

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**APRIMORAMENTO DE FORMULAÇÃO DO MEF PARA BARRA GERAL
LAMINADA TRIDIMENSIONAL PELA CONSIDERAÇÃO DA
CINEMÁTICA DE EMPENAMENTO PARA SEÇÃO QUALQUER**

ANA PAULA FERREIRA SANTOS

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: Prof. Assoc. Humberto Breves Coda

CO-ORIENTADOR: Dr. Sc. Rodrigo Ribeiro Paccola

São Carlos

2008

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTA
TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO,
PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

S237a Santos, Ana Paula Ferreira
 Aprimoramento de formulação do MEF para barra geral
 laminada tridimensional pela consideração da cinemática
 de empenamento para seção qualquer / Ana Paula Ferreira
 Santos ; orientador Humberto Breves Coda ; co-orientador
 Rodrigo Ribeiro Paccola. -- São Carlos, 2008.

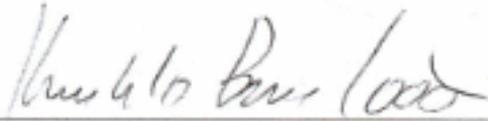
 Dissertação (Mestrado-Programa de Pós-Graduação e Área
 de Concentração: Engenharia de Estruturas) -- Escola de
 Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo,
 2008.

 1. Método dos elementos finitos. 2. Laminados.
 3. Empenamento. 4. Barras gerais. I. Título.

FOLHA DE JULGAMENTO

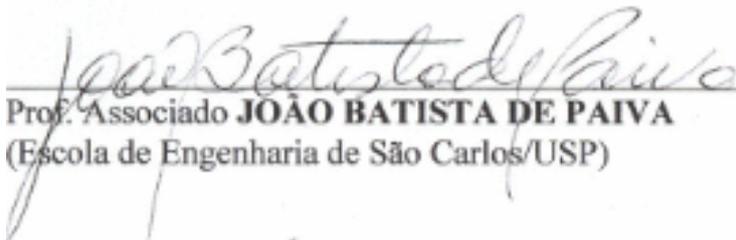
Candidata: Bacharel **ANA PAULA FERREIRA SANTOS**

Dissertação defendida e julgada em 20/03/2008 perante a Comissão Julgadora:



Prof. Associado **HUMBERTO BREVES CODA (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADA



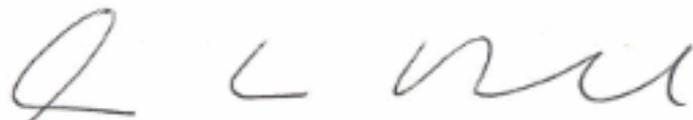
Prof. Associado **JOÃO BATISTA DE PAIVA**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADA



Prof. Associado **ALOÍSIO ERNESTO ASSAN**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)

APROVADA



Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)



Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**
Presidente da Comissão da Pós-Graduação da EESC

DEDICATÓRIA

À vovó Maria Ferreira de Oliveira,
com carinho, por todo o seu amor.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela presença constante em minha vida, suprimo sempre todas as minhas necessidades e guiando-me pelos Seus Caminhos.

À minha mãe, Abnair Ferreira de Oliveira, por ser uma pessoa sábia em toda a sua simplicidade, contribuindo para que eu chegasse à realização deste trabalho. A toda à minha família que sempre participa do meu desenvolvimento, tios, tias e primos, que foram além dos seus papéis sendo para mim pais, mães e irmãos, respectivamente. Cada um deles sabe a grande importância que têm na minha vida e o privilégio de serem numerosos impossibilita-me citar seus nomes aqui, evitando o risco de injustiças.

Ao Padre Luiz Silva pelas edificantes conversas ao longo desses vinte anos de amizade. E aos queridos amigos Daniela, Danielly, Danilla, Isabel, Juliana, Marcello, Patrícia, Renato, e às suas respectivas famílias pela preciosa amizade.

Ao meu namorado, Bayardo, por transformar esses dois anos em momentos ainda mais especiais, com a sua presença encantadora.

Aos estimados Professores da graduação Antonio Paulo Mendes, Edson Tejerina Calderón e Elias Calixto Carrijo pelos exemplos de dedicação, profissionalismo e conduta moral.

Ao Professor João Batista de Paiva pelos ensinamentos, por toda atenção, paciência e motivação. E pela presença na comissão examinadora desta dissertação, enriquecendo-a com a sua respeitável experiência.

Ao orientador deste trabalho, Professor Humberto Breves Coda, pela oportunidade e pelo eficiente acompanhamento deste trabalho inclusive no período do seu pós-doutorado na Universidade de Cambridge.

Ao co-orientador deste trabalho, Dr. Sc. Rodrigo Ribeiro Paccola, pela eficaz co-orientação, além da colaboração na disciplina de elementos finitos.

Ao professor Carlito Calil Junior pela manifestação necessária no momento da solicitação da bolsa à FAPESP.

Aos Professores José Elias Laier e Wilson Sergio Venturini, porque além dos conhecimentos transmitidos nas disciplinas, responsabilizaram-se pela minha orientação na ausência do Prof. Coda.

Aos Professores Dagoberto Dario Mori, Jorge Munaiar Neto, José Samuel Giongo, Marcio Antonio Ramalho, Maximiliano Malite e Sergio Persival Baroncini Proença pela boa vontade em disponibilizar material e esclarecer dúvidas referentes a este trabalho.

Ao Professor Libânio Miranda Pinheiro, porque foi o primeiro contato com o SET e por ser sempre simpático e atencioso com todas as pessoas.

A todos os professores e funcionários que contribuíram direta ou indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho. Especialmente a todo o pessoal do laboratório de informática e da secretaria do departamento de Engenharia de Estruturas pela paciência e disposição ao atender. E aos funcionários da biblioteca da EESC pelas orientações.

Aos amigos do SET, especialmente ao Rodolfo Sanches e ao Rogério Carrazedo que colaboraram para o meu desenvolvimento em programação computacional. E ao Eduardo Lima Junior, à Érica Kimura, ao Raimundo Amorim e ao Walter Oliveira pela representação discente.

Ao admirável Prof. Aloisio Ernesto Assan pela presença na comissão examinadora deste trabalho, enriquecendo-o com o seu conhecimento científico.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo, FAPESP, pelo financiamento desta pesquisa.

“Se você quiser, meu filho, ficará instruído e se você se empenhar, se tornará hábil. Se você gosta de escutar, aprenderá; e se der ouvido, se tornará sábio. Frequente a reunião dos anciãos e apegue-se a quem for sábio. Escute de boa vontade toda palavra divina, e não se descuide das máximas sábias. Se você encontrar um homem sábio, madrugue para visitá-lo, e que seu pé gaste a soleira da porta dele. Reflita sobre os preceitos do Senhor e medite sem cessar nos mandamentos Dele. Então Ele fortificará em você a inteligência, e o seu desejo de sabedoria ficará saciado.”

RESUMO

SANTOS, A. P. F. (2008). *Aprimoramento de formulação do MEF para barra geral laminada tridimensional pela consideração da cinemática de empenamento para seção qualquer*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

O presente trabalho consiste no aprimoramento de formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) para barra geral laminada tridimensional pela consideração da cinemática de empenamento para seção qualquer. Desenvolve-se um código computacional para se solucionar o empenamento, considerando-se uma derivada do giro em relação ao eixo longitudinal de valor unitário, do problema de torção livre de Saint-Venant para uma seção transversal de geometria qualquer, homogênea e não-homogênea. Posteriormente o código desenvolvido é adaptado de forma a ser acoplado a um programa com formulação de barra geral tridimensional laminada, que segue a cinemática de Reissner-Timoshenko generalizada, enriquecendo-o com a consideração do empenamento. A primeira contribuição significativa do desenvolvimento do trabalho é a inclusão de geometrias quaisquer para a seção transversal, possibilitando, por exemplo, a consideração de núcleos estruturais mistos em edifícios, abertos e fechados por trechos. A segunda contribuição é referente à consideração de material laminado, possibilitando considerar núcleos estruturais de materiais compostos. Exemplos gerais são resolvidos para a verificação e validação da formulação proposta e implementada.

Palavras Chaves: Elementos Finitos; Empenamento; Barras gerais; Laminados.

ABSTRACT

SANTOS, A. P. F. (2008). *An Improved Finite Element formulation for the analysis of general three-dimensional laminated bars with consideration of warping for any cross-section*. Dissertation (Master) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

In the present work an improved Finite Element formulation for the analysis of three-dimensional laminated bars is presented. The improvement is made by introducing the warping mode into the previous model that follows a general Reissner-Timoshenko kinematics hypothesis. In order to do so, a two-dimensional code is developed, based on Saint Venant's Torsion Problem; to find the warping mode for any considered cross-section, including non-homogeneous material. Each warping mode is achieved for unitary rotation by unit of length. This warping mode is weighted by a new parameter, the intensity of warping, and then added to the Reissner-Timoshenko kinematics, resulting into the enhanced formulation. The existent computational code is modified accordingly to this new kinematics and tested regarding its capacity of reproducing analytical results for Saint-Venant torsion and Vlasov bending-torsion theories. Some results for laminated cross sections are also provided. It is worth stressing that the main contributions of this work are two. The first is the consideration of warping for general 3D bars with any cross section, i.e., not limited to thin-walled cross sections. The second is the consideration of laminated materials for any cross section.

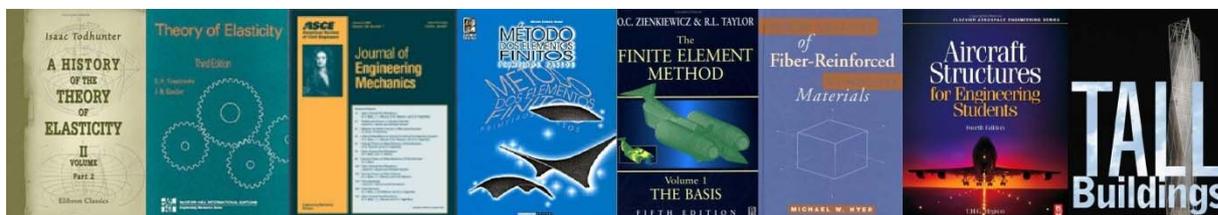
Keywords: Finite Elements; Warping; General Bars; Laminated.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
1.1	RESUMO HISTÓRICO	19
1.1.1	TORÇÃO UNIFORME	20
1.1.2	TORÇÃO NÃO-UNIFORME	21
1.1.3	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	22
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	24
1.3	OBJETIVOS	30
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	31
1.5	METODOLOGIA OPERACIONAL	32
1.6	JUSTIFICATIVA	33
1.7	SOFTWARES UTILIZADOS	34
1.8	DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS DA DISSERTAÇÃO	17
2	TORÇÃO LIVRE DE SAINT-VENANT PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	37
2.1	INTRODUÇÃO	37
2.2	PROPRIEDADES DE ÁREAS PLANAS	38
2.2.1	MOMENTO ESTÁTICO E CENTRÓIDE DE UMA ÁREA	39
2.2.2	MOMENTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA E RAIOS DE GIRAÇÃO	41
2.2.3	PRODUTO DE INÉRCIA	42
2.2.4	ROTAÇÃO DE EIXOS E EIXOS PRINCIPAIS	43
2.3	TORÇÃO LIVRE DE SAINT-VENANT	44
2.3.1	CINEMÁTICA	46
2.3.2	PROBLEMA DE VALOR DE CONTOURNO (RESUMO E NOTAÇÃO INDICIAL)	60
2.4	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	61
2.4.1	EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO EM FORMA FRACA PELA APLICAÇÃO DE RESÍDUOS PONDERADOS	62
2.4.2	DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO	64
2.4.2.1	Elemento finito triangular linear	65
2.4.2.2	Elemento finito triangular quadrático	72
2.4.3	EQUAÇÕES DISCRETAS	75
2.4.4	CENTRO DE CISALHAMENTO	82
2.4.5	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	90
2.4.6	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	93

3	EXEMPLOS DE TORÇÃO LIVRE - EMPENAMENTO	97
3.1	INTRODUÇÃO	97
3.2	SEÇÃO TRANSVERSAL HOMOGENEA	98
3.2.1	FECHADA.....	98
3.2.1.1	Elíptica.....	99
3.2.1.2	Circular.....	101
3.2.1.3	Triangular.....	103
3.2.1.4	Retangular.....	105
3.2.1.5	Quadrada.....	107
3.2.2	ABERTAS E PAREDES DELGADAS.....	109
3.2.2.1	Análise de convergência.....	111
3.2.2.2	Perfil Z enrijecido a 90°.....	113
3.2.2.3	Perfil U simples.....	119
3.2.2.4	Perfil I.....	126
3.3	SEÇÃO NÃO-HOMOGENEA.....	132
3.3.1	PERFIL U LAMINADO.....	132
3.3.2	CONCRETO ARMADO.....	136
3.3.3	ESTRUTURAS DE AERONAVES.....	139
3.3.3.1	Exemplo 1.....	141
3.3.3.2	Exemplo 2.....	143
3.3.3.3	Exemplo 3.....	146
3.3.3.4	Exemplo 4.....	148
4	ENRIQUECIMENTO DA CINEMÁTICA DO ELEMENTO DE BARRA GERAL	151
4.1	INTRODUÇÃO	151
4.2	CINEMÁTICA ORIGINAL E ENRIQUECIMENTO PROPOSTO	152
4.3	APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS	158
5	EXEMPLOS DO ELEMENTO DE BARRA GERAL.....	163
5.1	INTRODUÇÃO	163
5.2	EXEMPLOS DE FLEXO-TORÇÃO	164
5.2.1	EXEMPLO 01.....	165
5.2.1.1	Teoria Técnica.....	166
5.2.1.2	Resultados obtidos pela formulação do presente trabalho.....	171
5.2.1.3	Resultados ao longo do comprimento da barra.....	179
5.2.2	EXEMPLO 2.....	183
5.2.2.1	Teoria Técnica.....	184
5.2.2.2	Resultados obtidos pela formulação do presente trabalho.....	189
5.2.2.3	Resultados ao longo do comprimento da barra.....	193
5.2.3	CONCLUSÃO.....	198
5.3	EXEMPLOS DE NÚCLEOS ESTRUTURAIS	199
5.3.1	SEÇÃO TRANSVERSAL ABERTA.....	199
5.3.2	SEÇÕES TRANSVERSAIS COM GEOMETRIAS QUAISQUER.....	203
5.3.3	MATERIAIS COMPOSTOS.....	209
6	CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS.....	215
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	217

1 INTRODUÇÃO



1.1 DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação é composta por seis capítulos, nos quais se expõe de forma detalhada o trabalho desenvolvido durante este mestrado acadêmico. Apresentam-se resumidamente os tópicos abordados na presente dissertação, de forma que o leitor tenha uma idéia prévia do que será exposto nos próximos capítulos.

- **Capítulo 1: INTRODUÇÃO.** É o capítulo atual. Após a descrição dos capítulos da dissertação apresenta-se um breve histórico da teoria da torção livre de Saint-Venant. Comenta-se também sobre a origem da teoria de flexo-torção atribuída à Vlasov. Aborda-se resumidamente o desenvolvimento inicial do Método dos Elementos Finitos (MEF), que é o método numérico utilizado para a implementação computacional da formulação exposta no presente trabalho. Alguns trabalhos importantes no desenvolvimento da teoria de barra geral submetida à flexo-torção serão citados. Apresentam-se também os objetivos, organização, metodologia e

justificativas para este trabalho. Finalmente listam-se os programas utilizados na elaboração deste trabalho.

- **Capítulo 2: TORÇÃO LIVRE DE SAINT-VENANT PELO MEF.** Explana-se a cinemática de empenamento estudada e implementada computacionalmente. Refere-se à teoria da torção livre de Saint-Venant pelo Método dos Elementos Finitos.
- **Capítulo 3: EXEMPLOS DE TORÇÃO LIVRE DE SAIN-VENANT.** Apresentam-se resultados de exemplos obtidos pela cinemática descrita no *Capítulo 2*, que são validados através da comparação com valores fornecidos por análises efetuadas por outros autores, possibilitando a avaliação da eficiência computacional da cinemática implementada e descrita no capítulo anterior. Além de exemplos de seções homogêneas, apresentam-se outros, cujas seções são não-homogêneas.
- **Capítulo 4: CINEMÁTICA ENRIQUECIDA DO ELEMENTO DE BARRA GERAL.** Trata-se da descrição do acoplamento da cinemática desenvolvida no *Capítulo 2* ao programa com formulação de barra geral tridimensional laminada, desenvolvido em PACCOLA (2004);
- **Capítulo 5: EXEMPLOS DO ELEMENTO DE BARRA GERAL.** Expõem-se os resultados obtidos através do programa desenvolvido em PACCOLA (2004), após acoplamento do código computacional desenvolvido no presente trabalho, descrito no *Capítulo 2*. Apresentam-se exemplos de flexo-torção, núcleos estruturais não-laminados e laminados. Os resultados são validados através da comparação com a teoria técnica. Adota-se um exemplo cujo resultado é comparado com o programa ANSYS. Depois de confirmada a eficiência do presente trabalho, sugere-se que outros autores que se interessem por este assunto, comparem seus futuros trabalhos com o exemplo de núcleo estrutural de concreto armado apresentado no final do *Capítulo 5*.

- **Capítulo 6: CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS.** Discutem-se as conclusões relativas ao presente trabalho, de acordo com os objetivos propostos inicialmente e os resultados alcançados. Também se sugere tópicos para os desenvolvimentos futuros, relacionados com o tema abordado neste trabalho;

Após os capítulos desta dissertação listam-se as fontes consultadas, em ordem alfabética, para a elaboração desta dissertação em **REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**, trata-se de um levantamento bibliográfico sobre o tema abordado no presente trabalho e com ele relacionado, sugerindo-se ao leitor obras para um aprofundamento maior deste assunto.

1.2 RESUMO HISTÓRICO

O presente trabalho engloba a teoria de torção livre de Saint-Venant ou torção uniforme, que foi o fundamento para o desenvolvimento do código computacional bidimensional referente à sua primeira parte, o qual tem como resultado o empenamento (deslocamento na direção longitudinal) para qualquer seção transversal, homogênea e não homogênea, de uma barra com eixo longitudinal unitário.

Após o acoplamento ao programa com formulação de barra geral tridimensional laminada, este trabalho passa a justificar-se nas hipóteses da flexo-torção de Vlasov, que considera a torção não uniforme.

Portanto apresenta-se um breve histórico do desenvolvimento do problema de torção uniforme e não uniforme. E também do Método dos Elementos Finitos (MEF), que é o método numérico escolhido para o desenvolvimento do presente trabalho.

1.2.1 TORÇÃO UNIFORME

O problema da torção uniforme, também é conhecido como torção livre de Saint-Venant. Trata-se do problema em que uma barra prismática de seção transversal constante é submetida a um conjugado de momentos torçores em suas extremidades, onde o empenamento das seções transversais ocorre livremente e não varia ao longo da barra.

C. A. Coulomb (1736-1806) nasceu em Angoulême. Estudou em Paris e entrou para o corpo militar de engenheiros. Ele foi enviado para a ilha de Martinique, onde durante nove anos, estudou as propriedades mecânicas dos materiais e diversos problemas de engenharia estrutural. A primeira tentativa de se solucionar problemas de torção em peças homogêneas de seção circular foi feita por Charles Augustin Coulomb em 1784.

O problema da torção foi estudado posteriormente por Louis Marie Navier, em 1864, que adotou hipóteses que levavam a resultados errôneos.

O desenvolvimento da teoria de torção em barra com seção genérica deve-se a Barré de Saint-Venant, que em 1855 apresentou sua famosa memória sobre torção à Academia Francesa de Ciências, com a solução correta para a torção de barras prismáticas.

Ludwig Prandtl, em 1903, apresentou uma formulação matemática para a solução de problemas de torção utilizando a analogia da membrana. Este modelo estabelece relações

particulares entre a superfície deformada de uma membrana sob carregamento uniformemente distribuído, e a distribuição de tensões em seções submetidas à torção.

1.2.2 TORÇÃO NÃO-UNIFORME

LIMA, GUARDA & PINHEIRO (2007) afirmam que

em geral, os estudos sobre torção desconsideram a restrição ao empenamento, como nas hipóteses de Saint-Venant, mas, na prática, as próprias regiões de apoio (pilares ou outras vigas) tornam praticamente impossíveis o livre empenamento. Como consequência surgem tensões normais (de coação) no eixo da peça e há certa redistribuição da tensão cisalhante. Esse efeito pode ser desconsiderado no dimensionamento das seções mais usuais de concreto armado (perfis maciços ou fechados, nos quais a rigidez à torção é alta), uma vez que as tensões de coação tendem a cair bastante com a fissuração da peça e o restante passa a ser resistido apenas pelas armaduras mínimas. Assim, os princípios básicos de dimensionamento propostos para a torção clássica de Saint-Venant continuam adequados, com certa aproximação, para várias situações práticas. No caso de seções delgadas, entretanto, a influência do empenamento pode ser considerável, e devem ser utilizadas teorias mais gerais, como por exemplo, as hipóteses da flexo-torção de Vlasov, para o dimensionamento.

Vasilii Zakharovich Vlasov nasceu em 24 de fevereiro de 1906, na vila de Kareevo, na antiga União Soviética. Em 1930 ingressou na Faculdade de Engenharia Civil de Moscou e, em 1953, foi eleito membro da Academia de Ciências da União Soviética.

V. Z. Vlasov dedicou toda a sua vida ao estudo de elementos estruturais constituídos por paredes delgadas. Estes elementos estruturais são utilizados em estruturas modernas e otimizadas, projetadas com um peso mínimo e uma máxima rigidez. São aplicados em coberturas de edifícios industriais, estruturas de aeronaves ou submarinos, foguetes, etc.

Os principais resultados de suas investigações são encontrados em VLASOV (1940). A principal versão consultada sobre esta teoria é a do livro *Thin-walled Elastic Beams*, de 1961.

VLASOV (1961) desenvolveu uma teoria para barras com seção transversal aberta e paredes delgadas, na qual é apresentada a definição de bimomento, que é o esforço, e empenamento que é o deslocamento.

1.2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Os principais artigos que descrevem o desenvolvimento inicial do MEF, segundo GRUPTA & MEEK (2003), são: COURANT (1942), ARGYRIS (1955), TURNER et al. (1956), CLOUGH (1989, 1960 e 1962) e ZIENKIEWICZ & CHEUNG (1965).

Em resumo, os artigos de COURANT (1942) mostram que ele utilizou o Princípio da Minimização da Energia Potencial e interpolação polinomial por elementos, aplicados sobre sub-regiões triangulares, para resolver o problema da torção de Saint-Venant.

A série de artigos com o título *Energy Theorems and Structural Analysis* por ARGYRIS (1955) é talvez um dos mais significantes marcos da mecânica estrutural de todos os tempos. Esta publicação desenvolve a teoria matricial de estruturas para elementos discretos e mostra que este é somente um caso particular do contínuo geral em que as tensões e deformações devem ser especificadas. Esta descoberta conduz ao conceito de flexibilidade e rigidez. Este método matricial torna-se a base para a maioria das aplicações de análises de tensões do MEF.

Reconhece-se que o artigo de TURNER et al. (1956) foi escrito sem o conhecimento do trabalho de ARGYRIS (1955). Eles desenvolveram independentemente a teoria para a rigidez de um elemento triangular plano em estado de tensão constante e estudou as características da convergência deste elemento.

CLOUGH (1989) esboça o programa de pesquisa empreendida na Boeing Company em 1952-1953 para o cálculo dos coeficientes de flexibilidade para a análise dinâmica de estruturas de asa. Clough deu crédito a Turner pela criação do elemento plano de tensão triangular no estado de tensão constante. Clough referiu-se à primeira invenção com o nome *método dos elementos finitos*, mostrando a diferença entre análise contínua e método matricial em análise estrutural.

A técnica da minimização do funcional, descrita indiretamente por COURANT (1942), foi finalmente generalizada por ZIENKIEWICZ e CHEUNG (1965) e abriu caminho para análises gerais pelo MEF.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é, sem dúvida, a ferramenta numérica mais difundida e adequada para o cálculo estrutural da atualidade. Sua habilidade em modelar elementos sólidos, de superfície (cascas e placas) e de linha (barras gerais e simples) por um conjunto de equações natural e único demonstra sua superioridade quando comparado a outras técnicas, como por exemplo, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) e o Método das Diferenças Finitas (MDF).

Para se obter este conjunto de equações algébricas, usualmente se parte do princípio da mínima energia potencial total que pode ser expresso em diversos formatos, como os apresentados via Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), Cálculo das Variações (CV), pela minimização diferencial direta do potencial ou mesmo pela técnica dos resíduos ponderados (SORIANO (2003), SAVASSI (2000), BATHE (1996), REDDY (1993), COOK (1989), BREBBIA & FERRANTE (1975) etc.).

Segundo ASSAN (2003), o Método dos Resíduos Ponderados e o Método de Galerkin diferem dos métodos ditos variacionais por não necessitar da existência de um funcional, utilizando diretamente a equação diferencial (forma forte) do problema a ser resolvido. Independentemente do formato adotado, o ponto de partida para a construção do MEF é a aproximação do contínuo, dividido em subdomínios (elementos finitos), através de parâmetros nodais de deslocabilidades (graus de liberdade) e de funções interpoladoras (funções de forma).

Elementos de barra geral tridimensional de material laminado, seguindo a cinemática generalizada de REISSNER-STAVSKY (1961), usualmente chamada no caso de barras de

Reissner-Timoshenko, possuem como graus de liberdade os deslocamentos e giros nodais. A partir desses valores nodais, determinam-se os deslocamentos para cada ponto do elemento, seguindo a hipótese de Reissner-Timoshenko, encontrando-se as deformações e, conseqüentemente, o potencial de energia de deformação. Associando-se este potencial ao trabalho das forças externas, resulta o potencial de energia total e a solução do problema é calculada com a minimização deste último em relação aos parâmetros nodais incógnitos.

REISSNER-STAVSKY (1961) estuda estruturas laminadas considerando os efeitos do cisalhamento na deformação. Considera material anisotrópico. A cinemática utilizada considera a rotação da seção transversal como parâmetro independente da derivada do deslocamento vertical no ponto.

De maneira similar ao que foi apresentado para o elemento de pórtico e desenvolvido em PACCOLA (2001), com base nos trabalhos de MENEZES & DEVLOO (2000) e DEVLOO et al. (1999), para o elemento de placa quadrilateral com aproximação linear e quadrática de variáveis, PACCOLA (2004) propõe o desenvolvimento de um elemento de casca (fóliculos triangulares planos) com cinemática de laminados ou Reissner geral e de barra tridimensional.

MENEZES, PACCOLA & DEVLOO (2001) tratam da formulação teórica de placas laminadas apoiadas sobre base elástica. Adotam hipóteses de Reissner-Mindlin de placas espessas com cinemática de pequenos deslocamentos. Utiliza-se de técnicas de integração reduzida para o cálculo das contribuições dos esforços de cisalhamento, melhorando os resultados do problema de enrijecimento conhecido na literatura com o nome de efeito de travamento. A base elástica é considerada segundo as hipóteses de Winkler e sua contribuição na formulação é levada em conta no cálculo do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

É sabido, porém, que esta cinemática de REISSNER-STAVSKY (1961) quando aplicada a barras não permite o empenamento das seções transversais tornando o elemento de barra geral excessivamente rígido à torção. Na literatura se encontram diversos trabalhos que consideram o empenamento na cinemática do elemento de barra geral (não laminado). Esses trabalhos, em sua maioria, tratam de seções abertas de parede fina aplicados na solução de núcleos estruturais de edifícios altos. Sua primeira versão numérica foi apresentada por TARANATH (1968) inspirado na teoria proposta por VLASOV (1961 e 1940) dedicada exclusivamente para a solução de problemas de torção e flexo-torção de barras com seções abertas de parede fina.

Com o objetivo de reduzir drasticamente o volume de dados de entrada, para o caso específico de núcleos de rigidez, TARANATH (1968) formulou um elemento elástico de barra que possui sete graus de liberdade por nó, considerando, assim, o empenamento. Este elemento está associado à técnica de análise matricial de estruturas que diferentemente do MEF, não parte do funcional de energia, mas estuda diretamente o equilíbrio estático de estruturas.

COSTA (1982) estudou, através dos tratamentos contínuos e discretos, a determinação dos esforços nas paredes constituintes de núcleos estruturais de edifícios, contraventados por lintéis, sobre fundação flexível.

ROCHA (1985), utilizando a técnica do meio contínuo, apresentou um estudo de núcleos estruturais sujeitos à torção. Considerou o núcleo estrutural formado por dois pilares de concreto armado unidos por lintéis ao nível dos andares e considerando engastada a sua base em uma fundação rígida.

MORI (1992), baseado em BECKER (1989), estudou os núcleos estruturais de seção aberta e a não-linearidade geométrica na análise de estruturas tridimensionais de edifícios

altos via análise matricial de estruturas. Para a análise em segunda ordem ele desenvolveu uma formulação adaptando as equações diferenciais usuais para o estudo de pilares, permitindo a inclusão de termos adicionais originados da flexo-torção, obtendo delas as convenientes matrizes de rigidez que viabilizam a análise levando em conta a influência das deformações no equilíbrio.

DIOGO & ISHITANI (1993) apresentaram um roteiro para o cálculo de perfis de seção delgada, considerando a flexo-torção e a não linearidade geométrica, utilizando o método dos elementos finitos e elementos de casca cilíndrica.

ANTUNES, MORI & SOUZA (1995) desenvolveram uma extensão da teoria de flexo-torção em análise matricial de estruturas, levando em conta não só a análise em 1ª ordem, como em 2ª ordem, para elementos de núcleos em seção aberta ou semi-fechada.

BADIE, SALMON & BESHARA (1997) apresentaram uma análise de núcleos estruturais sobre fundação elástica. Analisaram tanto o núcleo quanto o solo pelo método dos elementos finitos. Observaram que ao calcular o núcleo sem interação com o solo, os efeitos no núcleo são subestimados.

MATIAS JUNIOR (1997), em sua dissertação de mestrado, acrescentou ao programa desenvolvido por MORI (1992) procedimentos para considerar as fundações do edifício sobre base elástica.

TORRES (1999) apresenta, no ambiente de análise matricial de estruturas, a matriz de rigidez de núcleo levando-se em conta a deformação por esforço cortante.

MARTINS (2001) estudou a análise de estrutura tridimensional de edifícios de andares múltiplos considerando a interação de deslocamentos e esforços entre os vários elementos que formam a estrutura, levando-se em consideração a rigidez transversal à flexão das lajes. Desenvolveu este estudo através de um modelo que compatibiliza o elemento que

discretiza o núcleo com sete graus de liberdade (análise matricial de estruturas), baseado na teoria da flexo-torção de Vlasov, com o restante da estrutura tridimensional de edifícios de andares múltiplos formada pelos núcleos, pilares, vigas e lajes.

SOUSA JUNIOR (2001) apresenta um estudo sobre a análise de edifícios altos enrijecidos com núcleos estruturais utilizando-se processos discretos. A ligação do núcleo estrutural com as lajes do pavimento do edifício é o ponto principal deste estudo. As vigas, pilares e lajes são analisados utilizando-se o Método dos Elementos Finitos. Os núcleos estruturais, que podem ser de seção aberta ou semi-fechada, foram analisados em análise matricial de estruturas incluindo a teoria da flexo-torção em que é levada em conta a análise em 1ª ordem. Na teoria de flexo-torção é levada em consideração o empenamento do elemento de núcleo, dessa forma aparece o esforço denominado bimomento.

BASAGLIA, CAMOTIM & SILVESTRE (2008) observam que

nos anos mais recentes, há uma crescente utilização de perfis metálicos de elevada esbeltez (e.g., perfis de aço formados a frio) na construção de pórticos destinados a edifícios industriais. Este fato deve-se à produção corrente de aços com cada vez maior resistência, o que conduz à obtenção de soluções estruturais muito leves e econômicas. No entanto, essa mesma característica torna os pórticos extremamente suscetíveis à ocorrência de fenômenos de instabilidade, bem como ao acoplamento entre eles - deste modo, uma avaliação rigorosa do seu comportamento geometricamente não linear só pode ser conseguida através do método dos elementos finitos, discretizando as barras do pórtico com elementos de casca. Apesar de conceitualmente possível, esta abordagem tem ainda custos computacionais proibitivos para aplicações correntes, sobretudo se envolverem fenômenos de instabilidade

local. Uma alternativa extremamente promissora, tanto computacional como de interpretação dos resultados, são as análises baseadas na Teoria Generalizada de Vigas (GBT - "Generalised Beam Theory").

Neste artigo, eles abordam a formulação e implementação computacional de um elemento finito de barra baseado na GBT que permite analisar o comportamento global, plano e espacial, de pórticos metálicos a trabalhar em regime elástico. Para isso, torna-se indispensável estabelecer relações cinemáticas que permitam assegurar a compatibilidade entre deslocamentos e rotações nas ligações que unem duas ou mais barras com orientações distintas (principalmente no que diz respeito aos deslocamentos de empenamento). Após uma breve revisão dos conceitos fundamentais envolvidos em uma análise estrutural baseada na GBT, apresenta-se em detalhe a formulação e implementação numérica de um elemento finito baseado na GBT que inclui apenas os quatro modos globais de deformação (i.e., extensão axial, flexão em torno do eixo de maior/menor inércia e torção). Em particular, descrevem-se os procedimentos envolvidos na determinação das matrizes de rigidez, linear e geométrica, do elemento finito e do pórtico (as últimas incorporam a influência das ligações e condições de apoio do pórtico). Em seguida, abordam-se os modelos cinemáticos para simular a transmissão do empenamento em ligações de pórticos que unem duas ou mais barras com seção em U ou I e exibem três configurações diferentes: continuidade da mesa e continuidade da alma com reforço em diagonal ou em caixa. Finalmente, validam os resultados obtidos através da comparação com valores fornecidos por análises efetuadas via elementos finitos de casca, as quais possibilitam também avaliar a eficiência computacional da abordagem baseada na GBT.

No presente trabalho, introduz-se a cinemática de empenamento em elemento de barra geral para seção transversal de geometria qualquer, aprimorando os modelos usuais de barra

geral. Este aprimoramento é feito através de uma técnica de enriquecimento cinemático e não impõe que o empenamento seja proporcional à taxa de giro de torção. Tal contribuição significa um avanço, ainda que modesto, nas técnicas usuais de análise estrutural via MEF, principalmente naquelas disponíveis no Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.

1.4 OBJETIVOS

O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento e a implementação computacional de uma formulação de elemento finito de barra geral tridimensional laminado, seguindo uma cinemática de Reissner-Timoshenko generalizada incluindo a consideração do empenamento à torção. Desta forma, o elemento finito resultante deve ser capaz de simular, com precisão, problemas de torção e flexo-torção para seções de geometria qualquer incluindo materiais não homogêneos e barras com seções constantes por trechos.

Para se atingir tal objetivo geral, desenvolveu-se e implementou-se um programa computacional para a solução da torção livre de Saint-Venant para barras com seção transversal não homogênea, criando-se o modo de empenamento generalizado, tornando-se um dos objetivos secundários deste trabalho.

Finalmente, entender, dominar e acoplar o modo de empenamento ao código de barra geral tridimensional laminada em PACCOLA (2004) foi o último objetivo e desafio do presente trabalho.

A contribuição significativa do desenvolvimento do trabalho é seus objetivos atingidos, resultando na inclusão de geometrias quaisquer para as seções transversais, possibilitando, por exemplo, a consideração de núcleos estruturais mistos em edifícios, abertos e fechados por trechos. Incluindo a consideração de material laminado, possibilitando análises de núcleos estruturais de materiais compostos.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

A base do presente trabalho foi o desenvolvimento da formulação teórica e sua implementação computacional, de acordo com a cinemática de Reissner-Timoshenko para elementos de barra geral e com o problema de torção livre de Saint-Venant. Este último fornece, para uma seção transversal qualquer, as equações diferenciais necessárias para se encontrar a função modo de empenamento. Deve-se mencionar que os deslocamentos longitudinais presentes na teoria de flexo-torção, ou torção não-uniforme, usual (empenamento real) são proporcionais à grandeza definida pela derivada do giro da seção em relação ao eixo longitudinal.

A cinemática de empenamento adotada foi encontrada criando-se o parâmetro nodal “empenamento” (similar à derivada do giro em relação ao eixo longitudinal) adotado como parâmetro livre. Tal como o giro à flexão é aproximado independentemente da derivada do deslocamento transversal em relação ao eixo longitudinal na cinemática de Reissner-Timoshenko. O empenamento real do problema acoplado é proporcional a este novo parâmetro, seguindo modo de empenamento adimensional, ou seja, o empenamento obtido na

solução da torção livre de Saint-Venant para uma derivada do giro em relação ao eixo longitudinal de valor unitário.

Desta forma, definiu-se o procedimento numérico para se solucionar o problema de torção livre para uma seção transversal de geometria qualquer, homogênea e não-homogênea. Baseou-se esta metodologia na técnica dos resíduos ponderados aplicado sobre a equação de Poisson de empenamento, transformando a equação diferencial em sistema algébrico. Neste processo, aplicou-se a discretização secundária, previamente gerada, que descreve a cinemática de Reissner-Timoshenko para material laminado. Após a determinação dos valores de empenamento, para uma origem qualquer, determinaram-se as coordenadas do centro de cisalhamento, de forma que as tensões normais resultantes apenas da torção não causassem momento fletor. Analogamente se corrigiram os valores de empenamento adimensional para que as tensões normais vindas da torção não gerassem força normal.

Após todas essas considerações o eixo de referência da cinemática total é inicialmente, o eixo que passa pelo centro de cisalhamento da peça. Outros eixos foram testados para verificar a influência desta posição nos resultados esperados. Resultados analíticos dos mais variados foram utilizados para verificar a programação.

1.6 METODOLOGIA OPERACIONAL

As implementações numéricas foram feitas, como já comentado, em software de análise estrutural aberto disponível no SET. Este código computacional está programado em ambiente visual utilizando a linguagem Delphi® em plataforma Windows®. No qual a

consideração de elementos de barra geral e casca laminados com material em comportamento viscoplástico se encontram disponíveis. Sua entrada de dados é feita através de pré-processadores comerciais (PATRAN® e ANSYS®) e seu pós-processamento visual (in House) o tornam ambiente ótimo para desenvolvimentos de pesquisa em mecânica computacional.

Comenta-se que o autor do software é o Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola que acompanhou o desenvolvimento do presente trabalho na qualidade de co-orientador. Providenciando os comentários, no programa fonte, necessários para a boa implementação da formulação.

1.7 JUSTIFICATIVA

O presente trabalho contribui originalmente para a análise estrutural, pois não se conhecem na literatura, ou pacotes comerciais, elementos de barra geral que considerem automaticamente o empenamento e a flexo-torção para materiais laminados e seções de geometria qualquer, bem como, diferentes tipos de seções transversais ao longo do comprimento da barra.

Além disso, o Departamento de Engenharia de Estruturas (SET) da Escola de Engenharia de São Carlos (EESC) da Universidade de São Paulo (USP) vem desenvolvendo um software de análise estrutural aberto. Sua utilização por grande parte dos pesquisadores (alunos de pós-graduação) e alunos de graduação vem se incrementando desde sua criação. A implementação de elemento de barra geral com a consideração de empenamento será muito importante para se incrementar as pesquisas aplicadas em análise estrutural. Além disso,

trabalhos desenvolvidos anteriormente, por pesquisadores importantes do SET estão sendo resgatados pelo presente projeto, apesar da formulação proposta aqui ser mais abrangente que as anteriores, que abordavam barras de seção aberta de parede fina seguindo metodologia de programação em análise matricial de estruturas.

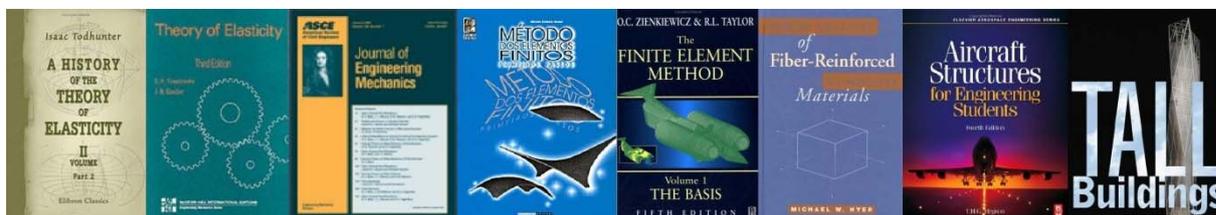
1.8 SOFTWARES UTILIZADOS

Além do software utilizado para a programação computacional, utilizaram-se outros para pós-processamento e validação de resultados, sendo que alguns são comerciais e outros acadêmicos. Listam-se os softwares empregados no desenvolvimento do presente trabalho, bem como a sua função:

- **DELPHI 6.0.** Software utilizado para o desenvolvimento computacional da cinemática proposta neste trabalho. Escolheu-se essa ferramenta para atender com maior facilidade ao acoplamento proposto inicialmente, visto que o programa que recebeu o presente código computacional está programado nesta linguagem e versão.
- **ANSYS 10.0.** Serviu como gerador da malha para os exemplos apresentados no *Capítulo 2*. O elemento utilizado foi do tipo Shell 63. E também na validação de resultados de um exemplo no *Capítulo 5*.
- **GMEC Visualizador 1.0.** Desenvolvido pelo Grupo de Mecânica Computacional, coordenado pelo Prof. Humberto Breves Coda, foi usado para a apresentação gráfica dos resultados relativos ao empenamento, *Capítulo 3*. Usado também para ilustrar os resultados referentes aos elementos de barras gerais apresentados no *Capítulo 5*.

- **FLEXO II 3.0.** Programa para o cálculo de propriedades de seções delgadas desenvolvido por Maurício C. Antunes e utilizado, a versão 3 (1999), para a comparação dos resultados referentes a este tipo de seções, apresentados no *Capítulo 3*.
- **MICROSOFT OFFICE 2003.** Conjunto de programas da Microsoft, dos quais o EXCEL, WORD e POWER POINT foram úteis na apresentação deste trabalho.
- **ACADSOFT.** Software de análise estrutural com formulação de barra geral tridimensional laminada desenvolvido em PACCOLA (2004), ao qual foi acoplada a cinemática de empenamento desenvolvida no presente trabalho.
- **PÓRTICO 3D.** Programa desenvolvido por Rodrigo Ribeiro Paccola para a geração da entrada de dados de PACCOLA (2004) e proveitoso na criação dos dados referentes à barra geral apresentados no *Capítulo 5*.
- **AUTOCAD 2002.** Usado na geração do arquivo de extensão *dxf* necessário na leitura do PÓRTICO 3D. E também na apresentação das figuras ao longo desta dissertação.

2 TORÇÃO LIVRE DE SAINT-VENANT PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS



2.1 INTRODUÇÃO

O segundo capítulo refere-se ao desenvolvimento da cinemática da torção livre de Saint-Venant pelo Método dos Elementos Finitos, considera-se a seção transversal qualquer, homogênea e não homogênea. Portanto, descrevem-se as bases teóricas e a formulação implementada computacionalmente.

Antes da formulação da torção livre de Saint-Venant aborda-se o conceito de centróide, necessário na implementação computacional. O programa que calcula o empenamento aceita como dado de entrada uma origem qualquer para a seção transversal, desta forma o cálculo do centróide é necessário, porque posteriormente o centro de cisalhamento é calculado em relação ao centróide. Adicionalmente, calculam-se também os momentos de inércia das áreas planas, que não interferem na cinemática do empenamento.

Aborda-se a cinemática da torção livre de Saint-Venant, necessária para a sua implementação computacional.

Apresenta-se o método dos elementos finitos de forma sucinta, baseado na formulação do problema da torção livre de Saint-Venant, para o estado plano de tensão, cuja equação diferencial é do tipo Poisson. O Método dos Elementos Finitos é atualmente definido como um método matemático para a solução de equações diferenciais parciais tal como a Equação de Poisson e Laplace. Devido às suas características de flexibilidade e estabilidade numérica, ele pode ser facilmente implementado em um sistema computacional, fato que explica a sua utilização neste trabalho.

Após toda a cinemática de empenamento apresentada, traça-se um esquema geral da sua implementação computacional.

Finalmente descreve-se a forma usada para os cálculos das integrais provenientes da cinemática do empenamento, que são calculadas numericamente em domínios triangulares, através dos pontos e pesos de Hammer.

2.2 PROPRIEDADES DE ÁREAS PLANAS

Determinaram-se as propriedades de áreas planas, ou seja, as propriedades da seção transversal. Considerou-se qualquer seção transversal, composta por apenas um ou por diferentes tipos de materiais. Apresenta-se apenas a formulação utilizada, maiores detalhes e conceitos encontram-se em TIMOSHENKO & GERE (1994) e BEER & JOHNSTON (1995), ou outros autores que abordam resistência dos materiais.

2.2.1 MOMENTO ESTÁTICO E CENTRÓIDE DE UMA ÁREA

A Figura 2.1 mostra uma área A situada no plano xy . Apesar de não indicado, esta área foi dividida em sub-áreas triangulares que coincidirão com os elementos finitos a serem aplicados na solução do problema de torção. Estas sub-áreas serão chamadas simplesmente de elementos.

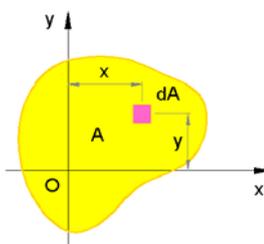


Figura 2.1. Plano de área com o elemento dA .

Se x e y forem coordenadas de um elemento infinitesimal de área dA , resulta:

$$A_{eq} = \frac{\sum_{e=1}^M \int_{A_e} E_e dA_e}{E_o} \quad (2.1)$$

onde A_{eq} é a área equivalente da seção transversal, M é o número de elementos, E_e o módulo de elasticidade variável de cada elemento finito triangular e E_o o módulo de elasticidade do material predominante na seção transversal. Por exemplo, dada uma viga de concreto armado, considerando-se um elemento situado em uma região que corresponda à área de aço, o E_e será o módulo de elasticidade do aço e E_o o módulo de elasticidade do concreto; se o elemento pertencer à área correspondente ao concreto E_e será igual ao E_o .

Define-se o momento estático de área A em relação ao eixo x como a integral:

$$Q_x = \frac{\sum_{e=1}^M \int_{A_e} E_e y dA_e}{E_o} \quad (2.2)$$

De maneira análoga, o momento estático da área A em relação ao eixo y é definido como a integral:

$$Q_y = \frac{\sum_{e=1}^M \int_{A_e} E_e x dA_e}{E_o} \quad (2.3)$$

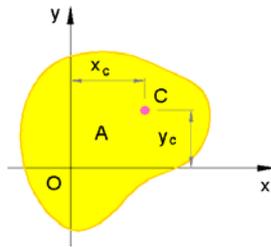


Figura 2.2. Plano de área com o centróide.

O centróide da área A é definido como o ponto C de coordenadas x e y (Figura 2.2), que satisfazem as relações:

$$x_c = \frac{Q_y}{A} \quad y_c = \frac{Q_x}{A} \quad (2.4)$$

Tendo-se as coordenadas do Centróide (C), muda-se o sistema de coordenadas que inicialmente tinha uma origem qualquer para o centróide da seção transversal, fazendo-se o sistema de coordenadas inicial menos as coordenadas do centróide, ou seja:

$$\begin{aligned} x &= x - x_c \\ y &= y - y_c \end{aligned} \quad (2.5)$$

Com o novo sistema de coordenadas calcularam-se os momentos de inércia da seção transversal, bem como a cinemática do problema da torção livre de Saint-Venant.

2.2.2 MOMENTO DE INÉRCIA DE UMA ÁREA E RAIOS DE GIRAÇÃO

Considerando-se novamente a área A situada no plano xy (Figura 2.1) e o elemento infinitesimal de área dA de coordenadas x e y . O momento de inércia da área A em relação ao eixo x e o momento de inércia de A em relação ao eixo y são definidos, respectivamente, como

$$I_x = \frac{\sum_{e=1}^M \int_{A_e} E_e y^2 dA_e}{E_o} \quad I_y = \frac{\sum_{e=1}^M \int_{A_e} E_e x^2 dA_e}{E_o} \quad (2.6)$$

Define-se agora o momento de inércia polar da área A em relação ao ponto O (origem do sistema de coordenadas) (Figura 2.3) como a integral:

$$J = \int_A \rho^2 dA \quad (2.7)$$

onde ρ é a distância de O ao elemento infinitesimal dA .

Pode-se estabelecer uma relação entre o momento de inércia polar J de certa área e os momentos de inércia retangulares I_x e I_y dessa área. Observa-se que $\rho^2 = x^2 + y^2$, portanto:

$$J = I_x + I_y \quad (2.8)$$

O raio de giração de uma área A em relação ao eixo x é definido pela grandeza r_x , que satisfaz a relação:

$$I_x = r_x^2 A \quad (2.9)$$

onde I_x é o momento de inércia de A em relação ao eixo x . Calculando o valor de r_x na Equação (2.9), tem-se:

$$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (2.10)$$

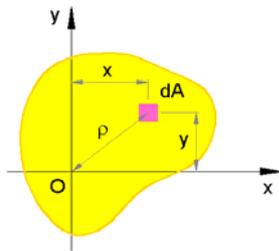


Figura 2.3. Distância da origem ao elemento infinitesimal de área.

De maneira análoga, define-se o raio de giração em relação ao eixo y :

$$r_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (2.11)$$

2.2.3 PRODUTO DE INÉRCIA

O produto de inércia de uma área plana em relação aos eixos x e y (Figura 2.3) é definido pela integral:

$$I_{xy} = \frac{\sum_{e=1}^M \int_{A_e} E_e xy dA_e}{E_o} \quad (2.12)$$

Na qual cada elemento infinitesimal de área, dA , é multiplicado pelo produto das coordenadas e a integração é estendida sobre toda a área.

2.2.4 ROTAÇÃO DE EIXOS E EIXOS PRINCIPAIS

Deseja-se determinar as quantidades correspondentes I_{x_1} , I_{y_1} referentes aos eixos principais (Figura 2.4), de uma área qualquer. Isto é feito diretamente com:

$$I_{x_1, y_1} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (2.13)$$

onde I_{x_1} representa o maior dos dois momentos e I_{y_1} o menor.

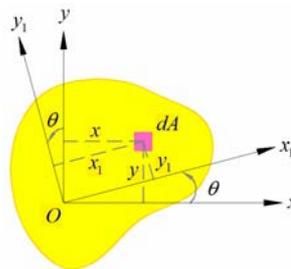


Figura 2.4. Rotação de eixos.

