

THAIS COIMBRA NINA

OTIMIZAÇÃO DE SEÇÕES TRANSVERSAIS DE
CONCRETO ARMADO: APLICAÇÃO A PÓRTICOS PLANOS

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos da Universidade de São Paulo
para obtenção do Título de Mestre em
Engenharia de Estruturas.

Orientador: Profa. Dra. Ana Lúcia H. C. El Debs

São Carlos
2006

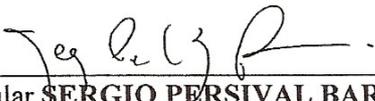
FOLHA DE JULGAMENTO

Candidata: Engenheira **THAÍS COIMBRA NINA**

Dissertação defendida e julgada em 29/05/2006 perante a Comissão Julgadora:



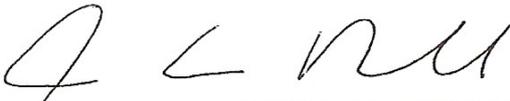
Prof. Dra. **ANA LÚCIA HOMCE DE CRESCER EL DEBS (Orientadora)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) APROVADA



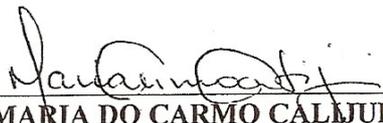
Prof. Titular **SERGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) APROVADA



Prof. Adjunto **ROBERTO CHUST CARVALHO**
(Universidade Federal de São Carlos/UFSCar) APROVADA



Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)



Prof. Titular **MARIA DO CARMO CALJURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

À minha família pelas incansáveis manifestações de apoio e principalmente aos meus pais, fontes de admiração, por todo o carinho, confiança, apoio e amor incondicional.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe Helen Maria Coimbra e ao meu pai Cláudio Bandão Nina pela confiança em mim depositada, pela compreensão, incentivo, orientação e pelo amor acima de tudo.

Aos meus avós paternos, Ana Cândida Brandão Nina e Afonso Celso Maranhão Nina, pelos mimos, carinhos e ensinamentos.

Aos meus tios e primos pelo apoio e pelas manifestações de saudades que aqueceram meu coração durante a permanência em São Carlos.

À Professora Ana Lúcia H. C. El Debs, pela sua orientação atenciosa.

Aos amigos que convivi no Mestrado Alice, Eduardo, Rafaelle, Ricardo e Tatiane pelo apoio, atenção e pelas horas de descontração.

À minha família de São Carlos, as Pimentas, Fernanda, Danusa, Danilo e Kenneth, pela amizade e pela enorme força.

Aos professores do Departamento de Estruturas da EESC-USP, que contribuíram para o meu crescimento pessoal e profissional.

A todos os funcionários do Departamento de Estruturas da EESC-USP, pela competência na execução dos seus serviços.

A CAPES, pela bolsa de estudo concedida.

RESUMO

NINA, T. C. (2006). **Otimização de seções transversais de concreto armado: aplicação a pórticos planos**. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Desenvolvimento de uma rotina computacional para otimizar o pré-dimensionamento de edifícios em concreto armado, tratados simplificadaamente como pórticos planos. Os softwares comerciais utilizados pelos escritórios de engenharia para o cálculo de estruturas partem do pré-dimensionamento, sendo esta etapa essencial ainda realizada geralmente a partir da experiência e intuição do projetista, por métodos de tentativa e erro. Apesar de que pequenos erros cometidos nesta fase serão corrigidos durante o dimensionamento, esse processo geralmente não leva à solução mais econômica, visto que podem existir diversas soluções de estruturas que atendam às condições de segurança exigidas pelas Normas e há pouco tempo para o engenheiro escolher, por meio de uma análise, a que lhe parecer ser a mais econômica. A otimização matemática é então utilizada como uma ferramenta de auxílio ao engenheiro para a determinação do projeto mais econômico, sendo que o pré-dimensionamento passa a ser feito utilizando técnicas matemáticas de avaliação das variáveis e restrições incluídas no projeto. A partir do posicionamento dos elementos e dos valores limites para as variáveis envolvidas, utilizando o método de programação quadrática sucessiva para resolver o problema geral de programação não-linear, aplica-se uma função de mínimo custo para a seção transversal das vigas e dos pilares, obtendo-se uma solução de mínimo custo para a estrutura estudada.

Palavras-chave: otimização estrutural; concreto armado; pórtico plano.

ABSTRACT

NINA, T. C. (2006). *Reinforced concrete cross-section cost optimization: a plane frame application*. Dissertação (Master Degree Thesis) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

A computational routine developed to optimize the first draft design of reinforced concrete buildings, approximated by plane frames. The commercial softwares used by the engineering offices for structural design is usually based in a first draft design, being this essential stage still accomplished by the engineer's experience and intuition, using attempt and error methods. Although small mistakes made in this phase will be corrected during the design, that process doesn't guarantee the most economic solution, because there are several structural solutions that assists to Code's safety conditions and there is little time for the engineer to choose, through an analysis, the one that seems to be the most economic. The mathematical optimization is used to assist the engineer to establish the cheapest structure, and the first draft design becomes made by mathematic techniques of evaluation of the project's variables and restrictions. Based on the elements location and the set values for the involved variables, solving the general nonlinear programming problem using the successive quadratic programming algorithm and a user-supplied gradient, a function of minimum cost is applied for the beams and columns cross section, obtaining a solution of minimum cost for the structure under analysis.

Keywords: structural optimization; reinforced concrete; plane frames.

Lista de Figuras

Figura 3.1: representação gráfica dos pontos de mínimo locais e globais de uma função genérica f .	22
Figura 3.2: Exemplos de restrições ativas e inativas.	23
Figura 4.1: Flexão normal composta	29
Figura 4.2: Flexão composta oblíqua.	29
Figura 4.3: Domínios de deformações definidos pela NBR 6118:2003	30
Figura 4.4: Convenção das dimensões do pilar	30
Figura 4.5: Situações de arranjos das armaduras.	31
Figura 4.6: Seção transversal do pilar e comp. de deformações nos domínios 2, 3 e 4	36
Figura 4.7: Seção transversal do pilar e compatibilidade de deformações no domínio 4a.	37
Figura 4.8: Seção transversal do pilar e compatibilidade de deformações no domínio 5	37
Figura 4.9: Diagrama tensão x deformação do aço CA-50	38
Figura 4.10: Situação de projeto 1	39
Figura 4.11: Situação de projeto 2	43
Figura 4.12: Situação de projeto 3	47
Figura 5.1: Seção transversal da viga, equilíbrio, diagrama de tensões e compatibilidade de deformações.	74
Figura 5.2: Viga biapoiada	80
Figura 7.1: Pórtico formado por quinze pavimentos e dois pilares	101
Figura 7.2: Pórtico formado por doze pavimentos e seis pilares	110
Figura 10.1: Exemplos de conjuntos convexos e não-convexos	128

Lista de Tabelas

Tabela 2.1: Publicações sobre otimização estrutural de vigas, pilares e lajes em concreto armado.....	7
Tabela 2.2: Publicações sobre otimização estrutural de pórticos de concreto armado.....	14
Tabela 4.1: Modelos de deformação da situação 1, domínios 2, 3 e 4.	39
Tabela 4.2: Tensões nas armaduras na situação 1, domínios 2, 3 e 4.	40
Tabela 4.3: Modelos de deformação da situação 1, domínio 4a.....	41
Tabela 4.4: Tensões nas armaduras na situação 1, domínio 4a.....	41
Tabela 4.5: Modelos de deformação da situação 1, domínio 5.	41
Tabela 4.6: Tensões nas armaduras na situação 1, domínio 5.....	42
Tabela 4.7: Modelos de deformação da situação 2, domínios 2, 3 e 4.	43
Tabela 4.8: Tensões nas armaduras na situação 2, domínios 2, 3 e 4.	44
Tabela 4.9: Modelos de deformação da situação 2, domínio 4a.....	45
Tabela 4.10: Tensões nas armaduras na situação 2, domínio 4a.....	45
Tabela 4.11: Modelos de deformação da situação 2, domínio 5.	46
Tabela 4.12: Tensões nas armaduras na situação 2, domínio 5.....	46
Tabela 4.13: Modelos de deformação da situação 3, domínios 2, 3 e 4.	48
Tabela 4.14: Tensões nas armaduras na situação 3, domínios 2, 3 e 4.	48
Tabela 4.15: Modelos de deformação da situação 3, domínio 4a.....	50
Tabela 4.16: Tensões nas armaduras na situação 3, domínio 4a.....	50
Tabela 4.17: Modelos de deformação da situação 3, domínio 5.	51
Tabela 4.18: Tensões nas armaduras na situação 3, domínio 5.....	51
Tabela 4.19: Validação do programa considerando excentricidade de 1cm e $b_w = 19\text{cm}$	58
Tabela 4.20: Validação do programa considerando excentricidade de 30cm e $b_w = 24\text{cm}$	58
Tabela 4.21: Resultados das variáveis otimizadas e auxiliares considerando excentricidade de 1cm.	60
Tabela 4.22: Comparação entre os custos considerando excentricidade de 1cm.	61
Tabela 4.23: Resultados das variáveis otimizadas e auxiliares considerando excentricidade de 5 cm.	62
Tabela 4.24: Comparação entre os custos considerando excentricidade de 5cm.	62
Tabela 4.25: : Resultados das variáveis otimizadas e auxiliares considerando excentricidade de 30 cm.	64
Tabela 4.26: Comparação entre os custos considerando excentricidade de 30cm.	64
Tabela 4.27: Resultados considerando excentricidade de 30 cm ($b_w=24\text{cm}$).	66
Tabela 4.28: Comparação entre os custos considerando excentricidade de 30cm ($b_w = 24\text{cm}$).....	66
Tabela 5.1: Resultados das variáveis otimizadas e auxiliares da viga biapoiada.	81
Tabela 5.2: Comparação entre os custos da viga biapoiada.....	84
Tabela 5.3: Comparação entre os custos dos materiais.	86
Tabela 5.4: Validação dos resultados obtidos com o dimensionamento.....	87

Tabela 5.5: Comparação entre as seções otimizadas e os menores custos obtidos com a variação da altura das vigas para os momentos fletores aplicados.	88
Tabela 7.1: Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas, ex. 01.	101
Tabela 7.2: Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares, ex. 01.	103
Tabela 7.3: Forças devidas ao vento.....	105
Tabela 7.4: Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas, ex.02.	106
Tabela 7.5: Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares, ex. 02.	107
Tabela 7.6: Tramos otimizados de cada pilar.....	109
Tabela 7.7: Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas, ex. 03.	110
Tabela 7.8: Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares, ex. 03.	112
Tabela 7.9: Forças devidas ao vento.....	114
Tabela 7.10: Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas, ex.04.....	114
Tabela 7.11: Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares, ex. 04.	115

Lista de Gráficos

Gráfico 4.1: Comportamento da função de custo em função da altura da seção.....	60
Gráfico 4.2: Resultados das variáveis otimizadas considerando excentricidade de 1cm	61
Gráfico 4.3: Comparação entre os custos considerando excentricidade de 1cm.....	62
Gráfico 4.4: Resultados das variáveis otimizadas considerando excentricidade de 5cm.	63
Gráfico 4.5: Comparação entre os custos considerando excentricidade de 5cm.....	63
Gráfico 4.6: Resultados considerando excentricidade de 30cm.....	64
Gráfico 4.7: Comparação entre os custos considerando excentricidade de 30cm.....	65
Gráfico 4.8: Resultados considerando excentricidade de 30cm e $b_w = 24$ cm.	67
Gráfico 4.9: Comparação entre os custos considerando excentricidade de 30cm e $b_w = 24$ cm.	67
Gráfico 4.10: Comparação dos custos em função das excentricidades e da força normal... ..	68
Gráfico 4.11: Comparação das funções de custo.....	68
Gráfico 5.1: Comparação entre alturas otimizadas.	81
Gráfico 5.2: Comparação entre altura otimizada e flecha na seção.....	82
Gráfico 5.3: Comparação entre as variáveis otimizadas da viga biapoiada.	83
Gráfico 5.4: Comparação entre os custos da viga biapoiada.	85
Gráfico 5.5: Relação altura vs. custo total da viga biapoiada.....	85
Gráfico 5.6: Custos totais para os momentos aplicados.	87
Gráfico 7.1: Resultados encontrados para as vigas a cada iteração.	102
Gráfico 7.2: Resultados encontrados para os pilares a cada iteração.	104
Gráfico 7.3: Custos totais das vigas, pilares e pórticos em cada iteração, ex. 01.....	105
Gráfico 7.4: Resultados encontrados para as vigas a cada iteração, ex. 02.....	107
Gráfico 7.5: Resultados encontrados para os pilares para cada iteração, ex. 02.	108
Gráfico 7.6: Custos totais das vigas, pilares e pórticos em cada iteração, ex. 02.....	109
Gráfico 7.7: Resultados encontrados para as vigas a cada iteração, ex. 03.....	111
Gráfico 7.8: Resultados encontrados para os pilares a cada iteração, ex.03.	112
Gráfico 7.9: Custos totais das vigas, pilares e pórticos em cada iteração, ex. 03.....	113
Gráfico 7.10: Resultados encontrados para as vigas a cada iteração, ex. 04.....	115
Gráfico 7.11: Resultados encontrados para os pilares para cada iteração, ex. 04.	116

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Considerações iniciais	1
1.2 Objetivo.....	2
1.3 Justificativa	3
1.4 Metodologia	4
2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	5
2.1 Tipos de otimização	5
2.2 A otimização estrutural	6
3. FUNDAMENTOS DA OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA	21
3.1 Definições	22
3.1.1 Ponto de mínimo local	22
3.1.2 Ponto de mínimo global	22
3.1.3 Ponto estacionário	22
3.1.4 Ponto regular	23
3.1.5 Restrições ativas e inativas	23
3.2 Problemas com restrições de igualdade e desigualdade	23
3.3 Método computacional utilizado na solução do problema de otimização	27
4. OTIMIZAÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL DE UM PILAR.....	28
4.1 Considerações iniciais	28
4.2 Variáveis otimizadas	30
4.3 Formulação da Função Objetivo	32
4.4 Restrições do Problema.....	33
4.4.1 Formulação das Restrições de Equilíbrio	33
4.4.2 Formulação das Restrições de Compatibilidade	35
4.4.3 Restrições das deformações	53
4.4.4 Restrições laterais	53
4.5 Resolução do problema	54
4.5.1 Formulação.....	54
4.5.2 Hipóteses	55
4.5.3 Etapas do processo	56
4.6 Exemplos Numéricos	57
4.6.1 Exemplo 01 e validação do programa de otimização de pilares.....	58
4.6.2 Exemplo 02.....	60

5. OTIMIZAÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL DE UMA VIGA	69
5.1 Considerações iniciais	69
5.2 Alterações na formulação da otimização da seção transversal de vigas	70
5.2.1 Condições de utilidade.....	70
5.2.2 Redistribuição de momentos	70
5.2.3 Deslocamentos limites	71
5.2.4 Flecha diferida no tempo (consideração da fluência)	71
5.2.5 Armadura mínima longitudinal de vigas.....	72
5.3 Variáveis otimizadas	72
5.4 Formulação da Função Objetivo.....	72
5.5 Restrições do Problema.....	73
5.5.1 Formulação das Restrições de Equilíbrio	73
5.5.2 Formulação das Restrições de Compatibilidade	75
5.5.3 Restrições Laterais	76
5.6 Resolução do problema	78
5.7 Exemplos Numéricos	79
5.8 Validação dos resultados.....	86
6. OTIMIZAÇÃO DE PÓRTICOS PLANOS.....	89
6.1 Processamento do programa de otimização	89
7. EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA.....	99
7.1 Exemplo 01:	100
7.2 Exemplo 02:	105
7.3 Exemplo 03:	110
7.4 Exemplo 04:	113
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS	117
8.1 Conclusões	117
8.2 Sugestões para pesquisas futuras.....	119
9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	120
APÊNDICE I - Complementos da otimização matemática.....	127
APÊNDICE II - Formulação para otimização de pilares.....	134

1. INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Nos dias atuais os escritórios de engenharia de estruturas fazem cada vez mais investimentos em computadores, *softwares*, treinamentos e manutenção em busca da competitividade no mercado, e de alguma forma estes gastos devem ser recompensados. Existem várias maneiras de se fazer isso, mas uma das mais importantes é a redução do tempo de elaboração dos projetos.

Os programas comerciais atuais de dimensionamento de estruturas de concreto armado já têm uma qualidade bastante avançada, fazendo, a partir do pré-dimensionamento, desde o cálculo dos esforços até o detalhamento de todos os elementos, enquanto que o engenheiro apenas acompanha o processo e faz os ajustes necessários para a entrega da solução final.

Mas, como foi mencionado, os softwares partem do pré-dimensionamento, sendo esta etapa essencial ainda realizada geralmente a partir da experiência e intuição do projetista, por métodos de tentativa e erro. Apesar de que pequenos erros cometidos nesta fase serão corrigidos durante o dimensionamento, esse processo geralmente não leva à solução mais econômica, visto que podem existir diversas soluções que atendam às condições de segurança exigidas pelas Normas e há pouco tempo para o engenheiro escolher a que lhe parecer ser a de mínimo custo.

É neste contexto que se inserem os métodos de otimização em projetos de estruturas, que podem proporcionar a automatização do pré-dimensionamento e trazer vários benefícios econômicos, tanto para o projetista, que terá seu tempo poupado contando com um auxílio matemático para encontrar a estrutura mais econômica com a certeza de estar atendendo às condições arquitetônicas, de segurança e construtivas, quanto para o construtor, que terá menos gastos para executar a estrutura.

Um programa de pré-dimensionamento deve produzir um projeto que: (1) seja econômico e eficiente; (2) seja capaz de resistir aos esforços especificados pelo projetista; (3) satisfaça todas as prescrições das normas e códigos relevantes da prática da engenharia; (4) e satisfaça qualquer outra limitação que o projetista especificar. Todos esses requisitos podem ser preenchidos por uma otimização numérica que minimize uma função objetivo de custo, representando a etapa (1), enquanto satisfaz um conjunto de restrições algébricas que representam (2), (3) e (4).

Assim, como afirmam Ahmadkhanlou e Adeli (2005), para os algoritmos de otimização estrutural encontrarem aplicação na prática da engenharia, eles devem ser formulados como otimização de custos e aplicados a estruturas realistas sujeitas a restrições de uso comum das Normas e códigos.

Sabendo dos benefícios que podem ser gerados pela otimização numérica, é desejável que sejam usados programas computacionais que a considerem, resultando em projetos econômicos e de estruturas eficientes.

1.2 OBJETIVO

Soares (1997) desenvolveu um software que determina automaticamente e de maneira ótima as alturas para as vigas de concreto armado de pavimentos de edifícios, tratados como grelhas, de forma a terem custo mínimo.

Vianna (2003) também desenvolveu uma rotina, mas para a minimização dos custos de pilares de concreto armado na situação de projeto em que a linha neutra se situa fora da seção transversal, ou seja, pilares no domínio 5 de deformação, com todas as armaduras comprimidas. Em seguida ele utilizou os resultados da pesquisa de Soares (1997) e unificou os dois softwares desenvolvendo uma rotina única para análise de pórticos planos de concreto armado.

No sentido de dar continuidade a essas duas pesquisas, o objetivo deste trabalho consiste em elaborar uma rotina para a otimização das seções transversais de pórticos planos, utilizando como base o algoritmo desenvolvido por Vianna (2003), de forma a considerar as situações de projeto não previstas anteriormente para os pilares, ou seja, com a posição da linha neutra dentro da seção, resultando em um *software* mais abrangente para análise de pórticos planos, contribuindo para a automatização do pré-dimensionamento dos edifícios de concreto armado.

A função de custo a ser implementada leva em conta os custos com material e mão de obra para a fabricação das vigas e pilares, incluindo nestes custos o concreto, a armadura longitudinal e a fôrma utilizada.

1.3 JUSTIFICATIVA

O engenheiro de estruturas, quando faz a concepção do projeto, conhecido como pré-dimensionamento, usa sua experiência e intuição para escolher os elementos que melhor irão atender aos aspectos de segurança e funcionalidade da estrutura. Esta etapa do projeto muitas vezes se torna exaustiva e, por causa da falta de tempo e limitação dos custos, nem sempre garante a escolha da opção mais econômica para aquela situação, visto que existem várias soluções que igualmente satisfazem às condições exigidas pelas Normas que regem a prática da engenharia.

A otimização matemática pode então ser utilizada como uma ferramenta de auxílio ao projetista para a determinação do projeto mais econômico, sendo que o pré-dimensionamento passa a ser feito utilizando técnicas matemáticas de avaliação das variáveis e restrições incluídas no projeto, e não pelo processo de tentativa e erro, proporcionando uma economia substancial de tempo.

Nas últimas quatro décadas ocorreu um grande avanço na teoria da otimização estrutural, mas os vários encontros realizados com o intuito de divulgar os trabalhos realizados e as tentativas de inseri-la no dia-a-dia dos escritórios de engenharia falharam, e a sua utilização ainda é quase nula, estando estes trabalhos restritos a especialistas no assunto, como afirma Vanderplaats (1984).

A maior razão do porque apenas pequena parte dos resultados das pesquisas em otimização tem sido adotada nos projetos práticos é que poucas satisfazem as necessidades específicas dos usuários potenciais. Em geral é dada maior prioridade à matemática sobre os aspectos estruturais da otimização nas publicações, sendo feitos exemplos triviais com a intenção apenas de ilustrar o sucesso da aplicação de um algoritmo em particular, como mostram Templeman (1983) e Cohn e Dinovitzer (1994). Então é razoável assumir que a otimização se tornará mais atrativa aos projetistas se mais exemplos de concreto e suas aplicações forem disponibilizados, especialmente para estruturas realistas, com condições de carregamento e análise dos estados limites.

As complexidades da otimização matemática, no entanto, representam um grande obstáculo para o projetista estrutural. Assim, é no sentido de auxiliá-lo que se insere este trabalho, na tentativa de preencher esta lacuna entre a teoria e a prática fornecendo uma rotina que realize o pré-dimensionamento dos projetos estruturais de pórticos planos de forma automatizada e econômica.

1.4 METODOLOGIA

A princípio foi feita uma revisão bibliográfica sobre o tema otimização em estruturas, apresentando algumas das pesquisas mais relevantes já realizadas e publicadas, métodos utilizados, resultados obtidos, conclusões e formas de abordagem para entender como este tema vem sendo tratado e estudado e quais os avanços encontrados.

Em seguida foi elaborada uma fundamentação teórica sobre a minimização matemática com o objetivo de explanar sobre conceitos, definições e teoremas para um melhor entendimento do método escolhido para otimizar o pórtico de concreto armado.

No desenvolvimento da rotina de otimização, tanto das vigas quanto dos pilares, o problema foi equacionado considerando uma função de custo sujeita às restrições de equilíbrio e compatibilidade das seções, além das limitações nas dimensões das variáveis, resultando em um problema de análise não linear. A solução exata do problema é alcançada por meio da resolução analítica do sistema de equações não-lineares gerado, por um método baseado na formulação e solução iterativa de subproblemas usando uma aproximação quadrática do Lagrangiano e linearizando as restrições.

As variáveis otimizadas das vigas são a altura da seção retangular e as armaduras (comprimidas e tracionadas), enquanto que para os pilares as variáveis são a altura da seção retangular, a armadura (considerada simétrica e com todas as barras de mesmo diâmetro) e a posição da linha neutra.

Para otimizar o pórtico plano a estrutura é processada localmente pela minimização das seções transversais das vigas e dos pilares. O resultado global é obtido pelas iterações realizadas, em que, após definidas as seções ótimas dos elementos isolados, a estrutura é reprocessada e novamente otimizada, até que não haja mais uma redistribuição significativa dos esforços.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Tipos de otimização

O problema de otimização consiste em alcançar a melhor solução para um problema matematicamente definido, que é frequentemente a modelagem de um problema físico, satisfazendo certas condições. No campo das estruturas, sejam estas de concreto ou de aço, a otimização pode ser aplicada para achar o custo ou o peso ótimo de vigas, pilares, lajes, pórticos ou treliças, sendo estes os modelos mais comumente estudados. As condições então são conhecidas como restrições, sendo determinadas pelas Normas e códigos que regem a prática do projeto de estruturas, como limitações das dimensões das peças, equilíbrio de esforços e limites de deslocamentos, por exemplo.

Em relação à otimização, os problemas estruturais podem convenientemente ser identificados, segundo Cohn e Dinovitzer (1994), por:

- Incerteza das considerações (determinística ou probabilística);
- Variáveis e parâmetros de projeto (geometria, carregamentos, materiais);
- Formulação do problema (objetivo, estados limites, restrições).

Segundo Camp et. al (1998), em geral as técnicas de otimização utilizadas no projeto de estruturas podem ser classificados em três tipos de aproximação: a programação matemática, método dos critérios de otimização ou algoritmos genéticos.

A programação matemática pode ser dividida em programação linear e não-linear. Na programação linear a função objetivo e as restrições são expressas por uma combinação linear das variáveis de projeto, enquanto que na programação não-linear as restrições são funções não-lineares nas variáveis de projeto. A programação matemática não linear foi desenvolvida para resolver problema de otimização não linear sem restrições, e as condições necessárias para alcançar a solução ótima são providas pelas condições de Kuhn-Tucker (Kuhn-Tucker, 1951). A otimização de elementos estruturais de concreto armado é um problema não linear com restrições, o que o torna um dos tipos mais difíceis de resolver.

Como a aplicação direta das condições de Kuhn-Tucker é extremamente difícil para a maioria dos problemas, o método dos critérios de otimização foi criado para sua aplicação indireta, combinada com os multiplicadores de Lagrange. Este método vem sendo usado na maioria dos problemas de engenharia de estruturas, principalmente para grandes estruturas, como em Chou (1977), Lounis e Cohn (1993b), Moharrami e Grierson (1993) e Soares (1997). Para problemas grandes ou complexos, são preferidos os métodos dos critérios de otimização, os quais dividem o problema em subproblemas garantindo a convergência dos resultados.

Finalmente, o método dos algoritmos genéticos não precisa de uma relação explícita entre a função objetivo e as restrições do problema. Ele trabalha com uma população de variáveis e cada uma define uma solução potencial. Este método também tem sido empregado com sucesso em Rath et al. (1999) e Camp et al. (2003).

2.2 A otimização estrutural

A teoria da otimização estrutural teve um avanço considerável durante as últimas quatro décadas, conforme pode ser comprovado pelo grande número de livros e artigos publicados. Mas por outro lado, sua aplicação prática ainda é comparativamente modesta e reservada a problemas específicos resolvidos por especialistas em otimização, como já foi mencionado.

Cohn e Dinovitzer (1994) fizeram um estudo sobre a história da otimização estrutural até 1992, abrangendo estruturas do tipo treliças planas e espaciais, vigas, colunas, cabos, pórticos, arcos, placas, cascas e chapas, tanto em concreto armado como em aço, produzindo um amplo catálogo que abrange aproximadamente 500 exemplos, entre livros e artigos. Sarma e Adeli (1998) também fizeram um estudo semelhante, mas se restringiram a artigos sobre otimização de custos de estruturas de concreto armado, como vigas, pilares, lajes, pórticos, estruturas de pontes, tanques de água entre outros.

No estudo da teoria e prática da otimização estrutural Cohn e Dinovitzer (1994) estimam que desde 1960 até 1997 foram publicados cerca de 150 livros e 2500 artigos, sendo que a grande maioria trata dos aspectos matemáticos da otimização. Sarma e Adeli (1998) afirmam ainda que apenas uma pequena fração das publicações trata da minimização dos custos das estruturas.

Tendo em vista que o assunto foi bastante explorado até 1997 por estes dois artigos, será mostrado nas tabelas 1 e 2, em ordem cronológica, um breve histórico sobre o tema até a data mencionada, baseado nestas publicações, dando maior enfoque às estruturas de concreto, que são de maior interesse neste trabalho.

Tabela 2.1: Publicações sobre otimização estrutural de vigas, pilares e lajes em concreto armado.

Vigas, Lajes e Pilares de Concreto Armado

Ano de publicação	Autor	Elemento estudado	Método de otimização utilizado	Conclusões	Comentários sobre a formulação do problema	Obs.
1971	Goble e Lapay	Viga seção T protendida pré-tensionada.	Método do gradiente de projeção.	O projeto ótimo não é afetado por mudanças nos coeficientes de custo.	Foi contestado por pesquisas posteriores.	Baseado no ACI.
1972	Kirsch	Viga contínua de dois vãos pré-tensionada.	Linearização aproximada do problema de otimização não-linear pelo método de programação linear.	-	Restrições de tensão, protensão e flecha.	-
1974	Friel	Vigas retangulares simplesmente apoiadas.	Soluções fechadas para a taxa ótima de aço/concreto para o mínimo custo.	Custo da forma e o aumento na altura da viga não influenciam significativamente no custo ótimo.	Restrições de momento último.	Baseado no ACI.
1975	Brown	Lajes simplesmente apoiadas uniformemente carregadas em uma direção.	Método iterativo.	Ganho de mais de 17% nos custos.	Restrições apenas à flexão.	Baseado no ACI.
1976	Naaman	Vigas retangulares protendidas simplesmente apoiadas e lajes armadas em uma direção.	Técnica de busca direta.	O mínimo custo e mínimo peso são similares apenas para uma determinada razão concreto/aço de protensão. Por outro lado, a aproximação de mínimo custo leva a uma solução mais econômica, principalmente para taxas muito menores que a citada (caso que engloba a maioria dos projetos).	Comparou mínimo custo e peso.	Baseado no ACI.
1977	Chou	Viga T simplesmente armada.	Método dos Multiplicadores de Lagrange.	Redução de mais de 14% no custo com taxa máxima de armadura.	Duas variáveis: altura útil e área de aço. Linha neutra dentro da mesa.	-

Tabela 2.1: continuação

Ano de publicação	Autor	Elemento estudado	Método de otimização utilizado	Conclusões	Comentários sobre a formulação do problema	Obs.
1978	Gunaratnam e Sivakumaran	Lajes com distribuição de momento uniforme, triangular ou parabólico.	Combinação de multiplicadores de Lagrange com métodos gráficos.	1. Apresentam curvas com parâmetros ótimos em função da espessura da laje. 2. Influência significativa do estado limite último de deflexão nos parâmetros ótimos.	-	Baseado na Norma britânica.
1984a	Cohn e MacRae	Viga simplesmente apoiada e parcial ou inteiramente pré-tensionada e pós-tensionada com seção transversal fixa.	Conjugação direta viável.	1. Para a viga pós-tensionada a protensão parcial é mais econômica que a total nos casos de taxas de armadura ativa/passiva maiores que 4; 2. Protensão total é mais econômica nas vigas pré-tensionadas; 3. Vigas com maior custo/benefício são aquelas com taxa alta/vão alta e baixa intensidade de cargas acidentais.	Vigas submetidas aos estados limites últimos e de serviço, incluindo flexão, deflexão, ductilidade, fadiga, fissuração e armadura mínima.	Baseado no ACI ou Norma Canadense.
1984	Saouma e Murad	Viga I simplesmente apoiada com carga distribuída, protensão parcial e mesas iguais.	Otimização com restrições é transformada em sem restrições usando o método da função de penalidade interior e resolvida pelo método quasi-Newton.	1. Soluções ótimas para vigas de 6 a 42m de vão, fissuradas ou não, com redução nos custos entre 5% e 52%. 2. Deixar a peça fissurar não reduz o custo significativamente.	Formulação com 9 variáveis: 6 geométricas e 3 áreas de aço (tração, compressão e protensão).	Baseado no ACI.

