

**THESE DE DOCTORAT**  
**DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**  
et  
**DE L'ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS**  
**DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO**

en co-tutelle

Présentée par

Wilson Wesley WUTZOW

**pour obtenir le grade de**

**DOCTEUR DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Domaine :

**MECANIQUE – GENIE MECANIQUE – GENIE CIVIL**

**et le grade de**

**DOUTOR EM ENGENHARIA CIVIL**

**Sujet de la thèse :**

**Formulation de la Méthode des Éléments de frontière aux  
milieux poreux renforcés**

Thèse présentée et soutenue à São Carlos, Brésil, le 16 mai 2008 devant le jury composé de :

Humberto BREVES CODA	Professeur-EESC/USP	Président
Euclides de MESQUITA NETO	Professeur-UNICAMP	Rapporteur
José Elias LAIER	Professeur-EESC/USP	Rapporteur
Nicolas SCHMITT	Maître de conférences-ENS Cachan	Examineur
Ahmed BENALLAL	Dir. de Recherche au CNRS – ENS Cachan	Co-directeur de thèse

Laboratoire de Mécanique et Technologie (LMT-Cachan)  
(ENS CACHAN/CNRS(UMR 8535)/Université Paris 6)  
61, avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN CEDEX (France)  
Departamento de Engenharia de Estruturas  
Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo (EESC/USP)  
Av. Trabalhador São-Carlense 400, 13566-590 SÃO CARLOS-SP (Brasil)

# **FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA MATERIAIS POROSOS REFORÇADOS**

**WILSON WESLEY WUTZOW**

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo e a École Normale Supérieure de Cachan, como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de **Doutor em Engenharia de Estruturas**.

Orientadores: Prof. Titular Wilson Sérgio Venturini

Dir. de Recherche Ahmed Benallal

São Carlos

2008

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

W973f           Wutzow, Wilson Wesley  
                  Formulação do método dos elementos de contorno  
                  para materiais porosos reforçados / Wilson Wesley  
                  Wutzow ; orientadores: Wilson Sérgio Venturini e Ahmed  
                  Benallal. -- São Carlos, 2008.

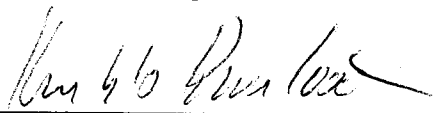
                  Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação e Área de  
                  Concentração em Engenharia de Estruturas -- Escola de  
                  Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo/  
                  École Normale Supérieure de Cachan, 2008.

                  1. Elasticidade das estruturas. 2. Plasticidade das  
                  estruturas. 3. Solo não saturado. 4. Método dos elementos  
                  de contorno. 5. Acoplamento MEC/MEF. I. Título.

## FOLHA DE JULGAMENTO

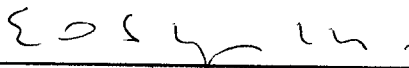
Candidato: Engenheiro **WILSON WESLEY WUTZOW**

Tese defendida e julgada em 16/05/2008 perante a Comissão Julgadora:



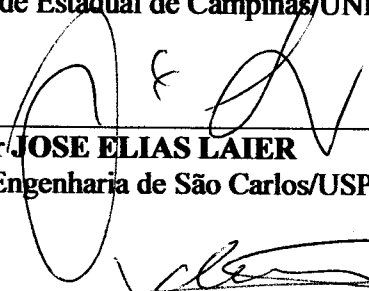
APROVADO

Prof. Associado **HUMBERTO BREVES CODA** (Orientador Substituto)  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)



APROVADO

Prof. Titular **EUCLIDES DE MESQUITA NETO**  
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP)



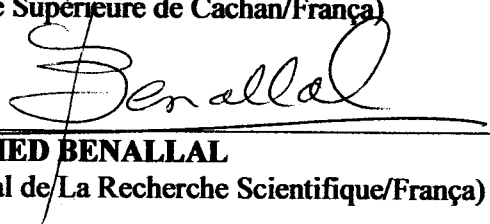
APROVADO

Prof. Titular **JOSE ELIAS LAIER**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)



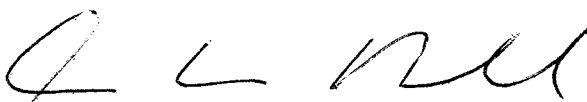
APROVADO

Prof. Dr. **NICOLAS SCHIMITT**  
(Ecole Normale Supérieure de Cachan/França)

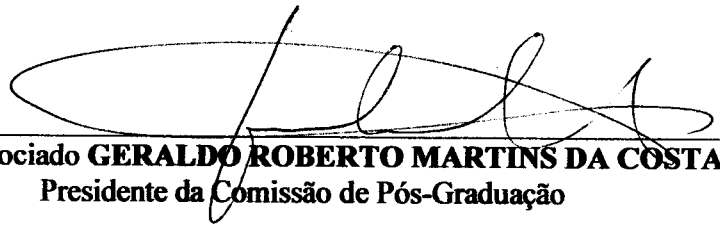


APROVADO

Prof. Dr. **AHMED BENALLAL**  
(Centre National de La Recherche Scientifique/França)



Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)



Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Ao Senhor Deus Soberano,  
a minha querida esposa – Késia  
aos meus pais – Wilson e Miriã,  
aos meus irmãos – Mirian e Carlos



## AGRADECIMENTOS

---

Ao Senhor nosso Deus, criador e mantenedor da vida.

Aos Professores Dr. Wilson Sérgio Venturini e Ahmed Benallal, pela orientação e dedicação dispensadas ao longo destes anos, sempre me motivando e dando suporte técnico para que esta tese fosse sendo construída, e também por suas amizades nos momentos difíceis dando me força para continuar.

Aos meus pais, pelo empenho e motivação em todos os momentos.

À minha querida esposa Késia, por ser tão amável e compreensiva, e por às vezes fazer de tudo para entender assuntos tão complexos com um sorriso nos lábios apenas para me fazer sentir-me seguro do que eu estava fazendo.

À meus irmãos Calos Emanuel e Miriam Cristiane que apesar das distâncias sempre me apoiaram e bateram palmas por nossas vitórias.

À meus avós, Libya e Emanuel Wutzow que em sua simplicidade sempre me mostraram o valor do estudo e que as coisas mais importantes da vida são conquistadas com esforço e orientação divina.

À meus amigos, que sempre me apoiaram, mas em especial a três grandes amigos: o professor Dr. Humberto Breves Coda, que muito nos ajudou, tanto a mim como ao professor Venturini, em todos os momentos, por seus conselhos práticos e objetivos, mostrando que as vezes precisamos parar e lembrar quais são nossos reais objetivos, ao Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola, por ter se tornado um irmão para mim, e sempre me apoiado e motivado, e à Eduardo Toledo que sempre esteve pronto a ouvir e discutir e construirmos juntos esta Tese.

Ao Romeo, Cleuza, Polinha e Romeozinho por sua compreensão e carinho.

Agradeço também aos amigos Rodolfo, Alexandre Botta, Leandro Vanalli, Valério, Rodrigo Codes, Rodrigo Canto e tantos outros que de uma forma ou de outra contribuíram direta ou indiretamente para que este trabalho fosse desenvolvido.

Ao CNPq, FAPESP e Alβan pelo apoio financeiro.

À Universidade de São Paulo, em especial ao Departamento de Estruturas pela infraestrutura e facilidade proporcionadas na realização deste trabalho.

Aos amigos e Professores do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá (UEM), em especial ao prof. Dr. Roberto Cruz Lessa pelos conselhos e amizade e também aos professores: Peralta, Nara, Pigozo e tantos outros pelo apoio durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos Professores e Funcionários do SET e do LMT, pela amizade e companheirismo.

Ao setor de desenvolvimento de programas computacionais do SET representados pelo professor Assoc. Dr. Humberto Breves Coda e o Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola por disponibilizarem o pos-processador do grupo de pesquisa GMec com o qual foram tratados diversos resultados publicados nesta tese.



## SUMÁRIO

---

### RESUMO

### RÉSUMO

xiv

### ABSTRACT

xv

## 1 INTRODUÇÃO

1

1.1 – Considerações Gerais e motivação

1

1.2 – Metodologia de trabalho

2

1.3 – Breve Revisão Bibliográfica

5

1.4 – Organização da Tese

13

## 2 INTRODUÇÃO A MECÂNICA DOS MEIOS POROSOS SATURADOS

15

2.1 – Introdução à mecânica dos meios porosos

15

2.2 – Descrição da deformação do esqueleto

17

2.3 – Cinemática da deformação do esqueleto

22

2.4 – Descrição do movimento do fluido

24

2.5 – Conceitos de derivada particular e derivada material

26

2.6 – Princípio da conservação de massa

21

2.7 – Balanço da quantidade de movimento

35

2.8 – Princípio das potências virtuais

40

## 3 INTRODUÇÃO A POROELASTICIDADE E POROPLASTICIDADE

43

3.1 – Introdução e conteúdo

43

3.2 – Equações Gerais da Poroelasticidade

44

3.3 – Equações Gerais de Poroplasticidade

47

3.3.1 – Relações Constitutivas

47

3.3.2 – Modelo elastoplástico de Drucker-Prager para meio poroso saturado

54

3.3.3 – Algoritmo de Integração – Modelo de Drucker-Prager

58

3.3.4 – Linearização do Algoritmo. Módulo Elastoplástico tangente consistente	47
<b>4 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA POROELASTICIDADE E POROPLASTICIDADE</b>	<b>83</b>
4.1 – Introdução	83
4.2 – Equações de Campo	84
4.3 – Representações Integrais para Poroelasticidade e Poroplasticidade	85
4.4 – Discretização no Tempo	96
4.5 – Discretização Espacial: Aproximação das Variáveis no Contorno e no Domínio	98
4.6 – Equações Algébricas do MEC para Poroelasticidade	102
4.7 – Formulação do MEC para Poroelasticidade	107
4.8 – Equações Algébricas do MEC para Poroplasticidade	109
4.9 – Formulação do MEC para Poroplasticidade	113
4.10 – Estratégia de Solução para Poroplasticidade	116
<b>5 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ESTUDO DE MEIOS PORO-ELASTO-PLÁSTICOS ENRIJECIDOS</b>	<b>121</b>
5.1 – Enrijecedor	121
5.2 – Equações algébricas do problema poro-elasto-plástico enrijecido	124
5.2.1 – Discretização espacial das equações integrais: equações algébricas.	125
5.2.2 – Equações algébricas do MEC para poroelasto-plasticidade enrijecida.	128
<b>6 MODELO PARA DOMÍNIOS NÃO SATURADOS</b>	<b>135</b>
6.1 – Balanço energético	135
6.1.1 – Equações de estado	135
6.1.2 – Equações constitutivas	137
6.1.2.1 – Equações constitutivas dos fluidos	138
6.1.2.2 – Equações constitutivas do esqueleto	147
6.1.3 – Formulação em tensão efetiva com esqueleto contínuo compressível e isotérmico	148
6.1.4 – Escolha da forma adotada para a energia livre específica:	154
6.1.5 – Relações de transporte	156
6.1.6 – Equações de campo	157
6.1.6.1 – Balanço de momento e equação de compatibilidade	157
6.1.6.2 – Balanço de massa	160
6.2 – Formulação matemática dos modelos não lineares	170
6.2.1 – Modelo de Van Genuchten	170
6.2.2 – Modelo de CamClay	173
6.2.3 – Formulação matemática do modelo constitutivo poro-elasto-plástico não saturado adotado	175
<b>7 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ESTUDO DE MEIOS PORO-ELASTO-PLÁSTICOS NÃO SATURADOS</b>	<b>181</b>
7.1 – Representações Integrais para Poroelasticidade e	181

<b>Poroplasticidade não saturada.</b>	
7.2 – Discretização no Tempo	191
7.3 – Discretização Espacial: Aproximação das Variáveis no	194
<b>Contorno e no Domínio</b>	
7.4 – Equações Algébricas do MEC para Poroelastoplasticidade	198
7.5 – Formulação do MEC para Poroelasticidade	198
<b>8 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO</b>	<b>213</b>
8.1 – Exemplos de aplicação para meios poroelásticos	214
8.1.1 – Fluido Incompressível	215
8.1.2 – Fluido Compressível	226
8.2 – Exemplos de aplicação para meios poro-elasto-plásticos	237
8.3 – Exemplos de aplicação para meios poroelásticos	254
enrijecidos	
8.4 – Exemplos de aplicação para meios poro-elasto-plásticos	259
enrijecidos	
8.5 – Exemplos de aplicação para meios poro-elásticos não	238
saturados	
<b>9 CONCLUSÕES</b>	<b>289</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>293</b>



## RESUMO

**WUTZOW, W.W. (2008).** Formulação do método dos elementos de contorno para materiais porosos reforçados. São Carlos. 315p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo/École Normale Supérieure de Cachan.

Neste trabalho, propõe-se uma formulação não linear baseada no Método dos Elementos de Contorno, para representação de domínios poro-elasto-plásticos reforçados. Esta formulação é apresentada para os casos saturado e não saturado. Para o problema poroso enrijecido um acoplamento com o Método dos Elementos Finitos é empregado, e a técnica de mínimos quadrados permite a regularização dos deslocamentos e do vetor de forças de superfície ao longo das interfaces de acoplamento. São empregadas expressões analíticas para o tratamento das integrais de contorno e de domínio presentes na formulação do Método dos Elementos de Contorno. A formulação de Biot é empregada para a descrição de meios porosos saturados e uma formulação energética baseada nos trabalhos de Coussy é adaptada para a extensão ao caso não saturado. Neste caso, a pressão capilar e energia das interfaces são levadas em consideração. O nível de saturação é descrito pelo modelo de Van Genuchten e o comportamento do esqueleto é descrito ou pelo modelo de Drucker-Prager ou pelo modelo de Cam-Clay modificado. O problema não linear obtido por uma descrição temporal associada a discretização espacial é resolvido pelo método de Newton-Raphson. No caso saturado, o operador tangente consistente é definido e utilizado para obtenção da solução do sistema. Exemplos numéricos são apresentados para validar a formulação proposta.

**Palavras-chaves:** Poro-elasticidade, Poro-elasto-plasticidade, Sólidos não saturados, Enrijecedores, Método dos Elementos de Contorno, Acoplamento MEC/MEF.



## RESUME

**WUTZOW, W.W. (2008).** Formulation de la Méthode des Éléments de frontière aux milieux poreux renforcés. São Carlos. 315p. Thèse (Doctorat) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo/École Normale Supérieure de Cachan.

Dans ce travail, on propose une formulation non linéaire de la Méthode des Eléments de Frontière pour les milieux poro-élastoplastiques renforcés. Cette formulation est présentée dans les cadres saturé et non saturé. Pour prendre en compte le renforcement, un couplage avec la Méthode des Eléments Finis est utilisé et une technique de moindres carrés permet la régularisation du déplacement et du vecteur contrainte le long des interfaces. La formulation de Biot est utilisée pour la description des milieux poreux saturés et une formulation énergétique basée sur les travaux de Coussy est adoptée pour son extension au cadre non saturé. Dans ce cas, la pression capillaire et l'énergie d'interface sont prises en compte. Le niveau de saturation est modélisé par le modèle de Van Genuchten et le comportement du squelette est décrit soit par le modèle de Drucker-Prager, soit par un modèle Cam-Clay modifié. Le problème non linéaire obtenu par une discrétisation temporelle associée à la discrétisation spatiale est résolu par la méthode de Newton-Raphson. Dans le cadre saturé, l'opérateur tangent cohérent est défini et utilisé pour obtenir la solution. Des exemples numériques sont présentés pour la validation de la formulation proposée.

**Mot-clés :** Poro-élasticité, Poro-plasticité, milieu saturé, milieu non saturé, Renforcement, Méthode des éléments de frontière, Couplage Méthode des éléments de frontière/Méthode des éléments finis.





## ABSTRACT

**WUTZOW, W.W. (2008).** Boundary element method formulation for reinforced porous material. São Carlos. 315p. Doctoral Thesis – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo/École Normale Supérieure de Cachan.

In this work a nonlinear formulation of the boundary element method (BEM) is proposed to deal with saturated and unsaturated poro-elasto-plastic 2D reinforced domains. To model reinforced porous domains a BEM/FEM (Finite Element Method) modified coupling technique is employed. The coupling is made by using the least square method to regularize the displacement and traction distributions along the interfaces. Analytical expressions have been derived for all boundary and domain integrals required for the formulation. The Biot formulation is used for the description of the saturated porous environments and an energetic consistent formulation based on work of Coussy is adopted for its extension to the framework of unsaturated porous media. In this case, the capillar pressure and the interface energy are taken into account. The Van Genuchten model is used for the determination of saturation level in non-saturated poro-elasto-plastic problems. The Drucker-Prager modified model is used for the saturated poro-elasto-plastic problems and the modified Cam-Clay model for the representation of non-saturated poro-elasto-plastic problems. For the saturated case, the consistent tangent operator is derived and employed inside a Newton procedure to solve non-linear problems. Numerical solutions are presented to validate the proposed models.

**Keywords:** Poro-elasticity, Poro-elasto-plasticity, non-saturated solids, Reinforcements, Boundary Elements Method, BEM/FEM couplings.



## INTRODUÇÃO

---

# Capítulo 1

### 1.1 – Considerações Gerais e motivação

Os modelos de acoplamento hidromecânico buscam descrever a percolação de um ou mais fluidos em meios porosos deformáveis. O movimento dos fluidos induzido por um gradiente de pressão provoca variações de tensões na matriz porosa que por sua vez se deforma. Conseqüentemente propriedades da rocha (matriz porosa), tais como porosidade e permeabilidade, são alteradas modificando o escoamento. Essa interação entre hidrodinâmica e análise de tensões e deformações na matriz porosa consiste na forma do acoplamento hidromecânico adotado, o qual necessita ser modelado com boa precisão, a fim de obtermos respostas confiáveis das simulações numéricas.

Os modelos de acoplamento hidromecânico são fundamentais para o entendimento e previsão de diversos fenômenos relacionados com a mecânica de solos e rochas (MARSILY, 1986; FREDLUND e RAHARDJO, 1993). Dentre eles, segundo (MENDES, 2008), podemos salientar o problema da subsidência da superfície terrestre originado pela extração de fluidos confinados em um reservatório na subsuperfície (MARSILY, 1986; BELL *et al.*, 2005; TEATINI *et al.*, 2006). Inicialmente, o peso das formações geológicas acima do reservatório é suportado pela pressão do fluido intersticial e pelas tensões de contato no esqueleto poroso. À medida que o processo extrativo evolui, o peso vai gradualmente sendo transferido

para a matriz porosa, causando a compactação do reservatório e a subsequente acomodação das camadas geológicas superiores, acompanhadas pela subsidência da superfície terrestre. Apesar de não muito freqüente, esse fenômeno pode acarretar grandes prejuízos financeiros e ambientais para a sociedade. Por exemplo, a extração de água do aquífero subsuperficial da cidade do México resultou em subsidência de até 9m danificando construções e causando alagamentos em algumas regiões durante épocas chuvosas (GUERRERO *et al.*, 1999).

Segundo (MENDES, 2008) a subsidência também pode acarretar sérias instabilidades estruturais nas plataformas petrolíferas sobre o assoalho oceânico ou comprometer os poços de produção de petróleo. Em 1984 constatou-se que a extração de óleo e gás do reservatório Ekofisk, situado no mar do Norte, havia provocado uma subsidência de 3 metros ao longo de 13 anos de exploração, o que fez baixar perigosamente o nível das plataformas petrolíferas em relação ao nível do mar, forçando o fechamento de 6 instalações e fazendo com que as autoridades cobrassem da operadora responsável um remanejamento do campo de produção. A necessidade de monitoramento constante do reservatório Ekofisk produziu uma enorme quantidade de dados experimentais, amplamente utilizados e referenciados na literatura da engenharia de petróleo (SULAK e DANIELSEN, 1989; ABDULRAHEEM *et al.*, 1994; ARNES *et al.*, 1996).

Dado o vasto leque de aplicações do acoplamento hidromecânico, em particular na simulação de reservatórios, o desafio científico consiste no desenvolvimento de modelos computacionais capazes de reproduzir satisfatoriamente os fenômenos mencionados anteriormente.

## 1.2 – Metodologia de trabalho

Tem-se o objetivo de abordar teórica e numericamente modelos que descrevem o comportamento em ruptura de meios porosos saturados e não saturados. Desenvolveu-se formulações numéricas para a aplicação em problemas de engenharia, tais como análise de escavações de túneis e poços, onde a interação com elementos estruturais é parte importante do conjunto.

A modelagem da interação foi feita combinando-se o método dos elementos finitos para as estruturas de menor dimensão com o método dos elementos de contorno para o domínio principal. O acoplamento é feito com uso da técnica de mínimos quadrados que evita as oscilações espúrias na forças distribuídas ao longo da interface. Esta formulação engloba também: a formulação de equações integrais mais adequadas para o tratamento do caso do material bifásico não-linear em meio poroso saturado; a formulação das equações algébricas do modelo incremental incluindo operador tangente; cálculo exato das integrais de contorno, interfaces e domínio; expressões analíticas das integrais obtidas simbolicamente; formulação das equações algébricas para o modelo que contempla o acoplamento MEC/MEF; desenvolvimento de modelos de interação para a regularização das forças de superfície.

O desenvolvimento da tese seguiu um cronograma dividido em duas etapas, sendo a primeira desenvolvida no Brasil no Departamento de Estruturas da Escola de engenharia de São Carlos onde, além das disciplinas cursadas, desenvolveu-se a formulação teórica do problema poro-elásto-plástico com enrijecimento.

Na segunda fase desenvolvida no “Laboratoire de mécanique et technologie (LMT-Cachan)” na “École normale supérieure de Cachan”, França, foi desenvolvida a formulação poro-elásto-plástica não para o problema não saturado.

Sobre o enrijecimento pode-se dizer que este foi implementado através do acoplamento MEC/MEF com regularização, sendo esta empregada para representação de enrijecedores que influenciam apenas de forma indireta no comportamento dos fluidos do meio poroso. Sobre este tipo de acoplamento ainda é importante salientar (será visto mais adiante) que o modelo adotado para a representação do enrijecedor segue a cinemática geral de Reissner-Mindlin de laminados, mas particularizado para vigas, que se adequava bem ao tipo de enrijecedor que se buscava simular.

Seguiu-se o modelo de Biot para meios porosos saturados com fluido compressível. Formulação esta desenvolvida algebricamente de forma que o sistema a ser resolvido ficasse em função das deformações dos pontos internos do meio.

Com relação às integrais, tanto as de domínio quanto as de contorno (singulares ou não) foram avaliadas analiticamente.

Procurou-se avançar na pesquisa nos seguintes aspectos: estudo de modelos de poroelasticidade e poroplasticidade mais gerais, com formulações consistentes com a termodinâmica dos processos irreversíveis, considerando-se compressibilidade do fluido. No caso da poroplasticidade, estudo do critério de Drucker-Prager, com influência direta da poro-pressão nas funções que o definem. Consideração da plasticidade geral, não-associativa. Formulação de procedimentos implícitos para atualização das variáveis do problema poro-elasto-plástico, com duas alternativas possíveis, uma baseada na pressão e outra na variação volumétrica, em função da escolha das variáveis independentes.

Do ponto de vista numérico, foi elaborada no caso da poroplasticidade, uma formulação do método dos elementos de contorno não-linear com campos corretivos de tensão e de poro pressão. A formulação, ao final, fica escrita somente em termos das deformações do esqueleto. Sua resolução é incremental no tempo e iterativa dentro dos incrementos. Foi também deduzida a matriz tangente consistente com o modelo não-associativo de Drucker-Prager, utilizada na linearização das equações de equilíbrio no processo iterativo.

As formulações citadas foram implementadas computacionalmente e testadas numericamente com vários exemplos. Os algoritmos mostraram ser bem estáveis e os resultados numéricos bem precisos. Os exemplos de poroplasticidade testados foram com parâmetros de “hardening”, ou seja, em problemas incondicionalmente estáveis.

No caso da formulação para problemas compostos por meios poro-elasto-plásticos não saturados foi desenvolvido um estudo teórico do modelo levando-se em conta a capilaridade. Levou-se em consideração também a compressibilidade dos dois fluidos que compunham o meio. Devido à consideração da compressibilidade dos fluidos constituintes, bem como a variação da permeabilidade intrínseca em função da variação da porosidade e da variação da permeabilidade relativa que está diretamente ligada ao nível de saturação de cada ponto do meio, fez-se necessário manipular de forma coerente as equações integrais do problema potencial a fim de considerar corretamente a não homogeneidade da constante explicitada na lei de Darcy. A modelo que rege a variação do nível de saturação em função do nível de pressão capilar é o modelo de Van Genuchten (GENUCHTEN, 1980).

Alguns resultados diretos do programa desenvolvido durante este doutoramento podem ser observados nos 8 artigos publicados em congressos e 2 em revista: (WUTZOW e PAIVA, 2003; 2004b; a; WUTZOW e VENTURINI, 2004; BOTTA *et al.*, 2005; WUTZOW *et al.*, 2005; WUTZOW, W.W. *et al.*, 2006; WUTZOW e PAIVA, 2006; WUTZOW, WILSON WESLEY *et al.*, 2006; WUTZOW e PAIVA, 2008)

### 1.3 – Breve Revisão Bibliográfica

O primeiro a pesquisar a poroelasticidade foi (TERZAGHI, 1936). Através de sua teoria, para problemas unidimensionais de adensamento de meios porosos elásticos saturados por um único fluido e microscopicamente incompressíveis, ele explicou o mecanismo de transferência de uma carga aplicada para o solo conjecturando que a pressão hidrostática do fluido intersticial não produzia compactação da matriz porosa. Assim, Terzaghi estabeleceu o pilar central do acoplamento hidromecânico postulando a decomposição da tensão total aplicada sobre a mistura em duas componentes: uma dada pela pressão hidrostática do fluido, também chamada de pressão do poro, e outra parcela de natureza constitutiva governante da deformação da matriz porosa denominada de tensão efetiva, explicando assim o seu adensamento. No entanto, apesar de seu pioneirismo, sua teoria ficou restrita a explicar o adensamento de uma coluna de solo carregada axialmente, sem prever deformações laterais.

Subseqüentemente (BIOT, 1941) generalizou o modelo de Terzaghi para três dimensões incorporando à formulação os efeitos distorcionais induzidos pelas tensões de cisalhamento no esqueleto poroso. Além desta generalização, Biot incluiu no modelo geomecânico o efeito de compressibilidade da fase sólida na escala do poro dando origem ao coeficiente de Biot-Willis que surge na decomposição de Terzaghi, multiplicando a pressão do poro (BIOT e WILLIS, 1957).

En (BIOT, 1955) ele estendeu sua teoria para o caso geral de anisotropia, agora considerando o fluido compressível. Nesta teoria, a anisotropia é geral,

considerada tanto nas propriedades elásticas do sólido quanto na generalização da lei de Darcy. Mais adiante, (BIOT, 1956) adicionou em sua teoria anisotrópica efeitos de viscoelasticidade linear na parte sólida do meio, o que a tornou mais geral ainda, levando em consideração fenômenos dissipativos até então desconsiderados. Mais recentemente, (COUSSY, 1995) apresentou modelos poro-elásticos e poro-plásticos descrevendo o comportamento de materiais porosos saturados, com intenso enfoque nos processos termodinâmicos envolvidos.

Desde que Biot elaborou sua teoria, inúmeros trabalhos foram publicados apresentando soluções analíticas para problemas de meios porosos com geometrias e carregamentos simples. (CHENG e LIGGETT, 1984b), por exemplo, citam os trabalhos (MCNAMEE e GIBSON, 1960; GIBSON e MCNAMEE, 1963; SCHIFFMAN e FUNGAROLI, 1965; GIBSON *et al.*, 1970; BABU *et al.*, 1978). Devido à complexidade do problema, nestes trabalhos foi considerado o caso de fluido incompressível. Para a maioria dos problemas de aplicação prática, entretanto, não existem soluções analíticas, devendo ser desenvolvidas soluções numéricas. Neste campo, trabalhos desenvolvidos com o método das equações integrais de contorno ou método dos elementos de contorno têm despertado grande interesse pelo uso desta técnica numérica, cujos resultados são reconhecidamente precisos e confiáveis, conforme se constata a partir de suas bem-sucedidas aplicações em outros problemas da engenharia.

Seguindo as primeiras formulações diretas do MEC para elastostática propostas por (RIZZO, 1967), (CLEARY, 1977) propôs as primeiras equações integrais para a poroelasticidade. (ARAMAKI e YASUHARA, 1981) e (KUROKI *et al.*, 1982) apresentaram trabalhos para análise da consolidação de solos com soluções fundamentais dependentes do tempo. O já citado trabalho de (CHENG e LIGGETT, 1984b) faz uso da transformada de Laplace para formular as equações integrais do problema poro-elástico. Os mesmos autores, (CHENG e LIGGETT, 1984a), mostram uma formulação do método das equações integrais com aplicações em propagação de fratura em meios poro-elásticos.

Outros trabalhos onde formulações diretas do MEC são apresentadas são: (CHENG e PRENDELEANU, 1987); (NISHIMURA e KOBAYASHI, 1989); (DARGUSH e BANERJEE, 1989) e (DARGUSH e BANERJEE, 1991). Um tratado



mais completo e abrangente sobre equações integrais e soluções fundamentais em poroelasticidade é apresentado por (CHENG e DETOURRNAY, 1998). (PAN e MAIER, 1997) apresentam uma formulação simétrica baseada em Galerkin para poroelasticidade. (PAN, 1999) utiliza as funções de Green para modelar o semi-espaço poro-elástico subdividindo-o em camadas. Utilizando soluções fundamentais independentes do tempo, (CAVALCANTI e TELLES, 2003), apresentaram algumas aplicações do MEC para meio poro-elástico saturado com teoria de Biot. Em problemas hidromecânicos aplicados a processos de extração de petróleo de hidrocarbonetos empregando a modelagem pelo método dos elementos de contorno pode-se citar os trabalhos de (BORBA, 1992; MESQUITA *et al.*, 1993; CAMPOS, 1995; CAMPOS e MESQUITA, 1996; MESQUITA e CAMPOS, 1996). (PARK e BANERJEE, 2002) analisaram problemas planos e tridimensionais de consolidação de solos com o MEC via integral particular.

No campo da poroplasticidade, existem menos trabalhos publicados que em poroelasticidade. Podem ser citados os trabalhos de (MAIER e COCCHETTI, 2000) e (MAIER e COCCHETTI, 2002). No primeiro, eles apresentam o modelo poroplástico convencional com uma formulação em elementos finitos. No segundo, analisam os mesmos conceitos aplicando-os em problemas de terremotos com programação linear. Outros trabalhos interessantes podem ser citados: (MANOHARAN e DASGUPTA, 1995), o próprio livro já citado de (COUSSY, 1995), (LEWIS e SHREFLER, 1998), (FAUCHET, B. *et al.*, 1992), (FAUCHET, B. *et al.*, 1992), (MAIER e COMI, 1997). Outros trabalhos que não versam exclusivamente sobre poroplasticidade, mas que relacionam de alguma maneira essa teoria com outros efeitos são: (SCHREFLER, 2002), (GIRAUD *et al.*, 1998), (ZHANG *et al.*, 1999) e (ZOHDI *et al.*, 2002).

A questão do estudo da instabilidade em materiais elasto-plásticos, quando estes estão em presença de comportamento com “softening” (ou não-associatividade) tem despertado intenso interesse na comunidade científica. Citam-se os trabalhos de (BENALLAL e COMI, 2002; 2003a; b), onde aspectos ligados à localização e instabilidade, teóricos e numéricos, são apresentados tanto para problemas quase estáticos quanto dinâmicos, com modelo associativo e não-associativo. Nos referidos trabalhos, são citados vários outros que tratam do mal condicionamento das soluções

em materiais porosos, devido ao “softening” ou não-associatividade (LORET e HARRIRECHE, 1991; RUNESSON *et al.*, 1996; RUNESSON *et al.*, 1998; RIZZI e LORET, 1999). Também são citados trabalhos que apresentam diversos procedimentos de regularização da solução para materiais multi-fásicos. (LORET e PREVOST, 1991; LARSSON *et al.*, 1996; VARDOULAKIS, 1996; EHLERS e VONK, 1997; ARMERO e CALLARI, 1999; LARSSON e LARSSON, 2000).

A formulação macroscópica das leis de comportamento dos solos saturados deformáveis é baseada em um conceito geral bem estabelecido. Sendo a variação de volume das partículas sólidas constituintes do solo ser negligenciadas diante da deformação volumétrica total, a deformação do solo,  $\varepsilon_{ij}$ , é então governada pelas tensões efetivas  $\sigma_{ij} + p\delta_{ij}$ , no esqueleto  $\sigma_{ij}$  são as tensões totais e  $p$  a pressão intersticial. Esse resultado já conhecido (TERZAGUI, 1925) é confirmado pela prática. Ele permite a aplicação do modelo clássico da mecânica dos sólidos (elástico, plástico, visco-plástico, etc.) aos solos saturados, utilizando-se o tensor de tensões efetivas. Baseando-se neste princípio podemos desenvolver modelos de comportamento mais específicos adaptando-os a complexidade de cada tipo de solo (areia, argila, etc.).

Entretanto, a formulação macroscópica das leis de comportamento dos solos não saturados ainda não possui unanimidade em seus conceitos gerais, mesmo que grandes avanços tenham sido realizados (ALONSO e DELAGE, 1995). A aproximação energética pode ajudar a esclarecer os conceitos do modelo poro-elástico não saturado.

Embora o princípio das tensões efetivas seja bem estabelecido para escoamento monofásico, suas extensões para escoamento multifásico não foram unificadas, seguindo diferentes caminhos que deram origem a diversas formulações e interpretações, em particular para o caso bifásico água-ar. Nesse contexto (BISHOP, 1959) generalizou a forma do princípio das tensões efetivas de Terzaghi postulando a dependência do coeficiente de Biot-Willis com a saturação. Modificações da teoria de Bishop foram sendo gradualmente propostas, destacando-se o trabalho de (FREDLUND e MORGENSTERN, 1977) os quais consideram a dependência da deformação da matriz porosa em duas variáveis termodinamicamente independentes:

a tensão líquida, definida pela diferença entre a tensão total e a pressão do ar, e a pressão capilar. A utilização destas duas variáveis para descrever o estado de tensões efetivas da matriz porosa representou avanço significativo no desenvolvimento de leis constitutivas entre tensão-deformação para meios porosos não saturados (FREDLUND e RAHARDJO, 1993).

Generalizações do modelo de Fredlund e Morgenstern para meios porosos elastoplásticos foram obtidos por (ALONSO *et al.*, 1990) os quais propuseram um modelo constitutivo geral para meios não saturados incorporando a dependência da superfície de plastificação da matriz porosa com a pressão capilar. Posteriormente esse modelo foi denominado de Modelo Básico de Barcelona, sendo estendido e modificado em diversos trabalhos subsequentes que objetivavam atualizá-lo às novas observações experimentais e avanços da área (SHENG *et al.*, 2004).

O princípio de Terzaghi estendido para escoamentos multifásicos conjuntamente com as leis de conservação de quantidade de movimento e de massa das fases envolvidas compõem o sistema de equações governantes do acoplamento geomecânico na escala de laboratório. O modelo é usualmente segmentado em dois subsistemas de naturezas bem diferentes. O subsistema da Poromecânica possui um caráter estritamente parabólico composto pelas equações de massa global, de equilíbrio de tensões e pelas leis constitutivas para a tensão efetiva e para a velocidade de percolação total da mistura fluida. Em contrapartida, o subsistema da Hidrodinâmica que rege o escoamento parcial dos fluidos é composto por equações de transporte predominantemente convectivas advindas do balanço de massa dos fluidos e da lei de Darcy. Para problemas onde o efeito difusivo da pressão Capilar pode ser desprezado, o subsistema da Hidrodinâmica passa a ser regido por uma equação hiperbólica não linear com o campo de saturação exibindo ondas de choque (CHAVENT e JAFFRÉ, 1986).

A decomposição do modelo em subsistemas é herdada naturalmente pelas técnicas de discretização das equações governantes. De fato, a necessidade de metodologias numéricas precisas para os modelos de acoplamento Geomecânico constitui um desafio ao desenvolvimento de simulações computacionais mais realistas.

Algoritmos de desacoplamento têm sido propostos com o intuito de reduzir o esforço computacional e aumentar a estabilidade numérica. Nesses casos, os subsistemas não lineares da Hidrodinâmica e da Poromecânica são iterados sequencialmente em cada passo de tempo e a comunicação entre eles é feita através da comutação entre as soluções numéricas. Dependendo do algoritmo de seqüenciamento adotado, a solução parcialmente acoplada pode atingir níveis de precisão semelhante à obtida por um esquema completamente acoplado onde as equações da Poromecânica e da Hidrodinâmica são resolvidas simultaneamente (SETTARI e WALTERS, 1999). As vantagens do desacoplamento são a flexibilidade de adotar métodos numéricos apropriados para cada subsistema que herdem naturalmente suas peculiaridades, além da comodidade de aproveitar simuladores robustos e eficientes já desenvolvidos para cada um dos subsistemas (DAVID e SETTARI, 2002; ONAISI e SAMIER, 2002). Em contrapartida, a abordagem totalmente acoplada constitui uma alternativa importante quando desejamos capturar numericamente a forte interação entre a Poromecânica e a Hidrodinâmica. No entanto, a necessidade do desenvolvimento de métodos numéricos robustos para o sistema acoplado aliado ao elevado custo computacional torna essa classe de algoritmos pouco competitiva para aplicações de grande porte que utilizam malhas muito refinadas. Como exemplos de implementações numéricas que utilizam essa abordagem citamos (SCHREFLER e ZHAN, 1993; OLIVELLA *et al.*, 1996; LEWIS *et al.*, 1998; CHARLIER e SAMIER, 2002; OETTL *et al.*, 2004).

As implementações numéricas dos modelos de acoplamento geomecânico geralmente discretizam espacialmente o subsistema da Poromecânica nas variáveis de pressão e deslocamento via método de elementos finitos em conjunção com diferenças finitas implícitas na aproximação no tempo (YALE, 2002; MINKOFF *et al.*, 2003; MERODO *et al.*, 2004). Apesar dessa abordagem apresentar instabilidade numérica nos instantes iniciais para algumas combinações de espaços aproximantes devido à resposta incompressível do meio poroso (MURAD e LOULA, 1994), ela possui propriedades ótimas de convergência para os campos de pressão e deslocamento. Além desta aproximação dos campos potenciais, para satisfazer localmente a conservação de massa e a condição de equilíbrio do sistema, é necessário que a discretização da Poromecânica seja capaz de fornecer campos de

velocidade e de tensões efetivas conservativos. No entanto, tal propriedade não se verifica na formulação clássica do método de Galerkin quando calculamos os gradientes a partir dos campos potenciais (MOSE *et al.*, 1994). Esse problema tem sido contornado fazendo uso de métodos mistos e dos espaços discretos de Raviart-Thomas que já foram empregados com grande sucesso para problemas de escoamento em meios porosos rígidos heterogêneos (DOUGLAS *et al.*, 1983; ABREU, 2007). Porém, para problemas em meios deformáveis, essa abordagem resulta em soluções numéricas que violam a simetria do tensor de Cauchy (ARNOLD *et al.*, 2007), além de apresentar maior custo computacional em relação ao método de Galerkin devido ao fato da formulação variacional resultante ser posta em quatro campos (tensões efetivas, deslocamento, pressão do poro e velocidade). O procedimento alternativo proposto neste trabalho consiste em utilizar uma técnica de pós-processamento inicialmente sugerida por (LOULA *et al.*, 1995) para o problema de Poisson. Tal metodologia baseia-se em projetar os gradientes dos campos potenciais de pressão e deslocamento nos espaços de Raviart-Thomas através de uma formulação de Petrov-Galerkin a qual adicionamos os resíduos do balanço de massa global e do equilíbrio das tensões efetivas.

Ao contrário das equações de natureza estritamente parabólica da Poromecânica cujos efeitos difusivos são preponderantes, as equações de transporte que governam o movimento das fases fluidas são predominantemente convectivas e caracterizadas por frentes de onda com surgimento de camadas limites difíceis de serem capturadas adequadamente pelos métodos numéricos clássicos (JOHN e KNOBLOCH, 2007). É bem sabido que, para problemas predominantemente convectivos, o método de Galerkin apresenta oscilações espúrias com estabilidade condicionada à magnitude do número de Peclet, tornando necessário o uso de malhas excessivamente refinadas à medida que o caráter convectivo das equações de transporte aumenta (JOHNSON, 1990). Para superar estas dificuldades métodos estabilizados baseados em formulações variacionais de Petrov-Galerkin com termos de captura de choque têm sido propostos onde destacamos os métodos SUPG (BROOKS e HUGHES, 1982), CAU (GALEÃO e CARMO, 1988), GLS (HUGHES *et al.*, 1989), Unusual (MIZUKAMI e HUGHES, 1985; FRANCA e VALENTIN, 2000). O principal objetivo desses métodos é eliminar as oscilações espúrias

adicionando difusão artificial de forma consistente à formulação variacional (JOHN e KNOBLOCH, 2007). Apesar de serem um grande avanço em relação ao método de Galerkin, tais técnicas ainda apresentam pequenas oscilações na resolução de problemas puramente hiperbólicos, em particular nas proximidades das regiões de choque onde as soluções apresentam descontinuidades. Uma alternativa consiste em aliar os esquemas de estabilização com o método de Galerkin Descontínuo (CALLE *et al.*, 2005). Nesta abordagem, os espaços aproximantes são gerados por funções descontínuas nas fronteiras dos elementos, de forma que os fluxos nas faces são aproximados por fluxos numéricos como os de Godunov, Lax-Friedrichs, Roe e Engquist-Osher, dando origem a diversas formulações (Cockburn e Shu, 2001). Como aplicações do método de Galerkin Descontínuo para equações hiperbólicas escalares destacamos os trabalhos de (AIZINGER *et al.*, 2000); (COCKBURN e SHU, 1989); (CALLE, DEVLOO *et al.*, 2005); (BAUMANN e ODEN, 1999).

Em particular, o método de Galerkin Descontínuo com funções testes constantes por partes reproduz os chamados métodos de volumes finitos (COCKBURN e SHU, 2001) que foram originalmente desenvolvidos com o objetivo de satisfazer a lei de conservação no nível de cada elemento. Tais métodos aproximam a forma integral da equação de transporte e exibem boas propriedades numéricas sendo entrópicos, explícitos no tempo e baratos computacionalmente. De forma análoga ao método de Galerkin Descontínuo, a determinação do fluxo numérico na fronteira dos elementos é crucial para a caracterização dos métodos de volumes finitos. Dentre as diversas aproximações ressaltamos (ver (LEVEQUE, 2002)) Lax-Friedrichs, Lax-Wendroff, Upwind, KT (RIBEIRO, 2007) e o método de (NESSYAHU e TADMOR, 1990). Este último é uma evolução do método Lax-Friedrichs com convergência quadrática, onde as derivadas da solução da equação de Transporte são aproximadas por esquemas de diferenças finitas estabilizados por funções limitadoras MinMod (slope limiters) e a integração da lei de conservação é feita na malha deslocada, não sendo necessário a caracterização do fluxo numérico na fronteira dos elementos. Apesar dos métodos de volumes finitos serem projetados para a resolução de equações puramente hiperbólicas, eles podem ser estendidos para equações de transporte predominantemente convectivas através da técnica de decomposição de operadores (Operator Splitting) em que os termos difusivos,

reativos e convectivos da equação são computados separadamente em cada passo de tempo (DOUGLAS *et al.*, 1997; LEVEQUE, 2002).

Uma outra família de técnicas para equações hiperbólicas predominantemente convectivas teve origem no método modificado das características proposto por (DOUGLAS e RUSSEL, 1982) e baseia-se na idéia de evoluir a solução a partir da condição inicial seguindo as linhas características. No entanto, ao contrário das formulações de volumes finitos, tais técnicas não preservam as leis integrais de conservação de massa levando a resultados numéricos irrealistas. Tal dificuldade motivou o surgimento de uma nova linha de pesquisa conhecida como “Eulerian Lagrangian Localized Adjoint Method” ou ELLAM (CELIA *et al.*, 1990). Esta família de métodos conserva a massa localmente, porém possui maior custo computacional do que o método modificado das características (MMOC). Recentemente, (DOUGLAS *et al.*, 2000) propuseram um método conservativo do tipo Euleriano-Lagrangiano baseado na formulação integral da equação de transporte cuja eficiência computacional é equiparável ao método MMOC apresentando, inclusive, melhores taxas de convergência.

A formulação desenvolvida para o caso não saturado é baseada nos últimos desenvolvimentos apresentados por Danga em alguns capítulos de (COUSSY e FLEUREAU, 2002) fazendo-se uma extensão do caso saturado de Biot (TERZAGUI, 1925; BIOT, 1962; 1972; 1977; ALONSO, GENS *et al.*, 1990) juntamente com o modelo termodinâmico de meios porosos deformáveis descrito por Coussy.

#### 1.4 – Organização da Tese

O presente relatório está organizado em 7 capítulos.

No capítulo 1, encontra-se uma breve introdução ao tema a ser abordado.

No capítulo 2, são apresentados alguns conceitos fundamentais da poroelasticidade.

No capítulo 3, são apresentadas as equações constitutivas da poroelasticidade e da poroplasticidade. Para esta última, as relações são apresentadas em taxas e em incrementos das variáveis. Apresenta-se toda a dedução do algoritmo implícito para a atualização das variáveis do problema poro-elasto-plástico.

No capítulo 4, são apresentadas as equações integrais da poroelasticidade e da poroplasticidade. A partir delas, são apresentadas as formulações do método dos elementos de contorno para os dois casos. Para a poroplasticidade, apresenta-se o procedimento de Newton-Raphson para resolução do problema não-linear com matriz tangente consistente.

No capítulo 5, são apresentadas as formulações do método dos elementos de contorno para a poro-elasto-plasticidade enrijecida através do acoplamento MEC/MEF.

No capítulo 6, é apresentado um resumo sobre a formulação poro-elástica para meios não saturados levando-se em consideração a influencia da pressão capilar no nível de saturação bem como o efeito da energia nas interfaces sobre a pressão resultante da mistura fluida.

No capítulo 7, é apresentado o desenvolvimento do método dos elementos de contorno para o problema não saturado.

No capítulo 8, são apresentados alguns exemplos de aplicação numérica das formulações do MEC para poroelasticidade e poroplasticidade, poroelasticidade enrijecida e poro-elasto-plasticidade enrijecida.



## INTRODUÇÃO A MECÂNICA DOS MEIOS POROSOS SATURADOS

# Capítulo 2

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos básicos da mecânica dos meios porosos, necessários para compreensão do conteúdo deste trabalho. O desenvolvimento deste capítulo foi baseado em (COUSSY, 1991)

### 2.1 – Introdução à mecânica dos meios porosos

A mecânica dos meios porosos é uma disciplina que tem aplicações nos mais diversos campos da engenharia. Como exemplos, podem ser citados problemas de engenharia civil envolvendo mecânica dos solos e mecânica das rochas, problemas de percolação de materiais indesejados em depósitos de dejetos, problemas de biomecânica, de geofísica e de engenharia agrônômica, entre outros. Os meios porosos apresentam constituição formada por duas ou mais fases. Uma das fases é sólida e deformável. A outra fase pode ser líquida, gasosa ou no caso não saturado tanto a gasosa como a líquida, podendo ser elas de um ou mais tipos. Um meio poroso é dito saturado se os vazios que o constituem, ou seja, a parte não ocupada pelo sólido estiver totalmente preenchida com líquido. Neste capítulo, serão tratados apenas os meios porosos saturados.

A mecânica dos meios porosos estuda como o meio poroso se deforma submetido aos diversos tipos de ações externas. Um meio poroso saturado, apesar de

ser constituído por duas fases distintas, pode ser tratado da mesma forma que um sólido convencional utilizando-se as equações provenientes da mecânica dos meios contínuos. Assim, consideram-se apenas as variáveis macroscópicas para formular o problema, desconsiderando-se a natureza microscópica dos fenômenos envolvidos na cinemática da deformação de cada fase e da interação entre elas.

Através dos poros é que o fluido se movimenta. A matriz também pode conter, além da parte sólida, vazios ou oclusões de bolhas de ar em seu interior, mesmo sendo um meio poroso saturado. A presença destes vazios na parte sólida não será considerada como uma fase distinta, sendo que sua contribuição deverá aparecer nas propriedades mecânicas médias da matriz como um só conjunto.

Considerando-se um volume elementar em torno de um ponto identificado pela posição  $x$  num sistema de referência adotado, a matriz (parte sólida + oclusões) e o espaço ocupado pelos poros formam a partícula do esqueleto na posição  $x$ . O fluido que permeia os poros forma a partícula do fluido na posição  $x$ . As duas partículas ocupam o mesmo ponto material definido pelo vetor  $x$ . Assim, um meio poroso saturado pode ser entendido como a superposição, no tempo e no espaço, de dois meios contínuos distintos, o esqueleto e o fluido (ver figura 2.1).



Figura 2.1 – Definição do meio poroso como a soma das partículas do esqueleto e do fluido.

Para que a hipótese de continuidade possa ser admitida, o meio poroso, que é heterogêneo por natureza, deve ser analisado numa escala macroscópica. Um exemplo diz respeito ao tamanho do volume elementar que deve ser utilizado para definir as partículas do esqueleto e do fluido. O volume elementar deve ser de um tamanho tal onde se possa incluir material suficiente para que sejam definidas

variáveis macroscópicas representativas deste volume. Na escala microscópica, por exemplo, a matriz pode ser localmente sólida ou não, em função da presença das oclusões de ar em seu interior. O esqueleto, ao contrário, só pode ser definido numa escala macroscópica. A hipótese de continuidade permite simplificar o tratamento do meio poroso a partir das definições de volume elementar, de partícula do esqueleto e de partícula do fluido. Por continuidade, entende-se que as variáveis macroscópicas variam continuamente de um ponto material a outro vizinho em todo o corpo ocupado pelo meio poroso.

## 2.2 – Descrição da deformação do esqueleto

Considere-se a deformação sofrida por um meio poroso ao longo do tempo. No instante de tempo  $t=0$ , o corpo ocupa uma posição de referência, e um dado ponto material do esqueleto pode ser representado pelo vetor  $X$  de componentes  $X_i$ , dadas segundo um sistema cartesiano de coordenadas adotado. No instante  $t \neq 0$ , o mesmo ponto material do esqueleto ocupa a posição dada pelo vetor  $x$  de componentes  $x_j$ . A função que relaciona os vetores  $x$  e  $X$ , para todos os pontos materiais do corpo, é denominada função de deformação. Ela é dada por:

$$x = x(X, t) \quad \text{ou} \quad x_j = x_j(X_i, t) \quad (2.1)$$

O gradiente da função de deformação (2.1) é dado por:

$$F = \nabla x \quad \text{ou} \quad F_{ji} = \frac{\partial x_j}{\partial X_i} \quad \text{ou} \quad F = F_{ji} (e_j \otimes e_i) \quad (2.2)$$

Observa-se na (2.2) a natureza tensorial de  $F$ . Os versores na base ortonormal são representados por  $e_i$  e o símbolo  $\otimes$  representa o produto tensorial. O tensor  $F$  tem transposta e inversa, definidas, respectivamente, por:

$$F^T_{ij} = F_{ji} \quad \text{e} \quad F^{-1}_{ji} = \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \quad (2.3)$$

Com o tensor gradiente da deformação ( $F$ ), pode-se descrever localmente a deformação de um ponto material. Considere-se um vetor infinitesimal  $dX$  ligando os pontos vizinhos  $X$  e  $(X+dX)$  na configuração de referência ( $t = 0$ ). Depois da deformação, os pontos  $X$  e  $(X+dX)$  ocupam, respectivamente, as novas posições definidas por  $x$  e  $(x+dx)$ , conforme a Figura 2.2. O vetor  $dx$  relaciona-se com o vetor  $dX$  através de  $F$ , ou seja:

$$dx = F \cdot dX \quad (2.4)$$

Assim sendo,  $F$  é uma aplicação linear que transforma qualquer vetor  $dX$  com origem em  $X$  no vetor  $dx$  com origem em  $x$ . Definindo-se o volume elementar  $d\Omega_0$ , na configuração de referência ( $t = 0$ ), como  $d\Omega_0 = dX_1 dX_2 dX_3$ , onde são definidos os vetores  $d\vec{X}_1 = dX_1 e_1$ ,  $d\vec{X}_2 = dX_2 e_2$  e  $d\vec{X}_3 = dX_3 e_3$ , outro resultado importante é:

$$d\Omega_t = \det(F) d\Omega_0 = J d\Omega_0 \quad (2.5)$$

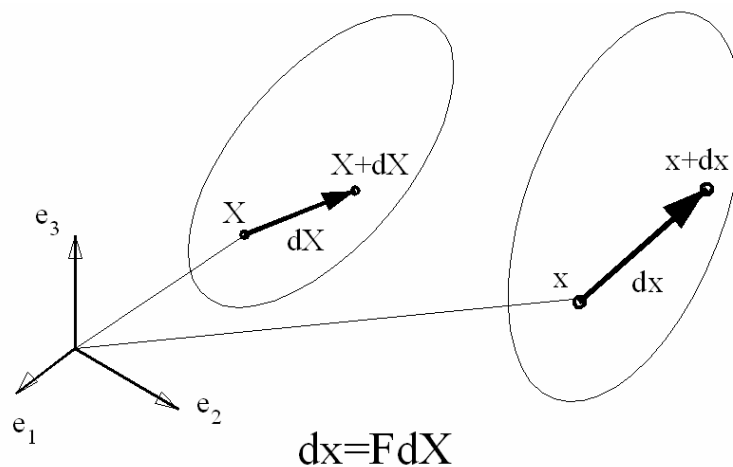


Figura 2.2 – Gradiente da deformação  $F$ .

ou seja, o determinante de  $F$ , ou o jacobiano  $J$ , transforma  $d\Omega_0$  em  $d\Omega = d\vec{x}_1 \cdot (d\vec{x}_2 \wedge d\vec{x}_3)$ , sendo que o símbolo  $\wedge$  representa o produto vetorial e os vetores  $d\vec{x}_1$ ,  $d\vec{x}_2$  e  $d\vec{x}_3$  são definidos, respectivamente, como  $d\vec{x}_1 = F \cdot d\vec{X}_1$ ,  $d\vec{x}_2 = F \cdot d\vec{X}_2$  e  $d\vec{x}_3 = F \cdot d\vec{X}_3$ . Segundo a equação (2.4), o determinante de  $F$  transforma um volume na configuração inicial num outro volume na configuração final.

Definindo-se  $dX$  e  $dX'$  como sendo dois vetores infinitesimais com origem no ponto  $X$  da configuração inicial, após a deformação, eles se transformam, respectivamente, nos vetores  $dx$  e  $dx'$  com origem no ponto  $x$  da configuração atualizada. Define-se o tensor de Green  $E$  através da expressão:

$$\frac{1}{2}[dx \cdot dx' - dX \cdot dX'] = dX \cdot E \cdot dX' = dX \cdot \left[ \frac{1}{2}(F^T F - I) \right] \cdot dX' \quad (2.6)$$

onde  $I$  é o tensor identidade e  $E = \left[ \frac{1}{2}(F^T F - I) \right]$ . É interessante expressar o tensor  $E$  em função do vetor dos deslocamentos  $u = u(X) = (x - X)$ . Ele resulta na expressão:

$$E = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T + \nabla u \nabla u^T) = \nabla^S u + \frac{1}{2}(\nabla u \nabla u^T) \quad (2.7)$$

sendo  $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial X}$  e  $\nabla^S u = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$  o gradiente simétrico do vetor dos deslocamentos  $u$ . O tensor das deformações de Green pode ser simplificado ou aproximado em primeira ordem se  $\|\nabla u\| \ll 1$ . Esta hipótese é válida somente se as deformações e os deslocamentos forem bem pequenos. O tensor de Green fica aproximado então pelo tensor linear de deformações, dado por:

$$\varepsilon = \nabla^S u \quad (2.8)$$

Note que a deformação  $\varepsilon$  expressão (2.8) tende a  $E$  da eq. (2.7) se  $\|\nabla u\| \ll 1$ . Com esta hipótese, outra simplificação possível é admitir que as derivadas do vetor  $u$  tomadas em relação às coordenadas na configuração inicial ( $t = 0$ ) sejam iguais às derivadas de  $u$  tomadas em relação às coordenadas na configuração ( $t \neq 0$ ). Ou seja, as componentes de  $\varepsilon$  ficam dadas por:

$$\varepsilon_{ij} = \nabla^s u = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right] \cong \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] = \text{grad}^s u \quad (2.9)$$

Note que na (2.9), a notação  $\nabla$  é utilizada para as derivadas tomadas em relação à configuração inicial enquanto  $\text{grad}$  é utilizada para as derivadas tomadas em relação à configuração atual.

O tensor de Green é uma medida referenciada à configuração inicial. Por isso foi escrito com  $\nabla$  ou  $\text{Grad}(\cdot)$  na (2.7). Uma outra medida de deformação pode ser definida, referenciada à configuração atualizada. Assim, define-se o tensor de deformações de Almansi  $E_A$  a partir da expressão:

$$\frac{1}{2} [dx \cdot dx' - dX \cdot dX'] = dx \cdot E_A \cdot dx' = dx \cdot \left[ \frac{1}{2} (I - F^{-T} F^{-1}) \right] \cdot dx' \quad (2.10)$$

$$\text{ou seja, } E_A = \left[ \frac{1}{2} (I - F^{-T} F^{-1}) \right].$$

Em termos do gradiente dos deslocamentos, o tensor de Almansi fica dado por:

$$E_A = \frac{1}{2} (\text{gradu} + \text{gradu}^T - \text{gradu} \text{gradu}^T) = \text{grad}^s u - \frac{1}{2} (\text{gradu} \text{gradu}^T) \quad (2.11)$$

sendo  $\text{grad}^s u = \frac{1}{2} (\text{gradu} + \text{gradu}^T)$ . Da mesma forma, pode-se definir o tensor linear de deformações  $\varepsilon^*$  referido à configuração atual, se  $\|\text{gradu}\| \ll 1$ . Assim, tem-se:

$$\varepsilon^* = \text{grad}^S u \quad (2.12)$$

Observando-se as equações (2.7), (2.8), (2.9), (2.11) e (2.12), conclui-se que, para  $\|\nabla u\| \ll 1$  e  $\|\text{gradu}\| \ll 1$ , os tensores definidos tendem ao mesmo valor, ou seja:

$$\varepsilon \cong E \cong E_A \cong \varepsilon^* \quad (2.13)$$

Ressalta-se novamente que as relações na (2.13) somente são válidas em teoria de pequenos deslocamentos e pequenas deformações. Pode-se estabelecer uma relação entre os tensores de Almansi e de Green conhecendo-se somente o tensor  $F$ . Assim, têm-se:

$$\begin{aligned} E &= F^T \cdot E_A \cdot F \\ E_A &= F^{-T} \cdot E \cdot F^{-1} \end{aligned} \quad (2.14)$$

O determinante de  $F$ , ou seja, o jacobiano da transformação de  $d\Omega_0$  em  $d\Omega$ , conforme a expressão (2.5), pode ser escrito em função do vetor dos deslocamentos  $u$  como:

$$J = 1 + \text{div}(u) = \frac{d\Omega - d\Omega_0}{d\Omega_0} \quad (2.15)$$

A expressão (2.15) é válida admitindo-se a hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações. Por definição,

$$\text{div}(u) = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_3} = \text{tr} \varepsilon. \text{ Ou seja, o traço do tensor } \varepsilon \text{ da equação (2.8)}$$

representa a variação de volume provocada pela deformação.

Num meio poroso, a medida de deformação que pode ser diretamente mensurável é a do esqueleto (matriz + poros vazios). No entanto, muitas vezes pretende-se conhecer a mudança de volume da parte sólida do esqueleto, ou seja, da matriz que o compõem. Desse modo, pretende-se conhecer a relação:

$$\varepsilon_s = \frac{d\Omega^S - d\Omega_0^S}{d\Omega_0^S} \quad (2.16)$$

Sendo  $d\Omega_0^S$  o volume da matriz do esqueleto ocupado na configuração inicial de referência e  $d\Omega^S$  o volume ocupado na configuração atual. A porosidade, também sendo uma variável macroscópica, pode ser definida nas duas configurações, respectivamente, como  $\phi_0$  e  $\phi$ . Sendo assim, valem as relações  $d\Omega_0^S = (1 - \phi_0)d\Omega_0$  e  $d\Omega^S = (1 - \phi)d\Omega$  entre o volume ocupado pela matriz e o volume total do esqueleto em ambas configurações. Com as equações (2.15) e (2.16), obtém-se a relação entre a mudança de volume da matriz e a deformação do esqueleto, dada por:

$$(1 - \phi_0)\varepsilon_s = (1 - \phi)\text{tr}\varepsilon - (\phi - \phi_0) \quad (2.17)$$

### 2.3 – Cinemática da deformação do esqueleto

O tensor gradiente das deformações ( $F$ ), conforme definido no item (2.2), é função da posição inicial  $X$  do ponto material e do tempo  $t$ . A cinemática da deformação mostra como a deformação evolui no tempo. Desse modo, as derivadas são tomadas em relação ao tempo  $t$ .

Definem-se dois tipos de descrição da cinemática da deformação. Na descrição Lagrangiana, as variáveis físicas são definidas em função da posição dos pontos ocupada na configuração inicial de referência. Sendo assim, as derivadas são tomadas em relação à configuração inicial. Como as variáveis físicas são definidas em função da posição inicial, e esta não varia no tempo, as derivadas a serem tomadas são sempre derivadas totais em relação ao tempo  $t$ . Na descrição Euleriana, as variáveis físicas são descritas na configuração atual, ou seja, são funções de  $x(X, t)$  e do tempo  $t$ . Na descrição Euleriana define-se o campo de velocidades



$V(x, t)$ , do ponto que ocupa a posição  $x$  na configuração atual, no instante de tempo  $t$ .

A descrição Lagrangiana envolve somente uma derivada total em relação ao tempo  $t$ . Derivando-se, por exemplo, a equação (2.6) em relação ao tempo  $t$ , tem-se:

$$\frac{d}{dt}[dx \cdot dx'] = 2dX \cdot \frac{dE}{dt} \cdot dX' \quad (2.18)$$

ou seja,  $\frac{dE}{dt}$  é a taxa do tensor de deformações de Green.

A descrição Euleriana, ao contrário, utiliza como referência a configuração atual. Assim, define-se o vetor de velocidades  $V(x, t)$  de uma partícula que ocupa a posição  $x$  na configuração atual, no instante de tempo  $t$ , como:

$$V(x, t) = \frac{dx}{dt} \quad (2.19)$$

Sabendo-se que  $\text{Grad}(V) = \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial X} = \text{grad}(V) \cdot F$ , e que

$$\text{Grad}(V) = \text{Grad}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t} \text{Grad}(x) = \frac{dF}{dt}, \text{ chega-se a:}$$

$$\text{grad}(V) = \frac{dF}{dt} \cdot F^{-1} \quad (2.20)$$

Sendo, por definição,  $dx = F \cdot dX$ , tem-se:

$$\frac{d}{dt}[dx] = \frac{d}{dt}[F \cdot dX] = \frac{dF}{dt} \cdot dX + F \cdot \frac{dX}{dt} \quad (2.21)$$

Substituindo-se a equação (2.20) na (2.21), e sabendo-se que  $\frac{dX}{dt} = 0$ , a

(2.21) fica:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{dx}] = \text{grad}(\mathbf{V}) \cdot \mathbf{dx} \quad (2.22)$$

Com a equação (2.22), pode-se derivar a (2.6) utilizando-se as coordenadas da configuração atual. Assim, tem-se:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{dx} \cdot \mathbf{dx}'] = 2\mathbf{dx} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{dx}' = \mathbf{dx} \cdot [\text{grad}(\mathbf{V}) + \text{grad}(\mathbf{V})^T] \cdot \mathbf{dx}' \quad (2.23)$$

ou seja, o tensor  $\mathbf{d}$  vale:

$$\mathbf{d} = \frac{[\text{grad}(\mathbf{V}) + \text{grad}(\mathbf{V})^T]}{2} \quad (2.24)$$

Observando-se as expressões (2.10) e (2.23), conclui-se que  $(\mathbf{dx} \cdot \mathbf{d} \cdot \mathbf{dx}') = \frac{d}{dt}(\mathbf{dx} \cdot \mathbf{E}_A \cdot \mathbf{dx}')$ , sendo  $\mathbf{E}_A$  o tensor de deformações de Almansi já definido anteriormente.

## 2.4 – Descrição do movimento do fluido

Para a completa descrição do movimento de um meio poroso saturado, deve-se conhecer o movimento das partículas do fluido em relação ao esqueleto. Sendo  $d\bar{a}$  uma área infinitesimal em torno de um ponto material do esqueleto e com vetor unitário normal a ela dado por  $\bar{\mathbf{n}}$ , na configuração atual, define-se, no instante de tempo  $t$ , e por unidade de tempo, a quantidade de massa que flui através de  $d\bar{a} = \bar{\mathbf{n}} da$  como:

$$\mathbf{J}_m^{\bar{\mathbf{n}}} da = \mathbf{J}_m^{\bar{\mathbf{n}}} (d\bar{a} \cdot \bar{\mathbf{n}}) = \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{n}} da \quad (2.25)$$

A variável  $J_m^f$  da equação (2.25) representa o fluxo de massa fluida por unidade de área. Observa-se que o fluxo é relativo ao esqueleto. Portanto, o vetor  $w(x, t)$ , na descrição Euleriana, é o vetor do fluxo de massa fluida no ponto material em consideração. Define-se, para um ponto  $x$  na configuração atual, no instante de tempo  $t$ , o vetor  $V^r(x, t)$  da velocidade relativa da partícula do fluido em relação à partícula do esqueleto, como:

$$V^r(x, t) = \frac{w}{\rho^f \phi} \quad (2.26)$$

Lembrando que as duas partículas ocupam em  $t$  a mesma posição  $x$ . Na (2.26),  $\rho^f(x, t)$  e  $\phi(x, t)$  são, respectivamente, a densidade de massa do fluido e a porosidade no ponto considerado. O termo  $\rho^f \phi$  representa a densidade de massa macroscópica do fluido, ou seja, a densidade de massa aparente do fluido, referida ao volume elementar ocupado pelo esqueleto e pelo fluido.

As variáveis  $w$  e  $V^r$  podem, da mesma forma, ser representadas segundo a descrição Lagrangiana. Definindo-se o vetor  $M$  através da relação:

$$M \cdot NdA = w \cdot n da \quad (2.27)$$

Sendo  $d\vec{A} = NdA$  a área, na configuração inicial de referência, orientada segundo o versor  $N$ , correspondente à área  $da = n da$ , orientada segundo o versor  $n$ , na configuração atual. As variáveis do fluxo de massa fluida  $w$  e da velocidade relativa do fluido  $V^r$ , com a (2.27), ficam dadas por:

$$w = \frac{F \cdot M}{J}, \quad V^r = \frac{F \cdot M}{J \rho^f \phi} \quad (2.28)$$

sendo  $J$  o jacobiano da transformação de volume definida pela (2.5).

## 2.5 – Conceitos de derivada particular e derivada material

Qualquer que seja um campo definido sobre o domínio de um corpo constituído de um meio poroso, tanto na descrição Lagrangiana quanto na Euleriana, as derivadas deste campo podem ser tomadas em relação ao esqueleto ou em relação ao fluido. Neste caso, elas são denominadas derivadas particulares.

Supondo um campo  $g(x(X,t),t)$ , escrito em termos das variáveis de Euler, a derivada particular deste campo em relação ao esqueleto e em relação ao tempo  $t$  é definida como:

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \text{grad } g \cdot V \quad (2.29)$$

onde  $V = \frac{\partial x}{\partial t}$  é o vetor velocidade da partícula do esqueleto que ocupa a posição atual definida por  $x$ . A derivada na (2.29) é válida para qualquer que seja o campo  $g$ . Por exemplo, admitindo-se  $g = V$ , tem-se a expressão da aceleração da partícula do esqueleto em  $x$  dada por:

$$\gamma = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \text{grad } V \cdot V \quad (2.30)$$

Da mesma maneira que a derivada na (2.29) foi definida tendo-se como referência o esqueleto, define-se a derivada particular em relação ao fluido do campo  $g$ , aqui denominada de  $d^f g/dt$ , como:

$$\frac{d^f g}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \text{grad } g \cdot V^f \quad (2.31)$$

onde  $V^f(x,t)$  é a velocidade absoluta da partícula do fluido ocupando a posição  $x$  em termos das variáveis de Euler. A velocidade do fluido  $V^f$  pode ser expressa por:

$$\mathbf{V}^{\text{fl}} = \mathbf{V} + \mathbf{V}^r \quad (2.32)$$

Com  $\mathbf{V}^r$  definida na (2.26). Ou seja, a velocidade da partícula do fluido é a soma da velocidade da partícula do esqueleto e da velocidade relativa entre as duas partículas. Comparando-se as expressões (2.29), (2.31) e (2.32), chega-se a:

$$\frac{d^{\text{fl}} \mathbf{g}}{dt} = \frac{d\mathbf{g}}{dt} + \text{grad } \mathbf{g} \cdot \mathbf{V}^r \quad (2.33)$$

ou seja, a derivada temporal do campo  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t)$  escrita em relação à partícula do fluido é igual à derivada temporal de  $\mathbf{g}$  escrita em relação à partícula do esqueleto mais um termo que é função da velocidade relativa  $\mathbf{V}^r$  entre as duas partículas. Usando a equação (2.26) na (2.33), tem-se:

$$\frac{d^{\text{fl}} \mathbf{g}}{dt} = \frac{d\mathbf{g}}{dt} + \text{grad } \mathbf{g} \cdot \frac{\mathbf{w}}{\rho^{\text{fl}} \phi} \quad (2.34)$$

A aceleração da partícula de fluido  $\gamma^{\text{fl}}$  fica definida substituindo-se  $\mathbf{g}$  por  $\mathbf{V}^{\text{fl}}$  na (2.31), ou seja:

$$\gamma^{\text{fl}} = \frac{d^{\text{fl}} \mathbf{V}^{\text{fl}}}{dt} = \frac{d\mathbf{V}^{\text{fl}}}{dt} + \text{grad } \mathbf{V}^{\text{fl}} \cdot \mathbf{V}^{\text{fl}} \quad (2.35)$$

A aceleração na (2.35), levando-se em conta a (2.32), também pode ser dada pelas:

$$\gamma^{\text{fl}} = \gamma + \frac{d\mathbf{V}^r}{dt} + \text{grad}(\mathbf{V} + \mathbf{V}^r) \cdot \mathbf{V}^r \quad (2.36)$$

$$\gamma^{\text{fl}} = \frac{d}{dt}(\mathbf{V} + \mathbf{V}^r) + \text{grad}(\mathbf{V} + \mathbf{V}^r) \cdot \mathbf{V}^r \quad (2.37)$$

$$\gamma^{\text{fl}} = \gamma + \frac{d^{\text{fl}}V^r}{dt} + \text{grad } V \cdot V^r \quad (2.38)$$

Usando a definição de  $V^r$  da (2.26) na (2.37), tem-se:

$$\gamma^{\text{fl}} = \frac{d}{dt} \left( V + \frac{w}{\rho^{\text{fl}}\phi} \right) + \text{grad} \left( V + \frac{w}{\rho^{\text{fl}}\phi} \right) \cdot \frac{w}{\rho^{\text{fl}}\phi} \quad (2.39)$$

Em algumas aplicações, recai-se na necessidade de derivar uma integral de volume, em geral a integral de uma variável representativa da densidade de volume de alguma quantidade física. Considere a densidade de volume representada por  $g(x, t)$  nas variáveis de Euler. Define-se então a integral:

$$I = \int_{\Omega_t} g(x, t) d\Omega_t \quad (2.40)$$

Da mesma maneira como feito anteriormente, pode-se definir a derivada particular da (2.40) em relação tanto ao esqueleto quanto ao fluido. Em relação ao esqueleto, por exemplo, a derivada particular da (2.40) segue o volume  $\Omega_t$ , ocupado a cada nova posição pelo esqueleto em seu movimento. Considere a densidade de volume nas variáveis de Lagrange  $G(X, t)$ , obtida da  $g(x, t)$  pela relação:

$$G(X, t) d\Omega = g(x, t) d\Omega_t \quad (2.41)$$

onde o volume  $\Omega$  corresponde na configuração de referência, ao volume  $\Omega_t$  na configuração atual. A derivada da (2.40), com a (2.41), fica:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} g d\Omega_t \right) = \int_{\Omega} \frac{dG}{dt} d\Omega \quad (2.42)$$

A última integral na (2.42) está escrita nas variáveis de Lagrange. A primeira integral nas variáveis de Euler. Neste último caso, a derivada do volume  $\Omega_t$  deve ser

tomada, já que este varia com o tempo. Por definição,  $\frac{d}{dt}[d\Omega_t] = \text{div}(\mathbf{V})d\Omega_t$ . Aplicando-se a derivada sobre o produto  $g d\Omega_t$  e utilizando-se os conceitos da álgebra tensorial, pode-se escrever:

$$\frac{dG}{dt}d\Omega = \left[ \frac{\partial g}{\partial t} + \text{grad } g \cdot \mathbf{V} + g \text{div}(\mathbf{V}) \right] d\Omega_t = \left[ \frac{\partial g}{\partial t} + \text{div}(g \otimes \mathbf{V}) \right] d\Omega_t \quad (2.43)$$

onde  $\otimes$  representa o produto tensorial. Com a (2.43), a integral da (2.42) nas variáveis de Euler fica:

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial g}{\partial t} + \text{div}(g \otimes \mathbf{V}) \right] d\Omega_t \quad (2.44)$$

Utilizando-se o teorema da divergência, a (2.44) se transforma na:

$$\frac{dI}{dt} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial g}{\partial t} d\Omega_t + \int_a g \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} da \quad (2.45)$$

onde  $a$  é a superfície que engloba o volume  $\Omega_t$ .

Pode-se obter expressões semelhantes às (2.44) e (2.45) para a derivada particular em relação ao fluido, denominada de  $d^{\text{fl}}I/dt$ . Neste caso, as (2.44) e (2.45) ficam, respectivamente, dadas pelas:

$$\frac{d^{\text{fl}}I}{dt} = \int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial g}{\partial t} + \text{div}(g \otimes \mathbf{V}^{\text{fl}}) \right] d\Omega_t \quad (2.46)$$

$$\frac{d^{\text{fl}}I}{dt} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial g}{\partial t} d\Omega_t + \int_a g \mathbf{V}^{\text{fl}} \cdot \mathbf{n} da \quad (2.47)$$

A definição de derivada particular em relação ao esqueleto, ou em relação ao fluido, somente em parte representa a variação da densidade de volume  $g$  de uma

quantidade física qualquer, entre os instantes  $t$  e  $t+dt$ . Na realidade, tomar uma derivada em relação ao esqueleto, por exemplo, acaba por desconsiderar a influência das partículas fluidas na variação temporal da integral de  $g$ . O contrário também é válido quando se toma apenas a derivada particular em relação ao fluido, desconsiderando a influência do esqueleto.

A variável  $g$ , definida na equação (2.40), é uma densidade de volume. Por definição, uma partícula do esqueleto e uma partícula do fluido ocupam a mesma posição  $x$  no instante de tempo  $t$ . Assim, a variável  $g$  pode ser decomposta aditivamente em duas, uma representando a partícula do esqueleto e outra a do fluido. Assim, define-se:

$$g(x, t)d\Omega_t = g^{\text{esq}}(x, t)d\Omega_t + g^{\text{fl}}(x, t)d\Omega_t \quad (2.48)$$

onde  $g^{\text{esq}}$  e  $g^{\text{fl}}$  são, respectivamente, as densidades da partícula do esqueleto e da partícula do fluido por unidade de volume macroscópico  $d\Omega_t$ . Por exemplo, se  $g$  é a densidade de massa de um meio poroso saturado,  $g^{\text{esq}} = \rho^s(1-\phi)$  e  $g^{\text{fl}} = \rho^{\text{fl}}\phi$ , sendo  $\rho^s$  a densidade da matriz sólida do esqueleto.

Considere o intervalo infinitesimal de tempo  $dt = Dt$ . A variação da integral  $I$ , definida pela (2.40), no intervalo  $Dt$ , e levando-se em consideração a (2.48), é dada pela expressão:

$$\frac{DI}{Dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} g^{\text{esq}}(x, t)d\Omega_t + \frac{d^{\text{fl}}}{dt} \int_{\Omega_t} g^{\text{fl}}(x, t)d\Omega_t \quad (2.49)$$

Considerando-se as equações (2.45) e (2.47) das derivadas particulares em relação ao esqueleto e ao fluido, respectivamente, e a equação (2.48), a (2.49) fica:

$$\frac{DI}{Dt} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial g}{\partial t} d\Omega_t + \int_a g^{\text{esq}} \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} da + \int_a g^{\text{fl}} \mathbf{V}^{\text{fl}} \cdot \mathbf{n} da \quad (2.50)$$

ou



$$\frac{DI}{Dt} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial g}{\partial t} d\Omega_t + \int_a g \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} da + \int_a g^{fl} (\mathbf{V}^{fl} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} da \quad (2.51)$$

Lembrando-se que  $g^{esq} = g - g^{fl}$ . A última integral da (2.51) tem um importante significado físico. Ela mede a quantidade da variável física, cuja densidade é  $g^{fl}$ , que atravessa a área  $a$  da superfície que envolve o volume  $\Omega_t$ . Definindo-se  $g_m^{fl}$  como a densidade por unidade de massa fluida da mesma quantidade física de  $g^{fl}$ , tem-se:

$$g^{fl} (\mathbf{V}^{fl} - \mathbf{V}) \cdot \mathbf{n} da = g_m^{fl} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da \quad (2.52)$$

Com a (2.52), a (2.51) pode ser reescrita como:

$$\frac{DI}{Dt} = \int_{\Omega_t} \frac{\partial g}{\partial t} d\Omega_t + \int_a g \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} da + \int_a g_m^{fl} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da \quad (2.53)$$

Observando-se a (2.45), a (2.53) fica:

$$\frac{DI}{Dt} = \frac{dI}{dt} + \int_a g_m^{fl} \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da \quad (2.54)$$

ou seja, a variação da quantidade física cuja densidade é representada por  $g = g^{esq} + g^{fl}$ , no volume  $\Omega_t$ , no tempo infinitesimal  $Dt$ , é igual à derivada particular em relação ao esqueleto da integral de  $g$  mais a quantidade de fluido que atravessa a superfície que envolve  $\Omega_t$ .

## 2.6 – Princípio da conservação de massa

O princípio da conservação de massa é fundamental na descrição da cinemática dos meios porosos. Desde que não haja criação de massa fluida, vale a relação:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho^f \phi d\Omega_t = - \int_a J_m^f da \quad (2.55)$$

ou seja, a variação no tempo da massa fluida que se encontra dentro do volume  $\Omega_t$ , representada pela integral sobre  $\Omega_t$  do produto  $\rho^f \phi$  da densidade volumétrica de massa pela porosidade, é igual ao fluxo de massa pela superfície  $a$ , representada pela integral sobre  $a$  do fluxo de massa por unidade de área  $J_m^f$ . Deve-se lembrar que o fluxo definido por  $J_m^f$  é sempre relativo ao esqueleto.

Admitindo-se que o campo  $g$  na equação (2.40) seja substituído por  $\rho^f \phi$ , e observando-se a (2.45), pode-se reescrever a equação (2.55) como:

$$\int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho^f \phi) + \text{div}(\rho^f \phi \mathbf{V}) \right] d\Omega_t = - \int_a J_m^f da \quad (2.56)$$

ou, sabendo-se que  $J_m^f da = \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da$ , como:

$$\int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho^f \phi) + \text{div}(\rho^f \phi \mathbf{V}) \right] d\Omega_t = - \int_a \mathbf{w} \cdot \mathbf{n} da \quad (2.57)$$

Utilizando-se o teorema da divergência, a (2.57) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega_t} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho^f \phi) + \text{div}(\rho^f \phi \mathbf{V} + \mathbf{w}) \right] d\Omega_t = 0 \quad (2.58)$$

A equação (2.58) é válida para qualquer que seja o volume  $\Omega_t$ . Para que esta condição seja atendida, o integrando necessariamente deve ser nulo, ou seja:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^{\text{fl}}\phi) + \text{div}(\rho^{\text{fl}}\phi \mathbf{V} + \mathbf{w}) = 0 \quad (2.59)$$

A equação (2.59), localmente definida, é conhecida como equação da continuidade. Uma outra forma de expressá-la é:

$$\frac{d}{dt}(\rho^{\text{fl}}\phi) + \rho^{\text{fl}}\phi \text{div} \mathbf{V} + \text{div} \mathbf{w} = 0 \quad (2.60)$$

Alternativamente à equação (2.55), pode-se expressar o princípio da conservação de massa utilizando-se a derivada particular em relação ao fluido. Assim, tem-se:

$$\frac{d^{\text{fl}}}{dt} \int_{\Omega_t} \rho^{\text{fl}}\phi d\Omega_t = 0 \quad (2.61)$$

Com a equação (2.47), a (2.61) reescreve-se como:

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho^{\text{fl}}\phi) d\Omega_t + \int_a \rho^{\text{fl}}\phi \mathbf{V}^{\text{fl}} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (2.62)$$

ou localmente como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho^{\text{fl}}\phi) + \text{div}(\rho^{\text{fl}}\phi \mathbf{V}^{\text{fl}}) = 0 \quad (2.63)$$

As equações (2.59) e (2.63) são equivalentes. Igualando-as, conclui-se:

$$\rho^{\text{fl}}\phi \mathbf{V} + \mathbf{w} = \rho^{\text{fl}}\phi \mathbf{V}^{\text{fl}} \quad (2.64)$$

que é confirmada pela equação (2.26).

As equações (2.55)-(2.64) dizem respeito à conservação de massa fluida. É importante também escrever as equações da conservação de massa total do meio

poroso (esqueleto + fluido). Definindo-se  $r$  como a função densidade de volume do meio poroso, a massa contida num volume infinitesimal  $d\Omega_t$  pode ser expressa como:

$$r d\Omega_t = [\rho^s (1 - \phi) + \rho^f \phi] d\Omega_t \quad (2.65)$$

Na ausência de criação de massa, vale a equação do balanço global de massa:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} r d\Omega_t = 0 \quad (2.66)$$

Fazendo-se  $g_m^f = 1$  na equação (2.53) da derivada material, a (2.66) fica reescrita como:

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial r}{\partial t} d\Omega_t + \int_a (r \mathbf{V} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (2.67)$$

Aplicando-se o teorema da divergência, chega-se à equação da continuidade do meio poroso saturado, dada pela:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \text{div}(r \mathbf{V} + \mathbf{w}) = 0 \quad (2.68)$$

ou

$$\frac{dr}{dt} + r \text{div}(\mathbf{V}) + \text{div}(\mathbf{w}) = 0 \quad (2.69)$$

A conservação de massa somente do esqueleto fica expressa pela equação:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} [\rho^s (1 - \phi)] d\Omega_t = 0 \quad (2.70)$$

ou, equivalentemente, pela:

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} [\rho^s (1 - \phi)] d\Omega_t + \int_a [\rho^s (1 - \phi)] \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} da = 0 \quad (2.71)$$

Neste caso, a equação da continuidade resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\rho^s (1 - \phi)] + \text{div} [\rho^s (1 - \phi) \mathbf{V}] = 0 \quad (2.72)$$

## 2.7 – Balanço da quantidade de movimento

Na mecânica dos meios contínuos, isolando-se um domínio  $\Omega_t$  de um dado contínuo, dois tipos de forças podem atuar sobre  $\Omega_t$ . Existem as forças de corpo, expressas pela densidade de massa  $F$ , de tal modo que a força resultante num volume infinitesimal  $d\Omega_t$  é dada por  $r F d\Omega_t$ , sendo  $r = [\rho^s (1 - \phi) + \rho^f \phi]$  a densidade do meio poroso. A densidade  $F$  depende do tempo  $t$  e da posição  $\mathbf{x}$  ocupada pelo ponto material na configuração atual, ou seja,  $F = F(\mathbf{x}, t)$ . Existem também as forças de superfície, que agem diretamente sobre a superfície  $a$  que envolve o domínio  $\Omega_t$ . São representadas pela força por unidade de área  $T(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$ , dependente do tempo  $t$ , da posição  $\mathbf{x}$  e do versor  $\mathbf{n}$  normal à superfície  $a$  no ponto  $\mathbf{x}$ .

A equação do balanço da quantidade de movimento postula que a resultante de todas as forças atuantes em  $\Omega_t$  deve ser igual à taxa de variação da quantidade de movimento, ou seja:

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} (\mathbf{r} \mathbf{V} + \rho^f \phi \mathbf{V}^f) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \mathbf{r} F d\Omega_t + \int_a \mathbf{T} da \quad (2.73)$$

quando se trata do balanço da quantidade de movimento linear e

$$\frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} [\mathbf{x} \wedge (\mathbf{rV} + \rho^{\text{fl}} \phi \mathbf{V}^r)] d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \wedge \mathbf{rF} d\Omega_t + \int_a \mathbf{x} \wedge \mathbf{T} da \quad (2.74)$$

quando se trata do balanço da quantidade de movimento angular, onde o símbolo  $\wedge$  representa o produto vetorial. Nas (2.73) e (2.74),  $[\mathbf{rV} + \rho^{\text{fl}} \phi \mathbf{V}^r] = [\rho^s (1 - \phi) \mathbf{V} + \rho^{\text{fl}} \phi \mathbf{V}^{\text{fl}}]$  é a quantidade de movimento linear da partícula do meio poroso, constituído pela superposição das partículas do esqueleto e do fluido. Deve ser observado que as equações (2.73) e (2.74) valem para o conjunto esqueleto-fluido que compõem o meio poroso, bem como as forças  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{T}$  que atuam sobre  $\Omega_t$  valem para o conjunto, não sendo distinguidas, portanto, forças que atuam no esqueleto de forças que atuam no fluido.

Voltando à equação (2.53) da derivada material e fazendo nela  $\mathbf{g} = \mathbf{rV} + \rho^{\text{fl}} \phi \mathbf{V}^r$  e  $\mathbf{g}_m^{\text{fl}} = \mathbf{V}^{\text{fl}} = \mathbf{V} + \mathbf{V}^r$ , tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} (\mathbf{rV} + \rho^{\text{fl}} \phi \mathbf{V}^r) d\Omega_t &= \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{rV} + \rho^{\text{fl}} \phi \mathbf{V}^r) d\Omega_t + \\ &\int_a [(\mathbf{rV} + \rho^{\text{fl}} \phi \mathbf{V}^r) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{V} + \mathbf{V}^r) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}] da \end{aligned} \quad (2.75)$$

ou seja, a variação da quantidade de movimento linear das partículas do meio poroso (membro esquerdo da (2.75)) é igual à variação da quantidade de movimento das partículas dentro do volume  $\Omega_t$  mais o fluxo através da superfície  $a$  de  $\Omega_t$  da quantidade de movimento das partículas do esqueleto e do fluido que entram ou deixam  $\Omega_t$  pela  $a$  (membro direito da (2.75)).

Fazendo agora  $\mathbf{g} = \mathbf{x} \wedge (\mathbf{rV} + \rho^{\text{fl}} \phi \mathbf{V}^r)$  e  $\mathbf{g}_m^{\text{fl}} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{V}^{\text{fl}} = \mathbf{x} \wedge (\mathbf{V} + \mathbf{V}^r)$  na equação (2.53), tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} [\mathbf{x} \wedge (\mathbf{rV} + \rho^{\text{fl}} \phi \mathbf{V}^r)] d\Omega_t &= \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{x} \wedge (\mathbf{rV} + \rho^{\text{fl}} \phi \mathbf{V}^r)] d\Omega_t + \\ &\int_a \{ [\mathbf{x} \wedge (\mathbf{rV} + \rho^{\text{fl}} \phi \mathbf{V}^r) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}] + [\mathbf{x} \wedge (\mathbf{V} + \mathbf{V}^r) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}] \} da \end{aligned} \quad (2.76)$$

Substituindo-se as (2.73) e (2.74), respectivamente, nas (2.75) e (2.76), chega-se ao seguinte enunciado: a resultante das forças e dos momentos que atuam num volume  $\Omega_t$  de um meio contínuo é igual, respectivamente, à resultante das forças e dos momentos dos vetores

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{rV} + \rho^f \phi \mathbf{V}^r) d\Omega_t = \frac{\partial}{\partial t} (\rho^s (1-\phi) \mathbf{V} + \rho^f \phi \mathbf{V}^f) d\Omega_t \quad (2.77)$$

distribuídos sobre o volume  $\Omega_t$  e dos vetores

$$\begin{aligned} [(\mathbf{rV} + \rho^f \phi \mathbf{V}^r) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{V} + \mathbf{V}^r) \mathbf{w} \cdot \mathbf{n}] da = \\ [(\rho^s (1-\phi) \mathbf{V}) \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} + (\rho^f \phi \mathbf{V}^f) \mathbf{V}^f \cdot \mathbf{n}] da \end{aligned} \quad (2.78)$$

distribuídos sobre a área  $a$  do domínio  $\Omega_t$ .

Utilizando-se o teorema da divergência, as integrais sobre a superfície  $a$ , que aparecem nas equações (2.75) e (2.76), são transformadas em integrais sobre o domínio  $\Omega_t$ . As equações (2.75) e (2.76) podem ser reescritas, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} (\mathbf{rV} + \rho^f \phi \mathbf{V}^r) d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{rV} + \rho^f \phi \mathbf{V}^r) d\Omega_t + \\ \int_{\Omega_t} \{ \text{div} [(\mathbf{rV} + \rho^f \phi \mathbf{V}^r) \otimes \mathbf{V}] + \text{div} [(\mathbf{V} + \mathbf{V}^r) \otimes \mathbf{w}] \} d\Omega_t \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{\Omega_t} [\mathbf{x} \wedge (\mathbf{rV} + \rho^f \phi \mathbf{V}^r)] d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} [\mathbf{x} \wedge (\mathbf{rV} + \rho^f \phi \mathbf{V}^r)] d\Omega_t + \\ \int_{\Omega_t} [\mathbf{x} \wedge \{ \text{div} [(\mathbf{rV} + \rho^f \phi \mathbf{V}^r) \otimes \mathbf{V}] + \text{div} [(\mathbf{V} + \mathbf{V}^r) \otimes \mathbf{w}] \}] d\Omega_t \end{aligned} \quad (2.80)$$

A expressão (2.79) pode ser manipulada utilizando-se a identidade  $\text{div}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \text{grad } \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \text{ div } \mathbf{B}$ , sendo  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  dois vetores quaisquer. Assim, o integrando do segundo membro da (2.79) fica dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{rV} + \rho^{\text{fl}} \phi \mathbf{V}^{\text{r}}) + \left\{ \text{div} \left[ (\mathbf{rV} + \rho^{\text{fl}} \phi \mathbf{V}^{\text{r}}) \otimes \mathbf{V} \right] + \text{div} \left[ (\mathbf{V} + \mathbf{V}^{\text{r}}) \otimes \mathbf{w} \right] \right\} = \\ \mathbf{r} \left[ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \text{grad } \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} \right] + \mathbf{V} \left[ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{rV} + \mathbf{w}) \right] + \\ \mathbf{V}^{\text{r}} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (\rho^{\text{fl}} \phi) + \text{div}(\rho^{\text{fl}} \phi \mathbf{V} + \mathbf{w}) \right] + \rho^{\text{fl}} \phi \left[ \frac{d\mathbf{V}^{\text{r}}}{dt} + \text{grad}(\mathbf{V} + \mathbf{V}^{\text{r}}) \cdot \mathbf{V}^{\text{r}} \right] \end{aligned} \quad (2.81)$$

Utilizando-se a equação da continuidade (2.59) e lembrando que  $\mathbf{w} = \mathbf{V}^{\text{r}} \rho^{\text{fl}} \phi$ , a (2.81) fica:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{rV} + \rho^{\text{fl}} \phi \mathbf{V}^{\text{r}}) + \left\{ \text{div} \left[ (\mathbf{rV} + \rho^{\text{fl}} \phi \mathbf{V}^{\text{r}}) \otimes \mathbf{V} \right] + \text{div} \left[ (\mathbf{V} + \mathbf{V}^{\text{r}}) \otimes \mathbf{w} \right] \right\} = \\ \mathbf{r}\gamma + \rho^{\text{fl}} \phi (\gamma^{\text{fl}} - \gamma) = \rho^{\text{s}} (1 - \phi) \gamma + \rho^{\text{fl}} \phi \gamma^{\text{fl}} \end{aligned} \quad (2.82)$$

sendo  $\gamma$  e  $\gamma^{\text{fl}}$  as acelerações absolutas das partículas do esqueleto e do fluido, respectivamente. Com as (2.73), (2.79) e (2.82), chega-se a:

$$\int_{\Omega_t} [\mathbf{r}\gamma + \rho^{\text{fl}} \phi (\gamma^{\text{fl}} - \gamma)] d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \mathbf{r} \mathbf{F} d\Omega_t + \int_a \mathbf{T} da \quad (2.83)$$

A equação equivalente à (2.83) para o caso do balanço da quantidade de movimento angular fica dada por:

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \mathbf{x} \wedge [\mathbf{r}\gamma + \rho^{\text{fl}} \phi (\gamma^{\text{fl}} - \gamma)] \right\} d\Omega_t = \int_{\Omega_t} \mathbf{x} \wedge \mathbf{r} \mathbf{F} d\Omega_t + \int_a \mathbf{x} \wedge \mathbf{T} da \quad (2.84)$$

O significado da (2.83) é bem claro, ou seja, a resultante das forças de volume e de superfície que atuam sobre  $\Omega_t$  é igual à resultante das forças dinâmicas elementares, representadas, no caso do meio poroso saturado, pela soma das parcelas do esqueleto  $\rho^{\text{s}} (1 - \phi) \gamma d\Omega_t$  e do fluido  $\rho^{\text{fl}} \phi \gamma^{\text{fl}} d\Omega_t$ . O significado da equação (2.84) é equivalente à da (2.83), no entanto relativo à resultante dos momentos elementares.



O princípio da conservação da quantidade de movimento é utilizado para demonstrar a existência do tensor de tensões  $\sigma$ . Aqui não será mostrada a prova da existência de  $\sigma$ . No entanto, ela pode ser encontrada nos livros-texto de mecânica dos meios contínuos. A prova utiliza um diagrama de corpo livre sobre um tetraedro elementar e resulta na definição:

$$\sigma \cdot n = T \quad (2.85)$$

que relaciona, num ponto  $x$  e no instante de tempo  $t$ , o vetor da força de superfície  $T$  com o tensor  $\sigma$  através do versor  $n$ . O tensor  $\sigma$  é o tensor de tensões totais, ou seja, é a soma das tensões que atuam no esqueleto e no fluido, do ponto de vista macroscópico.

Substituindo-se a (2.85) na (2.83), tem-se:

$$\int_{\Omega_t} [r\gamma + \rho^f \phi (\gamma^f - \gamma) - rF] d\Omega_t = \int_a (\sigma \cdot n) da \quad (2.86)$$

Com o teorema da divergência, obtém-se:

$$\int_{\Omega_t} [\text{div}\sigma + r(F - \gamma) - \rho^f \phi (\gamma^f - \gamma)] d\Omega_t = 0 \quad (2.87)$$

Desde que a equação (2.87) deve ser válida para qualquer que seja o domínio  $\Omega_t$ , o integrando deve necessariamente ser nulo, ou seja:

$$[\text{div}\sigma + r(F - \gamma) - \rho^f \phi (\gamma^f - \gamma)] = 0 \quad (2.88)$$

A equação (2.88) é a equação diferencial do equilíbrio dinâmico, que difere da de um meio contínuo monofásico por considerar distintamente as forças de inércia das partículas do esqueleto e do fluido.

A simetria do tensor de tensões é provada substituindo-se a (2.85) na equação (2.84) da resultante dos momentos dinâmicos, fazendo o volume  $\Omega_t$  infinitesimal. A simetria de  $\sigma$  pode ser assim expressa:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \text{ ou } \sigma = \sigma^T \quad (2.89)$$

## 2.8 – Princípio das potências virtuais

O princípio das potências virtuais é assim enunciado: para um dado volume  $\Omega_t$  de um meio contínuo, num certo instante de tempo  $t$ , e para todo e qualquer movimento virtual, a potência virtual dos esforços externos  $P_{\text{ext}}$  mais a potência virtual dos esforços internos  $P_{\text{int}}$  é igual à soma da potência virtual das forças de inércia  $P_a$ , ou seja:

$$P_{\text{ext}}(V^*) + P_{\text{int}}(V^*) = P_a(V^*) \quad (2.90)$$

onde  $V^*$  representa um campo qualquer de velocidades virtuais definido sobre  $\Omega_t$ .