Localizam-se os eixos principais, pela seguinte equação:

$$\operatorname{tg} 2\theta_p = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x} \quad (2.14)$$

onde θ_p representa o ângulo θ que define os eixos principais.

2.3 TORÇÃO LIVRE DE SAINT-VENANT

Segundo ZAGOTTIS (1979)

o Método Semi-Inverso, criado por Saint-Venant, consiste em pesquisar a solução do sistema geral, não dentro do conjunto de todas as funções possíveis de três variáveis x , y , e z , mas sim dentro de um conjunto mais restrito, o conjunto das funções que possuem determinada forma. A forma de tais funções é sugerida pela experimentação ou pela intuição, mediante hipóteses gerais feitas no início do processo. Se for encontrada, dentro desse conjunto restrito, uma solução, terá sido encontrada a única solução do problema, o que é garantido pelo teorema da unicidade. Se não for encontrada a solução, a forma adotada de início deve ser revista. O estudo da torção livre de barras prismáticas é um exemplo do Método Semi-Inverso.

A cinemática da torção livre de Saint-Venant é obtida aplicando-se as hipóteses estabelecidas por Saint-Venant, de forma a atender às Equações Gerais da Elasticidade no domínio (equações diferenciais do equilíbrio, componentes de deformação, equações de compatibilidade de deformações, equações constitutivas – Lei de Hooke generalizada) e no contorno (condições de contorno) da barra. Essas equações são apresentadas de forma

resumida, apenas com o objetivo de formular o problema elástico da torção livre de Saint-Venant. Seus conceitos e deduções encontram-se em várias outras bibliografias que abordam a teoria da elasticidade, entre elas se destacam LAIER & BARREIRO (2005), VILLAÇA & GARCIA (1996), CHOU & PAGANO (1992) e TIMOSHENKO & GOODIER (1980).

O desenvolvimento, do módulo computacional de identificação da função empenamento, será inicialmente independente, do programa final. Resolve-se assim, o problema de torção livre de SAINT-VENANT (1855) em ambiente bidimensional para o estado plano de tensão. O problema a ser resolvido é descrito a seguir de acordo com PAGANO (1992).

A tensão cisalhante no cilindro de seção circular homogênea sob torção é dada por uma fórmula elementar de torção. É mostrado que satisfeitas estas tensões que governam as equações da elasticidade, bem como as condições de contorno, elas representam a solução exata para um cilindro circular. O comportamento do cilindro de seção transversal circular sob torção é semelhante em todas as seções transversais normais aos eixos restantes do plano. Ou seja, a hipótese de que as seções transversais da barra permanecem planas e giram sem distorção durante a torção leva a solução exata do problema. Esta teoria desenvolvida por COULOMB (1787) foi aplicada posteriormente por NAVIER (1864) a barras de seção transversal não circular.

Para barras de seção transversal qualquer, sujeitas a momento torçor, esta condição não prevalece e acontece o empenamento. Deve-se considerar agora uma barra com algumas seções transversais e momentos torçores aplicados nas extremidades. A solução exata para este problema foi formulada primeiramente por SAINT-VENANT (1855) usando o método semi-inverso. Fazendo inicialmente certas hipóteses quanto ao empenamento da barra

submetida à torção, e demonstrando que com tais hipóteses poderiam ser atendidas as equações de equilíbrio e as condições de contorno.

TIMOSHENKO (1980) descreve que, Kirchhoff, baseado na hipótese de que a energia de deformação e, conseqüentemente, as tensões no corpo desaparecem, quando ele é liberado das ações de forças externas, provou a unicidade das equações da elasticidade. Pelo teorema da unicidade, as hipóteses de Saint-Venant estão corretas e a solução obtida é exata para o problema de torção livre.

2.3.1 CINEMÁTICA

Orientando-se pelas deformações que surgiam na barra circular, Saint-Venant assumiu que as deformações da barra de seção qualquer submetida à torção obedece aos seguintes princípios:

1. A projeção de qualquer seção transversal deformada no plano $x - y$ (Figura 2.5) gira como um corpo rígido e, o ângulo de torção por unidade de comprimento é constante;
2. Cada ponto é deslocado na direção longitudinal (ocorre empenamento).

Ele ainda assumiu que este empenamento é o mesmo para todas as seções transversais, ou seja, o deslocamento w é independente da direção z . Este comportamento pode ser visualizado considerando os deslocamentos nas hipóteses 1 e 2 ocorrendo separadamente. A rotação considerada em 1 é a mesma que ocorre no cilindro circular. Acompanhando esta rotação então, tem-se o deslocamento longitudinal descrito em 2.

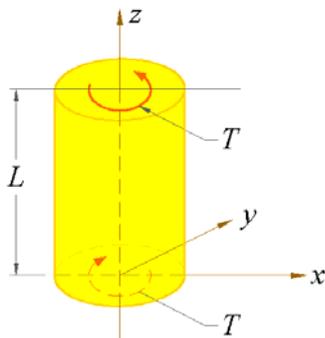


Figura 2.5. Torção de uma barra cilíndrica.

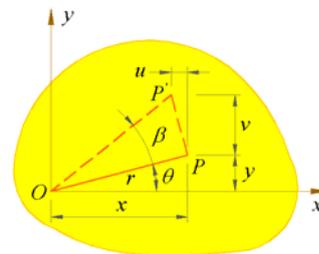


Figura 2.6. Deslocamento gerado pela rotação.

Esta condição de carregamento é mostrada na Figura 2.5. Os eixos x e y são considerados no plano inferior da seção transversal. A direção z é paralela ao comprimento do cilindro. O momento torçor T na extremidade do plano é positivo se o vetor que representa T (pela regra da mão direita) atua na direção da normal para fora deste plano.

O deslocamento de um ponto P qualquer gerado pela rotação é mostrado na Figura 2.6. A linha OP girada de um pequeno ângulo β em torno de O . O corpo é posicionado tal que o centro de torção coincida com a direção z . Desde que o ângulo de torção β seja pequeno, o arco PP' é definido como sendo uma linha reta normal à OP . Portanto, as componentes x e y de deslocamento de P , são escritas como:

$$u = -r\beta \sin \theta = -\beta y$$

$$v = r\beta \cos \theta = \beta x$$

Estes são acompanhados pelo deslocamento w na direção z (empenamento), onde:

$$w = w(x, y)$$

Desde que o empenamento de cada seção transversal seja considerado o mesmo, w é função só de x e y , não é função de z . Observa-se que a Figura 2.6 é a vista da extremidade de uma seção transversal mostrando a posição deformada de OP . Por conveniência, para a

seção transversal na origem, assume-se que $u = v = 0$. Assim se a seção transversal da Figura 2.6 está a uma distância z da origem, o ângulo de torção é dado por:

$$\beta = \alpha z$$

onde α é o ângulo de rotação por unidade de comprimento ao longo da direção z .

Conseqüentemente, os **deslocamentos** podem ser escritos da seguinte forma:

$$u = -\alpha y z$$

$$v = \alpha x z$$

(2.15)

$$w = w(x, y)$$

De acordo com teoria da elasticidade, as Equações (2.15) podem ser consideradas como parte da solução do problema no método semi-inverso. Deve-se mostrar agora que a solução para os estados planos de tensão e deformação – que tem origem nas Equações (2.15) e que também satisfazem às equações de equilíbrio e às condições de contorno – podem ser obtidas.

As hipóteses estabelecidas anteriormente representam a solução do problema e este tem uma única solução. Tem-se os deslocamentos descritos pelas Equações (2.15) e o problema de torção livre pode ser formulado em termos das tensões ou dos deslocamentos w .

Para a formulação do problema da torção livre é necessário definir as equações gerais da elasticidade para este problema específico.

As **componentes de deformação**, para o problema da elasticidade linear de um sólido, são constituídas pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\tag{2.16}$$

onde ε é a deformação linear específica (ou alongamento relativo) em uma direção e γ a deformação angular (ou distorção) associada a um par de direções ortogonais. Onde os índices referem-se ao sistema cartesiano global xyz .

Combinando as Equações (2.16) com as Equações (2.15), têm-se as **componentes de deformação** para o problema da torção livre de Saint-Venant:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y\tag{2.17}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x$$

A **Lei de Hooke**, para o problema de um sólido elástico-linear, é dada por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}\end{aligned}\tag{2.18}$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal, σ a tensão normal e τ a tensão cisalhante. O módulo de elasticidade transversal é calculado pela equação:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

As Equações (2.18) podem ser resolvidas para as componentes de tensão em termos das componentes de deformação, que resulta na **Lei de Hooke generalizada**:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\varepsilon_x + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} \\ \sigma_y &= 2G\varepsilon_y + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \\ \sigma_z &= 2G\varepsilon_z + \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx} \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde λ é a constante de Lamé, dada por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Aplicando as componentes de deformação, Equação (2.17) na Equação (2.19) têm-se as expressões que permitem encontrar as tensões para o problema da torção livre de Saint-Venant em função do deslocamento w e do ângulo de torção por unidade de comprimento α :

$$\tau_{xz} = G\gamma_{xz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha y\right)$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha x\right) \quad (2.20)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$$

Apesar da solução numérica desenvolvida nesta dissertação não fazer uso de todo o procedimento matemático descrito a seguir, este será mantido de forma a completar as informações técnicas para o bom entendimento do problema estudado.

Das duas primeiras Equações (2.20), observa-se a permanência das componentes de tensão, τ_{xz} e τ_{yz} , e que são funções somente de x e y .

Pode-se agora eliminar w das Equações (2.20), derivando a primeira equação em relação à y e a segunda em relação à x :

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - G\alpha$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = G \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + G\alpha$$

e subtraindo-as, tem-se a **equação de compatibilidade** para o estado plano de tensão:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} = -2G\alpha \quad (2.21)$$

A equação de compatibilidade tridimensional, para o problema sólido elástico-linear, é escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right)$$

(2.22)

A equação de compatibilidade em termos de deformação para o problema de torção livre também pode ser obtida integrando as equações de compatibilidade tridimensional, Equações (2.22) e substituindo nas Equações (2.17), resultando:

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = -2\alpha$$

As **equações de equilíbrio** gerais são:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

onde F são as forças de massa (por unidade de volume).

Reescrevendo a terceira equação de equilíbrio, com força de massa igual à zero, tem-se a **equação de equilíbrio** para o estado plano de tensões envolvendo apenas tensões cisalhantes:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (2.24)$$

Como $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$, as duas outras equações de equilíbrio com forças de massa iguais à zero, também são satisfeitas.

Inserindo uma **função de tensão** ϕ , introduzida por PRANDTL (1903), onde ϕ é função de x e de y , tais como:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (2.25)$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

A Equação (2.24) é satisfeita, lembrando-se que $\phi = 0$ no contorno. Substituindo a Equação (2.25) na Equação (2.21) resulta:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\alpha$$

ou:

$$\nabla^2 \phi = -2G\alpha \quad (2.26)$$

onde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Esta equação representa a solução do problema, já que se ela for satisfeita, conseqüentemente as equações de equilíbrio e as condições de contorno também estarão satisfeitas.

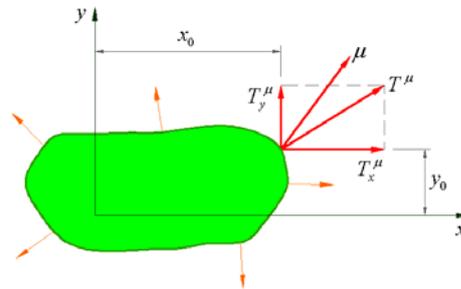


Figura 2.7. Superfície de forças.

Considerando o corpo mostrado na Figura 2.7. A distribuição de força na superfície (tensão) é especificada pelas componentes T_x^μ , T_y^μ e T_z^μ , quando μ é um vetor unitário normal à superfície e com direção oposta a ela. As coordenadas dos pontos na superfície do contorno são denotadas por x_o, y_o, z_o , estas são relacionadas com as equações na superfície de contorno.

Isolando um tetraedro infinitesimal $OABC$ mostrado na Figura 2.8, onde a face inclinada encontra-se no contorno, e expressando o equilíbrio de forças, encontram-se as **condições de contorno** para qualquer sólido elástico-linear, dadas pelas relações:

$$\begin{aligned} T_x^\mu &= \sigma_{x_o} \mu_x + \tau_{xy_o} \mu_y + \tau_{xz_o} \mu_z \\ T_y^\mu &= \tau_{xy_o} \mu_x + \sigma_{y_o} \mu_y + \tau_{yz_o} \mu_z \\ T_z^\mu &= \tau_{xz_o} \mu_x + \tau_{yz_o} \mu_y + \sigma_{z_o} \mu_z \end{aligned} \quad (2.27)$$

onde $\sigma_{x_o}, \tau_{xy_o}$, etc. são componentes de tensão determinadas no contorno (x_o, y_o, z_o) , e μ_x, μ_y, μ_z são as direções dos cossenos diretores do vetor unitário normal, com direção oposta à superfície, μ em relação à x , y e z , respectivamente (ou simplesmente as componentes de μ ao longo das três direções coordenadas).

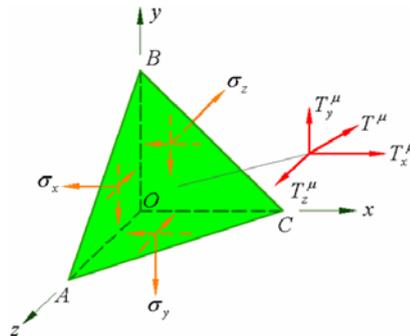


Figura 2.8. Equilíbrio no contorno.

Considerando as condições de contorno dadas pelas Equações (2.27). Na superfície lateral, onde não há forças externas; conseqüentemente, nestas superfícies $T_x^\mu = T_y^\mu = T_z^\mu = 0$. Desde que as normais a estas superfícies sejam perpendiculares à direção z , μ_z deve ser igual a zero.

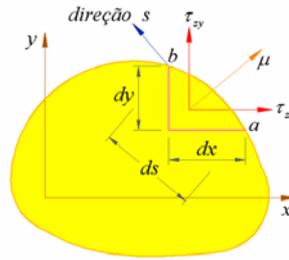


Figura 2.9. Tensões cisalhantes no plano z , próximo do contorno.

As duas primeiras das Equações (2.27) são satisfeitas e a terceira, dada pela relação (o subscrito “ o ” é omitido para o estado plano de tensão):

$$\tau_{xz}\mu_x + \tau_{yz}\mu_y = 0 \quad (2.28)$$

Como τ_{xz} é componente de tensão cisalhante no plano x atuando na direção z , τ_{zx} é no plano z atuando na direção x , e $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

Pela Figura 2.9, elemento bidimensional, verifica-se que o lado esquerdo da Equação (2.28) é igual à componente de tensão cisalhante no plano z normal à superfície de contorno lateral, ou:

$$\tau_{z\mu} = \tau_{zx}\mu_x + \tau_{zy}\mu_y = 0 \quad (2.29)$$

Desde que seja exigido que esta componente desapareça, a resultante da tensão cisalhante na seção transversal (plano z) deve ser tangente ao contorno. Novamente, de acordo com a Figura 2.9:

$$\mu_x = \frac{dy}{ds} \quad \mu_y = -\frac{dx}{ds}$$

supondo s o aumento de a para b . Usando estas relações e as Equações (2.25), a Equação (2.28) é reescrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = 0$$

e aplicando a regra de diferenciação:

$$\frac{d\phi}{ds} = 0$$

Assim a função de tensão ϕ deve ser constante ao longo do contorno da seção transversal. Se o contorno é simplesmente apoiado, a constante pode ser escolhida arbitrariamente (esta constante não interfere nas componentes de tensão, é somente a causa do deslocamento de corpo rígido), de modo que no seguinte problema ela é suposta igual a zero ou:

$$\phi = 0 \quad \text{no contorno} \quad (2.30)$$

Se esta condição for atendida, logo, a Equação (2.28) é satisfeita.

Tem-se, para este ponto, que a tensão estabelecida é definida por ϕ , atendendo a Equação (2.26) e a Equação (2.30), representa a solução do problema em elasticidade para este caso particular de barra cilíndrica sem forças aplicadas na superfície lateral. O objetivo agora é determinar quais forças (por unidade de área) devem ser aplicadas nas extremidades das superfícies planas tais que estas tensões existam. Desde que as extremidades planas sejam normais a direção z :

$$\mu_x = \mu_y = 0 \quad \mu_z = -1$$

para o plano $z = 0$, e:

$$\mu_x = \mu_y = 0 \quad \mu_z = +1$$

para o plano $z = L$. Substituindo estes valores dos cossenos diretores nas Equações (2.27), têm-se as componentes de forças de superfície distribuídas de acordo com:

$$T_x^\mu = \mp \tau_{xz} \quad T_y^\mu = \mp \tau_{yz} \quad T_z^\mu = 0 \quad (2.31)$$

devem ser aplicadas nas extremidades planas para atender as condições de contorno. Aqui os sinais superiores referem-se ao plano $z = 0$, e os sinais inferiores ao plano $z = L$.

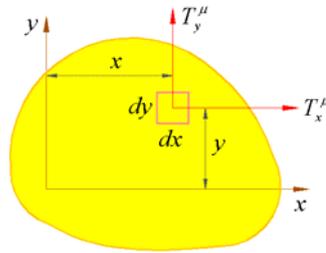


Figura 2.10. Tensões no contorno das extremidades planas.

Da Figura 2.10, verifica-se que a componente y da resultante de força em cada extremidade plana, tendo em vista as Equações (2.25), é:

$$\iint T_y^\mu dx dy = \mp \iint \tau_{yz} dx dy = \pm \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy \quad (2.32)$$

A última integração dupla pode ser tirada da primeira execução da integração interna ao longo da direção x como mostrado na Figura 2.11, ou:

$$\iint T_y^\mu dx dy = \pm \int_C \left(\int_{x=x_1}^{x=x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx \right) dy = \pm \int_C \left(\int_{x=x_1}^{x=x_2} d\phi \right) dy = \pm \int_C (\phi_2 - \phi_1) dy = 0 \quad (2.33)$$

onde $x = x_1(y)$ é a equação da parte esquerda do contorno da curva C e $x = x_2(y)$ é a equação da parte direita.

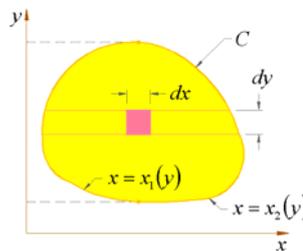


Figura 2.11. Integração sobre o plano da extremidade.

Desde que ϕ_2 e ϕ_1 sejam avaliados ao longo de x_1 e x_2 (no contorno), ambos desaparecem. Essa observação é feita caso suponha-se $\phi = c$ no contorno onde c é uma constante diferente de zero, $\phi_2 - \phi_1$ também são eliminados. Da mesma forma, pode ser mostrado que:

$$\iint T_x^\mu dx dy = 0 \quad (2.34)$$

Assim, as componentes x e y da resultante de forças em cada extremidade do plano são iguais a zero e a carga de superfície aplicada que age sobre cada extremidade é estaticamente equivalente ao momento sobre a direção z . O momento T , como mostrado na Figura 2.10, é:

$$T = \mp \iint (T_y^\mu x - T_x^\mu y) dx dy \quad (2.35)$$

Este pode ser expresso em termos da função de tensão ϕ . Substituindo as Equações (2.25) e as Equações (2.31) na Equação (2.35):

$$T = - \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} x dx dy - \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} y dx dy \quad (2.36)$$

Fazendo a integração interna do primeiro termo por partes:

$$\int_{x=x_1}^{x=x_2} \frac{\partial \phi}{\partial x} x dx = x \phi \Big|_{x=x_1}^{x=x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \phi dx = x_2 \phi_2 - x_1 \phi_1 - \int_{x_1}^{x_2} \phi dx = - \int_{x_1}^{x_2} \phi dx$$

desde que $\phi_2 = \phi_1 = 0$ no contorno. Conseqüentemente, o primeiro termo da Equação (2.36) pode ser escrito da seguinte forma:

$$- \iint \frac{\partial \phi}{\partial x} x dx dy = - \iint \phi dx dy$$

Da mesma forma:

$$- \iint \frac{\partial \phi}{\partial y} y dx dy = - \iint \phi dx dy$$

Portanto, o **momento torçor** para o estado plano de tensão é:

$$T = 2 \iint \phi dx dy \quad (2.37)$$

Observa-se que as duas integrais na Equação (2.36) são iguais; assim cada uma das componentes de tensão τ_{xz} e τ_{yz} contribuem para a metade do momento.

A força aplicada na superfície por unidade de área na extremidade plana como nas Equações (2.31) são fórmulas completamente restritas que raramente serão encontradas em aplicações práticas. Devido ao princípio de Saint-Venant, entretanto, a solução para torção dada para esta seção pode ser usada para qualquer carga aplicada na extremidade, contanto que a resultante da carga da extremidade satisfaça às condições das Equações (2.33), (2.34) e (2.37). Em outras palavras, se a carga aplicada é um momento de valor T , contudo sua distribuição sobre a extremidade plana, em seções a uma pequena distância dos planos da extremidade (se as dimensões da seção transversal forem pequenas em relação ao comprimento) tem as tensões dadas pelas Equações (2.25), Equação (2.26) e Equação (2.30).

Voltando à análise, nota-se que a solução do problema de torção livre, bem como qualquer problema estrutural em elasticidade linear, devem satisfazer às 15 equações dominantes da elasticidade. Desde que também sejam satisfeitas as condições de contorno, a solução é única.

Para o desenvolvimento da formulação numérica, resolver-se-á a Equação diferencial de Equilíbrio (2.24) com a Condição de Contorno (2.29). Resolvendo-se diretamente o empenamento w utilizando-se a Equação (2.20). Tal empenamento será proporcional ao parâmetro α que é o giro por unidade de comprimento e que será chamado parâmetro de empenamento. Este parâmetro será uma variável incógnita do elemento de barra geral e o empenamento da seção, no caso geral, não será constante no comprimento da barra, mas sim aproximado como $\alpha(\xi) = \phi_i^l \alpha_i^l$, onde α_i^l são os valores nodais e ϕ_i as funções de forma.

Para completar o texto referente aos processos matemáticos descreve-se resumidamente a teoria para o estado plano de deformação. Neste caso restará uma equação em termos de w :

$$\nabla^2 w = 0 \quad (2.38)$$

Esta é a equação de Laplace, que é mais facilmente solucionada do que a equação do tipo Poisson, Equação (2.26), na formulação para o estado plano de tensão. As condições de contorno para o estado plano de deformação, entretanto, não são simples como a Equação (2.30). Substituindo as Equações (2.20) nas Equações (2.28), as condições de contorno ficam:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} - y\alpha \right) \mu_x + \left(\frac{\partial w}{\partial y} - x\alpha \right) \mu_y = 0 \quad \text{no contorno} \quad (2.39)$$

e o momento é dado por:

$$T = G \iint \left(x^2 \alpha + y^2 \alpha + x \frac{\partial w}{\partial y} - y \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx dy \quad (2.40)$$

2.3.2 PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO (RESUMO E NOTAÇÃO INDICIAL)

O problema da torção livre de Saint-Venant, considerando o estado plano de tensão, no qual a deformação na direção z não é impedida, se compõe da equação de Poisson, Equação (2.26). A Figura 2.12 mostra uma barra prismática com comprimento na direção z e seção transversal no plano $x-y$, com domínio Ω e contorno Γ . No contorno Γ há um sistema ortogonal com vetor tangente n e normal $\mu = [\mu_x, \mu_y]^T$.

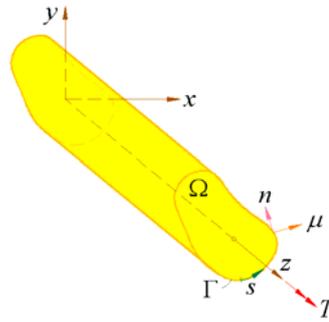


Figura 2.12. Torção de uma barra prismática.

A superfície lateral da barra tem torção livre. Conseqüentemente, o vetor τ deve ser perpendicular à μ no contorno Γ . Negligenciando as forças de massa, o problema de valor de contorno fica:

$$\tau_{3i,i} = 0 \quad i = (1,2) \quad \text{no } \Omega \tag{2.41}$$

$$\tau_{3i}\mu_i = \tau_{3\mu} = 0 \quad i = (1,2) \quad \text{no } \Gamma$$

de acordo com as Equações de Equilíbrio (2.24) e Condições de Contorno (2.29), respectivamente. O sistema de coordenadas cartesianas em notação indicial é escrito assumindo-se a relação:

$$x \leq 1, \quad y \leq 2, \quad z \leq 3 \tag{2.42}$$

2.4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Uma vez definido o problema de valor de contorno que se deseja resolver passa-se para a solução do mesmo por meio do Método dos Elementos Finitos. O problema definido

anteriormente é um problema do tipo contínuo, uma vez que todos os pontos do domínio são incluídos tanto na descrição quanto na solução do problema. O MEF transforma este domínio contínuo em um domínio discreto, onde a solução é encontrada em pontos discretos do domínio de cálculo, por exemplo, em pontos de união de uma malha triangular (nós).

O caminho utilizado aqui, para se derivar o MEF mais rápido, é a aplicação de métodos residuais para a obtenção das equações discretas. Neste caso, será empregado o método dos resíduos ponderados (Galerkin), também com a particularidade de que as equações de aproximação se referem a subdomínios discretos (elementos da malha).

2.4.1 EQUAÇÃO DE EQUILÍBRIO EM FORMA FRACA PELA APLICAÇÃO DE RESÍDUOS PONDERADOS

Escrevendo-se a Lei de Hooke generalizada (2.20), de acordo com a Notação Indicial mostrada em (2.42), tem-se:

$$\tau_{31} = G(w_{,1} - \alpha x_2) \quad (2.43)$$

e:

$$\tau_{32} = G(w_{,2} + \alpha x_1) \quad (2.44)$$

A Equação de Equilíbrio (2.24) é a primeira das Equações (2.41), que pode ser escrita na forma variacional, multiplicando-se a equação diferencial pela variação δw , onde $w(x, y)$ é a função peso:

$$\delta w \tau_{3i,i} = 0 \quad (2.45)$$

Integrando-se ambos os lados da Equação (2.45) sobre o domínio Ω resulta:

$$\int_{\Omega} \delta w \tau_{3i,i} d\Omega = 0 \quad (2.46)$$

Integrando por partes, tem-se:

$$\int_{\Omega} \delta w \tau_{3i,i} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta w \tau_{3i} \mu_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta w_{,i} \tau_{3i} d\Omega = 0 \quad (2.47)$$

Como a função $w(x, y)$ é arbitrária pode-se escolher $w(x, y)$ de tal forma que a seguinte Condição de Contorno seja satisfeita:

$$\delta w = cte \quad \text{sobre } \Gamma \quad (2.48)$$

Assim, da segunda equação (2.41), tem-se que a integral no contorno em (2.47) é eliminada. Logo, a Equação (2.47) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \delta w_{,i} \tau_{3i} d\Omega = 0 \quad (2.49)$$

Substituindo (2.43) e (2.44) em (2.49), tem-se:

$$\int_{\Omega} \delta w_{,1} G(w_{,1} - \alpha x_2) + \delta w_{,2} G(w_{,2} - \alpha x_1) d\Omega = 0$$

ou ainda, após fazer as simplificações possíveis:

$$\int_{\Omega} G[(\delta w_{,1} w_{,1}) + (\delta w_{,2} w_{,2})] d\Omega = \alpha \int_{\Omega} G(\delta w_{,1} x_2 - \delta w_{,2} x_1) d\Omega \quad (2.50)$$

A Equação (2.50) é a forma fraca da Equação de Equilíbrio e das Condições de Contorno naturais (2.41) que deve atender às condições de contorno essenciais (em deslocamentos). A forma é dita fraca por ser uma equação menos geral, com ordens de derivação menores que a original. O Método dos Elementos Finitos será reconstruído sobre a Equação (2.50) aplicando-se a discretização do domínio descrita como se segue.

2.4.2 DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO

A próxima etapa na aplicação do MEF é a subdivisão do domínio original em uma série de subdomínios menores, este processo é chamado de discretização. Os subdomínios podem ser de uma forma geométrica qualquer, tais como triângulos, retângulo, quadriláteros, pentágonos, etc. Pode-se também misturar subdomínios de formas geométricas distintas, tais como triângulos e retângulos. Cada subdomínio é chamado de elemento. A forma mais simples de elemento utilizado na prática é o triângulo, ele pode aproximar domínios de formas quaisquer com boa precisão. Em cada elemento são definidos pontos característicos, nos quais a solução será determinada. No caso mais simples de elementos triangulares são escolhidos os três vértices dos mesmos como pontos característicos, os quais são chamados de nós. O número de elementos utilizados na prática depende da natureza do domínio em estudo e do comportamento particular da solução. Em geral a precisão da solução aumenta com o número de elementos utilizados, havendo, no entanto um limite para o número de elementos, a partir do qual os erros de arredondamento se acumulam de tal forma que um aumento do número de elementos não traz uma melhora na precisão. Por outro lado, a precisão da solução depende também muito do tipo da função de aproximação utilizada (função linear, função quadrática, função cúbica, exponencial, etc.), do tipo de elemento utilizado (triangular, retangular, etc.).

O domínio discretizado é comumente designado por malha, do inglês mesh, quando deveria ser denominado como uma rede de malhas. E a rede é subdividida em elementos (subdomínios), os quais são as malhas da rede (domínio).

No presente trabalho, optou-se por um elemento triangular com variação quadrática para os deslocamentos, que resulta em variação linear para as tensões e deformações.

Quando expressa em coordenadas cartesianas, as funções de interpolação para o elemento triangular são complexas algebricamente. As coordenadas de área (coordenadas homogêneas) são uma forma de simplificar as funções de interpolação. Apesar de adotar-se o elemento triangular com variação quadrática para os deslocamentos, descreve-se o elemento finito triangular linear com o objetivo de introduzir-se o conceito de coordenadas homogêneas, procedendo-se de acordo com ASSAN (2003).

2.4.2.1 Elemento finito triangular linear

O elemento triangular linear tem como função interpoladora para o empenamento (deslocamento na direção z) o seguinte polinômio de primeiro grau:

$$w(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y \quad (2.51)$$

sendo o elemento mostrado na Figura 2.13.

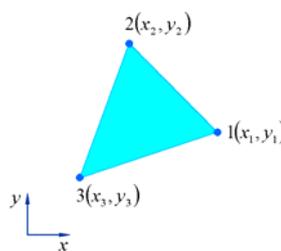


Figura 2.13. Elemento finito triangular linear.

O elemento triangular está inicialmente em coordenadas cartesianas e será formulado em coordenadas triangulares ou homogêneas.

O elemento finito triangular é numerado no sentido anti-horário e seus lados têm o número do nó oposto.

O sistema de coordenadas homogêneas é mostrado na Figura 2.14. Estas coordenadas relacionam-se ao lado do elemento triangular, variando de 0 a 1. Portanto, as coordenadas homogêneas são definidas da seguinte forma: ξ_1 é a distância relativa entre os nós 1 e 3 ao longo do lado 2 de comprimento l_{13} , definem-se as outras coordenadas de forma análoga.

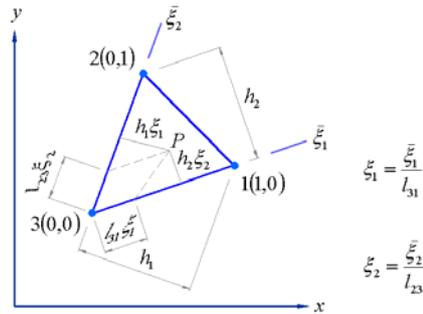


Figura 2.14. Coordenadas homogêneas.

Introduz-se um ponto P , interno ao triângulo, com coordenadas x e y para se obter as relações entre as coordenadas cartesianas e homogêneas.

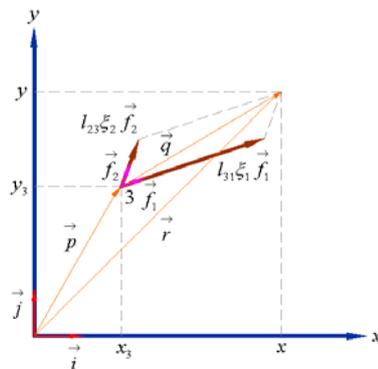


Figura 2.15. Representação vetorial.

A Figura 2.15 mostra a representação das bases vetoriais \vec{i} , \vec{j} e \vec{f}_1 , \vec{f}_2 definidas respectivamente em relação aos sistemas x , y e ξ_1 , ξ_2 . Portanto, escreve-se o vetor posição do ponto P :

$$\vec{r} = \vec{p} + \vec{q} = x \vec{i} + y \vec{j} \quad (2.52)$$

Os vetores P e Q podem ter essa representação:

$$\vec{p} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} \quad (2.53)$$

$$\vec{q} = l_{13} \xi_1 \vec{f}_1 + l_{23} \xi_2 \vec{f}_2$$

Substituindo-se as Equações (2.53) na Equação (2.52):

$$\vec{r} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + l_{13} \xi_1 \vec{f}_1 + l_{23} \xi_2 \vec{f}_2 \quad (2.54)$$

Os vetores $l_{13} \vec{f}_1$ e $l_{23} \vec{f}_2$ projetados nas direções x e y são:

$$l_{13} \vec{f}_1 = (x_1 - x_3) \vec{i} + (y_1 - y_3) \vec{j} \quad (2.55)$$

$$l_{23} \vec{f}_2 = (x_2 - x_3) \vec{i} + (y_2 - y_3) \vec{j}$$

Substituindo as Equações (2.55) na Equação (2.54), tem-se:

$$x \vec{i} + y \vec{j} = x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + \xi_1 (x_1 - x_3) \vec{i} + \xi_2 (x_2 - x_3) \vec{i} + \xi_1 (y_1 - y_3) \vec{j} + \xi_2 (y_2 - y_3) \vec{j} \quad (2.56)$$

resultando:

$$x = x_3 + \xi_1 (x_1 - x_3) + \xi_2 (x_2 - x_3) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + (1 - \xi_1 - \xi_2) x_3 \quad (2.57)$$

$$y = y_3 + \xi_1 (y_1 - y_3) + \xi_2 (y_2 - y_3) = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + (1 - \xi_1 - \xi_2) y_3$$

As coordenadas homogêneas também podem ser explicadas como relações entre as áreas dos triângulos definidos pelos nós 1,2,3 e o ponto P , de acordo com a Figura 2.16.

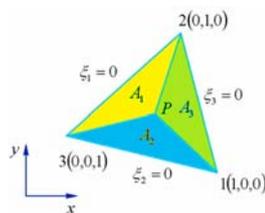


Figura 2.16. Triângulo dividido em áreas.

A altura do triângulo $1P3$ é igual à $\xi_2 h_2$. Da Figura 2.14, verifica-se que se o ponto P coincidissem com o nó 3, o produto $\xi_2 h_2$ seria nulo, já que nesse nó $\xi_2 = 0$; porém, se o ponto P coincidissem com o nó 2, o produto $\xi_2 h_2$ seria igual a h_2 , já que no nó 2 tem-se $\xi_2 = 1$.

Portanto a área A_2 do triângulo $1P3$ é dada por:

$$A_2 = \frac{1}{2} l_{13} \xi_2 h_2 \quad (2.58)$$

Analogamente, tem-se para a área A_1 do triângulo $2P3$:

$$A_1 = \frac{1}{2} l_{23} \xi_1 h_1 \quad (2.59)$$

De acordo com a Figura 2.14 tem-se o valor da área A do triângulo 123 :

$$A = \frac{1}{2} l_{13} h_2 = \frac{1}{2} l_{23} h_1 \quad (2.60)$$

Dividindo-se A_1 e A_2 por A obtém-se:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A} \quad \text{e} \quad \xi_2 = \frac{A_2}{A} \quad (2.61)$$

E a seguinte relação deve ser obedecida:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \quad (2.62)$$

Dividindo-se a Equação (2.62) por A , tem-se:

$$1 = \xi_1 + \xi_2 + \frac{A_3}{A} \quad (2.63)$$

Portanto, define-se:

$$\xi_3 = \frac{A_3}{A} \quad (2.64)$$

Substituindo-se a relação (2.64) na Equação (2.63):

$$1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \quad (2.65)$$

Lembra-se que as expressões para as áreas A_1 , A_2 e A_3 , em termos das coordenadas dos vértices do triângulo 123:

$$A_1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad A_2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad A_3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} \quad (2.66)$$

Substituindo as Equações (2.66) nas Equações (2.61) e (2.64) encontram-se as coordenadas homogêneas em relação às coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2A} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)] \\ \xi_2 &= \frac{1}{2A} [x_3 y_1 - x_1 y_3 + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)] \\ \xi_3 &= \frac{1}{2A} [x_1 y_2 - x_2 y_1 + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)] \end{aligned} \quad (2.67)$$

onde A é a área do elemento triangular, dadas pelas coordenadas dos três vértices do triângulo 123, e pode ser obtida da relação:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (2.68)$$

ou seja:

$$A = \frac{1}{2} [x_2 y_3 + x_3 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2] \quad (2.69)$$

Substituindo-se a Equação (2.65) nas Equações (2.57):

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \\ y &= \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 \end{aligned} \quad (2.70)$$

Que são as relações entre as coordenadas cartesianas e homogêneas.

De acordo com a Equação (2.51):

$$w_i = a_1 + a_2 x_i + a_3 y_i \quad \text{com } i = 1, 2, 3. \quad (2.71)$$

que leva ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad (2.72)$$

Resolvendo os coeficientes polinomiais do sistema (2.72) encontram-se:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2A} [w_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + w_2(x_3 y_1 - x_1 y_3) + w_3(x_1 y_2 - x_2 y_1)] \\ a_2 &= \frac{1}{2A} [w_1(y_2 - y_3) + w_2(y_3 - y_1) + w_3(y_1 - y_2)] \\ a_3 &= \frac{1}{2A} [w_1(x_3 - x_2) + w_2(x_1 - x_3) + w_3(x_2 - x_1)] \end{aligned} \quad (2.73)$$

Substituindo a Equação (2.73) na Equação (2.51):

$$w(x, y) = \frac{1}{2A} \left\{ \begin{aligned} &[(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]w_1 + \\ &[(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y]w_2 + \\ &[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y]w_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.74)$$

Escrevendo-se:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2A} [x_2 y_3 - x_3 y_2 + x(y_2 - y_3) + y(x_3 - x_2)] \\ \phi_2 &= \frac{1}{2A} [x_3 y_1 - x_1 y_3 + x(y_3 - y_1) + y(x_1 - x_3)] \\ \phi_3 &= \frac{1}{2A} [x_1 y_2 - x_2 y_1 + x(y_1 - y_2) + y(x_2 - x_1)] \end{aligned} \quad (2.75)$$

Levando-se em consideração as definições (2.75), a Equação (2.74) pode ser escrita:

$$w = \sum_{i=1}^3 \phi_i w_i \quad (2.76)$$

ou $\phi_i w$ em notação indicial.

Esta equação expressa os deslocamentos em um ponto sobre o elemento em termos dos deslocamentos nodais do elemento. Para este elemento, as funções ϕ_i devem ser polinômios de primeira ordem em ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 . A variação das funções de forma está representada na Figura 2.17, permitindo visualizar como os deslocamentos variam. Por exemplo, para $\xi_1 = 1$ tem-se $\xi_2 = \xi_3 = 0$, e os deslocamentos w tem a variação mostrada na Figura 2.17.

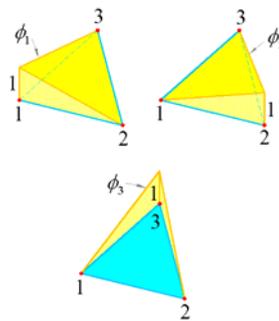


Figura 2.17. Funções de forma para o elemento triangular linear.

Comparando-se as Equações (2.75) com as Equações (2.67) chega-se à seguinte conclusão:

$$\phi_1 = \xi_1 \quad \phi_2 = \xi_2 \quad \phi_3 = \xi_3 \quad (2.77)$$

2.4.2.2 Elemento finito triangular quadrático

Neste caso, a localização do comportamento do elemento é definida por meio do campo dos deslocamentos contínuos aproximados por polinômios completos do segundo grau em x e y :

$$w(x, y) = d_1 + d_2x + d_3y + d_4x^2 + d_5xy + d_6y^2 \quad (2.78)$$

Nos lados do elemento, os deslocamentos também têm variação quadrática. Considerando-se somente dois nós em cada lado, a compatibilidade dos deslocamentos entre os elementos poderia não existir, porque um número infinito de parábolas passaria pelos dois pontos. Entretanto, desde que sejam 6 parâmetros desconhecidos em (2.78), o elemento deve ter 6 nós. Colocando três nós adicionais, cada lado terá três nós. Desde que seja somente uma parábola que passe através dos três pontos, a compatibilidade dos deslocamentos entre os elementos é assegurada. O elemento finito triangular com variação do deslocamento quadrática é ilustrado na Figura 2.18.

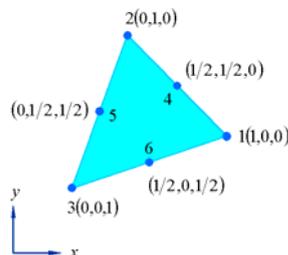


Figura 2.18. Elemento finito triangular com variação quadrática.

Escrevendo-se a Equação (2.78) em coordenadas de área tem-se:

$$w = c_1 + c_2\xi_1 + c_3\xi_2 + c_4\xi_1^2 + c_5\xi_1\xi_2 + c_6\xi_2^2 \quad (2.79)$$

Assim têm-se as funções $w(\xi_1, \xi_2)$:

$$\text{nó 1: } \xi_1 = 1 \quad \xi_2 = 0 \quad \xi_3 = 0 \quad w_1 = c_1 + c_2 + c_4$$

$$\text{nó 2: } \xi_1 = 0 \quad \xi_2 = 1 \quad \xi_3 = 0 \quad w_2 = c_1 + c_3 + c_6$$

$$\text{nó 3: } \xi_1 = 0 \quad \xi_2 = 0 \quad \xi_3 = 1 \quad w_3 = c_1$$

$$\text{nó 4: } \xi_1 = \frac{1}{2} \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \quad \xi_3 = 0 \quad w_4 = c_1 + \frac{c_2}{2} + \frac{c_3}{2} + \frac{c_4}{4} + \frac{c_5}{4} + \frac{c_6}{4} \quad (2.80)$$

$$\text{nó 5: } \xi_1 = 0 \quad \xi_2 = \frac{1}{2} \quad \xi_3 = \frac{1}{2} \quad w_5 = c_1 + \frac{c_3}{2} + \frac{c_6}{4}$$

$$\text{nó 6: } \xi_1 = \frac{1}{2} \quad \xi_2 = 0 \quad \xi_3 = \frac{1}{2} \quad w_6 = c_1 + \frac{c_2}{2} + \frac{c_4}{4}$$

Escrevendo-se o sistema de equações (2.80) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo-se o sistema de equações chega-se aos resultados dos coeficientes c_i , com

i igual ao número de nós do elemento e variando de 1 a 6:

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & -4 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{Bmatrix}$$

Substituindo os valores de c_i na Equação (2.79) e explicitando-se as funções aproximadoras em relação aos deslocamentos nodais escreve-se:

$$w = \phi_i w_i \quad (2.81)$$

com as funções de forma ϕ_i dadas pelas relações:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 2\xi_1^2 - \xi_1 = \xi_1(2\xi_1 - 1) \\ \phi_2 &= 2\xi_2^2 - \xi_2 = \xi_2(2\xi_2 - 1) \\ \phi_3 &= 2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 4\xi_1\xi_2 - 3\xi_2 - 3\xi_1 + 1 = \xi_3(2\xi_3 - 1) \\ \phi_4 &= 4\xi_1\xi_2 = 4\xi_1\xi_2 \\ \phi_5 &= 4\xi_2^2 - 4\xi_1\xi_2 - 4\xi_2^2 = 4\xi_2\xi_3 \\ \phi_6 &= 4\xi_1^2 - 4\xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2 = 4\xi_3\xi_1 \end{aligned} \quad (2.82)$$

As funções de forma do elemento finito triangular quadrático tem a variação mostrada na Figura 2.19.

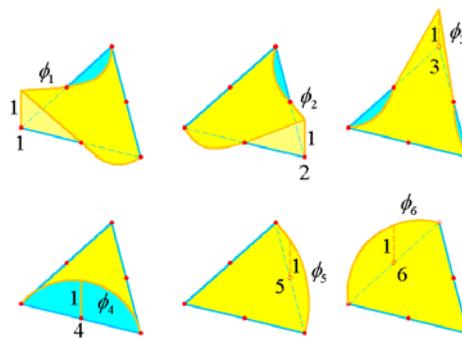


Figura 2.19. Funções de forma para o elemento triangular quadrático.

Analogamente às Equações (2.70) e (2.77) têm-se as relações entre as coordenadas cartesianas e homogêneas para o elemento finito triangular quadrático:

$$\begin{aligned}
 x &= \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2 + \phi_3 x_3 + \phi_4 x_4 + \phi_5 x_5 + \phi_6 x_6 \\
 y &= \phi_1 y_1 + \phi_2 y_2 + \phi_3 y_3 + \phi_4 y_4 + \phi_5 y_5 + \phi_6 y_6
 \end{aligned}
 \tag{2.83}$$

onde as funções de forma (ϕ) encontram-se nas Equações (2.82).

2.4.3 EQUAÇÕES DISCRETAS

Uma vez que o domínio em estudo foi discretizado, podem-se escrever as equações aproximadas para cada subdomínio do elemento designado por Ω_e , chamadas de equações discretas. Considerando-se a subdivisão do domínio original em M elementos, pode-se inicialmente escrever a Equação (2.50) na seguinte forma:

$$\sum_{e=1}^M \int_{\Omega_e} G_e [(\delta w_{,1} w_{,1}) + (\delta w_{,2} w_{,2})] d\Omega_e = \sum_{e=1}^M \alpha \int_{\Omega_e} G_e (\delta w_{,1} y - \delta w_{,2} x) d\Omega_e
 \tag{2.84}$$

A Equação (2.84) estabelece simplesmente que a integral foi dividida em uma soma de integrais parciais, abrangendo todos os M elementos que compõem o domínio. A fim de avaliar as integrais na Equação (2.84), é preciso substituir as funções ponderadora (δw) e incógnita (w) por suas aproximações discretas. Para que a análise seja mais precisa admitiram-se funções quadráticas e elementos triangulares. No método de Galerkin, tanto as funções incógnitas quanto as funções peso são aproximadas de forma idênticas em cada triângulo. Com estas considerações resulta a matriz de rigidez do elemento $[K]_e$ como a integral sobre um elemento de domínio Ω_e :

$$\{Dw\}^t [K]_e \{w\} = \int_{\Omega_e} G_e [(\delta w_{,1} w_{,1}) + (\delta w_{,2} w_{,2})] d\Omega_e \quad (2.85)$$

onde $\{Dw\}$ são valores nodais arbitrários da ponderadora e $\{w\}$ o vetor incógnito.

Analogamente, o vetor de forças é dado por:

$$\{Dw\}^t \{F\}_e = \alpha \int_{\Omega_e} G_e (\delta w_{,1} y - \delta w_{,2} x) d\Omega_e \quad (2.86)$$

Neste caso, as soluções aproximadas são encontradas por uma subdivisão do domínio de integração do problema em M elementos de tamanhos finitos, cada um tendo 6 pontos nodais.

