

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS

LEANDRO WAIDEMAM

**Formulação do método dos elementos de contorno para placas enrijecidas
considerando-se não-linearidades física e geométrica**

São Carlos
2008

LEANDRO WAIDEMAM

**Formulação do método dos elementos de contorno para placas enrijecidas
considerando-se não-linearidades física e geométrica**

Tese apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos da Universidade de São
Paulo para a obtenção do título de Doutor
em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini

São Carlos

2008

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de
Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

W138f Waidemam, Leandro
 Formulação do método dos elementos de contorno para
placas enrijecidas considerando-se não-linearidades
física e geométrica/ Leandro Waidemam ; orientador Wilson
Sergio Venturini. -- São Carlos, 2008.

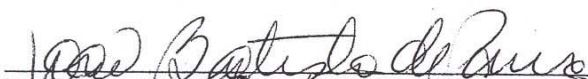
 Doutorado (Doutorado-Programa de Pós-Graduação e Área
de Concentração em Engenharia de Estruturas) -- Escola de
Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo,
2008.

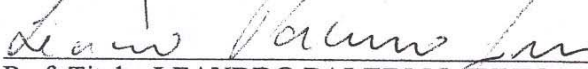
 1. Método dos elementos de contorno. 2. Placas.
3. Não-linearidade física. 4. Não-linearidade geométrica.
5. Enrijecedores. I. Título.


FOLHA DE JULGAMENTO


Candidato: Engenheiro **LEANDRO WAIDEMAM**


Tese defendida e julgada em 11/08/2008 perante a Comissão Julgadora:

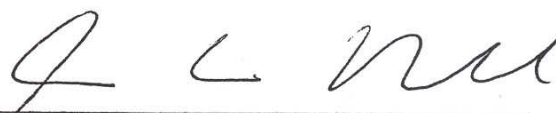

Prof. Associado **JOÃO BATISTA DE PAIVA (Orientador Substituto)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) Aprovado


Prof. Titular **LEANDRO PALERMO JUNIOR**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP) Aprovado


Prof. Dr. **HENRIQUE LINDENBERG NETO**
(Escola Politécnica/USP) Aprovado


Prof. Titular **JOSÉ ELIAS LAIERV**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) APROVADO


Prof. Associado **HUMBERTO BREVES CODA**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) APROVADO


Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)


Prof. Associado **GERALDO ROBERTO MARTINS DA COSTA**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*A Nossa Senhora, apoio fundamental,
dedico este trabalho.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, pai bondoso, e a Nossa Senhora, mãe querida, presenças constantes em minha vida.

Aos meus pais, Nelson e Evanir, pelos valores pessoais, pelo apoio incondicional e pela confiança depositada. Aos meus irmãos, Rafael e Juliane, por todos os momentos compartilhados.

À minha querida Lezzir, pelo carinho, pelo apoio, pela paciência e compreensão e sobretudo pelo companheirismo. Suas palavras de incentivo e sua presença constante foram fundamentais para a conclusão desta jornada.

Ao professor Wilson Sergio Venturini, cujos conhecimentos transmitidos, orientação e confiança permitiram a concretização deste trabalho. À amizade demonstrada e às oportunidades concedidas serei eternamente grato.

Ao professor e amigo Rogério de Oliveira Rodrigues, responsável pela minha iniciação na carreira científica.

Ao professor Vítor Leitão, pela co-orientação durante meu estágio de doutorado no Instituto Superior Técnico – IST/UTL. Ao amigo Carlos Tiago, pelo auxílio fundamental para minha ida a Lisboa.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas – SET/EESC pela presteza em servir e por todos os bons momentos de convivência.

Aos amigos do Departamento de Engenharia de Estruturas – SET/EESC por tornarem ainda mais prazerosa a execução deste trabalho.

À FAPESP, CAPES e CNPQ, cujo suporte financeiro possibilitou a execução deste trabalho.

Por fim, a todos aqueles que de alguma forma fizeram parte desta longa caminhada.

*“A mente que se abre a uma nova idéia jamais
voltará ao seu tamanho original”*

Albert Einstein

RESUMO

WAIDEMAM, L. **Formulação do método dos elementos de contorno para placas enrijecidas considerando-se não-linearidades física e geométrica**. 222 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar formulações do método dos elementos de contorno que contemplem as análises de placas considerando-se as não-linearidades física e geométrica e de placas enrijecidas considerando-se o comportamento não-linear físico do material.

As equações integrais utilizadas são baseadas na teoria de Kirchhoff para flexão de placas delgadas, sendo o efeito não-linear geométrico modelado a partir da teoria de Von Kármán. Os efeitos não-lineares físicos são introduzidos no sistema a partir da consideração de um campo de tensões iniciais, com a avaliação das regiões plastificadas realizada a partir do critério elastoplástico de von Mises com encruamento isótropo linear e particularizado para o estado plano de tensão.

A formulação dos enrijecedores é efetuada de forma alternativa, com o painel enrijecido considerado como um todo e submetido a campos de momentos e forças normais iniciais para induzir o ganho de rigidez. Apenas a parcela de enrijecimento na direção longitudinal do enrijecedor é considerada.

O sistema de equações algébricas é obtido a partir da discretização estrutural com elementos de contorno isoparamétricos lineares. Para a consideração dos efeitos de domínio da placa são utilizadas células triangulares com funções de aproximação linear. Já as integrais no domínio dos enrijecedores são transformadas em integrais no contorno dos mesmos, com as variáveis escritas apenas no seu eixo longitudinal. Toda a solução do sistema não-linear de equações é obtida a partir de uma formulação implícita, sendo os operadores tangentes consistentes explicitados ao longo do trabalho.

Por fim, vários exemplos são apresentados de forma a validar o correto desenvolvimento das formulações propostas.

Palavras-chave: método dos elementos de contorno; placas; não-linearidade física; não-linearidade geométrica; enrijecedores.

ABSTRACT

WAIDEMAM, L. **Boundary element method formulation for reinforced plates with combined geometrical and material nonlinearities.** 222 p. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

In this work a boundary element method formulation to analyse plates with combined geometrical and material nonlinearities was presented. Additionally an alternative boundary element method formulation was presented to analyse material nonlinear reinforced plates.

The boundary integral equations are derived based on Kirchhoff's theory. An initial stress field and von Kármán hypothesis are considered to take into account the material and geometrical nonlinearities, respectively. The elastoplastic von Mises criterion with linear isotropic hardening and particularized to the plane stress condition is considered to evaluate the plastic zone.

The effects of the reinforcements are taken into account by using a simplified scheme based on applying an initial stress field to correct locally the bending and stretching stiffness of the reinforcement regions. Only bending and stretching rigidities in the direction of the reinforcements are considered.

Isoparametric linear elements are used to approximate the boundary unknown values and triangular internal cells with linear shape functions are used to evaluate the plate domain value influences. The domain integrals due to the presence of the reinforcements are transformed to the reinforcement/plate interface. The nonlinear system of equations is solved by using an implicit scheme together with the consistent tangent operator presented along this paper.

Finally, several examples are presented to confirm the correct development of the proposed formulations.

Keywords: boundary element method; plates; material nonlinearity; geometrical nonlinearity; reinforcements.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Tensões atuantes em um elemento infinitesimal.....	12
Figura 2.2 – Componentes da força de superfície atuante em um tetraedro infinitesimal.....	13
Figura 2.3 – Sistema de coordenadas ns	16
Figura 2.4 – Deslocamento de um ponto situado sobre uma normal ao plano médio da placa.	19
Figura 2.5 – Tensões atuantes em uma placa plana.....	21
Figura 2.6 – Sentidos das tensões atuantes em um elemento da placa.	21
Figura 2.7 – Momentos e esforços cortantes atuantes sobre o plano médio de um elemento de placa.	23
Figura 2.8 – Esforços atuantes um elemento de placa.	26
Figura 3.1 – Forças atuantes sobre o plano médio de um elemento de placa na configuração deformada.	31
Figura 3.2 – Momentos atuantes sobre o plano médio de um elemento de placa na configuração deformada.	31
Figura 3.3 – Placa de domínio finito submetida a um carregamento distribuído.	36
Figura 3.4 – Momentos volventes em um canto i da placa.	41
Figura 3.5 – Contorno circular acrescido a um ponto Q de um canto da placa.	44
Figura 5.1 – Placa enrijecida: (a) materiais diferentes; (b) espessuras diferentes. ...	70
Figura 5.2 – Relação aditiva de momento.....	71
Figura 5.3 – Pannel enrijecido submetido à flexão composta.	74
Figura 5.4 – Superfície de referência.	75
Figura 5.5 – Placa enrijecida.....	76
Figura 6.1 – Ciclo de carregamento e descarregamento para um problema elastoplástico unidimensional.....	90
Figura 6.2 – Ciclo de recarregamento para um problema elastoplástico unidimensional.	91
Figura 6.3 – Curva tensão x deformação elastoplástica – efeito Baushinger.....	92
Figura 6.4 – Curva tensão x deformação elastoplástica – comportamento bi-linear	93

Figura 6.5 – Modelo elastoplástico perfeito.....	98
Figura 6.6 – Modelo de encruamento isotrópico.	101
Figura 6.7 – Modelo de encruamento cinemático.....	102
Figura 6.8 – Evolução da superfície de escoamento pelo procedimento radial.	111
Figura 6.9 – Fluxograma para a obtenção do real estado de tensão e deformação na estrutura.	118
Figura 7.1 – Placa discretizada.	120
Figura 7.2 – Coordenada adimensional ξ	121
Figura 7.3 – Representação gráfica das funções de forma.....	121
Figura 7.4 – Elemento estrutural: (a) presença de descontinuidade; (b) artifício adotado.	122
Figura 7.5 – Posicionamento do ponto de colocação para o nós duplos.	122
Figura 7.6 – Discretização do domínio da placa em células triangulares.....	124
Figura 7.7 – Posicionamento dos nós internos das células triangulares.....	125
Figura 7.8 – Limites de integração.	127
Figura 7.9 – Discretização utilizada nos enrijecedores.	128
Figura 7.10 – Pontos de carregamento definidos no contorno e fora do domínio	133
Figura 7.11 – Fluxograma do processo incremental-iterativo para o problema elastoplástico de placas considerando-se a não-linearidade geométrica.....	147
Figura 7.12 – Fluxograma do processo incremental-iterativo para o problema elastoplástico de placas enrijecidas.	155
Figura 8.1 – Placa com dimensões e carregamento genéricos.....	157
Figura 8.2 – Divisão do domínio em células.....	158
Figura 8.3 – Placa totalmente apoiada: carga x deslocamento máximo.	159
Figura 8.4 – Placa totalmente engastada: carga x deslocamento máximo.	159
Figura 8.5 – Placa circular.....	160
Figura 8.6 – Placa circular: carga x deslocamento máximo.	161
Figura 8.7 – Placa quadrada: dimensões, carregamento e malha de domínio.	162
Figura 8.8 – Deslocamento do ponto central em função do carregamento aplicado para as várias análises efetuadas.....	163
Figura 8.9 – Deslocamento do ponto central em função do carregamento aplicado para a análise considerando-se a não-linearidade geométrica.....	164

Figura 8.10 – Deslocamento do ponto central em função do carregamento aplicado para a análise considerando-se a elastoplasticidade.....	165
Figura 8.11 – Deslocamento do ponto central em função do carregamento aplicado para a análise considerando-se a elastoplasticidade e a não-linearidade geométrica atuando em conjunto.	165
Figura 8.12 – Placa circular: dimensões e discretização utilizada.....	167
Figura 8.13 – Placa circular: deslocamento do ponto central em função do carregamento aplicado.	167
Figura 8.14 – Placa circular: deslocamento do ponto central em função do carregamento aplicado para a análise elastoplástica considerando-se não-linearidade geométrica.	168
Figura 8.15 – Placa circular: deslocamento do ponto central em função do carregamento aplicado para a análise não-linear geométrica.	168
Figura 8.16 – Placa circular: deslocamento do ponto central em função do carregamento aplicado para a análise elastoplástica.	169
Figura 8.17 – Viga engastada com carregamento uniformemente distribuído.	170
Figura 8.18 – Seção transversal: (a) viga simples; (b) viga enrijecida.	170
Figura 8.19 – Deslocamento w ao longo do eixo da viga.....	171
Figura 8.20 – Placa enrijecida com momento aplicado.	172
Figura 8.21 – Viga bi-apoiada sujeita a momento fletor.	173
Figura 8.22 – Deslocamento w ao longo do eixo do enrijecedor e do eixo médio da placa.	173
Figura 8.23 – Placa enrijecida por três enrijecedores paralelos.	174
Figura 8.24 – Deslocamento do eixo central da viga V_2	175
Figura 8.25 – Momento M_{ss} ao longo do eixo central da viga V_2	176
Figura 8.26 – Viga bi-apoiada sujeita a força normal.	177
Figura 8.27 – Viga bi-apoiada sujeita a força normal e momento.	178
Figura 8.28 – Deslocamento transversal w da viga bi-apoiada.	179
Figura 8.29 – Deslocamento horizontal u_1 da viga bi-apoiada.	179
Figura 8.30 – Viga enrijecida bi-apoiada.	180
Figura 8.31 – Deslocamento transversal w da viga bi-apoiada:viga simples e viga enrijecida	181
Figura 8.32 – Deslocamento horizontal u_1 da viga bi-apoiada: viga simples e viga enrijecida.	181

Figura 8.33 – Viga bi-apoiada sujeita a momento fletor.	182
Figura 8.34 – Deslocamento transversal w da viga bi-apoiada sujeita a momento	183
Figura 8.35 – Viga enrijecida bi-apoiada sujeita a momento fletor.	184
Figura 8.36 – Deslocamento transversal w da viga bi-apoiada sujeita a momento:viga simples e viga enrijecida.	184
Figura 8.37 – Placa enrijecida com momento aplicado e força normal aplicados	185
Figura 8.38 – Resultados numéricos e analíticos de deslocamento transversal w para os eixos médios da placa e do enrijecedor.	186
Figura 8.39 – Placa enrijecida por duas vigas perpendiculares.	187
Figura 8.40 – Deslocamento ao longo do eixo da viga de 2,0 m de comprimento.....	188
Figura 8.41 – Deslocamento ao longo do eixo da viga de 4,0 m de comprimento.....	189
Figura 8.42 – Viga bi-apoiada enrijecida.	190
Figura 8.43 – Curva carga x deslocamento do ponto central da viga.....	191
Figura 8.44 – Placa enrijecida por duas vigas paralelas e submetida à flexão simples.....	192
Figura 8.45 – Placa enrijecida por duas vigas paralelas e submetida à flexão simples: malha utilizada.....	193
Figura 8.46 – Curva momento x deslocamento para os pontos médios das vigas e da placa.	193
Figura 8.47 – Viga enrijecida tracionada.	194
Figura 8.48 – Curva normal x deslocamento para o ponto de aplicação do carregamento.	195
Figura 8.49 – Placa enrijecida por duas vigas paralelas e submetida à flexão composta.....	196
Figura 8.50 – Curva carga x deslocamento para o ponto central do enrijecedor. ...	197
Figura A.1 – Flexão de placas: posicionamento do ponto fonte sobre o elemento.....	211
Figura A.2 – Problema elástico plano: posicionamento do ponto fonte sobre o elemento.....	213

SUMÁRIO

Capítulo 1 – Introdução.....	1
1.1 – Tema e motivação	1
1.2 – Breve histórico	2
1.3 – Objetivos.....	7
1.4 – Apresentação.....	8
Capítulo 2 – Fundamentos da teoria da elasticidade e teoria clássica de flexão de placas	11
2.1 – Generalidades	11
2.2 – Fundamentos da teoria da elasticidade	11
2.2.1 – Hipóteses básicas	11
2.2.2 – Equações de equilíbrio.....	11
2.2.3 – Relação deformação – deslocamento	13
2.2.4 – Relações constitutivas.....	14
2.2.5 – Estados planos de tensão e de deformação	15
2.2.6 – Mudança de coordenadas.....	16
2.2.7 – Solução fundamental para o problema elástico	17
2.3 – Teoria clássica de flexão de placas	18
2.3.1 – Hipóteses básicas	19
2.3.2 – Deslocamentos e deformações.....	19
2.3.3 – Tensões e esforços solicitantes	20
2.3.4 – Equação diferencial de placas	22
2.3.5 – Mudança de coordenadas.....	25
2.3.6 – Força cortante equivalente.....	26
2.3.7 – Solução fundamental de placas	27
Capítulo 3 – Equações integrais para flexão de placas considerando-se a não-linearidade geométrica.....	29
3.1 – Generalidades	29

3.2 – Hipóteses básicas.....	29
3.3 – Equação diferencial de placas considerando-se a não-linearidade geométrica	30
3.4 – Equacionamento básico.....	35
3.5 – Equações integrais para o problema de flexão de placas.....	39
3.5.1 – Equação integral de deslocamento para pontos no domínio da placa.....	39
3.5.2 – Equação integral de deslocamento para pontos no contorno da placa.....	44
3.5.3 – Equação integral de rotação para pontos no domínio da placa	49
3.5.4 – Equação integral de curvatura para pontos no domínio da placa	50
3.6 – Equações integrais para o problema elástico bidimensional	51
3.6.1 – Equação integral de deslocamento para pontos no domínio.....	51
3.6.2 – Equação integral de deslocamento para pontos no contorno	53
3.6.3 – Equação integral de esforço normal para pontos no domínio	56

Capítulo 4 – Equações integrais para a análise não-linear geométrica

de placas sujeitas à presença de campos de esforços iniciais	59
4.1 – Generalidades	59
4.2 – Equacionamento básico.....	59
4.3 – Equações integrais para o problema de flexão de placa	60
4.3.1 – Equações integrais de deslocamento.....	60
4.3.2 – Equação integral de rotação para pontos no domínio da placa	62
4.3.3 – Equação integral de curvatura para pontos no domínio da placa	63
4.4 – Equações integrais para o problema elástico bidimensional	64
4.4.1 – Equações integrais de deslocamento.....	64
4.4.2 – Equação integral de esforço normal para pontos do domínio	66

Capítulo 5 – Equações integrais para flexão de placas enrijecidas

5.1 – Generalidades	69
5.2 – Placas enrijecidas submetidas à flexão simples	69
5.2.1 – Equação integral de deslocamento	69
5.2.2 – Equação integral de momento para pontos no domínio da placa	72
5.3 – Placas enrijecidas submetidas à flexão composta.....	74

5.3.1 – Equações integrais para o problema de flexão de placas	76
5.3.2 – Equações integrais para o problema elástico plano	80
5.4 – Placas enrijecidas submetidas à flexão composta e sujeitas a campos de esforços iniciais	84
5.4.1 – Equações integrais para o problema de flexão de placa.....	84
5.4.2 – Equações integrais para o problema elástico plano	86
Capítulo 6 – Análise elastoplástica de placas	89
6.1 – Generalidades	89
6.2 – Conceitos básicos da teoria da plasticidade	89
6.3 – Modelo elastoplástico para problemas unidimensionais	93
6.4 – Modelo elastoplástico para problemas multidimensionais	99
6.5 – Formulação incremental do modelo elastoplástico com o critério de Von Mises para o estado plano de tensão	104
6.5.1 – Modelo elastoplástico com critério de Von Mises para problemas multidimensionais.....	105
6.5.2 – Modelo elastoplástico com critério de Von Mises para o estado plano de tensão.....	107
Capítulo 7 – Método dos elementos de contorno aplicado aos problemas propostos.....	119
7.1 – Generalidades	119
7.2 – Discretização do contorno	119
7.2.1 – Integração no contorno	123
7.3 – Discretização do domínio.....	123
7.3.1 – Integração no domínio da placa	124
7.3.2 – Integração no domínio do enrijecedor	128
7.4 – Transformação das equações integrais em equações algébricas	132
7.4.1 – Análise elastoplástica de placas considerando-se a não-linearidade geométrica	132
7.4.2 – Placas enrijecidas submetidas à flexão composta	135
7.4.3 – Análise elastoplástica de placas enrijecidas submetidas à flexão composta.....	136
7.5 – Procedimento para resolução do sistema de equações	138

7.5.1 – Análise elastoplástica de placas considerando-se a não-linearidade geométrica	138
7.5.2 – Placas enrijecidas submetidas à flexão composta	149
7.5.3 – Análise elastoplástica de placas enrijecidas submetidas à flexão composta.....	150
Capítulo 8 – Exemplos de aplicação.....	157
8.1 – Generalidades	157
8.2 – Placa quadrada uniformemente carregada considerando-se a não-linearidade geométrica.....	157
8.3 – Placa circular uniformemente carregada considerando-se a não-linearidade geométrica	160
8.4 – Placa quadrada uniformemente carregada considerando-se as não-linearidades física e geométrica	162
8.5 – Placa circular uniformemente carregada considerando-se as não-linearidades física e geométrica	166
8.6 – Viga enrijecida submetida à flexão simples	169
8.7 – Placa enrijecida com momento aplicado.....	171
8.8 – Placa enrijecida por três enrijecedores paralelos com momento aplicado nos bordos.....	174
8.9 – Viga bi-apoiada com apoio fora do plano médio	177
8.10 – Viga bi-apoiada com apoio fora do plano médio e sujeita a momento fletor	182
8.11 – Placa enrijecida com momento e força normal aplicados	185
8.12 – Placa enrijecida por duas vigas perpendiculares	187
8.13 – Viga bi-apoiada submetida à flexão simples considerando-se o comportamento elastoplástico	190
8.14 – Placa enrijecida por duas vigas paralelas submetida à flexão simples considerando-se o comportamento elastoplástico.....	191
8.15 – Viga enrijecida tracionada considerando-se o comportamento elastoplástico	194
8.16 – Placa enrijecida por duas vigas paralelas submetida à flexão composta considerando-se o comportamento elastoplástico.....	196

Capítulo 9 – Considerações finais	199
9.1 – Conclusões	199
9.2 – Proposta para desenvolvimentos futuros.....	201
 Referências bibliográficas e bibliografia consultada.....	203
 Apêndice	211

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 – Tema e motivação

A análise do comportamento estrutural dos sistemas estruturais é, sem dúvida, um dos principais objetivos almejados pelo engenheiro de estruturas. É através desta análise que se pode quantificar a magnitude dos esforços internos e dos deslocamentos que se manifestam em qualquer sistema estrutural quando o mesmo é submetido a um carregamento arbitrário. Tal procedimento fornece uma ampla gama de resultados numéricos, cuja avaliação de forma qualitativa permite a sua utilização na elaboração do projeto estrutural do sistema analisado.

Em geral, devido ao alto grau de complexidade envolvido no processo de análise estrutural, o desenvolvimento das teorias que modelam o comportamento dos mais variados elementos estruturais são fundamentados em hipóteses simplificadoras que, em determinados casos, fornecem soluções que podem se aproximar em muito do comportamento real da estrutura. É o caso, por exemplo, da conhecida lei de Hooke, onde é assumida a relação linear entre tensões e deformações, e também da hipótese de pequenos deslocamentos.

No entanto, em algumas situações as soluções obtidas através das teorias que fazem uso de determinadas simplificações não simulam corretamente o comportamento mecânico da estrutura analisada. Neste caso, cabe ao engenheiro fazer uso da chamada análise não-linear de estruturas.

Na engenharia estrutural, duas diferentes classes de não-linearidade são normalmente identificadas: a geométrica, onde o equilíbrio da estrutura deve ser feito na configuração deformada, sendo os deslocamentos e as deformações ocorridas consideradas nas relações de equilíbrio, e a física, que está associada à existência de uma relação constitutiva não-linear entre tensão e deformação.

É evidente que quanto mais completa for a análise estrutural desejada maior será também o seu grau de complexidade e, conseqüentemente, maior será a dificuldade em se obter a solução almejada.

Em contrapartida, com a disseminação da informática ocorrida no final da década de 1980 e sua impressionante evolução até os dias atuais, o engenheiro de estruturas passou a ter acesso a equipamentos de alta capacidade que, aliados ao desenvolvimento dos métodos numéricos, permitem a elaboração de programas computacionais que possibilitam uma análise estrutural baseada em modelos mais refinados. Dentre os vários métodos numéricos existentes pode-se citar o método dos elementos de contorno (MEC).

O surgimento e desenvolvimento do MEC se deram depois que os chamados métodos de domínio, diferenças finitas e elementos finitos, já tinham suas formulações e um vasto campo de aplicações consolidados.

Ao contrário dos demais métodos citados que possuem incógnitas em pontos específicos no domínio e no contorno do problema, o MEC possui incógnitas apenas em pontos pertencentes ao contorno do problema. Tal diminuição da dimensão do problema faz com que o MEC tenha como características principais a redução das aproximações envolvidas em qualquer análise numérica e a diminuição da ordem dos sistemas de equações lineares a serem resolvidos.

Dentre deste contexto, o presente trabalho tem como tema principal o estudo do comportamento estrutural de placas considerando-se não-linearidades física e geométrica e também a análise elastoplástica de placas enrijecidas. Pretende-se por fim apresentar formulações do MEC que contemplem os estudos desejados.

1.2 – Breve histórico

O surgimento de teorias para o estudo das placas data do século XIX, quando em 1850 Kirchhoff apresentou a chamada teoria clássica de flexão de placas. Em tal teoria, a solução do problema é obtida a partir de uma equação diferencial de quarta ordem onde devem ser satisfeitas duas condições de contorno. A teoria clássica se

mostra confiável para a análise de placas delgadas sujeitas à ação de carregamentos transversais ao seu plano médio.

Como alternativa ao uso da teoria de Kirchhoff, Reissner (1944, 1945) e Mindlin (1951) apresentaram teorias semelhantes que aproxima o problema da flexão de placas ao da teoria tridimensional da elasticidade. Em tais teorias, as deformações por cisalhamento transversal são consideradas e a solução do problema é obtida por meio de uma equação diferencial de sexta ordem, na qual devem ser verificadas três condições de contorno relacionadas ao problema. Tais teorias permitem o estudo de placas delgadas à moderadamente espessas e, em comparação à teoria de Kirchhoff, apresentam melhores resultados nos bordos da placa.

Muitas outras teorias foram apresentadas ao longo dos anos, mas as teorias de Kirchhoff e de Reissner se perpetuaram e continuam sendo até hoje as mais utilizadas nos estudos das placas.

Uma das primeiras formulações do MEC para flexão de placas é devida a Jaswon et al. (1967) ainda quando a técnica era conhecida como método das equações integrais de contorno. Tais autores propuseram a decomposição da equação bi-harmônica em duas equações harmônicas que, resolvidas por equações integrais e devidamente combinadas, forneciam a solução final do problema. Seguiram-se os trabalhos de Hansen (1976), Altiero & Sikarskie (1978) e Wu & Altiero (1979).

A formulação direta para flexão de placas foi consolidada em 1978 com os trabalhos de Bézine (1978), Bézine & Gambi (1978), Tottenham (1979) e Stern (1979, 1983). Tais autores utilizaram em seus trabalhos a formulação direta, tendo como problema auxiliar uma placa infinita submetida a uma carga unitária fornecendo a solução fundamental do problema. Além disso, são empregadas para a formulação do problema as representações integrais de deslocamento e de rotação.

A partir da proposição da formulação direta diversos outros trabalhos foram, ao longo do tempo, ampliando o uso do MEC em placas: Bézine (1980) propôs uma formulação para análise de vibrações; Kamiya et al. (1982, 1983) aplicou o modelo a problemas sujeitos à variação de temperatura; Van der Weeën (1982) desenvolveu a formulação para placas considerando as hipóteses de Reissner com três graus de

liberdade por nó de contorno e três representações integrais, sendo uma de deslocamento transversal e duas de rotação; Katsikadelis & Armenakas (1984) apresentaram formulações para o problema de placas sobre fundação elástica.

Os primeiros trabalhos que trataram placas no contexto de estruturas de pisos de edifícios foram os de Bézine (1981), Hartmann & Zotemantel (1986) e Song & Mukherjee (1986). Nesses trabalhos, os autores desenvolveram algoritmos que permitem a imposição de vínculos (inclusive elásticos) em pontos do domínio.

Paiva (1987) apresentou uma formulação do MEC para análise de placas associadas a estruturas como barras, pilares e vigas. Neste mesmo trabalho o autor sugeriu a utilização de duas equações integrais de deslocamento (uma para o ponto no contorno e outra para um ponto fora do domínio) em substituição à utilização da equação integral para a rotação normal nos pontos do contorno.

Um estudo utilizando uma combinação do MEC com o Método dos Elementos Finitos (MEF) é apresentado em NG et al. (1990). Em tal trabalho os autores consideraram apenas a presença de forças verticais presentes entre a placa e as vigas; o MEC foi utilizado na discretização da placa e o MEF na discretização das vigas. Outra formulação do MEF para o estudo de placas enrijecidas é apresentada em Deb et al (1991). Neste trabalho os autores consideraram a placa como sendo ortotrópica para que os efeitos da presença dos enrijecedores fossem considerados.

Hu & Hartley (1994) estudaram a flexão de uma placa simples apoiada em vigas de seção transversal retangular. Posteriormente, Hartley (1996) analisou em seu trabalho pavimentos de edifício considerando apenas colunas internas, sendo as vigas colocadas apenas nos bordos externos.

Paiva (1996) propôs uma formulação do MEC para o estudo de placas enrijecidas considerando a rotação tangencial como um valor nodal em adição a rotação normal considerada nas formulações “padrões” do método.

Tanaka & Bercin (1998) apresentaram uma formulação para o estudo de placas enrijecidas com vigas de seções transversais arbitrárias. Em tal formulação os autores levaram em consideração as rigidezes à flexão, à torção e ao empenamento da seção transversal do enrijecedor.

Tanaka et al. (2000) propuseram uma formulação para o estudo de placas elásticas enrijecidas com vigas de seções compostas por dois eixos de simetria. As vigas foram consideradas em contato com a placa através de uma linha através da qual são transmitidos os esforços. Apenas o esforço cortante, o momento fletor e o momento torçor da viga são considerados incógnitos na linha.

Fernandes (2003) apresentou em seu trabalho uma formulação do MEC considerando as vigas como sendo uma variação abrupta da espessura da placa. Além da flexão, foi considerado o comportamento dos elementos como membrana e, visando reduzir os graus de liberdade do sistema, uma formulação alternativa foi apresentada onde as vigas são representadas apenas por seus eixos médios.

A formulação do MEC para a consideração de grandes deslocamentos e análise de instabilidade de placas já apareceram em diversos trabalhos. Em grande parte destes a formulação é derivada da equação diferencial de Berger (1955), que, por ser um modelo simplificado ao tratamento apresentado por Von Kármán, facilita a obtenção da solução. O problema foi inicialmente tratado por Kamiya & Sawaki (1982, 1984) e Kamiya et al. (1982).

Ye & Liu (1984) apresentaram uma formulação integral baseada nas equações de Von Kármán para a análise de deslocamentos finitos na flexão de placas. Neste trabalho, os autores propuseram também uma técnica de solução iterativa onde os efeitos não-lineares geométricos são introduzidos na equação integral da placa como um pseudo-carregamento distribuído em toda a área.

Yan et al (1990) iniciaram o estudo de placas geometricamente não lineares via MEC levando em consideração os efeitos das deformações transversais. O estudo foi baseado nas equações de Von Kármán para a modelagem da não-linearidade geométrica e na teoria de Reissner para a flexão de placas. As mesmas equações de Von Kármán também foram utilizadas por Tanaka et al (1996) para a modelagem do problema de deslocamentos finitos em placas delgadas. Tais autores utilizaram um método que combina o uso de elementos de contorno com elementos de domínio para a resolução numérica do problema e, para o processo iterativo de resolução, utilizaram o algoritmo de Euler, um algoritmo predictor-corretor e também o algoritmo de Euler-Romberg.

Wang et al (2000) utilizaram o Método da Reciprocidade Dual para o estudo de placas com grandes deslocamentos. Em sua formulação, derivada também das equações de Von Kármán, as integrais de domínios foram feitas diretamente sem transformações e utilizando-se de funções aproximadoras radiais no domínio. O mesmo método foi utilizado por Wen et al (2005) em seu trabalho para transformar as integrais de domínio em integrais de contorno. Nesse caso, os autores trabalharam com a teoria de Reissner e com as equações de Von Kármán para a formulação apresentada.

Simões et al (2004a) utilizaram a mesma formulação proposta por Ye & Liu (1984), mas sugeriram a utilização de um novo algoritmo para a resolução do sistema não-linear. O algoritmo proposto permite a aplicação de carregamentos transversais mais elevados sem que houvesse perda de estabilidade numérica e a conseqüente não convergência de solução. Tais autores também demonstraram a obtenção de bons resultados utilizando elementos de contorno com aproximação linear em conjunto com células com aproximação constante no domínio.

Supriyono & Aliabadi (2006) apresentaram um estudo de placas que considera as não-linearidades física e geométrica atuando em conjunto. A teoria de flexão de placas utilizada na formulação é a de Reissner e a modelagem da não-linearidade geométrica é feita também com base nas equações de Von Kármán. Como critério de plastificação foi utilizado o critério de Von Mises e um comportamento elastoplástico perfeito foi considerado para o material. Tal estudo foi novamente realizado pelos autores em 2007, sendo o método da reciprocidade dual utilizado para a avaliação dos efeitos de domínio em substituição a técnica de integração com o uso de células (Supriyono & Aliabadi, 2007).

Entre os trabalhos que tratam da análise de instabilidade de placas podem ser citados: Bézine et al. (1985), Syngellakis & Kang (1985), Syngellakis & Elzien (1994), Nerantzaki & Katsikadelis (1996), Lin et al (1999), Simões et al (2004b) e Purbolaksono & Aliabadi (2005), dentre outros.

Em termos de formulação não-linear física do MEC os trabalhos iniciais têm origem no final dos anos setenta e início dos anos oitenta. Destaca-se o trabalho pioneiro de Bui (1978) que formulou corretamente o termo integral das correções em

tensão ou deformação em problemas planos e tridimensionais. Vieram depois desse, vários trabalhos de formulações do MEC destinados à modelagem de meios elastoplásticos, viscoplásticos e outros modelos não-lineares (Telles & Brebbia, 1980, Venturini & Brebbia, 1983, 1984). Dessa época, destacam-se principalmente os textos completos de Telles (1983), Venturini (1983) e Brebbia et al (1984).

A análise não-linear física de placas, em particular a inclusão de modelos elastoplásticos na formulação do MEC, foi inicialmente apresentada por Moshaiov & Vorus (1986), ainda utilizando uma formulação bastante simples. Outros trabalhos usando modelos elastoplásticos aparecem na literatura. Deve-se dar destaque para os trabalhos de Chueiri & Venturini (1995), Fernandes & Venturini (2002, 2007), além do trabalho de Telles & Karan (1998) que trata de formulação não-linear do MEC para placas de Reissner.

Por fim, ressalta-se que o conceito de operador tangente consistente, tal como introduzido por Simo & Taylor (1985) para elementos finitos, foi incorporado nas formulações não-lineares do MEC apenas recentemente por Bonnet & Mukherjee (1996) e Poon et al (1998). O mesmo operador foi utilizado na formulação implícita do MEC proposta por Fudoli (1999) e Benallal et al (2002) para problemas de localização de deformações plásticas com plasticidade com gradiente. O uso dos operadores tangente em problemas de placas pode ser encontrado nos trabalhos de Fernandes & Venturini (2002, 2007) e Fernandes (2003).

1.3 – Objetivos

O objetivo principal da tese de doutorado é apresentar uma formulação do método dos elementos de contorno para a análise de placas considerando-se os efeitos não-lineares físico e geométrico e também uma formulação alternativa para a análise elastoplástica de placas enrijecidas.

As equações integrais utilizadas são formuladas com base na teoria de placas delgadas de Kirchhoff. São incorporados nas representações integrais os termos que permitem a modelagem da não-linearidade geométrica, considerando-se a teoria de Von Kármán. A formulação também é estendida para englobar os termos

referentes ao campo de esforços iniciais necessário para a consideração dos efeitos não-lineares físico no sistema.

O modelo elastoplástico utilizado é o usual desenvolvido para formulações do MEC para flexão de placas, porém estendido para incorporar os efeitos de membrana. O critério elastoplástico utilizado é o de Von Mises e toda a solução não-linear do problema é obtida com base no operador tangente consistente.

Os enrijecedores são tratados de modo simplificado incorporando-se rigidez às placas como correções no campo de tensão, com as respectivas integrais de domínio transformadas em integrais no contorno dos enrijecedores. São analisados os casos de placas enrijecidas submetidas à flexão simples bem como as submetidas à flexão composta.

As formulações são verificadas com exemplos clássicos da literatura, através de comparações dos resultados obtidos com os fornecidos por outros autores e também com respostas obtidas por programas comerciais, mais especificamente o ANSYS.

1.4 – Apresentação

Neste presente capítulo procura-se apresentar uma visão geral de todo o trabalho, descrevendo-se para isso o tema e a motivação, um breve histórico, e os objetivos do trabalho.

No capítulo 2 apresenta-se um resumo dos fundamentos da teoria da elasticidade e da teoria clássica de Kirchoff para flexão de placas. Ainda neste capítulo são apresentadas as soluções fundamentais para o estudo de chapas e placas.

No capítulo 3 faz-se um estudo do efeito da não-linearidade geométrica em problemas de placas. Para isso, apresenta-se, inicialmente, a equação diferencial que rege o problema de não-linearidade geométrica em placas. O desenvolvimento das equações integrais referentes ao problema de flexão de placas e de membrana é apresentado de maneira individual, porém com o intuito de serem resolvidas de maneira acoplada durante o processo incremental-iterativo. Toda a formulação

apresentada no capítulo 3 é estendida no capítulo 4 visando englobar ao problema não-linear geométrico de placas os efeitos devidos à presença de campos de esforços iniciais. Tal equacionamento é necessário para a consideração dos efeitos não-lineares físicos nas análises propostas.

No capítulo 5 faz-se a dedução das equações integrais para o estudo de placas enrijecidas. Uma primeira análise é feita considerando-se apenas o problema de placas enrijecidas submetidas à flexão simples com o plano médio do enrijecedor coincidindo com o plano médio da placa. Na seqüência apresentam-se as equações integrais referentes ao problema de flexão composta em placas enrijecidas, onde o eixo médio do enrijecedor não mais coincide necessariamente com o eixo médio da placa. Ainda nesse capítulo apresenta-se a formulação necessária para o estudo de placas enrijecidas considerando-se o efeito da não-linearidade física.

O desenvolvimento do modelo elastoplástico para problema de flexão de placas é apresentado no capítulo 6. Inicialmente são tratados os problemas unidimensionais e multidimensionais, com posterior particularização deste último para o estudo de problemas referentes ao estado plano de tensão no qual está englobado o estudo das placas. No decorrer do desenvolvimento é apresentado um algoritmo para a obtenção do estado de tensão verdadeiro e do tensor de deformações plásticas na placa. Por fim, apresenta-se a expressão do operador elastoplástico tangente necessário para o desenvolvimento do operador tangente consistente.

A transformação de todas as equações integrais desenvolvidas no trabalho em equações algébricas é apresentada no capítulo 7 juntamente com uma discussão sobre o processo de integração nos elementos do contorno, nas células triangulares de domínio e nos elementos dos enrijecedores. O procedimento de resolução das equações algébricas referentes ao problema linear de placas enrijecidas, o procedimento incremental-iterativo para a resolução do problema não linear físico e geométrico de placas e não linear físico de placas enrijecidas e a dedução dos operadores tangente consistente são também apresentados no capítulo em questão.

Alguns resultados fornecidos pelo programa computacional implementado são apresentados no capítulo 8 e, no capítulo 9, são apresentadas as conclusões do trabalho e algumas propostas para desenvolvimento em trabalhos futuros.

Por fim são apresentadas as referências bibliográficas e a bibliografia consultada e, no apêndice, algumas expressões referentes ao processo de integração numérica e analítica realizado no trabalho.

Capítulo 2

FUNDAMENTOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE E TEORIA CLÁSSICA DE FLEXÃO DE PLACAS

2.1– Generalidades

O objetivo principal deste capítulo é apresentar alguns conceitos básicos da teoria da elasticidade linear bem como apresentar um resumo da teoria clássica de flexão de placas. Tais conceitos serão úteis no desenvolvimento da formulação que será apresentada nos capítulos subsequentes deste trabalho.

2.2 – Fundamentos da teoria da elasticidade

2.2.1 – Hipóteses básicas

A teoria da elasticidade está baseada em algumas hipóteses simplificadoras. São elas:

- material homogêneo, isotrópico e elástico linear;
- validade da hipótese de pequenos deslocamentos;
- possibilidade de descrever o estado deformado de um corpo em função do estado indeformado (formulação Lagrangeana).

2.2.2 – Equações de equilíbrio

Seja um corpo finito, em equilíbrio estático, sujeito a um sistema de forças aplicadas em sua superfície e em sua massa. Inicialmente define-se o estado de tensão em termos de suas componentes em um elemento infinitesimal representativo de um ponto qualquer do corpo conforme ilustra a figura 2.1.

O estado de tensão fica definido em termos de seis componentes: três tensões normais σ_{11} , σ_{22} e σ_{33} e três tensões tangenciais σ_{12} , σ_{13} e σ_{23} . Há ainda uma simetria no estado de tensão, sendo $\sigma_{21} = \sigma_{12}$, $\sigma_{31} = \sigma_{13}$ e $\sigma_{32} = \sigma_{23}$.

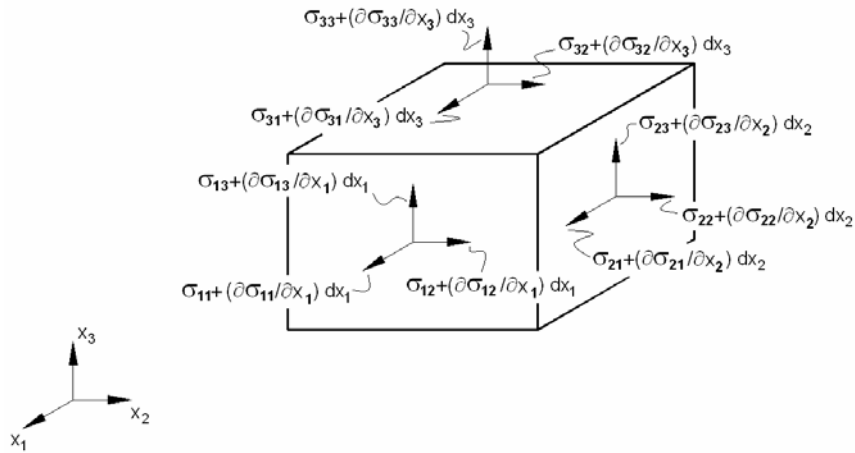


Figura 2.1 – Tensões atuantes em um elemento infinitesimal.

Observando-se a figura 2.1 e desprezando-se os termos de ordem superior o equilíbrio de forças na direção de x_3 pode ser escrito como:

$$\left[-\sigma_{33} - \sigma_{13} - \sigma_{23} + \left(\sigma_{33} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} \right) + \left(\sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} \right) + \left(\sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} \right) + b_3 \right] dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0$$

Estendendo-se o mesmo procedimento em relação às demais direções é possível escrever-se a equação de equilíbrio em sua forma condensada:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.1)$$

com $i, j = 1, 2, 3$ e sendo:

$\sigma_{ij,j}$: derivada da tensão σ_{ij} em relação à direção de x_j .

b_i : componente da força volumétrica atuante no elemento infinitesimal na direção de x_i ;

A equação (2.1) garante o equilíbrio para todos os pontos internos ao corpo. No entanto o equilíbrio também deve ser garantido para todos os pontos pertencentes à superfície do corpo. Dessa forma considere-se a figura 2.2 onde estão ilustradas as componentes da força atuante na superfície inclinada do tetraedro infinitesimal. Efetuando-se uma decomposição do estado de tensão adjacente à superfície do corpo considerado na direção do contorno de forma a igualar-se à força de superfície atuante, pode-se escrever:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.2)$$

com $i, j = 1, 2, 3$ e sendo:

p_i : componente da força de superfície na direção x_i ;

n_j : componente da normal ao plano do tetraedro na direção de x_j , ou seja, $\cos(n, x_j)$.

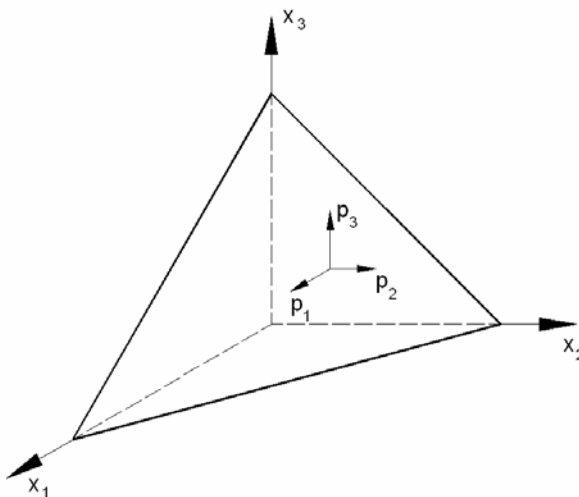


Figura 2.2 – Componentes da força de superfície atuante em um tetraedro infinitesimal.

2.2.3 – Relação deformação – deslocamento

O conceito de deslocamento traduz as possíveis mudanças de posição de cada ponto de um corpo sob uma determinada ação de forças externas. Uma alteração na posição relativa entre quaisquer desses pontos devido a um deslocamento configura uma deformação.

Considerando-se as hipóteses de continuidade e definindo-se o deslocamento de um ponto qualquer pertencente ao corpo por u e a componente do deslocamento na direção de x_i por u_i , o tensor Lagrangeano de deformações pode ser expresso por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.3)$$

com $i, j = 1, 2, 3$.

2.2.4 – Relações constitutivas

As componentes de tensão podem ser relacionadas com as componentes de deformação através da chamada lei de Hooke generalizada expressa por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.4)$$

onde C_{ijkl} é definido como um tensor de quarta ordem formado por coeficientes que contém as constantes elásticas do material e dado pela equação (2.5).

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2.5)$$

com $i, j, k, l = 1, 2, 3$ e:

G : módulo de elasticidade transversal, sendo dado por:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E : módulo de elasticidade longitudinal;

ν : coeficiente de Poisson;

δ_{ij} : delta de Kronecker, definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \rightarrow \text{se } i = j \\ 0 & \rightarrow \text{se } i \neq j \end{cases}$$

A equação (2.4) pode ser escrita como segue:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}\varepsilon_{kk} \quad (2.6)$$

2.2.5 – Estados planos de tensão e de deformação

Os chamados estados planos de tensão e de deformação surgiram a partir de simplificações impostas ao equacionamento originalmente tridimensional do problema elástico e podem ser aplicados em problemas sob determinadas restrições.

Uma análise pode ser efetuada sob o regime do estado plano de deformação sempre que a componente de deformação ao longo de uma das dimensões do corpo for admitida como sendo nula. Nessa classe de problemas enquadram-se, normalmente, problemas cuja geometria do corpo analisado apresenta uma de suas dimensões muito superior às demais. Como exemplos podem ser citados muros de contenção, aquedutos, túneis, dentre outros. Nestes casos, toma-se como referência o plano perpendicular à maior dimensão do corpo.

Admitindo-se por simplicidade que o plano tomado como referência seja o x_1x_2 , têm-se apenas as componentes de deformação ε_{11} , ε_{12} e ε_{22} presentes nesse tipo de problema. Neste caso $\varepsilon_{33} = 0$ e o estado de tensão é definido por σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} e σ_{33} , sendo este último dado por $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$.

Já os problemas do estado plano de tensão são caracterizados por distribuições de tensões no corpo essencialmente planas, sendo a componente de tensão que atua na direção do carregamento supostamente nula. Como características geométricas pode-se dizer que os corpos analisados nessa classe de problemas possuem uma das dimensões muito inferior às outras duas. Placas, chapas, vigas-parede, dentre outros, podem ser citados como exemplos de estado plano de tensão.

Novamente considerando-se por simplicidade que o plano tomado como referência seja o x_1x_2 , o estado de tensão pode ser definido pelas componentes σ_{11} , σ_{12} , σ_{22} . Neste caso $\sigma_{33} = 0$ e têm-se as seguintes componentes de deformação ε_{11} , ε_{12} , ε_{22} e ε_{33} , sendo esta última dada por $\varepsilon_{33} = [\nu/(1-\nu)](\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})$.

2.2.6 – Mudança de coordenadas

Em muitos casos é interessante expressar as variáveis do problema, sejam elas tensões, deformações, forças de superfície ou deslocamentos, não apenas em relação às direções x_1 e x_2 , mas também em relação a um outro sistema de coordenadas. É comum o uso de um sistema formado pela direção normal e pela direção tangencial (n,s) ao contorno do problema, conforme ilustra a figura 2.3.

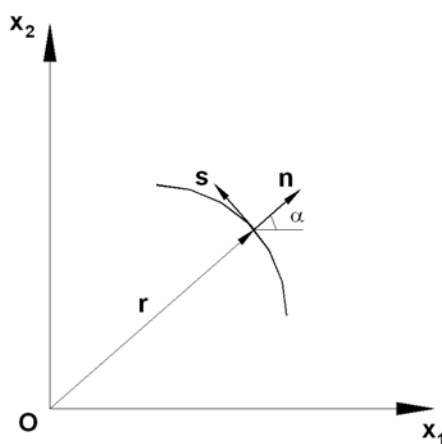


Figura 2.3 – Sistema de coordenadas ns .

A transformação das coordenadas (x_1, x_2) para o novo sistema (n, s) é feita através de uma matriz de transformação T , dada pela equação (2.7), cujas componentes são formadas pelos co-senos diretores das direções n e s .

$$T = \begin{bmatrix} n_1 & s_1 \\ n_2 & s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Assim, as mudanças de coordenadas das forças de superfície e dos deslocamentos podem ser expressas por:

$$\underset{\sim}{p}_{ns} = \underset{\sim}{T}^T \cdot \underset{\sim}{p}_{x_1x_2} \quad (2.8)$$

$$\underset{\sim}{u}_{ns} = \underset{\sim}{T}^T \cdot \underset{\sim}{u}_{x_1x_2} \quad (2.9)$$

Já as transformações de tensões de deformações podem ser escritas como segue:

$$\underset{\sim}{\sigma}_{ns} = \underset{\sim}{T}^T \cdot \underset{\sim}{\sigma}_{x_1x_2} \cdot \underset{\sim}{T} \quad (2.10)$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon}_{ns} = \underset{\sim}{T}^T \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}_{x_1x_2} \cdot \underset{\sim}{T} \quad (2.11)$$

2.2.7 – Solução fundamental para o problema elástico

A solução fundamental é definida como sendo a resposta em um ponto genérico p (denominado ponto de deslocamento ou campo) do domínio fundamental devido à aplicação de uma carga unitária na direção do vetor unitário e_j em outro ponto q (chamado ponto de carregamento ou fonte) deste domínio.

A solução fundamental utilizada neste trabalho é a solução clássica de Kelvin cuja demonstração pode ser encontrada em trabalhos como Love (1934), Brebbia & Dominguez (1989), entre outros, sendo, para o caso bidimensional, apresentada a seguir:

$$u_{ij}^*(q, p) = \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu)} \left[-(3-4\nu)\delta_{ij} \ln(r) + r_{,i} r_{,j} \right] \quad (2.12)$$

sendo \bar{G} definido como sendo o produto entre o módulo de elasticidade transversal G e a espessura da chapa para o estado plano de tensão generalizado.

Vale ressaltar que a solução fundamental apresentada é válida para o estado plano de deformação. Para o caso plano de tensão utilizado neste trabalho a correção no coeficiente de Poisson é necessária por meio da equação (2.13).

$$\nu' = \frac{\nu}{1+\nu} \quad (2.13)$$

A partir das relações definidas anteriormente, pode-se também definir os valores fundamentais das forças de superfície no plano, sendo dados por:

$$p_{ij}^*(q, p) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu')r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu')\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j} \right] - (1-2\nu')(r_{,i}n_{,j} - r_{,j}n_{,i}) \right\} \quad (2.14)$$

Ainda a partir das relações definidas é interessante listar os valores fundamentais de tensão e deformação que serão utilizados no decorrer deste trabalho:

$$N_{ijk}^*(q, p) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu')r} \left[2r_{,i}r_{,j}r_{,k} + (1-2\nu')(\delta_{ij}r_{,k} + \delta_{ik}r_{,j} - \delta_{jk}r_{,i}) \right] \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{ijk}^*(q, p) = -\frac{1}{8\pi(1-\nu')\bar{G}r} \left[(1-2\nu')(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik}) - r_{,i}\delta_{jk} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (2.16)$$

2.3 – Teoria clássica de flexão de placas

As placas são elementos estruturais definidos como corpos limitados por duas superfícies planas e simétricas em relação a um plano médio. A distância entre as duas superfícies, chamada de espessura, é pequena quando comparada às demais dimensões.

Tais elementos estruturais têm a particularidade de serem solicitados por esforços externos normais ao plano médio, existindo também a possibilidade desses esforços serem combinados com carregamentos paralelos a este plano.

2.3.1 – Hipóteses básicas

Tendo em vista a simplificação adotada por Kirchhoff, discutida no item 1.2 deste trabalho, as hipóteses admitidas na teoria clássica para flexão de placas são:

- pequena espessura de placa;
- pequenas deformações e deslocamentos;
- deslocamentos horizontais dos pontos do plano médio desprezíveis;
- retas normais ao plano médio da placa permanecem normais a esse plano após a deformação (Hipótese de Navier). Dessa forma são desprezadas as deformações por cisalhamento transversal;
- tensões normais ao plano da placa pequenas quando comparadas às demais componentes de tensão. São, portanto, desprezadas;

Admite-se, ainda, a placa constituída de material isotrópico, homogêneo e com comportamento elástico-linear.

2.3.2 – Deslocamentos e deformações

O deslocamento de um ponto qualquer da placa pode ser escrito em função das suas componentes u_1 , u_2 e w nos eixos x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente, de um sistema ortogonal com origem no plano médio coincidente com o plano (x_1, x_2) . O deslocamento de um ponto situado sobre uma normal ao plano médio da placa e distante de x_3 desse plano é ilustrado na figura 2.4.

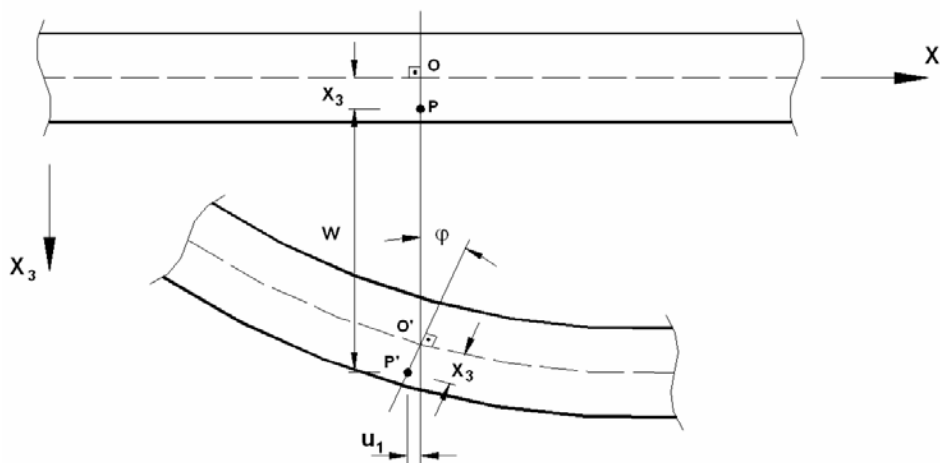


Figura 2.4 – Deslocamento de um ponto situado sobre uma normal ao plano médio da placa.

Tendo em vista as hipóteses da teoria clássica de flexão de placas, os pontos situados na superfície média ($x_3 = 0$) movem-se apenas na direção x_3 quando a placa se deforma. Uma linha reta perpendicular à superfície média antes do carregamento permanece reta e perpendicular à mesma após o carregamento (linha $OP - O'P'$).

Um ponto P situado a uma distância x_3 da superfície média possui deslocamentos u_1 e u_2 nas direções x_1 e x_2 , respectivamente. Admitindo-se que o deslocamento w seja função de x_1 e x_2 , pela figura 2.4 pode-se escrever:

$$u_1 = -x_3 \operatorname{tg} \varphi = -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1}$$

que escrito na forma geral é representado por:

$$u_i = -x_3 w_{,i} \quad (2.17)$$

com $i = 1, 2$.

De posse da equação dos deslocamentos, as componentes de deformação podem ser escritas na forma geral:

$$\varepsilon_{ij} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = -x_3 w_{,ij} \quad (2.18)$$

com $i, j = 1, 2$.

2.3.3 – Tensões e esforços solicitantes

A figura 2.5 ilustra as tensões atuantes em uma placa de espessura t e de dimensões dx_1 e dx_2 sujeita a um carregamento g uniformemente distribuído em toda a área.

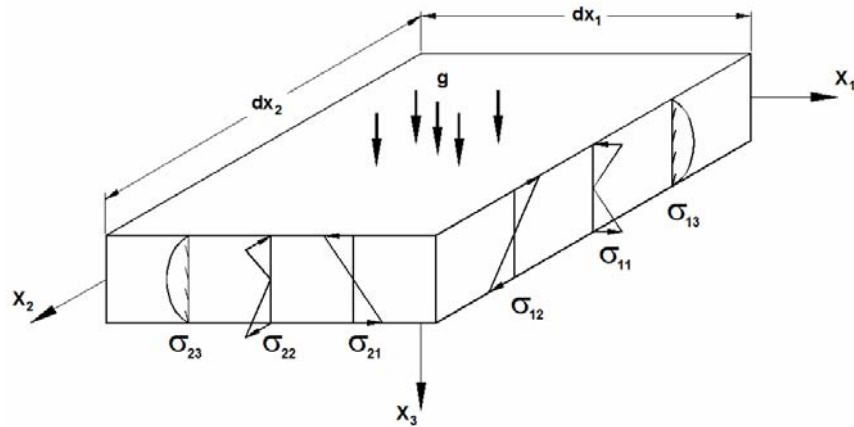


Figura 2.5 – Tensões atuantes em uma placa plana.

As tensões normais σ_{11} e σ_{22} variam linearmente em x_3 , dando origem aos momentos M_{11} e M_{22} , respectivamente. A tensão tangencial σ_{12} também varia linearmente em x_3 , dando origem ao momento torçor M_{12} . Tais tensões σ_{11} , σ_{22} e σ_{12} , assumem valores iguais a zero na superfície média da placa. A tensão normal σ_{33} é considerada desprezível em comparação com σ_{11} , σ_{22} e σ_{12} . Já as tensões tangenciais σ_{23} e σ_{31} variam de forma quadrática em x_3 e são usualmente pequenas quando comparadas com σ_{11} , σ_{22} e σ_{12} .

A figura 2.6 ilustra os sentidos das tensões atuantes na borda superior e borda inferior de um elemento da placa plana.

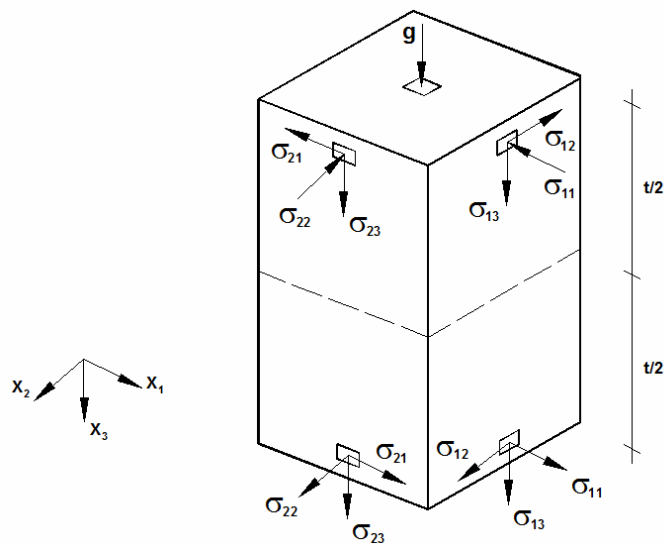


Figura 2.6 – Sentidos das tensões atuantes em um elemento da placa.

Tendo em vista a equação das deformações dadas em (2.18), as componentes das tensões podem ser escritas em função do deslocamento transversal da placa utilizando-se da Lei de Hooke. Assim, pode-se escrever:

$$\sigma_{ij} = -\frac{Ex_3}{1-\nu^2} [\nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij}] \quad (2.19)$$

com $i, j, k = 1, 2$.

Já a relação momento-curvatura pode ser obtida efetuando-se a integração das tensões multiplicadas pela distância x_3 ao longo da espessura da placa. Dessa forma, pode-se escrever:

$$M_{ij} = -D [\nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij}] \quad (2.20)$$

sendo D a rigidez à flexão da placa, dada por:

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.21)$$

De maneira análoga, a relação entre as forças cortantes e o deslocamento transversal da placa pode ser obtida efetuando-se a integração das tensões cisalhantes ao longo da espessura da placa. Tal relação também pode ser obtida através das relações de equilíbrio de um elemento da placa que será objeto de estudo do próximo item deste trabalho.

2.3.4 – Equação diferencial de placas

A figura 2.7 ilustra os sentidos positivos dos momentos e forças cortantes atuando no plano médio da placa.

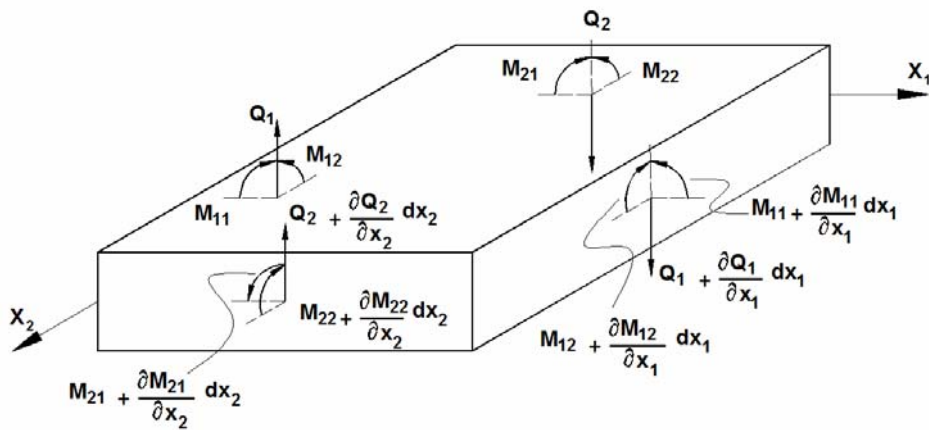


Figura 2.7 – Momentos e forças cortantes atuantes sobre o plano médio de um elemento de placa.

Observando-se a figura 2.7 e desprezando-se os termos de ordem superior, as relações de equilíbrio entre os esforços sollicitantes podem ser obtidas como segue.

⇒ Equilíbrio das forças na direção x_3 :

$$\left(\frac{\partial Q_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 + \left(\frac{\partial Q_2}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 + g dx_1 dx_2 = 0$$

ou

$$Q_{i,i} + g = 0 \quad (2.22)$$

com $i = 1, 2$.

⇒ Equilíbrio de momentos em torno do eixo x_1 :

$$-\left(\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 - \left(\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 + Q_2 dx_1 dx_2 = 0$$

ou

$$\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} - Q_2 = 0 \quad (2.23)$$

⇒ Equilíbrio de momentos em torno do eixo x_2 :

$$\left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 + \left(\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 - Q_1 dx_1 dx_2 = 0$$

ou

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} - Q_1 = 0 \quad (2.24)$$

Dessa forma, as equações (2.23) e (2.24) podem ser escritas de uma forma genérica, ou seja:

$$M_{ij,i} - Q_j = 0 \quad (2.25)$$

com $i, j = 1, 2$.

Substituindo-se a equação (2.20) em (2.25) chega-se à relação entre as forças cortantes e os deslocamentos transversais do elemento de placa, dada pela equação (2.26).

$$Q_j = -Dw_{,kkj} \quad (2.26)$$

com $k, j = 1, 2$.

A equação diferencial de placas pode ser obtida através da eliminação de Q_j nas equações (2.22) e (2.25) e posterior substituição de $M_{ij,i}$ pela equação (2.20). Por fim, tem-se:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{g}{D}$$

ou, simplesmente:

$$w_{,kkll} = \frac{g}{D} \quad (2.27)$$

com $k, l = 1, 2$.