Tabela 2.1: continuação

Ano de publicação	Autor	Elemento estudado	Método de otimização utilizado	Conclusões	Comentários sobre a formulação do problema	Obs.
1986	Abendroth e Salmon	Vigas seção T com extremidades inteira ou parcialmente restritas.	Otimização com restrições é transformada em sem restrições usando o método da função de penalidade interior e resolvido pelo método quasi-Newton Raphson.	1. Custos menores na utilização de formas metálicas ao invés de formas de madeira, mesmo com reaproveitamento 4 vezes; 2. 5% de aumento nos custos para concreto com resistência entre 17,2 a 48,2 MPa e 15% para o aço com resistência entre 275,6 e 516,8 MPa; 3. Projetos que consideram estados limites parciais, ao invés de elástico, não produzem economia significativa.	Assumido que o custo dos estribos é 1,5 vezes o custo da armadura longitudinal.	-
1987	Park e Harik	Lajes armadas em duas direções curvadas horizontalmente com contornos rígidos.	Método de programação linear sequencial.	Restrições de flecha, altura mínima útil e momentos de projeto são os 3 fatores dominantes na otimização.	-	Baseado na Norma Britânica.
1987	MacRae e Cohn	Lajes em concreto protendido.	Método da direção conjugada.	Usar cabos agrupados e aço de alta resistência reduz o custo total.	Considerou apenas a armadura de flexão, apesar da importância do cisalhamento. Variaram a razão altura útil/vão, cargas acidentais, posição dos cabos, estados limites e tensões.	Baseado na Norma Canadense e ACI.
1988	Prakash et al.	Vigas T e retangulares com armadura simples e dupla.	Método Simplex e multiplicadores de Lagrange.	1. Lajes armadas em duas direções são mais econômicas que pavimentos com viga T para vãos maiores que 6 m em prédios residenciais. 2. Para cargas mais pesadas ou maiores vãos, o contrário é verdadeiro.	-	Baseado na Norma Indiana.

Tabela 2.1: continuação

Ano de publicação	Autor	Elemento estudado	Método de otimização utilizado	Conclusões	Comentários sobre a formulação do problema	Obs.
1990	Paul et al.	Sistema de piso modular com lajes alveolares e maciças pré-moldadas protendidas sobre vigas de aço.	Método de programação geométrica geral.	Para custos menores, a força de protensão necessária para laje maciça é menor que para laje alveolar.	Considerou custo do concreto, aço de protensão, forma, vigas de aço e elevação para montagem.	Baseado na Norma Britânica.
1990	Kanagasundaram e Karihaloo	Vigas seção T, L e retangular contínuas simplesmente apoiadas.	Programação linear sequencial e programação sequencial convexa.	Os custos do concreto e do aço são praticamente os mesmos, mas a forma é mais que duas vezes o custo do concreto e do aço juntos, tendo então uma significativa contribuição no custo total.	-	-
1990 - 1991a	Kanagasundaram e Karihaloo	Pilares retangulares curtos e esbeltos sujeitos à compressão axial e flexão simples ou biaxial .	Programação linear sequencial e programação sequencial convexa.	-	A função objetivo e as restrições são aproximadas pela extensão das séries de Taylor.	Baseado na Norma Australiana.
1991a	Kanagasundaram e Karihaloo	Vigas seção retangular e T simplesmente apoiadas e de múltiplos vãos.	Custo do concreto relacionado à sua resistência através de uma análise por regressão não linear usando uma função cúbica.	Concreto com $f_{ck} > 60$ MPa resultam em seções menores e levam a vigas mais econômicas.	Consideraram resistência à tração como variável, junto com a seção transversal e taxa de armadura.	-
1991b	Kanagasundaram e Karihaloo	Vigas seção retangular de múltiplos vãos.	Custo do concreto relacionado à sua resistência através de uma análise por regressão não linear usando uma função cúbica.	Conclusões similares às anteriores (1991a).	Pressão de terra, pressão da água, cargas de vento ou de terremotos somadas às cargas permanentes e acidentais.	-

Tabela 2.1: continuação

Ano de publicação	Autor	Elemento estudado	Método de otimização utilizado	Conclusões	Comentários sobre a formulação do problema	Obs.
1992	Ezeldin e Hsu	Vigas retangulares reforçadas com fibras.	Método da procura direta.	Custos do concreto e fôrma são mais influentes que o do aço e fibras.	Seis variáveis: Largura e altura da seção, quantidade de fibras, área de aço das barras dobradas, área da seção transversal e espaçamento de estribos. Consideração do custo dos estribos na função objetivo.	-
1992a	Chakrabarty	Vigas retas retangulares simplesmente armadas.	Método da programação geométrica e de Newton-Rapson.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Custo do concreto e aço são parecidos, mas o da fôrma é aproximadamente 1/4 do custo do concreto ou do aço; 2. O valor ótimo leva a vigas dúcteis, o que é bom para resistir às forças dinâmicas, como terremotos; 3. O custo aumenta 35% quando a razão largura/altura da seção aumenta de 0,25 para 0,67; 4. As seções ótimas são freqüentemente mais altas para satisfazer as restrições de deslocamento, por isso, se tornam mais dúcteis com menos armadura. 	Pesquisa realizada na Índia, onde a mão-de-obra é barata. Em 1990 Kanagasundaram e Karihaloo disseram o inverso para países como Austrália e Estados Unidos, onde a mão-de-obra é mais cara, como foi exposto.	-

Tabela 2.1: continuação

Ano de publicação	Autor	Elemento estudado	Método de otimização utilizado	Conclusões	Comentários sobre a formulação do problema	Obs.
1993	Cohn e Lounis	Vigas contínuas protendidas parcial e totalmente e lajes armadas em uma direção.	Método dos Multiplicadores de Lagrange.	O custo total diminui com o aumento na tensão de protensão.	1.Satisfizeram estados limites último e de serviço simultaneamente. 2.A não linearidade do material é idealizada por uma relação constitutiva elastoplástica. 3.Perdas de protensão constantes são admitidas.	Baseado no ACI.
1993b	Lounis e Cohn	Lajes pré-tensionadas.	Método dos Multiplicadores de Lagrange.	-	1.Formulação de otimização multiobjetiva para minimizar o custo e maximizar a contra-flecha com trabalhabilidade e restrições ao estado limite último. 2.Satisfizeram estados limites último e de serviço simultaneamente.	Baseado no ACI.
1993	Khaleel e Itani	Vigas seção I assimétricas simplesmente apoiadas protendidas parcialmente.	Método da programação sequencial quadrática assumindo seções fissuradas e não fissuradas.	1. O aumento na resistência do concreto não diminui o custo ótimo significativamente; 2. A maior resistência do aço de protensão reduz o custo ótimo a um certo limite; 3) Certa quantidade de armadura passiva facilita o desenvolvimento da fissuração no concreto, reduzindo o custo dos materiais e aumentando a ductilidade.	-	Baseado no ACI.

Tabela 2.1: continuação

Ano de publicação	Autor	Elemento estudado	Método de otimização utilizado	Conclusões	Comentários sobre a formulação do problema	Obs.
1994	Al-Salloum e Siddiqi	Vigas retangulares simplesmente armadas.	Método dos Multiplicadores de Lagrange.	Obteve uma solução de forma fechada para as áreas de aço e altura da seção em função do custo e de parâmetros de resistência.	-	Baseado no ACI.
1994a	Adamu e Karihaloo	Vigas de seção variada de dois tipos: engastadas em uma extremidade e simplesmente apoiadas na outra, e contínuas de três vãos.	Método do critério de otimização discretizado tipo contínuo (DCOC).	-	Variáveis de projeto são a altura ou a razão altura/área de aço.	-
1995	Han et al.	Vigas retangulares e seção T pré-tensionadas parcialmente.	Método do critério de otimização discretizado tipo contínuo (DCOC).	Para uma viga simplesmente apoiada, a seção T é mais econômica que a retangular.	-	Baseado na Norma Australiana.
1995	Zielinski et al.	Pilares retangulares curtos short-tied	Método da penalização interna da função.	-	-	Baseado na Norma Canadense.
1996	Kocer e Arora	Postes de transmissão de concreto pretendido.	Combinação dos métodos branch and bound, enumeração e programação seqüencial quadrática com algoritmos genéticos.	1. Algoritmos genéticos são mais eficientes que as outras aproximações; 2. Economia de aproximadamente 25% em relação a projetos convencionais.	-	Baseado no PCI e ACI.

Tabela 2.2: Publicações sobre otimização estrutural de pórticos de concreto armado.

Pórticos de Concreto Armado

Ano de publicação	Autor	Elemento estudado	Método de otimização utilizado	Comentários sobre a formulação do problema e conclusões	Obs.
1981	Krishnamoorthy e Mosi	Pórticos bidimensionais de seção retangular.	Técnica da minimização sequencial sem restrições (SUMT) e o método Davidon-Fletcher-Powell.	1. Função de custo inclui apenas concreto, aço e forma. 2. Apresentaram exemplos de vão simples, duplo e triplo com seis pavimentos.	-
1985	Huanchun e Zheng	Pórticos bidimensionais.	Projeto de mínimo custo em dois níveis: no primeiro tentam achar a estrutura mais flexível satisfazendo restrições globais para deslocamentos laterais usando a programação linear sequencial. No segundo nível consideram as restrições locais para cada membro da estrutura usando um método da procura discreta para larguras e alturas da seção transversal.	A função objetivo inclui apenas custos de material das vigas e colunas.	Baseado na norma Chinesa.
1990	Choi e Kwak	Pórticos bidimensionais de seção retangular.	Método de busca direta para selecionar seções de projeto apropriadas a partir de algumas seções discretas predeterminadas.	A função objetivo inclui apenas custos de material do concreto, armadura e forma.	Baseado no ACI e norma Coreana.
1990	Spires e Arora	Pórticos tubulares altos com dupla simetria.	Método da programação quadrática sequencial. Mas a estrutura duplamente simétrica é reduzida a um pórtico plano equivalente usando uma aproximação por elementos finitos. Então são otimizados os custos de pórticos bidimensionais simétricos regulares.	1. A função objetivo inclui apenas custos de material do concreto, armadura e forma das vigas e pilares. 2. Também consideram a freqüente restrição ao limite das forças de vento e terremoto. 3. Apresentam exemplos de pórticos bidimensionais de cinco e quarenta pavimentos.	Baseado no ACI.
1993	Dinno e Mekha	Pórticos bidimensionais de um e dois pavimentos.	Método SUMT e uma relação momento-rotação inelástica tri-linear para vigas e colunas.	Projetos que usam análise inelástica são mais econômicos.	Baseado no ACI.

Tabela 2.2: continuação

Ano de publicação	Autor	Elemento estudado	Método de otimização utilizado	Comentários sobre a formulação do problema e conclusões	Obs.
1993	Moharrami e Grierson	Pórticos com pilares retangulares e vigas retangulares, seção L ou T.	Aproximação por critérios de otimização.	<ol style="list-style-type: none"> 1. A aproximação por critério de otimização converge lentamente quando as restrições de rigidez são incluídas na formulação. 2. Pórticos sujeitos a ação vertical e lateral. As variáveis de projeto são largura, altura e armadura longitudinal das vigas e colunas. 3. Exemplo de pórtico de cinco pavimentos e um vão. 	Baseado no ACI.
1995b	Adamu e Karihaloo	Pórticos de múltiplos andares e múltiplos vãos.	Método do critério de otimização discretizado tipo contínuo (DCOC).	<ol style="list-style-type: none"> 1. As variáveis de projeto são as dimensões da seção transversal e taxa de armadura. 2. Dimensões uniformes das vigas e pilares em todos os pavimentos, mas variação da taxa de armadura em cada membro. 	Baseado nas Normas Australiana e Européia.
1996	Fadaee e Grierson	Pórticos tridimensionais com vigas e pilares retangulares.	Aproximação por critérios de otimização.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Pórtico sujeito a momentos biaxiais e forças cortantes. Tem como foco a formulação de restrições apropriadas para combinação do carregamento, momento fletor e esforço cortante biaxiais. 2. Como exemplo um pórtico espacial de um vão e um pavimento. 3. O esforço cortante biaxial é uma importante consideração para o projeto dos pilares, e sua inclusão aumenta significativamente o custo ótimo da estrutura. 	Baseado no ACI.

Tabela 2.2: continuação

Ano de publicação	Autor	Elemento estudado	Método de otimização utilizado	Comentários sobre a formulação do problema e conclusões	Obs.
1997	Balling e Yao	Pórticos tridimensionais com pilares retangulares e vigas retangulares, seção T ou L, de um, dois e quatro pavimentos.	Programação sequencial quadrática ou um método baseado em gradiente.	<ol style="list-style-type: none"> 1. Pórtico sujeito a forças horizontais e verticais. 2. Para o aço consideram duas definições diferentes para as variáveis de projeto. Na primeira, a área de aço de cada membro é a única variável usada para o aço naquele membro. Na segunda são considerados número, diâmetro e distribuição longitudinal das barras, resultando em uma otimização em dois níveis. 3. Incluíram custo de material, fabricação e montagem na função de custo. 4. Os custos ótimos baseados nas duas definições acima ficam bem próximos um do outro, portanto, não há necessidade de incluir a segunda definição de custo computacional na formulação. Baseado nisso, os autores discutiram uma aproximação simplificada para otimização de custo de pórticos espaciais. 	Baseado no ACI.

Dando continuidade ao histórico da otimização estrutural após o ano de 1997, são apresentados a seguir os resumos de alguns artigos e trabalhos principais publicados até os dias atuais.

Soares (1997) apresenta uma rotina para fazer o pré-dimensionamento ótimo das seções transversais mais solicitadas das vigas de um pavimento (tratadas como grelha) por meio do método dos multiplicadores de Lagrange. Parte-se do princípio de que o somatório dos mínimos locais iteragidos representa o mínimo global da estrutura. As variáveis envolvidas no processo de otimização são a altura da viga e a área de aço, considerando que a largura da viga é um dado definido pela arquitetura. Através de exemplos e de comparações com estruturas reais, ele comprova a eficiência do programa apresentado.

Rath et al. (1999) desenvolvem uma aproximação para otimizar a forma da seção transversal variando altura e largura ao longo do comprimento de membros isolados de concreto armado submetidos à flexão. Utilizam como exemplos uma viga simplesmente apoiada, uma viga em balanço e uma viga contínua de dois vãos. A função objetivo é o custo total, considerando o material, fabricação e montagem, sendo o custo da forma proporcional ao volume de concreto. No início do processo a peça tem seção transversal retangular, e, pelo método da programação seqüencial quadrática (SQP), são otimizadas a largura, altura e área de armadura da seção, chegando a um membro de seção I com altura e largura variáveis ao longo do comprimento. Para otimizar o diâmetro e o número de barras de armadura longitudinal são usados algoritmos genéticos, sendo esta aproximação mais eficiente que outras técnicas discretas convencionais. Não consideram armadura de cisalhamento. Como conclusões, chegaram a reduções de material e custos das vigas entre 40 e 56%. Este tipo de otimização leva a economias consideráveis particularmente nos casos de peças pré-moldadas produzidas em grande escala e peças muito pesadas moldadas "in loco", como vigas de pontes.

Ferreira et al. (2003) apresentam um modelo para otimizar a área de aço (barras tracionadas e comprimidas) e sua distribuição em vigas seção T sujeitas à flexão. As considerações de projeto são elaboradas de acordo com as prescrições do Eurocode. O projeto é feito em termos de estado limite último para atender à seção mais solicitada, que delimita a seção transversal e a quantidade de aço. São apresentadas equações para o máximo momento fletor considerando apenas armadura simples e para a área ótima de aço e sua distribuição. Estas equações são expressas em termos da geometria e das características mecânicas da viga. As vantagens do modelo são soluções corretas mais econômicas quando comparadas a soluções práticas correntes, o uso do comportamento

não-linear dos materiais, o desenvolvimento de uma metodologia que pode ser estendida a outras seções e a possibilidade de implementação destas equações em programação computacional.

Com o objetivo de minimizar o custo total de uma estrutura, Leps e Sejnoha (2003) analisaram uma viga de concreto armado contínua usando o método do recozimento simulado (simulated annealing method) e algoritmos genéticos. Em trabalho anterior, os autores apresentaram resultados para o problema de otimização considerando apenas as dimensões da seção transversal e armadura de flexão como variáveis. No presente artigo foram incluídas forças de cisalhamento, resultando em economia de 30% em relação ao trabalho anterior. Quando comparado aos projetos convencionais baseados no Eurocode, o aumento na economia chega a mais de 42%.

Camp et al. (2003) utilizam o método dos algoritmos genéticos para otimizar o custo de vigas simplesmente apoiadas, pilares e pórticos de múltiplos andares segundo as limitações e restrições do ACI. Vários exemplos de projeto são apresentados para demonstrar a efetividade e eficiência deste método.

Lee e Ahn (2003) apresentam uma aproximação baseada no método dos algoritmos genéticos para otimizar pórticos planos de concreto armado sujeitos a combinações de cargas gravitacionais e laterais, conforme prescrições do ACI. Na função objetivo estão incluídos custos com material e mão-de-obra. As dificuldades em achar as seções ótimas a partir de um conjunto semi-infinito de possibilidades para as dimensões da seção e arranjos de armadura são aliviadas construindo um conjunto de dados contendo um número finito de propriedades da seção das vigas e pilares em um campo prático. São demonstrados exemplos de pórticos de três vãos com três, nove e vinte pavimentos.

Barros et al. (2004) obtêm uma solução analítica para o projeto ótimo de seções retangulares de concreto com armadura dupla sujeitas ao estado limite último, baseado nas restrições e limitações do Eurocode. O interesse do modelo é o uso de equações únicas de equilíbrio de forma fechada na otimização de seções com a mínima área de armadura e momento fletor econômico. A seção é suposta carregada com momento fletor e força axial, com a linha neutra situada dentro da seção. A solução ótima é função da posição da linha neutra e da distância da armadura de compressão ao topo da seção (altura útil "d"). A vantagem do método é regularizar as descontinuidades na função objetivo e nas restrições.

Ahmadkhanlou e Adeli (2005) apresentam uma formulação geral para a otimização de lajes de concreto armado de vão único e múltiplos com várias situações de contorno (simplesmente apoiadas, um lado contínuo, dois lados contínuos e em balanço) sujeitas às restrições do ACI. O problema é formulado com três variáveis: espessura da laje, diâmetro e espaçamento da armadura. A solução é obtida em dois estágios. No primeiro o modelo neuro-dinâmico é usado para obter uma solução ótima assumindo variáveis contínuas. Em seguida, o problema é formulado como uma otimização inteira-discreta e resolvido usando uma técnica de perturbação para achar valores práticos para as variáveis.

Fazendo uma breve análise quantitativa do histórico da otimização apresentado no catálogo de Cohn e Dinovitzer (1994), constata-se que o número de exemplos de otimização estrutural durante os últimos 40 anos é muito pequeno quando comparado às publicações de otimização matemática. Os exemplos mais utilizados são treliças planas e espaciais, pórticos, vigas, grelhas e chapas, sendo os quatro primeiros os tipos mais frequentemente usados, representando 25% de toda a literatura. A freqüência de uso desses modelos é explicada pelo fato de a solução já ser conhecida, facilitando a comparação com os novos algoritmos.

Já em relação ao tipo de carregamento, 88% considera carregamento estático. São poucos os casos de situações de carregamentos mais complexas, sendo que o dinâmico aparece em 11% do material pesquisado e vem crescendo.

Quanto ao tipo de material, o aço aparece como sendo o preferido (92%) devido à facilidade de modelagem de suas propriedades e homogeneidade. Concreto e materiais compostos representam apenas 5% dos exemplos.

A quantidade de exemplos que utilizam função objetivo única é predominante em relação às funções objetivo múltiplas, com peso e custos como objetivos principais.

Entre os algoritmos empregados como ferramentas de otimização, a programação matemática é a preferida para estruturas de tamanho moderado, enquanto que para estruturas de grande porte a preferência é para o método dos critérios de otimização.

Considerando agora apenas as publicações sobre otimização de custos de estruturas de concreto armado, percebe-se que a grande maioria utiliza vigas como exemplo. Lajes, pilares e pórticos representam apenas uma pequena parte, sendo que até o ano de 1997 foram citados apenas dois artigos sobre pórticos tridimensionais, segundo Sarma e Adeli (1998). Assim, há uma necessidade em se fazer mais pesquisas em estruturas realista tridimensionais, especialmente grandes estruturas com centenas de membros onde a otimização possa representar significativa economia.

Em relação à função custo, a maioria considera apenas custos de material com concreto, forma e aço, ignorando mão-de-obra, fabricação, transporte entre outros.

Nota-se também que as seguintes variáveis são freqüentemente usadas: geometria da seção e área e posição da armadura. No entanto, esta otimização considera análise linear elástica da estrutura global. Segundo Ferreira et al. (2003), este tipo de análise linear é relevante para o estado limite de serviço e é importante para as dimensões definitivas da seção, mas em termos do estado limite último esta análise não é correta devido ao comportamento não-linear do concreto armado.

3. FUNDAMENTOS DA OTIMIZAÇÃO MATEMÁTICA

Os problemas de minimização matemática geralmente são da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Minimizar} & f(x) \\
 \text{Sujeito a} & h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m \\
 & g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \\
 & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

onde f , h_i e g_j são funções contínuas definidas em \mathbb{R}^n , Ω é um subconjunto de \mathbb{R}^n e x é um vetor de n componentes x_1, x_2, \dots, x_n , chamado vetor das variáveis, das incógnitas ou dos parâmetros. O problema é então resolvido pelas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n que satisfazem as restrições e minimizam a função f .

A função $f(x)$ é denominada função objetivo, $h_i(x)$ são restrições de igualdade e $g_j(x)$ representam restrições de desigualdade.

Considerando que $i \in I$ e $j \in D$, quando $I = \emptyset$ e $D = \emptyset$, ou seja, quando estes dois conjuntos forem vazios, não existem as restrições $h_i(x)$ e $g_j(x)$ e ainda $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Neste caso diz-se tratar de um problema de otimização sem restrições. Quando $I \neq \emptyset$ e $D \neq \emptyset$, diz-se tratar de um problema de otimização com restrições.

Um vetor x que satisfaz todas as restrições do problema é chamado de ponto viável. O conjunto de todos os pontos viáveis do problema é chamado de região viável Γ . Se a região viável Γ for limitada e fechada, então a solução do problema existirá. Caso a região viável seja ilimitada, o problema pode ser ilimitado, ou seja, $f(x) \rightarrow \infty$. O problema também não terá solução se a região viável for vazia, ou seja, se não existir $x \in \Omega$ que satisfaça às restrições, e diz-se que as restrições são inconsistentes. Na seqüência deste capítulo será sempre suposto que a região Γ é limitada e fechada.

3.1 Definições

A seguir estão alguns conceitos iniciais de fundamental importância para o entendimento da otimização matemática. As demais definições utilizadas ao longo deste capítulo não apresentadas aqui podem ser conferidas no Apêndice I.

3.1.1 Ponto de mínimo local

Diz-se que um ponto $x^* \in \Gamma$ é um ponto de mínimo local ou ponto de mínimo relativo de $f(x)$ se numa vizinhança aberta de x^* , $B_a(x^*, r)$, $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in B_a(x^*, r)$. Se $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in B_a(x^*, r)$ e $x \neq x^*$, diz-se que x^* é um ponto de mínimo local estrito de $f(x)$.

3.1.2 Ponto de mínimo global

Diz-se que um ponto $x^* \in \Gamma$ é um ponto de mínimo global de $f(x)$ se $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in \Gamma$. Se $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in \Gamma$, $x \neq x^*$, diz-se que x^* é um ponto de mínimo global estrito de $f(x)$. A Figura 3.1 a seguir mostra os pontos de mínimo local e global de uma função de uma variável.

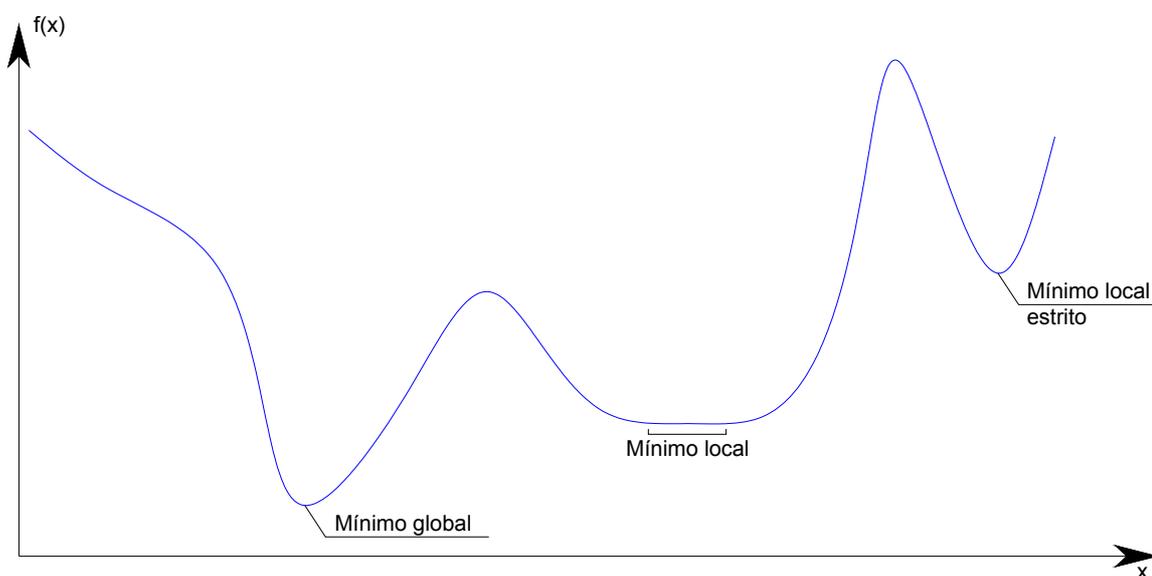


Figura 3.1: representação gráfica dos pontos de mínimo locais e globais de uma função genérica f .

3.1.3 Ponto estacionário

Um ponto x^* é considerado estacionário, ou seja, um ponto de máximo, de mínimo ou de inflexão da função f , se, em um espaço \mathbb{R}^n , suas n derivadas parciais são simultaneamente anuladas ($\nabla f(x^*) = 0$). Isto nos leva à interpretação de que o coeficiente angular da reta tangente a x^* (representado pelo gradiente de f em x^*) é zero ou não existe, o que significa que este ponto é um candidato a extremo da função.

3.1.4 Ponto regular

Seja um ponto x^* que satisfaça às restrições ativas $g_j(x^*) = 0$ para $j = 1, 2, \dots, p$. O ponto x^* é denominado ponto regular das restrições se os vetores gradientes $\nabla g_1(x^*)$, $\nabla g_2(x^*)$, ..., $\nabla g_p(x^*)$ são linearmente independentes.

3.1.5 Restrições ativas e inativas

Em uma restrição de desigualdade $g_j(x) \leq 0$, dizemos que a restrição é ativa no ponto x quando $g_j(x) = 0$, e inativa se $g_j(x) < 0$. Considera-se por convenção que qualquer restrição de igualdade $h_i(x) = 0$ é ativa em qualquer ponto viável.

As restrições inativas não exercem influência sobre o domínio de soluções viáveis do problema de minimização, enquanto que as ativas limitam este domínio. Sendo assim, podemos voltar nossas atenções para as restrições ativas a fim de resolver o problema, e apenas checar se os resultados encontrados satisfazem às demais restrições (as inativas). A Figura 3.2 mostra graficamente restrições ativas e inativas para melhor entendimento, onde $g_1(x)$ é ativa em x^* e as restrições $g_2(x)$ e $g_3(x)$ são inativas em x^* .

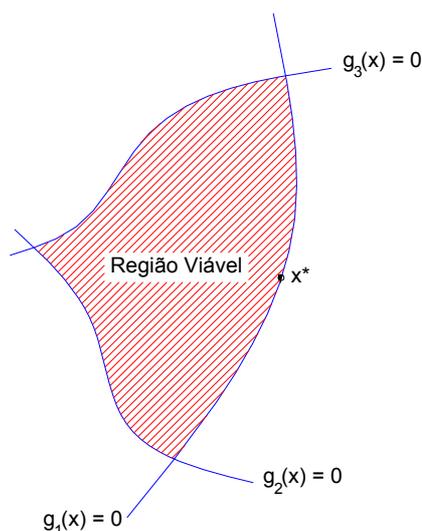


Figura 3.2: Exemplos de restrições ativas e inativas

3.2 Problemas com restrições de igualdade e desigualdade

Na seqüência deste capítulo serão estudadas as condições necessárias e suficientes para um ponto viável x^* ser uma solução ótima do problema de otimização matemática. Estas condições, além de caracterizarem soluções, definem os multiplicadores de Lagrange e certa matriz Hessiana que, considerados juntos, formam a base do desenvolvimento e análise dos algoritmos para resolver problemas não-lineares.

Será dada ênfase às funções não lineares que minimizam o custo de estruturas com restrições lineares e/ou não-lineares, situação que se aplica à análise dos elementos em questão. Para o melhor entendimento do contexto, no apêndice I são apresentados problemas sem restrições. Este tipo de problema é de difícil aplicação prática, no entanto é importante que ele seja estudado porque os problemas com restrições são uma extensão lógica dos problemas sem restrições. No apêndice I também podem ser estudados os problemas com restrições de desigualdade.

Os teoremas e corolários que serão introduzidos neste capítulo podem ser encontrados com demonstrações e explicações mais detalhadas em Bazaraa e Shetty (1979).

