

JESÚS ANTONIO GARCÍA SÁNCHEZ

ESTUDO DO FENÔMENO DA AUTO- INTERSECÇÃO EM UM ANEL  
ANISOTRÓPICO.

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia  
de São Carlos, da Universidade de São Paulo,  
como parte dos requisitos para a obtenção do título  
de Mestre em Engenharia Civil.

Orientador: Professor Doutor Adair Roberto Aguiar.

SÃO CARLOS

2008

*“Yo no sé lo que es el destino,  
caminando fui lo que fui.”*

*A Deus e às duas mulheres da  
minha vida Edith e Denise.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus pelo seu imenso amor, sua ajuda, sua misericórdia e sua sabedoria. A ele agradeço, por ser minha força, meu pai e meu amigo em todo momento, incluindo os dias difíceis e tristes da minha vida. Sem ele nenhum dos logros da minha vida seria possível.

A minha mãe por ter-me apoiado e amando durante tantos anos. Pelos sábios conselhos. Por nunca ter-me deixado retroceder.

A minha linda namorada pela paciência durante estes últimos meses. Por ser meu presente e meu futuro. Por ser meu amor.

Aos meus amigos Robenzon, as Marcelas, Jesús Daniel, Cesar, Ieda e Luiz. Pela amizade cultivada durante estes anos na difícil terra de São Carlos.

Aos professores, técnicos, colegas e pessoal administrativo pela ajuda oferecida neste mestrado, em especial, a Coda, Venturini, Nadir, Pacola, Rodrigo "*Manaus*", Aquino e Raimundo.

A todas aquelas pessoas com as quais comparti o café, o futebol, o basquete e até os meus problemas.

Ao professor Adair Roberto Aguiar pela orientação e dedicação nesta pesquisa.

A CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – pela bolsa de Estudo.

## RESUMO

**SÁNCHEZ, J. A. G. Estudo do Fenômeno da Auto-intersecção em um Anel Anisotrópico. 2008. 94 f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.**

Estuda-se numericamente uma placa circular homogênea com furo centrado sob estado plano de deformação. A placa está fixa ao longo do contorno interno e está sob compressão radial uniforme ao longo do contorno externo. O material da placa é elástico-linear e anisotrópico. Apresenta-se a solução analítica do problema, a qual satisfaz as equações governantes de equilíbrio, no contexto da elasticidade linear clássica. Esta solução prediz o comportamento espúrio da auto-intersecção em uma região central da placa. Para evitar este comportamento, utiliza-se uma teoria que propõe encontrar um campo de deslocamento que minimize a energia potencial total do corpo sujeito à restrição de injetividade local para o campo da deformação correspondente. Esta teoria, juntamente com o método das penalidades interiores, permite encontrar uma solução numérica que preserva a injetividade. Esta solução corresponde a um campo de deslocamento radialmente simétrico. Estuda-se a possibilidade de encontrar uma solução rotacionalmente simétrica do problema restrito, em que o campo de deslocamento possua as componentes radial e tangencial, ambas funções somente do raio. Os resultados desta última modelagem mostram que a componente tangencial é nula, indicando que o campo de deslocamento é, de fato, radialmente simétrico. Mostra-se também que a solução do problema do anel converge para a solução do problema de um disco sem furo à medida que o raio do furo tende a zero.

**Palavras-chave:** anisotropia, auto-intersecção, injetividade, método das penalidades, minimização com restrição.

## ABSTRACT

**SÁNCHEZ, J. A. G. Study of the Self-intersection anomaly in an Anisotropic Ring. 2008. 94 f. M.Sc. Dissertation – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.**

This work concerns a numerical study of a homogeneous circular plate with a centered hole that is under a state of plane strain. The plate is fixed at its inner surface and is under uniform radial compression at its outer surface. The plate is linear, elastic, and anisotropic. An analytical solution for this problem, which satisfies the governing equations of equilibrium, is presented in the context of classical linear elasticity. This solution predicts the spurious behavior of self-intersection in a central region of the plate. To avoid this behavior, a constrained minimization theory is used. This theory concerns the search for a displacement field that minimizes the total potential energy of the body, which is a quadratic functional from the classical linear theory, subjected to the constraint of local injectivity for the associated deformation field. This theory together with an interior penalty method and a standard finite element methodology yield a numerical solution, which is radially symmetric, that preserves injectivity. Here, it is investigated the possibility of finding a rotationally symmetric solution to the constrained problem; one for which the associated displacement field has radial and tangential components, which are both functions of the radius only. The numerical results show, however, that the tangential component is zero. It is also shown that, as the radius of the hole tends to zero, the corresponding sequence of solutions tends to the solution of a solid disk.

**Keywords:** anisotropy, self-intersection, injectivity, penalty method, constrained minimization.

## CONTEÚDO

AGRADECIMENTOS .....	iv
RESUMO .....	v
ABSTRACT .....	vi
1 INTRODUÇÃO .....	1
1.1 Objetivos e Justificativas .....	1
1.2 Revisão Bibliográfica .....	2
1.2.1 Auto-intersecção na Vizinhança de Vértices de Trincas. ....	2
1.2.2 Auto-intersecção na Vizinhança de Cantos. ....	5
1.2.3 Auto-intersecção na Vizinhança de Pontos Interiores. ....	8
1.3 Organização do Texto .....	13
2 Fundamentos da Mecânica do Contínuo .....	15
2.1 Cinemática dos Meios Contínuos .....	15
2.1.1 Os Corpos Contínuos e suas Configurações .....	15
2.1.2 O Campo de Deformação .....	17
2.1.3 Deformações de Elementos de Linha, Superfície e Volume .....	20
2.1.4 Movimento de um Corpo. ....	21
2.2 Leis de Balanço, ou, de Conservação .....	22
2.2.1 Balanço de Massa .....	22
2.2.2 Forças .....	23
2.2.3 Balanço da Quantidade de Movimento Linear .....	25
2.2.4 Balanço de Movimento Angular .....	27
2.2.5 Balanço de Energia .....	28

2.3	Modelos Constitutivos .....	29
2.3.1	Material Elástico-Linear Anisotrópico .....	29
3	Programação Não-Linear .....	33
3.1	Minimização sem Restrições.....	35
3.1.1	Propriedades de Mínimo.....	35
3.1.2	Propriedades dos Algoritmos de Minimização. ....	36
3.2	Minimização com Restrições .....	40
3.2.1	Conceitos Básicos .....	41
3.2.2	Introdução ao Método das Penalidades .....	43
3.2.3	Penalidades Interiores.....	44
3.2.4	Penalidades Exteriores .....	46
4	FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	48
4.1	O Problema do Anel sem Restrição .....	48
4.1.1	Problema Unidimensional em Uma Variável .....	51
4.1.2	Problema Unidimensional em Duas Variáveis. ....	54
4.2	O Problema do Anel com Restrição .....	56
4.2.1	Conceitos Preliminares.....	56
4.2.2	Problema Unidimensional em Uma Variável com Restrição.....	59
4.2.3	Formulação Penalizada .....	60
4.3	Formulação Discreta do Problema do Anel com Restrição .....	61
4.3.1	Problema Unidimensional em Uma Variável. ....	62
4.3.2	Problema Unidimensional em Duas Variáveis .....	65
5	Resultados Numéricos.....	68
5.1	Resultados do Problema do Anel Sem Restrição.....	68



5.2	Resultados do Problema do Anel Com Restrição. ....	73
5.3	O Problema do Anel em Relação ao Disco Sem Furo .....	80
6	Conclusões.....	92
7	Bibliografia .....	94
	Anexo A – Álgebra Linear.....	95
	Anexo B – Análise Tensorial.....	102
	Anexo C – Norma $H^1$ .....	106

## Lista de Figuras

Fig. 1: Chapa infinita com trinca. _____	3
Fig. 2: Punção Rígido atuando sobre uma base horizontal semi-infinita. _____	6
Fig. 3: Disco elástico-linear e anisotrópico analisado por Lekhnitskii (1968). _____	9
Fig. 4: Um corpo contínuo e algumas de suas possíveis configurações. _____	17
Fig. 5: Configuração de referência e configuração deformada. _____	18
Fig. 6. Deformações de elementos de linha, superfície e volume. _____	20
Fig. 7. Interpretação geométrica de um problema de minimização no $\mathbb{R}^2$ utilizando curvas de nível. _____	34
Fig. 8. Aproximação pelo método de Newton (busca Unidirecional). _____	39
Fig. 9: Curvas de nível para problema bi-dimensional, $n=2$ , com restrições. _____	41
Fig. 10. Exemplo de problema com uma restrição ativa. _____	42
Fig. 11. Exemplo de problema com duas restrições ativas. _____	43
Fig. 12: Disco elástico anisotrópico com furo sob compressão radial. _____	49
Fig. 13: Discretização utilizando o programa de elementos finitos ANSYS 10.0 de uma quarta parte da seção transversal de um disco com furo. _____	69
Fig. 14: Ampliação da vizinhança do raio interno da Fig. 13. _____	71
Fig. 15: Convergência com relação ao tamanho do elemento finito do disco sem furo. _____	72
Fig. 16: Convergência com relação ao elemento finito do problema do disco (LEKHNITSKII 1968). _____	72
Fig. 17: Ampliação na vizinhança da malha utilizada para obter a bifurcação da solução do problema de Lekhnitskii: malha deformada. _____	75
Fig. 18: Ampliação na vizinhança do centro da malha utilizada para obter a bifurcação da solução do problema de Lekhnitskii. _____	76
Fig. 19: Determinante do gradiente da deformação do problema de Lekhnitskii, na vizinhança do centro. _____	76
Fig. 20: Seqüência de aproximações numéricas geradas pelo método das penalidades à medida que $\delta \rightarrow 0$ . _____	78

<i>Fig. 21: Convergência do problema do anel sujeito à restrição de injetividade com relação ao número de elementos finitos.</i>	79
<i>Fig. 22: Convergência com relação ao tamanho do furo das soluções analíticas do problema do anel sem restrição para a solução analítica do problema de Lekhnitskii sem restrição.</i>	81
<i>Fig. 23: Convergência com relação ao tamanho do elemento finito da aproximação numérica do problema do anel sem restrição para a solução analítica do mesmo problema, considerando <math>r_i = 10^{-2}</math>.</i>	82
<i>Fig. 24: Análise de convergência com relação ao tamanho do elemento finito do problema do anel sem restrição para sua solução analítica, considerando <math>r_i = 10^{-2}</math>.</i>	83
<i>Fig. 25: Convergência da aproximação numérica para a solução analítica do problema do anel sem restrição, considerando <math>r_i = 10^{-7}</math>.</i>	84
<i>Fig. 26: Análise de convergência com relação ao tamanho do elemento finito do problema do anel sem restrição, para a solução analítica, considerando <math>r_i = 10^{-7}</math>.</i>	85
<i>Fig. 27: Convergência da aproximação numérica do anel com restrição para a solução numérica do disco de Lekhnitskii à medida que <math>r_i \rightarrow 0</math>. <math>M=64</math>.</i>	86
<i>Fig. 28: Análise de convergência da aproximação numérica do anel com restrição para a solução numérica do disco de Lekhnitskii à medida que <math>r_i \rightarrow 0</math>.</i>	87
<i>Fig. 29: Convergência com relação a <math>M</math> do determinante do gradiente de deformação, <math>J</math>, do problema do anel.</i>	88
<i>Fig. 30: Convergência com relação a <math>M</math> do determinante do gradiente de deformação do problema do anel em uma vizinhança do furo <math>r_i = 10^{-3}</math>.</i>	89
<i>Fig. 31: Comportamento do determinante do gradiente de deformação para o problema de Lekhnitskii, considerando a malha 75/25/20.</i>	90
<i>Fig. 32: Ampliação na vizinhança de <math>r_a</math> do comportamento do determinante do gradiente de deformação do problema de Lekhnitskii, considerando a malha 75/25/20.</i>	91
<i>Fig. 34. Domínio e imagem da função <math>f</math>.</i>	104

## Lista de Tabelas

<i>Tab. 1: Classificação dos materiais ortotrópicos, TING (1996).</i>	32
<i>Tab. 2: Constantes elásticas utilizadas por FOSDICK e ROYER-CARFAGNI (2001).</i>	70
<i>Tab. 3: Contastes elásticas utilizadas por FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007), associadas à bifurcação da solução do problema de Lekhnitskii.</i>	74
<i>Tab. 4: Contastes elásticas utilizadas por FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007), associadas à solução unidimensional em uma variável do problema de Lekhnitskii.</i>	74

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Objetivos e Justificativas

A teoria proposta (FOSDICK e ROYER-CARFAGNI, 2001) representa uma nova abordagem para os problemas de elasticidade que apresentam auto-interseção. O número de estudos realizados nesse novo campo é limitado e justifica a realização deste trabalho.

Resultados apresentados por FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007) indicam a existência de bifurcação no campo de deslocamento no contexto de uma teoria de minimização com restrição que utiliza o potencial de energia da elasticidade linear plana. Neste trabalho, examina-se a possibilidade de ocorrer bifurcação no campo de deslocamento, semelhante à encontrada por FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007). Aqui, no entanto, considera-se que o campo de deslocamento é rotacionalmente simétrico. Observa-se, assim, o valor de pesquisas que adicionem informações aos estudos realizados para corrigir problemas na teoria da elasticidade, de modo a preservar a injetividade e, por conseguinte, eliminar o fenômeno anômalo da auto-interseção.

O objetivo principal deste trabalho é aportar no conhecimento da teoria da elasticidade com a restrição de injetividade, aplicável a problemas que possuam o fenômeno da auto-interseção. Será analisado o problema de um disco com furo (anel) sob compressão radial, cujas tensões são finitas, descrevendo o comportamento da solução do problema. Analisa-se a

convergência da solução do problema do anel para a solução do problema de Lekhnitskii (disco sem furo), cujas tensões são infinitas no centro do disco.

## **1.2 Revisão Bibliográfica**

A elasticidade é uma propriedade fundamental das substâncias presentes na natureza (MUSKHELISHVILI, 1933). A teoria da elasticidade utiliza idealizações e simplificações que permitem aproximar e prever de forma satisfatória o comportamento desta propriedade nos corpos. Entretanto, para alguns casos, a teoria da elasticidade proporciona soluções que, embora satisfaçam as equações governantes, não possuem significado físico.

Diversos estudos têm sido realizados para tentar corrigir, ou, ao menos mostrar as falhas existentes na teoria da elasticidade. A seguir, citam-se algumas pesquisas sobre os fenômenos anômalos previstos pela teoria da elasticidade, classificando-as segundo o tipo de problema onde ocorrem.

### **1.2.1 Auto-intersecção na Vizinhança de Vértices de Trincas.**

WILLIAMS (1959) considera dois corpos elásticos semi-infinitos, com propriedades elásticas diferentes, unidos ao longo de uma interface plana contendo uma trinca e sendo tracionados no infinito por uma carga  $P$  constante, conforme ilustrado na Fig. 1. O problema tem importância prática, sendo que o interesse pelo mesmo surgiu em pesquisas geológicas de linhas de falha ao longo da interface entre duas lajes de estrato de rochas. Tal problema

também é comum quando se trabalha com dois metais diferentes unidos através de uma linha fissurada de solda. WILLIAMS (1959) é o primeiro a mostrar que as tensões e os deslocamentos no vértice da trinca possuem um caráter oscilatório do tipo

$$\begin{aligned}\sigma &\sim r^{-\frac{1}{2}} \text{sen}(E \text{ Log } r), \\ u &\sim \text{sen}(E \text{ Log } r),\end{aligned}\tag{1}$$

onde  $r$  é a distancia do vértice da trinca a um ponto no interior do sólido e  $E$  é função das constantes elásticas dos meios semi-infinitos. Observe de (1) que as tensões tendem ao infinito à medida que se aproxima do vértice da trinca. Além disso, o comportamento oscilatório do campo de deslocamento ocasiona sobreposição das faces da trinca, caracterizando a auto-intersecção do material.

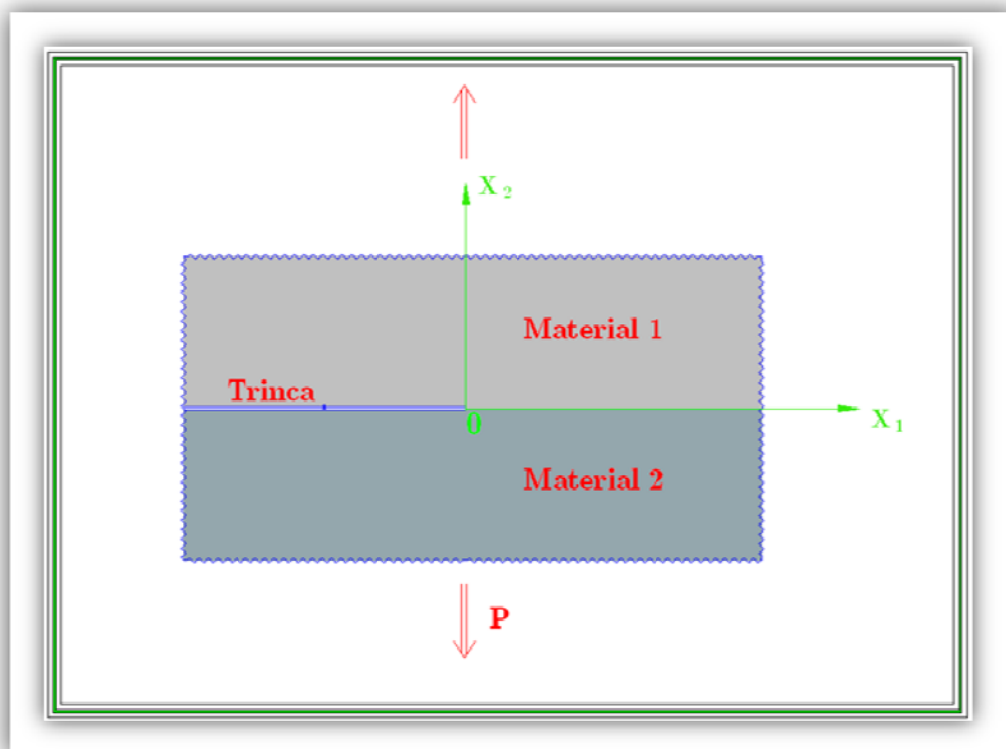


Fig. 1: Chapa infinita com trinca.

ENGLAND (1965) estuda o problema de uma trinca de interface sob pressão interna arbitrária. O autor nota que a solução do problema é inadmissível, pois as superfícies superior e inferior da trinca apresentam ondulações que ocasionam a auto-intersecção do material em uma vizinhança do vértice da trinca. ENGLAND (1965) estima numericamente o raio na vizinhança da trinca onde ocorre a auto-intersecção. A ordem de grandeza do raio é de  $10^{-4}$  vezes o comprimento da trinca.

ATKINSON (1977) propõe dois modelos para o tratamento de um problema semelhante ao abordado por WILLIAMS (1959), ou seja, uma chapa composta de dois materiais distintos com uma trinca na interface entre os materiais. Nos dois modelos a interface é substituída por uma tira com pequena espessura. No primeiro modelo a tira é homogênea e tem um módulo de elasticidade diferente dos módulos de elasticidade dos materiais que compõem a chapa. A trinca é introduzida no interior da tira homogênea. Neste caso, as oscilações não ocorrem. O primeiro modelo é deficiente, pois a trinca deve estar contida na tira homogênea. O segundo modelo, mais popular, utiliza uma tira posicionada na interface com um módulo de elasticidade continuamente variável, tal que, nos contornos é igual ao do material da chapa que a limita. Assim, a trinca é colocada entre o primeiro material da chapa e a tira. Uma vez que o módulo de elasticidade é contínuo ao redor da trinca, evita-se o comportamento oscilatório na vizinhança do vértice da trinca.

COMNINOU (1977) também substitui a interface por uma tira homogênea e isotrópica com a possibilidade de ter contato sem atrito ao longo da face da trinca. Ela impõe que as faces deformadas da trinca permaneçam em contato na vizinhança do vértice da trinca. A autora mostra a existência de regiões de contato com um comprimento altamente dependente do



carregamento aplicado. Nesta análise, a singularidade nas tensões é do tipo raiz quadrada e a solução assintótica é do modo II, ou seja, as tensões cisalhantes são as únicas componentes que possuem singularidade na frente da trinca.

KNOWLES (1981) mostra que no problema de modo II na trinca a solução pode, ou, não prever a auto-intersecção, dependendo das propriedades do material. O autor realiza uma análise assintótica, mostrando que para materiais como o vidro ocorre auto-intersecção, porem não ocorre para poliestireno e aço.

ARAVAS e SHARMA (1991) consideram um meio elasto-plástico colado a um substrato rígido e introduzem uma trinca na interface destes materiais. Eles consideram contato sem fricção entre a trinca e o substrato. Os autores apresentam resultados numéricos que mostram que, quando a zona de contato é pequena comparada com o tamanho da trinca, o modelo adotado por COMNINOU (1977) ainda prediz a auto-intersecção do material. ARAVAS e SHARMA (1991) mostram que na solução encontrada por COMNINOU (1977) a auto-intersecção não ocorre nas faces da trinca, mas o fenômeno apresenta-se nos elementos materiais encontrados na vizinhança da ponta da trinca.

### **1.2.2 Auto-intersecção na Vizinhança de Cantos.**

MUSKHELISHVILI (1933) estuda o problema de um punção vertical rígido atuando sobre uma base horizontal semi-infinita sob uma carga axial, conforme ilustrado na Fig. 2. Ele encontra uma solução fechada para o problema no contexto da teoria da elasticidade linear

clássica. Em particular, ele mostra que as forças mudam de sinal infinitas vezes nos cantos do punção.

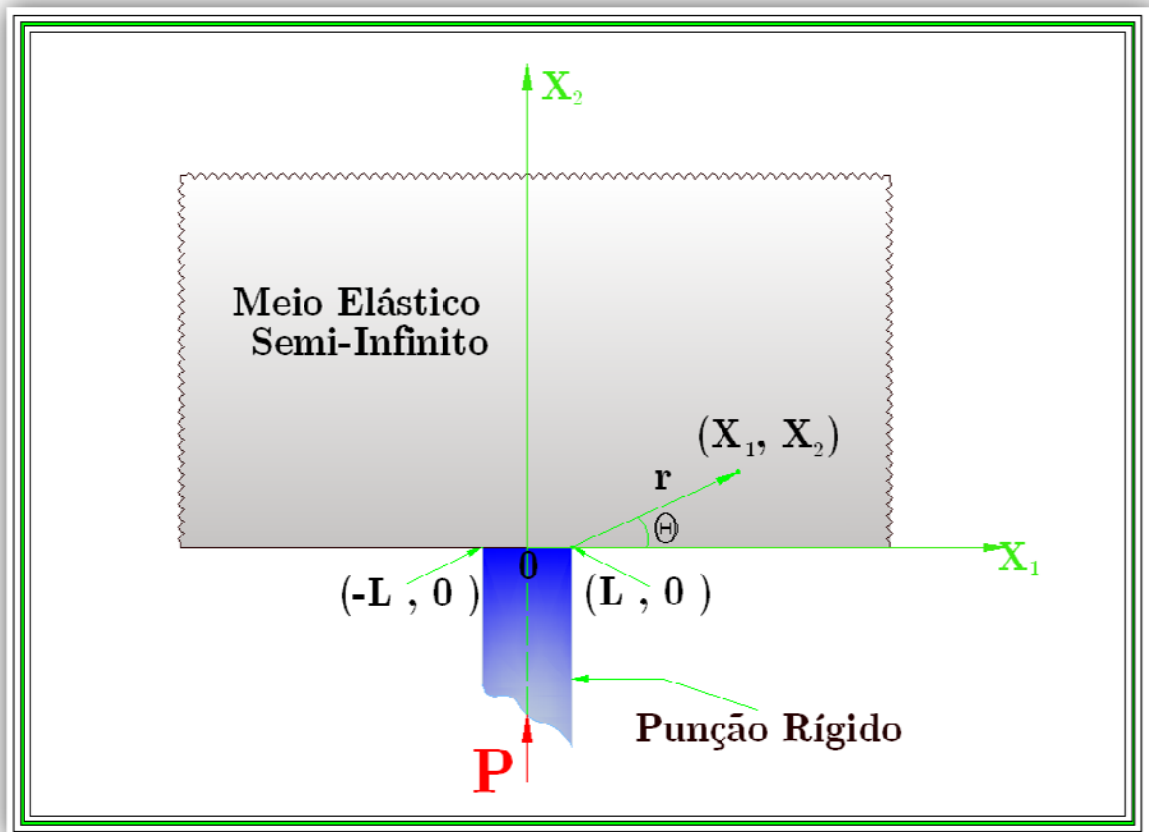


Fig. 2: Punção Rígido atuando sobre uma base horizontal semi-infinita.

KNOWLES e STERNBERG (1975) modelam o problema do punção rígido considerando estado plano de deformação. Eles analisam o comportamento oscilatório da solução deste problema clássico no contexto da teoria de elasticidade. Os autores concluem que, no contexto da teoria linear, a solução deste problema é inadmissível, pois exibe um comportamento oscilatório nos campos de tensão e deformação. Em consequência do comportamento oscilatório, a solução apresenta o fenômeno de auto-intersecção. Eles mostram que, para uma

classe particular de materiais elásticos e não-lineares, o comportamento anômalo da auto-intersecção pode ser resolvido. Isto permite aos autores argumentar que a ausência do comportamento oscilatório é devido às peculiaridades da escolha do material (COMNINOU, 1990).

AGUIAR e FOSDICK (2001) avançam no entendimento do comportamento do campo de deformação na vizinhança de pontos onde o contorno do corpo elástico não é suave. Eles realizam uma análise assintótica no contexto das teorias linear e não linear planas do campo de deformação na vizinhança do canto do punção. Na teoria não linear, os autores realizam duas análises: Na primeira, utilizam um material harmônico e na segunda um material semi-linear modificado. Resultados numéricos obtidos pelos autores via Método dos Elementos Finitos confirmam que a solução assintótica representa o comportamento local do estado de equilíbrio na vizinhança do canto do punção. Nesta vizinhança, as teorias linear e não linear predizem diferentes comportamentos. Assim, as teorias linear e não linear com materiais linear e harmônico, respectivamente, predizem um comportamento oscilatório no campo de deformação e em ambas apresenta-se o fenômeno da auto-intersecção. A teoria não linear com o material semi-linear modificado não apresenta o comportamento oscilatório no campo de deslocamento e evita o fenômeno da auto-intersecção. Longe do canto do punção, o gradiente de deformação é pequeno e a solução assintótica no contexto da teoria não linear utilizando o material harmônico, torna-se inválida. Os autores mostram, no entanto, a existência de uma região intermediária onde os resultados numéricos obtidos para as teorias linear e não linear são similares e predizem um comportamento suave para a superfície livre. Em particular, eles

apresentam uma solução que não possui o comportamento oscilatório e que impede a auto-intersecção na vizinhança do canto punção.

### 1.2.3 Auto-intersecção na Vizinhança de Pontos Interiores.

LEKHNITSKII (1968) considera um disco circular elástico-linear, com anisotropia cilíndrica, sob estado plano de tensão e em equilíbrio sob pressão radial distribuída uniformemente no contorno, conforme ilustrado na Fig. 3. Em um sistema de coordenadas polares, Lekhnitskii encontra a distribuição de tensões

$$\begin{aligned}\sigma_r &= -q \left(\frac{r}{b}\right)^{k-1}, \\ \sigma_\theta &= -q k \left(\frac{r}{b}\right)^{k-1}, \\ \tau_{r\theta} &= 0,\end{aligned}\tag{2}$$

onde  $\sigma_r$  é a tensão normal na direção radial,  $\sigma_\theta$  é a tensão normal na direção tangencial,  $\tau_{r\theta}$  é a tensão de cisalhamento no plano,  $q$  é a pressão radial distribuída no contorno,  $b$  é o raio do disco,  $k = \sqrt{\frac{E_\theta}{E_r}}$  e  $E_r, E_\theta$  são os módulos de Young nas direções radial e tangencial, respectivamente. Quando  $E_\theta < E_r$ ,  $k < 1$ , e segue de (2) que as tensões tendem, em módulo, ao infinito à medida que se aproxima do centro do disco, ou seja, à medida que  $r \rightarrow 0$ . Assim, no centro do disco ocorre uma singularidade no campo das tensões. FOSDICK e ROYER-

CARFAGNI (2001) mostram que para  $0 < k < 1$  o problema do disco com furo pode apresentar o fenômeno da auto-intersecção.

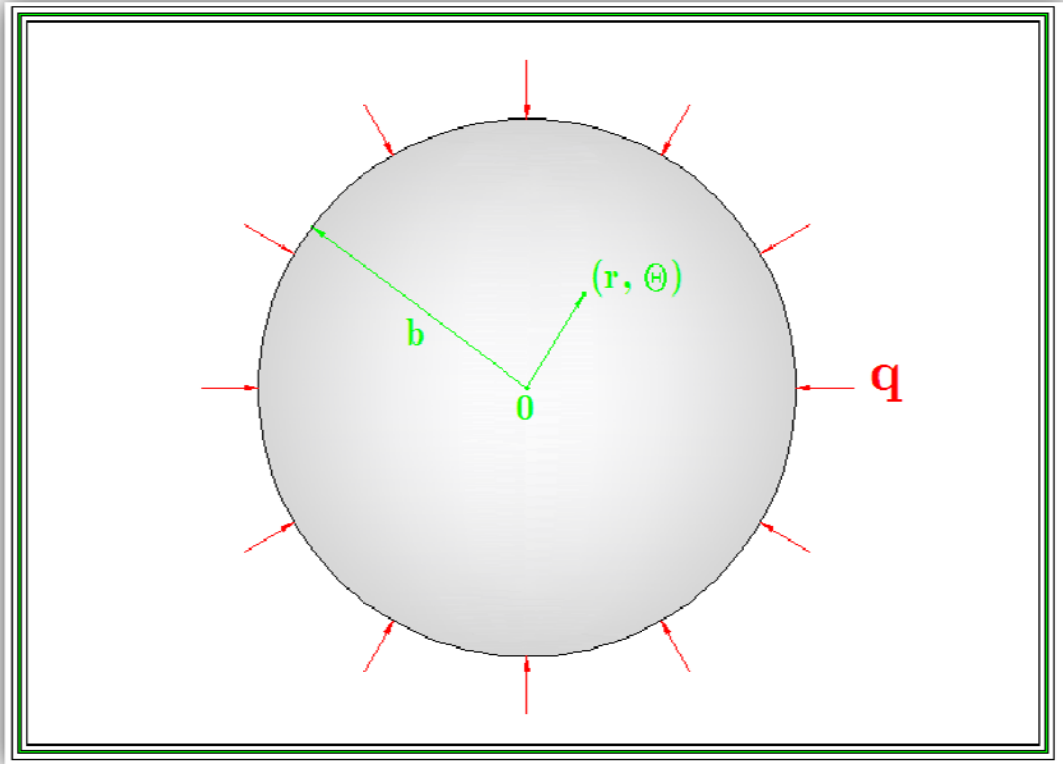


Fig. 3: Disco elástico – linear e anisotrópico analisado por Lekhnitskii (1968).