A potência virtual dos esforços externos é definida como:

$$P_{\text{ext}}(V^*) = \int_{\Omega_t} V^* \cdot r F d\Omega_t + \int_a V^* \cdot T da \quad (2.91)$$

A potência virtual das forças de inércia, considerando-se as partículas do esqueleto e do fluido, é dada pela expressão:

$$P_a(V^*) = \int_{\Omega_t} V^* \cdot [\rho^s(1-\phi)\gamma + \rho^f\phi\gamma^f] d\Omega_t \quad (2.92)$$

e a potência virtual dos esforços internos é definida pela:

$$P_{\text{int}}(\mathbf{V}^*) = - \int_{\Omega_t} \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{D}} d\Omega_t \quad (2.93)$$

onde  $\hat{\mathbf{D}} = \frac{1}{2} [\text{grad } \mathbf{V}^* + \text{grad}^T \mathbf{V}^*]$  é a taxa de deformação associada ao vetor de velocidades  $\mathbf{V}^*$ .

Utilizando-se os resultados da (2.85) e da (2.88), a (2.91) pode ser reescrita como:

$$P_{\text{ext}}(\mathbf{V}^*) = \int_{\Omega_t} \mathbf{V}^* \cdot \left[ -\text{div} \boldsymbol{\sigma} + r\boldsymbol{\gamma} + \rho^{\text{fl}} \phi (\gamma^{\text{fl}} - \boldsymbol{\gamma}) \right] d\Omega_t + \int_a \mathbf{V}^* \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da \quad (2.94)$$

O teorema da divergência e a simetria do tensor de tensões permitem escrever:

$$\int_a \mathbf{V}^* \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} da = \int_{\Omega_t} (\boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{D}} + \mathbf{V}^* \cdot \text{div} \boldsymbol{\sigma}) d\Omega_t \quad (2.95)$$

Com a (2.95) substituída na (2.94), e levando-se em conta as (2.92) e (2.93), fica verificada a equação (2.90) do princípio das potências virtuais.

.

**INTRODUÇÃO A POROELASTICIDADE E POROPLASTICIDADE****Capítulo 3****3.1 – Introdução e conteúdo**

Neste capítulo, além dos conceitos básicos da poroelasticidade são apresentadas as relações constitutivas que descrevem o comportamento mecânico de meios porosos. Inicialmente para poroelasticidade. Depois para poroplasticidade, onde serão considerados efeitos plásticos. As relações constitutivas são fundamentadas na teoria de (BIOT, 1955) e os efeitos plásticos seguem a descrição dada em (COUSSY, 1995).

No caso da poroplasticidade, considerar-se-á o critério de plastificação de Drucker-Prager, com influência direta da poro pressão nas equações. Será considerada a não-associatividade na dedução das equações, partindo-se da definição de uma função diferente da função de plastificação para o potencial plástico.

Serão apresentadas, para o critério de Drucker-Prager (com Hardening linear), as relações constitutivas em taxas e em incrementos. Neste último caso, apresentar-se-á a dedução da expressão fechada do multiplicador plástico, considerando-se uma formulação implícita para o retorno à superfície de plastificação, com direção normal à função do potencial plástico. Duas expressões distintas para o multiplicador plástico serão deduzidas, tendo-se em vista as formulações do MEC a serem apresentadas no capítulo 4. Numa delas, o retorno é feito mantendo-se a poro pressão constante, em outra, mantendo-se a variação da quantidade de fluido constante.

Ao final, serão deduzidas as expressões dos módulos tangentes consistentes de rigidez para os dois casos citados.

### 3.2 – Equações Gerais da Poroelasticidade

Neste item, serão apresentadas as equações constitutivas da poroelasticidade linear, segundo a teoria da consolidação proposta por (BIOT, 1955). Serão assumidas as seguintes condições: processo isotérmico e geometria de pequenas deformações. Efeitos de inércia serão desconsiderados, sendo as equações válidas para o caso quase estático. Admite-se que o meio poroso esteja completamente saturado.

Segundo (COUSSY, 1995), pode-se definir o seguinte potencial de energia livre:

$$\rho\Psi(\varepsilon, \zeta) = \frac{1}{2} \varepsilon : E^d : \varepsilon + \frac{1}{2} b^2 M (\text{Tr}(\varepsilon))^2 + \frac{1}{2} M \zeta^2 - b M \zeta \text{Tr}(\varepsilon) \quad (0.1)$$

onde  $\rho$  é a densidade de massa do meio poroso (fases sólida mais líquida),  $E^d$  é o tensor elástico do material drenado,  $M$  é o módulo de Biot,  $b$  é o coeficiente de Biot da tensão efetiva,  $\varepsilon$  é o tensor das deformações da parte sólida do meio e  $\zeta$  representa a variação da quantidade de fluido, ou seja, a variação no volume de fluido por unidade de volume do meio poroso (mistura sólido-líquido). As variáveis associadas às variáveis internas  $\varepsilon$  e  $\zeta$  são, respectivamente, o tensor das tensões totais  $\sigma$  e a poro pressão  $p$ , dados por:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E^d : \varepsilon + b M (b \text{Tr}(\varepsilon) - \zeta) \mathbf{i} \quad (0.2)$$

$$p = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} = M (\zeta - b \text{Tr}(\varepsilon)) \quad (0.3)$$

onde, na (0.2),  $i$  representa o tensor identidade de segunda ordem. Substituindo-se a poro pressão  $p$  da (0.3) na equação das tensões totais (0.2), chega-se a:

$$\sigma = E^d : \varepsilon - bpi \quad (0.4)$$

ou seja, a tensão total  $\sigma$  é composta por uma parcela que depende das propriedades elásticas da parte sólida e outra parcela que depende da poro pressão  $p$ , cujos valores, por convenção, são sempre positivos. O tensor  $E^d$ , assumindo comportamento isotrópico, é dado por:

$$E^d = \left( K^d - \frac{2G}{3} \right) i \otimes i + 2GI \quad (0.5)$$

sendo  $K^d$  e  $G$ , respectivamente, os módulos de compressibilidade volumétrica e de cisalhamento do material drenado. O tensor identidade de quarta ordem é representado por  $I$ . Do conjunto das equações (0.1) à (0.5), observa-se que a resposta elástica do meio poroso fica determinada conhecendo-se os quatro seguintes parâmetros independentes:  $M$ ,  $b$ ,  $K^d$  e  $G$ .

Outros parâmetros igualmente importantes são o módulo de compressibilidade volumétrica do material sob condição não-drenada  $K^u$  e o coeficiente de Skempton  $B$ . Estes parâmetros são definidos pelas expressões:

$$K^u = -\frac{1}{3} \frac{\partial \text{Tr}(\sigma)}{\partial \text{Tr}(\varepsilon)} \Bigg|_{\zeta=0} \quad (0.6)$$

$$B = -3 \frac{\partial p}{\partial \text{Tr}(\sigma)} \Bigg|_{\zeta=0} \quad (0.7)$$

Note que, nas (0.6) e (0.7), foi assumido variação nula da quantidade de fluido por unidade de volume ( $\zeta = 0$ ). Isto significa que os parâmetros  $K^u$  e  $B$

devem ser obtidos de ensaios sob condição não-drenada. Pode ser mostrado que as relações entre os parâmetros  $M$  e  $b$  com os parâmetros  $K^u$  e  $B$  são dadas por:

$$b = \frac{K^u - K^d}{BK^u} \quad (0.8)$$

$$M = \frac{B^2 (K^u)^2}{K^u - K^d} \quad (0.9)$$

As relações entre as taxas das variáveis do problema poro-elástico são definidas nas (3.10), (3.11), (3.12) e (3.13).

$$\dot{\sigma} = E^d : \dot{\varepsilon} - F\dot{p} \quad (0.10)$$

$$\dot{\zeta} = F : \dot{\varepsilon} + J\dot{p} \quad (0.11)$$

$$\dot{\sigma} = E^u : \dot{\varepsilon} - \frac{1}{J}F\dot{\zeta} \quad (0.12)$$

$$\dot{p} = -\frac{1}{J}F : \dot{\varepsilon} + \frac{1}{J}\dot{\zeta} \quad (0.13)$$

Na expressão (0.10),  $E^d$  (definido na (0.5)) é o módulo tangente drenado (tensor de quarta ordem) que relaciona a taxa de deformação com a taxa de tensão sob condição drenada ( $\dot{p} = 0$ ).  $F$  é um tensor de segunda ordem, enquanto  $J$ , nas (0.12) e (0.13), são escalares. A partir das expressões (0.3) e (0.4), estas variáveis são definidas como:

$$F = bi \quad (0.14)$$



$$J = \frac{1}{M} \quad (0.15)$$

O tensor  $E^u$  na (0.12) é chamado de tensor elástico não-drenado, sendo sua expressão dada por:

$$E^u = E^d + b^2 M (i \otimes i) = \left( K^u - \frac{2G}{3} \right) i \otimes i + 2 * GI \quad (0.16)$$

$$K^u = K^d + b^2 M \quad (0.17)$$

### 3.3 – Equações Gerais de Poroplasticidade

#### 3.3.1 – Relações Constitutivas

Na poroplasticidade, os fenômenos plásticos precisam ser levados em conta nas leis constitutivas, conforme apresentado por (COUSSY, 1995). O comportamento do material segue a mesma formulação descrita por (BIOT, 1955), acrescentado do efeito da plastificação da fase sólida do meio poroso. As relações constitutivas são dadas em termos das relações entre as variáveis estáticas (tensão total de Cauchy  $\sigma$  e poro pressão  $p$ ) e as variáveis cinemáticas (deformação do esqueleto  $\varepsilon$  e variação da quantidade de fluido  $\zeta$ ).

De acordo com (COUSSY, 1995), no caso poro-plástico, as variáveis cinemáticas são particionadas aditivamente em duas, ou seja:

$$\varepsilon = \varepsilon^c + \varepsilon^p \quad (0.18)$$

$$\zeta = \zeta^c + \zeta^p \quad (0.19)$$

nas quais o índice superior  $e$  diz respeito à parte elástica e  $p$  à parte plástica das variáveis cinemáticas  $\varepsilon$  e  $\zeta$ . O potencial de energia livre a ser considerado nesta formulação é dado por:

$$\begin{aligned} \rho\Psi(\varepsilon - \varepsilon^p, \zeta - \zeta^p, \alpha) = & \frac{1}{2} \varepsilon^e : E^d : \varepsilon^e + \frac{1}{2} b^2 M (\text{Tr}(\varepsilon^e))^2 + \frac{1}{2} M (\zeta^e)^2 \\ & - bM \zeta^e \text{Tr}(\varepsilon^e) + \frac{1}{2} \alpha h \alpha \end{aligned} \quad (0.20)$$

onde  $\alpha$  representa o vetor com as variáveis internas que estão relacionadas com outros fenômenos dissipativos, enquanto  $h$  armazena os parâmetros de “hardening” ou “softening” do material. Note que, por simplicidade, a dependência do potencial de energia com as variáveis internas tem a forma quadrática e desacoplada. Outras dependências mais complexas poderiam ser consideradas, sem prejuízo dos resultados. A tensão  $\sigma$ , a poro pressão  $p$  e as forças termodinâmicas  $\chi$  associadas a  $\alpha$  são dadas, respectivamente, por:

$$\sigma = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = E^d : \varepsilon^e + bM (b \text{Tr}(\varepsilon^e) - \zeta^e) \mathbf{i} \quad (0.21)$$

$$p = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} = M (\zeta^e - b \text{Tr}(\varepsilon^e)) \quad (0.22)$$

$$\chi = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} = -h \alpha \quad (0.23)$$

A partir das relações (0.21) e (0.22), pode-se escrever:

$$\sigma + b p \mathbf{i} = E^d : \varepsilon^e \quad (0.24)$$

sendo  $E^d$  o mesmo dado pela (0.5). Define-se como tensão efetiva  $\sigma^{ef}$  a tensão verdadeira que atua no esqueleto sólido, ou seja,  $\sigma^{ef} = E^d : \varepsilon^e = E^d : (\varepsilon - \varepsilon^p)$ . Logo, a (0.24) fica:

$$\sigma^{ef} = \sigma + b p i \quad (0.25)$$

As leis de evolução das variáveis internas são definidas a partir de um potencial plástico conhecido  $F(\sigma, p, \chi)$ , escrito em função das variáveis associadas  $\sigma$ ,  $p$  e  $\chi$ . Assim, têm-se:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (0.26)$$

$$\dot{\zeta}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial p} \quad (0.27)$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \chi} \quad (0.28)$$

onde  $\dot{\lambda}$  é o multiplicador plástico que satisfaz obrigatoriamente as condições de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda} \geq 0, f \leq 0, \dot{\lambda} f = 0 \quad (0.29)$$

sendo  $f(\sigma, p, \chi)$  a função de plastificação que delimita, no espaço das variáveis associadas, as regiões com comportamento poro-elástico e poro-elasto-plástico. A dependência das funções  $F$  e  $f$  com as variáveis associadas é, em princípio, arbitrária. No entanto, muitas vezes, elas podem depender diretamente da tensão efetiva pela relação (0.24), ou seja, passam a ser dadas como  $F(\sigma^{ef}, \chi)$  e  $f(\sigma^{ef}, \chi)$ .

Assumindo-se que o material esteja sofrendo um “carregamento plástico”, ou seja, que esteja sobre a superfície de plastificação, no limite da região de comportamento elástico, a partir das expressões (0.18), (0.19), (0.21), (0.22), (0.23) e (0.25) e da condição de consistência  $\dot{f} = 0$ , chegam-se às seguintes equações constitutivas em taxas:

$$\dot{\sigma} = H^d : \dot{\varepsilon} - K\dot{p} \quad (0.30)$$

$$\dot{\zeta} = L : \dot{\varepsilon} + D\dot{p} \quad (0.31)$$

ou, escritas de outra forma:

$$\dot{\sigma} = H^u : \dot{\varepsilon} - \frac{K}{D} F \dot{\zeta} \quad (0.32)$$

$$\dot{p} = -\frac{L}{D} : \dot{\varepsilon} + \frac{1}{D} \dot{\zeta} \quad (0.33)$$

Na (0.30),  $H^d$  é o módulo tangente drenado que relaciona a taxa de deformação com a taxa de tensão sob condição drenada ( $\dot{p} = 0$ ). Nas (0.30), (0.31), (0.32) e (0.33),  $K$  e  $L$  são tensores de segunda ordem e  $D$  é um escalar. O tensor  $H^u$  na (0.32) é o módulo tangente não-drenado que relaciona as taxas de deformação e tensão sob condição não-drenada ( $\dot{\zeta} = 0$ ).

Para se determinar as expressões dos tensores  $H^d$  e  $K$ , deve-se partir da condição de consistência, ou seja:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial f}{\partial \chi} \dot{\chi} = 0 \quad (0.34)$$

Da expressão (0.24) com a (0.18) e da (0.23), obtêm-se, respectivamente:

$$\dot{\sigma} = E^d : (\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) - b\dot{p}i \quad (0.35)$$

$$\dot{\chi} = -h\dot{\alpha} \quad (0.36)$$

Com a (0.26) na (0.35), chega-se a:

$$\dot{\sigma} = E^d : \left( \dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right) - b\dot{p}i \quad (0.37)$$

e, com a (0.28) na (0.36):

$$\dot{\chi} = -h\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \chi} \quad (0.38)$$

Com os resultados das (0.37) e (0.38), a (0.34) fica:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : E^d : \left( \dot{\varepsilon} - \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial f}{\partial \sigma} : (-b\dot{p}i) + \frac{\partial f}{\partial p} \dot{p} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \chi} h \frac{\partial F}{\partial \chi} = 0 \quad (0.39)$$

Da (0.39), obtém-se a seguinte expressão para  $\dot{\lambda}$ :

$$\dot{\lambda} = \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} : E^d : \dot{\varepsilon} + \left( \frac{\partial f}{\partial p} - b \frac{\partial f}{\partial \sigma} : i \right) \dot{p} \right)}{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} : E^d : \frac{\partial F}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial \chi} h \frac{\partial F}{\partial \chi} \right)} = \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} : E^d : \dot{\varepsilon} + \left( \frac{\partial f}{\partial p} - b \frac{\partial f}{\partial \sigma} : i \right) \dot{p} \right)}{F^d} \quad (0.40)$$

$$\text{sendo } F^d = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : E^d : \frac{\partial F}{\partial \sigma} + h^d \text{ para } h^d = \frac{\partial f}{\partial \chi} \cdot h \cdot \frac{\partial F}{\partial \chi}.$$

Substituindo-se  $\dot{\lambda}$  da (0.40) na (0.37), tem-se:

$$\dot{\sigma} = E^d : \left( \dot{\varepsilon} - \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} : E^d : \dot{\varepsilon} + \left( \frac{\partial f}{\partial p} - b \frac{\partial f}{\partial \sigma} : i \right) \dot{p} \right) \frac{\partial F}{\partial \sigma}}{F^d} \right) - b \dot{p} i \quad (0.41)$$

ou, rearranjando-se os termos:

$$\dot{\sigma} = \left( E^d - \frac{E^d : \frac{\partial F}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial f}{\partial \sigma} : E^d}{F^d} \right) : \dot{\varepsilon} - \left( \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial p} - b \frac{\partial f}{\partial \sigma} : i \right) E^d : \frac{\partial F}{\partial \sigma}}{F^d} + b i \right) \dot{p} \quad (0.42)$$

Observando-se as (0.30) e (0.42), conclui-se que:

$$H^d = E^d - \frac{E^d : \frac{\partial F}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial f}{\partial \sigma} : E^d}{F^d} \quad (0.43)$$

$$K = \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial p} - b \frac{\partial f}{\partial \sigma} : i \right) E^d : \frac{\partial F}{\partial \sigma}}{F^d} + b i \quad (0.44)$$

O tensor L e o escalar D são obtidos da (0.22) em taxas, ou seja:

$$\dot{p} = M \left( \dot{\zeta}^c - b \text{Tr}(\dot{\varepsilon}^c) \right) = M \left( \dot{\zeta} - \dot{\zeta}^p - b \text{Tr}(\dot{\varepsilon}) + b \text{Tr}(\dot{\varepsilon}^p) \right) \quad (0.45)$$

na qual se utilizou as (0.18) e (0.19). Isolando-se  $\dot{\zeta}$  na (0.45), tem-se:

$$\dot{\zeta} = \frac{\dot{p}}{M} + \dot{\zeta}^p + b \text{Tr}(\dot{\varepsilon}) - b \text{Tr}(\dot{\varepsilon}^p) \quad (0.46)$$

ou, com as (0.26) e (0.27):

$$\dot{\zeta} = \frac{\dot{p}}{M} + \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial p} + b \text{Tr}(\dot{\varepsilon}) - b \dot{\lambda} \text{Tr} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right) \quad (0.47)$$

Substituindo-se  $\dot{\lambda}$  da (0.40) na (0.47), obtém-se:

$$\dot{\zeta} = \frac{\dot{p}}{M} + b \text{Tr}(\dot{\varepsilon}) + \frac{\left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} : E^d : \dot{\varepsilon} + \left( \frac{\partial f}{\partial p} - b \frac{\partial f}{\partial \sigma} : i \right) \dot{p} \right)}{F^d} \left( \frac{\partial F}{\partial p} - b \text{Tr} \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right) \right) \quad (0.48)$$

ou, rearranjando-se os termos:

$$\dot{\zeta} = \left( b i + \frac{\left( \frac{\partial F}{\partial p} - b \frac{\partial F}{\partial \sigma} : i \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma} : E^d}{F^d} \right) : \dot{\varepsilon} + \left( \frac{1}{M} + \frac{\left( \frac{\partial F}{\partial p} - b \frac{\partial F}{\partial \sigma} : i \right) \left( \frac{\partial f}{\partial p} - b \frac{\partial f}{\partial \sigma} : i \right)}{F^d} \right) \dot{p} \quad (0.49)$$

que, a partir da (0.31), permite concluir:

$$L = b i + \frac{\left( \frac{\partial F}{\partial p} - b \frac{\partial F}{\partial \sigma} : i \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma} : E^d}{F^d} \quad (0.50)$$

$$D = \frac{1}{M} + \frac{\left( \frac{\partial F}{\partial p} - b \frac{\partial F}{\partial \sigma} : i \right) \left( \frac{\partial f}{\partial p} - b \frac{\partial f}{\partial \sigma} : i \right)}{F^d} \quad (0.51)$$

O módulo não-drenado  $H^u$  relaciona-se com os demais tensores e com o escalar  $D$  através da expressão:

$$H^u = H^d + \frac{K \otimes L}{D} \quad (0.52)$$

A prova da (0.52) pode ser facilmente obtida substituindo-se a (0.33) na (0.30), resultando:

$$\dot{\sigma} = H^d : \dot{\varepsilon} - K \dot{p} = H^d : \dot{\varepsilon} - K \left( -\frac{L}{D} : \dot{\varepsilon} + \frac{1}{D} \dot{\zeta} \right) \quad (0.53)$$

a qual, pode ser reescrita como:

$$\dot{\sigma} = \left( H^d + \frac{K \otimes L}{D} \right) : \dot{\varepsilon} - \frac{K}{D} \dot{\zeta} = H^u : \dot{\varepsilon} - \frac{K}{D} \dot{\zeta} \quad (0.54)$$

Manipulando-se algebricamente a (0.52), pode-se escrever:

$$H^u = E^u - \frac{E^u : \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{bM}{3K^u} \frac{\partial F}{\partial p} \right)_i \otimes \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{bM}{3K^u} \frac{\partial f}{\partial p} \right)_i : E^u}{F^u} \quad (0.55)$$

com  $E^u$  e  $K^u$  já definidos nas (0.16) e (0.17) e  $F^u$  dado por:

$$F^u = h^u + \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} - \frac{bM}{3K^u} \frac{\partial f}{\partial p} \right)_i : E^u : \left( \frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{bM}{3K^u} \frac{\partial F}{\partial p} \right)_i \quad (0.56)$$

sendo  $h^u = h^d + M \frac{K^d}{K^u} \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial p}$ .

### 3.3.2 – Modelo elastoplástico de Drucker-Prager para meio poroso saturado

Neste item, as relações constitutivas da poroplasticidade, apresentadas no item (3.3.1), serão revistas para um tipo particular de critério, o de Drucker-Prager.

A função de plastificação  $f$  e o potencial plástico  $F$ , do critério de Drucker-Prager a ser considerado, são definidos, respectivamente, como:



$$f = \sqrt{J_2} + \mu(I_1 + 3\mu^* p) - \chi - \sigma_y \quad (0.57)$$

$$F = \sqrt{J_2} + \beta(I_1 + 3\beta^* p) - \chi - \sigma_y \quad (0.58)$$

onde  $J_2 = \frac{1}{2} s : s$  é o segundo invariante do tensor desviador de tensões  $s$ , definido por  $s = \sigma - \frac{1}{3} \text{Tr}(\sigma) \mathbf{i}$ , sendo  $\|s\| = \sqrt{s : s}$ ,  $I_1 = \text{Tr}(\sigma)$  é a tensão hidrostática,  $\chi$  é o tamanho da superfície de plastificação e  $\mu$ ,  $\mu^*$ ,  $\beta$  e  $\beta^*$  são parâmetros do material. Os parâmetros  $\mu$  e  $\beta$  são os coeficientes de atrito e de dilatação, respectivamente, enquanto  $\mu^*$  e  $\beta^*$  são os coeficientes das tensões efetivas na função de carregamento e no potencial plástico.

Note que as funções  $f$  e  $F$  nas (0.57) e (0.58) dependem do tensor de tensões totais  $\sigma$  e da poro pressão  $p$ . Essa forma geral das funções pode ser, em alguns casos, particularizada para que sejam direta e unicamente dependentes do tensor de tensões efetivas  $\sigma^{\text{ef}}$ , conforme já salientado anteriormente. No entanto, os próximos desenvolvimentos serão feitos com as funções gerais das (0.57) e (0.58).

Deste ponto em diante, serão calculados os tensores  $H^d$ ,  $K$ ,  $L$  e  $H^u$ , juntamente com o escalar  $D$ , das equações (0.30), (0.31), (0.32) e (0.33), utilizando-se o critério de Drucker-Prager definido pelas (0.57) e (0.58). Para auxiliar os cálculos, definem-se as derivadas:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{s}{\|s\|} + \mu \mathbf{i} \quad (0.59)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{s}{\|s\|} + \beta \mathbf{i} \quad (0.60)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 3\mu\mu^* \quad (0.61)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = 3\beta\beta^* \quad (0.62)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \chi} = -1 \quad (0.63)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \chi} = -1 \quad (0.64)$$

Os seguintes produtos tensoriais podem ser determinados para o critério de Drucker-Prager:

$$\begin{aligned} E^d : \frac{\partial F}{\partial \sigma} &= \left( \left( K^d - \frac{2G}{3} \right) i \otimes i + 2GI \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{s}{\|s\|} + \beta i \right) = \\ &= \frac{2G}{\sqrt{2}} \frac{s}{\|s\|} + 3\beta \left( K^d - \frac{2G}{3} \right) i + 2G\beta i = \frac{2G}{\sqrt{2}} \frac{s}{\|s\|} + 3\beta K^d i \end{aligned} \quad (0.65)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} : E^d : \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{s}{\|s\|} + \mu i \right) : \left( \frac{2G}{\sqrt{2}} \frac{s}{\|s\|} + 3\beta K^d i \right) = G + 9\mu\beta K^d \quad (0.66)$$

$$h^d = \frac{\partial f}{\partial \chi} h \frac{\partial F}{\partial \chi} = h \quad (0.67)$$

Com os resultados das (0.65), (0.66) e (0.67), tem-se  $F^d$  da (0.40), dado por:

$$F^d = \frac{\partial f}{\partial \sigma} : E^d : \frac{\partial F}{\partial \sigma} + h^d = G + 9\mu\beta K^d + h \quad (0.68)$$

O tensor  $H^d$  da (0.43) passa a ser dado por:

$$H^d = E^d - \frac{E^d : \frac{\partial F}{\partial \sigma} \otimes \frac{\partial f}{\partial \sigma} : E^d}{F^d} = E^d - \frac{\left( \frac{2G}{\sqrt{2}} \frac{s}{\|s\|} + 3\beta K^d i \right) \otimes \left( \frac{2G}{\sqrt{2}} \frac{s}{\|s\|} + 3\mu K^d i \right)}{F^d} \quad (0.69)$$

ou, em termos do invariante  $J_2$ , por:

$$H^d = E^d - \frac{\left( \frac{G}{\sqrt{2}} s + 3\beta K^d i \right) \otimes \left( \frac{G}{\sqrt{2}} s + 3\mu K^d i \right)}{(G + 9\mu\beta K^d + h)} \quad (0.70)$$

Os tensores  $K$  e  $L$  das (0.44) e (0.50) ficam dados por:

$$K = \frac{(3\mu\mu^* - 3b\mu)}{(G + 9\mu\beta K^d + h)} \left( \frac{G}{\sqrt{2}} s + 3\beta K^d i \right) + b i \quad (0.71)$$

$$L = \frac{(3\beta\beta^* - 3b\beta)}{(G + 9\mu\beta K^d + h)} \left( \frac{G}{\sqrt{2}} s + 3\mu K^d i \right) + b i \quad (0.72)$$

sendo que, para encontra-los, foram utilizadas as seguintes expressões:

$$\left( \frac{\partial f}{\partial p} - b \frac{\partial f}{\partial \sigma} : i \right) = 3\mu\mu^* - 3b\mu \quad (0.73)$$

$$\left( \frac{\partial F}{\partial p} - b \frac{\partial F}{\partial \sigma} : i \right) = 3\beta\beta^* - 3b\beta \quad (0.74)$$

O escalar  $D$  da (0.51) é dado por:

$$D = \left( \frac{1}{M} + \frac{(3\beta\beta^* - 3b\beta)(3\mu\mu^* - 3b\mu)}{(G + 9\mu\beta K^d + h)} \right) \quad (0.75)$$

### 3.3.3 – Algoritmo de Integração – Modelo de Drucker-Prager

Na mecânica dos sólidos, a resolução numérica de um problema não-linear de valor de contorno se baseia em procedimentos iterativos. As equações de equilíbrio (estática ou dinâmica) precisam ser discretizadas no tempo e no espaço. Subentende-se o termo “tempo” como o tempo real nos problemas de análise dinâmica e como um “pseudo-tempo” nos problemas estáticos, este último referindo-se à marcha de evolução das variáveis com o carregamento estático. Nos problemas com meios porosos, o tempo é sempre o real, mesmo na análise quase estática.

Um dos importantes passos na análise numérica não-linear é o de determinar, para um dado incremento de deformação, conhecendo-se sua história ao longo do carregamento, novos valores das variáveis do modelo (no caso do modelo poro-elasto-plástico  $\sigma, p, \chi, \varepsilon^p, \zeta, \zeta^p, \alpha$ ), mediante integração das equações constitutivas locais, a partir de condições iniciais dadas.

Este problema, crucial na análise numérica, diz respeito diretamente ao uso das equações constitutivas de um dado modelo não-linear físico (por exemplo, o do item (3.3.2)). Um fato importante desta etapa da análise numérica é que este problema depende do conhecimento da história da deformação ao longo do carregamento, sendo referido portanto de “strain-driven problem”.

Neste item, apresentar-se-á um procedimento implícito que permite calcular expressões fechadas do multiplicador plástico no caso de hardening linear, em situação de “carregamento plástico”, com retorno radial à superfície definida pela função do potencial plástico de Drucker-Prager (modelo não-associativo). Dois algoritmos distintos serão considerados. Num deles, o retorno é obtido mantendo-se a poro pressão invariável, no outro, mantendo-se a variação da quantidade de fluido invariável. Conforme será visto, as expressões do multiplicador plástico serão diferentes para os dois casos.

Seja  $[0, T] \subset \mathbb{R}$  o intervalo de tempo de interesse. Num dado instante de tempo  $t_n \in [0, T]$ , admite-se que as seguintes variáveis do modelo poro-elasto-plástico de Drucker-Prager do item (3.3.2) sejam conhecidas:  $\sigma_n$ ,  $p_n$ ,  $\chi_n$ ,  $\varepsilon_n$ ,  $\varepsilon_n^p$ ,  $\zeta_n$ ,  $\zeta_n^p$  e  $\alpha_n$ . Note que existe uma dependência entre o tensor de tensões  $\sigma_n$ , a poro pressão  $p_n$  e as forças termodinâmicas  $\chi_n$  com as demais variáveis internas, através das relações:

$$\sigma_n = E^d : (\varepsilon_n - \varepsilon_n^p) + bM \left( b \text{Tr}(\varepsilon_n - \varepsilon_n^p) - \zeta_n + \zeta_n^p \right) \mathbf{i} \quad (0.76)$$

$$p_n = M \left( \zeta_n - \zeta_n^p - b \text{Tr}(\varepsilon_n - \varepsilon_n^p) \right) \quad (0.77)$$

$$\chi_n = -h\alpha_n \quad (0.78)$$

ou seja, conhecendo-se as variáveis internas em  $t_n$ , calculam-se, de forma direta, as variáveis associadas a elas com as expressões (0.76), (0.77) e (0.78). O problema básico consiste em se determinar estas mesmas variáveis no instante de tempo  $t_{n+1} \in [0, T]$ , de uma maneira consistente com as equações constitutivas do modelo poro-elasto-plástico, dadas pelas expressões (0.26), (0.27), (0.28), pelas condições de Kuhn-Tucker expressas na (0.29) e pelas condições iniciais  $\left\{ \varepsilon, \varepsilon^p, \zeta, \zeta^p, \alpha \right\} \Big|_{t=t_n} = \left\{ \varepsilon_n, \varepsilon_n^p, \zeta_n, \zeta_n^p, \alpha_n \right\}$ .

Este problema pode ser resolvido expressando-se o modelo constitutivo em forma incremental. As seguintes equações podem ser escritas:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta \varepsilon_n \quad (0.79)$$

$$p_{n+1} = p_n + \Delta p_n \quad (0.80)$$

$$\sigma_{n+1} = E^d : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) - b p_{n+1} \mathbf{i} \quad (0.81)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right|_{n+1} \quad (0.82)$$

$$\zeta_{n+1}^p = \zeta_n^p + \Delta\lambda \left. \frac{\partial F}{\partial p} \right|_{n+1} \quad (0.83)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \chi} \right|_{n+1} \quad (0.84)$$

$$\zeta_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{M} + \zeta_{n+1}^p + b \text{Tr}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \quad (0.85)$$

$$\chi_{n+1} = -h \alpha_{n+1} \quad (0.86)$$

$$f_{n+1} \leq 0, \Delta\lambda \geq 0, f_{n+1} \Delta\lambda = 0 \quad (0.87)$$

onde  $\Delta(\bullet) = (\bullet)_{n+1} - (\bullet)_n$  representa a variável incremental de “•”. A (0.87) é a forma incremental das condições de Kuhn-Tucker. Deve-se observar que, nas (0.79) e (0.80), admite-se que os incrementos de deformação  $\Delta\varepsilon_n$  e de poro pressão  $\Delta p_n$  sejam conhecidos. Estas variáveis são calculadas a partir das equações de equilíbrio da estrutura discretizada, pelo método dos elementos de contorno. Esta formulação, onde são conhecidos  $\Delta\varepsilon_n$  e  $\Delta p_n$  a cada novo incremento, segue a mesma estrutura das equações (0.30) e (0.31), que têm, como variáveis independentes,  $\dot{\varepsilon}$  e  $\dot{p}$ .

As equações (0.79) - (0.87) formam um sistema não-linear, cuja resolução possibilita encontrar as variáveis em  $t_{n+1}$ . Para a resolução deste sistema, propõe-se, a seguir, uma formulação implícita, com solução fechada para o problema, se obedecida a condição de serem lineares as leis de encruamento (caso aqui adotado).

Como ponto de partida, imagine um estado de tentativa elástico, de tal maneira que todo o acréscimo de deformação no incremento seja elástico, ou seja:

$$\Delta \varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \Delta \varepsilon_n^e \quad (0.88)$$

onde  $\Delta \varepsilon_n^e$  representa o incremento de deformação elástica. Como consequência da (0.88), têm-se:

$${}^t \varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p \quad (0.89)$$

$${}^t \zeta_{n+1}^p = \zeta_n^p \quad (0.90)$$

$${}^t \alpha_{n+1} = \alpha_n \quad (0.91)$$

onde o índice superior  $t$  representa o estado de tentativa. Observe que as variáveis internas, nas (0.89) - (0.91), do estado de tentativa, são iguais às suas correspondentes do instante  $t_n$ . Lembrar também que  $\Delta \varepsilon_n$  e  $\Delta p_n$  são valores conhecidos a priori, que vêm do método dos elementos de contorno. Com as (0.89) - (0.91), determinam-se as seguintes variáveis do estado de tentativa: o tensor de tensões  ${}^t \sigma_{n+1}$  a partir da (0.81), as forças  ${}^t \chi_{n+1}$  a partir da (0.86) e a variação da quantidade de fluido  ${}^t \zeta_{n+1}$  a partir da (0.85), resultando:

$${}^t \sigma_{n+1} = E^d : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - b p_{n+1} \mathbf{i} \quad (0.92)$$

$${}^t \chi_{n+1} = -h \alpha_n \quad (0.93)$$

$${}^t \zeta_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{M} + \zeta_n^p + b \text{Tr}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \quad (0.94)$$

A partir das variáveis associadas nas (0.92) e (0.93), pode-se determinar a função de plastificação do estado de tentativa  ${}^t f_{n+1} = {}^t f_{n+1}({}^t \sigma_{n+1}, p_{n+1}, {}^t \chi_{n+1})$ , a partir da (0.57). Assim, tem-se:

$${}^t f_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} {}^t s_{n+1} : {}^t s_{n+1} + \mu \left( \text{Tr}({}^t \sigma_{n+1}) + 3\mu^* p_{n+1} \right) - {}^t \chi_{n+1} - \sigma_y} \quad (0.95)$$

De acordo com o sinal de  ${}^t f_{n+1}$ , pode-se inferir:

$$\text{Se } {}^t f_{n+1} < 0 \rightarrow \text{passo poro-elástico} \rightarrow \Delta\lambda = 0 \quad (0.96)$$

$$\text{Se } {}^t f_{n+1} > 0 \rightarrow \text{passo poro-elasto-plástico} \rightarrow \Delta\lambda > 0 \quad (0.97)$$

Um conhecido lema, que aqui não será provado, diz: se a função de plastificação  $f$  é convexa, então se pode afirmar que:

$${}^t f_{n+1} \geq f_{n+1} \quad (0.98)$$

De acordo com a (0.96), a condição  ${}^t f_{n+1} < 0$  implica que  $\Delta\varepsilon_n = \Delta\varepsilon_n^e$ , ou seja, a tentativa elástica é correta. Neste caso, pode-se afirmar que  $f_{n+1} < 0$ , de acordo com a (0.98), e  $\Delta\lambda = 0$ , de acordo com as condições de Kuhn-Tucker expressas na (0.87). No caso de  ${}^t f_{n+1} > 0$  (0.97), conclui-se que  $\Delta\varepsilon_n \neq \Delta\varepsilon_n^e$ , ou seja, deve existir deformação plástica não nula ( $\Delta\lambda > 0$  e  $f_{n+1} = 0$ ). No primeiro caso, a solução para as variáveis em  $t_{n+1}$  do sistema de equações (0.80) – (0.87) é encontrada de forma direta fazendo-se  $\Delta\lambda = 0$ . No segundo caso, utilizando-se uma formulação implícita, pode-se chegar a uma expressão fechada para  $\Delta\lambda$ , desde que obedecidas certas condições (encruamento linear). A partir de agora, apresentar-se-á a dedução da expressão de  $\Delta\lambda$  para o critério de Drucker-Prager (0.57) e (0.58). Será deduzido o caso geral de plasticidade não-associativa ( $f \neq F$ ).

O tensor de tensões  ${}^t \sigma_{n+1}$  da (0.92), com a definição de  $E^d$  dada na (0.5), fica:



$${}^t\sigma_{n+1} = \left[ \left( K^d - \frac{2G}{3} \right) \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + 2G\mathbf{I} \right] : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - b p_{n+1} \mathbf{i} =$$

$$\left( K^d - \frac{2G}{3} \right) \text{Tr}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \mathbf{i} + 2G(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - b p_{n+1} \mathbf{i} \quad (0.99)$$

O traço do tensor  ${}^t\sigma_{n+1}$  da (0.99) é dado por:

$$\text{Tr}({}^t\sigma_{n+1}) = 3 \left( K^d - \frac{2G}{3} \right) \text{Tr}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) + 2G \text{Tr}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - 3b p_{n+1} =$$

$$3K^d \text{Tr}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - 3b p_{n+1} \quad (0.100)$$

A partir das (0.99) e (0.100), o tensor desviador das tensões do estado de tentativa,  ${}^t s_{n+1} = {}^t\sigma_{n+1} - \frac{1}{3} \text{Tr}({}^t\sigma_{n+1}) \mathbf{i}$ , passa a ser dado por:

$${}^t s_{n+1} = \left( K^d - \frac{2G}{3} \right) \text{Tr}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \mathbf{i} + 2G(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - b p_{n+1} \mathbf{i} -$$

$$\frac{1}{3} (3K^d \text{Tr}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - 3b p_{n+1}) \mathbf{i} \quad (0.101)$$

ou, simplificando-se:

$${}^t s_{n+1} = 2G(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - \frac{2G}{3} \text{Tr}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \mathbf{i} \quad (0.102)$$

Com as (0.102), (0.100) e (0.93), determina-se  ${}^t f_{n+1}$  expresso na (0.95).

Quando houver “carregamento plástico”, ou seja, quando  $\Delta\lambda > 0$ , a expressão para  $f_{n+1}$  fica:

$$f_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} s_{n+1} : s_{n+1} + \mu (\text{Tr}(\sigma_{n+1}) + 3\mu^* p_{n+1}) - \chi_{n+1} - \sigma_y} \quad (0.103)$$

Todas as variáveis da (0.103) podem ser colocadas em função de suas correspondentes do estado de tentativa. Com a (0.82), o tensor de tensões totais da (0.81), por exemplo, fica dado por:

$$\sigma_{n+1} = \left[ \left( K^d - \frac{2G}{3} \right) i \otimes i + 2GI \right] : \left( \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p - \Delta\lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right|_{n+1} \right) - b p_{n+1} i \quad (0.104)$$

ou, observando-se a (0.99), dado em função de  ${}^t\sigma_{n+1}$  através de:

$$\sigma_{n+1} = {}^t\sigma_{n+1} + \left[ \left( \frac{2G}{3} - K^d \right) i \otimes i - 2GI \right] : \left( \Delta\lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right|_{n+1} \right) \quad (0.105)$$

Conhecendo-se a expressão da derivada dada pela (0.60), a (0.105) fica:

$$\sigma_{n+1} = {}^t\sigma_{n+1} + \Delta\lambda \left[ 3\beta \left( \frac{2G}{3} - K^d \right) i - \sqrt{2}G \frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} - 2G\beta i \right] \quad (0.106)$$

ou

$$\sigma_{n+1} = {}^t\sigma_{n+1} - \Delta\lambda \left[ 3\beta K^d i + \sqrt{2}G \frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} \right] \quad (0.107)$$

O traço de  $\sigma_{n+1}$  da (0.107) fica:

$$\text{Tr}(\sigma_{n+1}) = \text{Tr}({}^t\sigma_{n+1}) - 9\beta\Delta\lambda K^d \quad (0.108)$$

Com as (0.107) e (0.108), o tensor desviador das tensões,  $s_{n+1} = \sigma_{n+1} - \frac{1}{3}\text{Tr}(\sigma_{n+1})i$ , fica dado por:

$$s_{n+1} = {}^t\sigma_{n+1} - \Delta\lambda \left[ 3\beta K^d i + \sqrt{2}G \frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} \right] - \frac{1}{3} \text{Tr}({}^t\sigma_{n+1}) i + 3\beta\Delta\lambda K^d i \quad (0.109)$$

ou, em função de  ${}^t s_{n+1}$ , dado por:

$$s_{n+1} = {}^t s_{n+1} - \Delta\lambda \sqrt{2}G \frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} = {}^t s_{n+1} - \Delta\lambda \frac{G}{\sqrt{J_2}} s_{n+1} \quad (0.110)$$

Isolando-se  ${}^t s_{n+1}$  na (0.110), chega-se a:

$${}^t s_{n+1} = \left( 1 + \Delta\lambda \frac{G}{\sqrt{J_2}} \right) s_{n+1} \quad (0.111)$$

Da definição de norma de um tensor, dada por  $\|s\| = \sqrt{s:s}$ , sendo  $s$  um tensor arbitrário, e sabendo-se que  $2J_2 = \|s_{n+1}\|^2$ , conclui-se, a partir da (0.111), que:

$$\|{}^t s_{n+1}\| = \left( 1 + \Delta\lambda \frac{\sqrt{2}G}{\|s_{n+1}\|} \right) \|s_{n+1}\| \quad (0.112)$$

ou, simplificando-se:

$$\|{}^t s_{n+1}\| = \|s_{n+1}\| + \sqrt{2}G\Delta\lambda \quad (0.113)$$

Seguindo-se o mesmo raciocínio, a força termodinâmica  $\chi_{n+1}$  é dada por:

$$\chi_{n+1} = -h \cdot \alpha_{n+1} = -h \cdot \left( \alpha_n + \Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial \chi_{n+1}} \right) = {}^t \chi_{n+1} + h \cdot \Delta\lambda \quad (0.114)$$

na qual se utilizou a derivada da (0.64).

A partir dos resultados expressos pelas (0.108), (0.113) e (0.114), que relacionam, respectivamente, as variáveis  $\text{Tr}(\sigma_{n+1})$ ,  $\|s_{n+1}\|$  e  $\chi_{n+1}$ , da função de plastificação  $f_{n+1}$ , na (0.103), com as variáveis do estado de tentativa elástico  $\text{Tr}({}^t\sigma_{n+1})$ ,  $\|{}^t s_{n+1}\|$  e  ${}^t\chi_{n+1}$ , da função de plastificação  ${}^t f_{n+1}$ , na (0.95), pode-se reescrever a (0.103) como:

$$f_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \|{}^t s_{n+1}\| - \sqrt{2} G \Delta\lambda \right) + \mu \left( \text{Tr}({}^t\sigma_{n+1}) - 9\beta\Delta\lambda K^d + 3\mu^* p_{n+1} \right) - {}^t\chi_{n+1} - \sigma_y - h \cdot \Delta\lambda \quad (0.115)$$

A partir da definição de  ${}^t f_{n+1}$  na (0.95), rearranjando-se os termos da (0.115), ela fica:

$$f_{n+1} = {}^t f_{n+1} - [G + 9\beta\mu K^d + h] \Delta\lambda \quad (0.116)$$

Para que sejam obedecidas as condições de Kuhn-Tucker, expressas na (0.87), deve-se ter  $f_{n+1} = 0$ . Assim, igualando-se a (0.116) a zero, obtém-se:

$$\Delta\lambda = \frac{{}^t f_{n+1}}{[G + 9\beta\mu K^d + h]} \quad (0.117)$$

A (0.117) é a expressão fechada para  $\Delta\lambda$  com endurecimento linear. Uma vez determinada, num dado ponto, o valor da função de plastificação do estado de tentativa elástico,  ${}^t f_{n+1}$ , determina-se o valor do multiplicador plástico  $\Delta\lambda$ , conhecendo-se os parâmetros físicos do material e os parâmetros das funções de plastificação e do potencial plástico, que aparecem no denominador da (0.117).

Assim, uma vez determinado  $\Delta\lambda$ , o sistema de equações (0.79) – (0.87) fica resolvido para uma situação de “carregamento plástico” com modelo não-

associativo. As variáveis internas, expressas pelas (0.82) – (0.84), ficam assim determinadas:

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \frac{{}^t f_{n+1}}{[G + 9\beta\mu K^d + h]} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} + \beta i \right] \quad (0.118)$$

$$\zeta_{n+1}^p = \zeta_n^p + \frac{3\beta\beta^* {}^t f_{n+1}}{[G + 9\beta\mu K^d + h]} \quad (0.119)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{{}^t f_{n+1}}{[G + 9\beta\mu K^d + h]} \quad (0.120)$$

Este procedimento é implícito pois todas as derivadas da função de plastificação foram calculadas em  $t_{n+1}$ . Para se recuperar a plasticidade associativa com o critério de Drucker-Prager, faz-se  $\mu = \beta$  e  $\mu^* = \beta^*$  em todas as expressões anteriores.

Todo o procedimento que acaba de ser apresentado (da equação (0.79) até a (0.120)) diz respeito à integração das equações constitutivas locais. Como já conhecido o ponto de partida, ou seja, as variáveis de entrada do problema representado pelas (0.79) – (0.87) foram os incrementos de deformação  $\Delta\varepsilon$  e de poro pressão  $\Delta p$ . Estas variáveis vêm da resolução do sistema de equações linearizado do método dos elementos de contorno, numa dada iteração.

A segunda alternativa adotada aqui é o caso em que as variáveis de entrada são os incrementos de deformação  $\Delta\varepsilon$  e da variação da quantidade de fluido  $\Delta\zeta$  ao invés de  $\Delta p$ . Neste caso, a integração das equações constitutivas resulta numa expressão diferente da (0.117) para o multiplicador plástico  $\Delta\lambda$ . Apresentar-se-á, deste ponto em diante, a determinação explícita de  $\Delta\lambda$  prescrevendo-se  $\Delta\varepsilon$  e  $\Delta\zeta$ .

O sistema de equações a ser resolvido, neste caso, é dado a seguir, pelas equações (3.121) – (3.129).

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n \quad (0.121)$$

$$\zeta_{n+1} = \zeta_n + \Delta\zeta_n \quad (0.122)$$

$$\sigma_{n+1} = E^d : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) - bM [\zeta_{n+1} - \zeta_{n+1}^p - b\text{Tr}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p)] \mathbf{i} \quad (0.123)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta\lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right|_{n+1} \quad (0.124)$$

$$\zeta_{n+1}^p = \zeta_n^p + \Delta\lambda \left. \frac{\partial F}{\partial p} \right|_{n+1} \quad (0.125)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \Delta\lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \chi} \right|_{n+1} \quad (0.126)$$

$$p_{n+1} = M [\zeta_{n+1} - \zeta_{n+1}^p - b\text{Tr}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p)] \quad (0.127)$$

$$\chi_{n+1} = -h \cdot \alpha_{n+1} \quad (0.128)$$

$$f_{n+1} \leq 0, \Delta\lambda \geq 0, f_{n+1}\Delta\lambda = 0 \quad (0.129)$$

Esta formulação ((0.121) – (0.129)), onde são conhecidos  $\Delta\varepsilon_n$  e  $\Delta\zeta_n$  a cada novo incremento, segue a estrutura das equações (0.32) e (0.33), cujas variáveis independentes são  $\dot{\varepsilon}$  e  $\dot{\zeta}$ . De novo, as (0.121) – (0.129) formam um sistema de equações não-lineares nas variáveis em  $t_{n+1}$ , que será resolvido utilizando-se um procedimento implícito, com expressão fechada para  $\Delta\lambda$  no caso do endurecimento linear.

Comenta-se ainda que nos desenvolvimentos seguintes algumas equações se repetem, porém são mantidas para simplificar o entendimento.

De início, supõe-se um estado de tentativa puramente elástico no incremento, ou seja, um estado onde se admite que todo o acréscimo de  $\varepsilon$  e de  $\zeta$  seja dado somente pelas suas respectivas parcelas elásticas  $\Delta\varepsilon_n^e$  e  $\Delta\zeta_n^e$ . Assim, têm-se:

$$\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n = \Delta\varepsilon_n^e \quad (0.130)$$

$$\Delta\zeta_n = \zeta_{n+1} - \zeta_n = \Delta\zeta_n^e \quad (0.131)$$

As variáveis internas plásticas do estado de tentativa  $t$  são as mesmas das (0.89) – (0.91), ou seja,  ${}^t\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p$ ,  ${}^t\zeta_{n+1}^p = \zeta_n^p$  e  ${}^t\alpha_{n+1} = \alpha_n$ . O tensor de tensões  ${}^t\sigma_{n+1}$ , a poro pressão  ${}^t p_{n+1}$  e as forças termodinâmicas  ${}^t\chi_{n+1}$  do estado de tentativa são dados, respectivamente, por:

$${}^t\sigma_{n+1} = E^d : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) - bM \left[ \zeta_{n+1} - \zeta_n^p - b\text{Tr}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \right] i \quad (0.132)$$

$${}^t p_{n+1} = M \left[ \zeta_{n+1} - \zeta_n^p - b\text{Tr}(\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \right] \quad (0.133)$$

$${}^t\chi_{n+1} = -h\alpha_n \quad (0.134)$$

Com as (0.132) – (0.134), determina-se a função de plastificação do estado de tentativa  ${}^t f_{n+1} = {}^t f_{n+1}({}^t\sigma_{n+1}, {}^t p_{n+1}, {}^t\chi_{n+1})$ , conforme expressa na (0.95). Verifica-se o sinal de  ${}^t f_{n+1}$ . Caso seja menor que zero, o passo é poro-elástico e  $\Delta\lambda = 0$  (de acordo com as condições de Kuhn-Tucker da (0.129)). Caso  ${}^t f_{n+1}$  seja maior que zero, o passo é poro-elasto-plástico e  $\Delta\lambda > 0$ . Como feito anteriormente, para o caso de  $\Delta\varepsilon_n$  e  $\Delta p_n$  prescritos, utilizando-se uma formulação implícita, pode-se chegar a uma expressão fechada para  $\Delta\lambda$  no presente caso de  $\Delta\varepsilon_n$  e  $\Delta\zeta_n$  prescritos. Utilizar-se-á o mesmo critério de Drucker-Prager (0.57) e (0.58) não-associativo.

Da definição de  $E^d$  na (0.5), obtém-se:

$${}^t\sigma_{n+1} = \left[ \left( K^d - \frac{2G}{3} \right) \mathbf{i} \otimes \mathbf{i} + 2G\mathbf{I} \right] : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \mathbf{bM} \left[ \zeta_{n+1} - \zeta_n^p - \mathbf{bTr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) + \mathbf{bTr}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \right] \mathbf{i} \quad (0.135)$$

O traço do tensor  ${}^t\sigma_{n+1}$  da (0.135) é dado por:

$$\begin{aligned} \text{Tr}({}^t\sigma_{n+1}) &= 3 \left( K^d - \frac{2G}{3} \right) \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) + 2G \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \\ &3\mathbf{bM} \left[ \zeta_{n+1} - \zeta_n^p - \mathbf{bTr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) + \mathbf{bTr}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \right] = \\ &3(K^d + \mathbf{b}^2\mathbf{M}) \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - 3\mathbf{bM}(\zeta_{n+1} - \zeta_n^p) \end{aligned} \quad (0.136)$$

Com as (0.135) e (0.136), o tensor desviador das tensões do estado de tentativa,  ${}^t\mathbf{s}_{n+1}$ , fica:

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{s}_{n+1} &= \left( K^d - \frac{2G}{3} \right) \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \mathbf{i} + 2G(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \\ &\mathbf{bM} \left[ \zeta_{n+1} - \zeta_n^p - \mathbf{bTr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}) + \mathbf{bTr}(\boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \right] \mathbf{i} - \\ &\frac{1}{3} \left( 3(K^d + \mathbf{b}^2\mathbf{M}) \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - 3\mathbf{bM}(\zeta_{n+1} - \zeta_n^p) \right) \mathbf{i} \end{aligned} \quad (0.137)$$

ou

$${}^t\mathbf{s}_{n+1} = 2G(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) - \frac{2G}{3} \text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_n^p) \mathbf{i} \quad (0.138)$$

Assim sendo,  ${}^t\mathbf{f}_{n+1}$  fica determinada com as (0.138), (0.136), (0.134) e (0.133). Se  $\Delta\lambda > 0$ , da (0.129), deve-se necessariamente ter

$$\mathbf{f}_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{s}_{n+1} : \mathbf{s}_{n+1}} + \mu \left( \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) + 3\mu^* p_{n+1} \right) - \chi_{n+1} - \sigma_y = 0. \quad \text{As variáveis da } \mathbf{f}_{n+1}$$



podem ser escritas em função das variáveis da  ${}^t f_{n+1}$ . O tensor de tensões totais  $\sigma_{n+1}$  fica dado por:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} = & \left[ \left( K^d - \frac{2G}{3} \right) i \otimes i + 2GI \right] : \left( \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p - \Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{n+1}} \right) - \\ & bM \left[ \zeta_{n+1} - \zeta_n^p - \Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial p_{n+1}} - b \text{Tr}(\varepsilon_{n+1}) + b \text{Tr} \left( \varepsilon_n^p + \Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \right] i \end{aligned} \quad (0.139)$$

ou, em função de  ${}^t \sigma_{n+1}$  da (0.135), dado por:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} = & {}^t \sigma_{n+1} + \left[ \left( \frac{2G}{3} - K^d \right) i \otimes i - 2GI \right] : \left( \Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{n+1}} \right) + \\ & bM \left[ \Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial p_{n+1}} - b \text{Tr} \left( \Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{n+1}} \right) \right] i \end{aligned} \quad (0.140)$$

Com as derivadas dadas pelas (0.60) e (0.62), a (0.140) fica:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} = & {}^t \sigma_{n+1} + \Delta\lambda \left[ 3\beta \left( \frac{2G}{3} - K^d \right) i - \sqrt{2G} \frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} - 2G\beta i \right] + \\ & bM\Delta\lambda \left[ 3\beta\beta^* - 3b\beta \right] i \end{aligned} \quad (0.141)$$

ou

$$\sigma_{n+1} = {}^t \sigma_{n+1} + \Delta\lambda \left[ \left( 3bM\beta(\beta^* - b) - 3\beta K^d \right) i - \sqrt{2G} \frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} \right] \quad (0.142)$$

O traço de  $\sigma_{n+1}$  da (0.142) é dado por:

$$\text{Tr}(\sigma_{n+1}) = \text{Tr}({}^t \sigma_{n+1}) + 9\beta\Delta\lambda \left( bM(\beta^* - b) - K^d \right) \quad (0.143)$$

O tensor desviador das tensões  $s_{n+1}$  fica:

$$s_{n+1} = {}^t\sigma_{n+1} + \Delta\lambda \left[ (3bM\beta(\beta^* - b) - 3\beta K^d) \mathbf{i} - \sqrt{2}G \frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} \right] - \frac{1}{3} \text{Tr}({}^t\sigma_{n+1}) \mathbf{i} - 3\beta\Delta\lambda (bM(\beta^* - b) - K^d) \mathbf{i} \quad (0.144)$$

ou, em função de  ${}^t s_{n+1}$ :

$$s_{n+1} = {}^t s_{n+1} - \Delta\lambda \sqrt{2}G \frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} = {}^t s_{n+1} - \Delta\lambda \frac{G}{\sqrt{J_2}} s_{n+1} \quad (0.145)$$

Observe que a (0.145) é idêntica à (0.110). Portanto, para o presente caso, são também válidos os resultados das (0.111) – (0.113).

Observando-se as (0.82) e (0.83), a poro pressão  $p_{n+1}$ , dada pela (0.127), fica escrita como:

$$p_{n+1} = M \left( \zeta_{n+1} - \zeta_n^p - \Delta\lambda \left. \frac{\partial F}{\partial p} \right|_{n+1} - b \text{Tr} \left( \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p - \Delta\lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right|_{n+1} \right) \right) \quad (0.146)$$

ou, em função de  ${}^t p_{n+1}$  na (0.133), como:

$$p_{n+1} = {}^t p_{n+1} - M \left( \Delta\lambda \left. \frac{\partial F}{\partial p} \right|_{n+1} - b \text{Tr} \left( \Delta\lambda \left. \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right|_{n+1} \right) \right) \quad (0.147)$$

Substituindo-se as derivadas das (0.60) e (0.62), a (0.147) reduz-se a:

$$p_{n+1} = {}^t p_{n+1} - 3\beta M \Delta\lambda (\beta^* - b) \quad (0.148)$$

A força termodinâmica  $\chi_{n+1}$  é a mesma da (0.114), ou seja:

$$\chi_{n+1} = {}^t\chi_{n+1} + h \cdot \Delta\lambda \quad (0.149)$$

Com as (0.149), (0.148), (0.145) e (0.143), a  $f_{n+1}$  fica dada por:

$$f_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}} \left( \| {}^t s_{n+1} \| - \sqrt{2} G \Delta\lambda \right) + \mu \left( \text{Tr}({}^t \sigma_{n+1}) + 9\beta \Delta\lambda (bM(\beta^* - b) - K^d) \right) + 3\mu \mu^* \left( {}^t p_{n+1} - 3\beta M \Delta\lambda (\beta^* - b) \right) - {}^t \chi_{n+1} - \sigma_y - h \cdot \Delta\lambda \quad (0.150)$$

ou, em função da  ${}^t f_{n+1}$ :

$$f_{n+1} = {}^t f_{n+1} - \left[ G + 9\beta \mu (K^d + b^2 M - bM\beta^*) + 9\mu \mu^* \beta M (\beta^* - b) + h \right] \Delta\lambda \quad (0.151)$$

Igualando-se a (0.151) a zero, obtém-se:

$$\Delta\lambda = \frac{{}^t f_{n+1}}{\left[ G + 9\beta \mu (K^d + b^2 M - bM\beta^*) + 9\mu \mu^* \beta M (\beta^* - b) + h \right]} \quad (0.152)$$

Com  $\Delta\lambda$  da (0.152), o sistema de equações (0.121) – (0.129) fica resolvido. Comparando-se as expressões de  $\Delta\lambda$  da (0.152) e da (0.117), nota-se que são diferentes. Também é fácil notar que, fazendo-se  $\beta^* = b$ , a expressão (0.152) simplifica-se, recaindo na (0.117). A diferença entre os dois algoritmos pode ser melhor compreendida através da interpretação geométrica do retorno à superfície de plastificação, que ocorre segundo uma direção normal à superfície definida pela função do potencial plástico. No algoritmo da (0.117), o retorno ocorre mantendo-se a poro pressão constante. No algoritmo da (0.152), o retorno ocorre permitindo-se variação da poro pressão, no entanto, mantendo-se constante a variação da quantidade de fluido. Assim, sendo, em função dos parâmetros escolhidos, as superfícies de retorno  $f_{n+1}$  podem ser diferentes nos dois casos, assim como também as direções de retorno.

### 3.3.4 – Linearização do Algoritmo. Módulo Elastoplástico tangente consistente

A expressão para o tensor de tensões totais  $\sigma_{n+1}$  pode ser escrita de duas maneiras: em função de  $\varepsilon_{n+1}$  e  $p_{n+1}$  ou em função de  $\varepsilon_{n+1}$  e  $\zeta_{n+1}$ , ambas em  $t_{n+1}$ . Elas são dadas, respectivamente, como:

$$\sigma_{n+1} = E^d : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p - \Delta\lambda n_{n+1}) - b p_{n+1} i \quad (0.153)$$

$$\sigma_{n+1} = E^d : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p - \Delta\lambda n_{n+1}) - bM \left[ \zeta_{n+1} - \zeta_n^p - \Delta\lambda m_{n+1} - b \text{Tr}(\varepsilon_{n+1}) + b \text{Tr}(\varepsilon_n^p + \Delta\lambda n_{n+1}) \right] i \quad (0.154)$$

nas quais  $n_{n+1} = \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} + \beta i$  e  $m_{n+1} = \frac{\partial F}{\partial p} = 3\beta\beta^*$ . Com  $E^d$  dado pela (0.5),

as (0.153) e (0.154) ficam, respectivamente, dadas por:

$$\sigma_{n+1} = E^d : \varepsilon_{n+1} - \left( K^d - \frac{2G}{3} \right) \left( \text{Tr}(\varepsilon_n^p) + \Delta\lambda \text{Tr}(n_{n+1}) \right) i - 2G(\varepsilon_n^p + \Delta\lambda n_{n+1}) - b p_{n+1} i \quad (0.155)$$

$$\sigma_{n+1} = E^d : \varepsilon_{n+1} - \left( K^d - \frac{2G}{3} + b^2 M \right) \left( \text{Tr}(\varepsilon_n^p) + \Delta\lambda \text{Tr}(n_{n+1}) \right) i - 2G(\varepsilon_n^p + \Delta\lambda n_{n+1}) - bM \left[ \zeta_{n+1} - \zeta_n^p - \Delta\lambda m_{n+1} - b \text{Tr}(\varepsilon_{n+1}) \right] i \quad (0.156)$$

Sabendo-se que  $\text{Tr}(n_{n+1}) = 3\beta$ , diferenciando-se a equação algorítmica (0.155), obtém-se:

$$d\sigma_{n+1} = E^d : d\varepsilon_{n+1} - 3\beta d\Delta\lambda \left( K^d - \frac{2G}{3} \right) i - 2G(d\Delta\lambda n_{n+1} + \Delta\lambda dn_{n+1}) - b dp_{n+1} i \quad (0.157)$$

que também pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} d\sigma_{n+1} = & \left[ E^d - 3\beta \left( K^d - \frac{2G}{3} \right) \mathbf{i} \otimes \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \varepsilon_{n+1}} - 2G \left( \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{n}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} + \mathbf{n}_{n+1} \otimes \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \varepsilon_{n+1}} \right) \right] : d\varepsilon_{n+1} \\ & - b dp_{n+1} \mathbf{i} \end{aligned} \quad (0.158)$$

Diferenciando-se agora a (0.156), chega-se a:

$$\begin{aligned} d\sigma_{n+1} = & E^d : d\varepsilon_{n+1} - 3\beta d\Delta \lambda \left( K^d - \frac{2G}{3} + b^2 M \right) \mathbf{i} - 2G (d\Delta \lambda \mathbf{n}_{n+1} + \Delta \lambda d\mathbf{n}_{n+1}) - \\ & bM [d\zeta_{n+1} - d\Delta \lambda m_{n+1} - b \text{Tr}(d\varepsilon_{n+1})] \mathbf{i} \end{aligned} \quad (0.159)$$

ou

$$\begin{aligned} d\sigma_{n+1} = & \left[ E^d - \left[ 3\beta \left( K^d - \frac{2G}{3} + b^2 M \right) - bM m_{n+1} \right] \left( \mathbf{i} \otimes \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \varepsilon_{n+1}} \right) - \right. \\ & \left. 2G \left( \Delta \lambda \frac{\partial \mathbf{n}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} + \mathbf{n}_{n+1} \otimes \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \varepsilon_{n+1}} \right) + b(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) \right] : d\varepsilon_{n+1} \\ & - bM d\zeta_{n+1} \mathbf{i} \end{aligned} \quad (0.160)$$

O tensor entre colchetes na (0.158) é o módulo elasto-plástico tangente consistente do material drenado  $C_{n+1}^d$ , enquanto o tensor entre colchetes na (0.160) é o módulo elasto-plástico tangente consistente do material não-drenado  $C_{n+1}^u$ , ambos determinados a partir da derivada  $\frac{\partial \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}}$ . Os módulos  $C_{n+1}^d$  e  $C_{n+1}^u$  dependem

diretamente das derivadas  $\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \varepsilon_{n+1}}$  e  $\frac{\partial \mathbf{n}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}}$ . A primeira delas é dada por:

$$\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{K} \frac{\partial {}^t f_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (0.161)$$

sendo  $K = [G + 9\beta\mu K^d + h]$  caso a derivada seja utilizada na (0.158) e  $K = [G + 9\beta\mu(K^d + b^2M - bM\beta^*) + 9\mu\mu^*\beta M(\beta^* - b) + h]$  caso ela seja utilizada na (0.160). A derivada  $\frac{\partial {}^t f_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}}$ , na (0.161), é diferente para os casos em que se prescreve  $\varepsilon$  e  $p$  e  $\varepsilon$  e  $\zeta$ . No primeiro caso, a função  ${}^t f_{n+1}$  depende de  $\varepsilon_{n+1}$  somente através de  ${}^t \sigma_{n+1}$ , enquanto que, no segundo caso,  ${}^t f_{n+1}$  depende de  $\varepsilon_{n+1}$  através de  ${}^t \sigma_{n+1}$  e de  ${}^t p_{n+1}$ .

Inicialmente, encontraremos a derivada para o caso de  $\varepsilon$  e  $p$  prescritos. Utilizando-se a regra da cadeia, obtém-se:

$$\frac{\partial {}^t f_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial {}^t f_{n+1}}{\partial {}^t s_{n+1}} \cdot \frac{\partial {}^t s_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} + \frac{\partial {}^t f_{n+1}}{\partial {}^t \sigma_{n+1}} \cdot \frac{\partial {}^t \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (0.162)$$

As derivadas da (0.162) são dadas por:

$$\frac{\partial {}^t f_{n+1}}{\partial {}^t s_{n+1}} = \frac{{}^t s_{n+1}}{2\sqrt{{}^t J_2}} \quad (0.163)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^t s_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} &= \left[ \left( K^d - \frac{2G}{3} \right) (i \otimes i) + 2GI \right] \left[ I - \frac{1}{3} (i \otimes i) \right] = \\ &= 2GI - \frac{2G}{3} (i \otimes i) = 2G \left[ I - \frac{1}{3} (i \otimes i) \right] \end{aligned} \quad (0.164)$$

$$\frac{\partial {}^t f_{n+1}}{\partial {}^t \sigma_{n+1}} = \mu i \quad (0.165)$$

$$\frac{\partial {}^t \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \left[ \left( K^d - \frac{2G}{3} \right) (i \otimes i) + 2GI \right] \quad (0.166)$$

Com as (0.163) – (0.166), a (0.162) fica:

$$\frac{\partial^t f_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{G}{\sqrt{{}^t J_2}} {}^t s_{n+1} + 3\mu K^d i \quad (0.167)$$

Para o caso de  $\varepsilon$  e  $\zeta$  prescritos, a derivada de  ${}^t f_{n+1}$  em relação à  $\varepsilon_{n+1}$  passa também a depender de  ${}^t p_{n+1}$ . Assim sendo, com a regra da cadeia, obtém-se:

$$\frac{\partial^t f_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial^t f_{n+1}}{\partial^t s_{n+1}} \cdot \frac{\partial^t s_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} + \frac{\partial^t f_{n+1}}{\partial^t \sigma_{n+1}} \cdot \frac{\partial^t \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} + \frac{\partial^t f_{n+1}}{\partial^t p_{n+1}} \cdot \frac{\partial^t p_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \quad (0.168)$$

As derivadas da (0.168) são agora dadas por:

$$\frac{\partial^t f_{n+1}}{\partial^t s_{n+1}} = \frac{{}^t s_{n+1}}{2\sqrt{{}^t J_2}} \quad (0.169)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^t s_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} &= \left[ \left( K^d - \frac{2G}{3} + b^2 M \right) (i \otimes i) + 2GI \right] \left[ I - \frac{1}{3} (i \otimes i) \right] = \\ &= 2GI - \frac{2G}{3} (i \otimes i) = 2G \left[ I - \frac{1}{3} (i \otimes i) \right] \end{aligned} \quad (0.170)$$

$$\frac{\partial^t f_{n+1}}{\partial^t \sigma_{n+1}} = \mu i \quad (0.171)$$

$$\frac{\partial^t \sigma_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \left( \left( K^d - \frac{2G}{3} + b^2 M \right) (i \otimes i) + 2GI \right) \quad (0.172)$$

$$\frac{\partial^t f_{n+1}}{\partial^t p_{n+1}} = 3\mu \mu^* \quad (0.173)$$

$$\frac{\partial {}^t p_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = -bMi \quad (0.174)$$

Com as (0.169) – (0.174), a (0.168) fica escrita como:

$$\frac{\partial {}^t f_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{G}{\sqrt{{}^t J_2}} {}^t s_{n+1} + 3\mu(K^d + b^2M - \mu^*bM)i \quad (0.175)$$

Com as (0.161), (0.167) e (0.175), conclui-se que:

$$\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{K} \left( \frac{G}{\sqrt{{}^t J_2}} {}^t s_{n+1} + 3\mu K^d i \right) \quad (0.176)$$

para  $\varepsilon$  e  $p$  prescritos, com  $K = [G + 9\beta\mu K^d + h]$  e

$$\frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{1}{K} \left( \frac{G}{\sqrt{{}^t J_2}} {}^t s_{n+1} + 3\mu(K^d + b^2M - \mu^*bM)i \right) \quad (0.177)$$

para  $\varepsilon$  e  $\zeta$  prescritos, com

$$K = [G + 9\beta\mu(K^d + b^2M - bM\beta^*) + 9\mu\mu^*\beta M(\beta^* - b) + h].$$

A derivada  $\frac{\partial n_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}}$  tem a mesma expressão para as duas situações em estudo.

Pode-se provar, com as expressões (0.111) – (0.113), que é verdadeira a relação

$$\frac{s_{n+1}}{\|s_{n+1}\|} = \frac{{}^t s_{n+1}}{\|{}^t s_{n+1}\|}. \text{ Assim sendo, pode-se dizer que } n_{n+1} = {}^t n_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{{}^t s_{n+1}}{\|{}^t s_{n+1}\|} + \beta i. \text{ Logo,}$$

a derivada  $\frac{\partial n_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}}$  fica dada por:



$$\frac{\partial \mathbf{n}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{{}^t \mathbf{s}_{n+1}}{\|{}^t \mathbf{s}_{n+1}\|} + \beta \mathbf{i} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( {}^t \mathbf{s}_{n+1} \otimes \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left( \frac{1}{\|{}^t \mathbf{s}_{n+1}\|} \right) + \frac{1}{\|{}^t \mathbf{s}_{n+1}\|} \frac{\partial {}^t \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \right) \quad (0.178)$$

Calculando-se  $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left( \frac{1}{\|{}^t \mathbf{s}_{n+1}\|} \right)$  na (0.178), obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left( \frac{1}{\|{}^t \mathbf{s}_{n+1}\|} \right) = \frac{\partial {}^t \mathbf{s}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left( -\frac{{}^t \mathbf{s}_{n+1}}{\|{}^t \mathbf{s}_{n+1}\|^3} \right) = \frac{-2G}{\|{}^t \mathbf{s}_{n+1}\|^3} {}^t \mathbf{s}_{n+1} \quad (0.179)$$

Com a (0.179), o produto tensorial na (0.178) fica dado por:

$${}^t \mathbf{s}_{n+1} \otimes \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{n+1}} \left( \frac{1}{\|{}^t \mathbf{s}_{n+1}\|} \right) = \frac{-4G}{\|{}^t \mathbf{s}_{n+1}\|} ({}^t \mathbf{n}_{n+1} - \beta \mathbf{i}) \otimes ({}^t \mathbf{n}_{n+1} - \beta \mathbf{i}) \quad (0.180)$$

Com as (0.180) e (0.170), a (0.178) fica dada por

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{2G}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\|{}^t \mathbf{s}_{n+1}\|} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} (\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) \right) - \frac{2}{\|{}^t \mathbf{s}_{n+1}\|} ({}^t \mathbf{n}_{n+1} - \beta \mathbf{i}) \otimes ({}^t \mathbf{n}_{n+1} - \beta \mathbf{i}) \right) \quad (0.181)$$

Finalmente, os resultados anteriores permitem determinar os módulos tangentes consistentes  $\mathbf{C}_{n+1}^d$  da expressão (0.158) e  $\mathbf{C}_{n+1}^u$  da expressão (0.160), resultando:

$$\mathbf{C}_{n+1}^d = \left[ \begin{array}{l} \mathbf{E}^d - 2G^2 \Delta \lambda \left( \frac{\sqrt{2}}{\|{}^t \mathbf{s}_{n+1}\|} \left( \mathbf{I} - \frac{1}{3} (\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) \right) - \frac{2\sqrt{2}}{\|{}^t \mathbf{s}_{n+1}\|} ({}^t \mathbf{n}_{n+1} - \beta \mathbf{i}) \otimes ({}^t \mathbf{n}_{n+1} - \beta \mathbf{i}) \right) \\ -\frac{1}{\mathbf{K}} \left[ 2G \mathbf{n}_{n+1} + 3\beta \left( \mathbf{K}^d - \frac{2G}{3} \right) \mathbf{i} \right] \otimes \left[ \sqrt{2}G \frac{{}^t \mathbf{s}_{n+1}}{\|{}^t \mathbf{s}_{n+1}\|} + 3\mu \mathbf{K}^d \mathbf{i} \right] \end{array} \right] \quad (0.182)$$

$$C_{n+1}^u = \begin{bmatrix} E^d - 2G^2\Delta\lambda \left( \frac{\sqrt{2}}{\|{}^t s_{n+1}\|} \left( I - \frac{1}{3}(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) \right) - \frac{2\sqrt{2}}{\|{}^t s_{n+1}\|} ({}^t n_{n+1} - \beta \mathbf{i}) \otimes ({}^t n_{n+1} - \beta \mathbf{i}) \right) \\ -\frac{1}{K} [2Gn_{n+1}] \otimes \left[ \sqrt{2}G \frac{{}^t s_{n+1}}{\|{}^t s_{n+1}\|} + 3\mu(K^d + b^2M - \mu^*bM) \mathbf{i} \right] \\ -\frac{1}{K} \left[ 3\beta \left( K^d - \frac{2G}{3} + b^2M - b\beta^*M \right) \right] \otimes \left[ \sqrt{2}G \frac{{}^t s_{n+1}}{\|{}^t s_{n+1}\|} + 3\mu(K^d + b^2M - \mu^*bM) \mathbf{i} \right] \\ +b(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) \end{bmatrix} \quad (0.183)$$

Dois outros resultados importantes, que serão utilizados nas formulações do

MEC do capítulo 3, são as seguintes derivadas:  $\frac{\partial \zeta_{n+1}^p}{\partial \varepsilon_{n+1}} = m_{n+1} \frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \varepsilon_{n+1}}$  e

$\frac{\partial \varepsilon_{n+1}^p}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \Delta\lambda \frac{\partial n_{n+1}}{\partial \varepsilon_{n+1}} + n_{n+1} \otimes \frac{\partial \Delta\lambda}{\partial \varepsilon_{n+1}}$ . Elas são dadas por:

$$\frac{\partial \zeta_{n+1}^p}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{3\beta\beta^*}{K} \left[ \frac{G}{\sqrt{{}^t J_2}} {}^t s_{n+1} + 3\mu K^d \mathbf{i} \right] \quad (0.184)$$

e

$$\frac{\partial \varepsilon_{n+1}^p}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \sqrt{2}G\Delta\lambda \left( \frac{1}{\|{}^t s_{n+1}\|} \left( I - \frac{1}{3}(\mathbf{i} \otimes \mathbf{i}) \right) - \frac{2}{\|{}^t s_{n+1}\|} ({}^t n_{n+1} - \beta \mathbf{i}) \otimes ({}^t n_{n+1} - \beta \mathbf{i}) \right) + \frac{1}{K} n_{n+1} \otimes \left[ \frac{G}{\sqrt{{}^t J_2}} {}^t s_{n+1} + 3\mu K^d \mathbf{i} \right] \quad (0.185)$$

para  $\varepsilon$  e  $p$  prescritos, com  $K = [G + 9\beta\mu K^d + h]$  e

$$\frac{\partial \zeta_{n+1}^p}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \frac{3\beta\beta^*}{K} \left[ \frac{G}{\sqrt{{}^t J_2}} {}^t s_{n+1} + 3\mu(K^d + b^2M - \mu^*bM) \mathbf{i} \right] \quad (0.186)$$

e

$$\frac{\partial \varepsilon_{n+1}^p}{\partial \varepsilon_{n+1}} = \sqrt{2} G \Delta \lambda \left( \frac{1}{\|{}^t s_{n+1}\|} \left( I - \frac{1}{3} (i \otimes i) \right) - \frac{2}{\|{}^t s_{n+1}\|} ({}^t n_{n+1} - \beta i) \otimes ({}^t n_{n+1} - \beta i) \right) + \frac{1}{K} n_{n+1} \otimes \left[ \frac{G}{\sqrt{{}^t J_2}} {}^t s_{n+1} + 3\mu (K^d + b^2 M - \mu^* b M) i \right] \quad (0.187)$$

para  $\varepsilon$  e  $\zeta$  prescritos, com  $K = [G + 9\beta\mu(K^d + b^2 M - bM\beta^*) + 9\mu\mu^*\beta M(\beta^* - b) + h]$



# FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTOURNO PARA POROELASTICIDADE E POROPLASTICIDADE

## Capítulo 4

### 4.1 – Introdução

O objetivo deste capítulo é o de apresentar formulações numéricas baseadas no método dos elementos de contorno para a resolução de problemas utilizando-se os modelos de comportamento mecânico dos meios porosos apresentados no capítulo 3.

Inicialmente, serão introduzidas as equações de campo (equações diferenciais) que dizem respeito às relações de equilíbrio, de compatibilidade, de conservação de massa e de fluxo interno do fluido, para os meios porosos saturados. A partir das equações de campo, utilizando-se teoremas de reciprocidade, serão apresentadas as equações integrais das poroelasticidade e poroplasticidade. Nesta última, será introduzido o campo de tensões iniciais. Serão discutidas as aproximações das variáveis de contorno e de domínio, bem como apresentadas as formas discretizadas das representações integrais.

Em seguida, são apresentadas as discretizações temporal e espacial para a resolução do problema de valor de contorno com os modelos poro-elástico e poro-elasto-plástico. Na discretização espacial, serão mostradas as equações algébricas do método dos elementos de contorno. No caso particular da poroplasticidade, duas formulações distintas serão abordadas. Cada formulação apresentando variáveis independentes diferentes. Ao final, apresentar-se-á a estratégia de solução iterativa para a poroplasticidade.

## 4.2 – Equações de Campo

O comportamento mecânico de um meio poroso saturado, elástico ou elasto-plástico, com domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$ , em regime quase estático e assumindo geometria de pequenas deformações, é descrito pelas relações constitutivas apresentadas no capítulo 3, complementadas pelas equações de campo (conservação de massa, equilíbrio e compatibilidade) e pelas condições de contorno.

Para o caso quase estático, que será considerado neste capítulo, a equação de equilíbrio local é dada por:

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{b} = 0 \quad (4.1)$$

sendo  $\mathbf{b}$  a força de volume da mistura sólido-fluido do meio poroso. O campo de deformação é dado em função do deslocamento do esqueleto sólido ( $\mathbf{u}$ ) como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (4.2)$$

sendo  $\mathbf{u}$  o campo de deslocamentos do esqueleto sólido.

Admitindo-se a hipótese de escoamento laminar do fluido nos poros do meio, considerada bastante razoável dentro dos campos de aplicação deste trabalho, será assumido como válida a clássica lei de Darcy linear, dada por:

$$\mathbf{q} = -\mathbf{k}(\text{grad } p - \mathbf{f}) \quad (4.3)$$

onde  $\mathbf{q}$  representa o vetor do fluxo de fluido,  $\mathbf{k}$  o tensor de permeabilidade e  $\mathbf{f}$  o vetor da força de volume do fluido. A equação da continuidade (conservação de massa) é dada por:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{q}) = \gamma \quad (4.4)$$

sendo  $\gamma$  a fonte de fluido com a derivada de  $\zeta$  tomada em relação ao tempo  $t$ .

As (4.1)-(4.4), em notação indicial, ficam, respectivamente:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.6)$$

$$q_i = -k_{ij}(p_{,j} - f_j) \quad (4.7)$$

$$\dot{\zeta} + q_{i,i} = \gamma \quad (4.8)$$

Para simplificar o estudo, deste ponto em diante, a permeabilidade do meio será considerada isotrópica, ou seja,  $k_{ij} = k$  escalar na (4.7). Aplicando-se o operador divergente à equação (4.7), obtem-se:

$$q_{i,i} = -k(p_{,kk} - f_{m,m}) \quad (4.9)$$

Substituindo-se a (4.9) na (4.8), chega-se a:

$$\dot{\zeta} - kp_{,kk} = (\gamma - kf_{m,m}) \quad (4.10)$$

### 4.3 – Representações Integrais para Poroelasticidade e Poroplasticidade

Neste item, será apresentada a dedução das equações integrais para as teorias da poroelasticidade e da poroplasticidade. Inicialmente, serão abordadas as equações

integrais da elastostática, que dizem respeito à parte sólida deformável do meio poroso. Em cada equação da elastostática, irá aparecer uma integral de domínio com o campo de poro pressões. No caso da poroplasticidade, uma integral de domínio a mais, com o campo de tensões iniciais, deverá aparecer. Em seguida, será mostrada a equação integral das poro pressões, que será relacionada com a equação da continuidade (4.8) através de uma integral de domínio.

As soluções fundamentais de Kelvin da elastostática, para uma carga unitária concentrada  $b_i(s) = \delta(s,p)e_i$ , aplicada no ponto fonte  $s$  do domínio infinito  $\Omega^*$ , sendo  $p$  o ponto campo,  $e_i$  o vetor unitário da base ortonormal na direção  $i$  e  $\delta$  o delta de Dirac, são dadas por:

$$u_{ij}^*(s,p) = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu)\delta_{ij} - r_{,i}r_{,j} \right\} \quad (4.11)$$

$$T_{ij}^*(s,p) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j} \right] + (1-2\nu)(r_{,j}\eta_i - r_{,i}\eta_j) \right] \quad (4.12)$$

$$\varepsilon_{ijk}^*(s,p) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)Gr} \left[ (1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik}) - r_{,i}\delta_{jk} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (4.13)$$

$$\sigma_{ijk}^*(s,p) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ (1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik} - r_{,i}\delta_{jk}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (4.14)$$

onde  $u_{ij}^*(s,p)$ ,  $T_{ij}^*(s,p)$ ,  $\varepsilon_{ijk}^*(s,p)$  e  $\sigma_{ijk}^*(s,p)$  são, respectivamente, as soluções fundamentais para os deslocamentos, as forças de superfície, as deformações e as tensões. O índice  $i$ , nas (4.11)-(4.14), representa a direção de aplicação da carga unitária,  $\delta$  é o delta de Kronecker,  $G$  o módulo de elasticidade transversal do material,  $\nu$  o seu coeficiente de Poisson,  $\eta$  o vetor unitário normal à superfície no ponto em consideração e  $r$  a distância entre os pontos fonte  $s$  e campo  $p$ .



No campo da poroelasticidade, as equações de equilíbrio (4.5) e de compatibilidade (4.6), no ponto fonte  $s$ , ficam escritas, derivando-se a eq.(3.4), respectivamente, como:

$$\sigma_{ij,j}(s) + b_i(s) = \sigma_{ij,j}^{ef}(s) - b\delta_{ij}p_{,j}(s) + b_i(s) = 0 \quad (4.15)$$

$$\varepsilon_{ij}(s) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(s) + u_{j,i}(s)) \quad (4.16)$$

onde, na (4.15), fez-se uso da expressão (3.4), com  $\sigma^{ef} = E:\varepsilon$ . As forças de superfície  $T_i(S)$ , no ponto  $S$  de  $\Gamma$ , são dadas por:

$$T_i(S) = \sigma_{ij}(S)\eta_j = (\sigma_{ij}^{ef}(S) - b\delta_{ij}p(S))\eta_j \quad (4.17)$$

e a lei de Hooke expressa pelas:

$$\sigma_{ij}^{ef}(s) = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(s) \quad (4.18)$$

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (4.19)$$

com  $C_{ijkl}$  representando o tensor constitutivo elástico de quarta ordem. O tensor de tensões totais, com as (4.18) (4.19), é dado pela seguinte expressão:

$$\sigma_{ij}(s) = 2G\varepsilon_{ij}(s) + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(s) - b\delta_{ij}p(s) \quad (4.20)$$

Diferenciando-se a (4.20) e aplicando-se a(4.16), obtém-se a equação de Navier a partir da (4.15), com a derivada da poro pressão  $p$ , dada por:

$$G \left[ u_{i,jj}(s) + \frac{1}{(1-2\nu)} u_{j,ij}(s) \right] + b_i(s) - b \delta_{ij} p_{,j}(s) = 0 \quad (4.21)$$

Para se obter as representações integrais de deslocamentos, tensões e deformações da elastostática, será utilizado o teorema da reciprocidade de Betti. A aplicação do teorema pressupõe dois estados elásticos distintos (o fundamental e o real). O fundamental é dado pelas equações (4.11)-(4.14). O estado elástico real é dado pela (4.18), que relaciona linearmente e proporcionalmente  $\sigma^{ef}$  com  $\varepsilon$ . Assim, sendo, o teorema se expressa como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{ef} \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (4.22)$$

ou, para se introduzir o termo da poro-pressão, utiliza-se a relação (4.20), ou seja:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} + b \delta_{ij} p) \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (4.23)$$

Com a equação de compatibilidade (4.16), aplicando-se o teorema da divergência na (4.23), chega-se a:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij} u_{,j}^* \eta_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,i}^* u_j d\Omega + b \int_{\Omega} \delta_{ij} p \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^* u_{,j} \eta_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,i}^* u_j d\Omega \quad (4.24)$$

Sabendo-se que a equação de equilíbrio do problema fundamental é dada por  $\sigma_{ji,i}^* + \delta(s,p) e_j = 0$ , a (4.24) fica:

$$\int_{\Gamma} T_j u_j^* d\Gamma - \int_{\Omega} b_j u_j^* d\Omega + b \int_{\Omega} \delta_{ij} p \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Gamma} T_j^* u_j d\Gamma + \int_{\Omega} \delta(s,p) e_j u_j d\Omega \quad (4.25)$$

na qual foi utilizada a (4.17). Por definição,  $\int_{\Omega} \delta(s,p) e_j u_j d\Omega = u_j(s)$ . Portanto, a

(4.25), desprezando-se as forças de volume  $b_j$ , fica:

$$C_{ik}(s)\dot{u}_k(s) = -\int_{\Gamma} T_{ij}^*(s, P)\dot{u}_j(P)d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, P)\dot{T}_j(P)d\Gamma + \int_{\Omega} b\delta_{jk}\varepsilon_{ijk}^*(s, p)\dot{p}(p)d\Omega \quad (4.26)$$

A (4.26) é a equação integral dos deslocamentos escrita em taxas. O termo  $C_{ik}$  depende da posição do ponto fonte (se pertence ou não ao domínio  $\Omega$ ). Caso ele pertença ao contorno  $\Gamma$ ,  $C_{ik}$  depende da geometria deste no ponto em consideração. As letras minúsculas entre parênteses na (4.26) indicam que o ponto pertence ao domínio, enquanto as maiúsculas que ele pertence ao contorno. A equação integral das tensões totais é obtida diferenciando-se a (4.26) para se obter as deformações, e aplicando-se no resultado obtido a (4.20). Assim sendo, tem-se:

$$\dot{\sigma}_{ij}(s) = -\int_{\Gamma} S_{ijk}(s, P)\dot{u}_k(P)d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, P)\dot{T}_k(P)d\Gamma + \int_{\Omega} b(\delta_{kl})E_{ijkl}(s, p)\dot{p}(p)d\Omega + g_{ij}(\delta_{kl}\dot{p}(s)) \quad (4.27)$$

sendo que as soluções fundamentais na (4.27) são dadas por:

$$S_{ijk}(s, p) = \frac{2G}{4\pi(1-\nu)r^2} \{2r_{,i} \left[ (1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] + 2\nu(\eta_{i,r_j}r_{,k} + \eta_{j,r_i}r_{,k}) + (1-2\nu)(2\eta_{k,r_i}r_{,j} + \eta_{j,i}\delta_{ik} + \eta_{i,j}\delta_{jk}) - (1-4\nu)\eta_{k,i}\delta_{ij} \} \quad (4.28)$$

$$D_{ijk}(s, p) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu) \left[ \delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k} \right] + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\} \quad (4.29)$$

$$E_{ijkl}(s, p) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu) \left[ \delta_{ii}\delta_{jk} + \delta_{jj}\delta_{ik} - \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\delta_{ij}r_{,k}r_{,l} \right] + 2\nu \left[ \delta_{ik}r_{,j}r_{,l} + \delta_{jl}r_{,i}r_{,k} + \delta_{il}r_{,j}r_{,k} + \delta_{jk}r_{,i}r_{,l} \right] + 2\delta_{kl}r_{,i}r_{,j} - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l} \right\} \quad (4.30)$$

enquanto que o termo livre  $g_{ij}(\delta_{kl}p(s))$  é dado por:

$$g_{ij}(\delta_{kl}\dot{p}(s)) = -\frac{1}{8(1-\nu)} \left\{ 2[\delta_{ij}\dot{p}(s)] + \delta_{ij}(1-4\nu)[2\dot{p}(s)] \right\} \quad (4.31)$$

As (4.15)-(4.31) são as equações da poroelasticidade. Deve-se observar que, nas (4.26) e (4.27), aparecem duas integrais de domínio com o campo de poro pressões. No caso da poroplasticidade, algumas definições e notações novas são necessárias. Assim, definem-se tensão elástica  $\sigma_{ij}^e$ , tensão efetiva  $\sigma_{ij}^{ef}$  e tensão total  $\sigma_{ij}$  como:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad (4.32)$$

$$\sigma_{ij}^{ef} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} - \sigma_{ij}^p = \sigma_{ij}^e - \sigma_{ij}^p \quad (4.33)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{ef} - bp\delta_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} - \sigma_{ij}^p - bp\delta_{ij} \quad (4.34)$$

Na figura (4.1), pode-se visualizar as definições dadas nas (4.32), (4.33) e (4.34), no caso de um modelo unidimensional. A tensão elástica  $\sigma^e$ , determinada com a lei de Hooke, conhecendo-se a deformação  $\epsilon$ , é dada pela soma das tensões efetiva  $\sigma^{ef}$  (que é a tensão elasto-plástica na parte sólida do meio) e corretiva  $\sigma^p$ . Por outro lado, a tensão total da (4.34) é a soma das parcelas que atuam na parte sólida do meio poroso ( $\sigma^{ef}$ ) e na líquida (poro pressão).

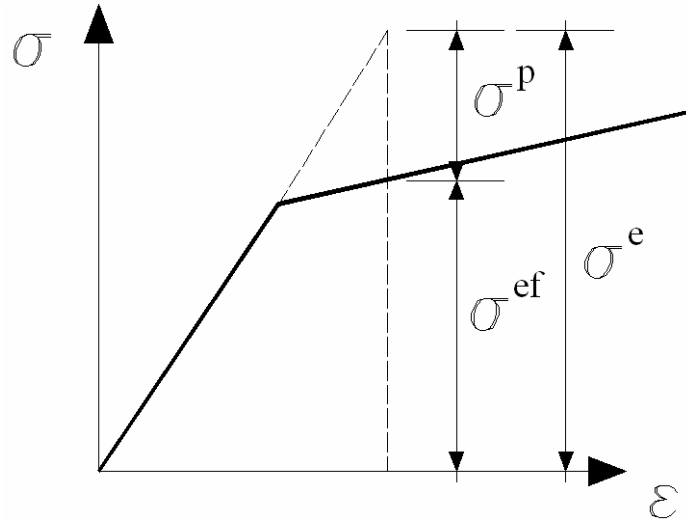


Figura 4.1 – Definições das tensões do modelo poro-elasto-plástico.

Com estas definições, pode-se adotar o par  $(\sigma^e, \varepsilon)$  para representar o estado real do teorema da reciprocidade de Betti. O estado fundamental continua sendo dado pelas soluções elásticas de Kelvin já apresentadas. Assim sendo, a equação de equilíbrio e a equação das forças de superfície, utilizando-se as definições das (4.32), (4.33) e (4.34) ficam, respectivamente, dadas por:

$$\sigma_{ij,j}(s) + b_i(s) = \sigma_{ij,j}^e(s) - \sigma_{ij,j}^p(s) - b\delta_{ij}p_{,j}(s) + b_i(s) = 0 \quad (4.35)$$

$$T_i(S) = \sigma_{ij}(S)\eta_j = \left( \sigma_{ij}^e(S) - \sigma_{ij}^p(S) - b\delta_{ij}p(S) \right) \eta_j \quad (4.36)$$

O tensor de tensões totais e a equação de Navier ficam, respectivamente:

$$\sigma_{ij}(s) = 2G\varepsilon_{ij}(s) + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij}\varepsilon_{kk}(s) - \sigma_{ij}^p(s) - b\delta_{ij}p(s) \quad (4.37)$$

$$G \left[ u_{i,ij}(s) + \frac{1}{(1-2\nu)} u_{j,ij}(s) \right] + b_i(s) - \sigma_{ij,j}^p(s) - b\delta_{ij}p_{,j}(s) = 0 \quad (4.38)$$

A reciprocidade, representada por  $\int_{\Omega} \sigma_{ij}^e \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega$ , com as (4.32), (4.33) e (4.34), fica:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} + \sigma_{ij}^p + b\delta_{ij}p) \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (4.39)$$

Aplicando-se o teorema de Green na (4.39), chega-se nas representações integrais dos deslocamentos e das tensões, após diferenciação. Elas são dadas, respectivamente, pelas:

$$\begin{aligned} C_{ik}(s) \dot{u}_k(s) = & - \int_{\Gamma} T_{ij}^*(s, P) \dot{u}_j(P) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, P) \dot{T}_j(P) d\Gamma + \\ & b \int_{\Omega} \delta_{jk} \varepsilon_{ijk}^*(s, p) \dot{p}(p) d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^*(s, p) \dot{\sigma}_{jk}^p(p) d\Omega \end{aligned} \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}(s) = & - \int_{\Gamma} S_{ijk}(s, P) \dot{u}_k(P) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, P) \dot{T}_k(P) d\Gamma + \\ & b \int_{\Omega} (\delta_{kl}) E_{ijkl}(s, p) \dot{p}(p) d\Omega + \int_{\Omega} E_{ijkl}(s, p) \dot{\sigma}_{kl}^p(p) d\Omega + \\ & b g_{ij}(\delta_{kl} \dot{p}(s)) + g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^p(s)) \end{aligned} \quad (4.41)$$

As soluções fundamentais, nas (4.40) e (4.41), são as mesmas já mostradas. O termo livre  $g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^p(s))$  é dado por:

$$g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^p(s)) = - \frac{1}{8(1-\nu)} \{ 2\dot{\sigma}_{ij}^p(s) + (1-4\nu)\dot{\sigma}_{mm}^p(s)\delta_{ij} \} \quad (4.42)$$

Observe que surge uma integral de domínio a mais nas (4.40) e (4.41), com as tensões de correção  $\sigma^p$ . Na realidade,  $\sigma^p$  pode ser associado a qualquer campo de tensões iniciais aplicado no domínio  $\Omega$ . No presente caso, ele representa a correção das tensões do modelo poro-elasto-plástico (ver figura (4.1)).

A partir da lei de Darcy, dada pela (4.7), chega-se na representação integral das poro pressões. Da mesma forma que na elastostática foi utilizada a reciprocidade de Betti, será utilizada uma outra relação de reciprocidade para a dedução da equação integral das poro pressões. A (4.7) com permeabilidade isotrópica, fica:

$$q_i + k(p_{,i} - f_i) = 0 \quad (4.43)$$

Observa-se, na (4.43), que a relação entre o fluxo  $q_i$  e o gradiente da pressão  $p_{,i}$  é linear. No entanto a equação não é proporcional devido ao termo  $kf_i$ . Para que a reciprocidade seja válida, define-se o fluxo proporcional  $q_i^p$  como:

$$q_i^p = q_i - kf_i = -kp_{,i} \quad (4.44)$$

de tal modo que  $q_i^p$  seja proporcional a  $p_{,i}$ . O gráfico da figura (4.2) ilustra a situação, mostrando as relações lineares de  $q_i$  e  $q_i^p$  com  $p_{,i}$ .