A seguir serão apresentados os problemas com restrições de igualdade e desigualdade. O problema de programação não-linear neste caso é da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{Sujeito a} & h_i(x) = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \\ & g_j(x) \leq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, p \\ & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Teorema 01:

Sejam as funções $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \dots, m$, e $g_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para $j = 1, 2, \dots, p$. Considere o problema P da forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{Sujeito a} & h_i(x) = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m \\ & g_j(x) \leq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, p \\ & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Seja x^* um ponto de mínimo local e $J = \{j: g_j(x^*) = 0\}$. Seja ainda f e g_j , para $j \in J$, diferenciáveis em x^* , g_j , para $j \notin J$, continua em x^* e h_i continuamente derivável em x^* , para $i = 1, 2, \dots, m$. Se $\nabla h_i(x^*)$, para $i = 1, 2, \dots, m$ são linearmente independentes, então $F_0 \cap G_0 \cap H_0 = \emptyset$, onde

$$\begin{aligned} F_0 &= \{d: \nabla f(x^*)^t d < 0\} \\ G_0 &= \{d: \nabla g_j(x^*)^t d < 0 \text{ para } j \in J\} \\ H_0 &= \{d: \nabla h_i(x^*)^t d < 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Expressando a condição geométrica de mínimo $F_0 \cap G_0 \cap H_0 = \emptyset$ em equações algébricas mais usuais, como foi feito no teorema 06 apresentado no apêndice I, podemos também chegar às condições de Fritz John para problemas com restrições de igualdade e de desigualdade. Aplicando as qualificações de restrições a este resultado, resulta o teorema 02, que são as condições de Kuhn e Tucker para problemas deste tipo.

Teorema 02:

Sejam as funções $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \dots, m$, e $g_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para $j = 1, 2, \dots, p$. Considere o problema P da forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{Sujeito a} & h_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \\ & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Seja x^* um ponto de mínimo local e $J = \{j: g_j(x^*) = 0\}$. Seja ainda f e g_j , para $j \in J$, diferenciáveis em x^* , g_j , para $j \notin J$, continua em x^* e h_i continuamente derivável em x^* , para $i = 1, 2, \dots, m$. As condições suficientes para que um ponto x^* seja uma solução local para o problema são que existam os escalares λ_i para $i = 1, 2, \dots, m$ e μ_j para $j = 1, 2, \dots, p$, de forma que:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \mu_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, p \\ \mu_j &\geq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

e a matriz hessiana

$$L(x^*) = F(x^*) + \lambda^t H(x^*) + \mu^t G(x^*)$$

seja definida positiva no sub-espço

$$M = \{d: \nabla h_i(x^*)d = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } \nabla g_j(x^*)d = 0 \text{ para todo } j \in J\}$$

onde

$$J = \{j: g_j(x^*) = 0, \mu_j > 0\}$$

Foram apresentadas até aqui as condições necessárias e suficientes para que um ponto estacionário x seja um ponto mínimo local x^* . Mas, se o problema possuir algumas características de convexidade, definidas no apêndice I, podemos também determinar condições para o ponto x^* ser um mínimo global. Os conceitos de convexidade e teoremas apresentados podem ser encontrados em Luenberger (1989) e Medrano (1994).

Condições suficientes para mínimo global

Considere-se então o seguinte problema:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{Sujeito a} & g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \\ & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Admite-se que as funções $g_j(x)$ são convexas no conjunto convexo Ω . O conjunto delimitado por cada uma das restrições $g_j(x) \leq 0$ é um conjunto convexo, assim como a intersecção de vários conjuntos convexas é também um conjunto convexo. Conclui-se, então, que a região viável Γ delimitada pelas restrições $g_j(x)$ é convexa. Se ainda a função $f(x)$ for convexa, diz-se que é um problema de programação convexa.

Relativamente à programação convexa, valem os seguintes resultados:

Teorema 3

Toda solução x^* de um problema de programação convexa é uma solução global, e o conjunto das soluções globais S é um conjunto convexo.

Corolário 01

Se no problema de programação convexa a função objetivo for estritamente convexa em Ω , então toda solução global é única.

Teorema 4

Se num problema de programação convexa, as funções $f(x)$ e $g_j(x)$, para $j = 1, 2, \dots, p$, são contínuas com derivadas parciais contínuas até primeira ordem, e se as condições de Kuhn-Tucker estão satisfeitas em x^* , então o ponto x^* é uma solução global do problema de programação convexa.

3.3 Método computacional utilizado na solução do problema de otimização

A elaboração dos algoritmos de otimização foi feita na linguagem Fortran e a plataforma utilizada foi a *Compaq Visual Fortran Version 6.6*.

Para a resolução matemática da minimização do problema foi utilizado um algoritmo chamado NCONG, extraído da *IMSL MATH LIBRARY*, que é uma biblioteca de rotinas e funções em Fortran utilizadas em análise matemática. Este algoritmo, baseado na subrotina NLPQL, é um código desenvolvido por Schittkowski (1986) que usa um método de programação quadrática sucessiva para resolver o problema geral de programação não-linear.

Nesta rotina o problema é definido como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) \\ & x \in \mathbb{R}^n \\ \text{Sujeito a} \quad & g_j(x) = 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, m_e \\ & g_j(x) \geq 0, \quad \text{para } j = m_e + 1, \dots, m \\ & x_{lower} \leq x \leq x_{upper} \end{aligned}$$

onde todas as funções são contínuas e diferenciáveis. Os dados de entrada da subrotina são as funções objetivo e das restrições e suas respectivas derivadas parciais. O método é baseado na formulação e solução iterativa de subproblemas usando uma aproximação quadrática do Lagrangiano e linearizando as restrições. Isto é,

$$\begin{aligned} \min_{d \in \mathbb{R}^n} \quad & \frac{1}{2} d^T B_k d + \nabla f(x_k)^T d \\ \text{Sujeito a} \quad & \nabla g_j(x_k)^T d + g_j(x_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m_e \\ & \nabla g_j(x_k)^T d + g_j(x_k) \geq 0, \quad j = m_e + 1, \dots, m \\ & x_l - x_k \leq d \leq x_u - x_k \end{aligned}$$

onde B_k é uma aproximação positiva definida da Hessiana e x_k é a iteração corrente.

Assim, deixe d_k ser a solução do subproblema. Uma linha de pesquisa é usada para achar um novo ponto x_{k+1} ,

$$x_{k+1} = x_k + \lambda d_k, \quad \lambda \in (0, 1]$$

tal que uma direção de busca terá um valor menor no novo ponto. Aqui, a função Lagrangiana (Schittkowski 1986) é usada como a direção de busca. Quando a otimização não é alcançada, B_k é atualizada de acordo com a fórmula BFGS (Powell 1978).

Para mais detalhes teóricos e práticos, ver Stoer (1985), Schittkowski (1983, 1986) e Gill et al. (1985).

4. OTIMIZAÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL DE UM PILAR

Neste capítulo será apresentada a elaboração da formulação matemática e a resolução do problema de otimização dos custos de um pilar. São considerados pilares de seção retangular com distribuição simétrica das barras longitudinais, não sendo otimizada a armadura transversal (estribos).

A princípio foi feita uma breve introdução sobre o comportamento dos pilares sob solicitações normais e os possíveis estados de tensões das armaduras da seção em função destes esforços solicitantes, o que implica em diversas situações diferentes de equilíbrio. Em seguida será demonstrada a elaboração da função objetivo (ou função de custo) e das restrições, o método utilizado para resolução do problema e por fim serão apresentados alguns exemplos e verificações dos resultados obtidos.

4.1 Considerações iniciais

As solicitações normais são os esforços solicitantes que produzem tensões normais na seção transversal das peças estruturais de concreto, e englobam momento fletor e força normal.

A flexão normal composta (FNC) é determinada por uma solicitação normal excêntrica localizada sobre os eixos de simetria da seção transversal da peça estrutural (Figura 4.1). Já a flexão composta oblíqua (FCO) ocorre quando a solicitação normal atua fora dos eixos de simetria da seção (Figura 4.2).

Dependendo da posição da linha neutra, convencionada como sua distância x à fibra extrema mais comprimida, há três casos de estado de tensões das armaduras possíveis em seções submetidas à FNC:

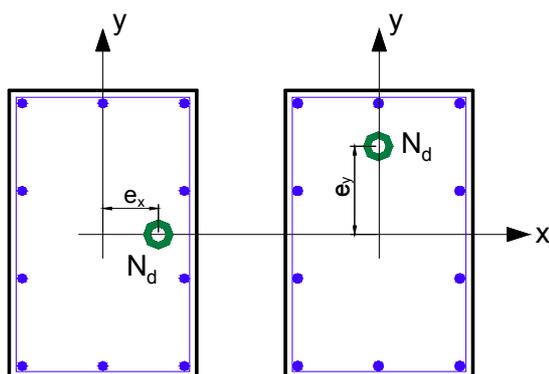


Figura 4.1: Flexão normal composta – posição da solicitação normal nos eixos de simetria.

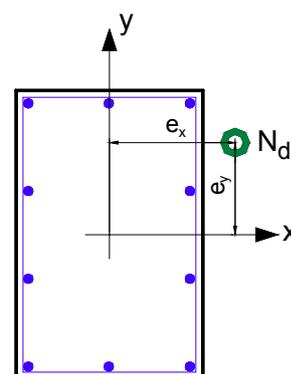


Figura 4.2: Flexão composta oblíqua – posição da solicitação normal fora dos eixos de simetria.

1) *Somente armaduras tracionadas*: o esforço predominante é a força normal de tração, implicando em tração uniforme (Reta a), flexo-tração com pequena excentricidade (Domínio 1) ou flexo-tração com grande excentricidade (Sub-domínio 2a). A Figura 4.3 ilustra os domínios de deformações definidos pela NBR 6118:2003. A resistência do concreto à tração não é considerada por ser muito pequena, o qual é admitido como inteiramente fissurado, sendo a solicitação absorvida apenas pelas armaduras. A ruína se dá por deformação plástica excessiva da armadura e a linha neutra situa-se entre $-\infty < x < d'$;

2) *Algumas armaduras tracionadas e outras comprimidas*: o esforço predominante é o momento fletor, implicando em flexo-tração com grande excentricidade, flexão simples (ambos Sub-domínio 2b e Domínio 3) ou flexo-compressão com grande excentricidade (Sub-domínio 2b e Domínios 3 e 4). No Domínio 3 ocorre ruptura do concreto simultaneamente ao escoamento da armadura, situação desejável em projeto, enquanto que no Domínio 4 o concreto sofre ruptura frágil, não-avisada, pois atinge a tensão de ruptura antes que o aço entre em escoamento, devendo-se portanto evitar tanto quanto possível o dimensionamento das peças nesta situação. A posição da linha neutra varia entre $d' < x < d$;

3) *Somente armaduras comprimidas*: o esforço predominante é a solicitação normal de compressão, implicando em flexo-compressão com pequena excentricidade (Domínios 4a e 5) e compressão uniforme (Reta b). A ruína se dá por ruptura do concreto e a linha neutra encontra-se no intervalo $d < x < +\infty$.

Neste estudo os pilares foram considerados simplificadaamente como submetidos à flexão normal composta, abrangendo o dimensionamento nos domínios 2, 3, 4, 4a e 5.

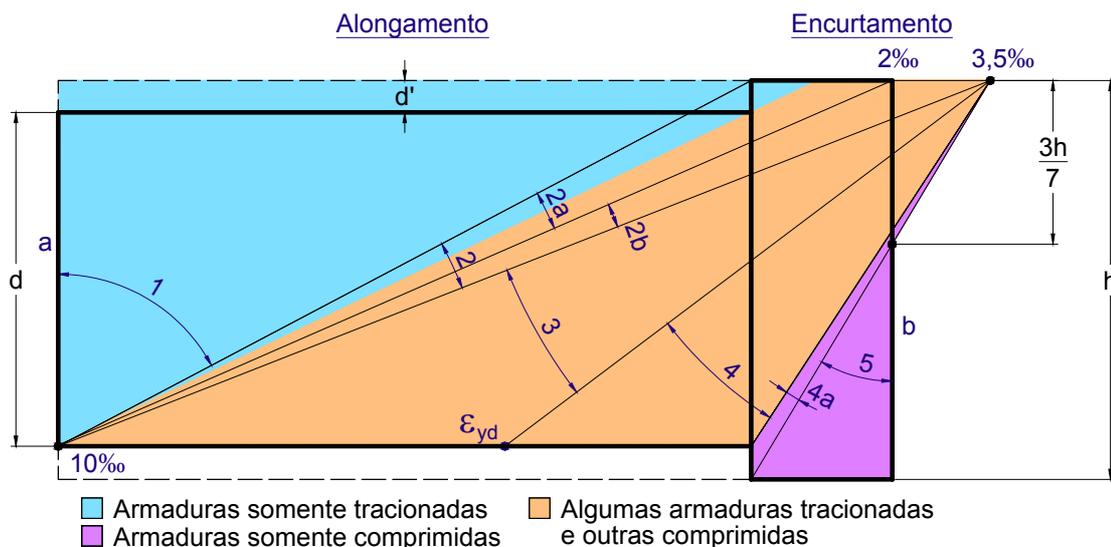


Figura 4.3: Domínios de deformações definidos pela NBR 6118:2003.

4.2 Variáveis otimizadas

As variáveis a serem otimizadas, a princípio, são a altura e a área de armadura longitudinal da seção transversal de concreto de um pilar retangular.

Algumas considerações devem ser feitas:

- Foi convencionada como altura a dimensão paralela ao eixo da viga que chega ao pilar e largura a dimensão perpendicular a este mesmo eixo, como pode ser observado Figura 4.4;

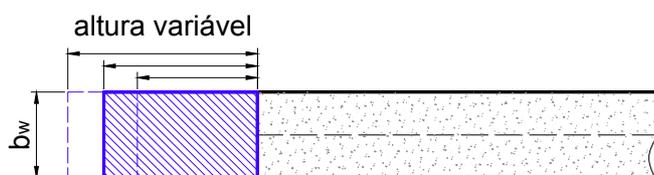


Figura 4.4: Convenção das dimensões do pilar.

- O programa de otimização de pilares desenvolvido parte de uma largura predeterminada e busca valores ótimos para a altura e para a armadura da seção. Isso porque geralmente se considera a largura dos pilares como sendo a mínima permitida por norma;

- Na elaboração dos projetos de estruturas é usual se considerar o uso de armadura simétrica em pilares, a fim de evitar erros de posicionamento das armaduras durante sua montagem. Assim, para efeito prático todas as barras serão consideradas com mesmo diâmetro e com arranjo simétrico na seção;

■ Em relação às armaduras longitudinais, para atender à NBR 6118:2003 que prescreve que o espaçamento máximo das barras na seção do pilar não deve ultrapassar 40 cm, foram consideradas 3 situações de projeto para os arranjos das barras em função da dimensão altura, conforme ilustrado na Figura 4.5.;

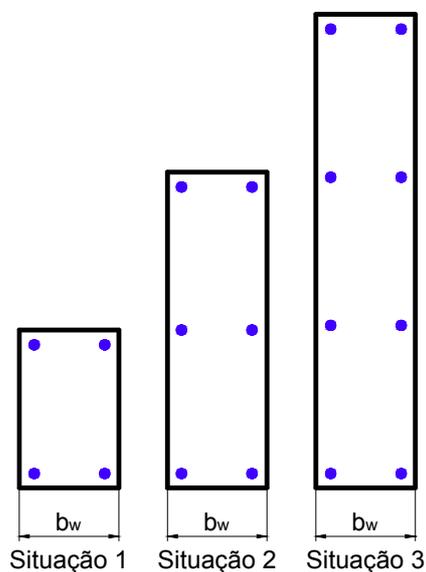


Figura 4.5: Situações de arranjos das armaduras.

- Situação de projeto 1: $h \leq 40$ cm;
 Situação de projeto 2: $40 < h \leq 80$ cm;
 Situação de projeto 3: $80 < h \leq 120$ cm.

■ A NBR 6118:2003 determina que se a altura da seção for maior que cinco vezes sua largura o elemento é considerado como pilar-parede. Então, como a altura máxima considerada pelas situações é de 120cm, pode-se fixar a largura em no máximo 24cm.

■ Apesar da profundidade da linha neutra não ser uma variável otimizada diretamente na função objetivo, ela será necessária para o equilíbrio da seção, portanto também deve ser considerada como incógnita.

Assim, as variáveis do problema são:

- $h = x_1$ Altura da seção transversal do pilar;
 $A_s = x_2$ Área de aço longitudinal da seção transversal do pilar;
 $x = x_3$ Profundidade da linha neutra da seção transversal do pilar.

4.3 Formulação da Função Objetivo

A função objetivo é a expressão que engloba as variáveis e representa o menor custo por unidade de comprimento do pilar, levando em consideração gastos com material e mão de obra para a execução das fôrmas de madeira (inclusive travamentos e escoramentos), da concretagem e da montagem da armadura longitudinal, sendo da forma:

$$F = (b_w \cdot h) \cdot C_C + A_s \cdot \rho_s \cdot C_S + (2b_w + 2h) \cdot C_F \quad [4.1]$$

onde:

- F Função de custo do pilar, por unidade de comprimento;
- b_w Largura do pilar;
- h Altura do pilar;
- A_s Área de armadura longitudinal na seção do pilar;
- ρ_s Massa específica do aço;
- C_C Custo do concreto, por unidade de volume;
- C_S Custo da armadura, por unidade de massa;
- C_F Custo da fôrma, por unidade de área.

Substituindo a nomenclatura das variáveis a serem otimizadas na equação [4.1]:

$$F(x) = (b_w \cdot x_1) \cdot C_C + x_2 \cdot \rho_s \cdot C_S + (2b_w + 2x_1) \cdot C_F \quad [4.2]$$

Algumas constantes foram determinadas para simplificar os cálculos, sendo estas:

$$c_1 = C_C$$

$$c_2 = \rho_s C_S$$

$$c_3 = 2 \cdot C_F$$

Substituindo as constantes acima na equação [4.2], obtém-se a função objetivo:

$$F(x) = c_1 \cdot (b_w \cdot x_1) + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot (b_w + x_1) \quad [4.3]$$

4.4 Restrições do Problema

4.4.1 Formulação das Restrições de Equilíbrio

As equações de equilíbrio de forças de uma seção transversal de concreto são elaboradas em função da distribuição das camadas de armadura, da linha neutra e da altura da seção. Sendo assim, serão apresentadas a seguir as equações definidas para cada uma das três diferentes situações de projeto apresentados no item 4.2. Para a definição das equações de equilíbrio foi utilizado o diagrama retangular de tensões.

4.4.1.1 Situação de projeto 1 ($x_1 \leq 40\text{cm}$)

Domínios 2, 3, 4 e 4a:

$$\sum F_x = 0 \quad 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) - N_d = 0 \quad [4.4]$$

$$\sum M_{CG} = 0 \quad 0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{4} \cdot (\sigma_2 - \sigma_1) \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.5]$$

onde:

f_{cd} Resistência à compressão de cálculo do concreto;

d' Distância do centro de gravidade da armadura à face da seção;

σ_i Tensão atuante na armadura na camada i , sendo as camadas numeradas no sentido da face menos comprimida (ou tracionada) para a mais comprimida da seção.

Nota: Nos valores das tensões já estão considerados seus respectivos sinais (positivo para compressão e negativo para tração).

Domínio 5:

Devido ao uso do diagrama tensão x deformação simplificado do concreto, uma consideração deve ser feita quando se trata do domínio 5.

Podem ocorrer duas situações: na primeira o valor de y (onde a altura y do diagrama retangular de tensões é dada por $y = 0,8x_3$, sendo x_3 a profundidade da linha neutra real) pode resultar dentro da seção. Na segunda situação y se mantém fora da seção. Isto implica na área de concreto comprimida que contribui para o equilíbrio.

Para solucionar o problema o domínio 5 foi dividido em a e b, em que no sub-domínio 5a apenas a área de concreto $A_c = 0,8x_3 \cdot b_w$ contribui para o equilíbrio, enquanto que no sub-domínio 5b toda a área da seção $A_c = x_1 \cdot b_w$ contribui.

Equilíbrio no sub-domínio 5a:

As equações de equilíbrio no sub-domínio 5a são idênticas às eqs. [4.4] e [4.5].

Equilíbrio no sub-domínio 5b:

$$\sum F_x = 0 \quad 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{2} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) - N_d = 0 \quad [4.6]$$

$$\sum M_{CG} = 0 \quad \frac{x_2}{4} \cdot (x_1 - 2d') \cdot (\sigma_2 - \sigma_1) - M_d = 0 \quad [4.7]$$

4.4.1.2 Situação de projeto 2 ($40 < x_1 \leq 80$ cm)*Domínios 2, 3, 4, 4a e sub-domínio 5a:*

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - N_d = 0 \quad [4.8]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{6} \cdot (\sigma_3 - \sigma_1) \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.9]$$

Sub-domínio 5b:

$$0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{3} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - N_d = 0 \quad [4.10]$$

$$\frac{x_2}{6} \cdot (x_1 - 2d') \cdot (\sigma_3 - \sigma_1) - M_d = 0 \quad [4.11]$$

4.4.1.3 Situação de projeto 3 ($80 < x_1 \leq 120$ cm)*Domínios 2, 3, 4, 4a e sub-domínio 5a:*

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) - N_d = 0 \quad [4.12]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{24} \cdot (\sigma_3 + 3\sigma_4 - 3\sigma_1 - \sigma_2) \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.13]$$

Sub-domínio 5b:

$$0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{4} \cdot (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4) - N_d = 0 \quad [4.14]$$

$$\frac{x_2}{24} \cdot (x_1 - 2d') \cdot (\sigma_3 + 3\sigma_4 - 3\sigma_1 - \sigma_2) - M_d = 0 \quad [4.15]$$

4.4.2 Formulação das Restrições de Compatibilidade

Segundo a NBR 6118:2003, as condições de compatibilidade são decorrentes da hipótese de manutenção da forma plana da seção transversal e dos domínios de deformação relativos aos estados limites últimos.

Por meio das restrições de compatibilidade se estabelece uma relação entre a tensão atuante em uma determinada camada de armadura e a deformação da fibra de concreto localizada nesta camada. Assim, de acordo com cada domínio de deformação, dada a posição da linha neutra e imposta a deformação específica de um ponto em particular da seção transversal, pela Hipótese de Euler-Bernoulli de que a seção plana e perpendicular ao eixo da peça antes do carregamento permaneça plana e perpendicular ao eixo da peça fletida (a seção é, por hipótese, indeformável) é possível determinar as deformações específicas em todos os pontos da seção e, conseqüentemente, suas respectivas tensões. Essas tensões são então substituídas nas equações de equilíbrio de cada situação de cálculo.

No entanto, no início do processo não se dispõe da posição da linha neutra, pois ela é uma variável a ser otimizada. Por conseqüência, não se sabe a princípio quais barras estarão comprimidas ou tracionadas. A fim de solucionar este problema foram consideradas diversas possibilidades de posição da linha neutra nas seções, abrangendo deformações do domínio 2 ao 5 em cada uma das três situações. Desta forma foram previstas várias equações de equilíbrio de acordo com os modelos pré-determinados para o estado de tensão das armaduras.

Determina-se a seguir as equações gerais das deformações e tensões nas armaduras.

4.4.2.1 Equações gerais de deformações

Domínios 2, 3 e 4:

Utilizando-se o limite $\varepsilon_{cu} = 3,5\%$, onde ε_{cu} corresponde ao encurtamento máximo do concreto, pode-se determinar a deformação ε_{si} de um ponto genérico distante y_i do centro geométrico da peça, conforme ilustrado na Figura 4.6, por meio da seguinte equação de compatibilidade:

$$\frac{3,5\%}{\frac{x_1}{2} + y_0} = \frac{\varepsilon_{si}}{y_i - y_0} \quad [4.16]$$

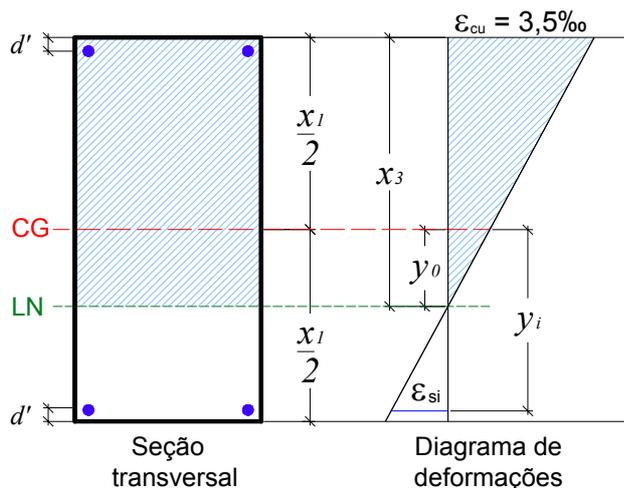


Figura 4.6: Seção transversal do pilar e compatibilidade de deformações nos domínios 2, 3 e 4.

Da Figura 4.6 também é possível equacionar a posição da linha neutra como sendo:

$$x_3 = \frac{x_1}{2} + y_0 \tag{4.17}$$

Definem-se ainda os adimensionais:

$$\xi = \frac{x_3}{x_1} \quad \text{e} \quad \beta_y = \frac{y_i}{x_1} \tag{4.18}$$

Substituindo em [4.16] os adimensionais dados pelas equações em [4.18], o valor de y_0 dado por [4.17] e dividindo o numerador e o denominador por h obtém-se uma equação para determinação das deformações em qualquer camada de concreto da seção:

$$\boxed{\varepsilon_{si} = 3,5\text{‰} \frac{\xi - (\beta_y + 0,5)}{\xi}} \tag{4.19}$$

Domínio 4a:

No domínio 4a tem-se a deformação máxima do concreto fixada em 3,5‰ e todas as armaduras da seção comprimidas, como pode ser observado na Figura 4.7

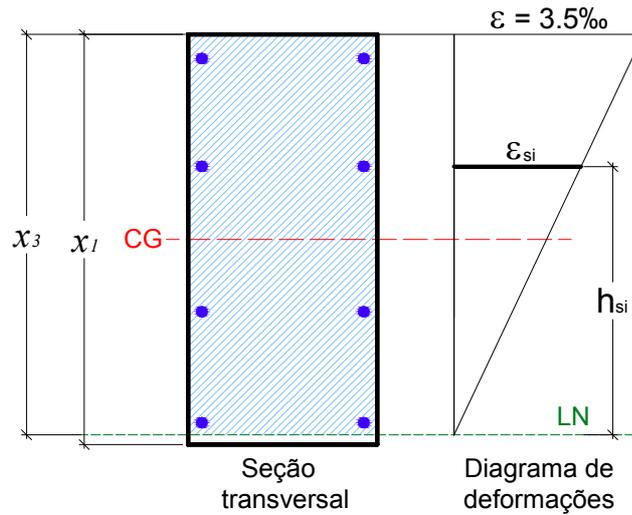


Figura 4.7: Seção transversal do pilar e compatibilidade de deformações no domínio 4a.

Portanto, a equação de compatibilidades de deformações para o domínio 4a pode ser definida por:

$$\epsilon_{si} = 3.5\text{‰} \cdot \frac{h_{si}}{x_3} \quad [4.20]$$

Domínio 5:

Neste caso a NBR 6118:2003 supõe que a deformação no concreto é fixada em 2‰ a uma distância de $3x_1 / 7$ a partir da face mais comprimida, como pode ser observado na Figura 4.8.

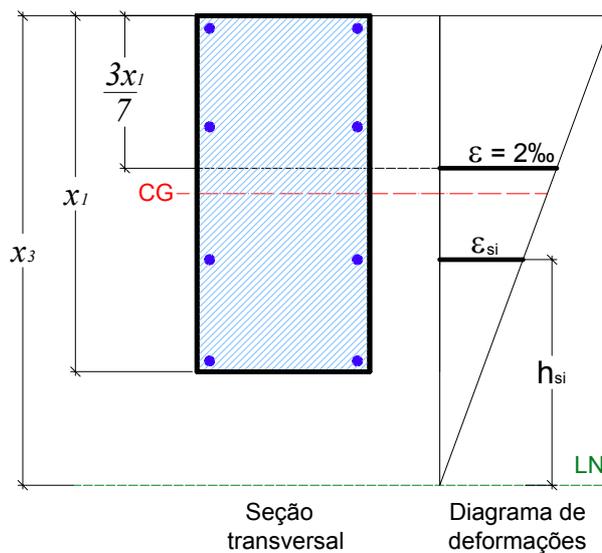


Figura 4.8: Seção transversal do pilar e compatibilidade de deformações no domínio 5.

A equação de compatibilidade de deformações pode então ser definida por:

$$\frac{2‰}{x_3 - \frac{3}{7} \cdot x_1} = \frac{\varepsilon_{si}}{h_{si}} \quad [4.21]$$

Isolando ε_{si} em [4.21] obtém-se a equação para determinar as deformações no domínio 5:

$$\varepsilon_{si} = 14‰ \cdot \frac{h_{si}}{7x_3 - 3x_1} \quad [4.22]$$

4.4.2.2 Equações gerais de tensões

Por meio das equações [4.19], [4.20] e [4.22] as tensões nas armaduras podem ser determinadas a partir do diagrama tensão x deformação para o aço CA-50, conforme Figura 4.9.

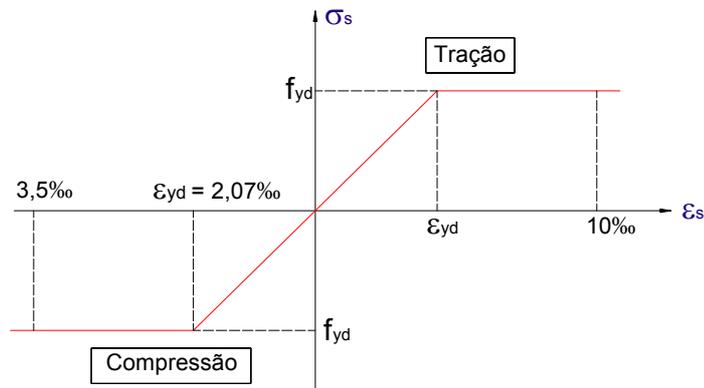


Figura 4.9: Diagrama tensão x deformação do aço CA-50.

Fixando o módulo de elasticidade do aço CA-50 em $E_s = 21000 \text{ kN/cm}^2$, de acordo com as prescrições da NBR 6118:2003, tem-se as seguintes relações:

Para $\varepsilon_{si} < 2,07‰$ $\sigma_i = E_s \cdot \varepsilon_{si}$

$$\sigma_i = 21000 \cdot \varepsilon_{si} \quad [4.23]$$

Para $\varepsilon_{si} \geq 2,07‰$ $\sigma_i = f_{yd}$ [4.24]

Onde σ_{si} tem sinal positivo para compressão e negativo para tração.

4.4.2.3 Equações de tensão e equilíbrio para cada modelo considerado

A seguir são apresentados os modelos considerados e são definidas as equações das tensões nas armaduras em suas respectivas situações.

Situação de projeto 1

A Figura 4.10 mostra o equilíbrio da seção em função da linha neutra.

Domínios 2, 3 e 4:

Nesta situação foram considerados três modelos de deformações:

Tabela 4.1: Modelos de deformação da situação 1, domínios 2, 3 e 4.