TING (1999) considera o equilíbrio de uma esfera homogênea, linear e anisotrópica de raio  $b$ , a qual é radialmente comprimida por uma força por unidade de área  $q$  uniformemente distribuída ao longo do contorno externo. A esfera é composta por um material esfericamente uniforme. Em um sistema de coordenadas esférico, Ting encontra a distribuição de tensões

$$\sigma_r = -q \left(\frac{r}{b}\right)^{3(k-1)/2},$$

$$\sigma_\theta = -q \left(\frac{1+3k}{4}\right) \left(\frac{r}{b}\right)^{3(k-1)/2}, \quad (3)$$

onde  $k \equiv \frac{1}{3} \sqrt{1 + 8 \left( \frac{c_{22} + c_{23} - c_{12}}{c_{11}} \right)} > 0$ . Se  $0 < k < 1$ , o autor mostra que a tensão é infinita no centro da esfera,  $r = 0$ , e que existe uma região próxima ao centro onde ocorre o fenômeno da auto-intersecção.

Um avanço importante no tratamento do fenômeno anômalo da auto-intersecção foi realizado por FOSDICK e ROYER-CARFAGNI (2001). Estes autores propõem minimizar o funcional quadrático da energia potencial da elasticidade linear clássica sujeito à restrição de injetividade

$$\det(\nabla f) \geq \varepsilon > 0, \quad (4)$$

onde  $\nabla f$  é o gradiente de deformação e  $\varepsilon$  é um valor arbitrário, positivo e suficientemente pequeno. Os autores analisam o problema do disco de Lekhnitskii sujeito à restrição (4), utilizam multiplicadores de Lagrange e encontram uma solução fechada. Para encontrar esta solução, eles consideram uma distribuição radialmente simétrica em deslocamentos e tensões, ou seja, desprezam os deslocamentos tangenciais e qualquer dependência com relação à variável  $\theta$ . Os autores realizam uma análise do comportamento da restrição de injetividade e identificam duas regiões, uma central onde  $\det(\nabla f) = \varepsilon$  e outra complementar a esta onde  $\det(\nabla f) > \varepsilon$ .

A solução analítica do problema de Lekhnitskii com a restrição é verificada numericamente por OBEIDAT et al. (2001), onde a técnica dos multiplicadores de Lagrange foi utilizada. Os autores encontram dificuldades pelo caráter altamente não linear da restrição. Nesse artigo o procedimento de Newton-Raphson foi utilizado para resolver iterativamente o sistema de equações resultante, sendo que, nas aproximações iniciais, a cada passo do procedimento, a restrição de injetividade era violada. Nesse artigo, a restrição simula uma barreira, ou seja, faz que qualquer seqüência de soluções aproximadas que tente violar a

restrição retorne ao conjunto de deformações admissíveis. O autor destaca que, quando a solução atinge o domínio inadmissível, onde a restrição é violada, verificam-se grandes instabilidades numéricas. Com isto, a solução tem que ser forçada “manualmente” para permanecer no domínio admissível.

O problema proposto por LEKHNITSKII (1968), sem a utilização da restrição (4), também foi analisado numericamente por OBEIDAT et al. (2001). Nesse artigo, o problema foi discretizado pelo método dos elementos finitos, com funções de forma lineares. Os resultados obtidos por estes autores indicam que a sequência de soluções numéricas não converge para a solução exata do problema à medida que a malha de elementos finitos é refinada. AGUIAR e SANCHEZ (2005) constroem seqüências de soluções numéricas que parecem convergir para a solução exata, mas de forma muito devagar.

AGUIAR (2006) utiliza o método das penalidades interiores para analisar o problema da esfera (ver TING, 1999), sujeito à restrição (4). Aguiar utiliza a teoria de minimização proposta por FOSDICK e ROYER-CARFAGNI (2001) para propor uma formulação penalizada do problema elástico com restrição. Esta formulação permite construir uma aproximação numérica do problema. A aproximação consiste em encontrar o campo de deslocamento que minimiza um potencial de energia aumentado. Este potencial aumentado é composto da energia potencial da elasticidade linear clássica e uma função penalidade dividida por um parâmetro de penalidade. Uma seqüência de soluções parametrizada por este parâmetro é então construída. A seqüência converge para uma função, que satisfaz a primeira condição de variação para ser o mínimo do problema de minimização com restrição, à medida que o parâmetro tende a infinito. Esta

aproximação possui a vantagem de ser matematicamente aplicável e de não apresentar dificuldades computacionais significativas na hora de ser implementado.

AGUIAR (2004) simula numericamente o problema de Lekhnitskii sujeito à restrição (4). O autor considera uma distribuição radialmente simétrica no campo de deslocamento tal que nesta simplificação a componente tangencial do deslocamento é nula. Com esta hipótese, o autor confirma numericamente a solução analítica encontrada por FOSDICK e ROYER-CARFAGNI (2001).

FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007) simulam numericamente o problema de Lekhnitskii sujeito à restrição (4). Os autores analisam este problema sem utilizar simetria no campo de deslocamentos, ou seja, tratam o problema de uma forma bidimensional. Os autores utilizam o método das penalidades interiores proposto por AGUIAR (2006) para encontrar uma solução numérica. Eles encontram que para determinadas propriedades elásticas do material existe uma solução na qual as componentes, radial e tangencial, são não nulas, sendo esta uma bifurcação da solução unidimensional. Embora a energia seja quadrática e convexa o resultado encontrado pelos autores é justificado pelo caráter altamente não linear da restrição. Baseados nos resultados obtidos por FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007) e procurando uma diminuição no esforço computacional, neste trabalho, tenta-se encontrar uma solução rotacionalmente simétrica, com dependência radial, mas que possua uma componente tangencial não nula.



### 1.3 Organização do Texto

No primeiro capítulo realiza-se uma revisão bibliográfica sobre soluções de problemas que não respeitam a condição (4) e que estão, portanto, relacionados com o fenômeno anômalo da auto-intersecção. Em particular, mencionam-se trabalhos que tratam do fenômeno na vizinhança dos vértices de trincas, cantos e pontos interiores de discos e esferas sólidas.

No Capítulo 2 apresentam-se conceitos teóricos da Mecânica do Contínuo, os quais são fundamentais para o entendimento deste trabalho. Na seção 2.3.1 descreve-se brevemente a teoria da elasticidade anisotrópica, com ênfase para a elasticidade cilíndricamente ortotrópica, pois os exemplos apresentados possuem materiais com este tipo de comportamento elástico.

No Capítulo 3 são apresentadas as idéias básicas de otimização que são utilizadas para resolver numericamente o problema do anel sujeito à restrição de injetividade (4), o qual está descrito no Cap. 4 em especial, detalha-se o método das penalidades e o método de Newton – para a busca da direção ótima e para a busca unidirecional.

No Capítulo 4 descreve-se o problema do anel, o qual recai no mesmo problema descrito por LEKHNITSKII (1968) quando o tamanho do furo tende a zero. Os resultados teóricos mostrados neste capítulo são divididos de acordo com o modelo utilizado para o campo de deslocamento. Assim, este problema é definido de duas formas: na primeira, considera-se que o campo de deslocamento é radialmente simétrico, possuindo apenas a componente radial. Na segunda forma considera-se que o campo de deslocamentos é rotacionalmente simétrico, possuindo as componentes radial e tangencial. Os dois problemas descritos anteriormente são

denominados neste trabalho como problema unidimensional em uma variável e problema unidimensional com restrição em duas variáveis, respectivamente.

No Capítulo 5 apresentam-se os resultados numéricos obtidos. Inicialmente, apresentam-se resultados da elasticidade linear clássica, os quais predizem o fenômeno espúrio da auto-intersecção em um disco com furo. Posteriormente, mostram-se resultados que indicam a ausência de bifurcação na solução do problema unidimensional em duas variáveis. Finalmente, analisam-se os resultados do disco com furo à medida que o tamanho do furo tende a zero.

No último capítulo apresentam-se as conclusões deste trabalho.

## 2 FUNDAMENTOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO

Apresentam-se conceitos básicos da Mecânica do Contínuo relacionados às leis de balanço, ou, de conservação, à cinemática dos meios contínuos e aos modelos constitutivos<sup>1</sup>. Alguns tópicos matemáticos utilizados na Mecânica do Contínuo são apresentados, de forma sucinta, nos anexos A e B.

### 2.1 Cinemática dos Meios Contínuos

A mecânica dos meios contínuos descreve cinematicamente as deformações e os movimentos dos corpos contínuos com a maior generalidade possível, sem as restrições características da teoria da elasticidade linear clássica. O ponto de partida para esta descrição é a definição de *corpo contínuo* do ponto de vista matemático.

#### 2.1.1 Os Corpos Contínuos e suas Configurações

Os corpos encontrados na natureza são formados por moléculas, as quais são compostas de átomos. Ao se observar um corpo qualquer através de um microscópio de grande definição, nota-se que os átomos encontram-se separados uns dos outros; ou seja, em grandezas atômicas, a matéria é descontínua. Agora, se um corpo é observado com um grau de

---

<sup>1</sup> Ver também GURTIN (1981) e OGDEN (1997).

detalhamento menor, nota-se que os átomos estão próximos entre si e que a matéria composta destes átomos parece um meio contínuo.

Assume-se, portanto, que a matéria é contínua. Isto é claramente uma aproximação; entretanto, se os problemas a serem analisados são formados sobre corpos cujas dimensões são muito maiores que os átomos, então, a aproximação é boa. A hipótese anterior é a base da mecânica dos meios contínuos.

Matematicamente, um corpo contínuo é definido como um conjunto  $\mathcal{B}$  de partículas  $P_1, P_2, \dots$ , com a seguinte propriedade: existe um conjunto de aplicações bijetivas e diferenciáveis  $\mathcal{Y} = \{\psi\}$ , que transformam  $\mathcal{B}$  em conjuntos abertos de  $\mathbb{R}^3$ ; ou seja, para toda partícula  $P \in \mathcal{B}$

$$x = \psi(P) \in \mathbb{R}^3, \quad \psi(\mathcal{B}) = \widehat{\mathcal{B}} \subseteq \mathbb{R}^3, \text{ aberto,} \quad e \quad \psi^{-1}(\widehat{\mathcal{B}}) = \mathcal{B}. \quad (5)$$

Para qualquer aplicação  $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{Y}$ , a composição

$$z_{12}: \psi_1(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \psi_2(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3, \quad z_{12} = \psi_2 \circ \psi_1^{-1}, \quad (6)$$

é diferenciável, como ilustrado na Fig. 4. Cada uma destas infinitas aplicações  $\psi$  determina uma configuração do corpo.

Percebe-se que existe um número infinito de configurações possíveis para o corpo  $\mathcal{B}$ . Uma destas configurações é escolhida para ser denominada como configuração de referência,  $\psi_{ref}$ . A configuração de referência define uma relação biunívoca entre as partículas do corpo,  $P \in \mathcal{B}$ , e um conjunto aberto  $\mathcal{B}_{ref} \equiv \psi_{ref}(\mathcal{B}) \subseteq \mathbb{R}^3$ . Assim, dado um sistema de coordenadas qualquer em  $\mathbb{R}^3$ , para cada partícula do corpo existem unicamente três coordenadas que definem sua posição, e vice-versa. A configuração de referência pode ser qualquer, mas é conveniente utilizar a configuração indeformada do corpo.

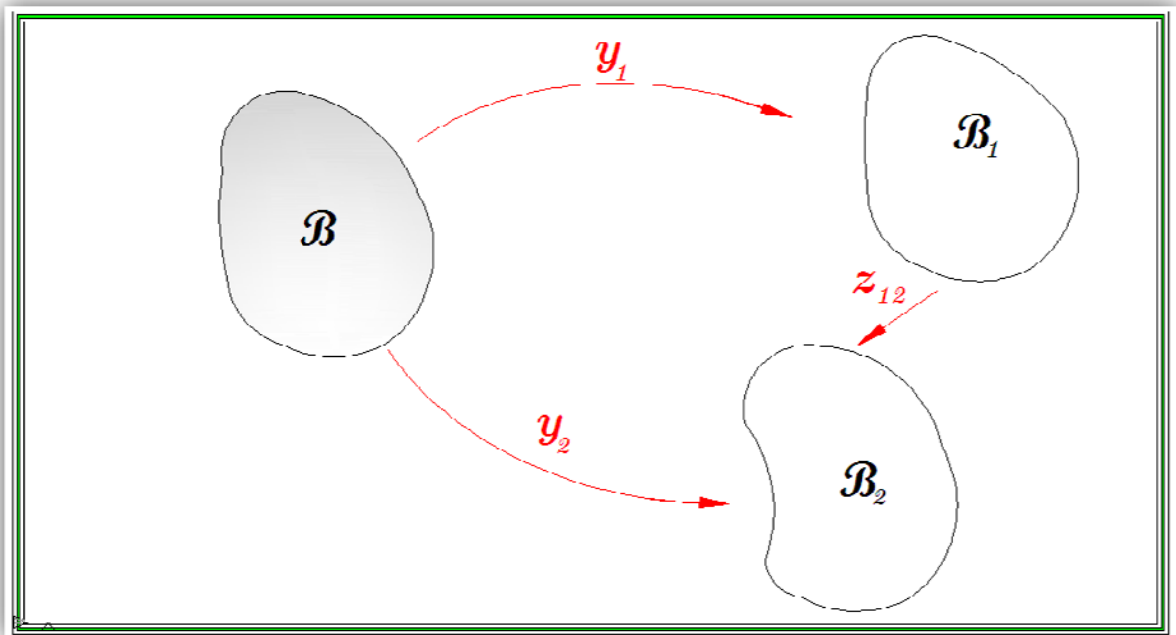


Fig. 4: Um corpo contínuo e algumas de suas possíveis configurações.

Da definição matemática de um corpo contínuo, pode-se associar a cada partícula  $P \in \mathcal{B}$  um ponto  $\hat{P} \in \hat{\mathcal{B}}$ , sendo  $\hat{\mathcal{B}}$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ , e vice-versa. Como  $\mathbb{R}^3$  é contínuo, a definição anterior implica na continuidade da matéria que constitui  $\mathcal{B}$ , tal como indicado na hipótese fundamental da Mecânica do Contínuo.

### 2.1.2 O Campo de Deformação

Conforme ilustrado na Fig. 5, configurações de referência e deformada definem uma aplicação entre  $\mathcal{B}_{ref}$  e  $\mathcal{B}_{def}$ , denominada deformação:

$$f : \mathcal{B}_{ref} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{B}_{def} \subseteq \mathbb{R}^3, \quad f \equiv \psi_{def} \circ \psi_{ref}^{-1}. \quad (7)$$

Existe uma transformação linear  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  que mapeia  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , conhecida como gradiente de deformação. Este objeto define a relação entre os elementos diferenciáveis das configurações

indeformada e deformada. Especificamente, se  $d\mathbf{X}$  é um vetor diferencial situado no ponto  $\mathbf{X}$  da configuração de referência e  $d\mathbf{x}$  é o vetor que resulta da deformação de  $d\mathbf{X}$ , tem-se que

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{X})d\mathbf{X}. \quad (8)$$

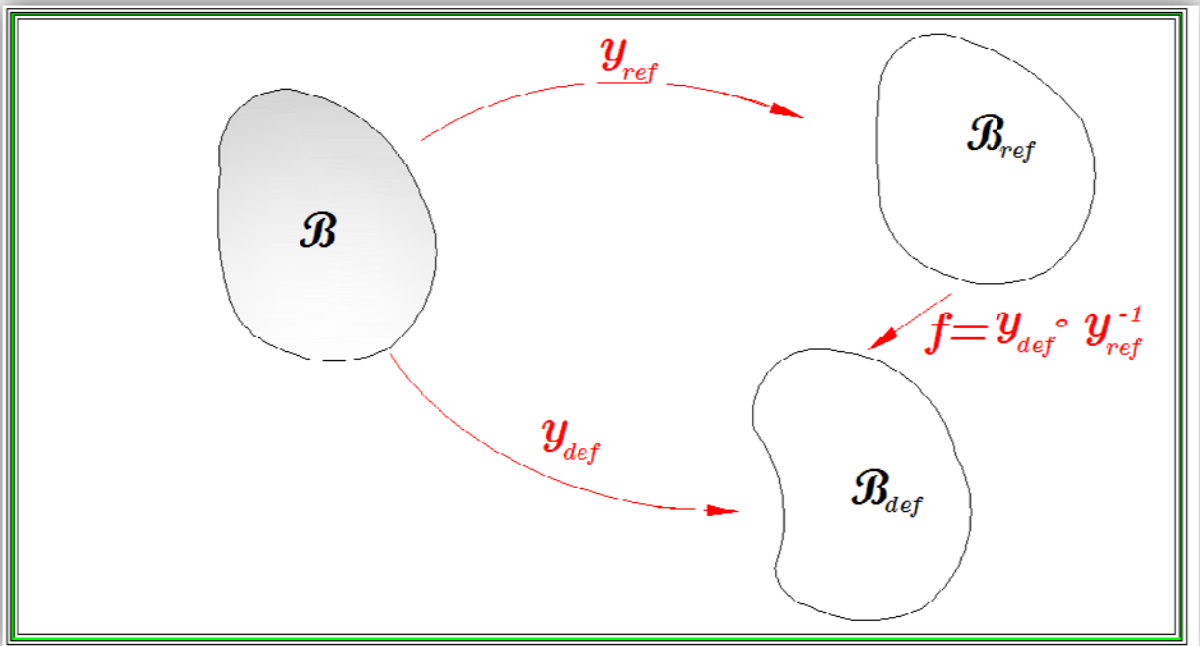


Fig. 5: Configuração de referência e configuração deformada.

Pelo Teorema da Decomposição Polar, (GURTIN, 1981), pode-se decompor  $\mathbf{F}$  nas formas

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R}, \quad (9)$$

onde  $\mathbf{R}$  é um tensor ortogonal próprio,  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  são dois tensores simétricos e positivo-definidos. Chama-se  $\mathbf{R}$  de tensor rotação e  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  de tensores extensão à direita e à esquerda, respectivamente. Assumindo que  $\det(\mathbf{F}) > 0$ , o Teorema da Decomposição Polar assegura que as decomposições (9) são únicas. Em aplicações, é mais conveniente trabalhar com os tensores deformação de Cauchy-Green à direita e à esquerda,

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F} \mathbf{F}^T, \quad (10)$$

respectivamente. Em termos do campo de deslocamento

$$\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (11)$$

definido pela relação

$$\mathbf{u} = \mathbf{X} - \mathbf{x}, \quad (12)$$

temos que

$$\mathbf{C} - \mathbf{I} = \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}, \quad (13)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a transformação identidade. Este tensor é uma medida da variação entre uma dada deformação e uma deformação rígida, para a qual  $\mathbf{C} = \mathbf{I}$ . Por isto, é conveniente introduzir o tensor deformação de Green-St. Venant

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}). \quad (14)$$

Se as deformações são infinitesimais, como na teoria clássica da elasticidade linear, obtém-se de (13) e (14) que

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) = \nabla_s \mathbf{u} + \mathcal{O}(\nabla \mathbf{u}^2), \quad (15)$$

onde  $\nabla_s$  denota a operação gradiente simétrico, definida por

$$\nabla_s \mathbf{u} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}), \quad (16)$$

e  $\mathcal{O}(\nabla \mathbf{u}^2)$  são os termos de ordem superior. Utilizando a expressão (16), define-se o gradiente de deformação

$$\nabla f \equiv \mathbf{1} + \nabla \mathbf{u}. \quad (17)$$

### 2.1.3 Deformações de Elementos de Linha, Superfície e Volume

Ilustra-se na Fig. 6 um corpo na configuração de referência,  $\mathcal{B}_{ref}$ , e em uma configuração deformada,  $\mathcal{B}_{def}$ . Do ponto  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_{ref}$  emanam os vetores  $d\mathbf{X}, d\mathbf{Y}$  e  $d\mathbf{Z}$ . Esses vetores são linearmente deformados pelo tensor  $\mathbf{F}$  nos vetores  $d\mathbf{x}, d\mathbf{y}$  e  $d\mathbf{z}$ , os quais emanam do ponto  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_{def}$ . Os elementos de linha  $d\mathbf{X}$  e  $d\mathbf{Y}$  estão relacionados com as suas imagens  $d\mathbf{x}$  e  $d\mathbf{y}$  por

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F}d\mathbf{X}, \quad d\mathbf{y} = \mathbf{F}d\mathbf{Y}. \quad (18)$$

Os elementos de área  $d\mathbf{A} \in \mathcal{B}_{ref}$  e  $d\mathbf{a} \in \mathcal{B}_{def}$  estão relacionados por

$$\mathbf{n} d\mathbf{a} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-T} \mathbf{N} d\mathbf{A}. \quad (19)$$

Os elementos de volume  $d\mathbf{V} \in \mathcal{B}_{ref}$  e  $d\mathbf{v} \in \mathcal{B}_{def}$  estão relacionados por

$$d\mathbf{v} = (\det \mathbf{F}) d\mathbf{V}. \quad (20)$$

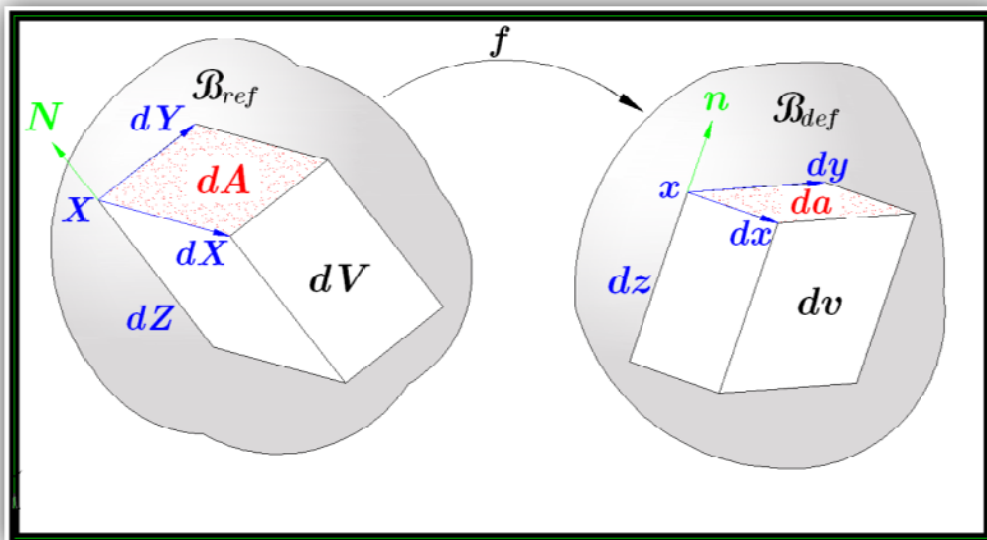


Fig. 6. Deformações de elementos de linha, superfície e volume.



## 2.1.4 Movimento de um Corpo.

Define-se o movimento de um corpo como uma família de deformações  $f_t$ , diferenciáveis, parametrizadas pelo tempo  $t$ . Então, a configuração inicial  $\mathcal{B}_0$  tem lugar no instante  $t = 0$ . Mesmo que os conceitos de configuração inicial e de referência sejam diferentes, neste trabalho, utilizam-se estes conceitos indistintamente.

Quando um corpo realiza um movimento como o descrito no parágrafo anterior, cada partícula  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_{ref}$  percorre uma curva,  $\mathbf{c}(t)$ , no espaço, que se pode expressar em função do campo das configurações como:

$$\mathbf{c}(t) = f_t(\mathbf{X}) \quad ? \quad (21)$$

Esta curva é denominada de trajetória e determina a posição de cada partícula  $\mathbf{X}$  em cada instante do tempo.

O movimento  $f_t: \mathcal{B}_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  de um corpo é uma família de deformações suaves parametrizadas pelo tempo  $t$ . Estas configurações definem uma aplicação bijetiva entre  $\mathcal{B}_0$  e  $\mathcal{B}_t$ , ou seja, cada partícula material  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_0$  ocupa, em um dado instante, um ponto espacial  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ . Cada ponto da região  $\mathcal{B}_t \in \mathbb{R}^3$  é a imagem de uma e somente uma partícula material do corpo. Dada uma posição  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ , pode-se encontrar a posição que ocupa a partícula no instante  $t$  mediante a função inversa

$$\mathbf{X} = f_t^{-1}(\mathbf{x}). \quad (22)$$

---

<sup>2</sup> Neste trabalho, utiliza-se de forma equivalente as notações  $f_t(\mathbf{x})$ , ou,  $f(\mathbf{x}, t)$ .

Define-se um campo material  $Y_t(\mathbf{X})$  aplicado em todo instante sobre as partículas materiais da configuração de referência. Utilizando a equação (22), pode-se expressar o campo  $Y_t$  em função da posição  $\mathbf{x}$ , ou seja,

$$\mathbf{y}_t = Y_t(f_t^{-1}(\mathbf{x})), \quad (23)$$

onde o campo  $\mathbf{y}_t = Y_t \circ f_t^{-1}$  é denominado campo espacial.

## 2.2 Leis de Balanço, ou, de Conservação

O comportamento de um corpo contínuo é regido pelas leis de balanço, ou, de conservação. Dos balanços de massa, de quantidade de movimento e de energia, resultam as equações de campo, definidas com relação às configurações dos corpos em  $\mathbb{E}^3$ .

### 2.2.1 Balanço de Massa

A massa de um meio contínuo  $m$  é uma quantidade positiva e constante que não depende do tempo, das dimensões e das formas que o corpo possa ter.

Considera-se uma região  $\Omega(\mathbf{x})$  contendo o ponto  $\mathbf{x}$  com volume  $v(\mathbf{x})$  e com massa  $m(\Omega(\mathbf{x}), t)$ . Com isto, é definida a massa específica de um corpo,  $\rho$ , como

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{v(\mathbf{x}) \rightarrow 0} \frac{m(\Omega(\mathbf{x}), t)}{v(\mathbf{x})}. \quad (24)$$

Observa-se de (24) que a densidade é um campo escalar espacial. A densidade no instante  $t = 0$  é chamada densidade de referência  $\rho_0$ , sendo um escalar que não depende do tempo.

Assumindo que a massa de qualquer volume material do corpo contínuo se mantém em todo instante de tempo, expressa-se o princípio de conservação de massa por

$$\int_{\mathcal{R}_0} \rho_0(\mathbf{X}) dV = \int_{\mathcal{R}_t} \rho_t(\mathbf{x}) dv, \quad (25)$$

onde  $\mathcal{R}$  é uma sub-região pertencente ao corpo  $\mathcal{B}$ .

Realizando mudança de variável em integrais de volume mediante a inserção da expressão (20) na expressão (25), obtém-se

$$\int_{\mathcal{R}_0} \rho_0(\mathbf{X}) dV = \int_{\mathcal{R}_0} \rho_t(f_t(\mathbf{X})) (\det \mathbf{F}) dV. \quad (26)$$

Sabendo que as duas integrais são iguais para qualquer região  $\mathcal{R}_0$ , então os integrandos são iguais em todo ponto<sup>3</sup>, resultando na expressão material, ou, Lagrangiana do balanço de massa,

$$\rho_0(\mathbf{X}) = \rho_t(f_t(\mathbf{X})) \det \mathbf{F}. \quad (27)$$

A expressão espacial, ou, Euleriana do balanço de massa resulta na *equação de campo de continuidade*, dada por

$$\dot{\rho}_t(\mathbf{x}) + \rho_t(\mathbf{x}) \operatorname{div} \dot{\mathbf{x}} = 0, \quad (28)$$

onde  $(\dot{\quad})$  simboliza a derivada temporal.

## 2.2.2 Forças

Assume-se que os seguintes sistemas de forças atuam em uma região  $\mathcal{R}_t \in \mathcal{B}_t$ :

---

<sup>3</sup> Ver Teorema da Localização em GURTIN (1981).