Resolve-se a Equação (2.84) pelo MEF empregando o elemento finito triangular quadrático. A função empenamento é dada pela Equação (2.81) e as funções de forma pelas Equações (2.82). Expandindo-se a Equação (2.81):

$$w = \phi_1 w_1 + \phi_2 w_2 + \phi_3 w_3 + \phi_4 w_4 + \phi_5 w_5 + \phi_6 w_6 \quad (2.87)$$

e escrevendo-a na forma vetorial:

$$w = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad \phi_4 \quad \phi_5 \quad \phi_6] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{Bmatrix} \quad (2.88)$$

Da Equação (2.87) encontram-se as derivadas da função empenamento em relação às direções 1 e 2, respectivamente:

$$w_{,1} = \phi_{1,1} w_1 + \phi_{2,1} w_2 + \phi_{3,1} w_3 + \phi_{4,1} w_4 + \phi_{5,1} w_5 + \phi_{6,1} w_6 \quad (2.89)$$

$$w_{,2} = \phi_{1,2} w_1 + \phi_{2,2} w_2 + \phi_{3,2} w_3 + \phi_{4,2} w_4 + \phi_{5,2} w_5 + \phi_{6,2} w_6$$

Generalizando as Equações (2.89), afirma-se que a derivada da função empenamento (w) em relação a uma direção qualquer (j) é dada por:

$$w_{,j} = \sum_{i=1}^6 \phi_{i,j} w_i \quad (2.90)$$

que na forma vetorial fica:

$$w_{,j} = \left[\phi_{1,j} \quad \phi_{2,j} \quad \phi_{3,j} \quad \phi_{4,j} \quad \phi_{5,j} \quad \phi_{6,j} \right] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{Bmatrix} \quad (2.91)$$

O mesmo é feito para a ponderadora:

$$\delta w = \sum_{i=1}^6 \phi_i \delta w_i \quad (2.92)$$

e na forma vetorial:

$$\delta w = \left[\delta w_1 \quad \delta w_2 \quad \delta w_3 \quad \delta w_4 \quad \delta w_5 \quad \delta w_6 \right] \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{Bmatrix} \quad (2.93)$$

Analogamente ao descrito para a derivada da função empenamento, a derivada da ponderadora é escrita da seguinte forma:

$$\delta w_{,j} = \sum_{i=1}^6 \phi_{i,j} \delta w_i \quad (2.94)$$

ou na forma vetorial:

$$\delta w_{,j} = [\delta w_1 \quad \delta w_2 \quad \delta w_3 \quad \delta w_4 \quad \delta w_5 \quad \delta w_6] \begin{Bmatrix} \phi_{1,j} \\ \phi_{2,j} \\ \phi_{3,j} \\ \phi_{4,j} \\ \phi_{5,j} \\ \phi_{6,j} \end{Bmatrix} \quad (2.95)$$

Multiplicando a Equação (2.95) pela Equação (2.91) e fazendo $j = 1$, tem-se:

$$\delta w_{,1} w_{,1} = \begin{bmatrix} \delta w_1 \\ \delta w_2 \\ \delta w_3 \\ \delta w_4 \\ \delta w_5 \\ \delta w_6 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \phi_{1,1}\phi_{1,1} & \phi_{1,1}\phi_{2,1} & \phi_{1,1}\phi_{3,1} & \phi_{1,1}\phi_{4,1} & \phi_{1,1}\phi_{5,1} & \phi_{1,1}\phi_{6,1} \\ \phi_{2,1}\phi_{1,1} & \phi_{2,1}\phi_{2,1} & \phi_{2,1}\phi_{3,1} & \phi_{2,1}\phi_{4,1} & \phi_{2,1}\phi_{5,1} & \phi_{2,1}\phi_{6,1} \\ \phi_{3,1}\phi_{1,1} & \phi_{3,1}\phi_{2,1} & \phi_{3,1}\phi_{3,1} & \phi_{3,1}\phi_{4,1} & \phi_{3,1}\phi_{5,1} & \phi_{3,1}\phi_{6,1} \\ \phi_{4,1}\phi_{1,1} & \phi_{4,1}\phi_{2,1} & \phi_{4,1}\phi_{3,1} & \phi_{4,1}\phi_{4,1} & \phi_{4,1}\phi_{5,1} & \phi_{4,1}\phi_{6,1} \\ \phi_{5,1}\phi_{1,1} & \phi_{5,1}\phi_{2,1} & \phi_{5,1}\phi_{3,1} & \phi_{5,1}\phi_{4,1} & \phi_{5,1}\phi_{5,1} & \phi_{5,1}\phi_{6,1} \\ \phi_{6,1}\phi_{1,1} & \phi_{6,1}\phi_{2,1} & \phi_{6,1}\phi_{3,1} & \phi_{6,1}\phi_{4,1} & \phi_{6,1}\phi_{5,1} & \phi_{6,1}\phi_{6,1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{Bmatrix} \quad (2.96)$$

Multiplicando a Equação (2.95) pela Equação (2.91) e fazendo $j = 2$, tem-se:

$$\delta w_{,2} w_{,2} = \begin{bmatrix} \delta w_1 \\ \delta w_2 \\ \delta w_3 \\ \delta w_4 \\ \delta w_5 \\ \delta w_6 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \phi_{1,2}\phi_{1,2} & \phi_{1,2}\phi_{2,2} & \phi_{1,2}\phi_{3,2} & \phi_{1,2}\phi_{4,2} & \phi_{1,2}\phi_{5,2} & \phi_{1,2}\phi_{6,2} \\ \phi_{2,2}\phi_{1,2} & \phi_{2,2}\phi_{2,2} & \phi_{2,2}\phi_{3,2} & \phi_{2,2}\phi_{4,2} & \phi_{2,2}\phi_{5,2} & \phi_{2,2}\phi_{6,2} \\ \phi_{3,2}\phi_{1,2} & \phi_{3,2}\phi_{2,2} & \phi_{3,2}\phi_{3,2} & \phi_{3,2}\phi_{4,2} & \phi_{3,2}\phi_{5,2} & \phi_{3,2}\phi_{6,2} \\ \phi_{4,2}\phi_{1,2} & \phi_{4,2}\phi_{2,2} & \phi_{4,2}\phi_{3,2} & \phi_{4,2}\phi_{4,2} & \phi_{4,2}\phi_{5,2} & \phi_{4,2}\phi_{6,2} \\ \phi_{5,2}\phi_{1,2} & \phi_{5,2}\phi_{2,2} & \phi_{5,2}\phi_{3,2} & \phi_{5,2}\phi_{4,2} & \phi_{5,2}\phi_{5,2} & \phi_{5,2}\phi_{6,2} \\ \phi_{6,2}\phi_{1,2} & \phi_{6,2}\phi_{2,2} & \phi_{6,2}\phi_{3,2} & \phi_{6,2}\phi_{4,2} & \phi_{6,2}\phi_{5,2} & \phi_{6,2}\phi_{6,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{Bmatrix} \quad (2.97)$$

Multiplicando-se a Equação (2.95) por y e fazendo $j = 1$:

$$\delta w_{,1} y = [\delta w_1 \quad \delta w_2 \quad \delta w_3 \quad \delta w_4 \quad \delta w_5 \quad \delta w_6] \begin{Bmatrix} \phi_{1,1}y \\ \phi_{2,1}y \\ \phi_{3,1}y \\ \phi_{4,1}y \\ \phi_{5,1}y \\ \phi_{6,1}y \end{Bmatrix} \quad (2.98)$$

Multiplicando-se a Equação (2.95) por x e fazendo $j = 2$:

$$\delta w_{,2}x = \left[\delta w_1 \quad \delta w_2 \quad \delta w_3 \quad \delta w_4 \quad \delta w_5 \quad \delta w_6 \right] \left\{ \begin{array}{l} \phi_{1,1}x \\ \phi_{2,1}x \\ \phi_{3,1}x \\ \phi_{4,1}x \\ \phi_{5,1}x \\ \phi_{6,1}x \end{array} \right\} \quad (2.99)$$

Substituindo as Equações (2.96) e (2.97) na Equação (2.85) e lembrando-se os valores nodais tem-se a matriz de rigidez do elemento:

$$[K]_e = \int_{\Omega_e} G_e \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} d\Omega_e \quad (2.100)$$

onde a matriz de rigidez do elemento $[K]_e$ é dada pela integral no domínio dos seguintes coeficientes:

$$\begin{array}{lll} k_{11} = \phi_{1,1}\phi_{1,1} + \phi_{1,2}\phi_{1,2} & k_{32} = \phi_{3,1}\phi_{2,1} + \phi_{3,2}\phi_{2,2} & k_{63} = \phi_{6,1}\phi_{3,1} + \phi_{6,2}\phi_{3,2} \\ k_{21} = \phi_{2,1}\phi_{1,1} + \phi_{2,2}\phi_{1,2} & k_{42} = \phi_{4,1}\phi_{2,1} + \phi_{4,2}\phi_{2,2} & k_{44} = \phi_{4,1}\phi_{4,1} + \phi_{4,2}\phi_{4,2} \\ k_{31} = \phi_{3,1}\phi_{1,1} + \phi_{3,2}\phi_{1,2} & k_{52} = \phi_{5,1}\phi_{2,1} + \phi_{5,2}\phi_{2,2} & k_{54} = \phi_{5,1}\phi_{4,1} + \phi_{5,2}\phi_{4,2} \\ k_{41} = \phi_{4,1}\phi_{1,1} + \phi_{4,2}\phi_{1,2} & k_{62} = \phi_{6,1}\phi_{2,1} + \phi_{6,2}\phi_{2,2} & k_{64} = \phi_{6,1}\phi_{4,1} + \phi_{6,2}\phi_{4,2} \\ k_{51} = \phi_{5,1}\phi_{1,1} + \phi_{5,2}\phi_{1,2} & k_{33} = \phi_{3,1}\phi_{3,1} + \phi_{3,2}\phi_{3,2} & k_{55} = \phi_{5,1}\phi_{5,1} + \phi_{5,2}\phi_{5,2} \\ k_{61} = \phi_{6,1}\phi_{1,1} + \phi_{6,2}\phi_{1,2} & k_{43} = \phi_{4,1}\phi_{3,1} + \phi_{4,2}\phi_{3,2} & k_{65} = \phi_{6,1}\phi_{5,1} + \phi_{6,2}\phi_{5,2} \\ k_{22} = \phi_{2,1}\phi_{2,1} + \phi_{2,2}\phi_{2,2} & k_{53} = \phi_{5,1}\phi_{3,1} + \phi_{5,2}\phi_{3,2} & k_{66} = \phi_{6,1}\phi_{6,1} + \phi_{6,2}\phi_{6,2} \end{array} \quad (2.101)$$

Substituindo as Equações (2.98) e (2.99), na Equação (2.86) e eliminando-se os valores nodais da ponderadora tem-se o vetor de cargas para o elemento:

$$\{F\}_e = \int_{\Omega_e} G_e \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} d\Omega_e, \text{ onde :} \quad \begin{aligned} f_1 &= \phi_{1,1}y - \phi_{1,2}x \\ f_2 &= \phi_{2,1}y - \phi_{2,2}x \\ f_3 &= \phi_{3,1}y - \phi_{3,2}x \\ f_4 &= \phi_{4,1}y - \phi_{4,2}x \\ f_5 &= \phi_{5,1}y - \phi_{5,2}x \\ f_6 &= \phi_{6,1}y - \phi_{6,2}x \end{aligned} \quad (2.102)$$

Escrevendo-se a Equação (2.84) sem os parâmetros nodais arbitrários da Ponderadora na forma matricial:

$$\sum_{e=1}^M \int_{\Omega_e} G_e \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{Bmatrix} d\Omega_e = \alpha \sum_{e=1}^M \int_{\Omega_e} G_e \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{Bmatrix} d\Omega_e \quad (2.103)$$

Pela equação (2.103) afirma-se que o empenamento é proporcional ao ângulo de rotação por unidade de comprimento (α).

Considerando todos os elementos, obtém-se um sistema local semelhante ao seguinte:

$$\begin{bmatrix} k_{11}^e & k_{12}^e & k_{13}^e & k_{14}^e & k_{15}^e & k_{16}^e \\ k_{21}^e & k_{22}^e & k_{23}^e & k_{24}^e & k_{25}^e & k_{26}^e \\ k_{31}^e & k_{32}^e & k_{33}^e & k_{34}^e & k_{35}^e & k_{36}^e \\ k_{41}^e & k_{42}^e & k_{43}^e & k_{44}^e & k_{45}^e & k_{46}^e \\ k_{51}^e & k_{52}^e & k_{53}^e & k_{54}^e & k_{55}^e & k_{56}^e \\ k_{61}^e & k_{62}^e & k_{63}^e & k_{64}^e & k_{65}^e & k_{66}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1^e \\ f_2^e \\ f_3^e \\ f_4^e \\ f_5^e \\ f_6^e \end{Bmatrix}$$

para cada elemento, onde a matriz de coeficientes locais é simétrica. A fim de se obter a matriz global do sistema, devem-se somar todos os sistemas locais, de acordo com a Equação (2.84), obtendo-se desta forma um sistema único de equações chamado sistema global. Os índices 1,2,3,4,5,6 nas equações locais de cada elemento possuem uma correspondência com a numeração global dos nós. Deve-se avaliar a contribuição de cada um dos elementos e adicioná-la à matriz global. Por exemplo, supondo que o elemento 1 de uma

malha contendo 15 nós esteja sendo considerado e que exista a seguinte correspondência entre os nós locais e globais:

$$1 \rightarrow 5 \quad 2 \rightarrow 7 \quad 3 \rightarrow 9 \quad 4 \rightarrow 11 \quad 5 \rightarrow 13 \quad 6 \rightarrow 15$$

Ao ser processado o elemento em questão, a sua contribuição será adicionada à matriz global da forma esquematizada abaixo:

$$\begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_{11}^1 & 0 & k_{12}^1 & 0 & k_{13}^1 & 0 & k_{14}^1 & 0 & k_{15}^1 & 0 & k_{16}^1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_{21}^1 & 0 & k_{22}^1 & 0 & k_{23}^1 & 0 & k_{24}^1 & 0 & k_{25}^1 & 0 & k_{26}^1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_{31}^1 & 0 & k_{32}^1 & 0 & k_{33}^1 & 0 & k_{34}^1 & 0 & k_{35}^1 & 0 & k_{36}^1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_{41}^1 & 0 & k_{42}^1 & 0 & k_{43}^1 & 0 & k_{44}^1 & 0 & k_{45}^1 & 0 & k_{46}^1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_{51}^1 & 0 & k_{52}^1 & 0 & k_{53}^1 & 0 & k_{54}^1 & 0 & k_{55}^1 & 0 & k_{56}^1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & k_{61}^1 & 0 & k_{62}^1 & 0 & k_{63}^1 & 0 & k_{64}^1 & 0 & k_{65}^1 & 0 & k_{66}^1
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 w_1 \\
 w_2 \\
 w_3 \\
 w_4 \\
 w_5 \\
 w_6 \\
 w_7 \\
 w_8 \\
 w_9 \\
 w_{10} \\
 w_{11} \\
 w_{12} \\
 w_{13} \\
 w_{14} \\
 w_{15}
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 f_5^1 \\
 0 \\
 f_7^1 \\
 0 \\
 f_9^1 \\
 0 \\
 f_{11}^1 \\
 0 \\
 f_{13}^1 \\
 0 \\
 f_{15}^1
 \end{Bmatrix}
 \quad (2.104)$$

De acordo com a Equação (2.104) as contribuições locais são colocadas nas linhas e colunas da matriz global dadas pelo número de nós globais; k_{12}^1 por exemplo será colocado na linha 5 e coluna 7, k_{13}^1 na linha 5 e coluna 9, etc.

Repetindo-se o procedimento ilustrado para todos os elementos da malha obtém-se um sistema de equações lineares global, Equação (2.103), do tipo:

$$[K]\{w\} = \{F\} \quad (2.105)$$

Observa-se que a matriz de coeficientes $[K]$ é simétrica, com poucos elementos fora da diagonal principal.

Após montada a matriz de coeficientes, solucionou-se o sistema de equações resultante (global) obtendo-se os empenamentos (w).

Antes de resolver o sistema de Equações (2.103) é necessário solucionar as integrais. Resolvem-se estas, utilizando integração numérica com 7 pontos de Hammer, como será descrito posteriormente, ainda neste capítulo.

Ao se resolver o sistema de equações (2.105) encontra-se um empenamento com eixo de referência arbitrário. Este empenamento não é o ideal a ser aplicado no programa geral. É importante se escolher uma origem com significado físico. Neste trabalho adota-se o Centro de Cisalhamento (CC) ou o Centro de Gravidade (CG) da seção. O segundo é de determinação trivial. Assim a determinação do CC é descrita no próximo sub-item.

2.4.4 CENTRO DE CISALHAMENTO

O Centro de Cisalhamento é um ponto característico da seção transversal, pelo qual deve passar o plano de aplicação da resultante das cargas transversais e, conseqüentemente das forças cortantes, de modo que não ocorra torção, apenas flexão.

Calculou-se o Centro de Cisalhamento a partir da função empenamento através do Método dos Elementos Finitos. O cálculo do centro de cisalhamento é necessário na presente cinemática desenvolvida, visto que ao contrário os resultados apresentariam movimento de corpo rígido.

As tensões de cisalhamento para uma origem qualquer são calculadas a partir das Equações (2.20).

Determina-se uma nova origem (x_o, y_o) , substituindo-se em todos os cálculos:

$$x \text{ por } x - x_o \quad (2.106)$$

$$y \text{ por } y - y_o$$

Lembra-se que os operadores não são alterados de acordo com as coordenadas da nova origem, pois valem as relações:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial(x - x_o)} \quad (2.107)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial(y - y_o)}$$

Dadas relações (2.106), (2.107) e substituindo-as nas Equações (2.20) encontram-se as tensões de cisalhamento para uma nova origem:

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha(x - x_o) \right) \quad (2.108)$$

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \alpha(y - y_o) \right)$$

Pelas expressões (2.107) sabe-se que a matriz de rigidez para o cálculo de w não se altera. Assim, para esta nova origem, tem-se a seguinte equação em elementos finitos a resolver, após substituição das Equações (2.106) e (2.108) na Equação (2.50):

$$\int_A G [(\delta w_{,x} w_{,x}) + (\delta w_{,y} w_{,y})] dA = \alpha \int_A G [\delta w_{,x} (y - y_o) - \delta w_{,y} (x - x_o)] dA \quad (2.109)$$

O novo empenamento genérico para a origem (x_o, y_o) é calculado como:

$$\int_A G [(\delta w_{,x} w_{,x}) + (\delta w_{,y} w_{,y})] dA = \alpha \int_A G (\delta w_{,x} y - \delta w_{,y} x) dA - \alpha \int_A G \delta w_{,x} y_o dA + \alpha \int_A G \delta w_{,y} x_o dA \quad (2.110)$$

Analogamente à Equação (2.84), a Equação (2.110) pode ser escrita em relação ao número de elementos:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^M \int_{A_e} G [(\delta w_{,x} w_{,x}) + (\delta w_{,y} w_{,y})] dA_e = \\ \alpha \sum_{e=1}^M \int_{A_e} G (\delta w_{,x} y - \delta w_{,y} x) dA_e - \alpha \sum_{e=1}^M \int_{A_e} G \delta w_{,x} y_o dA_e + \alpha \sum_{e=1}^M \int_{A_e} G \delta w_{,y} x_o dA_e \end{aligned} \quad (2.111)$$

A Equação (2.111) pode ser escrita particularizando-a para cada elemento:

$$[k]_e \{w\} = \alpha \{F\}_e + \alpha y_o \{F_x\}_e + \alpha x_o \{F_y\}_e \quad (2.112)$$

Da Equação (2.111) e da Equação (2.112) tem-se que a matriz de rigidez $[K]_e$ é dada por:

$$\{Dw\}_e^t [k]_e = \int_{A_e} G_e [(\delta w_{,x} w_{,x}) + (\delta w_{,y} w_{,y})] dA_e \quad (2.113)$$

E encontra-se escrita na forma matricial nas Equações (2.100) e (2.101).

O vetor de cargas $\{F\}_e$ fica:

$$\{Dw\}_e^t \{F\}_e = \int_{A_e} G_e (\delta w_{,x} y - \delta w_{,y} x) dA_e \quad (2.114)$$

E está escrito na forma vetorial nas Equações (2.102). A parcela correspondente ao vetor de cargas $\{F_x\}_e$ é:

$$\{Dw\}_e^t \{F_x\}_e = - \int_{A_e} G_e \delta w_{,x} dA_e \quad (2.115)$$

e escrito na forma vetorial, eliminando-se os valores nodais arbitrários da Ponderadora, fica:

$$\{F_x\}_e = - \int_{A_e} G_e \begin{Bmatrix} \phi_{1,1} \\ \phi_{2,1} \\ \phi_{3,1} \\ \phi_{4,1} \\ \phi_{5,1} \\ \phi_{6,1} \end{Bmatrix} dA_e \quad (2.116)$$

E a parcela correspondente ao vetor de cargas $\{F_y\}_e$ é:

$$\{Dw\}_e^t \{F_y\}_e = \int_{A_e} G_e \delta w_{,y} dA_e \quad (2.117)$$

que pode ser escrito na forma vetorial, eliminando-se $\{Dw\}^t$, como apresentado na equação abaixo:

$$\{F_y\}_e = \int_{A_e} G_e \begin{Bmatrix} \phi_{1,2} \\ \phi_{2,2} \\ \phi_{3,2} \\ \phi_{4,2} \\ \phi_{5,2} \\ \phi_{6,2} \end{Bmatrix} dA_e \quad (2.118)$$

Pode-se dividir a solução da função empenamento (w) como:

$$w = \alpha \{w_o + y_o w_x + x_o w_y\} \quad (2.119)$$

Lembra-se que w é função da nova origem de acordo com a relação (2.106):

$$w = w[(x - x_o), (y - y_o)] \quad (2.120)$$

Da Equação (2.112) após a contribuição de todos os elementos, tem-se o sistema de equações global:

$$[k]\{w\} = \alpha \{F\} + \alpha y_o \{F_x\} + \alpha x_o \{F_y\} \quad (2.121)$$

Substituindo-se a Equação (2.119) na Equação (2.121), conclui-se que:

$$\{w_o\} = [K]^{-1} \{F\} \quad \{w_x\} = [K]^{-1} \{F_x\} \quad \{w_y\} = [K]^{-1} \{F_y\} \quad (2.122)$$

Dada a cinemática do empenamento considerando-se uma mudança de origem, Equação (2.110), necessita-se determinar o Centro de Cisalhamento da seção transversal. Portanto, relembra-se a hipótese já citada e que também foi descrita por ABRAMENTO (1981), de que cada seção transversal, inicialmente plana, sofre um empenamento com a aplicação de um momento torçor, deixando de ser plana. Admite-se que este empenamento é tal que a seção mantém sua projeção no plano xy com a forma inicial da seção, e que todas as seções empenam do mesmo modo, sendo que o valor do empenamento é proporcional ao giro

por unidade de comprimento (α). O empenamento da seção corresponde aos deslocamentos w de uma seção e , assim, pode-se escrever:

$$w = \alpha(z)w(x, y) \quad (2.123)$$

onde $\alpha = \frac{\partial \beta}{\partial z}$ e β é mostrado na Figura 2.6. Existindo impedimento ao livre empenamento das seções, as fibras longitudinais sofrerão variação de comprimento, de modo que um elemento de comprimento dz tem seu comprimento variado de dw , sendo o alongamento correspondente:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.124)$$

Substituindo-se a Equação (2.123) na Equação (2.124) tem-se:

$$\varepsilon_z = \alpha' w(x, y) \quad (2.125)$$

Sendo σ_x e σ_y identicamente nulos, as seções girando em torno do eixo de torção estarão, portanto, sujeitas à tensão:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = E\alpha' w \quad (2.126)$$

Que deverá ser auto equilibrada na seção, enquanto apenas o momento torçor for aplicado, desse modo, pode-se afirmar que:

$$\int_A \sigma_z dA = 0 \quad \int_A \sigma_z x dA = 0 \quad \int_A \sigma_z y dA = 0 \quad (2.127)$$

Ou seja, nesse caso, a tensão σ_z não possui resultante em força normal ($N = \int_A \sigma_z dA$) e em momentos fletores ($M_y = \int_A \sigma_z x dA$ e $M_x = \int_A \sigma_z y dA$). De onde decorre que segundo MORI (1978), adotando-se a origem no Centro de Gravidade (CG) ou no Centro de Cisalhamento (CC), as seguintes condições são verdadeiras:

$$\int_A w dA = 0 \quad \int_A wx dA = 0 \quad \int_A wy dA = 0 \quad (2.128)$$

Para se calcular o Centro de Cisalhamento (CC), adota-se a origem inicial no Centro de Gravidade (CG) e aplicam-se as duas ultimas Equações (2.128). Relativas à nova posição (centro) de referência para o qual a condição é válida tal como em (2.120), ou seja, o CC .

Assim:

$$\int_A Ew[(x - x_{cc}), (y - y_{cc})](y - y_{cc}) dA = \int_A Ewy dA - y_{cc} \int_A Ew dA = 0 \quad (2.129)$$

Substituindo-se a primeira das Equações (2.128) na Equação (2.129):

$$\int_A Ew[(x - x_{cc}), (y - y_{cc})](y - y_{cc}) dA = \int_A Ewy dA = 0 \quad (2.130)$$

Da Equação (2.130) pode-se afirmar que:

$$\int_A Ew[(x - x_{cc}), (y - y_{cc})]y dA = 0 \quad (2.131)$$

$$\int_A Ew[(x - x_{cc}), (y - y_{cc})]x dA = 0$$

Portanto, reescreve-se a Equação (2.119), considerando-se a nova origem como sendo o Centro de Cisalhamento (CC):

$$w[(x - x_{cc}), (y - y_{cc})] = \alpha \{w_o + y_{cc} w_x + x_{cc} w_y\} \quad (2.132)$$

Substituindo-se a Equação (2.132) na primeira das Equações (2.131), levando-se em consideração a Equação (2.122) e particularizando-a de acordo com o número total de elementos (M) tem-se:

$$\sum_{e=1}^M \int_{A_e} E_e \alpha (\phi_e w_o^e + y_{cc} \phi_e w_x^e + x_{cc} \phi_e w_y^e) y dA_e = 0 \quad (2.133)$$

Simplificando-se a Equação (2.133) e reorganizando-a tem-se:

$$x_{cc} \sum_{e=1}^M \int_{A_e} E_e (\phi_e w_y^e) y dA_e + y_{cc} \sum_{e=1}^M \int_{A_e} E_e (\phi_e w_x^e) y dA_e = - \sum_{e=1}^M \int_{A_e} E_e (\phi_e w_o^e) y dA_e \quad (2.134)$$

Particularizando a Equação (2.134) para cada elemento, têm-se os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned} a_{11}^e &= \int_{A_e} E_e (\phi_e w_y^e) y dA_e \\ a_{12}^e &= \int_{A_e} E_e (\phi_e w_x^e) y dA_e \\ F_y^e &= - \int_{A_e} E_e (\phi_e w_o^e) y dA_e \end{aligned} \quad (2.135)$$

Integrados os coeficientes (2.135), a Equação (2.134) pode ser escrita na forma global, após a contribuição de todos os elementos:

$$a_{11} x_{cc} + a_{12} y_{cc} = F_y \quad (2.136)$$

Analogamente substituindo-se a Equação (2.132) na segunda das Equações (2.131) fica:

$$\sum_{e=1}^M \int_{A_e} E_e \alpha (\phi_e w_o^e + y_{cc} \phi_e w_x^e + x_{cc} \phi_e w_y^e) x dA_e = 0 \quad (2.137)$$

A Equação (2.137) pode ser assim reescrita:

$$x_{cc} \sum_{e=1}^M \int_{A_e} E_e (\phi_e w_y^e) x dA_e + y_{cc} \sum_{e=1}^M \int_{A_e} E_e (\phi_e w_x^e) x dA_e = - \sum_{e=1}^M \int_{A_e} E_e (\phi_e w_o^e) x dA_e \quad (2.138)$$

Particularizando a Equação (2.138) para cada elemento, têm-se os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned} a_{21}^e &= \int_{A_e} E_e (\phi_e w_y^e) x dA_e \\ a_{22}^e &= \int_{A_e} E_e (\phi_e w_x^e) x dA_e \\ F_x^e &= - \int_{A_e} E_e (\phi_e w_o^e) x dA_e \end{aligned} \quad (2.139)$$

Integrados os coeficientes (2.139), a Equação (2.138) pode ser escrita na forma global, após a contribuição de todos os elementos:

$$a_{21}x_{cc} + a_{22}y_{cc} = F_x \quad (2.140)$$

Da Equação (2.136) e da Equação (2.140) tem-se o sistema de equações global:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_{cc} \\ y_{cc} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_y \\ F_x \end{Bmatrix} \quad (2.141)$$

Resolvendo o sistema de Equações (2.141) encontram-se as coordenadas do Centro de Cisalhamento $CC(x_{cc}; y_{cc})$.

Muda-se o sistema de coordenadas fazendo:

$$x = x - x_{cc} \quad (2.142)$$

$$y = y - y_{cc}$$

A partir do novo sistema de coordenadas encontram-se os empenamentos para o problema da torção livre de Saint-Venant, para qualquer seção transversal, homogênea ou não-homogênea, cuja origem do sistema de coordenadas é o Centro de Cisalhamento, independente da origem inicial adotada.

2.4.5 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Uma forma de solucionar as integrais relativas à matriz de rigidez e ao vetor de cargas nodais do elemento finito triangular é calculá-las numericamente.

De acordo com ASSAN (2003), a integração numérica é realizada no domínio descrito pelas coordenadas homogêneas e, então, o mapeamento é feito de modo a transformar todas as grandezas para o domínio real do elemento, cujas coordenadas são as cartesianas (x, y) . No presente trabalho calcularam-se as integrais numericamente, utilizando-se sete pontos de Hammer.

A relação entre as coordenadas cartesianas e as coordenadas homogêneas para o elemento finito triangular quadrático são dadas pelas Equações (2.83). Que após substituição das funções de forma encontradas nas Equações (2.82) são escritas apenas em função de ξ_1 e ξ_2 , como:

$$\begin{aligned}
 x &= (2\xi_1^2 - \xi_1)x_1 + (2\xi_2^2 - \xi_2)x_2 + (2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 4\xi_1\xi_2 - 3\xi_2 - 3\xi_1 + 1)x_3 + \\
 &\quad (4\xi_1\xi_2)x_4 + (4\xi_2 - 4\xi_1\xi_2 - 4\xi_2^2)x_5 + (4\xi_1 - 4\xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2)x_6 \\
 y &= (2\xi_1^2 - \xi_1)y_1 + (2\xi_2^2 - \xi_2)y_2 + (2\xi_1^2 + 2\xi_2^2 + 4\xi_1\xi_2 - 3\xi_2 - 3\xi_1 + 1)y_3 + \\
 &\quad (4\xi_1\xi_2)y_4 + (4\xi_2 - 4\xi_1\xi_2 - 4\xi_2^2)y_5 + (4\xi_1 - 4\xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2)y_6
 \end{aligned}
 \tag{2.143}$$

Chamando J a matriz Jacobiana dada por:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}
 \tag{2.144}$$

Em ASSAN (2003) encontra-se a representação geométrica do Jacobiano. Os coeficientes da matriz Jacobiana são encontrados derivando-se as Equações (2.143) em relação às coordenadas ξ_1 e ξ_2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} \end{cases} = \begin{bmatrix} 4\xi_1 - 1 & 0 & 4\xi_1 + 4\xi_2 - 3 & 4\xi_2 & -4\xi_2 & 4 - 4\xi_2 - 8\xi_1 \\ 0 & 4\xi_2 - 1 & 4\xi_2 + 4\xi_1 - 3 & 4\xi_1 & 4 - 4\xi_1 - 8\xi_2 & -4\xi_1 \end{bmatrix} \begin{cases} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{cases} \quad (2.145)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{cases} = \begin{bmatrix} 4\xi_1 - 1 & 0 & 4\xi_1 + 4\xi_2 - 3 & 4\xi_2 & -4\xi_2 & 4 - 4\xi_2 - 8\xi_1 \\ 0 & 4\xi_2 - 1 & 4\xi_2 + 4\xi_1 - 3 & 4\xi_1 & 4 - 4\xi_1 - 8\xi_2 & -4\xi_1 \end{bmatrix} \begin{cases} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \end{cases}$$

e o determinante do Jacobiano é:

$$\det J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x}{\partial \xi_1} & \frac{\partial y}{\partial \xi_2} \end{pmatrix} \quad (2.146)$$

a matriz inversa da matriz jacobiana é:

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \quad (2.147)$$

Das Equações (2.145) escrevem-se as derivadas das funções de forma em relação ao sistema local (L):

$$\begin{bmatrix} (\phi_{1,1})_L & (\phi_{2,1})_L & (\phi_{3,1})_L & (\phi_{4,1})_L & (\phi_{5,1})_L & (\phi_{6,1})_L \\ (\phi_{1,2})_L & (\phi_{2,2})_L & (\phi_{3,2})_L & (\phi_{4,2})_L & (\phi_{5,2})_L & (\phi_{6,2})_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\xi_1 - 1 & 0 & 4\xi_1 + 4\xi_2 - 3 & 4\xi_2 & -4\xi_2 & 4 - 4\xi_2 - 8\xi_1 \\ 0 & 4\xi_2 - 1 & 4\xi_2 + 4\xi_1 - 3 & 4\xi_1 & 4 - 4\xi_1 - 8\xi_2 & -4\xi_1 \end{bmatrix}$$

onde:

$$\phi_{i,j} = \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi_j} \quad \text{com } i = 1,2,3,4,5,6 \quad \text{e } j = 1,2$$

Para transformar a derivada das funções de forma do sistema local para o global, deve-se multiplicar a matriz inversa do determinante do jacobiano pelas derivadas das funções de forma:

$$\begin{bmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{2,1} & \phi_{3,1} & \phi_{4,1} & \phi_{5,1} & \phi_{6,1} \\ \phi_{1,2} & \phi_{2,2} & \phi_{3,2} & \phi_{4,2} & \phi_{5,2} & \phi_{6,2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det J} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \xi_2} & -\frac{\partial y}{\partial \xi_1} \\ -\frac{\partial x}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x}{\partial \xi_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\phi_{1,1})_L & (\phi_{2,1})_L & (\phi_{3,1})_L & (\phi_{4,1})_L & (\phi_{5,1})_L & (\phi_{6,1})_L \\ (\phi_{1,2})_L & (\phi_{2,2})_L & (\phi_{3,2})_L & (\phi_{4,2})_L & (\phi_{5,2})_L & (\phi_{6,2})_L \end{bmatrix} \quad (2.148)$$

Considerando o elemento finito triangular com coordenadas homogêneas, Figura 2.20, têm-se que as matrizes e vetores formulados no presente trabalho podem ser escritos através da área do triângulo.

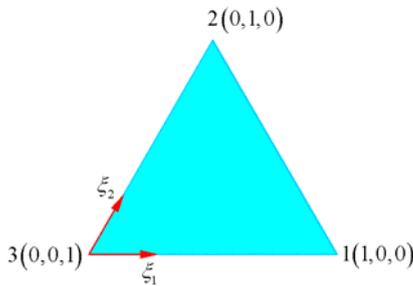


Figura 2.20. Elemento triangular com coordenadas homogêneas.

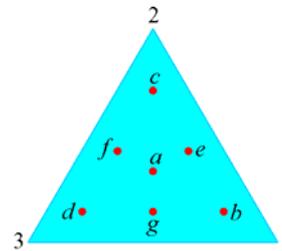


Figura 2.21. Pontos de integração do elemento triangular.

Portanto tem-se:

$$\int_A f(x, y) dA = \sum_{i=1}^n g(\xi_1, \xi_2, \xi_3)_i \omega_i \det J(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (2.149)$$

A integral é calculada referente aos sete pontos de integração internos, Figura 2.21, da

Tabela 2.1.

Tabela 2.1 - Pontos e pesos (Hammer) para $-1 \leq \xi_i \leq 1$ ($i = 1, 2, 3$), ASSAN (2003).

$n(\text{grau})$	Pontos	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ω_i
7(<i>quíntuplo</i>)	<i>a</i>	0,3333333	0,3333333	0,3333333	0,1125000
	<i>b</i>	0,7974270	0,1012865	0,1012865	0,0629696
	<i>c</i>	0,1012865	0,7974270	0,1012865	0,0629696
	<i>d</i>	0,1012865	0,1012865	0,7974270	0,0629696
	<i>e</i>	0,4701420	0,4701420	0,0597160	0,0661971
	<i>f</i>	0,0597160	0,4701420	0,4701420	0,0661971
	<i>g</i>	0,4701420	0,0597160	0,4701420	0,0661971

Sendo n o número de pontos tomados no intervalo $[-1, 1]$, ξ_i é a coordenada do ponto i e ω_i são os pesos associados ao ponto i .

2.4.6 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Apresentou-se nos sub-itens anteriores a solução do problema da torção livre de Saint-Venant pelo MEF, com o objetivo de determinar o empenamento, para qualquer seção transversal, homogênea ou não-homogênea, cuja origem do sistema de coordenadas é o Centro de Cisalhamento, independente da origem inicial adotada. Agora se apresenta um fluxograma (Figura 2.22) da sua implementação para uma maior compreensão da estrutura do código computacional referente ao presente trabalho.

Descrevem-se as fases da implementação computacional de forma sucinta e esquemática, visto que a cinemática do empenamento foi descrita detalhadamente nos sub-itens anteriores.

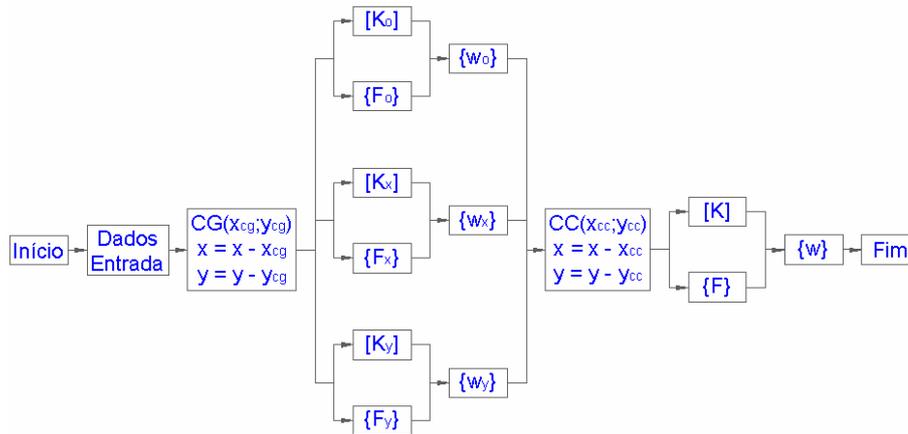


Figura 2.22. Fluxograma do código computacional referente à torção livre de Saint-Venant pelo MEF.

Para a implementação computacional da solução da torção livre, primeiramente informam-se ao programa os dados da estrutura (denominados dados de entrada) para a qual se deseja calcular o empenamento. Os dados de entrada são: número de elementos, número de nós, módulo de elasticidade longitudinal do elemento e do material predominante, coordenadas nodais, incidência do elemento (nós que formam determinado elemento) e coeficiente de Poisson. Os dados de entrada do elemento referem-se a um elemento finito triangular linear, no código computacional executam-se cálculos de forma a adicionar um nó no meio de cada lado do elemento, obtendo-se assim um elemento finito triangular quadrático. Também se calcula o módulo de elasticidade transversal do elemento e do material predominante na seção transversal.

Depois da leitura de dados, calcula-se a posição do Centro de Gravidade da seção transversal, cujo objetivo é a mudança da origem do sistema de coordenadas, inicialmente qualquer, para o Centro de Gravidade da seção. Determinam-se outras propriedades da seção, que não interferem na cinemática do empenamento, para que estas sejam comparadas com outro autor no *Capítulo 3*.

A etapa seguinte é a solução dos seguintes sistemas de equações lineares globais:

$$\begin{aligned}
 [K_o]\{w_o\} &= \{F_o\} \\
 [K_x]\{w_x\} &= \{F_x\} \\
 [K_y]\{w_y\} &= \{F_y\}
 \end{aligned}
 \tag{2.150}$$

Como já comentado tem-se que a formulação das matrizes de rigidez não se altera, ou seja:

$$[K] = [K_o] = [K_x] = [K_y] \tag{2.151}$$

As matrizes de rigidez dos elementos são dadas pelas Equações (2.100) e (2.101).

O vetor de cargas do elemento $\{F\}$ é dado pelas Equações (2.102), considerando-se o vetor após a contribuição de todos os elementos, tem-se a igualdade:

$$\{F\} = \{F_o\} \tag{2.152}$$

Os vetores de cargas globais $\{F_x\}$ e $\{F_y\}$ tem os seus vetores correspondentes, para cada elemento, descritos na Equação (2.116) e na Equação (2.118), respectivamente.

Da solução dos sistemas de equações (2.150) encontram-se $\{w_o\}$, $\{w_x\}$ e $\{w_y\}$ necessários para o cálculo das coordenadas do Centro de Cisalhamento de acordo com o sistema de equações (2.141).

Determinadas as coordenadas do Centro de Cisalhamento muda-se novamente a origem do sistema de coordenadas, do Centro de Gravidade para o Centro de Cisalhamento.

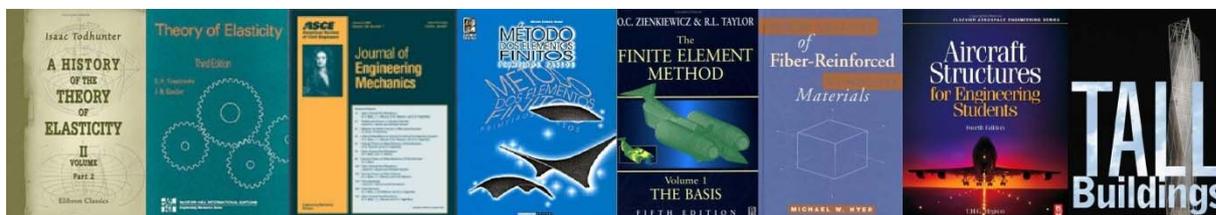
Finalmente resolve-se o sistema de equações global:

$$[K]\{w\} = \{F\} \tag{2.153}$$

Obtendo-se como resultado o empenamento do problema da torção livre de Saint-Venant, objetivo deste código computacional. Observa-se que o usuário pode entrar com uma seção transversal de geometria qualquer e considerá-la composta por quaisquer materiais, homogênea ou não.

Lembra-se ainda que o empenamento obtido para $\alpha = 1$ é chamado modo de empenamento e será adicionado à cinemática de Reissner-Timoshenko de barra geral laminada 3D de forma a incluir o parâmetro “intensidade de empenamento”.

3 EXEMPLOS DE TORÇÃO LIVRE - EMPENAMENTO



3.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como objetivo comprovar a eficiência da cinemática desenvolvida no presente trabalho e descrita no *Capítulo 2*, no cálculo do empenamento para o problema da torção livre de Saint-Venant. Portanto, a partir de exemplos de barras submetidas à torção livre de Saint-Venant comprova-se a eficácia do procedimento numérico desenvolvido em solucionar este problema para uma seção transversal de geometria qualquer, homogênea e não-homogênea.

O empenamento é verificado a partir da comparação de resultados provenientes da teoria técnica e de soluções analíticas conhecidas para exemplos de torção livre de Saint-Venant com seções transversais fechadas e abertas com paredes delgadas, compostas por um ou diferentes tipos de materiais.

O eixo de referência desta cinemática é o eixo que passa pelo centro de cisalhamento da peça. Mostram-se os resultados em outro eixo (CG) verificando-se a influência desta posição nos resultados esperados, no exemplo do Perfil U simples, Figura 3.28 e Figura 3.29.

3.2 SEÇÃO TRANSVERSAL HOMOGENEA

Para as seções transversais homogêneas verificaram-se os resultados do empenamento para seções abertas e fechadas.

3.2.1 FECHADA

Apresentam-se as aplicações da torção livre de Saint-Venant, comparando-se com outros autores os resultados obtidos para o problema da torção uniforme em barras com seção transversal em forma de elipse, círculo, triângulo equilátero, retângulo e quadrado.

A solução deste problema, considerando seções fechadas, é apresentada por vários autores, tais como SILVA (2005), ABRAMENTO (1981), TIMOSHENKO & GOODIER (1980), ZAGOTTIS (1979), cujos resultados são semelhantes. Eles resolvem o problema da torção livre no contexto da teoria da elasticidade, pelo método semi-inverso, de acordo com as hipóteses de Saint-Venant. Comprova-se o bom resultado do presente trabalho ao resolver esse problema comparando-se o empenamento obtido em SILVA (2005) para a elipse, o círculo, o retângulo e o quadrado. Os resultados para a seção transversal na forma de triângulo equilátero são comparados com ABRAMENTO (1981).

Os resultados referem-se ao centro de cisalhamento da seção transversal, que para estes exemplos coincidem com o centro de gravidade.

3.2.1.1 Elíptica

A função empenamento para a seção transversal elíptica de SILVA (2005), referentes à torção livre Saint-Venant é:

$$w(x, y) = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} xy + w_0 \quad (3.1)$$

onde w é o empenamento; x e y são as coordenadas cartesianas; a e b são as dimensões mostradas na Figura 3.1. Adotou-se $a = 20$ e $b = 10$.

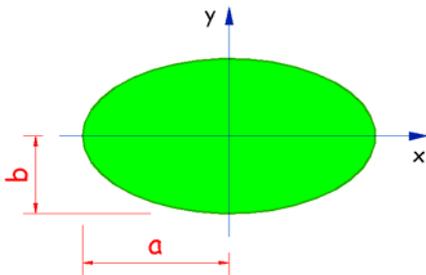


Figura 3.1. Seção transversal elíptica.

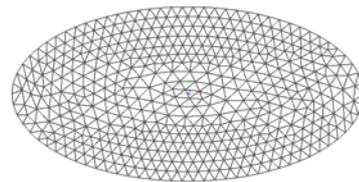


Figura 3.2. Malha da seção transversal elíptica adotada no Presente Trabalho.

Gerou-se uma malha com 906 elementos e 1.891 nós, como ilustra a Figura 3.2.

A Figura 3.3 apresenta o mapa de deslocamentos e a configuração deformada, referentes ao Presente Trabalho, para a seção transversal elíptica.

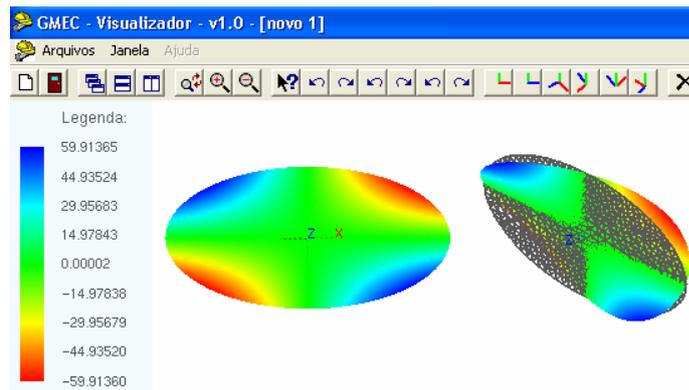


Figura 3.3. Mapa do empenamento e configuração deformada da seção transversal elíptica referente ao Presente Trabalho.

E a Figura 3.4 é o mapa de deslocamentos e a configuração deformada relativo aos resultados de SILVA (2005).

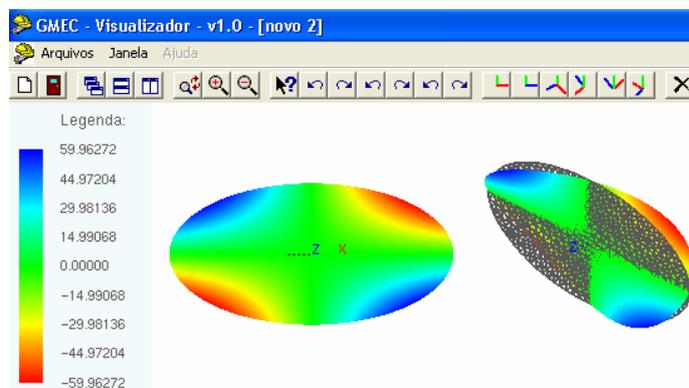


Figura 3.4. Mapa do empenamento e configuração deformada da seção transversal elíptica referente a SILVA (2005).

A razão relativa entre o Presente Trabalho e SILVA (2005), para a elipse, é apresentada na Tabela 3.1.

Os resultados encontrados são aproximadamente iguais, com uma diferença desprezível, em situações práticas de engenharia.

Tabela 3.1 - Comparação do empenamento relativo da seção transversal elíptica.

Presente Trabalho			SILVA (2005)			Razão Relativa (%)
w_{max}	w_{min}	$w_{max} - w_{min}$	w_{max}	w_{min}	$w_{max} - w_{min}$	
59,91365	-59,91360	119,82725	59,96272	-59,96272	119,92544	0,08

3.2.1.2 Circular

De acordo com SILVA (2005), para a seção transversal circular utiliza-se a mesma função usada para a elipse, Equação (3.1), e faz-se $a = b$, obtendo-se a seguinte função:

$$w(x, y) = w_0 \tag{3.2}$$

Admitiu-se $a = b = 20$.

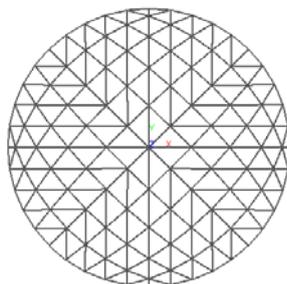


Figura 3.5. Malha da seção transversal circular adotada no Presente Trabalho.

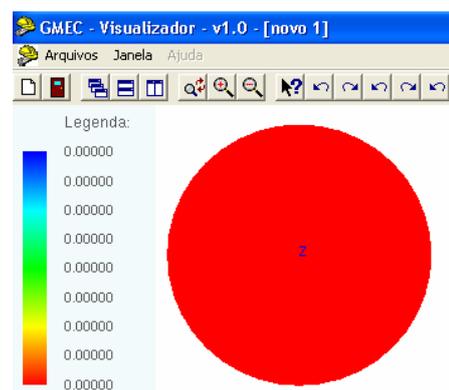


Figura 3.6. Empenamento da seção transversal circular referente ao Presente Trabalho e a SILVA (2005).

Para a implementação numérica adotou-se uma malha com 200 elementos e 441 nós, mostrada na Figura 3.5.

A Figura 3.6 apresenta a configuração deformada, do Presente Trabalho e de SILVA (2005), para a seção circular.

A razão relativa entre o Presente Trabalho e SILVA (2005) é apresentada na Tabela 3.2. Como esperado, para a seção circular, de acordo com a teoria de Coulomb, ambos os trabalhos não apresentam empenamento, ou seja, estão de acordo com a hipótese de que as seções transversais da barra permanecem planas e giram sem distorção durante a torção, levando à solução exata do problema da barra com seção transversal circular.

Tabela 3.2 - Comparação do empenamento relativo da seção transversal circular.

Presente Trabalho			SILVA (2005)			Razão Relativa (%)
w_{\max} (cm)	w_{\min} (cm)	$w_{\max} - w_{\min}$ (cm)	w_{\max} (cm)	w_{\min} (cm)	$w_{\max} - w_{\min}$ (cm)	
0	0	0	0	0	0	0

3.2.1.3 Triangular

Quando a seção transversal é um triângulo equilátero, segundo ABRAMENTO (1981), tem-se a seguinte função empenamento para a torção livre Saint-Venant:

$$w(x, y) = \frac{1}{2a} (y^3 - 3yz^2) \quad (3.3)$$

onde a é a dimensão mostrada na Figura 3.7. Adotou-se $a = 30$.

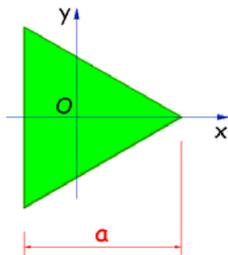


Figura 3.7. Seção transversal triangular.

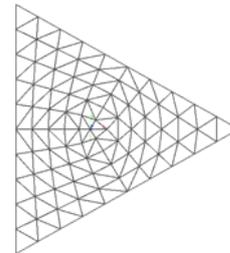


Figura 3.8. Malha da seção transversal triangular adotada no Presente Trabalho.

Calculou-se o empenamento neste trabalho utilizando-se uma malha com 150 elementos e 331 nós, apresentada na Figura 3.8.

A Figura 3.9 apresenta o mapa do empenamento e a configuração deformada, do Presente Trabalho, para a seção transversal triangular.

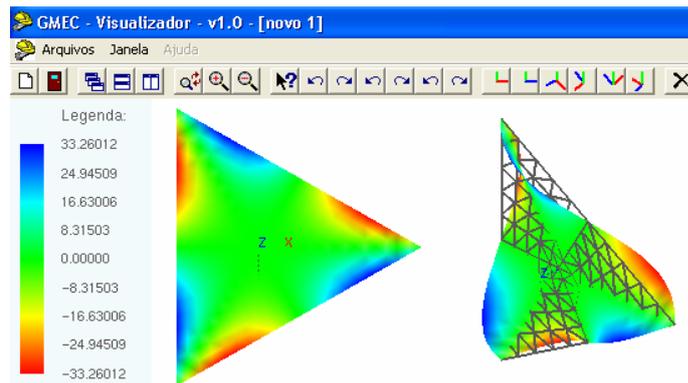


Figura 3.9. Mapa do empenamento e configuração deformada da seção transversal triangular referente ao Presente Trabalho.

E a Figura 3.10 é o mapa do empenamento e a configuração deformada referentes aos resultados ABRAMENTO (1981).

