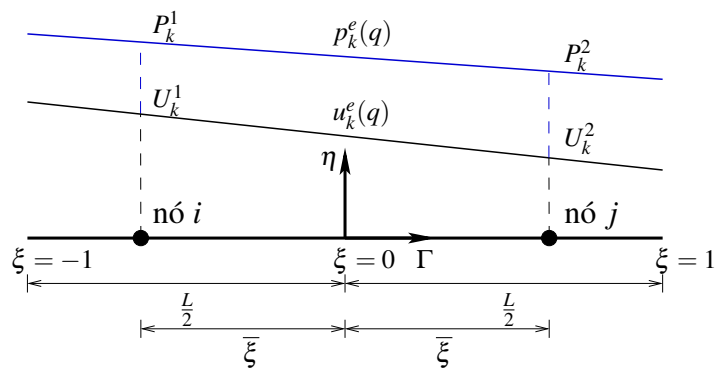


Figura 7.4: Sistema de coordenadas do elemento linear descontínuo

As funções de forma são dadas por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\xi}{\bar{\xi}} \right) \quad (7.7)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\xi}{\bar{\xi}} \right)$$

### 7.2.3 Função de Interpolação Quadrática

Considere o sistema de coordenadas do elemento quadrático mostrado na figura (7.5), diferentemente do elemento constante e do linear, esse elemento possui três nós  $i$ ,  $j$  e  $k$ . Como nesse elemento existem três valores nodais, as funções  $u_k^e(q)$  e  $p_k^e(q)$  são, portanto, funções quadráticas. Isso significa que  $M = 3$  e as funções de forma  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  e  $\phi_3$ , são dadas por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi) - \frac{1}{2}(1 - \xi^2)$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi) - \frac{1}{2}(1 - \xi^2) \quad (7.8)$$

$$\phi_3 = \frac{1}{2}(1 - \xi^2)$$

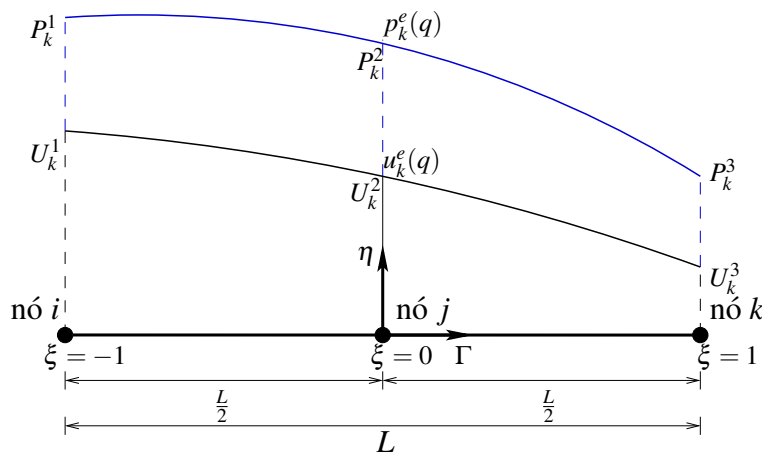


Figura 7.5: Sistema de coordenadas do elemento quadrático

O elemento quadrático, assim como o linear, pode ser também descontínuo, como apresentado na figura (7.6).

As funções de forma são dadas por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi}{\xi_j}\right) - \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_j}\right)^2\right]$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\xi}{\xi_j}\right) - \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{\xi}{\xi_j}\right)^2\right] \quad (7.9)$$

$$\phi_3 = 1 - \left(\frac{\xi}{\xi_j}\right)^2$$

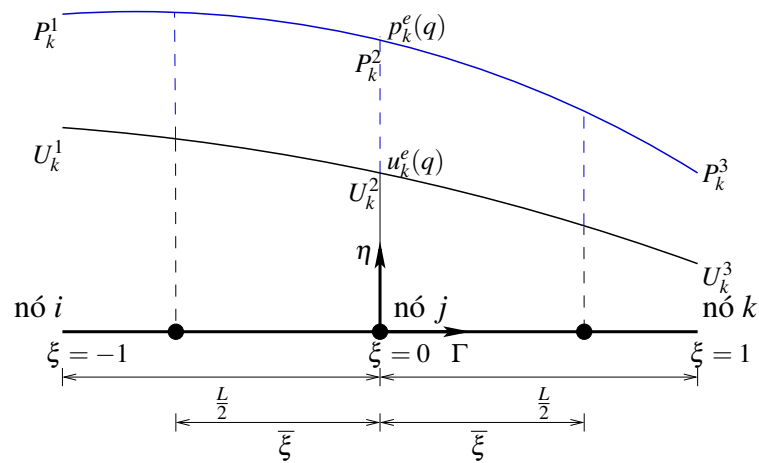


Figura 7.6: Sistema de coordenadas do elemento quadrático descontínuo

### 7.3 Discretização Numérica

Tendo-se definido as funções aproximadoras em termo dos diferentes tipos de elemento, considera-se agora como a expressão (6.11) pode ser discretizada em função desses elementos. Sendo possível, assim, determinar um sistema de equações lineares com o qual pode-se calcular todos os valores das incógnitas, força e/ou deslocamento, contidas no contorno do problema. Admite-se um contorno bidimensional (fig. 7.7) dividido em  $N$  segmentos de reta ou, assim chamados anteriormente, elementos lineares.

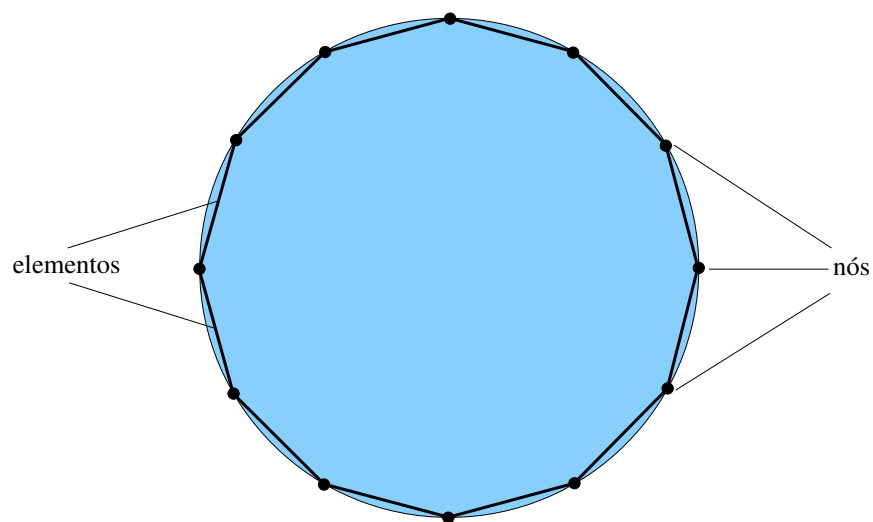


Figura 7.7: Elementos Lineares

Os valores das incógnitas do problema são calculados nos nós e localizadas, para o

caso do elemento linear, nos extremos do elemento, como mostrado na Figura (7.7). Para o elemento linear o contorno é dividido em  $N$  elementos. Considera-se que os valores de  $U$  e  $P$  variam linearmente ao longo de cada elemento (ver fig. 7.8). Levando em consideração a discretização, portanto as considerações contidas nas equações (7.1),(7.2) e (7.3), a equação (6.11), desconsiderando-se as forças de corpo, pode ser reescrita como:

$$C_{lk}(s)u_k(s) = \sum_{j=1}^{NE} \left[ \sum_{m=1}^M P_k^m \int_{\Gamma_j} u_{lk}^*(s,q)\phi_m(q)d\Gamma_s \right] - \sum_{j=1}^{NE} \left[ \sum_{m=1}^M U_k^m \int_{\Gamma_j} p_{lk}^*(s,q)\phi_m(q)d\Gamma_s \right] \quad (7.10)$$

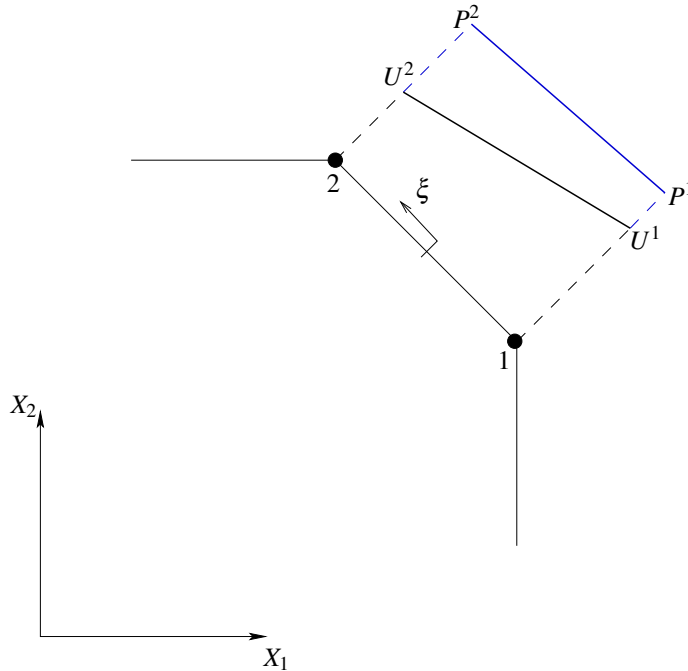


Figura 7.8: Aproximação Linear

Adotando-se uma aproximação linear tanto para o deslocamento como para a força, tem-se:

$$u_k = \phi_1 U_k^1 + \phi_2 U_k^2 \quad , \quad p_k = \phi_1 P_k^1 + \phi_2 P_k^2 \quad (7.11)$$

Reescrevendo-se novamente a equação (7.10), tem-se:

$$C_{lk}u_k = \sum_{j=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_j} u_{lk}^* \phi_m d\Gamma_s \right] P_k^m - \sum_{j=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_j} p_{lk}^* \phi_m d\Gamma_s \right] U_k^m \quad (7.12)$$

escrevendo-se de forma mais compacta:



$$C_{lk}u_k = \sum_{j=1}^{NE} [G_{lk}^{mj}] P_k^m - \sum_{j=1}^{NE} [\hat{H}_{lk}^{mj}] U_k^m \quad (7.13)$$

onde:

$$\hat{H}_{lk}^{mj} = \int_{\Gamma_j} p_{lk}^* \phi_m d\Gamma_s$$

$$G_{lk}^{mj} = \int_{\Gamma_j} u_{lk}^* \phi_m d\Gamma_s$$

Assumindo-se que a posição de  $i$  varia de 1 até número de nós . Então quando o nó  $i$  estiver sobre o elemento  $j$  o termo referente a matriz  $C_{lk}$ , será somado:

$$H_{lk}^{mj} = \begin{cases} \hat{H}_{lk}^{mj}, & i \neq j \\ \hat{H}_{lk}^{mj} + C_{lk}, & i = j \end{cases} \quad (7.14)$$

A equação (7.13), com as considerações contidas em (7.14), pode ser reescrita de forma matricial como:

$$[H] \{U\} = [G] \{P\} \quad (7.15)$$

Com  $i$  variando de 1 até o numero de nós e  $j$  variando de 1 até o número de elementos. No caso de elemento com aproximação linear o número de nós é o dobro do número de elementos, assim as matrizes  $[H]$  e  $[G]$  são matrizes  $2N \times 2N$  onde  $N$  é o número total de nós e os vetores  $U$  e  $P$  são de tamanho  $2N$ . Note que  $2N_1$  valores de  $u$  e  $2N_2$  valores de  $P$  são conhecidos (condições de contorno prescritas) em  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  respectivamente. Portanto, há no total  $2N$  incógnitas no sistema de equações (7.15). Para introduzir essas condições de contorno no sistema de equações (7.15), é possível rearranjar o sistema movendo as colunas de  $[H]$  e  $[G]$  de um lado para o outro, fazendo com que as incógnitas fiquem todas do lado esquerdo do sistema, assim pode-se escrever:

$$[A] \{X\} = \{F\} \quad (7.16)$$

onde  $X$  é o vetor dos valores de contorno de  $u$  e  $p$  desconhecido .  $F$  é o vetor resultante

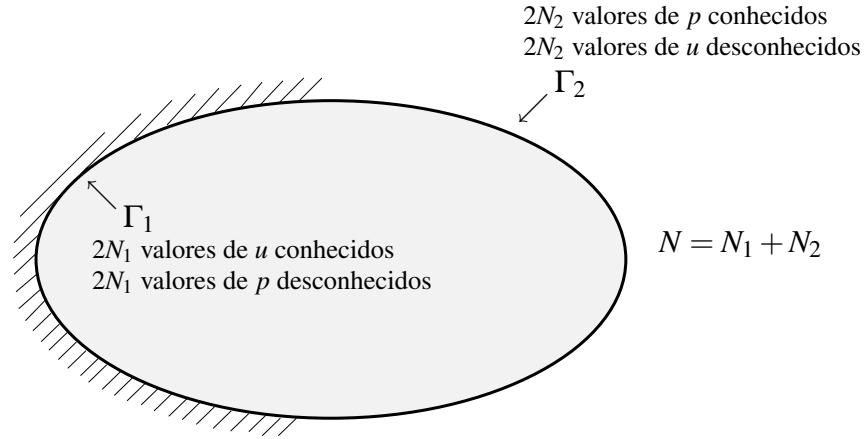


Figura 7.9: Incógnitas do problema elástico

da multiplicação das matrizes  $[H]$  e  $[G]$  com o vetor com os valores de contorno  $u$  e  $p$  prescritos. Após a solução do sistema e conhecido todos os valores de  $u$  e  $p$  sobre o contorno é possível calcular em qualquer ponto interno do domínio  $\Omega$  os valores de deslocamento e de tensões internas. Os valores de  $u$  são calculados nos pontos internos, como mostrado anteriormente, usando a equação (7.18). O mesmo acontece para o cálculo das tensões.

A equação (7.18) é a equação do deslocamento para pontos internos ( $u^i$ ). Após a resolução do sistema (7.16) todos os valores de  $u$  e  $p$  no contorno são conhecidos. Como os pontos se encontram dentro do domínio as integrais mudam, conseqüentemente é necessário o cálculo das matrizes  $[\bar{H}]$  e  $[\bar{G}]$  determinadas agora para os pontos internos.

A identidade Somigliana (eq. 6.4) permite o cálculo do deslocamento em qualquer ponto interno em relação aos esforços e deslocamentos do contorno. Considerando-se novamente a representação integral, como mostrado anteriormente, pode-se apresentar a equação como:

$$u^i = \sum_{j=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_j} u^* \phi d\Gamma \right] \{p^j\} - \sum_{j=1}^{NE} \left[ \int_{\Gamma_j} p^* \phi d\Gamma \right] \{u^j\} + \sum_{s=1}^M \left[ \int_{\Omega_s} u^* b d\Omega \right] \quad (7.17)$$

onde  $\Gamma_j$  corresponde a superfície do elemento  $j$  e  $i$  é agora um ponto interno.  $\phi$  é a função aproximadora adotada na formulação numérica. Assim, os deslocamentos para os pontos internos em termos de deslocamento nodal pode ser escrito na forma:

$$u^i = \sum_{j=1}^N [\bar{G}^{ij}] \{p^j\} - \sum_{j=1}^N [\bar{H}^{ij}] \{u^j\} + \sum_{s=1}^M [B^{is}] \quad (7.18)$$

onde os termos de  $\bar{G}^{ij}$  e  $\bar{H}^{ij}$  são calculados a partir de integrais sobre os elementos em relação ao nó  $i$ . Essas integrais podem ser calculadas facilmente usando métodos de integração numérica.

## 7.4 Integração de Gauss

A integração de Gauss é um método de integração numérica amplamente utilizada no Método dos Elementos de Contorno e possui um papel importante em sua formulação como será demonstrado no próximo item deste capítulo.

Tomando-se como base as propriedades do método de Gauss no tratamento numérico para cálculo das integrais, pode-se aproximar a integral  $I$  por um somatório, isto é:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^N W_i f(\xi_i) \quad (7.19)$$

onde  $W_i$  são os chamados pesos de Gauss e  $\xi_i$  as coordenadas intrínseca dos pontos de integração. O método de Gauss permite utilizar um número variável de pontos de integração permitindo, dessa maneira, um resultado numérico mais preciso para a integral  $I$ . Neste método, a função a ser integrada é substituída por uma função polinomial do tipo:

$$f(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots + a_p\xi^p \quad (7.20)$$

onde os coeficientes são ajustados de forma a se aproximar da melhor forma da função original. Determinam-se o número e a localização dos pontos de Gauss e os pesos. O número de pontos de Gauss cresce a medida que o grau polinomial  $p$  também cresce. A tabela 7.1 apresenta o número de pontos de Gauss  $N$  necessário para integrar um polinômio de grau  $p$  até  $p = 5$ . A localização dos pontos de Gauss e respectivos pesos são dados na tabela 7.2 para até três pontos de Gauss.

Tabela 7.1: Pontos de Gauss e grau do polinômio

Nº de pontos de Gauss $N$	Grau do polinômio $p$
1	1 (linear)
2	3 (cúbico)
3	5

Aplicando-se uma integração numérica sobre elementos bidimensionais, então aparecerá um somatório duplo:

Tabela 7.2: Coordenadas dos pontos de Gauss e pesos

N	$\xi_i$	$W_i$
1	0,0	2,0
2	0,57735; -0,57735	1,0; 1,0
3	0,77459; 0,0; -0,77459	0,55555; 0,88888; 0,55555

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M W_i W_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (7.21)$$

Os pontos de integração de Gauss para um elemento bidimensional são localizados no elemento como mostrado na figura (7.10). O número de pontos de Gauss determina a ordem de sua integração.

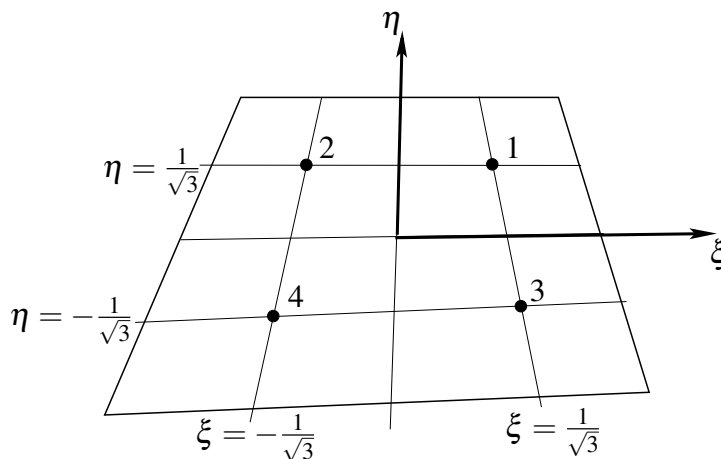


Figura 7.10: Pontos de integração de Gauss para elementos bidimensionais

## 7.5 Processos de Integração

As integrais podem ser calculadas usando fórmulas de integração numérica como a regra de quadratura de Gauss demonstrada anteriormente. Substituindo-se as soluções fundamentais  $u_{lk}^*$  (eq. 5.52 ou eq. 5.53) e  $p_{lk}^*$  (eq. 5.55 ou eq. 5.56) nas integrais contidas em (7.13), respeitando, entretanto, a mudança de coordenadas (eq. 7.5), pode-se escrever as equações que representam o cálculo dos termos das matrizes  $\hat{H}_{lk}^{mj}$  e  $G_{lk}^{mj}$  para  $i \neq j$ :

$$\widehat{H}_{lk}^{mj} = \frac{L_j}{8\pi(1-\nu)} \sum_{T=1}^{NG} \left\{ \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l}r_{,k}] + (1-2\nu)(n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right] W_T \phi_m \right\} \quad (7.22)$$

$$G_{lk}^{mj} = \frac{L_j}{16\pi G(1-\nu)} \sum_{T=1}^{NG} \left\{ \left[ (3-4\nu) \ln \left( \frac{1}{r} \right) \delta_{lk} + r_{,l}r_{,k} \right] W_T \phi_m \right\} \quad (7.23)$$

onde  $L_j$  é o comprimento do elemento  $j$ ,  $r$  o raio entre o ponto  $i$  e o ponto de Gauss  $T$ , formado dentro do elemento;  $W_T$  é o peso de Gauss e  $NG$  é o número de Gauss considerado na integração. Considera-se que o sistema local de referência localiza-se no meio do elemento (ver fig. 7.11).

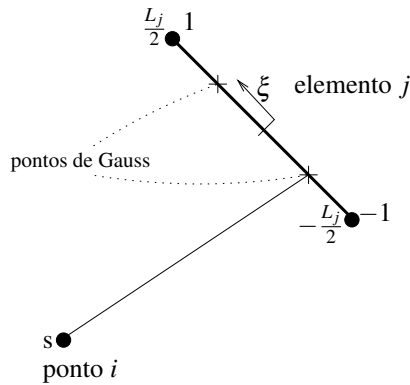


Figura 7.11: Pontos de Gauss sobre o elemento

Quando, o ponto de colocação,  $i$  estiver sobre o elemento  $j$  aparecerá uma singularidade. Essa singularidade pode ser eliminada trasladando-se o ponto fonte  $s$  na mesma direção do vetor normal ao elemento, sendo integrado numericamente ou resolvendo a integral analiticamente como feito por (Wutzow, 2003), que determinou as expressões analíticas das integrais para o elemento linear quando o ponto fonte  $s$  estiver sobre o elemento. Tais expressões levam em consideração três casos distintos: i) quando o ponto fonte  $s$  coincidir com o primeiro nó do elemento a ser integrado, ii) quando o ponto fonte  $s$  coincidir com o segundo nó do elemento a ser integrado e iii) quando o ponto fonte estiver em algum ponto intermediário aos dois nós do elemento.

## 7.6 Tensões no Contorno

As tensões no contorno podem ser calculadas de duas maneiras: i) escrevendo a equação integral correspondente; ii) utilizando diferenças finitas para determinar as deformações na

direção do contorno. No primeiro caso é necessário cuidados especiais na aproximação dos deslocamentos, pois terão que ser contínuos e com primeira derivada contínua nos nós. Pela segunda alternativa se conhece a priori duas componentes de tensão: a normal e a tangencial ao contorno. Falta portanto apenas uma que é a tensão normal paralela ao contorno. Utiliza-se portanto diferenças finitas locais para o cálculo da deformação na direção paralela ao contorno.

Portanto, nesse caso se conhecem as componentes:  $\sigma_{\hat{x}}$  e  $\tau_{\hat{x}\hat{y}}$ , no sistema de coordenados locais do elemento que são obtidas diretamente através das forças de superfície (ver fig. 7.12(a)).

$$\sigma_{\hat{x}} = P_{\hat{x}}, \quad \tau_{\hat{x}\hat{y}} = P_{\hat{y}} \tag{7.24}$$

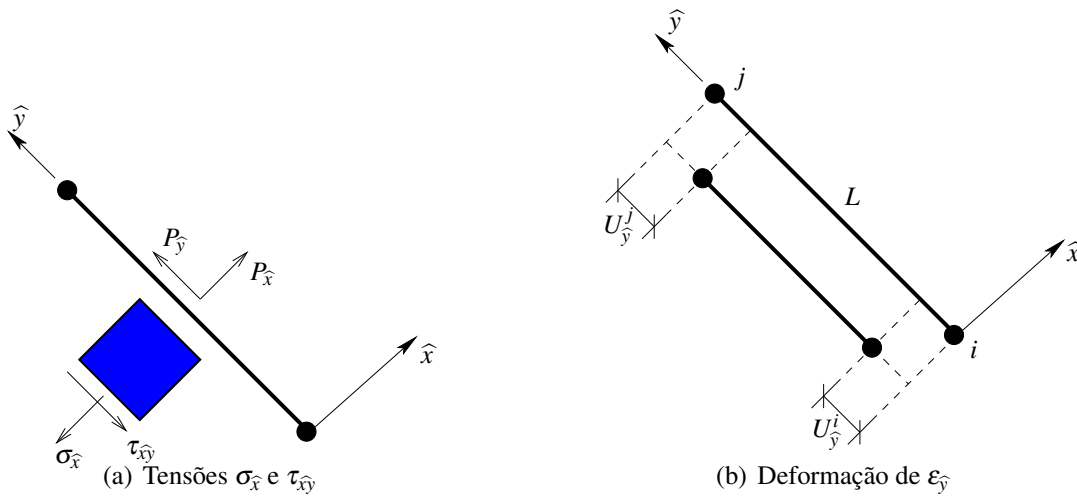


Figura 7.12: Tensões no contorno

Para determinar as tensões no contorno no sistema de referência local é necessário multiplicar as forças de superfície, que estão no sistema de referência global, pela matriz de rotação  $[R]$  transposta.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\hat{x}} \\ \tau_{\hat{x}\hat{y}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_{\hat{x}} \\ P_{\hat{y}} \end{Bmatrix} = [R]^T \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix} \tag{7.25}$$

A tensão  $\sigma_{\hat{y}}$ , para o estado plano de deformação, é dado por:

$$\sigma_{\hat{y}} = \frac{1}{1-\nu} (\nu\sigma_{\hat{x}} + 2G\epsilon_{\hat{y}}) \tag{7.26}$$

A deformação de  $\epsilon_{\hat{y}}$  pode ser calculado por diferenças finitas, assim:

$$\varepsilon_{\hat{y}} = \frac{U_{\hat{y}}^j - U_{\hat{y}}^i}{L} \quad (7.27)$$

Para voltar ao sistema de referência global basta multiplicar pela inversa da matriz de rotação, sendo dados por:

$$\{\sigma\} = [R]^{-1} \{\hat{\sigma}\} \quad (7.28)$$

onde:

$$[R]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & -2\cos \alpha \sin \alpha & 1 - \cos^2 \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha - 1 & -\cos \alpha \sin \alpha \\ 1 - \cos^2 \alpha & 2\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (7.29)$$

## 7.7 Subelementação

A subelementação divide um mesmo elemento em diversas partes menores, chamados de subelementos. Uma recomendação interessante é garantir que o comprimento ( $d$ ) do subelemento não seja maior que a metade da distância do ponto fonte  $s$  ao ponto médio do subelemento. Admitindo-se que o comprimento do subelemento seja duas vezes a distância entre o ponto fonte e o ponto médio do subelemento, tem-se um triângulo isósceles, como está ilustrado na Fig. 7.13.

