

Estudo Numérico sobre a Determinação de
Parâmetros em um Sólido Elástico-Linear e
Incompressível

Edmar Borges Theóphilo Prado

Orientador: Prof. Dr. Adair Roberto Aguiar

Edmar Borges Theóphilo Prado

**ESTUDO NUMÉRICO SOBRE A DETERMINAÇÃO DE
PARÂMETROS EM UM SÓLIDO ELÁSTICO-LINEAR E
INCOMPRESSÍVEL**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Adair Roberto Aguiar

SÃO CARLOS

Junho de 2008

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

P896e Prado, Edmar Borges Theóphilo
Estudo numérico sobre a determinação de parâmetros em um sólido elástico-linear e incompressível / Edmar Borges Theóphilo Prado ; orientador Adair Roberto Aguiar. -- São Carlos, 2008.

Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação e Área de Concentração em Engenharia de Estruturas) -- Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2008.

1. Elasticidade linear clássica. 2. Método dos elementos finitos. 3. Problema-inverso. 4. Tecidos biológicos. 5. Elastografia. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

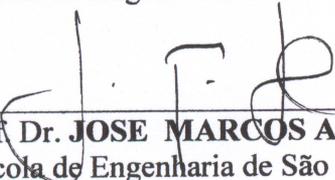
Candidato: Engenheiro **EDMAR BORGES THEÓPHILO PRADO**

Dissertação defendida e julgada em 09/06/2008 perante a Comissão Julgadora:



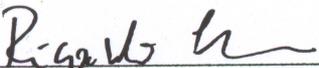
Prof. Dr. **ADAIR ROBERTO AGUIAR (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO



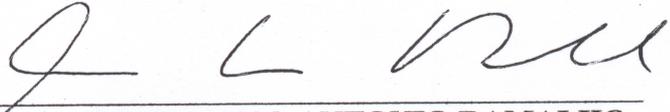
Prof. Dr. **JOSE MARCOS ALVES**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

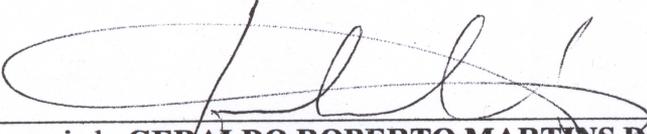


Prof. Dr. **RICARDO LEIDERMAN**
(Universidade Federal do Rio de Janeiro/UFRJ)

APROVADO



Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)



Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTENS DA COSTA**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Dedicatória

Aos meus pais e ao meu irmão, Romulo,

por todo o apoio e compreensão para que este trabalho
pudesse ser realizado.

Agradecimentos

Aos meus pais pelas oportunidades concedidas e pelo apoio incondicional às minhas decisões. Ao meu irmão e acima de tudo grande amigo, Romulo, por apoiar-me nos momentos difíceis.

Ao professor Adair Roberto Aguiar pela orientação, dedicação e compreensão das minhas limitações ao longo de toda esta pesquisa.

À CAPES pelo suporte financeiro e a todos os funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas por contribuir direta, ou, indiretamente para a realização deste trabalho.

Gostaria de agradecer, em especial, ao Rodrigo Paccola por disponibilizar e auxiliar na utilização do pós-processador gráfico por ele desenvolvido, contribuindo de forma significativa para melhorar a qualidade de apresentação dos resultados.

Ao colega e grande amigo Marlos pela troca de idéias e pelo apoio nos momentos difíceis. Novamente ao Marlos e ao colega e amigo Rogério Carrazedo pelo auxílio na utilização do LaTeX.

Ao grande amigo Antônio Carlos pela amizade e o companherismo vindos desde o tempo da graduação e sua colaboração para que eu tivesse acesso a alguns materiais de leitura necessários ao desenvolvimento desta pesquisa.

Aos colegas e amigos de mestrado Saulo, Ronaldo, Edson Leonel e Eduardo Toledo pelo auxílio no uso do software Ansys. Aos meus colegas e amigos Jesús Garcia e Manoel Dênis pela amizade e troca de idéias.

Um agradecimento especial se faz necessário aos meus grandes amigos Michell Macedo Alves e Maximiliano Azambuja (companheiros de república) e ao Luiz Vieira por todo o apoio que prestaram quando cheguei em São Carlos.

Resumo

PRADO, E. B. T. (2008). *Estudo Numérico sobre a Determinação de Parâmetros em um Sólido Elástico-Linear e Incompressível*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

A teoria de elasticidade linear clássica é utilizada no modelamento de problemas da Física Médica relacionados com a determinação de parâmetros elásticos de tecidos biológicos a partir da medição *in vivo*, ou, *in vitro* dos deslocamentos, ou, das deformações. Baseados em observações experimentais, as quais revelam que os tecidos biológicos anômalos têm comportamento mecânico diferente dos tecidos biológicos saudáveis, os pesquisadores têm modelado estes tecidos como sólidos elástico-lineares, isotrópicos, heterogêneos e incompressíveis. Neste trabalho, analisa-se uma classe de problemas planos relacionados à determinação do módulo de elasticidade ao cisalhamento μ de tecidos biológicos e propõe-se um procedimento numérico não-iterativo para obter soluções aproximadas para estes problemas a partir de campos de deslocamentos conhecidos de ensaios possíveis de serem realizados em laboratório. Os ensaios são estáticos e são simulados numericamente via Método dos Elementos Finitos. Apresentam-se resultados obtidos das distribuições de μ em cilindros retos, longos e de seção retangular contendo inclusões cilíndricas circulares centradas, ou, excêntricas. Consideram-se inclusões mais, ou, menos rígidas do que o meio elástico circundante. Adicionalmente, os resultados obtidos no presente trabalho são comparados com resultados de outros pesquisadores que utilizam ensaios dinâmicos. Neste sentido, dois casos de inclusão circular centrada são resolvidos com as condições de contorno adaptadas do caso dinâmico para o caso estático. Resolve-se finalmente o caso de uma inclusão de forma geométrica complexa e seis vezes mais rígida do que o entorno. O cilindro contendo esta inclusão está submetido às condições de contorno propostas neste trabalho e também à condição de contorno adaptada do caso dinâmico. Em todos os casos analisados os resultados são satisfatórios, apesar do emprego de uma quantidade reduzida de elementos finitos na reconstrução de μ . Deve-se ressaltar que nenhum método de regularização foi utilizado para tratar os deslocamentos obtidos dos ensaios simulados. Este trabalho é de grande interesse na detecção de tumores cancerígenos, tais como tumores nos seios e na próstata, e no diagnóstico diferenciado de tecidos biológicos.

Palavras-chave: elasticidade linear clássica; método dos elementos finitos; problema inverso; tecidos biológicos; elastografia.

Abstract

PRADO, E. B. T. (2008). *A Numerical Study about the Determination of Parameters in an Incompressible and Linearly Elastic Solid*. M.Sc Dissertation – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2008.

The theory of classical linear elasticity is used to model of problems in Medical Physics that are related to the determination of elastic parameters of biological tissues from the measurement *in vivo*, or, *in vitro* of either displacements or strains. Based on experimental observations, which indicate that the abnormal biological tissues have different mechanical behavior from normal biological tissues, researchers have modeled these tissues as an incompressible, heterogeneous, and isotropic linear elastic solid. In this work a class of plane problems related to the determination of the shear elastic modulus μ of biological tissues is examined. A non-iterative numerical procedure to obtain an approximate solution to these problems from known displacement fields is proposed. The displacement fields are obtained from experiments that are possible to reproduce in laboratory. The experiments are quasi-static and are simulated numerically using the Finite Element Method. Results for the distribution of μ in long, straight cylinders of rectangular cross-sections, containing either centered or eccentric circular inclusions that are more, or, less stiff than the surrounding elastic medium, are presented. Additionally, the results obtained in this study are compared with results of other researchers who use dynamical experiments. In this sense, two cases of centered circular inclusions are solved by using an adaptation of the dynamical case to the static case. Finally, the case of an inclusion with a complex geometry that is six times more rigid than the surrounding medium is solved. In all cases analyzed, the results are satisfactory, despite the fact that they were obtained with a reduced number of finite elements. It should be noted that no method of regularization has been used to treat the displacement data obtained from the simulated experiments. This work is of great interest in the detection of cancerous tumours, such as those in the breasts and in the prostate, and in the differential diagnosis of biological tissues.

Key-words: classical linear elasticity; finite element method; inverse problem; biological tissues; elastography.

Lista de Figuras

Figura 1	As configurações de referência e deformada de um corpo \mathcal{B}	13
Figura 2	Deformação de um corpo.	15
Figura 3	Plano \mathcal{S} seccionando corpo deformado.	17
Figura 4	Barra reta engastada e composta de duas partes com propriedades materiais e geométricas distintas.	29
Figura 5	Esquema simples ilustrando o problema direto e o problema inverso.	32
Figura 6	Esquema geral para a solução de problemas inversos.	40
Figura 7	Idéia do Processo de Regularização.	43
Figura 8	Ensaio para a determinação de μ	48
Figura 9	Processo de geração de elastogramas de deformação e do módulo elástico ao cisalhamento do tecido.	56
Figura 10	Instrumentação para gerar elastograma a partir da compressão de um corpo de prova denominado <i>phantom</i>	57
Figura 11	<i>Phantom</i> indicado pela seta no centro da ilustração em posição de pré-deformação no sistema elastográfico experimental.	58
Figura 12	Fluxograma para ilustrar os conceitos básicos e estratégias de processamento de sinais de métodos elastográficos coerentes e incoerentes.	59
Figura 13	Da esquerda para a direita: sonograma longitudinal, elastograma e fotografia de um corte longitudinal de um rim ovino.	61
Figura 14	Ensaio para a obtenção dos campos de deslocamento independentes e das forças resultantes sobre as bordas da chapa.	64
Figura 15	Barra prismática de comprimento unitário.	66
Figura 16	Funções de base quando $ j - i > 1$ em que os suportes de N_i e N_j não se sobrepõem.	75
Figura 17	Lado esquerdo: Descrição local do e -ésimo elemento. Lado direito: Descrição global do e -ésimo elemento.	77

Figura 18	Numeração dos elementos e coordenadas dos nós da malha.	79
Figura 19	Notação: X denota valores diferentes de zero na matriz de rigidez e no vetor de forças.	81
Figura 20	Matriz de locação para os dados propostos acima.	82
Figura 21	Diagrama de fluxo de algoritmo para a montagem das matrizes \mathbf{K} e \mathbf{F}	83
Figura 22	Representação dos domínio \mathcal{B} e do domínio de aproximação por elementos finitos quadrilaterais, \mathcal{B}_h	91
Figura 23	Elemento retangular com funções de forma bilineares.	92
Figura 24	Diagrama de fluxo elementar do programa desenvolvido para a determinação de parâmetros elásticos.	100
Figura 25	Malha uniforme em (a) e redes deformadas por tração-compressão em (b) e por cisalhamento em (c).	103
Figura 26	Exemplo de malha não uniforme de elementos finitos com inclusão centrada de raio $r = 6$ mm.	104
Figura 27	Diferença entre a deformação calculada pelo ANSYS 5.5 e o valor analítico para os raios (a) $r = 2$ mm e (b) $r = 6$ mm.	105
Figura 28	Distribuição da pressão reativa no cilindro com inclusão de 6 mm de raio e $C_R = 1$	106
Figura 29	Lado esquerdo: Reconstrução das pressões (Pa) obtidas do problema de tração-compressão. Lado direito: Reconstrução das pressões obtidas do problema de cisalhamento. Caso de inclusão circular centrada com $C_R = 0$ e $r = 6$ mm. Utilizaram-se as malhas 1, 3 e 5 da Tab.2	108
Figura 30	Resultados da reconstrução de μ (Pa) para $C_R = 0$: (a) Valor de referência; (b) a (f): Reconstrução de μ com as malhas 1 a 5 da Tab. 2, respectivamente, para inclusão circular centrada com $C_R = 0$ e $r = 6$ mm.	109
Figura 31	Lado esquerdo: Reconstrução das pressões (Pa) obtidas do problema de tração-compressão. Lado direito: Reconstrução das pressões obtidas do problema de cisalhamento. Caso de inclusão circular centrada com $C_R = 6$ e $r = 6$ mm. Utilizaram-se as malhas 1,3 e 5 da Tab.2	111
Figura 32	Resultados da reconstrução de μ (Pa) para $C_R = 6$: (a) Valor de re-	

	ferência; (b) a (f): Reconstrução de μ com as malhas 1 a 5 da Tab. 2, respectivamente, para inclusão circular centrada com $C_R = 6$, $r = 6$ mm.	112
Figura 33	Lado esquerdo: Reconstrução das pressões (Pa) obtidas do problema de tração-compressão. Lado direito: Reconstrução das pressões obtidas do problema de cisalhamento. Caso de inclusão circular excêntrica com $C_R = 0$ e $r = 6$ mm. Utilizaram-se as malhas 1, 3 e 5 da Tab.3	114
Figura 34	Resultados da reconstrução de μ (Pa) para $C_R = 0$: (a) Valor de referência; (b) a (f): Reconstrução de μ com as malhas 1 a 5 da Tab. 3, respectivamente, para inclusão circular excêntrica com $C_R = 0$, $r = 6$ mm.	115
Figura 35	Lado esquerdo: Reconstrução das pressões (Pa) obtidas do problema de tração-compressão. Lado direito: Reconstrução das pressões obtidas do problema de cisalhamento. Caso de inclusão circular excêntrica com $C_R = 6$ e $r = 6$ mm. Utilizaram-se as malhas 1, 3 e 5 da Tab.3	116
Figura 36	Resultados da reconstrução de μ (Pa) para $C_R = 6$: (a) Valor de referência; (b) a (f): Reconstrução de μ com as malhas 1 a 5 da Tab. 3, respectivamente, para inclusão circular excêntrica com $C_R = 6$, $r = 6$ mm.	117
Figura 37	Erro relativo máximo de μ em relação ao valor de referência no cilindro versus malha de elementos finitos.	119
Figura 38	Erro relativo máximo de μ em relação ao valor de referência na inclusão versus malha de elementos finitos.	120
Figura 39	Erro relativo máximo em relação ao valor de referência de μ no cilindro versus C_R para $r = 2$ mm e $r = 6$ mm.	121
Figura 40	Erro relativo máximo em relação ao valor de referência de μ na inclusão versus C_R para $r = 2$ mm e $r = 6$ mm.	122
Figura 41	Resultados da reconstrução de μ com $C_R = 0, 1, 2, 4, 6$ de (a) a (e), respectivamente, para uma inclusão excêntrica de raio $r = 2$ mm.	123
Figura 42	Resultados da reconstrução de μ com $C_R = 0, 1, 2, 4, 6$ de (a) a (e), respectivamente, para uma inclusão excêntrica de raio $r = 6$ mm.	124
Figura 43	Resultados de μ para diferentes erros adicionados quando a inclusão tem raio $r = 6$ mm e está centrada em um cilindro de secção quadrada de 50 mm de lado.	125
Figura 44	Resultado da reconstrução de μ : (a) valor de referência; (b) inclusão cen-	

	trada de raio $r = 2$ mm com $C_R = 2$	127
Figura 45	Resultado da reconstrução de μ : (a) valor de referência, (b) inclusão centrada de raio $r = 6$ mm com $C_R = 6$	128
Figura 46	Detalhes da reconstrução de μ via malha 5 da Tab. (2) para o cilindro e a inclusão centrada com $C_R = 6$ e $r = 6$ mm.	129
Figura 47	Reconstrução de μ no cilindro reto de secção de 50 mm de lado com inclusão excêntrica de raio $r = 6$ mm e $C_R = 6$, combinando os ensaios de compressão uniaxial e de cisalhamento proposto por Park e Maniatty (2006) adaptado ao caso estático.	130
Figura 48	Resultado da reconstrução de μ ; (a) valor de referência, (b) condições de Park e Maniatty (2006), (c) condições de contorno propostas no presente trabalho	131
Figura 49	Tetraedro de tensões.	143
Figura 50	Paralelepípedo de dimensões infinitesimais com vetores tensão.	145

Lista de Tabelas

Tabela 1	Casos de problemas para uma barra composta por dois materiais	30
Tabela 2	Malhas de elementos finitos para o cilindro reto com inclusão centrada.	105
Tabela 3	Malhas de elementos finitos para o cilindro reto com inclusão excêntrica.	113
Tabela 4	Erros aleatórios introduzidos nos campos de deslocamento e valores médios do módulo de elasticidade ao cisalhamento (μ) na inclusão centrada. .	126

Lista de Siglas

EdUERJ	Editora da Universidade do Estado do Rio de Janeiro
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEC	Método dos Elementos de Contorno
EPD	Estado Plano de Deformação
EPDH	Equação Diferencial Parcial Hiperbólica
PI	Problema Inverso
MMQ	Método dos Mínimos Quadrados

Lista de Símbolos

μ	Módulo de elasticidade ao cisalhamento
λ	Parâmetro de Lamé
\mathcal{B}	Domínio de análise
π	Pressão reativa
n_{el}	Número de elementos finitos da malha

Sumário

Referências	i
1 Introdução	1
1.1 Motivação	2
1.2 Objetivos	2
1.3 Organização da Dissertação	3
2 Revisão Bibliográfica	5
2.1 Detecção de Inclusões e Identificação de Parâmetros	5
3 Conceitos Básicos da Mecânica	13
3.1 Cinemática	13
3.2 Força e Tensão	16
3.3 Elasticidade Linear Clássica	18
3.4 O Problema Direto para a Determinação do Deslocamento	19
3.4.1 Formulação Forte	20
3.4.2 Formulação Fraca	21
4 Problemas Inversos	25
4.1 Considerações Gerais	25
4.1.1 Exemplos de Problemas Inversos em Elasticidade Linear Clássica	28
4.2 Classificação dos Problemas Inversos	35
4.3 Métodos de Solução e Regularização	37

4.3.1	Solução com o uso do método SVD (<i>Singular Value Decomposition</i>) e Limitações	39
4.3.2	Solução por Mínimos Quadrados e Limitações	41
4.3.3	Métodos de Regularização	43
4.4	O Problema Inverso de Determinação de Parâmetros Elásticos	44
4.4.1	Formulação Forte	44
4.4.2	Considerações sobre a Unicidade de Solução	44
4.4.3	Formulação Fraca	51
5	Elastografia	53
5.1	Fundamentos da Elastografia	53
5.2	O Processo Elastográfico	54
5.2.1	Métodos de Processamento de Elastogramas	57
5.2.2	Aplicações da Elastografia	60
5.3	Proposição de Experimentos em Elastografia	61
5.3.1	Considerações Iniciais	61
5.3.2	Ensaio Biaxial de Tração-Compressão e de Cisalhamento	62
6	Formulação Numérica	65
6.1	Aspectos Básicos do Método dos Elementos Finitos-MEF	65
6.1.1	Formulação Forte, ou, Clássica	65
6.1.2	Formulação Fraca, ou, Variacional	67
6.1.3	Método de Aproximação de Galerkin	68
6.1.4	Sistema de Equações Lineares	70
6.1.5	Funções de Forma Lineares por Partes	74
6.1.6	Propriedades da Matriz \mathbf{K}	74
6.1.7	O MEF do Ponto de Vista do Elemento - Coordenadas Locais e Globais.	76
6.1.8	A Matriz de Rigidez e o Vetor de Força de um Elemento Genérico	79

6.1.9	A Montagem da Matriz Global de Rigidez e do Vetor de Força.	81
6.1.10	A Resolução do Sistema de Equações	84
6.2	O Problema Direto Discreto via MEF	85
6.3	MEF Aplicado ao Problema de Determinação de Parâmetros	88
7	Apresentação e Discussão de Resultados.....	101
7.1	Cilindro Reto de Secção Retangular com Inclusão Cilíndrica de Secção Circular	101
7.2	Influência da Malha de Elementos Finitos no Problema Direto Discreto	102
7.3	Influência da Malha de Elementos Finitos no Problema Inverso Discreto	104
7.4	Influência do C_R na Convergência do Problema Inverso Discreto	119
7.5	Comparação do Método Proposto com o Método de Park e Maniatty (2006) ..	122
7.5.1	Apresentação e Resultados do Método de Park e Maniatty (2006)	122
7.5.2	Adaptação do Ensaio de Park e Maniatty (2006) ao Caso Estático	126
7.6	Influência dos Ensaios na Determinação de Parâmetros	128
7.6.1	Inclusão Centrada	128
7.6.2	Inclusão Excêntrica	130
7.6.3	Inclusão Cilíndrica com Secção Complexa	130
8	Conclusão.....	133
8.1	Sugestões para a Continuação da Pesquisa	134
	Referências	137
	Apêndice A – O Tensor Tensão.....	143
	Apêndice B – Equivalência entre as Formas Forte (S) e Fraca (W)	147

1 Introdução

Esta dissertação apresenta um procedimento numérico para a determinação do módulo de elasticidade ao cisalhamento, μ , em um sólido elástico-linear, heterogêneo, incompressível e sob estado plano de deformação a partir do campo de deslocamento conhecido no interior do sólido.

O procedimento numérico baseia-se no método dos elementos finitos aplicado na formulação fraca das equações de equilíbrio que governam os deslocamentos do sólido em dois experimentos clássicos da mecânica. Os dois experimentos são escolhidos de forma a garantir que, sem o conhecimento das forças atuantes no contorno, μ seja determinado com a exceção de quatro constantes (BARBONE; GOKHALE, 2004).

Neste trabalho, o sólido é um cilindro reto, longo e de secção transversal retangular que está submetido aos ensaios de tração-compressão e de cisalhamento, conforme descrito na Seção 5.

Nos últimos anos houve o desenvolvimento de modalidades de diagnóstico por imagem, tais como o ultra-som, imagem por ressonância magnética (MRI) e tomografia computadorizada por raios-x com o propósito de auxiliar o diagnóstico por imagem de lesões em tecidos biológicos, originando um novo método para análise de imagens, a elastografia (OPHIR et al., 1991, 1999; PARK; MANIATTY, 2006). Este método permite a identificação de estruturas com diferentes níveis de rigidez em um meio elástico tomando por base informações sobre os campos de deslocamento no interior do corpo. O procedimento numérico proposto neste trabalho permite quantificar estes níveis de rigidez.

O procedimento proposto pode ser empregado também na análise de problemas de engenharia que necessitam o conhecimento de propriedades elásticas de materiais sem o uso de técnicas invasivas, tais como a investigação geológica de áreas para a prospecção de petróleo e gás, na detecção de inclusões em membros estruturais aeronáuticos, navais, etc (RAMM, 2005; ISAKOV, 2006; KIRSCH, 1996; BONNET; CONSTATINESCU, 2005).

1.1 Motivação

Em problemas de interesse tanto da engenharia estrutural como da medicina, a impossibilidade de inspeções invasivas, seja porque a estrutura encontra-se em serviço, seja porque a análise necessita ser feita em tecido vivo, motiva o desenvolvimento de uma metodologia de análise remota.

Nota-se de alguns procedimentos propostos na literatura (BONNET; CONSTATINESCU, 2005; JI et al., 2003; KALLEL et al., 1998; OPHIR et al., 1999), para a determinação de parâmetros elásticos, os quais estão fundamentados no MEF, ou, no MEC por meio de experimentos quase-estáticos, ou, dinâmicos, uma lacuna na determinação quantitativa dos resultados obtidos, uma vez que as avaliações finais estão baseadas em resultados qualitativos de análise da imagem.

Assim, esta pesquisa justifica-se ao apresentar um procedimento estático não-iterativo de avaliação não-invasiva para a determinação das constantes elásticas de materiais lineares, isotrópicos e incompressíveis.

Questões relacionadas às condições de contorno também são discutidas neste trabalho, pois o problema de determinação de parâmetros em um sólido elástico-linear pode não ter solução única para condições de contorno que sejam possíveis de serem impostas em ensaios de laboratório. Neste caso, condições adicionais devem ser fornecidas.

Soma-se ao exposto acima que a principal vantagem apresentada pela metodologia proposta é a de possibilitar a determinação do módulo de elasticidade ao cisalhamento, μ , no interior de um corpo elástico-linear, isotrópico e incompressível, a partir de campos de deslocamento conhecido no interior do corpo e de resultantes de forças conhecidas sobre partes complementares do contorno. Deste modo, nos problemas de engenharia acima, pode-se adaptar a metodologia proposta para determinar a localização e forma de falhas, ou, inclusões no substrato prejudiciais ao bom desempenho estrutural. No campo da aplicação médica, tecidos biológicos poderão ser analisados, tendo-se suas propriedades elásticas calculadas e, assim, avaliando-se a sanidade do tecido em exames preventivos.

1.2 Objetivos

O objetivo principal desta dissertação é propor um procedimento numérico para a determinação do módulo de elasticidade ao cisalhamento em um sólido elástico, isotrópico e incompressível, sob estado plano de deformação, no contexto da teoria de elasticidade

linear clássica.

O procedimento numérico baseia-se em uma metodologia de elementos finitos que utiliza ambos, o conhecimento de campos de deslocamento no interior do sólido medidos por meio de técnicas não-invasivas e o conhecimento de forças resultantes atuantes no contorno do sólido. Deste modo, o trabalho representa uma contribuição para a determinação única de parâmetros elásticos em estruturas biológicas e de engenharia.

Outros objetivos também foram alcançados, tais como o estudo, o entendimento e a proposição dos problemas direto e de determinação de parâmetros com as corretas condições de contorno; o estudo de métodos experimentais utilizados na obtenção dos campos de deslocamento interno de materiais como a ultra-sonografia; a proposição de experimentos simples e exequíveis em laboratório; a utilização de programas simbólicos como o Mathematica, linguagem de programação como o Fortran, e pacotes comerciais de elementos finitos como o Ansys.

1.3 Organização da Dissertação

Na Seção 2 apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre o estado da arte na área de determinação de parâmetros materiais em tecidos biológicos.

Na Seção 3 apresentam-se os fundamentos teóricos da teoria de elasticidade linear clássica, a qual serve para formular o problema direto de determinação de deslocamentos nas formas forte e fraca e também o problema inverso de determinação de parâmetros, este último apresentado na Seção 4. O problema direto consiste em determinar os campos de deslocamento e de pressão π que satisfaçam simultaneamente as equações de equilíbrio para um material elástico-linear, isotrópico e incompressível, a restrição cinemática de dilatação volumétrica nula e as condições de contorno. Aqui o módulo de elasticidade ao cisalhamento, μ , é conhecido. O problema de determinação de parâmetros, também chamado de problema inverso, consiste em determinar μ e π que satisfaçam as mesmas equações de equilíbrio para um campo de deslocamento conhecido, o qual satisfaz a restrição cinemática de dilatação volumétrica nula. Em geral, este problema não tem solução única.

Na Seção 4 apresenta-se uma introdução à teoria de problemas inversos. Apresentam-se uma classificação destes problemas e alguns métodos de regularização que permitem obter solução única para a classe de problemas tratados neste trabalho. Ao final desta seção, encontram-se as formulações forte e fraca do problema inverso de deter-

minação de parâmetros elásticos. Apresenta-se também uma discussão sobre a unicidade de solução deste problema inverso no contexto da teoria de elasticidade linear clássica apresentada na Seção 3.

Na Seção 5 apresenta-se uma visão geral sobre as técnicas aplicadas em elastografia. Apresentam-se também alguns problemas que podem ser realizados em laboratório e que permitem a determinação dos parâmetros elásticos de forma única.

Na Seção 6 apresenta-se a fundamentação teórica do Método de Elementos Finitos (MEF), o qual é aplicado nas soluções aproximadas dos problemas direto e inverso descritos acima. Apresenta-se também a formulação do procedimento desenvolvido com um fluxograma do código computacional para resolver os problemas de determinação de parâmetros.

Na Seção 7 apresentam-se e discutem-se resultados obtidos das soluções aproximadas de problemas bidimensionais propostos nas seções anteriores. Comparam-se estes resultados aos resultados obtidos por outros pesquisadores, os quais empregam metodologias distintas na determinação dos parâmetros elásticos. Estas metodologias baseiam-se em experimentos dinâmicos, ao invés de estáticos, para a obtenção de campos de deslocamento.

Na Seção 8 apresentam-se as principais conclusões sobre a pesquisa desenvolvida e algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 Revisão Bibliográfica

Nesta seção realiza-se uma revisão bibliográfica de trabalhos relevantes na área de determinação de parâmetros elásticos em tecidos biológicos. Observa-se desta revisão que a maioria das referências são dos últimos dez anos e que os autores são de diferentes áreas do conhecimento, tais como medicina e engenharia. O assunto é, portanto, de interesse atual e multidisciplinar.

2.1 Detecção de Inclusões e Identificação de Parâmetros

O mais antigo problema de identificação de parâmetros que se tem notícia diz respeito à pergunta “Arquimedes, esta coroa é de ouro?”, feita pelo rei Híeron ao matemático grego nascido em Siracusa em 287 a.C. (SILVA NETO, 2005).

Pode-se imaginar pergunta semelhante em muitas aplicações atuais, tais como na determinação de propriedades elásticas de tecidos biológicos. No caso de tumores cancerígenos, observações experimentais revelam que os tecidos biológicos anômalos têm comportamento mecânico diferente dos tecidos biológicos saudáveis (FUNG, 2004; OPHIR et al., 1991; LIU et al., 2003). Este comportamento é utilizado no diagnóstico do câncer de mama, pois os tumores malignos apresentam rigidez diferente da rigidez dos tecidos saudáveis (SARVAZYAN, 1993; SARVAZYAN et al., 1998; KROUSKOP et al., 1998). De fato, cerca de metade de todos os casos de câncer de mama detectados nos Estados Unidos no período 1988-1990 foram descobertos pelo próprio paciente ao apalpar os seios e constatar a presença de um nódulo em seus seios (REEVES et al., 1995).

Uma técnica utilizada na Física Médica para a detecção de tumores cancerígenos consiste em pressionar levemente uma sonda ultra-sônica sobre uma superfície externa do corpo humano, ocasionando deformação da parte do corpo localizada em uma região próxima da área pressionada (OPHIR et al., 2002). A deformação deve ser pequena para que o comportamento não-linear do tecido biológico seja ignorado e, assim, este possa ser tratado como um sólido elástico-linear (MRIDHA; ÖDMAN, 1986).

Ao se medir o campo de deslocamento nesta região, determina-se o campo de deformação infinitesimal, o qual está relacionado ao campo de tensão através da Lei de Hooke generalizada. Ao se impor a condição de que o corpo deve satisfazer as leis de balanço da Mecânica do Contínuo, obtém-se expressões para a determinação dos parâmetros elásticos da parte do corpo sob análise. Os valores destes parâmetros dependem do ponto material; especialmente se os tumores cancerígenos estiverem dispersos no tecido biológico sadio.

O exame de toque ainda é o método padrão usado por profissionais da área médica para determinar a presença de lesões da mama e próstata. Em muitos casos, porém, mesmo havendo diferença de rigidez entre o tecido lesionado e o tecido sadio, a lesão pode não ser detectada devido ao seu tamanho reduzido, ou, devido à sua localização em regiões muito profundas do corpo, mesmo com o auxílio dos exames de ultra-som convencionais (OPHIR et al., 2001).

O procedimento aqui desenvolvido insere-se no estudo de problemas de elastografia, termo cunhado por Ophir et al. (1991), cujo início data dos primeiros anos da década de 1990. A elastografia tem como objetivo determinar de forma quantitativa as deformações e a distribuição do módulo de elasticidade ao cisalhamento em tecidos moles por meio da análise de imagem obtida com o auxílio de aparelhos de ultra-som.

Em um contexto mais amplo, o problema elastográfico é um problema inverso, pois trata da determinação de parâmetros a partir de campos de deslocamento. A importância dos problemas inversos está em encontrar propriedades desconhecidas de um meio sólido pela observação da resposta deste meio a um sinal de sondagem. Assim, a teoria dos problemas inversos serve de base teórica para a detecção remota de inclusões, vazios e trincas e para a avaliação não-destrutiva de estruturas biológicas e de engenharia (RAMM, 2005).

O uso de equipamentos modernos, tais como os aparelhos de ultra-som utilizados em Elastografia, permite a captação dos campos de deslocamento internos do corpo em regiões de interesse de modo que não se fique restrito ao conhecimento apenas de dados referentes à fronteira do domínio de análise, tal como ocorre em muito problemas inversos de investigação de parâmetros.

Zhu, Hall e Jiang (2003) apresentam uma discussão sobre duas técnicas de ultra-som utilizadas na reconstrução do módulo de elasticidade ao cisalhamento μ em tecidos biológicos, os quais são considerados incompressíveis. A primeira técnica utiliza um vibrador em contato com a superfície externa do corpo para propagar ondas de baixa frequência

para o interior do corpo. Medindo-se a velocidade de propagação de ondas de cisalhamento, ou, o comprimento destas ondas, estima-se μ via sistema de equações que fornecem a direção de propagação da onda em termos de seus cossenos diretores. Vários fatores podem, no entanto, influenciar na precisão das medições, limitando a aplicabilidade da técnica. Dentre os fatores, destacam-se ruídos de medições elevados, baixa resolução espacial, dificuldade de propagação da energia das ondas de cisalhamento através dos contornos do tecido.

Com relação à categoria dos métodos de compressão estáticos, a distribuição de μ é estimada das deformações internas e de medidas de forças impostas no contorno. Pode-se fazer a medição dos deslocamentos internos, por exemplo, segundo as técnicas descritas em Ophir et al. (1991) e Kybic e Smutek (2005). Além da medição dos deslocamentos internos para estimar a distribuição do módulo de Young, é necessário o conhecimento das forças no contorno. Na prática, as forças não podem ser medidas ponto a ponto no contorno. As resultantes destas forças podem, contudo, ser facilmente obtidas em partes complementares do contorno segundo Zhu, Hall e Jiang (2003).

No trabalho realizado por Zhu, Hall e Jiang (2003) utiliza-se o método dos elementos finitos e faz-se um relaxamento das condições de contorno para tornar o método mais prático quando da reconstrução do módulo elástico ao cisalhamento para materiais considerados elástico-lineares, isotrópicos e incompressíveis.

Este autores realizam um único experimento para obter o campo de distribuição de μ . Devido a isto, os autores não conseguem mostrar a unicidade de solução para um único campo de deslocamento advindo da compressão do corpo sob análise. Os autores ressaltam, no entanto, que o processo de minimização empregado utilizando os mínimos quadrados conduz sempre a uma única solução algébrica. Zhu, Hall e Jiang (2003) ainda utilizam uma rede de elementos finitos uniforme por considerar não ser possível prever a forma das inclusões imersas no substrato.

Aqui, deseja-se obter uma única solução da distribuição do parâmetro material no interior do corpo. Assim, resulta naturalmente a questão: se existe uma distribuição do parâmetro material e esta é única, qual é o número mínimo de experimentos necessários para prover dados em quantidade suficiente para determinar univocamente o módulo de elasticidade ao cisalhamento?

A questão precedente é tratada em Barbone e Gokhale (2004). Estes autores consideram um material elástico-linear, isotrópico e incompressível ocupando um domínio bidimensional, o qual corresponde a uma chapa retangular em EPD, e apresentam uma

discussão sobre a determinação do módulo elástico quando o corpo é submetido a forças quase-estáticas e dinâmicas. Em particular eles mostram que a equação que rege o problema de determinação de parâmetros para materiais elástico-lineares, isotrópicos e incompressíveis em domínio bidimensional é uma equação diferencial parcial de segunda ordem do tipo hiperbólica, EPDH, com coeficientes variáveis.

Barbone e Gokhale (2004) apresentam então a formulação de dois problemas clássicos da mecânica, tração-compressão biaxial e cisalhamento simples que fornecem dois campos de deslocamento. As características da EPDH para determinação de μ do problema de tração-compressão biaxial não são paralelas às características da EPDH do problema de cisalhamento. Assim, estes problemas são denominados de problemas linearmente independentes. Com relação as características da equação diferencial hiperbólica, Barbone e Gokhale (2004) afirmam que estas são paralelas ao eixos de deformações principais.

A substituição do campo de deformação do problema de tração-compressão biaxial na equação que rege o problema de determinação de parâmetros deve obedecer a solução geral do problema inverso. Esta solução geral é composta de duas funções arbitrárias, $f(x)$ e $g(y)$. A substituição do campo de deformação do problema de cisalhamento nesta mesma equação que rege o problema de determinação de parâmetros também deve obedecer a solução geral do problema inverso. Deste procedimento resultam duas equações que satisfazem a solução geral do problema inverso. Substituindo-se a solução geral do problema inverso na equação resultante do problema de cisalhamento obtém-se que as derivadas de segunda ordem das funções arbitrárias, $f(x)$ e $g(y)$, são iguais e constantes. Integrando estas constantes para encontrar as funções $f(x)$ e $g(y)$ mostra-se que resultam na determinação de μ com exceção de quatro constantes arbitrárias. Estas constantes podem ser obtidas com poucas informações adicionais; por exemplo, pelo conhecimento de μ em quatro pontos distintos do domínio.

Barbone e Gokhale (2004) optam pelo estudo considerando o material incompressível diferentemente de McLaughlin e Yoon (2004) que consideram o estudo da determinação de μ para o caso compressível. Barbone e Gokhale (2004) dizem que a incompressibilidade é mais apropriada na aproximação do problema de imagem de tecidos moles, pois na compressibilidade, ou, próximo a esta, o problema inverso é altamente sensível aos pequenos erros de medição da dilatação ($\nabla \cdot \mathbf{u}$), enquanto que, assumindo a hipótese de incompressibilidade, o problema inverso é insensível a estes erros.

No trabalho de Barbone e Gokhale (2004) menciona-se a necessidade de uma

quantidade determinada de informações *a priori* sobre o contorno e de forma não arbitrária para obter a distribuição de μ no domínio bidimensional, assumindo-se ainda uma variação suave de μ e obedecendo às equações de equilíbrio e compatibilidade restritivas para materiais incompressíveis no regime elástico.

Barbone e Gokhale (2004) mencionam ainda que para um único campo de deslocamento exige-se uma grande quantidade de informações relacionadas ao próprio módulo de elasticidade ao cisalhamento. O conhecimento de tais informações *a priori* no problema inverso poderia permitir então que apenas um único campo de deslocamentos viesse a ser suficiente para determinar a solução de forma única (BARBONE; BAMBER, 2002). Porém, na prática do diagnóstico por imagem prescrever as duas funções arbitrárias, $f(x)$ e $g(y)$, obtidas da solução geral no caso de um único campo de deslocamentos não é factível.

Barbone e Oberai (2007) consideram alguns problemas de identificação dos parâmetros de Lamé, fornecendo a solução exata para o caso compressível. Foram considerados problemas, por exemplo, em que o parâmetro de Lamé λ é conhecido *a priori* e μ é determinado de um único campo de deformação a menos de uma constante. Quando $\lambda \rightarrow \infty$ tem-se a instabilidade dos resultados com erros muito amplificados na determinação de μ ; mais precisamente, o valor do erro pode implicar em μ multiplicado por um fator de 1000 (mil) vezes o valor de referência. O valor de referência é o valor da propriedade elástica conhecido no problema direto.

Outro exemplo foi trocar λ , conhecido *a priori*, por μ , e daí determinar λ de um único campo de deformação, o que resultou na determinação de λ a menos de uma constante. Finalmente, Barbone e Oberai (2007) consideram o caso em que nenhum destes dois parâmetros são conhecidos *a priori*, porém sabe-se o coeficiente de Poisson, ν , e pede-se que sejam determinados μ e λ de um único campo de deformação. Novamente os resultados da determinação de μ e λ são dependentes de uma constante quando se utiliza um único campo de deslocamento. Todas as considerações neste trabalho supõem conhecida a densidade com os deslocamentos dependentes do tempo.

Park e Maniatty (2006) apresentam um procedimento para a determinação do módulo de elasticidade ao cisalhamento que utiliza o Método dos Elementos Finitos, sem recorrer a processos iterativos, em que o corpo é submetido a forças dinâmicas. Utilizou-se neste trabalho um único ensaio dinâmico. A abordagem do trabalho é computacional. Pode-se citar como um exemplo de processo iterativo para a busca de μ o trabalho desenvolvido por Doyley, Meaney e Bamber (2000).

Em Park e Maniatty (2006), fez-se o experimento de cisalhamento com um único

pulso de excitação de baixa frequência utilizado para estimular o tecido, medindo-se os campos de deslocamento a partir de um sistema de ultra-som de alta velocidade. O experimento de cisalhamento é realizado engastando-se a base do corpo cuja secção transversal do sólido é um quadrado de 50 mm de lado. Aplicam-se forças tangenciais na borda superior com amplitudes máximas de 1 mm. As bordas laterais são mantidas livres de carregamento. O corpo se encontra em estado plano de deformações.

O algoritmo desenvolvido por Park e Maniatty (2006) é testado e simulado com o uso de uma malha de elementos finitos muito refinada que fornece para o problema direto dados que estão próximos da solução exata. Assim, o problema inverso que é resolvido com uma malha mais grosseira, mas também regular, utiliza os deslocamentos obtidos nos pontos coincidentes da malha refinada. Os autores adicionam ruído para que se verifique a validade do procedimento em uma situação real, a qual está sujeita a erros de medidas nos campos de deslocamento.

Este estudo apresentado por Park e Maniatty (2006) pretende também mostrar a importância de se considerar os termos de pressão hidrostática, os quais são desprezados em diversos trabalhos como, por exemplo, em Oliphant et al. (2001). Nestes trabalhos, para desprezar os termos de pressão a justificativa é que estes termos estão associados com as ondas longitudinais (compressão) que possuem comprimento muito grande quando comparadas com as ondas de cisalhamento. No entanto, esta justificativa é válida somente para meios homogêneos e não se aplica aos meios heterogêneos como, por exemplo, os tecido moles.

O problema de identificação de parâmetros em Park e Maniatty (2006) é resolvido como um problema de otimização. Foi escolhido o método de mínimos quadrados para obter a solução ótima entre os deslocamentos calculados e os medidos experimentalmente. Estes autores mencionam, no entanto, que os parâmetros de ponderação da função campo de deslocamento a ser minimizada podem não ser ótimos e que seriam investigados posteriormente. No entanto, bons resultados são obtidos para μ quando comparados com a literatura e mostram não só o efeito do ruído na reconstrução do módulo elástico, mas que μ depende da área da inclusão e de sua rigidez em relação à rigidez do meio circundante. Mostra-se também neste trabalho a necessidade de se considerar os termos de pressão.

Park e Maniatty (2006) discutem ainda o fato de que regiões situadas imediatamente atrás da inclusão não são bem detectadas quando se utilizam os métodos baseados nas equações de Helmholtz, sendo típico encontrar nos resultados para estas regiões um

grande ruído. Não obstante, a reconstrução do módulo elástico com o uso de filtros especiais para dados coletados das medições podem provocar a perda da detectabilidade de inclusões atrás de outras inclusões. Por este motivo, os autores não utilizaram filtro de regularização para os dados. Park e Maniatty (2006) afirmam ainda que as equações de Helmholtz não são boas aproximações nestas regiões devido à heterogeneidade.

O algoritmo desenvolvido por Park e Maniatty (2006) tem a necessidade da diferenciabilidade do campo de deslocamento. Neste algoritmo requer-se as três componentes do campo de deslocamento e também seus gradientes por se tratar de um método de inversão direta.

França (2007) apresenta uma formulação inversa para resolver o problema de determinação de μ em inclusões circulares para um material elástico-linear e isotrópico. Ao corpo é aplicado um carregamento quase-estático em tensão plana levando-o a adquirir uma configuração deformada com um campo de deslocamentos axiais associado. O campo de deslocamento obtido é então regularizado com a utilização de funções de penalização e de regularização de Tikhonov. O processo de inversão empregado para obter μ na inclusão após a regularização é iterativo utilizando-se o algoritmo de Levenberg-Marquardt e informações *a priori* a cerca dos parâmetros elásticos. Destaca-se que o módulo de elasticidade ao cisalhamento na matriz é conhecido *a priori* para solução do problema inverso. Também são obtidas soluções com o método de inversão estatística, sendo que para obter μ utiliza-se o algoritmo de Metropolis-Hastings. Os resultados obtidos são considerados bons quando comparados com os resultados da literatura.

Com relação aos métodos explícitos, ou, de inversão direta, em sua maioria não são métodos gerais, existindo mais um interesse acadêmico do que um esquema metodológico geral a ser seguido (CAMPOS VELHO, 2002; KIRSCH, 1996; ENGL; HANKE; NEUBAUER, 2000; RAMM, 2005; SILVA NETO; MOURA NETO, 2005; LIU; HAN, 2003). Geralmente estes métodos de inversão direta são sensíveis a erros nas medições dos dados. Portanto, em se tratando de dados experimentais opta-se por métodos de regularização e suavização consagrados na literatura a fim de reduzir o mal comportamento das matrizes geradas para a inversão, citando-se, como exemplo, o método de regularização de Tikhonov, filtro Tikhonov, métodos de molificação, etc.

3 Conceitos Básicos da Mecânica

Nesta seção apresentam-se os conceitos básicos de cinemática, força, relações constitutivas e leis de balanço, os quais serão aplicados na determinação de parâmetros elásticos. Maiores detalhes sobre a teoria podem ser encontrados em Gurtin (1981) e Aguiar e Fosdick (1993).

3.1 Cinemática

Seja \mathcal{B} uma região regular e compacta em \mathbb{R}^3 e seja \mathbf{X} um ponto material pertencente a \mathcal{B} . Uma deformação de \mathcal{B} é um mapeamento suave $\mathbf{y} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $\det \nabla \mathbf{y} > 0$, onde $\nabla(\bullet) = \partial(\bullet)/\partial \mathbf{X}$. O ponto $\mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{X})$ é o lugar ocupado por \mathbf{X} na deformação \mathbf{y} , conforme ilustrado na Fig. 1.

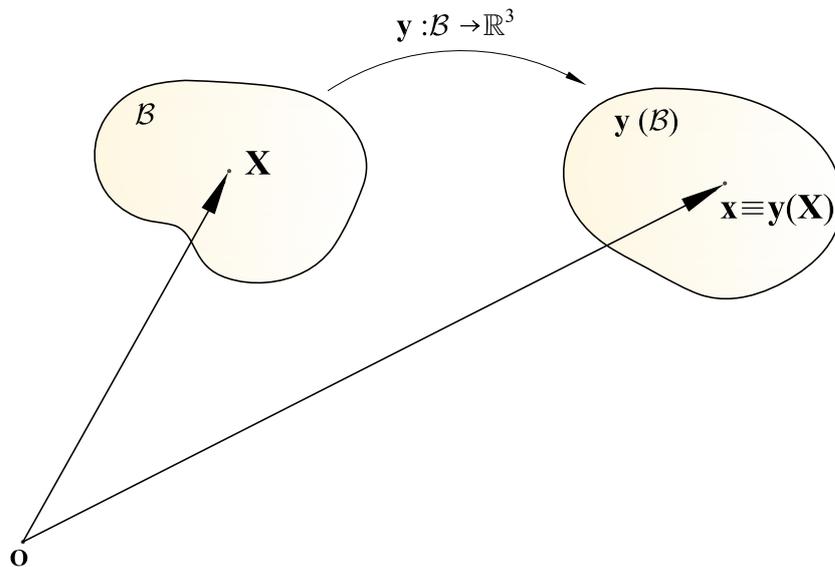


Figura 1: As configurações de referência e deformada de um corpo \mathcal{B} .