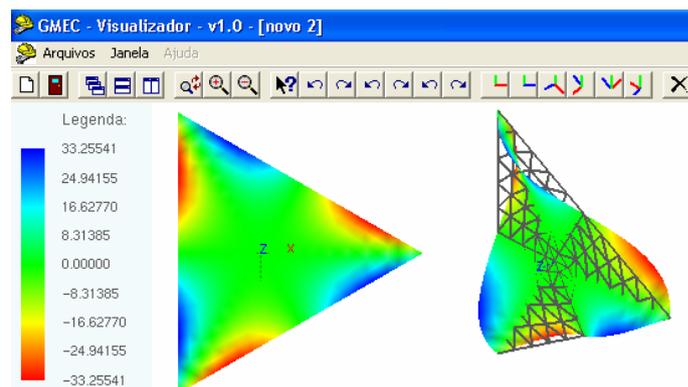


Figura 3.10. Mapa do empenamento e configuração deformada da seção transversal triangular referente à ABRAMENTO (1981).

A razão relativa entre o Presente Trabalho e ABRAMENTO (1981), para a seção transversal que corresponde ao triângulo equilátero, é apresentada na Tabela 3.3. A diferença existente entre os dois trabalhos pode ser desconsiderada, uma vez que os resultados são muito semelhantes.

Tabela 3.3 - Comparação do empenamento relativo da seção transversal triangular.

Presente Trabalho			ABRAMENTO (1981)			Razão Relativa (%)
w_{max}	w_{min}	$w_{max} - w_{min}$	w_{max}	w_{min}	$w_{max} - w_{min}$	
33,26012	-33,2601	66,52024	33,25541	-33,25541	66,5082	0,02

3.2.1.4 Retangular

A função empenamento para a seção retangular de SILVA (2005), referentes à torção livre Saint-Venant é:

$$w(x, y) = w_0 - \frac{(a^6 + 19a^4b^2 - 19a^2b^4 - b^6)xy + \frac{35}{12}a^2b^2(-4x^3y + 4xy^3)}{a^6 + 14a^4b^2 + 14a^2b^4 + b^6} \tag{3.4}$$

onde a e b são as dimensões mostradas na Figura 3.11. Adotou-se $a = 20$ e $b = 10$.

Deve-se observar que esta função não é completa, pois segundo Timoshenko (1982) a solução completa é dada por série de Fourier.

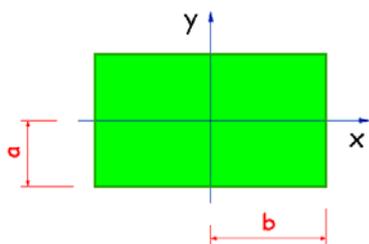


Figura 3.11. Seção transversal retangular.

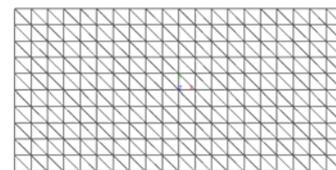


Figura 3.12. Malha da seção transversal retangular adotada no Presente Trabalho.

Criou-se uma malha com 400 elementos e 861 nós, para o presente trabalho, que está representada na Figura 3.12.

A Figura 3.13 apresenta o mapa do empenamento e a configuração deformada, do presente trabalho, para a seção retangular.

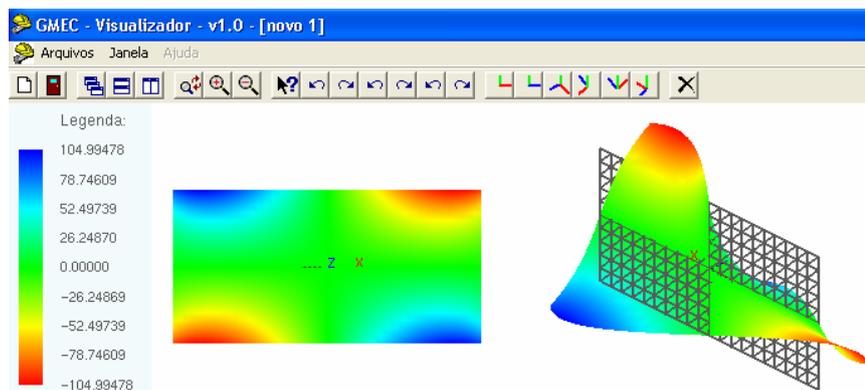


Figura 3.13. Mapa do empenamento e configuração deformada da seção transversal retangular referente ao Presente Trabalho.

E a Figura 3.14 é o mapa do empenamento e a configuração deformada referentes aos resultados de SILVA (2005).

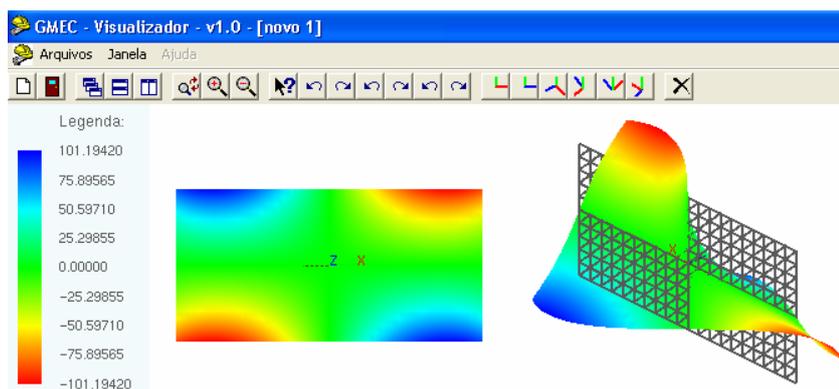


Figura 3.14. Mapa do empenamento e configuração deformada da seção transversal retangular referente a SILVA (2005).

A razão relativa entre o Presente Trabalho e SILVA (2005), para a seção retangular, é apresentada na Tabela 3.4. Para esta seção há uma pequena diferença entre os resultados, sendo que o presente trabalho é mais preciso, por ser menos aproximado.

Tabela 3.4 - Comparação do empenamento relativo da seção transversal retangular.

Presente Trabalho			SILVA (2005)			Razão Relativa (%)
w_{max}	w_{min}	$w_{max} - w_{min}$	w_{max}	w_{min}	$w_{max} - w_{min}$	
104,99478	-104,99478	209,98956	101,19420	-101,19420	202,38840	3,62

3.2.1.5 Quadrada

A função empenamento para a seção transversal quadrada de SILVA (2005) é a mesma Equação (3.4), e neste caso, adotou-se $a = b = 20$.

Gerou-se uma malha com 800 elementos e 1.681 nós, como exhibe a Figura 3.15.

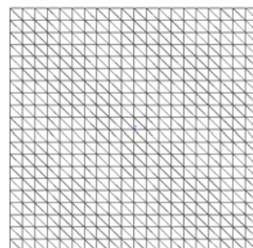


Figura 3.15. Malha da seção transversal quadrada adotada no Presente Trabalho.

A Figura 3.16 apresenta o mapa do empenamento e a configuração deformada, do Presente Trabalho, para a seção transversal quadrada.

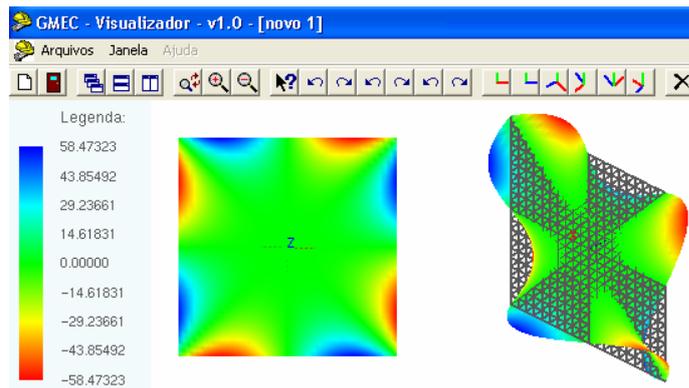


Figura 3.16. Mapa do empenamento e configuração deformada da seção transversal quadrada referente ao Presente Trabalho.

E a Figura 3.17 é o mapa do empenamento e a configuração deformada, de SILVA (2005), para a seção transversal quadrada.

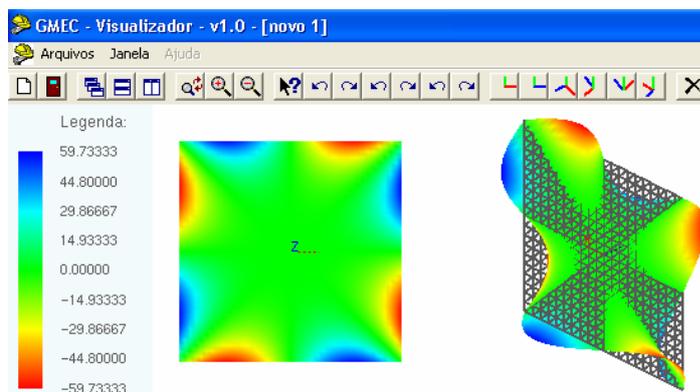


Figura 3.17. Mapa do empenamento e configuração deformada da seção transversal quadrada referente a SILVA (2005).

A razão relativa entre o Presente Trabalho e SILVA (2005), para a seção quadrada, é apresentada na Tabela 3.5. A seção quadrada apresenta uma diferença entre os resultados menor do que a seção retangular.

Tabela 3.5 - Comparação do empenamento relativo da seção transversal quadrada.

Presente Trabalho			SILVA (2005)			Razão Relativa (%)
W_{\max}	W_{\min}	$W_{\max} - W_{\min}$	W_{\max}	W_{\min}	$W_{\max} - W_{\min}$	
58,47323	-58,4732	116,94646	59,73333	-59,73333	119,46666	2,11

Com esses exemplos de torção livre para seções transversais fechadas, confirmam-se as implementações computacionais seguindo as hipóteses de Saint-Venant e verifica-se a capacidade deste código computacional em solucionar este tipo de problema de forma satisfatória.

3.2.2 ABERTAS E PAREDES DELGADAS

Segundo VLASOV (1961) uma barra é considerada de seção delgada quando suas dimensões relativas satisfazem as seguintes ordens de grandeza:

$$\frac{\delta}{d} \leq 0,1 \quad \frac{d}{L} \leq 0,1 \quad (3.5)$$

onde δ é a espessura, d é a largura ou altura da seção transversal e L o comprimento, como mostra a Figura 3.18.

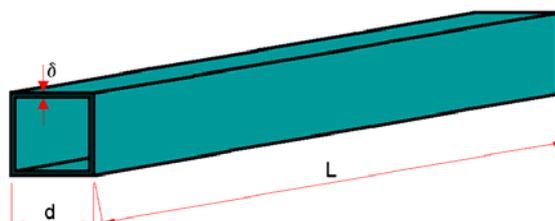


Figura 3.18. Barra com seção delgada.

Os resultados numéricos do Presente Trabalho, referentes ao MEF baseados na teoria de torção livre de Saint-Venant, serão comparados com a Teoria Técnica para barras com paredes abertas e seções delgadas, desenvolvida por Vasili Zakharovich Vlasov (1961). Encontram-se publicações referentes a esta teoria em datas anteriores a esta, como em VLASOV (1940).

Explicar o que seja uma seção transversal aberta com paredes delgadas e quais suas particularidades de cálculo estão além dos objetivos dessa dissertação. Tais informações podem ser encontradas nos seguintes trabalhos: VLASOV (1961), RACHID (1975), MORI (1978), MORI (1988) e MUNAIAR NETO (2006).

Comparou-se a formulação desenvolvida com os resultados, das propriedades das seções delgadas e os valores da área setorial na linha esqueleto da seção transversal, obtidos através do programa FLEXO II, desenvolvido por ANTUNES (1999) com base nas referências supra-citadas.

Procurando-se testar a formulação com dimensões reais adotaram-se alguns perfis estruturais de aço formado a frio, com seção transversal aberta, extraídos da NBR 6355/2003. Escolheram-se as espessuras para os perfis U simples, conforme a tabela A.2 (NBR 6355/2003). E perfil Z enrijecido a 90°, conforme a tabela A.4 (NBR 6355/2003). Também se considerou o perfil I, a partir de dois perfis U.

Pela teoria de Vlasov, o empenamento (w) é dado por:

$$w = \omega \alpha \tag{3.6}$$

onde ω é a área setorial e α o giro por unidade de comprimento. Através da Equação (3.6) calcularam-se os valores para os empenamentos das seções transversais abertas e com paredes delgadas, referentes à teoria técnica. Os valores de α foram adotados com o objetivo de simular situações usuais na prática do trabalho com estruturas metálicas.

Para efeito de cálculo desprezou-se a curvatura formada por elementos adjacentes nos perfis formados a frio. Considerou-se que todos esses ângulos são iguais a 90° e ocorrem abruptamente.

A teoria de Vlasov considera a linha esqueleto da seção transversal para a determinação do diagrama de área setorial. Portanto os valores do empenamento, obtidos por ambas as teorias, serão comparados para a linha esqueleto.

A unidade dos deslocamentos (empenamento) para os exemplos com seções transversais abertas e paredes delgadas é o milímetro (*mm*).

3.2.2.1 Análise de convergência

O objetivo da análise de convergência é determinar o número de elementos a partir do qual os resultados não apresentem alterações significativas.

Dado o perfil Z_{90} $100 \times 50 \times 17 \times 2,00$ (Tabela 3.7), verificou-se o empenamento no ponto 1 (Figura 3.21) para malhas com diferentes quantidades de elementos. Estes resultados encontram-se na Tabela 3.6.

Tabela 3.6 - Análise de convergência do Perfil Z_{90} $100 \times 50 \times 17 \times 2,00$.

N° <i>elementos</i>	w_1 <i>(mm)</i>
18	22,98754
120	22,99513
228	22,99625
616	22,99716
904	22,99745

E a verificação é feita através de exemplos que serão apresentados posteriormente.

Representou-se a análise de convergência graficamente como mostra a Figura 3.19, na abscissa tem-se o número de elementos e na ordenada os valores do empenamento no ponto 1.

Em relação aos resultados, a partir da análise de convergência para as seções transversais abertas e com paredes delgadas pode-se afirmar que por mais pobre que seja a malha, a diferença no resultado é desprezível, em situações práticas de engenharia, como se observa na Tabela 3.6 e Figura 3.19. Portanto, para exemplos com seções transversais desse tipo considerou-se a dimensão máxima possível para o elemento triangular (dois elementos para cada trecho triangular), garantindo-se a conformidade dos elementos, respeitando a dimensão do perfil, e impondo a existência de nós na linha esqueleto. Já que os resultados são pouco sensíveis à malha adotada.

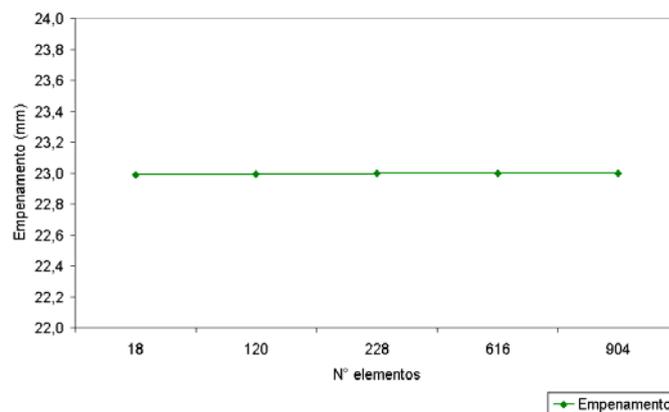
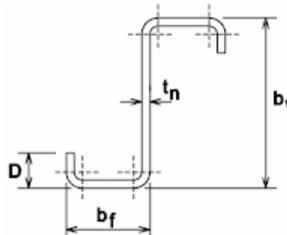


Figura 3.19. Representação gráfica da análise de convergência do perfil $Z_{90} 100 \times 50 \times 17 \times 2,00$.

3.2.2.2 Perfil Z enrijecido a 90°

As dimensões adotadas para o perfil Z_{90} foram obtidas a partir da NBR 6355/ 2003, procurando-se verificar a formulação desenvolvida em casos de dimensões reais (Tabela 3.7).

Tabela 3.7 - Série comercial do perfil estrutural Z e respectiva designação (NBR6355/2003).

Série	Seção transversal	Designação ¹⁾
Z enrijecido a 90°		$Z_{90} \ b_w \times b_f \times D \times t_n$ Exemplos: $Z_{90} \ 100 \times 50 \times 17 \times 1,20$ $Z_{90} \ 100 \times 50 \times 17 \times 2,00$ $Z_{90} \ 100 \times 50 \times 17 \times 3,00$

¹⁾ As dimensões são apresentadas em milímetros.

Analisou-se o empenamento dos Perfis Z_{90} com malhas constituídas por 18 elementos e 57 nós, como ilustra a Figura 3.20.

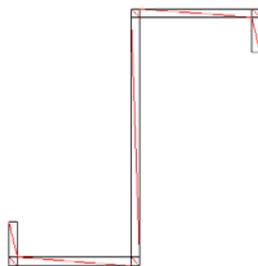


Figura 3.20. Malha adotada para o Perfil Z_{90} .

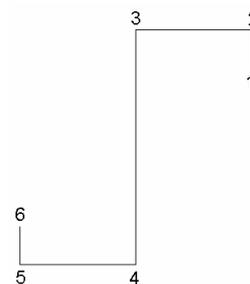


Figura 3.21. Nós do vértice da linha esqueleto do Perfil Z_{90} .

Os nós, cujos empenamentos da seção transversal Z , que pertencem à linha esqueleto e foram escolhidos para a comparação entre a teoria técnica e os resultados numéricos, estão representados na Figura 3.21.

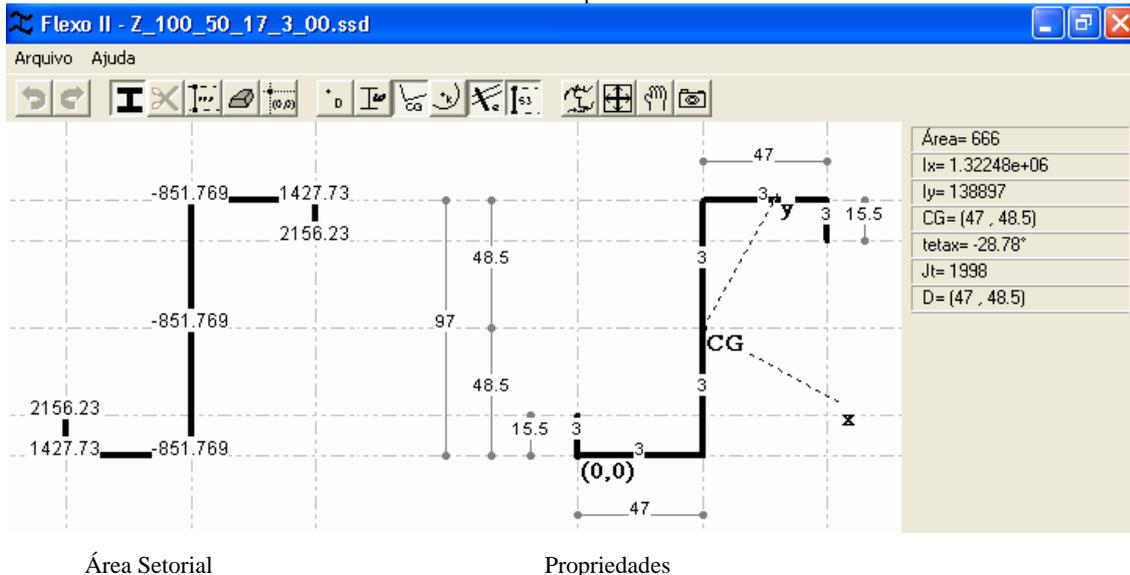
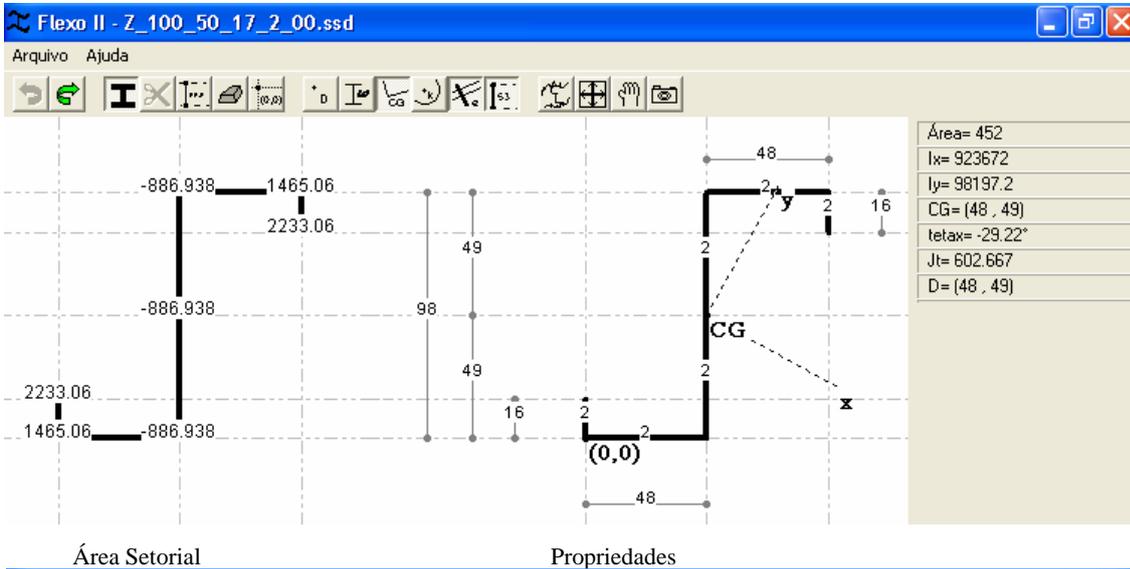
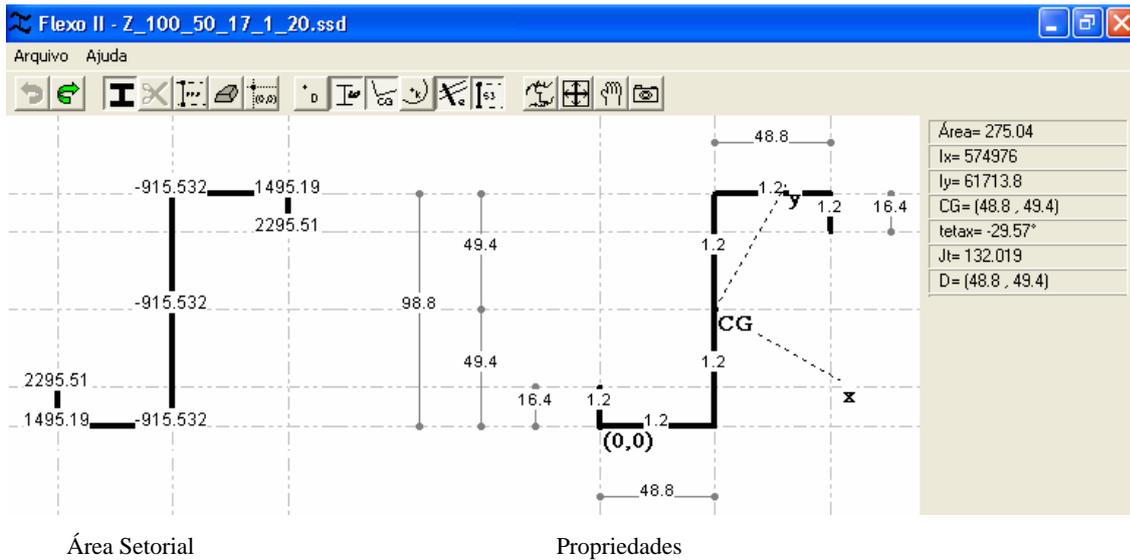


Figura 3.22. Propriedades e área setorial do Perfil Z_{90} , ANTUNES (1999).

Lembra-se que a seção Z é ponto - simétrica, portanto tem-se a área setorial e o empenamento de forma que os valores do nó 1 são iguais aos do nó 6, 2 iguais aos 5 e 3 iguais aos 4, Figura 3.21.

Do programa FLEXO II, desenvolvido por ANTUNES (1999) têm-se as propriedades (Figura 3.22, à direita) e valores de área setorial (unidade: mm^2) dos Perfis Z_{90} (Figura 3.22, à esquerda), para diferentes espessuras. Onde D é o Centro de Torção, CG o Centro de Gravidade e $(0,0)$ a origem do sistema de coordenadas. Como a seção Z é ponto - simétrica, o centro de torção (D) ou de cisalhamento (CC) coincide com o centro de gravidade (CG), conforme resultados obtidos através do programa FLEXO II. Os valores na linha esqueleto são as espessuras das seções (Figura 3.22, à direita - Propriedades). As cotas são em relação ao eixo da seção transversal, ou seja, na linha esqueleto. A unidade de referência é o milímetro (mm).

Apresentam-se na Tabela 3.8 os resultados das propriedades dos Perfis Z_{90} , para diferentes espessuras, obtidos a partir do Presente Trabalho e de ANTUNES (1999), bem como, a comparação destes resultados. A diferença encontrada é desprezível em situações práticas de engenharia.

Tabela 3.8 - Comparação das propriedades do Perfil Z_{90} .

Propriedades		Presente Trabalho	ANTUNES (1999)	Razão Relativa (%)
Z_{90} 100 x 50 x 17 x 1,20				
Área	(mm ²)	275,04	275,04	0,00
I_x	(mm ⁴)	575.068,55	574.976,00	0,02
I_y	(mm ⁴)	61.748,41	61.713,80	0,06
x(CG)	(mm)	48,80	48,80	0,00
y(CG)	(mm)	49,40	49,40	0,00
θ_x	(°)	-29,57	-29,57	0,00
J_t	(mm ⁴)	133,83	132,02	1,35
x(D)	(mm)	48,80	48,80	0,00
y(D)	(mm)	49,40	49,40	0,00
Z_{90} 100 x 50 x 17 x 2,00				
Área	(mm ²)	452,00	452,00	0,00
I_x	(mm ⁴)	924.098,42	923.672,00	0,05
I_y	(mm ⁴)	98.355,10	98.197,20	0,16
x(CG)	(mm)	48,00	48,00	0,00
y(CG)	(mm)	49,00	49,00	0,00
θ_x	(°)	-29,22	-29,22	0,00
J_t	(mm ⁴)	615,49	602,67	2,08
x(D)	(mm)	48,00	48,00	0,00
y(D)	(mm)	49,00	49,00	0,00
Z_{90} 100 x 50 x 17 x 3,00				
Área	(mm ²)	666,00	666,00	0,00
I_x	(mm ⁴)	1.323.903,94	1.322.480,00	0,11
I_y	(mm ⁴)	139.419,83	138.897,00	0,38
x(CG)	(mm)	47,00	47,00	0,00
y(CG)	(mm)	480,50	48,50	0,00
θ_x	(°)	-28,78	-28,78	0,00
J_t	(mm ⁴)	2.056,70	1.998,00	2,85
x(D)	(mm)	47,00	47,00	0,00
y(D)	(mm)	48,50	48,50	0,00

A Figura 3.23 mostra o mapa do empenamento e a configuração deformada dos perfis Z , para diferentes espessuras, no centro de gravidade da seção transversal, que coincide com o centro de cisalhamento, para este exemplo de perfil Z ponto - simétrica. Estes resultados referem-se ao presente trabalho.

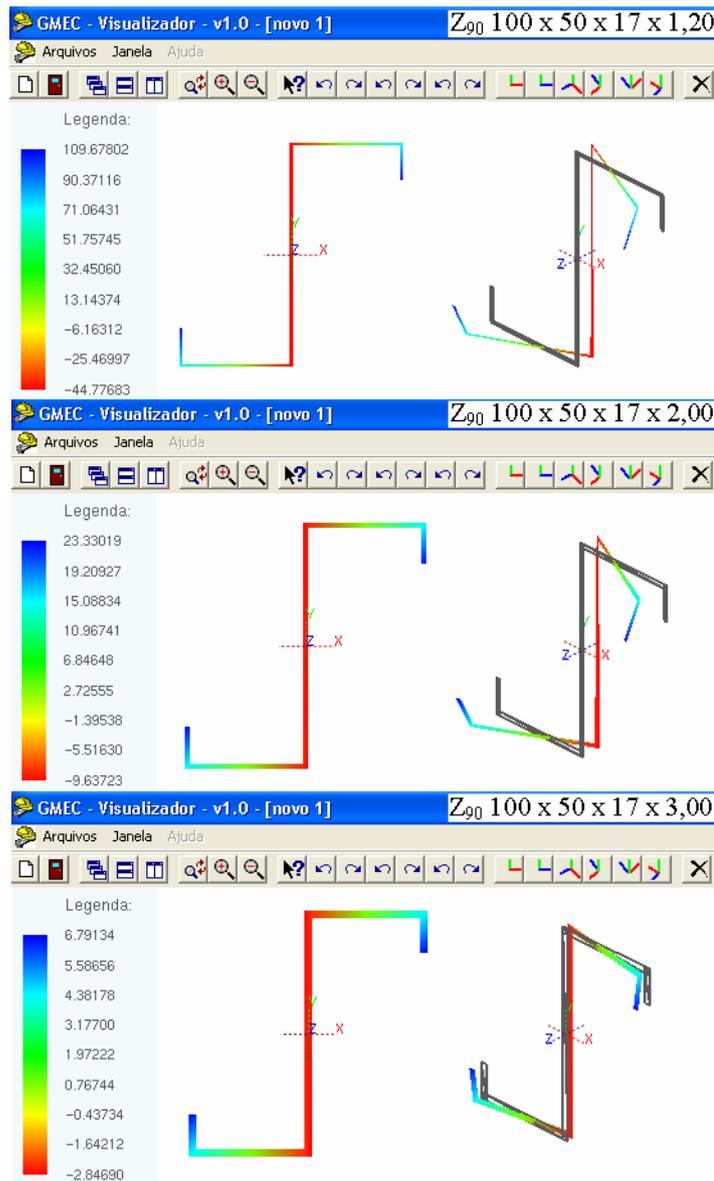


Figura 3.23. Mapa de deslocamentos e configuração deformada do Perfil Z_{90} no $CG \equiv CC$.

Os resultados dos empenamentos, referentes aos nós representados na Figura 3.21, para os valores obtidos a partir da teoria técnica (Vlasov) e do presente trabalho (Saint-Venant), para diferentes espessuras, encontram-se na Tabela 3.9. Os resultados da área setorial são de ANTUNES (1999) e encontram-se na Figura 3.22.

Tabela 3.9 - Comparação do empenamento do Perfil Z_{90} .

Nós	Presente Trabalho			Teoria Técnica		Razão Relativa (%)
	Empenamento (mm)	Área Setorial (mm^2)	Giro (rad/mm)	Empenamento (mm)		
$Z_{90} 100 \times 50 \times 17 \times 1,20$						
1	108,737	2.295,510	0,0473849287	108,773		0,03
2	70,829	1.495,190	0,0473849287	70,849		0,03
3	-43,372	-915,532	0,0473849287	-43,382		0,02
$Z_{90} 100 \times 50 \times 17 \times 2,00$						
1	22,987	2.233,060	0,0103030517	23,007		0,09
2	15,083	1.465,060	0,0103030517	15,095		0,08
3	-9,132	-886,938	0,0103030517	-9,138		0,07
$Z_{90} 100 \times 50 \times 17 \times 3,00$						
1	6,636	2.156,230	0,0030833181	6,648		0,19
2	4,395	1.427,730	0,0030833181	4,402		0,16
3	-2,623	-851,769	0,0030833181	-2,626		0,12

A Figura 3.24 é a representação gráfica dos valores dos empenamentos nos pontos 1, 2 e 3 da linha esqueleto, ilustrados na Figura 3.21. Os nós 4, 5 e 6 foram omitidos por serem simétricos.

O presente trabalho apresenta o cálculo do empenamento em toda a seção transversal como mostra a Figura 3.23. A teoria técnica calcula o empenamento apenas na linha esqueleto, que são os resultados comparados com o presente trabalho. Apesar da cinemática do presente trabalho ser menos simplificada e apresentar resultados mais próximos dos reais, a teoria técnica também apresenta uma precisão aceitável na linha esqueleto como mostram a Tabela 3.9 e a Figura 3.24.

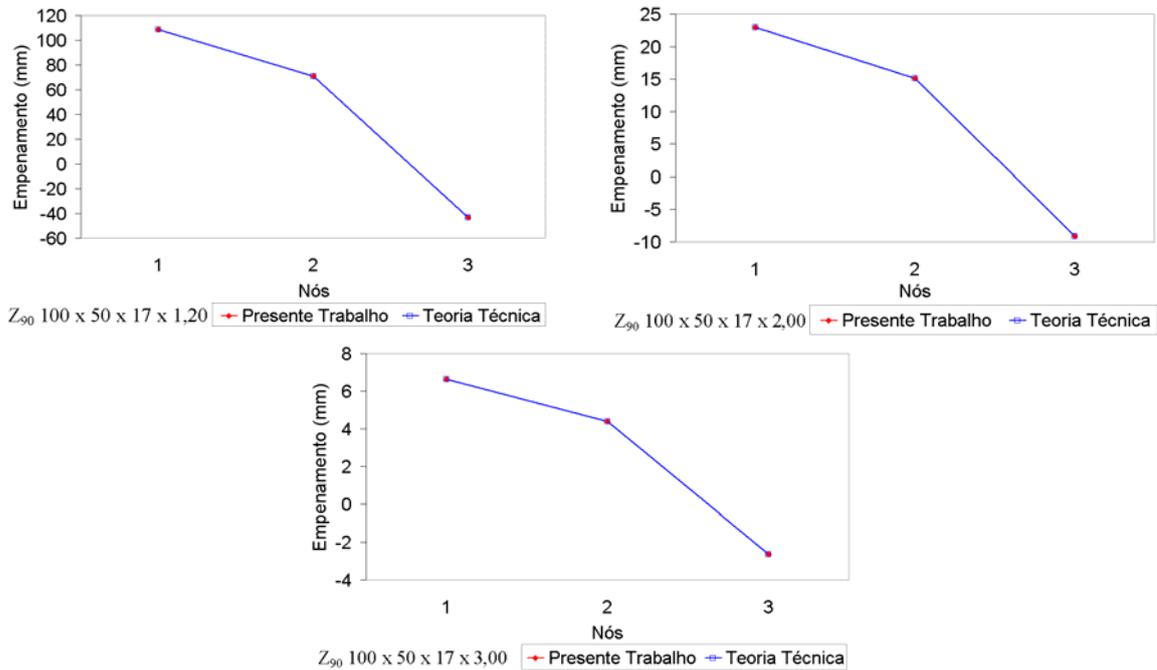
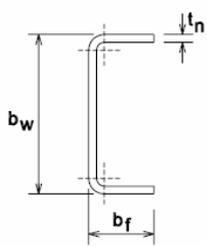


Figura 3.24. Representação gráfica do empenamento do Perfil Z₉₀.

3.2.2.3 Perfil U simples

As dimensões adotadas para o Perfil *U* simples foram obtidas a partir da NBR6355/2003, procurando-se verificar a formulação desenvolvida em casos de dimensões reais (Tabela 3.10).

Tabela 3.10 - Série comercial do perfil estrutural *U* e respectiva designação (NBR6355/2003).

Série	Seção transversal	Designação ¹⁾
U simples		$U \ b_w \times b_f \times t_n$ Exemplos: $U \ 100 \times 75 \times 2,65$ $U \ 100 \times 75 \times 3,00$ $U \ 100 \times 75 \times 3,75$ $U \ 100 \times 75 \times 8,00$

¹⁾ As dimensões são apresentadas em milímetros.

Analisou-se o empenamento dos Perfis U simples com malhas constituídas por 10 elementos e 33 nós, como ilustra a Figura 3.25.

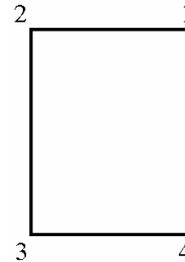


Figura 3.25. Malha adotada para o Perfil U simples. Figura 3.26. Nós do vértice da linha esqueleto do Perfil U simples.

Os nós, cujos empenamentos da seção transversal U , que pertencem à linha esqueleto e foram escolhidos para a comparação entre a teoria técnica e os resultados numéricos, estão representados na Figura 3.26.

Do programa FLEXO II, desenvolvido por ANTUNES (1999) têm-se as propriedades (Figura 3.27, à direita) e valores de área setorial (unidade: mm^2) dos Perfis U simples (Figura 3.27, à esquerda). Onde D é o Centro de Torção, CG o Centro de Gravidade e $(0,0)$ a origem do sistema de coordenadas. Os valores na linha esqueleto são as espessuras das seções (Figura 3.27, à direita - Propriedades). As cotas são em relação ao eixo da seção transversal, ou seja, na linha esqueleto. A unidade de referência é o milímetro (mm).

Apresentam-se na Tabela 3.11 os resultados das propriedades dos Perfis U simples, para diferentes espessuras, obtidos a partir do Presente Trabalho e de ANTUNES (1999), bem como a comparação destes resultados. A diferença é desprezível em situações práticas de engenharia.

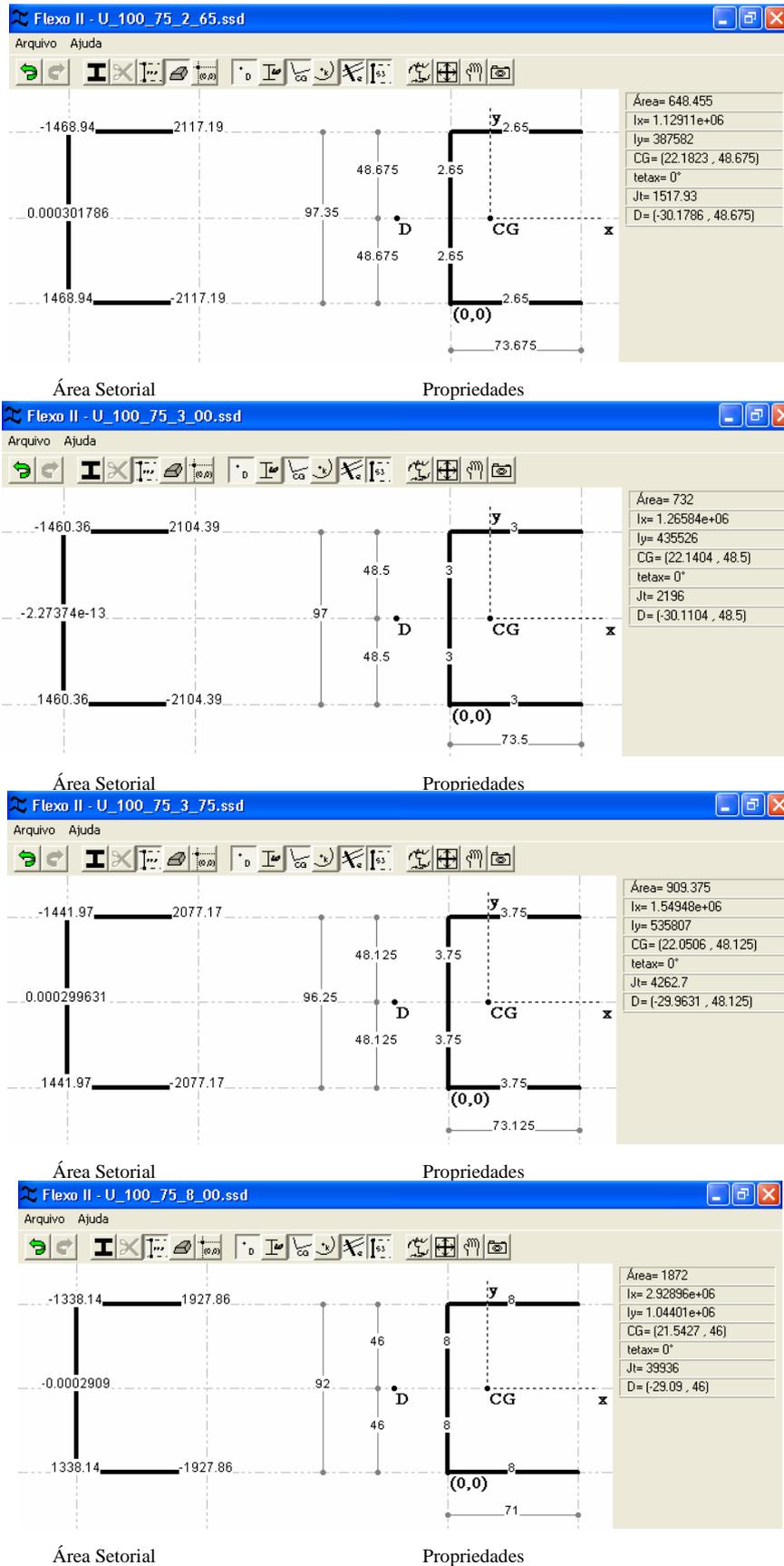


Figura 3.27. Propriedades e área setorial do Perfil U simples, ANTUNES (1999).

Tabela 3.11 - Comparação das propriedades do Perfil U simples.

Propriedades		Presente Trabalho	ANTUNES (1999)	Razão Relativa (%)
U 100 x 75 x 2,65				
Área	(mm ²)	648,455	648,455	0,00
I_x	(mm ⁴)	1.129.560,857	1.129.110,000	0,04
I_y	(mm ⁴)	387.787,307	387.582,000	0,05
x(CG)	(mm)	22,175	22,182	-0,03
y(CG)	(mm)	48,675	48,675	0,00
θ_x	(°)	0,000	0,000	0,00
J_t	(mm ⁴)	1.539,510	1.517,930	1,40
x(D)	(mm)	-30,101	-30,179	-0,26
y(D)	(mm)	48,675	48,675	0,00
U 100 x 75 x 3,00				
Área	(mm ²)	732,00	732,00	0,00
I_x	(mm ⁴)	1.266.496,23	1.265.840,00	0,05
I_y	(mm ⁴)	435.824,48	435.526,00	0,07
x(CG)	(mm)	22,13	22,14	0,04
y(CG)	(mm)	48,50	48,50	0,00
θ_x	(°)	0,00	0,00	0,00
J_t	(mm ⁴)	2.230,85	2196,00	1,56
x(D)	(mm)	-30,01	-30,11	-0,33
y(D)	(mm)	48,50	48,50	0,00
U 100 x 75 x 3,75				
Área	(mm ²)	909,375	909,375	0,00
I_x	(mm ⁴)	1.550.747,356	1.549.480,000	0,08
I_y	(mm ⁴)	536.387,624	535.807,000	0,11
x(CG)	(mm)	22,036	22,051	0,07
y(CG)	(mm)	48,125	48,125	0,00
θ_x	(°)	0,000	0,000	0,00
J_t	(mm ⁴)	4.344,742	4.262,700	1,89
x(D)	(mm)	-29,779	-29,963	0,62
y(D)	(mm)	48,125	48,125	0,00
U 100 x 75 x 8,00				
Área	(mm ²)	1.872,00	1.872,00	0,00
I_x	(mm ⁴)	2.940.736,55	2.928.960,00	0,40
I_y	(mm ⁴)	1.049.514,94	1.044.010,00	0,52
x(CG)	(mm)	21,47	21,54	0,32
y(CG)	(mm)	46,00	46,00	0,00
θ_x	(°)	0,00	0,00	0,00
J_t	(mm ⁴)	41.325,56	39.936,00	3,36
x(D)	(mm)	-28,42	-29,09	2,34
y(D)	(mm)	46,00	46,00	0,00

A Figura 3.28 mostra o mapa do empenamento e a configuração deformada dos perfis U simples, para diferentes espessuras, no centro de gravidade da seção transversal.

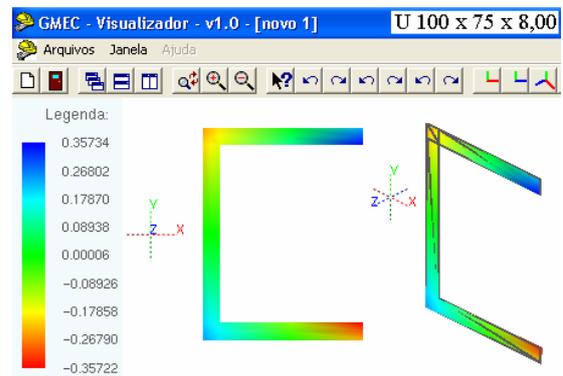
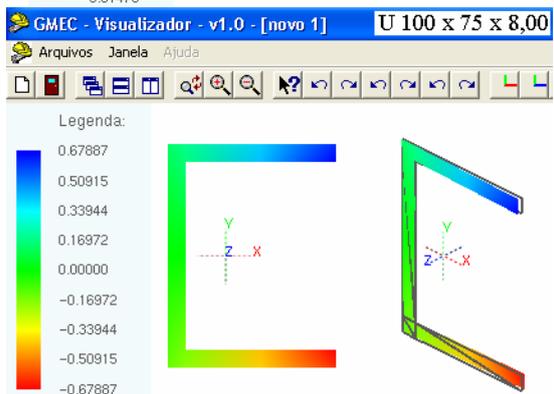
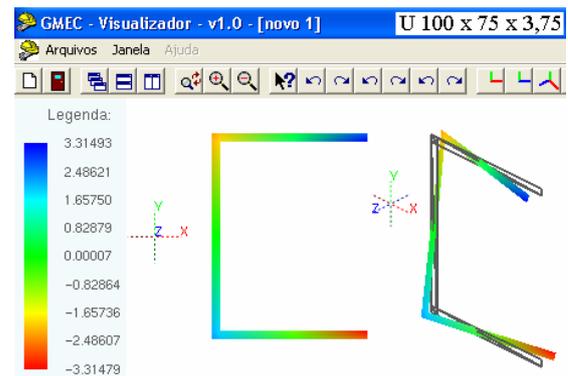
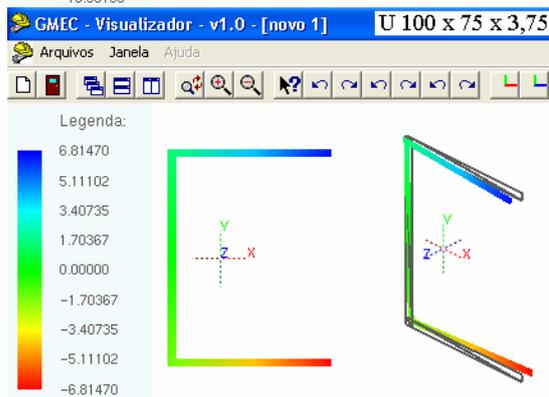
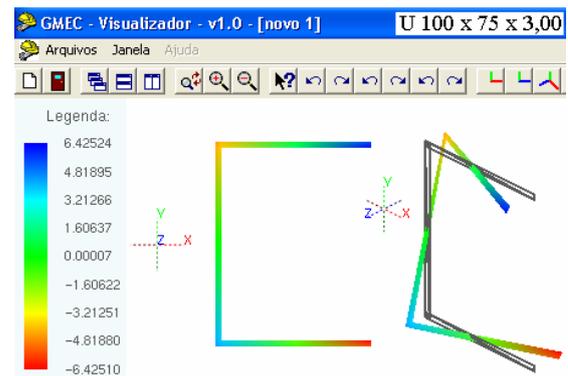
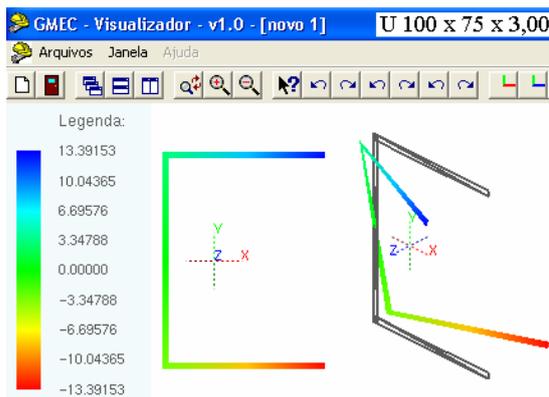
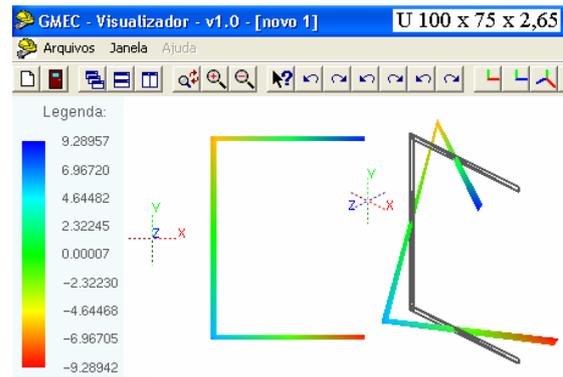
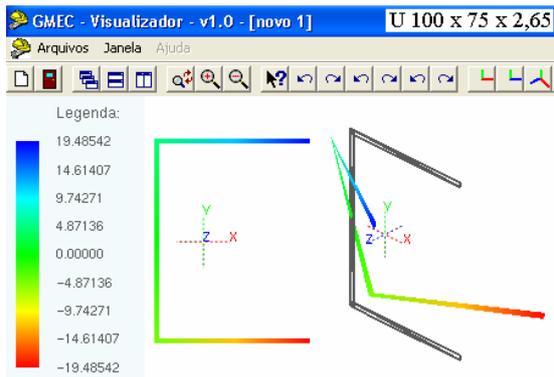


Figura 3.28. Mapa de deslocamentos e configuração deformada do Perfil U simples, origem no CG.

Figura 3.29. Mapa de deslocamentos e configuração deformada do Perfil U simples, origem no CC.

E a Figura 3.29 ilustra o mapa do empenamento e a configuração deformada para os perfis U simples, com origem no centro de cisalhamento da seção transversal. Estes resultados referem-se ao presente trabalho. Observam-se na Figura 3.28 e Figura 3.29 que os valores do empenamento obtidos considerando-se a origem no CG são diferentes daqueles para a origem no CC, porque ocorre movimento de corpo rígido. Visto que a diferença entre o empenamento máximo e mínimo de cada seção coincide para ambas as origens.

Os resultados dos empenamentos, referentes aos nós representados na Figura 3.26, para os valores obtidos a partir da teoria técnica (Vlasov) e do presente trabalho (Saint-Venant), para diferentes espessuras, encontram-se na Tabela 3.12. Os resultados da área setorial são de ANTUNES (1999) e se encontram na Figura 3.27.

Tabela 3.12 - Comparação do empenamento do Perfil U simples no CC.