Modelo	Camada de armadura	Estado de tensão	Armadura em escoamento
1	s_1	Tração	Sim
	s_2	Compressão	Não
2	s_1	Tração	Sim
	s_2	Compressão	Sim
3	s_1	Tração	Não
	s_2	Compressão	Sim

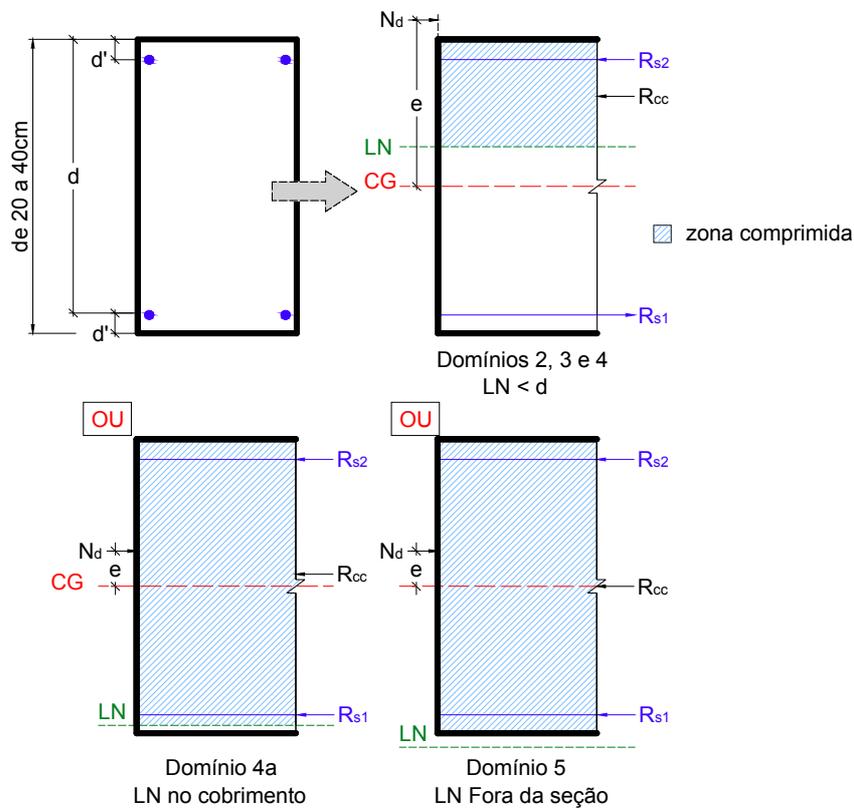


Figura 4.10: Situação de projeto 1.

A Tabela 4.2 apresenta as equações das tensões em cada camada de armadura nos casos em que não ocorre escoamento ($\varepsilon_{si} \leq 2,07\%$). Estas resultam das equações [4.19] e [4.23].

Tabela 4.2: Tensões nas armaduras na situação 1, domínios 2, 3 e 4.

Camada de armadura	Distância y_i da camada ao CG da seção	Tensão na armadura
s_1	$y_1 = \frac{x_1}{2} - d'$	$\sigma_1 = 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right]$
s_2	$y_2 = -\left(\frac{x_1}{2} - d' \right)$	$\sigma_2 = 73,5 \cdot \left(1 - \frac{d'}{x_3} \right)$

Substituindo as tensões nas equações [4.4] e [4.5] de equilíbrio, obtêm-se:

Modelo 1:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{2} \cdot \left[73,5 \cdot \left(1 - \frac{d'}{x_3} \right) - f_{yd} \right] - N_d = 0 \quad [4.25]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{4} \cdot \left[73,5 \cdot \left(1 - \frac{d'}{x_3} \right) + f_{yd} \right] \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.26]$$

Modelo 2:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 - N_d = 0 \quad [4.27]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{2} \cdot f_{yd} \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.28]$$

Modelo 3:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{2} \cdot \left\{ 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] + f_{yd} \right\} - N_d = 0 \quad [4.29]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{4} \cdot \left\{ f_{yd} - 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] \right\} \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.30]$$

Domínio 4a:

Na situação 1 foi considerado apenas um modelo de deformações:

Tabela 4.3: Modelos de deformação da situação 1, domínio 4a.

Modelo	Camada de armadura	Estado de tensão	Armadura em escoamento
1	s ₁	Compressão	Sim
	s ₂	Compressão	Não

A Tabela 4.4 apresenta a tensão resultante das equações [4.20] e [4.23]. Neste caso todas as armaduras estão comprimidas, mas apenas a camada s₁ está em escoamento. As tensões nas demais camadas não foram apresentadas por não serem necessárias ao desenvolvimento das equações.

Tabela 4.4: Tensões nas armaduras na situação 1, domínio 4a.

Camada de armadura	Distância h _{si} da camada à linha neutra	Tensão na armadura
s ₁	$h_{s_1} = x_3 - x_1 + d'$	$\sigma_1 = \frac{73,5}{x_3} \cdot (x_3 - x_1 + d')$

Substituindo as tensões nas equações [4.4] e [4.5] de equilíbrio, obtêm-se:

Modelo 1:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{2} \cdot \left[\frac{73,5}{x_3} \cdot (x_3 - x_1 + d') + f_{yd} \right] - N_d = 0 \quad [4.31]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{4} \cdot \left[f_{yd} - \frac{73,5}{x_3} \cdot (x_3 - x_1 + d') \right] \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.32]$$

Domínio 5:

Neste caso foram considerados dois modelos de deformações:

Modelo	Camada de armadura	Armadura em escoamento
1	s ₁	Não
	s ₂	Sim
2	s ₁	Não
	s ₂	Não

Tabela 4.5: Modelos de deformação da situação 1, domínio 5.

A Tabela 4.6 apresenta as tensões resultantes das equações [4.22] e [4.23]. Neste caso a linha neutra x₃ é maior que a altura x₁, estando todas as armaduras comprimidas.

Tabela 4.6: Tensões nas armaduras na situação 1, domínio 5.

Camada de armadura	Distância h_{si} da camada à linha neutra	Tensão na armadura
S ₁	$h_{s1} = x_3 - x_1 + d'$	$\sigma_1 = 294 \cdot \frac{x_3 - x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1}$
S ₂	$h_{s2} = x_3 - d'$	$\sigma_2 = 294 \cdot \frac{x_3 - d'}{7x_3 - 3x_1}$

Substituindo as tensões nas equações [4.4], [4.5], [4.6] e [4.7] obtêm-se:

Modelo 1 - sub-domínio 5a:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{2} \cdot \left(294 \cdot \frac{x_3 - x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1} + f_{yd} \right) - N_d = 0 \quad [4.33]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{4} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \cdot \frac{x_3 - x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0 \quad [4.34]$$

Modelo 1 - sub-domínio 5b:

$$0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{2} \cdot \left(294 \cdot \frac{x_3 - x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1} + f_{yd} \right) - N_d = 0 \quad [4.35]$$

$$\frac{x_2}{4} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \cdot \frac{x_3 - x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0 \quad [4.36]$$

Modelo 2 - sub-domínio 5a:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{2} \cdot \left(294 \cdot \frac{2x_3 - x_1}{7x_3 - 3x_1} \right) - N_d = 0 \quad [4.37]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{4} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(294 \cdot \frac{x_1 - 2d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0 \quad [4.38]$$

Modelo 2 - sub-domínio 5b:

$$0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{2} \cdot \left(294 \cdot \frac{2x_3 - x_1}{7x_3 - 3x_1} \right) - N_d = 0 \quad [4.39]$$

$$\frac{x_2}{4} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(294 \cdot \frac{x_1 - 2d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0 \quad [4.40]$$

Situação de projeto 2

A Figura 4.11 mostra o equilíbrio da seção em função da linha neutra.

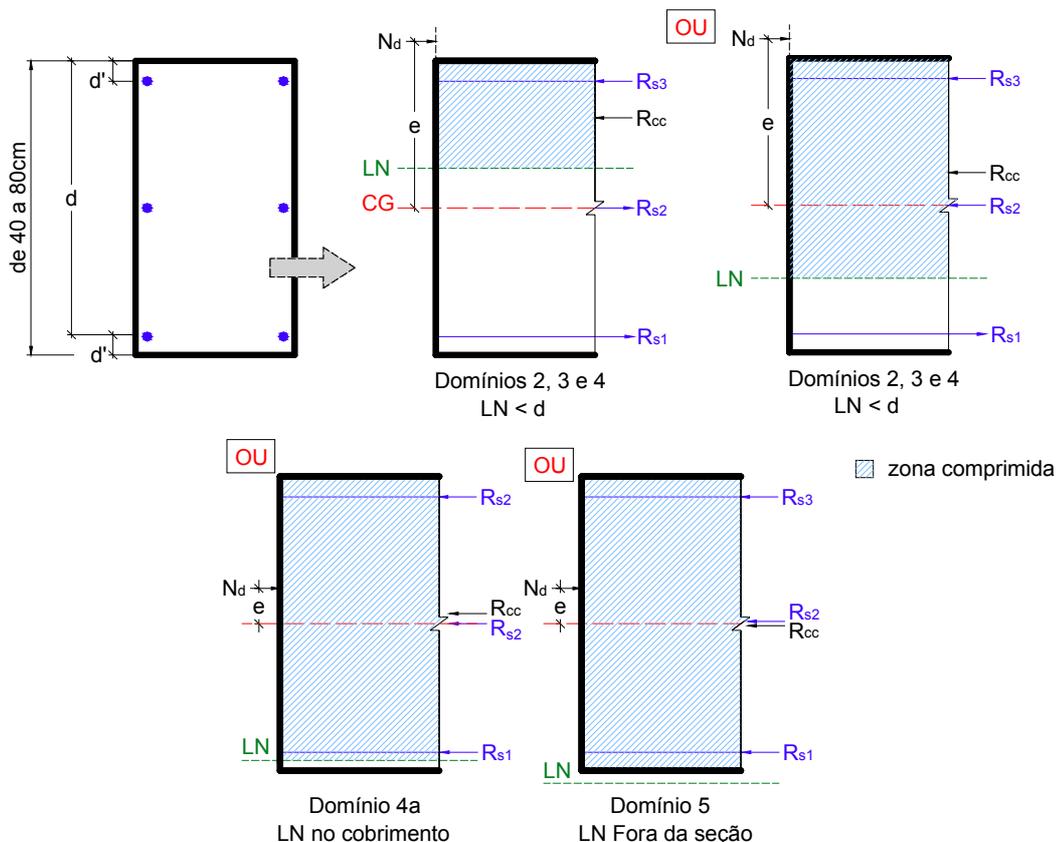


Figura 4.11: Situação de projeto 2.

Domínios 2, 3 e 4:

Nesta situação foram considerados quatro modelos de deformações:

Tabela 4.7: Modelos de deformação da situação 2, domínios 2, 3 e 4.

Modelo	Camada de armadura	Estado de tensão	Armadura em escoamento
1	s_1	Tração	Não
	s_2	Compressão	Não
	s_3	Compressão	Sim
2	s_1	Tração	Sim
	s_2	*	*
	s_3	Compressão	Sim
3	s_1	Tração	Sim
	s_2	Com. ou Tra.	Não
	s_3	Compressão	Sim
4	s_1	Tração	Sim
	s_2	Tração	Sim
	s_3	Compressão	Sim

* A linha neutra está na direção da camada s_2 (CG da seção).

A Tabela 4.8 apresenta as equações das tensões em cada camada de armadura nos casos em que não ocorre escoamento ($\varepsilon_{si} \leq 2,07\text{‰}$).

Tabela 4.8: Tensões nas armaduras na situação 2, domínios 2, 3 e 4.

Camada de armadura	Distância y_i da camada ao CG da seção	Tensão na armadura
s_1	$y_1 = \frac{x_1}{2} - d'$	$\sigma_1 = 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right]$
s_2	$y_2 = 0$	$\sigma_2 = 73,5 \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \frac{x_1}{x_3} \right)$
s_3	$y_3 = - \left(\frac{x_1}{2} - d' \right)$	$\sigma_3 = 73,5 \cdot \left(1 - \frac{d'}{x_3} \right)$

Substituindo as tensões nas equações [4.8] e [4.9] de equilíbrio, obtêm-se:

Modelo 1:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{3} \cdot \left\{ 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] + 73,5 \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \frac{x_1}{x_3} \right) + f_{yd} \right\} - N_d = 0 \quad [4.41]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{6} \cdot \left\{ \sigma_3 - 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] \right\} \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.42]$$

Modelo 2:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 - N_d = 0 \quad [4.43]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - d - 0,4x_3) + \frac{x_2}{3} \cdot f_{yd} \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.44]$$

Modelo 3:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{3} \left[73,5 \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \frac{x_1}{x_3} \right) \right] - N_d = 0 \quad [4.45]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - d - 0,4x_3) + \frac{x_2}{3} \cdot f_{yd} \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.46]$$

Modelo 4:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 - \frac{x_2}{3} \cdot f_{yd} - N_d = 0 \quad [4.47]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - d - 0,4x_3) + \frac{x_2}{3} \cdot f_{yd} \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.48]$$

Domínio 4a:

Na situação 2 foram considerados dois modelos de deformações:

Tabela 4.9: Modelos de deformação da situação 2, domínio 4a.

Modelo	Camada de armadura	Estado de tensão	Armadura em escoamento
1	s ₁	Compressão	Sim
	s ₂	Compressão	Sim
	s ₃	Compressão	Não
2	s ₁	Compressão	Sim
	s ₂	Compressão	Não
	s ₃	Compressão	Não

A Tabela 4.10 apresenta a tensão resultante das equações [4.20] e [4.23]. As tensões nas demais camadas não foram apresentadas por não serem necessárias.

Tabela 4.10: Tensões nas armaduras na situação 2, domínio 4a.

Camada de armadura	Distância h_{si} da camada à linha neutra	Tensão na armadura
s ₁	$h_{s1} = x_3 - x_1 + d'$	$\sigma_1 = \frac{73,5}{x_3} \cdot (x_3 - x_1 + d')$
s ₂	$h_{s2} = x_3 - \frac{x_1}{2}$	$\sigma_2 = \frac{73,5}{x_3} \cdot \left(x_3 - \frac{x_1}{2}\right)$

Substituindo as tensões nas equações [4.8] e [4.9] de equilíbrio, obtêm-se:

Modelo 1:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{3} \cdot \left[\frac{36,75}{x_3} \cdot (4x_3 - 3x_1 + 2d') + f_{yd} \right] - N_d = 0 \quad [4.49]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{6} \cdot \left[f_{yd} - \frac{73,5}{x_3} \cdot (x_3 - x_1 + d') \right] \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.50]$$

Modelo 2:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{3} \cdot \left[\frac{73,5}{x_3} \cdot (x_3 - x_1 + d') + 2f_{yd} \right] - N_d = 0 \quad [4.51]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{6} \cdot \left[f_{yd} - \frac{73,5}{x_3} \cdot (x_3 - x_1 + d') \right] \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.52]$$

Domínio 5:

Neste caso foram considerados dois modelos de deformações:

Tabela 4.11: Modelos de deformação da situação 2, domínio 5.

Modelo	Camada de armadura	Armadura em escoamento
1	s ₁	Não
	s ₂	Não
	s ₃	Sim
2	s ₁	Não
	s ₂	Não
	s ₃	Não

A Tabela 4.12 apresenta as tensões resultantes das equações [4.22] e [4.23].

Camada de armadura	Distância h_{si} da camada à linha neutra	Tensão na armadura
s ₁	$h_{s1} = x_3 - x_1 + d'$	$\sigma_1 = 294 \cdot \frac{x_3 - x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1}$
s ₂	$h_{s2} = x_3 - \frac{x_1}{2}$	$\sigma_2 = 294 \cdot \frac{x_3 - \frac{x_1}{2}}{7x_3 - 3x_1}$
s ₃	$h_{s3} = x_3 - d'$	$\sigma_3 = 294 \cdot \frac{x_3 - d'}{7x_3 - 3x_1}$

Tabela 4.12: Tensões nas armaduras na situação 2, domínio 5.

Substituindo as tensões nas equações [4.8], [4.9], [4.10] e [4.11], obtêm-se:

Modelo 1 - sub-domínio 5a:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{3} \cdot \left(147 \cdot \frac{4x_3 - 3x_1 + 2d'}{7x_3 - 3x_1} + f_{yd} \right) - N_d = 0 \quad [4.53]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{6} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(\sigma_3 - 294 \cdot \frac{x_3 - x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0 \quad [4.54]$$

Modelo 1 - sub-domínio 5b:

$$0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{3} \cdot \left(147 \cdot \frac{4x_3 - 3x_1 + 2d'}{7x_3 - 3x_1} + f_{yd} \right) - N_d = 0 \quad [4.55]$$

$$\frac{x_2}{6} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(\sigma_3 - 294 \cdot \frac{x_3 - x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0 \quad [4.56]$$

Modelo 2 - sub-domínio 5a:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{3} \cdot \left(49 \cdot \frac{2x_3 - x_1}{7x_3 - 3x_1} \right) - N_d = 0 \quad [4.57]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{6} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(196 \cdot \frac{x_1 - 2d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0 \quad [4.58]$$

Modelo 2 - sub-domínio 5b:

$$0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{3} \cdot \left(49 \cdot \frac{2x_3 - x_1}{7x_3 - 3x_1} \right) - N_d = 0 \quad [4.59]$$

$$\frac{x_2}{6} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(196 \cdot \frac{x_1 - 2d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0 \quad [4.60]$$

Situação de projeto 3

A Figura 4.12 mostra o equilíbrio da seção em função da linha neutra.

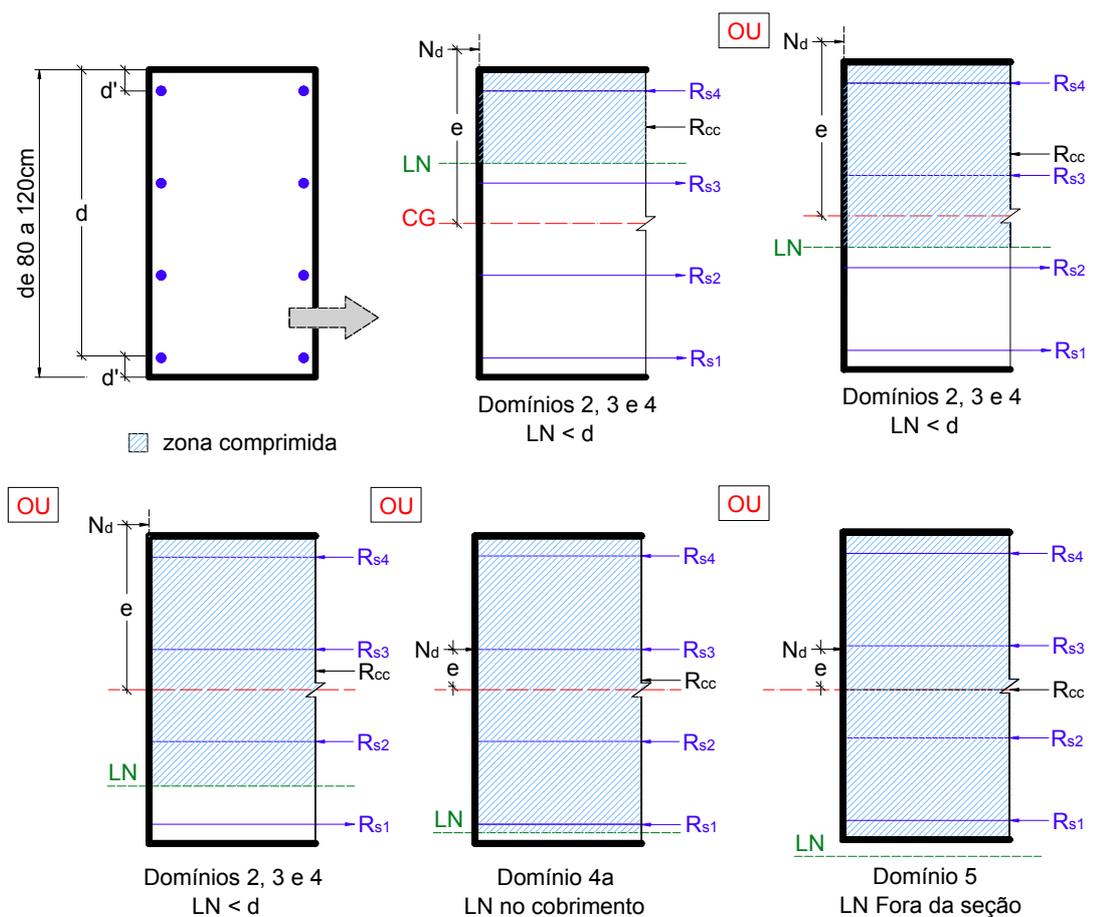


Figura 4.12: Situação de projeto 3.

Domínios 2, 3 e 4:

Nesta situação foram considerados seis modelos de deformações:

Tabela 4.13: Modelos de deformação da situação 3, domínios 2, 3 e 4.

Modelo	Camada de armadura	Estado de tensão	Armadura em escoamento
1	s ₁	Tração	Sim
	s ₂	Tração	Sim
	s ₃	Tra. ou Comp.	Não
	s ₄	Compressão	Sim
2	s ₁	Tração	Sim
	s ₂	Tração	Não
	s ₃	Compressão	Não
	s ₄	Compressão	Sim
3	s ₁	Tração	Não
	s ₂	Tra. ou Comp.	Não
	s ₃	Compressão	Não
	s ₄	Compressão	Sim
4	s ₁	Tração	Não
	s ₂	Compressão	Não
	s ₃	Compressão	Sim
	s ₄	Compressão	Sim
5	s ₁	Tração	Sim
	s ₂	Tração	Sim
	s ₃	*	*
	s ₄	Compressão	Sim
6	s ₁	Tração	Não
	s ₂	*	*
	s ₃	Compressão	Não
	s ₄	Compressão	Sim

* A linha neutra está na direção da camada de armadura.

A Tabela 4.14 apresenta as equações das tensões em cada camada de armadura nos casos em que não ocorre escoamento ($\varepsilon_{si} \leq 2,07\text{‰}$).

Tabela 4.14: Tensões nas armaduras na situação 3, domínios 2, 3 e 4.

Camada de armadura	Distância y_i da camada ao CG da seção	Tensão na armadura
s ₁	$y_1 = \frac{x_1}{2} - d'$	$\sigma_1 = 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right]$
s ₂	$y_2 = \frac{x_1 - 2d'}{6}$	$\sigma_2 = \frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - 2x_1 + d')$
s ₃	$y_3 = -\left(\frac{x_1 - 2d'}{6} \right)$	$\sigma_3 = \frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - x_1 - d')$
s ₄	$y_4 = -\left(\frac{x_1}{2} - d' \right)$	$\sigma_4 = 73,5 \cdot \left(1 - \frac{d'}{x_3} \right)$

Substituindo as tensões nas equações [4.12] e [4.13] de equilíbrio, obtêm-se:

Modelo 1:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \left[f_{yd} + \frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - x_1 - d') \right] - N_d = 0 \quad [4.61]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{24} \cdot \left[\frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - x_1 - d') + 7f_{yd} \right] \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.62]$$

Modelo 2:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \left[\frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - 2x_1 + d') + \frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - x_1 - d') \right] - N_d = 0 \quad [4.63]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{24} \cdot \left[\frac{24,5}{x_3} \cdot (x_1 - 2d') + 6f_{yd} \right] \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.64]$$

Modelo 3:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \left\{ 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] + \frac{24,5}{x_3} \cdot (6x_3 - 3x_1) + f_{yd} \right\} - N_d = 0 \quad [4.65]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{24} \cdot \left\{ \frac{24,5}{x_3} \cdot (x_1 - 2d') - 220,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] + 3f_{yd} \right\} \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.66]$$

Modelo 4:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \left\{ 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] + \frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - 2x_1 + d') + 2f_{yd} \right\} - N_d = 0 \quad [4.67]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{24} \cdot \left\{ 4f_{yd} - 220,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] - \frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - 2x_1 + d') \cdot (x_1 - 2d') \right\} - M_d = 0 \quad [4.68]$$

Modelo 5:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 - \frac{x_2}{4} \cdot f_{yd} - N_d = 0 \quad [4.69]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + 7f_{yd} \cdot \frac{x_2}{24} \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.70]$$

Modelo 6:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \left\{ 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] + \frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - x_1 - d') + f_{yd} \right\} - N_d = 0 \quad [4.71]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{24} \cdot \left\{ 3f_{yd} - 220,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] - \frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - x_1 - d') \cdot (x_1 - 2d') \right\} - M_d = 0 \quad [4.72]$$

Domínio 4a:

Neste caso foi considerado apenas um modelo de deformações:

Tabela 4.15: Modelos de deformação da situação 3, domínio 4a.

Modelo	Camada de armadura	Armadura em escoamento
1	s ₁	Não
	s ₂	Não
	s ₃	Sim
	s ₄	Sim

As tensões resultantes para o devido modelo desta situação estão apresentadas na Tabela 4.16. As tensões nas demais camadas não foram apresentadas por não serem necessárias à elaboração das equações neste caso.

Tabela 4.16: Tensões nas armaduras na situação 3, domínio 4a

Camada de armadura	Distância h_{si} da camada à linha neutra	Tensão na armadura
s ₁	$h_{s1} = x_3 - x_1 + d'$	$\sigma_1 = \frac{73,5}{x_3} \cdot (x_3 - x_1 + d')$
s ₂	$h_{s2} = \frac{3x_3 - 2x_1 + d'}{3}$	$\sigma_2 = \frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - 2x_1 + d')$

Substituindo as tensões nas equações [4.12] e [4.13] de equilíbrio, obtêm-se:

Modelo 1:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \cdot \left[\frac{36,75}{x_3} \cdot (4x_3 - 3x_1 + 2d') + 2f_{yd} \right] - N_d = 0 \quad [4.73]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{24} \cdot \left[4f_{yd} + \frac{36,75}{x_3} \cdot (7x_1 - 8x_3 + 6d') \right] \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0 \quad [4.74]$$

Domínio 5:

Neste caso foram considerados três modelos de deformações:

Modelo	Camada de armadura	Armadura em escoamento
1	s ₁	Não
	s ₂	Não
	s ₃	Sim
	s ₄	Sim
2	s ₁	Não
	s ₂	Não
	s ₃	Não
	s ₄	Sim
3	s ₁	Não
	s ₂	Não
	s ₃	Não
	s ₄	Não

Tabela 4.17: Modelos de deformação da situação 3, domínio 5.

A Tabela 4.18 apresenta as tensões resultantes das equações [4.22] e [4.23].

Camada de armadura	Distância h_{s_i} da camada à linha neutra	Tensão na armadura
s ₁	$h_{s_1} = x_3 - x_1 + d'$	$\sigma_1 = 294 \cdot \frac{x_3 - x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1}$
s ₂	$h_{s_2} = \frac{3x_3 - 2x_1 + d'}{3}$	$\sigma_2 = 98 \cdot \frac{3x_3 - 2x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1}$
s ₃	$h_{s_3} = \frac{3x_3 - x_1 - d'}{3}$	$\sigma_3 = 98 \cdot \frac{3x_3 - x_1 - d'}{7x_3 - 3x_1}$
s ₄	$h_{s_4} = x_3 - d'$	$\sigma_4 = 294 \cdot \frac{x_3 - d'}{7x_3 - 3x_1}$

Tabela 4.18: Tensões nas armaduras na situação 3, domínio 5.

Substituindo as tensões nas equações [4.12], [4.13], [4.14] e [4.15], obtêm-se:

Modelo 1 - sub-domínio 5a:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \cdot \left(98 \cdot \frac{6x_3 - 5x_1 + 4d'}{7x_3 - 3x_1} + 2f_{yd} \right) - N_d = 0 \quad [4.75]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) +$$

$$\frac{x_2}{24} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(98 \cdot \frac{11x_1 - 12x_3 - 10d'}{7x_3 - 3x_1} + 4f_{yd} \right) - M_d = 0 \quad [4.76]$$

Modelo 1 – sub-domínio 5b:

$$0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{4} \cdot \left(98 \cdot \frac{6x_3 - 5x_1 + 4d'}{7x_3 - 3x_1} + 2f_{yd} \right) - N_d = 0 \quad [4.77]$$

$$\frac{x_2}{24} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(98 \cdot \frac{11x_1 - 12x_3 - 10d'}{7x_3 - 3x_1} + 4f_{yd} \right) - M_d = 0 \quad [4.78]$$

Modelo 2 - sub-domínio 5a:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \cdot \left(294 \cdot \frac{3x_3 - 2x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1} + f_{yd} \right) - N_d = 0 \quad [4.79]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) +$$

$$\frac{x_2}{24} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(98 \cdot \frac{10x_1 - 9x_3 - 11d'}{7x_3 - 3x_1} + 3f_{yd} \right) - M_d = 0 \quad [4.80]$$

Modelo 2 – sub-domínio 5b:

$$0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{4} \cdot \left(294 \cdot \frac{3x_3 - 2x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1} + f_{yd} \right) - N_d = 0 \quad [4.81]$$

$$\frac{x_2}{24} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(98 \cdot \frac{10x_1 - 9x_3 - 11d'}{7x_3 - 3x_1} + 3f_{yd} \right) - M_d = 0 \quad [4.82]$$

Modelo 3 - sub-domínio 5a:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \cdot \left(588 \cdot \frac{2x_3 - x_1}{7x_3 - 3x_1} \right) - N_d = 0 \quad [4.83]$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{24} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(980 \cdot \frac{x_1 - 2d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0 \quad [4.84]$$

Modelo 3 – sub-domínio 5b:

$$0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{4} \cdot \left(588 \cdot \frac{2x_3 - x_1}{7x_3 - 3x_1} \right) - N_d = 0 \quad [4.85]$$

$$\frac{x_2}{24} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(980 \cdot \frac{x_1 - 2d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0 \quad [4.86]$$

4.4.3 Restrições das deformações

Ao final de cada iteração do algoritmo de otimização de pilares é feita uma verificação das deformações e do estado de tensões que foram inicialmente supostos para as armaduras. Nesta verificação estão incluídos o alongamento máximo da armadura e o encurtamento máximo do concreto.

Por serem apenas valores limitantes das variáveis do processo, estas restrições não entram diretamente na otimização, sendo apenas checadas após cada cálculo efetuado. Se os valores não forem satisfatórios, parte-se para uma nova interação até encontrar uma situação e modelo que combine suas idealizações com os resultados.

4.4.4 Restrições laterais

Restrições laterais são aquelas em que são impostos limites diretamente no valor das variáveis. A NBR 6118:2003 limita as dimensões máximas e mínimas da seção transversal dos pilares retangulares, assim como a taxa de armadura, resultando nas seguintes desigualdades:

$$h_{\min} \leq h \leq h_{\max}$$

$$\rho_{\min} \leq \rho \leq \rho_{\max}$$

onde ρ é a taxa de armadura do concreto na seção de concreto, de valor igual a A_s/A_c (área de armadura dividida pela área da seção de concreto).