O campo

$$\mathbf{F} = \nabla \mathbf{y} \quad (3.1)$$

é um membro do conjunto \mathcal{Lin} de todas as transformações lineares de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R}^3 e é conhecido como o gradiente de deformação; se \mathcal{P} é uma parte de \mathcal{B} com dimensões infinitesimais, então $\det \mathbf{F}$ é a razão entre o volume de $\mathbf{y}(\mathcal{B})$ e o volume de \mathcal{P} e representa o valor local da dilatação volumétrica de \mathcal{B} . A deformação é isocórica se

$$\det \mathbf{F} - 1 = 0. \quad (3.2)$$

Em aplicações, é conveniente trabalhar com o tensor de deformação de Cauchy-Green à direita, definido por

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}. \quad (3.3)$$

Segue de (3.2) e (3.3) que deformações isocóricas satisfazem

$$\det \mathbf{C} - 1 = 0. \quad (3.4)$$

Em termos do campo de deslocamento $\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido pela relação

$$\mathbf{u} = \mathbf{y} - \mathbf{X} \quad (3.5)$$

e ilustrado na Fig. 2, obtém-se de (3.1), (3.3) e (3.5) que

$$\mathbf{C} - \mathbf{1} = (\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \nabla \mathbf{u}, \quad (3.6)$$

onde $\mathbf{1} \in \mathcal{Lin}$ é o tensor identidade. Esta diferença é uma medida do desvio de forma entre uma dada deformação e uma deformação de corpo rígido, para a qual $\mathbf{C} = \mathbf{1}$. Devido a isto, é comum introduzir o tensor deformação de Green-Saint Venant

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1}). \quad (3.7)$$

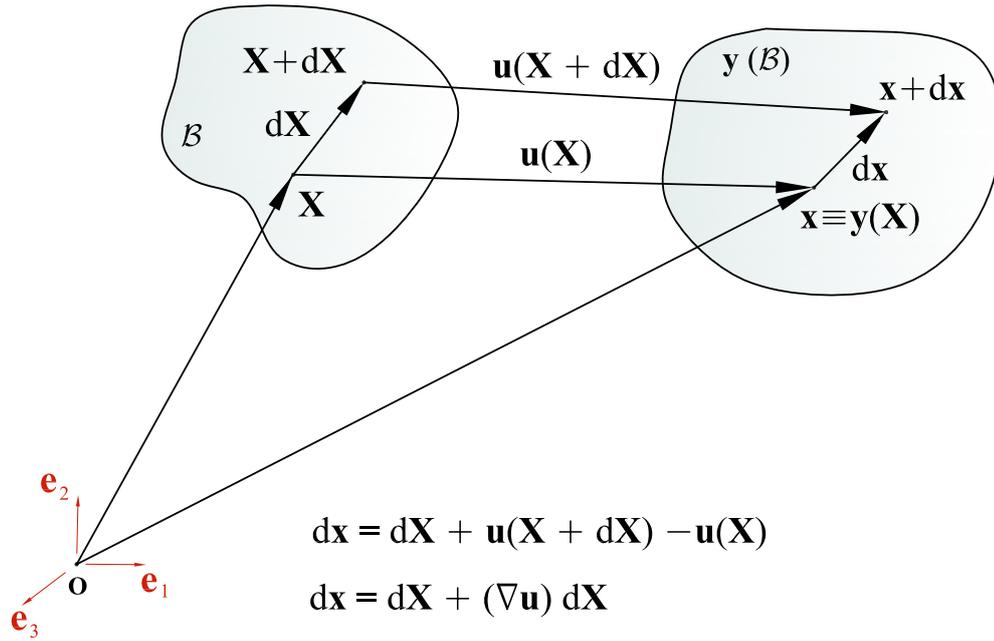


Figura 2: Deformação de um corpo.

Assumindo pequenas deformações, segue de (3.6) e (3.7) que

$$\mathbf{E} = \nabla_s \mathbf{u} + \mathcal{O}(|\nabla_s \mathbf{u}|^2), \quad (3.8)$$

onde

$$\nabla_s \mathbf{u} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u})^T + \nabla \mathbf{u}], \quad (3.9)$$

é a parte simétrica do tensor $\nabla \mathbf{u}$ e $\mathcal{O}(\cdot)$ é um símbolo de ordem que satisfaz $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \frac{\mathcal{O}(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \right| < \infty$. Na teoria de elasticidade linear, despreza-se o termo de ordem superior em (3.8).

Agora, seja $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ uma base ortonormal associada a um sistema de coordenadas cartesianas retangulares com origem em \mathbf{O} (sistema CCR), conforme ilustrado na Fig. 2. Neste sistema de coordenadas, $\mathbf{X} = X_i \mathbf{e}_i$ e $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$, onde X_i e x_i , $i = 1, 2, 3$, são as componentes de \mathbf{X} e \mathbf{x} , respectivamente. Uma vez que $\mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{X})$, tem-se então que $x_i = y_i(X_1, X_2, X_3)$, onde $y_i = \mathbf{y} \cdot \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, 3$. Além disso, $\mathbf{u} = u_i \mathbf{e}_i$ e $\nabla_s \mathbf{u} = \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, onde $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \varepsilon_{ij}$ são as componentes de deformação infinitesimal e $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k = \delta_{jk} \mathbf{e}_i$, $i, j, k = 1, 2, 3$, define o produto tensorial entre \mathbf{e}_i e \mathbf{e}_j .

3.2 Força e Tensão

Forças representam a ação de um corpo sobre o outro. Esta ação pode se manifestar por contato entre partes de um corpo, ou, entre um corpo e o meio exterior a este. Aqui, consideram-se três tipos de força, a saber:

i) forças de contato entre partes distintas de um corpo;

ii) forças de contato exercidas sobre o contorno de um corpo pelo meio exterior a este;

iii) forças de corpo exercidas sobre todos os pontos de um corpo pelo meio exterior, tais como a força gravitacional da Terra.

As forças de contato *i)* e *ii)* são também chamadas forças de superfície internas e externas, respectivamente, pois são transmitidas através de uma superfície de contato.

Seja \mathbf{x} um ponto arbitrário no interior de $\mathbf{y}(\mathcal{B})$ e seja \mathcal{S} um plano contendo \mathbf{x} e que divide $\mathbf{y}(\mathcal{B})$ nas partes $\mathbf{y}(\mathcal{B}_1)$ e $\mathbf{y}(\mathcal{B}_2)$, conforme ilustrado na Fig. 3.a. Na superfície da face plana que pertence a $\mathbf{y}(\mathcal{B}_1)$ atuam forças de contato internas que correspondem à ação da parte $\mathbf{y}(\mathcal{B}_2)$ sobre a parte $\mathbf{y}(\mathcal{B}_1)$. Seja \mathbf{n} o vetor normal unitário exterior à face plana e seja $\Delta\mathbf{F}$ a resultante no ponto \mathbf{x} da força de contato que atua em uma superfície de área ΔA ao redor do ponto \mathbf{x} . A expressão

$$\mathbf{t} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{F}}{\Delta A}$$

define o vetor tensão \mathbf{t} no ponto \mathbf{x} .

Pela *hipótese de Cauchy* (GURTIN, 1981), o vetor tensão é independente da superfície que passa pelo ponto \mathbf{x} , desde que a normal a esta superfície seja a mesma normal em \mathbf{x} do plano \mathcal{S} e que a superfície seja suave no ponto \mathbf{x} . Assume-se, portanto, que

$$\mathbf{t} = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}). \quad (3.10)$$

Por outro lado, as forças de corpo, medidas por unidade de volume em $\mathbf{x} \in \mathbf{y}(\mathcal{B})$, são representadas pelo mapeamento $\mathbf{b} : \mathbf{y}(\mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{b}(\mathbf{x})$ é contínuo.

Assume-se que \mathbf{t} e \mathbf{b} estão consistentes com o balanço de momentum linear

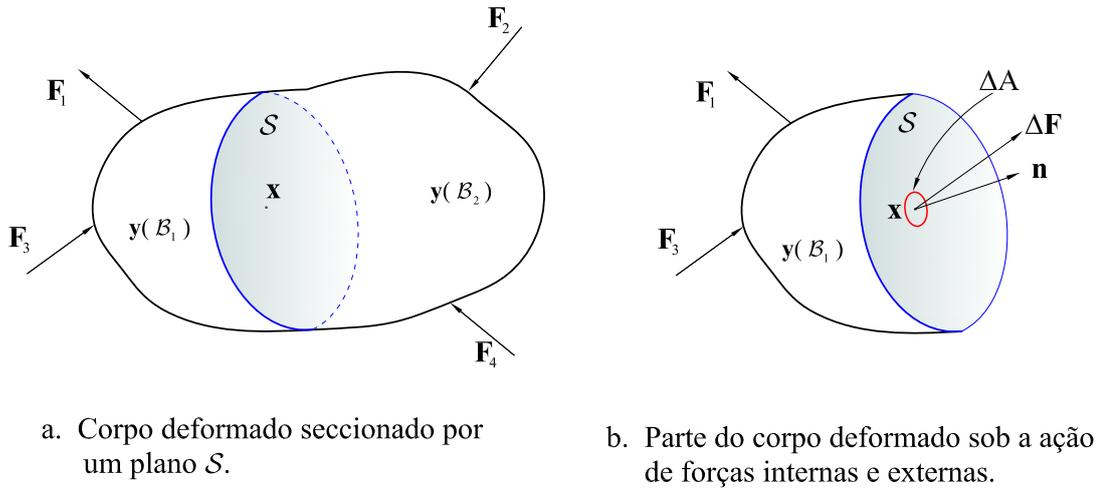


Figura 3: Plano \mathcal{S} seccionando corpo deformado.

$$\int_{\partial \mathbf{y}(\mathcal{P})} \mathbf{t}(\mathbf{n}) \, dS + \int_{\mathbf{y}(\mathcal{P})} \mathbf{b} \, dV = 0, \quad (3.11)$$

onde \mathcal{P} é uma parte arbitrária de \mathcal{B} e $\mathbf{y}(\mathcal{P})$ está em equilíbrio, e com o balanço de momento de momentum linear

$$\int_{\partial \mathbf{y}(\mathcal{P})} \mathbf{r} \wedge \mathbf{t}(\mathbf{n}) \, dS + \int_{\mathbf{y}(\mathcal{P})} \mathbf{r} \wedge \mathbf{b} \, dV = 0, \quad (3.12)$$

onde “ \wedge ” denota o produto vetorial. Apesar de existir a dependência explícita em \mathbf{x} de \mathbf{t} , \mathbf{b} e \mathbf{r} nas expressões (3.11) e (3.12), esta foi omitida.

As leis de balanço (3.11) e (3.12), juntamente com a *hipótese de Cauchy* (3.10), garantem a existência de um campo tensorial suave e simétrico \mathbf{T} , o tensor tensão de Cauchy, tal que

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}) \mathbf{n} \quad (3.13)$$

para todo versor \mathbf{n} e para qualquer ponto $\mathbf{x} \in \mathbf{y}(\mathcal{B})$.

Substituindo (3.13) nas leis de balanço (3.11) e (3.12), utilizando o teorema da divergência e considerando \mathcal{P} arbitrário para que se faça uso do teorema da localização (GURTIN, 1981), pode-se mostrar que

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$$

e

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathcal{B}. \quad (3.14)$$

Um procedimento alternativo comumente empregado em engenharia, (TIMOSHENKO; GOODIER, 1980), para obter as expressões (3.13) e (3.14) é apresentado no Apêndice A.

3.3 Elasticidade Linear Clássica

Assume-se que na configuração não deformada, $\mathbf{y}(\mathbf{X}) = \mathbf{X}$ para todo \mathbf{X} em \mathcal{B} , a tensão residual é nula, ou seja, $\mathbf{T} = 0$. Neste caso e considerando a teoria de pequenas deformações, pode-se considerar que todas as grandezas dependem de \mathbf{X} (ao invés de $\mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{X})$).

Em particular, reescreve-se (3.13) na forma

$$\mathbf{t}(\mathbf{X}, \mathbf{n}) = \mathbf{T}(\mathbf{X}) \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B} \quad (3.15)$$

e considera-se que a equação de equilíbrio (3.14) é satisfeita em \mathcal{B} , ou seja,

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{X}) + \mathbf{b}(\mathbf{X}) = 0, \quad \forall \mathbf{X} \in \mathcal{B}. \quad (3.16)$$

No sistema CCR, $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^3 X_i \mathbf{e}_i$ e a equação vetorial 3.16 é reescrita em termos de suas componentes, dadas por

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} + b_i = 0, \quad \text{em } \mathcal{B}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.17)$$

Além disso, segue de (3.4) juntamente com (3.7) que deformações isocóricas satisfazem

$$\operatorname{tr} \mathbf{E} = 0, \quad (3.18)$$

onde, aqui,

$$\mathbf{E} = \nabla_s \mathbf{u}, \quad (3.19)$$

é o tensor de deformação infinitesimal, o qual é obtido de (3.7) juntamente com (3.6) ao se desprezar termos de ordem superior, $\mathcal{O}(|\nabla \mathbf{u}|^2)$.

Um corpo incompressível oferece uma resistência interna infinita a mudanças locais de volume ao ser deformado. Para um material elástico-linear e isotrópico, a relação constitutiva de um corpo incompressível é dada por

$$\mathbf{T} = -\pi \mathbf{1} + 2\mu(\mathbf{X})\nabla_s \mathbf{u}, \quad (3.20)$$

onde $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ é o módulo de elasticidade ao cisalhamento. A dependência explícita de μ em \mathbf{X} na relação (3.20) representa uma possível heterogeneidade material. Para tal corpo, qualquer campo de deslocamento deve satisfazer a restrição de dilatação volumétrica nula, dada por

$$\text{tr } \nabla_s \mathbf{u} \equiv \text{div } \mathbf{u} = 0 \quad (3.21)$$

a qual foi obtida de (3.18) juntamente com (3.19). A tensão de Cauchy é então determinada do campo de deslocamento e do tensor esférico arbitrário $-\pi \mathbf{1}$, onde π é chamado parte reativa de \mathbf{T} , ou também, pressão reativa.

3.4 O Problema Direto para a Determinação do Deslocamento

Na Seção 3.4.1 considera-se o *problema direto*, o qual consiste em determinar os campos de deslocamento $\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e de pressão $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaçam ambas, a restrição cinemática (3.21) e a equação de equilíbrio (3.26), onde μ é conhecido, juntamente com as condições de contorno (3.23).

Adianta-se que o problema inverso tratado na Seção 4.4 consiste em determinar o módulo de elasticidade ao cisalhamento $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ e o campo de pressão $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaçam a equação de equilíbrio (3.26), onde \mathbf{u} é conhecido. Obviamente, o termo $\nabla_s \mathbf{u}$ satisfaz a restrição cinemática (3.18) e \mathbf{u} satisfaz a condição (3.23.b). Assume-se, no entanto, que a condição de contorno (3.23.a) não é conhecida.

Na Seção 3.4.2 apresenta-se uma formulação integral do problema direto que permite introduzir na Seção 6 uma formulação numérica baseada no Método dos Elementos

Finitos para o cálculo aproximado dos campos \mathbf{u} e π .

3.4.1 Formulação Forte

Deseja-se resolver a equação diferencial parcial

$$\operatorname{div} \mathbf{T} + \mathbf{b} = 0 \quad \text{em } \mathcal{B} \quad (3.22)$$

juntamente com condições de contorno da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\mathbf{n} &= \mathbf{g} && \text{sobre } \Gamma_g, \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{sobre } \Gamma_u, \end{aligned} \quad (3.23)$$

onde \mathbf{n} é a normal exterior a Γ_g e ambos Γ_g e Γ_u são partes regulares do contorno de \mathcal{B} , $\partial\mathcal{B}$, tal que

$$\partial\mathcal{B} = \Gamma_g \cup \Gamma_u, \quad \emptyset = \overset{\circ}{\Gamma}_g \cap \overset{\circ}{\Gamma}_u. \quad (3.24)$$

O círculo acima de Γ denota conjunto aberto. Lembra-se da Seção 3.3 que na teoria de Elasticidade Linear Clássica todas as grandezas envolvidas estão definidas na configuração não deformada \mathcal{B} .

Por simplicidade, assume-se que $\mathbf{b} = 0$. Se $\Gamma_u = 0$, então \mathbf{g} deve satisfazer a condição de equilíbrio global

$$\int_{\partial\mathcal{B}} \mathbf{g} \, dA = 0, \quad (3.25)$$

a qual é necessária para a existência de soluções.

No caso de material isotrópico e incompressível, lembra-se da Seção 3.3 que a relação constitutiva é dada por (3.20) e que o campo de deslocamento deve satisfazer a restrição (3.21).

Substituindo a expressão (3.20) na equação de equilíbrio (3.22), sem \mathbf{b} , e na condição de contorno (3.23.a), obtém-se o problema de achar o campo de deslocamento $\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^3$ e o campo de pressão $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaçam as equações (3.21) e

$$-\nabla\pi + 2 \operatorname{div} (\mu \nabla_s \mathbf{u}) = 0 \quad \text{em } \mathcal{B}, \quad (3.26)$$

juntamente com as condições de contorno

$$\begin{aligned} -\pi \mathbf{n} + 2\mu (\nabla_s \mathbf{u}) \mathbf{n} &= \mathbf{g} && \text{sobre } \Gamma_g, \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{sobre } \Gamma_u. \end{aligned} \quad (3.27)$$

A formulação acima é chamada *formulação forte* (HUGHES, 1987).

Neste trabalho, o corpo está em *estado plano de deformação* paralelo ao plano $\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2$ em um sistema C.C.R. $(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$, de modo que as componentes de \mathbf{u} neste sistema de coordenadas são dadas por

$$u_i = u_i(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2), \quad i = 1, 2, \quad u_3 = 0. \quad (3.28)$$

Além disso, o corpo \mathcal{B} é uma região regular em \mathbb{R}^2 , com Γ_g e Γ_u denotando novamente partes complementares do contorno $\partial\mathcal{B}$.

O problema de valor de contorno associado ao estado plano de deformação do corpo consiste em achar $\mathbf{u} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaçam as equações diferenciais (3.26) juntamente com as condições de contorno (3.27).

Na próxima seção apresenta-se uma formulação integral do problema direto que permite construir um procedimento numérico simples e eficiente para o cálculo de \mathbf{u} na Seção 6.2.

3.4.2 Formulação Fraca

Seja agora $\mathcal{L}^2(\mathcal{B})$ o conjunto de todas as funções quadrado-integráveis, ou seja,

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{B}) = \{\varphi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}; |\varphi|_0 < \infty\}, \quad (3.29)$$

onde a norma $|\bullet|_0$ é dada por

$$|\varphi|_0 \triangleq \left(\int_{\mathcal{B}} |\varphi|^2 \, dA \right)^{\frac{1}{2}} \equiv [(\varphi, \varphi)_0]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.30)$$

Seja $(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^2$ um espaço de Hilbert definido por

$$(\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^2 = \{\mathbf{v} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2; \|\mathbf{v}\|_1 < \infty\}, \quad (3.31)$$

onde a norma $\|\bullet\|_1$ e a semi-norma $|\bullet|_1$ são dadas por

$$\|\mathbf{v}\|_1 \triangleq \left(\int_{\mathcal{B}} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \, dA \right)^{\frac{1}{2}} \equiv (\mathbf{v}, \mathbf{v})_1^{\frac{1}{2}}, \quad (3.32)$$

$$|\mathbf{v}|_1 \triangleq \left(\int_{\mathcal{B}} (\nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) \, dA \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.33)$$

respectivamente.

Seja $\mathbf{u} \in (\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^2$ um deslocamento cinematicamente admissível, de modo que $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ sobre Γ_u , e seja $\mathbf{v} : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função vetorial que satisfaça $\mathbf{v} = 0$ sobre Γ_u . Sejam também \mathcal{A} o conjunto de todos os deslocamentos admissíveis e \mathcal{V} o conjunto de todas as variações admissíveis.

Utilizam-se estas definições para obter a forma integral das equações (3.26) no caso plano. Para isto, toma-se o produto interno da equação (3.26.a) com um elemento arbitrário $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, integra-se sobre $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ e aplica-se o teorema da divergência sobre a equação resultante, lembrando que $\nabla \pi = \text{div}(\pi \mathbf{1})$ e que $\mathbf{Tn} = \mathbf{g}$ sobre Γ_g . Multiplica-se também a equação (3.26.b) por um elemento arbitrário $p \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$ e integra-se a equação resultante sobre $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$.

O problema de valor de contorno pode então ser reformulado como segue: Achar $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$ e $\pi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$ tal que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\pi, \mathbf{v}) &= (\mathbf{g}, \mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ b(p, \mathbf{u}) &= 0, & \forall p \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B}), \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= 2 \int_{\mathcal{B}} \mu \nabla_s \mathbf{u} \cdot \nabla_s \mathbf{v} \, dA, \\ b(\pi, \mathbf{u}) &= \int_{\mathcal{B}} \pi \, \text{tr} \nabla_s \mathbf{u} \, dA. \end{aligned} \quad (3.35)$$

A formulação acima é chamada *formulação fraca* (HUGHES, 1987).

Introduz-se agora uma formulação alternativa de (3.34) juntamente com (3.35) que fornece um procedimento numérico simples e eficiente para o cálculo aproximado de \mathbf{u} e π . Para isto, seja

$$c(\pi, p) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \pi p \, dA. \quad (3.36)$$

Para $\varepsilon > 0$, considere o problema de achar $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{S}$ e $\pi_\varepsilon \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$ tal que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) - b(\pi_\varepsilon, \mathbf{v}) &= (\mathbf{g}, \mathbf{v}), & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\ \varepsilon c(\pi_\varepsilon, p) + b(p, \mathbf{u}_\varepsilon) &= 0 & \forall p \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Uma vez que p é arbitrário, pode-se resolver a segunda equação para π_ε e substituí-lo na primeira equação. Obtém-se assim o problema de achar $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{S}$ tal que

$$a(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) - \hat{b}(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) = (\mathbf{g}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (3.38)$$

onde

$$\hat{b}(\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v}) = \frac{2}{\varepsilon} \int_{\mathcal{B}} (tr \nabla_s \mathbf{u}_\varepsilon)(tr \nabla_s \mathbf{v}) \, dA. \quad (3.39)$$

A formulação deste problema é equivalente à formulação fraca do problema de valor de contorno para um material elástico-linear compressível, para o qual

$$\mathbf{T} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} \mathbf{1} + 2\mu \nabla_s \mathbf{u}, \quad (3.40)$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé, sendo que λ é tomado constante e igual a $2\varepsilon^{-1}$ neste trabalho. É bem conhecido da teoria de elasticidade linear clássica que para $\varepsilon > 0$ e $\mu > 0$ o problema de achar ambos $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{S}$ que satisfaça (3.38) juntamente com (3.39) e $\pi_\varepsilon \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$ que satisfaça (3.37.b) tem uma única solução que converge para a solução (\mathbf{u}, π) de (3.34) juntamente com (3.35) à medida que $\varepsilon \rightarrow 0$.

No caso especial de μ constante e da condição de contorno na forma $\mathbf{u} = 0$ sobre Γ_u , é possível obter a seguinte estimativa de erro para ε pequeno:

$$\begin{aligned} \|u - u_\varepsilon\|_0 &\leq \alpha_1 \varepsilon, \\ \|\pi - \pi_\varepsilon\|_0 &\leq \alpha_2 \varepsilon, \end{aligned} \quad (3.41)$$

onde α_1, α_2 são constantes positivas que não dependem de ε , (veja, por exemplo, Mercier (1979)). As estimativas (3.41) verificam-se essencialmente porque as duas condições abaixo são satisfeitas:

$$\begin{aligned}
a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + \hat{b}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &\geq 2\mu \|\mathbf{v}\|_1^2, & \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \\
\inf_{p \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})} \sup_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}} \frac{\hat{b}(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_1 \|p\|_0} &\geq \beta,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

onde β é uma constante positiva independente de ε . A condição (3.42.b) é conhecida como a condição LBB (HUGHES, 1987).

4 Problemas Inversos

Este capítulo apresenta conceitos gerais de problemas inversos e algumas classificações para situar o leitor no contexto do estudo de problemas de determinação de parâmetros, os quais pertencem a uma classe de problemas inversos.

4.1 Considerações Gerais

A distinção entre o que seja um problema direto, ou, inverso para um dado fenômeno está ligada à nossa interpretação de causa e efeito (CAMPOS VELHO, 2002). Segundo este autor, é atribuído a O. M. Alifanov, proeminente pesquisador russo na área de problemas inversos, a afirmação “a solução de um problema inverso consiste em determinar causas baseado na observação dos seus efeitos”.

Do ponto de vista prático, convencionou-se chamar problema direto àquele em que o estudo antecedeu-se historicamente. Tal ambigüidade sobre a definição de problema direto, ou, inverso pode ser exemplificada do seguinte modo: Se o modelo direto é expresso por $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}$, o modelo inverso pode ser representado por $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{f} = \mathbf{u}$. Por outro lado, definindo-se $\mathbf{B} \equiv \mathbf{A}^{-1}$, o problema direto é representado por $\mathbf{B}\mathbf{f} = \mathbf{u}$, enquanto que o problema inverso é representado por $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{f}$. Logo, qual é o problema inverso? (CAMPOS VELHO, 2002).

O termo *problema inverso*, PI, deve-se ao astrofísico georgiano V. A. Ambartsumian (CAMPOS VELHO, 2002). No entanto, Engl, Hanke e Neubauer (2000) fornecem uma definição bastante abrangente dizendo que resolver um problema inverso é determinar causas desconhecidas a partir de efeitos desejados, ou, observados, devendo-se notar ainda que a área de projeto ótimo, ou, projeto inverso também está incluída nesta definição.

Deve-se atentar para o fato de que, em geral, as observações são imprecisas (dados contaminados com ruídos, ou, erros experimentais) e incompletas. Diferentemente, problemas diretos requerem um conhecimento completo das causas para a determinação

dos efeitos (CAMPOS VELHO, 2002).

Também é preciso ter em mente que *causas*, em um modelo matemático, são as condições iniciais e de contorno, termos de fontes, ou, sumidouro e propriedades do sistema analisado. *Efeitos* são as propriedades calculadas a partir de um modelo direto, como o campo de temperatura, concentração, corrente elétrica, etc.

Matematicamente, problemas inversos pertencem à classe de problemas mal-postos. Segundo Hadamard (1952), um problema bem-posto satisfaz as três propriedades abaixo:

- 1.Existência de solução;
- 2.Unicidade de solução;
- 3.Estabilidade da solução, ou seja, a solução tem uma dependência contínua (suave) com os dados de entrada.

Logo, o problema é dito mal-posto se alguma das condições acima não é satisfeita. Problemas discretos e finitos são chamados mal-condicionados, se a condição (3) não se cumpre (SILVA NETO; MOURA NETO, 2005). Em geral, um problema inverso não satisfaz a nenhuma das condições de Hadamard; maiores detalhes em Kirsch (1996), Morozov (1984), Romanov (1987), Tikhonov (1977) e Tikhonov e Goncharkis (1987).

O requerimento de estabilidade é importante. Se um problema não é estável, então é praticamente impossível calcular a solução porque uma medida ou cálculo numérico é poluído por um erro inevitável: os dados do problema sempre serão perturbados por sinais aleatórios. Se a solução de um problema não depende continuamente dos dados, então, em geral, a solução computada não tem semelhança com a solução real (KIRSCH, 1996).

Se não for possível obter as informações que possibilitaram o cálculo dos dados no problema direto e que servirão de entrada no problema inverso, então não existe meio para gerar esta informação perdida.

Sendo assim, as condições envolvidas na solução de um problema inverso dependem de informações a respeito da existência de solução, a estabilidade desta e a unicidade. Neste contexto, a falta de informação para obtenção da solução de um problema inverso não pode ser remediada com a utilização de um “artifício” matemático (KIRSCH, 1996).

Exemplos simples podem ser usados para ilustrar os conceitos acima mencionados. Por exemplo, considere a solução da equação do 1º grau:

$$2x - 8 = 0.$$

O problema (direto) algébrico acima tem a solução única $x = 4$. O problema algébrico inverso relativo à equação anterior pode ser expresso por

$$ax + b = 0$$

onde a e b são coeficientes a determinar quando $x = 4$. No caso deste problema inverso a solução não é única.

O problema de estabilidade é exemplificado por uma equação algébrica do 2º grau:

$$ax^2 - 2x + 1 = 0. \tag{4.1}$$

Se $a = 1$, a equação polinomial (4.1) possui a raiz dupla $x = 1$. Introduzindo um erro de 1% no coeficiente a , de modo que $a = 1,01$, as raízes da equação (4.1) são dadas por $x_1 = 1 + 0,1i$ e $x_2 = 1 - 0,1i$, sendo i a unidade dos números imaginários. Ou seja, com 1% de ruído em a , a equação (4.1) não tem mais solução no campo dos número reais.

Mesmo apresentando um franco desenvolvimento, a área de estudo de problemas inversos é um capítulo recente na ciência. Há legítimos problemas inversos que não eram reconhecidos como tal. Contudo, existem várias outras áreas da ciência que estão correlacionadas com esta nova área, seja pela natureza do objetivo de estudo, seja pelo ponto de vista metodológico (CAMPOS VELHO, 2002). A lista a seguir apresenta as áreas correlatas aos problemas inversos:

1. Identificação de Sistemas;
2. Controle Ótimo em Sistemas Estocásticos;
3. Álgebra Linear Computacional em Problemas de Posto Incompleto;
4. Reconstrução de Imagens;
5. Teoria de Filtragem;

6. Assimilação/Iniciação de Dados;

7. Teoria de Estimação.

Quanto ao tipo de causa a ser determinada, esta pode ser usada para classificar os problemas inversos (CAMPOS VELHO, 2002). Estas classificações serão apresentadas nas Seções 4.1.1 e 4.2.

4.1.1 Exemplos de Problemas Inversos em Elasticidade Linear Clássica

Comenta-se a seguir dois problemas inversos em engenharia estrutural, salientando pontos relevantes do problema direto e do problema inverso no contexto da elasticidade linear clássica.

Considere o caso de uma barra composta por dois materiais, conforme ilustrado na Fig. 4, na qual pode-se observar na extremidade esquerda a vinculação que impede os deslocamentos nas direções X_1 e X_2 e a rotação no plano X_1X_2 em torno do ponto 1. Na extremidade direita, a barra não sofre restrições em deslocamentos. Note ainda que o ponto 2 representa uma secção transversal que divide a barra em duas partes com propriedades materiais e geométricas distintas entre si.

Para este exemplo, surgem diversas condições no que diz respeito ao conhecimento dos dados *a priori*, resultando em diferentes tipos de sistemas classificados com relação ao número de incógnitas a resolver e o número de equações disponíveis na solução do problema inverso.

Estes casos encontram-se na Tab. 1. Nesta tabela, os dados estão dispostos do seguinte modo: Na primeira coluna no lado esquerdo da tabela encontram-se casos relativos à Fig. 4; as demais colunas contêm os dados disponíveis e os dados que se desejam calcular para cada caso. Na primeira linha encontram-se os dados para o problema direto, o qual corresponde ao primeiro caso. As demais linhas contêm os casos de problemas inversos.

Para exemplificar dois casos da Tab. 1, será utilizado a seguir o Método dos Elementos Finitos na solução de problemas unidimensionais, sendo este explicado com maiores detalhes na Seção 6.1. A intenção aqui é montar o sistema a ser resolvido e as discussões geradas pelo conhecimento de um dado, ou, a falta deste, sem se preocupar com o entendimento do método numérico neste momento. Sendo assim, assumamos as expressões elementares para uma única barra reta submetida à forças em suas extremidades como

segue:

$$\begin{bmatrix} k_i & -k_i \\ -k_i & k_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_j \\ u_{j+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_j \\ f_{j+1} \end{Bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, (n+1), \quad (4.2)$$

onde

$$k_i = \frac{E_i A_i}{l_i}. \quad (4.3)$$

Os subíndices i e j representam o número de intervalos na barra e os pontos, denominados nós, que dividem os intervalos, respectivamente.

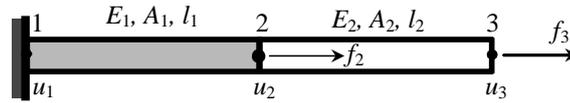


Figura 4: Barra reta engastada e composta de duas partes com propriedades materiais e geométricas distintas.

Fonte: Liu e Han (2003).

As equações governantes do sistema para a Fig. 4 são obtidas da montagem dos dois membros da barra com o uso de (4.2) e (4.3). Para o caso discreto, obtém-se

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}, \quad (4.4)$$

onde

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{E_1 A_1}{l_1}, \\ k_2 &= \frac{E_2 A_2}{l_2}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Utilizando a condição de contorno $u_1 = 0$, pode-se reescrever (4.4) na forma

$$\begin{bmatrix} \hat{k}_1 + \hat{k}_2 & -\hat{k}_2 \\ -\hat{k}_2 & \hat{k}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{f}_2 \\ \hat{f}_3 \end{Bmatrix}. \quad (4.6)$$

Tabela 1: Casos de problemas para uma barra composta por dois materiais

Casos	Condições de Contorno	Parâmetros Geométricos	Parâmetros da Propriedade do Material	Causas Externas (Forças)	Efeitos (Deslocamentos, Frequência Natural/Modos)
Problema Direto	$u_1 = 0$	$A_1 = \hat{A}_1, l_1 = \hat{l}_1$ $A_2 = \hat{A}_2, l_2 = \hat{l}_2$	$\hat{E}_1 = \hat{E}_1$ $\hat{E}_2 = \hat{E}_2$	$f_2 = \hat{f}_2$ $f_3 = \hat{f}_3$	$u_2 = ?$ $u_3 = ?$
Problema Inverso Caso I-1 igual-posto	$u_1 = 0$	$A_1 = \hat{A}_1, l_1 = \hat{l}_1$ $A_2 = \hat{A}_2, l_2 = l_2$	$\hat{E}_1 = \hat{E}_1$ $\hat{E}_2 = \hat{E}_2$	$f_2 = ?$ $f_3 = ?$	$u_2 = \hat{u}_2$ $u_3 = \hat{u}_3$
Problema Inverso Caso I-2 sub-posto	$u_1 = 0$	$A_1 = \hat{A}_1, l_1 = \hat{l}_1$ $A_2 = \hat{A}_2, l_2 = \hat{l}_2$	$\hat{E}_1 = \hat{E}_1$ $\hat{E}_2 = \hat{E}_2$	$f_2 = ?$ $f_3 = ?$	$u_3 = \hat{u}_3$
Problema Inverso Caso II-1 igual-posto	$u_1 = 0$	$A_1 = \hat{A}_1, l_1 = \hat{l}_1$ $A_2 = \hat{A}_2, l_2 = \hat{l}_2$	$\hat{E}_1 = ?$ $\hat{E}_2 = ?$	$f_2 = \hat{f}_2$ $f_3 = \hat{f}_3$	$u_2 = \hat{u}_2$ $u_3 = \hat{u}_3$
Problema Inverso Caso II-2 sobre-posto	$u_1 = 0$	$A_1 = \hat{A}_1, l_1 = \hat{l}_1$ $A_2 = \hat{A}_2, l_2 = \hat{l}_2$	$\hat{E}_1 = \hat{E}_1$ $\hat{E}_2 = ?$	$f_2 = \hat{f}_2$ $f_3 = \hat{f}_3$	$u_2 = \hat{u}_2$ $u_3 = \hat{u}_3$
Problema Inverso Caso III-1 igual-posto	$u_1 = 0$	$A_1 = ?, l_1 = \hat{l}_1$ $A_2 = ?, l_2 = l_2$	$\hat{E}_1 = \hat{E}_1$ $\hat{E}_2 = \hat{E}_2$	$f_2 = \hat{f}_2$ $f_3 = \hat{f}_3$	$u_2 = \hat{u}_2$ $u_3 = \hat{u}_3$
Problema Inverso Caso III-2 igual-posto	$u_1 = 0$	$A_1 = \hat{A}_1, l_1 = ?$ $A_2 = \hat{A}_2, l_2 = ?$	$\hat{E}_1 = \hat{E}_1$ $\hat{E}_2 = \hat{E}_2$	$f_2 = \hat{f}_2$ $f_3 = \hat{f}_3$	$u_2 = \hat{u}_2$ $u_3 = \hat{u}_3$
Problema Inverso Caso IV- igual-posto	$u_1 = ?$ $f_1 = ?$	$A_1 = \hat{A}_1, l_1 = \hat{l}_1$ $A_2 = \hat{A}_2, l_2 = \hat{l}_2$	$\hat{E}_1 = \hat{E}_1$ $\hat{E}_2 = \hat{E}_2$	$f_2 = \hat{f}_2$ $f_3 = \hat{f}_3$	$u_2 = \hat{u}_2$ $u_3 = \hat{u}_3$

Fonte: Adaptado de Liu e Han (2003).

O Problema Direto

Inicialmente, para a estrutura que se apresenta na Fig. 4, deve-se realizar uma discussão elementar sobre a solução do problema direto. Resolvendo a equação (4.6) para os deslocamentos dados e considerando as condições presentes na Tab. 1, segue que

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{k}_1 + \hat{k}_2 & -\hat{k}_2 \\ -\hat{k}_2 & \hat{k}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \hat{f}_2 \\ \hat{f}_3 \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{k}_1} & \frac{1}{\hat{k}_1} \\ \frac{1}{\hat{k}_1} & \frac{\hat{k}_1 + \hat{k}_2}{\hat{k}_1 \hat{k}_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{f}_2 \\ \hat{f}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\hat{k}_1} (\hat{f}_2 + \hat{f}_3) \\ \frac{1}{\hat{k}_1} \left[\hat{f}_2 + \left(\frac{\hat{k}_1 + \hat{k}_2}{\hat{k}_2} \right) \hat{f}_3 \right] \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Tomando a primeira equação de (4.4), encontra-se a força de reação no nó 1, a qual é dada por

$$f_1 = -\hat{k}_1 \times \hat{u}_2 = -\left(\hat{f}_2 + \hat{f}_3 \right). \quad (4.8)$$

Mostra-se que, conhecidos os parâmetros geométricos, as condições de contorno e as causas externas, pode-se determinar unicamente os deslocamentos na barra reta. A solução que se apresenta em (4.7) pode ser escrita na forma geral como segue:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{S} \hat{\mathbf{X}}, \quad (4.9)$$

onde

$$\mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

é o vetor de deslocamentos,

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{Bmatrix} \hat{f}_2 \\ \hat{f}_3 \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

é o vetor de forças e

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{k}_1} & \frac{1}{\hat{k}_1} \\ \frac{1}{\hat{k}_1} & \frac{\hat{k}_1 + \hat{k}_2}{\hat{k}_1 \hat{k}_2} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

é a matriz de flexibilidade, a qual depende das propriedades do material e dos parâmetros

geométricos do sistema.

No problema direto, o vetor $\hat{\mathbf{X}}$ é um vetor de entrada, \mathbf{S} é uma matriz de transformação e o vetor \mathbf{Y} é o vetor de saída, como ilustrado na Fig. 5.

Se a equação (4.4) for resolvida sem o uso das condições de contorno, o problema direto é mal-posto e não apresenta solução única. Além disso, se k_1 e k_2 forem iguais a zero, a equação (4.7) ainda não poderá prover solução única. O ponto fundamental aqui é que o problema direto também pode ser mal-posto, sendo neste caso usualmente chamado de não bem-definido (LIU; HAN, 2003).

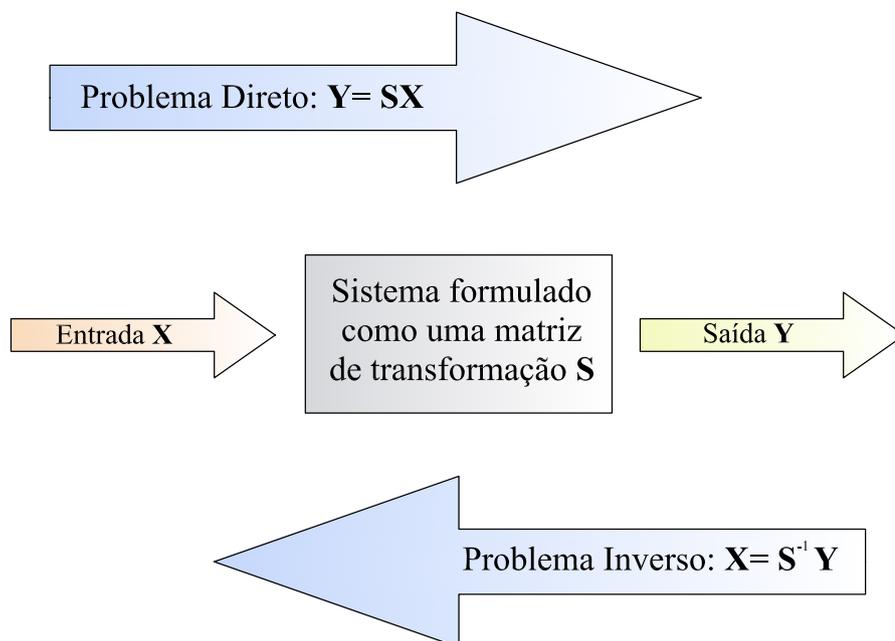


Figura 5: Esquema simples ilustrando o problema direto e o problema inverso.

Fonte: Adaptado de Liu e Han (2003).

Pretende-se agora, após a discussão acima sobre as condições para a obtenção de solução do problema direto, selecionar dois casos na Tab. 1 para discutir alguns aspectos relacionados às soluções de problemas inversos.

1. Problema Inverso II-1: Identificação de Propriedade do Material com Solução Única (Número de Equações Igual ao Número de Incógnitas)

Considere agora o caso do problema inverso II-1, com suas respectivas condições apresentadas na Tab. 1. Neste caso, conhece-se todas as variáveis com exceção dos módulos de Young dos dois membros da barra. Os módulos E_1 e E_2 estão relacionados às constantes k_1 e k_2 através de (4.5).

Tendo em vista a discussão que segue abaixo, pode-se escrever a equação matricial (4.6) na forma

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} \hat{f}_2 \\ \hat{f}_3 \end{Bmatrix}}_{\hat{\mathbf{Y}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{u}_2 & \hat{u}_2 - \hat{u}_3 \\ 0 & -\hat{u}_2 + \hat{u}_3 \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{S}}} \underbrace{\begin{Bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{X}}. \quad (4.13)$$

Neste tipo de problema, a matriz de transformação $\hat{\mathbf{S}}$ depende dos deslocamentos medidos. O vetor de saídas é o vetor de forças externas e o vetor de entrada contém as propriedades do material e os parâmetros geométricos do sistema.

Resolvendo a equação matricial (4.13) para a entrada \mathbf{X} , tem-se

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{S}}^{-1} \hat{\mathbf{Y}}, \quad (4.14)$$

onde

$$\hat{\mathbf{S}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\hat{u}_2} & \frac{1}{\hat{u}_2} \\ 0 & \frac{1}{-\hat{u}_2 + \hat{u}_3} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Substituindo (4.15) em (4.14), obtém-se

$$\mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{\hat{u}_2} (\hat{f}_2 + \hat{f}_3) \\ \frac{1}{\hat{u}_3 - \hat{u}_2} \hat{f}_3 \end{Bmatrix}. \quad (4.16)$$

Usando a expressão (4.16) juntamente com (4.5), determinam-se os módulos de Young dos dois membros da barra, os quais são dados por

$$\begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\hat{l}_1}{\hat{A}_1} k_1 \\ \frac{\hat{l}_2}{\hat{A}_2} k_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\hat{l}_1}{\hat{A}_1 \hat{u}_2} (\hat{f}_2 + \hat{f}_3) \\ \frac{\hat{l}_2}{\hat{A}_2 (\hat{u}_3 - \hat{u}_2)} \hat{f}_3 \end{Bmatrix}. \quad (4.17)$$

Neste ponto, discutem-se as condições para que a equação (4.15) apresente solução. Assim, se $\hat{u}_2 = \hat{u}_3$, não é possível determinar E_2 , e se $\hat{u}_2 = 0$, não é possível determinar E_1 . Este fato revela um ponto importante sobre os problemas inversos: existem situações nas quais o processo de solução falha.

Além disso, quando \hat{u}_2 (ou, $\hat{u}_2 - \hat{u}_3$) é muito pequeno e incorreto, pode-se ver facilmente que o erro em estimar E_1 (ou, E_2) pode ser significativo e até mesmo instável (uma pequena mudança no valor de \hat{u}_2 poderia resultar em uma grande mudança em E_1). Não obstante, revela-se deste fato outro ponto importante a

respeito dos problemas inversos: os erros na solução podem ser ampliados, ou, a solução pode ser instável. Esta instabilidade é responsável pela má-colocação dos problemas inversos. Segundo Liu e Han (2003), classifica-se este tipo de problema como problema inverso mal-posto do Tipo II.

Para a discussão seguinte, defina *posto* de uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, sendo $m \times n$ as dimensões desta matriz, como o segue

$$\text{posto}(\mathbf{A}) = \text{mín}\{n_L, n_C\},$$

onde n_L e n_C são, respectivamente, os números de linhas e colunas linearmente independentes da matriz \mathbf{A} .

Em outras palavras, o rank de uma matriz \mathbf{A} , $m \times n$, é a dimensão da maior submatriz quadrada \mathbf{B} não singular ($\mathbf{B} \neq 0$) que puder ser obtida de \mathbf{A} .

Diz-se que o posto da matriz \mathbf{A} é completo quando $\text{posto}(\mathbf{A})$ é igual à menor das dimensões de \mathbf{A} ; caso contrário, o posto da matriz é chamado deficiente (GOLUB; LOAN, 1996).

Retornando à discussão anterior, a causa da má-colocação de um problema inverso é o *posto* da matriz de transformação $\hat{\mathbf{S}}$ na equação (4.13). Isto é visto claramente quando $\hat{u}_2 = 0$, ou, $\hat{u}_2 = \hat{u}_3$, pois neste caso $\hat{\mathbf{S}}$ tem o *posto* igual a 1, ou seja, o *posto* da matriz é deficiente segundo a definição acima. Fisicamente, esta má-colocação está no fato de E_2 não ser sensível a qualquer medida que produza $\hat{u}_2 = \hat{u}_3$, porque tal medida não causará deformação na parte à direita da barra reta. Portanto, não existe maneira de determinar E_2 se estes forem os valores medidos. Similarmente, E_1 não é sensível a qualquer medição que produza $\hat{u}_2 = 0$, porque tal medida não provocará qualquer deformação na parte à esquerda da barra reta.

Como as incógnitas e as variáveis conhecidas são iguais em número, este problema é dito igual-posto, ou, determinado. Observe que um sistema igual-posto não garante necessariamente a estabilidade da solução para o problema inverso devido à possibilidade de má-colocação do Tipo II de problema inverso que se mencionou previamente (LIU; HAN, 2003).

Observe que a má-colocação do Tipo II no problema direto ocorre quando a solução da equação (4.7) tem como condições k_1 , ou, k_2 igual a zero. Veja a discussão anterior sobre a solução do problema direto para maiores detalhes.

2.Problema Inverso II-2: Identificação de Propriedade do Material com Solução Não-Única (Número de Equações Superior ao Número de Incógnitas)

Neste caso $E_1 = \hat{E}_1$, onde \hat{E}_1 é conhecido. O sistema (4.6) pode ser reescrito na forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (\hat{u}_2 - \hat{u}_3) \frac{\hat{A}_2}{\hat{l}_2} \\ (-\hat{u}_2 + \hat{u}_3) \frac{\hat{A}_2}{\hat{l}_2} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{S}}} \underbrace{\left\{ \hat{E}_2 \right\}}_{\mathbf{X}} = \underbrace{\left\{ \hat{f}_2 - \hat{u}_2 \frac{\hat{E}_1 \hat{l}_1}{\hat{A}_1} \right.}_{\hat{\mathbf{Y}}} \left. \hat{f}_3 \right\}. \quad (4.18)$$

Observa-se que este sistema é do tipo sobre-determinado, porque para uma incógnita existem duas equações. Para obter a entrada \mathbf{X} , é necessário realizar a inversão da matriz de transformação $\hat{\mathbf{S}}$, cuja dimensão é 2×1 , encontrando-se a solução

$$\mathbf{X} = \hat{\mathbf{S}}^{-g} \hat{\mathbf{Y}} \quad (4.19)$$

onde $\hat{\mathbf{S}}^{-g}$ é uma matriz inversa generalizada de $\hat{\mathbf{S}}_{2 \times 1}$, a qual pode ser obtida com o uso do Método dos Mínimos Quadrados, MMQ, como segue

$$\hat{\mathbf{S}}^{-g} = \left(\hat{\mathbf{S}}^T \hat{\mathbf{S}} \right)^{-1} \hat{\mathbf{S}}^T. \quad (4.20)$$

O que se deseja enfatizar neste ponto é o fato de sistemas sobre-determinados poderem ser mal-postos. Claramente, é possível ver isto da equação (4.18) quando $\hat{u}_2 = \hat{u}_3$. Em tais casos, E_2 não é definido e poderá ser instável ao se usar os dados de \hat{u}_2 e \hat{u}_3 com ruídos, ou seja, um típico problema inverso do Tipo II mal-colocado.

Para uma visão mais geral sobre outros problemas inversos que surgem no contexto da elasticidade linear, em especial os que se referem à identificação de parâmetros, sugere-se a leitura do trabalho desenvolvido por Bonnet e Constatinescu (2005).

4.2 Classificação dos Problemas Inversos

Como havia sido adiantado na Seção 4.1, pode-se classificar os problemas inversos conforme a causa a ser determinada, ou, segundo Liu e Han (2003), pelo tipo de má-colocação do sistema a ser resolvido, conforme apresentado na Tab. 1. A seguir apresentam-se algumas classificações:

1.Quanto à natureza matemática do método:

Explícito (inversão direta)

Implícito

2. Quanto à natureza estatística do método:

Aqui a expressão “natureza estatística” deve ser entendida como o grau de conhecimento da solução obtida pelo método empregado. Deste modo, tem-se

Determinista

Estocástico (veja maiores explicações sobre este método em Tarantola (2005))

Observe que as classificações 1 e 2 estão ligadas aos métodos de solução do PI.

3. Quanto à natureza da solução:

Estimação de parâmetros

Estimação de função

Esta classificação foi formulada por Beck, Blackwell e Clair (1985).

4. Segundo (SILVA NETO; MOURA NETO, 2000) e (SILVA NETO, 2005):

Esta classificação está baseada na dimensão do modelo do fenômeno físico (problema direto – PD) e na dimensão de quantidade a ser estimada (problema inverso – PI) se finita (f), ou infinita (∞).

Tipo-1 Estimação de um número finito de parâmetros em um modelo de dimensão finita (PD- f e PI- f); por exemplo a solução de um sistema de n equações a m incógnitas. Os problemas inversos do tipo reconstrução de imagens são exemplos de PI do Tipo-1.

Tipo-2 Estimação de um número finito de parâmetros em um modelo de dimensão infinita (PD- ∞ e PI- f). Como exemplo de dimensão infinita tem-se o caso de um problema de valor inicial para uma equação diferencial parcial. Se o objeto a ser estimado for de dimensão finita, esta dimensão será dada por alguns parâmetros, ou, constantes do modelo.

Tipo-3 Estimação de um número infinito de parâmetros, ou, de uma função em um modelo de dimensão infinita (PD- ∞ e PI- ∞).

Na classificação do item 4 pode-se classificar a estimação de parâmetros como do Tipo-2, ou, Tipo-3. A estimação de função contínua é sempre um problema do Tipo-3 (CAMPOS VELHO, 2002).

4.3 Métodos de Solução e Regularização

São vários os métodos utilizados para resolver problemas inversos, (CAMPOS VELHO, 2002), dentre os quais citam-se:

1. Inversão direta;
2. Decomposição em valores singulares;
3. Mínimos quadrados e variantes (mínimos quadrados ponderados);
4. Métodos de regularização;
5. Métodos variacionais;
6. Outros (molificação, métodos bayesianos, filtros digitais, redes neurais, etc).

O procedimento numérico desenvolvido nesta pesquisa utiliza um método de pseudo-inversão baseado na Decomposição em Valores Singulares mencionado no item 2 da lista anterior. Na Seção 4.3.1 encontram-se maiores detalhes sobre este método.

Liu e Han (2003) descrevem um procedimento geral para resolver problemas inversos. O procedimento consiste nos passos apresentados no fluxograma da Fig. 6, os quais estão descritos brevemente a seguir.

* Definição do problema - definir a finalidade e os objetivos do projeto, com uma análise sobre os recursos e o tempo disponíveis. Uma estratégia global e exequível deve ser determinada para mais tarde ser efetivamente executada. Deve-se realizar tentativas a qualquer momento para (1) reduzir o número de incógnitas a serem inversamente identificadas e (2) definir claramente os parâmetros a serem utilizados. Estas duas tentativas podem levar a uma redução efetiva das possibilidades de problemas inversos mal-postos (por exemplo, condições de contorno mal definidas) e assim, aumentar a chance de sucesso e melhorar a eficiência e a precisão da operação de inversão.

* Formulação do modelo direto - um modelo físico deve ser estabelecido para capturar a física do problema definido. Os resultados, ou, efeitos do sistema devem ser sensíveis aos parâmetros do sistema a serem inversamente identificados. Os parâmetros deverão ser independentes dos resultados, ou, dos efeitos do sistema. Impor condições adicionais pode contribuir para a boa colocação de problemas inversos. Modelos matemáticos e computacionais devem ser desenvolvidos para resolver o problema direto.

Podem-se empregar métodos computacionais padrões, tais como o MEF (Método dos Elementos Finitos), MDF (Método das Diferenças Finitas), MVF (Método dos Volumes Finitos), métodos sem malhas, solucionadores de ondas, etc.

* Análise da sensibilidade entre os dados de entrada e os dados de saída (resultados)- Certifique-se de que os resultados do problema e os parâmetros (incluindo os dados de entrada) para serem inversamente identificados estão bem correlacionados. Garantir a alta sensibilidade dos resultados para os parâmetros é uma das estratégias mais eficazes para reduzir más-posições nos estágios futuros da análise inversa. A análise deve ser realizada utilizando o modelo direto criado sem a necessidade de experimentos que possam ser dispendiosos. Baseado na análise da sensibilidade, pode-se fazer modificações no modelo direto e nas escolhas dos parâmetros.

* Concepção do experimento - decidir sobre os métodos de medição, tipo de equipamento para ensaios e gravação e análise de dados. O número de medições, ou, leituras deve ser, pelo menos, maior do que o número de incógnitas a ser inversamente identificadas, o que pode conduzir a um problema igual-posto. Um sistema sobre-determinado (utilizando mais saídas), é geralmente preferido, de forma a melhorar a propriedade do sistema de equações e reduzir a má-colocação do problema. Uma formulação sobre-determinada pode acomodar normalmente níveis mais elevados de contaminação por ruídos em dados experimentais. No entanto, sistemas com um número de equações muito maior do que o número de incógnitas podem resultar numa saída de dados com reprodutibilidade pobre, podendo ser verificados mais tarde pela computação da reprodutibilidade dos dados de saída após a obtenção da solução inversa.

* Minimização dos erros de medição (por exemplo, por meio de filtragem) - erros na medição de dados devem ser eliminados, tanto quanto possível, porque eles podem acionar as más-colocações do problema, fazendo com que os erros possam ser ampliados na solução inversa, ou mesmo, resultar em uma solução instável. Existe a possibilidade de utilizar filtros adequadamente concebidos para filtrar os erros antes que dados de medição sejam usados para a análise inversa.

* Análise inversa, ou, obtenção da solução inversa - se o sistema pode ser formulado em uma matriz de forma explícita, a inversa generalizada (veja Golub e Loan, 1996) da matriz do sistema pode ser efetuada de modo a obter a solução inversa. Para sistemas complexos que não podem ser formulados em uma matriz na forma explícita, um funcional de erro sempre pode ser estabelecido por meio de uma norma apropriada, e técnicas de otimização/minimização devem ser utilizadas para a pesquisa da solução

que minimiza a norma do erro. Pode-se usar técnicas de regularização apropriadas para problemas inversos mal-postos. Técnicas de regularização são muito importantes para obter soluções estáveis para problemas inversos mal-postos. Observe também que a utilização de algumas das técnicas de regularização deve ser o último recurso para sanar as más-colocações do problema. Alguns efeitos colaterais irão ocorrer ao se usar muitos dos métodos de regularização. Além disso, o uso inadvertido destas técnicas de regularização pode também levar a resultados completamente incorretos.

* Verificação da solução - isto é importante para garantir que a solução inversa obtida é fisicamente plausível. Todos os métodos possíveis com o apropriado julgamento de engenharia deverão ser empregados para certificar-se de que a solução obtida é confiável. Verificações sobre a reprodutibilidade dos dados de saída e de entrada das matrizes podem dar algumas indicações sobre a qualidade da solução. Podem ser necessárias modificações das estratégias experimentais e de inversão, sendo possível repetir os passos anteriores até que a solução inversa seja satisfatória. Note que podem-se realizar muitas verificações computacionais com a necessidade de verificações experimentais na fase final.

4.3.1 Solução com o uso do método SVD (*Singular Value Decomposition*) e Limitações

Considere o modelo linear discreto expresso por $\mathbf{d} = \mathbf{G}\mathbf{m}$, onde $\mathbf{d} = [d_1, d_2, \dots, d_D]^T$ é o vetor de dados, ou, observações, $\mathbf{m} = [m_1, m_2, \dots, m_M]^T$ é o vetor de parâmetros a ser determinado e

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1M} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ g_{D1} & \cdots & g_{DM} \end{bmatrix}$$

é uma matriz $D \times M$.

Se $D = M$ a solução formal é dada pela inversão direta: $\mathbf{m} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{d}$. Na prática, porém, a matriz \mathbf{G} é freqüentemente quase-singular, ou, mesmo singular e o procedimento é inaplicável (CAMPOS VELHO, 2002). Para avaliar como uma matriz mal condicionada pode levar a uma degeneração da solução do PI, realiza-se a decomposição de \mathbf{G} em valores singulares (SVD). Veja maiores detalhes em Golub e Loan (1996). Assim,

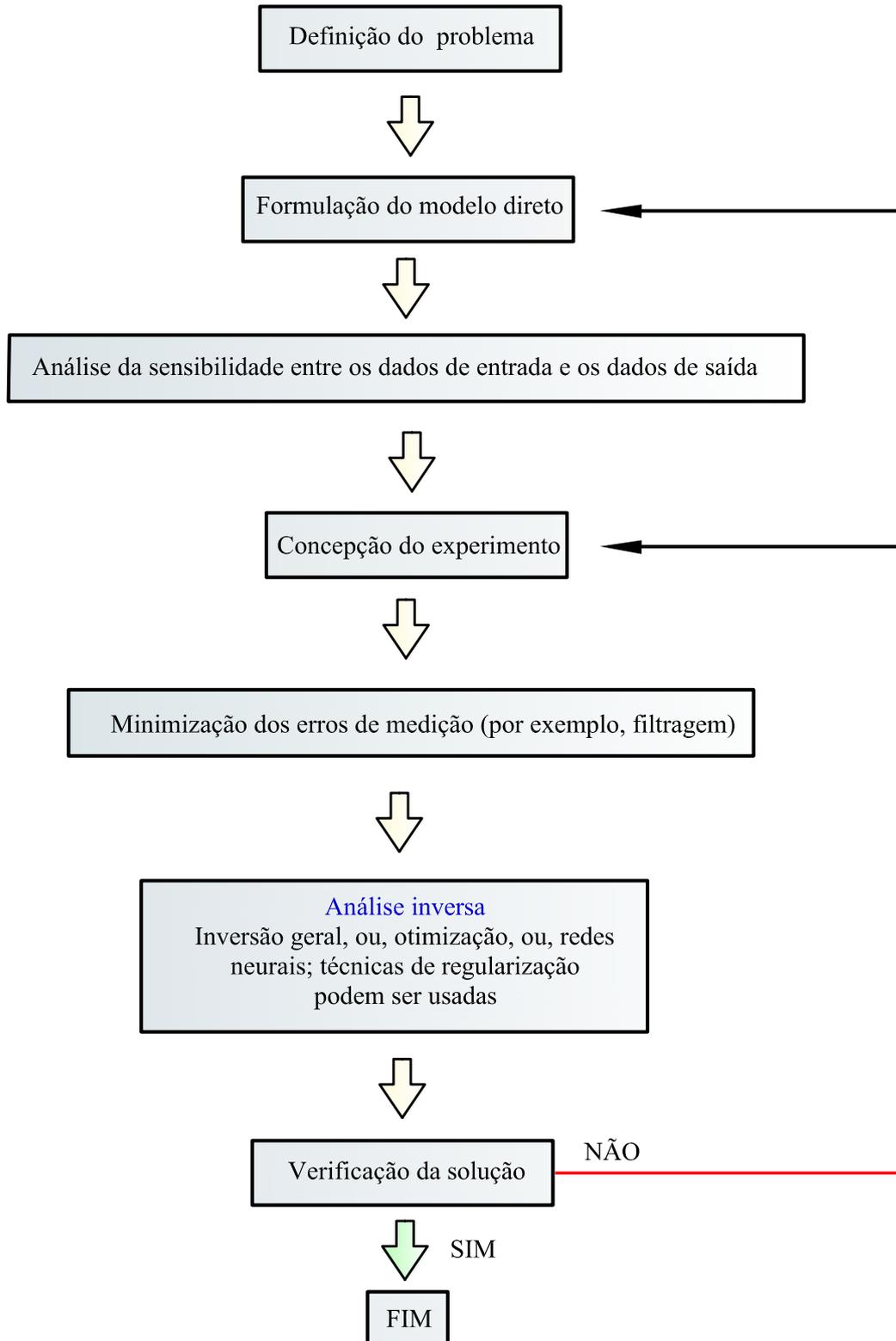


Figura 6: Esquema geral para a solução de problemas inversos.

Fonte: Adaptado de Liu e Han (2003).

$$\mathbf{G} = \mathbf{U} [\text{diag}(\omega_j)] \mathbf{V}^T = \mathbf{U} \mathbf{\Omega} \mathbf{V}^T,$$

onde \mathbf{U} e \mathbf{V} são matrizes quadradas ortogonais, isto é: $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{I}_{D \times D}$ e $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_{M \times M}$. As colunas de \mathbf{U} são autovetores de $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$. Os ω_j são autovalores ordenados ($\omega_1 \geq \omega_2 \geq \dots \geq \omega_M$) da matriz $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$. A inversa da matriz \mathbf{G} é dada por

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{V} [\text{diag}(\omega_j^{-1})] \mathbf{U}^T.$$

Inicialmente, defina o *espaço nulo* de uma matriz $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, denotado por $\mathcal{N}(\mathbf{G})$, como o conjunto de vetores \mathbf{x} tais que $\mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ou, de outro modo,

$$\mathcal{N}(\mathbf{G}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{G}\mathbf{x} = \mathbf{0}\}.$$

Se \mathbf{G} é uma matriz quase singular, ou seja, existe $r > 0$ tal que $\omega_{r+1} \approx \omega_{r+2} \approx \dots \approx \omega_M \approx 0$, então, aproximadamente, $\text{posto}(\mathbf{G}) = r$ e $\dim(\mathcal{N}(\mathbf{G})) = M - r$. Erros experimentais em \mathbf{d} (erros de arredondamento, etc) serão muito amplificados e contaminarão a solução inversa. A análise pode ser repetida para problemas indeterminados ($D < M$). A indeterminação neste caso aparecerá de forma explícita na decomposição de \mathbf{G} :

$$\mathbf{G} = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \text{diag}(\omega_j) & \\ & \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}^T,$$

implicando que a inversa de \mathbf{G} não existe.

4.3.2 Solução por Mínimos Quadrados e Limitações

Consieram-se as três técnicas abaixo.

a) Método de Mínimos Quadrados (padrão). Se a matriz \mathbf{G} é singular ou quase-singular, uma abordagem natural (mas não única e nem sempre a mais correta) é determinar a solução do sistema $\mathbf{G}\mathbf{m} = \mathbf{d}$ pelo método dos mínimos quadrados. Segundo (CAMPOS VELHO, 2002) deseja-se determinar o ponto de mínimo $\hat{\mathbf{m}}$ do problema de minimização

$$\min_{\mathbf{m}} \|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}\|_2^2,$$

onde, do exposto anteriormente, \mathbf{d} é o vetor de dados. Uma condição necessária para a

existência de $\hat{\mathbf{m}}$ é que $\mathbf{G}\hat{\mathbf{m}} = \mathbf{d}$. Esta condição pode ser escrita na forma

$$\hat{\mathbf{m}} = (\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^T \mathbf{d} = \mathbf{G}^+ \mathbf{d},$$

onde \mathbf{G}^+ é a inversa generalizada de Moore-Penrose, também chamada de pseudo-inversa (veja Golub e Loan (1996)). Antes de prosseguir, é importante destacar algumas observações relevantes:

1. Se $\mathcal{N}(\mathbf{G}) = \{0\}$, então $\hat{\mathbf{m}}$ existe e é único para sistemas lineares.
2. Se os erros associados às medidas experimentais \mathbf{d} forem independentes, aditivos e gaussianos, $\hat{\mathbf{m}}$ corresponde ao estimador de máxima verossimilhança ¹. Resumindo:

Máxima Verossimilhança + Hipótese Gaussiana = Mínimos Quadrados.

b) Mínimos Quadrados Ponderados. É somente uma generalização da função custo $\mathbf{J}(\mathbf{m})$ expressa como segue:

$$\hat{\mathbf{m}} \Rightarrow \min_{\mathbf{m}} \|\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m}\|_{\mathbf{W}}^2,$$

ou,

$$\mathbf{J}(\mathbf{m}) = (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m})^T \mathbf{W} (\mathbf{d} - \mathbf{G}\mathbf{m})$$

onde a matriz \mathbf{W} é a matriz diagonal dos pesos que definem a contribuição relativa de cada erro individual ao erro total. \mathbf{W} é uma matriz simétrica e positiva definida, com dimensão $D \times D$ (CAMPOS VELHO, 2002).

Dois importantes casos de problemas lineares finitos que podem ser resolvidos com as técnicas apresentadas nas Seções 4.3.1 e 4.3.2 são:

- Problemas indeterminados ($D < M$): solução é dada pela *norma mínima de mínimos quadrados*: Mínimos Quadrados + $\min(\mathbf{m}^T \mathbf{m})$.

- Problemas mal-condicionados: Este é o caso mais simples: se $\omega_{r+1} \approx \omega_{r+2} \approx \dots \approx \omega_M \approx 0$. A solução é obtida fixando-se $\omega_{r+1}^{-1} = \dots = \omega_M^{-1} = 0$ e obtendo-se a inversa generalizada, por exemplo, via mínimos quadrados, ou, SVD (CAMPOS VELHO, 2002).

¹O método de máxima verossimilhança é utilizado para estimativa dos valores dos parâmetros da distribuição que maximiza a função de verossimilhança. A função de verossimilhança é baseada na função densidade de probabilidade conhecida para uma dada distribuição (veja maiores detalhes em Cordeiro (1992)).

4.3.3 Métodos de Regularização

No caso particular de sistemas lineares indeterminados ($D < M$), a solução proposta apresenta o termo adicional $\mathbf{m}^T \mathbf{m}$. A partir deste caso pode-se generalizar: para resolver problemas mal-postos é necessário fornecer informação adicional. Na década de 60 vários pesquisadores também notaram este fato. No entanto, o destaque é dado ao trabalho de Tikhonov (1963), que iniciou uma formulação geral para problemas mal-postos, chamada *regularização*, ou, *método de regularização* (CAMPOS VELHO, 2002).

O método de regularização consiste em determinar a solução aproximada mais suave compatível com os dados de observação para um certo nível de ruído (CAMPOS VELHO, 2002). A busca da solução mais suave (regular) é uma informação adicional que transforma o problema mal-posto em um problema bem-posto, conforme ilustrado na Fig. 7.

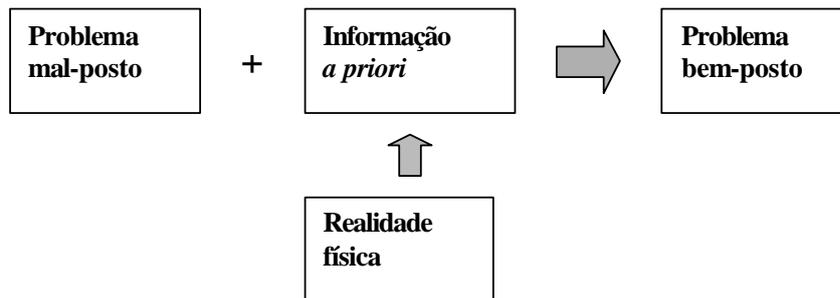


Figura 7: Idéia do Processo de Regularização.

Fonte: Campos Velho(2002).

Formula-se o PI como um problema de otimização com restrições:

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \left\| \mathbf{A}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^\delta \right\|_2^2$$

sujeito a

$$\Omega[\mathbf{u}] \leq \rho,$$

onde δ é um limite para os erros de medição, $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{f}^\delta$ representa o modelo direto e $\Omega[\mathbf{u}]$ é o operador de regularização (TIKHONOV; GONCHARSKIS, 1987). A técnica dos multiplicadores de Lagrange permite reunir na mesma função custo os objetivos de fidelidade dos parâmetros com o modelo direto e a regularidade (suavidade) exigida da quantidade

desconhecida (CAMPOS VELHO, 2002). Utilizando esta técnica, reescreve-se o problema de minimização na forma

$$\min_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \left\{ \left\| \mathbf{A}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}^\delta \right\|_2^2 + \alpha \|\Omega[\mathbf{u}]\| \right\},$$

onde α é o parâmetro de regularização. Deve ser observado que se $\alpha \rightarrow 0$ o termo de fidelidade dos dados na função objetivo é superestimado, enquanto que se $\alpha \rightarrow \infty$ toda a informação contida no modelo matemático é perdida (CAMPOS VELHO, 2002).

4.4 O Problema Inverso de Determinação de Parâmetros Elásticos

Esta seção trata do problema inverso de determinação de parâmetros e traz algumas considerações sobre a unicidade da solução.

4.4.1 Formulação Forte

Assim, o problema inverso consiste em determinar o módulo de elasticidade ao cisalhamento $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ e o campo de pressão $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaçam a equação de equilíbrio (3.26), onde \mathbf{E} está relacionado a um campo de deslocamento \mathbf{u} através de (3.19), sendo \mathbf{u} conhecido. Obviamente, \mathbf{E} satisfaz a restrição cinemática (3.21) e \mathbf{u} satisfaz a condição (3.23.b). Assume-se, no entanto, que a condição de contorno (3.23.a) não é conhecida. Esta formulação do problema inverso é dita forte uma vez que as equações governantes deste problema devem ser atendidas em todos os pontos de \mathcal{B} juntamente com o seu contorno $\partial\mathcal{B}$. Na Seção 4.4.3 é apresentada uma formulação fraca do problema inverso.

4.4.2 Considerações sobre a Unicidade de Solução

Considere que \mathcal{B} é a secção transversal de um cilindro reto e longo sob estado plano de deformação (EPD) paralelo ao plano desta secção. Assuma que ambos, o módulo de elasticidade ao cisalhamento $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ e a pressão $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ são campos suaves.

Seja então $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ uma base ortonormal em \mathbb{R}^3 associada a um sistema de coordenadas cartesianas retangulares com a origem em O (sistema CCR). Os vetores \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 são paralelos ao plano que contém \mathcal{B} , enquanto que \mathbf{e}_3 é paralelo ao eixo do cilindro reto. Neste sistema de coordenadas, um ponto do cilindro é representado por $\mathbf{X} + X_3 \mathbf{e}_3$,

onde $\mathbf{X} = X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 \in \mathcal{B}$ e $X_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Além disso, $\mathbf{u} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2$, onde $v_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, e $\mathbf{E} = \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$, onde $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ é o produto tensorial entre \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_2 , o qual é definido por $(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k = \delta_{jk} \mathbf{e}_i$, e segue de (3.19) que $\varepsilon_{ij} \triangleq \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial X_j} + \frac{\partial v_j}{\partial X_i} \right)$. Segue de (3.21) que $\varepsilon_{22} = -\varepsilon_{11}$, uma vez que o cilindro está sob EPD.

Tomando o rotacional de (3.26.a), elimina-se π e obtém-se a equação diferencial

$$L[\mu] \triangleq \left(\frac{\partial^2}{\partial X_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial X_2^2} \right) (\mu \varepsilon_{12}) - 2 \frac{\partial^2}{\partial X_1 \partial X_2} (\mu \varepsilon_{11}) = 0, \quad (4.21)$$

onde $L[\mu]$ é um operador linear em μ .

Agora, considera-se uma transformação inversível de coordenadas, possivelmente não-linear, dada por $X_i = \hat{X}_i(\eta_1, \eta_2)$, $i = 1, 2$, onde (η_1, η_2) são as coordenadas em um novo sistema, de modo que $\eta_i = \eta_i(X_1, X_2)$, $i = 1, 2$. Introduzindo esta transformação em (4.21), obtém-se

$$\begin{aligned} L[\hat{\mu}] \triangleq & \left[\hat{\varepsilon}_{12} \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial X_1} \right)^2 - 2 \hat{\varepsilon}_{11} \frac{\partial \eta_1}{\partial X_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial X_2} - \hat{\varepsilon}_{12} \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial X_2} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \hat{\mu}}{\partial \eta_1^2} + \\ & + \left[\hat{\varepsilon}_{12} \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial X_1} \right)^2 - 2 \hat{\varepsilon}_{11} \frac{\partial \eta_2}{\partial X_1} \frac{\partial \eta_2}{\partial X_2} - \hat{\varepsilon}_{12} \left(\frac{\partial \eta_2}{\partial X_2} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \hat{\mu}}{\partial \eta_2^2} + \\ + 2 & \left[\hat{\varepsilon}_{12} \frac{\partial \eta_2}{\partial X_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial X_1} - \hat{\varepsilon}_{11} \left(\frac{\partial \eta_1}{\partial X_1} \frac{\partial \eta_2}{\partial X_2} + \frac{\partial \eta_2}{\partial X_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial X_2} \right) - \hat{\varepsilon}_{12} \frac{\partial \eta_2}{\partial X_2} \frac{\partial \eta_1}{\partial X_2} \right] \frac{\partial^2 \hat{\mu}}{\partial \eta_1 \partial \eta_2} + \\ & + L_1[\hat{\mu}], \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde $\mu = \hat{\mu}(\eta_1, \eta_2)$, $\varepsilon_{ij} = \hat{\varepsilon}_{ij}(\eta_1, \eta_2)$, $i, j = 1, 2$, e $L_1[\hat{\mu}]$ é um operador linear que contém somente termos de ordem inferior a 2 em $\hat{\mu}$. Assumindo que $\hat{\varepsilon}_{12} \neq 0$, examina-se o caso em que os dois primeiros coeficientes da expressão (4.22) são nulos, ou seja, examinam-se as equações

$$\hat{\varepsilon}_{12} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial X_1} \right)^2 - 2 \hat{\varepsilon}_{11} \frac{\partial \eta_i}{\partial X_1} \frac{\partial \eta_i}{\partial X_2} - \hat{\varepsilon}_{12} \left(\frac{\partial \eta_i}{\partial X_2} \right)^2 = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.23)$$

As soluções destas equações são dadas por

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial X_1} \Big/ \frac{\partial \eta_i}{\partial X_2} = \frac{\hat{\varepsilon}_{11} \pm \sqrt{\Delta}}{\hat{\varepsilon}_{12}}, \quad \Delta \triangleq (\hat{\varepsilon}_{11})^2 + (\hat{\varepsilon}_{12})^2, \quad i = 1, 2. \quad (4.24)$$

O operador L é chamado *hiperbólico* se $\Delta > 0$ (WEINBERGER, 1965). Observe de (4.24) juntamente com o Jacobiano da transformação de coordenadas que esta condição é necessária para que a transformação seja inversível. Uma vez que $\mathbf{E} = \sum_{i,j=1}^2 \varepsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \neq 0$, $\Delta > 0$ e, portanto, a equação que governa a distribuição de μ no cilindro, dada por (4.21), é hiperbólica. Analisa-se agora algumas conseqüências desta conclusão.

Sem perda de generalidade, reescreve-se (4.24) na forma

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial X_1} \Big/ \frac{\partial \eta_1}{\partial X_2} = \frac{\hat{\varepsilon}_{11} + \sqrt{\Delta}}{\hat{\varepsilon}_{12}}, \quad \frac{\partial \eta_2}{\partial X_1} \Big/ \frac{\partial \eta_2}{\partial X_2} = \frac{\hat{\varepsilon}_{11} - \sqrt{\Delta}}{\hat{\varepsilon}_{12}}. \quad (4.25)$$

Ao longo de uma reta $\eta_i = \bar{\eta}_i$, $i = 1, 2$, onde $\bar{\eta}_i \in \mathbb{R}$ é constante, tem-se que $d\eta_i = \frac{\partial \eta_i}{\partial X_1} dX_1 + \frac{\partial \eta_i}{\partial X_2} dX_2 = 0$. Segue desta expressão que

$$\frac{\partial \eta_i}{\partial X_1} \Big/ \frac{\partial \eta_i}{\partial X_2} = -\frac{dX_2}{dX_1}, \quad i = 1, 2. \quad (4.26)$$

Substituindo (4.26) em (4.25), obtém-se

$$\frac{dX_2}{dX_1} = -\frac{\varepsilon_{11} + \sqrt{\Delta}}{\varepsilon_{12}}, \quad \frac{dX_2}{dX_1} = -\frac{\varepsilon_{11} - \sqrt{\Delta}}{\varepsilon_{12}}, \quad (4.27)$$

onde Δ é dado por (4.24.b) e $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(X_1, X_2)$. As expressões (4.27) são equações diferenciais ordinárias de primeira ordem em uma das variáveis; por exemplo, X_2 . Integrando (4.27) com respeito à outra variável, X_1 , obtém-se as curvas $X_2 = X_{21}(X_1)$ e $X_2 = X_{22}(X_1)$, as quais correspondem às retas $\eta_1 = \bar{\eta}_1$ e $\eta_2 = \bar{\eta}_2$, respectivamente. As expressões (4.27) fornecem também as inclinações das retas tangentes às curvas $X_2 = X_{21}(X_1)$ e $X_2 = X_{22}(X_1)$. Denota-se por β_1 e β_2 os ângulos correspondentes a estas inclinações.

Por outro lado, as deformações principais de \mathbf{E} em um dado ponto $\mathbf{X} = X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2$ são dadas por $\varepsilon_1 = \sqrt{\Delta}$ e $\varepsilon_2 = -\sqrt{\Delta}$ e as direções principais correspondentes são dadas por

$$\alpha_1 = \operatorname{atan} \left(\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_{11}}{\varepsilon_{12}} \right), \quad \alpha_2 = \alpha_1 - \frac{\pi}{2}. \quad (4.28)$$

Observe de (4.27.b) e do exposto no parágrafo anterior que

$$\beta_2 \triangleq \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_{11})}{\varepsilon_{12}} \tan \alpha_1$$

e que, portanto, a reta tangente à curva $X_{22}(X_1)$ é paralela à direção principal correspondente a ε_1 . Similarmente,

$$\beta_1 \triangleq \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_{11})}{\varepsilon_{12}} \tan \alpha_2$$

e a reta tangente à curva $X_{21}(X_1)$ é paralela à direção principal correspondente a ε_2 .

O exposto acima está de acordo com o que foi visto na Seção 2.1, em que Barbone e Gokhale (2004) afirmam que as características da equação diferencial hiperbólica são paralelas aos eixos de deformações principais para os dois problemas linearmente independentes, tração-compressão biaxial e cisalhamento. Quando estes problemas são combinados resultam na determinação de μ com exceção de quatro constantes arbitrárias.

Consideram-se agora dois ensaios possíveis de serem realizados em laboratório. Deseja-se elucidar o fato de que μ não pode ser determinado de um único ensaio quando $\Gamma_g = \emptyset$ em (3.24), ou seja, quando o carregamento é desconhecido e somente o campo de deslocamento é conhecido em cada ensaio. Para isto, considere um cilindro reto de secção transversal retangular sob EPD perpendicular ao eixo do cilindro. O material do cilindro é elástico-linear, isotrópico e incompressível. Submete-se o cilindro aos ensaios biaxial de tração-compressão e de cisalhamento, os quais estão ilustrados na Fig. 8. Observe desta figura que \bar{X}_i , $i = 1, 2$, são os comprimentos dos lados do cilindro, e que τ_1 e τ_2 são os módulos das forças resultantes que atuam sobre os lados verticais do cilindro nos ensaios biaxial (ensaio I) e de cisalhamento (ensaio II), respectivamente.

Assume-se que os campos de deformação obtidos de ambos os ensaios são homogêneos e dados por

$$\text{Ensaio I: } \varepsilon_{11}^{(I)}(X_1, X_2) = -\varepsilon_{22}^{(I)}(X_1, X_2) = \bar{\varepsilon}_1, \quad \varepsilon_{12}^{(I)}(X_1, X_2) = 0, \quad (4.29)$$

$$\text{Ensaio II: } \varepsilon_{11}^{(II)}(X_1, X_2) = \varepsilon_{22}^{(II)}(X_1, X_2) = 0, \quad \varepsilon_{12}^{(II)}(X_1, X_2) = \bar{\varepsilon}_2. \quad (4.30)$$

Claramente, os campos de deformação (4.29) e (4.30) satisfazem a restrição (3.21) identicamente e referem-se ao mesmo estado de cisalhamento simples se $\bar{\varepsilon}_1 = \bar{\varepsilon}_2$. Neste caso, as direções principais associadas a estes campos de deformação estão relacionadas entre si por uma rotação de eixos de 45 graus. Além disso, infere-se que $\pi = 0$, pois

lembra-se do exposto na Seção 3.3 que π representa a reação do corpo a mudanças de volume. Este conhecimento *a priori* de π não é utilizado na exposição a seguir, pois deseja-se mostrar que, conhecendo-se somente o campo de deformação, μ não pode ser determinado de um único ensaio.

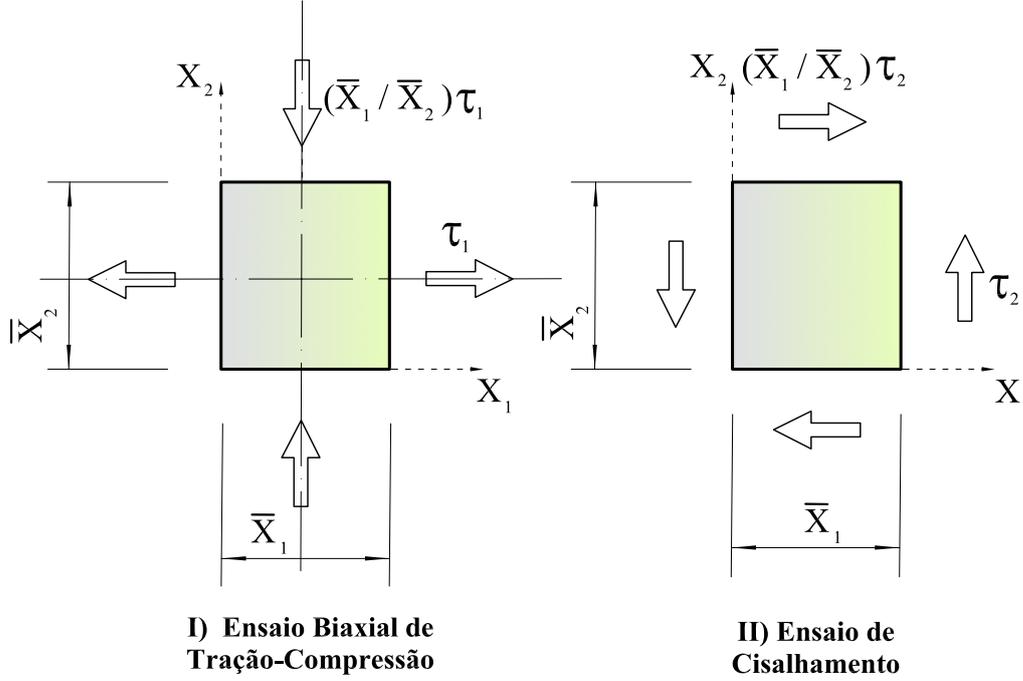


Figura 8: Ensaio para a determinação de μ .

Substituindo o campo de deformação (4.29) em (4.21) e resolvendo para μ , obtém-se

$$\mu(X_1, X_2) = \phi_1^{(I)}(X_1) + \phi_2^{(I)}(X_2), \quad (4.31)$$

onde $\phi_i^{(I)}$, $i = 1, 2$, são funções arbitrárias de seus argumentos e não podem ser determinadas unicamente do ensaio I.

Considera-se agora a transformação de coordenadas linear

$$\eta_1(X_1, X_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(X_1 + X_2), \quad \eta_2(X_1, X_2) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X_1 + X_2), \quad (4.32)$$

a qual corresponde a uma rotação de 45° entre os eixos de coordenadas no sistema (X_1, X_2) e os eixos de coordenadas no sistema (η_1, η_2) . Substituindo o campo de deformação (4.30) juntamente com (4.32) em (4.22) e resolvendo para μ no novo sistema

de coordenadas, obtém-se

$$\hat{\mu}(\eta_1, \eta_2) = \phi_1^{(II)}(\eta_1) + \phi_2^{(II)}(\eta_2), \quad (4.33)$$

onde $\phi_i^{(II)}$, $i = 1, 2$, são funções arbitrárias dos seus argumentos e, similarmente ao exposto no parágrafo anterior, não podem ser determinadas unicamente do ensaio II. Para obter (4.33), verificou-se que $L_1[\hat{\mu}] = 0$.

Se, no entanto, realiza-se ambos os ensaios sobre o mesmo cilindro reto e substitui-se (4.31), obtido do ensaio I, juntamente com o campo de deformação (4.30) do ensaio II em (4.21), obtém-se uma expressão para μ que depende somente de quatro constantes arbitrárias. Esta expressão é dada por

$$\mu(X_1, X_2) = \mu_0 + \mu_1 X_1 + \mu_2 X_2 + \mu_3 (X_1^2 + X_2^2), \quad (4.34)$$

onde $\mu_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, \dots, 3$, são constantes a determinar. A expressão (4.34) é apresentada por Barbone e Gokhale (2004) para elucidar o fato de que μ não pode ser determinado de um único ensaio quando somente o campo de deslocamento é conhecido.

Substituindo (4.34) em (3.16), desprezando a força de corpo $\mathbf{b}(\mathbf{X})$ e resolvendo para os campos de pressão π^1 e π^2 dos ensaios I e II, respectivamente, obtém-se

$$\pi^1(X_1, X_2) = 2 \varepsilon_1 [\mu_1 X_1 - \mu_2 X_2 + \mu_3 (X_1^2 - X_2^2) + \hat{\pi}^1], \quad (4.35)$$

$$\pi^2(X_1, X_2) = 2 \varepsilon_2 [\mu_2 X_1 + \mu_1 X_2 + 2 \mu_3 X_1 X_2 + \hat{\pi}^2], \quad (4.36)$$

onde $\hat{\pi}^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, são constantes a determinar.

Assume-se agora que as forças resultantes τ_i , $i = 1, 2$, (veja Fig. 8) são conhecidas de, por exemplo, medições experimentais. Integrando (3.13) sobre partes complementares de $\partial \mathcal{B}$ e utilizando (3.20), obtém-se o sistema de equações abaixo.

Ensaio I: O campo de deformação para este ensaio é dado por (4.29). Assim,

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= \int_0^{\bar{X}_2} (-\pi + 2\mu \bar{\varepsilon}_1)(0, X_2) dX_2 \\
&= \int_0^{\bar{X}_2} (-\pi + 2\mu \bar{\varepsilon}_1)(\bar{X}_1, X_2) dX_2, \\
\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2} \tau_1 &= \int_0^{\bar{X}_1} (-\pi_1 - 2\mu \bar{\varepsilon}_1)(X_1, 0) dX_1 \\
&= \int_0^{\bar{X}_1} (-\pi_1 - 2\mu \bar{\varepsilon}_1)(X_2, \bar{X}_1) dX_1.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

Ensaio II: O campo de deformação para este ensaio é dado por (4.30). Assim,

$$\begin{aligned}
\tau_2 &= 2\bar{\varepsilon}_2 \int_0^{\bar{X}_2} \mu(0, X_2) dX_2 = 2\bar{\varepsilon}_2 \int_0^{\bar{X}_2} \mu(\bar{X}_1, X_2) dX_2, \\
0 &= \int_0^{\bar{X}_2} \pi(0, X_2) dX_2 = \int_0^{\bar{X}_2} \pi(\bar{X}_1, X_2) dX_2, \\
\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2} \tau_2 &= 2\bar{\varepsilon}_2 \int_0^{\bar{X}_1} \mu(X_1, 0) dX_1 = 2\bar{\varepsilon}_2 \int_0^{\bar{X}_1} \mu(X_2, \bar{X}_1) dX_1, \\
0 &= \int_0^{\bar{X}_1} \pi(X_1, 0) dX_1 = \int_0^{\bar{X}_1} \pi(X_1, \bar{X}_2) dX_1.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Substituindo (4.34) – (4.36) em (4.37) – (4.38), obtém-se um sistema de equações sobre-determinado para a determinação dos coeficientes μ_i , $i = 0, \dots, 3$, e $\hat{\pi}^i$, $i = 1, 2$. A solução deste sistema é dada por

$$2\mu_0 = \frac{\tau_2}{\varepsilon_2 \bar{X}_2} = \frac{\tau_1}{\varepsilon_1 \bar{X}_2}, \quad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 0, \quad \hat{\pi}^1 = \hat{\pi}^2 = 0. \tag{4.39}$$

Segue de (4.34) – (4.36) que μ é constante (portanto, o cilindro é homogêneo) e que $\pi^i = 0$, $i = 1, 2$, o que está consistente com o nosso conhecimento *a priori* dos campos de pressão para estes ensaios.

O procedimento utilizado para a determinação de μ a partir dos campos de deformação conhecidos (4.29) e (4.30) e das forças resultantes sobre partes complementares dos lados do cilindro pode ser generalizado para o caso em que o cilindro não é homogêneo. Neste caso, a solução da equação de equilíbrio (3.26) para os campos μ e π^i , $i = 1, 2$, não é trivial e exige a utilização de métodos numéricos que possibilitem construir aproximações para estes campos. Na próxima seção apresenta-se uma formulação fraca do problema de determinação de μ e π^i , $i = 1, 2$, que, juntamente com o Método dos Elementos Finitos

(MEF), possibilita a construção destas aproximações.

4.4.3 Formulação Fraca

Novamente, lembra-se da Seção 4.4.1 que o problema inverso consiste em determinar $\mu : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ e o campo de pressão $\pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaçam a equação de equilíbrio (3.26), onde o termo $\nabla_s \mathbf{u}$ satisfaz a restrição cinemática (3.21) e está relacionado ao campo de deslocamento \mathbf{u} por meio de (3.19). Assume-se que $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$ é conhecido e que $\Gamma_g = \emptyset$ em (3.24). Assume-se também que forças resultantes são conhecidas em r partes complementares de $\partial \mathcal{B}$, de modo que

$$\mathbf{R}_i = \int_{\partial_i \mathcal{B}} (-\pi \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{E}) \mathbf{n}_i \, dL, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (4.40)$$

onde $\partial \mathcal{B} \equiv \bigcup_{i=1}^r \partial_i \mathcal{B}$, $\partial_i \mathcal{B} \cap \partial_j \mathcal{B} \neq \emptyset$ para $i \neq j$, e \mathbf{n}_i é a normal exterior a $\partial_i \mathcal{B}$. Obviamente, $\sum_{i=1}^r \mathbf{R}_i = 0$.

A formulação fraca do problema inverso consiste em achar $\mu \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$ e $\pi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$ que satisfaçam

$$-\int_{\mathcal{B}} \pi \operatorname{tr} \nabla_s \mathbf{v} \, dA + 2 \int_{\mathcal{B}} \mu \nabla_s \mathbf{u} \cdot \nabla_s \mathbf{v} \, dA = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}, \quad (4.41)$$

juntamente com as expressões (4.40). Segue da discussão realizada na Seção 4.4.2 que a solução deste problema não pode ser determinada de um único campo de deslocamento. Ainda segundo esta discussão, assume-se o conhecimento de dois campos de deslocamento, $\mathbf{u}^1 \in \mathcal{A}$ e $\mathbf{u}^2 \in \mathcal{A}$, linearmente independentes. Considera-se então o problema da determinação de $\mu \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$ e $\pi^i \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, $i = 1, 2$, que satisfaçam (4.40) e (4.41) para os campos de deslocamento \mathbf{u}^i , $i = 1, 2$, respectivamente.

5 Elastografia

5.1 Fundamentos da Elastografia

No estudo de tecidos biológicos o parâmetro de rigidez não pode ser medido diretamente (OPHIR et al., 1999). Um estímulo mecânico precisa ser propagado no interior do tecido de modo a provocar movimentos internos deste. Técnicas de ultra-som, ressonância magnética, ou, alguma outra modalidade de diagnóstico por imagem são então utilizadas para medir estes movimentos.

Existem dois grandes grupos de métodos de medição baseados em ultra-som:

1. Métodos ditos quase-estáticos em que uma compressão é aplicada ao tecido e as componentes do tensor de deformação são estimadas (OPHIR et al., 1991, 2001; KALLEL et al., 1998; DOYLEY; MEANEY; BAMBER, 2000).
2. Métodos em que se aplicam ao tecido vibrações de baixa frequência e se inspeciona o comportamento resultante do tecido (WU et al., 2006).

O mais importante é o fato de que em ambos os métodos os deslocamentos locais do tecido são estimados do intervalo entre dois sinais de eco, um de pré e outro de pós-compressão, cujo gradiente axial é então computado para estimar e exibir a deformação local.

Sendo assim, elastografia é um método não-invasivo que utiliza as imagens de pré e pós-compressão de tecidos, para a determinação de campos de deslocamentos internos que possibilitem inferir as propriedades elásticas destes tecidos.

Uma hipótese restritiva que se utiliza na técnica elastográfica é a analogia de um modelo físico simplificado de molas para prever o comportamento mecânico de tecidos moles isotrópicos e homogêneos. Basicamente, o comportamento considerado para estes tecidos é semelhante ao de um sistema com três molas colocadas em série, cada qual

identificada com uma constante elástica, e submetidas a uma força de compressão. Caso as constantes elásticas sejam iguais, após a compressão, as molas apresentarão as mesmas deformações. Detalhes dessa hipótese encontram-se em Ophir et al. (1991) e Ophir e Yazdi (1992).

No caso de tecidos moles, se uma região possui uma inclusão, mesmo que esta apresente uma constante elástica bem maior do que o entorno, é provável que sofra uma contração. Em elastografia, o fato fundamental é que a inclusão sofre uma contração diferente do meio circundante, permitindo a sua identificação.

Em Fung (2004), encontra-se a justificativa para a afirmação dada acima, uma vez que dependendo de sua composição estrutural os tecidos possuem propriedades mecânicas variáveis. Sendo assim, quando submetidos a forças similares, as partes dos tecidos que possuem módulos elásticos menores deformam-se mais do que as partes que apresentam módulos elásticos maiores.

No que tange à diferenciação de estruturas com módulos elásticos distintos, a elastografia apresenta um grande potencial de vir a se tornar um excelente método complementar aos exames já existentes, principalmente àqueles convencionais (ultra-som, tomografia computadorizada, ou, ressonância magnética) em que tais estruturas não podem ser distinguidas, ou, são consideradas invisíveis a estes métodos (OPHIR et al., 2001).

5.2 O Processo Elastográfico

A elastografia difere de alguns métodos vibracionais em aspectos importantes, dentre os quais mencionam-se:

1. A tensão aplicada ao tecido não é vibratória, mas sim quase-estática. Isto tende a evitar problemas devido às reflexões, ondas estacionárias e modos permanentes que possam ser criados no tecido e, em consequência, venham a interferir na qualidade da imagem.
2. A tensão uni-axial quase-estática que se aplica reduz a complexidade da equação viscoelástica do movimento unidimensional. Esta equação possui a forma

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + Kx = F_0 e^{i\omega t}. \quad (5.1)$$

A equação (5.1) contém os termos de inércia M , de viscosidade R e de rigidez K ,

sendo ainda x o deslocamento, F_0 a amplitude da força e ω a frequência vibracional angular. A forma reduzida mais simples é a equação Hookeana $Kx = F_0$; desde que $\omega = 0$, os termos de velocidade e aceleração sejam desprezíveis. Em princípio, isto permite isolar e extrair o parâmetro de rigidez local do tecido (K) da medição da força diferencial aplicada F_0 e as conseqüentes mudanças locais no deslocamento x . Para o caso contínuo, a equação equivalente torna-se $\varepsilon E = \sigma$, onde ε é o módulo elástico, E é a deformação e σ é a tensão aplicada.

3. Os níveis médios de deformação produzidos no tecido são normalmente muito pequenos (da ordem de 0,1%, ou, 0,001). Dentro destes níveis, a equação Hookeana é considerada válida. Chegou-se a estes níveis de deformação através de estudos de relação tensão-deformação lineares em géis e tecidos musculares *in vivo* feitos por Mridha e Ödman (1986), cuja validade estendeu-se até níveis de deformação de 2,5% (ou 0,025). Estas deformações são pequenas para manter as distorções no tempo de mudança dos sinais de eco (antes das correções) a um mínimo; por conseguinte mantendo um baixo nível de ruído de descorrelação no elastograma. Ao se fazer as correções adequadas, no entanto, é possível aumentar a tensão aplicada e obter ganhos no contraste da imagem, respeitando os limites dos métodos de correção, sendo isto talvez o mais importante segundo Ophir et al. (1999).

4. A elastografia é capaz de produzir imagens de alta resolução (elastogramas) (OPHIR et al., 1991, 2001). O termo “elastograma” é utilizado como uma descrição genérica de todos os diferentes tipos de imagens que mostram alguns parâmetros que estão relacionados com o comportamento elástico, ou, natureza do tecido. Nesse sentido, elastogramas são descritos como imagens que exibem deformações axiais, ou, laterais, a distribuição do módulo elástico ao cisalhamento, ou, o coeficiente de Poisson nos tecidos.