Nó	Presente Trabalho			Teoria Técnica	Razão Relativa (%)
	Empenamento (mm)	Área Setorial (mm ²)	Giro (rad/mm)	Empenamento (mm)	
U 100 x 75 x 2,65					
1	8,72371	2.117,19	0,0041191443	8,72101	0,03
2	-6,04166	-1.468,94	0,0041191443	-6,05078	0,15
3	6,04160	1.468,94	0,0041191443	6,05078	0,15
4	-8,72356	-2.117,19	0,0041191443	-8,72101	0,03
U 100 x 75 x 3,00					
1	5,98441	2.104,39	0,0028426203	5,98198	0,04
2	-4,14323	-1.460,36	0,0028426203	-4,15125	0,19
3	4,14316	1.460,36	0,0028426203	4,15125	0,19
4	-5,98426	-2.104,39	0,0028426203	-5,98198	0,04
U 100 x 75 x 3,75					
1	3,03376	2.077,17	0,0014595719	3,03178	0,07
2	-2,09832	-1.441,97	0,0014595719	-2,10466	0,30
3	2,09826	1.441,97	0,0014595719	2,10466	0,30
4	-3,03362	-2.077,17	0,0014595719	-3,03178	0,06
U 100 x 75 x 8,00					
1	0,29689	1.927,86	0,0001534514	0,29583	0,36
2	-0,20251	-1.338,14	0,0001534514	-0,20534	1,38
3	0,20245	1.338,14	0,0001534514	0,20534	1,41
4	-0,29676	-1.927,86	0,0001534514	-0,29583	0,31

A Figura 3.30 é a representação gráfica dos valores dos empenamentos nos pontos ilustrados na Figura 3.26.

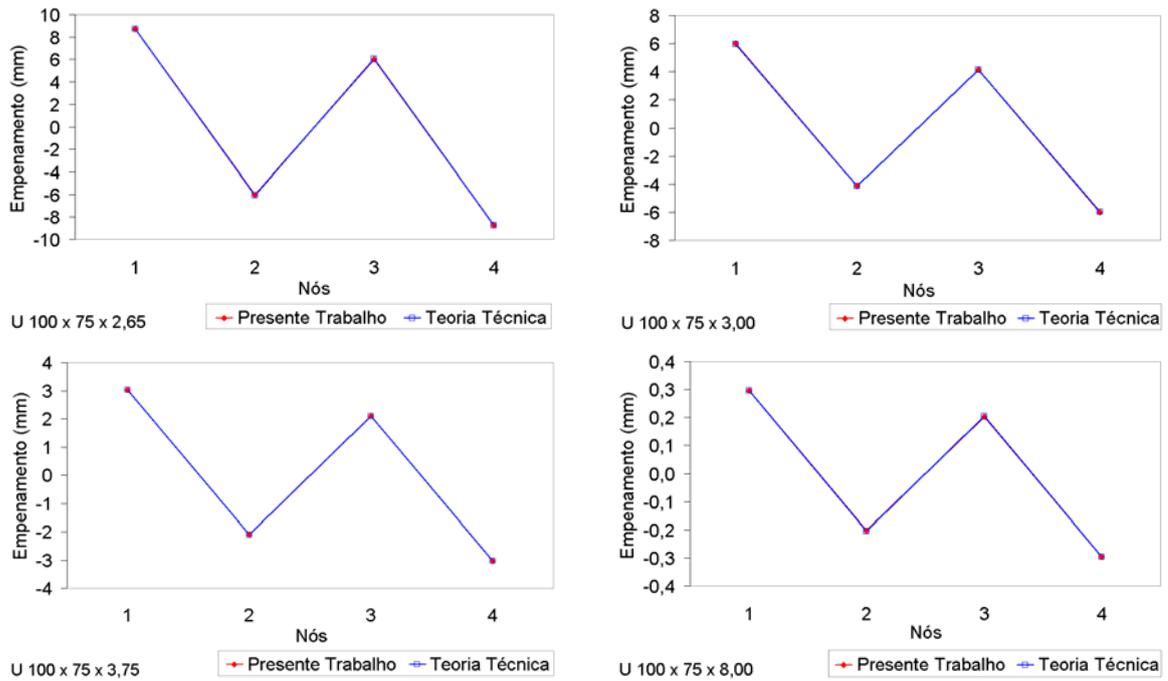


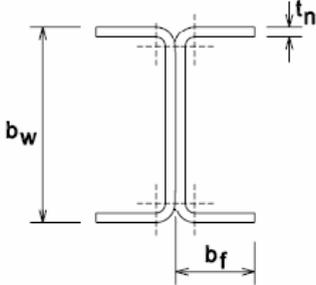
Figura 3.30. Representação gráfica da comparação do empenamento do Perfil U simples.

O presente trabalho apresenta o cálculo do empenamento em toda a seção transversal como mostra a Figura 3.29. A teoria técnica calcula o empenamento apenas na linha esqueleto, que são os resultados comparados com o presente trabalho. Apesar da cinemática do presente trabalho ser menos simplificada e apresentar resultados mais próximos dos reais, a teoria técnica também apresenta uma precisão aceitável na linha esqueleto como mostram a Tabela 3.12 e a Figura 3.30.

3.2.2.4 Perfil I

A seção I considera a união de dois Perfis U simples. As dimensões são as descritas na Tabela 3.13.

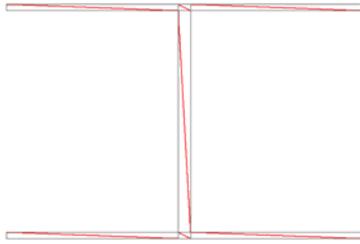
Tabela 3.13 - Série do Perfil I adotado a partir de dois perfis estruturais U e respectiva designação.

Série	Seção transversal	Designação ¹⁾
I		$I = 2 \times (U \ b_w \times b_f \times t_n)$ <p>Exemplos:</p> $I = 2 \times (U \ 100 \times 75 \times 2.65)$ $I = 2 \times (U \ 100 \times 75 \times 3.00)$ $I = 2 \times (U \ 100 \times 75 \times 3.75)$ $I = 2 \times (U \ 100 \times 75 \times 8.00)$

¹⁾ As dimensões são apresentadas em milímetros.

Analisou-se o empenamento dos Perfis I com malhas constituídas por 14 elementos e 45 nós, como ilustra a Figura 3.31.

Os nós, cujos empenamentos da seção transversal I , que pertencem à linha esqueleto e foram escolhidos para a comparação entre a teoria técnica e os resultados numéricos, estão representados na Figura 3.32.

Figura 3.31. Malha adotada para o Perfil I .Figura 3.32. Nós do vértice da linha esqueleto do Perfil I .

Do programa FLEXO II, desenvolvido por ANTUNES (1999) têm-se as propriedades (Figura 3.33, à direita) e valores de área setorial (unidade: mm^2) dos Perfis I (Figura 3.33, à esquerda), para diferentes espessuras. Onde D é o Centro de Torção, CG o Centro de Gravidade e $(0,0)$ a origem do sistema de coordenadas. Os valores na linha esqueleto são as espessuras das seções (Figura 3.33, à direita - Propriedades). As cotas são em relação ao eixo da seção transversal, ou seja, na linha esqueleto. A unidade de referência é o milímetro (mm).

Apresentam-se na Tabela 3.14 os resultados das propriedades dos Perfis I , para diferentes espessuras, obtidos a partir do Presente Trabalho e de ANTUNES (1999), bem como, a comparação destes resultados. A diferença encontrada é desprezível em situações práticas de engenharias.

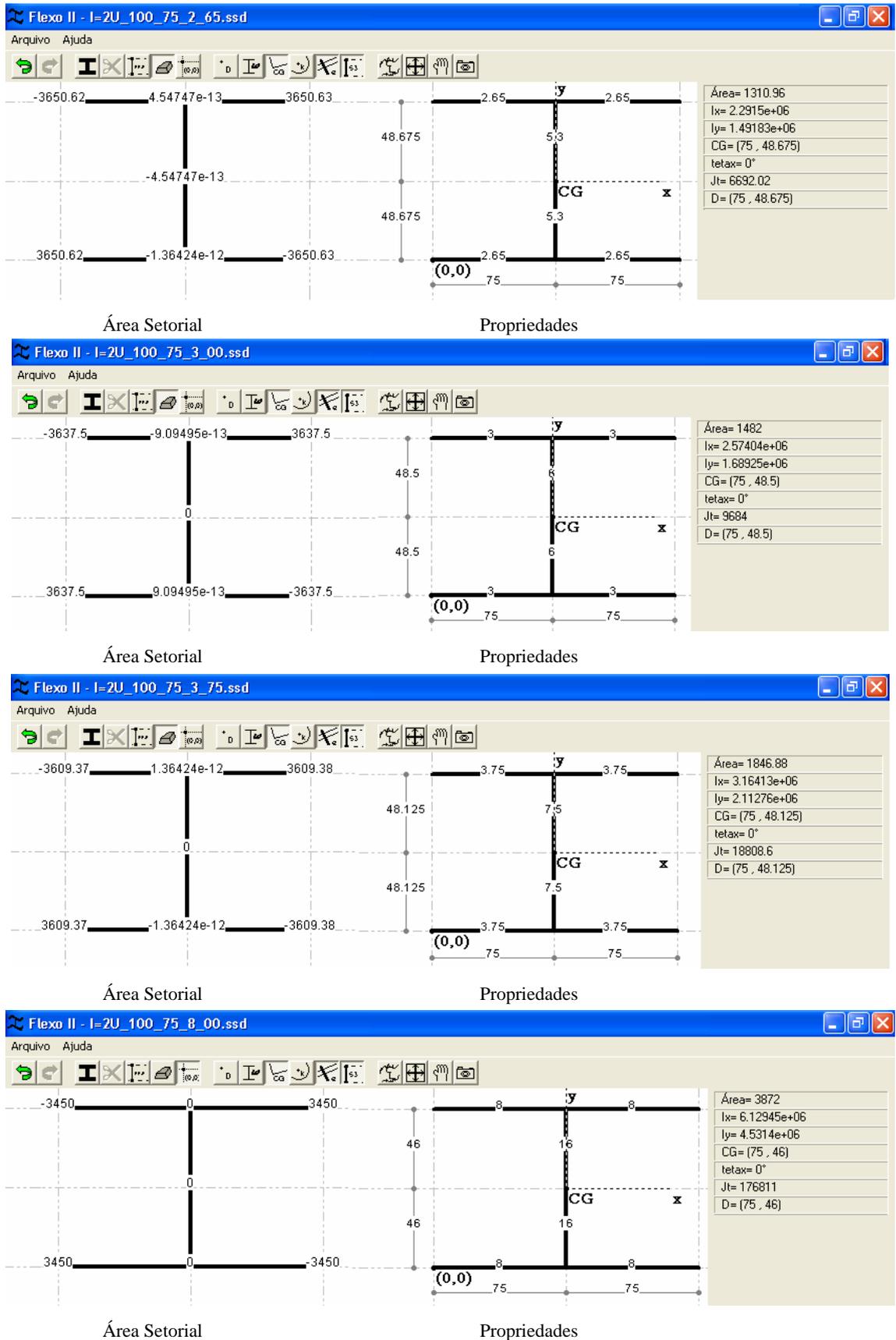


Figura 3.33. Propriedades e área setorial do Perfil I , ANTUNES (1999).

Tabela 3.14 - Comparação das propriedades do Perfil I .

Propriedades	Presente Trabalho	ANTUNES (1999)	Razão Relativa (%)
$I = 2 \times (U 100 \times 75 \times 2.65)$			
Área	1296,910	1310,960	1,08
I_x	2259121,714	2291500,000	1,43
I_y	1491800,137	1491830,000	0,00
$x(CG)$	75,000	75,000	0,00
$y(CG)$	48,675	48,675	0,00
θ_x	0,000	0,000	0,00
J_t	6742,979	6692,020	0,76
$x(D)$	75,000	75,000	0,00
$y(D)$	48,675	48,675	0,00
$I = 2 \times (U 100 \times 75 \times 3.00)$			
Área	1464,00	1482,00	1,23
I_x	2532992,46	2574040,00	1,62
I_y	1689192,28	1689250,00	0,00
$x(CG)$	75,00	75,00	0,00
$y(CG)$	48,50	48,50	0,00
θ_x	0,00	0,00	0,00
J_t	9765,01	9684,00	0,83
$x(D)$	75,00	75,00	0,00
$y(D)$	48,50	48,50	0,00
$I = 2 \times (U 100 \times 75 \times 3.75)$			
Área	1818,750	1846,880	1,55
I_x	3101494,711	3164130,000	2,02
I_y	2112627,309	2112760,000	0,01
$x(CG)$	75,000	75,000	0,00
$y(CG)$	48,125	48,125	0,00
θ_x	0,000	0,000	0,00
J_t	18993,119	18808,600	0,97
$x(D)$	75,000	75,000	0,00
$y(D)$	48,125	48,125	0,00
$I = 2 \times (U 100 \times 75 \times 8.00)$			
Área	3744,00	3872,00	3,42
I_x	5881473,10	6129450,00	4,22
I_y	4528672,78	4531400,00	0,06
$x(CG)$	75,00	75,00	0,00
$y(CG)$	46,00	46,00	0,00
θ_x	0,00	0,00	0,00
J_t	179392,09	176811,00	1,44
$x(D)$	75,00	75,00	0,00
$y(D)$	46,00	46,00	0,00

A Figura 3.34 mostra o mapa do empenamento e a configuração deformada, referente ao presente trabalho, dos perfis I , para diferentes espessuras, no centro de gravidade da seção transversal, que para este perfil coincide com o centro de cisalhamento.

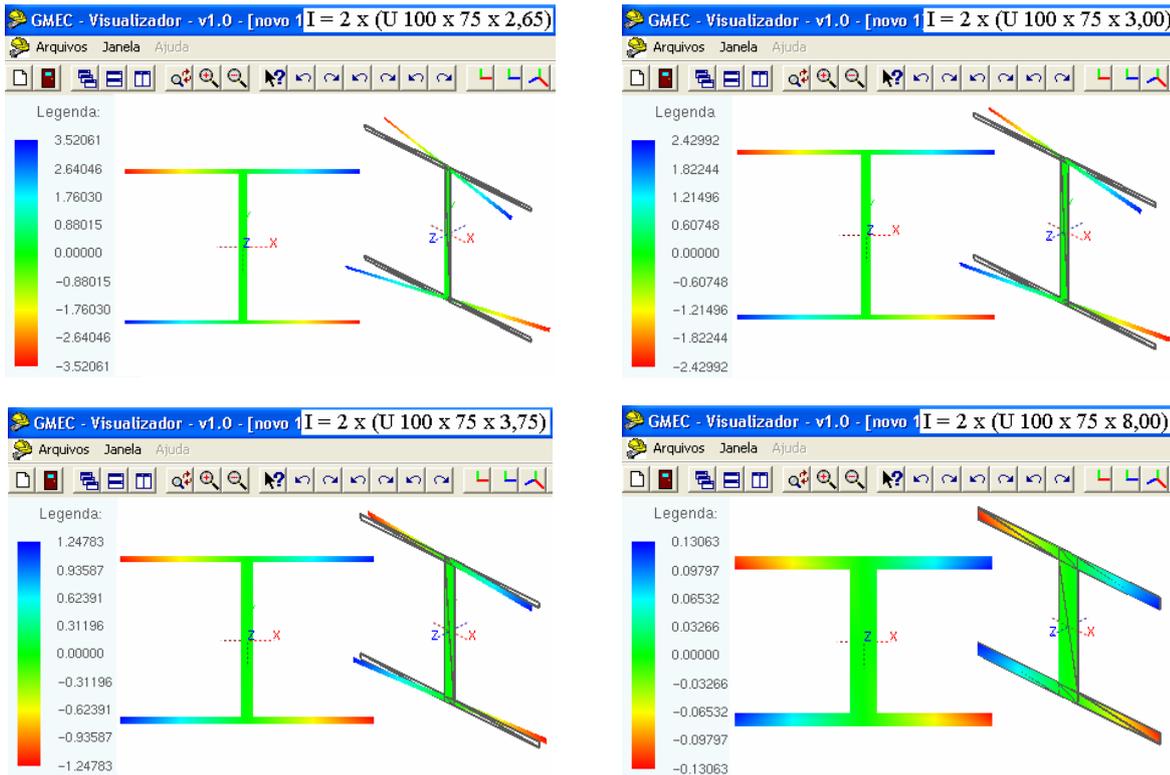


Figura 3.34. Mapa de deslocamentos e configuração deformada do Perfil I no $CG \equiv CC$.

Os resultados dos empenamentos, referentes aos nós representados na Figura 3.32, para os valores obtidos a partir da teoria técnica (Vlasov) e do presente trabalho (Saint-Venant), para diferentes espessuras, encontram-se na Tabela 3.15. Os resultados da área setorial são de ANTUNES (1999) e se encontram também na Figura 3.33.

A Figura 3.35 é a representação gráfica dos valores dos empenamentos nos pontos ilustrados na Figura 3.32.

O presente trabalho apresenta o cálculo do empenamento em toda a seção transversal como mostra a Figura 3.34. A teoria técnica calcula o empenamento apenas na linha esqueleto, que são os resultados comparados com o presente trabalho.

Tabela 3.15 - Comparação do empenamento do Perfil I.

Nó	Presente Trabalho			Teoria Técnica	
	Empenamento (mm)	Área Setorial (mm ²)	Giro (rad/mm)	Empenamento (mm)	Razão Relativa (%)
I = 2 x (U 100 x 75 x 2.65)					
1	-3,42727	-3650,62	0,0009404543	-3,43324	0,17
2	3,42727	3650,63	0,0009404543	3,43325	0,17
3	3,42727	3650,62	0,0009404543	3,43324	0,17
4	-3,42727	-3650,63	0,0009404543	-3,43325	0,17
I = 2 x (U 100 x 75 x 3.00)					
1	-2,35699	-3637,50	0,0006494066	-2,36222	0,22
2	2,35699	3637,50	0,0006494066	2,36222	0,22
3	2,35699	3637,50	0,0006494066	2,36222	0,22
4	-2,35699	-3637,50	0,0006494066	-2,36222	0,22
I = 2 x (U 100 x 75 x 3.75)					
1	-1,20100	-3609,37	0,0003338822	-1,20510	0,34
2	1,20100	3609,38	0,0003338822	1,20511	0,34
3	1,20100	3609,37	0,0003338822	1,20510	0,34
4	-1,20100	-3609,38	0,0003338822	-1,20511	0,34
I = 2 x (U 100 x 75 x 8.00)					
1	-0,12016	-3450,00	0,0000353497	-0,12196	1,48
2	0,12016	3450,00	0,0000353497	0,12196	1,48
3	0,12016	3450,00	0,0000353497	0,12196	1,48
4	-0,12016	-3450,00	0,0000353497	-0,12196	1,48

Apesar da cinemática do presente trabalho ser menos simplificada e apresentar resultados mais próximos dos reais, a teoria técnica também apresenta uma precisão aceitável na linha esqueleto como mostram a Tabela 3.15 e a Figura 3.35.

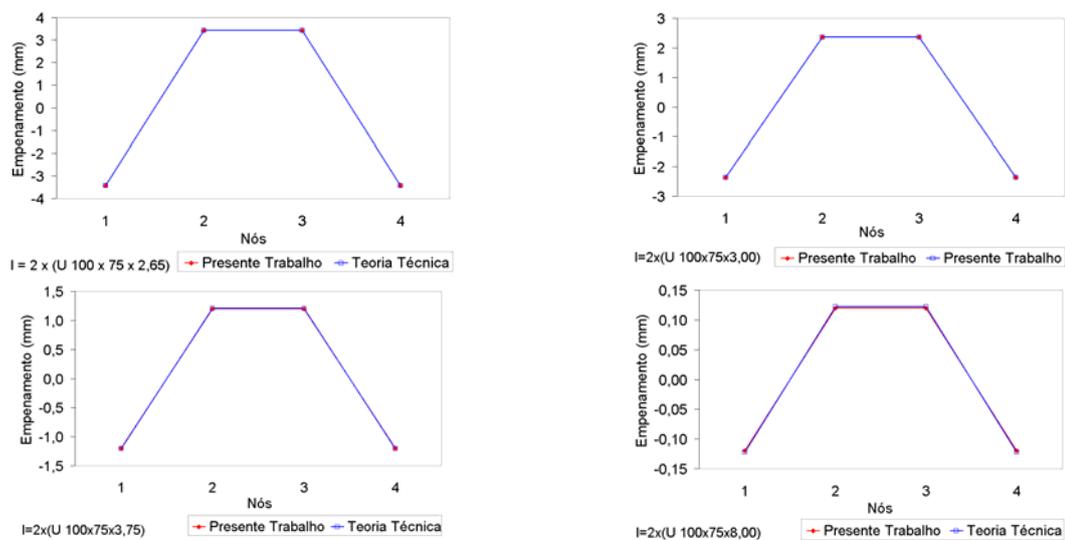


Figura 3.35. Representação gráfica da comparação do empenamento do Perfil I .

3.3 SEÇÃO NÃO-HOMOGÊNEA

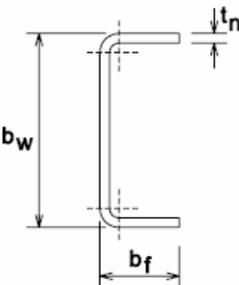
Para a verificação da formulação da torção livre considerando-se a seção transversal composta por diferentes materiais analisaram-se alguns exemplos.

Primeiro considerou-se um Perfil U simples constituído por dois materiais diferentes. No segundo exemplo, analisou-se o comportamento de uma seção transversal formada por concreto armado. E finalmente observaram-se seções transversais correspondentes às estruturas aeronáuticas.

3.3.1 PERFIL U LAMINADO

O Perfil U simples foi obtido da NBR 6355 (Tabela 3.16), procurando-se testar a formulação desenvolvida para o empenamento em casos de dimensões reais:

Tabela 3.16 - Série comercial do perfil estrutural e respectiva designação (NBR6355/2003).

Série	Seção transversal	Designação ¹⁾
U simples		$U \ b_w \times b_f \times t_n$ $U \ 150 \times 75 \times 8$

¹⁾ As dimensões são apresentadas em milímetros.

A malha foi discretizada em 46 elementos finitos triangulares com variação do empenamento quadrática e 109 nós (Figura 3.36).

Considerou-se a seção transversal laminada (Figura 3.36), sendo que o material da maioria dos elementos é a borracha, com o seguinte módulo de elasticidade $E = 2 \times 10^{-9} \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,5$. O material adotado para quatro elementos foi o aço ($E = 2,05 \times 10^{-4} \text{ kN/m}^2, \nu = 0,3$). Os elementos constituídos por aço encontram-se nas extremidades do perfil U como mostra o detalhe A da Figura 3.36.

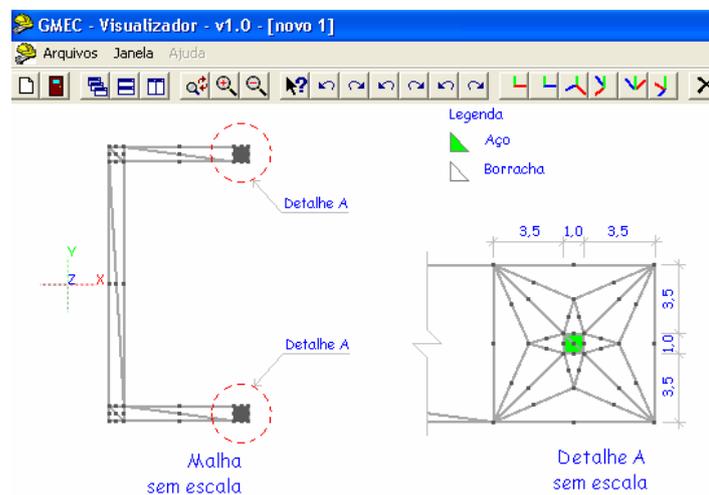


Figura 3.36. Malha para o perfil U 150 x 75 x 8 laminado.

O perfil U, com as características descritas anteriormente, apresenta o mapa de deslocamentos e a configuração deformada ilustrados na Figura 3.37.

Com o único objetivo de ilustrar, a Figura 3.38 apresenta o mapa de deslocamentos e a configuração deformada (em milímetro) do perfil U 150x75x8, formado por um único material, o aço.

Aqui não serão verificados os valores dos empenamentos para a seção constituída por apenas um material, uma vez que essa validação de resultados já foi feita anteriormente.

Portanto, considera-se o giro da seção transversal por unidade de comprimento (α) unitário, uma vez que os empenamentos reais também já foram verificados anteriormente, e o objetivo é ilustrar o comportamento de um perfil laminado.

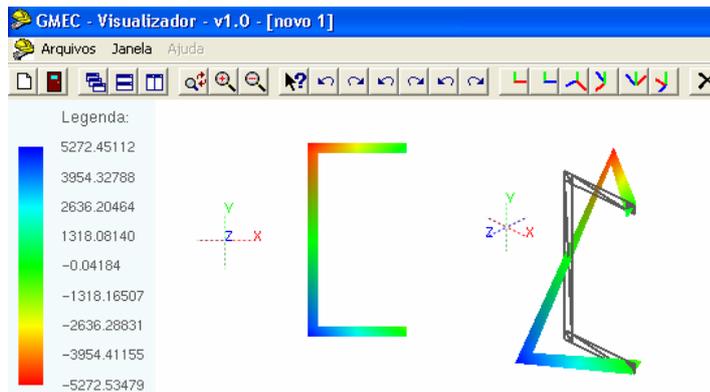


Figura 3.37. Mapa de deslocamentos e configuração deformada do Perfil U 150x75x8 – borracha e aço.

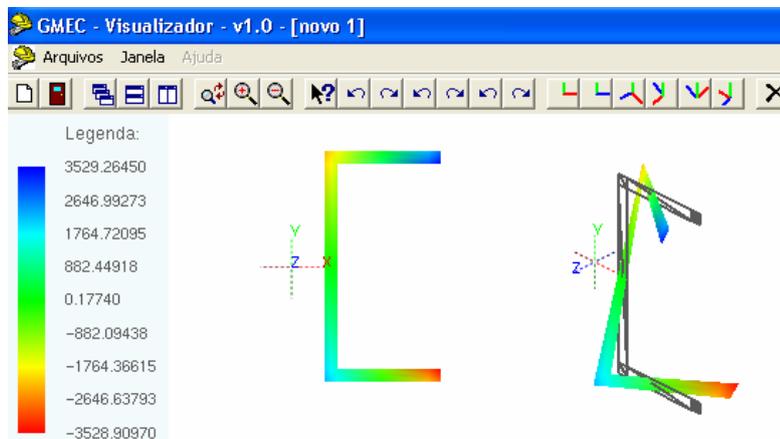


Figura 3.38. Mapa de deslocamentos e configuração deformada do perfil U 150x75x8 – aço.

A origem do sistema de coordenadas representada nas Figura 3.37 e Figura 3.38 são os centros de cisalhamento, das respectivas seções transversais. Através dessas figuras verifica-se a mudança da posição do centro de cisalhamento. Obviamente ocorre também mudança nas posições dos centros de gravidade.

Através da Figura 3.37 e da Figura 3.38 percebe-se uma mudança da posição onde os empenamentos nodais são nulos, exceto, é claro, a posição que pertence ao eixo de simetria, aí se tem empenamento igual a zero nos dois casos. As posições onde o empenamento nodal é zero, para o perfil não laminado, são conhecidas da teoria de Vlasov e já foi mencionada anteriormente. Já para o perfil laminado verifica-se que o empenamento nodal é igual a zero na região onde o material é o aço (Figura 3.36). Se a situação fosse invertida, e se colocasse aço na maioria dos elementos e nos 4 elementos detalhado na Figura 3.36 o material considerado fosse a borracha, o resultado tenderia ao encontrado para o perfil não laminado. Também se verifica a mudança de valores do empenamento relativo, de acordo com a Tabela 3.17. Os valores desta tabela estão em relação a uma origem $(0,0)$ localizada na extremidade inferior esquerda do perfil U .

Tabela 3.17 - Comparação entre o do perfil U 150x75x8 laminado e não laminado.

<i>seção U 150×75×8</i>	<i>aço</i>	<i>borracha e aço</i>
CG (mm)	(21,693;75,0)	(70,0;75,0)
CC (mm)	(-22,169;75,0)	(-62,811;75,0)
$w_{\max} - w_{\min}$ (mm)	7058,174	10544,986

3.3.2 CONCRETO ARMADO

Para este exemplo considerou-se uma seção transversal constituída por concreto armado, cuja armadura longitudinal inferior é igual à $2\phi 10\text{mm}$.

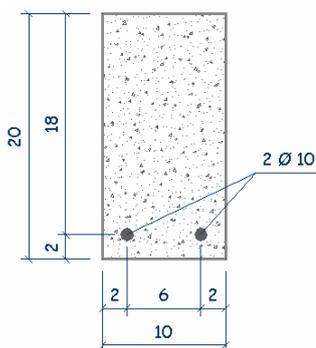


Figura 3.39. Seção transversal de concreto armado, cotas: cm.

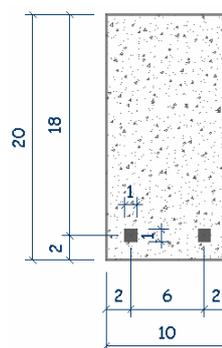


Figura 3.40. Seção equivalente de concreto armado, cotas: cm.

Detalhou-se a disposição de tais armaduras na Figura 3.39. A Figura 3.40 ilustra a seção transversal equivalente adotada para este exemplo.

Discretizou-se a malha em 120 elementos e 273 nós, sendo que a parte correspondente ao aço foi dividida em 4 elementos, que estão destacados na Figura 3.41.

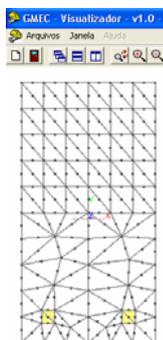


Figura 3.41. Malha para a seção de concreto armado.

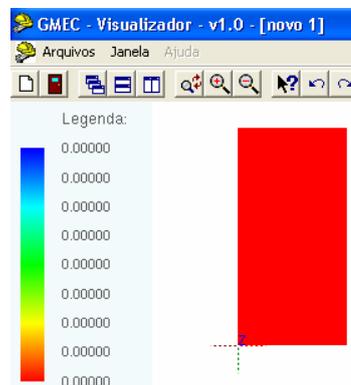


Figura 3.42. Mapa do empenamento na origem do sistema de coordenadas.

A Figura 3.42 é o mapa de deslocamentos na origem do sistema de coordenadas da seção considerada.

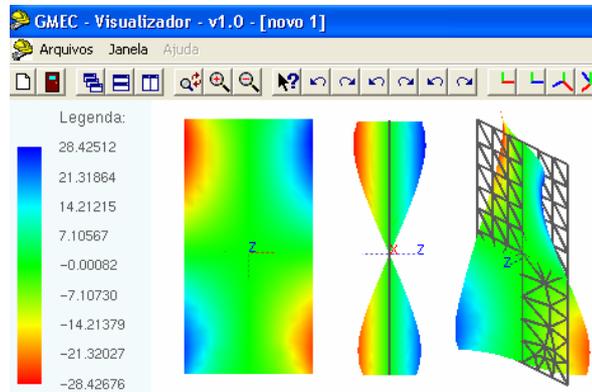


Figura 3.43. Mapa de deslocamentos e configuração deformada do concreto armado.

A Figura 3.43 é o mapa de deslocamentos e a configuração deformada para a seção transversal correspondente ao concreto armado.

E para comparar os resultados, têm-se na Figura 3.44 o mapa do empenamento e a configuração deformada para a seção transversal correspondente, considerando-a constituída por concreto.

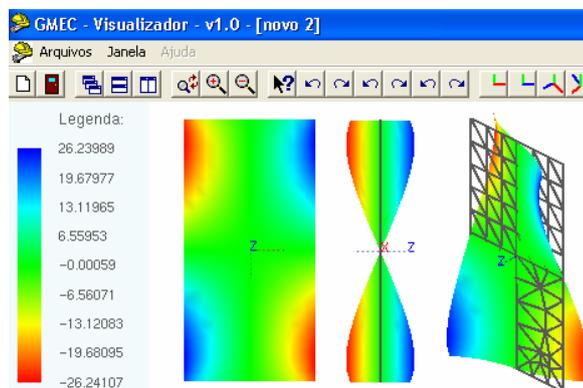


Figura 3.44. Mapa de deslocamentos e configuração deformada do concreto.

A Tabela 3.18 é a comparação entre os resultados da seção transversal correspondente ao concreto e ao concreto armado. Os valores do CG e CC estão em relação à origem do sistema de coordenadas mostrada na Figura 3.42.

Tabela 3.18 - Comparação entre o concreto e concreto armado.

<i>seção U 150×75×8</i>	<i>concreto</i>	<i>concreto armado</i>
<i>CG (cm)</i>	(5,00;10,00)	(5,00;9,34)
<i>CC (cm)</i>	(5,00;10,00)	(5,00;9,56)
$w_{\max} - w_{\min}$ (cm)	52,481	56,852

Através da Figura 3.43, da Figura 3.44 e pela Tabela 3.18 verificam-se as diferenças entre as seções consideradas. Para a seção com apenas um material o centro de gravidade coincide com o centro de cisalhamento e estão situados exatamente no centro da seção. O mesmo não ocorre para a seção de concreto armado, na qual o centro de gravidade não coincide com o centro de cisalhamento e o centro de cisalhamento está mais próximo do eixo da peça e o centro de gravidade mais abaixo. A diferença relativa do empenamento máximo é maior para a seção de concreto armado.

Neste ponto se mostra uma aplicação interessante que é a informação da posição do Centro de Cisalhamento de seções transversais de concreto armado para projetistas.

3.3.3 ESTRUTURAS DE AERONAVES

As estruturas de uma aeronave são basicamente compostas de barras com seções transversais fechadas e barras com seções transversais abertas e paredes delgadas sujeitas à esforços de flexão, cisalhamento, torção e axial (Figura 3.45). MEGSON (2005) afirma que os Perfis T , Z ou I são alguns dos que constituem as partes da estrutura referentes às seções abertas e paredes delgadas, garantindo rigidez à superfície delgada externa da aeronave e servindo de apoio para as cargas externas dos pisos, fixações do motor etc.

Como exemplo de aplicação, apresenta-se a comparação da posição do centro de cisalhamento (CC) de seções de asas e fuselagens idealizadas de acordo com a teoria técnica. PROENÇA (2007) afirma que a análise referente à teoria técnica é simplificada, por fazer uso de uma idealização da seção, tanto em relação à sua geometria quanto à capacidade resistente e de transmissão de tensões dos seus elementos constituintes. E adverte que esta análise deve ser usada apenas para uma avaliação rápida de estudo preliminar de projetos. Maiores detalhes sobre tensões normais e fluxos de cisalhamento em seções de asas e fuselagens sob flexão encontram-se em MEGSON (2005) e PROENÇA (2007).



Figura 3.45. Estrutura de uma aeronave (MEGSON, 2005).

Na idealização feita em MEGSON (2005), ele representa um reforço na estrutura, na forma circular. A comparação com o presente trabalho é feita considerando-se a estrutura, com o reforço em forma circular e, também, considerando a estrutura laminada (reforço concentrado) e, nesse caso, relaciona-se a área do círculo a um módulo de elasticidade equivalente:

$$A_c E_c = A_R E_R \quad \text{ou} \quad (3.7)$$
$$E_R = \frac{A_c E_c}{A_R}$$

onde A é a área e E o módulo de elasticidade longitudinal. O índice c refere-se ao círculo e o R ao retângulo equivalente à área do reforço, considerando o módulo de elasticidade equivalente.

Em relação aos resultados encontrados para o presente trabalho a discretização da malha quando a seção é considerada laminada sempre é menor do que a com reforço circular, o que ocorre em decorrência da necessidade de um maior número de elementos triangulares necessários para a aproximação do círculo. Lembra-se que a malha é a menor possível, uma vez que nesse caso, o aumento no número de elementos apresenta uma alteração desprezível nos resultados. Ilustram-se as malhas apenas com o objetivo de visualizar a seção transversal com dimensão de reforço.

3.3.3.1 Exemplo 1

O primeiro exemplo é a idealização de um perfil de uma asa conforme ilustrado na Figura 3.46.

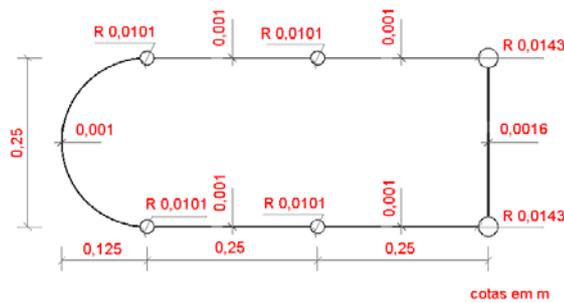


Figura 3.46. Dimensões da seção do exemplo 1.

A Figura 3.47 mostra a localização do Centro de Cisalhamento (CC) a partir de uma distância (d) do eixo da extremidade direita da seção.

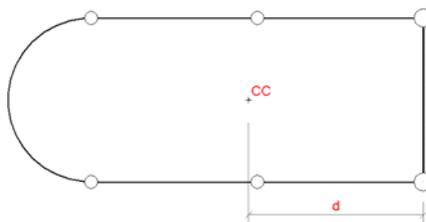


Figura 3.47. Posição do CC da seção do exemplo 1.

Para o presente trabalho, considerando-se o reforço com dimensão como em PROENÇA (2007), discretizou-se a seção em uma malha com 642 elementos e 1670 nós, Figura 3.48.

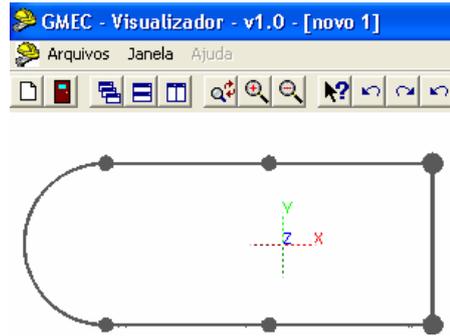


Figura 3.48. Malha da seção do exemplo 1 com o reforço.

Já para a seção laminada (reforço com menor dimensão) discretizou-se a seção em uma malha com 408 elementos e 1200 nós, Figura 3.49. Adotou-se o módulo de elasticidade da maior parte da seção igual a $E_C = 1kN/m^2$. Nas posições onde se encontram os reforços, representados pelos círculos de raio igual à $0,0101m$, consideraram-se em seus lugares quadrados de lado $0,001m$ (mesma espessura da seção) com $E_R = 320kN/m^2$. E para as áreas com raio igual à $0,0143m$ adotaram-se retângulos de dimensões $(0,0016 \times 0,001)m^2$ e $E_R = 400kN/m^2$. Os módulos de elasticidade equivalentes ao reforço foram calculados de acordo com a Equação (3.7).

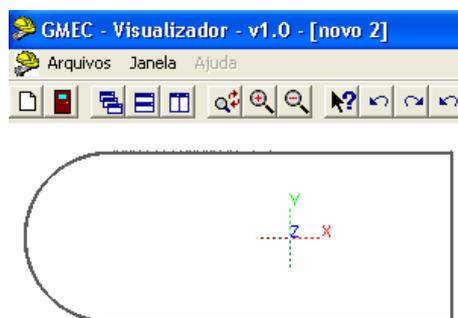


Figura 3.49. Malha da seção não-homogênea do exemplo 1.

A Tabela 3.19 é a comparação da posição do Centro de Cisalhamento entre o presente trabalho e PROENÇA (2007), do exemplo 1. A teoria técnica é simplificada para seções fechadas, não sendo sempre precisa. Acredita-se que o presente trabalho apresenta resultados bem próximos dos reais, tendo em vista todos os testes feitos anteriormente.

Tabela 3.19 - Posição do CC do exemplo 1.

Posição do CC	PROENÇA (2007)	Seções do Presente Trabalho	
		Laminada	Reforço
d (m)	0,278	0,237	0,230
Razão Relativa (%)		14,75	17,27

3.3.3.2 Exemplo 2

A Figura 3.50 ilustra a estrutura referente ao segundo exemplo e as suas dimensões.

Os reforços representados por círculos são todos iguais, com áreas iguais à $0,000625m^2$.

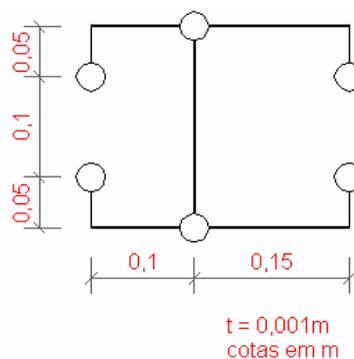


Figura 3.50. Dimensões da seção do exemplo 2.

A Figura 3.51 mostra a localização do Centro de Cisalhamento (CC) a partir de uma distância (d) à esquerda da aba vertical.

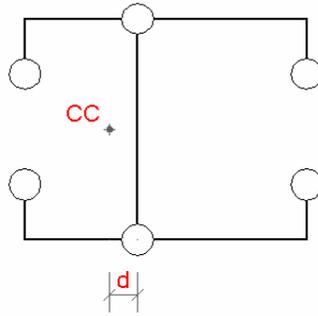


Figura 3.51. Posição do CC do exemplo 2.

Para o presente trabalho, considerando-se o reforço com as dimensões dadas em PROENÇA (2007), discretizou-se a seção em uma malha com 490 elementos e 1.169 nós (Figura 3.52).

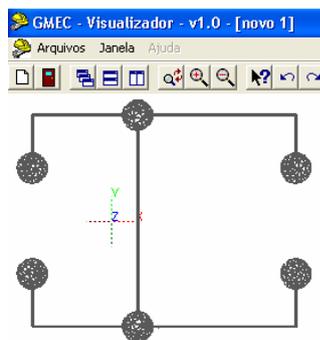


Figura 3.52. Malha da seção do exemplo 2 com o reforço.

Para a seção laminada discretizou-se a seção em uma malha com 38 elementos e 117 nós (Figura 3.53). Adotou-se o módulo de elasticidade da maior parte da seção igual a

$E_C = 1kN/m^2$. Substituíram-se os reforços por quadrados de lado $0,001m$ (mesma espessura da seção) com $E_R = 625kN/m^2$, de acordo com a Equação (3.7).

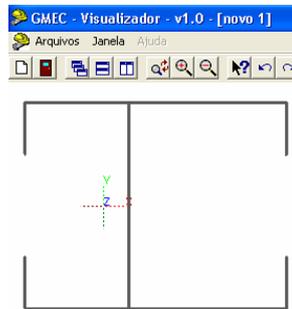


Figura 3.53. Malha da seção não-homogênea do exemplo 2.

A Tabela 3.20 é a comparação da posição do Centro de Cisalhamento entre o presente trabalho e PROENÇA (2007), do exemplo 2. Para este exemplo, apesar da maior simplificação da teoria técnica quando comparada ao presente trabalho, ambos apresentam os mesmos resultados.

Tabela 3.20 - Posição do CC (exemplo 2).

Posição do CC	PROENÇA (2007)	Seções do Presente Trabalho	
		Laminada	Reforço
d (m)	0,025	0,025	0,025
Razão Relativa (%)		0,00	0,00

3.3.3.3 Exemplo 3

A Figura 3.54 ilustra a estrutura referente ao terceiro exemplo e as suas dimensões. Os reforços representados por círculos são todos iguais, com áreas iguais à $0,000625m^2$.

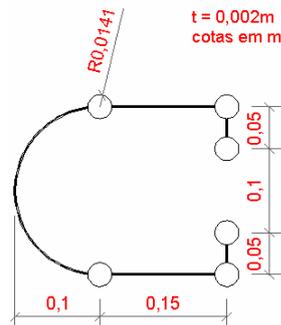


Figura 3.54. Dimensões da seção do exemplo 3.

A Figura 3.55 mostra a localização do Centro de Cisalhamento (CC) a partir de uma distância (d) à esquerda das abas verticais.

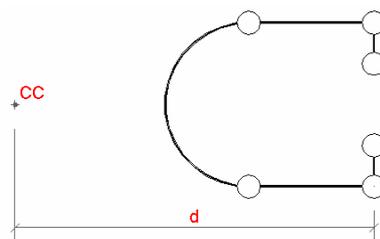


Figura 3.55. Posição do CC do exemplo 3.

Para o presente trabalho, considerando-se o reforço com as dimensões dadas em PROENÇA (2007), discretizou-se a seção em uma malha com 524 elementos e 1.301 nós (Figura 3.56).



Figura 3.56. Malha da seção do exemplo 3 com o reforço.

Para a seção laminada discretizou-se a seção em uma malha com 218 elementos e 605 nós (Figura 3.57). Adotou-se o módulo de elasticidade da maior parte da seção igual a $E_C = 1kN/m^2$. Substituíram-se os reforços por quadrados de lado $0,002m$ (mesma espessura da seção) com $E_R = 156,25kN/m^2$, de acordo com a Equação (3.7).

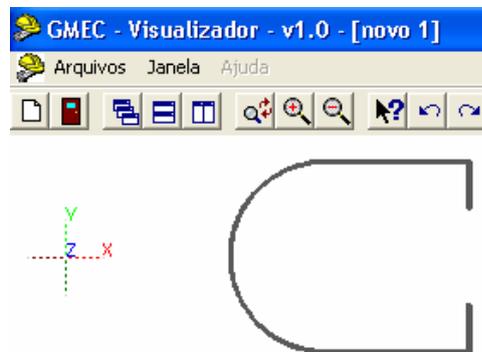


Figura 3.57. Malha da seção não-homogênea do exemplo 3.

A Tabela 3.21 é a comparação da posição do Centro de Cisalhamento entre o presente trabalho e PROENÇA (2007), do exemplo 3. A análise da teoria técnica é simplificada e os resultados do presente trabalho devem representar melhor os valores reais.

Tabela 3.21 - Posição do CC do exemplo 3.

Posição do CC	PROENÇA (2007)	Seções do Presente Trabalho	
		Laminada	Reforço
d (m)	0,4412	0,4229	0,4211
Razão Relativa (%)		4,15	4,56

3.3.3.4 Exemplo 4

A Figura 3.58 ilustra a estrutura referente ao quarto exemplo e as suas dimensões. Os reforços representados por círculos são todos iguais, com áreas iguais à $0,000625m^2$.

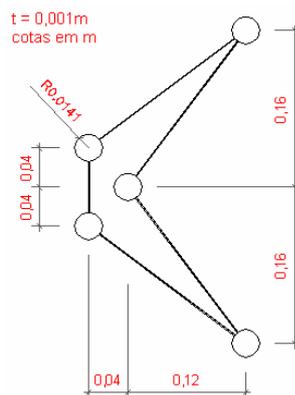


Figura 3.58. Dimensões da seção do exemplo 4.

A Figura 3.59 mostra a localização do Centro de Cisalhamento (CC) a partir de uma distância (d) à esquerda do reforço situado sobre o eixo de simetria.

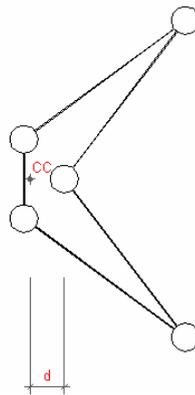


Figura 3.59. Posição do CC do exemplo 4.

Para o presente trabalho, considerando-se o reforço com as dimensões dadas por PROENÇA (2007), discretizou-se a seção em uma malha com 304 elementos e 718 nós (Figura 3.60).

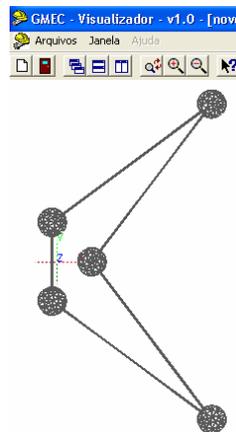


Figura 3.60. Malha da seção do exemplo 4 com o reforço.

Para a seção laminada discretizou-se a seção em uma malha com 128 elementos e 270 nós (Figura 3.61). Adotou-se o módulo de elasticidade da maior parte da seção igual a $E_C = 1 \text{ kN/m}^2$. Substituíram-se os reforços por quadrados de lado $0,0005 \text{ m}$ com $E_R = 2500 \text{ kN/m}^2$, de acordo com a Equação (3.7).

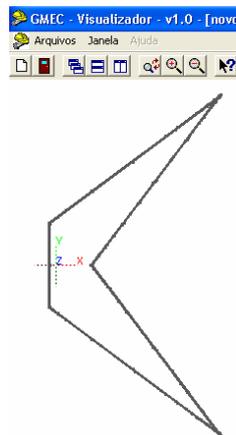


Figura 3.61. Malha da seção não-homogênea do exemplo 4.

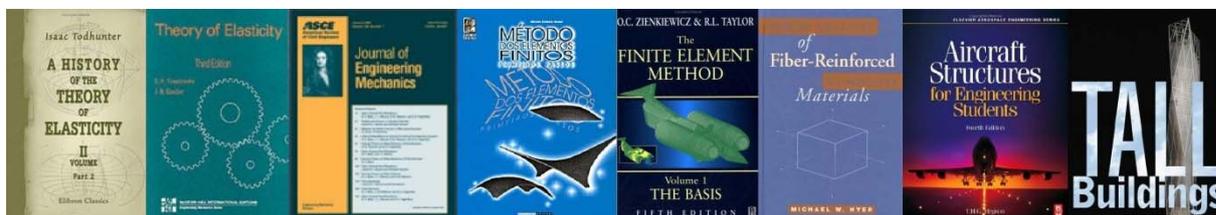
A Tabela 3.22 é a comparação da posição do Centro de Cisalhamento entre o presente trabalho e PROENÇA (2007), do exemplo 4. A diferença apresentada entre os resultados é pequena.

Tabela 3.22 - Posição do CC (exemplo 4).

Posição do CC	PROENÇA (2007)	Seções do presente trabalho	
		Laminada	Reforço
d (m)	0,035	0,034	0,0357
Razão Relativa (%)		2,66	2,00

Nestes exemplos observa-se que a utilização do software desenvolvido traria informações mais confiáveis do que aquelas fornecidas pelas teorias simplificadas de cálculo de Centro de Cisalhamento de perfis laminados reforçados.

4 ENRIQUECIMENTO DA CINEMÁTICA DO ELEMENTO DE BARRA GERAL



4.1 INTRODUÇÃO

O elemento finito desenvolvido em PACCOLA (2004), utilizado no programa ACADSOFT do SET, é um elemento de barra geral reto com aproximação quadrática para deslocamentos e rotações (lineares) no espaço tridimensional. Este elemento utiliza a cinemática de Reissner-Timoshenko no que diz respeito ao comportamento da barra geral à flexão. Entretanto, ao considerar giros de torção, aplicou-se uma cinemática semelhante à de Reissner-Timoshenko, ou seja, os pontos da seção se movimentavam proporcionalmente ao giro de torção e à sua distância ao eixo de referência. Com esta simplificação a seção transversal era impedida de empenar, resultando em elemento muito mais rígido à torção do que aquele que se pretendia modelar. Naquele trabalho adotou-se coeficiente de penalização da rigidez à torção para contornar este travamento indesejado.