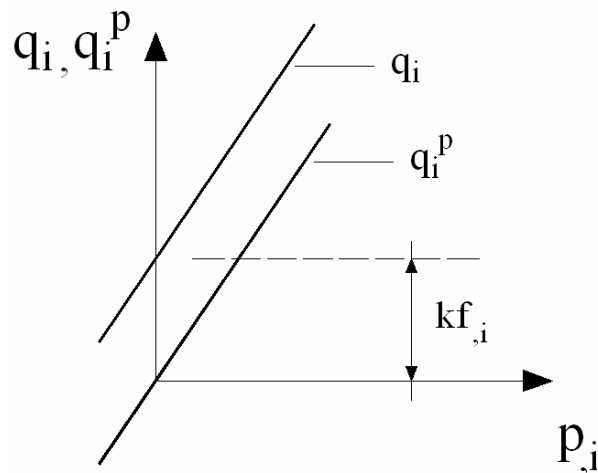


Figura 4.2 – Relações lineares entre fluxos e gradiente da poro pressão.

A reciprocidade, dada pela (4.45), deve ser aplicada com  $q_i^p$  como o estado real.

$$\int_{\Omega} q_i^p p_{,i}^* d\Omega = \int_{\Omega} q_i^* p_{,i} d\Omega \quad (4.45)$$

Na (4.45),  $p_{,i}^*$  e  $q_i^*$  são as soluções do problema fundamental definido pela equação:

$$p_{,ii}^*(s,p) = \frac{\delta(s,p)}{k} \quad (4.46)$$

com  $\delta$  representando o delta de Dirac. Uma vez encontrada a solução fundamental para a poro pressão  $p^*$ , o fluxo é determinado através da lei de Darcy  $q_i^* = -kp_{,i}^*$ . A solução da equação (4.46) para poro pressão é dada por:

$$p^*(s,p) = \frac{1}{2\pi k} \ln(r) \quad (4.47)$$

lembrando que  $r$  é a distância entre os pontos fonte e campo. Com a (4.47), o fluxo fundamental fica:

$$q_i^*(s,p) = -\frac{r_{,i}}{2\pi r} \quad (4.48)$$

Um outro resultado importante é o do fluxo perpendicular ao contorno  $q^*(s,P)$ , dado, a partir da (4.48), por:

$$q^*(s,P) = -\frac{r_{,n}}{2\pi r} \quad (4.49)$$



sendo  $\eta$  o vetor unitário normal ao contorno no ponto considerado. Substituindo-se a (4.44) na (4.45), obtém-se:

$$\int_{\Omega} (q_i - kf_i) p_{,i}^* d\Omega = \int_{\Omega} q_i^* p_{,i} d\Omega \quad (4.50)$$

Utilizando-se o teorema de Green na (4.50), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} p^* q_i \eta_i d\Gamma - \int_{\Gamma} q_i^* p \eta_i d\Gamma - \int_{\Omega} p^* q_{i,i} d\Omega + \int_{\Omega} p q_{i,i}^* d\Omega - \int_{\Omega} kf_i p_{,i}^* d\Omega = 0 \quad (4.51)$$

Tendo-se em vista que  $q_{i,i}^* = -\delta(s,p)$  e que  $\int_{\Omega} p \delta(s,p) d\Omega = p(s)$ , chega-se finalmente na equação integral das poro pressões, dada por:

$$\begin{aligned} c(s)p(s) = & - \int_{\Gamma} q^*(s,P)p(P)d\Gamma + \int_{\Gamma} p^*(s,P)q(P)d\Gamma - \\ & \int_{\Omega} p^*(s,p)q_{i,i}(p)d\Omega - \int_{\Omega} p_{,i}^*(s,p)kf_i(p)d\Omega \end{aligned} \quad (4.52)$$

sendo  $c(s)$  uma variável escalar dependente da posição de  $s$ . Duas integrais de domínio aparecem na (4.52). Na primeira integral, o termo  $q_{i,i}$  pode ser substituído de acordo com a (4.8), resultando:

$$\begin{aligned} c(s)p(s) = & - \int_{\Gamma} q^*(s,P)p(P)d\Gamma + \int_{\Gamma} p^*(s,P)q(P)d\Gamma - \\ & \int_{\Omega} p^*(s,p)\gamma(p)d\Omega + \int_{\Omega} p^*(s,p)\zeta(p)d\Omega - \int_{\Omega} p_{,i}^*(s,p)kf_i(p)d\Omega \end{aligned} \quad (4.53)$$

As integrais de domínio com os termos  $\gamma$  e  $f_i$  podem ser integradas diretamente se estas variáveis forem constantes. Nos desenvolvimentos que se seguirão,  $\gamma$  e  $f_i$  serão desprezados.

A variável  $\zeta$ , variação da quantidade de fluido, conforme apresentado no capítulo 3, é diferente para os modelos poro-elástico e poro-elasto-plástico. No modelo poro-elástico, se  $\dot{\zeta}$  for substituída, na (4.53), pela expressão (3.3), chega-se na seguinte equação integral:

$$c(s)p(s) = -\int_{\Gamma} q^*(s, P)p(P)d\Gamma + \int_{\Gamma} p^*(s, P)q(P)d\Gamma + \int_{\Omega} p^*(s, p) \left( \frac{\dot{p}(p)}{M} + b\text{Tr}(\dot{\varepsilon}(p)) \right) d\Omega \quad (4.54)$$

Para o modelo poro-elasto-plástico, observando-se as (3.18), (3.19) e (3.22), chega-se a:

$$c(s)p(s) = -\int_{\Gamma} q^*(s, P)p(P)d\Gamma + \int_{\Gamma} p^*(s, P)q(P)d\Gamma + \int_{\Omega} p^*(s, p) \left( \frac{\dot{p}(p) + \dot{p}^p(p)}{M} + b\text{Tr}(\dot{\varepsilon}(p)) \right) d\Omega \quad (4.55)$$

sendo  $\dot{p}^p(p) = M \left[ \dot{\zeta}^p(p) - b\text{Tr}(\dot{\varepsilon}^p(p)) \right]$ .

A utilização das equações (4.53) ou (4.54) na poroelasticidade e das equações (4.53) ou (4.55) na poroplasticidade, em conjunto com as equações da elastostática, leva a formulações distintas de elementos de contorno. Nos próximos itens, esta questão será discutida com maiores detalhes.

#### 4.4 – Discretização no Tempo

As equações integrais dos deslocamentos, das tensões e das poro pressões, do item 4.3, devem ser, integradas no tempo. As (4.40), (4.41) e (4.55), por exemplo, seriam reescritas como:

$$\begin{aligned}
C_{ik}(s) \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}_k(s) dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} T_{ij}^*(s, P) \dot{u}_j(P) d\Gamma dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, P) \dot{T}_j(P) d\Gamma dt + \\
& b \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \delta_{jk} \varepsilon_{ijk}^*(s, p) \dot{p}(p) d\Omega dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^*(s, p) \dot{\sigma}_{jk}^p(p) d\Omega dt
\end{aligned} \tag{4.56}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \dot{\sigma}_{ij}(s) dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} S_{ijk}(s, P) \dot{u}_k(P) d\Gamma dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, P) \dot{T}_k(P) d\Gamma dt + \\
& b \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (\delta_{kl}) E_{ijkl}(s, p) \dot{p}(p) d\Omega dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} E_{ijkl}(s, p) \dot{\sigma}_{kl}^p(p) d\Omega dt + \\
& b \int_{t_1}^{t_2} g_{ij}(\delta_{kl} \dot{p}(s)) dt + \int_{t_1}^{t_2} g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^p(s)) dt
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
c(s) \int_{t_1}^{t_2} \dot{p}(s) dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} q^*(s, P) p(P) d\Gamma dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} p^*(s, P) q(P) d\Gamma dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} p^*(s, p) \left( \frac{\dot{p}(p) + \dot{p}^p(p)}{M} + b \text{Tr}(\dot{\varepsilon}(p)) \right) d\Omega dt
\end{aligned} \tag{4.58}$$

com  $t_1$  e  $t_2$  representando dois instantes distintos de tempo. Chamando  $\Delta t = t_2 - t_1$ , e efetuando-se as integrais no tempo, obtêm-se, das (4.56)-(4.58):

$$\begin{aligned}
C_{ik}(s) [u_k(s, t_2) - u_k(s, t_1)] &= - \int_{\Gamma} T_{ij}^*(s, P) [u_j(P, t_2) - u_j(P, t_1)] d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, P) [T_j(P, t_2) - T_j(P, t_1)] d\Gamma + b \int_{\Omega} \delta_{jk} \varepsilon_{ijk}^*(s, p) [p(p, t_2) - p(p, t_1)] d\Omega + \\
& \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^*(s, p) [\sigma_{jk}^p(p, t_2) - \sigma_{jk}^p(p, t_1)] d\Omega
\end{aligned} \tag{4.59}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(s, t_2) - \sigma_{ij}(s, t_1) &= - \int_{\Gamma} S_{ijk}(s, P) [u_k(P, t_2) - u_k(P, t_1)] d\Gamma + \\
& \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, P) [T_k(P, t_2) - T_k(P, t_1)] d\Gamma + b \int_{\Omega} (\delta_{kl}) E_{ijkl}(s, p) [p(p, t_2) - p(p, t_1)] d\Omega + \\
& \int_{\Omega} E_{ijkl}(s, p) [\sigma_{kl}^p(p, t_2) - \sigma_{kl}^p(p, t_1)] d\Omega + \\
& b g_{ij}(\delta_{kl} [p(s, t_2) - p(s, t_1)]) + g_{ij}([\sigma_{kl}^p(s, t_2) - \sigma_{kl}^p(s, t_1)])
\end{aligned} \tag{4.60}$$

$$\begin{aligned}
c(s)p(s)\Delta t = & -\int_{\Gamma} q^*(s,P)p(P)d\Gamma\Delta t + \int_{\Gamma} p^*(s,P)q(P)d\Gamma\Delta t + \\
& \int_{\Omega} p^*(s,p) \left( \frac{p(p,t_2) - p(p,t_1) + p^p(p,t_2) - p^p(p,t_1)}{M} + b\text{Tr}(\varepsilon(p,t_2) - \varepsilon(p,t_1)) \right) d\Omega
\end{aligned} \quad (4.61)$$

Imaginando que  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  seja um típico intervalo de tempo da discretização temporal, e que o incremento da variável  $\bullet$ , dentro do passo de tempo, seja dado por  $\Delta(\bullet) = \bullet_{n+1} - \bullet_n$ , as equações integrais (4.59)-(4.61) ficariam, respectivamente, dadas por:

$$\begin{aligned}
C_{ik}(s)\Delta u_k(s) = & -\int_{\Gamma} T_{ij}^*(s,P)\Delta u_j(P)d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s,P)\Delta T_j(P)d\Gamma + \\
& b \int_{\Omega} \delta_{jk} \varepsilon_{ijk}^*(s,p)\Delta p(p)d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^*(s,p)\Delta \sigma_{jk}^p(p)d\Omega
\end{aligned} \quad (4.62)$$

$$\begin{aligned}
\Delta \sigma_{ij}(s) = & -\int_{\Gamma} S_{ijk}(s,P)\Delta u_k(P)d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s,P)\Delta T_k(P)d\Gamma + \\
& b \int_{\Omega} (\delta_{kl}) E_{ijkl}(s,p)\Delta p(p)d\Omega + \int_{\Omega} E_{ijkl}(s,p)\Delta \sigma_{kl}^p(p)d\Omega + \\
& b g_{ij}(\delta_{kl}\Delta p(s)) + g_{ij}(\Delta \sigma_{kl}^p(s))
\end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned}
c(s)p(s) = & -\int_{\Gamma} q^*(s,P)p(P)d\Gamma + \int_{\Gamma} p^*(s,P)q(P)d\Gamma + \\
& \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} p^*(s,p) \left( \frac{\Delta p(p) + \Delta p^p(p)}{M} + b\text{Tr}(\Delta \varepsilon(p)) \right) d\Omega
\end{aligned} \quad (4.64)$$

#### 4.5 – Discretização Espacial: Aproximação das Variáveis no Contorno e no Domínio

Através da discretização espacial, obtêm-se as equações algébricas do método dos elementos de contorno. Em conjunto com a discretização temporal, pode-se obter soluções numéricas do problema de valor de contorno. As equações integrais dos deslocamentos, tensões e poro pressões possuem integrais de contorno e de domínio.

Conseqüentemente, o contorno  $\Gamma$  do corpo deverá ser discretizado em  $N_e$  elementos, de modo a se ter  $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N_e} \Gamma_j$ , enquanto seu domínio  $\Omega$  deverá ser discretizado em  $N_c$  células, com  $\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_c} \Omega_j$ .

No contorno discretizado em elementos, são definidos nós. A cada nó, associa-se um conjunto de variáveis de contorno: deslocamentos e forças de superfície, provenientes das equações da elastostática, e poro pressão e fluxo normal, provenientes da equação das poro pressões. Assim sendo, definem-se:

$${}^j u_k(P) = \phi_m(P) {}^j U_k^m \quad (4.65)$$

$${}^j T_k(P) = \phi_m(P) {}^j T_k^m \quad (4.66)$$

$${}^j p(P) = \phi_m(P) {}^j P_C^m \quad (4.67)$$

$${}^j q(P) = \phi_m(P) {}^j Q_C^m \quad (4.68)$$

onde o índice  $j$  representa o elemento  $\Gamma_j$ ,  $m$  representa os nós de  $\Gamma_j$ ,  $\phi_m$  são as funções de forma e  $k$ , nas (4.65) e (4.66), indica a direção segundo as coordenadas globais. As variáveis nodais de deslocamentos, forças, poro pressão e fluxo normal estão representadas, respectivamente, por  $U$ ,  $T$ ,  $P_C$  e  $Q_C$  nas (4.65), (4.66), (4.67) e (4.68), enquanto  ${}^j u_k(P)$ ,  ${}^j T_k(P)$ ,  ${}^j p(P)$  e  ${}^j q(P)$  representam estas mesmas variáveis calculadas num ponto  $P$  qualquer de  $\Gamma_j$ .

Da mesma forma, no domínio discretizado, são definidos nós e as variáveis são aproximadas por células. As variáveis de domínio, nos modelos poro-elástico e poro-elasto-plástico, são: a poro pressão  $p$ , as tensões corretivas  $\sigma_{kl}^p$ , as deformações  $\varepsilon_{kl}$ , a poro pressão corretiva  $p^p$  e a variação da quantidade de fluido  $\zeta$ . Assim, definem-se:

$${}^j p(p) = \phi_m(p) {}^j P_1^m \quad (4.69)$$

$${}^j \sigma_{kl}^p(p) = \phi_m(p) {}^j \sigma_{kl}^{p,m} \quad (4.70)$$

$${}^j \varepsilon_{kl}(p) = \phi_m(p) {}^j \varepsilon_{kl}^m \quad (4.71)$$

$${}^j \zeta(p) = \phi_m(p) {}^j \zeta^m \quad (4.72)$$

onde agora o índice  $j$  representa a célula  $\Omega_j$ ,  $m$  relaciona-se com os nós de  $\Omega_j$  e com as funções de forma adotadas e  $P_1$ ,  $\sigma_{kl}^p$ ,  $\varepsilon_{kl}$ ,  $P^p$  e  $\zeta$  são as variáveis nodais internas utilizadas para se calcular, respectivamente, a poro pressão  ${}^j p(p)$ , as tensões corretivas  ${}^j \sigma_{kl}^p(p)$ , as deformações  ${}^j \varepsilon_{kl}(p)$ , a poro pressão corretiva  ${}^j p^p(p)$  e a variação de fluido  ${}^j \zeta(p)$ , do ponto  $p$  de  $\Omega_j$ . As cinco aproximações não são necessariamente utilizadas todas de uma vez numa formulação, somente as que forem necessárias entre elas.

As aproximações das variáveis adotadas neste trabalho são lineares, tanto nos elementos de  $\Gamma$  quanto nas células de  $\Omega$ . Os nós de contorno são considerados contínuos, localizados nas extremidades dos elementos retos, prevendo-se, entretanto, a possibilidade de consideração de nós duplos nos cantos ou entre elementos com descontinuidade de carga ou de qualquer outra variável de contorno prescrita. Os nós de célula também são considerados contínuos, localizados nos vértices das células triangulares. Excetua-se, entretanto, o caso de células com um ou dois vértices pertencentes ao contorno. Neste caso, o nó passa a ser interno à célula, deslocado do vértice em direção ao centróide da célula de uma distância pré-fixada (ver figura (4.3)).

Uma vez discretizado o corpo e aproximadas as variáveis do problema, as equações integrais passam a ser representadas por somatórios de integrais sobre as unidades discretizadas. As (4.62)-(4.64), por exemplo, ficariam expressas como:

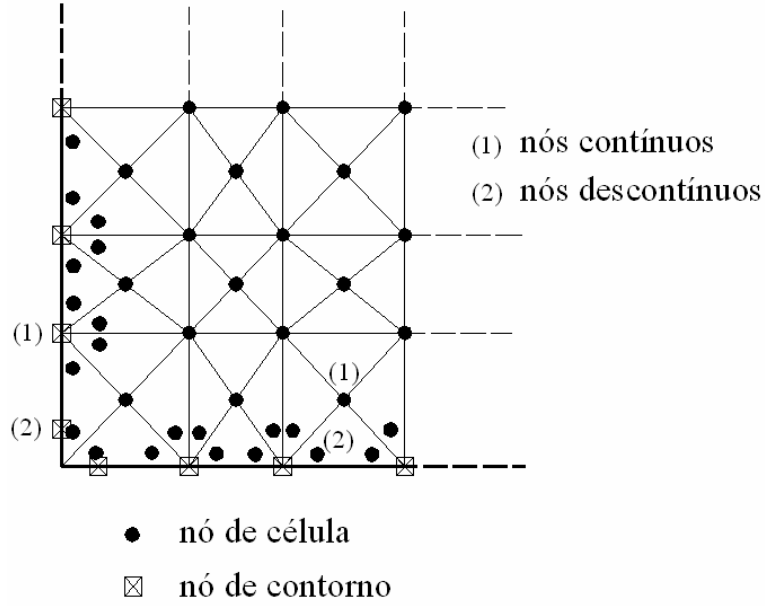


Figura 4.3 – Nós de contorno e de célula. Contínuos e descontínuos.

$$C_{ik}(s)\Delta u_k(s) = -\sum_{j=1}^{N_c} \int_{\Gamma_j} T_{ik}^*(s, P)\phi_m(P)\Delta^j U_k^m d\Gamma_j + \sum_{j=1}^{N_c} \int_{\Gamma_j} u_{ik}^*(s, P)\phi_m(P)\Delta^j T_k^m d\Gamma_j + \sum_{j=1}^{N_c} b \int_{\Omega_j} \delta_{kl} \varepsilon_{ikl}^*(s, p)\phi_m(p)\Delta^j P_1^m d\Omega_j + \sum_{j=1}^{N_c} \int_{\Omega_j} \varepsilon_{ikl}^*(s, p)\phi_m(p)\Delta^j \sigma_{kl}^m d\Omega_j \quad (4.73)$$

$$\Delta \sigma_{pq}(s) = -\sum_{j=1}^{N_c} \int_{\Gamma_j} S_{pqk}(s, P)\phi_m(P)\Delta^j U_k^m d\Gamma_j + \sum_{j=1}^{N_c} \int_{\Gamma_j} D_{pqk}(s, P)\phi_m(P)\Delta^j T_k^m d\Gamma_j + \sum_{j=1}^{N_c} b \int_{\Omega_j} (\delta_{kl}) E_{pqkl}(s, p)\phi_m(p)\Delta^j P_1^m d\Omega_j + \sum_{j=1}^{N_c} \int_{\Omega_j} E_{pqkl}(s, p)\phi_m(p)\Delta^j \sigma_{kl}^m d\Omega_j + b g_{pq} (\delta_{kl} \Delta^s P_1) + g_{pq} (\Delta^s \sigma_{kl}^p) \quad (4.74)$$

$$c(s) {}^s P_1 = -\sum_{j=1}^{N_c} \int_{\Gamma_j} q^*(s, P)\phi_m(P) {}^j P_C^m d\Gamma_j + \sum_{j=1}^{N_c} \int_{\Gamma_j} p^*(s, P)\phi_m(P) {}^j Q_C^m d\Gamma_j + \frac{1}{\Delta t} \sum_{j=1}^{N_c} \int_{\Omega_j} p^*(s, p)\phi_m(p) \left( \frac{\Delta^j P_1^m + \Delta^j p^{pm}}{M} + b \text{Tr}(\Delta^j \varepsilon^m) \right) d\Omega_j \quad (4.75)$$

Na (4.74),  $\Delta^s P_i$  e  $\Delta^s \sigma_{kl}^p$  são, respectivamente, as variáveis de poro pressão interna e de tensão corretiva do nó  $s$ , assim como tem o mesmo significado  $^s P_i$  na (4.75). Supõe-se, é claro, que o ponto fonte coincida com o nó  $s$ .

#### 4.6 – Equações Algébricas do MEC para Poroelasticidade

A partir das equações integrais discretizadas, obtêm-se as equações algébricas do método dos elementos de contorno. As equações são escritas em função das variáveis incrementais no tempo. Com o modelo poro-elástico, o sistema de equações algébricas fica linear. Neste item, serão apresentadas as equações algébricas do MEC para poroelasticidade. As equações são de dois tipos: de contorno (deslocamentos e poro pressão) e de domínio (tensões e poro pressão), de acordo com a posição do ponto fonte.

Seja  $2N$  o número de variáveis de contorno de deslocamento e de força de superfície, sendo  $N$  o número de nós de contorno (simples e duplos). Escrevendo-se  $2N$  equações algébricas a partir da equação integral dos deslocamentos (4.26) da poroelasticidade, chega-se ao sistema:

$$[H]\{\Delta U\} = [G]\{\Delta T\} + [Q][D]\{\Delta p_i\} \quad (4.76)$$

onde  $[H]$ ,  $[G]$  e  $[Q]$  são matrizes de influência determinadas integrando-se, na (4.26), as soluções fundamentais multiplicadas pelas funções de forma adotadas, enquanto  $\{\Delta U\}$ ,  $\{\Delta T\}$  e  $\{\Delta p_i\}$  são, respectivamente, vetores com os incrementos das variáveis de contorno de deslocamento e de força e de domínio de poro pressão. Observe que os vetores  $\{\Delta U\}$  e  $\{\Delta T\}$  têm  $2N$  componentes e  $\{\Delta p_i\}$  tem  $M$  componentes, sendo  $M$  o número de nós internos de célula. Escrevendo-se  $3M$  equações algébricas com a (4.27) (a partir deste momento os termos livres das equações das tensões serão omitidos, pois eles já estarão embutidos dentro das matrizes dos sistemas algébricos), chega-se a:



$$\{\Delta\sigma\} = -[H']\{\Delta U\} + [G']\{\Delta T\} + b[Q'] [D]\{\Delta p_i\} \quad (4.77)$$

sendo  $[H']$ ,  $[G']$  e  $[Q']$  matrizes de influência também obtidas por integração e  $\{\Delta\sigma\}$  o vetor de dimensão  $3M$  com as tensões totais nos nós internos.

Prescrevendo-se, para cada coordenada de cada nó, deslocamento ou força de superfície, e reunindo-se as incógnitas de contorno no vetor  $\{\Delta X\}$ , as (4.76) e (4.77) ficam, respectivamente, dadas por:

$$[A]\{\Delta X\} = \{\Delta F\} + b[Q][D]\{\Delta p_i\} \quad (4.78)$$

$$\{\Delta\sigma\} = -[A']\{\Delta X\} + \{\Delta F'\} + b[Q'] [D]\{\Delta p_i\} \quad (4.79)$$

sendo  $[A]$  e  $[A']$  matrizes de influência das variáveis de  $\{\Delta X\}$  e  $\{\Delta F\}$  e  $\{\Delta F'\}$  vetores conhecidos, com as influências das variáveis de contorno prescritas.

Isolando-se  $\{\Delta X\}$  na (4.78), obtém-se:

$$\{\Delta X\} = [A]^{-1} \{ \{\Delta F\} + b[Q][D]\{\Delta p_i\} \} \quad (4.80)$$

Substituindo-se a (4.80) na equação das tensões (4.78), obtém-se:

$$\{\Delta\sigma\} = -[A'] [A]^{-1} \{ \{\Delta F\} + b[Q][D]\{\Delta p_i\} \} + \{\Delta F'\} + b[Q'] [D]\{\Delta p_i\} \quad (4.81)$$

ou, reunindo-se os termos em comum:

$$\{\Delta\sigma\} = -[A'] [A]^{-1} \{\Delta F\} + \{\Delta F'\} + b \left[ -[A'] [A]^{-1} [Q] + [Q'] \right] [D]\{\Delta p_i\} \quad (4.82)$$

Simplificando-se a (4.82), tem-se:

$$\{\Delta\sigma\} = \{\Delta N\} + b[S][D]\{\Delta p_i\} \quad (4.83)$$

com

$$\{\Delta N\} = -[A'][A]^{-1}\{\Delta F\} + \{\Delta F'\} \quad (4.84)$$

$$[S] = -[A'][A]^{-1}[Q] + [Q'] \quad (4.85)$$

Escrevendo-se  $N$  equações de contorno com a equação integral das poro pressões (4.53), obtém-se o sistema:

$$[H_f]\{P_c\} = [\bar{G}_f]\{Q_c\} + [\bar{Q}_f]\{\Delta\zeta\} \quad (4.86)$$

Alternativamente à (4.53), pode-se utilizar a (4.54), na qual está implícita a relação constitutiva do modelo poro-elástico  $\zeta = \zeta(p, \varepsilon)$ . Assim, como alternativa à (4.86), tem-se a equação:

$$[H_f]\{P_c\} = [\bar{G}_f]\{Q_c\} + \frac{1}{M\Delta t}[\bar{Q}_f]\{\Delta p_i\} + \frac{b}{\Delta t}[\bar{Q}_f][D]^T\{\Delta\varepsilon\} \quad (4.87)$$

Nas (4.86) e (4.87),  $[H_f]$ ,  $[\bar{G}_f]$  e  $[\bar{Q}_f]$  são as matrizes de influência obtidas calculando-se as integrais da equação discretizada das poro pressões ((4.53) ou (4.54)). Os vetores  $\{P_c\}$ ,  $\{Q_c\}$ ,  $\{\Delta\zeta\}$  e  $\{\Delta\varepsilon\}$  reúnem, respectivamente, as variáveis de contorno de poro pressão e fluxo normal e as variáveis incrementais de domínio de variação de fluido e de deformação.

Escrevendo-se agora  $M$  equações para as poro pressões dos pontos internos (com as mesmas equações integrais dependentes de  $\zeta$  ou de  $p$  e  $\varepsilon$ ), chega-se nos sistemas:

$$\{P_i\} = -[H'_f]\{P_c\} + [\bar{G}'_f]\{Q_c\} + [\bar{Q}'_f]\{\Delta\zeta\} \quad (4.88)$$

$$\{P_i\} = -[H'_f]\{P_c\} + [\bar{G}'_f]\{Q_c\} + \frac{1}{M\Delta t}[\bar{Q}'_f]\{\Delta p_i\} + \frac{b}{\Delta t}[\bar{Q}'_f][D]^T\{\Delta\varepsilon\} \quad (4.89)$$

sendo  $\{P_i\}$  o vetor de  $M$  componentes com as poro pressões internas e  $[H'_f]$ ,  $[\bar{G}'_f]$  e  $[\bar{Q}'_f]$  as correspondentes matrizes de influência, com  $\Delta t$  implícito nas três últimas. O primeiro índice de cada matriz,  $c$  ou  $i$ , nas (4.86)-(4.89), indica se a equação foi escrita para pontos de contorno ou de domínio, respectivamente. Deve-se observar que as aproximações para a poro pressão são independentes, ou seja, são diferentes no contorno (variáveis em  $\{P_c\}$ ) e no domínio (variáveis em  $\{P_i\}$ ), sem que haja, com isto, prejuízo na formulação. Esta escolha independente das aproximações é muito prática, pois permite escrever dois sistemas distintos de equações para a poro pressão ((4.86)-(4.87) e (4.88)-(4.89)).

Chamando de  $\{X_c\}$  o vetor com as incógnitas de contorno de poro pressão ou fluxo normal, as (4.86)-(4.89) ficam, respectivamente, dadas por:

$$[A_f]\{X_c\} = \{F_c\} + [\bar{Q}_f]\{\Delta\zeta\} \quad (4.90)$$

$$[A_f]\{X_c\} = \{F_c\} + \frac{1}{M\Delta t}[\bar{Q}_f]\{\Delta p_i\} + \frac{b}{\Delta t}[\bar{Q}_f][D]^T\{\Delta\varepsilon\} \quad (4.91)$$

$$\{P_i\} = -[A'_f]\{X_c\} + \{F'_c\} + [\bar{Q}'_f]\{\Delta\zeta\} \quad (4.92)$$

$$\{P_i\} = -[A'_f]\{X_c\} + \{F'_c\} + \frac{1}{M\Delta t}[\bar{Q}'_f]\{\Delta p_i\} + \frac{b}{\Delta t}[\bar{Q}'_f][D]^T\{\Delta\varepsilon\} \quad (4.93)$$

sendo  $[A_f]$  e  $[A'_f]$  matrizes de influência de  $\{X_c\}$ ,  $\{F_c\}$  e  $\{F'_c\}$  vetores conhecidos dependentes das variáveis prescritas de contorno. Deve-se observar que, nas (4.86)-

(4.93), foi admitido que os valores de contorno prescritos de poro pressão e de fluxo são invariáveis no tempo, ou seja,  $\{F_c\}$  e  $\{F'_c\}$  não mudam com os incrementos de tempo. Isolando-se  $\{X_c\}$  nas (4.90) e (4.92) e substituindo-se, respectivamente, nas (4.91) e (4.93), obtêm-se:

$$\{P_i\} = -[A'_f] \left\{ [A_f]^{-1} \left\{ \{F_c\} + [\bar{Q}_f] \{\Delta\zeta\} \right\} \right\} + \{F'_c\} + [\bar{Q}'_f] \{\Delta\zeta\} \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} \{P_i\} = & -[A'_f] \left\{ [A_f]^{-1} \left\{ \{F_c\} + \frac{1}{M\Delta t} [\bar{Q}_f] \{\Delta p_i\} + \frac{b}{\Delta t} [\bar{Q}_f] [D]^T \{\Delta\varepsilon\} \right\} \right\} + \{F'_c\} + \\ & \frac{1}{M\Delta t} [\bar{Q}'_f] \{\Delta p_i\} + \frac{b}{\Delta t} [\bar{Q}'_f] [D]^T \{\Delta\varepsilon\} \end{aligned} \quad (4.95)$$

ou, reescritas de outra maneira:

$$\{P_i\} = \{F_d\} + [S_f] \{\Delta\zeta\} \quad (4.96)$$

$$\{P_i\} = \{F_d\} + \frac{1}{M\Delta t} [S_f] \{\Delta p_i\} + \frac{b}{\Delta t} [S_f] [D]^T \{\Delta\varepsilon\} \quad (4.97)$$

onde, nas (4.96) e (4.97), definem-se:

$$\{F_d\} = -[A'_f] [A_f]^{-1} \left\{ \{F_c\} + \{F'_c\} \right\} \quad (4.98)$$

$$[S_f] = -[A'_f] [A_f]^{-1} [\bar{Q}_f] + [\bar{Q}'_f] \quad (4.99)$$

Os pares de equações (4.83)-(4.96) ou (4.83)-(4.97) definem o problema poro-elástico nas variáveis  $\zeta$  e  $\varepsilon$  ou  $p$  e  $\varepsilon$ , respectivamente. No próximo item, estas equações serão manipuladas para se obter um sistema compacto escrito em função de  $\varepsilon$ .

#### 4.7 – Formulação do MEC para Poroelasticidade

Os sistemas de equações algébricas apresentados no item (4.6) para as teorias da poroelasticidade, permitem chegar a diferentes formulações do MEC, de acordo com a escolha das variáveis independentes. Nesse quesito, duas opções são possíveis: escolhendo-se os pares  $(\Delta\zeta, \Delta\varepsilon)$  ou  $(\Delta p_i, \Delta\varepsilon)$ . No caso da poroelasticidade, o sistema final de equações é linear. Assim, é indiferente usar um ou outro par de variáveis independentes.

Como ponto de partida das formulações, é necessário se expressar a equação das tensões, (4.83) da poroelasticidade, em função das deformações nodais. Sabe-se que, no modelo poro-elástico, por definição,  $\{\Delta\sigma\} = [E]\{\Delta\varepsilon\} - b[D]\{\Delta p_i\}$ , sendo  $[E]$  a matriz global com os módulos de rigidez locais dispostos em sua diagonal e  $b[D]$  a matriz de influência das poro pressões nas tensões totais, que depende do coeficiente de Biot das tensões efetivas  $b$  (ver equação (3.4)). Somando-se o termo  $b[D]\{\Delta p_i\}$  nos dois membros da (4.83), obtém-se:

$$[E]\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta N\} + b[\bar{S}][D]\{\Delta p_i\} \quad (4.100)$$

sendo  $[\bar{S}] = [S] + [i]$ . Observando-se a (3.3), pode-se escrever que  $\{\Delta p_i\} = M\left[\{\Delta\zeta\} - b[D]^T\{\Delta\varepsilon\}\right]$ , sendo  $[D]^T$  a matriz transposta de  $[D]$ . Logo, uma maneira alternativa de se escrever a (4.100) é:

$$[E]\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta N\} + Mb[\bar{S}][D]\{\Delta\zeta\} - Mb[\bar{S}][D][D]^T\{\Delta\varepsilon\} \quad (4.101)$$

Nas (4.96) e (4.97), se for subtraído, de cada membro de cada equação, o vetor  $\{P_i\}_{n-1}$ , onde  $n$  indica o instante de tempo anterior, obtêm-se, respectivamente:

$$\{P_i\}_n - \{P_i\}_{n-1} = \{\Delta p_i\} = \{\bar{F}_d\} + [S_f] \{\Delta \zeta\} \quad (4.102)$$

$$\{P_i\}_n - \{P_i\}_{n-1} = \{\Delta p_i\} = \{\bar{F}_d\} + \frac{1}{M\Delta t} [S_f] \{\Delta p_i\} + \frac{b}{\Delta t} [S_f][D]^T \{\Delta \varepsilon\} \quad (4.103)$$

com  $\{P_i\}$ , nas (4.96) e (4.97), reescrito como  $\{P_i\}_n$  e  $\{\bar{F}_d\} = \{F_d\} - \{P_i\}_{n-1}$ . A poro pressão  $\{\Delta p_i\}$ , na (4.102), pode ser substituída pela sua relação constitutiva do modelo, resultando:

$$M\{\Delta \zeta\} - Mb[D]^T \{\Delta \varepsilon\} = \{\bar{F}_d\} + [S_f] \{\Delta \zeta\} \quad (4.104)$$

Os dois possíveis conjuntos de equações que resolvem o problema são formados pelas (4.100)-(4.103) e (4.101)-(4.104). Os conjuntos de equações são reescritos, de forma compacta, no que segue.

$$[E] \{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta N\} + b[\bar{S}][D] \{\Delta p_i\} \quad (4.105)$$

$$\left[ [I] - \frac{1}{M\Delta t} [S_f] \right] \{\Delta p_i\} = \{\bar{F}_d\} + \frac{b}{\Delta t} [S_f][D]^T \{\Delta \varepsilon\} \quad (4.106)$$

$$\left[ [E] + Mb[\bar{S}][D][D]^T \right] \{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta N\} + Mb[\bar{S}][D] \{\Delta \zeta\} \quad (4.107)$$

$$\left[ M[I] - [S_f] \right] \{\Delta \zeta\} = \{\bar{F}_d\} + Mb[D]^T \{\Delta \varepsilon\} \quad (4.108)$$

Observe que, nas (4.105)-(4.106), as variáveis são  $\{\Delta p_i\}$  e  $\{\Delta \varepsilon\}$ . Já nas (4.107)-(4.108), elas são  $\{\Delta \zeta\}$  e  $\{\Delta \varepsilon\}$ . As equações do problema poro-elástico são lineares. A utilização de uma ou outra formulação, neste caso, é indiferente em

termos de custo computacional. Para agilizar o processo de busca de solução a cada novo incremento de tempo, pode-se eliminar  $\{\Delta p_i\}$  da (4.106) na (4.105) ou  $\{\Delta \zeta\}$  da (4.108) na (4.107), resultando em sistemas lineares menores, dependentes somente de  $\{\Delta \varepsilon\}$ . Entretanto, a cada mudança do valor do incremento de tempo  $\Delta t$ , estas substituições precisariam ser refeitas, pois as matrizes sofrem alterações. Os sistemas lineares escritos em termos das deformações ficam:

$$[E_p]\{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta N\} + \{N_p\} \quad (4.109)$$

$$[E_\zeta]\{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta N\} + \{N_\zeta\} \quad (4.110)$$

sendo

$$[E_p] = [E] - \frac{b^2}{\Delta t} [\bar{S}][D] \left[ [I] - \frac{1}{M\Delta t} [S_f] \right]^{-1} [S_f][D]^T \quad (4.111)$$

$$\{N_p\} = b[\bar{S}][D] \left[ [I] - \frac{1}{M\Delta t} [S_f] \right]^{-1} \{\bar{F}_d\} \quad (4.112)$$

$$[E_\zeta] = \left[ [E] + Mb[\bar{S}][D][D]^T \right] - M^2 b^2 [\bar{S}][D] [M[I] - [S_f]]^{-1} [D]^T \quad (4.113)$$

$$\{N_\zeta\} = Mb[\bar{S}][D] [M[I] - [S_f]]^{-1} \{\bar{F}_d\} \quad (4.114)$$

#### 4.8 – Equações Algébricas do MEC para Poroplasticidade

Com o modelo poro-elasto-plástico, o sistema de equações algébricas fica não-linear, devendo neste caso ser empregado procedimentos do tipo Newton-Raphson para sua resolução. Neste item, serão apresentadas as equações algébricas

do MEC para poroplasticidade. Novamente, as equações são de dois tipos: de contorno (deslocamentos e poro pressão) e de domínio (tensões e poro pressão), de acordo com a posição do ponto fonte.

No caso da poroplasticidade, surge uma integral a mais de domínio nas equações dos deslocamentos e das tensões da elastostática, com as variáveis de tensão inicial  $\sigma_{ij}^p$  (ver as (4.40) e (4.41)). Assim, a partir das equações discretizadas dos deslocamentos e das tensões, obtêm-se, respectivamente, as seguintes equações algébricas:

$$[H]\{\Delta U\} = [G]\{\Delta T\} + b[Q][D]\{\Delta p_i\} + [Q]\{\Delta \sigma^p\} \quad (4.115)$$

$$\{\Delta \sigma\} = -[H']\{\Delta U\} + [G']\{\Delta T\} + b[Q'] [D]\{\Delta p_i\} + [Q']\{\Delta \sigma^p\} \quad (4.116)$$

sendo  $[Q]$  e  $[Q']$  matrizes de influência das variáveis nodais de tensão inicial (ou tensão corretiva), reunidas no vetor  $\{\Delta \sigma^p\}$ . As demais matrizes e variáveis são as mesmas das (4.76) e (4.77). As (4.115) e (4.116) podem ser reescritas como:

$$[A]\{\Delta X\} = \{\Delta F\} + b[Q][D]\{\Delta p_i\} + [Q]\{\Delta \sigma^p\} \quad (4.117)$$

$$\{\Delta \sigma\} = -[A']\{\Delta X\} + \{\Delta F'\} + b[Q'] [D]\{\Delta p_i\} + [Q']\{\Delta \sigma^p\} \quad (4.118)$$

lembrando-se que  $\{\Delta X\}$  reúne as incógnitas de contorno. Isolando-se  $\{\Delta X\}$  na (4.117) e substituindo-o na (4.118), obtêm-se:

$$\{\Delta X\} = [A]^{-1} \left\{ \{\Delta F\} + b[Q][D]\{\Delta p_i\} + [Q]\{\Delta \sigma^p\} \right\} \quad (4.119)$$



$$\begin{aligned} \{\Delta\sigma\} = & -[A'] [A]^{-1} \{\Delta F\} + \{\Delta F'\} + b \left[ -[A'] [A]^{-1} [Q] + [Q'] \right] [D] \{\Delta p_i\} + \\ & + \left[ -[A'] [A]^{-1} [Q] + [Q'] \right] \{\Delta\sigma^p\} \end{aligned} \quad (4.120)$$

ou

$$\{\Delta\sigma\} = \{\Delta N\} + b [S] [D] \{\Delta p_i\} + [S] \{\Delta\sigma^p\} \quad (4.121)$$

sendo  $\{\Delta N\}$  e  $[S]$  os mesmos definidos nas (4.84)-(4.85).

Dcretizando-se as equações das poro pressões (4.53) e (4.55), os seguintes sistemas algébricos são obtidos:

$$[H_f] \{P_c\} = [\bar{G}_f] \{Q_c\} + [\bar{Q}_f] \{\Delta\zeta\} \quad (4.122)$$

$$[A_f] \{X_c\} = \{F_c\} + [\bar{Q}_f] \{\Delta\zeta\} \quad (4.123)$$

ou

$$[H_f] \{P_c\} = [\bar{G}_f] \{Q_c\} + \frac{1}{M\Delta t} \left( [\bar{Q}_f] \{\Delta p_i\} + [\bar{Q}_f] \{\Delta p_i^p\} \right) + \frac{b}{\Delta t} [\bar{Q}_f] [D]^T \{\Delta\epsilon\} \quad (4.124)$$

$$[A_f] \{X_c\} = \{F_c\} + \frac{1}{M\Delta t} [\bar{Q}_f] \{\Delta p_i\} + \frac{b}{\Delta t} [\bar{Q}_f] [D]^T \{\Delta\epsilon\} + \frac{1}{M\Delta t} [\bar{Q}_f] \{\Delta p_i^p\} \quad (4.125)$$

sendo  $[\bar{Q}_f]$ , nas (4.124)-(4.125), a matriz de influência obtida calculando-se a integral de volume da (4.55), enquanto  $\{\Delta p_i^p\}$  representa o vetor com as pressões corretivas nodais, cujas componentes são dadas, localmente, por:

$$\Delta p_i^p = M \left[ \Delta\zeta^p - b \text{Tr}(\Delta\epsilon^p) \right] \quad (4.126)$$

Para os pontos internos, obtêm-se as seguintes equações:

$$\{P_i\} = -[H'_f]\{P_c\} + [\bar{G}'_f]\{Q_c\} + [\bar{Q}'_f]\{\Delta\zeta\} \quad (4.127)$$

$$\{P_i\} = -[A'_f]\{X_c\} + \{F'_c\} + [\bar{Q}'_f]\{\Delta\zeta\} \quad (4.128)$$

ou

$$\begin{aligned} \{P_i\} = & -[H'_f]\{P_c\} + [\bar{G}'_f]\{Q_c\} + \frac{1}{M\Delta t}[\bar{Q}'_f]\{\Delta p_i\} + \frac{b}{\Delta t}[\bar{Q}'_f][D]\{\Delta\varepsilon\} \\ & + \frac{1}{M\Delta t}[\bar{Q}'_f]\{\Delta p_i^p\} \end{aligned} \quad (4.129)$$

$$\begin{aligned} \{P_i\} = & -[A'_f]\{X_c\} + \{F'_c\} + \frac{1}{M\Delta t}[\bar{Q}'_f]\{\Delta p_i\} + \frac{b}{\Delta t}[\bar{Q}'_f][D]^T\{\Delta\varepsilon\} \\ & + \frac{1}{M\Delta t}[\bar{Q}'_f]\{\Delta p_i^p\} \end{aligned} \quad (4.130)$$

sendo  $[\bar{Q}'_f]$ , nas (4.129)-(4.130), a correspondente matriz de influência. Continua valendo a hipótese na qual se admitem constantes as pressões e fluxos prescritos de contorno.

Calculando-se  $\{X_c\}$  nas (4.123) e (4.125), e substituindo-os, respectivamente, nas (4.128) e (4.130), obtêm-se as equações:

$$\{P_i\} = \{F_d\} + [S_f]\{\Delta\zeta\} \quad (4.131)$$

$$\{P_i\} = \{F_d\} + \frac{1}{M\Delta t}[S_f]\{\Delta p_i\} + \frac{b}{\Delta t}[S_f][D]^T\{\Delta\varepsilon\} + \frac{1}{M\Delta t}[S_f]\{\Delta p_i^p\} \quad (4.132)$$

onde, na (4.132), define-se:

$$[S_f] = -[A'_f][A_f]^{-1}[\bar{Q}_f] + [\bar{Q}'_f] \quad (4.133)$$

Os pares (4.121)-(4.131) ou (4.121)-(4.132) definem o problema poro-elasto-plástico com dois pares de variáveis independentes ( $\zeta$  e  $\varepsilon$  no primeiro caso e  $p$  e  $\varepsilon$  no segundo). No próximo item, será mostrado como se obtém um sistema equivalente com uma única variável, nos dois casos.

#### 4.9 – Formulação do MEC para Poroplasticidade

Os sistemas de equações algébricas apresentados no item (4.8) para a teoria da poroplasticidade, permitem chegar a diferentes formulações do MEC, de acordo com a escolha das variáveis independentes. Nesse quesito, duas opções são possíveis: escolhendo-se os pares  $(\Delta\zeta, \Delta\varepsilon)$  ou  $(\Delta p, \Delta\varepsilon)$ . Na poroplasticidade, o sistema de equações final de equações é não-linear. Portanto, neste caso, as duas formulações são diferentes, conforme será discutido com detalhes neste item.

Para o modelo poro-elasto-plástico, por definição (ver figura (4.1) e expressões (4.32)-(4.34)),  $\{\Delta\sigma^{ef}\} = [E]\{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\sigma^p\}$  e  $\{\Delta\sigma\} = \{\Delta\sigma^{ef}\} - b[D]\{\Delta p_i\}$ . Assim sendo, somando-se o termo  $\{\Delta\sigma^p\} + b[D]\{\Delta p_i\}$  nos dois membros da (4.121), chega-se a:

$$[E]\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta N\} + b[\bar{S}][D]\{\Delta p_i\} + [\bar{S}_\sigma]\{\Delta\sigma^p\} \quad (4.134)$$

com  $[\bar{S}_\sigma] = [S_\sigma] + [I]$ , sendo  $[I]$  a matriz identidade. No modelo poro-elasto-plástico, observando-se a (3.22), tem-se a seguinte relação de  $\{\Delta p_i\}$  com as variáveis internas  $\{\Delta\zeta^e\}$  e  $\{\Delta\varepsilon^e\}$ :

$$\begin{aligned} \{\Delta p_i\} &= \mathbf{M} \left[ \{\Delta \zeta^e\} - \mathbf{b}[\mathbf{D}]^T \{\Delta \varepsilon^e\} \right] \\ &= \mathbf{M} \left[ \{\Delta \zeta\} - \mathbf{b}[\mathbf{D}]^T \{\Delta \varepsilon\} \right] - \mathbf{M} \left[ \{\Delta \zeta^p\} - \mathbf{b}[\mathbf{D}]^T \{\Delta \varepsilon^p\} \right] \end{aligned} \quad (4.135)$$

Sabendo-se que  $\{\Delta p_i^p\} = \mathbf{M} \left[ \{\Delta \zeta^p\} - \mathbf{b}[\mathbf{D}]^T \{\Delta \varepsilon^p\} \right]$ , substituindo-se a (4.135) na (4.134), obtém-se:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}]\{\Delta \varepsilon\} &= \{\Delta \mathbf{N}\} + \mathbf{M}\mathbf{b}[\bar{\mathbf{S}}][\mathbf{D}]\{\Delta \zeta\} - \mathbf{M}\mathbf{b}^2[\bar{\mathbf{S}}][\mathbf{D}][\mathbf{D}]^T \{\Delta \varepsilon\} - \mathbf{M}\mathbf{b}[\bar{\mathbf{S}}][\mathbf{D}]\{\Delta p_i^p\} + \\ &+ [\bar{\mathbf{S}}_\sigma]\{\Delta \sigma^p\} \end{aligned} \quad (4.136)$$

As expressões (4.134) e (4.136) são válidas para o modelo poro-elasto-plástico. Com estas expressões que acabam de ser deduzidas e mais as equações algébricas das poro pressões internas, chega-se a duas formulações distintas do MEC, na teoria da poroplasticidade.

Subtraindo-se o vetor  $\{\mathbf{P}_i\}_{n-1}$  dos dois membros das (4.132) e (4.131), obtém-se, respectivamente:

$$\{\mathbf{P}_i\}_n - \{\mathbf{P}_i\}_{n-1} = \{\Delta p_i\} = \{\bar{\mathbf{F}}_d\} + [\mathbf{S}_f]\{\Delta \zeta\} \quad (4.137)$$

$$\begin{aligned} \{\mathbf{P}_i\}_n - \{\mathbf{P}_i\}_{n-1} &= \{\Delta p_i\} = \{\bar{\mathbf{F}}_d\} + \frac{1}{\mathbf{M}\Delta t}[\mathbf{S}_f]\{\Delta p_i\} + \frac{\mathbf{b}}{\Delta t}[\mathbf{S}_f][\mathbf{D}]^T \{\Delta \varepsilon\} + \\ &+ \frac{1}{\mathbf{M}\Delta t}[\mathbf{S}_f]\{\Delta p_i^p\} \end{aligned} \quad (4.138)$$

com  $\{\bar{\mathbf{F}}_d\}$  já definido anteriormente. Substituindo-se a (4.135) na (4.137), obtém-se:

$$\mathbf{M}\{\Delta \zeta\} - \mathbf{M}\mathbf{b}[\mathbf{D}]^T \{\Delta \varepsilon\} = \{\bar{\mathbf{F}}_d\} + [\mathbf{S}_f]\{\Delta \zeta\} + \{\Delta p_i^p\} \quad (4.139)$$

Os dois conjuntos de equações da poroplasticidade são, portanto, formados pelas (4.134)-(4.138) e (4.136)-(4.139). Reescritos convenientemente, ficam:

$$[E]\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta N\} + b[\bar{S}][D]\{\Delta p_i\} + [\bar{S}_\sigma]\{\Delta\sigma^p\} \quad (4.140)$$

$$\left[ [I] - \frac{1}{M\Delta t} [S_f] \right] \{\Delta p_i\} = \{\bar{F}_d\} + \frac{b}{\Delta t} [S_f][D]^T \{\Delta\varepsilon\} + \frac{1}{M\Delta t} [S_f]\{\Delta p_i^p\} \quad (4.141)$$

ou

$$\begin{aligned} \left[ [E] + Mb^2 [\bar{S}][D][D]^T \right] \{\Delta\varepsilon\} &= \{\Delta N\} + Mb[\bar{S}][D]\{\Delta\zeta\} - Mb[\bar{S}][D]\{\Delta p_i^p\} \\ &+ [\bar{S}_\sigma]\{\Delta\sigma^p\} \end{aligned} \quad (4.142)$$

$$[M[I] - [S_f]]\{\Delta\zeta\} = \{\bar{F}_d\} + Mb[D]^T \{\Delta\varepsilon\} + \{\Delta p_i^p\} \quad (4.143)$$

Note que, nas (4.140)-(4.141) e (4.142)-(4.143), têm-se, respectivamente, as variáveis independentes  $\{\Delta p_i\}$  e  $\{\Delta\varepsilon\}$  e  $\{\Delta\zeta\}$  e  $\{\Delta\varepsilon\}$ . Neste caso, pela presença dos corretores  $\{\Delta\sigma^p\}$  e  $\{\Delta p_i^p\}$  nas equações dos sistemas, o problema poro-elasto-plástico fica não-linear. Os vetores com as correções dependem das variáveis plásticas através das relações:

$$\{\Delta\sigma^p\} = \{\Delta\sigma^e\} - \{\Delta\sigma^{ef}\} = [E]\{\Delta\varepsilon^p\} = [E]\left\{ \Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_n} \right\} \quad (4.144)$$

$$\{\Delta p_i^p\} = M \left[ \{\Delta\zeta^p\} - b[D]^T \{\Delta\varepsilon^p\} \right] = M \left[ \left\{ \Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial p_n} \right\} - b[D]^T \left\{ \Delta\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_n} \right\} \right] \quad (4.145)$$

Pode-se isolar  $\{\Delta p_i\}$  na (4.141) e substituí-lo na (4.140), assim como  $\{\Delta\zeta\}$  na (4.143) e substituí-lo na (4.142). Dessa forma, resultam, respectivamente, os seguintes sistemas escritos em termos das deformações:

$$[\bar{E}_p] \{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta N\} + \{N_p\} + [\bar{S}_\sigma] \{\Delta \sigma^p\} + [\bar{D}_p] \{\Delta p_i^p\} \quad (4.146)$$

$$[\bar{E}_\zeta] \{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta N\} + \{N_\zeta\} + [\bar{S}_\sigma] \{\Delta \sigma^p\} + [\bar{D}_\zeta] \{\Delta p_i^p\} \quad (4.147)$$

sendo

$$[\bar{D}_p] = \frac{b}{M\Delta t} [\bar{S}] [D] \left[ [I] - \frac{1}{M\Delta t} [S_f] \right]^{-1} [S_f] \quad (4.148)$$

$$[\bar{D}_\zeta] = Mb [\bar{S}] [D] [M[I] - [S_f]]^{-1} - Mb [\bar{S}] [D] \quad (4.149)$$

e as demais matrizes e vetores dados pelas (4.111)-(4.114).

#### 4.10 – Estratégia de Solução para Poroplasticidade

As equações (4.146) e (4.147) do MEC para poroplasticidade são não-lineares no incremento de tempo. Portanto, elas devem ser resolvidas por algum tipo de procedimento iterativo para cada incremento de tempo. Usualmente, utiliza-se o procedimento de Newton-Raphson com suas variantes. A estratégia da solução iterativa, dentro de um incremento de tempo, é formada pelos seguintes passos: linearização da equação de equilíbrio, resolução do sistema linear linearizado, atualização das variáveis do modelo poro-elasto-plástico e verificação do equilíbrio com as variáveis atualizadas. O processo se repete a cada nova iteração, até que o equilíbrio, dentro de uma dada tolerância, seja verificado.

Na primeira linearização da equação de equilíbrio, admite-se que o comportamento seja poro-elástico, ou seja, não haja evolução das variáveis plásticas. Após a primeira atualização das variáveis, caso haja plastificação, a linearização passa a ser feita com matriz tangente consistente algorítmica para as demais iterações

do incremento. As equações de equilíbrio (4.146) e (4.147) podem ser reescritas como:

$$\{Y(\{\Delta\varepsilon\})\} = -[E_p]\{\Delta\varepsilon\} + \{\Delta N\} + \{N_p\} + [\bar{S}_\sigma]\{\Delta\sigma^p\} + [\bar{D}_p]\{\Delta p_i^p\} \quad (4.150)$$

$$\{Y(\{\Delta\varepsilon\})\} = -[E_\zeta]\{\Delta\varepsilon\} + \{\Delta N\} + \{N_\zeta\} + [\bar{S}_\sigma]\{\Delta\sigma^p\} + [\bar{D}_\zeta]\{\Delta p_i^p\} \quad (4.151)$$

Sabe-se que, por definição,  $\{\Delta\sigma^p\} = [E]\{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\sigma\} - b[D]\{\Delta p_i\}$  ou  $\{\Delta\sigma^p\} = [E]\{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\sigma\} - Mb[D]\{\Delta\zeta\} + Mb^2[D][D]^T\{\Delta\varepsilon\} + b[D]\{\Delta p_i^p\}$ .

Utilizando-se a primeira definição na (4.150) e a segunda na (4.151), têm-se, respectivamente, as seguintes derivadas:

$$\frac{\partial\{Y(\{\Delta\varepsilon\})\}}{\partial\{\Delta\varepsilon\}} = -[E_p] + [\bar{S}_\sigma][\bar{S}_p] + [\bar{D}_p][\bar{D}] \quad (4.152)$$

$$\frac{\partial\{Y(\{\Delta\varepsilon\})\}}{\partial\{\Delta\varepsilon\}} = -[E_\zeta] + [\bar{S}_\sigma][\bar{S}_\zeta] + [\bar{D}_\zeta][\bar{D}] \quad (4.153)$$

com

$$[\bar{S}_p] = \left[ [E] - \frac{\partial\{\Delta\sigma\}}{\partial\{\Delta\varepsilon\}} \right] \quad (4.154)$$

$$[\bar{S}_\zeta] = \left[ [E] - \frac{\partial\{\Delta\sigma\}}{\partial\{\Delta\varepsilon\}} + Mb^2[D][D]^T + b[D] \frac{\partial\{\Delta p_i^p\}}{\partial\{\Delta\varepsilon\}} \right] \quad (4.155)$$

$$[\bar{D}] = \left[ \frac{\partial\{\Delta p_i^p\}}{\partial\{\Delta\varepsilon\}} \right] \quad (4.156)$$

As matrizes  $\frac{\partial \{Y(\{\Delta\varepsilon\})\}}{\partial \{\Delta\varepsilon\}}$ , tal como definidas nas (4.152) e (4.153), são chamadas de tangente consistente algorítmica. A derivada  $\frac{\partial \{\Delta\sigma\}}{\partial \{\Delta\varepsilon\}}$ , na (4.154), é o módulo tangente consistente  $C_{n+1}^d$  que está definido na (3.182). A mesma derivada, na (4.155) está definido na (3.183). A derivada  $\frac{\partial \{\Delta p^p\}}{\partial \{\Delta\varepsilon\}}$  é calculada através de:

$$\frac{\partial \{\Delta p^p\}}{\partial \{\Delta\varepsilon\}} = \mathbf{M} \left[ \frac{\partial \{\Delta \zeta^p\}}{\partial \{\Delta\varepsilon\}} - \mathbf{b}[\mathbf{D}]^T \frac{\partial \{\Delta \varepsilon^p\}}{\partial \{\Delta\varepsilon\}} \right] \quad (4.157)$$

sendo que as derivadas que aparecem no seu segundo membro estão expressas nas (3.184)–(3.187). Utilizando-se as (3.184)–(3.187), as expressões das matrizes nas (4.154)–(4.155) podem ser consideravelmente simplificadas, facilitando a implementação computacional.

As equações (4.150) e (4.151) estão escritas em função das deformações  $\{\Delta\varepsilon\}$ . No entanto, elas vêm de formulações diferentes. Na primeira, a formulação foi escrita com  $\{\Delta\varepsilon\}$  e  $\{\Delta p_i\}$ . Na segunda, com  $\{\Delta\varepsilon\}$  e  $\{\Delta \zeta\}$ . Isto significa que, uma vez linearizada e resolvida a (4.150) para  $\{\Delta\varepsilon\}$ , calcula-se  $\{\Delta p_i\}$ , por recorrência, com a (4.141). O mesmo vale para a (4.151). Ou seja, conhecendo-se  $\{\Delta\varepsilon\}$ , calcula-se  $\{\Delta \zeta\}$  com a (4.143).

Na solução iterativa, a deformação na iteração  $(i+1)$ ,  $\{\Delta\varepsilon\}_n$ , é dada por:

$$\{\Delta\varepsilon\}_n = \{\Delta\varepsilon\}_{n-1} + \{\delta\Delta\varepsilon\}_{n-1} \quad (4.158)$$

com  $\{\delta\Delta\varepsilon\}_{n-1}$  obtido da resolução do sistema de equações que vem da linearização das (4.150) ou (4.151), ou seja:



$$\{Y(\{\Delta\varepsilon\}_n)\} = \{Y(\{\Delta\varepsilon\}_{n-1})\} + \frac{\partial\{Y(\{\Delta\varepsilon\}_{n-1})\}}{\partial\{\Delta\varepsilon\}_{n-1}}\{\delta\Delta\varepsilon\}_{n-1} = 0 \quad (4.159)$$

Observe que  $\frac{\partial\{Y(\{\Delta\varepsilon\}_{n-1})\}}{\partial\{\Delta\varepsilon\}_{n-1}}$ , na (4.159), é a matriz tangente consistente, obtida com as (4.152) ou (4.153), na iteração  $n-1$ . O vetor  $\{Y(\{\Delta\varepsilon\}_{n-1})\}$  é calculado com as (4.150) ou (4.151), conhecendo-se  $\{\Delta\varepsilon\}_{n-1}$ . O número de iterações, num incremento, é aquele necessário para que se tenha  $\{Y(\{\Delta\varepsilon\}_n)\} \cong 0$ , para uma tolerância pré-fixada.

.

**FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ESTUDO DE MEIOS PORO-ELASTO-PLÁSTICOS ENRIJECIDOS**Capítulo **5**

Apresenta-se neste capítulo o modelo empregado para representação de domínios poro-elasto-plásticos enrijecidos será sempre considerado em regime elástico representado pelo Método dos Elementos Finitos e o domínio onde ele está inserido representado pelo Método dos Elementos de Contorno. O modelo não linear empregado é semelhante ao descrito nos capítulos anteriores. Para melhorar a qualidades dos resultados obtidos é empregado a técnica de mínimos quadrados que pondera adequadamente numero de equações superior ao necessário para fazer o acoplamento resultando em um sistema de equações que melhor representa os esforços na interface do problema a ser simulado

**5.1 – Enrijecedor**

Para a modelagem dos enrijecedores, empregou-se a cinemática geral de Reissner desenvolvida para elementos laminados de casca segundo (PACCOLA *et al.*, 2003b; a; PACCOLA, 2004; PACCOLA e CODA, 2006 ) adaptada aqui para representar elementos de viga, já utilizadas anteriormente por (WUTZOW e VENTURINI, 2004).

Para um ponto P qualquer de uma viga (Fig. 5.1) a componente horizontal e vertical dos deslocamentos é dada por:

$$u_p(x, y) = u_0(x) + \theta_0(x).y \quad (5.1)$$

$$v_p(x, y) = v_0(x)$$

sendo  $(x, y)$  o sistema cartesiano de referência no centro da camada.

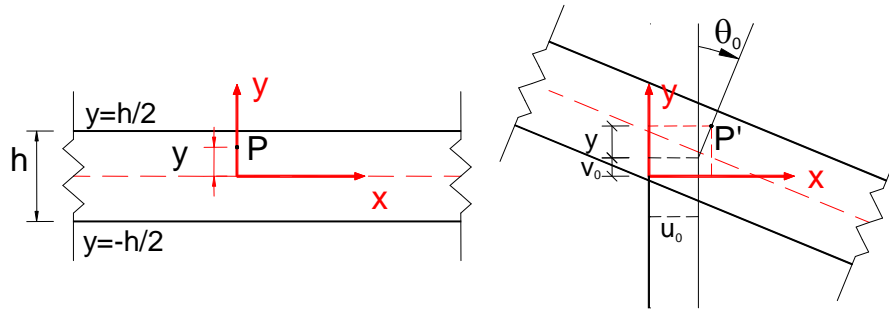


Figura 5.1 – Cinemática de um ponto aleatório “P” da viga.

A partir dos deslocamentos obtêm-se as deformações:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(x, y) &= \frac{\partial u_p(x, y)}{\partial x} \\ \varepsilon_y(x, y) &= 0 \\ \varepsilon_{xy}(x, y) &= \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_p(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_p(x, y)}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (5.2)$$

E as tensões:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E \cdot \varepsilon_x \\ \sigma_y &= 0 \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy}\end{aligned}\quad (5.3)$$

O equilíbrio é introduzido a partir do Princípio da Mínima Energia Potencial Total. Portanto, tem-se:

$$U_e = \int \left( \frac{1}{2} (\varepsilon_x \sigma_x + \varepsilon_y \sigma_y + \gamma_{xy} \tau_{xy}) \right) dV \quad (5.4)$$

$$U_e = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-1}^1 \left( G \left( \theta_0(\xi) + \frac{2v_0'(\xi)}{L} \right)^2 + \frac{4E(u_0'(\xi) + y\theta_0'(\xi))^2}{L^2} \right) \frac{L}{2} d\xi dy \quad (5.5)$$

A parcela de energia referente ao carregamento distribuído é dada por:

$$U_p = \int (t_x u_0^x + t_y U_0^y) dx \quad (5.6)$$

Sendo  $t_x$  e  $t_y$  as forças atuantes na interface de acoplamento.

Portanto o funcional de energia completo, contendo a parcela de carregamento distribuído, é descrito por:

$$\Pi = U_e - U_p \text{ ou } \Pi = \int \left( \frac{1}{2} (\varepsilon_x \sigma_x - \gamma_{xy} \tau_{xy}) \right) dV - \int (t_x u_0^x + t_y u_0^y) dx \quad (5.7)$$

Aproximações cúbicas independentes para os deslocamentos  $u_0$ ,  $v_0$  e  $\theta_0$  são adotadas:

$$u_0 = \sum_{i=1}^4 \phi_i^u u_0^i, \quad v_0 = \sum_{i=1}^4 \phi_i^v v_0^i, \quad \theta_0 = \sum_{i=1}^4 \phi_i^\theta \theta_0^i \text{ onde } \phi_i^u = \phi_i^v = \phi_i^\theta = \phi_i \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \phi_1(\xi) &= -\frac{9}{16} \left( \xi + \frac{1}{3} \right) \left( \xi - \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) \\ \phi_2(\xi) &= +\frac{27}{16} (\xi + 1) \left( \xi - \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) \\ \phi_3(\xi) &= -\frac{27}{16} (\xi + 1) \left( \xi + \frac{1}{3} \right) (\xi - 1) \\ \phi_4(\xi) &= +\frac{9}{16} \left( \xi + \frac{1}{3} \right) \left( \xi - \frac{1}{3} \right) (\xi + 1) \end{aligned} \quad \text{sendo} \quad \text{com } -1 \leq \xi \leq +1 \quad (5.9)$$

Para as forças na interface do acoplamento ( $t_x$  e  $t_y$ ) são adotadas aproximações lineares:

$$t_x = \sum_{i=1}^2 \phi_i^{t_x} t_x^i, \quad t_y = \sum_{i=1}^2 \phi_i^{t_y} t_y^i \quad \text{onde} \quad \phi_i^{t_x} = \phi_i^{t_y} = \phi_i \quad (5.10)$$

$$\text{sendo } \phi_1(\xi) = \frac{1-\xi}{2} \text{ e } \phi_2(\xi) = \frac{1+\xi}{2} \quad \text{com} \quad -1 \leq \xi \leq +1 \quad (5.11)$$

Utilizando-se as aproximações acima e minimizando-se o funcional de energia, Eq. (5.7), chega-se ao sistema algébrico de equações dado na seguinte forma:

$$[H_f] \{u_f\} = [G_f] \{t_f\} \quad (5.12)$$

onde  $[H_f]$  é a matriz de rigidez,  $[G_f]$  a matriz referente às cargas distribuídas,  $\{u_f\}$  o vetor de deslocamentos e  $\{t_f\}$  vetor de forças distribuídas.

## 5.2 – Equações algébricas do problema poro-elasto-plástico enrijecido

A seguir, apresenta-se a formulação empregada para o equacionamento do problema poro-elasto-plástico enrijecido através do acoplamento MEC/MEF. Apresenta-se inicialmente a discretização espacial do corpo com as aproximações das variáveis do contorno, do domínio e da interface de acoplamento com os enrijecedores. A formulação proposta resulta numa equação final de acoplamento esqueleto-fluido-enrijecedores escrita somente em termos das variáveis de deformação do domínio. As variáveis de poro-pressão do domínio e as incógnitas de contorno são todas calculadas a partir das deformações, em cada incremento de tempo.

### 5.2.1 – Discretização espacial das equações integrais: equações algébricas.

As equações integrais do problema poro-elástico referentes à parte sólida são apresentadas de forma de incremental. Considerando-se a solução fundamental clássica de um problema elástico (solução fundamental de Kelvin), as equações integrais para deslocamentos e tensões são (CAVALCANTI e TELLES, 2003; BOTTA *et al.*, 2005):

$$C_{ik}(s)\Delta u_k(s) = -\int_{\Gamma} T_{ij}^*(s, P)\Delta u_j(P)d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, P)\Delta T_j(P)d\Gamma + \int_{\Omega} \delta_{jk} \varepsilon_{ijk}^*(s, p)\Delta p(p)d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^*(s, p)\Delta \sigma_{jk}^p(p)d\Omega + \int_{\Gamma^{LF}} u_{ij}^*(s, P)\Delta T_j(P, \Delta t)d\Gamma^{LF} \quad (5.13)$$

$$\Delta \sigma_{ij}(s) = -\int_{\Gamma} S_{ijk}(s, P)\Delta u_k(P)d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, P)\Delta T_k(P)d\Gamma + b \int_{\Omega} (\delta_{kl}) E_{ijkl}(s, p)\Delta p(p)d\Omega + \int_{\Omega} E_{ijkl}(s, p)\Delta \sigma_{kl}^p(p)d\Omega + b g_{ij} (\delta_{kl} \Delta p(s)) + g_{ij} (\Delta \sigma_{kl}^p(s)) + \int_{\Gamma^{LF}} D_{ij\ell}(s, P)\Delta T_{\ell}(P, \Delta t)d\Gamma^{LF} \quad (5.14)$$

$$c(s)p(s) = -\int_{\Gamma} q^*(s, P)p(P)d\Gamma + \int_{\Gamma} p^*(s, P)q(P)d\Gamma + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} p^*(s, p) \left( \frac{\Delta p(p) + \Delta p^p(p)}{M} + b \text{Tr}(\Delta \varepsilon(p)) \right) d\Omega \quad (5.15)$$

onde o sobrescrito LF significa linha de força.

Para-se obter a forma discretizada das equações acima, divide-se o contorno  $\Gamma$  em  $N_e$  elementos ( $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N_e} \Gamma_j$ ), o domínio em  $N_c$  células ( $\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_c} \Omega_j$ ) e as linhas dos enrijecedores  $\bar{\Gamma}$  em  $N_{Lf}$  elementos de linha.

Em cada elemento de contorno, são definidos nós (não necessariamente nas extremidades) e as variáveis do problema são aproximadas por polinômio conhecido a partir dos valores nodais associados aos elementos:

$$\begin{aligned}
{}^j\mathbf{u}_k(\mathbf{P}) &= \phi_m(\mathbf{P}) {}^j\mathbf{U}_k^m \\
{}^j\mathbf{T}_k(\mathbf{P}) &= \phi_m(\mathbf{P}) {}^j\mathbf{T}_k^m \\
{}^j\mathbf{p}(\mathbf{P}) &= \phi_m(\mathbf{P}) {}^j\mathbf{P}_C^m \\
{}^j\mathbf{q}(\mathbf{P}) &= \phi_m(\mathbf{P}) {}^j\mathbf{Q}_C^m
\end{aligned} \tag{5.16}$$

O índice  $j$  representa o elemento de contorno  $\Gamma_j$  considerado, o índice  $m$  representa os nós do elemento e o índice  $k$  a direção da componente da variável. A função  $\phi_m(\mathbf{P})$  é o polinômio aproximador; as variáveis  ${}^j\mathbf{U}_k^m$ ,  ${}^j\mathbf{T}_k^m$ ,  ${}^j\mathbf{P}_C^m$  e  ${}^j\mathbf{Q}_C^m$  são, respectivamente, as variáveis nodais dos nós do contorno (deslocamentos e de forças de superfície) do nó  $m$  do elemento  $j$  na direção  $k$ , e as variáveis nodais de pressão e de velocidade de fluxo normal do nó  $m$  do elemento  $j$ .

As variáveis de domínio são também aproximadas em cada célula empregando-se valores nodais associados a nós (podendo ser internos) e funções aproximadoras:

$$\begin{aligned}
{}^j\varepsilon_{kl}(\mathbf{p}) &= \phi_m(\mathbf{p}) {}^j\varepsilon_{kl}^m \\
{}^j\mathbf{p}(\mathbf{p}) &= \phi_m(\mathbf{p}) {}^j\mathbf{P}_I^m
\end{aligned} \tag{5.17}$$

O índice  $j$  representa a célula  $\Omega_j$ , o índice  $m$  representa os nós da célula e os índices  $k$   $\ell$  a componente do tensor de deformações  $\varepsilon$ . As variáveis nodais de domínio  ${}^j\varepsilon_{kl}^m$  e  ${}^j\mathbf{P}_I^m$  são, respectivamente, as variáveis de deformação do nó  $m$  da célula  $j$  de componente  $k$   $\ell$ , e as variáveis de pressão do nó  $m$  da célula  $j$ ; as funções  $\phi_m(\mathbf{p})$  são as funções de forma. A tensão volumétrica,  $\sigma_{vol}$ , é aproximada indiretamente através das deformações.

A Figura 5.2 apresenta o corpo discretizado em elementos de contorno, células de domínio e linhas de carga na interface de acoplamento dos enrijecedores, bem como as aproximações adotadas para o problema.



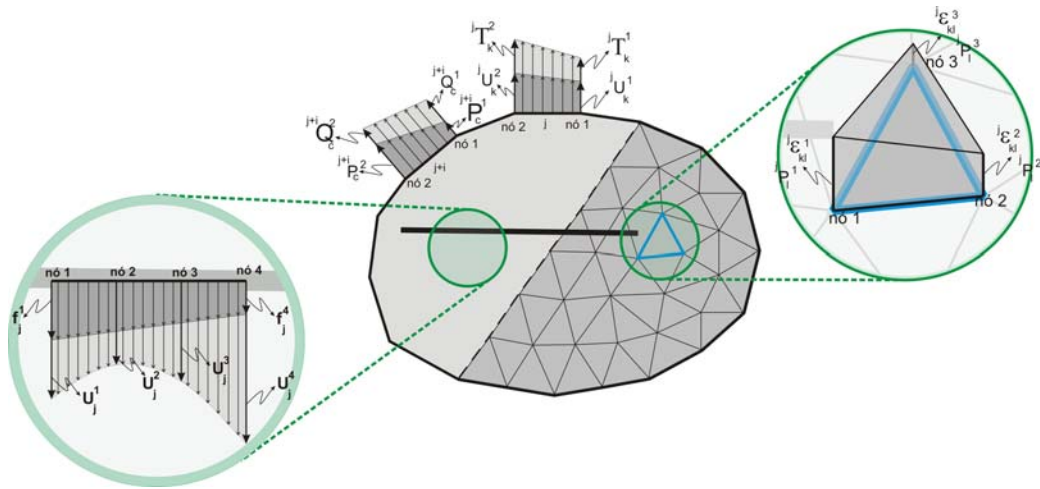


Figura 5.2 – Discretizações do contorno, domínio, enrijecedores e aproximações das variáveis.

É importante enfatizar que a aproximação adotada para os deslocamentos e para as forças de acoplamento ao longo da interface entre o enrijecedor e o domínio são diferentes.

Para as equações do MEC não há aproximação dos deslocamentos (pois se tratam apenas de pontos internos, evidentemente que indiretamente o campo de deslocamentos do domínio é aproximado pela aproximação dos deslocamentos do contorno do mesmo), enquanto que para a formulação do MEF a ser acoplada, os deslocamentos são aproximados com polinômios cúbicos. Com aproximações diferentes para deslocamentos e forças para domínio 2D e enrijecedor, torna-se conveniente a utilização da técnica de acoplamento com regularizações descrita em (WUTZOW e VENTURINI, 2004; WUTZOW *et al.*, 2005; WUTZOW *et al.*, 2006).

As equações redundantes são eliminadas com a utilização da técnica dos mínimos quadrados a qual também melhora significativamente os resultados deixando-os mais suaves e eliminando-se perturbações nas respostas observadas em acoplamentos MEC-MEF usuais (LEITE *et al.*, 2003).

### 5.2.2 – Equações algébricas do MEC para poroelasto-plasticidade enrijecida.

As equações integrais (5.13) dos deslocamentos, (5.14) das tensões totais e (5.15) das pressões no fluido definem o problema poro-elasto-plástico baseado no modelo de (BIOT, 1955). A partir da discretização do corpo e admitindo-se as aproximações já descritas obtêm-se a representação algébrica do problema. Essas equações combinadas com a equação algébrica (5.12) do MEF, que representa os enrijecedores, formam um conjunto que representam os meios poro-elasto-plásticos enrijecidos.

Assim, escrevendo-se a equação integral dos deslocamentos incluindo um número suficiente de pontos do contorno do corpo, juntamente com pontos internos posicionados sobre as linhas de enrijecimento, utilizando-se as equações do MEF (5.12), chega-se ao sistema de equações algébricas descrito abaixo (a partir deste momento os termos livres das equações das tensões serão omitidos, pois eles já estarão embutidos dentro das matrizes dos sistemas algébricos):

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_b & 0 & \mathbf{S}_b \\ 0 & \mathbf{H}_f & -\mathbf{G}_f \\ \bar{\mathbf{H}}_i & \bar{\mathbf{C}}_i & \bar{\mathbf{S}}_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{U}_b \\ \Delta \mathbf{U}_f \\ \Delta \mathbf{T}_f \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_b \\ 0 \\ \bar{\mathbf{G}}_i \end{bmatrix} \{\Delta \mathbf{T}_b\} + \mathbf{b} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_b \\ 0 \\ \bar{\mathbf{Q}}_i \end{bmatrix} [\mathbf{D}] \{\Delta \mathbf{p}_1\} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_b \\ 0 \\ \bar{\mathbf{Q}}_i \end{bmatrix} \{\Delta \sigma^P\} \quad (5.18)$$

onde  $[\mathbf{D}]$  é a matriz empregada em (5.18) para problema plano, que estabelece quais componentes do tensor de tensões totais são influenciadas pelo campo hidrostático de poro-pressão, ou seja, a matriz  $[\mathbf{D}]$  (da representação matricial) faz a função do delta de Kronecker (da representação integral).

$$[\mathbf{D}]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

Lembrando-se que na Eq.(5.18) já foram aplicadas as condições de equilíbrio e compatibilidade geométrica (no acoplamento com os enrijecedores) descritos na Eq. (5.20).

$$\{\Delta T_i\} = -\{\Delta T_f\} \quad \text{e} \quad \{\Delta U_i\} = \{\Delta U_f\} \quad (5.20)$$

Nesta equação também já está considerada a técnica de mínimos quadrados aplicada às equações de deslocamento dos pontos internos posicionados sobre as linhas de acoplamento com os enrijecedores descritas na Eq. (5.21) como desenvolvido e implementado em (WUTZOW e VENTURINI, 2004; WUTZOW, VENTURINI *et al.*, 2005; WUTZOW, BOTTA *et al.*, 2006).

$$\begin{aligned} [\bar{H}_i] &= [S_i]^T [H_i] \quad , \quad [\bar{C}_i] = [S_i]^T [C_i] \quad , \quad [\bar{S}_i] = [S_i]^T [S_i] \quad , \\ [\bar{G}_i] &= [S_i]^T [G_i] \quad \text{e} \quad [\bar{Q}_i] = [S_i]^T [Q_i] \end{aligned} \quad (5.21)$$

Aplicadas às condições de contorno na Eq. (5.18), obtém-se então o seguinte sistema de equações:

$$[A] \begin{Bmatrix} \Delta X_b \\ \Delta U_f \\ \Delta T_f \end{Bmatrix} = [B] \{\Delta Y_b\} + b [Q] [D] \{\Delta p_f\} + [Q] \{\Delta \sigma^p\} \quad (5.22)$$

onde  $[A]$  contém termos das matrizes correspondentes as incógnitas e  $[B]$  coeficientes relativos aos valores prescritos;  $\{\Delta X_b\}$  representa as incógnitas do contorno;  $\{\Delta Y_b\}$  contém os valores prescritos no contorno.

Invertendo-se a matriz  $[A]$  e isolando-se as incógnitas, chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \Delta X_b \\ \Delta U_f \\ \Delta T_f \end{Bmatrix} = \{\Delta M\} + b[R][D]\{\Delta p_I\} + [R]\{\Delta \sigma^P\} \quad (5.23)$$

$$\text{sendo } \{\Delta M\} = [A]^{-1}\{\Delta F\}, \quad [R] = [A]^{-1}[Q] \quad \text{e} \quad \{\Delta F\} = [B]\{\Delta Y_b\} \quad (5.24)$$

A equação (5.14) para a representação da equação das tensões totais, após a aproximação leva ao seguinte sistema algébrico:

$$\{\Delta \sigma_i\} = -[H'_i]\{\Delta U_b\} + [G'_i]\{\Delta T_b\} + b[Q'_i][D]\{\Delta p_I\} + [S'_i]\{\Delta T_i\} + [Q'_i]\{\Delta \sigma^P\} \quad (5.25)$$

Rearranjando-se os termos e aplicando-se as condições de equilíbrio na interface chega-se a:

$$\{\Delta \sigma_i\} = -\begin{bmatrix} H'_i & 0 & S'_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U_b \\ \Delta U_f \\ \Delta T_f \end{Bmatrix} + [G'_i]\{\Delta T_b\} + b[Q'_i][D]\{\Delta p_I\} + [Q'_i]\{\Delta \sigma^P\} \quad (5.26)$$

Separando-se, na Eq. (5.26), os valores incógnitos de contorno dos valores prescritos, têm-se:

$$\{\Delta \sigma\} = -[A'] \begin{Bmatrix} \Delta X_b \\ \Delta U_f \\ \Delta T_f \end{Bmatrix} + \{\Delta F'\} + b[Q'][D]\{\Delta p_I\} + [Q'_i]\{\Delta \sigma^P\} \quad (5.27)$$

$$\text{onde } [A'] = \begin{bmatrix} A'_i & 0 & S'_i \end{bmatrix}, \quad \{\Delta F'\} = [B'_i]\{\Delta Y_b\} \quad \text{e} \quad [Q'] = \begin{bmatrix} Q'_i \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Substituindo-se a Eq. (5.23) na Eq. (5.27) obtém-se:

$$\{\Delta \sigma\} = \{\Delta N\} + b[S][D]\{\Delta p_I\} + [S]\{\Delta \sigma^P\} \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \text{sendo } \{ \Delta N \} &= -[A'] [A]^{-1} \{ \Delta F \} + \{ \Delta F' \} \\ [S] &= -[A'] [A]^{-1} [Q] + [Q'] \end{aligned} \quad (5.30)$$

Lembrando-se que a relação entre tensões totais e efetivas e pressões é dada por:

$$\{ \Delta \sigma_i \} = \{ \Delta \sigma_i^{ef} \} - b [D] \{ \Delta p_i \} - \{ \Delta \sigma^p \} \quad (5.31)$$

A equação (5.29) fica sendo:

$$\{ \Delta N \} + b [S] [D] \{ \Delta p_i \} + [S] \{ \Delta \sigma^p \} = \{ \Delta \sigma_i^{ef} \} - b [D] \{ \Delta p_i \} - \{ \Delta \sigma^p \} \quad (5.32)$$

Rearranjando-se os termos e aplicando-se a lei constitutiva poroplástica pode-se escrever:

$$[E] \{ \Delta \varepsilon_i \} = \{ \Delta N \} + b [\bar{S}] [D] \{ \Delta p_i \} + [\bar{S}_\sigma] \{ \Delta \sigma^p \} \quad (5.33)$$

onde  $[\bar{S}] = [[S] + [I]]$  e  $[\bar{S}_\sigma] = [[S] + [I]]$ .

Na formulação proposta, as variáveis de poro-pressão serão aproximadas separadamente e independentemente sobre o contorno e sobre o domínio. As variáveis dessa última aproximação, definidas pelo vetor  $\{ \Delta p_i \}$ , aparecem nas equações dos deslocamentos (5.23) e das tensões totais (5.29). Escrevendo-se a equação (5.15) somente para pontos do contorno, resulta o seguinte sistema algébrico:

$$[H_f] \{ P_c \} = [\bar{G}_f] \{ Q_c \} + \frac{1}{\Delta t} [\bar{Q}_f] \left\{ \frac{\{ \Delta p_i \} + \{ \Delta p^p \}}{M} + b [D]^T \{ \Delta \varepsilon \} \right\} \quad (5.34)$$

sendo

$$\begin{aligned} [\bar{G}_f] &= \left( -\frac{\gamma_w}{k} \right) [G_f] \\ [\bar{Q}_f] &= \left( \frac{\gamma_w}{k} \right) [Q_f] \end{aligned} \quad (5.35)$$

onde  $[H_f]$ ,  $[G_f]$  e  $[Q_f]$  são matrizes com os coeficientes de integração da (5.15),  $\{P_c\}$  e  $\{Q_c\}$  são vetores com as incógnitas de contorno de poro-pressão e de fluxo normal, respectivamente, e  $\{\Delta\sigma_{vol}\}$  é o vetor com as variáveis de domínio referentes ao incremento da tensão volumétrica  $\{\Delta\sigma_{vol}\} = \{\sigma_{vol}(t_f)\} - \{\sigma_{vol}(t_0)\}$ . Os valores em  $\{P_c\}$  e  $\{Q_c\}$  referem-se ao instante de tempo final  $t_f$ .

A equação integral (5.15) também pode ser escrita para pontos internos. Nesse caso, a representação algébrica representa o equilíbrio no tempo  $t_n$ . Assim, as derivadas temporais da equação integral são substituídas por  $\Delta p_I$ . Foi adotada uma aproximação linear para o tempo dada pela equação  $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ , como consequência para a aproximação da derivada do tempo foi adotado o algoritmo “backward Euler” dado pela equação:  $\dot{x} = \Delta x / \Delta t = (x_n - x_{n-1}) / \Delta t$ .

$$\{P_i(t_n)\} = -[H'_f]\{P_c\} + [\bar{G}'_f]\{Q_c\} + \frac{1}{\Delta t} [\bar{Q}'_f] \left\{ \frac{\{\Delta p_I\} + \{\Delta p^P\}}{M} + b[D]^T \{\Delta \epsilon\} \right\} \quad (5.36)$$

sendo

$$\begin{aligned} [\bar{G}'_f] &= \left( -\frac{\gamma_w}{k} \right) [G'_f] \\ [\bar{Q}'_f] &= \left( \frac{\gamma_w}{k} \right) [Q'_f] \end{aligned} \quad (5.37)$$

onde  $[H'_f]$ ,  $[G'_f]$  e  $[Q'_f]$  são as matrizes de influência e  $\{p_I\}$  é o vetor com as variáveis de poro-pressão, definidas nos nós internos de domínio, no instante final  $t_f$ . Separando-se, na (5.34), os valores incógnitos de contorno dos prescritos, chega-se na equação:

$$[A_f]\{X_c\} = \{F_c\} + \frac{1}{\Delta t} [\bar{Q}'_f] \left\{ \frac{\{\Delta p_I\} + \{\Delta p^P\}}{M} + b[D]^T \{\Delta \varepsilon\} \right\} \quad (5.38)$$

onde  $\{X_c\}$  representa as poro-pressões e o fluxo desconhecidos e  $\{F_c\}$  a contribuição dos valores prescritos.

A Equação (5.36) pode ainda ser convenientemente reescrita da seguinte forma:

$$\{P_i(t_n)\} = -[A'_f]\{X_c\} + \{F_c\} + \frac{1}{\Delta t} [\bar{Q}'_f] \left\{ \frac{\{\Delta p_I\} + \{\Delta p^P\}}{M} + b[D]^T \{\Delta \varepsilon\} \right\} \quad (5.39)$$

Isolando-se  $\{X_c\}$  na Eq. (5.38), tem-se:

$$\{X_c\} = [A_f]^{-1} \{F_c\} + \frac{1}{\Delta t} [A_f]^{-1} [\bar{Q}'_f] \left\{ \frac{\{\Delta p_I\} + \{\Delta p^P\}}{M} + b[D]^T \{\Delta \varepsilon\} \right\} \quad (5.40)$$

Substituindo-se na Eq. (5.39) chega-se à expressão:

$$\{P_i(t_n)\} = \{F_d\} + \frac{1}{\Delta t} [S_f] \left\{ \frac{\{\Delta p_I\} + \{\Delta p^P\}}{M} + b[D]^T \{\Delta \varepsilon\} \right\} \quad (5.41)$$

sendo:

$$\{F_d\} = \left\{ -[A'_f][A_f]^{-1} \{F_c\} + \{F'_c\} \right\} \quad \text{e} \quad [S_f] = -[A'_f][A_f]^{-1} [Q_f] + [Q'_f] \quad (5.42)$$

Na (5.41), se for subtraído, de cada membro da equação, o vetor  $\{P_i\}_{n-1}$ , onde  $n$  indica o instante de tempo anterior, obtém-se:

$$\{P_i(t_n)\} - \{P_i(t_{n-1})\} = \{\Delta P_i\} = \{\bar{F}_d\} + \frac{1}{\Delta t} [S_f] \left\{ \frac{\{\Delta p_i\} + \{\Delta p^p\}}{M} + b[D]^T \{\Delta \varepsilon\} \right\} \quad (5.43)$$

com  $\{P_i\}$ , nas (5.43), reescrito como  $\{P_i\}_n$  e  $\{\bar{F}_d\} = \{F_d\} - \{P_i\}_{n-1}$ .

O conjunto de equações que resolve o problema é formado então por (5.33) e (5.43). O conjunto de equações é reescrito, de forma compacta como:

$$[E]\{\Delta \varepsilon_i\} = \{\Delta N\} + b[\bar{S}][D]\{\Delta p_i\} + [\bar{S}_\sigma]\{\Delta \sigma^p\} \quad (5.44)$$

$$\left[ [I] - \frac{1}{M\Delta t} [S_f] \right] \{\Delta p_i\} = \{\bar{F}_d\} + \frac{b}{\Delta t} [S_f][D]^T \{\Delta \varepsilon\} + \frac{1}{M\Delta t} [S_f]\{\Delta p^p\} \quad (5.45)$$

ou seguindo-se o mesmo procedimento adotado para o problema não enrijecido pode-se chegar ao seguinte sistema não linear:

$$[E_p]\{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta N\} + \{N_p\} + [\bar{S}_\sigma]\{\Delta \sigma^p\} + [\bar{D}_p]\{\Delta p_i^p\}$$

Podendo este ser resolvido da mesma forma que o sistema não enrijecido.



## MODELO PARA DOMÍNIOS NÃO SATURADOS

---

# Capítulo 6

### 6.1 – Balanço energético

#### 6.1.1 – Equações de estado

O objetivo principal deste texto é descrever um modelo para meios porosos composto inicialmente por quatro constituintes: sólido, líquido, vapor e ar seco. Mas descrito em três fases distintas: sólida, líquida e gasosa. O ar pode ser encontrado dissolvido na fase líquida (mas tal caso não será tratado neste texto) e a água pode transformar em vapor tornando-se um gás e vice versa. Foram consideradas três fases distintas, fase sólida descrita nas equações pelo índice “s”, a água composta por água pura e ar dissolvido descrita pelo índice “ $l$ ” e finalmente a fase gasosa composta por ar seco e vapor de água descrita pelo índice “g”, que ocupam a mesma fração de volume e estão completamente misturados e homogeneizados. Supõe-se que o solo assuma um comportamento plástico de maneira independente e todos os fluídos são considerados barotrópicos.

Neste contexto, as variáveis estáticas básicas consideradas são as tensões totais de Cauchy da mistura “ $\sigma$ ”, a pressão líquida “ $p^l$ ”, e a pressão gasosa “ $p^g$ ”. Faz-se necessário ainda para fazer os desenvolvimentos das equações que descrevem o meio, a pressão parcial do ar seco “ $p^a$ ” e a pressão do vapor “ $p^v$ ” na mistura

gasosa. Outra definição fundamental para os meios porosos não saturados é a pressão capilar definida por:

$$p^c = p^g - p^\ell \quad (6.1)$$

As variáveis cinemáticas empregadas são as deformações macroscópicas “ $\varepsilon$ ” do sólido, a porosidade Euleriana “ $n$ ” ou sua equivalente Lagrangiana  $\phi$ . Tendo esta o intuito de representar o volume poroso atual por unidade de volume da mistura na configuração atualizada e a outra o intuito de representar o mesmo volume poroso atual, mas agora por unidade de volume da mistura na configuração inicial {Coussy, 2002 #36. Estas duas medidas de porosidade, através do jacobiano da deformação  $J = \det(\mathbf{F})$ , podem ser relacionadas por

$$\phi = Jn \quad (6.2)$$

Ambas as medidas de porosidade podem ser divididas nas medidas de porosidade referentes às fases líquida e gasosa:

$$n = n^\ell + n^g, \quad \phi = \phi^\ell + \phi^g \quad (6.3)$$

Pode-se ainda definir o grau de saturação  $S^\ell$  e  $S^g$  respectivamente relativos à fase líquida e gasosa por:

$$S^\ell = \frac{n^\ell}{n} = \frac{\phi^\ell}{\phi}, \quad S^g = \frac{n^g}{n} = \frac{\phi^g}{\phi} \quad \text{onde } S^\ell + S^g = 1 \quad (6.4)$$

Tomando-se  $v_s = v, v_\ell, v_v, v_a$  respectivamente como as velocidades do sólido, líquido, vapor e ar, pode-se definir a velocidade média da fase gasosa “ $v_g$ ”:

$$v_g = \frac{1}{\rho_g} (\rho_a v^a + \rho_v v^v) \quad (6.5)$$

onde

$$\rho_g = \rho_a + \rho_v \quad (6.6)$$

é a densidade do gás  $\rho_g$ ,  $\rho_a$  e  $\rho_v$  são respectivamente a densidade do ar e a densidade do vapor.

No contesto poro plástico as variáveis cinemáticas são todas particionadas nas parcelas elásticas e irreversíveis:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p, \quad n^\ell = n^{\ell e} + n^{\ell p}, \quad n^g = n^{g e} + n^{g p}, \quad \phi^\ell = \phi^{\ell e} + \phi^{\ell p}, \quad \phi^g = \phi^{g e} + \phi^{g p} \quad (6.7)$$

Comportamento semelhante pode também ser atribuído a saturação, ou seja:

$$S^\ell = S^{\ell e} + S^{\ell p}, \quad S^g = S^{g e} + S^{g p} \quad (6.8)$$

Juntamente com as variáveis de estática e cinemática, uma grande quantidade de variáveis internas suplementares de várias naturezas tensoriais (escalares, vetores ou tensores de segunda ordem) é introduzida. Além desse grupo de variáveis  $\alpha_1 = [\varepsilon^p, \phi^{\ell p}, \phi^{g p}]$  (ou alternativamente  $\alpha_1 = [\varepsilon^p, \phi^p, S^{\ell p}]$ ) já mencionados em (6.7) e (6.8), outras variáveis internas, representadas pelo vetor  $\alpha_2$ , são necessárias para descrever os mecanismos físicos complementares, que governam a deformação plástica, enrijecimento, capilaridade e efeitos da histerese juntamente com os fenômenos dissipativos associados. Entretanto, para simplificar a notação usaremos o vetor  $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2]$  de todas as variáveis internas.

Para completar a descrição dos meios porosos sujeitos a esforços termodinâmicos, faz-se necessário ainda especificar dois pontos:

- O movimento relativo dos fluidos com respeito ao sólido, mas é necessário definir para isto os fluxos dos fluidos (com respeito ao esqueleto contínuo). Estes se realizam para cada constituinte fluido ou fase fluida

$$M^i = n^i (v^i - v^s), \quad i = \ell, v, a, g \quad (6.9)$$

Nota-se que para a fase gasosa empregou-se o fluxo médio calculado com “ $v^g$ ” definido em (6.5).

- Com respeito aos efeitos térmicos e ao processo da condução do calor: introduziu-se a temperatura absoluta “ $T$ ” e o vetor usual “ $q$ ” de fluxo de calor. Supôs-se também o equilíbrio térmico para as partículas contínuas e fluidas situadas numa mesma posição num mesmo tempo tendo assim a mesma temperatura.

### 6.1.2 – Equações constitutivas

Uma das idéias interessantes contida no modelo apresentado por (COUSSY e FLEUREAU, 2002) é que se supormos que as interações microscópicas que são

exercidas em um fluido no meio poroso não saturado ocorram somente através de suas interfaces com os outros constituintes, então as leis de estado usuais são válida ainda para o fluido. Enquanto estas leis são conhecidas independentemente do meio poroso, resta ainda obter o comportamento constitutivo do esqueleto quando considerado sozinho. Entretanto, este esqueleto é considerado como sendo formado não somente pelo esqueleto contínuo usual, mas também pelas várias interfaces entre o sólido e os fluidos ou entre um fluido e outro fluido.