Segundo a NBR 6118:2003, a menor dimensão de um pilar é 19cm, salvo algumas exceções, enquanto que a maior deve ser 5 vezes a menor dimensão da seção, pois a partir deste ponto o comportamento do elemento passa a ser de pilar-parede, o que não é objeto de estudo desta pesquisa.

Os limites da taxa de armadura na seção variam entre $0,15 \cdot N_d / f_{yd} \geq 0,004 \cdot A_c$ e $0,08 \cdot A_c$, considerando-se inclusive a sobreposição de armadura existente em regiões de emenda. Portanto na prática foi considerado o limite máximo da taxa de armadura na seção do pilar de $0,04 \cdot A_c$.

Assim como as restrições de deformações, estas restrições não entram diretamente na otimização, sendo apenas verificadas após cada cálculo efetuado. Mas se alguma variável atingir seu limite durante o processo, ela é retirada e re-inserida com um valor fixo correspondente ao seu limite (o que é previsto pelas hipóteses de cálculo que serão apresentadas no item 4.5.2), seja este máximo ou mínimo, reiniciando-se a otimização.

4.5 Resolução do problema

4.5.1 Formulação

Diante das considerações feitas no item 4.4, o problema da otimização da seção transversal de pilares pode ser apresentado da seguinte forma:

Minimizar: $F(x) = c_1 \cdot (b_w \cdot x_1) + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot (b_w + x_1)$

Sujeito a:

Situação 1

Domínios 2, 3 e 4

Modelo 1: Eq. [4.25] e Eq. [4.26]

Modelo 2: Eq. [4.27] e Eq. [4.28]

Modelo 3: Eq. [4.29] e Eq. [4.29]

Domínio 4a:

Modelo 1: Eq. [4.31] e Eq. [4.32]

Sub-domínio 5a:

Modelo 1: Eq. [4.33] e Eq. [4.34]

Modelo 2: Eq. [4.37] e Eq. [4.38]

Sub-domínio 5b:

Modelo 1: Eq. [4.35] e Eq. [4.36]

Modelo 2: Eq. [4.39] e Eq. [4.40]

Situação 2

Domínios 2, 3 e 4

Modelo 1: Eq. [4.41] e Eq. [4.42]

Modelo 2: Eq. [4.43] e Eq. [4.44]

Modelo 3: Eq. [4.45] e Eq. [4.46]

Modelo 4: Eq. [4.47] e Eq. [4.48]

Domínio 4a:

Modelo 1: Eq. [4.49] e Eq. [4.50]

Modelo 2: Eq. [4.51] e Eq. [4.52]

*Sub-domínio 5a:***Modelo 1:** Eq. [4.53] e Eq. [4.54]**Modelo 2:** Eq. [4.57] e Eq. [4.58]*Sub-domínio 5b:***Modelo 1:** Eq. [4.55] e Eq. [4.56]**Modelo 2:** Eq. [4.59] e Eq. [4.60]**Situação 3***Domínios 2, 3 e 4***Modelo 1:** Eq. [4.61] e Eq. [4.62]**Modelo 2:** Eq. [4.63] e Eq. [4.64]**Modelo 3:** Eq. [4.65] e Eq. [4.66]**Modelo 4:** Eq. [4.67] e Eq. [4.68]**Modelo 5:** Eq. [4.69] e Eq. [4.70]**Modelo 6:** Eq. [4.71] e Eq. [4.72]*Domínio 4a:***Modelo 1:** Eq. [4.73] e Eq. [4.74]*Sub-domínio 5a:***Modelo 1:** Eq. [4.75] e Eq. [4.76]**Modelo 2:** Eq. [4.79] e Eq. [4.80]**Modelo 3:** Eq. [4.83] e Eq. [4.84]*Sub-domínio 5b:***Modelo 1:** Eq. [4.77] e Eq. [4.78]**Modelo 2:** Eq. [4.81] e Eq. [4.82]**Modelo 3:** Eq. [4.85] e Eq. [4.86]

Estas equações e suas respectivas derivadas parciais foram implementadas na sub-rotina NCONG, como descrito no item 3.3, resultando nas seções de mínimo custo dos pilares em cada situação considerada.

4.5.2 Hipóteses

Como já mencionado anteriormente, foram desenvolvidas quatro hipóteses em cada modelo para prever os casos em que as variáveis ultrapassem seus respectivos limites

predeterminados. Nessas hipóteses as equações das restrições são as mesmas definidas em 4.5.1, diferindo apenas quando uma ou outra variável se torna uma constante. A seguir está a descrição de cada consideração feita:

Hipótese A: todas as variáveis estão livres

Todas são otimizadas e variam dentro de seus limites. As restrições são as apresentadas em 4.5.1.

Hipótese B: x_1 constante, x_2 e x_3 livres

A variável altura se torna constante, adquirindo seu valor mínimo ou máximo, enquanto que as outras são otimizadas.

Hipótese C: ρ constante, x_1 e x_3 livres

A variável área de armadura (x_2) deveria ser constante. No entanto ela é função das dimensões da seção, e como x_1 está livre x_2 não poderia ser fixada. Para solucionar o impasse a taxa geométrica de armadura foi considerada como constante.

Hipótese D: não há otimização

As variáveis x_1 e x_2 são constantes. Assim, se as dimensões e a armadura do pilar estão definidas, calcula-se apenas se a seção resiste aos esforços de momento fletor e força normal.

4.5.3 Etapas do processo

As etapas do processo de otimização de pilares utilizadas pela rotina computacional estão descritas a seguir:

1. Fixado o valor de b_w , o programa inicia supondo que a seção está sujeita à situação 1, modelo 1, hipótese A;
2. A partir das equações de restrições do suposto modelo são definidas as variáveis do problema;
3. Calcula-se a deformação em cada camada de armadura e verifica-se se o alongamento do aço é menor que 10‰ e se o encurtamento do concreto é menor que 3,5‰. Em caso afirmativo segue-se para o passo 4. Caso contrário, para o passo 5;
4. É feito um teste para determinar se as deformações calculadas estão condizentes com as do modelo (por exemplo: maiores ou menores que a deformação limite ε_{yd} , ou ainda se a fibra está tracionada ou comprimida). Em caso afirmativo segue-se para o passo 6. Caso contrário, para o passo 5;
5. Caso alguma deformação não atenda às predefinições do modelo, parte-se para outra suposição de modelo, retornando ao passo 2 do processo;

6. As restrições laterais são verificadas. Se alguma variável estiver fora dos limites esta é fixada em seu limite mais próximo (máximo ou mínimo), retirada do processo e re-inserida como uma constante. Então o modelo e a situação permanecem os mesmo e muda apenas a hipótese de cálculo, voltando para o passo 3;
7. Se todas as definições supostas para a situação, modelo e hipótese forem satisfeitas, calculam-se as tensões nas armaduras e finaliza-se o processo;

4.6 Exemplos Numéricos

Para avaliar os resultados fornecidos pelo programa de otimização de pilares desenvolvido, assim como o comportamento da função de custo e de suas variáveis, foram executados alguns exemplos numéricos. Os dados comuns a todos estes exemplos são os seguintes:

■ Custos*

- Concreto convencional dosado em central, inclusive mão de obra de lançamento e adensamento: **226,58/m³**
- Aço CA-50 inclusive corte, dobra e montagem: **4,36/kg**
- Fôrmas de madeira para concreto estrutural, inclusive travamentos e escoramentos: **42,10/m²**

* Fonte: Revista Construção e Mercado nº 55 de Fevereiro/2006 e site Informativo SBC (www.informativosbc.com.br), com dados atualizados em Março de 2006.

■ Concreto:

- Módulo de elasticidade secante: $E_{cs} = 21.300 \text{ MPa}$
- Resistência característica à compressão: $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$
- Deformação máxima: 3,5‰

■ Aço:

- Tipo CA-50
- Resistência característica ao escoamento: $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
- Deformação mínima: $\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} = \frac{5000}{1,15} \cdot \frac{1}{2100000} = 2,07\text{‰}$
- Taxa de armadura: entre 0,4 e 4%
- Massa específica: 7850kg/m³

■ Geometria da seção:

- Distância do CG da armadura à face da seção = 3cm
- Largura da seção: entre 19 e 24cm
- Altura da seção: entre 19 e 120cm

4.6.1 Exemplo 01 e validação do programa de otimização de pilares

Na Tabela 4.19 estão destacados em amarelo os resultados da seção otimizada de um pilar quando fixada a sua largura em 19cm e aplicada um força de 1.000kN com excentricidade de 1cm em relação ao seu centro de gravidade (CG), gerando um momento paralelo à altura de 1.000kN.cm.

Já na Tabela 4.20 estão destacados em amarelo os resultados da seção otimizada de um pilar de 24cm de largura sujeito a uma força de 1.500kN aplicada a uma excentricidade de 30cm, gerando um momento paralelo à altura de 45.000kN.cm.

Tabela 4.19: Validação do programa considerando excentricidade de 1cm e $b_w = 19$ cm.

N_d (kN)	M_d (kN.cm)	b_w (cm)	h (cm)	A_s (cm ²)	Linha Neutra (cm)	Custo (R\$)	Situação	β_x	Domínio
1.000	1.000	19	38,00	4,25	47,25	78,91	11B	1,35	5
		19	39,00	3,66	48,25	78,16	11B	1,34	5
		19	40,00	3,07	49,22	77,42	11B	1,33	5
		19	41,00	3,12	48,77	78,83	12D	1,28	5
		19	42,00	3,19	48,72	80,37	12D	1,25	5

Tabela 4.20: Validação do programa considerando excentricidade de 30cm e $b_w = 24$ cm.

N_d (kN)	M_d (kN.cm)	b_w (cm)	h (cm)	A_s (cm ²)	Linha Neutra (cm)	Custo (R\$)	Situação	β_x	Domínio
1.500	45.000	24	95,00	11,50	60,02	191,23	33B	0,652	4
		24	96,00	10,66	60,43	189,75	33B	0,650	4
		24	97,59	9,37	61,06	187,51	33C	0,645	4
		24	98,00	9,41	61,12	188,22	33D	0,643	4
		24	99,00	9,50	61,28	189,93	33D	0,638	4

Uma breve análise pode ser feita tendo em vista os resultados ótimos encontrados. No pré-dimensionamento usual geralmente se considera para a estimativa da área do pilar a resultante da divisão da Força Normal atuante pela resistência do concreto ($0,85 f_{cd}$). No caso do pilar com a força de 1.000kN aplicada a 1cm do CG, a área necessária seria de 823,53cm². Como a largura da seção é igual a 19cm, a altura necessária seria de 43,34cm. Comparando resultados, a altura otimizada encontrada de 40cm foi menor que o usual.

Esta comparação com o dimensionamento usual não deve ser feita no caso do pilar submetido à força aplicada a 30cm do seu CG, pois nesta situação, devido ao elevado valor do momento fletor resultante, geralmente não é feita esta simplificação.

Com a finalidade de comprovar se os resultados encontrados representam realmente o custo mínimo da seção, a partir da altura encontrada para a dada seção ótima, foram acrescentados e reduzidos 1cm e 2cm. Com essas novas alturas fixadas, o programa foi executado e foram encontrados os valores das demais variáveis, como mostram as tabelas apresentadas.

Para validar o problema considerando a altura fixa da seção como dado de entrada, não seria possível utilizar as hipóteses A, pois estas otimizam tanto altura quanto armadura, e nem as hipóteses C, que otimizam a altura da seção. Portanto, os exemplos com incrementos na altura foram executados em todas as situações e modelos, porém apenas nas hipóteses B e D do programa, que fixam a altura ou simultaneamente a altura e a área de armadura respectivamente.

Durante sua execução observou-se que as alturas com valores *menores* à de referência (destacadas em amarelo), quando supostas nas hipóteses D, não apresentaram resultados viáveis ou porque não atendiam às suposições do modelo e da situação ou porque retornavam valores de momentos resistentes menores que os solicitantes.

Já no caso de alturas com valores *maiores* à de referência, quando supostas nas hipóteses B, não apresentaram resultados viáveis ou porque também não atendiam às suposições do modelo e da situação ou porque apresentaram valores de armadura menores que o mínimo permitido pela NBR 6118:2003.

Pode-se perceber ainda, face aos resultados das alturas minoradas, que o programa procura equilibrar as variáveis altura e armadura buscando sempre o menor custo. Isso fica explícito nos resultados das duas menores alturas em relação à seção de referência nos dois casos analisados.

A partir do ponto de equilíbrio encontrado para as variáveis que levam ao custo ótimo, o aumento na altura, em conjunto com o aumento na armadura e na linha neutra, resulta em uma seção superdimensionada e anti-econômica, com valores de momentos resistentes maiores que os solicitantes.

Diante do exposto, fica comprovado que os valores ótimos de referência resultantes do programa de otimização são os pontos de mínimo da função de custo em seus respectivos casos. O Gráfico 4.1 exemplifica o comportamento da função de custo na vizinhança do ponto mínimo para o caso de excentricidade 1cm e largura da seção de 19cm, como apresentado na Tabela 4.19.

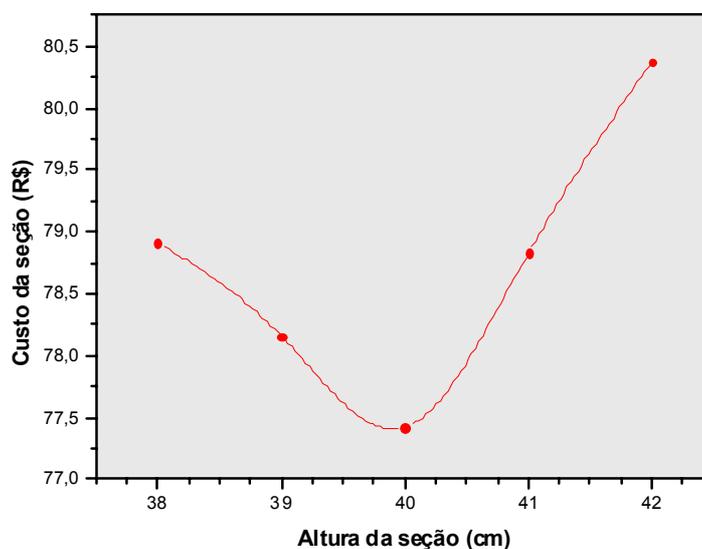


Gráfico 4.1: Comportamento da função de custo em função da altura da seção.

4.6.2 Exemplo 02:

Nos exemplos apresentados a seguir foi considerada inicialmente a aplicação de uma força normal de 200kN. Em seguida este valor foi majorado com incrementos de 200kN até a seção atingir sua capacidade última. As excentricidades foram variadas de 1 a 30cm na direção paralela à altura, gerando também momentos fletores nesta direção, para se observar o comportamento das variáveis em todos os domínios de deformação, tanto quando a seção está submetida predominantemente à compressão (representados pelos casos de exc. = 1cm) como quando os esforços levam a um comportamento semelhante a vigas em flexão (no caso de exc. = 30cm). As Tabelas a seguir mostram *apenas alguns* dos resultados obtidos, enquanto que nos Gráficos encontram-se *todos* os resultados encontrados para suas respectivas excentricidades.

Tabela 4.21: Resultados das variáveis otimizadas e auxiliares considerando excentricidade de 1cm.

N_d (kN)	M_d (kN.cm)	b_w (cm)	h (cm)	A_s (cm ²)	ω	ρ (%)	Linha Neutra (cm)	β_x	Custo (R\$)	Domínio
500	500	19	21,07	1,60	0,12	0,40	24,45	1,35	48,30	5
1000	1000	19	40,00	3,07	0,12	0,40	49,22	1,33	77,42	5
1500	1500	19	59,25	4,50	0,12	0,40	73,40	1,30	106,81	5
2000	2000	19	78,30	5,95	0,12	0,40	99,93	1,32	136,00	5
2500	2500	19	95,00	8,72	0,15	0,48	143,99	1,56	166,74	5
3000	3000	19	95,00	20,58	0,35	1,14	261,40	2,84	207,32	5
3500	3500	19	95,00	32,54	0,55	1,80	354,47	3,85	248,27	5
4000	4000	19	95,00	44,51	0,75	2,47	430,07	4,67	289,24	5
4500	4500	19	95,00	56,48	0,95	3,13	492,84	5,35	330,21	5
5000	5000	19	95,00	68,45	1,15	3,79	545,79	5,93	371,18	5

Notas:

β_x = Linha neutra/d, em que d é a altura útil da seção; e

ω é a taxa mecânica de armadura longitudinal de flexão para vigas, definido pela

$$\text{NBR 6118:2003 como sendo } \omega = \frac{A_s \cdot f_{yd}}{A_c \cdot f_{cd}} .$$

Tabela 4.22: Comparação entre os custos considerando excentricidade de 1cm.

N _d (kN)	Custos (R\$)				Porcentagem do total		
	Concreto	Aço	Fôrma	Total	Concreto	Aço	Fôrma
500	9,07	5,48	33,74	48,30	18,8%	11,3%	69,9%
1000	17,22	10,51	49,68	77,42	22,2%	13,6%	64,2%
1500	25,51	15,40	65,89	106,81	23,9%	14,4%	61,7%
2000	33,71	20,36	81,93	136,00	24,8%	15,0%	60,2%
2500	40,90	29,86	95,99	166,74	24,5%	17,9%	57,6%
3000	40,90	70,44	95,99	207,32	19,7%	34,0%	46,3%
3500	40,90	111,37	95,99	248,27	16,5%	44,9%	38,7%
4000	40,90	152,34	95,99	289,24	14,1%	52,7%	33,2%
4500	40,90	193,31	95,99	330,21	12,4%	58,5%	29,1%
5000	40,90	234,28	95,99	371,18	11,0%	63,1%	25,9%

Variáveis Otimizadas x Força Normal (Exc. = 1cm e b_w = 19cm)

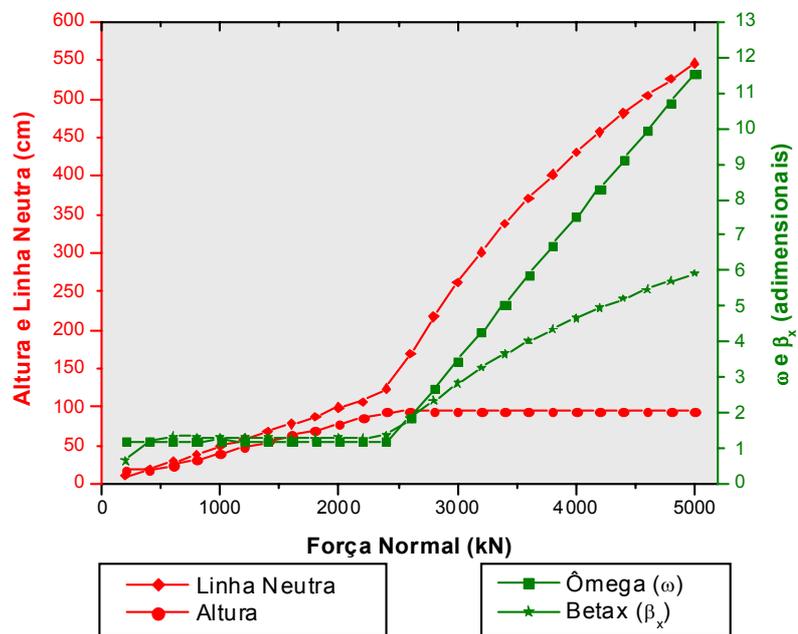


Gráfico 4.2: Resultados das variáveis otimizadas considerando excentricidade de 1cm

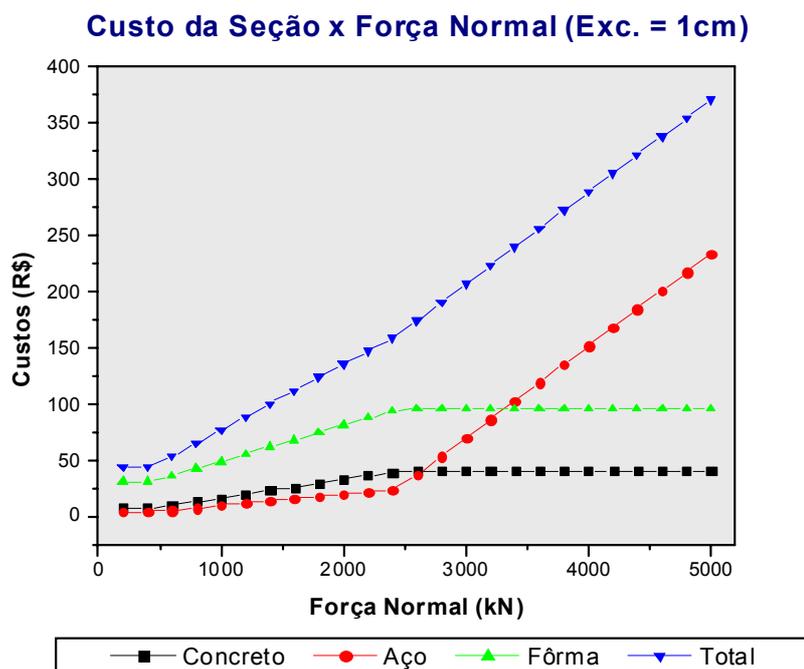


Gráfico 4.3: Comparação entre os custos considerando excentricidade de 1cm.

Tabela 4.23: Resultados das variáveis otimizadas e auxiliares considerando excentricidade de 5 cm.

N_d (kN)	M_d (kN.cm)	b_w (cm)	h (cm)	A_s (cm ²)	ω	ρ (%)	Linha Neutra (cm)	β_x	Custo (R\$)	Domínio
500	2500	19	28,32	2,15	0,12	0,40	24,66	0,97	59,40	4
1000	5000	19	47,84	3,63	0,12	0,40	48,53	1,08	89,32	5
1500	7500	19	66,89	5,08	0,12	0,40	73,04	1,14	118,52	5
2000	10000	19	86,12	6,54	0,12	0,40	97,25	1,17	148,00	5
2500	12500	19	95,00	14,36	0,24	0,80	110,70	1,20	186,04	5
3000	15000	19	95,00	27,77	0,47	1,54	113,96	1,24	231,93	5
3500	17500	19	95,00	41,21	0,69	2,28	116,69	1,27	277,94	5
4000	20000	19	95,00	54,63	0,92	3,03	120,12	1,30	323,86	5
4500	22500	19	95,00	67,77	1,14	3,75	128,86	1,40	368,86	5
4650	23250	19	95,00	71,72	1,21	3,97	131,14	1,42	382,36	5

Tabela 4.24: Comparação entre os custos considerando excentricidade de 5cm.

N_d (kN)	Custos (R\$)				Porcentagem do total		
	Concreto	Aço	Fôrma	Total	Concreto	Aço	Fôrma
500	12,19	7,36	39,84	59,40	20,5%	12,4%	67,1%
1000	20,60	12,42	56,28	89,32	23,1%	13,9%	63,0%
1500	28,80	17,39	72,32	118,52	24,3%	14,7%	61,0%
2000	37,07	22,38	88,51	148,00	25,1%	15,1%	59,8%
2500	40,90	49,15	95,99	186,04	22,0%	26,4%	51,6%
3000	40,90	95,05	95,99	231,93	17,6%	41,0%	41,4%
3500	40,90	141,05	95,99	277,94	14,7%	50,7%	34,5%
4000	40,90	186,98	95,99	323,86	12,6%	57,7%	29,6%
4500	40,90	231,95	95,99	368,86	11,1%	62,9%	26,0%
4650	40,90	245,47	95,99	382,36	10,7%	64,2%	25,1%

Variáveis Otimizadas x Força Normal (Exc. = 5cm e $b_w = 19\text{cm}$)

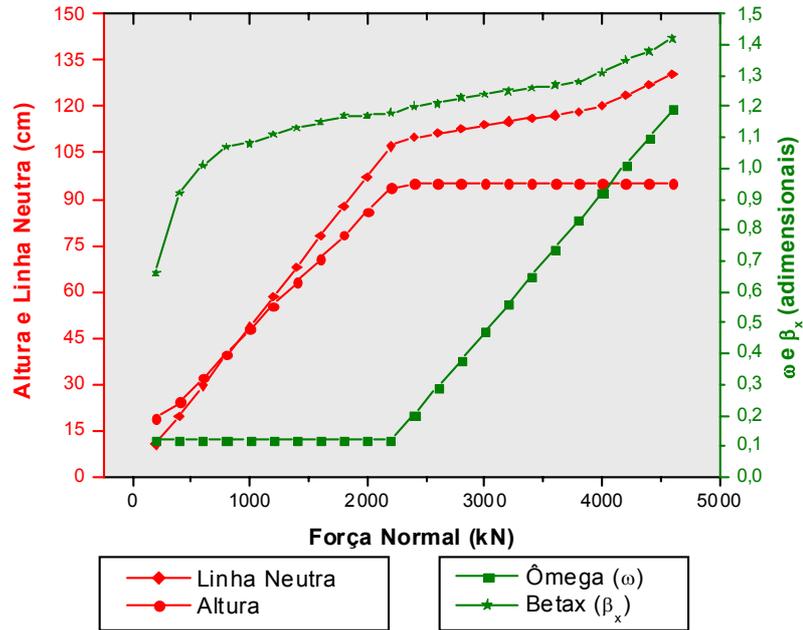


Gráfico 4.4: Resultados das variáveis otimizadas considerando excentricidade de 5cm.

Custo da Seção x Força Normal (Exc. = 5cm)

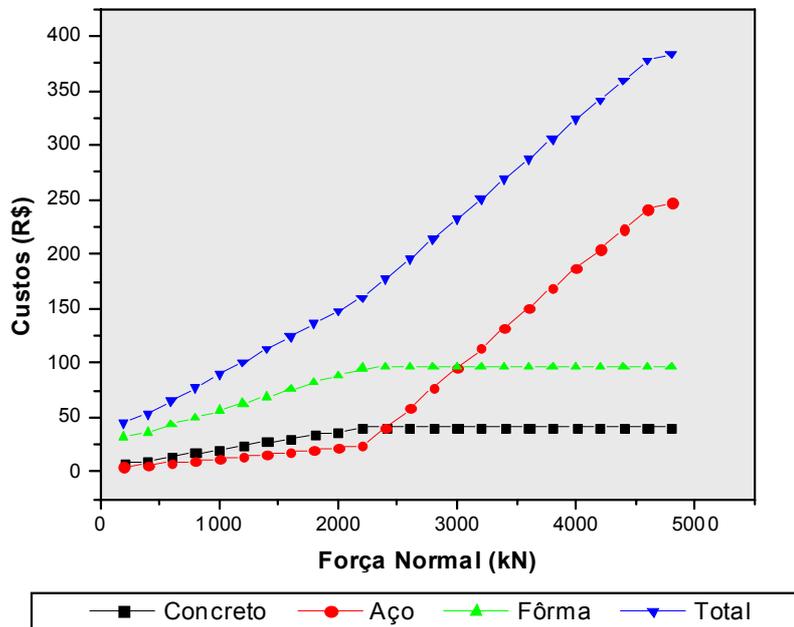


Gráfico 4.5: Comparação entre os custos considerando excentricidade de 5cm.

O comportamento das variáveis quando as excentricidades variam entre 5 e 30cm foram semelhantes, portanto serão apresentados a seguir os resultados apenas para a exc. = 30cm.

Tabela 4.25: Resultados das variáveis otimizadas e auxiliares considerando excentricidade de 30 cm.

N_d (kN)	M_d (kN.cm)	b_w (cm)	h (cm)	A_s (cm ²)	ω	ρ (%)	Linha Neutra (cm)	β_x	Custo (R\$)	Domínio
500	15000	19	64,39	4,89	0,12	0,40	28,05	0,45	114,68	3
1000	30000	19	89,34	6,79	0,12	0,40	52,22	0,61	152,93	3
1500	45000	19	95,00	20,69	0,35	1,15	65,82	0,72	207,69	4
2000	60000	19	95,00	40,97	0,69	2,27	70,32	0,76	277,12	4
2500	75000	19	95,00	61,89	1,04	3,43	72,68	0,79	348,73	4
2750	82500	19	95,00	68,22	1,15	3,78	73,18	0,79	370,39	4

Tabela 4.26: Comparação entre os custos considerando excentricidade de 30cm.

N_d (kN)	Custos (R\$)				Porcentagem do total		
	Concreto	Aço	Fôrma	Total	Concreto	Aço	Fôrma
500	27,72	16,74	70,21	114,68	24,2%	14,6%	61,2%
1000	38,46	23,24	91,22	152,93	25,2%	15,2%	59,7%
1500	40,90	70,81	95,99	207,69	19,7%	34,1%	46,2%
2000	40,90	140,22	95,99	277,12	14,8%	50,6%	34,6%
2500	40,90	211,82	95,99	348,73	11,7%	60,7%	27,5%
2750	40,90	233,49	95,99	370,39	11,0%	63,0%	25,9%

Variáveis Otimizadas x Força Normal (Exc. = 30cm e $b_w = 19$ cm)

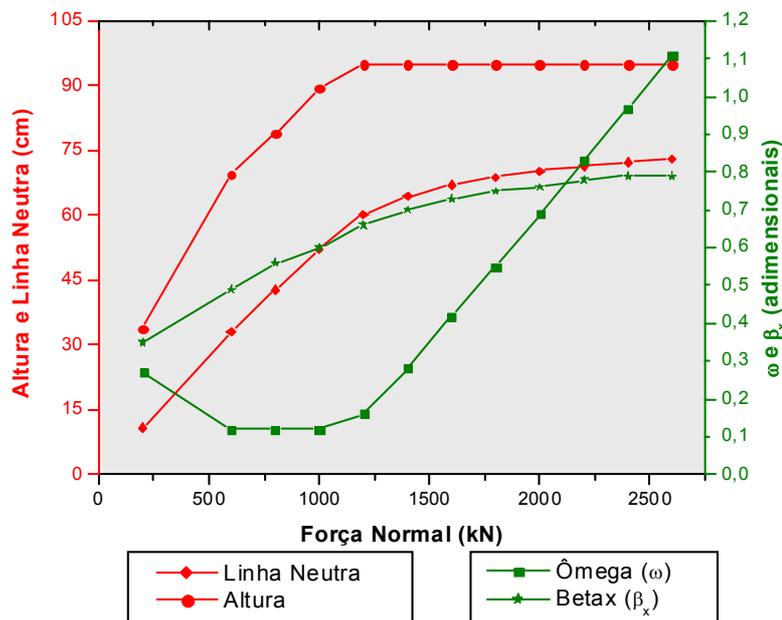


Gráfico 4.6: Resultados considerando excentricidade de 30cm.