A expressão que permite o cálculo de  $d$ , que dá origem a subdivisão do elemento, é dada por:

$$d = \frac{1}{n} \frac{R_0}{2\cos \alpha} \quad (7.30)$$

onde foi introduzida uma constante de subdivisão do elemento,  $n$ , a ser escolhida de acordo com a precisão desejada. A expressão acima é aplicada quando o ângulo entre o elemento e a direção do raio  $R_0$ , tomado no início do subelemento até o ponto fonte, for menor que  $60^\circ$ , portanto  $d$  é dado por:

$$d = \begin{cases} \frac{1}{n} \frac{R_0}{2\cos \alpha}, & \text{se } 2\cos \alpha > 1 \\ \frac{1}{n} R_0, & \text{se } 2\cos \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (7.31)$$

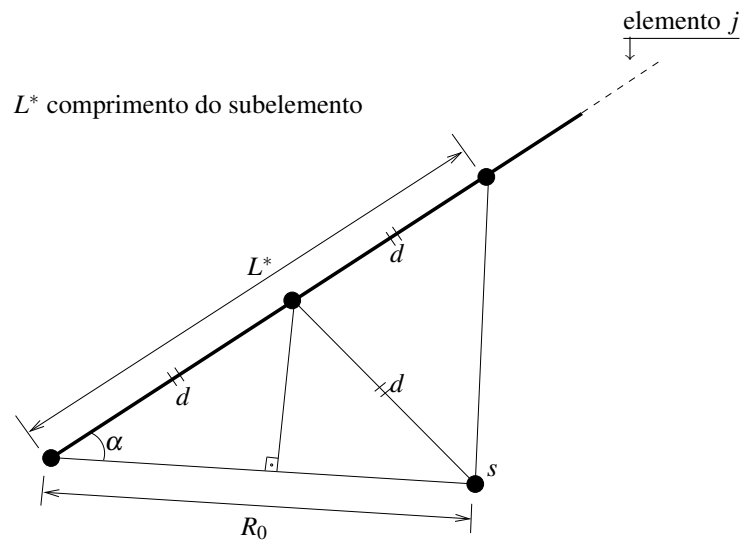


Figura 7.13: Desenho esquemático do processo de subelementação

É possível verificar regularidade nos resultados dos pontos internos localizados muito próximos do contorno, onde a singularidade é maior, implementando a subelementação. Essa verificação foi observada nos exemplos onde foi implementado a subelementação em um problema potencial.

## 7.8 Técnica da Sub-região

Em alguns casos o domínio da região do problema em estudo pode ser composto por multiregiões, cada uma definida pelas suas características elásticas. Nestes casos, o sólido deve ser analisado separando o domínio em sub-regiões com características específicas. O método dos elementos de contorno é então aplicado em cada sub-região como se fossem independentes umas das outras. O conjunto de equações finais do sistema global pode, portanto, ser obtida por acoplamento do conjunto de equações respeitando-se a compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de forças nos pontos das interfaces entre sub-regiões.

Considere o problema, com diferentes regiões, apresentado na figura (7.14) onde  $\Omega^i$  são as sub-regiões,  $\Gamma^i$  parte externa do contorno da sub-região  $\Omega^i$ ,  $\Gamma^{ij}$  é a interfase entre as sub-regiões  $\Omega^i$  e  $\Omega^j$ ;  $u^i, p^i$  são os deslocamentos nodais e forças de superfície nos nós do contorno  $\Gamma^i$  da sub-região  $\Omega_i$  e finalmente  $u^{ij}, p^{ij}$  são os deslocamentos nodais e forças de superfície nos nós do contorno  $\Gamma^{ij}$  da sub-região  $\Omega_i$ .



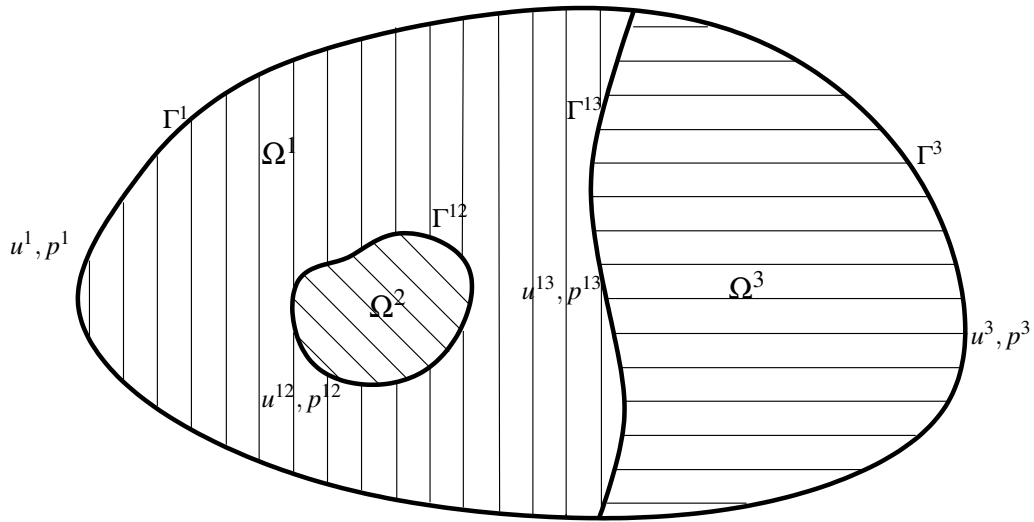


Figura 7.14: Sub-regiões

O problema apresentado contém três zonas de diferentes características tratadas, dessa forma, como sub-regiões. Um domínio bidimensional foi apresentado por simplicidade; entretanto, o procedimento aplica-se tanto para caso bidimensional como para o tridimensional. Na sub-região  $\Omega^i$  defini-se, através do Método dos Elementos de Contorno, as matrizes  $H^i$  e  $G^i$  que estão respectivamente relacionadas às condições de contorno  $u^i$  e  $p^i$ ; da mesma forma definimos também as matrizes  $H^{ij}$  e  $G^{ij}$  que estão respectivamente relacionadas às condições de contorno  $u^{ij}$  e  $p^{ij}$ .

Trabalhando-se com as equações do Método dos Elementos de Contorno de forma matricial (eq. 7.15), pode-se, primeiramente, encontrar o sistema de equações para as três sub-regiões separadamente. Assim, para a sub-região  $\Omega^1$  tem-se:

$$[H^1 \quad H^{12} \quad H^{13}] \begin{Bmatrix} U^1 \\ U^{12} \\ U^{13} \end{Bmatrix} = [G^1 \quad G^{12} \quad G^{13}] \begin{Bmatrix} P^1 \\ P^{12} \\ P^{13} \end{Bmatrix} \quad (7.32)$$

Para sub-região  $\Omega^2$  o sistema é mais simples:

$$[H^{21}] \left\{ U^{21} \right\} = [G^{21}] \left\{ P^{21} \right\} \quad (7.33)$$

Finalmente, para sub-região  $\Omega^3$  tem-se:

$$[H^3 \quad H^{31}] \left\{ \begin{matrix} U^3 \\ U^{31} \end{matrix} \right\} = [G^3 \quad G^{31}] \left\{ \begin{matrix} P^3 \\ P^{31} \end{matrix} \right\} \quad (7.34)$$

As condições de equilíbrio de forças de superfície e compatibilidade dos deslocamentos, nos elementos de contorno sobre a interface ( $\Gamma^{ij}$ ), que devem ser respeitadas, são:

$$U^{12} = U^{21}, \quad U^{13} = U^{31} \quad (7.35)$$

$$P^{12} = -P^{21}, \quad P^{13} = -P^{31} \quad (7.36)$$

Trabalhando-se com equação (7.33):

$$[H^{21}] \left\{ U^{21} \right\} - [G^{21}] \left\{ P^{21} \right\} = 0 \quad (7.37)$$

substituindo-se  $U^{21} = U^{12}$  e  $P^{21} = -P^{12}$ , tem-se:

$$[H^{21}] \left\{ U^{12} \right\} + [G^{21}] \left\{ P^{12} \right\} = 0 \quad (7.38)$$

assim:

$$[H^{21} \quad G^{21}] \left\{ \begin{matrix} U^{12} \\ P^{12} \end{matrix} \right\} = 0 \quad (7.39)$$

Trabalhando-se com a equação (7.34):

$$[H^3] \left\{ U^3 \right\} + [H^{31}] \left\{ U^{31} \right\} - [G^{31}] \left\{ P^{31} \right\} = [G^3] \left\{ P^3 \right\} \quad (7.40)$$

substituindo-se  $U^{31} = U^{13}$  e  $P^{31} = -P^{13}$ , tem-se:

$$[H^3] \{U^3\} + [H^{31}] \{U^{13}\} + [G^{31}] \{P^{13}\} = [G^3] \{P^3\} \quad (7.41)$$

assim:

$$[H^3 \quad H^{31} \quad G^{31}] \begin{Bmatrix} U^3 \\ U^{13} \\ P^{13} \end{Bmatrix} = 0 \quad (7.42)$$

Utilizando-se as equações (7.32), (7.39) e (7.40) é possível obter um conjunto de equações finais por acoplamento, ou seja:

$$\begin{bmatrix} H^1 & 0 & H^{12} & -G^{12} & H^{13} & -G^{13} \\ 0 & 0 & H^{21} & G^{21} & 0 & 0 \\ 0 & H^3 & 0 & 0 & H^{31} & G^{31} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U^1 \\ U^3 \\ U^{12} \\ P^{12} \\ U^{13} \\ P^{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G^1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & G^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P^1 \\ P^3 \end{Bmatrix} \quad (7.43)$$

O sistema pode ser reescrito como:

$$[H]^* \{U\}^* = [G]^* \{P\}^* \quad (7.44)$$

Aplicando-se as condições de contorno (ou seja, sobre a superfície externa  $\Gamma^1$  e  $\Gamma^3$ ), é possível rearranjar o sistema de equações movendo as colunas de  $[H]^*$  e  $[G]^*$  de um lado para o outro, fazendo com que as incógnitas do problema fiquem todas do lado esquerdo do sistema, ou seja:

$$[A]^* \{X\}^* = \{F\}^* \quad (7.45)$$

onde  $\{X\}^*$  é o vetor que contém os valores de contorno  $u$  e  $p$  desconhecidos que estão sobre a superfície externa do problema, assim como sobre as superfícies de interfase.  $\{F\}^*$  é o vetor

resultante da multiplicação da matriz  $[G]^*$  e o vetor dos valores de contorno  $u$  e  $p$  prescritos sobre a superfície externa  $\Gamma^1$  e  $\Gamma^3$ .

Após a solução do sistema global e conhecido todos os valores de  $u$  e  $p$  sobre o contorno do problema é possível calcular em qualquer ponto interno do domínio  $\Omega^i$  os valores de deslocamento e tensões internas.

## 8 Técnica de Modelagem de Inclusão e Enrijecedores

### 8.1 Introdução

Nesta capítulo são apresentadas as equações integrais, bem como a formulação numérica, da técnica de modelagem de inclusão e enrijecedores. Essa técnica foi implementada tendo como objetivo a sua utilização como uma outra opção, além do modelo de sub-regiões, na modelagem bidimensional dos elementos estruturais de suporte, entre eles o tirante.

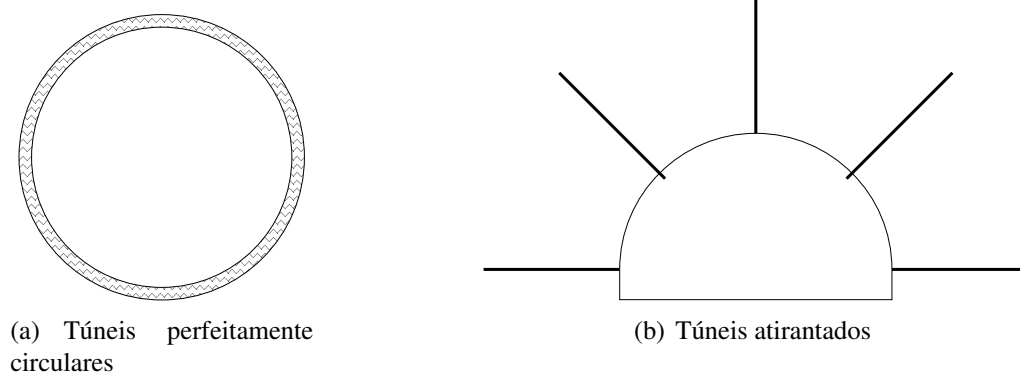


Figura 8.1: Tipos de túneis

O modelo a ser apresentado leva em consideração a determinação das forças normais na estrutura a ser modelada, portanto considera as peças lineares sem rigidez a flexão. O caso completo com a possibilidade de determinar momentos fletores não foi implementada. O modelo implementado no programa, contempla apenas os problemas onde há somente esforços normais, como é caso dos túneis perfeitamente circulares e/ou atirantados. Apesar de não ter sido implementado no programa o modelo completo, são apresentados, neste capítulo os dois casos, considerando: i) forças normais; ii) forças normais e momentos fletores.

## 8.2 Equação integral dos deslocamentos para pontos dentro do domínio e para pontos no contorno

Considere um domínio isotrópico  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$  enrijecido por um domínio interno  $\Omega_e$  e contorno  $\Gamma_e$ . Admitindo-se haver um carregamento conhecido. Utilizando-se o teorema da reciprocidade (eq. 5.58) e admitindo-se a presença de esforços iniciais devido a presença do enrijecedor. A reciprocidade de Betti pode agora ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* \varepsilon_{jk} d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* (\sigma_{jk} + \sigma_{jk}^D) d\Omega \quad (8.1)$$

ou seja:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* \varepsilon_{jk} d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk} d\Omega + \int_{\Omega_e} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk}^D d\Omega_e \quad (8.2)$$

onde  $\sigma_{jk}^D$  é o campo de tensões “danificado”, gerado devido a presença do enrijecedor. Reescrevendo-se a equação (8.2) em função dos deslocamentos e integrando-se por partes, chega-se a equação:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ijk}^* u_j \eta_k d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ijk,k}^* u_j d\Omega = \int_{\Gamma} u_{ij}^* \sigma_{jk} \eta_k d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ij}^* \sigma_{jk,k} d\Omega + \int_{\Omega_e} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk}^D d\Omega_e \quad (8.3)$$

usando-se Cauchy, ou seja,  $P_l = \sigma_{lj} \eta_j$ , então:

$$\int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ijk,k}^* u_j d\Omega = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ij}^* \sigma_{jk,k} d\Omega + \int_{\Omega_e} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk}^D d\Omega_e \quad (8.4)$$

utilizando-se as relações de equilíbrio, onde  $\sigma_{jk,k} = -b_j$  e  $\sigma_{ijk,k} = -b_{ij}$ , tem-se:

$$\int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma + \int_{\Omega} b_{ij}^* u_j d\Omega = \int_{\Gamma} u_{ij}^* p_j d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^* b_j d\Omega + \int_{\Omega_e} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk}^D d\Omega_e \quad (8.5)$$

Levando-se em consideração uma força de corpo  $b_{ij}^*$  correspondente a uma força unitária aplicada em um domínio infinito, representado a distribuição delta de Dirac,

$$b_{ij}^* = \Delta(Q - s) \delta_{ij}$$

para o segundo termo da equação (8.5) sabendo-se que  $\delta_{ij} u_j = u_i$ , tem-se:

$$\int_{\Omega} b_{ij}^* u_j d\Omega = \int_{\Omega} \Delta(Q-s) u_i d\Omega = \begin{cases} u_i(s), & s \in \Omega \\ 0, & s \notin \Omega \end{cases} \quad (8.6)$$

Assim, a equação do deslocamento  $u_i(s)$  para pontos dentro do domínio, ou seja,  $s \in \Omega$ , é dado por:

$$u_i(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, q) b_j(q) d\Omega + \int_{\Omega_e} \varepsilon_{ijk}^* \sigma_{jk}^D d\Omega_e$$

Desconsiderando-se as forças de corpo, e integrando-se por partes o último termo da equação, ela pode ser reescrita como:

$$u_i(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* \sigma_{jk}^D \eta_k d\Gamma_e - \int_{\Omega_e} u_{ij}^* \sigma_{jk,k}^D d\Omega_e$$

o último termo,  $\int_{\Omega_e} u_{ij}^* \sigma_{jk,k}^D d\Omega_e$ , refere-se ao dano provocado pelo enrijecedor dentro do domínio  $\Omega_e$ . Devido a diferença de rigidez entre as regiões e por conta do enrijecedor possuir um comportamento elástico  $\sigma_{jk,k}^D = 0$ . Assim, finalmente a equação integral dos deslocamentos, para pontos no interior do domínio, é dado por:

$$u_i(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* \sigma_{jk}^D \eta_k d\Gamma_e \quad (8.7)$$

Da mesma forma, a equação integral dos deslocamentos para pontos no contorno, seguindo o mesmo procedimento das integrais limite descritas anteriormente na seção 6.3, é dado por:

$$C_{ij}(s) u_j(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, q) p_j(q) d\Gamma + \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* \sigma_{jk}^D \eta_k d\Gamma_e \quad (8.8)$$

onde  $C_{ij}$  é uma matriz onde os valores de suas componentes são definidas a partir das características da superfície de contorno (ver seção 6.3).

### 8.3 Equação integral da tensão no domínio do enrijecedor

Para que as equações de deslocamento possam ser resolvidas é necessária a determinação da equação integral da tensão no domínio do enrijecedor. Para tanto, a equação integral da tensão no domínio do enrijecedor pode ser obtida derivando-se a equação integral para os deslocamentos em pontos internos e substituindo-se a deformação na equação tensão-deformação através do mesmo procedimento realizado para o cálculo das equações integrais de deslocamento e tensão para os pontos internos. Assim, chega-se a equação:

$$\sigma_{ij} = - \int_{\Gamma} S_{ijk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Gamma_e} D_{ijk}^* \sigma_{kt}^D \eta_t d\Gamma_e \quad (8.9)$$

Simplificando-se, o esforço na direção longitudinal  $s$  do enrijecedor, pode-se reescrever a equação (8.9):

$$\sigma_{ss} = - \int_{\Gamma} S_{ssk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ssk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Gamma_e} D_{ssk}^* \sigma_{kt}^D \eta_t d\Gamma_e \quad (8.10)$$

onde  $\sigma_{kt}^D$  é a tensão elástica com dano, ou seja:

$$\sigma_{kt}^D = D \sigma_{kt} \quad (8.11)$$

onde  $D$  é o componente de dano (ou flexibilidade) contido no material elástico que constitui o enrijecedor.

### 8.4 Equações algébricas

As equações algébricas estão ligadas a forma de aproximação adotada na consideração do esforço para a tensão ( $\sigma_{ss}$ ). Neste trabalho apresentam-se duas aproximações para a tensão longitudinal: i) considerando a ação do esforço normal e ii) considerando a ação do esforço normal e momento.

#### 8.4.1 Considerando a ação do esforço normal

Aproximando-se a tensão longitudinal do enrijecedor a partir do esforço normal, tem-se:

$$\sigma_{ss} = \frac{N_s}{A_e} \quad (8.12)$$



onde  $A_e$  é a área transversal ao eixo do enrijecedor. A equação do deslocamento (eq. 8.8), levando em consideração apenas o esforço normal no enrijecedor e incorporando a componente de dano (eq. 8.11), é dado por:

$$C_{ij}(s)u_j(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s,q)u_j(q)d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s,q)p_j(q)d\Gamma + \int_{\Gamma_e} u_{ij}^* D \frac{N_s}{A_e} \eta_k d\Gamma_e \quad (8.13)$$

e algebricamente em forma de matriz, tem-se:

$$[H] \{U\} = [G] \{P\} + [\lambda] \{N\} \quad (8.14)$$

A equação integral da força normal, para aproximação adotada é dada por:

$$N_s = A_e \left\{ - \int_{\Gamma} S_{ssk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ssk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Gamma_e} D_{ssk}^* D \frac{N_s}{A_e} \eta_l d\Gamma_e \right\} \quad (8.15)$$

e algebricamente em forma de matriz, tem-se:

$$[N] = -[S] \{U\} + [D] \{P\} + [\lambda^*] \{N\} \quad (8.16)$$

$[N]$  é o vetor que contém os esforços normais ao longo do eixo longitudinal  $s$  do enrijecedor. Efetuando-se as mudanças de coluna referente aos pontos de contorno obtém-se, juntamente com as equação das forças normais, o seguinte sistema:

$$[A] \{X\} = \{F\} + [\lambda] \{N\} \quad (8.17)$$

$$[N] + [A^*] \{X\} = \{F^*\} + [\lambda^*] \{N\} \quad (8.18)$$

resultando no seguinte sistema matricial final:

$$\begin{bmatrix} A & -\lambda \\ A^* & I - \lambda^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ F^* \end{Bmatrix} \quad (8.19)$$

Resolvendo-se o sistema de equações lineares determinam-se os deslocamentos e forças de superfície do problema, contidas no contorno do problema, bem como os esforços normais na direção longitudinal  $s$  do enrijecedor.

### 8.4.2 Considerando a ação do esforço normal e momento

Aproximando-se a tensão longitudinal do enrijecedor a ação do esforço normal e momento, tem-se:

$$\sigma_{ss} = \frac{N_s}{A_e} + \frac{M_{ss}}{I_e}y \quad (8.20)$$

onde  $I_e$  é o momento de inércia e  $y$  a distância transversal do eixo do enrijecedor ao ponto a ser integrado. A equação do deslocamento, levando-se em consideração o esforço normal e momento agindo sobre o enrijecedor, é dado por:

$$C_{ij}(s)u_j(s) = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s,q)u_j(q)d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s,q)p_j(q)d\Gamma + \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*D \frac{N_s}{A_e} \eta_k d\Gamma_e + \int_{\Gamma_e} u_{ij}^*D \frac{M_{ss}}{I_e} y \eta_k d\Gamma_e \quad (8.21)$$

e algebricamente em forma de matriz, tem-se:

$$[H] \{U\} = [G] \{P\} + [\lambda] \{N\} + [\psi] \{M\} \quad (8.22)$$

A equação normal, para aproximação adotada é dada por:

$$N_s = A_e \left\{ - \int_{\Gamma} S_{ssk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ssk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Gamma_e} D_{ssk}^* D \frac{N_s}{A_e} \eta_t d\Gamma_e + \int_{\Gamma_e} D_{ssk}^* D \frac{M_{ss}}{I_e} y \eta_t d\Gamma_e \right\} \quad (8.23)$$

e algebricamente em forma de matriz, tem-se:

$$[N] = -[S] \{U\} + [D] \{P\} + [\lambda^*] \{N\} + [\psi^*] \{M\} \quad (8.24)$$

A equação do momento pode ser obtida através da curvatura, ou seja:

$$M_{ss} = EI_e \frac{\partial u_s}{\partial x_s \partial x_s} \quad (8.25)$$

assim:

$$M_{ss} = EI_e \left\{ - \int_{\Gamma} S_{ssk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ssk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Gamma_e} D_{ssk}^* D \frac{N_s}{A_e} \eta_t d\Gamma_e + \int_{\Gamma_e} D_{ssk}^* D \frac{M_{ss}}{I_e} y \eta_t d\Gamma_e \right\} \quad (8.26)$$

e algebricamente em forma de matriz, tem-se:

$$[M] = -[S^*] \{U\} + [D^*] \{P\} + [\lambda^{**}] \{N\} + [\psi^{**}] \{M\} \quad (8.27)$$

onde  $[N]$  e  $[M]$  são os vetores que contém os esforços normais e momentos fletores ao longo do eixo longitudinal  $s$  do enrijecedor. Fazendo as mudanças de coluna referente aos pontos de contorno, juntamente com as equações de esforço normal e momento, obtém-se o seguinte sistema:

$$[A] \{X\} = \{F\} + [\lambda] \{N\} + [\psi] \{M\} \quad (8.28)$$

$$[N] + [A^*] \{X\} = \{F^*\} + [\lambda^*] \{N\} + [\psi^*] \{M\} \quad (8.29)$$

$$[M] + [A^{**}] \{X\} = \{F^{**}\} + [\lambda^{**}] \{N\} + [\psi^{**}] \{M\} \quad (8.30)$$

resultando no sistema matricial final:

$$\begin{bmatrix} A & -\lambda & -\psi \\ A^* & I - \lambda^* & -\psi^* \\ A^{**} & \lambda^{**} & I - \psi^{**} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X \\ N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ F^* \\ F^{**} \end{Bmatrix} \quad (8.31)$$

Resolvendo-se o sistema de equações lineares determinam-se os deslocamentos e forças contidas no contorno do problema, bem como os esforços normais e momentos na direção longitudinal  $s$  do enrijecedor.