A equação (2.27) pode ser ainda escrita em função do operador de Laplace. Assim:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{g}{D}$$

sendo

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \quad (2.28)$$

Ou em coordenadas polares:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{g}{D} \quad (2.29)$$

2.3.5 – Mudança de coordenadas

Conforme descrito no item 2.2.6 deste trabalho, em muitos casos é interessante expressar as variáveis do problema não apenas em relação às direções x_1 e x_2 mas também a um outro sistema de coordenadas, como por exemplo, o sistema formado pela direção normal e pela direção tangencial (n,s) ao contorno do problema. Mais ainda no problema de flexão de placas onde, como será visto na seqüência deste trabalho, se utiliza o sistema (n,s) para expressar os esforços solicitantes na placa. Sendo assim, com base no descrito no item 2.2.6, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{ns} &= \tilde{T}^T \cdot \tilde{M}_{x_1 x_2} \cdot \tilde{T} \\ \tilde{Q}_{ns} &= \tilde{T}^T \cdot \tilde{Q}_{x_1 x_2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

sendo os sentidos positivos dos esforços atuantes em um elemento da placa ilustrados na figura 2.8

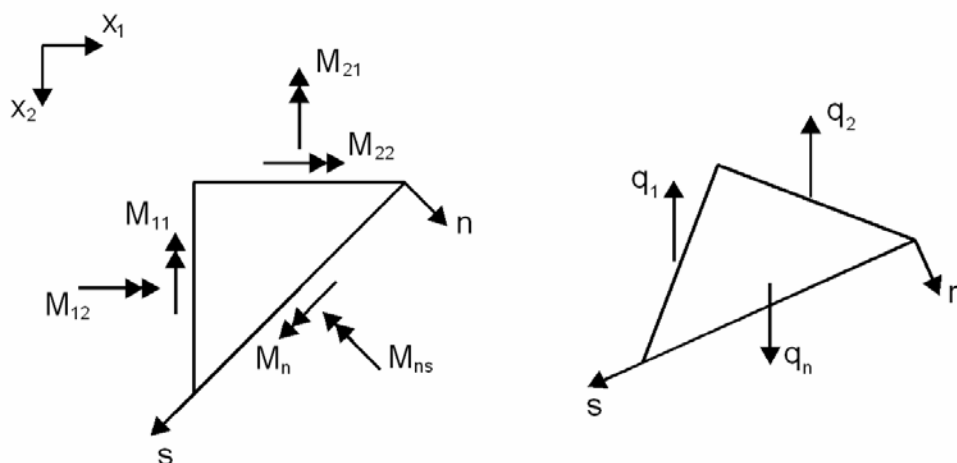


Figura 2.8 – Esforços atuantes um elemento de placa.

2.3.6 – Força cortante equivalente

Kirchhoff, baseado na hipótese de que ε_{13} e ε_{23} , e conseqüentemente σ_{13} e σ_{23} , são nulos (hipótese de desconsideração das deformações por efeito de cisalhamento transversal), demonstrou que duas condições de contorno são suficientes para a resolução da equação diferencial de placas.

Tais condições referem-se ao deslocamento transversal w do plano médio, sua derivada $\frac{\partial w}{\partial n}$, e aos esforços M_n , M_{ns} e Q_n segundo as direções normal e tangencial à borda.

Além disso, Kirchhoff demonstrou que os valores de contorno referentes a força cortante Q_n e ao momento M_{ns} devem ser agrupados em um único valor, relativo à uma força V_n chamada força cortante equivalente, dada por:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (2.31)$$

2.3.7 – Solução fundamental de placas

O problema fundamental de placas é definido como sendo o caso particular em que uma placa de domínio infinito (domínio fundamental) é solicitada por um carregamento transversal concentrado e unitário em um ponto qualquer deste domínio.

A solução fundamental é então definida como o deslocamento transversal w^* em um ponto p qualquer devido à aplicação da carga unitária em q e é obtida através da consideração do carregamento unitário na equação de equilíbrio representada por (2.27). Trabalhos como os de Danson (1979), Paiva (1987), Chueiri (1994) e Fernandes (2003), entre outros, trazem a dedução da solução fundamental de placas, cuja expressão final é apresentada a seguir:

$$w^*(q, p) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (2.32)$$

A partir da equação (2.32) e das demais relações definidas anteriormente, pode-se também definir os valores fundamentais da rotação $\frac{\partial w^*}{\partial n}$, dos momentos M_n^* e M_{ns}^* e do esforço cortante equivalente V_n^* como segue:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, p) = \frac{r}{4\pi D} \ln r(r, n_k) \quad (2.33)$$

$$M_n^*(q, p) = -\frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r + (1-\nu)(r, n_k)^2 + \nu \right] \quad (2.34)$$

$$M_{ns}^*(q, p) = -\frac{(1-\nu)}{4\pi} (r_{,k} s_k) (r_{,m} n_m) \quad (2.35)$$

$$V_n^*(q, p) = \frac{1}{4\pi r} (r_{,k} n_k) \left[2(1-\nu) (r_{,m} s_m)^2 - 3 + \nu \right] + \frac{(1-\nu)}{4\pi R} (r_{,k} n_k)^2 \quad (2.36)$$

sendo $R = \infty$ em placas com contornos externos retos.

Capítulo 3

EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO DE PLACAS CONSIDERANDO-SE A NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

3.1 – Generalidades

Neste capítulo serão apresentadas as equações integrais necessárias para o estudo de flexão de placas considerando-se a não-linearidade geométrica.

As equações integrais para a flexão de placas serão desenvolvidas tendo por base a teoria clássica de Kirchhoff descrita no capítulo 2 deste trabalho. A modelagem da não-linearidade geométrica será feita através do acoplamento dos problemas de flexão e de membrana considerando-se da teoria de deslocamentos finitos de Von Kármán.

Na seqüência são apresentadas algumas hipóteses em que se baseia a teoria de Von Kármán com posterior dedução das principais equações integrais referentes à formulação proposta.

3.2 – Hipóteses básicas

A teoria de pequenos deslocamentos em placas é escrita considerando-se que os deslocamentos horizontais são infinitesimais e, dessa forma, os resultados fornecidos são válidos literalmente apenas para deslocamentos muito pequenos. Quando os deslocamentos transversais são da mesma ordem de magnitude da espessura da placa os resultados fornecidos pela teoria mencionada tornam-se totalmente imprecisos.

Uma bem conhecida teoria de deslocamentos finitos para placas é devido a Von Kármán. Em sua teoria as seguintes hipóteses são consideradas:

➤ a placa é considerada fina. A espessura t é muito pequena quando comparada com as dimensões da placa;

- o deslocamento vertical w é da mesma ordem de magnitude da espessura da placa e , assim, pequeno quando comparado com as demais dimensões da placa;
- as rotações são pequenas, ou seja, $|\partial w/\partial x_1| \ll 1$ e $|\partial w/\partial x_2| \ll 1$;
- os deslocamentos horizontais u_1 e u_2 são infinitesimais. Nas relações de deformação-deslocamento apenas os termos não lineares que dependem de $\partial w/\partial x_1$ e $\partial w/\partial x_2$ são considerados;
- todas as componentes de deformação são pequenas. Dessa forma a Lei de Hooke é válida;
- as hipóteses de Kirchhoff também são válidas.

Dadas as hipóteses consideradas, a teoria de Von Kármán difere da teoria linear apenas por considerar derivadas $\partial w/\partial x_1$ e $\partial w/\partial x_2$ nas relações entre deformação e deslocamento.

Tendo em vista que o deslocamento vertical agora é considerado na mesma ordem de magnitude da espessura da placa, a configuração deformada difere consideravelmente da sua configuração original. Sendo assim tal configuração deve ser considerada no desenvolvimento da formulação.

3.3 – Equação diferencial de placas considerando-se a não-linearidade geométrica

A equação diferencial que rege o problema de não-linearidade geométrica de placas deve ser obtida através do equilíbrio das forças e dos momentos atuantes na placa em sua configuração deformada seguindo a descrição Lagrangeana.

Considere-se um elemento infinitesimal pertencente à placa na referida configuração, conforme ilustram as figuras 3.1 e 3.2. Em tais figuras são ilustrados os sentidos positivos das forças e dos momentos atuantes no plano médio do elemento.

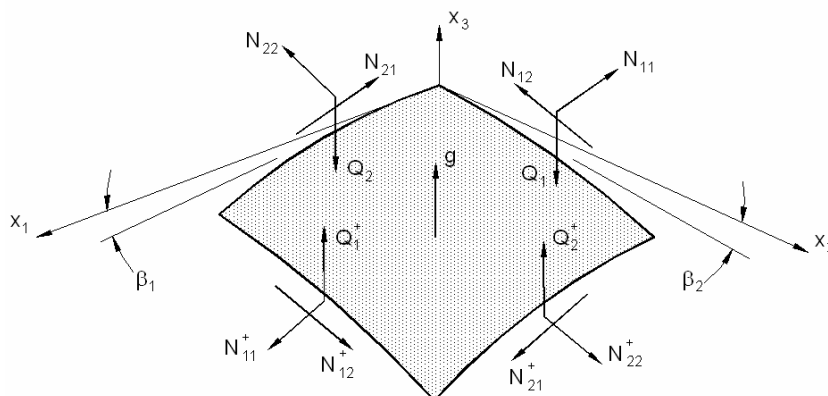


Figura 3.1 – Forças atuantes sobre o plano médio de um elemento de placa na configuração deformada.

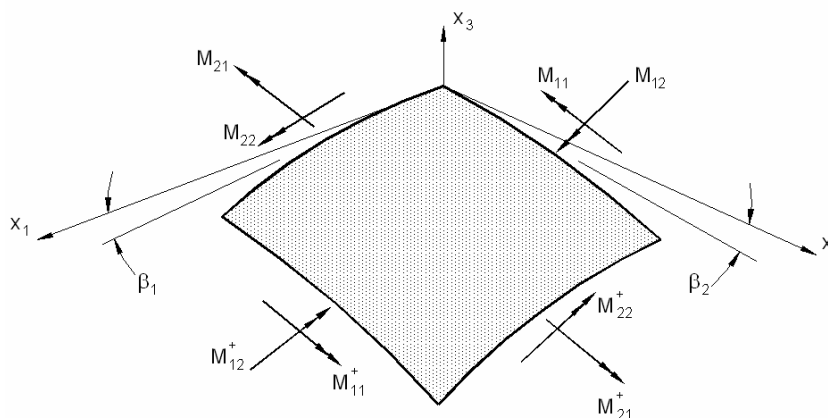


Figura 3.2 – Momentos atuantes sobre o plano médio de um elemento de placa na configuração deformada.

As rotações β_1 e β_2 representam o ângulo entre os eixos coordenados com as correspondentes tangentes da superfície média do elemento da placa no seu canto tomado como referência. Tais ângulos são pequenos de forma que seus senos e co-senos possam ser substituídos pelos seus próprios valores e pela unidade, respectivamente.

As intensidades das forças, momentos e rotações variam ao longo do elemento, sendo a notação N_{11}^+ usada para denotar a variação $N_{11} + (\partial N_{11}/\partial x_1) \cdot dx_1$, estendida para as demais componentes de forças e momentos; os termos que representam a interação não-linear entre as forças cisalhantes transversais e as rotações são consideradas desprezíveis.

Sendo assim, observando-se as figuras 3.1 e 3.2 e desprezando-se os termos de ordem superior, as relações de equilíbrio entre os esforços solicitantes podem ser obtidas como segue.

⇒ *Equilíbrio das forças na direção de x_1 :*

$$\left(\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 + \left(\frac{\partial N_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 = 0$$

ou

$$\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{21}}{\partial x_2} = 0 \quad (3.1)$$

⇒ *Equilíbrio das forças na direção de x_2 :*

$$\left(\frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 + \left(\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 = 0$$

ou

$$\frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = 0 \quad (3.2)$$

com as equações (3.1) e (3.2) podendo ser escritas na forma indicial como segue:

$$N_{ij,i} = 0 \quad (3.3)$$

com $i, j = 1, 2$.

⇒ *Equilíbrio das forças na direção de x_3 :*

$$\begin{aligned}
 & N_{11} dx_2 \beta_1 - \left(N_{11} + \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \left(\beta_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} dx_1 \right) + \\
 & + N_{22} dx_1 \beta_2 - \left(N_{22} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 \left(\beta_2 + \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} dx_2 \right) - \\
 & - Q_1 dx_2 + \left(Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 - Q_2 dx_1 + \left(Q_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 + \\
 & + N_{12} dx_2 \beta_2 - \left(N_{12} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \left(\beta_2 + \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} dx_1 \right) + \\
 & + N_{21} dx_1 \beta_1 - \left(N_{21} + \frac{\partial N_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 \left(\beta_1 + \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} dx_2 \right) + g dx_1 dx_2 = 0
 \end{aligned}$$

ou então:

$$\begin{aligned}
 & - \left(\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{21}}{\partial x_2} \right) \beta_1 - \left(\frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} \right) \beta_2 - N_{11} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} - \\
 & - N_{22} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} - N_{12} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} - N_{21} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = -g
 \end{aligned}$$

e, considerando-se as equações (3.1) e (3.2) e que $N_{12} = N_{21}$, tem-se:

$$-N_{11} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} - N_{22} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} - N_{12} \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial x_2} = -g$$

ou na forma indicial:

$$N_{ij} \beta_{i,j} - Q_{i,j} - g = 0 \tag{3.4}$$

com $i, j = 1, 2$.

⇒ *Equilíbrio de momentos em torno do eixo x_1 :*

$$- \left(\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 - \left(\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 + Q_2 dx_1 dx_2 = 0$$

ou

$$Q_2 = \frac{\partial M_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial M_{12}}{\partial x_1} \quad (3.5)$$

⇒ *Equilíbrio de momentos em torno do eixo x_2* :

$$\left(\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 + \left(\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 - Q_1 dx_2 dx_1 = 0$$

ou

$$Q_1 = \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial M_{21}}{\partial x_2} \quad (3.6)$$

com as equações (3.5) e (3.6) podendo ser escritas na forma indicial como segue:

$$M_{ij,i} - Q_j = 0 \quad (3.7)$$

Introduzindo-se as equações (3.5) e (3.6) em (3.4) e considerando-se que $M_{12} = M_{21}$, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 M_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 M_{22}}{\partial x_2^2} - N_{11} \frac{\partial \beta_1}{\partial x_1} - \\ & - N_{12} \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \beta_1}{\partial x_2} \right) - N_{22} \frac{\partial \beta_2}{\partial x_2} = -g \end{aligned} \quad (3.8)$$

Considerando-se que $\beta_i = -\partial w / \partial x_i$ a equação (3.8) pode ser escrita em termos indiciais como segue:

$$M_{ij,ij} + N_{ij} w_{ij} + g = 0 \quad (3.9)$$

com $i, j = 1, 2$.

E ainda, considerando-se as relações entre os momentos fletores e o deslocamento, dadas pela equação (2.20), tem-se a equação diferencial de placas considerando-se o efeito da não-linearidade geométrica:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{1}{D} \left(g + N_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + 2N_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + N_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right)$$

sendo, similarmente à equação diferencial apresentada no capítulo 2 deste trabalho, dada pela sua forma simplificada:

$$D\nabla^4 w = g + N_{ij} w_{,ij} \quad (3.10)$$

com $i, j = 1, 2$.

3.4 – Equacionamento básico

O problema de flexão de placas considerando-se os efeitos da não-linearidade geométrica, como se pode constatar pela equação diferencial deduzida no item anterior deste trabalho, é constituído basicamente pela “soma” de dois problemas conhecidos: o problema de flexão simples em placas e o problema elástico plano.

Assim, considerando-se um ponto genérico pertencente ao domínio da placa, as deformações e as tensões totais atuantes no ponto em questão podem ser expressas como uma soma das parcelas referentes aos problemas de placas e de chapas como segue:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \varepsilon_{ij}^p + \varepsilon_{ij}^c \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^p + \sigma_{ij}^c \end{aligned} \quad (3.11)$$

onde ε_{ij}^p e σ_{ij}^p representam as parcelas de deformação e de tensão do problema de flexão simples em placas e dadas pelas equações (2.18) e (2.19), respectivamente;

ε_{ij}^c e σ_{ij}^c representam as deformações e tensões referentes ao problema elástico plano e expressas, respectivamente, pelas equações (2.3) e (2.6).

Para a dedução das equações integrais necessárias para a resolução do problema não-linear geométrico de flexão de placas optou-se por utilizar o teorema da reciprocidade de Betti.

Considere-se então uma placa isotrópica qualquer de domínio finito Ω e contorno Γ submetida a um carregamento g distribuído em uma área de domínio Ω_g , conforme ilustra a figura 3.3.

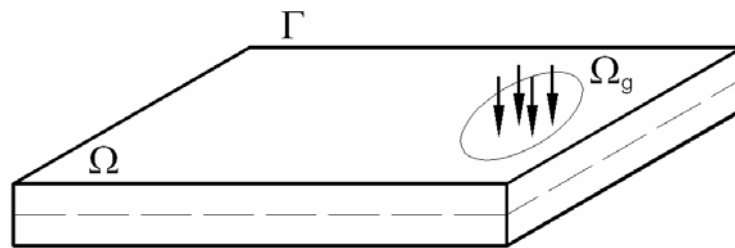


Figura 3.3 – Placa de domínio finito submetida a um carregamento distribuído.

Admitindo-se ainda que a placa esteja inserida em uma placa de domínio infinito Ω_∞ e contorno Γ_∞ e que a placa finita é submetida a dois carregamentos não simultâneos g e g^* , aos quais estão associados às superfícies elásticas w e w^* , os estados de tensão total σ_{ij} e σ_{ij}^* e seus respectivos estados de deformação ε_{ij} e ε_{ij}^* , pode-se escrever o Teorema de Betti como segue:

$$\int_V \sigma_{jk}^* \varepsilon_{jk} dV = \int_V \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* dV \quad (3.12)$$

com $j, k = 1, 2$.

Trabalhando-se apenas com o lado direito da equação (3.12) e tendo em vista a discussão a respeito da soma dos problemas elástico plano e de flexão de placas pode-se escrever:

$$\int_V \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* dV = \int_V (\sigma_{jk}^c + \sigma_{jk}^p) (\varepsilon_{ijk}^{*(c)} + \varepsilon_{jk}^{*(p)}) dV$$

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* dV &= \int_{\Omega} \int_{x_3} \sigma_{jk}^c \varepsilon_{ijk}^{*(c)} dx_3 d\Omega + \int_{\Omega} \int_{x_3} \sigma_{jk}^p \varepsilon_{ijk}^{*(c)} dx_3 d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \int_{x_3} \sigma_{jk}^c \varepsilon_{jk}^{*(p)} dx_3 d\Omega + \int_{\Omega} \int_{x_3} \sigma_{jk}^p \varepsilon_{jk}^{*(p)} dx_3 d\Omega \end{aligned} \quad (3.13)$$

com $i, j, k = 1, 2$ e sendo σ_{jk}^c e σ_{jk}^p as tensões referentes aos problemas elástico plano e de flexão de placas, respectivamente; e $\varepsilon_{ijk}^{*(c)}$ e $\varepsilon_{jk}^{*(p)}$ as soluções fundamentais dos problemas de chapas e de flexão de placas, respectivamente.

Substituindo-se as equações (2.18) e (2.19) em (3.13) obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* dV &= \int_{\Omega} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{jk}^c \varepsilon_{ijk}^{*(c)} dx_3 d\Omega + \int_{\Omega} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \left\{ -\frac{Ex_3}{1-\nu^2} [\nu w_{,ll} \delta_{jk} + (1-\nu) w_{,jk}] \right\} \varepsilon_{ijk}^{*(c)} dx_3 d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{ijk}^c [-x_3 w_{,jk}^*] dx_3 d\Omega + \int_{\Omega} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \left\{ -\frac{Ex_3}{1-\nu^2} [\nu w_{,ll} \delta_{jk} + (1-\nu) w_{,jk}] \right\} [-x_3 w_{,jk}^*] dx_3 d\Omega \end{aligned}$$

Efetuada-se a integração ao longo da espessura da placa obtém-se:

$$\int_V \sigma_{jk} \varepsilon_{jk}^* dV = \int_{\Omega} N_{ijk} \varepsilon_{ijk}^{*(c)} d\Omega + \int_{\Omega} -M_{jk} w_{,jk}^* d\Omega \quad (3.14)$$

O mesmo procedimento deve ser realizado com a parcela referente ao lado esquerdo da equação (3.12). Assim, considerando-se o problema como uma soma do problema de flexão de placas e do problema elástico plano tem-se:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{jk}^* \varepsilon_{jk} dV &= \int_V \left(\sigma_{ijk}^{*(c)} + \sigma_{ijk}^{*(p)} \right) \left(\varepsilon_{jk}^c + \varepsilon_{jk}^p \right) dV = \\ &= \int_{\Omega} \int_{x_3} \sigma_{ijk}^{*(c)} \varepsilon_{jk}^c dx_3 d\Omega + \int_{\Omega} \int_{x_3} \sigma_{ijk}^{*(p)} \varepsilon_{jk}^c dx_3 d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \int_{x_3} \sigma_{ijk}^{*(c)} \varepsilon_{jk}^p dx_3 d\Omega + \int_{\Omega} \int_{x_3} \sigma_{ijk}^{*(p)} \varepsilon_{jk}^p dx_3 d\Omega \end{aligned} \quad (3.15)$$

com $i, j, k = 1, 2$ e sendo ε_{jk}^c e ε_{jk}^p as deformações referentes aos problemas elástico plano e de flexão de placas, respectivamente; e $\sigma_{ijk}^{*(c)}$ e $\sigma_{jk}^{*(p)}$ as soluções fundamentais dos problemas de chapas e de flexão de placas, respectivamente.

Novamente, substituindo-se as equações (2.18) e (2.19) em (3.15) obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{jk}^* \varepsilon_{jk}^* dV &= \int_{\Omega} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{ijk}^{*(c)} \varepsilon_{jk}^{(c)} dx_3 d\Omega + \int_{\Omega} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \left\{ -\frac{Ex_3}{1-\nu^2} [\nu w_{,ll}^* \delta_{jk} + (1-\nu) w_{,jk}^*] \right\} \varepsilon_{ijk}^{*(c)} dx_3 d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \sigma_{ijk}^{*(c)} [-x_3 w_{,jk}] dx_3 d\Omega + \int_{\Omega} \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \left\{ -\frac{Ex_3}{1-\nu^2} [\nu w_{,ll}^* \delta_{jk} + (1-\nu) w_{,jk}^*] \right\} [-x_3 w_{,jk}] dx_3 d\Omega \end{aligned}$$

Após se efetuar a integração na espessura da placa pode-se escrever:

$$\int_V \sigma_{jk}^* \varepsilon_{jk}^* dV = \int_{\Omega} N_{ijk}^* \varepsilon_{jk}^{(c)} d\Omega + \int_{\Omega} -M_{jk}^* w_{,jk} d\Omega \quad (3.16)$$

Por fim, juntando-se as equações (3.14) e (3.16) tem-se o teorema de Betti integrado na espessura da placa para o problema de flexão de placas considerando-se a não-linearidade geométrica:

$$\int_{\Omega} N_{ijk}^* \varepsilon_{jk}^{(c)} d\Omega + \int_{\Omega} -M_{jk}^* w_{,jk} d\Omega = \int_{\Omega} N_{ijk} \varepsilon_{jk}^{*(c)} d\Omega + \int_{\Omega} -M_{jk} w_{,jk}^* d\Omega \quad (3.17)$$

com $i, j, k = 1, 2$.

A partir da equação (3.17) pode-se trabalhar com os dois problemas independentes e de forma acoplada dando origem às equações (3.18) e (3.19). Na seqüência do trabalho serão deduzidas as equações integrais para cada problema distinto e, no capítulo 6 será apresentado o procedimento para a resolução do problema em questão.

$$\int_{\Omega} N_{ijk}^* \varepsilon_{jk} d\Omega = \int_{\Omega} N_{jk} \varepsilon_{ijk}^* d\Omega \quad (3.18)$$

$$\int_{\Omega} M_{jk}^* w_{,jk} d\Omega = \int_{\Omega} M_{jk} w_{,jk}^* d\Omega \quad (3.19)$$

3.5 – Equações integrais para o problema de flexão de placas

3.5.1 – Equação integral de deslocamento para pontos no domínio da placa

Conforme apresentado no item 3.4 deste trabalho, o teorema de Betti escrito em termos de momento e curvatura para o problema de flexão de placas pode ser escrito como segue:

$$\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega = \int_{\Omega} M_{ij} w_{,ij}^* d\Omega \quad (3.20)$$

com $i, j = 1, 2$.

Denotando-se por P e S o primeiro e o segundo membro da equação (3.20), respectivamente, e, com o objetivo de transformar as integrais de domínio em integrais de contorno, pode-se aplicar o teorema da divergência ou integrar por partes a equação (3.20) em relação à coordenada x_j como segue:

$$S = \int_{\Gamma} M_{ij} w_{,i}^* n_j d\Gamma - \int_{\Omega} M_{ij,j} w_{,j}^* d\Omega \quad (3.21)$$

onde n_j são os co-senos diretores do vetor normal ao contorno da placa.

Integrando-se novamente por partes a integral de domínio restante na equação (3.21), obtém-se:

$$S = \int_{\Gamma} M_{ij} w_{,i}^* n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} M_{ij,j} w^* n_i d\Omega + \int_{\Omega} M_{ij,ij} w^* d\Omega \quad (3.22)$$

Considerando-se as equações (3.7), (2.30) e (3.9), obtém-se:

$$\begin{aligned} S = & \int_{\Gamma} M_{ij} w_{,i}^* n_j d\Gamma - \int_{\Gamma} Q_n w^* d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} N_{ij} w_{,ij} w^* d\Omega - \int_{\Omega} g w^* d\Omega \end{aligned} \quad (3.23)$$

A derivada de w^* em relação à coordenada x_i é dada por:

$$w_{,i}^* = \frac{\partial w^*}{\partial x_i} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x_i} + \frac{\partial w^*}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_i}$$

ou

$$w_{,i}^* = \frac{\partial w^*}{\partial n} n_i + \frac{\partial w^*}{\partial s} s_i \quad (3.24)$$

sendo n_i e s_i os co-senos diretores do versor normal e tangente ao contorno, respectivamente.

Substituindo-se (3.24) na equação (3.23), tem-se:

$$\begin{aligned} S = & \int_{\Gamma} \left(M_{ij} n_i n_j \frac{\partial w^*}{\partial n} + M_{ij} s_i n_j \frac{\partial w^*}{\partial s} \right) d\Gamma - \\ & - \int_{\Gamma} Q_n w^* d\Omega - \int_{\Omega} N_{ij} w_{,ij} w^* d\Omega - \int_{\Omega} g w^* d\Omega \end{aligned} \quad (3.25)$$

e, tendo-se em vista a relação de mudança de coordenadas dada pelas equações (2.30), tem-se:

$$\begin{aligned} S = & \int_{\Gamma} \left(M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - Q_n w^* \right) \cdot d\Gamma - \\ & - \int_{\Omega} N_{ij} w_{,ij} w^* d\Omega - \int_{\Omega} g w^* d\Omega \end{aligned} \quad (3.26)$$

Integrando-se agora por partes o membro da equação (3.26) que contém o momento volvente M_{ns} , obtém-se:

$$\int_{\Gamma} M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = \left[M_{ns} w^* \right]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (3.27)$$

Para contornos fechados cuja representação paramétrica e a respectiva derivada sejam contínuas, a primeira parcela do segundo membro de (3.27) se anula. Já quando existem angulosidades ou cantos no contorno, tal parcela não se anula, dando origem às chamadas reações de canto.

Sendo assim, pode-se reescrever a equação (3.27) da seguinte forma:

$$\int_{\Gamma} M_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = - \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (3.28)$$

sendo N_c o número total de cantos no contorno e w_{ci}^* o valor do deslocamento fundamental w^* no canto i .

As reações de canto R_{ci} podem ser escritas em função dos momentos volventes anterior e posterior ao canto da placa, ou seja:

$$R_{ci} = M_{nsi}^+ - M_{nsi}^-$$

sendo M_{nsi}^+ e M_{nsi}^- os momentos volventes posterior e anterior ao canto i da placa, respectivamente (figura 3.4).

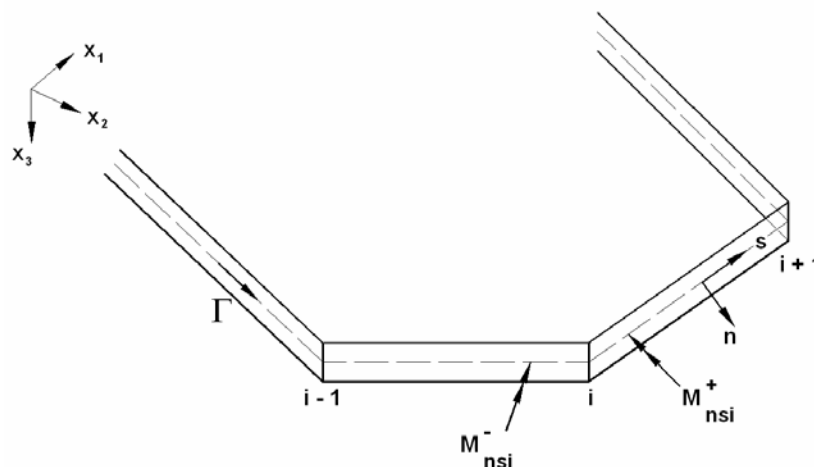


Figura 3.4 – Momentos volventes em um canto i da placa.

Substituindo-se (3.28) em (3.26), tem-se:

$$S = \int_{\Gamma} \left(Q_n w^* + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) \cdot d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* \quad (3.29)$$

$$+ \int_{\Omega} N_{ij} w_{,ij} w^* d\Omega + \int_{\Omega} g w^* d\Omega$$

Por fim, considerando-se a definição de força cortante equivalente, dada pela equação (2.31) e considerando-se que o carregamento g está distribuído no domínio Ω_g , obtém-se:

$$S = \int_{\Gamma} \left(V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \quad (3.30)$$

$$+ \int_{\Omega} N_{ij} w_{,ij} w^* d\Omega + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g$$

Desenvolvendo-se o primeiro membro da equação (3.20) de forma análoga:

$$P = \int_{\Gamma} \left(V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci} + \quad (3.31)$$

$$+ \int_{\Omega} g^* w d\Omega$$

Substituindo-se as equações (3.31) e (3.30) em (3.20), tem-se:

$$\int_{\Gamma} \left(V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega} N_{ij} w_{,ij} w^* d\Omega + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g =$$

$$= \int_{\Gamma} \left(V_n^* w - M_n^* \frac{\partial w}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci} + \int_{\Omega} g^* w d\Omega \quad (3.32)$$

Admite-se que o carregamento g^* seja uma carga concentrada unitária, cuja representação matemática é a função delta de Dirac, aplicada em um ponto q qualquer do domínio da placa.

Dessa forma, os deslocamentos e os esforços fundamentais, associados a este carregamento em um ponto qualquer do domínio da placa, são apenas funções do ponto de aplicação da carga q e do ponto de deslocamento p do domínio. Caso este último esteja no contorno da placa, é representado por P e suas variáveis serão, posteriormente, conhecidas.

Em contrapartida, os deslocamentos e esforços provenientes do carregamento real g são funções apenas do ponto p , uma vez que a posição deste carregamento é fixa.

Sendo assim, substituindo o carregamento g^* na equação (3.32) pela função $\delta(q,p)$, e representando cada variável em função dos dois pontos, q e p , para valores fundamentais, e de um ponto apenas em caso contrário, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \delta(q,p) w(p) d\Omega + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(q,P) w(P) - M_n^*(q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\ & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q,P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(q,P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right) \cdot d\Gamma + \\ & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q,P) + \int_{\Omega} N_{ij}(p) w_{,ij}(p) w^*(q,P) \cdot d\Omega + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) d\Omega_g \end{aligned} \quad (3.33)$$

Aplicando-se em (3.33) as propriedades da função delta de Dirac, obtém-se:

$$\begin{aligned} & w(q) + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(q,P) w(P) - M_n^*(q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\ & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(q,P) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(q,P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right) d\Gamma + \\ & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q,P) + \int_{\Omega} N_{ij}(p) w_{,ij}(p) w^*(q,P) d\Omega + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q,p) d\Omega_g \end{aligned} \quad (3.34)$$

A equação (3.34) é a equação integral de placas finas para deslocamentos de pontos no domínio da placa fletida considerando-se a não-linearidade geométrica. Esta equação fornece o deslocamento w de um ponto qualquer do domínio em função das variáveis de contorno e de domínio. Esta equação em conjunto com as equações integrais do problema elástico fornecerá a solução do problema proposto conforme será mais bem discutido no decorrer deste trabalho.

3.5.2 – Equação integral de deslocamento para pontos no contorno da placa

No item 3.5.1 deste trabalho foi desenvolvida a equação integral de deslocamento para pontos pertencentes ao domínio de placas fletidas considerando-se a não-linearidade geométrica. No entanto, o desenvolvimento da equação para pontos pertencentes ao contorno da placa também é de particular interesse para a posterior aplicação do MEC. Vale ressaltar que, em termos de notação, será utilizado a letra Q para denotar pontos de colocação situados no contorno da placa.

Stern (1979) considerou para o canto genérico i um acréscimo no domínio de contorno circular de raio ξ , com centro coincidente com o vértice deste canto, conforme ilustra a figura 3.5.

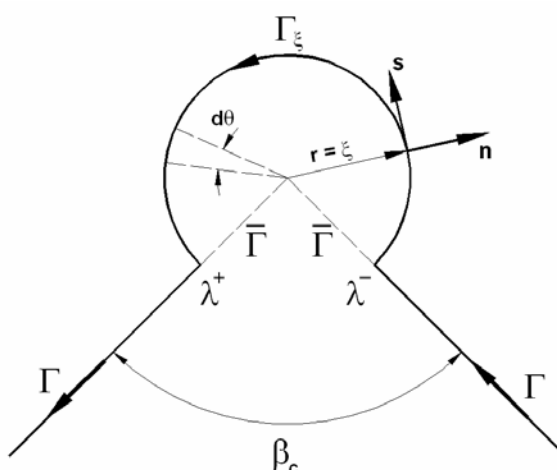


Figura 3.5 – Contorno circular acréscido a um ponto Q de um canto da placa.

Desta forma, coincidindo o ponto de aplicação da carga Q com o vértice do canto i e retirando-se a parcela $\bar{\Gamma}$, a equação (3.34) é satisfeita, pois Q pertence

ao novo domínio da placa. O domínio modificado gera os cantos λ^- e λ^+ e sua integral para o ponto Q , a partir de (3.34), fica:

$$\begin{aligned}
& w(Q) + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left(V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d(\Gamma-\bar{\Gamma}) + \\
& + \int_{\Gamma_\xi} \left(V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}^*(q,P)w_{ci}(P) + \\
& + R_{c\lambda^-}^*(Q,P)w_{ci}(P) + R_{c\lambda^+}^*(Q,P)w_{ci}(P) = \\
& = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left(V_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) d(\Gamma-\bar{\Gamma}) + \\
& + \int_{\Gamma_\xi} \left(V_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) d\Gamma_\xi + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q,P) + R_{c\lambda^-}(P)w_{ci}^*(Q,P) + R_{c\lambda^+}(P)w_{ci}^*(Q,P) + \\
& + \int_{\Omega+\Omega_\xi} N_{ij}(p)w_{,ij}(p)w^*(q,P) d(\Omega+\Omega_\xi) + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q,p) d\Omega_g
\end{aligned}$$

onde Γ_ξ e Ω_ξ representam a porção adicionada ao contorno e ao domínio, respectivamente.

Para que Q represente um ponto de contorno é necessário fazer com que o raio ξ tenda a zero. Assim, $w(Q)$ será calculado no limite, ou seja:

$$\begin{aligned}
& w(Q) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left(V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d(\Gamma-\bar{\Gamma}) + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left(V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}^*(q,P)w_{ci}(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(R_{c\lambda^-}^*(Q,P)w_{ci}(P) + R_{c\lambda^+}^*(Q,P)w_{ci}(P) \right) = \\
& = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left(V_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) d(\Gamma-\bar{\Gamma}) + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left(V_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) d\Gamma_\xi + \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q,P) + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(R_{c\lambda^-}(P)w_{ci}^*(Q,P) + R_{c\lambda^+}(P)w_{ci}^*(Q,P) \right) + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega+\Omega_\xi} N_{ij}(p)w_{,ij}(p)w^*(q,P) d(\Omega+\Omega_\xi) + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q,p) d\Omega_g
\end{aligned}$$

(3.35)

Os limites das integrais sobre o contorno $(\Gamma - \bar{\Gamma})$ e sobre o domínio $(\Omega + \Omega_\xi)$ na equação anterior resultam no valor principal das mesmas, ou seja:

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d(\Gamma - \bar{\Gamma}) = \\ = \int_{\Gamma} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left(V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d(\Gamma - \bar{\Gamma}) = \\ = \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega + \Omega_\xi} N_{ij}(p) w_{,ij}(p) w^*(q, P) d(\Omega + \Omega_\xi) = \\ = \int_{\Omega} N_{ij}(p) w_{,ij}(p) w^*(q, P) d\Omega \end{aligned} \quad (3.38)$$

As parcelas referentes às reações de canto resultam:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_c-1} R_{ck}^*(q, P) w_{ck}(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(R_{c\lambda^-}^*(Q, P) w_{ck}(P) + \right. \\ \left. + R_{c\lambda^+}^*(Q, P) w_{ck}(P) \right) = \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}^*(q, P) w_{ck}(P) \end{aligned} \quad (3.39)$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N_c-1} R_{ck}(P) w_{ck}^*(Q, P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(R_{c\lambda^-}(P) w_{ck}^*(Q, P) + \right. \\ \left. + R_{c\lambda^+}(P) w_{ck}^*(Q, P) \right) = \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P) w_{ck}^*(Q, P) \end{aligned} \quad (3.40)$$

A parcela referente à integral sobre o trecho Γ_ξ , envolvendo $w(P)$ e $\partial w(P)/\partial n$, pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi = \\
& = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ V_n^*(Q, P) [w(P) - w(Q)] - M_n^*(Q, P) \left[\frac{\partial w}{\partial n}(P) - \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right] \right\} d\Gamma_\xi + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_n^*(Q, P) w(Q) d\Gamma_\xi - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) d\Gamma_\xi
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Utilizando-se a condição de Hölder (Jaswon & Symm, 1977), dada por:

$$\begin{aligned}
|w(P) - w(Q)| &\leq C_1 r^{\alpha_1(P, Q)} \\
\left| \frac{\partial w}{\partial n}(P) - \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right| &\leq C_2 r^{\alpha_2(P, Q)}
\end{aligned}$$

onde C_1 e C_2 são constantes e $0 < \alpha_i \leq 1$, com $i = 1, 2$, a primeira integral de (3.41) se anula. E, ainda, como $w(Q)$ e $\partial w(Q)/\partial n$ são valores do domínio e não variam, portanto, ao longo de Γ_ξ , a equação (3.41) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi = \\
& w(Q) \cdot \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_n^*(Q, P) d\Gamma_\xi - \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} M_n^*(Q, P) d\Gamma_\xi
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Substituindo-se em (3.42) as soluções fundamentais (2.36) e (2.34) e considerando-se que, neste caso, $(r, n_k) = 1$, $(r, s_k) = 0$ e $r = R = \xi$, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi = \\
& w(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} -\frac{1}{2\pi\xi} d\Gamma_\xi + \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \frac{1}{4\pi} [(1+\nu) \ln \xi + 1] d\Gamma_\xi
\end{aligned}$$

Sendo $d\Gamma_\xi = \xi \cdot d\phi$, tem-se:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi =$$

$$w(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{(2\pi - \beta_c)} -\frac{1}{2\pi\xi} \xi d\phi + \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{(2\pi - \beta_c)} \frac{1}{4\pi} [(1 + \nu) \ln \xi + 1] \xi d\phi$$

onde β_c é o ângulo interno da placa, conforme ilustra a figura 3.5.

Resolvendo-se, então, as integrais anteriores, obtêm-se:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi = -\frac{2\pi - \beta_c}{2\pi} w(Q) \quad (3.43)$$

As demais integrais sobre Γ_ξ na equação (3.35) conduzem a valores nulos. Assim, substituindo-se as equações (3.43), (3.42), (3.41), (3.40), (3.39), (3.38), (3.37) e (3.36) em (3.35) tem-se a equação integral para um ponto do contorno:

$$C(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}^*(Q, P) w_{ck}(P) = \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P) w_{ck}^*(Q, P) + \int_{\Omega} N_{ij}(p) w_{,ij}(p) w^*(q, P) d\Omega + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g \quad (3.44)$$

onde

$$C(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi}$$

Para o caso do ponto q não pertencer ao domínio, a integral que contém o carregamento g^* na equação (3.32), é dada por:

$$\int_{\Omega} \delta(q, p) w(p) d\Omega = w(q) = 0$$

pois q não pertence ao domínio.

Sendo assim, pode-se concluir que:

$$C(Q) = \begin{cases} 1 & \rightarrow & Q \in \Omega \\ \frac{\beta_c}{2\pi} & \rightarrow & Q \in \Gamma \\ 0 & \rightarrow & Q \notin (\Omega \cup \Gamma) \end{cases}$$

Para o caso particular em que o ponto Q do contorno pertence a um trecho “reto”, isto é, $\beta_c = \pi$, tem-se:

$$C(Q) = \frac{1}{2}$$

3.5.3 – Equação integral de rotação para pontos no domínio da placa

Tendo em vista a equação de deslocamento para pontos internos ao domínio obtidos no item 3.5.1 e considerando-se que a rotação é dada pela derivada primeira do deslocamento, a equação integral de rotação para pontos no domínio pode ser escrita como segue:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w(q)}{\partial x_i} + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial V_n^*}{\partial x_i}(q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial x_i}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma + \\ & + \sum_{k=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ck}^*}{\partial x_i}(q, P) w_{ck}(P) = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial x_i}(q, P) - \right. \\ & \left. - M_n(P) \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \right\} d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P) \frac{\partial w_{ck}^*}{\partial x_i}(q, P) + \\ & + \int_{\Omega} N_{kl}(p) w_{,kl}(p) \frac{\partial w^*}{\partial x_i}(q, p) d\Omega + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*}{\partial x_i}(q, p) d\Omega_g \end{aligned}$$

(3.45)

sendo as derivadas primeiras das soluções fundamentais dadas por:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x_i}(q, p) = -\frac{r}{4\pi D} r_{,i} \ln r$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, p) \right] = -\frac{1}{4\pi D} [r_{,i} (r_{,k} n_k) + n_i \ln r]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^*}{\partial x_i}(q, p) = & \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu)(r_{,k} s_k)^2 [4r_{,i} (r_{,m} n_m) - n_i] + \right. \\ & \left. + 4(1-\nu)(r_{,k} s_k)(r_{,m} n_m) s_i + (3-\nu)[n_i - 2r_{,i} (r_{,k} n_k)] \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial x_i}(q, p) = \frac{1}{4\pi r} \left\{ (1+\nu) r_{,i} - 2(1-\nu)(r_{,k} n_k) [r_{,i} (r_{,m} n_m) - n_i] \right\}$$

$$\frac{\partial M_{ns}^*}{\partial x_i}(q, p) = \frac{(1-\nu)}{\pi r^2} \left\{ (r_{,k} s_k)(r_{,l} n_l) \right\}$$

com $i, k, l = 1, 2$.

3.5.4 – Equação integral de curvatura para pontos no domínio da placa

Considerando-se que a curvatura em um ponto qualquer da placa é dada é dada pela derivada segunda do deslocamento em relação às coordenadas x_i e x_j , tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_i \partial x_j} + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) w(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma + \\ & + \sum_{k=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{ck}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) w_{ck}(P) = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) - \right. \\ & \left. - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \right\} d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P) \frac{\partial^2 w_{ck}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) + \\ & + \int_{\Omega} N_{kl}(p) w_{,kl}(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) d\Omega + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) d\Omega_g \end{aligned}$$

(3.46)

sendo as derivadas segundas das soluções fundamentais expressas na seqüência.

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) = \frac{1}{4\pi D} (r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \ln r)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, p) \right] = -\frac{1}{4\pi D r} \left[(2r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}) r_{,k} n_k - r_{,i} n_j - r_{,j} n_i \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) = & \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 2(1-\nu)(r_k s_k)^2 \left[24r_{,i} r_{,j} (r_{,k} n_k) - 4 \left[r_{,i} n_j + r_{,j} n_i + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \delta_{ij} (r_{,k} n_k) \right] \right] + 2(1-\nu)(r_k s_k) \left[2(n_i s_j + n_j s_i) - 8(r_{,k} n_k)(r_{,i} s_j + \right. \right. \\ & \left. \left. r_{,j} s_i) \right] + 4(1-\nu)(r_{,k} n_k)(s_i s_j) + (3-\nu) \left[2\delta_{ij} (r_{,k} n_k) - \right. \right. \\ & \left. \left. - 8r_{,i} r_{,j} (r_{,k} n_k) + 2(r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) = & -\frac{1}{4\pi r^2} \left\{ (1+\nu)(\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) + 2(1-\nu) \left[n_i n_j - 2r_{,j} n_i (r_{,k} n_k) - \right. \right. \\ & \left. \left. - (\delta_{ij} - 4r_{,i} r_{,j})(r_{,k} n_k)^2 - 2r_{,i} n_j (r_{,k} n_k) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) = & \frac{(1-\nu)}{4\pi r^2} \left\{ 2 \left[(r_{,k} s_k)(r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) + (r_{,k} n_k)(r_{,i} s_j + r_{,j} s_i) \right. \right. \\ & \left. \left. + (r_{,k} n_k)(r_{,m} s_m)(\delta_{ij} - 4r_{,i} r_{,j}) \right] - (n_i s_j + n_j s_i) \right\} \end{aligned}$$

com $i, j, k, l = 1, 2$.

3.6 – Equações integrais para o problema elástico bidimensional

3.6.1 – Equação integral de deslocamento para pontos no domínio

As forças normais N_{ij} no problema não-linear geométrico de placas não dependem somente das forças externas aplicadas no plano (x_1, x_2) mas também das deformações do plano médio da placa devido à flexão. Dessa forma,

considerando-se que um carregamento externo atue perpendicularmente à placa e ainda que não existam forças externas atuantes no plano (x_1, x_2) , tais forças normais podem ser obtidas considerando-se uma deformação na superfície média da placa durante a flexão. Devido a não-linearidade do problema, as componentes de deformações representadas em (2.3) devem ser acrescidas de termos que representam a não-linearidade do problema e são expressas por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i} + w_{,i} w_{,j}) \quad (3.47)$$

Sendo assim, de forma análoga à efetuada para o problema de flexão de placas, e a partir do teorema da reciprocidade de Betti integrado na espessura da chapa apresentado no item 3.4 deste trabalho pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} N_{ikl}^* \varepsilon_{kl} d\Omega = \int_{\Omega} N_{kl} \varepsilon_{ikl}^* d\Omega \quad (3.48)$$

com $i, j, k = 1, 2$.

Tendo em vista que as soluções fundamentais a serem utilizadas serão as soluções para o problema linear de chapas descritas no item 2.2.7 deste trabalho e substituindo-se (3.47) em (3.48) obtém-se:

$$\int_{\Omega} N_{ikl}^* \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k} + w_{,k} w_{,l}) d\Omega = \int_{\Omega} N_{kl} \varepsilon_{ikl}^* d\Omega$$

e ainda

$$\int_{\Omega} N_{ikl}^* \cdot \frac{1}{2} \cdot (u_{k,l} + u_{l,k}) d\Omega + \int_{\Omega} N_{ikl}^* \frac{1}{2} (w_{,k} w_{,l}) d\Omega = \int_{\Omega} N_{kl} \frac{1}{2} (u_{ik,l}^* + u_{il,k}^*) d\Omega$$

que após algumas manipulações matemáticas assume a forma:

$$\int_{\Omega} N_{ikl}^* u_{k,l} d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} N_{ikl}^* w_{,k} w_{,l} d\Omega = \int_{\Omega} N_{kl} u_{ik,l}^* d\Omega \quad (3.49)$$

Integrando-se a equação (3.49) por partes obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} N_{ikl}^* u_k \eta_l d\Gamma - \int_{\Omega} N_{ikl,l}^* u_k d\Omega = \\ \int_{\Gamma} N_{kl} u_{ik}^* \eta_l d\Gamma - \int_{\Omega} N_{kl,l} u_{ik}^* d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} N_{ikl}^* w_{,k} w_{,l} d\Omega \end{aligned} \quad (3.50)$$

Substituindo-se as equações de equilíbrio (2.1) e (2.2) em (3.50) obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k d\Gamma - \int_{\Omega} N_{ikl,l}^* u_k d\Omega = \\ \int_{\Gamma} p_k u_{ik}^* d\Gamma + \int_{\Omega} b_k u_{ik}^* d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} N_{ikl}^* w_{,k} w_{,l} d\Omega \end{aligned}$$

Considerando-se ainda o problema fundamental e as propriedades dos deltas de Kronecker e Dirac tem-se, por fim, a equação integral de deslocamento para pontos no domínio da chapa:

$$\begin{aligned} u_i(q) = \int_{\Gamma} u_{ik}^*(q,P) p_k(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik}^*(q,P) u_k(P) d\Gamma + \\ + \int_{\Omega} u_{ik}^*(q,P) b_k(P) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} N_{ikl}^*(q,p) w_{,k}(p) w_{,l}(p) d\Omega \end{aligned} \quad (3.51)$$

3.6.2 – Equação integral de deslocamento para pontos no contorno

Um procedimento análogo ao efetuado no problema de flexão de placas deve ser realizado para a determinação da equação integral de deslocamento para pontos no contorno da chapa. Sendo assim, considere-se para um ponto P situado sobre o contorno da chapa um acréscimo no domínio de contorno circular de raio ξ com centro coincidente com este ponto conforme ilustra a figura 3.5.

Coincidindo-se o ponto de aplicação da carga Q com o ponto P e retirando-se a parcela $\bar{\Gamma}$ a equação (3.51) é satisfeita, pois o ponto Q pertence ao novo

domínio estabelecido. Assim, a equação integral para o ponto Q a partir de (3.51) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
u_i(Q) = & \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} u_{ik}^*(q,P) p_k(P) d(\Gamma-\bar{\Gamma}) + \int_{\Gamma_\xi} u_{ik}^*(q,P) p_k(P) d\Gamma_\xi - \\
& - \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} p_{ik}^*(q,P) u_k(P) d(\Gamma-\bar{\Gamma}) - \int_{\Gamma_\xi} p_{ik}^*(q,P) u_k(P) d\Gamma_\xi \\
& + \int_{\Omega+\Omega_\xi} u_{ik}^*(q,P) b_k(P) d(\Omega+\Omega_\xi) - \frac{1}{2} \int_{\Omega+\Omega_\xi} N_{ikl}^*(q,p) w_{,k}(p) w_{,l}(p) d(\Omega+\Omega_\xi)
\end{aligned}$$

Para que Q represente um ponto de contorno é necessário fazer com que o raio ξ tenda a zero. Assim, $u_i(Q)$ será calculado no limite, ou seja:

$$\begin{aligned}
u_i(Q) = & \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} u_{ik}^*(q,P) p_k(P) d(\Gamma-\bar{\Gamma}) + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_{ik}^*(q,P) p_k(P) d\Gamma_\xi - \\
& - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} p_{ik}^*(q,P) u_k(P) d(\Gamma-\bar{\Gamma}) - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} p_{ik}^*(q,P) u_k(P) d\Gamma_\xi \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega+\Omega_\xi} u_{ik}^*(q,P) b_k(P) d(\Omega+\Omega_\xi) - \\
& - \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega+\Omega_\xi} N_{ikl}^*(q,p) w_{,k}(p) w_{,l}(p) d(\Omega+\Omega_\xi)
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Os limites das integrais sobre o contorno $(\Gamma-\bar{\Gamma})$ e sobre o domínio $(\Omega+\Omega_\xi)$ na equação anterior resultam no valor principal das mesmas, ou seja:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} u_{ik}^*(q,P) p_k(P) d(\Gamma-\bar{\Gamma}) = \int_{\Gamma} u_{ik}^*(q,P) p_k(P) d\Gamma \tag{3.53}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} p_{ik}^*(q,P) u_k(P) d(\Gamma-\bar{\Gamma}) = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma} p_{ik}^*(q,P) u_k(P) d\Gamma \tag{3.54}$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Omega + \Omega_\xi} u_{ik}^*(q, P) b_k(P) d(\Omega + \Omega_\xi) = \int_{\Omega} u_{ik}^*(q, P) b_k(P) d\Omega \quad (3.55)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega + \Omega_\xi} N_{ikl}^*(q, p) w_{,k}(p) w_{,l}(p) d(\Omega + \Omega_\xi) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} N_{ikl}^*(q, p) w_{,k}(p) w_{,l}(p) d\Omega \quad (3.56)$$

A parcela referente à integral sobre o trecho Γ_ξ , envolvendo $p_j(P)$ se anula, ou seja:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} u_{ik}^*(q, P) p_k(P) d\Gamma_\xi = 0 \quad (3.57)$$

Já a parcela envolvendo $u_j(P)$ sobre o trecho Γ_ξ pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} p_{ik}^*(q, P) u_k(P) d\Gamma_\xi &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} p_{ik}^*(q, P) [u_k(P) - u_k(Q)] d\Gamma_\xi + \\ &+ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} p_{ik}^*(q, P) u_k(Q) d\Gamma_\xi \end{aligned}$$

Novamente utilizando-se da condição de Hölder (Jaswon & Symm, 1977) o primeiro termo do lado direito da equação se anula. Assim, pode-se escrever:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} p_{ik}^*(q, P) u_k(P) d\Gamma_\xi = \lim_{\xi \rightarrow 0} u_k(Q) \int_{\Gamma_\xi} p_{ik}^*(q, P) d\Gamma_\xi \quad (3.58)$$

Substituindo-se a solução fundamental do problema elástico (2.14) em (3.58) e efetuando-se a integração considerando-se um contorno suave, obtém-se:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} p_{ik}^*(q, P) u_k(P) d\Gamma_\xi = -\frac{1}{2} \delta_{ik} u_k(Q) \quad (3.59)$$

Assim, substituindo-se (3.59), (3.58), (3.57), (3.56), (3.55), (3.54) e (3.53) em (3.52) é possível escrever uma expressão geral para a equação de deslocamento para o problema elástico como segue:

$$C_{ik}(Q)u_k(Q) = \int_{\Gamma} u_{ik}^*(Q,P)p_k(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik}^*(Q,P)u_k(P)d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^*(Q,P)b_k(P)d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} N_{ikl}^*(Q,p)w_{,k}(p)w_{,l}(p)d\Omega \quad (3.60)$$

com

$$C_{ik}(Q) = \begin{cases} 1 & \rightarrow Q \in \Omega \\ \frac{1}{2} \delta_{ik} & \rightarrow Q \in \Gamma \\ 0 & \rightarrow Q \notin (\Omega \cup \Gamma) \end{cases}$$

sendo válido para o caso particular de contornos suaves (retos) utilizado neste trabalho.

3.6.3 – Equação integral de esforço normal para pontos no domínio

A equação integral de esforço normal para pontos internos ao domínio pode ser determinada a partir da relação constitutiva (2.6) apresentada no capítulo 2 deste trabalho.

Uma vez que a relação deformação-deslocamento envolve o cálculo das derivadas do deslocamento e tendo em vista a equação integral de deslocamento para pontos internos (3.51), pode-se escrever:

$$\frac{\partial u_i(q)}{\partial x_j} = \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j}(q,P)p_k(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial p_{ik}^*}{\partial x_j}(q,P)u_k(P)d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j}(q,P)b_j(P)d\Omega - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} N_{ikl}^*(q,p)w_{,k}(p)w_{,l}(p)d\Omega \quad (3.61)$$

A derivada das soluções fundamentais presentes na equação (3.61) podem ser feitas da maneira usual com exceção da parcela referente à consideração do

efeito não-linear geométrico. Atenção particular deve ser dada neste caso, pois a solução fundamental N_{ikl}^* possui singularidades do tipo $1/r$.

Assim, com o objetivo de se obter a derivada da integral referente ao efeito da não-linearidade geométrica, um procedimento utilizado por Venturini (1983), Chueiri (1994), Fernandes (1998), dentre outros trabalhos, será apresentado na seqüência.

É possível demonstrar que há a possibilidade de diferenciação do núcleo desta integral. Dessa forma a integral referida pode ser diferenciada aplicando-se a regra de Leibnitz para diferenciação de integrais como segue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} N_{ikl}^*(q, p) w_{,k}(p) w_{,l}(p) d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial N_{ikl}^*}{\partial x_j}(q, p) w_{,k}(p) w_{,l}(p) d\Omega - \\ &- w_{,k}(p) w_{,l}(p) \int_0^{2\pi} \bar{N}_{ikl}^*(q, p) r_{,j} d\phi \end{aligned} \quad (3.62)$$

sendo $\bar{N}_{ikl}^* = rN_{ikl}^*$.

A primeira integral presente em (3.62) deve ser interpretada no sentido do valor principal de Cauchy. Já a segunda pode ser facilmente obtida como segue:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \bar{N}_{ikl}^*(q, p) r_{,j} d\phi &= \int_0^{2\pi} \left\{ -\frac{1}{4\pi(1-\nu')} [2r_{,i} r_{,k} r_{,l} + (1-2\nu')(\delta_{ik}r_{,l} + \delta_{il}r_{,k} - \delta_{kl}r_{,i})] \right\} \cdot r_{,j} \cdot d\phi \\ \int_0^{2\pi} \bar{N}_{ikl}^*(q, p) r_{,j} d\phi &= -\frac{1}{8(1-\nu')} [(3-4\nu')(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) - (1-4\nu')\delta_{ij}\delta_{kl}] \end{aligned} \quad (3.63)$$

Assim, substituindo-se a equação (3.63) em (3.62) obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} N_{ikl}^*(q, p) w_{,k}(p) w_{,l}(p) d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{\partial N_{ikl}^*}{\partial x_j}(q, p) w_{,k}(p) w_{,l}(p) d\Omega - \\ &- \frac{1}{8(1-\nu')} [2(3-4\nu')w_{,i}(q)w_{,j}(q) - (1-4\nu')\delta_{ij}w_{,k}(q)w_{,k}(q)] \end{aligned} \quad (3.64)$$

Substituindo-se (3.64) em (3.61) e levando-se em consideração as relações (2.3) e (2.6) chega-se à a equação de esforço normal para pontos internos ao domínio:

$$\begin{aligned}
 N_{ij}(q) = & \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(q, P) p_k(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}^*(q, P) u_k(P) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ijk}^*(q, P) b_k(P) d\Omega - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} T_{ijkl}^*(q, P) w_{,k}(P) w_{,l}(P) d\Omega + \frac{\bar{G}}{8(1-\nu')} (2w_{,i}(q) w_{,j}(q) + \delta_{ij} w_{,k}(q) w_{,k}(q))
 \end{aligned}
 \tag{3.65}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
 D_{ijk}^*(q, P) = & \frac{1}{4\pi r(1-\nu')} \cdot \left\{ (1-2\nu') \cdot [\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}] + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \\
 S_{ijk}^*(q, P) = & \frac{\bar{G}}{2\pi r^2(1-\nu')} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu') \delta_{ij} r_{,k} + \nu' (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k}] + \right. \\
 & \left. + 2\nu' (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu') (2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu') n_k \delta_{ij} \right\} \\
 T_{ijkl}^*(q, p) = & - \frac{\bar{G}}{2\pi(1-\nu') r^2} \left[8r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} + (1-4\nu') \delta_{ij} \delta_{kl} - (1-2\nu') (2\delta_{ij} r_{,k} r_{,l} + \right. \\
 & \left. + 2\delta_{kl} r_{,i} r_{,j} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - 2\nu' (\delta_{ik} r_{,j} r_{,l} + \delta_{jk} r_{,i} r_{,l} + \delta_{il} r_{,j} r_{,k} + \delta_{jl} r_{,i} r_{,k}) \right]
 \end{aligned}$$

com $i, j, k, l = 1, 2$.

Capítulo 4***EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR
GEOMÉTRICA DE PLACAS SUJEITAS À PRESENÇA
DE CAMPOS DE ESFORÇOS INICIAIS*****4.1– Generalidades**

Neste capítulo o equacionamento desenvolvido para a análise não-linear geométrica de placas é estendido de modo a considerar a presença de momentos e forças normais provenientes de um campo de deformações iniciais assumido.

A formulação apresentada, além de permitir o estudo de problemas com ações devidas ao efeito de temperatura e retração, por exemplo, é essencial para a resolução de problemas de placas onde o material que a constitui apresenta comportamento não-linear.

Como será visto na seqüência do trabalho, o sistema não-linear de equações proveniente da análise proposta será resolvido através de um procedimento incremental-iterativo a partir de soluções elásticas sucessivas, onde as tensões excedentes devido à plastificação do material serão introduzidas ao sistema através de um campo de forças normais e momentos iniciais.

4.2 – Equacionamento básico

Conforme discutido anteriormente, no problema aqui proposto há a necessidade de se considerar a presença de um campo de deformação inicial

adicionada à parcela proveniente da aplicação do carregamento. Dessa forma, o tensor de deformações pode ser escrito como:

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^0 \quad (4.1)$$

com $i, j = 1, 2$ e sendo ε_{ij} o campo de deformação total composta pela componente elástica ε_{ij}^e devida ao carregamento e pela parcela ε_{ij}^0 referente ao campo de deformações iniciais.

Uma vez definido o tensor de deformações e considerando-se a lei de Hooke apresentada no capítulo 2 deste trabalho, o tensor de tensões pode ser escrito como:

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}^0 \quad (4.2)$$

com $i, j = 1, 2$.

Neste caso a parcela σ_{ij}^e está associada à deformação total ε_{ij} e as parcelas σ_{ij} e σ_{ij}^0 associadas às parcelas elástica ε_{ij}^e inicial ε_{ij}^0 , respectivamente.

É possível ainda se expressar os tensores de momento e força normal inicial como segue:

$$M_{ij}^e = M_{ij} + M_{ij}^0 \quad (4.3)$$

$$N_{ij}^e = N_{ij} + N_{ij}^0 \quad (4.4)$$

com $i, j = 1, 2$ e sendo as componentes M_{ij}^e e N_{ij}^e associadas à ε_{ij} ; M_{ij} e N_{ij} à ε_{ij}^e e M_{ij}^0 e N_{ij}^0 à parcela inicial ε_{ij}^0 .

4.3 – Equações integrais para o problema de flexão de placa

4.3.1 – Equações integrais de deslocamento

As equações integrais de deslocamento para pontos no contorno e no domínio da placa podem ser obtidas a partir do teorema da reciprocidade de Betti, de maneira semelhante à realizada no item 3.5 deste trabalho. Desta forma,

considerando-se novamente uma placa de domínio infinito submetida a dois carregamentos simultâneos g e g^* , o teorema de Betti em termos de momento e curvatura pode ser escrito como segue:

$$\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega = \int_{\Omega} M_{ij}^e w_{,ij}^* d\Omega$$

com $i, j = 1, 2$.

Considerando-se que a parcela M_{ij}^e do momento pode ser escrita como uma somatória das parcelas M_{ij} e M_{ij}^0 , pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega = \int_{\Omega} (M_{ij} + M_{ij}^0) w_{,ij}^* d\Omega$$

Ou então:

$$\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega = \int_{\Omega} M_{ij} w_{,ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} M_{ij}^0 w_{,ij}^* d\Omega \quad (4.5)$$

Com exceção da integral que possui o campo de momentos iniciais em seu integrando, o desenvolvimento através de integrações por partes, semelhantemente ao efetuado no item 3.5 deste trabalho, conduz a equação de deslocamentos para pontos internos ao domínio da placa, sendo dada por:

$$\begin{aligned} w(q) + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}^*(q, P) w_{ck}(P) = \\ = \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P) w_{ck}^*(q, P) + \\ + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g + \int_{\Omega} N_{ij}(p) w_{,ij}(p) w^*(q, P) d\Omega - \int_{\Omega} M_{ij}^0(p) w_{,ij}^*(q, P) d\Omega \end{aligned} \quad (4.6)$$

com $i, j = 1, 2$.

Efetuando-se procedimento análogo ao item 3.5.2 deste trabalho é possível obter-se a equação de deslocamentos para pontos no contorno da placa, sendo esta dada pela equação (4.7).

$$\begin{aligned}
C(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}^*(Q,P)w_{ck}(P) = \\
= \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P)w_{ck}^*(Q,P) + \\
+ \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q,p)d\Omega_g + \int_{\Omega} N_{ij}(p)w_{,ij}(p)w^*(Q,P)d\Omega - \int_{\Omega} M_{ij}^0(p)w_{,ij}^*(Q,P)d\Omega
\end{aligned} \tag{4.7}$$

onde $i, j = 1, 2$ e

$$C(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi}$$

sendo β_c o ângulo interno do canto da placa no ponto Q .

4.3.2 – Equação integral de rotação para pontos no domínio da placa

Uma vez obtida a equação integral de deslocamento para pontos internos ao domínio da placa, a determinação da equação integral de rotação se faz de maneira simples, apenas derivando-se a equação de deslocamentos. Dessa forma, derivando-se a equação (4.7) em relação à coordenada x_i obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w(q)}{\partial x_i} + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial V_n^*}{\partial x_i}(q,P)w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial x_i}(q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ck}^*}{\partial x_i}(q,P)w_{ck}(P) = \\
= \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial x_i}(q,P) - M_n(P)\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right] \right\} d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P)\frac{\partial w_{ck}^*}{\partial x_i}(q,P) + \\
+ \int_{\Omega_g} g(p)\frac{\partial w^*}{\partial x_i}(q,p)d\Omega_g + \int_{\Omega} N_{kl}(p)w_{,kl}(p)\frac{\partial w^*}{\partial x_i}(q,p)d\Omega - \frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Omega} M_{kl}^0(p)w_{,kl}^*(q,p)d\Omega
\end{aligned} \tag{4.8}$$

com $i, j, k, l = 1, 2$.

Observando-se a expressão da solução fundamental $w_{kl}^*(q, P)$ verifica-se que a derivada em relação à coordenada x_i pode ser feita normalmente, uma vez que não ocorrem singularidades fortes. Sendo assim a derivada da integral que possui o campo de momentos iniciais em seu integrando pode ser feita de maneira simples, efetuando-se apenas a derivada de $w_{kl}^*(q, P)$. Assim, pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int_{\Omega} M_{kl}^0(p) w_{,kl}^*(q, p) d\Omega = \int_{\Omega} M_{kl}^0(p) w_{,ikl}^*(q, p) d\Omega$$

sendo

$$w_{,ikl}^*(q, p) = -\frac{1}{4\pi D r} [\delta_{ij} r_{,k} + \delta_{kl} r_{,i} + \delta_{ik} r_{,j} - 2r_{,i} r_{,k} r_{,j}] \quad (4.9)$$

4.3.3 – Equação integral de curvatura para pontos no domínio da placa

A equação integral de curvatura para pontos internos ao domínio da placa pode ser obtida derivando-se a equação de deslocamento para pontos internos em relação às coordenadas x_i e x_j . Dessa forma, a partir de (4.7) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_i \partial x_j} + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) w(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{ck}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) w_{ck}(P) = \\ & = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \right\} d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P) \frac{\partial^2 w_{ck}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) + \\ & + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) d\Omega_g + \int_{\Omega} N_{kl}(p) w_{,kl}(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) d\Omega - \\ & - \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} M_{kl}^0(p) w_{,kl}^*(q, p) d\Omega \end{aligned} \quad (4.10)$$

com $i, j, k, l = 1, 2$.

Particular atenção deve ser dada à derivada segunda da integral que possui em seu integrando o campo de momentos iniciais, pois neste caso a solução fundamental w_{ikl}^* possui singularidades do tipo $1/r$.

O processo de diferenciação da referida integral deve seguir o mesmo procedimento apresentado no item 3.6.3 deste trabalho, sendo o resultado final obtido apresentado na equação que segue:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \int_{\Omega} M_{kl}^0(p) w_{,kl}^*(q, P) d\Omega = \int_{\Omega} M_{kl}^0(p) w_{,ijkl}^*(q, p) d\Omega + \frac{1}{8D} [2M_{ij}^0(q) + \delta_{ij} M_{kk}^0(q)]$$

sendo

$$w_{ijkl}^*(q, p) = -\frac{1}{4\pi D r^2} \left[2(\delta_{ik} r_{,j} r_{,l} + \delta_{jk} r_{,i} r_{,l} + \delta_{ij} r_{,k} r_{,l} + \delta_{il} r_{,j} r_{,k} + \delta_{kl} r_{,i} r_{,j} + \delta_{jl} r_{,i} r_{,k}) - 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} - (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk} + \delta_{ij} \delta_{kl}) \right] \quad (4.11)$$

4.4 – Equações integrais para o problema elástico bidimensional

4.4.1 – Equações integrais de deslocamento

As equações integrais de deslocamento para pontos no contorno e no domínio da chapa podem ser obtidas forma análoga à efetuada para o problema de flexão de placas. Sendo assim considere-se uma chapa isotrópica qualquer de domínio finito Ω e contorno Γ submetida a dois carregamentos distintos e não simultâneos, sendo um deles referente ao problema fundamental. Assim, pelo

teorema da reciprocidade de Betti integrado na espessura da placa pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} N_{ikl}^* \varepsilon_{kl} d\Omega = \int_{\Omega} N_{kl}^e \varepsilon_{ikl}^* d\Omega$$

com $i, k, l = 1, 2$.

Considerando-se a equação (4.4), onde o esforço normal N_{kl}^e é escrito em função da soma das demais componentes N_{ij} e N_{ij}^0 , o teorema de Betti descrito assume a forma:

$$\int_{\Omega} N_{ikl}^* \varepsilon_{kl} d\Omega = \int_{\Omega} (N_{kl} + N_{kl}^0) \varepsilon_{ikl}^* d\Omega$$

ou então:

$$\int_{\Omega} N_{ikl}^* \varepsilon_{kl} d\Omega = \int_{\Omega} N_{kl} \varepsilon_{ikl}^* d\Omega + \int_{\Omega} N_{kl}^0 \varepsilon_{ikl}^* d\Omega \quad (4.12)$$

Com exceção da integral que possui o campo de normais iniciais em seu integrando, pode-se efetuar um desenvolvimento através de integrações por partes de maneira semelhante à realizada no item 3.6 deste trabalho. Dessa forma, a equação de deslocamentos para pontos internos ao domínio da chapa pode ser escrita através da equação (4.13).

$$\begin{aligned}
u_i(q) = & \int_{\Gamma} u_{ik}^*(q,P) p_k(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik}^*(q,P) u_k(P) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^*(q,P) b_k(P) d\Omega - \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Omega} N_{ikl}^*(q,p) w_{,k}(p) w_{,l}(p) d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ikl}^*(q,p) N_{jk}^0(p) d\Omega
\end{aligned}
\tag{4.13}$$

com $i, k, l = 1, 2$.

A obtenção da equação integral de deslocamento para pontos no contorno da chapa segue o mesmo procedimento descrito no item 3.6.2 deste trabalho. Sendo assim, considerando-se um acréscimo circular de domínio centrado no ponto fonte sobre o contorno e escrevendo-se a equação de deslocamentos no limite com o raio tendendo à zero, obtém-se:

$$\begin{aligned}
C_{ik}(Q) u_k(Q) = & \int_{\Gamma} u_{ik}^*(Q,P) p_k(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik}^*(Q,P) u_k(P) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^*(Q,P) b_k(P) d\Omega - \\
& - \frac{1}{2} \int_{\Omega} N_{ikl}^*(Q,p) w_{,k}(p) w_{,l}(p) d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ikl}^*(Q,p) N_{kl}^0(p) d\Omega
\end{aligned}
\tag{4.14}$$

com $i, k, l = 1, 2$ e $C_{ik}(Q) = \left(\frac{1}{2}\right) \delta_{ik}$ para o caso particular de contornos suaves (retos) tratado neste trabalho.

4.4.2 – Equação integral de esforço normal para pontos do domínio

A relação constitutiva (2.6) apresentada no capítulo 2 deste trabalho fornece a relação entre as tensões e as deformações na chapa. Tendo em vista que as

deformações na chapa são dadas em função da derivada dos deslocamentos, com o auxílio da equação de deslocamentos em pontos internos (4.13) pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_i(q)}{\partial x_j} = & \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j}(q, P) p_k(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial p_{ik}^*}{\partial x_j}(q, P) u_k(P) d\Gamma \\
 & + \int_{\Omega} \frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j}(q, P) b_j(P) d\Omega - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} N_{ikl}^*(q, p) w_{,k}(p) w_{,l}(p) d\Omega + \\
 & + \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} \varepsilon_{ikl}^*(q, p) N_{kl}^0(p) d\Omega
 \end{aligned}
 \tag{4.15}$$

Com exceção da integral que possui o campo de forças normais no seu integrando, todas as demais derivadas presentes na equação (4.15) foram devidamente tratadas no item 3.6.3 deste trabalho. Com relação à referida integral, é necessário aplicar a regra de Leibnitz para diferenciação de integrais de maneira semelhante à efetuada no item 3.6.3 deste trabalho. Dessa forma, o resultado final obtido pode ser expresso por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{\Omega} \varepsilon_{ikl}^*(q, p) N_{kl}^0(p) d\Omega = & \int_{\Omega} \frac{\partial \varepsilon_{ikl}^*}{\partial x_j}(q, p) N_{kl}^0(p) d\Omega - \\
 & - \frac{1}{16(1-\nu')} \bar{G} \left[2(3-4\nu') N_{ij}^0(q) + \delta_{ij} N_{kk}^0(q) \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

Com o auxílio das equações (2.6), (2.3), (4.15) e (4.16) pode-se escrever a equação integral de esforço normal para pontos internos ao domínio da chapa, sendo expressa pela equação (4.17).

$$\begin{aligned}
N_{ij}(q) = & \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(q, P) p_k(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}^*(q, P) u_k(P) d\Gamma + \\
& + \int_{\Omega} D_{ijk}^*(q, P) b_k(P) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} T_{ijkl}^*(q, P) w_{,k}(P) w_{,l}(P) d\Omega + \\
& + \int_{\Omega} E_{ijkl}^*(q, P) N_{kl}(P) d\Omega + \frac{\bar{G}}{8(1-\nu')} [2w_{,i}(q)w_{,j}(q) + \delta_{ij}w_{,k}(q)w_{,k}(q)] - \\
& - \frac{1}{8(1-\nu')} [2N_{ij}^0(q) + (1-4\nu')\delta_{ij}N_{kk}^0(q)]
\end{aligned}
\tag{4.17}$$

com $i, j, k, l = 1, 2$ e a solução fundamental E_{ijkl}^* dada por:

$$\begin{aligned}
E_{ijkl}^*(q, p) = & \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (1-2\nu') [\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{jl}\delta_{ik} - \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\delta_{ij}r_{,k}r_{,l}] + \right. \\
& \left. 2\nu [\delta_{ik}r_{,j}r_{,l} + \delta_{jl}r_{,i}r_{,k} + \delta_{il}r_{,j}r_{,k} + \delta_{jk}r_{,i}r_{,l}] + 2\delta_{kl}r_{,i}r_{,j} - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l} \right\}
\end{aligned}
\tag{4.18}$$

Capítulo 5**EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO
DE PLACAS ENRIJECIDAS****5.1– Generalidades**

Neste capítulo serão apresentadas as equações integrais para a análise de flexão de placas enrijecidas.

Inicialmente apresenta-se a formulação que contempla o estudo de placas enrijecidas submetidas à flexão simples, onde o plano médio do enrijecedor coincide com o plano médio da placa. Na seqüência essa formulação é estendida de modo a considerar o problema de flexão composta, onde o plano médio do enrijecedor não coincide necessariamente com o plano médio da placa. Ao final do capítulo, com o intuito de estudar o comportamento elastoplástico das placas enrijecidas, são apresentadas as equações referentes à análise de placas enrijecidas submetidas à flexão composta e sujeitas à presença de campos de esforços iniciais.

É interessante destacar que a consideração dos efeitos dos enrijecedores em tais formulações segue um procedimento específico onde se procurou reduzir o número de variáveis a serem aproximadas no domínio. Para induzir a correção de rigidez nos problemas, o modelo foi formulado a partir da consideração de campos de momentos e forças normais iniciais, o que permitiu uma maior simplificação e redução na complexidade das equações obtidas.

5.2 – Placas enrijecidas submetidas à flexão simples**5.2.1 – Equação integral de deslocamento**

Considere-se uma placa isotrópica e enrijecida qualquer de domínio finito Ω e contorno Γ submetida a um carregamento g distribuído em uma área de domínio Ω_g , conforme ilustra a figura 5.1.

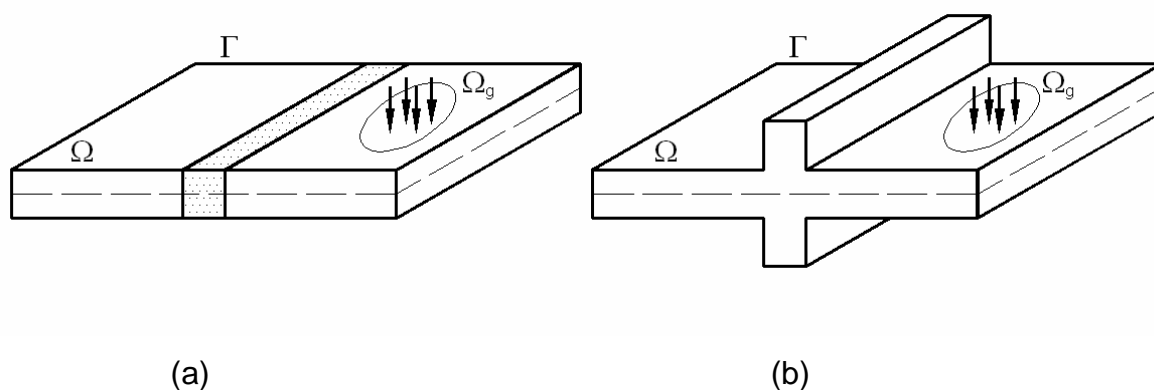


Figura 5.1 – Placa enrijecida: (a) materiais diferentes; (b) espessuras diferentes.

Considere-se, ainda, que a placa está inserida em uma placa de domínio infinito Ω_∞ e contorno Γ_∞ e que a placa finita é submetida a dois carregamentos não simultâneos g e g^* , aos quais estão associados às superfícies elásticas w e w^* , os estados de tensão σ_{ij} e σ_{ij}^* e seus respectivos estados de deformação ε_{ij} e ε_{ij}^* .

Identificados tais estados de tensão e deformação e partindo-se inicialmente do Teorema de Betti, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega = \int_{\Omega} M_{ij}^e w_{,ij}^* d\Omega$$

com $i, j = 1, 2$.

O aumento de rigidez proporcionado pelo enrijecedor à placa é tratado neste trabalho de uma maneira simplificada. O painel enrijecido é considerado como um todo e o ganho de rigidez é induzido ao conjunto através da aplicação de um campo de momentos iniciais sobre o domínio Ω_{enrij} do enrijecedor. Dessa forma, assumindo-se para Ω_{enrij} a rigidez à flexão D_p da placa, pode-se definir uma relação entre o momento elástico, M_{ij}^e , o momento corretor M_{ij}^c e o momento atual M_{ij} (ver figura 5.2) como segue:

$$M_{ij} = M_{ij}^e + M_{ij}^c \quad (5.1)$$

sendo M_{ij}^e dado pela equação (2.20) e

$$M_{ij} = \psi_p M_{ij}^e \quad (5.2)$$

$$M_{ij}^c = (\psi_p - 1) M_{ij}^e \quad (5.3)$$

sendo ψ_p definido como a relação entre a rigidez a flexão do enrijecedor D_{enrij} e da placa D_p , $\psi_p = D_{enrij} / D_p$.

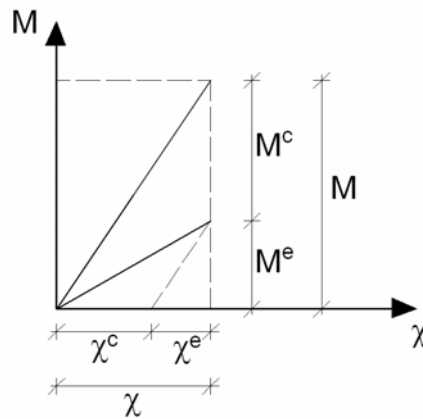


Figura 5.2 – Relação aditiva de momento.

Definida a relação aditiva de momento e considerando-se o campo de momentos corretores M_{ij}^c atuando no domínio do enrijecedor, o teorema de Betti pode ser escrito como segue:

$$\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega = \int_{\Omega} M_{ij} w_{,ij}^* d\Omega - \int_{\Omega_{enrij}} M_{ij}^c w_{,ij}^* d\Omega_{enrij}$$

Efetuando-se o desenvolvimento da equação anterior de forma já detalhada neste trabalho obtém-se a equação de integral de deslocamento para pontos no domínio da placa enrijecida:

$$\begin{aligned} & C(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\ & + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}^*(Q,P)w_{ck}(P) = \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) d\Gamma + \\ & + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P)w_{ck}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q,p)d\Omega_g + \int_{\Omega_{enrij}} M_{ij}^c(p)w_{,ij}^*(Q,p)d\Omega_{enrij} \end{aligned}$$

(5.4)

Na equação (5.4) todas as três componentes do momento corretor estão sendo consideradas. Como usual para esse tipo de problema, neste trabalho optou-se por considerar apenas o ganho de rigidez na direção longitudinal s da viga. Dessa forma, a equação de deslocamento (5.4) pode ser reduzida à:

$$\begin{aligned}
& C(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\
& + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}^*(Q,P)w_{ck}(P) = \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) d\Gamma + \\
& + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P)w_{ck}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q,p)d\Omega_g + \int_{\Omega_{enrij}} M_{ss}^c(p)w_{,ss}^*(Q,p)d\Omega_{enrij}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Com o objetivo de se eliminar as singularidades presentes na integral no domínio do enrijecedor para a posterior definição da equação de momento nos pontos internos, uma integração por partes é efetuada. Assim, obtém-se a equação final de deslocamento para placas enrijecidas submetidas à flexão simples dada pela equação (5.6).

$$\begin{aligned}
& C(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}^*(Q,P)w_{ck}(P) = \\
& = \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P)w_{ck}^*(Q,P) + \\
& + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q,p)d\Omega_g + \int_{\Gamma_{enrij}} M_{ss}^c(p)w_{,s}^*(Q,p)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \\
& - \int_{\Omega_{enrij}} M_{ss,s}^c(p)w_{,s}^*(Q,p)d\Omega_{enrij}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

5.2.2 – Equação integral de momento para pontos no domínio da placa

A relação (2.20) apresentada no capítulo 2 deste trabalho fornece a relação entre momento e curvatura na placa. Tendo em vista que a curvatura em um ponto qualquer da placa é obtida através da derivada segunda do deslocamento em

relação às coordenadas x_i e x_j , com o auxílio da equação (5.5) pode-se escrever a equação de momento nos pontos do enrijecedor:

$$\begin{aligned}
M_{ij}^r(q) = & - \int_{\Gamma} \left(V_{n_{ij}}^*(q, P) w(P) - M_{n_{ij}}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck_{ij}}^*(q, P) w_{ci}(P) + \\
& + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w_{ij}^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w_{ij}^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P) w_{ck_{ij}}^*(q, P) + \\
& + \int_{\Omega_g} g(\rho) w_{ij}^*(q, \rho) d\Omega_g + \int_{\Gamma_{enrij}} M_{ss}^c(\rho) w_{s_{ij}}^*(Q, \rho) \eta_s d\Gamma_{enrij} - \\
& - \int_{\Omega_{enrij}} M_{ss,s}^c(\rho) w_{s_{ij}}^*(q, \rho) d\Omega_{enrij}
\end{aligned} \tag{5.7}$$

onde

$$V_{n_{ij}}^*(q, P) = -D_p \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 V_n^*(q, P)}{\partial x_k \partial x_k} + (1-\nu) \frac{\partial^2 V_n^*(q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

$$M_{n_{ij}}^*(q, P) = -D_p \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 M_n^*(q, P)}{\partial x_k \partial x_k} + (1-\nu) \frac{\partial^2 M_n^*(q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

$$R_{cm_{ij}}^*(q, P) = -D_p \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 R_{cm}^*(q, P)}{\partial x_k \partial x_k} + (1-\nu) \frac{\partial^2 R_{cm}^*(q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

$$w_{ij}^*(q, P) = -D_p \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w^*(q, P)}{\partial x_k \partial x_k} + (1-\nu) \frac{\partial^2 w^*(q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

$$\frac{\partial w_{ij}^*}{\partial n}(q, P) = -D_p \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) + (1-\nu) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right]$$

$$w_{s_{ij}}^*(q, P) = -D_p \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w_{s}^*(q, P)}{\partial x_k \partial x_k} + (1-\nu) \frac{\partial^2 w_{s}^*(q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right]$$

com as derivadas das soluções fundamentais apresentadas nos capítulos anteriores deste trabalho.

Particularizando-se o cálculo do momento apenas para a direção longitudinal s do enrijecedor, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 M_{ss}^r(q) = & - \int_{\Gamma} \left(V_{n_{ss}}^*(q, P) w(P) - M_{n_{ss}}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck_{ss}}^*(q, P) w_{ck} \\
 & + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w_{ss}^*(q, P) - M_n(P) \frac{\partial w_{ss}^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P) w_{ck_{ss}}^*(q, P) \\
 & + \int_{\Omega_g} g(\rho) w_{ss}^*(q, \rho) d\Omega_g + \int_{\Gamma_{enrij}} M_{ss}^c(\rho) w_{s_{ss}}^*(Q, \rho) \eta_s d\Gamma_{enrij} - \\
 & - \int_{\Omega_{enrij}} M_{ss,s}^c(\rho) w_{s_{ss}}^*(q, \rho) d\Omega_e
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

5.3 – Placas enrijecidas submetidas à flexão composta

A formulação apresentada no item 5.2 deste trabalho apresenta a particularidade de ser aplicável somente aos casos onde o conjunto “placa + enrijecedor” esteja submetido à flexão simples.

Nesse item pretende-se estender a formulação apresentada visando englobar os casos onde o conjunto esteja submetido à flexão e também a esforços de membrana. Tem-se como exemplo de um painel submetido à flexão composta o conjunto ilustrado na figura 5.3, onde a superfície média do enrijecedor não coincide com a superfície média da placa.

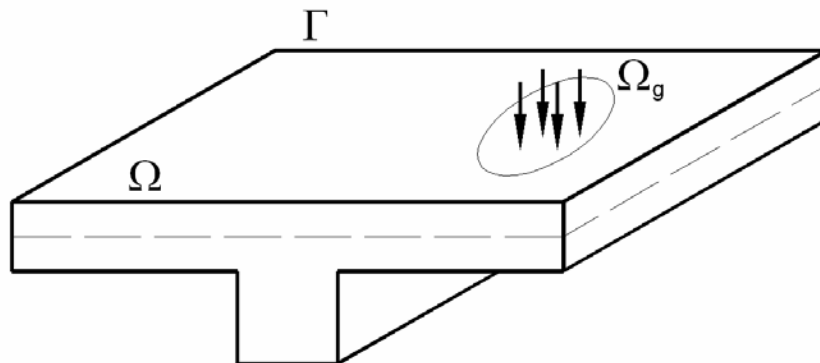


Figura 5.3 – Painel enrijecido submetido à flexão composta.

Assim como efetuado nos capítulos anteriores deste trabalho, neste caso também é possível realizar-se uma análise acoplada dos problemas de flexão de

placas e do problema elástico plano. Sendo assim, considere-se um corte transversal da placa enrijecida ilustrado na figura 5.4.

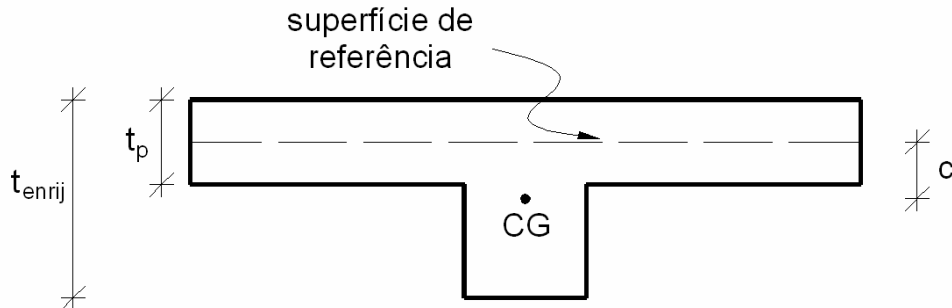


Figura 5.4 – Superfície de referência.

Devido ao fato de as superfícies médias do enrijecedor e da placa não serem coincidentes existe a necessidade de se definir uma superfície que será considerada como referência para se efetuar o equilíbrio dos esforços.

Tomando-se a superfície média da placa como superfície de referência e considerando-se que tanto a força normal quanto a curvatura não se alteram ao longo da espessura do enrijecedor, os tensores de deformação e de momento podem ser escritos em relação a superfície de referência como segue:

$$\varepsilon_{ij}^{enrij} = \varepsilon_{ij} - cW_{,ij} \quad (5.9)$$

$$M_{ij}^{enrij} = M_{ij} - cN_{ij} \quad (5.10)$$

onde ε_{ij}^{enrij} e ε_{ij} são os valores das deformações escritos na superfície média do enrijecedor e na superfície de referência, respectivamente; M_{ij}^{enrij} e M_{ij} são os valores de momento também referenciados à superfície média do enrijecedor e à superfície de referência, respectivamente; e c é a distância entre o plano médio do enrijecedor e o plano de referência.

Definida as relações iniciais serão deduzidas, na seqüência, as equações integrais necessárias para a resolução do problema de placas enrijecidas submetidas à flexão composta.

5.3.1– Equações integrais para o problema de flexão de placas

5.3.1.1 – Equação integral de deslocamento

Considere-se a placa enrijecida ilustrada na figura 5.5. O domínio da placa Ω foi dividido em duas parcelas, sendo Ω_2 a parcela coincidente com o enrijecedor e $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$. Foi adotada como superfície de referência a superfície média da placa, dando origem à distância $c = (t_{enrij}/2) - (t/2)$.

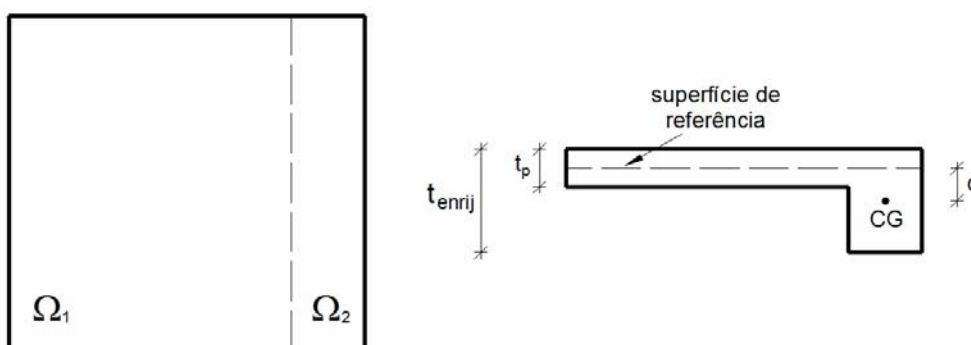


Figura 5.5 – Placa enrijecida.

Partindo-se do Teorema de Betti aplicado ao problema de flexão de placas escrito em função de momento e curvatura, pode-se escrever para o domínio do conjunto “placa + enrijecedor” a relação:

$$\int_{\Omega_1} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega_2 = \int_{\Omega_1} M_{ij}^e w_{,ij}^* d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} M_{ij}^e w_{,ij}^* d\Omega_2 \quad (5.11)$$

Trabalhando-se apenas com a parcela referente ao domínio enrijecido e considerando-se a presença de um campo de momentos corretores M_{ij}^c para induzir o acréscimo de rigidez à flexão ao conjunto obtém-se:

$$\int_{\Omega_2} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega_2 = \int_{\Omega_2} M_{ij}^{enrij} w_{,ij}^* d\Omega_2 - \int_{\Omega_2} M_{ij}^c w_{,ij}^* d\Omega_2$$

Uma vez que a equação anterior está escrita em relação à superfície média do enrijecedor e tendo em vista que o equilíbrio deve ser feito em relação à

superfície de referência, através da substituição da equação (5.10) na equação anterior obtém-se:

$$\int_{\Omega_2} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega_2 = \int_{\Omega_2} M_{ij} w_{,ij}^* d\Omega_2 - c \int_{\Omega_2} N_{ij} w_{,ij}^* d\Omega_2 - \int_{\Omega_2} M_{ij}^c w_{,ij}^* d\Omega_2 \quad (5.12)$$

De maneira análoga a efetuada no item 5.2 deste trabalho, também neste caso é possível definir-se uma relação aditiva de esforço normal como segue:

$$N_{ij} = N_{ij}^e + N_{ij}^c \quad (5.13)$$

com N_{ij}^e dado pela equação (2.6) e

$$N_{ij} = \psi_c N_{ij}^e \quad (5.14)$$

$$N_{ij}^c = (\psi_c - 1) N_{ij}^e \quad (5.15)$$

sendo ψ_c definido como a relação entre os produtos Gt_{enrij} do enrijecedor e Gt_p da placa, $\psi_c = Gt_{enrij}/Gt_p$.

Substituindo-se as equações (5.14) e (5.3) em (5.12) e adotando-se M^r e N^r para representar os esforços elásticos M^e e N^e no enrijecedor, obtém-se:

$$\int_{\Omega_2} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega_2 = \int_{\Omega_2} M_{ij} w_{,ij}^* d\Omega_2 - c \cdot \psi_c \int_{\Omega_2} N_{ij}^r w_{,ij}^* d\Omega_2 - (\psi_p - 1) \int_{\Omega_2} M_{ij}^r w_{,ij}^* d\Omega_2 \quad (5.16)$$

A equação (5.16) representa o teorema de Betti para o domínio do enrijecedor com o equilíbrio dos esforços realizado na superfície de referência. A parcela do teorema referente ao domínio Ω_1 não sofrerá alterações, uma vez que o plano de referência adotado coincide com o plano médio da placa e que não há acréscimos devido a mudanças na rigidez. Sendo assim, substituindo-se (5.16) em (5.11) obtém-se o teorema de Betti escrito para a placa como um todo acrescido das integrais no domínio do enrijecedor referentes às correções impostas:

$$\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega = \int_{\Omega} M_{ij} w_{,ij}^* d\Omega - c \cdot \psi_c \int_{\Omega_{enrij}} N_{ij}^r w_{,ij}^* d\Omega_{enrij} - (\psi_p - 1) \int_{\Omega_{enrij}} M_{ij}^r w_{,ij}^* d\Omega_{enrij} \quad (5.17)$$

Efetuando-se o desenvolvimento da equação (5.17) obtém-se por fim a equação de deslocamento para placas enrijecidas submetidas à flexão composta:

$$\begin{aligned}
& C(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}^*(Q,P)w_{ck}(P) = \\
& = \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P)w_{ck}^*(Q,P) + \\
& + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q,p)d\Omega_g + (\psi_p - 1) \int_{\Omega_{enrij}} M_{ij}^r(p)w_{,ij}^*(Q,p)d\Omega_{enrij} + \\
& + c \cdot \psi_c \int_{\Omega_{enrij}} N_{ij}^r(p)w_{,ij}^*(Q,p)d\Omega_{enrij}
\end{aligned}$$

Particularizando-se o cálculo do momento e do esforço normal apenas para a direção longitudinal s do enrijecedor e efetuando-se uma integração por partes nas integrais no domínio do enrijecedor de modo a eliminar as singularidades do integrando, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& C(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}^*(Q,P)w_{ck}(P) = \\
& = \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P)w_{ck}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q,p)d\Omega_g \\
& + (\psi_p - 1) \left[\int_{\Gamma_{enrij}} M_{ss}^r(p)w_{,s}^*(Q,p)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} M_{ss,s}^r(p)w_{,s}^*(Q,p)d\Omega_{enrij} \right] \\
& + c \cdot \psi_c \left[\int_{\Gamma_{enrij}} N_{ss}^r(p)w_{,s}^*(Q,p)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} N_{ss,s}^r(p)w_{,s}^*(Q,p)d\Omega_{enrij} \right]
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Conforme será visto no decorrer do desenvolvimento das equações integrais necessárias para a resolução do problema em questão, é mais interessante expressar a equação (5.18) em termos das curvaturas no enrijecedor. Sendo assim,

substituindo-se a relação (2.20) em (5.18) obtém-se a equação final de deslocamento para placas enrijecidas submetidas à flexão composta:

$$\begin{aligned}
& C(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}^*(Q,P)w_{ck}(P) = \\
& = \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P)\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P)w_{ck}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q,p)d\Omega_g \\
& - D_p(\psi_p - 1) \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,ss}^r(p)w_{,s}^*(Q,p)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,ss,s}^r(p)w_{,s}^*(Q,p)d\Omega_{enrij} \right] - \\
& - \nu D_p(\psi_p - 1) \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,nn}^r(p)w_{,s}^*(Q,p)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,nn,s}^r(p)w_{,s}^*(Q,p)d\Omega_{enrij} \right] + \\
& + c \cdot \psi_c \left[\int_{\Gamma_{enrij}} N_{ss}^r(p)w_{,s}^*(Q,p)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} N_{ss,s}^r(p)w_{,s}^*(Q,p)d\Omega_{enrij} \right]
\end{aligned} \tag{5.19}$$

5.3.1.2 – Equação integral de curvatura

A equação integral de curvatura pode ser obtida derivando-se duas vezes a equação de deslocamento (5.19) em relação às coordenadas x_i e x_j . Assim, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 w^r(q)}{\partial x_i \partial x_j} + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,P)w(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{ck}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,P)w_{ck}(P) = \\
& = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P)\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,P) - M_n(P)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) \right] \right\} d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P)\frac{\partial^2 w_{ck}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,P) + \\
& + \int_{\Omega_g} g(p)\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,P)d\Omega_g - D_p(\psi_p - 1) \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,ss}^r(p)\frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,p)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \right. \\
& \left. - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,ss,s}^r(p)\frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,p)d\Omega_{enrij} \right] - \nu D_p(\psi_p - 1) \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,nn}^r(p)\frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,p)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \right. \\
& \left. - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,nn,s}^r(p)\frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,p)d\Omega_{enrij} \right] + c \cdot \psi_c \left[\int_{\Gamma_{enrij}} N_{ss}^r(p)\frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,p)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \right. \\
& \left. - \int_{\Omega_{enrij}} N_{ss,s}^r(p)\frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q,p)d\Omega_{enrij} \right]
\end{aligned} \tag{5.20}$$

5.3.2– Equações integrais para o problema elástico plano

5.3.2.1 – Equação integral de deslocamento

Novamente adotando-se o domínio enrijecido ilustrado na figura 5.5 e partindo-se do Teorema de Betti aplicado ao problema elástico plano, pode-se escrever:

$$\int_{\Omega_1} \varepsilon_{jk} N_{ijk}^* d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \varepsilon_{jk} N_{ijk}^* d\Omega_2 = \int_{\Omega_1} N_{jk}^e \varepsilon_{ijk}^* d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} N_{jk}^e \varepsilon_{ijk}^* d\Omega_2 \quad (5.21)$$

Trabalhando-se apenas com a parcela referente ao domínio enrijecido e considerando-se a presença de um campo de forças normais corretoras N_{jk}^c para induzir a correção de rigidez ao conjunto, tem-se:

$$\int_{\Omega_2} \varepsilon_{jk}^{enrij} N_{ijk}^* d\Omega_2 = \int_{\Omega_2} N_{jk} \varepsilon_{ijk}^* d\Omega_2 - \int_{\Omega_2} N_{jk}^c \varepsilon_{ijk}^* d\Omega_2$$

De maneira análoga a efetuada para o problema de flexão de placas, substituindo-se a expressão (5.9) na equação anterior para que o equilíbrio dos esforços seja realizado em relação à superfície de referência e utilizando $w_{,jk}^r$ para representar a curvatura no enrijecedor obtém-se:

$$\int_{\Omega_2} \varepsilon_{jk} N_{ijk}^* d\Omega_2 - c \int_{\Omega_2} w_{,jk}^r N_{ijk}^* d\Omega_2 = \int_{\Omega_2} N_{jk} \varepsilon_{ijk}^* d\Omega_2 - \int_{\Omega_2} N_{jk}^c \varepsilon_{ijk}^* d\Omega_2 \quad (5.22)$$

Substituindo-se (5.15) em (5.22) e utilizando N_{jk}^r para representar a força normal elástica no enrijecedor obtém-se:

$$\int_{\Omega_2} \varepsilon_{jk} N_{ijk}^* d\Omega_2 - c \int_{\Omega_2} w_{,jk}^r N_{ijk}^* d\Omega_2 = \int_{\Omega_2} N_{jk} \varepsilon_{ijk}^* d\Omega_2 - (\psi_c - 1) \int_{\Omega_2} N_{jk}^r \varepsilon_{ijk}^* d\Omega_2 \quad (5.23)$$

Por fim, substituindo-se a equação (5.23) em (5.21) obtém-se o teorema de Betti escrito para a chapa enrijecida como um todo acrescida das integrais no domínio do enrijecedor:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{jk} N_{ijk}^* d\Omega - c \int_{\Omega_{enrij}} w_{,jk}^r N_{ijk}^* d\Omega_{enrij} = \int_{\Omega} N_{jk} \varepsilon_{ijk}^* d\Omega - (\psi_c - 1) \int_{\Omega_{enrij}} N_{jk}^r \varepsilon_{ijk}^* d\Omega_{enrij} \quad (5.24)$$

Desenvolvendo-se a equação (5.24) através do procedimento já explicitado ao logo do trabalho obtém-se a equação integral final de deslocamento para o problema elástico plano:

$$\begin{aligned} C_{ik}(Q) u_k(Q) &= \int_{\Gamma} u_{ik}^*(Q, P) p_k(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik}^*(Q, P) u_k(P) d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} u_{ik}^*(Q, P) b_k(P) d\Omega - (\psi_c - 1) \int_{\Omega_{enrij}} N_{jk}^r(p) \varepsilon_{ijk}^*(Q, p) d\Omega_{enrij} + \\ &+ c \int_{\Omega_{enrij}} w_{,jk}^r(p) N_{ijk}^*(Q, p) d\Omega_{enrij} \end{aligned} \quad (5.25)$$

Assim como o efetuado na obtenção das equações integrais referentes ao problema de flexão de placas é interessante neste caso efetuar-se uma integração por partes nas integrais sobre o domínio do enrijecedor. Dessa forma, considerando-se as equações (2.3) e (2.6) é possível obter-se:

$$\begin{aligned} C_{ik}(Q) u_k(Q) &= \int_{\Gamma} u_{ik}^*(Q, P) p_k(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik}^*(Q, P) u_k(P) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^*(Q, P) b_k(P) d\Omega - \\ &- \frac{1}{2} (\psi_c - 1) \left[\int_{\Gamma_{enrij}} N_{jk}^r(p) u_{ij}^*(Q, P) \eta_k d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} N_{jk,k}^r(p) u_{ij}^*(Q, P) d\Omega_{enrij} + \right. \\ &+ \left. \int_{\Gamma_{enrij}} N_{jk}^r(p) u_{ik}^*(Q, P) \eta_j d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} N_{jk,j}^r(p) u_{ik}^*(Q, P) d\Omega_{enrij} \right] + \\ &+ c \cdot \bar{G} \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,jk}^r(p) u_{ij}^*(Q, P) \eta_k d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,jk,k}^r(p) u_{ij}^*(Q, P) d\Omega_{enrij} + \right. \\ &+ \left. \int_{\Gamma_{enrij}} w_{,jk}^r(p) u_{ik}^*(Q, P) \eta_j d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,jk,j}^r(p) u_{ik}^*(Q, P) d\Omega_{enrij} \right] + \\ &+ c \cdot \frac{2\bar{G}\nu'}{(1-2\nu')} \delta_{jk} \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,jk}^r(p) u_{im}^*(Q, P) \eta_m d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,jk,m}^r(p) u_{im}^*(Q, P) d\Omega_{enrij} \right] \end{aligned} \quad (5.26)$$

Considerando-se o ganho de rigidez apenas na direção s do enrijecedor, tem-se:

$$\begin{aligned}
C_{ik}(Q)u_k(Q) &= \int_{\Gamma} u_{ik}^*(Q,P)p_k(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik}^*(Q,P)u_k(P)d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^*(Q,P)b_k(P)d\Omega - \\
&-(\psi_c - 1) \left[\int_{\Gamma_{enrij}} N_{ss}^r(p)u_{is}^*(Q,P)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} N_{ss,s}^r(p)u_{is}^*(Q,P)d\Omega_{enrij} + \right. \\
&+ c \cdot 2\bar{G} \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,ss}^r(p)u_{is}^*(Q,P)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,ss,s}^r(p)u_{is}^*(Q,P)d\Omega_{enrij} + \right. \\
&+ \left. \int_{\Gamma_{enrij}} w_{,nn}^r(p)u_{in}^*(Q,P)\eta_n d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,nn,n}^r(p)u_{in}^*(Q,P)d\Omega_{enrij} \right] + \\
&c \cdot \frac{4\bar{G}\nu'}{(1-2\nu')} \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,ss}^r(p)u_{is}^*(Q,P)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,ss,s}^r(p)u_{is}^*(Q,P)d\Omega_{enrij} + \right. \\
&\left. \int_{\Gamma_{enrij}} w_{,nn}^r(p)u_{in}^*(Q,P)\eta_n d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,nn,n}^r(p)u_{in}^*(Q,P)d\Omega_{enrij} \right]
\end{aligned} \tag{5.27}$$

5.3.2.2 – Equação integral de esforço normal

A equação integral de esforço normal para pontos internos ao domínio pode ser obtida fazendo-se uso da relação constitutiva (2.6) apresentada no capítulo 2 deste trabalho.

A relação deformação-deslocamento envolve o cálculo das derivadas do deslocamento o que pode ser obtido através da equação (5.27) e sendo dado por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_i^r}{\partial x_j}(q) &= \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j}(Q,P)p_k(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} \frac{\partial p_{ik}^*}{\partial x_j}(Q,P)u_k(P)d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j}(Q,P)b_k(P)d\Omega - \\
&-(\psi_c - 1) \left[\int_{\Gamma_{enrij}} N_{ss}^r(p) \frac{\partial u_{is}^*}{\partial x_j}(Q,P)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} N_{ss,s}^r(p) \frac{\partial u_{is}^*}{\partial x_j}(Q,P)d\Omega_{enrij} + \right. \\
&+ c \cdot 2\bar{G} \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,ss}^r(p) \frac{\partial u_{is}^*}{\partial x_j}(Q,P)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,ss,s}^r(p) \frac{\partial u_{is}^*}{\partial x_j}(Q,P)d\Omega_{enrij} + \right. \\
&+ \left. \int_{\Gamma_{enrij}} w_{,nn}^r(p) \frac{\partial u_{in}^*}{\partial x_j}(Q,P)\eta_n d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,nn,n}^r(p) \frac{\partial u_{in}^*}{\partial x_j}(Q,P)d\Omega_{enrij} \right] + \\
&c \cdot \frac{4\bar{G}\nu'}{(1-2\nu')} \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,ss}^r(p) \frac{\partial u_{is}^*}{\partial x_j}(Q,P)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,ss,s}^r(p) \frac{\partial u_{is}^*}{\partial x_j}(Q,P)d\Omega_{enrij} + \right. \\
&\left. \int_{\Gamma_{enrij}} w_{,nn}^r(p) \frac{\partial u_{in}^*}{\partial x_j}(Q,P)\eta_n d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,nn,n}^r(p) \frac{\partial u_{in}^*}{\partial x_j}(Q,P)d\Omega_{enrij} \right]
\end{aligned}$$

A simples substituição das derivadas do deslocamento na lei constitutiva (2.6) fornece as tensões totais na superfície de referência da placa. Contudo se deseja obter neste item a equação que fornece apenas a parcela das forças normais referentes ao problema elástico plano. Dessa forma, se torna necessário subtrair a parcela de tensão referente ao problema de flexão de placas, dada pela equação (2.19). Assim pode-se escrever:

$$\sigma_{ij}^r = G(u_{i,j}^r + u_{j,i}^r) + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{k,k}^r - \left\{ -\frac{E \cdot c}{(1-\nu^2)} [\nu w_{,kk}^r \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij}^r] \right\} \quad (5.28)$$

Substituindo-se as derivadas do deslocamento na equação (5.28) obtém-se a equação integral de esforço normal para pontos internos ao domínio:

$$\begin{aligned} N_{ij}^r(q) = & \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(q,P) p_k(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}^*(q,P) u_k(P) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ijk}^*(q,P) b_k(P) d\Omega - \\ & - (\psi_c - 1) \left[\int_{\Gamma_{enrij}} N_{ss}^r(p) D_{ijs}^*(q,p) \eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} N_{ss,s}^r(p) D_{ijs}^*(q,p) d\Omega_{enrij} + \right. \\ & + c \cdot 2\bar{G} \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,ss}^r(p) D_{ijs}^*(q,p) \eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,ss,s}^r(p) D_{ijs}^*(q,p) d\Omega_{enrij} + \right. \\ & \left. \left. + \int_{\Gamma_{enrij}} w_{,nn}^r(p) D_{ijn}^*(q,p) \eta_n d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,nn,n}^r(p) D_{ijn}^*(q,p) d\Omega_{enrij} \right] + \right. \\ & c \cdot \frac{4\bar{G}\nu'}{(1-2\nu')} \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,ss}^r(p) D_{ijs}^*(q,p) \eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,ss,s}^r(p) D_{ijs}^*(q,p) d\Omega_{enrij} + \right. \\ & \left. \int_{\Gamma_{enrij}} w_{,nn}^r(p) D_{ijn}^*(q,p) \eta_n d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,nn,n}^r(p) D_{ijn}^*(q,p) d\Omega_{enrij} \right] - \\ & \left. - \left\{ -\frac{Et_p \cdot c}{(1-\nu^2)} [\nu w_{,kk}^r \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij}^r] \right\} \right. \end{aligned} \quad (5.29)$$

Particularizando a equação (5.29) para o cálculo do esforço normal na direções do enrijecedor obtém-se:

$$\begin{aligned}
N_{ss}^r(q) = & \int_{\Gamma} D_{ssk}^*(q,P) p_k(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ssk}^*(q,P) u_k(P) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ssk}^*(q,P) b_k(P) d\Omega - \\
& - (\psi_c - 1) \left[\int_{\Gamma_{enrij}} N_{ss}^r(p) D_{sss}^*(q,p) \eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} N_{ss,s}^r(p) D_{sss}^*(q,p) d\Omega_{enrij} + \right. \\
& + c \cdot 2\bar{G} \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,ss}^r(p) D_{sss}^*(q,p) \eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,ss,s}^r(p) D_{sss}^*(q,p) d\Omega_{enrij} + \right. \\
& \left. + \int_{\Gamma_{enrij}} w_{,nn}^r(p) D_{ssn}^*(q,p) \eta_n d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,nn,n}^r(p) D_{ssn}^*(q,p) d\Omega_{enrij} \right] + \\
& c \cdot \frac{4\bar{G}\nu'}{(1-2\nu')} \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,ss}^r(p) D_{sss}^*(q,p) \eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,ss,s}^r(p) D_{sss}^*(q,p) d\Omega_{enrij} + \right. \\
& \left. \int_{\Gamma_{enrij}} w_{,nn}^r(p) D_{ssn}^*(q,p) \eta_n d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,nn,n}^r(p) D_{ssn}^*(q,p) d\Omega_{enrij} \right] - \\
& - \left\{ - \frac{Et_p \cdot c}{(1-\nu^2)} [w_{,ss}^r + \nu w_{,nn}^r] \right\}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

5.4 – Placas enrijecidas submetidas à flexão composta e sujeitas a campos de esforços iniciais

Com o intuito de se efetuar um estudo de placas enrijecidas compostas por materiais que apresentam comportamento não-linear é necessário estender as equações obtidas no item anterior deste trabalho de forma a englobar os efeitos provenientes de campos de esforços iniciais. Tal procedimento é semelhante ao realizado no capítulo 4 deste trabalho para o problema de placas simples e será repetido neste item de forma a considerar a presença dos enrijecedores.

5.4.1 – Equações integrais para o problema de flexão de placa

5.4.1.1 – Equação integral de deslocamento

A equação integral de deslocamento para placas enrijecidas submetidas à flexão composta foi deduzida no item 5.3.1.1 deste trabalho. Considerando a placa

ilustrada na figura 5.5 e tendo em vista que o teorema de Betti é escrito em função dos esforços elásticos, a equação (5.17) pode ser reescrita como segue:

$$\int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega = \int_{\Omega} M_{ij}^e w_{,ij}^* d\Omega - c \cdot \psi_c \int_{\Omega_{enrij}} N_{ij}^r w_{,ij}^* d\Omega_{enrij} - (\psi_p - 1) \int_{\Omega_{enrij}} M_{ij}^r w_{,ij}^* d\Omega_{enrij}$$

Conforme discutido no capítulo 4 deste trabalho, a parcela elástica M_{ij}^e do momento pode ser escrita como uma somatória do momento total M_{ij} e da parcela de momento inicial M_{ij}^0 . Sendo assim, é possível escrever:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} M_{ij}^* w_{,ij} d\Omega &= \int_{\Omega} M_{ij} w_{,ij}^* d\Omega + \int_{\Omega} M_{ij}^0 w_{,ij}^* d\Omega - \\ &- c \cdot \psi_c \int_{\Omega_{enrij}} N_{ij}^r w_{,ij}^* d\Omega_{enrij} - (\psi_p - 1) \int_{\Omega_{enrij}} M_{ij}^r w_{,ij}^* d\Omega_{enrij} \end{aligned} \quad (5.31)$$

Desenvolvendo-se a equação (5.31) e considerando-se o ganho de rigidez proporcionado pelo enrijecedor apenas na sua direção longitudinal s chega-se a equação final de deslocamento para placas enrijecidas submetidas a um campo de momentos iniciais:

$$\begin{aligned} c(Q)w(Q) + \int_{\Gamma} \left(V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}^*(Q,P)w_{ck}(P) = \\ = \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w^*(Q,P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P)w_{ck}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(Q,p) d\Omega_g \\ - D_p(\psi_p - 1) \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,ss}^r(p)w_{,s}^*(Q,p)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,ss,s}^r(p)w_{,s}^*(Q,p) d\Omega_{enrij} \right] - \\ - \nu D_p(\psi_p - 1) \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,nn}^r(p)w_{,s}^*(Q,p)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,nn,s}^r(p)w_{,s}^*(Q,p) d\Omega_{enrij} \right] + \\ + c \cdot \psi_c \left[\int_{\Gamma_{enrij}} N_{ss}^r(p)w_{,s}^*(Q,p)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} N_{ss,s}^r(p)w_{,s}^*(Q,p) d\Omega_{enrij} \right] - \int_{\Omega} M_{ij}^0(p)w_{,ij}^*(q,P) d\Omega \end{aligned} \quad (5.32)$$

5.4.1.2– Equação integral de curvatura

A equação integral de curvatura pode ser obtida derivando-se duas vezes a equação de deslocamento (5.32) em relação às coordenadas x_i e x_j . Assim, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_i \partial x_j} + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) w(P) - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right\} d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} \frac{\partial^2 R_{ck}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) w_{ck}(P) = \\
& = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(P) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right] \right\} d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P) \frac{\partial^2 w_{ck}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) + \\
& + \int_{\Omega_g} g(\rho) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) d\Omega_g - D_p(\psi_p - 1) \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,ss}^r(\rho) \frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, \rho) \eta_s d\Gamma_{enrij} - \right. \\
& - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,ss,s}^r(\rho) \frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, \rho) d\Omega_{enrij} \left. - \nu D_p(\psi_p - 1) \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,nn}^r(\rho) \frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, \rho) \eta_s d\Gamma_{enrij} - \right. \right. \\
& - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,nn,s}^r(\rho) \frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, \rho) d\Omega_{enrij} \left. \right] + c \cdot \psi_c \left[\int_{\Gamma_{enrij}} N_{ss}^r(\rho) \frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, \rho) \eta_s d\Gamma_{enrij} - \right. \\
& \left. - \int_{\Omega_{enrij}} N_{ss,s}^r(\rho) \frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, \rho) d\Omega_{enrij} \right] - \int_{\Omega} M_{kl}^0(\rho) w_{,ijkl}^*(q, \rho) d\Omega - \frac{1}{8D} [2M_{ij}^0(q) + \delta_{ij} M_{kk}^0(q)]
\end{aligned} \tag{5.33}$$

5.4.2– Equações integrais para o problema elástico plano

5.4.2.1 – Equação integral de deslocamento

Partindo-se do Teorema de Betti apresentado em (5.24) e tendo em vista a relação aditiva de esforço normal descrita no capítulo 4 deste trabalho, é possível escrever:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \varepsilon_{jk} N_{ijk}^* d\Omega - c \int_{\Omega_{enrij}} w_{,jk}^r N_{ijk}^* d\Omega_{enrij} = \\
& \int_{\Omega} N_{jk} \varepsilon_{ijk}^* d\Omega + \int_{\Omega} N_{jk}^0 \varepsilon_{ijk}^* d\Omega - (\psi_c - 1) \int_{\Omega_{enrij}} N_{jk}^r \varepsilon_{ijk}^* d\Omega_{enrij}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Desenvolvendo-se a equação (5.34) e considerando-se o ganho de rigidez apenas na direção longitudinal s do enrijecedor chega-se a equação integral final de deslocamento para o problema elástico plano considerando-se a presença de forças normais iniciais:

$$\begin{aligned}
C_{ik}(Q)u_k(Q) &= \int_{\Gamma} u_{ik}^*(Q,P)p_k(P)d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik}^*(Q,P)u_k(P)d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ik}^*(Q,P)b_k(P)d\Omega - \\
&- (\Psi_c - 1) \left[\int_{\Gamma_{enrij}} N_{ss}^r(p)u_{is}^*(Q,P)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} N_{ss,s}^r(p)u_{is}^*(Q,P)d\Omega_{enrij} + \right. \\
&+ c \cdot 2\bar{G} \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,ss}^r(p)u_{is}^*(Q,P)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,ss,s}^r(p)u_{is}^*(Q,P)d\Omega_{enrij} + \right. \\
&+ \left. \int_{\Gamma_{enrij}} w_{,nn}^r(p)u_{in}^*(Q,P)\eta_n d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,nn,n}^r(p)u_{in}^*(Q,P)d\Omega_{enrij} \right] + \\
&c \cdot \frac{4\bar{G}v'}{(1-2v')} \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,ss}^r(p)u_{is}^*(Q,P)\eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,ss,s}^r(p)u_{is}^*(Q,P)d\Omega_{enrij} + \right. \\
&\left. \int_{\Gamma_{enrij}} w_{,nn}^r(p)u_{in}^*(Q,P)\eta_n d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,nn,n}^r(p)u_{in}^*(Q,P)d\Omega_{enrij} \right] - \int_{\Omega} N_{jk}^0 \varepsilon_{ijk}^* d\Omega
\end{aligned} \tag{5.35}$$

5.4.2.2 – Equação integral de esforço normal

A equação integral de esforço normal para pontos internos ao domínio pode ser obtida a partir das derivadas da equação (5.35) e relação constitutiva (2.6) apresentada no capítulo 2 deste trabalho. Também neste caso, assim como efetuado no item 5.4.1.2 deste trabalho, é necessário subtrair a parcela de tensão referente ao problema de flexão de placas, dada pela equação (2.19).

Dessa forma, considerando-se apenas o enrijecimento na direção longitudinal s do enrijecedor, pode-se escrever a equação de esforço normal para o problema elástico plano considerando-se a presença de campos de forças normais iniciais:

$$\begin{aligned}
N_{ij}(q) = & \int_{\Gamma} D_{ijk}^*(q, P) p_k(P) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}^*(q, P) u_k(P) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ijk}^*(q, P) b_k(P) d\Omega - \\
& - (\psi_c - 1) \left[\int_{\Gamma_{enrij}} N_{ss}^r(p) D_{ijs}^*(q, p) \eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} N_{ss,s}^r(p) D_{ijs}^*(q, p) d\Omega_{enrij} + \right. \\
& + c \cdot 2\bar{G} \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,ss}^r(p) D_{ijs}^*(q, p) \eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,ss,s}^r(p) D_{ijs}^*(q, p) d\Omega_{enrij} + \right. \\
& \left. + \int_{\Gamma_{enrij}} w_{,nn}^r(p) D_{ijn}^*(q, p) \eta_n d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,nn,n}^r(p) D_{ijn}^*(q, p) d\Omega_{enrij} \right] + \\
& c \cdot \frac{4\bar{G}\nu'}{(1-2\nu')} \left[\int_{\Gamma_{enrij}} w_{,ss}^r(p) D_{ijs}^*(q, p) \eta_s d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,ss,s}^r(p) D_{ijs}^*(q, p) d\Omega_{enrij} + \right. \\
& \left. \int_{\Gamma_{enrij}} w_{,nn}^r(p) D_{ijn}^*(q, p) \eta_n d\Gamma_{enrij} - \int_{\Omega_{enrij}} w_{,nn,n}^r(p) D_{ijn}^*(q, p) d\Omega_{enrij} \right] - \\
& - \left\{ -\frac{Et_p \cdot c}{(1-\nu^2)} \left[\nu w_{,kk}^r \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij}^r \right] \right\} + \int_{\Omega} E_{ijkl}^*(q, P) N_{kl}(P) d\Omega - \\
& - \frac{1}{8(1-\nu')} \left[2N_{ij}^0(q) + (1-4\nu') \delta_{ij} N_{kk}^0(q) \right]
\end{aligned}$$

(5.36)

ANÁLISE ELASTOPLÁSTICA DE PLACAS

6.1 – Generalidades

O objetivo principal deste capítulo é apresentar o modelo elastoplástico baseado no critério de plastificação de Von Mises particularizado para o estado plano de tensões visando a análise elastoplástica de placas.

Em um primeiro momento são apresentados alguns conceitos básicos da teoria da plasticidade que governa o comportamento elastoplástico dos materiais. Na seqüência apresenta-se o equacionamento referente ao modelo elastoplástico para problemas unidimensionais e também o modelo elastoplástico para o estudo de problemas multidimensionais.

O capítulo ainda apresenta uma particularização do modelo elastoplástico multidimensional com critério de plastificação de Von Mises para problemas bidimensionais restritos ao estado plano de tensão.

No final do capítulo apresenta-se um algoritmo para o cálculo do estado real de tensão e da parcela plástica da deformação no material.

6.2 – Conceitos básicos da teoria da plasticidade

O comportamento elástico de um material é caracterizado basicamente por uma função linear que relaciona as tensões e deformações apresentadas por um elemento quando este é submetido a um carregamento qualquer. Neste caso, conforme apresentado no capítulo 2 deste trabalho, a relação constitutiva que caracteriza esse tipo de comportamento é expressa pela lei de Hooke, dada pela equação (2.6) e reescrita a seguir:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\varepsilon_{kk}$$

Um material sob regime elástico também possui a característica de não apresentar deformações residuais após ser submetido a ciclos de carregamento e descarregamento. As curvas de tensão x deformação para um ciclo de carregamento e de descarregamento são coincidentes e, uma vez cessado o carregamento, as tensões e as deformações retornam ao patamar igual a zero.

O comportamento plástico de um material, ao contrário do elástico, caracteriza-se pelo aparecimento de deformações irreversíveis, ou permanentes, depois de atingido um determinado nível de tensão, dito tensão inicial de escoamento do material. Assim, pode-se dizer que a resposta elastoplástica do material fica evidenciada operando-se ciclos de tensão ou deformação, de onde resultam deformações ou tensões residuais, respectivamente,

A figura 6.1 ilustra uma possível curva de tensão x deformação de um ensaio uniaxial para um material com comportamento elastoplástico. No primeiro trecho, correspondente a tensões inferiores a σ_y , o comportamento do material é elástico linear. Neste caso, para sucessivos ciclos de carregamento e descarregamento, o caminho percorrido encontra-se sobre o trecho linear inicial \overline{OA} . Portanto, depois de cessado o carregamento não há a presença de deformações residuais.

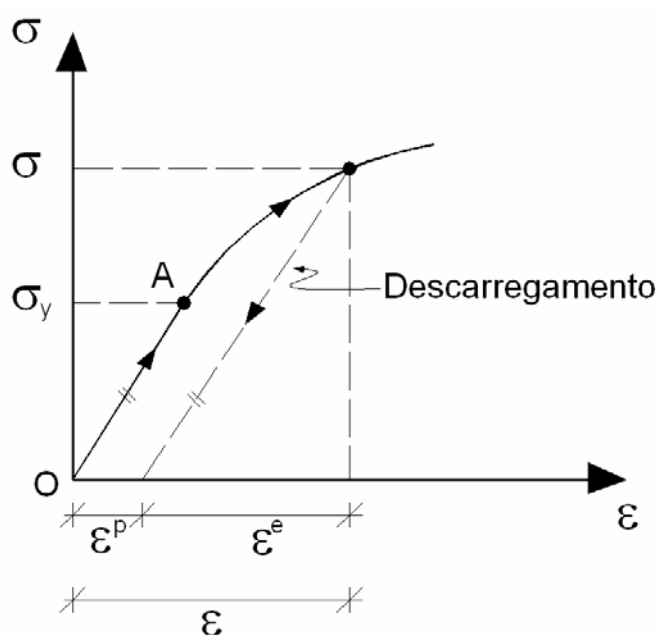


Figura 6.1 – Ciclo de carregamento e descarregamento para um problema elastoplástico unidimensional.

Para níveis de tensão superiores a tensão de escoamento σ_y o material apresenta comportamento plástico. Neste caso, para um determinado ciclo de carregamento e descarregamento, a descarga não se dá mais pelo caminho percorrido durante a carga, mas sim por um trajeto paralelo ao do regime elástico. Esse comportamento dá origem às deformações plásticas residuais ε^p .

Admita-se que o material tenha plastificado e que os níveis de tensão tenham retornado a zero conforme ilustrado na figura 6.1. Ao se efetuar um novo carregamento, este percorre o trecho linear originado pelo descarregamento do ciclo anterior até que seja atingido um novo valor para a tensão de escoamento σ'_y que é função da deformação plástica acumulada até então (figura 6.2). Esse fenômeno de capacidade de ganho de resistência associado ao crescimento da deformação é denominado de encruamento do material.

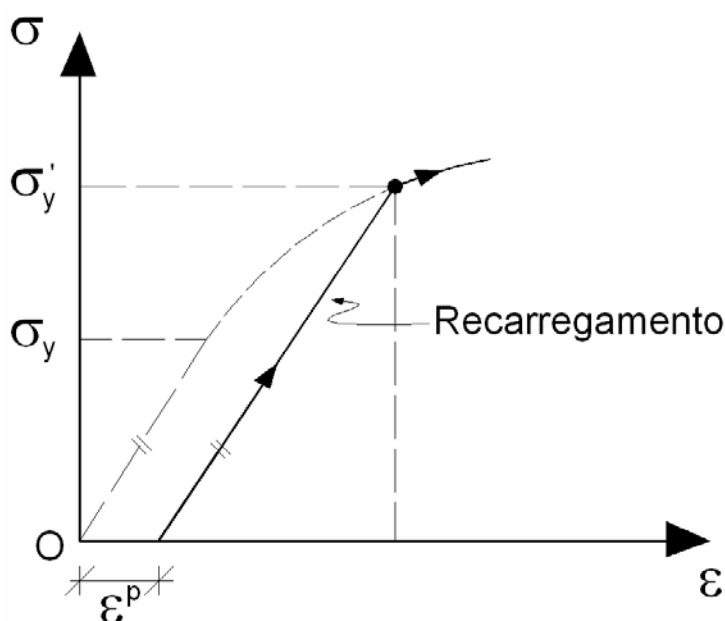


Figura 6.2 – Ciclo de recarregamento para um problema elastoplástico unidimensional.

Um outro fenômeno, característico dos metais e que ocorre no regime plástico, é o chamado efeito Baushinger. Esse efeito tem como característica a perda de simetria da curva tensão x deformação quando, após ter ocorrido o

escoamento do material, há uma inversão na sollicitação. Esse comportamento está ilustrado na figura 6.3.

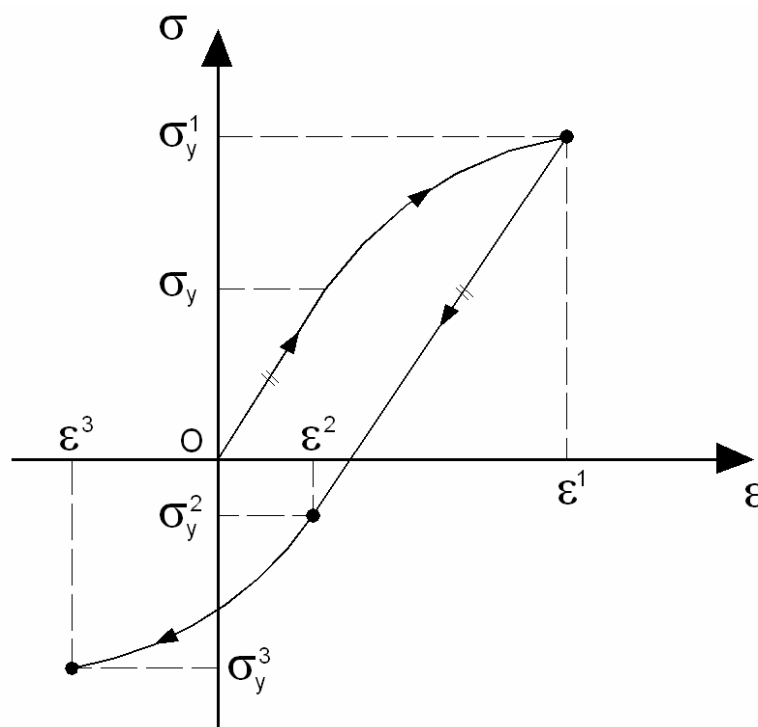


Figura 6.3 – Curva tensão x deformação elastoplástica – efeito Baushinger.

Admita-se inicialmente que o material tenha sido carregado até o patamar σ_y^1 e que em seguida tenha sido descarregado chegando a níveis de tensão iguais a zero. Admita-se ainda que após ter sido descarregado o material sofra uma inversão no carregamento, o que, pela figura 6.3, é equivalente a dizer que o material esteja sob a ação de tensões de compressão.

A princípio, tanto na tração quanto na compressão o comportamento do material é o mesmo, de forma que a relação tensão x deformação seja a mesma para os dois casos. No entanto, devido a anterior plastificação do material, o módulo da tensão de escoamento na compressão que inicialmente era σ_y passa a assumir um valor igual a σ_y^2 inferior ao patamar original. Sobre tal comportamento é equivalente dizer que, a cada ciclo completo de carga e descarga atingindo as tensões relativas ao regime plástico do material, a curva tensão x deformação sofre uma translação nos eixos σ e ε . Observa-se que as deformações permanentes

modificam as características iniciais do material retirando a sua isotropia. Esse efeito não será considerado no presente estudo.

Pela sua simplicidade será apresentado inicialmente um resumo da teoria que modela o comportamento elastoplástico para problemas unidimensionais. Na seqüência do trabalho o modelo será estendido para o caso multidimensional e para problemas referentes ao estado plano de tensão no qual se engloba o estudo das placas.

6.3 – Modelo elastoplástico para problemas unidimensionais

Para problemas unidimensionais a definição do modelo elastoplástico é relativamente simples. Sua avaliação pode ser feita a partir de curvas de tensão x deformação obtidas em ensaios uniaxiais feitos em corpos de prova.

Em geral são feitas algumas simplificações nas curvas de tensão x deformação para a modelagem do comportamento plástico do material. Uma alternativa que se parece satisfatória é a adoção de curvas bi-lineares com endurecimento linear do material após o escoamento. Tal simplificação, adotada no presente trabalho, pode ser visualizada na figura 6.4.

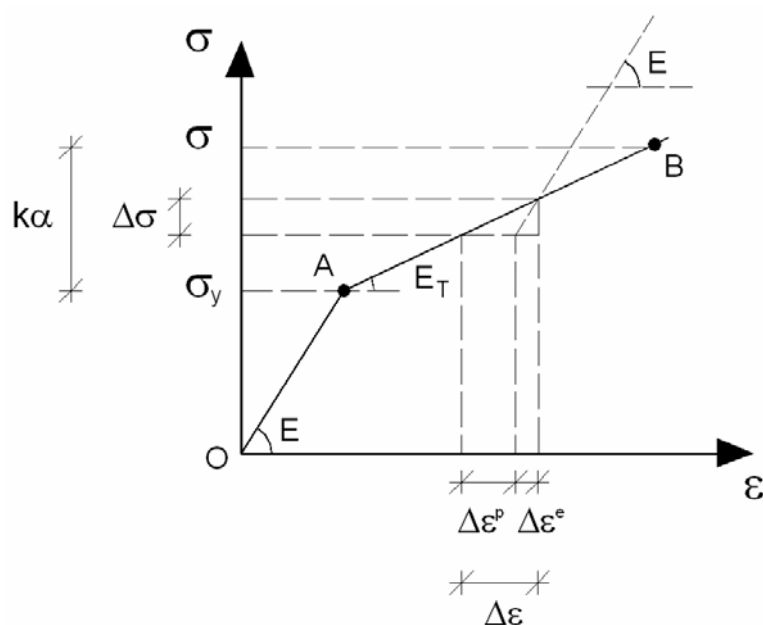


Figura 6.4 – Curva tensão x deformação elastoplástica – comportamento bi-linear.

A modelagem do encruamento pode ser feita de várias maneiras. Neste trabalho optou-se por trabalhar com o encruamento linear isotrópico, onde a expansão do intervalo elástico inicial de tensão $([-\sigma_y, \sigma_y])$ se dá simetricamente em relação ao seu centro e ocorre sempre que o passo implicar em evolução da deformação plástica.

Para níveis de tensão abaixo da tensão inicial de escoamento σ_y o material ainda está em regime elástico. Neste caso a constante de proporcionalidade entre tensão e deformação é o próprio módulo de elasticidade longitudinal E . A relação tensão x deformação é definida por:

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon \quad (6.1)$$

Para tensões acima de σ_y um incremento de tensão normal provoca um incremento de deformação segundo o módulo elastoplástico tangente E_T . A relação tensão x deformação passa a ser definida como segue:

$$\Delta\sigma = E_T\Delta\varepsilon \quad (6.2)$$

Como pode ser visualizado na figura 6.4, o incremento de deformação pode ser decomposto em duas parcelas: uma elástica e outra plástica. Assim, pode-se expressar o incremento total de deformação usando a forma aditiva:

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^e + \Delta\varepsilon^p \quad (6.3)$$

Pela figura pode-se também escrever:

$$\Delta\sigma = E\Delta\varepsilon^e = E(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^p) \quad (6.4)$$

Considere-se ainda o digrama representativo da relação tensão x deformação, ilustrado na figura 6.4. Uma vez que os níveis de tensão no material

atingiram o patamar indicado pelo ponto B , o limite elástico do material se expandiu para $\sigma = \sigma_y + k\alpha$. Assim, pode-se dizer que a simples existência de deformação plástica no material, independente do seu sinal e proveniente da “história” de carregamento, é suficiente para provocar expansão do intervalo inicial de tensões admissíveis. O parâmetro k é denominado módulo plástico de encruamento isótropo e α uma medida maior que zero que registra a história da deformação plástica no ciclo de carregamento.

Uma expressão que se faz admissível para o critério de plastificação é apresentada a seguir:

$$f(\sigma) = |\sigma| - (\sigma_y + k\alpha) \leq 0 \quad (6.5)$$

É importante ressaltar que o critério é escrito em termos do módulo das tensões atuantes $|\sigma|$ pois é admitido tanto para tensões positivas de tração quanto para tensões negativas de compressão. Ressalta-se ainda que α tem uma lei de evolução atrelada à lei de evolução da deformação plástica. No chamado encruamento por deformação a variável é definida através da relação:

$$\Delta\lambda = |\Delta\varepsilon^p| \quad (6.6)$$

Numa primeira hipótese, considere-se um estado de tensão onde $f(\sigma) = 0$. Considerando um novo estado onde $f(\sigma + \Delta\sigma) < 0$ tem-se que a resposta imediata não proporcionou evolução nas deformações plásticas acumuladas do material ($\Delta\varepsilon^p = 0$). Pode-se dizer, então, que a resposta do material em $\Delta\sigma$ foi puramente elástica e correspondente a um descarregamento.

Em uma segunda análise, partindo-se de $f(\sigma) = 0$ e supondo-se um novo estado de tensão onde $f(\sigma + \Delta\sigma) = 0$, tem-se que o estado $(\sigma + \Delta\sigma)$ proporcionou uma evolução nas deformações plásticas do material. Assim, pode-se dizer que

$f(\sigma)=0$ configura-se como uma condição necessária para que possa ocorrer variação da deformação plástica no incremento.

Definindo-se a variável $\Delta\lambda \geq 0$ como sendo o valor absoluto da deformação plástica, e considerando-se que as deformações plásticas podem ocorrer tanto na compressão quanto na tração, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon^p &= \Delta\lambda \geq 0, \text{ se } \sigma > 0 \\ \Delta\varepsilon^p &= -\Delta\lambda \leq 0, \text{ se } \sigma < 0\end{aligned}$$

Definindo-se o operador de sinal $sign(\cdot)$, sendo $sign(x) = +1$ para $x > 0$ e $sign(x) = -1$ para $x < 0$, pode-se escrever:

$$\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda sign(\sigma) \text{ se } f(\sigma) = 0 \text{ e } \Delta\lambda \geq 0 \quad (6.7)$$

Com base no exposto até o presente momento, observa-se que $\Delta\lambda$ e $f(\sigma)$ verificam certas condições complementares em termos de sinal, isto é, $\Delta\lambda \geq 0$ e $f(\sigma) \leq 0$. Além disso, se $\Delta\lambda \geq 0$ então $f(\sigma) = 0$ e se $f(\sigma) < 0$ então $\Delta\lambda = 0$. Assim, com base nas possibilidades apresentadas, pode-se definir a relação (6.8) denominada condição de complementaridade.

$$\Delta\lambda \cdot f(\sigma) = 0 \quad (6.8)$$

Ainda, considerando-se que em um nível de tensão $f(\sigma) = 0$ e que no próximo incremento exista $\Delta\lambda > 0$, isso implica que o novo estado de tensão também deverá verificar o critério de plastificação, ou seja, $f(\sigma + \Delta\sigma) = 0$. Uma vez admitida a continuidade na função f , pode-se escrever a forma linearizada de f em torno de σ como segue:

$$f(\sigma + \Delta\sigma) = f(\sigma) + \Delta f(\sigma)$$

Tendo em vista que $f(\sigma) = 0$ e $f(\sigma + \Delta\sigma) = 0$, pode-se dizer que a hipótese de $\Delta\lambda > 0$ implica em $\Delta f(\sigma) = 0$. Tem-se ainda que, partindo de $f(\sigma) = 0$, as situações de carregamento e descarregamento se caracterizam, respectivamente como $\Delta\lambda \geq 0$ se $\Delta f = 0$ e $\Delta\lambda = 0$ se $\Delta f < 0$. Tais condições dão origem à chamada condição de consistência que é expressa por:

$$\Delta\lambda \cdot \Delta f = 0 \quad (6.9)$$

Adotando-se a hipótese de encruamento por deformação (equação (6.6)) e sendo $\Delta\lambda = |\Delta\varepsilon^p|$, pode-se escrever $\Delta\lambda = \Delta\alpha$. Admitindo-se uma linearização do fluxo de plastificação em torno de um certo nível de tensão é possível escrever:

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \Delta\sigma + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \Delta\alpha \quad (6.10)$$

Considerando-se que $\frac{\partial f}{\partial \sigma} = \text{sign}(\sigma)$ e que $\Delta\varepsilon^p = \Delta\lambda \text{sign}(\sigma)$, a equação (6.10) pode ser desenvolvida como segue:

$$\Delta f = \text{sign}(\sigma) E [\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^p] - k \Delta\alpha$$

$$\Delta f = \text{sign}(\sigma) E \Delta\varepsilon - \text{sign}(\sigma) E \Delta\lambda \text{sign}(\sigma) - k \Delta\alpha$$

$$\Delta f = \text{sign}(\sigma) E \Delta\varepsilon - \Delta\lambda (E + k)$$

Impondo-se a condição de complementaridade (6.8) obtém-se:

$$\Delta\lambda = \frac{\text{sign}(\sigma) E \Delta\varepsilon}{(E + k)} \quad (6.11)$$

Substituindo-se (6.11) em (6.7) e (6.4) obtém-se:

$$\Delta \varepsilon^p = \frac{E}{(E+k)} \Delta \varepsilon \quad (6.12)$$

$$\Delta \sigma = \frac{E \cdot k}{(E+k)} \Delta \varepsilon \quad (6.13)$$

sendo o módulo elastoplástico tangente dado em (6.2) definido como segue:

$$E_T = \frac{E \cdot k}{(E+k)} \quad (6.14)$$

Pode-se ainda observar que o modelo elástico perfeito, ilustrado na figura 6.5, pode ser tratado como uma idealização mais simples da formulação apresentada para o qual não se considera o endurecimento do material e, portanto, k e E_T são nulos. Neste caso, a função de escoamento pode ser definida por:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (6.15)$$

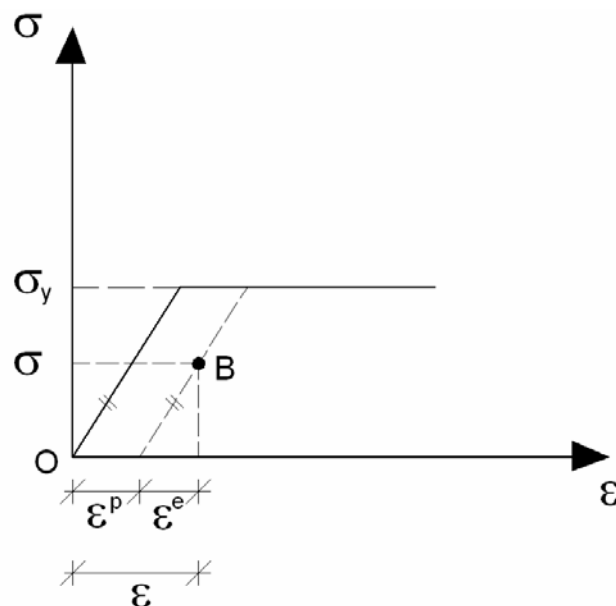


Figura 6.5 – Modelo elastoplástico perfeito.

6.4 – Modelo elastoplástico para problemas multidimensionais

O modelo elastoplástico para estados multiaxiais de tensão tem sua formulação fundamentada em uma generalização do problema unidimensional apresentado no item 6.3 deste trabalho. Ao contrário do modelo uniaxial onde as grandezas eram essencialmente escalares, no problema multiaxial passam a apresentar dimensões vetoriais ou tensoriais.

No meio contínuo as relações entre tensão e deformação passam a ser estabelecidas, na sua forma geral, através de componentes tensoriais σ_{ij} e ε_{ij} , com $i, j = 1, 2$. Assim como o efetuado no item 6.3 deste trabalho, para os problemas multidimensionais também pode ser estabelecida uma relação aditiva para as componentes de deformação, sendo expressa essa por:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (6.16)$$

De modo a considerar o carácter não-linear do modelo constitutivo, a relação (6.16) pode ser escrita em termos de taxas:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (6.17)$$

Na fase elástica a relação de proporcionalidade entre tensão e deformação é escrita em função da relação constitutiva apresentada em (2.4), que escrita em termos de taxas é expressa por:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (6.18)$$

sendo C_{ijkl} um tensor de quarta ordem formado por coeficientes que contém as constantes elásticas do material reescrito a seguir:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

com $i, j, k, l = 1, 2, 3$.

O critério de plastificação é definido por uma função f , associada ao estado de tensão e ao encruamento do material, de valor escalar de modo que:

$$f(\sigma, \rho) \leq 0 \quad (6.19)$$

onde ρ é a variável relacionada ao encruamento com lei de evolução dada pela expressão $\dot{\rho} = -\dot{\lambda} \cdot h(\sigma, \rho)$, com $\dot{\lambda}$ sendo um escalar e h um vetor que define a direção do encruamento.

A função f pode ser representada no espaço das tensões como sendo uma superfície que limita os estados de tensões elásticos e os que produzem deformações plásticas.

Para cada nível de encruamento caracterizado pelas componentes do vetor ρ , os pares (σ, ρ) dão origem a um ponto no espaço das tensões. Nessas condições, a função f define duas regiões distintas. Uma primeira região, denominada “domínio elástico”, é formada pelos pares (σ, ρ) que satisfaçam a condição de $f(\sigma, \rho) < 0$. Já a segunda, denominada “superfície de plastificação” é definida pelos pares (σ, ρ) que impliquem em $f(\sigma, \rho) = 0$.

Ainda com relação à representação do critério de plastificação no espaço das tensões, considere-se inicialmente um par (σ, ρ) tal que $f(\sigma, \rho) = 0$. Acréscimos no estado de tensão que conduzam a valores negativos de f caracterizam uma situação de descarregamento ou entrada no regime elástico. Acréscimos de tensão que conduzam a valores nulos de f indicam uma situação limite de carregamento neutro. Nesse caso o ponto “caminha” sobre a superfície de plastificação sem produzir deformações plásticas. Já acréscimos de tensão que conduzam a valores positivos de f configuram uma situação de carregamento e são ditos inacessíveis, pois indicam o aparecimento de deformações permanentes. Nesta situação a superfície inicial deve evoluir no espaço de tensões de tal modo que o ponto que representa o novo estado de tensão ainda resulte sobre a superfície.

Assim, sempre que o material apresentar uma variação nas deformações plásticas acumuladas haverá também mudanças no limite elástico gerando superfícies subseqüentes. O processo de evolução das superfícies é descrito pela regra de endurecimento associada à variável p .

Considere-se a figura 6.6 onde é ilustrada a evolução da superfície de plastificação para um problema plano. Neste caso, o modelo de evolução, denominado isotrópico, permite que a superfície evolua mantendo a sua forma original e sem sofrer translação sobre os eixos coordenados das tensões principais. Isto corresponde à manutenção das características iniciais de isotropia do material. Novamente vale lembrar que no presente trabalho adotou-se o modelo de endurecimento isotrópico do material.

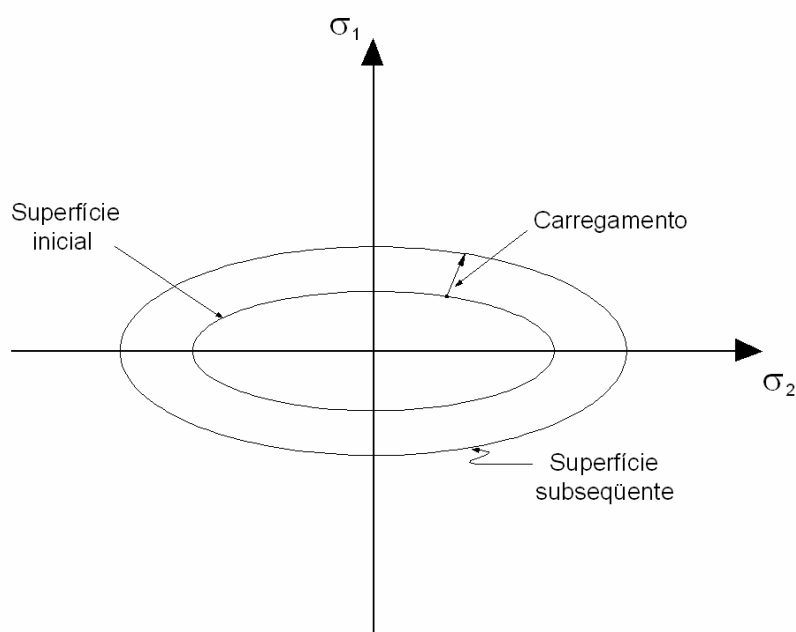


Figura 6.6 – Modelo de encruamento isotrópico.

Quando as superfícies subseqüentes mantêm a dimensão e a forma, mas transladam no espaço de tensões o modelo é dito cinemático. Este modelo, ilustrado na figura 6.7 para um problema essencialmente plano, permite a simulação do efeito Baushinger e é adequado para carregamentos cíclicos. Neste trabalho tal modelo não foi considerado.

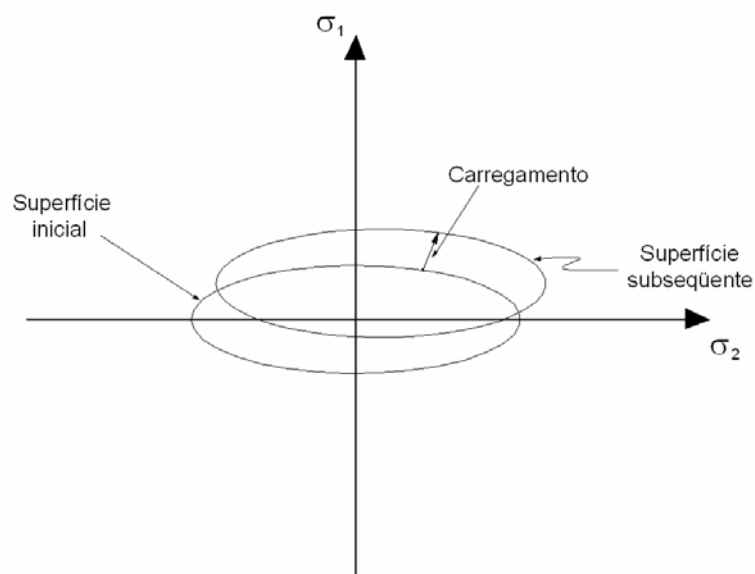


Figura 6.7 – Modelo de encruamento cinemático.

De modo a caracterizar o modelo elastoplástico para problemas multiaxiais define-se ainda uma lei de evolução das deformações plásticas, ou lei de plastificação, expressa na seguinte forma:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \cdot r(\sigma, p) \quad (6.20)$$

onde r é um tensor que estabelece a direção do fluxo plástico.

Nas relações apresentadas $\dot{\lambda}$ é um escalar, maior ou igual a zero, que fica definido a partir das condições de complementaridade e de consistência desenvolvidas no item 6.3 deste trabalho e novamente expressas a seguir:

$$\dot{\lambda} \cdot f = 0 \quad ; \quad \dot{\lambda} \cdot \dot{f} = 0$$

Em se considerando um par (σ, p) de tal forma que $f(\sigma, p) < 0$, pela condição de complementaridade tem-se que $\dot{\lambda} = 0$ e conseqüentemente $\dot{\varepsilon}^p = 0$ e $\dot{p} = 0$. Neste caso a resposta é totalmente elástica e a deformação plástica acumulada não se altera.

Ainda, considerando-se um par (σ, p) de forma que $f(\sigma, p) = 0$. Pela condição de complementaridade $\dot{\lambda} \geq 0$. Uma primeira possibilidade é de que $\dot{f}(\sigma, p) < 0$ e, pela condição de consistência se deduz que $\dot{\lambda} = 0$ e conseqüentemente $\dot{\varepsilon}^p = 0$ e $\dot{p} = 0$. Logo, pode-se concluir que a resposta imediata configura um descarregamento elástico.

Uma segunda possibilidade é a de que $\dot{f}(\sigma, p) = 0$ e, assim, $\dot{\lambda}$ pode ser positivo ou neutro. Na hipótese de $\dot{\lambda} = 0$ caracteriza-se como carregamento neutro, onde o ponto (σ, p) imediato tenha “caminhado” sobre a superfície de plastificação sem haver evolução das deformações plásticas. Por outro lado se $\dot{\lambda} > 0$ tem-se que $\dot{\varepsilon}^p \neq 0$ e $\dot{p} \neq 0$ o que caracteriza uma situação dita de carregamento plástico, com evolução na superfície de plastificação e nas deformações plásticas acumuladas.

Uma expressão para $\dot{\lambda}$ pode ser obtida a partir de \dot{f} . Assim, pode-se escrever:

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \dot{p}$$

Considerando que $\dot{\sigma} = C(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p)$, $\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \cdot r$, $\dot{p} = -\dot{\lambda} \cdot h$ e ainda a notação $f_\sigma = \partial f / \partial \sigma$ e $f_p = \partial f / \partial p$ tem-se:

$$\dot{f} = f_\sigma \cdot C\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda}(f_\sigma \cdot Cr + f_p \cdot h)$$

Considerando-se a lei de consistência, $\dot{\lambda} > 0$ só é possível se $\dot{f} = 0$. Assim, tem-se:

$$\dot{\lambda} = \frac{f_\sigma \cdot C\dot{\varepsilon}}{(f_\sigma \cdot Cr + f_p \cdot h)} \quad (6.21)$$

Com a expressão de $\dot{\lambda}$ é possível determinar-se as expressões de $\dot{\varepsilon}^p$ e de \dot{p} como segue:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{(f_\sigma \cdot C \dot{\varepsilon}) r}{(f_\sigma \cdot Cr + f_p \cdot h)} \quad (6.22)$$

$$\dot{\lambda} = \frac{(f_\sigma \cdot C \dot{\varepsilon}) h}{(f_\sigma \cdot Cr + f_p \cdot h)} \quad (6.23)$$

E ainda, considerando-se que $\dot{\sigma} = C(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p)$, ou $\dot{\sigma} = C^{ep} \dot{\varepsilon}$, onde C^{ep} é o tensor de quarta ordem dos módulos elastoplásticos de rigidez tangente, pode-se escrever:

$$C^{ep} = \begin{cases} C & \text{se } \dot{\lambda} = 0 \\ C - \frac{(Cr \otimes Cf_\sigma)}{(f_\sigma \cdot Cr + f_p \cdot h)} & \text{se } \dot{\lambda} > 0 \end{cases} \quad (6.24)$$

Em (6.24), para um r arbitrário C^{ep} não é, em geral, simétrico. De modo a se obter C^{ep} simétrico é necessário assumir-se que $r = f_\sigma$. Essa situação implica no uso da chamada lei da normalidade, pois nesse caso o tensor taxa de deformação é perpendicular à superfície de escoamento, ou seja:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} f_\sigma \quad (6.25)$$

6.5 – Formulação incremental do modelo elastoplástico com o critério de Von Mises para o estado plano de tensão

Neste item procura-se apresentar uma formulação incremental do modelo elastoplástico baseado no critério de plastificação de Von Mises para o estado plano de tensão.

Inicialmente apresenta-se o modelo elastoplástico para o problema geral multidimensional baseado no critério de plastificação de Von Mises. Na seqüência, o equacionamento é particularizado para o estado plano de tensão com posterior apresentação da formulação incremental e do algoritmo para a determinação do estado de tensão verdadeiro e da parcela plástica da deformação no material.

6.5.1 – Modelo elastoplástico com critério de Von Mises para problemas multidimensionais

A expressão para o critério de plastificação de Von Mises pode ser expressa pela seguinte relação:

$$f = \|S\| - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (\sigma_y + k \cdot \alpha) \quad (6.26)$$

onde σ_y é a tensão inicial de escoamento; k é o módulo plástico de encruamento isotrópico do material; α é a deformação plástica efetiva; e $\|S\|$ é a norma do tensor que contém a parte anti-esférica do tensor de tensão σ sendo expresso por:

$$\|S\| = \sqrt{2J_2} \quad (6.27)$$

Na expressão (6.27) o invariante J_2 para o caso tridimensional pode ser escrito em função do tensor das tensões como segue:

$$J_2 = \frac{1}{2} \|\sigma\|^2 - \frac{1}{6} (tr\sigma)^2 \quad (6.28)$$

sendo $tr\sigma$ o traço do tensor de tensões σ expresso por:

$$tr\sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

É interessante destacar que o tensor que contém a parte anti-esférica do vetor de tensão σ é expresso por:

$$S = \sigma - \frac{1}{3}(\text{tr}\sigma)I$$

sendo I o tensor de identidade de segunda ordem.

Para a definição das demais expressões que compõem o modelo elastoplástico deve-se efetuar a derivada de f com relação à σ (f_σ) como segue:

$$f_\sigma = \frac{1}{\sqrt{2J_2}} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma}$$

$$f_\sigma = \frac{1}{\|S\|} \left[\|\sigma\| \frac{\partial \|\sigma\|}{\partial \sigma} - \frac{1}{3}(\text{tr}\sigma) \frac{\partial (\text{tr}\sigma)}{\partial \sigma} \right]$$

$$f_\sigma = \frac{1}{\|S\|} \left[\|\sigma\| \frac{\sigma}{\|\sigma\|} - \frac{1}{3}(\text{tr}\sigma)I \right]$$

$$f_\sigma = \frac{S}{\|S\|} \quad (6.29)$$

Daí, a partir de (6.25) pode-se definir o tensor de evolução das deformações plásticas:

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{S}{\|S\|} = \dot{\lambda} n \quad (6.30)$$

onde n corresponde ao vetor unitário que determina a direção do fluxo plástico segundo a lei associativa.

E ainda, a lei de evolução da deformação plástica efetiva pode expressa como segue:

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \quad (6.31)$$

Por fim são apresentadas as expressões para o cálculo do multiplicador plástico $\dot{\lambda}$ e do tensor dos módulos elastoplásticos de rigidez tangente C^{ep} cujas deduções são apresentadas por Simo & Hughes (1998) e Proença (2004), dentre outros.

$$\dot{\lambda} = \frac{n \cdot \dot{\varepsilon}}{1 + \frac{k}{3\mu}} \quad (6.32)$$

$$C^{ep} = \lambda(I \otimes I) + 2\mu \left[// - \frac{n \otimes n}{1 + \frac{k}{3\mu}} \right] \quad (6.33)$$

sendo I o tensor de identidade de segunda ordem; $//$ o tensor identidade de quarta ordem; e λ e μ as constantes de Lamé definidas por:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (6.34)$$

$$\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6.35)$$

6.5.2 – Modelo elastoplástico com critério de Von Mises para o estado plano de tensão

A formulação apresentada no item 6.5.1 pode ser particularizada para o estado plano de tensão. Vale lembrar que no estado plano de tensão as

componentes σ_{i3} , com $i = 1, 2, 3$, são nulas. Dessa forma, os tensores de tensão e desviador passam a ser representados como segue:

$$\sigma^T = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{12}] \quad (6.36)$$

$$S^T = [S_{11} \quad S_{22} \quad S_{12}] \quad (6.37)$$

A matriz \bar{P} relaciona os tensores σ e S da seguinte forma:

$$S = \bar{P}\sigma$$

sendo

$$\bar{P} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

Vale lembrar que a componente S_{33} do tensor anti-esférico não é nula. No entanto tal componente não será “explicitamente” incluída na formulação apresentada. Tal fato também ocorre com as componentes ε_{33} e ε_{33}^p de deformação. Assim, os tensores de deformação podem ser expressos como segue:

$$\varepsilon^T = [\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad 2\varepsilon_{12}] \quad (6.39)$$

$$\varepsilon^{p(T)} = [\varepsilon_{11}^p \quad \varepsilon_{22}^p \quad 2\varepsilon_{12}^p] \quad (6.40)$$

Define-se também a matriz P necessária para a particularização das equações apresentadas em 6.5.1:

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

Definida as relações principais, as equações (6.26), (6.30) e (6.31) particularizadas para o estado plano de tensão são expressas por:

$$f = \sqrt{\sigma^T P \sigma} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (\sigma_y + k \cdot \alpha) \quad (6.42)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} P \sigma \quad (6.43)$$

$$\dot{\alpha} = \dot{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \sigma^T P \sigma} \quad (6.44)$$

Para a seqüência da formulação é interessante expressar a matriz P e a matriz constitutiva C em termos de uma decomposição diagonal. Assim, considerando-se o material isotrópico, tem-se:

$$P = Q \Lambda_p Q^T \quad (6.45)$$

$$C = Q \Lambda_c Q^T \quad (6.46)$$

com a matriz ortogonal $Q^{-1} = Q^T$ e a matriz constitutiva C dadas por (6.47) e (6.48).

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

$$C = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.48)$$

As matrizes diagonais Λ_p e Λ_c são expressas por:

$$\Lambda_p = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (6.49)$$

$$\Lambda_c = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu} & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

De posse das equações que modelam o comportamento elastoplástico do material que tem como base o critério de plastificação de Von Mises, parte-se agora para a dedução da formulação incremental e posterior apresentação do algoritmo implícito para a resolução do problema.

Para que o processo iterativo possa ser iniciado é necessário que inicialmente se parta de um estado de tensões inicial, dito de previsão, que por simplicidade é tomado como o resultado da aplicação da relação elástica entre tensão e deformação.

Dessa forma, com as deformações calculadas tendo por base os resultados de deslocamento obtidos pela resolução das equações de equilíbrio do problema de placas para um determinado passo de carga, define-se o estado de tensões de tentativa como segue:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \nabla^s U \quad (6.51)$$

$$\sigma_{n+1}^{pr} = \mathbf{C} [\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p] \quad (6.52)$$

Em geral, para problemas tridimensionais ou mesmo para problemas referentes ao estado plano de deformação, a correção dada ao tensor de tensões e conseqüentemente a evolução da superfície de escoamento se dá segundo uma direção normal à superfície de escoamento. Neste caso vale lembrar que a diferença entre os algoritmos implícitos e explícitos reside no fato de que, no primeiro caso a correção se dá segundo a normal da superfície de escoamento $f_{n+1} = 0$ enquanto que, no segundo caso, a normal é referente à superfície $f_n = 0$. A figura 6.8 ilustra o procedimento radial.

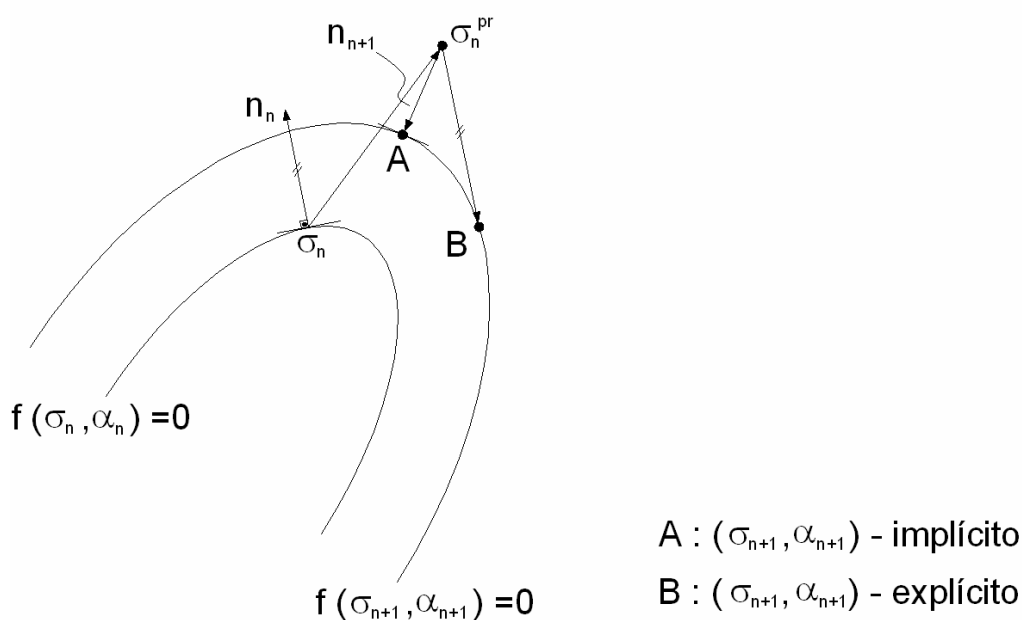


Figura 6.8 – Evolução da superfície de escoamento pelo procedimento radial.

O procedimento utilizado neste trabalho para a dedução do algoritmo que permite estabelecer a evolução da superfície de escoamento para o estado plano de tensão é o proposto por Simo & Taylor (1986). Segundo tais autores o procedimento radial simples utilizado nos problemas tridimensionais e nos problemas referentes ao estado plano de deformação não deve ser utilizado para problemas referentes ao estado plano de tensão por violar suas restrições.

O algoritmo proposto é deduzido a partir das equações para o estado plano de tensão já apresentadas e, dessa forma, todas as restrições para esse tipo de problema estão automaticamente satisfeitas.

Definidas então as equações (6.51) e (6.52), tem-se as demais equações que complementam o modelo em questão:

$$\sigma_{n+1} = \Xi(\dot{\lambda}) C^{-1} \sigma_{n+1}^{pr} \quad (6.53)$$

$$\bar{f}_{n+1} = \sqrt{\sigma_{n+1}^T \cdot P \cdot \sigma_{n+1}} \quad (6.54)$$

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \dot{\lambda} \cdot \bar{f}_{n+1} \quad (6.55)$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \dot{\lambda} \cdot P \cdot \sigma_{n+1} \quad (6.56)$$

sendo matriz $\Xi(\dot{\lambda})$ presente na equação (6.53) definida por:

$$\Xi(\dot{\lambda}) = [C^{-1} + \dot{\lambda} \cdot P] \quad (6.57)$$

Por fim tem-se a expressão do operador elastoplástico tangente necessário para a implementação do algoritmo implícito:

$$C_{n+1}^{ep} = \left. \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right|_{n+1} = \Xi - \frac{[\Xi P \sigma_{n+1}][\Xi P \sigma_{n+1}]^T}{\sigma_{n+1}^T P \Xi P \sigma_{n+1} + \bar{\beta}_{n+1}} \quad (6.58)$$

com

$$\bar{\beta}_{n+1} = \frac{2}{3\theta} k \sigma_{n+1}^T P \sigma_{n+1}$$

e

$$\bar{\theta} = 1 - \frac{2}{3} k \dot{\lambda}$$

Analisando-se as equações (6.53) a (6.58) verifica-se que suas avaliações só são possíveis mediante a obtenção do multiplicador plástico $\dot{\lambda}$. Neste caso, ao contrário do que ocorre nos modelos referentes ao estado tridimensional e ao estado plano de deformação, o valor de $\dot{\lambda}$ não é obtido através de uma expressão “fechada”, mas sim por meio de um processo iterativo baseado na imposição do critério $f_{n+1} = 0$ para as tensões $\sigma_{n+1} = 0$.

Assim considerando-se expressão do critério para um ponto $(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1})$ sobre a superfície de escoamento pode-se escrever:

$$f(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1}) = \sqrt{\sigma_{n+1}^T P \sigma_{n+1}} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (\sigma_y + k \cdot \alpha_{n+1}) = 0 \quad (6.59)$$

De modo a facilitar a notação, considere-se a função descrita na seguinte forma:

$$f_{n+1} = \bar{f}_{n+1} - \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \bar{k}_{n+1} = 0 \quad (6.60)$$

com $f_{n+1} = f(\sigma_{n+1}, \alpha_{n+1})$, $\bar{f}_{n+1} = \sqrt{\sigma_{n+1}^T P \sigma_{n+1}}$ e $\bar{k}_{n+1} = (\sigma_y + k \cdot \alpha_{n+1})$.

Elevando-se ao quadrado todos os membros da equação (6.60) e desenvolvendo-se a expressão resultante:

$$f_{n+1}^2 = \bar{f}_{n+1}^2 - 2 \cdot \bar{f}_{n+1} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \bar{k}_{n+1} + \frac{2}{3} \cdot \bar{k}_{n+1}^2 = 0$$

$$f_{n+1}^2 = \frac{1}{2} \bar{f}_{n+1}^2 - \bar{f}_{n+1} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \bar{k}_{n+1} + \frac{1}{3} \cdot \bar{k}_{n+1}^2 = 0$$

$$f_{n+1}^2 = \frac{1}{2} \bar{f}_{n+1}^2 - \frac{1}{3} \bar{k}_{n+1}^2 \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3\bar{f}_{n+1}}{\bar{k}_{n+1}} - 1 \right] = 0 \quad (6.61)$$

Através de (6.60) pode-se escrever:

$$\bar{f}_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \bar{k}_{n+1} \quad (6.62)$$

Substituindo-se (6.62) em (6.61) obtém-se:

$$f_{n+1}^2 = \frac{1}{2} \bar{f}_{n+1}^2 - \frac{1}{3} \bar{k}_{n+1}^2 \left[\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{3 \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \bar{k}_{n+1}}{\bar{k}_{n+1}} - 1 \right] = 0$$

Ou então:

$$f_{n+1}^2 = \frac{1}{2} \bar{f}_{n+1}^2 - \frac{1}{3} \bar{k}_{n+1}^2 = 0 \quad (6.63)$$

Considerando-se as equações (6.54) e (6.53) e realizando-se algumas manipulações matemáticas com o auxílio da decomposição das matrizes P e C dadas em (6.45) e (6.46) pode-se escrever:

$$\bar{f}_{n+1}^2 = \frac{(\sigma_{11}^{pr} + \sigma_{22}^{pr})^2}{6 \left[1 + \frac{E}{3(1-\nu)} \dot{\lambda} \right]^2} + \frac{(\sigma_{11}^{pr} - \sigma_{22}^{pr})^2 + 4(\sigma_{12}^{pr})^2}{2[1 + 2\mu\dot{\lambda}]^2} \quad (6.64)$$

E ainda, considerando-se a expressão (6.55) pode-se escrever:

$$\bar{k}_{n+1}^2 = \left[\sigma_y + k \cdot \left(\alpha_n + \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \dot{\lambda} \cdot \bar{f}_{n+1} \right) \right]^2 \quad (6.65)$$

A solução da equação (6.63) que fornecerá o desejado multiplicador plástico $\dot{\lambda}$ pode ser obtida utilizando-se o método de Newton-Raphson através de um

processo iterativo. Assim, considerando-se apenas o primeiro termo da expansão em série de Taylor é possível escrever:

$$f_{n+1}^2 + \frac{\partial f_{n+1}^2}{\partial \dot{\lambda}} \cdot \Delta \dot{\lambda} = 0 \quad (6.66)$$

com f_{n+1}^2 definido a partir das equações (6.63), (6.64) e (6.65) e a derivada $\frac{\partial f_{n+1}^2}{\partial \dot{\lambda}}$ podendo ser obtida como segue:

$$\frac{\partial f_{n+1}^2}{\partial \dot{\lambda}} = \bar{f}_{n+1} \cdot \frac{\partial \bar{f}_{n+1}}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{2}{3} \bar{k}_{n+1} \frac{\partial \bar{k}_{n+1}}{\partial \dot{\lambda}} \quad (6.67)$$

com

$$\frac{\partial \bar{f}_{n+1}}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{1}{2\sqrt{\omega_1 + \omega_2}} \cdot \left[-\frac{2E\omega_1}{[3(1-\nu) + E]\dot{\lambda}} - \frac{4\mu\omega_2}{[1 + 2\mu\dot{\lambda}]} \right] \quad (6.68)$$

onde

$$\omega_1 = \frac{(\sigma_{11}^{pr} + \sigma_{22}^{pr})^2}{6 \left[1 + \frac{E}{3(1-\nu)} \dot{\lambda} \right]^2}$$

$$\omega_2 = \frac{(\sigma_{11}^{pr} - \sigma_{22}^{pr})^2 + 4(\sigma_{12}^{pr})^2}{2[1 + 2\mu\dot{\lambda}]^2}$$

e

$$\frac{\partial \bar{k}_{n+1}}{\partial \dot{\lambda}} = k \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \left(\bar{f}_{n+1} + \dot{\lambda} \cdot \frac{\partial \bar{f}_{n+1}}{\partial \dot{\lambda}} \right) \quad (6.69)$$

Deduzidas as equações necessárias, o processo iterativo para a determinação do multiplicador plástico $\dot{\lambda}$ deve ser iniciado adotando-se um valor inicial para o mesmo. Neste trabalho optou-se por assumi-lo nulo ($\dot{\lambda}^i = 0$).

Com o valor inicial de $\dot{\lambda}$ e das tensões iniciais de tentativa inicia-se o processo iterativo calculando-se por meio das equações (6.65), (6.64) e (6.63) o valor de $(f_{n+1}^2)^i$. Do mesmo modo, com as equações (6.69), (6.68) e (6.67) é determinado o valor de $\left(\frac{\partial f_{n+1}^2}{\partial \dot{\lambda}}\right)^i$. Assim, pode-se determinar o acréscimo a ser dado em $\dot{\lambda}$ na determinada iteração i como auxílio da equação (6.66) e transcrito a seguir:

$$\Delta \dot{\lambda}^i = - \frac{(f_{n+1}^2)^i}{\left(\frac{\partial f_{n+1}^2}{\partial \dot{\lambda}}\right)^i} \quad (6.70)$$

Dessa forma o valor de $\dot{\lambda}$ para a próxima iteração $i+1$ pode ser atualizado como segue:

$$\dot{\lambda}^{i+1} = \dot{\lambda}^i + \Delta \dot{\lambda}^i \quad (6.71)$$

O processo iterativo deve ser executado até que se o critério de convergência pré-determinado seja alcançado. Assim, neste trabalho o processo iterativo é interrompido quando relação (6.72) é satisfeita.

$$\frac{\dot{\lambda}^{i+1} - \dot{\lambda}^i}{\dot{\lambda}^i} \leq tol_{\dot{\lambda}} \quad (6.72)$$

sendo a tolerância $tol_{\dot{\lambda}}$ assumida igual a 1×10^{-6} .

Desenvolvido todo o equacionamento referente ao modelo elastoplástico baseado no critério de Von Mises para o estado plano de tensão, se faz agora necessário a obtenção de um algoritmo para a resolução do problema elastoplástico de placas. O processo incremental-iterativo para a resolução do problema será fruto de discussão do próximo capítulo deste trabalho.

O equacionamento proposto neste item do trabalho permite, em um determinado passo de carga e em uma determinada iteração do processo incremental-iterativo, encontrar, a partir de uma tentativa inicial, o real estado de tensões atuantes na estrutura.

Assim, a partir do campo de deslocamentos obtido pela resolução do sistema de equações de equilíbrio são determinadas as deformações totais nos pontos de análise, conforme a equação (6.51). As tensões elásticas de tentativa são obtidas considerando-se que acréscimo de tensão na estrutura devido ao acréscimo de deformações seja totalmente elástico (equação (6.52)).

De posse das tensões de tentativa faz-se a verificação do critério através da equação (6.42). Assim, caso seja obtido $f_{n+1} \leq 0$, o material encontra-se em regime elástico e, neste caso, as tensões reais atuantes na estrutura são iguais às tensões de tentativa e as deformações plásticas não sofrem acréscimos. Também neste caso, o tensor elastoplástico C_{n+1}^{ep} é igual ao próprio tensor elástico C .

Caso $f_{n+1} > 0$ o material encontra-se em regime plástico e são necessárias as devidas correções ao estado de tensão e deformação na estrutura. Assim, inicialmente calcula-se o multiplicador plástico $\dot{\lambda}_{n+1}$ através do procedimento iterativo descrito anteriormente. Com $\dot{\lambda}_{n+1}$ e com o auxílio das equações (6.53) a (6.57) são calculados os novos estados de tensão e deformação plástica nos pontos de interesse. Neste caso o tensor elastoplástico C_{n+1}^{ep} é atualizado por meio da equação (6.58).

Todo o procedimento descrito pode ser mais bem visualizado através do fluxograma apresentado na figura 6.9.

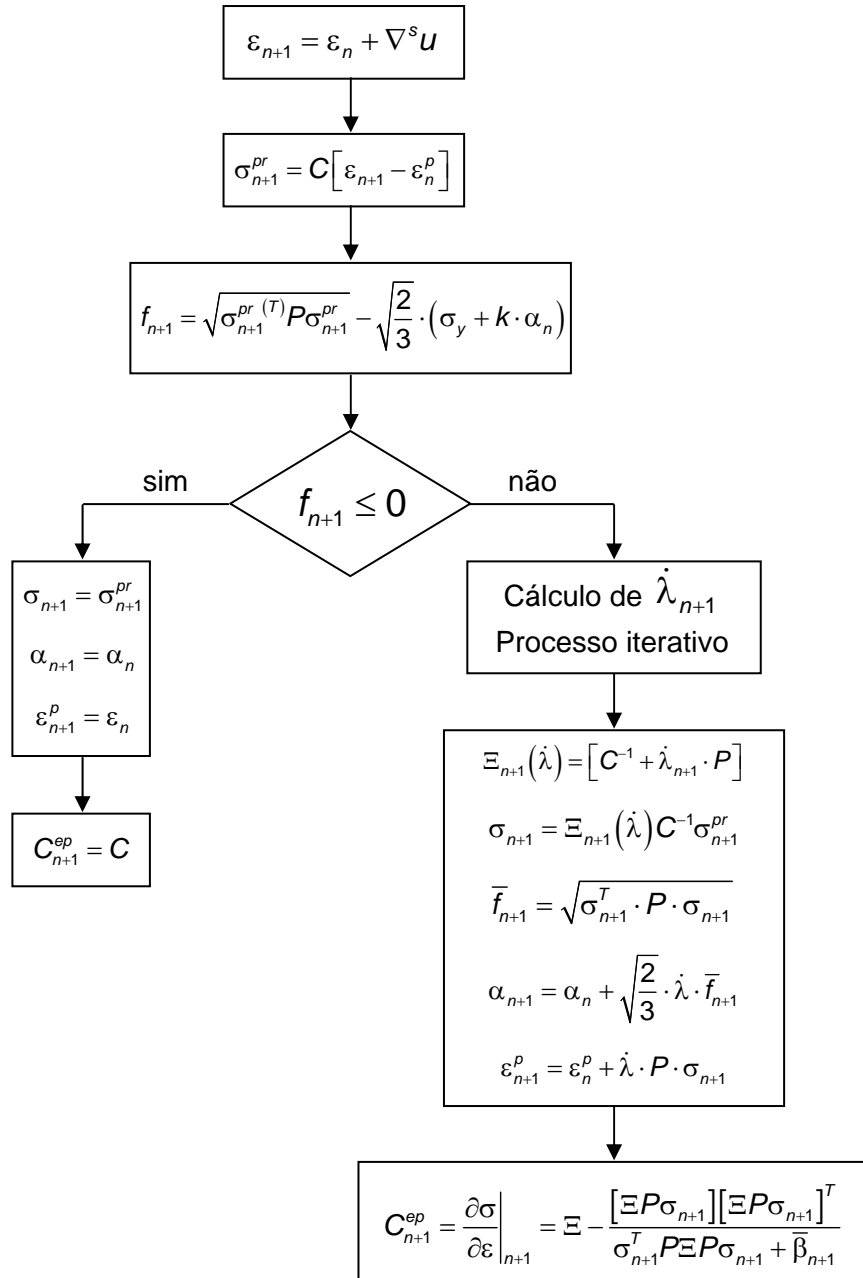


Figura 6.9 – Fluxograma para a obtenção do real estado de tensão e deformação na estrutura.

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO APLICADO AOS PROBLEMAS PROPOSTOS

7.1– Generalidades

A solução analítica das equações integrais obtidas no presente trabalho é relativamente difícil de ser encontrada, além de estar restrita a poucos problemas.

Na maioria dos casos práticos de interesse, uma análise aproximada envolvendo apenas um número limitado de graus de liberdade fornece uma exatidão suficiente e, assim, o problema pode ser reduzido à determinação das variáveis em um número finito de pontos previamente escolhidos. A partir daí surge a possibilidade de aplicação dos métodos numéricos para a obtenção de tais soluções aproximadas. Dentre os métodos numéricos existentes pode-se destacar o método dos elementos de contorno.

O MEC consiste basicamente na divisão do contorno da placa em segmentos, denominados elementos de contorno, sobre os quais as variáveis são aproximadas por funções previamente escolhidas. Essas funções, ditas funções interpoladoras, são, em geral, polinomiais e definidas em função de pontos previamente escolhidos em cada elemento, denominados pontos nodais ou, simplesmente, nós.

Uma vez efetuada a discretização do contorno, as equações integrais mencionadas são transformadas em equações algébricas que, aplicadas aos pontos nodais definidos dão origem a um sistema de equações lineares cuja resolução fornece as incógnitas do problema.

7.2 – Discretização do contorno

Considere-se o elemento estrutural de domínio Ω e contorno Γ ilustrada na figura 7.1. O contorno Γ é dividido em n trechos menores Γ_i , tal que a soma

desses recompõe o contorno original. O número e a forma dos elementos são escolhidos de maneira que representem o contorno real de forma exata ou aproximada.

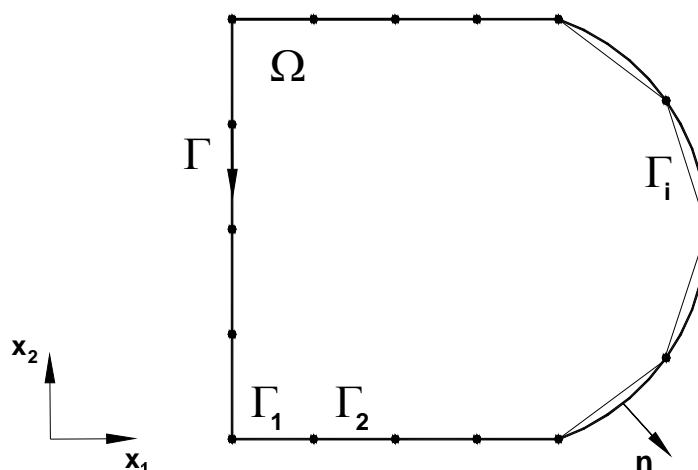


Figura 7.1 – Placa discretizada.

As variáveis do problema, conforme dito anteriormente, são, em geral, aproximadas em cada elemento Γ_i por funções polinomiais. Tais funções aproximadoras podem ser constantes, lineares, quadráticas, ou mesmo de ordem superior. Já para a representação geométrica dos elementos geralmente são utilizadas funções do tipo linear ou quadrática.

Para os casos onde, tanto a geometria quanto as variáveis dos elementos são descritas pela mesma função de interpolação, o elemento é chamado isoparamétrico. É o caso apresentado neste trabalho onde foi utilizado o elemento isoparamétrico linear. A aproximação das variáveis no elemento pode ser expressa pela equação (7.1).

$$\tilde{X}_s(P) = \tilde{\psi}(P) \cdot \tilde{X}^N \quad (7.1)$$

Na equação (7.1) \tilde{X}_s representa qualquer uma das variáveis do elemento, sejam as coordenadas, o deslocamento ou o esforço no ponto P . Já \tilde{X}^N representa os valores nodais da variável em questão. Tal expressão pode ser mais bem visualizada através da equação (7.2).

$$\begin{Bmatrix} x_1(P) \\ x_2(P) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) & 0 \\ 0 & \phi_1(P) & 0 & \phi_2(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \\ X_1^2 \\ X_2^2 \end{Bmatrix} \quad (7.2)$$

As funções de interpolação usadas são os polinômios de Lagrange, que, para o caso linear, assumem a forma:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2}(1-\xi) \\ \phi_2 &= \frac{1}{2}(1+\xi) \end{aligned} \quad (7.3)$$

onde ξ é uma coordenada adimensional, cujos valores são representados na figura 7.2.

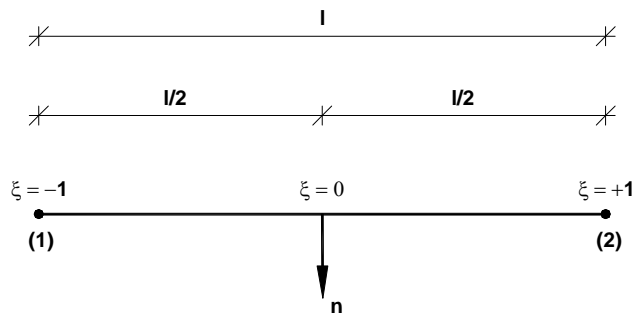


Figura 7.2 – Coordenada adimensional ξ .

A representação gráfica das funções de aproximação é ilustrada na figura 7.3.

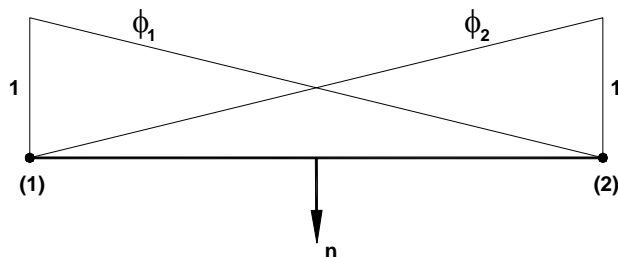


Figura 7.3 – Representação gráfica das funções de forma.

Para os casos onde haja a presença de angulosidades no contorno ou então diferentes condições de contorno aplicadas ao problema adotou-se, neste trabalho, o artifício do chamado “nó duplo”.

Os nós duplos caracterizam-se por apresentarem as mesmas coordenadas, porém permite que haja descontinuidade, tanto nas variáveis quanto na geometria do problema. A figura 7.4 ilustra a presença do nó duplo na discretização de um elemento estrutural.

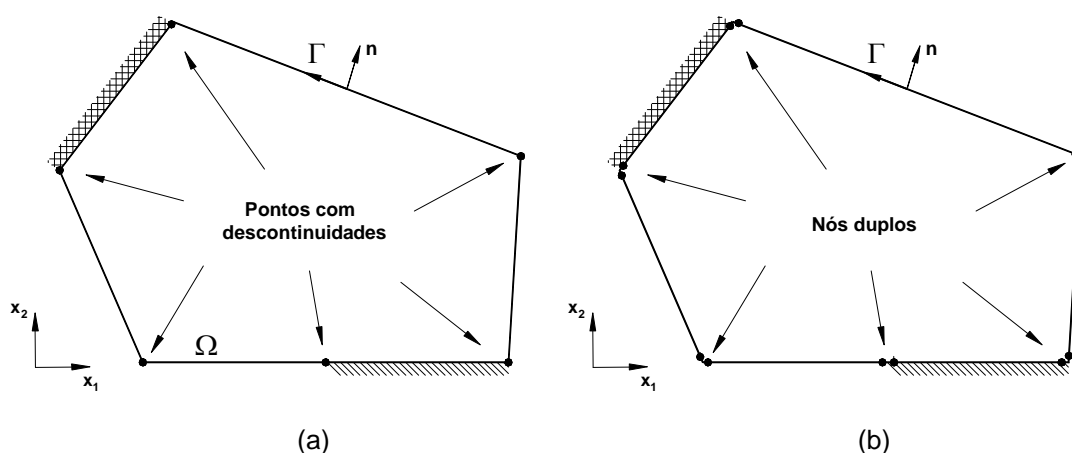


Figura 7.4 – Elemento estrutural: (a) presença de descontinuidade; (b) artifício adotado.

Dessa forma, para que as equações obtidas para os dois pontos de iguais coordenadas não sejam idênticas, o procedimento utilizado é o deslocamento do ponto de colocação para dentro do elemento, conforme ilustra a figura 4.5. Andrade (2001) sugere que o ponto seja deslocado a uma distância igual a um quarto do comprimento do elemento.

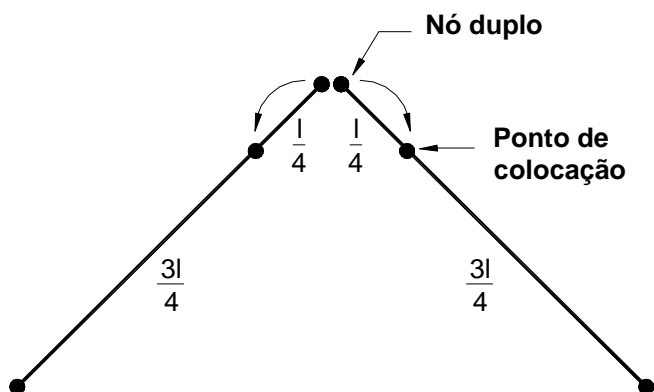


Figura 7.5 – Posicionamento do ponto de colocação para o nós duplos.

7.2.1– Integração no contorno

O processo de integração sobre os elementos do contorno de modo a transformar as equações integrais apresentadas no decorrer do trabalho em equações algébricas foi feito de duas maneiras distintas neste trabalho.

Para o caso onde o ponto de colocação Q não pertença ao elemento a ser integrado, ou para pontos fora do domínio, o procedimento de integração utilizado foi o baseado Método numérico de Quadratura de Gauss (Brebbia & Dominguez, 1989).

Já para os casos em que o ponto Q esteja sobre o elemento a ser integrado as integrais devem ser resolvidas analiticamente, uma vez que o integrando apresentará singularidades decorrentes das soluções fundamentais.

As expressões obtidas para as integrais analíticas sobre o contorno da placa e do problema elástico plano são apresentadas no apêndice deste trabalho.

7.3 – Discretização do domínio

Nas equações integrais apresentadas no decorrer do trabalho nota-se a presença de inúmeras integrais de domínio que devem ser avaliadas para a consideração dos efeitos não-lineares físicos e geométricos no problema e também para a consideração do aumento de rigidez proporcionado pela presença dos enrijecedores.

Para o cálculo dessas integrais há a necessidade de se discretizar o domínio da placa e/ou enrijecedor de modo que as variáveis possam ser aproximadas a partir de um número finito de graus de liberdade. Uma alternativa para o cálculo das mesmas seria utilizar-se de procedimentos como a reciprocidade dual ou múltipla, procedimentos esses que não foram abordados neste trabalho.

Analisando-se as equações integrais apresentadas no trabalho nota-se que existem duas classes de integrais de domínio: as integrais sobre o domínio dos enrijecedores e as integrais sobre todo o domínio da placa. Cada uma dessas classes foi tratada de forma distinta neste trabalho. Para os casos onde as variáveis são aproximadas em todo o domínio da placa foram utilizadas células triangulares com aproximação linear. Já as integrais calculadas no domínio do enrijecedor foram avaliadas de uma maneira particular, sendo os dois procedimentos descritos na seqüência deste trabalho.

7.3.1 – Integração no domínio da placa

Conforme discutido anteriormente, para a discretização do domínio da placa foram utilizadas células triangulares com função de aproximação linear conforme ilustra a figura 7.6.

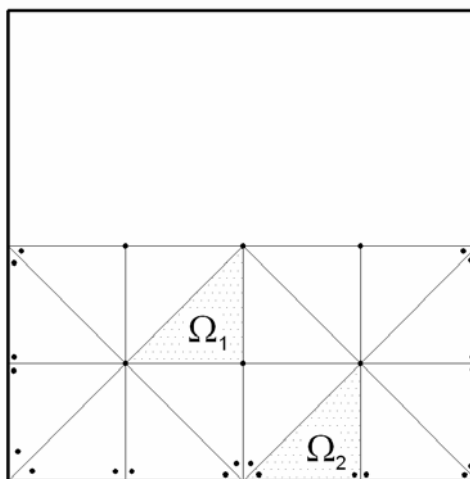


Figura 7.6 – Discretização do domínio da placa em células triangulares.

Na figura 7.6 a célula com domínio Ω_1 possui todos os seus vértices internos ao domínio da placa. Neste caso os nós são definidos sobre os vértices da célula. Já a célula de domínio Ω_2 apresenta originalmente dois de seus vértices coincidentes com o contorno externo da placa. Para se evitar singularidades no processo de integração, os nós coincidentes com o contorno da placa foram deslocados para o seu interior de acordo com o procedimento apresentado por Botta (2003). Vale lembrar que a continuidade no campo que se está aproximando é admitida em células concorrentes no mesmo nó.

A posição dos nós internos é geometricamente definida conforme ilustra a figura 7.7. Assim, define-se um parâmetro $dist$, definido entre zero e um, tal que a distância do nó interno ao centróide da célula seja dada por:

$$\bar{r} = dist \cdot r \quad (7.4)$$

sendo r a distância entre o centróide e o vértice da célula.

Neste trabalho adotou-se como padrão o valor $dist = 0,45$ para as análises numéricas apresentadas no decorrer do trabalho.

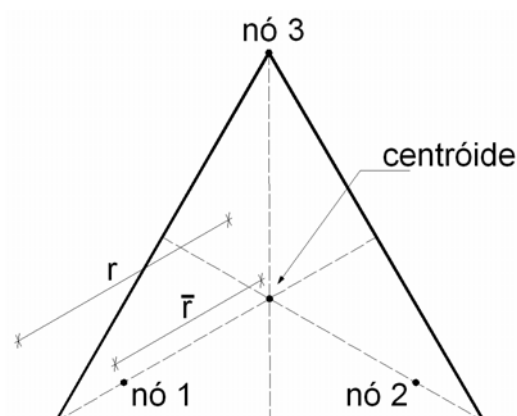


Figura 7.7 – Posicionamento dos nós internos das células triangulares.

As variáveis podem ser aproximadas no domínio da célula através da relação (7.5):

$$X(p) = \phi_i(p) \cdot X^N \quad (7.5)$$

sendo X a variável a ser aproximada, X^N o valor das variáveis calculadas nos nós da célula e $\phi_i(s)$ as funções de aproximação linear definidas por:

$$\phi_i(s) = \frac{1}{2A} [a^i + m^i x_1(s) + n^i x_2(s)] \quad (7.6)$$

sendo $x_1(s)$ e $x_2(s)$ as coordenadas cartesianas do ponto s e:

$$2A = (x_1^2 x_2^3 + x_1^3 x_2^1 + x_1^1 x_2^2 - x_1^2 x_2^1 - x_1^1 x_2^3 - x_1^3 x_2^2)$$

$$\begin{cases} a^i = x_1^j x_2^k - x_1^k x_2^j \\ m^i = x_2^j - x_2^k \\ n^i = x_1^k - x_1^j \end{cases}$$

com i, j e k variando ciclicamente de 1 a 3.

Escrevendo-se (7.6) em coordenadas cilíndricas obtém-se:

$$\phi_i(p) = \frac{1}{2A} \left[a^i + m^i (x_1(Q) + r \cos(\theta)) + n^i (x_2(Q) + r \text{sen}(\theta)) \right]$$

ou ainda:

$$\phi_i(p) = \phi_i(Q) + \frac{r}{2A} \left[m^i (\cos(\theta)) + n^i (\text{sen}(\theta)) \right] \quad (7.7)$$

O processo de integração sobre as células é efetuado através de um procedimento semi-analítico descrito na seqüência. Tomando-se como exemplo a integral de domínio referente ao efeito não-linear geométrico presente na equação (4.7) pode-se escrever para apenas uma célula genérica k :

$$\int_{\Omega_k} N_{ij}(P) w_{,ij}(P) w^*(Q,P) d\Omega_k \quad (7.8)$$

Substituindo-se em (7.8) a solução fundamental w^* apresentada no capítulo 2 deste trabalho e também as funções de aproximação dadas em (7.7), tem-se:

$$N_{ij}^N w_{,ij}^N \int_{\Omega_k} \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \cdot \left\{ \frac{1}{2A} \left[a^k + m^k (x_1(Q) + r \cos(\theta)) + n^k (x_2(Q) + r \text{sen}(\theta)) \right] \right\} d\Omega_k$$

sendo N_{ij}^N e $w_{,ij}^N$ valores nodais da célula k .

Pode-se ainda escrever:

$$N_{ij}^N w_{,ij}^N \int_{\theta} \int_r \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \cdot \left\{ \frac{1}{2A} \left[a^k + m^k (x_1(Q) + r \cos(\theta)) + n^k (x_2(Q) + r \text{sen}(\theta)) \right] \right\} r dr d\theta$$

Integrando-se analiticamente em r :

$$N_{ij}^N w_{ij}^N \int_{\theta} \left\{ \frac{1}{32\pi D} R^4 \left(\ln R - \frac{3}{4} \right) \cdot \left\{ \frac{1}{2A} [a^k + m^k x_1(Q) + n^k x_2(Q)] \right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{40\pi D} R^5 \left(\ln R - \frac{7}{10} \right) \left\{ \frac{1}{2A} [m^k \cos \theta + n^k \text{sen} \theta] \right\} \right\} d\theta$$

com $R(\theta) = R_2(\theta) - R_1(\theta)$ conforme ilustra a figura 7.8.

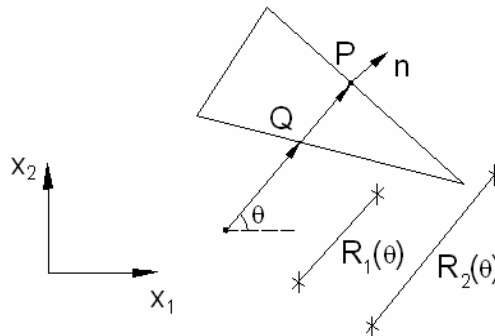


Figura 7.8 – Limites de integração.

A integração em θ pode ser transformada em integral no contorno da célula; na seqüência tal integral pode calculada numericamente pelo método da quadratura gaussiana. Esse procedimento evita o cálculo de $R_1(\theta)$ e $R_2(\theta)$. Assim, seguindo-se tal procedimento, pode-se escrever:

$$N_{ij}^N w_{ij}^N \int_{\Gamma_\ell} \left\{ \frac{1}{32\pi D} r^4 \left(\ln r - \frac{3}{4} \right) \cdot \left\{ \frac{1}{2A} [a^k + m^k x_1(Q) + n^k x_2(Q)] \right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{40\pi D} r^5 \left(\ln r - \frac{7}{10} \right) \left\{ \frac{1}{2A} [m^k \cos \theta + n^k \text{sen} \theta] \right\} \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_\ell$$

Tal integral é equivalente à somatória:

$$N_{ij}^N w_{ij}^N \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \left\{ \frac{1}{32\pi D} r^4 \left(\ln r - \frac{3}{4} \right) \cdot \left\{ \frac{1}{2A} [a^k + m^k x_1(Q) + n^k x_2(Q)] \right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{40\pi D} r^5 \left(\ln r - \frac{7}{10} \right) \left\{ \frac{1}{2A} [m^k \cos \theta + n^k \text{sen} \theta] \right\} \right\} \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}$$

onde p representa o número de lados da célula triangular, n o número de pontos de Gauss utilizado na integração e $|J_p|$ o jacobiano da transformação que, para o

estado plano, é igual a metade do comprimento do lado p da célula. Vale lembrar que a integração deve percorrer o sentido anti-horário.

O desenvolvimento das demais integrais no domínio da placa toda segue procedimento análogo ao apresentado, sendo os resultados finais obtidos para cada uma delas descrito no apêndice deste trabalho.

7.3.2 – Integração no domínio do enrijecedor

A definição dos enrijecedores neste trabalho segue o modelo simplificado apresentado por Fernandes (2003) onde as variáveis relativas ao enrijecedor são consideradas apenas no eixo médio do mesmo e não ao longo de todo o seu contorno. Tal simplificação reduz consideravelmente o número de graus de liberdade do problema e, além disso, facilita a entrada de dados no programa implementado.

Além dessa simplificação, neste trabalho optou-se por considerar o ganho de rigidez apenas na direção de x_s longitudinal ao enrijecedor, sendo a parcela referente à direção normal desprezada. Dessa forma, o número de graus de liberdade reduziu-se ainda mais, pois apenas três variáveis (w_{ss} , w_{nn} e N_{ss}) por nó do enrijecedor são acrescentadas ao problema.

Considere-se a placa ilustrada na figura 7.9. Na figura a linha contínua discretizada representa o eixo médio do enrijecedor e as linhas pontilhadas a largura total do mesmo. Ainda na figura é dado destaque para um elemento k do enrijecedor.

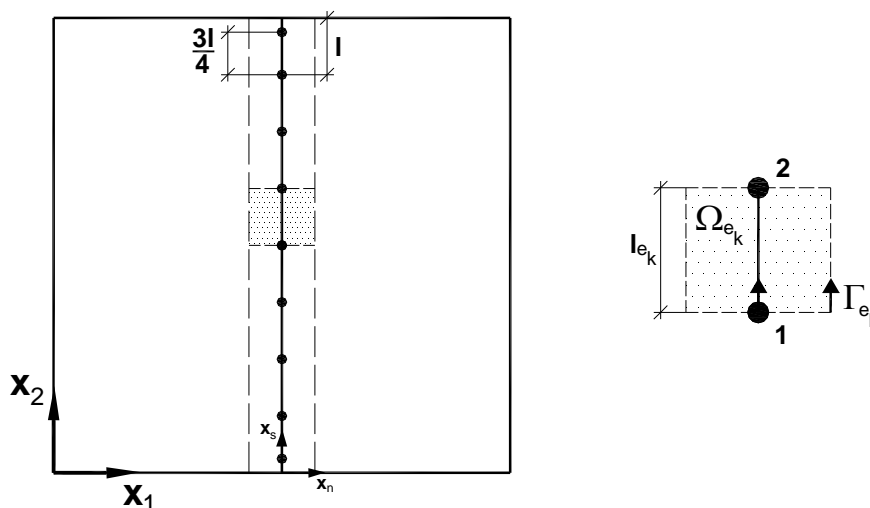


Figura 7.9 – Discretização utilizada nos enrijecedores.

Outro fato interessante apresentado na figura 7.9 é o posicionamento do nó do enrijecedor quando este coincide com o contorno externo da placa. De modo a se evitar singularidades no cálculo das variáveis de domínio, optou-se por deslocar o nó para o interior do elemento em um quarto de seu comprimento, de maneira semelhante à efetuada no procedimento de definição dos nós duplos.

Definido o posicionamento dos nós do enrijecedor, considere-se a integral no domínio do enrijecedor presente na equação (5.5). No decorrer da dedução da equação integral final de deslocamento foi realizado um processo de integração por partes que, para um elemento genérico k do enrijecedor, é reescrito a seguir:

$$\int_{\Omega_{e_k}} M_{ss}^c(p) w_{,ss}^*(Q,p) d\Omega_{e_k} = \int_{\Gamma_{e_k}} M_{ss}^c(p) w_{,s}^*(Q,p) \eta_s d\Gamma_{e_k} - \int_{\Omega_{e_k}} M_{ss,s}^c(p) w_{,s}^*(Q,p) d\Omega_{e_k} \quad (7.9)$$

sendo η_s a derivada da normal ao contorno do enrijecedor em relação a direção s longitudinal ao enrijecedor.

A integral de contorno presente na equação (7.9) segue o mesmo procedimento de integração dos elementos do contorno da placa, lembrando-se que as variáveis nodais estão dispostas apenas no eixo médio do enrijecedor. Vale ressaltar que foi adotada apenas uma variação linear para o momento ao longo do comprimento do enrijecedor; em relação à largura o momento permanece constante.

A variação de M_{ss}^c apenas ao longo do comprimento do enrijecedor permite escrevê-lo em função dos momentos nodais e aproximado no domínio do enrijecedor pelas mesmas funções polinomiais apresentadas em (7.3). Assim, tem-se:

$$M_{ss}^c = \phi_1 \cdot {}^1M_{ss}^c + \phi_2 \cdot {}^2M_{ss}^c \quad (7.10)$$

sendo ϕ_i as funções de aproximação e ${}^1M_{ss}^c$ e ${}^2M_{ss}^c$ os momentos nos nós inicial e final do elemento, respectivamente.

Para a determinação da integral de domínio existente na equação (7.9) é necessária a avaliação da derivada de M_{ss}^c em relação à x_s . Dessa forma, com base na equação (7.10), pode-se escrever:

$$\frac{\partial M_{ss}^c}{\partial x_s} = \frac{\partial \phi_1}{\partial x_s} \cdot {}^1M_{ss}^c + \frac{\partial \phi_2}{\partial x_s} \cdot {}^2M_{ss}^c$$

Considerando-se as funções ϕ_i dadas por (7.3) é possível escrever:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{2}(1-\xi) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_s}{(l_{e_k}/2)} \right) \\ \phi_2 &= \frac{1}{2}(1+\xi) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_s}{(l_{e_k}/2)} \right) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Daí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial x_s} &= -\frac{1}{l_{e_k}} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x_s} &= +\frac{1}{l_{e_k}} \end{aligned}$$

Por fim tem-se:

$$\frac{\partial M_{ss}^c}{\partial x_s} = -\frac{1}{l_{e_k}} \cdot {}^1M_{ss}^c + \frac{1}{l_{e_k}} \cdot {}^2M_{ss}^c \quad (7.12)$$

Visando simplificar o desenvolvimento das equações subseqüentes, a equação (7.12) pode ser reescrita com a seguinte notação:

$$\frac{\partial M_{ss}^c}{\partial x_s} = \phi_N \cdot {}^N M_{ss}^c \quad (7.13)$$

Assim, substituindo-se (7.13) na parcela referente ao domínio do elemento k do enrijecedor, obtém-se:

$$\int_{\Omega_{e_k}} M_{SS,S}^c(p) w_{,s}^*(Q,p) d\Omega_{e_k} = \int_{\Omega_{e_k}} \left[-\frac{r_{,s}}{4\pi D} r \ln r \right] \cdot [\varphi_N^N M_{SS}^c] \cdot d\Omega_{e_k}$$

Substituindo-se $d\Omega_{e_k} = r dr d\theta$:

$$\int_{\Omega_{e_k}} M_{SS,S}^c(p) w_{,s}^*(Q,p) d\Omega_{e_k} = [\varphi_N^N M_{SS}^c] \left[-\frac{r_{,s}}{4\pi D} \right] \int_{\theta} \int_r r^2 \ln r \cdot dr d\theta$$

Integrando-se analiticamente em r :

$$\int_{\Omega_{e_k}} M_{SS,S}^c(p) w_{,s}^*(Q,p) d\Omega_{e_k} = [\varphi_N^N M_{SS}^c] \left[-\frac{r_{,s}}{4\pi D} \right] \int_{\theta} \frac{r^3}{3} \left[\ln r - \frac{1}{3} \right] d\theta$$

Considerando-se que $d\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_{e_k}$

$$\int_{\Omega_{e_k}} M_{SS,S}^c(p) w_{,s}^*(Q,p) d\Omega_{e_k} = [\varphi_N^N M_{SS}^c] \left[-\frac{r_{,s}}{4\pi D} \right] \int_{\Gamma_{e_k}} \frac{r^2}{3} \left[\ln r - \frac{1}{3} \right] \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_{e_k}$$

Tal integral é equivalente à somatória:

$$\int_{\Omega_{e_k}} M_{SS,S}^c(p) w_{,s}^*(Q,p) d\Omega_{e_k} = [\varphi_N^N M_{SS}^D] \left[-\frac{r_{,s}}{4\pi D} \right] \sum_{\rho=1}^4 \sum_{n=1}^{N_g} |J_{\rho}| \cdot \frac{r^2}{3} \left[\ln r - \frac{1}{3} \right] \cdot \omega_g \frac{\partial r}{\partial n} \quad (7.14)$$

onde ρ representa o número de lados do elemento da célula, n o número de pontos de Gauss utilizado na integração e $|J_{\rho}|$ o jacobiano da transformação que, no caso plano, é igual a metade do comprimento do lado ρ do elemento.

O processo de integração para as demais integrais no domínio do enrijecedor segue o mesmo procedimento descrito, sendo os resultados finais obtidos para cada uma delas expresso no apêndice deste trabalho.

7.4– Transformação das equações integrais em equações algébricas

7.4.1 – Análise elastoplástica de placas considerando-se a não-linearidade geométrica

Conforme discutido anteriormente, as equações integrais para o problema de flexão de placas e para o problema elástico plano apresentadas no capítulo 4 deste trabalho devem ser resolvidas em conjunto de modo a se obter a solução do problema de placas considerando-se as não-linearidades física e geométrica.

As equações integrais apresentadas quando escritas na forma discretizada são equivalentes à equações algébricas com coeficientes resultantes do processo integração sobre os elementos do contorno e sobre as células triangulares multiplicados pelas correspondentes variáveis nodais de contorno e de domínio

Dessa forma, analisando-se a equação integral (4.7) nota-se que as variáveis de contorno existentes no problema de flexão de placas são os deslocamentos $w(P)$ e $\partial w/\partial n(P)$ e os esforços $V_n(P)$ $M_n(P)$; portanto, $4 \cdot N_n$ variáveis são obtidas no problema discretizado. Além disso, em se considerando os deslocamentos w_c e as reações R_c dos cantos da placa como variáveis do problema (procedimento adotado neste trabalho), o número de variáveis do problema sobe para $4 \cdot N_n + 2 \cdot N_c$.

Considerando-se que para cada nó do contorno da placa duas condições de contorno são aplicadas e ainda que para cada canto da placa uma das variáveis é conhecida, restam ainda $2 \cdot N_n + N_c$ incógnitas no problema. Portanto, para a resolução do problema são necessárias duas equações para cada nó do contorno e uma para os nós de canto.

Paiva & Venturini (1987) demonstraram que a alternativa que se mostra mais eficiente em problemas de placa é a aplicação da equação integral do deslocamento nos nós do contorno e também em pontos associados a esses nós e externos ao domínio, conforme ilustra a figura 7.10.

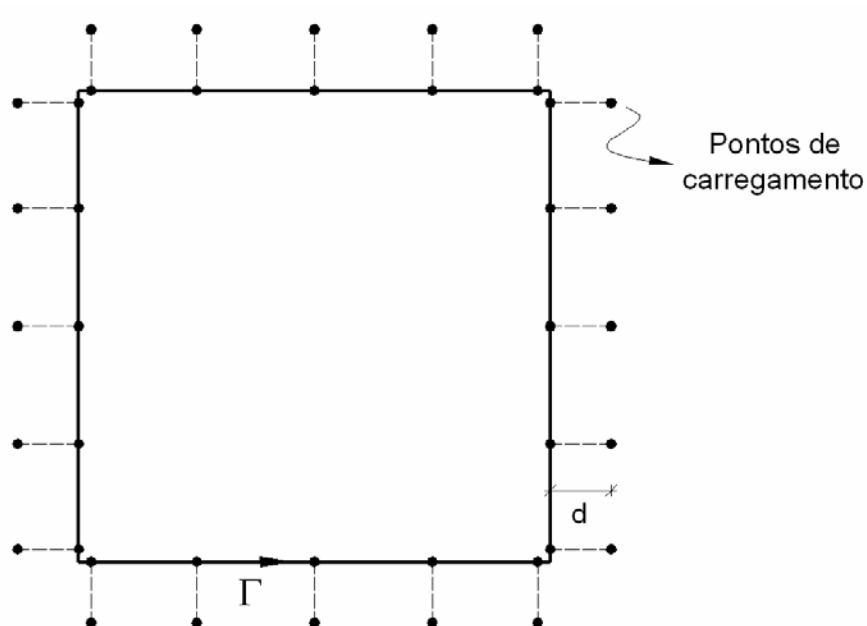


Figura 7.10 – Pontos de carregamento definidos no contorno e fora do domínio.

A posição do ponto externo ao domínio é definida na direção normal ao elemento, a uma distância do nó do contorno dada por:

$$d = \alpha \cdot l_m \quad (7.15)$$

sendo α um parâmetro não nulo e l_m a média dos comprimentos dos elementos concorrentes ao nó, ou, simplesmente o comprimento do elemento no caso do nó estar no interior do elemento (Chueiri, 1994).

O parâmetro α pode assumir qualquer valor. Paiva & Venturini (1987) propõem utilizar um parâmetro unitário; Silva (1986) e Calderón (1991) sugerem que, para que problemas numéricos sejam evitados, seu valor esteja entre 0,5 e 1,0. Já Fernandes (1998) sugere que, em se considerando a técnica de sub-elementação, seu limite inferior pode estar em torno de 1×10^{-4} , sendo que este último fornece resultados mais precisos.

Em se tratando da equação de deslocamento para o problema elástico (equação (4.14)) têm-se os deslocamentos e forças de superfície como variáveis do problema. Neste caso, após a aplicação das condições de contorno, as incógnitas

do problema ficam reduzidas a um número igual a $2 \cdot N_n$. Portanto, são também necessárias duas equações para cada nó do contorno.

Dessa forma, efetuando-se a discretização do contorno da placa e também do domínio em células triangulares e lembrando-se que também é necessário escrever as equações das rotações, curvaturas e forças normais para cada nó das células, obtém-se as equações algébricas necessárias para a resolução do problema. Assim, a partir das equações (4.7), (4.8), (4.10), (4.14) e (4.17) pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{H}_p \underset{\sim}{U}_p &= \underset{\sim}{G}_p \underset{\sim}{P}_p + \underset{\sim}{T}_p + \underset{\sim}{E}_p \left[\underset{\sim}{N} \cdot \underset{\sim}{\chi} \right] + \underset{\sim}{F}_p \underset{\sim}{M}^0 \\ \underset{\sim}{H}_c \underset{\sim}{U}_c &= \underset{\sim}{G}_c \underset{\sim}{P}_c + \underset{\sim}{T}_c + \underset{\sim}{E}_c \left[\underset{\sim}{\theta} \otimes \underset{\sim}{\theta} \right] + \underset{\sim}{F}_c \underset{\sim}{N}^0 \end{aligned} \quad (7.16)$$

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{N}^e &= -\underset{\sim}{S}_c \underset{\sim}{U}_c + \underset{\sim}{D}_c \underset{\sim}{P}_c + \underset{\sim}{T}'_c + \underset{\sim}{E}'_c \left[\underset{\sim}{\theta} \otimes \underset{\sim}{\theta} \right] + \left[\underset{\sim}{F}'_c - \underset{\sim}{I} \right] \underset{\sim}{N}^0 \\ \underset{\sim}{\theta} &= -\underset{\sim}{H}'_p \underset{\sim}{U}_p + \underset{\sim}{G}'_p \underset{\sim}{P}_p + \underset{\sim}{T}'_p + \underset{\sim}{E}'_p \left[\underset{\sim}{N} \cdot \underset{\sim}{\chi} \right] + \underset{\sim}{F}'_p \underset{\sim}{M}^0 \\ \underset{\sim}{\chi} &= -\underset{\sim}{H}''_p \underset{\sim}{U}_p + \underset{\sim}{G}''_p \underset{\sim}{P}_p + \underset{\sim}{T}''_p + \underset{\sim}{E}''_p \left[\underset{\sim}{N} \cdot \underset{\sim}{\chi} \right] + \underset{\sim}{F}''_p \underset{\sim}{M}^0 \end{aligned} \quad (7.17)$$

sendo:

✦ $\underset{\sim}{U}_p$ e $\underset{\sim}{P}_p$ vetores contendo os deslocamentos e esforços do contorno, respectivamente, para o problema de flexão de placas;

✦ $\underset{\sim}{U}_c$ e $\underset{\sim}{P}_c$ vetores contendo os deslocamentos e esforços do contorno, respectivamente, para o problema elástico plano;

✦ $\underset{\sim}{N}^e$, $\underset{\sim}{\theta}$ e $\underset{\sim}{\chi}$ vetores contendo a parcela elástica do esforço normal, as rotações e as curvaturas nos nós das células triangulares, respectivamente;

✦ $\underset{\sim}{N}^0$ e $\underset{\sim}{M}^0$ vetores contendo as forças normais e momentos iniciais nos nós das células, respectivamente;

✦ $\left[\underset{\sim}{N} \cdot \underset{\sim}{\chi} \right]$ vetor constituído pelo produto escalar entre as forças normais e as curvaturas obtidas nos nós das células;

✦ $\left[\begin{matrix} \theta \otimes \theta \\ \sim \end{matrix} \right]$ vetor constituído pelo produto tensorial entre as rotações obtidas nos nós das células;

e as demais matrizes contendo os coeficientes resultantes do processo de integração.

A resolução do sistema de equações algébricas formado pelas equações (7.16) e (7.17) fornecerá as requeridas incógnitas no contorno da placa. Devido à presença dos efeitos não-lineares físico e geométrico a solução do sistema deve ser obtida através de um processo incremental-iterativo que será objeto de discussão no decorrer deste trabalho.

7.4.2 – Placas enrijecidas submetidas à flexão composta

Também para o problema de placas enrijecidas submetidas à flexão composta as equações integrais para o problema de flexão de placas e para o problema elástico plano apresentadas no capítulo 5 deste trabalho devem ser resolvidas de forma acoplada.

Neste caso o processo de integração deve percorrer todos os elementos do contorno da placa e também os elementos dos enrijecedores. Assim, depois de realizada a integração, as equações (5.19), (5.20), (5.27) e (5.30) dão origem a um sistema de equações algébricas apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{H}_p \underset{\sim}{U}_p &= \underset{\sim}{G}_p \underset{\sim}{P}_p + \underset{\sim}{T}_p + \underset{\sim}{J}_p \underset{\sim}{\chi}^r + \underset{\sim}{K}_p \underset{\sim}{N}^r \\ \underset{\sim}{H}_c \underset{\sim}{U}_c &= \underset{\sim}{G}_c \underset{\sim}{P}_c + \underset{\sim}{T}_c + \underset{\sim}{J}_c \underset{\sim}{\chi}^r + \underset{\sim}{K}_c \underset{\sim}{N}^r \end{aligned} \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{N}^r &= -\underset{\sim}{S}_c \underset{\sim}{U}_c + \underset{\sim}{D}_c \underset{\sim}{P}_c + \underset{\sim}{T}'_c + \underset{\sim}{J}'_c \underset{\sim}{\chi}^r + \underset{\sim}{K}'_c \underset{\sim}{N}^r \\ \underset{\sim}{\chi}^r &= -\underset{\sim}{H}''_p \underset{\sim}{U}_p + \underset{\sim}{G}''_p \underset{\sim}{P}_p + \underset{\sim}{T}''_p + \underset{\sim}{J}''_p \underset{\sim}{\chi}^r + \underset{\sim}{K}''_p \underset{\sim}{N}^r \end{aligned} \quad (7.19)$$

sendo:

✦ $\underset{\sim}{U}_p$ e $\underset{\sim}{P}_p$ vetores contendo os deslocamentos e esforços do contorno,

respectivamente, para o problema de flexão de placas;

✦ $\underset{\sim}{U}_c$ e $\underset{\sim}{P}_c$ vetores contendo os deslocamentos e esforços do contorno,

respectivamente, para o problema elástico plano;

✦ $\underset{\sim}{\chi}^r$ vetor contendo as curvaturas $w_{,ss}^r$ e $w_{,nn}^r$ calculadas nos nós do

enrijecedor;

✦ $\underset{\sim}{N}^r$ vetor contendo a parcela elástica do esforço normal N_{ss}^r calculado nos

nós do enrijecedor;

e as demais matrizes contendo os coeficientes resultantes do processo de integração.

A resolução do sistema de equações algébricas formado pelas equações (7.18) e (7.19) será objeto de discussão no decorrer deste trabalho.

7.4.3– Análise elastoplástica de placas enrijecidas submetidas à flexão composta

As equações algébricas para a resolução do problema elastoplástico de placas enrijecidas sujeitas à flexão composta são obtidas a partir das equações integrais apresentadas no item 5.4 deste trabalho.

Após todo o processo de integração nos elementos do contorno da placa, nos elementos dos enrijecedores e nas células da placa, as equações algébricas assumem a mesma forma apresentada em (7.18) e (7.19) acrescidas das parcelas referentes aos esforços iniciais responsáveis pela correção dos esforços no processo incremental-iterativo. Assim, depois de realizado o processo de integração, as equações (5.32), (5.33), (5.35) e (5.36) dão origem ao sistema de equações algébricas apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{H}_p \underset{\sim}{U}_p &= \underset{\sim}{G}_p \underset{\sim}{P}_p + \underset{\sim}{T}_p + \underset{\sim}{J}_p \underset{\sim}{\chi}^r + \underset{\sim}{K}_p \underset{\sim}{N}^r + \underset{\sim}{F}_p \underset{\sim}{M}^0 \\ \underset{\sim}{H}_c \underset{\sim}{U}_c &= \underset{\sim}{G}_c \underset{\sim}{P}_c + \underset{\sim}{T}_c + \underset{\sim}{J}_c \underset{\sim}{\chi}^r + \underset{\sim}{K}_c \underset{\sim}{N}^r + \underset{\sim}{F}_c \underset{\sim}{N}^0 \end{aligned} \quad (7.20)$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{N}^e &= -\tilde{S}_c \tilde{U}_c + \tilde{D}_c \tilde{P}_c + \tilde{T}_c + \tilde{J}_c \tilde{\chi}^r + \tilde{K}_c \tilde{N}^r + \left[\tilde{F}_c - \tilde{I} \right] \tilde{N}^0 \\
 \tilde{\chi} &= -\tilde{H}_p'' \tilde{U}_p + \tilde{G}_p'' \tilde{P}_p + \tilde{T}_p'' + \tilde{J}_p'' \tilde{\chi}^r + \tilde{K}_p'' \tilde{N}^r + \tilde{F}_p'' \tilde{M}^0
 \end{aligned}
 \tag{7.21}$$

sendo:

✦ \tilde{U}_p e \tilde{P}_p vetores contendo os deslocamentos e esforços do contorno, respectivamente, para o problema de flexão de placas;

✦ \tilde{U}_c e \tilde{P}_c vetores contendo os deslocamentos e esforços do contorno, respectivamente, para o problema elástico plano;

✦ $\tilde{\chi}^r$ vetor contendo as curvaturas $w_{,ss}^r$ e $w_{,nn}^r$ calculadas nos nós do enrijecedor;

✦ \tilde{N}^r vetor contendo a parcela elástica do esforço normal N_{ss}^r calculado nos nós do enrijecedor;

✦ \tilde{N}^e e $\tilde{\chi}$ vetores contendo a parcela elástica do esforço normal e as curvaturas, respectivamente, nos nós das células triangulares e dos elementos dos enrijecedores;

✦ \tilde{M}^0 e \tilde{N}^0 vetores contendo os esforços normais e momentos iniciais, respectivamente, nos nós das células e dos elementos dos enrijecedores.

e as demais matrizes contendo os coeficientes resultantes do processo de integração.

A resolução do sistema de equações algébricas formado pelas equações (7.20) e (7.21) será objeto de discussão do próximo item deste trabalho.

7.5 – Procedimento para resolução do sistema de equações

7.5.1 – Análise elastoplástica de placas considerando-se a não-linearidade geométrica

A solução do problema elastoplástico de placas considerando-se a não-linearidade geométrica é obtido através de um procedimento incremental-iterativo a partir da formulação implícita, na qual as correções que devem ser aplicadas no sistema são obtidas através do operador tangente consistente.

O conceito de operador tangente consistente foi introduzido em formulações não-lineares do MEC apenas recentemente, com o trabalho de Bonnet & Mukherjee (1996), onde tais autores estudaram o problema elastoplástico considerando uma formulação escrita em função de deformações iniciais. Alguns outros trabalhos que fazem uso do operador tangente consistente podem ser citados: Poon et al (1998), Fudoli (1999), Botta (2003), Fernandes (2003), dentre outros.

Conforme apresentado no item 7.4.1 deste trabalho o problema de flexão de placas considerando-se as não-linearidades física e geométrica pode ser resumido em um conjunto de equações algébricas reescritas na seqüência:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_p \tilde{U}_p &= \tilde{G}_p \tilde{P}_p + \tilde{T}_p + \tilde{E}_p \left[\tilde{N} \cdot \tilde{\chi} \right] + \tilde{F}_p \tilde{M}^0 \\ \tilde{H}_c \tilde{U}_c &= \tilde{G}_c \tilde{P}_c + \tilde{T}_c + \tilde{E}_c \left[\tilde{\theta} \otimes \tilde{\theta} \right] + \tilde{F}_c \tilde{N}^0 \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}^e &= -\tilde{S}_c \tilde{U}_c + \tilde{D}_c \tilde{P}_c + \tilde{T}_c + \tilde{E}_c \left[\tilde{\theta} \otimes \tilde{\theta} \right] + \left[\tilde{F}_c - I \right] \tilde{N}^0 \\ \tilde{\theta} &= -\tilde{H}'_p \tilde{U}_p + \tilde{G}'_p \tilde{P}_p + \tilde{T}'_p + \tilde{E}'_p \left[\tilde{N} \cdot \tilde{\chi} \right] + \tilde{F}'_p \tilde{M}^0 \\ \tilde{\chi} &= -\tilde{H}''_p \tilde{U}_p + \tilde{G}''_p \tilde{P}_p + \tilde{T}''_p + \tilde{E}''_p \left[\tilde{N} \cdot \tilde{\chi} \right] + \tilde{F}''_p \tilde{M}^0 \end{aligned} \quad (7.23)$$

sendo as equações (7.22) originadas através do processo de integração das equações de deslocamentos referentes à análise de placas e ao problema de membrana, e as equações (7.23) referente ao cálculo das normais, rotações e curvaturas necessárias para a avaliação dos efeitos não-lineares.

Considerando-se a matriz \underline{F}'_c já subtraída da matriz identidade \underline{I} e isolando-se as variáveis de contorno do problema nos vetores \underline{X} obtém-se:

$$\begin{aligned}\underline{A}'_p \underline{X}_p &= \underline{B}'_p + \underline{E}'_p \left[\underline{N} \cdot \underline{\chi} \right] + \underline{F}'_p \underline{M}^0 \\ \underline{A}'_c \underline{X}_c &= \underline{B}'_c + \underline{E}'_c \left[\underline{\theta} \otimes \underline{\theta} \right] + \underline{F}'_c \underline{N}^0\end{aligned}\quad (7.24)$$

$$\begin{aligned}\underline{N}^e &= -\underline{A}'_c \underline{X}_c + \underline{B}'_c + \underline{E}'_c \left[\underline{\theta} \otimes \underline{\theta} \right] + \underline{F}'_c \underline{N}^0 \\ \underline{\theta} &= -\underline{A}'_p \underline{X}_p + \underline{B}'_p + \underline{E}'_p \left[\underline{N} \cdot \underline{\chi} \right] + \underline{F}'_p \underline{M}^0 \\ \underline{\chi} &= -\underline{A}''_p \underline{X}_p + \underline{B}''_p + \underline{E}''_p \left[\underline{N} \cdot \underline{\chi} \right] + \underline{F}''_p \underline{M}^0\end{aligned}\quad (7.25)$$

De (7.24) pode-se ainda escrever:

$$\begin{aligned}\underline{X}_p &= \underline{L}'_p + \underline{Q}'_p \left[\underline{N} \cdot \underline{\chi} \right] + \underline{R}'_p \underline{M}^0 \\ \underline{X}_c &= \underline{L}'_c + \underline{Q}'_c \left[\underline{\theta} \otimes \underline{\theta} \right] + \underline{R}'_c \underline{N}^0\end{aligned}\quad (7.26)$$

com $\underline{L}' = \underline{A}'^{-1} \cdot \underline{B}'$, $\underline{Q}' = \underline{A}'^{-1} \cdot \underline{E}'$ e $\underline{R}' = \underline{A}'^{-1} \cdot \underline{F}'$.

Substituindo-se (7.26) em (7.25) obtém-se:

$$\begin{aligned}\underline{N}^e &= \underline{L}'_c + \underline{Q}'_c \left[\underline{\theta} \otimes \underline{\theta} \right] + \underline{R}'_c \underline{N}^0 \\ \underline{\theta} &= \underline{L}'_p + \underline{Q}'_p \left[\underline{N} \cdot \underline{\chi} \right] + \underline{R}'_p \underline{M}^0 \\ \underline{\chi} &= \underline{L}''_p + \underline{Q}''_p \left[\underline{N} \cdot \underline{\chi} \right] + \underline{R}''_p \underline{M}^0\end{aligned}\quad (7.27)$$

com $\underline{L}' = -\underline{A}' \cdot \underline{A}'^{-1} \cdot \underline{B}' + \underline{B}'$, $\underline{L}'' = -\underline{A}'' \cdot \underline{A}''^{-1} \cdot \underline{B}'' + \underline{B}''$, $\underline{Q}' = -\underline{A}' \cdot \underline{A}'^{-1} \cdot \underline{E}' + \underline{E}'$,
 $\underline{Q}'' = -\underline{A}'' \cdot \underline{A}''^{-1} \cdot \underline{E}'' + \underline{E}''$, $\underline{R}' = -\underline{A}' \cdot \underline{A}'^{-1} \cdot \underline{F}' + \underline{F}'$ e $\underline{R}'' = -\underline{A}'' \cdot \underline{A}''^{-1} \cdot \underline{F}'' + \underline{F}''$.

Conforme discutido no capítulo 4 deste trabalho, os momentos e as forças normais totais atuantes na estrutura podem ser expressos em função de suas parcelas elásticas associadas ao campo de deformação total ε_{ij} e em função de um campo de esforços iniciais associados ao campo de deformações iniciais ε_{ij}^0 como segue:

$$M_{ij}^e = M_{ij} + M_{ij}^0 \quad (7.28)$$

$$N_{ij}^e = N_{ij} + N_{ij}^0$$

A Lei de Hooke e a relação entre momento-curvatura apresentadas no capítulo 2 relacionam as parcelas elásticas M_{ij}^e e N_{ij}^e com as curvaturas e as deformações totais de membrana, respectivamente. Dessa forma, para todos os pontos internos da placa pode-se escrever:

$$\underset{\sim}{M}_{ij}^e = \underset{\sim}{C}_M \cdot \underset{\sim}{\chi} \quad (7.29)$$

$$\underset{\sim}{N}_{ij}^e = \underset{\sim}{C}_N \cdot \underset{\sim}{\varepsilon}$$

sendo $\underset{\sim}{C}_M$ e $\underset{\sim}{C}_N$ matrizes formadas pelas componentes apresentadas nas relações (2.6) e (2.20), respectivamente.

Substituindo-se a equação (7.29) em (7.28) tem-se para todos os pontos da placa:

$$\underset{\sim}{M}^0 = \underset{\sim}{C}_M \underset{\sim}{\chi} - \underset{\sim}{M} \quad (7.30)$$

$$\underset{\sim}{N}^0 = \underset{\sim}{C}_N \underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{N}$$

Substituindo-se as equações (7.30) e (7.29) em (7.27) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{C}}_N \underline{\underline{\varepsilon}} &= \underline{\underline{L}}'_c + \underline{\underline{Q}}'_c \left[\underline{\underline{\theta}} \otimes \underline{\underline{\theta}} \right] + \underline{\underline{R}}'_c \left[\underline{\underline{C}}_N \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{N}} \right] \\
 \underline{\underline{\theta}} &= \underline{\underline{L}}'_p + \underline{\underline{Q}}'_p \left[\underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{\chi}} \right] + \underline{\underline{R}}'_p \left[\underline{\underline{C}}_M \underline{\underline{\chi}} - \underline{\underline{M}} \right] \\
 \underline{\underline{\chi}} &= \underline{\underline{L}}''_p + \underline{\underline{Q}}''_p \left[\underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{\chi}} \right] + \underline{\underline{R}}''_p \left[\underline{\underline{C}}_M \underline{\underline{\chi}} - \underline{\underline{M}} \right]
 \end{aligned} \tag{7.31}$$

Por fim, considerando-se as equações escritas na forma incremental, têm-se as equações finais de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{f}}_\varepsilon \left(\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}; \underline{\underline{\Delta\theta}} \right) &= -\underline{\underline{C}}_N \underline{\underline{\Delta\varepsilon}} + \underline{\underline{\Delta L}}'_c + \underline{\underline{Q}}'_c \left[\underline{\underline{\Delta\theta}} \otimes \underline{\underline{\theta}} + \underline{\underline{\theta}} \otimes \underline{\underline{\Delta\theta}} \right] + \underline{\underline{R}}'_c \left[\underline{\underline{C}}_N \underline{\underline{\Delta\varepsilon}} - \underline{\underline{\Delta N}} \right] = 0 \\
 \underline{\underline{f}}_\theta \left(\underline{\underline{\Delta\theta}}; \underline{\underline{\Delta\varepsilon}}; \underline{\underline{\Delta\chi}} \right) &= -\underline{\underline{\Delta\theta}} + \underline{\underline{\Delta L}}'_p + \underline{\underline{Q}}'_p \left[\underline{\underline{\Delta N}} \cdot \underline{\underline{\chi}} + \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{\Delta\chi}} \right] + \underline{\underline{R}}'_p \left[\underline{\underline{C}}_M \underline{\underline{\Delta\chi}} - \underline{\underline{\Delta M}} \right] = 0 \\
 \underline{\underline{f}}_\chi \left(\underline{\underline{\Delta\chi}}; \underline{\underline{\Delta\varepsilon}} \right) &= -\underline{\underline{\Delta\chi}} + \underline{\underline{\Delta L}}''_p + \underline{\underline{Q}}''_p \left[\underline{\underline{\Delta N}} \cdot \underline{\underline{\chi}} + \underline{\underline{N}} \cdot \underline{\underline{\Delta\chi}} \right] + \underline{\underline{R}}''_p \left[\underline{\underline{C}}_M \underline{\underline{\Delta\chi}} - \underline{\underline{\Delta M}} \right] = 0
 \end{aligned} \tag{7.32}$$

A solução do problema elastoplástico de placas considerando-se a não-linearidade geométrica é obtido através da resolução do sistema de equações apresentadas em (7.32). A solução é obtida utilizando-se o método de Newton-Raphson através de um processo iterativo. Assim, para um determinado passo de carga, a cada iteração são obtidas correções que devem ser somadas aos estados de deformações referentes ao problema elástico plano, de rotações e de curvaturas. No final do processo iterativo deseja-se encontrar valores de incrementos $\underline{\underline{\Delta\varepsilon}}$, $\underline{\underline{\Delta\theta}}$ e $\underline{\underline{\Delta\chi}}$ para o passo de carga em questão que satisfaçam o sistema de equações (7.32) e também o modelo constitutivo adotado dentro de uma tolerância pré-determinada.

Dessa forma, para uma iteração $i+1$, os valores de $\underline{\Delta\varepsilon}$, $\underline{\Delta\theta}$ e $\underline{\Delta\chi}$ da iteração anterior i são corrigidos através de acréscimos $\delta\underline{\Delta\varepsilon}$, $\delta\underline{\Delta\theta}$ e $\delta\underline{\Delta\chi}$ de forma que:

$$\begin{aligned}\underline{\Delta\varepsilon}^{i+1} &= \underline{\Delta\varepsilon}^i + \delta\underline{\Delta\varepsilon}^i \\ \underline{\Delta\theta}^{i+1} &= \underline{\Delta\theta}^i + \delta\underline{\Delta\theta}^i \\ \underline{\Delta\chi}^{i+1} &= \underline{\Delta\chi}^i + \delta\underline{\Delta\chi}^i\end{aligned}\quad (7.33)$$

As correções $\delta\underline{\Delta\varepsilon}$, $\delta\underline{\Delta\theta}$ e $\delta\underline{\Delta\chi}$ podem ser obtidas através da forma linearizada das equações (7.32) considerando-se apenas o primeiro termo da expansão em série de Taylor, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \underline{f}_\varepsilon(\underline{\Delta\varepsilon}^i; \underline{\Delta\theta}^i) \\ \underline{f}_\theta(\underline{\Delta\theta}^i; \underline{\Delta\varepsilon}^i; \underline{\Delta\chi}^i) \\ \underline{f}_\chi(\underline{\Delta\chi}^i; \underline{\Delta\varepsilon}^i) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{f}_\varepsilon}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}^i} & \frac{\partial \underline{f}_\varepsilon}{\partial \underline{\Delta\theta}^i} & \frac{\partial \underline{f}_\varepsilon}{\partial \underline{\Delta\chi}^i} \\ \frac{\partial \underline{f}_\theta}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}^i} & \frac{\partial \underline{f}_\theta}{\partial \underline{\Delta\theta}^i} & \frac{\partial \underline{f}_\theta}{\partial \underline{\Delta\chi}^i} \\ \frac{\partial \underline{f}_\chi}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}^i} & \frac{\partial \underline{f}_\chi}{\partial \underline{\Delta\theta}^i} & \frac{\partial \underline{f}_\chi}{\partial \underline{\Delta\chi}^i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\underline{\Delta\varepsilon}^i \\ \delta\underline{\Delta\theta}^i \\ \delta\underline{\Delta\chi}^i \end{Bmatrix} + \dots = \underline{0}$$

sendo o operador tangente consistente obtido por meio das derivadas das funções $\underline{f}_\varepsilon$, \underline{f}_θ e \underline{f}_χ em relação as variáveis $\underline{\Delta\varepsilon}$, $\underline{\Delta\theta}$ e $\underline{\Delta\chi}$ e expresso por:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} -\underline{C}_N \underline{II} + \underline{R}'_c \left[\underline{C}_N \underline{II} - \underline{C}_{N\varepsilon}^{ep} \right] & \underline{Q}'_c \left[\underline{I} \otimes \underline{\theta} + \underline{\theta} \otimes \underline{I} \right] & -\underline{R}'_c \underline{C}_{N\chi}^{ep} \\ \underline{Q}'_p \left[\underline{C}_{N\varepsilon}^{ep} \cdot \underline{\chi} - \underline{R}'_p \underline{C}_{M\varepsilon}^{ep} \right] & -\underline{I} & \underline{Q}'_p \left[\underline{C}_{N\chi}^{ep} \cdot \underline{\chi} + \underline{N} \cdot \underline{II} \right] + \underline{R}'_p \left[\underline{C}_M \underline{II} - \underline{C}_{M\chi}^{ep} \right] \\ \underline{Q}''_p \left[\underline{C}_{N\varepsilon}^{ep} \cdot \underline{\chi} - \underline{R}''_p \underline{C}_{M\varepsilon}^{ep} \right] & 0 & -\underline{II} + \underline{Q}''_p \left[\underline{C}_{N\chi}^{ep} \cdot \underline{\chi} + \underline{N} \cdot \underline{II} \right] + \underline{R}''_p \left[\underline{C}_M \underline{II} - \underline{C}_{M\chi}^{ep} \right] \end{bmatrix}\quad (7.34)$$

e as correções $\delta\underline{\Delta\varepsilon}$, $\delta\underline{\Delta\theta}$ e $\delta\underline{\Delta\chi}$ obtidas por meio de:

$$\begin{Bmatrix} \delta\underline{\Delta\varepsilon}^i \\ \delta\underline{\Delta\theta}^i \\ \delta\underline{\Delta\chi}^i \end{Bmatrix} = -\underline{C}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} \underline{f}_\varepsilon(\underline{\Delta\varepsilon}^i; \underline{\Delta\theta}^i) \\ \underline{f}_\theta(\underline{\Delta\theta}^i; \underline{\Delta\varepsilon}^i; \underline{\Delta\chi}^i) \\ \underline{f}_\chi(\underline{\Delta\chi}^i; \underline{\Delta\varepsilon}^i) \end{Bmatrix}$$

Na equação (7.34) I representa o tensor de identidade de segunda ordem e II o tensor identidade de quarta ordem. As matrizes $\underset{\sim}{C}_{N\varepsilon}^{ep}$, $\underset{\sim}{C}_{N\chi}^{ep}$, $\underset{\sim}{C}_{M\varepsilon}^{ep}$ e $\underset{\sim}{C}_{M\chi}^{ep}$ são definidas tendo por base o operador elastoplástico tangente consistente $\partial\sigma/\partial\varepsilon$ definido no capítulo 6 deste trabalho e sendo dadas por:

$$\underset{\sim}{C}_{N\varepsilon}^{ep} = \frac{\partial N}{\partial \Delta\varepsilon} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \frac{\partial\sigma}{\partial \Delta\varepsilon} dx_3$$

$$\underset{\sim}{C}_{N\chi}^{ep} = \frac{\partial N}{\partial \Delta\chi} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \frac{\partial\sigma}{\partial \Delta\varepsilon} \cdot \frac{\partial \Delta\varepsilon}{\partial \Delta\chi} dx_3 = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} -x_3 \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial \Delta\varepsilon} dx_3$$

$$\underset{\sim}{C}_{M\varepsilon}^{ep} = \frac{\partial M}{\partial \Delta\varepsilon} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \frac{\partial(x_3 \cdot \Delta\sigma)}{\partial \Delta\sigma} \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial \Delta\varepsilon} dx_3 = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} x_3 \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial \Delta\varepsilon} dx_3$$

$$\underset{\sim}{C}_{M\chi}^{ep} = \frac{\partial M}{\partial \Delta\chi} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \frac{\partial(x_3 \cdot \Delta\sigma)}{\partial \Delta\sigma} \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial \Delta\varepsilon} \cdot \frac{\partial \Delta\varepsilon}{\partial \Delta\chi} dx_3 = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} -x_3^2 \cdot \frac{\partial\sigma}{\partial \Delta\varepsilon} dx_3$$

Ou ainda, utilizando-se do procedimento de Gauss de integração numérica ao longo da espessura da placa pode-se escrever:

$$\underset{\sim}{C}_{N\varepsilon}^{ep} = \frac{t}{2} \sum_{ig=1}^{Ng} \left[\frac{\partial\sigma}{\partial \Delta\varepsilon} \right]_{ig} \cdot W_{ig} \quad (7.35)$$

$$\underset{\sim}{C}_{N\chi}^{ep} = -\frac{t^2}{4} \sum_{ig=1}^{Ng} \left[\frac{\partial\sigma}{\partial \Delta\varepsilon} \right]_{ig} \cdot \xi_{ig} \cdot W_{ig} \quad (7.36)$$

$$\underset{\sim}{C}_{M\varepsilon}^{ep} = \frac{t^2}{4} \sum_{ig=1}^{Ng} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \Delta \varepsilon} \right]_{ig} \cdot \xi_{ig} \cdot W_{ig} \quad (7.37)$$

$$\underset{\sim}{C}_{M\chi}^{ep} = -\frac{t^3}{8} \sum_{ig=1}^{Ng} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial \Delta \varepsilon} \right]_{ig} \cdot \xi_{ig}^2 \cdot W_{ig} \quad (7.38)$$

7.5.1.1 – Processo incremental-iterativo

As equações (7.24) e (7.31) formam um sistema de equações através do qual é possível a resolução do problema elastoplástico de flexão de placas considerando-se os efeitos da não-linearidade geométrica.

Por se tratar de um sistema não-linear de equações sua resolução é possível por meio de um procedimento incremental-iterativo, sendo este o objeto de discussão deste item do trabalho.

Inicialmente o carregamento aplicado na placa é dividido em um determinado número de passos de carga. Para o primeiro passo de carga, resolve-se inicialmente o problema de flexão de placas e o problema de membrana através das equações (7.24) sem considerar os efeitos da não-linearidade geométrica e do campo de esforços iniciais. De posse dos deslocamentos e esforços no contorno e novamente não levando em consideração os efeitos não-lineares, calculam-se, através das equações (7.31), as deformações referentes ao problema elástico plano, as rotações e as curvaturas nos nós das células.

Através do equacionamento apresentado no capítulo 2 deste trabalho são calculados os valores das tensões de tentativa e deformações totais em todos os nós das células. Neste ponto é interessante ressaltar que foi utilizado um modelo estratificado onde para cada nó das células admitiu-se uma distribuição de pontos de Gauss ao longo da espessura da placa. Assim, para cada ponto de Gauss são calculadas as tensões elásticas de tentativa e as deformações totais e posteriormente faz-se a verificação do modelo constitutivo adotado.

Através do modelo constitutivo adotado, conforme visto no capítulo 6 deste trabalho, obtêm-se os valores das tensões verdadeiras admissíveis para todos os pontos em análise. Assim, de posse das tensões verdadeiras nos pontos de Gauss

na espessura da placa, calculam-se os valores dos momentos verdadeiros e das forças normais verdadeiros atuantes em um determinado nó de célula através de um procedimento de integração numérica das tensões ao longo da espessura da placa. Assim, pode-se escrever:

$$\Delta \tilde{M} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \Delta \tilde{\sigma} x_3 dx_3 = \frac{t^2}{4} \sum_{ig=1}^{Ng} \Delta \tilde{\sigma}_{ig} \cdot \tilde{\xi}_{ig} \cdot W_{ig} \quad (7.39)$$

$$\Delta \tilde{N} = \int_{-\frac{t}{2}}^{+\frac{t}{2}} \Delta \tilde{\sigma} dx_3 = \frac{t}{2} \sum_{ig=1}^{Ng} \Delta \tilde{\sigma}_{ig} \cdot W_{ig} \quad (7.40)$$

As matrizes $\tilde{C}_{N\varepsilon}^{ep}$, $\tilde{C}_{N\chi}^{ep}$, $\tilde{C}_{M\varepsilon}^{ep}$ e $\tilde{C}_{M\chi}^{ep}$ calculadas através das equações (7.35) a (7.38) e necessárias para a montagem do operador tangente consistente são também definidas tendo por base o modelo constitutivo adotado. Vale lembrar que, em se tratando de iterações e/ou passos de carga elásticos, os valores do momento verdadeiro e do esforço normal verdadeiro coincidem com os valores elásticos de tentativa e, assim, não há interferência da plasticidade nas equações finais de equilíbrio. Também neste caso é interessante salientar que $\tilde{C}_{N\varepsilon}^{ep} = \tilde{C}_{N\varepsilon}$, $\tilde{C}_{M\varepsilon}^{ep} = \tilde{C}_{M\varepsilon}$ e $\tilde{C}_{N\chi}^{ep} = \tilde{C}_{M\chi}^{ep} = 0$.

De posse dos valores de contorno e também das variáveis de domínio, os valores das “funções” \tilde{f}_ε , \tilde{f}_θ e \tilde{f}_χ podem ser calculadas através das equações (7.32), e, assim, dar início ao processo iterativo até que se alcance a solução desejada para o passo de carga em questão.

A cada nova iteração $i+1$, o operador tangente consistente (7.34) deve ser atualizado com os valores de $\Delta \tilde{\varepsilon}^i$, $\Delta \tilde{\theta}^i$ e $\Delta \tilde{\chi}^i$ e com as matrizes $\tilde{C}_{N\varepsilon}^{ep}$, $\tilde{C}_{N\chi}^{ep}$, $\tilde{C}_{M\varepsilon}^{ep}$ e $\tilde{C}_{M\chi}^{ep}$ referentes à iteração anterior i e os valores de $\delta \Delta \tilde{\varepsilon}^{i+1}$, $\delta \Delta \tilde{\theta}^{i+1}$ e $\delta \Delta \tilde{\chi}^{i+1}$, determinados. A cada nova iteração os valores de domínio devem ser atualizados com o auxílio das equações (7.33) e o novo estado de tensão e deformação nos nós

das células calculados e verificados pelo modelo constitutivo adotado. O processo iterativo deve ser repetido até que a solução encontrada satisfaça ao mesmo tempo as equações de equilíbrio estático e o modelo constitutivo empregado dentro de um critério de convergência pré-determinado.

O processo descrito acima deve ser repetido até que todo o carregamento seja aplicado na estrutura. É importante ressaltar que, a partir do segundo incremento de carga, os valores finais de deformação referente ao problema de membrana, de rotação e de curvatura do incremento de carga anterior devem ser utilizados nas primeiras “avaliações” do passo de carga atual e na avaliação inicial do critério de convergência.

Todo o procedimento descrito neste item pode ser mais bem visualizado através do fluxograma apresentado na figura 7.11.

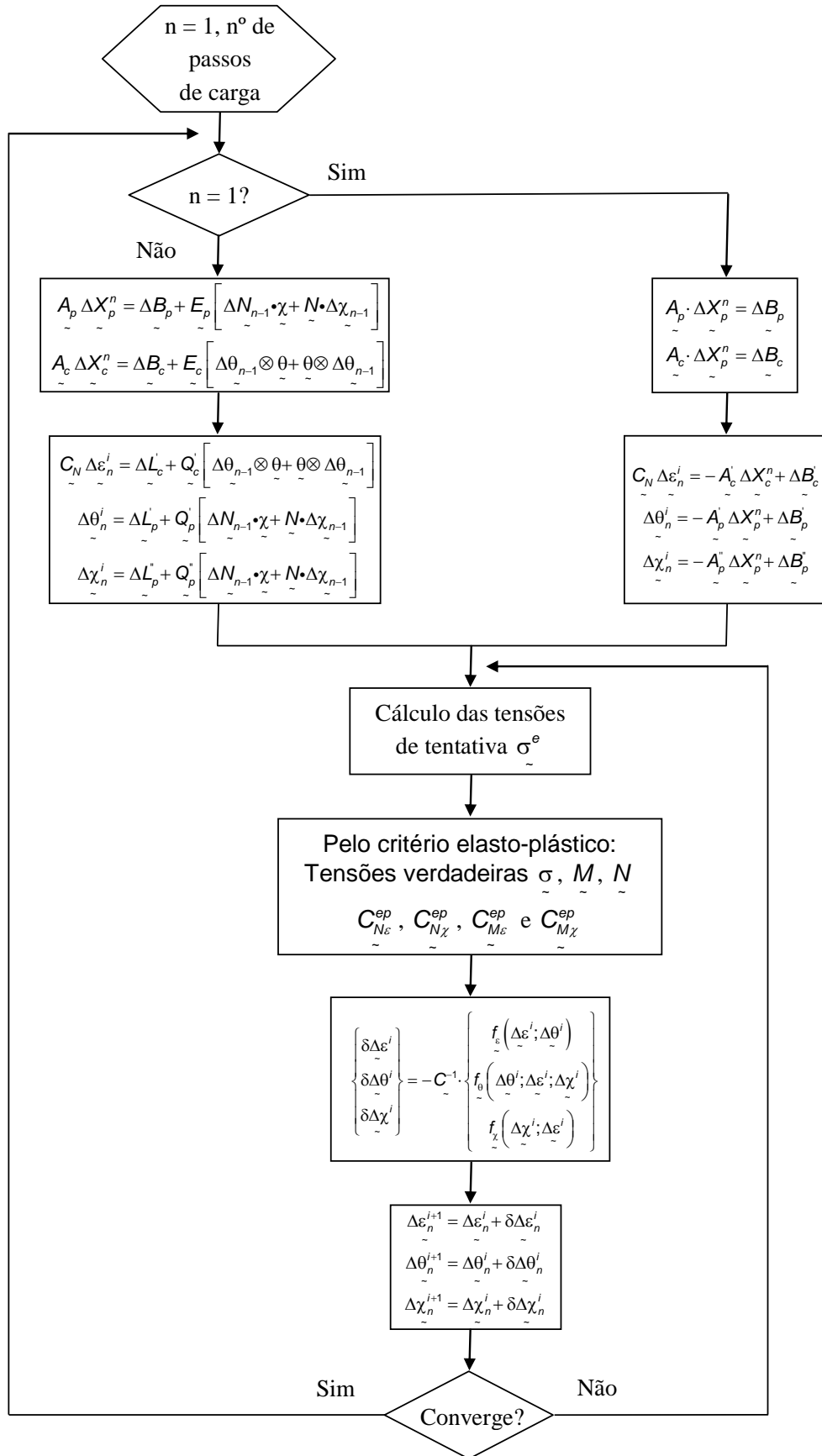


Figura 7.11 – Fluxograma do processo incremental-iterativo para o problema elastoplástico de placas considerando-se a não-linearidade geométrica.

7.5.1.2 – Critério de convergência

A convergência do resultado obtido é verificada aplicando-se o critério em todos os nós das células, sendo que para cada nó são verificadas as convergências nos valores das rotações, curvaturas e forças normais obtidas.

Em uma dada iteração i , define-se o critério como sendo a relação entre a diferença dos valores obtidos na iteração $i-1$ e i e os valores obtidos na iteração $i-1$, ou seja:

$$\frac{\sum (X_i^N - X_{i-1}^N)^2}{\sum (X_{i-1}^N)^2} \leq tol \quad (7.41)$$

onde X é o valor de rotação, curvatura ou normal no nó da célula e tol representa a tolerância admitida no critério.

A convergência dos resultados também é verificada em termos das tensões nos pontos plastificados. Neste caso a verificação é feita através da relação entre as tensões de tentativa, a tensão de escoamento e a tensão real na iteração em questão como segue:

$$\frac{\bar{f}_{i+1}^{pr} - \bar{\sigma}_y^i}{\bar{f}_{i+1}} \leq tol \quad (7.42)$$

onde:

$$\bar{f}_{i+1}^{pr} = \sqrt{\sigma_{i+1}^{(pr)T} \cdot P \cdot \sigma_{i+1}^{(pr)}}$$

$$\bar{\sigma}_y^i = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (\sigma_y + k \cdot \alpha^i)$$

$$\bar{f}_{i+1} = \sqrt{\sigma_{i+1}^T \cdot P \cdot \sigma_{i+1}}$$

7.5.2 – Placas enrijecidas submetidas à flexão composta

A solução do problema de placas enrijecidas é obtida através da resolução do sistema de equações deduzido no item 7.4.2 deste trabalho e reescrita a seguir:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_p \tilde{U}_p &= \tilde{G}_p \tilde{P}_p + \tilde{T}_p + \tilde{J}_p \tilde{\chi} + \tilde{K}_p \tilde{N}^e \\ \tilde{H}_c \tilde{U}_c &= \tilde{G}_c \tilde{P}_c + \tilde{T}_c + \tilde{J}_c \tilde{\chi} + \tilde{K}_c \tilde{N}^e \end{aligned} \quad (7.43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}^e &= -\tilde{S}_c \tilde{U}_c + \tilde{D}_c \tilde{P}_c + \tilde{T}_c' + \tilde{J}_c' \tilde{\chi} + \tilde{K}_c' \tilde{N}^e \\ \tilde{\chi} &= -\tilde{H}_p'' \tilde{U}_p + \tilde{G}_p'' \tilde{P}_p + \tilde{T}_p'' + \tilde{J}_p'' \tilde{\chi} + \tilde{K}_p'' \tilde{N}^e \end{aligned} \quad (7.44)$$

Por se tratar de um problema linear, sem a consideração dos efeitos não-lineares físicos e geométricos, a resolução do sistema é feita de maneira direta sem a necessidade de se fazer uso de procedimentos incrementais / iterativos. Sendo assim, nas equações (7.43) e (7.44), isolando-se as incógnitas do problema nos vetores \tilde{X} pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \tilde{A}_p \tilde{X}_p &= \tilde{B}_p + \tilde{J}_p \tilde{\chi} + \tilde{K}_p \tilde{N}^e \\ \tilde{A}_c \tilde{X}_c &= \tilde{B}_c + \tilde{J}_c \tilde{\chi} + \tilde{K}_c \tilde{N}^e \end{aligned} \quad (7.45)$$

$$\begin{aligned} \tilde{N}^e &= \tilde{A}_c' \tilde{X}_c + \tilde{B}_c' + \tilde{J}_c' \tilde{\chi} + \tilde{K}_c' \tilde{N}^e \\ \tilde{\chi} &= \tilde{A}_p'' \tilde{X}_p + \tilde{B}_p'' + \tilde{J}_p'' \tilde{\chi} + \tilde{K}_p'' \tilde{N}^e \end{aligned} \quad (7.46)$$

Organizando-se as equações (7.45) e (7.46) em um sistema matricial obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \tilde{A}_p & 0 & -\tilde{K}_p & -\tilde{J}_p \\ 0 & \tilde{A}_c & -\tilde{K}_c & -\tilde{J}_c \\ 0 & -\tilde{A}_c' & (\tilde{I} - \tilde{K}_c') & \tilde{J}_c' \\ -\tilde{A}_p'' & 0 & \tilde{K}_p'' & (\tilde{I} - \tilde{J}_p'') \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{X}_p \\ \tilde{X}_c \\ \tilde{N}^e \\ \tilde{\chi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{B}_p \\ \tilde{B}_c \\ \tilde{B}_c' \\ \tilde{B}_p'' \end{Bmatrix} \quad (7.47)$$

A resolução do sistema linear de equações (7.47) fornecerá os requeridos deslocamentos e esforços no contorno da placa e do problema elástico plano além de fornecer os valores de esforço normal N_{ss}^e e curvaturas $w_{,ss}$ e $w_{,nn}$ nos nós do enrijecedor. De posse desses valores o problema elástico de placas enrijecidas submetidas à flexão composta fica determinado.

7.5.3– Análise elastoplástica de placas enrijecidas submetidas à flexão composta

A solução do problema elastoplástico de placas enrijecidas submetidas à flexão composta segue um procedimento incremental-iterativo semelhante ao apresentado no item 7.5.1 deste trabalho para o problema elastoplástico de placas considerando-se a não-linearidade geométrica. Também neste caso o procedimento é obtido a partir da formulação implícita, com as correções que devem ser aplicadas no sistema obtidas com o uso do operador tangente consistente.

A exemplo do efetuado no item 7.5.1, as equações algébricas apresentadas em 7.4.3 são inicialmente manipuladas de forma a isolar as variáveis do problema em um único vetor. Sendo assim, considerando o vetor \underline{X} composto pelos deslocamentos e esforços desconhecidos no contorno e a matriz \underline{F}_c já subtraída da matriz identidade I , as equações (7.20) e (7.21) podem ser reescritas como segue:

$$\begin{aligned} \underline{A}_p \underline{X}_p &= \underline{B}_p + \underline{J}_p \underline{\chi}^r + \underline{K}_p \underline{N}^r + \underline{F}_p \underline{M}^0 \\ \underline{A}_c \underline{X}_c &= \underline{B}_c + \underline{J}_c \underline{\chi}^r + \underline{K}_c \underline{N}^r + \underline{F}_c \underline{N}^0 \end{aligned} \quad (7.48)$$

$$\begin{aligned} \underline{N}^e &= -\underline{A}_c' \underline{X}_c + \underline{B}_c' + \underline{J}_c' \underline{\chi}^r + \underline{K}_c' \underline{N}^r + \underline{F}_c' \underline{N}^0 \\ \underline{\chi} &= -\underline{A}_p'' \underline{X}_p + \underline{B}_p'' + \underline{J}_p'' \underline{\chi}^r + \underline{K}_p'' \underline{N}^r + \underline{F}_p'' \underline{M}^0 \end{aligned} \quad (7.49)$$

De (7.48) pode-se ainda escrever:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{X}}_p &= \underline{\tilde{L}}_p + \underline{\tilde{J}}_p \underline{\tilde{\chi}}^r + \underline{\tilde{K}}_p \underline{\tilde{N}}^r + \underline{\tilde{R}}_p \underline{\tilde{M}}^0 \\ \underline{\tilde{X}}_c &= \underline{\tilde{L}}_c + \underline{\tilde{J}}_c \underline{\tilde{\chi}}^r + \underline{\tilde{K}}_c \underline{\tilde{N}}^r + \underline{\tilde{R}}_c \underline{\tilde{N}}^0 \end{aligned} \quad (7.50)$$

com $\underline{\tilde{L}} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B}$, $\underline{\tilde{J}} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{J}$, $\underline{\tilde{K}} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{K}$ e $\underline{\tilde{R}} = \underline{A}^{-1} \cdot \underline{F}$.

Substituindo-se (7.50) em (7.49) obtém-se:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{N}}^e &= \underline{\tilde{L}}'_c + \underline{\tilde{J}}'_c \underline{\tilde{\chi}}^r + \underline{\tilde{K}}'_c \underline{\tilde{N}}^r + \underline{\tilde{R}}'_c \underline{\tilde{N}}^0 \\ \underline{\tilde{\chi}} &= \underline{\tilde{L}}''_p + \underline{\tilde{J}}''_p \underline{\tilde{\chi}}^r + \underline{\tilde{K}}''_p \underline{\tilde{N}}^r + \underline{\tilde{R}}''_p \underline{\tilde{M}}^0 \end{aligned} \quad (7.51)$$

com $\underline{\tilde{L}}' = -\underline{A}' \cdot \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B} + \underline{B}'$, $\underline{\tilde{L}}'' = -\underline{A}'' \cdot \underline{A}^{-1} \cdot \underline{B} + \underline{B}''$, $\underline{\tilde{K}}' = \underline{A}' \cdot \underline{K}$, $\underline{\tilde{K}}'' = \underline{A}'' \cdot \underline{K}$, $\underline{\tilde{J}}' = \underline{A}' \cdot \underline{J}$, $\underline{\tilde{J}}'' = \underline{A}'' \cdot \underline{J}$, $\underline{\tilde{R}}' = -\underline{A}' \cdot \underline{A}^{-1} \cdot \underline{F} + \underline{F}'$ e $\underline{\tilde{R}}'' = -\underline{A}'' \cdot \underline{A}^{-1} \cdot \underline{F} + \underline{F}''$.

Lembrando-se que os esforços totais podem ser expressos em função de suas parcelas elástica e inicial e que os momentos e as forças normais elásticas podem ser expressos em função das curvaturas e deformações (lei de Hooke), a expressão (7.51) pode ser reescrita como segue:

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{C}}_N \underline{\tilde{\varepsilon}} &= \underline{\tilde{L}}'_c + \underline{\tilde{J}}'_c \underline{\tilde{\chi}}^r + \underline{\tilde{K}}'_c \left[\underline{\tilde{C}}'_N \underline{\tilde{\varepsilon}}^r \right] + \underline{\tilde{R}}'_c \left[\underline{\tilde{C}}'_N \underline{\tilde{\varepsilon}} - \underline{\tilde{N}} \right] \\ \underline{\tilde{\chi}} &= \underline{\tilde{L}}''_p + \underline{\tilde{J}}''_p \underline{\tilde{\chi}}^r + \underline{\tilde{K}}''_p \left[\underline{\tilde{C}}''_N \underline{\tilde{\varepsilon}}^r \right] + \underline{\tilde{R}}''_p \left[\underline{\tilde{C}}''_M \underline{\tilde{\chi}} - \underline{\tilde{M}} \right] \end{aligned} \quad (7.52)$$

com $\underline{\tilde{\varepsilon}}^r$ contendo as componentes de deformação $\underline{\tilde{\varepsilon}}^r_{ss}$ e $\underline{\tilde{\varepsilon}}^r_{nn}$ dos enrijecedores e $\underline{\tilde{C}}'_N$ contendo as componentes apresentadas nas relações (2.6) para os pontos pertencentes aos enrijecedores.

Por fim, considerando-se as equações (7.52) escritas na forma incremental, têm-se as equações finais de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \underline{f}_\varepsilon(\underline{\Delta\varepsilon}; \underline{\Delta\chi}) &= -\underline{C}_N \underline{\Delta\varepsilon} + \underline{\Delta L}'_c + \underline{J}'_c \underline{\Delta\chi}^r + \underline{K}'_c \left[\underline{C}'_N \underline{\Delta\varepsilon}^r \right] + \underline{R}'_c \left[\underline{C}_N \underline{\Delta\varepsilon} - \underline{\Delta N} \right] = \underline{0} \\ \underline{f}_\chi(\underline{\Delta\chi}; \underline{\Delta\varepsilon}) &= -\underline{\Delta\chi} + \underline{\Delta L}''_p + \underline{J}''_p \underline{\Delta\chi}^r + \underline{K}''_p \left[\underline{C}'_N \underline{\Delta\varepsilon}^r \right] + \underline{R}''_p \left[\underline{C}_M \underline{\Delta\chi} - \underline{\Delta M} \right] = \underline{0} \end{aligned} \quad (7.53)$$

A solução do sistema de equações (7.53) é obtida através do uso do método de Newton-Raphson através de um processo incremental-iterativo. Para um determinado passo de carga são obtidas, a cada iteração, correções que devem ser somadas aos estados de deformação referente ao problema elástico plano e de curvatura referente ao problema de flexão de placas. Ao final do processo iterativo deseja-se encontrar valores de incrementos $\underline{\Delta\varepsilon}$ e $\underline{\Delta\chi}$ para o passo de carga em questão que satisfaçam o sistema de equações (7.53) e também o modelo constitutivo adotado dentro de uma tolerância pré-determinada. Vale lembrar que nos vetores $\underline{\Delta\varepsilon}$ e $\underline{\Delta\chi}$ estão inclusos as parcelas referentes à deformação e à curvatura nos nós dos enrijecedores que são necessárias também para induzir a correção de rigidez ao sistema.

Dessa forma, para uma iteração $i+1$, os valores de $\underline{\Delta\varepsilon}$ e $\underline{\Delta\chi}$ da iteração anterior i são corrigidos através de acréscimos $\delta\underline{\Delta\varepsilon}$ e $\delta\underline{\Delta\chi}$ de forma que:

$$\begin{aligned} \underline{\Delta\varepsilon}^{i+1} &= \underline{\Delta\varepsilon}^i + \delta\underline{\Delta\varepsilon}^i \\ \underline{\Delta\chi}^{i+1} &= \underline{\Delta\chi}^i + \delta\underline{\Delta\chi}^i \end{aligned} \quad (7.54)$$

Considerando-se a forma linearizada da equação (7.53) e apenas o primeiro termo da expansão em série de Taylor, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \underline{f}_\varepsilon(\underline{\Delta\varepsilon}^i; \underline{\Delta\chi}^i) \\ \underline{f}_\chi(\underline{\Delta\chi}^i; \underline{\Delta\varepsilon}^i) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{f}_\varepsilon}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}^i} & \frac{\partial \underline{f}_\varepsilon}{\partial \underline{\Delta\chi}^i} \\ \frac{\partial \underline{f}_\chi}{\partial \underline{\Delta\varepsilon}^i} & \frac{\partial \underline{f}_\chi}{\partial \underline{\Delta\chi}^i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\underline{\Delta\varepsilon}^i \\ \delta\underline{\Delta\chi}^i \end{Bmatrix} + \dots = \underline{0}$$

sendo o operador tangente consistente obtido por meio das derivadas das funções f_{ε} e f_{χ} em relação as variáveis $\Delta\varepsilon$ e $\Delta\chi$ e expresso por:

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} -\tilde{\mathbf{C}}_N \tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{K}}_c' \tilde{\mathbf{C}}_N^r \tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{R}}_c' \left[\tilde{\mathbf{C}}_N \tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{C}}_{N\varepsilon}^{ep} \right] & \tilde{\mathbf{J}}_c' \tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{R}}_c' \tilde{\mathbf{C}}_{N\chi}^{ep} \\ \tilde{\mathbf{K}}_p'' \tilde{\mathbf{C}}_N^r \tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{R}}_p'' \tilde{\mathbf{C}}_{M\varepsilon}^{ep} & -\tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{J}}_p'' \tilde{\mathbf{I}} + \tilde{\mathbf{R}}_p'' \left[\tilde{\mathbf{C}}_M \tilde{\mathbf{I}} - \tilde{\mathbf{C}}_{M\chi}^{ep} \right] \end{bmatrix} \quad (7.55)$$

e as correções $\delta\Delta\varepsilon$ e $\delta\Delta\chi$ obtidas por meio de:

$$\begin{Bmatrix} \delta\Delta\varepsilon^i \\ \delta\Delta\chi^i \end{Bmatrix} = -\tilde{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} f_{\varepsilon}(\Delta\varepsilon^i; \Delta\chi^i) \\ f_{\chi}(\Delta\chi^i; \Delta\varepsilon^i) \end{Bmatrix}$$

Na equação (7.34) $\tilde{\mathbf{I}}$ representa o tensor de identidade de segunda ordem e $\tilde{\mathbf{I}}\tilde{\mathbf{I}}$ o tensor identidade de quarta ordem. As matrizes $\tilde{\mathbf{C}}_{N\varepsilon}^{ep}$, $\tilde{\mathbf{C}}_{N\chi}^{ep}$, $\tilde{\mathbf{C}}_{M\varepsilon}^{ep}$ e $\tilde{\mathbf{C}}_{M\chi}^{ep}$ são definidas tendo por base o operador elastoplástico tangente consistente $\partial\sigma/\partial\varepsilon$ através do processo de integração definido no item 7.5.1 deste trabalho.

7.5.3.1 – Processo incremental-iterativo

A solução do sistema não-linear formado pelas equações (7.48) e (7.52) é obtida através de um procedimento incremental-iterativo. Inicialmente o carregamento aplicado no painel enrijecido é dividido em um número finito de passos de carga. Para o primeiro passo resolve-se inicialmente o problema de flexão de placas e o problema de membrana através das equações (7.48) e (7.52) sem considerar os efeitos do campo de esforços iniciais. As parcelas iniciais das variáveis do problema ΔX_p , ΔX_c , $\Delta\chi^r$ e $\Delta\varepsilon^r$ são então obtidas através da resolução do

sistema de equações de maneira semelhante a apresentada no item 7.5.2 deste trabalho.

De posse dos deslocamentos e esforços no contorno e das curvaturas e deformações nos nós dos enrijecedores calculam-se, através das equações (7.52), as deformações referentes ao problema elástico plano e as curvaturas nos nós das células sem considerar novamente as parcelas referentes aos campos de esforços iniciais.

Adotando-se para cada nó de célula e de enrijecedor um modelo estratificado com pontos de Gauss espalhados ao longo das espessuras da placa e do enrijecedor, respectivamente, e com o auxílio do equacionamento apresentado no capítulo 2 deste trabalho, são calculados os valores das tensões de tentativa e deformações totais em todos os pontos definidos. As tensões de tentativa são verificadas através do modelo constitutivo adotado de forma a se obter o real estado de tensão em todos os pontos em análise.

De posse das tensões verdadeiras nos pontos de Gauss são calculados os valores dos momentos das forças normais verdadeiros e as matrizes $\tilde{C}_{N\varepsilon}^{ep}$, $\tilde{C}_{N\chi}^{ep}$, $\tilde{C}_{M\varepsilon}^{ep}$ e $\tilde{C}_{M\chi}^{ep}$ através do procedimento de integração numérica descrito no item 7.5.1 deste trabalho.

Com todos os valores de contorno e também das variáveis de domínio determinados pode-se, através das equações (7.53), obter os valores das “funções” \tilde{f}_χ e \tilde{f}_ε e dar início ao processo iterativo até que se alcance a solução desejada para o passo de carga em questão. A solução encontrada deve satisfazer ao mesmo tempo as equações de equilíbrio estático e o modelo constitutivo empregado dentro de um critério de convergência pré-determinado.

O processo descrito acima deve ser repetido até que todo o carregamento seja aplicado na estrutura. Tal procedimento pode ser mais bem visualizado através do fluxograma apresentado na figura 7.12.

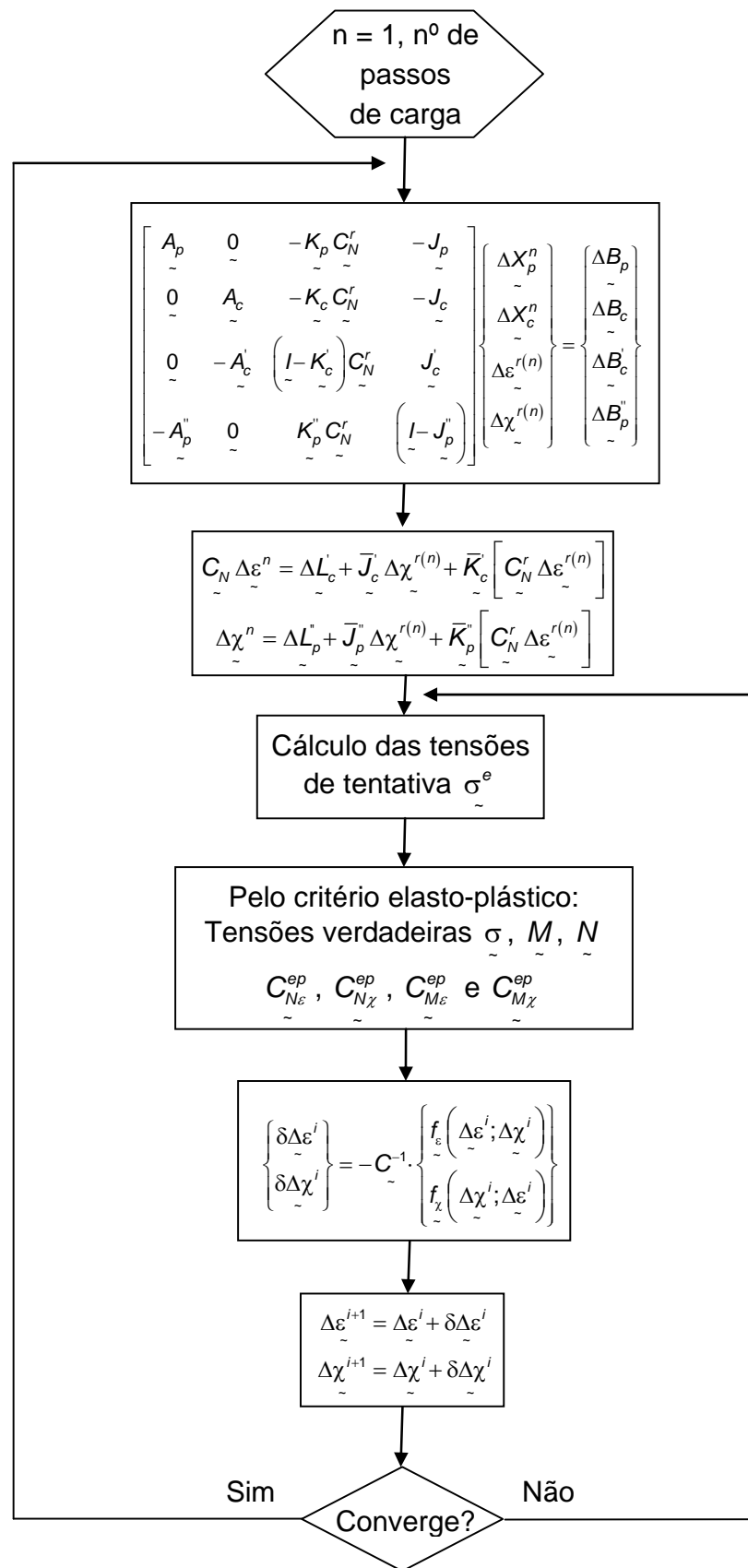


Figura 7.12 – Fluxograma do processo incremental-iterativo para o problema elastoplástico de placas enrijecidas.

7.5.3.2 – Critério de convergência

O critério de convergência adotado é o mesmo do item 7.5.1.2 deste trabalho, ou seja, feito através da relação entre as tensões de tentativa, a tensão de escoamento e a tensão real na iteração em questão como segue:

$$\frac{\bar{f}_{i+1}^{pr} - \bar{\sigma}_y^i}{\bar{f}_{i+1}} \leq tol \quad (7.56)$$

onde:

$$\bar{f}_{i+1}^{pr} = \sqrt{\sigma_{i+1}^{(pr)T} \cdot P \cdot \sigma_{i+1}^{(pr)}}$$

$$\bar{\sigma}_y^i = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot (\sigma_y + k \cdot \alpha^i)$$

$$\bar{f}_{i+1} = \sqrt{\sigma_{i+1}^T \cdot P \cdot \sigma_{i+1}}$$

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

8.1 – Generalidades

Neste capítulo são apresentados alguns resultados numéricos obtidos através do programa implementado até o presente momento.

Visando comprovar a correta implementação da formulação desenvolvida, nos exemplos que seguem os resultados obtidos foram comparados com resultados numéricos fornecidos por outros pesquisadores e também com resultados obtidos em simulações feitas em programas comerciais existentes.

Por fim procurou-se efetuar uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados obtidos em cada exemplo estudado.

8.2 – Placa quadrada uniformemente carregada considerando-se a não-linearidade geométrica

A placa analisada neste exemplo possui lados com dimensões genéricas iguais a a , espessura t , módulo de elasticidade longitudinal E e coeficiente de poisson ν igual a 0,3. Ressalta-se que a relação t/a utilizada foi igual a 0,01.

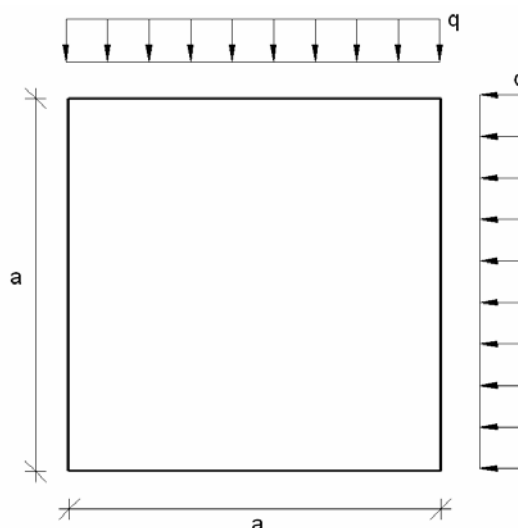


Figura 8.1 – Placa com dimensões e carregamento genéricos.

Várias condições de contorno foram simuladas. Inicialmente as placas foram “divididas” em duas categorias: placas com todas as bordas apoiadas ($w = M_n = 0$) e placas com todas as bordas engastadas ($w = \partial w / \partial n = 0$). Para cada um desses casos foram definidos dois subgrupos de acordo com a vinculação das bordas com relação ao plano $x_1 x_2$. No primeiro subgrupo considera-se que os deslocamentos u_1 e u_2 são permitidos. Já no segundo os deslocamentos u_1 e u_2 são impedidos, ou seja, $u_1 = u_2 = 0$.

O carregamento, ilustrado na figura 8.1, é aplicado de maneira uniforme em toda a placa. As simulações foram realizadas utilizando uma malha composta por 160 elementos de contorno, sendo 40 elementos de iguais comprimentos distribuídos por lado da placa. Para a avaliação dos efeitos não-lineares geométricos o domínio foi dividido em 8 células triangulares dispostas conforme ilustra a figura 8.2.

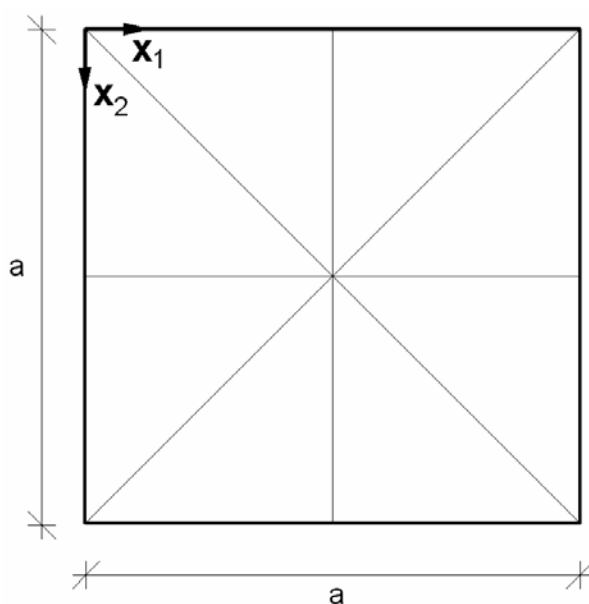


Figura 8.2 – Divisão do domínio em células.

Os resultados obtidos de carga x deslocamento máximo são apresentados nas figuras 8.3 e 8.4 juntamente com os resultados fornecidos por Ye & Liu (1985).

Ressalta-se que, na apresentação dos resultados, foram utilizadas as “siglas” BI para o caso onde os bordos estão restritos no plano $x_1 x_2$ e BM quando não existem restrições aos deslocamentos no plano indicado.

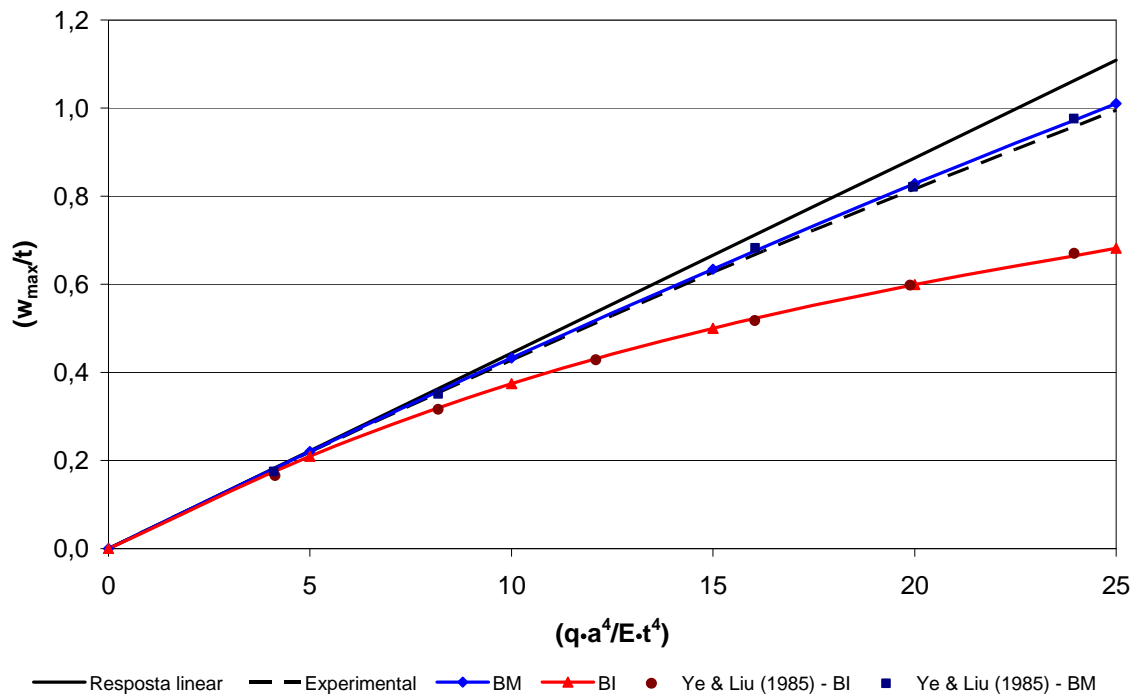


Figura 8.3 – Placa totalmente apoiada: carga x deslocamento máximo.

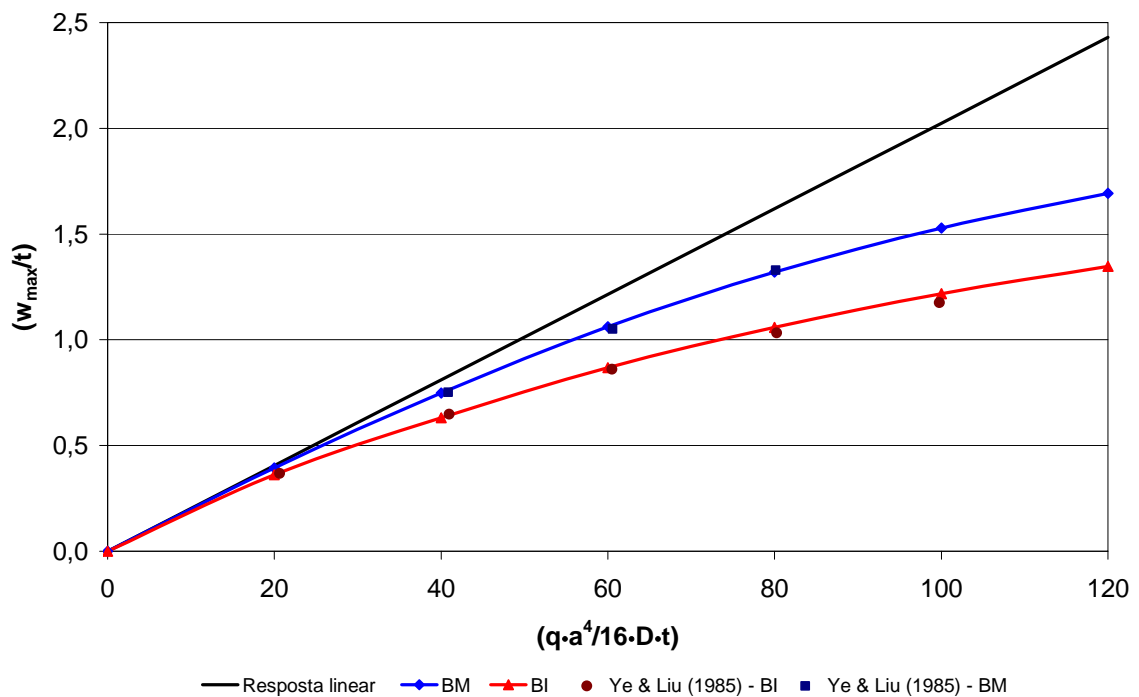


Figura 8.4 – Placa totalmente engastada: carga x deslocamento máximo.

Os resultados obtidos, quando comparados com os fornecidos por Ye & Liu (1985), demonstram a eficiência da formulação proposta e sua correta implementação computacional.

Ainda que a malha utilizada para as análises, sobretudo no que diz respeito às integrais de domínio, seja relativamente pobre, bons resultados foram obtidos de maneira rápida, indicando a agilidade do processo iterativo quando se faz uso do operador tangente consistente. Vale lembrar que outras simulações foram efetuadas com malhas mais discretizadas, porém com diferenças insignificantes no resultado final obtido.

8.3 – Placa circular uniformemente carregada considerando-se a não-linearidade geométrica

Este segundo exemplo é composto por uma placa circular, com diâmetro igual a $2a$, espessura igual a t e a razão t/a igual a $0,02$. O módulo de elasticidade longitudinal do material é dado por E enquanto que o coeficiente de Poisson é igual a $0,3$.

Foram utilizados nas simulações 40 elementos de contorno lineares de forma a reconstruir o contorno curvilíneo original da placa. Para a discretização do domínio foram utilizadas 100 células triangulares dispostas de maneira simétrica ao centro da placa. As características geométricas e a discretização adotada estão ilustradas na figura 8.5.

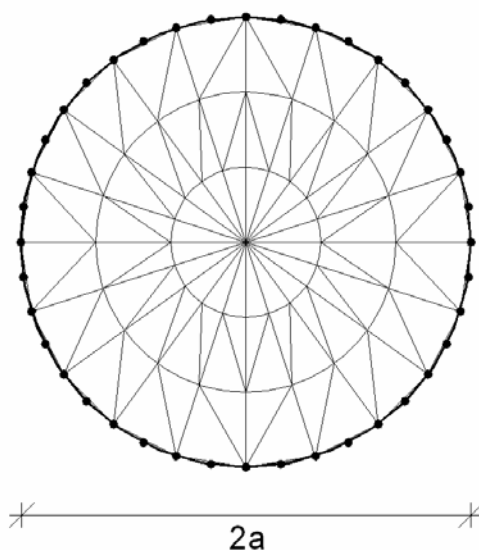


Figura 8.5 – Placa circular.

Como condições de contorno foram assumidas bordas engastadas ($w = \partial w / \partial n = 0$) e restritas no plano $x_1 x_2$, ou seja, $u_1 = u_2 = 0$. Admitiu-se também um carregamento q , perpendicular ao plano médio da placa, e atuando uniformemente sobre todo o domínio da placa.

Este é um exemplo clássico na literatura. Wen et al (2005), Tanaka et al (1996), dentre outros, propuseram a análise do mesmo exemplo em seus trabalhos. Os resultados de deslocamento para o ponto central da placa x carregamento aplicado juntamente com os fornecidos por Wen et al (2005) (numéricos e analíticos) estão ilustrados na figura 8.6.

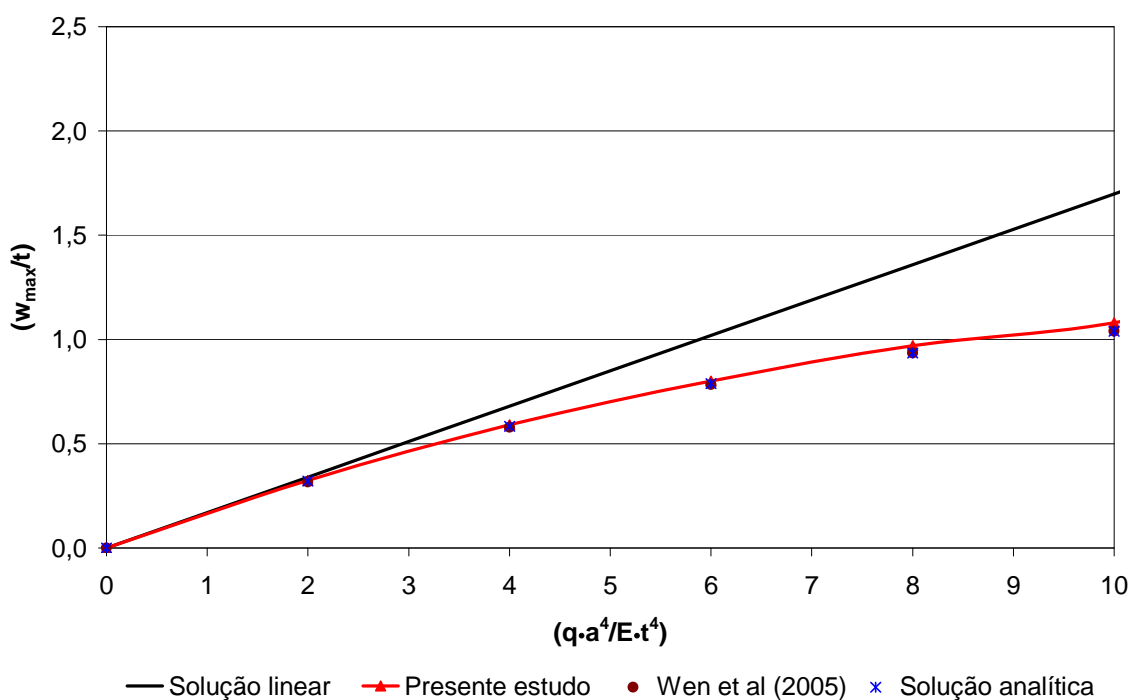


Figura 8.6 – Placa circular: carga x deslocamento máximo.

Os resultados obtidos neste exemplo confirmam a análise efetuada no exemplo anterior. Também neste caso, em se comparando os resultados obtidos com os fornecidos por Wen et al (2005), verifica-se que a formulação apresentou bons resultados, com erros máximos da ordem de 4 % quando comparados com os valores analíticos.

8.4 – Placa quadrada uniformemente carregada considerando-se as não-linearidades física e geométrica

Este exemplo, proposto em Supriyono & Aliabadi (2006), consiste em analisar uma placa quadrada, de lados com dimensões iguais a a e espessura t , com relação t/a igual a 0,01. A placa é submetida a um carregamento q uniformemente distribuído em toda a sua área.

Como condições de contorno foram admitidas bordas apoiadas ($w = M_n = 0$) com restrição aos deslocamentos no plano x_1, x_2 , ou seja, $u_1 = u_2 = 0$.

Para as análises efetuadas foi utilizada uma malha composta por 256 elementos dispostos uniformemente ao longo das bordas da placa, sendo 64 elementos por lado. Para as aproximações de domínio foi considerada uma malha composta por 32 células triangulares dispostas de maneira simétrica conforme ilustra a figura 8.7.

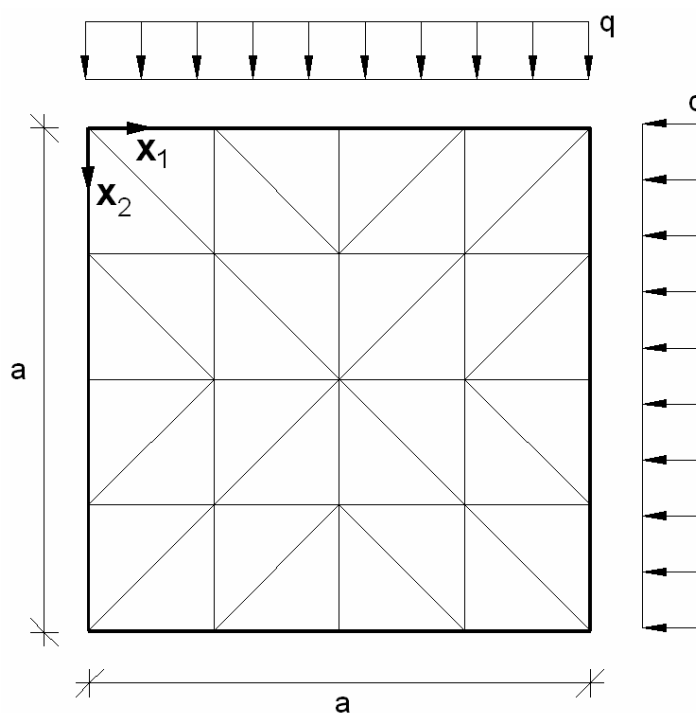


Figura 8.7 – Placa quadrada: dimensões, carregamento e malha de domínio.

O comportamento do material foi admitido como elastoplástico perfeito, com módulo de elasticidade longitudinal $E = 100 \text{ MPa}$, coeficiente de poisson $\nu = 0,316$ e tensão inicial de escoamento $\sigma_y = 1,25 \times 10^{-2} \text{ MPa}$.

Foram feitas diversas análises considerando a versatilidade da formulação proposta. Para efeito de comparação, foram efetuadas análises do tipo linear, considerando-se apenas a não-linearidade geométrica, considerando-se apenas o comportamento elastoplástico e uma última análise considerando-se tanto a elastoplasticidade quanto a não-linearidade geométrica. Os resultados obtidos para deslocamento no centro da placa em função do carregamento aplicado são ilustrados na figura 8.8.

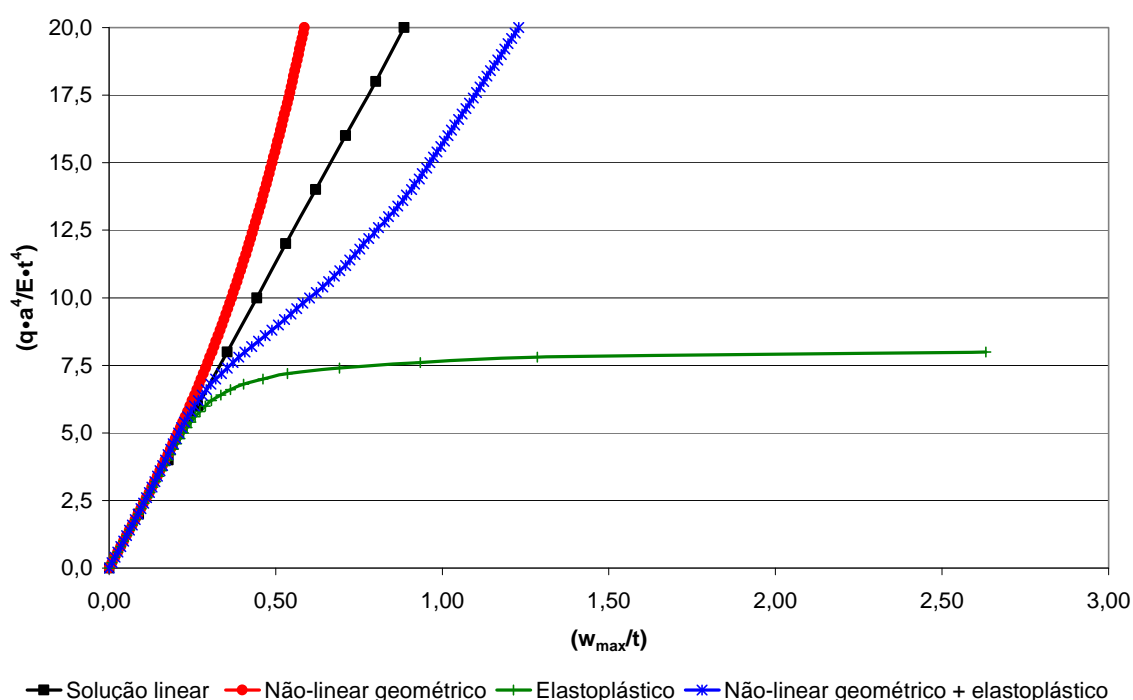


Figura 8.8 – Deslocamento do ponto central em função do carregamento aplicado para as várias análises efetuadas.

Os resultados obtidos para a análise não-linear geométrica seguem o comportamento já verificado nos exemplos anteriores, apresentando deslocamentos inferiores aos apresentados na análise linear simples uma vez que os esforços de membrana são considerados no equilíbrio da placa.

Com relação à análise elastoplástica efetuada, os resultados de deslocamento apresentaram-se superiores aos verificados na análise linear conforme era esperado. Devido à consideração do modelo elastoplástico perfeito, os deslocamentos obtidos, a partir de determinada intensidade de carregamento, passam a aumentar com proporção muito superior ao aumento do carregamento,

sendo que, a partir da relação qa^4/Et^4 superior a 8, não houve mais convergência de solução.

Já na análise efetuada quando se considera o comportamento elastoplástico do material em conjunto com os efeitos não-lineares geométricos, o comportamento estrutural da placa, como pode ser visto pela figura 8.8, apresenta-se intermediário aos obtidos quando se considera os efeitos não-lineares de forma isolada. Por fim nota-se que os resultados são superiores aos fornecidos pela análise linear simples.

De forma a validar o correto desenvolvimento da formulação proposta e correta implementação computacional os resultados obtidos foram comparados com os fornecidos por Supriyono & Aliabadi (2006) e também com uma análise efetuada com 144 elementos finitos do tipo *Shell 93* (8 nós com 6 graus de liberdade por nó) através do programa *ANSYS*. Os resultados obtidos para as diversas análises efetuadas foram organizados nas figuras 8.9, 8.10 e 8.11.

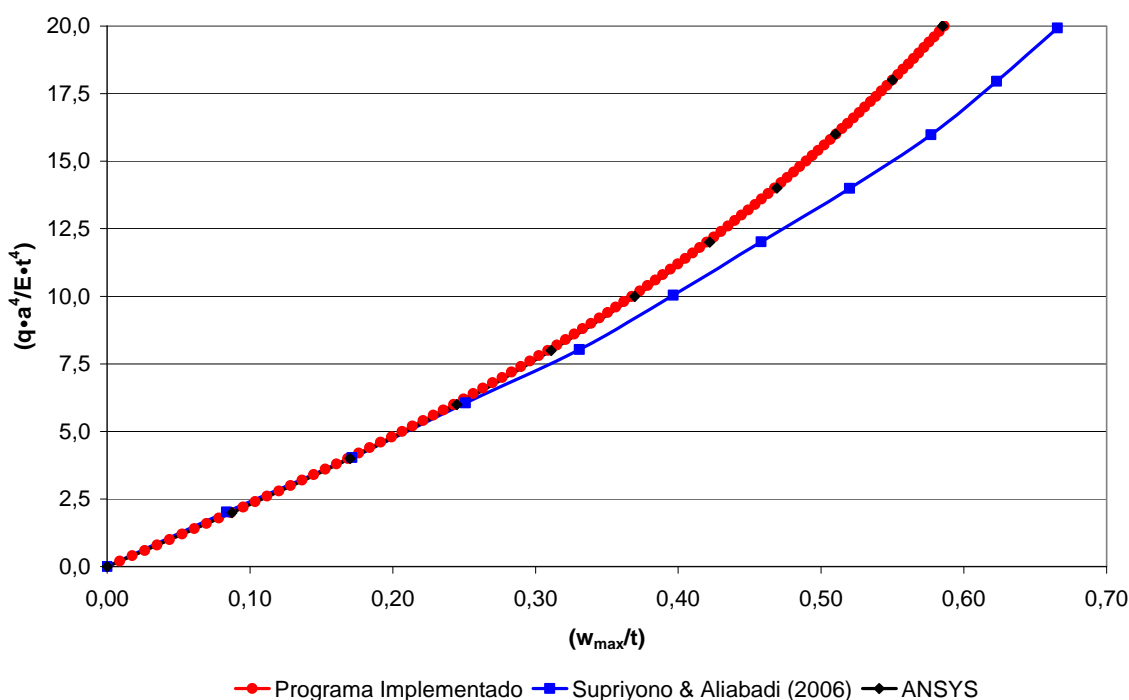


Figura 8.9 – Deslocamento do ponto central em função do carregamento aplicado para a análise considerando-se a não-linearidade geométrica.

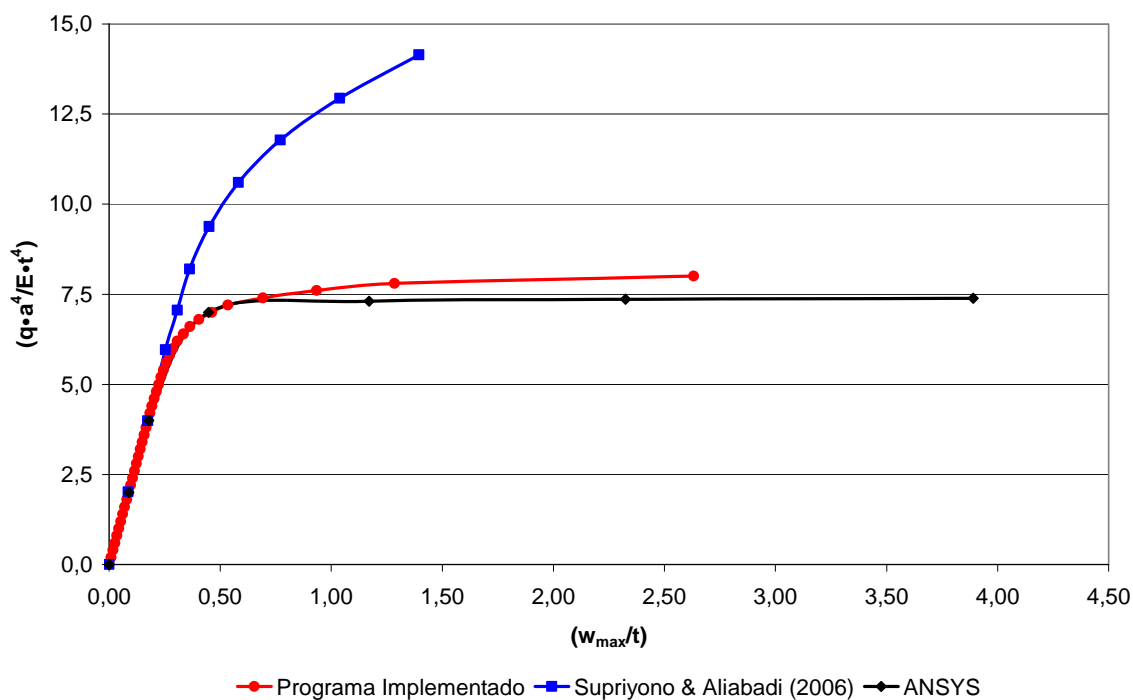


Figura 8.10 – Deslocamento do ponto central em função do carregamento aplicado para a análise considerando-se a elastoplasticidade.

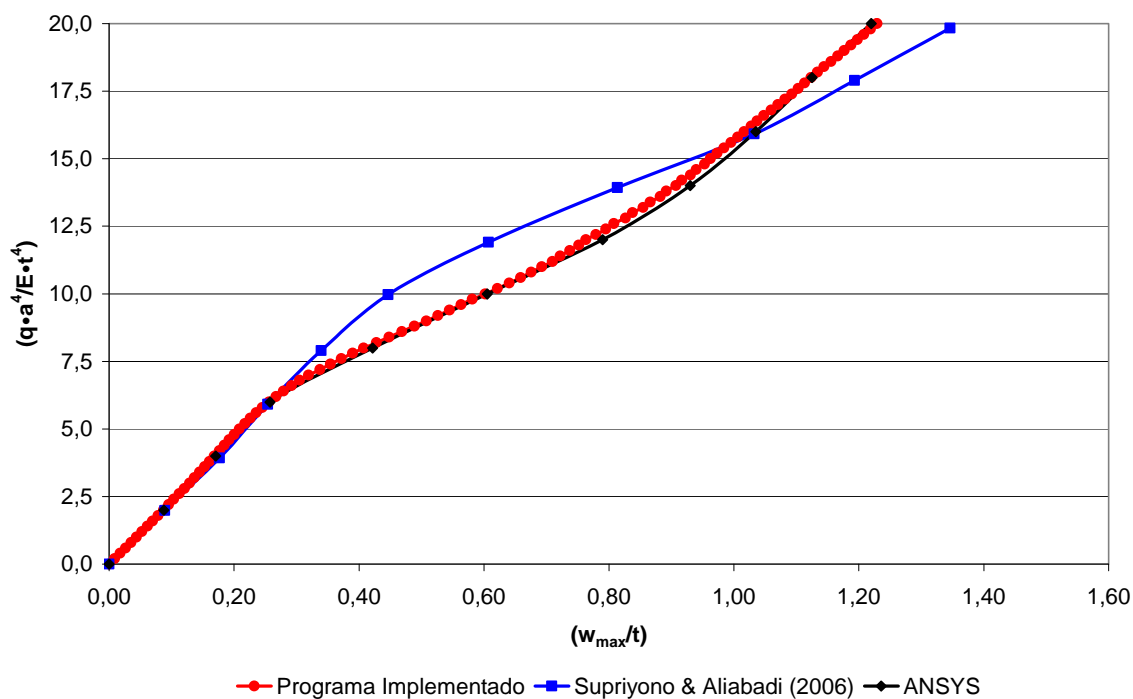


Figura 8.11 – Deslocamento do ponto central em função do carregamento aplicado para a análise considerando-se a elastoplasticidade e a não-linearidade geométrica atuando em conjunto.

Os resultados de deslocamento ilustrados nas figuras 8.9, 8.10 e 8.11 para as diversas análises efetuadas demonstram a correta implementação computacional e a versatilidade da formulação proposta.

Em todas as análises pode-se notar que as curvas de carga x deslocamento obtidas pelo programa implementado apresentam-se muito próximas das fornecidas pelo programa comercial ANSYS, ao contrário dos resultados fornecidos por Supriyono & Aliabadi (2006). Verifica-se ainda que, tanto na análise não linear geométrica quanto na análise efetuada com os efeitos não-lineares físico e geométrico atuando em conjunto, as curvas obtidas praticamente coincidiram com as fornecidas pelo programa comercial.

Vale lembrar que em suas análises os autores citados utilizaram uma formulação do método dos elementos de contorno desenvolvida a partir da teoria de Reissner para flexão de placas, com malhas compostas por elementos de contorno quadráticos isoparamétricos e células quadrilaterais com 9 nós.

8.5 – Placa circular uniformemente carregada considerando-se as não-linearidades física e geométrica

Neste exemplo é efetuada a análise elastoplástica de uma placa circular, com diâmetro igual a $2a$, espessura t , e relação t/a igual a 0,1. Sobre a placa atua um carregamento q uniformemente distribuído em toda a sua área.

As características físicas adotadas para o material são: comportamento elastoplástico perfeito, módulo de elasticidade longitudinal $E = 200$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e tensão inicial de escoamento $\sigma_y = 300$ MPa.

Como condições de contorno foram admitidas bordas apoiadas ($w = M_n = 0$) com restrição aos deslocamentos no plano x_1x_2 , ou seja, $u_1 = u_2 = 0$ em todo o contorno da placa.

As simulações foram realizadas utilizando-se uma malha composta por 80 elementos de contorno lineares de forma a reconstruir o contorno curvilíneo original da placa. Para a avaliação dos efeitos de domínio foi utilizada uma malha de domínio composta por 140 células triangulares dispostas de maneira simétrica ao centro da placa. As características geométricas e a discretização adotada estão ilustradas na figura 8.12.

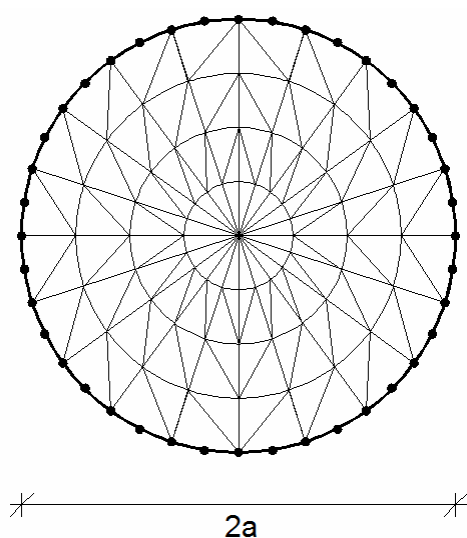


Figura 8.12 – Placa circular: dimensões e discretização utilizada.

Para o exemplo em questão foram realizadas diversas simulações. Os resultados de deslocamento no ponto central da placa em função do carregamento aplicado para as análises realizadas estão ilustrados na figura 8.13.

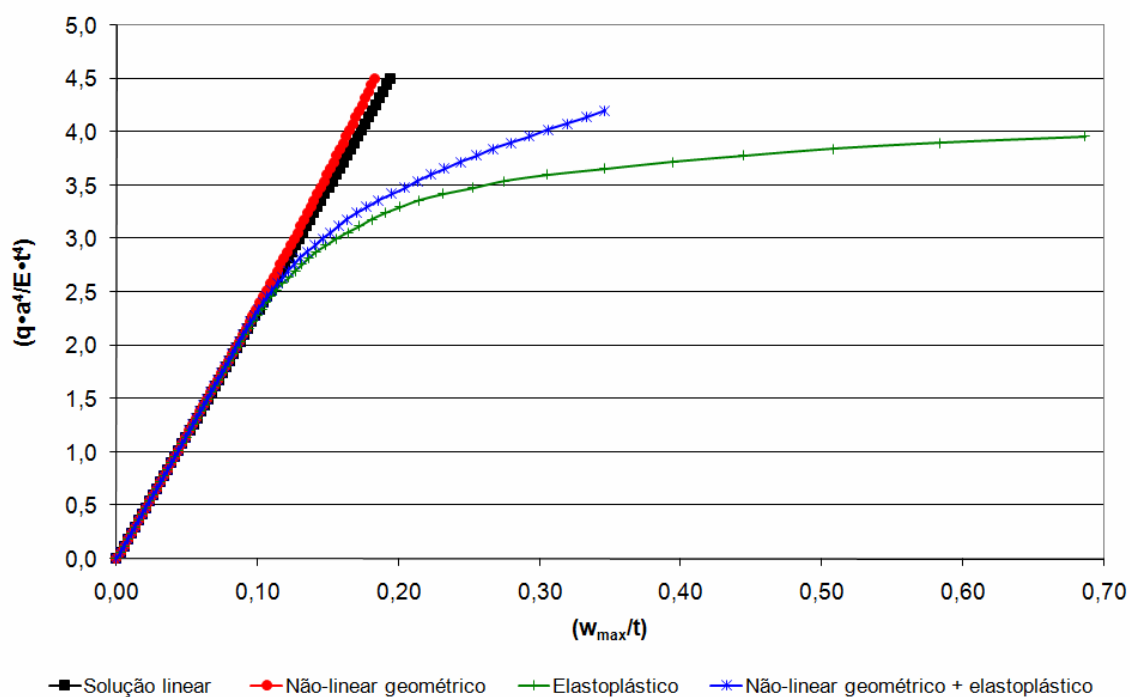


Figura 8.13 – Placa circular: deslocamento do ponto central em função do carregamento aplicado.

O mesmo exemplo foi analisado por Supriyono & Aliabadi (2007). Os resultados de deslocamento central em função do carregamento para as várias análises efetuadas estão ilustrados nas figuras 8.14, 8.15 e 8.16.

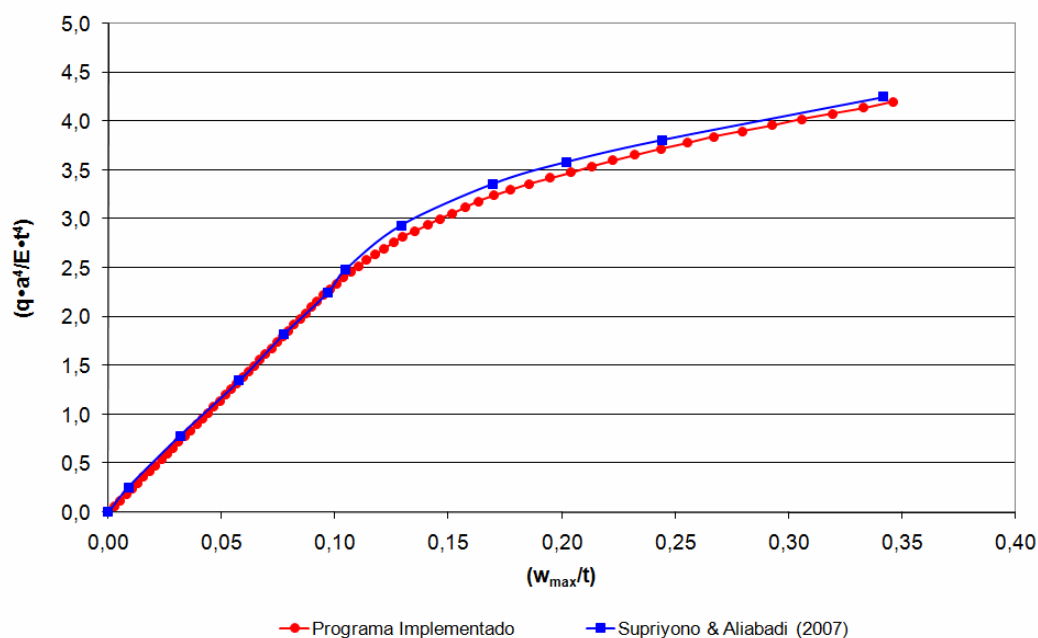


Figura 8.14 – Placa circular: deslocamento do ponto central em função do carregamento aplicado para a análise elasto-plástica considerando-se não-linearidade geométrica.

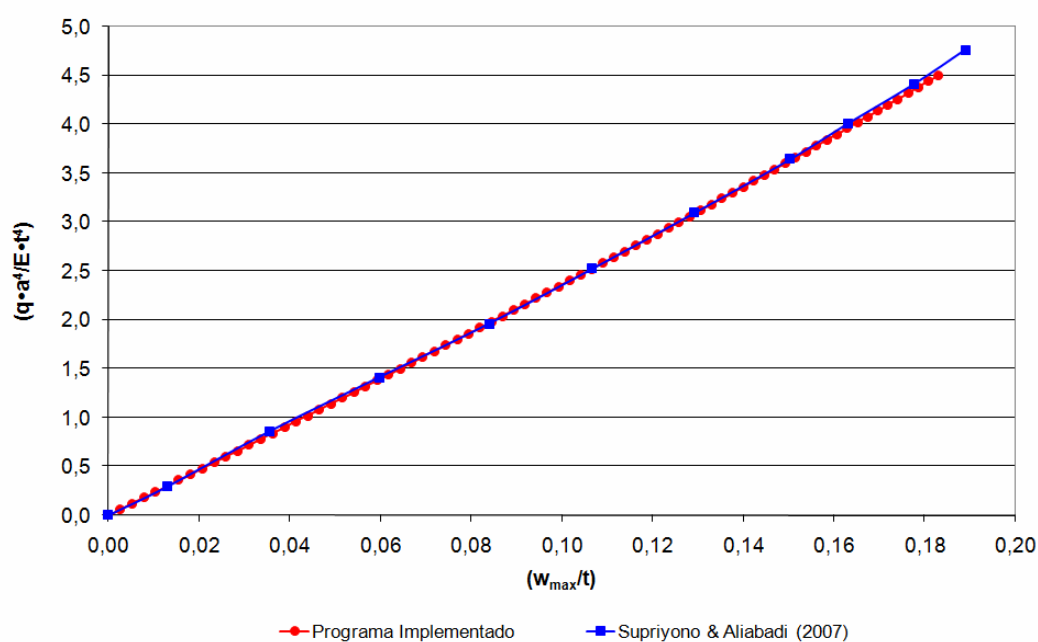


Figura 8.15 – Placa circular: deslocamento do ponto central em função do carregamento aplicado para a análise não-linear geométrica.

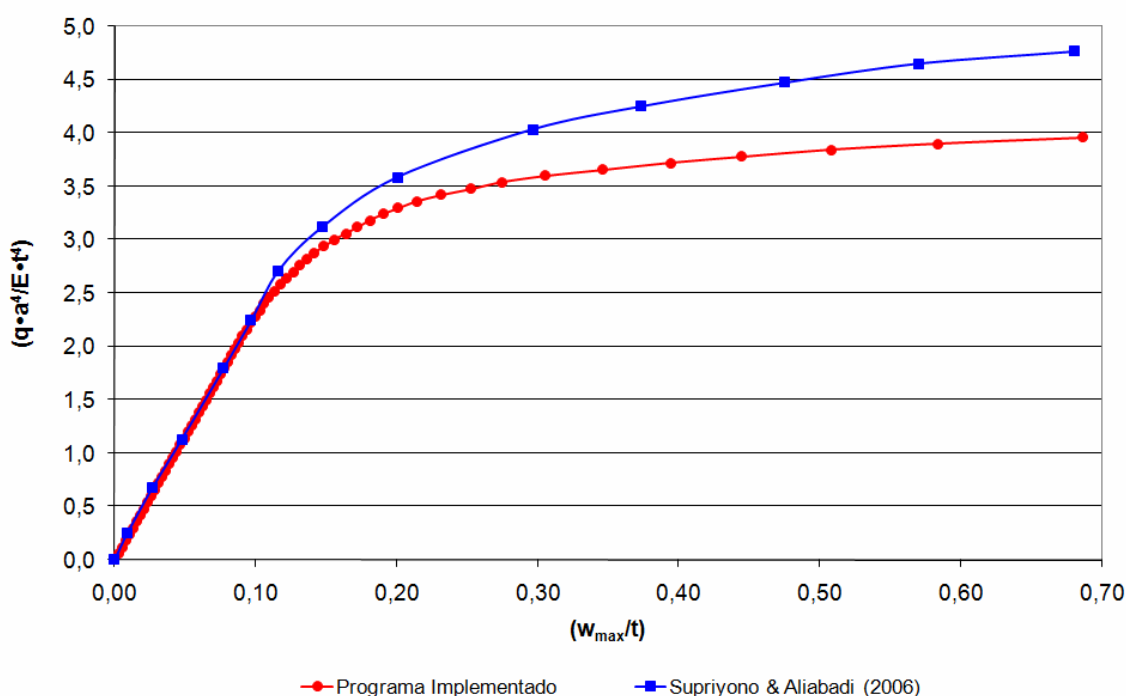


Figura 8.16 – Placa circular: deslocamento do ponto central em função do carregamento aplicado para a análise elastoplástica.

Os resultados ilustrados nas figuras de 8.13 a 8.16 confirmam a versatilidade da formulação desenvolvida. As curvas obtidas pelo programa computacional implementado apresentaram-se muito próximas das fornecidas por Supriyono & Aliabadi (2007), o que reafirma o correto desenvolvimento da formulação proposta.

É importante ressaltar que os autores citados utilizaram em suas análises uma formulação baseada na teoria de Reissner para flexão de placas, com malhas compostas por elementos de contorno quadráticos isoparamétricos e com integração no domínio realizada através do método da reciprocidade dual.

8.6 – Viga enrijecida submetida à flexão simples

Este exemplo é composto por uma viga de comprimento $\ell = 2,0 \text{ m}$, largura $b = 0,20 \text{ m}$, engastada em uma extremidade e sujeita a um carregamento $q = 0,1 \text{ kN/m}$ uniformemente distribuído em todo o seu comprimento, conforme ilustra a figura 8.17.

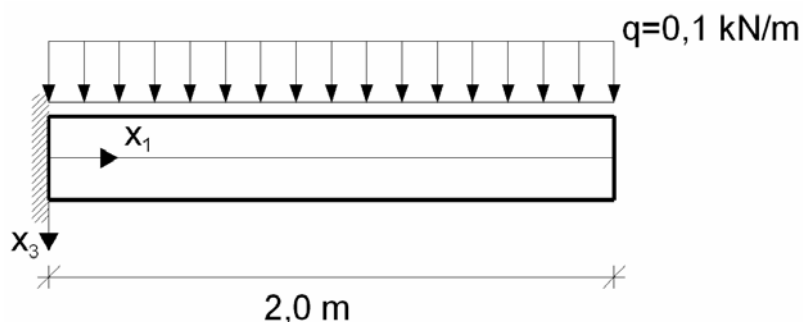


Figura 8.17 – Viga engastada com carregamento uniformemente distribuído.

Foram realizadas duas análises. Na primeira análise, considerou-se uma viga simples sem enrijecedor, com espessura igual a t_1 e momento de inércia $I_1 = bt_1^3/12$; na segunda análise foi considerada uma viga enrijecida, com espessura total $t_2 = \sqrt[3]{2} \cdot t_1$ e momento de inércia $I_2 = bt_2^3/12$. As seções transversais das vigas analisadas estão ilustradas na figura 8.18.

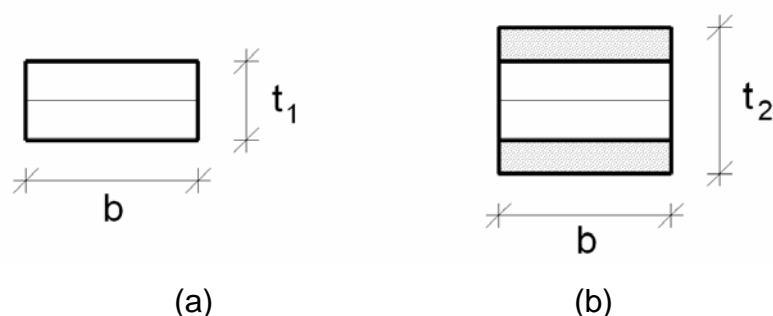


Figura 8.18 – Seção transversal: (a) viga simples; (b) viga enrijecida.

Os resultados para a primeira viga ($I = I_1$) foram obtidos considerando-se a formulação padrão do MEC para flexão de placas, enquanto que para a viga enrijecida ($I = I_2$) foi utilizada a formulação proposta neste trabalho para análise de placas enrijecidas submetidas à flexão simples. Neste último caso admitiu-se um fator de correção de rigidez $\psi_p = 2$, calculado pela relação entre os momentos de inércia das vigas conforme exposto no item 5.2.1 deste trabalho.

A discretização estrutural foi feita utilizando-se 50 elementos de contorno para ambos os casos. Para o caso da viga enrijecida, de modo a se avaliar a correção imposta pela integral no domínio do enrijecedor, 20 elementos foram utilizados para

discretizar o eixo central da viga. Os resultados de deslocamento obtidos para os dois problemas estão ilustrados na figura 8.19.

Uma vez que a rigidez da viga enrijecida é igual ao dobro da viga simples, era esperado que os deslocamentos apresentados pela primeira fossem iguais à metade dos verificados na segunda. De fato os resultados obtidos confirmaram o esperado, levando-se a conclusão de que as correções de rigidez induzidas através da formulação proposta não introduziram nenhum erro significativo nas análises efetuadas.

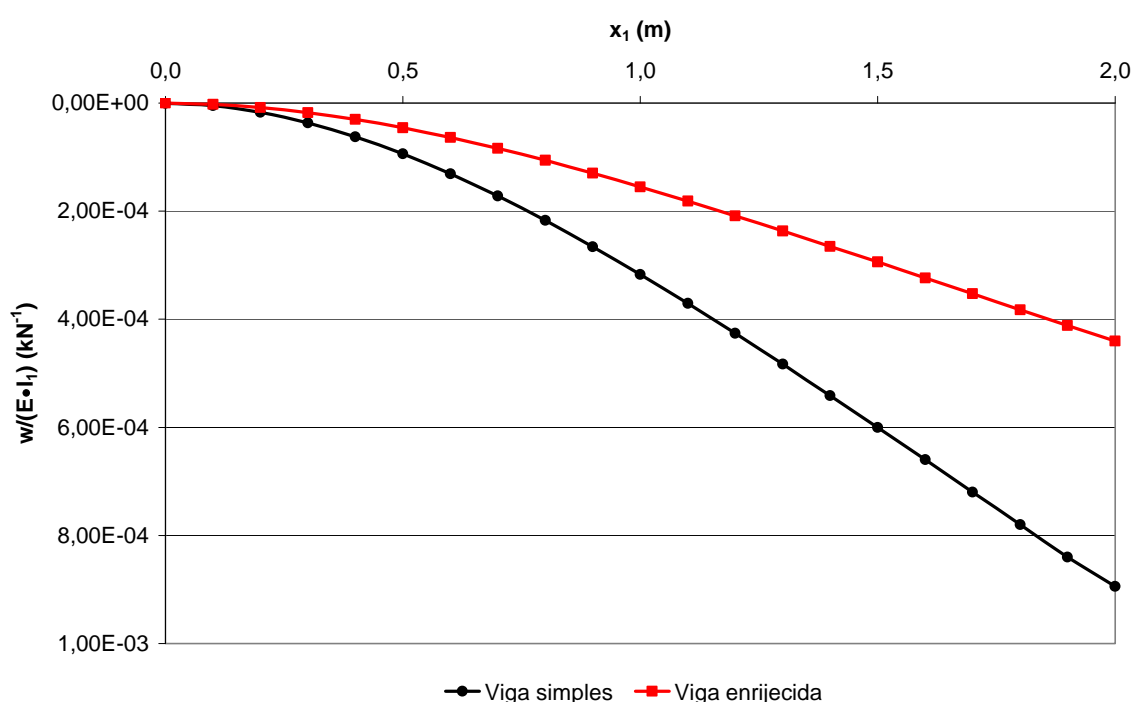


Figura 8.19 – Deslocamento w ao longo do eixo da viga.

8.7 – Placa enrijecida com momento aplicado

Este exemplo consiste em analisar uma placa enrijecida submetida à flexão simples de dimensões e carregamentos ilustrados na figura 8.20. A placa possui dois enrijecedores ao longo de suas bordas livres ($M_n = V_n = 0$) sendo as demais bordas consideradas apoiadas ($w = M_n = 0$).

Como características físicas do problema têm-se: módulo de elasticidade longitudinal $E = 2,7 \times 10^5$ MPa e coeficiente de Poisson nulo. As espessuras da

placa e do enrijecedor são iguais a $t_p = 0,10$ m e $t_e = 0,25$ m, respectivamente. Assim, com as espessuras da placa e do enrijecedor definidas tem-se o fator de correção de rigidez $\psi_p = 15,625$ calculado conforme discutido no item 5.2.1 deste trabalho.

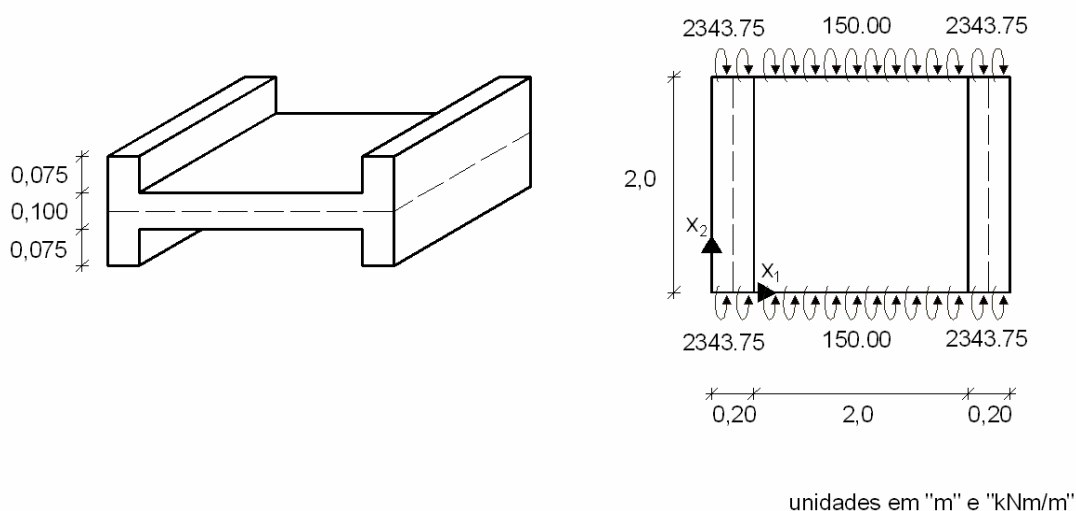


Figura 8.20 – Placa enrijecida com momento aplicado.

Os momentos aplicados ao longo das bordas apoiadas da placa e dos enrijecedores foram definidos de forma a proporcionar os mesmos valores de curvatura na placa e nos enrijecedores. Dessa forma definiu-se inicialmente o momento aplicado na região da borda referente à placa igual a $M_n^{placa} = 150,00$ kN·m/m e, para os enrijecedores, os momentos aplicados foram definidos de tal forma que $M_n^{enrij} = (D_p/D_e) \cdot M_n^{placa} = 2343,75$ kN·m/m, sendo D_p e D_e as rigidezes à flexão da placa e do enrijecedor, respectivamente, calculadas segundo a equação (2.21).

Diante do exposto, tanto a placa quanto os enrijecedores devem se comportar de maneira independente como se fossem vigas bi-apoiadas e com momentos aplicados em suas extremidades. Como resultado espera-se que pontos situados em uma mesma coordenada x_2 possuam o mesmo

deslocamento transversal w e coincidente com a solução analítica desse tipo de problema dada por:

$$w = \frac{M}{2EI} \left[\frac{\ell^2}{4} - x^2 \right] \quad (8.1)$$

$$\theta = -\frac{M}{EI} x$$

sendo $I = bt^3/12$ o momento de inércia da viga e as demais variáveis positivas segundo os sentidos ilustrados na figura 8.21.

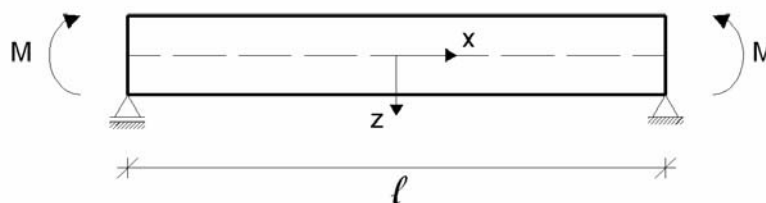


Figura 8.21 – Viga bi-apoiada sujeita a momento fletor.

Na análise efetuada foi utilizada uma malha composta por 92 elementos de contorno ao longo de todo o contorno da placa e por 20 elementos dispostos no eixo de cada enrijecedor. Os resultados de deslocamento obtidos para o eixo médio da placa ($x_1 = 2,1 \text{ m}$) e para o eixo médio do enrijecedor ($x_1 = 0,1 \text{ m}$) estão ilustrados na figura 8.22.

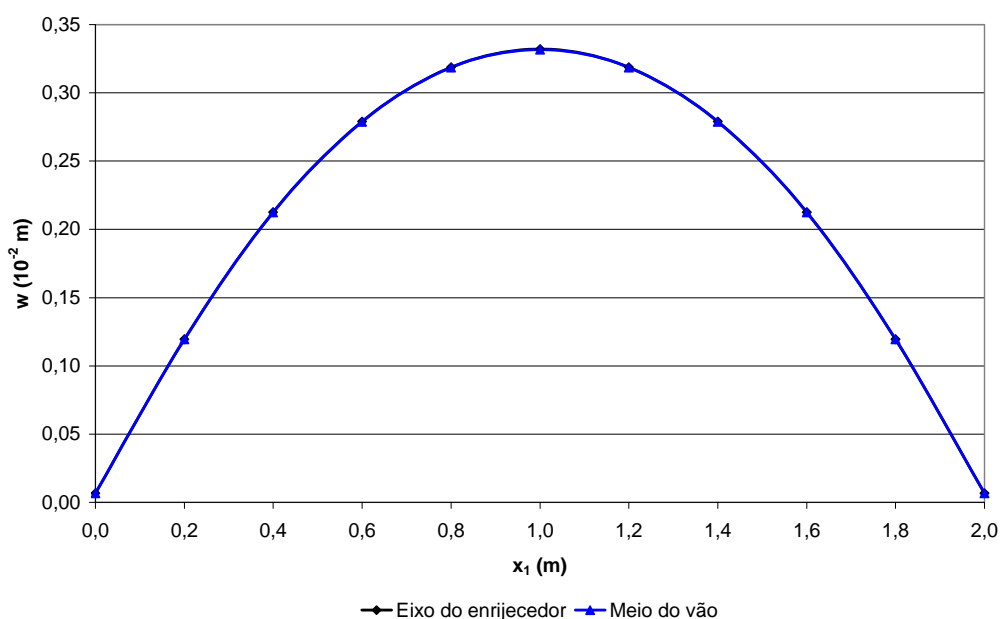


Figura 8.22 – Deslocamento w ao longo do eixo do enrijecedor e do eixo médio da placa.

Os resultados numéricos obtidos pelo programa computacional implementado e ilustrados na figura 8.22 são praticamente os mesmos que os obtidos através das expressões analíticas (8.1). Além disso, confirmando o esperado, os deslocamentos ao longo do eixo médio da viga são idênticos aos obtidos no eixo médio do enrijecedor. Por fim, foram ainda obtidos como resultado da análise efetuada os valores de $V_n = 0$ e $\partial w / \partial n = -0,00667$ ao longo dos bordos apoiados e $\partial w / \partial n = 0$ ao longo dos bordos livres.

8.8 – Placa enrijecida por três enrijecedores paralelos com momento aplicado nos bordos

Este exemplo, proposto por Fernandes & Venturini (2002), consiste na análise de uma placa enrijecida por três enrijecedores paralelos, dois ao longo de duas das bordas da placa e um sobre o eixo médio da placa, conforme ilustra a figura 8.23. As características físicas do material são dadas por: módulo de elasticidade longitudinal $E = 3,0 \times 10^{10}$ MPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,316$.

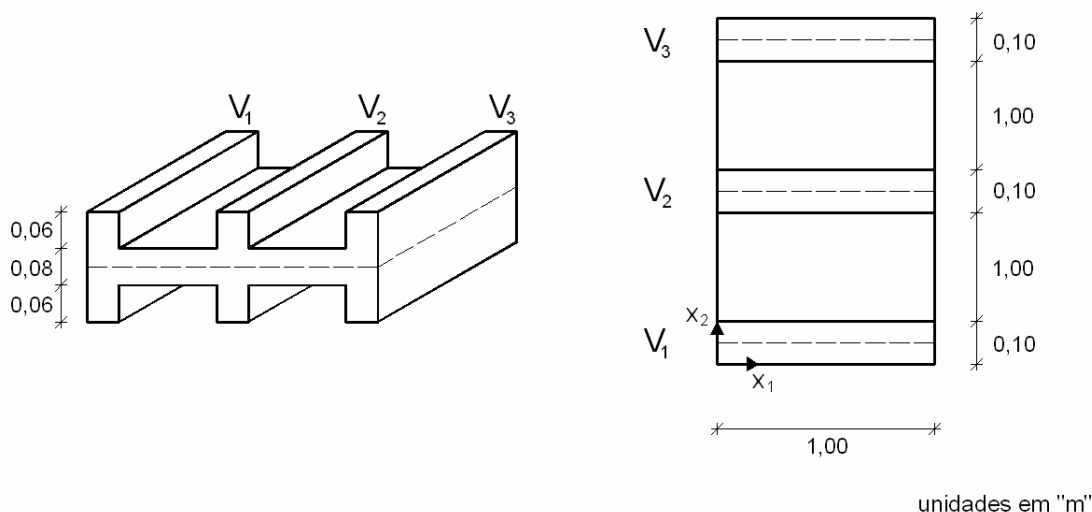


Figura 8.23 – Placa enrijecida por três enrijecedores paralelos.

Bordas apoiadas ($w = M_n = 0$) são assumidas ao longo das bordas da placa definidas por x_1 igual a 0 e 1 m e com x_2 variando de 0 a 2,3 m. As outras duas bordas são livres, ou seja, o momento M_n e a força cortante equivalente V_n são nulos. As espessuras da placa e do enrijecedor implicam em um fator de correção de rigidez $\psi_p = 15,625$.

O contorno externo da placa foi discretizado com 132 elementos de contorno enquanto que cada eixo médio dos enrijecedores foi discretizado com 40 elementos.

O único carregamento aplicado na placa foi um momento distribuído $M_n = 10 \text{ kNm/m}$ ao longo das bordas apoiadas da placa.

Os resultados obtidos pelo programa computacional implementado foram comparados com os fornecidos por Fernandes & Venturini (2002) que consideraram em suas análises uma formulação alternativa do MEC para placas enrijecidas que mantém os deslocamentos da interface placa/enrijecedor como incógnitas do problema. Os resultados obtidos foram ainda comparados com os fornecidos pelo programa comercial ANSYS onde foi efetuada uma análise utilizando elementos finitos do tipo *Shell 93*, definindo-se, a partir do plano médio da placa, regiões com espessuras referentes às espessuras da placa e do enrijecedor conforme indicado na figura 8.23.

Ainda na simulação efetuada no programa ANSYS as resistências à flexão nas direções normal e tangencial do enrijecedor foram tomadas apenas como 10 % dos seus valores originais. Essa consideração permitiu efetuar uma análise similar à efetuada com a formulação proposta, uma vez que esta última considera apenas o acréscimo de rigidez ao painel enrijecido na direção longitudinal do enrijecedor.

Os resultados de deslocamento ao longo do eixo central da viga V_2 e de momento M_{ss} também ao longo do eixo central de V_2 estão ilustrados nas figuras 8.24 e 8.25 juntamente com os resultados fornecidos por Fernandes & Venturini (2002) e pelo programa comercial ANSYS.

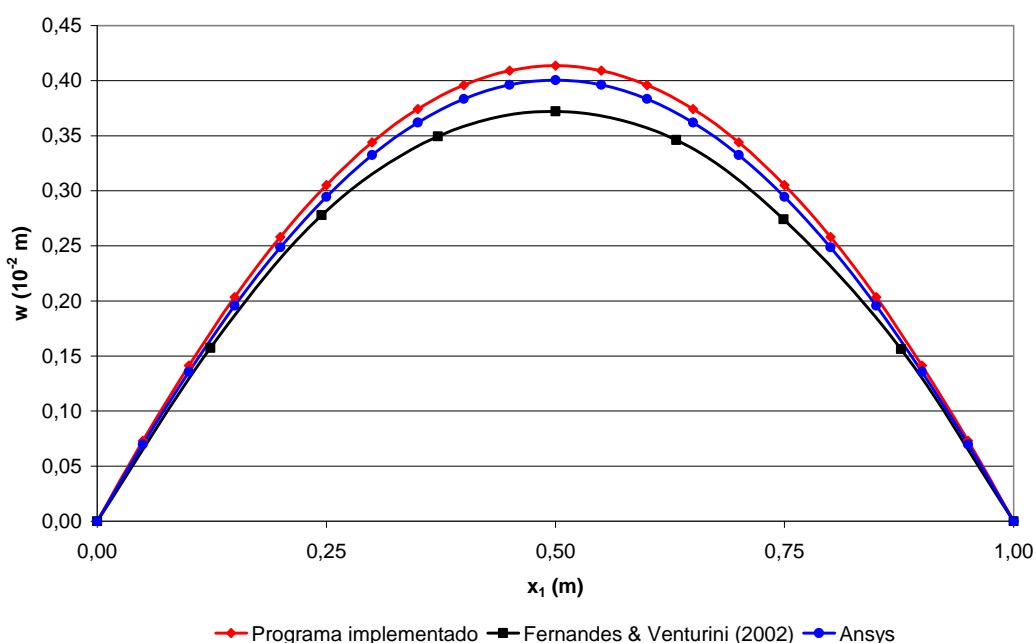


Figura 8.24 – Deslocamento do eixo central da viga V_2 .

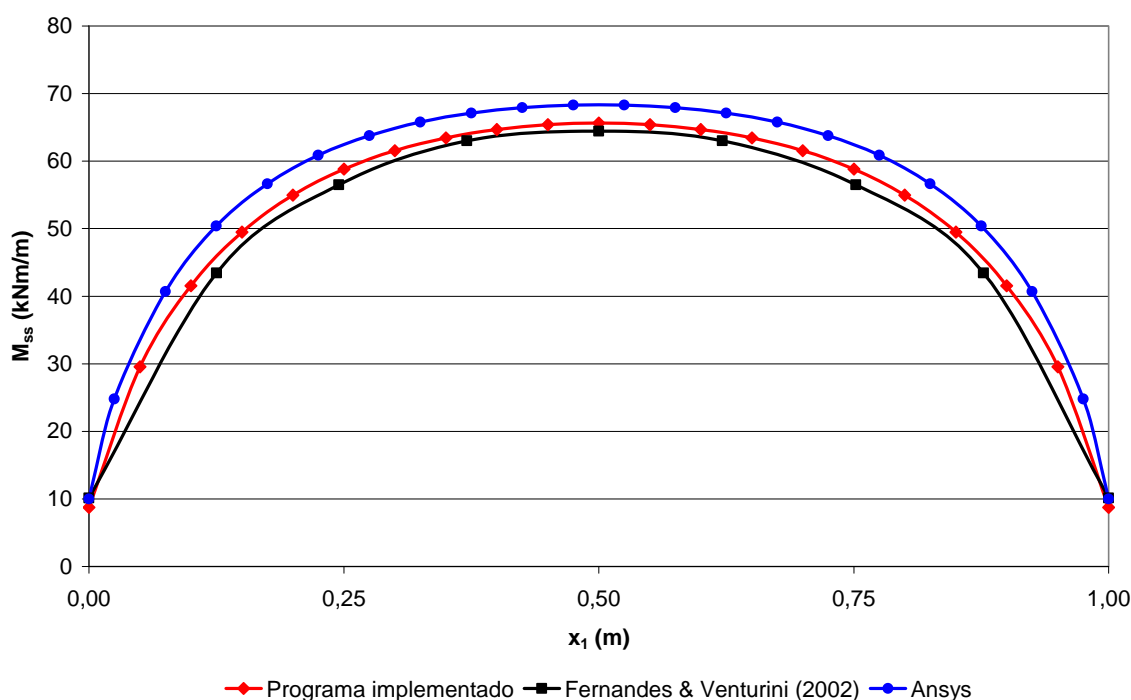


Figura 8.25 – Momento M_{ss} ao longo do eixo central da viga V_2 .

As curvas apresentadas nas figuras 8.24 e 8.25 ilustram diferenças significantes de resultados obtidos através das análises realizadas com as três formulações em questão. Acredita-se que tais diferenças sejam advindas, principalmente, das aproximações assumidas de forma distinta em cada uma das formulações, o que ocasionou na análise de três sistemas estruturais com diferentes rigidezes.

Na formulação proposta neste trabalho as correções aplicadas no painel enrijecido consideram apenas a rigidez à flexão na direção longitudinal dos enrijecedores. Além disso, a separação física entre os elementos estruturais placa e enrijecedor não é considerada, isto é, o comportamento monolítico do sólido como um todo é preservado.

Com relação à formulação apresentada por Fernandes & Venturini (2002), os resultados indicam que as diversas aproximações introduzidas na formulação desenvolvida pelos autores tornaram o modelo em análise mais rígido. Acredita-se que a consideração das demais parcelas do momento corretor M'_{nn} e M'_{sn} na formulação proposta neste trabalho proporcionaria uma maior rigidez ao conjunto “placa + enrijecedor”, o que permitiria obter resultados mais próximos dos apresentados pelos autores citados. É importante destacar que, apesar do modelo

considerado ser menos rígido, a distribuição de momento fletor ao longo da viga não foi muito alterada.

Por fim, as reduções impostas nas resistências à flexão das direções normal e tangencial do enrijecedor discutidas anteriormente tornaram o sistema estrutural em análise no programa ANSYS menos rígido quando comparado ao obtido por Fernandes & Venturini (2002). Dessa forma, os resultados obtidos via elementos finitos se apresentaram mais próximos dos obtidos com o uso da formulação aqui proposta. Vale lembrar que também foram realizadas análises no programa ANSYS sem as penalizações impostas nas resistências à flexão do enrijecedor. Nesse caso, como era esperado, os resultados apresentaram-se próximos aos fornecidos pelos autores citados.

8.9 – Viga bi-apoiada com apoio fora do plano médio

Este exemplo consiste em analisar uma viga de comprimento $\ell = 2,0$ m, largura $b = 0,5$ m, espessura $t = 0,2$ m conforme ilustra a figura 8.26.

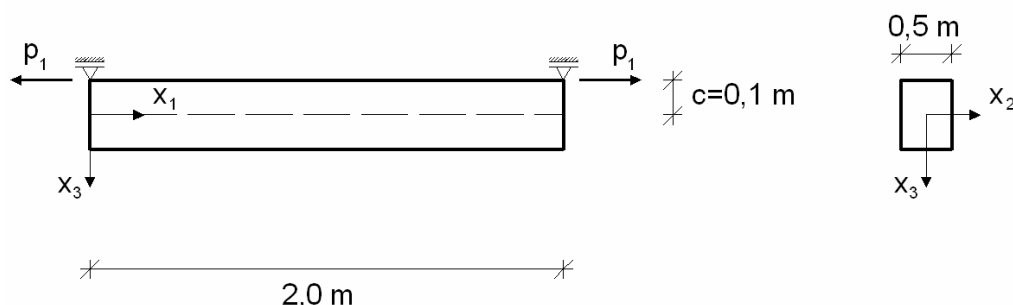


Figura 8.26 – Viga bi-apoiada sujeita a força normal.

Em uma primeira análise a viga é submetida a um carregamento distribuído em sua largura igual a $p_1 = 1000$ kN/m. Ainda como condições de contorno são prescritos os valores de $w = M_n = u_2 = 0$ para os lados menores da viga e para os lados maiores têm-se $M_n = V_n = p_1 = p_2 = 0$. Todos os valores de deslocamento e de esforços prescritos referem-se a parte superior da viga (vide figura 8.26).

As características físicas do material são dadas por: módulo de elasticidade longitudinal $E = 3000$ MPa e coeficiente de Poisson nulo. A discretização estrutural foi feita com 50 elementos de contorno dispostos de forma que cada lado maior da

viga fosse discretizado com 20 elementos de contorno e cada lado menor com 5 elementos.

A análise é efetuada escrevendo-se o equilíbrio dos esforços no plano médio da viga, dando origem a excentricidade $c = 0,1 m$.

A solução analítica para este tipo de problema pode ser obtida através da equivalência deste com um problema de viga sujeita a uma força normal atuante no plano médio acrescido de um momento fletor conforme ilustra a figura 8.27.

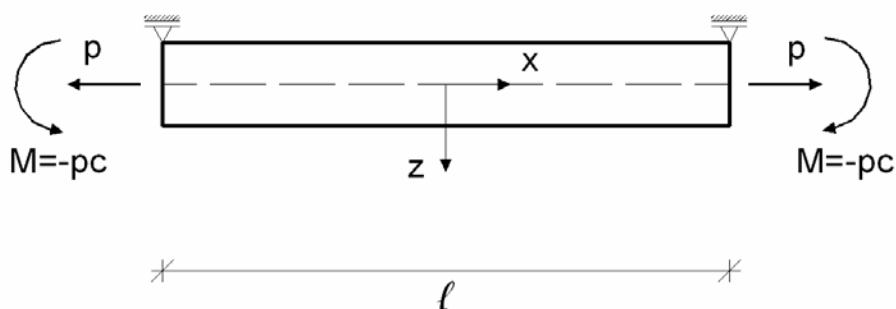


Figura 8.27 – Viga bi-apoiada sujeita a força normal e momento.

As expressões analíticas podem ser expressas por:

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{Pc}{2EI} \left[x^2 - \frac{\ell^2}{4} \right] \\
 \theta &= \frac{Pc}{EI} \cdot x \\
 u_1 &= \frac{Px}{E} \left[\frac{c^2}{I} + \frac{1}{A} \right]
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

sendo I e A o momento de inércia e a área da seção transversal da viga, respectivamente.

Os resultados de deslocamento transversal w e deslocamento horizontal u_1 obtidos através do programa implementado para pontos com coordenadas $x_2 = x_3 = 0$ e x_1 variando de 0 a 2 m estão ilustrados nas figuras 8.28 e 8.29, respectivamente. As figuras apresentam ainda as curvas obtidas a partir das expressões analíticas dadas em (8.2).

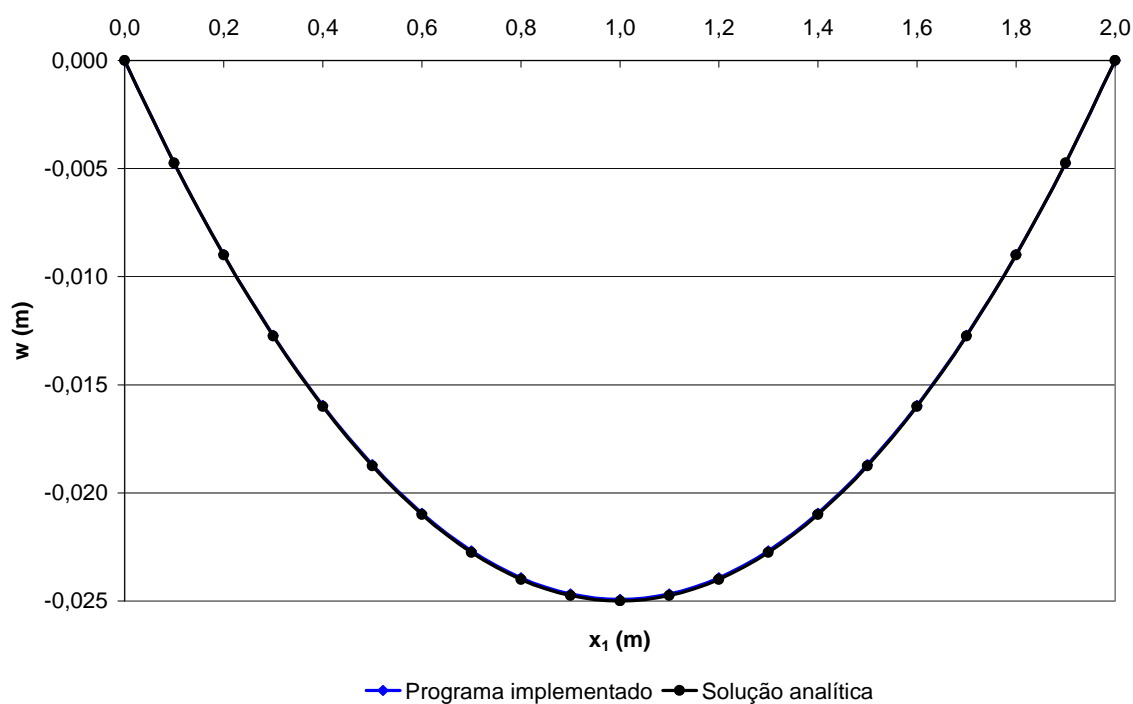


Figura 8.28 – Deslocamento transversal w da viga bi-apoiada.

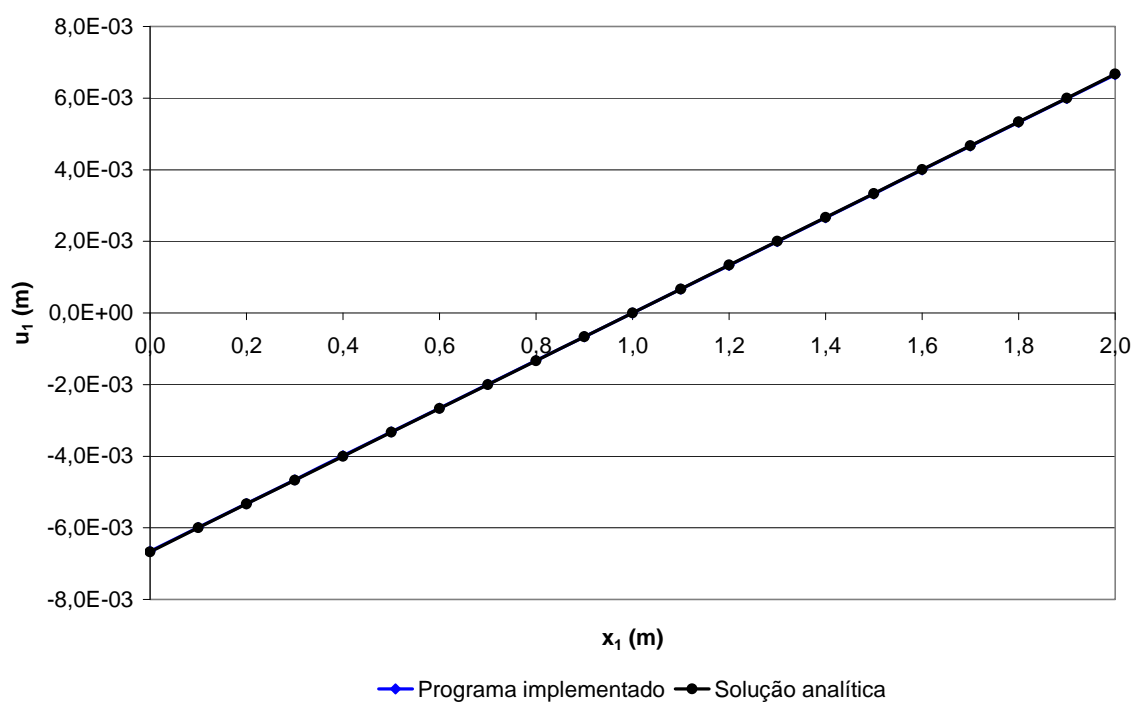


Figura 8.29 – Deslocamento horizontal u_1 da viga bi-apoiada.

As figuras 8.28 e 8.29 ilustram as curvas obtidas através da formulação proposta e também por meio das expressões analíticas. Neste caso, os resultados numéricos coincidiram exatamente com os valores analíticos de deslocamento, o

que demonstra o correto desenvolvimento da formulação proposta. Vale ressaltar que os resultados de esforços, tanto para pontos internos quanto para os nós de contorno, também reproduziram exatamente os valores esperados.

Ainda com relação a este exemplo uma outra análise foi efetuada. Neste caso a viga foi tomada apenas com a metade da altura original, porém com um enrijecedor disposto em todo o seu domínio de forma que o conjunto “viga + enrijecedor” reconstitua a viga original. A figura 8.30 ilustra a viga enrijecida.

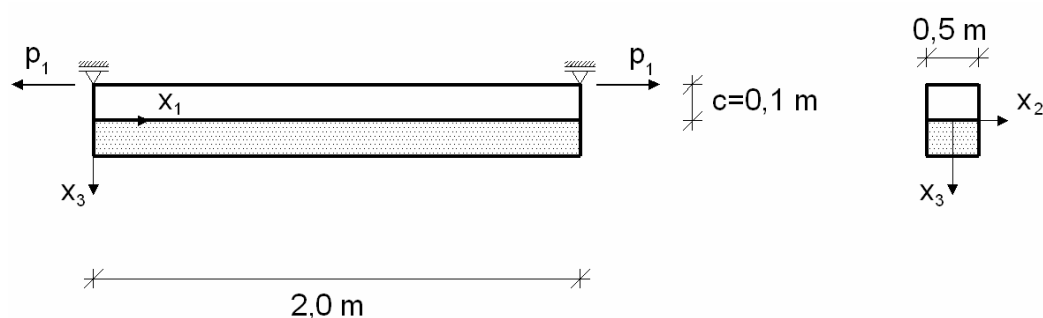


Figura 8.30 – Viga enrijecida bi-apoiada.

A malha utilizada na análise é composta pelo mesmo número de elementos da análise anterior, porém agora acrescida de 20 elementos dispostos no eixo médio da viga para que a correção imposta pela integral no domínio do enrijecedor possa ser avaliada.

Neste caso o equilíbrio foi calculado tendo por base o plano médio do conjunto viga enrijecida, o qual coincide com o plano médio da viga original. Sendo assim, o valor da excentricidade se mantém em $0,1\text{ m}$.

Para que se possa realizar a análise proposta utilizando a formulação para placas enrijecidas submetidas à flexão composta é necessário calcular os coeficientes de correção de rigidez discutidos no capítulo 5 deste trabalho. Assim têm-se: $\psi_p = 8$ e $\psi_c = 2$.

Assim, através da formulação proposta para placas enrijecidas submetidas à flexão composta foram obtidos resultados de deslocamento transversal w e deslocamento horizontal u_1 para pontos com coordenadas $x_2 = x_3 = 0$ e x_1 variando de 0 a 2 m . Tais resultados, juntamente com os resultados analíticos e numéricos obtidos na análise anterior, estão ilustrados nas figuras 8.31 e 8.32.

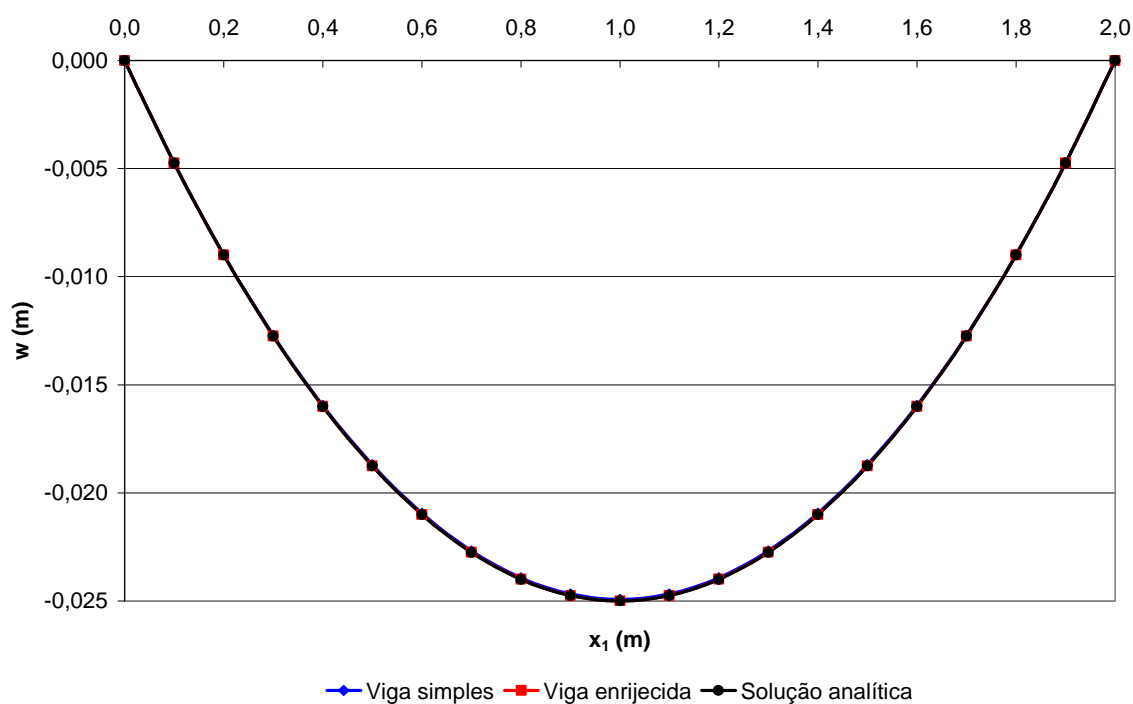


Figura 8.31 – Deslocamento transversal w da viga bi-apoiada: viga simples e viga enrijecida .

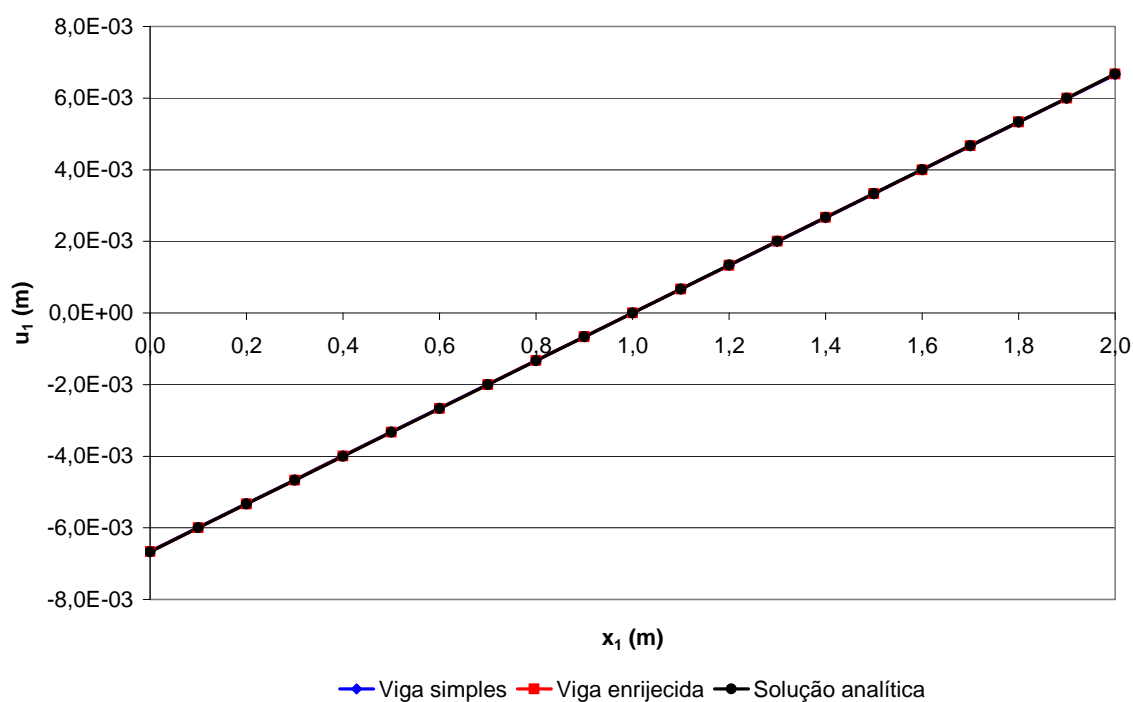


Figura 8.32 – Deslocamento horizontal u_1 da viga bi-apoiada: viga simples e viga enrijecida.

Também neste caso a formulação para placas enrijecidas submetidas à flexão composta reproduziu exatamente os resultados analíticos o que ilustra o correto desenvolvimento da mesma e a sua correta implementação computacional.

8.10 – Viga bi-apoiada com apoio fora do plano médio e sujeita a momento fletor

A viga bi-apoiada deste exemplo é a mesma analisada no exemplo 8.9 com apenas algumas alterações nas condições de contorno do problema. Neste caso, a viga está sujeita a um momento igual a $M_n = 1000 \text{ kNm/m}$ distribuído em seus lados menores conforme ilustra a figura 8.33.

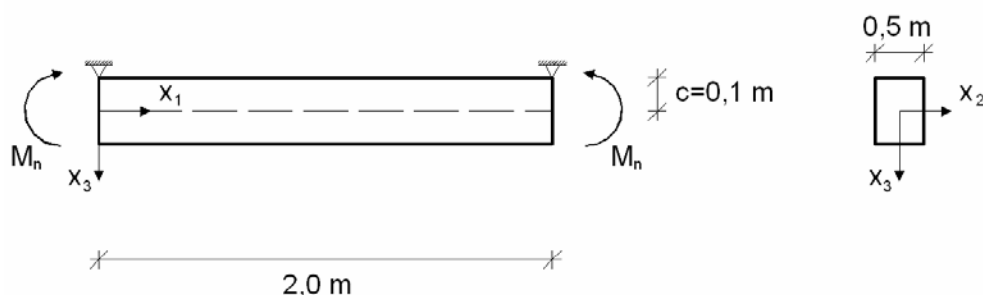


Figura 8.33 – Viga bi-apoiada sujeita a momento fletor.

Têm-se ainda como condições de contorno $w = M_n = u_1 = u_2 = 0$ para os lados menores da viga e $M_n = V_n = p_1 = p_2 = 0$ para os lados maiores. Todos os valores de deslocamento e de esforços prescritos referem-se a parte superior da viga (vide figura 8.33).

Módulo de elasticidade longitudinal $E = 3000 \text{ MPa}$ e coeficiente de Poisson nulo são as características físicas do material. A malha utilizada é a mesma do exemplo anterior composta por 50 elementos de contorno dispostos de maneira uniforme em todo o contorno.

A análise é efetuada escrevendo-se o equilíbrio dos esforços no plano médio da viga, dando origem a excentricidade $c = 0,1 \text{ m}$.

Devido a presença das reações de apoio, a solução analítica para este tipo de problema continua sendo obtida a partir da equivalência deste com um problema de viga sujeita a uma força normal atuante no plano médio acrescido de um momento fletor conforme ilustra a figura 8.27. Neste caso o momento fletor total é dado pela soma entre o momento M prescrito e o momento referente à transferência da

reação de apoio para o eixo médio da viga $M = -Pc$. Dessa forma pode-se escrever as expressões analíticas para o problema em questão como segue:

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{(M - Pc)}{2EI} \left[\frac{\ell^2}{4} - x^2 \right] \\
 \theta &= \frac{(M - Pc)}{EI} \cdot x \\
 u_1 &= \frac{Px}{E} \left[\frac{c^2}{I} + \frac{1}{A} \right] - \frac{M \cdot c}{EI} \cdot x \\
 \rho &= \frac{M \cdot A \cdot c}{A \cdot c^2 + I}
 \end{aligned}
 \tag{8.3}$$

sendo I e A o momento de inércia e a área da seção transversal da viga, respectivamente.

Os resultados de deslocamento obtido pelo programa implementado e os valores referentes à solução analítica estão ilustrados na figura 8.34.

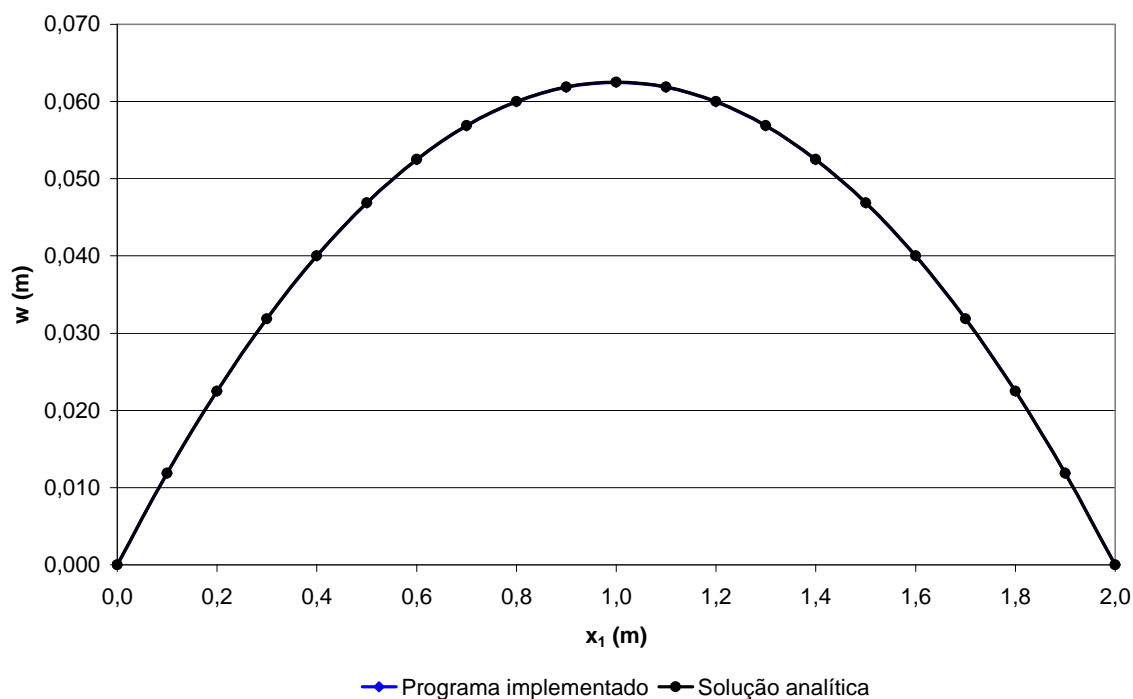


Figura 8.34 – Deslocamento transversal w da viga bi-apoiada sujeita a momento.

Foram ainda obtidos os seguintes resultados: momento $M_{11} = 250,00 \text{ kNm/m}$ e $u_1 = 0$ para todos os pontos da viga; e $p = 7500,00 \text{ kN/m}$ e $\theta_n = -12,50$ nas bordas menores da viga.

De maneira análoga a efetuada no exemplo 8.9 deste trabalho, foi efetuada uma análise onde a viga foi tomada apenas com a metade da altura original e com um enrijecedor disposto em todo o seu domínio de forma que o conjunto “viga + enrijecedor” reconstituísse a viga original. A figura 8.35 ilustra a viga enrijecida.

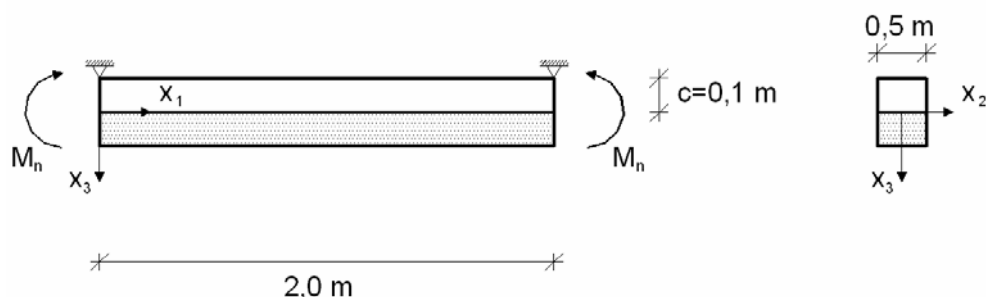


Figura 8.35 – Viga enrijecida bi-apoiada sujeita a momento fletor.

Com o equilíbrio calculado no plano médio do conjunto viga enrijecida e com o uso da formulação proposta para placas enrijecidas submetidas à flexão composta, tem-se os resultados de deslocamento transversal w para pontos com coordenadas $x_2 = x_3 = 0$ e x_1 variando de 0 a 2 m ilustrados na figura 8.36.

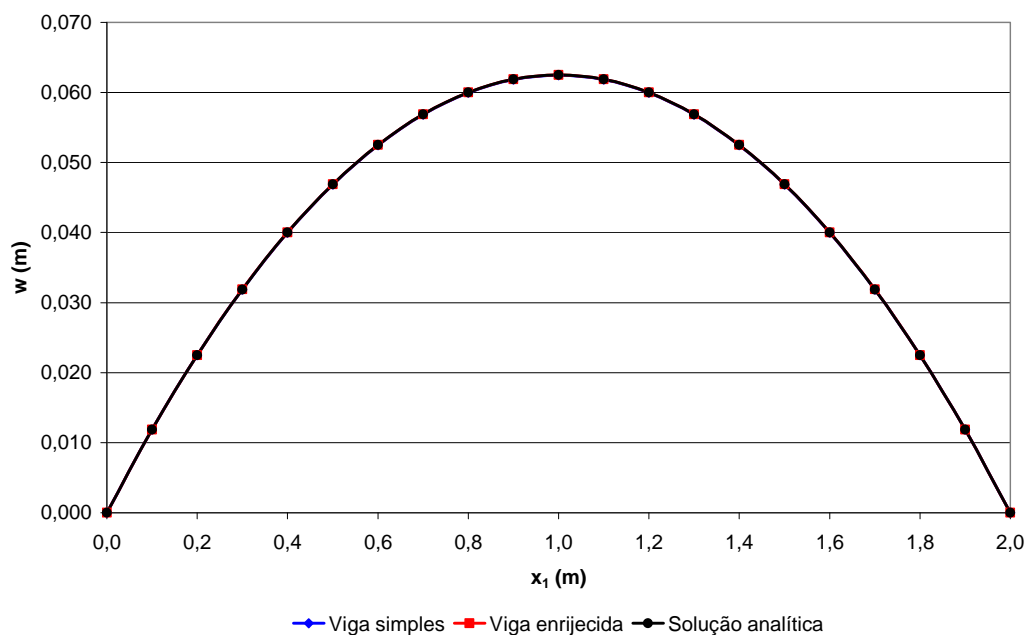


Figura 8.36 – Deslocamento transversal w da viga bi-apoiada sujeita a momento: viga simples e viga enrijecida.

Os demais resultados obtidos coincidiram exatamente com a solução analítica e numérica obtida para a análise da viga simples. Vale lembrar que coeficientes de correção de rigidez são dados por: $\psi_p = 8$ e $\psi_c = 2$ e que a malha utilizada nesta análise é a mesma utilizada no exemplo 8.9, ou seja, 50 elementos no contorno da viga acrescidos de 20 elementos dispostos no eixo médio da viga.

8.11 – Placa enrijecida com momento e força normal aplicados

Este exemplo trata de um caso simples de placa enrijecida por duas vigas cujas dimensões estão ilustradas na figura 8.37. O objetivo principal deste exemplo é verificar a validade da formulação apresentada em análises de placas enrijecidas com o plano médio dos enrijecedores não coincidentes com o plano médio da placa.

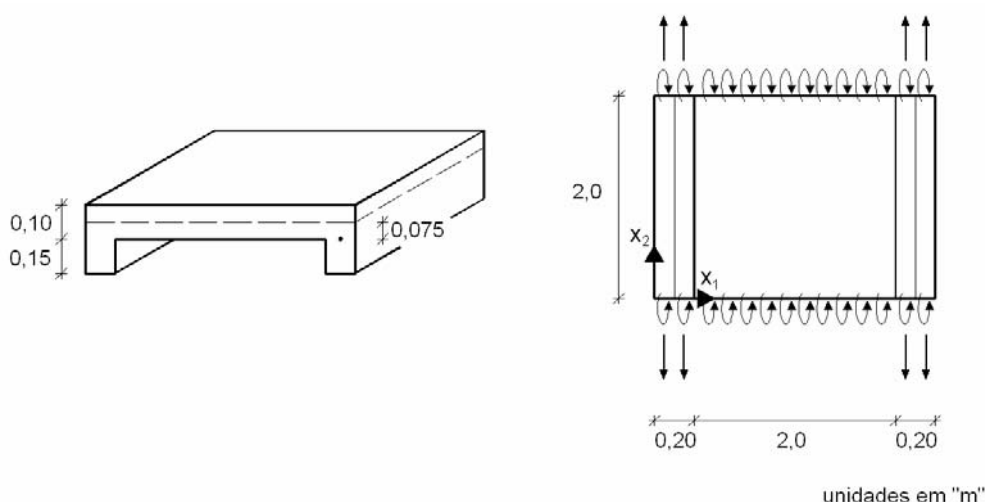


Figura 8.37 – Placa enrijecida com momento aplicado e força normal aplicados.

Este exemplo é similar ao exemplo 8.7 já apresentado, sendo que a principal diferença entre ambos reside no posicionamento dos enrijecedores com relação ao plano médio da placa. Neste caso o plano médio das vigas está posicionado abaixo do plano médio da placa ocasionando uma excentricidade $c = 7,5 \times 10^{-2} \text{ m}$. Vale lembrar que o estudo será realizado tendo o plano médio da placa como plano de referência.

As características físicas do material são dadas por: módulo de elasticidade longitudinal $E = 2,7 \times 10^5 \text{ MPa}$ e coeficiente de Poisson nulo. Com as espessuras da placa e do enrijecedor, $t_p = 0,1 \text{ m}$ e $t_e = 0,25 \text{ m}$, respectivamente, obtém-se os coeficientes de correção de rigidez discutidos no capítulo 5 deste trabalho: $\psi_p = 15,625$ e $\psi_c = 2,5$.

As bordas da placa coincidentes com as vigas foram consideradas livres ($M_n = V_n = p_1 = p_2 = 0$) e as demais bordas apoiadas ($w = M_n = p_1 = p_2 = 0$). Em apenas dois pontos de coordenadas ($x_1 ; x_2$) iguais a $P_1(1,20 ; 0)$ e $P_2(1,20 ; 2,0)$ foram admitidas diferentes condições de contorno. Para P_1 admitiu-se $w = M_n = u_1 = u_2 = 0$ e para P_2 $w = M_n = u_1 = p_2 = 0$.

Os carregamentos foram aplicados de forma que tanto a placa quanto as vigas possuíssem a mesma curvatura, ou seja, pontos pertencentes à mesma coordenada x_2 possuem os mesmos os deslocamentos verticais w . Dessa forma foram admitidos para as bordas das placas momentos distribuídos iguais a $M_n = 166,67 \text{ kNm/m}$ e para as bordas da viga momentos iguais a $M_n = 5416,67 \text{ kNm/m}$ e forças de superfície $p_2 = 375,00 \text{ kN/m}$.

A malha utilizada na análise é composta por 92 elementos no contorno externo da placa enrijecida acrescida de 20 elementos por eixo médio de cada enrijecedor.

Para este tipo de problema a solução analítica pode ser obtida através das expressões (8.3). Os resultados numéricos de deslocamento transversal w para o eixo médio dos enrijecedores e para o meio do vão da placa e também a curva fornecida pelas expressões analíticas estão ilustrados na figura 8.38.

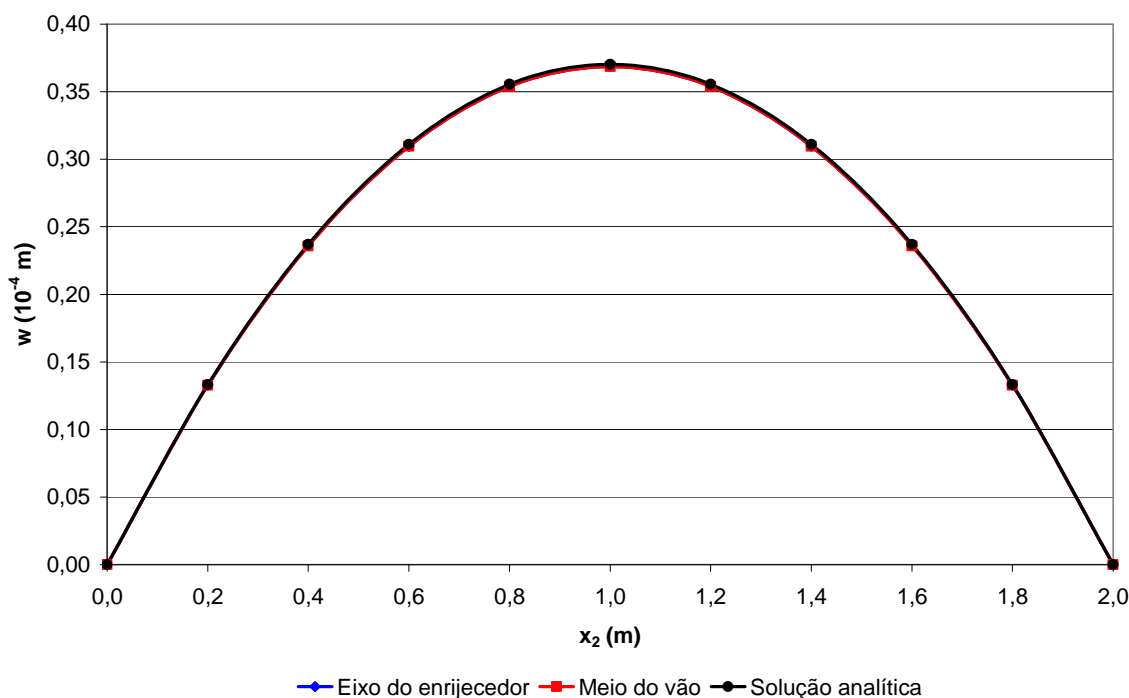


Figura 8.38 – Resultados numéricos e analíticos de deslocamento transversal w para os eixos médios da placa e do enrijecedor.

Foram ainda obtidos resultados de rotação iguais a $\partial w/\partial n = -0,007377$ na borda apoiada da placa coincidente com $x_2 = 0 \text{ m}$ e $N_{ss} = 375,00 \text{ kN/m}$ e $M_{ss} = 2612,5 \text{ kNm/m}$ nos nós dos enrijecedores. Neste caso vale lembrar que o valor de M_{ss} encontrado é referente ao plano médio do enrijecedor, sendo, portanto, dado analiticamente por $M_{ss} = M_n - p_2 \cdot c = 2604,1667 \text{ kNm/m}$.

Os resultados obtidos se apresentaram muito próximos da solução exata. Considerando que a solução exata de rotação é igual a $\partial w/\partial n = -0,007407$ para a borda apoiada da placa coincidente com $x_2 = 0 \text{ m}$ e $M_{ss} = 2604,17 \text{ kNm/m}$ nos nós dos enrijecedores, erros máximos da ordem de 0,4% ilustram o correto desenvolvimento da formulação proposta e sua correta implementação computacional.

8.12 – Placa enrijecida por duas vigas perpendiculares

Este exemplo consiste na análise de uma placa retangular enrijecida por duas vigas perpendiculares conforme ilustra a figura 8.39.

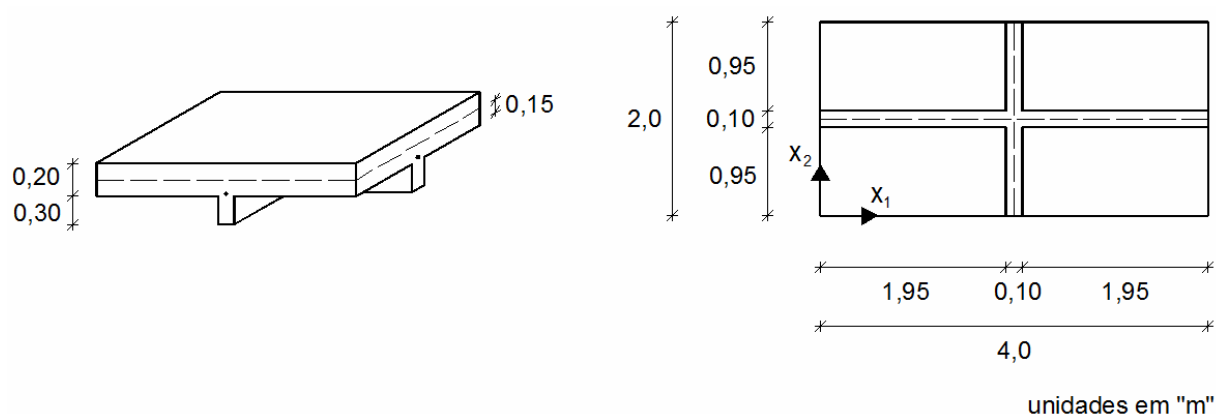


Figura 8.39 – Placa enrijecida por duas vigas perpendiculares.

O material possui módulo de elasticidade longitudinal $E = 100 \text{ MPa}$ e coeficiente de Poisson nulo. Como condições de contorno foram admitidas todas as bordas simplesmente apoiadas ($w = M_n = 0$) e com restrição ao deslocamento no plano x_1x_2 ($u_1 = u_2 = 0$).

Um carregamento $q = 0,1 \text{ kN/m}^2$ atua uniformemente distribuído em toda a área da placa. As espessuras da placa e das vigas, $t_p = 0,2 \text{ m}$ e $t_e = 0,5 \text{ m}$, respectivamente, dão origem aos coeficientes de correção de rigidez $\psi_p = 15,625$ e $\psi_c = 2,5$ conforme discutido no capítulo 5 deste trabalho, e a excentricidade $c = 0,15 \text{ m}$ (vide figura 8.39). Vale ressaltar que na análise efetuada o plano médio da placa foi tomado como superfície de equilíbrio.

As simulações numéricas foram feitas utilizando-se uma malha composta por 240 elementos no contorno da placa e acrescida de 120 elementos ao longo dos eixos das vigas. Os resultados de deslocamento ao longo do eixo central das vigas juntamente com os fornecidos pelo programa comercial ANSYS estão ilustrados nas figuras 8.40 e 8.41.

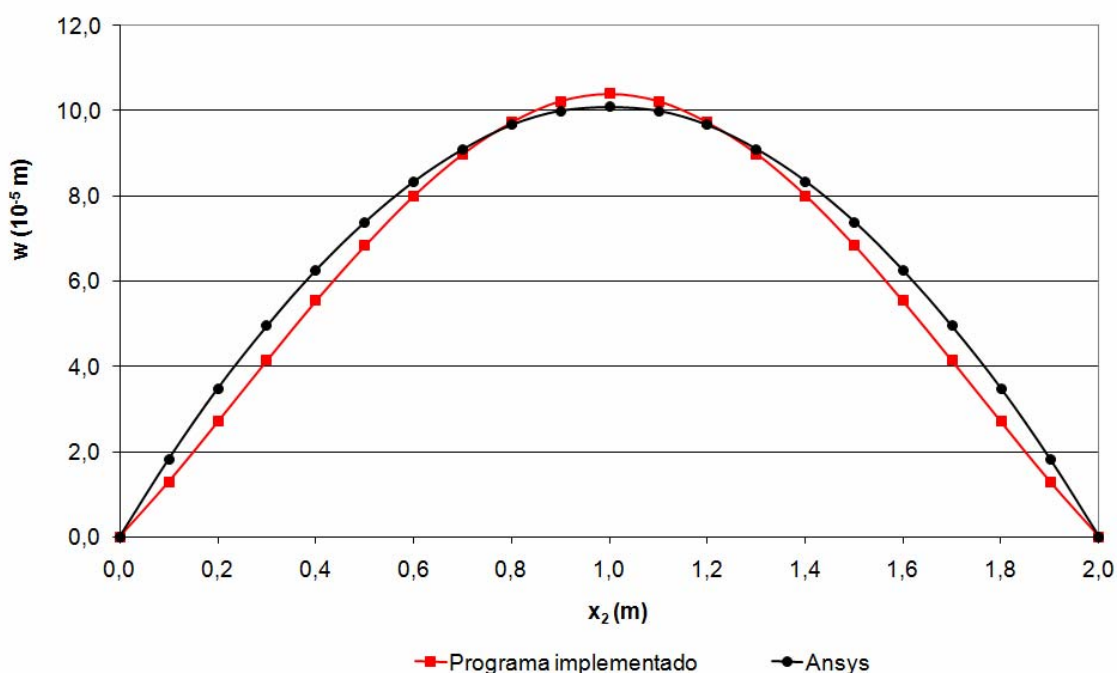


Figura 8.40 – Deslocamento ao longo do eixo da viga de 2,0 m de comprimento.

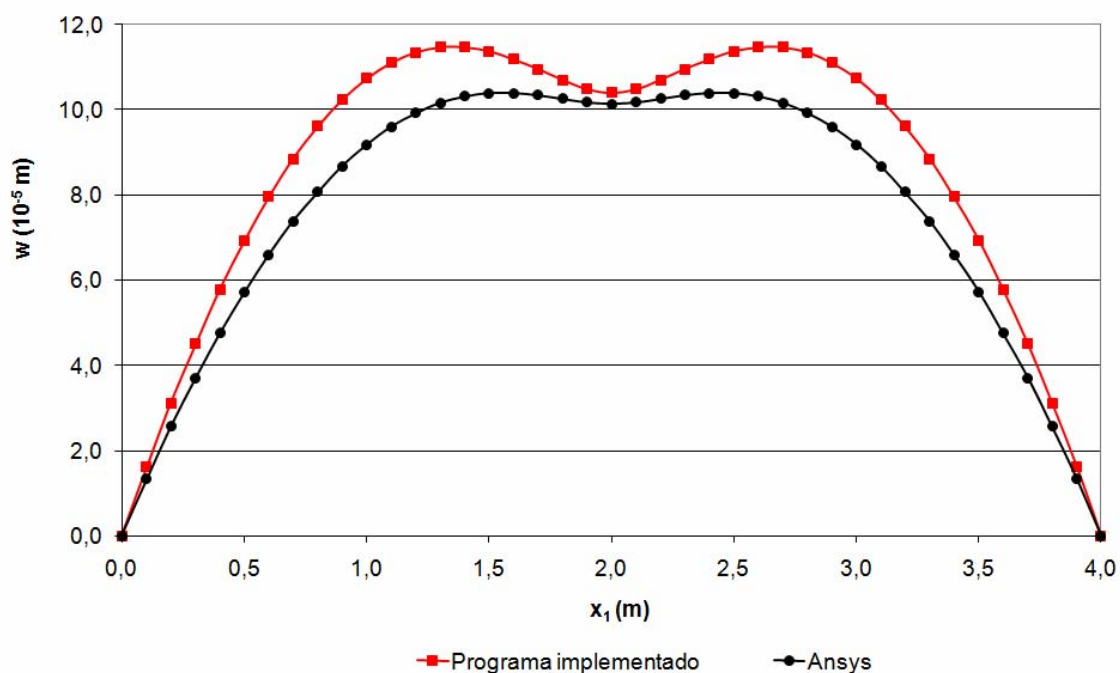


Figura 8.41 – Deslocamento ao longo do eixo da viga de 4,0 m de comprimento.

A formulação desenvolvida neste trabalho para o estudo de placas enrijecidas submetidas à flexão composta considera apenas as parcelas de enrijecimento na direção longitudinal da viga, ou seja, somente dois graus de liberdade são acrescentados ao problema de flexão de placas (M_{ss} e N_{ss}). Os resultados obtidos neste exemplo ilustram o prejuízo causado por tal consideração.

Ao contrário do apresentado no exemplo anterior, onde a solução encontrada para o problema de placas enrijecidas por duas vigas paralelas coincidiu com a solução exata, neste caso a solução apresentou-se apenas como uma solução aproximada.

Do exposto pode-se concluir que as parcelas de enrijecimento desconsideradas na formulação influenciam consideravelmente no comportamento estrutural do painel enrijecido apresentado neste exemplo, e, dessa forma, não podem ser desconsideradas.

8.13 – Viga bi-apoiada submetida à flexão simples considerando-se o comportamento elastoplástico

Neste exemplo é realizada a análise de uma viga bi-apoiada enrijecida de maneira semelhante a realizada no exemplo 8.10. A viga é considerada apenas com metade de sua altura original e enrijecida de forma que o conjunto “viga + enrijecedor” recupere a altura original da viga. As características geométricas da viga estão ilustradas na figura 8.42.

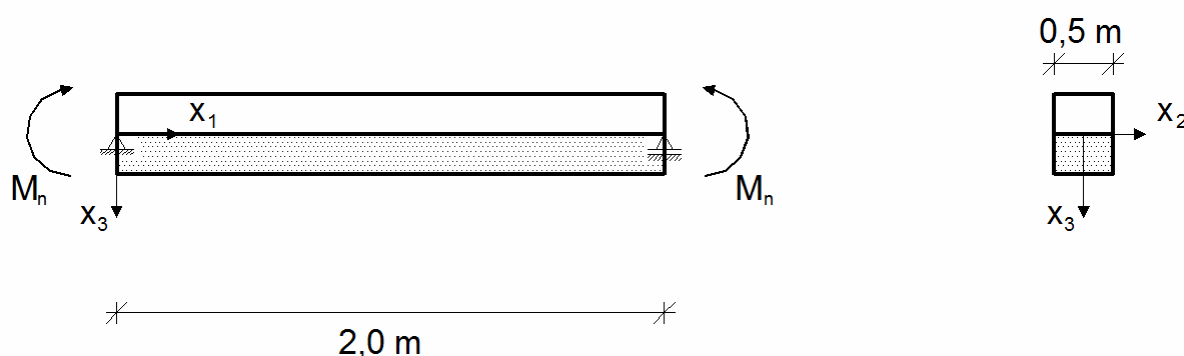


Figura 8.42 – Viga bi-apoiada enrijecida.

A viga é submetida a um momento igual a $M_n = 4200$ kNm/m distribuído em seus lados menores. A análise foi efetuada dividindo-se o carregamento total em 50 incrementos uniformes. Como condições de contorno têm-se bordas apoiadas ($w = M_n = 0$) para os lados menores da viga e bordas livres ($M_n = V_n = 0$) para os lados maiores.

O material possui como características físicas um comportamento elastoplástico, com módulo de elasticidade longitudinal $E = 300$ MPa, coeficiente de Poisson nulo, módulo de encruamento $k = 150$ MPa e tensão inicial de escoamento $\sigma_y = 0,3$ MPa.

A malha utilizada nas simulações numéricas é composta por 100 elementos de contorno uniformemente distribuídos ao longo de toda a viga e acrescida por 40 elementos distribuídos em seu eixo longitudinal de forma similar o enrijecimento e avaliar os efeitos de domínio (análise não-linear).

A altura da viga e do conjunto “viga + enrijecedor”, $t_p = 0,1\text{ m}$ e $t_e = 0,2\text{ m}$, respectivamente, implicam em um fator de enrijecimento $\psi_p = 8$. A curva de carga x deslocamento do ponto central da viga fornecida pelo programa implementado juntamente com a curva obtida no programa ANSYS estão ilustradas na figura 8.43.

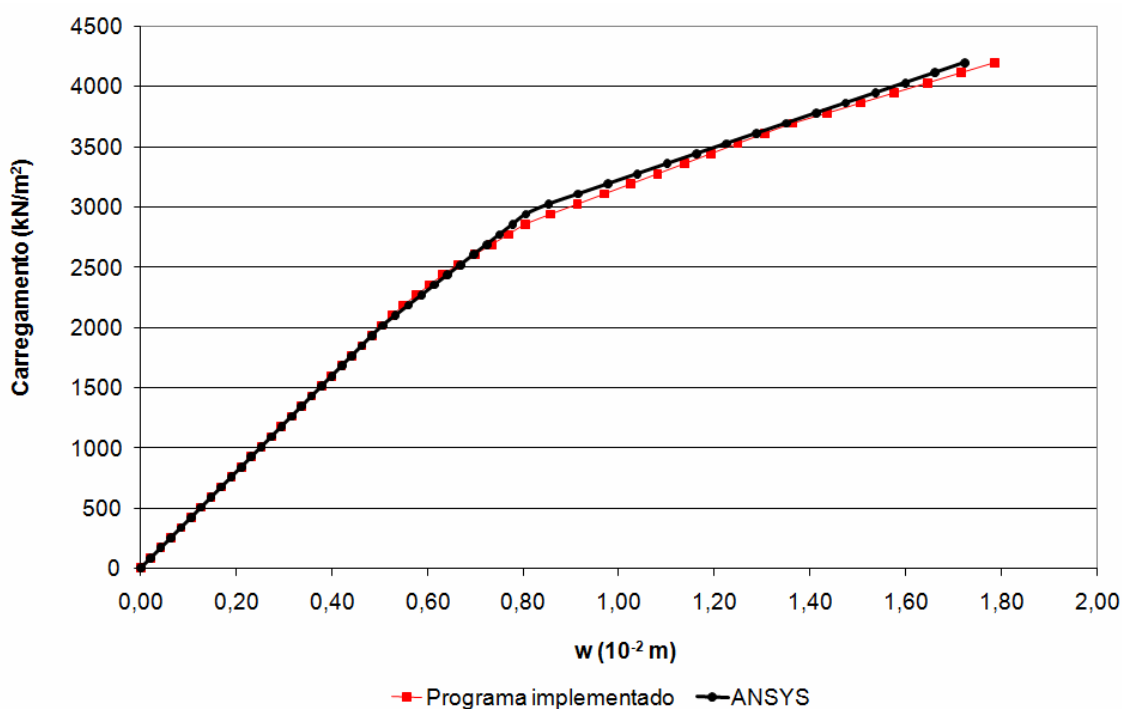


Figura 8.43 – Curva carga x deslocamento do ponto central da viga.

As curvas de carga x deslocamento do ponto central da viga obtida pelo programa computacional implementado apresentou-se bem próxima da curva fornecida pelo programa comercial ANSYS. Tal comportamento ilustra o correto desenvolvimento e a correta implementação da formulação desenvolvida neste trabalho para a análise elastoplástica de placas enrijecidas submetidas à flexão simples.

8.14 – Placa enrijecida por duas vigas paralelas submetida à flexão simples considerando-se o comportamento elastoplástico

Este exemplo consiste na análise de uma placa enrijecida por duas vigas paralelas submetida à flexão simples e considerando-se o comportamento elastoplástico do material.

A exemplo do que foi feito no exemplo 8.7 também neste exemplo o carregamento foi definido de forma que os momentos aplicados produzissem as mesmas curvaturas na placa e na viga. As características geométricas e o carregamento aplicado estão ilustrados na figura 8.44.

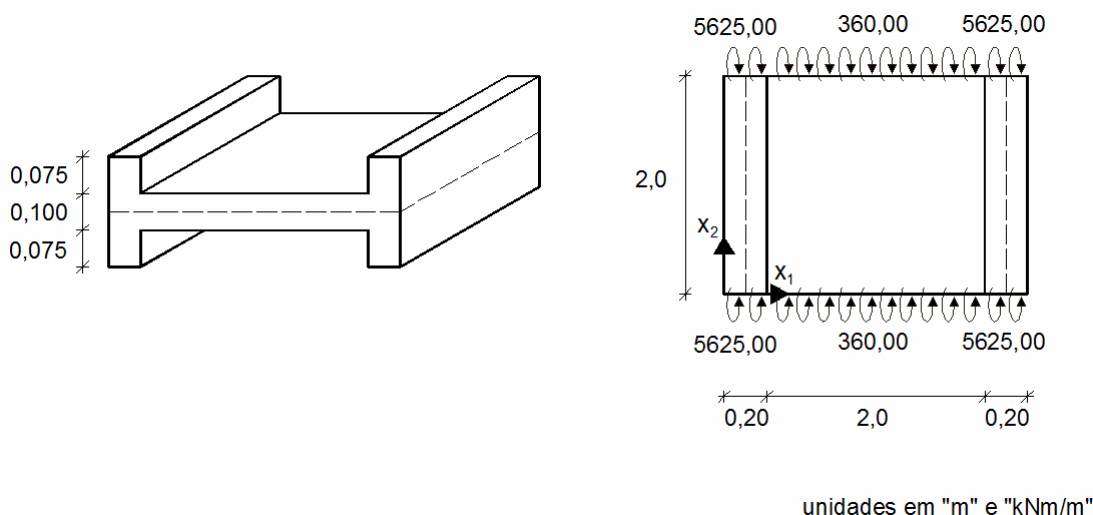


Figura 8.44 – Placa enrijecida por duas vigas paralelas e submetida à flexão simples.

As condições de contorno do problema são definidas por bordas simplesmente apoiadas ($w = M_n = 0$) onde são aplicados os momentos fletores e bordas livres ($M_n = V_n = 0$) para as demais.

Como características físicas do problema têm-se: módulo de elasticidade longitudinal $E = 2,7 \times 10^5$ MPa, módulo de encruamento $k = 1,35 \times 10^5$ MPa, tensão inicial de escoamento $\sigma_y = 240$ MPa e coeficiente de Poisson nulo. As espessuras da placa e do enrijecedor, $t_p = 0,10$ m e $t_e = 0,25$ m, respectivamente, definem o fator de correção de rigidez $\psi_p = 15,625$.

As simulações numéricas foram realizadas utilizando-se uma malha composta por 88 elementos no contorno da placa e 40 elementos distribuídos nos eixos médios dos enrijecedores. Além dos elementos dos enrijecedores, para a avaliação dos efeitos de domínio foi utilizada uma malha interna composta por 32 células triangulares dispostas de maneira simétrica ao ponto central da placa. A malha utilizada está ilustrada na figura 8.45.

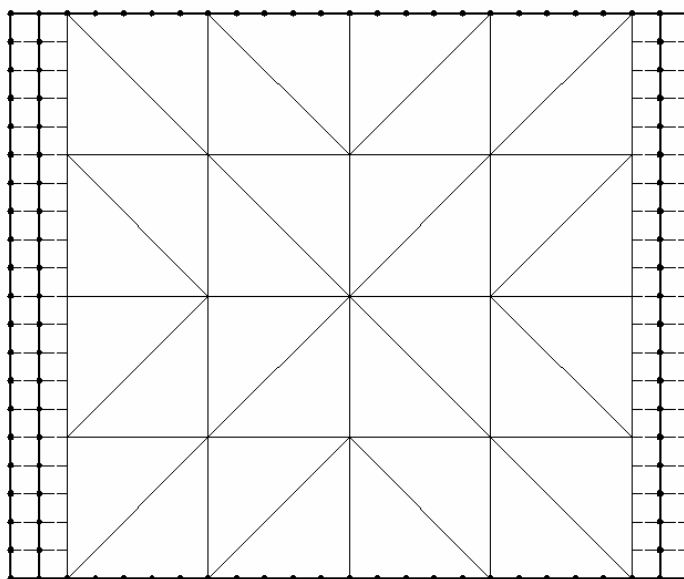


Figura 8.45 – Placa enrijecida por duas vigas paralelas e submetida à flexão simples: malha utilizada.

O carregamento total aplicado foi dividido em 25 incrementos iguais de forma a permitir a elaboração de uma curva de momento x deslocamento para os pontos médios da placa e do enrijecedor. Os resultados obtidos pela análise em questão juntamente com os fornecidos pelo programa ANSYS estão ilustrados na figura 8.46.

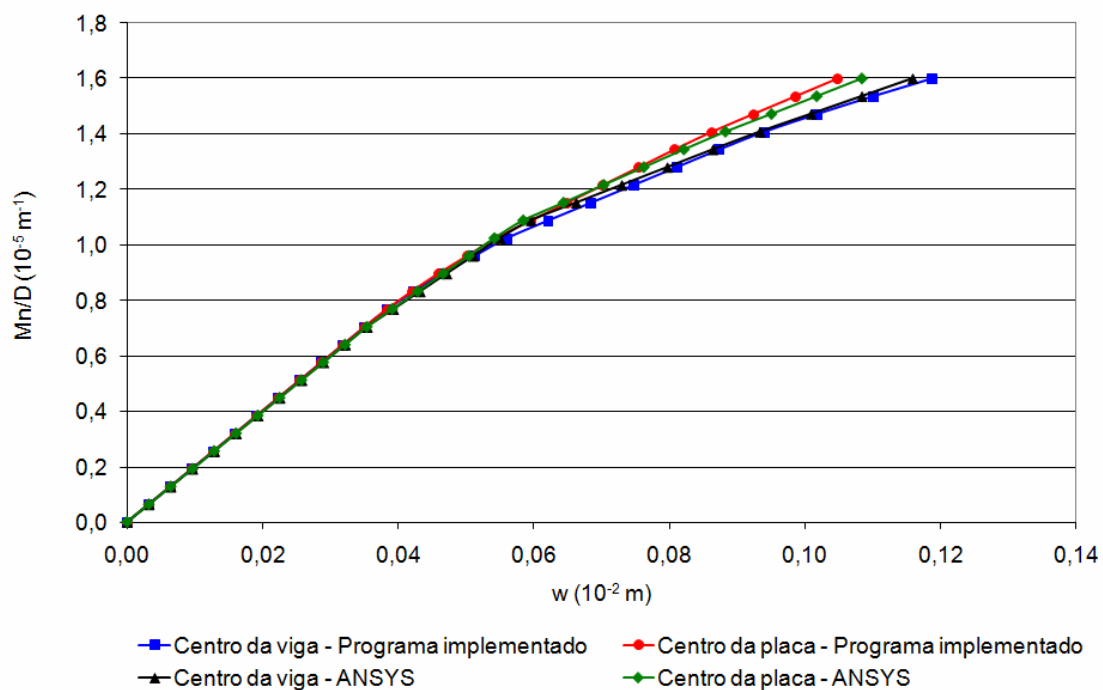


Figura 8.46 – Curva momento x deslocamento para os pontos médios das vigas e da placa.

A exemplo do ocorrido no exemplo anterior, novamente para a análise elastoplástica utilizando-se a formulação desenvolvida para placas enrijecidas submetidas à flexão simples as curvas obtidas apresentaram-se bem próximas das curvas fornecidas pelo programa comercial, o que confirma o correto desenvolvimento da formulação proposta.

8.15 – Viga enrijecida tracionada considerando-se o comportamento elastoplástico

Este exemplo trata de um caso simples onde uma viga bi-apoiada tracionada é analisada considerando-se o comportamento elastoplástico do material. Também neste exemplo foi utilizada a alternativa apresentada em exemplos anteriores de considerar uma viga enrijecida de forma que a altura do conjunto “viga + enrijecedor” recuperasse a altura da viga original. As características geométricas, as condições de vinculação e o carregamento aplicado estão ilustrados na figura 8.47.

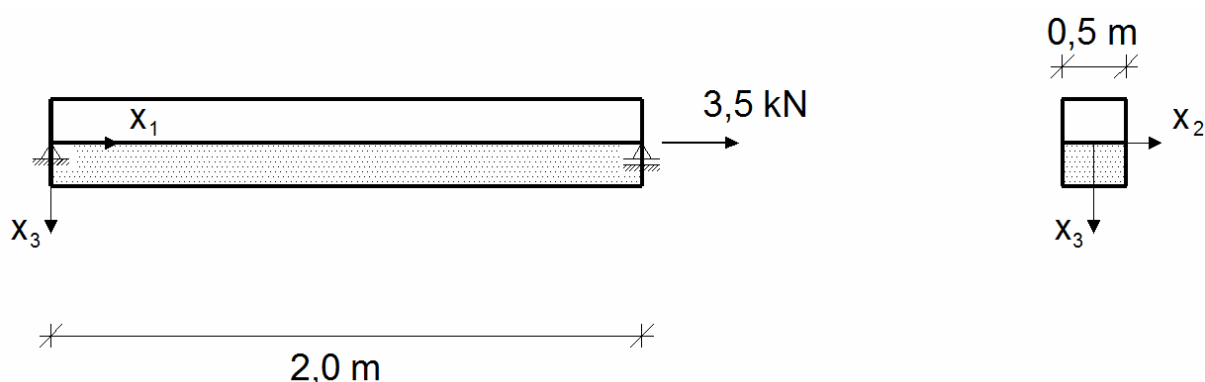


Figura 8.47 – Viga enrijecida tracionada.

As características físicas do material são dadas por módulo de elasticidade longitudinal $E = 2700$ MPa, módulo de encruamento $k = 1000$ MPa, tensão inicial de escoamento $\sigma_y = 3 \times 10^{-3}$ MPa e coeficiente de Poisson nulo. A altura da viga e do conjunto “viga + enrijecedor”, $t_p = 0,5$ m e $t_e = 1,0$ m, respectivamente, dão origem ao coeficiente de enrijecimento $\psi_c = 2,0$.

A análise foi efetuada utilizando-se uma malha composta por 44 elementos de contorno distribuídos de maneira uniforme ao longo dos quatro lados da viga. De

forma a considerar os efeitos do enrijecimento foi utilizada uma malha adicional de 20 elementos dispostos no eixo médio do mesmo.

O carregamento total foi dividido em 100 incrementos iguais de forma a permitir a construção de uma curva de normal x deslocamento do ponto de aplicação do carregamento. A curva obtida juntamente com a fornecida pelo programa ANSYS está ilustrada na figura 8.48.

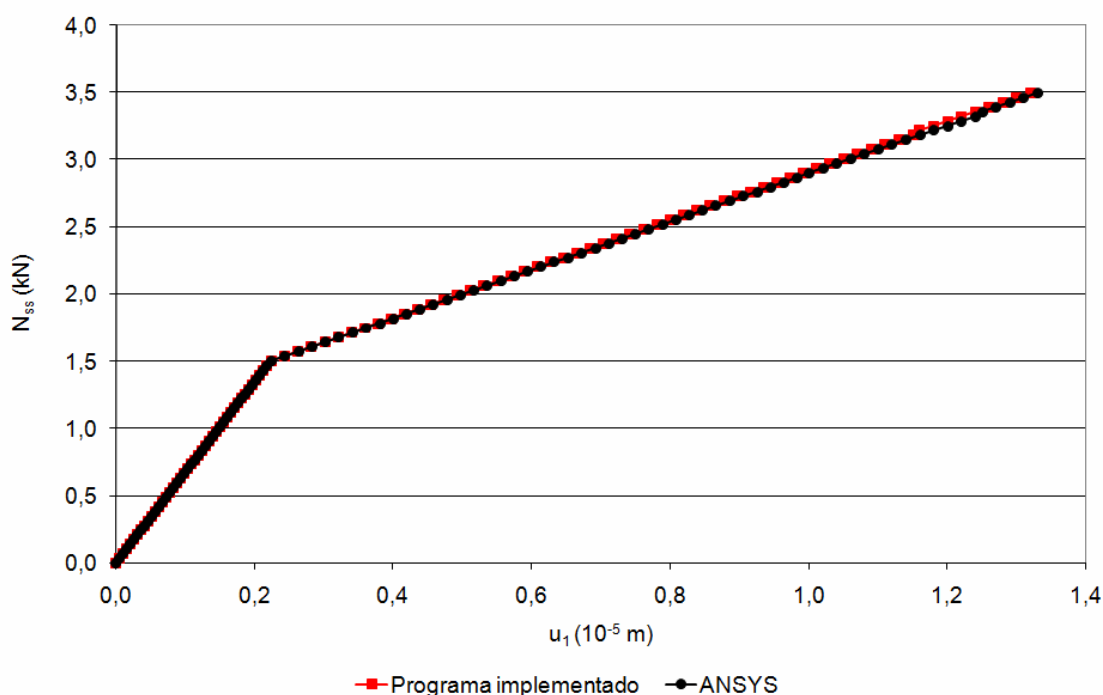


Figura 8.48 – Curva normal x deslocamento para o ponto de aplicação do carregamento.

O objetivo deste exemplo é verificar o comportamento da formulação desenvolvida na análise elastoplástica de elementos estruturais submetidos a carregamentos em seu plano médio através de uma análise simples em uma viga submetida a esforços de tração.

A curva de normal x deslocamento obtida pelo programa implementado apresentou-se praticamente idêntica à fornecida pela análise efetuada no programa comercial, o que ilustra o correto desenvolvimento e implementação da formulação no estudo proposto. É importante ressaltar que as demais parcelas de enrijecimento negligenciadas novamente não influenciaram no resultado final uma vez que nesse tipo de análise os esforços se concentram apenas na direção longitudinal da viga.

8.16 – Placa enrijecida por duas vigas paralelas submetida à flexão composta considerando-se o comportamento elastoplástico

Semelhante ao efetuado no exemplo 8.11 deste trabalho novamente é apresentada a análise de uma placa enrijecida por dois enrijecedores paralelos e submetida à flexão composta. Neste caso é considerado o comportamento elastoplástico do material.

A placa possui as características geométricas e os carregamentos ilustrados na figura 8.49.

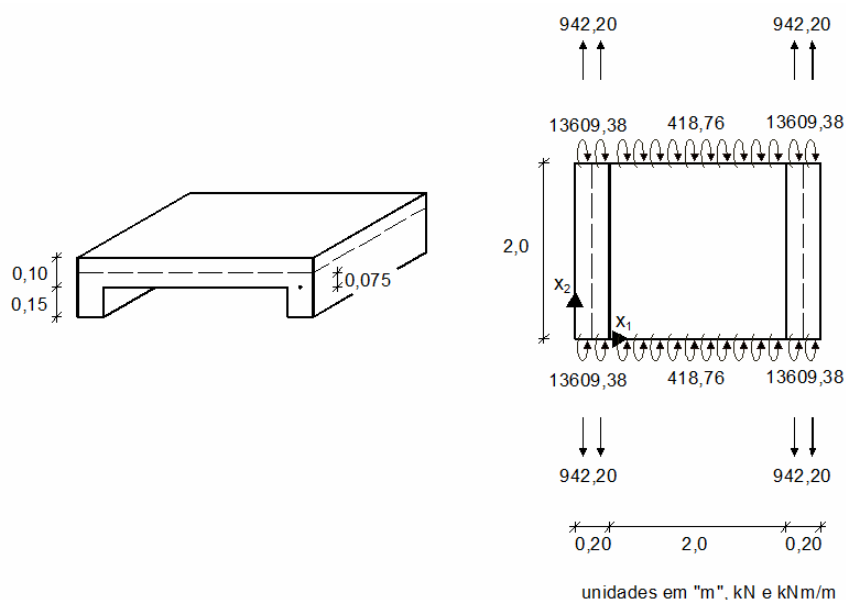


Figura 8.49 – Placa enrijecida por duas vigas paralelas e submetida à flexão composta.

As condições de vinculação consideradas correspondem a bordas livres ($M_n = V_n = 0$) coincidentes com os enrijecedores e bordas simplesmente apoiadas ($w = M_n = 0$) onde estão sendo aplicados os carregamentos. Para o material foi considerado um comportamento elastoplástico definido pelos seguintes parâmetros: módulo de elasticidade longitudinal $E = 2,7 \times 10^5$ MPa, módulo de encruamento $k = 1,08 \times 10^5$ MPa, tensão inicial de escoamento $\sigma_y = 240$ MPa e coeficiente de Poisson nulo.

Tomando como superfície de referência o plano médio da placa, o posicionamento do enrijecedor define a excentricidade $c = 0,075$ m e as espessuras da placa e do enrijecedor, $t_p = 0,10$ m e $t_e = 0,25$ m, respectivamente, definem os coeficientes de correção de rigidez $\psi_p = 15,625$ e $\psi_c = 2,5$.

A malha utilizada para as simulações numéricas é a mesma utilizada no exemplo 8.14, ou seja, composta por 88 elementos no contorno da placa, 40 elementos distribuídos nos eixos médios dos enrijecedores e 32 células triangulares dispostas de maneira simétrica ao centro da placa. A disposição dos elementos e das células triangulares pode ser visualizada através da figura 8.45.

Este exemplo foi inicialmente proposto por Fernandes (2003). Os resultados de deslocamento para o ponto central dos enrijecedores estão ilustrados na figura 8.50.

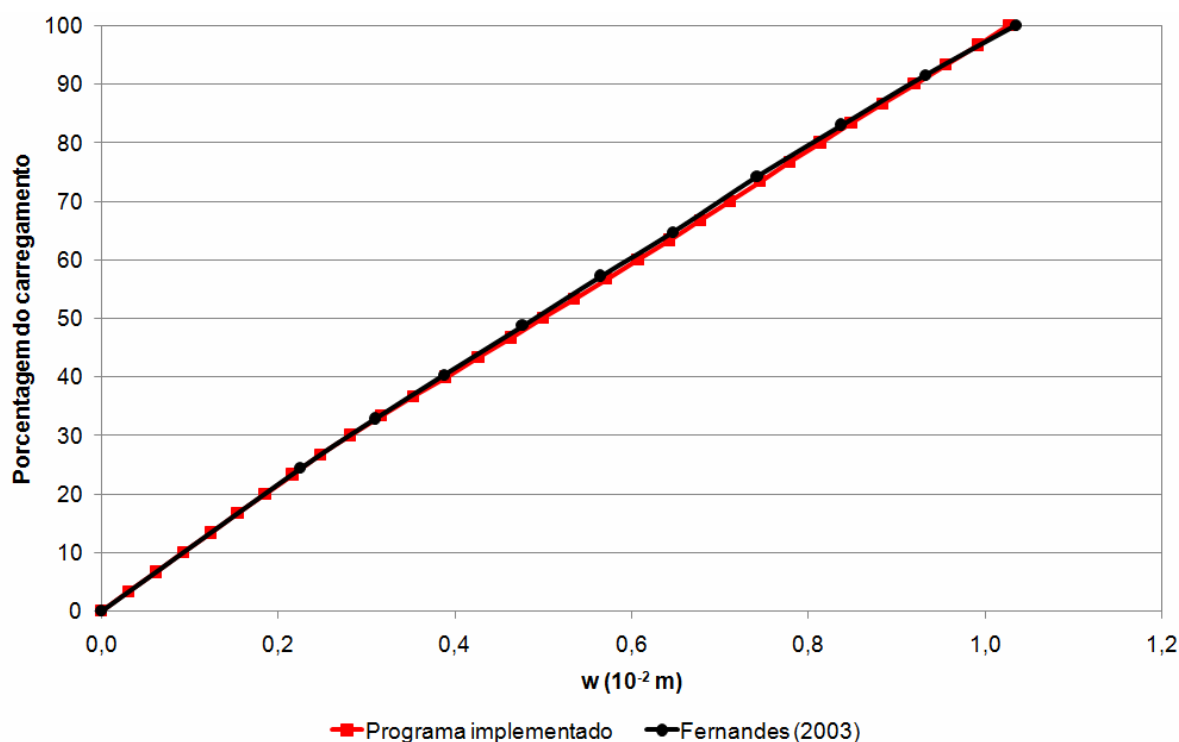


Figura 8.50 – Curva carga x deslocamento para o ponto central do enrijecedor.

A proximidade dos resultados obtidos com os fornecidos por Fernandes (2003) ilustram mais uma vez o correto desenvolvimento da formulação proposta. Nesse caso é importante ressaltar que, também para análises elastoplásticas, o

modelo desenvolvido que considera apenas o enrijecimento na direção longitudinal do enrijecedor apresenta falhas em situações onde as demais parcelas se fazem necessárias.

CONSIDERAÇÕES FINAIS**9.1 – Conclusões**

O presente trabalho teve como objetivo principal apresentar uma formulação do método dos elementos de contorno para a análise elastoplástica de placas geometricamente não-lineares e também propor uma formulação alternativa e simplificada para a análise elastoplástica de placas enrijecidas.

Em um primeiro momento foi apresentada uma breve descrição dos fundamentos da teoria da elasticidade e da teoria clássica de flexão de placas que serviram de base para o desenvolvimento de todo o trabalho. Além disso, foram apresentadas as soluções fundamentais dos problemas de chapa e de placa necessárias para a aplicação do MEC na resolução dos problemas propostos.

Na seqüência, apresentou-se um estudo do efeito da não-linearidade geométrica em problemas de placas. Assim, foram apresentados a equação diferencial que rege o problema de não-linearidade geométrica em placas e o desenvolvimento das equações integrais referentes ao problema de flexão de placas e de membrana. Na seqüência toda a formulação integral desenvolvida foi estendida de modo a englobar o problema não-linear geométrico de placas sujeito à presença de campos de esforços iniciais que, posteriormente, foi utilizado para a consideração dos efeitos não-lineares físicos nas análises.

Uma vez apresentado o equacionamento do problema de placas considerando as não-linearidades física e geométrica partiu-se para a dedução das equações integrais para o estudo de placas enrijecidas. Um primeiro estudo foi feito considerando-se apenas o problema de placas enrijecidas submetidas à flexão simples com o plano médio do enrijecedor coincidindo com o plano médio da placa. Na seqüência foi apresentado o desenvolvimento das equações integrais referentes ao problema de flexão composta em placas enrijecidas, onde o eixo médio do enrijecedor não coincide necessariamente com o eixo médio da placa.

Com o objetivo de estudar o comportamento dos painéis enrijecidos compostos por materiais que apresentem um comportamento elastoplástico, o equacionamento do problema de flexão composta em placas enrijecidas foi estendido de modo a englobar os efeitos de campos de esforços iniciais.

Apresentados os desenvolvimentos das equações integrais que compõem o trabalho efetuado, partiu-se para a apresentação do modelo elastoplástico que foi utilizado nas análises não-lineares. Na seqüência, o MEC foi utilizado para a obtenção das requeridas equações algébricas referentes ao problema não-linear físico e geométrico de placas e também para o problema de placas enrijecidas considerando-se ou não o comportamento não-linear do material. O procedimento de integração nos elementos do contorno e nos enrijecedores, o procedimento incremental-iterativo para a resolução dos sistemas não-lineares de equações e o desenvolvimento dos operadores tangentes consistentes para os problemas propostos foram também apresentados.

Por fim alguns exemplos foram simulados nos programas computacionais elaborados visando atestar a validade e a correta implementação das formulações apresentadas.

A formulação apresentada para a análise não-linear de placas simples se mostrou bastante eficiente na resolução dos problemas propostos no capítulo 8. Os resultados obtidos, quando comparados com valores fornecidos por outros autores e/ou com soluções obtidas em simulações no programa comercial ANSYS ilustram a correta formulação e implementação computacional.

Em todos os casos a solução do sistema não-linear de equações foi obtida através de um procedimento implícito com o uso do operador tangente consistente. O procedimento incremental-iterativo apresentou boa convergência aliada a um baixo tempo de processamento conforme esperado.

Com relação ao problema linear de placas enrijecidas, a formulação proposta neste trabalho apresenta como principais características a simplicidade nas equações integrais finais quando comparadas a outras formulações do MEC propostas por outros pesquisadores, e uma redução considerável no número de graus de liberdade do problema.

A simplicidade nas equações integrais finais foi conquistada pela maneira particular de induzir a correção de rigidez ao modelo, feita através da consideração

de um campo de esforços corretores aplicados ao painel enrijecido. Tal consideração implicou apenas no acréscimo de integrais no domínio dos enrijecedores nas formulações lineares de placas e chapas simples. Por fim, de forma a simplificar ainda mais a formulação, as integrais no domínio dos enrijecedores foram transformadas em integrais no contorno dos mesmos e as variáveis de domínio consideradas apenas em seu eixo longitudinal.

Já a redução no número de graus de liberdade do problema foi proporcionada pelo fato de se considerar apenas o ganho de rigidez proporcionado pelos enrijecedores em sua direção longitudinal.

Os problemas analisados no capítulo 8 demonstraram a correta formulação do problema. Muitos dos resultados foram comparados com as soluções analíticas do exemplo em análise, o que demonstrou a obtenção de resultados precisos através da formulação proposta. Em alguns exemplos a formulação deixou o modelo menos rígido quando comparado com resultados fornecidos por outros pesquisadores, apresentando, dessa forma, apenas soluções aproximadas. Acredita-se que tal deficiência venha do fato de se considerar apenas o ganho de rigidez na direção longitudinal do enrijecedor com as demais parcelas desprezadas.

O mesmo comportamento da formulação foi evidenciado nas análises elastoplásticas de painéis enrijecidos. Também nesse caso alguns modelos apresentaram soluções aproximadas ilustrando a deficiência em se considerar apenas algumas parcelas de enrijecimento.

Vale ressaltar que a solução do sistema não-linear de equações nos problemas de painéis enrijecidos também foi obtida com o uso de um procedimento implícito, com soluções precisas e tempos de processamento reduzidos.

9.2 – Proposta para desenvolvimentos futuros

De forma mais imediata e visando confirmar a formulação alternativa para a solução de placas enrijecidas apresentada neste trabalho, pode-se sugerir a implementação computacional das demais parcelas de enrijecimento aqui negligenciadas. Acredita-se que, uma vez consideradas todas as componentes, a formulação apresentada tende a fornecer soluções precisas em análises de qualquer tipo de painel enrijecido.

Também em se tratando de problemas de placas enrijecidas propõe-se desenvolver e implementar o efeito da não-linearidade geométrica na formulação proposta, o que possibilitaria uma análise mais completa de tais elementos estruturais.

Ainda como sugestões para desenvolvimentos futuros pode-se propor a implementação de algoritmos para a consideração de comportamentos viscosos e viso-plásticos do material, o desenvolvimento da formulação tendo como base a teoria de Reissner para a flexão de placas e também a utilização do método da reciprocidade dual para a integração no domínio da placa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS E BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ALTIERO, N. J.; SIKARSKIE, L. D. (1978) A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. **Computers & Structures**, v. 9, n. 2, p. 163-168.

ANDRADE, R.C. (2001) **Uma análise das soluções fundamentais aplicáveis às placas espessas pelas teorias de Reissner e Mindlin e suas relações com a teoria clássica para o uso no método dos elementos de contorno**. 248 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade de Campinas, Campinas.

BENALLAL, A.; FUDOLI, C. A.; VENTURINI, W. S. (2002) An implicit BEM formulation for gradient plasticity and localization phenomena. **International Journal for numerical methods in engineering**, v. 53, n. 8, p. 1853-1869.

BERGER, H. M.; WASHINGTON, D. C. (1955) A new approach to the analysis of large deflections of plates. **Journal of Applied Mechanics**, v. 22, n. 4, p. 465-472.

BÉZINE, G. (1978) Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. **Mechanics Research Communications**, v. 5, n. 4, p. 197-206.

BÉZINE, G. (1980) A mixed boundary integral – Finite element approach to plate vibration problems. **Mechanics Research Communications**, v. 7, n. 3, p. 141-150.

BÉZINE, G. (1981) A boundary integral equation method for plate flexure with conditions inside the domain. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 11, p. 1647-1657.

BÉZINE, G.; CIMETIERE, A.; GELBERT, J. P. (1985) Unilateral buckling of thin elastic plates by the boundary integral equation method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 21, n. 12, p. 2189-2199.

BÉZINE, G.; GAMBY, D. A. (1978) New integral equation formulation for plate bending problems. In: BREBBIA, C. A. **Recent advances in boundary element methods**. Pentech Press.

BONNET, M.; MUKHERJEE, S. (1996) Implicit BEM formulations for usual and sensitivity problems in elasto-plasticity using the consistent tangent operator concept. **International Journal of Solids and Structures**, v. 33, n. 30, p. 4461-4480.

BOTTA, A. S. (2003) **Método dos elementos de contorno para a análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformações**. 176 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. (1984) **Boundary elements techniques: theory and applications in engineering**. Berlin: Springer-Verlag

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. (1989) **Boundary elements: an introductory course**. Southampton: Computational Mechanics Publications. 292p. ISBN 0-905451-76-7

BUI, H. D. (1978) Some remarks about the formation of three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations. **International Journal of Solids and Structures**, v. 14, p. 935-939.

CALDERÓN, E. T. (1991) **Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno**. 191 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

CHUEIRI, L. H. M. (1994) **Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas**. 219 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

CHUEIRI, L. H. M.; VENTURINI, W. S. (1995) Elastoplastic BEM to model concrete slabs. In: BREBBIA, C. A. et al. **Boundary element XVII**. Computational Mechanics Publications.

DANSON, D.J. (1980) **Analysis of plate bending problems by the direct boundary element method**. 93 f. Dissertation (Msc. in Advanced Structural Engineering) – Faculty of Engineering and Applied Science, University of Southampton.

DEB, A.; DEB, M. K.; BOOTON, M. (1991) Analysis of orthotropically modeled stiffened plates. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 27, n. 5, p. 647-664.

FERNANDES, G. R. (1998) **O método dos elementos de contorno aplicado à análise não-linear de placas**. 178 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

FERNANDES, G. R. (2003) **Análise não-linear de estruturas de pavimentos de edifícios através do método dos elementos de contorno**. 272 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

FERNANDES, G. R.; VENTURINI, W. S. (2002) Non-linear boundary element analysis of plates applied to concrete slabs. **Computational Mechanics**, v. 28, p. 275-281.

FERNANDES, G. R.; VENTURINI, W. S. (2007) Non-linear boundary element analysis of floor slabs reinforced with rectangular beams. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 31, p. 721-737.

FUDOLI, C. A. (1999) **Formulação do método dos elementos de contorno e plasticidade com gradiente**. 151 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

FUNG, Y. C. (1965) **Foundations of solid mechanics**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 525p. ISBN 0-905451-76-7

HANSEN, E. B. (1976) Numerical solution of integro-differential and singular equations for plate bending problems. **Journal of Elasticity**, v. 6, n. 1, p. 39-56.

HARTLEY, G. A. (1996) Development of plate bending elements for frame analysis **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 17, p. 93-104.

HARTMANN, F.; ZOTEMANTEL, R. (1986) The direct boundary element method in plate bending. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 23, n. 11, p. 2049-2069.

HU, C.; HARTLEY, G. A. (1994) Elastic analysis of thin plates with beam supports. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 13, p. 229-238.

JASWON, H.; MAITI, M.; SYMM, G. J. (1967) Numerical biharmonic analysis and some applications. **International Journal of Solids and Structures**, v. 3, n. 3, p. 309-332.

JASWON, M. A.; SYMM, G.T. (1977) **Integral equation methods in potential theory and elastostatics**. London: Academic Press Inc. LTD. 287p. ISBN 0-12-381050-7

KAMIYA, N.; SAWAKI, Y. (1982) An integral equation approach to finite deflection of elastic plates. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 17, n. 3, p. 187-194.

KAMIYA, N.; SAWAKI, Y. (1984) Finite deflection of plates. In: BREBBIA, C. A. **Topics in boundary elements**, v. 1, p. 204-224, Springer-Verlag.

KAMIYA, N.; SAWAKI, Y.; NAKAMURA, Y.; FUKUI, A. (1982) An approximate finite deflection analysis of heated elastic plate by boundary element method. **Applied Mathematical Modelling**, v. 6, n. 1, p. 1-72.

KAMIYA, N.; SAWAKI, Y.; NAKAMURA, Y. (1983) Non-linear bending analyses of heated sandwich plates and shells by the boundary element method. **Res Mechanica**, v. 8, n. 1, p. 29-83.

KATSIKADELIS, J. T.; ARMENAKAS, A. E. (1984) Analysis of clamped plates on elastic foundation by the boundary integral method. **Journal of Applied Mechanics**, v. 110, n. 7, p. 1085-1104.

LIN, J.; DUFFIELD, R. C.; SHIH, H. R. (1999) Buckling analysis of elastic plates by boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 23, p. 131-137.

LOVE, A. E. H. (1934) **A treatise on the mathematical theory of elasticity**. Cambridge: University Press. 643p.

MINDLIN, R. D. (1951) Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. **Journal of Applied Mechanics**, n. 13, p. 31-38.

MOSHAIQV, A.; VORUS, W. S. (1986) Elasto-plastic plate bending analysis by a boundary element method with internal initial plastic moments. **International Journal of Solids and Structures**, v. 22, p. 1213-1229.

NERANTZAKI, M. S.; KATSIKADELIS, J. T. (1996) Buckling of plates with variable thickness – an analog equation solution. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 18, p. 149-154.

NG, S. F.; CHEUNG, M. S.; XU, T. (1990) A combined boundary element and finite element solution of slab and slab-on-girder bridges. **Computers & Structures**, v. 37, n. 6, p. 1069-1075.

OLIVEIRA, R. S. (1997) **Análise de pavimentos de edifícios de concreto armado com a consideração da não-linearidade física**. 123 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

PAIVA, J. B. (1987) **Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas**. 195 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

PAIVA, J. B. (1996) Boundary element formulation of building slabs. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 17, p. 105-110.

PAIVA, J. B.; VENTURINI, W.S. (1987) Uma formulação alternativa para a resolução de placas via método dos elementos de contorno. In: CONGRESSO LATINO AMERICANO E IBÉRICO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 8, 1987, Rio de Janeiro. **Anais...** Rio de Janeiro: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, v. B, p. 307-314.

POON, H.; MUKHERJEE, S.; BONNET, M. (1998) Numerical implementation of a CTO-based implicit approach for the BEM solution of usual and sensitivity problems in elasto-plasticity. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 22, p. 257-269.

PROENÇA, S. P. B. (2004) **Análise não-linear de estruturas: notas de aula**. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP. Notas de Aula.

PURBOLAKSONO, J.; ALIABADI, M. H. (2005) Buckling analysis of shear deformable plates by boundary element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 62, n. 4, p. 537-563.

REISSNER, E. (1944) On the theory of bending of elastic plates. **Journal of Mathematics and Physics**, n. 23, p. 184-191.

REISSNER, E. (1945) The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. **Journal of Applied Mechanics**, n. 12, p. A69-A77.

SILVA, N.A. (1996) **Aplicação do método dos elementos de contorno à placas com enrijecedores utilizando a teoria de Reissner**. 230 f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

SIMO, J. C.; HUGHES, T. J. R. (1998) **Computational inelasticity**. New York: Springer. 392p.

SIMO, J. C.; TAYLOR, R. L. (1985) Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 48, n. 1, p. 101-118.

SIMO, J. C.; TAYLOR, R. L. (2005) Return Mapping Algorithm for plane stress elastoplasticity. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 22, n. 3, p. 649-670.

SIMÕES, R., PALERMO JR., L; MESQUITA NETO, E. (2004a) Análise de placas elásticas com deslocamentos finitos. In: IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 25, 2004, Recife. **CD-ROM**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco.

SIMÕES, R., PALERMO JR., L; MESQUITA NETO, E. (2004b) Estudo de placas elásticas comprimidas com o efeito dos deslocamentos finitos. In: IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 25, 2004, Recife. **CD-ROM**. Recife: Universidade Federal de Pernambuco.

SONG, G. S.; MUKHERJEE, S. (1986) Boundary element method analysis of bending of elastic plates of arbitrary shape with general boundary conditions. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 3, p. 36-44.

STERN, M. (1979) A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. **International Journal of Solids and Structures**, v. 15, n. 10, p. 769-782.

STERN, M. (1983) Boundary integral equations for bending of thin plates. In: BREBBIA, C. A. **Progress in boundary element method**. London, Pentech Press, v 1.2.

SUPRIYONO; ALIABADI, M.H. (2006) Boundary element method for shear deformable plates with combined geometric and material nonlinearities. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 30, p. 31-42.

SUPRIYONO; ALIABADI, M.H. (2007) Analysis of shear deformable plates with combined geometric and material nonlinearities by boundary element method. **International Journal for solids and structures**, v. 44, p. 1038-1059.

SYNGELLAKIS, S.; ELZEIN, A. (1994) Plate buckling loads by the boundary element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, n. 10, p. 1763-1778.

SYNGELLAKIS, S.; KANG, M. (1987) A boundary element solution of the plate buckling problem. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 4, p. 75-81.

TANAKA, M.; BERCIN, A. N. (1998) Static bending analysis of stiffened using the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 21, p. 147-154.

TANAKA, M.; MATSUMOTO, T.; ZHENG, Z. D. (1996) Incremental analysis of finite deflection of elastic plates via boundary-domain-element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 17, p. 123-131.

TANAKA, M.; MATSUMOTO, T.; OIDA, S. (2000) A boundary element method applied to the elastostatic bending problem of beam-stiffened plates. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 24, p. 751-758.

TELLES, J. C. F. (1983) **The boundary element method applied to inelastic problems**. Berlin: Springer-Verlag.

TELLES, J. C. F., BREBBIA, C. A. (1980) On the application of the boundary element method to plasticity. **Applied Mathematical Modelling**, v. 3, p. 466-470.

TELLES, J. C. F., KARAN, V. J. (1998) Nonlinear material analysis of Reissner's plates. In: ALIABADI, M. H. **Plate bending analysis with boundary elements**. Computational Mechanics Publications.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. (1980) **Teoria da elasticidade**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois S. A., 545p.

TOTTENHAN, H. (1979) The boundary element method for plates and shells. In: BANERJEE, P. K.; BUTTERFIELD, R. **Boundary element methods**. London, App. Sc. Publ.

VAN DER WEEËN, F. (1982) Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model. In: BREBBIA, C. A. **Boundary element methods in engineering**. Berlin, Springer-Verlag.

VENTURINI, W. S. (1983) Boundary element method in geomechanics. In: BREBBIA, C. A.; ORSZAG, S. A. **Lecture notes in engineering**. Berlin, Springer-Verlag, v 4.

VENTURINI, W. S., BREBBIA, C. A. (1983) Some applications of the boundary element method in geomechanics. **International journal for numerical and analytical methods in geomechanics**, v. 7, n. 4, p. 419-433.

VENTURINI, W. S., BREBBIA, C. A. (1984) Boundary element formulation for nonlinear applications in geomechanics. **Applied mathematical modelling Lecture notes in engineering**, v. 8, n. 4, p. 251-260.

WANG, W.; JI, X.; TANAKA, M. (2000) A dual reciprocity boundary element approach for the problems of large deflection of thin elastic plates. **Computational Mechanics**, v. 26, p. 58-65.

WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; YOUNG, A. (2005) Large deflection analysis of Reissner plate by boundary element method. **Computers & Structures**, v. 83, p. 870-879.

WU, B. C.; ALTIERO, N. J. (1979) A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. **Computers & Structures**, v. 10, n. 4, p. 703-707.

YAN, L. X.; KUANG, H. M.; XIUXI, W. (1990) Geometrically nonlinear analysis of a Reissner type plate by the boundary element method. **Computers & Structures**, v. 37, n. 6, p. 911-916.

YE, T. Q.; LIU, Y. (1985) Finite deflection analysis of elastic plate by the boundary element method. **Applied Mathematical Modelling**, v. 9, n. 3, p. 183-188.

APÊNDICE

Integrais analíticas para o problema de flexão de placas

Quando o ponto Q pertence ao elemento a ser integrado, o integrando apresenta uma singularidade decorrente das funções fundamentais. Nestes casos é conveniente que sua integração seja feita analiticamente.

Em se tratando das integrais analíticas que envolvem as soluções fundamentais θ_n^* e V_n^* , tem-se que seus valores são nulos, pois tais funções apresentam em suas expressões o cosseno do ângulo formado entre o vetor r e a normal dos elementos, que, neste caso é 90° .

A seguir apresenta-se o valor das integrais analíticas de w^* e M_n^* para os possíveis posicionamentos do ponto fonte, conforme ilustra a figura A.1.

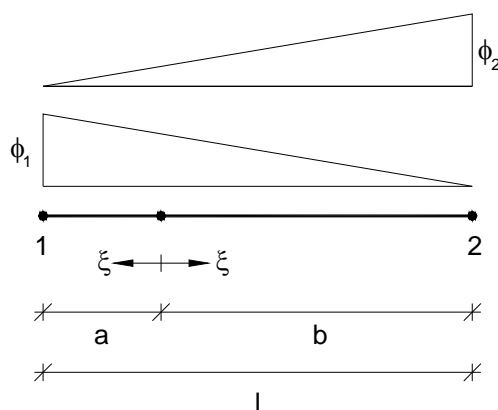


Figura A.1 – Flexão de placas: posicionamento do ponto fonte sobre o elemento.

➤ Ponto fonte no início do elemento ($a = 0$):

$$\int_{\Gamma_i} w^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = \frac{L^3}{96\pi D} \left(\ln L - \frac{13}{12} \right)$$

$$\int_{\Gamma_i} M_n^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = \frac{L}{8\pi} \left[\frac{(1+\nu)}{2} (3 - 2 \cdot \ln L) - \nu \right]$$

$$\int_{\Gamma_i} w^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = \frac{L^3}{32\pi D} \left(\ln L - \frac{3}{4} \right)$$

$$\int_{\Gamma_i} M_n^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = \frac{L}{8\pi} \left[\frac{(1+\nu)}{2} (1 - 2 \cdot \ln L) - \nu \right]$$

➤ Ponto fonte no final do elemento ($b = 0$):

$$\int_{\Gamma_i} w^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = \frac{L^3}{32\pi D} \left(\ln L - \frac{3}{4} \right)$$

$$\int_{\Gamma_i} M_n^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = \frac{L}{8\pi} \left[\frac{(1+\nu)}{2} (1 - 2 \cdot \ln L) - \nu \right]$$

$$\int_{\Gamma_i} w^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = \frac{L^3}{96\pi D} \left(\ln L - \frac{13}{12} \right)$$

$$\int_{\Gamma_i} M_n^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = \frac{L}{8\pi} \left[\frac{(1+\nu)}{2} (3 - 2 \cdot \ln L) - \nu \right]$$

➤ Ponto fonte no interior do elemento:

$$\int_{\Gamma_i} w^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = \frac{1}{8\pi DL} \left(\frac{1}{4} a^4 \ln a - \frac{3}{16} a^4 + \frac{1}{3} ba^3 \ln a - \frac{5}{18} ba^3 + \frac{1}{12} b^4 \ln b - \frac{13}{144} b^4 \right)$$

$$\int_{\Gamma_i} M_n^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = \frac{1}{4\pi L} \left[(1+\nu) \left(-ab \ln a - \frac{1}{2} b^2 \ln b - \frac{1}{2} a^2 \ln a \right) + \nu \left(\frac{1}{4} b^2 - \frac{1}{4} a^2 \right) + \frac{3}{4} b^2 + ba + \frac{1}{4} a^2 \right]$$

$$\int_{\Gamma_i} w^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = \frac{1}{8\pi DL} \left(\frac{1}{3} ab^3 \ln b - \frac{5}{18} ab^3 + \frac{1}{12} a^4 \ln a - \frac{13}{144} a^4 + \frac{1}{4} b^4 \ln b - \frac{3}{16} b^4 \right)$$

$$\int_{\Gamma_i} M_n^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = \frac{1}{4\pi L} \left[(1+\nu) \left(-\frac{1}{2} a^2 \ln a - \frac{1}{2} b^2 \ln b - ab \ln b \right) + \nu \left(\frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{4} b^2 \right) + \frac{3}{4} a^2 + ab + \frac{1}{4} b^2 \right]$$

Integrais analíticas para o problema elástico plano

A seguir apresenta-se o valor das integrais analíticas de ρ_{ij}^* e u_{ij}^* para os possíveis posicionamentos do ponto fonte, conforme ilustra a figura A.2.

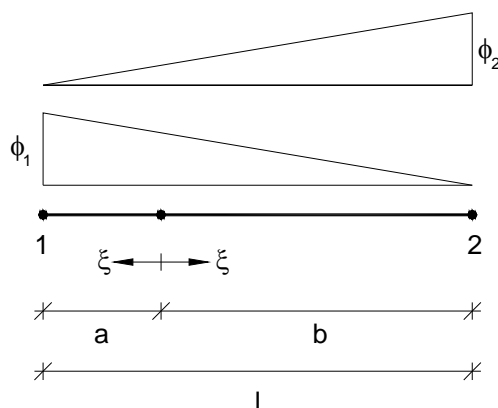


Figura A.2 – Problema elástico plano: posicionamento do ponto fonte sobre o elemento.

$$k_1 = \frac{1-2\nu}{4\pi(1-\nu)}$$

$$k_2 = \frac{L}{16\pi G(1-\nu)}$$

➤ Ponto fonte no início do elemento ($a = 0$):

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{11}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{12}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = k_1 \cdot (1 - \ln(L))$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{11}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{12}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = -k_1$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{21}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = -k_1 \cdot (1 - \ln(L))$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{22}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{21}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = k_1$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{22}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_i} u_{11}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = k_2 \cdot \left((3-4\nu) \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + n_2^2 \right)$$

$$\int_{\Gamma_i} u_{12}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = -k_2 \cdot n_1 \cdot n_2$$

$$\int_{\Gamma_i} u_{11}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = k_2 \cdot \left((3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + n_2^2 \right)$$

$$\int_{\Gamma_i} u_{12}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = -k_2 \cdot n_1 \cdot n_2$$

$$\int_{\Gamma_i} u_{21}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = -k_2 \cdot n_1 \cdot n_2$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{22}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = k_2 \cdot \left((3-4\nu) \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + n_1^2 \right)$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{21}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = -k_2 \cdot n_1 \cdot n_2$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{22}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = k_2 \cdot \left((3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + n_1^2 \right)$$

➤ Ponto fonte no final do elemento ($b = 0$):

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{11}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{12}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = k_1$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{11}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{12}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = -k_1 \cdot (1 - \ln(L))$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{21}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = -k_1$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{22}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{21}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = k_1 \cdot (1 - \ln(L))$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{22}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_i} u_{11}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = k_2 \cdot \left((3 - 4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + n_2^2 \right)$$

$$\int_{\Gamma_i} u_{12}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = -k_2 \cdot n_1 \cdot n_2$$

$$\int_{\Gamma_i} u_{11}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = k_2 \cdot \left((3 - 4\nu) \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + n_2^2 \right)$$

$$\int_{\Gamma_i} u_{12}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = -k_2 \cdot n_1 \cdot n_2$$

$$\int_{\Gamma_i} u_{21}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = -k_2 \cdot n_1 \cdot n_2$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{22}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = k_2 \cdot \left((3 - 4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + n_1^2 \right)$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{21}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = -k_2 \cdot n_1 \cdot n_2$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{22}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = k_2 \cdot \left((3 - 4\nu) \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + n_1^2 \right)$$

➤ Ponto fonte no interior do elemento:

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{11}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{12}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = \frac{k_1}{L} \left(b \cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right) + L \right)$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{11}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_i} \rho_{12}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = \frac{k_1}{L} \left(a \cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right) - L \right)$$

$$\int_{\Gamma_i} p_{21}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = -\frac{k_1}{L} \left(b \cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right) + L \right)$$

$$\int_{\Gamma_i} p_{22}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_i} p_{21}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = -\frac{k_1}{L} \left(a \cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right) - L \right)$$

$$\int_{\Gamma_i} p_{22}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = 0$$

$$\int_{\Gamma_i} u_{11}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = \frac{2k_2}{L^2} \cdot \left\{ -(3-4\nu) \left[\left(a \cdot b + \frac{a^2}{2} \right) \cdot \ln(a) + \frac{b^2}{2} \cdot \ln(b) - \left(\frac{a^2}{4} + a \cdot b + \frac{3b^2}{4} \right) \right] + \frac{L^2}{2} n_2^2 \right\}$$

$$\int_{\Gamma_i} u_{12}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = -k_2 \cdot n_1 \cdot n_2$$

$$\int_{\Gamma_i} u_{11}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = \frac{2k_2}{L^2} \cdot \left\{ -(3-4\nu) \left[\left(a \cdot b + \frac{b^2}{2} \right) \cdot \ln(b) + \frac{a^2}{2} \cdot \ln(a) - \left(\frac{b^2}{4} + a \cdot b + \frac{3a^2}{4} \right) \right] + \frac{L^2}{2} n_1^2 \right\}$$

$$\int_{\Gamma_i} u_{12}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = -k_2 \cdot n_1 \cdot n_2$$

$$\int_{\Gamma_i} u_{21}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = -k_2 \cdot n_1 \cdot n_2$$

$$\int_{\Gamma_i} p_{22}^* \cdot \phi_1 \cdot d\Gamma = \frac{2k_2}{L^2} \cdot \left\{ -(3-4\nu) \left[\left(a \cdot b + \frac{a^2}{2} \right) \cdot \ln(a) + \frac{b^2}{2} \cdot \ln(b) - \left(\frac{a^2}{4} + a \cdot b + \frac{3b^2}{4} \right) \right] + \frac{L^2}{2} n_1^2 \right\}$$

$$\int_{\Gamma_i} p_{21}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = -k_2 \cdot n_1 \cdot n_2$$

$$\int_{\Gamma_i} p_{22}^* \cdot \phi_2 \cdot d\Gamma = \frac{2k_2}{L^2} \cdot \left\{ -(3-4\nu) \left[\left(a \cdot b + \frac{b^2}{2} \right) \cdot \ln(b) + \frac{a^2}{2} \cdot \ln(a) - \left(\frac{b^2}{4} + a \cdot b + \frac{3a^2}{4} \right) \right] + \frac{L^2}{2} n_1^2 \right\}$$

Integrais no domínio da placa

$$\int_{\Omega_k} N_{ij}(p) w_{,ij}(p) w^*(Q,P) d\Omega_k =$$

$$= N_{ij}^N w_{,ij}^N \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \left\{ \frac{1}{32\pi D} r^4 \left(\ln r - \frac{3}{4} \right) \cdot \left\{ \frac{1}{2A} \left[a^k + m^k x_1(Q) + n^k x_2(Q) \right] \right\} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{40\pi D} r^4 \left(\ln r - \frac{7}{10} \right) \left\{ \frac{1}{2A} \left[m^k \cos\theta + n^k \sin\theta \right] \right\} \right\} \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_k} M_{ij}^0(\rho) w_{ij}^*(Q, P) d\Omega_k &= \\
&= M_{ij}^{0(N)} \sum_{\rho=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J_\rho| \left\{ \frac{r_i r_j}{4\pi D} r^2 \cdot \frac{1}{2A} \left[a^k + m^k x_1(Q) + n^k x_2(Q) \right] \frac{r}{2} + [m^k \cos\theta + n^k \text{sen}\theta] \frac{r^2}{2} \right\} + \\
&+ \frac{1}{4\pi D} \delta_{ij} \frac{1}{2A} \left\{ [a^k + m^k x_1(Q) + n^k x_2(Q)] \frac{r}{2} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + [m^k \cos\theta + n^k \text{sen}\theta] \frac{r^2}{3} \left(\ln r - \frac{1}{3} \right) \right\} \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_k} N_{kl}(\rho) w_{kl}(\rho) w_{ij}^*(q, \rho) d\Omega_k &= \\
&= N_{kl}^N w_{kl}^N \sum_{\rho=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J_\rho| \left\{ \frac{r_i}{12\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{3} \right) \left\{ \frac{1}{2A} [a^k + m^k x_1(q) + n^k x_2(q)] \right\} + \right. \\
&+ \left. \frac{r_j}{16\pi D} r^3 \left(\ln r - \frac{1}{4} \right) \left\{ \frac{1}{2A} [m^k \cos\theta + n^k \text{sen}\theta] \right\} \right\} \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_k} M_{kl}^0(\rho) w_{ikl}^*(q, \rho) d\Omega_k &= \\
&= M_{kl}^{0(N)} \sum_{\rho=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J_\rho| \bar{w}_{ikl}^* \frac{1}{2A} \left\{ [a^k + m^k x_1(q) + n^k x_2(q)] + \right. \\
&+ \left. \frac{r}{2} [m^k \cos\theta + n^k \text{sen}\theta] \right\} \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}
\end{aligned}$$

com $\bar{w}_{ikl}^* = r \cdot w_{ikl}^*$.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_k} N_{kl}(\rho) w_{kl}(\rho) w_{ij}^*(q, \rho) d\Omega_k &= \\
&= N_{ij}^N w_{ij}^N \sum_{\rho=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J_\rho| \left\{ \frac{r_i r_j}{4\pi D} r^2 \cdot \frac{1}{2A} \left[a^k + m^k x_1(q) + n^k x_2(q) \right] \frac{r}{2} + [m^k \cos\theta + n^k \text{sen}\theta] \frac{r^2}{2} \right\} + \\
&+ \frac{1}{4\pi D} \delta_{ij} \frac{1}{2A} \left\{ [a^k + m^k x_1(q) + n^k x_2(q)] \frac{r}{2} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + [m^k \cos\theta + n^k \text{sen}\theta] \frac{r^2}{3} \left(\ln r - \frac{1}{3} \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_k} M_{kl}^0(p) w_{ijkl}^*(q, p) d\Omega_k &= \\
&= M_{kl}^{0(N)} \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \bar{w}_{ijkl}^* \frac{1}{2A} \left\{ \frac{\ln r}{r} [a^k + m^k x_1(q) + n^k x_2(q)] + \right. \\
&\quad \left. + [m^k \cos \theta + n^k \operatorname{sen} \theta] \right\} \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}
\end{aligned}$$

com $\bar{w}_{ijkl}^* = r \cdot w_{ijkl}^*$.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_k} N_{ikl}^*(Q, p) w_{,k}(p) w_{,l}(p) d\Omega_k &= \\
&= w_{,j}^N w_{,k}^N \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \bar{N}_{ikl}^* \frac{1}{2A} \left\{ [a^k + m^k x_1(Q) + n^k x_2(Q)] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{r}{2} [m^k \cos \theta + n^k \operatorname{sen} \theta] \right\} \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}
\end{aligned}$$

com $\bar{N}_{ikl}^* = r \cdot N_{ikl}^*$.

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_k} \varepsilon_{ikl}^*(Q, p) N_{kl}^0(p) d\Omega_k &= \\
&= N_{kl}^{0(N)} \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \bar{\varepsilon}_{ikl}^* \frac{1}{2A} \left\{ [a^k + m^k x_1(Q) + n^k x_2(Q)] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{r}{2} [m^k \cos \theta + n^k \operatorname{sen} \theta] \right\} \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}
\end{aligned}$$

com $\bar{\varepsilon}_{ikl}^* = r \cdot \varepsilon_{ikl}^*$.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_k} T_{ijkl}^*(q, p) w_{,k}(p) w_{,i}(p) d\Omega_k = \\
& = w_{,j}^N w_{,k}^N \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \bar{T}_{ijkl}^* \frac{1}{2A} \left\{ \frac{\ln r}{r} [a^k + m^k x_1(q) + n^k x_2(q)] + \right. \\
& \quad \left. + [m^k \cos \theta + n^k \operatorname{sen} \theta] \right\} \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}
\end{aligned}$$

com $\bar{T}_{ijkl}^* = r \cdot T_{ijkl}^*$.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_k} E_{ijkl}^*(q, p) N_{kl}^0(p) d\Omega_k = \\
& = N_{kl}^{0(N)} \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \bar{E}_{ijkl}^* \frac{1}{2A} \left\{ \frac{\ln r}{r} [a^k + m^k x_1(q) + n^k x_2(q)] + \right. \\
& \quad \left. + [m^k \cos \theta + n^k \operatorname{sen} \theta] \right\} \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}
\end{aligned}$$

com $\bar{E}_{ijkl}^* = r \cdot E_{ijkl}^*$.

Integrais no domínio do enrijecedor

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{e_k}} M_{ss,s}^c(p) w_{,s}^*(Q, p) d\Omega_{e_k} = \\
& = [\varphi_N^N M_{ss}^D] \left[-\frac{r_{,s}}{4\pi D} \right] \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \cdot \frac{r^2}{3} \left[\ln r - \frac{1}{3} \right] \cdot \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_{e_k}} M_{ss,s}^c(p) w_{,s_{ss}}^*(q, p) d\Omega_{e_k} = \\
& = [\varphi_N \cdot {}^N M_{ss}^c] \cdot \bar{w}_{,s_{ss}}^* \cdot \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \cdot \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}
\end{aligned}$$

com $\bar{w}_{,sss}^* = r \cdot w_{,sss}^*$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{e_k}} M_{ss,s}^c(p) w_{,snn}^*(q,p) d\Omega_{e_k} &= \\ &= \left[\varphi_N \cdot {}^N M_{ss}^c \right] \cdot \bar{w}_{,snn}^* \cdot \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \cdot \omega_g \frac{\partial r}{\partial n} \end{aligned}$$

com $\bar{w}_{,snn}^* = r \cdot w_{,snn}^*$.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{e_k}} w_{,ss,s}(p) w_{,s}^*(Q,p) d\Omega_{e_k} &= \\ &= \left[\varphi_N {}^N w_{,ss} \right] \left[-\frac{r_{,s}}{4\pi D} \right] \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \cdot \frac{r^2}{3} \left[\ln r - \frac{1}{3} \right] \cdot \omega_g \frac{\partial r}{\partial n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{e_k}} w_{,nn,s}(p) w_{,s}^*(Q,p) d\Omega_{e_k} &= \\ &= \left[\varphi_N {}^N w_{,nn} \right] \left[-\frac{r_{,s}}{4\pi D} \right] \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \cdot \frac{r^2}{3} \left[\ln r - \frac{1}{3} \right] \cdot \omega_g \frac{\partial r}{\partial n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_{e_k}} N_{ss,s}^e(p) w_{,s}^*(Q,p) d\Omega_{e_k} &= \\ &= \left[\varphi_N {}^N N_{ss}^e \right] \left[-\frac{r_{,s}}{4\pi D} \right] \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \cdot \frac{r^2}{3} \left[\ln r - \frac{1}{3} \right] \cdot \omega_g \frac{\partial r}{\partial n} \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_{e_k}} w_{,ss,s}(p) \frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) d\Omega_{e_k} =$$

$$= [\varphi_N \cdot {}^N W_{,ss}] \cdot \bar{w}_{,sij}^* \cdot \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \cdot \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}$$

com $\bar{w}_{,sij}^* = r \cdot w_{,sij}^*$.

$$\int_{\Omega_{e_k}} w_{,nn,s}(p) \frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) d\Omega_{e_k} =$$

$$= [\varphi_N \cdot {}^N W_{,nn}] \cdot \bar{w}_{,sij}^* \cdot \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \cdot \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}$$

com $\bar{w}_{,sij}^* = r \cdot w_{,sij}^*$.

$$\int_{\Omega_{e_k}} N_{ss,s}^e(p) \frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, p) d\Omega_{e_k} =$$

$$= [\varphi_N \cdot {}^N N_{ss}^e] \cdot \bar{w}_{,sij}^* \cdot \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \cdot \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}$$

com $\bar{w}_{,sij}^* = r \cdot w_{,sij}^*$.

$$\int_{\Omega_{e_k}} N_{ss,s}^e(p) u_{is}^*(Q, p) d\Omega_{e_k} =$$

$$= [\varphi_N \cdot {}^N N_{ss}^e] \left[\frac{1}{8\pi G(1-\nu')} \right] \sum_{p=1}^4 \sum_{n=1}^{N_g} |J_p| \left\{ -(3-4\nu') s_i \frac{r^2}{2} \left[\ln(r) - \frac{1}{2} \right] + r_{,i} r_{,s} \frac{r^2}{2} \right\} \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}$$

$$\int_{\Omega_{e_k}} w_{,ss,s}(\rho) u_{,is}^*(Q,P) d\Omega_{e_k} =$$

$$= [\varphi_N^N W_{,ss}] \left[\frac{1}{8\pi G(1-\nu')} \right] \sum_{\rho=1}^4 \sum_{n=1}^{N_g} |J_\rho| \left\{ -(3-4\nu') s_i \frac{r^2}{2} \left[\ln(r) - \frac{1}{2} \right] + r_{,i} r_{,s} \frac{r^2}{2} \right\} \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}$$

$$\int_{\Omega_{e_k}} w_{,nn,n}(\rho) u_{,in}^*(Q,P) d\Omega_{e_k} =$$

$$= [\varphi_N^N W_{,nn}] \left[\frac{1}{8\pi G(1-\nu')} \right] \sum_{\rho=1}^4 \sum_{n=1}^{N_g} |J_\rho| \left\{ -(3-4\nu') n_i \frac{r^2}{2} \left[\ln(r) - \frac{1}{2} \right] + r_{,i} r_{,n} \frac{r^2}{2} \right\} \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}$$

$$\int_{\Omega_{e_k}} N_{ss,s}^e(\rho) D_{sss}^*(q,\rho) d\Omega_{e_k} =$$

$$= [\varphi_N^N N_{ss}^e] \bar{D}_{sss}^* \cdot \sum_{\rho=1}^4 \sum_{n=1}^{N_g} |J_\rho| \cdot \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}$$

com $\bar{D}_{sss}^* = r \cdot D_{sss}^*$

$$\int_{\Omega_{e_k}} w_{,ss,s}(\rho) D_{sss}^*(q,\rho) d\Omega_{e_k} =$$

$$= [\varphi_N^N W_{,ss}] \bar{D}_{sss}^* \cdot \sum_{\rho=1}^4 \sum_{n=1}^{N_g} |J_\rho| \cdot \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}$$

com $\bar{D}_{sss}^* = r \cdot D_{sss}^*$

$$\int_{\Omega_{e_k}} w_{,nn,n}(\rho) D_{ssn}^*(q,\rho) d\Omega_{e_k} =$$

$$= [\varphi_N^N W_{,nn}] \bar{D}_{ssn}^* \cdot \sum_{\rho=1}^4 \sum_{n=1}^{N_g} |J_\rho| \cdot \omega_g \frac{\partial r}{\partial n}$$

com $\bar{D}_{ssn}^* = r \cdot D_{ssn}^*$