O modo de empenamento à torção livre, desenvolvido no *Capítulo 2* deste trabalho, foi utilizado como função enriquecedora da cinemática de Reissner-Timoshenko, e

introduzido no programa ACADSOFT melhorando seu desempenho no que diz respeito ao comportamento à torção.

Neste capítulo será feita uma breve revisão da cinemática adotada originalmente, mostrando-se a introdução do modo de empenamento na formulação, que é ponderada por um parâmetro livre (incógnito) chamado de intensidade de empenamento. Este é o sétimo parâmetro nodal da formulação e é semelhante (se confundindo com este em casos extremos) à taxa de giro por unidade de comprimento longitudinal, apresentada nas teorias clássicas de flexo-torção.

4.2 CINEMÁTICA ORIGINAL E ENRIQUECIMENTO PROPOSTO

A cinemática proposta se baseia no enriquecimento da cinemática de Reissner para barras gerais laminadas tridimensionais. Inicialmente será apresentada a cinemática original discutindo o que ocorre com relação à rigidez à torção caso não seja enriquecida.

As lâminas que possibilitam a inclusão de material não homogêneo na seção transversal apresentam geometria triangular. A hipótese cinemática de Reissner implica que seções planas e ortogonais à linha de referência do elemento, antes da aplicação das solicitações externas, permanecerão planas após a aplicação das mesmas, porém não mais ortogonais à linha de referência. Em termos práticos isto significa que a aproximação dos deslocamentos transversais é feita de maneira totalmente independente da aproximação dos giros de flexão. Por simplicidade o elemento adotado é reto. As coordenadas locais do

$$\begin{aligned}
u_p(X, y, z) &= u_0(X) - \theta_0^z(X)(f_y + y) + \theta_0^y(X)(f_z + z) \\
v_p(X, y, z) &= v_0(X) - \theta_0^x(X)(f_z + z) \\
w_p(X, y, z) &= w_0(X) + \theta_0^x(X)(f_y + y)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

onde u_0 , v_0 e w_0 são os deslocamentos do elemento na linha de referência, θ_0^x , θ_0^y e θ_0^z são os giros em torno dos eixos X, Y e Z com origem na linha de referência e f_y e f_z são as distâncias do baricentro das fibras triangulares ao eixo de referência. Os eixos x, y, e z são paralelos aos eixos locais X, Y e Z. Deve-se comentar que, ao se fornecer as coordenadas Y^v e Z^v dos vértices das fibras, calculam-se as coordenadas correspondentes y^v e z^v como:

$$\begin{aligned}
y^v &= Y^v - f_y \\
z^v &= Z^v - f_z
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Antes de substituir as aproximações usuais do MEF, sobre o elemento finito, calculam-se as deformações no ponto genérico P como:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u_p(X, y, z)}{\partial x} \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p(X, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_p(X, y, z)}{\partial x} \right) \\
\varepsilon_{xz} &= \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p(X, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w_p(X, y, z)}{\partial x} \right)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Deve-se observar que se derivar uma grandeza em relação às coordenadas maiúsculas ou minúsculas é indiferente.

É obvio que, ao se aplicar um momento torçor M_x constante em uma barra com esta cinemática, a variável θ_0^x será não nula, entretanto o deslocamento $u_p(x, y, z)$ será identicamente nulo, ou seja, não haverá empenamento, gerando uma distribuição de

deformação ε_{xz} e ε_{xy} não nulas, mas erradas, ou seja, associadas a um problema de torção com o empenamento totalmente restrito. Este elemento apresentará rigidez à torção muito superior ao problema real. Como comentado na introdução deste capítulo, nas aplicações correntes se faz uma penalização desta rigidez para atenuar seu efeito na deslocabilidade global da estrutura, porém as distribuições de deformações e tensões continuam apresentando resultados não satisfatórios.

Para corrigir esta deficiência propõe-se enriquecer a cinemática de Reissner introduzindo-se um modo de deslocamento proporcional ao empenamento da seção transversal quando submetida à torção livre de Saint Venant, *Capítulo 2*. Isto é feito como segue:

$$\begin{aligned} u_p(X, y, z) &= u_0(X) - \theta_0^Z(X)(f_Y + y) + \theta_0^Y(X)(f_Z + z) + \alpha_0^X(X)u_{wp}(y, z) \\ v_p(X, y, z) &= v_0(X) - \theta_0^X(X)(f_Z + z) \\ w_p(X, y, z) &= w_0(X) + \theta_0^X(X)(f_Y + y) \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde $\alpha_0^X(X)$, que será escrito em função de novos parâmetros nodais, representa a intensidade do empenamento que ocorre na seção transversal localizada na coordenada X e $u_{wp}(y, z)$ é o modo de empenamento (warping) da seção transversal em questão, vetor resultado do sistema de equações descritos pelas Equações (2.85) e (2.86). Este modo de empenamento é conhecido, pois, tal como mostrado no *Capítulo 2*, é calculado independentemente para qualquer seção transversal e material constituinte.

Neste ponto, a diferença entre a formulação proposta e os desenvolvimentos anteriores encontrados na literatura deve ser destacada. Deve-se lembrar que na cinemática de Euler-Bernoulli as igualdades $\partial v_0 / \partial X = \theta_0^Z$ e $\partial w_0 / \partial X = \theta_0^Y$ são impostas, da mesma forma se impõe a igualdade $\partial \theta_0^X / \partial X = \alpha_0^X$ na cinemática de Vlasov. Na cinemática de Reissner as

desigualdades $\partial v_0 / \partial X \neq \theta_0^z$ e $\partial w_0 / \partial X \neq \theta_0^y$ ocorrem e no enriquecimento aqui proposto a desigualdade $\partial \theta_0^x / \partial X \neq \alpha_0^x$ está presente, ou seja, garantindo maior abrangência da formulação aqui proposta em relação à cinemática de Vlasov.

Adotando-se relação constitutiva elástica linear com módulo de elasticidade longitudinal E e módulo de elasticidade transversal G , aplicando-se a definição das componentes de deformação dadas pelas Equações (4.3), à luz da cinemática proposta, se escreve a energia de deformação para a barra geral como:

$$U = \frac{1}{2} \int \left[E \left(\frac{\partial u_0(X)}{\partial X} - \frac{\partial \theta_0^z(X)}{\partial X} (f_Y + Y) + \frac{\partial \theta_0^y(X)}{\partial X} (f_Z + z) + \frac{\partial \alpha_0^x(X)}{\partial X} u_{wp}(y, z) \right)^2 + G \left(-\theta_0^z(X) + \frac{\partial v_0(X)}{\partial X} - \frac{\partial \theta_0^x(X)}{\partial X} (f_Z + z) + \frac{\partial u_{wp}(y, z)}{\partial y} \alpha_0^x(X) \right)^2 + G \left(\theta_0^y(X) + \frac{\partial w_0(X)}{\partial X} + \frac{\partial \theta_0^x(X)}{\partial X} (f_Y + Y) + \frac{\partial u_{wp}(y, z)}{\partial z} \alpha_0^x(X) \right)^2 \right] dV \quad (4.5)$$

E as componentes de tensão como:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E \left(\frac{\partial u_0(X)}{\partial X} - \frac{\partial \theta_0^z(X)}{\partial X} (f_Y + Y) + \frac{\partial \theta_0^y(X)}{\partial X} (f_Z + z) + \frac{\partial \alpha_0^x(X)}{\partial X} u_{wp}(y, z) \right) \\ \tau_{xy} &= G \left(-\theta_0^z(X) + \frac{\partial v_0(X)}{\partial X} - \frac{\partial \theta_0^x(X)}{\partial X} (f_Z + z) + \frac{\partial u_{wp}(y, z)}{\partial y} \alpha_0^x(X) \right) \\ \tau_{xz} &= G \left(\theta_0^y(X) + \frac{\partial w_0(X)}{\partial X} + \frac{\partial \theta_0^x(X)}{\partial X} (f_Y + Y) + \frac{\partial u_{wp}(y, z)}{\partial z} \alpha_0^x(X) \right) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Unificando-se a notação das componentes de deslocamento, pode-se escrever:

$$\{u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \theta_0^x \quad \theta_0^y \quad \theta_0^z \quad \alpha_0^x\}^T = \{u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7\}^T = \{u\}^T \quad (4.7)$$

E assim a energia de deformação fica escrita de forma matricial, facilitando as implementações computacionais, como:

$$\begin{aligned}
 U_\epsilon = \frac{1}{2} \int \left\{ \begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{xz} \frac{\partial u_{wp}(y,z)}{\partial z} & -2G_{xy} \frac{\partial u_{wp}(y,z)}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{xz} \frac{\partial u_{wp}(y,z)}{\partial z} & -2G_{xy} \frac{\partial u_{wp}(y,z)}{\partial y} & G_{xz} \left(\frac{\partial u_{wp}(y,z)}{\partial z} \right)^2 + G_{xy} \left(\frac{\partial u_{wp}(y,z)}{\partial y} \right)^2 \end{array} \right] \{u\} + \\ & + \left\{ \frac{\partial u}{\partial X} \right\}^T \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{xz} & 2G_{xz}(f_y+y) & 0 & 0 \\ 0 & -2G_{xy} & 0 & 2G_{xy}(f_z+z) & 0 & 0 \\ 0 & 2G_{xy} \frac{\partial u_{wp}(y,z)}{\partial y} & 2G_{xz} \frac{\partial u_{wp}(y,z)}{\partial z} & 2G_{xz} \left(\frac{\partial u_{wp}(y,z)}{\partial z} \right) (f_y+y) - 2G_{xy} \left(\frac{\partial u_{wp}(y,z)}{\partial y} \right) (f_z+z) & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \frac{\partial u}{\partial X} \right\} + \\ & + \left\{ \frac{\partial u}{\partial X} \right\}^T \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2G_{xy} & 2G_{xy} \frac{\partial u_{wp}(y,z)}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{xz} & 0 & 2G_{xz} \frac{\partial u_{wp}(y,z)}{\partial z} \\ 0 & 0 & 0 & -2G_{xz}(f_y+y) & 2G_{xy}(f_z+z) & 2G_{xz} \left(\frac{\partial u_{wp}(y,z)}{\partial z} \right) (f_y+y) - 2G_{xy} \left(\frac{\partial u_{wp}(y,z)}{\partial y} \right) (f_z+z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \{u\} + \\ & + \left\{ \frac{\partial u}{\partial X} \right\}^T \left[\begin{array}{cccccc} E & 0 & 0 & 0 & 2E(f_z+z) & -2E(f_y+y) & 2Eu_{wp}(y,z) \\ 0 & G_{xy} & 0 & -2G_{xy}(f_z+z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{xz} & 2G_{xz}(f_y+y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2G_{xy}(f_z+z) & 2G_{xz}(f_y+y) & G_{xz}(f_y+y)^2 + G_{xy}(f_z+z)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 2E(f_z+z) & 0 & 0 & 0 & E(f_z+z)^2 & -2E(f_z+z)(f_y+y) & 2Eu_{wp}(y,z)(f_z+z) \\ -2E(f_y+y) & 0 & 0 & 0 & -2E(f_z+z)(f_y+y) & E(f_y+y)^2 & -2Eu_{wp}(y,z)(f_y+y) \\ 2Eu_{wp}(y,z) & 0 & 0 & 0 & 2Eu_{wp}(y,z)(f_z+z) & -2Eu_{wp}(y,z)(f_y+y) & (Eu_{wp}(y,z))^2 \end{array} \right] \left\{ \frac{\partial u}{\partial X} \right\} dV \end{aligned} \right. \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

Os esforços solicitantes são calculados conforme indicado em Paccola (2004) eliminando-se entretanto a constante de correção para momento torçor lá indicada.

4.3 APROXIMAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

A cinemática apresentada no item anterior será escrita em função dos parâmetros nodais. Os parâmetros por nó ℓ do elemento finito são três translações (U^ℓ, V^ℓ, W^ℓ ou $U_1^\ell, U_2^\ell, U_3^\ell$), três rotações ($\Theta_X^\ell, \Theta_Y^\ell, \Theta_Z^\ell$ ou $U_4^\ell, U_5^\ell, U_6^\ell$) e uma intensidade de empenamento (A^ℓ ou U_7^ℓ). Utilizando-se polinômios de Lagrange ou funções de forma, usuais nas aplicações do MEF, as aproximações são escritas em notação indicial como:

$$u_i(\mathbf{X}) = \phi_\ell(\mathbf{X}) U_i^\ell$$

$$\frac{\partial u_i(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \phi_\ell(\mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} U_i^\ell \quad (4.9)$$

onde ϕ_ℓ é função de forma associada a cada nó ℓ e i é o grau de liberdade de cada nó, variando de 1 até 7. As aproximações (4.9) são ao longo do elemento de barra geral e os parâmetros nodais associados são, efetivamente, as variáveis do problema.

Os valores das excentricidades (distância da linha de referência ao baricentro da fibra) f_Y^λ e f_Z^λ são únicos para cada lâmina λ . Os valores y , z , $u_{wp}(y, z)$, $\partial u_{wp}(y, z)/\partial y$ e $\partial u_{wp}(y, z)/\partial z$ são escritos para cada lâmina triangular utilizando funções de forma para pseudo-elementos finitos triangulares planos de fibra. Utilizam-se coordenadas triangulares adimensionais (ξ_1, ξ_2, ξ_3) tal como escrito no *Capítulo 2*, como base de geração das funções de forma, resultando em mapeamento quadrático. Definindo κ como um ponto genérico (equivalentemente a um nó em elementos finitos) da lâmina se escreve:

$$\begin{aligned}
y^\lambda &= \phi_\kappa(\xi_1, \xi_2, \xi_3) Y^{\kappa\lambda} - f_Y^\lambda \\
z^\lambda &= \phi_\kappa(\xi_1, \xi_2, \xi_3) Z^{\kappa\lambda} - f_Z^\lambda \\
u_{wp}^\lambda(y, z) &= \phi_\kappa(\xi_1, \xi_2, \xi_3) U_{wp}^{\kappa\lambda} \\
\frac{\partial u_{wp}^\lambda(y, z)}{\partial z} &= \frac{\partial \phi_\kappa(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial z} U_{wp}^{\kappa\lambda} \\
\frac{\partial u_{wp}^\lambda(y, z)}{\partial y} &= \frac{\partial \phi_\kappa(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial y} U_{wp}^{\kappa\lambda}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

onde $Y^{\kappa\lambda}$ e $Z^{\kappa\lambda}$ são coordenadas dos pontos que formam o ‘pseudo-elemento’ de fibra e $U_{wp}^{\kappa\lambda}$ são os valores do modo de empenamento para cada ponto nodal da fibra.

Estes valores não caracterizam variáveis incógnitas do problema estudado e são calculados independentemente, para cada tipo de seção transversal, conforme descrito no *Capítulo 2* e testado no *Capítulo 3*. Deve-se comentar que este conjunto de valores (empenamento) é característica que depende apenas da geometria e dos materiais que constituem a seção transversal. Portanto, as variáveis incógnitas do método proposto são os 6 graus de liberdade usuais dos elementos de barra geral e as intensidades de empenamento nodais U_7 de cada nó ℓ .

De posse do mapeamento da cinemática da seção transversal dado pelas Equações (4.10) e substituindo-se as Equações (4.9) na equação (4.8) resulta a energia de deformação da barra geral em função dos sete parâmetros nodais e dos nós do elemento finito, fica dada como:

$$\begin{aligned}
U = \frac{1}{2} & \left\{ \begin{aligned} & \left\{ u \right\}^T \left[\phi \right]^T \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xz} & 0 & 2G_{xz}u_{ap,z} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xy} & -2G_{xy}u_{ap,y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_{xz}u_{ap,z} & -2G_{xy}u_{ap,y} & G_{xy}(u_{ap,y})^2 + G_{xz}(u_{ap,z})^2 \end{bmatrix} \left\{ \phi \right\} \left\{ u \right\} + \\ & \left\{ u \right\}^T \left[\phi \right]^T \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2G_{xz} & -2G_{xz}(f_y + y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2G_{xy} & 0 & 2G_{xy}(f_z + z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2G_{xy}u_{ap,y} & 2G_{xz}u_{ap,z} & -2G_{xy}(f_z + z)u_{ap,y} + 2G_{xz}(f_y + y)u_{ap,z} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \phi \right\} \left\{ u \right\} + \\ & \left\{ u \right\}^T \left[\phi \right]^T \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2G_{xy} & 2G_{xy}u_{ap,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_{xz} & 0 & 2G_{xz}u_{ap,z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2G_{xz}(f_y + y) & 2G_{xy}(f_z + z) & -2G_{xy}(f_z + z)u_{ap,y} + 2G_{xz}(f_y + y)u_{ap,z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \phi \right\} \left\{ u \right\} + \right. \\ & \left. \left\{ u \right\}^T \left[\phi \right]^T \left(\begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 2E(f_z + z) & -2E(f_y + y) & 2Eu_{ap} \\ 0 & G_{xy} & 0 & -2G_{xy}(f_z + z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{xz} & 2G_{xz}(f_y + y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2G_{xy}(f_z + z) & 2G_{xz}(f_y + y) & G_{xy}(f_z + z)^2 + G_{xz}(f_y + y)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 2E(f_z + z) & 0 & 0 & 0 & E(f_z + z)^2 & -2E(f_y + y)(f_z + z) & 2Eu_{ap}(f_z + z) \\ -2E(f_y + y) & 0 & 0 & 0 & -2E(f_y + y)(f_z + z) & E(f_y + y)^2 & -2Eu_{ap}(f_y + y) \\ 2Eu_{ap} & 0 & 0 & 0 & 2Eu_{ap}(f_z + z) & -2Eu_{ap}(f_y + y) & (Eu_{ap})^2 \end{bmatrix} \left\{ \phi \right\} \left\{ u \right\} \right) \right\} dV
\end{aligned} \right. \quad (4.11)
\end{aligned}$$

Diferenciando-se a expressão (4.11) duas vezes em relação aos parâmetros nodais encontra-se a integral sobre o volume do elemento que resulta na matriz de rigidez para o elemento finito proposto de ordem sete vezes o numero de nós adotados para aproximar o elemento. Deve-se lembrar que a primeira derivada da energia de deformação em relação aos parâmetros nodais é o vetor de força interna.

As integrais necessárias são feitas na área da seção transversal e no comprimento do elemento finito. Na área da seção transversal segue-se exatamente o que foi descrito no *Capítulo 2*, enquanto no comprimento do elemento aplicou-se aproximação quadrática (três nós) com as funções de forma dadas por:

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi) \quad \phi_2(\xi) = (1 - \xi^2) \quad \phi_3(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi) \quad (4.12)$$

E suas derivadas:

$$\phi_1'(\xi) = \frac{1}{2}(2\xi - 1) \quad \phi_2'(\xi) = -2\xi \quad \phi_3'(\xi) = \frac{1}{2}(2\xi + 1) \quad (4.13)$$

E sua integração foi feita usando pontos e pesos de Gauss. As formas destas funções são dadas na Figura 4.3:

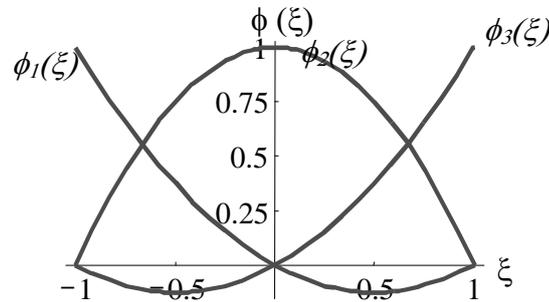
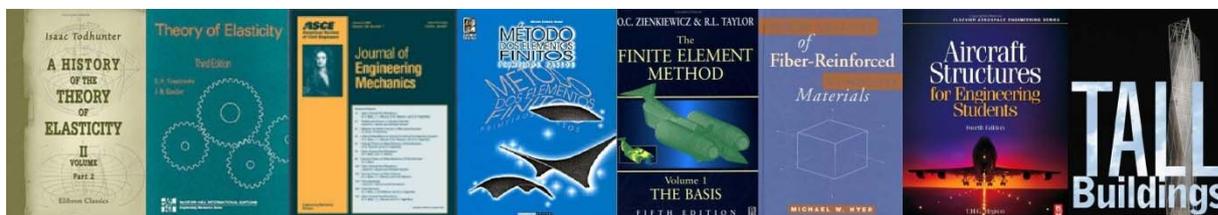


Figura 4.3 Funções de forma para o elemento quadrático (PACCOLA, 2004).

Comenta-se ainda que os parâmetros nodais de intensidade do empenamento possuem o seu conjugado energético natural, ou seja, a grandeza bimomento, definida na teoria técnica de flexo-torção, i.e., teoria de Vlasov.

Como comentado anteriormente, a diferença entre a proposta deste trabalho e a referida teoria é na forma de como a intensidade do empenamento se relaciona com a taxa longitudinal de giro em torno do eixo da barra geral e não na natureza do empenamento e de sua relação com o bimomento. Isto ocorre semelhantemente na cinemática de Reissner onde os momentos de flexão continuam sendo conjugados energéticos dos giros da seção transversal, tal como na cinemática de Euler-Bernoulli, apesar da diferença de como o giro da seção transversal se relaciona com a taxa do deslocamento transversal ao longo do eixo do elemento.

5 EXEMPLOS DO ELEMENTO DE BARRA GERAL



5.1 INTRODUÇÃO

Este capítulo tem como propósito demonstrar que os objetivos deste trabalho foram atingidos de forma satisfatória, para tanto, apresentam-se os resultados de alguns exemplos referentes às barras tridimensionais, com diferentes tipos de seções transversais por trechos, abertas e fechadas e com a consideração de material laminado.

Primeiramente, para a verificação da programação, utilizaram-se resultados analíticos de flexo-torção de barras de seção aberta de parede fina descritos no sub-item “*Exemplos flexo-torção*”. Comprova-se o bom resultado obtido na resolução de núcleos estruturais como mostrado no primeiro exemplo referente ao sub-item “*Exemplos de núcleos estruturais*”.

Através destes exemplos tem-se o intuito de demonstrar as contribuições significativas obtidas com o desenvolvimento deste trabalho. A primeira, que é a inclusão de geometrias quaisquer para a seção transversal, possibilitando, por exemplo, a consideração de núcleos estruturais mistos em edifícios, abertos e fechados por trechos, é verificada no segundo exemplo referente ao sub-item “*Exemplos de núcleos estruturais*”. A segunda contribuição é

referente à consideração de material laminado, possibilitando considerar barras gerais de materiais compostos para várias aplicações, é confirmada no terceiro exemplo deste capítulo, relativo a “*Exemplos de núcleos estruturais*”.

5.2 EXEMPLOS DE FLEXO-TORÇÃO

A teoria referente à flexo-torção de barras com seção transversal aberta e paredes delgadas pode ser encontrada em inúmeros trabalhos. Entre eles destacam-se alguns trabalhos desenvolvidos no SET/EESC/USP (Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos pertencente à Universidade de São Paulo), tais como: MORI (1978) & (1988), RACHID (1975) e RACHID & MORI (1993). LANGENDONCK (1960) & (1959), também descreve esse tema. Entretanto, destaca-se o trabalho de VLASOV (1961), que foi quem desenvolveu a teoria de barras com paredes abertas e seção delgada. Observa-se que este assunto iniciou-se antes de 1961, há referências em VLASOV (1940).

O objetivo aqui é comprovar a eficiência do presente trabalho na resolução de estruturas de barras com seção transversal aberta e paredes delgadas sujeitas a torção não-uniforme ou flexo-torção. Portanto, questionar os métodos e conceitos de flexo-torção está além da proposta deste trabalho.

Neste capítulo, serão apresentadas as fórmulas imediatas, para o cálculo dos resultados, relativos à flexo-torção, necessários para a validação do presente trabalho. Essa formulação é particular para cada exemplo, uma vez que é resultado da consideração das condições de contorno na formulação geral, em cada situação específica. A resolução

detalhada destes exemplos encontra-se nas notas de aula de MUNAIAR NETO (2006) e também em MORI (1988) & (1978).

Os conceitos físicos, bem como as formulações gerais podem ser encontrados nos trabalhos mencionados, ou em outra bibliografia referente à flexo-torção de barras com seção transversal aberta e paredes delgadas.

5.2.1 EXEMPLO 01

O exemplo 1 é a viga indicada na Figura 5.1. Trata-se de uma barra engastada com forças F aplicadas na extremidade livre.

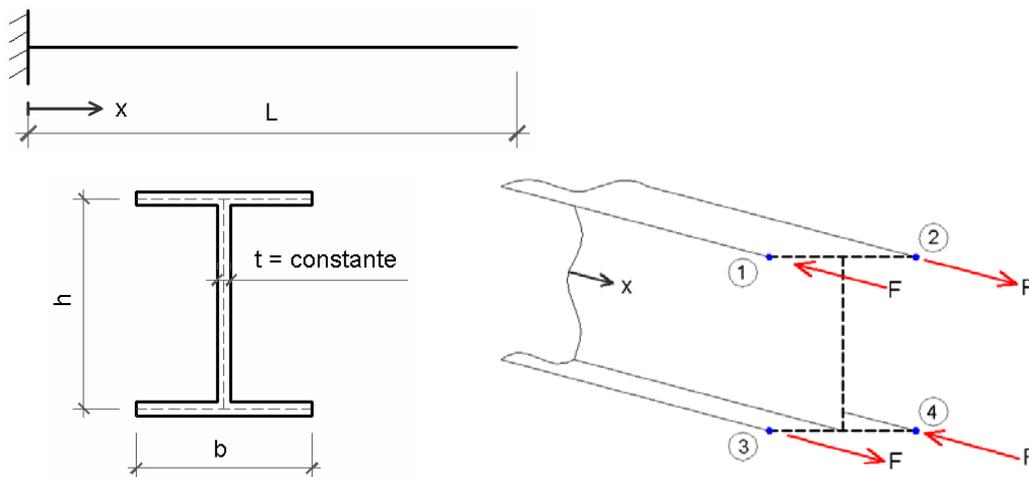


Figura 5.1 Representação da estrutura do exemplo 1.

Os valores necessários para o cálculo desta estrutura são:

$$F = 50kN \quad L = 200cm \quad t = 0,8cm \quad h = 12cm \quad b = 10cm$$

$$E = 21.000kN/cm^2 \quad G = 8.000kN/cm^2$$

O objetivo, neste exemplo, é a comparação do ângulo de rotação ao longo da direção x em radianos (ϕ); do ângulo de rotação por unidade de comprimento ao longo da direção x (ϕ'); da tensão normal na extremidade livre (σ_x); da tensão máxima de cisalhamento (τ_{\max}); e do empenamento (u) nos pontos 1, 2, 3 e 4, destacados na Figura 5.1.

5.2.1.1 Teoria Técnica

O diagrama de área setorial para o perfil I é representado na Figura 5.2. Para este exemplo, em decorrência do sentido adotado para o eixo x , a área setorial apresenta os valores ilustrados na figura.

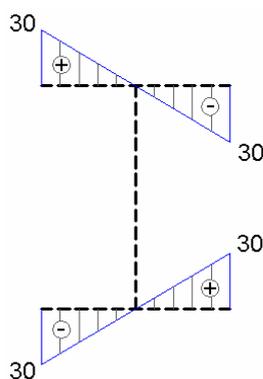


Figura 5.2. Diagrama de área setorial principal do perfil I do exemplo 1 (cm^2).

Os momentos de inércia à torção e setorial são determinados da seguinte forma:

$$I_t = \frac{1}{3} \int_s t^3 ds = \frac{0,8^3}{3} (2 \times 10 + 12) = 5,46 \text{ cm}^4$$

$$I_\omega = \int_A \omega^2 dA = \frac{10^3 \times 12^2 \times 0,8}{24} = 4.800 \text{ cm}^6$$

E o comprimento de comparação é calculado pela expressão abaixo:

$$r = \sqrt{\frac{EI_\omega}{GI_t}} = \sqrt{\frac{21.000 \times 4.800}{8.000 \times 5,46}} = 48,04 \text{ cm}$$

As condições de contorno para este exemplo são:

- extremidade engastada

$$\sigma_x \neq 0 \quad B \neq 0$$

$$\phi = 0 \quad \phi' = 0 \quad u_i = \omega_i \phi' = 0$$

(5.1)

- extremidade livre com tensão normal σ_x ou carga P_i aplicada

$$B = \int_A \sigma_x \omega dA \quad \text{ou} \quad B = \sum_i F_i \omega_i$$

Onde σ_x é a tensão normal, B o bimomento, ϕ o ângulo de rotação ao longo da direção x , ϕ' o ângulo de rotação por unidade de comprimento ao longo da direção x , A a área, u o empenamento, ω a área setorial, F a carga concentrada e i o ponto considerado.

A partir das Condições de Contorno (5.1) determina-se o bimomento aplicado. O produto entre as forças aplicadas e os valores de área setorial principal produzirá um bimomento negativo localizado na mesma seção, em resposta à ocorrência de parcelas negativas, produzidas por força positivas (Figura 5.1) multiplicada por área setorial negativa (Figura 5.2) e vice-versa.

A equação geral do bimomento é:

$$B = C_1 \sinh\left(\frac{x}{r}\right) + C_2 \cosh\left(\frac{x}{r}\right) + r^2 m \quad (5.2)$$

Para este exemplo a parcela de carga de torção distribuída é desconsiderada ($m = 0$).

Analisando o carregamento aplicado na barra e a solicitação na viga, é possível considerar que o momento de torção total resulta nulo, ou seja, $M_t = 0$. Como $M_t = M_L + M_{ft}$, para esse exemplo $M_{ft} = -M_L$ e $M_L = GI_t \phi'$, onde M_{ft} é o momento devido à flexo-torção e M_L o momento devido à torção livre.

Pela condição de contorno $\phi'(x=0) = 0$, tem-se que $B'(x=0) = 0$ e determina-se a constante C_1 .

Por outro lado, tem-se $B(x=L) = \sum_i F_i \omega_i = -Fhb$. Substituindo essa condição na equação do bimomento, determina-se C_2 .

Portanto, substituindo-se as constantes e desconsiderando-se $m = 0$, a equação do bimomento resulta na forma:

$$B = - \left[\frac{Fhb}{\cosh\left(\frac{L}{r}\right)} \right] \cosh\left(\frac{x}{r}\right) \quad (5.3)$$

$$B = - \left[\frac{50 \times 12 \times 10}{\cosh\left(\frac{200}{48,04}\right)} \right] \cosh\left(\frac{x}{48,04}\right)$$

Logo, determinam-se os momentos de torção livre e flexo-torção, já que $M_L = -M_{ft} = B'$:

$$M_L = -M_{jt} = - \left[\frac{Fhb}{r \cosh\left(\frac{L}{r}\right)} \right] \sinh\left(\frac{x}{r}\right) \quad (5.4)$$

Sendo $M_L = GI_t \phi'$, integrando a Equação (5.4), aplicando a condição de contorno $\phi(x=0) = 0$ e isolando ϕ :

$$\phi = \frac{Fbh}{GI_t \cosh\left(\frac{L}{r}\right)} \left[1 - \cosh\left(\frac{x}{r}\right) \right] \quad (5.5)$$

$$\phi = \frac{50 \times 10 \times 12}{8.000 \times 5,46 \times \cosh\left(\frac{200}{48,04}\right)} \left[1 - \cosh\left(\frac{x}{48,04}\right) \right]$$

Como $\cosh(x/r)$ resultam sempre maior ou igual à unidade, os valores de ϕ são sempre negativos, isto é, as seções sofrem rotações no sentido horário para um observador posicionado com visão no sentido positivo de x . Derivando-se ϕ , determina-se o ângulo de rotação por unidade de comprimento ao longo da direção x :

$$\phi' = - \left[\frac{Fbh}{GI_t r \cosh\left(\frac{L}{r}\right)} \right] \sinh\left(\frac{x}{r}\right) \quad (5.6)$$

$$\phi' = - \left[\frac{50 \times 10 \times 12}{8.000 \times 5,46 \times 48,04 \times \cosh\left(\frac{200}{48,04}\right)} \right] \sinh\left(\frac{x}{48,04}\right)$$

Como:

$$u = \omega \phi' \quad (5.7)$$

e ϕ' resulta sempre negativo, para os pontos 1, 2, 3 e 4, têm-se:

$$u_1 = u_4 < 0$$

$$u_2 = u_3 > 0$$

Por fim, as tensões normais σ_x são dadas por:

$$\sigma_x = \frac{B}{I_\omega}(\omega)$$

$$\sigma_x = \left\{ - \left[\frac{50 \times 12 \times 10}{\cosh\left(\frac{200}{48,04}\right)} \right] \cosh\left(\frac{x}{48,04}\right) \right\} \frac{\omega}{I_\omega} \quad (5.8)$$

Como, nesse caso, $B < 0$ e $I_\omega > 0$, para os pontos 1, 2, 3 e 4, resultam:

$$\sigma_{x(1)} = \sigma_{x(4)} < 0 \quad (5.9)$$

$$\sigma_{x(2)} = \sigma_{x(3)} > 0$$

O valor do momento estático setorial é calculado pela seguinte equação:

$$S_\omega = \int_A \omega dA = t \int_{s_1}^{s_2} \omega ds = 60 \text{ cm}^2 \quad (t \times \text{área da figura}) \quad (5.10)$$

Portanto S_ω é o produto da espessura pela área da figura formada no diagrama de área setorial.

A tensão de cisalhamento máxima por flexo-torção é dada por:

$$\tau_{ft} = - \frac{M_{ft} S_\omega}{t I_\omega} \quad \tau_{ft} = \frac{B' S_\omega}{t I_\omega}$$

$$\tau_{ft} = \left\{ - \left[\frac{50 \times 12 \times 10}{48,04 \times \cosh\left(\frac{200}{48,04}\right)} \right] \sinh\left(\frac{x}{48,04}\right) \right\} \frac{60}{0,8 \times 4.800} \quad (5.11)$$

A tensão de cisalhamento máxima por torção livre é escrita pela seguinte fórmula:

$$\tau_L = \frac{M_L t}{I_t}$$

$$\tau_L = \left\{ - \left[\frac{50 \times 12 \times 10}{48,04 \times \cosh\left(\frac{200}{48,04}\right)} \right] \sinh\left(\frac{x}{48,04}\right) \right\} \begin{matrix} 0,8 \\ 5,46 \end{matrix} \quad (5.12)$$

A partir das Equações, para este exemplo, obtidas para o giro em radianos (5.5), giro por unidade de comprimento (5.6), tensão normal (5.8), tensão de cisalhamento (5.11) e (5.12) e empenamento (5.7) para valores de coordenadas x , de 0 a 200cm, obtiveram-se os resultados numéricos para posterior comparação com o presente trabalho.

5.2.1.2 Resultados obtidos pela formulação do presente trabalho

Para obter os resultados do presente trabalho, para o exemplo em questão, entrou-se no programa, após acoplamento ao ACADSOFT, com os dados desta estrutura. Para a geração dos dados de entrada utilizou-se um aplicativo desenvolvido em PACCOLA (2004).

Primeiro, desenhou-se a seção transversal no programa AutoCAD, Figura 5.3.

Com a seção transversal, criaram-se as camadas, sempre no sentido anti-horário, através do 3D face, Figura 5.4.

Salvou-se o arquivo em extensão *dxf*, Figura 5.5.

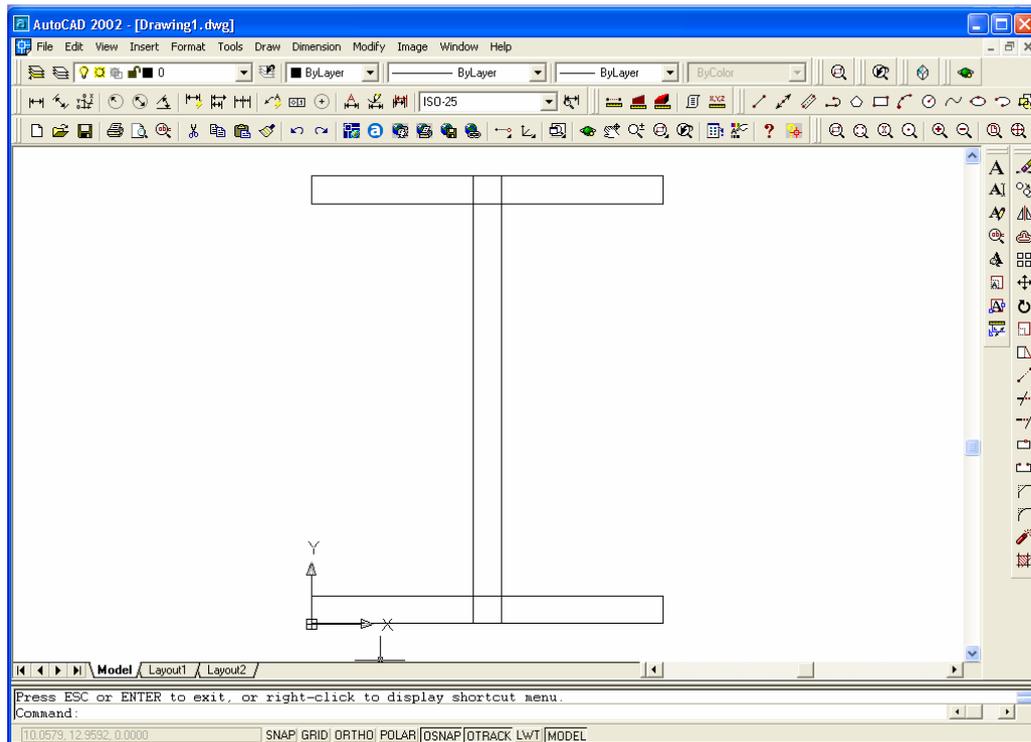


Figura 5.3. Seção transversal do exemplo 1.

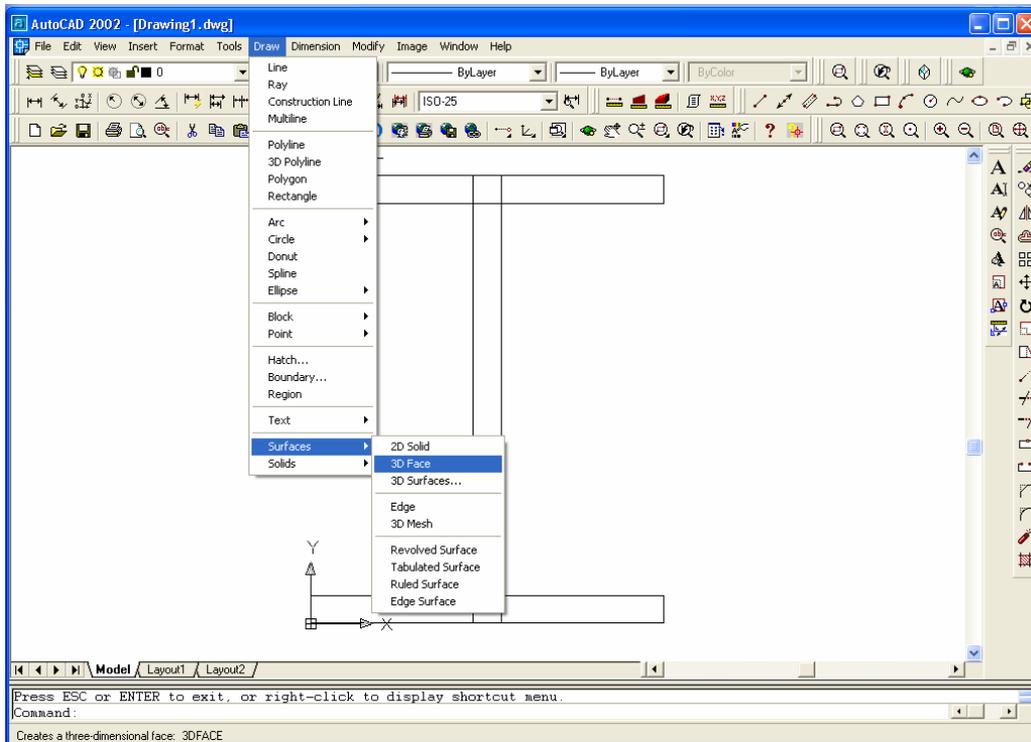


Figura 5.4. 3D Face do exemplo 1.

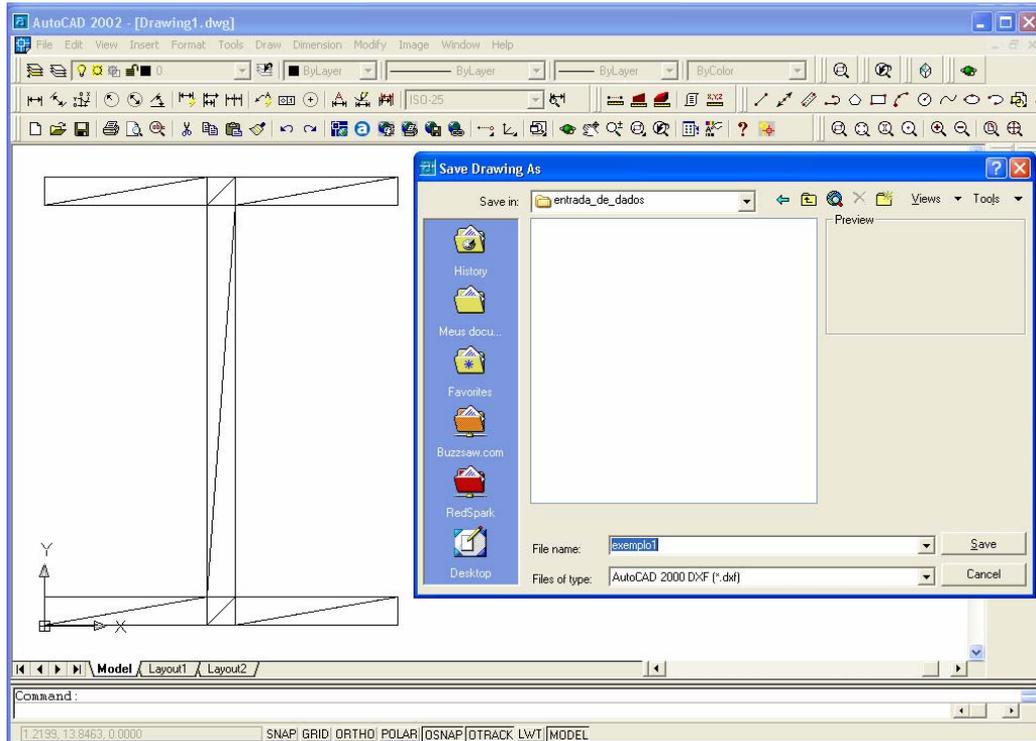


Figura 5.5. Salvar o arquivo do exemplo 1 em extensão *dxf* .

Abriu-se o aplicativo que gera os arquivos de entradas de dados e digitaram-se os tipos de seção transversal, como na Figura 5.6.



Figura 5.6. Tipos de seção transversal do exemplo 1.

Determinou-se a origem da seção transversal, Figura 5.7.

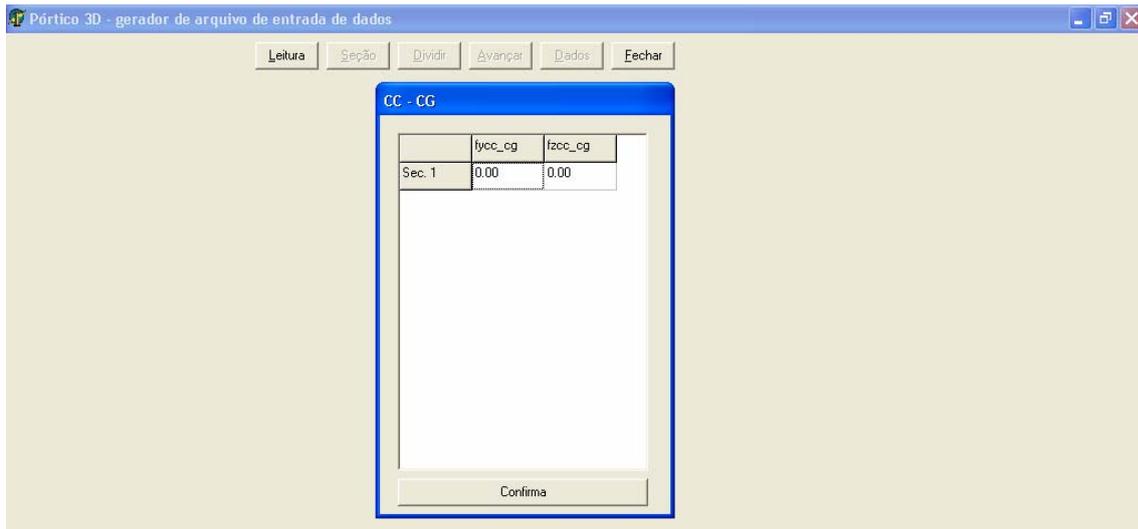


Figura 5.7. Origem da seção transversal do exemplo 1.

Abriu-se o arquivo das camadas da seção transversal em extensão *dxf*, previamente definidas, Figura 5.8.

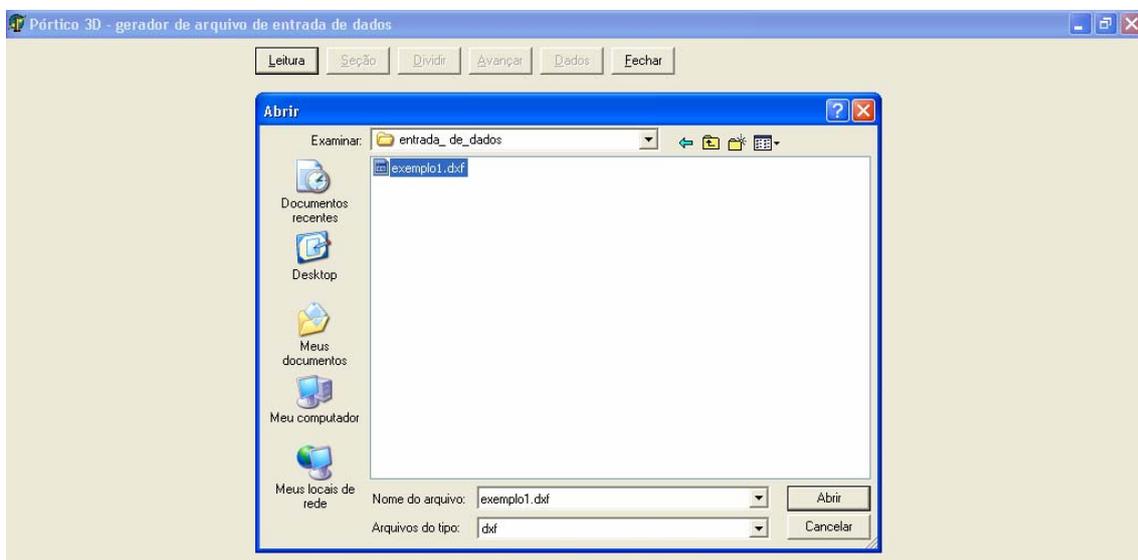


Figura 5.8. Leitura das camadas em extensão *dxf* do exemplo 1.

O gerador desenha essas camadas na tela. Subdividiram-se as camadas (4 divisões em y e 4 em z) de forma a melhorar a discretização da seção transversal a fim de obter melhores resultados para este exemplo, Figura 5.9.

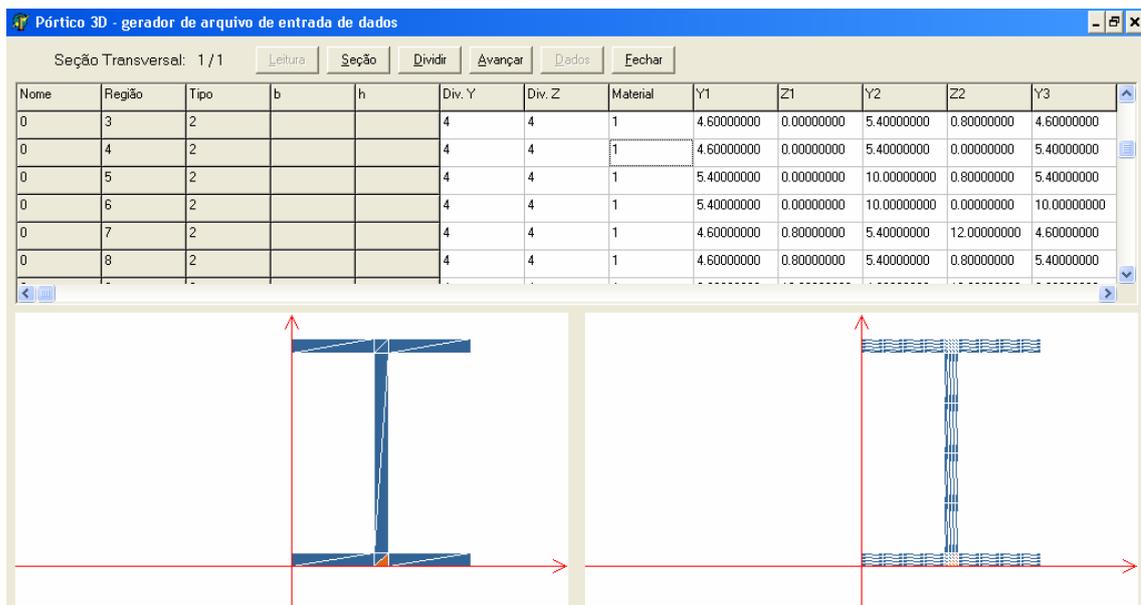


Figura 5.9. Divisão da seção transversal do exemplo 1 em elementos.

Após a subdivisão, avançou-se para as próximas telas do programa onde se definiram as características geométricas e dos materiais deste exemplo, bem como as condições de contorno envolvidas.

Na tela seguinte digitaram-se os dados da estrutura, como ilustrado na Figura 5.10. Tais como, número de elementos; número de nós; direções vinculadas, carregadas e deslocadas; número de materiais e trecho. Coordenadas nodais, rotação da seção transversal e propriedades dos materiais.