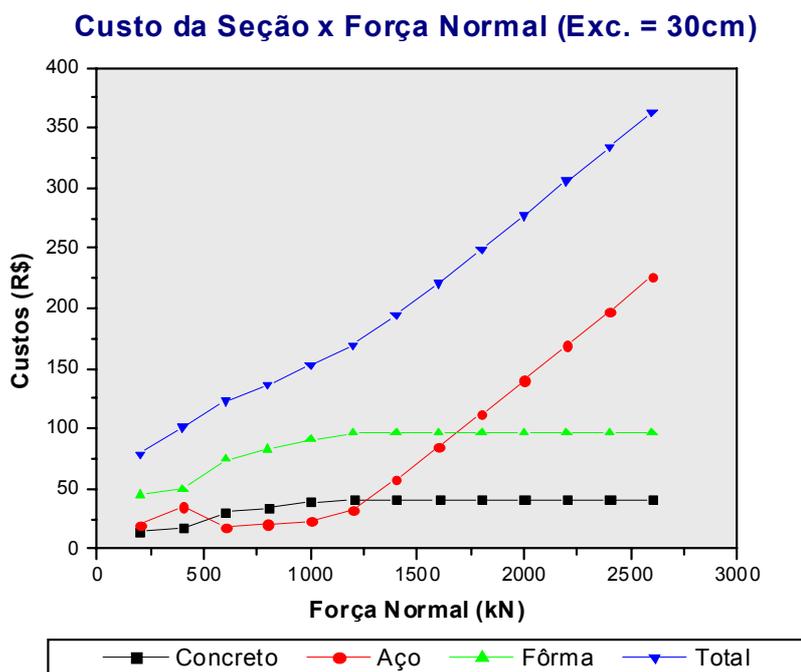


Gráfico 4.7: Comparação entre os custos considerando excentricidade de 30cm.

Em vista dos resultados encontrados, algumas observações são feitas a seguir.

Em relação aos gráficos e tabelas que apresentam o comportamento das variáveis otimizadas, verifica-se que, independente do domínio de deformação onde a seção está, as curvas basicamente podem ser divididas em dois trechos. No primeiro o valor mais econômico vai sendo determinado com o aumento da altura, mantendo a armadura próxima à mínima. No segundo as retas apresentam uma leve inclinação, quando a altura passa a ser limitada pelo seu valor máximo e apenas a armadura aumenta para resistir ao incremento dos esforços.

Outro aspecto é a redução nos valores da profundidade da linha neutra e de β_x com o aumento da excentricidade, como já era previsto, abrangendo as seções econômicas em seus devidos domínios de deformação de acordo com os pares N_d e M_d .

Em relação aos gráficos e tabelas que apresentam as comparações entre os custos, pode-se perceber a mesma característica descrita acima, em que as curvas podem ser divididas em dois trechos visivelmente distintos. Isso sugere que a seção tem uma perda de economia no segundo trecho, o que pode ser explicado pela imposição da simetria das armaduras, como foi comentado anteriormente, resultando em algumas camadas de armadura subutilizadas.

Observa-se ainda que no primeiro trecho as proporções de cada parcela que compõem o custo total se mantêm próximas quando são variadas as forças atuantes (para as diferentes excentricidades). Estes valores são de aproximadamente 23% do custo total

para a parcela de concreto, de 16% para a armadura e de 61% para a fôrma na maioria dos casos estudados. Isto justifica o comportamento da função de custo neste primeiro trecho, em que as parcelas com maior contribuição para o custo total são determinadas pelas dimensões da seção, ficando a armadura com importância reduzida. No caso de pilares esta situação poderia ser prevista, já que estes geralmente trabalham sob flexo-compressão e como é sabido a compressão em sua maior parte é absorvida pelo concreto e não pela armadura.

O custo da fôrma poderia ser reduzido se fosse considerada a reutilização dos materiais, mas esse aspecto não foi incluído na composição dos custos.

No segundo trecho da curva, quando a otimização é limitada pela altura máxima, as proporções das parcelas são bastante variáveis, não sendo possível chegar a índices representativos.

A título de ilustração, as tabelas e os gráficos a seguir mostram os valores ótimos para uma seção com largura (b_w) igual a 24cm e exc. = 30cm, apresentando a limitação máxima para este caso, tanto dos esforços quanto das variáveis, suportada pelo programa de pilares elaborado.

Tabela 4.27: Resultados considerando excentricidade de 30 cm ($b_w=24$ cm).

N_d (kN)	M_d (kN.cm)	b_w (cm)	h (cm)	A_s (cm ²)	ω	ρ (%)	Linha Neutra (cm)	β_x	Custo (R\$)	Domínio
500	15000	24	40,00	12,56	0,40	1,31	21,44	0,48	118,65	3
1000	30000	24	78,58	7,54	0,12	0,40	42,33	0,56	154,92	3
1500	45000	24	97,59	9,37	0,12	0,40	61,06	0,65	187,51	4
2000	60000	24	114,67	11,00	0,12	0,40	79,37	0,71	216,80	4
2500	75000	24	120,00	22,76	0,24	0,79	90,00	0,76	264,53	4
3000	90000	24	120,00	40,49	0,43	1,41	94,27	0,80	325,10	4
3500	105000	24	120,00	58,69	0,62	2,04	97,00	0,82	387,37	4
4000	120000	24	120,00	77,10	0,81	2,68	98,92	0,84	450,40	4
4500	135000	24	120,00	95,63	1,01	3,32	100,34	0,86	513,83	4
5000	150000	24	120,00	114,52	1,21	3,98	101,48	0,87	578,45	4

Tabela 4.28: Comparação entre os custos considerando excentricidade de 30cm ($b_w = 24$ cm).

N_d (kN)	Custos (R\$)				Porcentagem do total		
	Concreto	Aço	Fôrma	Total	Concreto	Aço	Fôrma
500	21,75	42,99	53,89	118,65	18,3%	36,2%	45,4%
1000	42,73	25,81	86,37	154,92	27,6%	16,7%	55,8%
2000	62,36	37,65	116,76	216,80	28,8%	17,4%	53,9%
3000	65,26	138,58	121,25	325,10	20,1%	42,6%	37,3%
4000	65,26	263,90	121,25	450,40	14,5%	58,6%	26,9%
5000	65,26	391,96	121,25	578,45	11,3%	67,8%	21,0%

Variáveis Otimizadas x Força Normal (Exc. = 30cm e $b_w = 24$ cm)

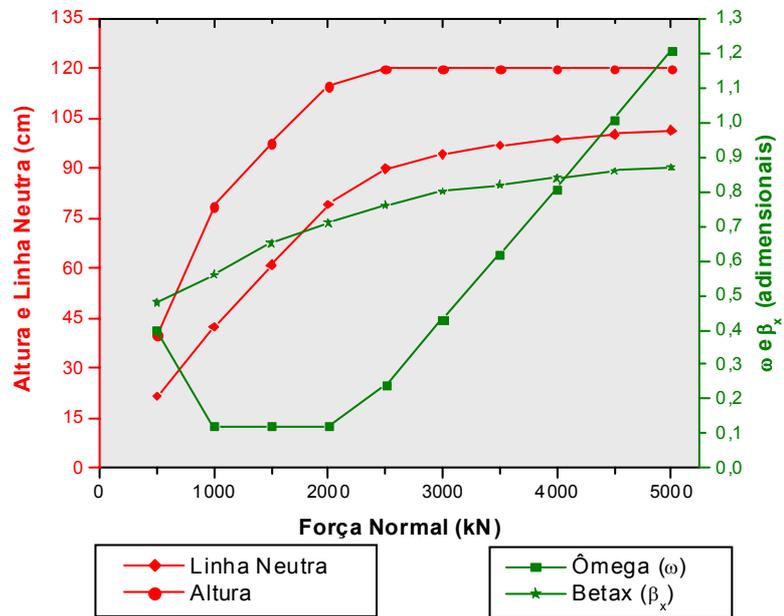


Gráfico 4.8: Resultados considerando excentricidade de 30cm e $b_w = 24$ cm.

Custo da Seção x Força Normal (Exc. = 30cm e $b_w = 24$ cm)

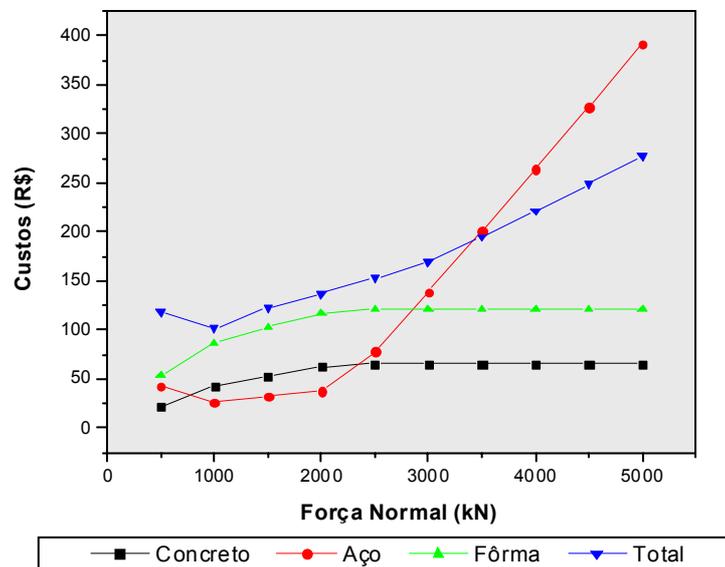


Gráfico 4.9: Comparação entre os custos considerando excentricidade de 30cm e $b_w = 24$ cm.

Como podem ser observadas pelas semelhanças entre os gráficos apresentados para as demais excentricidades, as observações feitas anteriormente também se aplicam a este caso.

De forma geral, como era esperado, em todos os casos o custo da seção aumenta conforme aumenta a excentricidade e as solicitações normais (força normal e momento fletor), como mostra de forma mais clara o Gráfico 4.10.

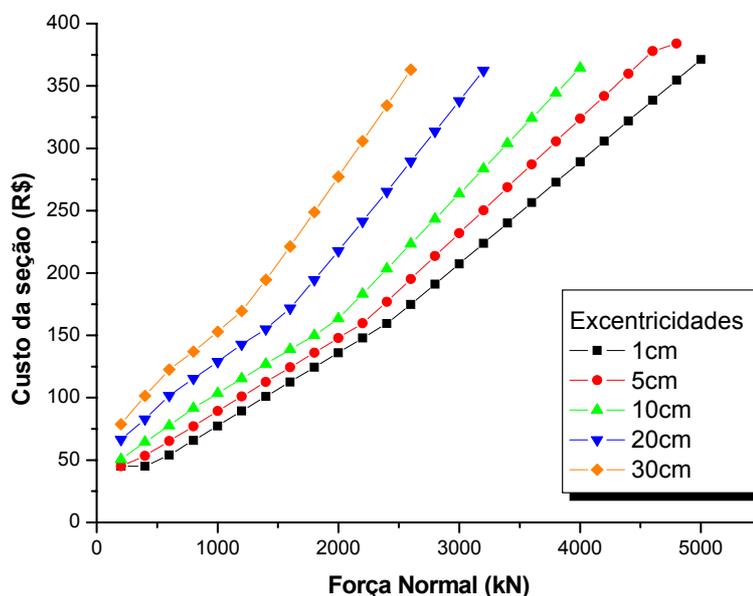


Gráfico 4.10: Comparação dos custos em função das excentricidades e da força normal.

Verifica-se também que, independente do domínio de deformação onde a seção esteja (representados pela variação das excentricidades e dos esforços atuantes), a tendência das funções de custo em todos os casos estudados se mostrou a mesma, como mostra o Gráfico 4.11.

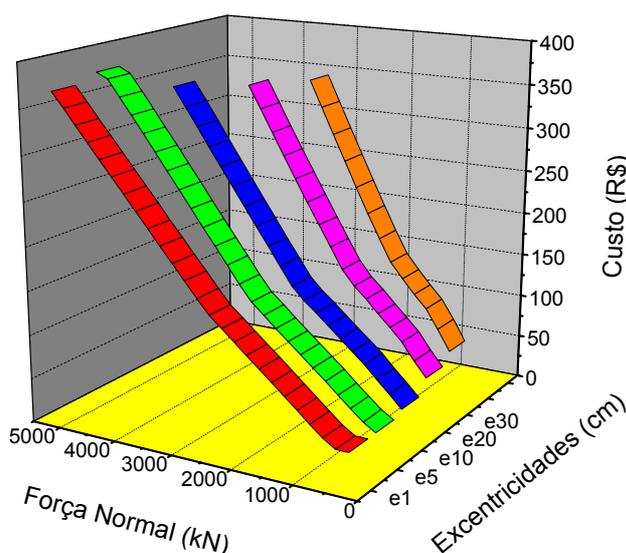


Gráfico 4.11: Comparação das funções de custo

5. OTIMIZAÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL DE UMA VIGA

Neste capítulo serão apresentadas as considerações para a formulação matemática e para a resolução do problema de otimização dos custos de uma viga. São consideradas vigas de seção retangular com armaduras longitudinais de tração e compressão, não sendo incluída na formulação do problema a contribuição da força cortante e nem otimizada a armadura transversal (estribos).

Logo após será demonstrada a elaboração da função objetivo (ou função de custo) e das restrições, seguido de um exemplo e das verificações dos resultados obtidos.

5.1 Considerações iniciais

Como apresentado na revisão bibliográfica deste trabalho, Soares (1997) desenvolveu uma formulação de minimização de custos da seção transversal de vigas de um pavimento, resultando em uma rotina computacional. Vianna (2003) utilizou como base esta rotina e fez algumas implementações, como pode ser observado em sua dissertação e de forma resumida no item 2.2 desta pesquisa. No entanto, na época da elaboração deste programa a versão da NBR 6118 vigente era a NB-1/1978. Assim, foi feita uma adaptação desta rotina para as prescrições da norma atual, a versão do ano de 2003.

Deve ser destacado também que a sub-rotina utilizada para a otimização em si da seção transversal das vigas isoladamente foi substituída por outra formulação, semelhante à utilizada para pilares, como será descrito mais detalhadamente ao longo deste capítulo.

Tratou-se então de se utilizar o mesmo algoritmo elaborado por Soares (1997) e adaptado por Vianna (2003) com suas devidas modificações.

Serão apresentadas a seguir as atualizações feitas na formulação do algoritmo de otimização de uma viga devido à mudança da versão vigente da NBR 6118.

5.2 Alterações na formulação da otimização da seção transversal de vigas

5.2.1 Condições de ductilidade

Segundo a NBR 6118:2003, a capacidade de rotação dos elementos estruturais é função da posição da linha neutra (x) no Estado Limite Último (ELU). Quanto menor for a relação entre esta e a altura útil (d), determinada por $\beta_x = x/d$, tanto maior será essa capacidade.

A fim de melhorar a ductilidade das estruturas nas regiões de apoio das vigas ou de ligações com outros elementos estruturais (onde geralmente prevalecem momentos negativos), a norma brasileira prescreve que a posição da linha neutra no ELU deve obedecer aos seguintes limites:

- a) $\frac{x}{d} \leq 0,50$ para concretos com $f_{ck} \leq 35MPa$; ou
- b) $\frac{x}{d} \leq 0,40$ para concretos com $f_{ck} > 35MPa$.

Estes limites foram inseridos no programa em questão de forma que se a seção crítica da viga estiver submetida a momentos fletores negativos, o dimensionamento será feito com β_x fixado nos valores acima, e não mais no limite considerado econômico dos domínios 3 e 4 como usual.

5.2.2 Redistribuição de momentos

A NBR 6118:2003 permite a redução dos momentos fletores sobre os apoios em até 10% para estruturas de nós móveis e 25% para outros casos, e indica ainda que no caso de reduzir-se o momento fletor de M para δM em uma determinada seção transversal, a razão entre o coeficiente de redistribuição (δ) e a posição da linha neutra na seção (x/d) deve obedecer à seguinte expressão:

- a) $\delta \geq 0,44 + 1,25 \cdot \frac{x}{d}$ para concretos com $f_{ck} \leq 35MPa$; ou
- b) $\delta \geq 0,56 + 1,25 \cdot \frac{x}{d}$ para concretos com $f_{ck} > 35MPa$.

A verificação destes limites foi inserida na rotina de minimização de custos de vigas para checar a redistribuição dos momentos na seção otimizada. No caso destes não serem atendidos, a seção é redimensionada considerando a variação de momento fletor máxima permitida.

5.2.3 Deslocamentos limites

Para a verificação do Estado limite de deformação excessiva, a NBR 6118:2003 determina para aceitabilidade sensorial – para evitar o efeito visual desagradável – o limite de $l/250$, em que ' l ' é o comprimento do vão em questão. No caso de se tratar de balanços, o vão equivalente a ser considerado deve ser o dobro do comprimento do balanço.

No programa estes novos valores substituíram os antigos determinados pela NB1/78, em que a flecha máxima devia obedecer aos limites de $l/300$ no caso de vãos suportados em ambas as extremidades por apoios que não se movem, e $l/150$ no caso de balanços.

5.2.4 Flecha diferida no tempo (consideração da fluência)

A NB-1/78 considerava a flecha adicional diferida no tempo (decorrente das cargas de longa duração em função da fluência) por meio da majoração da flecha imediata por um coeficiente de fluência β_T , função do mês de carregamento da estrutura após a concretagem e das deformações do concreto e do aço antes e após este carregamento.

Já a norma atual, além de manter as mesmas considerações citadas inclui a influência da armadura de compressão e define uma maneira aproximada para determinar a flecha adicional diferida por meio de um fator α_f , dado por:

$$\alpha_f = \frac{\Delta\xi}{1+50\rho'}$$

onde:

$\Delta\xi = \xi(t) - \xi(t_0)$ é a variação do coeficiente em função do tempo, dado por:

$$\xi(t) = 0,68 \cdot (0,996^t) \cdot t^{0,32} \text{ para } t \leq 70 \text{ meses}$$

ou

$$\xi(t) = 2 \text{ para } t > 70 \text{ meses}$$

sendo:

t o tempo, em meses, quando se deseja o valor da flecha diferida;

t_0 a idade, em meses, relativa à data de aplicação da carga de longa duração;

ρ' é a taxa de armadura comprimida, dada por:

$$\rho' = \frac{A_s'}{b \cdot d}, \text{ sendo:}$$

A_s' a área de armadura comprimida;

b a largura da viga; e

d a altura útil da viga.

Os valores de t e t_0 são dados de entrada do programa.

O valor da flecha total é dado pela multiplicação da flecha imediata por $(1 + \alpha_f)$.

Na rotina de otimização de vigas o coeficiente β_T foi substituído por α_f .

5.2.5 Armadura mínima longitudinal de vigas

A NBR 6118:2003 alterou o limite mínimo absoluto da taxa de armadura de flexão para vigas de 0,15% para valores dependentes da forma da seção e da resistência à compressão do concreto, conforme tabela 17.3 da referida norma. Esses valores também foram atualizados no algoritmo de otimização de vigas.

5.3 Variáveis otimizadas

O programa de otimização de vigas utilizado parte de uma largura predeterminada como dado de entrada e busca valores ótimos para a altura e para as armaduras da seção retangular. Isso porque, na prática, em projetos estruturais geralmente a largura das vigas é definida de acordo com a espessura da parede ou por imposições arquitetônicas.

Assim, as variáveis do problema são:

$d = x_1$ Altura útil da seção transversal da viga;

$A_{st} = x_2$ Área de armadura tracionada da seção transversal da viga;

$A_{sc} = x_3$ Área de armadura comprimida da seção transversal da viga.

5.4 Formulação da Função Objetivo

Assim como a função de custo utilizada na determinação do custo ótimo dos pilares, a função objetivo representa o menor custo por unidade de comprimento da viga, levando em consideração gastos com material e mão de obra para a execução das fôrmas de madeira (inclusive travamentos e escoramentos), da concretagem e da montagem da armadura longitudinal, sendo da forma:

$$F = (b_w \cdot h) \cdot C_c + (A_{st} + A_{sc}) \cdot \rho_s \cdot C_s + (b_w + 2h) \cdot C_F \quad [5.1]$$

onde:

F Função de custo da viga, por unidade de comprimento;

b_w Largura da viga;

h Altura da viga;

A_{st} Área de armadura tracionada na seção da viga;

A_{sc} Área de armadura comprimida na seção da viga;

ρ_s Massa específica do aço;

C_C Custo do concreto, por unidade de volume;

C_S Custo da armadura, por unidade de massa;

C_F Custo da fôrma, por unidade de área.

Substituindo a nomenclatura das variáveis a serem otimizadas na equação [5.1]:

$$F(x) = b_w \cdot (x_1 + d') \cdot C_C + (x_2 + x_3) \cdot \rho_s \cdot C_S + (b_w + 2 \cdot (x_1 + d')) \cdot C_F \quad [5.2]$$

Algumas constantes foram determinadas para simplificar os cálculos, sendo estas:

$$c_1 = C_C$$

$$c_2 = \rho_s C_S$$

$$c_3 = C_F$$

Substituindo as constantes acima na equação [5.2], obtém-se a função objetivo:

$$F(x) = b_w \cdot (x_1 + d') \cdot c_1 + (x_2 + x_3) \cdot c_2 + (b_w + 2 \cdot (x_1 + d')) \cdot c_3 \quad [5.3]$$

Sendo d' a distância do centro de gravidade da armadura à face da seção;

5.5 Restrições do Problema

5.5.1 Formulação das Restrições de Equilíbrio

Em geral considera-se o dimensionamento das vigas como se submetidas à flexão simples. O equilíbrio das forças na seção das vigas está representado na Figura 5.1.

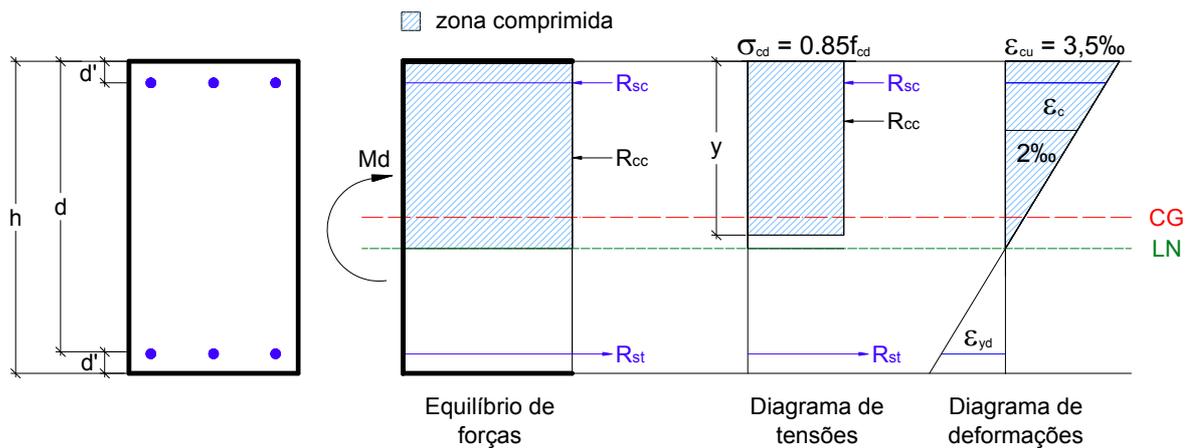


Figura 5.1: Seção transversal da viga, equilíbrio, diagrama de tensões e compatibilidade de deformações.

As equações de equilíbrio de forças de uma seção transversal de concreto são elaboradas em função da distribuição das camadas de armadura, da linha neutra e da altura da seção. Sendo assim, serão apresentadas a seguir as equações definidas para o equilíbrio das vigas considerando o diagrama retangular simplificado de tensões:

$$\sum F_x = 0 \quad R_{cc} + R_{sc} = R_{st} \quad [5.4]$$

$$\sum M_{st} = 0 \quad R_{cc} \cdot \left(d - \frac{y}{2} \right) + R_{sc} \cdot (d - d') = M_d \quad [5.5]$$

onde:

$$R_{cc} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot y \quad \text{Força resistente de compressão do concreto};$$

$$R_{sc} = \sigma_{sc} \cdot A_{sc} \quad \text{Força resistente de compressão do aço};$$

$$R_{st} = \sigma_{st} \cdot A_{st} \quad \text{Força resistente de tração do aço};$$

$$y = 0,8x \quad \text{Altura equivalente do diagrama simplificado de tensões};$$

d Altura útil da seção de concreto;

x Profundidade da linha neutra.

Nota: A profundidade da linha neutra da seção transversal a ser otimizada é um dado de entrada do programa, sendo importante para a determinação da altura da seção.

Colocando as eqs. [5.4] e [5.5] em função das tensões nas armaduras e substituindo a nomenclatura dada às variáveis do problema, tem-se:

$$\sum F_x = 0 \quad 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x + \sigma_{sc} \cdot x_3 - \sigma_{st} \cdot x_2 = 0 \quad [5.6]$$

$$\sum M_{st} = 0 \quad 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x \cdot (x_1 - 0,4x) + \sigma_{sc} \cdot x_3 \cdot (x_1 - d') = M_d \quad [5.7]$$

5.5.2 Formulação das Restrições de Compatibilidade

O dimensionamento à flexão simples deve sempre ser feito para que o estado limite último da peça seja atingido nos domínios 2 ou 3 de deformação, pois nesses casos o aço está em escoamento e a ruptura se dá de forma dúctil, sendo utilizada apenas armadura de tração (peça simplesmente armada). Para um melhor aproveitamento dos materiais – aço e concreto – em geral se utiliza o limite determinado pelos domínios 3 e 4, em que o concreto fica submetido ao seu máximo encurtamento atingindo a tensão de ruptura com simultaneidade de escoamento do aço tracionado. Nesta situação não há desperdício das propriedades de nenhum dos dois materiais, pelo contrário, os dois trabalham próximos aos seus limites máximos, sendo por isso chamado de dimensionamento econômico.

O que deve ser evitado é o dimensionamento no domínio 4, pois neste caso a seção atinge o ELU quando o aço ainda não alcançou a tensão de escoamento, resultando em uma ruptura frágil, sem aviso prévio do elemento. Outro aspecto é que se faz necessário o uso de armadura de compressão, tornando o dimensionamento anti-econômico.

5.5.2.1 Equações gerais de deformações

A fim de realizar o dimensionamento econômico, a profundidade da linha neutra é determinada com β_x no limite entre os domínios 3 e 4, como foi explicado, por meio da seguinte equação de compatibilidade de deformações conforme a Figura 5.1:

$$\frac{\varepsilon_c}{x} = \frac{\varepsilon_s}{d - x} \quad [5.8]$$

Isolando a linha neutra encontra-se:

$$x = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s + \varepsilon_c} \cdot d \quad [5.9]$$

Em que:

- ε_c encurtamento máximo do concreto;
- ε_s deformação de escoamento do aço.

Desta forma teremos as armaduras trabalhando com a tensão de escoamento f_{yd} , e a altura da linha neutra fixada em função dos limites de deformação do aço e do concreto.

As deformações dos materiais são dados de entrada do programa, deixando a critério do usuário o dimensionamento no domínio de sua escolha. Neste estudo todos os exemplos foram feitos considerando o dimensionamento econômico.

Substituindo a eq. [5.9] nas equações de equilíbrio dadas por [5.6] e [5.7] temos as equações finais de equilíbrio:

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s + \varepsilon_c} \cdot d + \sigma_{sc} \cdot x_3 - \sigma_{st} \cdot x_2 = 0 \quad [5.10]$$

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s + \varepsilon_c} \cdot d \cdot \left(x_1 - 0,4 \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s + \varepsilon_c} \cdot d \right) + \sigma_{sc} \cdot x_3 \cdot (x_1 - d') = M_d \quad [5.11]$$

As considerações sobre utilidade apresentadas no item 5.2.1 também são obedecidas fazendo a substituição direta do valor de β_x nas equações de equilíbrio, nos casos em que o dimensionamento da seção é determinado pelos momentos nos apoios (negativos).

5.5.3 Restrições Laterais

Como explicado no capítulo 0, restrições laterais são aquelas em que são impostos limites diretamente no valor das variáveis. No caso de vigas elas se dão em função da arquitetura da edificação, de procedimentos construtivos ou ainda para atender às especificações de normas técnicas.

5.5.3.1 Limites de armadura

■ Para evitar uma fissuração inaceitável nas vigas de concreto limita-se o excesso de armadura em:

$$x_2 + x_3 - P_{ac} \cdot b_w \cdot x_1 \leq 0 \quad [5.12]$$

em que P_{ac} é a relação entre a área de armadura e a área de concreto na seção, sendo um dado de entrada do programa.

■ Por questões construtivas limita-se a percentagem de armadura comprimida em 50% da armadura tracionada:

$$x_3 - 0,5x_2 \leq 0 \quad [5.13]$$

5.5.3.2 Limites de deformação

A flecha máxima das vigas deve obedecer ao limite:

$$\delta \leq \delta_{\text{lim}}$$

em que:

δ deslocamento máximo da viga otimizada;

δ_{lim} deslocamento máximo permitido por Norma, sendo dado de entrada do programa.

No cálculo do deslocamento máximo das vigas deve ser considerada a rigidez efetiva das seções do elemento estrutural, ou seja, a presença de armadura, a existência de fissuras no concreto ao longo dessa armadura e as deformações diferidas no tempo. Para tanto, na determinação do valor final da flecha imediata no programa de otimização de vigas foram utilizados dois modelos que diferem basicamente pela consideração do momento de inércia.

No primeiro se considerou o concreto e o aço como materiais de comportamento elástico e linear, em que as seções encontram-se no Estádio I e a inércia dos elementos é calculada com seu valor bruto, dado pela expressão:

$$I_0 = \frac{b_w \cdot h^3}{12}$$

Neste caso, em que o momento fletor para o qual a viga está sendo dimensionada é menor ou igual ao momento de fissuração, foi estabelecida uma relação entre o deslocamento e a inércia da viga antes e depois de determinada sua altura ótima, representada na eq. [5.14].

$$\delta_{\text{imediate}} = \delta_i \cdot \frac{I_0}{I_f} \quad [5.14]$$

onde:

δ_{imediate} flecha imediata da viga otimizada;

δ_i flecha inicial fornecida pelo programa, calculada antes da seção ser otimizada por meio dos deslocamentos relativos dos nós resultantes do método dos elementos finitos;

I_0 momento de inércia antes da seção ser otimizada;

I_f momento de inércia da seção otimizada.

No segundo modelo o elemento estrutural encontra-se no Estádio II, apresentando fissuração, sendo utilizada uma inércia diferente para cada elemento finito. Neste cálculo foram consideradas a área de concreto comprimida, as armaduras (calculadas no Estado Limite Último) e a área de concreto entre fissuras, representadas pela equação empírica de *Branson* adotada pela NBR 6118:2003. Para a determinação da flecha imediata neste caso, então, foi utilizada a analogia de Mohr.