## 9 Exemplos de Validação

### 9.1 Introdução

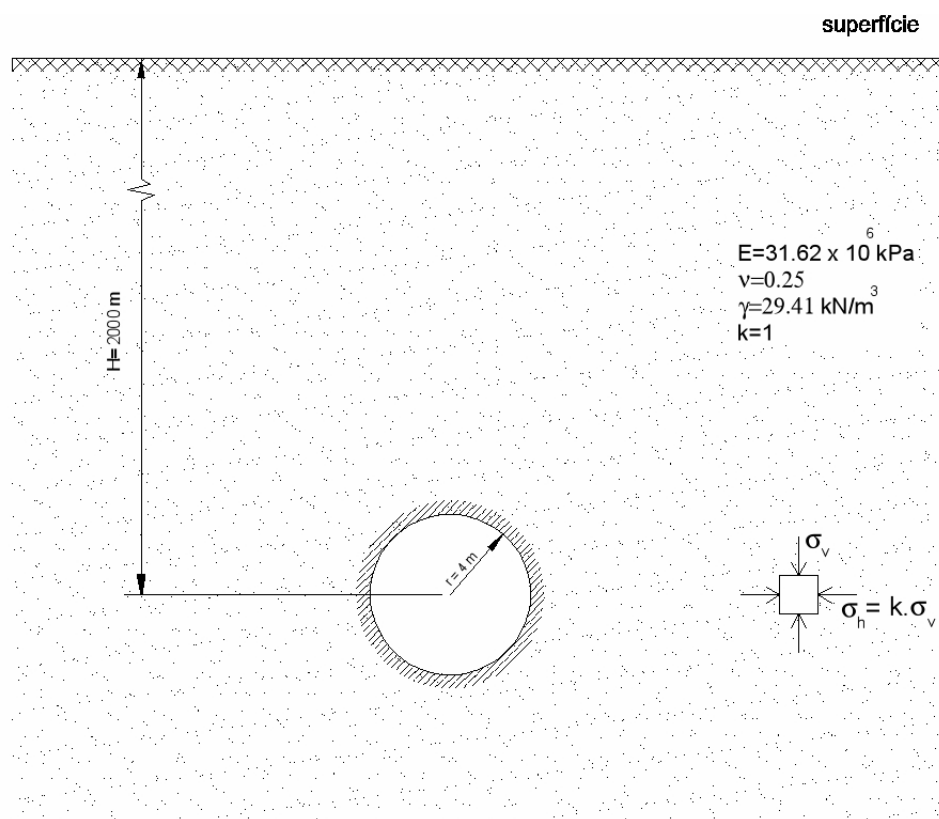


Figura 9.1: Túnel em rocha

O objetivo deste capítulo é, através de exemplos, validar o modelo numérico bidimensional, aplicado a análise de problemas de túneis, implementado; verificando: i) a potencialidade do modelo para análise bidimensional de túneis sem suporte e ii) a validação do modelo de sub-região para análise bidimensional de túneis com suporte.

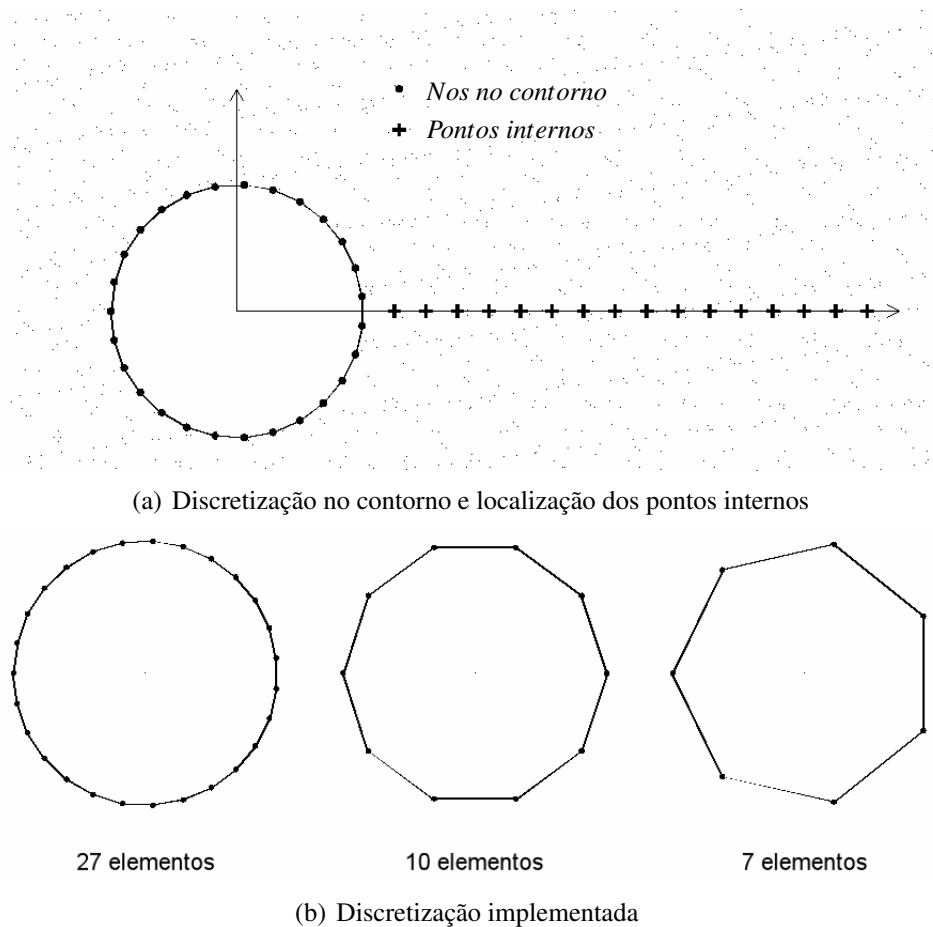


Figura 9.2: Discretização

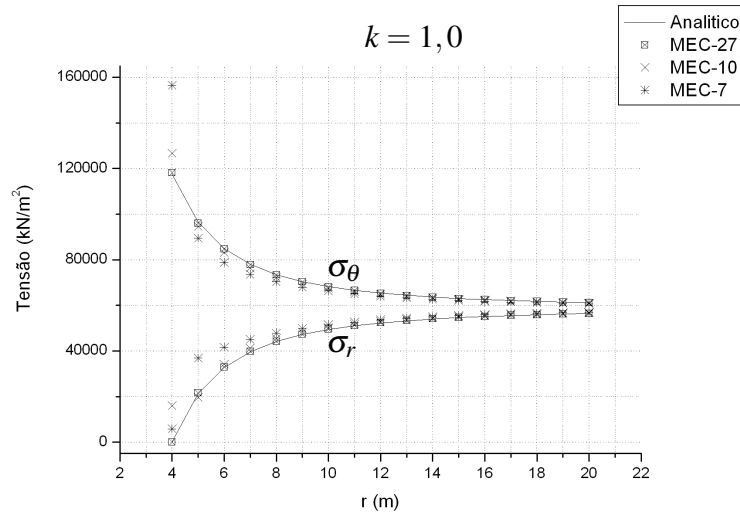
## 9.2 Determinação dos estados deformação/tensão em um túnel circular - sem pressão interna

Esta aplicação consiste em verificar as potencialidades do Método dos Elementos de Contorno no estudo dos estados deformação e tensão gerado em um maciço rochoso provocado pela escavação de um túnel sem suporte. O túnel que possui um diâmetro de  $8m$  e está a uma profundidade de  $2000m$ . O maciço rochoso é considerado ter comportamento elástico, linear e coeficiente de empuxo em repouso  $k = 1,0$  na situação (i) e  $k = 0,5$  na situação (ii). O peso específico ( $\lambda$ ) da rocha é de  $29,41kN/m^3$  o módulo de elasticidade  $E = 31,62GPa$  e coeficiente de Poisson é assumido  $0,25$  (ver fig. 9.1).

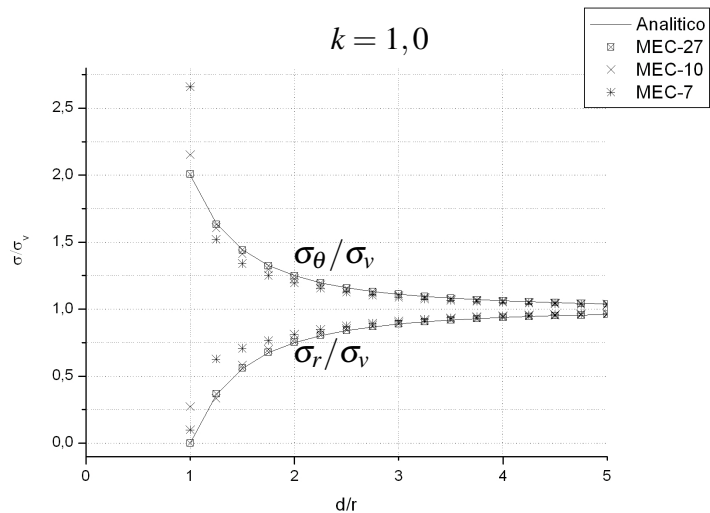
As hipóteses admitidas para este problema são:

1. O túnel é considerado circular e profundo, ou seja, o estado originário de tensões é mesmo para todos os pontos localizados na periferia do túnel;

2. O problema se caracteriza como estado plano de deformação;
3. O descarregamento é aplicada de modo uniforme sobre o contorno do túnel;



(a) Tensão radial e tangencial



(b) Tensão radial e tangencial parametrizado

Figura 9.3: Tensões

4. As deformações plásticas são consideradas pequenas, portanto foram desprezadas;
5. O maciço é considerado contínuo, isótropo, homogêneo e possui comportamento elástico-linear.

O problema foi resolvido usando três malhas de elementos de contorno que contém 27, 10 e 7 elementos lineares ao longo de todo o perímetro do túnel. Os resultados encontrados foram comparados com os resultados analíticos obtidos a partir das equações de Kirsch (KIRSCH, 1898), para tanto foram analisados as tensões radiais e tangenciais, bem como os deslocamentos

radiais nos pontos internos localizados ao longo do eixo positivo  $x$  (ver fig. 9.2(a)).

Três tipos de discretização foram implementadas: uma simétrica e duas não-simétricas. Foram escolhidos com objetivo de avaliar os resultados das tensões sobre o contorno, ou seja, no caso das malhas não simétricas esse valor sobre o contorno é obtido através da tensão calculada sobre o elemento que intercepta o ponto  $x = 4$  e  $y = 0$ , enquanto que no caso da malha simétrica o valor de contorno calculado é determinado sobre o valor obtido no nó que por consequência da simetria se encontra no ponto  $x = 4$  e  $y = 0$ .

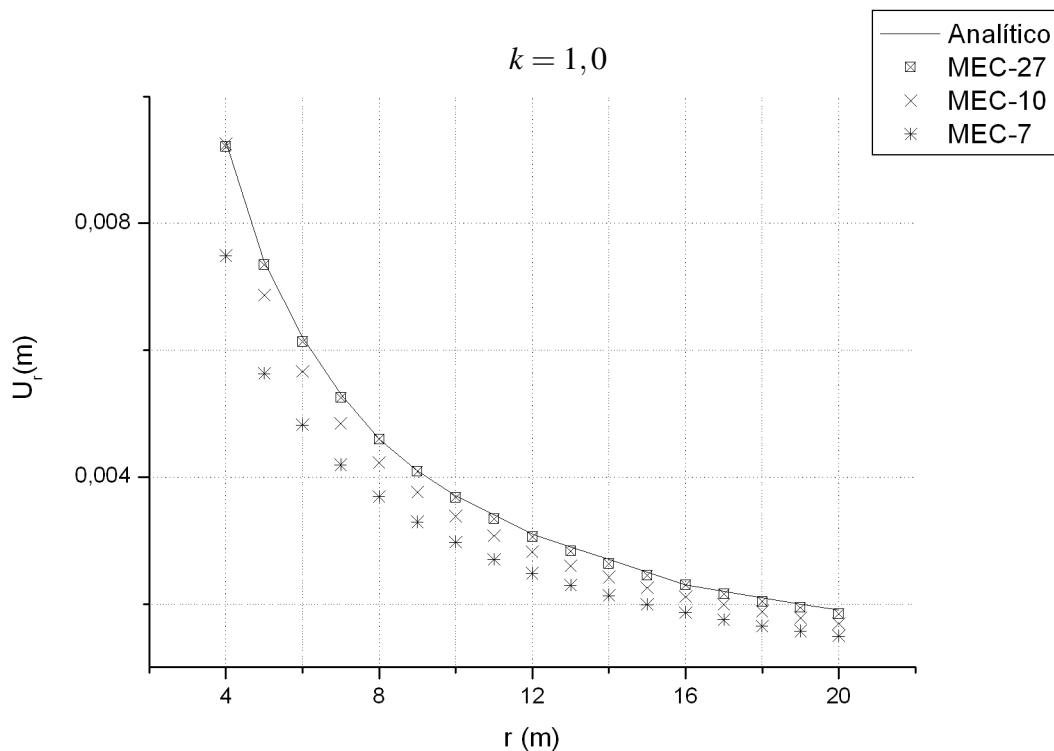


Figura 9.4: Deslocamento radial

Os resultados das tensões e deslocamento radial calculados nos pontos internos, para o caso  $k = 1,0$ , encontram-se nas fig. 9.3(a), fig. 9.3(b) e fig. 9.4. No gráfico são apresentados os resultados analíticos de tensão e deslocamento radial, obtidos a partir de (KIRSCH, 1898), plotados conjuntamente com os resultados numéricos encontrados usando uma discretização do contorno com 27 elementos, denominado MEC27; com 10 elementos, denominado MEC10; e finalmente com 7 elementos, denominado MEC7.

Na fig. 9.3(b) são apresentados os resultados de tensão radial ( $\sigma_r$ ) e circunferencial (tangencial) ( $\sigma_\theta$ ) parametrizados em relação a tensão provocada pelo campo de tensões iniciais do maciço ( $\sigma_v$ ). O comportamento desse gráfico é bem definido na mecânica das rochas. A tensão radial,  $\sigma_r$ , sobre a parede do túnel, ou seja, em  $d/r = 1$ , é igual a zero. Quando a



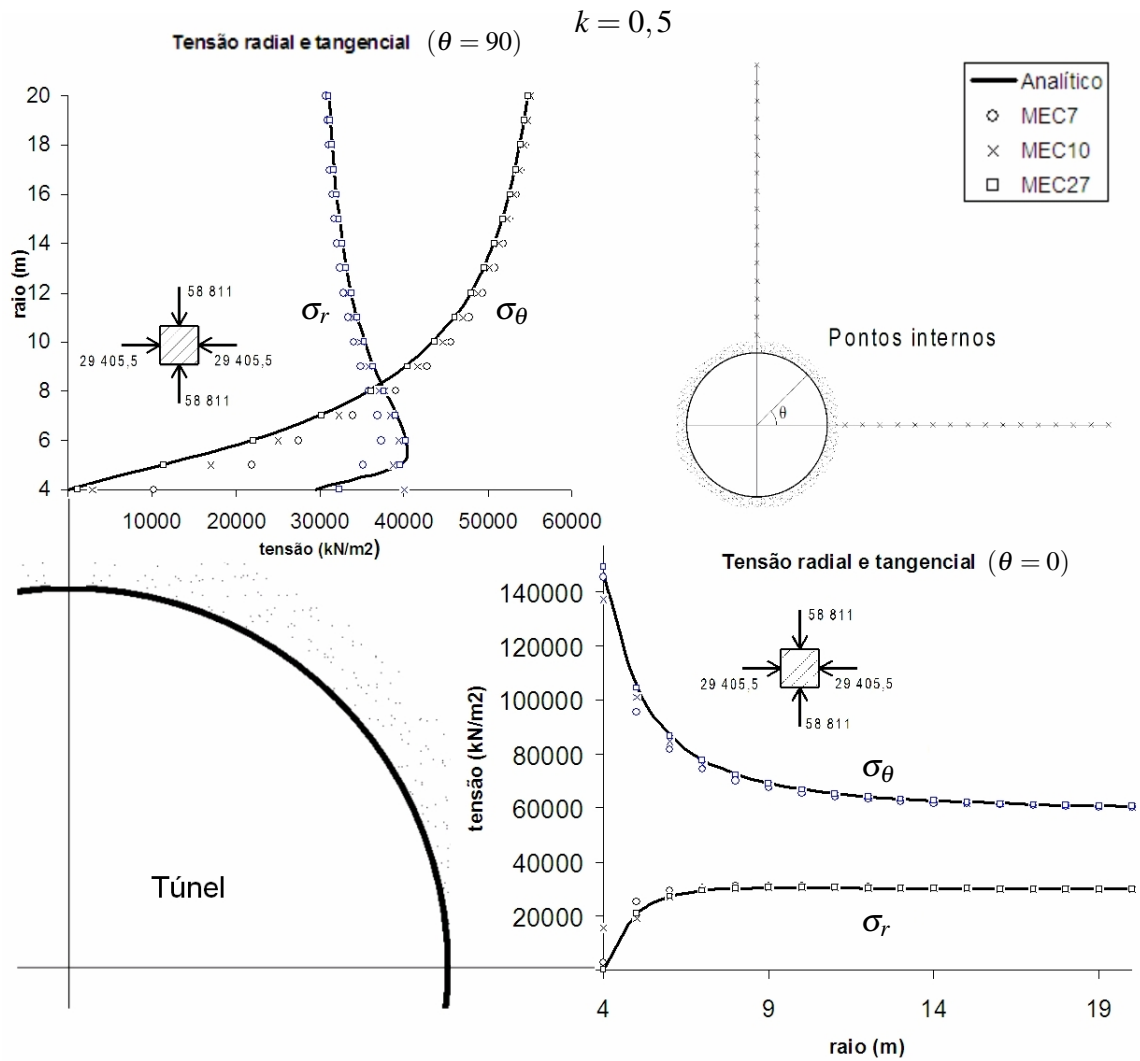
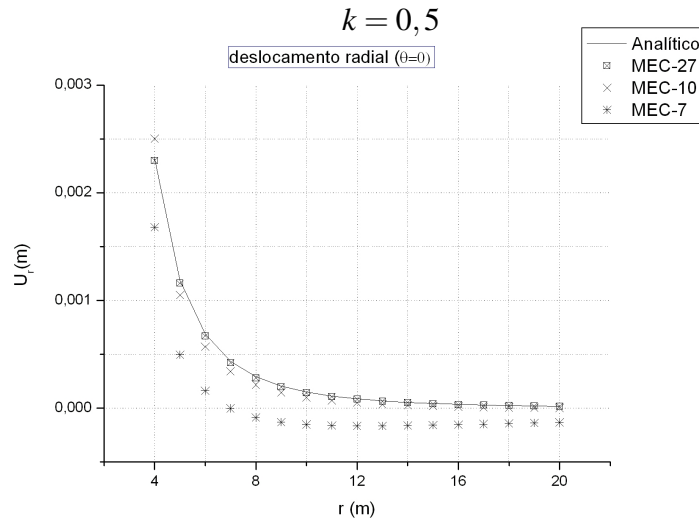
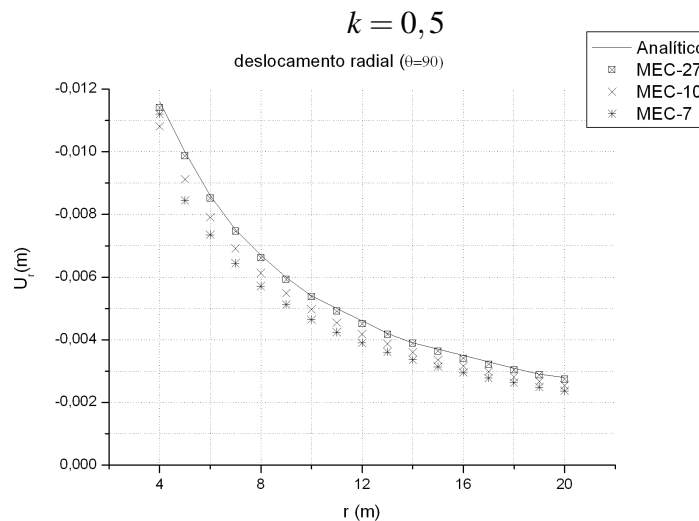


Figura 9.5: Tensão radial e tangencial

distância  $d$ , em relação a parede do túnel, tende ao infinito o valor da tensão  $\sigma_r$  tende a tensão provocada pelo campo de tensões iniciais do maciço  $\sigma_v$ . Em contrapartida a tensão tangencial,  $\sigma_\theta$ , sobre a parede do túnel é igual a  $2\sigma_v$ . Quando  $d$  tende ao infinito  $\sigma_\theta$  tende a  $\sigma_v$ .

Os resultados das tensões e dos deslocamentos radiais calculados nos pontos internos, agora para o caso  $k = 0,5$ , encontram-se nas fig. 9.5, fig. 9.6 e fig. 9.7. No gráfico são apresentados, da mesma forma como no caso  $k = 1,0$ , os resultados analíticos de tensão e deslocamento radial.

Figura 9.6: Deslocamento radial  $\theta = 0$ Figura 9.7: Deslocamento radial  $\theta = 90$ 

### 9.3 Determinação dos estados de deformação/tensão em um túnel circular - com pressão interna

Este estudo consiste em verificar a aplicação do método dos elementos de contorno no problema de estados de deformação e tensão gerado em um maciço rochoso com suporte, provocados pela aplicação de uma pressão interna sobre um túnel já escavado, admitindo-se o suporte como sendo uma sub-região. O túnel, com revestimento, possui um diâmetro de 4,60m.

O revestimento é de concreto, com módulo de elasticidade  $E = 25,70GPa$  e coeficiente de Poisson 0,15, sendo nele aplicada uma pressão radial e constante de  $p = 1000kN/m^2$ . A

espessura do revestimento é de  $0,30m$ .

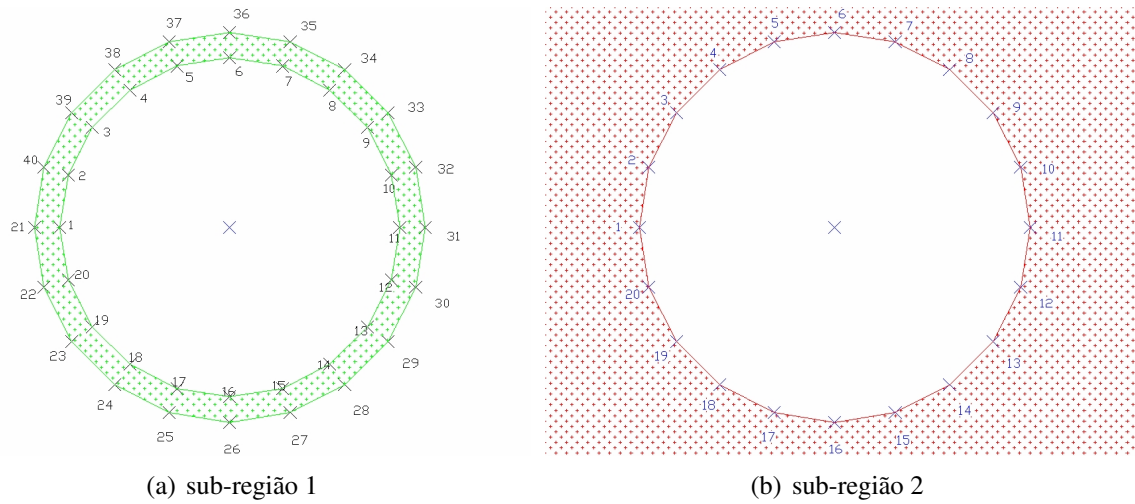


Figura 9.8: Discretização - MEC20

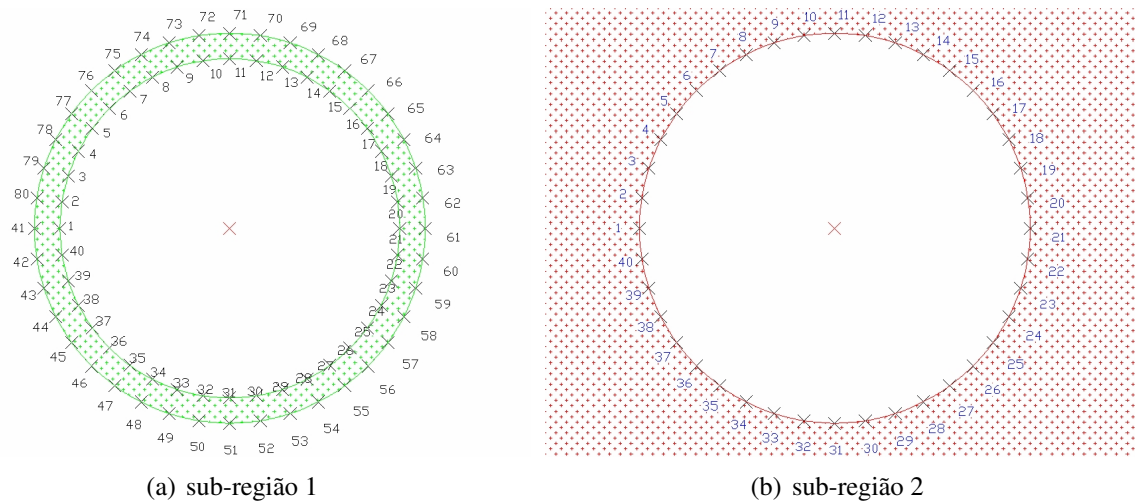


Figura 9.9: Discretização - MEC40

O maciço rochoso é considerado ter comportamento elástico-linear, com módulo de elasticidade  $E = 12,85GPa$  e coeficiente de Poisson  $0,20$  (ver fig. 9.10).

O problema foi resolvido usando duas malhas de elementos de contorno contendo 20 e 40 elementos lineares (tomando como referência a sub-região 2) ao longo de todo o perímetro do túnel. Os resultados encontrados foram comparados com os resultados analíticos obtidos a partir da teoria da elasticidade (TIMOSHENKO; GOODIER, 1980), lembrando que tanto o revestimento do concreto como a rocha possuem comportamento elástico-linear. Foram analisadas as tensões radiais (ver Tab. 9.1) e deslocamentos radiais (ver Tab. 9.2) nos pontos internos indicados na fig. 9.10.

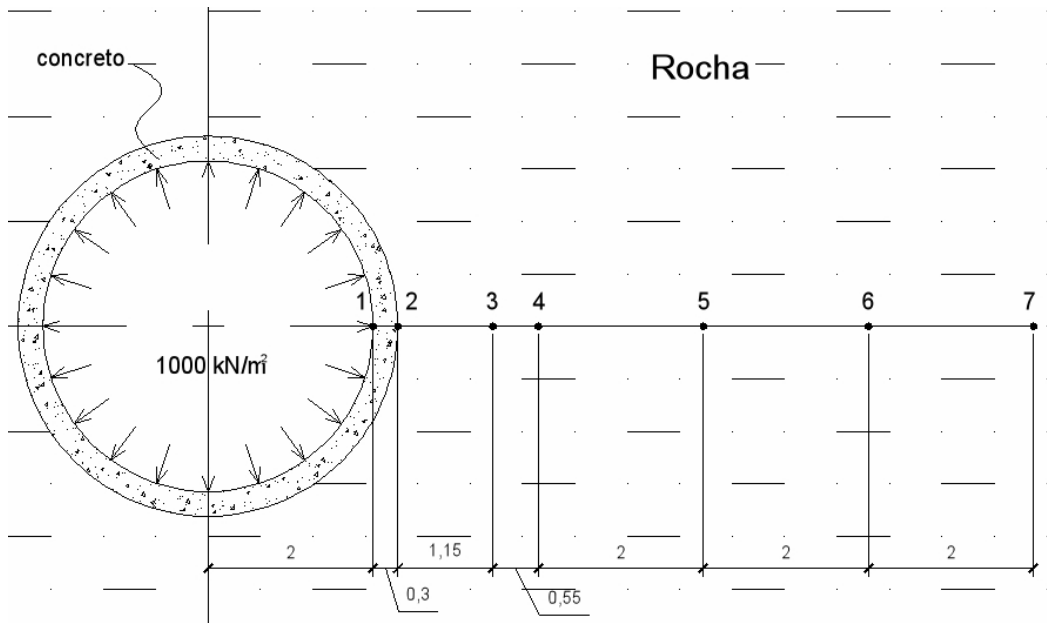


Figura 9.10: Túnel com pressão interna

Os resultados mostram:

- um decréscimo da força aplicada sobre a superfície do túnel devido a pressão radial interna  $p = 1000 \text{ kN/m}^2$ , tendendo a zero em um ponto distante do túnel;

- apesar do revestimento de concreto ser considerado esbelto (espessura de  $0,30 \text{ m}$ ) os resultados para tensão mostram-se muito próximos do resultado analítico, gerando um erro de menos de 3%, no ponto interno 7, tanto para a discretização com 40 elementos como a discretização com 20 elementos;

- os resultados em relação ao deslocamento (ponto 7), quando comparados com o resultado analítico, indicam um erro de menos de 1% para a discretização com 40 elementos e menos de 2,5% para a discretização com 20 elementos;

- a discretização com 20 elementos, apesar de possuir um número pequeno de elementos, apresentam resultados satisfatórios para um análise de esforços e deslocamentos para um problema de mesma natureza;

- os resultados numéricos quando comparados com os resultados analíticos mostram a acurácia do método validando a implementação da sub-região;

Tabela 9.1: Tensão radial - túnel com pressão interna

ponto	solução teórica	MEC20	MEC40
1	1000	913	978
2	656	642	651
3	291	284	289
4	217	212	215
5	96	94	96
6	54	53	54
7	35	34	34

Tabela 9.2: Deslocamento radial  $10^{-4}m$  - túnel com pressão interna

ponto	solução teórica	MEC20	MEC40
1	1,533	1,528	1,530
2	1,409	1,399	1,404
3	0,939	0,917	0,932
4	0,810	0,791	0,804
5	0,540	0,527	0,536
6	0,405	0,396	0,402
7	0,324	0,316	0,322

## 9.4 Determinação dos estados de deformação/tensão em um túnel circular - com suporte

Esse estudo consiste em verificar a aplicação do Método dos Elementos de Contorno no estudo dos estados de deformação e tensão em um maciço rochoso com suporte, provocado pela aplicação de uma pressão sobre o suporte que foi obtida a partir do campo de tensões iniciais do maciço, admitindo-se o suporte como sendo uma sub-região.

Esse estudo abre caminho para o início da análise tridimensional das ações de deformação e tensão a partir de modelos bidimensionais, que será mais detalhado posteriormente.

O túnel, com revestimento, possui um diâmetro de  $4,60m$  e está a uma profundidade de  $340m$  da superfície. O revestimento é de concreto com módulo de elasticidade  $E = 25,70GPa$  e coeficiente de Poisson  $0,15$ . O maciço rochoso é considerado ter comportamento isotrópico elástico-linear, com módulo de elasticidade  $E = 31,62GPa$  e coeficiente de Poisson  $0,25$  (ver fig. 9.11). O peso específico ( $\gamma$ ) da rocha é de  $29,41kN/m^3$ .

O problema foi resolvido usando duas malhas de elementos de contorno que contém 20 e 40 elementos lineares ao longo de todo o perímetro do túnel. Como validação da técnica de sub-região implementada no programa, primeiramente foi feito uma simulação desse problema

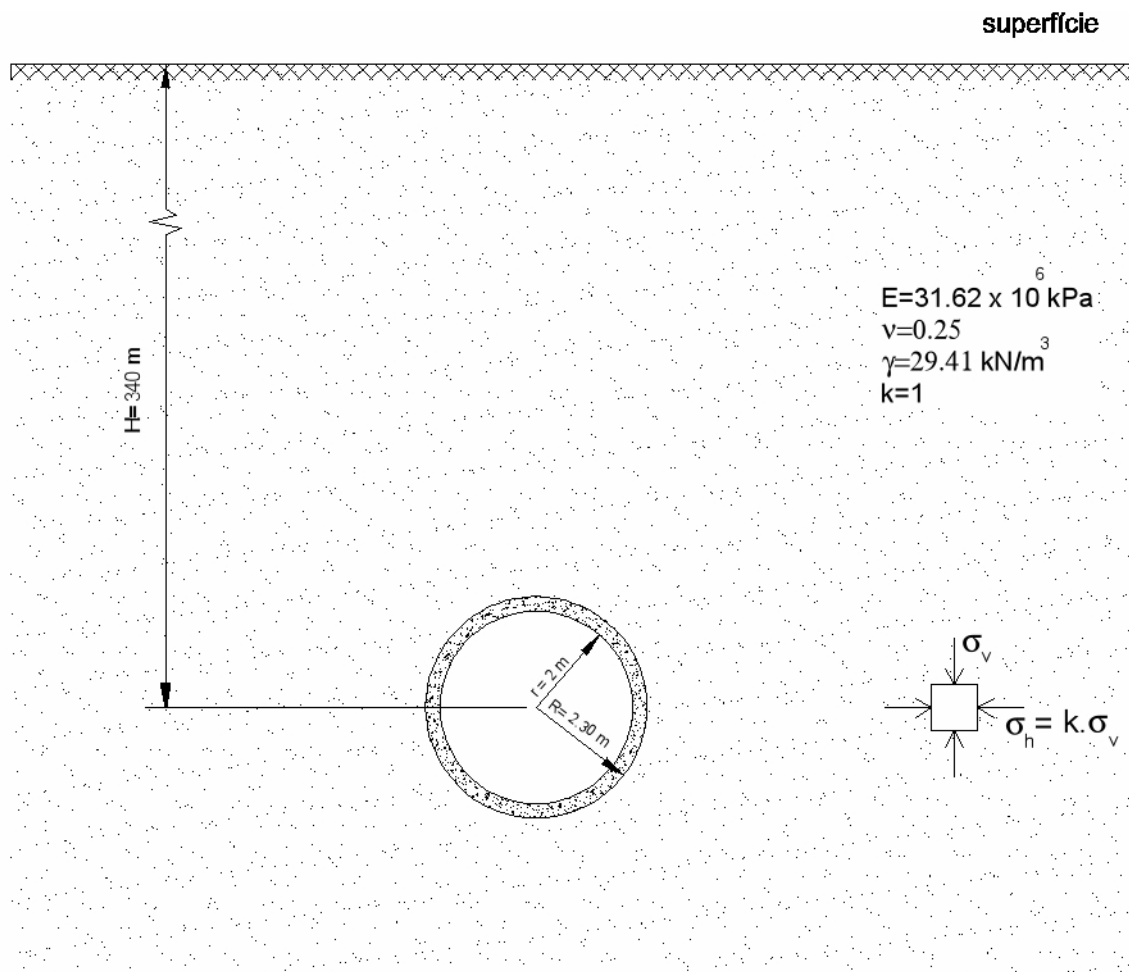


Figura 9.11: Túnel em maciço rochoso com suporte

considerando o módulo de elasticidade do concreto próximo de zero ( $E = 1$ ) e seus resultados comparados com os resultados das tensões e dos deslocamentos nos pontos internos calculados considerando o túnel sem o revestimento.

Nos dois casos, túnel sem suporte e túnel com suporte de concreto com módulo de elasticidade próximo de zero ( $E = 1$ ), os resultados dos deslocamentos e tensões nos pontos internos devem ser os mesmos. Os resultados encontrados para a situação 1 (sem suporte) e para a situação 2 (com suporte,  $E = 1$ ) foram obtidos numericamente utilizando uma malha com 20 elementos (MEC20). As localizações dos pontos internos são os mesmos mostrados no problema anterior.

Os resultados encontrados estão em total acordo com a solução analítica obtida através das equações de Kirsch. Os valores encontrados entre as soluções obtidas sem suporte (situação 1) e com suporte (situação 2) foram os mesmo tanto para os deslocamentos como para as tensões, apresentando dessa forma a validade da técnica de sub-região implementada.

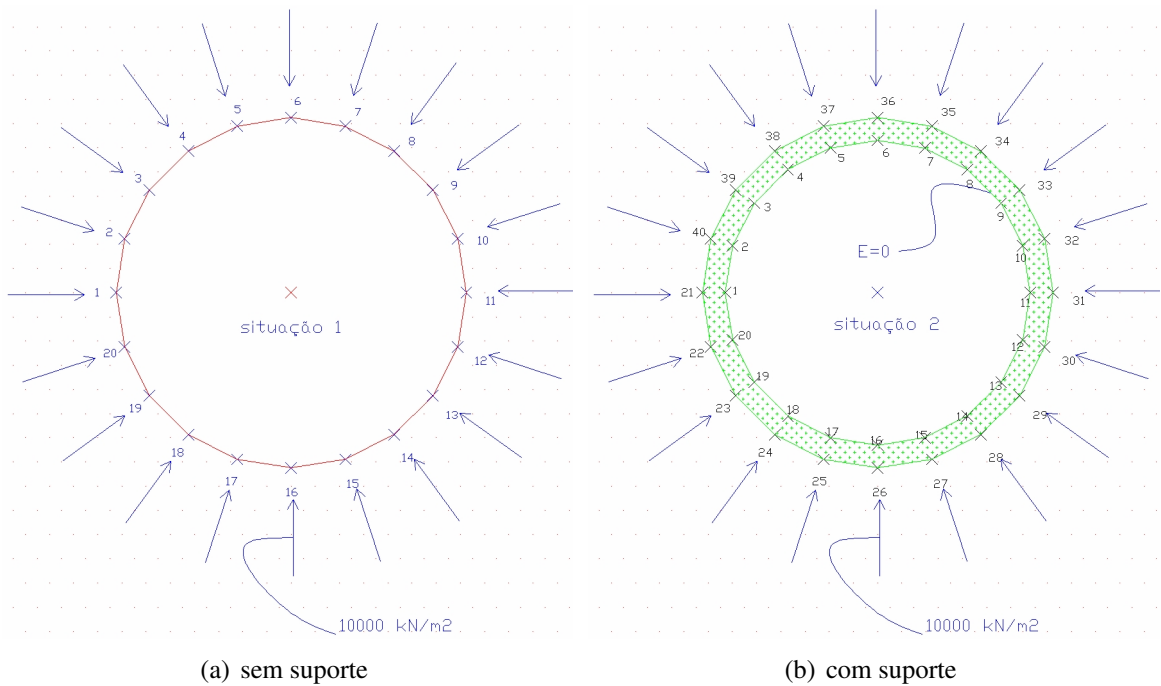


Figura 9.12: Discretização

Tabela 9.3: Deslocamento radial  $10^{-4}m$

ponto	situação 1	situação 2	analítico
1	-	-	-
2	9,068	9,068	9,092
3	5,931	5,931	6,062
4	5,116	5,116	5,228
5	3,41	3,41	3,485
6	2,558	2,558	2,614
7	2,046	2,046	2,091

Foi realizado também uma simulação desse problema considerando o módulo de elasticidade do concreto infinitamente rígido. Os resultados dos deslocamentos nos pontos internos devem ser, para esse caso, nulos (próximo de zero) e as tensões sobre o maciço devem permanecer inalterados. Os resultados encontrados foram obtidos numericamente utilizando uma malha com 20 elementos (MEC20). As localizações dos pontos internos são os mesmos mostrados no problema anterior.

Os resultados encontrados estão em total acordo com a solução antes prevista. Uma vez que o suporte é considerado infinitamente rígido os deslocamentos provocados pela ação do maciço sobre o suporte é aproximadamente zero e o campo de tensões no maciço permanecem praticamente inalterados.

Tabela 9.4: Tensão radial  $kN/m^2$ 

ponto	situação 1	situação 2	analítico
1	-	-	-
2	651	651	0
3	5649	5649	5555
4	6765	6765	6693
5	8562	8562	8530
6	9191	9191	9173
7	9482	9482	9471

Tabela 9.5: Deslocamentos e tensões considerando o suporte infinitamente rígido

ponto	deslocamento radial (m)	tensão radial ( $kN/m^2$ )
1	-	-
2	$6,80 \cdot 10^{-9}$	-999,9258
3	$4,46 \cdot 10^{-9}$	-999,9672
4	$3,85 \cdot 10^{-9}$	-999,9756
5	$2,56 \cdot 10^{-9}$	-999,9891
6	$1,92 \cdot 10^{-9}$	-999,9939
7	$1,54 \cdot 10^{-9}$	-999,9961

Agora admitindo-se as características reais do revestimento, ou seja,  $E = 25,70GPa$  e coeficiente de Poisson 0,15. Foram encontrados os resultados para as tensões e os deslocamentos nos pontos internos no maciço e no suporte. Os resultados das tensões estão contidas na Fig 9.13 e os resultados dos deslocamentos na Fig 9.14.

No gráfico de deslocamento radial (Fig 9.14) os resultados mostram uma pequena variação na inclinação da curva na interfase entre as duas estruturas. Essa pequena variação se deve a variação dos módulos de elasticidade do concreto e maciço rochoso. No gráfico de tensão radial (Fig 9.13) as tensões tendem ao valor do campo de tensões iniciais do maciço a uma distância longe do túnel, da mesma forma como os deslocamentos radiais tendem a zero.

Traçando as curvas características do suporte e do maciço utilizando respectivamente as equações eq. 9.1 e eq. 9.2 é possível determinar analiticamente o ponto de equilíbrio.

$$U_s = \frac{P_i r^2 (1 - \nu_s^2)}{E_s A_s} \quad (9.1)$$

$$U_f = \frac{P_i r^2 (1 + \nu_M)}{E_M} \quad (9.2)$$



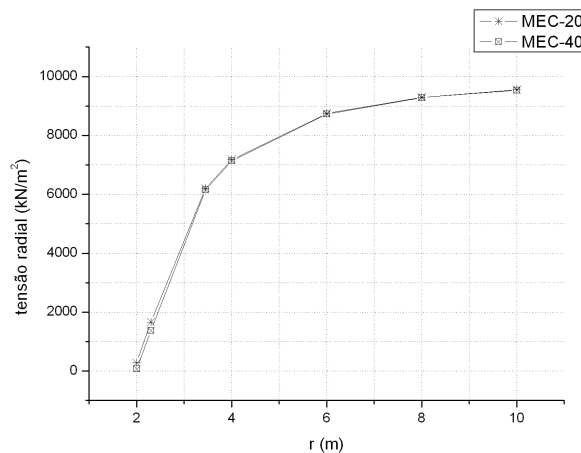


Figura 9.13: Tensão radial - túnel com suporte

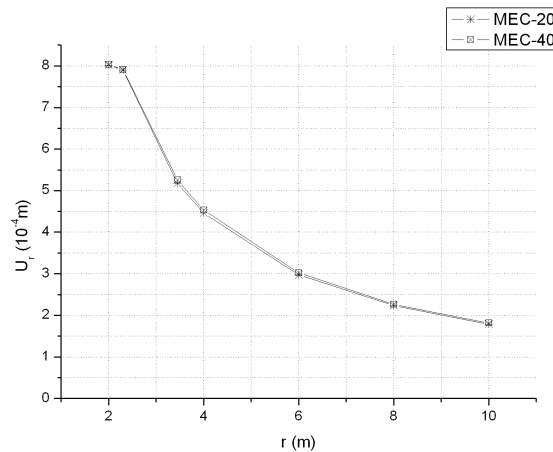


Figura 9.14: Deslocamento radial - túnel com suporte

onde  $P_i$  a pressão sofrida pela parede do túnel e  $r$  o raio do túnel;  $\nu_s$ ,  $E_s$  e  $A_s$  os coeficiente de Poisson, módulo de elasticidade e área da seção transversal do suporte respectivamente;  $\nu_M$  e  $E_M$  o coeficiente de Poisson e módulo de elasticidade do maciço.  $U_s$  e  $U_f$  são respectivamente os deslocamentos finais do suporte e do maciço sujeitos ao carregamento  $P_i$ .

A tabela 9.6 indica o resultado obtido da interação maciço-suporte. A interação maciço-suporte determina o ponto de equilíbrio provocado pela interação entre essas duas estruturas. Esse ponto determina o deslocamento e a carga final necessária para o estabelecimento do equilíbrio sobre a interface entre os dois sistemas, ou seja, em nosso exemplo sobre o ponto interno número 2. Os valores encontrados para o ponto de equilíbrio ( $U_e$ ,  $P_e$ ) calculado analiticamente em confronto com o resultado numérico utilizando o MEC40 se encontram na Tabela 9.6.

Tabela 9.6: Ponto de equilíbrio do sistema maciço-suporte

	analítico	MEC40
$U_e(\text{mm})$	0,8048	0,7914
$P_e(\text{kN}/\text{m}^2)$	1147	1376

O mesmo problema foi resolvido considerando o caso de  $k \neq 1$ . Admitindo-se  $k = 0,5$  e duas malhas de elementos de contorno com 20 e 40 elementos, nomeados como MEC20 e MEC40 respectivamente. Foram calculados os esforços e deslocamentos nos pontos internos indicados na figura 9.15.

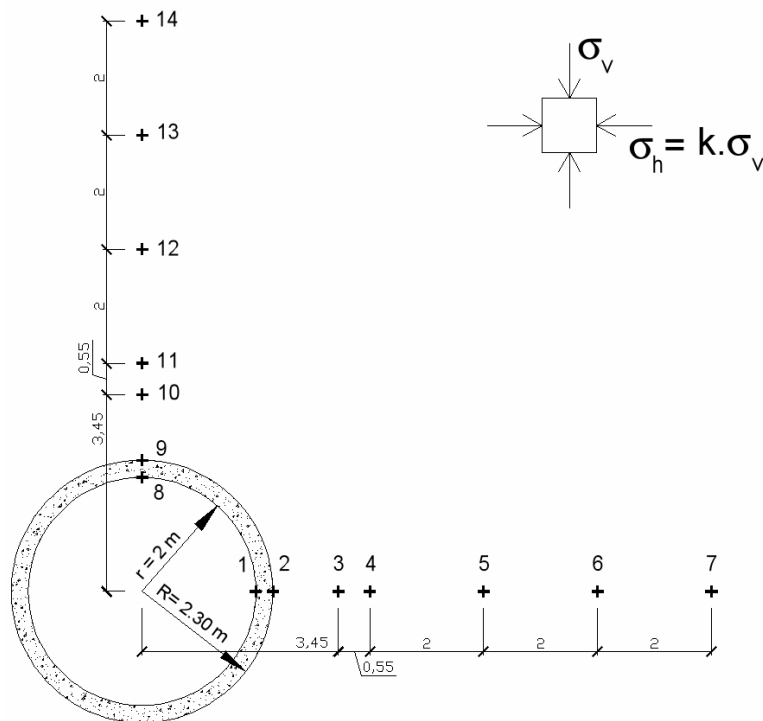


Figura 9.15: Localização dos pontos internos

Tabela 9.7: Deslocamento radial  $10^{-4}m$ : caso  $k = 0,5$ 

ponto	MEC20	MEC40
1	-1,930	-1,926
2	-1,175	-1,770
3	-0,518	-0,536
4	-0,337	-0,350
5	-0,107	-0,112
6	-0,049	-0,052
7	-0,028	-0,030
8	-10,100	-10,130
9	-10,100	-10,100
10	-7,241	-7,345
11	-6,355	-6,447
12	-4,354	-4,419
13	-3,297	-3,346
14	-2,649	-2,689

Tabela 9.8: Tensão radial  $kN/m^2$ : caso  $k = 0,5$ 

ponto	MEC20	MEC40
1	327	82
2	1773	1485
3	4836	4817
4	5086	5077
5	5187	5187
6	5134	5135
7	5094	5095
8	94	18
9	713	579
10	4476	4405
11	5682	5624
12	7932	7902
13	8807	8790
14	9228	9217



## **10 Calibração dos Parâmetros que Levam em Consideração o Efeito Tridimensional do Problema de Escavação**

### **10.1 Introdução**

O objetivo deste capítulo é a calibração de parâmetros que possam ser utilizados em um modelo de análise bidimensional em túneis, utilizando o Método dos Elementos de Contorno e levando em consideração o efeito tridimensional do problema. Os parâmetros são definidos para cada método e estão descritos ao longo de cada um dos itens. Para a calibração dos parâmetros foram levados em consideração dois casos distintos para o problema de escavação: i) escavação do túnel sem suporte e ii) escavação do túnel com suporte considerando o atraso na instalação do mesmo.

O trabalho de simulação numérica foi desenvolvido durante um período de 3 meses junto ao Departamento de Análise Estrutural da Universidade Técnica de Graz (Áustria) sobre a orientação do professor Gernot Beer. Os programas utilizados foram as versões BEFE (Boundary Element/Finite Element Program) e BEFE++ que se encontra atualmente em desenvolvimento. Esse programa é direcionado principalmente para problemas aplicados a túneis.

### **10.2 Escavação sem Suporte**

Nessa seção será elaborado um método que seja capaz de incorporar, dentro de uma análise numérica bidimensional, os efeitos tridimensionais contidos no problema de escavação de túneis sem suporte. É necessário, portanto, quantificar e qualificar os parâmetros envolvidos nesse problema entendendo sua influência e variação para os diversos casos que possam existir.

### 10.2.1 Objetivo

Para o problema da escavação de túneis sem suporte o objetivo principal é poder descrever detalhadamente o andamento do deslocamento radial em seções logo a frente e logo a atrás da frente de escavação. Isto é, obter o campo de deslocamentos do problema 3D utilizando a solução do problema 2D.

### 10.2.2 Método da Redução do Carregamento

Usando o método da redução do carregamento, descrito na seção 3.3, é possível desenvolver um procedimento capaz de descrever com precisão, em um modelo numérico bidimensional, os efeitos tridimensionais contidos no problema da escavação de túneis sem suporte (ver fig. 10.1).

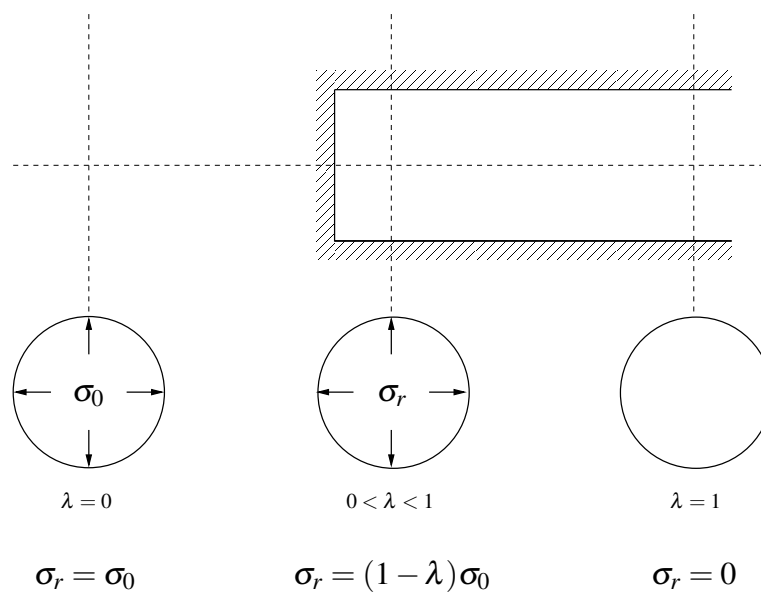


Figura 10.1: Fator de Redução do carregamento  $\lambda$

Na região próxima a frente de escavação o carregamento é reduzido através de um fator  $\lambda$  que varia de 0 a 1. O fator  $\lambda$  é nulo a uma distância  $2D$  depois da face, toda tensão residual do maciço permanece, portanto, sem haver descarregamento.

Numa região intermediária entre a distância  $2D$  antes e  $2D$  depois da face a tensão residual que permanece é  $\sigma_r = (1 - \lambda)\sigma_0$ . Portanto, as forças de superfície para simular o descarregamento são:

$$P = -\lambda \sigma_0 \quad (10.1)$$

Na região a uma distância  $2D$  antes da face o descarregamento é completo,  $\lambda = 1$  e  $P = -\sigma_0$ .

No problema de estado plano de deformação (2-D) uma tensão radial,  $\sigma_r$ , é aplicado na periferia do túnel provando um decrescimento na tensão inicial  $\sigma_0$ . Admitindo-se um túnel circular profundo de raio  $r$ , submetido a um campo de tensões iniciais isotrópico, escavado em um maciço rochoso homogêneo e que possui um comportamento elástico linear, pode-se definir  $P_i$  como a pressão inicial sobre a parede do túnel, assim:

$$\sigma_0 = -P_i \quad (10.2)$$

Para um carregamento  $P_i$ , o deslocamento radial pode ser descrito por Kirsch (1898):

$$U_r = \frac{\lambda P_i r}{2G_M} \quad (10.3)$$

Normalizando-se o deslocamento radial ( $U_r$ ) em relação ao diâmetro do túnel:

$$\frac{U_r}{D} = \lambda \frac{P_i}{4G_M} \quad (10.4)$$

Como visto anteriormente,  $\lambda$  é um fator de descarregamento que varia em função da distância da seção analisada em relação a frente de escavação. Quando a seção em estudo está distante, atrás da frente de escavação,  $U_r = U_r^f$  e  $\lambda = 1$ .  $U_r^f$  é o deslocamento final do maciço rochoso. Quando a seção em estudo está distante, adiante da frente de escavação,  $U_r = 0$  e  $\lambda = 0$ . Ajustando-se a eq. 10.4, isolando  $\lambda$ , é possível visualizar dois conjuntos de parâmetros que definem a variável  $\lambda$ :

$$\lambda = \frac{4G_M}{P_i} \frac{U_r}{D}$$

O conjunto de parâmetros físicos contém as características físicas do problema: carregamento ( $P_i$ ) e módulo de rigidez transversal do maciço ( $G_M$ ). O conjunto de parâmetros

geométricos contém o deslocamento radial, na seção em estudo, normalizado pelo diâmetro adotado para a escavação.

### Estudo do Conjunto de Parâmetros Geométricos

Foram modelados túneis usando um modelo numérico tridimensional para o estudo do deslocamento radial ( $U_r$ ) ao longo do eixo longitudinal do túnel para seções localizadas a frente e a atrás da face de escavação. O modelo numérico 3-D foi implementado usando o programa BEFE que está em constante desenvolvimento no departamento de análise estrutural da Universidade Técnica de Graz, Áustria. O modelo numérico foi implementado usando o Método dos Elementos de Contorno. A malha de elementos de contorno típica utilizado na modelagem pode ser visto na fig. 10.2

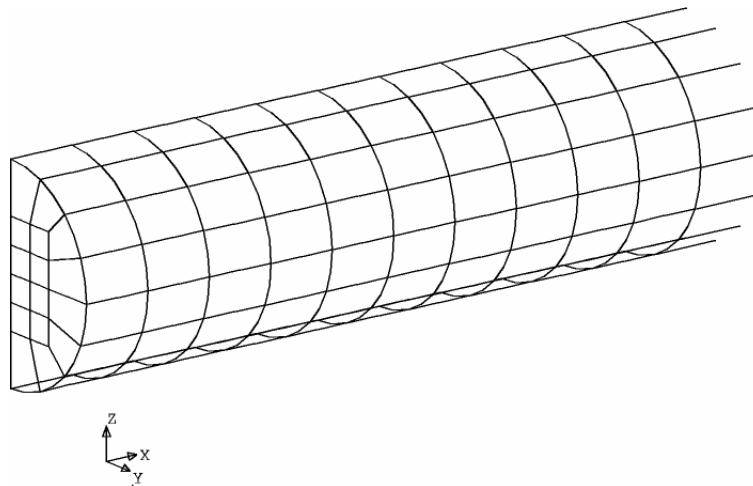


Figura 10.2: Malha em Elementos de Contorno

Para a malha mostrada na fig. 10.2 foram utilizados dois tipos de elementos: a) elemento de contorno parabólico, com oito nós por elemento; b) elemento de contorno infinito, com 6 nós por elemento. O elemento de contorno infinito é um elemento especial desenvolvido no programa BEFE e recomendado para problemas onde o contorno do domínio da região modelada se estende para infinito. Os deslocamentos neste elemento são assumidos constantes na direção de  $\eta$ .

Foi verificado nos casos simulados, que para túneis profundos com diferentes valores de diâmetro, o deslocamento radial na região próxima a frente de escavação é o mesmo, isso se



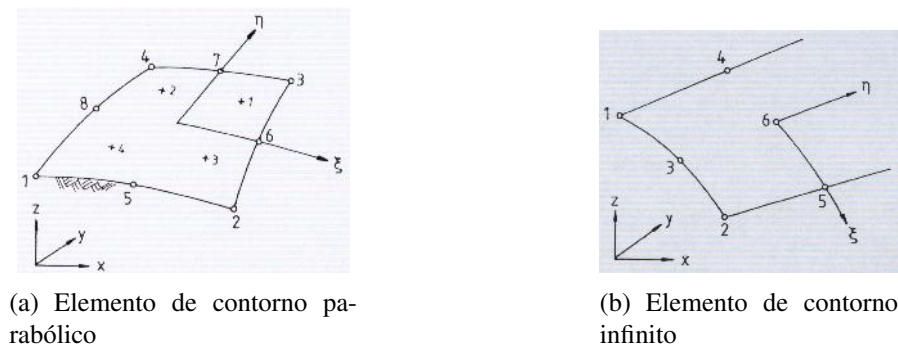


Figura 10.3: Tipos de elementos de contorno utilizados

o deslocamento radial for normalizado em relação ao diâmetro do túnel ( $U_r/D$ ) para um mesmo material e valor de carregamento.

Traçando-se o gráfico do deslocamento radial, admitindo-se como sendo na direção  $Z$ , ao longo do eixo longitudinal em função da distância em relação a frente de escavação, admitindo-se como sendo na direção  $X$ , ambos normalizados em relação ao diâmetro, é possível construir o gráfico de  $Z/D$  (deslocamento radial normalizado em relação ao diâmetro), para um dado conjunto de parâmetros físicos, que não varia independente do valor do diâmetro adotado (ver fig. 10.4).

Esse resultado é importante porque é possível descrever o comportamento do deslocamento radial longitudinal ao eixo do túnel para um conjunto de parâmetros físicos específicos independente do valor do diâmetro.

### Estudo do Conjunto de Parâmetros Físicos

O conjunto de parâmetros físicos contém as características do maciço rochoso e o valor do carregamento.  $\lambda$  é uma função que não é variável com esse conjunto de parâmetros. Para cada problema definido o conjunto de parâmetros físicos se comporta como uma constante do problema.  $\lambda$  varia em função da distância da seção em análise em relação a frente de escavação ( $X/D$ ), substituindo-se o deslocamento total  $U_r^f$  na equação que defini  $\lambda$  encontra-se a relação:

$$\lambda = \frac{U_r}{U_r^f} \quad (10.5)$$

É possível, com a relação contida na eq. 10.5, determinar a variação de  $\lambda$  para qualquer problema independente do conjunto de parâmetros físicos e o conjunto de parâmetros geométricos adotados.

Para ratificar essa observação foram modelados três casos com diferentes conjuntos de

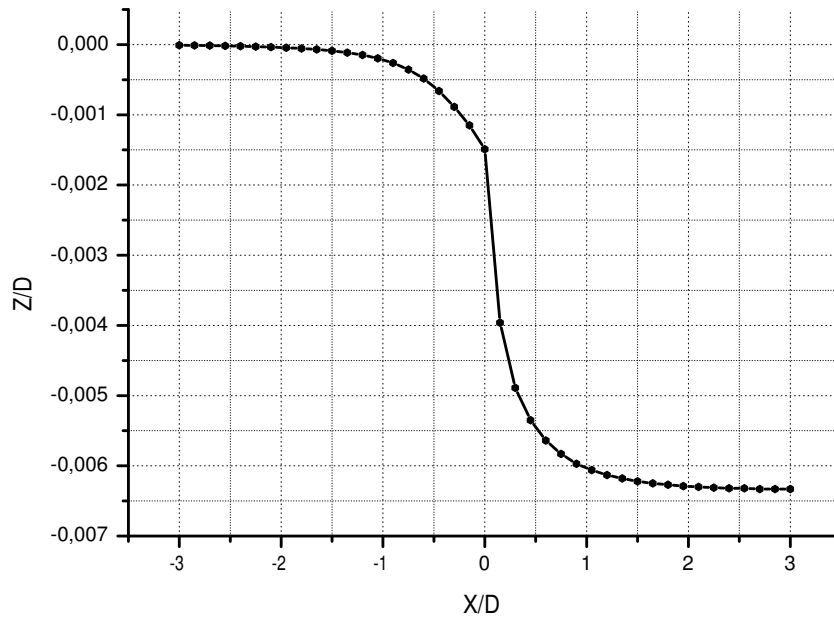


Figura 10.4: Deslocamento radial para um conjunto de parâmetros físicos específicos

parâmetros físicos. As características de cada caso estão contidas na tabela 10.1.

Tabela 10.1: Casos modelados

caso	$E(MN/m^2)$	$\nu$	$G_M(MN/m^2)$	$P_i(MN/m^2)$	$\rho = \frac{4G_M}{P_i}$
1	1000	0,30	384,62	10	153,85
2	500	0,30	192,31	20	38,46
3	500	0,15	217,39	30	28,99

Para o três casos estudados, o gráfico de  $\lambda$  determinado pela modelagem numérica tridimensional implementada foi o mesmo (ver fig. 10.5).

Com os valores de  $\lambda$  é possível agora utilizar um método numérico bidimensional para analisar qualquer seção que se encontre a frente ou atrás da face, sendo necessário apenas aplicar o fator de descarregamento  $\lambda$  mudando as condições de contorno do problema.

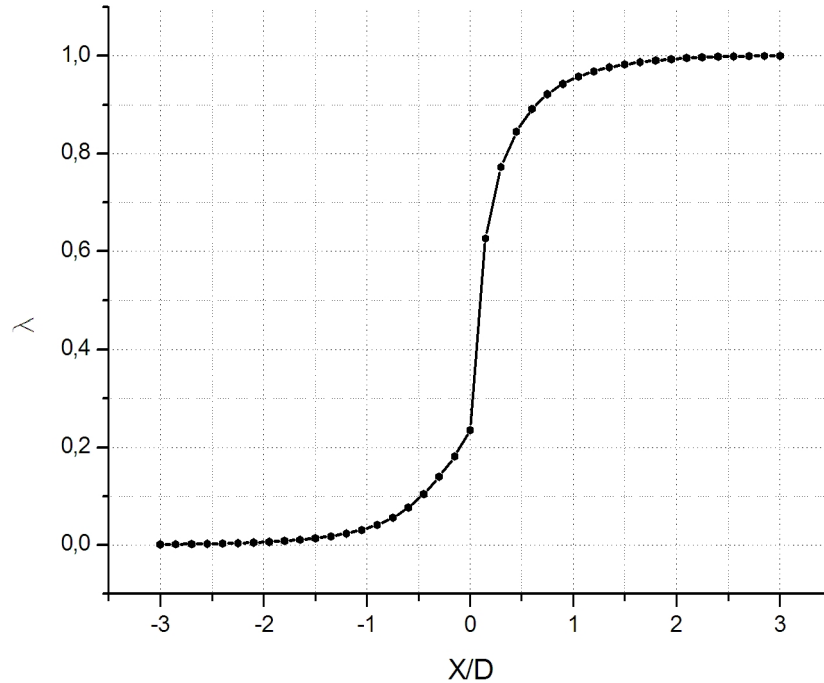


Figura 10.5: Variação de  $\lambda$

### 10.3 Escavação com Suporte

A proposta principal deste item é adotar um método simplificado que seja capaz de reproduzir o efeito tridimensional para o problema de túneis com suporte, de forma a ser possível analisá-lo aplicando um método numérico desenvolvido para o espaço 2D. Para tanto é necessário:

- i - Desenvolver, através de um estudo específico (estudo do gráfico de interação maciço-suporte), um método que seja capaz de quantificar e qualificar cada parâmetro que descreve o problema;
- ii - Verificar se o método incorpora outros métodos amplamente utilizados;
- iii - Desenvolver um método que seja capaz de incorporar os efeitos tridimensionais em um modelo numérico bidimensional de análise de escavação de túneis.

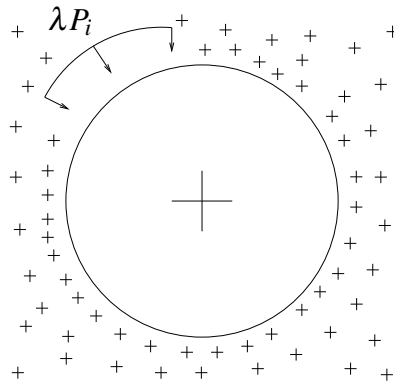


Figura 10.6: Fator de Redução do carregamento para o túnel sem suporte

### 10.3.1 Objetivo

No problema da escavação de túneis com suporte o objetivo é determinar o ponto de equilíbrio para o problema de escavação em túneis considerando-se o efeito do suporte sobre o equilíbrio do sistema, levando-se em consideração o atraso na instalação do suporte. Para a análise desse problema foi necessário um estudo paralelo para a elaboração de um modelo que possa representar na análise bidimensional as particularidades contidas nesse problema. Entre essas particularidades duas precisam ser destacadas:

i - O problema é essencialmente tridimensional: na face de escavação do túnel o deslocamento tem uma forma complexa;

ii - É um problema acoplado de interação entre duas diferentes estruturas que possuem geometrias e comportamentos distintos: o suporte que pode ser admitido como sendo um anel em torno da escavação e o maciço rochoso onde é realizada a escavação.

### 10.3.2 Estudo do Gráfico de Interação Maciço-Suporte

Considere um túnel circular profundo de raio  $r$ , escavado em um maciço rochoso homogêneo e isotrópico sujeito a um campo de tensões geostáticas  $\{\sigma_0\}$ :

$$\sigma_0 = -P_i \quad (10.6)$$

$\{P_i\}$ : Pressão inicial sobre a parede do túnel. com  $P_i = \rho gz$ , onde:  $z$  é a distância entre o eixo longitudinal do túnel e a superfície. O suporte possui um comportamento elástico linear e uma espessura constante  $\{e\}$ .  $\{L'_d\}$  representa o atraso na instalação do suporte em relação a face de

escavação do túnel. A face é admitida plana e vertical.

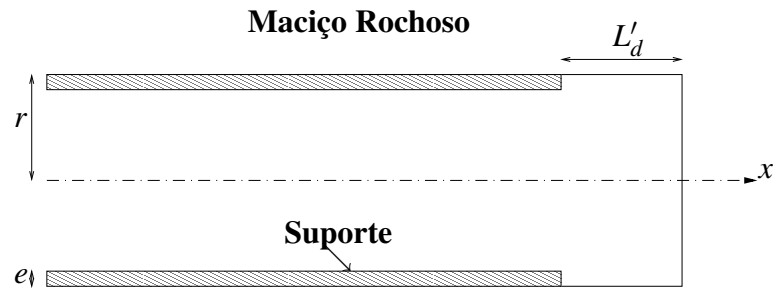


Figura 10.7: Túnel modelo

Se a face do túnel estiver longe da seção em estudo, ou seja, no caso onde  $x \rightarrow \infty$  o campo de deslocamentos é radial (estado plano de deformação). Neste caso todos os parâmetros que descrevem a estrutura dependem somente da distância radial em relação ao eixo do túnel.

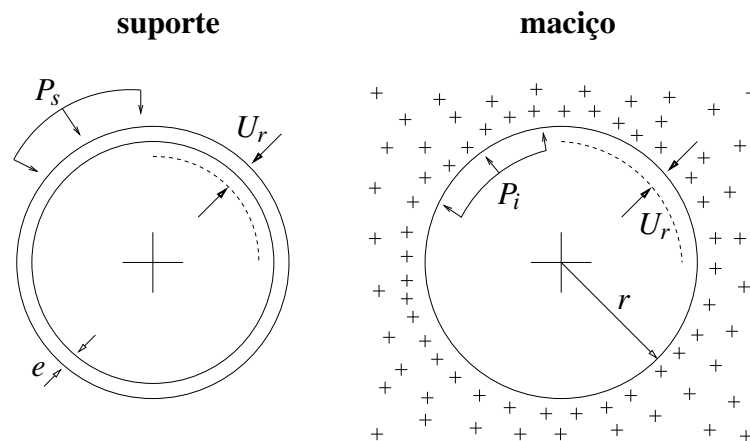


Figura 10.8: Representação esquemática das variáveis envolvidas na interação entre as duas estruturas, suporte e maciço respectivamente.

A interação entre as duas estruturas pode ser definida através do parâmetro de confinamento  $P_i$  comum a elas (fig. 10.8). O parâmetro associado é o deslocamento radial da parede do túnel  $U_r$ . Pode-se, assim, traçar as curvas das duas estruturas no diagrama convergência-confinamento  $P_i - U_r$  (fig. 10.9).

A curva  $C_M$  é a chamada curva característica do maciço ou curva de convergência, dado a pressão interna  $P_i$  exercida sobre a parede do túnel versus o deslocamento radial (convergência) parede  $U_r$ . A curva  $C_S$  é a chamada curva característica do suporte ou curva de confinamento, ilustra a relação entre a pressão interna  $P_i$  versus o confinamento do suporte  $U_r$ .

O ponto de equilíbrio  $(P_e, U_e)$  entre essas duas estruturas é dado pela interseção das curvas  $C_M$  e  $C_S$ .  $P_e$  é a pressão exercida pelo maciço rochoso sobre o suporte no fim do processo

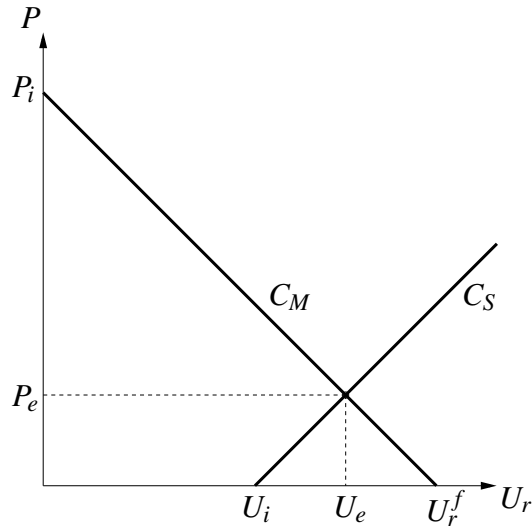


Figura 10.9: Diagrama Convergência-Confinamento

de construção e  $U_e$  é o fechamento total da parede do túnel.  $U_i$  representa a abscissa inicial da curva  $C_S$  sendo função do atraso na instalação do suporte  $L'_d$ .  $U_r^f$  é o deslocamento máximo do maciço caso não houvesse o suporte, é dado por (para o caso do carregamento isotrópico):

$$U_r^f = \frac{P_i r}{2G_M} \quad (10.7)$$

Trabalhando-se com o gráfico de interação maciço-suporte é possível determinar as equações que representam matematicamente o comportamento de cada estrutura. Definindo-se para o suporte uma função  $f(x)$  e para o maciço rochoso uma função  $g(x)$ , tem-se:

$$\text{suporte} - f(x) = ax + b \quad (10.8)$$

$$\text{maciço} - g(x) = cx + d \quad (10.9)$$

Para determinar os coeficientes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  basta aplicar as condições contidas em cada função separadamente. Uma vez que são quatro o número de incógnitas é necessário no mínimo quatro condições linearmente independentes. Através do gráfico de interação maciço-suporte (fig. 10.9) é possível determinar as seguintes condições:

$$f(x) = 0, x = U_i \quad (10.10)$$

$$f'(x) = \frac{E_s A_s}{r^2(1 - \nu_s^2)}, x \geq 0 \quad (10.11)$$

$$g(x) = P_i, x = 0 \quad (10.12)$$

$$g(x) = 0, x = U_r^f \quad (10.13)$$

A condição 10.11 representa o ângulo de inclinação da reta da curva  $C_S$  que é a mesma obtida pela análise bidimensional de um anel sollicitado por um carregamento radial. A equação da reta que representa a curva  $C_S$  é a mesma equação utilizada pelo modelo de Schwartz e Einstein (eq. 4.7). Aplicando-se as condições acima e substituindo-se o valor de  $U_r^f$  contida na eq. 10.7 é possível chegar facilmente as funções:

$$f(x) = \frac{E_s A_s}{r^2(1 - \nu_s^2)} x - \frac{E_s A_s}{r^2(1 - \nu_s^2)} U_i \quad (10.14)$$

$$g(x) = \frac{-2G_M}{r} x + P_i \quad (10.15)$$

Para o ponto de equilíbrio as duas funções se igualam, ou seja, para  $x = U_e \rightarrow f(x) = g(x)$ :

$$\frac{E_s A_s}{r^2(1 - \nu_s^2)} x - \frac{E_s A_s}{r^2(1 - \nu_s^2)} U_i = \frac{-2G_M}{r} x + P_i \quad (10.16)$$

Substituindo-se a valor de  $x$  na eq. 10.16 e definindo  $G_S$  como sendo o módulo de elasticidade transversal do suporte, pode-se isolar o valor  $U_i$ :

$$U_i = \left[ \frac{r}{A_s} \frac{G_M}{G_S} (1 - \nu_s) + 1 \right] U_e - \frac{P_i r^2 (1 - \nu_s^2)}{E_s A_s} \quad (10.17)$$

O primeiro termo da eq. 10.17 é o produto entre um parâmetro adimensional referente as características físicas do problema, geometria e material, que será chamada de uma constante Kappa  $\{\kappa\}$  e o ponto de deslocamento final do sistema equilibrado  $U_e$ . O segundo termo, observando-se a (fig. 10.10), é o deslocamento final do suporte  $\{U_r^s\}$  trabalhando como uma estrutura isolada se a ela fosse aplicada uma força de carregamento  $P_i$ .

Desta forma a eq. 10.17 pode ser reescrita como:

$$U_i = \kappa U_e - U_r^s \quad (10.18)$$

É possível fazer algumas considerações em relação ao intervalo de Kappa ( $\kappa$ ), levando em conta o problema físico envolvido.  $\kappa$ , como definido anteriormente, é dado por:

$$\kappa = \left[ \frac{r}{A_s} \frac{G_M}{G_S} (1 - \nu_s) + 1 \right] \quad (10.19)$$

Se forem analisados todos os problemas que fisicamente podem ocorrer, em especial os

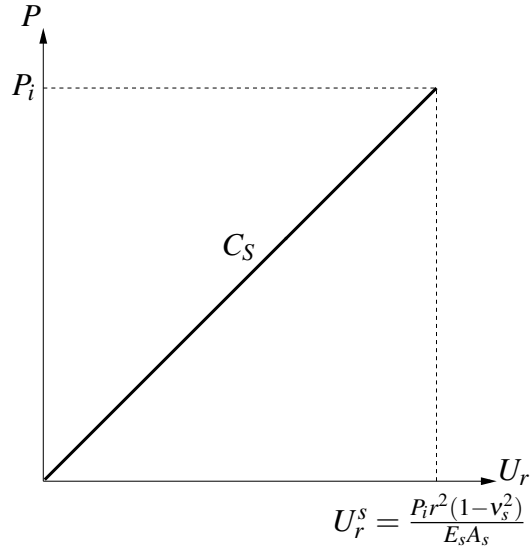


Figura 10.10: Curva característica do suporte trabalhando como uma estrutura isolada

seus extremos, pode-se definir o intervalo de variação de  $\kappa$  cobrindo todos os tipos de problema, sempre respeitando as hipóteses antes definidas. É fácil observar que o primeiro termo da eq. 10.19 define esse intervalo, podendo ser zero, para o caso onde o produto  $A_s G_s$  tende ao infinito em relação ao produto  $r G_M$ ; ou infinito  $\infty$ , para o caso onde o produto  $r G_M$  tende ao infinito em relação ao produto  $A_s G_s$ . Desta forma consegue-se verificar que o intervalo de  $\kappa$  é:

$$1 \leq \kappa \leq \infty \quad (10.20)$$

Pode-se analisar ainda a variação de  $U_e$  em relação a esses extremos, para tanto precisa-se trabalhar com a eq. 10.18. Primeiro isolando  $U_e$  e parametrizando em relação a  $U_r^f$ , tem-se:

$$\frac{U_e}{U_r^f} = \frac{U_i}{U_r^f} + \frac{U_r^s}{U_r^f} \quad (10.21)$$

Substituindo-se o valor de  $U_r^s$ , contido na fig. 10.10, e  $U_r^f$ , contido na eq. 10.7, é possível chegar facilmente na equação:

$$\frac{U_e}{U_r^f} = 1 + \frac{1}{\kappa} \left( \frac{U_i}{U_r^f} - 1 \right) \quad (10.22)$$

A eq. 10.22 representa o valor do deslocamento equilibrado dos dois sistemas estruturais parametrizado em relação ao valor de deslocamento final do maciço sem suporte. Agora fica fácil observar a variação de  $U_e$  para o intervalo definido anteriormente para  $\kappa$ :



$$\kappa = 1, U_e = U_i \quad (10.23)$$

$$\kappa \rightarrow \infty, U_e = U_r^f \quad (10.24)$$

A verificação dessa constatação pode ser observada para o caso onde  $U_i$  é igual a zero, ou seja, para o caso onde o atraso na instalação do suporte é nulo. A eq. 10.22 para  $U_i$  igual a zero é:

$$\frac{U_e}{U_r^f} = 1 - \frac{1}{\kappa} \quad (10.25)$$

Traçando-se o gráfico adimensionalizado do deslocamento  $U_e$  versus a variação de Kappa, tem-se (para o caso onde o atraso da instalação é nulo):

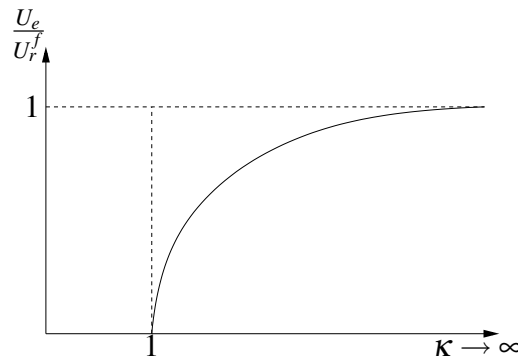


Figura 10.11: Gráfico de variação de  $U_e$  em relação a  $\kappa$

Generalizando-se o gráfico acima para diferentes valores de atraso na instalação do suporte, ou seja,  $U_i^n \neq 0$  pode-se deduzir que o gráfico de variação de  $U_e$  em relação a  $\kappa$  possui um comportamento como mostrado na fig. 10.12.