### 6.1.2.1 – Equações constitutivas dos fluidos

Recordando-se as leis dos estados para os fluidos (água em estado líquido, vapor de água e ar seco). Para uma transformação qualquer de um fluido, a variação de energia interna específica (por unidade de massa)  $e(\rho, s)$  é dada por:

$$de = -pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + Tds \quad (6.10)$$

onde “p” é a pressão, “ $\rho$ ” a massa volumétrica, “T” a temperatura e “s” a entropia específica, a partir desta relação pode-se escrever as leis de estado como:

$$p = -\left(\frac{\partial e}{\partial\left(\frac{1}{\rho}\right)}\right)_s, \quad T = -\left(\frac{\partial e}{\partial s}\right)_{\frac{1}{\rho}} \quad (6.11)$$

Pode-se inverter parcialmente estas leis de estado com respeito às variáveis  $\left(\frac{1}{\rho}, T\right)$ , através da introdução da entalpia específica  $h = e + \frac{p}{\rho}$ , as leis de estado ficam sendo:

$$\frac{1}{\rho} = \left( \frac{dh}{dp} \right)_T, \quad T = \left( \frac{dh}{ds} \right)_{\frac{1}{\rho}} \quad (6.12)$$

De outra forma pode-se inverter parcialmente se usada a energia livre específica  $\psi = e - Ts$ , que faz com que seja possível obter:

$$d\psi = -pd\left(\frac{1}{\rho}\right) - sdT \quad (6.13)$$

sendo que as equações de estado se tornam:

$$p = - \left( \frac{\partial \psi}{\partial \left( \frac{1}{\rho} \right)} \right)_T, \quad s = - \left( \frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_{\frac{1}{\rho}} \quad (6.14)$$

E finalmente, pode-se inverter a relação (6.11) introduzindo-se a entalpia livre específica  $g = \psi + \frac{p}{\rho} = h - Ts$  obtendo-se as leis de estado na seguinte forma alternativa:

$$\frac{1}{\rho} = \left( \frac{\partial g}{\partial p} \right)_T, \quad s = - \left( \frac{\partial g}{\partial T} \right)_p \quad (6.15)$$

Em todo o resto do texto, a análise é restrita a uma transformação “infinitesimal” e “quase estática”. Considerando-se um volume elementar de um meio poroso não saturado composto como apresentado anteriormente por um esqueleto que é saturado por uma fase líquida e outra gasosa. Quando sujeita a cargas externas, este volume  $d\Omega$  se deforma e altera a massa líquida. O balanço de energia e entropia pode ser escrito respectivamente (COUSSY e FLEUREAU, 2002) por:

$$\frac{dE}{dt} = \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} - \text{grad} \left( \sum_{\alpha} h_{\alpha} w^{\alpha} + q \right) + \sum_{\alpha} b w^{\alpha} \quad (6.16)$$

$$\frac{dS}{dt} \geq -\text{grad} \left( \sum_{\alpha} s_{\alpha} w^{\alpha} + \frac{q}{T} \right) \quad (6.17)$$

onde “E” e “S” são as densidades totais de energia e de entropia por unidade de volume.  $\varepsilon$  são os componentes do tensor de deformação do esqueleto sólido,  $\sigma$  os componentes do tensor de tensões totais.  $w^{\alpha}$  o fluxo mássico relativo lagrangiano da fase  $\alpha$  ( $=\ell$ ,  $v$  ou  $a$ ) por unidade de volumes do elemento  $d\Omega$ .  $w^{\alpha}$  podendo ser escrito em função do fluxo volumétrico ou velocidade relativa da fase com respeito ao esqueleto pela expressão  $w^{\alpha} = \rho_{\alpha} M^{\alpha}$  onde  $\rho_{\alpha}$  é a densidade de massa e  $M^{\alpha}$  vetor filtração ou velocidade relativa.  $b$  é a carga de domínio por unidade de massa da mistura.  $q$  e  $T$  São respectivamente o fluxo térmico por unidade de volume e  $T$  a temperatura. Sendo respeitada a convenção de somatória para índices repetidos (em latim e grego). Através do balanço anterior (equação (6.16) primeiro principio da termodinâmica) indica que a variação  $dE$  da energia interna  $E$  por unidade de volume  $d\Omega$  é igual à soma do trabalho dos trabalhos de deformação do solo (termo  $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$ ) do calor fornecido pelo exterior (termo  $-\text{div}(q)$ ) e da energia interna de cada uma das massas fluidas  $\alpha$  (termo  $-\text{div} \left( \sum_{\alpha} h_{\alpha} w^{\alpha} \right)$ ) acrescida do trabalho necessário para a introdução de massa no volume  $d\Omega$ , (termo  $\sum_{\alpha} b w^{\alpha}$ ). Sendo  $S$  a entropia por unidade de volume do solo  $d\Omega$ , o segundo principio da termodinâmica (equação (6.17)) indica que a variação de entropia  $dS$  do sistema aberto  $d\Omega$  é superior a entropia para com exterior, que pode ser descrita como soma da entropia por condução (termo  $\text{div} \left( \frac{q}{T} \right)$ ) e da entropia por convecção (termo  $\text{div} \left( \sum_{\alpha} s_{\alpha} w^{\alpha} \right)$ ).

Partindo-se da energia livre específica total por unidade de volume total (letra maiúscula)

$$\Psi = E - TS \quad (6.18)$$

pode-se escrever a sua variação no tempo como:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{dE}{dt} - T \frac{dS}{dt} - S \frac{dT}{dt} \quad (6.19)$$

Rearranjando-se pode-se aplicar o segundo princípio da termodinâmica de forma que se possa escrever:

$$\frac{dE}{dt} - S \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} = T \frac{dS}{dt} \geq -T \nabla \left( \sum_{\alpha} s_{\alpha} \rho_{\alpha} M^{\alpha} \right) - T \nabla \left( \frac{q}{T} \right) \quad (6.20)$$

Aplicando-se o primeiro princípio da termodinâmica, eq (6.16), na equação (6.20) chega-se a:

$$\begin{aligned} \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} - \sum_{\alpha} \nabla \left( h_{\alpha} \rho_{\alpha} M^{\alpha} \right) - \nabla(q) + \sum_{\alpha} b \rho_{\alpha} M^{\alpha} - S \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} = \\ = T \frac{dS}{dt} \geq -T \nabla \left( \sum_{\alpha} s_{\alpha} \rho_{\alpha} M^{\alpha} \right) - T \nabla \left( \frac{q}{T} \right) \end{aligned} \quad (6.21)$$

Sabendo-se que  $T \nabla \left( \frac{q}{T} \right) = T q \nabla \left( \frac{1}{T} \right) + \nabla(q)$  onde  $\nabla \left( \frac{1}{T} \right) = -\frac{1}{T^2} \nabla(T)$  e aplicando-se também a definição de entalpia específica na equação precedente (6.21) tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} - \sum_{\alpha} \nabla \left( \left( e_{\alpha} + \frac{p_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} \right) \rho_{\alpha} M^{\alpha} \right) + \sum_{\alpha} b \rho_{\alpha} M^{\alpha} - S \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} \geq \\ \geq -T \nabla \left( \sum_{\alpha} s_{\alpha} \rho_{\alpha} M^{\alpha} \right) + \frac{q}{T} \nabla(T) \end{aligned} \quad (6.22)$$

Rearranjando-se a equação precedente (6.22) tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} - S \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} - \sum_{\alpha} \nabla \left( \left( e_{\alpha} + T s_{\alpha} + \frac{p_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} \right) \rho_{\alpha} M^{\alpha} \right) + \\ + \sum_{\alpha} b \rho_{\alpha} M^{\alpha} - \frac{q}{T} \nabla(T) \geq 0 \end{aligned} \quad (6.23)$$

aplicando-se a equação da energia livre específica para cada umas das fases fluidas  $\alpha$  chega-se então a:

$$\sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} - S \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} - \sum_{\alpha} \nabla \left( \left( \psi_{\alpha} + \frac{p_{\alpha}}{\rho_{\alpha}} \right) \rho_{\alpha} M^{\alpha} \right) + \sum_{\alpha} b \rho_{\alpha} M^{\alpha} - \frac{q}{T} \nabla(T) \geq 0 \quad (6.24)$$

da mesma forma aplicando-se o conceito de entalpia livre específica para cada umas das fases fluidas  $\alpha$  chega-se a:

$$\sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} - S \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} - \sum_{\alpha} \nabla (g_{\alpha} \rho_{\alpha} M^{\alpha}) + \sum_{\alpha} b \rho_{\alpha} M^{\alpha} - \frac{q}{T} \nabla(T) \geq 0 \quad (6.25)$$

que pode ser reescrito também assim:

$$\begin{aligned} \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} - S \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} - \sum_{\alpha} g_{\alpha} \nabla (\rho_{\alpha} M^{\alpha}) - \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} M^{\alpha} \nabla (g_{\alpha}) + \\ + \sum_{\alpha} b \rho_{\alpha} M^{\alpha} - \frac{q}{T} \nabla(T) \geq 0 \end{aligned} \quad (6.26)$$

Das equações de conservação de cada uma das fases fluidas (líquido, vapor e ar), pode-se escrever:

$$\nabla (\rho_{\ell} M^{\ell}) = - \frac{dm^{\ell}}{dt} - m^{\ell v} \quad (6.27)$$



$$\nabla(\rho_v M^v) = -\frac{dm^v}{dt} + m^{\ell v} \quad (6.28)$$

$$\nabla(\rho_a M^a) = -\frac{dm^a}{dt} \quad (6.29)$$

onde  $m^{\ell v}$  representa a massa líquida por unidade de volume que se transforma em vapor entre os instantes  $t$  e  $t + dt$ . Desta forma, pode-se reescrever a equação (6.26) assim:

$$\begin{aligned} \sigma: \frac{d\varepsilon}{dt} - S \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} - \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} M^{\alpha} \nabla(g_{\alpha}) + \sum_{\alpha} b \rho_{\alpha} M^{\alpha} - \frac{q}{T} \nabla(T) + \\ + g^{\ell} \frac{dm^{\ell}}{dt} + g^{\ell} m^{\ell v} + g^v \frac{dm^v}{dt} - g^v m^{\ell v} + g^a \frac{dm^a}{dt} \geq 0 \end{aligned} \quad (6.30)$$

ou simplesmente:

$$\begin{aligned} \left[ \sigma: \frac{d\varepsilon}{dt} + \sum_{\alpha} g_{\alpha} \frac{dm_{\alpha}}{dt} - S \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} \right] + \left[ -\frac{q}{T} \nabla(T) \right] + \left[ \sum_{\alpha} -\rho_{\alpha} M^{\alpha} (\nabla(g_{\alpha}) - b) \right] + \\ + \left[ (g^{\ell} - g^v) m^{\ell v} \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (6.31)$$

Os quatro termos entre colchetes representam respectivamente as dissipações devido aos efeitos irreversíveis no esqueleto, na dissipação térmica, na dissipação do líquido em seu movimento através do esqueleto e na dissipação devido à mudança da fase. Em (6.16), (6.17) e (6.31), a soma é realizada para  $\alpha = \ell, v$  e  $a$ . Para obter (6.31), foi usada a equação de balanço de massa (6.114), (6.115), e (6.116).

Assumindo-se o equilíbrio termodinâmico entre a fase líquida e seu vapor corresponde obtém-se a igualdade do potencial de Gibbs:

$$g^v(T, p^v) = g^{\ell}(T, p^{\ell}) \quad (6.32)$$

Na equação (6.30),  $(g^\ell - g^v)m^{\ell v}$  representa a dissipação associada à mudança de fase. Considerando-se a escala macroscópica a hipótese de equilíbrio termodinâmico conservada em toda a evolução, as equações (6.31) e (6.32) conduzem a inequação de Clausius-Duhem:

$$\left[ \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} + \sum_{\alpha} g_{\alpha} \frac{dm_{\alpha}}{dt} - S \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi}{dt} \right] + \left[ -\frac{q}{T} \nabla(T) \right] + \left[ \sum_{\alpha} -\rho_{\alpha} M^{\alpha} (\nabla(g_{\alpha}) - b) \right] \geq 0 \quad (6.33)$$

Como mencionado anteriormente, foi introduzido o conceito de energia livre  $\Psi^{sq}$  e a entropia  $S^{sq}$  por unidade de volume do esqueleto (incluindo todas as interfaces entre sólidos e fluidos e entre fluidos e fluidos) definido por:

$$\Psi^{sq} = \Psi - m^{\alpha} \psi^{\alpha} \quad (6.34)$$

$$S^{sq} = S - m^{\alpha} s^{\alpha} \quad (6.35)$$

logo pode-se escrever que

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d\Psi^{sq}}{dt} + m^{\alpha} \frac{d\psi^{\alpha}}{dt} + \psi^{\alpha} \frac{dm^{\alpha}}{dt} \quad (6.36)$$

e desta forma a desigualdade de Clausius-Duhem (6.33) se torna:

$$\left[ \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} + g_{\alpha} \frac{dm_{\alpha}}{dt} - (S_{sq} + m_{\alpha} s_{\alpha}) \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi_{sq}}{dt} - m_{\alpha} \frac{d\psi_{\alpha}}{dt} - \psi_{\alpha} \frac{dm_{\alpha}}{dt} \right] + \left[ -\frac{q}{T} \nabla(T) \right] + \left[ \sum_{\alpha} -\rho_{\alpha} M^{\alpha} (\nabla(g_{\alpha}) - b) \right] \geq 0 \quad (6.37)$$

Recordando-se das definições de  $d\psi_{\alpha}$  em (6.13) e de  $g_{\alpha}$  pode-se reescrever a equação (6.37) assim:

$$\begin{aligned}
& \left[ \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} + \left( \psi_\alpha + \frac{p_\alpha}{\rho_\alpha} \right) \frac{dm_\alpha}{dt} - (S_{sq} + m_\alpha s_\alpha) \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi_{sq}}{dt} - m_\alpha \left( -p_\alpha \frac{d\left(\frac{1}{\rho_\alpha}\right)}{dt} - s_\alpha \frac{dT}{dt} \right) - \psi_\alpha \frac{dm_\alpha}{dt} \right] + \\
& + \left[ -\frac{q}{T} \nabla(T) \right] + \left[ \sum_\alpha -\rho_\alpha M^\alpha (\nabla(g_\alpha) - b) \right] \geq 0
\end{aligned} \tag{6.38}$$

Aplicando-se o conceito de massa para cada um dos fluidos constituintes  $m_\alpha = \rho_\alpha \phi_\alpha$ , sua derivada com relação ao tempo  $\frac{dm_\alpha}{dt} = \rho_\alpha \frac{d\phi_\alpha}{dt} + \phi_\alpha \frac{d\rho_\alpha}{dt}$ , a derivada do inverso da densidade  $\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{\rho_\alpha} \right) = -\frac{\dot{\rho}_\alpha}{\rho_\alpha^2} = -\frac{1}{\rho_\alpha^2} \frac{d\rho_\alpha}{dt}$  e empregando-se algumas simplificações possíveis pode-se chegar a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
& \left[ \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} + p_\alpha \frac{d\phi_\alpha}{dt} - S_{sq} \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi_{sq}}{dt} \right] + \\
& + \left[ -\frac{q}{T} \nabla(T) \right] + \left[ \sum_\alpha -\rho_\alpha M^\alpha (\nabla(g_\alpha) - b) \right] \geq 0
\end{aligned} \tag{6.39}$$

Que pode ser escrito de forma explícita como:

$$\begin{aligned}
& \left[ \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} + p^\ell \frac{d\phi^\ell}{dt} + p^v \frac{d\phi^v}{dt} + p^a \frac{d\phi^a}{dt} - S^{sq} \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi^{sq}}{dt} \right] + \\
& + \left[ -\frac{q}{T} \nabla(T) \right] + \left[ \sum_\alpha -\rho_\alpha M^\alpha (\nabla(g_\alpha) - b) \right] \geq 0
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Levando-se em conta o fato de que o vapor e o ar ocupam a mesmo volume de fase:

$$\phi^g = \phi^v = \phi^a \tag{6.41}$$

sendo sua derivada com relação ao tempo escrita assim

$$\frac{d\phi_g}{dt} = \frac{d\phi_v}{dt} = \frac{d\phi_a}{dt} \quad (6.42)$$

e que a pressão do gás “ $p_g$ ” é a pressão total da mistura gasosa, ou seja:

$$p_g = p_v + p_a \quad (6.43)$$

pode-se através de (6.42) reescrever (6.40) como:

$$\left[ \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} + p_\ell \frac{d\phi_\ell}{dt} + (p_v + p_a) \frac{d\phi_g}{dt} - S_{sq} \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi_{sq}}{dt} \right] + \left[ -\frac{q}{T} \nabla(T) \right] + \left[ \sum_\alpha -\rho_\alpha M^\alpha (\nabla(g_\alpha) - b) \right] \geq 0 \quad (6.44)$$

e por (6.43) reescrever (6.44) assim:

$$\left[ \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} + p_\ell \frac{d\phi_\ell}{dt} + p_g \frac{d\phi_g}{dt} - S_{sq} \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi_{sq}}{dt} \right] + \left[ -\frac{q}{T} \nabla(T) \right] + \left[ \sum_\alpha -\rho_\alpha M^\alpha (\nabla(g_\alpha) - b) \right] \geq 0 \quad (6.45)$$

Sabendo-se que o volume de vazios é necessariamente ocupado pela fase líquida e gasosa, segundo a equação (6.4), pode-se escrever a porosidade líquida em função da saturação e da porosidade total, ou seja:

$$\phi_\ell = \phi S_\ell \quad (6.46)$$

logo

$$\frac{d\phi_\ell}{dt} = S_\ell \frac{d\phi}{dt} + \phi \frac{dS_\ell}{dt} \quad (6.47)$$

De forma semelhante para a porosidade gasosa pode-se escrever:

$$\phi_g = \phi(1 - S_\ell) = \phi S_g \quad (6.48)$$

e da mesma maneira:

$$\frac{d\phi_g}{dt} = (1 - S_\ell) \frac{d\phi}{dt} - \phi \frac{dS_\ell}{dt} \quad (6.49)$$

Empregando-se as expressões (6.47) e (6.49) na equação (6.45) tem-se:

$$\begin{aligned} & \left[ \sigma : \frac{d\varepsilon}{dt} + (p_\ell S_\ell + p_g S_g) \frac{d\phi}{dt} - p_c \phi \frac{dS_\ell}{dt} - S_{sq} \frac{dT}{dt} - \frac{d\Psi_{sq}}{dt} \right] + \\ & + \left[ -\frac{q}{T} \nabla(T) \right] + \left[ \sum_\alpha -\rho_\alpha M^\alpha (\nabla(g_\alpha) - b) \right] \geq 0 \end{aligned} \quad (6.50)$$

### 6.1.2.2 – Equações constitutivas do esqueleto

A relação (6.45) sugere que a energia livre “ $\Psi_{sq}$ ” pode ser tomada em função das deformações “ $\varepsilon$ ”, das porosidades Lagrangianas “ $\phi_\ell$ ” e “ $\phi_g$ ” junto com a temperatura “ $T$ ” e das variáveis internas “ $\alpha$ ” descrevendo outros fenômenos irreversíveis que ocorrem no meio poroso. Os argumentos clássicos conduzem então às seguintes leis de estado formado pelo tensor de tensões totais  $\sigma$ , pelas pressões  $p_\ell$ ,  $p_g$ , pelas forças termodinâmicas  $A$  associadas a  $\alpha$  e finalmente pela entropia  $S$ .

$$\sigma = \frac{\partial \Psi_{sq}}{\partial \varepsilon}, \quad p_\ell = \frac{\partial \Psi_{sq}}{\partial \phi_\ell}, \quad p_g = \frac{\partial \Psi_{sq}}{\partial \phi_g}, \quad A = -\frac{\partial \Psi_{sq}}{\partial \alpha}, \quad S_{sq} = -\frac{\partial \Psi_{sq}}{\partial T} \quad (6.51)$$

Pode ser também conveniente usar-se em vez de duas porosidades,  $\phi_g$  e  $\phi_\ell$ , a porosidade total  $\phi$  e a saturação líquida  $S_\ell$ . Neste caso, usando (6.51), ou através da observação de (6.50), as leis de estado referentes às pressões em (6.51) são substituídas por

$$S_\ell p_\ell + S_g p_g = \frac{\partial \Psi_{sq}}{\partial \phi}, \quad \phi(p_\ell - p_g) = -\phi p_c = \frac{\partial \Psi_{sq}}{\partial S_\ell} \quad (6.52)$$

### 6.1.3 – Formulação em tensão efetiva com esqueleto contínuo compressível e isotérmico

Para o caso isotérmico desconsiderando-se as cargas ou fontes de domínio, a desigualdade de Clausius–Duhem se torna, após algumas manipulações:

$$\sigma_{ij} : \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + p_\ell \frac{d\phi_\ell}{dt} + p_g \frac{d\phi_g}{dt} - \frac{d\Psi_{sq}(\varepsilon_{ij}, S_\ell, \phi)}{dt} \geq 0 \quad (6.53)$$

Esta desigualdade representa a energia livre total do sistema (esqueleto) incluindo a energia das interfaces. A seguinte forma da equação (6.53) é comumente empregada:

$$\sigma_{ij} : \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + (p_\ell S_\ell + p_g S_g) \frac{d\phi}{dt} - \phi p_c \frac{dS_\ell}{dt} - \frac{d\Psi_{sq}(\varepsilon_{ij}, S_\ell, \phi)}{dt} \geq 0 \quad (6.54)$$

**Não** será feita a suposição da incompressibilidade do esqueleto contínuo o que leva a seguinte relação de “desigualdade”:

$$d\varepsilon_{ij} : I > d\phi \quad (6.55)$$

Conseqüentemente, as equações de estado da poroelasticidade para o esqueleto (esqueleto sólido + Interfaces) são:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi_{sq}}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad \phi p_c = \frac{\partial \Psi_{sq}}{\partial S_\ell}, \quad p_\ell S_\ell + p_g S_g = \frac{\partial \Psi_{sq}}{\partial \phi} \quad (6.56)$$

Até agora, a expressão do potencial  $\Psi_{sq}$  é desconhecida. A fim de identificar a curva de sucção com a segunda equação de (6.56). Supondo-se que ela não dependa da tensão total e da variação de porosidade. Esta suposição é razoavelmente aceitável para um material (como o minério de ferro) em que a variação da porosidade durante um carregamento é demasiadamente pequena para afetar fortemente o processo de saturação, ao contrário do caso de materiais argilosos (como as argilas ou a bentonita (GRGIC *et al.*, 2006)). A curva da sucção pode ser obtida experimentalmente considerando as deformações nulas. Sob esta circunstância, a energia livre do esqueleto corresponde somente à energia das interfaces  $\Psi_\gamma$ , e a sucção capilar depende somente da saturação líquida. Conseqüentemente, a equação (6.54) se tornaria em:

$$\Psi_{sq}(S_\ell) = \psi_\gamma(S_\ell) = \phi_0 U(S_\ell) \text{ com } U(S_\ell) = -\int_{S_\ell}^1 p_c(x) dx, \quad p_c = -\frac{dU(S_\ell)}{dS_\ell} \quad (6.57)$$

Contudo, sob circunstâncias gerais (de carregamento), o esqueleto contínuo é deformável e supondo-se que a sucção capilar depende somente da saturação líquida, a seguir nós podemos identificar totalmente  $\Psi_{sq}$ . Esta identificação necessita a seguinte suposição: a energia livre de esqueleto  $\Psi_{sq}$  é a soma de duas energias diferentes, da energia das interfaces  $\psi_\gamma$  e da energia de esqueleto sólido  $\psi_s$  supondo-se que este ( $\psi_s$ ) não depende da saturação líquida:

$$\Psi_{sq}(\varepsilon_{ij}, S_\ell, \phi) = \psi_\gamma(S_\ell, \phi) + \psi_s(\varepsilon_{ij}, \phi) = \phi U(\phi, S_\ell) + \psi_s(\varepsilon_{ij}, \phi) \quad (6.58)$$

Com a (6.58) na (6.54) tem-se:

$$\sigma \frac{d\varepsilon}{dt} + \left( p^\ell S^\ell + p^g S^g - \frac{\partial(\phi U(\phi, S^\ell))}{\partial \phi} \right) \frac{d\phi}{dt} - \phi \left( p^c + \frac{\partial(U(\phi, S^\ell))}{\partial S^\ell} \right) \frac{dS^\ell}{dt} + \left( - \frac{d\psi_s(\varepsilon_{ij}, \phi)}{dt} \right) \geq 0 \quad (6.59)$$

Para este caso mais geral, a fórmula (6.54) pode ser reescrita como segue:

$$\sigma_{ij} : \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \pi \frac{d\phi}{dt} - \frac{d\psi_s(\varepsilon_{ij}, \phi)}{dt} \geq 0 \quad (6.60)$$

$$p^c = - \frac{\partial(U(\phi, S^\ell))}{\partial S^\ell} \quad (6.61)$$

Com  $\pi$  sendo a pressão líquida equivalente nos poros:

$$\pi = p^\ell S^\ell + p^g S^g - \frac{\partial(\phi U(\phi, S^\ell))}{\partial \phi} \quad (6.62)$$

Em (COUSSY e FLEUREAU, 2002) é demonstrado que para um meio poroso cuja geometria dos poros pode ser representada pelo empilhamento de micro esferas a aproximação micro-macro leva a seguinte expressão:

$$\frac{\partial(\phi U(\phi, S^\ell))}{\partial \phi} = \frac{2}{3} U(\phi, S^\ell) \quad (6.63)$$

Logo:

$$\pi = p^\ell S^\ell + p^g S^g - \frac{2}{3} U(\phi, S^\ell) \quad (6.64)$$



Expandindo-se a derivada parcial presente na equação (6.63) tem-se

$$\frac{\partial(\phi U(\phi, S^\ell))}{\partial \phi} = U(\phi, S^\ell) + \phi \frac{\partial(U(\phi, S^\ell))}{\partial \phi} = \frac{2}{3} U(\phi, S^\ell) \quad (6.65)$$

E desta pode-se tirar que:

$$\frac{1}{U(\phi, S^\ell)} \frac{\partial(U(\phi, S^\ell))}{\partial \phi} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\phi} \quad (6.66)$$

Integrando-se a equação anterior de  $\phi_0$  a  $\phi$

$$\int_{\phi_0}^{\phi} \frac{1}{U(\phi, S^\ell)} \frac{\partial(U(\phi, S^\ell))}{\partial \phi} d\phi = -\frac{1}{3} \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{1}{\phi} d\phi \quad (6.67)$$

chega-se a:

$$\left( \text{Ln}(U(\phi, S^\ell)) - \text{Ln}(U(\phi_0, S^\ell)) \right) = -\frac{1}{3} (\text{Ln}(\phi) - \text{Ln}(\phi_0)) \quad (6.68)$$

que se manipulada corretamente obtém-se:

$$U(\phi, S^\ell) = \left( \frac{\phi}{\phi_0} \right)^{-\frac{1}{3}} U_0(S^\ell) \quad (6.69)$$

Retomando-se a equação (6.61), empregando-se nesta a equação anterior chega-se a:

$$p^c = - \left( \frac{\phi}{\phi_0} \right)^{-\frac{1}{3}} \frac{\partial(U_0(S^\ell))}{\partial S^\ell} \quad (6.70)$$

Que se integrada de  $S^\ell$  a 1, tem-se:

$$\int_{S^\ell}^1 p^c dS^\ell = -\left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{\frac{1}{3}} \int_{S^\ell}^1 U_0(S^\ell) dS^\ell \quad (6.71)$$

Sabendo-se que  $U_0(1) = 0$  tem-se:

$$U_0(S^\ell) = \left(\frac{\phi}{\phi_0}\right)^{\frac{1}{3}} \int_{S^\ell}^1 p^c dS^\ell \quad (6.72)$$

Substituindo-se a (6.72) na (6.69) tem-se:

$$U(\phi, S^\ell) = \int_{S^\ell}^1 p^c dS^\ell \quad (6.73)$$

Logo a pressão equivalente  $\pi$  pode ser reescrita como:

$$\pi = p^\ell S^\ell + p^g S^g - \frac{2}{3} \int_{S^\ell}^1 p^c dS^\ell = p^\ell S^\ell + p^g S^g - \frac{2}{3} U(\phi, S^\ell) \quad (6.74)$$

ou ainda:

$$\pi = p^g - p^c S^\ell - \frac{2}{3} \int_{S^\ell}^1 p^c dS^\ell = p^g - p^c S^\ell - \frac{2}{3} U(\phi, S^\ell) \quad (6.75)$$

Note que  $\pi$  se torna  $p_\ell$  quando  $S_\ell = 1$ ; é por isso que se considera como a pressão líquida equivalente nos poros, pela referência ao caso saturado. A formulação energética do comportamento elástico é:

$$\sigma_{ij} : \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} + \pi \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\psi_s(\varepsilon_{ij}, \phi)}{dt} \quad (6.76)$$

$\psi_s$  representa a energia elástica do esqueleto sólido.

Considerando-se as seguintes igualdades (b: Coeficiente de Biot; M: Módulo de Biot;  $K^0$ : “bulk modulus” drenado):

$$\mathbf{b} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon_{ij} : \mathbf{I}} \right), \quad \mathbf{M} = \left( \frac{\partial \pi}{\partial \phi} \right), \quad \mathbf{K}^0 = \left( \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \varepsilon_{ij} : \mathbf{I}} \right) \quad (6.77)$$

A lei de comportamento elástico é sob condições drenadas ( $\lambda^0$ : Coeficiente de Lamé drenado; G: Coeficiente de Lamé ou módulo de elasticidade transversal):

$$d\sigma_{ij} = \lambda^0 \text{Tr}(d\varepsilon_{ij}) \mathbf{I} + 2G d\varepsilon_{ij} - b d\pi, \quad d\sigma_m = \frac{1}{3} d\sigma_{ij} \mathbf{I} = K^0 d\varepsilon_{ij} : \mathbf{I} - b d\pi \quad (6.78)$$

com:

$$d\phi = b d\varepsilon : \mathbf{I} + \frac{d\pi}{M}, \quad K^0 = K - Mb^2 \quad (6.79)$$

Como para o caso saturado, é assumido que o tensor de deformações totais é controlado pelo tensor de tensões efetivas:

$$d\sigma'_{ij} = d\sigma_{ij} + b d\pi = \lambda^0 \text{Tr}(d\varepsilon_{ij}) \mathbf{I} + 2G d\varepsilon_{ij}, \quad d\sigma'_m = d\sigma_m + b d\pi = K^0 d\varepsilon_{ij} : \mathbf{I} \quad (6.80)$$

A tensão efetiva é a tensão que controla o comportamento da relação tensão–deformação independentemente das pressões dos fluidos. A integração da equação (6.80) conduz a fórmula (6.81):

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= \sigma_{ij} + b\pi = \sigma_{ij} + b \left( p_g - S_\ell p_c - \frac{2}{3} \int_{S_\ell}^1 p_c(x) dx \right) \\ &= \sigma_{ij} + b \left( p_g - \frac{1}{3} S_\ell p_c - \frac{2}{3} \int_0^{p_c} S_\ell(x) dx \right) \end{aligned} \quad (6.81)$$

### 6.1.4 – Escolha da forma adotada para a energia livre específica:

Adotando-se um funcional de energia livre dependente somente da deformação  $\varepsilon_{ij}$  da saturação líquida  $S_\ell$  e da porosidade total lagrangiana, e ainda supondo a possibilidade a separação do termo de energia das interfaces e da deformação do solo pode-se escrever a energia livre específica seguindo-se a equação (6.58), onde o funcional de energia livre referente à deformação do solo pode ser adotado como em (COUSSY e FLEUREAU, 2002) igual à:

$$\psi_s(\phi, \varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} E_{ijkl}^d \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \left( -\text{btr}(\varepsilon_{ij}) + (\phi - \phi_0) + \frac{\pi_0}{M} \right) M \left( -\text{btr}(\varepsilon_{ij}) + (\phi - \phi_0) + \frac{\pi_0}{M} \right) \quad (6.82)$$

ou para o caso elasto-plástico:

$$\psi_s(\phi - \phi^p, \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^e E_{ijkl}^d \varepsilon_{kl}^e + \frac{1}{2} \left( -\text{btr}(\varepsilon_{ij}^e) + (\phi^e - \phi_0) + \frac{\pi_0}{M} \right) M \left( -\text{btr}(\varepsilon_{ij}^e) + (\phi^e - \phi_0) + \frac{\pi_0}{M} \right) \quad (6.83)$$

Sendo assim a equação (6.51) escrita em tensões pode ser reescrita como:

$$\sigma_{ij} = \left( \frac{\partial(\psi_s(\phi^e, \varepsilon_{ij}^e))}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right)_{\phi^e} = E_{ijkl}^d \varepsilon_{kl}^e + bM \left( \text{btr}(\varepsilon_{ij}^e) - (\phi^e - \phi_0) - \frac{\pi_0}{M} \right) \delta_{ij} \quad (6.84)$$

E a pressão líquida equivalente nos poros como:

$$\pi = S^\ell p^\ell + S^g p^g - \frac{2}{3} \int_{S_\ell} p^c(s) ds = \left( \frac{\partial(\psi_s(\phi^e, \varepsilon_{ij}^e))}{\partial \phi^e} \right)_{\varepsilon_{ij}^e} = -M \left( \text{btr}(\varepsilon_{ij}^e) - (\phi^e - \phi_0) - \frac{\pi_0}{M} \right) \quad (6.85)$$

De onde se pode extrair que a porosidade pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\phi^e - \phi_0 = \text{btr}(\varepsilon_{ij}^e) + \frac{1}{M}(\pi - \pi_0) = \text{btr}(\varepsilon_{ij}^e) + \frac{1}{M}\left(\mathbf{p}^\ell \mathbf{S}^\ell + \mathbf{p}^g \mathbf{S}^g - \frac{2}{3} \mathbf{U}^c - \pi_0\right) \quad (6.86)$$

que para o caso plástico é dado por:

$$\phi = \text{btr}(\varepsilon_{ij}) + \frac{1}{M}\pi - \frac{1}{M}\pi_0 + \phi_0 + \phi^p - \text{btr}(\varepsilon_{ij}^p) \quad (6.87)$$

Lembrando-se que

$$\phi^e = \phi - \phi^p \quad (6.88)$$

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p \quad (6.89)$$

Que se diferenciada no tempo fica sendo:

$$\dot{\phi} = \text{btr}(\dot{\varepsilon}_{ij}) + \frac{1}{M}\dot{\pi} + \dot{\phi}^p - \text{btr}(\dot{\varepsilon}_{ij}^p) \quad (6.90)$$

Empregando-se a expressão (6.85) na (6.84), pode-se reescreve-la da seguinte maneira:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}^d \varepsilon_{kl}^e - \mathbf{b}\pi\delta_{ij} \quad (6.91)$$

E com a expressão de U:

$$U(\phi, \mathbf{S}^\ell) = \int_{S^\ell} \mathbf{p}^c dS^\ell \quad (6.92)$$

A pressão equivalente fica escrita como:

$$\pi = S_g p_g + S_\ell p_\ell - \frac{2}{3} \int_{S_\ell}^1 p_c(s) ds \quad (6.93)$$

### 6.1.5 – Relações de transporte

Ao negligenciar-se a inércia, os efeitos viscosos e levando-se em consideração o termo da difusão (efeito de Soret), a lei clássica do transporte (lei de Darcy) para os meios porosos isotrópicos (balanço de momento) relaciona os fluxos relativos lagrangianos  $M_\ell$  e  $M_g$  com a pressão e o gradiente de temperatura. Para as fases do líquido e do gás, tem-se respectivamente

$$M_i^\ell = \frac{k^\phi(\phi) k^{\ell S^\ell}(S_\ell)}{\mu_\ell} (-\nabla p^\ell + f_i^\ell) - k^{T\ell} \nabla T = \frac{w_i^\ell}{\rho_\ell} \quad (6.94)$$

$$M_i^g = \frac{k^\phi(\phi) k^{g S^\ell}(S_\ell)}{\mu_g} (-\nabla p^g + f_i^g) - k^{Tg} \nabla T = \frac{w_i^g}{\rho_g} \quad (6.95)$$

com  $f_i^\ell$  e  $f_i^g$  sendo cargas de domínio que podem ser empregadas para representar o peso próprio por exemplo. Nas relações acima,  $k^{\ell S^\ell}(S_\ell)$  e  $k^{g S^\ell}(S_\ell)$  são as permeabilidades relativas das fases do líquido e do gás,  $\mu_i$  são as viscosidades das fases e o  $\rho_i$  as densidades de massa.  $k^{Ti}$  é o coeficiente do acoplamento para o efeito de Soret e  $k^\phi(\phi)$  é a permeabilidade intrínseca do meio poroso que é dependente da porosidade do meio. A dependência das permeabilidades na saturação  $S^\ell$  é já bem conhecida. Nesta formulação considerou-se também esta permeabilidade como dependente também das variáveis internas. Por exemplo, o efeito dos danos na permeabilidade pode ser considerado.

O transporte do vapor dentro do gás ocorre de duas maneiras: pela difusão devido ao gradiente de vapor e pela advecção devido ao movimento do gás como dado por (6.95). O fluxo total do vapor é conseqüentemente

$$M_v = M_v^d + M_g \quad (6.96)$$

A primeira parcela é descrita pela lei de Fick, (veja (LORET e KHALILI, 2000; COUSSY e FLEUREAU, 2002; LORET e KHALILI, 2002))

$$M_v^d = n_g (v_v - v_g) = -n_g D_v \frac{\nabla p_v}{\rho_v} \quad (6.97)$$

com  $D_v$  denotando a difusividade molecular do vapor no gás contido no poro.

A respeito da condução do calor, a clássica lei de Fourier é adotada e incluiu-se o efeito dos fluxos de calor devido aos gradientes de pressão. O vetor do fluxo do calor é então dado por

$$q = -\Lambda \nabla T - k_{Tg} \nabla p_g - k_{Tl} \nabla p_l \quad (6.98)$$

que relaciona o fluxo de calor total “q” com o gradiente de temperatura  $\nabla T$  e com os gradientes de pressão  $\nabla p_g$  e  $\nabla p_l$ .  $\Lambda$  é o coeficiente de condução efetivo de calor da mistura. O coeficiente de condução efetivo de calor é geralmente escrito como

$$\Lambda = -(1-\phi) \Lambda^s + \phi^l \Lambda^l + \phi^g \Lambda^g \quad (6.99)$$

com o  $\Lambda^i$  ( $i = s, l, g$ ) denotando os coeficientes de condução de calor da fase sólida, líquida e da fase gasosa respectivamente. Lembrando-se que é assumido o equilíbrio térmico nas partículas porosas do meio que ajusta a mesma temperatura  $T$  ao sólido, líquido e ao gás situado na mesma posição.

### **6.1.6 – Equações de campo**

A evolução quase-estática de um sólido poro-elasto-plástico não saturado para pequenas deformações e pequenos deslocamentos é descrito pelas relações constitutivas descritas anteriormente, complementadas pelas equações do campo, pelas condições limite ou condições de contorno e pelas condições iniciais. As equações de campo relevantes são o balanço de momento, a equação de compatibilidade, balanço de massa ou conservação de massa e o balanço ou conservação de energia.

#### **6.1.6.1 – Balanço de momento e equação de compatibilidade**

A conservação de momento, a equação de compatibilidade entre deformações e deslocamentos e as forças de superfície são dadas respectivamente por

$$\operatorname{div}\sigma + b = 0 \quad \text{ou} \quad \sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (6.100)$$

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left[ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6.101)$$

$$T_i = \sigma_{ij} \eta_j \quad (6.102)$$

$\mathbf{u}$  sendo o campo de deslocamento do esqueleto,  $\rho$  a densidade de massa da mistura e  $b$  a carga de domínio da mistura.

Para um solo em regime elástico linear do solo pode-se escrever através da lei de Hooke a relação entre as tensões efetivas e as deformações assim:

$$\sigma_{ij}^{\text{ef}} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (6.103)$$

onde

$$E_{ijkl} = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (6.104)$$

sendo  $G$ ,  $\nu$  e  $\delta_{ij}$  respectivamente o Módulo de Elasticidade Transversal do esqueleto, o coeficiente de poisson do esqueleto e o tensor identidade de segunda ordem conhecido como delta de Kronecker.

Pode-se escrever uma nova tensão  $\sigma'_{ij}$  semelhante à efetiva que se diferencia da efetiva  $\sigma_{ij}^{\text{ef}}$  por levar em consideração os efeitos da variação da temperatura:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij}^{\text{ef}} - \gamma T \delta_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \gamma T \delta_{ij} \quad (6.105)$$

Com auxílio da equação (6.105) da (6.81) e da (6.74) as tensões totais para o meio poro-elástico não saturado com efeito térmico podem ser escritas da seguinte forma:



$$\sigma_{ij} = \sigma'_{ij} - b\pi\delta_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \left( b \left( S^\ell p^\ell + S^g p^g - \frac{2}{3} U^c \right) - \gamma T \right) \delta_{ij} \quad (6.106)$$

Se substituído na equação precedente (6.106) o tensor constitutivo de quarta ordem da lei de Hooke (6.104) chega-se a seguinte expressão:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\delta_{ij}\varepsilon_{kk} - \left( b \left( S^\ell p^\ell + S^g p^g - \frac{2}{3} U^c \right) - \gamma T \right) \delta_{ij} \quad (6.107)$$

E através da equação (6.106) as tensões efetivas podem ser reescritas em função das tensões totais:

$$\sigma_{ij}^{ef} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} = \sigma_{ij} + \left( b \left( S^\ell p^\ell + S^g p^g - \frac{2}{3} U^c \right) - \gamma T \right) \delta_{ij} \quad (6.108)$$

Aplicando-se a equação das tensões totais (6.106) na equação de equilíbrio (6.100) pode-se escrever:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \sigma_{ij,j}^{ef} - \left( b S^\ell p_{,j}^\ell + b S^g p_{,j}^g - b \frac{2}{3} U_{,j}^c - \gamma T \right) \delta_{ij} + b_i = 0 \quad (6.109)$$

As forças normais e tangentes a um determinado plano podem ser escritas aplicando-se a equação das tensões totais (6.106) na equação das forças de superfície (6.102):

$$T_i = \sigma_{ij}\eta_j = \left( \sigma_{ij}^{ef} - \left( b S^\ell p^\ell + b S^g p^g - b \frac{2}{3} U^c - \gamma T \right) \delta_{ij} \right) \eta_j \quad (6.110)$$

O gradiente das tensões efetivas pode ser obtido derivando-se a equação das tensões efetivas (6.103):

$$\sigma_{ij,j}^{ef} = \frac{\partial}{\partial X_j} (E_{ijkl} u_{k,l}) \quad (6.111)$$

Aplicando-se então a relação precedente (6.111) à equação (6.109) tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left[ E_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \left( bS^\ell p^\ell + bS^g p^g - b \frac{2}{3} U^c - \gamma T \right) \delta_{ij} \right] + b_i = 0 \quad (6.112)$$

Como na equação (6.107), se substituído na equação (6.112) o tensor constitutivo de quarta ordem da lei de Hooke (6.104) chega-se a seguinte expressão:

$$G \left[ u_{i,jj} + \frac{1}{(1-2\nu)} u_{j,ij} \right] + b_i - \left( bS^\ell p_{,j}^\ell + bS^g p_{,j}^g - b \frac{2}{3} U_{,j}^c - \gamma T \right) \delta_{ij} = 0 \quad (6.113)$$

Sendo esta equação (6.113) a equação diferencial que descreve o comportamento do esqueleto do solo de um meio poro-elástico não saturado com efeito de variação de temperatura.

### **6.1.6.2 – Balanço de massa**

Restringindo-se a análise às tensões infinitesimais e considerando-se a mudança de fase, a conservação de massa líquida, de massa de vapor e da massa de ar seco, podem ser escritas respectivamente como (ver (COUSSY e FLEUREAU, 2002))

$$\frac{dm_\ell}{dt} + \frac{d(\rho_\ell M_i^\ell)}{dx_i} = -m_{\ell v} \quad \text{ou} \quad \dot{m}^\ell + w_{i,i}^\ell = -m^{\ell v} \quad (6.114)$$

$$\frac{dm_v}{dt} + \frac{d(\rho_v M_i^v)}{dx_i} = m_{\ell v} \quad \text{ou} \quad \dot{m}^v + w_{i,i}^v = m^{\ell v} \quad (6.115)$$

$$\frac{dm_a}{dt} + \frac{d(\rho_a M_i^a)}{dx_i} = 0 \quad \text{ou} \quad \dot{m}^a + w_{i,i}^a = 0 \quad (6.116)$$

onde

$$m_i = \rho_i \phi_i \quad (6.117)$$

é a massa Lagrangiana do constituinte  $i$ . Note que no caso mais geral,  $\rho_i M_i$  pode ser substituído por seu equivalente Lagrangiano (ver (COUSSY e FLEUREAU, 2002)). O termo  $m_{lv}$  representa a taxa de massa líquida que muda de fase se transformando em vapor por unidade de volume inicial. Esta taxa de transferência de massa pode ser obtida pela equação de Dalton (ver Loret e Khalili (LORET e KHALILI, 2000; 2002))

$$m_{lv} = z(p_{sv} - p_v) \quad (6.118)$$

onde  $z$  representa o coeficiente de transferência de massa da fase líquida,  $p_v$  é a pressão de vapor e  $p_{sv}$  é a pressão de vapor saturado dada pela relação de Kelvin

$$p_{sv} = p_{sv0} e^{\frac{p_c M_l}{\rho_l R T}} \quad (6.119)$$

com  $M_l$  sendo a massa molecular do líquido,  $R$  a constante universal dos gases,  $p_c$  a pressão capilar e finalmente  $p_{sv0}$  a pressão de vapor saturado em contato com o líquido sobre uma superfície plana e dependente somente da temperatura. Esta variável é obtida usando a equação de Clausius-Clapeyron:

$$p_{sv0} = p_0 e^{\frac{L M_l}{R T}} \quad (6.120)$$

em que  $L$  é o calor latente de vaporização e  $p_0$  o valor de referência.

Da equação (6.114), sabendo-se por meio de (6.117) que

$$\dot{m}^\ell = \dot{\rho}_\ell \phi^\ell + \rho_\ell \dot{\phi}^\ell \quad (6.121)$$

, a conservação de massa para a fase líquida implica em

$$\dot{\rho}_\ell \phi^\ell + \rho_\ell \dot{\phi}^\ell + m_{\ell v} = -\frac{d(\rho_\ell M_i^\ell)}{dx_i} \quad (6.122)$$

Assumindo que o líquido é barotrópico, isto é, que a densidade de massa  $\rho_\ell = \rho(p_\ell, T)$  depende somente da pressão  $p_\ell$  e da temperatura  $T$ , tem-se

$$\dot{\rho}_\ell = \frac{\partial \rho_\ell}{\partial p_\ell} \dot{p}_\ell + \frac{\partial \rho_\ell}{\partial T} \dot{T} = \rho_\ell (\bar{k}_\ell \dot{p}_\ell - \alpha_\ell \dot{T}) \quad (6.123)$$

onde pode-se introduzir o coeficiente de compressibilidade e de expansão térmica da fase líquida definidos por

$$\bar{k}_\ell = \frac{1}{\rho_\ell} \frac{\partial \rho_\ell}{\partial p_\ell}, \quad \alpha_\ell = -\frac{1}{\rho_\ell} \frac{\partial \rho_\ell}{\partial T} \quad (6.124)$$

Usando este resultado, a relação (6.122) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\rho_\ell (\bar{k}_\ell \dot{p}_\ell - \alpha_\ell \dot{T}) \phi^\ell + \rho_\ell \dot{\phi}^\ell + m_{\ell v} = -M_i^\ell \frac{d\rho_\ell}{dx_i} - \rho_\ell \frac{dM_i^\ell}{dx_i} \quad (6.125)$$

Dividindo-se a equação (6.125) por  $\rho_\ell$  e empregando-se a relação de transporte (6.94) têm-se

$$M_{i,i}^\ell = -\dot{\phi}^\ell - (\bar{k}_\ell \dot{p}_\ell - \alpha_\ell \dot{T}) \phi^\ell - \frac{m_{\ell v}}{\rho_\ell} - \frac{M_i^\ell}{\rho_\ell} \frac{d\rho_\ell}{dx_i} \quad (6.126)$$

onde o último termo pode ser expresso somente em função da pressão e da temperatura da seguinte forma:

$$M_i^\ell \cdot \frac{\nabla \rho_\ell}{\rho_\ell} = M_i^\ell \cdot [\bar{k}_\ell \nabla p_\ell - \alpha_\ell \nabla T] \quad (6.127)$$

pois

$$\nabla \rho_\ell = \frac{\partial \rho_\ell}{\partial p_\ell} \nabla p_\ell + \frac{\partial \rho_\ell}{\partial T} \nabla T = \rho_\ell (\bar{k}_\ell \nabla p_\ell - \alpha_\ell \nabla T) \quad (6.128)$$

e desta forma a equação (6.126) fica reescrita como:

$$M_{i,i}^\ell = -\dot{\phi}^\ell - (\bar{k}_\ell \dot{p}_\ell - \alpha_\ell \dot{T}) \phi^\ell - \frac{m_{lv}}{\rho_\ell} - M_i^\ell \cdot [\bar{k}_\ell \nabla p_\ell - \alpha_\ell \nabla T] \quad (6.129)$$

Sendo esta equação (6.129) a equação diferencial que descreve o comportamento do fluido líquido de um meio poro-elástico não saturado com efeito de variação de temperatura.

Somando-se as equações de conservação de massa para o vapor e para o ar dadas por (6.115) e (6.116), obtém-se a conservação de massa para a fase de gasosa como

$$\dot{m}_v + \dot{m}_a + \frac{d[\rho_v M_i^v + \rho_a M_i^a]}{dx_i} = \frac{\partial(\rho_g \phi^g)}{\partial t} + \frac{d[\rho_g M_i^g]}{dx_i} = m_{lv} \quad (6.130)$$

sendo

$$m_v + m_a = m_g = \rho_g \phi^g \quad (6.131)$$

$$\rho_v M_i^v + \rho_a M_i^a = \rho_g M_i^g \quad (6.132)$$

Seguindo-se o mesmo procedimento efetuado para a formulação da fase líquida, agora na fase gasosa, pode-se chegar à seguinte equação

$$M_{i,i}^g = -\dot{\phi}^g - (\bar{k}_g \dot{p}_g - \alpha_g \dot{T}) \phi^g + \frac{m_{lv}}{\rho_g} - \frac{M_i^g}{\rho_g} \frac{d\rho_g}{dx_i} \quad (6.133)$$

cujo último termo pode ser expresso semelhantemente a fase líquida em função da pressão e da temperatura

$$M_i^g \cdot \frac{\nabla \rho_g}{\rho_g} = M_i^g \cdot [\bar{k}_g \nabla p_g - \alpha_g \nabla T] \quad (6.134)$$

e onde o coeficiente de compressibilidade e de expansão térmica do gás é dado de maneira semelhante a expressão (6.124) com o índice  $\ell$  substituído pelo  $g$ . Desta forma a equação (6.133) fica reescrita como:

$$M_{i,i}^g = -\dot{\phi}^g - (\bar{k}_g \dot{p}_g - \alpha_g \dot{T}) \phi^g + \frac{m_{\ell v}}{\rho_g} - M_i^g [\bar{k}_g \nabla p_g - \alpha_g \nabla T] \quad (6.135)$$

Sendo esta equação (6.135) a equação diferencial que descreve o comportamento do fluido gasoso de um meio poro-elástico não saturado com efeito de variação de temperatura.

Se for desconsiderado a influência da variação de temperatura nas equações (6.129) e (6.135) obtém-se:

$$M_{i,i}^\ell = -\dot{\phi}^\ell - \bar{k}_\ell \dot{p}_\ell \phi^\ell - \frac{m_{\ell v}}{\rho_\ell} - M_i^\ell \bar{k}_\ell \nabla p_\ell \quad (6.136)$$

$$M_{i,i}^g = -\dot{\phi}^g - \bar{k}_g \dot{p}_g \phi^g + \frac{m_{\ell v}}{\rho_g} - M_i^g \bar{k}_g \nabla p_g \quad (6.137)$$

desconsiderando a transformação de líquido em vapor na forma incremental, chega-se a:

$$M_{i,i}^\ell = -\frac{\Delta \phi^\ell}{\Delta t} - \bar{k}_\ell \frac{\Delta p^\ell}{\Delta t} \phi^\ell - M_i^\ell \bar{k}_\ell \nabla p^\ell \quad (6.138)$$

$$M_{i,i}^g = -\frac{\Delta \phi^g}{\Delta t} - \bar{k}_g \frac{\Delta p^g}{\Delta t} \phi^g - M_i^g \bar{k}_g \nabla p^g \quad (6.139)$$

Sendo o instante de tempo “n” o instante cuja solução é conhecida, e “n+1” o instante em que se deseja conhecer a solução, logo escrevendo-se as equações (6.138) e (6.139) para o instante “n+1”, tem-se:

$$M_{i,i(n+1)}^{\ell} = -\frac{\Delta\phi^{\ell}}{\Delta t} - \bar{k}_{\ell} \frac{\Delta p^{\ell}}{\Delta t} \phi_{(n+1)}^{\ell} - M_{i(n+1)}^{\ell} \bar{k}_{\ell} \nabla p^{\ell} \quad (6.140)$$

$$M_{i,i(n+1)}^g = -\frac{\Delta\phi^g}{\Delta t} - \bar{k}_g \frac{\Delta p^g}{\Delta t} \phi_{(n+1)}^g - M_{i(n+1)}^g \bar{k}_g \nabla p^g \quad (6.141)$$

onde

$$\Delta\phi^{\ell} = \phi_{(n+1)} S_{(n+1)}^{\ell} - \phi_{(n)} S_{(n)}^{\ell} \quad \Delta\phi^g = \phi_{(n+1)} S_{(n+1)}^g - \phi_{(n)} S_{(n)}^g \quad (6.142)$$

$$\phi_{(n+1)}^{\ell} = \phi_{(n+1)} S_{(n+1)}^{\ell} \quad \phi_{(n+1)}^g = \phi_{(n+1)} S_{(n+1)}^g \quad (6.143)$$

$$\Delta p^{\ell} = p_{(n+1)}^{\ell} - p_{(n)}^{\ell} \quad \Delta p^g = p_{(n+1)}^g - p_{(n)}^g \quad (6.144)$$

Substituindo-se as equações (6.142) – (6.144) nas equações (6.140) e (6.141) tem-se:

$$M_{i,i(n+1)}^{\ell} = -\left(1 + \bar{k}_{\ell} (p_{(n+1)}^{\ell} - p_{(n)}^{\ell})\right) \frac{1}{\Delta t} S_{(n+1)}^{\ell} \phi_{(n+1)}^{\ell} + \phi_{(n)} S_{(n)}^{\ell} \frac{1}{\Delta t} + M_{i(n+1)}^{\ell} \bar{k}_{\ell} p_{i(n+1)}^{\ell} \quad (6.145)$$

$$M_{i,i(n+1)}^g = -\left(1 + \bar{k}_g (p_{(n+1)}^g - p_{(n)}^g)\right) \frac{1}{\Delta t} S_{(n+1)}^g \phi_{(n+1)}^g + \phi_{(n)} S_{(n)}^g \frac{1}{\Delta t} + M_{i(n+1)}^g \bar{k}_g p_{i(n+1)}^g \quad (6.146)$$

Dada a lei de Darcy para as fases líquidas e gasosas, desconsiderando-se a variação térmica tem-se:

$$M_{i(n+1)}^\ell = -\frac{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{\ell S^\ell}}{\mu_\ell} \left( p_{i(n+1)}^\ell - f_{i(n+1)}^\ell \right) \quad (6.147)$$

$$M_{i(n+1)}^g = -\frac{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{g S^\ell}}{\mu_g} \left( p_{i(n+1)}^g - f_{i(n+1)}^g \right) \quad (6.148)$$

Aplicando-se a lei de Darcy escrita em (6.147) e (6.148) nas equações (6.145) e (6.146) chega-se à:

$$\begin{aligned} M_{i,i(n+1)}^\ell = & -\left(1 + \bar{k}_\ell \left( p_{(n+1)}^\ell - p_{(n)}^\ell \right)\right) \frac{1}{\Delta t} S_{(n+1)}^\ell \phi_{(n+1)} + \phi_{(n)} S_{(n)}^\ell \frac{1}{\Delta t} \\ & + \frac{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{\ell S^\ell}}{\mu_\ell} \left( p_{i(n+1)}^\ell - f_{i(n+1)}^\ell \right) \bar{k}_\ell p_{i(n+1)}^\ell \end{aligned} \quad (6.149)$$

$$\begin{aligned} M_{i,i(n+1)}^g = & -\left(1 + \bar{k}_g \left( p_{(n+1)}^g - p_{(n)}^g \right)\right) \frac{1}{\Delta t} S_{(n+1)}^g \phi_{(n+1)} + \phi_{(n)} S_{(n)}^g \frac{1}{\Delta t} \\ & + \frac{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{g S^\ell}}{\mu_g} \left( p_{i(n+1)}^g - f_{i(n+1)}^g \right) \bar{k}_g p_{i(n+1)}^g \end{aligned} \quad (6.150)$$

Como parte da estratégia de resolução de problemas de fluidos onde as constantes da lei de Darcy não são homogêneas em todo o domínio ou onde estas variáveis podem variar de forma diferenciada de um ponto a outro ao longo do tempo, faz-se necessário definir duas variáveis que podem ser chamadas de Fluxo modificado do líquido e do gás:  $\bar{M}_{i(n+1)}^\ell$  e  $\bar{M}_{i(n+1)}^g$ . Estas variáveis são definidas como:

$$\bar{M}_{i(n+1)}^\ell = M_{i(n+1)}^\ell \frac{\mu^g}{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{g S^\ell}} \quad (6.151)$$

$$\bar{M}_{i(n+1)}^g = M_{i(n+1)}^g \frac{\mu^g}{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{g S^\ell}} \quad (6.152)$$



A definição de tais variáveis leva a relações semelhantes à lei de Darcy:

$$\bar{M}_{i(n+1)}^\ell = -\left(\mathbf{p}_{i(n+1)}^\ell - \mathbf{f}_{i(n+1)}^\ell\right) \quad (6.153)$$

$$\bar{M}_{i(n+1)}^g = -\left(\mathbf{p}_{i(n+1)}^g - \mathbf{f}_{i(n+1)}^g\right) \quad (6.154)$$

Se derivadas, as expressões (6.151) e (6.152) dão origem as seguintes expressões:

$$\bar{M}_{i,i(n+1)}^\ell = M_{i,i(n+1)}^\ell \frac{\mu^\ell}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi \mathbf{k}_{(n+1)}^{\ell S^\ell}} + \left(\mathbf{p}_{i(n+1)}^\ell - \mathbf{f}_{i(n+1)}^\ell\right) \left(\frac{\mathbf{k}_{i(n+1)}^\phi}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi} + \frac{\mathbf{k}_{i(n+1)}^{\ell S^\ell}}{\mathbf{k}_{(n+1)}^{\ell S^\ell}}\right) \quad (6.155)$$

$$\bar{M}_{i,i(n+1)}^g = M_{i,i(n+1)}^g \frac{\mu^g}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi \mathbf{k}_{(n+1)}^{g S^\ell}} + \left(\mathbf{p}_{i(n+1)}^g - \mathbf{f}_{i(n+1)}^g\right) \left(\frac{\mathbf{k}_{i(n+1)}^\phi}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi} + \frac{\mathbf{k}_{i(n+1)}^{g S^\ell}}{\mathbf{k}_{(n+1)}^{g S^\ell}}\right) \quad (6.156)$$

Aplicando-se em (6.155) e (6.156) as definições de  $M_{i,i(n+1)}^\ell$  e  $M_{i,i(n+1)}^g$  descritas em (6.149) e (6.150), chegam-se as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \bar{M}_{i,i(n+1)}^\ell &= -\left(1 + \bar{\mathbf{k}}_\ell \left(\mathbf{p}_{(n+1)}^\ell - \mathbf{p}_{(n)}^\ell\right)\right) \frac{1}{\Delta t} \mathbf{S}_{(n+1)}^\ell \frac{\mu^\ell}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi \mathbf{k}_{(n+1)}^{\ell S^\ell}} \phi_{(n+1)} \\ &+ \left( \left(\mathbf{p}_{i(n+1)}^\ell - \mathbf{f}_{i(n+1)}^\ell\right) \bar{\mathbf{k}}_\ell + \left(\frac{\mathbf{k}_{i(n+1)}^\phi}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi} + \frac{\mathbf{k}_{i(n+1)}^{\ell S^\ell}}{\mathbf{k}_{(n+1)}^{\ell S^\ell}}\right) \right) \mathbf{p}_{i(n+1)}^\ell \\ &+ \phi_{(n)} \mathbf{S}_{(n)}^\ell \frac{1}{\Delta t} \frac{\mu^\ell}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi \mathbf{k}_{(n+1)}^{\ell S^\ell}} - \mathbf{f}_{i(n+1)}^\ell \left(\frac{\mathbf{k}_{i(n+1)}^\phi}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi} + \frac{\mathbf{k}_{i(n+1)}^{\ell S^\ell}}{\mathbf{k}_{(n+1)}^{\ell S^\ell}}\right) \end{aligned} \quad (6.157)$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{i,i(n+1)}^g &= -\left(1 + \bar{k}_g \left(p_{(n+1)}^g - p_{(n)}^g\right)\right) \frac{1}{\Delta t} S_{(n+1)}^g \frac{\mu^g}{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{gS^\ell}} \phi_{(n+1)} \\
&+ \left( \left( p_{i(n+1)}^g - f_{i(n+1)}^g \right) \bar{k}_g + \left( \frac{k_{i(n+1)}^\phi}{k_{(n+1)}^\phi} + \frac{k_{i(n+1)}^{gS^\ell}}{k_{(n+1)}^{gS^\ell}} \right) \right) p_{i(n+1)}^g \\
&+ \phi_{(n)} S_{(n)}^g \frac{1}{\Delta t} \frac{\mu^g}{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{gS^\ell}} - f_{i(n+1)}^g \left( \frac{k_{i(n+1)}^\phi}{k_{(n+1)}^\phi} + \frac{k_{i(n+1)}^{gS^\ell}}{k_{(n+1)}^{gS^\ell}} \right)
\end{aligned} \tag{6.158}$$

Sabendo-se que  $\text{tr}(\varepsilon_{ij(n+1)}) = \text{tr}(\Delta\varepsilon_{ij}) + \text{tr}(\varepsilon_{ij(n)})$  e conhecendo-se por intermédio de (6.87) e (6.93) as definições de  $\phi_{(n+1)}$  e  $\pi_{(n+1)}$  pode-se escrever  $\phi_{(n+1)}$  como:

$$\begin{aligned}
\phi_{(n+1)} &= \text{btr}(\Delta\varepsilon_{ij}) + \frac{1}{M} S_{(n+1)}^\ell p_{(n+1)}^\ell + \frac{1}{M} S_{(n+1)}^g p_{(n+1)}^g + \\
&+ \left( \text{btr}(\varepsilon_{ij(n)}) + \phi_{(n+1)}^p - \text{btr}(\varepsilon_{ij(n+1)}^p) - \frac{1}{M} \pi_0 + \phi_0 - \frac{1}{M} \frac{2}{3} U_{(n+1)}^c \right)
\end{aligned} \tag{6.159}$$

Aplicando-se a equação precedente (6.159) às equações (6.157) e (6.158) chega-se à:

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{i,i(n+1)}^\ell &= -\frac{S_{(n+1)}^\ell}{\Delta t} \frac{\mu^\ell}{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{\ell S^\ell}} \left(1 + \bar{k}_\ell \left(p_{(n+1)}^\ell - p_{(n)}^\ell\right)\right) \text{btr}(\Delta \varepsilon_{ij}) \\
&- \frac{S_{(n+1)}^\ell}{\Delta t} \frac{\mu^\ell}{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{\ell S^\ell}} \left[ \left(1 + \bar{k}_\ell \left(p_{(n+1)}^\ell - p_{(n)}^\ell\right)\right) \frac{1}{M} S_{(n+1)}^\ell \right. \\
&\quad \left. + \bar{k}_\ell \left( \text{btr}(\varepsilon_{ij(n)}) + \phi_{(n+1)}^p - \text{btr}(\varepsilon_{ij(n+1)}^p) \right) \right] p_{(n+1)}^\ell \\
&- \frac{S_{(n+1)}^\ell}{\Delta t} \frac{\mu^\ell}{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{\ell S^\ell}} \left(1 + \bar{k}_\ell \left(p_{(n+1)}^\ell - p_{(n)}^\ell\right)\right) \frac{1}{M} S_{(n+1)}^g p_{(n+1)}^g \\
&+ \left( \left(p_{i(n+1)}^\ell - f_{i(n+1)}^\ell\right) \bar{k}_\ell + \left( \frac{k_{i(n+1)}^\phi}{k_{(n+1)}^\phi} + \frac{k_{i(n+1)}^{\ell S^\ell}}{k_{(n+1)}^{\ell S^\ell}} \right) \right) p_{i(n+1)}^\ell \\
&- \frac{S_{(n+1)}^\ell}{\Delta t} \frac{\mu^\ell}{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{\ell S^\ell}} \left(1 - \bar{k}_\ell p_{(n)}^\ell\right) \left( \text{btr}(\varepsilon_{ij(n)}) + \phi_{(n+1)}^p - \text{btr}(\varepsilon_{ij(n+1)}^p) \right) \\
&\quad \left( -\frac{1}{M} \pi_0 + \phi_0 - \frac{1}{M} \frac{2}{3} U_{(n+1)}^c \right) \\
&+ \phi_{(n)} S_{(n)}^\ell \frac{1}{\Delta t} \frac{\mu^\ell}{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{\ell S^\ell}} - f_{i(n+1)}^\ell \left( \frac{k_{i(n+1)}^\phi}{k_{(n+1)}^\phi} + \frac{k_{i(n+1)}^{\ell S^\ell}}{k_{(n+1)}^{\ell S^\ell}} \right)
\end{aligned} \tag{6.160}$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{i,i(n+1)}^g &= -\frac{S_{(n+1)}^g}{\Delta t} \frac{\mu^g}{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{g S^\ell}} \left(1 + \bar{k}_g \left(p_{(n+1)}^g - p_{(n)}^g\right)\right) \text{btr}(\Delta \varepsilon_{ij}) \\
&- \frac{S_{(n+1)}^g}{\Delta t} \frac{\mu^g}{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{g S^\ell}} \left(1 + \bar{k}_g \left(p_{(n+1)}^g - p_{(n)}^g\right)\right) \frac{1}{M} S_{(n+1)}^\ell p_{(n+1)}^\ell \\
&- \frac{S_{(n+1)}^g}{\Delta t} \frac{\mu^g}{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{g S^\ell}} \left[ \left(1 + \bar{k}_g \left(p_{(n+1)}^g - p_{(n)}^g\right)\right) \frac{1}{M} S_{(n+1)}^g \right. \\
&\quad \left. + \bar{k}_g \left( \text{btr}(\varepsilon_{ij(n)}) + \phi_{(n+1)}^p - \text{btr}(\varepsilon_{ij(n+1)}^p) \right) \right] p_{(n+1)}^g \\
&- \frac{S_{(n+1)}^g}{\Delta t} \frac{\mu^g}{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{g S^\ell}} \left(1 - \bar{k}_g p_{(n)}^g\right) \left( \text{btr}(\varepsilon_{ij(n)}) + \phi_{(n+1)}^p - \text{btr}(\varepsilon_{ij(n+1)}^p) \right) \\
&\quad \left( -\frac{1}{M} \pi_0 + \phi_0 - \frac{1}{M} \frac{2}{3} U_{(n+1)}^c \right) \\
&+ \left( \left(p_{i(n+1)}^g - f_{i(n+1)}^g\right) \bar{k}_g + \left( \frac{k_{i(n+1)}^\phi}{k_{(n+1)}^\phi} + \frac{k_{i(n+1)}^{g S^\ell}}{k_{(n+1)}^{g S^\ell}} \right) \right) p_{i(n+1)}^g \\
&+ \phi_{(n)} S_{(n)}^g \frac{1}{\Delta t} \frac{\mu^g}{k_{(n+1)}^\phi k_{(n+1)}^{g S^\ell}} - f_{i(n+1)}^g \left( \frac{k_{i(n+1)}^\phi}{k_{(n+1)}^\phi} + \frac{k_{i(n+1)}^{g S^\ell}}{k_{(n+1)}^{g S^\ell}} \right)
\end{aligned} \tag{6.161}$$

E finalmente derivando-se a equação (6.93) chega-se à:

$$\Delta\pi = p_{(n+1)}^{\ell} S_{(n+1)}^{\ell} + p_{(n+1)}^g S_{(n+1)}^g - \frac{2}{3} U_{(n+1)}^c - \pi_n \quad (6.162)$$

## 6.2 – Formulação matemática dos modelos não lineares

### 6.2.1 – Modelo de Van Genuchten

Em sistemas multifásicos, existe uma correlação fundamental entre a saturação dos fluidos aderentes e não aderentes e a pressão capilar. Um acréscimo da saturação da fase não aderente deve também conduzir a um acréscimo da pressão capilar. Se a saturação da fase aderente decresce, o fluido aderente recua para os poros menores ou para as aberturas de fraturas.

Assim, as considerações macroscópicas sobre a capilaridade resultam na seguinte relação Pressão Capilar–Saturação:

$$p^c = p^c(S^{\ell}) \quad (6.163)$$

Devido à geometria irregular dos poros (ou das fraturas) é impossível determinar-se analiticamente a relação Pressão Capilar–Saturação. Entretanto, diversos pesquisadores têm tentado obter uma função para a relação Pressão Capilar–Saturação. Entre vários, os modelos mais famosos para o sistema ar–água por Leverett (1941), Vrook e Corey (1964) e Van Genuchten (1980).

Estes modelos contêm diversos parâmetros que tentam levar em conta diferentes geometrias do poro-espaco, por exemplo, a distribuição e tamanho dos poros e a interconectividade do espaço poroso. Usualmente, tem-se empregado dados experimentais para se calibrar o modelo.

O modelo de Van Genuchten usa a seguinte correlação para um modelo composto por dois fluidos gás–água:

$$S_e(p^c) = \frac{S^\ell - S^{lr}}{1 - S^{lr}} = \left[ 1 + (\alpha \cdot p^c)^n \right]^{-m} \quad \text{para} \quad p^c > 0 \quad (6.164)$$

onde  $S_e$  é a saturação efetiva,  $S^{lr}$  é a saturação residual líquida e  $n$ ,  $m$  e  $\alpha$  ( $\text{Pa}^{-1}$ ) são os parâmetros de Van Genuchten.

A pressão capilar é frequentemente formulada em função da saturação efetiva. Tem-se:

$$p^c(S^\ell) = \frac{1}{\alpha} (S_e^{-1/m} - 1)^{1/n} \quad \text{para} \quad p^c > 0 \quad (6.165)$$

De forma mais explícita pode-se escrever a pressão capilar em função da saturação líquida ou vice versa a partir de (6.164) como descrito nas relações seguintes:

$$p^c(S^\ell) = \frac{1}{\alpha} \left( \left( \frac{S^\ell - S^{lr}}{1 - S^{lr}} \right)^{-1/m} - 1 \right)^{1/n} \quad \text{para} \quad p^c > 0 \quad (6.166)$$

$$S^\ell(p^c) = S^{lr} + (1 - S^{lr}) \left( 1 + (\alpha p^c)^n \right)^{-m} \quad \text{para} \quad p^c > 0 \quad (6.167)$$

onde

$$m = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{para} \quad n = \frac{1}{1 - m} \quad (6.168)$$

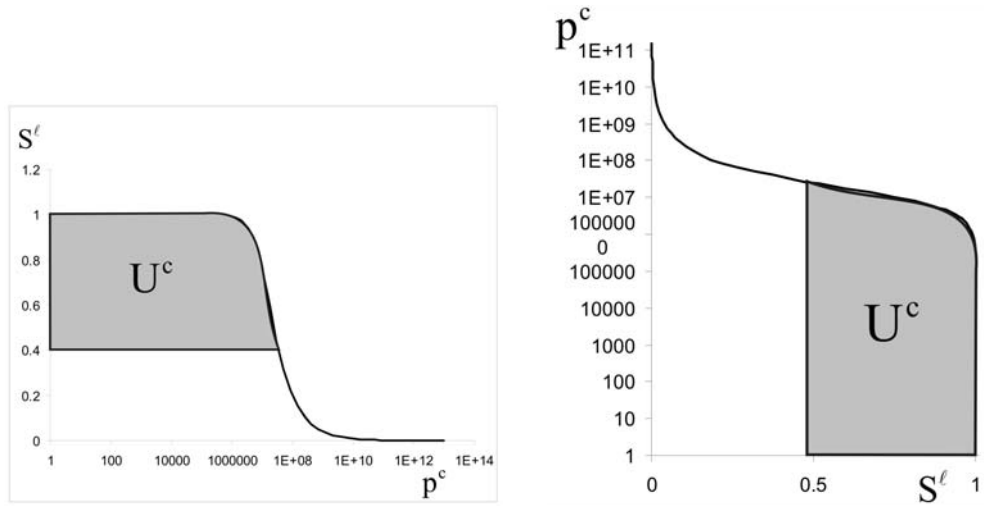


Figura 6.1 – Aspecto típico das curvas de (a) saturação em função da pressão capilar ou de (b) pressão capilar em função da saturação.

A permeabilidade Relativa que é função da saturação da fase em questão pode ser descrita por:

$$k^{\ell S^\ell}(S^\ell) = \sqrt{S^\ell} \left( 1 - \left( 1 - (S^\ell)^{\frac{1}{\chi}} \right)^\chi \right)^2 \quad (6.169)$$

$$k^{g S^\ell}(S^\ell) = \sqrt{1 - S^\ell} \left( 1 - (S^\ell)^{\frac{1}{\chi}} \right)^{2\chi} \quad (6.170)$$

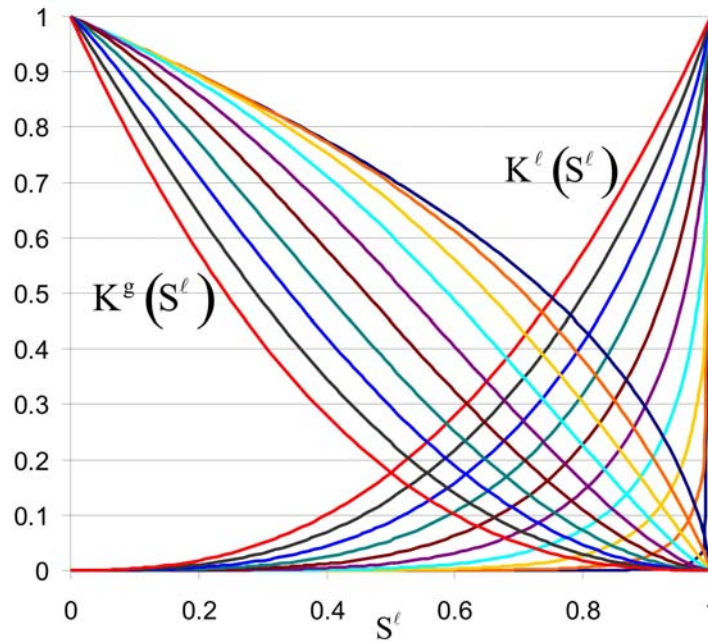


Figura 6.2 – Permeabilidades relativas  $k^{lS^l}$  e  $k^{gS^l}$  em função da saturação líquida para  $\chi$  variando entre 0.1 e 1 nas (6.169) e (6.170).

### 6.2.2 – Modelo de CamClay

O modelo poro-elasto-plástico adotado foi o modelo de Cam-Clay modificado que leva em conta o efeito da pressão capilar  $p^c$  e da pressão resultante  $\pi$ . O critério de plastificação é definido no espaço  $\left[ (\sigma_{ij} + \pi\delta_{ij}) \times (p_c) \right]$  pela função:

$$f(\sigma_{ij} + \pi\delta_{ij}, p_c, p_0) = q^2 + M^2(\sigma + \pi)(\sigma + \pi + p_0\ell(P_c)) \quad (6.171)$$

A lei de escoamento (direção de retorno) é obtida então pelo potencial  $g$  definida por:

$$g(\sigma_{ij} + \pi\delta_{ij}, p_c, p_0) = \alpha q^2 + M^2(\sigma + \pi)(\sigma + \pi + p_0\ell(P_c)) \quad (6.172)$$

onde  $\sigma$  é o primeiro invariante do tensor das tensões,  $q$  é o segundo Invariante do tensor das tensões,  $\ell(P_c)$  é responsável pela variação do domínio elástico em função da pressão capilar,  $\alpha$  é a variável que dá o caráter não associativo ao modelo,  $\pi$  é a pressão equivalente,  $M$  e  $p_0$  são constantes do modelo.

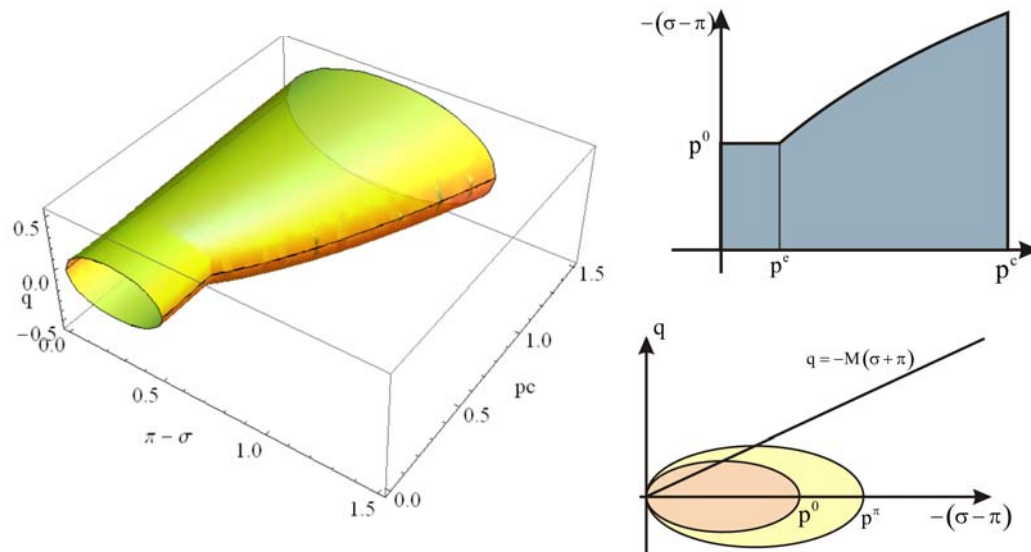


Figura 6.4 – Representações gráficas do modelo de Cam-Clay em diferentes espaços.

O primeiro e o segundo variantes tensor de tensões podem ser escrito como:

$$\sigma = \text{tr}(\sigma_{ij}) \quad (6.173)$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij} \quad (6.174)$$

onde

$$q = \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}} \quad (6.175)$$

E finalmente a variável  $\ell(P_c)$  é escrita como sendo:

$$\ell(P_c) = \frac{\sqrt{P_c}}{\sqrt{P_e}} \quad (6.176)$$



### 6.2.3 – Formulação matemática do modelo constitutivo poro-elasto-plástico não saturado adotado

Durante evoluções irreversíveis, a energia livre do sistema depende também das variáveis internas de estado: deformação plástica, saturação plástica e porosidade plástica. A saturação líquida, bem como a deformação total e a porosidade, podem ser decompostas em parte elástica e plástica:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \phi = \phi^e + \phi^p \quad (6.177)$$

onde as parcelas plásticas da deformação  $\varepsilon_{ij}^p$  e da porosidade  $\phi^p$  podem ser escritas respectivamente como

$$d\varepsilon_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}, \quad d\phi^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \pi} \quad (6.178)$$

onde  $\dot{\lambda}$  é o multiplicador plástico que satisfaz obrigatoriamente as condições de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \text{logo} \quad \dot{\lambda} f = 0 \quad (6.179)$$

sendo  $f(\sigma_{ij} + \pi\delta_{ij}, p_c, p_0)$  a função de plastificação que delimita, no espaço das variáveis associadas, as regiões com comportamento poro-elástico e poro-elasto-plástico. A Determinação do multiplicador plástico pode ser feita empregando-se a condição de consistência, ou seja:

$$\dot{f} = 0 \quad (6.180)$$

Logo baseado em (6.171) pode-se escrever que:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \pi} \dot{\pi} + \frac{\partial f}{\partial p^c} \dot{p}^c + \frac{\partial f}{\partial p^0} \dot{p}^0 = 0 \quad (6.181)$$

Onde as derivadas temporais que aparecem na expressão anterior podem ser dadas respectivamente por:

$$\dot{\sigma}_{ij} = E(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) - b\pi\delta_{ij} \quad (6.182)$$

$$\dot{\pi} = S^\ell \dot{p}^\ell + \dot{S}^\ell p^\ell + (1 - S^\ell) \dot{p}^g - \dot{S}^\ell p^g + \frac{2}{3} p^c \dot{S}^\ell \quad (6.183)$$

$$\dot{p}^c = \dot{p}^g - \dot{p}^\ell \quad (6.184)$$

$$\dot{p}^0 = \frac{\partial p^0}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\lambda} \text{tr} \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma_{ij}} \right) \quad (6.185)$$

Epregando-se em (6.181) as expressões (6.182) e (6.185) chega-se a:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \left( E(\dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\varepsilon}_{ij}^p) - b\pi\delta_{ij} \right) + \frac{\partial f}{\partial \pi} \dot{\pi} + \frac{\partial f}{\partial p^c} \dot{p}^c + \frac{\partial f}{\partial p^0} \frac{\partial p^0}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\lambda} \text{tr} \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma_{ij}} \right) = 0 \quad (6.186)$$

Conhecendo-se  $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$  por intermédio de (6.178) pode-se chegar à:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E \dot{\lambda} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma_{ij}} + \left( \frac{\partial f}{\partial \pi} \dot{\pi} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} b\pi\delta_{ij} \right) + \frac{\partial f}{\partial p^c} \dot{p}^c + \frac{\partial f}{\partial p^0} \frac{\partial p^0}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\lambda} \text{tr} \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma_{ij}} \right) = 0 \quad (6.187)$$

Que se rearranjada determina a expressão de  $\dot{\lambda}$  por:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E \dot{\varepsilon}_{ij} + \left( \frac{\partial f}{\partial \pi} \dot{\pi} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} b\pi\delta_{ij} \right) + \frac{\partial f}{\partial p^c} \dot{p}^c}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial p^0} \frac{\partial p^0}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \text{tr} \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma_{ij}} \right)} \quad (6.188)$$

Conhecendo-se  $\dot{\pi}$  e  $\dot{p}^c$  por intermédio de (6.183) e (6.184), o multiplicador plástico pode ser reescrito como:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E \dot{\varepsilon}_{ij} + S^\ell \left( \frac{\partial f}{\partial \pi} - b \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij} - \frac{\partial f}{\partial p^c} \right) \dot{p}^\ell + S^g \left( \frac{\partial f}{\partial \pi} - b \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial p^c} \right) \dot{p}^g + \frac{1}{3} (p^\ell - p^g) \left( \frac{\partial f}{\partial \pi} - b \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \delta_{ij} \right) \dot{S}^\ell}{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} E \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial f}{\partial p^0} \frac{\partial p^0}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \text{tr} \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \sigma_{ij}} \right)} \quad (6.189)$$

onde

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6.190)$$

Derivando-se a expressão do critério (6.171), tem-se

$$\frac{\partial f}{\partial q} = 2q \quad (6.191)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma} = M^2 (2\sigma + 2\pi + p_0 \ell(P_c)) \quad (6.192)$$

Logo substituindo-se (6.191) e (6.192) em (6.190) tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 2q \frac{\partial q}{\partial \sigma_{ij}} + M^2 (2\sigma + 2\pi + p_0 \ell(P_c)) \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ij}} \quad (6.193)$$

onde

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij} \quad (6.194)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\frac{3}{2} \frac{\partial s_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} s_{ij}}{2 \sqrt{\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}}} = \frac{3}{2q} \frac{\partial s_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} s_{ij} = \frac{3}{2q} \frac{\partial s_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} s_{ij} \quad (6.195)$$

Em (6.195) as derivadas parciais podem ser escritas como:

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{1}{3} \frac{\partial \sigma_{pp}}{\partial \sigma_{kl}} \delta_{ij} \quad (6.196)$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (6.197)$$

$$\frac{\partial \sigma_{pp}}{\partial \sigma_{kl}} = \delta_{pk} \delta_{pl} \quad (6.198)$$

Logo a (6.195) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} s_{ij} = \left( \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{pk} \delta_{pl} \delta_{ij} \right) s_{ij} = s_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{pk} \delta_{pl} (\delta_{ij} s_{ij}) \quad (6.199)$$

Sendo  $\delta_{pk} \delta_{pl} = 0$  e  $\frac{\partial s_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} s_{ij} = s_{kl}$ , chega-se por intermédio de (6.199) e (6.195)

à:

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma_{kl}} = \frac{3}{2q} s_{kl} \quad (6.200)$$

Logo a expressão (6.193) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 3s_{kl} + M^2 (2\sigma + 2\pi + p_0 \ell(P_c)) \delta_{ij} \quad (6.201)$$

Sendo:

$$\frac{\partial f}{\partial \pi} = M^2 (2\sigma + 2\pi + p_0 \ell(P_c)) \quad (6.202)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p^c} = (M^2 (\sigma + \pi) p_0) \frac{\partial \ell(P_c)}{\partial p^c} \quad (6.203)$$

onde

$$\frac{\partial \ell(P_c)}{\partial p^c} = \frac{1}{2\sqrt{p^c} \sqrt{p^c}} = \frac{1}{2\sqrt{p^c p^c}} \quad (6.204)$$

e desta forma (6.203) pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial f}{\partial p^c} = \frac{(M^2 (\sigma + \pi) p_0)}{2\sqrt{p^c p^c}} \quad (6.205)$$

Como pode-se observa nas deduções feitas entre as equações (6.190) e (6.205) as derivadas parciais da expressão do multiplicador plástico (6.189) podem ser dadas por:

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = 3s_{ij} + M^2 (2\sigma + 2\pi + p_0 \ell(P_c)) \delta_{ij} \quad (6.206)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = 3\alpha s_{ij} + M^2 (2\sigma + 2\pi + p_0 \ell(P_c)) \delta_{ij} \quad (6.207)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \pi} = M^2 (2\sigma + 2\pi + p_0 \ell(P_c)) \quad (6.208)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p^c} = \frac{(M^2 (\sigma + \pi) p_0)}{2\sqrt{p^e p^c}} \quad (6.209)$$

$$\frac{\partial f}{\partial p^0} = M^2 (\sigma + \pi) \ell(P_c) \quad (6.210)$$

.

+

## MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ESTUDO DE MEIOS PORO-ELASTO-PLÁSTICOS NÃO SATURADOS

# Capítulo 7

### 7.1 – Representações Integrais para Poroelasticidade e Poroplasticidade não saturada.

De maneira semelhante ao caso saturado apresentado anteriormente, serão apresentados neste capítulo o desenvolvimento das equações integrais para as teorias da poroelasticidade e da poroplasticidade para o caso não saturado. Inicialmente, serão abordadas as equações integrais da elastostática, que dizem respeito à parte sólida deformável do meio poroso. Em cada equação da elastostática, irá aparecer uma integral de domínio com o campo de poro pressões. No caso da poroplasticidade, uma integral de domínio a mais, com o campo de tensões iniciais, deverá aparecer. Em seguida, será mostrada as equações integrais das poro pressões, que será relacionada com a equação da continuidade através de uma integral de domínio.

As soluções fundamentais de Kelvin da elastostática, para uma carga unitária concentrada  $b_i(s) = \delta(s, p) e_i$ , aplicada no ponto fonte  $s$  do domínio infinito  $\Omega^*$ , sendo  $p$  o ponto campo,  $e_i$  o vetor unitário da base ortonormal na direção  $i$  e  $\delta$  o delta de Dirac, são dadas por:

$$u_{ij}^*(s, p) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left\{ (3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ij} + r_{,i} r_{,j} \right\} \quad (7.1)$$

$$T_{ij}^*(s, p) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial \eta} \left[ (1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j} \right] + (1-2\nu)(r_{,j}\eta_i - r_{,i}\eta_j) \right] \quad (7.2)$$

$$\varepsilon_{ijk}^*(s, p) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)Gr} \left[ (1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik}) - r_{,i}\delta_{jk} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (7.3)$$

$$\sigma_{ijk}^*(s, p) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ (1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik} - r_{,i}\delta_{jk}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (7.4)$$

onde  $u_{ij}^*(s, p)$ ,  $T_{ij}^*(s, p)$ ,  $\varepsilon_{ijk}^*(s, p)$  e  $\sigma_{ijk}^*(s, p)$  são, respectivamente, as soluções fundamentais para os deslocamentos, as forças de superfície, as deformações e as tensões. O índice  $i$ , nas (7.1)-(7.4), representa a direção de aplicação da carga unitária,  $\delta$  é o delta de Kronecker,  $G$  o módulo de elasticidade transversal do material,  $\nu$  o seu coeficiente de Poisson,  $\eta$  o vetor unitário normal à superfície no ponto em consideração e  $r$  a distância entre os pontos fonte  $s$  e campo  $p$ . A vírgula indica derivada em relação ao índice subscrito.

No campo da poroelasticidade não saturada, as equações de equilíbrio e de compatibilidade, no ponto fonte  $s$ , ficam escritas, respectivamente, como:

$$\sigma_{ij,j}(s) + b_i(s) = \sigma_{ij,j}^{ef}(s) - b\pi_{,j}(s)\delta_{ij} + b_i(s) = 0 \quad (7.5)$$

$$\varepsilon_{ij}(s) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(s) + u_{j,i}(s)) \quad (7.6)$$

As forças de superfície  $T_i(S)$ , no ponto  $S$  de  $\Gamma$ , são dadas por:

$$T_i(S) = \sigma_{ij}(S)\eta_j = (\sigma_{ij}^{ef}(S) - b\pi(S)\delta_{ij})\eta_j \quad (7.7)$$

e a lei de Hooke expressa pelas:



$$\sigma_{ij}^{ef}(s) = E_{ijkl}(\varepsilon_{kl}(s) - \varepsilon_{kl}^p(s)) = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}(s) - \sigma_{ij}^p(s) \quad (7.8)$$

Onde

$$\sigma_{ij}^e(s) = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}(s) \quad (7.9)$$

$$E_{ijkl} = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (7.10)$$

com  $E_{ijkl}$  representando o tensor constitutivo elástico de quarta ordem. O tensor de tensões totais, com as (7.8) (7.10), é dado pela seguinte expressão:

$$\sigma_{ij}(s) = 2G\varepsilon_{ij}(s) + \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}(s) - b\pi(s)\delta_{ij} - \sigma_{ij}^p(s) \quad (7.11)$$

Diferenciando-se a (7.11) com a(7.6), obtém-se a equação de Navier a partir da (7.5), com a derivada da poro pressão  $p$ , dada por:

$$G\left[u_{i,jj}(s) + \frac{1}{(1-2\nu)}u_{j,ij}(s)\right] + b_i(s) - b\pi_{,j}(s)\delta_{ij} - \sigma_{ij,j}^p(s) = 0 \quad (7.12)$$

Para se obter as representações integrais de deslocamentos, tensões e deformações da elastostática, será utilizado o teorema da reciprocidade de Betti. A aplicação do teorema pressupõe dois estados elásticos distintos (o fundamental e o real). O fundamental é dado pelas equações (7.1)-(7.4). O estado real é dado pela (7.9), que relaciona linearmente e proporcionalmente  $\sigma^e$  com  $\varepsilon$ . Assim, sendo, o teorema se expressa como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^e \varepsilon_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (7.13)$$

ou

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij} + b\pi\delta_{ij} + \sigma_{ij}^p) \varepsilon_{ijk}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* \varepsilon_{ij} d\Omega \quad (7.14)$$

Com a equação de compatibilidade (7.6), aplicando-se o teorema da divergência na (7.14), chega-se a:

$$\int_{\Gamma} \sigma_{ij}^* u_{jk}^* \eta_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,i}^* u_{jk}^* d\Omega + b \int_{\Omega} \delta_{jk} \pi \varepsilon_{ijk}^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^p \varepsilon_{ijk}^* d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ijk}^* u_j \eta_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ijk,i}^* u_j d\Omega \quad (7.15)$$

Sabendo-se que a equação de equilíbrio do problema fundamental é dada por  $\sigma_{jik,i}^* + \delta(s, p) e_j = 0$ , a (7.15) fica:

$$\int_{\Gamma} T_j^* u_{jk}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_j u_{jk}^* d\Omega + b \int_{\Omega} \delta_{jk} \pi \varepsilon_{ijk}^* d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^p \varepsilon_{ijk}^* d\Omega = \int_{\Gamma} T_{jk}^* U_j d\Gamma + \int_{\Omega} \delta(s, p) e_j u_j d\Omega \quad (7.16)$$

na qual foi utilizada a (7.7). Por definição,  $\int_{\Omega} \delta(s, p) e_j u_j d\Omega = u_j(s)$ . Portanto, a (7.16),

desprezando-se as forças de volume  $b_j$ , fica:

$$\begin{aligned} C_{ij}(s) \dot{u}_j(s) = & - \int_{\Gamma} T_{ij}^*(s, P) \dot{U}_j(P) d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, P) \dot{T}_j(P) d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ij}^*(s, p) \dot{b}_j(p) d\Omega + \\ & + b \int_{\Omega} \delta_{jk} \varepsilon_{ijk}^*(s, p) \dot{\pi}(p) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{jk}^p(p) \varepsilon_k^*(s, p) d\Omega \end{aligned} \quad (7.17)$$

A (7.17) é a equação integral dos deslocamentos escrita em taxas. O termo  $C_{ik}$  depende da posição do ponto fonte (se pertence ou não ao domínio  $\Omega$ ). Caso ele pertença ao contorno  $\Gamma$ ,  $C_{ik}$  depende da geometria deste no ponto em consideração. As letras minúsculas entre parênteses na (7.17) indicam que o ponto pertence ao domínio, enquanto as maiúsculas que ele pertence ao contorno. A equação integral das tensões totais é obtida diferenciando-se a (7.17) para se obter as deformações, e aplicando-se no resultado obtido a lei de Hooke. Assim sendo, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij}(s) = & - \int_{\Gamma} S_{ijk}(s, P) \dot{U}_k(P) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, P) \dot{T}_k(P) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ijk}(s, p) \dot{b}_k(P) d\Omega \\ & + b \int_{\Omega} (\delta_{ij}) E_{ijkl}(s, p) \dot{\pi}(p) d\Omega + \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^p(p) E_{ijkl}(s, p) d\Omega + b g_{ij}(\delta_{kl} \dot{\pi}(s)) + g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^p(s)) \end{aligned} \quad (7.18)$$

sendo que as soluções fundamentais na (7.18) são dadas por:

$$\begin{aligned} S_{ijk}(s, p) = & \frac{2G}{4\pi(1-\nu)r^2} \{ 2r_{,i} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \\ & + 2\nu (\eta_i r_{,j} r_{,k} + \eta_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu) (2\eta_k r_{,i} r_{,j} + \eta_j \delta_{ik} + \eta_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) \eta_k \delta_{ij} \} \end{aligned} \quad (7.19)$$

$$D_{ijk}(s, p) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ (1-2\nu) [\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}] + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned} E_{ijkl}(s, p) = & \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{ (1-2\nu) [\delta_{ii} \delta_{jk} + \delta_{jj} \delta_{ik} - \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\delta_{ij} r_{,k} r_{,l}] \\ & + 2\nu [\delta_{ik} r_{,j} r_{,l} + \delta_{jl} r_{,i} r_{,k} + \delta_{il} r_{,j} r_{,k} + \delta_{jk} r_{,i} r_{,l}] + 2\delta_{kl} r_{,i} r_{,j} - 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} \} \end{aligned} \quad (7.21)$$

enquanto que o termo livre  $g_{ij}(\delta_{kl} \dot{\pi}(s))$  e  $g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^p(s))$  são dados por:

$$g_{ij}(\delta_{kl} \dot{\pi}(s)) = - \frac{1}{8(1-\nu)} \{ 2[\delta_{ij} \dot{\pi}(s)] + \delta_{ij} (1-4\nu) [2\dot{\pi}(s)] \} \quad (7.22)$$

$$g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^p(s)) = - \frac{1}{8(1-\nu)} \{ 2\dot{\sigma}_{ij}^p(s) + (1-4\nu) \dot{\sigma}_{mm}^p(s) \delta_{ij} \} \quad (7.23)$$

A partir da lei de Darcy, chega-se na representação integral das poro pressões. Da mesma forma que na elastostática foi utilizada a reciprocidade de Betti, será utilizada uma outra relação de reciprocidade para a dedução da equação integral das poro pressões. A lei de Darcy escrita para as fases líquida e gasosa com permeabilidade isotrópica e sem variação de temperatura, ficam:

$$M_i^\ell + k^{\ell S^\ell} \frac{k^\phi}{\mu^\ell} (p_{,i}^\ell - f_i^\ell) = 0 \quad (7.24)$$

$$M_i^g + k^{g S^\ell} \frac{k^\phi}{\mu^g} (p_{,i}^g - f_i^g) = 0 \quad (7.25)$$

Observa-se, na (7.24) e (7.25), que as relações do fluxo  $M_i^\ell$  e  $M_i^g$  e os gradientes da pressão  $p_{,i}^\ell$  e  $p_{,i}^g$  são lineares. No entanto, ela não é proporcional, a menos dos termos  $k^{\ell S^\ell} \frac{k^\phi}{\mu^\ell} f_i^\ell$  e  $k^{g S^\ell} \frac{k^\phi}{\mu^g} f_i^g$ , além do que ela não é homogênea para todo o meio já que  $k^{\ell S^\ell}$ ,  $k^{g S^\ell}$  e  $k^\phi$  variam conforme o grau de saturação e da pressão capilar de cada ponto do meio e conforme a porosidade de cada ponto do meio.

