

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**INFLUÊNCIA DAS IRREGULARIDADES DA FORMA EM PEÇAS DE
MADEIRA NA DETERMINAÇÃO DO MÓDULO DE ELASTICIDADE
LONGITUDINAL**

André Luis Christoforo

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

Orientador: **Prof. Tit. Francisco Antonio Rocco Lahr**

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: **Engenharia de Estruturas**

*São Carlos
2007*

“Eu conheço um planeta onde mora um certo cavalheiro de rosto avermelhado. Ele nunca cheirou uma flor. Nunca olhou uma estrela. Nunca amou ninguém. Nunca fez outra coisa senão somar números. E o dia todo repete, como tu: Estou ocupado com assuntos sérios! E isso o faz inchar-se de orgulho. Mas ele não é um homem, é um cogumelo!”

Antoine de Saint-Exupéry: O Pequeno Príncipe

**Dedico este trabalho à minha amada mãe Marlene L. P.
Christoforo, em memórias ao meu querido pai Carlos J.
Christoforo e ao amigo Klaus Biagioni Fluhmann.**

AGRADECIMENTOS

A Deus, pois sem a sua intervenção em minha vida este trabalho certamente não seria realizado.

Às minhas queridas e amadas irmãs Yeda, Luciana e Maria do Carmo, aos meus sobrinhos Diego e Túlio e ao meu cunhado Orlando, minha doce e querida família, meu porto seguro.

Ao querido professor Francisco Antonio Rocco Lahr, por sua inestimável amizade, compreensão e atenção para com a minha pessoa.

A todos os colegas que presenciaram esta singular jornada da minha vida, e em especial aos amigos Sergio T. Oshima, Adriano Fonseca e Giulio F. Peterlevitz.

À minha doce e amada Tenille, pelo seu amor, carinho e amparo nos momentos difíceis e a todos os seus familiares, em especial ao senhor Luis, à Dona Cleonice, à Kalinca e ao Dérek, pelo carinho e consideração.

À EESC/USP, pela oportunidade de crescimento e aprendizado pessoal e profissional.

À coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela concessão da bolsa de estudos.

Ao Horto Florestal de Itirapina e à empresa IRPA de São Carlos, pela concessão das madeiras.

A todos os funcionários do LaMEM e do Departamento de Estruturas.

A todos vocês, muito obrigado.

SUMÁRIO

| | |
|---|-----------|
| 1. INTRODUÇÃO | 1 |
| 1.1 Generalidades..... | 1 |
| 1.2 Objetivos..... | 2 |
| 1.3 Justificativa..... | 3 |
| 1.4 Estrutura da Tese..... | 3 |
| | |
| 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA..... | 6 |
| 2.1 Classificação Mecânica das Peças Estruturais de Madeira..... | 6 |
| 2.2 Elementos Finitos..... | 19 |
| 2.3 Otimização..... | 22 |
| 2.4 Conclusões da Revisão Bibliográfica..... | 25 |
| | |
| 3. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO..... | 26 |
| 3.1 Formulação do Elemento Finito segundo a Teoria de Bernoulli..... | 26 |
| 3.1.1 Formulação do Elemento Finito com Aproximação Linear da | |
| Geometria..... | 35 |
| | |
| 4. ASPECTOS NUMÉRICOS DE OTIMIZAÇÃO..... | 38 |
| 4.1 Método dos Mínimos Quadrados..... | 38 |
| 4.2 Método de Newton..... | 39 |

| | |
|---|-----------|
| 5. MATERIAIS E MÉTODOS..... | 41 |
| 5.1 Materiais | 41 |
| 5.1.1 Madeira Roliça: Aspectos Gerais..... | 41 |
| 5.2 Métodos | 44 |
| 5.2.1.Preparação das Peças Roliças Estruturais de Madeira para o | |
| Ensaio de flexão..... | 44 |
| 5.2.2. Determinação do Módulo de Elasticidade Longitudinal com o Uso | |
| do Diâmetro Equivalente da Peça (E_{deq})..... | 48 |
| 5.2.3 Determinação do Módulo de Elasticidade Longitudinal Ótimo (E_o).... | 49 |
| 5.2.4 Influência de Posições Distintas no Ensaio de Flexão, com Rotação | |
| de 90° | 55 |
| 5.2.4.1 Determinação do Módulo de Elasticidade Longitudinal | |
| segundo a Mudança da Posição da Peça (E_{90})..... | 56 |
| 5.2.4.2 Determinação do Módulo de Elasticidade Longitudinal | |
| Ótimo segundo a Mudança da Posição da Peça (E_{o90})..... | 56 |
| 5.3 Análise Estatística..... | 56 |
| 6. ASPECTOS COMPUTACIONAIS..... | 58 |
| 6.1 Generalidades..... | 58 |
| 6.2 Arquivo de Entrada de Dados..... | 59 |

| | |
|--|------------|
| 7. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS..... | 63 |
| 7.1 Classificação dos Corpos-de-Prova Estruturais..... | 63 |
| 7.2 Valores de Elasticidade para as Peças Roliças de Madeira do Gênero | |
| <i>Pinus</i> | 64 |
| 7.3 Valores de Elasticidade para as Peças Roliças de Madeira da Espécie | |
| <i>Eucalyptus citriodora</i> | 68 |
| | |
| 8. CONCLUSÕES..... | 71 |
| | |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 73 |
| Bibliografia Consultada..... | 73 |
| Bibliografia Complementar..... | 77 |
| | |
| APÊNDICE..... | 82 |
| APÊNDICE A..... | 83 |
| APÊNDICE B..... | 109 |
| APÊNDICE C..... | 123 |

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|-----------|
| Figura 1 – Determinação do diâmetro equivalente para peças de seção circular variável segundo NBR 7190/1997..... | 7 |
| Figura 2 – Ensaio de flexão estática de Postes segundo a NBR 6231/1980..... | 8 |
| Figura 3 – Variação do módulo de elasticidade em função de L/h segundo LAHR (1983)..... | 9 |
| Figura 4 – Esquema de ensaio de flexão estática de quatro pontos..... | 15 |
| Figura 5 – Ensaio de flexão estática segundo a Norma ASTM D4761-96..... | 16 |
| Figura 6 – Exemplo de discretização por uma malha de elementos finitos..... | 18 |
| Figura 7 – Exemplo de uma função de interpolação gerada pelo MEF..... | 19 |
| Figura 8 – Simulação da tração normal às fibras da madeira..... | 21 |
| Figura 9 – Simulação da tração normal às fibras da madeira com a presença de uma fenda..... | 22 |
| Figura 10 – Elemento estrutural..... | 26 |
| Figura 11 – Deformação longitudinal em um elemento de viga de dimensões infinitesimais..... | 28 |
| Figura 12 – Graus de liberdade do elemento finito..... | 29 |
| Figura 13 – Função aproximativa de deslocamentos segundo o MEF..... | 31 |
| Figura 14 – Aproximação linear da geometria..... | 35 |

| | |
|---|-----------|
| Figura 15 – Função de aproximação linear para a geometria do elemento finito..... | 36 |
| Figura 16 – Aproximação por uma função quadrática pelo Método de Newton..... | 39 |
| Figura 17 – Peça roliça estrutural de madeira da espécie <i>Eucalyptus citriodora</i>..... | 42 |
| Figura 18 – Peça roliça estrutural de madeira do gênero <i>Pinus</i>..... | 42 |
| Figura 19 – Árvore do gênero <i>Pinus</i> selecionada para a análise do MOE..... | 43 |
| Figura 20 – Lote de peças roliças de madeira da espécie <i>Eucalyptus citriodora</i>..... | 44 |
| Figura 21 – Madeira retirada de um lote de peças roliças..... | 45 |
| Figura 22 – Condução da peça roliça de madeira ao trilho de suspensão..... | 45 |
| Figura 23 – Trilho de suspensão..... | 46 |
| Figura 24 – Pórtico utilizado para a realização dos ensaios de flexão..... | 46 |
| Figura 25 – Comprimento da circunferência do elemento roliço medido em $L/2$..... | 47 |
| Figura 26 – Ensaio de flexão de três pontos..... | 48 |
| Figura 27 – Diâmetro equivalente para a determinação do E_{deq} | 49 |
| Figura 28 – Ensaio alternativo para a determinação do E_0..... | 49 |
| Figura 29 – Aproximação linear da geometria..... | 50 |
| Figura 30 – Determinação do E_{otm}..... | 54 |
| Figura 31 – Posições relativas da peça roliça de madeira no ensaio de flexão.. | 55 |

Figura 32 – Discretização do elemento roliço segundo MEF..... 62

Figura 33 – Classificação das peças estruturais de madeira do gênero *Pinus*.. 63

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|-----------|
| Tabela 1 – Arquivo de entrada de dados do programa EOTM..... | 59 |
| Tabela 2 – Valores de elasticidade obtidos para as peças roliças estruturais de madeira do gênero <i>Pinus</i>..... | 64 |
| Tabela 3 – Valores de elasticidade obtidos para as peças roliças estruturais de madeira da espécie <i>Eucalyptus citriodora</i>..... | 68 |

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

- ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas
- ASTM – American Society for Testing and Materials
- AS/NZS – Australian / New Zealand Standard

LISTA DE SÍMBOLOS

| | | |
|---------------------|---|---|
| k_{mod} | – | coeficiente parcial de modificação da Norma NBR 7190-97 |
| E | – | módulo de elasticidade longitudinal |
| L | – | vão livre |
| MOE | – | módulo de elasticidade longitudinal |
| F | – | Força concentrada |
| p | – | Força distribuída |
| AGs | – | algoritmos genéticos |
| MEF | – | método dos elementos finitos |
| L_1 | – | distância entre o apoio e o ponto de aplicação da força |
| ΔF | – | incremento de carga |
| Δv | – | incremento de deslocamento |
| E_x | – | módulo de elasticidade longitudinal na direção “x” |
| E_y | – | módulo de elasticidade longitudinal na direção “y” |
| G_{xy} | – | módulo de elasticidade transversal no plano “xy” |
| U_{exp} | – | vetor de deslocamentos determinados experimentalmente |
| U_{num} | – | vetor de deslocamentos determinados numericamente |
| τ_{int} | – | trabalho dos esforços internos |
| τ_{ext} | – | trabalho das forças externas |
| dV | – | volume elementar |

| | |
|--|--|
| dA | – área elementar |
| $\mathbf{P}(\mathbf{s})$ | – forças de superfície |
| $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ | – força por unidade de volume |
| Δ_v | – deslocamentos virtuais |
| $\Delta(\mathbf{x})_v$ | – deslocamentos virtuais oriundos das forças de volume |
| $\Delta(\mathbf{s})_v$ | – deslocamentos virtuais oriundos das forças de superfície |
| $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})_v$ | – deformações específicas virtuais de volume |
| $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ | – tensões em um sólido |
| $V(x)$ | – função de deslocamentos para um elemento de viga |
| ρ | – raio de curvatura |
| ε_x | – deformação específica na direção “x” |
| \mathbf{D} | – tensor constitutivo de rigidez |
| σ_x | – tensão normal na direção “x” |
| $\phi(x)$ | – função de forma |
| $\tilde{V}(x)$ | – função aproximativa de deslocamentos para o elemento de viga |
| V_i | – deslocamento na extremidade “i” do elemento finito de viga |
| V_j | – deslocamento na extremidade “j” do elemento finito de viga |
| θ_i | – rotação na extremidade “i” do elemento finito de viga |
| θ_j | – rotação na extremidade “j” do elemento finito de viga |
| $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ | – matriz das funções de forma do elemento finito de viga |

| | |
|-------------------------------------|---|
| Δ | – deslocamentos pontuais |
| $\tilde{\varepsilon}(x)$ | – função aproximativa das deformações específicas ao longo do elemento finito de viga |
| $\mathbf{B}(x)$ | – matriz deslocamento-deformação |
| \mathbf{F}_{eq} | – vetor das forças equivalentes nodais para um elemento finito qualquer |
| \mathbf{K}_e | – matriz de rigidez para um elemento finito qualquer |
| \mathbf{U}_e | – vetor de deslocamentos nodais para um elemento finito qualquer |
| F_i | – força pontual aplicada no nó “i” do elemento finito de viga |
| F_j | – força pontual aplicada no nó “j” do elemento finito de viga |
| d | – diâmetro da seção transversal circular da peça de madeira roliça |
| r | – raio da seção transversal circular da peça de madeira roliça |
| $f(x)$ | – função objetivo avaliada no ponto x |
| $\mathbf{V}(x)$ | – função residual |
| \mathbf{x}^k e \mathbf{x}^{k+1} | – vetor dos valores estimados na iteração anterior e atual ,respectivamente, para a busca do valor ótimo da função objetivo |
| $\nabla f(x)$ | – vetor gradiente de “ $f(x)$ ” |
| \mathbf{d}_k | – vetor dos valores das direções de busca do valor ótimo da função objetivo |
| α_k | – vetor dos valores das estimativas do passo na busca pela solução ótima |

| | |
|--------------------|---|
| K | – matriz de rigidez da estrutura |
| U | – vetor dos deslocamentos nodais da estrutura |
| f(E) | – função objetivo utilizada para a determinação do MOE |
| C | – perímetro da circunferência na seção de engastamento |
| c | – circunferência no ponto de aplicação da força |
| Δ_p | – incremento de força |
| Δ_γ | – incremento de deslocamento |
| d_1, d_2, d_{eq} | – diâmetro da base, do topo e equivalente da peça roliça de madeira |
| $\delta(\pi)$ | – variação do funcional de energia de uma estrutura |
| v_t | – deslocamento transversal total |
| v_f | – deslocamento transversal devido ao momento fletor |
| v_c | – deslocamento transversal devido ao cisalhamento |
| φ | – rotação (ângulo) do elemento, segundo a Teoria de Bernoulli |
| γ | – distorção (ângulo) do elemento, segundo a Teoria de Timoshenko |
| Q | – força cortante |
| M | – momento fletor |
| q | – carga distribuída no elemento |
| G | – módulo de elasticidade transversal |

| | |
|-----------------------------|---|
| k | – fator de forma da seção transversal |
| g | – constante para a viga de Timoshenko |
| r_0 e r_L | – curvatura do elemento em $x = 0$ (nó inicial) e em $x = L$ (nó final) |
| U | – energia de deformação interna |
| \bar{x}_m | – média aritmética amostral das diferenças |
| n | – tamanho da amostra |
| s_m | – desvio padrão amostral das diferenças |
| α | – nível de significância; $(1-\alpha)$ = nível de confiança |
| $t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ | – valor tabelado pela distribuição “t” de Student com $n-1$ graus de liberdade e nível de significância α , ou nível de confiança $(1-\alpha)$ |
| E_{deq} | – módulo de elasticidade segundo o diâmetro equivalente |
| E_o | – módulo de elasticidade ótimo |
| E_{90} | – módulo de elasticidade segundo o giro da peça em 90° |
| E_{o90} | – módulo de elasticidade ótimo segundo o giro da peça em 90° |

Christoforo, A. L. *Influência das irregularidades existentes na geometria de peças roliças estruturais de madeira na determinação do módulo de elasticidade longitudinal*. São Carlos, 2007. 137 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

RESUMO

Atualmente, os documentos normativos que tratam da determinação das propriedades de rigidez e resistência para elementos roliços estruturais de madeira não levam em consideração em seus modelos matemáticos a influência das irregularidades existentes na geometria dessas peças. O presente trabalho tem como objetivo determinar o valor ótimo do módulo de elasticidade longitudinal para peças roliças estruturais de madeira por intermédio de uma técnica de otimização aliada ao Método da Análise Inversa, ao Método dos Elementos Finitos e ao Método dos Mínimos Quadrados.

ABSTRACT

Currently, the normative codes that deal with the determination of the properties of stiffness and strength for round structural timber elements do not take in to consideration in both mathematical models the influence of existing irregularities in geometry of these elements. An objective of this work is to determine the optimum value of the modulus of elasticity for round structural timber elements by an optimization technique associated to the Inverse Analysis Method, to the Finite Element Method and the Least Squares Method.



INTRODUÇÃO

1.1 Generalidades

O emprego da madeira como elemento estrutural no Brasil tem crescido ao longo dos últimos anos em virtude das pesquisas realizadas, no sentido de torná-la um material mais competitivo com relação a outros materiais empregados na construção de estruturas, tais como o aço e o concreto.

Almejando o desenvolvimento tecnológico, a NBR 7190/1997 (Projeto de Estruturas de Madeira) da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) está sendo revisada no sentido de melhor ajustar os dispositivos quanto às propriedades físico-mecânicas da madeira e dos sistemas estruturais nos quais este material é empregado, com o intuito de se viabilizar condições mais adequadas para o dimensionamento no âmbito do Método dos Estados Limites.

Os esforços realizados por pesquisadores para o desenvolvimento tecnológico, a partir do conhecimento mais preciso das propriedades da madeira, fundamentam-se por

torná-la um material mais confiável na construção de elementos estruturais, diminuindo-se assim as incertezas ou até preconceitos por parte dos profissionais da construção civil com relação à sua utilização.

Dentre as várias possibilidades de aplicação da madeira na construção civil, destaca-se o emprego dos elementos ou peças estruturais roliças de madeira. A utilização do elemento estrutural roliço apresenta uma grande vantagem com relação ao elemento estrutural de madeira serrada, e esta reside no fato de que a peça roliça não precisa ser processada, evitando-se os gastos daí advindos. Destaca-se também a grande versatilidade em termos da aplicação do elemento roliço na construção civil, desempenhando a função estrutural como elemento de viga, colunas, fundações etc. Mesmo com toda esta gama de aplicabilidade, a existência de importantes lacunas nos documentos normativos brasileiros contribuem para a sua menor utilização como elemento estrutural.

Assim, são necessárias pesquisas que venham responder às diversas questões que ainda limitam o seu emprego como elemento estrutural.

1.2 Objetivo

O presente trabalho tem como objetivo principal avaliar a influência que as irregularidades existentes na geometria da peça estrutural de madeira roliça acarretam na determinação da sua rigidez. Esta análise é realizada com o auxílio de um programa desenvolvido para se determinar um valor efetivo para a elasticidade.

1.3 Justificativa

Como já discutido na introdução, a madeira roliça possui grande potencial em termos de sua aplicação no campo da construção civil. Porém, no Brasil, a falta de conhecimentos por parte dos profissionais da área de construção civil, a respeito das suas propriedades mecânicas, torna-se um dos principais motivos que restringem a sua aplicação a obras provisórias.

Os documentos normativos nacionais e internacionais que tratam da aplicação da madeira roliça como elemento estrutural destinado a fundações, postes para rede de energia elétrica, etc, utilizam um diâmetro equivalente (ou dois diâmetros medidos ao longo do elemento) para o cálculo do seu módulo de elasticidade longitudinal, admitindo-se conicidade para a forma do elemento.

Desta forma, o estudo da influência da geometria das peças estruturais de madeira roliça na determinação do seu módulo de elasticidade longitudinal, assim como de outras propriedades físicas e geométricas, mostra-se de grande importância perante o quadro atual das pesquisas realizadas com relação a este assunto no Brasil e no mundo.

1.4 Estrutura da Tese

Neste capítulo, foram apresentadas informações que motivaram a elaboração desse trabalho, assim como dos seus objetivos e justificativas.

O capítulo dois versa sobre a revisão bibliográfica realizada. Nesse trabalho, a pesquisa bibliográfica foi dividida em quatro sub-itens. O primeiro procura apresentar aspectos do estado-da-arte referente à determinação do módulo de elasticidade longitudinal em peças de madeira, de maneira a se validar as metodologias de ensaio

utilizadas neste trabalho para a sua obtenção. O segundo procura apresentar uma breve introdução sobre o Método dos Elementos Finitos juntamente com a sua aplicação na engenharia de estruturas de madeira, por intermédio de algumas pesquisas desenvolvidas nesta área. O terceiro procura apresentar o emprego das técnicas de otimização utilizadas na engenharia de estruturas, por intermédio de algumas pesquisas desenvolvidas no Brasil com relação a esse assunto. O quarto e último sub-item procura apresentar as conclusões sobre o capítulo dois.

No capítulo três, é apresentada em detalhes, a formulação matemática utilizada no cálculo da matriz de rigidez para um elemento finito (barra de viga) segundo o Método dos Elementos Finitos. Particularmente, esta formulação permite ajustar uma forma linear para a geometria do elemento finito de maneira que esta seja tronco-cônica, ou seja, a geometria da peça estrutural roliça de madeira é aproximada por um conjunto de elementos finitos de geometria tronco-cônica.

No capítulo quatro, são apresentados de forma breve e sucinta, o Método dos Mínimos Quadrados juntamente com o Método de Newton, que são ferramentas matemáticas fundamentais utilizadas no desenvolvimento dessa tese.

No capítulo cinco, são apresentados os materiais assim como os métodos de cálculo utilizados na determinação do valor efetivo de elasticidade para as peças roliças de dimensões estruturais. Este trabalho é composto basicamente por etapas distintas, sendo uma numérica e a outra experimental. A parte numérica corresponde ao emprego do *software* EOTM, desenvolvido nos fundamentos do Método dos Elementos Finitos, aliado ao Método dos Mínimos Quadrados e a uma técnica de otimização, como é o caso do Método de Newton. A parte experimental basicamente é composta por ensaios de

flexão estática de três pontos de onde são obtidos os deslocamentos da peça. Além do cálculo do valor efetivo de elasticidade, é avaliada também, no ensaio de flexão, a influência do giro da peça em torno do seu eixo na determinação do módulo de elasticidade longitudinal.

No capítulo seis, são apresentadas as particularidades do programa EOTM juntamente com ilustração de um arquivo de entrada de dados, com a finalidade de se exibir como as variáveis estruturais são aferidas ao programa.

No capítulo sete, são apresentados os valores dos módulos de elasticidade longitudinais obtidos para os elementos roliços de acordo com os métodos de cálculo abordados nesse trabalho.

No oitavo, último capítulo, são feitas as conclusões sobre os resultados obtidos, mostrados no capítulo sete.



REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Classificação Mecânica das Peças Estruturais de Madeira

A norma técnica NBR 7190/1997 - Projeto de Estruturas de Madeira - da ABNT não faz referências à determinação das propriedades de rigidez e resistência para peças roliças estruturais de madeira, ou, serradas, restringindo-se esta análise a corpos-de-prova de pequenas dimensões e isentos de defeitos.

No entanto, para o dimensionamento de estruturas compostas por elementos roliços, a norma NBR 7190/1997 especifica que o momento de inércia da peça (seção circular) deve ser calculado considerando-se o diâmetro da seção que encontra-se a um terço de distância da extremidade da seção transversal mais delgada do elemento (topo do elemento), não considerando-se, no entanto, um diâmetro superior a 1,5 do diâmetro nessa extremidade, assim como ilustra a figura 1.

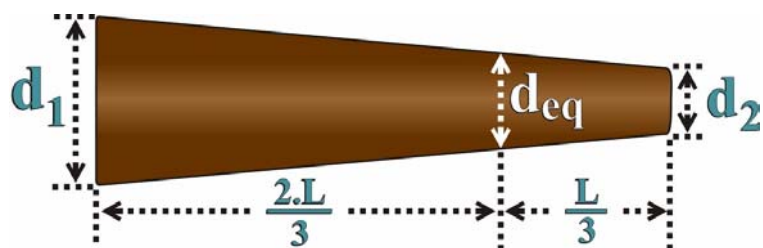


Figura 1 – Determinação do diâmetro equivalente para peças de seção circular variável segundo NBR 7190/1997.

$$d_{eq} = d_2 + \frac{d_1 - d_2}{3} \quad (1a)$$

com

$$d_{eq} \leq 1,5d_2 \quad (1b)$$

em que:

d_1 – diâmetro da base (extremidade da peça roliça de maior área de seção transversal);

d_2 – diâmetro do topo (extremidade da peça roliça de menor área de seção transversal);

d_{eq} – diâmetro equivalente da peça roliça de madeira.

A norma técnica NBR 8456/1984 (Poste de Eucalipto Preservado para Redes de Distribuição de Energia Elétrica) faz referência ao ensaio de flexão em postes de madeira (figura 2) que são padronizados pela NBR 6231/1980 (Resistência à Flexão de Postes de Madeira).

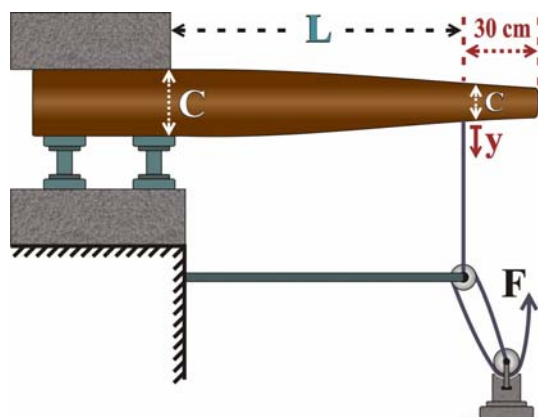


Figura 2 – Ensaio de flexão estática de postes segundo a NBR 6231/1980.

O módulo de elasticidade segundo a NBR 6231/1980 é obtido pela equação

$$E = \frac{64\pi\ell^3}{3C^3c} \frac{\Delta_p}{\Delta_\gamma} \quad (2)$$

onde:

ℓ – distância da seção de engastamento ao ponto de aplicação da força menos o valor de

“y” (deslocamento vertical no ponto de aplicação da força);

C – perímetro da circunferência na seção de engastamento;

c – perímetro da circunferência no ponto de aplicação da força;

Δ_p – incremento de força;

Δ_γ – incremento de deslocamento;

E – módulo de elasticidade longitudinal.

A norma técnica NBR 6122/1996 (Projeto e Execução de Fundações) recomenda o uso da norma NBR 7190/1997 (Projeto de Estruturas de Madeira) para o cálculo da resistência de estacas de madeira, sendo que, esta última, limita-se a ensaios de

resistência em corpos-de-prova de pequenas dimensões e isentos de defeitos, mesmo sendo conveniente o uso da peça estrutural para a determinação de suas propriedades mecânicas.

Embora pesquisando apenas vigas de seções retangulares constantes, é importante destacar que LAHR (1983) avaliou a influência da relação L/h (razão entre o comprimento da peça e sua altura) na determinação do módulo de elasticidade e observou que, para a razão $L/h \geq 21$, o valor de E é praticamente assintótico, como ilustra a figura 3. Esta conclusão implica que, para peças de madeira com comprimento de vinte e uma vezes o valor de sua altura, as deformações oriundas do cisalhamento podem ser desprezadas.

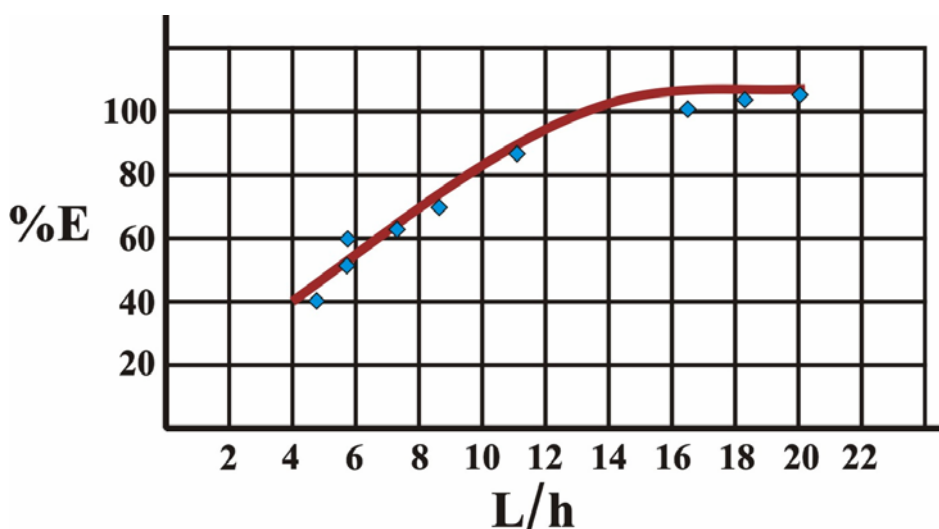


Figura 3 – Variação do módulo de elasticidade em função de L/h segundo LAHR (1983).

Outras conclusões importantes oriundas daquele trabalho são:

- os valores encontrados para os módulos de elasticidade transversal realizados em ensaios de corpos-de-prova nas direções radial e tangencial mostraram-se estaticamente equivalentes, o mesmo ocorrendo na determinação dos módulos de elasticidade longitudinal, nas mesmas condições de carregamento;
- o valor do módulo de elasticidade longitudinal do elemento independe da relação L/b (razão entre o comprimento da peça e a largura da sua seção transversal).

Com o intuito de se verificar as diferenças numéricas existentes entre os valores de resistência e rigidez determinados em peças estruturais com relação a corpos-de-prova de pequenas dimensões e isentos de defeitos, MINÁ *et al.* (2004) utilizaram 25 postes de madeira da espécie *Eucalyptus citriodora*, ensaiados à flexão estática, com aproximadamente 6 metros de comprimento e 26 centímetros de diâmetro médio, quatro corpos-de-prova de pequenas dimensões, ensaiados à compressão paralela às fibras, sendo dois retirados da região do alburno e os demais da região do cerne e dois corpos-de-prova pequenos e isentos de defeitos, ensaiados à flexão (obtidos da parte mais externa da seção transversal das peças), chegando-se às seguintes conclusões:

- Os valores médios de elasticidade e resistência à flexão foram:

| | Cps pequenos e isentos de defeitos | Postes |
|-------|------------------------------------|-----------|
| E_M | 20078 MPa | 22175 MPa |
| f_M | 125 MPa | 133 MPa |

em que:

E_M – módulo de elasticidade na flexão;

f_M – tensão resistente na flexão.

- Os valores médios de rigidez e resistência à compressão paralela às fibras foram:

| | Cps pequenos e isentos de defeitos | CPs estruturais |
|----------|------------------------------------|-----------------|
| E_{CO} | 21705 MPa | 19990 MPa |
| f_{CO} | 57 MPa | 60 MPa |

em que:

E_{CO} – módulo de elasticidade na compressão paralela às fibras;

f_{CO} – tensão resistente na compressão paralela às fibras.

- Os valores médios de compressão paralela às fibra (rigidez e resistência), obtidos com corpos-de-prova pequenos e isentos de defeitos, retirados da região do albarno, apresentaram valores maiores que os retirados da região do cerne;
- Os postes de *Eucalyptus citriodora* apresentaram bom desempenho para o uso como estacas de madeira, em termos de sua resistência.

BATISTA. *et al.* (2000) realizaram ensaios de flexão estática segundo as recomendações do anexo B da NBR 7190/1997 em corpos-de-prova de dimensões reduzidas e dimensões estruturais, em madeiras da espécie *Cambará (Qualea sp)*, *Cupiúba (Goupia glabra)* e Eucalipto (*Eucalyptus*), com o intuito de se verificar as possíveis diferenças existentes entre os valores obtidos do módulo de elasticidade longitudinal para ambas as situações. As peças estruturais (de dimensões 6 cm × 16 cm × 360cm) foram ensaiadas à flexão, com um vão livre equivalente a vinte e uma vezes o valor da sua altura (21h), evitando-se a influência das deformações por cisalhamento. Entre as conclusões obtidas por BATISTA *et al.* (2000), destacam-se a seguintes:

- para as madeiras das espécies Eucalipto e Cambará, os resultados confirmam que os modelos reduzidos representam fielmente os modelos reais;
- para a madeira da espécie Cupiúba, o resultado obtido foi inferior àquele citado pela norma NBR 7190/1997, apontando-se como hipóteses, ou, justificativas mais prováveis, a não secagem completa da madeira e/ou que as peças de modelos reais e reduzidos não foram extraídas do mesmo lote.

PIGOZZO *et al* (2000) realizaram testes de flexão estática (com variação da posição do balanço no esquema estrutural de viga bi-apoiada com força centrada, vão livre de três metros e balanço de um metro) em doze vigas de madeira serrada (seção transversal retangular 6 cm × 12 cm) com a espécie Envira (*Sterculia Sp*) objetivando-se definir o vão livre mais adequado para os ensaios de flexão (não destrutivos) em peças estruturais de madeira com dimensões comerciais, determinar o número mínimo de ensaios para o cálculo do módulo de elasticidade e também, analisar e estimar o custo desses ensaios para empresas de pequeno porte.

As peças foram ensaiadas com a carga aplicada nas posições A e B, respectivamente, perpendiculares aos eixos de menor e maior inércia. Entre as conclusões obtidas por PIGOZZO *et al.* (2000), destacam-se as seguintes:

- o módulo de elasticidade à flexão pode ser determinado em ambas as posições A e B da peça;
- o impacto do custo da classificação de peças estruturais no preço final da madeira não traria maiores conseqüências uma vez que o consumidor economizaria ao adquirir menor volume de madeira, utilizando classes de maior

resistência. Isto possibilitaria ao consumidor o uso de peças de primeira categoria, podendo-se admitir que o coeficiente parcial de modificação k_{mod3} seja igual a 1, conforme NBR 7190/1997, aferindo-se um acréscimo de 25%, na resistência de cálculo, em relação às peças não classificadas.

Atualmente, as normas internacionais existentes, que tratam do problema referente à determinação das propriedades mecânicas de peças roliças estruturais de madeira, estão resumidas a uma metodologia de ensaio estrutural, desconsiderando-se, para esses cálculos, possíveis irregularidades existente na sua geometria.

A Norma AS/NZS 4676 (2000) (*Structural Design Requirements for Utility Service Poles*) sugere a utilização do diâmetro de topo (mais crítico) como sendo o diâmetro equivalente utilizado na determinação do módulo de elasticidade longitudinal em postes de madeira.

A Norma ASTM D1036-97 (*Standard Test Methods of Static Tests of Wood Poles*) sugere dois tipos de ensaios estruturais para a determinação do módulo de elasticidade longitudinal em postes de madeira destinados a redes de energia elétrica. O primeiro é o de viga engastada com uma força aplicada na sua extremidade livre e o segundo, o de viga bi-apoiada com uma força pontual aplicada. Para ambos os casos, o módulo de elasticidade longitudinal da peça é determinado por uma equação que contabiliza, além de outras variáveis, dois valores de raios (determinados por intermédio da medida das suas respectivas circunferências) medidos ao longo do seu comprimento. Para o primeiro esquema estrutural de ensaio, os raios são medidos no ponto de aplicação da carga e na extremidade que se encontra engastada e, para o segundo, os

raios são medidos no ponto de aplicação da força e no apoio referente à extremidade mais delgada do elemento.

WILKINSON (1968) avaliou o desempenho mecânico (rigidez e resistência) de estacas de madeira para as espécies Douglas-fir, Souther pine e Red oak, utilizando o diâmetro de topo na determinação do seu módulo de elasticidade longitudinal.

LARSON *et al.* (2004) realizam ensaios de flexão estática em elementos roliços em sua forma original, cônica, e em elementos de seção circular constante. Os resultados desse trabalho apontaram que modificar a forma cônica original de uma peça roliça em uma peça com diâmetro constante reduz os valores de resistência e rigidez na flexão, enquanto ocorre um acréscimo da porcentagem de madeira juvenil na seção transversal.

MINÁ (2005) apresentou um estudo teórico e experimental de estacas de madeira, incluindo a instrumentação de fundações em estacas de madeira de uma ponte de madeira, com o objetivo de gerar recomendações para o projeto deste tipo de fundações para pontes de madeira de pequenos vãos. Os resultados encontrados nesse trabalho apontam as estacas de madeira como excelentes elementos estruturais para o uso em fundações. Ainda nesse trabalho, e mais especificamente em seu anexo, o autor desenvolve um método de cálculo para o diâmetro equivalente das estacas de madeira, e, conseqüentemente, propõe uma melhor aproximação para o cálculo do módulo de elasticidade da peça. Segundo a sua metodologia, o diâmetro equivalente do elemento (equação 3) é determinado segundo o esquema estrutural de viga bi-apoiada com força concentrada no meio do seu vão, através do Princípio dos Trabalhos Virtuais, sendo a sua geometria aproximada por dois troncos de cone, um entre um dos apoios e o ponto de aplicação da força e o outro, entre o ponto de aplicação da força e o outro apoio.

$$D_{eq} = \sqrt[4]{\frac{2D_T D_m D_B}{D_T + D_B}} \quad (3)$$

em que:

D_{eq} – diâmetro equivalente da peça de madeira roliça segundo a aproximação de sua geometria por dois troncos de cone;

D_T – diâmetro no topo;

D_m – diâmetro no meio;

D_B – diâmetro na base.

ZANGIÁCOMO (2006) estudou a relação vão livre entre apoios/diâmetro (L/d) em peças estruturais de madeira roliça das espécies *Pinus elliotti* e *Pinus caribea* segundo ensaios de flexão estática com carga concentrada aplicada no meio do vão, objetivando-se encontrar a razão L/d a partir da qual o efeito do cisalhamento torna-se desprezível no cálculo do deslocamento total da peça.

A Norma ASTM D198-97 (1998) (Standard Test Methods of Static of Timber in Structural Sizes) propõe um esquema de ensaio à flexão estática de quatro pontos para a determinação do módulo de elasticidade longitudinal da peça, como ilustra a figura 4.

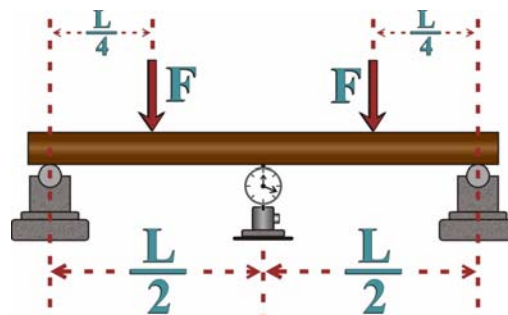


Figura 4 - Esquema de ensaio de flexão estática de quatro pontos.

O deslocamento “ α ” no meio do vão livre da peça ($L/2$) é dado pela expressão:

$$\alpha = \frac{FL^3}{24EI} \left(-4 \frac{L_1^3}{L^3} + 3 \frac{L_1}{L} \right) \quad (4)$$

em que:

F – força aplicada num dos terços da viga;

I – momento de inércia;

E – módulo de elasticidade longitudinal;

L – distância entre os apoios da viga;

L_1 – distância entre o apoio e o ponto de aplicação da força.

A Norma ASTM D4761-96 (Standard Test Methods for Mechanical Properties of Lumber and Wood-Base Structural Material) propõe um esquema de ensaio à flexão estática para a determinação do módulo de elasticidade longitudinal da peça, como ilustra a figura 5.

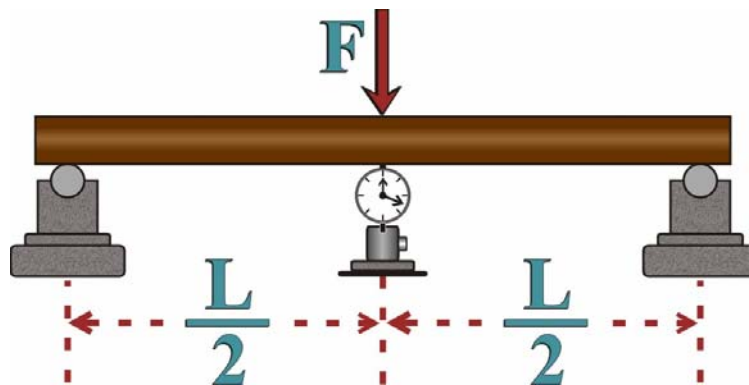


Figura 5 – Ensaio de flexão estática segundo a Norma ASTM D4761-96.

O incremento de deslocamento α no meio do vão livre da peça ($L/2$) é dado pela expressão

$$\alpha = \frac{\Delta FL^3}{48EI} \quad (5)$$

onde:

$\Delta F = (F_2 - F_1)$ – incremento de carga;

E – módulo de elasticidade;

L – vão livre do elemento;

I – momento de inércia da seção transversal.

2.2 Elementos Finitos

Na engenharia civil e, em particular, na engenharia de estruturas, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma excelente ferramenta de cálculo utilizada para analisar o comportamento dos materiais empregados em projetos estruturais, assim como para avaliar o desempenho mecânico dessas estruturas.

O MEF surgiu em 1955 como evolução da análise matricial de modelos reticulados, motivado pelo advento do computador e elaborado com o intuito de se projetar estruturas de modelos contínuos.

O Método dos Elementos Finitos é um dos mais potentes métodos de discretização. Ele é resultado de longas tentativas de engenheiros e matemáticos para resolver equações ou sistemas de equações diferenciais, especialmente aquelas representando problemas do contínuo.

O MEF é tido como uma síntese dos Métodos Variacionais e do Método das Diferenças Finitas, no sentido de substituir porções do domínio por “elementos”, por ser um método variacional que determina funções satisfazendo $\delta(\pi) = 0$ (mínima energia potencial), e por trabalhar com malhas e funções associadas a ela que substituem as equações diferenciais originais.

O procedimento geral para a resolução de um problema contínuo segundo o Método dos Elementos Finitos resume-se em:

- a) o contínuo é dividido em elementos representados por linhas ou superfícies, cuja quantidade é finita;
- b) os elementos são assumidos interligados por um número discreto de nós situados nas fronteiras dos elementos, como ilustra a figura 6. Para o presente trabalho, por se tratar de deformações de corpos elásticos, os deslocamentos desses nós são as incógnitas básicas do problema;

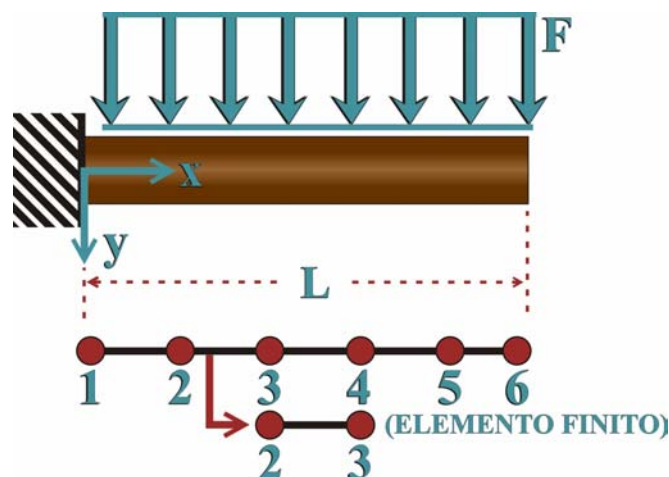


Figura 6 – Exemplo de discretização por uma malha de elementos finitos.

c) um conjunto de funções é escolhido para definir univocamente o estado de deslocamentos dentro de cada elemento em função dos seus deslocamentos nodais, como ilustra a figura 7.

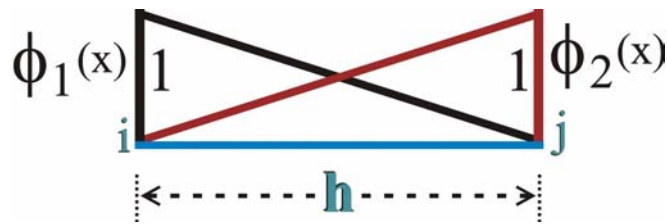


Figura 7 – Exemplo uma de função de interpolação gerada pelo MEF.

Essas funções são chamadas de funções de deslocamentos, e definem o estado de deslocamento ao longo do elemento finito, como expressa a equação 6.

$$\{U(x, y, z)\} = [N]\{U\}_{\text{nós}} \quad (6)$$

em que:

$\{U(x, y, z)\}$ – vetor dos deslocamentos no domínio de um elemento finito qualquer;

$[N]$ – matriz das funções de interpolação do campo de deslocamentos ao longo de um elemento finito;

$\{U\}_{\text{nós}}$ – vetor dos deslocamentos nodais para um elemento finito qualquer.

d) um sistema de forças nodais equilibra as tensões e as possíveis cargas distribuídas, resultando numa relação de rigidez.

A versatilidade do MEF é tão grande quanto a sua literatura correlata. Sendo assim, a pesquisa bibliográfica referente ao método dos elementos finitos neste trabalho resume-se à sua aplicação na engenharia de estruturas e, mais especificamente, às estruturas de madeira.

GÓES (2004) avaliou numericamente o desempenho mecânico de pontes concebidas por tabuleiros de madeira protendida, através de três modelos distintos de cálculo, que são: Modelo de Viga Equivalente, Modelo de Placa Ortotrópica Equivalente e Modelo em Elementos Finitos.

A modelagem em elementos finitos foi realizada com a utilização do *software* ANSYS, versão 5.5. Para a simulação numérica do problema, utilizou-se um elemento tridimensional, conhecido como SOLID 64, com propriedades ortotrópicas.

O autor conclui que o modelo de placa ortotrópica foi o mais ágil e eficiente em termos da determinação dos esforços e deslocamentos nas pontes protendidas de madeira.

MASCIA (1991) estudou o comportamento anisotrópico da madeira de forma experimental e numérica. O estudo numérico foi realizado com o auxílio do *software* SAP90 versão 5.04.

Dentre outras conclusões obtidas nesse trabalho, as deformações medidas em corpos-de-prova de madeira para a espécie Gapuruvu (*Schuzolobium parahybum*), submetidos à compressão paralela às fibras, apresentaram resultados semelhantes aos simulados numericamente.

CHEUNG (2003) realizou um estudo teórico do comportamento de placas ortotrópicas treliçadas, e protendidas transversalmente, utilizando conectores do tipo chapa com dentes estampados para a união das barras da treliça. Para a avaliação das propriedades elásticas da placa, foram utilizados dois modelos numéricos, um tendo por base o MEF e o outro, baseado nas séries de Levy-Nadai. A aferição do modelo proposto foi realizado com o ensaio de um protótipo em escala real.

Os resultados obtidos por CHEUNG (2003) revelam que a placa possui ótimo comportamento para a sua utilização em pontes (rigidez elevada e baixo consumo de material) e que ambos os modelos de cálculo utilizados apresentaram-se consistentes para aplicação nos sistemas de placas ortótropas treliçadas utilizando ligações por chapas com dentes estampados.

PERRINE *et al.* (2002) elaboraram um modelo matemático baseado na morfologia da madeira para a espécie Douglas-fir, objetivando a representação ou reprodução do seu comportamento mecânico. Os autores realizaram ensaios experimentais de tração normal às fibras da madeira com e sem a presença de defeitos localizados na peça. Juntamente com esses ensaios, foram realizadas simulações numéricas, com o intuito de se verificar a eficiência do modelo matemático formulado. Os resultados encontrados são ilustrados pelas figuras 8 e 9.

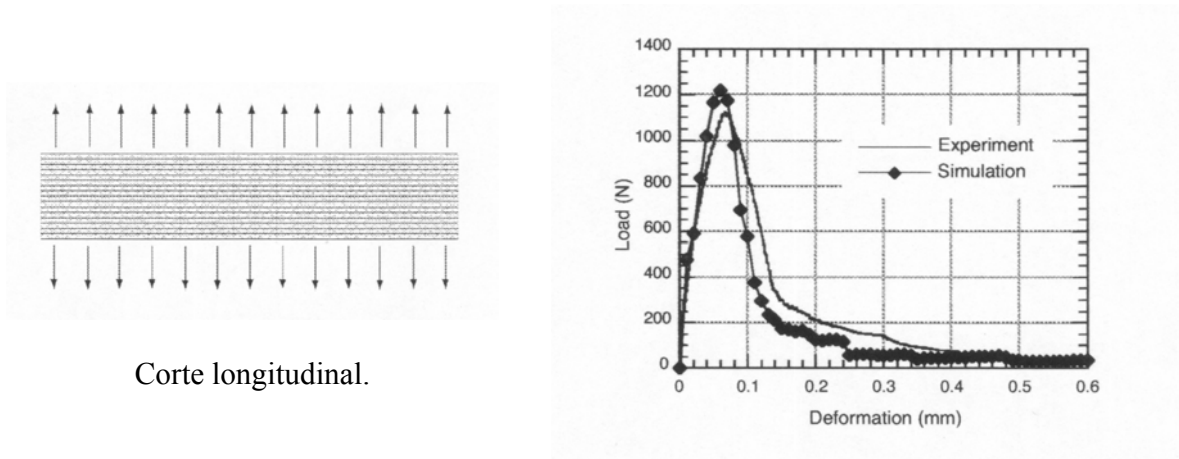
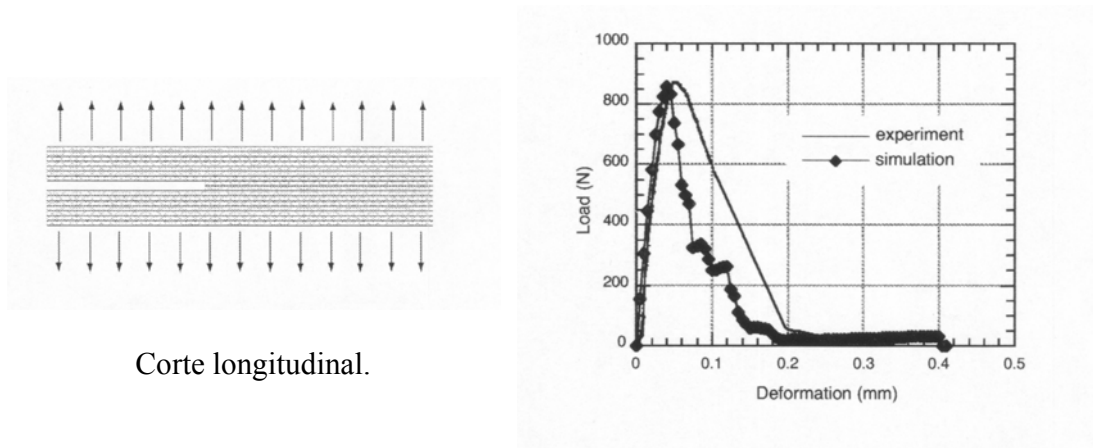


Figura 8 – Simulação da tração normal às fibras da madeira. Fonte: PERRINE (2002).



Corte longitudinal.

Figura 9 – Simulação da tração normal às fibras da madeira com a presença de uma fenda. Fonte: PERRINE (2002).

2.3 Otimização

O emprego de métodos de otimização na engenharia de estruturas surgiu na década de 40 do século findo, com o Método de Falha Simultânea, desenvolvido anteriormente ao surgimento do computador. Este método pressupõe as restrições que serão críticas no projeto ótimo, sendo restrito às formas estruturais simples com um estado único de carregamento.

Os métodos de otimização na engenharia de estruturas foram desenvolvidos com o intuito de se transformar os procedimentos empíricos de cálculo (baseados em tentativa e erro), utilizados por engenheiros no dimensionamento de estruturas, em critérios de decisão baseados em técnicas de otimização. A expansão no desenvolvimento de técnicas de otimização aplicadas à análise de projetos estruturais deu-se em 1960, quando o computador já começara a ser uma ferramenta de uso comum.

As técnicas de otimização (programação linear ou não linear) são então desenvolvidas para resolverem problemas com ou sem a presença de restrições, onde estas restrições eram relações matemáticas de igualdade, ou, desigualdade, que limitavam as variáveis de projeto a uma região admissível.

Atualmente, os algoritmos de otimização existentes podem ser classificados como estocásticos, analíticos e de busca exaustiva ,ou, aleatória.

O primeiro fundamenta-se na análise de fenômenos físicos, utilizando-se conceitos matemáticos de probabilidade na sua interpretação. Como exemplo, os Algoritmos Genéticos (AGs), dentre outros algoritmos pertencentes a esta classe (Monte Carlo, Simulated Annealing,etc), cujo desenvolvimento fundamenta-se na teoria da seleção natural de Charles Darwin.

O segundo fundamenta-se em conceitos matemáticos advindos do cálculo diferencial, onde a busca pelos extremos da função objetivo é realizada por intermédio de derivadas, como é o caso do Método dos Gradientes, do Método de Newton, entre outros.

O terceiro fundamenta-se na geração de valores iniciais (aleatórios ou não) aplicados à função objetivo, e, com posse desse valor, estipula-se uma nova estimativa, de maneira que a solução ótima do problema seja encontrada.

A pesquisa bibliográfica realizada com relação ao presente tema tem como objetivo apresentar algumas aplicações das técnicas de otimização à resolução de problemas referentes à engenharia de estruturas.

ALVARENGA & ANTUNES (1994) desenvolveram um programa baseado em técnicas de otimização para a determinação do peso ótimo em estruturas do tipo treliça, tanto plana como espacial.

SOARES & EL DEBS (1997) desenvolveram um modelo matemático de otimização de seções transversais para vigas de concreto armado aplicado a pavimentos formados por vigas e/ou lajes, com o intuito de determinar o custo mínimo da estrutura. A função objetivo contabiliza o volume do concreto, a área de fôrma e o peso das armaduras, estando o problema sujeito a algumas restrições, tais como a flecha máxima admitida, a máxima taxa de armadura de compressão em relação à tração e a máxima taxa geométrica de armadura.

RIGO (1999) aplicou algumas técnicas de otimização, tais como o Método dos Gradientes, de Newton e Quase Newton para a análise do comportamento não linear em estruturas concebidas por elementos reticulados, tais como barras de treliça, vigas e pórticos.

AGUIAR (2004) e (2006) utilizou o Método das Penalidades como restrição no potencial de energia quadrático em problemas rotacionalmente simétricos e anisotrópicos, planos (anisotropia cilíndrica) e tridimensionais (anisotropia esférica) respectivamente, ambos submetidos a um estado de pressão uniforme, impedindo-se o problema da auto-intersecção advinda da solução exata da Teoria da Elasticidade Linear clássica para os dois casos.

Com relação aos algoritmos estocásticos, CHEUNG *et al.* (2004) utilizaram os algoritmos genéticos para a determinação dos parâmetros elásticos (E_x , E_y e G_{xy}) de uma placa ortotrópica através da calibração de um modelo numérico com resultados de

deslocamentos (obtidos por um programa de análise de placas ortotrópicas), utilizando o Método de Análise Inversa. Os resultados obtidos nesse trabalho comprovam a grande eficiência dos AGs na determinação de tais variáveis.

Outros trabalhos envolvendo a aplicação dos AGs na engenharia de estruturas podem ser citados, tais como os de ARGOLO (2000), SILVA (2001), OLIVIERI (2004), entre outros.

2.4 Conclusões da Revisão Bibliográfica

Com relação às técnicas de otimização aplicadas pela engenharia de estruturas no Brasil, o seu emprego é, em maior parte, referente às estruturas de concreto.

Dentre os trabalhos nacionais e internacionais pesquisados com razoável amplitude, bem como nos documentos normativos técnicos nacionais e internacionais referentes a peças roliças estruturais de madeira, nada foi encontrado sobre a influência das irregularidades existentes na geometria do elemento na determinação do seu módulo de elasticidade longitudinal.

Por esse motivo, justifica-se a originalidade da abordagem dada ao tema aqui tratado.



FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO

3.1 Formulação do Elemento Finito segundo a Teoria de Bernoulli

O elemento finito segundo as hipóteses de Bernoulli é desenvolvido em função da aplicação do MEF no PTV.

Para o elemento estrutural ilustrado na figura 10, o PTV é expresso pela equação (7).

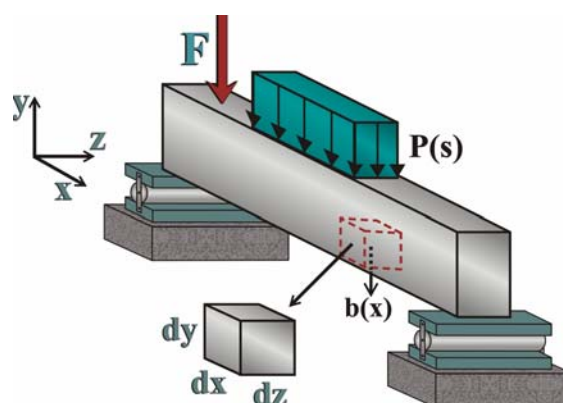


Figura 10 – Elemento estrutural.

$$\Delta_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{F} + \int_V \Delta(\mathbf{x})_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV + \int_A \Delta(\mathbf{s})_{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{P}(\mathbf{s}) dA = \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})_{\mathbf{v}} \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) dV \quad (7)$$

onde:

dV – volume do elemento de dimensões infinitesimais;

dA – área de superfície com dimensões infinitesimais;

$\mathbf{P}(\mathbf{s})$ – força de superfície;

\mathbf{F} – força pontual;

$\mathbf{b}(\mathbf{x})$ – força por unidade de volume;

$\Delta_{\mathbf{v}}$ – deslocamentos virtuais pontuais;

$\Delta(\mathbf{x})_{\mathbf{v}}$ – deslocamentos virtuais oriundos das forças de volume;

$\Delta(\mathbf{s})_{\mathbf{v}}$ – deslocamentos virtuais oriundos das forças de superfície;

$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$ – deformações virtuais;

$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ – tensões.

O primeiro membro da equação (7) expressa o trabalho ou a energia segundo as ações externas (forças) e o segundo membro, a energia interna do corpo ou a sua energia de deformação.

Para a aplicação do PTV ao elemento finito (barra de viga), o conhecimento das hipóteses geométricas responsáveis por descrever o seu campo de deformações torna-se necessário.

A deformação do elemento de viga, segundo a geometria, está associada à curvatura, expressa por:

$$k = \frac{V''(x)}{\sqrt[2]{(1+V'(x)^2)^3}} \quad (8)$$

em que:

k – curvatura, que depende dos deslocamentos da viga;

$V(x)$ – função que representa os deslocamentos da viga no ponto x .

Para pequenas rotações ($V'(x) \cong 0$) e pequenos deslocamentos (teoria de primeira ordem), a curvatura fica expressa por:

$$k = V''(x) \quad (9)$$

A deformação de um elemento de viga de tamanho infinitesimal sujeito às hipóteses de Bernoulli e restrito a pequenos deslocamentos é ilustrada pela figura 11, e expressa pela equação (10).

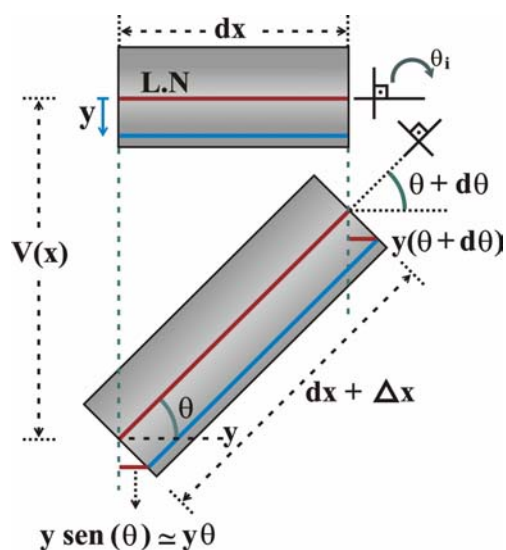


Figura 11 – Deformação longitudinal em um elemento de viga de dimensões infinitesimais.

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{dx}$$

$$\varepsilon_x = \frac{y\theta - y(\theta + d\theta)}{dx} = \frac{-yd\theta}{dx} = -y \left(\frac{d\theta}{dx} \right)$$

$$\varepsilon_x = -yV''(x) \tag{10}$$

A relação constitutiva para o elemento de viga, admitindo-se que o material seja solicitado dentro do regime elástico linear, é expressa por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \Rightarrow \sigma_x = E\varepsilon_x \tag{11}$$

em que:

$\boldsymbol{\sigma}$ – tensor das tensões;

\mathbf{D} – tensor de elasticidade infinitesimal;

σ_x – tensão atuante na direção do eixo “x” no elemento finito (barra de viga);

ε_x – deformação medida na direção do eixo “x” do elemento finito (barra de viga);

E – módulo de elasticidade longitudinal.

A formulação do elemento finito de viga segundo as hipóteses de Bernoulli é desenvolvida mediante a aplicação das funções de forma do MEF no PTV.

O elemento finito utilizado para a análise do módulo de elasticidade longitudinal neste trabalho possui dois nós e quatro graus de liberdade, composto por duas translações e duas rotações, como ilustra a figura 12.

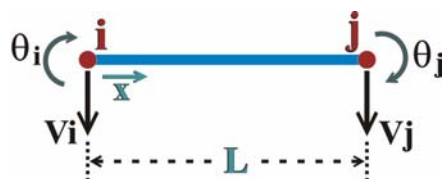


Figura 12 – Graus de liberdade do elemento finito.

A função de forma adotada para o problema é um polinômio do terceiro grau. Este polinômio possui quatro coeficientes, representando os graus de liberdade para o elemento de viga. O polinômio é expresso por:

$$\phi(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (12)$$

O objetivo desta função consiste em interpolar o campo de deslocamentos no interior do elemento finito, em função dos seus deslocamentos nodais.

Como o elemento finito possui quatro graus de liberdade, a função de aproximação do campo de deslocamentos ao longo do seu domínio é constituída de quatro parcelas, expressas pela equação (13).

$$V_{ap}(x) = V_i\phi_1(x) + \theta_i\phi_2(x) + V_j\phi_3(x) + \theta_j\phi_4(x) \quad (13)$$

em que $V_{ap}(x)$ é a função de aproximação de deslocamentos.

Os coeficientes para as quatro funções de forma, contidas na função aproximativa do campo de deslocamentos, são determinados mediante a aplicação da técnica de elementos finitos, que consiste em atribuir um valor de magnitude unitária a um dos graus de liberdade do elemento (deslocamento unitário), mantendo-se os demais nulos.

A função aproximativa dos deslocamentos segundo a técnica de elementos finitos é ilustrada na figura 13.

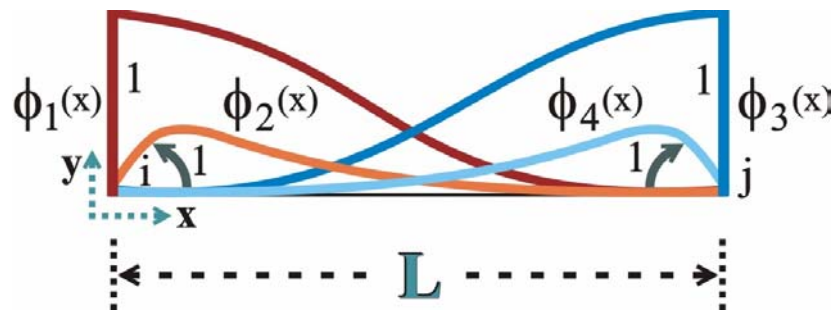


Figura 13 – Função aproximativa de deslocamentos segundo o MEF.

As quatro funções de forma determinadas mediante a técnica de elementos finitos são expressas pelas equações (14), (15), (16) e (17).

$$\text{para : } \begin{cases} \phi_1(0) = 1 \\ \phi_1'(0) = 0 \\ \phi_1(h) = 0 \\ \phi_1'(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \phi_1(x) = \frac{2}{h^3}x^3 - \frac{3}{h^2}x^2 + 1 \quad (14)$$

$$\text{para : } \begin{cases} \phi_2(0) = 0 \\ \phi_2'(0) = 1 \\ \phi_2(h) = 0 \\ \phi_2'(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \phi_2(x) = \frac{1}{h^2}x^3 - \frac{2}{h}x^2 + x \quad (15)$$

$$\text{para : } \begin{cases} \phi_3(0) = 0 \\ \phi_3'(0) = 0 \\ \phi_3(h) = 1 \\ \phi_3'(h) = 0 \end{cases} \Rightarrow \phi_3(x) = \frac{-2}{h^3}x^3 + \frac{3}{h^2}x^2 \quad (16)$$

$$\text{para : } \begin{cases} \phi_4(0) = 0 \\ \phi_4'(0) = 0 \\ \phi_4(h) = 0 \\ \phi_4'(h) = 1 \end{cases} \Rightarrow \phi_4(x) = \frac{1}{h^2}x^3 - \frac{1}{h}x^2 \quad (17)$$

A equação (13) pode ser escrita na forma matricial

$$V_{ap}(x) = [\phi_1(x) \quad \phi_2(x) \quad \phi_3(x) \quad \phi_4(x)] \begin{bmatrix} V_i \\ \theta_i \\ V_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (18)$$

A equação (18), de forma compacta, é expressa por:

$$V_{ap}(x) = [N(x)]\{\Delta\} \quad (19)$$

A matriz das funções de forma $[N(x)]$ da equação (19) permite determinar os deslocamentos ao longo do elemento finito em função dos seus deslocamentos nodais.

De acordo com a equação (10), as deformações para o elemento de viga são calculadas mediante a segunda derivada da sua função de deslocamentos. Sendo assim, o campo de deformações ao longo do elemento finito de viga é determinado calculando-se a segunda derivada de sua função aproximativa de deslocamentos, expressa por:

$$\varepsilon_{ap}(x) = V_i\phi_1''(x) + \theta_i\phi_2''(x) + V_j\phi_3''(x) + \theta_j\phi_4''(x) \quad (20)$$

A equação (20) na forma matricial é expressa por:

$$\varepsilon_{ap}(x) = [\phi_1''(x) \quad \phi_2''(x) \quad \phi_3''(x) \quad \phi_4''(x)] \begin{bmatrix} V_i \\ \theta_i \\ V_j \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (21)$$

A equação (21), de forma compacta, pode ser reescrita como:

$$\varepsilon_{ap}(x) = [B(x)]\{\Delta\} \quad (22)$$

A matriz $[B(x)]$ é chamada de matriz deslocamento-deformação e permite determinar as deformações ao longo do elemento finito em função dos seus deslocamentos nodais.

O PTV pode ser reescrito, de acordo com a equação (23), desenvolvida pela substituição das equações (11), (19) e (20) na equação (7).

$$\Delta_v \cdot F + \int_V (N(x)\Delta_v) \cdot b(x)dV + \int_A (N(x)\Delta_v) \cdot P(s)dA = \int_V (B(x)\Delta_v) \cdot D \cdot B(x) \cdot \Delta dV \quad (23)$$

Colocando-se Δ_v em evidência na equação (23) temos:

$$F + \int_V N(x) \cdot b(x)dV + \int_A N(x) \cdot P(s)dA = \left(\int_V B(x) \cdot D \cdot B(x)dV \right) \cdot \Delta \quad (24)$$

O primeiro membro da equação (24), na forma matricial, representa o vetor das forças equivalentes nodais atuantes no elemento estrutural, e o segundo membro, o produto da matriz de rigidez do elemento finito pelo seu vetor de deslocamentos nodais, como indicado na equação (25).

$$\{F_{eq}\} = [K_e]\{U_e\} \quad (25)$$

A matriz de rigidez, para um elemento finito qualquer pode ser escrita então como:

$$[K_e] = \int_V B(x) \cdot D \cdot B(x)dV \quad (26)$$

O vetor de forças equivalentes nodais para um elemento finito qualquer fica, portanto, representado pela equação (27).

$$\{F_{eq}\} = \mathbf{F} + \int_V \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV + \int_A \mathbf{N}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{s}) dA \quad (27)$$

Aplicando-se as equações (10) e (11) na equação (26), a matriz de rigidez para o elemento de viga é obtida, como expressa a equação (28).

$$[K_e] = \int_0^L \int_A \left(-y V_{ap}''(x) \right)^t E \left(-y V_{ap}''(x) \right) dA dx$$

$$[K_e] = \int_0^L E V_{ap}''(x)^t \left(\int_A y^2 dA \right) V_{ap}''(x) dx$$

$$[K_e] = \int_0^L E I V_{ap}''(x)^t V_{ap}''(x) dx$$

$$[K_e] = \int_0^L E I \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) dx \quad (28)$$

A equação (28) pode ser reescrita como:

$$[K_e] = E \int_0^L \mathbf{I} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}) dx \quad (29)$$

Atribuindo-se as derivadas das funções de forma contidas na matriz deformação deslocamento, a equação (29) pode ser reescrita como expressa a equação (30).

$$[K_e] = E \int_0^L \mathbf{I} \left(\begin{bmatrix} \phi_1''(x) \\ \phi_2''(x) \\ \phi_3''(x) \\ \phi_4''(x) \end{bmatrix} \left[\phi_1''(x) \quad \phi_2''(x) \quad \phi_3''(x) \quad \phi_4''(x) \right] \right) dx \quad (30)$$

O vetor das forças equivalentes nodais para a determinação do MOE, contabiliza apenas as forças pontuais aplicadas diretamente nos nós do elemento finito (em função

do esquema estrutural de ensaio), expresso pela equação (31), desprezando-se as forças de volume ou o peso próprio do elemento estrutural.

$$\{F_{eq}\} = \begin{bmatrix} F_i \\ 0 \\ F_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

em que:

F_i – força concentrada atuando no nó “i” do elemento finito;

F_j – força concentrada atuando no nó “j” do elemento finito.

3.1.1 Formulação do Elemento Finito com Aproximação Linear da Geometria

A figura 14 ilustra a forma de aproximação linear da geometria para um trecho da peça roliça de madeira, em que d_i e d_j são, respectivamente, os diâmetros à esquerda e à direita do elemento finito.

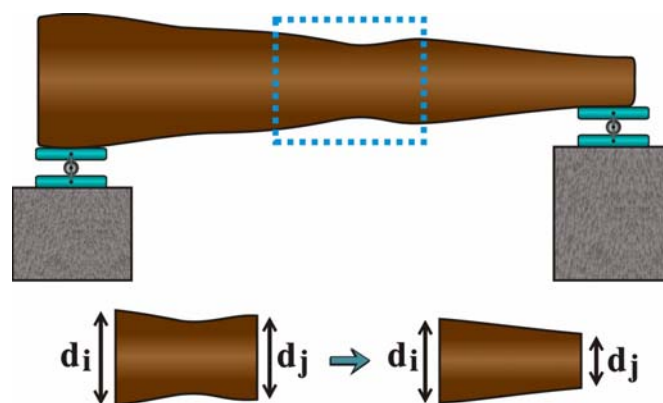


Figura 14 – Aproximação linear da geometria.

O momento de inércia para seções transversais de geometria circular é expresso por:

$$I = \frac{\pi.d^4}{64} = \frac{\pi.r^4}{4} \quad (32)$$

em que:

I – momento de inércia;

d – diâmetro;

r – raio.

Considerando-se a aproximação linear para a geometria ao longo do elemento finito, a equação (33) mostra a relação entre a variação do raio em função do seu comprimento, como ilustra a figura 15.

$$r(x) = \left(\frac{r_f - r_i}{L} \right) x + r_i \quad (33)$$

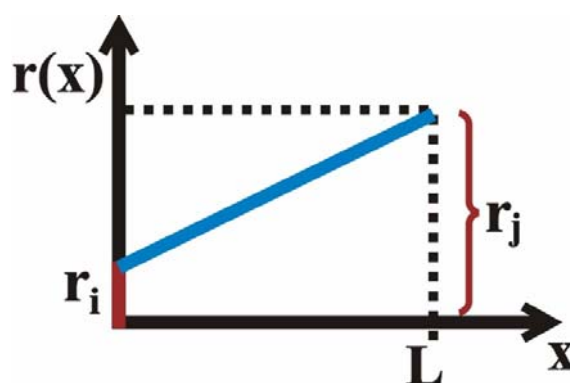


Figura 15 – Função de aproximação linear para a geometria do elemento finito.

A variação do momento de inércia ao longo do elemento finito é determinada substituindo-se a equação (33) na (32), obtendo-se a equação (34).

$$I(x) = \frac{\pi}{4} \left[\left(\frac{r_f - r_i}{L} \right) x + r_i \right]^4 \quad (34)$$

Os termos da matriz de rigidez do elemento finito (aproximação linear da geometria) são obtidos mediante a substituição da equação (34) na equação (30), expressos pelas equações dadas abaixo:

$$K_{11} = \frac{3}{35} E \frac{\pi}{L^3} (11r_i^4 + 5r_i^3r_f + 3r_i^2r_f^2 + 5r_i r_f^3 + 11r_f^4) \quad (35)$$

$$K_{12} = K_{21} = \frac{1}{70} E \frac{\pi}{L^2} (47r_i^4 + 22r_i^3r_f + 9r_i^2r_f^2 + 8r_i r_f^3 + 19r_f^4) \quad (36)$$

$$K_{13} = K_{31} = \frac{-3}{35} E \frac{\pi}{L^3} (11r_i^4 + 5r_i^3r_f + 3r_i^2r_f^2 + 5r_i r_f^3 + 11r_f^4) \quad (37)$$

$$K_{14} = K_{41} = \frac{1}{70} E \frac{\pi}{L^2} (19r_i^4 + 8r_i^3r_f + 9r_i^2r_f^2 + 22r_i r_f^3 + 47r_f^4) \quad (38)$$

$$K_{22} = \frac{1}{35} E \frac{\pi}{L} (17r_i^4 + 9r_i^3r_f + 4r_i^2r_f^2 + 2r_i r_f^3 + 3r_f^4) \quad (39)$$

$$K_{23} = K_{32} = \frac{-1}{70} E \frac{\pi}{L^2} (47r_i^4 + 22r_i^3r_f + 9r_i^2r_f^2 + 8r_i r_f^3 + 19r_f^4) \quad (40)$$

$$K_{24} = K_{42} = \frac{1}{70} E \frac{\pi}{L} (13r_i^4 + 4r_i^3r_f + r_i^2r_f^2 + 4r_i r_f^3 + 13r_f^4) \quad (41)$$

$$K_{33} = \frac{3}{35} E \frac{\pi}{L^3} (11r_i^4 + 5r_i^3r_f + 3r_i^2r_f^2 + 5r_i r_f^3 + 11r_f^4) \quad (42)$$

$$K_{34} = K_{43} = \frac{-1}{70} E \frac{\pi}{L^2} (19r_i^4 + 8r_i^3r_f + 9r_i^2r_f^2 + 22r_i r_f^3 + 47r_f^4) \quad (43)$$

$$K_{44} = \frac{1}{35} E \frac{\pi}{L} (3r_i^4 + 2r_i^3r_f + 4r_i^2r_f^2 + 9r_i r_f^3 + 17r_f^4) \quad (44)$$



ASPECTOS NUMÉRICOS DE OTIMIZAÇÃO

4.1 Método dos Mínimos Quadrados

O problema de Mínimos Quadrados é definido como:

$$\min \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{V}(\mathbf{x})\|, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R} \quad (45)$$

onde:

$\mathbf{f}(\mathbf{x})$ – função objetivo;

$\|(\cdot)\|$ – norma euclidiana;

$\mathbf{V}(\mathbf{x})$ – função residual.

A função objetivo utilizada para o cálculo do valor ótimo do módulo de elasticidade longitudinal para peças estruturais roliças de madeira está fundamentada no Método dos Mínimos Quadrados.

4.2 Método de Newton

O método de Newton está fundamentado no desenvolvimento da função f , por Taylor, em torno de um ponto \mathbf{x}^k (obtendo-se uma aproximação quadrática), e que, sendo este um método iterativo, a nova solução é obtida pelo mínimo da quadrática, como ilustra a figura 16.

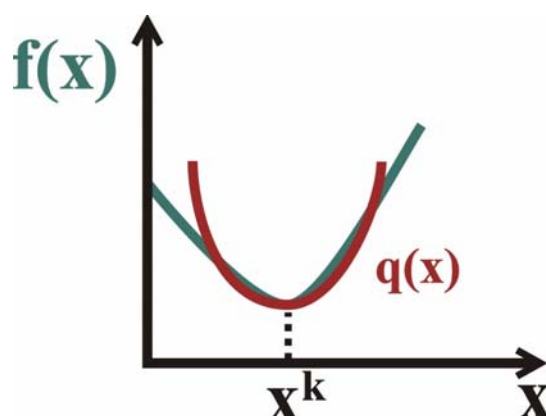


Figura 16 – Aproximação por uma função quadrática pelo Método de Newton.

A aproximação de Taylor para a função quadrática é expressa por:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)^t \nabla^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) = \mathbf{q}(\mathbf{x}) \quad (46)$$

O ponto \mathbf{x}^{k+1} é determinado pelo mínimo de $q(x)$.

Determina-se primeiramente o gradiente da função $q(x)$:

$$\nabla \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) + \nabla^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) \quad (47)$$

Igualando-se o gradiente da função a zero, tem-se:

$$\nabla \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \nabla^2 \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) = -\nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \quad (48)$$

Multiplicando-se a equação (48) por $[\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1}$, tem-se:

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}^k = -[\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (49)$$

onde, a solução de $\nabla q(\mathbf{x}) = 0$ é dada por:

$$\mathbf{x}^{k+1} \equiv \mathbf{x} = \mathbf{x}^k - [\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (50)$$

Fazendo-se:

$$\mathbf{d}_k = -[\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)]^{-1} \nabla f(\mathbf{x}^k)$$

a equação (50) pode ser escrita como:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{d}_k \quad (51)$$

Na prática, faz-se:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{d}_k \quad (52)$$

em que o passo α_k é determinado de maneira a satisfazer:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) < \mathbf{f}(\mathbf{x}^k) \quad (53)$$

ao longo da direção \mathbf{d}_k .

A função objetivo elaborada para a determinação do valor ótimo do MOE é quadrática, segundo o Método dos Mínimos Quadrados. Isto implica que o método de Newton converge para o valor de mínimo da função em apenas uma iteração.



MATERIAIS E MÉTODOS

5.1 Materiais

5.1.1 Madeira Roliça: Aspectos Gerais

As madeiras do gênero *Pinus* e *Eucalyptus* são adotadas para a análise do MOE, neste trabalho, em razão ao seu desempenho e aplicação como elemento estrutural, e também, segundo KRONKA (2002), por constituírem respectivamente 21% e 79% da área total de reflorestamento do Estado de São Paulo.

As madeiras do gênero *Pinus* foram doadas pelo Horto Florestal de Itirapina, enquanto que as madeiras da espécie *Eucalyptus citriodora* foram doadas pela empresa IRPA de São Carlos e foram extraídas de um lote de madeiras destinadas a servirem como postes para rede de energia elétrica.

As madeiras da espécie *Eucalyptus citriodora* possuem uma geometria mais regular do que a madeira do gênero *Pinus*, estando mais próxima à geometria de cone. Em se tratando da forma geométrica circular da seção transversal das peças de madeira

roliça, as madeiras da espécie *Eucalyptus citriodora* são mais irregulares quando comparadas às peças de madeira do gênero *Pinus*, como ilustram, respectivamente, as figuras 17 e 18.



Figura 17 – Peça roliça estrutural de madeira da espécie *Eucalyptus citriodora*.



Figura 18 – Peça roliça estrutural de madeira do gênero *Pinus*.

As peças de madeira roliça do gênero *Pinus* foram selecionadas (figura 19) de um lote de árvores destinado à extração de suas resinas, possuindo teor de umidade acima do ponto de saturação das fibras.



Figura 19 – Árvore do gênero *Pinus* selecionada para a análise do MOE.

Por ser peça estrutural, a madeira foi solicitada dentro do seu regime elástico linear e restrita a deslocamentos da ordem $L/200$ (segundo NBR 7190/1997), onde L é o comprimento da peça.

As peças roliças de madeira respeitam a relação $L \geq 21d_{eq}$, desprezando-se as deformações por cisalhamento (Teoria de Vigas de Timoshenko), sendo d_{eq} o diâmetro equivalente da peça, medido no ponto de aplicação da força (em $L/2$), segundo ensaio de flexão estática de três pontos.

Para a análise do MOE, foram utilizadas 12 árvores da espécie *Pinus elliottii*, 12 árvores da espécie *Pinus caribaea* var. *caribaea*, com dimensões de aproximadamente 15 metros de comprimento cada e diâmetro médio à altura do peito igual a 25 cm, sendo

que cada árvore deu origem a duas peças de dimensões estruturais com 7,50 metros. Também, foram utilizadas 24 peças de madeira roliça da espécie *Eucalyptus citriodora*, com aproximadamente 9 metros de comprimento cada.

5.2 Métodos

5.2.1 Preparação das Peças Roliças Estruturais de Madeira para o Ensaio de Flexão

Inicialmente, as peças roliças estruturais de madeira foram retiradas, uma a uma, de um lote de peças empilhadas (figura 20), como ilustra a figura 21.



Figura 20 – Lote de peças roliças de madeira da espécie *Eucalyptus citriodora*.



Figura 21 – Madeira retirada de um lote de peças roliças.

Logo após a retirada da madeira do lote, esta foi conduzida (figura 22) até o trilho de suspensão (figura 23), com capacidade de carga de uma tonelada, e encaminhada ao pórtico (figura 24) para o ensaio de flexão estática.



Figura 22 – Condução da peça roliça de madeira ao trilho de suspensão.



Figura 23 – Trilho de suspensão.



Figura 24 – Pórtico utilizado para a realização dos ensaios de flexão.

Antes da colocação da peça roliça de madeira nos apoios para o ensaio de flexão, o comprimento L do elemento foi medido de maneira a se posicionar o meio da peça coincidente com o ponto de aplicação da força.

Depois de posicionada a peça no dispositivo para o ensaio de flexão, em $L/2$ mediu-se o perímetro da circunferência da peça (figura 25) e calculou-se o valor do diâmetro neste ponto (d_{eq}), de maneira a se determinar o comprimento do elemento ($L = 24 d_{eq}$), desprovido da ação do cisalhamento no cálculo das suas deflexões.



Figura 25 – Comprimento da circunferência do elemento roliço medido em $L/2$.

Segundo a metodologia de cálculo aqui desenvolvida para a determinação do módulo de elasticidade em peças roliças estruturais de madeira (ver próxima secção), foram medidos, além da circunferência para o cálculo do diâmetro equivalente do elemento, outros oito valores de circunferência. Neste trabalho, também foi avaliado, segundo a metodologia de cálculo mencionada acima, a influência da posição da peça no ensaio de flexão na obtenção do seu MOE. Os resultados dos deslocamentos medidos experimentalmente (através de relógios comparadores), com e sem a mudança da posição da peça no ensaio de flexão, assim como os valores das forças, comprimento e

circunferências medidas ao longo do elemento, encontram-se nos apêndices A e b deste Trabalho.

5.2.2. Determinação do Módulo de Elasticidade Longitudinal com o Uso do Diâmetro Equivalente da Peça (E_{deq})

A figura 26 ilustra o esquema estrutural de ensaio utilizado na determinação do módulo de elasticidade longitudinal das peças roliças de madeira.

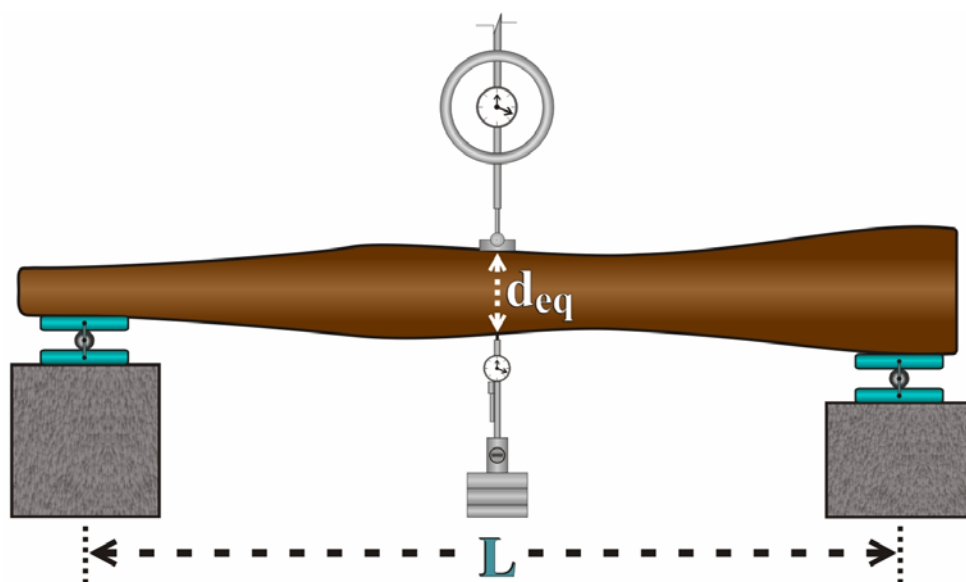


Figura 26 – Ensaio de flexão de três pontos.

O esquema estrutural de ensaio ilustrado na figura 26 é o mesmo proposto pela Norma ASTM D4761-96, ensaio de flexão de três pontos.

O módulo de elasticidade foi calculado por intermédio da equação (5) (capítulo 2), considerando-se para o cálculo do momento de inércia da peça o seu diâmetro equivalente, assumindo-se que as seções das peças estruturais são perfeitamente

circulares, que os diâmetros variam linearmente no comprimento (figura 27) e que o deslocamento máximo da peça ocorre no ponto de aplicação da força (pequena conicidade).

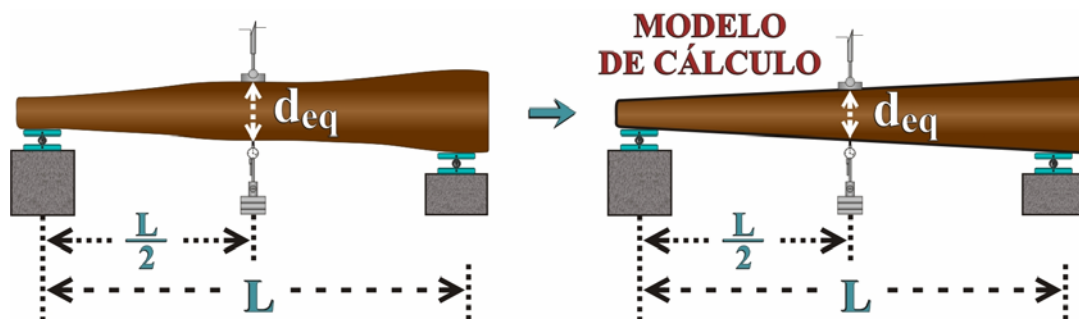


Figura 27 – Diâmetro equivalente para a determinação do E_{deq} .

5.2.3 Determinação do Módulo de Elasticidade Longitudinal Ótimo (E_o)

A figura 28 ilustra o esquema estrutural de ensaio utilizado na determinação do módulo de elasticidade ótimo das peças roliças de madeira.

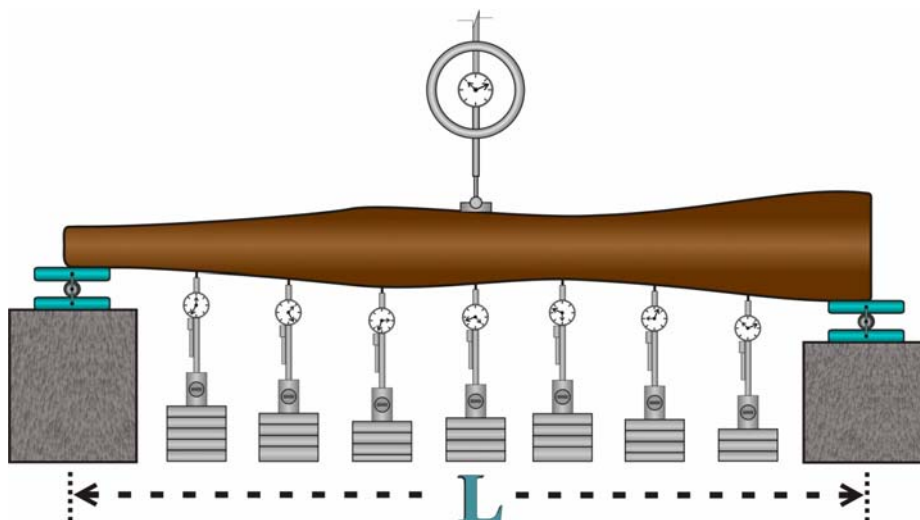


Figura 28 – Ensaio alternativo para a determinação E_0 .

No esquema estrutural de ensaio, ilustrado na figura 28, são colocados sete relógios comparadores, localizados a uma distância de $L/8$ uns dos outros ao longo da peça roliça.

Para a determinação do E_0 , com aproximação linear da geometria para cada elemento finito, foram medidos nove valores de perímetro das circunferências e, conseqüentemente, calculados os seus respectivos diâmetros ao longo da peça de madeira, sendo dois localizados nas extremidades da peça que encontram-se apoiadas (base e topo), e os demais, nos pontos onde foram localizados os relógios comparadores, como ilustra a figura 29.

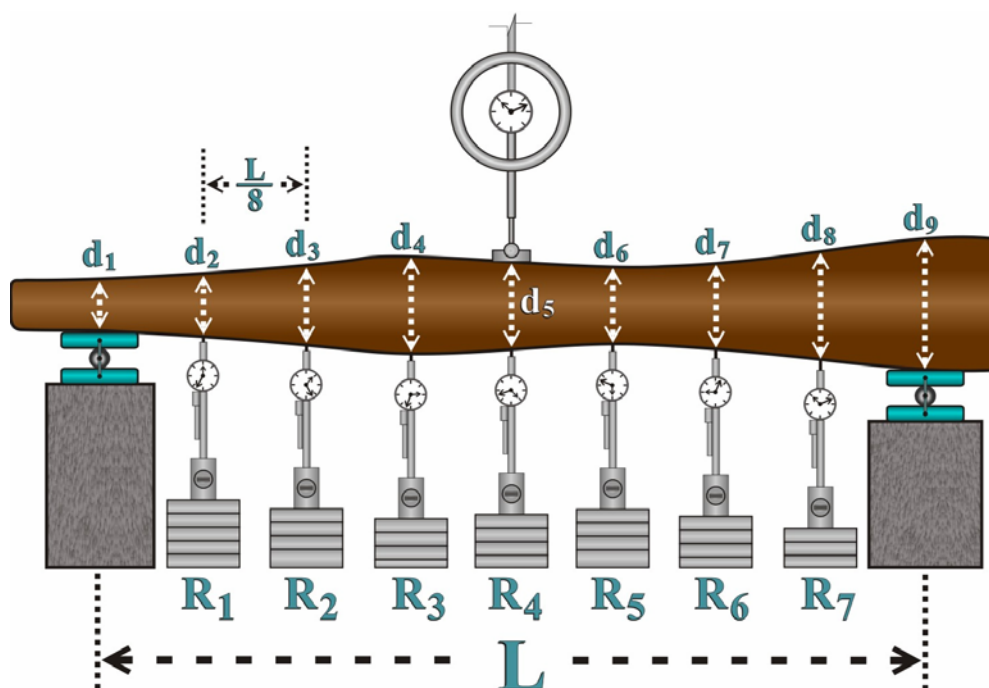


Figura 29 – Aproximação linear da geometria.

Na figura 29, os parâmetros representam:

d_i – diâmetros da seção transversal medidos ao longo da peça roliça nos pontos em estudo;

R_i – relógios comparadores localizados ao longo da peça roliça de madeira.

Utilizando-se o Método de Análise Inversa, os valores de deslocamentos, assim como os valores dos diâmetros medidos ao longo do elemento (em função da forma de aproximação da sua geometria) foram fornecidos a um programa computacional, denominado EOTM, desenvolvido neste trabalho, com o objetivo de se calcular o valor ótimo do módulo de elasticidade da peça.

O programa EOTM, tendo por base os fundamentos do MEF, apresentado no cap. 3, determina um vetor de deslocamentos (numérico), contabilizando-se a influência das irregularidades existentes na geometria da peça e tendo como variável dependente, o módulo de elasticidade do elemento estrutural.

Com posse do vetor de deslocamentos determinados pelo programa, e do vetor de deslocamentos experimentais, uma função foi construída, fundamentada no Método dos Mínimos Quadrados (equação 53), cujo objetivo foi determinar o valor do módulo de elasticidade para que o resíduo gerado por ambas as soluções, numérica e experimental, fosse mínimo.

O módulo de elasticidade foi obtido mediante a minimização da equação (54) dada abaixo.

$$f(E) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(U_i^{(e)} - U_i^{(n)} \right)^2 \quad (54)$$

onde:

$U^{(e)}$ – vetor de deslocamentos experimentais;

$U^{(n)}$ – vetor de deslocamentos numéricos.

Como já comentado no capítulo 2, a aplicação do MEF na análise do comportamento linear de uma estrutura consistiu em se avaliar o seu desempenho mecânico por intermédio da construção e resolução de um sistema de equações lineares que, na sua forma matricial, é dado por:

$$[K]\{U\} = \{F\}$$
$$[K]\{U\} = \{F\} \Rightarrow \{U\} = [K]^{-1}\{F\} \quad (55)$$

em que:

$[K]$ – matriz de rigidez da estrutura;

$\{U\}$ – vetor dos deslocamentos da estrutura;

$\{F\}$ – vetor das forças pontuais da estrutura.

A matriz de rigidez da estrutura assim como o seu vetor de deslocamentos e de forças equivalentes nodais são construídos segundo a disposição da malha de elementos finitos (incidência de coordenadas entre os elementos) e da numeração dos seus nós.

Para o elemento finito barra de viga, a sua matriz de rigidez (equação 30) e conseqüentemente a matriz de rigidez da estrutura, é composta pelo módulo de elasticidade, momento de inércia e pelo comprimento referente a cada elemento.

Sendo o módulo de elasticidade constante e comum a todos os termos da matriz de rigidez da estrutura, como resposta aos deslocamentos, todas as suas componentes também serão, como expressa a equação:

$$\{U\} = [K]^{-1} \{F\} \Rightarrow \{U\} = \frac{1}{E} [A] \{F\} \quad (56)$$

em que:

[A] – matriz constituída pelo momento de inércia e pelo comprimento de cada elemento finito da estrutura, em que $1/E [A] = [K]^{-1}$;

E – módulo de elasticidade longitudinal do elemento estrutural.

Para o presente trabalho, o momento de inércia de cada elemento finito variou ao longo do seu comprimento, tendo a sua geometria aproximada por uma forma linear, como visto no capítulo 3.

A equação (56) pôde ser reescrita assim:

$$\left\{ U^{(n)} \right\} = \frac{1}{E} \left\{ F^* \right\} \quad (57)$$

em que:

$\{F^*\}$ – vetor constituído pelo momento de inércia, comprimento e forças pontuais atuantes em cada elemento finito da estrutura.

A figura 30 ilustra a idéia da forma em que o Módulo de Elasticidade Ótimo (E_o) foi obtido neste trabalho.

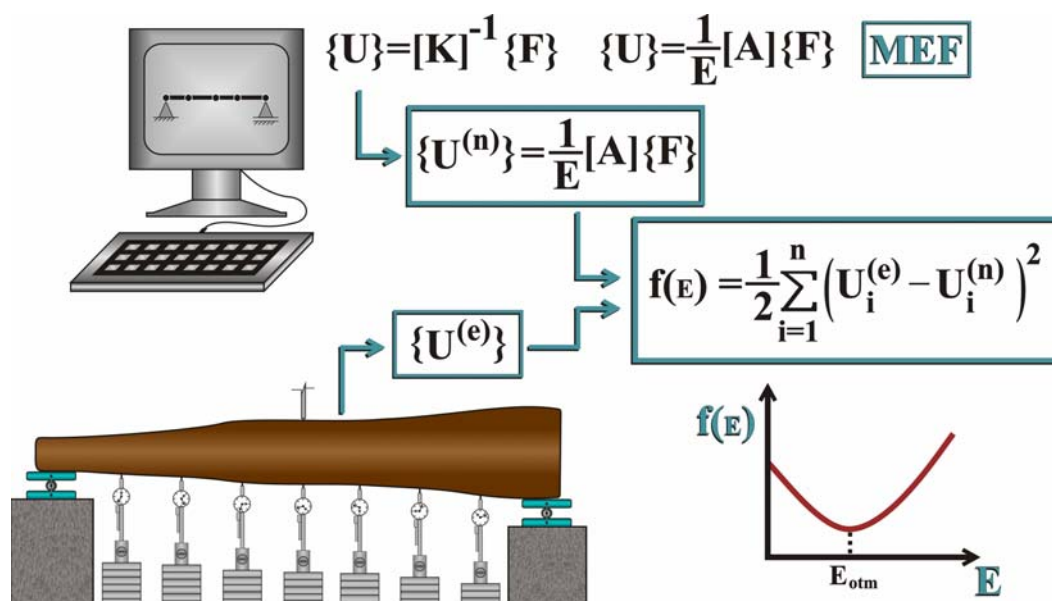


Figura 30 – Determinação do E_{otm} .

De posse da equação (57), a equação (54) pode ser reescrita, chegando-se a:

$$f(E) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\left\{ U_i^{(e)} \right\} - \frac{1}{E} \left\{ F_i^* \right\} \right)^2 \quad (58)$$

Para o esquema prático analisado, o vetor de deslocamentos experimentais (translações) para a forma de aproximação linear da geometria do elemento foi constituído por sete termos, correspondentes aos deslocamentos medidos nos respectivos relógios comparadores, dispostos ao longo da peça estrutural.

Para o vetor de deslocamentos numéricos (programa EOTM), as suas coordenadas referentes à rotação foram desprezadas de maneira que este tivesse a mesma dimensão do vetor de deslocamentos experimentais. As coordenadas de rotação do vetor de deslocamentos numéricos foram desconsideradas na elaboração da função

objetivo em função da dificuldade em se obter estes valores experimentalmente. Esta restrição, em termos da precisão no cálculo do E_0 , foi contornada com o uso de sete relógios comparadores, medindo sete valores de deslocamentos (translações) ao longo da peça.

5.2.4 Influência de Posições Distintas no Ensaio de Flexão, com Rotação de 90°

No ensaio de flexão estática, as peças roliças de madeira foram ensaiadas em duas posições distintas, como ilustra a figura 31, com o objetivo de se verificar a sua influência na determinação do módulo de elasticidade do elemento.

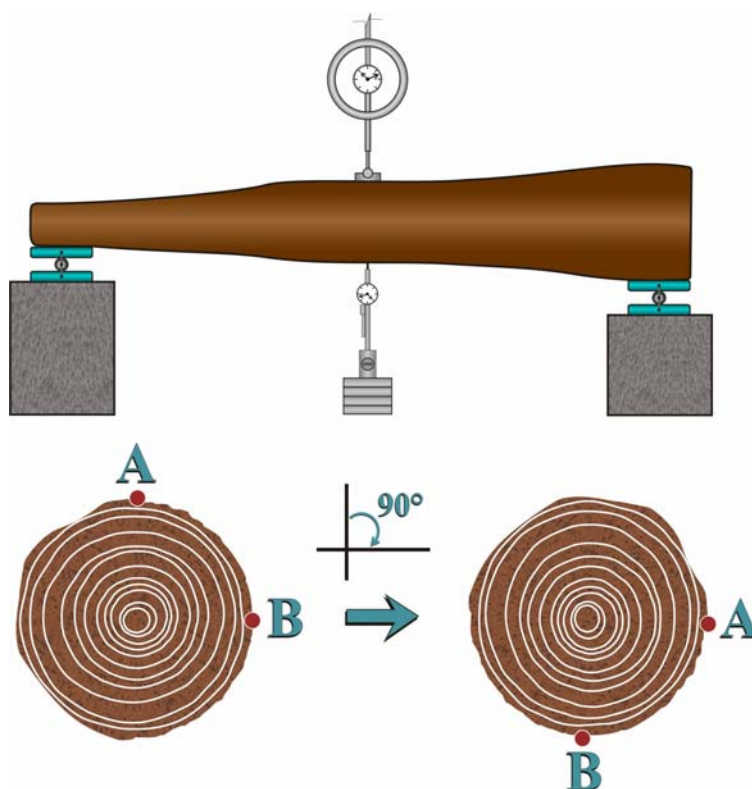


Figura 31 – Posições relativas da peça roliça de madeira no ensaio de flexão.

5.2.4.1 Determinação do Módulo de Elasticidade Longitudinal segundo a Mudança da Posição da Peça (E_{90})

A metodologia utilizada para o cálculo do E_{90} foi a mesma utilizada na determinação do E_{deq} , diferenciando-se apenas pela mudança na posição da peça.

5.2.4.2 Determinação do Módulo de Elasticidade Longitudinal Ótimo segundo a Mudança da Posição da Peça (E_{o90})

A metodologia utilizada para o cálculo do E_{o90} foi a mesma utilizada na determinação do E_o , diferenciando-se apenas pela mudança na posição do elemento estrutural.

5.3 Análise Estatística

A verificação da equivalência estatística entre os valores obtidos do MOE e do MOE ótimo para as peças estruturais de madeira roliça, com e sem a mudança de sua posição, é realizada por intermédio da análise do intervalo de confiança da diferença das médias entre ambos os valores, expresso pela equação:

$$\bar{x}_m - t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S_m}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x}_m + t_{\frac{\alpha}{2}, n-1} \frac{S_m}{\sqrt{n}} \quad (59)$$

em que:

μ – média populacional das diferenças;

\bar{x}_m – média aritmética amostral das diferenças;

n – tamanho da amostra;

S_m – desvio padrão amostral das diferenças;

α – nível de significância;

$t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ – valor tabelado pela distribuição “t” de Student com n-1 graus de liberdade e

nível de significância α .

Para as madeiras do gênero *Pinus* o parâmetro t tabelado é igual a $t_{2,5\%;47} = 2,02$, com 95% de confiabilidade e com grau de liberdade ($v = n-1$) igual a 47, e, para as madeiras da espécie *Eucalyptus*, o parâmetro t tabelado é igual a $t_{2,5\%;23} = 2,069$, com 95% de confiabilidade e com grau de liberdade igual a 23.

Este teste estatístico pôde ser utilizado para o conjunto total de resultados em razão de que os valores de elasticidade E_{deq} , E_o , E_{90} e E_{090} , calculados neste trabalho, foram obtidos de corpos-de-prova estruturais vindos da mesma população.



ASPECTOS COMPUTACIONAIS

6.1 Generalidades

O programa EOTM foi desenvolvido na plataforma do *software* Mathcad versão 2000, em função da sua versatilidade e eficiência em se derivar e integrar funções compostas por termos literais.

Como os deslocamentos medidos experimentalmente na translação (figura 28) tinham o mesmo sentido dos deslocamentos convencionados nos nós do elemento finito (figura 12), os mesmos foram admitidos como positivos no arquivo de entrada do programa.

Os graus de liberdade referentes aos deslocamentos angulares dos nós do elemento finito são desprezados no cálculo da função objetivo, sendo esta, em termos de deslocamentos, dependente apenas dos deslocamentos lineares, assim como visto no capítulo anterior.

6.2 Arquivo de Entrada de Dados para Aproximação Linear da Geometria da Peça

A tabela 1 ilustra um exemplo contendo o arquivo de entrada de dados para a madeira do gênero *Pinus*, objetivando-se uma melhor compreensão na forma de como os seus dados físicos e geométricos pertencentes foram lançados ao programa EOTM.

Tabela 1 – Arquivo de entrada de dados do programa EOTM

| | |
|--|--|
| Entre com o número de nós da estrutura: | |
| Nnos:= 9 | |
| Entre com as coordenadas dos nós da estrutura (em cm): | |
| X – vetor das coordenadas nodais da estrutura. | |
| $\text{No} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ | $\text{X} := \begin{pmatrix} 0 \\ 85.5 \\ 165 \\ 247.5 \\ 330 \\ 412.5 \\ 495 \\ 577.5 \\ 660 \end{pmatrix}$ |
| Entre com os valores das circunferências medidas na estrutura para cada elemento finito (em cm): | |
| Ci – circunferência do nó inicial do elemento finito; | |
| Cf – circunferência do nó final do elemento finito. | |

$$\text{Elemento} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{Ci} := \begin{pmatrix} 77 \\ 75 \\ 73 \\ 71 \\ 70 \\ 67 \\ 65 \\ 62 \end{pmatrix} \quad \text{Cf} := \begin{pmatrix} 75 \\ 73 \\ 71 \\ 70 \\ 67 \\ 65 \\ 62 \\ 60 \end{pmatrix}$$

Entre com o número de nós carregados na estrutura:

Nnoscar:= 1

Entre com a intensidade e posição das forças aplicadas aos nós da estrutura:

Nnoscar – número dos nós carregados;

Fy – força aplicada aos nós (em kN):

Nocar:= 4

Fy:= 4.52

Entre com o número de deslocamentos (translações) medidos ao longo da estrutura:

Ndes:= 7

Entre com a magnitude e a posição dos deslocamentos medidos experimentalmente ao longo da estrutura:

Nodes – nós com deslocamentos medidos experimentalmente;

dexp – valor dos deslocamentos nodais experimentais (em cm).

$$\text{Nodes} := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \qquad \text{dexp} := \begin{pmatrix} 1.220 \\ 1.308 \\ 3.111 \\ 3.330 \\ 3.207 \\ 2.600 \\ 1.494 \end{pmatrix}$$

Entre com o número de nós restritos a deslocamentos na estrutura:

Nnorest:= 2

Entre com as restrições a deslocamentos na estrutura:

Ty – translação;

Rxy – rotação.

Obs: 1 = grau de liberdade restrito

0 = grau de liberdade irrestrito

$$\text{Norest} := \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ty} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Rxy} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A figura 32 ilustra a discretização do problema apresentado no arquivo de entrada de dados do programa.

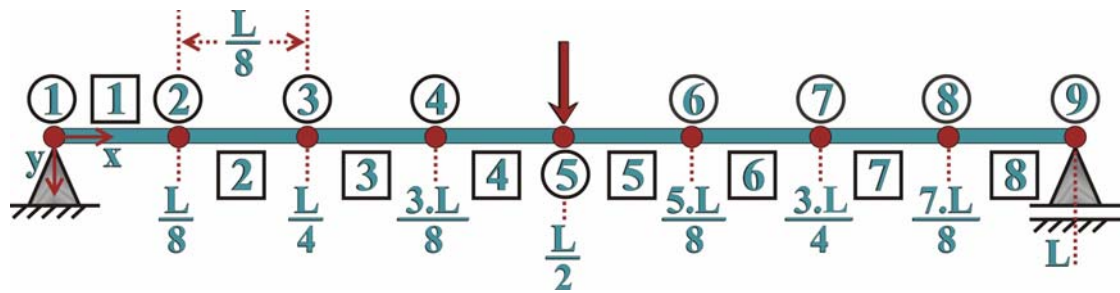


Figura 32 – Discretização do elemento rolíço segundo MEF.



APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

7.1 Classificação dos Corpos-de-Prova Estruturais

As peças roliças estruturais de madeira do gênero *Pinus* são classificadas em função da região da árvore onde foram obtidos os corpos-de-prova, “topo” (T) ou “base” (B), a como ilustra a figura 33.

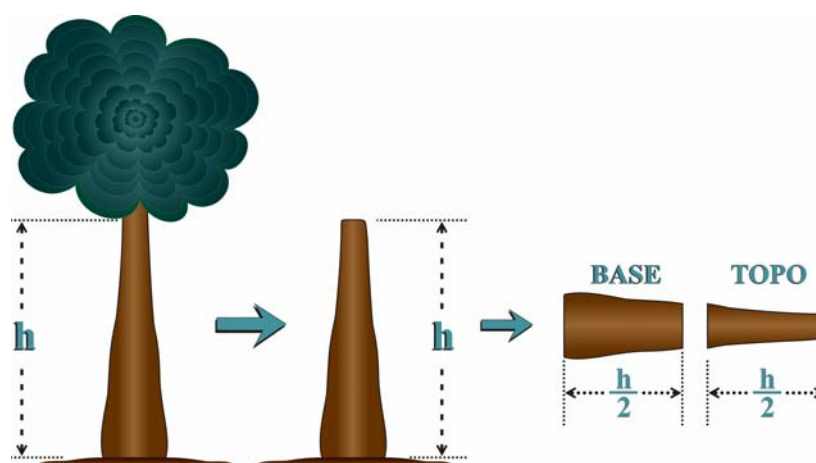


Figura 33 – Classificação das peças estruturais de madeira do gênero *Pinus*.

As peças roliças estruturais de madeira da espécie *Eucalyptus citriodora*, são classificadas aleatoriamente, não se fazendo distinção entre topo e base.

7.2 Valores de Elasticidade para as Peças de Madeira Roliça do Gênero *Pinus*

A tabela 2 apresenta os valores dos módulos de elasticidade E_{deq} , E_o , E_{90} e E_{090} obtidos para as peças do gênero *Pinus*, em que:

CT – corpo-de-prova roliço da espécie *caribaea* var. *caribaea* retirado do topo da árvore;

CB – corpo-de-prova roliço da espécie *caribaea* var. *caribaea* retirado da base da árvore;

ET – corpo-de-prova roliço da espécie *elliottii* retirado do topo da árvore;

EB – corpo-de-prova roliço da espécie *elliottii* retirado da base da árvore.

Tabela 2 – Valores de elasticidade obtidos para as peças roliças estruturais de madeira do gênero *Pinus*.

| Peças | E_{deq} (kN/cm ²) | E_o (kN/cm ²) | E_{90} (kN/cm ²) | E_{090} (kN/cm ²) |
|-------|---------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| CT-1 | 671,93 | 645,84 | 768,55 | 742,33 |
| CT-2 | 845,51 | 851,61 | 915,83 | 838,66 |
| CT-3 | 973,11 | 1.117,20 | 1.015,45 | 973,15 |
| CT-4 | 856,60 | 812,76 | 828,91 | 861,04 |
| CT-5 | 783,73 | 847,40 | 762,00 | 652,39 |
| CT-6 | 778,86 | 683,63 | 793,52 | 749,12 |

| Peças | E_{deq} (kN/cm ²) | E_o (kN/cm ²) | E_{90} (kN/cm ²) | E_{o90} (kN/cm ²) |
|-------|---------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| CT-7 | 804,00 | 812,44 | 783,34 | 802,28 |
| CT-8 | 772,00 | 836,07 | 781,97 | 740,36 |
| CT-9 | 718,70 | 798,51 | 675,34 | 644,47 |
| CT-10 | 630,00 | 721,19 | 682,31 | 714,75 |
| CT-11 | 925,02 | 887,63 | 869,65 | 846,72 |
| CT-12 | 887,23 | 852,89 | 986,40 | 953,23 |
| CB-1 | 825,56 | 902,83 | 910,81 | 877,04 |
| CB-2 | 693,59 | 731,16 | 871,76 | 938,21 |
| CB-3 | 976,95 | 1.036,01 | 851,87 | 919,94 |
| CB-4 | 907,85 | 853,83 | 840,68 | 873,07 |
| CB-5 | 682,40 | 737,47 | 662,00 | 696,82 |
| CB-6 | 597,68 | 652,84 | 644,22 | 689,73 |
| CB-7 | 626,00 | 628,60 | 714,78 | 653,98 |
| CB-8 | 962,98 | 1.038,21 | 932,07 | 1.017,64 |
| CB-9 | 850,72 | 932,87 | 788,99 | 738,53 |
| CB-10 | 755,72 | 641,62 | 774,04 | 856,82 |
| CB-11 | 903,81 | 822,43 | 916,86 | 1.108,61 |
| CB-12 | 659,79 | 663,72 | 654,40 | 611,93 |
| ET -1 | 911,18 | 1.044,64 | 911,10 | 848,35 |
| ET-2 | 979,32 | 1.089,72 | 850,14 | 790,95 |
| Peças | E_{deq} (kN/cm ²) | E_o (kN/cm ²) | E_{90} (kN/cm ²) | E_{o90} (kN/cm ²) |

| | | | | |
|-------|---------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| ET-3 | 683,72 | 562,83 | 640,01 | 589,13 |
| ET-4 | 848,47 | 921,85 | 859,41 | 861,46 |
| ET-5 | 664,59 | 556,95 | 613,94 | 665,72 |
| ET-6 | 801,04 | 834,62 | 808,54 | 957,31 |
| ET-7 | 663,99 | 615,24 | 683,40 | 725,10 |
| ET-8 | 945,38 | 987,11 | 963,56 | 998,63 |
| ET-9 | 680,46 | 781,63 | 767,43 | 721,18 |
| ET-10 | 1.089,39 | 1.135,88 | 1.036,81 | 1.017,27 |
| ET-11 | 796,80 | 697,59 | 844,08 | 886,54 |
| ET-12 | 825,41 | 908,61 | 915,28 | 1.013,16 |
| EB-1 | 1.163,14 | 1.287,89 | 1.071,39 | 1.027,85 |
| EB-2 | 536,17 | 623,78 | 655,91 | 681,36 |
| EB-3 | 1.108,82 | 1.173,11 | 1.074,23 | 1.202,36 |
| EB-4 | 1.465,53 | 1.252,93 | 1.494,61 | 1.303,68 |
| EB-5 | 891,07 | 754,09 | 937,12 | 1.096,74 |
| EB-6 | 1.048,91 | 1.076,71 | 1.077,04 | 1.243,42 |
| EB-7 | 1.234,26 | 973,23 | 1.197,23 | 1.116,27 |
| EB-8 | 969,91 | 1.054,26 | 1.055,17 | 1.134,81 |
| EB-9 | 1.042,65 | 971,41 | 1.090,84 | 1.143,62 |
| EB-10 | 959,59 | 1.103,65 | 864,81 | 895,07 |
| Peças | E_{deq} (kN/cm ²) | E_o (kN/cm ²) | E_{90} (kN/cm ²) | E_{o90} (kN/cm ²) |
| EB-11 | 1.023,37 | 1.072,83 | 1.075,36 | 1.198,78 |

| | | | | |
|--------------|----------|----------|----------|----------|
| EB-12 | 1.090,42 | 1.146,34 | 1.173,68 | 1.103,15 |
| Média | 865 | 878 | 877 | 891 |
| D.P. | 181 | 189 | 173 | 183 |
| C.V. | 0,21 | 0,22 | 0,20 | 0,20 |

Utilizando-se a equação (59) na verificação da equivalência estatística entre os valores de elasticidade para as madeiras do gênero *Pinus*, tem-se:

- valores entre E_{deq} e E_0 :

$$-13,66 \leq \mu \leq 39,58 \quad (60)$$

- valores entre E_{deq} e E_{90} :

$$-7,05 \leq \mu \leq 30,94 \quad (61)$$

- valores entre E_{90} e E_{090} :

$$-9,24 \leq \mu \leq 36,57 \quad (62)$$

Os valores de μ encontrados de acordo com (60), (61) e (62) mostram que as relações: (E_0 e E_{deq}), (E_{deq} e E_{90}) e (E_{090} e E_{90}) são estatisticamente equivalentes, pois envolvem o zero.

7.3 Valores de Elasticidade para as Peças Roliças de Madeira da Espécie *Eucalyptus citriodora*

A tabela 3 apresenta os valores dos módulos de elasticidade E_{deq} , E_o , E_{90} e E_{o90} obtidos para as peças roliças de madeira da espécie *Eucalyptus citriodora*.

Tabela 3 – Valores de elasticidade obtidos para as peças roliças estruturais de madeira da espécie *Eucalyptus citriodora*.

| Peça | E_{deq} (kN/cm ²) | E_o (kN/cm ²) | E_{90} (kN/cm ²) | E_{o90} (kN/cm ²) |
|------|---------------------------------|-----------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| 1 | 2.043,23 | 2.137,72 | 1.937,34 | 2.078,55 |
| 2 | 2.198,63 | 2.116,41 | 2.531,82 | 2.734,33 |
| 3 | 1.979,92 | 2.103,67 | 2.098,98 | 2.215,49 |
| 4 | 2.001,44 | 2.076,37 | 2.310,76 | 2.474,25 |
| 5 | 1.785,78 | 1.924,44 | 1.702 | 1.569,08 |
| 6 | 1.945,39 | 1.827,27 | 1.893,48 | 1.976,12 |
| 7 | 1.832,07 | 1.926,81 | 1.641,64 | 1.792,23 |
| 8 | 2.112,61 | 2.065,89 | 1.935,02 | 1.765,47 |
| 9 | 2.120,71 | 2.037,22 | 2.215,88 | 2.402,71 |
| 10 | 1.685,53 | 1.467,47 | 2.055,65 | 2.128,32 |
| 11 | 1.550,62 | 1.597,58 | 1.820,47 | 1.653,93 |
| 12 | 2.022,73 | 2.165,91 | 2.072,26 | 2.221,06 |
| 13 | 2.192,81 | 2.278,77 | 2.288,64 | 2.086,87 |
| Peça | E_{deq} (kN/cm ²) | E_o (kN/cm ²) | E_{90} (kN/cm ²) | E_{o90} (kN/cm ²) |
| 14 | 1.939,94 | 2.043 | 2.096,72 | 2.151,73 |
| 15 | 1.925,08 | 1.855,84 | 2.066,53 | 1.985,41 |

| | | | | |
|--------------|----------|----------|----------|----------|
| 16 | 1.682,23 | 1.732,76 | 1.832,15 | 1.951,68 |
| 17 | 1.620,92 | 1.553,49 | 1.714,63 | 1.568,97 |
| 18 | 1.912,17 | 2.013,03 | 2.150,84 | 2.302,52 |
| 19 | 1.934,49 | 2.089,35 | 2.126,24 | 2.276,78 |
| 20 | 1.559,86 | 1.528,54 | 1.597,12 | 1.433,95 |
| 21 | 1.659,53 | 1.781,28 | 1.799,37 | 1.589,59 |
| 22 | 1.889,68 | 1.674,39 | 1.909 | 1.967,26 |
| 23 | 1.651,23 | 1.482,96 | 2.092,61 | 2.111,15 |
| 24 | 1.646,81 | 1.821,34 | 1.687,56 | 1.724,44 |
| Média | 1.871 | 1.889 | 1.982 | 2.007 |
| D.P. | 195 | 236 | 230 | 317 |
| C.V. | 0,1 | 0,22 | 0,12 | 0,16 |

Utilizando-se a equação (59) na verificação da equivalência entre os valores de elasticidade para as madeiras da espécie *Eucalyptus citriodora*, tem-se:

- valores entre E_{deq} e E_0 :

$$-32 \leq \mu \leq 68,99 \quad (63)$$

- valores entre E_{deq} e E_{90} :

$$43,52 \leq \mu \leq 180,09 \quad (64)$$

- valores entre E_{90} e E_{090} :

$$-88,86 \leq \mu \leq 34,10 \quad (65)$$

Segundo os respectivos valores de μ encontrados em (63) e (65), os módulos de elasticidade encontrados entre (E_{deq} e E_0), e, entre (E_{90} e E_{090}) são estatisticamente equivalentes.

O valor de μ encontrado de acordo com (64) mostra que a relação encontrada entre os valores de elasticidade (E_{90} e E_{deq}) não são estatisticamente equivalentes.



CONCLUSÕES

O módulo de elasticidade longitudinal para as peças roliças da madeira do gênero *Pinus* pode ser determinado por intermédio do ensaio de flexão estática de três pontos, com o uso do modelo simplificado de cálculo (variação linear da geometria do elemento), considerando-se o diâmetro da peça como sendo o seu equivalente (medido no ponto de aplicação da força, ou seja, na metade do comprimento da peça). Também, pelos resultados advindos da análise estatística, a mudança de posição da peça no ensaio de flexão estática de três pontos não afeta a determinação do módulo de elasticidade longitudinal.

Para as peças roliças da espécie *Eucalyptus citriodora*, o módulo de elasticidade longitudinal, assim como nas peças de madeira roliça do gênero *Pinus*, pode ser calculado utilizando o seu diâmetro equivalente, ou seja, a determinação do módulo de elasticidade longitudinal segundo o diâmetro equivalente do elemento mostra-se como

um bom modelo de cálculo a ser utilizado na sua determinação. Porém, a mudança da posição relativa da peça no ensaio de flexão de três pontos influencia na obtenção do E, tornando-se necessário o seu cálculo em pelo menos duas posições distintas, tomando-se como o módulo de elasticidade do elemento, o menor entre os valores de elasticidade encontrados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bibliografia Consultada

AGUIAR, A. R.(2004). *A numerical treatment of material overlapping in elasticity*. In: Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering (XXV CILAMCE).

AGUIAR, A. R.(2006). *Local and global injective solution of the rotationally simetric sphere problem*. Journal of Elasticity, vol. 84, pp. 99-129.

ALVARENGA, R. C. S. S.; ANTUNES, H. M. C. C. (1994). *Otimização de treliças*. Congresso Ibero Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia, 15., Belo Horizonte, MG. Anais, p 1699-1708.

ARGOLO, W. P. (2000) *Otimização de seções de concreto armado submetida a flexo-compressão reta utilizando algoritmos genéticos*. Dissertação (Mestrado)- COPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, NBR 6122/1996 – *Projeto e execução de fundações*.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, NBR 6231:1980 - *Resistência à flexão de postes de madeira.*

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, NBR 7190:1997 – *Projeto de estruturas de madeira.*

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, NBR 8456/1984 - *Poste de eucalipto preservado para redes de distribuição de energia elétrica.*

ASTM D1036-97. *Standard test methods of static test of wood poles.*

ASTM D198-97. *Standard methods of static test of timber is structural sizes.*

ASTM D4761-96 *Standard test methods for mechanical properties of lumber and wood-base structural material.*

AUSTRALIAN/NEW ZEALAND STANDARD; AS/NZS 4676 (2000). *Structural design requirements for utility services poles.*

BATISTA, A. M; ROSSI, N.; MASCIA, N. T.; FURLANI, J. E. (2000). *Estudo de flexão estática: Relação entre peças de madeira com dimensões estruturais e dimensões reduzidas.* In: VII Encontro Brasileiro em Madeiras e em Estruturas de Madeiras, São Carlos. Anais, CD-ROM.

CHEUNG, A. B. (2003). *Tabuleiro ortotrópico treliçado protendido transversalmente para aplicação em pontes de madeira*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, SP.

CHEUNG, A. B.; LINDQUIST, M.; CALIL, C. J. (2004). *Calibração de propriedades elásticas de uma placa ortótropa utilizando algoritmos genéticos*. Revista Sul-americana de Engenharia Estrutural. Universidade de Passo Fundo. RS. Vol.1, nº 2, p74-92.

GERE, J. M e WEAVER, W. (1987). *Análise estrutural de estruturas reticuladas*. Editora Guanabara S.A.

GÓES, J. L. N. (2004). *Modelos teóricos para o dimensionamento de pontes com tabuleiro multicelular de madeira protendida*. XXXI Jornadas Sud-americanas de Ingeniería Estructural. Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Cuyo. Mendoza. Argentina. Anais, CD-ROM.

KRONKA, F. J. N. (org) (2002). *Inventário florestal das áreas reflorestadas do Estado de São Paulo*. Secretaria de Estado do Meio Ambiente/Instituto Florestal. São Paulo, 184p.

LAHR, F. A. R. (1983). *Sobre a determinação de propriedades de elasticidade da madeira*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, SP.

LARSON, D.; MIRTH, R.; WOLFE, R. (2004). *Evaluation of small-diameter ponderosa pine logs in bending*. Forest Products Journal. 54 (12). Forest Products Society. Madison, WI.

MASCIA, N. T. (1991). *Considerações a respeito da anisotropia da madeira*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, SP.

MINÁ, A. J. S. *Estudo de estacas de madeira para fundações de pontes de madeira*. São Carlos, 2005. 150 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MINÁ, A. J. S.; Dias, A. A. ; Calil, C. (2004). *Avaliação da rigidez e da resistência de postes de madeira para uso como estacas para fundações*. In: IX Encontro Brasileiro em Madeiras e em Estruturas de Madeiras, Cuiabá. Anais, CD-ROM.

OLIVIERI, B. P. (2004). *Otimização do projeto de pontes protendidas pré-moldadas pelo método dos algoritmos genéticos*. Dissertação (Mestrado) – COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ.

PERRINE, P.; LANDIS E, N.; DAVIDS, W. G.; VASIC, S. (2002). *Morphology-based models for wood and wood composites*. E.M. 2002. 15th ASCE Engineering Mechanics Conference. June 2-5. Columbia University. New York NY.

PIGOZZO, J. C.; PLETZ, E.; ROCCO LAHR, F. A. (2000). *Aspectos da classificação mecânica de peças estruturais de madeira*. VII Encontro Brasileiro em Madeiras e estruturas de Madeira, São Carlos, SP. Anais, CD-ROM.

RIGO, E (1999). *Métodos de otimização aplicados à análise de estruturas*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, SP.

SILVA, E. E. (2001). *Otimização de estruturas de concreto armado utilizando algoritmos genéticos*. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo,SP.

SOARES, R. C.; EL DEBS, A. L. H. C. (1997). *Otimização de seções transversais de vigas de concreto armado: Aplicação a pavimentos*. Congresso Ibero Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais para Engenharia, 13., Brasília. Anais, pp 1507-1514.

WILKINSON, T. L. (1968). *Strength evaluation of round timber piles*. U.S.D.A. Forest Service Research Paper. FPL 101. December 1968.

ZANGIÁCOMO A. L. (2007). *Avaliação do efeito de cisalhamento na deflexão de elementos roliços das espécies Pinus elliotti e Pinus caribea*. In: X Encontro Brasileiro em Madeiras e em Estruturas de Madeiras, São Pedro S.P. Anais, CD-ROM.

Bibliografia Complementar

AMERICAN INSTITUTE OF TIMBER CONSTRUCTION (1974). *Timber construction manual*. New York, NY.

AMERICAN SOCIETY OF AGRICULTURAL ENGINEERS, ASAE EP 486 (1991) .
Post and pole foundation design.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS NBR-6122:1996. *Projeto e execução de fundações*. Rio de Janeiro.

ASTM D143-94. *Small clear specimens of timber*.

ASTM D25-91. *Standard specification for round timber piles*.

ASTM D2899-01. *Standard establishing allowable stresses for timber piles*.

ASTM D3200-74. *Design stresses for round timber piles construction poles, establishing recommended*.

AUSTRALIAN STANDARD, AS 2209.3 (1994). *Timber – Poles for overhead lines.*

AUSTRALIAN STANDARD, AS 3818.3 (2001). *Timber – Heavy structural products – Visually graded.*

AUSTRALIAN STANDARD, AS/NZS 4676 (2000). *Structural design requirements for utility services poles.*

BALLARIN, A. W.; PALMA, H. A. L. (2002). *Propriedades de resistência e rigidez da madeira juvenil e adulta de Pinus taeda L.* Revista Árvore. Universidade Federal de Viçosa. /No prelo/

BODIG, J.; JAYNE, B. A. (1982). *Mechanics of wood and wood composites.* New York.

BOHANNAN, B. (1983). *Structural engineering research in wood science and technology* – vol.I - Solid Wood. Berlin, Springer – Verlag.

CREWS, K.I.; HERRIGON, A.; BOUGHTON, G. *Assessment of characteristic properties for utility poles in Australia.* In: WORLD CONFERENCE ON TIMBER ENGINEERING, 5. Montreux-Suíça, 1998. Proceedings. Swise Federal Institute of Technology, Lausanne, Montreux, 1998. p.618-25.

FURIATI, M. (1981). *Classificação estrutural de peças de madeira*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, SP.

GREEN, D. W. ; WINANDY, J. E.; KRETSCHMANN, D. E. (1999). *Wood handbook- Wood as an engineering material – Chapter 4 – Mechanical Properties of Wood*. Was., D. C., FPL – FS – USDA, Department of Agriculture, Forest Service, Madison.

LOAD AND RESISTANCE FACTOR, LRFD-96. Manual for Engineered Wood Construction. *Supplement timber poles and piles*. American Forest & paper association.

MADSEN, B. (1992). *Structural behaviour of timber. Timber Engineering Ltd.* Vancouver, Canadá.

MELO, J. M. (1984). *Classificação mecânica de peças estruturais de madeira*. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, SP.

NATIONAL DESIGN SPECIFICATION FOR WOOD CONSTRUCTION, ANSI/NfoPA NDS-91., *Structural lumber, Glued laminated timber, Timber poles, Connections*. American National Standard.

OKIMOTO, F. S.; PFISTER, G. M.; CALIL, C. (1995). *Classificação visual e mecânica de madeiras estruturais*. Encontro Brasileiro em Madeiras e em Estruturas de Madeira, 5. Anais. Belo Horizonte: Ufmg.

PFEIL, W; PFEIL, M. (2003) *Estruturas de madeira*. 6.ed., Rio de Janeiro, Ed. LTC, Cap.2, p.9-26: Produtos de madeira e sistemas estruturais.

REVISTA DA MADEIRA. (2001) *A madeira de eucalipto para poste*, ed.59.

SALES, A.; PORTELLA, K.F.; GRIGOL, E.J.; RECH, P.; OLIVEIRA, F.G.R.; CAMPOS, J.A.O. *Durabilidade de postes de madeira utilizada em redes de distribuição de energia elétrica*. In: ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRA E ESTRUTURAS DE MADEIRA, 8., Uberlândia, jul., 2002.

SILVA, H. C. (1942) *Ensaio estático de madeira em dimensões estruturais*. Rio de Janeiro, Instituto Nacional de Tecnologia, 35p.

WOLFE, R.; MOODY, R. (1997) *Standard specifications for wood poles*. In: UTILITY POLE STRUCTURES CONFERENCE AND TRADE SHOW. Nevada.

WOLFE, R.W. (1999) *Round timbers and ties*. In: *Forest Products Laboratory, Wood handbook: wood as engineering material*. Report FPL-GTR-113. Madison. Cap.18, p.18-1/18-14.

APÊNDICES

APÊNDICE A

As tabelas A1 a A48 apresentam os valores das circunferências dos deslocamentos, dos comprimentos das peças e das forças determinadas para cada ensaio de flexão utilizado no cálculo do módulo de elasticidade longitudinal das peças roliças estruturais de madeira do gênero *Pinus*, em que:

C – comprimento das circunferências medidas ao longo da peça;

d – deslocamentos medidos ao longo da peça;

d_{90° - deslocamento medido ao longo da peça segundo a mudança de sua posição;

topo – comprimento da circunferência medida na extremidade menor da peça;

base – comprimento da circunferência medida na extremidade maior da peça;

F – força;

L – comprimento da peça;

F_{90° – força aplicada na peça segundo a mudança na sua posição;

R – relógio comparador.

A disposição dos relógios comparadores ao longo das peças de madeira roliça é ilustrada pela figura 29 (ver capítulo 5).

Tabela A1 – Peça estrutural CT-1.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90° (cm) |
|---------------|---------------------------------------|---------------|---------------------------------------|
| base | 77 | | |
| R1 | 75 | 1,220 | 1,278 |
| R2 | 73 | 1,308 | 1,401 |
| R3 | 71 | 3,111 | 3,247 |
| R4 | 70 | 3,330 | 3,192 |
| R5 | 67 | 3,207 | 3,089 |
| R6 | 65 | 2,600 | 2,801 |
| R7 | 62 | 1,494 | 1,312 |
| topo | 60 | | |
| F (kN) | F_{90° (kN) | L (cm) | |
| 4,52 | 5,17 | 660 | |

Tabela A2 – Peça estrutural CT-2.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 75 | | |
| R1 | 75 | 0,960 | 1,177 |
| R2 | 68 | 1,088 | 0,911 |
| R3 | 67 | 2,919 | 2,763 |
| R4 | 65 | 3,150 | 3,281 |
| R5 | 63 | 3,146 | 3,311 |
| R6 | 60 | 2,369 | 2,114 |
| R7 | 59 | 1,546 | 1,372 |
| topo | 58 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 4,00 | 4,38 | 660 | |

Tabela A3 – Peça estrutural CT-3.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 75 | | |
| R1 | 72 | 1,240 | 1,098 |
| R2 | 72 | 2,156 | 2,278 |
| R3 | 69 | 2,782 | 2,906 |
| R4 | 67 | 3,225 | 3,323 |
| R5 | 67 | 2,970 | 2,711 |
| R6 | 66 | 2,420 | 2,516 |
| R7 | 63 | 1,345 | 1,179 |
| topo | 61 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 4,9 | 5,11 | 660 | |

Tabela A4 – Peça estrutural CT-4.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 73 | | |
| R1 | 72 | 1,205 | 1,993 |
| R2 | 71 | 2,127 | 2,232 |
| R3 | 70 | 2,810 | 2,687 |
| R4 | 66 | 3,180 | 3,031 |
| R5 | 66 | 2,970 | 2,816 |
| R6 | 65 | 2,336 | 2,492 |
| R7 | 64 | 1,333 | 1,214 |
| topo | 58 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 5,00 | 4,78 | 630 | |

Tabela A5 – Peça estrutural CT-5.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 73 | | |
| R1 | 71 | 1,142 | 1,019 |
| R2 | 69 | 1,957 | 2,213 |
| R3 | 66 | 2,671 | 2,471 |
| R4 | 65 | 3,000 | 2,895 |
| R5 | 64 | 2,826 | 2,915 |
| R6 | 62 | 2,224 | 2,106 |
| R7 | 57 | 1,124 | 1,274 |
| topo | 55 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 4,70 | 4,57 | 600 | |

Tabela A6 – Peça estrutural CT-6.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 73 | | |
| R1 | 72 | 1,135 | 0,981 |
| R2 | 72 | 2,842 | 2,721 |
| R3 | 68 | 2,810 | 2,922 |
| R4 | 65 | 3,160 | 3,276 |
| R5 | 65 | 3,034 | 2,814 |
| R6 | 62 | 2,410 | 2,487 |
| R7 | 60 | 1,410 | 1,571 |
| topo | 59 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 4,25 | 4,33 | 630 | |

Tabela A7 – Peça estrutural CT-7.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 70 | | |
| R1 | 69 | 1,200 | 1,312 |
| R2 | 67 | 2,190 | 1,921 |
| R3 | 67 | 2,920 | 2,813 |
| R4 | 64 | 3,280 | 3,111 |
| R5 | 63 | 3,067 | 2,949 |
| R6 | 62 | 2,430 | 2,512 |
| R7 | 60 | 1,329 | 1,416 |
| topo | 58 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 4,28 | 4,17 | 630 | |

Tabela A8 – Peça estrutural CT-8.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 65 | | |
| R1 | 65 | 1,110 | 1,085 |
| R2 | 63 | 1,717 | 1,847 |
| R3 | 61 | 2,410 | 2,447 |
| R4 | 59 | 2,700 | 2,700 |
| R5 | 58 | 2,528 | 2,559 |
| R6 | 57 | 2,000 | 1,961 |
| R7 | 54 | 1,149 | 1,119 |
| topo | 49 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 3,88 | 3,93 | 540 | |

Tabela A9 – Peça estrutural CT-9.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 72 | | |
| R1 | 70 | 1,088 | 1,100 |
| R2 | 68 | 1,939 | 2,481 |
| R3 | 66 | 2,756 | 2,654 |
| R4 | 65 | 3,000 | 2,700 |
| R5 | 63 | 2,946 | 2,389 |
| R6 | 60 | 2,352 | 2,300 |
| R7 | 57 | 1,329 | 1,273 |
| topo | 51 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 4,31 | 4,05 | 600 | |

Tabela A10 – Peça estrutural CT-10.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 80 | | |
| R1 | 77 | 1,220 | 1,274 |
| R2 | 75 | 2,055 | 1,977 |
| R3 | 74 | 2,973 | 2,886 |
| R4 | 70 | 3,300 | 3,211 |
| R5 | 68 | 3,210 | 3,232 |
| R6 | 66 | 2,478 | 2,413 |
| R7 | 62 | 1,413 | 1,329 |
| topo | 58 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 4,20 | 3,88 | 660 | |

Tabela A11 – Peça estrutural CT-11.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 70 | | |
| R1 | 71 | 1,131 | 1,151 |
| R2 | 69 | 2,150 | 2,115 |
| R3 | 68 | 2,849 | 2,819 |
| R4 | 67 | 3,150 | 3,180 |
| R5 | 65 | 2,974 | 2,995 |
| R6 | 63 | 2,303 | 2,413 |
| R7 | 62 | 1,351 | 1,308 |
| topo | 60 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 5,68 | 5,34 | 630 | |

Tabela A12 – Peça estrutural CT-12.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 77 | | |
| R1 | 76 | 1,169 | 1,177 |
| R2 | 77 | 2,172 | 2,175 |
| R3 | 69 | 2,966 | 2,936 |
| R4 | 72 | 3,300 | 3,300 |
| R5 | 70 | 3,000 | 3,124 |
| R6 | 68 | 2,426 | 2,425 |
| R7 | 67 | 1,443 | 1,393 |
| topo | 61 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 6,62 | 7,36 | 660 | |

Tabela A13 – Peça estrutural CB-1.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 95 | | |
| R1 | 90 | 1,520 | 1,614 |
| R2 | 87 | 2,419 | 2,312 |
| R3 | 87 | 3,180 | 3,276 |
| R4 | 83 | 3,375 | 3,493 |
| R5 | 82 | 3,215 | 3,970 |
| R6 | 81 | 2,580 | 2,512 |
| R7 | 78 | 1,625 | 1,549 |
| topo | 72 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 10,4 | 11,6 | 675 | |

Tabela A14 – Peça estrutural CB-2.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 91 | | |
| R1 | 83 | 1,400 | 1,311 |
| R2 | 80 | 2,290 | 2,167 |
| R3 | 81 | 2,960 | 2,871 |
| R4 | 79 | 3,240 | 3,131 |
| R5 | 79 | 2,972 | 2,816 |
| R6 | 76 | 2,320 | 2,233 |
| R7 | 75 | 1,402 | 1,336 |
| topo | 74 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 10,96 | 9,78 | 648 | |

Tabela A15 – Peça estrutural CB-3.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 103 | | |
| R1 | 90 | 1,490 | 1,371 |
| R2 | 85 | 1,900 | 1,814 |
| R3 | 83 | 2,533 | 2,427 |
| R4 | 78 | 3,375 | 3,256 |
| R5 | 81 | 3,005 | 2,904 |
| R6 | 79 | 1,900 | 1,842 |
| R7 | 76 | 1,356 | 1,239 |
| topo | 73 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 8,92 | 8,37 | 675 | |

Tabela A16 – Peça estrutural CB-4.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 107 | | |
| R1 | 97 | 1,456 | 1,322 |
| R2 | 92 | 2,425 | 2,318 |
| R3 | 92 | 3,034 | 3,101 |
| R4 | 88 | 3,360 | 3,449 |
| R5 | 88 | 3,086 | 2,955 |
| R6 | 84 | 2,464 | 2,332 |
| R7 | 85 | 1,332 | 1,127 |
| topo | 80 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 10,96 | 10,29 | 672 | |

Tabela A17 – Peça estrutural CB-5.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 101 | | |
| R1 | 93 | 1,710 | 1,550 |
| R2 | 91 | 2,500 | 2,280 |
| R3 | 87 | 3,110 | 2,913 |
| R4 | 85 | 3,245 | 3,240 |
| R5 | 83 | 2,978 | 2,294 |
| R6 | 80 | 2,300 | 2,346 |
| R7 | 78 | 1,332 | 1,341 |
| topo | 75 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 9,00 | 10,27 | 648 | |

Tabela A18 – Peça estrutural CB-6.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 107 | | |
| R1 | 98 | 1,315 | 1,339 |
| R2 | 95 | 2,300 | 1,810 |
| R3 | 93 | 2,961 | 2,998 |
| R4 | 90 | 3,360 | 3,360 |
| R5 | 89 | 3,139 | 3,120 |
| R6 | 87 | 2,430 | 2,500 |
| R7 | 85 | 2,240 | 1,494 |
| topo | 79 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 11,00 | 11,32 | 672 | |

Tabela A19 – Peça estrutural CB-7.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 103 | | |
| R1 | 87 | 1,545 | 1,331 |
| R2 | 82 | 2,340 | 2,390 |
| R3 | 83 | 3,100 | 3,010 |
| R4 | 80 | 3,370 | 3,370 |
| R5 | 80 | 3,140 | 3,110 |
| R6 | 75 | 2,448 | 2,400 |
| R7 | 76 | 1,419 | 1,342 |
| topo | 74 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 7,53 | 7,76 | 675 | |

Tabela A20 – Peça estrutural CB-8.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 111 | | |
| R1 | 92 | 1,425 | 1,372 |
| R2 | 93 | 2,278 | 2,156 |
| R3 | 89 | 3,000 | 2,937 |
| R4 | 87 | 3,240 | 3,179 |
| R5 | 85 | 3,000 | 2,948 |
| R6 | 83 | 2,466 | 2,392 |
| R7 | 82 | 1,520 | 1,457 |
| topo | 78 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 15,89 | 15,38 | 648 | |

Tabela A21 – Peça estrutural CB-9.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 100 | | |
| R1 | 90 | 1,215 | 1,147 |
| R2 | 88 | 2,185 | 2,076 |
| R3 | 85 | 2,840 | 2,911 |
| R4 | 82 | 3,120 | 3,051 |
| R5 | 81 | 2,930 | 2,832 |
| R6 | 78 | 2,269 | 2,332 |
| R7 | 78 | 1,328 | 1,266 |
| topo | 74 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 10,95 | 11,08 | 624 | |

Tabela A22 – Peça estrutural CB-10.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 111 | | |
| R1 | 93 | 1,421 | 1,264 |
| R2 | 87 | 2,235 | 2,155 |
| R3 | 86 | 2,869 | 2,773 |
| R4 | 83 | 3,120 | 3,120 |
| R5 | 82 | 2,922 | 2,900 |
| R6 | 80 | 2,395 | 2,197 |
| R7 | 78 | 1,353 | 1,308 |
| topo | 73 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 11,14 | 11,41 | 624 | |

Tabela A23 – Peça estrutural CB-11.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 101 | | |
| R1 | 91 | 1,371 | 1,500 |
| R2 | 86 | 2,377 | 2,400 |
| R3 | 84 | 3,111 | 3,160 |
| R4 | 82 | 3,510 | 3,510 |
| R5 | 81 | 3,294 | 3,232 |
| R6 | 82 | 2,611 | 2,533 |
| R7 | 79 | 1,570 | 1,431 |
| topo | 73 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 9,00 | 9,13 | 702 | |

Tabela A24 – Peça estrutural CB-12.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 96 | | |
| R1 | 88 | 1,261 | 1,427 |
| R2 | 84 | 2,219 | 2,310 |
| R3 | 80 | 2,970 | 3,014 |
| R4 | 76 | 3,240 | 3,230 |
| R5 | 74 | 2,962 | 3,000 |
| R6 | 72 | 2,300 | 2,345 |
| R7 | 70 | 1,303 | 1,378 |
| topo | 68 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 6,39 | 6,00 | 648 | |

Tabela A25 – Peça estrutural ET-1.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 65 | | |
| R1 | 68 | 0,951 | 0,974 |
| R2 | 35 | 1,916 | 1,951 |
| R3 | 62 | 2,560 | 2,364 |
| R4 | 61 | 2,850 | 2,850 |
| R5 | 60 | 2,751 | 2,565 |
| R6 | 66 | 2,145 | 2,014 |
| R7 | 58 | 1,200 | 1,256 |
| topo | 57 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 5,00 | 5,00 | 570 | |

Tabela A26 – Peça estrutural ET-2.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 54 | | |
| R1 | 69 | 1,105 | 1,070 |
| R2 | 71 | 1,891 | 1,895 |
| R3 | 64 | 2,561 | 2,526 |
| R4 | 71 | 2,850 | 2,850 |
| R5 | 70 | 2,668 | 2,800 |
| R6 | 68 | 2,142 | 2,130 |
| R7 | 58 | 1,175 | 1,254 |
| topo | 62 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 5,48 | 6,15 | 570 | |

Tabela A27 – Peça estrutural ET-3.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 78 | | |
| R1 | 76 | 1,232 | 1,152 |
| R2 | 72 | 2,182 | 2,010 |
| R3 | 69 | 2,921 | 2,865 |
| R4 | 76 | 3,240 | 3,240 |
| R5 | 66 | 3,076 | 3,044 |
| R6 | 66 | 2,430 | 2,438 |
| R7 | 62 | 1,288 | 1,359 |
| topo | 57 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 6,57 | 6,15 | 648 | |

Tabela A28 – Peça estrutural ET-4.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 60 | | |
| R1 | 60 | 1,000 | 1,005 |
| R2 | 58 | 1,710 | 1,676 |
| R3 | 56 | 2,362 | 2,224 |
| R4 | 56 | 2,550 | 2,550 |
| R5 | 54 | 2,389 | 2,338 |
| R6 | 53 | 1,883 | 1,791 |
| R7 | 52 | 1,068 | 1,038 |
| topo | 46 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 3,88 | 3,93 | 510 | |

Tabela A29 – Peça estrutural ET-5.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 66 | | |
| R1 | 72 | 1,120 | 1,162 |
| R2 | 72 | 2,140 | 2,125 |
| R3 | 68 | 2,700 | 2,836 |
| R4 | 68 | 3,150 | 3,150 |
| R5 | 70 | 2,937 | 2,939 |
| R6 | 71 | 2,296 | 2,368 |
| R7 | 57 | 1,316 | 1,359 |
| topo | 55 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 4,33 | 4,00 | 630 | |

Tabela A30 – Peça estrutural ET-6.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 72 | | |
| R1 | 75 | 1,180 | 1,200 |
| R2 | 77 | 2,096 | 2,113 |
| R3 | 70 | 2,890 | 2,390 |
| R4 | 70 | 3,300 | 3,300 |
| R5 | 67 | 3,135 | 3,151 |
| R6 | 65 | 2,470 | 2,500 |
| R7 | 62 | 1,451 | 1,422 |
| topo | 58 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 5,34 | 5,39 | 660 | |

Tabela A31 – Peça estrutural ET-7.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 73 | | |
| R1 | 70 | 1,782 | 1,690 |
| R2 | 74 | 2,400 | 2,315 |
| R3 | 72 | 3,112 | 3,069 |
| R4 | 73 | 3,450 | 3,450 |
| R5 | 68 | 3,260 | 3,210 |
| R6 | 66 | 2,524 | 2,500 |
| R7 | 68 | 1,448 | 1,480 |
| topo | 63 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 4,79 | 4,93 | 690 | |

Tabela A32 – Peça estrutural ET-8.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 68 | | |
| R1 | 75 | 1,076 | 1,441 |
| R2 | 68 | 1,980 | 1,933 |
| R3 | 65 | 2,592 | 2,572 |
| R4 | 62 | 2,850 | 2,850 |
| R5 | 64 | 2,695 | 2,726 |
| R6 | 63 | 2,078 | 2,139 |
| R7 | 61 | 1,205 | 1,232 |
| topo | 56 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 5,20 | 5,30 | 570 | |

Tabela A33 – Peça estrutural ET-9.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 71 | | |
| R1 | 72 | 1,226 | 1,205 |
| R2 | 69 | 2,105 | 2,136 |
| R3 | 70 | 2,820 | 2,836 |
| R4 | 69 | 3,150 | 3,150 |
| R5 | 65 | 2,791 | 2,956 |
| R6 | 68 | 2,341 | 2,353 |
| R7 | 63 | 1,391 | 1,383 |
| topo | 55 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 4,70 | 4,61 | 630 | |

Tabela A34 – Peça estrutural ET-10.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 67 | | |
| R1 | 69 | 1,115 | 1,080 |
| R2 | 68 | 1,990 | 2,015 |
| R3 | 68 | 2,781 | 2,710 |
| R4 | 65 | 3,000 | 3,000 |
| R5 | 61 | 2,800 | 2,842 |
| R6 | 60 | 2,180 | 2,203 |
| R7 | 57 | 1,155 | 1,138 |
| topo | 48 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 6,53 | 6,15 | 600 | |

Tabela A35 – Peça estrutural ET-11.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 63 | | |
| R1 | 62 | 1,022 | 1,083 |
| R2 | 61 | 1,581 | 1,895 |
| R3 | 58 | 2,430 | 2,582 |
| R4 | 61 | 2,880 | 2,850 |
| R5 | 58 | 2,749 | 2,640 |
| R6 | 61 | 2,159 | 1,975 |
| R7 | 56 | 1,295 | 1,090 |
| topo | 48 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 4,15 | 4,24 | 570 | |

Tabela A36 – Peça estrutural ET-12.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 57 | | |
| R1 | 57 | 0,911 | 0,843 |
| R2 | 55 | 1,665 | 1,632 |
| R3 | 53 | 2,210 | 2,226 |
| R4 | 53 | 2,450 | 2,400 |
| R5 | 52 | 2,271 | 2,295 |
| R6 | 50 | 1,679 | 1,800 |
| R7 | 50 | 0,905 | 1,015 |
| topo | 42 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 3,49 | 3,87 | 480 | |

Tabela A37 – Peça estrutural EB-1.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 117 | | |
| R1 | 101 | 1,266 | 1,200 |
| R2 | 88 | 2,251 | 2,282 |
| R3 | 78 | 2,968 | 3,048 |
| R4 | 72 | 3,300 | 3,300 |
| R5 | 74 | 3,020 | 3,075 |
| R6 | 71 | 2,291 | 2,390 |
| R7 | 70 | 1,400 | 1,479 |
| topo | 66 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 8,68 | 7,99 | 660 | |

Tabela A38 – Peça estrutural EB-2.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 113 | | |
| R1 | 105 | 1,541 | 1,410 |
| R2 | 101 | 2,145 | 2,263 |
| R3 | 96 | 2,885 | 2,928 |
| R4 | 91 | 3,240 | 3,240 |
| R5 | 85 | 2,930 | 3,165 |
| R6 | 85 | 2,326 | 2,411 |
| R7 | 83 | 1,635 | 1,424 |
| topo | 82 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 10,59 | 12,56 | 648 | |

Tabela A39 – Peça estrutural EB-3.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 109 | | |
| R1 | 93 | 1,352 | 1,309 |
| R2 | 86 | 2,411 | 2,370 |
| R3 | 75 | 3,128 | 3,141 |
| R4 | 75 | 3,450 | 3,450 |
| R5 | 72 | 3,129 | 3,344 |
| R6 | 78 | 2,493 | 2,433 |
| R7 | 74 | 1,467 | 1,421 |
| topo | 70 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 8,72 | 10,00 | 690 | |

Tabela A40 – Peça estrutural EB-4.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 97 | | |
| R1 | 92 | 1,185 | 1,201 |
| R2 | 84 | 2,232 | 2,243 |
| R3 | 77 | 3,010 | 3,043 |
| R4 | 72 | 3,450 | 3,450 |
| R5 | 78 | 3,150 | 3,150 |
| R6 | 79 | 2,552 | 2,540 |
| R7 | 74 | 1,403 | 1,430 |
| topo | 70 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 10,00 | 10,20 | 690 | |

Tabela A41 – Peça estrutural EB-5.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 106 | | |
| R1 | 95 | 1,420 | 1,293 |
| R2 | 89 | 2,277 | 2,182 |
| R3 | 76 | 2,168 | 2,881 |
| R4 | 78 | 3,240 | 3,240 |
| R5 | 73 | 3,025 | 3,055 |
| R6 | 80 | 2,472 | 2,379 |
| R7 | 76 | 1,429 | 1,453 |
| topo | 71 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 9,50 | 10,95 | 648 | |

Tabela A42 – Peça estrutural EB-6.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 110 | | |
| R1 | 98 | 1,537 | 1,560 |
| R2 | 95 | 2,400 | 2,434 |
| R3 | 86 | 3,040 | 3,100 |
| R4 | 81 | 3,375 | 3,375 |
| R5 | 84 | 3,113 | 3,023 |
| R6 | 81 | 2,367 | 2,415 |
| R7 | 80 | 1,509 | 1,395 |
| topo | 80 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 11,97 | 12,31 | 675 | |

Tabela B43 – Peça estrutural EB-7.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 96 | | |
| R1 | 84 | 1,1180 | 1,290 |
| R2 | 79 | 1,992 | 2,136 |
| R3 | 68 | 2,676 | 2,755 |
| R4 | 65 | 3,000 | 3,000 |
| R5 | 70 | 2,790 | 2,820 |
| R6 | 62 | 2,269 | 2,200 |
| R7 | 62 | 1,410 | 1,130 |
| topo | 60 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 6,80 | 7,18 | 600 | |

Tabela A44 – Peça estrutural EB-8.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 111 | | |
| R1 | 99 | 1,490 | 1,190 |
| R2 | 84 | 2,475 | 2,086 |
| R3 | 79 | 3,090 | 2,920 |
| R4 | 76 | 3,240 | 3,251 |
| R5 | 76 | 3,046 | 3,046 |
| R6 | 77 | 2,410 | 2,365 |
| R7 | 74 | 1,427 | 1,359 |
| topo | 68 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 9,32 | 10,14 | 648 | |

Tabela A45 – Peça estrutural EB-9.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 102 | | |
| R1 | 92 | 1,491 | 1,300 |
| R2 | 84 | 2,335 | 2,341 |
| R3 | 75 | 3,051 | 3,253 |
| R4 | 74 | 3,450 | 3,450 |
| R5 | 72 | 3,392 | 3,281 |
| R6 | 70 | 2,545 | 2,549 |
| R7 | 68 | 1,620 | 1,448 |
| topo | 65 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 7,99 | 8,30 | 690 | |

Tabela A46 – Peça estrutural EB-10.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 106 | | |
| R1 | 92 | 1,386 | 1,300 |
| R2 | 81 | 2,080 | 2,243 |
| R3 | 83 | 2,925 | 2,951 |
| R4 | 78 | 3,240 | 3,240 |
| R5 | 72 | 3,081 | 2,934 |
| R6 | 75 | 2,422 | 2,321 |
| R7 | 71 | 1,475 | 1,331 |
| topo | 66 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 10,23 | 9,22 | 648 | |

Tabela A47 – Peça estrutural EB-11.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 92 | | |
| R1 | 85 | 1,250 | 1,380 |
| R2 | 78 | 2,183 | 2,330 |
| R3 | 66 | 2,962 | 3,010 |
| R4 | 71 | 3,300 | 3,300 |
| R5 | 75 | 3,071 | 3,064 |
| R6 | 68 | 2,410 | 2,373 |
| R7 | 73 | 1,355 | 1,326 |
| topo | 67 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 7,22 | 7,78 | 660 | |

Tabela A48 – Peça estrutural EB-12.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 98 | | |
| R1 | 81 | 1,228 | 1,152 |
| R2 | 73 | 2,085 | 2,121 |
| R3 | 65 | 2,741 | 2,738 |
| R4 | 63 | 3,012 | 3,067 |
| R5 | 64 | 2,781 | 1,530 |
| R6 | 61 | 2,163 | 2,161 |
| R7 | 65 | 1,359 | 1,203 |
| topo | 57 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 5,79 | 6,23 | 600 | |

APÊNDICE B

As tabelas B1 a B24 apresentam os valores das circunferências dos deslocamentos, dos comprimentos das peças e das forças determinadas para cada ensaio de flexão utilizado no cálculo do módulo de elasticidade longitudinal das peças estruturais de madeira roliça da espécie *Eucalyptus citriodora*, em que:

C – comprimento das circunferências medidas ao longo da peça;

d – deslocamentos medidos ao longo da peça;

d_{90° - deslocamento medido ao longo da peça segundo a mudança de sua posição;

topo – comprimento da circunferência medida na extremidade menor da peça;

base – comprimento da circunferência medida na extremidade maior da peça;

F – força;

L – comprimento da peça;

F_{90° – força aplicada na peça segundo a mudança na sua posição;

R – relógio comparador.

A disposição dos relógios comparadores ao longo das peças de madeira roliça é ilustrada pela figura 29 (ver capítulo 5).

Tabela B1 – Peça estrutural 1.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90° (cm) |
|---------------|---------------------------------------|---------------|---------------------|
| base | 86 | | |
| R1 | 84 | 1,180 | 1,121 |
| R2 | 83 | 2,070 | 2,023 |
| R3 | 81 | 2,780 | 2,670 |
| R4 | 79 | 3,000 | 3,000 |
| R5 | 77 | 2,800 | 2,815 |
| R6 | 76 | 2,130 | 2,080 |
| R7 | 73 | 1,215 | 1,250 |
| topo | 73 | | |
| F (kN) | F_{90° (kN) | L (cm) | |
| 26,73 | 25,35 | 600 | |

Tabela B2 – Peça estrutural 2.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 69 | | |
| R1 | 68 | 0,837 | 0,850 |
| R2 | 65 | 1,490 | 1,471 |
| R3 | 63 | 1,975 | 2,073 |
| R4 | 58 | 2,160 | 2,160 |
| R5 | 59 | 2,043 | 1,993 |
| R6 | 59 | 1,560 | 1,500 |
| R7 | 56 | 0,910 | 0,766 |
| topo | 56 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 16,12 | 18,56 | 432 | |

Tabela B3 – Peça estrutural 3.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 79 | | |
| R1 | 77 | 1,060 | 1,069 |
| R2 | 75 | 1,880 | 1,908 |
| R3 | 75 | 2,480 | 2,408 |
| R4 | 72 | 2,760 | 2,760 |
| R5 | 69 | 2,609 | 2,530 |
| R6 | 68 | 1,670 | 2,014 |
| R7 | 69 | 0,890 | 1,154 |
| topo | 66 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 21,11 | 22,38 | 552 | |

Tabela B4 – Peça estrutural 4.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 73 | | |
| R1 | 72 | 1,057 | 1,058 |
| R2 | 70 | 1,780 | 1,820 |
| R3 | 69 | 1,240 | 2,400 |
| R4 | 68 | 2,640 | 2,640 |
| R5 | 67 | 2,430 | 2,560 |
| R6 | 66 | 2,376 | 1,931 |
| R7 | 65 | 1,072 | 1,190 |
| topo | 65 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 18,56 | 21,42 | 528 | |

Tabela B5 – Peça estrutural 5.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 71 | | |
| R1 | 70 | 0,900 | 0,985 |
| R2 | 68 | 1,670 | 1,717 |
| R3 | 67 | 2,275 | 2,270 |
| R4 | 66 | 2,520 | 2,520 |
| R5 | 65 | 2,310 | 2,445 |
| R6 | 64 | 1,763 | 1,778 |
| R7 | 63 | 1,026 | 1,011 |
| topo | 61 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 16,12 | 15,38 | 504 | |

Tabela B6 – Peça estrutural 6.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 76 | | |
| R1 | 76 | 1,100 | 1,015 |
| R2 | 73 | 1,935 | 1,852 |
| R3 | 71 | 2,530 | 2,465 |
| R4 | 71 | 2,760 | 2,760 |
| R5 | 69 | 2,581 | 2,561 |
| R6 | 69 | 1,985 | 1,991 |
| R7 | 68 | 1,113 | 1,130 |
| topo | 69 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 19,62 | 19,09 | 552 | |

Tabela B7 – Peça estrutural 7.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 66 | | |
| R1 | 65 | 0,933 | 0,950 |
| R2 | 63 | 1,640 | 1,720 |
| R3 | 62 | 2,207 | 2,215 |
| R4 | 62 | 2,400 | 2,400 |
| R5 | 60 | 2,250 | 2,261 |
| R6 | 59 | 1,753 | 1,739 |
| R7 | 57 | 1,000 | 1,075 |
| topo | 56 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 14,21 | 12,73 | 480 | |

Tabela B8 – Peça estrutural 8.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 74 | | |
| R1 | 73 | 1,027 | 1,037 |
| R2 | 72 | 1,795 | 1,790 |
| R3 | 72 | 2,410 | 2,350 |
| R4 | 70 | 2,640 | 2,640 |
| R5 | 69 | 2,412 | 2,505 |
| R6 | 69 | 1,906 | 2,008 |
| R7 | 67 | 1,115 | 1,197 |
| topo | 66 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 22,06 | 20,15 | 528 | |

Tabela B9 – Peça estrutural 9.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|---------------|---------------|-----------------------------|
| base | 68 | | |
| R1 | 67 | 0,892 | 0,940 |
| R2 | 65 | 1,540 | 1,610 |
| R3 | 64 | 2,160 | 2,265 |
| R4 | 62 | 2,400 | 2,400 |
| R5 | 60 | 2,263 | 2,208 |
| R6 | 59 | 1,665 | 1,204 |
| R7 | 59 | 1,064 | 1,078 |
| topo | 57 | | |
| F (kN) | | L (cm) | |
| 16,44 | 17,18 | 480 | |

Tabela B10 – Peça estrutural 10.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 69 | | |
| R1 | 68 | 1,002 | 0,965 |
| R2 | 68 | 1,720 | 1,660 |
| R3 | 64 | 2,315 | 2,310 |
| R4 | 66 | 2,520 | 2,520 |
| R5 | 64 | 2,405 | 2,475 |
| R6 | 62 | 1,890 | 1,861 |
| R7 | 59 | 1,043 | 1,059 |
| topo | 58 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 16,76 | 18,56 | 504 | |

Tabela B11 – Peça estrutural 11.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 73 | | |
| R1 | 71 | 0,950 | 0,917 |
| R2 | 69 | 1,730 | 1,700 |
| R3 | 68 | 2,300 | 2,300 |
| R4 | 66 | 2,520 | 2,520 |
| R5 | 64 | 2,358 | 2,422 |
| R6 | 63 | 1,796 | 1,902 |
| R7 | 60 | 1,031 | 1,160 |
| topo | 59 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 14,01 | 16,44 | 504 | |

Tabela B12 – Peça estrutural 12.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 72 | | |
| R1 | 70 | 0,930 | 0,920 |
| R2 | 69 | 1,710 | 1,626 |
| R3 | 67 | 2,250 | 2,200 |
| R4 | 66 | 2,520 | 2,520 |
| R5 | 62 | 2,385 | 2,418 |
| R6 | 60 | 1,800 | 1,920 |
| R7 | 58 | 1,089 | 1,111 |
| topo | 57 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 17,18 | 17,61 | 504 | |

Tabela B13 – Peça estrutural 13.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 61 | | |
| R1 | 61 | 0,858 | 0,890 |
| R2 | 60 | 1,545 | 1,436 |
| R3 | 58 | 2,103 | 2,070 |
| R4 | 58 | 2,280 | 2,228 |
| R5 | 58 | 2,120 | 2,147 |
| R6 | 57 | 1,605 | 1,644 |
| R7 | 55 | 0,900 | 0,872 |
| topo | 56 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 14,43 | 15,06 | 456 | |

Tabela B14 – Peça estrutural 14.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 70 | | |
| R1 | 70 | 0,924 | 0,940 |
| R2 | 67 | 1,650 | 1,655 |
| R3 | 66 | 1,175 | 2,164 |
| R4 | 64 | 2,400 | 2,400 |
| R5 | 62 | 2,251 | 2,239 |
| R6 | 61 | 1,713 | 1,714 |
| R7 | 60 | 0,989 | 0,960 |
| topo | 60 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 17,08 | 18,46 | 480 | |

Tabela B15 – Peça estrutural 15.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 72 | | |
| R1 | 71 | 0,950 | 0,945 |
| R2 | 69 | 1,705 | 1,690 |
| R3 | 68 | 2,213 | 2,256 |
| R4 | 66 | 2,520 | 2,520 |
| R5 | 65 | 2,238 | 2,374 |
| R6 | 63 | 1,864 | 1,792 |
| R7 | 63 | 1,042 | 1,110 |
| topo | 60 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 17,34 | 18,67 | 504 | |

Tabela B16 – Peça estrutural 16.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 69 | | |
| R1 | 68 | 0,870 | 0,890 |
| R2 | 67 | 1,643 | 1,618 |
| R3 | 65 | 2,170 | 2,140 |
| R4 | 62 | 2,400 | 2,400 |
| R5 | 61 | 2,309 | 2,201 |
| R6 | 60 | 1,795 | 1,685 |
| R7 | 61 | 1,017 | 0,941 |
| topo | 58 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 13,05 | 14,21 | 480 | |

Tabela B17 – Peça estrutural 17.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 68 | | |
| R1 | 67 | 0,994 | 0,910 |
| R2 | 67 | 1,720 | 1,670 |
| R3 | 67 | 2,300 | 2,238 |
| R4 | 66 | 2,520 | 2,520 |
| R5 | 64 | 2,351 | 2,380 |
| R6 | 63 | 1,895 | 1,841 |
| R7 | 61 | 1,037 | 1,100 |
| topo | 60 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 14,64 | 15,49 | 504 | |

Tabela B18 – Peça estrutural 18.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 90 | | |
| R1 | 88 | 1,240 | 1,205 |
| R2 | 84 | 2,205 | 2,100 |
| R3 | 83 | 2,640 | 2,760 |
| R4 | 81 | 3,120 | 3,120 |
| R5 | 78 | 2,377 | 2,441 |
| R6 | 76 | 2,170 | 2,295 |
| R7 | 74 | 1,338 | 1,320 |
| topo | 72 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 25,56 | 28,74 | 624 | |

Tabela B19 – Peça estrutural 19.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 78 | | |
| R1 | 78 | 1,016 | 1,035 |
| R2 | 75 | 1,765 | 1,767 |
| R3 | 73 | 2,350 | 2,350 |
| R4 | 71 | 2,640 | 2,640 |
| R5 | 70 | 2,484 | 2,508 |
| R6 | 67 | 1,450 | 1,989 |
| R7 | 66 | 1,090 | 1,040 |
| topo | 64 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 21,32 | 23,44 | 528 | |

Tabela B20 – Peça estrutural 20.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 77 | | |
| R1 | 75 | 1,046 | 1,029 |
| R2 | 72 | 1,815 | 1,885 |
| R3 | 71 | 2,400 | 2,368 |
| R4 | 71 | 2,640 | 2,640 |
| R5 | 69 | 2,453 | 2,458 |
| R6 | 67 | 1,978 | 1,895 |
| R7 | 69 | 1,078 | 1,127 |
| topo | 67 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 17,18 | 17,61 | 528 | |

Tabela B21 – Peça estrutural 21.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 60 | | |
| R1 | 59 | 0,810 | 0,834 |
| R2 | 58 | 1,465 | 1,460 |
| R3 | 57 | 1,950 | 1,924 |
| R4 | 57 | 2,610 | 2,610 |
| R5 | 55 | 2,021 | 1,905 |
| R6 | 54 | 1,531 | 1,505 |
| R7 | 53 | 0,651 | 0,880 |
| topo | 53 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 11,35 | 12,30 | 432 | |

Tabela B22 – Peça estrutural 22.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 78 | | |
| R1 | 75 | 1,110 | 1,105 |
| R2 | 74 | 1,937 | 1,890 |
| R3 | 72 | 2,535 | 2,570 |
| R4 | 72 | 2,760 | 2,760 |
| R5 | 70 | 2,544 | 2,530 |
| R6 | 70 | 2,111 | 1,943 |
| R7 | 68 | 1,189 | 1,110 |
| topo | 67 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 20,15 | 2037 | 552 | |

Tabela B23 – Peça estrutural 23.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 79 | | |
| R1 | 78 | 1,032 | 1,046 |
| R2 | 77 | 1,875 | 1,805 |
| R3 | 74 | 2,507 | 2,506 |
| R4 | 73 | 2,760 | 2,760 |
| R5 | 70 | 2,618 | 2,629 |
| R6 | 69 | 2,084 | 2,034 |
| R7 | 66 | 1,248 | 1,225 |
| topo | 65 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 16,65 | 20,90 | 552 | |

Tabela B24 – Peça estrutural 24.

| | C (cm) | d (cm) | d_{90°} (cm) |
|---------------|-----------------------------|---------------|-----------------------------|
| base | 63 | | |
| R1 | 61 | 0,790 | 0,783 |
| R2 | 60 | 1,384 | 1,374 |
| R3 | 58 | 1,850 | 1,830 |
| R4 | 57 | 2,040 | 2,040 |
| R5 | 56 | 1,900 | 1,896 |
| R6 | 55 | 1,467 | 1,461 |
| R7 | 54 | 0,865 | 0,840 |
| topo | 54 | | |
| F (kN) | F_{90°} (kN) | L (cm) | |
| 12,62 | 12,94 | 408 | |

APÊNDICE C

O cálculo do valor do módulo de elasticidade transversal (G) não é realizado neste trabalho, porém, a formulação da teoria responsável por sua determinação encontra-se aqui desenvolvida, possibilitando a elaboração de trabalhos futuros.

O cálculo do G para a peça de madeira roliça pode ser obtido por intermédio da formulação do elemento finito segundo a Teoria de Vigas de Timoshenko.

Generalidades

A teoria de vigas de Timoshenko baseia-se, a princípio, na teoria de Bernoulli. No entanto, leva em conta na sua formulação o efeito da deformação por esforço cortante. Dessa forma, a hipótese de que as seções planas permanecem planas após as deformações continua válida, porém, não mais perpendicular ao eixo deformado.

Neste caso, existe uma deformação adicional à curvatura de flexão fazendo com que a distorção seja diferente de zero, o que é muito significativo quando se trata de vigas curtas, vigas com baixo módulo de elasticidade transversal ou quando se necessita determinar a elástica de forma mais precisa.

Muitos autores propuseram elementos finitos para a viga de Timoshenko, cujas formulações estão baseadas no método dos deslocamentos e em métodos mistos, diferenciando-se apenas na escolha da função de interpolação utilizada para aproximar os deslocamentos transversais e as rotações. Sendo assim, nos modelos mais simples utilizam-se funções lineares para interpolar os deslocamentos e as rotações, mas com inconvenientes quando se trata de vigas poucos deformáveis ao esforço cortante, que podem ser eliminados utilizando-se funções de interpolação de ordens iguais para os

deslocamentos transversais e rotações, e, um polinômio de ordem inferior para as distorções.

Dedução da Matriz de Rigidez para a Viga Segundo a Teoria de Timoshenko

A determinação da matriz de rigidez para a viga segundo a teoria de Timoshenko é baseada no trabalho de GERE & WEAVER (1987), por ser uma formulação simples e eficiente, sendo a matriz de rigidez obtida com a função de forma exata, não havendo problema de travamento observado quando a aproximação é feita a partir de funções aproximadoras mais pobres.

Como essa formulação recorre várias vezes a expressões clássicas da Resistência dos Materiais, faz-se necessário o ajuste entre as convenções para os graus de liberdade utilizadas nas expressões e no Método dos Elementos Finitos, como ilustram as figuras 1 e 2.

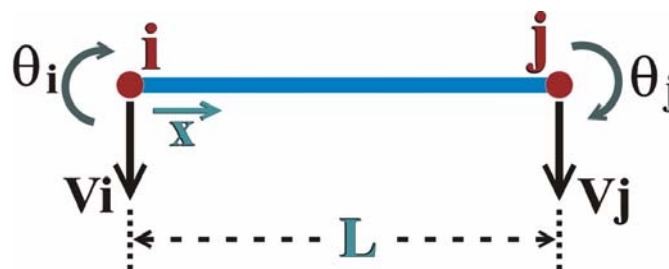


Figura 1 – Convenção e disposição dos graus de liberdade (deslocamentos) pela Resistência dos Materiais.

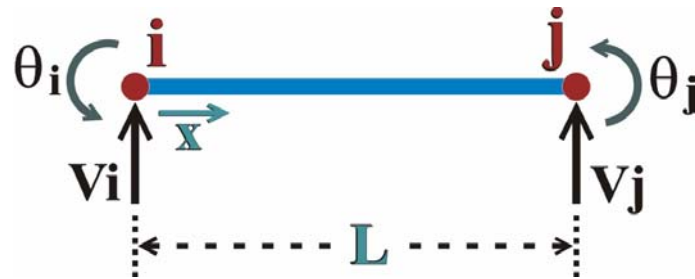


Figura 2 – Convenção e disposição dos graus de liberdade (deslocamentos) pelo Método dos Elementos Finitos.

A figura 3 ilustra a deformação de um elemento de viga segundo a teoria de Timoshenko.

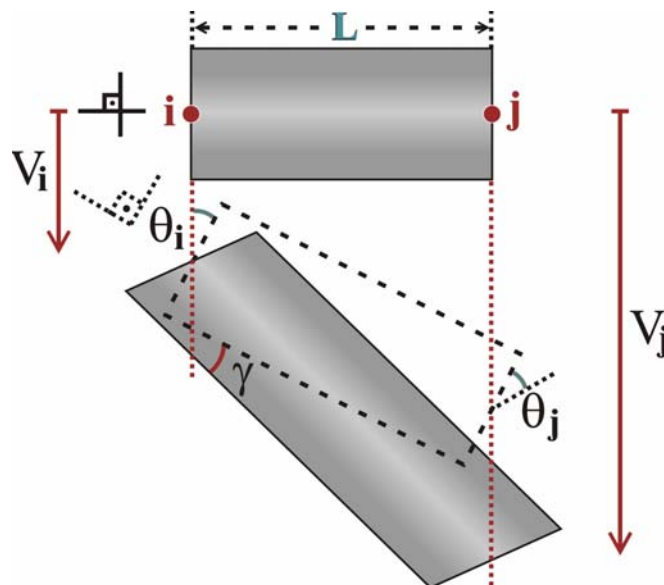


Figura 3 – Deformação do elemento finito segundo a Teoria de Vigas de Timoshenko.

A partir do modelo cinemático descrito na figura 3, escrevem-se as seguintes relações geométricas:

$$V_t = V_f + V_c \quad (1)$$

em que:

V_t – deslocamento transversal total;

V_f – deslocamento transversal devido ao momento fletor;

V_c – deslocamento transversal devido ao cisalhamento.

Da mesma forma, a relação é mantida em termos de primeira e segunda derivada.

$$\frac{d}{dx} V_t = \frac{d}{dx} V_f + \frac{d}{dx} V_c \quad (2a)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} V_t = \frac{d^2}{dx^2} V_f + \frac{d^2}{dx^2} V_c \quad (2b)$$

A equação (2a) pode também ser escrita da seguinte forma:

$$\beta = \varphi + \gamma \quad (3)$$

em que:

$\beta = \frac{d}{dx} V_t$ – variação angular total;

$\varphi = \frac{d}{dx} V_f$ – rotação (ângulo) do elemento segundo a Teoria de Bernoulli;

$\gamma = \frac{d}{dx} V_c$ – distorção (ângulo) do elemento segundo a Teoria de Timoshenko.

Tomando-se as equações de equilíbrio, provenientes da Resistência dos Materiais, para um elemento isolado, tem-se:

$$\frac{d}{dx}Q = -q \quad (4a)$$

$$\frac{d}{dx}M = Q \quad (4b)$$

onde:

Q – força cortante;

M – momento fletor;

q – carga distribuída no elemento.

A Resistência dos Materiais também fornece a relação da linha elástica, contendo as parcelas de flexão e de cisalhamento, expressa por:

$$V_t'' = -\frac{M}{EI} + \frac{kQ}{GS} \quad (5)$$

em que:

G – módulo de elasticidade transversal;

S – área da seção transversal da viga.

O método dos elementos finitos, em sua formulação, converte a carga distribuída ao longo do elemento em um carregamento nodal equivalente, que facilita a automação do processo sem causar perda de precisão dos resultados, admitindo-se para a primeira das equações de equilíbrio que:

$$\frac{d}{dx}V = 0 \quad (6)$$

de forma que a equação (5) seja expressa como:

$$M = -EIV_t'' \quad (7)$$

Recorrendo-se às equações (2a) e (3), tem-se que a rotação de flexão é dada por:

$$\varphi = \frac{d}{dx} V_f \therefore \frac{d}{dx} \varphi = V_f'' \quad (8a)$$

e a distorção por:

$$\gamma = \beta - \varphi \Rightarrow \gamma = \frac{d}{dx} V_t - \varphi = \frac{d}{dx} V_t - \frac{d}{dx} V_f \quad (8b)$$

Substituindo-se na expressão da linha elástica a equação (8a), juntamente com as equações (4a), (4b) e (8b), obtêm-se as seguintes relações constitutivas:

$$M = -EI \left(\frac{d}{dx} \varphi + \frac{d}{dx} \gamma \right) \quad (9a)$$

$$Q = -EI \left(\frac{d^2}{dx^2} \varphi + \frac{d^2}{dx^2} \gamma \right) \quad (9b)$$

$$Q = kGS\gamma = kGS \left(\frac{d}{dx} V_t - \varphi \right) \quad (9c)$$

sendo k o fator de forma da seção transversal, sendo seu valor expresso por:

- $\frac{1}{1,2}$ → seções retangulares;
- $\frac{1}{0,9}$ → seções circulares.

Recorrendo-se, novamente, à equação (6) pode-se, então, substituir nela a força cortante pelo seu valor obtido com a relação constitutiva (9c), de modo que:

$$kGS \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} V_t - \varphi \right) = 0 \quad (10)$$

de onde resulta que:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} V_t - \varphi \right) = 0 \quad (11a)$$

logo:

$$\frac{d^2}{dx^2} V_c = \frac{d}{dx} \gamma = 0 \quad (11b)$$

Tomando-se como base o resultado de (11b), as equações constitutivas (9a) e (9b) podem ser reescritas como:

$$M = -EI \frac{d}{dx} \varphi \quad (12a)$$

$$Q = -EI \frac{d^2}{dx^2} \varphi \quad (12b)$$

Substituindo-se na equação de equilíbrio (4b) as expressões obtidas com as relações constitutivas (12a) e (12c), tem-se:

$$\frac{d}{dx} \left(-EI \frac{d}{dx} \varphi \right) = kGS \left(\frac{d}{dx} V_t - \varphi \right) \quad (13a)$$

$$EI \frac{d^2}{dx^2} \varphi + kGS \left(\frac{d}{dx} V_t - \varphi \right) = 0 \quad (13b)$$

Recorrendo-se à equação de equilíbrio (4a), aplicou-se sobre ela a relação constitutiva (12b) e a equação (6), obtendo-se:

$$\frac{d^3}{dx^3} \varphi = 0 \quad (14)$$

e, portanto, para se ter nula a terceira derivada da rotação, escolhe-se uma função interpoladora para as rotações, dada por:

$$\varphi = A + Bx + Cx^2 \quad (15)$$

Substituindo-se na equação (13b) os valores dados por (15) e (8b), tem-se:

$$EI \frac{d^2}{dx^2} (A + Bx + Cx^2) + kGS\gamma = 0 \quad (16a)$$

$$EI \frac{d^2}{dx^2} (A + Bx + Cx^2) + kGS\gamma = 0 \quad (16b)$$

resultando numa expressão para a distorção em função dos parâmetros gerais e das características geométricas e físicas da seção, dada por:

$$\gamma = -\frac{2CEI}{kGS} \quad (17)$$

Obtida a distorção dada por (17) e substituindo-a, juntamente com a função de interpolação (15), na equação (8b) obtem-se para a primeira derivada do deslocamento transversal total a expressão:

$$\frac{d}{dx} V_t = A + Bx + Cx^2 - \frac{2CEI}{kGS} \quad (18)$$

que, ao ser integrada e devidamente simplificada, resulta na expressão do deslocamento transversal total, dada por:

$$V_t = D + Ax + \frac{Bx^2}{2} + C \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2EI}{kGS}x \right) \quad (19)$$

Convenientemente, pode-se definir a seguinte constante para a viga de Timoshenko:

$$g = \frac{6EI}{kGSL^2} \quad (20)$$

ficando a expressão (19) escrita da seguinte forma:

$$V_t = D + Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{C}{3}(x^3 - gL^2x) \quad (21)$$

A expressão (21) representa o polinômio aproximador dos deslocamentos (contendo as parcelas de flexão e cisalhamento), enquanto que a expressão (15) representa o polinômio aproximador das rotações (contendo somente a parcela de flexão). Contudo, esses polinômios estão expressos em função dos parâmetros generalizados, precisando, então, serem escritos em função dos parâmetros nodais do elemento com os devidos ajustes de convenções.

Para garantir a continuidade das funções aproximadoras, foram tomados os seguintes parâmetros nodais (figura 4):

V_1 e V_2 – deslocamentos lineares devidos à flexão e cisalhamento;

θ_1 e θ_2 – rotações devidas à flexão.

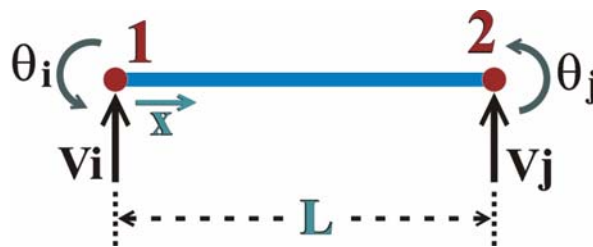


Figura 4 –Parâmetros nodais do elemento finito.

No contorno do elemento tem-se:

- $x = 0 \Rightarrow V = -V_1, x = 0 \Rightarrow \varphi = -\theta_1$
- $x = L \Rightarrow V = -V_2, x = L \Rightarrow \varphi = -\theta_2$

As relações acima podem ser mais bem compreendidas em termos matriciais:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ L & \frac{L^2}{2} & \frac{L^3}{3}(1-g) & 1 \\ 1 & L & L^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -V_1 \\ -\theta_1 \\ -V_2 \\ -\theta_2 \end{Bmatrix} \quad (22)$$

Resolvendo-se o sistema de equações acima, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\theta_1 \\ 2 \left(\frac{3V_1 + 2\theta_1 L + \theta_1 L g - 3V_2 + \theta_2 L - \theta_2 L g}{L^2(1+2.g)} \right) \\ -3 \left(\frac{2V_1 + \theta_1 L - 2V_2 + \theta_2 L}{L^3(1+2.g)} \right) \\ -V_1 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

A primeira derivada da rotação, em função dos parâmetros generalizados, é dada por:

$$\varphi' = B + 2Cx \quad (24a)$$

Enquanto que em termos dos parâmetros nodais, é dada por:

$$\varphi' = \frac{2}{L^2} \frac{(3V_1 + 2\theta_1 L + \theta_1 L g - 3V_2 + \theta_2 L - \theta_2 L g)}{(1+2g)} - \frac{6x}{L^3} \frac{(2V_1 + \theta_1 L - 2V_2 + \theta_2 L)}{(1+2g)} \quad (24b)$$

A primeira derivada da rotação representa a curvatura da seção ao longo do elemento. Para isso, são substituídos na equação (24b) os pontos $x = 0$ e $x = L$, de forma que:

- $x = 0$

$$\phi' = \left[\frac{6}{L^2(1+2g)} \right] V_1 + \left[\frac{4\left(1+\frac{g}{2}\right)}{L(1+2g)} \right] \theta_1 - \left[\frac{6}{L^2(1+2g)} \right] V_2 + \left[\frac{2(1-g)}{L(1+2g)} \right] \theta_2 \quad (25a)$$

- $x = L$

$$\phi' = \left[\frac{-6}{L^2(1+2g)} \right] V_1 + \left[\frac{-2(1-g)}{L(1+2g)} \right] \theta_1 - \left[\frac{-6}{L^2(1+2g)} \right] V_2 - \left[\frac{4\left(1+\frac{g}{2}\right)}{L(1+2g)} \right] \theta_2 \quad (25b)$$

Sendo assim, as equações (25a) e (25b) podem ser organizadas matricialmente determinando o vetor das curvaturas nas extremidades dos elementos, como expressa a equação:

$$\begin{Bmatrix} \frac{1}{r_0} \\ \frac{1}{r_L} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1+2g} \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} & \frac{4\left(1+\frac{g}{2}\right)}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(1-g) \\ -\frac{6}{L^2} & -\frac{2}{L}(1-g) & \frac{6}{L^2} & -\frac{4\left(1+\frac{g}{2}\right)}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

em que:

r_0 – curvatura do elemento em $x = 0$ (nó inicial);

r_L – curvatura do elemento em $x = L$ (nó final).

A distorção da seção transversal em função dos parâmetros nodais é obtida a partir da substituição da expressão (23) em (17), que, devidamente simplificada, fica:

$$\gamma = (2V_1 - 2V_2 + L\theta_1 + L\theta_2) \frac{g}{L(1+2g)} \quad (27)$$

O cálculo da matriz de rigidez do elemento finito segundo a Teoria de Vigas de Timoshenko é realizado por intermédio da minimização do seu funcional de energia de deformação.

O funcional de energia de deformação do elemento é expresso por:

$$U = \frac{E.I}{2} \int_0^L (\varphi')^2 dx + \frac{kGS}{2} \int_0^L (\gamma)^2 dx \quad (28)$$

em que “U” representa a energia de deformação interna do elemento.

Substituindo-se as expressões (24b) e (27) no funcional (28) e realizando-se algumas simplificações, tem-se:

$$U = \frac{E.I}{L^3(1+2g)} (2L^2\theta_2^2 + L^2\theta_2^2g + 2L^2\theta_1\theta_2 - 2L^2\theta_1\theta_2g - 6V_2\theta_2L + 6V_1\theta_2L + L^2\theta_1^2g + 2L^2\theta_1^2 + 6V_1\theta_1L - 6V_2\theta_1L - 2V_1V_2 + 6V_1^2 + 6V_2^2) \quad (29)$$

Fazendo-se a derivação da expressão da energia de deformação (29) em relação aos parâmetros nodais, segundo o princípio da mínima energia potencial total, tem-se:

$$\frac{dU}{dV_1} = \frac{6EI}{(1+2g)L^3} (2V_1 + L\theta_1 - 2V_2 + L\theta_2) \quad (30a)$$

$$\frac{dU}{d\theta_1} = \frac{-2EI}{(1+2g)L^2} (-3V_1 - 2L\theta_1 - L\theta_1g + 3V_2 - L\theta_2 + L\theta_2g) \quad (30b)$$

$$\frac{dU}{dV_2} = \frac{-6EI}{(1+2g)L^3} (2V_1 + L\theta_1 - 2V_2 + L\theta_2) \quad (30c)$$

$$\frac{dU}{d\theta_1} = \frac{-2EI}{(1+2g)L^2} (3V_1 + L\theta_1 - L\theta_1g - 3V_2 + 2L\theta_2 + L\theta_2g) \quad (30d)$$

Reorganizando-se as equações (30a) a (30d) na forma matricial segundo o sistema de equações $\{F\} = [K]\{U\}$, em que $[K]$ é a matriz de rigidez do elemento, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{1+2g} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(2+g) & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(1-g) \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(1-g) & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(2+g) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_1 \\ \theta_1 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (31)$$