- I. **Forças de contato:** Resultam da interação de partes adjacentes do corpo através da superfície que as separam, exercidas sobre o contorno de  $\mathcal{R}_t$ ,  $\partial\mathcal{R}_t$ . As forças de contato são medidas por unidade de área deformada e operam em uma superfície orientada pela normal unitária  $\mathbf{n}$  através do ponto  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ . Assim,

$$\mathbf{t}: \{\text{vetor unitário}\} \times \mathcal{B}_t \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (29)$$

onde o mapeamento  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x})$  é suave para cada vetor unitário  $\mathbf{n}$  e o mapeamento  $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{t}(\mathbf{n}, \mathbf{x})$  é contínuo para cada  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}_t$ . Define-se o campo de força de contato por unidade de superfície indeformada,  $\mathbf{t}_0$ , como

$$\mathbf{t}_0(\mathbf{X})dA = (\mathbf{t} \circ f)(\mathbf{X}, t)d\mathbf{a}.$$

- II. **Forças de corpo:** Exercidas sobre pontos interiores de um corpo pelo seu meio externo e medidas por unidade de massa  $\mathbf{X} \in \mathcal{B}_t$

$$\mathbf{b}: \mathcal{B}_t \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (30)$$

onde  $\mathbf{X}$  é contínuo. Define-se o campo de forças de corpo na configuração de referência,  $\mathbf{b}_0$ , mediante

$$\mathbf{b}_0(\mathbf{X}) = (\mathbf{b} \circ f)(\mathbf{X}, t). \quad (31)$$

A resultante das forças que atuam sobre a região  $\mathcal{R}_t$  é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{ext}(\mathcal{R}_t) &= \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0(\mathbf{X})\mathbf{b}_0(\mathbf{X}) dV + \int_{\partial\mathcal{R}_0} \mathbf{t}_0(\mathbf{X})dA \quad (\text{Descrição Lagrangeana}), \\ &= \int_{\mathcal{R}_t} \rho_t(\mathbf{x})\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dv + \int_{\partial\mathcal{R}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t)d\mathbf{a} \quad (\text{Descrição Euleriana}). \end{aligned} \quad (32)$$

### 2.2.3 Balanço da Quantidade de Movimento Linear

Aplicando a segunda lei de Newton no contexto dos meios contínuos, é estabelecida a proporcionalidade entre as forças aplicadas sobre um sistema de partículas e a variação na quantidade de movimento.

O movimento linear  $\mathbf{L}$  de uma região  $\mathcal{R}_t \in \mathcal{B}_t$  é dado pela soma da quantidade de movimento linear de cada uma das partículas que a constitui, ou seja,

$$\mathbf{L}(\mathcal{R}_t) = \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0(\mathbf{X}) \dot{\mathbf{X}} dV = \int_{\mathcal{R}_t} \rho_t(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} dv, \quad (33)$$

onde  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{X}} \circ f_t^{-1}$  é a velocidade espacial do centro de massa do corpo. Em (33) são apresentadas as formas Lagrangiana e Euleriana, respectivamente, da quantidade de movimento linear.

A lei de balanço de quantidade de movimento linear, ou, primeira *lei de movimento de Euler*, é expressa por

$$\mathbf{F}_{ext}(\mathcal{R}_t) = \dot{\mathbf{L}}(\mathcal{R}_t). \quad (34)$$

onde  $\mathbf{F}_{ext}(\mathcal{R}_t)$  é dado por (32) e  $\mathbf{L}(\mathcal{R}_t)$  é dado por (33).

Partindo dos resultados dados em (32), (33) e (34), obtém-se as expressões integrais, em suas formas Lagrangiana e Euleriana, da quantidade de movimento linear,

$$\int_{\mathcal{R}_0} \rho_0(\mathbf{X}) \ddot{\mathbf{X}} dV = \int_{\mathcal{R}_0} \rho_0(\mathbf{X}) \mathbf{b}_0(\mathbf{X}) dV + \int_{\partial\mathcal{R}_0} \mathbf{t}_0(\mathbf{X}) dA, \quad (35)$$

$$\int_{\mathcal{R}_t} \rho_t(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} d\mathbf{v} = \int_{\mathcal{R}_t} \rho_t(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{v} + \int_{\partial\mathcal{R}_t} \mathbf{t}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{a}, \quad (36)$$

onde  $\ddot{\mathbf{x}} = \ddot{\mathbf{X}} \circ f_t^{-1}$  é a aceleração espacial do centro de massa do corpo.

Aplicando o balanço de quantidade de movimento linear dado por (36) em uma sub-região tetraédrica de  $\mathcal{R}_t$ , obtém-se uma relação linear entre a força de contato  $\mathbf{t}$  e a normal  $\mathbf{n}$  à superfície sobre a qual esta força atua. Esta relação é dada por

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}, t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n}, \quad (37)$$

onde  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  é o *tensor tensão de Cauchy*.

Utilizando o resultado (37) e o Teorema da Divergência<sup>4</sup> na equação (36), obtém-se

$$\int_{\mathcal{R}_t} (\rho_t(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}} - \text{div } \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) - \rho_t(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t)) d\mathbf{v} = 0. \quad (38)$$

Sabendo que a integral em (38) é nula para toda região  $\mathcal{R}_t \in \mathcal{B}_t$ , segue do *Teorema da Localização*<sup>4</sup> a equação diferencial da quantidade de movimento linear, dada por

$$\text{div } \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) + \rho_t(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \rho_t(\mathbf{x}) \ddot{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{B}_t. \quad (39)$$

A equação (39) é mais conhecida como a *equação diferencial do movimento*.

A equação do movimento (39) está expressa na descrição espacial. Na descrição material, esta mesma equação é dada por

$$\text{div } \mathbf{S}(\mathbf{X}, t) + \rho_0(\mathbf{X}) \mathbf{b}_0(\mathbf{X}) = \rho_0(\mathbf{X}) \ddot{\mathbf{X}}, \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B}, \quad (40)$$

onde  $\mathbf{S}(\mathbf{X}, t)$  é denominado *primeiro tensor tensão de Piola-Kirchhoff*. Este é um tensor de segunda ordem, não necessariamente simétrico, e definido por

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}, t) = (\det \mathbf{F})(\mathbf{T} \circ f)(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}^{-T}. \quad (41)$$

---

<sup>4</sup> Ver GURTIN (1981).

## 2.2.4 Balanço de Movimento Angular

Considerando uma região arbitrária  $\mathcal{R}_t \in \mathcal{B}_t$ , define-se a quantidade de movimento angular de um meio contínuo, com relação a uma origem  $o$ , como a soma do movimento angular de cada uma das partículas que constitui a região  $\mathcal{R}_t$ , ou seja,

$$\mathbf{M}(\mathcal{R}_t, o) = \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{r} \wedge \dot{\mathbf{x}} \rho_t(\mathbf{x}) d\mathbf{v} = \int_{\mathcal{R}_0} f_t(\mathbf{R}) \wedge \dot{\mathbf{X}} \rho_0(\mathbf{X}) d\mathbf{V}, \quad (42)$$

onde  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - o$  e  $\mathbf{R} = \mathbf{X} - o$  são os vetores posição dos pontos  $\mathbf{x} \in \mathcal{R}_t$  e  $\mathbf{X} \in \mathcal{R}_0$ , respectivamente.

O momento de forças exteriores sobre a região  $\mathcal{R}_t$ , denominado  $\boldsymbol{\tau}_{ext}$ , é dado por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_{ext}(\mathcal{R}_t, o) &= \int_{\mathcal{R}_0} f_t(\mathbf{R}) \wedge \mathbf{b}_0(\mathbf{X}) \rho_0(\mathbf{X}) d\mathbf{V} + \int_{\partial\mathcal{R}_0} f_t(\mathbf{R}) \wedge \mathbf{t}_0(\mathbf{X}, \mathbf{N}) d\mathbf{A} \quad (\text{Descrição Lagrangiana}) \\ &= \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{r} \wedge \mathbf{b}_t(\mathbf{x}) \rho_t(\mathbf{x}) d\mathbf{v} + \int_{\partial\mathcal{R}_t} \mathbf{r} \wedge \mathbf{t}_t(\mathbf{x}, \mathbf{n}) d\mathbf{a} \quad (\text{Descrição Euleriana}). \end{aligned} \quad (43)$$

O balanço da quantidade de movimento angular é dado pela *segunda lei de movimento de Euler*, ou seja,

$$\dot{\mathbf{M}}(\mathcal{R}_t, o) = \boldsymbol{\tau}_{ext}(\mathcal{R}_t, o). \quad (44)$$

Introduzindo as expressões (42) e (43) na expressão (44), obtém-se

$$\int_{\mathcal{R}_0} f_t(\mathbf{R}) \wedge \dot{\mathbf{X}} \rho_0(\mathbf{X}) d\mathbf{V} - \int_{\mathcal{R}_0} f_t(\mathbf{R}) \wedge \mathbf{b}_0(\mathbf{X}) \rho_0(\mathbf{X}) d\mathbf{V} = \int_{\partial\mathcal{R}_0} f_t(\mathbf{R}) \wedge \mathbf{t}_0(\mathbf{X}, \mathbf{N}) d\mathbf{A}, \quad (45)$$

$$\int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{r} \wedge \rho_t(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{x}} d\mathbf{v} - \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{r} \wedge \mathbf{b}_t(\mathbf{x}) \rho_t(\mathbf{x}) d\mathbf{v} = \int_{\partial\mathcal{R}_t} \mathbf{r} \wedge \mathbf{t}_t(\mathbf{x}, \mathbf{n}) d\mathbf{a}. \quad (46)$$

Utilizando o Teorema da Divergência e a equação (41), obtemos a equação diferencial do balanço de quantidade de movimento angular<sup>5</sup> na forma local, a qual é dada por

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{T}^T(\mathbf{x}, t). \quad (47)$$

Esta relação é obtida da forma Euleriana diferencial da lei de balanço de movimento angular e mostra a simetria do tensor tensão de Cauchy. A expressão Lagrangiana da relação (47) é dada por

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}, t) \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \mathbf{S}^T(\mathbf{X}, t). \quad (48)$$

## 2.2.5 Balanço de Energia

Considera-se uma região  $\mathcal{R}_t \in \mathcal{B}_t$ . Define-se a *potência mecânica*  $P_{ext}(\mathcal{R}_t)$  das forças atuantes nas partículas que ocupam a região  $\mathcal{R}_t$  como

$$P_{ext}(\mathcal{R}_t) = \int_{\mathcal{R}_t} \rho_t(\mathbf{x}) \mathbf{b}_t(\mathbf{x}) \cdot \dot{\mathbf{x}} d\mathbf{v} + \int_{\partial\mathcal{R}_t} \mathbf{t}_t(\mathbf{x}, \mathbf{n}) \cdot \dot{\mathbf{x}} d\mathbf{a}. \quad (49)$$

Na seqüência, define-se a *energia cinética*,  $K(\mathcal{R}_t)$ , e o *potencial de tensão*,  $\dot{U}(\mathcal{R}_t)$ , de um corpo que ocupa a região  $\mathcal{R}_t$  como

$$K(\mathcal{R}_t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}_t} \rho_t(\mathbf{x}) (\dot{\mathbf{x}})^2 d\mathbf{v}, \quad (50)$$

$$\dot{U}(\mathcal{R}_t) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{R}_t} \mathbf{T}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla_s \mathbf{u} d\mathbf{v}, \quad (51)$$

onde  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, t)$  e  $\nabla_s \mathbf{u}$  são definidos por (37) e (16), respectivamente.

---

<sup>5</sup> Ver detalhes em GURTIN (1981).



Finalmente, a lei de balanço da energia escreve-se na forma

$$P_{ext}(\mathcal{R}_t) = \dot{K}(\mathcal{R}_t) + \dot{U}(\mathcal{R}_t). \quad (52)$$

## 2.3 Modelos Constitutivos

Os corpos respondem de forma diferente sob estímulos iguais devido às constituições diferentes destes corpos, as quais são representadas matematicamente por relações constitutivas. Uma relação constitutiva é, aqui, uma relação entre a tensão aplicada e a deformação resultante.

### 2.3.1 Material Elástico-Linear Anisotrópico

Um corpo contínuo é *elástico-linear* se as componentes de tensão são funções lineares das componentes de deformação. Neste caso, o corpo satisfaz a *lei de Hooke generalizada*, dada por

$$\mathbf{T} = \mathbb{C}\mathbf{E}, \quad (53)$$

onde  $\mathbb{C}$  é um tensor de quarta ordem chamado *tensor de elasticidade* e, aqui,  $\mathbf{E}$  é o tensor de deformação infinitesimal, obtido de (15) ao se desprezar os termos de ordem superior. Assim,  $\mathbf{E} = \nabla_s \mathbf{u}$ .

Um corpo elástico é denominado anisotrópico se as propriedades elásticas são diferentes em diferentes direções (LEKHNITSKII, 1963). Se dois eixos de simetria de um material coincidem

com a tangente e a normal a círculos concêntricos em um dado plano e se o terceiro eixo de simetria coincide com a direção perpendicular ao plano, então o material é chamado *cilindricamente anisotrópico*.

Os tensores tensão e deformação infinitesimal podem ser escritos, convenientemente, na forma vetorial

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{ \sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{\theta z}, \sigma_{rz}, \sigma_{r\theta} \}, \quad (54)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^T = \{ \epsilon_{rr}, \epsilon_{\theta\theta}, \epsilon_{zz}, \epsilon_{\theta z}, \epsilon_{rz}, \epsilon_{r\theta} \}. \quad (55)$$

A lei de Hooke (53) passa a ser reescrita na forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}, \quad (56)$$

onde  $\mathbf{C}$  é uma matriz simétrica 6x6 dada por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ & & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ & & & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ & Sim. & & & c_{55} & c_{56} \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}, \quad (57)$$

sendo  $c_{\alpha\beta}$  as constantes elásticas de  $\mathbb{C}$  no sistema de coordenadas cilíndricas ortonormais. Uma condição importante nas constantes elásticas é que a energia de deformação tem que ser positiva (ver anexo A.3). Esta condição implica que a matriz das constantes elásticas tem que ser positiva definida (TING, 1996).

A expressão (57) descreve o caso mais geral de materiais anisotrópicos. Estes materiais são também chamados *materiais triclinicos*, os quais possuem 21 constantes elásticas independentes.

Os materiais comumente utilizados na engenharia exibem algum tipo de simetria, ou, simplificação na sua microestrutura, o que permite a diminuição do número de constantes independentes da equação (57).

Neste trabalho, será dada especial ênfase aos materiais com 3 planos de simetria, denominados *ortotrópicos*. Para estes materiais, as 21 constantes elásticas independentes de (57) reduzem-se a 9; assim

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & \text{Sim.} & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}. \quad (58)$$

As constantes elásticas  $c_{\alpha\beta}$  da expressão (58) podem ser escritas em função das constantes de engenharia  $E_{ii}$ ,  $G_{jj}$  e  $\nu_{ij}$  na forma

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{E_{11}}{D_0} \left( 1 - \nu_{23}^2 \frac{E_{33}}{E_{22}} \right), & c_{12} &= \frac{E_{22}}{D_0} \left( \nu_{12} + \nu_{23} \nu_{13} \frac{E_{33}}{E_{22}} \right), \\ c_{13} &= \frac{E_{33}}{D_0} (\nu_{12} \nu_{23} + \nu_{13}), & c_{22} &= \frac{E_{22}}{D_0} \left( 1 - \nu_{13}^2 \frac{E_{33}}{E_{11}} \right), \\ c_{23} &= \frac{E_{33}}{D_0} \left( \nu_{23} + \nu_{12} \nu_{13} \frac{E_{22}}{E_{11}} \right), & c_{33} &= \frac{E_{33}}{D_0} \left( 1 - \nu_{12}^2 \frac{E_{22}}{E_{11}} \right), \\ c_{44} &= G_{23}, & c_{55} &= G_{13}, & c_{66} &= G_{12}, \end{aligned} \quad (59)$$

onde  $D_0/(E_{11} E_{22} E_{33})$  é o determinante da sub-matriz 3x3 superior esquerda da matriz  $\mathbf{C}$  dada por (58) e

$$D_0 = 1 - \nu_{23}^2 \frac{E_{33}}{E_{22}} - \nu_{12}^2 \frac{E_{22}}{E_{11}} - 2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{13} \frac{E_{33}}{E_{11}} - \nu_{13}^2 \frac{E_{33}}{E_{11}}. \quad (60)$$

Segundo TING (1996), os materiais ortotrópicos possuem outros tipos de simetrias, as quais estão apresentadas na Tab. 1.

Nome do Material	Forma da Matriz	Constantes Independentes
<p><i>Materiais Tetragonais</i></p>	$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & Sim. & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & \overline{c_{66}} \end{bmatrix}$	6
<p><i>Materiais Transversalmente Isotrópicos</i></p>	$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{44} & 0 & 0 \\ & Sim. & & & c_{44} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}$	5
<p><i>Materiais Cúbicos</i></p>	$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & c_{66} & 0 & 0 \\ & Sim. & & & c_{66} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix}$	3
<p><i>Materiais Isotrópicos</i></p>	$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \overline{c_{66}} & 0 & 0 \\ & Sim. & & & \overline{c_{66}} & 0 \\ & & & & & \overline{c_{66}} \end{bmatrix}$	2

Tab. 1: Classificação dos materiais ortotrópicos, TING (1996).

onde  $\overline{c_{66}} = \frac{1}{2} (c_{11} - c_{12})$ .

### 3 PROGRAMAÇÃO NÃO-LINEAR

Utilizam-se os métodos de programação não-linear para encontrar a solução numérica dos problemas de minimização com restrição tratados no Cap. 4. Assim, neste capítulo, realiza-se uma introdução às técnicas de otimização.

A otimização é uma importante ferramenta de decisão utilizada para identificar o valor ótimo (mínimo, ou, máximo) de uma *função objetivo*, a qual é uma quantidade de medida do comportamento do sistema sob estudo. A função objetivo depende de certas características do sistema, denominadas *variáveis de projeto*. A finalidade da otimização é atingida quando se encontram valores para as variáveis que otimizem a função objetivo. Frequentemente, estas variáveis têm que respeitar alguns limites denominados *restrições*. A região limitada por estas restrições é chamada *região admissível*. Em particular, um problema de otimização consiste em

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} (\text{ou } \max) f_{obj}(\mathbf{x}) \quad \text{sujeito a} \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) = 0, & i = 1, \dots, p, \\ h_j(\mathbf{x}) \geq 0, & j = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (61)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor das variáveis de projeto,  $f_{obj}$  é a função objetivo,  $g_i, i = 1, 2, \dots, p$ , são restrições de igualdade e  $h_j, j = 1, 2, \dots, m$ , são restrições de desigualdade.

Uma interpretação geométrica dos conceitos expostos anteriormente é dada na Fig. 7 na forma de curvas de nível. No gráfico, mostra-se o mínimo  $x^*$  de uma função objetivo  $f_{obj}$  sujeita a duas restrições de desigualdade  $h_1$  e  $h_2$ . Na figura, também é ilustrada a região admissível, a qual consiste de um conjunto de variáveis de projeto que satisfazem as restrições.

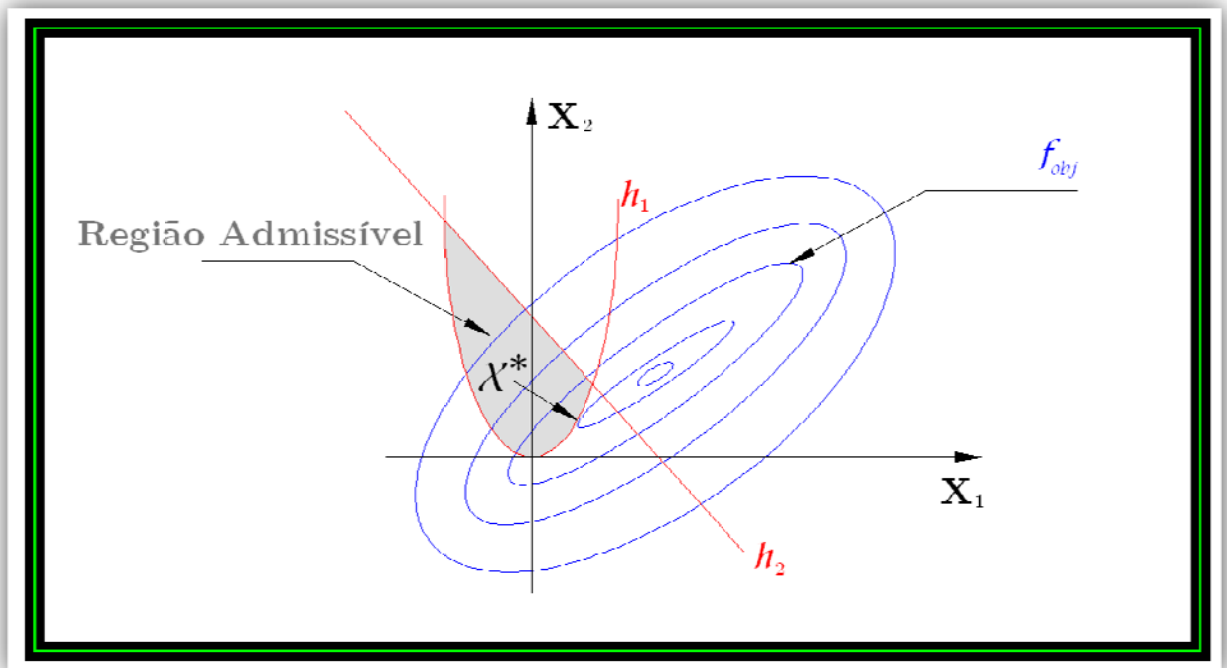


Fig. 7. Interpretação geométrica de um problema de minimização no  $\mathbb{R}^2$  utilizando curvas de nível.

Em otimização tem-se um *modelo* quando, para um dado problema, consegue-se identificar a função objetivo, as variáveis e as restrições. Depois de formular o modelo, utiliza-se um *algoritmo de otimização* para encontrar a sua solução numérica.

Uma classificação importante dos problemas de minimização está relacionada à existência, ou, não de restrições: No primeiro caso, tem-se a *minimização sem restrições* e no segundo caso, a *minimização com restrições*.

### 3.1 Minimização sem Restrições

Deseja-se minimizar uma função objetivo  $f_{obj}$ , a qual depende de variáveis de projeto que não possuem limitações nos valores que possam adotar. Então, um problema de minimização sem restrições resume-se a

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_{obj}(\mathbf{x}), \quad (62)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , é um vetor  $n$ -dimensional contendo as variáveis de projeto.

Nesta seção, são discutidos inicialmente algumas propriedades e conceitos de mínimo. Em seguida, são descritos os métodos e algoritmos para a busca numérica do mínimo de uma função objetivo.

#### 3.1.1 Propriedades de Mínimo

Geralmente, em otimização, encontram-se dois tipos de mínimo: o global e o local. Um ponto  $\mathbf{x}^*$  é um *mínimo local* se existe uma vizinhança  $\mathcal{N}$  de  $\mathbf{x}^*$ , tal que  $f_{obj}(\mathbf{x}^*) \leq f_{obj}(\mathbf{x})$  para qualquer  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}$ . O mínimo local é *estrito* se  $f_{obj}(\mathbf{x}^*) < f_{obj}(\mathbf{x})$  para qualquer  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}$ .

O ponto  $\mathbf{x}^*$  é um *mínimo global* se  $f_{obj}(\mathbf{x}^*) \leq f_{obj}(\mathbf{x})$  para qualquer  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Utilizando o teorema de Taylor<sup>6</sup>, definem-se abaixo as condições para a existência de mínimo.

*Condição necessária de primeira ordem:* se  $\mathbf{x}^*$  é um mínimo local e  $f_{obj}$  é uma função continuamente diferenciável em uma vizinhança de  $\mathbf{x}^*$ , então  $\nabla f_{obj}(\mathbf{x}^*) = 0$ .

---

<sup>6</sup> Ver LUENBERGER (1989).

*Condição necessária de segunda ordem:* se  $\mathbf{x}^*$  é um mínimo local de  $f_{obj}$  e a matriz Hessiana  $\nabla^2 f_{obj}$ , (FOX 1971), a qual contém as segundas derivadas parciais com relação aos graus de liberdade, é contínua em um conjunto aberto na vizinhança de  $\mathbf{x}^*$ , então  $\nabla f_{obj}(\mathbf{x}^*) = 0$  e  $\nabla^2 f_{obj}(\mathbf{x}^*)$  é positivo semi-definido (ver Anexo A.3).

*Condição Suficiente de segunda ordem:* suponha que  $\nabla^2 f_{obj}$  é contínuo em um conjunto aberto na vizinhança de  $\mathbf{x}^*$  e que  $\nabla^2 f_{obj}(\mathbf{x}^*)$  é positivo definido (ver anexo A.3). Então  $\mathbf{x}^*$  é um mínimo local estrito de  $f_{obj}$ .

### 3.1.2 Propriedades dos Algoritmos de Minimização.

Nesta seção serão mostradas algumas propriedades dos algoritmos clássicos de minimização. Depois, será feito um breve resumo do método de Newton, tanto para a busca da direção ótima como na busca unidirecional.

Em geral, os algoritmos de minimização sem restrições precisam de um ponto inicial  $\mathbf{x}_0$ , como parâmetro de entrada. Iniciando em  $\mathbf{x}_0$ , um algoritmo de minimização  $\mathbf{A}$  gera uma seqüência de iterações  $\{\mathbf{x}_k\}$  definida por

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_k) \tag{63}$$

que finaliza quando a solução encontrada possui a aproximação desejada. Esta seqüência é gerada sabendo-se que, para determinar o ponto  $\mathbf{x}_{k+1}$ , é utilizado o valor da função objetivo,  $f_{obj}$ , avaliada no ponto  $\mathbf{x}_k$ . Frequentemente, são também utilizadas informações das iterações anteriores,  $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ .



Na maior parte dos algoritmos clássicos são identificadas duas estratégias fundamentais para se mover do ponto  $\mathbf{x}_k$  para o ponto  $\mathbf{x}_{k+1}$ . Estas estratégias são a *busca da direção ótima* e a *busca unidirecional*.

Tais procedimentos estão baseados na idéia básica de considerar o movimento desde qualquer ponto em uma dada direção  $\mathbf{S}$ . Ao longo desta direção, é possível considerar a função objetivo como uma função de uma variável escalar  $\alpha$ . Assim, em um ponto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , diz-se que  $\mathbf{S}$  é uma *direção factível* se existe um  $\bar{\alpha} > 0$ , tal que  $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{S} \in \mathbb{R}^n$  para todo  $\alpha \in (0, \bar{\alpha})$ . Com isso, depois de escolhida a direção  $\mathbf{S}$  e saindo de um ponto  $\mathbf{x}_k$ , a dificuldade está em resolver o problema de minimização para encontrar o passo  $\alpha$ , tal que

$$\min_{\alpha > 0} f_{obj}(\mathbf{x}_k + \alpha\mathbf{S}). \quad (64)$$

Com isto, os algoritmos que permitem encontrar a melhor direção  $\mathbf{S}$  são os denominados algoritmos de *busca da direção ótima* e os algoritmos que determinam o passo ideal,  $\alpha$ , são denominados métodos de *busca unidirecional*.

### 3.1.2.1 Método de Newton (Busca da Direção Ótima).

A idéia do método de Newton é aproximar  $f_{obj}$  por uma função quadrática, a qual pode ser minimizada de forma exata, na vizinhança do ponto de mínimo de  $f_{obj}$ . Assim, ao redor de um ponto  $\mathbf{x}_k$ , pode-se aproximar  $f_{obj}$  por uma expansão truncada em série de Taylor

$$f_{obj}(\mathbf{x}) \cong q_{obj}(\mathbf{x}) \triangleq f_{obj}(\mathbf{x}_k) + \left( \nabla f_{obj}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) \right) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)^T \mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k), \quad (65)$$

onde  $\mathbf{H}(\mathbf{x}_k) = \nabla^2 f_{obj}(\mathbf{x}_k)$  é a *matriz Hessiana* de  $f_{obj}$  e contém as segundas derivadas parciais da função objetivo, avaliadas no ponto  $\mathbf{x}_k$ . Assumindo que o mínimo de  $q_{obj}$  é uma boa aproximação para o mínimo de  $f_{obj}$ , impomos a condição necessária de primeira ordem  $\nabla q_{obj}(\mathbf{x}) = 0$  (ver seção 3.1.1), obtendo

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - (\mathbf{H}(\mathbf{x}_k))^{-1} (\nabla f_{obj}(\mathbf{x}_k)) . \quad (66)$$

A expressão (66) é a forma pura do *método de Newton* e fornece uma estimativa melhor do ponto de mínimo.

Segundo a condição suficiente de segunda ordem para ponto de mínimo, Seção 3.1.1, supõe-se que no ponto de mínimo local,  $\mathbf{x}^*$ , a matriz Hessiana  $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*)$  é positiva definida. Sendo este o caso, afirma-se que o método é bem definido perto da solução.

Uma variação do método de Newton consiste em construir uma seqüência de aproximações utilizando a expressão

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k - \alpha_k (\mathbf{H}(\mathbf{x}_k))^{-1} (\nabla f_{obj}(\mathbf{x}_k))^T , \quad (67)$$

onde  $\alpha_k$ , como foi visto em (64), é um valor que minimiza  $\nabla f_{obj}(\mathbf{x}_{k+1})$ . Em (67) é fácil ver que a equação possui a forma  $\mathbf{x}_k + \alpha \mathbf{S}$ , onde

$$\mathbf{S} = (\mathbf{H}(\mathbf{x}_k))^{-1} (\nabla f_{obj}(\mathbf{x}_k))^T . \quad (68)$$

### 3.1.2.2 Método de Newton-Raphson (Busca Unidireccional)

Seja

$$f_s(\alpha) \triangleq f_{obj}(\mathbf{x} + \alpha\mathbf{S}), \quad (69)$$

para um dado ponto  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e uma direção fixa  $\mathbf{S}$ .

Supondo-se que para um dado  $\alpha_k$  é possível avaliar  $f_s(\alpha_k)$ ,  $f'_s(\alpha_k)$ ,  $f''_s(\alpha_k)$ , então é possível construir uma função quadrática  $f_Q$  que aproxima  $f_s$  da forma

$$f_s(\alpha) \cong f_Q(\alpha) = f_s(\alpha_k) + f'_s(\alpha - \alpha_k) + \frac{1}{2}f''_s(\alpha - \alpha_k)^2. \quad (70)$$

Conforme ilustrado na Fig. 8, deseja-se encontrar uma estimativa  $\alpha_{k+1}$  do ponto de mínimo da função  $f_s$ . Assumindo que esta estimativa é o ponto de mínimo da função  $f_Q$ , segue que

$$0 = f'_Q(\alpha_{k+1}) = f'_s(\alpha_k) + f''_s(\alpha_k)(\alpha_{k+1} - \alpha_k). \quad (71)$$

portanto,

$$\alpha_{k+1} = \alpha_k - \frac{f'_s(\alpha_k)}{f''_s(\alpha_k)}. \quad (72)$$

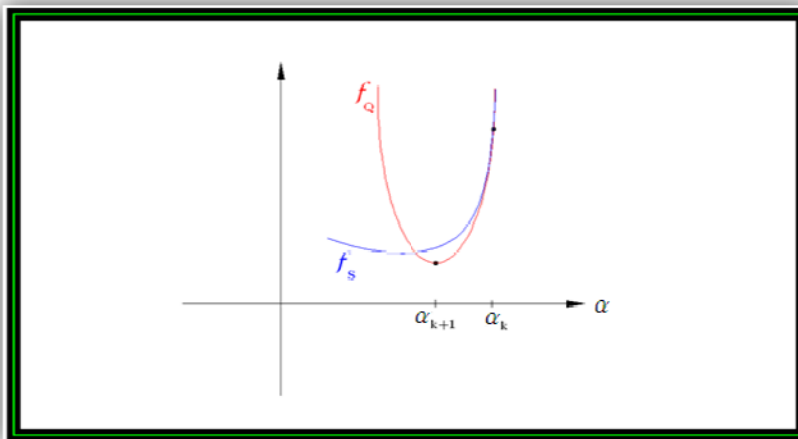


Fig. 8. Aproximação pelo método de Newton (busca Unidireccional).