Para que a reciprocidade seja válida inicialmente definem-se novas variáveis de fluxo indicada aqui pela barra superior:

$$\bar{M}_i^\ell = \frac{M_i^\ell}{k^{\ell S^\ell} \frac{k^\phi}{\mu^\ell}} \quad (7.26)$$

$$\bar{M}_i^g = \frac{M_i^g}{k^{g S^\ell} \frac{k^\phi}{\mu^g}} \quad (7.27)$$

Logo as equações (7.24) e (7.25) ficam sendo:

$$\bar{M}_i^\ell + (p_{,i}^\ell - f_i^\ell) = 0 \quad (7.28)$$

$$\bar{M}_i^g + (p_{,i}^g - f_i^g) = 0 \quad (7.29)$$

e para que a reciprocidade seja válida, definem-se os fluxos proporcionais  $M_i^{\ell\text{pro}}$  e  $M_i^{\text{gpro}}$  como:

$$M_i^{\ell\text{pro}} = \bar{M}_i^{\ell} - f_i^{\ell} = -p_{,i}^{\ell} \quad (7.30)$$

$$M_i^{\text{gpro}} = \bar{M}_i^{\text{g}} - f_i^{\text{g}} = -p_{,i}^{\text{g}} \quad (7.31)$$

As reciprocidades, cuja equações são dadas por (7.32) e (7.31), devem ser aplicadas com  $M_i^{\ell\text{pro}}$  e  $M_i^{\text{gpro}}$  do estado real.

$$\int_{\Omega} M_i^{\ell\text{pro}} p_{,i}^* d\Omega = \int_{\Omega} M_i^* p_{,i}^{\ell} d\Omega \quad (7.32)$$

$$\int_{\Omega} M_i^{\text{gpro}} p_{,i}^* d\Omega = \int_{\Omega} M_i^* p_{,i}^{\text{g}} d\Omega \quad (7.33)$$

Na (7.32),  $p_{,i}^*$  e  $M_i^*$  são as soluções do problema fundamental definido pela equação:

$$p_{,ii}^*(s, p) = \frac{\delta(s, p)}{k} \quad (7.34)$$

com  $\delta$  representando o delta de Dirac. Uma vez encontrada a solução fundamental para a poro pressão  $p^*$ , o fluxo é determinado através da lei de Darcy  $M_i^* = -p_{,i}^*$ . A solução da equação (7.34) para poro pressão é dada por:

$$p^*(s, p) = \frac{1}{2\pi k} \ln(r) \quad (7.35)$$

sendo  $k$  a constante da lei de Darcy, que neste caso por se empregar as variáveis de fluxo modificado  $\bar{M}_i^{\ell}$ ,  $\bar{M}_i^{\text{g}}$  torna-se unitária, portanto  $k = 1$ .

Lembrando que  $r$  é a distância entre os pontos fonte e campo. Com a (7.35), o fluxo fundamental fica:

$$M_i^*(s, p) = -\frac{r_{,i}}{2\pi r} \quad (7.36)$$

Outro resultado importante é o do fluxo perpendicular ao contorno  $M^*(s, P)$ , dado, a partir da (7.36), por:

$$M^*(s, P) = -\frac{r_{,n}}{2\pi r} \quad (7.37)$$

sendo  $\eta$  o vetor unitário normal ao contorno no ponto considerado. Substituindo-se a (7.30) nas (7.32) e (7.33), obtém-se:

$$\int_{\Omega} (\bar{M}_i^\ell - f_i^\ell) p_{,i}^* d\Omega = \int_{\Omega} M_i^* p_{,i}^\ell d\Omega \quad (7.38)$$

$$\int_{\Omega} (\bar{M}_i^g - f_i^g) p_{,i}^* d\Omega = \int_{\Omega} M_i^* p_{,i}^g d\Omega \quad (7.39)$$

Utilizando-se novamente o teorema de Green nas (7.38) e (7.39), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} p^* \bar{M}_i^\ell \eta_i d\Gamma - \int_{\Omega} p^* \bar{M}_{i,i}^\ell d\Omega - \int_{\Gamma} M_i^* p^\ell \eta_i d\Gamma + \int_{\Omega} p^\ell M_{i,i}^* d\Omega - \int_{\Omega} f_i^\ell p_{,i}^* d\Omega = 0 \quad (7.40)$$

$$\int_{\Gamma} p^* \bar{M}_i^g \eta_i d\Gamma - \int_{\Omega} p^* \bar{M}_{i,i}^g d\Omega - \int_{\Gamma} M_i^* p^g \eta_i d\Gamma + \int_{\Omega} p^g M_{i,i}^* d\Omega - \int_{\Omega} f_i^g p_{,i}^* d\Omega = 0 \quad (7.41)$$

Tendo-se em vista que  $M_{i,i}^* = -\delta(s,p)$  e que  $\int_{\Omega} p^g \delta(s,p) d\Omega = p^g(s)$  e  $\int_{\Omega} p^l \delta(s,p) d\Omega = p^l(s)$ , chega-se finalmente nas equações integrais das poro pressões, dadas por:

$$\begin{aligned} c(s)p^l(s) = & \int_{\Gamma} p^*(s,P)\bar{M}^l(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} M^*(s,P)p^l(P)d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} p^*(P)\bar{M}_{i,i}^l(s,P)d\Omega - \int_{\Omega} f_i^l(P)p_{,i}^*(s,P)d\Omega \end{aligned} \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned} c(s)p^g(s) = & \int_{\Gamma} p^*(s,P)\bar{M}^g(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} M^*(s,P)p^g(P)d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} p^*(P)\bar{M}_{i,i}^g(s,P)d\Omega - \int_{\Omega} f_i^g(P)p_{,i}^*(s,P)d\Omega \end{aligned} \quad (7.43)$$

sendo  $c(s)$  uma variável escalar dependente da posição de  $s$ . Duas integrais de domínio aparecem nas (7.42) e (7.43). No primeiro termo integral das expressões (7.42) e (7.43), os termos  $\bar{M}_{i,i}^l$  e  $\bar{M}_{i,i}^g$  pode ser substituído de acordo com as expressões definidas no capítulo anterior (6.160) e (6.161). Entretanto uma outra alternativa é adotar a aproximação no espaço para os termos  $\bar{M}_{i,i}^l$  e  $\bar{M}_{i,i}^g$  integrar no espaço e no tempo e depois substituir a definições de tais termos localmente.

Como nas expressões de  $\bar{M}_{i,i}^l$  e  $\bar{M}_{i,i}^g$  aparecem os gradientes de pressão, faz-se necessário escrever as equações integrais para  $p_{,j}^l$  e  $p_{,j}^g$ . É possível ainda optar por outra solução, adotando-se uma função aproximadora para  $p^l$  e  $p^g$ , e desta forma pode-se obter as expressões de  $p_{,j}^l$  e  $p_{,j}^g$  em função de  $p^l$  e  $p^g$ . Contudo a adoção deste segundo procedimento pode levar a alguns problemas. O primeiro problema que surge é que: para uma aproximação linear das pressões  $p^l$  e  $p^g$  leva a uma aproximação constante de  $p_{,j}^l$  e  $p_{,j}^g$ , e como os pontos de interesse para resolução do problema de maneira geral normalmente estão posicionado nas interfaces entre células adjacentes, existirá uma descontinuidade do gradiente de pressões justamente

no ponto de interesse, pode-se evidentemente adotar um valor médio, mas isto pode promover erros importantes a solução do problema. Além disto, se  $p_{,j}^{\ell}$  e  $p_{,j}^g$  for constante, isto levará a valores nulos para  $p_{,jj}^{\ell}$  e  $p_{,jj}^g$  que anulará uma parte importante da expressão dos divergentes de fluxo  $M_{i,i}^{\ell}$  e  $M_{i,i}^g$  comprometendo de forma importante a resolução do problema poro-elástico que tem nestes termos  $M_{i,i}^{\ell}$  e  $M_{i,i}^g$  a conservação de massa líquida e gasosa. Desta forma parece evidente que a primeira opção, escrever as equações integrais para  $p_{,j}^{\ell}$  e  $p_{,j}^g$ , produzirá melhores resultados.

As equações integrais dos gradientes de pressões são obtidas diferenciando-se as (7.42) e (7.43). Assim sendo, tem-se:

$$\begin{aligned} c(s)p_{,j}^{\ell}(s) = & -\int_{\Gamma} S_j^f(s, P)p^{\ell}(P)d\Gamma + \int_{\Gamma} D_j^f(s, P)\bar{M}^{\ell}(P)d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} D_j^f(s, P)\bar{M}_{i,i}^{\ell}(P)d\Omega - \int_{\Omega} E_{ji}^f(s, p)f_i^{\ell}(P)d\Omega - g_{ji}^f f_i^{\ell}(s) \end{aligned} \quad (7.44)$$

$$\begin{aligned} c(s)p_{,j}^g(s) = & -\int_{\Gamma} S_j^f(s, P)p^g(P)d\Gamma + \int_{\Gamma} D_j^f(s, P)\bar{M}^g(P)d\Gamma \\ & - \int_{\Omega} D_j^f(s, P)\bar{M}_{i,i}^g(P)d\Omega - \int_{\Omega} E_{ji}^f(s, p)f_i^g(P)d\Omega - g_{ji}^f f_i^g(s) \end{aligned} \quad (7.45)$$

onde:

$$S_j^f(s, P) = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^2} \left( -\delta_{kj} + 2r_{,k}r_{,j} \right) \eta_k \quad (7.46)$$

$$D_j^f(s, P) = -\frac{r_{,j}}{2\pi kr} \quad (7.47)$$

$$E_{jk}^f(s, p) = \frac{1}{2\pi k} \frac{1}{r^2} \left( -\delta_{jk} + 2r_{,j}r_{,k} \right) \quad (7.48)$$

$$g_{jk}^f = -\frac{1}{2k} \delta_{jk} \quad (7.49)$$



sendo  $k$  a constante da lei de Darcy, que neste caso por se empregar as variáveis de fluxo modificado  $\bar{M}_i^\ell$ ,  $\bar{M}_i^g$  torna-se unitária, portanto  $k = 1$ .

## 7.2 – Discretização no Tempo

As equações integrais dos deslocamentos, das tensões e das poro pressões (liquida e gasosa), do item (4.3), podem ser, sem nenhum prejuízo, integradas no tempo. As (7.17), (7.18), (7.42), (7.43), (7.44) e (7.45), por exemplo, seriam reescritas como:

$$\begin{aligned} C_{ik}(s) \int_{t_1}^{t_2} \dot{u}_k(s) dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} T_{ij}^*(s, P) \dot{U}_j(P) d\Gamma dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, P) \dot{T}_j(P) d\Gamma dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} u_j^*(s, p) \dot{b}_j(p) d\Omega dt + b \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^*(s, p) \dot{\pi}(p) d\Omega dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} \dot{\sigma}_{ij}^p(p) \varepsilon_{ij}^*(s, p) d\Omega dt \end{aligned} \quad (7.50)$$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \dot{\sigma}_{ij}(s) dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} S_{ijk}(s, P) \dot{U}_k(P) d\Gamma dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, P) \dot{T}_k(P) d\Gamma dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} D_{ijk}(s, p) \dot{b}_k(p) d\Omega dt + b \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} (\delta_{ij}) E_{ijkl}(s, p) \dot{\pi}(p) d\Omega dt \\ &+ \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} E_{ijkl}(s, p) \dot{\sigma}_{ij}^p(p) d\Omega dt + b \int_{t_1}^{t_2} g_{ij}(\delta_{kl} \dot{\pi}(s)) dt + \int_{t_1}^{t_2} g_{ij}(\dot{\sigma}_{kl}^p(s)) dt \end{aligned} \quad (7.51)$$

$$\begin{aligned} c(s) \int_{t_1}^{t_2} p^\ell(s) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} p^*(s, P) \bar{M}^\ell(P) d\Gamma dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} M^*(s, P) p^\ell(P) d\Gamma dt \\ &- \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} p^*(s, P) \bar{M}_{i,i}^\ell(P) d\Omega dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} p_{,i}^*(s, P) f_i^\ell(P) d\Omega dt \end{aligned} \quad (7.52)$$

$$\begin{aligned}
c(s) \int_{t_1}^{t_2} p^g(s) dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} p^*(s, P) \bar{M}^g(P) d\Gamma dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} M^*(s, P) p^g(P) d\Gamma dt \\
&\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} p^*(s, P) \bar{M}_{i,i}^g(P) d\Omega dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} p_{,i}^*(s, P) f_i^{\ell}(P) d\Omega dt
\end{aligned} \tag{7.53}$$

$$\begin{aligned}
c(s) \int_{t_1}^{t_2} p_{,j}^{\ell}(s) dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} S_j^f(s, P) p^{\ell}(P) d\Gamma dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} D_j^f(s, P) \bar{M}^{\ell}(P) d\Gamma dt \\
&\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} D_j^f(s, P) \bar{M}_{i,i}^{\ell}(P) d\Omega dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} E_{ji}^f(s, P) f_i^{\ell}(P) d\Omega dt - \int_{t_1}^{t_2} g_{ji}^f f_i^{\ell}(s) dt
\end{aligned} \tag{7.54}$$

$$\begin{aligned}
c(s) \int_{t_1}^{t_2} p^g(s) dt &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} S_j^f(s, P) p^g(P) d\Gamma dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} D_j^f(s, P) \bar{M}^g(P) d\Gamma dt \\
&\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} D_j^f(s, P) \bar{M}_{i,i}^g(P) d\Omega dt - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Omega} E_{ji}^f(s, P) f_i^{\ell}(P) d\Omega dt - \int_{t_1}^{t_2} g_{ji}^f f_i^g(s) dt
\end{aligned} \tag{7.55}$$

com  $t_1$  e  $t_2$  representando dois instantes distintos de tempo. Chamando  $\Delta t = t_2 - t_1$ , e efetuando-se as integrais no tempo, obtêm-se, das (7.50)-(7.55):

$$\begin{aligned}
C_{ik}(s) [u_k(s, t_2) - u_k(s, t_1)] &= - \int_{\Gamma} T_{ij}^*(s, P) [U_j(P, t_2) - U_j(P, t_1)] d\Gamma + \\
&\quad + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s, P) [T_j(P, t_2) - T_j(P, t_1)] d\Gamma + \int_{\Omega} u_j^*(s, p) [b_j(p, t_2) - b_j(p, t_1)] d\Omega + \\
&\quad + b \int_{\Omega} \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^*(s, p) [\pi(p, t_2) - \pi(p, t_1)] d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^*(s, p) [\sigma_{ij}^p(p, t_2) - \sigma_{ij}^p(p, t_1)] d\Omega
\end{aligned} \tag{7.56}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(s, t_2) - \sigma_{ij}(s, t_1) &= - \int_{\Gamma} S_{ijk}(s, P) [U_k(P, t_2) - U_k(P, t_1)] d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, P) [T_k(P, t_2) - T_k(P, t_1)] d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Omega} D_{ijk}(s, p) [b_k(P, t_2) - b_k(P, t_1)] d\Omega + b \int_{\Omega} (\delta_{ij}) E_{ijkl}(s, p) [\pi(p, t_2) - \pi(p, t_1)] d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} E_{ijkl}(s, p) [\sigma_{ij}^p(p, t_2) - \sigma_{ij}^p(p, t_1)] d\Omega + b g_{ij} (\delta_{kl} [\pi(s, t_2) - \pi(s, t_1)]) + g_{ij} [\sigma_{ij}^p(s, t_2) - \sigma_{ij}^p(s, t_1)]
\end{aligned} \tag{7.57}$$

$$\begin{aligned}
c(s) p^{\ell}(s) \Delta t &= - \int_{\Gamma} M^*(s, P) p^{\ell}(P) d\Gamma \Delta t + \int_{\Gamma} p^*(s, P) \bar{M}^{\ell}(P) d\Gamma \Delta t + \\
&\quad - \int_{\Omega} p^*(s, p) \bar{M}_{i,i}^{\ell}(p) d\Omega \Delta t - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} p_{,i}^*(s, p) f_i^{\ell}(p) d\Omega \Delta t
\end{aligned} \tag{7.58}$$

$$\begin{aligned}
c(s)p^g(s)\Delta t = & -\int_{\Gamma} M^*(s,P)p^g(P)d\Gamma\Delta t + \int_{\Gamma} p^*(s,P)\bar{M}^g(P)d\Gamma\Delta t + \\
& -\int_{\Omega} p^*(s,p)\bar{M}_{i,i}^g(p)d\Omega\Delta t - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} p_{,i}^*(s,p)f_i^g(p)d\Omega\Delta t
\end{aligned} \tag{7.59}$$

$$\begin{aligned}
c(s)p_{,j}^{\ell}(s)\Delta t = & -\int_{\Gamma} S_j^f(s,P)p^{\ell}(P)d\Gamma\Delta t + \int_{\Gamma} D_j^{\ell}(s,P)\bar{M}^{\ell}(P)d\Gamma\Delta t + \\
& -\int_{\Omega} D_j^f(s,p)\bar{M}_{i,i}^{\ell}(p)d\Omega\Delta t - \int_{\Omega} E_{ji}^f(s,p)f_i^{\ell}(p)d\Omega\Delta t - g_{ji}^f f_i^{\ell}(s)\Delta t
\end{aligned} \tag{7.60}$$

$$\begin{aligned}
c(s)p_{,j}^g(s)\Delta t = & -\int_{\Gamma} S_j^f(s,P)p^g(P)d\Gamma\Delta t + \int_{\Gamma} D_j^{\ell}(s,P)\bar{M}^g(P)d\Gamma\Delta t + \\
& -\int_{\Omega} D_j^f(s,p)\bar{M}_{i,i}^g(p)d\Omega\Delta t - \int_{\Omega} E_{ji}^f(s,p)f_i^g(p)d\Omega\Delta t - g_{ji}^f f_i^g(s)\Delta t
\end{aligned} \tag{7.61}$$

Imaginando que  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  seja um típico intervalo de tempo da discretização temporal, e que o incremento da variável  $\bullet$ , dentro do passo de tempo, seja dado por  $\Delta(\bullet) = \bullet_{n+1} - \bullet_n$ , as equações integrais (7.56)-(7.58) ficariam, respectivamente, dadas por:

$$\begin{aligned}
C_{ik}(s)\Delta u_k(s) = & -\int_{\Gamma} T_{ij}^*(s,P)\Delta U_j(P)d\Gamma + \int_{\Gamma} u_{ij}^*(s,P)\Delta T_j(P)d\Gamma + \int_{\Omega} u_j^*(s,P)\Delta b_j(p)d\Omega \\
& + b \int_{\Omega} \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^*(s,p)\Delta \pi(p)d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ij}^*(s,p)\Delta \sigma_{ij}^p(p)d\Omega
\end{aligned} \tag{7.62}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \sigma_{ij}(s) = & -\int_{\Gamma} S_{ijk}(s,P)\Delta U_k(P)d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s,P)\Delta T_k(P)d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ijk}(s,P)\Delta b_k(p)d\Omega + \\
& + b \int_{\Omega} (\delta_{kl}) E_{ijkl}(s,p)\Delta \pi(p)d\Omega + b g_{ij}(\delta_{kl}\Delta \pi(s)) + \int_{\Omega} E_{ijkl}(s,p)\Delta \sigma_{ij}^p(p)d\Omega + g_{ij}(\Delta \sigma_{kl}^p(s))
\end{aligned} \tag{7.63}$$

$$\begin{aligned}
c(s)p^{\ell}(s) = & -\int_{\Gamma} M^*(s,P)p^{\ell}(p)d\Gamma + \int_{\Gamma} p^*(s,P)M^{\ell}(p)d\Gamma + \\
& -\int_{\Omega} p^*(s,P)M_{i,i}^{\ell}(p)d\Omega - \int_{\Omega} p_{,i}^*(s,P)f_i^{\ell}(p)d\Omega
\end{aligned} \tag{7.64}$$

$$\begin{aligned}
c(s)p^g(s) = & - \int_{\Gamma} M^*(s, P) p^g(p) d\Gamma + \int_{\Gamma} p^*(s, P) M^g(p) d\Gamma + \\
& - \int_{\Omega} p^*(s, P) M_{i,i}^g(p) d\Omega - \int_{\Omega} p_{,i}^*(s, P) f_i^g(p) d\Omega
\end{aligned} \tag{7.65}$$

$$\begin{aligned}
c(s)p_{,j}^{\ell}(s) = & - \int_{\Gamma} S_j^f(s, P) p^{\ell}(p) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_j^f(s, P) \bar{M}^{\ell}(p) d\Gamma + \\
& - \int_{\Omega} D_j^f(s, P) \bar{M}_{i,i}^{\ell}(p) d\Omega - \int_{\Omega} E_{ji}^f(s, P) f_i^{\ell}(p) d\Omega - g_{ji}^f f_i^{\ell}(s)
\end{aligned} \tag{7.66}$$

$$\begin{aligned}
c(s)p_{,j}^g(s) = & - \int_{\Gamma} S_j^f(s, P) p^g(p) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_j^f(s, P) \bar{M}^g(p) d\Gamma + \\
& - \int_{\Omega} D_j^f(s, P) \bar{M}_{i,i}^g(p) d\Omega - \int_{\Omega} E_{ji}^f(s, P) f_i^g(p) d\Omega - g_{ji}^f f_i^g(s)
\end{aligned} \tag{7.67}$$

### 7.3 – Discretização Espacial: Aproximação das Variáveis no Contorno e no Domínio

Através da discretização espacial, obtêm-se as equações algébricas do método dos elementos de contorno. Em conjunto com a discretização temporal, pode-se obter soluções numéricas do problema de valor de contorno. As equações integrais dos deslocamentos, tensões e poro pressões possuem integrais de contorno e de domínio. Conseqüentemente, o contorno  $\Gamma$  do corpo deverá ser discretizado em  $N_c$  elementos, de modo a se ter  $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N_c} \Gamma_j$ , enquanto seu domínio  $\Omega$  deverá ser discretizado em  $N_c$  células, com  $\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_c} \Omega_j$ .

No contorno discretizado em elementos, são definidos nós. A cada nó, associa-se um conjunto de variáveis de contorno: deslocamentos e forças de superfície, provenientes das equações da elastostática, e poro pressão do líquido e do gás e velocidade relativa normal do líquido e do gás, provenientes da equação das poro pressões. Assim sendo, definem-se:

$${}^j U_k(P) = \varphi_m(P) {}^j U_k^m \tag{7.68}$$

$${}^jT_k(P) = \varphi_m(P) {}^jT_k^m \quad (7.69)$$

$${}^jP^\ell(P) = \varphi_m(P) {}^jP_C^{\ell m} \quad (7.70)$$

$${}^j\bar{M}^\ell(P) = \varphi_m(P) {}^j\bar{M}_C^{\ell m} \quad (7.71)$$

$${}^jP^g(P) = \varphi_m(P) {}^jP_C^{gm} \quad (7.72)$$

$${}^j\bar{M}^g(P) = \varphi_m(P) {}^j\bar{M}_C^{gm} \quad (7.73)$$

onde o índice  $j$  representa o elemento  $\Gamma_j$ ,  $m$  representa os nós de  $\Gamma_j$ ,  $\varphi_m$  são as funções de forma e  $k$ , nas (7.68) e (7.69), indica a direção segundo as coordenadas globais. As variáveis nodais de deslocamentos, forças, poro pressão do líquido e do gás e fluxo (modificado) do líquido e do gás estão representadas, respectivamente, por  $U$ ,  $T$ ,  $P_C^\ell$ ,  $P_C^g$ ,  $\bar{M}_C^\ell$  e  $\bar{M}_C^g$  nas (7.68), (7.69), (7.70) e (7.71), enquanto  ${}^jU_k(P)$ ,  ${}^jT_k(P)$ ,  ${}^jP^\ell(P)$ ,  ${}^jP^g(P)$ ,  ${}^j\bar{M}^\ell(P)$  e  ${}^j\bar{M}^g(P)$  representam estas mesmas variáveis calculadas num ponto  $P$  qualquer de  $\Gamma_j$ .

Da mesma forma, no domínio discretizado, são definidos nós e as variáveis são aproximadas por célula. As variáveis de domínio, nos modelos poro-elástico e poro-elasto-plástico, são: a poro pressão líquida  $p^\ell$ , a poro pressão gasosa  $p^g$ , as deformações plásticas  $\varepsilon_{kl}^p$ , a porosidade plástica  $\phi^p$ , as deformações  $\varepsilon_{kl}$  e os termos de domínio  $\bar{M}_{i,i}^\ell$ ,  $\bar{M}_{i,i}^g$ ,  $f_i^\ell$ ,  $f_i^g$ ,  $b_k$  e  $\pi$ . Assim, definem-se:

$${}^jX(p) = \varphi_m(p) {}^jX_I^m \quad (7.74)$$

onde agora o índice  $j$  representa a célula  $\Omega_j$ ,  $m$  relaciona-se com os nós de  $\Omega_j$  e com as funções de forma adotadas e  $X$  representa cada uma das variáveis nodais internas utilizadas para se calcular, respectivamente.

As aproximações das variáveis adotadas neste trabalho são lineares, tanto nos elementos de  $\Gamma$  quanto nas células de  $\Omega$ . Os nós de contorno são considerados contínuos, localizados nas extremidades dos elementos retos, prevendo-se, entretanto, a possibilidade de consideração de nós duplos nos cantos ou entre elementos com descontinuidade de carga ou de qualquer outra variável de contorno prescrita. Os nós de célula também são considerados contínuos, localizados nos vértices das células triangulares. Excetua-se, entretanto, o caso de células com um ou dois vértices pertencentes ao contorno. Neste caso, o nó passa a ser interno à célula, deslocado do vértice em direção ao centróide da célula de uma distância pré-fixada (ver figura (4.3)).

Uma vez discretizado o corpo e aproximadas as variáveis do problema, as equações integrais passam a ser representadas por somatórias de integrais sobre as unidades discretizadas. As (7.62)-(7.65), por exemplo, ficariam expressas como:

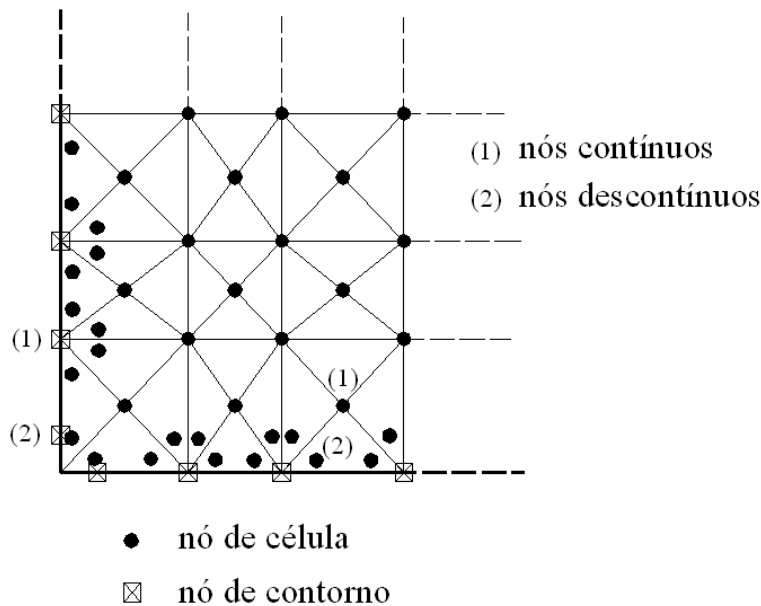


Figura 4.3 – Nós de contorno e de célula. Contínuos e descontínuos.

$$\begin{aligned}
C_{ik}(s)\Delta u_k(s) = & -\sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma_k} T_{ij}^*(s, P)\phi_m(P)\Delta^j U_k^m d\Gamma_k + \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Gamma_k} u_{ij}^*(s, P)\phi_m(P)\Delta^j T_k^m d\Gamma_k + \\
& + \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Omega_k} u_j^*(s, p)\phi_m(p)\Delta^k b_j^m d\Omega_k + b \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Omega_k} \delta_{ji} \varepsilon_{ijl}^*(s, p)\phi_m(p)\Delta^k \pi^m d\Omega_k + \\
& + \sum_{k=1}^{N_e} \int_{\Omega_k} \varepsilon_{ijl}^*(s, p)\phi_m(p)\Delta^k \sigma_{ji}^m d\Omega_k
\end{aligned} \tag{7.75}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \sigma_{pq}(s) = & -\sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} S_{pqk}(s, P)\phi_m(P)\Delta^j U_k^m d\Gamma_j + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} D_{pqk}(s, P)\phi_m(P)\Delta^j T_k^m d\Gamma_j + \\
& + \int_{\Omega_j} D_{pqk}(s, P)\phi_m(p)\Delta^j b_k^m d\Omega_j + b \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} (\delta_{kl}) E_{pqkl}(s, p)\phi_m(p)\Delta^j \pi^m d\Omega_j + \\
& + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} E_{pqkl}(s, p)\phi_m(p)\Delta^j \sigma_{kl}^m d\Omega_j + b g_{pq} (\delta_{kl} \Delta^s \pi) + g_{pq} (\Delta^s \sigma_{kl}^p)
\end{aligned} \tag{7.76}$$

$$\begin{aligned}
c(s)^s p^\ell = & -\sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} M^*(s, P)\phi_m(P)^j P_C^{\ell m} d\Gamma_j + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} p^*(s, P)\phi_m(P)^j \bar{M}_C^{\ell m} d\Gamma_j + \\
& - \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} M^*(s, p)\phi_m(p)^j \bar{M}_{i,i}^{\ell m} d\Omega_j - \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} p_{,i}^*(s, p)\phi_m(p)^j f_i^{(\ell)m} d\Omega_j
\end{aligned} \tag{7.77}$$

$$\begin{aligned}
c(s)^s p^g = & -\sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} M^*(s, P)\phi_m(P)^j P_C^{gm} d\Gamma_j + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} p^*(s, P)\phi_m(P)^j M_C^{gm} d\Gamma_j + \\
& - \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} M^*(s, p)\phi_m(p)^j \bar{M}_{i,i}^{gm} d\Omega_j - \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} p_{,i}^*(s, p)\phi_m(p)^j f_i^{(g)m} d\Omega_j
\end{aligned} \tag{7.78}$$

$$\begin{aligned}
c(s)^s p_{,j}^\ell = & -\sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} S_j^f(s, P)\phi_m(P)^j P_C^{\ell m} d\Gamma_j + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} D_j^f(s, P)\phi_m(P)^j \bar{M}_C^{\ell m} d\Gamma_j + \\
& - \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} D_j^f(s, p)\phi_m(p)^j \bar{M}_{i,i}^{\ell m} d\Omega_j - \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} E_{ji}^f(s, p)\phi_m(p)^j f_i^{(\ell)m} d\Omega_j - g_{ji}^f s f_i^\ell
\end{aligned} \tag{7.79}$$

$$\begin{aligned}
c(s)^s p_{,j}^g = & -\sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} S_j^f(s, P)\phi_m(P)^j P_C^{gm} d\Gamma_j + \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} D_j^f(s, P)\phi_m(P)^j M_C^{gm} d\Gamma_j + \\
& - \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} D_j^f(s, p)\phi_m(p)^j \bar{M}_{i,i}^{gm} d\Omega_j - \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Omega_j} E_{ji}^f(s, p)\phi_m(p)^j f_i^{(g)m} d\Omega_j - g_{ji}^f s f_i^g
\end{aligned} \tag{7.80}$$

#### 7.4 – Equações Algébricas do MEC para Poroelastoplasticidade

A partir das equações integrais discretizadas, obtêm-se as equações algébricas do método dos elementos de contorno da mesma forma como é feito para o caso saturado. As equações são escritas em função das variáveis incrementais no tempo. Com o modelo poro-elástico, o sistema de equações algébricas fica linear. Neste item, serão apresentadas as equações algébricas do MEC para poroelastoplasticidade. As equações são de dois tipos: de contorno (deslocamentos e poro pressão) e de domínio (tensões e poro pressão), de acordo com a posição do ponto fonte.

Seja  $2N$  o número de variáveis de contorno de deslocamento e de força de superfície, sendo  $N$  o número de nós de contorno (simples e duplos). Escrevendo-se  $2N$  equações algébricas a partir da equação integral dos deslocamentos (7.17) da poroelasticidade (a partir deste momento os termos livres das equações das tensões e dos gradientes de pressão serão omitidos, pois eles já estarão embutidos dentro das matrizes dos sistemas algébricos), chega-se ao sistema:

$$[H]\{\Delta U\} = [G]\{\Delta T\} + [S]\{\Delta b\} + b[Q][D]\{\Delta \pi\} + [Q]\{\Delta \sigma^p\} \quad (7.81)$$

onde  $[H]$ ,  $[G]$ ,  $[S]$  e  $[Q]$  são matrizes de influência determinadas integrando-se, na (7.17), as soluções fundamentais multiplicadas pelas funções de forma das aproximações adotadas, enquanto  $\{\Delta U\}$ ,  $\{\Delta T\}$ ,  $\{\Delta b\}$ ,  $\{\Delta \sigma^p\}$  e  $\{\Delta \pi\}$  são, respectivamente, vetores com os incrementos das variáveis de contorno de deslocamento e de força e de domínio de cargas externas, das tensões plásticas e poro pressão equivalente. Observe que os vetores  $\{\Delta U\}$  e  $\{\Delta T\}$  têm  $2N$  componentes,  $\{\Delta \pi\}$  tem  $M$  componentes e a matriz  $[S]$  é de ordem  $3M$ , sendo  $M$  o número de nós internos de célula. Escrevendo-se  $3M$  equações algébricas com a (7.18), chega-se a:

$$\{\Delta \sigma\} = -[H']\{\Delta U\} + [G']\{\Delta T\} + [S']\{\Delta b\} + b[Q'][D]\{\Delta \pi\} + [Q']\{\Delta \sigma^p\} \quad (7.82)$$



sendo  $[H']$ ,  $[G']$ ,  $[S']$  e  $[Q']$  matrizes de influência também obtidas por integração e  $\{\Delta\sigma\}$  o vetor de dimensão  $3M$  com as tensões totais nos nós internos.

Da mesma forma como foi feito para a equação (7.18) em (7.82) pode-se escrever  $2M$  equações algébricas para a (7.17):

$$\{\Delta U_{(i)}\} = -[H_i]\{\Delta U\} + [G_i]\{\Delta T\} + [S_i]\{\Delta b\} + b[Q_i][D]\{\Delta\pi\} + [Q_i]\{\Delta\sigma^p\} \quad (7.83)$$

Prescrevendo-se, para cada coordenada de cada nó, deslocamento ou força de superfície, e reunindo-se as incógnitas de contorno no vetor  $\{\Delta X\}$ , as (7.81), (7.82) e (7.83) ficam, respectivamente, dadas por:

$$[A]\{\Delta X^u\} = \{\Delta Y^u\} + [S]\{\Delta b\} + b[Q][D]\{\Delta\pi\} + b[Q]\{\Delta\sigma^p\} \quad (7.84)$$

$$\{\Delta\sigma\} = -[A']\{\Delta X^u\} + \{\Delta Y^\sigma\} + [S']\{\Delta b\} + b[Q'] [D]\{\Delta\pi\} + [Q']\{\Delta\sigma^p\} \quad (7.85)$$

$$\{\Delta U_{(i)}\} = -[A_i]\{\Delta X^u\} + \{\Delta Y^{u(i)}\} + [S_i]\{\Delta b\} + b[Q_i][D]\{\Delta\pi\} + [Q_i]\{\Delta\sigma^p\} \quad (7.86)$$

sendo  $[A]$ ,  $[A']$  e  $[A_i]$  matrizes de influência das variáveis de  $\{\Delta X^u\}$ . E sendo  $\{\Delta Y_u\}$ ,  $\{\Delta Y'_u\}$  e  $\{\Delta Y_u^{(i)}\}$  vetores conhecidos, com as influências das variáveis de contorno prescritas.

Isolando-se  $\{\Delta X^u\}$  na (7.84), obtém-se:

$$\{\Delta X^u\} = [A]^{-1}\{\Delta Y^u\} + [A]^{-1}[S]\{\Delta b\} + b[A]^{-1}[Q][D]\{\Delta\pi\} + [A]^{-1}[Q]\{\Delta\sigma^p\} \quad (7.87)$$

Substituindo-se a (7.87) na equação das tensões (7.85) e nas equações de deslocamento (7.86) para os pontos internos, obtém-se respectivamente:

$$\begin{aligned} \{\Delta\sigma\} = & -[A'] [A]^{-1} \{\Delta Y^u\} + \{\Delta Y^\sigma\} + [-[A'] [A]^{-1} [S] + [S']] \{\Delta b\} + \\ & + b [-[A'] [A]^{-1} [Q] + [Q_i]] [D] \{\Delta\pi\} + [-[A'] [A]^{-1} [Q] + [Q_i']] \{\Delta\sigma^p\} \end{aligned} \quad (7.88)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta U_{(i)}\} = & -[A_i] [A]^{-1} \{\Delta Y^u\} + \{\Delta Y^{u(i)}\} + [-[A_i] [A]^{-1} [S] + [S_i]] \{\Delta b\} + \\ & + b [-[A_i] [A]^{-1} [Q] + [Q_i]] [D] \{\Delta\pi\} + [-[A_i] [A]^{-1} [Q] + [Q_i']] \{\Delta\sigma^p\} \end{aligned} \quad (7.89)$$

Simplificando-se a (7.88) e (7.89), tem-se:

$$\{\Delta\sigma\} = \{\Delta N^\sigma\} + [S^\sigma] \{\Delta b\} + b [Q^\sigma] [D] \{\Delta\pi\} + [Q^\sigma] \{\Delta\sigma^p\} \quad (7.90)$$

$$\{\Delta U_{(i)}\} = \{\Delta N^u\} + [S^u] \{\Delta b\} + b [Q^u] [D] \{\Delta\pi\} + [Q^u] \{\Delta\sigma^p\} \quad (7.91)$$

com

$$\{\Delta N^\sigma\} = -[A'] [A]^{-1} \{\Delta Y\} + \{\Delta Y^\sigma\} \quad (7.92)$$

$$\{\Delta N^u\} = -[A_i] [A]^{-1} \{\Delta Y\} + \{\Delta Y^{u(i)}\} \quad (7.93)$$

$$[S^\sigma] = -[A'] [A]^{-1} [S] + [S^\sigma] \quad (7.94)$$

$$[S^u] = -[A_i] [A]^{-1} [S] + [S^u] \quad (7.95)$$

$$[Q^\sigma] = -[A'] [A]^{-1} [Q] + [Q^\sigma] \quad (7.96)$$

$$[Q^u] = -[A_i] [A]^{-1} [Q] + [Q^u] \quad (7.97)$$

Sabendo-se por intermédio da lei de hooke para problemas hidromecânicos não saturados que  $\{\Delta\sigma\} = [E]\{\Delta\varepsilon\} - b[D]\{\Delta\pi\} - \{\Delta\sigma^p\}$  pode-se reescrever a equação (7.90) como:

$$[E]\{\Delta\varepsilon\} - b[D]\{\Delta\pi\} - \{\Delta\sigma^p\} = \{\Delta N^\sigma\} + [S^\sigma]\{\Delta b\} + b[Q^\sigma][D]\{\Delta\pi\} + [Q^\sigma]\{\Delta\sigma^p\} \quad (7.98)$$

ou rearranjando-se (7.98) tem-se:

$$[E]\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta N^\sigma\} - [S^\sigma]\{\Delta b\} + b[[Q^\sigma] + [i]][D]\{\Delta\pi\} + [[Q^\sigma] + [i]]\{\Delta\sigma^p\} \quad (7.99)$$

Escrevendo-se N equações de contorno com a equação integral das poro pressões líquidas e gasosas (7.42) e (7.43), obtém-se os sistemas:

$$[H^f]\{p^\ell\} = [G^f]\{\bar{M}^\ell\} - [S^f]\{\bar{M}_{i,i}^\ell\} + [Q^f]\{f_i^\ell\} \quad (7.100)$$

$$[H^f]\{p^g\} = [G^f]\{\bar{M}^g\} - [S^f]\{\bar{M}_{i,i}^g\} + [Q^f]\{f_i^g\} \quad (7.101)$$

Nas (7.100) e (7.101),  $[H^f]$ ,  $[G^f]$ ,  $[S^f]$  e  $[Q^f]$  são as matrizes de influência obtidas calculando-se as integrais da equação discretizada das poro pressões ((7.42) e (7.43)). Os vetores  $\{p^\ell\}$ ,  $\{p^g\}$ ,  $\{\bar{M}^\ell\}$ ,  $\{\bar{M}^g\}$ ,  $\{\bar{M}_{i,i}^\ell\}$ ,  $\{\bar{M}_{i,i}^g\}$ ,  $\{f_i^\ell\}$  e  $\{f_i^g\}$  reúnem, respectivamente, as variáveis incrementais de contorno de poro pressão e fluxo (modificado) e as variáveis de domínio de divergente do fluxo (modificado) no espaço e o termo de fonte de domínio (para consideração de cargas como peso próprio).

Escrevendo-se agora M equações para as poro-pressões dos pontos internos para a fase líquida e mais M equações para as poro pressões dos pontos internos para a fase gasosa, bem como 2M equações para os gradientes de pressão líquida e mais 2M para o gradiente das pressões gasosa, chega-se aos sistemas:

$$\{p_{(i)}^\ell\} = -[H_i^f]\{p^\ell\} + [G_i^f]\{\bar{M}^\ell\} - [S_i^f]\{\bar{M}_{i,i}^\ell\} + [Q_i^f]\{f_i^\ell\} \quad (7.102)$$

$$\{p_{(i)}^g\} = -[H_i^f]\{p^g\} + [G_i^f]\{\bar{M}^g\} - [S_i^f]\{\bar{M}_{i,i}^g\} + [Q_i^f]\{f_i^g\} \quad (7.103)$$

$$\{p_{(i,j)}^\ell\} = -[H_i^{f'}]\{p^\ell\} + [G_i^{f'}]\{\bar{M}^\ell\} - [S_i^{f'}]\{\bar{M}_{i,i}^\ell\} + [Q_i^{f'}]\{f_i^\ell\} \quad (7.104)$$

$$\{p_{(i,j)}^g\} = -[H_i^{f'}]\{p^g\} + [G_i^{f'}]\{\bar{M}^g\} - [S_i^{f'}]\{\bar{M}_{i,i}^g\} + [Q_i^{f'}]\{f_i^g\} \quad (7.105)$$

sendo  $\{p_{(i)}^\ell\}$  e  $\{p_{(i)}^g\}$  os vetores de  $M$  componentes das poro pressões líquidas e gasosas internas,  $\{p_{(i,j)}^\ell\}$  e  $\{p_{(i,j)}^g\}$  os vetores de  $2M$  componentes dos gradientes das poro pressões líquidas e gasosas internas e  $[H_i^f]$ ,  $[G_i^f]$ ,  $[S_i^f]$ ,  $[Q_i^f]$ ,  $[H_i^{f'}]$ ,  $[H_i^{f'']}]$ ,  $[G_i^{f'}]$ ,  $[S_i^{f'}]$  e  $[Q_i^{f'}]$  as correspondentes matrizes de influência. O primeiro índice de cada matriz,  $i$ , nas (7.100)-(7.105), indica se a equação foi escrita para pontos de domínio, ou de contorno (na ausência deste índice). Observe que as aproximações para a poro pressão são independentes, ou seja, são diferentes no contorno (variáveis em  $\{p^\ell\}$  e  $\{p^g\}$ ) e no domínio (variáveis em  $\{p_{(i)}^\ell\}$  e  $\{p_{(i)}^g\}$ ), sem que haja, com isto, prejuízo na formulação. Esta escolha independente das aproximações é muito prática, pois permite escrever dois sistemas distintos de equações para a poro pressão ((7.100) e (7.101) ou (7.102) e (7.103)).

Chamando de  $\{X^\ell\}$  o vetor com as incógnitas de contorno de poro pressão ou fluxo normal, as (7.100)-(7.103) ficam, respectivamente, dadas por:

$$[A^\ell]\{X^\ell\} = \{Y^\ell\} - [S^\ell]\{\bar{M}_{i,i}^\ell\} + [Q^\ell]\{f_i^\ell\} \quad (7.106)$$

$$[A^g]\{X^g\} = \{Y^g\} - [S^g]\{\bar{M}_{i,i}^g\} + [Q^g]\{f_i^g\} \quad (7.107)$$

$$\{X^\ell\} = [A^\ell]^{-1} \{Y^\ell\} - [A^\ell]^{-1} [S^\ell] \{\bar{M}_{i,i}^\ell\} + [A^\ell]^{-1} [Q^\ell] \{f_i^\ell\} \quad (7.108)$$

$$\{X^g\} = [A^g]^{-1} \{Y^g\} - [A^g]^{-1} [S^g] \{\bar{M}_{i,i}^g\} + [A^g]^{-1} [Q^g] \{f_i^g\} \quad (7.109)$$

$$\{p_{(i)}^\ell\} = -[A_i^\ell] \{X^\ell\} + \{Y_{(i)}^\ell\} - [S_i^\ell] \{\bar{M}_{i,i}^\ell\} + [Q_i^\ell] \{f_i^\ell\} \quad (7.110)$$

$$\{p_{(i)}^g\} = -[A_i^g] \{X^g\} + \{Y_{(i)}^g\} - [S_i^g] \{\bar{M}_{i,i}^g\} + [Q_i^g] \{f_i^g\} \quad (7.111)$$

$$\{p_{(i),j}^\ell\} = -[A_i^{\ell'}] \{X^\ell\} + \{Y_{(i)}^{\ell'}\} - [S_i^{\ell'}] \{\bar{M}_{i,i}^\ell\} + [Q_i^{\ell'}] \{f_i^\ell\} \quad (7.112)$$

$$\{p_{(i),j}^g\} = -[A_i^{g'}] \{X^g\} + \{Y_{(i)}^{g'}\} - [S_i^{g'}] \{\bar{M}_{i,i}^g\} + [Q_i^{g'}] \{f_i^g\} \quad (7.113)$$

sendo  $[A^\ell]$ ,  $[A_i^\ell]$ ,  $[A_i^{\ell'}]$ ,  $[A^g]$ ,  $[A_i^g]$  e  $[A_i^{g'}]$  matrizes de influência de  $\{X^\ell\}$  e  $\{X^g\}$ . Sendo  $\{Y^\ell\}$ ,  $\{Y^g\}$ ,  $\{Y_{(i)}^\ell\}$ ,  $\{Y_{(i)}^g\}$ ,  $\{Y_{(i)}^{\ell'}\}$  e  $\{Y_{(i)}^{g'}\}$  são os vetores conhecidos dependentes das variáveis prescritas de contorno. Observe que, nas (7.110)-(7.113). Isolando-se  $\{X^\ell\}$  e  $\{X^g\}$  nas (7.106) e (7.107) e substituindo-se, respectivamente, nas (7.110)-(7.113), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \{p_{(i)}^\ell\} = & -[A_i^\ell] [A^\ell]^{-1} \{Y^\ell\} + \{Y_{(i)}^\ell\} - \left[ -[A_i^\ell] [A^\ell]^{-1} [S^\ell] + [S_i^\ell] \right] \{\bar{M}_{i,i}^\ell\} \\ & + \left[ -[A_i^\ell] [A^\ell]^{-1} [Q^\ell] + [Q_i^\ell] \right] \{f_i^\ell\} \end{aligned} \quad (7.114)$$

$$\begin{aligned} \{p_{(i)}^g\} = & -[A_i^g] [A^g]^{-1} \{Y^g\} + \{Y_{(i)}^g\} - \left[ -[A_i^g] [A^g]^{-1} [S^g] + [S_i^g] \right] \{\bar{M}_{i,i}^g\} \\ & + \left[ -[A_i^g] [A^g]^{-1} [Q^g] + [Q_i^g] \right] \{f_i^g\} \end{aligned} \quad (7.115)$$

$$\begin{aligned} \{P_{(i),j}^\ell\} = & -[A_i^{\ell'}][A^\ell]^{-1}\{Y^\ell\} + \{Y_{(i)}^{\ell'}\} - \left[ -[A_i^{\ell'}][A^\ell]^{-1}[S^\ell] + [S_i^{\ell'}] \right] \{M_{i,i}^\ell\} \\ & + \left[ -[A_i^{\ell'}][A^\ell]^{-1}[Q^\ell] + [Q_i^{\ell'}] \right] \{f_i^\ell\} \end{aligned} \quad (7.116)$$

$$\begin{aligned} \{P_{(i)}^g\} = & -[A_i^{g'}][A^g]^{-1}\{Y^g\} + \{Y_{(i)}^{g'}\} - \left[ -[A_i^{g'}][A^g]^{-1}[S^g] + [S_i^{g'}] \right] \{M_{i,i}^g\} \\ & + \left[ -[A_i^{g'}][A^g]^{-1}[Q^g] + [Q_i^{g'}] \right] \{f_i^g\} \end{aligned} \quad (7.117)$$

ou, reescritas de outra maneira:

$$\{P_{(i)}^\ell\} = \{N^\ell\} - [\bar{S}^\ell] \{M_{i,i}^\ell\} + [\bar{Q}^\ell] \{f_i^\ell\} \quad (7.118)$$

$$\{P_{(i)}^g\} = \{N^g\} - [\bar{S}^g] \{M_{i,i}^g\} + [\bar{Q}^g] \{f_i^g\} \quad (7.119)$$

$$\{P_{(i),j}^\ell\} = \{N^{\ell'}\} - [\bar{S}^{\ell'}] \{M_{i,i}^\ell\} + [\bar{Q}^{\ell'}] \{f_i^\ell\} \quad (7.120)$$

$$\{P_{(i),j}^g\} = \{N^{g'}\} - [\bar{S}^{g'}] \{M_{i,i}^g\} + [\bar{Q}^{g'}] \{f_i^g\} \quad (7.121)$$

onde, nas (7.118) e (7.121), definem-se:

$$\{N^\ell\} = -[A_i^\ell][A^\ell]^{-1}\{Y^\ell\} + \{Y_{(i)}^\ell\} \quad (7.122)$$

$$\{N^g\} = -[A_i^g][A^g]^{-1}\{Y^g\} + \{Y_{(i)}^g\} \quad (7.123)$$

$$\{N^{\ell'}\} = -[A_i^{\ell'}][A^\ell]^{-1}\{Y^\ell\} + \{Y_{(i)}^{\ell'}\} \quad (7.124)$$

$$\{N^{g'}\} = -[A_i^{g'}][A^g]^{-1}\{Y^g\} + \{Y_{(i)}^{g'}\} \quad (7.125)$$

$$[\bar{S}^\ell] = -[A_i^\ell][A^\ell]^{-1}[S^\ell] + [S_i^\ell] \quad (7.126)$$

$$[\bar{S}^g] = -[A_i^g][A^g]^{-1}[S^g] + [S_i^g] \quad (7.127)$$

$$[\bar{S}^{\ell'}] = -[A_i^{\ell'}][A^\ell]^{-1}[S^\ell] + [S_i^{\ell'}] \quad (7.128)$$

$$[\bar{S}^{g'}] = -[A_i^{g'}][A^g]^{-1}[S^g] + [S_i^{g'}] \quad (7.129)$$

$$[\bar{Q}^\ell] = -[A_i^\ell][A^\ell]^{-1}[Q^\ell] + [Q_i^\ell] \quad (7.130)$$

$$[\bar{Q}^g] = -[A_i^g][A^g]^{-1}[Q^g] + [Q_i^g] \quad (7.131)$$

$$[\bar{Q}^{\ell'}] = -[A_i^{\ell'}][A^\ell]^{-1}[Q^\ell] + [Q_i^{\ell'}] \quad (7.132)$$

$$[\bar{Q}^{g'}] = -[A_i^{g'}][A^g]^{-1}[Q^g] + [Q_i^{g'}] \quad (7.133)$$

No próximo item, estas equações serão manipuladas para se obter o acoplamento destas equações com as equações que descrevem a fase sólida.

## 7.5 – Formulação do MEC para Poroelasticidade

Resumindo a formulação descrita nos capítulos anteriores pode-se dizer que o problema de poroelasticidade para meios parcialmente saturados fica escrita em função dos três sistemas de equações do método dos elementos de contorno

(Equação em Tensão, Equação das Pressões Líquidas e Equação das Pressões do gás):

$$[E]\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta N^\sigma\} + [S^\sigma]\{\Delta b\} + b\left[[Q^\sigma] + [i]\right][D]\{\Delta\pi\} + \left[[Q^\sigma] + [i]\right]\{\Delta\sigma^p\} \quad (7.134)$$

$$\{p_{(n+1)}^\ell\} = \{N_{(n+1)}^\ell\} - [\bar{S}^\ell]\{\bar{M}_{i,i(n+1)}^\ell\} + [\bar{Q}^\ell]\{f_{i(n+1)}^\ell\} \quad (7.135)$$

$$\{p_{(n+1)}^g\} = \{N_{(n+1)}^g\} - [\bar{S}^g]\{\bar{M}_{i,i(n+1)}^g\} + [\bar{Q}^g]\{f_{i(n+1)}^g\} \quad (7.136)$$

$$\{p_{j(n+1)}^\ell\} = \{N_{(n+1)}^{\ell'j}\} - [\bar{S}^{\ell'j}]\{\bar{M}_{i,i(n+1)}^{\ell'j}\} + [\bar{Q}^{\ell'j}]\{f_{i(n+1)}^{\ell'j}\} \quad (7.137)$$

$$\{p_{j(n+1)}^g\} = \{N_{(n+1)}^{g'j}\} - [\bar{S}^{g'j}]\{\bar{M}_{i,i(n+1)}^{g'j}\} + [\bar{Q}^{g'j}]\{f_{i(n+1)}^{g'j}\} \quad (7.138)$$

O penúltimo termo de (7.134) referente a pressão equivalente  $\Delta\pi$  pode ser escrito para o instante  $(n+1)$  em função das pressões líquidas e gasosas. Partindo-se do princípio que  $\Delta\pi = \pi_{(n+1)} - \pi_{(n)}$  a equação da pressão equivalente pode ser aplicada para o instante  $(n+1)$ , obtendo-se assim a seguinte definição para a variação de pressão  $\Delta\pi$ :

$$\Delta\pi = S_{(n+1)}^g p_{(n+1)}^g + S_{(n+1)}^\ell p_{(n+1)}^\ell - U_{(n+1)}^c - \pi_{(n)} \quad (7.139)$$

De onde pode-se escrever que:

$$-b\{\Delta\pi\} = [M^{\varepsilon\ell}]\{p_{(n+1)}^\ell\} + [M^{\varepsilon g}]\{p_{(n+1)}^g\} + \{V^\varepsilon\} \quad (7.140)$$

onde



$$\mathbf{M}^{\varepsilon\ell} = -\mathbf{b}\mathbf{S}_{(n+1)}^{\ell} \quad (7.141)$$

$$\mathbf{M}^{\varepsilon\mathbf{g}} = -\mathbf{b}\mathbf{S}_{(n+1)}^{\mathbf{g}} \quad (7.142)$$

$$\mathbf{V}^{\varepsilon} = -\mathbf{b}\left(-\frac{2}{3}\mathbf{U}_{(n+1)}^{\mathbf{c}} - \pi_n\right) \quad (7.143)$$

E desta forma empregando-se a equação (7.140) na (7.134) tem-se:

$$\begin{aligned} & [\mathbf{E}]\{\Delta\varepsilon\} + \left[[\mathbf{Q}^{\sigma}] + [\mathbf{i}]\right][\mathbf{D}][\mathbf{M}^{\varepsilon\ell}]\{\mathbf{p}_{(n+1)}^{\ell}\} + \\ & + \left[[\mathbf{Q}^{\sigma}] + [\mathbf{i}]\right][\mathbf{D}][\mathbf{M}^{\varepsilon\mathbf{g}}]\{\mathbf{p}_{(n+1)}^{\mathbf{g}}\} = \{\Delta\mathbf{N}^{\sigma}\} + [\mathbf{S}^{\sigma}]\{\Delta\mathbf{b}\} - \\ & \left[[\mathbf{Q}^{\sigma}] + [\mathbf{i}]\right][\mathbf{D}]\{\mathbf{V}^{\varepsilon}\} + \left[[\mathbf{Q}^{\sigma}] + [\mathbf{i}]\right][\mathbf{E}]\{\Delta\varepsilon^{\mathbf{p}}\} \end{aligned} \quad (7.144)$$

Nas equações (7.135), (7.136), (7.137) e (7.138) os termos  $\{\bar{\mathbf{M}}_{i,i(n+1)}^{\ell}\}$  e  $\{\bar{\mathbf{M}}_{i,i(n+1)}^{\mathbf{g}}\}$  podem, segundo o capítulo precedente serem escritos como:

$$\{\bar{\mathbf{M}}_{i,i(n+1)}^{\ell}\} = [\mathbf{M}^{\ell\varepsilon}]\{\Delta\varepsilon_{ij}\} + [\mathbf{M}^{\ell\ell}]\{\mathbf{p}_{(n+1)}^{\ell}\} + [\mathbf{M}^{\ell\mathbf{g}}]\{\mathbf{p}_{(n+1)}^{\mathbf{g}}\} + [\mathbf{M}^{\ell\ell,i}]\{\mathbf{p}_{i(n+1)}^{\ell}\} + \{\mathbf{V}^{\ell}\} \quad (7.145)$$

$$\{\bar{\mathbf{M}}_{i,i(n+1)}^{\mathbf{g}}\} = [\mathbf{M}^{\mathbf{g}\varepsilon}]\{\Delta\varepsilon_{ij}\} + [\mathbf{M}^{\mathbf{g}\ell}]\{\mathbf{p}_{(n+1)}^{\ell}\} + [\mathbf{M}^{\mathbf{g}\mathbf{g}}]\{\mathbf{p}_{(n+1)}^{\mathbf{g}}\} + [\mathbf{M}^{\mathbf{g}\mathbf{g},i}]\{\mathbf{p}_{i(n+1)}^{\mathbf{g}}\} + \{\mathbf{V}^{\mathbf{g}}\} \quad (7.146)$$

onde as matrizes  $[\mathbf{M}^{\ell\varepsilon}]$ ,  $[\mathbf{M}^{\mathbf{g}\varepsilon}]$ ,  $[\mathbf{M}^{\ell\ell}]$ ,  $[\mathbf{M}^{\mathbf{g}\mathbf{g}}]$ ,  $[\mathbf{M}^{\ell\mathbf{g}}]$ ,  $[\mathbf{M}^{\mathbf{g}\ell}]$ ,  $[\mathbf{M}^{\ell\ell,i}]$ ,  $[\mathbf{M}^{\mathbf{g}\mathbf{g},i}]$ ,  $\{\mathbf{V}^{\ell}\}$  e  $\{\mathbf{V}^{\mathbf{g}}\}$  são definidos por matrizes diagonais compostos pelas seguintes expressões:

$$\mathbf{M}^{\ell\varepsilon} = -\frac{\mathbf{S}_{(n+1)}^{\ell}}{\Delta t} \frac{\mu^{\ell}}{\mathbf{k}_{(n+1)}^{\phi} \mathbf{k}_{(n+1)}^{\ell\mathbf{S}^{\ell}}} \left(1 + \bar{\mathbf{k}}_{\ell} (\mathbf{p}_{(n+1)}^{\ell} - \mathbf{p}_{(n)}^{\ell})\right) \mathbf{b}[\mathbf{D}]^t \quad (7.147)$$

$$\mathbf{M}^{g\varepsilon} = -\frac{\mathbf{S}_{(n+1)}^g}{\Delta t} \frac{\mu^g}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi \mathbf{k}_{(n+1)}^{gS^\ell}} \left(1 + \bar{\mathbf{k}}_g \left(\mathbf{p}_{(n+1)}^g - \mathbf{p}_{(n)}^g\right)\right) \mathbf{b}[\mathbf{D}]^t \quad (7.148)$$

$$\mathbf{M}^{\ell\ell} = -\frac{\mathbf{S}_{(n+1)}^\ell}{\Delta t} \frac{\mu^\ell}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi \mathbf{k}_{(n+1)}^{\ell S^\ell}} \left( \begin{array}{c} \left(1 + \bar{\mathbf{k}}_\ell \left(\mathbf{p}_{(n+1)}^\ell - \mathbf{p}_{(n)}^\ell\right)\right) \frac{1}{\mathbf{M}} \mathbf{S}_{(n+1)}^\ell \\ \left( \mathbf{btr} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{ij(n)} \right) + \phi_{(n+1)}^p - \mathbf{btr} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{ij(n+1)}^p \right) \right) \\ \left( -\frac{1}{\mathbf{M}} \pi_0 + \phi_0 - \frac{1}{\mathbf{M}} \frac{2}{3} \mathbf{U}_{(n+1)}^c \right) \end{array} \right) \quad (7.149)$$

$$\mathbf{M}^{gg} = -\frac{\mathbf{S}_{(n+1)}^g}{\Delta t} \frac{\mu^g}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi \mathbf{k}_{(n+1)}^{gS^\ell}} \left( \begin{array}{c} \left(1 + \bar{\mathbf{k}}_g \left(\mathbf{p}_{(n+1)}^g - \mathbf{p}_{(n)}^g\right)\right) \frac{1}{\mathbf{M}} \mathbf{S}_{(n+1)}^g \\ \left( \mathbf{btr} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{ij(n)} \right) + \phi_{(n+1)}^p - \mathbf{btr} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_{ij(n+1)}^p \right) \right) \\ \left( -\frac{1}{\mathbf{M}} \pi_0 + \phi_0 - \frac{1}{\mathbf{M}} \frac{2}{3} \mathbf{U}_{(n+1)}^c \right) \end{array} \right) \quad (7.150)$$

$$\mathbf{M}^{\ell g} = -\frac{\mathbf{S}_{(n+1)}^\ell}{\Delta t} \frac{\mu^\ell}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi \mathbf{k}_{(n+1)}^{\ell S^\ell}} \left(1 + \bar{\mathbf{k}}_\ell \left(\mathbf{p}_{(n+1)}^\ell - \mathbf{p}_{(n)}^\ell\right)\right) \frac{1}{\mathbf{M}} \mathbf{S}_{(n+1)}^g \quad (7.151)$$

$$\mathbf{M}^{g\ell} = -\frac{\mathbf{S}_{(n+1)}^g}{\Delta t} \frac{\mu^g}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi \mathbf{k}_{(n+1)}^{gS^\ell}} \left(1 + \bar{\mathbf{k}}_g \left(\mathbf{p}_{(n+1)}^g - \mathbf{p}_{(n)}^g\right)\right) \frac{1}{\mathbf{M}} \mathbf{S}_{(n+1)}^\ell \quad (7.152)$$

$$\mathbf{M}^{\ell\ell,i} = + \left( \left( \mathbf{p}_{,i(n+1)}^\ell - \mathbf{f}_{i(n+1)}^\ell \right) \bar{\mathbf{k}}_\ell + \left( \frac{\mathbf{k}_{,i(n+1)}^\phi}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi} + \frac{\mathbf{k}_{,i(n+1)}^{\ell S^\ell}}{\mathbf{k}_{(n+1)}^{\ell S^\ell}} \right) \right) \quad (7.153)$$

$$\mathbf{M}^{gg,i} = + \left( \left( \mathbf{p}_{,i(n+1)}^g - \mathbf{f}_{i(n+1)}^g \right) \bar{\mathbf{k}}_g + \left( \frac{\mathbf{k}_{,i(n+1)}^\phi}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi} + \frac{\mathbf{k}_{,i(n+1)}^{gS^\ell}}{\mathbf{k}_{(n+1)}^{gS^\ell}} \right) \right) \quad (7.154)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^\ell = & -\frac{\mathbf{S}_{(n+1)}^\ell}{\Delta t} \frac{\mu^\ell}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi \mathbf{k}_{(n+1)}^{\ell S^\ell}} \left( 1 - \bar{\mathbf{k}}_\ell \mathbf{p}_{(n)}^\ell \right) \left( \begin{array}{l} \text{btr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij(n)}) + \phi_{(n+1)}^p - \text{btr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij(n+1)}^p) \\ -\frac{1}{\mathbf{M}} \pi_0 + \phi_0 - \frac{1}{\mathbf{M}} \frac{2}{3} \mathbf{U}_{(n+1)}^c \end{array} \right) \\ & + \phi_{(n)} \mathbf{S}_{(n)}^\ell \frac{1}{\Delta t} \frac{\mu^\ell}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi \mathbf{k}_{(n+1)}^{\ell S^\ell}} - \mathbf{f}_{i(n+1)}^\ell \left( \frac{\mathbf{k}_{i(n+1)}^\phi}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi} + \frac{\mathbf{k}_{i(n+1)}^{\ell S^\ell}}{\mathbf{k}_{(n+1)}^{\ell S^\ell}} \right) \end{aligned} \quad (7.155)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^g = & -\frac{\mathbf{S}_{(n+1)}^g}{\Delta t} \frac{\mu^g}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi \mathbf{k}_{(n+1)}^{g S^\ell}} \left( 1 - \bar{\mathbf{k}}_g \mathbf{p}_{(n)}^g \right) \left( \begin{array}{l} \text{btr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij(n)}) + \phi_{(n+1)}^p - \text{btr}(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij(n+1)}^p) \\ -\frac{1}{\mathbf{M}} \pi_0 + \phi_0 - \frac{1}{\mathbf{M}} \frac{2}{3} \mathbf{U}_{(n+1)}^c \end{array} \right) \\ & + \phi_{(n)} \mathbf{S}_{(n)}^g \frac{1}{\Delta t} \frac{\mu^g}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi \mathbf{k}_{(n+1)}^{g S^\ell}} - \mathbf{f}_{i(n+1)}^g \left( \frac{\mathbf{k}_{i(n+1)}^\phi}{\mathbf{k}_{(n+1)}^\phi} + \frac{\mathbf{k}_{i(n+1)}^{g S^\ell}}{\mathbf{k}_{(n+1)}^{g S^\ell}} \right) \end{aligned} \quad (7.156)$$

Empregando-se as expressões (7.145) e (7.146) nas equações (7.135) – (7.138), chega-se a:

$$\begin{aligned} & [\bar{\mathbf{S}}^\ell][\mathbf{M}^{\ell \varepsilon}]\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\} + [\mathbf{i}] + [\bar{\mathbf{S}}^\ell][\mathbf{M}^{\ell \ell}]\{\mathbf{p}_{(n+1)}^\ell\} + \\ & + [\bar{\mathbf{S}}^\ell][\mathbf{M}^{\ell g}]\{\mathbf{p}_{(n+1)}^g\} + [\bar{\mathbf{S}}^\ell][\mathbf{M}^{\ell \ell, i}]\{\mathbf{p}_{i(n+1)}^\ell\} = \\ & = \{\mathbf{N}_{(n+1)}^\ell\} - [\bar{\mathbf{S}}^\ell]\{\mathbf{V}^\ell\} + [\bar{\mathbf{Q}}^\ell]\{\mathbf{f}_{i(n+1)}^\ell\} \end{aligned} \quad (7.157)$$

$$\begin{aligned} & [\bar{\mathbf{S}}^g][\mathbf{M}^{g \varepsilon}]\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\} + [\bar{\mathbf{S}}^g][\mathbf{M}^{g \ell}]\{\mathbf{p}_{(n+1)}^\ell\} + \\ & + [\mathbf{i}] + [\bar{\mathbf{S}}^g][\mathbf{M}^{g g}]\{\mathbf{p}_{(n+1)}^g\} + [\bar{\mathbf{S}}^g][\mathbf{M}^{g g, i}]\{\mathbf{p}_{i(n+1)}^g\} = \\ & = \{\mathbf{N}_{(n+1)}^g\} - [\bar{\mathbf{S}}^g]\{\mathbf{V}^g\} + [\bar{\mathbf{Q}}^g]\{\mathbf{f}_{i(n+1)}^g\} \end{aligned} \quad (7.158)$$

$$\begin{aligned} & [\bar{\mathbf{S}}^{\ell'}][\mathbf{M}^{\ell' \varepsilon}]\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij}\} + [\bar{\mathbf{S}}^{\ell'}][\mathbf{M}^{\ell' \ell}]\{\mathbf{p}_{(n+1)}^\ell\} + \\ & + [\bar{\mathbf{S}}^{\ell'}][\mathbf{M}^{\ell' g}]\{\mathbf{p}_{(n+1)}^g\} + [\mathbf{i}] + [\bar{\mathbf{S}}^{\ell'}][\mathbf{M}^{\ell' \ell, i}]\{\mathbf{p}_{i(n+1)}^\ell\} = \\ & = \{\mathbf{N}_{(n+1)}^{\ell'}\} - [\bar{\mathbf{S}}^{\ell'}]\{\mathbf{V}^\ell\} + [\bar{\mathbf{Q}}^{\ell'}]\{\mathbf{f}_{i(n+1)}^\ell\} \end{aligned} \quad (7.159)$$

$$\begin{aligned}
& [\bar{\mathbf{S}}^{g'}][\mathbf{M}^{g^c}]\{\Delta\epsilon_{ij}\} + [\bar{\mathbf{S}}^{g'}][\mathbf{M}^{g^\ell}]\{\mathbf{p}_{(n+1)}^\ell\} + \\
& + [\bar{\mathbf{S}}^{g'}][\mathbf{M}^{g^g}]\{\mathbf{p}_{(n+1)}^g\} + [\mathbf{i}] + [\bar{\mathbf{S}}^{g'}][\mathbf{M}^{g^g,i}]\{\mathbf{p}_{i,(n+1)}^g\} = \\
& = \{\mathbf{N}_{(n+1)}^{g'}\} - [\bar{\mathbf{S}}^{g'}]\{\mathbf{V}^g\} + [\bar{\mathbf{Q}}^{g'}]\{\mathbf{f}_{i(n+1)}^g\}
\end{aligned} \quad (7.160)$$

Finalmente, juntando-se as equações (7.144), (7.157), (7.158), (7.159) e (7.160) num único sistema de equações, chega-se a:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [\mathbf{E}] & [[\mathbf{Q}^\sigma] + [\mathbf{i}]][\mathbf{D}][\mathbf{M}^{\ell'}] & 0 & [[\mathbf{Q}^\sigma] + [\mathbf{i}]][\mathbf{D}][\mathbf{M}^{g^g}] & 0 \\ [\bar{\mathbf{S}}^\ell][\mathbf{M}^{\ell^c}] & [\mathbf{i}] + [\bar{\mathbf{S}}^\ell][\mathbf{M}^{\ell\ell}] & [\bar{\mathbf{S}}^\ell][\mathbf{M}^{\ell,i}] & [\bar{\mathbf{S}}^\ell][\mathbf{M}^{g^g}] & 0 \\ [\bar{\mathbf{S}}^{\ell'}][\mathbf{M}^{\ell^c}] & [\bar{\mathbf{S}}^{\ell'}][\mathbf{M}^{\ell\ell}] & [\mathbf{i}] + [\bar{\mathbf{S}}^{\ell'}][\mathbf{M}^{\ell,i}] & [\bar{\mathbf{S}}^{\ell'}][\mathbf{M}^{g^g}] & 0 \\ [\bar{\mathbf{S}}^g][\mathbf{M}^{g^c}] & [\bar{\mathbf{S}}^g][\mathbf{M}^{g^\ell}] & 0 & [\mathbf{i}] + [\bar{\mathbf{S}}^g][\mathbf{M}^{g^g}] & [\bar{\mathbf{S}}^g][\mathbf{M}^{g^g,i}] \\ [\bar{\mathbf{S}}^{g'}][\mathbf{M}^{g^c}] & [\bar{\mathbf{S}}^{g'}][\mathbf{M}^{g^\ell}] & 0 & [\bar{\mathbf{S}}^{g'}][\mathbf{M}^{g^g}] & [\mathbf{i}] + [\bar{\mathbf{S}}^{g'}][\mathbf{M}^{g^g,i}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta\epsilon\} \\ \{\mathbf{p}_{(n+1)}^\ell\} \\ \{\mathbf{p}_{i(n+1)}^\ell\} \\ \{\mathbf{p}_{(n+1)}^g\} \\ \{\mathbf{p}_{i(n+1)}^g\} \end{Bmatrix} = (7.161) \\
& = \begin{Bmatrix} \{\Delta\mathbf{N}^\sigma\} + [\mathbf{S}^\sigma]\{\Delta\mathbf{b}\} - [[\mathbf{Q}^\sigma] + [\mathbf{i}]][\mathbf{D}]\{\mathbf{V}^g\} + [[\mathbf{Q}^\sigma] + [\mathbf{i}]][\mathbf{E}]\{\Delta\epsilon^p\} \\ \{\bar{\mathbf{N}}_{(n+1)}^\ell\} - [\bar{\mathbf{S}}^\ell]\{\mathbf{V}^\ell\} + [\bar{\mathbf{Q}}^\ell]\{\mathbf{f}_{i(n+1)}^\ell\} \\ \{\mathbf{N}_{(n+1)}^{\ell'}\} - [\bar{\mathbf{S}}^{\ell'}]\{\mathbf{V}^{\ell'}\} + [\bar{\mathbf{Q}}^{\ell'}]\{\mathbf{f}_{i(n+1)}^{\ell'}\} \\ \{\bar{\mathbf{N}}_{(n+1)}^g\} - [\bar{\mathbf{S}}^g]\{\mathbf{V}^g\} + [\bar{\mathbf{Q}}^g]\{\mathbf{f}_{i(n+1)}^g\} \\ \{\mathbf{N}_{(n+1)}^{g'}\} - [\bar{\mathbf{S}}^{g'}]\{\mathbf{V}^{g'}\} + [\bar{\mathbf{Q}}^{g'}]\{\mathbf{f}_{i(n+1)}^{g'}\} \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$

Empregando-se a hipótese de Richard, que determina que não haja variação da pressão gasosa no tempo, e supondo que a pressão gasosa seja nula para todos os pontos do domínio, logo seu gradiente será nulo também, desta forma o sistema (7.161) se reduz à:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [\mathbf{E}] & [[\mathbf{Q}^\sigma] + [\mathbf{i}]][\mathbf{D}][\mathbf{M}^{\ell'}] & 0 \\ [\bar{\mathbf{S}}^\ell][\mathbf{M}^{\ell^c}] & [\mathbf{i}] + [\bar{\mathbf{S}}^\ell][\mathbf{M}^{\ell\ell}] & [\bar{\mathbf{S}}^\ell][\mathbf{M}^{\ell,i}] \\ [\bar{\mathbf{S}}^{\ell'}][\mathbf{M}^{\ell^c}] & [\bar{\mathbf{S}}^{\ell'}][\mathbf{M}^{\ell\ell}] & [\mathbf{i}] + [\bar{\mathbf{S}}^{\ell'}][\mathbf{M}^{\ell,i}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta\epsilon\} \\ \{\mathbf{p}_{(n+1)}^\ell\} \\ \{\mathbf{p}_{i(n+1)}^\ell\} \end{Bmatrix} \\
& = \begin{Bmatrix} \{\Delta\mathbf{N}^\sigma\} + [\mathbf{S}^\sigma]\{\Delta\mathbf{b}\} - [[\mathbf{Q}^\sigma] + [\mathbf{i}]][\mathbf{D}]\{\mathbf{V}^g\} + [[\mathbf{Q}^\sigma] + [\mathbf{i}]][\mathbf{E}]\{\Delta\epsilon^p\} \\ \{\bar{\mathbf{N}}_{(n+1)}^\ell\} - [\bar{\mathbf{S}}^\ell]\{\mathbf{V}^\ell\} + [\bar{\mathbf{Q}}^\ell]\{\mathbf{f}_{i(n+1)}^\ell\} \\ \{\mathbf{N}_{(n+1)}^{\ell'}\} - [\bar{\mathbf{S}}^{\ell'}]\{\mathbf{V}^{\ell'}\} + [\bar{\mathbf{Q}}^{\ell'}]\{\mathbf{f}_{i(n+1)}^{\ell'}\} \end{Bmatrix} \quad (7.162)
\end{aligned}$$

Tanto para o problema com (7.162) ou sem (7.161) a hipótese de Richard, o sistema final de equações será do tipo:

$$[A(x)]\{x\} = \{b(x)\} \quad (7.163)$$

A resolução deste problema foi feita de forma iterativa, cuja tentativa inicial para os valores de  $x$  que compõem a matriz  $[A(x)]$  e o vetor  $\{b(x)\}$  são os valores de  $x$  da iteração anterior:

$$[A(x_{(s)})]\{x_{(s+1)}\} = \{b(x_{(s)})\} \quad (7.164)$$

O processo iterativo é efetuado até que:

$$\frac{\text{Max}|\Delta u|}{u_{\text{ref}}} < \varepsilon \quad (7.165)$$

$$\frac{\text{Max}|\Delta p|}{p_{\text{ref}}} < \varepsilon \quad (7.166)$$

$$\frac{\text{Max}|\Delta S^\ell|}{S_{\text{ref}}^\ell} < \varepsilon \quad (7.167)$$

onde  $u_{\text{ref}}$ ,  $p_{\text{ref}}$  e  $S_{\text{ref}}^\ell$  são valores de referência para os deslocamento, pressões e saturação, e  $\varepsilon$  é o valor do máximo erro admissível.

A matriz  $[A(x_{(s)})]$  e o vetor  $\{b(x_{(s)})\}$  tem em sua composição termos que dependem do grau de saturação no instante  $S_{(n+1)}^\ell$ . Esta segunda não linearidade (referente a saturação) será resolvida empregando-se um processo iterativo e o modelo constitutivo adotado para representar o comportamento da saturação em função da pressão capilar é o modelo de Van Genuchten (GENUCHTEN, 1980). E

por fim a não linearidade física da matriz porosa será modelada com um modelo do tipo Cam-Clay(COUSSY e FLEUREAU, 2002) dentro de um processo iterativo.

## Exemplos de Aplicação

---

Capítulo 8

Neste capítulo, serão apresentados alguns exemplos de aplicação numérica da formulação do MEC apresentada nos capítulos anteriores. No item 8.1, mostrar-se-ão exemplos de poroelasticidade, onde serão analisadas as influências da constante de biot do modelo poro-elástico nas respostas numéricas. No item 8.2, apresentar-se-ão dois exemplos de poroplasticidade, o segundo deles com uma geometria mais complexa do que o primeiro. Será analisado o comportamento das variáveis plásticas ao longo do tempo e como elas se distribuem no corpo fixando-se valores do tempo, no item 8.3 são apresentados alguns exemplos de meios poro-elásticos enrijecidos com emprego do acoplamento MEC/MEF com regularização das variáveis de acoplamento, no item 8.4 são apresentados os resultados de dois exemplos simulados empregando-se a formulação poro-elasto-plástica para domínios enrijecidos e regularização das interfaces de acoplamento, no item 8.5 são apresentados alguns resultados da formulação poro-elástica para o caso não saturado.

Os resultados foram obtidos a partir de um código computacional desenvolvido em linguagem de programação Object Pascal. A formulação do MEC, cujos resultados da poroplasticidade foram obtidos, baseia-se nas equações algébricas escritas em termos das variáveis independentes de deformação e de poro pressão. No algoritmo implementado, foi utilizada a matriz tangente consistente algorítmica na linearização das equações dos MEC e o procedimento implícito para a atualização das variáveis plásticas do modelo.

É importante lembrar que apesar do programa ter sido criado de forma individual, importantes contribuições e dicas foram dadas pelos orientadores do presente trabalho o Prof. Dr. Wilson Sérgio Venturini e o Prof. Ahmed Benallal, e pelo Dr. Alexandre Botta que desenvolveu em seu programa de Pos-Doutorado um estudo relacionado ao tema desta tese.

Atualmente o programa funciona com todas as integrais de contorno (potencial, eq. Somigliana e Somigliana em tensão), obtidas de forma totalmente analítica tanto para os casos singulares como para os não singulares para aproximação linear de variáveis de contorno inclusive para as integrais de domínio.

Algumas hipóteses básicas foram consideradas no programa. O meio é homogêneo e os parâmetros físicos do esqueleto e do fluido são constantes em todo o corpo. O carregamento é aplicado durante o primeiro incremento de tempo e permanece constante ao longo do tempo, as condições de contorno também são fixas e invariáveis no tempo, o contorno do corpo é discretizado em elementos retos e suas variáveis (deslocamentos, forças de superfície, poro-pressão e velocidade normal) são aproximadas linearmente por elemento, para as integrais de domínio são empregadas triangulares de aproximação linear.

No programa desenvolvido, os elementos de contorno são contínuos, mas existe a possibilidade de definição de nós duplos. As células também são contínuas, com exceção daquelas adjacentes ao contorno do corpo, ou ao contorno dos enrijecedores, para as quais admite-se descontinuidade para células vizinhas. O incremento de tempo  $\Delta t$  pode ser constante ou variável, ou constante por trechos da análise.

A seguir são apresentados alguns exemplos empregando o programa e a formulação descritos anteriormente.

### 8.1 – Exemplos de aplicação para meios poroelásticos



### 8.1.1 – Fluido Incompressível

#### Exemplo 1 - Ensaio simples de adensamento

Neste primeiro exemplo, analisa-se um caso de configuração geométrica bem simples, adotando-se parâmetros físicos unitários. A geometria do problema analisado está mostrada na figura 8.1, assim como as condições de contorno adotadas. A análise é feita para estado plano de deformação. O módulo de elasticidade longitudinal  $E$  e o coeficiente de permeabilidade  $K$  são unitários e constantes no domínio dado, representando um único material poroso. Admitem-se a densidade  $\gamma_w$  do fluido igual a um e o coeficiente de Poisson do esqueleto igual a zero. Neste exemplo o fluido foi considerado incompressível.

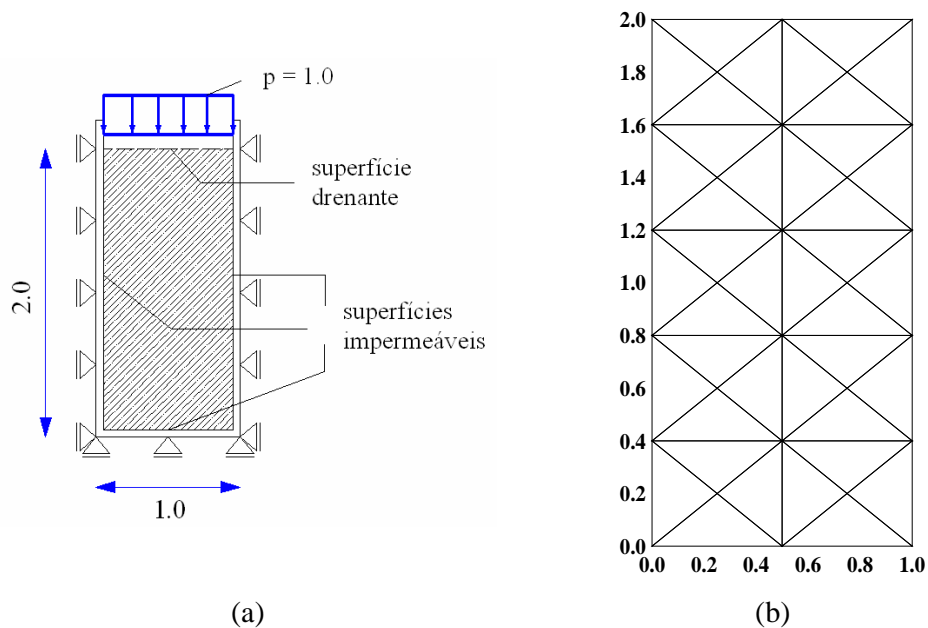


Figura 8.1 – (a) Geometria e condições de contorno do exemplo. (b) Discretização do domínio em células triangulares.

Na figura 8.1 (a), observa-se que um carregamento distribuído uniforme de compressão, de valor unitário, está aplicado na face superior do aparato. As duas

faces verticais têm seus deslocamentos horizontais impedidos, e a face inferior tem seus deslocamentos verticais impedidos. A face superior está livre para movimentar-se verticalmente. As duas faces verticais e a inferior são impermeáveis, ou seja, têm fluxo normal à superfície nulo. Assim sendo, para estas superfícies, prescreve-se velocidade normal nula. A face superior é uma superfície drenante, ou seja, permite fluxo perpendicular a ela. Nesta face, a pressão é prescrita como sendo nula.

Para a aplicação da formulação numérica, o meio bidimensional deve ser discretizado em células de domínio. Sobre cada célula, os campos de pressões no fluido e de deformações e tensões no esqueleto são aproximados linearmente. Definem-se nós internos de célula para as variáveis de pressão, deformação e tensão, e as aproximações são escritas em função dos valores nodais incógnitos. As superfícies de contorno também são discretizadas em elementos retos. Os campos de pressões e velocidades normais no fluido e os campos de forças de superfície e deslocamentos de contorno são linearmente aproximados por elemento. A discretização do domínio em células triangulares está mostrada na figura 8.1 (b).

O carregamento de compressão é aplicado instantaneamente em  $t = 0$ . Neste mesmo instante, cria-se um campo de pressões no fluido em todo o domínio. Em função da configuração geométrica e das condições de contorno do aparato do exemplo, o campo de pressões gerado pelo carregamento externo é constante e unitário em todo o meio, ou seja,  $p = 1.0$  em todos os nós. As deformações no esqueleto são iguais a zero em  $t = 0$ , pela hipótese do fluido incompressível.

À medida que o tempo avança, gradativamente ocorre a dissipação das poro-pressões e o conseqüente aumento de deformação no esqueleto. Observando-se as condições de contorno do exemplo, conclui-se que, à medida que ocorre a dissipação das poro-pressões, ocorre também um fluxo ascendente do fluido, com velocidade não-nula na superfície drenante. A velocidade do fluxo depende da magnitude da relação  $K/\gamma_w$ .

Na Figura 8.2, apresenta-se a evolução das poro-pressões com o tempo através de sua distribuição no domínio para seis diferentes valores de  $t$ .

Observa-se pela figura 8.2 que, para  $t = 0.001s$ , as poro-pressões são praticamente constantes no domínio e iguais a 1.0. À medida que o tempo avança, as

pressões caem rapidamente junto à face superior da superfície drenante, como se pode ver para os tempos  $t = 0.01s$  e  $t = 0.05s$ . Mais adiante, as pressões também começam a cair ao longo da profundidade. Para um tempo bem grande, em relação aos dados deste exemplo, as pressões tornam-se praticamente nulas em todo o domínio ( $t = 6.25s$ ). Nesta situação, as poro-pressões já foram dissipadas, as partículas do fluido têm velocidade nula e o esqueleto sólido encontra-se com deformação máxima, resistindo sozinho ao carregamento externo aplicado.

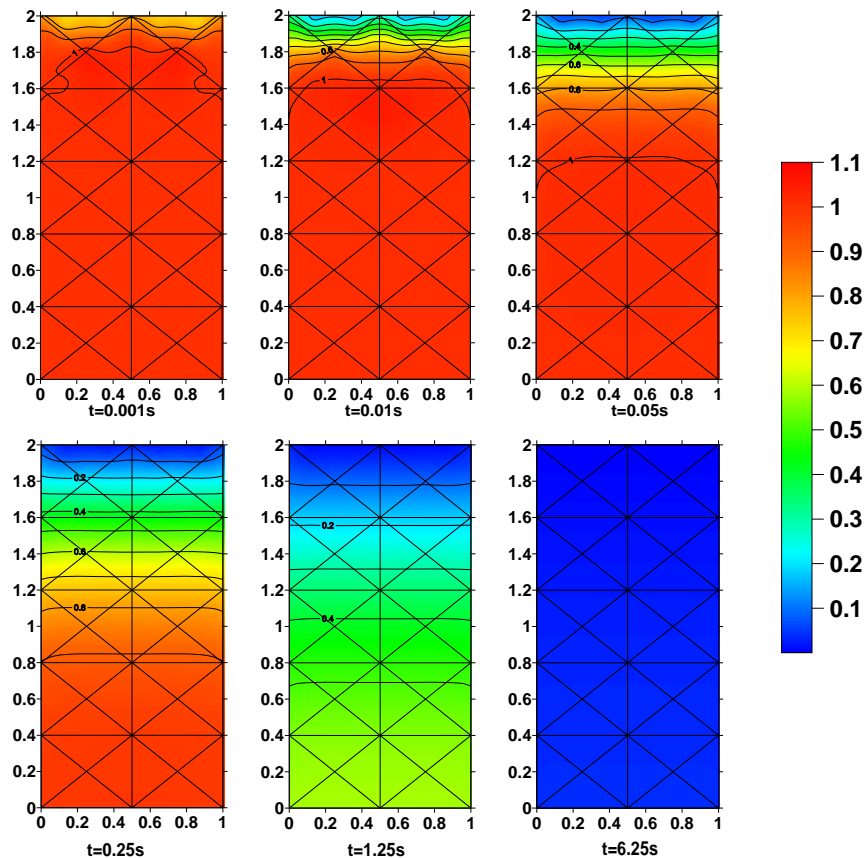


Figura 8.2 – Distribuição ao longo do tempo das poro-pressões.

Na figura 8.3, são apresentados, em contraposição à dissipação das pressões, os diagramas das tensões efetivas verticais ao longo do tempo. As tensões efetivas atuam no esqueleto sólido.

Em relação à evolução das tensões efetivas verticais, observa-se, da figura 8.3, um processo inverso do que ocorre com as poro-pressões. Para  $t = 0.001s$ , as tensões são praticamente nulas em quase todo o corpo, ou seja, o esqueleto sólido

ainda não recebe carga externa. À medida que evolui o tempo, as tensões efetivas aumentam, mais rapidamente no topo do que no meio e na base do domínio. Ao final, para  $t = 6.25s$ , a tensão efetiva vale  $-1.0$  em todos os pontos, e o esqueleto torna-se o único responsável por resistir ao carregamento externo.

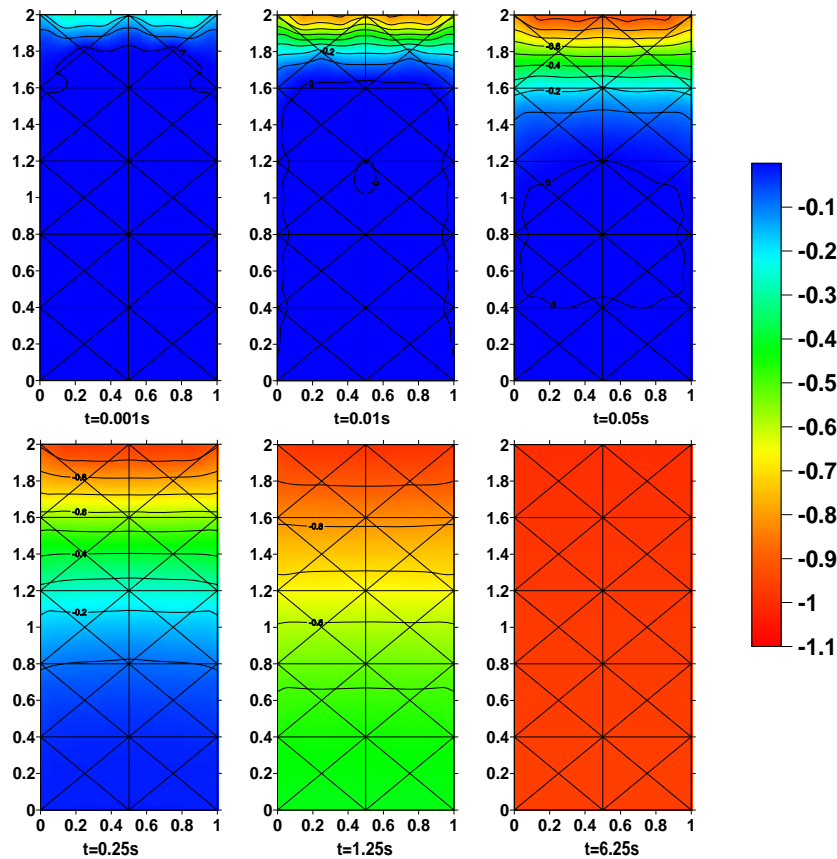


Figura 8.3. Distribuição ao longo do tempo das tensões efetivas verticais no esqueleto.

Com a mesma geometria da figura 8.1, porém modificando-se as condições de contorno, pode-se acelerar no tempo a dissipação das poro-pressões. Supondo que a face inferior seja, a exemplo da face superior, constituída também de uma superfície drenante, conforme mostra a figura 8.4, chega-se aos diagramas das pressões e das tensões efetivas verticais, dados, respectivamente, pelas figuras 8.5 e 8.6.

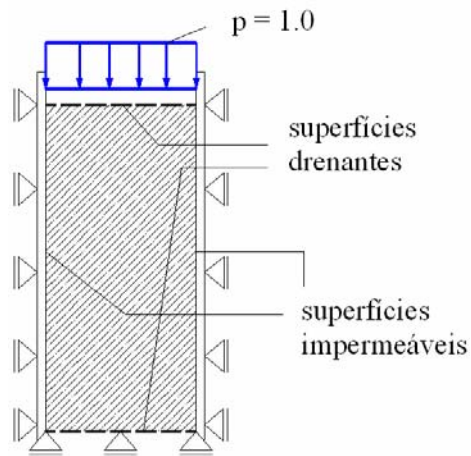


Figura 8.4 – Condições de contorno do exemplo com duas superfícies drenantes.

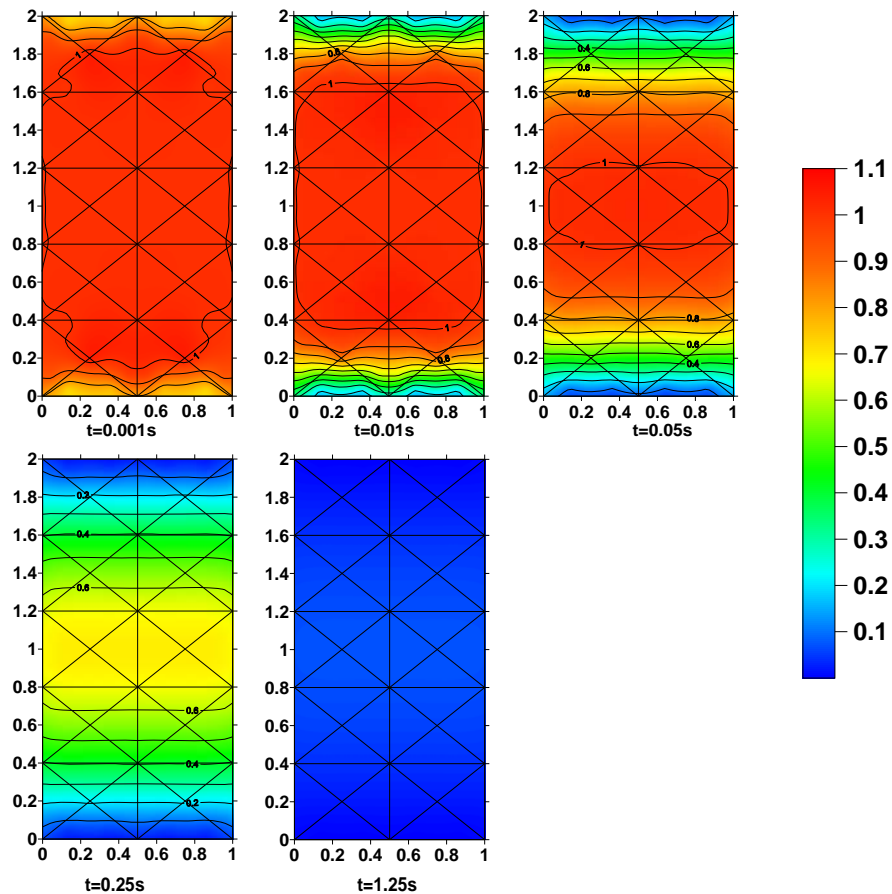


Figura 8.5 – Distribuição ao longo do tempo das poro-pressões para duas superfícies drenantes.

Observa-se, pelas figuras 8.5 e 8.6, que as pressões, com a presença das duas superfícies drenantes horizontais, dissipam em conjunto tanto de cima para baixo

quanto de baixo para cima, ou seja, os fluxos ocorrem nos dois sentidos. A dissipação é mais demorada na região central, conforme esperado. Como consequência, as tensões efetivas do esqueleto sólido se desenvolvem primeiro junto às duas extremidades drenantes e por fim junto à região do centro.