Como explicado no item 5.2.4, no cálculo da flecha final da viga deve ser considerado um acréscimo da flecha imediata devido à influência da flecha diferida no tempo, conforme a eq. [5.15].

$$\delta = \delta_{\text{imediate}} \cdot (1 + \alpha_f) \quad [5.15]$$

Segundo Soares (1997), devido à complexidade que a formulação matemática assumiu quando a restrição de deslocamento máximo foi imposta ao problema, esta verificação foi inserida após ter sido encontrada a solução ótima, tendo em vista que isto não implicaria em mudança nos resultados. Assim, encontrada a solução ótima sem restrições de deslocamentos, verifica-se a flecha. Se esta ultrapassar os limites pré-estabelecidos, uma nova altura para a viga é calculada, pelo método dos intervalos encaixantes seguido do método da bisseção, de modo que a flecha atenda a um erro absoluto de 0,5% imposto internamente no programa. Com a nova altura são determinadas também novas armaduras e os custos ótimos da seção.

5.6 Resolução do problema

Diante das considerações feitas no item 5.5, o problema da otimização da seção transversal de vigas pode ser apresentado da seguinte forma:

Minimizar: $F(x) = b_w \cdot (x_1 + d') \cdot c_1 + (x_2 + x_3) \cdot c_2 + (b_w + 2 \cdot (x_1 + d')) \cdot c_3$

Sujeito a: $0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s + \varepsilon_c} \cdot d + f_{yd} \cdot x_3 - \sigma_{st} \cdot x_2 = 0$

$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s + \varepsilon_c} \cdot d \cdot \left(x_1 - 0,4 \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s + \varepsilon_c} \cdot d \right) + f_{yd} \cdot x_3 \cdot (x_1 - d') - M_d = 0$$

$$x_2 + x_3 - P_{ac} \cdot b_w \cdot x_1 \leq 0$$

$$x_3 - 0,5x_2 \leq 0$$

Estas equações e suas derivadas parciais foram implementadas na sub-rotina NCONG, como descrito no item 3.3, resultando nas seções de mínimo custo das vigas para cada esforço aplicado considerado.

5.7 Exemplos Numéricos

Para avaliar os resultados fornecidos pelo programa de otimização de vigas desenvolvido, assim como o comportamento da função de custo e de suas variáveis, foram executados dois exemplos numéricos. Os dados comuns são semelhantes aos utilizados nos exemplos de pilares, sendo:

■ Custos*

- Concreto convencional dosado em central, inclusive mão de obra de lançamento e adensamento: 226,58/m³
- Aço CA-50 inclusive corte, dobra e montagem: 4,36/kg
- Fôrmas de madeira para concreto estrutural, inclusive travamento e escoramento: 42,10/m²

* Fonte: Revista Construção e Mercado nº 55 de Fevereiro/2006 e site Informativo SBC (www.informativosbc.com.br), com dados atualizados em Março de 2006.

■ Concreto:

- Módulo de elasticidade secante: $E_{cs} = 21.300 \text{ MPa}$
- Resistência característica à compressão: $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$
- Deformação máxima: 3,5‰
- Peso específico: 25 kN/m³

■ Aço:

- Tipo CA-50
- Resistência característica ao escoamento: $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
- Deformação mínima: 2,07‰
- Taxa máxima: $P_{ac} = 4\%$
- Massa específica: 7850kg/m³

■ Geometria da seção:

- Dimensões iniciais: $b_w = 15 \text{ cm}$ e $d = 77 \text{ cm}$
- Distância do CG da armadura à face da seção = 3cm
- Relação máxima entre o vão e a largura da seção: $l/h \geq 2$, caso contrário a viga deve ser tratada como viga-parede, não sendo abrangido pelo programa em questão.

5.7.1 Exemplo:

Foi considerada a viga biapoiada conforme a Figura 5.2.

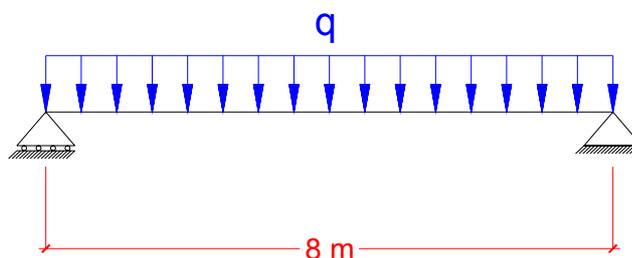


Figura 5.2: Viga biapoiada

A flecha máxima permitida pela NBR 6119:2003 para este caso é de:

$$\frac{l}{250} = \frac{800}{250} = 3,2 \text{ cm.}$$

Para obter uma variação nos esforços solicitantes da viga biapoiada, o carregamento distribuído na viga foi sendo majorado de forma a produzir máximos momentos positivos no vão de 3.000 a 70.000 kN.cm, com incrementos de 500 kN.cm. O carregamento inicial foi de 0,0075kN/cm, que acrescido do peso próprio do elemento resultou em 0,0375kN/cm.

Para cada momento atuante foram verificados os resultados gerados pelo programa de minimização do custo de vigas. As tabelas a seguir mostram alguns dos resultados obtidos, enquanto que nos gráficos encontram-se todos os resultados obtidos de acordo com seus respectivos esforços.

Na resolução do problema não foi considerada armadura mínima na zona comprimida da seção, conhecida como porta-estribo, para se obter uma melhor análise do comportamento das armaduras em função dos esforços solicitantes.

Tabela 5.1: Resultados das variáveis otimizadas e auxiliares da viga biapoada.

M _d (kN.cm)	Altura (cm)		Armadura (cm ²)			ρ (%)	Flecha (cm)	Custo Total/m (R\$)
	Antes da flecha	Depois da flecha	Tração	Comp.	Total			
3.000	27,75	37,73	3,12	0	3,12	0,55%	3,18	61,57
10.000	48,19	61,37	6,34	0	6,34	0,69%	3,19	100,54
15.000	58,35	71,57	8,22	0	8,22	0,77%	3,20	119,04
20.000	66,91	79,46	9,98	0	9,98	0,84%	3,20	134,37
25.000	74,46	85,80	11,69	0	11,69	0,91%	3,20	147,74
30.000	81,28	91,12	13,39	0	13,39	0,98%	3,19	159,84
35.000	87,55	95,42	15,17	0	15,17	1,06%	3,19	170,99
40.000	93,39	99,22	16,95	0	16,95	1,14%	3,19	181,59
45.000	98,87	102,35	18,86	0	18,86	1,23%	3,18	191,82
50.000	104,06	104,87	20,94	0	20,94	1,33%	3,19	201,94
52.000	106,06	106,06	21,70	0	21,22	1,36%	3,17	205,94
55.000	108,99	108,99	22,32	0	21,70	1,37%	3,09	211,51
60.000	113,70	113,70	23,31	0	22,32	1,37%	2,96	220,48
65.000	118,22	118,22	24,26	0	23,31	1,37%	2,85	229,08
70.000	122,57	122,57	25,18	0	24,26	1,37%	2,75	237,36
75.000	126,77	126,77	26,06	0	25,18	1,37%	2,66	245,34
80.000	130,83	130,83	26,92	0	26,06	1,37%	2,57	253,06
85.000	134,76	134,76	27,75	0	26,92	1,37%	2,50	260,55
90.000	138,58	138,58	28,55	0	27,75	1,37%	2,43	267,82
95.000	142,30	142,30	29,33	0	28,55	1,37%	2,36	274,88
100.000	145,91	145,91	30,09	0	29,33	1,37%	2,31	281,77
105.000	149,44	149,44	30,84	0	30,09	1,38%	2,25	288,48
110.000	152,89	152,89	31,56	0	30,84	1,38%	2,20	295,04
115.000	156,26	156,26	32,27	0	31,56	1,38%	2,15	301,45
120.000	159,55	159,55	32,97	0	32,27	1,38%	2,11	307,72

Alturas x Momento Fletor

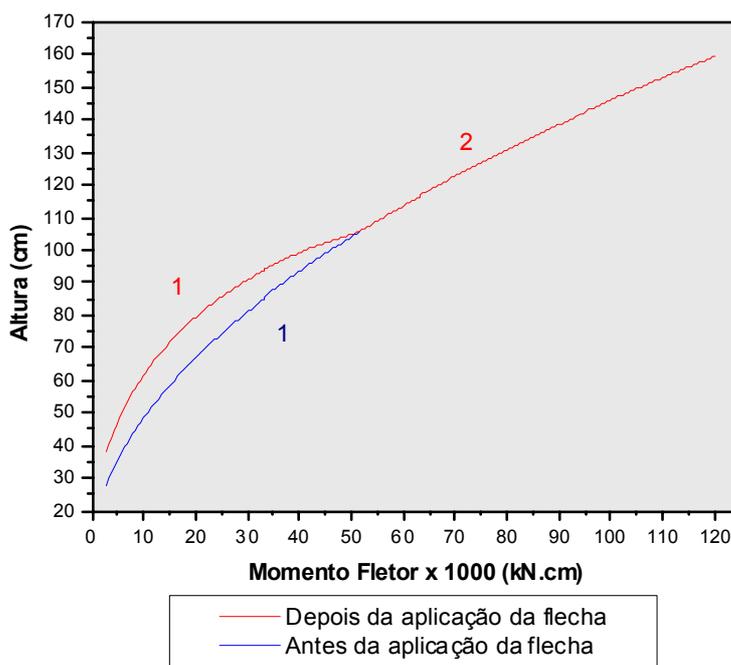


Gráfico 5.1: Comparação entre alturas otimizadas.

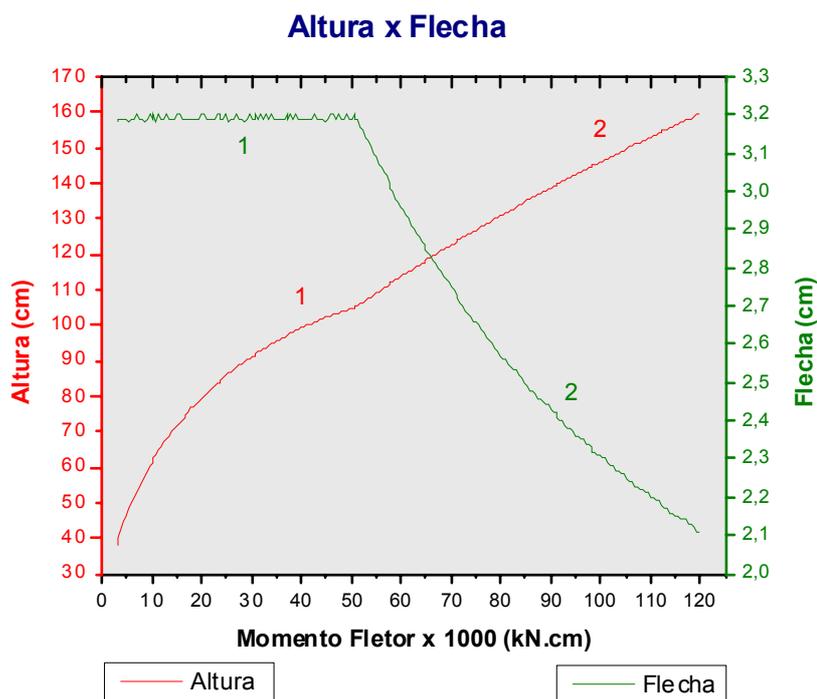


Gráfico 5.2: Comparação entre altura otimizada e flecha na seção.

Como foi explicado no item 5.5.3.2, a altura otimizada é encontrada a princípio sem restrição de deslocamentos. Em seguida, se a flecha máxima exigida pela NBR 6118:2003 não for atendida, a altura é aumentada até aquela ser alcançada, que neste exemplo é de 3,2cm. Na Tabela 5.1 e no Gráfico 5.1 estão apresentadas as alturas antes e depois da aplicação da restrição de deslocamento máximo.

Analisando em conjunto o Gráfico 5.1 e o Gráfico 5.2, chega-se à conclusão de que a flecha é o fator determinante para a divisão da curva que representa a altura ótima em dois trechos (indicados numericamente no gráfico em questão): no trecho 1 a resposta do programa para a altura é aquela em que o seu valor ótimo foi aumentado para satisfazer a flecha máxima e no trecho 2 o valor é o encontrado sem a restrição de deslocamentos, sendo o equilíbrio de esforços a restrição predominante. Na Tabela 5.1 está grifado de cor verde o valor do momento fletor de 52.000 kN.cm, a partir do qual a flecha não é mais limitante para a altura.

Para o momento fletor inicial, de 3.000 kN.cm, o aumento da altura com restrição de deslocamento em relação à altura sem restrição de deslocamento foi de 36%. Este valor foi diminuindo a cada incremento nos esforços solicitantes, chegando a zero no esforço mencionado de 52.00 kN.cm.

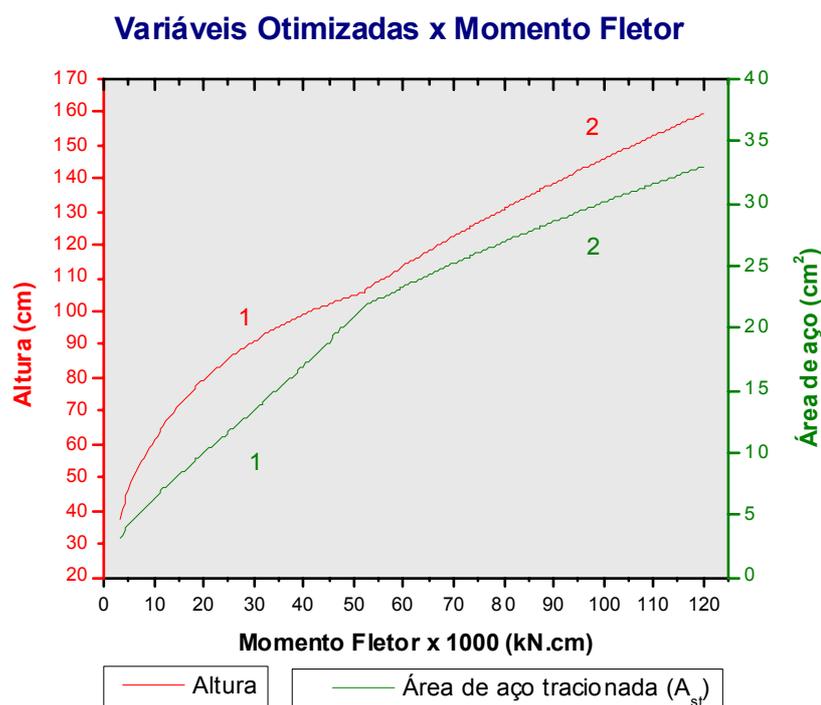


Gráfico 5.3: Comparação entre as variáveis otimizadas da viga biapoiada.

Tendo ainda em vista a influência da restrição da flecha para a seção otimizada, pode-se fazer uma análise no Gráfico 5.3 em relação à armadura. Neste caso nota-se que a curva representativa da área de aço também pode ser dividida em dois trechos: no primeiro a armadura de tração, em conjunto com a área de concreto da seção, resiste aos esforços solicitantes, mas o aumento deste esforço não causa muita variação na altura da seção, sendo o aumento da armadura o responsável pelo equilíbrio. Em vista disso percebe-se que no trecho 2, quando a flecha deixa de ser a restrição predominante, há uma redução na inclinação da curva da armadura e um aumento na da altura.

Tabela 5.2: Comparação entre os custos da viga biapoiada.

M_d (kN.cm)	Custos por metro (R\$)				Porcentagem do total		
	Concreto	Aço	Fôrma	Total	Concreto	Aço	Fôrma
3.000	12,82	10,66	38,08	61,57	20,8%	17,3%	61,9%
10.000	20,86	21,69	57,99	100,54	20,7%	21,6%	57,7%
15.000	24,32	28,13	66,58	119,04	20,4%	23,6%	55,9%
20.000	27,01	34,15	73,22	134,37	20,1%	25,4%	54,5%
25.000	29,16	40,02	78,56	147,74	19,7%	27,1%	53,2%
30.000	30,97	45,83	83,04	159,84	19,4%	28,7%	52,0%
35.000	32,43	51,90	86,65	170,99	19,0%	30,4%	50,7%
40.000	33,72	58,01	89,86	181,59	18,6%	31,9%	49,5%
45.000	34,78	64,54	92,49	191,82	18,1%	33,6%	48,2%
50.000	35,64	71,68	94,61	201,94	17,6%	35,5%	46,9%
52.000	36,05	74,28	95,62	205,94	17,5%	36,1%	46,4%
55.000	37,04	76,39	98,08	211,51	17,5%	36,1%	46,4%
60.000	38,64	79,78	102,05	220,48	17,5%	36,2%	46,3%
65.000	40,18	83,04	105,86	229,08	17,5%	36,3%	46,2%
70.000	41,66	86,18	109,52	237,36	17,6%	36,3%	46,1%
75.000	43,08	89,20	113,05	245,34	17,6%	36,4%	46,1%
80.000	44,46	92,13	116,47	253,06	17,6%	36,4%	46,0%
85.000	45,80	94,96	119,78	260,55	17,6%	36,4%	46,0%
90.000	47,10	97,72	123,00	267,82	17,6%	36,5%	45,9%
95.000	48,36	100,39	126,13	274,88	17,6%	36,5%	45,9%
100.000	49,59	103,00	129,18	281,77	17,6%	36,6%	45,8%
105.000	50,79	105,55	132,15	288,48	17,6%	36,6%	45,8%
110.000	51,96	108,03	135,05	295,04	17,6%	36,6%	45,8%
115.000	53,11	110,46	137,88	301,45	17,6%	36,6%	45,7%
120.000	54,23	112,83	140,66	307,72	17,6%	36,7%	45,7%

Observando o Gráfico 5.4 e os percentuais de cada parcela que compõe a função de custo dados na Tabela 5.2 podem ser feitas duas considerações conforme os dois trechos também apresentados pelas curvas de custos totais e parciais.

No trecho 1 nota-se que para a maioria dos esforços solicitantes o custo de fôrma é o mais alto, mas conforme aumenta a solicitação sua porcentagem de contribuição para o custo total diminui enquanto que a do aço aumenta. O valor final do custo do aço no trecho em questão apresenta um crescimento relativo de aproximadamente 7 vezes seu valor inicial, enquanto que o do concreto e o da fôrma apresentam crescimentos mais suaves, alcançando valores finais da ordem de 2,8 e 2,5 vezes seus valores iniciais respectivamente.

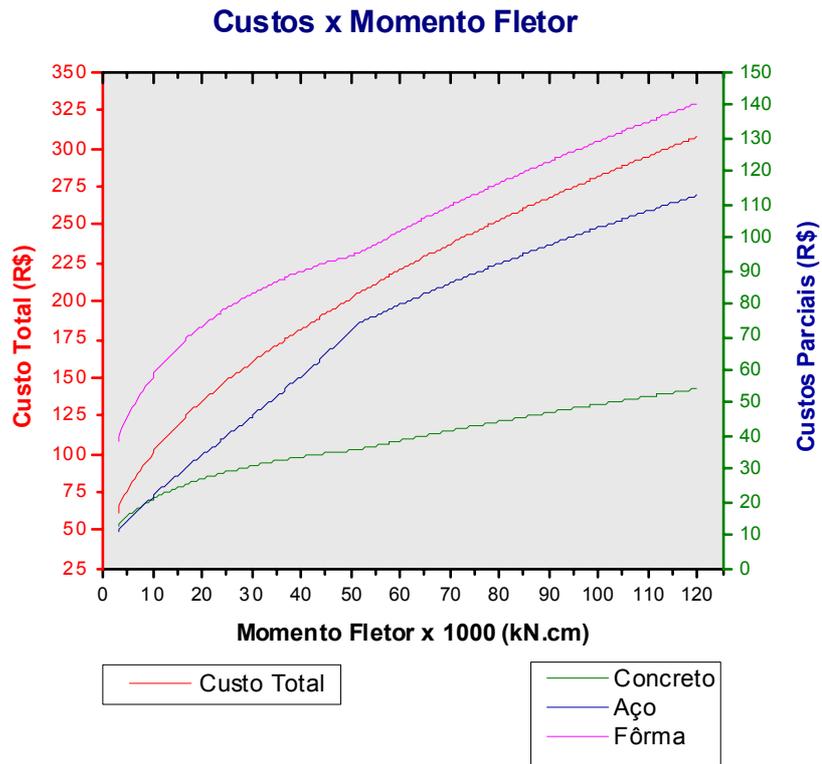


Gráfico 5.4: Comparação entre os custos da viga biapoçada.

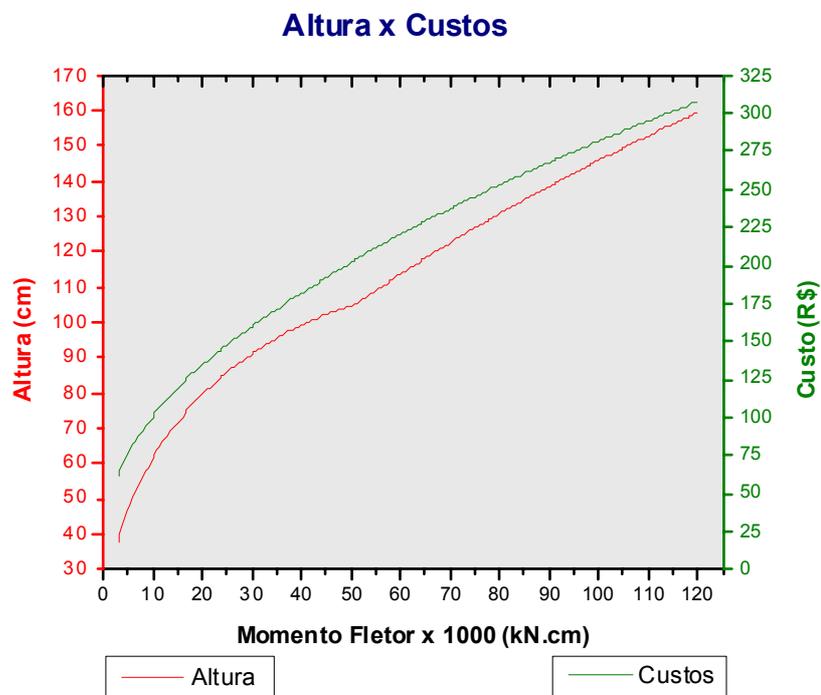


Gráfico 5.5: Relação altura vs. custo total da viga biapoçada.

No trecho 2 das curvas do Gráfico 5.4, a inclinação da curva do custo total diminui ligeiramente, pois como já foi dito, neste caso a restrição da flecha não é a ativa, sendo que a altura da viga cresce de maneira mais lenta que a inicial.

Em relação às armaduras, os resultados apresentados na Tabela 5.1 apontam para uma seção ótima composta apenas por armadura de tração, deixando a armadura de compressão inutilizada.

Em vista dos resultados aqui obtidos, conclui-se que a seção econômica é determinada quando somente a área de concreto comprimida está resistindo aos esforços solicitantes de compressão, sem a ajuda de armadura de compressão, ou seja, com a configuração de viga simplesmente armada.

No entanto, fazendo uma comparação com pesquisas anteriores foi constatada uma perceptível diferença entre os resultados. Vianna (2003), por exemplo, indica que a seção econômica é determinada pela preferência na utilização do aço ao concreto para resistir às solicitações. Essas disparidades podem ser explicadas pela diferença entre as proporções de contribuição dos custos de cada material para a função de custo total. A Tabela 5.3 apresenta os valores utilizados para os custos pelo pesquisador citado e os adotados nesta pesquisa.

Tabela 5.3: Comparação entre os custos dos materiais.

Material	Custos por metro (R\$)		Diferença percentual
	Vianna (2003)	Atualidade	
Concreto	228,39 /m ³	226,58 /m ³	-0,79%
Aço	2,73 /kg	4,36 /kg	59,71%
Fôrma	31,58 /m ²	42,10 /m ²	33,31%

Diante destas diferenças entre resultados, chega-se à conclusão de que as seções ótimas são determinadas em função das proporções de contribuição dos custos de cada material para a função de custo total utilizadas.

5.8 Validação dos resultados

Com o intuito de validar os resultados apresentados, foi considerada a seguinte situação prática: foram selecionados momentos entre 10.000 e 100.000 kN.cm e para cada um destes se dimensionou as armaduras da viga prefixando a altura da seção. As alturas variaram entre 15 e 150cm, com incrementos de 1 cm. Com as dimensões e as áreas de aço definidas, foi calculado o custo de cada seção. O comportamento da função de custo de acordo com altura da seção para cada momento solicitante considerado está apresentado no Gráfico 5.6.

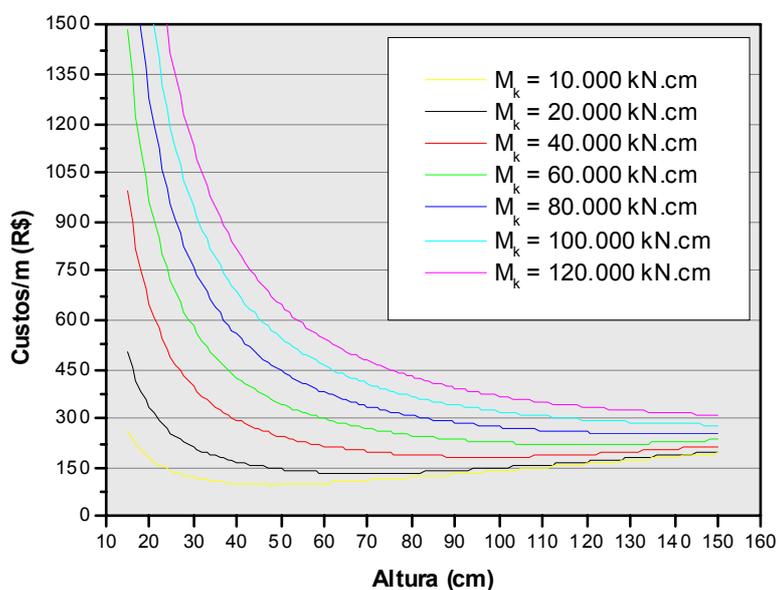


Gráfico 5.6: Custos totais para os momentos aplicados.

O Gráfico 5.6 deixa claro que há apenas um ponto de mínimo custo da seção para cada momento aplicado. Assim, para cada esforço foi selecionada a seção que apresentava simultaneamente o menor custo total e o atendimento às restrições impostas ao problema de otimização de vigas. Para exemplificar, foram extraídos do dimensionamento dois momentos aplicados (10.000 e 50.000kN.cm). Na Tabela 5.4 estão representadas as variáveis e os custos da seção mais econômica de cada um destes momentos e também os valores vizinhos.

Tabela 5.4: Validação dos resultados obtidos com o dimensionamento.

M_d (kN.cm)	b_w (cm)	h (cm)	A_{st} (cm ²)	A_{sc} (cm ²)	Custo Total/m (R\$)
10.000	15	46	9,82	0,76	96,89
	15	47	9,67	0,40	96,38
	15	48	9,54	0,00	95,93
	15	50	9,35	0,00	96,23
	15	51	9,15	0,00	96,73
50.000	15	102	21,52	0,67	202,82
	15	103	21,40	0,34	202,46
	15	104	21,29	0,00	202,08
	15	105	21,08	0,00	202,57
	15	106	20,88	0,00	203,05

Os demais resultados obtidos do dimensionamento dos outros esforços encontram-se na Tabela 5.5 juntamente com os resultados obtidos quando se utilizou a rotina de otimização de vigas para os mesmos momentos aplicados, retiradas da Tabela 5.1.

Tabela 5.5: Comparação entre as seções otimizadas e os menores custos obtidos com a variação da altura das vigas para os momentos fletores aplicados.

M_d (kN.cm)	Valores obtidos com a rotina de otimização				Valores obtidos com o dimensionamento			
	Altura (cm)	A_{st} (cm ²)	A_{sc} (cm ²)	Custo Total/m (R\$)	Altura (cm)	A_{st} (cm ²)	A_{sc} (cm ²)	Custo Total/m (R\$)
10.000	48,19	9,52	0,00	95,84	48,00	9,54	0,00	95,93
20.000	66,91	13,46	0,00	131,46	67,00	13,44	0,00	131,50
40.000	93,39	19,03	0,00	181,83	93,00	19,08	0,12	181,96
50.000	104,06	21,28	0,00	202,13	104,00	21,28	0,00	202,25
60.000	113,70	23,31	0,00	220,48	114,00	23,25	0,00	220,62
80.000	130,83	26,92	0,00	253,06	131,00	26,88	0,00	253,14
100.000	145,91	30,09	0,00	281,77	146,00	30,08	0,00	281,81

Percebe-se que a rotina de otimização de vigas obteve valores ótimos para as seções e para os custos muito próximos dos encontrados quando se fez o dimensionamento. As diferenças podem ser atribuídas ao fato de que no dimensionamento foram considerados apenas valores inteiros da altura (incrementos de 1 cm como foi mencionado). Isso torna válido os resultados encontrados pela rotina de otimização de vigas elaborada.

6. OTIMIZAÇÃO DE PÓRTICOS PLANOS

Segundo Kirsch (1993), pode-se dividir a otimização estrutural em três classes de aproximação: a primeira é a aproximação global, em que a estrutura é analisada em sua totalidade, sendo a função objetivo formulada para todos os pontos espaciais da estrutura; a segunda é a aproximação local, em que a função objetivo e as restrições são definidas em trechos isolados da estrutura, garantindo um resultado bastante eficiente para os trechos estudados podendo, porém, não gerar resultados satisfatórios para a estrutura global; e a terceira é a aproximação combinada, que transpõe os resultados encontrados com as aproximações locais para toda a estrutura de forma a garantir um resultado com qualidades globais, utilizando aproximações locais.

Neste trabalho optou-se por utilizar a aproximação combinada, pois a aproximação global tende a gerar um esforço computacional muito grande, considerando que no caso de estruturas de concreto armado se trabalha com dois elementos de comportamentos diferentes, o aço e o concreto, e ainda com materiais heterogêneos. Assim, a estrutura é processada localmente por meio da otimização das seções transversais das vigas e dos pilares. O resultado global é obtido pelas iterações realizadas, em que, após definidas as seções ótimas dos elementos isolados, a estrutura é reprocessada e novamente otimizada, até que não haja mais uma redistribuição significativa dos esforços.

Com este procedimento aproximado espera-se alcançar uma qualidade de otimização próxima à resultante de uma aproximação global.

6.1 Processamento do programa de otimização

Na Figura 6.1 está esquematizado um fluxograma que apresenta todo o processo e as considerações feitas no programa elaborado para resolução do problema de otimização de pórticos. As etapas que possuem um número em seu canto superior direito serão comentadas em seguida para o melhor entendimento do contexto.