### 3.2 Minimização com Restrições

Este tipo de problema consiste em minimizar uma função sujeita a restrições nas suas variáveis. Uma formulação geral deste problema é dada por

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_{obj}(\mathbf{x}) \quad \text{sujeito a} \begin{cases} g_i(\mathbf{x}) = 0, & i = 1, \dots, p, \\ h_j(\mathbf{x}) \geq 0, & j = 1, \dots, m, \end{cases} \quad (73)$$

onde  $f_{obj}$  e as funções  $g_i, h_j$  são suaves de valores reais. Lembramos do exposto acima que  $f_{obj}$  é a função objetivo,  $g_i$  são restrições de igualdade e  $h_j$  são restrições de desigualdade. Uma restrição de desigualdade  $h_j$  é ativa se o ponto de mínimo encontra-se sobre  $h_j = 0$ . Define-se também uma *região admissível*  $\Omega$  como o conjunto de pontos  $\mathbf{x}$  que satisfazem as restrições, ou seja,

$$\Omega \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) = 0, i = 1, \dots, p, h_j(\mathbf{x}) \geq 0, j = 1, \dots, m\}. \quad (74)$$

Com isto, pode-se reescrever a equação (73) na forma compacta

$$\min_{\mathbf{x} \in \Omega} f_{obj}(\mathbf{x}). \quad (75)$$

Existem duas formas de abordar o problema (75). A primeira delas consiste em realizar uma reformulação do problema descrito em (75), tal que as restrições fiquem implícitas dentro da função objetivo. Sendo assim, o problema é tratado como um problema sem restrições semelhante ao encontrado na expressão (62). Estes métodos são chamados *métodos indiretos*. A segunda forma de solucionar o problema (75) é utilizando os denominados *métodos diretos*, os quais utilizam às restrições como superfícies limitantes, ou, subespaços. Os métodos diretos são limitados a problemas de pouca complexidade.

Neste trabalho, será dada ênfase aos métodos indiretos, especialmente ao método das penalidades interiores.

### 3.2.1 Conceitos Básicos

Em problemas sem restrições, similares ao descrito em (62), o ponto de mínimo  $\mathbf{x}^*$  deve satisfazer

$$\nabla f_{obj}(\mathbf{x}^*) = 0,$$

e o Hessiano associado,  $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*) = \nabla^2 f_{obj}$ , deve ser positivo definido. (76)

Para problemas com restrições, as condições anteriores são modificadas. Com isto, apresentam-se as condições de mínimo para um problema com restrições, através de exemplos geométricos, conforme exposto em FOX (1971).

No primeiro exemplo geométrico, o ponto de mínimo do problema (76) está no interior da região admissível e é o ponto de mínimo da função objetivo, conforme ilustrado na Fig. 9 para um problema bi-dimensional ( $n=2$ ).

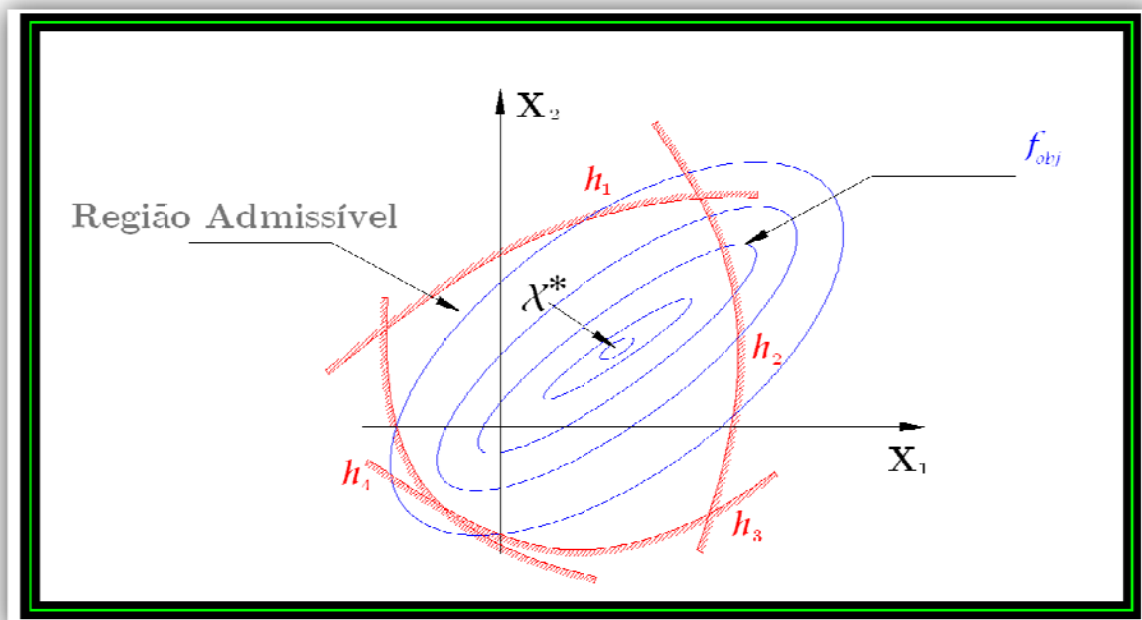


Fig. 9: Curvas de nível para problema bi-dimensional,  $n=2$ , com restrições.

Para o exemplo mostrado na Fig. 10, o mínimo ocorre em um ponto  $\mathbf{x}_p^*$  onde  $\nabla f_{obj} \neq 0$  e  $h_j(\mathbf{x}_p^*) = 0$ . Então, se  $h_j$  e  $f_{obj}$  são diferenciáveis, o ponto de mínimo satisfaz a equação

$$\nabla f_{obj}(\mathbf{x}_p^*) = \lambda \nabla h_j(\mathbf{x}_p^*), \quad \lambda < 0, \quad (77)$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

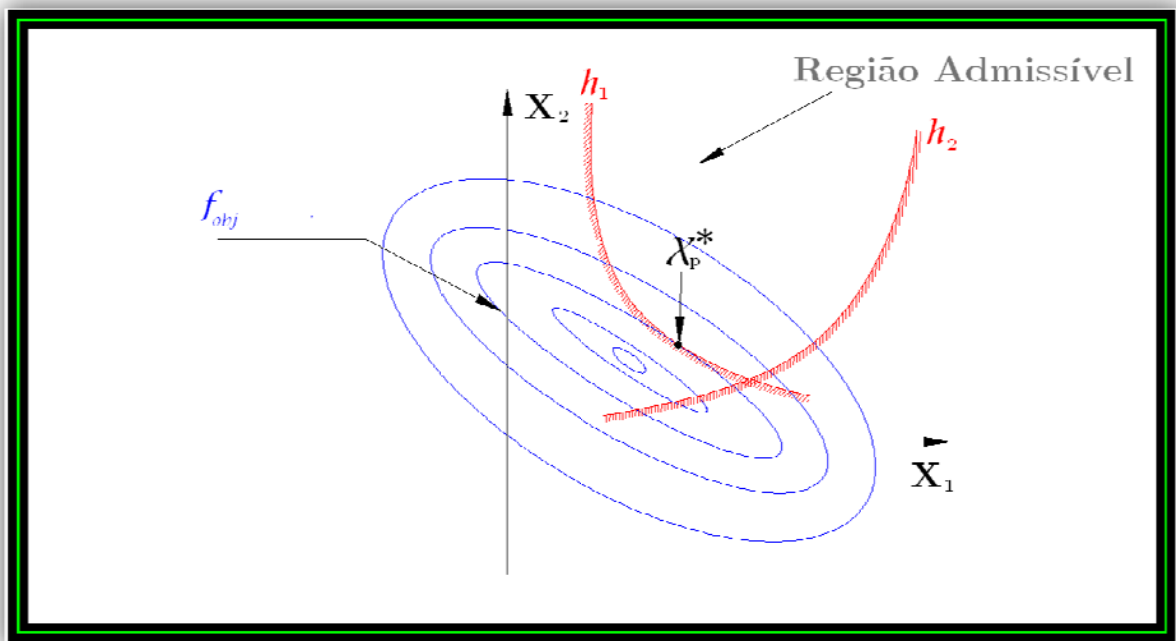


Fig. 10. Exemplo de problema com uma restrição ativa.

Finalmente, na Fig. 11 ilustra-se a possibilidade do ponto de mínimo local estar na intersecção de duas restrições. A relação que caracteriza o ponto de mínimo para este caso é denominada *condição de Kuhn-Tucker* (ver LUENBERGER, 1989). Em termos gerais, esta condição consiste em encontrar um ponto onde o gradiente da função objetivo esteja contido dentro de um cone, definido pelos versores normais às restrições ativas no ponto em questão.

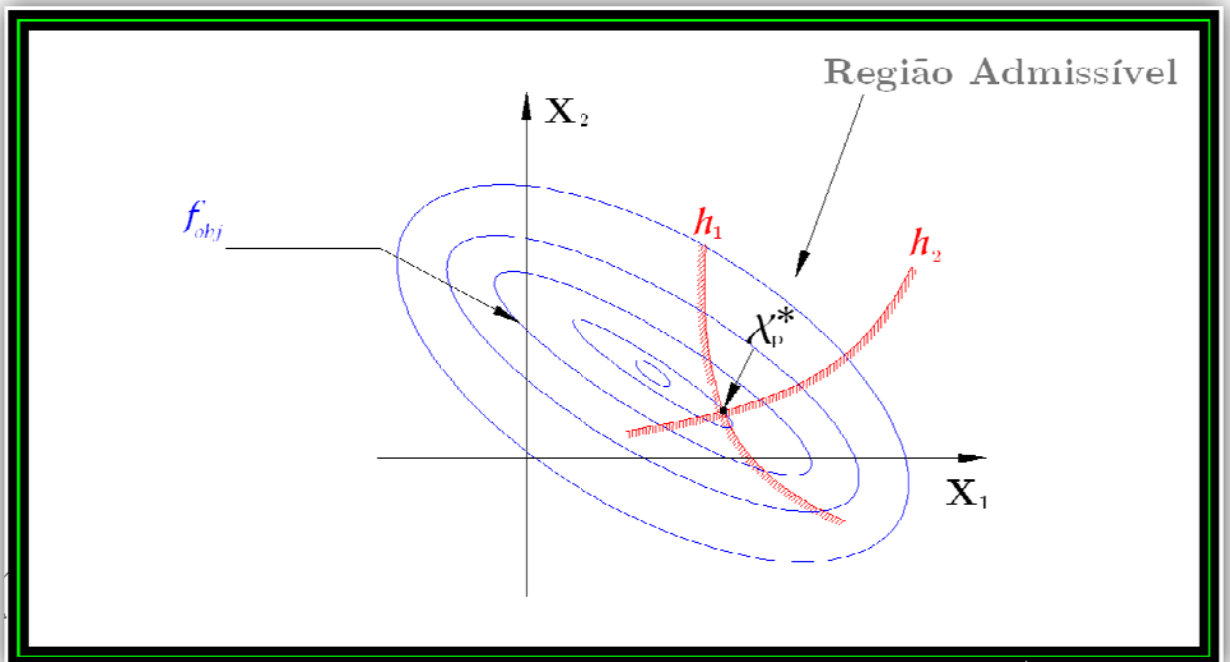


Fig. 11. Exemplo de problema com duas restrições ativas.

### 3.2.2 Introdução ao Método das Penalidades

O método das penalidades é um método indireto, ou seja, o problema de otimização com restrições é aproximado por um problema sem restrições. A aproximação é feita adicionando um termo à função objetivo que penaliza a violação da restrição. Associado a este método, existe um parâmetro  $\delta$  que determina a severidade da penalização e, conseqüentemente, o grau de aproximação do problema sem restrições com relação ao problema com restrição original.

Para realizar uma exposição do método das penalidades, é considerado inicialmente o problema com restrições (75).

A idéia do método das penalidades consiste em substituir o problema (75) por um problema sem restrições da forma

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_{obj}(\mathbf{x}) + \delta \mathcal{P}(\mathbf{x}), \quad (78)$$

onde  $\delta$  é uma constante positiva e  $\mathcal{P}$  é uma função contínua em  $\mathbb{R}^n$  que satisfaz  $\mathcal{P}(\mathbf{x}) \geq 0$  para todo  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ .

Para resolver o problema (75) com o método das penalidades, gera-se uma seqüência  $\{\delta_k\}, k = 1, 2, \dots$ , a qual tende ao infinito. Assim, define-se a função

$$f_{\mathcal{P}}(\delta, \mathbf{x}) = f_{obj}(\mathbf{x}) + \delta \mathcal{P}(\mathbf{x}). \quad (79)$$

Para cada  $k$  tem-se uma solução  $\mathbf{x}_k$  do problema

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f_{\mathcal{P}}(\delta_k, \mathbf{x}). \quad (80)$$

É possível provar que existe uma seqüência de soluções  $\{\mathbf{x}_k\}$  gerada pelo método das penalidades, tal que qualquer ponto limite da seqüência seja uma solução de (75).

O método das penalidades é classificado em *penalidades interiores* e *penalidades exteriores*, dependendo se a solução é procurada dentro ou fora da região admissível, respectivamente. As seguintes subseções realizam uma breve exposição destes métodos.

### 3.2.3 Penalidades Interiores

No método das penalidades interiores, o mínimo no problema (75) é procurado dentro da região admissível. Para uma seqüência decrescente dos valores dos parâmetros de penalidade  $\{\delta_k\}, k = 1, 2, \dots$ , o ponto de mínimo  $\mathbf{x}_k^*$  (79) é forçado para o ótimo restrito desde o interior.



Para este método, aumenta-se a função objetivo com um fator penalidade vezes uma função penalidade, a qual tem implícitas às restrições. A função penalidade tende ao infinito à medida que se aproxima de uma restrição. As funções penalidade  $\mathcal{P}$  comumente utilizadas são

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) = - \sum_{j=1}^m \frac{1}{h_j(\mathbf{x})} \quad (81)$$

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) = - \sum_{j=1}^m \log(-h_j(\mathbf{x})) \quad (82)$$

onde  $h_j \leq 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , são restrições de desigualdade sobre a função objetivo e  $\mathcal{P}$  é a função penalidade que aparece em (79).

Observe de (79) juntamente com (81) que para  $\delta > 0$ , o efeito ocasionado pelo método é adicionar um valor positivo a  $f_{obj}(\mathbf{x})$ , pois nos pontos interiores, todos os termos dentro dos somatórios em (81) e (82) são negativos.

**Critério de convergência:** como  $f_{\mathcal{P}}$  é minimizado para valores decrescentes de  $\delta$ , espera-se que a seqüência de mínimos  $\mathbf{x}_i^*(\delta_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , convirja para a solução do problema (75). Um critério simples de parada é dado por

$$\Delta F \equiv \frac{|f_{\mathcal{P}}(\delta_{i-1}, \mathbf{x}_{i-1}^*) - f_{\mathcal{P}}(\delta_i, \mathbf{x}_i^*)|}{|f_{\mathcal{P}}(\delta_i, \mathbf{x}_i^*)|} \quad (83)$$

O processo finaliza quando o valor  $\Delta F$  calculado com a expressão (83) é inferior a um certo valor (o qual depende do precisão desejada).

O algoritmo básico do método das penalidades interiores<sup>7</sup> para encontrar uma solução de um problema com restrições de desigualdade consiste dos passos apresentados a seguir.

- i. Define-se um valor inicial para  $\mathbf{x}$ , tal que  $h_j(\mathbf{x}) < 0$ . Escolhe-se um valor *moderado*<sup>8</sup> para  $\delta$ .
- ii. Encontra-se um ponto  $\mathbf{x}^*$  que minimize a função  $f_{\mathcal{P}}(\delta_k, \mathbf{x})$ , a qual é dada por (80) juntamente com (81), ou, (82). Neste trabalho, utilizamos (81).
- iii. Verifica-se a convergência de  $\mathbf{x}^*$  para o ponto de ótimo do problema (75).
- iv. Se o critério de convergência não é satisfeito, diminui-se  $\delta$  para um valor  $c\delta$  onde  $c < 1$ .
- v. Substitui-se o ponto inicial pelo  $\mathbf{x}^*$  obtido no passo ii, inicializa-se o algoritmo de minimização, e repetem-se os passos ii a v.

### 3.2.4 Penalidades Exteriores

No método das penalidades exteriores, o mínimo do problema (75) é procurado fora da região admissível. Uma função penalidade para este método é

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m \langle h_j(\mathbf{x}) \rangle^z, \quad (84)$$

onde  $\mathcal{P}$  é a função penalidade descrita em (79),  $z \geq 0$  é uma constante e o operador  $\langle \cdot \rangle$  é definido por

---

<sup>7</sup> Ver FOX (1971).

<sup>8</sup> O valor inicial de  $\delta$  não é considerado moderado se, ao ser utilizado juntamente com  $\mathcal{P}$ , muda-se arbitrariamente  $f_{obj}$ , dificultando a convergência do problema da equação (80).

$$\langle h \rangle = \begin{cases} h, & h \geq 0, \\ 0, & h < 0. \end{cases}$$

O algoritmo básico do método das penalidades exteriores<sup>9</sup> para encontrar uma solução de um problema com restrições de desigualdade consiste dos passos apresentados a seguir.

- i. Define-se um valor inicial para  $\mathbf{x}$ . Adota-se um valor inicial *moderado* para  $\delta$ .
- ii. Encontra-se um valor  $\mathbf{x}^*$  que minimiza a função

$$f_{\mathcal{P}}(\delta, \mathbf{x}) = f_{obj}(\mathbf{x}) + \delta \sum_{j=1}^m \langle h_j(\mathbf{x}) \rangle^2. \quad (85)$$

- iii. Analisam-se as restrições para determinar se o ponto  $\mathbf{x}^*$  está no domínio admissível.
- iv. Se o resultado do passo iii é verdadeiro, finaliza-se; senão, escolhe-se um  $\delta' > \delta$  e, iniciando do ponto  $\mathbf{x}^*$  calculado anteriormente, retorna-se ao passo ii, minimizando  $f_{\mathcal{P}}(\delta', \mathbf{x})$ .

---

<sup>9</sup> Ver FOX (1971).

## 4 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

Pretende-se minimizar o potencial total de energia de um corpo elástico-linear sujeito à restrição de injetividade (4). FOSDICK e ROYER-CARFAGNI (2001) provam que existe solução para este problema de minimização no contexto da teoria plana.

### 4.1 O Problema do Anel sem Restrição

O problema do anel tratado neste trabalho consiste em achar a solução de equilíbrio de um disco circular de raio  $r_e$  com um furo central de raio  $r_i$ , o qual está sujeito a uma compressão radial por um carregamento uniformemente distribuído  $q$ , dado por unidade de comprimento (ver Fig. 12). O anel é homogêneo e possui anisotropia cilíndrica. O problema é bidimensional, de modo que, em um sistema de coordenadas cilíndricas, os tensores tensão e deformação infinitesimal são dados por

$$\mathbf{T} = \sigma_{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \sigma_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \sigma_{r\theta} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r), \quad (86)$$

$$\mathbf{E} = \epsilon_{rr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \epsilon_{\theta\theta} \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_\theta + \epsilon_{r\theta} (\mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \otimes \mathbf{e}_r), \quad (87)$$

onde  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta\}$  é uma base ortonormal para o sistema de coordenadas adotado. Estes tensores estão relacionados entre si pela lei de Hooke generalizada. Assim,

$$\mathbf{T} = \mathbb{C}\mathbf{E}, \quad (88)$$

onde  $\mathbb{C}$  é o tensor de elasticidade, o qual é simétrico e positivo definido (ver anexo A.3). Os tensores tensão e deformação infinitesimal podem ser escritos, convenientemente, na forma vetorial

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{r\theta}\}, \quad (89)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}^T = \{\epsilon_{rr}, \epsilon_{\theta\theta}, 2\epsilon_{r\theta}\}. \quad (90)$$

A lei de Hooke (88) pode então ser reescrita na forma

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon}, \quad (91)$$

onde  $\mathbf{C}$  é uma matriz simétrica 3x3 dada por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix}, \quad (92)$$

sendo  $c_{\alpha\beta}$  as constantes elásticas de  $\mathbf{C}$  no sistema de coordenadas cilíndricas. Devido à restrição da energia de deformação ser positiva definida, tem-se

$$c_{11} > 0, \quad c_{22} > 0, \quad c_{66} > 0, \quad c_{11} c_{22} > c_{12}^2. \quad (93)$$

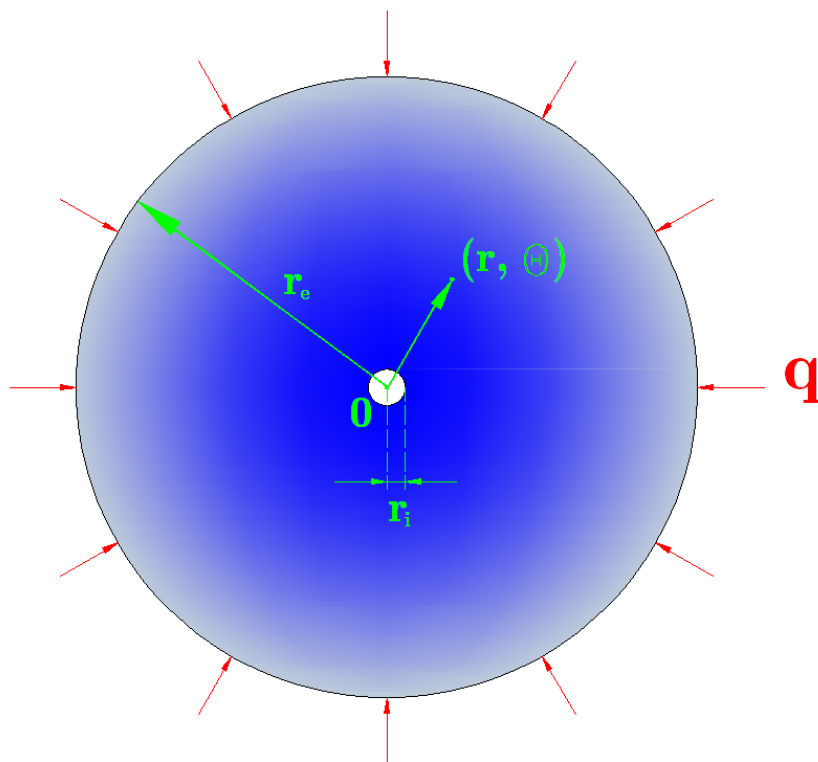


Fig. 12: Disco elástico anisotrópico com furo sob compressão radial.

A relação deformação-deslocamento é dada por

$$\mathbf{E} = \nabla_s(\mathbf{u}) = \frac{(\nabla\mathbf{u})^T + \nabla\mathbf{u}}{2}, \quad (94)$$

Onde, lembrando de (16) que o operador  $\nabla_s(\cdot)$  é o gradiente simétrico e  $\mathbf{u}$  é o vetor deslocamento. O gradiente do vetor deslocamento para o caso bidimensional é dado por

$$\nabla\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \end{bmatrix}. \quad (95)$$

Utilizando (95), obtemos as componentes de  $\mathbf{E}$ , as quais são dadas por

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right). \quad (96)$$

Segue de (89)-(92) juntamente com (95) que

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right), & \sigma_{\theta\theta} &= c_{21} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{22} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right), \\ \sigma_{r\theta} &= c_{66} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (97)$$

Utilizando a expressão (17) que define o gradiente de deformação juntamente com a expressão (95), obtemos

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 1 & \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} + 1 \end{bmatrix}. \quad (98)$$

As equações de equilíbrio para o caso bidimensional, em coordenadas cilíndricas, são dadas por (Lekhnitskii, 1968)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{\sigma_{r\theta}}{r} + \Theta &= 0, \end{aligned} \tag{99}$$

onde  $r$  e  $\theta$  são as direções radial e tangencial, respectivamente, de um sistema de coordenadas cilíndricas e  $R$  e  $\Theta$  são as forças de corpo nas direções radial e tangencial, respectivamente.

Substituindo

(97) em (99), obtém-se equações diferenciais para a determinação do campo de deslocamento

**u.**

Neste trabalho, estuda-se o problema do anel, classificando-o em problema unidimensional em uma variável, para o qual  $\mathbf{u}(r, \theta) = \mathbf{u}(r) = u_r(r)\mathbf{e}_r$  e problema unidimensional em duas variáveis para o qual  $\mathbf{u}(r, \theta) = \mathbf{u}(r) = u_r(r)\mathbf{e}_r + u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$ . No primeiro caso, o deslocamento é radialmente simétrico e no segundo caso, o deslocamento é rotacionalmente simétrico.

#### 4.1.1 Problema Unidimensional em Uma Variável

Nesta seção, considera-se que o deslocamento é da forma  $\mathbf{u}(r, \theta) = u_r(r)\mathbf{e}_r$ . Em seguida, apresenta-se a solução analítica do problema do anel sem restrições. Apresentam-se também

alguns resultados e análises encontrados na literatura sobre o problema do disco sem furo, denominado problema de Lekhnitskii.

Considerando que a componente tangencial de deslocamento é nula, as expressões (95) e (96) são reescritas como

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} \end{bmatrix}, \quad (100)$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \epsilon_{r\theta} = 0, \quad (101)$$

respectivamente. Segue de (98) que

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 1 & 0 \\ 0 & \frac{u_r}{r} + 1 \end{bmatrix}, \quad (102)$$

e de (99) com  $\Theta = 0$  que a única equação de equilíbrio não trivial é dada por

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0. \quad (103)$$

Substituindo as componentes de tensão dadas por

(97) em (103) e considerando força de corpo nula, obtemos a equação diferencial ordinária

$$\frac{1}{r} \left( c_{11} r \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} - c_{22} \frac{u_r}{r} \right) = 0. \quad (104)$$

Resolvendo a equação (104) para  $u_r$  e impondo as condições de deslocamento  $u_r(r_i) = 0$  e de carregamento  $\sigma_r(r_e) = -q$ , onde  $r_i$  e  $r_e$  são os raios interno e externo, respectivamente, obtém-se a solução do anel sob compressão externa, a qual é dada por



$$u_r(r) = A r^\kappa + B r^{-\kappa}, \quad r_i \leq r \leq r_e, \quad (105)$$

onde

$$\kappa \equiv \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{11}}} > 0, \quad (106)$$

$$A \equiv \frac{q r_e^{1+\kappa}}{c_{12}(-r_i^{2\kappa} + r_e^{2\kappa}) + c_{11}\kappa(r_i^{2\kappa} + r_e^{2\kappa})}, \quad (107)$$

$$B \equiv \frac{q r_e^{1+\kappa} r_i^{2\kappa}}{c_{12}(-r_i^{2\kappa} + r_e^{2\kappa}) + c_{11}\kappa(r_i^{2\kappa} + r_e^{2\kappa})}. \quad (108)$$

Então, para valores  $0 < \kappa < 1$ , a solução clássica do anel não proporciona valores com significado físico, pelos quais não é uma solução aceitável.

AGUIAR (2006) resolve o problema da esfera linear anisotrópica sob compressão radial uniforme. Nesse trabalho, o autor propõe uma teoria pseudo-linear, baseada no método das penalidades interiores, para minimizar o potencial de energia do corpo sujeito à restrição (4). Com isto, a solução é restrita a um conjunto de soluções admissíveis para as quais o comportamento anômalo da auto-intersecção é evitado.

Agora, fazendo o raio interno  $r_i$  tender a zero, obtém-se a solução clássica apresentada por LEKHNITSKII (1968),

$$u_r(r) = -m \frac{r^\kappa}{r_e^{\kappa-1}}, \quad 0 \leq r \leq r_e, \quad (109)$$

onde  $\kappa$  é dado por (106) e

$$m \equiv \frac{q}{\sqrt{c_{11} c_{22} + c_{12}}}, \quad (110)$$

Observe da expressão (109) que as tensões radial e tangencial são singulares se  $\kappa < 1$ . FOSDICK e ROYER-CARFAGNI (2001) observam que, quando  $q > 0$  e  $0 < \kappa < 1$ , existe no disco sem furo uma região central definida por

$$0 < \left(\frac{r}{r_e}\right)^{1-\kappa} < m, \quad (111)$$

para a qual  $u_r(r) < -r$ , caracterizando a auto-interseção do material. Nesta região central está contida uma zona, definida por  $\kappa m < \left(\frac{r}{r_e}\right)^{1-\kappa} < m$ , onde o determinante do gradiente de deformação em (102) é negativo, ou seja,

$$\det \nabla f = \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + 1 \right] \left[ \frac{u_r}{r} + 1 \right] < 0. \quad (112)$$

A formula (112) pode ser reescrita por

$$\det \nabla f = \left[ 1 - \kappa m \left(\frac{r}{r_e}\right)^{\kappa-1} \right] \left[ 1 - m \left(\frac{r}{r_e}\right)^{\kappa-1} \right] < 0, \quad 0 \leq r \leq r_e. \quad (113)$$

#### 4.1.2 Problema Unidimensional em Duas Variáveis.

Considera-se agora que o campo de deslocamento do corpo é dado por  $\mathbf{u}(r, \theta) = u_r(r)\mathbf{e}_r + u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$ . Então, as expressões (95) e (96) reescrevem-se como

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & -\frac{u_\theta}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{u_r}{r} \end{bmatrix}, \quad (114)$$

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( -\frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right), \quad (115)$$

respectivamente. Segue de (98) que

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} + 1 & -\frac{u_\theta}{r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} & \frac{u_r}{r} + 1 \end{bmatrix}. \quad (116)$$

Aqui, as componentes de tensão dadas por

(97) tomam a forma

$$\sigma_{rr} = c_{11} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{12} \left( \frac{u_r}{r} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = c_{21} \frac{\partial u_r}{\partial r} + c_{22} \left( \frac{u_r}{r} \right), \quad \sigma_{r\theta} = c_{66} \left( -\frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right). \quad (117)$$

Substituindo estas expressões em (99), obtemos duas equações diferenciais ordinárias para a determinação de  $u_r$  e  $u_\theta$ . Estas componentes devem satisfazer as condições de deslocamento  $u_r(r_i) = u_\theta(r_i) = 0$  e de carregamento  $\sigma_{rr}(r_e) = -q$ ,  $\sigma_{r\theta}(r_e) = 0$ . Obviamente, unicidade em elasticidade linear clássica implica que  $u_r$  é dado por (105) e  $u_\theta = 0$ .