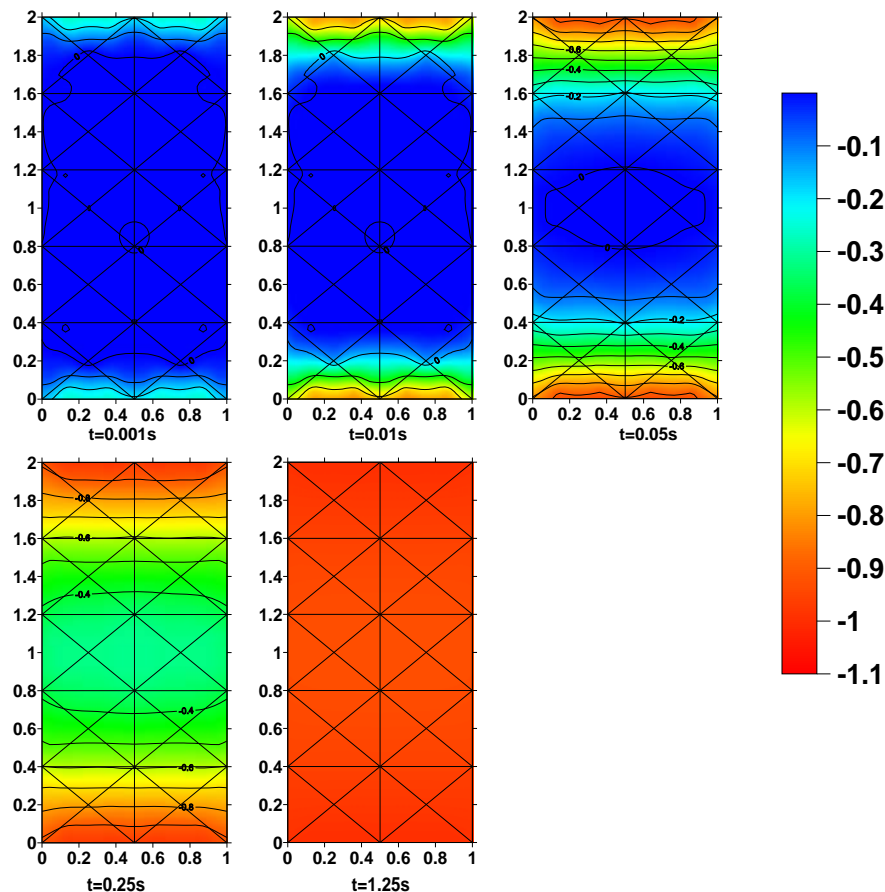


Figura 8.6 – Distribuição ao longo do tempo das tensões efetivas verticais no esqueleto para duas superfícies drenantes.

Supondo agora, para o mesmo exemplo, que a face superior horizontal e a face da direita vertical sejam as superfícies permeáveis, com as outras duas faces impermeáveis, conforme mostrado na figura 8.7, a resposta fica assimétrica, de acordo com os diagramas das pressões da figura 8.8 e das tensões efetivas da figura 8.9.

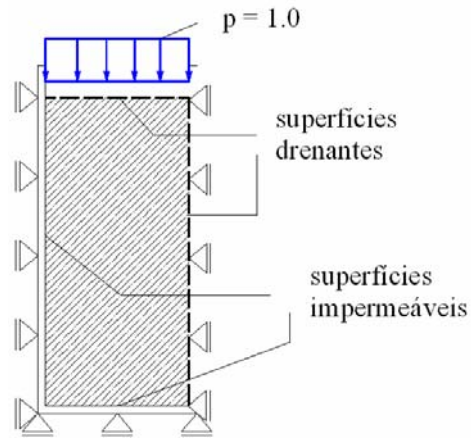


Figura 8.7 – Condições de contorno do exemplo com superfícies drenantes horizontal e vertical.

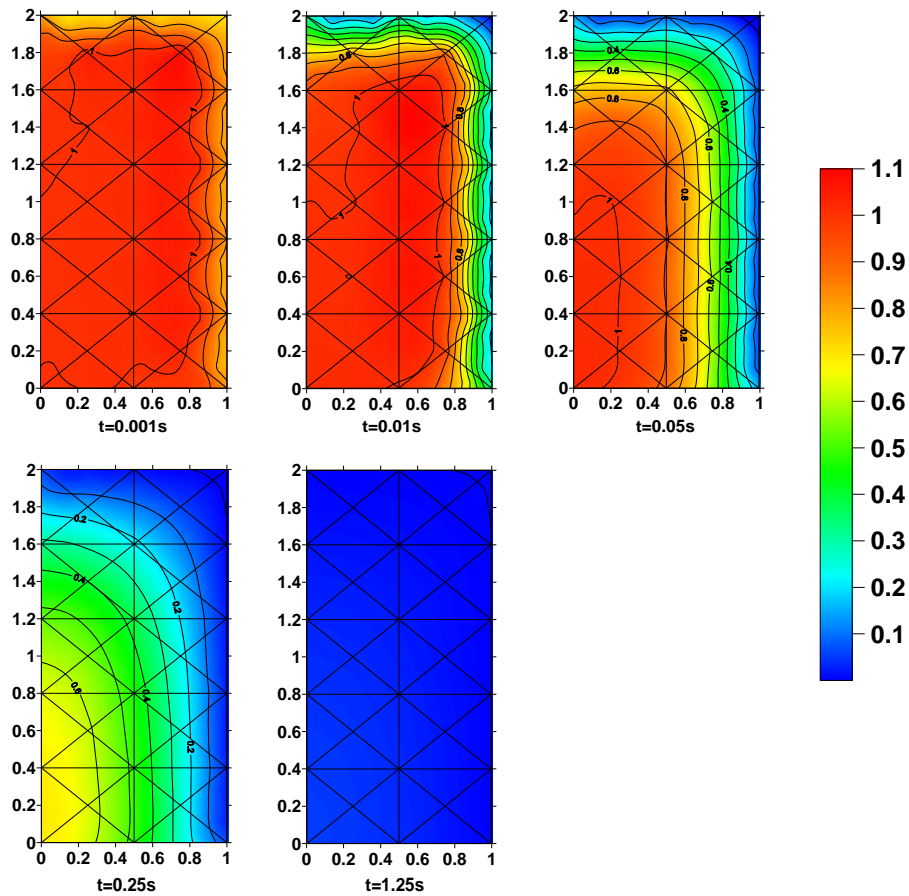


Figura 8.8 – Distribuição ao longo do tempo das poro-pressões com superfícies drenantes horizontal e vertical.

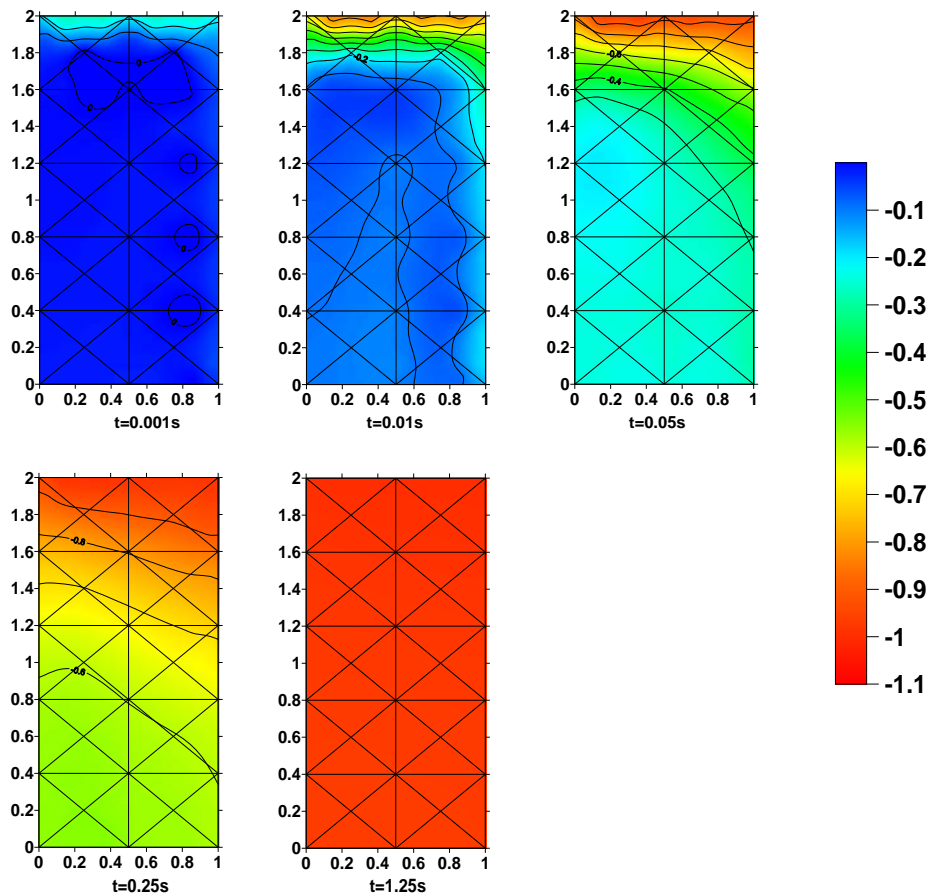


Figura 8.9 – Distribuição ao longo do tempo das tensões efetivas verticais no esqueleto com superfícies drenantes horizontal e vertical.

### Exemplo 2 – Viga contínua sobre meio semi-infinito

Neste exemplo, que se encontra em SCHIFFMAN et al. (An analysis of Consolidation Theories, *Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division*, ASCE, vol. SM-1, pp. 285-312, 1969), considera-se uma fundação em viga contínua apoiada sobre um maciço de solo saturado, conforme mostra o esquema da figura 8.10. Para simplificar, a análise numérica será feita considerando-se estado plano de deformação. Levando-se em conta as simetrias do carregamento e da resposta, apenas metade da geometria mostrada na figura 8.10 será discretizada. Como o meio poroso é semi-infinito, e a análise numérica deve ser feita para um meio finito, adotou-se um domínio a ser discretizado com fronteiras que distam dez vezes a semi-



largura “a” do carregamento distribuído. Na figura 8.11, são mostrados o domínio considerado na análise e duas discretizações de células adotadas para no exemplo, uma menos refinada (a) e outra mais refinada (b).

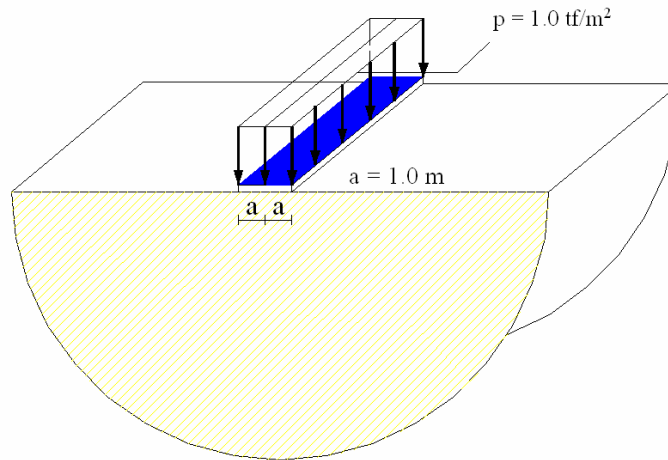


Figura 8.10 – Viga contínua apoiada em meio poroso semi-infinito.

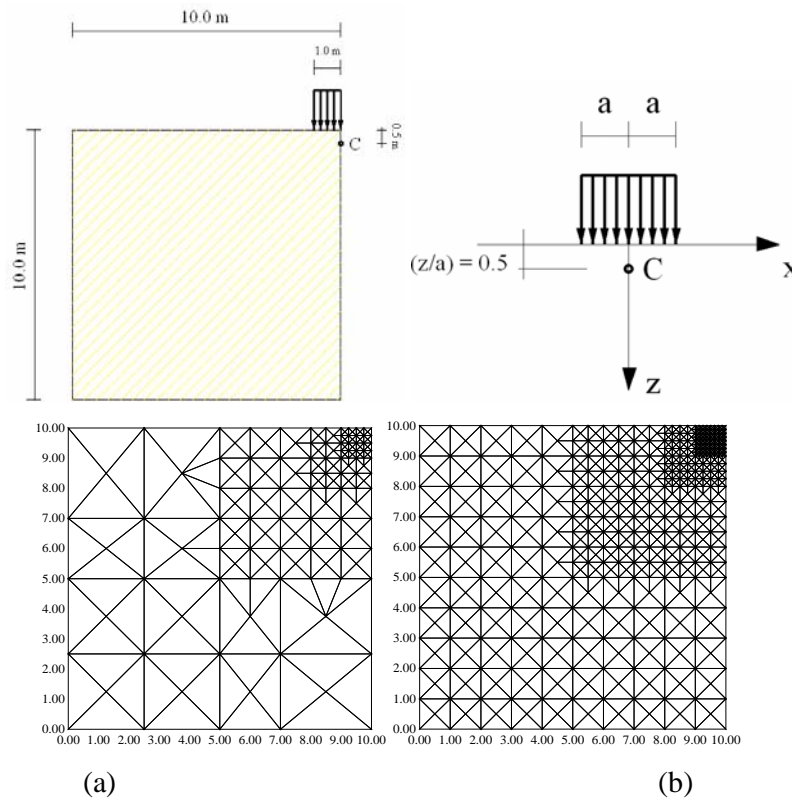


Figura 8.11 – Domínio finito e discretizações em células da análise numérica.

Os resultados em termos das poro-pressões, tensões totais e tensões efetivas são apresentados na forma normalizada, junto com os de Schiffman. Os resultados mostram a evolução das variáveis ao longo do tempo para o ponto C da figura 8.11. O ponto C dista verticalmente  $(a/2)$  da superfície horizontal do semi-infinito. Os resultados normalizados para as poro-pressões, tensões totais e tensões efetivas são mostrados na figura 8.12.

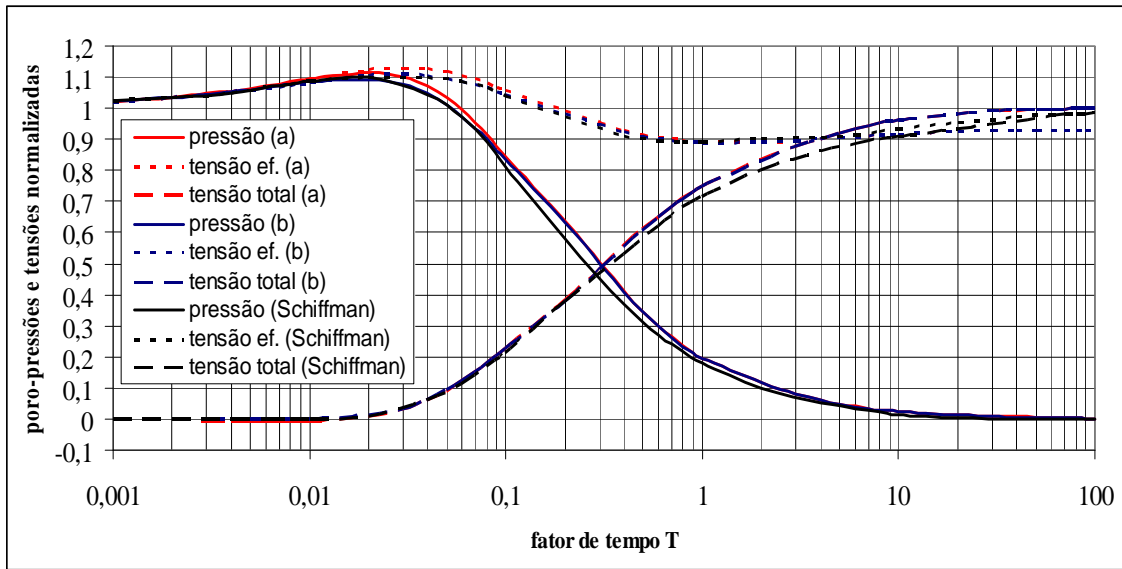


Figura 8.12. Poro-pressões, tensões totais e tensões efetivas normalizadas.

O fator de tempo  $T$ , do eixo horizontal da figura 8.12, é calculado pela relação  $T = \frac{(1-\nu)}{(1-2\nu)} \frac{2GK}{\gamma_w} t$ , onde  $t$  representa o tempo real,  $\nu$  o coeficiente de Poisson do esqueleto,  $G$  o seu módulo de elasticidade transversal,  $K$  o coeficiente de permeabilidade do solo e  $\gamma_w$  o peso específico do fluido. As pressões, tensões totais e tensões efetivas normalizadas que estão mostradas no gráfico da figura 8.12 foram determinadas, respectivamente, com as expressões:

$$\frac{p(T)}{p(0)}, \frac{(\sigma_{11}(T) + \sigma_{22}(T))}{2p(0)}, \frac{(\sigma_{11}^{ef}(T) + \sigma_{22}^{ef}(T))}{(\sigma_{11}^{ef}(\infty) + \sigma_{22}^{ef}(\infty))}$$

onde  $p(T)$  representa a poro-pressão em  $T$ ,  $p(0)$  a poro-pressão em  $t=0$ ,  $\sigma_{ii}(T)$  as componentes normais da tensão total em  $T$  e  $\sigma_{ii}^{ef}(T)$  e  $\sigma_{ii}^{ef}(\infty)$  as componentes normais da tensão efetiva em  $T$  e  $T = \infty$ , respectivamente.

Os diagramas da figura 8.13 mostram a distribuição das poro-pressões com T. Observa-se que, no início, as pressões são maiores sob a carga externa. À medida que o tempo avança, as pressões no fluido diminuem sob a carga e aumentam nas profundidades maiores. Ao final ( $T = 100\text{s}$ ) as pressões se anulam em todo o domínio

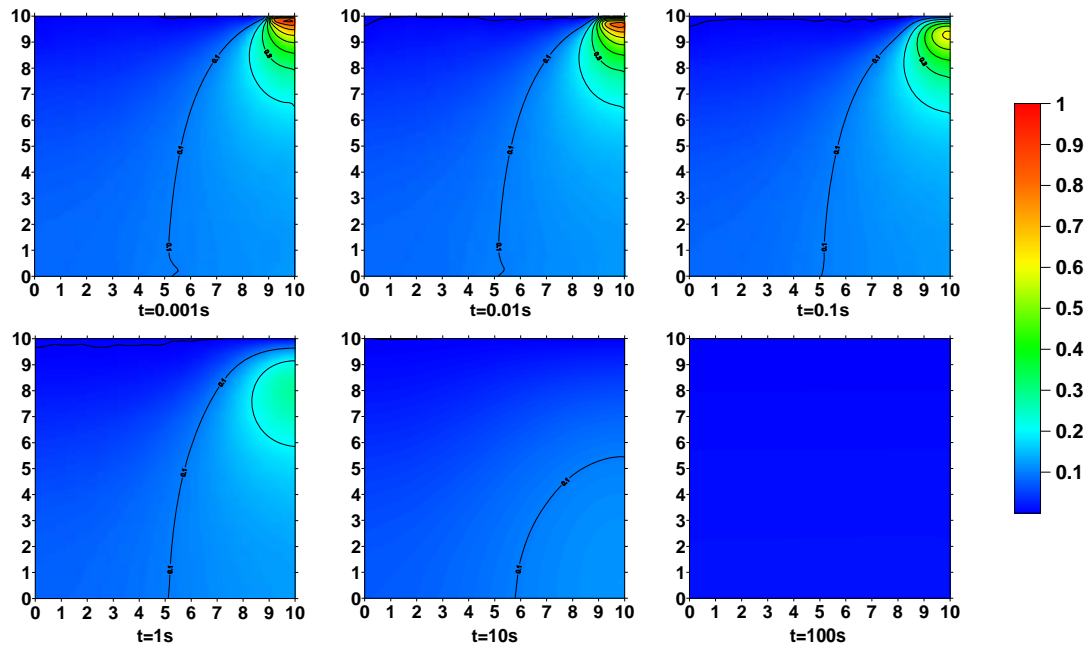


Figura 8.13 – Diagramas das poro-pressões com T.

Os diagramas das tensões efetivas verticais ( $\sigma_{22}^{ef}$ ) são mostrados na figura 8.14. Neste caso, observa-se o contrário da figura 8.13. Inicialmente, as tensões efetivas verticais são próximas de zero, mesmo sob a carga atuante. Com a evolução de T, a dissipação das pressões no fluido acarreta a transferência de carga para o esqueleto sólido. Ao final, o esqueleto resiste unicamente às cargas aplicadas.

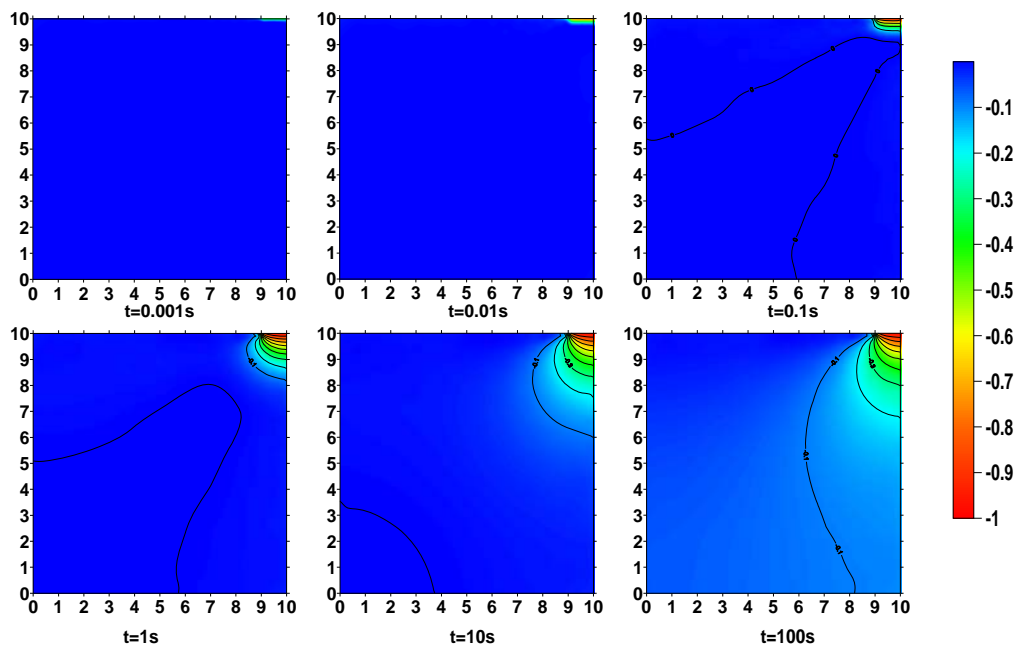


Figura 8.14 – Diagramas das tensões efetivas verticais com T.

### 8.1.2 – Fluido Compressível

#### Exemplo 1 – Influência da compressibilidade do fluido (permeabilidade (k) Constante)

Com os exemplos que serão apresentados, pretende-se mostrar algumas aplicações da formulação do MEC para o modelo poro-elástico, num caso de geometria simples, facilitando a interpretação dos resultados. Na Figura 8.15, tem-se o domínio bidimensional retangular, com altura  $H = 4$  e largura  $B = 1$ . Na superfície horizontal de topo, um carregamento de compressão uniformemente distribuído  $p$ , de valor unitário, é instantaneamente aplicado no tempo  $t = 0$ . Os deslocamentos horizontais ao longo das duas paredes verticais são impedidos, assim como os deslocamentos verticais ao longo de toda a base horizontal. Em todos os lados do domínio, o fluxo normal de fluido é impedido, com exceção da face horizontal superior, onde é permitido fluxo vertical mantendo-se a poro pressão nula. Assim, pode-se dizer que a superfície onde está aplicado o carregamento é uma superfície drenante, enquanto as demais são não-drenantes.

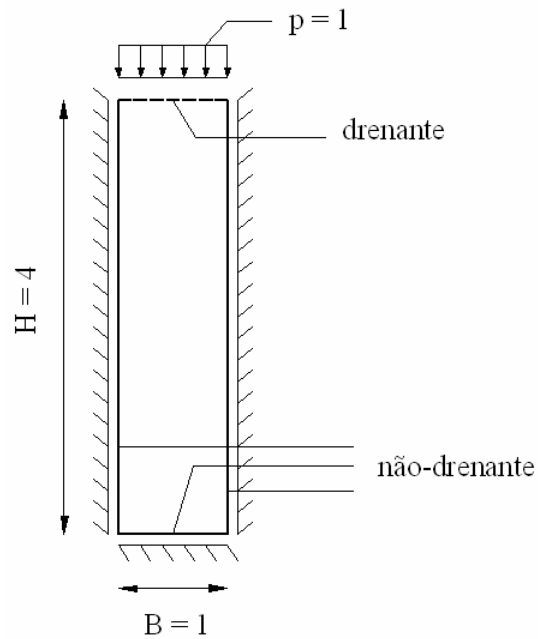


Figura 8.15 – Geometria, carregamento e condições de contorno.

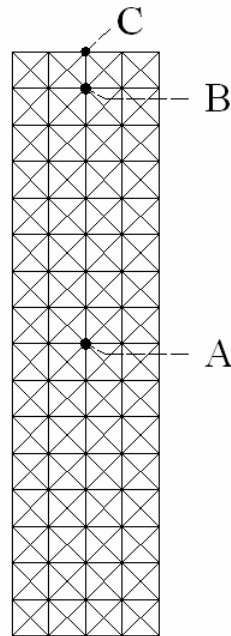


Figura 8.16 – Discretização adotada para os elementos de contorno e células.

Na presente análise, adotou-se como sendo unitários os módulos de elasticidade longitudinal  $E$  e o coeficiente de permeabilidade  $k$ . A análise foi feita admitindo-se estado plano de deformação e coeficiente de Poisson nulo. Foram

utilizados três valores distintos para o módulo de Biot  $M$  (1, 10 e 100). Com isso, é possível medir a influência da compressibilidade do fluido na resposta global. A discretização do corpo está mostrada na Figura 8.16. Foram utilizados 40 elementos de contorno e 256 células triangulares. Os quatro nós de contorno de extremidade foram considerados nós duplos. Os nós de domínio são contínuos nos cruzamentos internos e descontínuos junto ao contorno.

Nos gráficos subsequentes, mostrar-se-á a evolução das variáveis do problema poro-elástico em função do tempo para o exemplo dado. Para facilitar a interpretação dos resultados, o tempo será colocado em escala logarítmica em todos os gráficos.

No gráfico da Figura 8.17, apresentam-se as componentes verticais de deformação da parte sólida do meio, para os pontos A e B (Figura 8.16), ao longo do tempo, para os três valores de  $M$ . Observa-se que, quanto maior é o valor de  $M$ , menor é a deformação de compressão no início da análise. Também se pode concluir que a deformação vertical é praticamente uniforme ao longo do corpo logo nos instantes iniciais, para um mesmo valor de  $M$ . À medida que o tempo evolui, as deformações de compressão começam a aumentar mais rapidamente próximo ao topo (ponto B). Depois, começam a aumentar também na região central (ponto A), de acordo com o esperado.

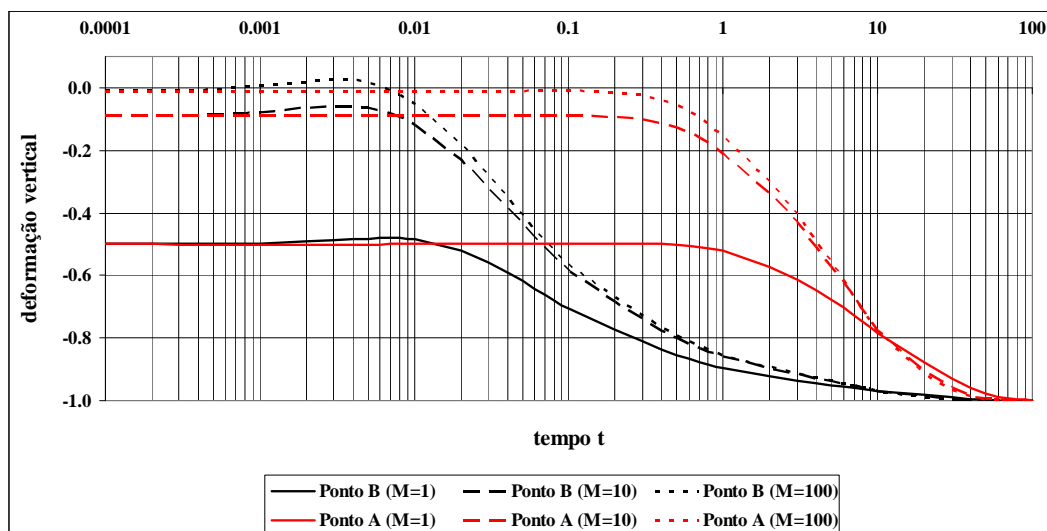


Figura 8.17 – Deformação vertical nos pontos A e B ao longo do tempo.

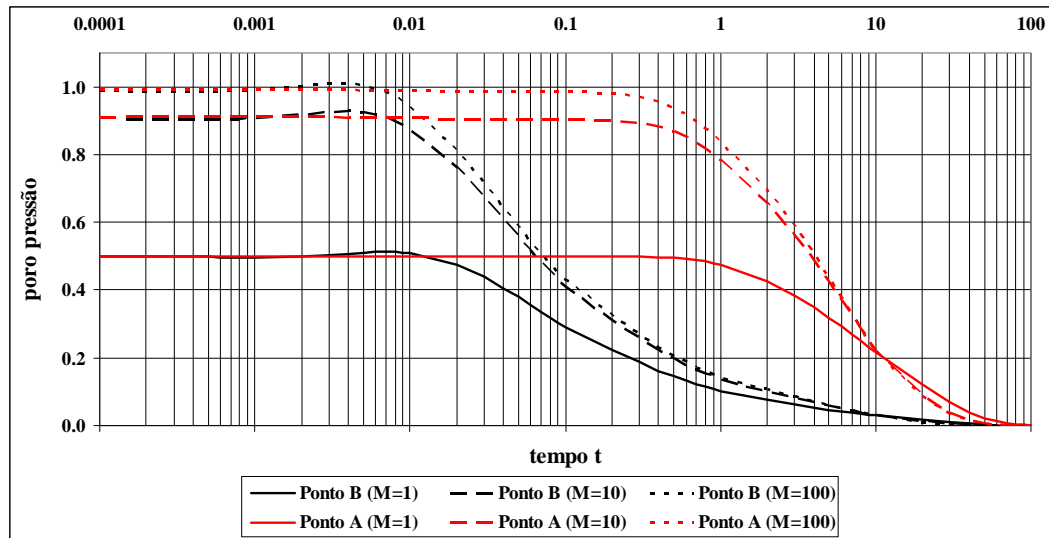


Figura 8.18 – Poro pressão nos pontos A e B ao longo do tempo.

Na Figura 8.18, apresentam-se as poro pressões nos pontos A e B ao longo do tempo  $t$ . De certa forma, os resultados são complementares aos apresentados para as deformações verticais. Quanto maiores os valores de  $M$ , maiores as poro pressões bem no início do tempo. Por exemplo, para  $M = 100$ , a poro pressão é praticamente igual a um em todo o corpo. Isto significa que a carga aplicada é praticamente toda ela resistida pelo fluido que, neste caso, tem baixa compressibilidade. No caso de  $M = 1$ , o fluido é bastante compressível. Logo, cerca de metade da carga aplicada é inicialmente resistida por ele. Ao longo do tempo, a poro pressão cai mais rapidamente no ponto B do que no ponto A, pois a única superfície drenante se encontra mais próxima de B. O fluxo de fluido, neste caso, é ascendente.

Na Figura 8.19, têm-se os gráficos com a variável  $\zeta$  da variação de volume do fluido em função do tempo, para os pontos A e B e para os três valores de  $M$ . Observa-se que, logo no início, a variação de volume do fluido é praticamente nula e uniforme no corpo, independente do valor de  $M$ . O volume de fluido começa a diminuir mais rápido no ponto B ao longo do tempo. Ao final do processo, para  $t = 100$ ,  $\zeta$  tende a  $-1.0$  em todas as situações. O valor de  $\zeta$ , neste caso, é praticamente igual ao da deformação vertical (também igual a  $-1.0$  no final da análise, conforme a Figura 8.17).

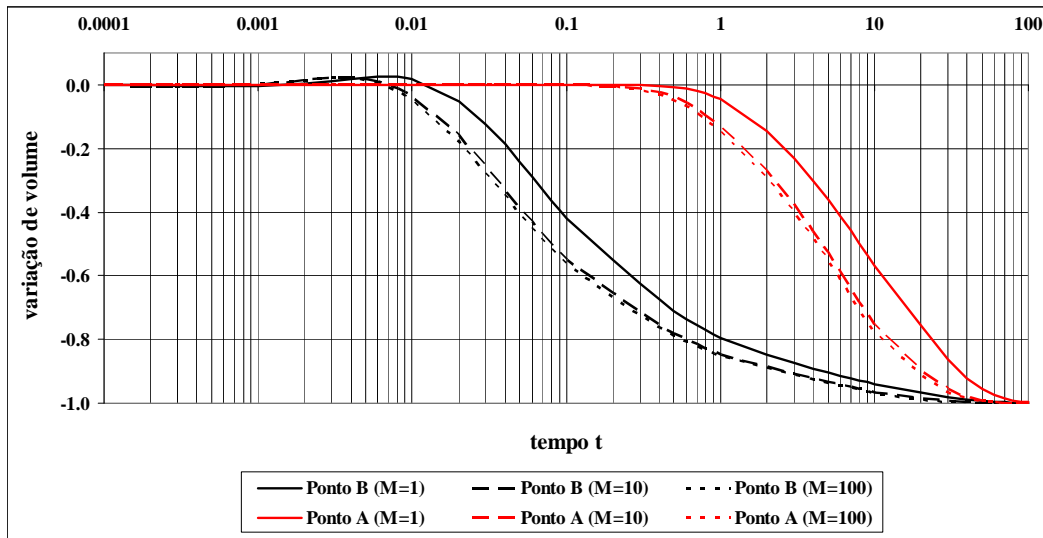


Figura 8.19 – Variação de volume do fluido  $\zeta$  nos pontos A e B ao longo do tempo.

Na Figura 8.20, o deslocamento vertical do ponto C da Figura 8.16 é mostrado ao longo do tempo para os três valores de  $M$ . Nota-se que, para todos os valores de  $M$ , o deslocamento no final da análise é igual a  $-4.0$ , que é valor da deformação vertical multiplicado pela altura  $H = 4$ . Em função da compressibilidade do fluido, o deslocamento inicial é diferente, tendendo a ser menor para  $M$  maior. Ao longo do tempo, eles crescem de seus valores iniciais até o valor comum final de  $-4.0$ .

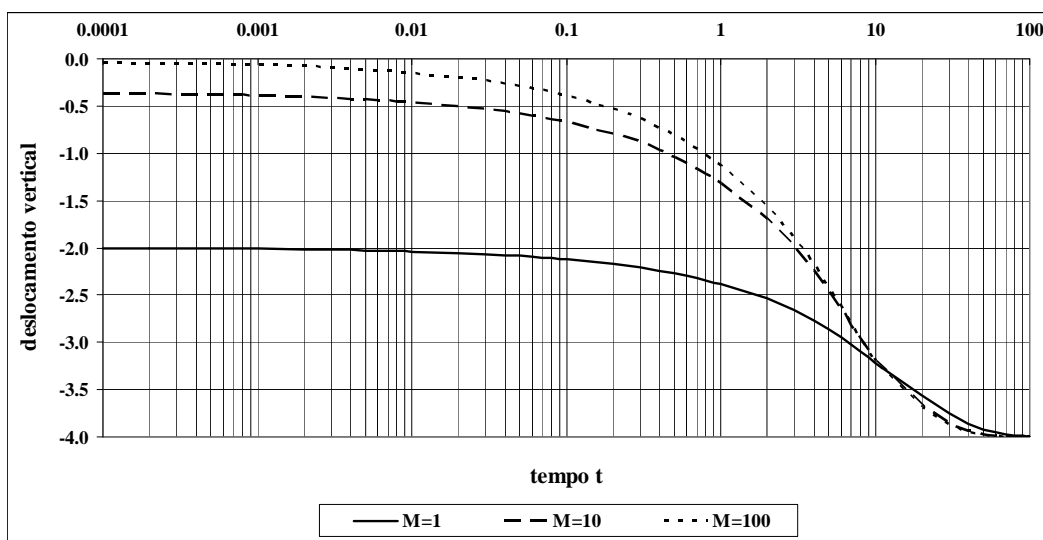


Figura 8.20 – Deslocamento vertical do ponto C ao longo do tempo.



Outros resultados interessantes de serem vistos são aqueles que dizem respeito à distribuição de uma dada variável no corpo, para alguns valores de tempo dados. Por exemplo, nas Figuras 8.21, 8.22 e 8.23, têm-se as distribuições das deformações verticais no corpo para vários instantes de tempo  $t$ , respectivamente para  $M = 1$ ,  $M = 10$  e  $M = 100$ . Pode-se notar que existe uma grande diferença na magnitude das deformações iniciais ( $t = 0.0001$ ) em todo o corpo, em função do parâmetro  $M$ . Nas três figuras, também se observa que ocorre um aumento das deformações em todo o corpo com o tempo, mostrando que a dissipação das poro pressões é acompanhada pela transferência de carga para o esqueleto. Outro fenômeno que também pode ser observado nas três figuras é o aumento mais rápido que ocorre nas deformações junto à face carregada. Ao final da análise ( $t = 100$ ), a deformação vertical fica praticamente uniforme no corpo, em torno do valor unitário (só não fica totalmente uniforme em função da bidimensionalidade do problema).

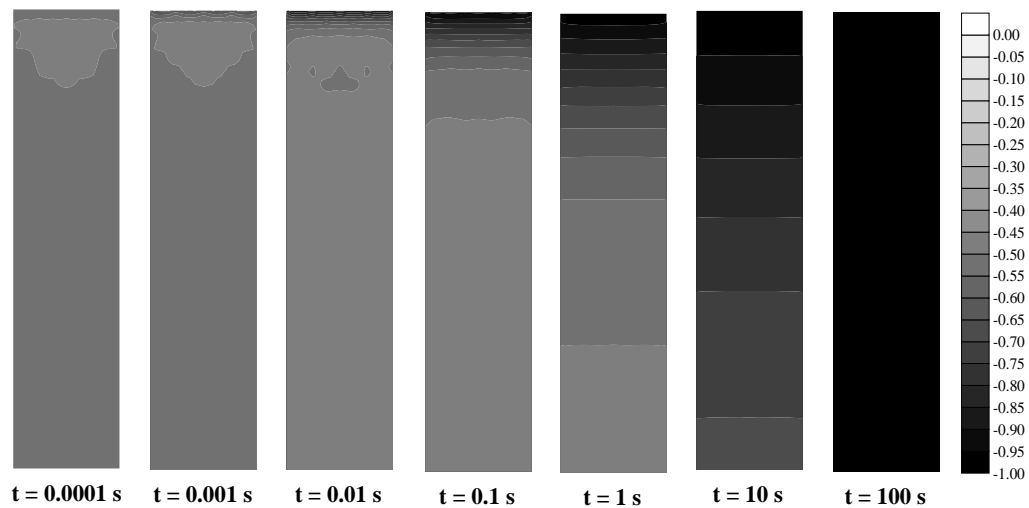


Figura 8.21 – Deformações verticais para vários valores de tempo.  $M = 1$ .

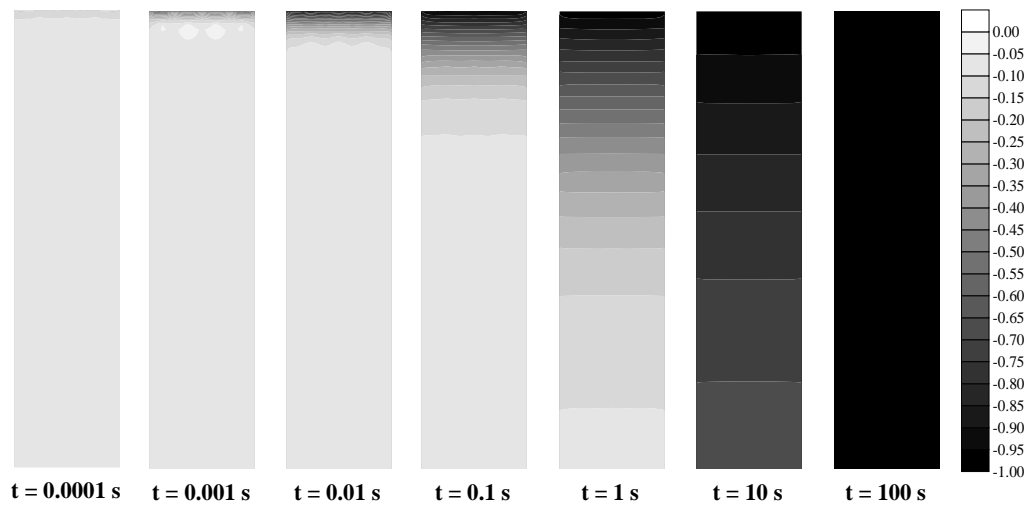


Figura 8.22 – Deformações verticais para vários valores de tempo.  $M = 10$ .

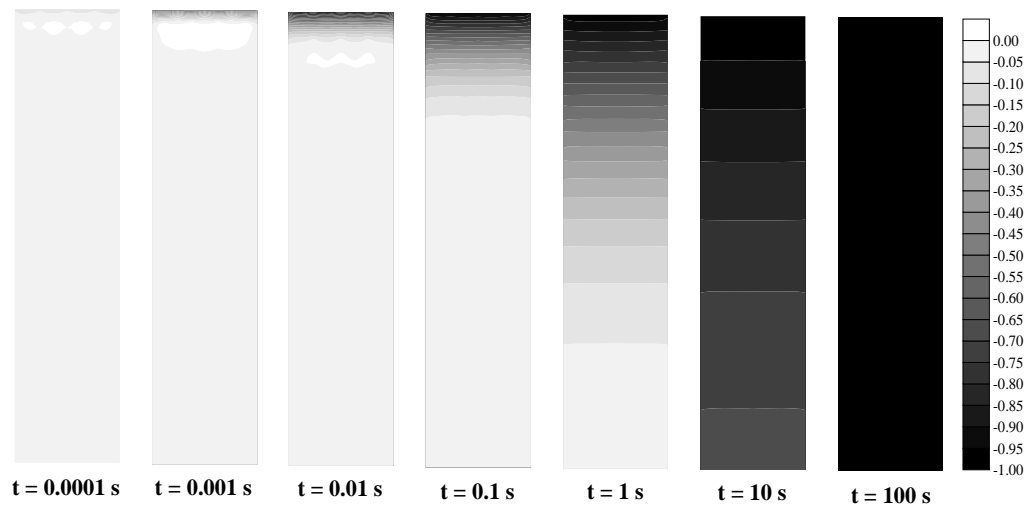


Figura 8.23 – Deformações verticais para vários valores de tempo.  $M = 100$ .

Nas Figuras 8.24, 8.25 e 8.26, são mostradas, respectivamente, para  $M = 1$ ,  $M = 10$  e  $M = 100$ , as distribuições de  $\zeta$  para vários valores de tempo. Neste caso, não se observa grandes diferenças variando-se  $M$  (observar a Figura 8.19). Entretanto, nota-se claramente pelas três figuras que há uma diminuição do volume de fluido com o tempo ( $\zeta$  unitário negativo no final).

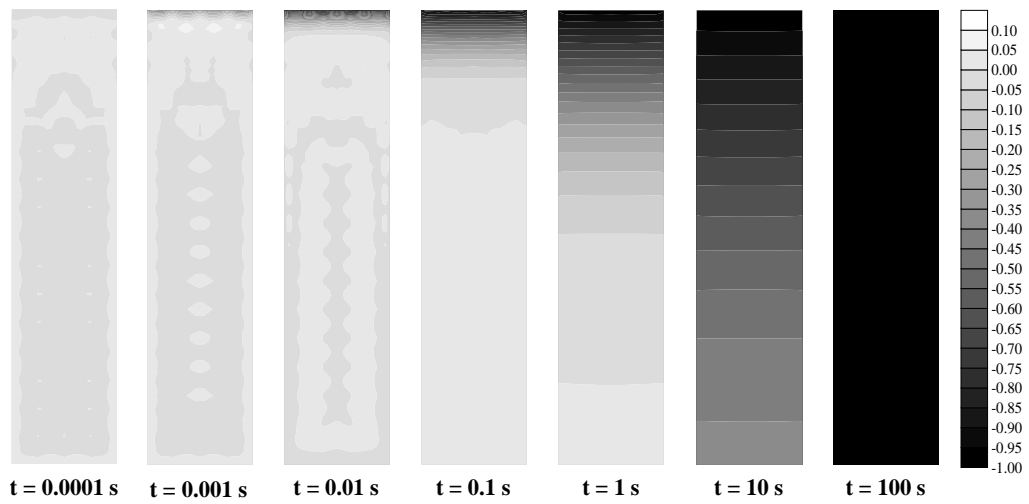


Figura 8.24 – Variável  $\zeta$  para vários valores de tempo.  $M = 1$ .

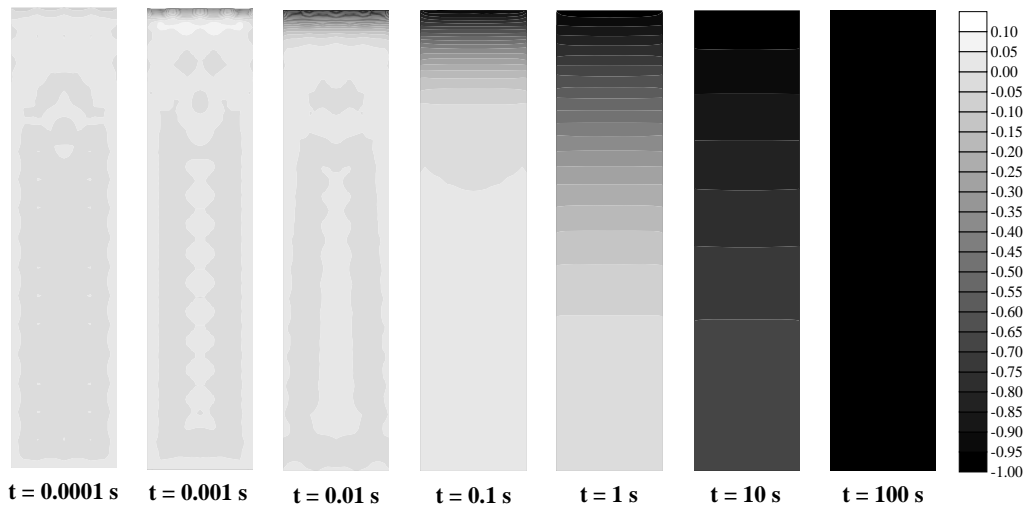


Figura 8.25 – Variável  $\zeta$  para vários valores de tempo.  $M = 10$ .

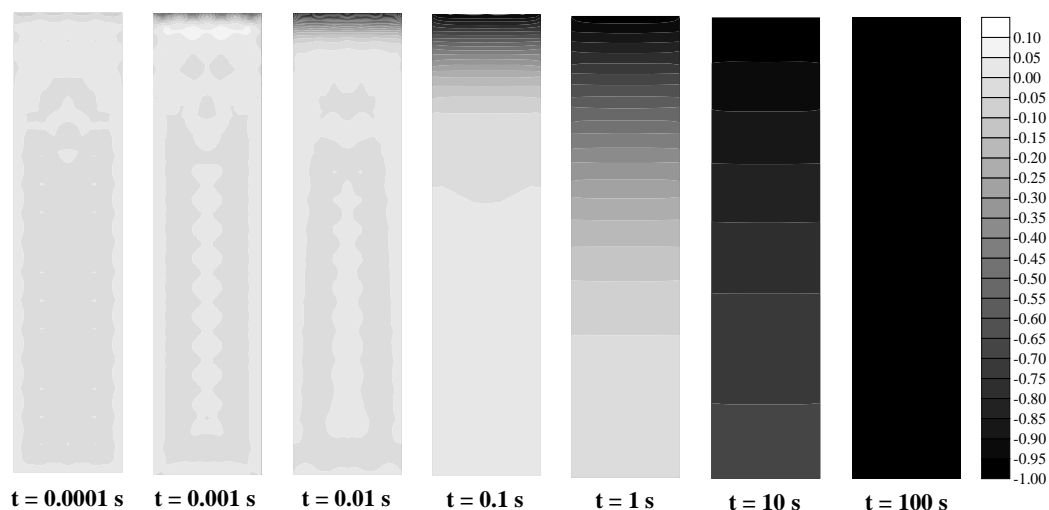


Figura 8.26 – Variável  $\zeta$  para vários valores de tempo.  $M = 100$ .

### Exemplo 2 – Influência da permeabilidade

Como próximo exemplo, será examinada a influência do coeficiente de permeabilidade do meio na resposta do problema poro-elástico. A mesma geometria, com os mesmos carregamento e condições de contorno da Figura 8.15, mais a discretização da Figura 8.16 foram considerados. O módulo de elasticidade utilizado foi  $E = 1$ , o coeficiente de Poisson zero e em todos os resultados adotou-se  $M = 10$ . Cinco valores distintos para o coeficiente de permeabilidade  $k$  foram considerados: 0.6, 0.8, 1.0, 1.2 e 1.4.

Nas Figuras 8.27 e 8.28, são apresentadas, respectivamente, as curvas de poro pressão nos pontos A e B da Figura 8.16, ao longo do tempo, para os cinco valores adotados de  $k$ . Conforme se pode constatar, quanto maior a permeabilidade, mais rápida ocorre a dissipação das poro pressões. Além disso, no ponto B (Figura 8.28), a dissipação ocorre mais cedo do que no ponto A (Figura 8.27), de acordo com o esperado.

As curvas com as deformações verticais, em função da permeabilidade  $k$ , são apresentadas para o ponto A, na Figura 8.29, e para o ponto B, na Figura 8.30. As mesmas conclusões relativas às curvas de poro pressão valem no presente caso.

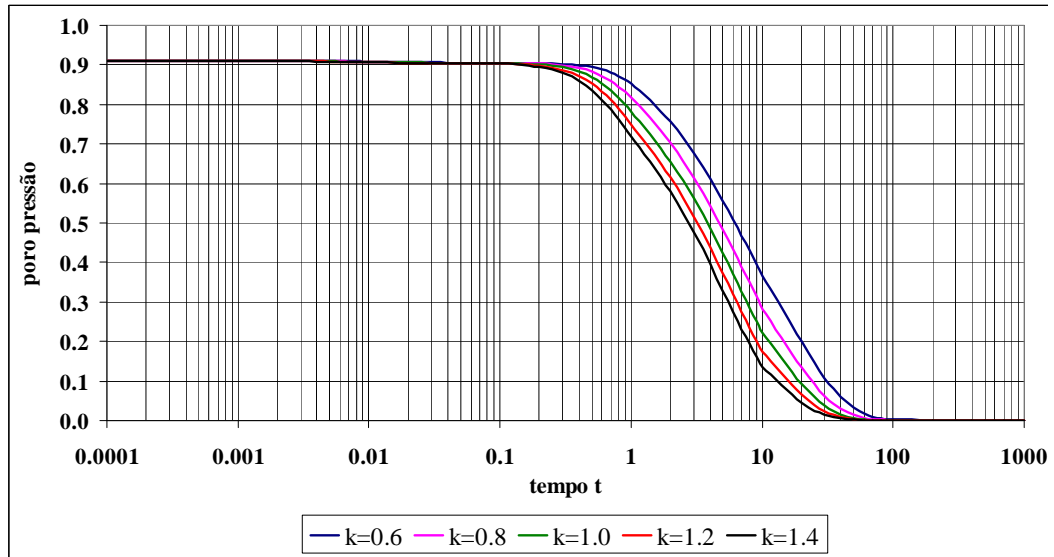


Figura 8.27 – Poro pressão no ponto A em função da permeabilidade.

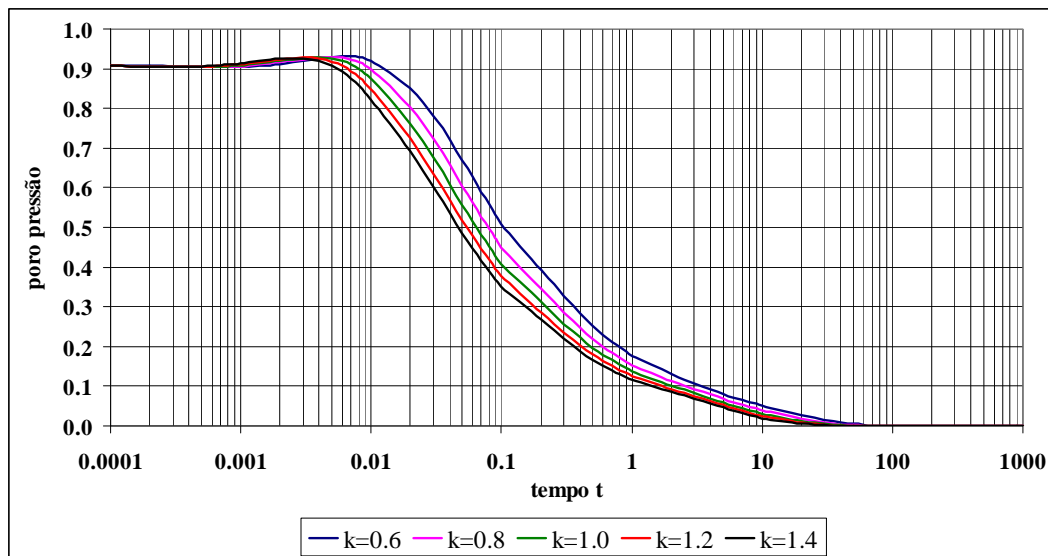


Figura 8.28 – Poro pressão no ponto B em função da permeabilidade.

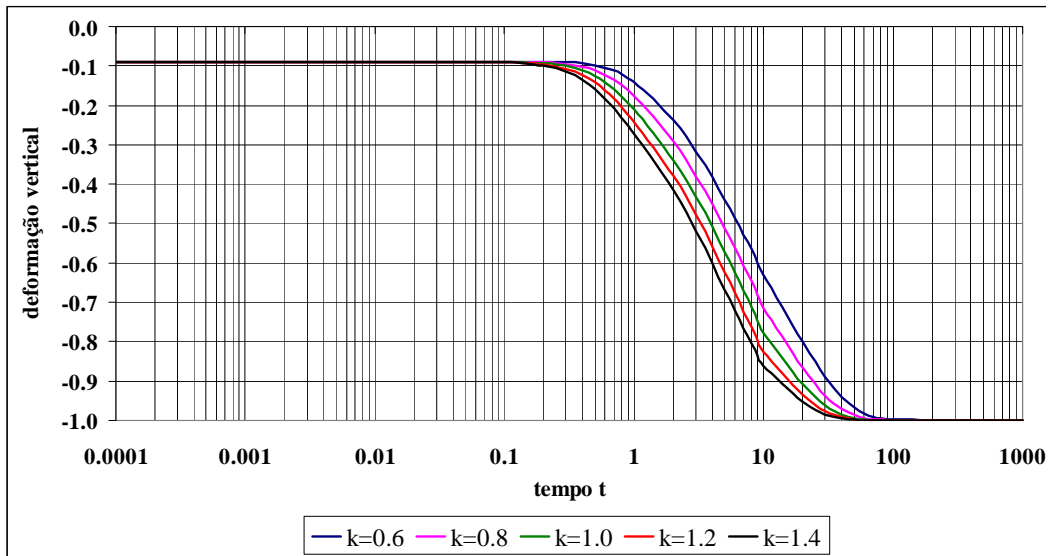


Figura 8.29 – Deformação vertical no ponto A em função da permeabilidade.

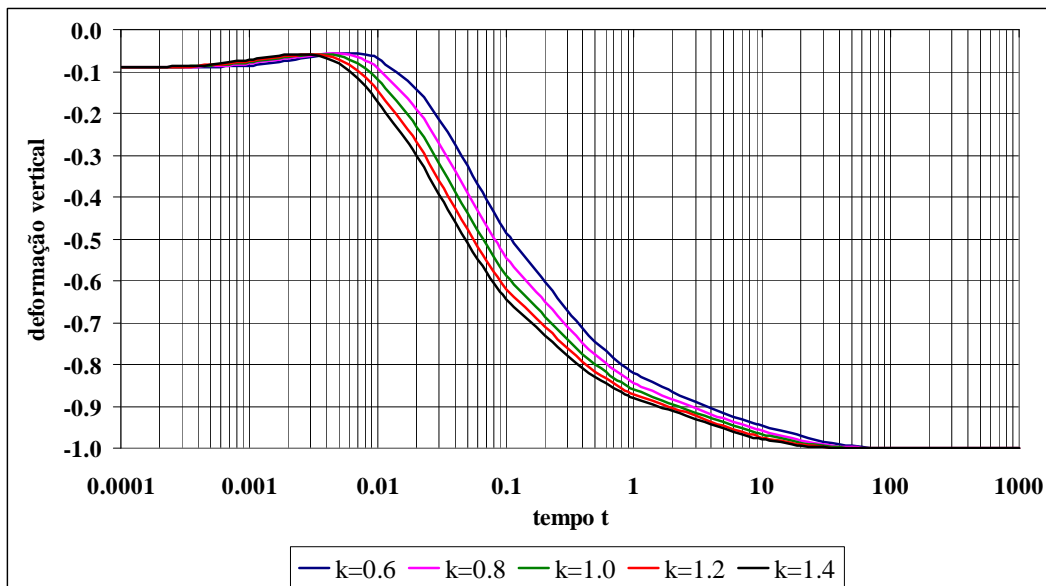


Figura 8.30 – Deformação vertical no ponto B em função da permeabilidade.

As curvas de  $\zeta$  com a permeabilidade estão apresentadas nas Figuras 8.31 para o ponto A e 8.32 para o ponto B.

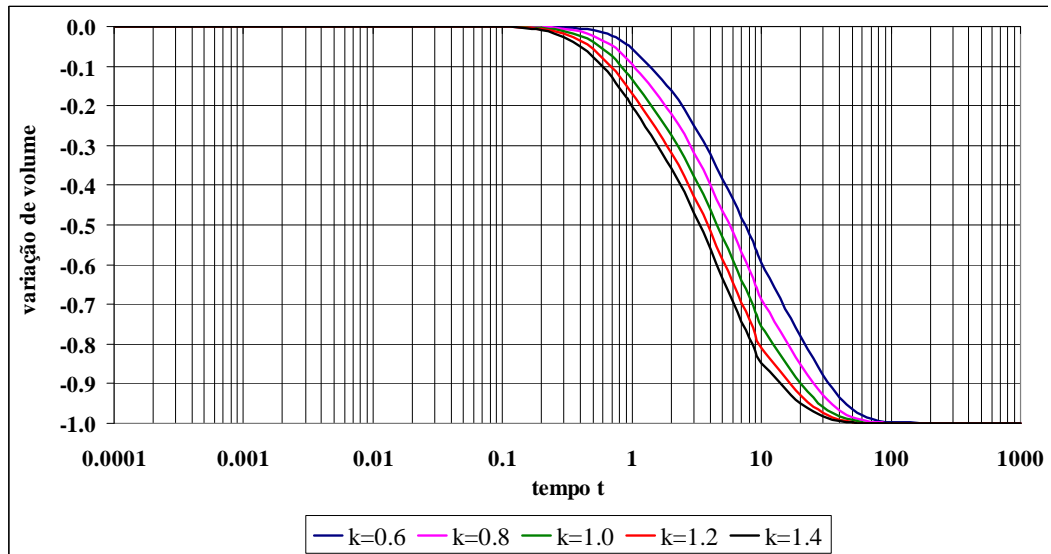


Figura 8.31 – Variação de volume do fluido no ponto A em função da permeabilidade.

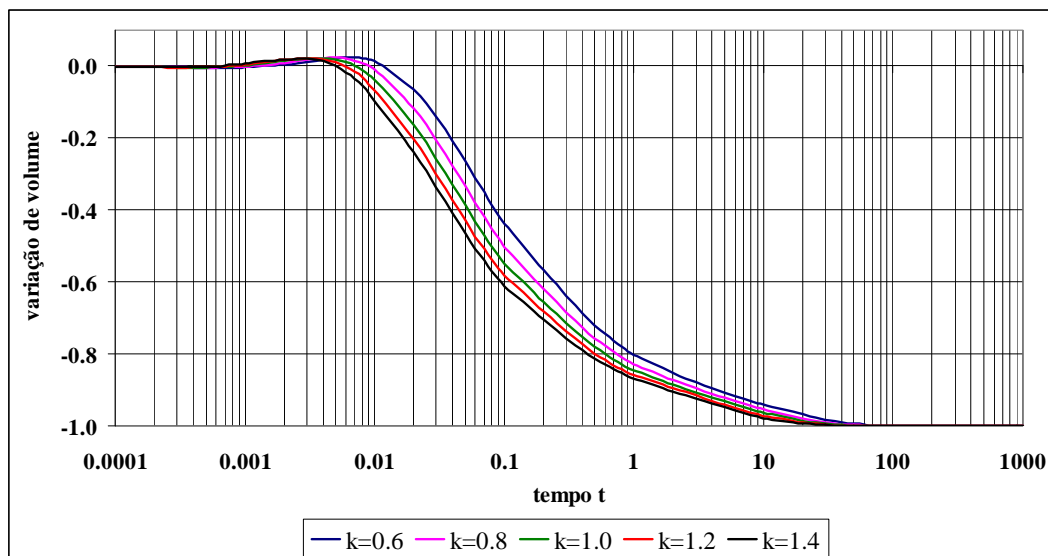


Figura 8.32 – Variação de volume do fluido no ponto B em função da permeabilidade.

## 8.2. Exemplos de aplicação para meios poro-elasto-plásticos

Nos exemplos deste item, serão mostrados resultados obtidos a partir da formulação do MEC com o modelo poro-elasto-plástico. A formulação implementada, a partir da qual foram obtidos os resultados deste item, se baseia nas equações do MEC escritas em função das deformações e das poro pressões ( $\Delta \epsilon$ ,  $\Delta p$ ), conforme salientado no capítulo 4. Na formulação, utilizou-se o procedimento com matriz tangente consistente, o que permitiu uma substancial redução do número de iterações por incremento de tempo.

### 8.2.1 – Influência da Compressibilidade

Inicialmente, será considerado o mesmo problema definido nas Figuras 8.15 e 8.16. São adotados o módulo de elasticidade  $E = 1$ , o coeficiente de Poisson  $\nu = 0$ , o coeficiente de permeabilidade do meio  $k = 1$  e mais os seguintes parâmetros das funções do critério de Drucker-Prager:  $\mu = 0.3$ ,  $\mu^* = 1.0$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $\beta^* = 1.0$ ,  $h = 0.05$  e o limite poro-elástico da função de plastificação igual a  $0.075$ . Este valor constante deve ser subtraído da função de plastificação  $f$  e representa o tamanho inicial da superfície de plastificação.

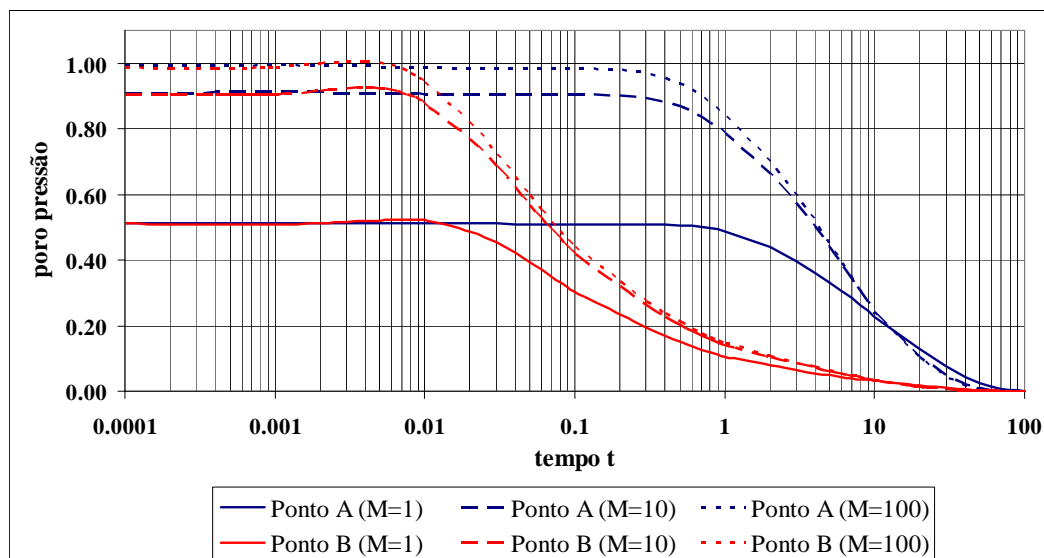


Figura 8.33 – Poro pressão nos pontos A e B ao longo do tempo.



Foram adotados, no exemplo, três valores do parâmetro  $M$ : 1, 10 e 100. A análise foi feita para estado plano de deformação. Na Figura 8.33, são mostradas as curvas com as poro pressões nos pontos A e B da Figura 8.16. Observa-se exatamente o comportamento esperado, com dissipação mais rápida no ponto B próximo à superfície drenante do que no ponto A do interior. Também é possível ver o efeito do parâmetro  $M$  na distribuição inicial das poro pressões.

Na Figura 8.34, têm-se as deformações verticais totais (elástica + plástica) nos mesmos casos que os anteriores. Seus valores tendem, no final da análise, a um valor constante, em torno de -1.076. Na Figura 8.35, têm-se as deformações verticais plásticas para os pontos A e B. Os valores finais para estas deformações, em  $t = 100$ , são em torno de -0.075, em todos os casos. As diferenças entre os valores correspondentes das curvas dos gráficos 8.34 e 8.35 fornecem as deformações elásticas, as quais, no instante final, são iguais a -1.0, em resposta ao carregamento unitário aplicado. É mostrado que na Figura 8.35 que, logo no início, para  $M = 1$ , a deformação plástica já é diferente de zero. Isto significa que, no instante de aplicação da carga, o esqueleto sólido absorve uma parcela do carregamento que já é capaz de provocar de imediato uma plastificação. Quanto maior o módulo de Biot ( $M = 10$  e  $M = 100$ ) este fenômeno já não ocorre.

Nas Figuras 8.36 e 8.37, são apresentadas as curvas da variação de volume do fluido total  $\zeta$  e plástica  $\zeta^p$ , respectivamente, ao longo do tempo, para as situações em estudo. Os valores de  $\zeta$  tendem a -1.075 em  $t = 100$ , para qualquer  $M$ . As parcelas plásticas  $\zeta^p$  da variação de volume, representadas na 8.37, também tendem com o tempo a um valor constante, próximo de 0.26. A diferença entre  $\zeta$  e  $\zeta^p$  é a variação de volume elástica  $\zeta^e$ .

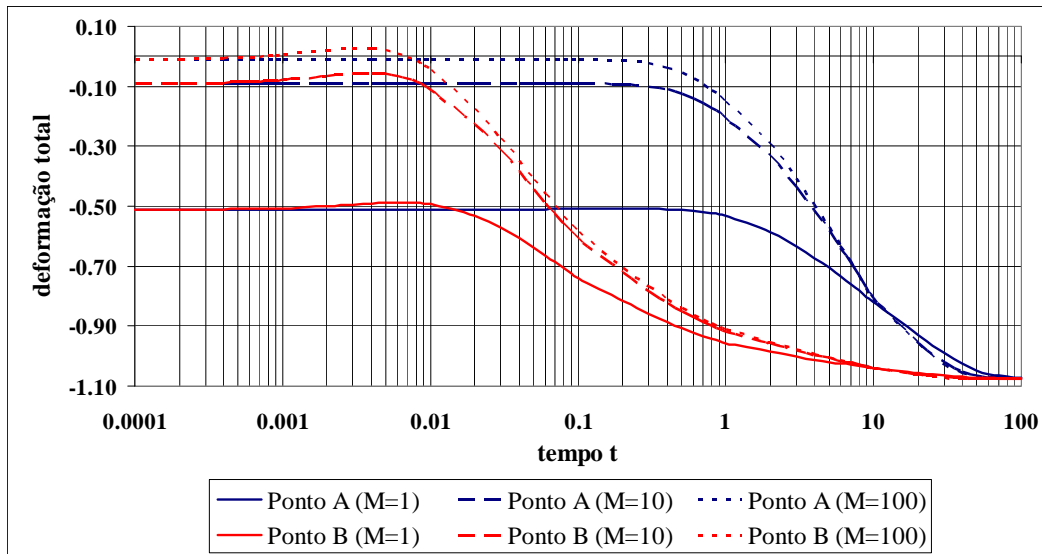


Figura 8.34 – Deformação vertical total nos pontos A e B ao longo do tempo.

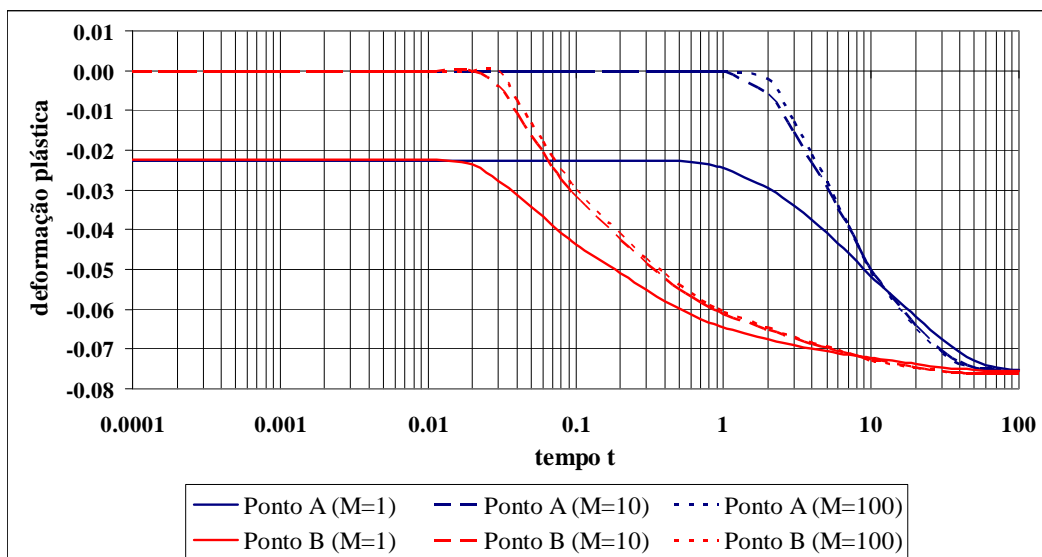


Figura 8.35 – Deformação vertical plástica nos pontos A e B ao longo do tempo.

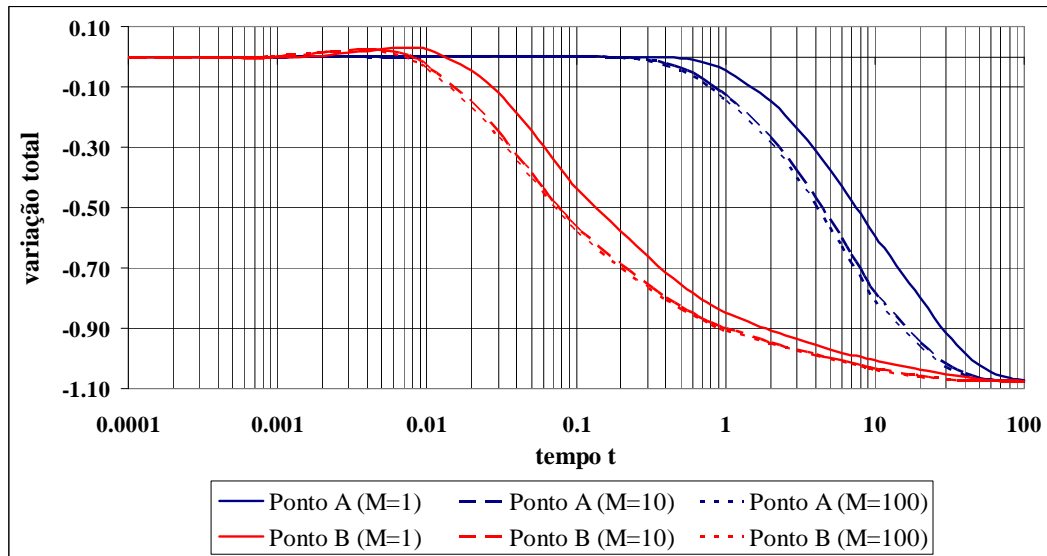


Figura 8.36 – Variação de volume total  $\zeta$  nos pontos A e B ao longo do tempo.

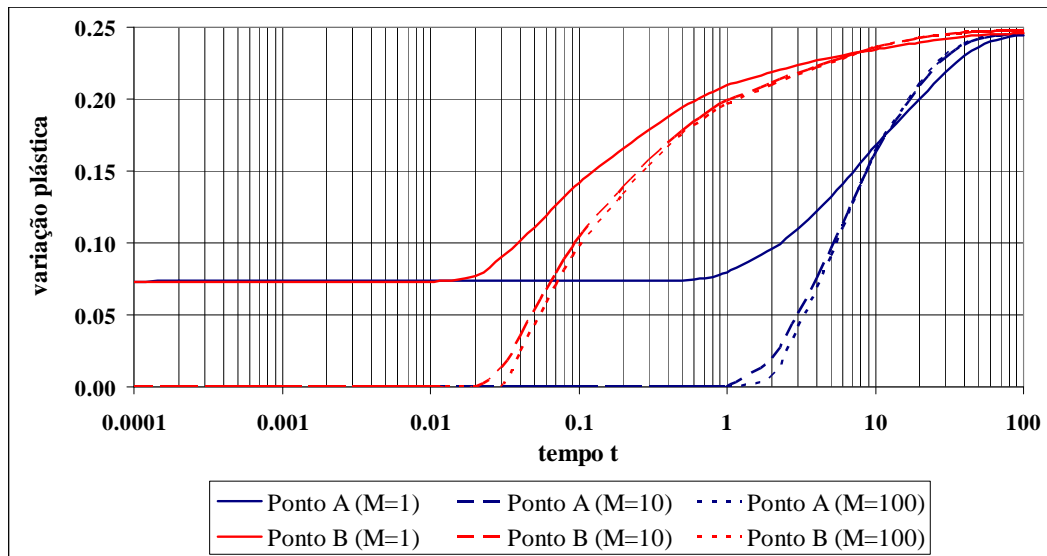


Figura 8.37 – Variação de volume plástica  $\zeta^p$  nos pontos A e B ao longo do tempo.

Na Figura 8.38, estão representadas as tensões totais (soma das tensões efetivas no esqueleto com a poro pressão). Os valores da tensão total permanecem sempre próximos de  $\sigma = -1.0$ . A variação observada em torno deste valor ocorre em função da resposta bidimensional do problema. A variação das tensões, conforme esperado, é maior no ponto B, que se encontra próximo à superfície de aplicação da

carga unitária. No final da análise, a tendência é de uniformização das tensões em torno do valor unitário. Neste caso, elas se confundem com as tensões efetivas, já que neste ponto há ausência de poro pressões.

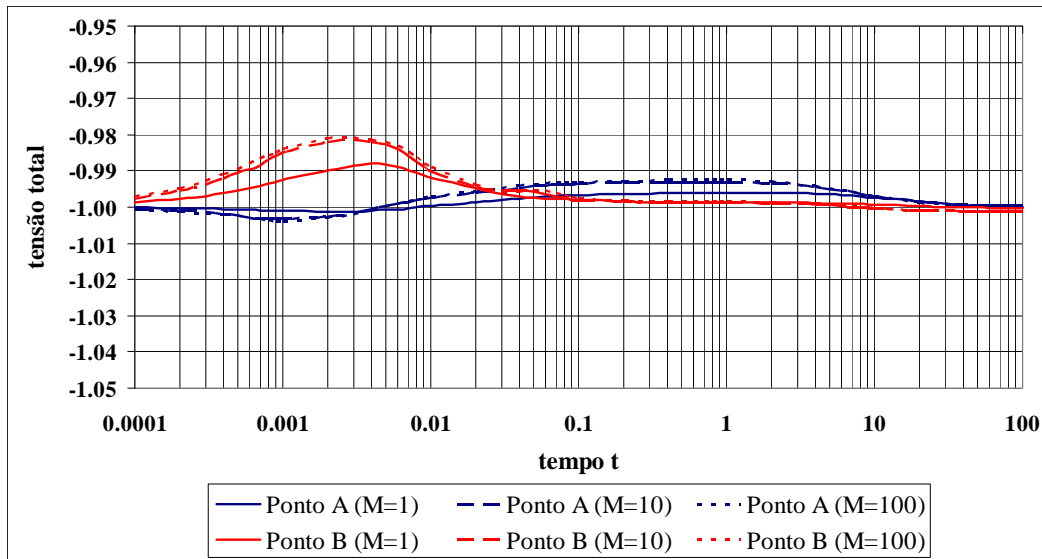


Figura 8.38 – Tensões totais nos pontos A e B ao longo do tempo.

As tensões efetivas encontram-se na Figura 8.39. Elas são proporcionais às deformações elásticas do esqueleto.

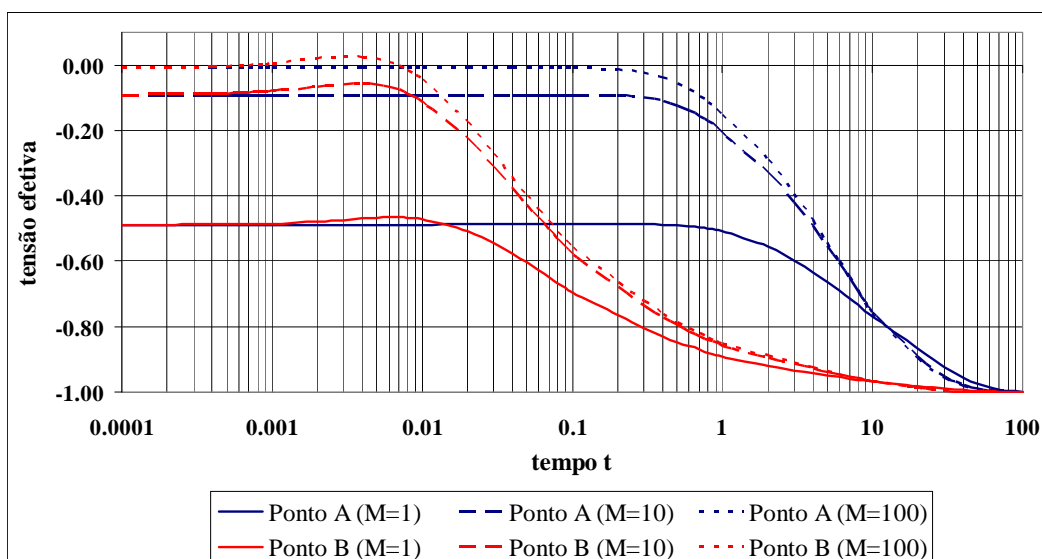


Figura 8.39 – Tensões efetivas nos pontos A e B ao longo do tempo.

Na Figura 8.40, estão apresentadas as curvas dos deslocamentos verticais do ponto C. Aqui é possível perceber que os deslocamentos finais são maiores, quando comparados com os da Figura 8.20, do modelo poro-elástico. A diferença se deve ao efeito plástico.

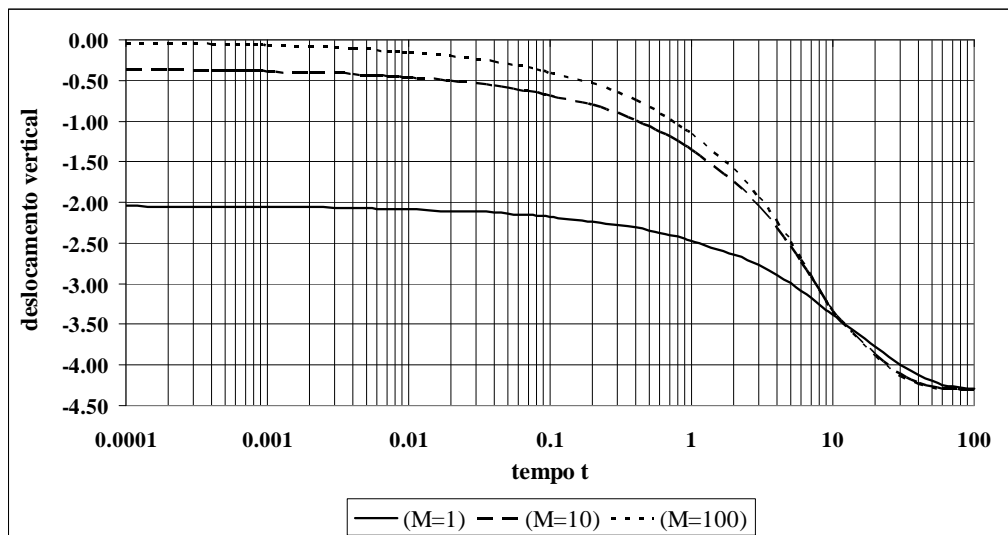
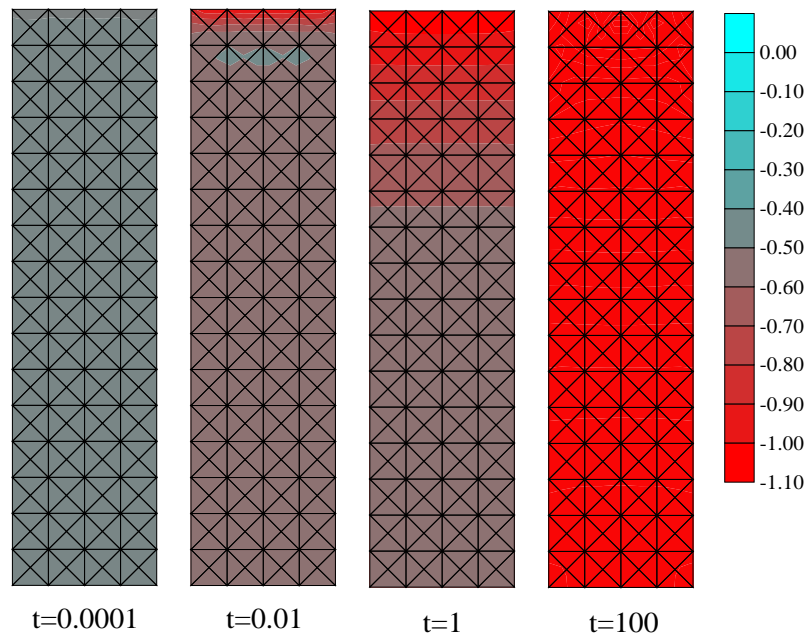
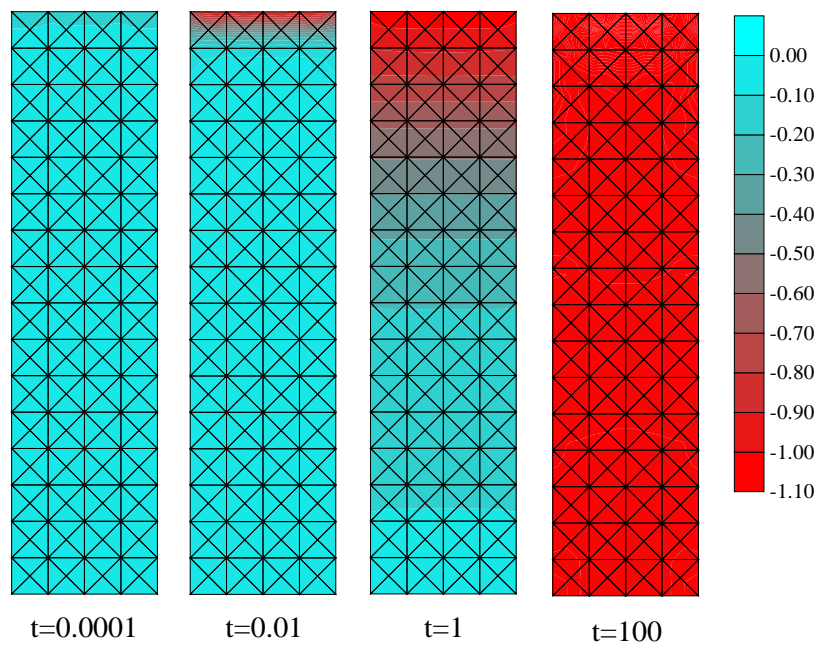


Figura 8.40 – Deslocamento vertical do ponto C ao longo do tempo.

Para finalizar, nas Figuras 8.41, 8.42 e 8.43, são apresentadas as deformações verticais totais em todo o corpo, respectivamente, para  $M = 1$ ,  $M = 10$  e  $M = 100$ , para quatro valores diferentes do tempo  $t$ . Nas Figuras 8.44, 8.45 e 8.46, estão representadas as deformações verticais plásticas, para os mesmos valores de  $M$  e de  $t$ .

É possível notar, nas Figuras 8.41-8.46, como as parcelas total e plástica da deformação vertical evoluem no tempo, mostrando como elas se distribuem em todo o corpo, além da influência de  $M$  nestes mapeamentos.

Figura 8.41 – Deformações verticais totais no corpo.  $M = 1$ .Figura 8.42 – Deformações verticais totais no corpo.  $M = 10$ .

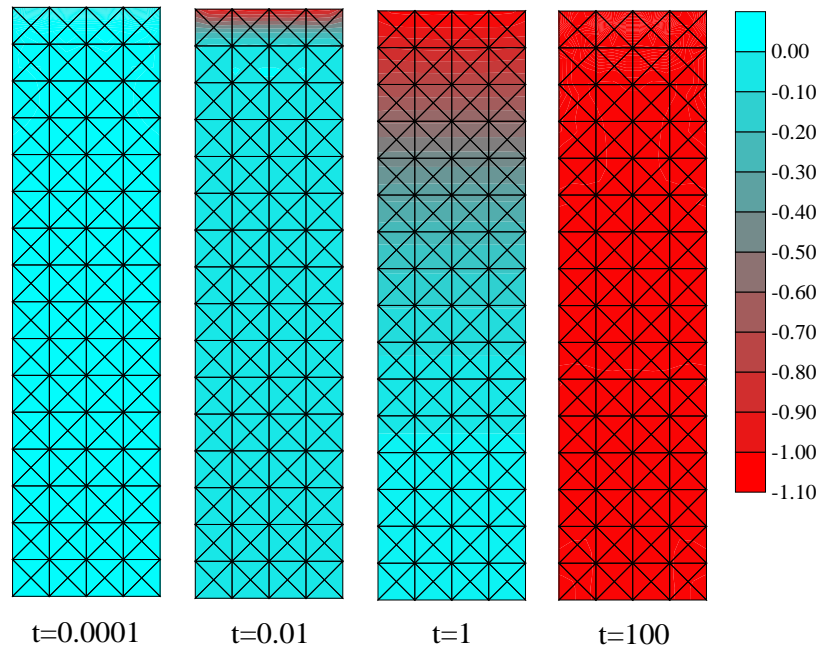


Figura 8.43 – Deformações verticais totais no corpo.  $M = 100$ .

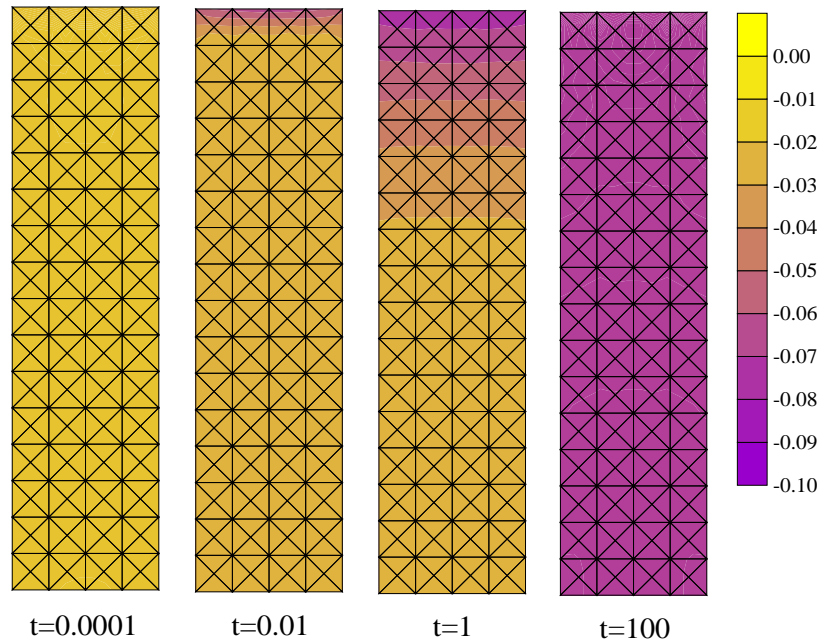


Figura 8.44 – Deformações verticais plásticas no corpo.  $M = 1$ .

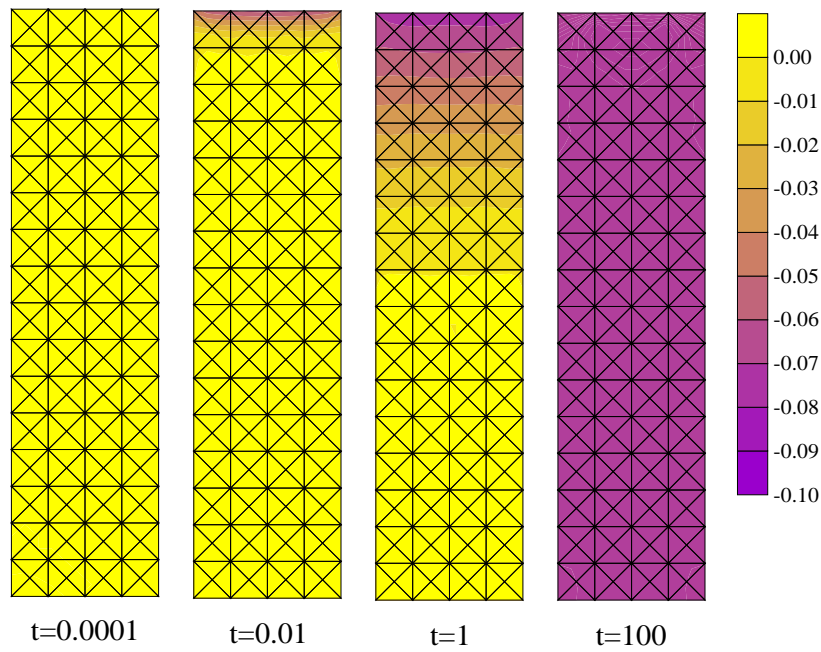


Figura 8.45 – Deformações verticais plásticas no corpo.  $M = 10$ .

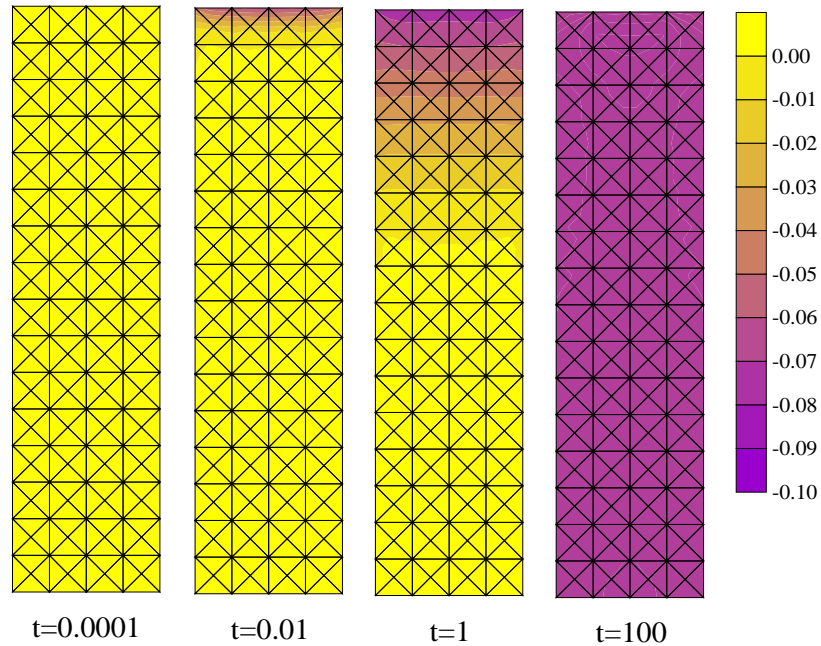


Figura 8.46 – Deformações verticais plásticas no corpo.  $M = 100$ .

No próximo exemplo, considera-se um problema com geometria um pouco mais complexa, mostrada na Figura 8.47. O corpo, em forma de L, está submetido a



uma carga unitária de compressão uniformemente distribuída. A carga é aplicada de forma instantânea em  $t = 0$ , na face horizontal superior do corpo. Todas as paredes verticais impedem deslocamentos horizontais. Os deslocamentos verticais são impedidos na base horizontal e na base logo acima desta de comprimento  $2a$ . Os deslocamentos verticais do topo onde a carga está aplicada são livres. O fluxo de fluido está impedido em todo o contorno, exceto na superfície drenante mostrada na Figura 8.47, de comprimento  $a = 1$ , na qual a poro pressão é prescrita zero.

A discretização do corpo para o exemplo está mostrada na Figura 8.48. Foram utilizados 56 elementos retos de contorno e 384 células triangulares. As constantes físicas do material, adotadas para o exemplo, foram: módulo de elasticidade  $E = 1.0$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0$  e módulo de Biot  $M = 25.0$ . Os parâmetros das funções do critério de Drucker-Prager utilizados foram:  $\mu = 0.3$ ,  $\mu^* = 1.0$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $\beta^* = 1.0$ ,  $h = 0.05$  e o limite poro-elástico da função de plastificação igual a 0.15. Todas as análises foram feitas admitindo-se estado plano de deformação.

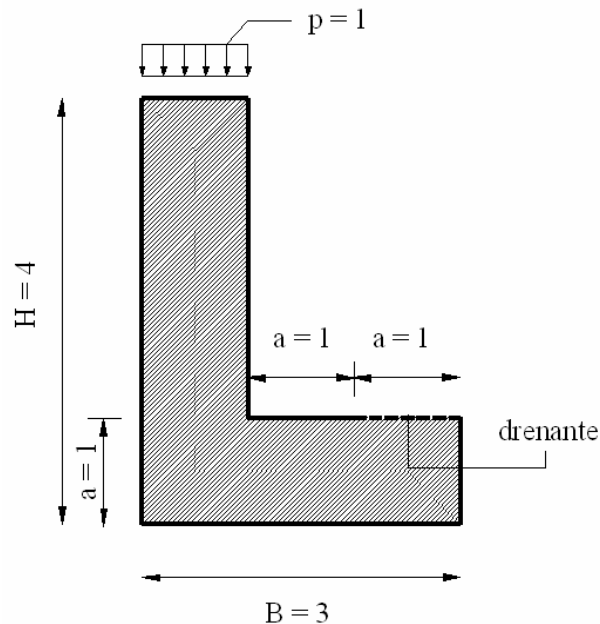


Figura 8.47 – Geometria, carregamento e condições de contorno.

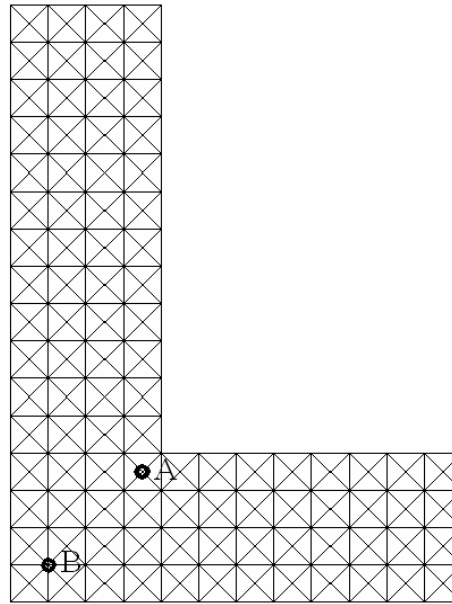


Figura 8.48 – Discretização adotada.

Na Figura 8.49, são apresentadas, ao longo do tempo, as deformações totais do esqueleto nos pontos A e B, mostrados na Figura 8.48. Na legenda da Figura 8.49, o índice “11” indica deformação na direção horizontal, enquanto “22” indica na direção vertical. Na Figura 8.50, estão representadas as deformações plásticas dos mesmos pontos ao longo do tempo.

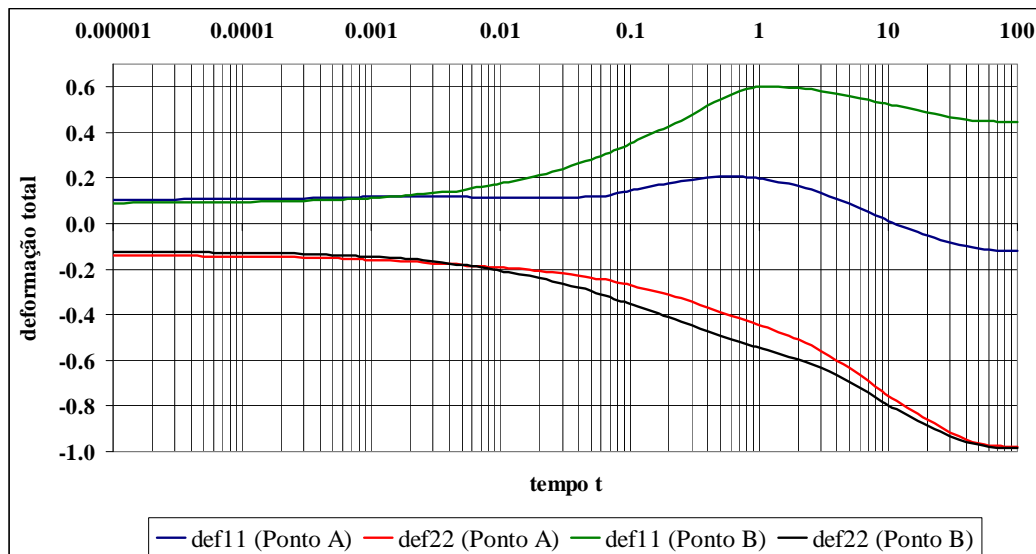


Figura 8.49 – Deformações totais nos pontos A e B ao longo do tempo.

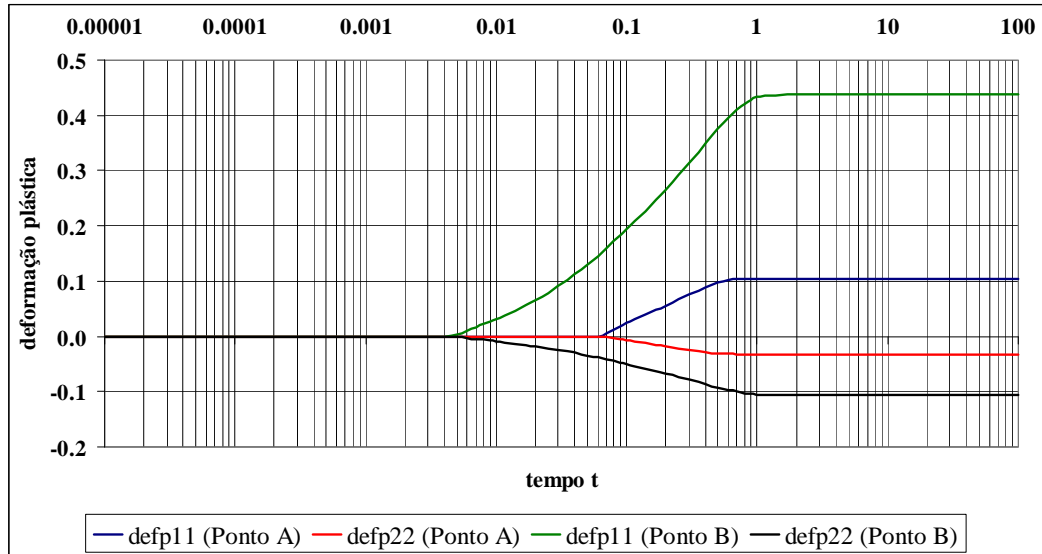


Figura 8.50 – Deformações plásticas nos pontos A e B ao longo do tempo.

As poro pressões com o tempo, nos pontos A e B, são mostradas na Figura 8.51. Observe pelas curvas apresentadas que a maior taxa de dissipação das pressões não ocorre no início da análise. A dissipação mais imediata deve ocorrer na região junto à superfície drenante.

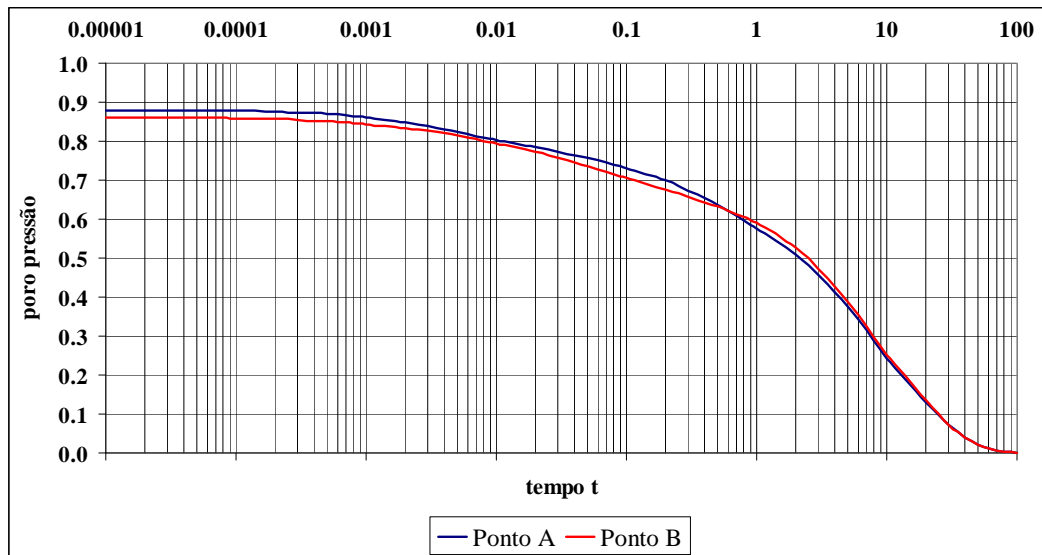


Figura 8.51 – Poro pressões nos pontos A e B ao longo do tempo.

Na Figura 8.52, estão representadas as curvas das variáveis  $\zeta$  e  $\zeta^p$ , nos pontos A e B, identificadas na legenda, respectivamente, por “var tot” e “var plast”.

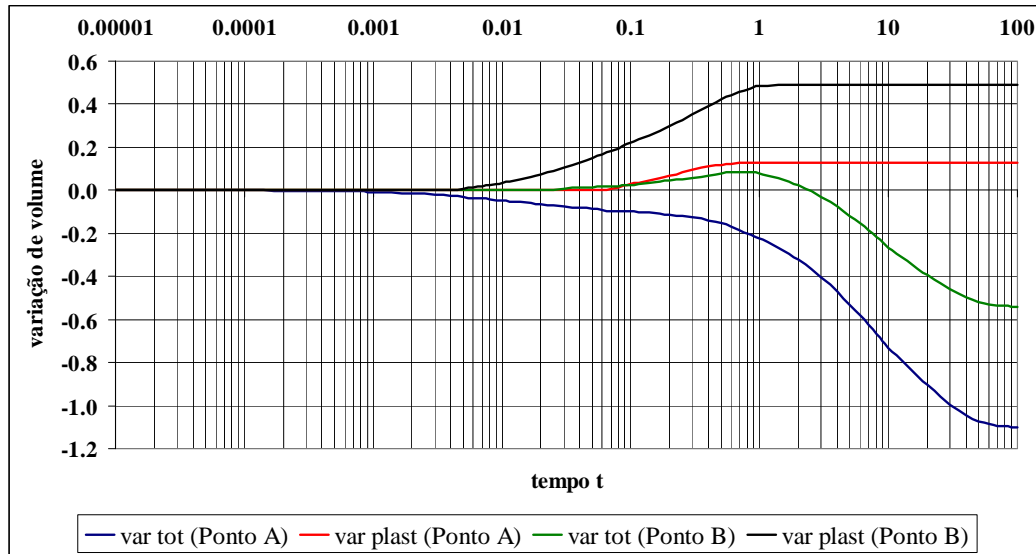


Figura 8.52 – Variáveis  $\zeta$  e  $\zeta^p$  nos pontos A e B ao longo do tempo.

Os mapeamentos das variáveis do problema poro-elasto-plástico, em todo o corpo, para quatro diferentes valores do tempo  $t$ , 0.00001, 0.001, 0.1 e 10, são mostrados nas Figuras 8.53-8.54.

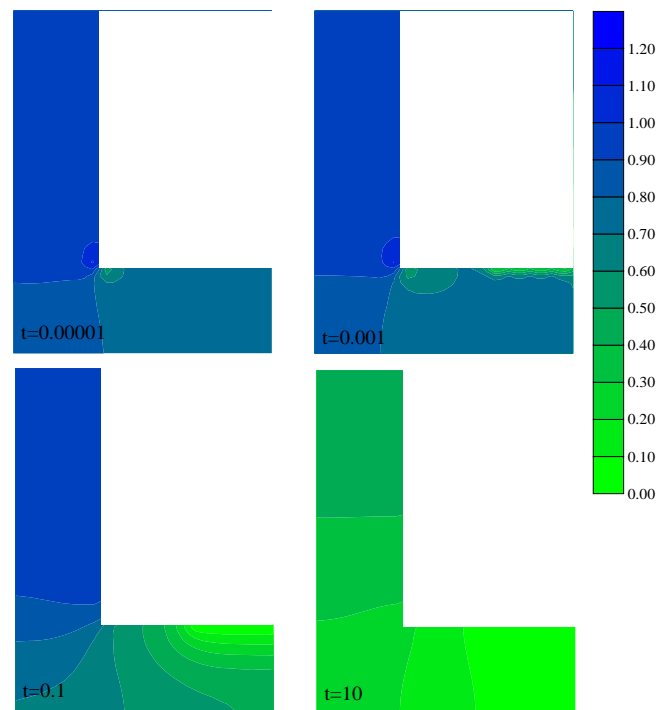


Figura 8.53 – Poro pressões no corpo em diferentes tempos.

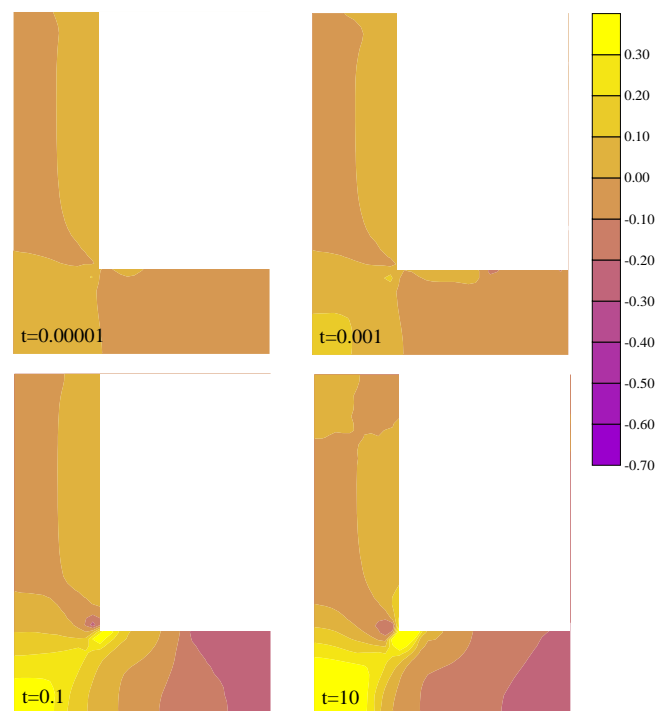


Figura 8.54 – Deformações totais horizontais no corpo em diferentes tempos.

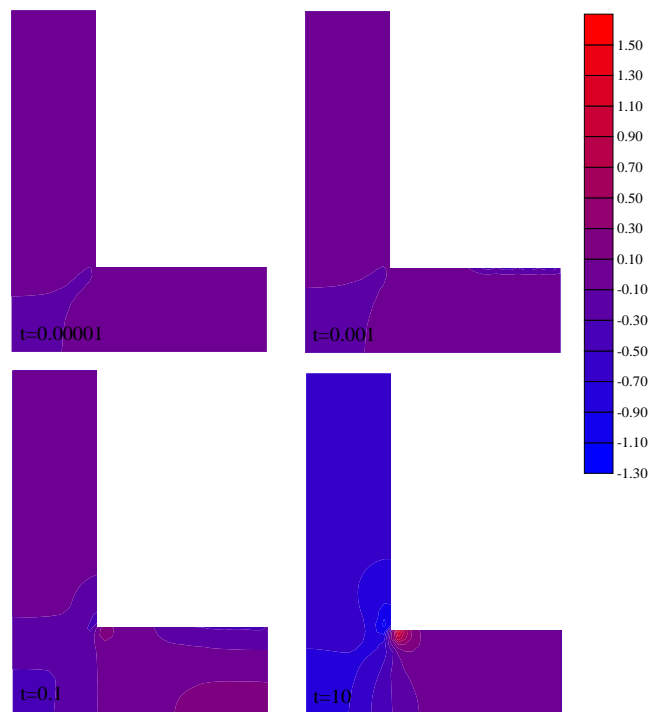


Figura 8.55 – Deformações totais verticais no corpo em diferentes tempos.

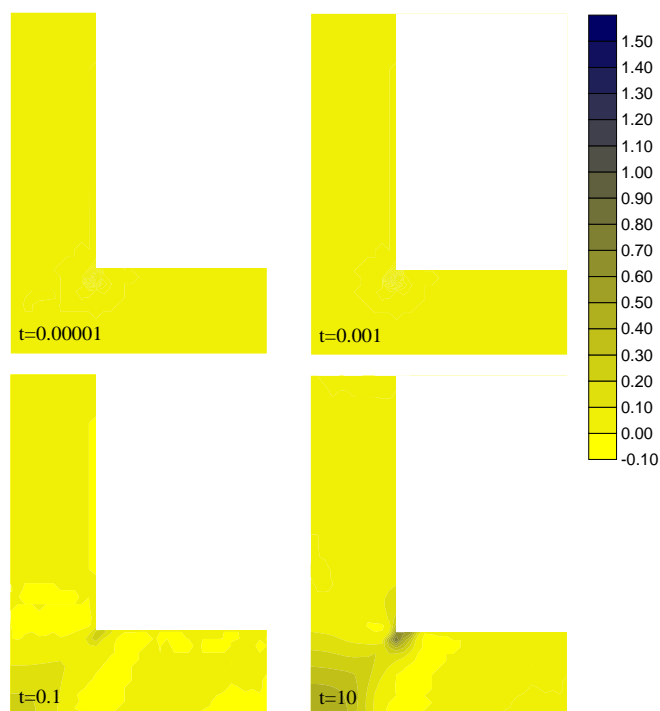


Figura 8.56 – Deformações plásticas horizontais no corpo em diferentes tempos.

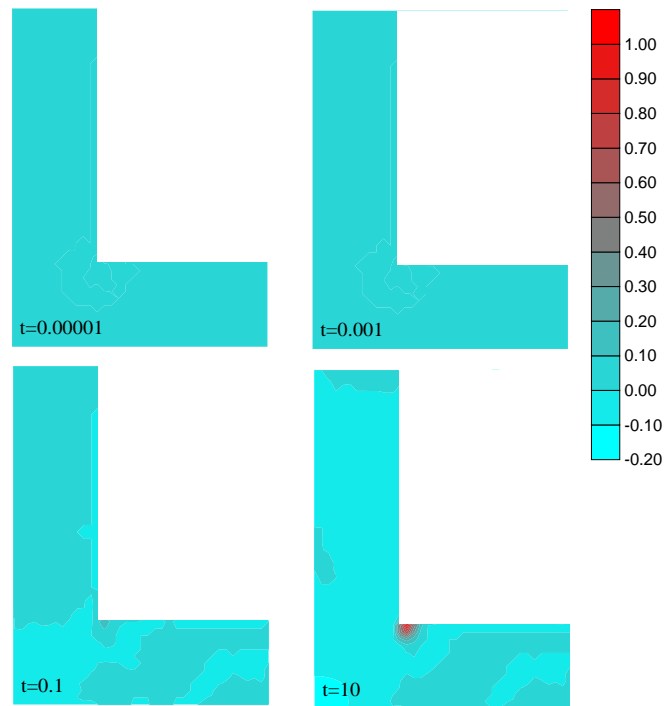
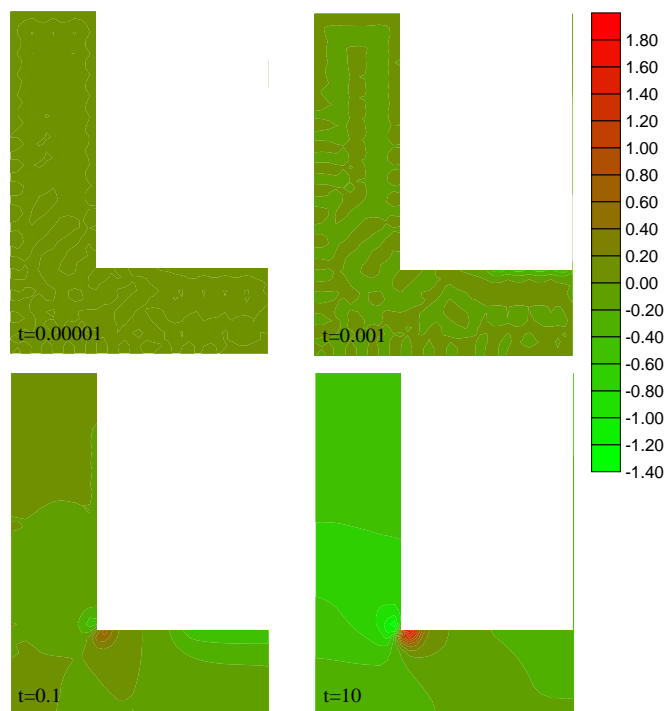


Figura 8.57 – Deformações plásticas verticais no corpo em diferentes tempos.

Figura 8.58 – Variável  $\zeta$  no corpo em diferentes tempos.

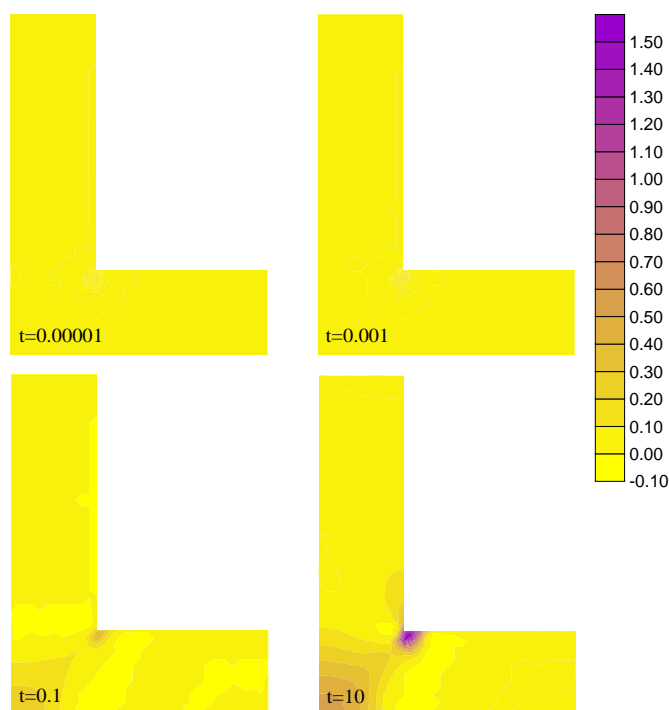


Figura 8.59 – Variável  $\zeta^p$  no corpo em diferentes tempos.

### 8.3 – Exemplos de aplicação para meios poroelásticos enrijecidos

Neste exemplo analisa-se um problema de inclusão para demonstrar as qualidades da formulação descrita anteriormente (meio poroelástico enrijecido): estaca com carga concentrada no topo.

A Figura 8.60 define o domínio bidimensional adotado, dimensões, características geométricas, vinculações empregadas e carregamentos aplicados. Para três situações distintas de carregamento aplicados na cabeça da estaca são apresentados resultados. O primeiro trata-se de uma carga concentrada vertical de  $F_v = -1\text{MN}$ , o segundo trata-se de uma carga horizontal de  $F_H = -1\text{MN}$  o terceiro um momento aplicado de  $M = -1\text{MNm}$ . A Discretização do contorno e da interface utilizada para a obtenção dos resultados apresentados está apresentada também na Figura 8.60. Diversas outras discretizações foram testadas para verificar a convergência da solução. Foram empregadas 800 células com nós descontínuos no contorno e na interface de acoplamento com o enrijecedor, totalizando 643 nós para a



malha de domínio. O contorno foi discretizado com 80 elementos e 85 nós. Foram empregados 10 elementos finitos totalizando 11 nós para a aproximação do campo de forças e 31 para o campo de deslocamentos.

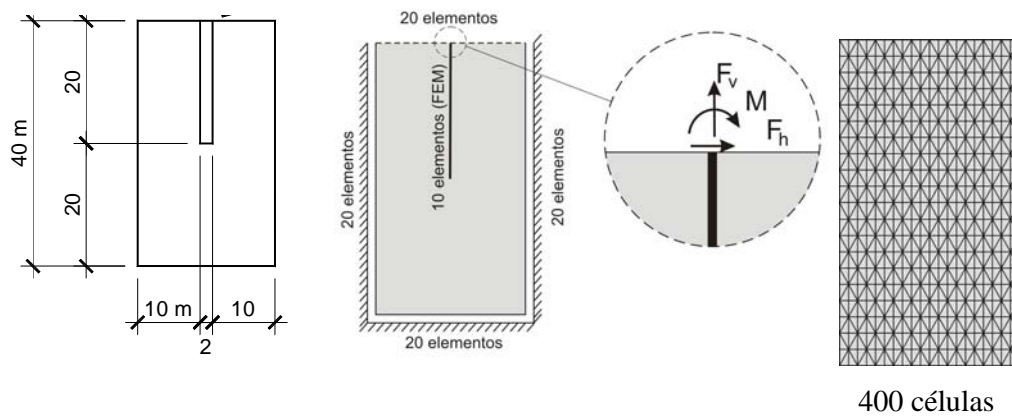


Figura 8.60 – Discretizações do contorno, domínio, enrijecedores e cargas aplicadas e condições de contorno.

As condições de contorno prescritas foram: deslocamentos horizontais nulos nas faces verticais do domínio, deslocamentos verticais nulos na face inferior do domínio e carregamentos concentrados aplicados no topo da estaca conforme descrito anteriormente. O fluxo foi prescrito nulo nas faces laterais e inferior e a pressão nula foi prescrita na face superior.

Os parâmetros elásticos escolhidos para esta análise numérica foram: Módulos de elasticidade do solo  $E_s = 2100\text{MPa}$  e da estaca  $E_p = 21000\text{MPa}$ , coeficiente de Poisson do solo  $\nu_s = 0.2$  e da estaca  $\nu_p = 0.2$ . Portanto, a relação  $E_p/E_s = 10$ ,  $k = 1.0$ ,  $M = 1.0 \times 10^6$  (Módulo de Biot) e  $b = 1.0$  (Constante de Biot para tensões efetivas).

Os resultados são apresentados nas figuras a seguir mostrando a progressão das pressões bem como das tensões ao longo do tempo.

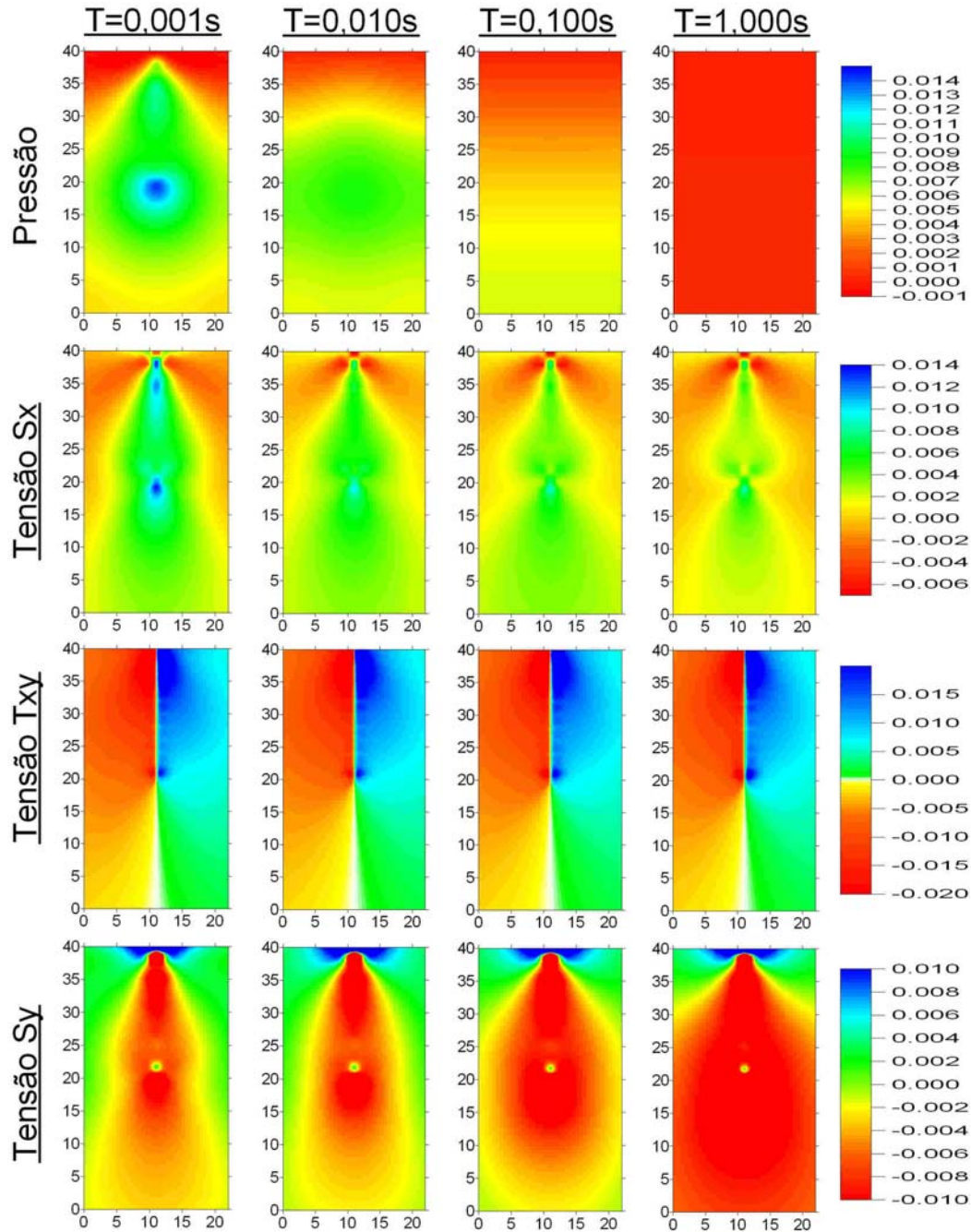


Figura 8.61 – Resultados encontrados para a carga vertical

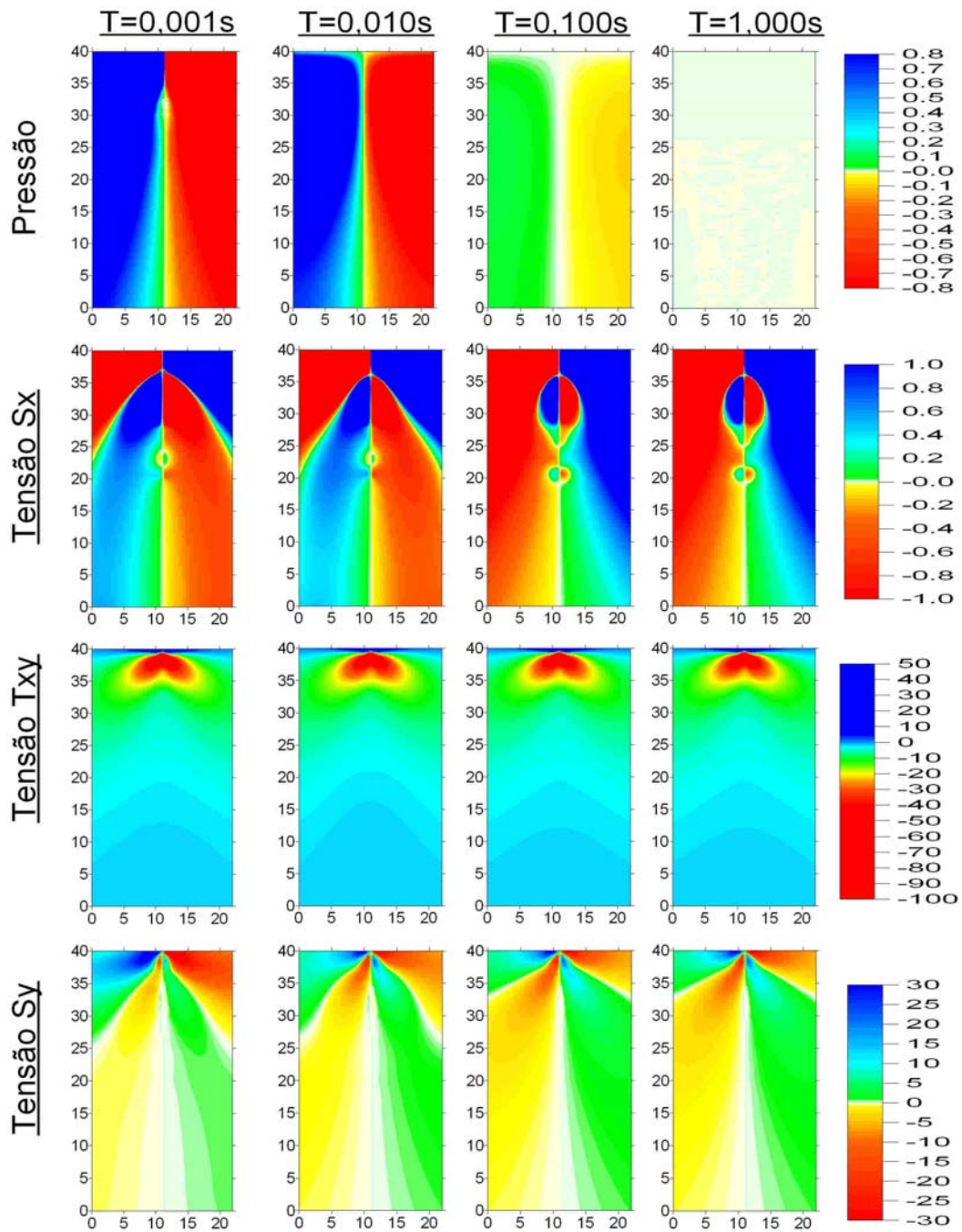


Figura 8.62 – Resultados encontrados para a carga horizontal

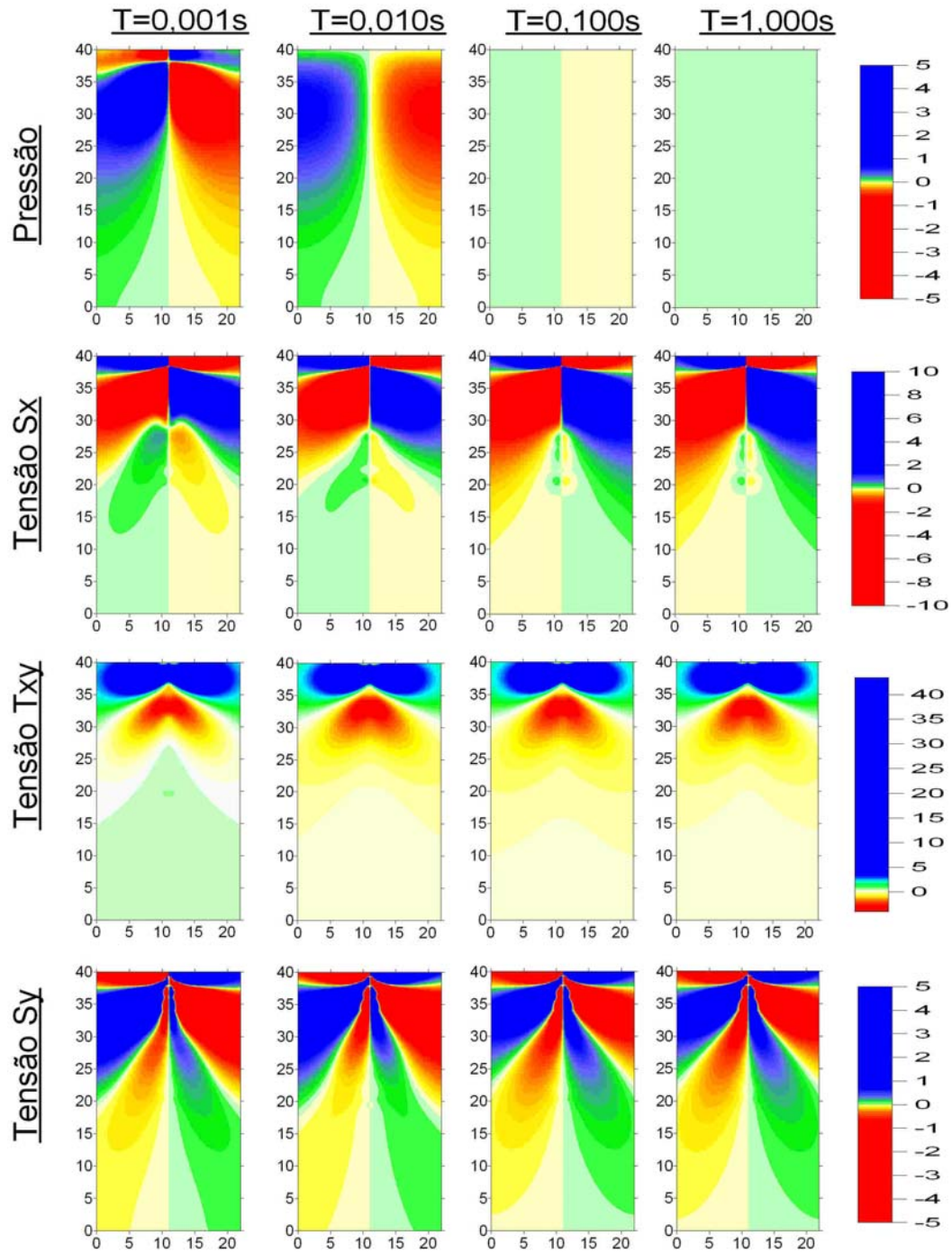


Figura 8.63 – Resultados encontrados para o momento fletor aplicado.



## 8.4 – Exemplos de aplicação para meios poro-elasto-plásticos enrijecidos

### Exemplo 1 – Quadrado com enrijecedor T

O primeiro exemplo escolhido para ilustrar o acoplamento MEC/MEF aplicado ao meio poroso não linear é composto por um meio poroplástico quadrado contendo um enrijecedor como está representado na figura 8.64, onde são definidas além da geometria do domínio a geometria do enrijecedor e as condições de contorno aplicadas ao problema. O comprimento do quadrado é de 4 metros, enquanto que o enrijecedor por duas barras de 2 metros cada como na ilustração. Admite-se que o enrijecedor tenha comportamento elástico com secção constante cujas constantes  $EI$  e  $EA$  são tomadas a partir de uma barra de espessura 0,5m. A relação entre o módulo de young da barra e do meio é de 100 enquanto que o coeficiente de poisson adotado para o domínio poroso é de  $\nu = 0.2$  e  $\nu = 0.0$  para o enrijecedor. O comportamento do meio poroso fica definido por  $k = 1.0$ ,  $M = 1.0 \times 10^6$  (Módulo de Biot) e  $b = 1.0$  (Constante de Biot para tensões efetivas). A superfície plástica e o potencial plástico são definidos adotando-se os seguintes valores:  $\mu = 1.0$ ,  $\mu^* = 0.3$ ,  $\beta = 1.0$ ,  $\beta^* = 0.3$ ,  $h = 0.0$  e  $\sigma_y = p/25$  onde  $p$  é a carga vertical aplicada na superfície livre a direita. A discretização adotada neste exemplo é apresentada nas figuras 8.64(a) e 8.64(b) que consiste em 64 elementos lineares de contorno 8 elementos finitos de ordem cúbica e 545 células triangulares.

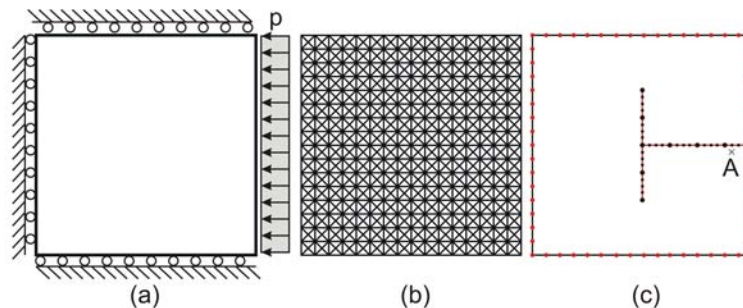


Figura 8.64. Domínio Reforçado: a) geometria e condições de contorno; b) Células Internas; c) Discretização do contorno e do enrijecedor.

A carga distribuída  $P$  é aplicada instantaneamente, e as variáveis internas são computadas ao longo do tempo, onde surgem as tensões plásticas e as variações plásticas. Como trata-se de um acoplamento de elementos estruturais que possuem uma diferença de rigidez alta, surgem ao longo do contato altas concentrações de tensões e conseqüentemente observa-se o surgimento de regiões plásticas ao longo destas interfaces. A figura 8.65 apresenta as zonas plásticas surgindo junto a interface. O parâmetro  $\alpha$ , multiplicador plástico acumulado, foi escolhido para identificar a evolução das zonas plásticas.

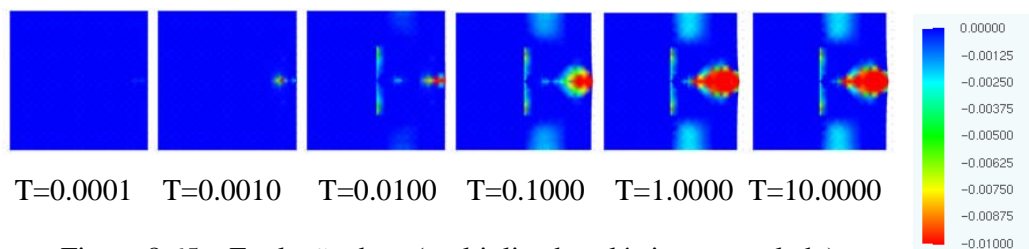


Figura 8.65 – Evolução de  $\alpha$  (multiplicador plástico acumulado)

A figura 8.66 apresenta a dissipação das pressões atuantes ao longo do tempo.

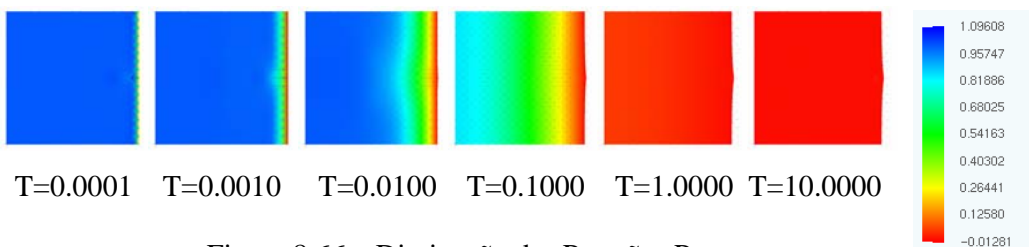


Figura 8.66 – Dissipação das Pressões  $P$

Novamente pode-se observar o efeito do enrijecedor no comportamento da estrutura são apresentadas as variações volumétricas e do resíduo plástico da mesma nas figuras 8.67 e 8.68.

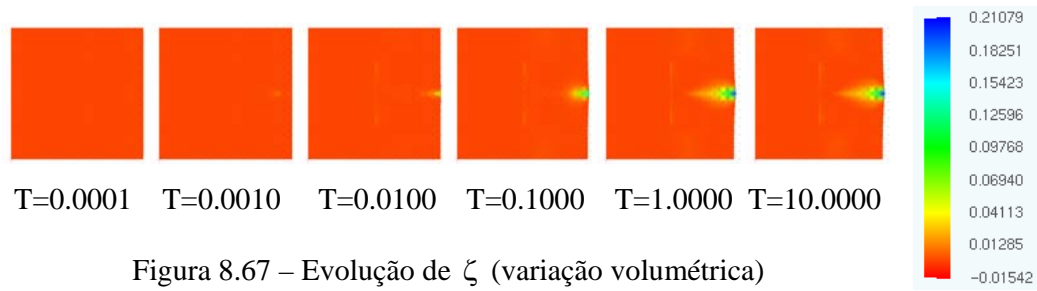


Figura 8.67 – Evolução de  $\zeta$  (variação volumétrica)

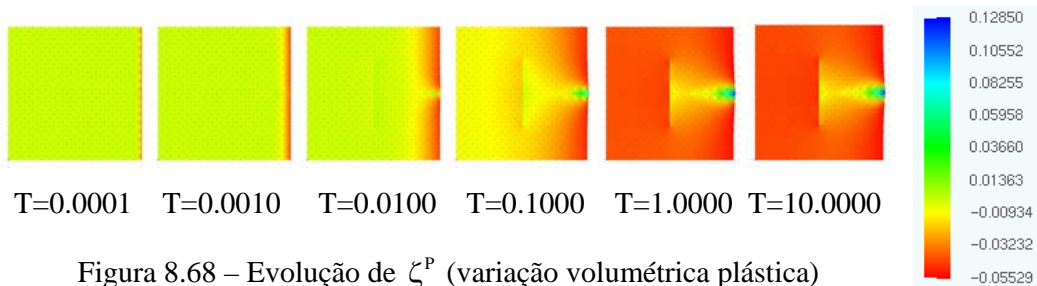


Figura 8.68 – Evolução de  $\zeta^p$  (variação volumétrica plástica)

Nas figuras 8.69, 8.70 e 8.71 é apresentada a evolução dos componentes tensor de tensões.

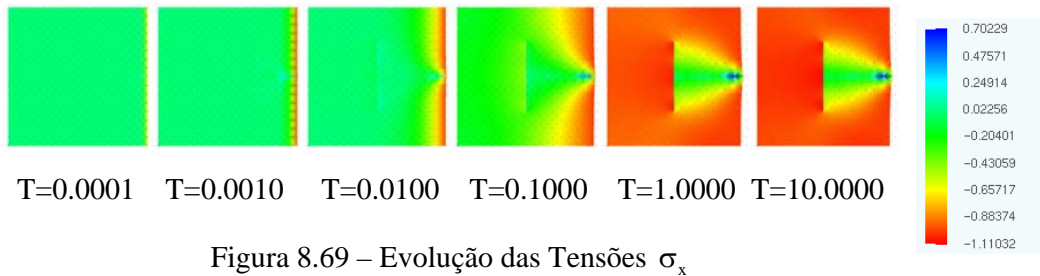


Figura 8.69 – Evolução das Tensões  $\sigma_x$

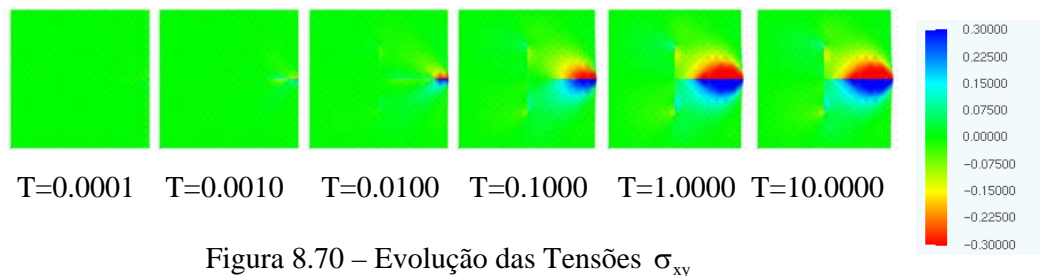


Figura 8.70 – Evolução das Tensões  $\sigma_{xy}$

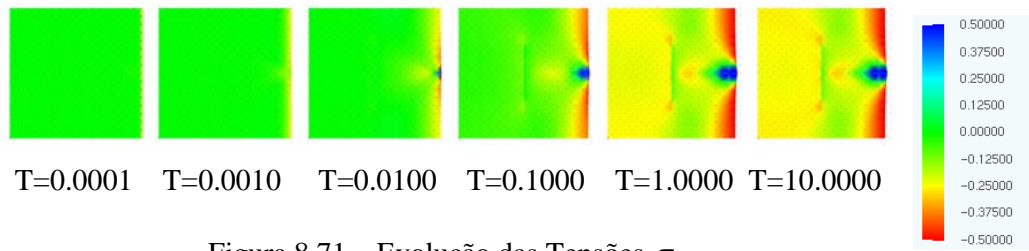


Figura 8.71 – Evolução das Tensões  $\sigma_y$

E em 8.72, 8.73 e 8.74 a evolução ao longo do tempo dos respectivos resíduos plásticos do tensor de tensões.

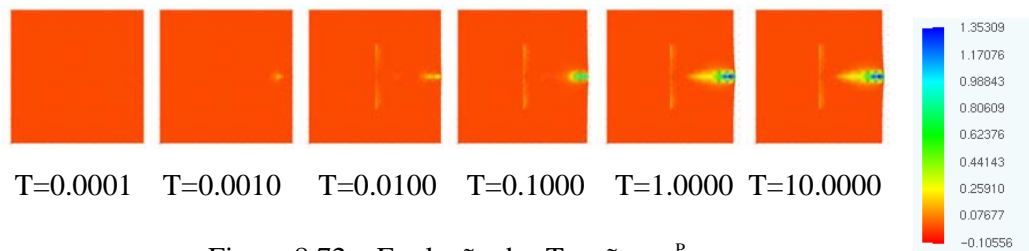


Figura 8.72 – Evolução das Tensões  $\sigma_x^p$

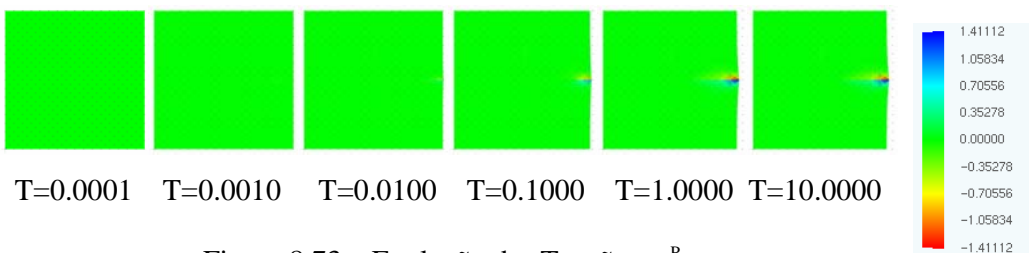


Figura 8.73 – Evolução das Tensões  $\sigma_{xy}^p$

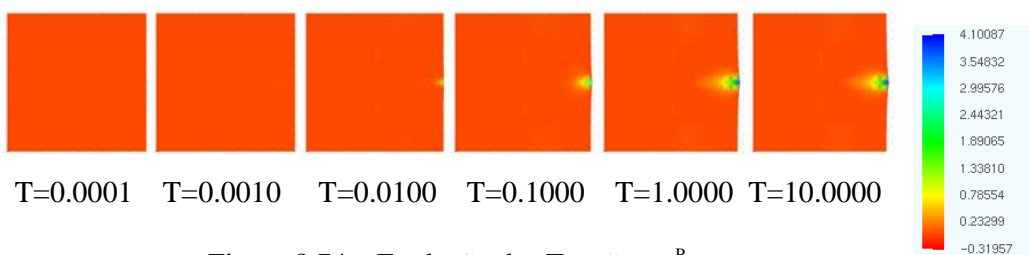


Figura 8.74 – Evolução das Tensões  $\sigma_y^p$



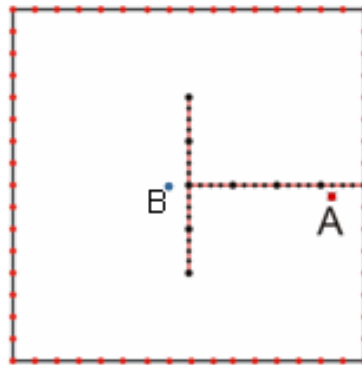


Figura 8.75 – Pontos A e B

Nas figuras 8.76 e 8.77 é apresentada a dissipação das pressões bem como a evolução do multiplicador plástico juntamente com o comportamento da tensão  $\sigma_x$  e com a evolução da respectiva tensão plástica  $\sigma_x^P$  dos pontos A (figura 8.76) e B (figura 8.77) sendo tais resultados apresentados na forma normalizada (para tornar nos valores predominantemente positivos e variando de -1 a 1, dividiu-se os valores obtidos pelos valores máximos das curvas com o objetivo de plotar num mesmo gráfico facilitando comparações).

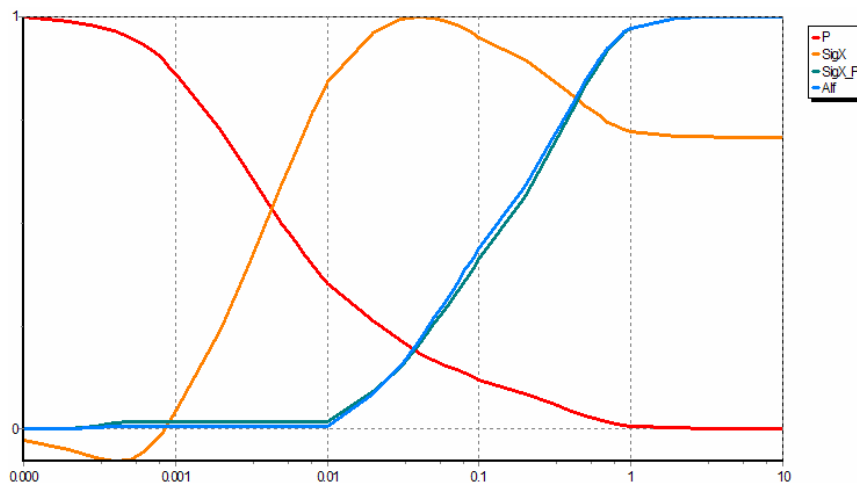


Figura 8.76 – Resultados normalizados  $P/0.9828$ ,  $\alpha/-0.0488$ ,  $\sigma_x/-0.3224$ ,  $\sigma_x^P/0.3242$  para o ponto A da apresentado na figura 8.75.

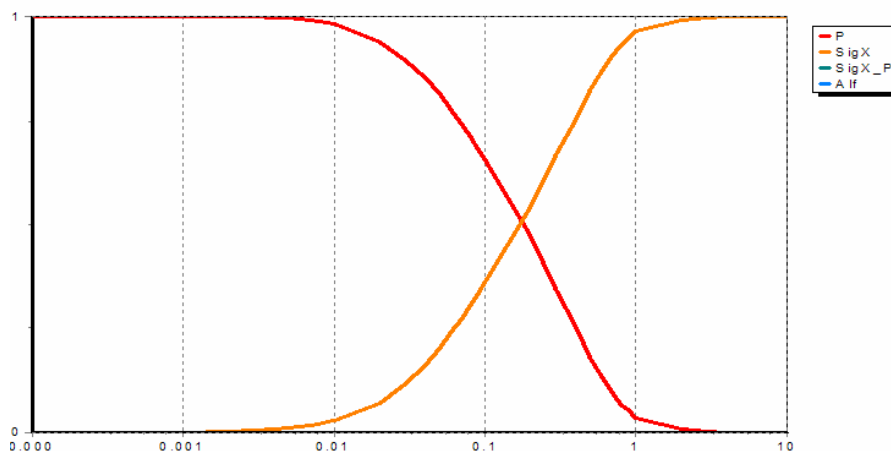


Figura 8.77 – Resultados normalizados  $P/1.0015$ ,  $\alpha/-1.0000$ ,  $\sigma_x/-1.0691$ ,  $\sigma_x^P/1.0000$  para o ponto B da apresentado na figura 8.75.

### Exemplo 2 – Quadrado com enrijecedor oblíquo

Este exemplo ilustra a influencia do enrijecedor no comportamento do meio poro-elasto-plástico enrijecido, sendo este enrijecimento aplicado através do acoplamento MEC/MEF. O domínio poro-elasto-plástico tem geometria quadrada como está ilustrado na figura 8.78 e o enrijecedor de comportamento elástico também é apresentado na figura 8.78 onde também estão definidas as condições de contorno aplicadas ao problema. O comprimento do quadrado é de 4 metros, enquanto que o enrijecedor por uma barra de  $\sqrt{2(3.5)^2}$  metros posicionada na diagonal principal do domínio poro-elasto-plástico como na ilustração. Assume-se que o enrijecedor tenha comportamento elástico com secção constante cujas constantes  $EI$  e  $EA$  são tomadas a partir de uma barra de espessura 0,5m. A relação entre o módulo de young da barra e do meio é de 100 enquanto que o coeficiente de poisson adotado para o domínio poroso é de  $\nu = 0.2$  e  $\nu = 0.0$  para o enrijecedor. O comportamento do meio poroso fica definido por  $k = 1.0$ ,  $M = 1.0 \times 10^6$  (Módulo de Biot) e  $b = 1.0$  (Constante de Biot para tensões efetivas). A superfície plástica e o potencial plástico são definidos adotando-se os seguintes valores:  $\mu = 1.0$ ,  $\mu^* = 0.3$ ,  $\beta = 1.0$ ,  $\beta^* = 0.3$ ,  $h = 0.0$  e  $\sigma_y = p/25$  onde  $p$  é a carga horizontal aplicada nas

faces superior(para a esquerda) e inferior (para a direita). A discretização adotada neste exemplo é apresentada nas figuras 8.78 (b) e 8.78 (c) que consiste em 64 elementos lineares de contorno 10 elementos finitos de ordem cúbica e 545 células triangulares.

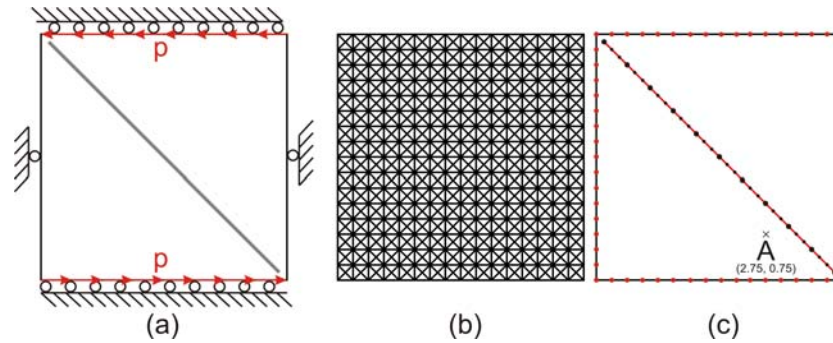


Figura 8.78 – Domínio Reforçado: a) geometria e condições de contorno; b) Células Internas; c) Discretização do contorno e do enrijecedor.

Pode-se observar na figura 8.79 (que apresenta a evolução das zonas plásticas ao longo do tempo) a atuação do enrijecedor concentrando as plastificações em suas extremidades e aliviando a diagonal principal da plastificação que ocorreria no modelo não enrijecido. É certo que os níveis de plastificação que ocorreram nas extremidades do enrijecedor são superiores aos observados no problema não enrijecido, mas aliviando o restante do domínio.

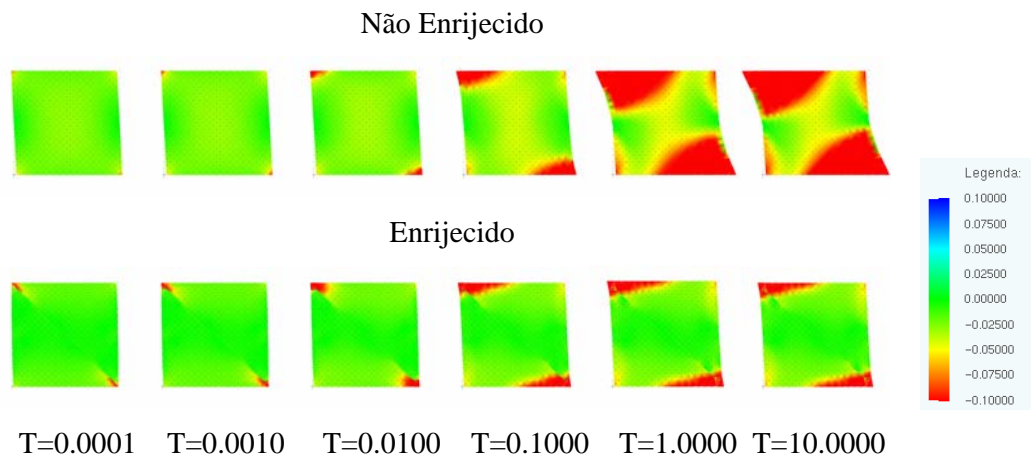


Figura 8.79 – Evolução das zonas plásticas no caso enrijecido e não enrijecido.

Na figura 8.80 são apresentados a dissipação das poro pressões para os dois modelos: enrijecido e não enrijecido.

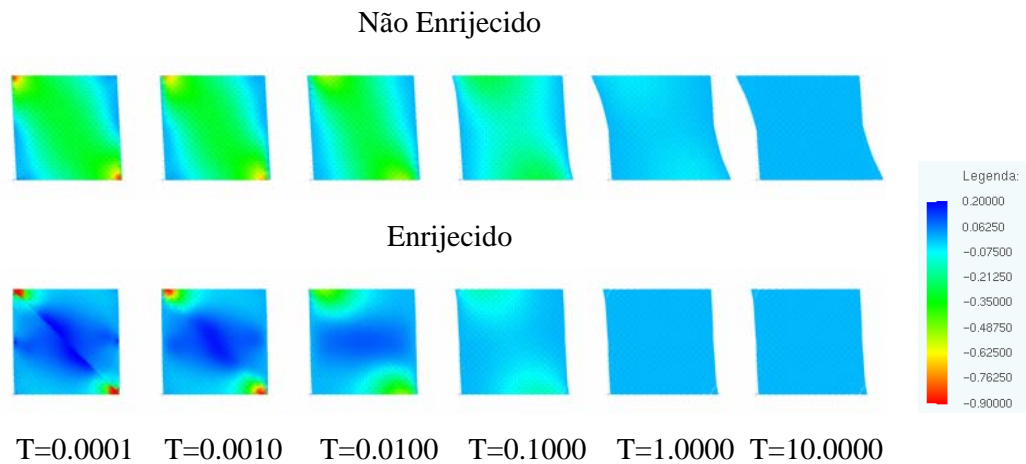


Figura 8.80 – Evolução da pressão  $P$  tanto para o caso enrijecido como para o não enrijecido.

A seguir na figura 8.81 são apresentadas respectivamente os níveis de plastificação para o modelo enrijecido e para o modelo não enrijecido.

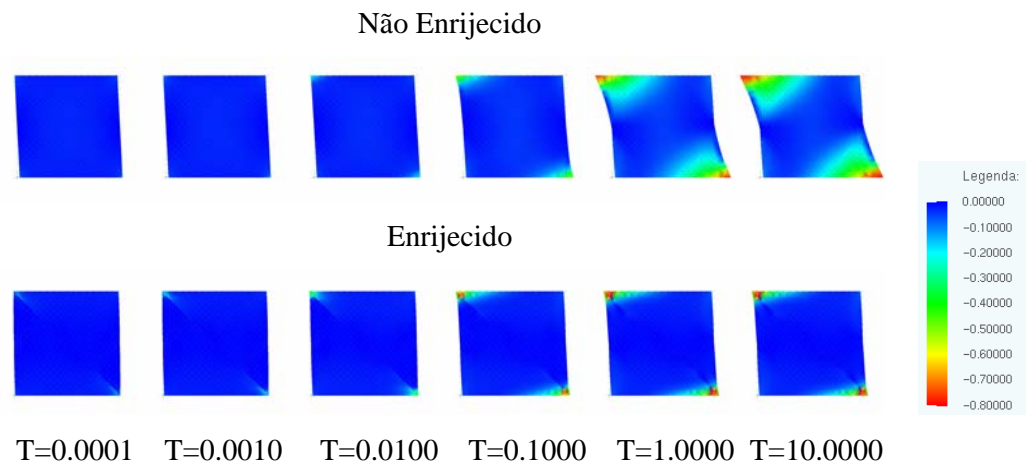


Figura 8.81 – Evolução de  $\alpha$  tanto para o caso enrijecido como para o não enrijecido.

Na figura 8.82 apresenta-se a evolução das deformações horizontais para os dois modelos e na figura 8.83 as deformações plásticas horizontais.

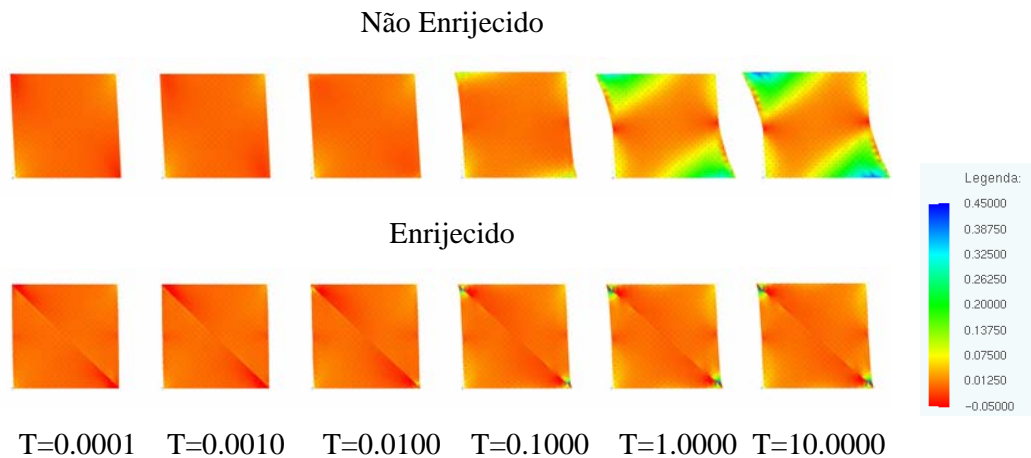


Figura 8.82 – Evolução de  $\varepsilon_x$  tanto para o caso enrijecido como para o não enrijecido.

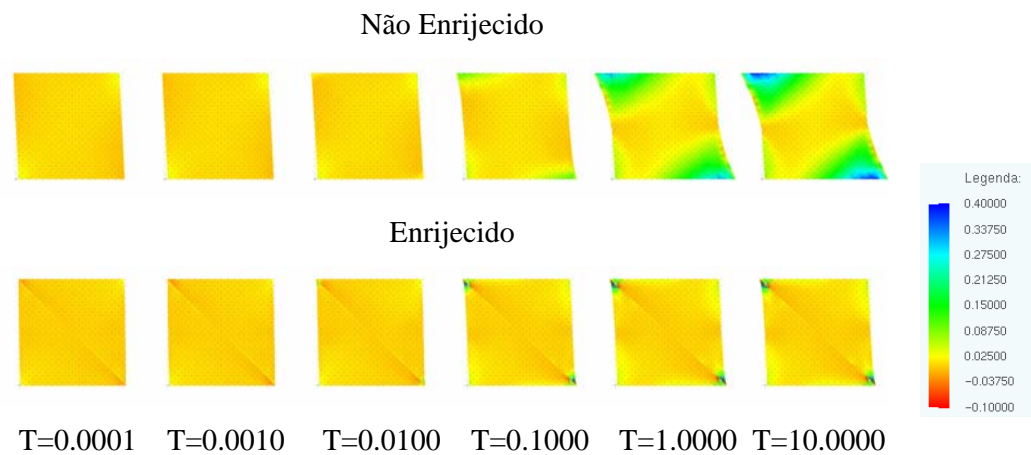


Figura 8.83 – Evolução de  $\varepsilon_x^p$  tanto para o caso enrijecido como para o não enrijecido.

Com um comportamento semelhante ao apresentado para as deformações, a variação volumétrica e seu resíduo plástico são apresentados respectivamente nas figuras 8.84 e 8.85.

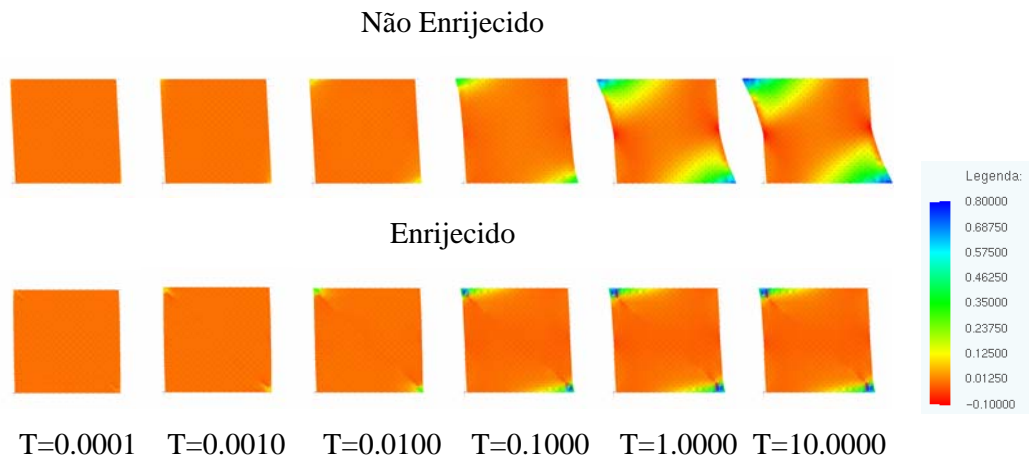


Figura 8.84 – Evolução de  $\zeta$  tanto para o caso enrijecido como para o não enrijecido.

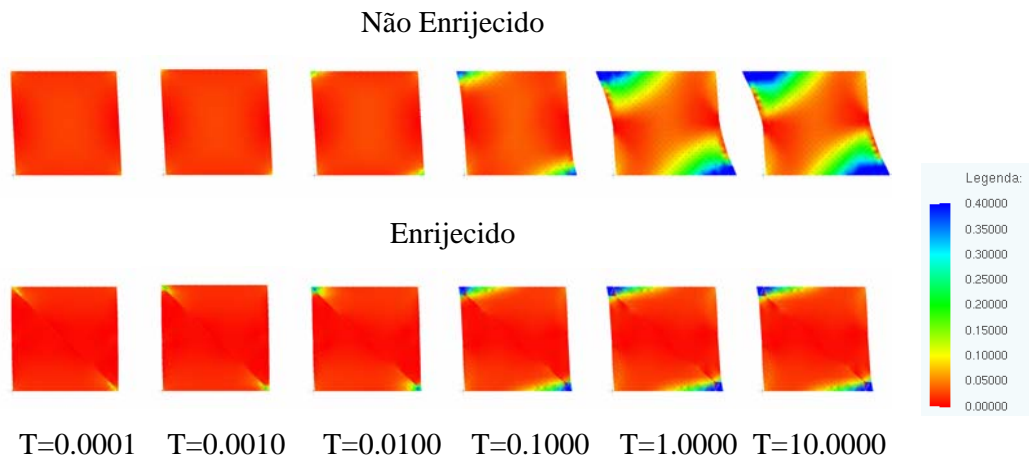


Figura 8.85 – Evolução de  $\zeta^p$  tanto para o caso enrijecido como para o não enrijecido.

Na figura 8.86 pode-se observar o comportamento ao longo do tempo do ponto A de coordenadas  $x=2,75$  e  $y = 0.75$  (ver figura 8.78(c)) da dissipação da pressão tanto para o modelo sem enrijecimento quanto para o modelo com enrijecimento, estes resultados são contrastados com a evolução plástica para o mesmo ponto plotado sobre o mesmo gráfico. Pode-se observar por esse gráfico que a evolução plástica para o modelo enrijecido é quase que desprezível se comparada

com a evolução plástica para o modelo não enrijecido. Na mesma figura mas na parte b pode-se observar o mesmo comportamento agora para a variação volumétrica.

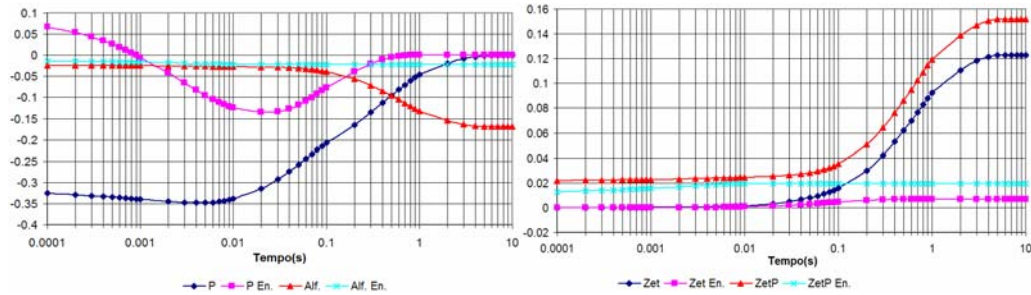


Figura 8.86 – Evolução de  $P$ ,  $\alpha$ ,  $\zeta$  e  $\zeta^P$  do ponto A tanto para o caso enrijecido como para o não enrijecido.

E finalmente nas figuras 8.87 (a), (b) e (c) é apresentada a evolução do tensor de deformações totais e plásticas para ambos os casos (enrijecido e não enrijecido), dando assim uma visão mais completa da influência do enrijecedor para este ponto e também demonstrando o funcionamento do modelo constitutivo para um meio poro-elasto-plástico saturado.

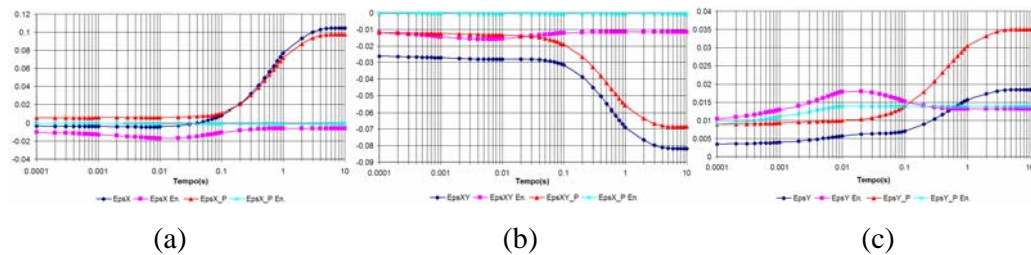


Figura 8.87 – Evolução de  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_x^P$ ,  $\epsilon_{xy}$ ,  $\epsilon_{xy}^P$ ,  $\epsilon_y$  e  $\epsilon_y^P$  do ponto A tanto para o caso enrijecido como para o não enrijecido.

### 8.5 – Exemplos de aplicação para meios poro-elásticos não saturados

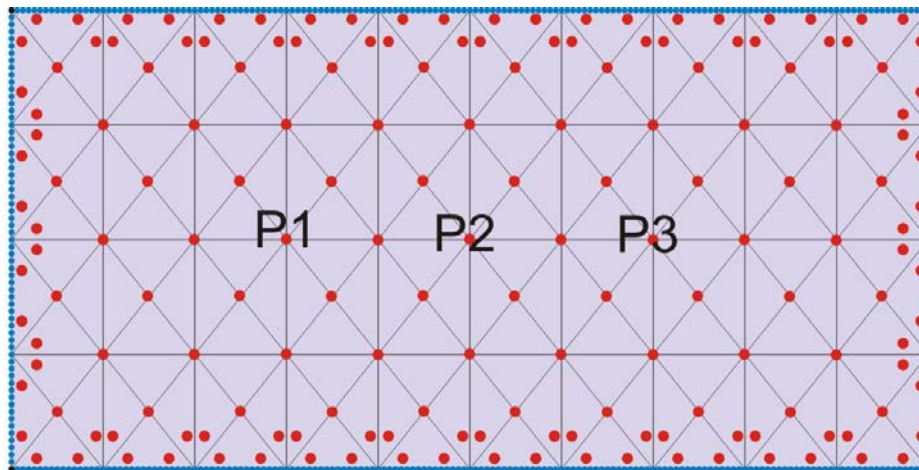
Os resultados de dois exemplos são apresentados neste item, os dois tratam de problemas porosos onde a matriz é suposta estar sempre em regime elástico e o nível



de saturação seguindo o modelo não linear de Van Genuchten. No primeiro modelo a permeabilidade intrínseca é considerada constante ao longo do tempo e homogênea no espaço, no segundo exemplo a permeabilidade intrínseca também é considerada constante ao longo do tempo mas não homogênea no espaço. Lembrando-se que para os dois casos a permeabilidade total não é constante e nem homogênea pois ela resulta da ponderação da permeabilidade intrínseca pela permeabilidade relativa que é variável ao longo do espaço e do tempo.

### Exemplo 1

A Discretização empregada nos exemplos 1 e 2 do item 8.5 pode ser vista a seguir:



- Nós simples de Contorno
  - Nós duplos de Contorno
  - Nós Internos
- |   |         |                           |
|---|---------|---------------------------|
| } | 452 nós | 448 elementos de contorno |
|   | 95 nós  | 160 células de domínio    |

Figura 8.88 – Discretização empregado nos dois exemplos do item 8.5

É importante observar a necessidade de se adotar uma boa aproximação para o contorno, e que não é necessário que a aproximação do contorno e do domínio se assemelhem pois as grandezas que estão sendo aproximadas no domínio e no contorno são diferentes. A dimensão horizontal da amostra é de 20 metros e a vertical de 10 metros, as condições de contorno são descritas na figura 8.89



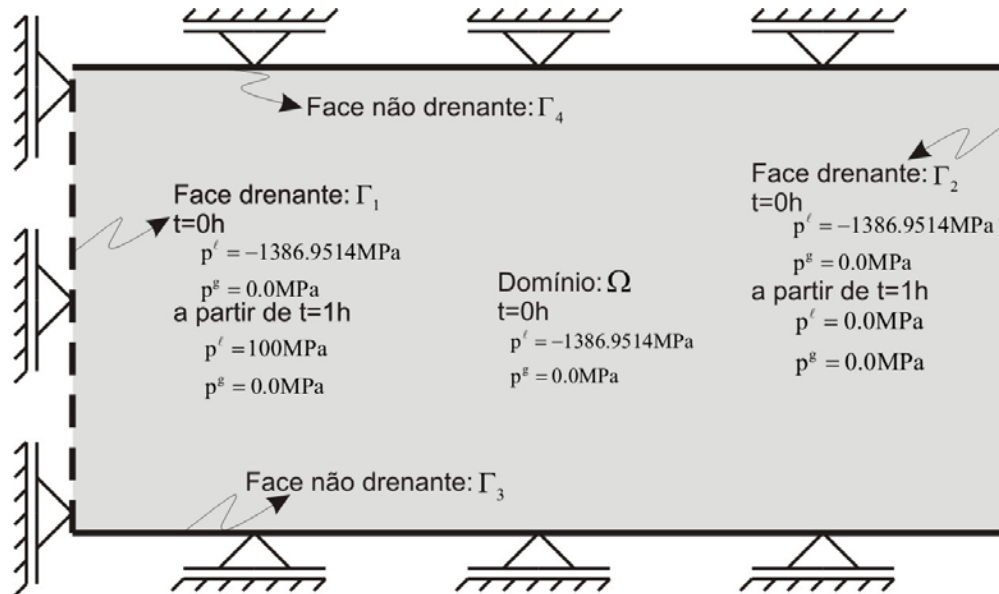


Figura 8.89 – Descretização empregado nos dois exemplos do item 8.5

Neste exemplo, com o intuito de caracterizar as propriedades físicas do material, foram adotadas as seguintes constantes: Módulo de Elasticidade  $E = 2000MPa$ , Coeficiente de Poisson  $\nu = 0$ , Coeficiente de Biot  $b = 0,8$ , logo se sabendo que:

$$\frac{1}{K_0} = \frac{3(1-2\nu_0)}{E_0} \quad (8.1)$$

pode-se determinar a compressibilidade  $K_0$  ou a incompressibilidade  $1/K_0$  do grão que compõe a matriz porosa e novamente sabendo-se que

$$\frac{1}{K^s} = \frac{1}{K_0}(1-b) \quad (8.2)$$

pode-se determinar a compressibilidade  $K_s$  ou a incompressibilidade  $1/K_s$  da matriz porosa, e conseqüentemente o módulo de biot  $M$  ou o inverso dele  $1/M$  pode ser determinado pela expressão:

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{K^s} (b - \phi_0) \quad (8.3)$$

A viscosidade líquida adotada é igual a  $\mu^\ell = 1,003e^{-6} \text{MPa}\cdot\text{s}$  que é o valor da viscosidade para a água. Para o ar, adotou-se uma viscosidade de  $\mu^g = 1,000e^{-1} \text{MPa}\cdot\text{s}$ . A compressibilidade para o líquido é  $K^\ell = 5,000e^{-4} \text{MPa}^{-1}$  e para o ar de  $K^g = 1,000e^{-1} \text{MPa}^{-1}$ . A porosidade inicial adotada para toda a amostra é de  $\phi^0 = 0,15$ , sendo a permeabilidade intrínseca adotada para toda a amostra de  $K^\phi = 1,000e^{-12} \text{m}^2/\text{s}$ , neste exemplo a permeabilidade intrínseca foi considerada constante ao longo do tempo, sendo assim, ela não depende da variação da porosidade do meio, tornando desta forma a permeabilidade total dependente somente do nível de saturação de cada ponto. No instante de tempo  $t = 0\text{s}$  o nível de saturação líquida da amostra era de  $S^\ell = 0,01$  ou seja, 1% (quase seca). A amostra estava no instante inicial em equilíbrio e o nível de pressão gasosa foi considerado de  $p^g = 0 \text{MPa}$ .

Conhecendo-se o nível de saturação líquida  $S^\ell$  pode-se através do modelo de Van Genuchten conhecer o valor da pressão capilar  $p^c$ , e tendo-se o valor da pressão capilar e da pressão gasosa para o instante inicial, pode-se determinar o valor da pressão líquida  $p^\ell$ , por esta razão, o valor da pressão líquida no instante inicial não faz parte dos dados do problema pois ele é calculado através do nível de saturação e do valor da pressão gasosa. O valor da energia das interfaces inicial aqui chamado de  $U^{c0}$  também pode ser determinado conhecendo-se o nível de saturação líquida. E da mesma forma o valor da pressão resultante da mistura fluida  $\pi^0$  também pode ser determinado conhecendo-se os valores da saturação líquida  $S^\ell$ , pressão gasosa  $p^g$ , pressão líquida  $p^\ell$  e da energia  $U^c$ . Desta forma todas as variáveis ficam determinadas para o instante de tempo  $t = 0\text{s}$  e a amostra encontra-se em equilíbrio.

No problema mecânico, não são aplicados nenhum carregamento, como pode-se observar nas condições de contorno descritas na figura 8.89. Na primeira

hora de simulação é aplicada uma variação no valor da pressão líquida no contorno do problema, nas faces drenantes este valor sai do valor de equilíbrio e toma valores de  $p^{\ell} = 100\text{MPa}$  e  $p^{\ell} = 0\text{MPa}$ . Lembrando-se que a amostra no instante  $t = 0\text{s}$  estava em equilíbrio a um nível de saturação de 1% com a pressão gasosa nula pode-se observar que o valor da pressão líquida possuía em módulo o mesmo valor da pressão capilar mas com o sinal contrário, ou seja, a pressão capilar era positiva e com um valor elevado e a pressão líquida era negativa com o mesmo valor em módulo da pressão capilar. Sendo assim pode-se observar que nas duas faces drenantes o valor da pressão líquida aumentou fazendo com que houvesse uma injeção de líquido na amostra, de uma forma um pouco mais intensa na face onde foi aplicada a pressão  $p^{\ell} = 100\text{MPa}$  e de uma forma um pouco menos intensa na face onde  $p^{\ell} = 0\text{MPa}$ . As faces consideradas drenantes para a fase gasosa são as mesmas da fase líquida.

Afim de compor o modelo de Drenagem e Saturação de Van Genuchten, foram adotadas as seguintes constantes: saturação líquida residual  $S^{lr} = 0$ ;  $\alpha = 0,01327$ ;  $m = 0,612553$  e  $\chi = 1$ . Onde os coeficientes  $\alpha$  e  $m$  compõem a forma da curva de saturação e o coeficiente  $\chi = 1$  determina a variação da permeabilidade relativa da fase líquida e gasosa que irão compor a permeabilidade absoluta de cada fase juntamente com a permeabilidade intrínseca do meio poroso.

A seguir na figura 8.90 é apresentada a evolução no tempo do nível de pressão capilar e conseqüentemente a variação da saturação.

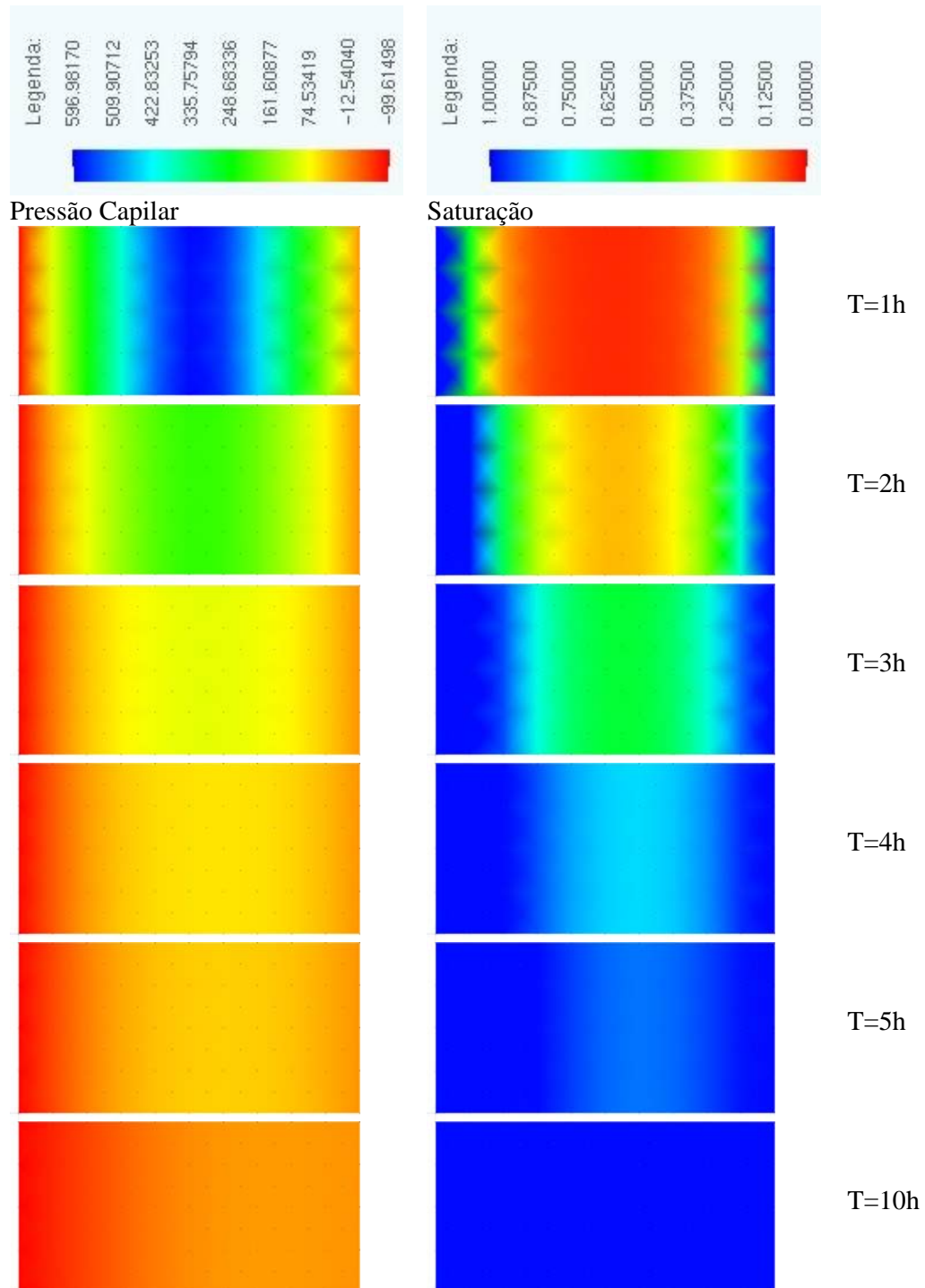


Figura 8.90 – Evolução da Pressão Capilar e da Saturação.

Na figura 8.91 pode-se observar a evolução das pressões líquidas e gasosas.

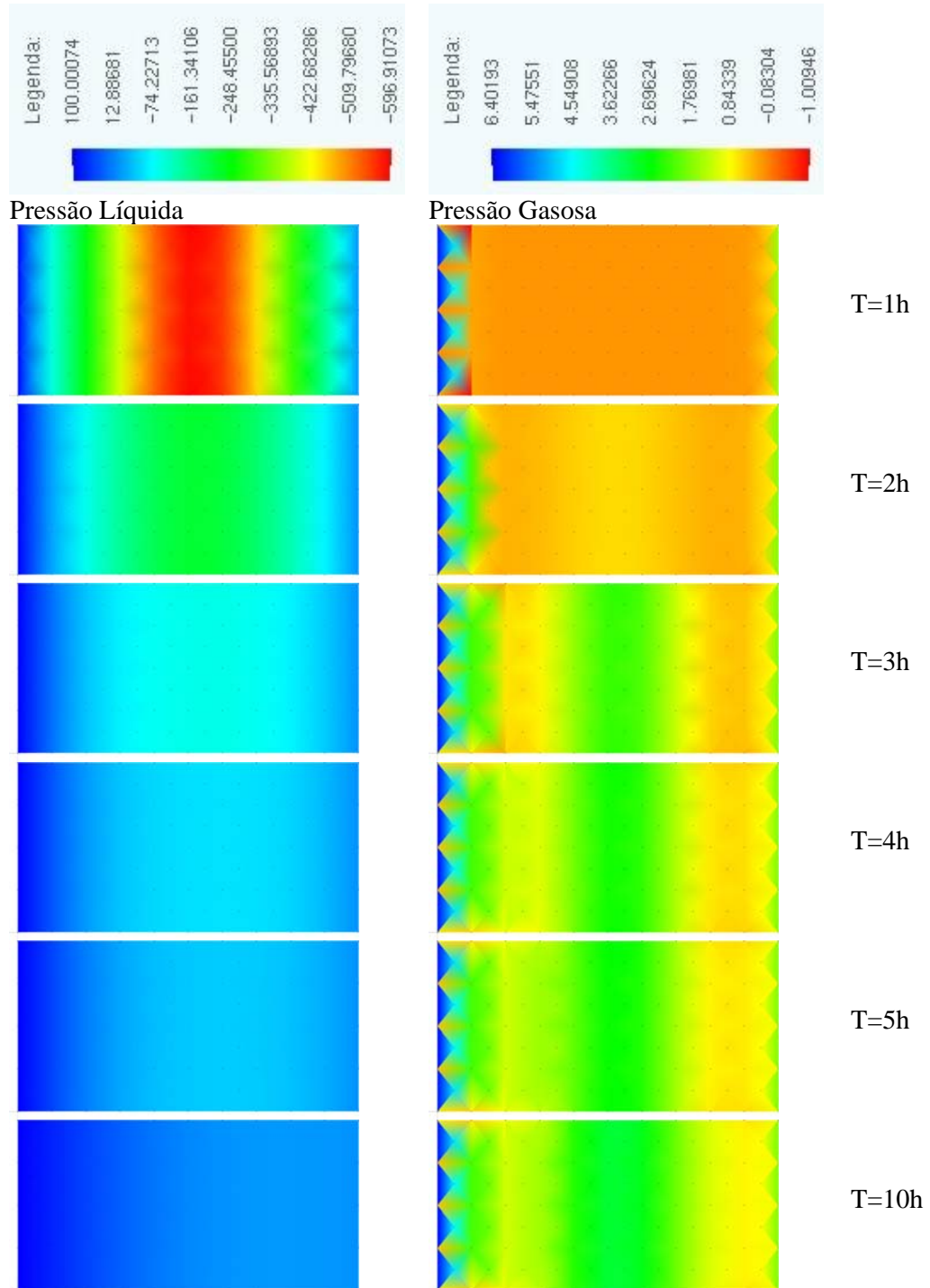


Figura 8.91 – Evolução da Pressão Líquida e Gasosa.

Os Gradientes de pressão líquida e gasosa são apresentados na figura 8.92.

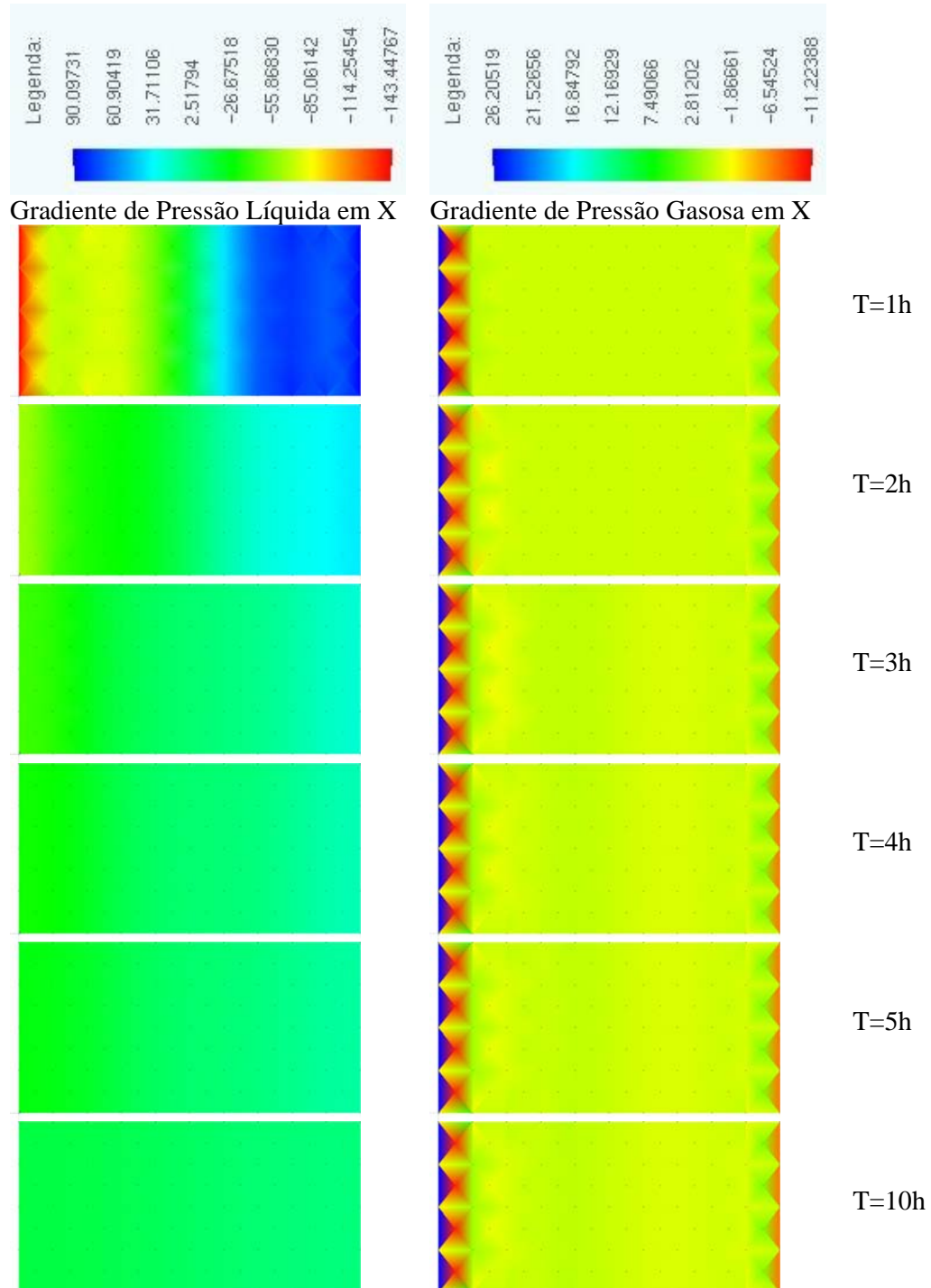


Figura 8.92 – Evolução do Gradiente Pressão Líquida e Gasosa.

A evolução das pressões resultante e do nível de deformação pode ser observada na figura 8.93.

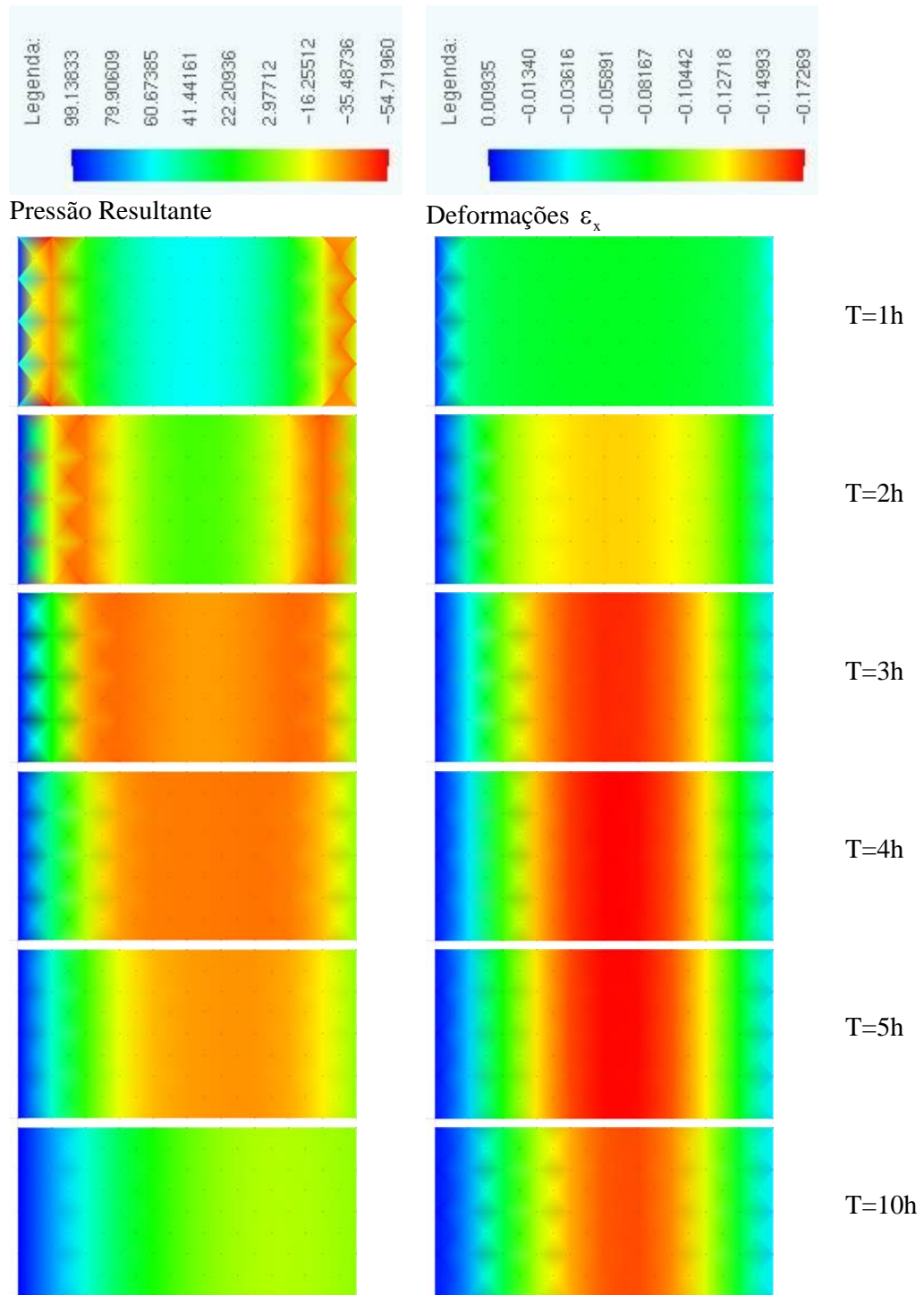


Figura 8.93 – Evolução da Pressão Resultante e da Deformação  $\epsilon_x$ .



A variação das tensões totais e efetivas pode ser observada na figura 8.94.

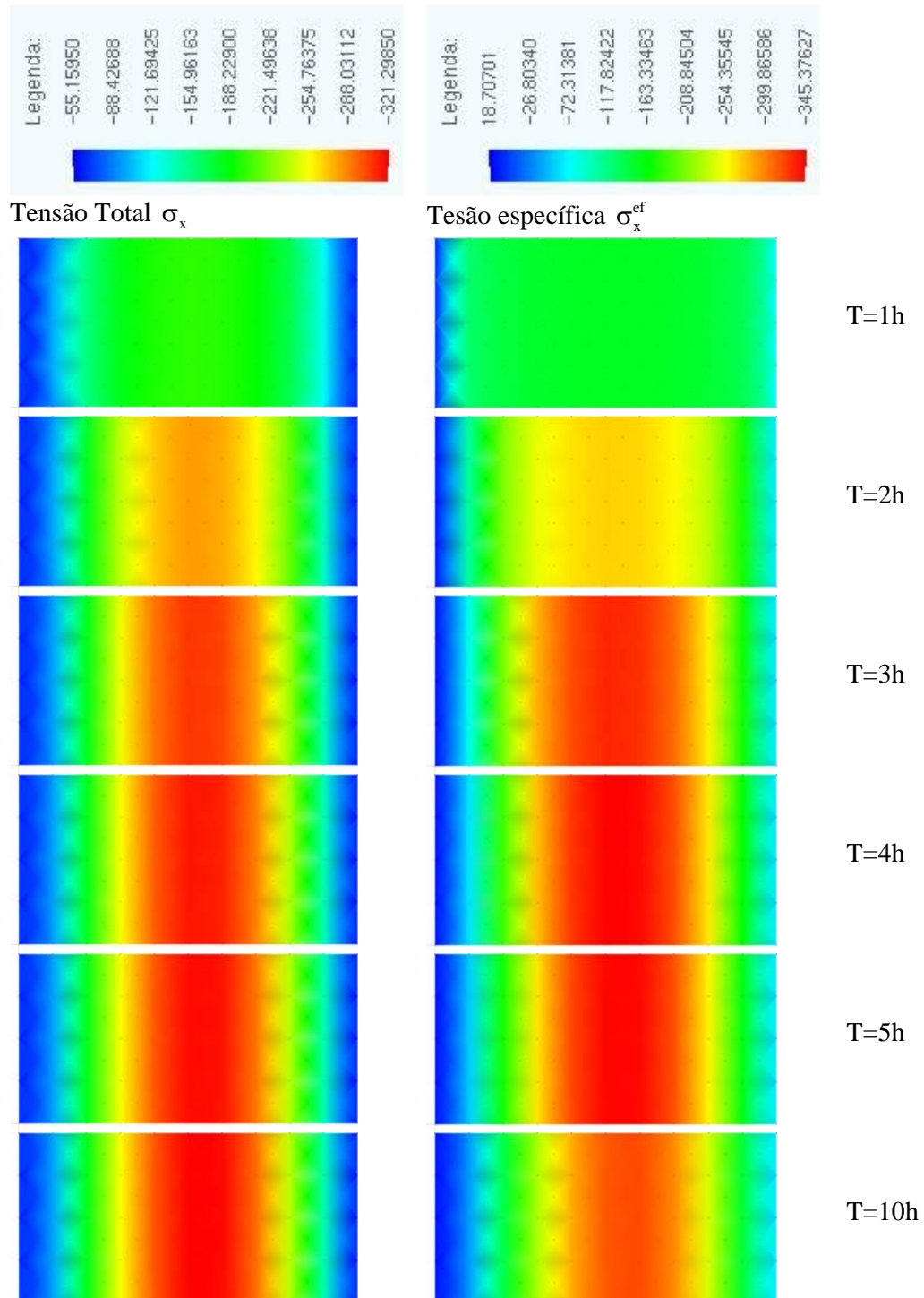


Figura 8.94 – Evolução da Tensão Total  $\sigma_x$  e da Tensão Específica  $\sigma_x^{ef}$ .



Para os pontos localizados no eixo horizontal  $y = 5m$ , são apresentadas a evolução da pressão capilar  $p^c$  na figura 8.95.

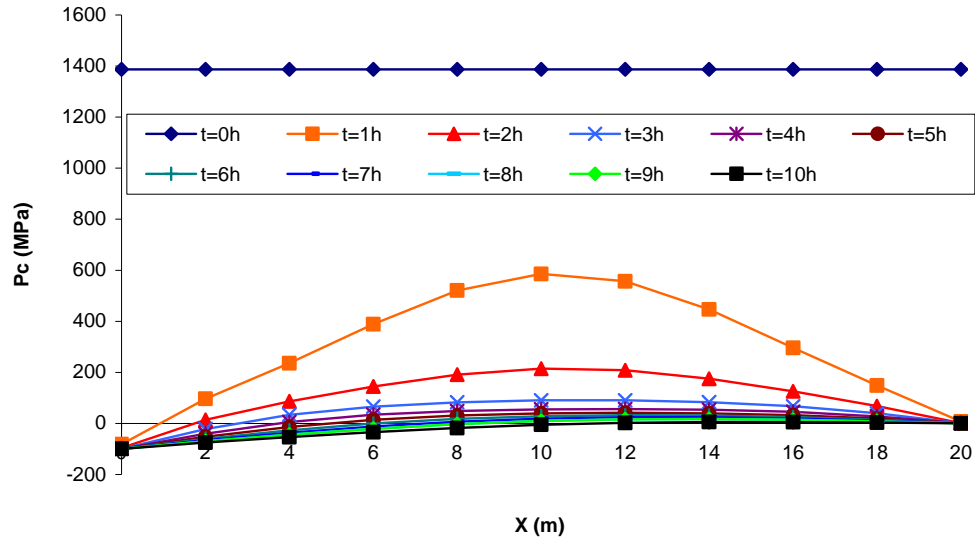


Figura 8.95 – Evolução da pressão capilar no eixo horizontal  $y = 5m$ .

Para os pontos  $P1(6m,5m)$ ,  $P2(10m,5m)$  e  $P2(14m,5m)$ , são apresentadas as evoluções da pressão capilar  $p^c$  na figura 8.96.

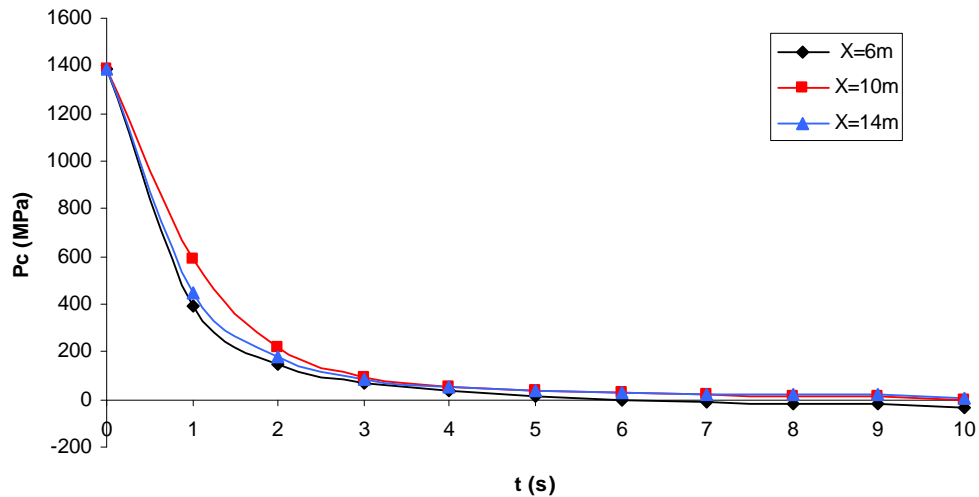


Figura 8.96 – Evolução da pressão capilar nos pontos  $P1(6m,5m)$ ,  $P2(10m,5m)$  e  $P2(14m,5m)$ .

A evolução do nível de saturação dos pontos localizados sobre o eixo horizontal  $y = 5m$  são apresentadas na figura 8.97.

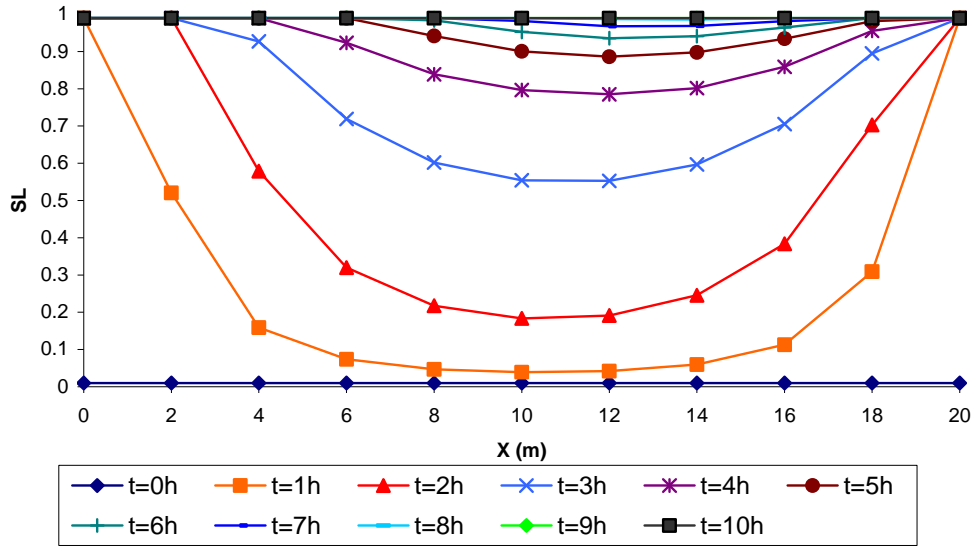


Figura 8.97 – Evolução do nível de saturação no o eixo horizontal  $y = 5m$ .

A evolução do nível de saturação dos pontos os pontos P1(6m,5m), P2(10m,5m) e P2(14m,5m) são apresentadas na figura 8.98.

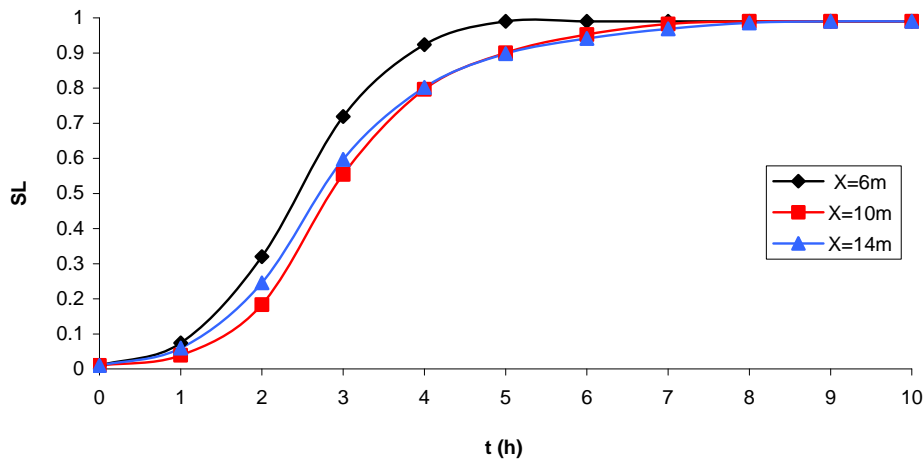


Figura 8.98 – Evolução do nível de saturação nos pontos P1(6m,5m), P2(10m,5m) e P2(14m,5m)

A curva de saturação em função do nível de pressão capilar descrita pelo modelo de Van Genuchten é reconstruída na figura 8.99 para os pontos P1(6m,5m), P2(10m,5m) e P2(14m,5m).

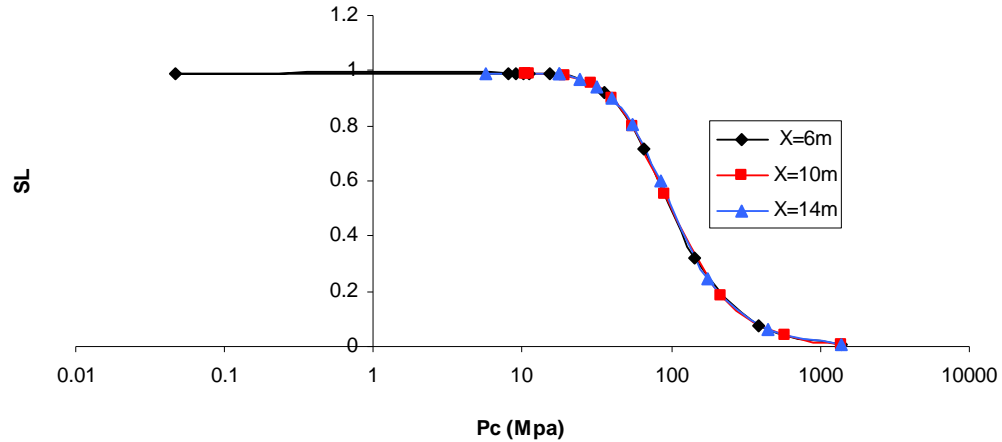


Figura 8.99 – Curva de saturação em função da pressão capilar nos pontos P1(6m,5m), P2(10m,5m) e P2(14m,5m)

### Exemplo 2

Este segundo exemplo segue todas as condições de contorno e iniciais descritas no exemplo anterior a menos da permeabilidade intrínseca que assume valores diferenciados entre o lado direito e esquerdo da amostra como está representado na figura 8.100.

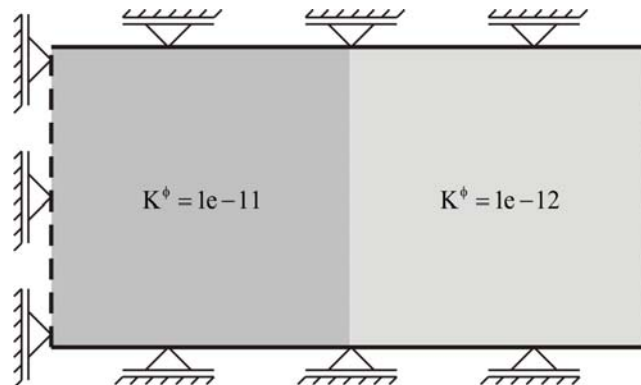


Figura 8.100 – Permeabilidade intrínseca diferenciada para cada lado da amostra.

A seguir nas figuras 8.101 é apresentada a evolução no tempo do nível de pressão capilar e consequentemente a variação da saturação

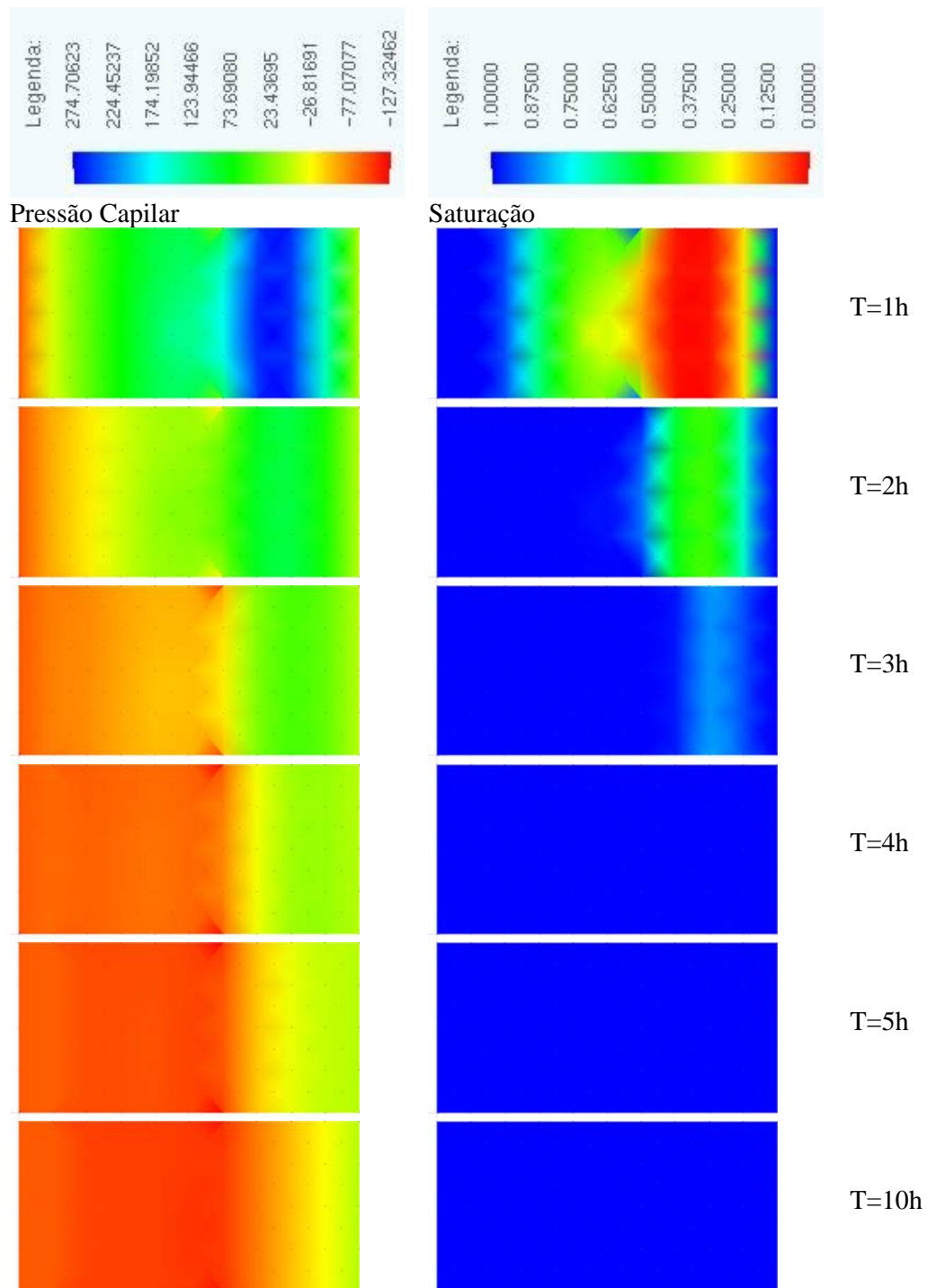


Figura 8.101 – Evolução da Pressão Capilar e da Saturação.

Nas figuras 8.102 pode-se observar a evolução das pressões líquidas e gasosas.

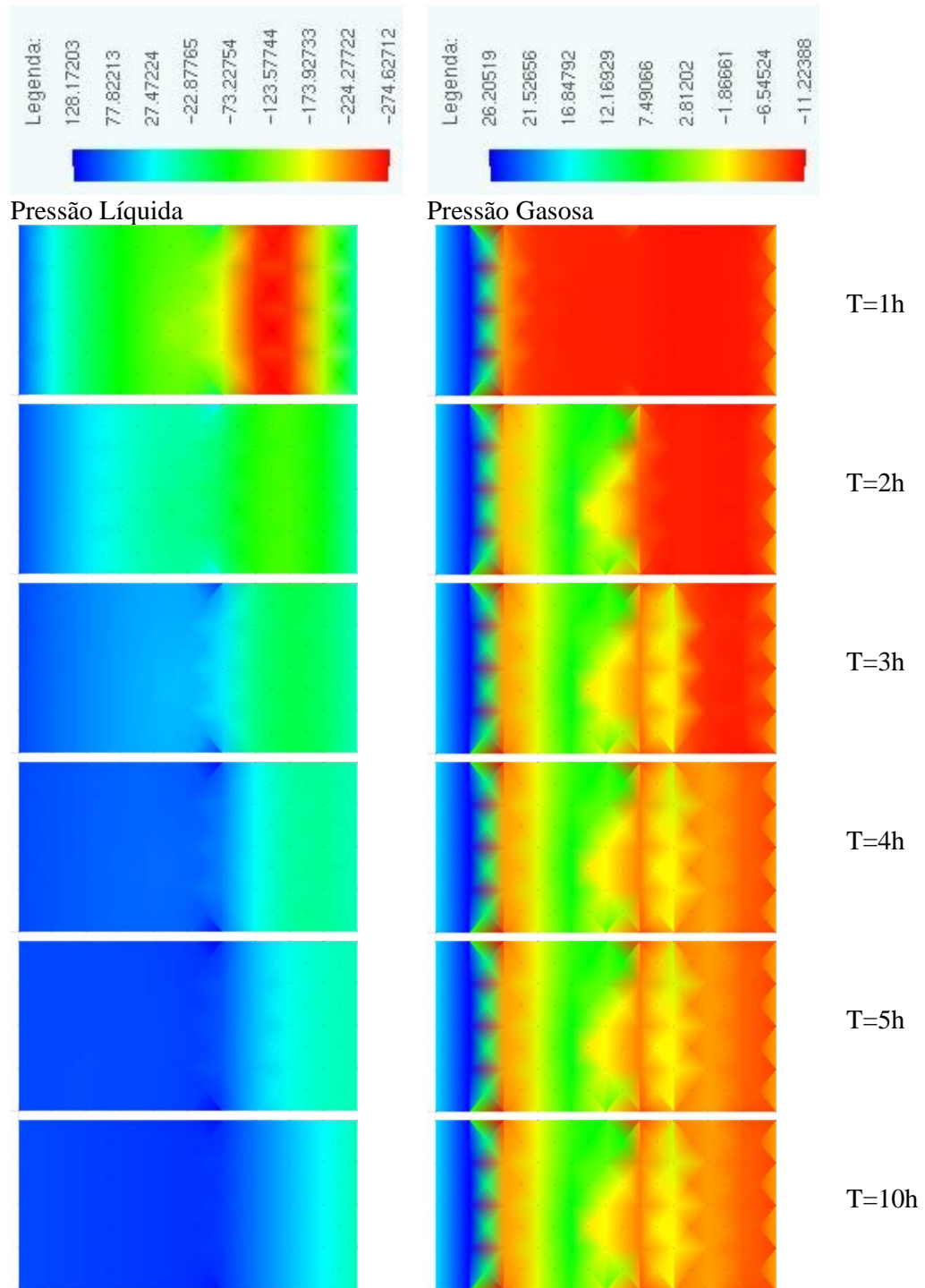


Figura 8.102 – Evolução da Pressão Líquida e Gasosa.

Os Gradientes de pressão líquida e gasosa são apresentados nas figuras 8.103.

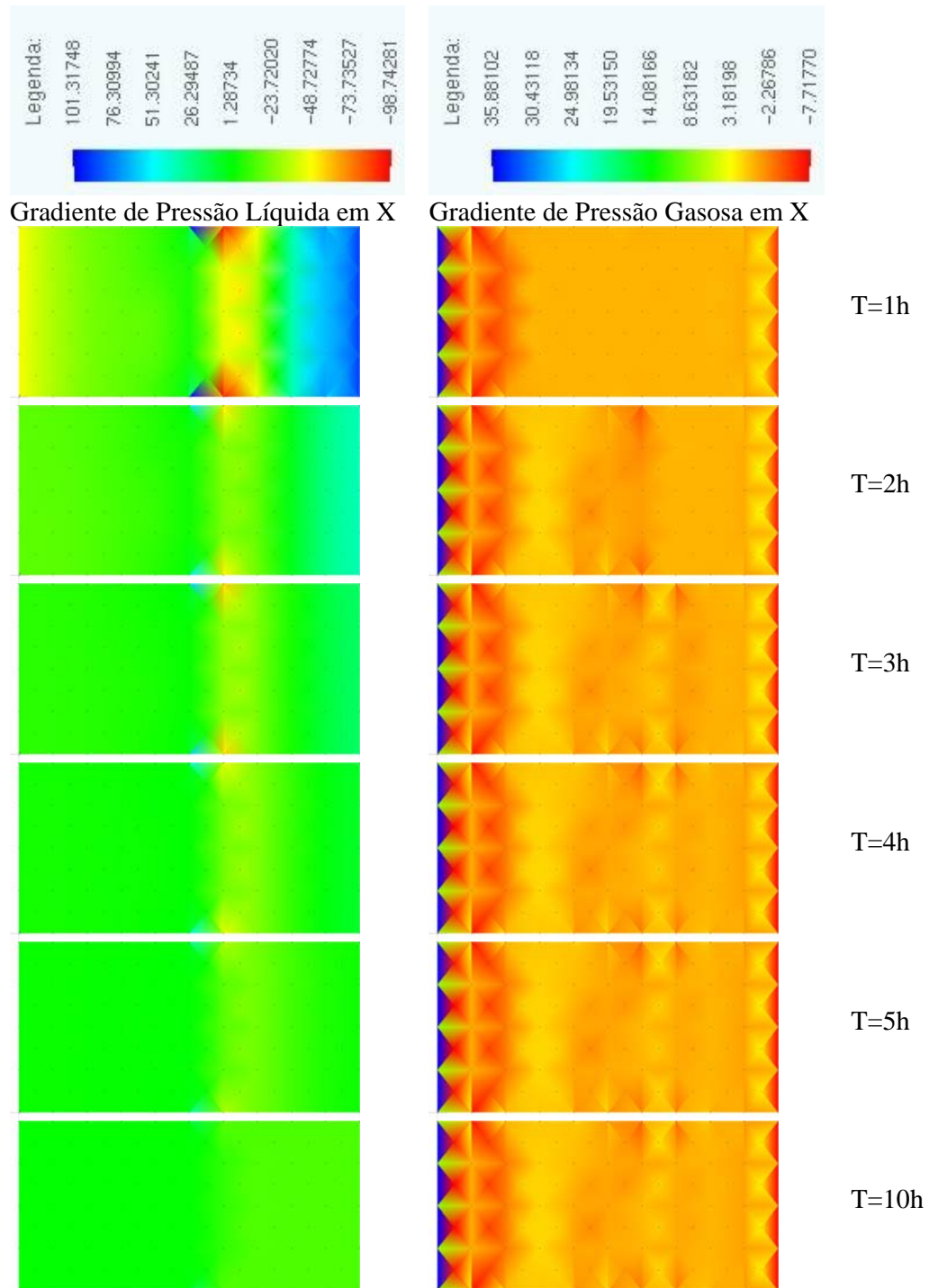


Figura 8.103 – Evolução da Pressão Líquida e Gasosa.

A evolução das pressões resultante e do nível de deformação pode ser observado nas figuras 8.104.

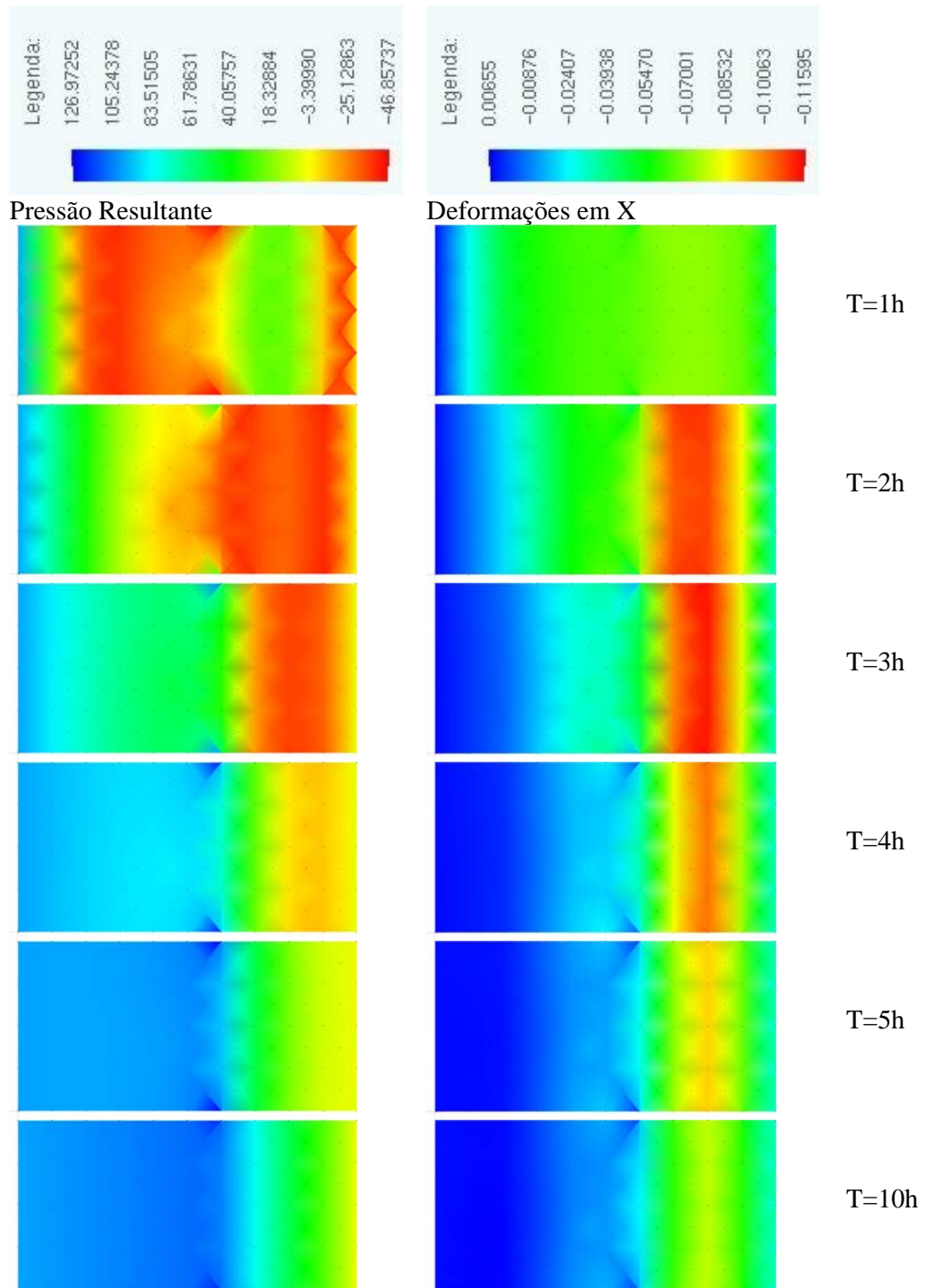


Figura 8.104 – Evolução da Pressão Líquida e Gasosa.



A variação das tensões totais e efetivas podem ser observadas nas figuras 8.105.

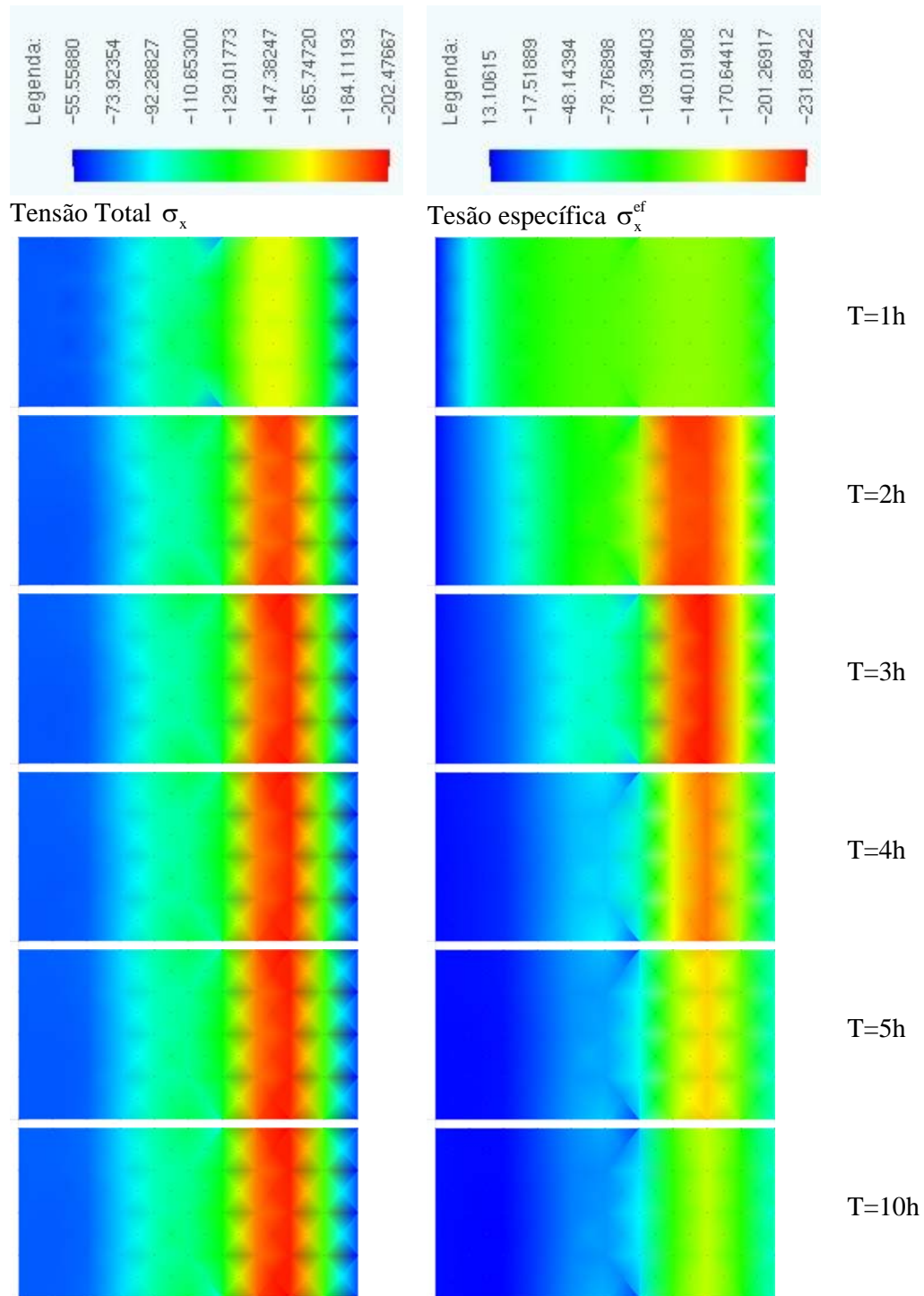


Figura 8.105 – Evolução da Tensão Total  $\sigma_x$  e da Tensão Específica  $\sigma_x^{ef}$ .



Para os pontos localizados no eixo horizontal  $y = 5\text{m}$ , são apresentadas a evolução da pressão capilar  $p^c$  na figura 8.106.

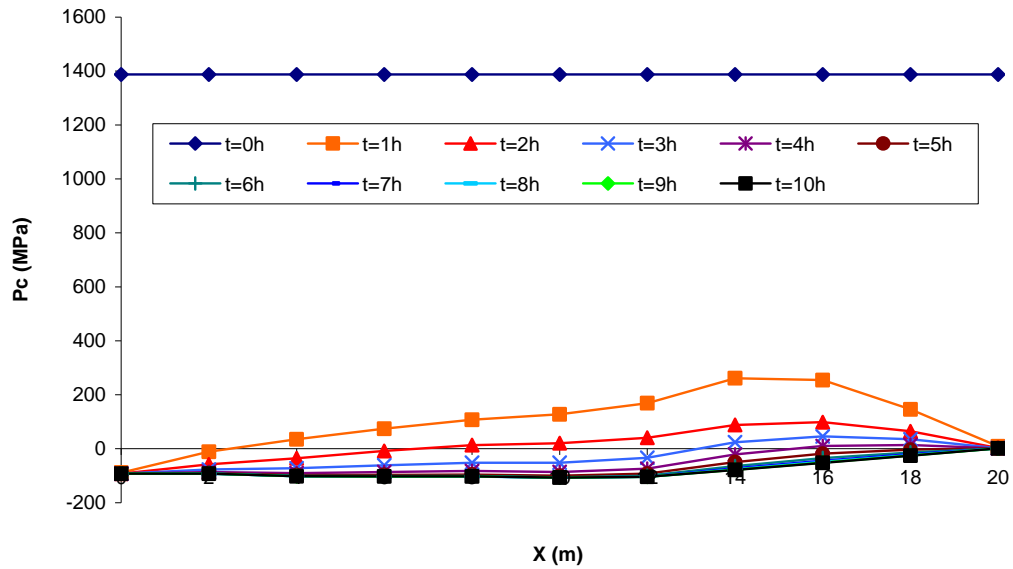


Figura 8.106 – Evolução da pressão capilar no eixo horizontal  $y = 5\text{m}$ .

Para os pontos  $P1(6\text{m},5\text{m})$ ,  $P2(10\text{m},5\text{m})$  e  $P2(14\text{m},5\text{m})$ , são apresentadas as evoluções da pressão capilar  $p^c$  na figura 8.107.

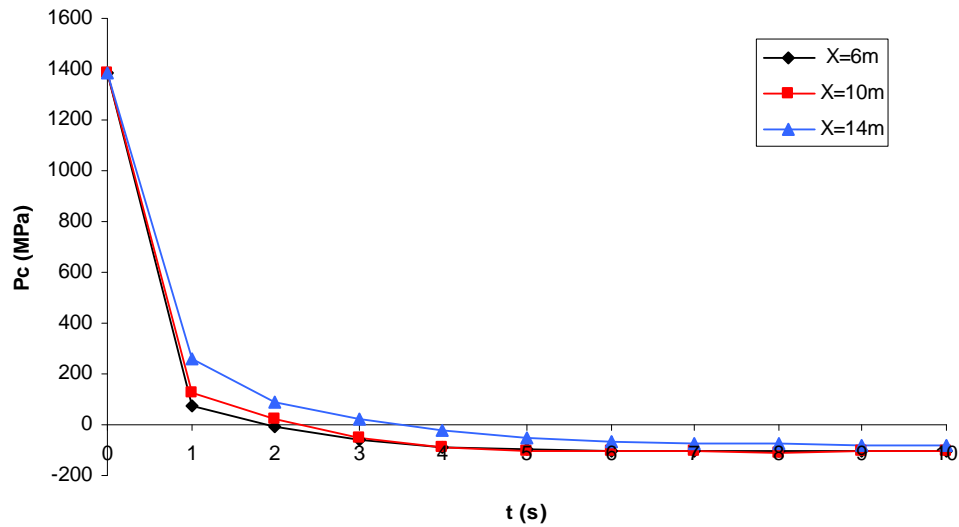


Figura 107 – Evolução da pressão capilar nos pontos  $P1(6\text{m},5\text{m})$ ,  $P2(10\text{m},5\text{m})$  e  $P2(14\text{m},5\text{m})$ .

A evolução do nível de saturação dos pontos localizados sobre o eixo horizontal  $y = 5\text{m}$  é apresentada na figura 108.

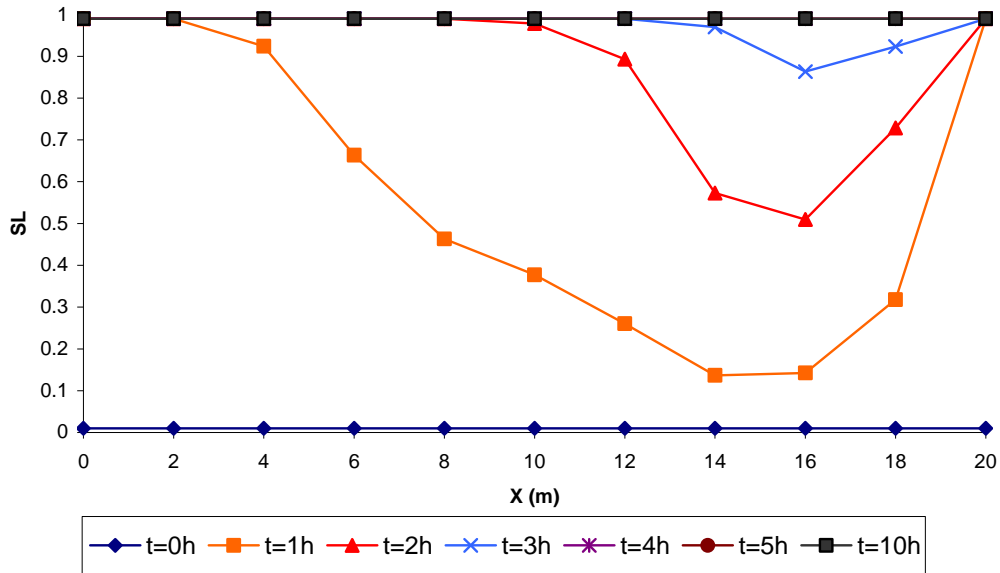


Figura 108 – Evolução do nível de saturação no o eixo horizontal  $y = 5\text{m}$ .

A evolução do nível de saturação dos pontos os pontos  $P1(6\text{m},5\text{m})$ ,  $P2(10\text{m},5\text{m})$  e  $P2(14\text{m},5\text{m})$  são apresentadas na figura 109.

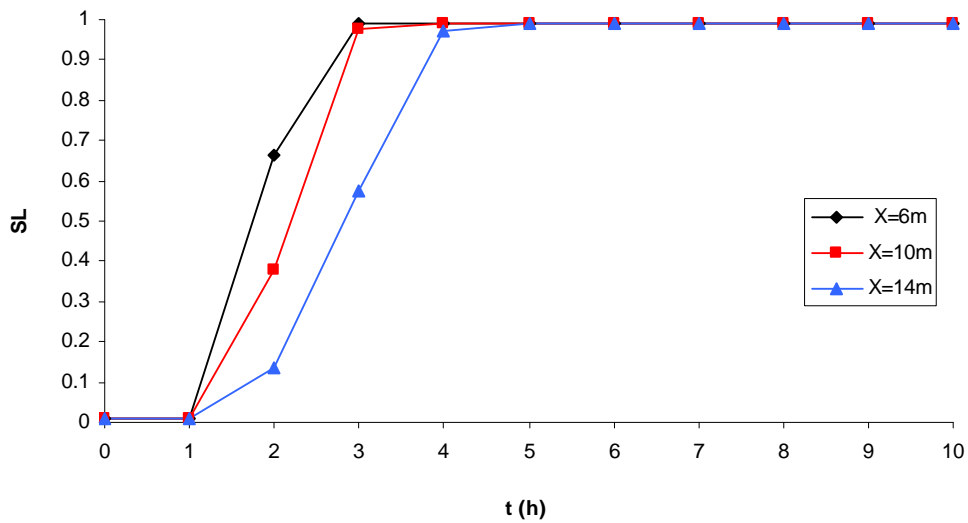


Figura 109 – Evolução do nível de saturação nos pontos  $P1(6\text{m},5\text{m})$ ,  $P2(10\text{m},5\text{m})$  e  $P2(14\text{m},5\text{m})$

## Conclusões

---

# Capítulo 9

Neste trabalho foram tratados alguns novos conceitos e formas de se abordar numericamente problemas porosos com o Método dos Elementos de Contorno. Apesar do método dos elementos de contorno ter sido empregado por alguns autores para representação de problemas porosos, neste trabalho, entre outras coisas, buscou-se dar uma contribuição original para a abordagem de problemas porosos enrijecidos. A representação desse enrijecimento foi baseada num acoplamento MEC/MEF modificado, utilizando-se o método dos mínimos quadrados para obter respostas livres oscilações espúrias para deslocamentos e forças de superfície ao longo das interfaces. Resultados adequados usando a formulação proposta foram encontrados mesmo para exemplos pouco discretizados. A manipulação algébrica empregada no acoplamento MEC/MEF fez com que o desenvolvimento algébrico do problema poro-elástico enrijecido se desse de forma muito semelhante ao desenvolvimento empregado para o caso não enrijecido, facilitando a implementação do problema enrijecido, principalmente para casos mais complexos como o caso da poro-elasto-plasticidade em domínios enrijecidos, ou de forma análoga para o caso não saturado.

Uma outra contribuição deste trabalho que deve ser destacada se deve ao fato do modelo poro-elástico implementado levar em consideração a influência das pressões capilares, e da energia das interfaces proporcionando uma formulação energeticamente consistente para o problema não saturado. O modelo empregado foi

extraído dos diversos trabalhos de Oliver Coussy baseados na extensão do conhecido modelo de Biot.

Em se tratando do caso não saturado pode-se citar ainda como uma contribuição deste trabalho o emprego da variável de fluxo modificada (capítulo 7) com o intuito de viabilizar o emprego de soluções fundamentais simples para o problema não homogêneo. Vale salientar, contudo, que cuidados devem ser tomados nos limites de saturação e secagem no sentido de se evitar casos singulares.

A substituição da aproximação de pressão no domínio com intuito de obter o gradiente de pressão (através da derivada dessa aproximação) pela equação integral do gradiente das pressões proporcionou um melhora significativa na determinação dos gradientes de pressão viabilizando a solução do caso não saturado. Contudo esta substituição proporcionou um aumento significativo do número de graus de liberdade do problema, passando de cinco graus de liberdade por nó para nove, aumentando o tempo de processamento e conseqüentemente limitando a complexidade dos exemplos a serem simulados.

Observou-se como já se esperava uma importante dependência da precisão dos resultados em relação à qualidade da aproximação das integrais dos termos não lineares de domínio, devido à forte variação entre o nível de saturação e a pressão capilar influenciando diretamente no processo de convergência da análise.

Outro fator que contribuiu favoravelmente com a qualidade das respostas está ligado ao emprego de expressões analíticas em todas as integrais de domínio e contorno necessárias para resolução do problema.

O modelo desenvolvido neste trabalho torna possível abrir uma perspectiva de novos estudos e modelagens mais completas do problema poroso com o método dos elementos de contorno, para isso sugere-se: A adoção de algoritmos mais robustos de resolução de problemas através de uma possível paralelização tanto no nível de integração quando na resolução do sistema de equações. Outro aspecto importante a ser abordado que melhoraria significativamente a convergência do

problema não saturado está relacionado à adoção do algoritmo tangente consistente como desenvolvido para o caso saturado. O modelo não linear de Cam-Clay para o caso não saturado está entre os pontos a serem explorados, pois tal modelo levaria a representações mais precisas do comportamento de solos não saturados em regime de plastificação, levando-se em conta aspectos importantes como a pressão capilar e a energia das interfaces.

Diversas variações mais estáveis do modelo de Van-Genuchten podem ser estudadas com o intuito de melhorar a convergência do problema.

.

## Referências Bibliográficas

---

ABDULRAHEEM, A.;ZAMAN, M.;ROEGIERS, J. C. (1994). A finite-element model for ekofisk field subsidence. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v.10, n.4, p.299–310.

ABREU, E. (2007). **Modelagem e simulação computacional de escoamentos trifásicos em reservatórios de petróleo heterogêneos**. (Tese de Doutorado) -, IPRJ-UERJ.

ABREU, E.;DOUGLAS, J.;FURTADO, F.;MARCHESIN, D.;PEREIRA, F. (2006). Three-phase immiscible displacement in heterogeneous petroleum reservoirs. **Mathematics and Computers in Simulation**, v.73, n.1-4, p.2–20.

AIZINGER, V.;DAWSON, C.;COCKBURN, B.;CASTILLO, P. (2000). The local discontinuous galerkin method for contaminant transport. **Advances in Water Resources**, v.24, n.1, p.73–87.

ALONSO, E. E.;DELAGE, P. (1995). **Unsaturated Soil**. In: Proceeding of the International Congress on Unsaturated Soils (Unsat'95), . Paris, Vol. 3, Balkema, Rotterdam p.

ALONSO, E. E.;GENS, A.;JOSA, A. (1990). A constitutive model for partially saturated soils. **Geotechnique**, v.40, n.3, p.405–430.

ARAMAKI, G.;YASUHARA, W. (1981). Applications of the boundary element method for axysymmetric Biot's consolidation. **Engng Anal**, v.2, p.184 -191.

ARMERO, F.;CALLARI, C. (1999). An analysis of strong discontinuities in a saturated poro-plastic solid. **Int J Num Meth Eng** v.46, n.10, p.1673 - 1698.

ARNES, F. C.;LILLEJORD, H.;VIELER, A. (1996). Simulation forecasts complex flow streams from ekofisk. **Oil & Gas Journal**, v.94, n.44, p.69–75.

ARNOLD, D. N.;FALK, R. S.;WINTHER, R. (2007). Mixed finite element methods for linear elasticity with weakly imposed symmetry. **Mathematics of Computation**, v.76, n.260, p.1699–1723.

ATKINS, P. W. (1990). **Physical Chemistry**: Oxford University Press

BABU, S. N.;KARMA, K. S.;RATNAM, M. V. (1978). Consolidation due to shear loads distributed over a rectangular area. **Int J Numer Anal Methods Geomech**, v.2, p.329 - 342.

BAUMANN, C. E.;ODEN, J. T. (1999). A discontinuous hp finite element method for convection-diffusion problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.175, n.3-4, p.311–341.

BEAR, J. (1979). **Hydraulics of groundwater**: MCGRAW-HILL

BEER, G. (2001). **Programming the boundary element method – An introduction for engineers**. Chichester: WILEY

BELL, F. G.;DONNELLY, L. J.;GENSKE, D. D.;OJEDA, J. (2005). Unusual cases of mining subsidence from great britain, germany and Colombia. **Environmental Geology**, v.47, n.5, p.620–631.

BENALLAL, A. (2005). On localization modes in coupled thermo-hydro-mechanical problems. **C. R. Mecanique**, v.333, p.557–564.

BENALLAL, A.;COMI, C. (1996). Localization Analysis Via a Geometrical Method. **Int. J. Solids Structures**, v.33, p.99-119.

\_\_\_\_\_. (2002). Material instabilities in inelastic saturated porous media under dynamic loadings. **Int J Sol Struct**, v.39, p.3693-3716.

\_\_\_\_\_. (2003). On numerical analyses in the presence of unstable saturated porous materials. **Int J Num Methods Eng**, v.56, p.883-910.

\_\_\_\_\_. (2003). Perturbation growth and localization in fluid-saturated inelastic porous media under quasi-static loadings. **J Mech Phys Solids**, v.51, p.851-899.

BIOT, M. A. (1941). General theory of three dimensional consolidation. **Journal of Applied Physics**, v.12, p.155-164.

\_\_\_\_\_. (1955). Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. **J Appl Phys**, v.26, p.182-185.

\_\_\_\_\_. (1956). Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid. **J Appl Phys**, v.27, p.459-467.



\_\_\_\_\_. (1962). Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. **Journal of applied Physics**, v.12, p.155-164.

\_\_\_\_\_. (1972). Theory of finite deformation of porous solids. **Indiana University Mathematical Journal**, v.33, p.1482-1498.

\_\_\_\_\_. (1977). Variational Lagrangian-thermodynamics of non-isothermal finite strain. Mechanics of porous solid and thermomolecular diffusion. **International Journal of Solids and Structures**, v.12, p.155-164.

\_\_\_\_\_. (1977). Variational-Lagrangian irreversible thermodynamics of initially-stressed solids with thermomolecular diffusion and chemical reactions. **J. Mech. Phys. Solids**, v.25, p.289-307.

BIOT, M. A.; WILLIS, D. G. (1957). The elastic coefficients of the theory of consolidation. **Journal of Applied Mechanics**, v.24, p.594-601.

BISHOP, A. W. (1959). The Principle of effective stress. **Teknisk Ukeblad**, v.39, p.859-863.

BORBA, G. L. (1992). **Formulação Direta do Método dos Elementos de Contorno para Tratamento do Estado Plano da Poroelasticidade Acoplada**. Campinas. (Discertação de Mestrado) -, UNICAMP.

BORGES, M. (2006). **Injeção de traçadores em reservatórios de petróleo: modelagem multi-escala e simulação numérica**. (Tese de Doutorado) -, LABTRAN-UERJ.

BORJA, R. I. (2004). Cam-Clay plasticity. Part V: A mathematical framework for three-phase deformation and strain localization analyses of partially saturated porous media. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v.193, p.5301-5338.

\_\_\_\_\_. (2006). On the mechanical energy and effective stress in saturated and unsaturated porous continua. **International Journal of Solids and Structures**, v.43, p.1764-1786.

BOSO, D. P.; LEFIK, M.; SCHREFLER, B. A. (2005). A multilevel homogenised model for superconducting strand thermomechanics. **Cryogenics**, v.45, p.259-271.

BOTTA, A. S. (2003). **Método dos Elementos de Contorno para análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformações**. São Carlos. (Tese de Doutorado) - Departamento de Estruturas, EESC/USP. 170 p.

BOTTA, A. S.; VENTURINI, W. S.; BENALLAL, A.; WUTZOW, W. W. (2005).

Poroelastic analysis using Boundary Element Method considering fluid compressibility. **XXVI CILAMCE (Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering)**. Guarapari-BR

BOURBIÉ, T.; COUSSY, O.; ZINSZNER, B. (1987). **Acoustics of porous media**: Gulf Publishing Company

BREBBIA, C. A. D., J. (1984). **Boundary element: an introductory course**. Southampton: CML Publ.

BREBBIA, C. A. T., J.C.F.; WROBEL, L.C. (1984). **Boundary element techniques: Theory and applications in engineering**. Berlin: Springer-Verlag

BREZZI, F. (1974). On the existence, uniqueness and approximation of saddle-point problems arising from lagrange multipliers. **Math. Anal. Numér.**, v.8, p.129–151.

BROOKS, A. N.; HUGHES, T. J. R. (1982). Streamline upwind petrov-galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible navier-stokes equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.32, n.1-3, p.199–259.

BRUHAT, G. (1968), Ed. Eds. **Cours de Physique Générale - Thermodynamique**: Masson & Cie, 6 ed.

BUHAN, P. D.; CHATEAU, X.; DORMIEUX, L. (1998). The constitutive equations of finite strain poroelasticity in the light of a homogenization approach. **Europ. J. Mechanics A/Solids**, v.17, p.909-921.

CALLE, J. L. D.; DEVLOO, P. R. B.; GOMES, S. M. (2005). Stabilized discontinuous galerkin method for hyperbolic equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.194, n.17, p.1861–1874.

CAMPOS, J. C. B.; MESQUITA, E. (1996). **Teoria da Poroelasticidade Aplicada Ao Estudo da Estabilidade de Poços Em Um Campo de Tensões Não Hidrostático Usando O Método dos Elementos de Contorno**. In: X COLAPER,. Quito: Anais X Congresso Latinoamericano de Perforacion. Quito, 1996. v. 1. p. 316-332. p.

CAMPOS, J. C. B. D. (1995). **Solução de Problemas Poroelásticos Através do Método dos Elementos de Contorno**. Campinas. (Tese de Doutorado) -, UNICAMP.

CARMAN, P. C. (1937). Fluid flow through granular beds. **Chemical Engineering Research & Design**, v.15, p.150–156.

CARMELIET, J. (1996). Moisture transfer and durability of open reactive porous media. **5th Symposim on Building Physics in the Nordic**

**Countries.** Espoo, Finlande

CAVALCANTI, M. C.; TELLES, J. C. F. (2003). Biot's consolidation theory - application of BEM with time independent fundamental solutions for poroelastic saturated media. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.27, p.145–157.

CELIA, M. A.; RUSSEL, T. F.; HERRERA, I.; R. E, E. (1990). An eulerian-lagrangian localized adjoint method for the advection-diffusion equation. **Advances in Water Resources**, v.13, n.4, p.187–206.

CHARLIER, R.; SAMIER, P. (2002). Numerical simulation of the coupled behavior of faults during the depletion of a high-pressure/high-temperature reservoir. **SPE/ISRM Rock Mechanics Conference**

CHATEAU, X.; DORMIEUX, L. (1995). Homogenization of a non-saturated porous medium: Hill's lemma and applications. **C. R. Acad. Sc.**, v.320, n.IIb, p.627-634.

\_\_\_\_\_. (1998). **Comportement élastique d'un milieu poreux non saturé par homogénéisation**. In: Ouvrages géomatériaux, modélisations multi-échelles. Paris: Hermès. p.

\_\_\_\_\_. (1998). **A micromechanical approach to the behaviour of unsaturated porous media**. In: Poromechanics, A tribute to M. A. Biot. Proceedings of the Biot conference on poromechanics. Balkema, Rotterdam. p.

\_\_\_\_\_. (2002). Micromechanics of saturated and unsaturated porous media. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v.26, n.6, p.831 - 844.

CHAVENT, G.; JAFFRÉ, J. (1986). **Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation - Single Phase, Multiphase and Multicomponent Flows Through Porous Media, Studies in Mathematics and its Applications**. North Holland, Amsterdam, v.17 (Studies in Mathematics and its applications)

CHENG, A. H. D.; DETOURRNAY, E. (1998). On singular integral equations and fundamental solutions of poroelasticity. **Int J Solid Struct** v.35, p.4521-4555.

CHENG, A. H. D.; LIGGETT, J. A. (1984). Boundary integral equation method for linear porous-elasticity with applications to fracture propagation. **Int J Num Meth Eng**, v.20, p.279 - 296.

\_\_\_\_\_. (1984). Boundary integral equation method for linear porous-elasticity with applications to soil consolidation. **Int J Num Meth Eng**, v.20, p.255 - 278.

CHENG, A. H. D.;PRENDELEANU, M. (1987). Transient boundary element formulation for linear poroelasticity. **Int J Appl Math Modelling** v.11, p.285 - 290.

CLEARY, M. P. (1977). Fundamental solutions for a fluid-saturated porous solid. **Int J Solid Struct**, v.13, p.785-806.

COCKBURN, B.;SHU, C.-W. (1989). Tvb runge-kutta local projection discontinuous galerkin finite-element method for conservation-laws II: General framework. **Mathematics of Computation**, v.52, n.186, p.411-435.

COCKBURN, B.;SHU, C. W. (2001). Runge-kutta discontinuous galerkin methods for convection-dominated problems. **Journal of Scientific Computing**, v.16, p.173–261.

CODA, H. B. (1993). **Análise tridimensional transiente de estruturas pela combinação entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos**. São Carlos. (Tese de Doutorado) -, EESC/USP.

\_\_\_\_\_. (2000). **Contribuição à Análise Dinâmica Transiente de Meios Cotínuos pelo Método dos Elementos de Contorno**. São Carlos. (Tese de Livre Docência) -, USP.

\_\_\_\_\_. (2001). Dynamic and static non-linear analysis of reinforced media: a BEM/FEM coupling approach. **Computers & Structures**, , v.79, p.2751-2765.

COLLIN, F.;LI, X. L.;RADU, J. P.;CHARLIER, R. (2002). Thermo-hydro-mechanical coupling in clay barriers. **Engineering Geology**, v.64, p.179–193.

COOK, C. C.;ANDERSEN, M. A.;HALLE, G.;GISLEFOSS, E.;BOWEN, G. R. (2001). An approach to simulating the effects of water-induced compaction in a north sea reservoir. **SPE Reservoir Evaluation & Engineering**, v.4, n.2, p.121–127.

COUSSY, O. (1989). Thermodynamics of saturated porous solids infinite deformation. **European Journal of Mechanics, A/Solids**, v.8, p.1 - 14.

\_\_\_\_\_. (1991). **Mécanique des Milieux Poreux**: Technip

\_\_\_\_\_. (1995). **Mechanics of Porous Continua**: John Wiley & Sons

\_\_\_\_\_. (2004). **Poromechanics**: John Wiley & Sons

\_\_\_\_\_. (2007). Revisiting the constitutive equations of unsaturated porous solids using a Lagrangian saturation concept. **Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.**, v.In Press.

COUSSY, O.;EYMARD, R.;LASSABATÈRE, T. (1998). Constitutive modelling of unsaturated drying deformable materials. **J. of Engineering Mechanics**, v.124, p.658-667.

COUSSY, O.;FLEUREAU, J. M. (2002). **Mécanique des sols non saturés**: Hermes Science

COWIN, S. C. (1999). Bone poroelasticity. **Journal of Biomechanics**, v.32, p.217-238.

CRAIG, J. R.;RABIDEAU, A. J. (2006). Finite difference modeling of contaminant transport using analytic element flow solutions. **Advances in Water Resources**, v.29, p.1075–1087.

CRUSE, T. A. (1969). Numerical solutions in three dimensional elastostatics. **Int. Journal of Solid and Structures**, v.5., p.1259-1274.

\_\_\_\_\_. (1974). An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. **Computer and Structures**, v.4, p.741-754.

DAGAN, G. (1989). **Flow and transport in porous formations**: SPRINGER VERLAG

DANGLA, P.;COUSSY, O. (1996). **Drainage and drying of deformable porous materials: one-dimensional case study**. In: Proceedings of the UITAM symposium on Mechanics of Granular and Prous Materials. Cambridge: Kluwer Academic Publishers. 15-17 July 1996. p.

\_\_\_\_\_. (1998). **Non-linear poroelasticity fou unsaturated porous materials: an energy approach**. In: Poromechanics, A tribute to M. A. Biot. Proceedings of the Boit conference on poromechanics. Balkema, Rotterdam. p.

DANGLA, P.;COUSSY, O.;EYMARD, R. (1998). A Vanishing Diffusion Process In Unsaturated Soils. **Int. J. Non-Linear Mechanics**, v.33, n.6, p.1027-1037.

DANGLA, P.;COUSSY, O.;OLCHITZKY, E.;IMBERT, C. (2000). **Non linear thermo-mechanical couplings in unsaturated clay barriers**. In: Theoretical and numerical methods in continuum mechanics of porous materials, IUTAM Symposium: Kluwer Academic Publishers. p.

DANGLA, P.;MALINSKY, L.;COUSSY, O. (1998). **Platicity and imbibition-drainages curves for unsaturated soils: a unified approach, Numerical Models in Geomechanics**. In: Numog VI. Balkema, Rotterdam. p.

DARGUSH, G. F.;BANERJEE, P. K. (1989). A time domain boundary element method for poroelasticity. **Int J Num Meth Eng**, v.28, p.2423-2449.

\_\_\_\_\_. (1991). A boundary element method for axisymmetric soil consolidation. **Int J Solid Struct**, v.28, p.897-915.

DAVID, T.;SETTARI, A. (2002). New iterative coupling between a reservoir simulator and a geomechanics module. **SPE/ISRM Rock Mechanics Conference**

DEFAY, R.;PRIGOGINE, I. (1951). **Tension superficielle et adsorption**: Desoer

DEGRANDE, G.;ROECK, G. D.;BROECK, P. V. D.;SMEULDERS, D. (1998). Wave Propagation in Layered Dry Saturated and Unsaturated Poroelastic Media. **Int. J. Solids Structures**, v.35, n.34-35, p.4753-4778.

DICARLO, D. A. (2005). Modeling observed saturation overshoot with continuum additions to standard unsaturated theory. **Advances in Water Resources**, v.28, p.1021–1027.

DORMIEUX, L.;SANAHUJA, J.;MAGHOUS, S. (2006). Influence of capillary effects on strength of non-saturated porous media. **C. R. Mecanique**, v.334, p.19-24.

DOUGLAS, J.;EWING, R. E.;WHEELER, M. F. (1983). A time-discretization procedure for a mixed finite element approximation of miscible displacement in porous media. **Numerique - Numerical Analysis**, v.17, p.249–265.

DOUGLAS, J.;FURTADO, F.;PEREIRA, F. (1997). On the numerical simulation of waterflooding of heterogeneous petroleum reservoirs. **Computational Geosciences**, v.1, p.155–190.

DOUGLAS, J.;PEREIRA, F.;YEH, L. M. (2000). A locally conservative eulerian-lagrangian numerical method and its application to nonlinear transport in porous media. **Computation Geosciences**, v.4, n.1, p.1–40.

DOUGLAS, J.;RUSSEL, T. F. (1982). Numerical-methods for convection-dominated diffusionproblems based on combining the method of characteristics with finite-element or finite-difference procedures. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v.19, n.5, p.871–885.

DULLIEN, F. A. L. (1992). **Porous media-Fluid Transport and pore structure**: Academic Press

EHLERS, W.;VONK, W. (1997). On shear band localization phenomena of liquid-saturated granular elasto-plastic porous solid materials accounting for fluid viscosity and micropolar solid rotations. **Mech Cohes-frict Materials**, v.2, p.301-320.

FAUCHET, B.;CARRÈRE, A.;TARDIEU, B. (1992). Poroplasticity: modelling of pore pressure effects in concrete and rocks. **Water Power and Dam**

**Construction**, p.21-27.

FAUCHET, B.;COUSSY, O.;CARRÈRE, A.;TARDIEU, B. (1992). Poroplastic analysis of concrete dams and their foundations. **Dam Engineering**, v.2, p.165-192.

FENG, Z.-Q.;HJIAJ, M.;SAXCE, G. D.;MRO, Z. (2006). Effect of frictional anisotropy on the quasistatic motion of a deformable solid sliding on a planar surface. **Comput Mech**, v.37, p.349–361.

FERAILLE-FRESNET, A.;TAMAGNY, P.;EHLACHER, A.;SERCOMBE, J. Thermo-Hydro-Chemical Modelling of a Porous Medium Submitted to High Temperature: An Application to an Axisymmetrical Structure. **Mathematical and Computer Modelling**, v.37, p.641-650.

FERRO, M. A. C. (2002). **Poroelasticidade dinâmica acoplada usando o método dos elementos de contorno**. Rio de Janeiro. (Tese de Doutorado) -, Universidade Federal do Rio de Janeiro. 195 p.

FERRO, N. C. P. (1993). **Uma combinação MEC/MEF para análise de fundação enrijecidas por estacas**. São Carlos. (Dissertação de mestrado) -, EESC/USP.

FOLTRAN, C. E. (1999). **Análise de problemas planos em regime elasto-plástico pelo método dos elementos de contorno**. Campinas. (Dissertação de mestrado) -, Universidade Estadual de Campinas.

FRANCA, L. P.;VALENTIN, F. (2000). On an improved unusual stabilized finite element method for the advective-reactive-diffusive equation. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.190, p.1785–1900.

FREDLUND, D. G.;ANQING, X. (1994). Equations for Soil-water characteristic curve. **Can. Geotech. J.**, v.31, p.521-532.

FREDLUND, D. G.;MORGENSTERN, N. R. (1977). Stress state variables for unsaturated soils. **ASCE Geotech Eng.**, v.103, p.447–446.

FREDLUND, D. G.;RAHARDJO, H. (1993). **Soil Mechanics for Unsaturated Soils**: J. Wiley & Sons

FREEZE, R. A. (1977). Stochastic-conceptual analysis of one-dimensional groundwater flow in nonuniform homogeneous mediareply. **Water Resouces Research**, v.13, n.2, p.480–480.

FRIAS, D. G.;MURAD, M. A.;PEREIRA, F. (2004). Stochastic computational modelling of highly heterogeneous poroelastic media with long-range correlations. **International Journal for Numerical and Analytical Methods un Geomechanics**, v.28, n.1, p.1–32.

FURTADO, F.;PEREIRA, F. (1998). Scaling analysis for two-phase immiscible flow in heterogeneous porous media. **Computational and Applied Mathematics**, v.17, n.3, p.237–263.

\_\_\_\_\_. (2003). Crossover from nonlinearity controlled to heterogeneity controlled mixing in two-phase porous media flow. **Computational Geosciences**, v.7, p.115–135.

GALEÃO, A. C.;CARMO, E. G. D. D. (1988). A consistent approximate upwind petrov-galerkin method for convection-dominated problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.68, n.1, p.83–95.

GALLIPOLI, D.;GENS, A.;SHARMA, R.;VAUNAT, J. (2003). An elasto-plastic model for unsaturated soil incorporating the effects of suction and degree of saturation on mechanical behaviour. **Géotechnique**, v.53, n.1, p.123–135.

GAMA, R. M. S. D.;MARTINS-COSTA, M. L. (1997). Incompressible fluid flow and heat transfer through a nonsaturated porous medium. **Computational Mechanics**, v.20, p.479-494.

GATMIRI, B.;DELAGE, P.;CERROLAZA, M. (1998). UDAM: A powerful finite element software for the analysis of unsaturated porous media. **Advances in Engineering Software**, v.29, n.1, p.29-43.

GATMIRI, B.;JABBARI, E. (2005). Time-domain Green's functions for unsaturated soils. Part I: Two-dimensional solution. **International Journal of Solids and Structures**, v.42, p.5971–5990.

\_\_\_\_\_. (2005). Time-domain Green's functions for unsaturated soils. Part II: Three-dimensional solution. **International Journal of Solids and Structures**, v.42, p.5991–6002.

GAWIN, D.;MAJORANA, C. E.;SCHREFLER, B. A. (1999). Numerical analysis of hygro-thermal behaviour and damage of concrete at high temperature. **Mechanics of Cohesive-Frictional Materials**, v.4, p.37-74.

GAWIN, D.;PESAVENTO, F.;SCHREFLER, B. A. (2003). Modelling of hygro-thermal behaviour of concrete at high temperature with thermo-chemical and mechanical material degradation. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v.192, p.1731–1771.

\_\_\_\_\_. (2006). Towards prediction of the thermal spalling risk through a multi-phase porous media model of concrete. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v.In Press.

GELHAR, L. W. (1986). Stochastic subsurface hidrology from theory to applications. **Water Resources Research**, v.22, n.9, p.S135–S145.



- \_\_\_\_\_. (1993). **Stochastic subsurface hydrology**: Springer Verlag
- GENUCHTEN, M. T. V. (1980). A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils. **Soil Sci. Soc. Am. J.**, v.44, p.892-898.
- GIBSON, R. E.;MCNAMEE, J. (1963). A three-dimensional problem of the consolidation of a semi-infinite clay stratum. **Q J Mech Appl Math**, v.16, p.115-127.
- GIBSON, R. E.;SCHIFFMAN, R. L.;PU, S. L. (1970). Plane strain and axially symmetric consolidation of clay layer on a smooth impervious base. **Quart J Mech Appl Math**, v.23, p.505-519.
- GIDDA, T.;CANN, D.;STIVER, W. H.;ZYTNER, R. G. (2006). Airflow dispersion in unsaturated soil. **Journal of Contaminant Hydrology**, v.82, p.118– 132.
- GIDLEY, J. L. (1990). **Recent Advances In Hydraulic Fracturing, Monograph**: Society of Petroleum Engineers, v.12
- GIRAUD, A.;HOMAND, F.;ROUSSET, G. (1998). Thermoelastic and thermoplastic response of a double-layer porous space containing a decaying heat source. **Int J Numer Anal Methods Geomech**, v.22, p.133-149.
- GLIMM, J.;LINDQUIST, W. B.;PEREIRA, F.;ZHANG, Q. (1993). A theory of macrodispersion for the scale-up problem. **Transport in Porous Media**, v.13, n.1, p.97–122.
- GLIMM, J.;SHARP, D. H. (1991). A random field model for anomalous diffusion in heterogeneous porous-media. **Journal of statistical Physics**, v.62, n.1-2, p.415–424.
- GOSAVI, S. V. (2006). **An Integrated Finite Element and Finite Volume Code to Solve Thermo-Hydro-Mechanical Problems in Porous Media**. Manhattan, Kansas. (Tese de Doutorado) - Department of Mechanical Engineering, College of Engineering, Kansas State University. 159 p.
- GRAY, W. G.;SCHREFLER, B. A. (2001). Thermodynamic approach to effective stress in partially saturated porous media. **Eur. J. Mech. A/Solids**, v.20, p.521–538.
- GRGIC, D.;GIOT, R.;HOMAND, F.;GIRAUD, A. (2005). Effect of suction on the mechanical behaviour of iron ore rock. **International Journal For Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v.29, p.789–827.
- GRGIC, D.;HOMAND, F.;GIRAUD, A. (2006). Modelling of the drying and flooding of underground iron mines in Lorraine (France). **International**

**Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences**, v.43, p.388–407.

GUERRERO, A. O.;RUDOLPH, D. L.;CHERRY, J. A. (1999). Analysis of long-term land subsidence near Mexico City: field investigations and predictive modeling. **Water Resources Research**, v.35, n.11, p.3327–3341.

GUEVARA JR., N. O. (2006). **Implementação computacional de um modelo constitutivo para o tratamento de poro-colapso em meios porosos**. Rio de Janeiro. (Discertação de Mestrado) -, Universidade Federal do Rio de Janeiro. 125 p.

HONG, H. P. (1992). One-dimensional consolidation with uncertain properties. **Canadian Geotechnical Journal**, v.29, n.1, p.161–165.

HOUPEURT, A. (1974). **Mécanique des fluides dans les milieux poreux, critiques et recherches** Editions Technip

HUGHES, T. J. R.;FRANCA, L. P.;HULBERT, G. M. (1989). A new finite-element formulation for computational fluid-dynamics .8. the galerkin least-squares method for advective-diffusive equations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.73, n.2, p.173–189.

JOHN, V.;KNOBLOCH, P. (2007). On spurious oscillations at layers diminishing (sold) methods for convection-diffusion equations: Part ia review. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.196, n.17-20, p.2197–2215.

JOHNSON, C. (1990). **Numerical solutions of partial differential equations by the finite element method**: Cambridge University Press

KAMALIAN, M.;JAFARI, M. K.;SOHRABI-BIDAR, A.;RAZMKHAH, A.;GATMIRI, B. (2005). Time-domain two-dimensional site response analysis of non-homogeneous topographic structures by a hybrid BE/FE method. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v.In Press.

KHALILI, N.;KHABBAZ, M. H.;VALLIAPPAN, S. (2000). An effective stress based numerical model for hydro-mechanical analysis on unsaturated porous media. **Computational Mechanics**, v.26, p.178-184.

KHALILI, N.;LORET, B. (2001). An elasto-plastic model for non-isothermal analysis of flow and deformation in unsaturated porous media: formulation. **International Journal of Solids and Structures**, v.38, p.8305-8330.

KUROKI, T.;ITO, T.;ONISHI, K. (1982). Boundary element method in Biot's linear consolidation. **Int J Appl Math Modelling**, v.6, p.105.

LARSSON, J.;LARSSON, R. (2000). Finite-element analysis of localization of deformation and fluid pressure in an elastoplastic porous medium. **Int J Solids Struc**, v.37, n.48/50, p.7231-7257.

LARSSON, R.;RUNESSON, K.;STURE, S. (1996). Embedded localization band in undrained soil based on regularized strong discontinuity-Theory and FE-analysis. **Int J Solids Struc**, v.33, p.3081-3101.

LASSABATÈRE, T. (1994). **Couplages hydromécaniques en milieu poreux non saturé avec changement de phase: application au retrait de dessiccation**. (Tese de Doutorado) -, École Nationale des Ponts et Chaussées.

LAWTHER, R. (2006). On the straightness of eigenvalue interactions. **Comput Mech**, v.37, p.362–368.

LEAL, F. C. (2003). **Análise numérica de problemas termo-hidráulicos em meios porosos**. Rio de Janeiro. (Dissertação de Mestrado) -, PUC-RIO. 90 p.

LEITE, L. G. S. (2007). **Desenvolvimento de Modelos Numéricos Para Análise de Problemas de Interação de Domínios Bidimensionais**. São Carlos. (Tese de Doutorado) - Departamento de Estruturas, EESC-USP. 181 p.

LEITE, L. G. S.;CODA, H. B.;VENTURINI, W. S. (2003). Two-dimensional solids reinforced by thin bars using the boundary element method. *Engineering analysis with boundary elements*. v.27, p.193-201.

LEMAITRE, J.;CHABOCHE, J.-L. **Mécanique Des Matériaux Solides**: Dunod

LEVEQUE, R. J. (2002). **Finite volume methods for hyperbolic problems**: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS

LEWIS, R. W.;MASTERS, L.;REES, L. (2006). Coupled and uncoupled contaminant transport using advanced finite volume methods. **Comput Mech**, v.37, p.292–310.

LEWIS, R. W.;SCHREFLER, B. A.;RAHMAN, N. A. (1998). Finite element analysis of multiphase immiscible flow in deforming porous media for subsurface systems. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v.14, n.2, p.135–149.

LEWIS, R. W.;SHREFLER, B. A. (1998). **The finite element method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media**: John Wiley & Sons

LI, C.;BORJA, R.;REGUEIRO, R. (2004). Dynamics of porous media at finite strain. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.193, p.3837.

LI, X.;LI, R.;SCHREFLER, B. A. (2006). A coupled chemo-thermo-hydro-

mechanical model of concrete at high temperature and failure analysis. **Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.**, v.30, p.635–681.

LI, X.;LIU, Z.;LEWIS, R. W. (2005). Mixed finite element method for coupled thermo-hydro-mechanical process in poro-elasto-plastic media at large strains. **Int. J. Numer. Meth. Engng.**, v.64, p.667-708.

LI, X.-L. (1999). **Comportement Hydromécanique des Sols Fins: de l'état saturé à l'état non saturé.** (Tese de Doutorado) - Faculté des Sciences Appliquées, Université de Liège.

LORET, B.;HARRIRECHE, O. (1991). Acceleration waves, flutter instabilities and stationary discontinuities in inelastic porous media. **J Mech Phys Solids**, v.39, p.569-606.

LORET, B.;KHALILI, N. (2000). A three-phase model for unsaturated soils. **Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.**, v.24, p.893-927.

\_\_\_\_\_. (2002). An effective stress elastic–plastic model for unsaturated porous media. **Mechanics of Materials**, v.34, p.97–116.

LORET, B.;SIMÕES, F. M. F.;MARTINS, J. A. C. (1997). Growth and Decay of Acceleration Waves in Non-Associative Elastic-Plastic Fluid-Saturated Porous Media. **Inf. J. Solids Structures**, v.34, n.13, p.1583-1608.

LORET, V.;PREVOST, J. H. (1991). Dynamic strain localization in fluid-saturated porous media. **J Eng Mechanics (ASCE)**, v.117, n.4, p.907-922.

LOULA, A. F. D.;ROCHINHA, F. A.;MURAD, M. A. (1995). Higher-order gradient postprocessings for second-order elliptic problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.128, p.361–381.

LUIZ, T. F. (2006). **Aplicação do Método dos Elementos de Contorno a Problemas de Potencial Tridimensional em Meios Heterogêneos.** Rio de Janeiro. (Tese de Doutorado) -, Universidade Federal do Rio de Janeiro. 101 p.

MACIEL, D. N. (2003). **Determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão Estáticos e Dinâmicos via MEC com Integração Analítica em Coordenadas Locais.** São Carlos. (Discertação de Mestrado) - Departamento de Estruturas, EESC-USP. 139 p.

MAIER, G.;COCCHETTI, G. (2000). Shakedown analysis in poroplasticity by linear programming. **Int J Num Methods Eng**, v.47, p.141-168.

\_\_\_\_\_. (2002). Fundamentals of direct methods in poroplasticity. **Foundations of civil and environmental engineering**, v.1, p.111-136.

MAIER, G.;COMI, C. (1997). **Variational finite element modelling in**

**poroplasticity**. In: Recent Developments in Computational and Applied Mechanics. Barcelona. 180-199 p.

MANDELBROT;WALLIS. (1968). Fractional brownian motions, fractional noises and applications. **SIAM Review**, v.10, p.422–437.

MANOHARAN, N.;DASGUPTA, S. P. (1995). Consolidation analysis of elasto-plastic soil. **Computers & Structures**, v.54, p.1005-1021.

MAO, X.;PROMMER, H.;BARRY, D. A.;LANGEVIN, C. D.;PANTELEIT, B.;LI, L. (2006). Three-dimensional model for multi-component reactive transport with variable density groundwater flow. **Environmental Modelling & Software**, v.21, p.615–628.

MARSILY, G. (1986). **Quantitative hydrogeology**: Academic Press

MARTINS-COSTA, M. L.;GAMA, R. E. M. S. D. (1997). A Local Model for the Energy Transfer in a Saturated Static Mixture. **Meccanica**, v.32, p.515–528.

MASTERS, I.;PAO, W. K. S.;LEWIS, R. W. (2000). Coupling temperature to a double-porosity model of deformable porous media. **Int. J. Numer. Meth. Engng**, v.49, p.421-438.

MAVCO, G.;NUR, A. (1997). The effect of a percolation threshold in the kozeny-carman relation. **Geophysics**, v.62, p.1480–1482.

MCNAMEE, J.;GIBSON, R. E. (1960). Plane strain and axially symmetric problems of the consolidation of a semi-infinite clay stratum. **Quart J Mech Appl Math**, v.13, p.210-227.

MENDES, M. A. (2008). **Modelagem Computacional de Escoamento Bifásico em Meios Porosos Heterogêneos com Acoplamento Geomecânico**. Petropolis. (Tese de Doutorado) -, Laboratório Nacional de Computação Científica.

MERODO, J. A. F.;PASTOR, M.;MIRA, P.;TONNI, L.;HERREROS, M. I.;GONZALEZ, E.;TAMAGNINI, R. (2004). Modelling of diffuse failure mechanisms of catastrophic landslides. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.193, n.27-29, p.2911–2939.

MESQUITA, E.;CAMPOS, J. C. B. (1996). **Two Classical Elasticity Problems Revisited By Quasi-Static Poroelastic Bem Implementation**. In: 11 ASCE ENGINEERING MECHANICS SPECIALTY CONFERENCE. Miami: Proceedings 11 ASCE ENGINEERING MECHANICS SPECIALTY CONFERENCE. FLORIDA, USA : ASCE, 1996. v. 1. p. 1078-1081. p.

MESQUITA, E.;CAMPOS, J. C. B.;BORBA, G. L. (1993). **Boundary Element Method Applied To Fully Coupled Transient Poro- Elasticity**. In: XII COBEM. Brasília: ANAIS XII COBEM. BRASILIA : ABCM, 1993. v. 1. p. 225-

228. p.

MICHALOWSKI, R. L.; DAWSON, E. M. (2002). Three-dimensional analysis of limit loads on Mohr-Coulomb Soil. **Foundations of civil and environmental engineering**, v.1, p.137-147.

MINKOFF, S. E.; STONE, C. M.; BRYANT, S.; PESZYNSKA, M.; WHEELER, M. F. (2003). Coupled fluid flow and geomechanical deformation modeling. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v.38, n.1-2, p.37-56.

MIZUKAMI, A.; HUGHES, T. J. R. (1985). A petrov-galerkin finite-element method for convection-dominated flows an accurate upwinding technique for satisfying the maximum principle. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v.50, n.2, p.181-193.

MOSE, R.; SIEGEL, P.; ACKERER, P.; CHAVENT, G. (1994). Application of the mixed hybrid finite-element approximation in a groundwater-flow model luxury or necessity. **Water Resources Research**, v.30, n.11, p.3001-3012.

MURAD, M. A.; LOULA, A. F. D. (1994). On stability and convergence of finite-element approximations of biots consolidation problem. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.37, n.4, p.645-667.

MURAD, M. A.; THOMEE, V.; LOULA, A. F. D. (1996). Asymptotic behavior of semidiscrete finite-element approximations of biot's consolidation problem. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v.33, n.3, p.1065-1083.

NÉRON, D. (2004). **Sur une stratégie de calcul pour les problèmes multiphysiques**. Cachan. (Tese de Doutorado) -, École Normale Supérieure de Cachan. 144 p.

NESSYAHU, H.; TADMOR, E. (1990). Non-oscillatory central differencing for hyperbolic conservation laws. **Journal of Computational Physics**, v.87, n.2, p.408-463.

NISHIMURA, N.; KOBAYASHI, S. (1989). A boundary integral equation method for consolidation problems. **Int J Solid Struct**, v.25, p.1-21.

NOURI, A.; VAZIRI, H.; BELHAJ, H.; ISLAM, R. (2006). Sand-production prediction: a new set of criteria for modeling based on large-scale transient experiments and numerical investigation. **SPE Journal**, v.11, n.2, p.227-237.

OBEID, W.; ALLICHE, A.; MOUNAJED, G. (2001). Identification of the Physical Parameters Used in the Thermo-Hygro-Mechanical Model. **Transport in Porous Media**, v.45, p.215-239.

OBEID, W.; MOUNAJED, G.; ALLICHE, A. (2001). Mathematical formulation os thermo-higro-mechanical coupling problem in non-saturated porous

media. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v.190, p.5105-5122.

OETTL, G.;STARK, R. F.;HOFSTETTER, G. (2004). Numerical simulation of geotechnical problems based on a multi-phase finite element approach. **Computers and Geotechnics**, v.31, n.8, p.643–664.

OLCHITZKY, E. (2002). **Couplage hydromécanique et perméabilité d'une argile gonflante non saturée sous sollicitations hydriques et thermiques**. (Tese de Doutorado) -, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

OLIVELLA, S.;GENS, A. (2000). Vapour Transport in Low Permeability Unsaturated Soils with Capillary Effects. **Transport in Porous Media**, v.40, p.219–241.

OLIVELLA, S.;GENS, A.;CARRERA, J.;ALONSO, E. E. (1996). Numerical formulation for a simulator (code bright) for the coupled analysis of saline media. **Engineering Computations**, v.13, n.7, p.87–&.

ONAIISI, A.;SAMIER, P. (2002). Management of stress sensitive reservoirs using two coupled stress-reservoir simulation tools : Ecl2vis and ath2vis. **International Petroleum Exhibition and Conference**

PACCOLA, R. R. (2004). **Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da combinação entre o MEC e o MEF**. São Carlos. (Tese de Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC/USP. 190 p.

PACCOLA, R. R.;CODA, H. B. (2006 ). **Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da combinação entre o MEC e o MEF**. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v.7, n.30, p.135-156.

PACCOLA, R. R.;VANALLI, L.;CODA, H. B. (2003). 3D Laminated Frame Finite Element - Linear Analysis. **CILAMCE 2003 - XXIV IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING**. Ouro Preto - MG

\_\_\_\_\_. (2003). A Study of a Shear Locking Free Finite Element Based on Laminated Kinematics. **CILAMCE 2003 - XXIV IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING**. Ouro Preto - MG

PAN, E. (1999). Green's functions in layered poroelastic half-spaces. **Int J Num Anal Meth Geomech**, v.23, p.1631-1653.

PAN, E.;MAIER, G. (1997). A symmetric boundary integral approach to transient poroelastic analysis. **Computational Mechanics**, v.19, p.169-178.

PARK, K. H.;BANERJEE, P. K. (2002). Two- and three-dimensional soil consolidation by BEM via particular integral. **Comp Methods Appl Mech Engrg**, v.191, p.3233-3255.

PEREIRA, J.-M.;WONG, H.;DUBUJET, P.;DANGLA, P. (2005). Adaptation of existing behaviour models to unsaturated states: Application to CJS model. **Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.**, v.29, p.1127–1155.

PHAM, Q. T. (2006). **Effets de la désaturation et de la resaturation sur l'argilite dans les ouvrages souterrains.** (Tese de Doutorado) -, Ecole Polytechnique.

PRAYONGPHAN, S.;ICHIKAWA, Y.;KAWAMURA, K.;SUZUKI, S.;CHAE, B.-G. (2006). Diffusion with micro-sorption in bentonite: evaluation by molecular dynamics and homogenization analysis. **Comput Mech**, v.37, p.369–380.

RAHMAN, N.;LEWIS, R. W. (1999). Finite element modelling of multiphase immiscible flow in deforming porous media for subsurface systems. **Computers and Geotechnics**, v.24, p.41–63.

RIBEIRO, S. S. (2007). **Novos esquemas centrais de diferenças finitas para a simulação de escoamentos multifásicos em reservatórios de petróleo.** (Tese de Doutorado) -, IPRJ-UERJ.

RIZZI, E.;LORET, B. (1999). Strain localization in fluid-saturated anisotropic elasto-plastic porous media. **Int J Eng Sci**, v.37, p.235-251.

RIZZO, F. J. (1967). An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatic. **Q J Appl Math**, v.25, p.83-95.

ROEGIERS, A. A. M. Z. E. J. C. (1994). A finite-element model for ekofisk field subsidence. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v.10, n.4, p.299–310.

RUBIN, Y. (2003). **Applied stochastic hydrogeology:** Oxford University Press

RUNESSON, K.;LARSSON, R.;STURE, S. (1998). Localization in hyperelasto-plastic porous solids subjected to undrained conditions. **Int J Solids Struct**, v.35, p.4239-4255.

RUNESSON, K.;PERIC, D.;STURE, S. (1996). Effect of pore fluid compressibility on localization in elastic-plastic porous solids under undrained conditions. **Int J Solids Struct**, v.33, p.1501-1518.

RUSSELL, A. R.;KHALILI, N. (2006). On the problem of cavity expansion in unsaturated soils. **Comput Mech**, v.37, p.311–330.

RUTQVISTA, J.;BÖRGESSON, L.;CHIJIMATSU, M.;KOBAYASHI, A.;JING,



L.;NGUYEN, T. S.;NOORISHAD, J.;TSANG, C.-F. (2001). Thermohydromechanics of partially saturated geological media: governing equations and formulation of four finite element models. **International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences**, v.38, p.105-127.

SALAZAR, G. E. C. (2006). **Modélisation du Séchage d'un Milieu Poreux Saturé Déformable: Prise en Compte de la Pression du Liquide**. (Tese de Doutorado) -, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers - Centre de Bordeaux. 152 p.

SAMIER, P.;ONAISSI, A.;FONTAINE, G. (2003). Coupled analysis of geomechanics and fluid flow in reservoir simulation. **SPE Reservoir Symposium**

SANAVIA, L.;PESAVENTO, F.;SCHREFLER, B. A. (2006). Finite element analysis of non-isothermal multiphase geomaterials with application to strain localization simulation. **Comput Mech**, v.37, p.331–348.

SCHIFFMAN, R. L.;FUNGAROLI, A. A. (1965). **Consolidation due to tangential loads**. In: Proc Sixth Int Conf on Soil Mechanics and Foundation Engineering. Montreal. 188-192 p.

SCHREFLER, B. A. (2002). Mechanics and thermodynamics of saturated/unsaturated porous materials and quantitative solutions. **Appl Mech Rev**, v.55, p.351-388.

SCHREFLER, B. A.;PESAVENTO, F. (2004). Multiphase flow in deforming porous material. **Computers and Geotechnics**, v.31, p.237–250.

\_\_\_\_\_. (2004). Multiphase flow in deforming porous material. **Computers and Geotechnics**, v.31, n.3, p.237–250.

SCHREFLER, B. A.;SCOTTA, R. (2001). A Fully coupled dynamic model for two-phase fluid flow in deformable porous media. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v.3223, p.3223-3246.

SCHREFLER, B. A.;ZHAN, X. Y. (1993). A fully coupled model for water-flow and air-flow in deformable porous-media. **Water Resources Research**, v.29, n.1, p.155–167.

SETTARI, A.;WALTERS, D. (1999). Advances in coupled geomechanical and reservoir modeling with applications to reservoir compaction. **SPE Reservoir Simulation Symposium**, p.14–17.

SETTARI, A.;WALTERS, D. A.;BEHIE, G. A. (2001). Use of coupled reservoir and geomechanical modelling for integrated reservoir analysis and management. **Journal of Canadian Petroleum Technology**, v.40, n.12, p.55–61.

SHENG, D.;SLOAN, S. W.;GENS, A. (2004). A constitutive model for unsaturated soils: thermomechanical and computational aspects. **Computational Mechanics**, v.33, n.6, p.453–465.

SIH, G. C.;MICHPOULOS, J. G.;CHOU, S. C. (1986). **Hygrothermoelasticity**: Martinus Nijhoff Publishers

SILVA, J. C. D. (2004). **Modelagem e simulação numérica do fluxo bifásico e do transporte multicomponente em meios porosos com interação termo-química**. Rio de Janeiro. (Tese de Doutorado) -, PUC-RIO. 115 p.

SILVA JR., F. I. D. (2003). **Modelagem e Implementação Computacional da Poroelasticidade Acoplada**. Campinas. (Dissertação de mestrado) -, Universidade Estadual de Campinas.

SIMOES, F. M. F.;MARTINS, J. A. C.;LORET, B. (1999). Instabilities in elastic-plastic fluid-saturated porous media harmonic wave versus acceleration wave analyses. **International Journal of Solids and Structures**, v.36, p.1277-1295.

SKEMPTON, A. W. (1961). **Effective stress in soil, concrete and rocks**. In: Pore Pressure and Suction in Soils. Londres: Butterworth. 4-16 p.

SOARES JR., D. (2004). **Análise Dinâmica de Sistemas não Lineares com Acoplamento do Tipo Solo-Fluido-Estrutura por intermédio do Método dos Elementos Finitos e do Método dos Elementos de Contorno**. Rio de Janeiro. (Tese de Doutorado) -, Universidade Federal do Rio de Janeiro. 235 p.

SUDICKY, E. A. (1986). A natural gradient experiment on solute transport in a sand aquiferspatial variability of hydraulic conductivity and its role in the dispersion process. **Water Resources Research**, v.22, n.13, p.2069–2082.

SULAK, R. M.;DANIELSEN, J. (1989). Reservoir aspects of ekofisk subsidence. **Journal of Petroleum Technology**, v.41, n.7, p.709–716.

TAYLOR, C.;HOOD, P. (1973). A numerical solution of the navier-stokes equations using the finite element technique. **Comput. & Fluids**, v.1, p.73–100.

TEATINI, P.;FERRONATO, M.;GAMBOLATI, G.;GONELLA, M. (2006). Groundwater pumping and land subsidence in the emilia-romagna coastland, italy: Modeling the past occurrence and the future trend. **Water Resources Research**, v.42, n.1, p.W01406.

TERZAGHI, K. (1936). The shearing resistance of saturated soils and the angle between the planes of shear. **First Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Engr.** Harvard University. Vol. I: 54-56 p.

TERZAGUI, K. (1925). Principales of soil mechanics, A summary of experimental results of clay and sand. **Eng. News Rec**, p.3-98.

THIMUS, J.-F. (1997). **Poromechanics: A Tribute to Maurice A.Biot - Proceedings of the Biot Conference on Poromechanics**. Balkema, Rotterdam

\_\_\_\_\_. (1998). **Poromechanics: A Tribute to Maurice A.Biot - Proceedings of the Biot Conference on Poromechanics**. Louvain-la-Neuve, Belgium

THOMÉE, V. (1997). **Galerkin finite element methods for parabolic problems**: Springer Verlarg

VARDOULAKIS, I. (1996). Deformation of water-saturated sand: II. Effect of pore water flow and shear banding. **Géotechnique**, v.46, p.457-472.

VAUNAT, J.;CANTE, J. C.;LEDESMA, A.;GENS, A. (2000). A stress point algorithm for an elastoplastic model in unsaturated soils. **International Journal of Plasticity**, v.16, p.121-141.

VENTURINI, W. S. (1988). **Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia**. São Carlos. (Tese de livre docência) -, EESC/USP.

WAN, R. G.;LIU, Y.;WANG, J. (2006). Prediction of volumetric sand production using a coupled geomechanics-hydrodynamic erosion model. **Journal of Canadian Petroleum Technology**, v.45, n.4, p.34-41.

WUTZOW, W. W. (2003). **Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Chapas com Enrijecimento**. São Carlos. (Discertação de Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC/USP. 166 p.

WUTZOW, W. W.;BOTTA, A. S.;VENTURINI, W. S.;BENALLAL, A. (2006). BEM Poroplastic Analysis Applied to Reinforced Solids. **VII BETEQ (Boundary Element Techniques International Conference)**. Paris

WUTZOW, W. W.;PAIVA, J. B. (2003). Análise de Chapas com Enrijecedores Via MEC com Condensação de Variáveis. **XXIV CILAMCE (Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering)**. Ouro Preto-BR

\_\_\_\_\_. (2004). Estudo de Chapas do MEC regularizadas com mínimos quadrados. **XXV CILAMCE (Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering)**. Recife-BR.

\_\_\_\_\_. (2004). Estudo de chapas via MEC com mínimos quadrados e integração analítica. **XXXI Jornadas Sudamericanas de Ingeniería**

**Estructural. Mendonça-AR**

\_\_\_\_\_. (2006). Analysis of Plates with Stiffeners by The Boundary Element Method with Condensation of Variables. **VII BETEQ (Boundary Element Techniques International Conference)**. Paris

\_\_\_\_\_. (2008). Analysis of stiffened plates by the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v.32, n.1, p.1-10.

WUTZOW, W. W.; VENTURINI, W. S. (2004). Análise de sólidos enrijecidos 2D utilizando a combinação MEC/MEF regularizada. **XXV CILAMCE (Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering)**. Recife-BR

WUTZOW, W. W.; VENTURINI, W. S.; BENALLAL, A.; BOTTA, A. S. (2005). Análise de sólidos poro-elásticos enrijecidos utilizando o Método dos Elementos de Contorno. **XXVI CILAMCE (Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering)**. Guarapari-BR

WUTZOW, W. W.; VENTURINI, W. S.; BENALLAL, A. (2006). Análises Poro-Elasto-Plásticas De Sólidos Reforçados com Emprego do MEC. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**, v.8, n.32, p.169-172.

XIE, M.; BAUER, S.; KOLDITZ, O.; NOWAK, T.; SHAO, H. (2006). Numerical simulation of reactive processes in an experiment with partially saturated bentonite. **Journal of Contaminant Hydrology**, v.83, p.122– 147.

YALE, D. P. (2002). Coupled geomechanics-fluid flow modeling: effects of plasticity and permeability alteration. **SPE/ISRM Rock Mechanics Conference**.

ZEITOUN, D. G.; BAKER, R. (1992). A stochastic approach for settlement predictions of shallow foundations. **Geotechnique**, v.42, n.4, p.617–629.

ZENISEK, A. (1984). The existence and uniqueness theorem in biot's consolidation theory. **Aplic. Matem.**, v.29, p.194–210.

ZHANG, D. (2001). **Stochastic methods for flow in porous media: coping with uncertainties**: Academic Press

ZHANG, H.; BAI, M.; ABOUSLEIMAN, Y.; ROEGIERS, J.-C. (1999). An elastoplastic analysis of non-isothermal consolidation. **Int J Numer Anal Methods Geomech**, v.23, p.1535-1557.

ZHANG, H. W.; SCHREFLER, B. A. (2000). Gradient-dependent plasticity model and dynamic strain localisation analysis of saturated and partially saturated porous media: one dimensional model. **Eur. J. Mech. A/Solids**, v.19, p.503–524.

\_\_\_\_\_. (2001). Uniqueness and localization analysis of elastic}plastic saturated porous media. **International Journal For Numerical And Analytical Methods In Geomechanics**, v.25, p.29-48.

ZHANG, H. W.;ZHOU, L.;SCHREFLER, B. A. (2005). Material instabilities of anisotropic saturated multiphase porous media. **European Journal of Mechanics A/Solids**, v.24, p.713–727.

ZHOU, Y.;RAJAPAKSE, R. K. N. D.;GRAHAM, J. (1998). A Coupled Themporoelastic Model With Thermo-Osmosis and Thermal Filtration. **Int. J. Solids Structures**, v.35, n.34-35, p.3548-3572.

\_\_\_\_\_. (1999). Coupled fields in a deformable unsaturated medium. **International Journal of Solids and Structures**, v.36, p.3730-3757.

ZOHDI, T. I.;KACHANOV, M.;SEVOSTIANOV, I. (2002). On perfectly plastic flow in porous material. **Int J Plasticity**, v.18, p.1649-1659.

ZUBKOV, V. V.;KOSHELEV, V. F.;LINKOV, A. M. (2007). Numerical modeling of hydraulic fracture initiation and development. **Journal Of Mining Science**, v.43, n.1, p.40–56.

.