Pórtico 3D - gerador de arquivo de entrada de dados

Constantes elásticas Leitura Seção Dividir **Avançar** Dados Fechar

Número de Passos: 1
 Número de Nós: 57
 Número de Elementos: 28
 Nós por Elemento: 3
 Direções Vinculadas: 7
 Direções Carregadas: 1
 Direções Deslocadas: 0
 Número de Materiais: 1
 Número de Trechos: 1

Coordenadas Nodais

	Coord. X	Coord. Y	Coord. Z
49	171.4285710	0	
50	174.9999910	0	
51	178.5714210	0	
52	182.1428510	0	
53	185.7142810	0	
54	189.2857110	0	
55	192.8571410	0	
56	196.4285710	0	
57	200	0	0

Elementos

	Nó 1	Nó 2	Nó 3	TTS	X	Y	Z
20	39	40	41	1	0	1	0
21	41	42	43	1	0	1	0
22	43	44	45	1	0	1	0
23	45	46	47	1	0	1	0
24	47	48	49	1	0	1	0
25	49	50	51	1	0	1	0
26	51	52	53	1	0	1	0
27	53	54	55	1	0	1	0
28	55	56	57	1	0	1	0

Materiais

	E	Gxy	Gxz	ks
	Sigma	k1	eps1	H
1	21000	8000	8000	0.8333333
T	2000000011000	0	1000	
C	2000000011000	0	1000	

Figura 5.10. Dados 1 da estrutura do exemplo 1.

A Figura 5.11 mostra a entrada de dados das condições de contorno e carregamento. Observa-se que para este exemplo substituíram-se as quatro cargas concentradas na extremidade pelo bimomento aplicado equivalente, na direção correspondente a esse esforço solicitante. Tal direção é a 7 e corresponde ao giro por unidade de comprimento.

Este aplicativo para a geração do arquivo de entrada de dados não está ligado ao ACADSOFT, ele apenas gera um arquivo de entrada de dados, que pode ser alterado posteriormente. Sendo assim, executou-se o ACADSOFT após gerar o arquivo de entrada de dados.

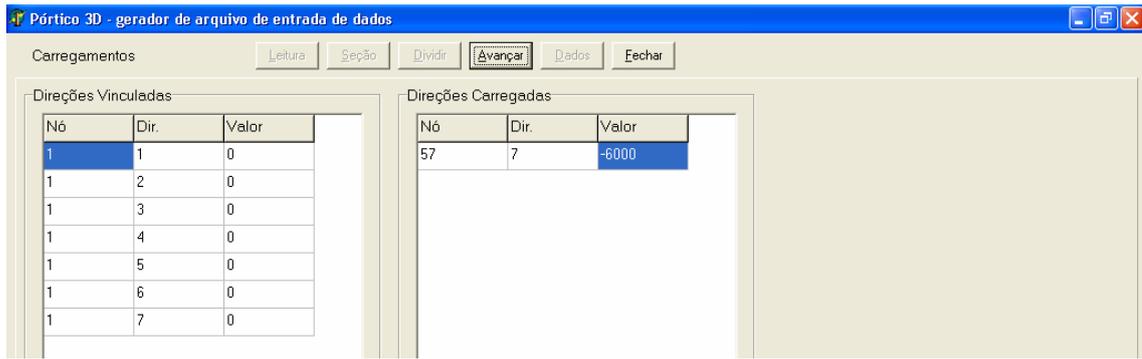


Figura 5.11. Dados 2 da estrutura do exemplo 1.

Adotou-se uma seção transversal com 224 elementos e 513 nós, como ilustrada na Figura 5.12.

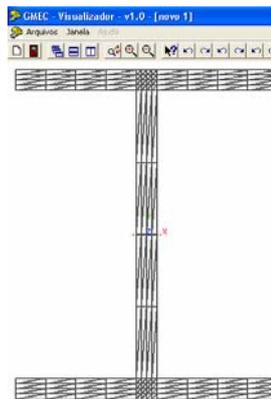


Figura 5.12. Malha da seção transversal da seção *I* do exemplo 1.

Definida a malha da seção transversal, com o objetivo de se determinar a malha da barra que levaria a resultados mais precisos, realizou-se uma análise de convergência, encontrada na Tabela 5.1 e representada graficamente na Figura 5.13. Nesta análise, compararam-se os valores obtidos pela teoria técnica e pelo presente trabalho. Para a extremidade livre ($x = 200\text{cm}$) compararam-se os resultados do giro por unidade de comprimento, para diferentes discretizações da barra. E para a mesma posição de x ,

escolhendo-se o ponto 3 da seção transversal (Figura 5.1), compararam-se os valores da tensão normal.

Tabela 5.1 - Análise de convergência do exemplo 1.

<i>n</i> ^o <i>elementos</i>	ϕ' ou α (radianos/cm)		<i>razão</i> <i>relativa</i> (%)	σ_x (kN/cm ²)		<i>razão</i> <i>relativa</i> (%)
	<i>presente</i> <i>trabalho</i>	<i>teoria</i> <i>técnica</i>		<i>presente</i> <i>trabalho</i>	<i>teoria</i> <i>técnica</i>	
1	-0,0017960	-0,0028577	37,15	6,19	37,5	83,50
2	-0,0024968	-0,0028577	12,63	16,21	37,5	56,77
3	-0,0027009	-0,0028577	5,49	22,38	37,5	40,32
4	-0,0027823	-0,0028577	2,64	26,53	37,5	29,24
8	-0,0028576	-0,0028577	0,00	33,96	37,5	9,45
10	-0,0028642	-0,0028577	0,23	35,32	37,5	5,80
20	-0,0028699	-0,0028577	0,43	37,23	37,5	0,71
25	-0,0028702	-0,0028577	0,44	37,43	37,5	0,18
26	-0,0028702	-0,0028577	0,44	37,46	37,5	0,11
28	-0,0028703	-0,0028577	0,44	37,50	37,5	0,00
32	-0,0028703	-0,0028577	0,44	37,56	37,5	0,15
40	-0,0028704	-0,0028577	0,44	37,62	37,5	0,32
100	-0,0028704	-0,0028577	0,44	37,69	37,5	0,51

Lembra-se que para a teoria técnica, o giro por unidade de comprimento e a tensão normal para a seção transversal da extremidade livre ($x = 200\text{cm}$), independe do número de elementos e depende somente da posição x , ao contrário do presente trabalho.

O interesse aqui é a comparação da técnica desenvolvida com a teoria técnica e pelos dados da Tabela 5.1 observa-se uma alteração pequena nos valores de tensão, para a quantidade superior a 25 elementos finitos.

Observando-se a análise de convergência, tanto na Tabela 5.1 quanto na Figura 5.13, conclui-se que a resposta mais próxima da teoria técnica para a tensão normal é aquela que corresponde à malha de 28 elementos.

Comparando-se a teoria técnica e o presente trabalho verifica-se que para 28 elementos tem-se o mesmo valor para a tensão normal (σ_x), após esse número ainda ocorre

uma variação nos resultados do presente trabalho, mas trata-se de uma diferença insignificante por ser extremamente pequena e praticamente imperceptível como mostra a Figura 5.13. Em relação ao giro por unidade de comprimento (ϕ'), após 25 elementos a diferença mantém-se constante e desprezível. Observa-se, entretanto, que os resultados devem convergir para valor pouco diferente da teoria técnica, resultando em uma análise ainda mais realista do problema real.

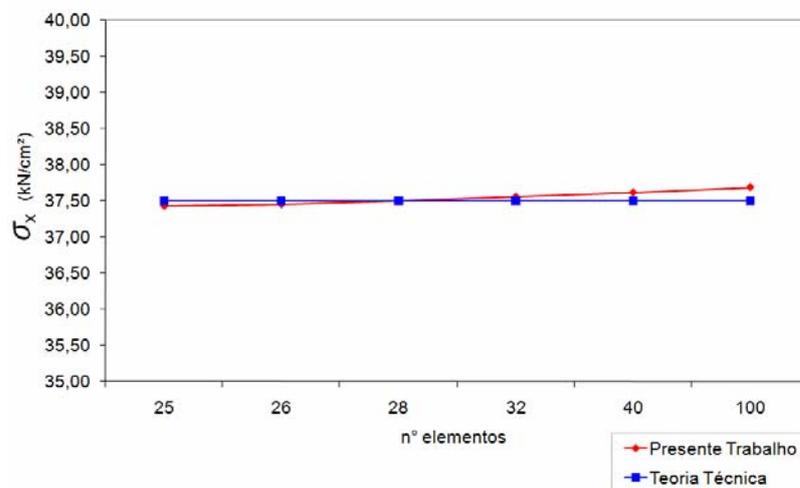


Figura 5.13. Representação gráfica da análise de convergência do exemplo 1.

5.2.1.3 Resultados ao longo do comprimento da barra

Finalmente podem-se comparar os resultados do presente trabalho com a teoria técnica. Obtiveram-se os resultados da teoria técnica, apresentados anteriormente, resolvendo suas respectivas formulações. E, têm-se os resultados do presente trabalho ao longo da barra, obtidos da forma e com as malhas, transversal e longitudinal (28 elementos), descritas no item

anterior. Lembrando que a comparação dos resultados refere-se ao ponto 3 (Figura 5.1), da seção transversal ao longo da barra.

A Tabela 5.2 é a comparação do giro e do giro por unidade de comprimento entre a teoria técnica e o presente trabalho, observa-se uma pequena diferença entre eles. Para a comparação entre os resultados, a Tabela 5.2 mostra-se alguns dos 57 nós ilustrados na Figura 5.14.

Tabela 5.2 - Ângulo de rotação e ângulo de rotação por unidade de comprimento do exemplo 1.

x (cm)	ϕ (radianos)		razão relativa (%)	ϕ' ou α (radianos/cm)		razão relativa (%)
	presente trabalho	teoria técnica		presente trabalho	teoria técnica	
0,0	0,0000000	0,0000000	0,00	0,0000000	0,0000000	0,00
14,3	-0,0001874	-0,0001902	1,51	-0,0000266	-0,0000268	0,83
28,6	-0,0007663	-0,0007778	1,49	-0,0000556	-0,0000560	0,80
42,9	-0,0017887	-0,0018152	1,46	-0,0000896	-0,0000903	0,74
57,1	-0,0033466	-0,0033947	1,42	-0,0001316	-0,0001325	0,67
71,4	-0,0055798	-0,0056572	1,37	-0,0001855	-0,0001866	0,58
85,7	-0,0086890	-0,0088043	1,31	-0,0002560	-0,0002573	0,48
100,0	-0,0129536	-0,0131164	1,24	-0,0003495	-0,0003509	0,38
114,3	-0,0187567	-0,0189777	1,16	-0,0004745	-0,0004757	0,27
128,6	-0,0266196	-0,0269106	1,08	-0,0006420	-0,0006430	0,16
142,9	-0,0372487	-0,0376220	0,99	-0,0008673	-0,0008676	0,04
157,1	-0,0515990	-0,0520663	0,90	-0,0011704	-0,0011695	0,08
171,4	-0,0709598	-0,0715307	0,80	-0,0015787	-0,0015756	0,20
185,7	-0,0970702	-0,0977498	0,70	-0,0021289	-0,0021221	0,32
200,0	-0,1322764	-0,1330598	0,59	-0,0028703	-0,0028577	0,44

A Figura 5.14 e a Figura 5.15 são os gráficos do ângulo de rotação ao longo da direção x , em radianos e por unidade de comprimento, respectivamente. Esses gráficos mostram uma diferença praticamente imperceptível entre os dois trabalhos. Lembra-se aqui que se comparou diretamente o parâmetro intensidade de empenamento α com o giro por unidade

de comprimento ϕ' , pois são grandezas que praticamente se confundem. Tal procedimento é adotado em todos os exemplos.

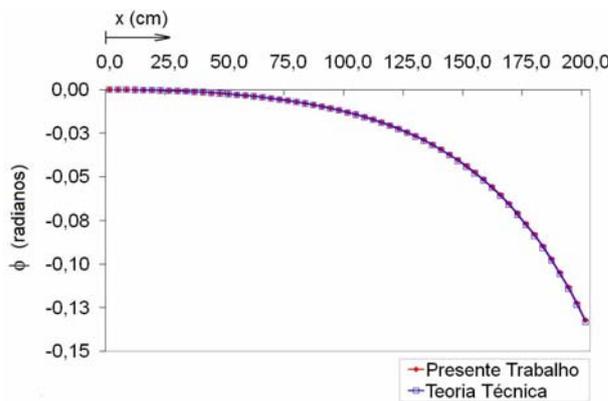


Figura 5.14. Representação gráfica do ângulo de rotação do exemplo 1.

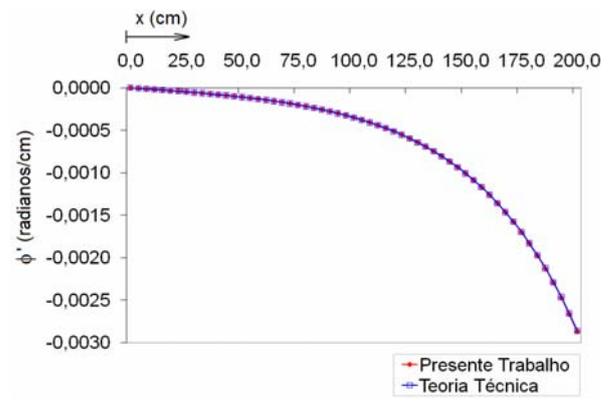


Figura 5.15. Diagrama do ângulo de rotação por unidade de comprimento do exemplo 1.

Como $B(x = 200) = -6000kNcm^2$. Substituindo esses valores na Equação (5.8), tem-se para a teoria técnica:

$$\sigma_{x(3)}(x = 200) = -\frac{6000}{4.800}(-30) = 37,50 kN/cm^2$$

Para o presente trabalho, considerando-se uma malha com 224 elementos para a seção transversal e 28 elementos para a barra, tem-se $\sigma_{x(3)}(x = 200) = 37,50 kN/cm^2$, ou seja, o mesmo valor encontrado na teoria técnica. A Figura 5.16 ilustra o mapa de tensões normais, para o presente trabalho no ponto 3 ao longo da barra.

Para a determinação da máxima tensão de cisalhamento pela teoria técnica deve-se determinar a tensão de cisalhamento máxima por flexo-torção, no x que corresponde ao máximo M_{ϕ} . Da Equação (5.11):

$$|\tau_{ft}(x = 200)| = 1,95086 \text{ kN/cm}^2$$

E a tensão de cisalhamento máxima por torção livre que corresponde ao máximo M_L , de acordo com a Equação (5.12):

$$|\tau_L(x = 200)| = 18,28928 \text{ kN/cm}^2$$

O valor da tensão de cisalhamento máxima é o seguinte:

$$\tau_{\max} = |\tau_{ft}| + |\tau_L| = 20,24014 \text{ kN/cm}^2 \quad (5.13)$$

Para o presente trabalho, como mostram os mapas de tensões de cisalhamento ilustrados na Figura 5.17 e na Figura 5.18, a tensão de cisalhamento máxima é igual a $21,44265 \text{ kN/cm}^2$. A diferença entre os dois trabalhos é igual a 5,61%.

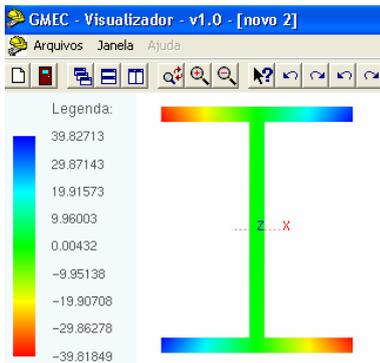


Figura 5.16. Mapa de σ_x do exemplo 1, unidade: kN/cm^2 .

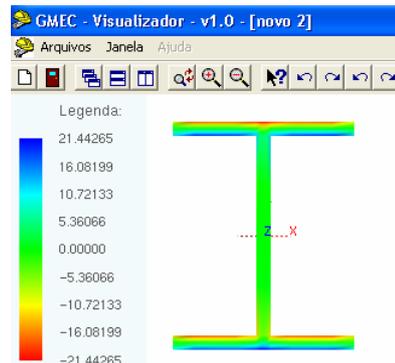


Figura 5.17. Mapa de τ_{xy} do exemplo 1, unidade: kN/cm^2 .

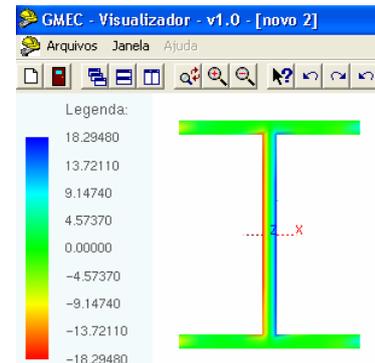


Figura 5.18. Mapa de τ_{xz} do exemplo 1, unidade: kN/cm^2 .

Os valores do empenamento para os pontos destacados na Figura 5.1, para a teoria técnica, são os seguintes:

$$u_1 = u_4 = -0,08573 \text{ cm}$$

$$u_2 = u_3 = 0,08573 \text{ cm}$$

E para o presente trabalho:

$$u_1 = u_4 = -0,08579cm$$

$$u_2 = u_3 = 0,08579cm$$

Portanto, há uma diferença de 0,07% , entre os dois trabalhos. Lembrando que a teoria técnica só fornece os valores do empenamento nodal na linha esqueleto. O mapa de deslocamentos e configuração deformada para $x = 200cm$, referente ao presente trabalho, relativo a este exemplo, encontram-se na Figura 5.19.

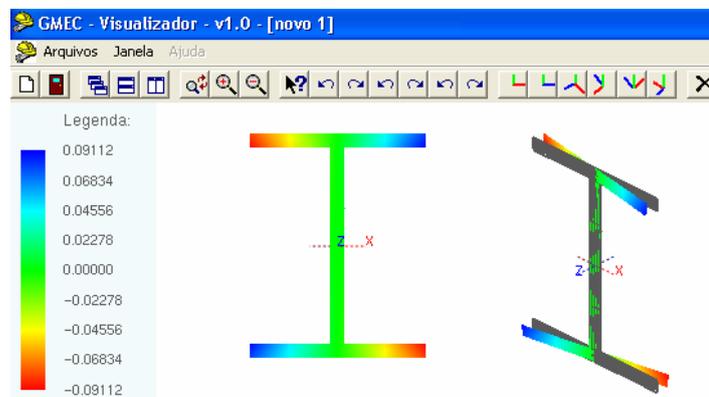


Figura 5.19. Mapa de deslocamentos e configuração deformada do exemplo 1, unidade: kN/cm^2 .

5.2.2 EXEMPLO 2

O exemplo 2 é a viga esquematizada na Figura 5.20, admitiram-se vinculações nas extremidades do tipo “vínculos de garfo” e cargas axiais de tração aplicadas nas seções transversais no centro de torção que coincide com o centro de cisalhamento. Trata-se de uma barra com seção transversal “Z” ponto-simétrica:

O objetivo, neste exemplo, é a comparação do ângulo de rotação ao longo da direção x em radianos (ϕ), do ângulo de rotação por unidade de comprimento ao longo da direção x (ϕ'), da tensão normal (σ_x), da tensão máxima de cisalhamento (τ_{\max}) e do empenamento (u) nos pontos 1, 2, 3 e 4, destacados na Figura 5.21, em $x = 225\text{cm}$.

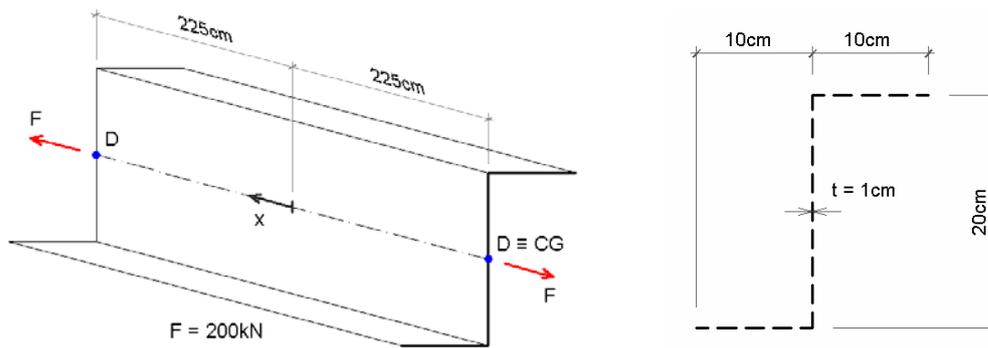


Figura 5.20. Representação da estrutura do exemplo 2.

5.2.2.1 Teoria Técnica

O diagrama de área setorial para o perfil Z é representado na Figura 5.22.

Os momentos de inércia à torção e setorial são determinados da seguinte forma:

$$I_t = \frac{1}{3} \int_s t^3 ds = \frac{1}{3} 1^3 (4 \times 10) = 13,33 \text{cm}^4$$

$$I_\omega = t \int_s \omega^2 ds = 20 \times 25^2 + 2 \left[\frac{10}{3} (75^2 - 75 \times 25 + 25^2) \right] = 41.666,67 \text{cm}^6$$

A área da seção transversal desse perfil Z é igual à 40cm^2 .

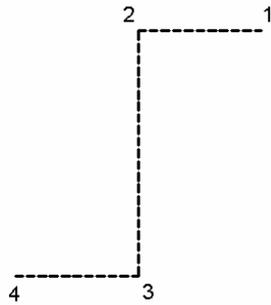


Figura 5.21. Pontos da seção transversal do exemplo 2.

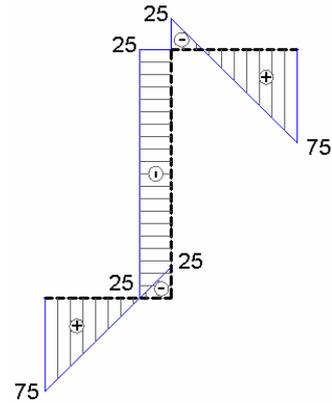


Figura 5.22. Diagrama de área setorial principal do perfil Z do exemplo 2 (cm²).

E o comprimento de comparação é calculado pela expressão abaixo:

$$r = \sqrt{\frac{EI_\omega}{GI_t}} = \sqrt{\frac{21.000 \times 41.666,67}{8.000 \times 13,33}} = 90,57 \text{ cm}$$

As condições de contorno para este exemplo são:

- extremidade com vínculo de garfo

$$\phi = 0$$

$$B = 0 \text{ (se não houver bimomento aplicado na extremidade)}$$

(5.14)

- extremidade livre com tensão normal σ_x ou carga P_i aplicada

$$B = \int_A \sigma_x \omega dA \quad \text{ou} \quad B = \sum_i F_i \omega_i$$

Onde σ_x é a tensão normal, B o bimomento, ϕ o ângulo de rotação ao longo da direção x ,

A a área, ω a área setorial, F a carga concentrada e i o ponto considerado.

Dadas as Condições de Contorno (5.14), tem-se o valor do bimomento aplicado nas extremidades:

$$\phi(x = L/2) = 0 \quad B(x = L/2) = 200(-25) = -5.000kNcm^2$$

$$\phi(x = -L/2) = 0 \quad B(x = -L/2) = 200(-25) = -5.000kNcm^2$$

A equação geral do bimomento é:

$$B = C_1 \operatorname{senh}\left(\frac{x}{r}\right) + C_2 \operatorname{cosh}\left(\frac{x}{r}\right) + r^2 m \quad (5.15)$$

Para este exemplo a parcela de carga de torção distribuída é desconsiderada ($m = 0$).

Portanto:

$$B' = \frac{C_1}{r} \operatorname{cosh}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{C_2}{r} \operatorname{senh}\left(\frac{x}{r}\right) \quad (5.16)$$

Pelas condições de contorno sabe-se que $B'(x=0)=0$ e encontra-se $C_1=0$. E da condição $B(x=L/2)=-5.000kNcm^2$, tem-se C_2 . Substituindo-se as constantes na Equação (5.15), chega-se à equação do bimomento e de sua derivada, para este exemplo:

$$B = \frac{-5000}{\operatorname{cosh}\left(\frac{L}{2r}\right)} \operatorname{cosh}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{-5000}{\operatorname{cosh}\left(\frac{450}{2 \times 90,57}\right)} \operatorname{cosh}\left(\frac{x}{90,57}\right) \quad (5.17)$$

$$B' = \frac{-5000}{r \operatorname{cosh}\left(\frac{L}{2r}\right)} \operatorname{senh}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{-5000}{90,57 \times \operatorname{cosh}\left(\frac{450}{2 \times 90,57}\right)} \operatorname{senh}\left(\frac{x}{90,57}\right)$$

A viga deste exemplo é vinculada, nas extremidades por vínculos de garfo. Este vínculo impede a rotação da seção, porém sem interferir nos deslocamentos longitudinais (não restringe o empenamento). Ao restringir a rotação, o vínculo de garfo pode solicitar a seção com um momento de torção que, nesse caso pode ser admitido, como igual em módulo, porém com sentidos contrários.

Dessa forma, é possível considerar que M_t seja constante ao longo do comprimento da barra. Portanto, permanece válida a igualdade $M_t = M_L + M_{ft}$. Substituindo-se

$M_L = GI_t \phi'$ e $M_{jt} = -B'$ em M_t e integrando-se em x , encontra-se uma equação para ϕ com uma constante ainda incógnita. Das condições de contorno $\phi(x=L/2)=0$ e $\phi(x=-L/2)=0$, a constante é determinada e igual a $-5.000kNcm^2$, concluindo-se que $M_t = 0$. A nulidade obtida para o momento de torção confirma a consideração desse esforço como constante, inicialmente assumida. Então, a equação da rotação resulta:

$$\phi = \frac{-5000}{GI_t} \left[\frac{\cosh\left(\frac{x}{r}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{2r}\right)} - 1 \right] = \frac{-5000}{8.000 \times 13,33} \left[\frac{\cosh\left(\frac{x}{90,57}\right)}{\cosh\left(\frac{450}{2 \times 90,57}\right)} - 1 \right] \quad (5.18)$$

e sua derivada:

$$\phi' = \frac{-5000}{rGI_t} \left[\frac{\sinh\left(\frac{x}{r}\right)}{\cosh\left(\frac{L}{2r}\right)} \right] = \frac{-5000}{90,57 \times 8.000 \times 13,33} \left[\frac{\sinh\left(\frac{x}{90,57}\right)}{\cosh\left(\frac{450}{2 \times 90,57}\right)} \right] \quad (5.19)$$

Como ϕ é positivo, a seção central gira no sentido anti-horário, para um observador no sentido positivo de x .

Para a tensão normal, tem-se:

$$\sigma = + \frac{N}{A} \pm \frac{B}{I_\omega} (\omega)$$

$$\sigma = \frac{200}{40} + \left[\frac{-5000}{\cosh\left(\frac{L}{2r}\right)} \cosh\left(\frac{x}{r}\right) - \frac{-5000}{\cosh\left(\frac{450}{2 \times 90,57}\right)} \cosh\left(\frac{x}{90,57}\right) \right] \frac{\omega}{41.666,67} \quad (5.20)$$

O valor do momento estático setorial é calculado pela seguinte equação:

$$S_\omega = \int_A \omega dA = t \int_{s_1}^{s_2} \omega ds = 281,25 cm^2 \quad (5.21)$$

A tensão de cisalhamento máxima por flexo-torção é dada por:

$$\tau_{ft} = \frac{B'S_{\omega}}{tI_{\omega}}$$

$$\tau_{ft} = \left[\frac{-5000}{90,57 \times \cosh\left(\frac{450}{2 \times 90,57}\right)} \sinh\left(\frac{x}{90,57}\right) \right] \frac{281,25}{1 \times 41.666,67} \quad (5.22)$$

A tensão de cisalhamento máxima por torção livre é escrita pela seguinte fórmula:

$$\tau_L = \frac{M_L t}{I_t}$$

$$\tau_L = \left\{ \frac{-5000}{90,57 \times 8.000 \times 13,33} \left[\frac{\sinh\left(\frac{x}{90,57}\right)}{\cosh\left(\frac{450}{2 \times 90,57}\right)} \right] \right\} 8.000 \times 1 \quad (5.23)$$

O empenamento é dado pela equação:

$$u = \omega \phi' \quad (5.24)$$

A partir das Equações, para este exemplo, obtidas para o giro em radianos (5.18), giro por unidade de comprimento (5.19), tensão normal (5.20), tensão de cisalhamento (5.22) e (5.23) e empenamento (5.24) para valores de coordenadas x , de -225 a 225cm , obtiveram-se os valores numéricos para posterior comparação com os resultados obtidos pela técnica apresentada no presente trabalho.

5.2.2.2 Resultados obtidos pela formulação do presente trabalho

A entrada de dados para esta estrutura foi feita da mesma forma descrita no exemplo 1. Com o aplicativo para a geração do arquivo de entrada de dados desenvolvido em PACCOLA (2004), fez-se a leitura das camadas previamente definidas em um editor de arquivo “*dxf*” e desenharam-se estas camadas na tela. Com o aplicativo subdividiram-se estas camadas de forma a melhorar a discretização da seção transversal a fim de se obter melhores resultados para este exemplo.

Subdividiram-se as camadas em 4 divisões em y e 4 em z (Figura 5.23).

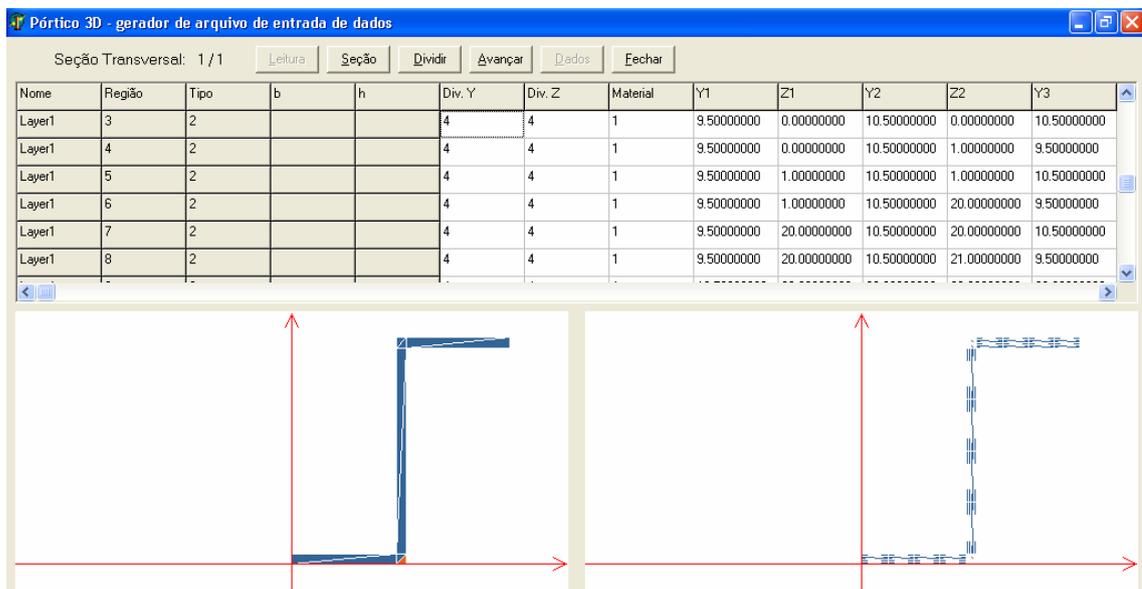


Figura 5.23. Divisão da seção transversal do exemplo 2 em elementos.

Avançou-se no programa, definindo-se as características geométricas e dos materiais deste problema, bem como as condições de contorno (Figura 5.24).

Observa-se que o vínculo de garfo impede duas translações, sendo elas em y e z (v e w , respectivamente); e três rotações as rotações (θ_x , θ_y e θ_z); ficando livre a translação em x (u) e o ângulo de rotação por unidade de comprimento ao longo da direção x (ϕ' ou α). Em relação ao carregamento aplicado, observa-se que além da carga axial na direção u , entrou-se com o bimomento gerado por essa carga na variável nodal associada à α (Figura 5.25).

Constantes elásticas: Leitura | Seção | Dividir | Avançar | Dados | Fechar

Número de Passos: 1
 Número de Nós: 201
 Número de Elementos: 100
 Nós por Elemento: 3
 Direções Vinculadas: 10
 Direções Carregadas: 4
 Direções Deslocadas: 0
 Número de Materiais: 1
 Número de Trechos: 1

Coordenadas Nodais

	Coord. X	Coord. Y	Coord. Z
193	432	0	0
194	434.25	0	0
195	436.5	0	0
196	438.75	0	0
197	441	0	0
198	443.25	0	0
199	445.5	0	0
200	447.75	0	0
201	450	0	0

Elementos

	Nó 1	Nó 2	Nó 3	TTS	X	Y	Z
92	183	184	185	1	0	1	0
93	185	186	187	1	0	1	0
94	187	188	189	1	0	1	0
95	189	190	191	1	0	1	0
96	191	192	193	1	0	1	0
97	193	194	195	1	0	1	0
98	195	196	197	1	0	1	0
99	197	198	199	1	0	1	0
100	199	200	201	1	0	1	0

Materias

	E	Gxy	Gxz	ks
	Sigma	k1	eps1	H
1	21000	8000	8000	.83333333
T	20000000	1000	0	1000
C	20000000	1000	0	1000

Figura 5.24. Dados 1 da estrutura do exemplo 2.

Adotou-se uma malha para a seção transversal com 160 elementos e 369 nós, como ilustra a Figura 5.26.

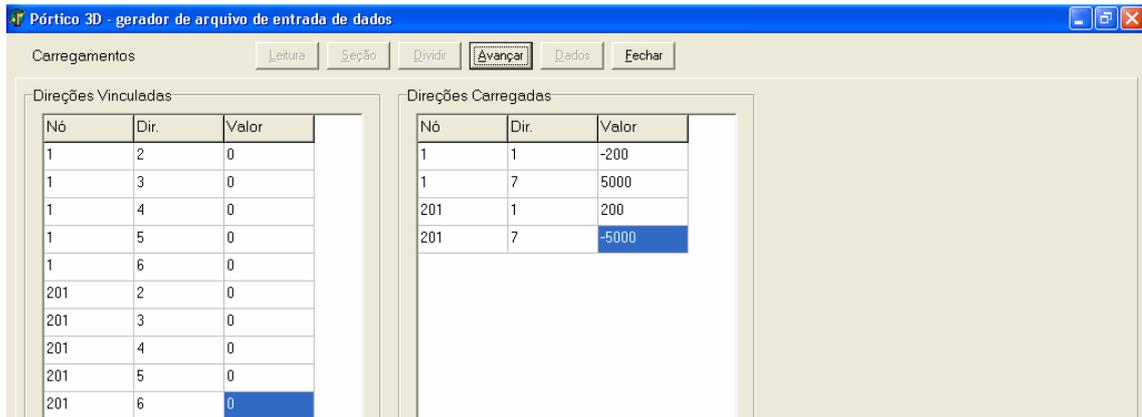


Figura 5.25. Dados 2 da estrutura do exemplo 2.

Definida a malha da seção transversal, com o objetivo de determinar-se a malha da barra que levaria a resultados mais precisos, realizou-se uma análise de convergência, encontrada na Tabela 5.3 e representada graficamente na Figura 5.27.

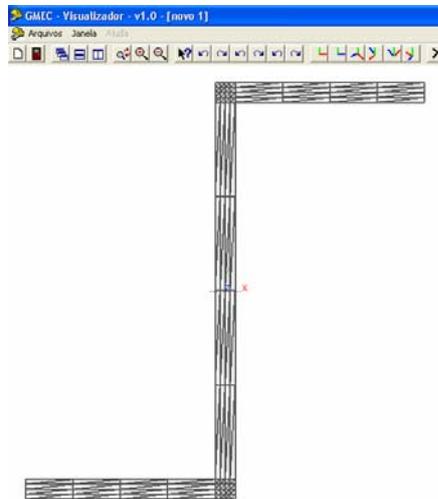


Figura 5.26. Malha da seção transversal Z do exemplo 2.

Nesta análise, compararam-se os valores obtidos pela teoria técnica e pela formulação proposta no presente trabalho. Para $x = 225cm$ compararam-se os resultados do giro por unidade de comprimento (α ou ϕ') e para a mesma posição de x , escolhendo-se o ponto 3

($\omega = -25$) e o 4 ($\omega = 75$) da seção transversal (Figura 5.21 e Figura 5.22), compararam-se os valores da tensão normal, para diferentes malhas da barra.

O interesse é a comparação dos resultados obtidos aqui com aqueles calculados utilizando a teoria técnica usando os dados da Tabela 5.3. Na tabela observa-se uma rápida convergência para todos os valores.

Tabela 5.3 - Análise de convergência do exemplo 2.

<i>n</i> ^o elementos	ϕ' ou α (radianos/cm)		razão relativa (%)	σ (3) (kN/cm ²)		razão relativa (%)	σ (4) (kN/cm ²)		razão relativa (%)
	presente trabalho	teoria técnica		presente trabalho	teoria técnica		presente trabalho	teoria técnica	
1	-0,0004196	-0,0005104	17,79	5,977	8,0	25,29	2,064	-4,0	151,60
2	-0,0004237	-0,0005104	16,99	6,042	8,0	24,47	1,867	-4,0	146,67
6	-0,0005002	-0,0005104	2,00	7,257	8,0	9,29	-1,785	-4,0	55,36
8	-0,0005052	-0,0005104	1,02	7,501	8,0	6,24	-2,518	-4,0	37,05
10	-0,0005074	-0,0005104	0,60	7,653	8,0	4,34	-2,977	-4,0	25,59
12	-0,0005084	-0,0005104	0,39	7,752	8,0	3,10	-3,273	-4,0	18,17
15	-0,0005091	-0,0005104	0,25	7,842	8,0	1,98	-3,544	-4,0	11,41
16	-0,0005093	-0,0005104	0,22	7,862	8,0	1,72	-3,605	-4,0	9,88
18	-0,0005094	-0,0005104	0,19	7,893	8,0	1,33	-3,699	-4,0	7,53
20	-0,0005096	-0,0005104	0,17	7,916	8,0	1,05	-3,766	-4,0	5,85
24	-0,0005097	-0,0005104	0,14	7,944	8,0	0,70	-3,852	-4,0	3,69
25	-0,0005097	-0,0005104	0,14	7,949	8,0	0,63	-3,867	-4,0	3,32
30	-0,0005098	-0,0005104	0,13	7,967	8,0	0,42	-3,919	-4,0	2,03
40	-0,0005098	-0,0005104	0,12	7,982	8,0	0,23	-3,965	-4,0	0,87
60	-0,0005098	-0,0005104	0,12	7,991	8,0	0,11	-3,993	-4,0	0,18
100	-0,0005098	-0,0005104	0,12	7,995	8,0	0,07	-4,003	-4,0	0,09
120	-0,0005098	-0,0005104	0,12	7,995	8,0	0,06	-4,005	-4,0	0,12
150	-0,0005098	-0,0005104	0,12	7,996	8,0	0,06	-4,006	-4,0	0,15

Observando a análise de convergência, tanto a Tabela 5.3 quanto a Figura 5.27, conclui-se que a resposta mais próxima da teoria técnica para a tensão normal é aquela que corresponde à malha com 100 elementos. Destaca-se que a cinemática desenvolvida no presente trabalho é mais precisa que a teoria de Vlasov.

Para encontrar o resultado mais próximo possível do real deve-se refinar a malha, tanto da seção transversal quanto da barra, até que os valores obtidos sejam constantes.

Comparando-se a teoria técnica e o presente trabalho verifica-se que para 100 elementos têm-se resultados aproximadamente iguais. Em relação ao giro por unidade de comprimento (α ou ϕ'), após 40 elementos a razão relativa mantém-se constante e desprezível. Para a tensão normal (4) tem-se a menor diferença para 100 elementos e depois esta aumenta. E para a tensão normal (3), após 100 elementos, observa-se uma diferença desprezível (Figura 5.27). Portanto, para fazer comparações ao longo da barra assume-se a discretização com 100 elementos finitos.

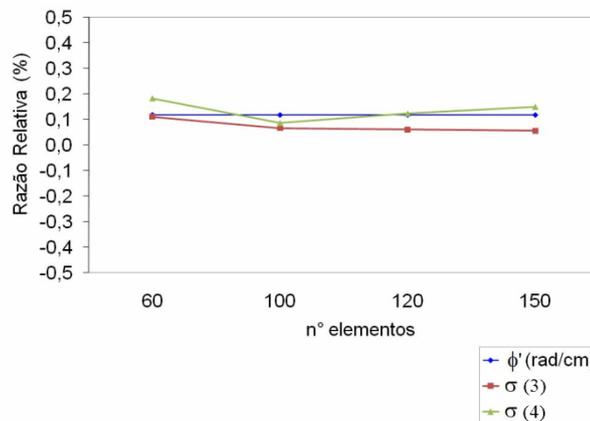


Figura 5.27. Representação gráfica da análise de convergência do exemplo 2.

5.2.2.3 Resultados ao longo do comprimento da barra

Finalmente podem-se comparar os resultados do presente trabalho ao longo do comprimento da barra com a teoria técnica. Obtiveram-se os resultados da teoria técnica, apresentados anteriormente, resolvendo suas respectivas formulações. E, têm-se os resultados do presente trabalho, obtidos da forma e com as malhas descritas no item anterior (100

elementos). Lembrando que a comparação dos resultados refere-se ao ponto 3 e 4 (Figura 5.21), da seção transversal.

A Tabela 5.4 é a comparação do giro e do giro por unidade de comprimento, respectivamente, entre a teoria técnica e o presente trabalho. Calcularam-se os giros para 100 elementos, ou seja, 201 nós. Esta tabela mostra a comparação dos resultados em alguns desses nós.

Tabela 5.4 - Ângulo de rotação e ângulo de rotação por unidade de comprimento do exemplo 2.

x (cm)	ϕ (radianos)		razão relativa (%)	ϕ' ou α (radianos/cm)		razão relativa (%)
	presente trabalho	teoria técnica		presente trabalho	teoria técnica	
-225,00	0,0000000	0,0000000	0,00	0,0005098	0,0005104	0,12
-202,50	0,0100931	0,0101488	0,55	0,0003956	0,0003963	0,18
-180,00	0,0179157	0,0180193	0,57	0,0003061	0,0003069	0,24
-157,50	0,0239556	0,0240997	0,60	0,0002357	0,0002364	0,29
-135,00	0,0285896	0,0287673	0,62	0,0001800	0,0001806	0,35
-112,50	0,0321066	0,0323116	0,63	0,0001355	0,0001360	0,39
-90,00	0,0347260	0,0349525	0,65	0,0000995	0,0000999	0,44
-67,50	0,0366111	0,0368538	0,66	0,0000696	0,0000700	0,47
-45,00	0,0378794	0,0381334	0,67	0,0000441	0,0000444	0,50
-22,50	0,0386101	0,0388708	0,67	0,0000214	0,0000215	0,51
0,00	0,0388487	0,0391116	0,67	0,0000000	0,0000000	0,00
22,50	0,0386101	0,0388708	0,67	-0,0000214	-0,0000215	0,51
45,00	0,0378794	0,0381334	0,67	-0,0000441	-0,0000444	0,50
67,50	0,0366111	0,0368538	0,66	-0,0000696	-0,0000700	0,47
90,00	0,0347260	0,0349525	0,65	-0,0000995	-0,0000999	0,44
112,50	0,0321066	0,0323116	0,63	-0,0001355	-0,0001360	0,39
135,00	0,0285896	0,0287673	0,62	-0,0001800	-0,0001806	0,35
157,50	0,0239556	0,0240997	0,60	-0,0002357	-0,0002364	0,29
180,00	0,0179157	0,0180193	0,57	-0,0003061	-0,0003069	0,24
202,50	0,0100931	0,0101488	0,55	-0,0003956	-0,0003963	0,18
225,00	0,0000000	0,0000000	0,00	-0,0005098	-0,0005104	0,12

A Figura 5.28 e a Figura 5.29 são os gráficos do ângulo de rotação ao longo da direção x , em radianos e por unidade de comprimento, respectivamente. Os valores dos ângulos são

definidos para as mesmas posições de x , em ambos os trabalhos. Observa-se uma pequena diferença entre os valores do giro, da teoria técnica e do presente trabalho.

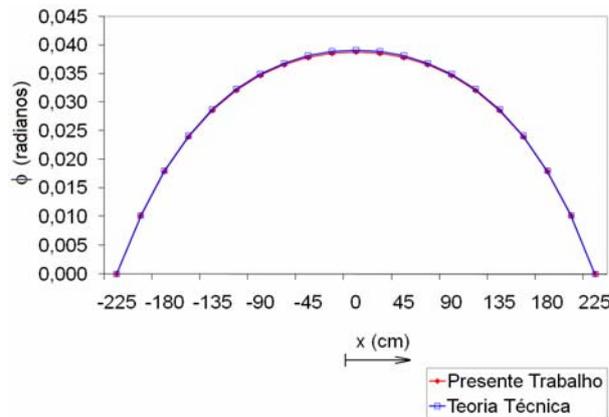


Figura 5.28. Representação gráfica do ângulo de rotação do exemplo 2.

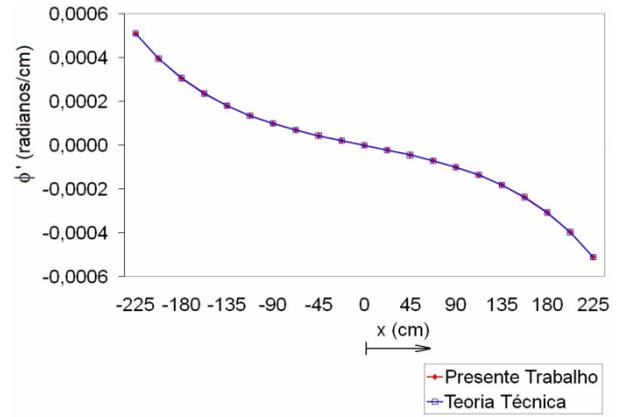


Figura 5.29. Representação gráfica do ângulo de rotação por unidade de comprimento do exemplo 2.

Como $B(x = 225) = -5.000 kNcm^2$. Com base nesses valores resultam para a teoria técnica, da Equação (5.20):

$$\sigma_{x(3)}(x = 225) = \frac{200}{40} - \frac{5000}{41.666,67}(-25) = 8,0 kN/cm^2$$

$$\sigma_{x(4)}(x = 225) = \frac{200}{40} - \frac{5000}{41.666,67}(75) = -4,0 kN/cm^2$$

Para o presente trabalho, considerando-se uma malha de 160 elementos para a seção transversal e 100 elementos para a barra, tem-se $\sigma_{x(3)}(x = 225) = 7,99468 kN/cm^2$ e $\sigma_{x(4)}(x = 225) = -4,00347 kN/cm^2$. Ou seja, uma diferença de 0,07% e 0,09%, para $\sigma_{x(3)}(x = 225)$ e $\sigma_{x(4)}(x = 225)$, respectivamente. A Figura 5.30 ilustra o mapa de tensões normais, para o presente trabalho.

Para a determinação da máxima tensão de cisalhamento deve-se determinar a tensão de cisalhamento máxima por flexo-torção, no x que corresponde ao máximo M_{ft} . Da

Equação (5.22):

$$|\tau_{ft}(x = 225)| = 0,36749 \text{ kN/cm}^2$$

A tensão de cisalhamento máxima por torção livre corresponde ao máximo M_L . Da

Equação (5.23):

$$|\tau_L(x = 225)| = 4,08327 \text{ kN/cm}^2$$

O valor da tensão de cisalhamento máxima é o seguinte:

$$\tau_{\max} = |\tau_{ft}| + |\tau_L| = 4,45076 \text{ kN/cm}^2 \quad (5.25)$$

Para o presente trabalho, como mostram os mapas de tensões de cisalhamento ilustrados na Figura 5.31 e na Figura 5.32, a tensão de cisalhamento máxima é igual a $4,42834 \text{ kN/cm}^2$. A diferença entre as duas abordagens é igual a 0,50%.

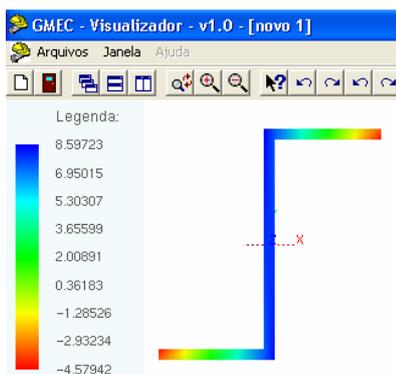


Figura 5.30. Mapa de σ_x do exemplo 2, unidade: kN/cm^2 .

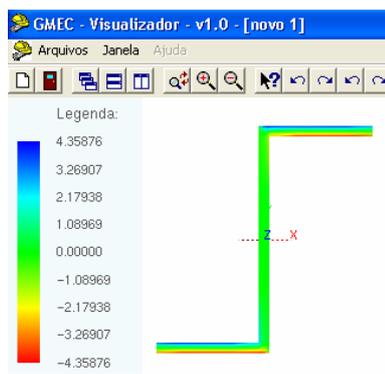


Figura 5.31. Mapa de τ_{xy} do exemplo 2, unidade: kN/cm^2 .

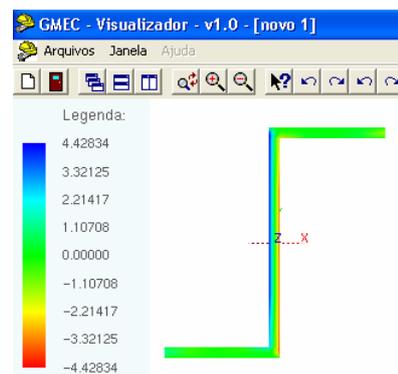


Figura 5.32. Mapa de τ_{xz} do exemplo 2, unidade: kN/cm^2 .

Os valores do empenamento para os pontos destacados na Figura 5.21, para a teoria técnica, são os seguintes:

$$u_1 = u_4 = -0,03828cm$$

$$u_2 = u_3 = 0,01276cm$$

E para o presente trabalho:

$$u_1 = u_4 = -0,03819cm$$

$$u_2 = u_3 = 0,01271cm$$

Portanto, há uma diferença de 0,23% entre os empenamentos u_1 e 0,39% entre u_2 , em relação aos dois trabalhos. Lembrando que a teoria técnica só fornece os valores do empenamento nodal na linha esqueleto. A Figura 5.33 e a Figura 5.34 ilustram o mapa de deslocamentos (empenamento) e configuração deformada, do presente trabalho, para $x = 225cm$ e $x = -225cm$, respectivamente.

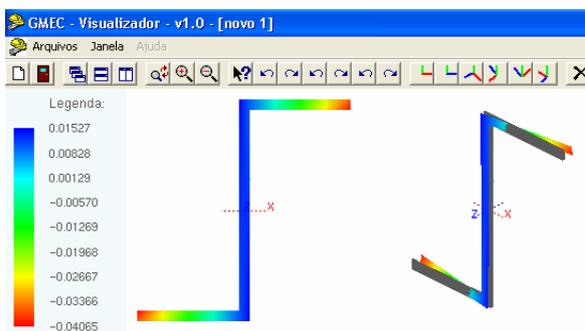


Figura 5.33. Mapa de deslocamentos e configuração deformada do exemplo 2, para $x = 225cm$, unidade: kN/cm^2 .