O processo geral para a produção de elastogramas convencionais pode ser descrito como o que se apresenta na Fig. 9. O processo inicia-se com a distribuição do contraste do módulo tissular e finaliza com um elastograma da distribuição do módulo elástico ao cisalhamento correspondente, sendo o tecido submetido a processos de compressão quase estáticos e restrito a condições de contorno mecânicas. A obtenção do elastograma do módulo de elasticidade ao cisalhamento por meio da solução do problema inverso é um ponto de contribuição ótima ao processo (OPHIR et al., 1999).

Deve-se a Ophir et al. (1991), Ophir e Yazdi (1992) a idealização da instrumentação para obter os elastogramas tal qual se apresenta na Fig. 10. Resumidamente,

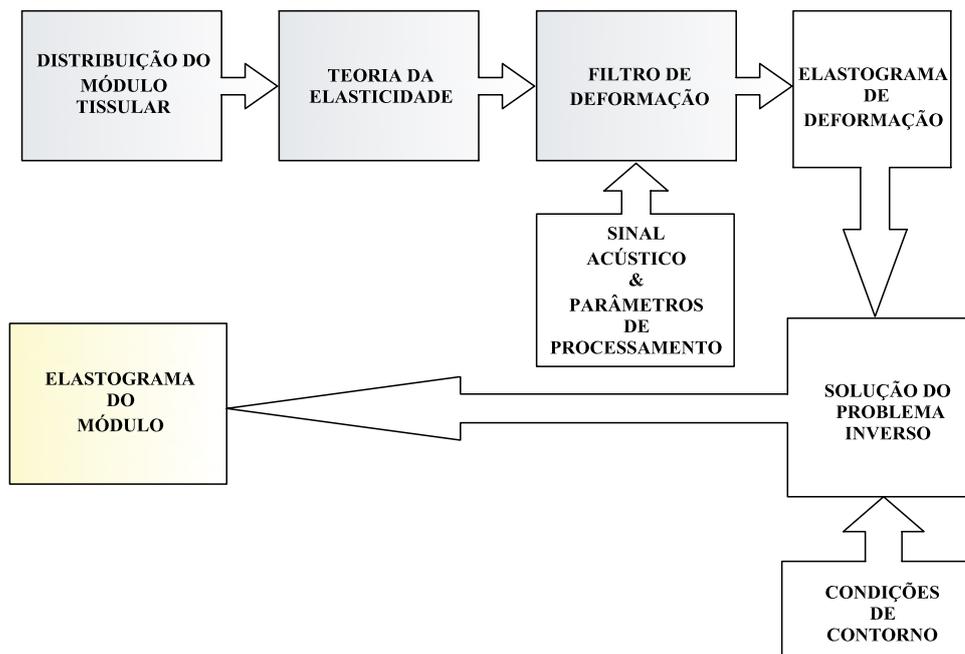


Figura 9: Processo de geração de elastogramas de deformação e do módulo elástico ao cisalhamento do tecido.

Fonte: Adaptado de (OPHIR et al., 1999).

o sistema é composto de uma estrutura rígida com um motor acoplado. O membro axial possui duas extremidades, sendo a primeira acoplada ao motor e podendo-se variar a posição axial com o uso deste. A segunda extremidade do membro axial liga-se ao emissor de ultra-som que transmite as ondas ultra-sônicas por meio de uma superfície que é dita sonicamente acoplada ao corpo alvo, ou, phantom. Um transmissor é conectado ao emissor, ou, fonte de ultra-som e a um receptor de seqüência de sinais de ecos vindas do corpo alvo em resposta aos sinais transmitidos pela fonte no corpo alvo. Um digitalizador conectado ao receptor e operável digitaliza as seqüências de ecos e um processador conectado ao digitalizador, e também operável, converte a seqüência de sinais de eco em um perfil de deformação.

A Fig. 11 apresenta um exemplo de montagem experimental para ensaio de corpos de prova em elastografia *in vitro* presente no trabalho de Doyley, Meaney e Bamber (2000). Estes autores mesmo tendo feito um ensaio com carregamento quase-estático, uma vez que a deformação total aplicada na direção vertical de 2% foi dividida em passos de 0,2%, regularam o receptor de ultra-som para geração dos quadros de imagens, denominados *frames*, para um carregamento dinâmico. Deste modo foi possível obter mais detalhes sobre cada passo de carga e o comportamento do *phantom*. Este aparato experimental

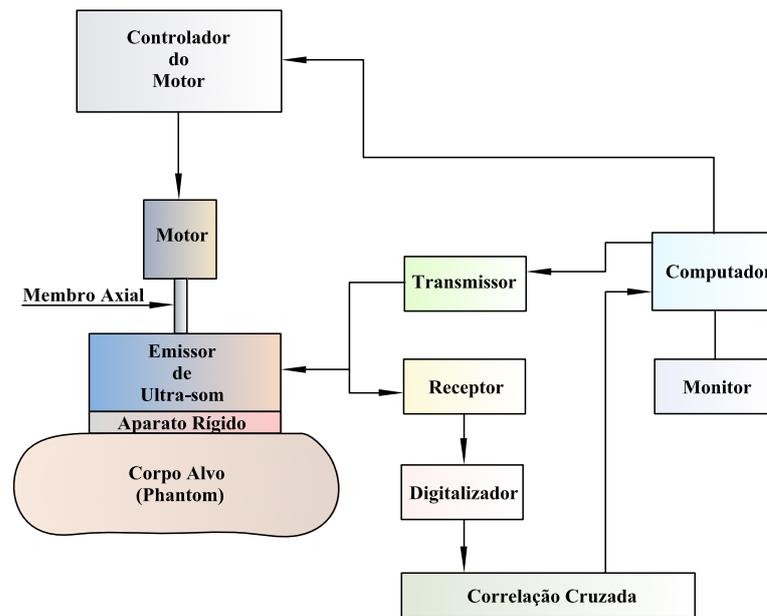


Figura 10: Instrumentação para gerar elastograma a partir da compressão de um corpo de prova denominado *phantom*.

Fonte: Adaptado de (OPHIR; YAZDI, 1992).

está de acordo com o esquema que se apresenta na Fig. 10.

Citando Yang e Huang (2003), pode-se dar outro exemplo de estudo com phantoms. Estes autores propõem uma outra metodologia na análise de comportamento de materiais usando técnicas de correlação cruzada; por exemplo, funções de correlação cruzada por partes, para estimar o perfil de deformação axial nestes phantoms. Adicionalmente, usam o que se denomina filtro harmônico secundário, do qual obtém-se o sinal de eco secundário, para auxílio na obtenção do perfil de deformações em casos dinâmicos, tanto para phantoms homogêneos como para aqueles formados por dois materiais distintos. As metodologias mais correntes que se empregam em análise de elastogramas estão listadas na próxima subseção.

5.2.1 Métodos de Processamento de Elastogramas

As técnicas mencionada abaixo são usualmente empregadas na análise de elastogramas para a obtenção dos campos de deslocamento.

1. Técnicas de Correlação - A elastografia padrão utiliza a técnica de correlação cruzada coerente, ou, função correlação cruzada por partes para estimar os deslocamentos em

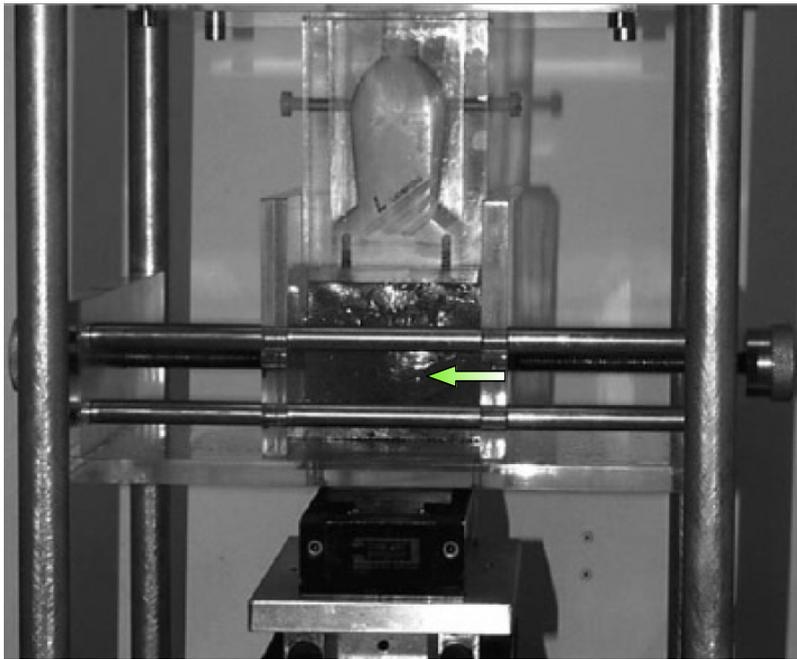


Figura 11: *Phantom* indicado pela seta no centro da ilustração em posição de pré-deformação no sistema elastográfico experimental.

Fonte: Doyley, Meaney e Bamber (2000).

tecidos e a deformação dos tecidos com o uso subsequente de um operador gradiente. Enquanto que os métodos de estimativas ditos coerentes têm a vantagem de serem altamente precisos, os estimadores ditos incoerentes são menos precisos, porém mais robustos, além de facilitar o seu uso prático. Um gráfico de fluxo ilustra os conceitos básicos de ambas as técnicas elastográficas, coerente e incoerente, na Fig. 12.

2. Métodos Baseados na Fase - Utilizam a mudança de fase dos sinais de eco do transdutor de ultra-som para medir os pequenos deslocamentos do tecido.

3. Estimador de Deformação por Mínimos Quadrados.

4. Método Butterfly Search - Método determinístico baseado na desigualdade de Schwartz para determinação de deslocamentos vindos de um envelope de sinais complexos, ou seja, faz a análise de mais de dois pares de linhas A^1 por vez.

¹Em processamento de imagem pode-se descrever um par de linhas do seguinte modo: seja um fundo branco com linhas pretas e espaçadas. Será considerado um par de linhas a união da linha preta com o espaço em branco que a intercala de outra linha preta. Quando os fotógrafos dizem “linhas de definição”, estão falando destes pares de linhas por milímetros da imagem. Na televisão e vídeo, um par de linhas é igual a duas linhas da tevê, ou, pixels, de definição. Veja mais detalhes em Koyama (2006). Em Elastografia um par de linhas A é o conjunto formado pelos sinais de pré e de pós-deformação adquiridos pelo transdutor de recepção (YANG; HUANG, 2003). Sendo assim, para o processamento de imagem, o par é formado de linhas do mesmo quadro, enquanto que em elastografia o par é formado de elementos vindos de quadros distintos.

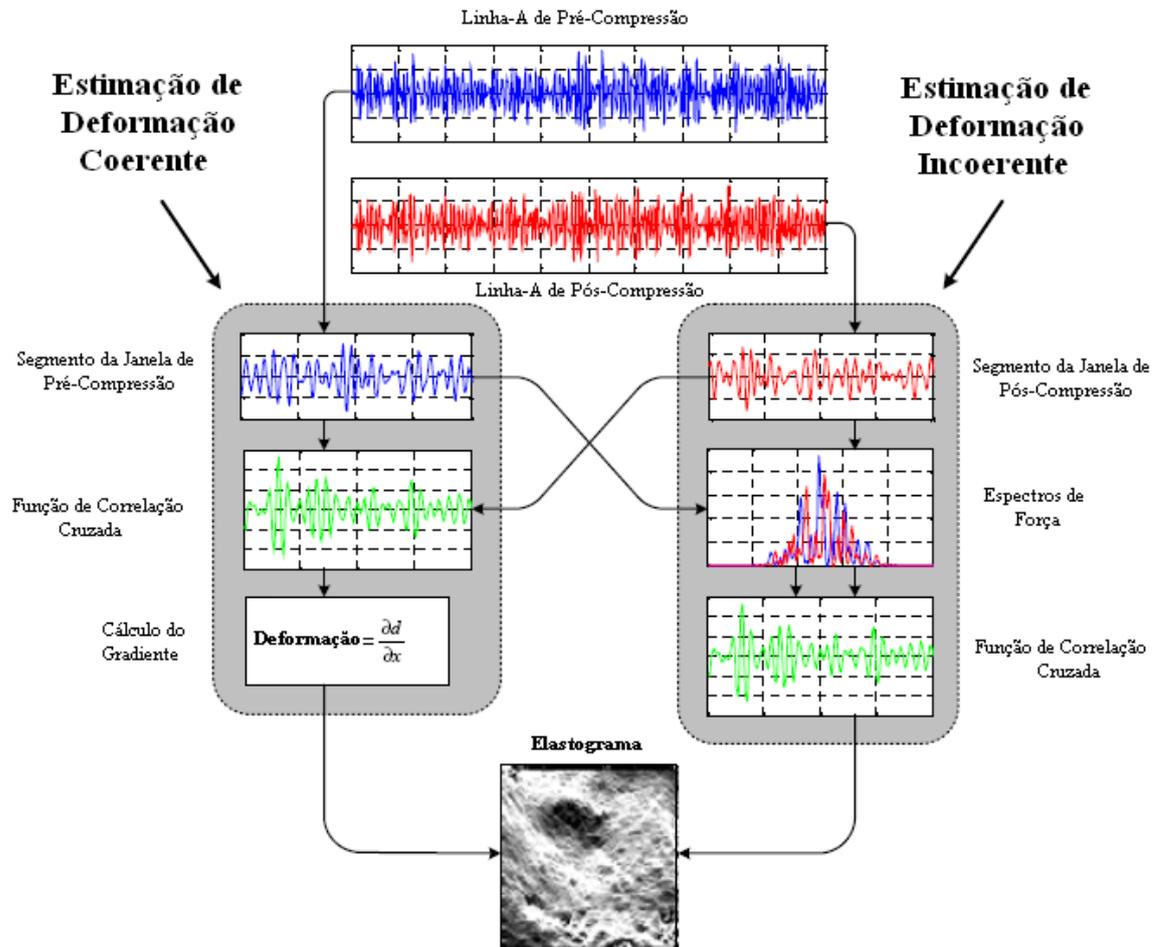


Figura 12: Fluxograma para ilustrar os conceitos básicos e estratégias de processamento de sinais de métodos elastográficos coerentes e incoerentes.

Fonte: Adaptado de Hoyt (2005).

5. Estimadores de Deformação Espectral - Métodos usados para estimativa direta da deformação sem o uso de operadores gradientes amplificadores de ruídos na análise, podendo a deformação ter seu cálculo feito por correlação cruzada espectral, ou, por mudança do centróide espectral. Pode-se citar como exemplo de uso destes métodos o trabalho de Hoyt (2005).

6. A Técnica *Block Matching* - Os padrões de speckles pré e pós-deformação constituem o que se define como *block matching*. Esta técnica consiste em comparar regiões, ou, kernels, no mapa de pré-deformação com regiões de mesmo tamanho no mapa de pós-deformação. O tamanho do kernel, na técnica *block matching*, é um dos principais parâmetros para melhorar a precisão das medidas de deslocamento. Esta comparação é feita pela minimização de uma função custo, dentre as quais citam-se:

* SAD (*Sum Absolute Differences*)

* SSD (*Sum Square Differences*)

* NCC (*Normal Cross-Correlation*)

A função custo NCC é a que fornece os melhores resultados por reter mais informações do sinal; porém, é a que apresenta o maior custo computacional quando comparadas com as funções SAD e SSD. Já as funções custo SAD e SSD possuem desempenho muito semelhante. Um breve resumo sobre estas técnicas aplicadas no processamento de elastogramas é apresentado em Neves (2007).

Maiores detalhes sobre procedimentos para a medição de campos de deslocamentos com o uso de ultra-som encontram-se nos trabalhos de Hall e Zhu (2003) e Radulescu (2007).

5.2.2 Aplicações da Elastografia

Segundo Ophir et al. (2001), a elastografia pode ser aplicada a qualquer sistema de tecidos que seja acessível por ultra-som e que possa ser sujeito a pequenas compressões estáticas. Esta compressão pode ser aplicada externamente, ou, internamente. A elastografia é aplicada na análise *in vivo* de imagens de mama, próstata e tecidos vasculares. Muitos estudos *in vitro* demonstram o potencial da elastografia no estudo de imagens da anatomia normal. Demonstra-se o potencial de utilidade da elastografia também em monitoração terapêutica térmica.

Como exemplo, a Fig. 13 apresenta a anatomia normal de um rim ovino, cuja imagem elastográfica apresenta uma riqueza de detalhes muito superior à imagem de ultrassom em modo B convencional para diferenciação das estruturas do tecido que compõem o órgão, perdendo somente em detalhes para a fotografia.

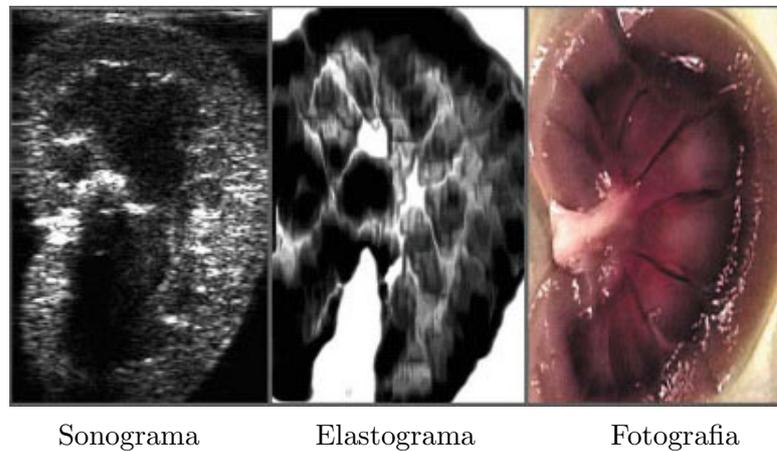


Figura 13: Da esquerda para a direita: sonograma longitudinal, elastograma e fotografia de um corte longitudinal de um rim ovino.

Fonte: <http://www.uth.tmc.edu/schools/med/rad/elasto/>.

5.3 Proposição de Experimentos em Elastografia

5.3.1 Considerações Iniciais

Esta seção trata da proposição de alguns experimentos para a determinação das constantes de Lamé de forma única. Em geral, o problema da determinação dos parâmetros elásticos é mal-posto, pois as equações governantes são do tipo hiperbólico e não se conhecem os valores destes parâmetros no contorno do corpo. Demonstra-se em Barbone e Gokhale (2004), no entanto, que a realização de diferentes ensaios mecânicos sobre o mesmo corpo, com a conseqüente determinação de diferentes campos de deformação, é suficiente para a determinação do módulo de elasticidade ao cisalhamento μ de um corpo elástico-linear, isotrópico e incompressível sob EPD e sob condições particulares de carregamento. Segundo estes autores, a realização de dois experimentos que produzam campos de deslocamento linearmente independentes entre si é suficiente para determinar μ com exceção de quatro constantes. Se quatro experimentos forem utilizados, então μ é determinado com exceção de uma constante.

Neste trabalho consideram-se os ensaios biaxial de tração-compressão e de cisalhamento de um cilindro reto sob EPD perpendicular ao seu eixo para a determinação

do módulo de elasticidade ao cisalhamento μ . Considera-se que o material do cilindro é elástico-linear, isotrópico e incompressível. Estes ensaios estão descritos na próxima seção.

Deste modo, os experimentos propostos visam a medição do campo de deslocamento utilizando, por exemplo, a técnica desenvolvida por Neves (2007), com a determinação do campo de deformação infinitesimal correspondente, o qual é proporcional à rigidez interna do material. Logo, ao se relacionar as deformações com as tensões por meio da Lei de Hooke Generalizada e ao se impor a condição de que o corpo deve satisfazer as leis de balanço da Mecânica do Contínuo, obtêm-se expressões para a determinação de μ .

5.3.2 Ensaios Biaxial de Tração-Compressão e de Cisalhamento

Os ensaios biaxial de tração-compressão e de cisalhamento em um corpo isento de inclusões fornecem campos de deformação uniformes, conforme visto na Seção 4.4.2. Além disso, estes ensaios fornecem campos de deslocamento linearmente independentes (BARBONE; GOKHALE, 2004).

Considera-se um cilindro reto, longo e de secção retangular, cuja largura é $\bar{X}_1 = 50$ mm, a altura é $\bar{X}_2 = 50$ mm contendo uma inclusão cilíndrica reta, longa de secção circular de raio r , o qual pode assumir os valores 0, 2, 4 e 6 mm. O cilindro reto está sob estado plano de deformação (EPD) paralelo ao plano X_1X_2 . Assume-se que a força de corpo é nula. Estes problemas, devido à presença da inclusão, não fornecem os campos de deslocamento uniformes, resultando em variação dos termos de pressão ao longo de todo o domínio.

Inicialmente, consideram-se os dois ensaios ilustrados na Fig. 14. No lado esquerdo mostra-se o ensaio biaxial de tração-compressão. Neste caso, o carregamento sobre as bordas da chapa é dado por

$$\begin{aligned} i) \quad \int_0^{\bar{X}_2} \mathbf{T} \mathbf{e}_1 dX_2 &= \tau_1 \mathbf{e}_1 \quad \text{sobre } X_1 = 0 \text{ e } X_1 = \bar{X}_1, \\ ii) \quad \int_0^{\bar{X}_1} \mathbf{T} \mathbf{e}_2 dX_1 &= -\frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2} \tau_1 \mathbf{e}_2 \quad \text{sobre } X_2 = 0 \text{ e } X_2 = \bar{X}_2, \end{aligned} \tag{5.2}$$

onde τ_i , $i = 1, 2$, são resultantes de força, por unidade de comprimento na direção axial do cilindro reto, obtidas experimentalmente.

No lado direito da Fig. 14 mostra-se um ensaio de cisalhamento para o qual o carregamento sobre as bordas do cilindro reto é dado por

$$\begin{aligned}
 i) \quad & \int_0^{\bar{X}_2} \mathbf{T} \mathbf{e}_1 dX_2 = \tau_2 \mathbf{e}_2 \quad \text{sobre } X_1 = 0 \text{ e } X_1 = \bar{X}_1, \\
 ii) \quad & \int_0^{\bar{X}_1} \mathbf{T} \mathbf{e}_2 dX_1 = \frac{\bar{X}_1}{\bar{X}_2} \tau_2 \mathbf{e}_1 \quad \text{sobre } X_2 = 0 \text{ e } X_2 = \bar{X}_2,
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

onde F é uma força resultante, por unidade de comprimento na direção axial do cilindro reto, obtida experimentalmente.

Além das forças resultantes, estes ensaios possibilitam obter dois campos de deslocamento independentes segundo Barbone e Gokhale (2004). Estes campos de deslocamento são obtidos experimentalmente através de técnicas experimentais discutidas na Seção 5. Neste trabalho, utiliza-se o programa de elementos finitos ANSYS 5.5 para simular os dois ensaios a) e b) da Fig. 14 e para calcular as forças resultantes τ_1 e τ_2 . As condições nas bordas do cilindro reto para realizar estas simulações são dadas a seguir.

i) Ensaio biaxial de tração-compressão:

a) Bordas Verticais:

$$\begin{aligned}
 u_1(0, X_2) &= 0, & u_1(\bar{X}_1, X_2) &= \bar{\varepsilon}_1 \bar{X}_1, \\
 (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_1)(0, X_2) &= (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_1)(\bar{X}_1, X_2) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

b) Bordas Horizontais:

$$\begin{aligned}
 u_2(X_1, 0) &= 0, & u_2(X_1, \bar{X}_2) &= -\bar{\varepsilon}_1 \alpha_2, \\
 (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_2)(X_1, 0) &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_2)(X_1, \bar{X}_2) = 0.
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Ensaio de cisalhamento:

a) Bordas Verticais

$$\begin{aligned}
 u_1(0, X_2) &= u_1(\bar{X}_1, X_2) = 2 \bar{\varepsilon}_2 X_2, \\
 u_2(0, X_2) &= u_2(\bar{X}_1, X_2) = 0,
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

b) Bordas Horizontais

$$\begin{aligned} u_2(X_1, 0) &= u_2(X_1, \bar{X}_2) = 0, \\ u_1(X_1, 0) &= u_1(X_1, \bar{X}_2) = 2\bar{\varepsilon}_2 \bar{X}_2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

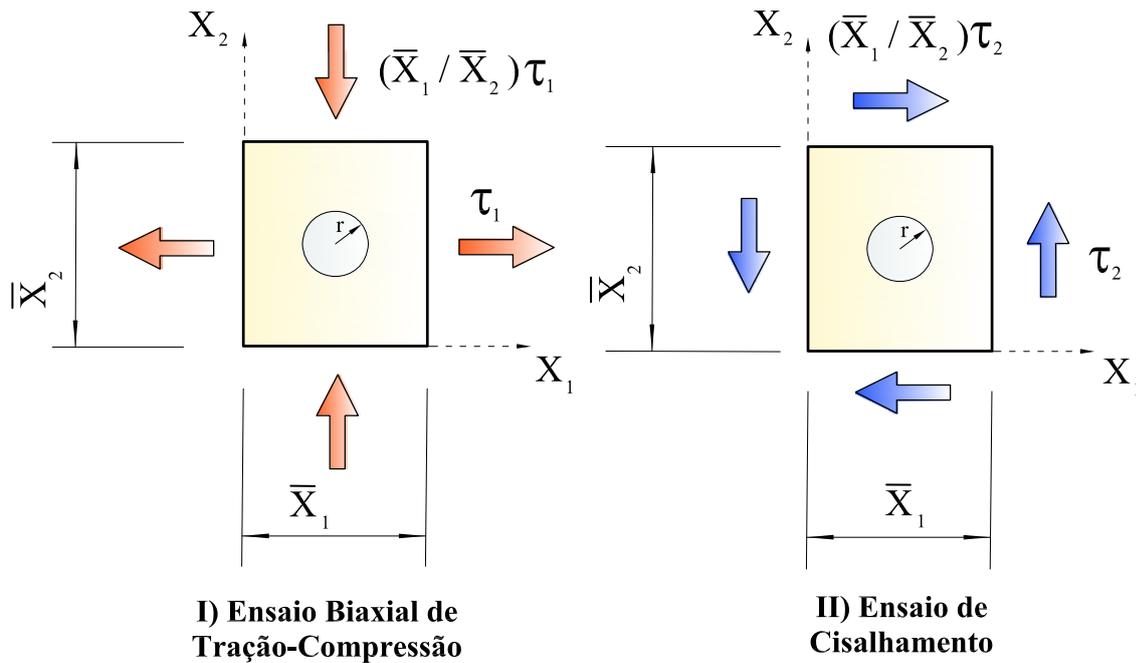


Figura 14: Ensaio para a obtenção dos campos de deslocamento independentes e das forças resultantes sobre as bordas da chapa.

Na próxima seção apresenta-se a formulação numérica utilizada na obtenção de valores aproximados para μ e π a partir de campos de deslocamento conhecidos.

6 Formulação Numérica

Na Seção 6.1 apresentam-se os conceitos básicos sobre o método dos elementos finitos (MEF) para o caso unidimensional. Na Seção 6.2 desenvolve-se a formulação discreta via MEF para o problema direto bidimensional. A Seção 6.3 apresenta o MEF aplicado ao estudo da determinação de μ e π utilizando os conceitos desenvolvidos nas seções anteriores.

6.1 Aspectos Básicos do Método dos Elementos Finitos-MEF

Nesta seção apresentam-se conceitos básicos do Método dos Elementos Finitos (MEF), a partir da formulação fraca apresentada na Seção 3. Para facilitar a exposição, consideram-se somente problemas uni-dimensionais lineares.

Os principais constituintes do Método dos Elementos Finitos clássico para a solução de um problema de valor de contorno são:

- i. A formulação variacional, ou, fraca do problema;
- ii. A aproximação das equações variacionais correspondentes utilizando série finita de funções contínuas com suportes que tendem a pontos à medida que o número de termos na série tende ao infinito.

6.1.1 Formulação Forte, ou, Clássica

Considere uma barra prismática de comprimento unitário sujeita a um carregamento axial de intensidade $b(X)$, conforme ilustrado na Fig. 15. A barra é homogênea com módulo de elasticidade E . Sob as hipóteses de pequenos deslocamentos e deformações, tem-se que

$$\begin{aligned}\sigma &= E u && \text{(Lei de Hooke),} \\ \sigma_{,X} + b &= 0 && \text{(Equação de equilíbrio),}\end{aligned}\tag{6.1}$$

no intervalo aberto $]0, 1[$, onde σ é a tensão normal à seção transversal da barra, u é o campo de deslocamento que se deseja calcular e $(\cdot)_{,X}$ denota diferenciação com respeito a $X \in]0, 1[$, de modo que $\sigma_{,X} = d\sigma/dX$.

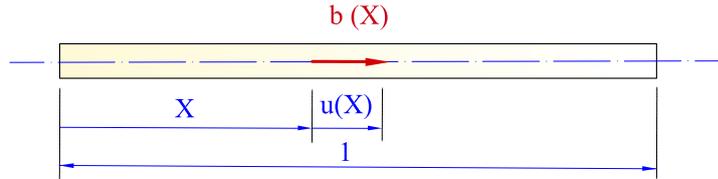


Figura 15: Barra prismática de comprimento unitário.

Assuma que $b :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ é uma função escalar suave e definida no intervalo fechado $[0, 1]$. Tomando $E = 1$ e eliminando σ entre as duas equações de (6.1), obtém-se

$$u_{,XX} + b = 0 \quad \text{em }]0, 1[.\tag{6.2}$$

Além da equação (6.2), deve-se impor condições em u , ou, em suas derivadas no contorno da barra para determinar u de forma única em $[0, 1]$. Aqui, assume-se que u deve satisfazer

$$\begin{aligned}u(1) &= g, \\ -u_{,X}(0) &= f,\end{aligned}\tag{6.3}$$

onde, por razões óbvias, as condições de contorno do tipo (6.3) conduzem ao chamado *problema de valor de contorno de dois pontos*. A formulação forte deste problema é dada abaixo.

$$(S) \begin{cases} \text{Dados } b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ suave e } g \text{ e } f \text{ constantes, achar } u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que} \\ u_{,XX} + b = 0 \quad \text{em }]0, 1[\\ u(1) = g, \\ -u_{,X}(0) = f. \end{cases}\tag{6.4}$$

A solução exata de (S) é dada por

$$u(X) = g + (1 - X) f + \int_X^1 \left\{ \int_0^Y b(Z) dZ \right\} dY. \quad (6.5)$$

6.1.2 Formulação Fraca, ou, Variacional

Para obter a forma fraca, ou, variacional de (S) , necessita-se caracterizar duas classes de funções. A primeira é a classe de funções admissíveis, a qual é composta de funções que satisfazem a condição de contorno $u(1) = g$. A outra condição de contorno, dada por $-u_{,X}(0) = f$ não é requerida na definição. Impõe-se também que

$$\int_0^1 [u^2 + (u_{,X})^2] dX < \infty, \quad (6.6)$$

onde u é uma função admissível.

As funções que satisfazem (6.6) são denominadas funções \mathcal{H}^1 em $(0, 1)$. Assim, o conjunto de funções admissíveis é dado por

$$\gamma \equiv \{ u \mid u \in \mathcal{H}^1, u(1) = g \}. \quad (6.7)$$

A segunda classe de funções é chamada classe de funções de teste e é dada por

$$\varsigma \equiv \{ w \mid w \in \mathcal{H}^1, w(1) = 0 \}. \quad (6.8)$$

Ambas as definições, (6.7) e (6.8), são particularizações para o caso unidimensional das definições de \mathcal{A} e \mathcal{V} , respectivamente, introduzidas na Seção 3.4.

Em termos das definições anteriores, pode-se agora estabelecer uma forma fraca apropriada, (W) , do problema de valor de contorno (S) .

$$(W) \begin{cases} \text{Dados } b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ suave e } f \text{ constante, achar } u \in \gamma \text{ tal que} \\ \int_0^1 w_{,X} u_{,X} dX = \int_0^1 w b dX + w(0) f, \quad \forall w \in \varsigma. \end{cases} \quad (6.9)$$

Mostra-se no Apêndice B que as formulações forte (S) e fraca (W) são equivalentes.

A condição de contorno $u_{,X}(0) = f$ não aparece na definição de γ em (6.7). No entanto, observe de (6.9) que esta condição aparece naturalmente na formulação fraca (W) . Por este motivo, esta condição é chamada *condição de contorno natural*. Por outro

lado, a condição de contorno $u(1) = g$ faz parte da definição de γ em (6.7). Por este motivo, esta condição é chamada *condição de contorno essencial*.

O Método dos Elementos Finitos permite obter uma solução aproximada do problema (W) em (6.9). A idéia básica do método é aproximar γ e ζ por conjuntos de funções convenientes de dimensões finitas.

Introduz-se agora algumas definições que serão utilizadas a seguir na apresentação do Método dos Elementos Finitos. Sejam, portanto,

$$a(w, u) = \int_0^1 w_{,X} u_{,X} dX, \quad (6.10)$$

$$(w, b) = \int_0^1 w b dX. \quad (6.11)$$

formas bilineares simétricas. Claramente, $a(\cdot, \cdot)$ e (\cdot, \cdot) são simétricos, pois, dadas as funções $u, v \in \mathcal{H}^1$,

$$\begin{aligned} a(u, v) &= a(v, u) \\ (u, v) &= (v, u) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Além disso, dadas as constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ e as funções $u, v, w \in \mathcal{H}^1$, as expressões (6.10) e (6.11) são bilineares, pois elas satisfazem as relações

$$\begin{aligned} a(c_1 u + c_2 v, w) &= c_1 a(u, w) + c_2 a(v, w), & a(u, c_1 v + c_2 w) &= c_1 a(u, v) + c_2 a(u, w) \\ (c_1 u + c_2 v, w) &= c_1 (u, w) + c_2 (v, w), & (u, c_1 v + c_2 w) &= c_1 (u, v) + c_2 (u, w) \end{aligned}$$

Em termos de (6.10) e (6.11), a equação variacional (6.9) toma a forma

$$a(w, u) = (w, b) + w(0) f, \quad \forall w \in \zeta. \quad (6.13)$$

6.1.3 Método de Aproximação de Galerkin

Descreve-se agora um método para obter soluções aproximadas de (W) em (6.9). O primeiro passo no desenvolvimento do método é construir subconjuntos de dimensões finitas de γ e ζ , os quais são denotados por γ^h e ζ^h , respectivamente. O índice h refere-se

à associação de γ^h e ζ^h com uma divisão, ou, discretização do domínio $]0, 1[$, a qual é parametrizada por um comprimento característico h .

Uma vez que

$$\gamma^h \subset \gamma, \quad \zeta^h \subset \zeta, \quad (6.14)$$

segue de (6.7), (6.8) e (6.14) que se $u^h \in \gamma^h$ e se $w^h \in \zeta^h$, então

$$u^h(1) = g, \quad w^h(1) = 0 \quad (6.15)$$

Claramente, os conjuntos ζ e ζ^h são espaços lineares de funções, pois se c_1 e c_2 são constantes e v e w estão em ζ , então $c_1v + c_2w$ também está em ζ . Contudo, essas propriedades não são claramente compartilhadas por γ e γ^h devido à não homogeneidade das condições de contorno. Por exemplo, se u_1 e u_2 são membros de γ , então $u_1 + u_2 \notin \gamma$, uma vez que $u_1(1) + u_2(1) = g + g = 2g$, em violação à definição de γ . Os conjuntos γ e γ^h são chamados *espaços lineares afins*.

Assume-se dado o conjunto v^h . Por conseguinte, para cada membro $v^h \in \zeta^h$, constrói-se uma função $u^h \in \gamma^h$ tal que

$$u^h = v^h + g^h, \quad (6.16)$$

onde g^h é uma função conhecida que satisfaz a condição de contorno essencial

$$g^h(1) = g. \quad (6.17)$$

Note de (6.17) que (6.16) satisfaz também as requeridas condições de contorno:

$$u^h(1) = v^h(1) + g^h(1) = g. \quad (6.18)$$

Assim, define-se γ^h como o conjunto de todas as funções da forma (6.16).

Tomando $u^h \in \gamma^h$ e $w^h \in \zeta^h$, escreve-se a equação variacional (6.13) na forma

$$a(w^h, u^h) = (w^h, b^h) + w^h(0) f, \quad \forall w^h \in \zeta^h. \quad (6.19)$$

Substituindo (6.16) em (6.19) e utilizando a bilinearidade de $a(\cdot, \cdot)$, obtém-se:

$$a(w^h, v^h) = (w^h, b) + w^h(0)f - a(w^h, g^h), \quad \forall w^h \in \zeta^h. \quad (6.20)$$

O lado direito consiste de termos associados com dados fornecidos, ou seja, b , g , e f . A equação (6.20) é usada para obter v^h , a parte desconhecida de u^h . Obtém-se assim a formulação de Galerkin do problema (W) em (6.9) como segue:

$$(G) \begin{cases} \text{Dados } b : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ suave e } f \text{ constante, achar } v^h \in \zeta^h \text{ tal que} \\ a(w^h, v^h) = (w^h, b) + w^h(0)f - a(w^h, g^h), \quad \forall w^h \in \zeta^h. \end{cases} \quad (6.21)$$

Note que (G) é uma versão discreta de (W) que utiliza uma coleção finita ζ^h de funções de base contínuas. Denomina-se a equação (6.20) de Equação de Galerkin. Ver-se-á a seguir que o método de Galerkin fornece um sistema de equações algébricas lineares que permite determinar $v^h \in \zeta^h$.

6.1.4 Sistema de Equações Lineares

Seja

$$0 = X_1 < X_2 < \dots < X_{n+1} = 1 \quad (6.22)$$

uma partição do intervalo $[0, 1]$ em sub-intervalos

$$\mathcal{I}_j = (X_j, X_{j+1}), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (6.23)$$

de comprimento

$$h_j = X_{j+1} - X_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.24)$$

Os subintervalos são chamados *elementos finitos do domínio*, ou simplesmente, elemento. Note de (6.24) que o comprimento dos elementos não são necessariamente iguais. O parâmetro da malha, h , é geralmente tomado como sendo o comprimento máximo de um subintervalo (isso é, $h = \max h_i, i = 1, 2, \dots, n$). Assim, uma malha refinada possui h pequeno. Se os comprimentos dos subintervalos são iguais, então $h = 1/n$.

Considere agora funções N_i , $i = 1, 2, \dots, n + 1$, com a propriedade

$$N_i(X_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n + 1, \quad (6.25)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Estas funções são chamadas funções de forma.

Claramente, $N_i \in \zeta$ para $i = 1, 2, \dots, n$, e uma função $w^h \in \zeta$ pode ser representada na forma

$$w^h(X) = \sum_{i=1}^n c_i N_i(X). \quad (6.26)$$

Além disso, pode-se representar g^h na forma

$$g^h(X) = g N_{n+1}(X), \quad (6.27)$$

de modo a satisfazer (6.17).

Com essas definições, uma função admissível $u^h \in \gamma^h$ pode ser escrita como

$$u^h = v^h + g^h = \sum_{i=1}^n d_i N_i + g N_{n+1}, \quad (6.28)$$

onde os d_i 's são parâmetros a determinar. Substituindo (6.26), (6.27) e (6.28) na equação de Galerkin (6.21) tem-se

$$\begin{aligned} a \left(\sum_{i=1}^n c_i N_i, \sum_{j=1}^n c_j N_j \right) &= \left(\sum_{i=1}^n c_i N_i, b \right) \\ &+ \left[\sum_{i=1}^n c_i N_i(0) \right] f - a \left(\sum_{i=1}^n c_i N_i, g N_{n+1} \right) \end{aligned} \quad (6.29)$$

Com o uso da bilinearidade de ambos, $a(\cdot, \cdot)$ e (\cdot, \cdot) , (6.29) torna-se

$$0 = \sum_{i=1}^n c_i G_i, \quad (6.30)$$

onde

$$G_i = \sum_{j=1}^n a(N_i, N_j) d_j - (N_i, b) - N_i(0) f - a(N_i, N_{n+1}) g \quad (6.31)$$

Uma vez que os c_i 's são arbitrários em (6.30), pois w^h é arbitrário, segue de (6.30) e (6.31) que $G_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$. Isto implica de (6.31) que

$$\sum_{j=1}^n a(N_i, N_j) d_j = (N_i, b) - N_i(0) f - a(N_i, N_{n+1}) g, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.32)$$

Note que todos os termos são conhecidos em (6.32), exceto $d_j, j = 1, \dots, n$. As equações (6.32) constituem um sistema de n equações a n incógnitas. Este sistema pode ser escrito em uma forma mais concisa como segue.

Sejam

$$K_{ij} = a(N_i, N_j), \quad (6.33)$$

e

$$F_i = (N_i, b) + N_i(0) f - a(N_i, N_{n+1}) g \quad (6.34)$$

para $i, j = 1, 2, \dots, n$. Então, (6.32) torna-se

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} d_j = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (6.35)$$

Agora, defina as matrizes

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{2n} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & K_{nn} \end{bmatrix}, \quad (6.36)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ F_n \end{bmatrix}, \quad (6.37)$$

e

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ d_n \end{bmatrix}. \quad (6.38)$$

As definições (6.36)-(6.38) permitem escrever (6.35) na forma matricial

$$\mathbf{Kd} = \mathbf{F}. \quad (6.39)$$

Chama-se \mathbf{K} de matriz de rigidez, \mathbf{F} de vetor força e \mathbf{d} de vetor deslocamento.

O problema de Galerkin (G) em (6.21) pode então ser escrito na forma abaixo.

$$(M) \left\{ \begin{array}{l} \text{Dados a matriz } \mathbf{K} \text{ e o vetor } \mathbf{F}, \text{ achar o vetor } \mathbf{d} \text{ tal que} \\ \mathbf{Kd} = \mathbf{F}. \end{array} \right.$$

Uma vez que \mathbf{K} é inversível, a solução de (M) é $\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}$. Conhecido \mathbf{d} , obtém-se a solução u^h de (G) em qualquer ponto $X \in [0, 1]$ empregando (6.28). Por conveniência, reescreve-se (6.28) na forma

$$u^h(X) = \sum_{i=1}^{n+1} d_i N_i, \quad (6.40)$$

onde $d_{i+1} \equiv g$.

Ressalta-se que a solução de (G) é uma solução aproximada de (W). Conseqüentemente, a equação diferencial e as condições de contorno naturais são aproximadamente

satisfeitas. A qualidade da aproximação depende da escolha dos N_i 's e do número de partições n .

6.1.5 Funções de Forma Lineares por Partes

Neste trabalho, consideram-se funções de forma lineares por partes, as quais são definidas por

$$N_i(X) = \begin{cases} \frac{(X - X_{i-1})}{h_{i-1}}, & X_{i-1} \leq X \leq X_i, \\ \frac{(X_{i+1} - X)}{h_i}, & X_i \leq X \leq X_{i+1}, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (6.41)$$

para os nós interiores, ou seja, para $i = 2, 3, \dots, n$, e

$$N_1(X) = \begin{cases} \frac{(X_2 - X)}{h_1}, & X_1 \leq X \leq X_2, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (6.42)$$

$$N_{n+1}(X) = \begin{cases} \frac{(X - X_n)}{h_n}, & X_n \leq X \leq X_{n+1} \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para os nós do contorno.

Note de ambos, (6.41) e (6.42), que as funções de forma são contínuas com derivadas contínuas por partes e satisfazem a propriedade (6.25).

6.1.6 Propriedades da Matriz \mathbf{K}

Observe de (6.41) e (6.42) que a função de forma N_i é nula fora da vizinhança do nó X_i , conforme ilustrado na Fig. 16. De fato,

$$K_{ij} = \int_0^1 N_{i,X} N_{j,X} dX = 0 \quad \text{para } |j - i| > 1, \quad (6.43)$$

resultando em uma matriz \mathbf{K} esparsa.

Observe de (6.43) que \mathbf{K} é semi-diagonal, pois os seus valores diferentes de zero estão em uma banda sobre a diagonal principal, ou seja,

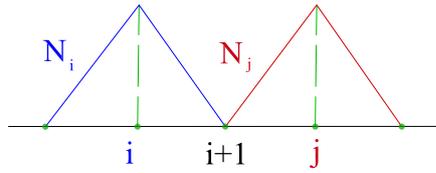


Figura 16: Funções de base quando $|j - i| > 1$ em que os suportes de N_i e N_j não se sobrepõem.

Fonte: Adaptado de Hughes (1987).

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 & & \cdots & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & 0 & & \\ 0 & K_{32} & K_{33} & K_{34} & 0 & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & 0 & K_{n-2,n-3} & K_{n-2,n-2} & K_{n-2,n-1} & \vdots \\ \vdots & & & 0 & K_{n-1,n-2} & K_{n-1,n-1} & K_{n-1,n} \\ 0 & & \cdots & & 0 & K_{n,n-1} & K_{n,n} \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

Matrizes semi-diagonais do tipo mostrado em (6.44) têm vantagens significativas, uma vez que os elementos nulos fora da banda não são armazenados e nem operados pelos computadores. Em geral, a matriz de rigidez obtida do método de elementos finitos possui uma banda estreita. Esta propriedade permite armazenar somente os elementos diferentes de zero, o que conduz à soluções com menos custo computacional.

Observe de (6.33) juntamente com (6.10) que a matriz \mathbf{K} é simétrica, uma vez que $a(\cdot, \cdot)$ é simétrico, e positiva definida, pois se $w^h(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n c_i N_i(\mathbf{X})$ é uma função arbitrária de ς (portanto, com coeficientes arbitrários c_i), então

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_i a(N_i, N_j) c_j = a\left(\sum_{i=1}^n c_i N_i, \sum_{j=1}^n c_j N_j\right) = a(w^h, w^h) \geq 0. \quad (6.45)$$

Se $a(w^h, w^h) = 0$, então w^h deve ser constante em $]0, 1[$. Uma vez que $w^h \in \varsigma$, $w^h(1) = 0$. Portanto,

$$0 = w^h(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^n c_i N_i(\mathbf{X}) \quad (6.46)$$

para w^h constante em $]0, 1[$. Admitindo que o conjunto $\{N_i\}$ é uma base para ζ (veja, por exemplo, Johnson (1987)), segue de (6.46) que $c_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Portanto, verifica-se a igualdade em (6.45) somente se $w^h = 0$.

Segue do exposto acima que \mathbf{K} possui n auto-valores reais e positivos (HOFFMAN; KUNZE, 1971). Portanto, \mathbf{K} é inversível, ou seja, existe \mathbf{K}^{-1} tal que $\mathbf{K}\mathbf{K}^{-1} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{K} = \mathbf{1}$, onde $\mathbf{1}$ é a matriz identidade.

6.1.7 O MEF do Ponto de Vista do Elemento - Coordenadas Locais e Globais.

Até o momento, adotou-se o ponto de vista global, segundo o qual consideram-se as funções de forma como definidas em todo o domínio do problema de valor de contorno. Este ponto de vista global é muito usado para estabelecer as propriedades matemáticas do Método dos Elementos Finitos.

Agora, deseja-se discutir o ponto de vista local, o qual, neste estudo, corresponde ao estudo do elemento finito no intervalo $[X_i, X_{i+1}]$. Este ponto de vista é tradicional em engenharia e é muito usado na implementação computacional do Método dos Elementos Finitos e no desenvolvimento de elementos finitos.

Começa-se o tratamento do ponto de vista local com uma questão: O que é um elemento finito?

Tenta-se dar uma resposta em termos do espaço de funções lineares por partes definido acima. Para isto, apresenta-se a descrição global de um elemento finito através das componentes:

(g1) Domínio: $[X_i, X_{i+1}]$,

(g2) Nós: $\{X_i, X_{i+1}\}$,

(g3) Graus de liberdade: $\{d_i, d_{i+1}\}$,

(g4) Funções de forma: $\{N_i, N_{i+1}\}$,

(g5) Funções de aproximação:

$$u^h(\mathbf{X}) = N_i(\mathbf{X})d_i + N_{i+1}(\mathbf{X})d_{i+1}, \mathbf{X} \in [X_i, X_{i+1}].$$

Cada elemento finito contendo as componentes (g1) a (g5) pode ser mapeado em um único elemento finito cuja descrição, chamada local, contém as seguintes componentes:

- (11) Domínio: $[\xi_1, \xi_2]$,
- (12) Nós: $\{\xi_1, \xi_2\}$,
- (13) Graus de liberdade: $\{d_1, d_2\}$,
- (14) Funções de forma: $\{N_1, N_2\}$,
- (15) Funções de aproximação: $u^h(\xi) = N_1(\xi) d_1 + N_2(\xi) d_2$

Na Fig. 17 ilustram-se as descrições local e global do e -ésimo elemento de uma malha de elementos finitos.

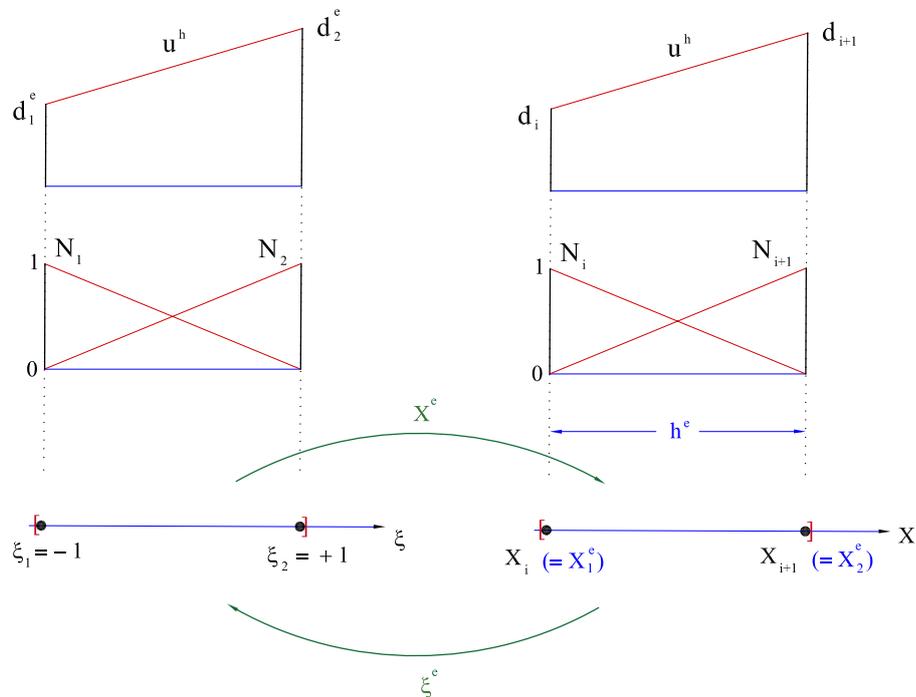


Figura 17: Lado esquerdo: Descrição local do e -ésimo elemento. Lado direito: Descrição global do e -ésimo elemento.

Fonte: Adaptado de Hughes (1987).

Relacionam-se os domínios da descrição global e local por uma transformação afim $\xi : [X_i, X_{i+1}] \rightarrow [\xi_1, \xi_2]$, tal que $\xi(X_i) = \xi_1$ e $\xi(X_{i+1}) = \xi_2$. Padroniza-se este procedimento na prática tomando $\xi_1 = -1$ e $\xi_2 = +1$. Então, representa-se ξ pela expressão

$$\xi(X) = c_1 + c_2 X \quad (6.47)$$

sendo c_1 e c_2 constantes a determinar do sistema de equações

$$\begin{cases} -1 = c_1 + c_2 X_i, \\ +1 = c_1 + c_2 X_{i+1}. \end{cases} \quad (6.48)$$

Solucionando este sistema, chega-se a

$$\xi(X) = \frac{2X - X_i - X_{i+1}}{h_i}, \quad (6.49)$$

onde lembra-se de (6.24) que $h_i = X_{i+1} - X_i$. O mapeamento inverso de (6.49) é dado por

$$X(\xi) = \frac{h_i \xi - X_i - X_{i+1}}{2}. \quad (6.50)$$

Na seqüência, adota-se a notação convencional, segundo a qual os sub-índices a, b, c, \dots pertencem ao sistema de numeração local. Os sub-índices i, j, k, \dots pertencem ao sistema de numeração global. Para controlar a proliferação de notações, usa-se a mesma notação para o sistema local e global (por exemplo, d_a e d_i , ou, N_a e N_i). Se houver perigo de confusão, introduzir-se-á um sobre-índice e para denotar uma quantidade com descrição local associada ao elemento e (por exemplo, $d_a^e = d_i$, $N_a^e(\xi) = N_i(X^e(\xi))$, sendo $X^e : [\xi_1, \xi_2] \rightarrow [X_1^e, X_2^e] = [X_i, X_{i+1}]$, etc.).

Em termos de ξ , as funções de forma na descrição local, N_a , são dadas por

$$N_a(\xi) = \frac{(1 + \xi_a \xi)}{2}, \quad a = 1, 2. \quad (6.51)$$

Utilizando (6.51), reescreve-se (6.50) na forma

$$X^e(\xi) = \sum_{a=1}^2 N_a(\xi) X_a^e, \quad (6.52)$$

onde $X_1^e = X_i$ e $X_2^e = X_{i+1}$.

Assim, a expressão (6.52) tem a mesma forma das funções de aproximação (15). Para referência futura, notam-se os seguintes resultados:

$$N_{a,\xi} = \frac{\xi_a}{2} = \frac{(-1)^a}{2}, \quad (6.53)$$

$$X_{,\xi}^e = \frac{h^e}{2}, \quad (6.54)$$

onde $h^e = X_2^e - X_1^e$ e

$$\xi_{,\xi}^e = (X_{,\xi}^e)^{-1} = \frac{2}{h^e}. \quad (6.55)$$

6.1.8 A Matriz de Rigidez e o Vetor de Força de um Elemento Genérico

Realiza-se agora uma partição do intervalo com n_{el} elementos, numerados como na Fig. 18. Evidentemente, para o modelo uni-dimensional, $n_{el} = n$. Seja e a variável índice para os elementos; então $1 \leq e \leq n_{el}$.

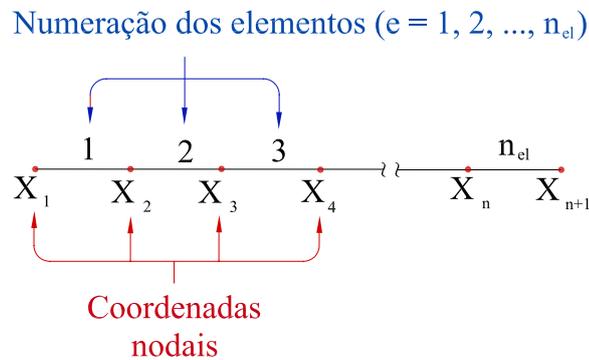


Figura 18: Numeração dos elementos e coordenadas dos nós da malha.

Fonte: Adaptado de Hughes (1987).

Agora, segue de (6.33) e (6.34) que

$$K_{ij} = a(N_i, N_j) = \int_0^1 N_{i,X} N_{j,X} dX, \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} F_i &= (N_i, b) + \delta_{i1} f - a(N_i, N_{n+1}) g = \\ &= \int_0^1 N_i b dX + \delta_{i1} f - \int_0^1 N_{i,X} N_{n+1,X} dX g. \end{aligned} \quad (6.57)$$

É possível escrever as integrais sobre $[0, 1]$ em (6.56) e (6.57) como a soma de integrais sobre os elementos do domínio. Deste modo resulta as expressões seguintes

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{K}^e, \quad \mathbf{K}^e = [K_{ij}^e], \quad (6.58)$$

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^{n_{el}} \mathbf{F}^e \quad \mathbf{F}^e = [F_i^e], \quad (6.59)$$

onde

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega^e} N_{i,X} N_{j,X} dX \quad (6.60)$$

$$F_i^e = \int_{\Omega^e} N_i b dX + \delta_{i1} f - \int_{\Omega^e} N_{i,X} N_{n+1,X} dX g, \quad (6.61)$$

e $\Omega^e \equiv [X_1^e, X_2^e]$. Observe de (6.58) e (6.59) que pode-se construir \mathbf{K} e \mathbf{F} , respectivamente, pela soma das contribuições das matrizes \mathbf{K}^e e vetores \mathbf{F}^e definidos sobre os elementos. Pela definição dos N_i 's em (6.41) e (6.42), segue de (6.60) e (6.61) que

$$K_{ij}^e = 0, \text{ se } i \neq e, \text{ ou, } i \neq e + 1, \text{ ou } j \neq e, \text{ ou, } j \neq e + 1 \quad (6.62)$$

e

$$F_i^e = 0, \text{ se } i \neq e, \text{ ou, } i \neq e + 1. \quad (6.63)$$

A situação para um dado elemento e apresenta-se na Fig. 19. Na prática, somente os termos diferentes de zeros, indicados por X na Fig. 19, são armazenados. Para esse propósito, é muito útil definir a matriz de rigidez para o e -ésimo elemento e , \mathbf{k}^e , e o vetor força do elemento e , \mathbf{f}^e , como segue:

$$\mathbf{k}^e = \underbrace{[k_{ab}^e]}_{2 \times 2}, \quad \mathbf{f}^e = \underbrace{[f_a^e]}_{2 \times 1},$$

onde

$$k_{ab}^e = \int_{\Omega^e} N_{a,x} N_{b,x} dx$$

$$f_a^e = \int_{\Omega^e} N b dx + \begin{cases} \delta_{a1} f & \text{se } e = 1, \\ 0 & \text{se } e = 2, 3, \dots, n_{el} - 1, \\ -k_{a2}^e g & \text{se } e = n_{el}. \end{cases}$$

Aqui, definem-se \mathbf{k}^e e \mathbf{f}^e com respeito à ordenação local e \mathbf{K}^e e \mathbf{F}^e com respeito

à ordenação global.

Para determinar onde as componentes \mathbf{k}^e e \mathbf{f}^e serão armazenados em \mathbf{K}^e e \mathbf{F}^e , respectivamente, requerem-se informações adicionais a serem discutidas no próximo ítem.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cc}
 \text{Coluna} & \text{Coluna} \\
 (e) & (e+1) \\
 \downarrow & \downarrow
 \end{array} \\
 \mathbf{K}^e = \underbrace{\begin{bmatrix}
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & X & X & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & X & X & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\
 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0
 \end{bmatrix}}_{n \times n}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \leftarrow \text{Linha } (e) \rightarrow \\
 \leftarrow \text{Linha } (e+1) \rightarrow
 \end{array}
 \mathbf{F}^e = \underbrace{\begin{Bmatrix}
 0 \\
 \vdots \\
 X \\
 X \\
 \vdots \\
 0
 \end{Bmatrix}}_{n \times 1}
 \end{array}$$

Figura 19: Notação: X denota valores diferentes de zero na matriz de rigidez e no vetor de forças.

Fonte: Adaptado de Hughes (1987).

6.1.9 A Montagem da Matriz Global de Rigidez e do Vetor de Força.

Em um programa computacional de elementos finitos, uma sub-rotina produz \mathbf{k}^e e \mathbf{f}^e , $e = 1, 2, \dots, n_{el}$, dos dados fornecidos. A sub-rotina de montagem necessita de informação adicional, tal que se possa adicionar os termos em \mathbf{k}^e e \mathbf{f}^e nas posições apropriadas em \mathbf{K}^e e \mathbf{F}^e , respectivamente. Armazenam-se estas informações para montagem em uma matriz chamada \mathbf{M}_L , a matriz de localizações. Constrói-se uma matriz \mathbf{M}_L para o problema considerado abaixo. As dimensões de \mathbf{M}_L são n_{en} , o número de nós dos elementos, pelo número de elementos. Por exemplo, considere os valores $n_{en} = 2$ e n_{el} , respectivamente. Dado o grau de liberdade a e o elemento e , o valor retornado pela matriz \mathbf{M}_L é correspondente ao número global da equação, A , do sistema formado por $\mathbf{Kd} = \mathbf{F}$. Para $a = 1$ e $a = 2$, obtém-se

$$\mathbf{A} = \mathbf{M}_L(a, e) = \begin{cases} e & \text{se } a = 1, \\ e + 1 & \text{se } a = 2. \end{cases} \quad (6.64)$$

A matriz completa \mathbf{M}_L é mostrada na Fig. 20. Note que $M_L(2, n_{el}) = 0$. Isto indica que o grau de liberdade 2 do elemento de número n_{el} é prescrito e não é uma incógnita na equação da matriz global. Portanto, os termos $k_{12}^{n_{el}}$, $k_{21}^{n_{el}}$, $k_{22}^{n_{el}}$ e $f_2^{n_{el}}$ não são montados em \mathbf{K} e \mathbf{F} , respectivamente.

$$\begin{array}{c}
 \text{Elemento } e, 1 \leq e \leq n_{el} \\
 \hline
 \begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & \dots & e & \dots & n_{el-1} & n_{el} \\
 \text{Nó} & \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right. & 1 & 2 & 3 & \dots & e & \dots & n-1 & n \\
 \text{Local} & & 2 & 2 & 3 & 4 & \dots & e+1 & \dots & n & 0 \\
 (n_{en} = 2) & & & & & & & & & & \underbrace{\hspace{10em}}_{n_{en} \times n_{el}}
 \end{array}
 \end{array}$$

Figura 20: Matriz de locação para os dados propostos acima.

Fonte: Adaptado de Hughes (1987).

Como um exemplo, deseja-se adicionar a contribuição do e -ésimo elemento, onde $1 \leq e \leq n_{el-1}$, para as matrizes \mathbf{K} e \mathbf{F} . Utilizando \mathbf{M}_L , obtém-se

$$\begin{aligned}
 K_{ee} &\leftarrow K_{ee} + k_{11}^e \\
 K_{e,e+1} &\leftarrow K_{e,e+1} + k_{12}^e \\
 K_{e+1,e} &\leftarrow K_{e+1,e} + k_{21}^e \\
 K_{e+1,e+1} &\leftarrow K_{e+1,e+1} + k_{22}^e \\
 F_e &\leftarrow F_e + f_1^e \\
 F_{e+1} &\leftarrow F_{e+1} + f_2^e
 \end{aligned} \tag{6.65}$$

onde a seta (\leftarrow) denota “é substituído por”. Devido à simetria, k_{21}^e não será montado na prática.

Para o elemento n_{el} , tem-se apenas

$$\begin{aligned}
 K_{nn} &\leftarrow K_{nn} + k_{11}^{n_{el}}, \\
 F_n &\leftarrow F_n + f_1^{n_{el}}.
 \end{aligned} \tag{6.66}$$

Tendo-se em mente este procedimento, pode-se esboçar um modelo de algoritmo para montar \mathbf{K} e \mathbf{F} na Fig. 21. O fluxograma da Fig. 21 dá uma idéia de como são empregados estes conceitos na Seção 6.3 para a montagem das matrizes do problema de determinação de parâmetros.

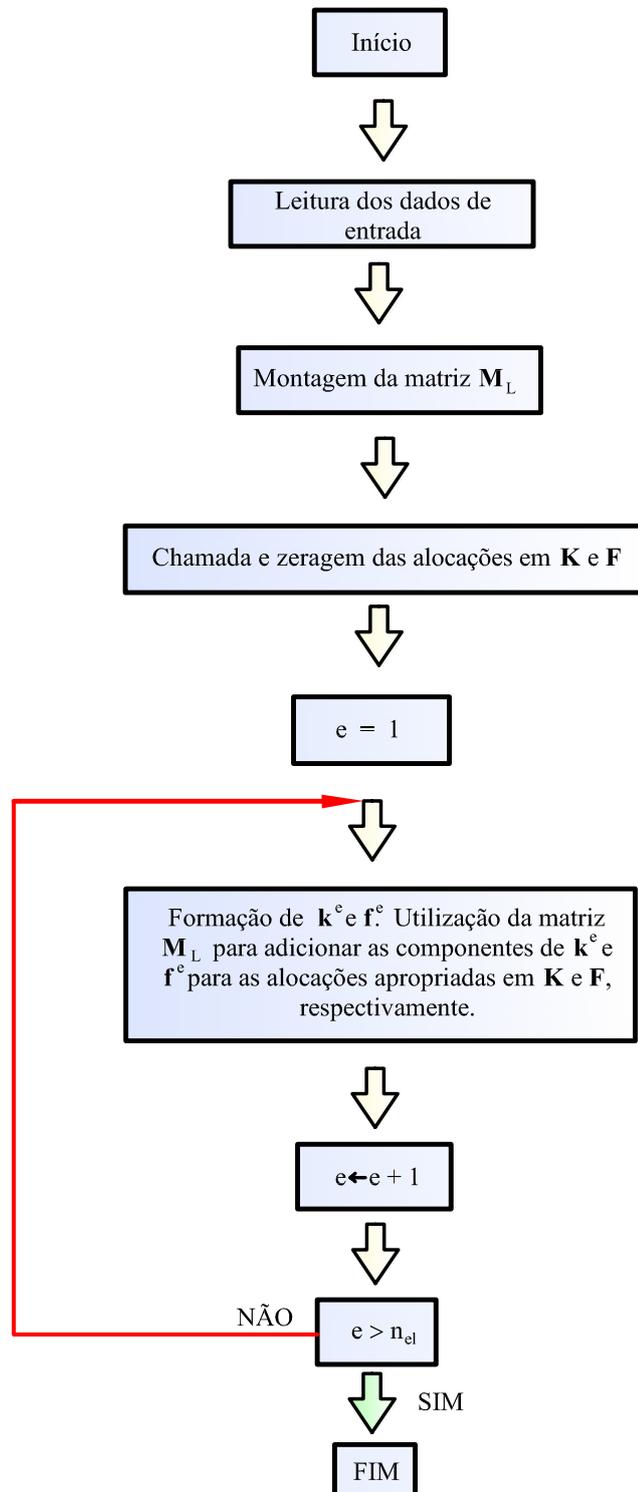


Figura 21: Diagrama de fluxo de algoritmo para a montagem das matrizes **K** e **F**.

Fonte: Adaptado de Hughes (1987).

6.1.10 A Resolução do Sistema de Equações

Os problemas discretizados pelo Método de Elementos Finitos recaem em grandes sistemas lineares da forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (6.67)$$

Matricialmente, o sistema (6.67) é reescrito como

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (6.68)$$

Em (6.68), \mathbf{A} é a matriz de coeficientes, \mathbf{B} é vetor dos termos independentes e \mathbf{X} é o vetor das incógnitas.

Diversos métodos numéricos estão disponíveis para a resolução de um sistema linear. Destacam-se as duas classes abaixo devido à facilidade de implementação computacional e à simplicidade matemática:

Métodos Diretos (Baseados no Escalonamento de Matrizes):

- Método de Jordan;
- Método de Gauss;
- Método da Pivotação Parcial e
- Método da Pivotação Completa.

Métodos Iterativos:

- Método de Jacobi;
- Método de Gauss-Seidel e
- Método SOR (*Successive Over Relaxation*).

Certos casos extremos podem exigir a análise de sistemas mal-condicionados e refinamento de sistemas lineares que não são abrangidos pelos métodos expostos acima. Menciona-se, por exemplo, o procedimento descrito na Seção 6.3, o qual fornece um programa para a obtenção de parâmetros elásticos em um domínio bidimensional. O programa emprega rotinas de decomposição em valores singulares (SVD) e Inversa Generalizada da matriz final, delineadas na Seção 4.3, a qual contém os coeficientes para a determinação dos parâmetros elásticos.

Antes de fornecer a formulação em elementos finitos para o problema inverso, pretende-se na Seção 6.2 apresentar a formulação discreta do problema direto em elementos finitos para o caso bidimensional. Esta formulação é semelhante ao que foi explicado até o momento para a formulação numérica unidimensional em elementos finitos. Isto permitirá ao leitor familiarizar-se mais com o procedimento desenvolvido via MEF quando for desenvolvida a formulação para o problema inverso.

6.2 O Problema Direto Discreto via MEF

Deseja-se obter aproximações para as soluções $\mathbf{u}_\varepsilon \in \mathcal{S}$ do problema direto dado por (3.38) e (3.39). Na Seção 6.3 emprega-se abordagem análoga para obter as soluções $\mu \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$ e $\pi^i \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, $i = 1, 2$, do problema inverso formulado na Seção 4.4.3.

Para este fim, constrói-se um *domínio de discretização* \mathcal{B}_h composto de m sub-regiões $\mathcal{K}_k \in \mathbb{R}^2$, $k = 1, 2, \dots, m$, não vazias, de modo que

$$\mathcal{B}_h \equiv \bigcup_{k=1}^m \mathcal{K}_k, \quad (6.69)$$

onde $\mathcal{K}_{k_1} \cap \mathcal{K}_{k_2}$, $k_1 \neq k_2$, é vazio, um ponto, ou, uma reta. O sub-índice “h” em (6.69) refere-se a um comprimento característico do conjunto $\{\mathcal{K}_k\}$, o qual pode ser tomado como o raio do círculo circunscrito à sub-região \mathcal{K}_k de maior área. Deseja-se construir um domínio de discretização \mathcal{B}_h que aproxime \mathcal{B} à medida que $h \rightarrow 0$; ou seja, para algum $\mathbf{X} \in \partial\mathcal{B}$, desejamos que $\lim_{h \rightarrow 0} |\mathbf{X} - \mathbf{Y}| = 0$ para $\mathbf{Y} \in \partial\mathcal{B}_h$, onde $|\bullet|$ é a norma Euclidiana usual em \mathbb{R}^2 .

Assume-se que a sub-região \mathcal{K}_k , $k = 1, 2, \dots, m$, contém um conjunto de \hat{n} pontos, ou, nós $\hat{\mathcal{N}}_k \equiv \{\hat{\mathbf{X}}_{k1}, \hat{\mathbf{X}}_{k2}, \dots, \hat{\mathbf{X}}_{k\hat{n}}\}$. Sobre cada sub-região \mathcal{K}_k introduz-se um conjunto de funções de base normalizadas $\{\hat{\varphi}_{ki}; \mathcal{K}_k \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, \hat{n}\}$ tal que

$$\hat{\varphi}_{ki}(\hat{\mathbf{X}}_{kj}) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, \hat{n}, \quad (6.70)$$

onde $\hat{\mathbf{X}}_{ki}$ é o i -ésimo nó de \mathcal{K}_k . Estas funções de base permitem definir um conjunto de funções contínuas sobre \mathcal{K}_k , dado por

$$\hat{\mathcal{P}}_k = \left\{ \hat{\varphi}: \mathcal{K}_k \rightarrow \mathbb{R} \mid \hat{\varphi}(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^{\hat{n}} \hat{\alpha}_j \hat{\varphi}_j(\mathbf{X}), \forall (\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_{\hat{n}}) \in \mathbb{R}^{\hat{n}} \right\}. \quad (6.71)$$

Para uma dada função $\hat{\varphi}(\mathbf{X}) \in \hat{\mathcal{P}}_k$, está claro de (6.71) que $\hat{\alpha}_i = \hat{\varphi}(\mathbf{X}_i)$ são escalares que formam o conjunto de graus de liberdade $\hat{\Sigma}_k = \{\hat{\varphi}(\mathbf{X}_{ki}), i = 1, 2, \dots, \hat{n}\}$. Note que $\hat{\alpha}_i$ é similar a d_i definido em 6.1.7 para o caso unidimensional. À ordenação $(\mathcal{K}_k, \hat{\mathcal{P}}_k, \hat{\Sigma}_k)$ chama-se *elemento finito Lagrangeano* e ao conjunto de elementos finitos definidos sobre \mathcal{B}_h chama-se *malha de elementos finitos*. Estes conceitos estão de acordo com o explicado na Seção 6.1 para o caso unidimensional.

O conjunto $\{\hat{\mathbf{X}}_{ki}, k = 1, 2, \dots, m, i = 1, 2, \dots, \hat{n}\}$ possui n nós distintos que definem o conjunto $\mathcal{N} \equiv \{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_n\} \in \mathcal{B}_h$, de modo que, para $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, existem $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ e $i \in \{1, 2, \dots, \hat{n}\}$ tal que $\mathbf{X}_j = \hat{\mathbf{X}}_{ki}$. Define-se agora o conjunto de funções $\{\varphi_j: \mathcal{B}_h \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, 2, \dots, n\}$ tal que $\varphi_j(\mathbf{X}) = \hat{\varphi}_{ki}(\mathbf{X})$ para $\mathbf{X} \in \mathcal{K}_k \cap \mathcal{B}_h, j = 1, 2, \dots, n, i = 1, 2, \dots, \hat{n}$. Além disso, assume-se continuidade de φ_j através da borda comum a dois elementos adjacentes. Assim, φ_j é uma função contínua em \mathcal{B}_h que satisfaz $\varphi_j(\mathbf{X}_i) = \delta_{ij}$. De fato, o conjunto destas funções é uma base de dimensão finita sobre \mathcal{B}_h que permite introduzir o conjunto de funções contínuas definido por

$$\mathcal{P} = \left\{ \varphi: \mathcal{B}_h \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi(\mathbf{X}) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j(\mathbf{X}), \forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \right\}. \quad (6.72)$$

Utilizando (6.72), introduz-se o espaço finito-dimensional \mathcal{V}_h como segue

$$\mathcal{V}_h = \left\{ \mathbf{v} \in (C^0(\mathcal{B}_h))^2 : \mathbf{v} \in ((\mathcal{B}_h))^2, \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ sobre } \Gamma_{hu} \right\}, \quad (6.73)$$

onde $C^0(\mathcal{B}_h)$ é o conjunto de funções contínuas definidas sobre \mathcal{B}_h e seu contorno $\partial\mathcal{B}_h \equiv \Gamma_{hg} \cup \Gamma_{hu}, \overset{\circ}{\Gamma}_{hg} \cap \overset{\circ}{\Gamma}_{hu} = \emptyset$. Aqui, Γ_{hg} e Γ_{hu} são partes complementares de $\partial\mathcal{B}_h$ sobre as quais atuam aproximações de \mathbf{g} , \mathbf{g}_h , e de $\bar{\mathbf{u}}$, $\bar{\mathbf{u}}_h$, respectivamente. Observe de (6.73) e da definição de \mathcal{V} na Seção 3.4.2 que $\mathcal{V}_h \subset \mathcal{V}$ se $\mathcal{B}_h \subset \mathcal{B}$.

Note de (6.72) e (6.73) que uma função $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h$ é representada por

$$\mathbf{v}_h(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{2n} \vartheta_i \mathbf{w}_i(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B}_h \cup \partial\mathcal{B}_h, \quad (6.74)$$

onde $\vartheta_i \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{w}_i \in \mathbb{R}^2$ é dado por

$$\mathbf{w}_{2i-1} = (\varphi_i, 0), \quad \mathbf{w}_{2i} = (0, \varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.75)$$

com φ_i sendo a função de base associada ao i -ésimo nó \mathbf{X}_i . Observe de (6.74) e (6.75) que $\mathbf{v}_h(\mathbf{X}_i) = (\vartheta_{2i-1}, \vartheta_{2i})$ para $i = 1, 2, \dots, n$. Denomina-se ϑ_i de *grau de liberdade* do campo \mathbf{v}_h . Assim, considerando que cada nó em \mathcal{N} tem dois graus de liberdade e que $\mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h$, decompõe-se o conjunto completo de $2n$ graus de liberdade em dois conjuntos complementares de inteiros, \mathcal{Z}^* e \mathcal{Z} , tais que $\vartheta_i = 0, \forall i \in \mathcal{Z}^*$, e $\mathcal{Z} \equiv \{1, 2, \dots, n\} \setminus \mathcal{Z}^*$.

De maneira similar ao realizado com o conjunto \mathcal{V}_h , introduz-se o conjunto \mathcal{A}_h definido por

$$\mathcal{A}_h = \left\{ \mathbf{v} \in (C^0(\mathcal{B}_h))^2 : \mathbf{v} \in ((\mathcal{B}_h))^2, \mathbf{v} = \bar{\mathbf{u}}_h \text{ sobre } \Gamma_{hu} \right\}. \quad (6.76)$$

Observe de (6.72) e (6.76) que um deslocamento $\mathbf{u}_h \in \mathcal{A}_h$ é representado por

$$\mathbf{u}_h(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{2n} v_i \mathbf{w}_i(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B}_h \cup \partial\mathcal{B}_h, \quad (6.77)$$

onde, para cada índice $i \in \mathcal{Z}^*$, o valor correspondente de v_i é prescrito e dado por $v_i = \bar{v}_i$.

Neste trabalho, $\mathcal{B}_h = \mathcal{B}$ e $\mathcal{K}_k, k = 1, 2, \dots, m$, são quadriláteros cujos nós estão localizados nos vértices destes quadriláteros. O *problema direto discreto* associado ao espaço \mathcal{V}_h e obtido da formulação de penalidades em (3.38) e (3.39) consiste em achar o deslocamento $\mathbf{u}_h \in \mathcal{A}_h$ tal que

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + \hat{b}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = (\mathbf{g}_h, \mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h, \quad (6.78)$$

onde $a(\bullet, \bullet)$ é dado por (3.35.a) e $\hat{b}(\bullet, \bullet)$ é dado por (3.39). Lembra-se da Seção 3.4 que no problema direto os parâmetros elásticos μ em (3.35.a) e ε em (3.39) são conhecidos.

Uma vez que \mathbf{u}_h é dado por (6.77) e \mathbf{v}_h é dado por (6.74), onde os coeficientes $\vartheta_i, i = 1, 2, \dots, n$, são arbitrários, pode-se reescrever (6.78) na forma

$$\sum_{j=1}^n (\kappa_{ij} + \hat{\kappa}_{ij}) v_j = \gamma_i, \quad i \in \mathcal{Z}, \quad (6.79)$$

onde

$$\kappa_{ij} \triangleq 2 \int_{\mathcal{B}} \mu \nabla_s \mathbf{w}_i \cdot \nabla_s \mathbf{w}_j \, dA, \quad \hat{\kappa}_{ij} \triangleq \frac{2}{\varepsilon} \int_{\mathcal{B}} (\text{tr} \nabla_s \mathbf{w}_i) (\text{tr} \nabla_s \mathbf{w}_j) \, dA, \quad (6.80)$$

$$\gamma_i \triangleq (\mathbf{g}_h, \mathbf{w}_i). \quad (6.81)$$

Assume-se que as funções de base normalizadas em (6.70) são bilineares, ou seja, estas funções são polinômios de primeiro grau em cada uma das coordenadas. Resolve-se o problema direto discreto com o pacote de elementos finitos ANSYS 5.5. Este pacote permite gerar malhas de elementos finitos sobre geometrias complexas e possui uma biblioteca ampla de elementos finitos. Em particular, utiliza-se o elemento finito PLANE42 devido à simplicidade da sua formulação.

Utiliza-se a formulação discreta apresentada acima para simular numericamente os ensaios que fornecem os dois campos de deslocamento \mathbf{u}^1 e \mathbf{u}^2 necessários para a determinação de μ , conforme descrito no final da Seção 4.4.3. Estas simulações fornecem também as forças resultantes \mathbf{R}_i^1 e \mathbf{R}_i^2 da forma (4.40) sobre partes complementares $\partial_j \mathcal{B}$ de $\partial \mathcal{B} \equiv \bigcup_{j=1}^r \partial_j \mathcal{B}$.

6.3 MEF Aplicado ao Problema de Determinação de Parâmetros

Nesta seção discute-se um procedimento numérico baseado no MEF que foi desenvolvido e implementado com o objetivo de determinar os parâmetros elásticos para o conjunto de experimentos ilustrados na Fig. 14. Para isto, considera-se um material elástico-linear, isotrópico e incompressível. Seja $\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in (\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))^2 : \mathbf{v}|_{\partial \mathcal{B}} = 0\}$, com $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ e considere 2 experimentos linearmente independentes, tendo-se $q = 1, 2$ para os termos de pressão, π .

Portanto, pode-se expressar ainda no caso contínuo desconsiderando-se as forças de corpo e relembrando da Seção 3.4.2 de (3.34) e (3.35) para material incompressível

como segue:

$$\int_{\mathcal{B}} (-\pi^q \operatorname{tr} \nabla_s \mathbf{v} + 2 \mu \mathbf{E}^q \cdot \nabla_s \mathbf{v}) dA = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (6.82)$$

Analogamente ao que foi realizado no caso uni-dimensional, aproxima-se \mathbf{v} na forma

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{2n} v_i \mathbf{w}_i, \quad (6.83)$$

onde (v_{2j-1}, v_{2j}) , $j = 1, 2, \dots, n$, é o deslocamento no nó j e

$$\mathbf{w}_{2j-1} = (\varphi_j, 0), \quad \mathbf{w}_{2j} = (0, \varphi_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

com φ_j , $j = 1, 2, \dots, n$, sendo a função de forma.

Os gradientes simétricos de \mathbf{w}_j calculam-se como segue:

$$\begin{aligned} \nabla_s \mathbf{w}_{2j-1} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_2} & 0 \end{bmatrix}, \\ \nabla_s \mathbf{w}_{2j} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_1} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_1} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial X_2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.84)$$

Substituindo (6.83) em (6.82), obtém-se

$$\int_{\mathcal{B}_h} \left[-\pi^q \operatorname{tr} \nabla_s \left(\sum_{i=1}^{2n} \mathbf{w}_i v_i \right) + 2 \mu \mathbf{E}^q \cdot \nabla_s \left(\sum_{i=1}^{2n} \mathbf{w}_i v_i \right) \right] dA = 0. \quad (6.85)$$

Uma vez que o traço de um tensor é um operador linear e que o produto escalar entre dois tensores é linear com respeito a cada um dos seus argumentos, obtém-se de (6.85) que

$$\sum_{i=1}^{2n} \left[\int_{\mathcal{B}_h} (-\pi^q \operatorname{tr} \nabla_s \mathbf{w}_i + 2 \mu \mathbf{E}^q \cdot \nabla_s \mathbf{w}_i) dA \right] v_i = 0, \quad \forall v_i \in \mathbb{R}. \quad (6.86)$$

A equação (6.86) é válida para valores arbitrários de v_i ; portanto,

$$\int_{\mathcal{B}_h} (-\pi^q \operatorname{tr} \nabla_s \mathbf{w}_i + 2\mu \mathbf{E}^q \cdot \nabla_s \mathbf{w}_i) dA = 0, \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (6.87)$$

Defina o conjunto

$$\mathcal{L}_h = \{\mu_h: \mathcal{B}_h \rightarrow \mathbb{R} : \mu_h \text{ é contínuo por partes sobre } \mathcal{B}_h\}. \quad (6.88)$$

Um elemento $\mu_h \in \mathcal{L}_h$ é representado por

$$\mu_h(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^m \mu_k \tau_k(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in \mathcal{B}_h \cup \partial\mathcal{B}_h, \quad (6.89)$$

onde lembra-se da Seção 6.2 que m é o número de elementos finitos na malha, $\mu_k \in \mathbb{R}$ e τ_k é uma função de base escalar constante por partes, a qual assume valor unitário sobre o elemento \mathcal{K}_k e é nula sobre $\mathcal{B}_h \setminus \mathcal{K}_k$.

Utilizando-se (6.89) pode-se escrever as aproximações $\sum_{l=1}^{\hat{n}_\mu} \mu_l \tau_l$ e $\sum_{l=1}^{\hat{n}_\pi} \pi_l^q \check{\varphi}_l$ para o módulo μ e para os termos de pressão ($q = 1, 2$), respectivamente, onde μ_l e π_l^q são parâmetros a determinar, \hat{n}_μ e \hat{n}_π fornecem o número de graus de liberdade para as aproximações de μ e π^q , respectivamente, e τ_l e $\check{\varphi}_l$ são funções de formas. Neste trabalho, $\tau_l = \check{\varphi}_l$. Substituindo estas aproximações em (6.87), resulta

$$\int_{\mathcal{B}_h} \left[- \left(\sum_{l=1}^{\hat{n}} \pi_l^q \tau_l \right) \operatorname{tr} \nabla_s \mathbf{w}_i + 2 \left(\sum_{l=1}^{\hat{n}} \mu_l \tau_l \right) \mathbf{E}^q \cdot \nabla_s \mathbf{w}_i \right] dA = 0, \quad i = 1, \dots, 2n, \quad (6.90)$$

onde $\hat{n} = \hat{n}_\mu = \hat{n}_\pi$.

Novamente, utilizando a linearidade do operador traço e do produto escalar, segue de (6.90) que

$$\sum_{l=1}^{\hat{n}} \left\{ \int_{\mathcal{B}_h} [- (\pi_l^q \tau_l) \operatorname{tr} \nabla_s \mathbf{w}_i + 2 (\mu_l \tau_l) \mathbf{E}^q \cdot \nabla_s \mathbf{w}_i] dA \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (6.91)$$

Agora, seja $\mathcal{B}_h = \bigcup_{j=1}^m k_j$ a união de todos os elementos finitos k_j que formam a malha sobre o domínio de análise, similar a (6.72), conforme ilustrado na Fig. 22. Segue

de (6.91) que

$$\sum_{l=1}^{\hat{n}} \left\{ \sum_{j=1}^m \int_{k_j} [-(\pi_l^q \tau_l) \text{tr} \nabla_s \mathbf{w}_i + 2(\mu_l \tau_l) \mathbf{E}^q \cdot \nabla_s \mathbf{w}_i] dA \right\} = 0, \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (6.92)$$

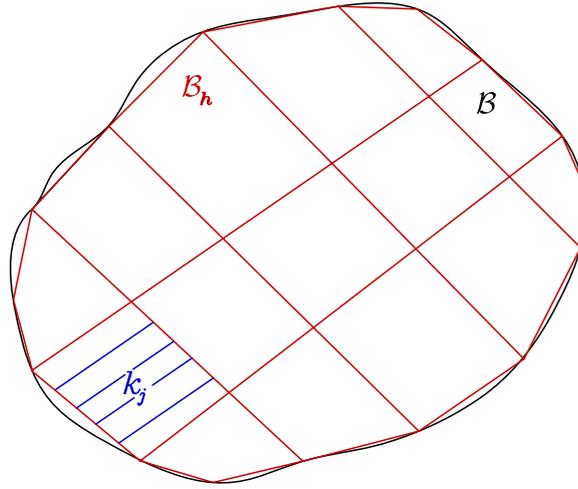


Figura 22: Representação dos domínio \mathcal{B} e do domínio de aproximação por elementos finitos quadrilaterais, \mathcal{B}_h .

Lembrando novamente que τ_l , $l = 1, 2, \dots, \hat{n}$, é constante por partes, de modo que $\hat{n} = n_{el}$ e que

$$\tau_l(X_1) = \begin{cases} 1 & \text{se } X_1 \in k_l, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (6.93)$$

Inserindo (6.93) em (6.92), obtém-se

$$\sum_{l=1}^{n_{el}} \left[-\pi_l^q \int_{k_l} \text{tr} \nabla_s \mathbf{w}_i dA + 2\mu_l \int_{k_l} \mathbf{E}^q \cdot \nabla_s \mathbf{w}_i dA \right] = 0. \quad (6.94)$$

Com o intuito de clarificar mais as idéias expostas acima para o caso bidimensional, segue um desenvolvimento matricial das expressões apresentadas até a determinação dos termos locais das matrizes dos elementos.

Exemplo 1

Assim, considere uma malha formada por um elemento finito quadrilateral com quatro nós, um em cada vértice do retângulo, com dois graus de liberdade em cada nó, conforme ilustrado na Fig. 23. Este elemento ocupa todo o domínio bidimensional sem inclusões. O leitor deve notar que a construção das funções de forma para este elemento bidimensional com funções de forma bilineares segue da multiplicação da função de forma linear em X_1 pela função de forma linear em X_2 , sendo estas já explicadas no estudo unidimensional da Seção 6.1.

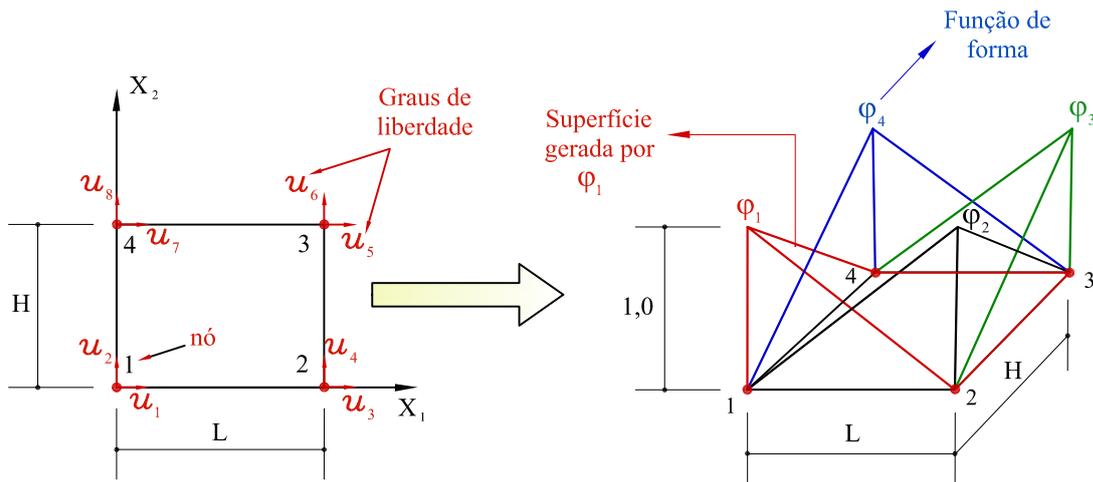


Figura 23: Elemento retangular com funções de forma bilineares.

Agora, controem-se as funções de forma bilineares sobre o elemento para cada nó indicado na Fig. 23. Estas funções são dadas por

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \left[1 + \frac{X_1 X_2}{LH} - \frac{X_1}{L} - \frac{X_2}{H} \right] \delta_{1j}, \\
 \varphi_2 &= \left[1 - \frac{X_1 X_2}{LH} + \frac{(X_1 - L)}{L} \right] \delta_{2j}, \\
 \varphi_3 &= \left[\frac{X_1 X_2}{LH} \right] \delta_{3j}, \\
 \varphi_4 &= \left[1 - \frac{X_1 X_2}{LH} + \frac{(X_2 - H)}{H} \right] \delta_{4j},
 \end{aligned} \tag{6.95}$$

onde δ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3, 4$, é o delta de Kronecker.

O cálculo de cada termo em (6.96) encontra-se na forma matricial a seguir:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\ \text{Coef } \pi^1 \\ \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\ \text{Coef } \pi^2 \\ \underbrace{\hspace{2cm}} \\
 \underbrace{\hspace{2cm}} \\ \text{Coef } \mu \\ \underbrace{\hspace{2cm}}
 \end{array}
 \end{array}
 \left[\begin{array}{c}
 i \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array} \right. \\
 j \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 4 \end{array} \right. \\
 k \left\{ \begin{array}{l} 5 \\ 6 \end{array} \right. \\
 l \left\{ \begin{array}{l} 7 \\ 8 \end{array} \right. \\
 i \left\{ \begin{array}{l} 9 \\ 10 \end{array} \right. \\
 j \left\{ \begin{array}{l} 11 \\ 12 \end{array} \right. \\
 k \left\{ \begin{array}{l} 13 \\ 14 \end{array} \right. \\
 l \left\{ \begin{array}{l} 15 \\ 16 \end{array} \right.
 \end{array} \right]
 \begin{array}{ccc}
 \begin{array}{l}
 - \int tr \nabla_s \mathbf{w}_1 dA \\
 - \int tr \nabla_s \mathbf{w}_2 dA \\
 - \int tr \nabla_s \mathbf{w}_3 dA \\
 - \int tr \nabla_s \mathbf{w}_4 dA \\
 - \int tr \nabla_s \mathbf{w}_5 dA \\
 - \int tr \nabla_s \mathbf{w}_6 dA \\
 - \int tr \nabla_s \mathbf{w}_7 dA \\
 - \int tr \nabla_s \mathbf{w}_8 dA \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 - \int tr \nabla_s \mathbf{w}_1 dA \\
 - \int tr \nabla_s \mathbf{w}_2 dA \\
 - \int tr \nabla_s \mathbf{w}_3 dA \\
 - \int tr \nabla_s \mathbf{w}_4 dA \\
 - \int tr \nabla_s \mathbf{w}_5 dA \\
 - \int tr \nabla_s \mathbf{w}_6 dA \\
 - \int tr \nabla_s \mathbf{w}_7 dA \\
 - \int tr \nabla_s \mathbf{w}_8 dA
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 2 \int \mathbf{E}^1 \cdot \nabla_s \mathbf{w}_1 dA \\
 2 \int \mathbf{E}^1 \cdot \nabla_s \mathbf{w}_2 dA \\
 2 \int \mathbf{E}^1 \cdot \nabla_s \mathbf{w}_3 dA \\
 2 \int \mathbf{E}^1 \cdot \nabla_s \mathbf{w}_4 dA \\
 2 \int \mathbf{E}^1 \cdot \nabla_s \mathbf{w}_5 dA \\
 2 \int \mathbf{E}^1 \cdot \nabla_s \mathbf{w}_6 dA \\
 2 \int \mathbf{E}^1 \cdot \nabla_s \mathbf{w}_7 dA \\
 2 \int \mathbf{E}^1 \cdot \nabla_s \mathbf{w}_8 dA \\
 2 \int \mathbf{E}^2 \cdot \nabla_s \mathbf{w}_1 dA \\
 2 \int \mathbf{E}^2 \cdot \nabla_s \mathbf{w}_2 dA \\
 2 \int \mathbf{E}^2 \cdot \nabla_s \mathbf{w}_3 dA \\
 2 \int \mathbf{E}^2 \cdot \nabla_s \mathbf{w}_4 dA \\
 2 \int \mathbf{E}^2 \cdot \nabla_s \mathbf{w}_5 dA \\
 2 \int \mathbf{E}^2 \cdot \nabla_s \mathbf{w}_6 dA \\
 2 \int \mathbf{E}^2 \cdot \nabla_s \mathbf{w}_7 dA \\
 2 \int \mathbf{E}^2 \cdot \nabla_s \mathbf{w}_8 dA
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Enfatiza-se ainda que na concepção da matriz local do elemento retangular bi-linear reservou-se as primeiras oito linhas para o problema de tração-compressão e as demais linhas para os termos associados ao problema de cisalhamento. O sobre-índice em π da forma matricial anterior indica a coluna da matriz local em que se localizará o coeficiente multiplicador das pressões dos ensaios propostos, 1 e 2, respectivamente.

Exemplo 2

Agora, considere uma malha de 16 elementos finitos retangulares. O primeiro elemento desta malha, por exemplo, pode ter os valores nodais das funções de forma calculados em cada nó analogamente ao calculado para o Exemplo 1 e são dadas no caso do primeiro elemento da malha por

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \left[1 + \frac{X_1 X_2}{\frac{LH}{16}} - \frac{X_1}{4} - \frac{X_2}{4} \right] \delta_{1j}, \\
 \varphi_2 &= \left[1 - \frac{X_1 X_2}{\frac{LH}{16}} + \frac{(X_1 - \frac{L}{4})}{L} \right] \delta_{2j}, \\
 \varphi_3 &= \left[\frac{X_1 X_2}{\frac{LH}{16}} \right] \delta_{3j}, \\
 \varphi_4 &= \left[1 - \frac{X_1 X_2}{\frac{LH}{16}} + \frac{(X_2 - \frac{H}{4})}{\frac{H}{4}} \right] \delta_{4j}.
 \end{aligned} \tag{6.97}$$

onde δ_{ij} , $i, j = 1, 2, 3, 4$, é o delta de Kronecker.

As derivadas da função de forma obtidas com relação às direções X_1 e X_2 para cada função de forma φ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ em (6.97) são dadas por

$$\begin{aligned}
 \varphi_{1,X_1} &= 1 + \frac{16}{LH} X_2 - \frac{4}{L} \\
 \varphi_{1,X_2} &= 1 + \frac{16}{LH} X_1 - \frac{4}{L} \\
 \varphi_{2,X_1} &= 1 + \frac{16}{LH} X_2 + \frac{4}{L} \\
 \varphi_{2,X_2} &= 1 + \frac{16}{LH} X_1 \\
 \varphi_{3,X_1} &= \frac{16}{LH} X_2 \\
 \varphi_{3,X_2} &= \frac{16}{LH} X_1 \\
 \varphi_{4,X_1} &= \frac{16}{LH} X_2 \\
 \varphi_{4,X_2} &= \frac{16}{LH} X_1 + \frac{4}{H}
 \end{aligned}$$

A área do elemento finito resulta em

$$A^1 = \frac{LH}{16}.$$

Para cada elemento, cujo número é indicado pelo índice sobrescrito, calcula-se os coeficientes da matriz local padrão e eliminam-se aqueles que pertençam aos graus de liberdade de nós que estão sobre o contorno do corpo.

Desse modo, para o exemplo proposto acima pode-se escrever (6.96) para o primeiro elemento que possui dois lados pertencentes ao contorno. Apresenta-se a seguir a lista dos coeficientes α_{ij} , para cada nó, que por pertencerem ao contorno (neste caso, nós i , j , e l) serão eliminados na alocação global:

$$\begin{aligned} \text{nó } (i) &- \alpha_{11}^1, \alpha_{21}^1, \alpha_{92}^1, \alpha_{102}^1, \alpha_{13}^1, \alpha_{23}^1, \alpha_{93}^1, \alpha_{103}^1 \\ \text{nó } (j) &- \alpha_{31}^1, \alpha_{41}^1, \alpha_{112}^1, \alpha_{122}^1, \alpha_{113}^1, \alpha_{123}^1 \\ \text{nó } (l) &- \alpha_{71}^1, \alpha_{81}^1, \alpha_{152}^1, \alpha_{162}^1, \alpha_{153}^1, \alpha_{163}^1 \end{aligned}$$

Do exposto, conclui-se que é necessário computar apenas os termos do nó k deste elemento. A seguir, como ilustração, apresentam-se os cálculos dos coeficientes α_{51}^1 e α_{53}^1 , pertencentes ao referido nó como segue

$$\begin{aligned} \alpha_{51}^1 &= - \int_{K_1} tr \nabla_s \mathbf{w}_5 dA = - \int_{X_2=0}^{X_2=\frac{H}{4}} \left\{ \int_{X_1=0}^{X_1=\frac{L}{4}} \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_1} dX_1 \right\} dX_2 \\ &= - \int_{X_2=0}^{X_2=\frac{H}{4}} \left\{ \int_{X_1=0}^{X_1=\frac{L}{4}} \left(\frac{16}{LH} X_2 \right) dX_1 \right\} dX_2 = - \int_{X_2=0}^{X_2=\frac{H}{4}} \left[\frac{16}{LH} X_2 X_1 \right]_{X_1=0}^{X_1=\frac{L}{4}} dX_2 \\ &= - \int_{X_2=0}^{X_2=\frac{H}{4}} \left(\frac{16}{LH} X_2 \frac{L}{4} \right) dX_2 = - \left[\frac{16}{H} \frac{X_2^2}{2} \frac{1}{4} \right]_{X_2=0}^{X_2=\frac{H}{4}} = - \frac{2}{H} \frac{H^2}{16} = - \frac{H}{8} \Rightarrow \\ \alpha_{51}^1 &= -0,125 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\alpha_{53}^1 &= -2 \int_{K_1} E^I \cdot \nabla_s \mathbf{w}_5 \, dA \\
&= 2 \int_{X_2=0}^{X_2=\frac{H}{4}} \left\{ \int_{X_1=0}^{X_1=\frac{L}{4}} \left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_{X_1 X_1}^I & \varepsilon_{X_1 X_2}^I \\ \varepsilon_{X_1 X_2}^I & \varepsilon_{X_2 X_2}^I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_1} & \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_2} & 0 \end{bmatrix} \right\} dX_1 \right\} dX_2 \\
&= 2 \int_{X_2=0}^{X_2=\frac{H}{4}} \left\{ \int_{X_1=0}^{X_1=\frac{L}{4}} \left\{ \varepsilon_{X_1 X_1}^I \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_1} + \varepsilon_{X_1 X_2}^I \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_2} \right\} dX_1 \right\} dX_2 \\
&= 2 \int_{X_2=0}^{X_2=\frac{H}{4}} \left\{ \left[\frac{10^{-3}}{L} \frac{16}{LH} X_2 X_1 \right]_{X_1=0}^{X_1=\frac{L}{4}} \right\} dX_2 = 2 \int_{X_2=0}^{X_2=\frac{H}{4}} \left(\frac{10^{-3}}{L} \frac{16}{LH} X_2 \frac{L}{4} \right) dX_2 \\
&= 2 \left[\frac{10^{-3}}{L} \frac{16}{LH} \frac{X_2^2 L}{2 \cdot 4} \right]_{X_2=0}^{X_2=\frac{H}{4}} = 2 \left(\frac{10^{-3}}{L} \frac{16}{LH} \frac{H^2 L}{32 \cdot 4} \right) = 2 \cdot 10^{-3} \frac{1}{8} \Rightarrow \\
\alpha_{53}^1 &= 0,250 \times 10^{-3}.
\end{aligned}$$

A formulação do problema inverso e o procedimento de montagem do sistema obtido pelo método dos elementos finitos pode então ser resumido da seguinte maneira. O *problema inverso discreto* associado aos espaços \mathcal{L}_h e \mathcal{V}_h e obtido da formulação fraca em (4.41) consiste em achar $\mu_h \in \mathcal{L}_h$ e $\pi_h^i \in \mathcal{L}_h$, $i = 1, 2$, que satisfaçam

$$\begin{aligned}
- \int_{\mathcal{B}} \pi_h^i \operatorname{tr} \nabla_s \mathbf{v}_h \, dA + 2 \int_{\mathcal{B}} \mu_h \nabla_s \mathbf{u}^i \cdot \nabla_s \mathbf{v}_h \, dA &= 0, & \forall \mathbf{v}_h \in \mathcal{V}_h, \\
\mathbf{R}_j^i &= \int_{\partial_j \mathcal{B}} (-\pi_h^i \mathbf{1} + 2 \mu_h \nabla_s \mathbf{u}^i) \mathbf{n}_j \, dL.
\end{aligned} \tag{6.98}$$

Uma vez que $\mathcal{B}_h = \mathcal{B}$ neste trabalho, assume-se que cada parte $\partial_j \mathcal{B}$ é dada pela união de bordas dos elementos próximos ao contorno de \mathcal{B}_h , ou seja, $\partial_j \mathcal{B} = \bigcup_{p \in \mathcal{Z}_j} \mathcal{D}_p$, onde \mathcal{D}_p é a borda do elemento \mathcal{K}_p contida em $\partial_j \mathcal{B}$ e \mathcal{Z}_j é o conjunto de números inteiros que identificam os elementos com bordas contidas em $\partial_j \mathcal{B}$. Utilizando (6.89), pode-se escrever $\mu_h = \sum_{k=1}^m \mu_k \tau_k$ e $\pi_h^i = \sum_{k=1}^m \pi_k^i \tau_k$, $i = 1, 2$, onde $\mu_k \in \mathbb{R}$ e $\pi_k^i \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, m$, são coeficientes a determinar. Uma vez que \mathbf{u}^i , $i = 1, 2$, são da forma (6.77) e \mathbf{v}_h é dado por (6.74), onde os coeficientes ϑ_i , $i = 1, 2, \dots, n$, são arbitrários, pode-se reescrever (6.98) na forma

$$\begin{aligned}
\sum_{q=1}^{2m} \alpha_{pq}^i \omega_q^i &= 0, & p \in \mathcal{Z}, \\
\sum_{q \in \mathcal{Z}_j} \beta_q^i \omega_q^i &= \mathbf{R}_j^i, & j = 1, 2, \dots, r,
\end{aligned} \tag{6.99}$$

respectivamente, onde $i = 1, 2$, e

$$\begin{aligned}
\alpha_{p(2q-1)}^i &\triangleq 2 \int_{\mathcal{K}_q} \nabla_s \mathbf{u}^i \cdot \nabla_s \mathbf{w}_p \, dA, & \alpha_{p(2q)}^i &\triangleq - \int_{\mathcal{K}_q} \text{tr} \, \nabla_s \mathbf{w}_p \, dA, \\
\beta_{2q-1}^i &\triangleq 2 \int_{\mathcal{D}_q} (\nabla_s \mathbf{u}^i) \mathbf{n}_q \, dA, & \beta_{2q}^i &\triangleq - \int_{\mathcal{D}_q} \mathbf{n}_q \, dA, \\
\omega_{2q-1}^i &\triangleq \mu_q, & \omega_{2q}^i &\triangleq \pi_q.
\end{aligned} \tag{6.100}$$

Para calcular os coeficientes α_{pq}^i desenvolveu-se um programa para determinação dos parâmetros elásticos em linguagem FORTRAN, versão FORTRAN 10.1.

O cálculo de cada α_{pq}^i depende da escolha do tipo de elemento finito, do conhecimento dos campos de deslocamento e geometria do domínio de análise para montar a matriz global do problema, ou, matriz de locação \mathbf{M}_L . Veja os exemplos 1 e 2 descritos anteriormente para recordar como estes termos são calculados no presente trabalho.

Após a colocação e reordenação de todos os coeficientes da matriz do elemento finito para os nós interiores adicionou-se a esta matriz as linhas correspondentes às condições de contorno sendo que os coeficientes são colocados na matriz para cada lado do cilindro. Por exemplo, considere um lado qualquer da seção retangular. Tem-se para o problema 1 os coeficientes relativos ao contorno ocupando as primeiras duas linhas contíguas e em seguida adicionam-se os coeficientes do problema 2 e assim sucessivamente até completar as dezesseis linhas relativas às partes complementares do contorno.

O endereçamento de cada coeficiente na coluna da matriz global é feito segundo o número do elemento, tal que um elemento α qualquer será representado por α_j^{3j-i} , $i = 2, 1, 0$; $j = 1, 2, \dots, m$, onde $3j - i$ é o número da coluna e j é o número do elemento finito a que o coeficiente α pertence, finalizando a montagem da matriz global para inversão.

A matriz global resultante para inversão tem a dimensão $4 \times$ número de nós mais dezesseis equações relacionadas ao equilíbrio das resultantes de forças em partes do contorno por $3 \times$ número de elementos no caso de se adotar elementos retangulares bilineares.

Em geral, o sistema linear formado por (6.99) e (6.100) é sobre-determinado. Para resolver este sistema é necessário utilizar técnicas especiais de inversão. Aqui, utilizamos um algoritmo de pseudo-inversão, ou, inversão generalizada via decomposição SVD (*Singular Value Decomposition*; veja Golub e Loan (1996)). Este algoritmo foi implementado utilizando rotinas do IMSL 10.1 para FORTRAN 10.1.

Os principais dados de entrada destas rotinas são os coeficientes \mathbf{R}_j^i , a matriz \mathbf{W} , que é uma composição da matrizes locais dadas por (6.96), formada pelos coeficientes que multiplicam ω_q^i no sistema (6.99) e (6.100), as dimensões de \mathbf{W} e uma tolerância que fornece a maior matriz quadrada não singular de \mathbf{W} . Neste trabalho, a tolerância é um número não-negativo abaixo do qual um valor singular de \mathbf{W} é considerado nulo. Os valores singulares de \mathbf{W} são a raízes quadradas dos autovalores do produto da transposta de \mathbf{W} pelo próprio \mathbf{W} e são ordenados em ordem decrescente. O número de valores singulares não-nulos é igual ao posto de \mathbf{W} . Um estudo preliminar da influência da tolerância sobre os valores de μ permitiu concluir que, para tolerâncias menores do que 10^{-8} , todos os valores obtidos para μ eram fisicamente plausíveis e diferiam pouco entre si.

A seguir, na Fig. 24, apresenta-se o esquema geral do programa desenvolvido para a determinação dos parâmetros elásticos. Ainda sobre o programa desenvolvido, fez-se os arquivos de entrada para resolver o problema inverso de determinação de μ com o auxílio do software ANSYS 5.5, o qual serviu para gerar a malha de elementos finitos.

Adicionalmente, arquivos que compõem dados essenciais à solução do problema inverso, tais como o conhecimento dos campos de deslocamentos nodais, as forças resultantes em partes complementares do contorno e as deformações nestas partes foram determinados a partir da solução do problema direto também com o auxílio deste software, colocando-se os campos de deslocamento no arquivo principal de entrada.

Ressalta-se do exposto acima que o procedimento para resolver μ e a pressão no problema inverso é do tipo não iterativo, ou seja, os parâmetros elásticos são determinados sem que haja necessidade da atualização dos valores destes para atender a um erro mínimo cujo propósito é servir de critério de parada.

Outro aspecto que merece ser lembrado é quanto à escolha do tipo de elemento finito quadrilateral com quatro pontos de integração para o deslocamento. O autor do presente trabalho utilizou o elemento finito mencionado acima devido à simplificação proporcionada nos cálculos, mas poderia ter sido usado o elemento finito tipo $P2$ que é livre de qualquer efeito tabuleiro de xadrez, (veja Tab. A.1 em Aguiar e Fosdik, 1993).

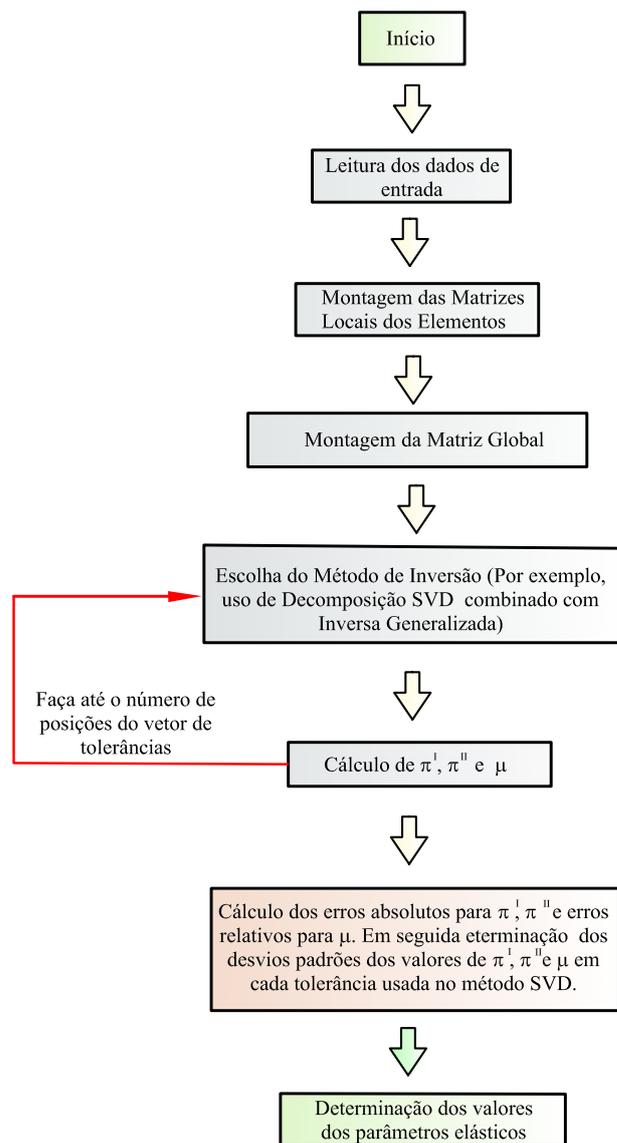


Figura 24: Diagrama de fluxo elementar do programa desenvolvido para a determinação de parâmetros elásticos.

7 Apresentação e Discussão de Resultados

7.1 Cilindro Reto de Secção Retangular com Inclusão Cilíndrica de Secção Circular

Para resolver os dois problemas diretos, tração-compressão biaxial e cisalhamento, simulam-se a realização dos ensaios em laboratório como experimentos propostos na Seção 5.3.2. Em ambos, (5.4) e (5.5), assume-se que $\bar{\varepsilon}_1 = 0,01$. Em (5.7), assume-se que $\bar{\varepsilon}_2 = 0,01$. Assume-se também que o cilindro reto é quase-incompressível com coeficiente de Poisson $\nu_C = 0,499999$ e com módulo de elasticidade ao cisalhamento $\mu_C = 36$ KPa. Ressalta-se que $\nu_C = 0,499999$ é um valor típico encontrado na literatura para tecidos moles (MANDUCA, 2005). A inclusão também é quase-incompressível com $\nu_I = \nu_C$ e $\mu_I = C_R \mu_C$, onde C_R pode assumir os valores 0, 1, 2, 4 e 6. Ressalta-se que $C_R = 0$ corresponde a um furo no cilindro; neste caso, adotou-se $\nu_I = 0,3$ e $C_R = 10^{-25}$ ao invés de com $\nu_I = 0,499999$ e $C_R = 0$, respectivamente para efeito de simulação via ANSYS 5.5. Ressalta-se também que $C_R > 1$ corresponde a uma inclusão mais rígida do que a chapa.

Segue do exposto acima que, para o caso de $C_R = 1$ (sólido homogêneo), as soluções de equilíbrio dos problemas diretos são dadas por:

$$\begin{aligned} \text{i) } \mathbf{u}(X_1, X_2) &= \bar{\varepsilon}_1 X_1 \mathbf{e}_1 - \bar{\varepsilon}_1 X_2 \mathbf{e}_2 \quad (\text{tração-compressão}), \\ \text{ii) } \mathbf{u}(X_1, X_2) &= 2 \bar{\varepsilon}_2 X_2 \mathbf{e}_1 \quad (\text{cisalhamento}). \end{aligned} \tag{7.1}$$

Para ambas as soluções homogêneas em (7.1), note que $\text{tr } \nabla_s \mathbf{u} = 0$. Ou seja, se o sólido é homogêneo, a dilatação volumétrica é nula independentemente do material ser incompressível, ou, não. Observe de ii) que

$$\begin{aligned}
(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_1)(0, X_2) &= (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_1)(\alpha_1, X_2) = 0 \text{ sobre as bordas verticais,} \\
(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_2)(X_1, 0) &= (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_2)(X_1, \alpha_2) = 0 \text{ sobre as bordas horizontais.}
\end{aligned}$$

Portanto, se a inclusão estiver distante das bordas do cilindro, pode-se assumir que estas relações são aproximadamente satisfeitas no caso de $C_R \neq 1$.

No problema direto resolvido numericamente pelo Ansys 5.5 existem resíduos de forças de cisalhamento influenciando o problema biaxial de tração-compressão, mesmo no caso de $C_R = 1$. Já no problema de cisalhamento, aparecem resíduos de forças de tração e de compressão. Conseqüentemente, as resultantes de forças correspondentes a estes resíduos não são identicamente nulas. Espera-se que estes resíduos tendam a zero à medida que a malha é refinada, pois observa-se de (5.4.b) e (5.5.b) que eles são nulos no problema contínuo.

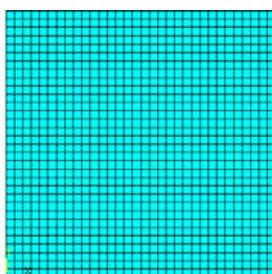
Neste trabalho consideram-se todas as 16 equações relacionadas à imposição das forças resultantes no contorno, mesmo as residuais. O objetivo em manter as forças residuais na formulação do problema inverso é simular, por exemplo, erros de medição.

7.2 Influência da Malha de Elementos Finitos no Problema Direto Discreto

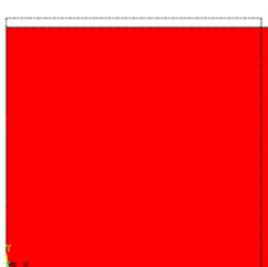
A influência da malha de elementos finitos pôde ser verificada da resolução do problema direto para o cilindro reto de secção quadrada de 50 mm de lado. Considerou-se o caso $C_R = 1$ com uma malha uniforme e duas outras malhas não uniformes para os raios $r = 2$ mm e $r = 6$ mm. As condições nas bordas do cilindro para os experimentos de tração-compressão e de cisalhamento simples são dadas por (5.4)–(5.7).

Apresenta-se na Fig. 25.(a) a malha uniforme obtida do pacote computacional ANSYS 5.5 e nas figuras 25.(b), (c) as deformações por tração-compressão e cisalhamento simples. As linhas contínuas indicam a posição indeformada do cilindro. Os valores das deformações calculadas são constantes em todo o cilindro e são representadas nas figuras 25.(b), (c) por uma única cor. Verificou-se que a diferença entre o valor calculado pelo ANSYS e o valor analítico dado por (7.1) para a deformação é desprezível

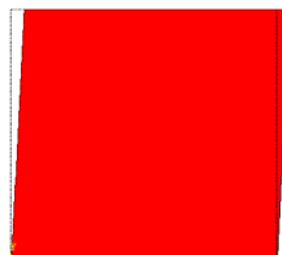
Agora, consideram-se dois cilindros retos contendo uma inclusão circular centrada em cada cilindro. Os raios das inclusões são $r = 2$ mm e $r = 6$ mm, respectivamente.



(a)



(b)



(c)

Figura 25: Malha uniforme em (a) e redes deformadas por tração-compressão em (b) e por cisalhamento em (c).

Considera-se ainda que o cilindro é homogêneo, de modo que $C_R = 1$. Utilizando o ANSYS 5.5, constrói-se uma malha de elementos finitos para cada cilindro, conforme ilustrado na Fig. 26. Observe desta figura que a malha não é uniforme.

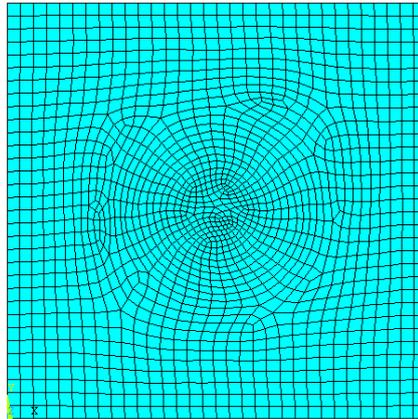


Figura 26: Exemplo de malha não uniforme de elementos finitos com inclusão centrada de raio $r = 6$ mm.

Utilizando malhas não uniformes resolveu-se numericamente o par de problemas diretos descritos acima para cada cilindro. A Fig. 27 mostra as diferenças entre as deformações cisalhantes calculadas pelo ANSYS 5.5 e a deformação cisalhante (4.30.b) no caso do problema de cisalhamento simples para $C_R = 1$, com inclusões de raio 2 mm em (a) e raio 6 mm em (b). As legendas à direita de cada caso apresentam os valores mínimo e máximo nos extremos da escala de cores. O menor valor é indicado em vermelho e o maior valor é indicado em azul. Observe destas legendas que os valores apresentados nas escalas devem ser multiplicados por 10^{-7} . Note da Fig. 27.(b) que as diferenças são pequenas, mas perceptíveis. As maiores diferenças ocorrem em (b) para o caso $r = 6$ mm.

7.3 Influência da Malha de Elementos Finitos no Problema Inverso Discreto

Quando da reconstrução do módulo elástico ao cisalhamento, μ , e também dos termos de pressão, fez-se uso de uma seqüência de malhas não uniformes de elementos finitos. Na Tab. 2 apresentam-se o números de nós e de elementos para o caso de inclusão centrada com raio de 6 mm para um cilindro reto de secção quadrada de lado 50 mm.

Algumas das malhas geradas no ANSYS 5.5 presentes na Tab. 2 apresentam problemas com a razão de aspecto dos elementos. Uma análise preliminar demonstrou, no entanto, que estes erros são localizados, tendo uma região de influência que não afeta

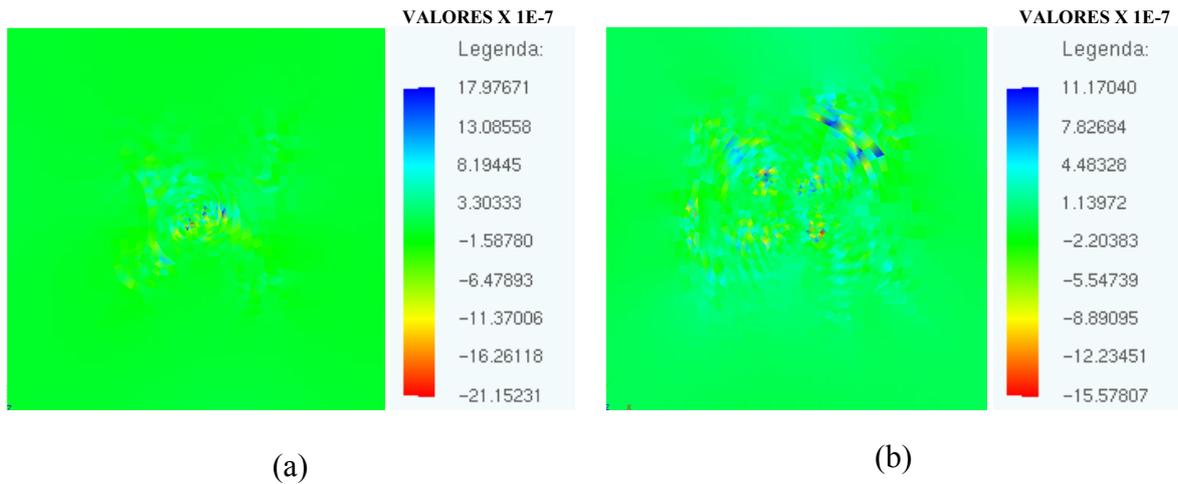


Figura 27: Diferença entre a deformação calculada pelo ANSYS 5.5 e o valor analítico para os raios (a) $r = 2$ mm e (b) $r = 6$ mm.

Tabela 2: Malhas de elementos finitos para o cilindro reto com inclusão centrada.

	Inclusão Centrada, $r = 6$ mm	
	número de nós	número de elementos
malha 1	803	738
malha 2	1016	951
malha 3	1148	1083
malha 4	1380	1315
malha 5	1544	1479

consideravelmente a determinação de μ .

Inicialmente, considera-se uma inclusão circular de raio 6 mm centrada no cilindro reto de secção quadrada com lado de 50 mm. Consideram-se também as condições nas bordas dadas por (5.4)–(5.7), com $\bar{\varepsilon}_1$ e $\bar{\varepsilon}_2$ iguais a 0.01 em ambos os ensaios. Obteve-se para o caso em que o $C_R = 1$, ou seja, para o caso em que o material da inclusão é igual ao material do cilindro, os resultados apresentados na Fig. 28 para as pressões reativas. Neste caso, ambos os problemas correspondem a um estado de cisalhamento puro, o que implica que ambas as pressões são nulas.

A Fig. 28 apresenta os resultados das pressões em escala de cores com o uso do programa desenvolvido neste trabalho. Na Fig. 28.(a) mostram-se os resultados das pressões para o ensaio biaxial de tração-compressão. Na Fig. 28.(b) mostram-se os resultados das pressões para o ensaio de cisalhamento. Cada figura possui uma legenda com valores mínimo e máximo.

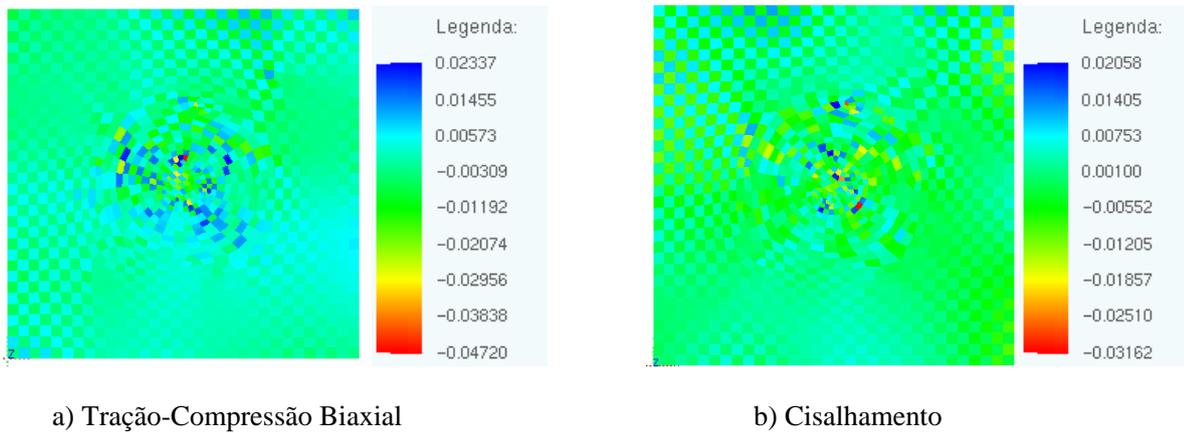


Figura 28: Distribuição da pressão reativa no cilindro com inclusão de 6 mm de raio e $C_R = 1$.

Observando as figuras 28.(a)–(b), nota-se da leitura das legendas que os valores oscilam próximo a zero. Verificou-se que os valores extremos de oscilação tanto na Fig. 28.(a) como na Fig. 28.(b) são inferiores a 7×10^{-5} vezes o valor das tensões calculadas pelo ANSYS no problema direto para ambos os ensaios. Portanto, os valores das pressões apresentadas nestas figuras estão em conformidade com os resultados analíticos apresentados acima.

Considerando o mesmo cilindro reto de seção quadrada, submetido às mesmas condições nas bordas dadas por (5.4)–(5.7), com uma inclusão centrada de raio $r = 6$ mm e $C_R = 0$, resolveu-se o problema da determinação de π e μ para as malhas da Tab 2.

Utilizando escala de cores, mostra-se no lado esquerdo da Fig. 29, ou seja, Fig. 29.(a1), (b1) e (c1), a distribuição da pressão obtida para o ensaio de tração-compressão com as malhas 1, 3 e 5 da Tab 2. Similarmente, mostra-se no lado direito da Fig. 29, ou seja, 29.(a2), (b2) e (c2), a distribuição de pressão obtida para o ensaio de cisalhamento. Pode-se ver claramente que o uso da malha menos refinada, correspondendo às figuras (a1) e (a2), não forneceu uma distribuição precisa de pressão. Nota-se, entretanto, do conjunto de figuras (a1)–(c1) e (a2)–(c2) que existe uma seqüência convergente de distribuições de pressão à medida que a malha é refinada. Além disso, os valores calculados aqui estão de bom acordo com valores calculados pelo Ansys 5.5 no problema direto.

Deve-se notar também que nos problemas de cisalhamento e de tração-compressão o campo de pressão é homogêneo somente quando $C_R = 1$. Nos demais casos em que $C_R \neq 1$ o campo da pressão no problema de tração-compressão indica um estado de cisalhamento. Este estado está em um plano paralelo ao plano do cilindro reto, rotacionado

de aproximadamente 45° no sentido anti-horário com $C_R = 0$. É recíproca a afirmação para o problema de cisalhamento com $C_R = 0$, porém a rotação do plano é de aproximadamente 45° no sentido horário. Estes fatos apoiam a idéia de que as configurações apresentadas na Fig. 29 estão corretas.

Chama-se a atenção neste ponto para o fato de que, para as demais figuras desta subseção, preferiu-se, por questões de maior riqueza de detalhes, colocar a escala de cores invertida para $C_R > 1$, como pode ser observado das leituras das escalas que acompanham suas respectivas figuras.

A Fig. 30.(a) apresenta os valores de referência de μ para a inclusão de raio 6 mm centrada com $C_R = 0$. No extremo inferior da legenda da Fig. 30.(a) encontra-se o valor de referência zero para a inclusão e no extremo superior da legenda encontra-se o valor de referência 36 kPa para a chapa. Os valores de referência são constantes na chapa e na inclusão. Nas figuras 30.(b), (c), (d), (e) e (f) encontram-se os valores de μ obtidos das soluções numéricas. Note que as legendas de cada figura variam.

Pode-se notar na Fig. 30 que a seqüência de resultados obtidos para μ converge para o valor de referência mostrado na Fig. 30.(a) à medida que o número de elementos finitos na malha aumenta.

Deve-se notar ainda da Fig. 30.(e) que o aumento do número de elementos resultou em uma pequena região afetada pela razão de aspecto deficiente dos elementos próximos ao círculo da inclusão. Esta deficiência ocorre devido ao fato de que o ângulo entre dois lados adjacentes de um elemento é muito fechado (próximo de 0°). Esta região contendo elementos com razão de aspecto deficiente não afetou substancialmente a construção de uma seqüência convergente para μ .

Observa-se tanto nas figuras das pressões quanto nas figuras de μ um efeito do tipo tabuleiro de xadrez (HUGHES, 1987). No entanto, os cálculos para as malhas uniformes e para as malhas não uniformes resultam em um coeficiente de travamento $r \approx 2$ em ambos os experimentos. O coeficiente r é a razão entre o número total de equações de deslocamentos após as imposições de contorno dividido pelo número total de restrições de incompressibilidade. Este coeficiente indica a tendência ao efeito tabuleiro de xadrez. Se $r \leq 1$, o elemento finito está sujeito ao travamento, se $r < 2$, existem muitas restrições de incompressibilidade. Se $r > 2$ então existem poucas restrições de incompressibilidade. A condição ótima ocorre quando $r = 2$.

Isto indica que para o tipo de elemento finito adotado, quadrilateral com um nó

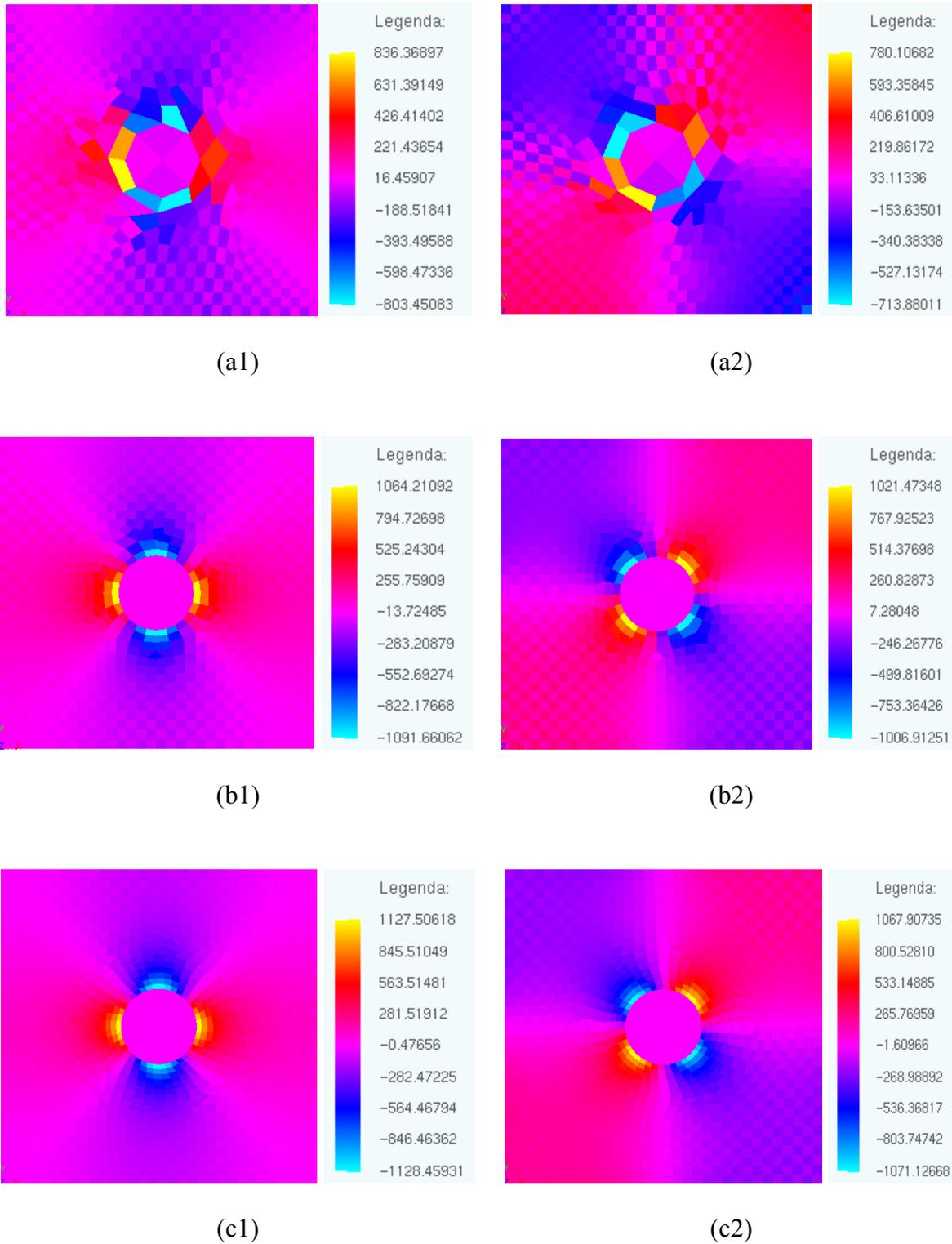


Figura 29: Lado esquerdo: Reconstrução das pressões (Pa) obtidas do problema de tração-compressão. Lado direito: Reconstrução das pressões obtidas do problema de cisalhamento. Caso de inclusão circular centrada com $C_R = 0$ e $r = 6$ mm. Utilizaram-se as malhas 1, 3 e 5 da Tab.2

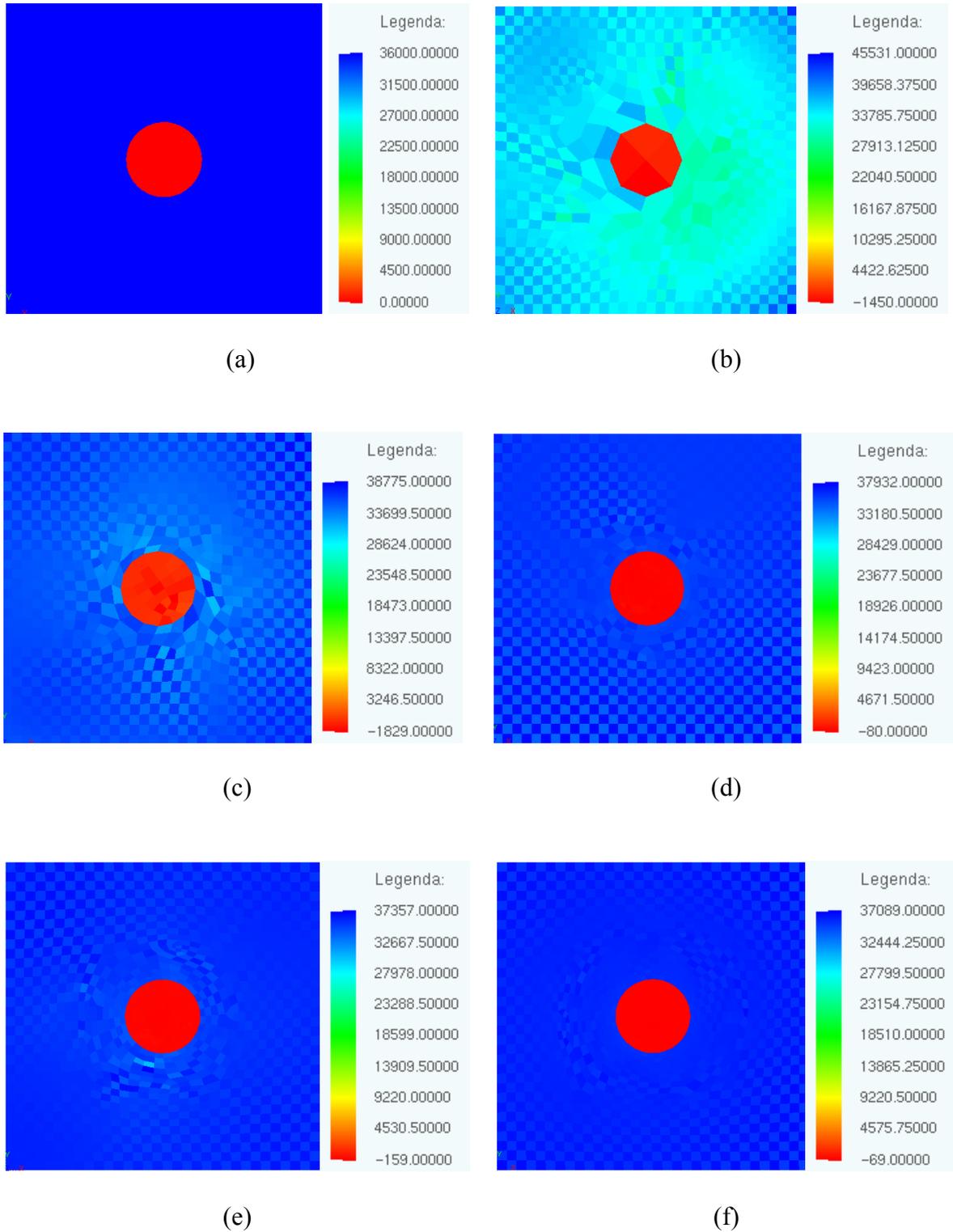


Figura 30: Resultados da reconstrução de μ (Pa) para $C_R = 0$: (a) Valor de referência; (b) a (f): Reconstrução de μ com as malhas 1 a 5 da Tab. 2, respectivamente, para inclusão circular centrada com $C_R = 0$ e $r = 6$ mm.

por vértice e dois graus de liberdade em cada nó para o campo de deslocamento, o efeito percebido nas figuras 29 e 30 não deve ser significativo na determinação dos parâmetros elásticos a menos das regiões próximas ao contorno, ou, à inclusão.

Agora considere o caso de uma inclusão centrada com $r = 6$ mm e $C_R = 6$. Resultados numéricos obtidos para este caso permitiram gerar as figuras 31 e 32, as quais estão apresentadas abaixo.

A Fig. 31 foi obtida de forma análoga à Fig. 29. Um detalhe que deve ser notado é a troca de sinais das pressões, ou seja, as regiões com pressões negativas na Fig. 29 tem agora valores positivos na Fig. 31 e vice-versa. Isto se explica pelo fato de que antes a inclusão era menos rígida do que o cilindro reto e agora ocorre justamente o contrário.

Obteve-se a Fig. 32 de forma análoga à Fig. 30. Deve-se notar que a escala de cores foi invertida por razões de detalhes de valores, pois agora a inclusão é mais rígida do que o cilindro reto. Os valores conhecidos, ou, de referência para a chapa e inclusão são 36 kPa e 216 kPa, respectivamente, e estão apresentados na Fig. 32.(a).

A Fig. 32.(b) mostra a distribuição de μ no cilindro reto. Observe a grande diferença de valores no cilindro e na inclusão e como se distanciam dos valores de referência na Fig. 32.(a). No entanto, quando se aumenta o número de elementos esta variação diminui. A Fig. 32.(f), correspondente à malha mais refinada, mostra que μ do cilindro e da inclusão convergem para seus respectivos valores de referência. Nota-se ainda que a geometria da inclusão foi corretamente identificada.

Considera-se agora o caso de uma inclusão excêntrica com raio $r = 6$ mm e centro em $(x,y)=(37,5$ mm; 37,5 mm). Optou-se por utilizar as malhas não uniformes de elementos finitos apresentadas na Tab. 3 para obter a reconstrução de μ e das pressões.

Todas as figuras que serão apresentadas até o final desta subseção foram obtidas de modo similar ao que foi explicado para as figuras anteriores nas reconstruções das pressões e de μ . Deve-se notar que valem todas as observações anteriores desta seção sobre a construção das legendas, no que concerne à divisão e à cor das escalas, quando a inclusão é menos rígida do que o cilindro reto e vice-versa.

Os resultados para as pressões em um cilindro reto contendo uma inclusão circular de raio $r = 6$ mm e excêntrica simulando um furo com $C_R = 0$ (ou seja, um cilindro com furo circular excêntrico) estão apresentados na Fig. 33. Nela, pode-se notar mais uma vez que o refino da malha fornece resultados qualitativamente condizentes para as pressões obtidas da solução do problema inverso utilizando os ensaios de tração-compressão e

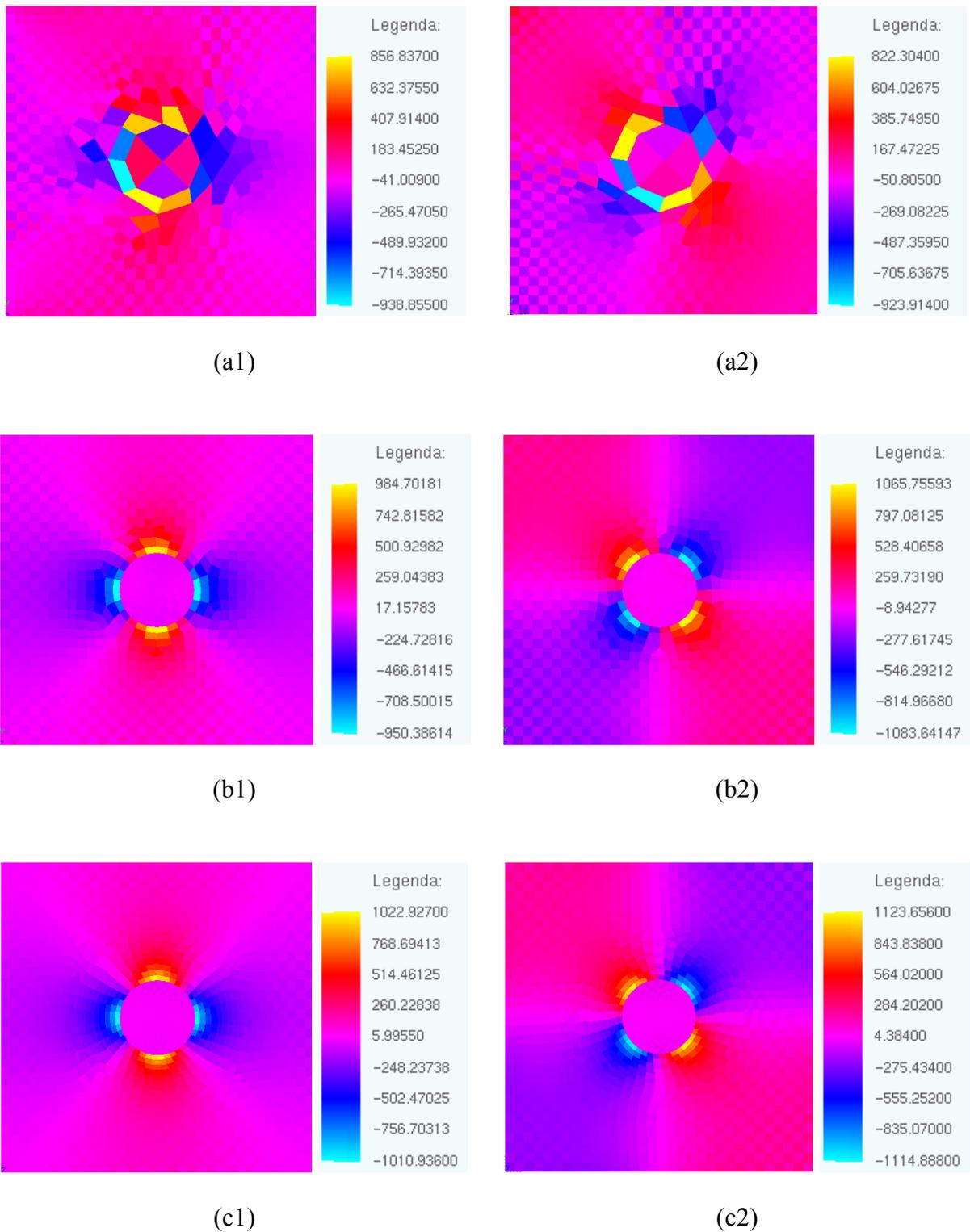


Figura 31: Lado esquerdo: Reconstrução das pressões (Pa) obtidas do problema de tração-compressão. Lado direito: Reconstrução das pressões obtidas do problema de cisalhamento. Caso de inclusão circular centrada com $C_R = 6$ e $r = 6$ mm. Utilizaram-se as malhas 1,3 e 5 da Tab.2

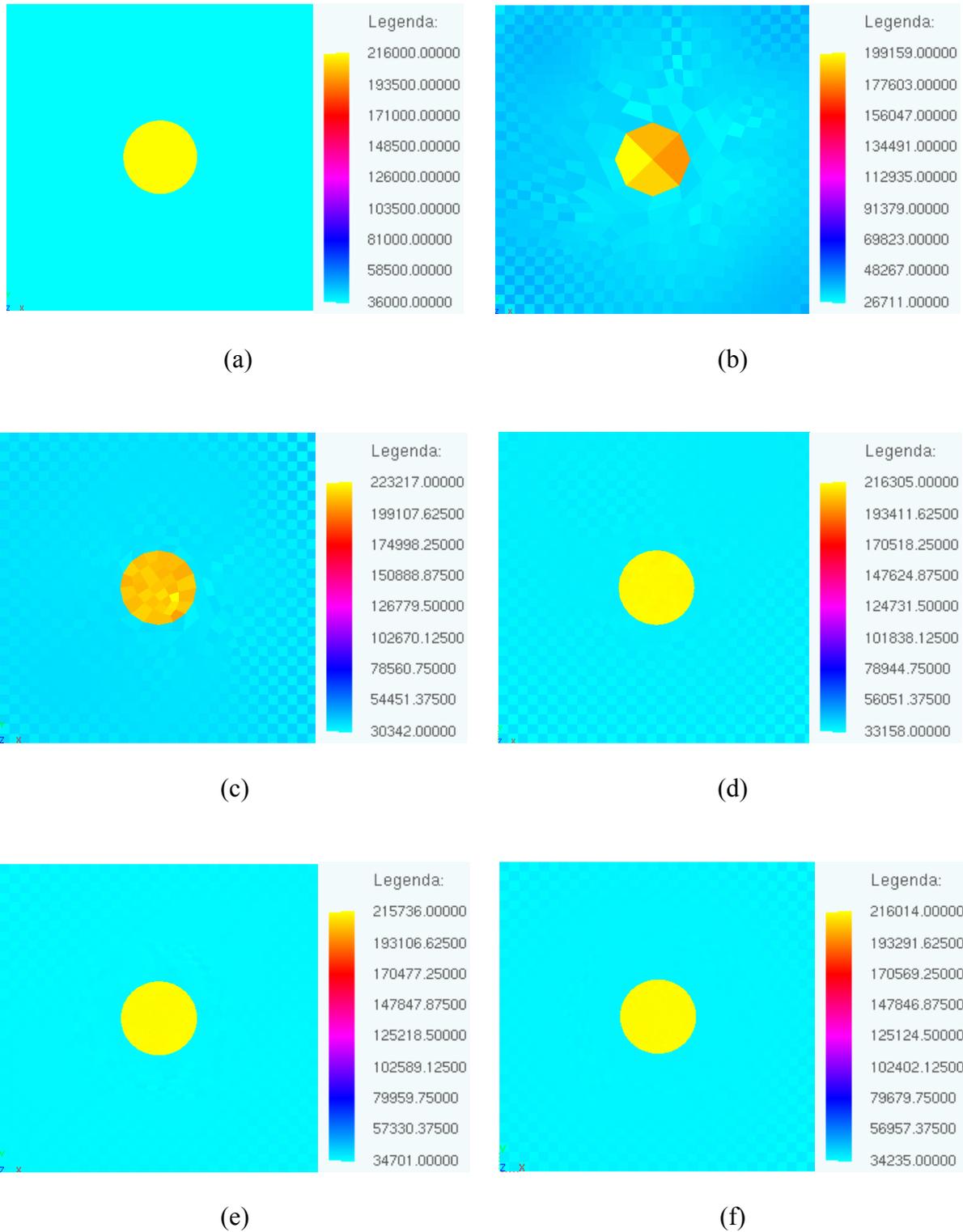


Figura 32: Resultados da reconstrução de μ (Pa) para $C_R = 6$: (a) Valor de referência; (b) a (f): Reconstrução de μ com as malhas 1 a 5 da Tab. 2, respectivamente, para inclusão circular centrada com $C_R = 6$, $r = 6$ mm.

Tabela 3: Malhas de elementos finitos para o cilindro reto com inclusão excêntrica.

	Inclusão Excêntrica, $r = 6$ mm	
	número de nós	número de elementos
malha 1	733	668
malha 2	931	866
malha 3	1077	1012
malha 4	1218	1153
malha 5	1535	1470

cisalhamento simulados numericamente.

Na próxima seqüência, mostrada na Fig. 34, estão os resultados da reconstrução de μ para o cilindro com furo circular excêntrico da Fig. 33. Note que o valor de μ converge para o valor de referência que se encontra na Fig. 34.(a).

Agora, considera-se o caso de um cilindro com inclusão excêntrica de raio $r = 6$ mm e com $C_R = 6$. A Fig. 35 apresenta os valores da reconstrução das pressões para este caso. Note que, à medida que a malha é refinada, os valores de pressão tendem no lado superior direito do cilindro a um estado de pressões semelhante ao verificado na Fig. 31 para o mesmo C_R no caso centrado.

A Fig. 36 apresenta em (a) os valores de referência de μ . Estes valores de referência são novamente 36 kPa para μ do cilindro e 216 kPa para μ da inclusão. De (b) a (f) mostram-se as reconstruções dos valores de μ . Os valores de μ obtidos em regiões próximas à inclusão e ao contorno estão distantes do valor de referência quando a malha é menos refinada. Observe, no entanto, da seqüência apresentada na Fig. 36 que os valores de μ obtidos próximo ao encontro dos lados junto à inclusão sofrem atenuação à medida que a malha é refinada. A atenuação pode ser notada principalmente quando o número de elementos finitos aproximadamente dobra, ao passar do número de elementos da malha 1 para o número de elementos da malha 5 na Tab. 3.

Observa-se das figuras 36.(b)–(f) que artefatos espúrios no encontro da borda vertical direita com a borda horizontal superior tendem a desaparecer à medida que a malha é refinada. Observa-se ainda que o efeito semelhante do tabuleiro de xadrez está significativamente atenuado na Fig. 36.(f).

Agora, defina o erro relativo de μ em relação ao valor de referência no cilindro (fora da inclusão) para cada elemento finito como segue

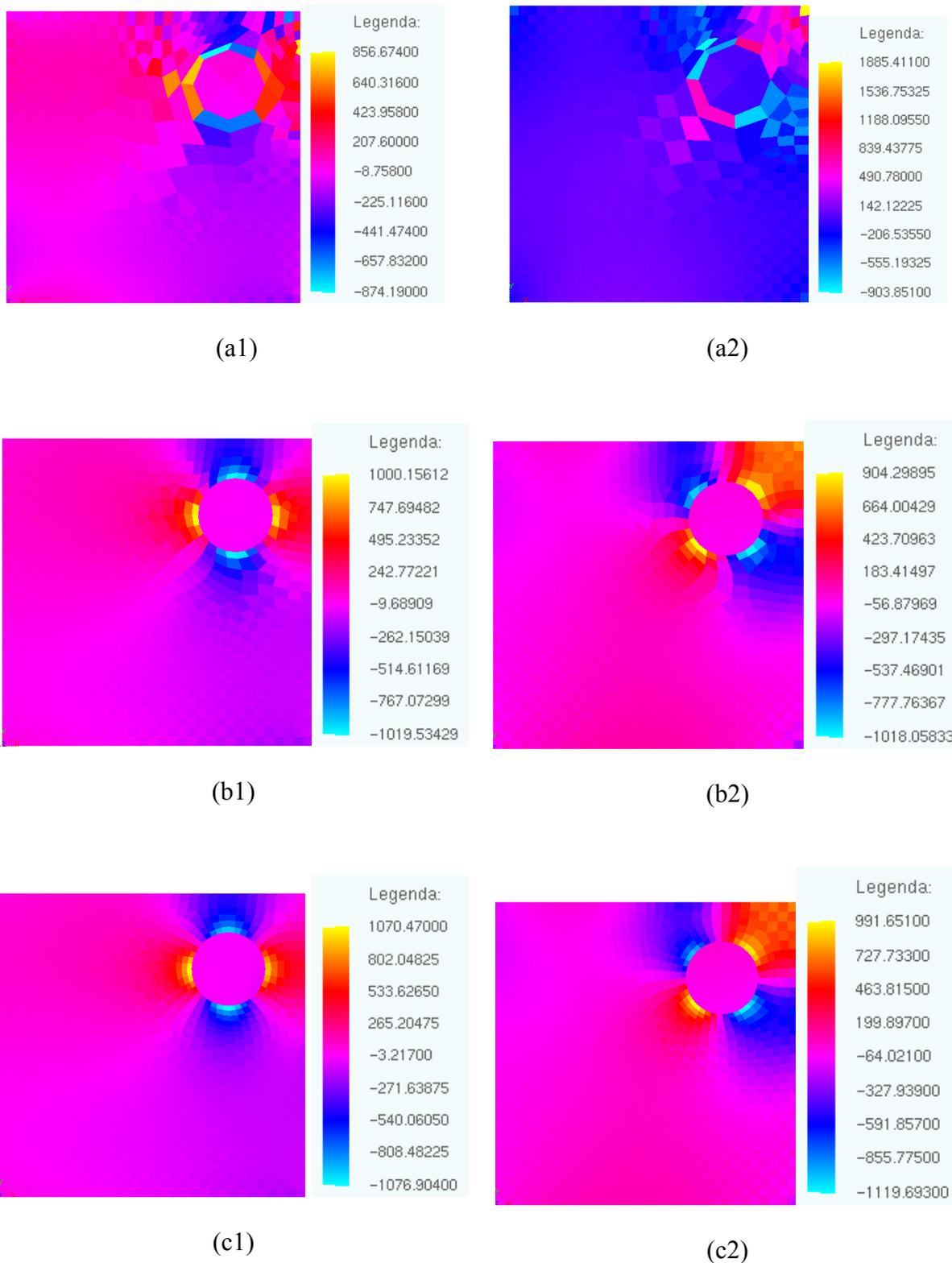


Figura 33: Lado esquerdo: Reconstrução das pressões (Pa) obtidas do problema de tração-compressão. Lado direito: Reconstrução das pressões obtidas do problema de cisalhamento. Caso de inclusão circular excêntrica com $C_R = 0$ e $r = 6$ mm. Utilizaram-se as malhas 1, 3 e 5 da Tab.3

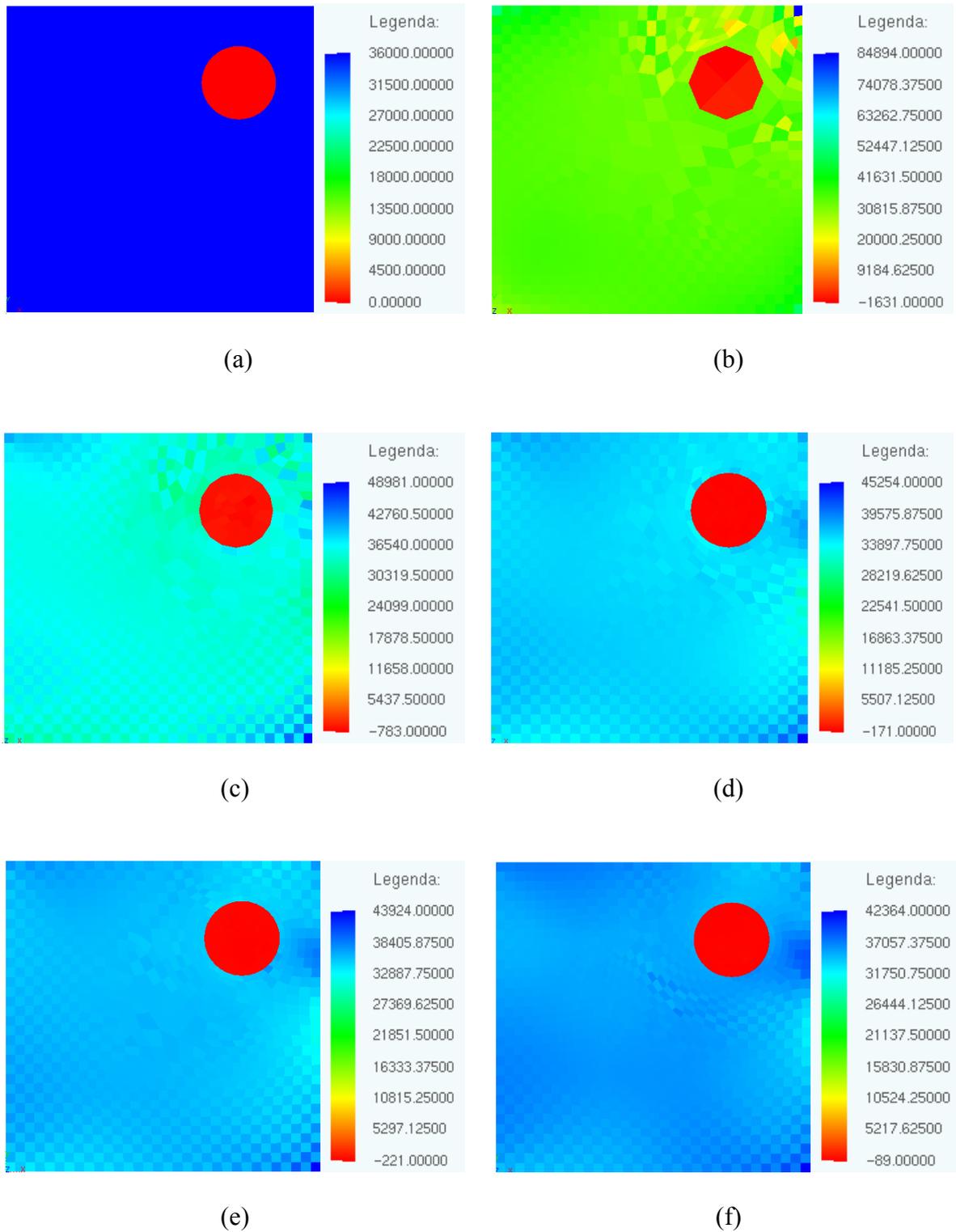


Figura 34: Resultados da reconstrução de μ (Pa) para $C_R = 0$: (a) Valor de referência; (b) a (f): Reconstrução de μ com as malhas 1 a 5 da Tab. 3, respectivamente, para inclusão circular excêntrica com $C_R = 0$, $r = 6$ mm.

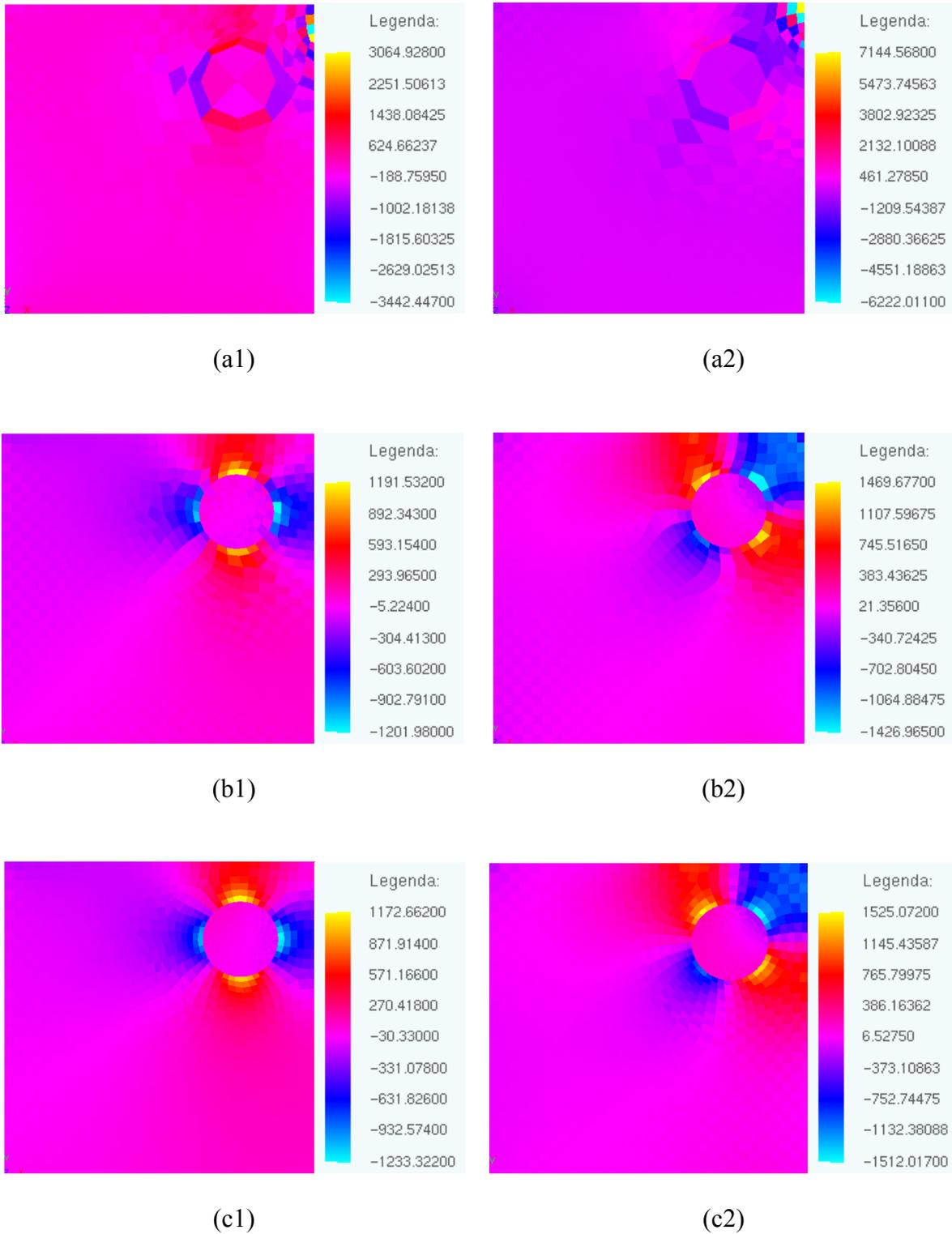


Figura 35: Lado esquerdo: Reconstrução das pressões (Pa) obtidas do problema de tração-compressão. Lado direito: Reconstrução das pressões obtidas do problema de cisalhamento. Caso de inclusão circular excêntrica com $C_R = 6$ e $r = 6$ mm. Utilizaram-se as malhas 1, 3 e 5 da Tab.3

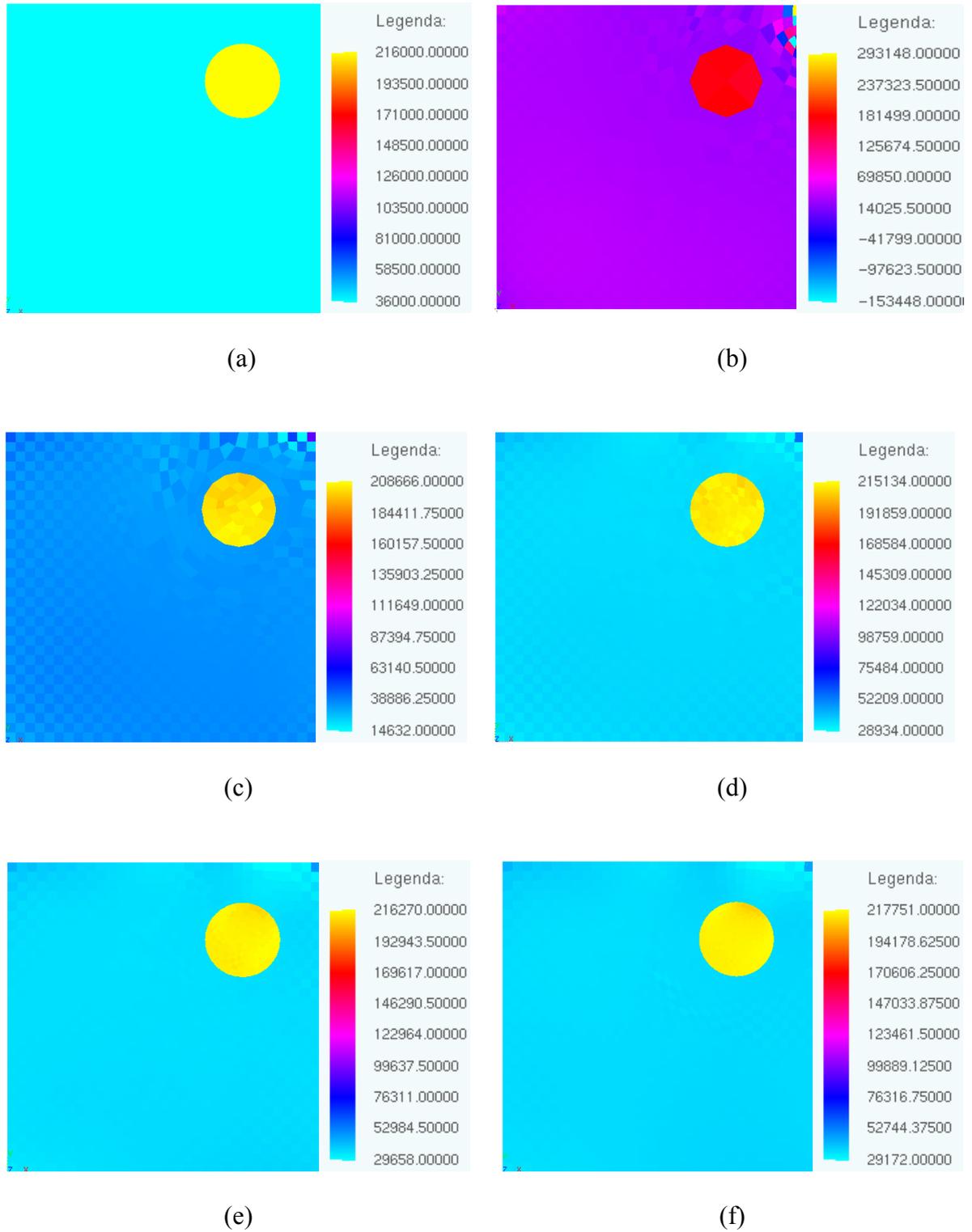


Figura 36: Resultados da reconstrução de μ (Pa) para $C_R = 6$: (a) Valor de referência; (b) a (f): Reconstrução de μ com as malhas 1 a 5 da Tab. 3, respectivamente, para inclusão circular excêntrica com $C_R = 6$, $r = 6$ mm.

$$E_C = \frac{|\mu_C^R - \mu_C|}{\mu_C^R} 100 \%, \quad (7.2)$$

onde μ_C^R é o valor de referência de μ no cilindro e μ_C é o valor aproximado de μ no cilindro (calculado numericamente).

Analogamente, o erro relativo de μ em relação ao valor de referência na inclusão para cada elemento finito é dado por

$$E_I = \frac{|\mu_I^R - \mu_I|}{\mu_I^R} 100 \%, \quad (7.3)$$

onde μ_I^R é o valor de referência de μ na inclusão e μ_I é o valor aproximado de μ na inclusão.

Considera-se novamente o caso da inclusão centrada (vide Fig. 32.(a)) de raio $r = 6$ mm com valor de referência 36 kPa no cilindro e $C_R = 6$. Para cada malha de elementos finitos na Tab. 2, calculou-se o erro relativo máximo de μ em relação ao valor de referência no cilindro utilizando a expressão (7.2). Estes erros são apresentados na Fig. 37, cujos valores do erro relativo máximo de μ estão apresentados no eixo das ordenadas em escala logarítmica e a numeração da malha de elementos finitos na Tab. 2 está apresentada no eixo das abcissas.

Similarmente, repetiu-se o procedimento descrito acima para o caso em que a inclusão é excêntrica com $C_R = 6$ (vide Fig. 36.(a)), considerando as malhas de elementos finitos da Tab. 3. Os valores dos erros máximos no cilindro apresentam-se também na Fig. 37.

Pode-se perceber na Fig. 37 que o erro decai de forma rápida com o aumento do número de elementos finitos no cilindro reto de secção quadrada. Apenas a malha 5 com inclusão excêntrica apresenta um pequeno aumento do erro relativo. Este aumento pode ter ocorrido porque ao se construir a malha não uniforme com o uso do ANSYS 5.5, dois elementos finitos no cilindro apresentaram razão de aspecto deficiente e houve uma mensagem de alerta. Não foi possível modificar a forma destes elementos na malha para melhorar o cálculo da solução aproximada do problema direto.

De modo análogo à descrição da Fig. 37, calculou-se o erro relativo máximo de μ na inclusão utilizando a expressão (7.3) para os casos de inclusão centrada e excêntrica com valor de referência 216 kPa na inclusão, ou seja, $C_R = 6$. Os valores dos erros máximos para cada malha das tabelas 2 e 3 permitiram construir a Fig. 38, onde os valores do erro relativo máximo de μ estão apresentados no eixo das ordenadas em escala

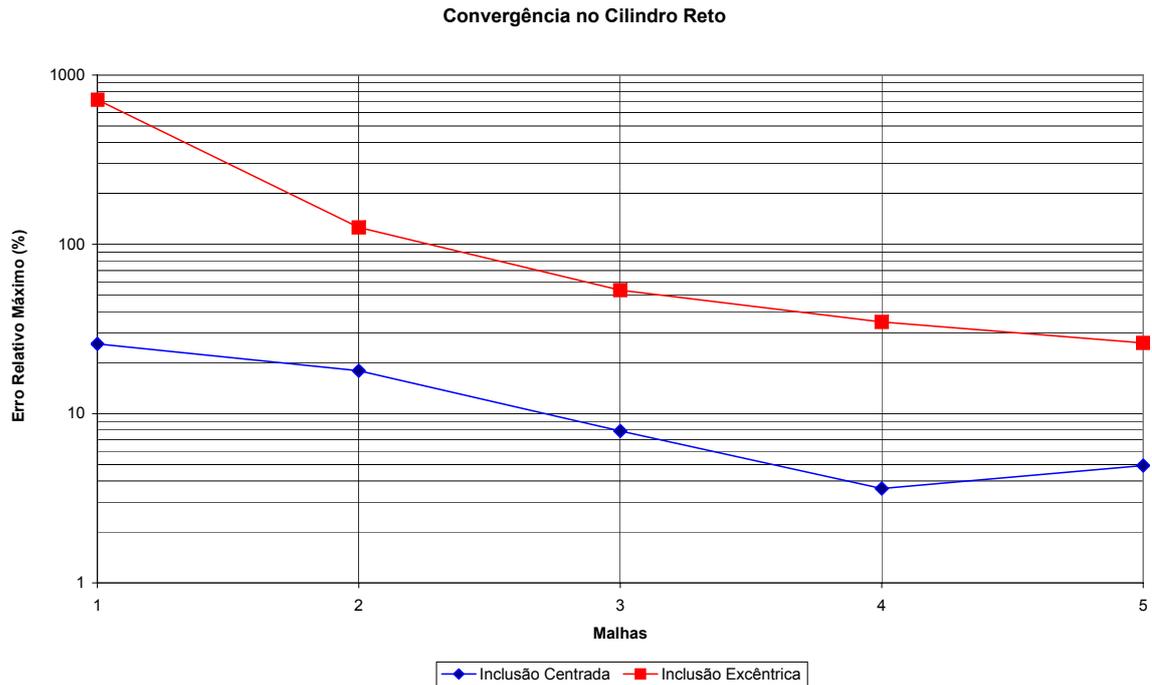


Figura 37: Erro relativo máximo de μ em relação ao valor de referência no cilindro versus malha de elementos finitos.

logarítmica e a numeração da malha de elementos finitos está apresentada no eixo das abcissas.

Observa-se da Fig. 38 que, tanto para a inclusão excêntrica quanto para a inclusão centrada, o erro relativo máximo de μ em relação ao valor de referência sofre decréscimo com o refinamento da malha. O decréscimo do erro que ocorre entre a malha 4 e a malha 5 é imperceptível na Fig. 38 para os dois casos porque o aumento do número de elementos finitos foi pequeno. O erro relativo máximo de μ na inclusão centrada é inferior a 1% e encontra-se em torno de 5% no caso da inclusão excêntrica, considerando o mesmo $C_R = 6$.

7.4 Influência do C_R na Convergência do Problema Inverso Discreto

Para saber qual a influência da variação do C_R sobre o aumento do erro relativo máximo na chapa e na inclusão, resolveram-se os problemas de determinação de μ considerando as condições de prescrição de deslocamento em todo o contorno em ambos os experimentos para duas inclusões circulares excêntricas com raios $r = 2$ mm e $r = 6$ mm,

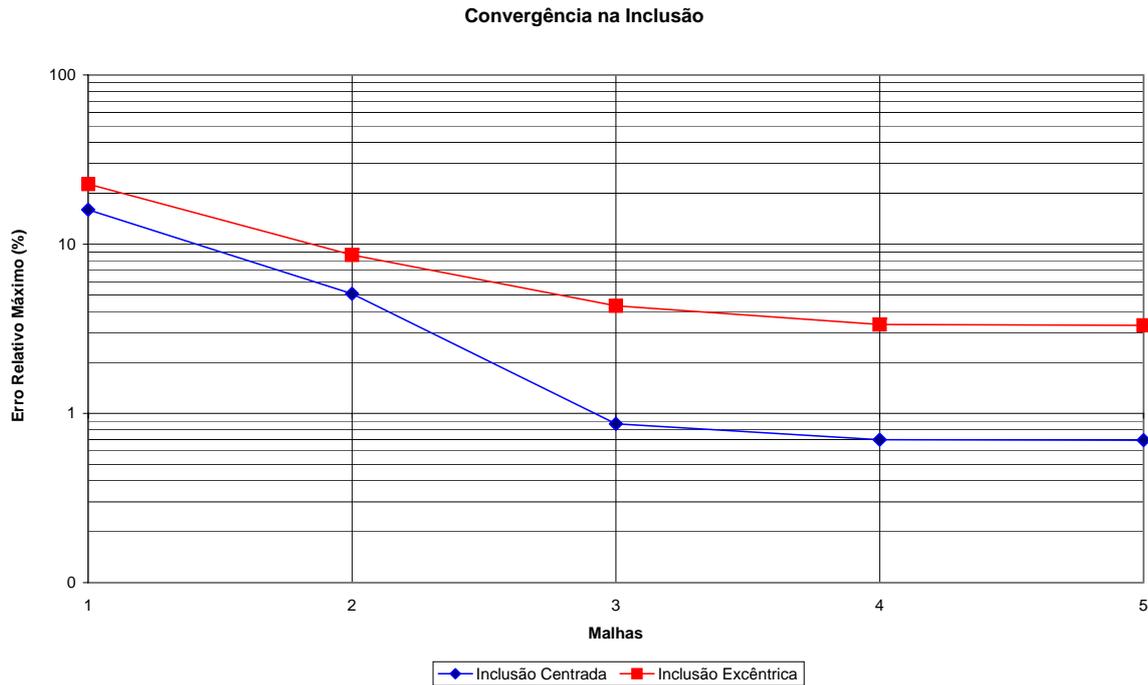


Figura 38: Erro relativo máximo de μ em relação ao valor de referência na inclusão versus malha de elementos finitos.

fazendo $C_R = 0, 1, 2, 4$ e 6 . Considera-se ainda a malha mais refinada para cada raio. Assim, o valor de referência de μ na inclusão também varia, assumindo os valores $0, 36, 72, 144$ e 216 kPa.

Para a inclusão com raio $r = 2$ mm, utilizou-se uma malha não uniforme com 1240 nós e 1175 elementos. Já para o raio $r = 6$ mm, utilizou-se uma malha não uniforme com 1535 nós e 1470 elementos, sendo esta a malha 5 da Tab. 3.

Na Fig. 39 mostram-se os valores dos erros relativos máximos versus os valores de C_R . Os cálculos para gerar esta figura são análogos aos realizados para gerar a Fig 7.2. No entanto, ao invés de considerar que a malha sofre variação, considerou-se que C_R é o valor variável para gerar cada curva. Nota-se claramente na Fig. 39 que quanto maior a inclusão e maior o C_R , mais rapidamente os valores calculados para μ se distanciam do valor de referência de μ no cilindro.

Já no caso da inclusão, visto na Fig. 40 com os erros relativos máximos versus os valores de C_R , nota-se um distanciamento não tão acentuado do valor de referência de μ na inclusão. É interessante observar que, para o raio $r = 2$ mm, o comportamento é do tipo parabólico enquanto que para $r = 6$ mm, o comportamento é próximo ao linear.

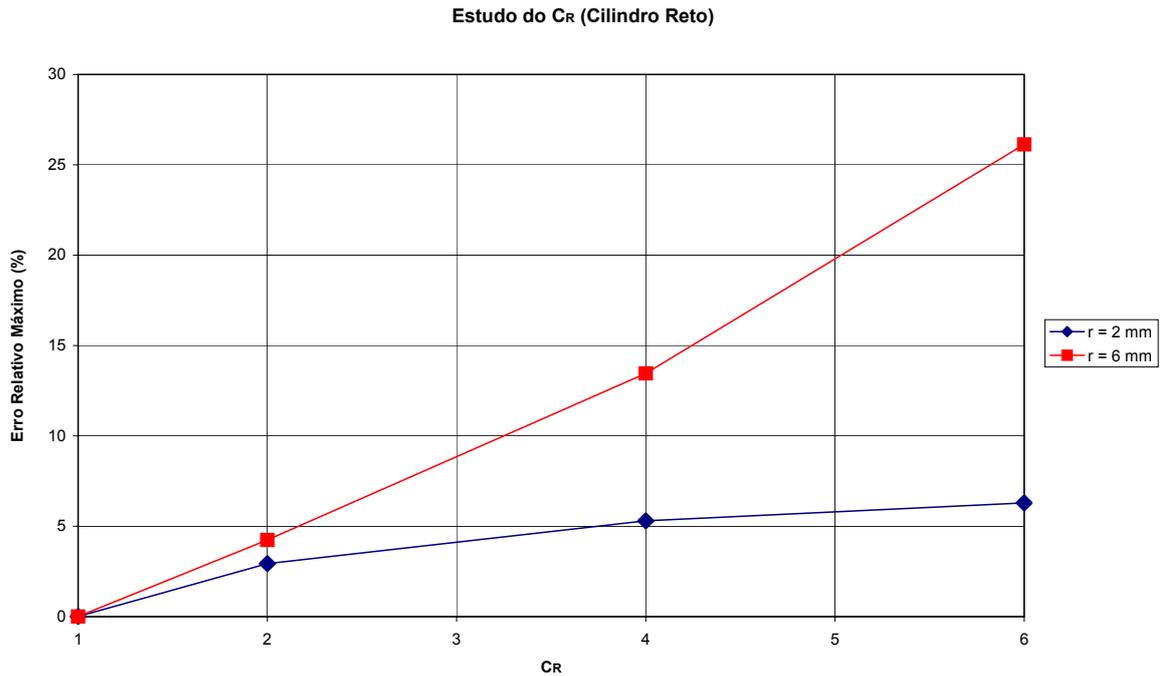


Figura 39: Erro relativo máximo em relação ao valor de referência de μ no cilindro versus C_R para $r = 2$ mm e $r = 6$ mm.

A Fig. 41 mostra os valores de μ reconstruídos para cada C_R considerado acima para o raio $r = 2$ mm. As cores das legendas de cada resultado representam a variação do valor de μ para cada C_R . A variação de cor é dada pelo pós-processador gráfico utilizado para captar os detalhes de cada caso, o que explica as maiores variações de cores quando os valores extremos estão mais próximos um do outro. Verifica-se que a variação de μ em função do C_R está em concordância com os valores nas curvas deste caso apresentados nas figuras 39 e 40.

O mesmo pôde ser feito para a inclusão excêntrica com $r = 6$ mm, resultando na Fig. 41. Em (a) houve mudança da escala de cores para gerar uma visualização melhor da variação de μ no cilindro reto de secção quadrada. Compare a Fig. 41.(b) com a Fig. 42.(b) e note que para o raio $r = 6$ mm os valores de μ sofrem maiores variações apesar das duas figuras serem para o mesmo C_R . Observe que quanto mais distante de 1 o valor de C_R , mais significativo se tornam as diferenças, ocasionando artefatos espúrios entre a inclusão e o encontro das bordas vertical direita e borda superior.

Deve-se notar também que nas figuras 41.(a) e 42.(a), cujo $C_R = 0$, ocorrem valores negativos para μ na inclusão onde μ deveria ser nulo. Estes valores, no entanto, são pequenos quando comparados com os valores de referência de μ no cilindro. A razão entre estes valores negativos máximos de μ na inclusão e os valores de referência de μ no

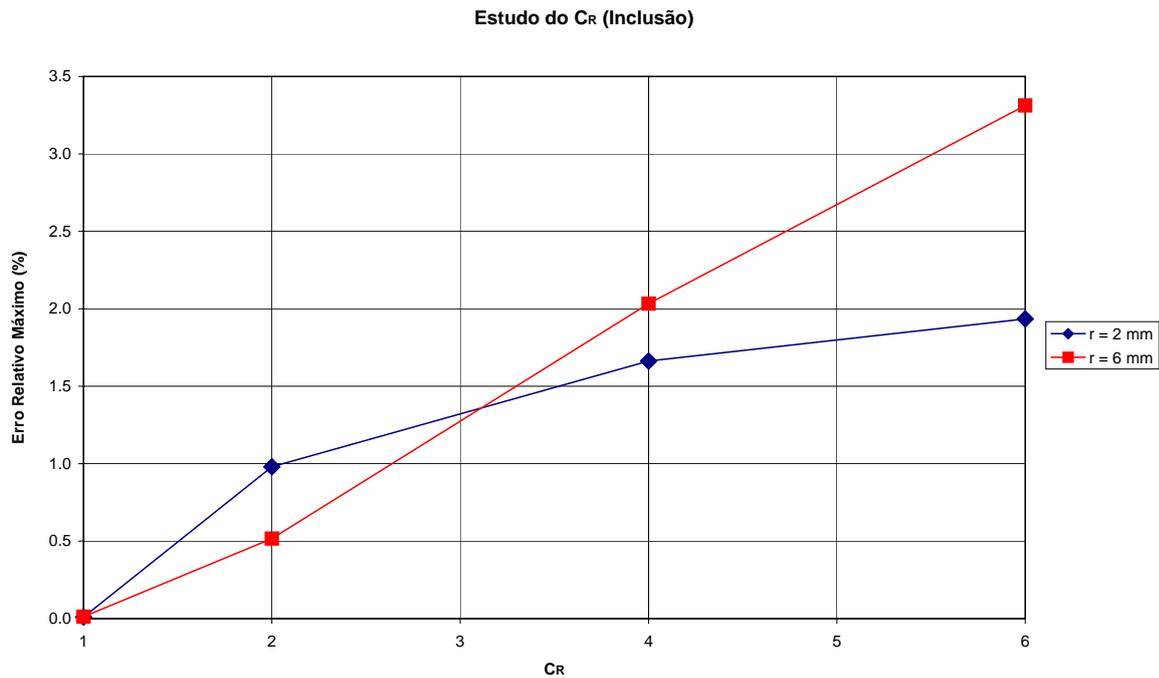


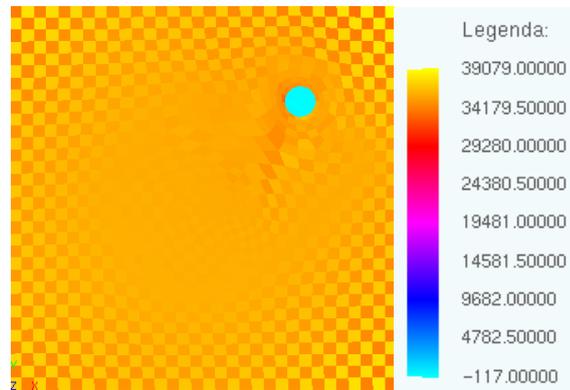
Figura 40: Erro relativo máximo em relação ao valor de referência de μ na inclusão versus C_R para $r = 2$ mm e $r = 6$ mm.

cilindro é menor do que 5×10^{-3} , para ambos os casos.

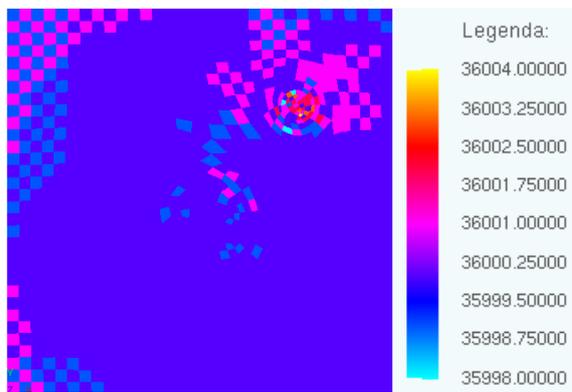
7.5 Comparação do Método Proposto com o Método de Park e Maniatty (2006)

7.5.1 Apresentação e Resultados do Método de Park e Maniatty (2006)

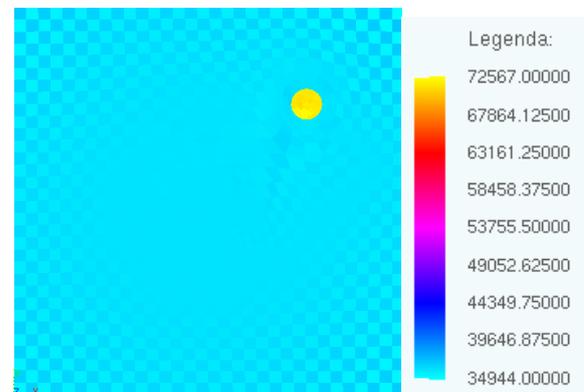
Relembrando da Seção 2, Park e Maniatty (2006) apresentam um método para a determinação do módulo de elasticidade ao cisalhamento baseado em elementos finitos sem recorrer a processos iterativos em que o corpo é submetido a forças dinâmicas. Utilizou-se neste trabalho um único ensaio dinâmico. Assim, considere o problema de determinação de parâmetros resolvido por Park e Maniatty (2006) e um único problema de cisalhamento dinâmico para uma inclusão centrada de raio $r = 6$ mm em um cilindro de secção quadrada de 50 mm de lado e $C_R = 6$. O problema direto com as condições de contorno para encontrar $\mathbf{u}(\mathbf{X})$ e a pressão $\pi(\mathbf{X})$ no problema de cisalhamento no domínio Ω é dado em notação indicial por



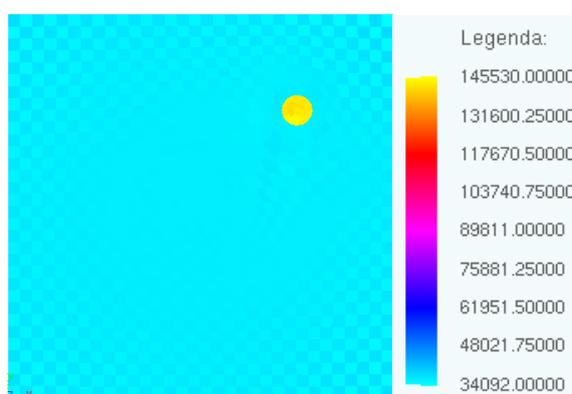
(a)



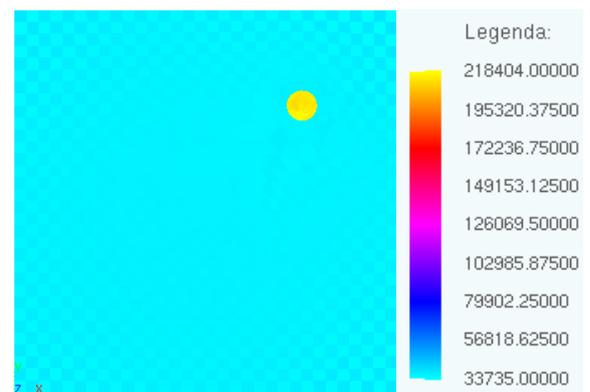
(b)



(c)

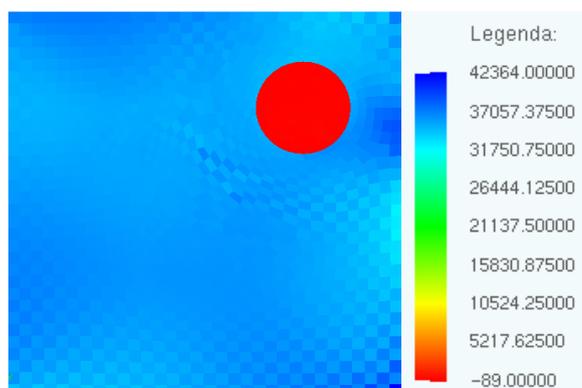


(d)

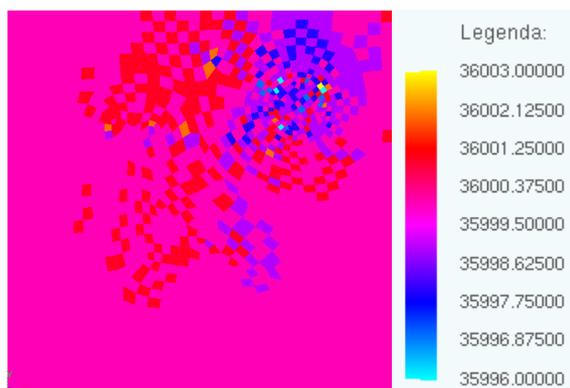


(e)

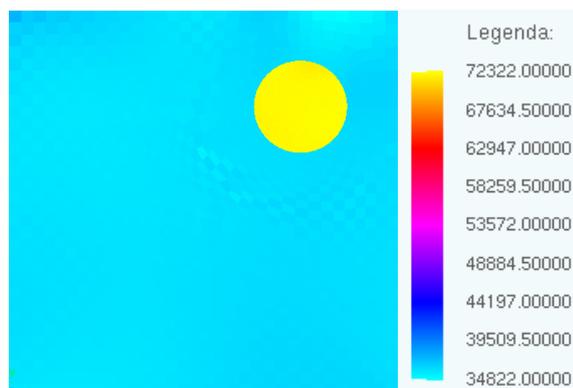
Figura 41: Resultados da reconstrução de μ com $C_R = 0, 1, 2, 4, 6$ de (a) a (e), respectivamente, para uma inclusão excêntrica de raio $r = 2$ mm.



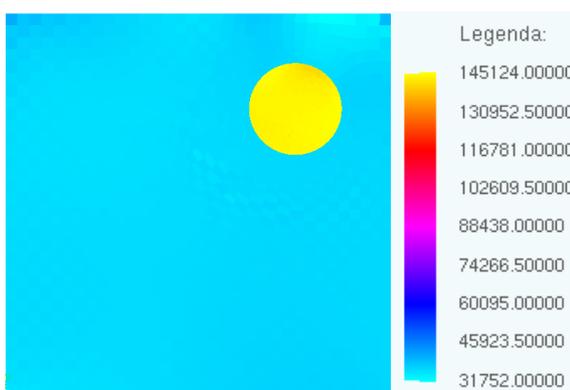
(a)



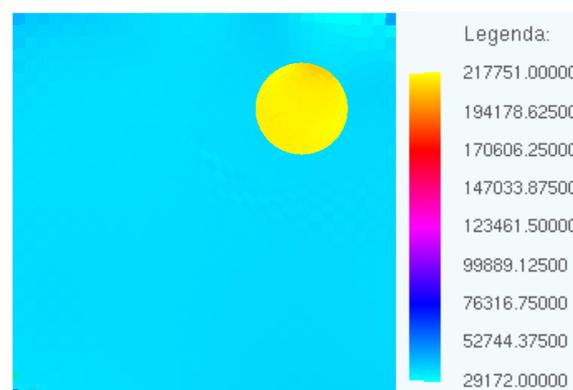
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 42: Resultados da reconstrução de μ com $C_R = 0, 1, 2, 4, 6$ de (a) a (e), respectivamente, para uma inclusão excêntrica de raio $r = 6$ mm.

$$\begin{aligned}
[\mu(u_{i,j} + u_{j,i})]_{,j} + \pi_{,i} &= -\rho\omega^2 u_i && \text{em } \Omega \\
\pi &= \lambda u_{k,k} && \text{em } \Omega \\
u_i &= \hat{u}_i && \text{sobre } \partial\Omega_{1i} \\
[\mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \pi\delta_{ij}] n_j &= \hat{T}_i && \text{sobre } \partial\Omega_{2i}
\end{aligned}$$

onde $\mu(\mathbf{X})$ é o módulo de elasticidade dependente da posição, ρ é a densidade, ω é a frequência angular da excitação harmônica e $\lambda(\mathbf{X})$ é um parâmetro material de Lamé. Os sub-índices indicam as coordenadas cartesianas, cuja repetição indica a soma. A derivada espacial é indicada por $(\cdot)_{,}$.

O valor da deformação por cisalhamento é 0,01 na máxima amplitude. O deslocamento na amplitude máxima é de 1 mm, uma vez que o ensaio é dinâmico.

A Fig. 43 apresenta imagens extraídas de Park e Maniatty (2006). Nesta figura estão colocados, da esquerda para a direita, os resultados de μ quando os campos de deslocamento são propositalmente afetados com um erro, cujos valores adotados são 0%, 1%, 3% e 5%.

O deslocamento calculado no problema direto foi obtido em um quadrado de 40 mm de lado centrado no interior do cilindro de 50 mm de lado, ou seja, retirou-se faixa ao longo de todo o perímetro do contorno.

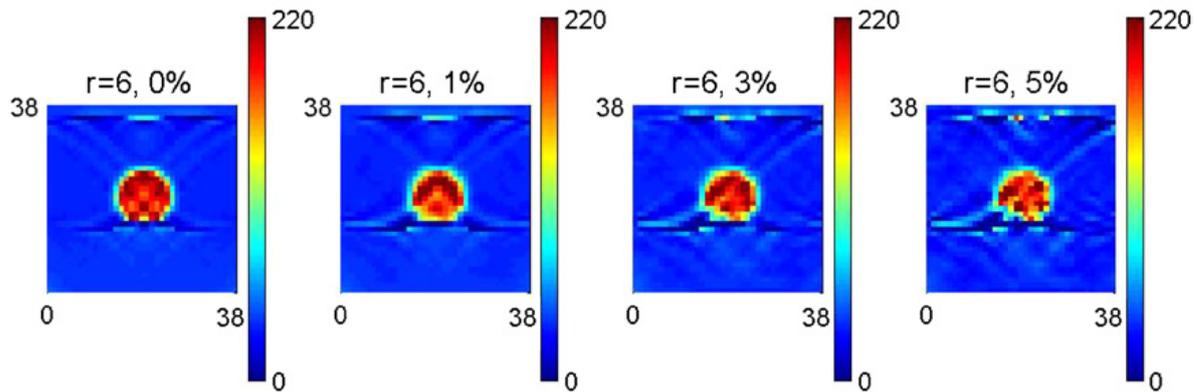


Figura 43: Resultados de μ para diferentes erros adicionados quando a inclusão tem raio $r = 6$ mm e está centrada em um cilindro de seção quadrada de 50 mm de lado.

Fonte: Extraído de Park e Maniatty (2006).

A Tab. 4 apresenta na primeira coluna os valores do erro aleatório médio introduzido no campo de deslocamento e na segunda coluna apresenta o correspondente valor médio de μ calculado na inclusão e denotado por $\mu_{\text{méd}}^{\text{inc}}$.

Tabela 4: Erros aleatórios introduzidos nos campos de deslocamento e valores médios do módulo de elasticidade ao cisalhamento (μ) na inclusão centrada.

Park e Maniatty (2006)	
(2500 Elementos)	
Erro Introduzido no Campo de Deslocamento (%)	$\mu_{\text{méd}}^{\text{inc}}$ (kPa)
0	191,2
1	184,4
3	182,1
5	164,0

7.5.2 Adaptação do Ensaio de Park e Maniatty (2006) ao Caso Estático

Nesta seção resolve-se o problema de determinação de μ combinando o ensaio de compressão uniaxial, ficando as bordas verticais do cilindro reto de secção retangular livres de forças aplicadas, com o ensaio de cisalhamento proposto por Park e Maniatty (2006) adaptado ao caso estático. Para isto, considera-se somente a amplitude máxima do deslocamento na borda superior do cilindro reto. Utiliza-se o ensaio de compressão uniaxial, ao invés do problema de tração-compressão, porque a intenção é não interferir com a condição de borda vertical livre adotada por Park e Maniatty (2006).

Assim, as condições nas bordas do cilindro para os dois problemas diretos resolvidos são dadas a seguir:

i) Ensaio de compressão uniaxial:

a) Bordas Verticais:

$$(\mathbf{T} \mathbf{e}_1)(0, X_2) = (\mathbf{T} \mathbf{e}_1)(\alpha_1, X_2) = 0. \quad (7.4)$$

b) Bordas Horizontais:

$$\begin{aligned} u_2(X_1, 0) = 0, \quad u_2(X_1, \alpha_2) = -\bar{\varepsilon}_1 \alpha_2, \\ (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_2)(X_1, 0) = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{T} \mathbf{e}_2)(X_1, \alpha_2) = 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

O valor de $\bar{\varepsilon}_1$ em (7.5), é 0,01.

Ensaio de cisalhamento de Park e Maniatty (2006) adaptado ao caso estático:

a) Bordas Verticais:

$$(\mathbf{T} \mathbf{e}_1)(0, X_2) = (\mathbf{T} \mathbf{e}_1)(\alpha_1, X_2) = 0. \quad (7.6)$$

b) Bordas Horizontais:

$$\begin{aligned} u_2(X_1, 0) &= u_2(X_1, \alpha_2) = 0, \\ u_1(X_1, 0) &= 0, \quad u_1(X_1, \alpha_2) = 2\bar{\varepsilon}_2 \alpha_2. \end{aligned} \quad (7.7)$$

O valor de $\bar{\varepsilon}_2$ em (7.7) é 0,01.

Considere uma inclusão circular centrada de raio $r = 2$ mm e com $C_R = 2$. Na Fig. 44 apresentam-se os valores de referência de μ em (a) e a reconstrução de μ em (b). Os valores de referência são 36 kPa para μ do cilindro e 72 kPa para μ da inclusão. Observe da Fig. 44.(a) que estes são os valores extremos da legenda. A malha não uniforme de elementos finitos utilizada para reconstruir μ possui 1311 nós e 1246 elementos. Observe que a maior variação ocorre nas bordas verticais, as quais estão livres de carregamento. Nestas bordas observa-se o efeito tabuleiro de xadrez.

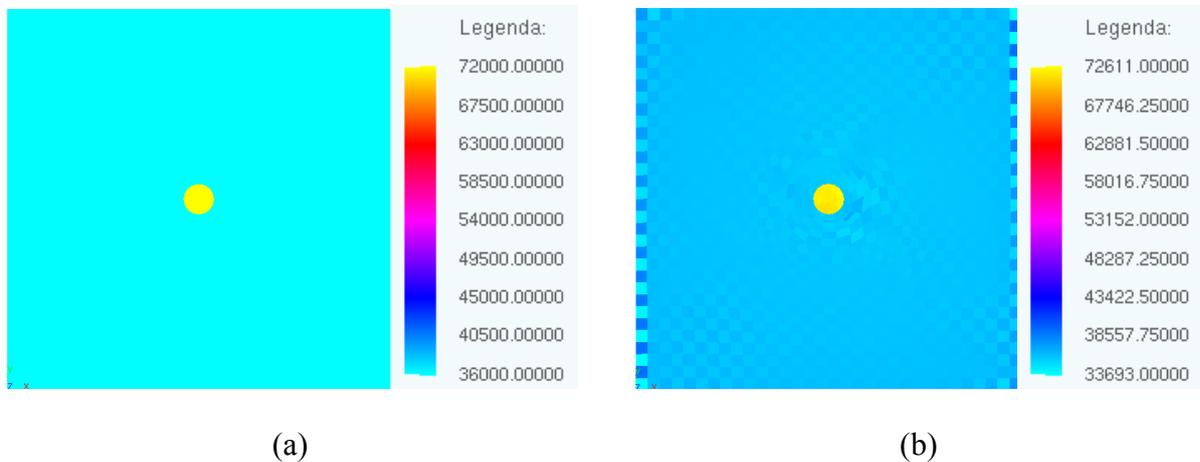


Figura 44: Resultado da reconstrução de μ : (a) valor de referência; (b) inclusão centrada de raio $r = 2$ mm com $C_R = 2$.

Agora, considera-se uma inclusão circular centrada de raio $r = 6$ mm e com $C_R = 6$. Na Fig. 45 apresentam-se os valores de referência de μ em (a) e a reconstrução de μ em (b). Valem as mesmas observações feitas sobre os valores da legenda da Fig. 44.(a) para a Fig. 45.(a). Construiu-se a Fig. 45.(b) utilizando uma malha não uniforme de 1544 nós e 1479 elementos. Esta é a malha 5 da Tab. 2 utilizada para construir uma seqüência convergente de valores aproximados de μ na Seção 7.3. Observe desta figura que não há

o efeito tabuleiro de xadrez ao longo das bordas verticais. Lembre-se do exposto acima que este efeito é visível na Fig. 44.(b).

Pode-se comparar os resultados mostrados na Fig. 45 em que se utilizou dois problemas no código computacional desenvolvido nesta pesquisa e os valores médios de μ dados na Tab. 4 da Seção 7.5.1, cujos resultados são de Park e Maniatty (2006). Uma análise feita para a inclusão neste caso demonstrou que o valor de μ calculado numericamente que está mais distante do valor de referência de μ na inclusão é o valor 213,933 kPa, que corresponde ao valor mínimo. Este valor é novamente mais próximo do valor de referência de μ na inclusão do que qualquer valor médio apresentado na Tab. 4. Este fato aponta para a necessidade de mais de um problema para se obter a reconstrução de μ com maior precisão.

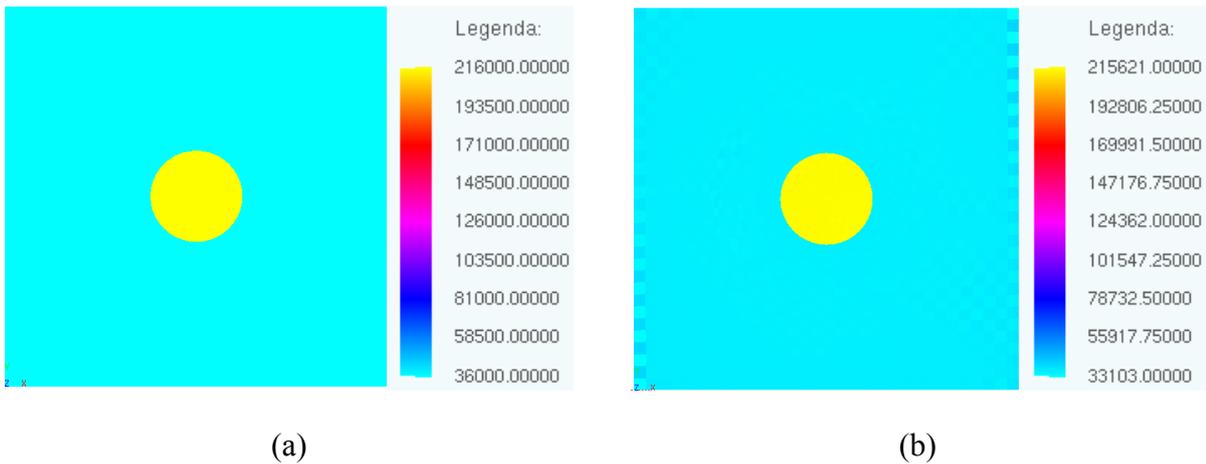


Figura 45: Resultado da reconstrução de μ : (a) valor de referência, (b) inclusão centrada de raio $r = 6$ mm com $C_R = 6$.

7.6 Influência dos Ensaio na Determinação de Parâmetros

7.6.1 Inclusão Centrada

Retomando, para comparação, a malha 5 da Tab. 2 com as condições nas bordas do cilindro reto dadas por (5.4)–(5.7) e o caso de inclusão centrada com raio 6 mm e $C_R = 6$, obteve-se a Fig. 46 que é um detalhamento da Fig. 32.(f).

A Fig. 46 apresenta no lado direito detalhes da distribuição de μ no cilindro (excluindo a inclusão). O valor mínimo é 34,235 kPa e o máximo é 37,777 kPa. No lado direito da Fig. 46 apresenta-se a distribuição de μ na inclusão. O valor mínimo é 214,500

kPa e o máximo é 216,014 kPa. O efeito tabuleiro de xadrez é perceptível devido ao maior grau de detalhamento proporcionado na obtenção das figuras utilizando os limites superior e inferior da distribuição de μ para cada região (cilindro e inclusão) separadamente. Uma comparação preliminar com outras malhas da Fig. 32 revelou, no entanto, que o efeito do tabuleiro de xadrez é atenuado quando a malha é refinada.

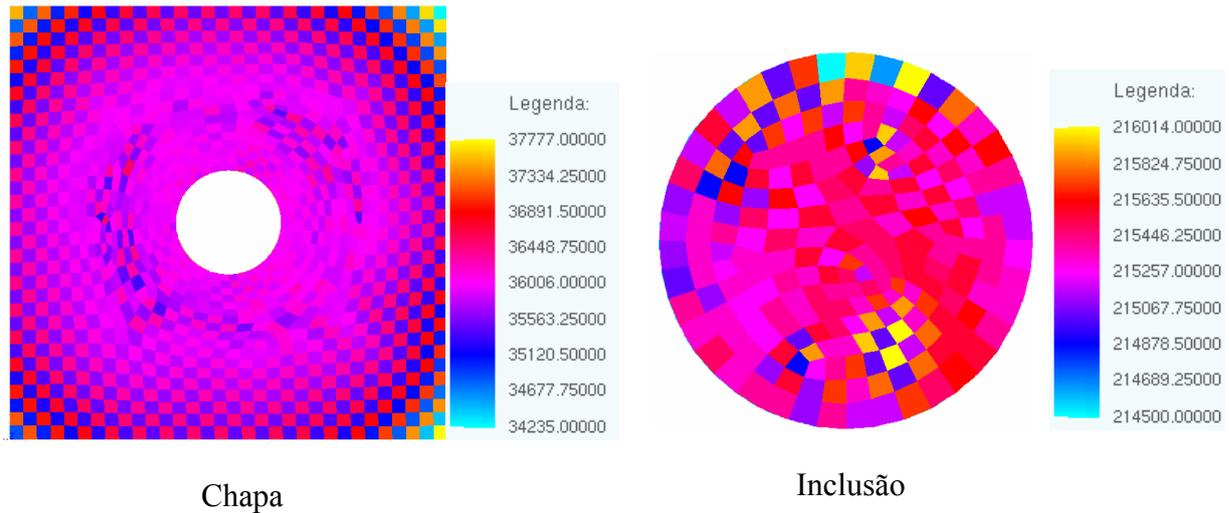


Figura 46: Detalhes da reconstrução de μ via malha 5 da Tab. (2) para o cilindro e a inclusão centrada com $C_R = 6$ e $r = 6$ mm.

No cilindro reto de secção quadrada o valor de μ calculado que está mais próximo do valor de referência, 36 kPa, é o valor mínimo com erro relativo, segundo (7.2), igual a 4,90 %. O valor máximo de μ calculado no cilindro reto apresenta erro relativo de 4,93 %. Já na inclusão, o valor mais próximo do valor de referência 216 kPa é o valor máximo com erro relativo, segundo (7.3), igual a $6,5 \times 10^{-5}$ %. O valor mínimo de μ na inclusão apresenta erro relativo de 7×10^{-3} %.

Estes valores atestam que μ foi determinado com precisão em todo o domínio. Aqui, nenhuma parte do contorno foi retirada para eliminar perturbações do campo de deslocamento, ou, porque se assumiu que a distribuição de μ no contorno é semelhante à distribuição de μ próximo ao contorno.

Agora comparando os valores mencionados logo acima para μ da inclusão com os valores da Tab. 4, nota-se que o valor mínimo na inclusão apresentado na Fig. 46 está mais próximo do valor de referência do que o valor médio de μ encontrado no problema de Park e Maniatty (2006) quando estes autores consideram um erro de 0% adicionado no campo de deslocamento apresentado na Fig. 43.

7.6.2 Inclusão Excêntrica

A Fig. 47 apresenta um cilindro reto de seção quadrada com inclusão excêntrica de raio $r = 6$ mm e $C_R = 6$. Para construir esta figura utilizou-se uma malha de 1380 nós e 1315 elementos. Veja ainda nesta figura o aparecimento de artefatos espúrios nas bordas verticais livres. Este pode ser um indicativo de que não impor restrições nas bordas do cilindro leve a uma determinação de μ com menos precisão no contorno.

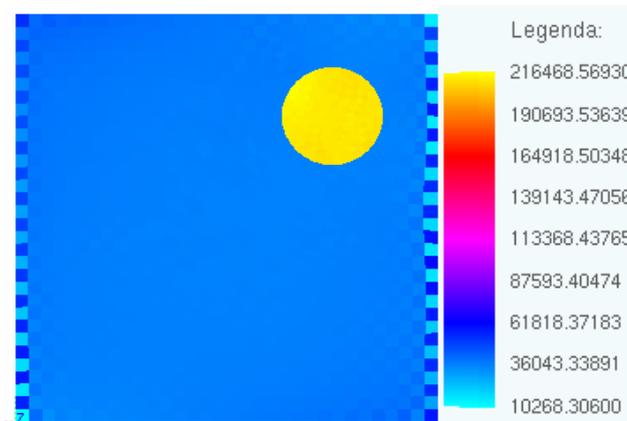


Figura 47: Reconstrução de μ no cilindro reto de seção de 50 mm de lado com inclusão excêntrica de raio $r = 6$ mm e $C_R = 6$, combinando os ensaios de compressão uniaxial e de cisalhamento proposto por Park e Maniatty (2006) adaptado ao caso estático.

7.6.3 Inclusão Cilíndrica com Seção Complexa

Novamente, os valores conhecidos para o cilindro reto de seção quadrada e inclusão são 36 kPa e 216 kPa, respectivamente. Utilizou-se o programa desenvolvido neste trabalho de pesquisa para solucionar o problema de determinação de parâmetros com relação às condições de contorno propostas no trabalho de Park e Maniatty (2006), adaptadas ao caso estático, juntamente com compressão uniaxial. Também resolveu-se o problema da determinação de μ com o programa desenvolvido considerando as condições nas bordas da chapa dadas por (5.4)–(5.7). Estes resultados foram reunidos na Fig. 48.

A Fig. 48.(a) apresenta o valor de referência de μ constante para o cilindro e o valor de referência de μ constante para a inclusão. Estes valores aparecem nos extremos da legenda desta figura.

A Fig. 48.(b) apresenta a reconstrução de μ considerando uma inclusão cilíndrica de seção geométrica complexa com $C_R = 6$ e localizada próxima do contorno, utilizando

as condições nas bordas do cilindro dadas por (7.4)–(7.7).

Note que a reconstrução utilizando o cisalhamento proposto por Park e Maniatty (2006) e adaptado ao caso estático juntamente com a compressão uniaxial levam à reconstrução de μ em regiões próximas ao contorno de forma menos precisa. Isto ocorre porque as condições de contorno são mais severas, com descontinuidades nas funções de tensão, visto que as laterais estão livres da aplicação de forças, e some a estas condições a presença de uma inclusão bem mais rígida do que o substrato próximo aos lados do cilindro de secção quadrada. Já no caso das condições dadas por (5.4)–(5.7), tração-compressão e cisalhamento, este efeito acontece com uma magnitude consideravelmente menor como pode ser visto na Fig. 48.(c).

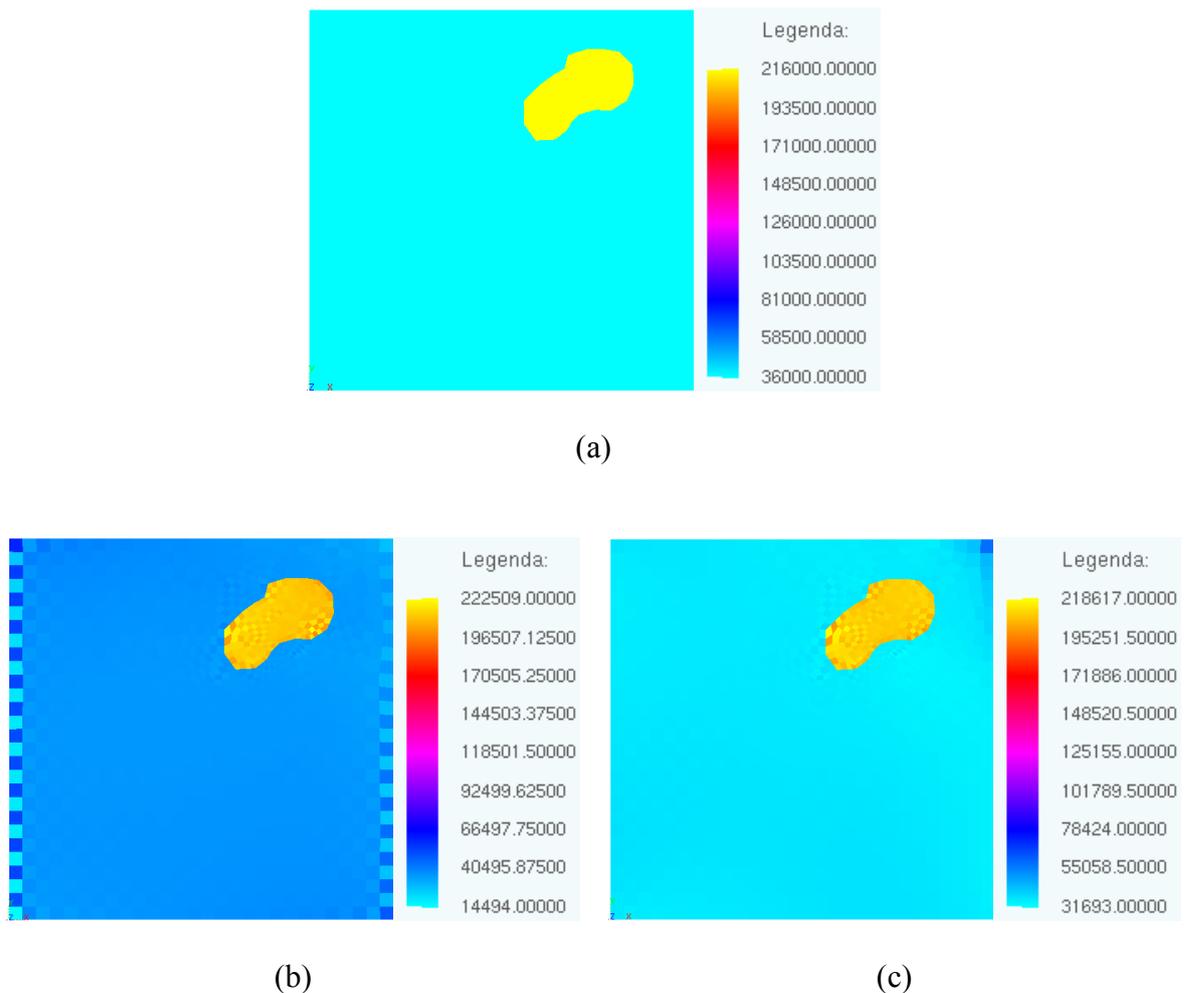


Figura 48: Resultado da reconstrução de μ ; (a) valor de referência, (b) condições de Park e Maniatty (2006), (c) condições de contorno propostas no presente trabalho

Deve-se observar, no entanto, que os erros relatados anteriormente são significativos no contorno, onde ocorrem com magnitude considerável para as condições de Park e Maniatty (2006), adaptadas ao caso estático, na primeira coluna de elementos em cada parte do contorno livre. Isto sugere que uma melhor discretização possa minimizar estes erros na determinação do módulo elástico nestas partes do contorno. Observando as figuras 48.(b) e 48.(c) quase não se nota a presença de artefatos na região central do cilindro gerados pela presença da inclusão de geometria complexa próxima ao contorno, o que demonstra novamente o potencial do método desenvolvido na determinação do módulo elástico, mesmo em condições mais severas.

Destaca-se ainda que todas as malhas de elementos finitos utilizadas na obtenção do módulo μ são inferiores em número de elementos finitos em relação às malhas utilizadas, por exemplo, no trabalho de Zhu, Hall e Jiang (2003) em que se utilizam 25.000 elementos finitos e 32 graus de liberdade em cada nó para os deslocamentos em uma rede uniforme de elementos finitos quadrilaterais. Estes autores simulam o caso de duas inclusões excêntricas cuja diferença de rigidez entre o cilindro e as inclusões é de três vezes. O número máximo de elementos no presente trabalho é de 1479 elementos em uma rede não uniforme (ou seja, cerca de 15 vezes menos elementos) e utiliza 2 graus de liberdade em cada nó para os deslocamentos.

8 Conclusão

O procedimento numérico desenvolvido no presente trabalho é uma nova ferramenta para a determinação do módulo de elasticidade ao cisalhamento de um material elástico-linear, isotrópico e incompressível. Uma vez que os tecidos biológicos moles são considerados quase incompressíveis e têm sido modelados sob leis lineares quando se aplica uma deformação inferior a 2,5%, o procedimento desenvolvido neste trabalho torna-se uma ferramenta com grande potencial de aplicação no diagnóstico de possíveis tumores imersos no tecido sadio e na identificação de diferentes tecidos compondo um determinado órgão a partir do conhecimento de campos de deslocamento internos do corpo em conjunto com as resultantes de forças em partes complementares do contorno.

Verificou-se a influência da escolha de malhas não-uniformes de elementos finitos quadrilaterais, com dois graus de liberdade em cada nó, para aproximar o campo de deslocamento do meio elástico. A utilização destas malhas fornece erros localizados, em regiões discretizadas por elementos finitos com lados adjacentes que formam ângulos muito fechados entre si. Estes erros não prejudicam de forma significativa a determinação dos valores do módulo de elasticidade ao cisalhamento μ .

Estudaram-se os casos de inclusão circular centrada e inclusão circular excêntrica, permitindo verificar a dependência de μ em relação à região abrangida pela inclusão (através da consideração de diferentes raios), a sua posição e também a influência da rigidez da inclusão no meio bidimensional. Constatou-se pelas figuras apresentadas na Seção 7 que os maiores erros ocorrem para inclusões excêntricas com raio $r = 6$ mm e com a maior razão de rigidez, C_R .

Os valores máximo e mínimo de μ obtidos na inclusão centrada com raio $r = 6$ mm e $C_R = 6$ e utilizando os experimentos propostos neste trabalho foram comparados com o valor médio na inclusão para o mesmo caso centrado resolvido por Park e Maniatty (2006). Verificou-se que o valor mais próximo ao valor de referência, dado pelo valor mínimo de μ na inclusão, é menor do que o valor médio de μ obtido para a mesma região

no trabalho de Park e Maniatty (2006) no caso mais favorável, ou seja, quando o erro aleatório é zero. Isto indica que os erros obtidos com os experimentos propostos neste trabalho são menores do que os obtidos em Park e Maniatty (2006).

Compararam-se também os valores mínimo e máximo da reconstrução de μ na inclusão centrada de raio $r = 6$ mm e $C_R = 6$ utilizando os experimentos de compressão uniaxial e o cisalhamento proposto por Park e Maniatty (2006), adaptado ao caso estático, com os valores médios de μ na inclusão obtidos por Park e Maniatty (2006). Calcularam-se os valores mínimo e máximo na inclusão, cuja distribuição de μ é apresentada na Fig. 45.(b). O valor mais próximo do valor de referência de μ na inclusão é dado pelo valor mínimo e este é menor do que qualquer valor médio apresentado na Tab.4. Este fato aponta ainda para a necessidade de mais de um problema para obter a reconstrução de μ com maior precisão.

Estudou-se também o caso de inclusão de forma complexa localizada próxima ao contorno, cujos resultados obtidos foram bastante satisfatórios e atestam o potencial do procedimento desenvolvido. Em todos os casos analisados nesta pesquisa os valores da reconstrução de μ foram satisfatórios quando comparados com seus respectivos valores de referência. Os valores obtidos de μ utilizando o programa desenvolvido nesta pesquisa para resolver o problema inverso apresentam erros menores quando comparados com os valores obtidos para μ na literatura.

Além disso, observou-se das figuras apresentadas na Seção 7 que o efeito espúrio do tabuleiro de xadrez diminui com o refino da malha. Este efeito é mais evidente próximo às regiões do contorno do corpo e depende das condições de deslocamento e de carregamento nas bordas do cilindro reto e da presença de elementos finitos com razões de aspecto deficientes. No entanto, não houve prejuízo significativo na determinação de μ , evidenciando que o método de inversão adotado para obter a solução desta constante elástica mostrou-se adequado, mesmo sem o uso de técnicas de regularização dos dados de entrada.

Os gráficos dos erros máximos versus o tipo de malha utilizada mostram diminuição dos erros com o aumento do número de elementos finitos.

8.1 Sugestões para a Continuação da Pesquisa

O procedimento numérico proposto nesta dissertação forneceu resultados satisfatórios relacionados à determinação do módulo de elasticidade ao cisalhamento μ de um sólido elástico-linear, isotrópico e incompressível sob estado plano de deformação (EPD).

Estes resultados foram obtidos com malhas pouco refinadas, contendo menos de 5.000 elementos, quando comparadas às malhas utilizadas por outros autores (e.g. Park e Maniatty (2006)). Além disso, a razão de aspecto deficiente e o efeito espúrio do tabuleiro de xadrez contribuíram negativamente na obtenção destes resultados.

Os resultados satisfatórios indicam, portanto, que o procedimento numérico proposto nesta dissertação possui grande potencial de aplicação na determinação de parâmetros materiais em sólidos viscoelásticos. Apresentam-se a seguir algumas sugestões para a realização deste potencial.

- 1.No caso de material elástico-linear incompressível, utilizar elemento finito adequado para melhor aproximar a restrição $tr \nabla_s \mathbf{u} = 0$ na formulação discreta do problema direto. Espera-se que a utilização de um elemento mais adequado evite o aparecimento do efeito espúrio do tabuleiro de xadrez.
- 2.Utilização de pacote numérico específico para a geração de malhas não-uniformes que contenham todos os elementos finitos com razões de aspecto satisfatórios. Neste trabalho, utilizou-se o gerador de malhas do ANSYS 5.5, o qual forneceu malhas com elementos finitos que tinham razões de aspecto deficientes.
- 3.Otimização do programa de elementos finitos para possibilitar a utilização de malhas refinadas contendo um número elevado de elementos.
- 4.Investigar a influência das condições de contorno em termos das resultantes de forças sobre as soluções dos problemas de determinação de parâmetros. Em particular, investigar a unicidade e a estabilidade de cada uma destas soluções. Obviamente, estas condições asseguram a existência de soluções, pois estas foram obtidas de forma aproximada neste trabalho.
- 5.Considerar relações constitutivas não-lineares que permitam a análise de problemas de determinação de parâmetros materiais em tecidos moles, para os quais as deformações são grandes. Neste trabalho, a relação constitutiva é linear e está limitada a deformações inferiores a 2,5%.
- 6.Desenvolver código computacional considerando outros estados de deformação além do EPD.

Referências

- AGUIAR, A.; FOSDICK, R. (1993) The Penalty Method and the Numerical Solution of Plane Problems in Nonlinear Elastostatics. Research Report. **University of Minnesota Supercomputing Institute**. Minneapolis, MN 55455.
- ANSYS Versão 5.5 (1998) **Documentation**. ANSYS, Inc.
- BARBONE, P. E.; BAMBER, J. C. (2002) Quantitative elasticity imaging: what can and cannot be inferred from strain images. **Physics in Medicine and Biology**, n. 47, p. 2147-2164.
- BARBONE, P. E.; GOKHALE, N. H. (2004) Elastic modulus imaging: on the uniqueness and nonuniqueness of the elastography inverse problem in two dimensions. **Inverse Problems**, n. 20, p. 283-296.
- BARBONE, P. E.; OBERAI, A. A. (2007) Elastic modulus imaging: some exact solutions of the compressible elastography inverse problem. **Physics in Medicine and Biology**, n. 52, p. 1577-1593.
- BECK, J.; BLACKWELL, B.; CLAIR, C. R. J. S. (1985) **Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems**. New York: John Wiley & Sons.
- BONNET, M.; CONSTATINESCU, A. (2005) Inverse problems in elasticity. **Inverse Problems**, n. 21, p. R1-R50.
- CAMPOS VELHO, H. F. (2002) **Problemas inversos: conceitos básicos e aplicações**. Nova Friburgo: Notas do mini-curso apresentado no VEMC, IPRJ-UERJ.
- CORDEIRO, G. (1992) **Introdução à Teoria de Verossimilhança**. Rio de Janeiro: [s.n.]. Livro Texto do 10º Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística.
- DOYLEY, M. M.; MEANEY, P. M.; BAMBER, J. C. (2000) Evaluation of an interactive reconstruction method for quantitative elastography. **Physics in Medicine and Biology**, n. 45, p. 1521-1540.
- ENGL, H. W.; HANKE, M.; NEUBAUER, A. (2000) **Regularization of Inverse Problems**. Dordrecht, The Netherlands: Klunwer Academic Publishers.

- FRANÇA, G. F. M. (2007) **Uma Formulação Inversa para Elastografia**. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Julho.
- FUNG, Y. C. (2004) **Biomechanics: Mechanical Properties of Living Tissues**. 2. ed. New York, NY, USA: Springer.
- GOLUB, G. H.; LOAN, C. F. V. (1996) **Matrix Computation**. Third edition. Baltimore, USA: The Johns Hopkins University Press. (Johns Hopkins Series in the Mathematical Sciences).
- GURTIN, E. M. (1981) **An Introduction to Continuum Mechanics**. New York, USA: Academic Press. (Mathematics in Science and Engineering, v. 158).
- HADAMARD, J. (1952) **Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations**. New York, USA: Dover Publications.
- HALL, T. J.; ZHU, Y. (2003) **Us Pat 6,508,768 b1**. January.
- HOFFMAN, K.; KUNZE, R. (1971) **Linear Algebra**. [S.l.]: Englewood Cliffs, N.J. : Prentice-Hall.
- HOYT, K. L. (2005) **Spectral Strain Estimation Techniques for Tissue Elasticity Imaging**. Tese (Doutorado) – Drexel University, June.
- HUGHES, T. J. R. (1987) **The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Analysis**. Englewood Cliffs, New Jersey, EUA: Prentice-Hall, Inc..
- ISAKOV, V. (2006) **Inverse Problems for Partial Differential Equations**. Second edition. New York, USA: Springer. (Applied Mathematical Sciences, v. 127).
- JI, L. et al. (2003) Interior elastodynamics inverse problems: shear wave speed reconstruction in transient elastography. **Inverse Problems**, n. 19, p. S1-S19.
- JOHNSON, C. (1987) **Numerical solution of partial differential equations by the finite element method**. Cambridge: Cambridge University.
- KALLEL, F. et al. (1998) Elastographic imaging of low-contrast elastic modulus distributions in tissue. **Ultrasound in Med. & Biol.**, v. 24, n. 3, p. 409-425.
- KIRSCH, A. A (1996) **Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems**. Berlin: Springer. (Applied Mathematical Sciences, v. 120).
- KOYAMA, T. (2006) Optics in digital still cameras. In: NAKAMURA, J. (Ed.). **Image Sensor and Signals Processing for Digital Still Cameras**. Boston, USA: Taylor &

Francis. cap. 2, p. 21-51.

KROUSKOP, T. A. et al. (1998) Elastic moduli of breast and prostate tissues under compression. **Ultrason. Imaging**, n. 20, p. 260-274.

KYBIC, J.; SMUTEK, D. (2005) Estimating elastic properties of tissues from standard 2D ultrasound images. In: Walker, W. F.; Emelianov, S. Y. (Ed.). **Medical Imaging 2005: Ultrasonic Imaging and Signal Processing**. Edited by Walker, William F.; Emelianov, Stanislav Y. Proceedings of the SPIE, Volume 5750, pp. 184-195 (2005). [S.l.: s.n.]. (Presented at the Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference, v. 5750).

LIU, G. R.; HAN, X. (2003) **Computational Inverse Techniques in Non Destructive Evaluation**. Boca Raton, Florida, USA: CRC Press.

LIU, H. T. et al. (2003) Analytic modeling of breast elastography. **Medical Physics**, v. 30, n. 9, p. 2340-2349.

MANDUCA, A. (2005) Analysis of dynamic magnetic resonance elastography data. In: LANDINI, L.; POSITANO, V.; SANTARELLI, M. (Ed.). **Advanced Image Processing in Resonance Imaging**. Boca Raton, Florida, USA: Taylor & Francis/CRC, (Signal Processing and Communications, v. 27). cap. 14, p. 451-477.

MCLAUGHLIN, J. R.; YOON, J. R. (2004) Unique identifiability of elastic parameters from time-dependent interior displacement measurement. **Inverse Problems**, n. 20, p. 25-45.

MERCIER, B. (1979) **Inéquations variationnelles de la mécanique**. [S.l.]: Orsay: Université de Paris-Sud.

MOROZOV, V. A. (1984) **Methods for Solving Incorrectly Posed Problems**. New York, USA: Springer-Verlag.

MRIDHA, M.; ÖDMAN, S. (1986) Noninvasive method for the assessment of subcutaneous edema. **Med. Biol. Eng. Comput.**, v. 24, n. 4, p. 393-398.

NEVES, L. P. (2007) **Otimização do Algoritmo de Block Matching Aplicado a Estudos Elastográficos**. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo FFCLRP Departamento de Física e Matemática, Ribeirão Preto, SP.

OLIPHANT, T. E. et al. (2001) Complex-valued stiffness reconstruction for magnetic resonance elastography by algebraic inversion of the differential equation. **Magnetic Resonance in Medicine**, n. 45, p. 299-310.

OPHIR, J. et al. (1999) Elastography: Ultrasonic estimation and imaging of elastic properties of tissues. In: **Proceedings of the Institute of Mechanical Engineers**. [S.l.: s.n.]. v. 213 (H), p. 203-233. [convidados].

OPHIR, J. et al. (2002) Elastography: imaging the elastic properties of soft tissues with ultrasound. **Journal of Medical Ultrasonics**, v. 29, n. 4, p. 155-171. [Convidados].

OPHIR, J. et al. (1991) Elastography: a quantitative method for imaging the elasticity of biological tissues. **Ultrason. Imaging**, n. 13, p. 111-134.

OPHIR, J. et al. (2001) Optical and acoustical imaging of biological media: Elastography. **C.R.Acad Sci. Paris-Applied Physics (Biophysics)**, t.2, p. 1193-1212.

OPHIR, J.; YAZDI, Y. (1992) **Us Pat. 5,107,837**. April.

PARK, E.; MANIATY, A. M. (2006) Shear modulus reconstruction in dynamic elastography: time harmonic case. **Physics in Medicine and Biology**, n. 51, p. 3697-3721.

RADULESCU, E. G. (2007) **Apparatus and method for optimezed search for displacement estimation in elasticity imaging**. United States Patent Application Publication, n. US2007/0167772A1, July.

RAMM, A. G. (2005) **Inverse Problems Mathematical and Analytical Techniques with Applications to Engineering**. Boston, USA: Springer.

REEVES, M. J. et al. (1995) Determinants of breast cancer detection among wisconsin (united states) women, 1988-1990. **Cancer-Causes-Control**, n. 6, p. 103-111.

ROMANOV, V. (1987) **Inverse Problems of Mathematical Physics**. Utrecht, The Netherlands: VNU Science Press BV.

SARVAZYAN, A. (1993) Shear acoustic properties of soft biological tissues in medical diagnostics. **The Journal of the Acoustical Society of America, ASA**, v. 93, n. 4, p. 2329-2330.

SARVAZYAN, A. et al. (1998) Shear wave elasticity imaging: a new ultrasound technology for medical diagnostics. **Ultrasound in Med. & Biol.**, n. 24, p. 1419-1435.

SILVA NETO, A. J. (2005) **Problemas inversos: Aplicações em engenharia e medicina**. Nova Friburgo: Material Apresentado no Projeto Quartas Científicas, Instituto Politécnico, UERJ.

SILVA NETO, A. J.; MOURA NETO, F. D. (2005) **Problemas Inversos - Conceitos Fundamentais e Aplicações**. Rio de Janeiro, RJ, Brasil: EdUERJ.

SILVA NETO, A. J.; MOURA NETO, F. D. (2000) Escolha de modelos - problemas inversos em engenharia. In: **Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional**, SBMAC, Santos (SP), Brasil. Mini-curso.

TARANTOLA, A. (2005) **Inverse Problems Theory and Methods for Model Parameter Estimation**. Philadelphia, USA: SIAM.

TIKHONOV, A. N. (1963) Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. **Soviet Math Dokl** **4**, p. 1035-1038. English translation of Dokl Akad Nauk SSSR 151, 1963, p. 501-504.

TIKHONOV, A. N. (1977) **Solutions of Ill-Posed Problems**. New York, USA: Halsted Press. (Scripta Series in Mathematics).

TIKHONOV, A. N.; GONCHARSKIS, A. V. (1987) **Ill-Posed Problems in the Natural Sciences**. Moscow, USSR: MIR Publishers. (Advances in Science and Technology in the USSR., Mathematics and Mechanics Series).

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. (1980) **Teoria da Elasticidade**. 3a edição. ed. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois.

WEINBERGER, H. F. (1965) **A First Course in Partial Differential Equations with Complex Variables and Transform Methods**. Waltham, Massachusetts-USA: Blaisdell Publishing Company.

WU, Z. et al. (2006) Sonoelastographic imaging of interference patterns for estimation of shear velocity distribution in biomaterials. **The Journal of the Acoustical Society of America, ASA**, v. 120, n. 1, p. 535-545.

YANG, S. K.; HUANG, Y.C. (2003) Use of the second harmonic in strain imaging: A phantom study. **Biomedical Engineering-Applications, Basis & Communications**, v. 15, n. 2, p. 68-76.

ZHU, Y.; HALL, T. J.; JIANG, J. (2003) A finite-element approach for young's modulus reconstruction. **IEEE Transactions on Medical Imaging**, v. 22, n. 7, p. 890-901.

$$\mathbf{t}_1 \Delta A_1 + \mathbf{t}_2 \Delta A_2 + \mathbf{t}_3 \Delta A_3 + \mathbf{t}_n \Delta A = \mathbf{0}. \quad (\text{A.1})$$

O vetor unitário \mathbf{n} que define o plano inclinado passando por ABC é dado por

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3, \quad (\text{A.2})$$

onde n_i , $i = 1, 2, 3$, são cossenos diretores dados por

$$n_i = \frac{\Delta A_i}{\Delta A}. \quad (\text{A.3})$$

Resolvendo (A.3) para ΔA_i , $i = 1, 2, 3$, e substituindo ΔA_i ns expressões correspondentes em (A.1), obtém-se

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3. \quad (\text{A.4})$$

Uma vez que $n_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n}$, pode-se reescrever (A.4) na forma

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{T} \mathbf{n}, \quad (\text{A.5})$$

onde, utilizando a soma implícita,

$$\mathbf{T} = \mathbf{t}_i \otimes \mathbf{e}_i \quad (\text{A.6})$$

é o tensor tensão de Cauchy. Note de (A.6) que \mathbf{T} não depende de \mathbf{n} , o que implica de (A.5) que \mathbf{t}_n é linear em \mathbf{n} .

Em particular, observe de (A.6) que $\mathbf{T} \mathbf{e}_i = \mathbf{t}_i$ para $i = 1, 2, 3$, onde \mathbf{t}_i é dado pelas suas componentes normal e tangenciais T_{ij} , $j = 1, 2, 3$, na forma

$$\mathbf{t}_i = T_{ij} \mathbf{e}_j. \quad (\text{A.7})$$

Segue, portanto, de (A.6) e (A.7) que a representação tensorial de \mathbf{T} na base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é dada por

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_i. \quad (\text{A.8})$$

Matricialmente, \mathbf{T} é representado por

$$[\mathbf{T}] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Considere agora um paralelepípedo de dimensões infinitesimais extraído da vizinhança de um ponto $\mathbf{x} \in \mathbf{y}(\mathcal{B})$, conforme ilustrado na Fig. 50. Os vetores tensão atuantes em cada face do cubo também estão mostrados na Fig. 50. Sejam $\mathbf{b} = b_i \mathbf{e}_i$ a força de corpo por unidade de massa e ρ a densidade de massa em \mathbf{x} . Uma vez que o corpo está em equilíbrio, tem-se que a resultante de todas as forças atuantes sobre o paralelepípedo deve ser zero, ou seja,

$$\begin{aligned} & [\mathbf{t}_1(\mathbf{x} + \Delta x_1 \mathbf{e}_1) - \mathbf{t}_1(\mathbf{x})] \Delta x_2 \Delta x_3 + [\mathbf{t}_2(\mathbf{x} + \Delta x_2 \mathbf{e}_2) - \mathbf{t}_2(\mathbf{x})] \Delta x_1 \Delta x_3 + \\ & [\mathbf{t}_3(\mathbf{x} + \Delta x_3 \mathbf{e}_3) - \mathbf{t}_3(\mathbf{x})] \Delta x_1 \Delta x_2 + \rho \mathbf{b} \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 = 0, \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde Δx_i , $i = 1, 2, 3$, são os comprimentos dos lados do paralelepípedo.

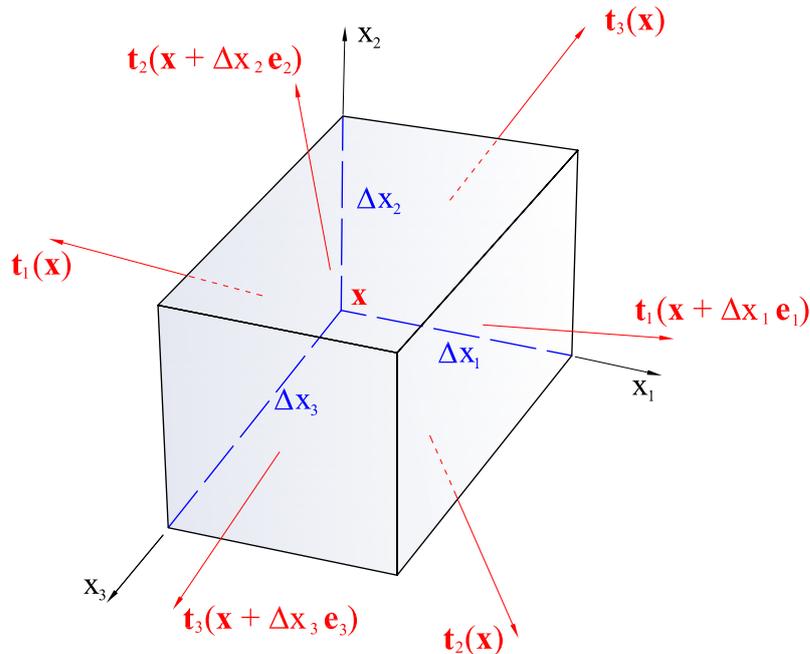


Figura 50: Paralelepípedo de dimensões infinitesimais com vetores tensão.

Dividindo a equação (A.10) por $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ e tomando o limite quando $\Delta x_i \rightarrow 0$, $i = 1, 2, 3$, obtém-se

$$\frac{\partial \mathbf{t}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{t}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{t}_3}{\partial x_3} + \rho \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (\text{A.11})$$

Substituindo (A.7) em (A.11) obtém-se

$$\frac{\partial \Gamma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (\text{A.12})$$

As equações (A.12) podem ser escritas na forma vetorial

$$\text{div } \mathbf{T} + \rho \mathbf{b} = 0 \quad (\text{A.13})$$

onde $\text{div } \mathbf{T}$ é definido por $\mathbf{a} \cdot \text{div } \mathbf{T} = \text{div } (\mathbf{T}^T \mathbf{a})$ para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ constante.

A equação (A.13) deve ser satisfeita em todos os pontos $\mathbf{x} \in y(\mathcal{B})$ para que o corpo esteja em equilíbrio.

APÊNDICE B – Equivalência entre as Formas Forte (S) e Fraca (W)

Mostra-se aqui que as formulações forte (S), dada por (6.4), e fraca, dada por (6.9), são equivalentes. Isso se estabelece assumindo que todas as funções envolvidas são suaves.

Proposição:

- a) Seja u uma solução de (S). Então u é também uma solução de (W).
- b) Seja u uma solução de (W). Então u é também uma solução de (S).

Prova Formal:

- a) Assuma que u é uma solução de (S), então pode-se escrever

$$0 = - \int_0^1 w (u_{,XX} + b) dX \quad (\text{B.1})$$

para qualquer $w \in \zeta$. Integrando (B.1) por partes resulta em

$$0 = \int_0^1 w_{,X} u_{,X} dX - \int_0^1 w b dX - w u_{,X} \Big|_0^1. \quad (\text{B.2})$$

Rearranjando (B.2) e usando ambos, $-u_{,X}(0) = f$ e $w(1) = 0$, resulta em

$$\int_0^1 w_{,X} u_{,X} dX = \int_0^1 w f dX + w(0) f. \quad (\text{B.3})$$

Além disso, $u(1) = g$ e, portanto, u está em γ . Por fim, desde que u também satisfaça (B.3) para todo $w \in \zeta$, u é uma solução de (W).

- b) Agora, assumamos que u é uma solução de (W). Então $u \in \gamma$, e

$$\int_0^1 w_{,X} u_{,X} dX = \int_0^1 w b dX + w(0) f$$

para todo $w \in v$. Integrando por partes e usando $w(1) = 0$, resulta em

$$0 = \int_0^1 w (u_{,XX} + b) dX + w(0) [u_{,X}(0) + f] \quad (\text{B.4})$$

Para provar que u é uma solução de (S) , é suficiente mostrar que (B.4) implica nas Equações de Euler-Lagrange:

- i. $u_{,XX} + b = 0$ em $]0, 1[$,
- ii. $u_{,X}(0) + f = 0$

Primeiro, prova-se (i) . Defina w em (B.4) por

$$w = \phi(u_{,XX} + b), \quad (\text{B.5})$$

onde ϕ é suave, $\phi(X) > 0$ para todo $X \in \Omega =]0, 1[$ e $\phi(0) = \phi(1) = 0$. Por exemplo, pode-se tomar $\phi(X) = X(1 - X)$, o qual satisfaz todos os requisitos estipulados. Segue que $w(1) = 0$ e então $w \in \varsigma$. Assim, (B.5) define uma função de ς . Substituindo (B.5) em (B.4) resulta em

$$0 = \int_0^1 \underbrace{\phi(u_{,XX} + b)^2}_{\geq 0} dX + 0. \quad (\text{B.6})$$

Uma vez que $\phi > 0$ em $]0, 1[$, segue de (B.6) que (i) deve ser satisfeito. Agora que se tem estabelecido (i) , passa-se a usar (B.4) para provar (ii) . Desse modo, segue de (B.4) que

$$0 = w(0) [u_{,X}(0) + f]. \quad (\text{B.7})$$

Nota-se que não há qualquer restrição no valor de w em $X = 0$. Portanto, pode-se escolher w tal que $w(0) \neq 0$. Então (ii) está também satisfeita, a qual completa a prova da proposição.