Segundo os resultados mostrados por FOSDICK e ROYER-CARFAGNI (2001), FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007) e AGUIAR et al (2008a) mostram que o fenômeno da auto-interseção está acompanhado pela presença de uma região onde o  $\det \nabla f$  é negativo. Para as hipóteses adotadas nesta seção, o determinante do gradiente de deformação é dado por

$$\det \nabla f = \left[ \frac{\partial u_r}{\partial r} + 1 \right] \left[ \frac{u_r}{r} + 1 \right] + \left[ \frac{u_\theta}{r} \right] \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right], \quad (118)$$

o qual pode ser reescrito na forma

$$\det \nabla f = \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial r} [(u_r + r)^2 + u_\theta]. \quad (119)$$

## 4.2 O Problema do Anel com Restrição

FOSDICK e ROYER-CARFAGNI (2001) consideram uma solução radialmente simétrica do disco sem furo. Recentemente, FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007) consideram o problema de Lekhnitskii no contexto de uma teoria plana, para a qual o campo de deslocamento é dado por  $\mathbf{u}(r, \theta) = u_r(r, \theta)\mathbf{e}_r + u_\theta(r, \theta)\mathbf{e}_\theta$ . Eles apresentam resultados numéricos que indicam que, dependendo das constantes elásticas do material, uma solução assimétrica é possível para este problema. O aparecimento de uma segunda solução é justificada pelo caráter não-linear da teoria com restrição.

### 4.2.1 Conceitos Preliminares

Seja  $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$  a configuração natural de referência de um corpo, ver Seção 2.1.1. Seja  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$  um ponto arbitrário da configuração de referência, o qual é mapeado para  $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2$ . O contorno  $\partial\mathcal{B}$  de  $\mathcal{B}$  é composto por duas partes complementares,  $\partial_1\mathcal{B}$  e  $\partial_2\mathcal{B}$ , tais que  $\partial_1\mathcal{B} \cup \partial_2\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}$  e  $\partial_1\mathcal{B} \cap \partial_2\mathcal{B} = \emptyset$ . Impomos as condições de deslocamentos  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0$  para  $\mathbf{x} \in \partial_1\mathcal{B}$  e de carregamento  $\bar{\mathbf{t}}(\mathbf{x})$  para  $\mathbf{x} \in \partial_2\mathcal{B}$ . Além disso, existe uma força de corpo  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  por unidade de volume de  $\mathcal{B}$  que atua em todos os pontos  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ .

Define-se o conjunto dos deslocamentos admissíveis

$$\mathcal{A}_\varepsilon \equiv \{\mathbf{v} : \mathcal{W}^{1,2}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \det(1 + \nabla \mathbf{v}) \geq \varepsilon > 0, \mathbf{v} = 0 \text{ em } \partial_1 \mathcal{B}\}, \quad (120)$$

onde  $\varepsilon$  é um valor positivo suficientemente pequeno.

Considera-se o problema de mínima energia potencial

$$\min_{\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\varepsilon} \mathcal{E}[\mathbf{v}], \quad \mathcal{E}[\mathbf{v}] \equiv \frac{1}{2} a[\mathbf{v}, \mathbf{v}] - f[\mathbf{v}], \quad (121)$$

onde  $\mathcal{E}[\cdot]$  é a energia potencial total da teoria clássica de elasticidade linear e

$$a[\mathbf{v}, \mathbf{v}] \equiv \int_{\mathcal{B}} \mathbb{C}[\mathbf{E}] \cdot [\mathbf{E}] d\mathbf{x}, \quad (122)$$

$$f[\mathbf{v}] \equiv \int_{\mathcal{B}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x} + \int_{\partial_2 \mathcal{B}} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}. \quad (123)$$

Em (122),  $\mathbf{E}$  é o tensor de deformação infinitesimal definido por (94) e  $\mathbb{C} = \mathbb{C}(\mathbf{x})$  é o tensor de elasticidade em (88).

FOSDICK e ROYER-CARFAGNI (2001) caracterizam a solução do problema de minimização definido em (121)-(123). Em particular, eles mostram que esta solução existe para problemas planos. Os autores derivam condições de primeira ordem para obter o mínimo  $\mathbf{u} \in \mathcal{A}_\varepsilon$  de  $\mathcal{E}[\cdot]$ .

Para isto, define-se

$$\mathcal{A} \equiv \{\mathbf{v} : \mathcal{W}^{1,2}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{v} = 0 \text{ em } \partial_1 \mathcal{B}\}. \quad (124)$$

Então, a primeira variação de  $\mathcal{E}[\cdot]$  pode ser obtida em função de  $\mathbf{u}$  na forma

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\mathcal{E}[\mathbf{u} + \tau \mathbf{v}] - \mathcal{E}[\mathbf{u}]}{\tau} \equiv \langle D\mathcal{E}[\mathbf{u}], \mathbf{v} \rangle \equiv a[\mathbf{u}, \mathbf{v}] - f[\mathbf{v}], \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{A}, \quad (125)$$

onde  $a[\cdot, \cdot]$  e  $f[\cdot]$  são definidos por (122) e (123), respectivamente.

Pode-se mostrar que existe o campo escalar dos multiplicadores de Lagrange,  $\lambda(\mathbf{x}) > 0$ , tal que a primeira variação (125) possua a representação equivalente

$$\langle D\mathcal{E}[\mathbf{u}], \mathbf{v} \rangle = \int_{\mathcal{B}} \lambda(\text{cof } \nabla \mathbf{F}) \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{A}, \quad (126)$$

onde  $\text{cof } \nabla \mathbf{f} = (\det \nabla \mathbf{F})[(\nabla \mathbf{F})^{-1}]^T$  é o cofator do gradiente de deformação.

Definindo

$$\mathcal{B}_{>} \equiv \text{int} [\{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \det(\nabla \mathbf{F}) > \varepsilon, r_a \leq r \leq r_e\}], \quad (127)$$

$$\mathcal{B}_{=} \equiv \text{int} [\{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \det(\nabla \mathbf{F}) = \varepsilon, r_i \leq r \leq r_a\}],$$

onde  $\text{int} [\cdot]$  é o interior de um conjunto e  $r_a \in (r_i, r_e)$ , as condições necessárias de primeira ordem para a existência de mínimo são dadas pelas

I. Equações de Euler – Lagrange:

$$\text{Div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = 0 \text{ em } \mathcal{B}_{>}, \quad \text{Div}(\mathbf{T} - \varepsilon \lambda (\nabla \mathbf{f})^{-T}) + \mathbf{b} = 0 \text{ em } \mathcal{B}_{=}, \quad (128)$$

onde  $\lambda \geq 0$ , sujeito às seguintes condições de contorno

$$\mathbf{T} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ em } \partial \mathcal{B}_{>} \cap \partial_2 \mathcal{B}, \quad (\mathbf{T} - \varepsilon \lambda (\nabla \mathbf{f})^{-T}) \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ em } \partial \mathcal{B}_{=} \cap \partial_2 \mathcal{B}, \quad (129)$$

onde  $\mathbf{T}$  é dado por (88) e  $\mathbf{n}$  é um versor normal a  $\partial_2 \mathcal{B}$ .

II. Condições de continuidade definidas na interface  $\mathcal{J} \equiv \overline{\mathcal{B}_{>}} \cap \overline{\mathcal{B}_{=}}$ , assumida suficientemente suave:

$$(\mathbf{T} - \varepsilon \lambda (\nabla \mathbf{f})^{-T})|_{\mathcal{J} \cap \overline{\mathcal{B}_{=}}} \mathbf{n} = \mathbf{T}|_{\mathcal{J} \cap \overline{\mathcal{B}_{>}}} \mathbf{n}, \quad (130)$$

onde  $\mathbf{n}$  é o versor normal a  $\mathcal{J}$ ,  $(\cdot)|_{\mathcal{J} \cap \overline{\mathcal{B}_{=}}}$  e  $(\cdot)|_{\mathcal{J} \cap \overline{\mathcal{B}_{>}}}$  expressam que o tensor  $(\cdot)$  é avaliado no limite, à medida que se aproxima de  $\mathcal{J}$  do interior de  $\mathcal{B}_{=}$  e  $\mathcal{B}_{>}$ , respectivamente.

Em (128)-(130),  $(\mathbf{T} - \varepsilon \lambda (\nabla \mathbf{f})^{-T})$  é a tensão total em  $\mathcal{B}_{=}$ , com  $\lambda$  sendo uma pressão reativa devido à imposição de  $\det(\nabla \mathbf{F}) = \varepsilon$ .

## 4.2.2 Problema Unidimensional em Uma Variável com Restrição

Assumindo que o deslocamento é radialmente simétrico,  $\mathbf{u}(r, \theta) = u_r(r)\mathbf{e}_r$ , as condições necessárias para a existência de mínimo, (127)-(129), são satisfeitas por

$$u_r(r) = \begin{cases} g(r) - r, & g(r) \equiv \sqrt{(r^2 - r_i^2)\varepsilon + r_i^2}, & r \in (r_i, r_a), \\ \frac{r_a}{2k} \left[ \beta_1 \left(\frac{r}{r_a}\right)^k + \beta_2 \left(\frac{r}{r_a}\right)^{-k} \right], & r \in (r_a, r_e), \end{cases} \quad (131)$$

onde  $k$  é dado por (106),

$$\beta_1 \equiv -(1+k) + \frac{kg(r_a)}{r_a} + \frac{\varepsilon r_a}{g(r_a)}, \quad \beta_2 \equiv 1 - k + \frac{kg(r_a)}{r_a} - \frac{\varepsilon r_a}{g(r_a)}, \quad (132)$$

e  $r_a$  satisfaz a equação algébrica

$$0 = w(\varsigma) \equiv s(\varsigma, k) + s(\varsigma, -k) + \frac{r}{c_{11}}, \quad \varsigma \equiv \frac{r_a}{r_e}. \quad (133)$$

Na equação anterior,

$$s(\varsigma, k) \equiv \left(\frac{k + \mu_\theta}{2k}\right) \varsigma^{1-k} \left[-(1+k) + \frac{k\hat{g}(\varsigma)}{\varsigma} + \frac{\varepsilon \varsigma}{\hat{g}(\varsigma)}\right] \quad (134)$$

é uma função de  $\varsigma$  parametrizada por  $k$ , onde  $\hat{g}(\varsigma) \equiv \sqrt{(\varsigma^2 - \varsigma_i^2)\varepsilon + \varsigma_i^2}$  e  $\varsigma_i \equiv \frac{r_i}{r_e}$  e

$\mu_\theta = \frac{c_{12}}{c_{11}}$ . Note de (133) juntamente com (134) que  $w(\varsigma_i) = (q - (1 - \varepsilon)p) / c_{11}$ , onde

$p = \frac{c_{11}\varsigma_i}{2k} \left( (k - \mu_\theta) \varsigma_i^k + (k + \mu_\theta) \varsigma_i^{-k} \right)$ . Tomando a derivada de  $r$  em (133), obtém-se que

$w'(\varsigma)$  é negativa, conseqüentemente  $k - \mu_\theta > 0$ ,  $k + \mu_\theta > 0$ , e sendo  $\varepsilon > 0$  suficientemente

pequeno. Assim, se  $w'(\varsigma_i) < 0$ , então  $r(\varsigma) = 0$  não possui raízes, ou seja, não existe auto-

intersecção. Os resultados e as análises realizadas na Seção 4.2.2 foram adaptados dos resultados obtidos por AGUIAR e FOSDICK (2008).

### 4.2.3 Formulação Penalizada

Aqui, aplica-se o método das penalidades interiores apresentado na Seção 3.2.3 no problema de minimização com restrições descrito nas expressões (121)-(123). Assim, define-se um funcional de energia penalizado (ver a expressão (79)) composto pelo funcional de energia (121)b mais um funcional de penalidade multiplicado por um parâmetro de penalidade, ou seja,

$$\mathcal{E}_\delta[\mathbf{u}] = \mathcal{E}[\mathbf{u}] + \frac{1}{\delta} \mathcal{P}[\mathbf{u}], \quad (135)$$

onde  $\delta$  é o parâmetro de penalidade e  $\mathcal{P}: \mathcal{A}_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$  é o funcional de penalidade. Neste trabalho, considera-se o funcional

$$\mathcal{P}[\mathbf{v}] = \int_B \frac{1}{\det(1 + \nabla \mathbf{v}) - \varepsilon} dx, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{A}_\varepsilon. \quad (136)$$

Com este funcional, o mínimo de  $\mathcal{E}_\delta[\cdot]$  existe no interior do conjunto  $\mathcal{A}_\varepsilon$ . É importante observar de (136) que  $\mathcal{P}[\mathbf{v}]$  não é negativo em  $\mathcal{A}_\varepsilon$  e que satisfaz a condição  $\mathcal{P}[\mathbf{v}] \rightarrow \infty$  à medida que  $\mathbf{v}$  se aproxima do contorno de  $\mathcal{A}_\varepsilon$ .

A formulação penalizada do problema de minimização (121)-(123) consiste em encontrar um campo admissível de deslocamentos  $\mathbf{u}_\delta \in \mathcal{A}_\varepsilon$  que minimize o funcional de energia penalizado  $\mathcal{E}_\delta[\cdot]$ , dado por

$$\min_{\mathbf{v} \in \mathcal{A}_\varepsilon} \mathcal{E}_\delta[\mathbf{v}]. \quad (137)$$

Este é um problema de minimização com restrição e é tão complexo quanto o problema original, dado por (121)-(123). A vantagem de considerar este problema é que podemos utilizar



os mesmos procedimentos numéricos que são utilizados para encontrar aproximações numéricas de soluções de problemas de minimização sem restrições.

Utilizando (135), a primeira variação de  $\mathcal{E}_\delta[\cdot]$  avaliada no mínimo  $\mathbf{u}_\delta$  é dada por

$$\langle D\mathcal{E}_\delta[\mathbf{u}_\delta], \mathbf{v} \rangle = \langle D\mathcal{E}[\mathbf{u}_\delta], \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{\delta} \langle D\mathcal{P}[\mathbf{u}_\delta], \mathbf{v} \rangle, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{A}_\varepsilon, \quad (138)$$

onde  $\langle D\mathcal{E}_\delta[\mathbf{u}_\delta], \mathbf{v} \rangle$  é a derivada direcional definida no Anexo B.1 e

$$\langle D\mathcal{P}_\delta[\mathbf{u}_\delta], \mathbf{v} \rangle = - \int_B \frac{(\text{cof } \nabla \mathbf{F}_\delta) \cdot (\nabla \mathbf{v})}{(\det \nabla \mathbf{F}_\delta - \varepsilon)^2} d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{A}_\varepsilon, \quad (139)$$

com  $\mathbf{f}_\delta = \mathbf{x} + \mathbf{u}_\delta$ .

AGUIAR et al. (2008a) utilizam os metodos das penalidades interiores e exteriores, juntamente com o método dos elementos finitos e com técnicas de programação não linear para encontrar soluções aproximadas do problema do anel com restrições. Eles mostram que os resultados numéricos obtidos são concordantes com os resultados analíticos, achados também pelos autores. Eles também mostram alguns resultados de convergência que indicam que, para parâmetros numéricos iguais, a sequência de soluções numéricas obtidas com os dois métodos das penalidades converge para a mesma função limite.

### 4.3 Formulação Discreta do Problema do Anel com Restrição

Pretende-se construir uma solução aproximada do problema definido em (137). Esta solução é construída com o método dos elementos finitos. Este método possibilita introduzir um problema de minimização discreto definido em um espaço finito  $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}$ , onde o subíndice  $h$  é um comprimento característico do elemento finito. Para resolver de forma aproximada o

problema (137), fixa-se  $h$  e obtém-se uma seqüência de soluções, parametrizadas por  $\delta$ , que converge para  $\mathbf{u}_h$  à medida que  $\delta \rightarrow \infty$ . Posteriormente, diminui-se  $h$  para refinar a malha do elemento finito. Repete-se o processo anterior, gerando outra seqüência de soluções, parametrizada agora por  $h$ , que converge para  $\mathbf{u}$  à medida que  $h \rightarrow 0$ .

Aplica-se o procedimento anterior na solução aproximada do problema do anel, descrito na seção 4.2, sujeito à restrição de injetividade  $\det(1 + \nabla \mathbf{v}) \geq \varepsilon > 0$ , onde  $\mathbf{v} \in \mathcal{A}$ . Este problema é bidimensional e altamente não linear, como foi visto em 4.2. FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007) mostram que, devido à não linearidade do problema, duas soluções são possíveis para o problema. O problema unidimensional em duas variáveis é um caso intermediário entre o problema bidimensional, analisado por FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007) e o problema unidimensional em uma variável apresentado na seção 4.2.2.

### 4.3.1 Problema Unidimensional em Uma Variável.

Analisa-se o problema do anel, sujeito à restrição de injetividade  $\det(1 + \nabla \mathbf{v}) \geq \varepsilon > 0$ , onde  $\mathbf{v} \in \mathcal{A}$ , conforme descrito na seção 4.2.2. Neste caso, considera-se que a solução tem a forma  $\mathbf{v}(r) = v_r(r)\mathbf{e}_r$ , onde  $v_r$  é uma função escalar definida no intervalo  $(r_i, r_e)$  e  $\mathbf{e}_r \equiv \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$  para  $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ .

Em conseqüência, a energia dada por (121)b-(123), com  $\mathbb{C}$  dado por (92),  $\mathbf{E}$  dado por (94) e  $\nabla \mathbf{v}$  dado por (100), pode ser escrita na forma

$$\mathcal{E}[\mathbf{v}] = \pi \left\{ \int_{r_i}^{r_e} \left[ r c_{11} (v_r')^2 + c_{22} \frac{(v_r)^2}{r} \right] dr + c_{12} (v_r(r_e))^2 \right\} + 2\pi q v_r(r_e) r_e, \quad (140)$$

onde  $(\cdot)' \equiv \frac{d(\cdot)}{dr}$ . O funcional definido por (136) é dado por

$$\mathcal{P}[\mathbf{v}] = 2\pi \int_{r_i}^{r_e} \frac{r}{(v_r' + 1) \left( \frac{v_r}{r} + 1 \right) - \varepsilon} dx. \quad (141)$$

O potencial de energia penalizada  $\mathcal{E}_\delta[\cdot]$  é dado pela expressão (135) juntamente com (140) e (141).

Considere o intervalo  $\mathcal{K} \equiv (r_i, r_e)$  e introduza a partição  $r_i = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n = r_e$ , de modo que  $\mathcal{K}_j \equiv (r_{j-1}, r_j)$  são subintervalos de  $\mathcal{K}$  de comprimento  $\Delta r_j = r_j - r_{j-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Considere também o conjunto  $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}$  de funções  $v_h \mathbf{e}_r$ , tal que  $v_h$  é linear em cada um dos subintervalos  $\mathcal{K}_j$ ,  $v_h \in \mathcal{C}^0(\mathcal{K})$  e  $v_h(0) = 0$ .

Introduzem-se as funções de forma lineares por partes  $\phi_j(r_k)$ , tais que

$$\phi_j(r_k) = \begin{cases} 1, & \text{se } k = j \\ 0, & \text{se } k \neq j \end{cases}, \quad k, j = 1, 2, \dots, n. \quad (142)$$

Obviamente,  $\phi_j \mathbf{e}_r \in \mathcal{A}_h$ . Então, uma função  $v_h \mathbf{e}_r \in \mathcal{A}_h$  tem a representação

$$v_h(r) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{g}(r), \quad r \in \mathcal{K}, \quad (143)$$

sendo esta a representação do produto interno entre o vetor  $\mathbf{s} \equiv (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$  e o vetor  $\mathbf{g} \equiv (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$  de funções de forma definidas no intervalo  $\mathcal{K}$ . Os coeficientes  $\eta_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , são os valores de  $v_h$  calculados nos nós, ou seja,

$$\eta_j = v_h(r_j). \quad (144)$$

Substituindo  $v_h$  nas expressões (140) e (141), obtém-se

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_h(\mathbf{s}) &\equiv \frac{\mathcal{E}[(\mathbf{s} \cdot \mathbf{g})\mathbf{e}_r]}{2\pi q r_e} \\ &= \frac{1}{2q r_e} \left\{ \int_{r_i}^{r_e} \left[ r c_{11}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{g}')^2 + c_{22} \frac{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{g})^2}{r} \right] dr + c_{12}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{g}(r_e))^2 \right\} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{g}(r_e)\end{aligned}\tag{145}$$

e

$$\mathcal{P}_h(\mathbf{s}) \equiv \frac{\mathcal{P}[(\mathbf{s} \cdot \mathbf{g})\mathbf{e}_r]}{2\pi q r_e} = \frac{1}{q r_e} \int_{r_i}^{r_e} \frac{r}{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{g}' + 1) \left( \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{g}}{r} + 1 \right) - \varepsilon} dx.\tag{146}$$

Observa-se de (145) e (146) que  $\mathcal{E}_h$  e  $\mathcal{P}_h$  são funções escalares do vetor  $n$ -dimensional  $\mathbf{s}$ .

Utilizando (145) e (146), obtém-se a forma discreta da energia penalizada dada por (135) juntamente com (121)b e (136). Assim,

$$\mathcal{F}_\delta(\mathbf{s}) = \mathcal{E}_h(\mathbf{s}) + \frac{1}{\delta} \mathcal{P}_h(\mathbf{s}).\tag{147}$$

Definindo  $\mathbb{R}_\varepsilon^n \triangleq \left\{ \hat{\mathbf{s}} \in \mathbb{R}^n: (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{g}'(r) + \mathbf{1}) \left( \hat{\mathbf{s}} \cdot \frac{\mathbf{g}(r)}{r} + \mathbf{1} \right) \geq \varepsilon > 0, r_i \leq r \leq r_e \right\}$ , a versão discreta do problema do anel com restrição é dada por

$$\min_{\mathbf{s} \in \mathbb{R}_\varepsilon^n} \mathcal{F}_\delta(\mathbf{s}).\tag{148}$$

Deseja-se encontrar um vetor  $n$ -dimensional  $\mathbf{r}_\delta \equiv \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  que minimize a função  $\mathcal{F}_\delta$ . O problema de minimização discreto (148) pode então ser resolvido numericamente, utilizando um método de minimização sem restrições apropriado.

### 4.3.2 Problema Unidimensional em Duas Variáveis

Analisa-se o problema do anel sujeito à restrição de injetividade  $\det(1 + \nabla \mathbf{v}) \geq \varepsilon > 0$ , onde  $\mathbf{v} \in \mathcal{A}$ . Aqui, considera-se que a solução é da forma  $\mathbf{v}(r) = v_r(r)\mathbf{e}_r + v_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$ , onde  $v_r$  e  $v_\theta$  são funções escalares definidas no intervalo  $(r_i, r_e)$ ,  $\mathbf{e}_r$  e  $\mathbf{e}_\theta$  são versores definidos nas direções radial e tangencial, respectivamente.

Em conseqüência, a energia dada por (121)b-(123), com  $\mathbb{C}$  dado por (92),  $E$  dado por (94) e  $\nabla \mathbf{v}$  dado por (114), pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\mathbf{v}] = \pi \left\{ \int_{r_i}^{r_e} \left[ r c_{11}(v_r')^2 + c_{22} \frac{(v_r)^2}{r} + c_{66}(v_\theta')^2 r + c_{66} \frac{(v_\theta)^2}{r} \right] dr + c_{12}(v_r(r_e))^2 \right. \\ \left. - c_{66}(v_\theta(r_e))^2 \right\} + 2\pi q v_r(r_e) r_e, \end{aligned} \quad (149)$$

onde lembramos da seção 4.3.1 que  $(\cdot)' \equiv \frac{d(\cdot)}{dr}$ . O funcional barreira definido por (136) toma a forma

$$\mathcal{P}[\mathbf{v}] = 2\pi \int_{r_i}^{r_e} \frac{r}{(v_r' + 1) \left( \frac{v_r}{r} + 1 \right) + (v_\theta') \left( \frac{v_\theta}{r} \right) - \varepsilon} dx. \quad (150)$$

Com isso, o potencial de energia penalizado  $\mathcal{E}_\delta[\cdot]$  é dado pela expressão (135) juntamente com as expressões (149) e (150).

Novamente (veja a Seção 4.3.1), considera-se uma partição  $r_i = r_0 < r_1 < r_2 < \dots < r_n = r_e$ , do intervalo  $\mathcal{K}_j \equiv (r_i, r_e)$  de modo que  $\mathcal{K}_j \equiv (r_{j-1}, r_j)$  são subintervalos de comprimento  $\Delta r_j = r_j - r_{j-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Aqui, no entanto,  $\mathcal{A}_h \subset \mathcal{A}$  é um conjunto de funções  $v_{rh}\mathbf{e}_r + v_{\theta h}\mathbf{e}_\theta$ , tal que  $v_{rh}$  e  $v_{\theta h}$  são lineares em cada um dos subintervalos  $\mathcal{K}_j$ ,  $v_{rh}, v_{\theta h} \in \mathcal{C}^0(\mathcal{K})$  e  $v_{rh}(0) = 0$ ,  $v_{\theta h}(0) = 0$ . As funções  $v_{rh}, v_{\theta h}$  têm a representação

$$v_{hr}(r) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{g}(r), \quad v_{\theta h}(r) = \mathbf{z} \cdot \mathbf{g}(r), \quad r \in \mathcal{K}, \quad (151)$$

onde  $\mathbf{s} \equiv (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{z} \equiv (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{g} \equiv (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ , com  $\phi_j = 1, \dots, n$ , sendo as funções de forma lineares por partes, as quais estão definidas no intervalo  $\mathcal{K}$  e satisfazem (137). Os coeficientes  $\eta_j$  e  $\xi_j$  são dados por

$$\eta_j = v_{rh}(r_j), \quad \xi_j = v_{\theta h}(r_j). \quad (152)$$

Substituindo  $v_{rh}$  e  $v_{\theta h}$  nas expressões (149) e (150), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_h(\mathbf{s}, \mathbf{z}) &\equiv \frac{\mathcal{E}[(\mathbf{s} \cdot \mathbf{g})\mathbf{e}_r + (\mathbf{z} \cdot \mathbf{g})\mathbf{e}_\theta]}{2\pi q r_e} \\ &= \frac{1}{2q r_e} \left\{ \int_{r_i}^{r_e} \left[ r c_{11}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{g}')^2 + c_{22} \frac{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{g})^2}{r} + c_{66}(\mathbf{z} \cdot \mathbf{g}')^2 r + c_{66} \frac{(\mathbf{z} \cdot \mathbf{g})^2}{r} \right] dr \right. \\ &\quad \left. + c_{12}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{g}(r_e))^2 - c_{66}(\mathbf{z} \cdot \mathbf{g}(r_e))^2 \right\} + \mathbf{s} \cdot \mathbf{g}(r_e), \end{aligned} \quad (153)$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_h(\mathbf{s}, \mathbf{z}) &\equiv \frac{\mathcal{P}[(\mathbf{s} \cdot \mathbf{g})\mathbf{e}_r + (\mathbf{z} \cdot \mathbf{g})\mathbf{e}_\theta]}{2\pi q r_e} \\ &= \frac{1}{q r_e} \int_{r_i}^{r_e} \frac{r}{(\mathbf{s} \cdot \mathbf{g}' + 1) \left( \frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{g}}{r} + 1 \right) + (\mathbf{z} \cdot \mathbf{g}') \left( \frac{\mathbf{z} \cdot \mathbf{g}}{r} \right) - \varepsilon} dx. \end{aligned} \quad (154)$$

Observa-se de (153) e (154) que  $\mathcal{E}_h$  e  $\mathcal{P}_h$  são funções escalares dos vetores  $n$ -dimensionais  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{z}$ .

Utilizando-se (153) e (154), obtém-se a forma discreta da energia penalizada dada por (135) juntamente com (121)b e (136).

$$\mathcal{F}_\delta(\mathbf{s}, \mathbf{z}) = \mathcal{E}_h(\mathbf{s}, \mathbf{z}) + \frac{1}{\delta} \mathcal{P}_h(\mathbf{s}, \mathbf{z}). \quad (155)$$

Definindo

$$\mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n} \triangleq \left\{ (\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{z}}) \in \mathbb{R}^{n \times n}: (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{g}'(r) + \mathbf{1}) \left( \hat{\mathbf{s}} \cdot \frac{\mathbf{g}(r)}{r} + \mathbf{1} \right) + (\hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{g}'(r)) \left( \hat{\mathbf{z}} \cdot \frac{\mathbf{g}(r)}{r} \right) \geq \varepsilon > 0, r_i \leq r \leq r_e \right\},$$

a versão discreta do problema do anel com restrição, é dada por

$$\min_{\mathbf{s}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}_\varepsilon^{n \times n}} \mathcal{F}_\delta(\mathbf{s}, \mathbf{z}). \quad (156)$$

O objetivo é encontrar dois vetores  $n$ -dimensionais  $\mathbf{r}_\delta \equiv \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$  e  $\mathbf{t}_\delta \equiv \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$  que minimizem a função  $\mathcal{F}_\delta$ . O problema de minimização discreto (156) pode então ser resolvido numericamente, utilizando um método de minimização sem restrições apropriado (ver Seção 3.1)

## **5 RESULTADOS NUMÉRICOS**

Os resultados apresentados neste capítulo estão organizados da seguinte forma: na primeira parte mostram-se resultados relacionados ao fenômeno da auto-intersecção na teoria da elasticidade linear clássica. Na segunda parte apresentam-se resultados referentes ao problema do anel sujeito à restrição de injetividade (4). Incluem-se nesta seção alguns resultados bidimensionais encontrados por FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007) e comparam-se estes resultados com resultados unidimensionais em uma e duas variáveis obtidos neste trabalho. Finalmente, analisa-se o problema do anel à medida que o tamanho do furo tende a zero, mostrando a convergência do problema do anel para o problema do disco sem furo. Finalmente expõem-se resultados que confirmam a presença da auto-intersecção no problema do anel - onde as tensões são finitas. Por conveniência, trabalha-se com grandezas adimensionais.

### **5.1 Resultados do Problema do Anel Sem Restrição**

Nesta seção apresentam-se soluções numéricas e analíticas do problema sem restrições descrito na Seção 4.1. Pretende-se assim mostrar o fenômeno da auto-intersecção em elasticidade linear clássica.

Simula-se o problema do anel sem restrição descrito na Seção 4.1 com o programa comercial ANSYS 10.0. Na Fig. 13 é mostrada uma discretização do domínio com elementos bilineares. Devido à simetria do carregamento e da geometria do anel, considera-se somente uma



quarta parte da seção transversal. Com propósitos comparativos, são utilizadas as mesmas constantes elásticas consideradas por FOSDICK e ROYER-CARFAGNI (2001) e OBEIDAT et al. (2001). Estas constantes são dadas na Tab. 2. Além disso, o raio externo do disco é  $r_e = 1$ , o raio interno do disco é  $r_i = 10^{-3}$ , o carregamento aplicado no contorno externo do disco é  $q = 500$  e o deslocamento imposto no raio interno é  $u(r_i) = 0$ .

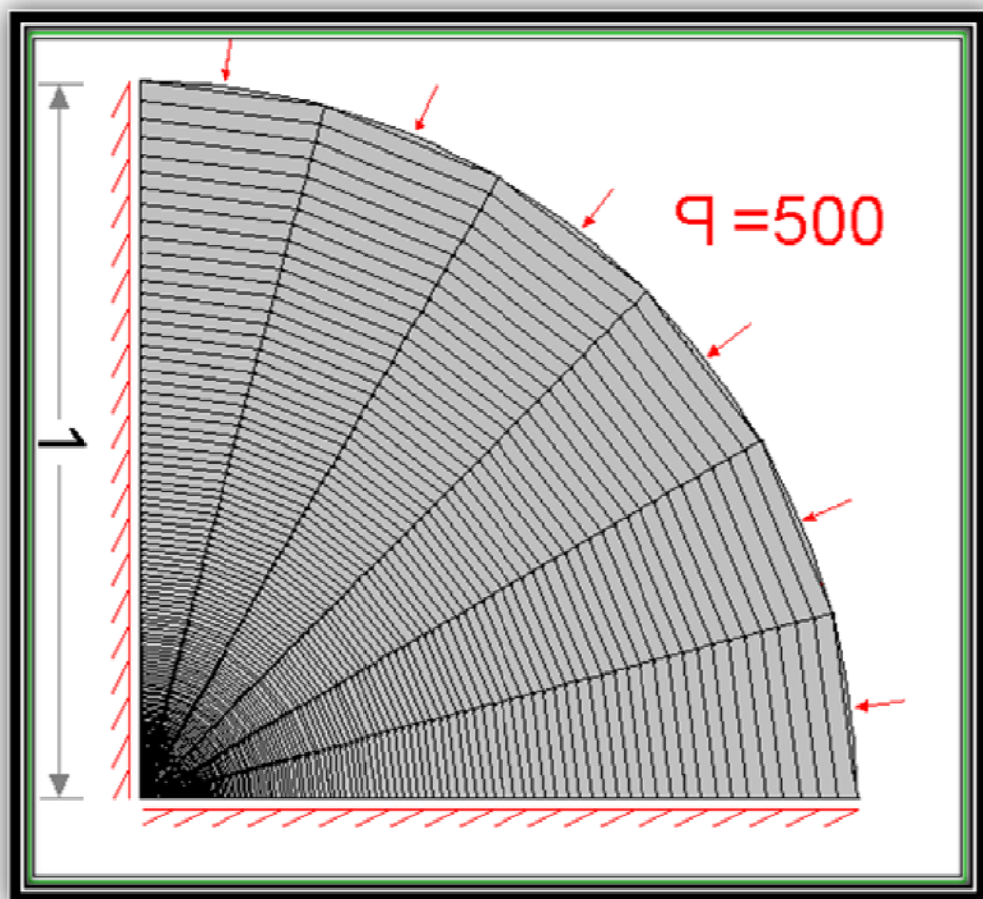


Fig. 13: Discretização utilizando o programa de elementos finitos ANSYS 10.0 de uma quarta parte da seção transversal de um disco com furo.

A Fig. 14 apresenta uma ampliação da região próxima ao raio interno do anel da Fig. 13, mostrando as malhas indeformada (linhas tracejadas) e deformada (linhas contínuas). Em particular, observa-se que elementos próximos ao raio interno são mapeados dentro de uma região definida por  $r < r_i$  e alguns elementos são mapeados ultrapassando o centro do anel; caracterizando assim o fenômeno da auto-intersecção.

$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{12}$	$C_{66}$
$10^5$	$10^3$	$10^3$	$10^3$

Tab. 2: Constantes elásticas utilizadas por FOSDICK e ROYER-CARFAGNI (2001).

Na Fig. 15 apresentam-se soluções analítica e numéricas do problema de Lekhnitskii sem restrição, o qual é descrito na Seção 4.1.1. O problema de Lekhnitskii sem restrição possui uma solução radialmente simétrica, então, os resultados mostram o deslocamento ao longo de uma linha radial. As linhas verdes tracejadas são aproximações numéricas encontradas utilizando o método dos elementos finitos. Sendo  $M$  o número de elementos finitos distribuídos ao longo de uma linha radial, apresentam-se, na figura, aproximações numéricas variando  $M$ , tal como indicado na expressão (157).

$$M = \{64, 128, 256, 512, 1024\}. \quad (157)$$

Na mesma figura, a linha sólida preta indica a solução exata de LEKHNITSKII (1968) apresentada nas expressões (109) e (110).

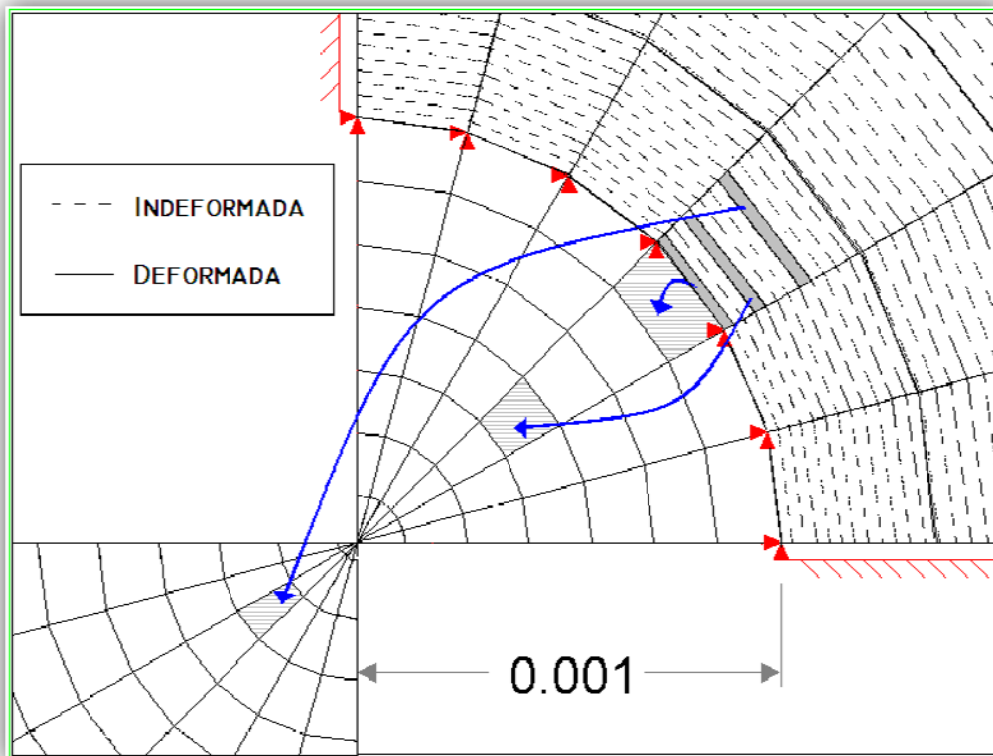


Fig. 14: Ampliação da vizinhança do raio interno da Fig. 13.

Na Fig. 16 apresenta-se uma análise de convergência das soluções numéricas do disco sem furo com relação à solução analítica do mesmo problema, à medida que se refina a malha de elementos finitos utilizada. A análise de convergência é feita através da norma  $H_1$  apresentada no anexo C. A figura mostra o logaritmo na base 2 da norma  $H_1$  versus o logaritmo na base 2 do número de elementos finitos distribuídos ao longo de uma linha radial,  $M$ . A Fig. 16 sugere que o problema numérico sem restrições converge linearmente para a solução analítica encontrada por Lekhnitskii (1968), mas de forma muito lenta.

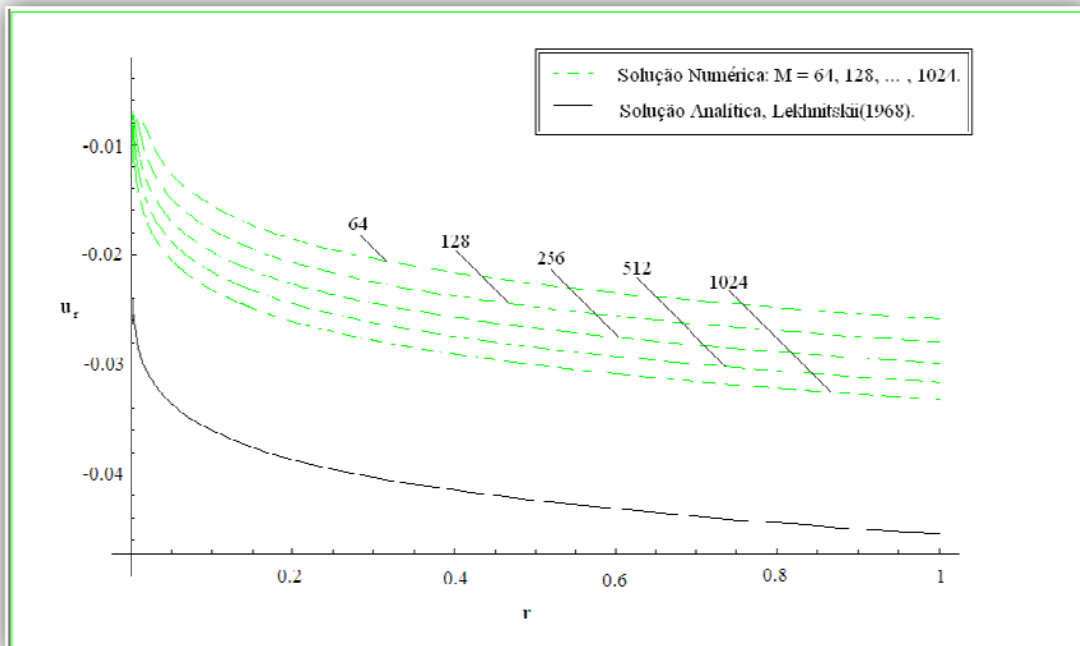


Fig. 15: Convergência com relação ao tamanho do elemento finito do disco sem furo.

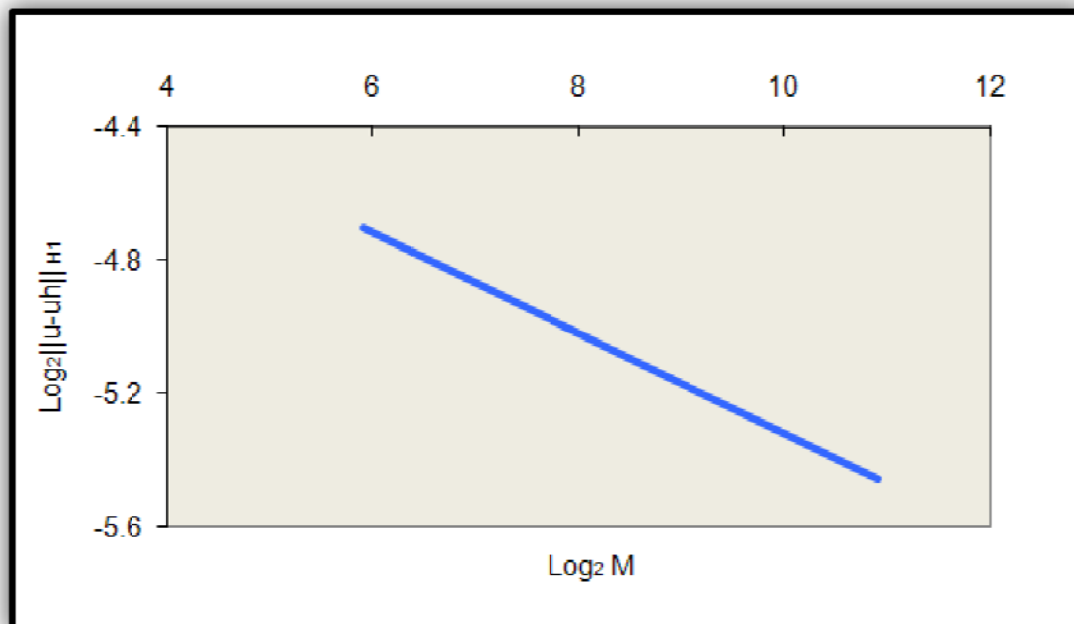


Fig. 16: Convergência com relação ao elemento finito do problema do disco (LEKHNITSKII, 1968).

## 5.2 Resultados do Problema do Anel Com Restrição.

Da Fig. 17 à Fig. 19 são apresentados resultados da modelagem bidimensional do problema de Lekhnitskii sujeito à restrição (4) obtidos por FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007). Os autores consideram que o campo de deslocamento é da forma  $\mathbf{u}(r, \theta) = u_r(r, \theta)\mathbf{e}_r + u_\theta(r, \theta)\mathbf{e}_\theta$ , ou seja, sem nenhuma consideração de simetria. No modelamento bidimensional, FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007) encontram um intervalo de valores da constante elástica  $c_{66}$ , na expressão (92), para o qual a solução  $\mathbf{u}$  do problema (137) possui a componente tangencial. Esta solução é considerada uma bifurcação da solução encontrada por FOSDICK e ROYER-CARFAGNI (2001) e confirmada numericamente por AGUIAR (2004). Os valores geométricos utilizados pelos autores para obter esta bifurcação são  $\varepsilon = 0.1$  na restrição de injetividade (4) e o deslocamento imposto no raio externo  $u_r(r_e) = -0.02 r_e$ . Utilizando as constantes elásticas da Tab. 3, os autores encontram a solução assimétrica e utilizando as constantes da Tab. 4, eles encontram uma solução radialmente simétrica cuja componente tangencial é nula.

FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007) discretizam o problema de Lekhnitskii com uma malha contendo 54912 elementos, para obter resultados que indicam a existência de bifurcação no campo de deslocamento. Na Fig. 17 é mostrada uma ampliação da malha deformada na vizinhança do centro do disco. Nesta figura é evidente a dificuldade de se observar o campo de deslocamento devido ao alto grau de refinamento da malha.

Na Fig. 18 é mostrada uma malha deformada<sup>10</sup> utilizada para discretizar o problema do disco. Nesta figura, percebe-se que uma região central do disco rotacionou. De fato, os cálculos realizados FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007) indicam que o centro do disco gira 180° com relação ao contorno externo do disco.

Percebe-se desta figura que todas as linhas radiais deformam-se de maneira similar, não havendo dependência do campo de deslocamentos de uma linha radial com o ângulo  $\theta$  desta linha. O argumento anterior originou a idéia de modelar o problema do disco de forma unidimensional em duas variáveis, onde o campo dos deslocamentos é dado por  $\mathbf{u}(r, \theta) = u_r(r)\mathbf{e}_r + u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$ , tal como foi descrito nas seções 4.1.2 e 4.3.2.

$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{12}$	$C_{66}$
$10^5$	$10^4$	$10^3$	$10^3$

**Tab. 3: Contastes elásticas utilizadas por FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007), associadas à bifurcação da solução do problema de Lekhnitskii.**

$C_{11}$	$C_{22}$	$C_{12}$	$C_{66}$
$10^5$	$10^4$	$10^3$	$10^5$

**Tab. 4: Contastes elásticas utilizadas por FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007), associadas à solução unidimensional em uma variável do problema de Lekhnitskii.**

<sup>10</sup> A malha mostrada na Fig. 18: Ampliação na vizinhança do centro da malha da figura 17, utilizada para obter a bifurcação da solução do problema de Lekhnitskii. Fig. 18 é uma malha pouco refinada com relação à malha da Fig. 17. A malha da Fig. 18 é utilizada pelos autores apenas para facilitar a visualização do fenômeno que ocorre na Fig. 17.

A Fig. 19 mostra a distribuição, em uma região próxima ao centro do disco, do valor do determinante do gradiente de deformação para a solução de bifurcação do problema de Lekhnitskii. Observa-se desta figura que a restrição é positiva e que em todos os pontos do disco em uma região anular ela é ativa, ou seja,  $\det \nabla \mathbf{F} = \varepsilon = 0.1$ .

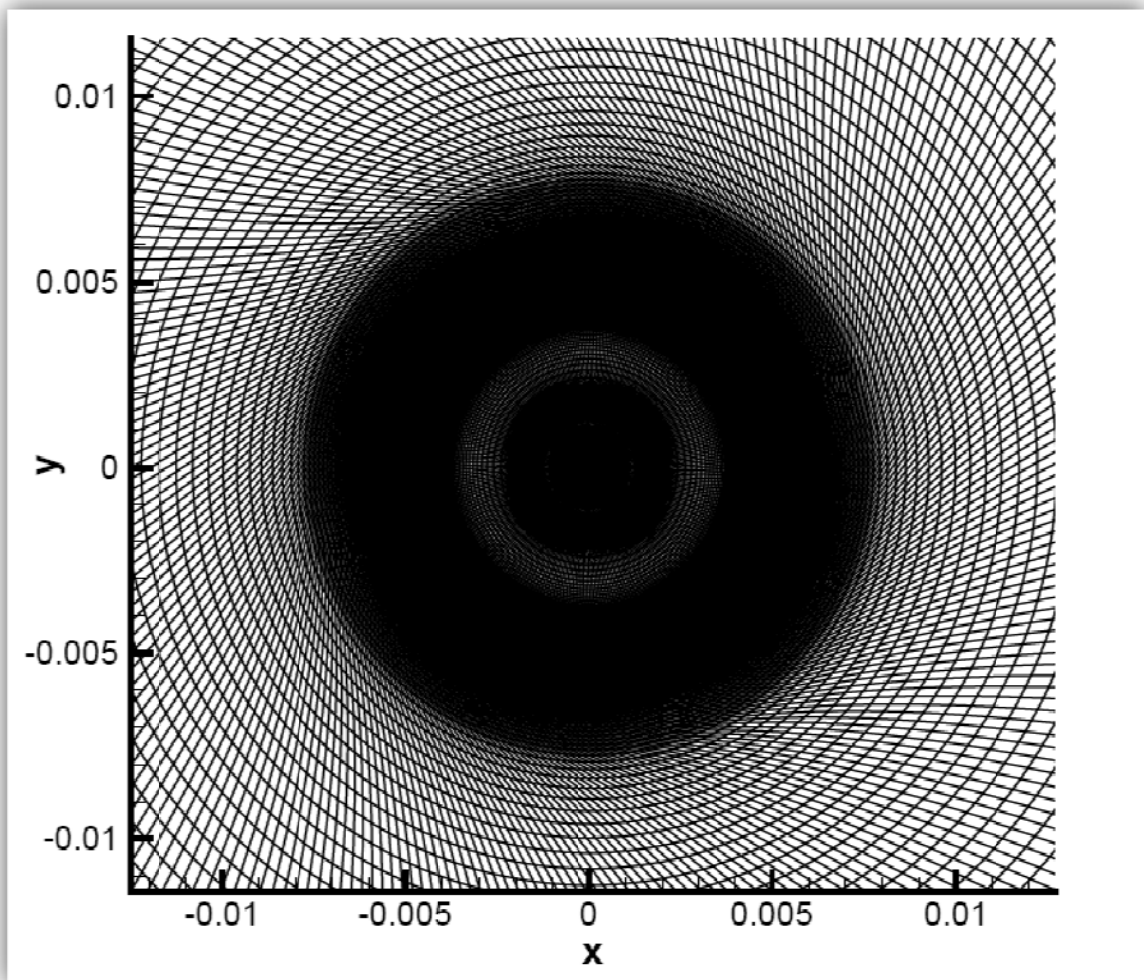


Fig. 17: Ampliação na vizinhança da malha utilizada para obter a bifurcação da solução do problema de Lekhnitskii: malha deformada.

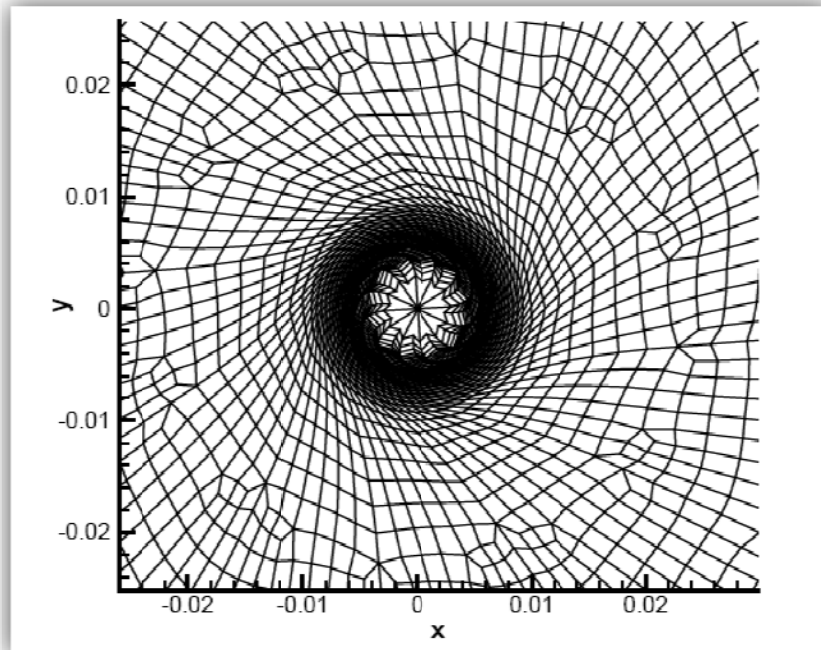


Fig. 18: Ampliação na vizinhança do centro da malha da figura 17, utilizada para obter a bifurcação da solução do problema de Lekhnitskii.

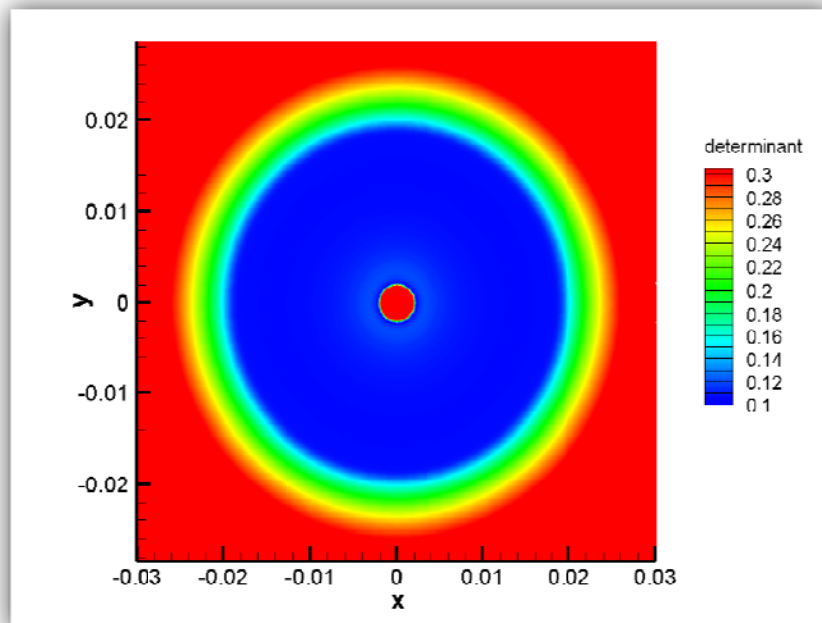


Fig. 19: Determinante do gradiente da deformação do problema de Lekhnitskii, ampliação na vizinhança do centro.



Deste ponto em diante apresentam-se resultados originados do modelamento numérico dos problemas unidimensionais com restrição em uma e em duas variáveis, os quais foram apresentados nas seções 4.3.1 e 4.3.2, respectivamente.

Utiliza-se o método das penalidades interiores, exposto na Seção 3.2.3, juntamente com as técnicas de minimização sem restrições de Newton apresentadas na Seção 3.1, para resolver numericamente o problema do anel sujeito à restrição de injetividade (4). Tal problema é descrito nas seções 4.2 e 4.3.

Originalmente, no problema de Lekhnitskii, o disco é comprimido radialmente por uma pressão uniforme. FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007) aplicam, no entanto, um deslocamento radial no contorno do disco e não uma força como no problema original. Na procura de resultados similares aos encontrados por FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007), modelou-se o problema unidimensional em duas variáveis impondo um deslocamento radial no contorno externo do anel. Os dados geométricos utilizados para o desenvolvimento numérico do problema do anel com restrição são o raio externo do anel,  $r_e = 1$ , e o raio interno do anel,  $r_i = 10^{-3}$ . O deslocamento radial aplicado no contorno externo do anel foi o equivalente ao produzido por um carregamento radial de compressão<sup>11</sup>,  $q = 500$ . O valor do limite inferior da restrição de injetividade (4) é  $\varepsilon = 0.1$ . As constantes elásticas utilizadas encontram-se na Tab. 2.

A Fig. 20 mostra a solução exata do problema do anel, representada pela linha sólida preta, e as aproximações numéricas, calculadas com 64 elementos e representadas pelas linhas tracejadas. Descreve-se a seqüência de aproximações numéricas gerada pelo método das

---

<sup>11</sup> O valor  $q = 500$  é utilizado por OBEIDAT, et al. (2001) e FOSDICK e ROYER-CARFAGNI (2001) no modelamento numérico e teórico, respectivamente, do problema do disco com restrição.

penalidades interiores à medida que  $\delta \rightarrow 0$  em (155). No lado direito da figura mostra-se uma ampliação na vizinhança do raio interno. Observa-se que a solução numérica aproxima-se da solução analítica à medida que o valor de  $\delta$  tende a zero.

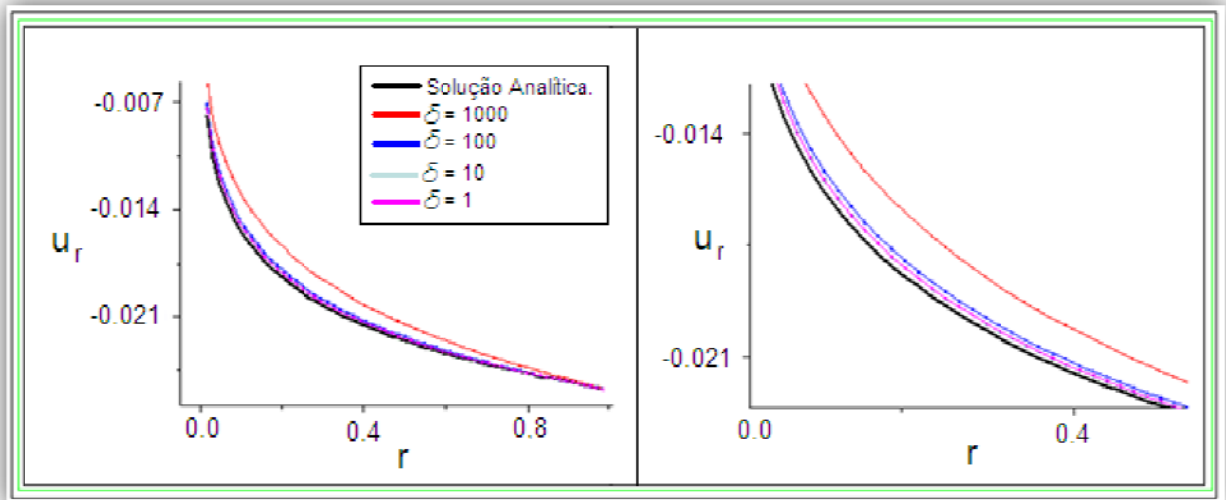


Fig. 20: Seqüência de aproximações numéricas geradas pelo método das penalidades à medida que  $\delta \rightarrow 0$ .

Na Fig.21 mostra-se a convergência da solução aproximada do problema do anel sujeito à restrição (4) com relação ao número de elementos finitos. A solução analítica exata é indicada em preto e as aproximações numéricas são apresentadas em cores, tal e como indicado na figura. Pode-se observar como a seqüência de soluções numéricas, obtidas incrementando  $M$  converge para a solução exata do problema com restrição. Mostra-se uma ampliação para facilitar a visualização das aproximações numéricas.

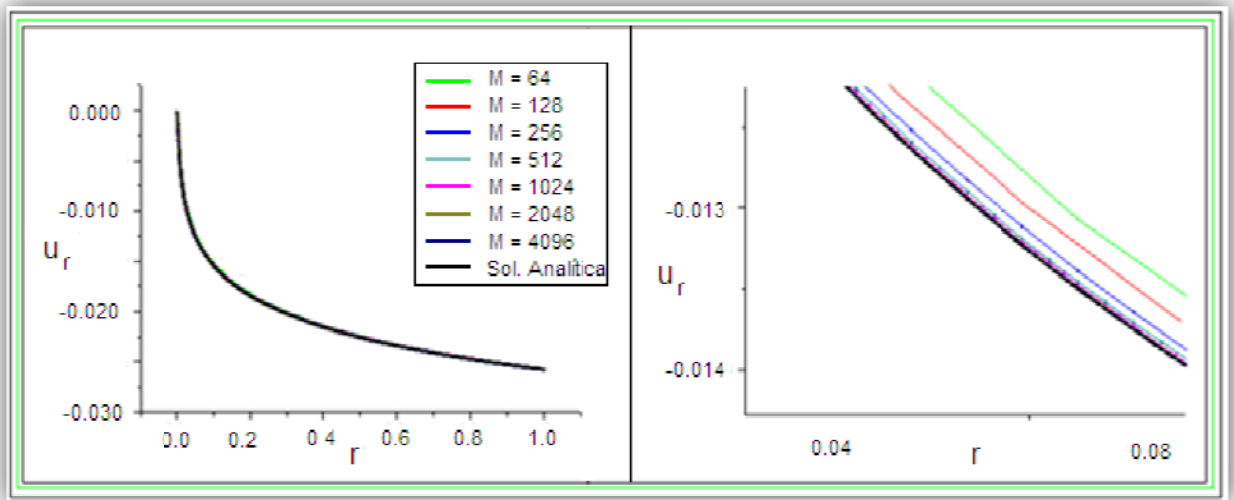


Fig.21: Convergência do problema do anel sujeito à restrição de injetividade com relação ao número de elementos finitos.

As soluções numéricas dos problemas com restrição em uma e em duas variáveis são idênticas e seguem o comportamento mostrado na Fig.21, ou seja, não foi encontrada nenhuma bifurcação no modelo em duas variáveis. Acredita-se que estes resultados não foram conseguidos devido ao baixo grau de refinamento da malha utilizada. FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007) notam que a bifurcação da solução do problema de Lekhnitskii é possível apenas com uma malha de elementos finitos bem refinada na região central, os autores não indicam qual é a ordem de grandeza do tamanho do menor elemento finito com que eles obtiveram a bifurcação da solução, mas esclarecem para uma malha na qual o tamanho do menor elemento finito era  $10^{-7}$  os resultados não foram positivos. Neste estudo, tentou-se discretizar o problema com uma malha bem refinada, mas quando o tamanho do elemento finito utilizado era inferior a  $10^{-6}$  verificou-se um erro numérico ocasionado pela precisão do

programa utilizado<sup>12</sup>. Assim, quando o tamanho do elemento finito era menor do que  $10^{-6}$  a solução obtida era instável, pois ela mudava dependendo do valor utilizado como critério de parada nos métodos de minimização.

### 5.3 O Problema do Anel em Relação ao Disco Sem Furo

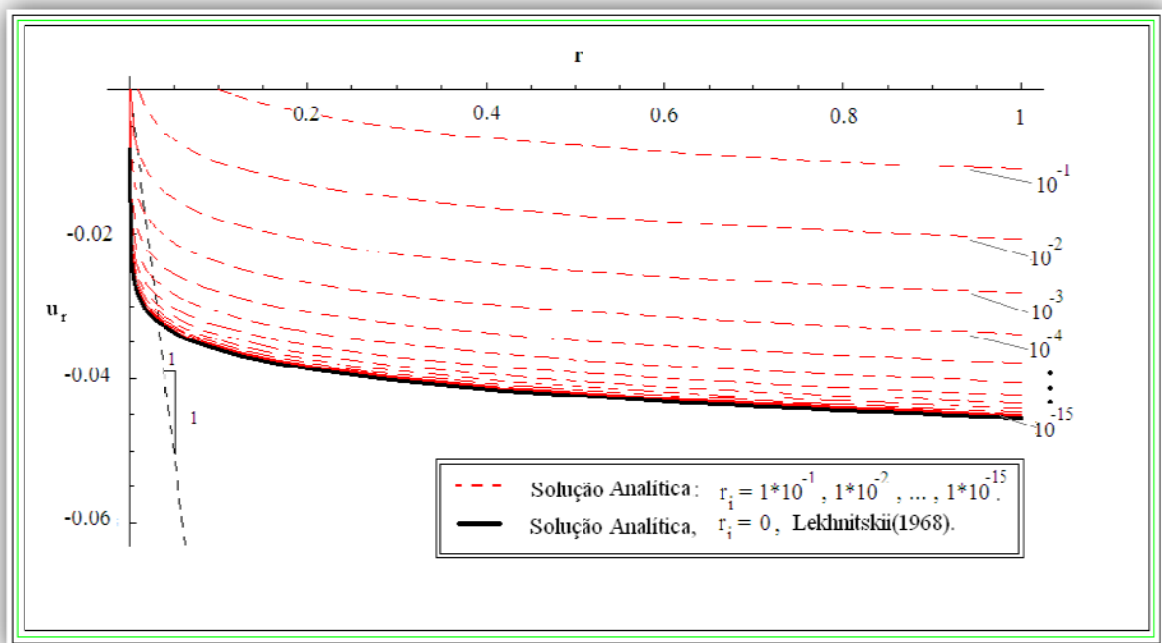
Lembre-se da Seção 4.1 que a solução do problema do anel, no contexto da teoria linear clássica prediz o fenômeno da auto-intersecção. Este problema é diferente com relação aos outros exemplos encontrados na literatura, pois o mesmo não possui nenhuma singularidade no campo das tensões, ou seja, todas as tensões possuem um valor numérico finito.

Nesta seção mostram-se resultados numéricos e analíticos para o problema do anel que indicam a existência do fenômeno da auto-intersecção no contexto da elasticidade linear clássica. Apresentam-se também resultados que permitem concluir que a solução numérica do problema do anel sujeito à restrição de injetividade (4) converge para a solução numérica do problema do disco sem furo, ou, problema de Lekhnitskii sujeito também à restrição (4). Finalmente, apresentam-se alguns resultados do problema do anel indicando a convergência do determinante do gradiente de deformação. Os resultados apresentados neste capítulo foram obtidos utilizando as constantes elásticas da Tab. 4 e o raio externo do disco  $r_e = 1.0$ . O raio interno do disco  $r_i$  varia de acordo com a análise que se deseja realizar. Aplica-se um carregamento radial de compressão  $q = 500$ . O valor limite inferior na restrição de injetividade (4) é  $\varepsilon = 0.1$ .

---

<sup>12</sup> FORTRAN 90.

Na Fig. 22 apresentam-se a solução analítica do problema do disco sem restrição e uma seqüência de soluções do problema do Anel sem restrição. A seqüência de soluções analíticas do problema do Anel sem restrição é gerada para vários valores do raio interno, o qual é diminuído até valores próximos de zero. A soluções analíticas do problema do anel são representadas pelas linhas tracejadas em vermelho e a solução analítica do problema do disco, representada pela linha sólida em preto.



**Fig. 22: Convergência com relação ao tamanho do furo das soluções analíticas do problema do anel sem restrição para a solução analítica do problema de Lekhnitskii sem restrição.**

Ambas as soluções foram encontradas no contexto da teoria de elasticidade linear clássica e estão descritas na Seção 4.1.1. Esta figura apresenta o deslocamento radial versus o raio do disco, indicando que, à medida que  $r_i \rightarrow 0$ , a solução do anel tende para a solução do problema sem furo, a qual não é uma solução fisicamente admissível. A linha tracejada em azul identifica

o limite da zona onde ocorre o fenômeno da auto-intersecção, ou seja, a intersecção de cada uma das soluções com esta linha define o raio da região de auto-intersecção. Os argumentos anteriores juntamente com os resultados apresentados na Fig. 22 mostram que a solução do disco com furo, um problema sem singularidade no campo das tensões, exibe o fenômeno anômalo da auto-intersecção. Esta conclusão numérica é provada analiticamente na Seção 4,2,2

A Fig. 23 descreve a convergência com relação ao tamanho do elemento finito da solução numérica do problema do anel sem restrição para a solução analítica deste. As linhas verdes representam as soluções numéricas e a linha preta refere-se à solução analítica do problema do anel. O raio interno utilizado nos cálculos foi  $r_i = 10^{-2}$ .

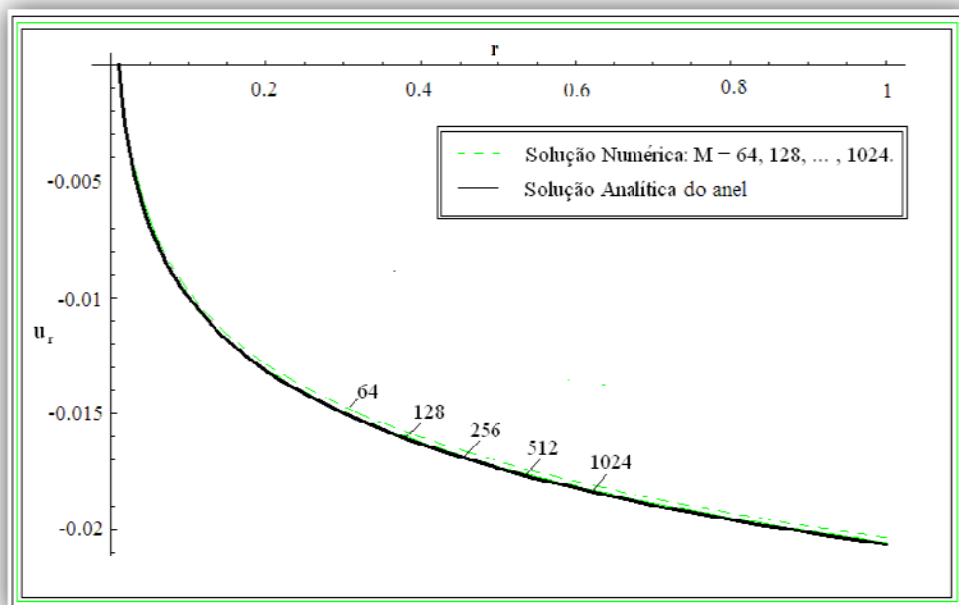


Fig. 23: Convergência com relação ao tamanho do elemento finito da aproximação numérica do problema do anel sem restrição para a solução analítica do mesmo problema, considerando  $r_i = 10^{-2}$ .

A Fig. 24 apresenta resultados de convergência relacionados aos resultados da Fig. 23 utilizando a norma  $H_1$ . A figura apresenta o logaritmo na base 2 da norma  $H_1$  versus o logaritmo na base 2 do número de elementos finitos. Esta figura indica que a solução numérica de um anel com  $r_i = 10^{-2}$  converge rapidamente para a solução analítica do mesmo problema.

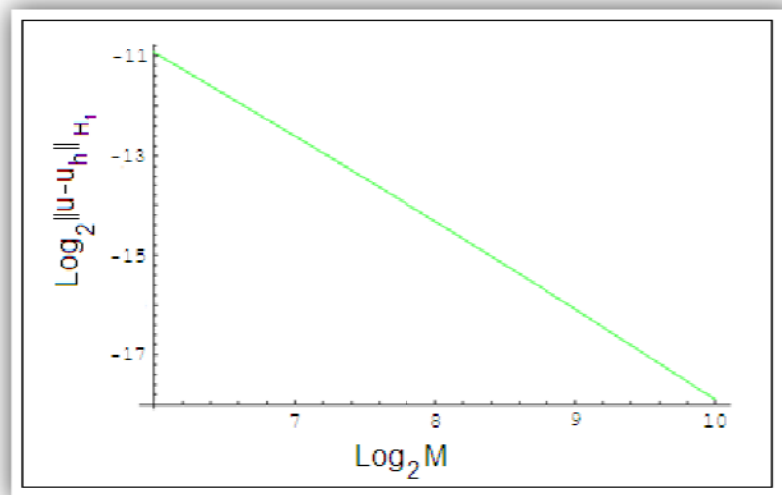


Fig. 24: Análise de convergência com relação ao tamanho do elemento finito do problema do anel sem restrição para sua solução analítica, considerando  $r_i = 10^{-2}$ .

A Fig. 25 apresenta resultados de convergência com relação ao tamanho do elemento finito da solução numérica do problema do anel sem restrição para a solução analítica do mesmo problema. As linhas tracejadas em verde representam as soluções numéricas e a linha sólida em preto refere-se à solução analítica do problema do anel. O raio interno utilizado nos cálculos foi  $r_i = 10^{-7}$ .

A Fig. 26 apresenta resultados de convergência relacionados aos resultados da Fig. 25, utilizando a norma  $H_1$ . A figura apresenta o logaritmo na base 2 da norma  $H_1$  versus o logaritmo na base 2 do número de elementos finitos. Nota-se, comparando a Fig. 26 e a Fig. 27, a queda na precisão da aproximação devido à diminuição do raio interno do anel.

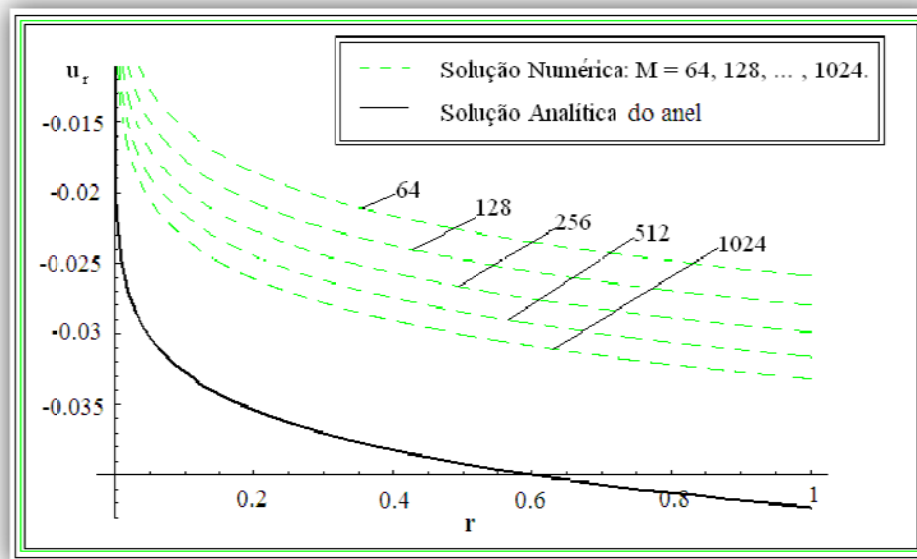


Fig. 25: Convergência da aproximação numérica para a solução analítica do problema do anel sem restrição, considerando  $r_i = 10^{-7}$ .



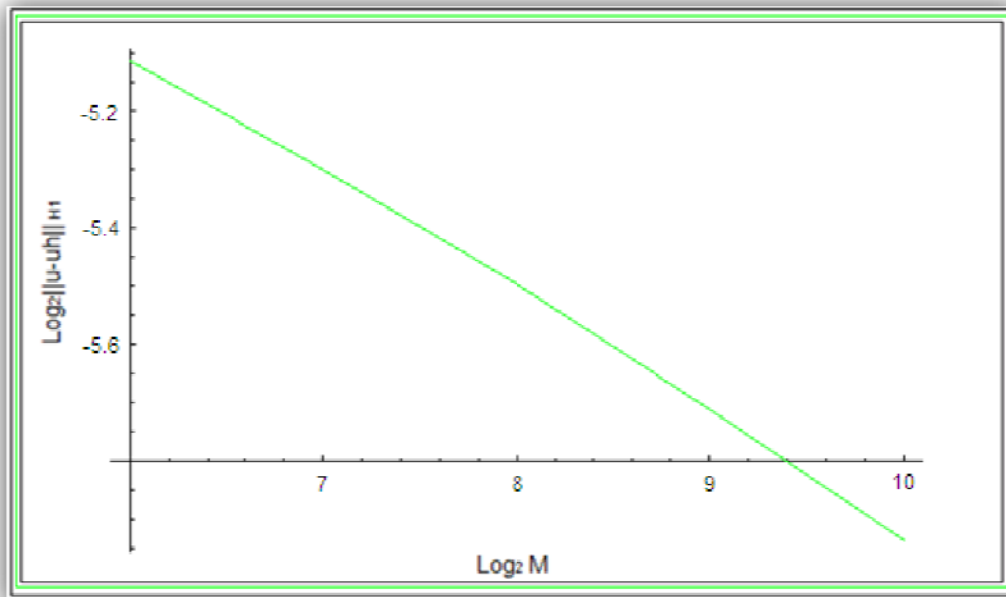


Fig. 26: Análise de convergência com relação ao tamanho do elemento finito do problema do anel sem restrição, para a solução analítica, considerando  $r_i = 10^{-7}$ .

Uma análise dos resultados mostrados da Fig. 23 à Fig. 26 juntamente com os resultados apresentados na Fig. 22 permitem concluir que, à medida que  $r_i \rightarrow 0$ , a convergência começa a apresentar problemas similares aos descritos na Fig. 15 e na Fig. 16, ou seja, a norma do erro indica valores relativamente grandes para uma quantidade elevada de elementos.

A Fig. 27 apresenta o deslocamento radial aproximado numericamente versus o raio do disco. Nela são mostradas a solução numérica do problema do disco sem restrição e uma seqüência de soluções numéricas do problema do anel sem restrição, onde tal seqüência é criada diminuindo o tamanho do furo, o problema do anel sem restrição e o problema do disco são descritos na Seção 4.1. Nesta figura, as linhas tracejadas em vermelho representam as soluções numéricas para os diferentes raios internos, a linha contínua em preto representa a solução numérica do problema de Lekhnitskii, para o qual  $r_i = 0$ . As soluções aproximadas

contidas neste gráfico foram calculadas com uma malha de 64 elementos, distribuídos em uma linha radial do disco. Os resultados desta figura indicam que a solução numérica do problema do anel sem restrições converge para a solução numérica do problema do disco sem furo, ou, problema de Lekhnitskii, isto à medida que o tamanho do raio interno do anel tende a zero.

A Fig. 28 apresenta o logaritmo na base 10 da norma  $\mathbb{R}^n$  versus o logaritmo na base 10 do tamanho do furo, indicando claramente que a solução numérica do anel converge rapidamente para a solução numérica do disco de Lekhnitskii à medida que o raio interno do disco tende a zero.

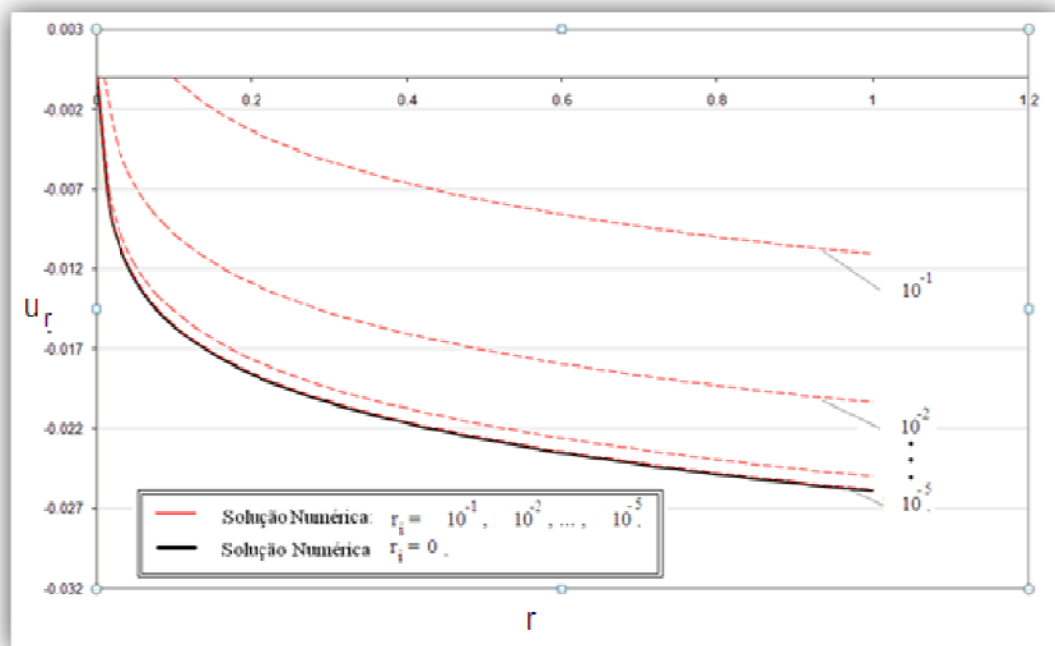


Fig. 27: Convergência da aproximação numérica do anel com restrição para a solução numérica do disco de Lekhnitskii à medida que  $r_i \rightarrow 0$ .  $M= 64$ .

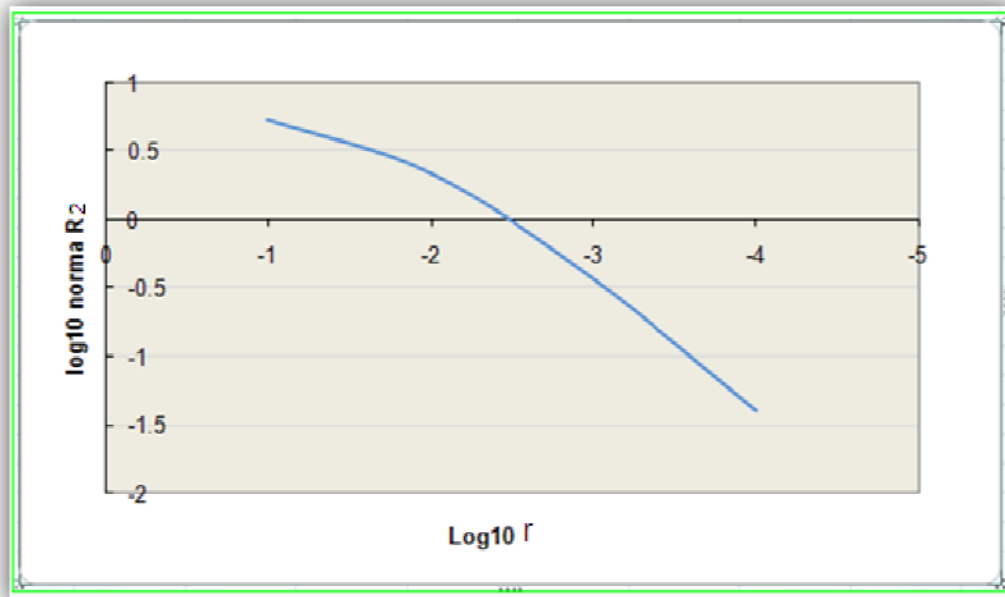


Fig. 28: Análise de convergência da aproximação numérica do anel com restrição para a solução numérica do disco de Lekhnitskii à medida que  $r_i \rightarrow 0$ .

Na Fig. 29 é mostrado o determinante do gradiente de deformação calculado da solução exata, o qual está representado em preto e as correspondentes aproximações numéricas do problema do anel com restrições, as quais foram obtidas de diferentes malhas e estão representadas por linhas coloridas. As malhas indicadas na figura, do tipo AA/BB/CC, estão distribuídas em três regiões: AA elementos entre  $r_i \leq r < 0.07 r_e$ , BB elementos entre  $0.07 r_e \leq r < 0.46 r_e$ , CC elementos entre  $0.46 r_e \leq r < r_e$ . O raio interno do anel é  $r_i = 10^{-3}$ . Observa-se da figura a boa concordância entre as aproximações numéricas e a solução analítica.

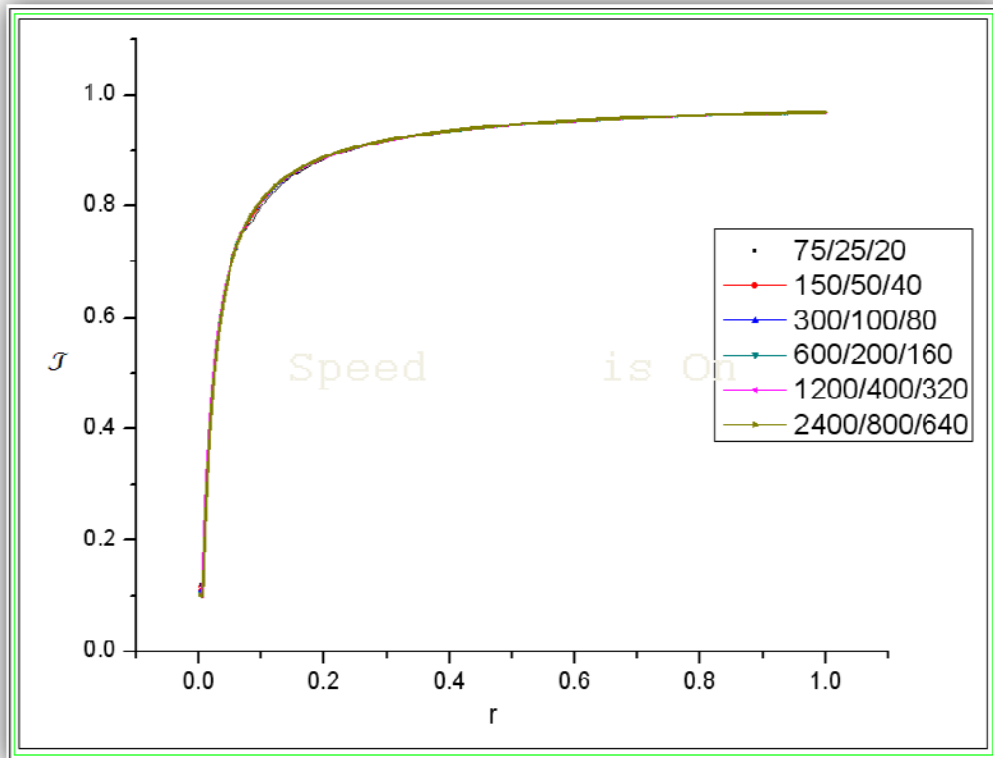


Fig. 29: Convergência com relação a  $M$  do determinante do gradiente de deformação,  $J$ , do problema do anel.

A Fig. 30 mostra o determinante do gradiente de deformação em uma vizinhança do raio interno do anel. O determinante foi calculado da solução exata, representado pela linha preta e das correspondentes aproximações numéricas do problema com restrições, as quais foram obtidas de diferentes malhas e estão representadas por linhas coloridas. Observa-se que a restrição é ativa,  $J = \varepsilon$ , para  $r < r_a \cong 0,0055$ . Nota-se também que a aproximação numérica do determinante do gradiente de deformação em uma vizinhança do raio interno converge para a solução analítica à medida que a malha é refinada.

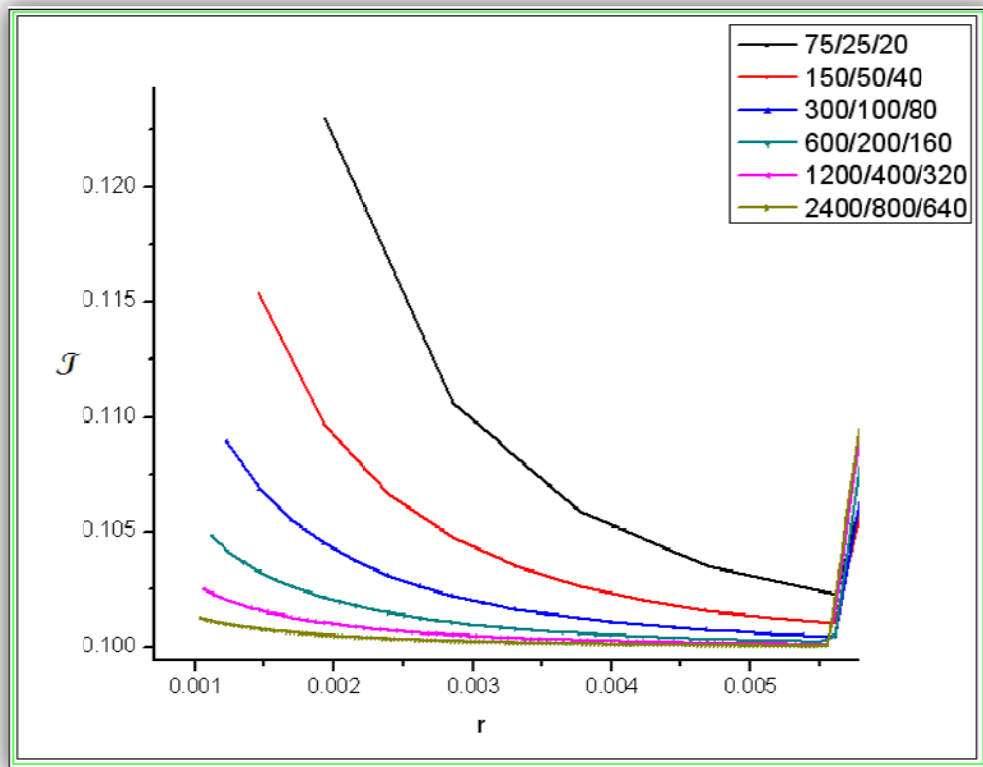


Fig. 30: Convergência com relação a  $M$  do determinante do gradiente de deformação do problema do anel em uma vizinhança do furo  $r_i = 10^{-3}$ .

A Fig. 32 apresenta o determinante do gradiente de deformação calculado da aproximação numérica do disco sem furo, sujeito à restrição de injetividade (4), obtida para uma malha 75/25/20, o qual indica que são 75 elementos entre  $r_i \leq r < 0.07 r_e$ , 25 elementos entre  $0.07 r_e \leq r < 0.46 r_e$  e 20 elementos entre  $0.46 r_e \leq r < r_e$ . O raio interno do anel é  $r_i = 10^{-3}$ . Com a consideração de um raio interno diferente de zero, nota-se uma perda na qualidade da convergência do determinante na região onde a restrição é ativa, ou seja, para  $r_i \leq r \leq r_a$ . Esta observação surge da comparação entre a Fig. 32 e a Fig. 30, pois, para uma malha pouco refinada - 75/25/20 - a aproximação numérica para o disco sem furo é melhor do que a aproximação numérica para uma malha muito refinada do anel.