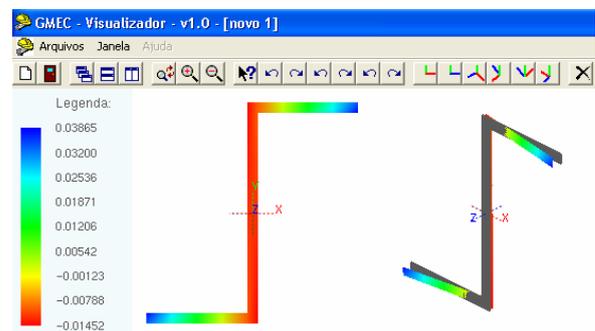


Figura 5.34. Mapa de deslocamentos e configuração deformada do exemplo 2, para $x = -225cm$, unidade: kN/cm^2 .

5.2.3 CONCLUSÃO

Analisando-se os resultados de ambas as abordagens encontram-se diferenças, como era esperado. As diferenças acontecem devido às simplificações adotadas em cada teoria. Sendo que as hipóteses adotadas para a teoria técnica são mais simplificadas que as do presente trabalho.

Além da teoria de Vlasov impor um comportamento linear das tensões de cisalhamento ao longo da espessura das seções transversais, esta considera que o empenamento da seção transversal é proporcional à ϕ' , ou seja, a taxa de giro por unidade de comprimento. Semelhante ao que ocorre na hipótese de Bernoulli onde o giro da seção transversal é a derivada do deslocamento transversal com relação ao eixo da barra analisada.

Na formulação proposta as tensões de cisalhamento são aproximadas por elementos finitos na seção transversal, deixando maior flexibilidade de acomodação energética. Além disso, o parâmetro α (intensidade de empenamento) não está amarrado à derivada longitudinal do giro, tal como ocorre na cinemática de Reissner-Timoshenko na análise de barras fletidas.

Portanto, acredita-se que os resultados do presente trabalho estão mais próximos dos valores reais, uma vez que a sua cinemática é menos simplificada que a da teoria de Vlasov.

5.3 EXEMPLOS DE NÚCLEOS ESTRUTURAIS

Apesar dos núcleos estruturais serem barras de seção de parede fina com múltiplas seções, adotou-se este nome para esta seção devido à grande importância deste elemento estrutural em aplicações na engenharia civil.

5.3.1 SEÇÃO TRANSVERSAL ABERTA

Este exemplo refere-se a um núcleo estrutural isolado e encontra-se em SOUSA JUNIOR (2001). Ele analisou a estrutura em três programas. O primeiro foi o desenvolvido por SOUSA JUNIOR (2001), que apresenta um estudo sobre a análise de edifícios altos enrijecidos com núcleos estruturais analisados pela teoria da flexo-torção. O segundo programa utilizado foi o apresentado em MATIAS JUNIOR (1997) que também modela o núcleo estrutural como sendo formado por barras de núcleos de seção delgada analisadas pela teoria de Vlasov. E o terceiro programa, foi o programa ANSYS versão 5.4 que faz a análise pelo método dos elementos finitos de casca.

O presente trabalho objetiva comprovar a eficiência do processo de cálculo descrito nos capítulos anteriores. Portanto, maiores detalhes sobre os métodos utilizados para o cálculo desta estrutura, referentes aos outros trabalhos, encontram-se em SOUSA JUNIOR (2001).

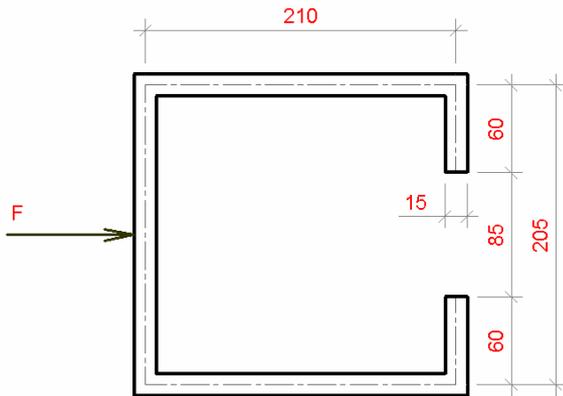


Figura 5.35. Seção transversal da estrutura.

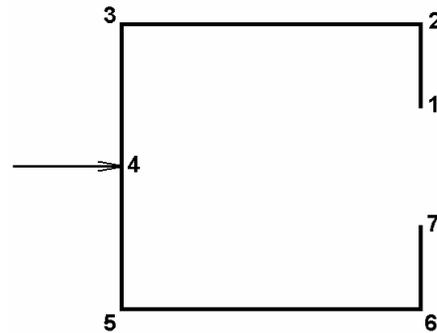


Figura 5.36. Localização dos pontos na seção transversal da estrutura.

A estrutura deste exemplo representa o poço de um elevador de vinte andares. A Figura 5.35 ilustra a seção transversal desta estrutura. A altura do núcleo é igual a 60 metros e as espessuras das paredes são 15 centímetros. Adotou-se Coeficiente de Poisson igual a 0,25, Módulo de Elasticidade Longitudinal igual a 2.000 kN/cm², e Módulo de Elasticidade Transversal igual a 800 kN/cm². Considerou-se a estrutura totalmente engastada na base. Aplicaram-se 20 cargas horizontais F de valor unitário (1kN) exatamente no ponto indicado na Figura 5.35, variando-se a cota de 3 em 3 metros de tal forma que a carga mais alta está aplicada no topo da estrutura, 60 metros.

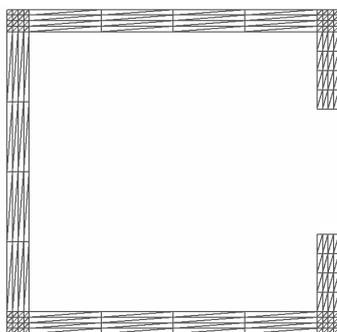


Figura 5.37. Malha da seção transversal.

Pavimento	Cota (cm)	Nó	Elemento
20°	6.000	201	100
	5.970	200	
	5.940	199	
⋮	⋮	⋮	⋮
1°	300	11	5
	270	10	
	240	9	
	210	8	4
	180	7	3
	150	6	
	120	5	
	90	4	2
	60	3	1
	30	2	
	0	1	

Figura 5.38. Malha da barra.

Neste trabalho discretizou-se a malha da seção transversal em 288 elementos finitos triangulares quadráticos e 657 nós, como mostra a Figura 5.37. Discretizou-se a barra em 100 elementos e 201 nós, Figura 5.38.

A Tabela 5.5 mostra os resultados dos deslocamentos verticais do perfil do núcleo medidos na parte mais elevada da estrutura e os pontos referenciados nesta tabela são os indicados na Figura 5.36.

Tabela 5.5 - Deslocamento vertical em centímetros no topo da estrutura.

Ponto	Presente Trabalho	SOUSA JUNIOR (2001)	ANSYS
1	-0,0997	-0,1003	-0,1002
2	-0,0997	-0,1003	-0,1002
3	0,0793	0,0798	0,0797
4	0,0793	0,0798	0,0797
5	0,0793	0,0798	0,0797
6	-0,0997	-0,1003	-0,1002
7	-0,0997	-0,1003	-0,1002

A Tabela 5.6 contém os resultados dos deslocamentos horizontais na direção do carregamento medido no ponto 4 da Figura 5.36.

A coluna pavimento da Tabela 5.6 refere-se à altura onde se aplicou as cargas. Considerou-se que a cada 3 metros há um pavimento de um edifício de 20 andares. O pavimento 20 refere-se à cota de 60 metros.

Observa-se que os resultados obtidos no presente trabalho e nos outros são praticamente iguais, como mostram as tabelas Tabela 5.5 e Tabela 5.6 e a representação gráfica do deslocamento horizontal no ponto 4, Figura 5.39.

Tabela 5.6 - Deslocamento horizontal em centímetros no ponto 4.

Pavimento	Presente Trabalho	SOUSA JUNIOR (2001)	MATIAS JUNIOR (1997)	ANSYS
0	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,019	0,018	0,018	0,021
2	0,071	0,071	0,071	0,075
3	0,155	0,154	0,154	0,159
4	0,265	0,264	0,264	0,270
5	0,400	0,399	0,399	0,406
6	0,556	0,555	0,555	0,563
7	0,730	0,731	0,731	0,739
8	0,921	0,922	0,922	0,931
9	1,126	1,128	1,128	1,137
10	1,343	1,345	1,345	1,355
11	1,569	1,573	1,573	1,582
12	1,804	1,808	1,808	1,818
13	2,044	2,050	2,050	2,060
14	2,290	2,297	2,297	2,307
15	2,540	2,548	2,548	2,558
16	2,792	2,802	2,802	2,811
17	3,046	3,057	3,057	3,066
18	3,301	3,314	3,314	3,323
19	3,557	3,571	3,571	3,580
20	3,812	3,828	3,828	3,839

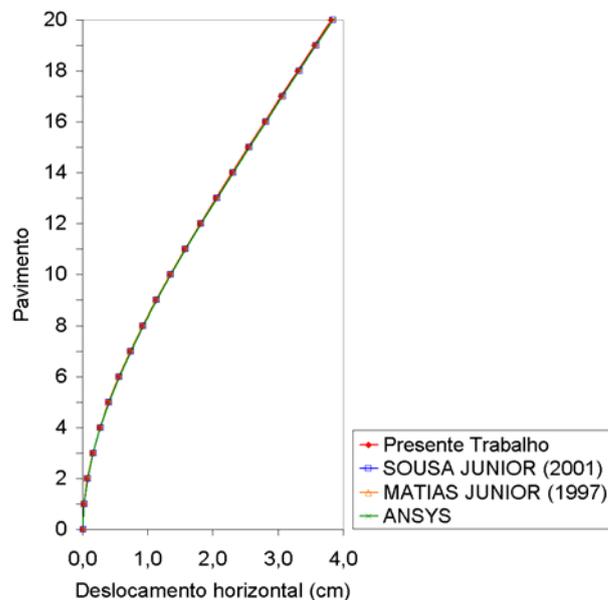
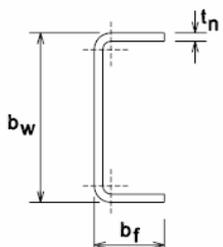


Figura 5.39. Representação gráfica do deslocamento horizontal no ponto 4.

5.3.2 SEÇÕES TRANSVERSAIS COM GEOMETRIAS QUALISQUER

Este exemplo objetiva verificar a capacidade da técnica apresentada no presente trabalho em calcular estruturas de núcleos estruturais compostas por seções transversais abertas e fechadas ao longo do seu comprimento.

Tabela 5.7 - Série comercial do perfil estrutural U e respectiva designação (NBR 6355/2003).

Série	Seção transversal	Designação ¹⁾
U simples		$U \ b_w \times b_f \times t_n$ Exemplo: $U \ 100 \times 75 \times 3,00$

¹⁾ As dimensões são apresentadas em milímetros.

A seção transversal 1 é o perfil U simples, $U \ 100 \times 75 \times 3,00$, a unidade é o milímetro (Tabela 5.7). Para efeito de cálculo desprezaram-se as curvaturas formadas por elementos adjacentes nos perfis formados a frio. Considerou-se que todos esses ângulos são iguais a 90° . E a seção transversal 2, tem as dimensões da seção 1, porém é um perfil fechado.

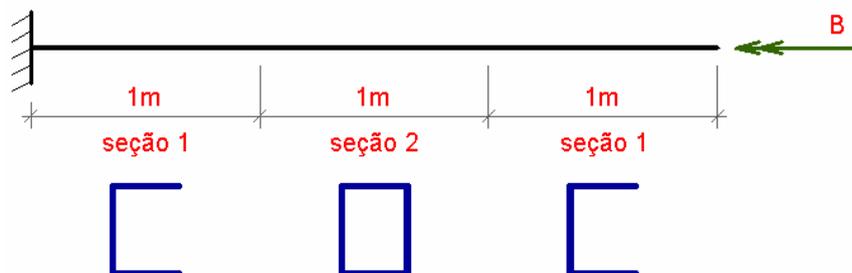


Figura 5.40. Representação da estrutura do exemplo 2.

A estrutura é uma viga engastada de comprimento total igual a 3 metros, Figura 5.40. Imaginando-se a barra dividida em três partes iguais, tem-se nos terços das extremidades o perfil U, e no terço médio a seção retangular fechada com as mesmas dimensões do perfil U simples.

Os valores necessários para o cálculo desta estrutura são:

$$L = 300\text{cm} \quad E = 21.000\text{kN/cm}^2 \quad \nu = 0,3$$

De ANTUNES (1999) têm-se os valores da área e Momento de Inércia Setorial necessários para a resolução desta estrutura. O diagrama de área setorial para o perfil U $100 \times 75 \times 3,00$ está representado na Figura 5.41.

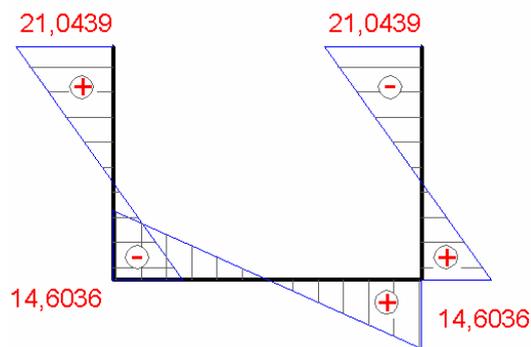


Figura 5.41. Diagrama de área setorial do perfil U $100 \times 75 \times 3,00$, unidade: cm^2 .

E o valor do seu Momento de Inércia Setorial (I_ω) é igual a $719,595\text{cm}^6$.

Para resolver esta estrutura deve-se determinar o valor do Bimomento que é definido da seguinte forma:

$$B = \int_A \sigma_x \omega dA \quad (5.26)$$

Como:

$$\sigma_x = E\omega\phi'' \quad (5.27)$$

Substituindo-se a Equação (5.27) na Equação (5.26):

$$B = E\phi'' \int_A \omega^2 dA \quad (5.28)$$

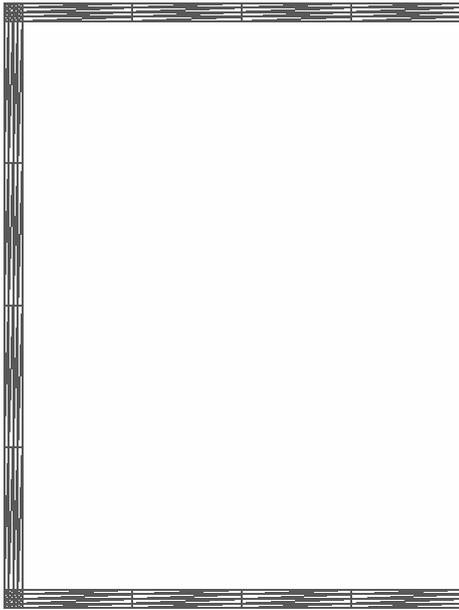


Figura 5.42. Malha da seção transversal 1.

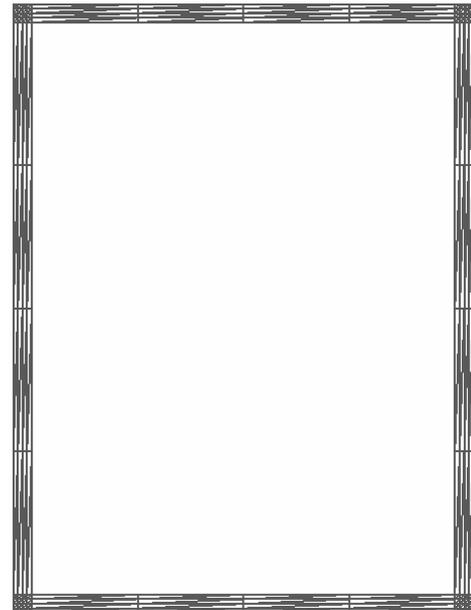


Figura 5.43. Malha da seção transversal 2.

Como $I_\omega = \int_A \omega^2 dA$, que é o Momento de Inércia Setorial e denominando-se $a = E\phi''$, escreve-

se a Equação (5.28) da seguinte forma:

$$B = a I_\omega \quad (5.29)$$

Substituindo-se a constante a na Equação (5.27):

$$\sigma_x = a\omega \quad (5.30)$$

Ou seja, a tensão é proporcional aos valores da área setorial. Portanto, a carga por unidade de comprimento é encontrada multiplicando-se a tensão normal pela espessura da seção transversal:

$$q = a\omega t \quad (5.31)$$

Adotou-se $a = 1/t$. Substituindo-se os valores de I_ω e a na Equação (5.29) encontra-se $B = -2.398,65 \text{ kNcm}^2$. E substituindo-se a na Equação (5.31) tem-se que $q = \omega$, ou seja, para este exemplo, as cargas por unidade de comprimento são iguais aos valores da área setorial e a unidade de q é kN/cm .

Aplicou-se o valor do Bimomento na direção 7, que corresponde ao parâmetro α , encontrando-se os resultados para esta estrutura. Para a técnica proposta, discretizou-se a malha da seção transversal 1 e 2 em 160 elementos e 369 nós (Figura 5.42), e 256 elementos e 576 nós (Figura 5.43), respectivamente.

Tem-se para a malha da barra 150 elementos e 301 nós, como esclarece a Figura 5.44. A malha descrita para o presente trabalho corresponde a 2.107 graus de liberdade, já que apresenta 7 graus de liberdade por nó e os nós da seção transversal não geram equação de equilíbrio.

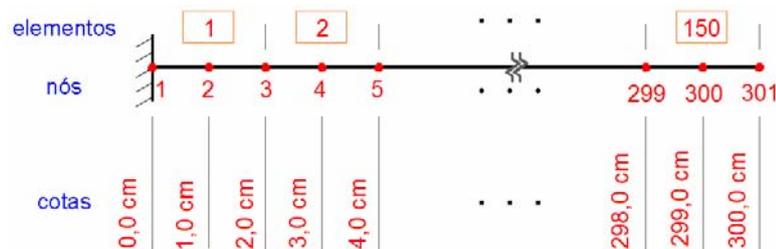


Figura 5.44. Malha da barra.

A carga aplicada no programa ANSYS que produz apenas deslocamento devido ao empenamento nesta estrutura, corresponde a uma tensão proporcional aos valores da área setorial do perfil $U 100 \times 75 \times 3,00$, de acordo com a Equação (5.31). Aplicou-se a carga por unidade de comprimento. Para a modelagem no ANSYS adotou-se o elemento Shell 63. Os

resultados finais apresentados correspondem à subdivisão das áreas da estrutura em 75.902 elementos e 38.421 nós, o que corresponde a 230.526 graus de liberdade, ou seja, 6 graus de liberdade por nó.

Fez-se uma análise de convergência em empenamento para a formulação proposta e a partir de 150 elementos finitos a solução se manteve estável, ou seja, a convergência foi atingida.

Assim, os valores referentes à formulação proposta apresentada na Figura 5.45 são para esta discretização, ou seja, 2.107 graus de liberdade.

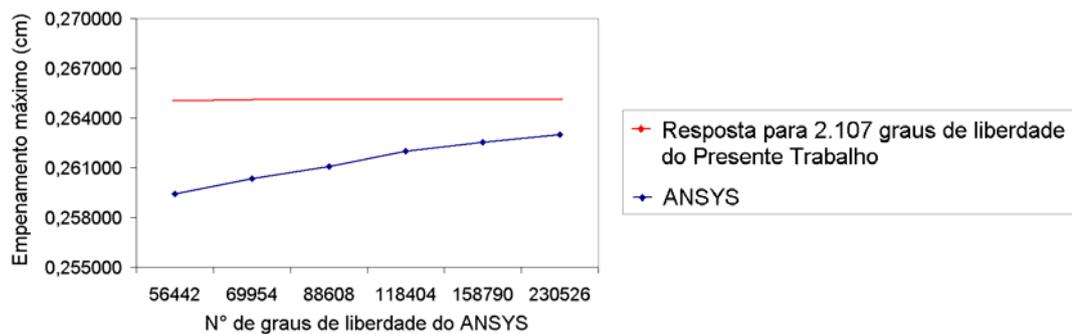


Figura 5.45. Representação gráfica do empenamento máximo.

A Figura 5.45 é a representação gráfica do empenamento máximo em função do número de graus de liberdades. Os dados referem-se tanto aos resultados obtidos por este trabalho quanto aos resultados do ANSYS. Como pode se observar para que o ANSYS apresentasse valor de empenamento próximo ao obtido pela formulação proposta foram necessários 100 vezes mais graus de liberdade.

A Tabela 5.8 mostra que os valores do empenamento máximo, da seção transversal situada na extremidade livre, obtidos tanto através do presente trabalho quanto do ANSYS são aproximadamente iguais para o número de graus de liberdade igual a 230.526 do ANSYS.

Tabela 5.8 - Empenamento no máximo da seção transversal, unidade: (cm).

Presente Trabalho	ANSYS	Razão relativa (%)
0,265118	0,263016	0,79

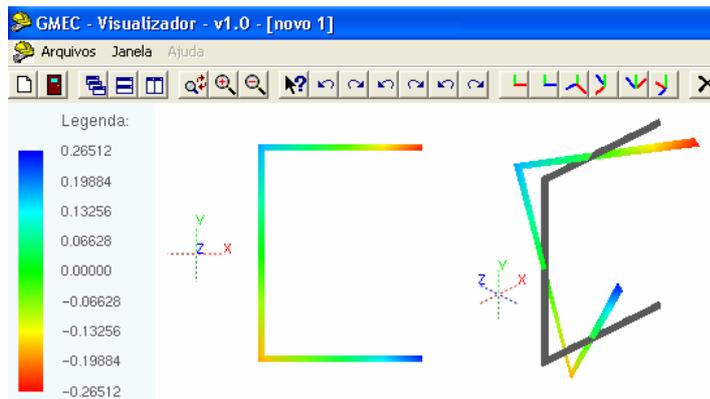


Figura 5.46. Mapa de deslocamentos e configuração deformada na extremidade livre.

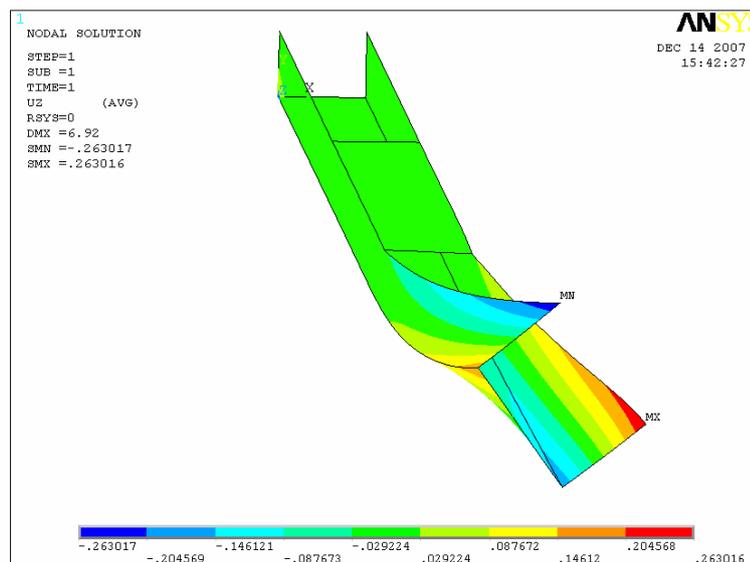


Figura 5.47. Representação do empenamento, ANSYS (10.0), unidade: cm.

O mapa do empenamento e configuração deformada, unidade em centímetros (cm), referente ao presente trabalho, para a seção transversal na extremidade livre, é ilustrado na Figura 5.46. A Figura 5.47 é o resultado do programa ANSYS para o empenamento desta estrutura. A partir da Figura 5.46, da Figura 5.47 e da Tabela 5.8 observa-se que os resultados do ANSYS estão em boa concordância com os resultados do presente trabalho.

Foram feitas análises semelhantes para tensões normais máximas e de cisalhamento máximas e encontraram-se diferenças relativas de 2,23% e 13,46%, respectivamente. Para a discretização do ANSYS com 230.526 graus de liberdade.

Para se comparar melhor os resultados em tensões seriam necessárias melhores discretizações. Como no momento, as análises com o ANSYS ficam limitadas pelos computadores disponíveis, contentou-se com os resultados apresentados.

5.3.3 MATERIAIS COMPOSTOS

Propõe-se um exemplo de um núcleo estrutural composto por seções abertas e fechadas por trecho, considerando-se como material o concreto armado. Como se trata de uma contribuição, ainda que modesta, apenas os resultados referentes ao presente trabalho serão apresentados.

Neste exemplo será analisada a estrutura de um edifício (Figura 5.50) de vinte pavimentos com 2,80m de pé direito, constituída exclusivamente por um núcleo de seção transversal constante ao longo da sua altura, todas as suas paredes possuem 0,15m

(Figura 5.48), sendo ainda contraventada por lintéis (Figura 5.49) ao nível de cada andar, com a mesma espessura das paredes e altura de 0,45m.

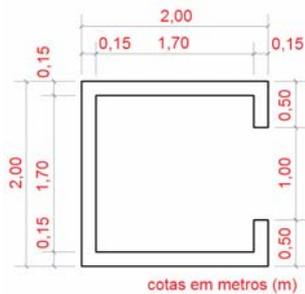


Figura 5.48. Seção transversal aberta.

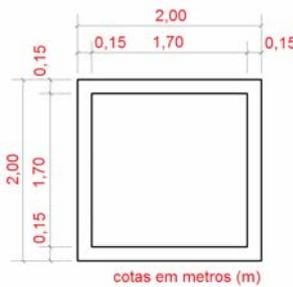


Figura 5.49. Seção transversal dos lintéis.

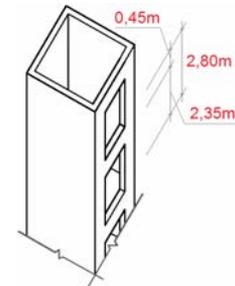


Figura 5.50. Núcleo estrutural.

Para o concreto, o módulo de elasticidade longitudinal adotado é igual a $2,1 \times 10^9 \text{ kgf/m}^2$ e transversal $8,75 \times 10^8 \text{ kgf/m}^2$. Para o aço, o módulo de elasticidade longitudinal adotado é igual a $2,1 \times 10^{10} \text{ kgf/m}^2$ e transversal $8,08 \times 10^9 \text{ kgf/m}^2$. As ações aplicadas foram um momento torçor de $3.756,10 \text{ kgfm}$ atuando ao nível da cobertura e $3.182,20 \text{ kgfm}$ nos demais pavimentos.

Distribuiu-se armadura na seção transversal da forma indicada na Figura 5.51, considerando-se $\phi 8,0 \text{ mm}$ c/10cm e cobrimento igual a 2cm. Lembrando que a armadura tem o comprimento do lintel (viga no nível do pavimento) na região correspondente a esse tipo de estrutura e que a outra seção é aberta.

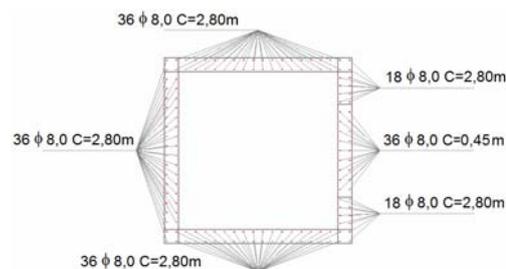


Figura 5.51. Detalhe de armadura (x20).

A malha foi gerada de acordo com a dimensão mínima da armadura idealizada em um quadrado de lado igual a oito milímetros. Discretizou-se a malha da seção transversal aberta em 1.370 elementos finitos triangulares quadráticos e 3.028 nós, como mostra a Figura 5.52. E na seção ilustrada na Figura 5.53 tem-se uma malha com 1.560 elementos finitos triangulares quadráticos e 3.435 nós.

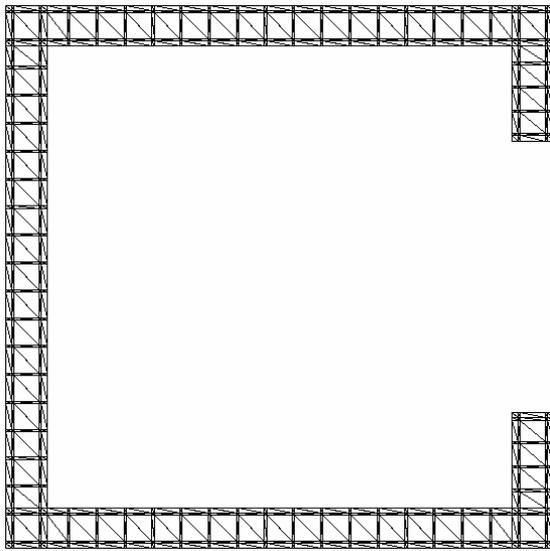


Figura 5.52. Malha da seção transversal aberta.

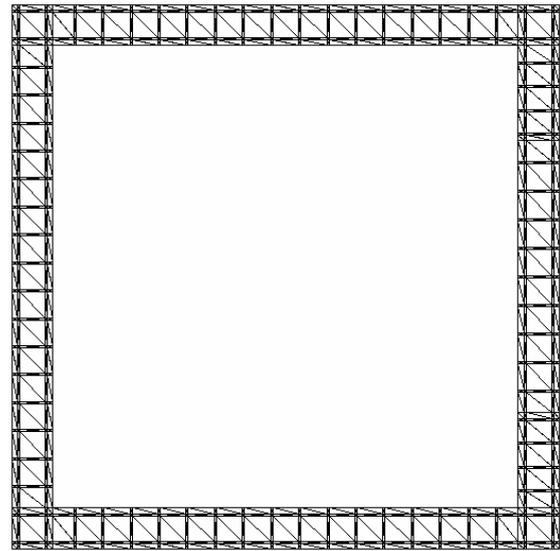


Figura 5.53. Malha do lintel.

O núcleo foi discretizado ao longo do seu comprimento por uma malha com 40 elementos e 81 nós, de 0 a $56m$. Sendo que existem dois elementos em cada pavimento, um elemento de comprimento igual a $2,35m$ e outro de comprimento igual a $0,45m$, formados por nós nas extremidades e o terceiro no ponto médio do elemento.

Na Tabela 5.9 estão os valores das rotações em torno do eixo longitudinal. Estes também são representados pela curva do gráfico da Figura 5.54. O parâmetro de intensidade de empenamento está representado na curva do gráfico da Figura 5.55.

Tabela 5.9 – Rotações (rad) no núcleo e deslocamento na direção do empenamento (rad/m).

Pav.	Cota (m)	ϕ (rad)	α (rad/m)
0	0	0,000000	0,000000000
1	2,8	0,000516	0,000309229
2	5,6	0,001546	0,000405591
3	8,4	0,002735	0,000428235
4	11,2	0,003942	0,000421539
5	14	0,005112	0,00040316
6	16,8	0,006223	0,000380128
7	19,6	0,007266	0,000355245
8	22,4	0,008238	0,000329624
9	25,2	0,009136	0,00030371
10	28	0,009961	0,000277683
11	30,8	0,010713	0,000251615
12	33,6	0,01139	0,000225546
13	36,4	0,011995	0,000199511
14	39,2	0,012525	0,00017358
15	42	0,012983	0,000147913
16	44,8	0,013368	0,000122913
17	47,6	0,013685	0,0000995896
18	50,4	0,013941	0,0000804773
19	53,2	0,014153	0,0000722016
20	56	0,014377	0,0000836917

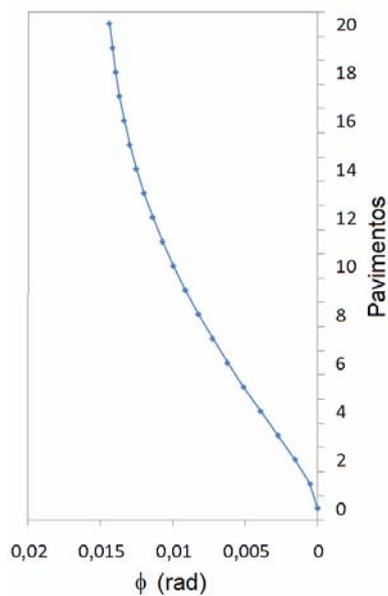


Figura 5.54. Representação gráfica a rotacão (radianos).

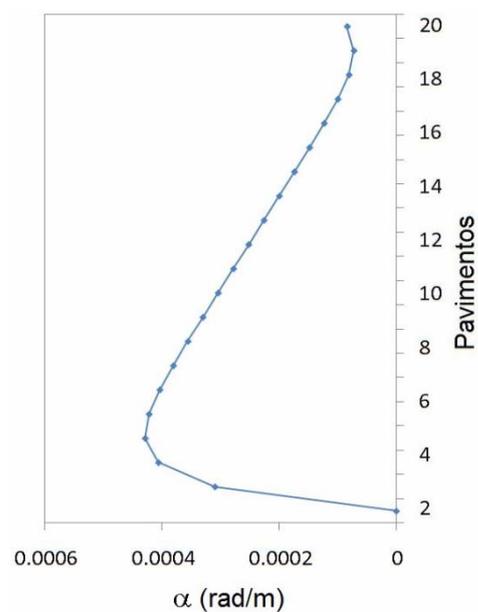


Figura 5.55. Representação gráfica da intensidade do empenamento (rad/m).

A Figura 5.56 é o mapa de deslocamentos para o empenamento no topo do edifício. A Figura 5.57 refere-se ao mapa da tensão normal (σ_x) máxima que ocorre no penúltimo pavimento, na cota $x = 53,20m$.

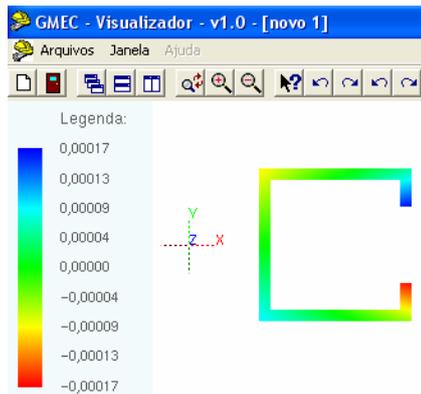


Figura 5.56. Mapa empenamento, unidade: m .

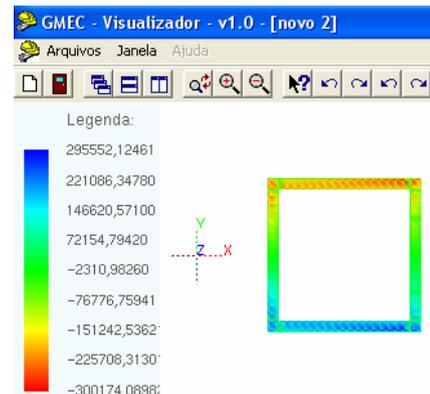


Figura 5.57. Mapa de σ_x máximo, unidade: kgf/m^2 .

O mapa da tensão de cisalhamento τ_{xy} é ilustrado na Figura 5.58, este ocorre no penúltimo pavimento, na cota $x = 53,20m$. Para τ_{xz} o mapa da tensão de cisalhamento é ilustrado na Figura 5.59, que ocorre no penúltimo pavimento, na cota $x = 53,20m$.

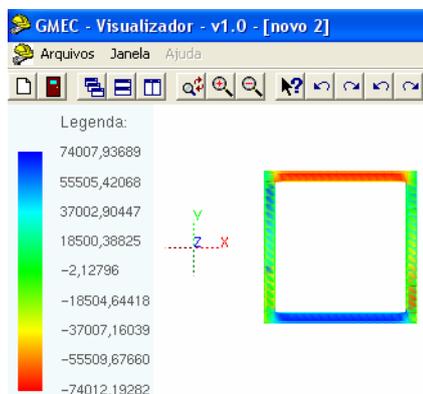


Figura 5.58. Mapa de τ_{xy} máximo, unidade: kgf/m^2 .

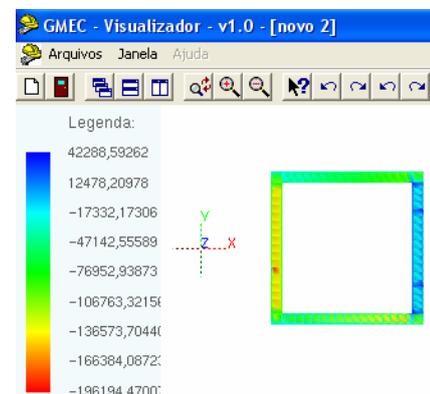
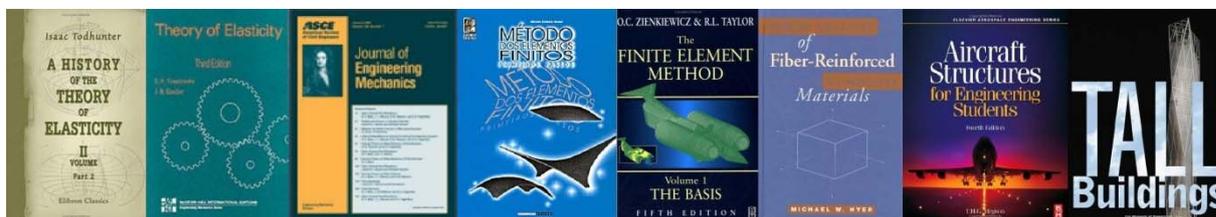


Figura 5.59. Mapa de τ_{xz} máximo, unidade: kgf/m^2 .

6 CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS



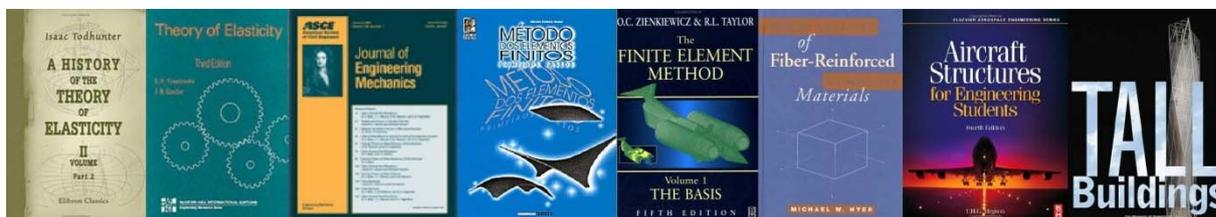
Os objetivos deste trabalho foram atingidos de forma satisfatória. Ou seja, desenvolveu-se e implementou-se computacionalmente uma formulação de elemento finito de barra geral tridimensional laminado, seguindo uma cinemática de Reissner-Timoshenko generalizada incluindo a consideração do empenamento à torção. Desta forma, o elemento finito resultante é capaz de simular, com precisão, problemas de torção livre e flexo-torção para seções de geometria qualquer incluindo materiais não homogêneos e barras com seções constantes por trechos. A eficácia deste código em solucionar problemas de torção livre é demonstrada no *Capítulo 3* desta dissertação a partir da comparação de exemplos, com outros autores, de problemas com seções transversais fechadas, abertas e com paredes delgadas, considerando-se seções homogêneas e não-homogêneas. O mesmo foi feito com relação aos problemas de flexo-torção, conforme apresentado no *Capítulo 5*.

Como descrito ao longo da dissertação, bem como no seu título, trata-se de um aprimoramento que resultou na melhora dos modelos usuais de barra geral, com a introdução da cinemática de empenamento para seção transversal de geometria qualquer. Destaca-se ainda a originalidade da obtenção do Centro de Cisalhamento pelo MEF. Com esse trabalho, houve um avanço, nas técnicas usuais de análise estrutural via MEF disponíveis no SET. Essa

contribuição, ainda que modesta, foi de nível compatível com o mestrado acadêmico e trará benefícios para trabalhos futuros.

Como desenvolvimentos futuros sugere-se a implementação de não-linearidade geométrica na formulação. Bem como o acoplamento barra geral/ casca e a consideração de todas as partes estruturais do edifício, além do núcleo estrutural.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS



ABRAMENTO, I. (1981). **O centro de torção e o centro de cisalhamento nas barras prismáticas**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Estruturas e Fundações, EPUSP, São Paulo, SP.

ANTUNES, H. M. C. C.; SOUSA JUNIOR E.; MARTINS, C. H. (2000). **Interação núcleo estrutural e lajes de pavimentos**. [CD-ROM]. In: Congresso Brasileiro do Concreto, 42. Fortaleza, IBRACON.

ANTUNES, H. M. C. C.; MORI, D. D.; SOUZA, J. C. A. O. (1995). **Núcleos Estruturais**. In: XXVII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, 1995. Memórias. , Tucumán – Argentina. V. 3. p. 123-134.

ANTUNES, M. C. (1999). **Programa para cálculo de propriedades de seções delgadas**. [online]. Available from Internet: <<http://www.geocities.com/rymaeda/elefin.html>>.

ASSAN, A. E. (2003). **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. 2ª ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2003). **NBR 6355**: Perfis de aço formados a frio – Padronização. Rio de Janeiro.

AVKHADIEV, F. G. (1998). Solution of the generalized Saint-Venant problem. **Mathematics**. 189: 12. p. 1739 – 1748.

BADIE, S. S.; SALMON, D. C.; BESHARA, A. W. (1997). Analysis of shear wall structures on elastic foundations. **Computers & Structures**. V. 65. n. 2. p. 213-224.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. (2008). Global buckling analysis of plane and space thin-walled frames in the context of GBT. **Thin-Walled Structures**, v. 46, p. 79-101. [online]. Available from Internet: <<http://www.sciencedirect.com>>.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. (2007). **GBT-Based analysis of the local-plate, distortional and global buckling behavior of thin-walled steel frames**. Proceedings of Structural Stability Research Council Annual Stability Conference (New Orleans, 18-21/4), 391-412.

BASAGLIA, C.; CAMOTIM, D.; SILVESTRE, N. (2007). **On the effect of the joint configuration on the local and global buckling behavior of thin-walled steel frames.** Proceedings of 18th ASCE Engineering Mechanics Conference (EM 07 - Blacksburg, 3-6/6), 205. (full paper in CD-ROM Proceedings).

BATHE, K. J. (1996). **Finite Element Procedures.** Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.

BEER, F. P.; JOHNSTON JR., E. R. (1995). **Resistência dos Materiais.** 3ª ed. São Paulo: MAKRON Books.

BREBBIA, C. A.; FERRANTE, A. J. (1975). **The Finite Element Technique: an introduction for engineers.** Porto Alegre, Editora da URGs, Universidade Federal do Rio Grande do Sul.

CHOU, P. C.; PAGANO, N. J. (1992). **Elasticity – Tensor, dyadic, and engineering approaches.** Dover publications, Inc., New York.

CLOUSTON, P. L.; LAM F., (2001). Computational modeling of strand-based wood composites. **Journal of Engineering Mechanics.** vol. 127. n. 8. pg.844 – 851.

COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E. (1989). **Concepts and applications of Finite Element Analysis,** John Wiley and Sons, Inc, 3d. edition.

COSTA, J. L. (1982). **Núcleos estruturais sobre fundações flexíveis**. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

DEVLOO, P. R. B.; MENEZES, F. A.; BRAVO, C. M. A. A. (1999). **Formulação e implementação de cálculo de placas de material composto**. COBEM99 – Congresso de Engenharia Mecânica, in CDROM. Águas de Lindóia, SP, Brasil.

DIOGO, L. A. C. (1996). **Torção**. PEF-126 – Resistência dos Materiais e Estática das Construções II, Departamento de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

DIOGO, L. A. C.; ISHITANI, H. (1993). **Estudo da flexo-torção em perfis de seção delgada mediante o emprego de elementos de casca cilíndrica**. In.: XIV Congresso Ibero Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia. São Paulo – Brasil, p. 31–40.

DEVLOO P. R. B., MENEZES, F. A., BRAVO, C. M. A. A. (1999). **Formulação e implementação de cálculo de placas de material composto**. COBEM99 – Congresso de Engenharia Mecânica, in CDROM, Águas de Lindóia, SP, Brasil.

GUPTA, K. K.; MEEK, J. L. (2003). **Finite element multidisciplinary analysis**. 2. ed. AIAA Education series.

HAMMER, P. C.; MARLOWE, O. J.; STROUD, A. H. (1956). Numerical integration over simplexes and cones. **Mathematical tables and other aids to computation**. Vol. 10. N° 55. Jul. p. 130 - 137.

HIGGINS, T. J. (1941). A note on the torsion problem. **National Mathematics Magazine**. Vol. 16. N° 1. p. 34 – 36.

HYER, M. W. (1998). **Stress Analysis of fiber-reinforced Composite Materials**. McGraw-Hill Publ., New York, 1997, 627 p.

KOLLI, M.; CHANDRASHEKHARA, K. (1996). Finite Element analysis of stiffened laminated plates under transverse loading near static and dynamic analysis of stiffened laminated plates. **Composite Science and Technology**. vol. 56. p. 1355-1361.

LAIER, J. E.; BARREIRO, J. C. (2005). **Complementos de Resistência dos Materiais**. 2 ed. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

LANGENDONCK, T. H. M. van. (1960). **Resistência dos Materiais: deformações**. Rio de Janeiro: Editora Científica.

LIMA, J. S.; GUARDA, M. C. C.; PINHEIRO, L. M. (2007). **Torção**. [online]. Available from Internet: <<http://www.set.eesc.usp.br/mdidatico/concreto/Textos>>.

MALITE, M.; SÁLES, J. J. (2001). **Estruturas de aço constituídas por perfis de chapa dobrada: dimensionamento de barras**. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MARTINS, C. H. (2001). **Análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios de andares múltiplos com núcleos resistentes considerando a rigidez transversal à flexão das lajes**. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MATIAS JUNIOR, I. G. (1997). **Análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleos resistentes sobre fundações flexíveis**. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MEGSON, T. H. G. (1999). **Aircraft Structures for Engineering Students**. 3. ed. New York: Wiley (2nd ed.: 1990).

MENEZES, F. A.; Paccola, R. R., Devloo, P. R. B. (2001). **Placas multi-camadas apoiadas sobre base elástica**. XXII CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, in CDROM, Campinas (SP), Brasil.

MORI, D. D. (1992). **Os núcleos estruturais e a não linearidade geométrica na análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos**. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MORI, D. D. (1978). **Flexo-torção: teorias de 1ª e 2ª ordem, automatização do cálculo**. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MORI, D. D. (1988). **Flexo-torção: barras com seção transversal aberta e paredes delgadas**. Pub 042/88. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MUNAIAR NETO, J. (2006). **Notas de aulas - Flexo-torção: barras com seção transversal aberta e paredes delgadas**. São Carlos, EESC, USP.

OSGOOD, W. R.; WASHINGTON, D. C. (1943). The center of shear again. **Journal of applied mechanics**. Vol. 10. June, p. A62-A64.

PACCOLA, R. R. (2004). **Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da combinação entre o MEC e o MEF**. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

PACCOLA, R. R.; Vanalli, L.; Coda, H. B. (2003). **3D Laminated frame finite element: Linear analysis**. XXIV CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, in CDROM, Ouro Preto (MG), Brasil.

PACCOLA, R. R.; VANALLI, L.; CODA, H. B. (2003). **A Study Of A Shear Locking Free Finite Element Based On Laminated Kinematics**. XXIV CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, in CDROM. Ouro Preto (MG), Brasil.

PACCOLA, R. R. (2001). **Estudo de formulações de placas laminadas apoiadas sobre base elástica**. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Civil, Departamento de Estruturas, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.

PAIVA, J. B.; ROIUK, D.; SANCHES JUNIOR, F.; FOLTRAN, T. J. (2008). **Introdução ao Método dos Elementos Finitos**. [online]. Available from Internet: <<http://www.set.eesc.usp.br/mdidatico/elfinitos/>>.

PEREIRA, G. S.; RAMALHO, M. A.; CORRÊA, M. R. S. (1997). **Análise de núcleos de rigidez em concreto armado**. XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural. São Carlos, SP. Setembro. p. 119 – 128.

PROENÇA, S. P. B. (2007). **Notas de aulas: Tensões normais e fluxos de cisalhamento em seções de asas e fuselagens sob flexão**. São Carlos, EESC, USP.

RACHID, M. (1975). **Instabilidade de barras de seção delgada**. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

REDDY, J. N. (1993). **An Introduction to the Finite Element Method**. McGraw-Hill International Editions. McGraw-Hill series in Mechanics Engineering. 2d. edition. ISBN 0-07-112799-2, Singapore.

REISSNER, E.; STAVSKY Y., (1961, Bending and stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic elastic plates. **Journal of Applied Mechanics**. vol. 28, Series E, n°. 3, September.

ROCHA, A. B. (1985). **Análise núcleos estruturais de edifícios sujeitos à torção**. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

SAMUELSSON, A.; ZIENKIEWICZ, O. C. (2006). History of the stiffness method. **International journal for numerical methods in engineering**. 67. p. 149 – 157.

SAVASSI, W. (2000). **Introdução ao Método dos Elementos Finitos em Análise Linear de Estruturas**. São Carlos, EESC, USP.

SILVA, H. F. (2005). **Formulação do problema da torção uniforme em barras de seção transversal maciça**. Dissertação (mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

SORIANO, H. L. (2003). **Método de elementos finitos em análise de estruturas**. 2ª. ed. São Paulo: Edusp: 2003.

SOUSA JUNIOR, E. (2001). **Análise da interação entre núcleos estruturais e lajes em edifícios altos**. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

STAVSKY, Y. (1961). Bending and stretching of laminated aeolotropic plates. **Journal of Engineering Mechanics Division**. vol. 87. n°. EM6, December.

TARANATH, B. S. (1988). **Structural analysis and design of tall buildings**. New York: McGraw-Hill.

TARANATH, B. S. (1968). Analysis of interconnected open section shear wall structures. **Journal of structural division**. ASCE, p.2367-2384.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. (1994). **Mecânica dos sólidos**. Livros Técnicos e Científicos Editora.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. (1982). **Teoria da Elasticidade**. 3ª. ed. Guanabara Dois, Rio de Janeiro.

TODHUNTER, I. (1960). **History of the theory of elasticity and of strenght of materials, from Galilei to lord Kelvin**. New York: Dover.

TORRES, I. F. R. (1999). **Efeito da deformação por cortante no calculo de edifícios de andares múltiplos com núcleos estruturais**. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

VILLAÇA, S. F.; TABORDA GARCIA, L. F. (1996). **Introdução à teoria da elasticidade**. 2ª ed. Rio de Janeiro: COPE/UFRJ.

VLASOV, V. Z. (1961). **Thin-walled elastic beams**. 2. ed. New York, Mc-Graw Hill.

WAGNER, W.; GRUTTMANN, F. (2001). Finite element analysis of Saint-Venant torsion problem with exact integration of the elastic-plastic constitutive equations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**. 190. p. 3831- 3848.

ZAGOTTIS, D. (1979). **Pontes e grandes Estruturas**. V. 1. São Paulo: EPUSP. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações.