

CARLOS ALBERTO CABRAL DE AZEVEDO

**FORMULAÇÃO ALTERNATIVA PARA ANÁLISE DE DOMÍNIOS
NÃO-HOMOGÊNEOS E INCLUSÕES ANISOTRÓPICAS VIA MEC**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Wilson Sérgio Venturini

SÃO CARLOS

- 2007 -

Aos meus pais Manoel e Odila, pela vida que me concederam. Às minhas irmãs Paula Fernanda e Maria Lúcia e à minha tia Clélia por todo carinho e afeto.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Wilson Sérgio Venturini, pela orientação, pelo belíssimo conhecimento transmitido, bem como pela paciência dedicada a este trabalho.

Aos demais professores do Departamento de Engenharia de Estruturas que também colaboraram com este trabalho. Aos professores do Centro de Estudo de Engenharia Civil (CESEC) da Universidade Federal do Paraná (UFPR), por terem proporcionado meus primeiros passos na pesquisa científica. Em especial, aos professores Jorge Luiz Milek, Sérgio Scheer, Mildred Ballin Hecke e Roberto Dalledone.

À escola de Engenharia de São Carlos, por ter me fornecido toda a estrutura necessária durante a elaboração deste trabalho. Agradeço também a todos os funcionários deste departamento.

À CAPES que, através de bolsa de estudo, possibilitou o desenvolvimento desta dissertação.

À Simone Hoefel e aos colegas do departamento, Wilson Wesley e Alexandre Botta, pelo grande auxílio na elaboração deste trabalho.

Aos meus pais, meus eternos professores.

À Tatiana Sanches, pelo carinho e incentivo necessário para a conclusão deste trabalho.

“O verdadeiro valor das coisas não está no tempo em que duram, mas na intensidade com que acontecem. Por isso existem momentos inesquecíveis, coisas inexplicáveis e pessoas incomparáveis”

Fernando Pessoa

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| 1 INTRODUÇÃO..... | 1 |
| 1.1. OS MÉTODOS NUMÉRICOS..... | 2 |
| 1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA..... | 5 |
| 1.3. OBJETIVOS DESTE TRABALHO..... | 11 |
| 1.4. CONTEÚDO DO TRABALHO..... | 12 |
| 2 FUNDAMENTOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE..... | 15 |
| 2.1. EQUAÇÕES BÁSICAS DA TEORIA DA ELASTICIDADE..... | 15 |
| <i>Forças de Superfície.....</i> | <i>15</i> |
| <i>Equações diferenciais de equilíbrio (Equação de Navier).....</i> | <i>17</i> |
| <i>Relações deformação – deslocamento.....</i> | <i>18</i> |
| <i>Equações constitutivas.....</i> | <i>18</i> |
| <i>Condições de Contorno.....</i> | <i>20</i> |
| 2.2. PROBLEMAS PLANOS..... | 20 |
| <i>Estado plano de tensão (EPT).....</i> | <i>20</i> |
| <i>Estado plano de deformação (EPD).....</i> | <i>21</i> |
| 3 RELAÇÃO CONSTITUTIVA EM ELASTICIDADE LINEAR..... | 23 |
| 3.1. ELASTICIDADE TRIDIMENSIONAL..... | 23 |
| <i>Material anisotrópico homogêneo.....</i> | <i>23</i> |
| <i>Coefficientes elásticos de engenharia.....</i> | <i>26</i> |
| <i>Relação constitutiva de um material anisotrópico.....</i> | <i>28</i> |
| <i>Relação constitutiva de um material ortotrópico.....</i> | <i>29</i> |
| <i>Relação constitutiva de um material isotrópico transversal.....</i> | <i>30</i> |
| <i>Relação constitutiva de um material isotrópico.....</i> | <i>33</i> |
| 3.2. ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL..... | 34 |
| <i>Problema de Estado Plano de Tensão.....</i> | <i>34</i> |
| <i>Problema de Estado Plano de Deformação.....</i> | <i>39</i> |
| 4 EQUAÇÕES INTEGRAIS DO PROBLEMA ELÁSTICO BIDIMENSIONAL.. | 43 |
| 4.1. SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE KELVIN..... | 43 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.2. | EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO PARA O PROBLEMA ELÁSTICO PLANO | 46 |
| 4.3. | EQUAÇÃO INTEGRAL PARA PONTOS NO CONTORNO | 48 |
| 5 | MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO | 53 |
| 5.1. | EQUAÇÕES ALGÉBRICAS DO MEC | 53 |
| 5.2. | FUNÇÃO APROXIMADORA LINEAR | 55 |
| 5.3. | MONTAGEM DO SISTEMA DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS | 56 |
| 5.4. | PROPRIEDADES DA MATRIZ H | 57 |
| 5.5. | PONTO DE COLOCAÇÃO | 58 |
| 5.6. | CONDIÇÕES DE CONTORNO | 58 |
| 5.7. | RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES | 59 |
| 5.8. | DESLOCAMENTO E TENSÕES EM PONTOS INTERNOS | 60 |
| 5.9. | INTEGRAÇÃO ANALÍTICA | 61 |
| 5.10. | INTEGRAÇÃO NUMÉRICA | 61 |
| 5.11. | QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE | 62 |
| 5.12. | SUB-ELEMENTAÇÃO | 63 |
| 6 | MEC APLICADO A PROBLEMAS COM CAMPOS INICIAIS | 67 |
| 6.1. | REPRESENTAÇÕES INTEGRAIS COM CAMPOS INICIAIS | 67 |
| 6.2. | FUNÇÃO DE APROXIMAÇÃO DAS VARIÁVEIS NO DOMÍNIO | 70 |
| 6.3. | EQUAÇÕES ALGÉBRICAS DO MEC PARA PROBLEMAS COM CAMPO DE TENSÕES INICIAIS | 78 |
| 7 | FORMULAÇÃO ALTERNATIVA PARA ANÁLISE DE DOMÍNIOS NÃO-HOMOGÊNEOS E INCLUSÕES DE MATERIAIS ANISOTRÓPICOS | 79 |
| 7.1. | INTRODUÇÃO | 79 |
| 7.2. | MATRIZ DE PENALIZAÇÃO D_{ijkl} | 81 |
| 7.3. | RESOLUÇÃO ALGÉBRICA | 82 |
| 8 | EXEMPLOS E APLICAÇÕES | 85 |
| 8.1. | EXEMPLO 01 | 85 |
| 8.2. | EXEMPLO 02 | 93 |
| 8.3. | EXEMPLO 03 | 95 |
| 8.4. | EXEMPLO 04 | 97 |
| 8.5. | EXEMPLO 05 | 98 |

| | |
|---|------------|
| 8.6. EXEMPLO 06..... | 102 |
| 8.7. EXEMPLO 07..... | 105 |
| 8.8. EXEMPLO 08..... | 108 |
| 9 CONCLUSÃO..... | 113 |
| NOTAÇÃO INDICIAL..... | 115 |
| 9.1. DEFINIÇÃO..... | 115 |
| 9.2. SOMATÓRIO..... | 116 |
| 9.3. DIFERENCIAÇÃO..... | 117 |
| DELTA DE KRONECKER..... | 118 |
| DELTA DE DIRAC..... | 119 |
| TEOREMA DA RECIPROCIDADE DE BETTI..... | 121 |
| INTEGRAIS ANALÍTICAS SINGULARES..... | 123 |
| INTEGRAIS ANALÍTICAS NÃO-SINGULARES..... | 129 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 145 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Forças de Superfície..... | 16 |
| Figura 2 – Forças de Superfície em um Elemento Diferencial Bidimensional... 17 | 17 |
| Figura 3 – Elemento Infinitesimal..... | 18 |
| Figura 4 – Estado Plano de Tensão | 21 |
| Figura 5 – Estado Plano de Deformação | 22 |
| Figura 6 – Singularidade em ponto fonte no contorno | 49 |
| Figura 7 – Classificação para definição de $c_{ij}(s)$ – WUTZOW (2003) | 51 |
| Figura 8 – Discretização do contorno em elementos – WUTZOW (2003) | 54 |
| Figura 9 – Funções de aproximação linear..... | 55 |
| Figura 10 – Ângulos para o cálculo do sub-elemento..... | 64 |
| Figura 11 – Comprimento do sub-elemento..... | 65 |
| Figura 12 – Comprimento do sub-elemento para Ψ maior que 60° | 65 |
| Figura 13 – Discretização do domínio em células | 71 |
| Figura 14 – Coordenadas cilíndricas r e θ | 74 |
| Figura 15 – Integração analítica em r | 75 |
| Figura 16 – Posição dos nós de célula internos | 77 |
| Figura 17 – Sistema de coordenadas adimensionais ξ_i | 77 |
| Figura 18 – Tensões iniciais, elásticas e reais..... | 80 |
| Figura 19 – Composição das matrizes e vetores globais | 83 |
| Figura 20 – Tubo de parede grossa. Geometria e carregamento (Exemplo 1). 86 | 86 |
| Figura 21 – Primeira discretização adotada no exemplo 1 | 87 |
| Figura 22 – Segunda discretização adotada no exemplo 1 | 87 |
| Figura 23 – Terceira discretização adotada no exemplo 1 | 88 |
| Figura 24 – Tubo de parede grossa. Geometria e carregamento (Exemplo 1). 93 | 93 |
| Figura 25 – Tubo de parede grossa. Geometria e carregamento. | 95 |
| Figura 26 – Geometria e carregamento do exemplo 4 | 97 |
| Figura 27 – Discretização empregada no exemplo 4..... | 97 |
| Figura 28 – Geometria e carregamento do exemplo 5 | 98 |
| Figura 29 – Primeira discretização adotada no exemplo 5 | 98 |

| | |
|--|-----|
| Figura 30 – Segunda discretização adotada no exemplo 5 | 99 |
| Figura 31 – Geometria e carregamento do exemplo 6..... | 102 |
| Figura 32 – Discretização adotada no exemplo 6..... | 102 |
| Figura 33 – Geometria e carregamento do quadrado com inclusão ortotrópica | 105 |
| Figura 34 – Discretização adotada no exemplo 7..... | 105 |
| Figura 35 – Tensões σ_x (Exemplo 7)..... | 107 |
| Figura 36 – Tensões τ_{xy} (Exemplo 7)..... | 107 |
| Figura 37 – Tensões σ_y (Exemplo 7)..... | 108 |
| Figura 38 – Geometria e carregamento do exemplo 8..... | 109 |
| Figura 39 – Tensões σ_x (Exemplo 8)..... | 110 |
| Figura 40 – Tensões τ_{xy} (Exemplo 8)..... | 111 |
| Figura 41 – Tensões σ_y (Exemplo 8)..... | 111 |
| Figura 42 – Função Delta de Dirac | 119 |
| Figura 43 – Ponto fonte no primeiro nó do elemento | 124 |
| Figura 44 – Ponto fonte no primeiro nó do elemento | 125 |
| Figura 45 – Ponto fonte no primeiro nó do elemento | 127 |
| Figura 46 – Ponto fonte não alinhado com o elemento..... | 130 |
| Figura 47 – Ponto fonte alinhado atrás do elemento | 138 |
| Figura 48 – Ponto fonte alinhado à frente do elemento | 141 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|-----|
| Tabela 1 – Deslocamentos Radiais (Exemplo 1) | 90 |
| Tabela 2 – Deslocamentos Radiais (Exemplo 2) | 94 |
| Tabela 3 – Deslocamentos Radiais (Exemplo 3) | 96 |
| Tabela 4 – Deslocamentos em y do Ponto A (Exemplo 4) | 98 |
| Tabela 5 – Deslocamentos verticais na face inferior (Exemplo 5) | 100 |

LISTA DE GRÁFICOS

| | |
|--|-----|
| Gráfico 1 - Deslocamento Radial do ponto 1 nas 3 discretizações analisadas . | 88 |
| Gráfico 2 – Deslocamento Radial do ponto 2 nas 3 discretizações analisadas | 89 |
| Gráfico 3 – Deslocamento Radial do ponto 3 nas 3 discretizações analisadas | 89 |
| Gráfico 4 – Deslocamento Radial do ponto 4 nas 3 discretizações analisadas | 89 |
| Gráfico 5 – Deslocamento Radial do ponto 5 nas 3 discretizações analisadas | 90 |
| Gráfico 6 – Tensões Radiais no Modelo 1 | 91 |
| Gráfico 7 – Tensões Radiais no Modelo 2 | 92 |
| Gráfico 8 – Tensões Radiais no Modelo 3 | 92 |
| Gráfico 9 – Tensões Radiais (Exemplo 2) | 94 |
| Gráfico 10 – Tensões Radiais (Exemplo 3) | 96 |
| Gráfico 11 – Deslocamento vertical ao longo da face inferior da viga | 101 |
| Gráfico 12 – Deslocamento vertical ao longo da face inferior da viga | 101 |
| Gráfico 13 – Força de superfície ao longo do apoio engastado (exemplo 6) .. | 103 |
| Gráfico 14 – Deslocamentos verticais ao longo da face superior (exemplo 6) | 104 |
| Gráfico 15 – Deslocamentos verticais ao longo da face lateral (exemplo 6)... | 104 |
| Gráfico 16 – Deslocamento vertical ao longo da face superior (Exemplo 7)... | 106 |
| Gráfico 17 – Deslocamento horizontal ao longo da face lateral (Exemplo 7) .. | 106 |
| Gráfico 18 – Deslocamento vertical na face superior (Exemplo 8) | 109 |
| Gráfico 19 – Deslocamento horizontal na face lateral (Exemplo 8) | 110 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- MDF – Método das Diferenças Finitas
- MEF – Método dos Elementos Finitos
- MEC – Método dos Elementos de Contorno
- BEM – Boundary Element Method
- BIEM – Boundary Integral Equation Method
- FORTTRAN – Formula Translation

RESUMO

AZEVEDO, C.A.C (2007). *Formulação alternativa para análise de domínios não-homogêneos e inclusões anisotrópicas via MEC* São Carlos. 153p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Este trabalho trata da análise de problemas planos de chapa compostos por materiais anisotrópicos, definidas em uma região ou no domínio por completo, utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno. As soluções fundamentais para problemas anisotrópicos, embora existentes, mostram-se difíceis de serem utilizadas devido à complexidade de sua formulação matemática ou da necessidade de se encontrar partes da solução numericamente. Nesse sentido, a formulação alternativa mostrada nesse trabalho permite o estudo de meios anisotrópicos utilizando-se as soluções fundamentais para meios isotrópicos nas representações integrais de problemas planos com campo de tensões iniciais. A região do domínio com propriedades anisotrópicas ou diferentes das propriedades elásticas de um meio isotrópico usado como referência é discretizada em células triangulares, enquanto que o contorno do problema é discretizado em elementos lineares. As componentes do tensor de tensões iniciais da região anisotrópica são definidas como uma correção das tensões elásticas do material isotrópico de referência através de uma matriz de penalização. Essa matriz, por sua vez, é obtida através de relações envolvendo as constantes elásticas de rigidez do meio desejado e os coeficientes elásticos de flexibilidade do meio isotrópico de referência. Essa técnica é particularmente adequada para a análise de inclusões anisotrópicas onde há a necessidade de discretizar apenas uma parte pequena do domínio, aumentando, portanto, pouco o número de graus de liberdade do sistema. Os resultados obtidos com a formulação proposta são comparados com os resultados numéricos existentes na literatura.

Palavras-chave:

Método dos elementos de contorno – Inclusão Anisotrópica – Anisotropia

ABSTRACT

AZEVEDO, C.A.C (2007). ***Alternative boundary element formulation for multi-region bodies and inclusions***. São Carlos. 153p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This work deals with elastic 2D problems characterized by the presence of zones with different materials and anisotropic inclusions using the boundary element method. The anisotropy can be assumed either over the whole domain or defined only over some particular inclusions, which is the most usual case. Fundamental solutions for anisotropic domains, although well-known, lead to more complex formulations and may introduce difficulties when the analysis requires more complex material models as for instance plastic behavior, finite deformations, etc. The alternative formulation proposed in this work can be applied to anisotropic bodies using the classical fundamental solutions for 2D elastic isotropic domains plus correction given by an initial stress field. The domain region with anisotropic properties or only with different isotropic elastic parameters has to be discretized into cells to allow the required corrections, while the complementary part of the body requires only boundary discretization. The initial stress tensor to be applied to the anisotropic region is defined as the isotropic material elastic stress tensor correction by introducing a local penalty matrix. This matrix is obtained by the difference between the elastic parameters between the reference values and the anisotropic material. This technique is particularly appropriate for anisotropic inclusion analysis, in which the domain discretization is required only over a small region, therefore increasing very little the number of degrees of freedom of the final algebraic system. The numerical results obtained by using the proposed formulation have demonstrated to be very accurate in comparison with either analytical solutions or the other numerical values.

Keywords: boundary element method – anisotropic inclusions – anisotropy

CAPÍTULO 1

“O começo é a parte mais importante do trabalho.”
(Platão)

INTRODUÇÃO

Na engenharia, sempre houve o interesse em simular os movimentos, as forças e o fluxo que aparecem nos corpos da natureza. Os problemas são, em sua grande maioria, governados por equações diferenciais. Tais equações devem atender alguns requisitos como as condições de equilíbrio, as condições de contorno e as condições iniciais impostas para cada problema.

Com freqüência, estes problemas apresentam grandes dificuldades de serem resolvidos, seja por apresentarem uma complexidade na geometria do sólido, seja por empregarem materiais com lei constitutiva complexa. Assim, muitos problemas não possuem soluções analíticas (exatas), ou quando as possuem, são de difícil obtenção.

Em virtude desta dificuldade, utiliza-se um modelo matemático que representa de forma adequada o real estado do corpo e então, emprega-se algum método numérico na obtenção das soluções aproximadas.

Ao longo da história, diversos métodos numéricos foram formulados. Hoje, com o recurso dos computadores, os métodos numéricos conseguem levar a soluções aproximadas para problemas que apresentam um alto grau de complexidade.

1.1. Os métodos numéricos

Com os conhecimentos da mecânica dos sólidos e de seus fenômenos modelados física e matematicamente, desenvolveram-se alguns métodos, que representam os meios contínuos por meios discretos simplificados. Em McHENRY (1943), HRENIKOFF (1941) e NEWMARK (1949) *apud* ZIENKIEWICZ (1977) são feitos os primeiros trabalhos neste sentido, comentando-se que soluções razoáveis para um meio contínuo podem ser obtidas por substituição em pequenas porções do contínuo por arranjos de simples barras elásticas.

Dependendo do tipo de representação, um método pode se apresentar do tipo diferencial ou integral. Entre os métodos numéricos existentes conhecidos, podemos citar primeiramente o Método das Diferenças Finitas (MDF) e o Método dos Elementos Finitos (MEF), sendo ambos do tipo diferencial, isto é, baseadas na aproximação de uma equação diferencial.

Entre os dois métodos citados anteriormente, o MDF é o mais antigo deles. Na literatura corrente, sua origem está relacionada ao trabalho de SOUTHWELL (1946), mas foi na realidade utilizado pela primeira vez por C. Runge no início do século passado. É empregado na análise numérica aplicada à resolução de problemas no campo da engenharia das estruturas.

Este método transforma equações diferenciais em equações algébricas válidas apenas em nós dentro do domínio, através de aproximações das derivadas por diferenças finitas. A sua sistematização foi feita como mencionado por Southwell.

Já o MEF, genericamente, baseia-se na divisão do domínio em uma série de subdomínios finitos ou elementos conectados através de seus nós, tais que estes representem o campo de deformação ou de tensões do domínio por equações simplificadas, que satisfaçam as condições mecânicas e geométricas do problema.

O MEF teve sua divulgação a partir dos trabalhos de TURNER *et alii* (1956), ARGYRIS (1960) e CLOUGH (1960), apesar de ter sido COURANT (1943) quem primeiro usou o conceito de discretização da região a ser tratada para problemas de torção de Saint-Venant.

Trabalhos como os de CLOUGH (1990), ROBINSON (1985) e GUPTA & MEEK (1996) trazem detalhes sobre a história do MEF, que apresentou um grande crescimento com o avanço tecnológico dos equipamentos computacionais.

Atualmente, as aplicações com este método são diversas, mostrando-se muito eficiente na solução de maioria dos problemas práticos, incluindo-se os problemas que envolvam respostas não-lineares. Como exemplo prático, pode-se citar as análises de edifícios empregando elementos reticulados, denominado barras, simulando pilares e vigas, e elementos bidimensionais de placa ou de casca, simulando o pavimento, etc.

O MEF apresenta vantagens sobre o MDF, pois permite uma melhor conformidade para a geometria do domínio, maior facilidade na aplicação das condições de contorno e construção de malhas de tamanho variável. Estas vantagens têm feito do MEF o método numérico mais utilizado entre os cientistas e engenheiros.

Uma característica do MEF é que seu equacionamento utiliza um número muito grande de variáveis, consumindo considerável tempo computacional, e apresenta entrada e saída de dados trabalhosos especialmente em problemas com contornos complexos. Com o uso de pré-processadores e pós-processadores, estes problemas podem ser contornados.

Algumas vezes, em problemas complexos, utilizam-se modelos simplificados e redes pouco refinadas para que possam ser executados em computadores convencionais. Porém, muitas vezes, estes modelos não representam de forma adequada o real comportamento da estrutura.

Outro método numérico muito conhecido, o Método dos Elementos de Contorno (MEC), propõe a solução através da discretização apenas do contorno do problema. Esta característica torna o MEC mais eficiente que o MEF para um razoável número de problemas. Além disso, segundo COLLATZ (1966), a aproximação de uma equação integral leva sempre a uma solução mais precisa.

Em alguns casos específicos, o MEC necessita também da discretização do domínio em células para aproximação de variáveis definidas no domínio e que não foram eliminadas na dedução da equação integral. Também há problemas onde a combinação dos dois métodos (MEC/MEF) leva a um

sistema de equações de alto desempenho tanto em precisão quanto em tempo de processamento e preparação (ou geração) de dados.

Com a redução da quantidade de nós necessários, comparado com outros métodos numéricos existentes, o MEC leva a uma redução de uma dimensão dos problemas analisados. Isto é, permite uma redução na quantidade de dados de entrada, no tempo de processamento e na área auxiliar para armazenamento das informações no processamento.

No início, o MEC era demonstrado a partir de aproximações de equações integrais com o emprego de algum princípio clássico, como o teorema de BETTI, por exemplo. Uma visão mais moderna dessa técnica classifica-o como mais um método pertencente à família dos métodos aproximados. A partir de relações do método dos resíduos ponderados é possível a obtenção das equações integrais necessárias à formulação do método dos elementos de contorno.

Com base no conhecimento adquirido a respeito do método dos elementos de contorno, este, atualmente, já se tornou uma alternativa na solução de diversos problemas de engenharia, sendo empregado em problemas da elastostática, problemas de potencial, problemas elastoplásticos, viscoplasticidade, elastodinâmica, análise de fratura, condução de calor, eletromagnetismo, interação solo-estrutura, interação estrutura-fluido entre outros, desde os casos mais simples até estudos complexos.

O MEC só pode ser aplicado se uma solução fundamental da equação diferencial for conhecida, de modo geral conhecidas como funções de Green. Basicamente existem dois tipos de MEC: Direto e Indireto.

No método direto, as variáveis físicas reais do problema aparecem nas equações integrais, enquanto que no método indireto as equações integrais são expressas completamente em termos de uma solução singular unitária da equação original empregando variáveis fictícias distribuídas no contorno e que não apresentam significado físico.

1.2. Revisão bibliográfica

Com o crescente interesse de pesquisadores nas últimas três décadas, o MEC tornou-se uma poderosa ferramenta computacional. Entretanto, as equações integrais, base do desenvolvimento dessa técnica, são conhecidas há muito tempo.

Segundo ELLIOTT, foi ABEL, em 1823, quem primeiro deduziu uma equação integral para o tratamento de um problema físico, o pêndulo isócrona. Posteriormente, em 1837, LIOUVILLE transformou um problema de valor inicial em uma equação integral, resolvendo-a por aproximações sucessivas. Com o estudo de problemas da teoria do potencial, obtiveram-se grandes avanços neste método.

Em 1903, FREDHOLM publicou uma versão completa de sua teoria, onde as integrais apresentavam núcleos definidos e integráveis. Já em 1906, FREDHOLM publica um rigoroso trabalho sobre equações integrais lineares aplicadas à solução de problemas de valor de contorno em elastostática.

Até o ano de 1950, apenas problemas de valores de contorno relativos a casos particulares foram estudados, baseados sempre nas equações integrais lineares de Fredholm.

A introdução do segundo problema fundamental de contorno para o campo das análises elásticas é devida a KUPRADZE (1965), que utilizou a teoria de Fredholm em equações com integrais singulares.

Os trabalhos notáveis de autores russos como MUSKHELISHVILI (1953), MIKHLIN (1957), SMIRNOV (1964), GAKHOV (1966) e IVANOV (1976) deram enorme contribuição ao início de uma nova era do uso das equações integrais para resolução de problemas físicos.

Os métodos desenvolvidos por TREFFTZ e PRAGES em 1917 e 1928, respectivamente, para resolução de equações integrais na mecânica dos fluidos devem ser considerados como precursores da moderna técnica de integração de contorno. O método da equação integral como uma ferramenta prática, geral e eficiente começa a aparecer na década de 60, um período caracterizado pela difusão do uso dos computadores, observando-se uma considerável expansão e desenvolvimento do método durante a década de 70.

O trabalho de RIZZO (1967) é o primeiro que trata as equações integrais como forma de técnica numérica. Certamente esse trabalho é também o primeiro a propor a formulação direta para o tratamento das equações integrais do problema elástico. As formulações até então apresentadas são baseadas no procedimento indireto. Inicialmente o método apareceu com o termo *BIEM* (*Boundary Integral Equation Method*) introduzido por RIZZO (1967) já como técnica alternativa das equações integrais. Outros autores seguiram a mesma terminologia como CRUSE (1969), (1973) e (1974).

CRUSE & RIZZO (1968) apresentam uma formulação do método das equações integrais de contorno, para a análise de problema elastodinâmico usando transformadas de Laplace com relação ao tempo.

RIZZO & SHIPPY (1968) utilizam o método das equações integrais de contorno, considerando a elasticidade linear e sugerindo o uso de sub-regiões para o tratamento dos domínios não homogêneos.

Em 1971, CRUSE & VANBUREN aplicaram pela primeira vez a formulação a um sólido tridimensional, considerando a influência de um *crack*, e SWEDLOW & CRUSE (1971) apresentaram uma formulação para simulação de materiais elastoplásticos, anisotrópicos e compressíveis, considerando ainda a relação tensão-deformação com encruamento.

RICCARDELLA (1973), partindo do trabalho de Swedlow & Cruse e empregando outros critérios, é o primeiro trabalho a apresentar alguns resultados numéricos para problemas da elastoplasticidade, utilizando a formulação direta do método.

O emprego das equações integrais para a resolução de problemas potenciais, também de importância para a ciência da engenharia, é apresentado em trabalhos anteriores ao artigo de RIZZO (1967). JASWON (1963) e SYMM (1963) apresentaram um processo numérico para a resolução da equação integral de contorno de Fredholm.

O grande avanço nos chamados métodos de contorno tem sua origem na tese de LCHAT (1975), apresentada à Universidade de Southampton, tratando de problemas bi e tridimensionais. Esse trabalho apresenta um eficiente tratamento numérico utilizando elementos curvos de segunda ordem com opções de variação linear, quadrática e cúbica para as aproximações das variáveis do problema. As integrais são calculadas numericamente por um

sofisticado esquema de integração através de fórmulas da quadratura gaussiana.

Foi em 1978 que BREBBIA usou a terminologia *BEM (Boundary Element Method)* que pode ser obtida como um caso especial da técnica dos resíduos ponderados, assim estabelecendo uma conexão entre as várias técnicas numéricas existentes.

A partir de 1978, com a publicação do primeiro livro de BREBBIA (1978), ainda que bastante simples, tornou-se o MEC mais conhecido e estudado em diversos centros importantes de pesquisa. Destacam-se, ainda, as publicações de BREBBIA (1984), KANE (1994) e PARÍS & CAÑAS (1997).

A utilização do método dos elementos de contorno na análise prática de problemas de engenharia não se restringe apenas a domínios homogêneos, onde a solução fundamental adotada assume que as propriedades materiais não mudam dentro do domínio analisado. Há muitos exemplos onde esta hipótese não vale. Por exemplo, quando o módulo de elasticidade varia com a profundidade ou quando existem várias camadas de solos com propriedades diferentes. Para alguns tipos de não-homogeneidade é possível a dedução das soluções fundamentais. Entretanto, tais soluções fundamentais são frequentemente complicadas e de difícil implementação computacional.

Na análise de problemas que envolvem domínios não-homogêneos, diversas técnicas numéricas podem ser empregadas. Nesse sentido, a técnica das sub-regiões consiste em considerar cada subdomínio individualmente e devidamente acoplado aos demais através de equações de equilíbrio e de compatibilidade de deslocamento impostas aos nós da interface.

VENTURINI (1984) mostra diversas análises práticas em estruturas de fundações, onde regiões não-homogêneas são tratadas pelo método das sub-regiões, mesmo quando tipos diferentes de não-linearidade físicas estão associados a cada material.

Os trabalhos de WATSON (1979) e de LACHAT e WATSON (1976), desenvolvidos a partir de LACHAT (1975), já indicavam a facilidade com que o método poderia analisar domínios compostos. Diversos algoritmos numéricos para o estudo de combinações de sub-regiões, com o intuito de agilizar a solução do sistema de equações algébricas do MEC, têm sido propostos. Um desses algoritmos, elaborado por CROTTY (1982), baseado na eliminação dos

blocos de zeros da matriz principal, diminui sensivelmente o tempo de resolução do sistema.

VENTURINI (1988) propõe uma formulação alternativa na análise de problemas de domínio não-homogêneos, tratando o domínio de forma contínua, sem a necessidade de dividi-lo em sub-regiões, apenas modificando as integrais de modo a levarem em conta as diferenças entre as constantes elásticas de cada sub-região.

No trabalho de WUTZOW (2003), a formulação linear do MEC para elasticidade bidimensional é empregada para o estudo de domínios enrijecidos. A consideração dos enrijecedores é abordada de duas formas, a primeira delas pela técnica clássica de sub-região ou acoplamento MEC/MEC e a segunda, também pelo mesmo acoplamento, mas condensando-se as variáveis do contorno para a linha central do enrijecedor. Esta última proporcionou bons resultados eliminando perturbações em enrijecedores finos.

Ainda no estudo de problemas de domínios não-homogêneos, BEER (2001) apresenta outro procedimento de montagem do sistema de equações algébricas, muito similar ao adotado no método dos elementos finitos, a partir da construção uma matriz de rigidez \mathbf{K} para cada região, considerando os coeficientes como fluxos ou forças de superfície devido à temperaturas/deslocamentos unitários. Tal método é mais eficiente que o método das sub-regiões na implementação em computação paralela e também pode ser usado no acoplamento do método dos elementos de contorno com o método dos elementos finitos.

Além da possibilidade de combinarem-se regiões com quaisquer propriedades mecânicas, lineares ou não, os problemas práticos exigem a combinação entre partes estruturais de diferentes naturezas, em muitos casos tratados por métodos numéricos diferentes. Algoritmos numéricos, que combinam o método dos elementos de contorno com outras técnicas, já foram propostos por diversos autores. Os trabalhos de ZIENKIEWCZ *et alii* (1977), de SHAW e FALBY (1977) e de OSIAS *et alii* (1977), apresentados em 1977, foram os primeiros a tratar sólidos onde uma parte é analisada via elementos de contorno e o restante do domínio é discretizado e analisado pelo método dos elementos finitos.

Devido ao aumento das aplicações industriais dos materiais, a teoria da Elasticidade aplicada ao estudo de meios anisotrópicos tem sido motivo de atenções a partir da década de 60, destacando-se trabalhos de LEKHNITSKII (1963) e LEKHNITSKII *et alii* (1968) que abordam os aspectos matemáticos da teoria da Elasticidade anisotrópica e apresentam soluções analíticas aproximadas para diversos problemas com anisotropia.

GREEN & ZERNA (1954) apresentam um modelo sobre a distribuição de tensões numa chapa ortotrópica tracionada com orifício interno. Essas distribuições ao comparadas com um material isotrópico e pode-se observar os diferentes comportamentos mecânicos da chapa, dependendo-se da direção de aplicação das tensões.

SILVERMAN (1964), estudando tensões e deformações em chapas ortotrópicas submetidas a cargas polinomiais normais e tangenciais, desenvolveu um método de solução analítico aproximado, através da utilização de funções de tensão de Airy polinomiais de vários graus, empregando seu método em vários exemplos.

HASHIN (1967) apresentou um método analítico de resolução de problemas planos envolvendo chapas anisotrópicas, submetidas a carregamentos polinomiais, o qual permite a construção de funções de tensão polinomiais, semelhantes às funções de Airy, que são soluções de problemas planos anisotrópicos. São apresentadas aplicações em chapas com anisotropia geral. NOACK & ROTH (1976) apresentam uma análise matemática da teoria da Elasticidade para materiais ortotrópicos, considerando-se a anisotropia retilinear e a cilíndrica.

Na abordagem de problemas anisotrópicos com o MEC, o progresso obtido na análise desses problemas no decorrer dos anos tem sido relativamente menor comparado ao alcançado na Mecânica isotrópica e ainda, na maioria das vezes, esse progresso originou somente aplicações destinadas à análise linear de meios ortotrópicos ou transversalmente isotrópicos.

A primeira formulação do MEC para problemas elásticos lineares planos, não isotrópicos, foi desenvolvida por RIZZO & SHIPPY (1970). Utilizando-se da solução fundamental para análise de problemas ortotrópicos proposta por GREEN (1943), baseada somente em variáveis reais, aplicam a abordagem direta de solução para o estudo de tensões em alguns exemplos de sólidos

ortotrópicos. Foram utilizados elementos constantes para aproximar as variáveis e a geometria do problema.

A partir desse trabalho, surgiram outros que aplicaram também a mesma solução fundamental de RIZZO & SHIPPY (1970) com a finalidade de se estudarem sólidos ortotrópicos planos, podendo ser citados BENJUMEA & SIKARSKIE (1972), MAHAJERIN & SIKARSKIE (1986), VABLE & SIKARSKIE (1988) e PADHI *et alii* (2000).

A análise de sólidos anisotrópicos planos, possuindo anisotropia geral, através do MEC teve início com o trabalho de CRUSE & SWEDLOW (1971) que, utilizando funções de variáveis complexas e o formalismo elástico anisotrópico de LEKHNITSKII (1963), propuseram uma solução fundamental bi-dimensional que tem sido bastante utilizada nas mais diferentes aplicações do MEC em anisotropia geral.

LEE & MAL (1990) apresentaram uma formulação para o MEC, para a análise de meios anisotrópicos planos, onde as equações integrais são discretizadas num plano complexo, diferenciando-se assim das formulações usuais. As incógnitas do problema são assumidas como funções lineares de uma variável complexa, em cada elemento de contorno, e as integrações são realizadas de forma exata para contornos arbitrários sem a necessidade de integrações numéricas, constituindo-se assim, a vantagem do método proposto.

BREBBIA & DOMINGUEZ (1989) propuseram uma solução fundamental deduzida a partir da solução fundamental isotrópica de Kelvin, evitando-se, dessa maneira, para problemas tridimensionais, a integração numérica para se determinar a função de Green. A técnica consiste em expressar as constantes anisotrópicas como uma média dos valores das constantes isotrópicas mais um resíduo, que por sua vez, é transformado num termo de domínio da equação integral e pode ser tratado, por exemplo, pelo método da reciprocidade dual (MRD).

Para meios infinitos transversalmente isotrópicos, PAN & CHOU (1976) obtiveram uma solução fundamental utilizando-se de três funções potenciais de deslocamentos. Essa solução foi empregada por PAN & AMADEI (1996), no estudo de sólidos sujeitos à ação da gravidade e também, por DING & LIANG (1999) na análise de sólidos piezoelétricos transversalmente isotrópicos.

No estudo de materiais compósitos, destaca-se o trabalho de HOEFEL (2006), que emprega a solução fundamental ortotrópica no estudo de laminados anisotrópicos. A anisotropia, portanto, é obtida dispendo-se as várias camadas ortotrópicas em direções diferentes entre si.

1.3. Objetivos deste trabalho

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de um programa computacional utilizando o Método dos Elementos de Contorno na solução de problemas elásticos lineares planos (chapa) compostos por domínios não-homogêneos, determinando os deslocamentos/forças de superfície no contorno e as tensões no domínio do corpo.

A não-homogeneidade estudada neste trabalho restringe-se aos problemas onde o domínio é composto por várias sub-regiões, cujas propriedades elásticas do material não variam no interior de cada sub-região.

A técnica clássica de sub-regiões, proposta através da compatibilização dos deslocamentos e forças de superfície nos nós da interface, permite apenas o estudo de materiais isotrópicos. No entanto, a formulação proposta neste trabalho permite, além da análise de problemas com sub-regiões isotrópicas, a análise de sub-regiões anisotrópicas. Garantida a qualidade dos resultados para os problemas descritos acima, estende-se a formulação na análise de meios contínuos anisotrópicos.

Utilizam-se, na formulação do problema, as representações integrais para problemas de campos iniciais no domínio. Sendo assim, faz-se necessário a discretização do domínio em células.

No contorno são empregados elementos iso-paramétricos lineares e as integrações são feitas analiticamente para todas as situações de posicionamento do ponto fonte. Calculam-se essas integrais, inicialmente, em relação a eixos cartesianos locais, procedendo-se posteriormente com a rotação de eixos para posicionamento global. No domínio são empregadas células triangulares com aproximação linear, com as integrais sendo obtidas segundo processo semi-analítico em coordenadas globais. Na busca por melhores resultados, utilizou-se no programa, a técnica de sub-elementação,

que consiste no refinamento nas integrações numéricas quando o ponto fonte encontra-se próximo do ponto singular.

Com a formulação devidamente elaborada parte-se para a implementação computacional, que, para este trabalho, foi utilizado a linguagem de programação FORTRAN *PowerStation* versão 6.

Para verificar a formulação, comparam-se alguns exemplos numéricos mais simples com seus resultados analíticos e ainda com resultados encontrados na literatura.

1.4. Conteúdo do Trabalho

No capítulo 2 são apresentados os fundamentos básicos da teoria da elasticidade, ponto de partida na elaboração deste trabalho.

Já o capítulo 3 aprofunda os conceitos sobre as relações constitutivas (para meios anisotrópicos, ortotrópicos, isotrópicos transversais e isotrópicos), onde primeiramente é abordada sua forma mais ampla (tridimensional) e posteriormente sua forma simplificada (bidimensional). Esta última ainda é apresentada para seus dois estados possíveis, Estado Plano de Tensão (EPT) e Estado Plano de Deformação (EPD).

No capítulo 4 são apresentadas as soluções fundamentais de Kelvin empregadas na formulação e a representação integral de um corpo elástico, necessária à resolução dos problemas pelo MEC.

No capítulo 5, as equações integrais são representadas em equações algébricas lineares, utilizando funções aproximadoras sobre o contorno para representar os deslocamentos e esforços. É apresentado os conceitos de integração analítica e numérica, e a técnica de sub-elementação no refinamento da solução.

O capítulo 6 apresenta as soluções integrais do MEC para problemas com campos iniciais, sua função de aproximação das variáveis no domínio, o conceito de célula e o equacionamento algébrico do MEC para resolução de problemas com campo de tensões iniciais.

No capítulo 7 é apresentada uma matriz, cuja propriedade consiste na penalização das propriedades elásticas de um material isotrópico qualquer

usado como referência, de modo a obter as propriedades elásticas desejadas na região do domínio discretizado em células.

O capítulo 8 traz os exemplos numéricos avaliados com o uso da formulação desenvolvida. Procura-se, na medida do possível, mostrar o potencial da ferramenta desenvolvida a partir de comparações com os resultados encontrados na literatura. E em seguida, são apresentadas as conclusões do presente trabalho de mestrado.

CAPÍTULO 2

“Temos de fazer o melhor que pudermos. Essa é a nossa sagrada responsabilidade humana.”

(Albert Einstein)

FUNDAMENTOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE

Este capítulo descreve sucintamente, em notação indicial, os conceitos básicos sobre a teoria da elasticidade.

2.1. Equações básicas da teoria da elasticidade

As seguintes relações básicas da teoria da elasticidade são utilizadas neste item: relações deformação-deslocamento, relações constitutivas e condições de equilíbrio. São elas que permitem descrever o comportamento de um sólido.

As forças atuantes em um corpo são admitidas como sendo de dois tipos: forças volumétricas (b_i) ou forças de superfície (p_i). As forças volumétricas são determinadas por unidade de volume, pois atuam sobre o volume do corpo (exemplo clássico, a gravidade), enquanto as forças de superfície são determinadas por unidade de área, pois atuam apenas sobre a superfície.

Forças de Superfície

Admitindo-se o equilíbrio estático de um tetraedro infinitesimal e conhecido todas as componentes de tensão que atuam nos três planos

cartesianos, pode-se então encontrar as tensões que atuam num plano qualquer que passe por este tetraedro. Estas tensões são conhecidas como forças de superfície (*Tractions*) e respeitam a condição de equilíbrio no contorno Γ do corpo dada pela expressão:

$$p_i = \sigma_{ij}\eta_j \quad (i, j = 1, 3), \quad (2.1)$$

onde,

p_i - Componentes de forças externas por unidade de superfície (*Traction*);

η_j - Componentes (co-seno diretor) do vetor normal unitário, apontando para fora do domínio.

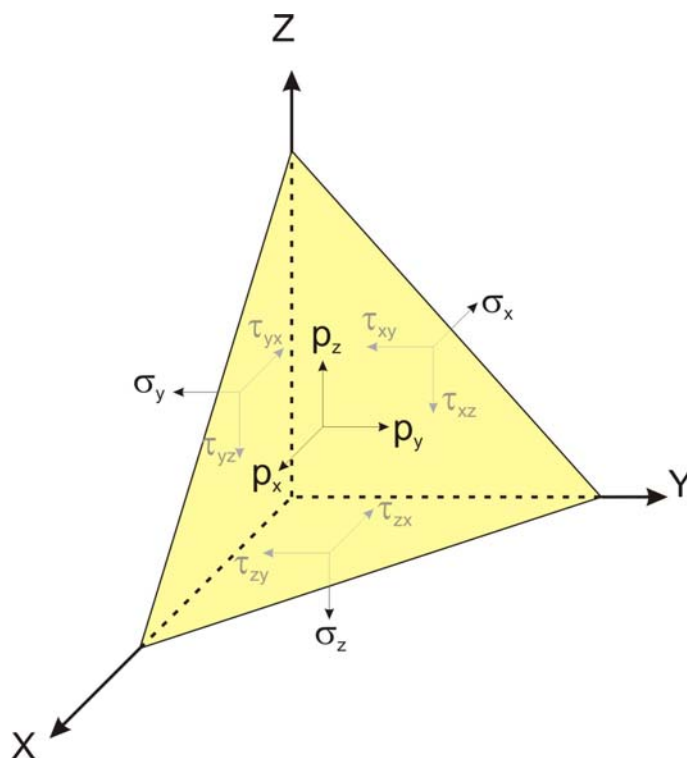


Figura 1 – Forças de Superfície

Em duas dimensões, visualizamos o elemento infinitesimal conforme a figura à seguir,

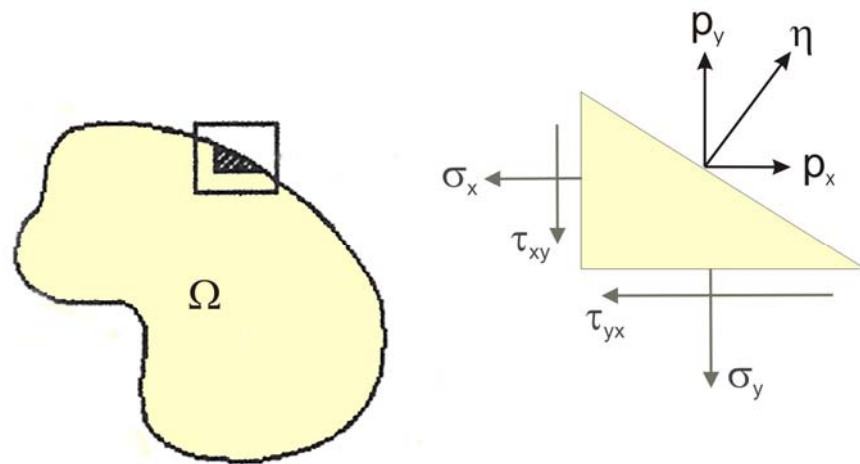


Figura 2 – Forças de Superfície em um Elemento Diferencial Bidimensional

Equações diferenciais de equilíbrio (Equação de Navier)

Para um ponto qualquer de um corpo tridimensional, isotrópico, elástico-linear e homogêneo, definido por um domínio Ω e contorno Γ , o equilíbrio de um elemento infinitesimal em forma de paralelepípedo (Figura 3 – Elemento Infinitesimal) em torno deste ponto é representado pela equação diferencial.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (i, j = 1, 3), \quad (2.2)$$

onde,

σ_{ij} são componentes do tensor de tensões (*stress tensor*);

b_i são componentes de forças por unidade de volume (*body forces*).

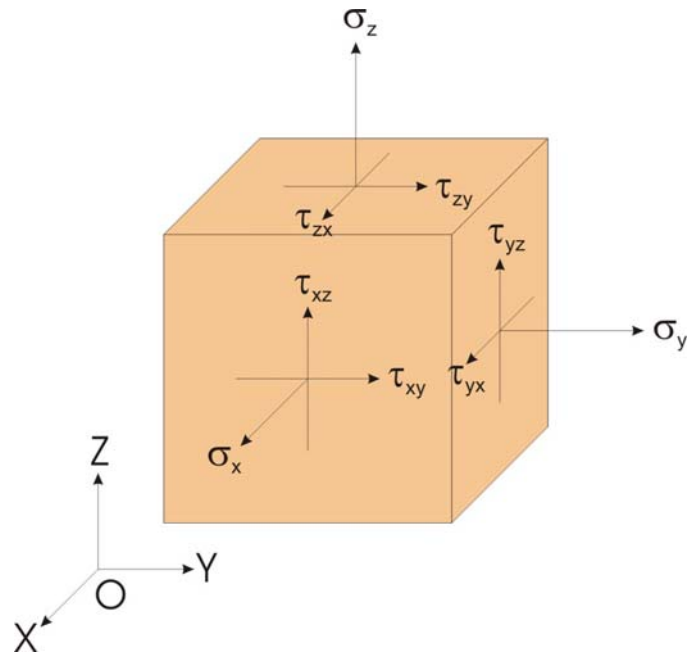


Figura 3 – Elemento Infinitesimal

Relações deformação – deslocamento

O tensor de deformações ε_{ij} é expresso por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j} - u_{k,i}u_{k,j}) \quad (i, j, k = 1,3). \quad (2.3)$$

Na prática, as estruturas sofrem pequenos deslocamentos e pequenas deformações, podendo-se então desprezar os efeitos de segunda ordem resultando na expressão linear simplificada abaixo:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{j,i} + u_{i,j}) \quad (i, j = 1,3). \quad (2.4)$$

Equações constitutivas

As equações constitutivas proporcionam as relações entre tensão e deformação do material. Enquanto o sólido encontra-se com suas deformações

no regime elástico linear, a equação constitutiva recebe o nome particular de lei de Hooke.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (2.5)$$

onde, C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem que caracteriza o material, variando de ponto a ponto dentro do corpo quando este não for homogêneo.

No caso de admitida às hipóteses de meio elástico, homogêneo e isotrópico, onde não existem mudanças de temperatura, este tensor tem reduzido suas constantes elásticas à apenas dois valores (G, ν) válidos para todos os pontos materiais, onde,

G - Módulo de elasticidade transversal ou de cisalhamento (*shear modulus*);

ν - Coeficiente de Poisson.

E o tensor, neste caso, é definido por:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}). \quad (2.6)$$

Então, a lei de Hooke pode ser escrita apenas por:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}, \quad (2.7)$$

onde,

ε_{ij} - Tensor de deformações específicas de Cauchy.

δ_{ij} - Delta de Kronecker.

E o módulo de elasticidade transversal G é expresso pela expressão:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (2.8)$$

sendo,

E - Módulo de elasticidade longitudinal do material ou módulo de Young;

ν - Coeficiente de Poisson.

Na forma inversa da equação constitutiva, podemos representar as deformações em função das tensões no corpo como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left[\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1 + \nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right]. \quad (2.9)$$

Condições de Contorno

Na formulação do problema elástico, além das equações que devem ser satisfeitas no domínio, outras condições devem ser atendidas no contorno do sólido. De maneira geral, podem-se ter deslocamentos prescritos ou forças prescritas.

2.2. Problemas Planos

Em muitos casos, um problema elástico pode ser considerado, de forma exata ou aproximada, com seu estado de tensão ou deformação independente de uma das suas coordenadas. Assim, problemas tridimensionais podem ser estudados de forma simplificada em modelos bidimensionais.

Estado plano de tensão (EPT)

O estado plano de tensão ocorre quando uma chapa delgada for solicitada por um carregamento distribuído uniformemente ao longo da sua espessura, atuando paralelamente ao plano da chapa. Então, as componentes

de tensão σ_z , τ_{zx} e τ_{zy} são nulas em ambas as faces da chapa e pode-se supor, em princípio, que também o são em seu interior. Conseqüentemente, as componentes de tensão não nulas são tomadas como sendo σ_x , σ_y , τ_{xy} .

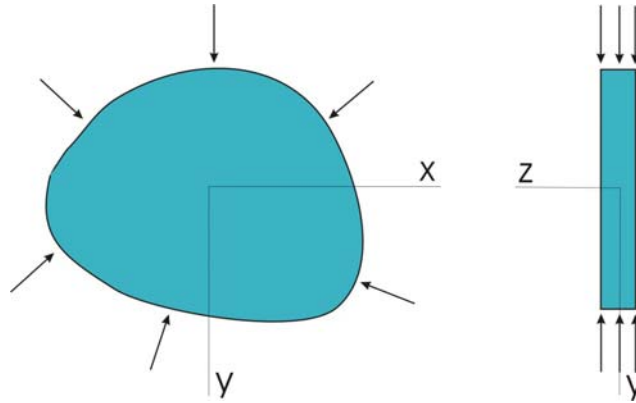


Figura 4 – Estado Plano de Tensão

As deformações específicas no ponto considerado são:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad (2.10)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad (2.11)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) \quad e \quad (2.12)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (2.13)$$

Estado plano de deformação (EPD)

O estado plano de deformação ocorre quando a dimensão do sólido na direção z é muito grande e é submetido a forças que não variam ao longo do comprimento. Portanto, admite-se que todas as seções transversais ao longo do comprimento estão sob as mesmas condições, sendo suficiente para estudo

adotar uma fatia do sólido situado entre duas seções que distem de uma unidade.

Em problemas reais da engenharia podemos encontrar o estado plano de deformação em muros de arrimo com pressão lateral, em tubos cilíndricos com pressão interna e túneis.

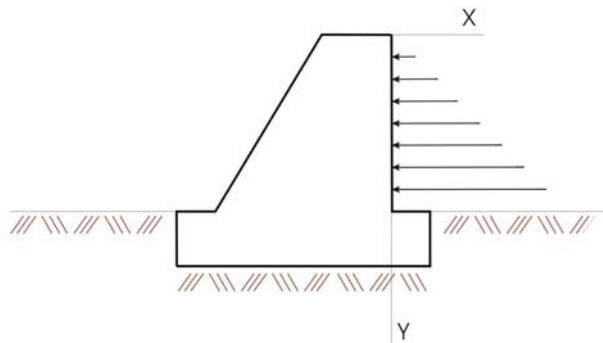


Figura 5 – Estado Plano de Deformação

Como o deslocamento na coordenada longitudinal z é nulo, as componentes de deformação ε_z , γ_{xz} e γ_{yz} também são nulas. A tensão normal σ_z é obtida em função de σ_x e σ_y através da lei de Hooke.

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (2.14)$$

CAPÍTULO 3

“As soluções, eu já as possuo há muito tempo. Mas
ainda não sei como cheguei a elas”
(Carl Friedrich Gauss)

RELAÇÃO CONSTITUTIVA EM ELASTICIDADE LINEAR

Um corpo elástico retorna sua forma original quando se retiram as solicitações que o deformam. Um corpo diz-se linearmente elástico quando um aumento ou diminuição das solicitações provoca, respectivamente, um aumento ou diminuição linear das deformações.

O objetivo deste capítulo é relacionar cada componente da tensão com cada componente da deformação introduzindo as propriedades do material. Ou seja, procura-se ligar os tensores de tensões e de deformações através dos coeficientes elásticos de rigidez a_{ijkl} e de flexibilidade b_{ijkl} .

3.1. Elasticidade Tridimensional

Material anisotrópico homogêneo

A Lei de Hooke generalizada, como já mostrada anteriormente em (2.5), aplicável à um material anisotrópico, isto é, sem nenhum plano de simetria material, é escrita como segue,

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (3.1)$$

ou, na forma inversa,

$$\varepsilon_{ij} = b_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (3.2)$$

onde,

a_{ijkl} são os coeficientes elásticos de rigidez do material;

b_{ijkl} são os coeficientes elásticos de flexibilidade do material.

Em virtude das simetrias dos tensores das tensões e das deformações é possível definir a densidade de energia de deformação pela expressão

$$U_0 = \frac{1}{2} a_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}. \quad (3.3)$$

Podendo concluir que, os coeficientes elásticos de rigidez e de flexibilidade apresentam as seguintes simetrias:

$$\begin{aligned} a_{ijkl} &= a_{jikl} = a_{ijlk} = a_{klij} \\ b_{ijkl} &= b_{jikl} = b_{ijlk} = b_{klij} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Consequentemente, dos 81 componentes de cada um dos tensores apenas 21 são independentes. No caso do material ser homogêneo, os valores de a_{ijkl} e b_{ijkl} são iguais em todos os pontos.

A Lei de Hooke generalizada ou relações constitutivas são escritas na forma matricial da seguinte forma,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1133} & a_{1123} & a_{1113} & a_{1112} \\ a_{2211} & a_{2222} & a_{2233} & a_{2223} & a_{2213} & a_{2212} \\ a_{3311} & a_{3322} & a_{3333} & a_{3323} & a_{3313} & a_{3312} \\ a_{2311} & a_{2322} & a_{2333} & a_{2323} & a_{2313} & a_{2312} \\ a_{1311} & a_{1322} & a_{1333} & a_{1323} & a_{1313} & a_{1312} \\ a_{1211} & a_{1222} & a_{1233} & a_{1223} & a_{1213} & a_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{1111} & b_{1122} & b_{1133} & 2b_{1123} & 2b_{1113} & 2b_{1112} \\ b_{2211} & b_{2222} & b_{2233} & 2b_{2223} & 2b_{2213} & 2b_{2212} \\ b_{3311} & b_{3322} & b_{3333} & 2b_{3323} & 2b_{3313} & 2b_{3312} \\ 2b_{2311} & 2b_{2322} & 2b_{2333} & 4b_{2323} & 4b_{2313} & 4b_{2312} \\ 2b_{1311} & 2b_{1322} & 2b_{1333} & 4b_{1323} & 4b_{1313} & 4b_{1312} \\ 2b_{1211} & 2b_{1222} & 2b_{1233} & 4b_{1223} & 4b_{1213} & 4b_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

Em algumas referências relacionadas com materiais denominados compósitos, as expressões acima são apresentadas na forma de pseudo vetores, ocultando o caráter tensorial, simplificando a escrita, conforme é apresentado abaixo,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

em notação indicial,

$$\sigma_i = a_{ij} \varepsilon_j \quad i, j \in [1,6], \quad (3.8)$$

e,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.9)$$

em notação indicial,

$$\varepsilon_i = b_{ij} \sigma_j \quad i, j \in [1,6] \quad (3.10)$$

Coefficientes elásticos de engenharia

As propriedades elásticas necessárias para definir um material anisotrópico podem ser definidas mediante razões entre tensões e deformações, ou vice-versa. Na prática, consideram-se as seguintes relações:

I – Módulo de elasticidade longitudinal E_k na direção x_k ($k = 1,2,3$) é a relação

$$E_k = \frac{\sigma_{kk}}{\varepsilon_{kk}} \quad (3.11)$$

Conclui-se que E_k relaciona a tensão normal que atua na face normal x_k ($k = 1,2,3$) com a deformação linear na mesma direção. Existem 3 módulos de elasticidade longitudinal.

II – Módulo de elasticidade transversal G_{ij} ($i \neq j$) é definido pela razão

$$G_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\varepsilon_{ij}} \quad (i \neq j), \quad (3.12)$$

que relaciona a tensão tangencial que atua na face normal x_i ($i = 1,2,3$) na direção x_j ($j = 1,2,3 \neq i$), com a deformação angular no plano $x_i x_j$. Existem 3 módulos de elasticidade transversal.

III - Coefficiente de Poisson ν_{mn} é definido como:

$$\nu_{mn} = -\frac{\varepsilon_{nn}}{\varepsilon_{mm}} \quad (m \neq n) \quad (3.13)$$

Portanto, o coeficiente de Poisson ν_{mn} relaciona a deformação linear segundo uma direção x_n perpendicular a x_m com a deformação linear segundo x_m , sendo o estado de deformação provocado por uma tensão normal na direção x_m . Existem seis coeficientes de Poisson diferentes.

IV – Outras razões de deformações – Em materiais anisotrópicos, uma tensão normal pode provocar deformações angulares e tensões tangenciais podem provocar deformações lineares ou distorções em outros planos. Assim, podem definir-se as seguintes razões de deformações:

- Angular/Angular:

$$\rho_{ijkl} = \frac{\varepsilon_{kl}}{\varepsilon_{ij}} = \frac{\gamma_{kl}}{\gamma_{ij}} \quad \text{com } (i \neq j) \text{ e } (k \neq l) \quad (3.14)$$

Esta expressão relaciona uma deformação angular num plano diferente de $x_i x_j$ com a deformação angular no plano $x_i x_j$, sendo o estado de deformação provocado por uma tensão tangencial σ_{ij} . Há seis relações independentes.

- Angular/Linear:

$$\rho_{ijkl} = \rho_{nnkl} = \frac{2\varepsilon_{kl}}{\varepsilon_{nn}} = \frac{\gamma_{kl}}{\varepsilon_{nn}} \quad \text{com } (i = j = n) \text{ e } (k \neq l) \quad (3.15)$$

Esta expressão relaciona uma deformação angular em cada um dos planos, com a deformação linear segundo a direção x_n , sendo o estado de deformação provocado por uma tensão normal σ_{nn} . Podem definir-se nove relações diferentes.

- Linear/Angular:

$$\rho_{ijkl} = \rho_{ijmm} = \frac{\varepsilon_{mm}}{2\varepsilon_{ij}} = \frac{\varepsilon_{mm}}{\gamma_{ij}} \quad \text{com } (i \neq j) \text{ e } (k = l = m) \quad (3.16)$$

Relaciona uma deformação linear segundo x_m com a deformação angular no plano $x_i x_j$, sendo o estado de deformação provocado por uma tensão tangencial σ_{ij} . Existem nove razões independentes.

Relação constitutiva de um material anisotrópico

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & \frac{\rho_{2311}}{G_{23}} & \frac{\rho_{1311}}{G_{13}} & \frac{\rho_{1211}}{G_{12}} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{\rho_{2322}}{G_{23}} & \frac{\rho_{1322}}{G_{13}} & \frac{\rho_{1222}}{G_{12}} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & \frac{\rho_{2333}}{G_{23}} & \frac{\rho_{1333}}{G_{13}} & \frac{\rho_{1233}}{G_{12}} \\ \frac{\rho_{1123}}{E_1} & \frac{\rho_{2223}}{E_2} & \frac{\rho_{3323}}{E_3} & \frac{1}{G_{23}} & \frac{\rho_{1323}}{G_{13}} & \frac{\rho_{1223}}{G_{12}} \\ \frac{\rho_{1113}}{E_1} & \frac{\rho_{2213}}{E_2} & \frac{\rho_{3313}}{E_3} & \frac{\rho_{2313}}{G_{23}} & \frac{1}{G_{13}} & \frac{\rho_{1213}}{G_{12}} \\ \frac{\rho_{1112}}{E_1} & \frac{\rho_{2212}}{E_2} & \frac{\rho_{3312}}{E_3} & \frac{\rho_{2312}}{G_{23}} & \frac{\rho_{1312}}{G_{13}} & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.17)$$

Devido à simetria do tensor de constantes elásticas de flexibilidade, conclui-se que um material anisotrópico apresenta 21 constantes independentes que podem ser obtidas experimentalmente mediante seis ensaios (um para cada uma das tensões independentes).

Relação constitutiva de um material ortotrópico

Um material ortotrópico apresenta três planos de simetria ortogonais entre si, x_1x_2 , x_1x_3 e x_2x_3 e sua relação constitutiva apresenta-se como segue abaixo,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

Percebe-se que para tais materiais, o número de coeficientes independentes reduz-se para 9, além de podermos observar que:

- as deformações angulares são independentes das tensões normais;
- as deformações lineares são independentes das tensões tangenciais;
- cada tensão tangencial só provoca deformação angular no plano em que atua.

As componentes do tensor de coeficientes elásticos de rigidez a_{ijkl} , para um material ortotrópico, podem ser obtidas invertendo-se a matriz acima, resultando os termos independentes seguir:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} E_1(1-\nu_{23}\nu_{32}) & E_1(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31}) & E_1(\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}) & 0 & 0 & 0 \\ E_2(\nu_{12}+\nu_{13}\nu_{32}) & E_2(1-\nu_{13}\nu_{31}) & E_2(\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}) & 0 & 0 & 0 \\ E_3(\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}) & E_3(\nu_{23}+\nu_{13}\nu_{21}) & E_3(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{21}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}$$

Relação constitutiva de um material isotrópico transversal

Um material isotrópico transversal constitui-se de um material ortotrópico que apresenta isotropia em um dos planos de simetria, ou seja, apresenta as mesmas propriedades em todas as direções neste plano.

Supondo o plano de isotropia sendo x_2x_3 , pode-se escrever a relação constitutiva,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Em virtude da isotropia no plano x_2x_3 , o módulo de elasticidade transversal G_{23} neste plano não é independente do módulo de elasticidade longitudinal E_2 e do coeficiente de Poisson ν_{23} , devendo verificar a relação:

$$b_{2323} = 2(b_{3333} - b_{2223}) \Leftrightarrow \frac{1}{G_{23}} = \frac{2(1 + \nu_{23})}{E_2} \quad (3.21)$$

Assim, para estes materiais, o número de coeficientes elásticos independentes reduz-se a 5 e, além das conclusões discutidas para materiais ortotrópicos, podemos observar à partir de (3.20):

- as deformações lineares no plano x_2x_3 provocadas pela tensão normal σ_{11} são iguais;
- as deformações lineares ε_{22} e ε_{33} provocadas pela tensão normal σ_{22} é igual às deformações ε_{33} e ε_{22} (respectivamente) provocadas por uma tensão $\sigma_{33} = \sigma_{22}$;
- cada tensão tangencial só provoca deformação angular no plano em que atua;
- a deformação angular γ_{23} provocada por uma tensão σ_{23} é igual à uma deformação angular γ_{13} provocada por uma tensão $\sigma_{13} = \sigma_{23}$.

Das conclusões anteriores é possível estabelecer as relações constitutivas para materiais isotrópicos transversais nos planos x_1x_3 e x_1x_2 , respectivamente:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{1}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

com,

$$b_{1313} = 2(b_{3333} - b_{1123}) \Leftrightarrow \frac{1}{G_{13}} = \frac{2(1 + \nu_{13})}{E_1} \quad (3.23)$$

E no outro plano,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

com,

$$b_{1212} = 2(b_{2222} - b_{1122}) \Leftrightarrow \frac{1}{G_{11}} = \frac{2(1 + \nu_{12})}{E_1} \quad (3.25)$$

As componentes do tensor de coeficientes elásticos de rigidez a_{ijkl} para um material isotrópico transversal podem ser obtidas invertendo-se as matrizes \mathbf{B} das equações (3.22) e (3.24) acima, para cada um dos casos de isotropia transversal.

Explicitamente, para o material isotrópico transversal em x_2x_3 temos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} E_1(1-\nu_{23}^2) & E_1(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{21}) & E_1(\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ E_2(\nu_{12}+\nu_{12}\nu_{32}) & E_2(1-\nu_{12}\nu_{21}) & E_2(\nu_{23}+\nu_{12}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ E_2(\nu_{12}+\nu_{12}\nu_{32}) & E_2(\nu_{23}+\nu_{12}\nu_{21}) & E_2(1-\nu_{12}\nu_{21}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Delta G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta G_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

$$\Delta = 1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{12}\nu_{21}\nu_{23}$$

Relação constitutiva de um material isotrópico

Um material isotrópico é aquele que apresenta infinitos planos de simetria ortogonais entre si. Por isso, pode-se dizer que não existem direções materiais preferenciais. Sua relação constitutiva apresenta-se da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

E na forma inversa,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

onde,

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3.29)$$

Para tais materiais, o número de coeficientes elásticos independentes reduz-se a apenas 2. Em notação indicial, pode-se escrever a relação constitutiva como:

$$\sigma_{ij} = \left[\frac{E}{(1+\nu)} \delta_{im} \delta_{jn} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta_{ij} \delta_{mn} \right] \varepsilon_{mn}. \quad (3.30)$$

3.2. Elasticidade Bidimensional

Problema de Estado Plano de Tensão

Defini-se estado plano de tensão como aquele em que uma das tensões principais é nula e a direção principal correspondente é igual em todos os pontos do corpo. Este estado de tensão verifica-se num corpo com uma dimensão muito menor do que as demais, apenas carregado no plano perpendicular a essa direção.

Supondo que é σ_{33} que é nula, o tensor das tensões para um ponto qualquer P é:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.31)$$

Conclui-se, então que,

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} = \sigma_{33} = 0. \quad (3.32)$$

I – Relação constitutiva de um material anisotrópico

Impondo a condição (3.32) à expressão (3.17), obtém-se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cccccc} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & \frac{\rho_{2311}}{G_{23}} & \frac{\rho_{1311}}{G_{13}} & \frac{\rho_{1211}}{G_{12}} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & \frac{\rho_{2322}}{G_{23}} & \frac{\rho_{1322}}{G_{13}} & \frac{\rho_{1222}}{G_{12}} \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & \frac{\rho_{2333}}{G_{23}} & \frac{\rho_{1333}}{G_{13}} & \frac{\rho_{1233}}{G_{12}} \\ \frac{\rho_{1123}}{E_1} & \frac{\rho_{2223}}{E_2} & \frac{\rho_{3323}}{E_3} & \frac{1}{G_{23}} & \frac{\rho_{1323}}{G_{13}} & \frac{\rho_{1223}}{G_{12}} \\ \frac{\rho_{1113}}{E_1} & \frac{\rho_{2213}}{E_2} & \frac{\rho_{3313}}{E_3} & \frac{\rho_{2313}}{G_{23}} & \frac{1}{G_{13}} & \frac{\rho_{1213}}{G_{12}} \\ \frac{\rho_{1112}}{E_1} & \frac{\rho_{2212}}{E_2} & \frac{\rho_{3312}}{E_3} & \frac{\rho_{2312}}{G_{23}} & \frac{\rho_{1312}}{G_{13}} & \frac{1}{G_{12}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \sigma_{12} \end{array} \right\} \quad (3.33)$$

Conclui-se que a lei constitutiva pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & \frac{\rho_{1211}}{G_{12}} \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{\rho_{1222}}{G_{12}} \\ \frac{\rho_{1112}}{E_1} & \frac{\rho_{2212}}{E_2} & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{\rho_{1233}}{G_{12}} \\ \frac{\rho_{1123}}{E_1} & \frac{\rho_{2223}}{E_2} & \frac{\rho_{1223}}{G_{12}} \\ \frac{\rho_{1113}}{E_1} & \frac{\rho_{2213}}{E_2} & \frac{\rho_{1213}}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.35)$$

As componentes do tensor de coeficientes elásticos da rigidez a_{ijkl} , para um material anisotrópico, são obtidas invertendo-se a matriz \mathbf{B} da equação (3.34) acima.

II – Relação constitutiva de um material ortotrópico

Neste caso, usando as equações (3.32) e (3.18), pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.36)$$

e,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

As componentes do tensor de coeficientes elásticos de rigidez a_{ijkl} , para um material ortotrópico, são obtidas invertendo-se a matriz **B** da equação (3.36) acima. Explicitamente, obtemos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & \frac{E_1\nu_{21}}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ \frac{E_2\nu_{12}}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & \frac{E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

III – Relação constitutiva de um material isotrópico transversal

Supondo o plano de isotropia x_2x_3 , encontra-se

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

e,

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & \frac{E_1\nu_{21}}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ \frac{E_2\nu_{12}}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & \frac{E_2}{(1-\nu_{12}\nu_{21})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.41)$$

IV – Relação constitutiva de um material isotrópico

Neste caso, temos:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.42)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.43)$$

As componentes do tensor de coeficientes elásticos de rigidez a_{ijkl} , para um material isotrópico, são obtidas invertendo-se a matriz **B** da equação (3.42) acima. Explicitamente, obtemos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{(1-\nu^2)} & \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & 0 \\ \frac{E\nu}{(1-\nu^2)} & \frac{E}{(1-\nu^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.44)$$

Problema de Estado Plano de Deformação

Define-se estado plano de deformação como aquele em que todos os componentes do tensor de deformações relativos à uma direção, por exemplo x_3 , forem nulos. Isto é,

$$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{33} = 0 \quad (3.45)$$

I – Relação constitutiva de um material anisotrópico

Impondo a condição (3.45) à expressão (3.5), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1133} & a_{1123} & a_{1113} & a_{1112} \\ a_{2211} & a_{2222} & a_{2233} & a_{2223} & a_{2213} & a_{2212} \\ a_{3311} & a_{3322} & a_{3333} & a_{3323} & a_{3313} & a_{3312} \\ a_{2311} & a_{2322} & a_{2333} & a_{2323} & a_{2313} & a_{2312} \\ a_{1311} & a_{1322} & a_{1333} & a_{1323} & a_{1313} & a_{1312} \\ a_{1211} & a_{1222} & a_{1233} & a_{1223} & a_{1213} & a_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

A relação constitutiva do material anisotrópico em deformação plana é:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1111} & a_{1122} & a_{1112} \\ a_{2211} & a_{2222} & a_{2212} \\ a_{1211} & a_{1222} & a_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{3311} & a_{3322} & a_{3312} \\ a_{2311} & a_{2322} & a_{2312} \\ a_{1311} & a_{1322} & a_{1312} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

As componentes do tensor de coeficientes elásticos de flexibilidade b_{ijkl} , para um material anisotrópico, é obtido invertendo-se a matriz \mathbf{A} da equação (3.47) acima.

II – Relação constitutiva de um material ortotrópico

Neste caso, impondo a condição (3.45) à lei constitutiva (3.19), podemos escrever:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32}) & E_1(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{31}) & 0 \\ E_2(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) & E_2(1 - \nu_{13}\nu_{31}) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.49)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} E_3(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}) & E_3(\nu_{23} + \nu_{13}\nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

sendo,

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{13}\nu_{31} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{21}\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{23}\nu_{31} \quad (3.51)$$

As componentes do tensor de coeficientes elásticos de flexibilidade b_{ijkl} , para um material ortotrópico, é obtido invertendo-se a matriz \mathbf{A} da equação (3.49) acima.

III – Relação constitutiva de um material isotrópico transversal

Supondo o plano de isotropia x_2x_3 e impondo a condição (3.45) à lei constitutiva baseada em (3.26), pode-se escrever

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} E_1(1 - \nu_{23}^2) & E_1(\nu_{21} + \nu_{23}\nu_{21}) & 0 \\ E_2(\nu_{12} + \nu_{12}\nu_{23}) & E_2(1 - \nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & \Delta G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} E_2(\nu_{12} + \nu_{12}\nu_{23}) & E_2(\nu_{23} + \nu_{12}\nu_{21}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.53)$$

sendo,

$$\Delta = 1 - 2\nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}^2 - 2\nu_{12}\nu_{21}\nu_{23} \quad (3.54)$$

As componentes do tensor de coeficientes elásticos de flexibilidade b_{ijkl} , para um material isotrópico transversal, é obtido invertendo-se a matriz \mathbf{A} da equação (3.52) acima.

III – Relação constitutiva de um material isotrópico

Neste caso, temos:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.55)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.56)$$

E na forma inversa, temos:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1-\nu^2}{E} & -\frac{\nu(1+\nu)}{E} & 0 \\ -\frac{\nu(1+\nu)}{E} & \frac{1-\nu^2}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.57)$$

CAPÍTULO 4

"Faça as coisas o mais simples que você puder,
porém não se restrinja às mais simples."

(Albert Einstein)

EQUAÇÕES INTEGRAIS DO PROBLEMA ELÁSTICO BIDIMENSIONAL

Neste capítulo serão deduzidas as equações integrais do problema elástico a partir do teorema da reciprocidade de Betti. O problema a ser tratado consiste em um meio elástico linear, onde é aplicada uma força unitária no ponto s , também denominado de ponto fonte (*source point*), e mede-se o efeito desta carga unitária em outro ponto qualquer q .

O domínio do problema a ser tratado é infinito e, assim como na literatura em geral, será empregado um asterisco (*) para indicar quando se tratar de variáveis associadas ao problema fundamental.

4.1. Solução fundamental de Kelvin

A solução fundamental de Kelvin representa fisicamente o efeito de uma carga unitária concentrada atuando em um ponto do domínio infinito.

Partindo-se da equação de equilíbrio (2.2) e substituindo a parte referente às forças volumétricas (b_k) pela função Delta de Dirac (Anexo C), obtém-se,

$$b_k(q) = \delta(s, q) c_k(s) \quad (4.1)$$

com $c_k(s)$ representando o co-seno do ângulo entre a força aplicada e o eixo x_k . Posteriormente, utiliza-se do delta de Kronecker (Anexo B) para indicar a força unitária atuando apenas na direção i .

Então, a equação de equilíbrio para o problema fundamental é escrita como:

$$\sigma_{ikj,j}^* + \delta(s,q)\delta_{ik} = 0 \quad (4.2)$$

Substituindo na Lei de Hooke (para o problema fundamental) a relação deformação-deslocamento (2.4) e em seguida derivando-se com respeito a x_j e substituindo-se o resultado na equação (4.2), tem-se:

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{ij,kj}^* + u_{ik,jj}^* + \frac{\delta(s,q)\delta_{ik}}{G} = 0 \quad (4.3)$$

As soluções desta equação são chamadas Soluções Fundamentais. Em se tratando das soluções de Kelvin, que correspondem ao espaço infinito, uma possível solução em deslocamento da equação (4.3) para o Estado Plano de Deformações (EPD) é,

$$u_{ik}^*(s,q) = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ik} - r_i r_{,k} \right] \quad (4.4)$$

E para problemas tridimensionais, encontramos:

$$u_{ik}^*(s,q) = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{ik} + r_i r_{,k} \right] \quad (4.5)$$

Para o Estado Plano de Tensões, as soluções fundamentais podem ser obtidas a partir das relações do Estado Plano de Deformações fazendo-se as seguintes transformações:

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (4.6)$$

e,

$$G' = G. \quad (4.7)$$

A partir da solução em deslocamento, encontramos a solução em deformação para o problema fundamental, substituindo (4.5) em (2.4). No caso plano, encontramos:

$$\varepsilon_{ijk}^*(s, q) = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik}) - r_{,i}\delta_{jk} + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (4.8)$$

E na forma geral,

$$\varepsilon_{ijk}^*(s, q) = -\frac{1}{8\alpha\pi G(1-\nu)r^\alpha} \left[(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik}) - r_{,i}\delta_{jk} + \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (4.9)$$

onde,

$$\begin{cases} 2D \Rightarrow \alpha = 1, & \beta = 2 \\ 3D \Rightarrow \alpha = 2, & \beta = 3 \end{cases}$$

As tensões são obtidas aplicando a lei de Hooke (2.5) na equação (4.9). No caso bidimensional, obtemos:

$$\sigma_{ijk}^*(s, q) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik} - r_{,i}\delta_{jk}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (4.10)$$

E na forma geral,

$$\sigma_{ijk}^*(s, q) = -\frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left[(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik} - r_{,i}\delta_{jk}) + \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (4.11)$$

A partir da expressão (4.11) e da relação (2.1) obtém-se as forças de superfície para o problema fundamental,

$$p_{ik}^*(s, q) = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,i}r_{,k}]r_{,n} - (1-2\nu)(r_{,i}\eta_{,k} - r_{,k}\eta_{,i}) \right\} \quad (4.12)$$

No caso geral, temos:

$$p_{ik}^*(s, q) = -\frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ik} + \beta r_{,i}r_{,k}]r_{,n} - (1-2\nu)(r_{,i}\eta_{,k} - r_{,k}\eta_{,i}) \right\} \quad (4.13)$$

4.2. Equação integral de contorno para o problema elástico plano

A representação integral de um problema elástico demonstrada abaixo foi proposta por SOMIGLIANA (1886), a partir do teorema da reciprocidade de Betti. Tal proposta considera um corpo em estudo com domínio finito Ω e contorno Γ , inserido em um meio infinito Ω^* , submetido a dois estados de carregamento.

O primeiro carregamento é dito real e é representado pelas componentes de deslocamento $u_k(q)$, de tensão $\sigma_{jk}(q)$, de deformação $\varepsilon_{jk}(q)$, de forças volumétricas $b_k(q)$ e condições de contorno prescritas.

O segundo carregamento é associado ao problema fundamental e as componentes de deslocamento $u_{ik}^*(s, q)$, tensão $\sigma_{ijk}^*(q)$, deformação $\varepsilon_{ijk}^*(q)$ e forças de superfície $p_{ik}^*(q)$, são obtidas da aplicação de uma carga unitária em um ponto q qualquer do meio infinito.

Admitido-se tais carregamentos, a partir do teorema da reciprocidade de Betti chega-se a seguinte igualdade,

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}(q) \varepsilon_{ijk}^*(s, q) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^*(s, q) \varepsilon_{jk}(q) d\Omega. \quad (4.14)$$

Aplicando-se a relação deformação-deslocamento (2.4) e as relações de simetria à expressão (4.14), encontramos:

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk} u_{ij,k}^* d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ijk}^* u_{j,k} d\Omega. \quad (4.15)$$

Integrando-se por partes, obtém-se:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk,k} u_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_j u_{ij}^* d\Gamma = -\int_{\Omega} \sigma_{ijk,k}^* u_j d\Omega + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma. \quad (4.16)$$

Aplicando-se a equação de equilíbrio,

$$\begin{cases} \sigma_{jk,k} = -b_j \\ \sigma_{ijk,k}^* = -\delta(s, q) \delta_{ij} \end{cases}$$

do problema real e fundamental na equação (4.16), encontra-se:

$$\int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega + \int_{\Gamma} p_j u_{ij}^* d\Gamma = \int_{\Omega} \delta(s, q) \delta_{ij} u_j d\Omega + \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma, \quad (4.17)$$

onde, a parcela $\int_{\Omega} \delta(s, q) \delta_{ij} u_j d\Omega = \delta_{ij} u_j \int_{\Omega} \delta(s, q) d\Omega = \delta_{ij} u_j = u_i$ apenas se o ponto s

estiver no domínio Ω . Então,

$$\int_{\Gamma} p_j u_{ij}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^* u_j d\Gamma + \int_{\Omega} b_j u_{ij}^* d\Omega = \delta_{ij} u_j. \quad (4.18)$$

De forma mais completa,

$$u_i(s) = \int_{\Gamma} p_j(Q) u_{ij}^*(s, Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, Q) u_j(Q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Omega. \quad (4.19)$$

A equação (4.19) é a representação integral para os deslocamentos de pontos do interior de um corpo, e também é conhecida como Identidade Somigliana.

A Identidade Somigliana, portanto, permite a determinação de deslocamentos em pontos internos a partir de deslocamentos e forças de superfícies dos pontos do contorno.

A representação integral das tensões, obtida a partir da diferenciação da equação (4.19) em um ponto s do domínio e posteriormente com a aplicação da lei de Hooke (2.7), pode ser expressa por:

$$\sigma_{ij}(s) = \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, Q) p_k(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk}(s, Q) u_k(Q) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ijk}(s, q) b_k(q) d\Gamma \quad (4.20)$$

onde os tensores $S_{ijk}(s, Q)$ e $D_{ijk}(s, Q)$ ou $D_{ijk}(s, q)$ valem,

$$S_{ijk}(s, Q) = \frac{2G}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\} \\ + 2\nu(\eta_i r_{,j} r_{,k} + \eta_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(2\eta_k r_{,i} r_{,j} + \eta_j \delta_{ik} + \eta_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)\eta_k \delta_{ij} \quad (4.21)$$

$$D_{ijk}(s, Q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ (1-2\nu)[\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}] + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right\} \quad (4.22)$$

4.3. Equação integral para pontos no contorno

Como a Identidade Somigliana (4.19) é válida em qualquer ponto do domínio Ω , incluindo o contorno Γ , é possível encontrar uma equação integral levando o ponto de colocação ao contorno do corpo. Para isto, adiciona-se ao domínio uma parte infinitesimal de domínio Ω_ε , com raio infinitesimal ε , caracterizando o ponto de colocação s como ponto interno. Através desta

manipulação, o novo domínio passa a $\Omega + \Omega_\varepsilon$ e com contorno $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon$, conforme figura abaixo.

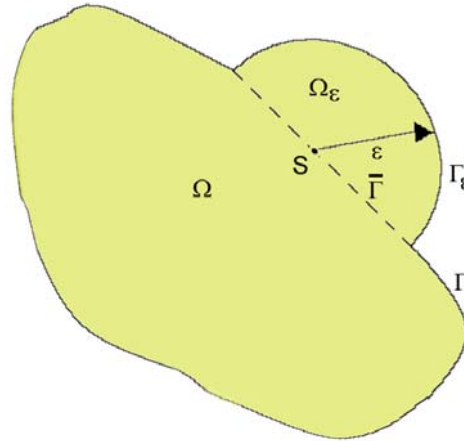


Figura 6 – Singularidade em ponto fonte no contorno

Então, a representação integral dos deslocamentos segue como,

$$u_i(s) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} p_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Gamma - \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega + \Omega_\varepsilon} b_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Omega \right] \quad (4.23)$$

Calculando o limite para cada termo da expressão (4.23), encontramos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma_\varepsilon} p_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Gamma \right] = 0 \quad (4.24)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega_\varepsilon} b_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Omega \right] = 0 \quad (4.25)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma \right] = - \int_{\Gamma} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma \quad (4.26)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} p_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Gamma \right] = \int_{\Gamma} p_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Gamma \quad (4.27)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\Omega} b_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Omega \right] = \int_{\Omega} b_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Omega \quad (4.28)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(s, q) (u_j(q) - u_j(s)) d\Gamma \right] + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\Gamma_\varepsilon} p_{ij}^*(s, q) (u_j(s)) d\Gamma \right] \quad (4.29)$$

Aplicando a condição de Hölder ao limite, obtemos:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- u_j(s) \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ij}^*(s, q) d\Gamma \right] \quad (4.30)$$

Em HARTMANN (1980) é apresentado o procedimento usado para a obtenção desta integral. Este trabalho mostra que a integração deste termo conduz a um termo livre:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[- u_j(s) \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{ij}^*(s, q) d\Gamma \right] = c_{ij}(s) u_j(s). \quad (4.31)$$

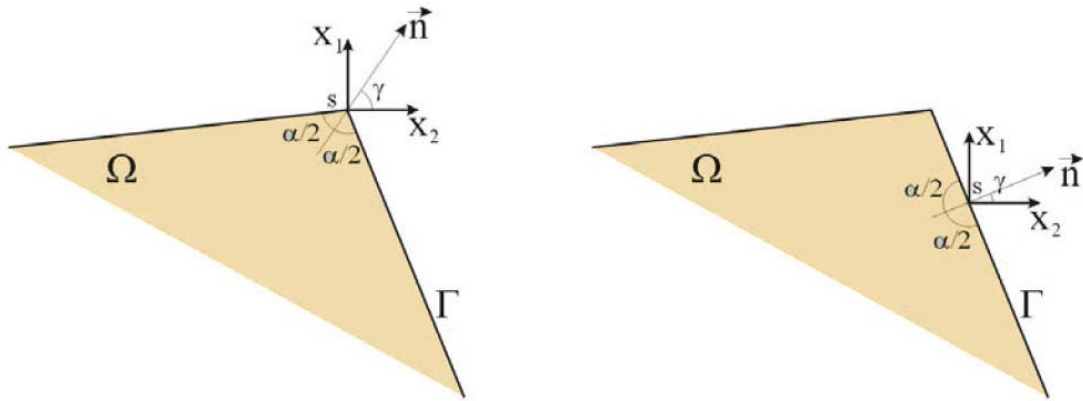
Por fim, o termo livre é adicionado ao termo de deslocamento presente no primeiro termo da equação (4.23), resultando na identidade Somigliana modificada para o contorno,

$$c_{ij}(s) u_j(s) = \int_{\Gamma} P_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, q) u_j(q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(q) u_{ij}^*(s, q) d\Omega \quad (4.32)$$

onde,

$$c_{ij}(s) u_i(s) = \frac{1}{2} \delta_{ij} u_j(s) \quad (4.33)$$

apenas para pontos do contorno com única tangente, denominados de contorno suaves.



(a) Ponto Fonte em um Ponto de Contorno com Angulosidade

(b) Ponto Fonte em um Ponto de Contorno Suave

Figura 7 – Classificação para definição de $c_{ij}(s)$ – WUTZOW (2003)

No caso de contorno com angulosidade, adotam-se valores conforme as características das tangentes,

$$c_{ij}(s)u_j(s) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\text{sen}(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} \\ \frac{\text{sen}(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

onde,

α - ângulo interno definido pelas tangentes ao contorno

γ - ângulo definido pela bissetriz de α

CAPÍTULO 5

"O que vale a pena fazer, vale fazê-lo bem."
(Lord Chesterfield)

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O MEC tem se apresentado mais adequado que outros métodos em problemas de domínio infinitos (mecânica dos solos, acústica, interação fluido-estrutura, etc.) e problemas onde se requer uma grande precisão no cálculo das tensões, como por exemplo, problemas da mecânica da fratura.

A seguir, as equações integrais deduzidas no capítulo anterior serão transformadas em equações algébricas através da discretização do contorno do problema em segmentos, ditos elementos de contorno, sobre os quais uma função de aproximação apropriada para os valores de contorno será considerada.

5.1. Equações Algébricas do MEC

Após a formulação da representação integral do problema plano, é necessário escrever um sistema de equações algébricas que representem de forma aproximada as equações integrais do problema.

Para efetuar tal representação, considera-se o contorno composto por segmentos, denominados na literatura como elementos, e adota-se sobre os elementos uma função de aproximação apropriada.

As funções de aproximação são de dois tipos: funções de aproximação das variáveis e funções de aproximação da geometria. A escolha do tipo de

função aproximadora das variáveis classifica os elementos em: constantes, lineares, quadráticos, cúbicos ou de ordem superior.

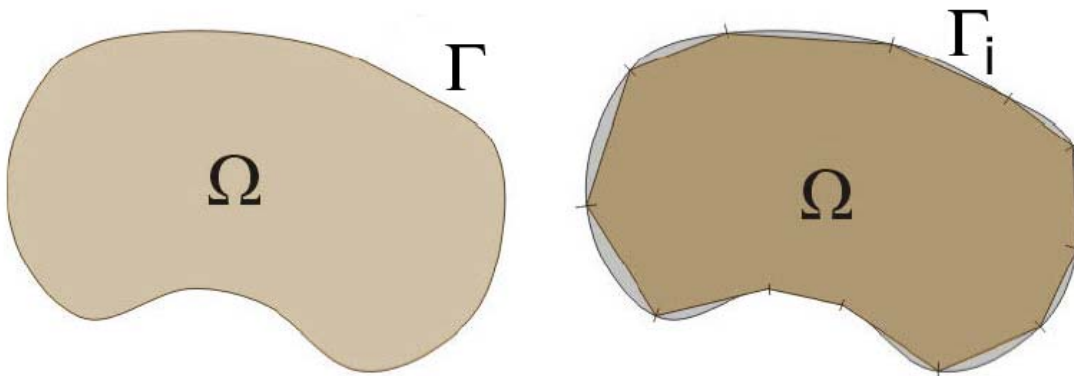


Figura 8 – Discretização do contorno em elementos – WUTZOW (2003)

Logo, a equação (4.32) escrita em sua forma aproximada, desprezando as forças de volume, fica sob a seguinte forma:

$$[c]\{u\}^s + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [p^*]\{u\} d\Gamma_j \right) = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [u^*]\{p\} d\Gamma_j \right) \quad (5.1)$$

onde,

NE - É o número de elementos no qual está dividido o contorno;

s - Ponto fonte ou ponto de colocação.

5.2. Função aproximadora linear

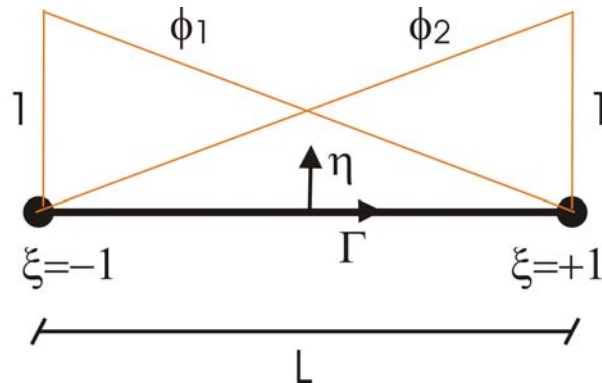


Figura 9 – Funções de aproximação linear

Para a representação do elemento linear visto acima, têm-se duas funções de interpolação, ϕ_1 e ϕ_2 , definidas em termos de coordenadas adimensionais ξ , podendo ser escritas como:

$$\phi_1 = \frac{1-\xi}{2} \quad \text{e} \quad (5.2)$$

$$\phi_2 = \frac{1+\xi}{2}. \quad (5.3)$$

Os deslocamentos e as forças nodais para cada elemento podem ser representados na forma matricial como,

$$\{\mathbf{u}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1^1 \\ \mathbf{u}_2^1 \\ \mathbf{u}_1^2 \\ \mathbf{u}_2^2 \end{Bmatrix} = [\Phi] \{\mathbf{u}\}_n^j \quad (5.4)$$

$$\{\mathbf{p}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1^1 \\ \mathbf{p}_2^1 \\ \mathbf{p}_1^2 \\ \mathbf{p}_2^2 \end{Bmatrix} = [\Phi] \{\mathbf{p}\}_n^j \quad (5.5)$$

onde,

- u_n^j - deslocamento do nó n do elemento na direção j ;
- p_n^j - força de superfície no nó n do elemento na direção j ;
- $\{u\}_n^j$ - deslocamentos nodais pertencente ao elemento j ;
- $\{p\}_n^j$ - forças nodais pertencente ao elemento j .

Substituindo-se as equações (5.4) e (5.5) em (5.1), obtém-se:

$$[c][\Phi] \{u\}_n^s + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [p^*][\Phi] d\Gamma_j \right) \{u\}_n^j = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [u^*][\Phi] d\Gamma_j \right) \{p\}_n^j \quad (5.6)$$

5.3. Montagem do Sistema de Equações Algébricas

As integrais (5.6) relacionam os deslocamentos do ponto de colocação s , com as forças de superfície e os deslocamentos nodais em qualquer elemento j . Tais integrais são denominadas matrizes de influência e são representadas da seguinte forma:

$$[HW]^{sj} = \int_{\Gamma_j} [p^*][\Phi] d\Gamma_j \quad e \quad (5.7)$$

$$[GW]^{sj} = \int_{\Gamma_j} [u^*][\Phi] d\Gamma_j. \quad (5.8)$$

De forma compacta, podemos reescrever a equação (5.6) como,

$$\sum_{j=1}^{NE} [HW]^{sj} \{u\}_n^j = \sum_{j=1}^{NE} [GW]^{sj} \{p\}_n^j \quad (5.9)$$

Sabendo que,

$$[HW] = \begin{cases} \left[\hat{HW} \right]^{sj} & \text{se } j \notin s \\ \left[\hat{HW} \right]^{sj} + [c][\Phi]^s & \text{se } j \in s \end{cases} \quad (5.10)$$

Tradicionalmente, a expressão (5.9) tem sido escrita na seguinte forma:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\}. \quad (5.11)$$

5.4. Propriedades da Matriz H

No caso de movimento de corpo rígido aplicado ao sistema na ausência de forças de superfície, encontramos:

$$[H]\{U\} = 0 \quad (5.12)$$

Com o vetor $\{U\}$ contendo os deslocamentos de corpo rígido em todos os nós. Lembrando que para haver movimento de corpo rígido, a matriz H necessariamente é singular.

Considerando os movimentos de corpo rígido independentes em cada direção, a seguinte propriedade da matriz H pode ser escrita:

$$\sum_{j=1}^{NN} H_{sk} = 0 \quad (5.13)$$

Onde H_{sk} são submatrizes (2x2) correspondentes às influências de cada nó k nas linhas geradas para o ponto de colocação s (ponto singular).

No caso de corpos infinitos, a integral sobre o contorno localizado no infinito resulta na própria força unitária do problema de Kelvin, na direção considerada. A propriedade então pode ser reescrita,

$$\sum_{j=1}^{NN} H_{sk} = \delta_{sk} \quad (5.14)$$

5.5. Ponto de colocação

A escolha adequada de um determinado conjunto de pontos de colocação influencia diretamente os resultados do problema. Sabe-se que quando os pontos de colocação encontram-se muito distantes do contorno, os resultados apresentam um erro considerável comparado às soluções analíticas.

FOLTRAN (1997) faz uma comparação entre os resultados obtidos pelo processo numérico e analítico e conclui que o erro na integração numérica passa por um mínimo quando a distância entre o ponto de colocação e o ponto médio do elemento está entre duas a seis vezes o comprimento deste.

Também quando o ponto de colocação encontra-se muito próximo ao contorno não se obtém resposta muito precisa, e uma técnica eficiente na minimização deste erro na integração é o emprego de sub-elementação. Tal técnica é comentada adiante.

Quando se posiciona o ponto fonte sobre o contorno do elemento de integração, é introduzida no cálculo das matrizes de influência uma singularidade forte que deve ser tratada como Valor Principal de Cauchy. Com isto, dificulta-se a dedução das expressões analíticas da solução fundamental de Kelvin. Porém, os resultados apresentados são muito superiores aos obtidos por integração numérica.

O tempo necessário para o processamento, usando as fórmulas analíticas, é muito menor que o gasto, se usada integração numérica, para um resultado comparável em exatidão.

5.6. Condições de contorno

As condições de contorno em cada nó podem ser prescritas em deslocamentos ou forças de superfície. Nos problemas elásticos planos, o número de valores de contorno por nó são quatro (2 deslocamentos e 2 forças

de superfície). Entretanto, é necessário que sejam prescritas duas condições de contorno por nó para que o sistema possa ser resolvido.

Assim que as condições de contorno são inseridas no problema, as matrizes H e G são reorganizadas de forma que as variáveis conhecidas estejam no primeiro membro e as incógnitas, no segundo. Para isto, basta que sejam trocadas as colunas das matrizes H e G referentes às incógnitas do problema.

Chega-se, então, ao sistema:

$$[A]\{X\} = [B]\{VP\} \quad (5.15)$$

onde,

- $[A]$ e $[B]$ - São as Matrizes H e G modificadas;
- $\{VP\}$ - Vetor que contém os valores prescritos;
- $\{X\}$ - Vetor que contém os valores de contorno a serem calculados.

5.7. Resolução do sistema de equações

Multiplica-se a matriz $[B]$ pelo vetor de valores prescritos $\{VP\}$, obtendo-se o sistema linear de equações abaixo,

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad (5.16)$$

Simbolicamente, a equação (5.16) pode ser resolvida por:

$$\{X\} = [A]^{-1}\{F\} \quad (5.17)$$

Finalmente, com os valores de contorno conhecidos pode-se calcular os valores internos dos deslocamentos e tensões.

5.8. Deslocamento e tensões em pontos internos

Após serem determinadas, antes desconhecidos, os valores de forças de superfície e deslocamentos nodais pela resolução do sistema algébrico de equações, obtém-se facilmente os valores dos deslocamentos e tensões em pontos internos.

Através da equação Somigliana (5.6), reescrita na forma matricial e com o auxílio de (5.7) e (5.8), encontra-se os deslocamentos em um ponto interno p qualquer, conforme a expressão abaixo.

$$\{u\}^p = -\sum_{j=1}^{NE} \left[\hat{H} \hat{W} \right]^{pj} \{u\}_n^j + \sum_{j=1}^{NE} [GW]^{pj} \{p\}_n^j \quad (5.18)$$

Agora, os pontos fontes s são os próprios pontos internos p . As 3 tensões em cada ponto interno p são obtidas pela expressão:

$$\sigma_{ij}^p = -\sum_{n=1}^{NE} [S_{ijk}]_n \{u_k\}_n + \sum_{n=1}^{NE} [D_{ijk}]_n \{p_k\}_n \quad (5.19)$$

onde,

$$[S_{ijk}]_n = \int_{\Gamma_e} S_{ijk} \phi_n d\Gamma \quad (5.20)$$

e

$$[D_{ijk}]_n = \int_{\Gamma_e} D_{ijk} \phi_n d\Gamma \quad (5.21)$$

com os tensores $[S]_{ijk}$ e $[D]_{ijk}$ definidos em (4.21) e (4.22)

5.9. Integração Analítica

Em se tratando de problemas formulados com o emprego da solução fundamental de Kelvin, as expressões das soluções para elementos isoparamétricos, já se encontra bem difundida no meio acadêmico. Tal integração analítica permite obter resultados mais precisos comparados aos resultados encontrados por integração numérica.

A integração analítica não singular apresenta-se quando o ponto de colocação encontra-se fora do elemento. Particularmente, quando tal ponto é alinhado ao elemento de integração, são obtidos melhores resultados. No anexo F, encontram-se os valores dos termos matrizes de influência ($[H]$, $[G]$, $[S]$ e $[D]$) para os casos onde o ponto de colocação esteja alinhado antes do elemento, após o elemento ou simplesmente não alinhado a este.

Porém, quando o ponto de colocação encontra-se no elemento de integração, é inserida na dedução dos termos das matrizes de influência a singularidade devido à solução fundamental (Cauchy para integral tipo $\frac{1}{r}$ e Hadamard para $\frac{1}{r^2}$). No anexo E, encontram-se os termos das matrizes de influência ($[H]$, $[G]$, $[S]$ e $[D]$) nos casos onde o ponto de colocação encontra-se no início do elemento, no final do elemento ou em qualquer posição intermediária dentro deste.

5.10. Integração Numérica

Na literatura encontra-se um grande número de esquemas de integração numérica. Muito deles, desenvolvidos para a resolução de problemas específicos.

De forma geral, utiliza-se a integração numérica quando se torna difícil a obtenção da expressão analítica.

A integração gaussiana é simples, precisa e largamente empregada nos problemas da elasticidade.

5.11. Quadratura de Gauss-Legendre

Quadratura é o termo empregado para o cálculo numérico de integrais. A quadratura gaussiana (Gauss-Legendre) consiste em encontrar um valor aproximado de uma dada integral, através da integração de um polinômio interpolador da função num intervalo definido em $[-1,1]$. A integração do polinômio consiste no somatório do valor da função polinomial em determinadas abscissas, multiplicadas por fatores de ponderação, também denominados pesos.

Assim, a integração de Gauss-Legendre pode ser descrita conforme abaixo,

$$\int_a^b F(x)dx = \int_{-1}^1 F(x(\xi))|j|d\xi \approx \sum_{i=1}^n F(x(\xi_i))|j|_i w_i + E_n \quad (5.22)$$

onde,

- n - número de pontos de integração;
- ξ_i - coordenada do i -ésimo ponto de integração;
- $|j|_i$ - jacobiano da transformação de coordenadas;
- w_i - peso;
- E_n - Erro residual.

O jacobiano, de forma geral, é calculado segundo a expressão abaixo,

$$J(\xi) = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx(\xi)}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy(\xi)}{d\xi}\right)^2} \quad (5.23)$$

Sendo,

$$\begin{cases} \frac{dx(\xi)}{d\xi} = \frac{d\phi_i(\xi)}{d\xi} x_i \\ \frac{dy(\xi)}{d\xi} = \frac{d\phi_i(\xi)}{d\xi} y_i \end{cases} \quad i = 1, \dots, n + 1 \quad (5.24)$$

No elemento isoparamétrico linear, o jacobiano apresenta um valor constante e igual à metade do comprimento do elemento a ser integrado.

O erro residual (E_n) é escrito como,

$$E_n = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n!)]^3} \frac{d^{2n}F(\xi)|J|}{d\xi^{2n}} \quad (-1 < \xi < 1) \quad (5.25)$$

5.12. Sub-elementação

A técnica de sub-elementação consiste em subdividir o elemento a ser integrado em partes menores, sem alterar a função aproximadora, de forma a obter melhores resultados na integração numérica, visto que quando o ponto de colocação encontra-se muito próximo do elemento de integração, ocorre um problema de quase singularidade durante o processo de integração numérica.

A seguir é apresentado de forma sucinta, o conceito desta técnica. Primeiro, deve-se verificar a necessidade de se subdividir o elemento de integração e determinar qual o comprimento deste sub-elemento.

Considerando-se os ângulos formados entre o elemento de integração e o ponto de colocação s , conforme a figura a seguir,

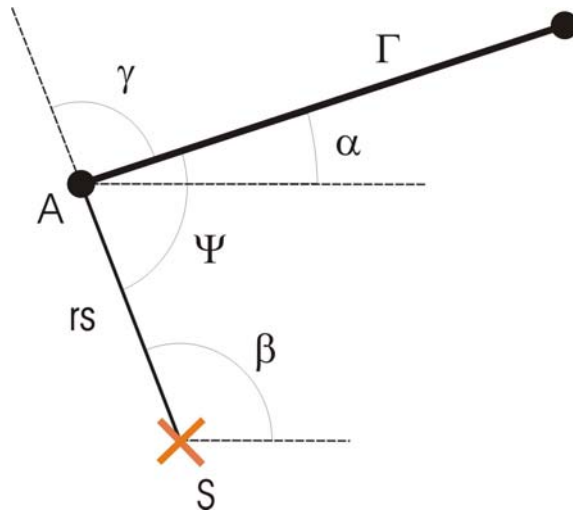


Figura 10 – Ângulos para o cálculo do sub-elemento

podemos encontrar o ângulo Ψ , fazendo:

$$\cos(\gamma) = \cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta) \quad (5.26)$$

e,

$$\Psi = \pi - \gamma. \quad (5.27)$$

Quando o ângulo Ψ for menor que 60° , o comprimento do sub-elemento (dist) é dado pela relação:

$$\text{dist} = \left| \frac{rs}{2\cos(\Psi)} \right| \quad (5.28)$$

onde, rs é a distância entre o ponto de colocação s e o início do sub-elemento.

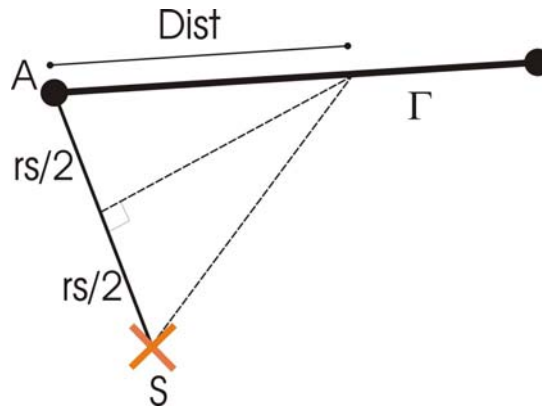
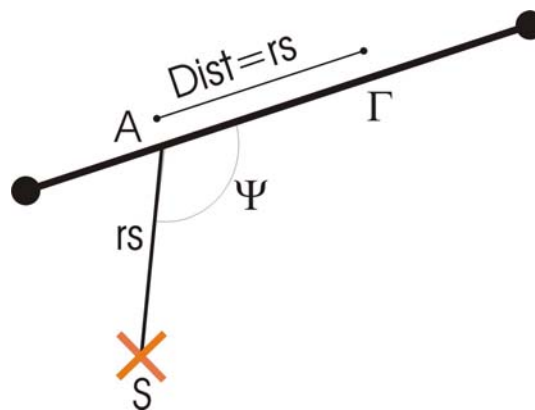


Figura 11 – Comprimento do sub-elemento

Porém, quando o ângulo Ψ for maior que 60° , o comprimento do sub-elemento (dist) é igual ao comprimento da distância rs .

Figura 12 – Comprimento do sub-elemento para Ψ maior que 60°

Este processo é repetido até que o somatório dos comprimentos dos sub-elementos seja maior que o comprimento do elemento de integração. Então, o comprimento deste último sub-elemento é calculado como o comprimento necessário para se completar o somatório.

CAPÍTULO 6

"Não existe acaso."
(François-Marie Arouet Voltaire)

MEC APLICADO A PROBLEMAS COM CAMPOS INICIAIS

A presença de campos iniciais de deformação ou de tensão aplicados ao domínio do corpo é importante em problemas onde variáveis de domínio assumem importância no problema mecânico, como por exemplo, em termoelasticidade, retração e fluência.

Em materiais que apresentam comportamento não-linear (plasticidade, dano, efeitos viscosos), o problema é resolvido de forma incremental empregando deformações ou tensões iniciais.

Neste capítulo são apresentadas as representações integrais para problemas de campos iniciais no domínio. Posteriormente, apresentam-se as aproximações das variáveis no domínio, a utilização de nós internos de célula e o equacionamento algébrico do MEC com campo de tensões iniciais.

6.1. Representações Integrais com Campos Iniciais

As componentes do tensor de deformações num ponto “s” se decompõem em:

$$\varepsilon_{ij}(s) = \varepsilon_{ij}^e(s) + \varepsilon_{ij}^0(s) \quad (6.1)$$

onde,

ε_{ij}^e - Tensor de deformações elásticas;

ε_{ij}^0 - Tensor de deformações iniciais.

De forma equivalente, as componentes do tensor de tensões são decompostas em:

$$\sigma_{ij}(s) = \sigma_{ij}^e(s) - \sigma_{ij}^0(s) \quad (6.2)$$

Os tensores com campos iniciais preservam a relação constitutiva elástica,

$$\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^0 \quad (6.3)$$

A relação constitutiva (2.5) e (2.6), agora pode ser representada acrescida dos termos de campos iniciais da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} [\varepsilon_{kk}(s) - \varepsilon_{ll}^0(s)] + 2G [\varepsilon_{ij}(s) - \varepsilon_{ij}^0(s)] \quad (6.4)$$

Da mesma forma, a equação de Navier e as forças de superfície também apresentam termos referentes à deformação inicial, conforme abaixo:

$$\sigma_{ij}(s) = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} u_{i,l}(s) \delta_{ij} + G [u_{i,j}(s) + u_{j,i}(s)] - \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \varepsilon_{kk}^0(s) \delta_{ij} - 2G \varepsilon_{ij}^0(s) \quad (6.5)$$

\Downarrow
 σ_{ij}^0

$$p_i(s) = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} u_{j,j}(s) \eta_i + G [u_{j,i}(s) \eta_j + u_{i,\eta}(s)] - \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \varepsilon_{mm}^0(s) \eta_i - 2G \varepsilon_{ij}^0(s) \eta_j \quad (6.6)$$

Analogamente ao procedimento empregado no capítulo 3, agora empregando os tensores ε_{ij} e σ_{ij} referentes às equações (6.1) e (6.2) para o problema real no teorema da reciprocidade de Betti e utilizando da solução fundamental de Kelvin, chega-se a identidade Somigliana (3.20) acrescida dos termos de tensão inicial,

$$c_{ij}(s)u_j(s) = \int_{\Gamma} P_j(Q)u_{ij}^*(s, Q)d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ij}^*(s, Q)u_j(Q)d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(q)u_{ij}^*(s, q)d\Omega \quad (6.7)$$

$$+ \int_{\Omega} \sigma_{jk}^0(q)\varepsilon_{ijk}^*(s, q)d\Omega$$

onde os termos u^* , ε^* e P^* correspondem as expressões (4.4), (4.8) e (4.12) respectivamente, para problemas planos.

Derivando-se os núcleos das integrais da equação (6.7), chega-se às representações integrais para as tensões [BREBBIA, 1984],

$$\sigma_{ij}(s) = - \int_{\Gamma} S_{ijk}(s, q)u_k(q)d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, q)p_k(q)d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ijk}(s, q)b_k(q)d\Omega \quad (6.8)$$

$$+ \int_{\Omega} E_{ijkl}(s, q)\sigma_{kl}^0(q)d\Omega - \frac{1}{8(1-\nu)} [2\sigma_{ij}^0(s) + (1-4\nu)\sigma_{mm}^0(s)\delta_{ij}]$$

onde,

$$S_{ijk}(s, q) = \frac{2G}{4\pi(1-\nu)r^2} \{ 2r_{,n} [(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (6.9)$$

$$+ 2\nu(\eta_i r_{,j} r_{,k} + \eta_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(2\eta_k r_{,i} r_{,j} + \eta_j \delta_{ik} + \eta_i \delta_{jk}) - (1-4\nu)\eta_k \delta_{ij} \}$$

$$D_{ijk}(s, q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{ (1-2\nu)[\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}] + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \} \quad (6.10)$$

$$E_{ijkl}(s, q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{ (1-2\nu)[\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{jl}\delta_{ik} - \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\delta_{ij}r_{,k}r_{,l}] \quad (6.11)$$

$$+ 2\nu(\delta_{ik}r_{,j}r_{,l} + \delta_{jl}r_{,i}r_{,k} + \delta_{il}r_{,j}r_{,k} + \delta_{jk}r_{,i}r_{,l}) + 2\delta_{kl}r_{,i}r_{,j} - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l} \}$$

O último termo da equação (6.8) é o coeficiente de termo livre que surge da derivação do núcleo da integral com o termo de tensão inicial da identidade de Somigliana.

Nos casos planos, precisamente no EPD, o termo livre considera o trabalho na terceira direção (σ_{33}^0).

Também é possível deduzir a representação integral das tensões para pontos do contorno, bastando calcular os limites das integrais no domínio acrescido em torno do ponto “S” do contorno e fazendo-o tender a zero. A representação das tensões no contorno é demonstrada por GUIGGIANI (1994), mas é aplicada somente aos pontos do contorno onde está garantida a continuidade das derivadas primeiras dos deslocamentos. Nos nós onde as derivadas à esquerda e à direita não são iguais, a equação de tensões não é aplicável.

FUDOLI (1999) demonstra que o termo livre dependente das tensões iniciais da equação das tensões (6.8) também tem seu equivalente para pontos de contorno. Para contorno suave, sem angulosidade diferente de 180 graus, o termo livre é metade do que o seu valor para pontos de domínio.

6.2. Função de Aproximação das Variáveis no Domínio

Como vem sendo discutido, a consideração de campos iniciais introduz as integrais de domínio no equacionamento do problema. A maneira mais simples de calcular tais integrais é transformando-as em somatórias sobre unidades de domínio discretizadas, ou células.

Neste trabalho, são utilizadas células triangulares e todas as equações de tensões são escritas para pontos pertencentes ao domínio. Ou seja, todos os nós das células não coincidem com seus respectivos vértices (ou nós geométricos), pois são “puxados” para o domínio da célula, passando a pertencerem ao domínio do corpo.

O domínio Ω é discretizado em N_c células e em cada célula são definidos nós, e as componentes de tensão são aproximadas por funções polinomiais da forma:

$${}^m\sigma_{ij}^0(s) = \phi_k(s)^m \sigma_{ij}^{0k} \tag{6.12}$$

onde,

m - representa a célula Ω_m .

k - representa os nós da célula.

${}^m\sigma_{ij}^{0k}$ - representa a variável nodal da componente ij do tensor de tensões iniciais da célula m para o nó k.

Neste trabalho, os polinômios $\phi_k(s)$ são adotados lineares, conforme figura abaixo,

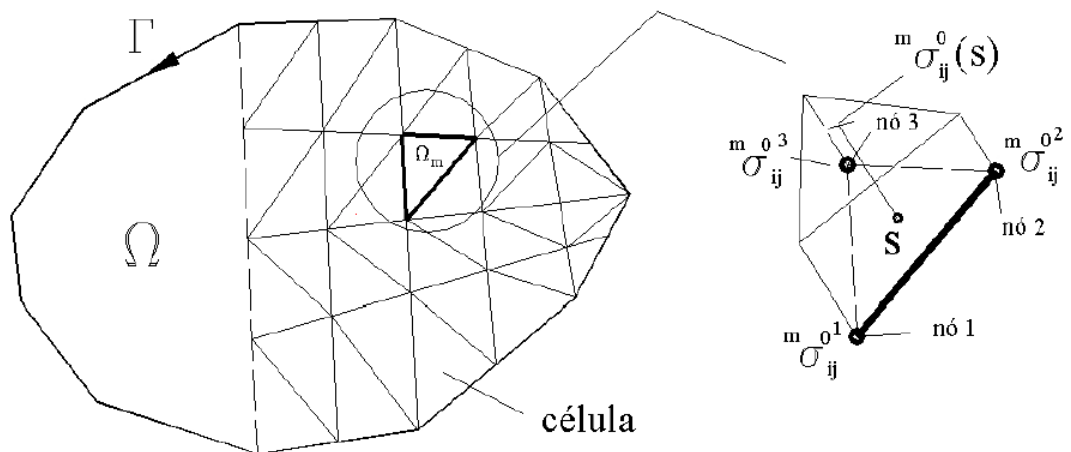


Figura 13 – Discretização do domínio em células

As integrais da Identidade Somigliana são equivalentes às somatórias das mesmas integrais sobre as unidades discretizadas, ou seja:

$$\int_{\Gamma} P_{ik}^*(s, Q) u_k(Q) d\Gamma = \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} P_{ik}^*(s, Q)^j u_k(Q) d\Gamma = \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} P_{ik}^*(s, Q)^j \phi_m(Q)^j U_k^m d\Gamma \tag{6.13}$$

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u}_{ik}^*(s, Q) \mathbf{P}_k(Q) d\Gamma = \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}_{ik}^*(s, Q)^j \mathbf{P}_k(Q) d\Gamma = \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}_{ik}^*(s, Q)^j \phi_m(Q)^j \mathbf{P}_k^m d\Gamma \quad (6.14)$$

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^*(s, q) \sigma_{jk}^0(q) d\Omega = \sum_{m=1}^{NE} \int_{\Omega_m} \varepsilon_{ijk}^*(s, q)^m \sigma_{jk}^0(q) d\Omega = \sum_{m=1}^{NE} \int_{\Omega_m} \varepsilon_{ijk}^*(s, q)^m \phi_l(q)^m \sigma_{jk}^{0l} d\Omega \quad (6.15)$$

As integrais (6.13), (6.14) são calculadas, neste trabalho, analiticamente e numericamente enquanto que (6.15) é calculada apenas de forma numérica.

A solução analítica é resultado de outros trabalhos da literatura e sua dedução pode ser vista em WUTZOW (2003).

Resolvendo de forma numérica utilizando quadratura gaussiana, as integrais sobre os elementos de contorno são descritas como:

$$\sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_{ik}^*(s, Q)^j \phi_m(Q)^j \mathbf{U}_k^m d\Gamma = \sum_{j=1}^{NE} |J| \int_{\Gamma_j} \mathbf{P}_{ik}^*(s, Q)^j \phi_m(Q) d\xi^j \mathbf{U}_k^m = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} |J| \{ \mathbf{P}_{ik}^*(s, Q)^j \phi_m(Q) \}_n w_n \}^j \mathbf{U}_k^m \quad (6.16)$$

$$\sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}_{ik}^*(s, Q)^j \phi_m(Q)^j \mathbf{P}_k^m d\Gamma = \sum_{j=1}^{NE} |J| \int_{\Gamma_j} \mathbf{u}_{ik}^*(s, Q)^j \phi_m(Q) d\xi^j \mathbf{P}_k^m = \sum_{j=1}^{NE} \sum_{n=1}^{NG} |J| \{ \mathbf{u}_{ik}^*(s, Q)^j \phi_m(Q) \}_n w_n \}^j \mathbf{P}_k^m \quad (6.17)$$

onde ξ é a coordenada adimensional compreendida no intervalo $[-1,1]$ e $|J|$ o determinante do jacobiano da transformação de coordenadas (cartesianas para adimensional). O número de pontos de Gauss é N_g e o peso da aproximação gaussiana do ponto n é representado por w_n .

Para as integrais sobre as células, a integração numérica em duas dimensões pode ser evitada se um procedimento semi-analítico for adotado, ou seja, primeiramente a integral na variável do raio é calculada analiticamente e posteriormente a variável ângulo é avaliada numericamente.

Duas integrais de domínio devem ser calculadas dentro da formulação proposta neste trabalho. A primeira, com núcleo ε_{ijk}^* , proveniente da equação dos deslocamentos (6.7) apresenta singularidade fraca ($1/r$) e a segunda, com núcleo E_{ijkl}^* , proveniente da equação das tensões (6.8) apresenta singularidade forte ($1/r^2$).

Para a primeira integral, emprega-se um sistema cilíndrico de coordenadas, de modo que a integral de domínio fique reescrita como,

$$\int_{\Omega_m} \varepsilon_{ijk}^*(s, q) \phi_l(q) \sigma_{jk}^{01} d\Omega = \int_{\theta} \int_r \frac{\bar{\varepsilon}_{ijk}(s, q)}{r} \phi_l(r, \theta) \sigma_{jk}^{01} r dr d\theta \quad (6.18)$$

onde $\bar{\varepsilon}_{ijk}(s, q) = r \varepsilon_{ijk}^*(s, q)$. As funções de forma $\phi_i(r, \theta)$ são escritas em função das coordenadas cartesianas dos nós definidos para cada célula, conforme abaixo,

$$\phi_i(r, \theta) = \frac{1}{2A} \{a_i + \omega_i [x(s) + r \cdot \cos(\theta)] + \eta_i [y(s) + r \cdot \sin(\theta)]\} \quad (6.19)$$

Os coeficientes a_i , ω_i e η_i da equação (6.19) são os parâmetros geométricos usuais da célula triangular a ser integrada, definidos por:

$$a_i = (x_j y_k - x_k y_j) \quad (6.20)$$

$$\omega_i = (y_j - y_k) \quad (6.21)$$

$$\eta_i = (x_k - x_j) \quad (6.22)$$

Onde $i = 1, 2, 3$, $j = 2, 3, 1$, $k = 3, 1, 2$ e A é a área do triângulo cujos vértices coincidem com os nós de tensão obtidos geometricamente pela fórmula:

$$A = \frac{(\omega_1 \eta_2 - \eta_1 \omega_2)}{2} \tag{6.23}$$

Os índices subscritos em (6.20), (6.21) e (6.22) representam os nós nas células com coordenadas (x_m, y_m) .

Na figura abaixo, definem-se o raio r e o ângulo θ da equação (6.19)

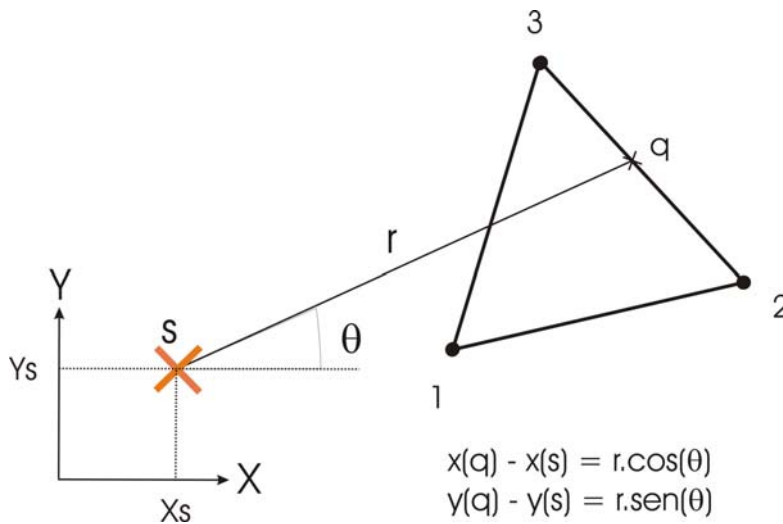


Figura 14 – Coordenadas cilíndricas r e θ

Substituindo a equação (6.19) na equação (6.18), encontra-se a integral:

$$\int_{\theta} \int_r \frac{\bar{\epsilon}_{ijk}(s, q)}{r} \left\{ \frac{1}{2A} [a_m + \omega_m [x(s) + r \cdot \cos(\theta)] + \eta_m [y(s) + r \cdot \sin(\theta)]] \right\} r dr d\theta \sigma_{jk}^{0\ m} \tag{6.24}$$

Integrando analiticamente na variável r , tem-se:

$$\int_{\theta} \left\{ \bar{\epsilon}_{ijk}(s, q) \left[\frac{1}{2A} [a_m + [\omega_m x(s) + \eta_m y(s)]] R(\theta) + \frac{1}{2A} [\omega_m \cos(\theta) + \eta_m \sin(\theta)] \frac{R(\theta)^2}{2} \right] \right\} d\theta \sigma_{jk}^{0\ m} \tag{6.25}$$

onde $R(\theta) = R_2(\theta) - R_1(\theta)$, conforme mostra a figura a seguir,

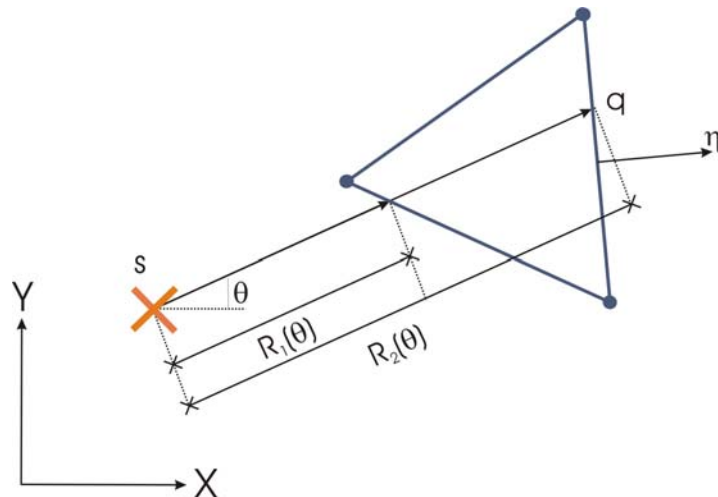


Figura 15 – Integração analítica em r.

Agora a equação (6.25) pode ser integrada numericamente substituindo o diferencial $d\theta$ por $\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\Gamma_1$, sendo este último o contorno da célula e $\frac{\partial r}{\partial \eta}$ a derivada do raio em relação ao vetor unitário normal ao contorno η no ponto campo “q” (Figura 15) e a variável r é a distância entre os pontos fontes “s” e campo “q”. Reescrevendo,

$$\int_{\Gamma_1} \left\{ \bar{\epsilon}_{ijk}(s, q) \left[\frac{1}{2A} [a_m + (\omega_m x(s) + \eta_m y(s))] r + \frac{1}{2A} [\omega_m \cos(\theta) + \eta_m \sin(\theta)] \frac{r^2}{2} \right] \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\Gamma_1 \sigma_{jk}^{0m} \quad (6.26)$$

A integral acima equivale à somatória,

$$\sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{NG} |J|_p \left\{ \bar{\epsilon}_{ijk}(s, q) \left[\frac{1}{2A} [a_m + (\omega_m x(s) + \eta_m y(s))] r + \frac{1}{2A} [\omega_m \cos(\theta) + \eta_m \sin(\theta)] \frac{r^2}{2} \right] \right\} w_n \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\xi_p \sigma_{jk}^{0m} \quad (6.27)$$

onde p varia de 1 a 3 e representa os três lados do contorno da célula. O índice n representa os pontos de Gauss. A coordenada adimensional ξ está compreendida no intervalo $[-1, 1]$ e $|J|_p$ é o determinante do jacobiano da transformação que, no caso plano, vale metade do comprimento do lado p da célula. A integração sobre o contorno da célula deve percorrer o sentido anti-horário.

Este procedimento de mudança de variável evita o cálculo de $R_1(\theta)$ e $R_2(\theta)$. Para a integral de domínio da equação das tensões (6.8), o procedimento é análogo. Para uma célula genérica m , tem-se:

$$\int_{\Omega_m} E_{ijkl}(s, q) \phi_p(q) \sigma_{kl}^{0p} d\Omega = \int_{\theta} \int_r \frac{\bar{E}_{ijkl}(s, q)}{r^2} \phi_p(r, \theta) \sigma_{kl}^{0p} r dr d\theta \quad (6.28)$$

onde $\bar{E}_{ijkl} = E_{ijkl} \cdot r^2$. As funções de forma $\phi_p(r, \theta)$ são as mesmas definidas em (6.19), (6.20), (6.21) e (6.22). Substituindo em (6.28), tem-se:

$$\int_{\theta} \int_r \frac{\bar{E}_{ijkl}(s, q)}{r^2} \left\{ \frac{1}{2A} [a_p^0 + \omega_p [x(s) + r \cos(\theta)] + \eta_p [y(s) + r \sin(\theta)]] \right\} r dr d\theta \sigma_{kl}^{0p} \quad (6.29)$$

A integral analítica em r da equação (6.29) resulta:

$$\int_{\theta} \left\{ \bar{E}_{ijkl}(s, q) \left[\frac{1}{2A} [a_p^0 + [\omega_p x(s) + \eta_p y(s)]] \ln(R(\theta)) + \frac{1}{2A} [\omega_p \cos(\theta) + \eta_p \sin(\theta)] R(\theta) \right] \right\} d\theta \sigma_{kl}^{0p} \quad (6.30)$$

onde $\ln(R(\theta)) = \ln(R_2(\theta)) - \ln(R_1(\theta))$. Transformando a variável de integração θ em Γ_m , a equação (6.30) equivale a:

$$\int_{\Gamma_m} \left\{ \bar{E}_{ijkl}(s, q) \left[\frac{1}{2A} [a_p^0 + [\omega_p x(s) + \eta_p y(s)]] \ln(r) + \frac{1}{2A} [\omega_p \cos(\theta) + \eta_p \sin(\theta)] r \right] \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\Gamma_m \sigma_{kl}^{0p} \quad (6.31)$$

A integral acima equivale à somatória:

$$\sum_{q=1}^3 \sum_{n=1}^{NG} J_p \left\{ \bar{E}_{ijkl}(s, q) \left[\frac{1}{2A} [a_p^0 + [\omega_p x(s) + \eta_p y(s)]] \ln(r) + \frac{1}{2A} [\omega_p \cos(\theta) + \eta_p \sin(\theta)] r \right] \right\} w_n \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\xi_p \sigma_{jk}^{0m} \quad (6.32)$$

A posição dos nós internos é geometricamente definida conforme mostra a Figura 16:

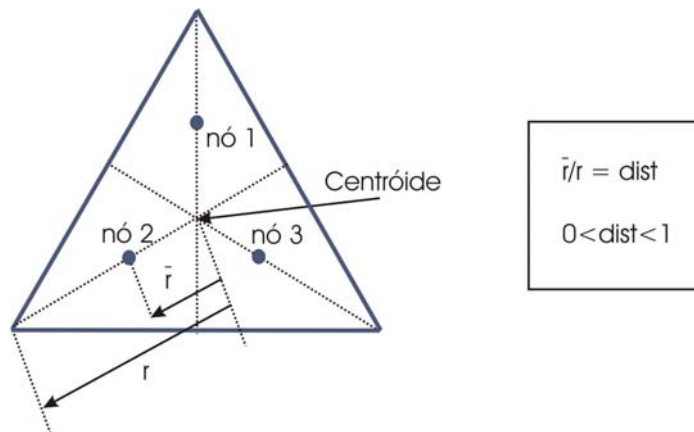


Figura 16 – Posição dos nós de célula internos

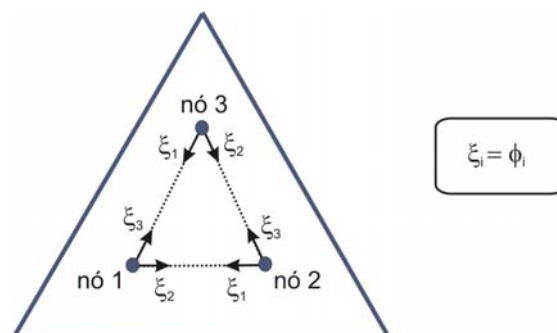
Define-se o valor da variável $dist$ entre $[0,1]$. A posição do nó fica definida por $\bar{r} = r \cdot dist$, sendo:

\bar{r} - Distância medida a partir do centróide do triângulo em direção a um de seus vértices;

r - Distância total do centróide ao vértice.

Em exemplos deste trabalho, utilizaram-se valores de $dist$ entre 0.35 e 0.45, obtendo melhores resultados para 0.40.

Adota-se um sistema local de coordenadas adimensionais $\xi_i = \phi_i$, com ϕ_i sendo as funções de forma lineares definidas na equação (6.19), conforme figura abaixo:

Figura 17 – Sistema de coordenadas adimensionais ξ_i

As integrais (6.27) e (6.32) são calculadas sobre o contorno da célula com as funções ϕ_i definidas conforme a figura acima, sendo desnecessária a adoção de um sistema local semelhante a ξ_i associado aos vértices da célula.

6.3. Equações Algébricas do MEC para Problemas com Campo de Tensões Iniciais

As equações integrais (6.7) e (6.8), quando escritas na forma discretizada, são equivalentes a equações algébricas, cujos coeficientes resultantes da integração numérica multiplicam as variáveis nodais de contorno e de domínio, para cada ponto fonte “s”, segundo cada direção do sistema global de coordenadas cartesianas. As integrais, portanto, podem ser representadas algebricamente conforme abaixo:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + [Q]\{\sigma^0\} \quad (6.33)$$

$$\{\sigma\} = -[H']\{U\} + [G']\{P\} + [Q']\{\sigma^0\} \quad (6.34)$$

onde,

$[H], [G], [Q], [H'], [G'], [Q']$ - Matrizes com os coeficientes de integração;

$\{U\}$ - vetor com as variáveis nodais de deslocamento;

$\{P\}$ - vetor com as variáveis nodais de forças de superfície de contorno;

$\{\sigma\}$ - vetor com as variáveis nodais do campo de tensões reais;

$\{\sigma^0\}$ - vetor com a tensão inicial de domínio.

A seguir serão apresentadas as equações com campos iniciais utilizadas na resolução de problemas de sub-região e inclusão de materiais com propriedades anisotrópicas.

CAPÍTULO 7

"Não são os grandes planos que dão certo;
são os pequenos detalhes."
(Stephen Kanitz)

FORMULAÇÃO ALTERNATIVA PARA ANÁLISE DE DOMÍNIOS NÃO-HOMOGÊNEOS E INCLUSÕES DE MATERIAIS ANISOTRÓPICOS

A maneira clássica de se tratar problemas composto por várias regiões, é através da técnica das sub-regiões, onde a compatibilidade dos deslocamentos e o equilíbrio de forças de superfície ao longo da interface são impostas em nível de equações algébricas. A seguir, é apresentada uma forma alternativa na resolução destes problemas a partir do emprego da formulação do método dos elementos de contorno com campos de tensões iniciais. Tal formulação permite a inclusão de domínios anisotrópicos em meios isotrópicos, ou ainda, o estudo de domínios completamente anisotrópicos.

7.1. Introdução

Partindo-se do conceito de campos iniciais,

$$\sigma_{ij}(s) = \sigma_{ij}^e(s) - \sigma_{ij}^0(s) \quad (7.1)$$

onde,

σ_{ij}^0 - Tensor de tensões iniciais;

σ_{ij}^e - Tensor de tensões elásticas;

σ_{ij} - Tensor de tensões reais;

Na forma gráfica podemos obter $(\sigma_{ij}^r, \epsilon)$, tensão verdadeira *versus* deformação, a partir de um corpo elástico obtido com outras constantes.

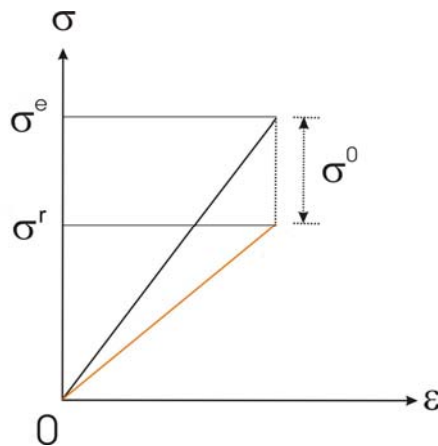


Figura 18 – Tensões iniciais, elásticas e reais

Admite-se que as componentes de tensões iniciais (σ_{ij}^0) sejam vistas como uma penalização das tensões elásticas do material (σ_{ij}^e) , expressas sob a forma:

$$\sigma_{ij}^0(s) = D_{ijkl} \sigma_{kl}^e(s) \quad (7.2)$$

onde D_{ijkl} é uma matriz que penaliza as tensões elásticas de um material isotrópico utilizado como referência, corrigindo-as para as tensões reais no qual estaria submetido o material desejado. Substituindo-se (7.2) em (7.1) temos

$$\sigma_{ij}(s) = (I_{ijkl} - D_{ijkl}) \sigma_{kl}^e(s) \quad (7.3)$$

onde I_{ijkl} é a matriz identidade.

7.2. Matriz de Penalização D_{ijkl}

Escrevendo-se a Lei de Hooke generalizada sob a forma matricial, tem-se,

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (7.4)$$

onde $[E]$ contém os coeficientes elásticos de rigidez do material e, convenientemente indicado quando se fizer referência a um material elástico isotrópico, conforme abaixo:

$$\{\sigma\}^e = [E]^e \{\varepsilon\} \quad (7.5)$$

Substituindo-se (7.4) e (7.5) em (7.3) obtém-se,

$$[E]\{\varepsilon\} = ([I] - [D])[E]^e \{\varepsilon\} \quad (7.6)$$

Ou seja, para um mesmo conjunto de deformações $\{\varepsilon\}$, encontramos:

$$[E] = ([I] - [D])[E]^e \quad (7.7)$$

Portanto, a matriz de penalização $[D]$ pode ser escrita como:

$$[D] = [I] - [E][C]^e \quad (7.8)$$

onde a matriz $[E]$ contém os coeficientes elásticos de rigidez do material desejado, a matriz $[C]^e$ contém os coeficientes elásticos de flexibilidade de um

material elástico isotrópico usado como referência e $[I]$ é a própria matriz identidade.

7.3. Resolução algébrica

Partindo-se das duas equações algébricas independentes (6.33) e (6.34), respectivamente:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + [Q]\{\sigma^0\} \quad (7.9)$$

e,

$$\{\sigma\} = -[H']\{U\} + [G']\{P\} + [Q']\{\sigma^0\} \quad (7.10)$$

Substituindo-se (7.2) na primeira equação (7.9), encontramos:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + [Q][D]\{\sigma\}^e \quad (7.11)$$

Adicionando $\{\sigma^0\}$ a ambos os membros da segunda equação (7.10):

$$\{\sigma\} + \{\sigma^0\} = -[H']\{U\} + [G']\{P\} + [Q']\{D\}\{\sigma^e\} + \{\sigma^0\} \quad (7.12)$$

É fácil perceber a partir de equação (7.1), que o primeiro membro de (7.12) resulta nas componentes elásticas $\{\sigma\}^e$ e, substituindo-se (7.2) no segundo membro, obtemos:

$$\{\sigma^e\} = -[H']\{U\} + [G']\{P\} + [Q']\{D\}\{\sigma^e\} + [D]\{\sigma^e\} \quad (7.13)$$

Reescrevendo-se (7.13), chega-se à:

$$[H']\{U\} + \{[I] - [Q][D] - [D]\}\{\sigma^e\} = [G']\{P\} \quad (7.14)$$

O acréscimo do termo de domínio, referente ao campo de tensões iniciais, nas equações de deslocamento e tensões em pontos interno, torna-as dependentes entre si. Portanto, a resolução dos problemas propostos somente é possível através da solução do sistema de equações formado pelas equações (7.11) e (7.14). A composição das matrizes e vetores globais pode ser vista na figura abaixo:

$$\begin{bmatrix} [H] & -[Q][D] \\ [H'] & [I] - [Q][D] - [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\} \\ \{\sigma\}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G] \\ [G'] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\} \end{Bmatrix}$$

Figura 19 – Composição das matrizes e vetores globais

Com as matrizes e vetores globais devidamente montados, a resolução do sistema é somente possível após o adequado rearranjo das equações, de modo que todas as incógnitas do problema estejam do mesmo lado. Após a passagem dos termos conhecidos para o segundo membro, e dos termos incógnitos para o primeiro membro, o sistema global fica reescrito, de forma simplificado, na seguinte forma:

$$[A]\{X\} = \{F\} \quad (7.15)$$

O vetor global $\{X\}$ é composto pelas componentes de deslocamentos nodais do contorno $\{U\}$, pelas forças de superfície $\{P\}$ e pelas tensões

elásticas $\{\sigma\}^e$ incógnitas. A resolução de (7.15) pode ser simbolicamente representada por,

$$\{X\} = [A]^{-1} \{F\} \quad (7.16)$$

E finalmente, as tensões reais $\{\sigma\}$ em cada nó descontínuo do meio discretizado em células podem ser obtidas pela expressão:

$$\{\sigma\} = ([I] - [D])\{\sigma\}^e \quad (7.17)$$

CAPÍTULO 8

"A paciência é o melhor remédio para qualquer problema." (Plauto)

EXEMPLOS E APLICAÇÕES

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos de aplicação da formulação proposta, comparando resultados com os obtidos através do Método dos Elementos Finitos, com soluções analíticas (quando disponíveis) e/ou outros resultados encontrados na literatura.

No programa computacional desenvolvido baseado na formulação proposta neste trabalho, empregaram-se integrações analíticas sobre os elementos de contorno e integrações numéricas sobre os elementos no domínio. Em todos os exemplos apresentados, adotou-se ainda, o valor de $\text{dist} = 0,40$, distância adimensional do nó ao vértice da célula, conforme mostrado na Figura 16.

8.1. Exemplo 01

Este exemplo consiste na análise de uma peça tubular espessa, formada por dois tubos concêntricos e devidamente acoplados. O primeiro tubo tem espessura e raio interno igual a 2. O tubo externo tem espessura igual ao interno e seu módulo de elasticidade é o dobro do módulo do primeiro tubo.

A primeira análise consiste na verificação da convergência da solução, comparando-se os resultados em deslocamentos e tensões radiais com a solução analítica do problema disponível na literatura.

A geometria, as propriedades dos materiais e as condições de contorno impostas são apresentadas na Figura 20. É importante destacar que os resultados apresentados a seguir referem-se ao Estado Plano de Tensão.

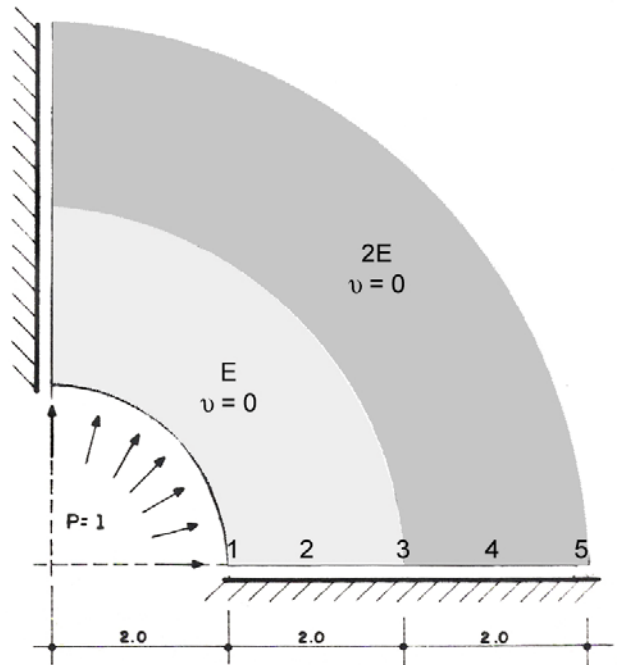


Figura 20 – Tubo de parede grossa. Geometria e carregamento (Exemplo 1)

Foram consideradas 3 discretizações, sendo a primeira delas com 6 elementos lineares na face interna do quarto do tubo em análise, 14 elementos lineares na face externa, 4 elementos lineares em cada linha de simetria e 67 células para discretizar o meio contínuo penalizado (Figura 21).

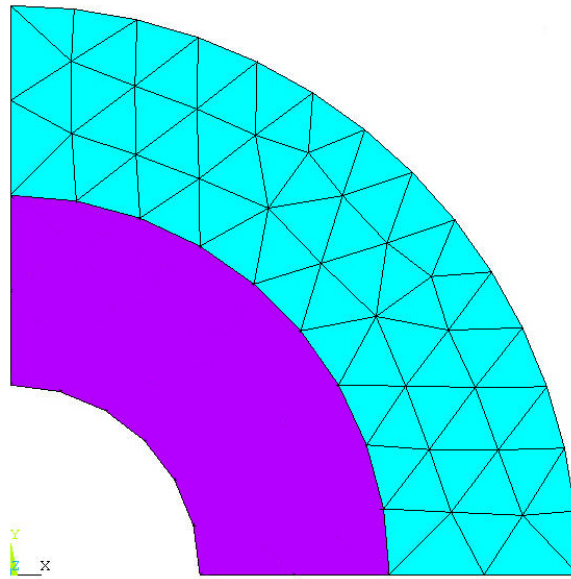


Figura 21 – Primeira discretização adotada no exemplo 1

A segunda malha (Figura 22) consiste no refinamento do primeiro modelo empregando 12 elementos lineares na face interna do quarto de tubo, 28 elementos lineares na face externa, 8 elementos lineares em cada linha de simetria e 268 células para discretizar o meio contínuo penalizado.

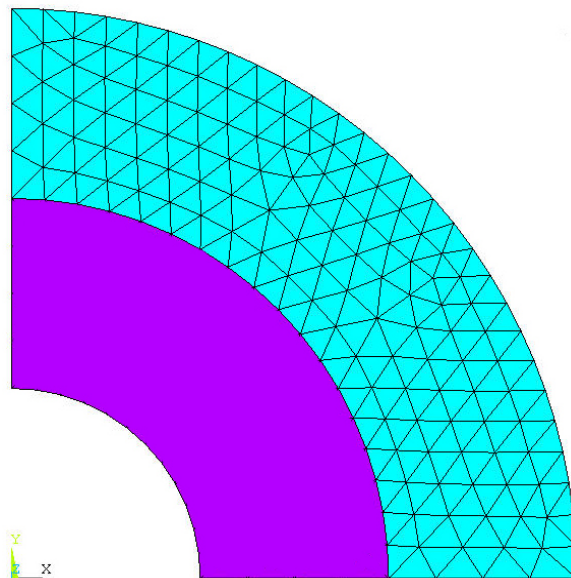


Figura 22 – Segunda discretização adotada no exemplo 1

A última discretização (Figura 23) consiste em 20 elementos lineares na face interna, 40 elementos lineares na face externa, 16 elementos lineares em

cada linha de simetria e 692 células para discretizar o meio contínuo penalizado.

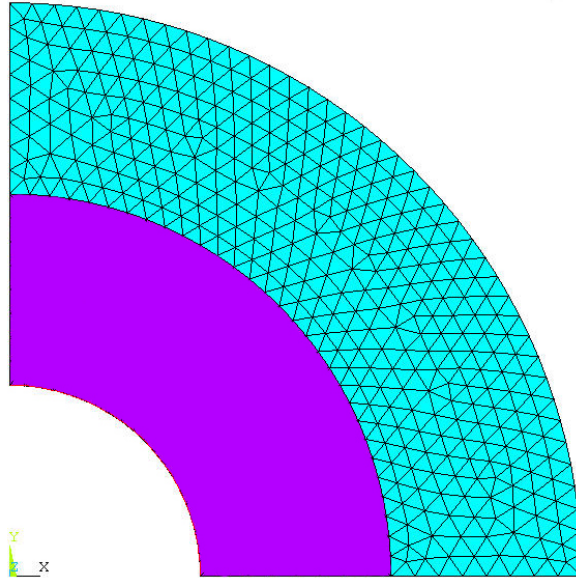


Figura 23 – Terceira discretização adotada no exemplo 1

Os seguintes deslocamentos radiais para os 5 pontos indicados foram encontrados e estão mostrados nos Gráficos 1 a 5:

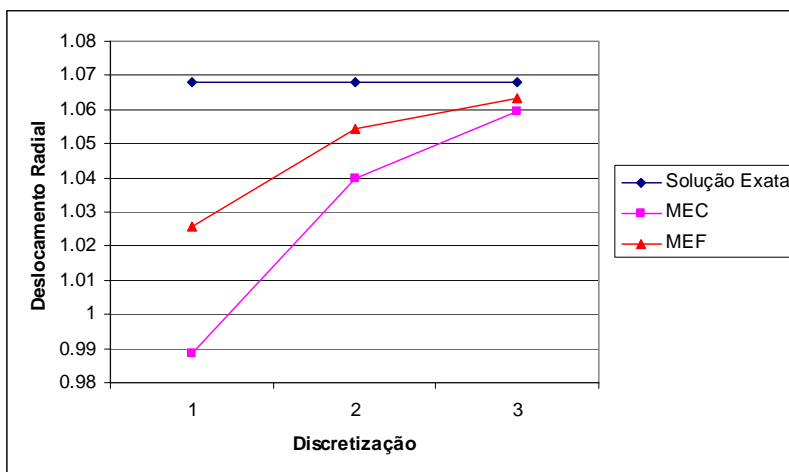


Gráfico 1 - Deslocamento Radial do ponto 1 nas 3 discretizações analisadas

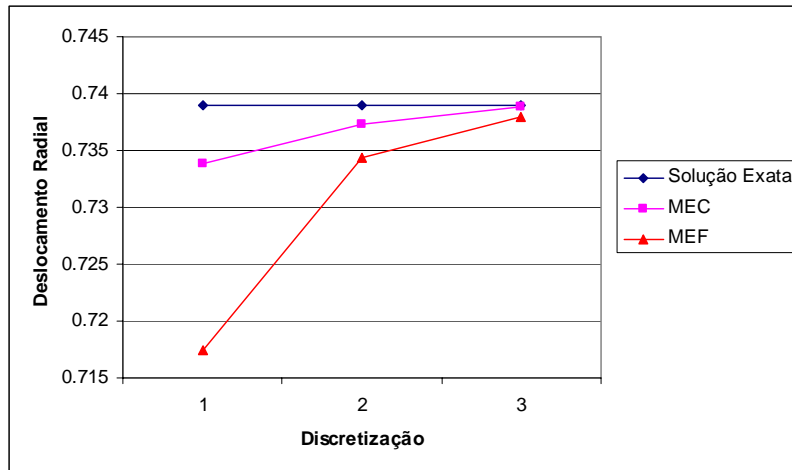


Gráfico 2 – Deslocamento Radial do ponto 2 nas 3 discretizações analisadas

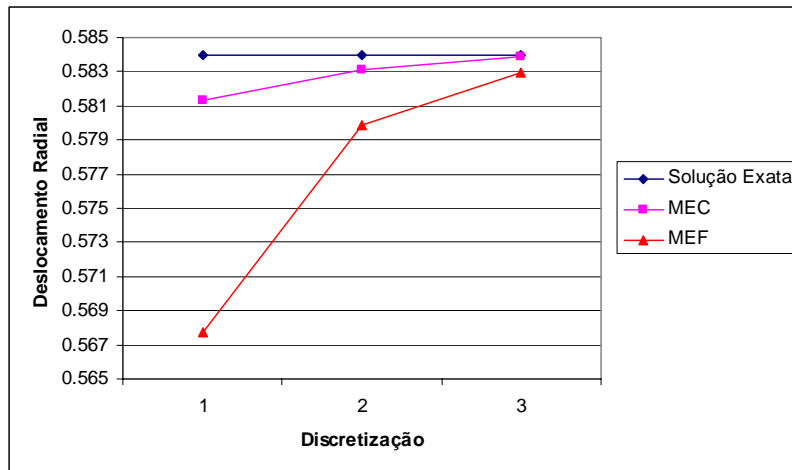


Gráfico 3 – Deslocamento Radial do ponto 3 nas 3 discretizações analisadas

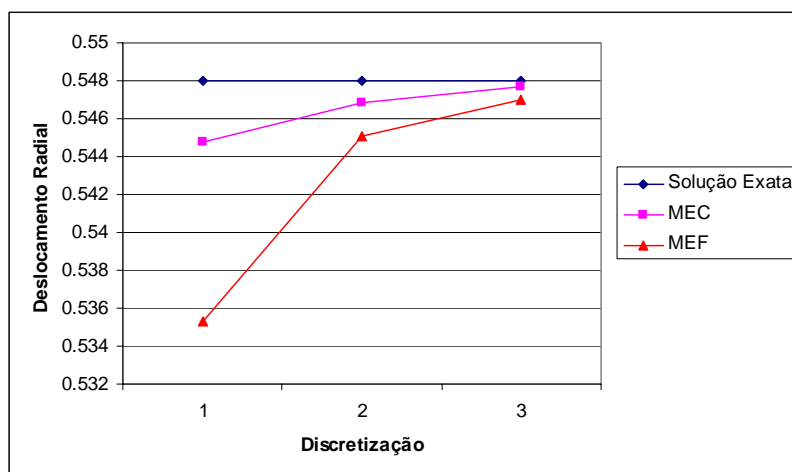


Gráfico 4 – Deslocamento Radial do ponto 4 nas 3 discretizações analisadas

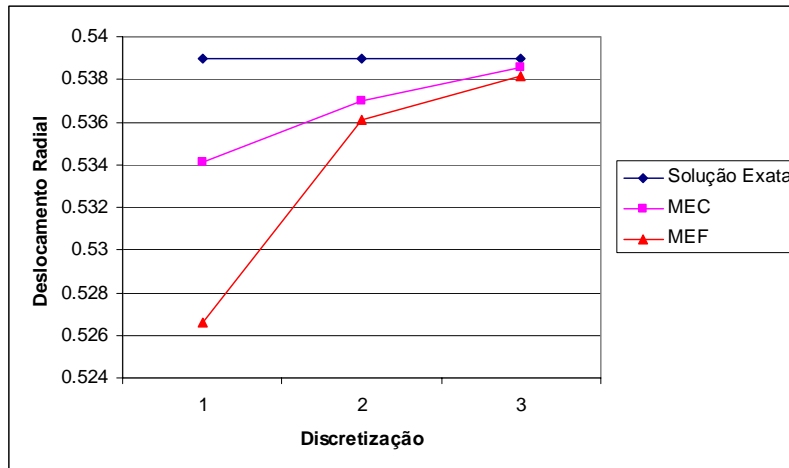


Gráfico 5 – Deslocamento Radial do ponto 5 nas 3 discretizações analisadas

Os valores apresentados em termos de deslocamentos radiais, juntamente com outros resultados disponíveis na literatura são apresentados na tabela a seguir,

| Técnica | Pontos | | | | |
|---------------------------------|--------|-------|-------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Formulação Alternativa | 1,068 | 0,736 | 0,582 | 0,552 | 0,538 |
| Método Clássico das Sub-regiões | 1,065 | 0,736 | 0,586 | 0,549 | 0,543 |
| MEF | 1,063 | 0,738 | 0,583 | 0,547 | 0,538 |
| Formulação Proposta (Malha1) | 0,989 | 0,734 | 0,581 | 0,545 | 0,534 |
| Formulação Proposta (Malha2) | 1,040 | 0,737 | 0,583 | 0,547 | 0,537 |
| Formulação Proposta (Malha3) | 1,059 | 0,739 | 0,584 | 0,548 | 0,538 |
| Valor Exato | 1,068 | 0,739 | 0,584 | 0,548 | 0,539 |

Os valores devem ser divididos por $E/2$

Tabela 1 – Deslocamentos Radiais (Exemplo 1)

Tanto o Método Clássico das sub-regiões quanto a Formulação alternativa indicada têm sua formulação devidamente descrita em VENTURINI (1988), onde foram empregados 6 elementos para aproximarem-se as superfícies interna, média e externa, enquanto que as linhas sobre os lados de cada tubo definidos pelos eixos de simetria foram discretizados com 2 elementos. Os valores exatos dos deslocamentos radiais, por sua vez, podem ser encontrados empregando-se as soluções analíticas demonstradas por TIMOSHENKO & GOODIER (1980), pág. 68, efetuando-se a compatibilização dos deslocamentos na interface entre os materiais.

O erro médio quadrático¹ obtido considerando todos os deslocamentos radiais dos nós do contorno na primeira discretização foi de 2,73%, reduzindo para 0,72% na segunda discretização e fechando em 0,49% na última discretização.

As tensões radiais² obtidas numericamente e comparadas com seus valores exatos estão mostradas nos Gráficos 6 a 9.

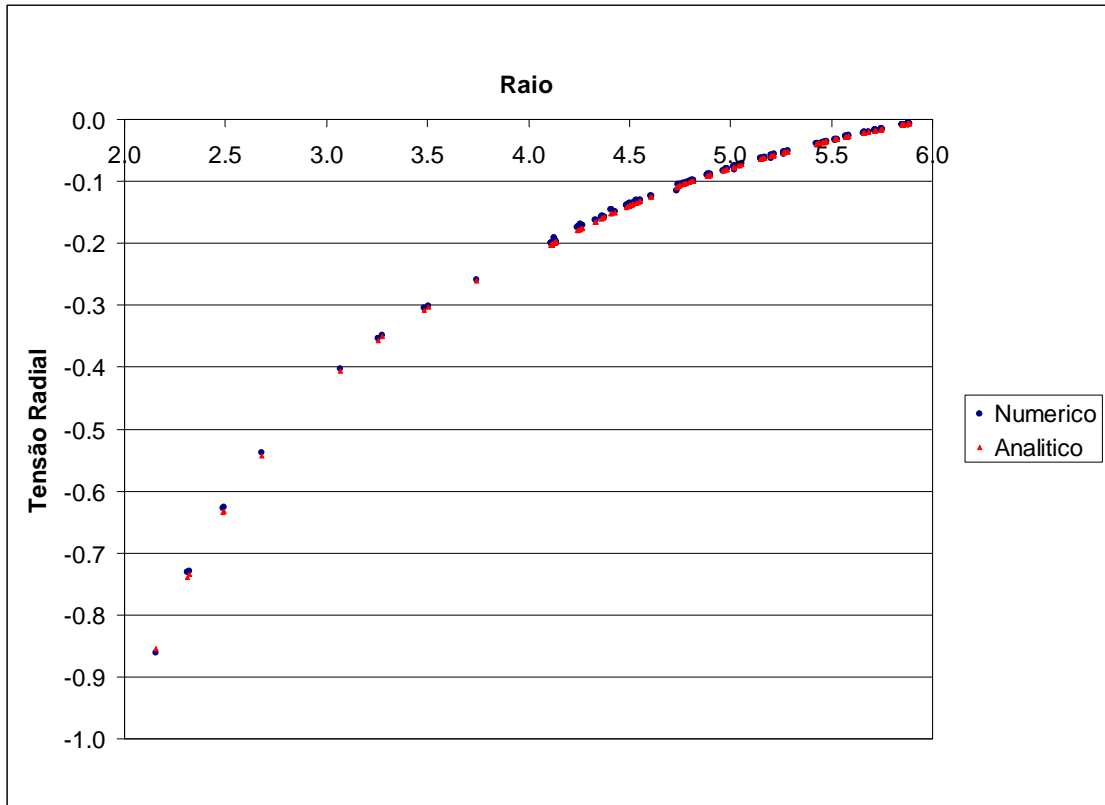
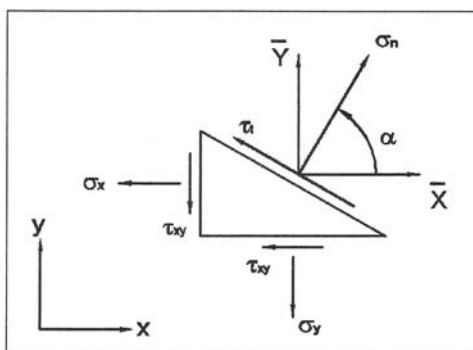


Gráfico 6 – Tensões Radiais no Modelo 1

¹
$$\text{Erro}(\%) = \sqrt{\frac{\sum (U_a - U_n)^2}{\sum (U_a)^2}} * 100$$
, onde U_a é o deslocamento analítico e U_n é o deslocamento numérico

² A tensões radiais (σ_r) podem ser obtidas a partir das tensões cartesianas ($\sigma_x, \tau_{xy}, \sigma_y$) da seguinte forma:



$$\sigma_r = l^2 \sigma_x + 2lm \tau_{xy} + m^2 \sigma_y,$$

onde l e m são os co-senos diretores da normal .

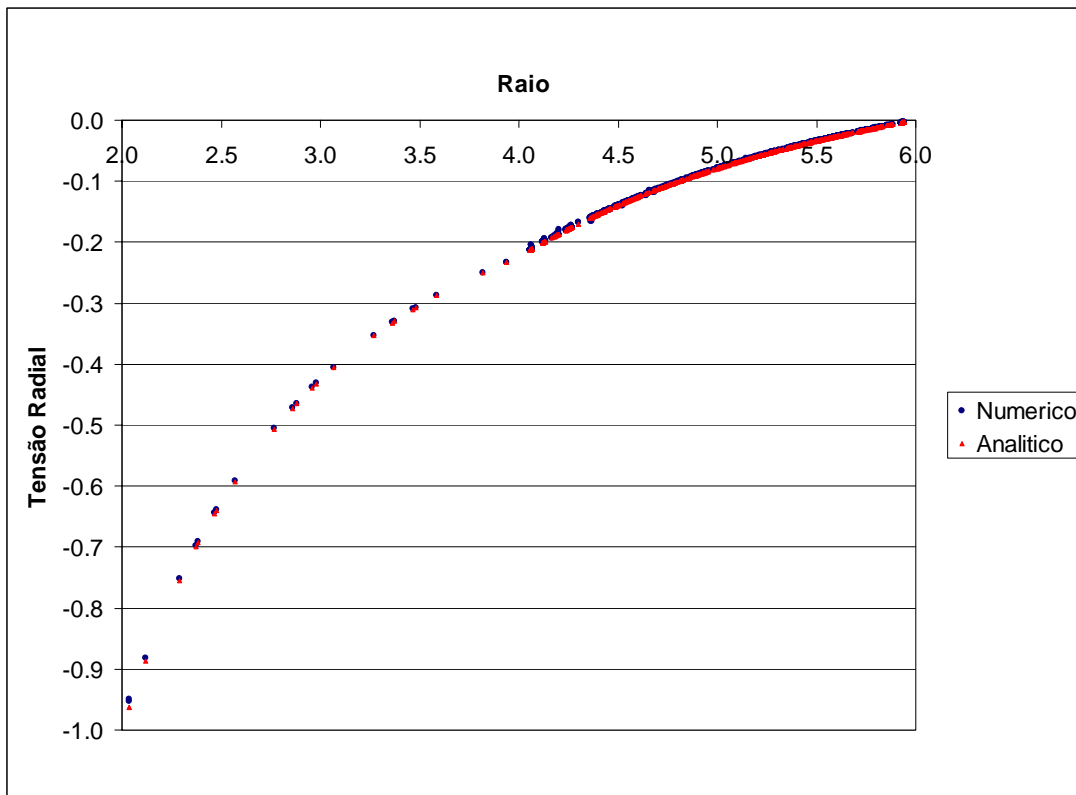


Gráfico 7 – Tensões Radiais no Modelo 2

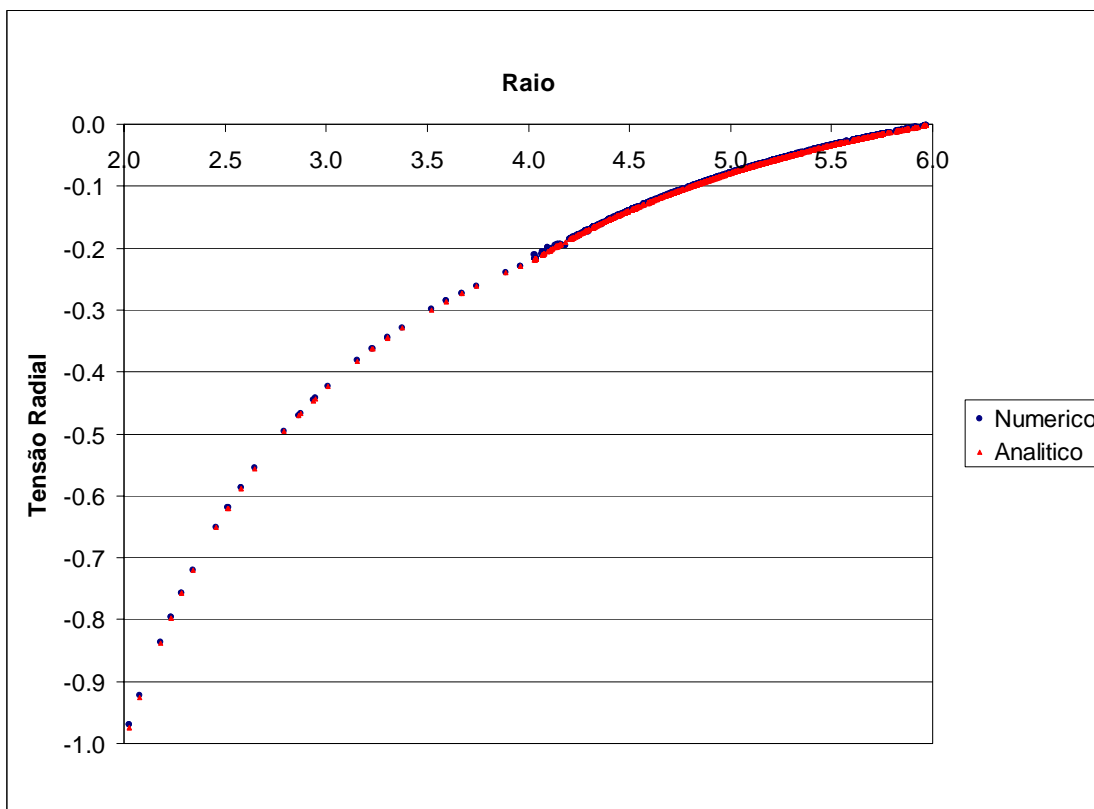


Gráfico 8 – Tensões Radiais no Modelo 3

Da mesma maneira que calculada nos deslocamentos, o erro médio quadrático obtido nas tensões radiais foi de 2,46% na primeira discretização e, 0,92% e 0,48%, na segunda e terceira discretização, respectivamente. Observe que os erros obtidos para deslocamentos e tensões são muito próximos, característica do MEC.

8.2. Exemplo 02

Este exemplo baseia-se no primeiro exemplo apresentado, diferenciando-se apenas nas propriedades elásticas dos materiais que, agora, apresentam o coeficiente de Poisson igual a 0,2.

A geometria, as propriedades dos materiais e as condições de contorno impostas são apresentadas na Figura 24. A discretização adotada permanece a mesma apresentada na Figura 23. Os resultados apresentados referem-se ao Estado Plano de Tensão.

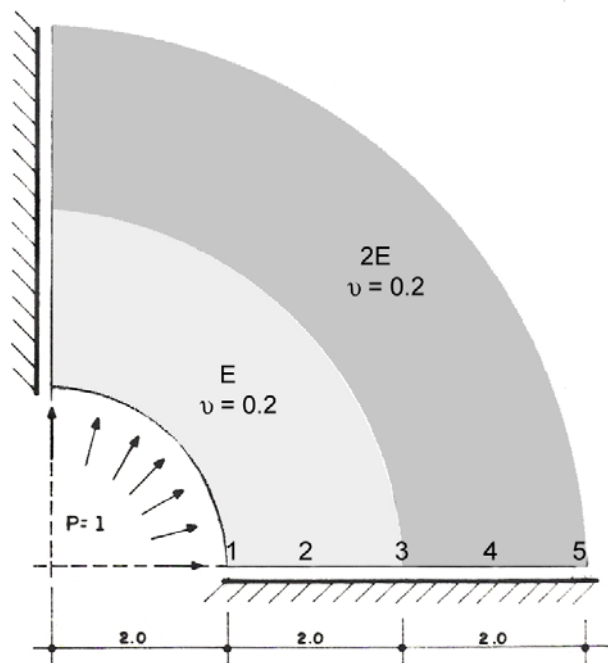


Figura 24 – Tubo de parede grossa. Geometria e carregamento (Exemplo 1)

Tem-se a seguir, na Tabela 2, os valores dos deslocamentos radiais comparados com os encontrados pela solução analítica e pelo MEF.

| Técnica | Pontos | | | | |
|---------------------|--------|-------|-------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Valor Exato | 1,246 | 0,846 | 0,651 | 0,588 | 0,558 |
| Formulação Proposta | 1,248 | 0,845 | 0,651 | 0,587 | 0,557 |
| MEF | 1,240 | 0,844 | 0,649 | 0,586 | 0,556 |

Os valores devem ser divididos por E/2

Tabela 2 – Deslocamentos Radiais (Exemplo 2)

As tensões radiais obtidas estão apresentadas no Gráfico 9 juntamente com a solução analítica.

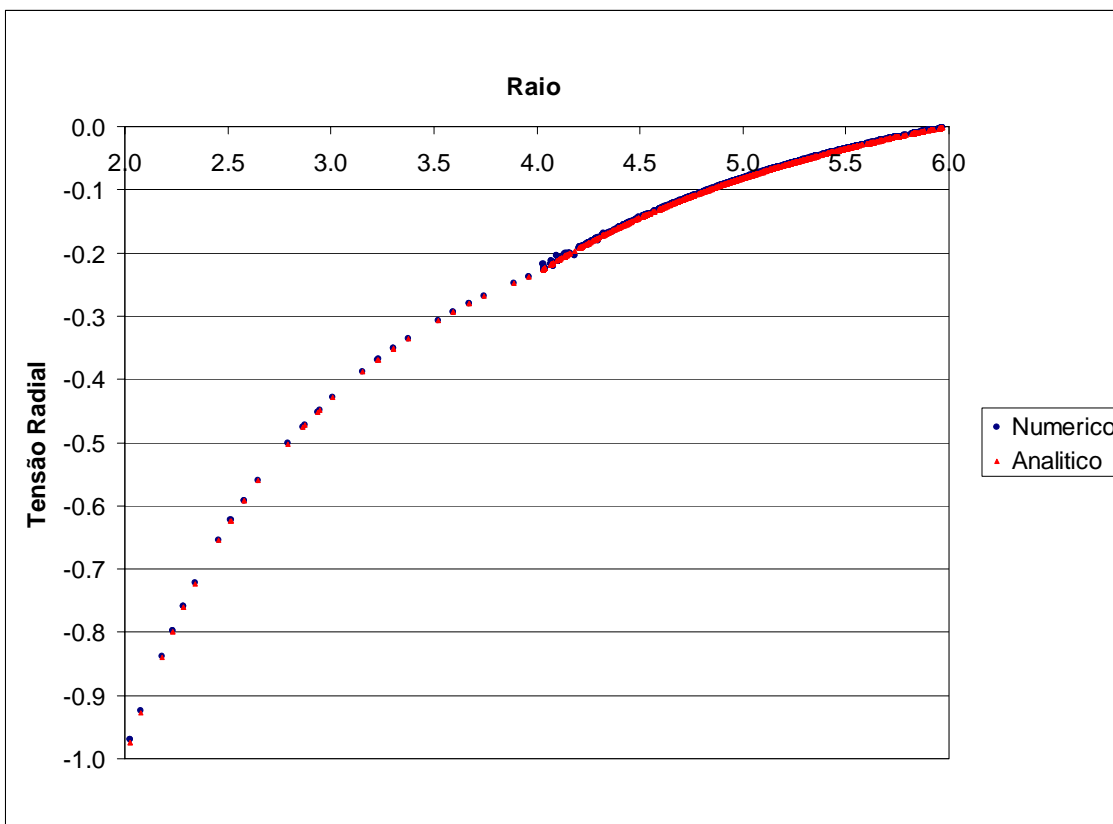


Gráfico 9 – Tensões Radiais (Exemplo 2)

| Técnica | Pontos | | | | |
|---------------------|--------|-------|-------|-------|-------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| Valor Exato | 1,087 | 0,761 | 0,609 | 0,549 | 0,522 |
| Formulação Proposta | 1,088 | 0,760 | 0,608 | 0,549 | 0,521 |
| MEF | 1,083 | 0,759 | 0,607 | 0,548 | 0,521 |

Os valores devem ser divididos por E/2

Tabela 3 – Deslocamentos Radiais (Exemplo 3)

As tensões radiais obtidas estão mostradas no Gráfico 10.

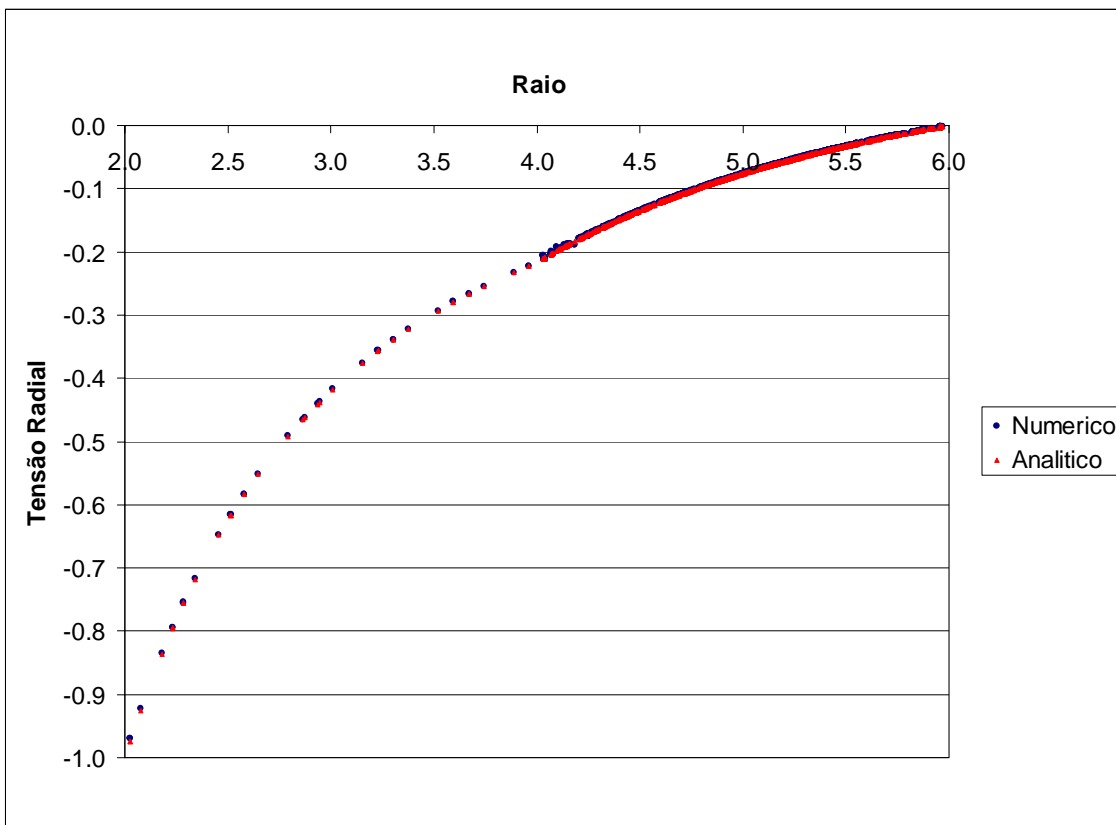


Gráfico 10 – Tensões Radiais (Exemplo 3)

O erro médio quadrático calculado em função dos deslocamentos numéricos e analíticos, foi de 0,18% enquanto que nas tensões radiais este erro permaneceu em torno de 0,45%

8.4. Exemplo 04

Neste exemplo, disponível em WUTZOW (2002), pág. 78, onde foram empregadas as técnicas de sub-região, elementos finitos e condensação tem seus resultados confrontados aos obtidos pela formulação proposta neste trabalho.

Os dados geométricos, físicos e as condições de contorno impostas, são vistos na Figura 26:

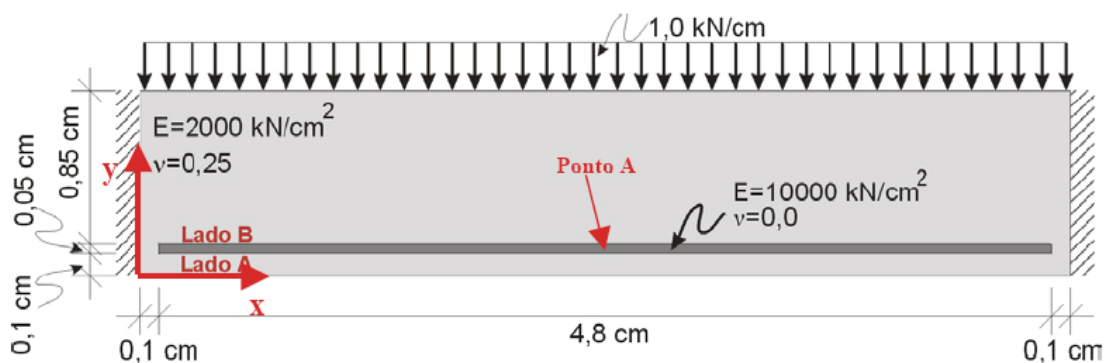


Figura 26 – Geometria e carregamento do exemplo 4

A discretização adotada é representada na figura abaixo,

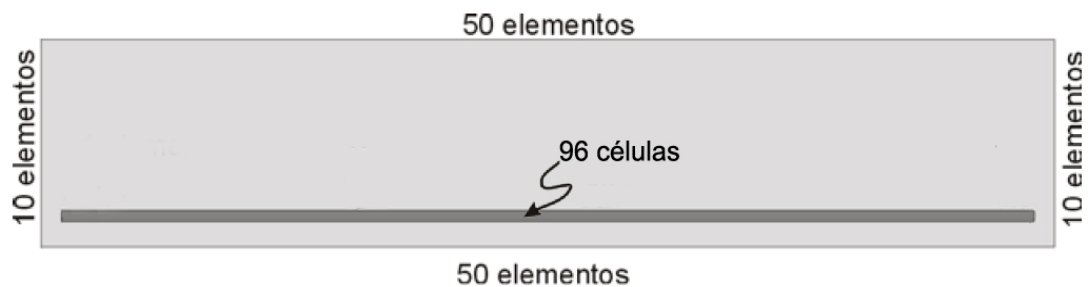


Figura 27 – Discretização empregada no exemplo 4

O deslocamento vertical do ponto A localizado no centro do enrijecedor é apresentado na Tabela 4 para as diferentes técnicas.

| Método de Cálculo | Deslocamento Y (cm) |
|------------------------------------|---------------------|
| Sub-região (WUTZOW, 2002) | -0,012211 |
| Condensação (WUTZOW, 2002) | -0,012211 |
| ANSYS (WUTZOW, 2002) | -0,012368 |
| Formulação Proposta neste trabalho | -0,012268 |

Tabela 4 – Deslocamentos em y do Ponto A (Exemplo 4)

8.5. Exemplo 05

O carregamento, a geometria, e as condições de contorno do problema são vistas na figura abaixo,

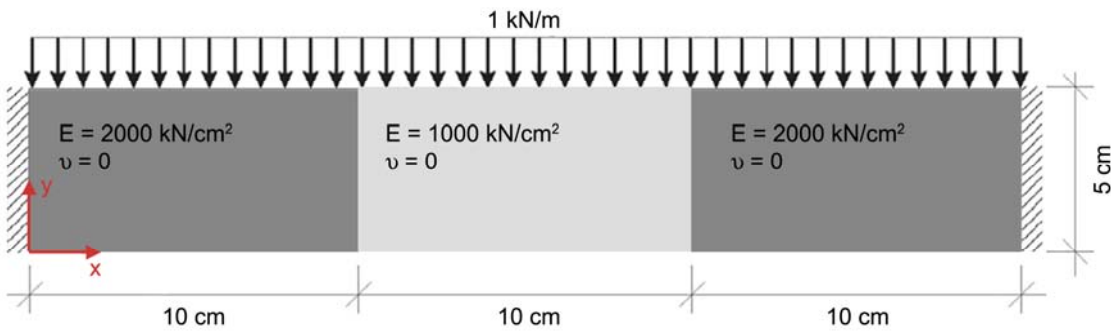


Figura 28 – Geometria e carregamento do exemplo 5

Foram adotadas 2 discretizações, sendo a primeira delas constituída por 70 elementos no contorno e 120 células no domínio, conforme mostrado na Figura 29:

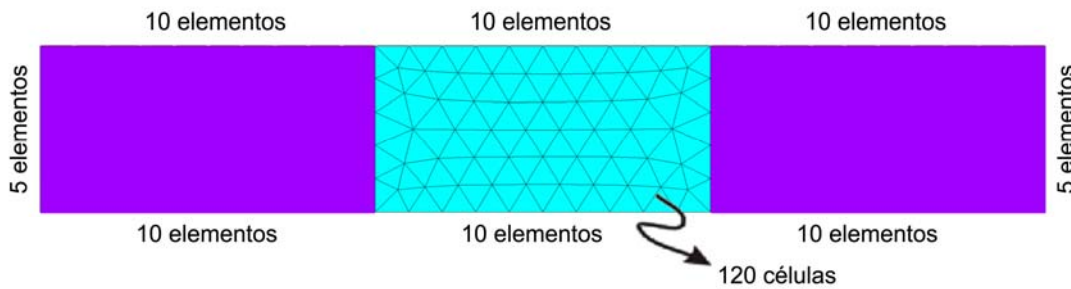


Figura 29 – Primeira discretização adotada no exemplo 5

Na segunda discretização, foram adotados 140 elementos no contorno e 480 células no domínio (Figura 30).

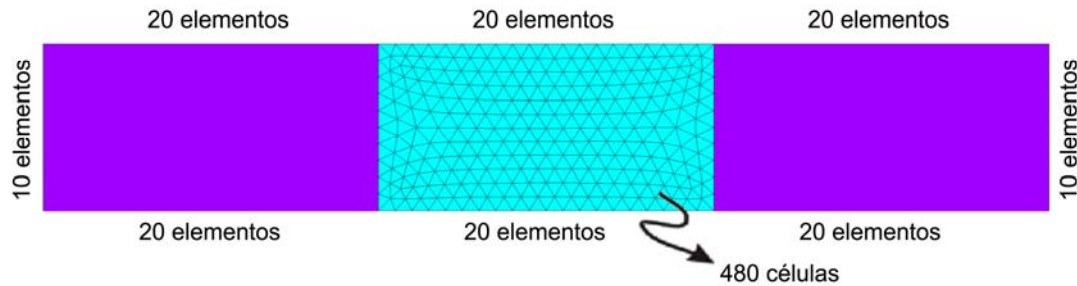


Figura 30 – Segunda discretização adotada no exemplo 5

Os resultados em deslocamento vertical nos nós na face inferior da viga são apresentados na tabela abaixo, comparando-se as duas discretizações adotadas com os resultados obtidos através do MEF com base na mesma discretização do domínio.

| Nó | Coord. X (cm) | MEC1 | MEC2 | MEF |
|----|---------------|----------|----------|----------|
| 1 | 0,000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |
| 2 | 1,000 | -0.04941 | -0.04781 | -0.04646 |
| 3 | 2,000 | -0.13035 | -0.13083 | -0.12914 |
| 4 | 3,000 | -0.23522 | -0.23823 | -0.23581 |
| 5 | 4,000 | -0.35750 | -0.36364 | -0.36044 |
| 6 | 5,000 | -0.49169 | -0.50155 | -0.49759 |
| 7 | 6,000 | -0.63288 | -0.64695 | -0.64225 |
| 8 | 7,000 | -0.77669 | -0.79528 | -0.78991 |
| 9 | 8,000 | -0.91913 | -0.94244 | -0.93644 |
| 10 | 9,000 | -1.05679 | -1.08480 | -1.07830 |
| 11 | 10,000 | -1.18797 | -1.22056 | -1.21350 |
| 12 | 11,000 | -1.31036 | -1.34813 | -1.34110 |
| 13 | 12,000 | -1.41161 | -1.45370 | -1.44640 |
| 14 | 13,000 | -1.48653 | -1.53177 | -1.52430 |
| 15 | 14,000 | -1.53244 | -1.57963 | -1.57220 |
| 16 | 15,000 | -1.54790 | -1.59575 | -1.58830 |

| Nó (Cont). | Coord. X (cm) | MEC1 | MEC2 | MEF |
|-------------------|----------------------|-------------|-------------|------------|
| 17 | 16,000 | -1.53244 | -1.57963 | -1.57220 |
| 18 | 17,000 | -1.48653 | -1.53177 | -1.52430 |
| 19 | 18,000 | -1.41161 | -1.45370 | -1.44640 |
| 20 | 19,000 | -1.31036 | -1.34813 | -1.34110 |
| 21 | 20,000 | -1.18797 | -1.22056 | -1.21350 |
| 22 | 21,000 | -1.05679 | -1.08480 | -1.07830 |
| 23 | 22,000 | -0.91913 | -0.94244 | -0.93645 |
| 24 | 23,000 | -0.77669 | -0.79528 | -0.78991 |
| 25 | 24,000 | -0.63288 | -0.64695 | -0.64226 |
| 26 | 25,000 | -0.49169 | -0.50155 | -0.49759 |
| 27 | 26,000 | -0.35750 | -0.36364 | -0.36045 |
| 28 | 27,000 | -0.23522 | -0.23823 | -0.23582 |
| 29 | 28,000 | -0.13035 | -0.13083 | -0.12915 |
| 30 | 29,000 | -0.04941 | -0.04781 | -0.04646 |
| 31 | 30,000 | 0.00000 | 0.00000 | 0.00000 |

Tabela 5 – Deslocamentos verticais na face inferior (Exemplo 5)

Nos Gráficos 11 e 12 são apresentados os deslocamentos verticais que ocorrem ao longo da face inferior da viga:

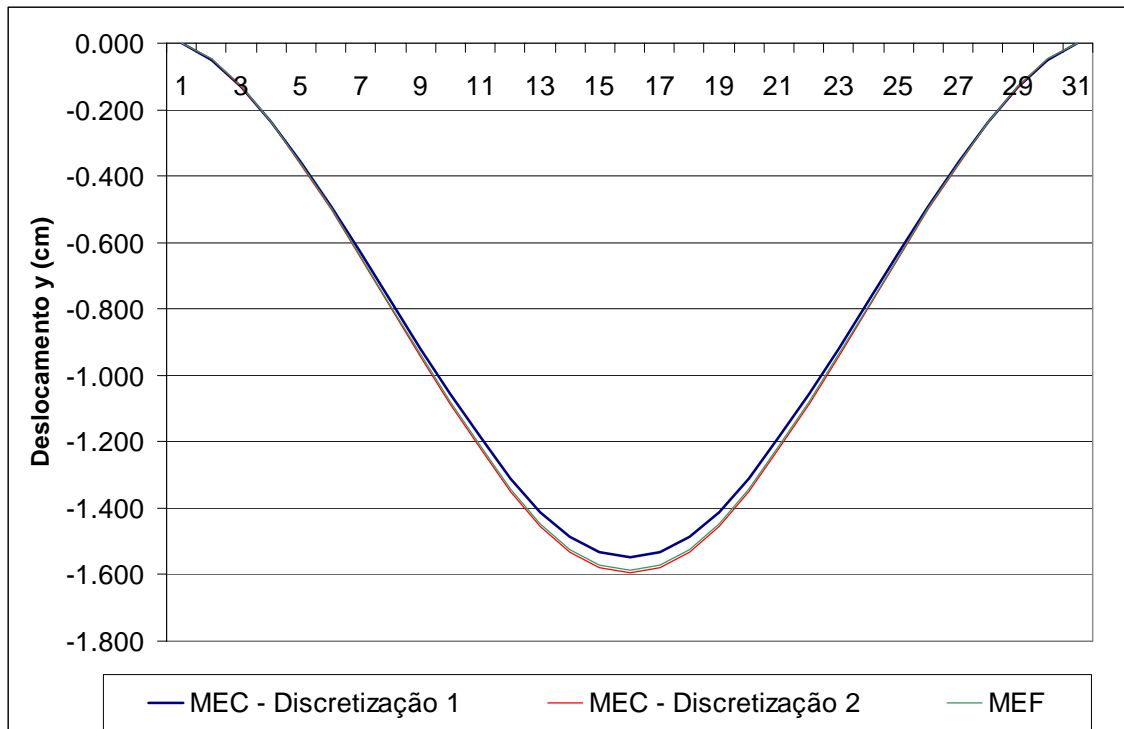


Gráfico 11 – Deslocamento vertical ao longo da face inferior da viga

Apenas os deslocamentos verticais na região central da viga Gráfico 12:

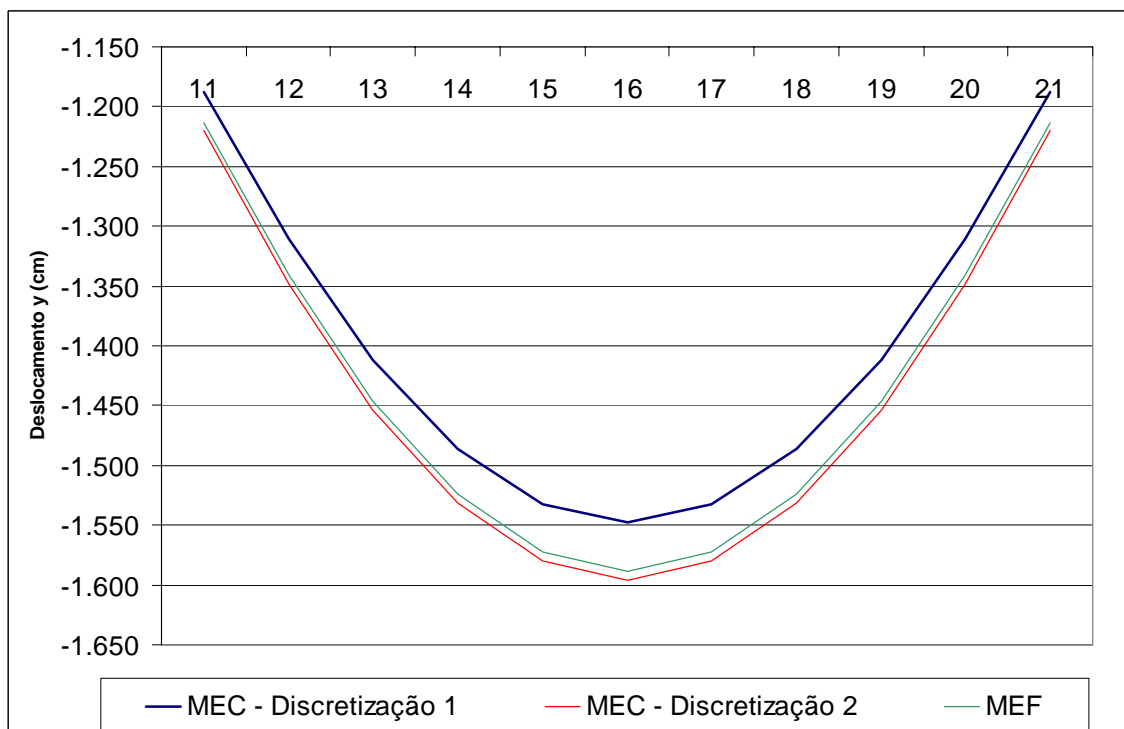


Gráfico 12 – Deslocamento vertical ao longo da face inferior da viga

8.6. Exemplo 06

Este exemplo consiste em um chapa quadrada, constituída de um material com propriedades ortotrópicas. O carregamento, a geometria, e as condições de contorno do problema são vistas na Figura 31.

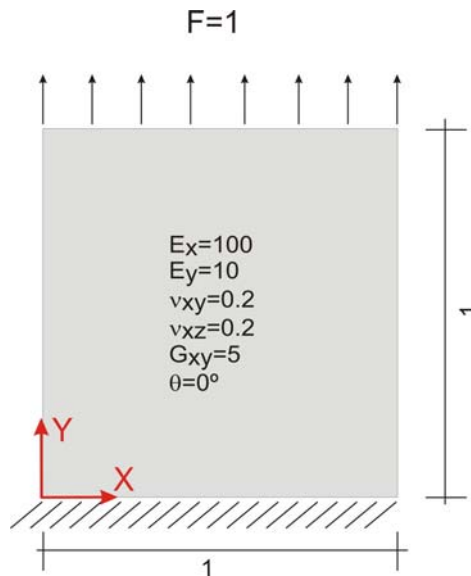


Figura 31 – Geometria e carregamento do exemplo 6

Empregaram-se 222 células no domínio e 10 elementos lineares sobre cada face do contorno, totalizando em 40 elementos lineares de contorno, conforme indicado na Figura 32.

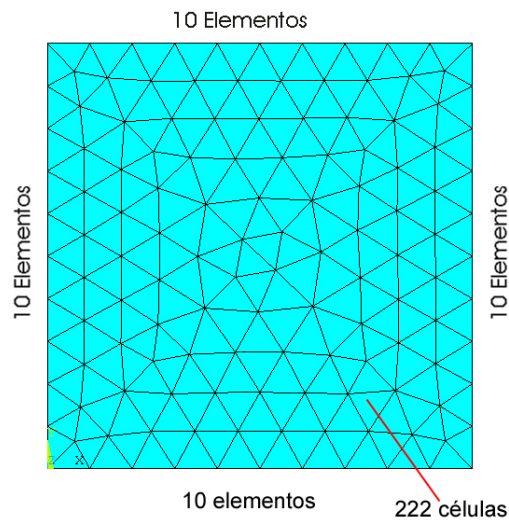


Figura 32 – Discretização adotada no exemplo 6

Os resultados obtidos foram confrontados com a formulação proposta no trabalho de HOEFEL (2006), que emprega a solução fundamental ortotrópica no equacionamento do problema e elementos constantes, e com o MEF empregando-se 100 e 400 elementos quadrangulares, respectivamente. Os resultados das forças de superfície ao longo do apoio engastado são mostrados no Gráfico 13.

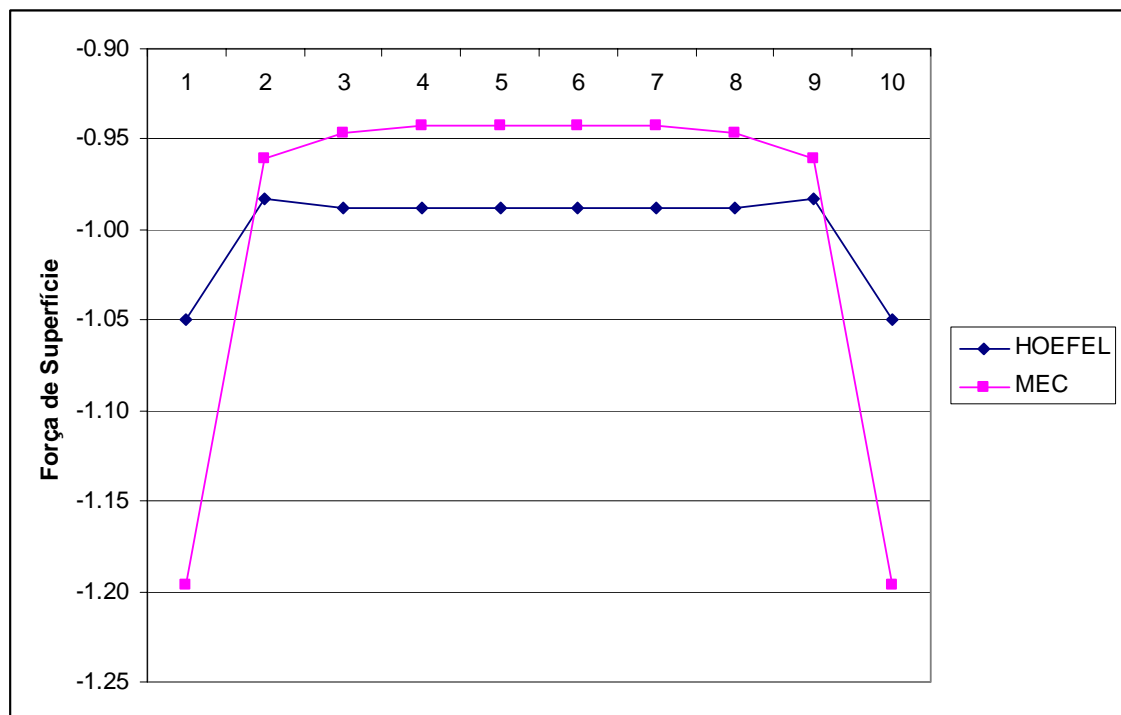


Gráfico 13 – Força de superfície ao longo do apoio engastado (exemplo 6)

Os resultados em deslocamentos verticais na face superior e ao longo da face lateral da chapa são mostrados no Gráfico 14 e Gráfico 15, a seguir:

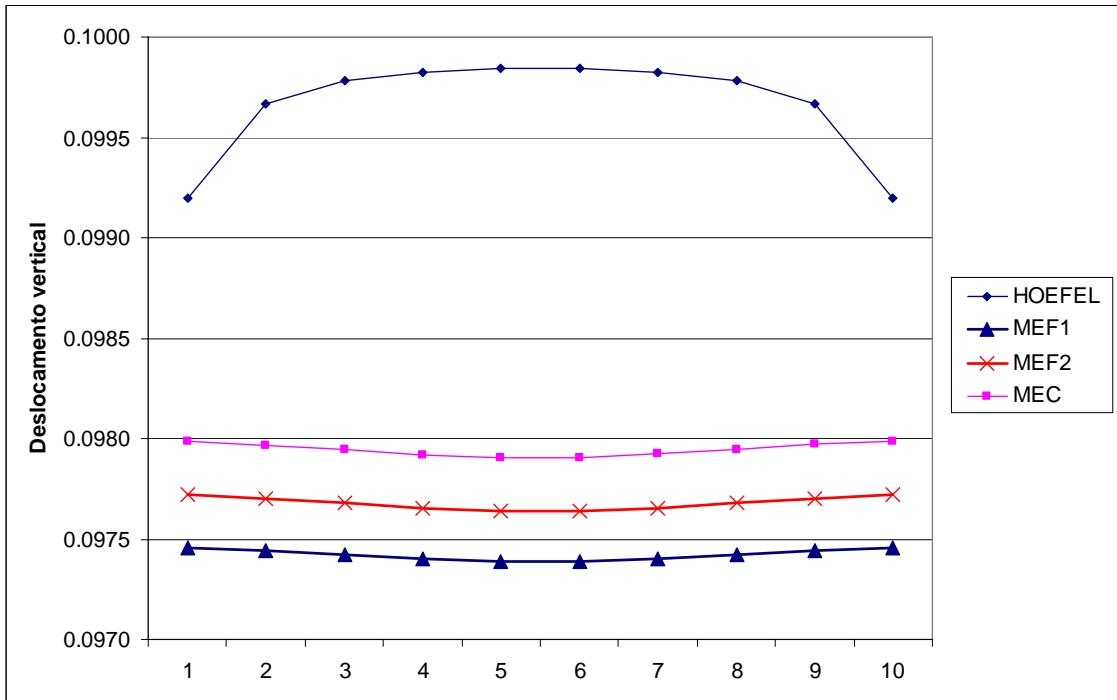


Gráfico 14 – Deslocamentos verticais ao longo da face superior (exemplo 6)

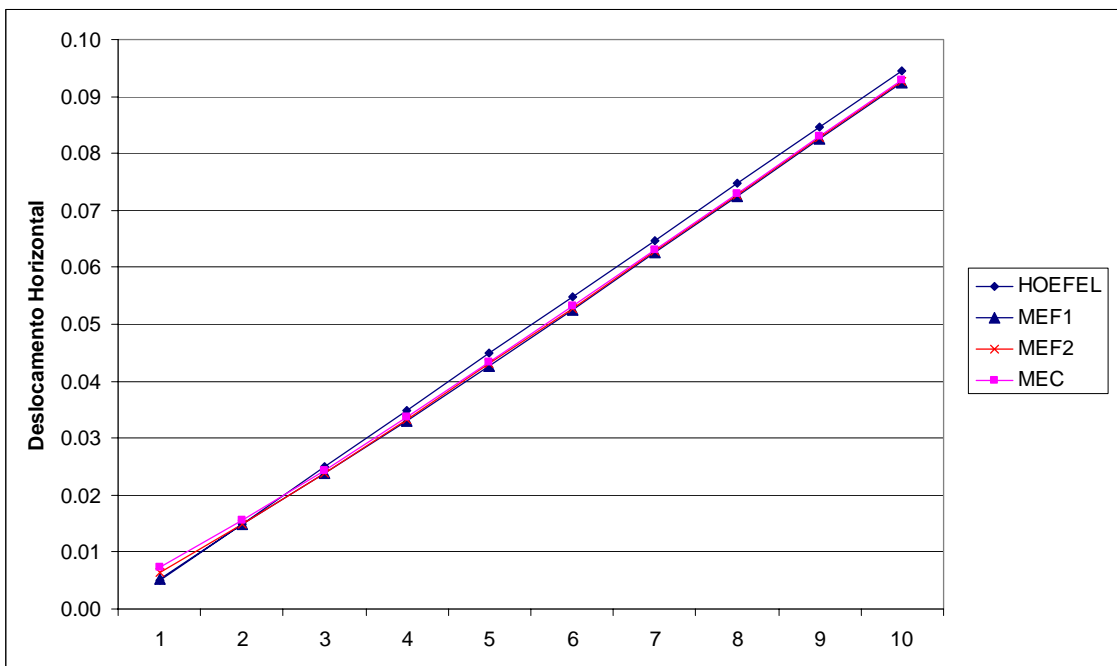


Gráfico 15 – Deslocamentos verticais ao longo da face lateral (exemplo 6)

8.7. Exemplo 07

Este exemplo consiste em uma chapa tracionada, composta por um material ortotrópico incluso em um material isotrópico. O carregamento, a geometria, e as condições de contorno do problema são vistas na Figura 33.

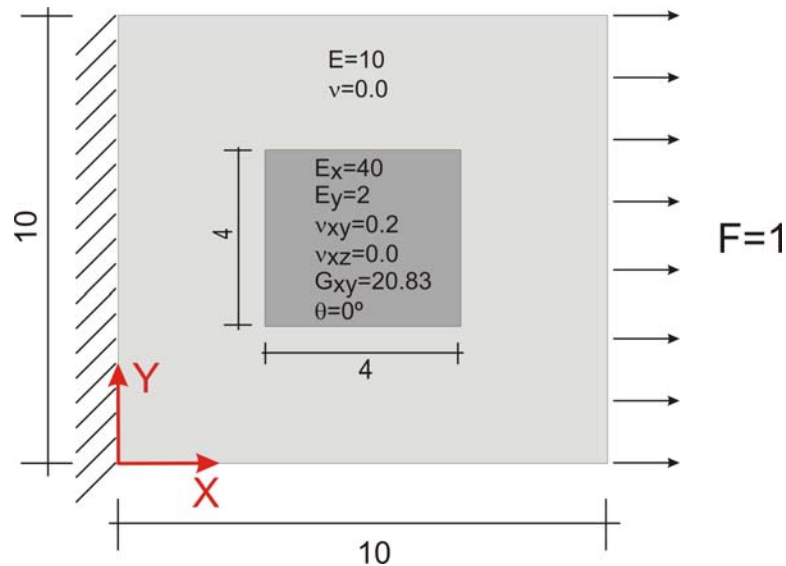


Figura 33 – Geometria e carregamento do quadrado com inclusão ortotrópica

Empregaram-se 86 células no domínio penalizado e 10 elementos lineares em cada face do contorno, totalizando 40 elementos lineares, conforme Figura 34.

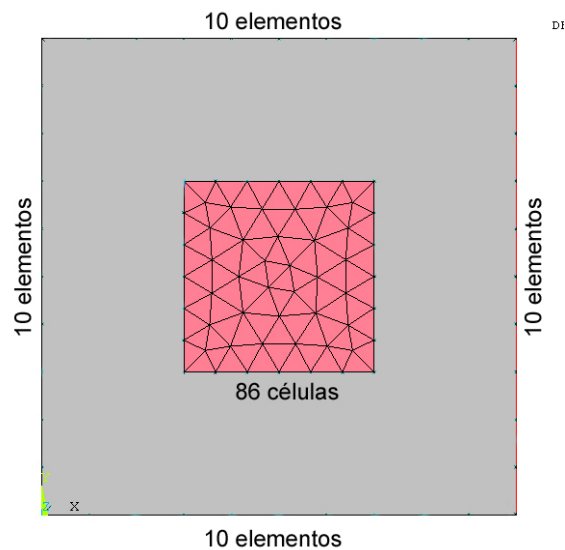


Figura 34 – Discretização adotada no exemplo 7

A seguir, comparam-se os resultados obtidos em deslocamentos verticais ao longo da face superior e deslocamentos horizontais ao longo da face lateral, com os resultados obtidos pelo MEF (ANSYS) como esta mostrado no Gráfico 16 e 17, respectivamente:

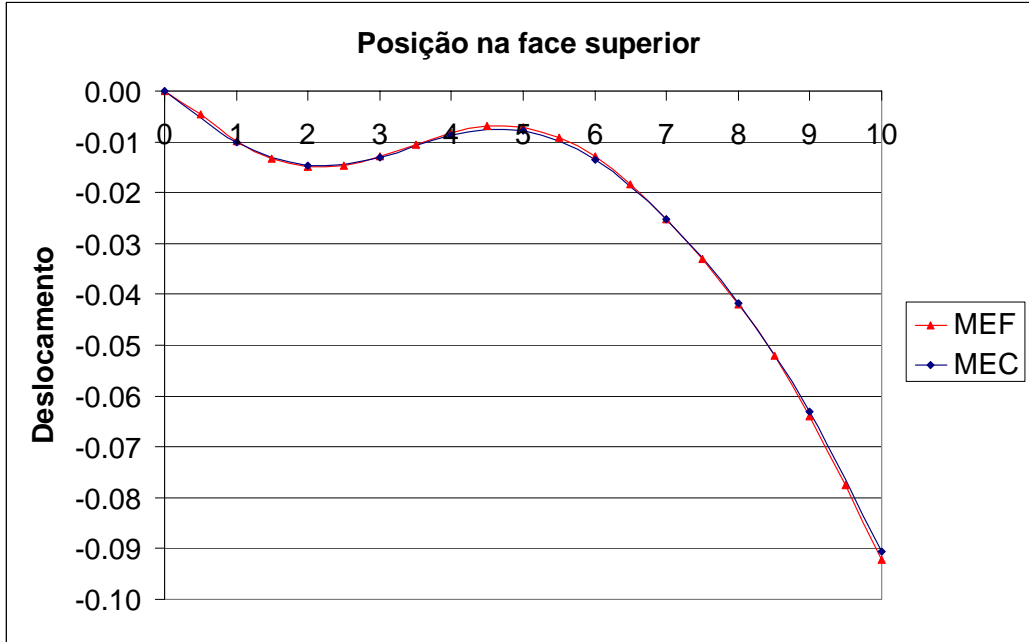


Gráfico 16 – Deslocamento vertical ao longo da face superior (Exemplo 7)

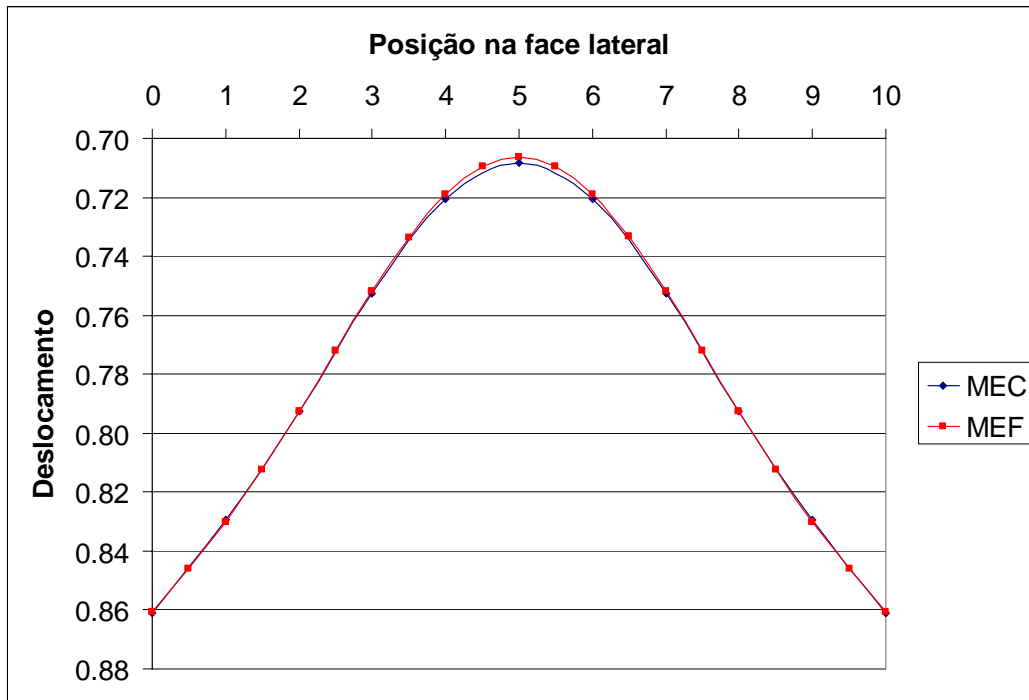


Gráfico 17 – Deslocamento horizontal ao longo da face lateral (Exemplo 7)

E as tensões σ_x , τ_{xy} e σ_y , respectivamente:

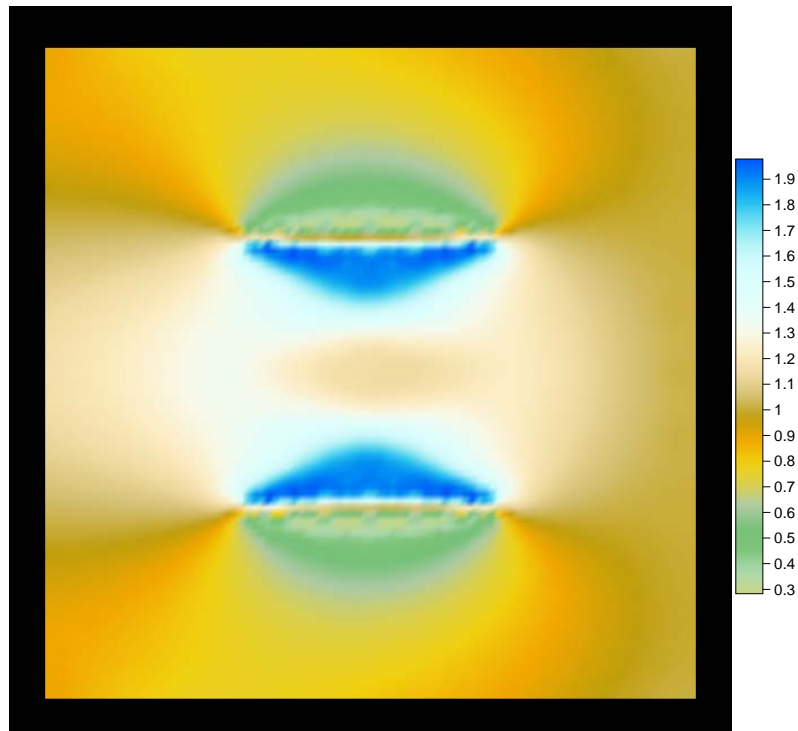


Figura 35 – Tensões σ_x (Exemplo 7)

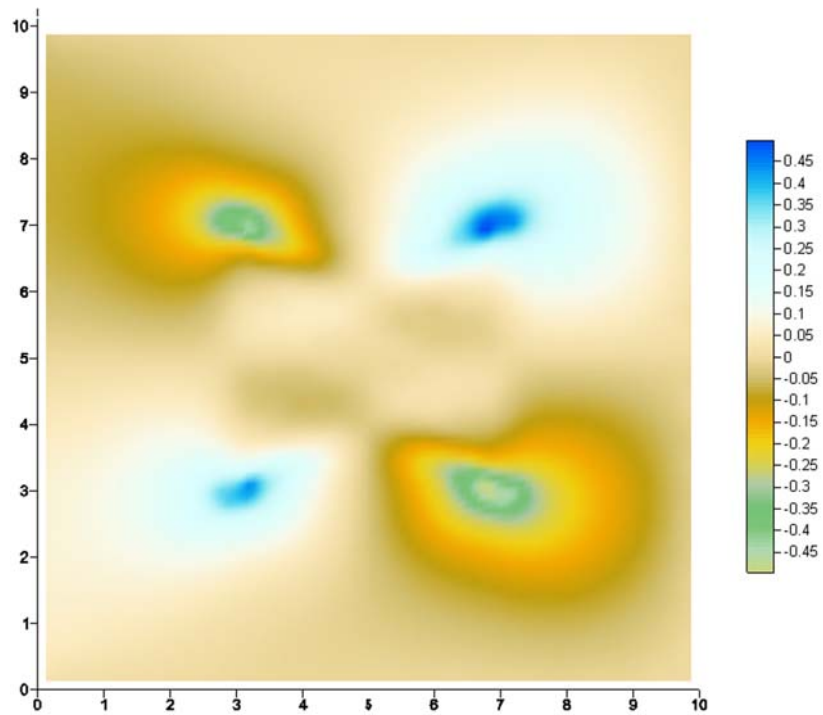
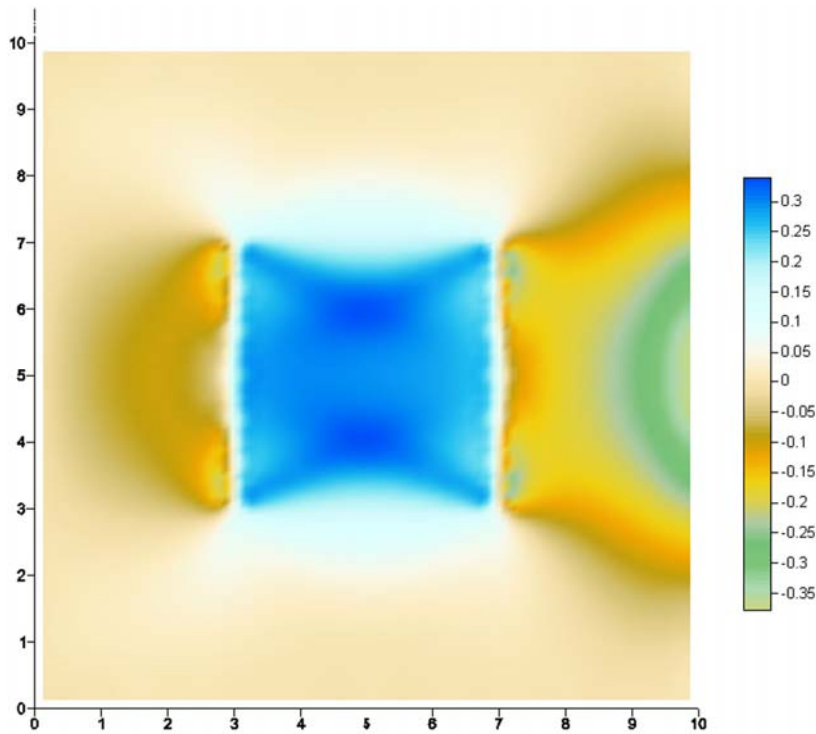


Figura 36 – Tensões τ_{xy} (Exemplo 7)

Figura 37 – Tensões σ_y (Exemplo 7)

8.8. Exemplo 08

Trata-se de uma variação do exemplo anterior onde, agora, o meio isotrópico apresenta o coeficiente de Poisson não-nulo. O carregamento, a geometria, e as condições de contorno do problema são vistas na Figura 38:

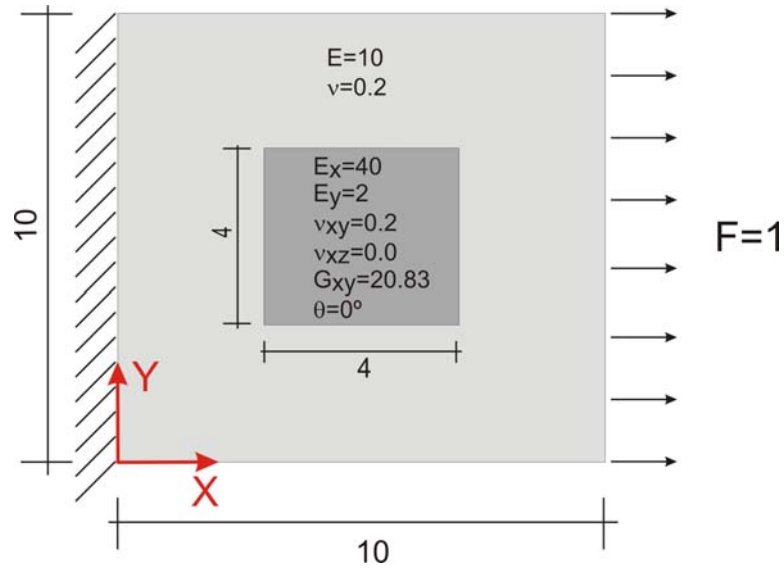


Figura 38 – Geometria e carregamento do exemplo 8

Foi adotada a mesma discretização mostrada na Figura 34. A seguir, comparam-se os resultados obtidos em deslocamentos verticais ao longo da face superior e deslocamentos horizontais ao longo da face lateral, com os resultados obtidos pelo MEF (Gráfico 18 e Gráfico 19).

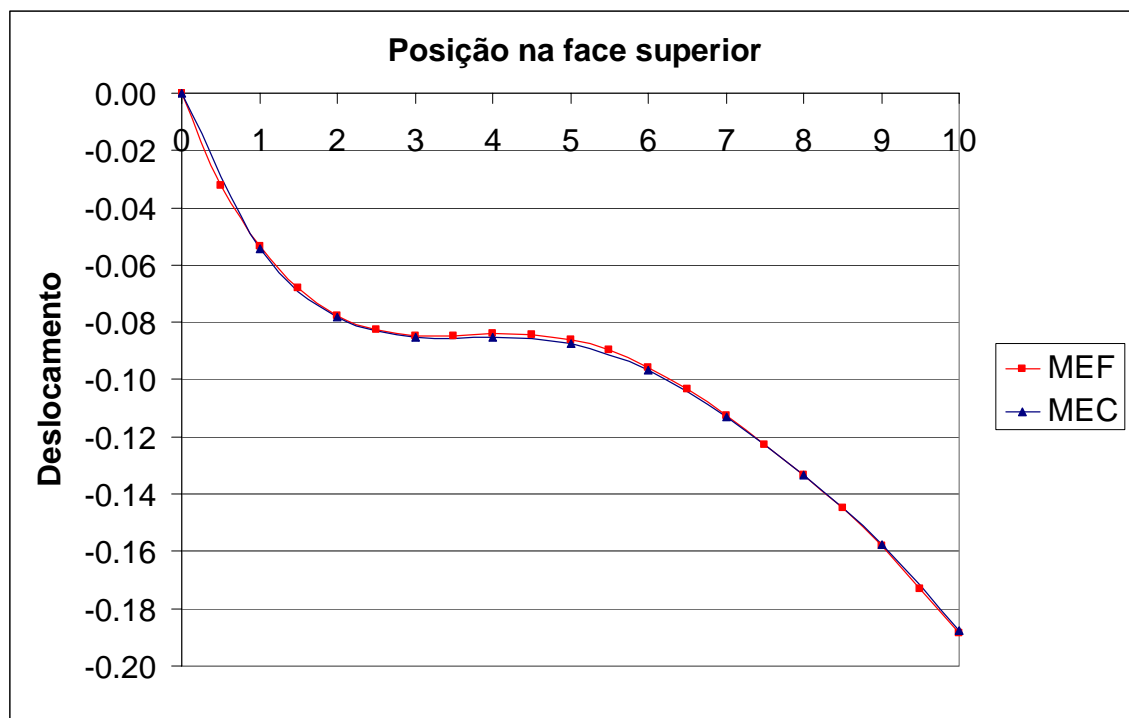


Gráfico 18 – Deslocamento vertical na face superior (Exemplo 8)

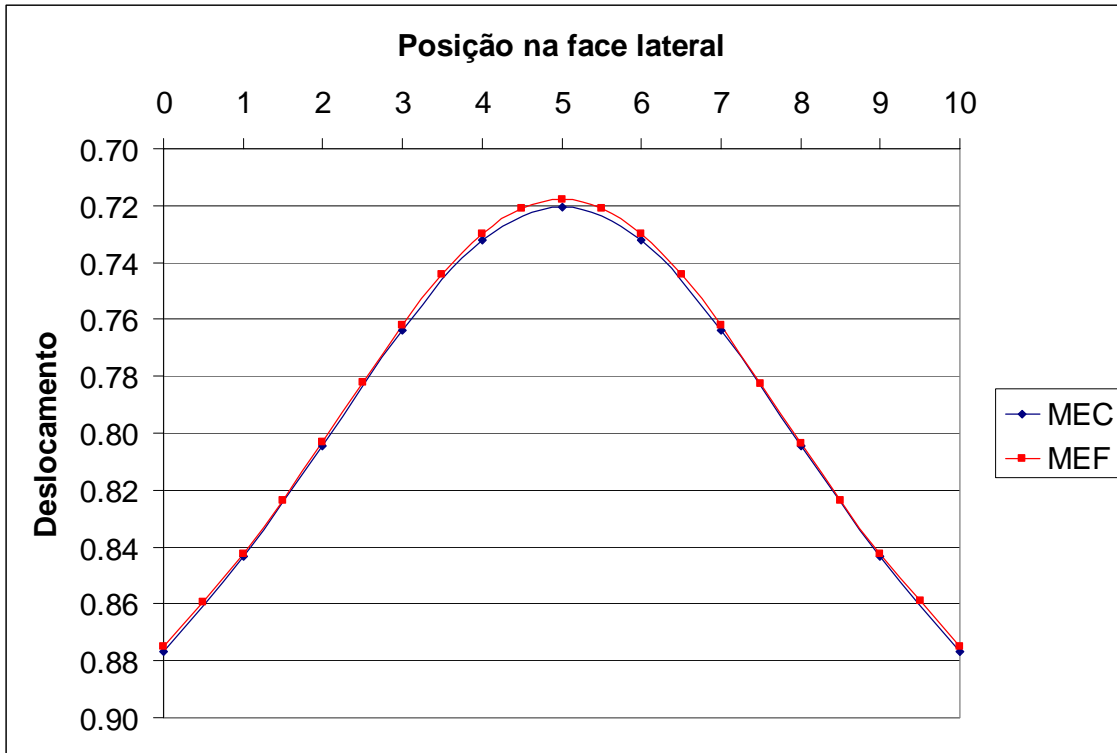


Gráfico 19 – Deslocamento horizontal na face lateral (Exemplo 8)

E as tensões σ_x , τ_{xy} e σ_y , respectivamente:

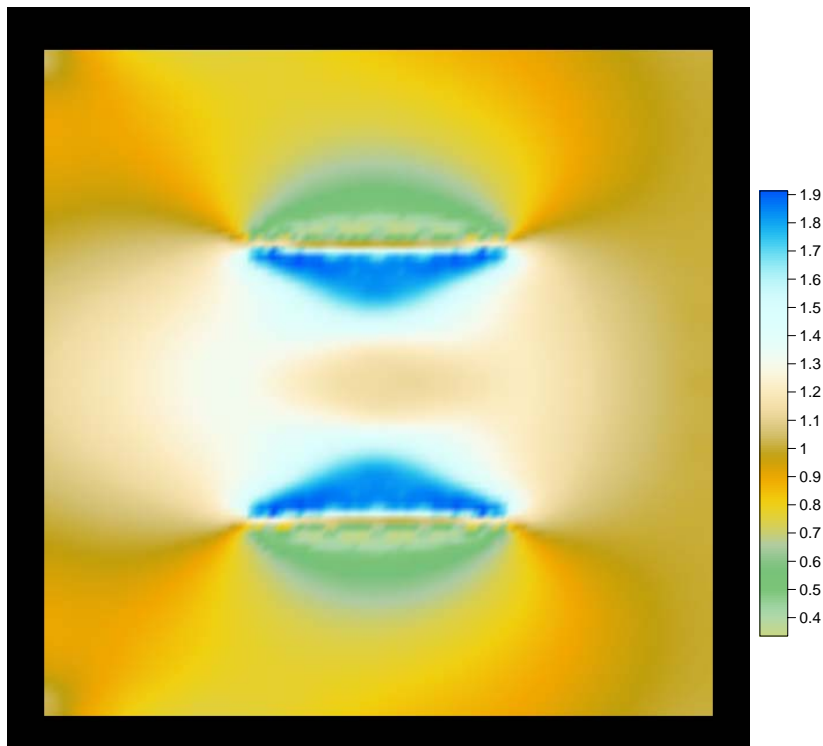
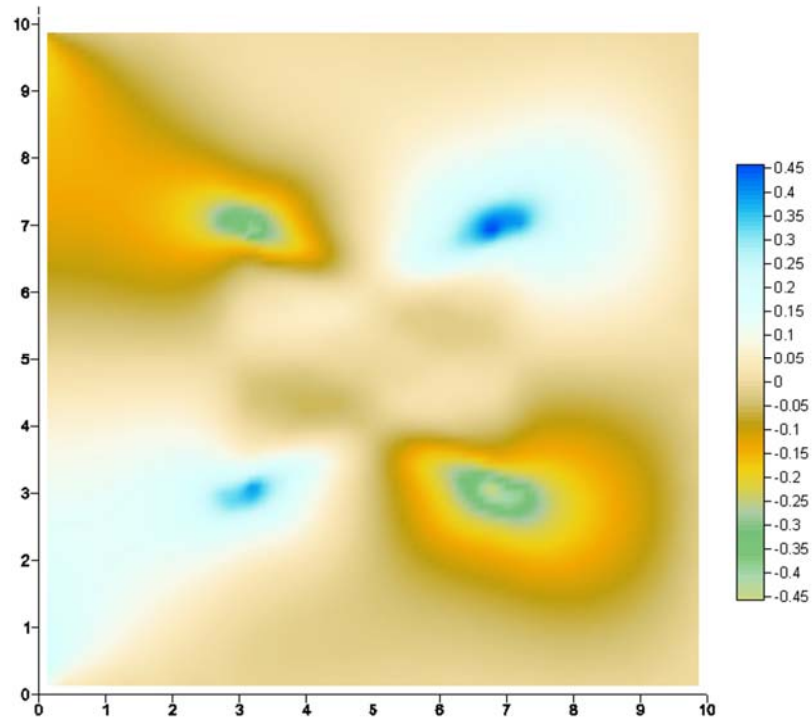
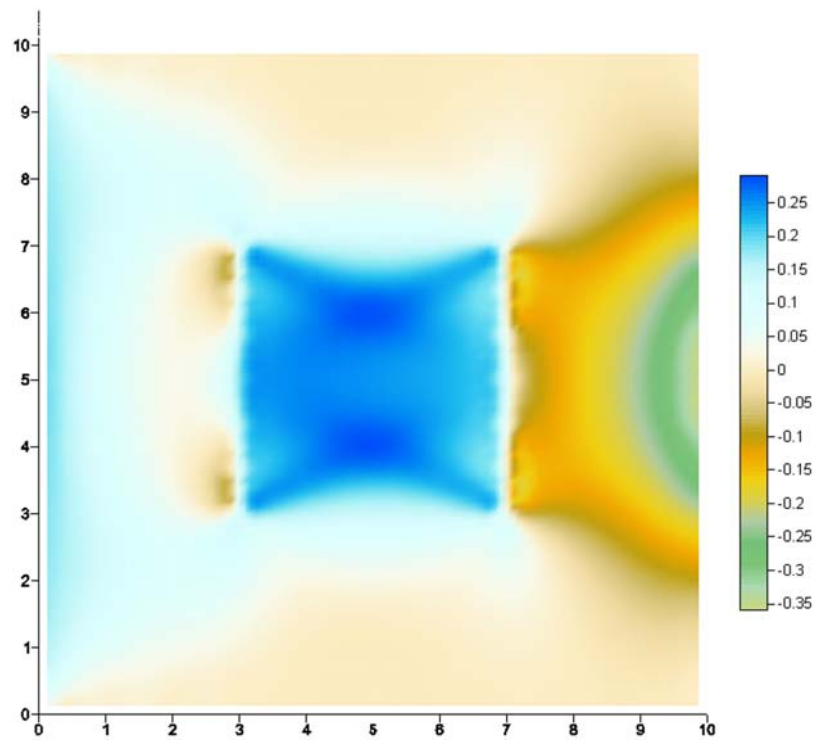


Figura 39 – Tensões σ_x (Exemplo 8)

Figura 40 – Tensões τ_{xy} (Exemplo 8)Figura 41 – Tensões σ_y (Exemplo 8)

CAPÍTULO 9

“Fácil é apagar as pegadas. Difícil é caminhar
sem tocar o chão” (Lao-tsé)

CONCLUSÃO

O objetivo principal deste trabalho foi apresentar uma formulação alternativa na resolução de problemas de sub-região ou inclusão anisotrópica, através do MEC modificando-se os parâmetros elásticos com campo de tensões iniciais. Em particular, desenvolveu-se um programa computacional baseado na formulação proposta, o qual foi submetido a uma série de exemplos e seus resultados confrontados aos obtidos por outras técnicas.

Em virtude da dificuldade de se obter as 21 constantes necessárias para caracterizar um material com anisotropia completa, foram analisados, no máximo, materiais com propriedades ortotrópicas.

A precisão dos resultados obtidos comprova a viabilidade da utilização desta formulação à análise de problemas onde uma parte, ou o domínio por completo, apresenta-se com propriedades anisotrópicas.

O emprego de células com descontinuidade nas variáveis de tensão inicial demanda uma grande área da memória do computador destinada à montagem e resolução do sistema algébrico. Assim, a formulação é mais adequada para problemas com inclusões que exigem discretização em regiões menores.

Nesse sentido, sugerem-se como contribuições futuras:

- A implementação da técnica Multipole (*Fast Multipole Method*), que decompõe a solução fundamental em séries a partir de expansões dos núcleos integrais procurando tornar as matrizes esparsas, onde a obtenção do sistema algébrico e sua resolução são concomitantes.

- Desenvolvimento de formulações do MEC que gerem matrizes esparsas para aumentar a eficiência do método: Técnica das sub-regiões ou método sem malha (Petrov-Galerkin).

ANEXO A

"A grandeza não consiste em receber honras,
mas em merecê-las." (Aristóteles)

NOTAÇÃO INDICIAL

A notação indicial é uma forma simples, objetiva e compacta de representar as expressões matemáticas. Assim, as expressões tornam-se mais elegantes e ágeis durante a implementação do código computacional.

Visto sua utilidade na engenharia, ao tratar por exemplo, de sistemas de equações lineares, somatório e equações constitutivas, apresenta-se a seguir o seu conceito e algumas das suas propriedades mais usadas.

9.1. Definição

É uma representação de um conjunto de variáveis por meio de índices, podendo ser subscrito ou sobrescrito.

Quando uma variável é apresentada por meio de um índice isoladamente, sem que seja determinado um intervalo para esta, estamos indicando uma variável qualquer x_1, x_2, \dots, x_n . Porém, quando um intervalo é definido, estamos representando o conjunto de variáveis. No caso do espaço tridimensional, o vetor \vec{V} pode ter suas componentes x_1, x_2, x_3 representadas por x_i ($i = 1, 2, 3$).

A escolha do índice é feita livremente. Portanto x_i e x_j representam a mesma componente do vetor \vec{V} .

9.2. Somatório

É a propriedade mais simples da notação indicial e, permite representar a soma dos termos de uma equação com o emprego do índice falso (ou repetido). Por exemplo, a equação $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + \dots + a_nx_n = b$ pode ser representada em notação indicial, sob a simples forma:

$$a_i x_i = b, \text{ com } i \text{ valendo no intervalo de } 1 \text{ a } n.$$

O emprego do índice livre representa o número de equações existentes. No caso do sistema de equações abaixo,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + a_{n4}x_4 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

De forma simplificada,

$$\begin{cases} a_{ij}x_j = b_i \\ a_{2j}x_j = b_2 \\ \dots \\ a_{nj}x_j = b_n \end{cases}$$

E, na forma indicial final, como $a_{ij}x_j = b_i$ com $(i, j = 1, 2, \dots, n)$.

Em resumo, na convenção do somatório, os índices repetidos (ou falsos) fazem com que a expressão cresça na horizontal enquanto que o índice livre faz com que a expressão cresça na direção vertical.

9.3. Diferenciação

As operações de derivação são representadas por vírgula. No caso das derivadas totais e parciais, temos:

$$\frac{du}{dx_i} = u_{,i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{,i}$$

No caso de uma função $u = u(a_j(x_j))$, a regra da cadeia se aplica da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{,i} = \frac{\partial u}{\partial a_j} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = u_{,j} u_{j,i}$$

ANEXO B

"A direção é mais importante do que a velocidade."

(Roberto Scaringella)

DELTA DE KRONECKER

O Delta de Kronecker (δ_{ij}), ou tensor de substituição, é uma matriz especial, representada por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

Na forma de matriz encontramos a matriz identidade, ou seja,

$$\delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para qualquer matriz quadrada M_{ij} e vetor A_{ij} temos as seguintes propriedades,

$$\delta_{ij} A_j = A_i$$

$$\delta_{ij} M_{jk} = M_{ik} = M_{ij} \delta_{jk}$$

$$\delta_{ik} \delta_{kj} = \delta_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

ANEXO C

"Caia sete vezes, levante-se oito."
(Provérbio japonês)

DELTA DE DIRAC

A chamada função Delta de Dirac foi introduzida pelo pesquisador Paul Dirac para simplificar o tratamento de certos problemas da mecânica quântica. Suas propriedades são estudadas na Teoria de Funções Generalizadas.

A intuição que reside por trás do Delta de Dirac é que a representação da densidade de uma grandeza concentra-se em um único ponto. Após a formulação, segue um exemplo do conceito desta função.

A função Delta de Dirac pode ser escrita da seguinte forma,

$$\delta(x) = \begin{cases} 1/\varepsilon & \text{para } -\varepsilon/2 < x < \varepsilon/2 \\ 0 & \text{para } |x| > \varepsilon/2 \end{cases}$$

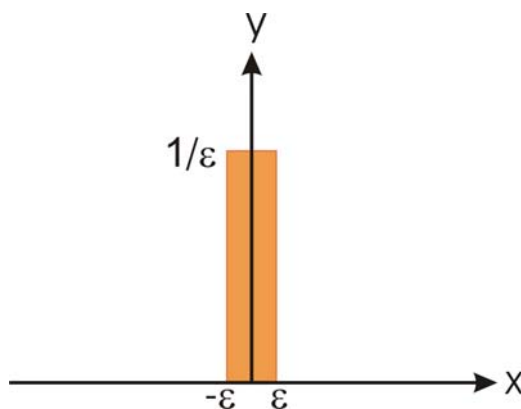


Figura 42 – Função Delta de Dirac

Em conseqüência da definição acima, é possível provar que,

$$\int \delta(x) dx = 1$$

Escolhendo uma função qualquer $f(x)$ bem definida em $x = 0$ e com o intervalo de integração $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$ muito pequeno, a variação da função $f(x)$ neste intervalo pode ser desconsiderada e então $f(x)$ permanece praticamente igual a $f(0)$.

Assim, obtêm-se melhores resultados quando o intervalo de integração é cada vez menor. No limite, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ se chega à definição da função Delta de Dirac, como visto abaixo,

$$\int \delta(x) f(x) dx = f(0)$$

Se, por exemplo, temos um ponto material de massa m localizado na posição x_0 da reta real, dizemos que a densidade de massa desse ponto é dada por

$$\rho(x) = m\delta(x - x_0) \quad x, x_0 \in \mathfrak{R}$$

onde $\delta(x)$, $x \in \mathfrak{R}$, é a chamada distribuição Delta de Dirac.

Nesse caso esperamos que $\rho(x) = 0$ se $x \neq x_0$ (pois o ponto material está concentrado apenas no ponto x_0) e que $\int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = m$ (pois a massa total é m). Concluimos que $\delta(x)$ deve satisfazer à hipótese de ser nula para todo $x \neq 0$ e divergir em $x = 0$, pois nesse ponto temos uma concentração infinita.

ANEXO D

"Não há mestre que não possa ser aluno."
(Baltazar Gracián)

TEOREMA DA RECIPROCIDADE DE BETTI

Um corpo em equilíbrio submetido a dois estados de carregamento distintos fornece para cada estado um conjunto de tensões e deformações.

O teorema da reciprocidade de Betti afirma que o trabalho realizado pelas tensões do primeiro estado de carregamento sobre as deformações do segundo estado é numericamente igual ao trabalho realizado pelas tensões do segundo estado sobre as deformações do primeiro.

Então, atribuindo-se ao primeiro estado de carregamento (1) o conjunto de tensões (σ_{ij}^1) e deformações (ε_{ij}^1) e, para o segundo estado de carregamento (2) o conjunto de tensões (σ_{ij}^2) e deformações (ε_{ij}^2) , podemos afirmar, segundo o teorema da reciprocidade de Betti, que,

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^1$$

A demonstração deste teorema é feita partindo-se da lei de Hooke (2.5),

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

Admitindo as hipóteses de meio elástico, homogêneo e isótropo, obtemos a lei de Hooke particularizada,

$$\sigma_{ij} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}$$

Aplicando-se o teorema da reciprocidade de Betti,

$$\sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 = \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^1 \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}^1 \right) \varepsilon_{ij}^2$$

$$\sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 = \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^1 \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^2 + 2G\varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 \right)$$

Mas,

$$\delta_{ij} \varepsilon_{ij}^2 = \varepsilon_{ii}^2 = \varepsilon_{kk}^2$$

Por analogia,

$$\varepsilon_{kk}^1 = \varepsilon_{ii}^1 = \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^1$$

Então, reescrevendo,

$$\sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 = \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^1 \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij}^1 \right) \varepsilon_{ij}^2$$

$$\sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^1 \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^2 + 2G\varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2$$

$$\sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{kk}^2 + 2G\varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2$$

$$\sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 = \left(\frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}^2 + 2G\varepsilon_{ij}^2 \right) \varepsilon_{ij}^1$$

$$\sigma_{ij}^1 \varepsilon_{ij}^2 = \sigma_{ij}^2 \varepsilon_{ij}^1$$

ANEXO E

"Um homem que comete um erro e não o corrige
está cometendo um outro erro."
(Confúcio)

INTEGRAIS ANALÍTICAS SINGULARES

Constantes

$$K_1 = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \quad \text{F.1}$$

$$K_2 = \frac{L}{16\pi G(1-\nu)} \quad \text{F.2}$$

$$K_3 = \frac{G}{2\pi(1-\nu)L} \left\{ 2\nu[\eta_j r_k r_i + \eta_k r_j r_i] + (1-2\nu)[\eta_i r_j r_k + \eta_k \delta_{ji} + \eta_j \delta_{ki}] - (1-4\nu)\eta_i \delta_{jk} \right\} \quad \text{F.3}$$

$$K_4 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)L} \left\{ -(1-2\nu)[r_k \delta_{ji} + r_j \delta_{ik} - r_i \delta_{jk}] + 2r_i r_j r_k \right\} \quad 13$$

Ponto fonte no primeiro nó do elemento de integração

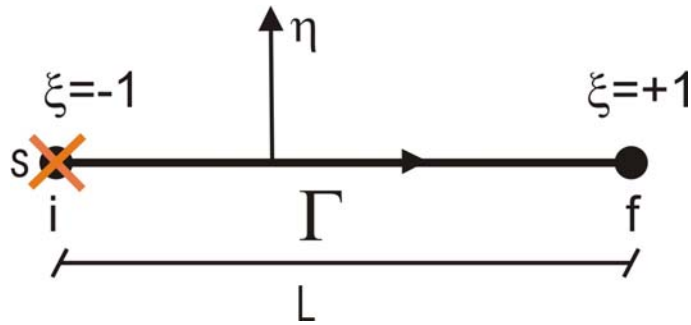


Figura 43 – Ponto fonte no primeiro nó do elemento

Matriz H:

$$H_{12}^1 = K_1(1 - \text{Ln}(L))$$

$$H_{12}^2 = -K_1$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{22}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^2 = 0$$

Matriz G:

$$G_{11}^1 = K_2 \left[(3 - 4\nu) \left(\frac{3}{2} - \text{Ln}(L) \right) + (\theta_2)^2 \right]$$

$$G_{22}^1 = K_2 \left[(3 - 4\nu) \left(\frac{3}{2} - \text{Ln}(L) \right) + (\theta_1)^2 \right]$$

$$G_{11}^2 = K_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \text{Ln}(L) \right) + (\theta_2)^2 \right]$$

$$G_{22}^2 = K_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \text{Ln}(L) \right) + (\theta_1)^2 \right]$$

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^1 = G_{21}^2 = -K_2 \theta_1 \theta_2$$

Ponto fonte interno ao elemento de integração

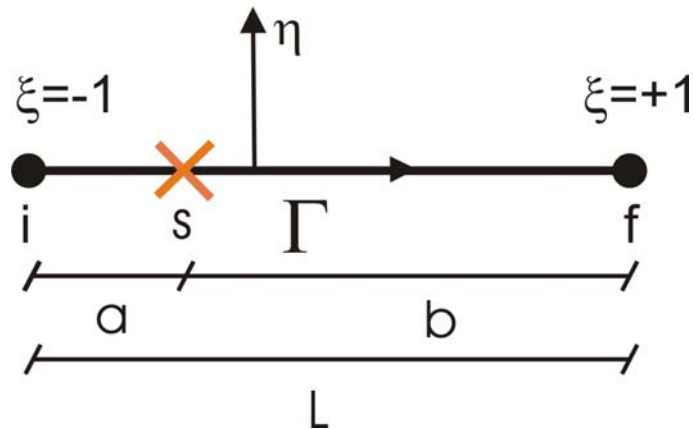


Figura 44 – Ponto fonte no primeiro nó do elemento

Matriz H:

$$H_{12}^1 = \frac{K_1}{L} \left(b \text{Ln} \left(\frac{a}{b} \right) + L \right)$$

$$H_{12}^2 = \frac{K_1}{L} \left(a \text{Ln} \left(\frac{a}{b} \right) + L \right)$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{22}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^2 = 0$$

Matriz G:

$$G_{11}^1 = \frac{2K_2}{L^2} \left\{ -(3-4\nu) \left[\left(ab + \frac{a^2}{2} \right) \text{Ln}(a) + \frac{b^2}{2} \text{Ln}(b) - \left(\frac{a^2}{4} + ab + \frac{3b^2}{4} \right) + \frac{L^2}{2} (\theta_2)^2 \right] \right\}$$

$$G_{22}^1 = \frac{2K_2}{L^2} \left\{ -(3-4\nu) \left[\left(ab + \frac{a^2}{2} \right) \text{Ln}(a) + \frac{b^2}{2} \text{Ln}(b) - \left(\frac{a^2}{4} + ab + \frac{3b^2}{4} \right) + \frac{L^2}{2} (\theta_1)^2 \right] \right\}$$

$$G_{11}^2 = \frac{2K_2}{L^2} \left\{ -(3-4\nu) \left[\left(ab + \frac{b^2}{2} \right) \text{Ln}(b) + \frac{a^2}{2} \text{Ln}(a) - \left(\frac{b^2}{4} + ab + \frac{3a^2}{4} \right) + \frac{L^2}{2} (\theta_2)^2 \right] \right\}$$

$$G_{22}^2 = \frac{2K_2}{L^2} \left\{ -(3-4\nu) \left[\left(ab + \frac{b^2}{2} \right) \text{Ln}(b) + \frac{a^2}{2} \text{Ln}(a) - \left(\frac{b^2}{4} + ab + \frac{3a^2}{4} \right) + \frac{L^2}{2} (\theta_1)^2 \right] \right\}$$

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^1 = G_{21}^2 = -K_2 \theta_1 \theta_2$$

Matriz S:

$$S_{ij}^1 = K_3 \left[\text{Ln}(a) - \text{Ln}(b) - \frac{b}{a} - 1 \right]$$

$$S_{ij}^2 = K_3 \left[-\text{Ln}(a) + \text{Ln}(b) - \frac{a}{b} - 1 \right]$$

Matriz D:

$$D_{ij}^1 = K_4 \{b[\text{Ln}(a) - \text{Ln}(b) + 1] + a\}$$

$$D_{ij}^2 = K_4 \{a[\text{Ln}(a) - \text{Ln}(b) - 1] - b\}$$

Ponto fonte no segundo nó do elemento de integração

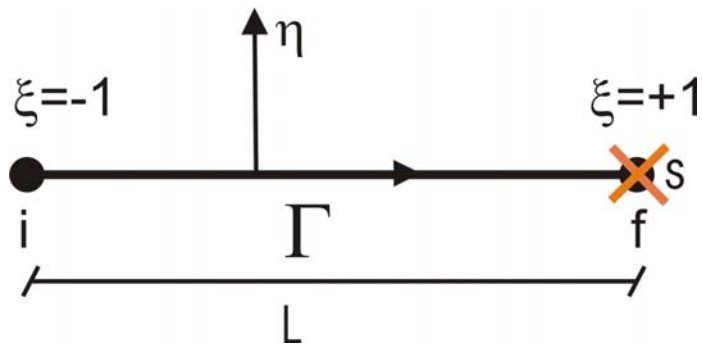


Figura 45 – Ponto fonte no primeiro nó do elemento

Matriz H:

$$H_{12}^1 = -K_1$$

$$H_{12}^2 = K_1(1 - \text{Ln}(L))$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{22}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^2 = 0$$

Matriz G:

$$G_{11}^1 = K_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \text{Ln}(L) \right) + (\theta_2)^2 \right]$$

$$G_{22}^1 = K_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \text{Ln}(L) \right) + (\theta_1)^2 \right]$$

$$G_{11}^2 = K_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{3}{2} - \text{Ln}(L) \right) + (\theta_2)^2 \right]$$

$$G_{22}^2 = K_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{3}{2} - \text{Ln}(L) \right) + (\theta_1)^2 \right]$$

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^1 = G_{21}^2 = -K_2 \theta_1 \theta_2$$

ANEXO F

"O futuro pertence àqueles que acreditam
na beleza dos seus sonhos."
(Eleanor Roosevelt)

INTEGRAIS ANALÍTICAS NÃO-SINGULARES

Constantes

$$K_1 = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \quad G.1$$

$$K_2 = (3-4\nu) \quad G.2$$

$$K_3 = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad G.3$$

$$K_4 = (1-2\nu) \quad G.4$$

$$K_5 = (1-4\nu) \quad G.5$$

$$K_6 = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \quad G.6$$

$$\phi_1 = \left(1 - \frac{y_s}{L}\right) \quad G.7$$

$$\phi_2 = \left(\frac{y_s}{L} \right)$$

G.8

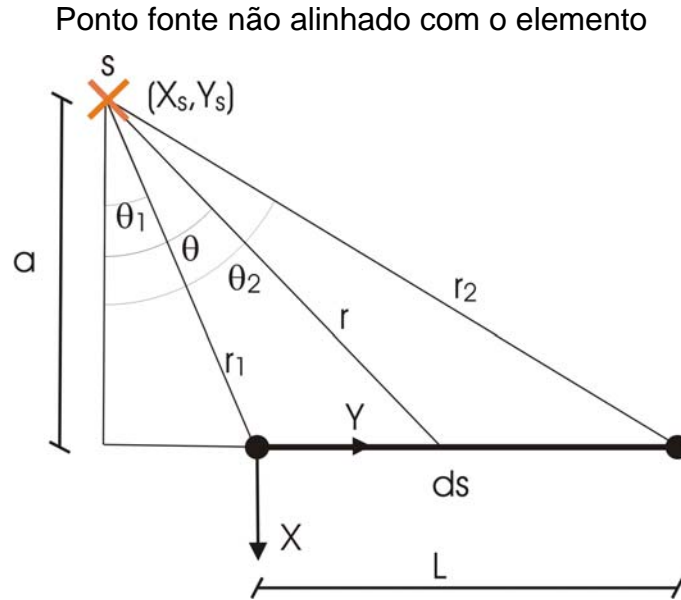


Figura 46 – Ponto fonte não alinhado com o elemento

Matriz H:

$$H_{11}^1 = K_3 \left\{ K_4 \left[\text{Ln}(\cos(\theta_2)) \frac{a}{L} + \theta_2 \phi_1 \right] + (\text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) + \theta_2) \phi_1 + \cos(\theta_2)^2 \frac{a}{L} \right\} +$$

$$- K_3 \left\{ K_4 \left[\text{Ln}(\cos(\theta_1)) \frac{a}{L} + \theta_1 \phi_1 \right] + (\text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1) + \theta_1) \phi_1 + \cos(\theta_1)^2 \frac{a}{L} \right\}$$

$$H_{12}^1 = K_3 \left\{ K_4 \left[-\text{Ln}(\cos(\theta_2)) \phi_1 + (-\text{tg}(\theta_2) + \theta_2) \frac{a}{L} \right] - (-\text{sen}(\theta_2) \cos(\theta_2) + \theta_2) \frac{a}{L} - \cos(\theta_2)^2 \phi_1 \right\} +$$

$$- K_3 \left\{ K_4 \left[-\text{Ln}(\cos(\theta_1)) \phi_1 + (-\text{tg}(\theta_1) + \theta_1) \frac{a}{L} \right] - (-\text{sen}(\theta_1) \cos(\theta_1) + \theta_1) \frac{a}{L} - \cos(\theta_1)^2 \phi_1 \right\}$$

$$H_{21}^1 = K_3 \left\{ K_4 \left[\text{Ln}(\cos(\theta_2))\phi_1 - (-\text{tg}(\theta_2) + \theta_2)\frac{a}{L} \right] - (-\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2)\frac{a}{L} - \cos(\theta_2)^2\phi_1 \right\} + \\ - K_3 \left\{ K_4 \left[\text{Ln}(\cos(\theta_1))\phi_1 - (-\text{tg}(\theta_1) + \theta_1)\frac{a}{L} \right] - (-\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1)\frac{a}{L} - \cos(\theta_1)^2\phi_1 \right\}$$

$$H_{22}^1 = K_3 \left\{ K_4 \left[\text{Ln}(\cos(\theta_2))\frac{a}{L} + \theta_2\phi_1 \right] + (-\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2)\phi_1 + \text{sen}(\theta_2)^2\frac{a}{L} + \frac{2a\text{Ln}(\cos(\theta_2))}{L} \right\} \\ - K_3 \left\{ K_4 \left[\text{Ln}(\cos(\theta_1))\frac{a}{L} + \theta_1\phi_1 \right] + (-\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1)\phi_1 + \text{sen}(\theta_1)^2\frac{a}{L} + \frac{2a\text{Ln}(\cos(\theta_1))}{L} \right\}$$

$$H_{11}^2 = K_3 \left\{ K_4 \left[-\text{Ln}(\cos(\theta_2))\frac{a}{L} + \theta_2\phi_2 \right] + (\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2)\phi_2 - \cos(\theta_2)^2\frac{a}{L} \right\} + \\ - K_3 \left\{ K_4 \left[-\text{Ln}(\cos(\theta_1))\frac{a}{L} + \theta_1\phi_2 \right] + (\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1)\phi_2 - \cos(\theta_1)^2\frac{a}{L} \right\}$$

$$H_{12}^2 = K_3 \left\{ K_4 \left[-\text{Ln}(\cos(\theta_2))\phi_2 - (-\text{tg}(\theta_2) + \theta_2)\frac{a}{L} \right] + (-\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2)\frac{a}{L} - \cos(\theta_2)^2\phi_2 \right\} + \\ - K_3 \left\{ K_4 \left[-\text{Ln}(\cos(\theta_1))\phi_2 - (-\text{tg}(\theta_1) + \theta_1)\frac{a}{L} \right] + (-\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1)\frac{a}{L} - \cos(\theta_1)^2\phi_2 \right\}$$

$$H_{21}^2 = K_3 \left\{ K_4 \left[\text{Ln}(\cos(\theta_2))\phi_2 + (-\text{tg}(\theta_2) + \theta_2)\frac{a}{L} \right] + (-\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2)\frac{a}{L} - \cos(\theta_2)^2\phi_2 \right\} + \\ - K_3 \left\{ K_4 \left[\text{Ln}(\cos(\theta_1))\phi_2 + (-\text{tg}(\theta_1) + \theta_1)\frac{a}{L} \right] + (-\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1)\frac{a}{L} - \cos(\theta_1)^2\phi_2 \right\}$$

$$H_{22}^2 = K_3 \left\{ K_4 \left[-\text{Ln}(\cos(\theta_2))\frac{a}{L} + \theta_2\phi_2 \right] + (-\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2)\phi_2 - \text{sen}(\theta_2)^2\frac{a}{L} - \frac{2a\text{Ln}(\cos(\theta_2))}{L} \right\} \\ - K_3 \left\{ K_4 \left[-\text{Ln}(\cos(\theta_1))\frac{a}{L} + \theta_1\phi_2 \right] + (-\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1)\phi_2 - \text{sen}(\theta_1)^2\frac{a}{L} - \frac{2a\text{Ln}(\cos(\theta_1))}{L} \right\}$$

Matriz G:

$$G_{11}^1 = K_1 \left\{ K_2 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{\cos(\theta_2)} \right) \right] \left[\text{tg}(\theta_2)\phi_1 - \frac{a}{2L\cos(\theta_2)^2} \right] + [-\text{tg}(\theta_2) + \theta_2]\phi_1 + \frac{a}{4L\cos(\theta_2)^2} \right] - \theta_2\phi_1 + \right. \\ \left. - \frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right\} - K_1 \left\{ K_2 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{\cos(\theta_1)} \right) \right] \left[\text{tg}(\theta_1)\phi_1 - \frac{a}{2L\cos(\theta_1)^2} \right] + [-\text{tg}(\theta_1) + \theta_1]\phi_1 + \right. \\ \left. + \frac{a}{4L\cos(\theta_1)^2} \right] - \theta_1\phi_1 - \frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right\}$$

$$G_{12}^1 = K_1 \left\{ \text{Ln}(\cos(\theta_2))\phi_1 + \frac{(\text{tg}(\theta_2) - \theta_2)}{L} \right\} - K_1 \left\{ \text{Ln}(\cos(\theta_1))\phi_1 + \frac{(\text{tg}(\theta_1) - \theta_1)}{L} \right\}$$

$$G_{21}^1 = G_{12}^1$$

$$G_{22}^1 = K_1 \left\{ K_2 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{\cos(\theta_2)} \right) \right] \left[\text{tg}(\theta_2)\phi_1 - \frac{a}{2L\cos(\theta_2)^2} \right] + [-\text{tg}(\theta_2) + \theta_2]\phi_1 + \frac{a}{4L\cos(\theta_2)^2} \right] + \right. \\ \left. + (\text{tg}(\theta_2) + \theta_2)\phi_1 + \frac{a\text{tg}(\theta_2)^2}{2L} + \frac{a\text{Ln}(\cos(\theta_2))}{L} \right\} - K_1 \left\{ K_2 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{\cos(\theta_1)} \right) \right] \left[\text{tg}(\theta_1)\phi_1 - \frac{a}{2L\cos(\theta_1)^2} \right] + \right. \\ \left. + [-\text{tg}(\theta_1) + \theta_1]\phi_1 + \frac{a}{4L\cos(\theta_1)^2} \right] + (-\text{tg}(\theta_1) + \theta_1)\phi_1 - \frac{a\text{tg}(\theta_1)^2}{2L} + \frac{a\text{Ln}(\cos(\theta_1))}{L} \right\}$$

$$G_{11}^2 = K_1 \left\{ K_2 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{\cos(\theta_2)} \right) \right] \left[\text{tg}(\theta_2)\phi_2 - \frac{a}{2L\cos(\theta_2)^2} \right] + [-\text{tg}(\theta_2) + \theta_2]\phi_2 - \frac{a}{4L\cos(\theta_2)^2} \right] - \theta_2\phi_2 + \right. \\ \left. + \frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right\} - K_1 \left\{ K_2 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{\cos(\theta_1)} \right) \right] \left[\text{tg}(\theta_1)\phi_2 + \frac{a}{2L\cos(\theta_1)^2} \right] + [-\text{tg}(\theta_1) + \theta_1]\phi_2 + \right. \\ \left. - \frac{a}{4L\cos(\theta_1)^2} \right] - \theta_1\phi_2 + \frac{a}{L} \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right\}$$

$$G_{12}^2 = K_1 \left\{ \text{Ln}(\cos(\theta_2))\phi_2 - \frac{(\text{tg}(\theta_2) - \theta_2)}{L} \right\} - K_1 \left\{ \text{Ln}(\cos(\theta_1))\phi_2 - \frac{(\text{tg}(\theta_1) - \theta_1)}{L} \right\}$$

$$G_{21}^2 = G_{12}^2$$

$$\begin{aligned} G_{22}^2 = & K_1 \left\{ K_2 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{\cos(\theta_2)} \right) \left[\text{tg}(\theta_2)\phi_2 + \frac{a}{2L\cos(\theta_2)^2} \right] + \left[-\text{tg}(\theta_2) + \theta_2 \right] \phi_2 - \frac{a}{4L\cos(\theta_2)^2} \right] + \right. \\ & \left. + \left(-\text{tg}(\theta_2) + \theta_2 \right) \phi_2 - \frac{a\text{tg}(\theta_2)^2}{2L} - \frac{a\text{Ln}(\cos(\theta_2))}{L} \right\} - K_1 \left\{ K_2 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{\cos(\theta_1)} \right) \left[\text{tg}(\theta_1)\phi_2 + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{a}{2L\cos(\theta_1)^2} \right] + \left[-\text{tg}(\theta_1) + \theta_1 \right] \phi_2 - \frac{a}{4L\cos(\theta_1)^2} \right] + \left. \left(-\text{tg}(\theta_1) + \theta_1 \right) \phi_2 - \frac{a\text{tg}(\theta_1)^2}{2L} - \frac{a\text{Ln}(\cos(\theta_1))}{L} \right\} \end{aligned}$$

Matriz S:

$$\begin{aligned} S_{11}^1 = & \frac{K_6}{a} \left\{ \left[(2K_4 + 4v)(\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2) - (2\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2))^3 + 3\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + 3\theta_2 \right] + \right. \\ & \left. + (2K_4 - K_5)\theta_2 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[-(2K_4 + 4v)\cos(\theta_2)^2 + 2\cos(\theta_2)^4 - (2K_4 - K_5)\text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \left\} + \right. \\ & \left. - \frac{K_6}{a} \left\{ \left[(2K_4 + 4v)(\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1) - (2\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1))^3 + 3\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + 3\theta_1 \right] + \right. \right. \\ & \left. \left. + (2K_4 - K_5)\theta_1 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[-(2K_4 + 4v)\cos(\theta_1)^2 + 2\cos(\theta_1)^4 - (2K_4 - K_5)\text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{12}^1 = & \frac{K_6}{a} \left\{ \left[-(K_4 + 2v)\cos(\theta_2)^2 + 2\cos(\theta_2)^4 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[(tk1 + 2v)(-\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. - (2\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2))^3 + \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2 \right] \right\} - \frac{K_6}{a} \left\{ \left[-(K_4 + 2v)\cos(\theta_1)^2 + 2\cos(\theta_1)^4 \right] \phi_1 + \right. \\ & \left. - \frac{a}{L} \left[(K_4 + 2v)(-\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1) - (2\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1))^3 + \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$S_{21}^1 = S_{12}^1$$

$$\begin{aligned}
S_{22}^1 = & \frac{K_6}{a} \left\{ [(K_4 + 2v)\theta_2 - (-2\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2)^3 + \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2)]\phi_1 + \right. \\
& \left. - \frac{a}{L} \left[-v((\text{sen}(\theta_2))^2 + \cos(\theta_2)^2 + 2\text{Ln}(\cos(\theta_2))) - 2\text{sen}(\theta_2)^4 - K_4\text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \right\} + \\
& - \frac{K_6}{a} \left\{ [(K_4 + 2v)\theta_1 - (-2\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1)^3 + \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1)]\phi_1 + \right. \\
& \left. - \frac{a}{L} \left[-v((\text{sen}(\theta_1))^2 + \cos(\theta_1)^2 + 2\text{Ln}(\cos(\theta_1))) - 2\text{sen}(\theta_1)^4 - K_4\text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{31}^1 = & \frac{K_6}{a} \left\{ [(2K_4 - K_5)\theta_2 - (-2\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2)^3 + \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2)]\phi_1 + \right. \\
& \left. - \frac{a}{L} [2\text{sen}(\theta_2)^4 - (2K_4 - K_5)\text{Ln}(\cos(\theta_2))] \right\} + \\
& - \frac{K_6}{a} \left\{ [(2K_4 - K_5)\theta_1 - (-2\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1)^3 + \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1)]\phi_1 + \right. \\
& \left. - \frac{a}{L} [-2\text{sen}(\theta_1)^4 - (2K_4 - K_5)\text{Ln}(\cos(\theta_1))] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{32}^1 = & \frac{K_6}{a} \left\{ [-(K_4 + 2v)\cos(\theta_2)^2 - 2\text{sen}(\theta_2)^4]\phi_1 - \frac{a}{L} [(K_4 + 2v)(-\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2) + \right. \\
& \left. - (-2\text{sen}(\theta_2)^3\cos(\theta_2) - 3\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + 3\theta_2)] \right\} + \\
& - \frac{K_6}{a} \left\{ [-(K_4 + 2v)\cos(\theta_1)^2 - 2\text{sen}(\theta_1)^4]\phi_1 - \frac{a}{L} [(K_4 + 2v)(-\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1) + \right. \\
& \left. - (-2\text{sen}(\theta_1)^3\cos(\theta_1) - 3\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + 3\theta_1)] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{11}^2 = & \frac{K_6}{a} \left\{ [(2K_4 + 4v)(\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2) - (2\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2)^3 + 3\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + 3\theta_2)] + \right. \\
& \left. + (2K_4 - K_5)\theta_2\right]\phi_2 + \frac{a}{L} \left[-(2K_4 + 4v)\cos(\theta_2)^2 + 2\cos(\theta_2)^4 - (2K_4 - K_5)\text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \right\} + \\
& - \frac{K_6}{a} \left\{ [(2K_4 + 4v)(\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1) - (2\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1)^3 + 3\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + 3\theta_1)] + \right. \\
& \left. + (2K_4 - K_5)\theta_1\right]\phi_2 + \frac{a}{L} \left[-(2K_4 + 4v)\cos(\theta_1)^2 + 2\cos(\theta_1)^4 - (2K_4 - K_5)\text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$S_{12}^2 = \frac{K_6}{a} \left\{ [-(K_4 + 2v)\cos(\theta_2)^2 + 2\cos(\theta_2)^4] \phi_2 + \frac{a}{L} [(K_4 + 2v)(-\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2) + \right. \\ \left. - (-2\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2)^3 + \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2)] \right\} - \frac{K_6}{a} \left\{ [-(K_4 + 2v)\cos(\theta_1)^2 + 2\cos(\theta_1)^4] \phi_2 + \right. \\ \left. + \frac{a}{L} [(K_4 + 2v)(-\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1) - (-2\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1)^3 + \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1)] \right\}$$

$$S_{21}^2 = S_{12}^2$$

$$S_{22}^2 = \frac{K_6}{a} \left\{ [(K_4 + 2v)\theta_2 - (-2\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2)^3 + \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2)] \phi_2 + \right. \\ \left. + \frac{a}{L} [-v(\text{sen}(\theta_2)^2 + \cos(\theta_2)^2 + 2\text{Ln}(\cos(\theta_2))) - 2\text{sen}(\theta_2)^4 - K_4\text{Ln}(\cos(\theta_2))] \right\} + \\ - \frac{K_6}{a} \left\{ [(K_4 + 2v)\theta_1 - (-2\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1)^3 + \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1)] \phi_2 + \right. \\ \left. + \frac{a}{L} [-v(\text{sen}(\theta_1)^2 + \cos(\theta_1)^2 + 2\text{Ln}(\cos(\theta_1))) - 2\text{sen}(\theta_1)^4 - K_4\text{Ln}(\cos(\theta_1))] \right\}$$

$$S_{31}^2 = \frac{K_6}{a} \left\{ [(2K_4 - K_5)\theta_2 - (-2\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2)^3 + \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2)] \phi_2 + \right. \\ \left. + \frac{a}{L} [-2\text{sen}(\theta_2)^4 - (2K_4 - K_5)\text{Ln}(\cos(\theta_2))] \right\} + \\ - \frac{K_6}{a} \left\{ [(2K_4 - K_5)\theta_1 - (-2\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1)^3 + \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1)] \phi_2 + \right. \\ \left. + \frac{a}{L} [-2\text{sen}(\theta_1)^4 - (2K_4 - K_5)\text{Ln}(\cos(\theta_1))] \right\}$$

$$S_{32}^2 = \frac{K_6}{a} \left\{ [-(K_4 + 2v)\cos(\theta_2)^2 - 2\text{sen}(\theta_2)^4] \phi_2 + \frac{a}{L} [(K_4 + 2v)(-\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2) + \right. \\ \left. - (-2\text{sen}(\theta_2)^3\cos(\theta_2) - 3\text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + 3\theta_2)] \right\} + \\ - \frac{K_6}{a} \left\{ [-(K_4 + 2v)\cos(\theta_1)^2 - 2\text{sen}(\theta_1)^4] \phi_2 + \frac{a}{L} [(K_4 + 2v)(-\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1) + \right. \\ \left. - (-2\text{sen}(\theta_1)^3\cos(\theta_1) - 3\text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + 3\theta_1)] \right\}$$

Matriz D:

$$D_{11}^1 = -K_3 \left\{ \left[(K_4 + 1)\theta_2 + \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[-K_4 \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\ + K_3 \left\{ \left[(K_4 + 1)\theta_1 + \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[-K_4 \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \right\}$$

$$D_{12}^1 = -K_3 \left\{ \left[K_4 \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[-K_4 (\text{tg}(\theta_2) - \theta_2) - \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2 \right] \right\} + \\ + K_3 \left\{ \left[K_4 \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[-K_4 (\text{tg}(\theta_1) - \theta_1) - \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\}$$

$$D_{21}^1 = -K_3 \left\{ \left[-K_4 \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[K_4 (\text{tg}(\theta_2) - \theta_2) - \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2 \right] \right\} + \\ + K_3 \left\{ \left[-K_4 \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[K_4 (\text{tg}(\theta_1) - \theta_1) - \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\}$$

$$D_{22}^1 = -K_3 \left\{ \left[(K_4 + 1)\theta_2 - \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[(-K_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\ + K_3 \left\{ \left[(K_4 + 1)\theta_1 - \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[(-K_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \right\}$$

$$D_{31}^1 = -K_3 \left\{ \left[(-K_4 + 1)\theta_2 - \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[(K_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\ + K_3 \left\{ \left[(-K_4 + 1)\theta_1 - \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[(K_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \right\}$$

$$D_{32}^1 = -K_3 \left\{ \left[(-K_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[K_4 (\text{tg}(\theta_2) - \theta_2) + \frac{2\text{sen}(\theta_2)^5}{\cos(\theta_2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\text{sen}(\theta_2)^3 + \cos(\theta_2) + 3\cos(\theta_2)\text{sen}(\theta_2) - 3\theta_2 \right] \right\} + K_3 \left\{ \left[(-K_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \phi_1 + \right. \\ \left. - \frac{a}{L} \left[K_4 (\text{tg}(\theta_1) - \theta_1) + \frac{2\text{sen}(\theta_1)^5}{\cos(\theta_1)} + 2\text{sen}(\theta_1)^3 + \cos(\theta_1) + 3\cos(\theta_1)\text{sen}(\theta_1) - 3\theta_1 \right] \right\}$$

$$D_{11}^2 = -K_3 \left\{ [(K_4 + 1)\theta_2 + \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2)]\phi_2 + \frac{a}{L} [-K_4 \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2] \right\} + \\ + K_3 \left\{ [(K_4 + 1)\theta_1 + \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1)]\phi_2 + \frac{a}{L} [-K_4 \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2] \right\}$$

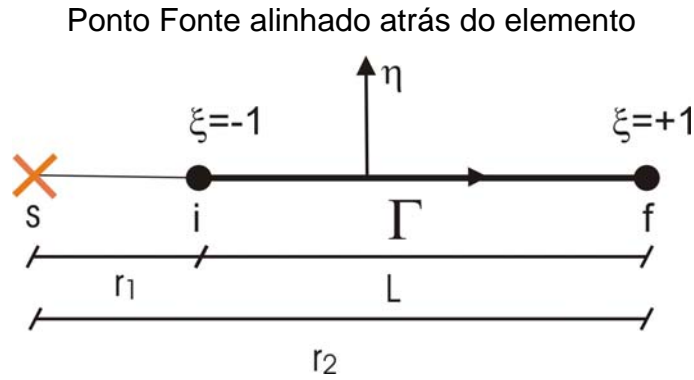
$$D_{12}^2 = -K_3 \left\{ [K_4 \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2]\phi_2 + \frac{a}{L} [-K_4(\text{tg}(\theta_2) - \theta_2) - \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2] \right\} + \\ + K_3 \left\{ [K_4 \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2]\phi_2 + \frac{a}{L} [-K_4(\text{tg}(\theta_1) - \theta_1) - \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1] \right\}$$

$$D_{21}^2 = -K_3 \left\{ [-K_4 \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2]\phi_2 + \frac{a}{L} [K_4(\text{tg}(\theta_2) - \theta_2) - \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2) + \theta_2] \right\} + \\ + K_3 \left\{ [-K_4 \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2]\phi_2 + \frac{a}{L} [K_4(\text{tg}(\theta_1) - \theta_1) - \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1) + \theta_1] \right\}$$

$$D_{22}^2 = -K_3 \left\{ [(K_4 + 1)\theta_2 - \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2)]\phi_2 + \frac{a}{L} [(-K_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2] \right\} + \\ + K_3 \left\{ [(K_4 + 1)\theta_1 - \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1)]\phi_2 + \frac{a}{L} [(-K_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2] \right\}$$

$$D_{31}^1 = -K_3 \left\{ [(-K_4 + 1)\theta_2 - \text{sen}(\theta_2)\cos(\theta_2)]\phi_2 + \frac{a}{L} [(K_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2] \right\} + \\ + K_3 \left\{ [(-K_4 + 1)\theta_1 - \text{sen}(\theta_1)\cos(\theta_1)]\phi_2 + \frac{a}{L} [(K_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2] \right\}$$

$$D_{32}^1 = -K_3 \left\{ [(-K_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2]\phi_2 + \frac{a}{L} \left[K_4(\text{tg}(\theta_2) - \theta_2) + \frac{2\text{sen}(\theta_2)^5}{\cos(\theta_2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2\text{sen}(\theta_2)^3 + \cos(\theta_2) + 3\cos(\theta_2)\text{sen}(\theta_2) - 3\theta_2 \right] \right\} + K_3 \left\{ [(-K_4 - 2)\text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2]\phi_2 + \right. \\ \left. + \frac{a}{L} \left[K_4(\text{tg}(\theta_1) - \theta_1) + \frac{2\text{sen}(\theta_1)^5}{\cos(\theta_1)} + 2\text{sen}(\theta_1)^3 + \cos(\theta_1) + 3\cos(\theta_1)\text{sen}(\theta_1) - 3\theta_1 \right] \right\}$$



Matriz H:

$$H_{12}^1 = K_3 K_4 \left[\text{Ln}(r_2) \phi_1 - \frac{r_2}{L} \right] - K_3 K_4 \left[\text{Ln}(r_1) \phi_1 - \frac{r_1}{L} \right]$$

$$H_{12}^2 = K_3 K_4 \left[\text{Ln}(r_2) \phi_2 + \frac{r_2}{L} \right] - K_3 K_4 \left[\text{Ln}(r_1) \phi_2 - \frac{r_1}{L} \right]$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^1 = H_{22}^2 = 0$$

Matriz G:

$$G_{11}^1 = K_1 \left\{ K_2 \left[(\text{Ln}(r_2) r_2 - r_2) \phi_1 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} r_2^2 \text{Ln}(r_2) - \frac{1}{4} r_2^2 \right) \right] \right\} +$$

$$- K_1 \left\{ K_2 \left[(\text{Ln}(r_1) r_1 - r_1) \phi_1 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} r_1^2 \text{Ln}(r_1) - \frac{1}{4} r_1^2 \right) \right] \right\}$$

$$G_{11}^2 = K_1 \left\{ K_2 \left[(\text{Ln}(r_2)r_2 - r_2)\phi_2 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} r_2^2 \text{Ln}(r_2) - \frac{1}{4} r_2^2 \right) \right] \right\} + \\ - K_1 \left\{ K_2 \left[(\text{Ln}(r_1)r_1 - r_1)\phi_2 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} r_1^2 \text{Ln}(r_1) - \frac{1}{4} r_1^2 \right) \right] \right\}$$

$$G_{22}^1 = K_1 \left\{ K_2 \left[(\text{Ln}(r_2)r_2 - r_2)\phi_1 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} r_2^2 \text{Ln}(r_2) - \frac{1}{4} r_2^2 \right) \right] - r_2\phi_1 + \frac{r_2^2}{2L} \right\} + \\ - K_1 \left\{ K_2 \left[(\text{Ln}(r_1)r_1 - r_1)\phi_1 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} r_1^2 \text{Ln}(r_1) - \frac{1}{4} r_1^2 \right) \right] - r_1\phi_1 + \frac{r_1^2}{2L} \right\}$$

$$G_{22}^2 = K_1 \left\{ K_2 \left[(\text{Ln}(r_2)r_2 - r_2)\phi_2 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} r_2^2 \text{Ln}(r_2) - \frac{1}{4} r_2^2 \right) \right] - r_2\phi_2 - \frac{r_2^2}{2L} \right\} + \\ - K_1 \left\{ K_2 \left[(\text{Ln}(r_1)r_1 - r_1)\phi_2 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} r_1^2 \text{Ln}(r_1) - \frac{1}{4} r_1^2 \right) \right] - r_1\phi_2 - \frac{r_1^2}{2L} \right\}$$

$$G_{12}^1 = G_{21}^1 = G_{12}^2 = H_{21}^2 = 0$$

Matriz S:

$$S_{11}^1 = K_6 \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \left(-\frac{1}{r_2} \right) \right] \phi_1 - \frac{1}{L} [(2K_4 - K_5) \text{Ln}(r_2)] \right\} + \\ - K_6 \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] \phi_1 - \frac{1}{L} [(2K_4 - K_5) \text{Ln}(r_1)] \right\}$$

$$S_{11}^2 = K_6 \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \left(-\frac{1}{r_2} \right) \right] \phi_2 + \frac{1}{L} [(2K_4 - K_5) \text{Ln}(r_2)] \right\} + \\ - K_6 \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] \phi_2 + \frac{1}{L} [(2K_4 - K_5) \text{Ln}(r_1)] \right\}$$

$$S_{22}^1 = K_6 \left\{ \left[(K_4 + 2\nu) \left(-\frac{1}{r_2} \right) \right] \phi_1 - \frac{1}{L} [(K_4 + 2\nu) \text{Ln}(r_2)] \right\} + \\ - K_6 \left\{ \left[(K_4 + 2\nu) \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] \phi_1 - \frac{1}{L} [(K_4 + 2\nu) \text{Ln}(r_1)] \right\}$$

$$S_{22}^2 = K_6 \left\{ \left[(K_4 + 2\nu) \left(-\frac{1}{r_2} \right) \right] \phi_2 + \frac{1}{L} [(K_4 + 2\nu) \text{Ln}(r_2)] \right\} + \\ - K_6 \left\{ \left[(K_4 + 2\nu) \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] \phi_2 + \frac{1}{L} [(K_4 + 2\nu) \text{Ln}(r_1)] \right\}$$

$$S_{31}^1 = S_{11}^1$$

$$S_{31}^2 = S_{11}^2$$

$$S_{12}^1 = S_{21}^1 = S_{32}^1 = S_{12}^2 = S_{21}^2 = S_{32}^2 = 0$$

Matriz D:

$$D_{12}^1 = K_3 K_4 \left[-\left(\frac{r_2}{L} \right) - \text{Ln}(r_2) \phi_2 + \text{Ln}(r_2) + \left(\frac{r_1}{L} \right) - \text{Ln}(r_1) \phi_2 - \text{Ln}(r_1) \right]$$

$$D_{12}^2 = K_3 K_4 \left[\left(\frac{r_2}{L} \right) + \text{Ln}(r_2) \phi_2 - \left(\frac{r_1}{L} \right) - \text{Ln}(r_1) \phi_2 \right]$$

$$D_{32}^1 = (-K_3 K_4 - 2K_3) \left[-\left(\frac{r_2}{L} \right) + \text{Ln}(r_2) \phi_2 + \text{Ln}(r_2) + \left(\frac{r_1}{L} \right) + \text{Ln}(r_1) \phi_2 - \text{Ln}(r_1) \right]$$

$$D_{32}^2 = (-K_3 K_4 - 2K_3) \left[\left(\frac{r_2}{L} \right) + \text{Ln}(r_2) \phi_2 - \left(\frac{r_1}{L} \right) - \text{Ln}(r_1) \phi_2 \right]$$

$$D_{21}^1 = -D_{12}^1$$

$$D_{21}^2 = -D_{12}^2$$

$$D_{11}^1 = D_{22}^1 = D_{31}^1 = D_{11}^2 = D_{22}^2 = D_{31}^2 = 0$$

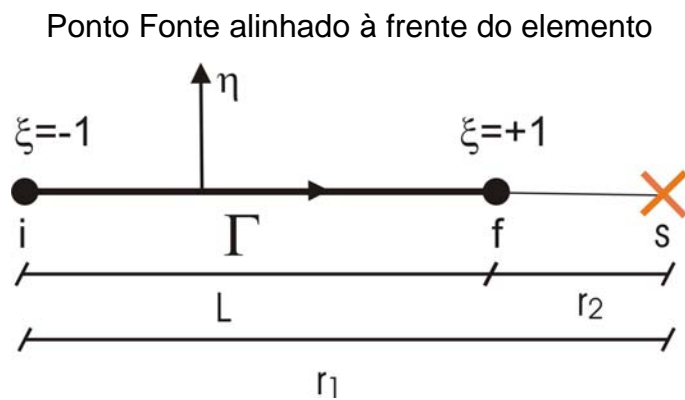


Figura 48 – Ponto fonte alinhado à frente do elemento

Matriz H:

$$H_{12}^1 = K_3 K_4 \left[\text{Ln}(r_2) \phi_1 + \left(\frac{r_2}{L} \right) \right] - K_3 K_4 \left[\text{Ln}(r_1) \phi_1 + \left(\frac{r_1}{L} \right) \right]$$

$$H_{12}^2 = K_3 K_4 \left[\text{Ln}(r_2) \phi_2 - \left(\frac{r_2}{L} \right) \right] - K_3 K_4 \left[\text{Ln}(r_1) \phi_2 - \left(\frac{r_1}{L} \right) \right]$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^1 = D_{22}^2 = 0$$

Matriz G:

$$G_{11}^1 = -K_1 \left\{ K_2 \left[(\text{Ln}(r_2)r_2 - r_2)\phi_1 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_2^2 \text{Ln}(r_2) - \frac{1}{4}r_2^2 \right) \right] \right\} + \\ + K_1 \left\{ K_2 \left[(\text{Ln}(r_1)r_1 - r_1)\phi_1 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_1^2 \text{Ln}(r_1) - \frac{1}{4}r_1^2 \right) \right] \right\}$$

$$G_{11}^2 = -K_1 \left\{ K_2 \left[(\text{Ln}(r_2)r_2 - r_2)\phi_2 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_2^2 \text{Ln}(r_2) - \frac{1}{4}r_2^2 \right) \right] \right\} + \\ + K_1 \left\{ K_2 \left[(\text{Ln}(r_1)r_1 - r_1)\phi_2 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_1^2 \text{Ln}(r_1) - \frac{1}{4}r_1^2 \right) \right] \right\}$$

$$G_{22}^1 = -K_1 \left\{ K_2 \left[(\text{Ln}(r_2)r_2 - r_2)\phi_1 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_2^2 \text{Ln}(r_2) - \frac{1}{4}r_2^2 \right) \right] - r_2\phi_1 - \frac{r_2^2}{2L} \right\} + \\ + K_1 \left\{ K_2 \left[(\text{Ln}(r_1)r_1 - r_1)\phi_1 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_1^2 \text{Ln}(r_1) - \frac{1}{4}r_1^2 \right) \right] - r_1\phi_1 - \frac{r_1^2}{2L} \right\}$$

$$G_{22}^2 = -K_1 \left\{ K_2 \left[(\text{Ln}(r_2)r_2 - r_2)\phi_2 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_2^2 \text{Ln}(r_2) - \frac{1}{4}r_2^2 \right) \right] - r_2\phi_2 + \frac{r_2^2}{2L} \right\} + \\ + K_1 \left\{ K_2 \left[(\text{Ln}(r_1)r_1 - r_1)\phi_2 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_1^2 \text{Ln}(r_1) - \frac{1}{4}r_1^2 \right) \right] - r_1\phi_2 + \frac{r_1^2}{2L} \right\}$$

$$G_{12}^1 = G_{21}^1 = G_{12}^2 = H_{21}^2 = 0$$

Matriz S:

$$S_{11}^1 = K_6 \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] \phi_1 - \frac{1}{L} [(2K_4 - K_5) \text{Ln}(r_2)] \right\} + \\ - K_6 \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \phi_1 - \frac{1}{L} [(2K_4 - K_5) \text{Ln}(r_1)] \right\}$$

$$S_{11}^2 = K_6 \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] \phi_2 + \frac{1}{L} [(2K_4 - K_5) \text{Ln}(r_2)] \right\} + \\ - K_6 \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \phi_2 + \frac{1}{L} [(2K_4 - K_5) \text{Ln}(r_1)] \right\}$$

$$S_{22}^1 = K_6 \left\{ \left[(K_4 + 2\nu) \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] \phi_1 - \frac{1}{L} [(K_4 + 2\nu) \text{Ln}(r_2)] \right\} + \\ - K_6 \left\{ \left[(K_4 + 2\nu) \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \phi_1 - \frac{1}{L} [(K_4 + 2\nu) \text{Ln}(r_1)] \right\}$$

$$S_{22}^2 = K_6 \left\{ \left[(K_4 + 2\nu) \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] \phi_2 + \frac{1}{L} [(K_4 + 2\nu) \text{Ln}(r_2)] \right\} + \\ - K_6 \left\{ \left[(K_4 + 2\nu) \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \phi_2 + \frac{1}{L} [(K_4 + 2\nu) \text{Ln}(r_1)] \right\}$$

$$S_{31}^1 = S_{11}^1$$

$$S_{31}^2 = S_{11}^2$$

$$S_{12}^1 = S_{21}^1 = S_{32}^1 = S_{12}^2 = S_{21}^2 = S_{32}^2 = 0$$

Matriz D:

$$D_{12}^1 = K_3 K_4 \left[\left(\frac{r_2}{L} \right) - \text{Ln}(r_2) \phi_2 + \text{Ln}(r_2) + \left(\frac{r_1}{L} \right) - \text{Ln}(r_1) \phi_2 - \text{Ln}(r_1) \right]$$

$$D_{12}^2 = K_3 K_4 \left[- \left(\frac{r_2}{L} \right) + \text{Ln}(r_2) \phi_2 + \left(\frac{r_1}{L} \right) - \text{Ln}(r_1) \phi_2 \right]$$

$$D_{32}^1 = (-K_3 K_4 - 2K_3) \left[\left(\frac{r_2}{L} \right) - \text{Ln}(r_2) \phi_2 + \text{Ln}(r_2) - \left(\frac{r_1}{L} \right) - \text{Ln}(r_1) \phi_2 - \text{Ln}(r_1) \right]$$

$$D_{32}^2 = (-K_3 K_4 - 2K_3) \left[\left(\frac{r_2}{L} \right) + \text{Ln}(r_2) \phi_2 + \left(\frac{r_1}{L} \right) - \text{Ln}(r_1) \phi_2 \right]$$

$$D_{21}^1 = -D_{12}^1$$

$$D_{21}^2 = -D_{12}^2$$

$$D_{11}^1 = D_{22}^1 = D_{31}^1 = D_{11}^2 = D_{22}^2 = D_{31}^2 = 0$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BEER, G. (2001) ***Programming the boundary element method: An introduction for engineers***. John Wiley & Sons. Ltd.

BREBBIA, C.A. (1984). ***Topics in Boundary Element Research***. Springer-Verlag: Berlim and New York..

BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C. (1984). ***Boundary element techniques. Theory and applications in engineering***. Springer-Verlag: Berlim and New York.

BREBBIA, C.A. & DOMINGUEZ, J. (1989). ***Boundary elements: an introductory course***. Southampton. New York, CMP/McGraw-Hill.

CHAVES, E.W.V. (1997). ***Análise de placas com variação de espessura através do método dos elementos de contorno***. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos – USP.

FOLTRAN, C.E. Um tratamento analítico para a obtenção das matrizes H e G do método dos elementos de contorno para a aplicação em problemas da elastostática bidimensional. **XVIII Cilamce**, Brasil, 1 , 389-396, 1997

FUDOLI, C.A. (1999). **Formulação do método dos elementos de contorno e plasticidade com gradiente**. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos – USP.

HOEFEL, S. S. (2006). **Análise de estruturas formadas pela associação de placas de laminados compósitos através do método dos elementos de contorno**. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP.

KANE, J.H. **Boundary Element Analysis in Engineering Continuum Mechanics**. Prentice-Hall, Inc. New Jersey (1994)

PARÍS, F. ; CAÑAS, J. **Boundary Element Method. Fundamentals and Applications**. Oxford University Press, 1997.

TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. (1980). **Teoria da elasticidade**. Rio de Janeiro, Ed. Guanabara Dois S.A.

VALLIAPPAN, S. (1981). **Continuum mechanics – fundamentals**. A.A. Balkema, Rotterdam.

VENTURINI, W.S. (1988). Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia. Tese (Livre-Docência) – Escola de Engenharia de São Carlos – USP.

VILLAÇA, S.F. & GARCIA, L.F.T. (1998). **Introdução à teoria da elasticidade**. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ.

WUTZOW, W.W. (2003). **Formulação do método dos elementos de contorno para análise de enrijecedores**. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Bibliografia Complementar

ABEL, N.H. **Ouevres completes**. Norvegien Christiania, 1, 1881.

ANDERSSON, R.S. et alii. **The application and numerical solution of integral equations**. Alphen aan den Rijn, The Netherlands, Sijthoff and Noordhoff, 1980.

ARGYRIS, J.H.; KELSEY, S. (1960). **Energy theorems and structural analysis**. London, Butterworths.

BETTI, E. Teoria dell'elasticità. **Il Nuovo Cimento**, 7-10, 1872.

BREBBIA, C.A. (1978). **The boundary element method for engineers**. London. Pentech Press.

BENJUMEA, R., SIKARSKIE, D.L. On solution of plane, orthotropic elasticity problems by an integral method. **Journal of Applied Mechanics**, 1972, vol. 94, pg. 801-808.

CEREDA, R.L.D.; MALDONADO, J.C. **Introdução ao FORTRAN 77 para microcomputadores**. São Paulo; McGraw-Hill; 1987

CLOUGH, R.W. (1960). The finite element method in plane stress analysis. 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, USA, September, **Proceedings**.

CLOUGH, R.W. (1990). Original formulation of the finite element method. **J. Finite Elem. Anal. Dés.**, v.7, n.2, p.89-101.

COLLATZ, L. **The numerical treatment of differential equations**. Springer-Verlag, 1966.

CROTTY, J.M. A block equation solver for large unsymmetric matrices arising in the boundary integral equation method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **18**: 997-1017, 1982.

CRUSE, T.A. Numerical solutions in three dimensional elastostatics. *Int. J. Solids Structures*, **5** : 1259-1274, 1969.

CRUSE, T.A. Applications of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis. *Computers and Structures*, **3** : 509-527, 1973.

CRUSE, T.A. An improved boundary-integral equation method for three dimensional elastic stress analysis. *Computers and Structures*, **4** : 741-754, 1974.

CRUSE, T.A. ; RIZZO, F.J. (1968). A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamics problem I. *Journal Math. Analysis Applications*, v.22, p.244-259.

CROTTY, J.M. A block equation solver for large unsymmetric matrices arising in the boundary integral equation method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, **18**: 997-1017, 1982.

CRUSE, T.A. ; VANBUREN, W. Three dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. *Int. J. Fract. Mech.*, **7** : 1-15, 1971

FREDHOLM, I. Sur Une Classe d'équations fonctionnelles. *Acta Math.*, **27**: 365-390, 1903.

FREDHOLM, I. Solution d'un Problème Fondamental de la Théorie de l'élasticité. Arkiv For Matematik, *Astronomi och Fysik*, **2** (28) : 3-8, 1906

GREEN, A.E. A note on stress systems in anisotropic materials. *Philosophical Magazine*, 1943, vol. 34, pg. 416-418.

GREEN, A.E., ZERNA, W. ***Theoretical Elasticity***. Glasgow: Claredon Press, 442p. 1954.

GUIGGIANI, M. (1994). ***Hypersingular formulation for boundary stress evaluation***. Engineering Analysis with Boundary Elements, 13, p. 169-179.

GUPTA, K.K.; MEEK, J.L. (1996). A brief history of the beginning of the finite element method. International ***Journal for Numerical Methods in Engineering***. v.39, p3761-3774.

HARTMANN, F. (1980). ***Computing the C matrix in non-smooth boundary points***. In. Brebbia, C.A., ed. New developments in boundary elements methods. Southampton, CMP Publ.

HASHIN, Z. Plane Anisotropic Beams. ***Journal of Applied Mechanics***, p.257-262. 1967.

HRENIKOFF, A. (1941). Solution of problems in elasticity by the framework method. ***J. Appl. Mech.***, A8, p. 129-144.

JASWON, M.A. (1963). Integral equation methods in potencial theory, I. ***Proc. Royal Society, A***, (275) : 237-246.

KUPRADZE, V.D. (1965). ***Potencial Methods in the Theory of Elasticity***. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations.

LACHAT, J.C. (1975). ***A further development of the boundary integral technique for elastostatics***. Southampton. (Ph.D. Thesis), University of Southampton

LACHAT, J.C. & WATSON, J.O. Effective numerical treatment of boundary integral equations. ***Int. J. Num. Meth. Engng.***, 10: 991-1005, 1976.

LEE, K.J., MAL, A.K. A boundary element method for plane anisotropic elastic media. ***Journal of Applied Mechanics***, 1990, vol. 57, pg. 600-606.

LEKHNITSKII, S.G. ***Theory of Elasticity of an Anisotropic Body***. 1^a ed. Moscou: Mir, 1963. 430p.

LEKHNITSKII, S.G., TSAI, S.W., CHERONT, T. ***Anisotropic Plates***. 1^a ed. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 1968. 534p.

LIOUVILLE, V.D. (1937) Sur le développement des fonctions. ***Journal de Mathématiques Pures et Appliquées***, 2: 16-35, 1837.

MAHAJERIN, E., SIKARSKIE, D.L. Boundary element study of a loaded hole in an orthotropic plate. ***Journal of Composite Materials***, 1986, vol.20, pg. 375-389.

McHENRY, D. (1943) A lattice analogy for the solution of plane stress problems. ***J. Inst. Civ. Eng.***, v.21, p.59-82.

MIKHLIN, S.G. (1957). ***Integral equations***. New York, Pergam Press. (International series of monographs in pure and applied).

MUSKHELISHVILI, N.I. (1953). ***Some basic problems of Mathematical theory of elasticity***. Groningen Holand, Noordhoff.

NEWMARK, N.M. (1949). Numerical methods of analysis in bars, plates and elastic bodies. ***Numerical Mech. Anal. Eng.***, (ed. L. E. Grinter), Macmillan.

NOACK, D., ROTH, von W. ***On the theory of elasticity of orthotropic material***. Wood Science and Technology, v10, p.97-110, 1976.

OSIAS, J.R. ; WILSON, R.B.; SEITELMAN, L.A. Combined boundary integral equation finite element analysis of solids. ***In: SYMPOSIUM ON***

INNOVATIVE NUMERICAL ANALYSIS IN APPLIED ENGINEERING SCIENCE, 1st, Versailles, CETIM, 1977 – **Proc.**

PADHI, G.S., SHENOI, R.A., MOY, S.S., HAWKINS, G.L. A quadratic boundary element implementation in orthotropic elasticity using the real variable approach. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, 2000, vol. 16, pg. 257-266.

PAN, Y.C., CHOU, T.W. Point force solution for an infinite transversely isotropic solid. **Journal of Applied Mechanics**, December 1976, pg. 608-612.

RICARDELLA, P.C. **An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity**. Pittsburg, Dept. Mech. Engng., Carnegie-Mellon University, 1973. (Report No. SM-73-10).

RIZZO, F.J. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. **Quart. Appl. Math.**, 25 (1) : 83-95, 1967.

RIZZO, F.J. ; SHIPPY, D.J. (1968). A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. **Int. J. Solids Structures**, v.4, p.1161-1179.

RIZZO, F.J., SHIPPY, D.J. A method for stress determination in plane anisotropic elastic bodies. **Journal of Composite Materials**, 1970, vol.4, pg. 36-61

ROBINSON, J. (1985). **Early FEM pioneers**. Robinson and Associates. England. Dorset.

SHAW, R.P. & FALBY, W. FEBIE: A combined finite element-boundary integral equation method. **In: SYMPOSIUM ON INNOVATIVE NUMERICAL ANALYSIS IN APPLIED ENGINEERING SCIENCE**, 1st, Versailles, CETIM, 1977 – **Proc.**

SILVERMAN, I.K. **Orthotropic beams under polynomial loads**. ASCE, Journal of the Engineering Mechanics Division, V.90, EM5, p. 293-319, oct. 1964.

SMIRNOV, V.I. (1964). **Integral equations and partial differential equations**. In: Course in higher mathematics. London, Addison – Wesley, v.4.

SOMIGLIANA, C. Sopra L'equilibrio di un corpo elastico isotropo. **II Nuovo Cimento, 17-19**, (1886)

SOUTHWELL, R.V. (1946). **Relaxation methods in theoretical physics**. London, Oxford. University Press, (The Oxford Engineering Sciences Series).

SWEDLOW, J.L. & CRUSE, T.A. Formulation of boundary integral equations for three dimensional elastoplastic flow. **Int. J. Solids Structures**, 7: 1673-1683, 1971.

SYMM, G.T. (1963). Integral equation methods in potencial theory, II. **Proc. Royal Society, A**, (275) : 33-46.

TURNER, M.J.; CLOUGH, R.W.; MARTIN, H.C.; TOPP, L.J. (1956). Stifness and deflection analysis of complex structures. **Journal Aeronaut Sciences**, v.23, n.9, p.805-823.

VABLE, M., SIKARSKIE, D.L. Stress analysis in plane orthotropic material by the boundary element method. **International Journal Solids Structures**, 1988, vol. 24, n.1, pg. 1-11.

VENTURINI, W.S. **Boundary element method in geomechanics**. Springer-Verlag, 1984. (lecture Notes in Engineering)

WATSON, J.O. Advanced implementation of the boundary element method for two and three-dimensional elastostatics. In: BANERJEE, P.K. &

BUTTERFIELD, R., eds. *Developments in boundary element methods*. London, Appl. Sci. Publ., 1979.

ZIENKIEWICZ, O.C.; KELLY, D.W.; BETTESS, P. The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **11**: 355-375, 1977.