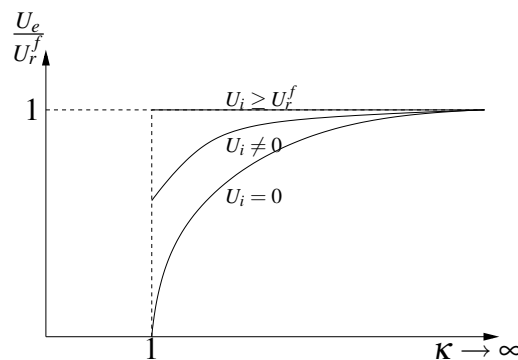


Figura 10.12: Gráfico de variação de  $U_e$  em relação a  $\kappa$  generalizado

As três curvas ( $U_i = 0$ ,  $U_i \neq 0$  e  $U_i \geq U_r^f$ ) representam o intervalo dos valores possíveis de  $U_i$  (ver fig. 10.13). Pode-se analisar as três curvas separadamente:

-  $U_i = 0$ : quando  $\kappa = 1$  o valor de  $U_e = 0$ , o que de fato concorda com o problema físico, uma vez que para  $\kappa = 1$  o produto  $A_s G_s$  tende ao infinito em relação ao produto  $r G_M$  (ver eq. 10.19). Por exemplo, quando o módulo de elasticidade do suporte tende ao infinito, seria o caso de um suporte infinitamente rígido colocado imediatamente após a escavação (é uma situação idealizada sobre um campo de análise matemática). Para esse caso a curva  $C_S$  do suporte no diagrama convergência-confinamento tenderia a ficar na vertical aproximando assim o valor  $U_e = 0$  e portanto o túnel não sofreria nenhum deslocamento. Quando  $\kappa \rightarrow \infty$  o produto  $r G_M$  tende ao infinito em relação ao produto  $A_s G_s$  (ver eq. 10.19). Portanto quando o módulo de elasticidade do suporte tende zero, seria o caso de um suporte infinitamente flexível. Para esse caso a curva  $C_S$  do suporte no diagrama convergência-confinamento tenderia a ficar na horizontal aproximando assim o valor  $U_e = U_r^f$ ; o deslocamento no túnel ocorre como se o suporte não existisse;

-  $U_i \neq 0$ : quando  $\kappa = 1$  o valor de  $U_e = U_i$  (ver eq. 10.23) o que de fato fisicamente também está de acordo, uma vez que para  $\kappa = 1$ , portanto o caso do módulo de elasticidade do suporte infinitamente rígido, a curva  $C_S$  do suporte no diagrama convergência-confinamento tenderia a ficar na vertical aproximando assim para o valor  $U_e = U_i$  (ver fig. 10.13). Para o caso do suporte infinitamente flexível ( $\kappa \rightarrow \infty$ ),  $U_e = U_r^f$ .

-  $U_i \geq U_r^f$ : para todo valor de  $U_i \geq U_r^f$  o valor de  $U_e$  vai ser sempre igual ao valor de  $U_r^f$ , uma vez que todo o deslocamento do maciço já ocorreu.

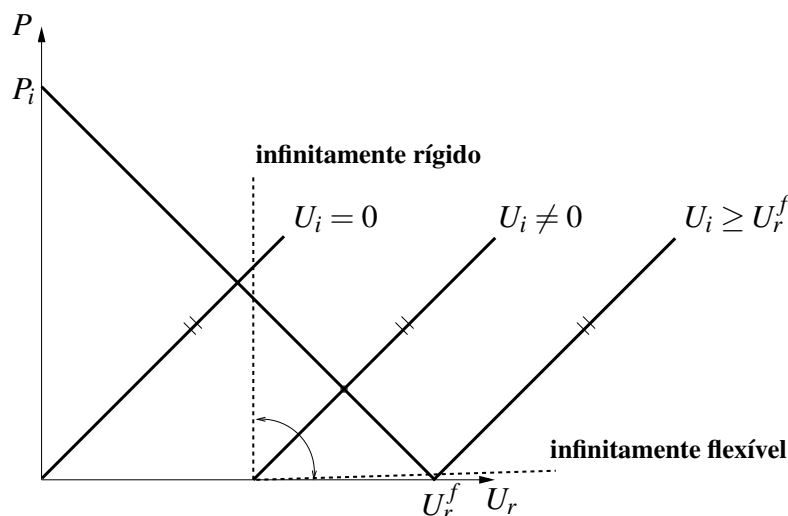


Figura 10.13: Possíveis valores  $U_i$  no gráfico de interação maciço-suporte

Métodos numéricos usando análises tridimensionais sobre condições de axisimetria ou não, permitem o cálculo com uma boa aproximação dos valores de  $U_i \neq 0$  para uma dada

família de parâmetros. Utilizando a metodologia simplificada acima descrita é possível estimar os valores de  $U_e$  e  $U_i$  para qualquer família de parâmetros, ou seja, para qualquer valor de  $\kappa$ . Na verdade  $U_i$  é um parâmetro que não depende das características físicas do material ou da geometria das estruturas envolvidas, mas do valor de  $L'_d$  que representa o atraso na instalação do suporte, como definido no início desta seção. Em virtude disso,  $U_i$  para diferentes valores de  $L'_d$  foram estimados utilizando um modelo numérico tridimensional. É necessário, entretanto, atentar para algumas particularidades do problema de simulação em túneis, principalmente no que se refere ao processo de escavação seqüencial.

### 10.3.3 Descrição do Modelo de Escavação Seqüencial

O modelo numérico tridimensional foi analisado usando o programa BEFE (Boundary Element/Finite Element Program). A sua versão BEFE++ se encontra em constante desenvolvimento sobre a coordenação do Prof. Gernot Beer da Universidade Técnica de Graz, Áustria. Esse programa é direcionado principalmente para problemas aplicados a túneis.

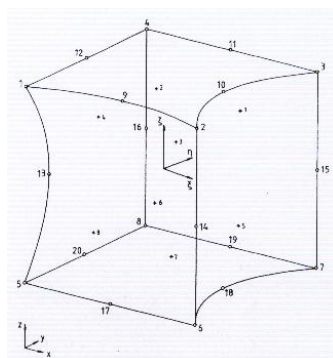


Figura 10.14: Elemento Finito tridimensional de 20 nós

O modelo foi analisado em elementos finitos usando elementos parabólicos de 20 nós com três graus de liberdade por nó (ver fig. 10.14) tanto para a modelagem do maciço como para o suporte. Diferentemente do caso sem suporte, não foi possível implementar elementos de contorno para este problema, isso porque a rotina necessária para modelar a escavação seqüencial para o Método dos Elementos de Contorno não se encontra ainda implementada no programa.

Foi implementado, para a modelagem e validação da escavação seqüencial, primeiramente a simulação de uma escavação seqüencial de um túnel sem suporte e confrontado o resultado do deslocamento longitudinal  $z$  com o resultado para o estado plano de deformação (plane strain solution).

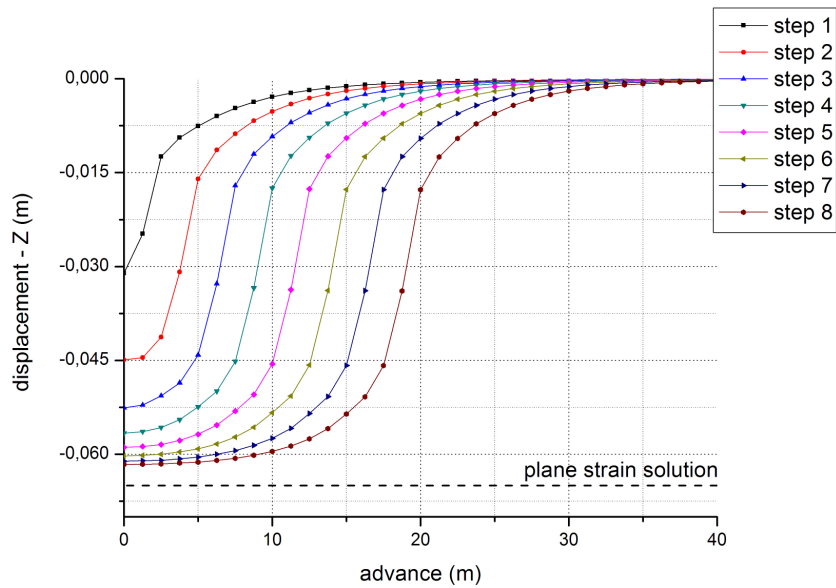


Figura 10.15: Escavação seqüencial sem suporte

Em virtude da malha, foram adotados 8 loadcase (casos de carregamento) gerados pelo processo de escavação seqüencial. O avanço adotado para frente de escavação foi de  $0,25D$  (para cada caso de carregamento). No final do oitavo caso, em  $2D$ , todo o deslocamento terá ocorrido e gerará o gráfico do deslocamento vertical necessário para a análise. Os resultados para essa simulação estão contidos na fig. 10.15.

Para o caso do túnel com suporte o mesmo procedimento foi realizado incorporando o avanço na instalação do suporte para cada caso de carregamento. A escavação se localizava sempre  $0,25D$  a frente do suporte. Os resultados obtidos (ver fig. 10.18) foram bastante satis-

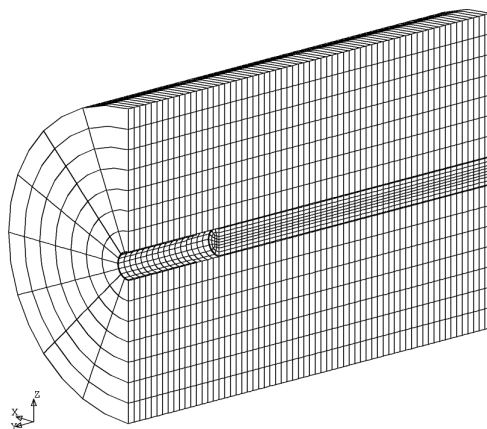


Figura 10.16: Malha completa

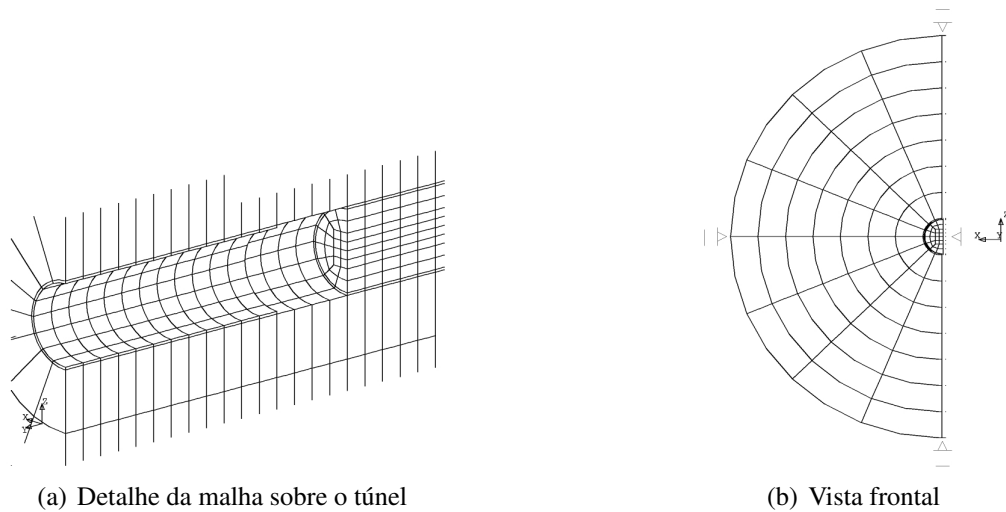


Figura 10.17: Malha usada na simulação numérica

fatórios e suficientes para adoção dessa metodologia usando o programa BEFE para análise de diferentes casos, considerando diferentes valores para o atraso na instalação do suporte.

### 10.3.4 Determinando $U_i/U_r^f$ Considerando o Atraso no Suporte $L'_d$

Usando-se o modelo de escavação sequencial descrito na seção anterior é possível encontrar os valores de  $U_i/U_r^f$  reescrevendo-se a eq. 10.22 em função dos valores  $U_e/U_r^f$  obtidos da simulação numérica. Por conveniência  $U_i/U_r^f$  será chamado de Beta  $\{\beta_\kappa\}$ , assim, tem-se:

$$\beta_\kappa = \frac{U_i}{U_r^f} = 1 + \kappa \left( \frac{U_e}{U_r^f} - 1 \right) \quad (10.26)$$

Beta foi calculado considerando-se diferentes valores de  $L'_d$  (atraso na instalação do suporte) cobrindo um intervalo de  $L'_d$  entre 0 e 2D (duas vezes o diâmetro). Os resultados estão mostrados na fig. 10.19. No eixo das abscissas os valores de  $L'_d$  foram normalizados em relação ao diâmetro. O deslocamento final do maciço ( $U_r^f$ ) utilizado para a normalização de  $U_i$  foi o encontrado pela simulação numérica ( $U_r^N$ ), considerando o túnel construído sem suporte.

Os valores discretos de Beta para os diferentes valores  $L'_d$  foram ajustados por uma curva exponencial, como indicado na fig. 10.19, obtendo um coeficiente de determinação  $R^2 = 0,99972$ :

$$\beta_\kappa = 1,232 - 0,389e^{-\frac{L'_d/D}{3,84}} - 0,843e^{-\frac{L'_d/D}{0,29}} \quad (10.27)$$

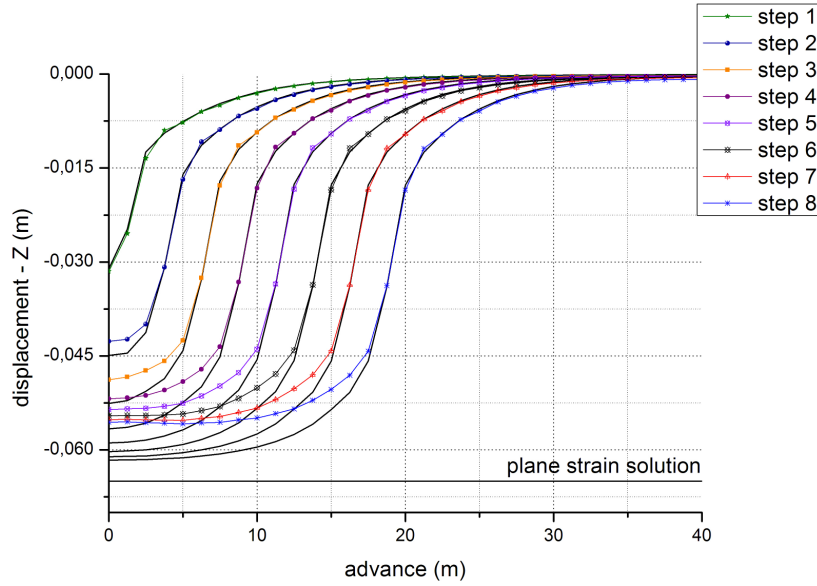


Figura 10.18: Escavação sequencial com suporte

Substituindo-se a equação exponencial de  $\beta_{\kappa} (U_i/U_f^N)$  na eq. 10.22 é possível encontrar qualquer curva de  $U_e/U_f^N$  para qualquer valor de  $L'_d/D$ , ou seja, para qualquer que seja o atraso na instalação do suporte, basta utilizar a eq. 10.28.

$$\frac{U_e}{U_f^N} = 1 + \frac{1}{\kappa} \left( 0,232 - 0,389e^{\frac{-L'_d/D}{3,84}} - 0,843e^{\frac{-L'_d/D}{0,29}} \right) \quad (10.28)$$

A fig. 10.20 apresenta algumas dessas curvas para diferentes valores no atraso da instalação suporte, com a indicação do referido valor da variável Beta.

Na simulação numérica implementada, para valores de  $L'_d \geq 2D$ , o deslocamento total do maciço já ocorreu o que implica que para valores maiores de  $L'_d \geq 2D$ , o deslocamento  $U_e$  é igual  $U_f^N$ . O suporte não está sofrendo nenhuma ação do maciço, uma vez que este último já estabilizou o sistema equilibrado após o seu deslocamento total.

É importante notar que o valor de Beta, discriminado no gráfico, corresponde exatamente ao valor de  $U_e/U_f^N$  (encontrado na simulação numérica implementada) quando  $\kappa = 1$ . Todas as curvas tendem para  $U_e = U_f^N$  para valores em que kappa é muito grande ( $\kappa \rightarrow \infty$ ), resultado esperado tendo em vista a discussão desse gráfico na seção anterior.

Este método desenvolvido, da forma que está apresentado, por si só já é uma ferramenta poderosa para análise bidimensional considerando o efeito tridimensional do problema

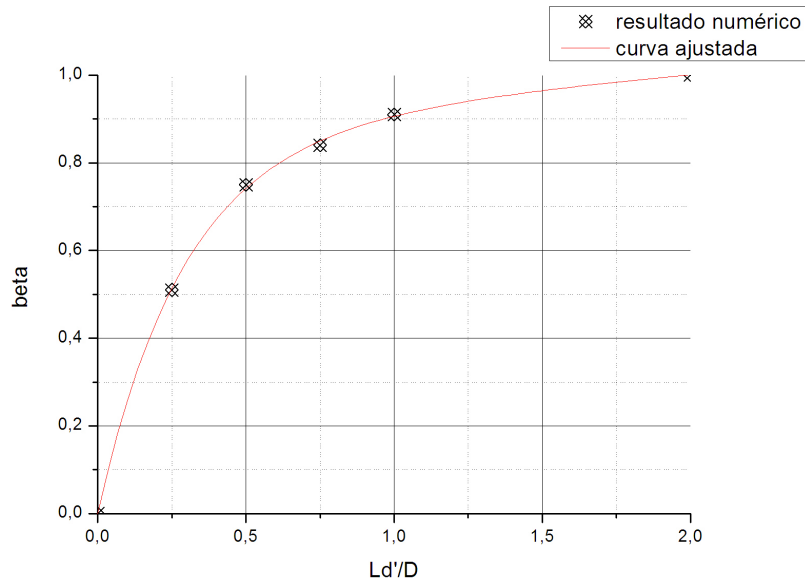


Figura 10.19: Variação de  $\beta_\kappa$  em relação a  $L_d'/D$

de túneis com atraso na instalação do suporte, é necessário, entretanto, saber ainda:

i - Se o método incorpora dentro dele outros métodos amplamente utilizados e exclui imprecisões que possam existir, principalmente sobre intervalos extremos do problema, ou seja, para o caso do atraso na instalação do suporte para  $L_d' = 0$  e  $L_d' \geq 2D$ .

ii - Como desenvolver uma metodologia que seja capaz de incorporar esses efeitos em um modelo numérico bidimensional de análise de escavação de túneis.

### 10.3.5 Comparação com o Modelo de Schwartz-Einstein

Os resultados encontrados na seção anterior foram comparados com dois modelos: um amplamente conhecido, desenvolvido por i-) Schwartz e Einstein (1980a) e Schwartz e Einstein (1980b) e um outro posterior desenvolvido por ii-) Hutchinson (1982) que no fundo é o mesmo modelo proposto por Schwartz-Einstein com uma pequena correção no que se refere ao processo de escavação seqüencial.

Os modelos acima definem o atraso na instalação do suporte  $\{L_d\}$  como a distância entre a face de escavação e o centro geométrico do suporte colocado (ver fig. 10.21). Enquanto que no método que utiliza Kappa, a variável que defini o atraso na instalação do suporte ( $L_d'$ ) é definido como a distância entre a face do túnel e o final da instalação do suporte. Compatibilizando essa diferença, levando-se em consideração o modelo de escavação seqüencial implementado na

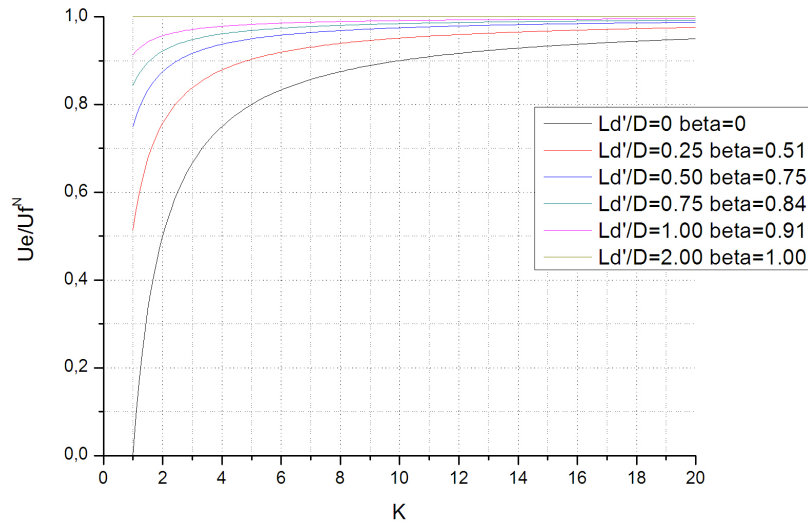


Figura 10.20: Gráfico Kappa

simulação numérica, é possível comparar os resultados entre os dois modelos, seja em função de  $L_d$ , seja em função de  $L'_d$ .

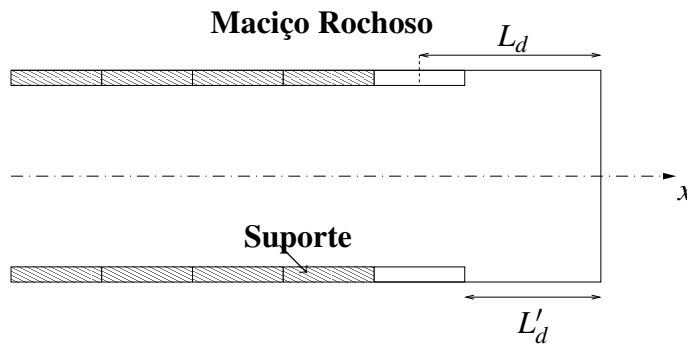


Figura 10.21: Túnel modelo de Schwartz-Einstein

Analisando-se os resultados, primeiramente em relação a  $L'_d$ , foi traçado um gráfico (ver fig. 10.22) de  $\beta_\kappa = U_i/U_f^N$  em função de  $L'_d/D$ . Para tanto foi necessário utilizar a fórmula de Schwartz-Einstein substituindo-se o valor de  $\lambda_d$  na equação abaixo e isolando  $U_i/U_f^N$ :

$$\frac{P'_s}{P_s} = \frac{U_f^N - U_i}{U_f^N} = \lambda_d \quad (10.29)$$

onde  $\lambda_d$  é dado por:



$$\lambda_d = 0,98 - 0,57(L_d/r) \quad (10.30)$$

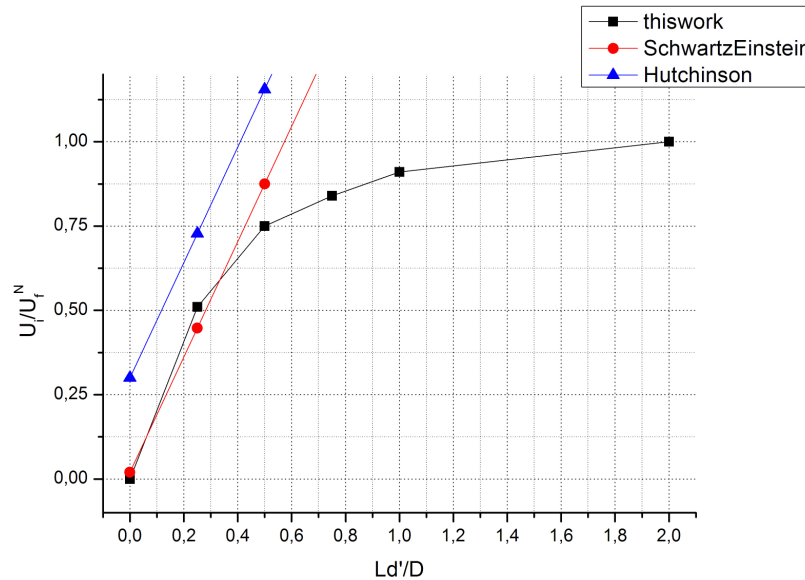


Figura 10.22: Avaliação do método Kappa em relação a  $L'_d$

Os resultados mostram que o método que utiliza Kappa é compatível com o modelo de Schwartz-Einstein para um intervalo de  $L'_d$  entre 0 e  $0,5D$ , o mesmo não ocorre em relação ao modelo Hutchinson. Para os resultados extremos, ou seja, para  $L'_d = 0$  e  $L'_d \geq 2D$  pode-se considerar:

a) Para  $L'_d = 0$  os resultados entre o método que utiliza Kappa e o modelo de Schwartz-Einstein são praticamente iguais e contém a consideração de suporte sendo construído imediatamente no mesmo instante em que a escavação está sendo feita (essa extrapolação é apenas matemática não podendo ser fisicamente possível);

b) No método que utiliza Kappa para  $L'_d \geq 2D$  os valores de  $U_i$  é igual a  $U_f^N$ , ou seja, a influência do suporte é nula sobre o equilíbrio do sistema quando o atraso na instalação é maior ou igual a  $2D$ . Para o modelo de Schwartz-Einstein  $U_i$  é igual a  $U_f^N$  ocorre, aproximadamente, em  $L'_d = 0,58D$ , ou seja, a influência do suporte é nula sobre o equilíbrio do sistema em qualquer atraso na instalação do suporte maior que  $0,58D$ . Verificando-se a fig. 10.20 percebe-se que isso não foi constatado na simulação numérica implementada.

As considerações a) e b) nos leva a concluir que:

1 - Foi identificado uma imprecisão no modelo de Schwartz-Einstein para um dos

extremos do problema ( $L'_d \geq 2D$ );

2 - O método Kappa incorpora dentro dele o modelo de Schwartz-Einstein e exclui a imprecisão identificada sobre um dos extremos do problema ( $L'_d \geq 2D$ ).

A mesma análise foi realizada agora traçando o gráfico de  $\lambda_d$  em função de  $L_d/r$ , da mesma forma como apresentado originalmente por Schwartz-Einstein (ver fig. 10.23).

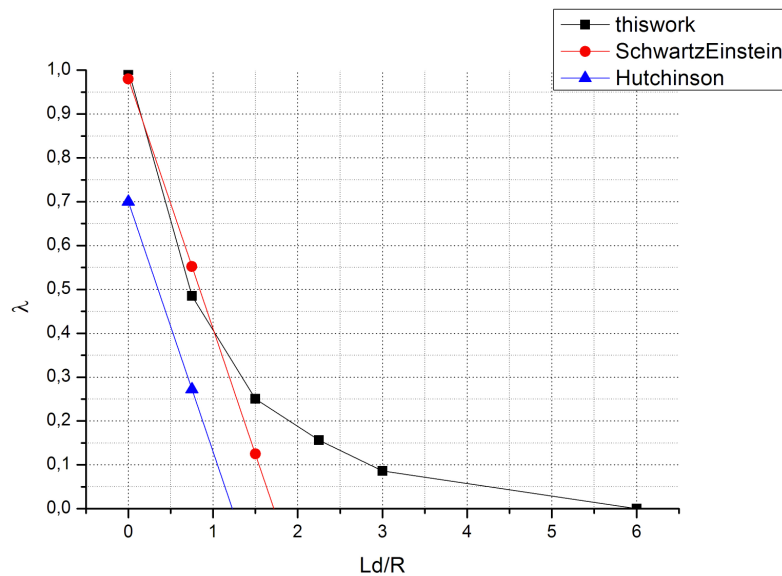


Figura 10.23: Avaliação do método Kappa em relação a  $L_d$

Os resultados mostram que o método Kappa é compatível com o método de Schwartz-Einstein para um intervalo de  $L_d$  entre 0 e  $1,5r$ , o mesmo não ocorre em relação ao método proposto por Hutchinson.

As simulações realizadas consideraram as velocidade de avanço de escavação e avanço do suporte como sendo iguais. A cada lance de escavação feita um lance de suporte da mesma medida era instalado. Desta maneira as variáveis  $L_d$  e  $L'_d$  possuem uma dependência linear:  $L_d = 1,5L'_d$ . Como verificado nas simulações numéricas, a influência de  $L'_d$  só se faz presente em  $L'_d \leq 2D$ , dessa forma fica fácil de entender o motivo pelo qual o gráfico do método Kappa cruza o eixo das abscissas em  $L_d = 6r$ . Substituindo-se  $L'_d = 2D = 4r$  encontra-se  $L_d = 6r$  para o ponto onde  $\lambda = 0$ , ou seja, o suporte não está sendo solicitado pelo maciço uma vez que este último já atingiu seu deslocamento total neste ponto.

Essa afirmação pode ser comprovada utilizando a eq. 10.29 para  $\lambda = 0 \rightarrow P'_s = 0$ .  $P'_s$  representa o fator de redução do carregamento do suporte provocado pelo efeito de atraso na

instalação do suporte, o que seria, para o método Kappa a variável  $P_e$  (ver fig. 10.9).

Os resultados poderiam nos levar a propor uma modificação na equação de  $\lambda_d$  em função de  $L_d/r$ , mas antes é necessário uma análise entre  $L_d$  e  $L'_d$ .

### 10.3.6 Estudo Comparativo entre $L_d$ e $L'_d$

As simulações feitas até então, consideraram as velocidades de avanço da frente de escavação e avanço da instalação do suporte como sendo iguais. Não permitindo, dessa maneira, uma avaliação mais criteriosa dessas duas variáveis, uma vez que elas em todas as análises possuem uma dependência linear igual a  $L_d = 1,5L'_d$ .

Para a avaliação levando-se em consideração as diferentes dependências entre essas variáveis e sua influência nos resultados é necessário a adoção de diferentes velocidades de avanço, tanto para o suporte como para a escavação.

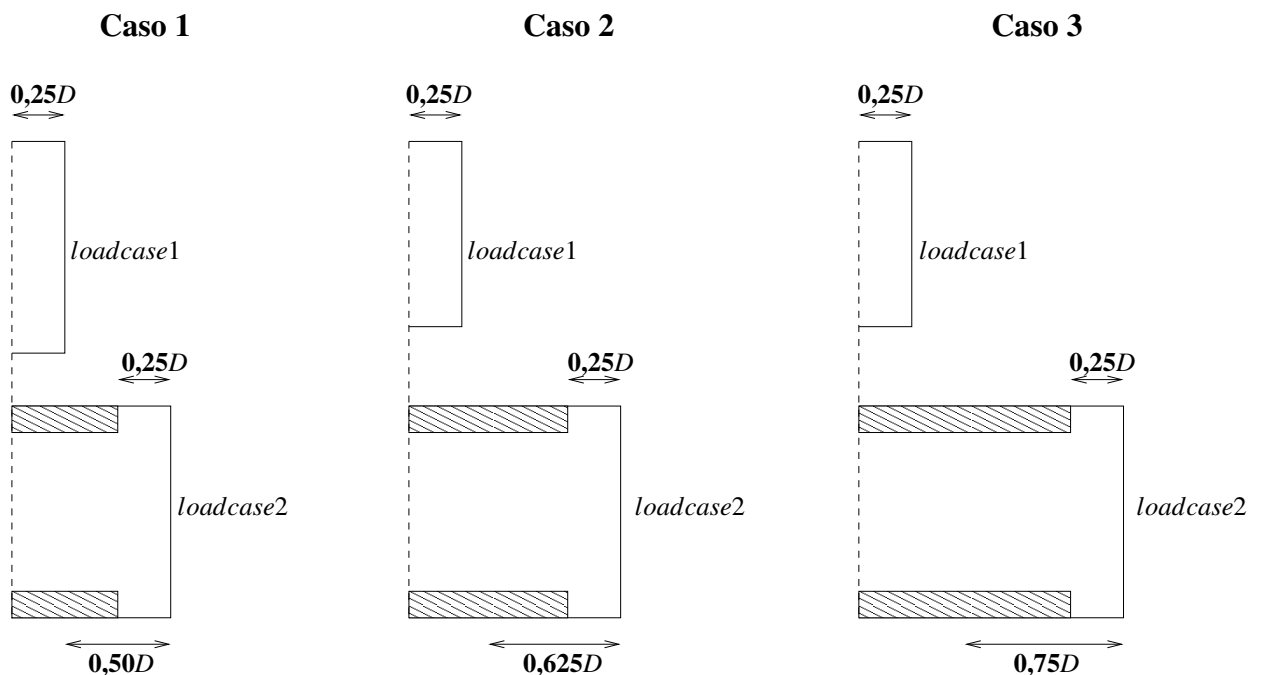


Figura 10.24: Casos simulados

A simulação que utiliza métodos numéricos considerando-se diferentes avanços, se configura como um problema complexo envolvendo outros efeitos a serem considerados, sendo, portanto, necessários outros estudos mais aprofundados e uma metodologia capaz de considerar todos esses efeitos. Porém para efeito de avaliação qualitativa desses dois parâmetros ( $L_d, L'_d$ )

é possível fazer uma pequena análise com aplicação de diferentes velocidades, tanto para o avanço da frente de escavação como para avanço na instalação do suporte. Na metodologia foram empregados dois *loadcase* (ver fig. 10.24) para representar as velocidades de avanço das duas estruturas (para uma avaliação mais criteriosa o número de casos deveria ser maior, fazendo assim uma representação melhor do processo de escavação sequencial).

Tabela 10.2: Casos simulados

caso	$L_d$	$L'_d$	$L_d/L'_d$
1	$0,5D$	$0,25D$	2,0
2	$0,625D$	$0,25D$	2,5
3	$0,75D$	$0,25D$	3,0

Os casos simulados encontram-se na tabela 10.2. Em todos os casos as características físicas dos materiais e a geometria do problema foram conservadas. Para cada caso simulado foi plotado o deslocamento longitudinal ( $z$ ) em função da distância em relação à face do túnel ( $X/D$ ) (ver fig. 10.26) e verificou-se que para diferentes valores de  $L_d$  o deslocamento segue o mesmo caminho. Isso leva a admitir que  $L_d$  não é representativo para caso onde as velocidades de avanço da frente de escavação e avanço na instalação do suporte sejam diferentes. Os resultados apresentados leva as seguintes conclusões:

1 -  $L'_d$  é mais representativo do que  $L_d$ , principalmente para problemas que consideram velocidades diferentes entre o avanço na frente de escavação e o avanço na instalação do suporte;

2 - A expressão de  $\beta_K = U_i/U_f^N$  (ver eq. 10.27), do método Kappa, em contraposição a  $\lambda_d$ , do método de Schwartz-Einstein, é mais representativo porque contém  $L'_d$  em sua definição.

Defini-se  $\lambda_K$  como a razão entre a fator de descarregamento do suporte  $P'_s$  e  $P_s$ , obtido da análise do estado plano de deformação, tem-se:

$$\frac{P'_s}{P_s} = \frac{U_r^f - U_i}{U_r^f} = \lambda_K \quad (10.31)$$

Substituindo-se  $\beta_K$  na equação acima, encontra-se para  $\lambda_K$ :

$$\lambda_K = -0,232 + 0,389e^{\frac{-L'_d/D}{3,84}} + 0,843e^{\frac{-L'_d/D}{0,29}} \quad (10.32)$$

Chega-se finalmente:

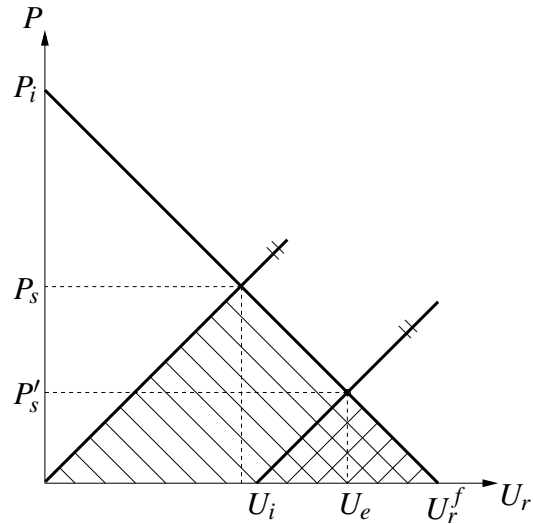


Figura 10.25: Diagrama Convergência-Confinamento

$$\frac{U_e}{U_f^N} = 1 - \frac{1}{\kappa} \lambda_\kappa \tag{10.33}$$

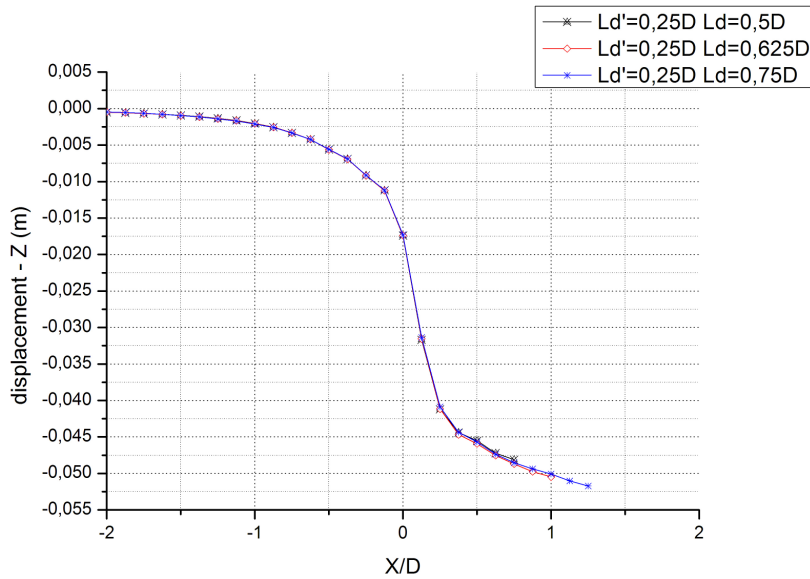


Figura 10.26: Avaliação  $L_d$  em relação a  $L'_d$

### 10.3.7 Métodos Propostos Para Análise do Túnel com Suporte Usando um Modelo Numérico Bidimensional

Existem vários métodos na literatura disponíveis para a análise de túneis usando um modelo numérico bidimensional, por exemplo: método da redução da rigidez do núcleo, método

da redução do carregamento, método da redução da rigidez do núcleo modificado etc. Todos eles entretanto aplicáveis somente para o caso do túnel com suporte sem considerar o atraso na sua instalação.

Em virtude de todo estudo antes elaborado neste capítulo é possível desenvolver um método capaz de permitir uma análise para o problema de túneis com suporte, considerando o atraso na instalação do suporte, usando um modelo numérico bidimensional. Para o problema de túneis com o suporte as possibilidades são maiores do que aquelas encontradas para o problema do túnel sem suporte, serão, entretanto, descritos neste trabalho quatro métodos:

- i - Método da redução do carregamento sobre o túnel;
- ii - Método da redução de rigidez do suporte;
- iii - Método do acréscimo do carregamento sobre o túnel;
- iv - Método do alívio de carga sobre o suporte.

### Método da Redução do Carregamento sobre o Túnel

Analisa-se o diagrama convergência-confinamento considerando o efeito de atraso na instalação do suporte (ver fig. 10.27). Pode-se, por semelhança de triângulos (triângulos rachados na fig. 10.27), encontrar a relação  $P'_s/P_i$ .  $P'_s$  representa o descarregamento provocado pela instalação do suporte sobre o túnel se transladar o eixo das abscissas até a ordenada  $P_e = P'_s$ .

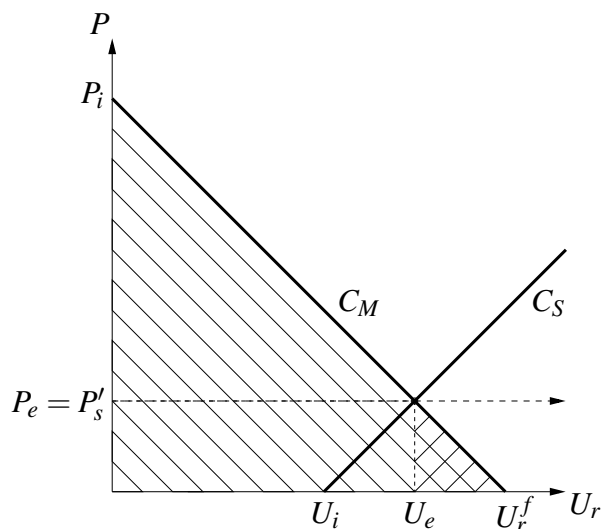


Figura 10.27: Diagrama Convergência-Confinamento para o método da redução do carregamento

$$\frac{P'_s}{P_i} = \frac{U_r^f - U_e}{U_r^f} = 1 - \frac{U_e}{U_r^f} \quad (10.34)$$

Para ser possível utilizar os resultados da simulação numérica implementada é necessário incluir um fator de correção:

$$\frac{P'_s}{P_i} = 1 - \xi \frac{U_e}{U_f^N} \quad (10.35)$$

$$\xi = \frac{U_f^N}{U_r^f} \quad (10.36)$$

onde  $U_r^f$  é resultado analítico encontrado pela fórmula fechada do deslocamento total do maciço na análise de estado plano de deformação e  $U_f^N$  é o resultado numérico 3-D do deslocamento máximo calculado. O resultado de  $U_f^N$  depende do método numérico escolhido e a malha utilizada. Nesse trabalho foi utilizado o Método dos Elementos Finitos com a malha apresentada na fig. 10.16. Assim  $P'_s$  é dado por:

$$P'_s = \left( 1 - \xi \frac{U_e}{U_f^N} \right) P_i \quad (10.37)$$

Esse método considera apenas o maciço como estrutura. A influência do suporte é incorporada como um fator de descarregamento sobre o maciço (ver fig. 10.28).

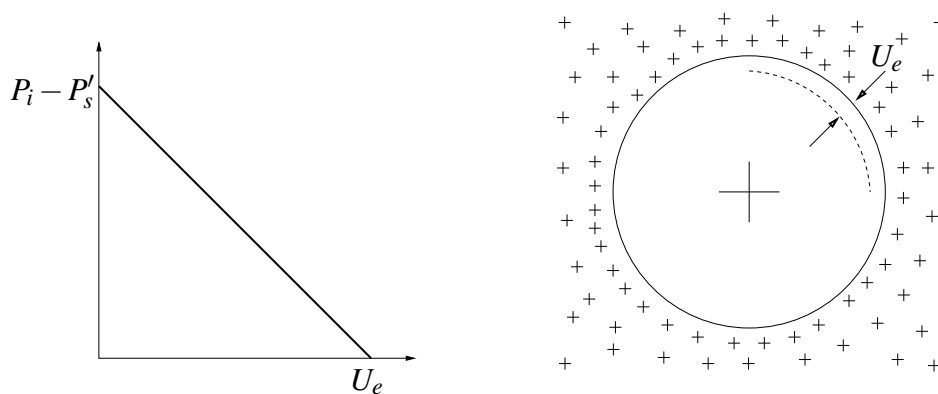


Figura 10.28: Redução do carregamento

É possível, ainda, definir um fator de descarregamento do maciço ( $\alpha_m$ ) em função de  $P_i$ , assim:

$$\alpha_m P_i = P_i - P'_s \quad (10.38)$$

$$\alpha_m = \xi \frac{U_e}{U_f^N} \quad (10.39)$$

ou seja,

$$\alpha_m = \xi \left( 1 - \frac{1}{\kappa} \lambda_\kappa \right) \quad (10.40)$$

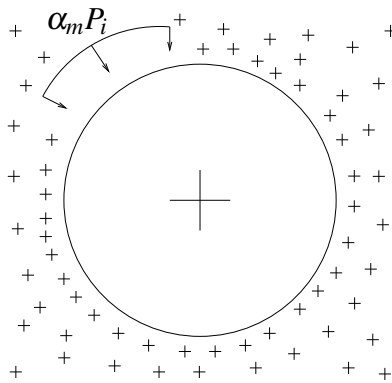


Figura 10.29: Fator de Redução do carregamento para o túnel com suporte

### Método da redução de Rigidez do Suporte

Analisando-se o gráfico de interação, da mesma forma como no método anterior, é possível estabelecer um método para a análise numérica bidimensional provocando uma variação sobre a rigidez do suporte (ver fig. 10.30).

Diferentemente do método anterior, esse método considera as duas estruturas. A influência do suporte é incorporada na variação do módulo de rigidez do suporte ( $G_S^*$ ). Estabelecendo a razão entre  $U_e$ , determinado através da nova curva característica (\*) do suporte, e  $U_r^f$  através da curva característica do maciço, chega-se a equação:

$$\frac{U_e}{U_r^f} = \frac{\frac{P'_s r^2 (1 - \nu_s^2)}{E_s^* A_s}}{\frac{P_i r}{2 G_M}} = \frac{P'_s}{P_i} \frac{r}{A_s} \frac{G_M}{G_S^*} (1 - \nu_s) \quad (10.41)$$

Trabalhando-se com eq. 10.41, substituindo-se o valor de  $P'_s/P_i$  encontrado na eq. 10.37, é possível determinar o valor de  $G_S^*$ :



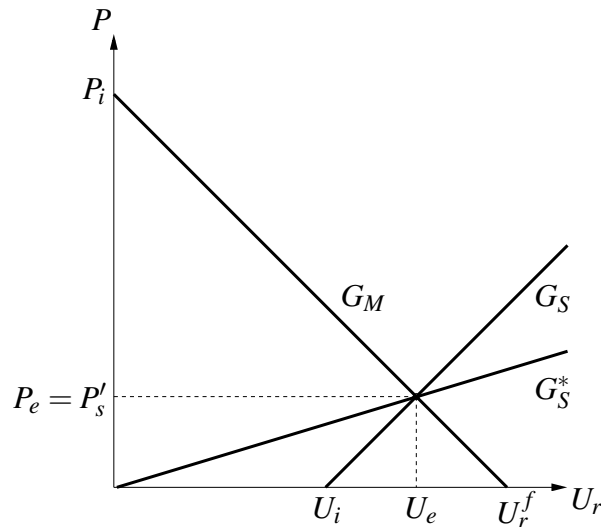


Figura 10.30: Diagrama Convergência-Confinamento para o método da redução de rigidez do suporte

$$G_S^* = \left( \frac{1}{\xi \frac{U_e}{U_f}} - 1 \right) \frac{r}{A_s} G_M (1 - \nu_s) \quad (10.42)$$

ou seja,

$$G_S^* = \left[ \frac{1}{\xi \left( 1 - \frac{1}{\kappa} \lambda_\kappa \right)} - 1 \right] \frac{r}{A_s} G_M (1 - \nu_s) \quad (10.43)$$

### Método do Acréscimo do Carregamento sobre o Túnel

Da mesma forma como no método da redução da rigidez do suporte é possível estabelecer um método para a análise numérica bidimensional aplicando uma sobrecarga sobre o sistema maciço-suporte ( $\alpha_\kappa P_i$ ) (ver fig. 10.31).

Definindo-se  $\alpha_\kappa P_i$  o fator de sobrecarga o sistema maciço-suporte, tem-se:

$$\alpha_\kappa P_i = P_i + (P_s'' - P_s') \quad (10.44)$$

onde, isolando  $\alpha_\kappa$ , tem-se:

$$\alpha_\kappa = 1 + \frac{P_s''}{P_i} - \frac{P_s'}{P_i} \quad (10.45)$$



Incorporando-se o fator de correção do método numérico implementado:

$$\alpha_{\kappa} = \left( \frac{\kappa}{\kappa - 1} \right) \xi \frac{U_e}{U_f^N} \quad (10.50)$$

ou seja,

$$\alpha_{\kappa} = \left( \frac{\kappa}{\kappa - 1} \right) \xi \left( 1 - \frac{1}{\kappa} \lambda_{\kappa} \right) \quad (10.51)$$

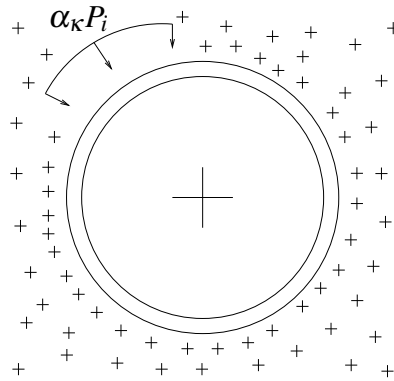


Figura 10.32: Fator de Sobrecarga

O valor de  $\xi$  encontrado na simulação numérica implementada neste trabalho foi de 0,95.

### Método do alívio de carga sobre o suporte

Os métodos anteriores descritos (i, ii e iii) foram desenvolvidos tendo a preocupação de determinar, da melhor forma possível, o deslocamento final  $U_e$ . Para o dimensionamento do suporte a preocupação maior é identificar a carga que está sendo aplicada sobre o mecanismo de suporte. Em virtude disso, se faz necessário um método que identifique a real carga aplicada sobre o suporte tendo em vista o atraso na sua instalação. Nesta seção será visto que a carga total do maciço é aliviada, segundo uma relação simples, devido ao atraso na instalação suporte provocado por um deslocamento inicial do maciço antes da instalação do suporte.

Analisando-se o diagrama convergência-confinamento, considerando o efeito de atraso na instalação do suporte (ver fig. 10.33), pode-se, por semelhança de triângulos (triângulos hachurados na fig. 10.33), encontrar a relação  $P_s^*/P_i$ .  $P_s^*$  representa o alívio provocado pelo atraso na instalação do suporte ( $U_i$ ) sobre o túnel trasladando-se o eixo das ordenadas.

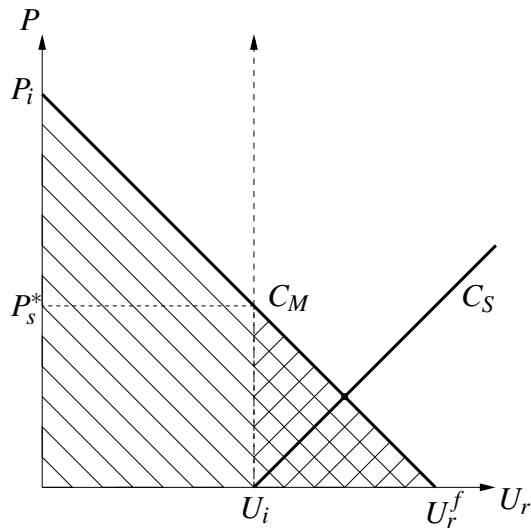


Figura 10.33: Diagrama Convergência-Confinamento para o alívio de carga

$$\frac{P_s^*}{P_i} = \frac{U_r^f - U_i}{U_r^f} = 1 - \frac{U_i}{U_r^f} \tag{10.52}$$

$\frac{U_i}{U_r^f}$  é, de acordo com eq. 10.26,  $\beta_\kappa$ . Assim  $P_s^*$  é dado por:

$$P_s^* = (1 - \beta_\kappa) P_i \tag{10.53}$$

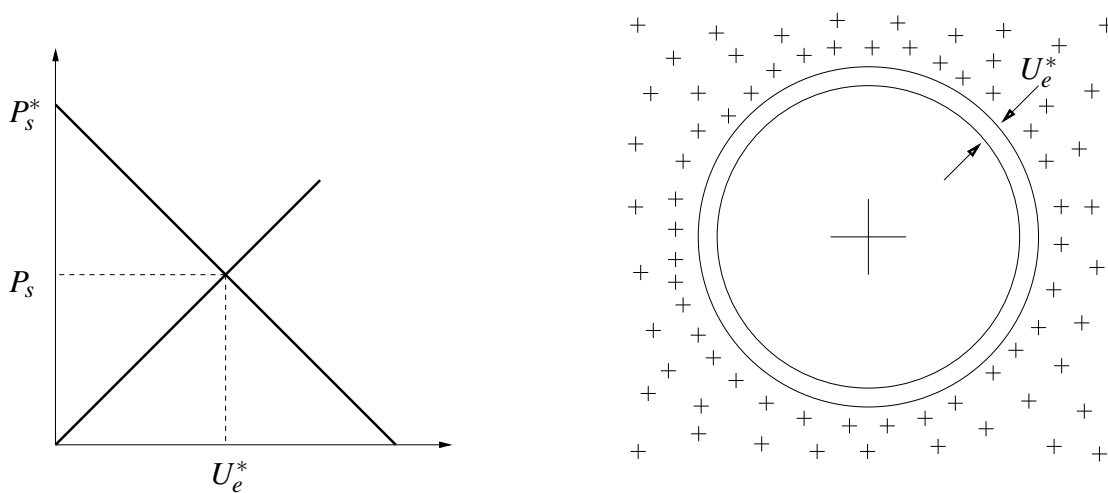


Figura 10.34: Alívio da carga

É possível, ainda, definir um fator de alívio de carregamento sobre o suporte ( $\alpha_a$ ) em função de  $P_i$ , assim:

$$P_s^* = \alpha_a P_i \quad (10.54)$$

$$\alpha_a = 1 - \beta_\kappa \quad (10.55)$$

onde,

$$\beta_\kappa = 1,232 - 0,389e^{\frac{-L'_d/D}{3,84}} - 0,843e^{\frac{-L'_d/D}{0,29}} \quad (10.56)$$

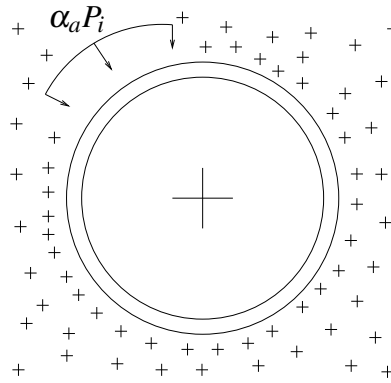


Figura 10.35: Fator de alívio do carregamento para o túnel com suporte

Neste método se considera como estrutura o maciço e o suporte, diferentemente do método de descarregamento que considera apenas o maciço.  $U_e^*$  é o deslocamento sofrido pelo suporte quando o sistema maciço-suporte atinge o equilíbrio. O fator de alívio de carregamento sobre o suporte ( $\alpha_a$ ) varia em função do atraso na instalação do suporte ( $L'_d/D$ ). A variação de  $\alpha_a$  em função de  $L'_d/D$  é mostrado na fig. 10.36.

### 10.3.8 Construção do gráfico de deslocamento radial para túneis circulares com suporte utilizando um método numérico ou resultado analítico do estado plano de deformação

Esta seção tratará da construção do gráfico de deslocamento radial para túneis circulares com suporte, considerando o atraso na sua instalação e utilizando um método numérico ou o resultado analítico do estado plano de deformação. A construção do gráfico de deslocamento radial se baseia em duas características verificadas nas simulações realizadas:

i - A deformação radial na frente de escavação é a mesma, para diferentes atrasos na

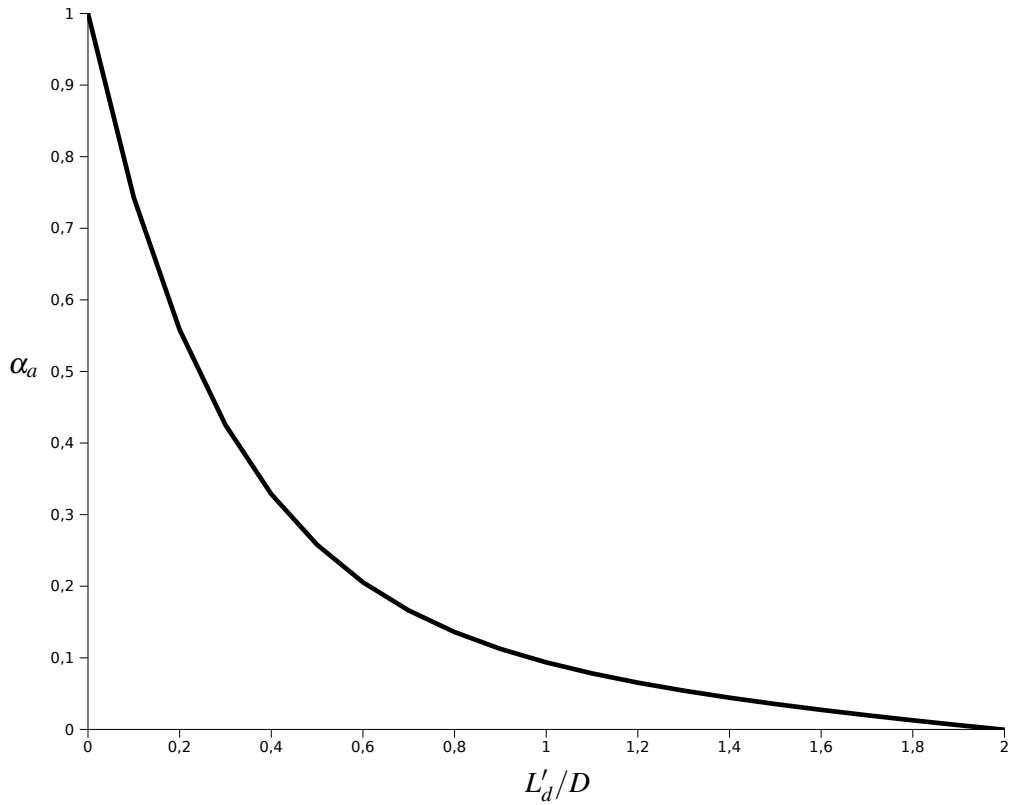


Figura 10.36: Fator de alívio  $\alpha_a$  em função do atraso na instalação do suporte ( $L'_d/D$ )

instalação do suporte, sendo diferente para a área atrás da frente de escavação;

ii - Os gráficos de deslocamentos radiais normalizados em relação à  $U_e$  são os mesmos para diferentes atrasos na instalação do suporte.

Através dos resultados encontrados e mostrados na fig. 10.38 pode-se considerar que:

$$\frac{U_r(x/D)}{U_e} = \lambda(x/D) \quad (10.57)$$

ou seja,

$$U_r(x/D) = \lambda(x/D)U_e \quad (10.58)$$

substituindo-se a eq. 10.33 na equação acima, tem-se:

$$U_r(x/D) = \lambda(x/D)U_f^N \left[ 1 - \frac{1}{\kappa} \lambda_\kappa \right] \quad (10.59)$$

onde:

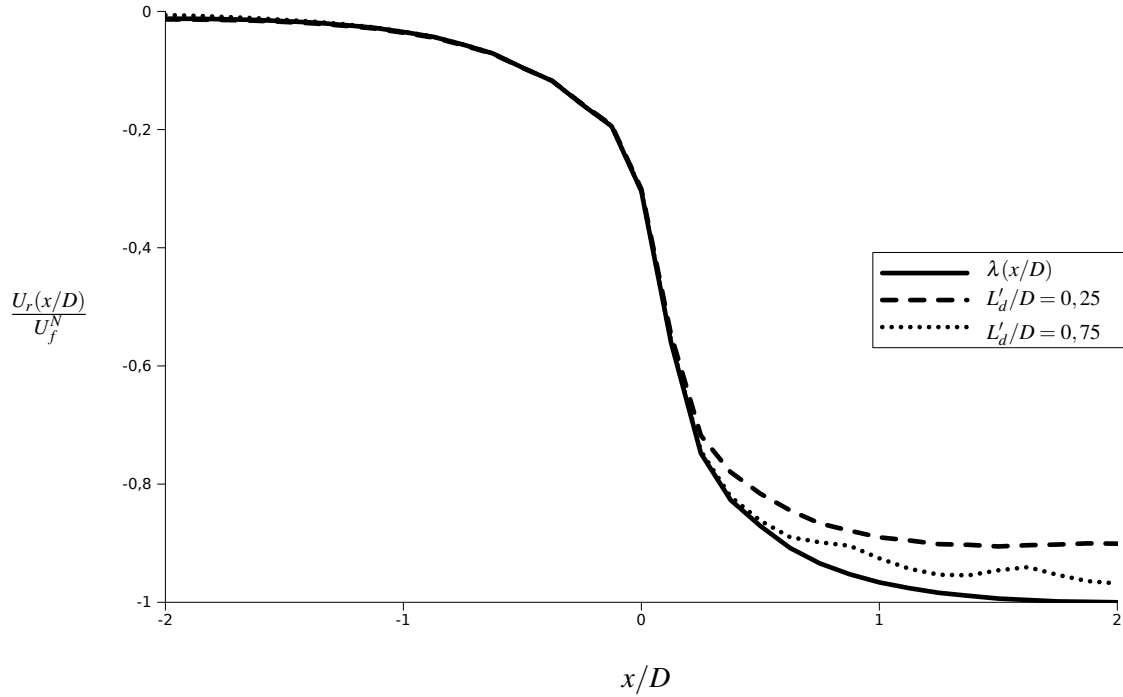


Figura 10.37: Deslocamento radial para diferentes  $L'_d/D$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa = \frac{r}{A_s} \frac{G_M}{G_S} (1 - \nu_s) + 1 \\ \lambda_\kappa = -0,232 + 0,389e^{\frac{-L'_d/D}{3,84}} + 0,843e^{\frac{-L'_d/D}{0,29}} \end{array} \right. \quad (10.60)$$

As equações eq. 10.59 e eq. 10.60 são para o caso de usar os resultados encontrados utilizando métodos numéricos 3-D ( $U_f^N$ ), que não levam em consideração a simulação do suporte. Para o caso de usar os resultados analíticos da análise do estado plano de deformação ( $U_f^f$ ) ou modelo numéricos bidimensionais, as equações são:

$$U_r(x/D) = \lambda(x/D)U_f^f \left[ 0,948 - \frac{1}{\kappa} \lambda_\kappa^* \right] \quad (10.61)$$

onde:

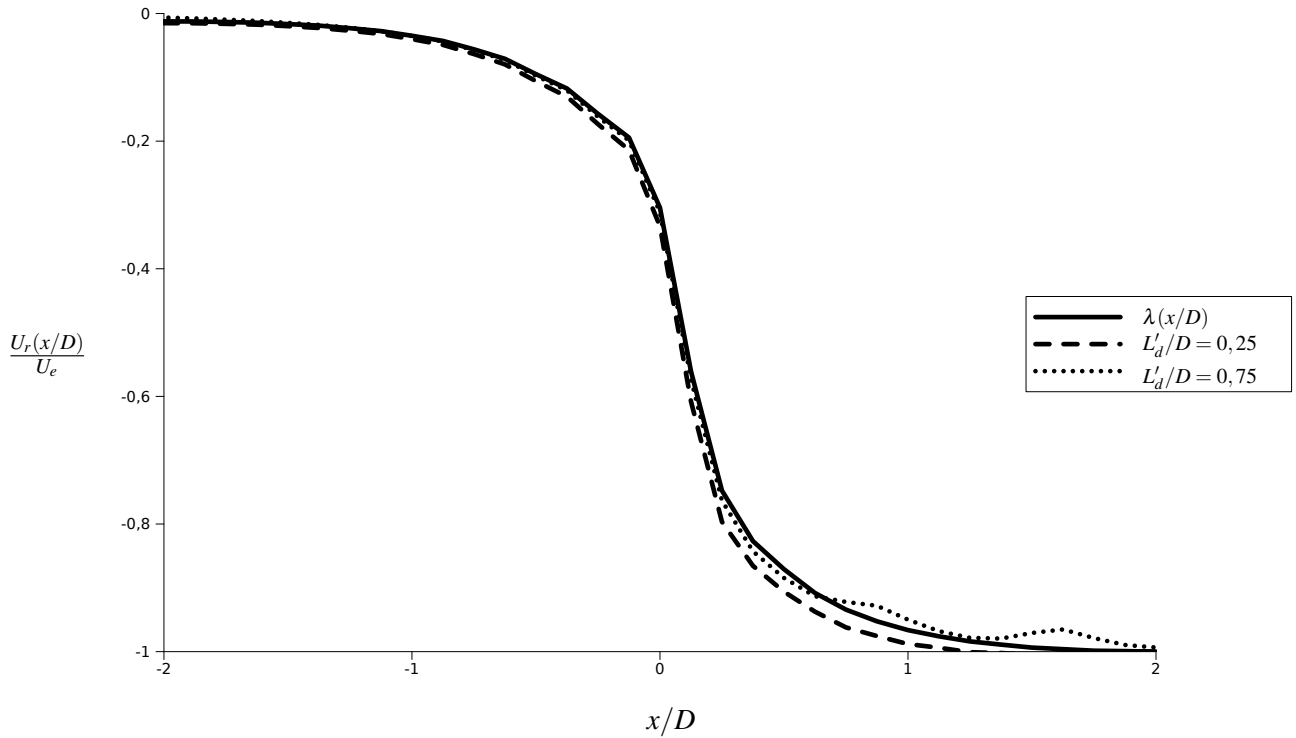


Figura 10.38: Deslocamento radial para diferentes  $L'_d/D$  parametrizado em relação a  $U_e$

$$\left\{ \begin{array}{l} \kappa = \frac{r}{A_s} \frac{G_M}{G_S} (1 - \nu_s) + 1 \\ \lambda_{\kappa}^* = -0,220 + 0,369e^{\frac{-L'_d/D}{3,84}} + 0,799e^{\frac{-L'_d/D}{0,29}} \end{array} \right. \quad (10.62)$$

onde  $\lambda_{\kappa}^*$  é obtido por:  $\lambda_{\kappa}^* = \xi \lambda_{\kappa}$ . O fator  $\xi$  é o fator de correção (eq. 10.36).

O  $\lambda(x/D)$  é chamado de perfil de deformação longitudinal ou LDP (Longitudinal Deformation Profile). O LDP é a representação gráfica ou analítica do deslocamento radial ao longo do eixo do túnel em seções localizadas a frente e atrás da face, obtidas por regressões feitas a partir resultados numéricos em túneis sem suporte. Vários autores propõem expressões para o LDP: Panet e Guenot (1982), Panet (1995), Corbetta, Bernaud e Minh (1991) e Carranza-Torres e Fairhurst (1999). Neste trabalho  $\lambda(x/D)$  foi calculado através do Método dos Elementos de Contorno e sua representação gráfica está mostrado na fig. 10.5.



## 11 Conclusões

Os resultados deste trabalho mostraram que o Método dos Elementos de Contorno possui uma grande potencialidade para problemas aplicados a túneis. Os resultados mostrados nos exemplos de validação: i) Determinação dos estados deformação/tensão em um túnel circular - sem pressão interna, ii) determinação dos estados deformação/tensão em um túnel circular - com pressão interna e iii) determinação dos estados deformação/tensão em um túnel circular - com suporte, apresentam grande precisão, mesmo nos casos de se usar um número reduzido de elementos, quando comparados com os resultados analíticos. O número pequeno de elementos produziu, em virtude disso, uma redução significativa no tempo de processamento se comparado com outros métodos. A grande precisão nos resultados encontrados para aplicações em túneis, se deve, dentre outras coisas, pela própria natureza das equações que constituem o Método dos Elementos de Contorno. As equações utilizam soluções fundamentais que tendem ao infinito. Para aplicações em que as regiões modeladas tendem ao infinito, como é o caso de túneis, o método apresenta resultados bastantes satisfatórios. Este aspecto mostra que a Geotecnia é um campo fértil para aplicação do Método dos Elementos de Contorno. Vale ressaltar que o método não possui limitação quanto ao tipo de túnel, podendo ser utilizado tanto para túneis profundos como para túneis rasos. Para este segundo caso as equações integrais para regiões semi-infinitas é o mais adequado.

A implementação do método numérico bidimensional com diferentes técnicas apresentou uma melhoria significativa. A técnica da subelementação produziu uma suavização nos resultados dos pontos internos localizados muito próximos do contorno. Essa melhoria se deve a redução da singularidade provocado pela técnica da subelementação. A técnica da sub-região apresentou resultados suficientemente precisos para a análise numérica pretendida, dando, portanto, ao programa uma versatilidade maior, podendo, assim, aumentar a gama de problemas que podem ser modelados, como por exemplo: túneis com suporte, túneis atirantados, túneis com  $n$  camadas de diferentes características geotécnicas, etc. A técnica de modelagem de inclusão e enrijecedores é uma técnica moderna e tem o mesmo objetivo da técnica da sub-região em dar maior versatilidade ao programa, sendo esta técnica mais adequada para a modelagem

de tirantes, suportes muito delgados, técnicas de enrijecimento sobre o suporte e/ou maciço etc.

A calibração dos parâmetros que levam em consideração o efeito tridimensional do problema de escavação foi realizado de forma bastante criteriosa. Usando os resultados de um modelo numérico tridimensional, baseado no Método dos Elementos de Contorno, para o caso do túnel sem suporte; e no Método dos Elementos Finitos, para o caso do túnel com suporte, foi possível determinar metodologias capazes de considerar o efeito tridimensional em modelos numéricos bidimensionais. Para escavação de túneis sem suporte foi proposto o método da redução do carregamento com a construção do perfil de deformação longitudinal do túnel - LDP (Longitudinal Deformation Profile). Para a escavação de túneis com suporte, baseado no método convergência-confinamento, foram propostos os seguintes métodos de análise: i) Método da redução do carregamento sobre o túnel, ii) Método da redução de rigidez do suporte, iii) Método do acréscimo do carregamento sobre o túnel e iv) Método do alívio de carga sobre o suporte. Os três primeiros (i, ii, iii) com foco na determinação do deslocamento final do sistema maciço-suporte ( $U_e$ ). O último método (iv) com foco principal no real carregamento aplicado sobre o suporte e o seu deslocamento radial final ( $U_e^*$ ). A grande contribuição do método iv) é a construção do gráfico do fator de alívio ( $\alpha_a$ ) em função do atraso na instalação do suporte ( $L'_d/D$ ). Todos esses métodos foram desenvolvidos a partir do modelo Kappa ( $\kappa$ ), elaborado neste trabalho a partir dos resultados encontrados na simulação numérica tridimensional. Os resultados desse modelo foram comparados com o modelo de Schwartz e Einstein (1980a), as análises mostram que o modelo Kappa contém o modelo de Schwartz e Einstein (1980a). Por fim, o método para a construção do gráfico de deslocamento radial para túneis circulares com suporte, considerando o atraso na instalação do suporte, utilizando um método numérico ou resultado analítico do estado plano de deformação se mostra como uma alternativa simples para análise do efeito tridimensional contido no problema de túneis.

## Referências Bibliográficas

- ALIABADI, M. H. *The Boundary Element Method - Applications in Solids and Structures*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2002.
- ALONSO, E. et al. Ground response curves for rock masses exhibiting strain-softening behaviour. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 27, p. 1153–1185, 2003.
- AUGARDE, C. E.; BURD, H. J. Three-dimensional finite element analysis of lined tunnels. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 25, p. 243–262, 2001.
- BANERJEE, P. K. *The Boundary Element Methods in Engineering*. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, Inc, 1994.
- BEER, G. *Programming the Boundary Element Method*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Ltd, 2001.
- BEER, G.; DÜNSER, C. Boundary element analysis of problems in tunneling. In: *Developments in Theoretical Geomechanics*. [S.l.: s.n.], 2000. p. 103–122.
- BEER, G.; WATSON, J. O.; SWOBODA, G. Three-dimensional analysis of tunnels using infinite boundary elements. *Computers and Geotechnics*, v. 3, p. 37–58, 1987.
- BERNAUD, D.; ROUSSET, G. Short communication: the 'new implicit method' for tunnel analysis. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 20, p. 673–690, 1996.
- BETTI, E. Teoria della elasticità. *Il nuovo Cimento, Serie 2*, v. 7, 8, p. 5–21, 69–97, 1872.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. *Boundary Elements: An Introductory Course*. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company (UK), 1992.
- BREBBIA, C. A.; TELLES, C.; WROBEL, L. *Boundary Element Techniques*. [S.l.]: Springer, Heidelberg, 1984.
- CARRANZA-TORRES, C.; FAIRHURST, C. The elasto-plastic response of underground excavations in rock masses that satisfy the hoek-brown failure criterion. *Rock Mechanics and Mining Sciences*, v. 36, p. 777–809, 1999.
- CORBETTA, F.; BERNAUD, D.; MINH, D. N. Contribution à la méthode convergence-confinement par le principe de la similitude. *Rev. Fr. Géotech.*, v. 54, p. 5–11, 1991.
- DOMINGUEZ, J.; ABASCAL, R. On fundamental solutions for the boundary integral equations method in static and dynamic elasticity. *Engineering Analysis*, v. 1, p. 128–134, 1984.

- EBERHARDT, E. Numerical modelling of three-dimension stress rotation ahead of an advancing tunnel face. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, v. 38, p. 499–518, 2001.
- EINSTEIN, H. H.; SCHWARTZ, C. W. Simplified analysis for tunnel supports. *Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE GT4*, v. 105, p. 499–518, 1979.
- GALLI, G.; GRIMALDI, A.; LEONARDI, A. Three-dimensional modelling of tunnel excavation and lining. *Computers and Geotechnics*, v. 31, p. 171–183, 2004.
- GAO, X. W.; DAVIES, T. G. *Boundary Element Programming in Mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- GAUL, L.; KÖGEL, M.; WAGNER, M. *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Deutschland, 2003.
- GOMES, R. A. M. P. *Análise tridimensional de túneis considerando o comportamento dependente do tempo na interação do maciço e do suporte*. Tese (Doutorado) — EESC-USP, Brazil, 2006. (in Portuguese).
- GRAZIANI, A.; BOLDINI, D.; RIBACCHI, R. Practical estimate of deformations and stress relief factors for deep tunnels supported by shotcrete. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, v. 38, p. 345–372, 2005.
- GREEN, A. E.; ZERNA, W. *Theoretical Elasticity*. [S.l.]: Oxford University Press, Ely House, London W.1, 1968.
- GUIGGIANI, M.; GIGANTE, A. A general algorithm for multidimensional cauchy principal value integrals in the boundary element method. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, v. 57, p. 906–915, 1990.
- GUIGGIANI, M. et al. A general algorithm for numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *Journal of Applied Mechanics, ASME*, v. 59, p. 604–614, 1992.
- HARTMANN, F. *Introduction to Boundary Elements: Theory and Applications*. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- HUTCHINSON, D. E. *Effects of construction procedure on shaft and tunnel performance*. Dissertação (Mestrado) — Department of Civil Engineering University of Alberta, 1982. (in Canada).
- KANE, J. H. *Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics*. [S.l.]: Prentice Hall, Inc, 1994.
- KARAKUS, M. Appraising the methods accounting for 3d tunnelling effects in 2d plane strain fe analysis. *Tunnelling and Underground Space Technology*, v. 22, p. 47–56, 2007.
- KARAKUS, M.; FOWELL, R. J. Back analysis for tunnelling induced ground movements and stress redistribution. *Tunnelling and Underground Space Technology*, v. 20, p. 514–524, 2005.
- KARAMI, G.; DERAKHSHAN, D. An efficient method to evaluate hypersingular and supersingular integrals in boundary integral equations analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v. 23, p. 317–326, 1999.

- KIM, H. J.; EISENSTEIN, Z. Prediction of tunnel lining loads using correction factors. *Engineering Geology*, v. 85, p. 302–312, 2006.
- KIRSCH. Die theorie der elastizitat und die bedurfnisse der festigkeitslehre. *Zeitschrift des Vereines deutscher Ingenieure*, v. 42, p. 797–807, 1898.
- KONTOGIANNI, V. A.; STIROS, S. C. Predictions and observations of convergence in shallow tunnels: case histories in greece. *Engineering Geology*, v. 63, p. 333–345, 2002.
- LEE, K. M.; ROWE, R. K. An analysis of three-dimensional ground movements: the thunder bay tunnel. *Canadian Geotechnical Journal*, v. 28, p. 25–41, 1991.
- MINDLIN, R. D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. *Physics*, v. 7, p. 195–202, 1936.
- MINDLIN, R. D.; CHENG, D. H. Nuclei of strain in the semi-infinite solid. *Journal of Applied Physics*, v. 21, p. 926–930, 1950.
- NAM, S. W.; BOBET, A. Radial deformations induced by groundwater flow on deep circular tunnels. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, v. 40, p. 23–29, 2007.
- PAN, X. D.; HUDSON, J. A. Technical note: Plane strain analysis in modelling three-dimensional tunnel excavations. *Rock Mechanics Mining Science and Geomechanics*, v. 25, p. 331–337, 1988.
- PANET, M. Calcul de tunnels par la méthode de convergence-confinement. In: *Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France*. [S.l.: s.n.], 1995.
- PANET, M.; GUENOT, A. Analysis of convergence behind the face of a tunnel. In: *Tunnelling'82. IMM*. [S.l.: s.n.], 1982. p. 197–203.
- POTTS, D. M.; ZDRAVKOVIĆ. *Finite Element Analysis in Geotechnical Engineering: Application*. [S.l.]: Thomas Telford, London, 2001.
- POWELL, D. B.; BEVERIDGE, J. P. Heathrow-express-design and performance of platform tunnels a terminal 4. In: *Tunnelling'97. IMM*. [S.l.: s.n.], 1997. p. 565–593.
- ROWE, R. K.; LO, K. Y.; KACK, K. J. A method of estimating surface settlement above shallow tunnels constructed in soft ground. *Canadian Geotechnical Journal*, v. 20, p. 11–22, 1983.
- SCHIKORA, K.; OSTERMEIER, B. Two-dimensional calculation model in tunnelling. verification by measurement results and by spatial calculation. In: *Proceedings of the 6th International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Innsbruck*. [S.l.: s.n.], 1988. p. 1499–1503.
- SCHWARTZ, C. W.; EINSTEIN, H. H. Improved design of tunnel supports:vol 1 - simplified analysis for ground-structure interaction in tunneling. In: *Report No. UMTA-MA-06-0100-80-4.US. Department of Transportation*. [S.l.: s.n.], 1980. p. 427.
- SCHWARTZ, C. W.; EINSTEIN, H. H. Simplified analysis for ground-structure interaction in tunneling. the state of the art in rock mechanics. In: *21st U.S. Symposium on Rock Mechanics, Rolla*. [S.l.: s.n.], 1980. p. 787–796.

- SECHLER, E. E. *Elasticity in Engineering*. [S.l.]: John Wiley and Sons, Inc, 1952.
- STERPI, D.; GIODA, G. Visco-plastic behaviour around advancing tunnels in squeezing rock. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, 2007.
- SWOBODA, G. Finite element analysis of the new austrian tunnelling method (NATM). In: *Proceedings of the 3rd International Conference on Numerical Methods in Geomechanics*. [S.l.: s.n.], 1979. p. 581–586.
- SWOBODA, G.; MARENCE, M.; MADER, I. Finite element modelling of tunnel excavation. *International Journal of Engineering Modelling*, v. 6, p. 51–63, 1994.
- TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. *Teoria da Elasticidade*. [S.l.]: Guanabara Dois, 1980.
- VENTURINI, W. S. *Boundary Element Method in Geomechanics*. [S.l.]: Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- VENTURINI, W. S. *Um estudo sobre o Método dos Elementos de Contorno e suas aplicações em problemas de engenharia*. [S.l.]: Tese de Livre-docência. EESC/USP, São Carlos, SP, 1988.
- WANG, C. T. *Applied Elasticity*. [S.l.]: McGraw-Hill Book Company, Inc, 1953.
- Wutzow, W. W. *Formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise de chapas com enrijecedores*. Dissertação (Mestrado) — EESC-USP , São Carlos, 2003.