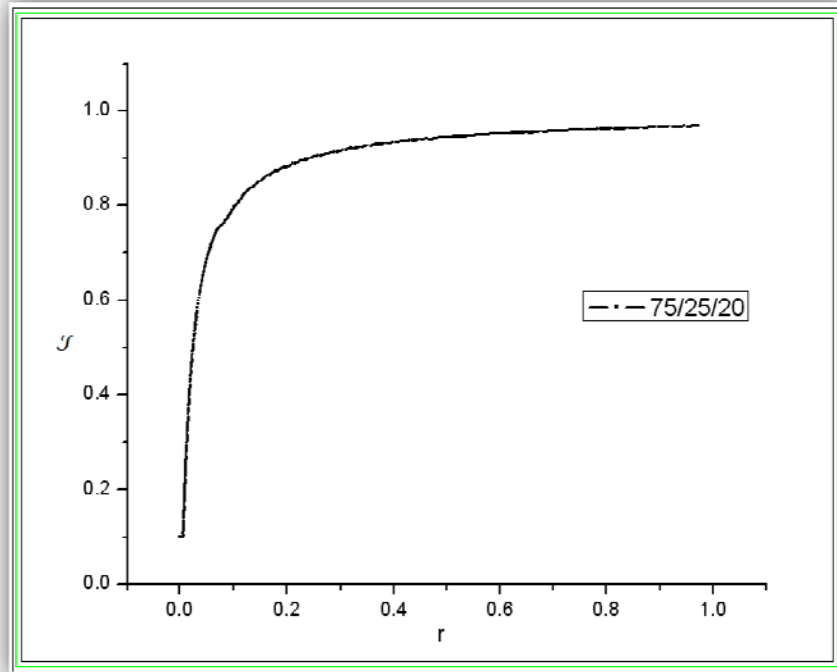


Fig. 31: Comportamento do determinante do gradiente de deformação para o problema de Lekhnitskii, considerando a malha 75/25/20.

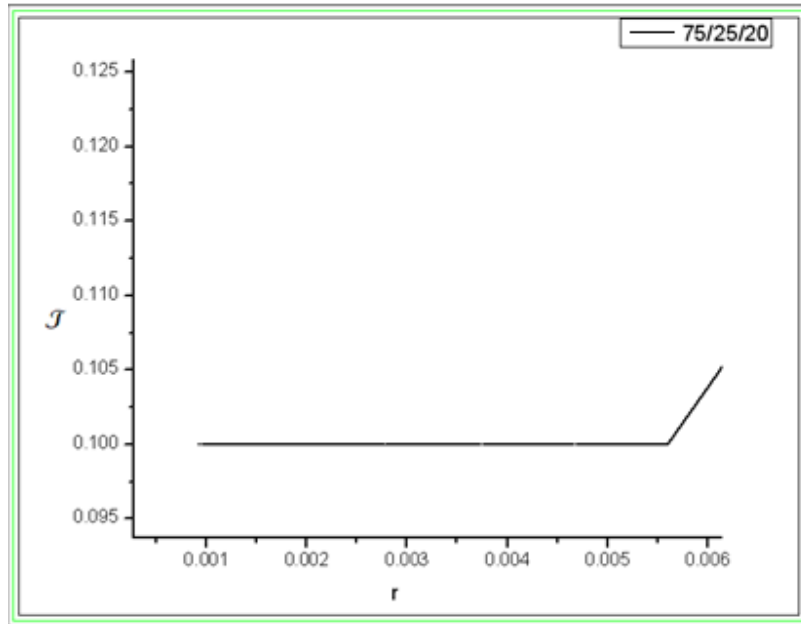


Fig. 32: Ampliação na vizinhança de  $r_a$  do comportamento do determinante do gradiente de deformação do problema de Lekhnitskii, considerando a malha 75/25/20.

## 6 CONCLUSÕES

Neste trabalho foi realizado um estudo do problema de um anel anisotrópico sob compressão radial. Os resultados mostram que a solução do problema do anel prediz o fenômeno anômalo da auto-intersecção, apesar de não apresentar singularidades no seu campo de tensão.

Minimizando-se o funcional da energia potencial de elasticidade clássica, dado por (121)b, sujeito à restrição (4) foram obtidos resultados numéricos que eliminaram o comportamento anômalo da auto-intersecção. Estes resultados foram obtidos com um campo de deslocamento dado por  $\mathbf{u}(r, \theta) = u_r(r)\mathbf{e}_r$ . Este campo é solução do problema unidimensional em uma variável discutido na seção 4.3.1.

Baseados em resultados obtidos por FOSDICK, FREDDI e ROYER-CAFAGNI (2007), estudou-se a possibilidade de encontrar uma solução rotacionalmente simétrica, da forma  $\mathbf{u}(r, \theta) = u_r(r)\mathbf{e}_r + u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$ , do problema unidimensional em duas variáveis, discutido na seção 4.3.2. Os resultados obtidos neste trabalho para a modelagem unidimensional em duas variáveis indicam que  $u_\theta(r) = 0$ , ou seja, a modelagem unidimensional em uma e em duas variáveis fornecem o mesmo campo de deslocamento.

Acredita-se que resultados numéricos que verifiquem a existência de uma distribuição de deslocamentos do tipo  $\mathbf{u}(r) = u_r(r)\mathbf{e}_r + u_\theta(r)\mathbf{e}_\theta$  ainda não foram alcançados devido ao baixo grau de refinamento da malha utilizada. Neste trabalho, tentou-se utilizar uma malha bem refinada, mas obtinha-se um erro numérico ocasionado pela precisão do programa utilizado<sup>13</sup>.

---

<sup>13</sup> FORTRAN 90



Notou-se que a solução exata do problema do anel sem restrição converge para a solução exata do problema de Lekhnitskii à medida que o raio interno do anel tende a zero. As aproximações numéricas do problema do anel também convergem para a solução numérica do problema de Lekhnitskii, tanto para o problema com restrição como para o problema sem restrição.

Com a consideração de um raio interno diferente de zero, notou-se uma perda na qualidade da convergência do determinante do gradiente de deformação na região onde a restrição é ativa, ou seja, na região onde  $r < r_a$ .

## 7 BIBLIOGRAFIA

AGUIAR, A. R. "Local and global injective solutions of the rotationally symmetric sphere problem." *Journal of Elasticity*, 2006: 99-129.

AGUIAR, A. R. "A Numerical Treatment of Material Overlapping in Elasticity". In: XXV CILAMCE - Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2004, Recife. Recife, 2004.

AGUIAR, A. R., e SÁNCHEZ, J. A. "Investigação da convergência de soluções aproximadas de problemas singulares em elasticidade anisotrópica." *13º Simpósio Internacional de Iniciação Científica da Universidade de São Paulo (SICUSP)*. São Carlos, 2005.

AGUIAR, A., e FOSDICK, R. "Self-intersection in elasticity." *International Journal of Solids and Structures*, 2001: 4797-4823.

AGUIAR, A. R. ; FOSDICK, R. L. . Self-Intersection in an Anisotropic Solid in the Absence of Singularity - Part I: Analytic, Pan-American Congress of Applied Mechanics - PACAM X, 2008, Cancún. Proceedings of PACAM X, 2008.

AGUIAR, A. R., FOSDICK, R. L. e SÁNCHEZ, J. A. G. "A study of penalty formulation used in the numerical approximation of a radially symmetric elasticity problem". Recomendado para publicação em "Journal of Mechanics of Materials and Structures", 2008a.

AGUIAR, A. R., FOSDICK, R. L. e SÁNCHEZ, J. A. G. Anisotropic Solid in the Abs, Singularity - Part II: Computational Results. In: Tenth Pan American Congress of Applied Mechanics - PACAM X, 2008, Proceedings of PACAM X, 2008b.

ARAVAS, N., e SHARMA, M. "An elastoplastic analysis of the interface crack with contact zones." *Journal of Mechanics and Physical Solids*, 1991: 311-344.

ATKINSON, C. "On stress singularities and interfaces in linear elastic fracture mechanics." *Internacional Journal of Fracture*, 1977: 807-820.

COMNINOU, M. "An Overview of Interface Cracks." *Engineering Fracture Mechanics*, 1990: 197-208.

COMNINOU, M.. "The interface crack." *Journal of Applied Mechanics*, 1977: 631-636.

ENGLAND, A. H. "A crack between dissimilar media." *Journal of Applied Mechanics*, 1965: 400-402.

FOSDICK, R., e ROYER-CARFAGNI, G. "The constraint of local injectivity in linear elasticity theory." *Proceedings of the Royal Society of London*, 2001: 2167-2187.

FOSDICK, R., FREDDI F., e ROYER-CAFAGNI, G. "Bifurcation instability in linear elasticity with the constraint of local injectivity." *Journal of Elasticity*, 2007.

FOX, RICHARD L. *Optimization Method for Engineering Desing*. Addison-Wesley Publishing Co, 1971.

GURTIN, M.E. *An introduction to continuum mechanics*. New York: Academic Press, 1981.

KNOWLES, J. K. "A nonlinear effect in mode II crack problems." *Engng Fracture Mech.*, 1981: 469-476.

KNOWLES, J.K., e STERNBERG, E. "On the singularity induced by certain mixed boundary conditions in linearized and nonlinear elastostatics." *Journal os Solids and Structures*, 1975: 1173-1201.

LEKHNITSKII S.G. *Anisotropic Plates*. New York: Gordon & Breach, 1968.

LEKHNITSKII, S.G. *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*. Edição: Julius J. Brandstatter. San Francisco: Holden-Day, 1963.

LUENBERGER, DAVID. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley Publishing Co, 1989.

MUSKHELISHVILI, N.I. *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. New York: P. Noordoff and Company, 1933.

NEGRÓN-MARRERO, P. V., e ANTMAN, S.S. "Singular global bifurcation problems for the buckling of anisotropic plates." *Proceedings of the Royal Society of London*, 1989: 95-37.

OBEIDAT, K., STOLARSKI, H., FOSDICK, R. e ROYER-CARFAGNI, G.. "Numerical analysis of elastic problems with injectivity constraints." *European Conference on Computational Mechanics (ECCM-2001)*. 2001.

OGDEN, R.W. *Non-linear elastic deformations*. Mineola, N.Y: Dover, 1997.

RICE, J. R., e SIH, G. C.. "Plane problems of cracks in dissimilar media." June de 1965: 418-423.

Sih, G. C., e Rice, J. R.. "The Bending of Plates of Dissimilar Materials With Cracks." *Journal of Applied Mechanics*, 1964: 477-482.

TING, T.C.T. *Anisotropic Elasticity*. New York: Oxford University Press, 1996.

TING, T.C.T. "The Remarkable Nature of Radially Symmetric Deformation of Spherically Uniform Linear Anisotropic Elastic Solids." *Journal of Elasticity*, 1999: 47-64.

WILLIAMS, M. L. "The stresses around a fault or crack in dissimilar media." April de 1959: 199-204.

ANSYS 10.0, Inc. and ANSYS Europe, Technical Reference (2005).

FORTRAN 90 – Visual Fortran from Versions 6.0 through 6.6. Houston, Texas: Compaq Computer Corporation. Technical References (2001).

## Anexo A - Álgebra Linear

Nesta seção resumem-se alguns conceitos e definições importantes de tensores e vetores. A exposição feita aqui limitou-se ao espaço pontual Euclidiano tridimensional  $\mathbb{E}^3$ . Neste espaço, escolheu-se um ponto de origem,  $\sigma$ , de onde emanam três eixos mutuamente ortogonais, cujas direções são dadas pelos respectivos versores de base  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

### A.1 Espaços Vetoriais

Define-se como espaço vetorial  $\mathcal{V}$  a estrutura algébrica dada pelo conjunto dos vetores geométricos  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  que satisfazem as propriedades abaixo.

Na soma,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}, \\ \mathbf{u} + \mathbf{v} &= \mathbf{v} + \mathbf{u}, \\ \mathbf{u} + \mathbf{0} &= \mathbf{u}, \\ \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) &= \mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{158}$$

Na multiplicação por escalar. Se  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , então

$$\begin{aligned}\alpha(\beta\mathbf{u}) &= \alpha\beta\mathbf{u}, \\ 1\mathbf{u} &= \mathbf{u}, \\ (\alpha + \beta)\mathbf{u} &= \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}, \\ \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) &= \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}.\end{aligned}\tag{159}$$

No produto interno,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}, \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{u},\end{aligned}$$

$$\alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \alpha \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad (160)$$

A norma, ou, magnitude de um vetor se define como

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{\frac{1}{2}}. \quad (161)$$

O produto interno, ou, produto escalar pode ser interpretado geometricamente como

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos(\theta), \quad (162)$$

onde  $\theta$  é o ângulo formado pelos vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ .

É oportuno definir o produto vetorial ( $\wedge$ ), cujo resultado é outro vetor ( $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ )  $\in \mathcal{V}$ , com as seguintes propriedades

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}, \\ (\alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} &= \alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{w}) + \beta(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) &= 0, \\ (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (163)$$

Define-se espaço Euclidiano  $\mathbb{E}^3$  ao conjunto de pontos  $x, y, \dots, z$ , tal que para cada par de pontos se define um vetor de  $\mathcal{V}$ . À relação de dois pontos  $x, y \in \mathbb{E}^3$  é associado um vetor  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ , que é expresso pela operação diferença

$$\mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{v}. \quad (164)$$

A operação (164) obedece às seguintes regras,

$$\begin{aligned} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + (\mathbf{x} - \mathbf{z}) &= (\mathbf{y} - \mathbf{z}), \\ \mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{v} &= \mathbf{v} + \mathbf{x}. \end{aligned} \quad (165)$$

Fixando uma origem  $\sigma \in \mathbb{E}^3$ , existe uma equivalência entre pontos e vetores, pois para cada  $x$  há um vetor  $\mathbf{x} = x - \sigma$  associado.

## A.2 Bases e Coordenadas

Pode-se expressar qualquer vetor  $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$  como uma combinação linear de versores linearmente independentes  $\mathbf{e}_i, i = 1, 2, \dots, n$ , onde  $n$  é a dimensão do espaço. Assim, considerando soma implícita,

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i, \quad (166)$$

onde  $v_i$  são as coordenadas de  $\mathbf{v}$  na base  $\mathbf{e}_i$ . O conjunto de versores  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  é uma base para  $\mathcal{V}$ . A base é chamada ortonormal quando

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (167)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o Delta de Kronecker.

Sejam  $\{\mathbf{e}_i\}$  e  $\{\mathbf{e}'_i\}$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , bases coordenadas. Define-se a mudança entre bases da seguinte forma

$$\mathbf{e}'_i = a_{ij} \mathbf{e}_j, \quad (168)$$

onde  $a_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j$  são os coeficientes da matriz de mudança de base  $[\mathbf{A}]$ , ou seja, de forma matricial,

$$\{\mathbf{e}'_i\} = [\mathbf{A}]\{\mathbf{e}_i\}. \quad (169)$$

Assim, leva-se de uma base coordenada  $\{\mathbf{e}_i\}$  para outra base coordenada  $\{\mathbf{e}'_i\}$ .

## A.3 Definições e Operações com Tensores.

Existe especial interesse nos tensores de ordem 2 e 4, pois, com estes, consegue-se abarcar os objetivos deste trabalho.

Denomina-se tensor de ordem 2 sobre um espaço vetorial  $\mathcal{V}$  a uma transformação linear  $\mathbf{T}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ , tal que,



$$\mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{T}\mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad \mathbf{T}\mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (170)$$

Denomina-se o conjunto de tensores de ordem 2 sobre  $\mathcal{V}$  como  $\mathcal{V}^2$ .

Uma transformação linear  $\mathbf{T}$  satisfaz a relação

$$\mathbf{T}(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}) = \alpha(\mathbf{T}\mathbf{v}) + \beta(\mathbf{T}\mathbf{u}), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{v}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \quad (171)$$

Um tensor  $\mathbb{C}$  de ordem 4 é uma transformação linear de  $\mathcal{V}^2$  em  $\mathcal{V}^2$ , de modo que se  $\mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$ , então  $\mathbb{C}\mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$ .

Diz-se que dois tensores  $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$  são iguais se e somente se

$$\mathbf{S}\mathbf{v} = \mathbf{T}\mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (172)$$

Sendo  $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$ , a soma  $\mathbf{S} + \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$  é definida por

$$(\mathbf{S} + \mathbf{T})\mathbf{v} = \mathbf{S}\mathbf{v} + \mathbf{T}\mathbf{v}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (173)$$

Dados  $\mathbf{S}, \mathbf{T} \in \mathcal{V}^2$ , o produto por um escalar,  $\alpha\mathbf{S} \in \mathcal{V}^2$ , é obtido por

$$(\alpha\mathbf{S})\mathbf{v} = \alpha(\mathbf{S}\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (174)$$

As componentes de um tensor em uma base qualquer  $\{\mathbf{e}_i\}$  são definidas como as componentes escalares

$$S_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot (\mathbf{S}\mathbf{e}_j). \quad (175)$$

O produto de dois tensores se define mediante a notação indicial

$$\mathbf{U} = \mathbf{T}\mathbf{S} \Rightarrow U_{ij} = T_{ip}S_{pj}. \quad (176)$$

O produto tensorial de dois vetores  $\mathbf{u}, \mathbf{z} \in \mathcal{V}$  é definido como um tensor de ordem 2, de acordo com

$$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{z})\mathbf{v} = \mathbf{u}(\mathbf{z} \cdot \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (177)$$

Mediante o produto tensorial dos vetores da base, pode-se escrever o desenvolvimento de um tensor de ordem 2 em função de suas componentes,

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j. \quad (178)$$

Um tensor de 4ª ordem pode ser representado mediante a aplicação deste tensor sobre produtos tensoriais dos vetores da base como segue

$$\mathbb{C}_{ijkl} = (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \mathbb{C}(\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l). \quad (179)$$

Dado um tensor  $\mathbf{T}$ , define-se o tensor transposto,  $\mathbf{T}^T$ , como outro tensor que satisfaz

$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}^T\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}. \quad (180)$$

Assim, diz-se que um tensor é simétrico se  $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ . Se  $\mathbf{T}^T = -\mathbf{T}$ , o tensor é anti-simétrico.

Um tensor  $\mathbf{T}$  é inversível se existe outro tensor  $\mathbf{T}^{-1}$ , a inversa de  $\mathbf{T}$ , tal que

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{1}. \quad (181)$$

O traço de um tensor é uma operação tensorial linear que associa um tensor de ordem 2 a um escalar. Aplicado ao produto tensorial, obtemos

$$\text{tr}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}. \quad (182)$$

Diz-se que um tensor é positivo-definido quando

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{u}) > 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \mathbf{u} \neq 0. \quad (183)$$

Diz-se que um tensor é positivo-semidefinido quando

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}\mathbf{u}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}, \mathbf{u} \neq 0. \quad (184)$$

Seja  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  uma base ortonormal. Então, definem-se os coeficientes de permutação  $\epsilon_{ijk}$  da seguinte maneira

$$\epsilon_{ijk} = (\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}_k. \quad (185)$$

Assim,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{se a permutação } (i, j, k) \text{ é horária : } (1,2,3), (2,3,1), \text{ ou, } (3,1,2) \\ -1, & \text{se a permutação } (i, j, k) \text{ é anti-horária: } (1,3,2), (2,1,3), \text{ ou, } (3,2,1) \\ 0, & \text{se em } (i, j, k) \text{ algum índice está repetido.} \end{cases} \quad (186)$$

O determinante de um tensor é uma função escalar de argumento tensorial. O determinante de um tensor coincide com o determinante da matriz das componentes deste tensor associada a uma dada base, ou seja,

$$\det \mathbf{T} = \det[\mathbf{T}]. \quad (187)$$

Escrevendo (187) em função dos coeficientes de permutação definidos em (186), obtemos

$$\det \mathbf{T} = \epsilon_{pqr} T_{p1} T_{q2} T_{r3} = \epsilon_{pqr} T_{1p} T_{2q} T_{3r} \quad (188)$$

O determinante é uma operação tensorial intrínseca, ou seja, o resultado é invariante com relação à base adotada.

Uma interpretação geométrica do determinante de um tensor em  $\mathbb{R}^3$  pode ser dada por

$$\det \mathbf{T} = \frac{\text{vol}(\mathbf{L}(\mathcal{B}))}{\text{vol}(\mathcal{B})} = \frac{(\mathbf{L}\mathbf{v} \wedge \mathbf{L}\mathbf{w}) \cdot \mathbf{L}\mathbf{u}}{(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u}}, \quad (189)$$

Onde  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  são vetores nas direções coordenadas,  $\mathbf{L}(\mathcal{B})$  é a imagem de  $\mathcal{B}$  sob  $\mathbf{T}$  e  $\text{vol}(\cdot)$  designa o volume. É fácil mostrar, com (185), (188) e (189), que  $\mathbf{L} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ .

## Anexo B - Análise Tensorial

### B.1 Diferenciação

Sejam dados o espaços vetoriais normados  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{W}$  e o espaço vetorial formado pelos mapeamentos lineares contínuos de  $\mathcal{U}$  em  $\mathcal{W}$   $\mathbf{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ . Considere uma função  $f$  cujos argumentos são escalares, vetores, ou, tensores o seu domínio é o intervalo aberto  $\mathcal{V}$  contido em  $\mathcal{U}$  e sua imagem é  $\mathcal{W}$ , conforme ilustrado na Fig. 33, ou seja,

$$f: \mathcal{V} \subset \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}. \quad (190)$$

Diz-se que  $f$  diferenciável em um ponto  $a \in \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{V}$  aberto, se existir  $Df(a) \in \mathbf{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ , tal que

$$f(a + \mathbf{u}) = f(a) + Df(a)[\mathbf{u}] + \sigma(\mathbf{u}), \quad (191)$$

à medida que  $\mathbf{u} \rightarrow 0$ , onde

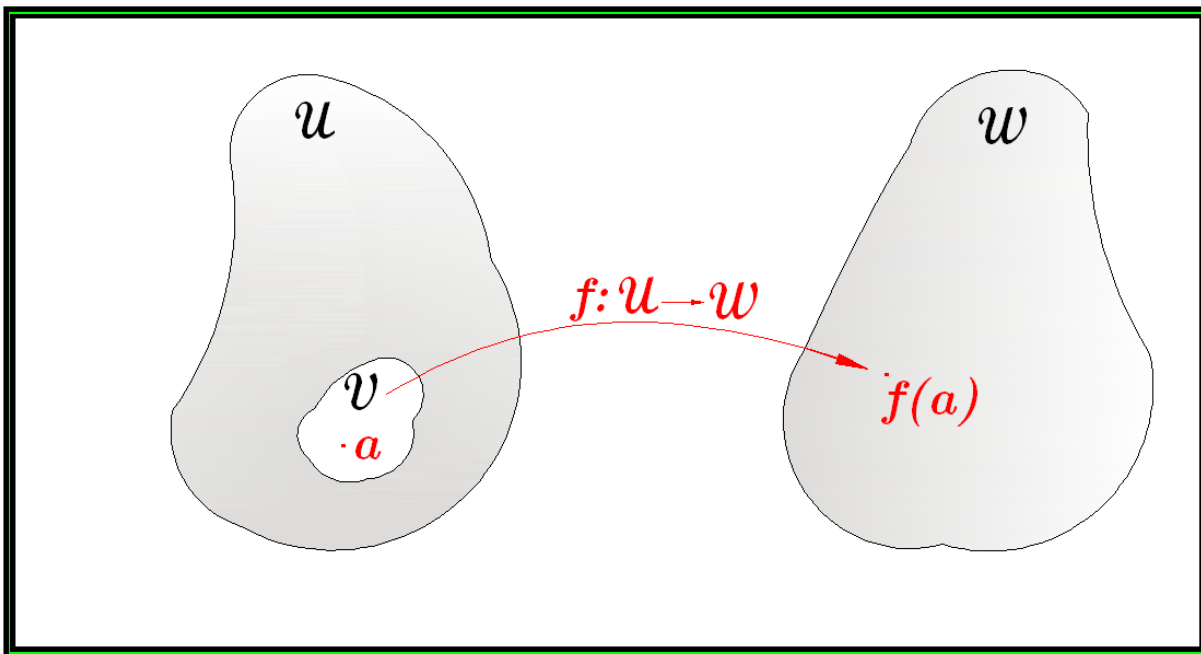


Fig. 33. Domínio e imagem da função  $f$ .

$$\sigma(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|\mathcal{E}(\mathbf{u}), \quad (192)$$

com  $\lim_{\mathbf{u} \rightarrow 0} \mathcal{E}(\mathbf{u}) = 0$  em  $\mathcal{W}$ .

Denomina-se  $Df(a) \in \mathbf{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$  a *derivada de Fréchet* da função  $f$  avaliada no ponto  $a$ , com as seguintes características:

- Se  $Df(a)$  existe, então ela é única, pois é contínua em  $a$ .
- Se  $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ ,  $Df(a) = f'(x)|_{x=a}$ .
- Se  $f: \mathcal{V} \subset \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$  é diferenciável em todos os pontos de  $\mathcal{V}$ , então  $f$  é diferenciável em  $\mathcal{V}$ .
- Se  $Df: x \in \mathcal{V} \subset \mathcal{U} \rightarrow Df(x) \in \mathbf{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$  é contínuo, então  $f$  é continuamente diferenciável em  $\mathcal{V}$  ou, simplesmente, de classe  $\mathcal{C}^1(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ . Similarmente, se  $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{V}, \mathcal{W})$  e  $Df$  é suave, então  $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ .

Seja  $f: \mathcal{V} \subset \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{W}$  um mapeamento suave 1:1 de classe  $\mathcal{C}^m(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ ,  $m \geq 1$ , e  $Df(x) \in \mathbf{L}(\mathcal{U}, \mathcal{W})$ . Então,  $f$  é inversível em cada ponto  $x \in \mathcal{V}$  e  $f^{-1}$  é de classe  $\mathcal{C}^m(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ .

Diz-se que  $f$  é um mapeamento 1:1 se  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , sempre que  $x_1 \neq x_2$ ,  $x_1, x_2 \in \mathcal{V}$ .  $f$  é chamado injetivo quando o determinante do gradiente de deformação  $\mathcal{J}$  é positivo. Define-se a derivada direcional, também chamada derivada de Gâteaux, como

$$\langle Df(a), \mathbf{h} \rangle = Df(a)[\mathbf{h}] = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{f(a + \alpha \mathbf{h}) - f(a)}{\alpha} = \frac{d}{d\alpha} f(a + \alpha \mathbf{h})|_{\alpha=0}. \quad (193)$$

## B.2 Gradiente, Divergente e Laplaciano

Seja  $\mathcal{U}$  um espaço n-dimensional real com produto interno e considere o campo escalar  $\varphi: \mathcal{V} \subset \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ . O gradiente de  $\varphi$ ,  $\text{grad}\varphi$ , é o único elemento  $\mathcal{U}$  que satisfaz

$$D\varphi(x)[\mathbf{u}] = \text{grad}\varphi(x) \cdot \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}. \quad (194)$$

Sendo  $\mathbf{v}: \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  um campo vetorial, diz-se que o gradiente de  $\mathbf{v}$ ,  $\text{grad}\mathbf{v}$ , é o único elemento de  $\mathcal{U}$  que satisfaz

$$D\mathbf{v}(x)[\mathbf{u}] = \text{grad}\mathbf{v}(x) \mathbf{u}, \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}. \quad (195)$$

O divergente de  $\mathbf{v}$ ,  $\text{div}\mathbf{v}$ , é um campo escalar definido por

$$\text{div}\mathbf{v}(x) \triangleq \text{tr}(\text{grad}\mathbf{v}(x)). \quad (196)$$

O laplaciano de um vetor, ou, de um escalar  $\phi$  de classe  $\mathcal{C}^2$  é dado por

$$\Delta\phi \triangleq \text{div}(\text{grad}\phi). \quad (197)$$

Se  $\Delta\phi = 0$ , então  $\phi$  é chamado harmônico.

Seja  $\mathcal{B} \in \mathbb{E}^3$  uma região regular com as seguintes condições de *regularidade*: 1)  $\mathcal{B}$  pode estar composta por uma ou mais partes limitadas, cada uma com volume não nulo. 2) O contorno  $\partial\mathcal{B}$  é suave por partes, as quais consistem de um número de elementos disjuntos. 3) Cada parte do contorno  $\partial\mathcal{B}$  é uma superfície orientável, ou seja, possui duas faces claramente distintas. Além disso,  $\mathbf{n}$  é definido como um versor normal ao contorno  $\partial\mathcal{B}$ .

Dada a região  $\mathcal{B}$  com as condições de regularidade acima, o *Teorema da Divergência* fornece:

$$\int_{\mathcal{B}} \text{grad}\varphi \, dv = \int_{\partial\mathcal{B}} \varphi \mathbf{n} \, ds,$$

$$\int_{\mathcal{B}} \text{div } \mathbf{v} \, dv = \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds, \tag{198}$$

$$\int_{\mathcal{B}} \text{div } \mathbf{T} \, dv = \int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{T} \mathbf{n} \, ds,$$

onde  $\varphi: \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$  é um campo escalar;  $\mathbf{v}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}$  é um campo vetorial e  $\mathbf{T}: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}^2$  um campo tensorial – todos eles suaves.

## Anexo C – Norma $H_1$

A norma  $H_1$  é uma quantidade escalar, produto de uma integração, que proporciona uma estimativa de erro. Ela é definida por

$$\|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{H_1} = \left[ \int_{\mathcal{B}} (|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}|^2 + |\mathbf{u}_h' - \mathbf{u}'|^2) dV \right]^{\frac{1}{2}} \quad (199)$$

onde  $\mathbf{u}_h$  é a solução aproximada e  $\mathbf{u}$  é a solução exata do problema analisado.