Figura 6.1: Fluxograma do programa de otimização de pórticos planos

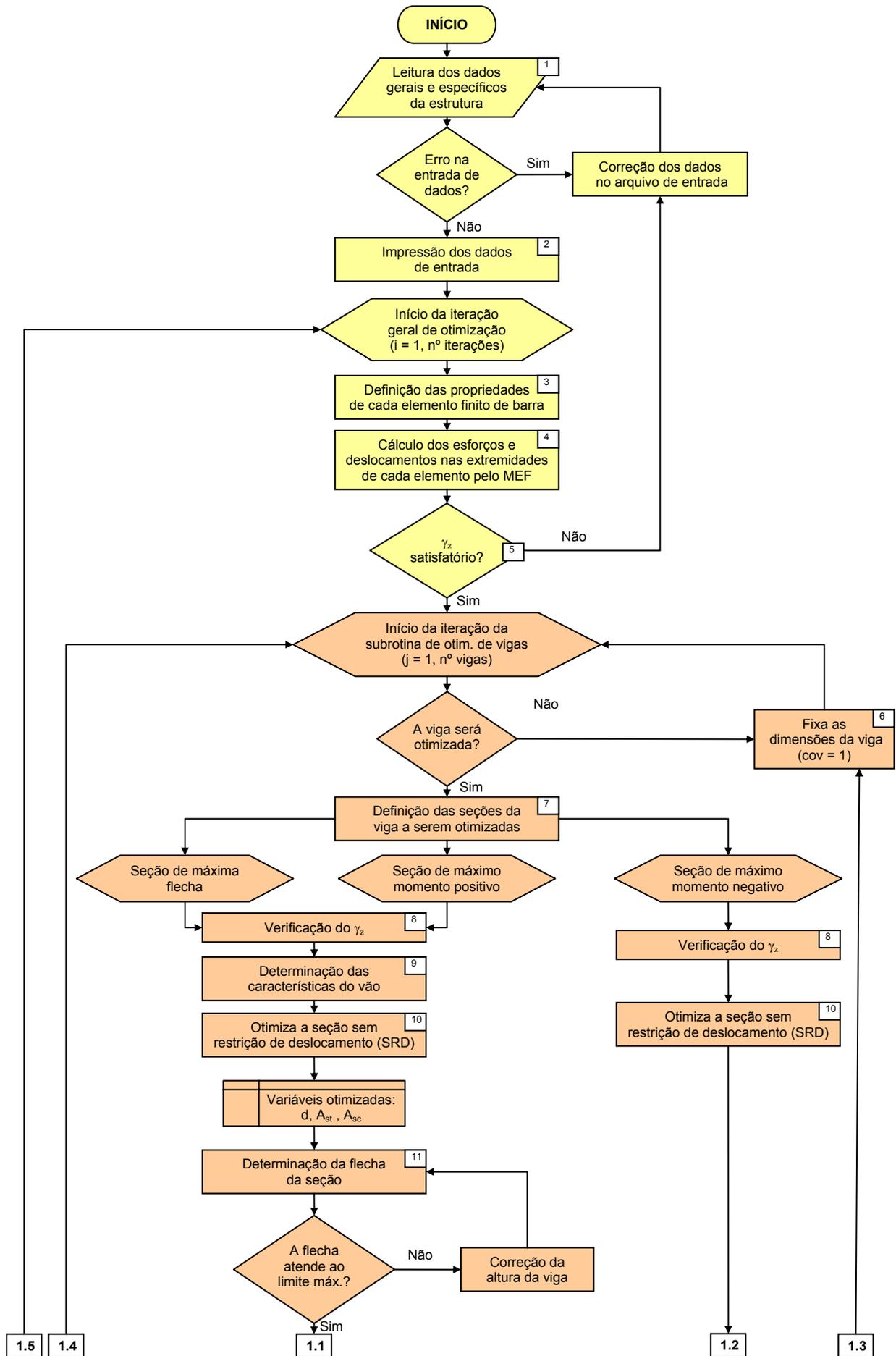
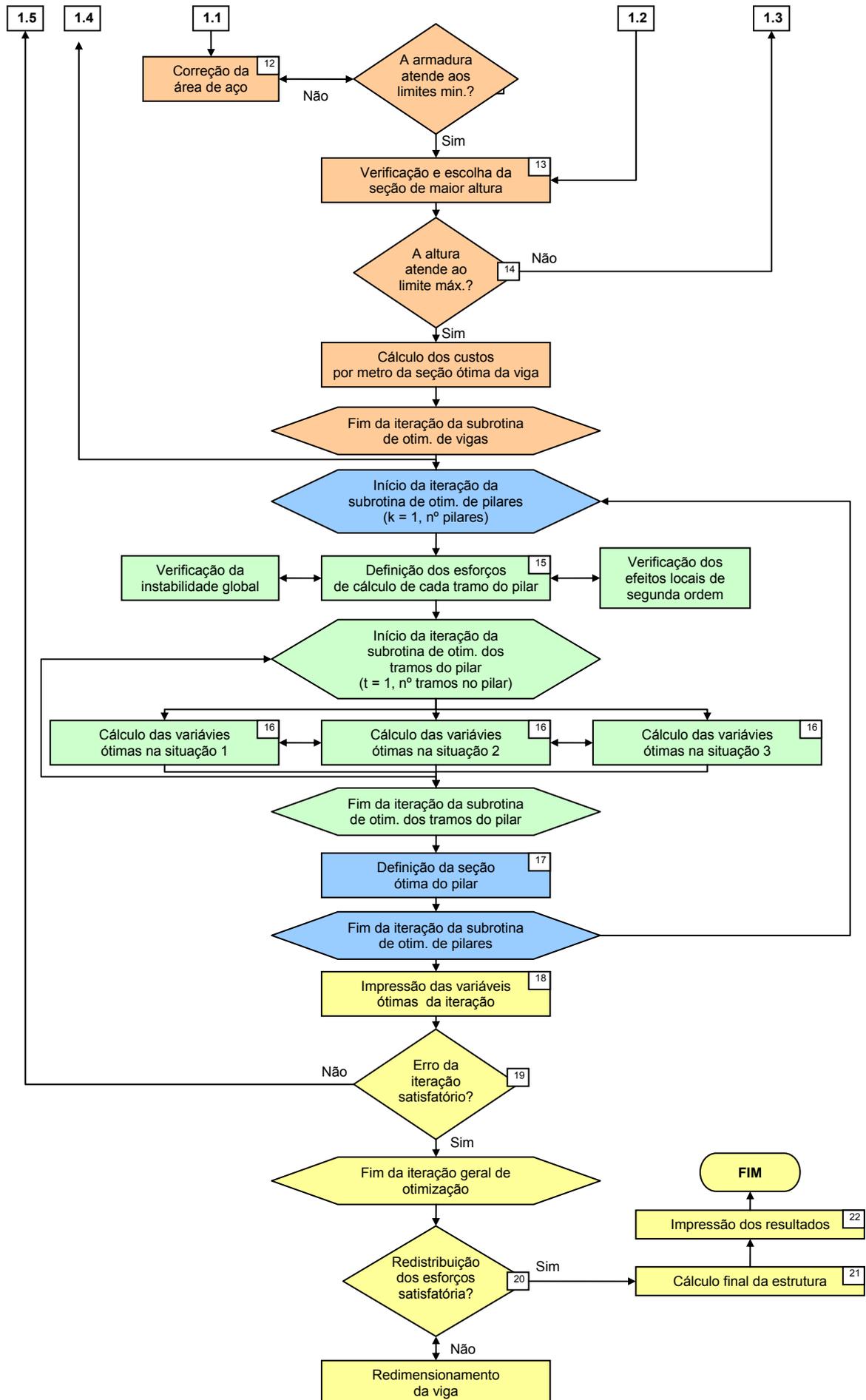


Figura 6.1: continuação



1. A entrada de dados do programa é feita via arquivo de texto, devendo ser utilizada a extensão '.est'. Nos dados específicos são definidos a discretização dos elementos de barra da estrutura, os carregamentos e as forças solicitantes nos elementos, enquanto que nos dados de entrada gerais estão descritos os:
 - a. Número de nós, de vigas, de pilares, de elementos de barra e de pavimentos;
 - b. Dados sobre os materiais como:
 - i. Concreto: f_{ck} , módulo de elasticidade, coeficiente de poisson, limites de deformação, flecha máxima no vão;
 - ii. Aço: f_{yk} , módulo de elasticidade, massa específica, taxa máxima de armadura, limites de deformação.
 - c. Custos dos materiais (concreto, aço e fôrma);
 - d. Coeficientes de segurança para dimensionamento;
 - e. Considerações sobre fluência e momento de inércia; e
 - f. Dados para as iterações, como número limite e erro admissível.
2. O programa cria um arquivo de texto com a extensão '.ent' e nele imprime todos os dados de entrada de forma esquemática e de fácil compreensão para o usuário conferir se a estrutura foi lançada corretamente.
3. Nesta sub-rotina são definidas as propriedades de cada elemento finito, como área da seção transversal, carregamento devido ao peso próprio e momento de inércia à flexão.
4. Para a determinação dos esforços e dos deslocamentos da estrutura foi utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF). As vigas e os pilares são representados por seus eixos baricêntricos, sendo discretizados por um elemento finito unidimensional com dois nós e três graus de liberdade em cada nó. As incógnitas nodais são duas translações, u e v , e uma rotação, θ . O vetor de deslocamento é obtido pela resolução do sistema de equação linear dado por: $\{F\} = [K]\{u\}$,

Em que:

$[K]$ é a matriz de rigidez global da estrutura obtida a partir da matriz de rigidez local de cada elemento; e

$[F]$ é o vetor de cargas nodais, obtido de maneira semelhante à matriz de rigidez e considerando diretamente a soma dos forças externas aplicadas aos nós da estrutura.

Após aplicadas as condições de contorno, determina-se o vetor dos deslocamentos nodais $\{u\}$, e a partir deste são definidos os esforços na estrutura.

5. Nos edifícios formados por estruturas de esqueleto a atuação simultânea das ações verticais e horizontais provoca, inevitavelmente, deslocamentos laterais dos nós da estrutura. Esse efeito pressupõe, a princípio, um equilíbrio na posição deslocada, o que implica no aparecimento de forças solicitantes adicionais (ou de 2ª ordem global) em vigas e pilares. Efeitos de 2ª ordem, portanto, são aqueles que se somam aos obtidos numa análise da estrutura na sua configuração inicial (não deformada), chamada de 1ª ordem, quando a análise do equilíbrio passa a ser efetuada considerando sua configuração deformada. Isto ocorre basicamente devido a dois fatores: a não-linearidade física e a não-linearidade geométrica.

Para medir a sensibilidade das estruturas em relação aos efeitos de 2ª ordem, geralmente se utiliza um parâmetro de instabilidade conhecido por coeficiente γ_z . Ele é definido a partir de uma análise linear de 1ª ordem considerando a rigidez dos elementos reduzida (consideração aproximada da NLF) e resulta em um coeficiente majorador dos efeitos de 1ª ordem, resultando em solicitações que representam uma estimativa dos efeitos de 2ª ordem.

O coeficiente γ_z é calculado pela expressão:

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\Delta M_d}{M_{1d}}}$$

onde:

M_{1d} é o momento de tombamento, ou seja, a soma dos momentos de todas as forças horizontais, com seus valores de cálculo, em relação à base da estrutura;

ΔM_d é a soma dos produtos de todas as forças verticais atuantes na estrutura, com seus valores de cálculo, pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos da análise de 1ª ordem;

Os limites do parâmetro γ_z são definidos por:

$\gamma_z \leq 1,1$ Estrutura de nós fixos, pode-se desprezar os efeitos de 2ª ordem;

$1,1 < \gamma_z \leq 1,3$ Estrutura de nós móveis, pode-se fazer $M_2 = 0,95 \cdot \gamma_z \cdot M_1$;

$\gamma_z > 1,3$ Estrutura de nós móveis, mas deve ser utilizado um processo mais rigoroso para avaliação da instabilidade global, como o P- Δ por exemplo.

O programa de otimização de pórticos planos calcula o coeficiente γ_z nesta etapa. Caso este seja maior que o limite de 1,3, o programa emite uma mensagem de erro e pára o processamento, pois a configuração da estrutura é instável.

6. É comum se utilizar a mesma altura das vigas nos pavimentos geralmente por dois motivos: para o reaproveitamento das fôrmas e pela limitação da altura das esquadrias. Para atender a estes casos, entre outros, no arquivo de entrada de dados é possível determinar quais vigas não devem ser otimizadas. Quando este recurso é ativado o programa atribui um código a este elemento e as suas dimensões são fixadas, sendo retirado do processo de otimização. Utilizando este recurso o engenheiro pode determinar as altura de algumas vigas e recomençar o processo fazendo a otimização das demais para a nova configuração da estrutura, verificando a redistribuição dos esforços e as novas dimensões. Este procedimento pode ser repetido até que todas as vigas fiquem com alturas aproximadas, de forma a adotar uma dimensão única para as mesmas, ou ainda até que se obtenha a estrutura que melhor se adapte às concepções do projetista.
7. A otimização das vigas é feita em três seções: de máximo deslocamento, de máximo momento positivo e de máximo momento negativo. Assim, nesta etapa são determinadas estas seções e seus respectivos momentos fletores. Dos resultados obtidos será assumida como altura ótima para toda a viga a maior entre as alturas encontradas, uma vez que a mesma, obrigatoriamente, satisfará às demais situações.
8. Para o dimensionamento ótimo das vigas devem ser verificados os efeitos de segunda ordem, como já foi comentado. Assim, se o valor de γ_z for menor que 1,1, os momentos de segunda ordem na estrutura são desconsiderados. Caso γ_z esteja entre 1,1 e 1,3, o valor do momento fletor para o qual a viga será dimensionada é majorado em $0,95 \gamma_z$.
9. Nesta etapa são definidas algumas características necessárias para o andamento do processo. Algumas delas são a definição dos nós extremos do vão onde está a seção a ser otimizada, os elementos que compõem este vão, o seu comprimento e ainda a determinação da flecha inicial, antes da viga ser otimizada. Esta flecha é calculada por meio dos deslocamentos relativos dos nós da estrutura, retirada do vetor de deslocamentos nodais obtido pela aplicação do MEF, em função das condições do contorno do vão em questão, obedecendo às seguintes equações:

Para vãos com apoios nas duas extremidades

$$\delta_i = -\frac{L_1}{L} \cdot |d_2 - d_1| + d_3 - d_1$$

Para vão em balanço do lado esquerdo

$$\delta_i = d_3 - d_2$$

Para vão em balanço do lado direito

$$\delta_i = d_3 - d_1$$

Em que:

δ_i é a flecha inicial do vão antes da viga ser otimizada;

L é o comprimento do vão que contém a seção;

L_1 é a distância da extremidade esquerda do vão até a seção;

d_1 é o deslocamento do nó da extremidade esquerda do vão;

d_2 é o deslocamento do nó da extremidade direita do vão;

d_3 é o deslocamento do nó da seção em estudo.

10. Obtenção dos valores otimizados da altura e das armaduras da viga em estudo sem considerar a restrição de deslocamento. O método utilizado foi descrito no item 3.3 e no capítulo 5.
11. Como explicado no item 5.5.3.2, a verificação da flecha foi inserida após ter sido encontrada a solução ótima, tendo em vista que isto não implicaria em mudança nos resultados. Assim, se esta ultrapassar os limites pré-estabelecidos, definidos em 5.2.3, uma nova altura para a viga é calculada, pelo método dos intervalos encaixantes seguido do método da bisseção, de modo que a flecha atenda a um erro absoluto de 0,5% imposto internamente no programa.
12. Após determinada a altura da viga que atende à flecha limite, a armadura da seção é redimensionada. Verifica-se em seguida se esta armadura atende aos limites mínimos exigidos pela NBR 6118:2003, definidos em 5.2.5. Em caso negativo, a armadura da seção é definida como a mínima.
13. É feita uma comparação entre as alturas ótimas encontradas para as diferentes seções dimensionadas e se define para toda a viga a maior entre estas.
14. São consideradas vigas-parede as vigas altas em que a relação entre o vão e a altura é inferior a 2 em vigas biapoiadas e inferior a 3 em vigas contínuas. Como o programa desenvolvido não abrange vigas-parede, a relação máxima para a altura das vigas não deve ser menor que os limites acima, caso contrário o programa emite uma mensagem de erro e pára o processamento.

15. Quando se faz o dimensionamento de pilares, devem ser considerados na análise os efeitos causados pelas imperfeições geométricas, como o desaprumo ou a falta de retilidade. Além disso, para fins de verificação local, nas barras comprimidas retiradas da estrutura, devem ser aplicados às suas extremidades os esforços obtidos por meio da análise global de 2ª ordem. Segundo a NBR 6118:2003, a análise dos efeitos de 2ª ordem pode ser dispensada se o índice de esbeltez λ for menor que o valor limite λ_1 , sendo:

$$\lambda = \frac{\ell_e}{i}$$

onde:

i é o raio de giração mínimo da seção bruta de concreto;

ℓ_e é o comprimento equivalente do elemento isolado, suposto vinculado em ambas as extremidades, definido como sendo:

$$\ell_e \leq \begin{cases} \ell_0 + h \\ \ell \end{cases}$$

em que:

ℓ_0 é a distância entre as faces internas dos elementos estruturais, supostos horizontais, que vinculam o pilar;

h é a altura da seção transversal do pilar, medida no plano da estrutura; e

ℓ é a distância entre os eixos dos elementos estruturais aos quais o pilar está vinculado.

O valor de λ_1 é definido pela expressão:

$$\lambda_1 = \frac{25 + 12,5 \cdot e_1/h}{\alpha_b}$$

No programa elaborado os pilares foram considerados como biapoiados. Assim o valor de α_b pode ser definido por:

$$\alpha_b = 0,60 + 0,40 \frac{M_B}{M_A} \geq 0,40 \text{ para pilares sem cargas transversais; ou}$$

$$\alpha_b = 1,0 \text{ para pilares com cargas transversais significativas ao longo da altura.}$$

Os momentos de 1ª ordem M_A e M_B são os momentos nos extremos do pilar.

Toma-se para M_A o maior valor absoluto ao longo do pilar. Para M_B toma-se o sinal positivo se tracionar a mesma face que M_A e negativo em caso contrário.

Se o valor do índice de esbeltez λ for maior que o limite λ_1 , os efeitos locais de 2ª ordem são determinados utilizando o método do pilar padrão com curvatura aproximada, conforme descrito na NBR 6118:2003.

16. Na sub-rotina de otimização de pilares são calculados os valores ótimos do tramo do pilar para cada situação, modelo e hipótese descritos no capítulo 4. Ao final do processo é escolhida a seção que apresenta o mínimo custo. O método utilizado foi descrito no item 3.3.
17. Dos resultados obtidos para cada tramo do pilar é assumida como altura ótima para todo o pilar a maior entre as alturas encontradas, uma vez que a mesma, obrigatoriamente, satisfará às demais situações.
18. O programa imprime no arquivo de texto com a extensão '.ent' todos os dados referentes a cada iteração, como as dimensões das vigas e dos pilares, custos, coeficiente γ_z da estrutura, entre outros.
19. Ao final de cada iteração é calculado o máximo erro entre as alturas das vigas da iteração anterior e da atual pela equação:

$$erroit = 1 - \frac{h_i}{h_{i-1}}$$

onde:

- $erroit$ é o erro máximo da iteração;
 h_i é a altura da viga na iteração atual;
 h_{i-1} é a altura da viga na iteração anterior;

O valor predefinido de $erroit$ é de 0,001, podendo ser alterado no arquivo de dados de entrada.

20. Após determinadas as seções ótimas finais dos pilares e das vigas, são recalculados os esforços e corrigidos os momentos de inércia de cada elemento. Estes resultados são então armazenados. Com a finalidade de avaliar a redistribuição de esforços na estrutura otimizada, os esforços elásticos são determinados fixando a inércia de todos

os elementos em seu valor bruto (estádio I). Em seguida o valor do coeficiente de redistribuição (conforme apresentado no item 5.2.2) é calculado. Se este resultar fora dos limites prescritos pela NBR 6118:2003, o esforço na seção (momento fletor) é fixado no valor máximo permitido e a viga é redimensionada.

21. Nesta etapa são calculadas as reações de apoio da estrutura otimizada.

22. O programa cria um arquivo de texto de saída com a extensão '.sol' e imprime neste as seções ótimas das vigas, dos pilares, os deslocamentos nodais, os esforços nas extremidades dos elementos de barra e as reações nos apoios.

7. EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA

A fim de avaliar os resultados fornecidos pelo programa de otimização de pórticos planos desenvolvido, assim como o comportamento da função de custo e de suas variáveis, foram executados alguns exemplos numéricos. Os dados de entrada fornecidos ao programa comuns a todos os exemplos são semelhantes aos utilizados anteriormente, sendo:

■ Custos*

- Concreto convencional dosado em central, inclusive mão de obra de lançamento e adensamento: **R\$ 226,58/m³**
- Aço CA-50 inclusive corte, dobra e montagem: **R\$ 4,36/kg**
- Fôrmas de madeira para concreto estrutural, inclusive travamento e escoramento: **R\$ 42,10/m²**

* Fonte: Revista Construção e Mercado nº 55 de Fevereiro/2006 e site Informativo SBC (www.informativosbc.com.br), com dados atualizados em Março de 2006.

■ Concreto:

- Módulo de elasticidade secante: $E_{cs} = 21.300 \text{ MPa}$
- Resistência característica à compressão: $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$
- Coeficiente de poisson: 0,25
- Deformação máxima: 3,5‰
- Peso específico: 25 kN/m³

■ Aço:

- Tipo CA-50
- Resistência característica ao escoamento: $f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
- Deformação mínima: 2,07‰
- Deformação máxima: 10‰
- Taxa máxima: $P_{ac} = 4\%$
- Massa específica: 7850kg/m³

■ Geometria da seção:

- Distância do CG da armadura à face da seção = 3cm
- Vigas
 - Relação máxima entre o vão e a largura da seção: $l/h \geq 2$, caso contrário a viga deve ser tratada como viga-parede, não sendo abrangido pelo programa em questão.
 - Limites de flecha:
 - Para vãos apoiados nos extremos: $L/250$
 - Para vãos em balanço: $2L/250$
- Pilares
 - Largura da seção: entre 19 e 24cm
 - Altura da seção: entre 19 e 120cm

■ Dados para dimensionamento:

Majoração dos esforços (γ_f): 1.4

Minoração da tensão no concreto (γ_c): 1.4

Minoração da tensão no aço (γ_s): 1.15

7.1 Exemplo 01:

O exemplo apresentado a seguir consiste em um pórtico plano, assimétrico, composto por 15 pavimentos, sendo que o primeiro de altura 4,5m e os demais de 3,0m. As vigas são compostas por dois trechos, sendo um com apoios nas extremidades de vão igual a 6m e o outro em balanço com comprimento de 2m. Seu modelo esquemático pode ser observado na Figura 7.1.

Em todas as vigas foram aplicados carregamentos verticais distribuídos de 50kN/m no trecho com apoios e de 10kN/m no balanço, além do peso próprio que é calculado pelo programa a partir das dimensões iniciais dos elementos fornecidas como dados de entrada, sendo atualizado a cada iteração.

A configuração deste pórtico pode ser considerada atípica, mas foi elaborada com o intuito de resultar na necessidade da consideração dos efeitos globais e locais de segunda ordem.

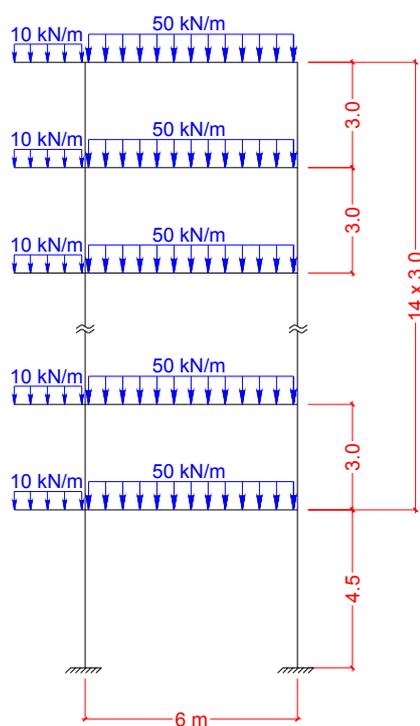


Figura 7.1: Pórtico formado por quinze pavimentos e dois pilares.

Os resultados finais das variáveis otimizadas das vigas e dos pilares encontram-se nas tabelas a seguir.

Tabela 7.1: Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas, ex. 01.

Viga	Base (cm)	Altura (cm)	Armaduras (cm ²)		Custos por metro (R\$)			
			Tração	Comp.	Concreto	Aço	Fôrma	Total
1	15	64,66	10,33	0	21,98	35,37	60,76	118,11
2	15	65,18	10,42	0	22,15	35,66	61,19	119,00
3	15	65,48	10,47	0	22,26	35,83	61,45	119,54
4	15	65,66	10,50	0	22,32	35,94	61,60	119,86
5	15	65,78	10,52	0	22,36	36,01	61,70	120,06
6	15	65,85	10,53	0	22,38	36,05	61,76	120,19
7	15	65,90	10,54	0	22,40	36,07	61,80	120,27
8	15	65,93	10,54	0	22,41	36,09	61,82	120,32
9	15	65,94	10,55	0	22,41	36,10	61,84	120,35
10	15	65,95	10,55	0	22,42	36,11	61,85	120,37
11	15	65,96	10,55	0	22,42	36,11	61,85	120,38
12	15	65,96	10,55	0	22,42	36,11	61,86	120,39
13	15	65,99	10,56	0	22,43	36,13	61,87	120,43
14	15	65,99	10,56	0	22,43	36,13	61,88	120,43
15	15	65,59	10,49	0	22,29	35,90	61,54	119,73

Na Tabela 7.1 os valores ótimos da altura das vigas e dos custos resultaram aproximados. Isso já era esperado, tendo em vista que os momentos atuantes em cada pavimento não sofrem muita variação devido à uniformidade dos carregamentos aplicados.

As alturas das vigas otimizadas apresentaram valores médios de 10,9% do comprimento do maior vão, o que se mostra bastante próximo dos valores de pré-dimensionamento adotados na prática pelos engenheiros projetistas, que variam geralmente de 8 a 10%. Esse acréscimo pode ser explicado pelo custo do aço utilizado, que nos dias atuais encontra-se bastante alto em relação aos anos anteriores, sendo portanto a seção de mínimo custo definida pelo aumento da área de concreto em substituição às das armaduras.

A contribuição de cada parcela componente da função objetivo para o custo total das vigas foi semelhante em todos os pavimentos, sendo da ordem de 18,6% para o concreto, de 30% para o aço e de 51,4% para a fôrma.

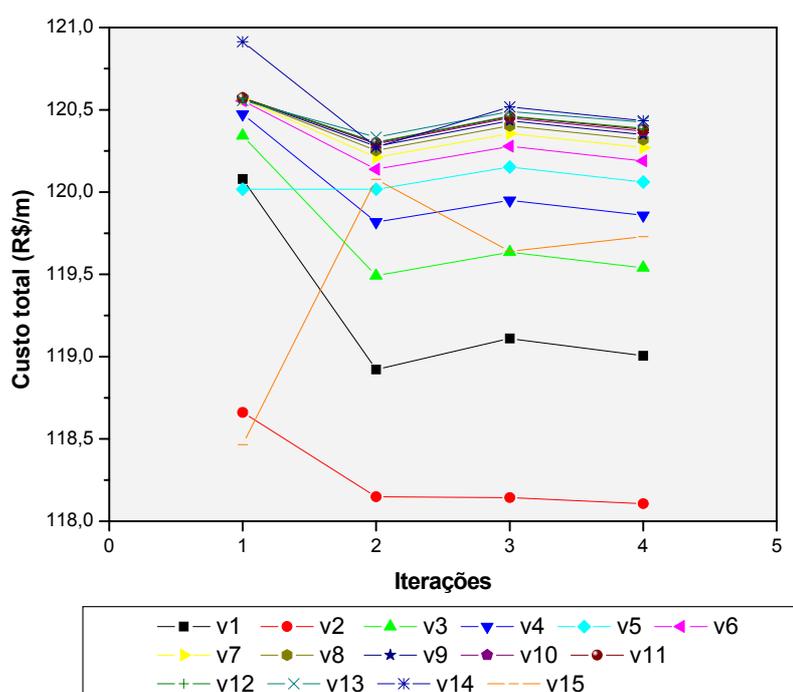


Gráfico 7.1: Resultados encontrados para as vigas a cada iteração.

O Gráfico 7.1 apresenta os resultados dos custos de cada viga encontrados em cada iteração. Nota-se que há uma grande perturbação na convergência para o custo mínimo na primeira iteração. Isto deve ser considerado natural devido à definição aleatória das dimensões iniciais da viga fornecidas pelo usuário. Nas demais iterações as variações reduzem e a função se aproxima do valor ótimo. Deve ser ressaltado que as dimensões iniciais são de grande importância para a definição das características dos elementos no

início do processo, como o peso próprio e a rigidez por exemplo, mas não afetam os resultados finais, influenciando apenas na velocidade de convergência do programa.

Após o processamento da estrutura foi verificada a redistribuição dos esforços finais solicitantes, considerando as vigas e pilares trabalhando no estágio II, em relação aos seus respectivos esforços elásticos. Os valores encontrados para os coeficientes de redistribuição de cada viga resultaram dentro dos limites prescritos pela NBR 6118:2003, apresentando em média um acréscimo da ordem de 1,036 para os momentos fletores positivos e uma redução de 0,98 para os momentos negativos.

Na Tabela 7.2 são apresentados os resultados ótimos dos pilares.

Tabela 7.2: Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares, ex. 01.

Pilar	Base (cm)	Altura (cm)	Armadura (cm ²)	Custos por metro (R\$)			
				Concreto	Aço	Fôrma	Total
1	24	120,00	24,53	65,26	83,95	121,25	270,46
2	24	117,89	11,32	64,11	38,74	119,47	222,32

Apesar de a altura da seção do pilar 1 ser apenas aproximadamente 3cm maior que a altura do pilar 2, o custo total do primeiro é consideravelmente maior que o do último. No pilar 1 devido à influência do balanço à esquerda os esforços solicitantes são maiores que os do pilar 2, mas como durante a otimização aquela seção atingiu sua dimensão máxima (120cm), o acréscimo dos esforços foi absorvido pela armadura, resultando no aumento do custo da seção.

A contribuição de cada parcela componente da função objetivo para o custo total do pilar 1 foi de 24,2% para o concreto, de 31% para o aço e de 44,8% para a fôrma. Já no pilar 2 estes valores foram de 28,9% para o concreto, de 17,4% para o aço e de 53,7% para a fôrma. Esta diferença em função do esforço solicitante já era esperada, conforme discutido no capítulo 4.

O Gráfico 7.2 mostra o comportamento da função de custo em cada iteração dos pilares.

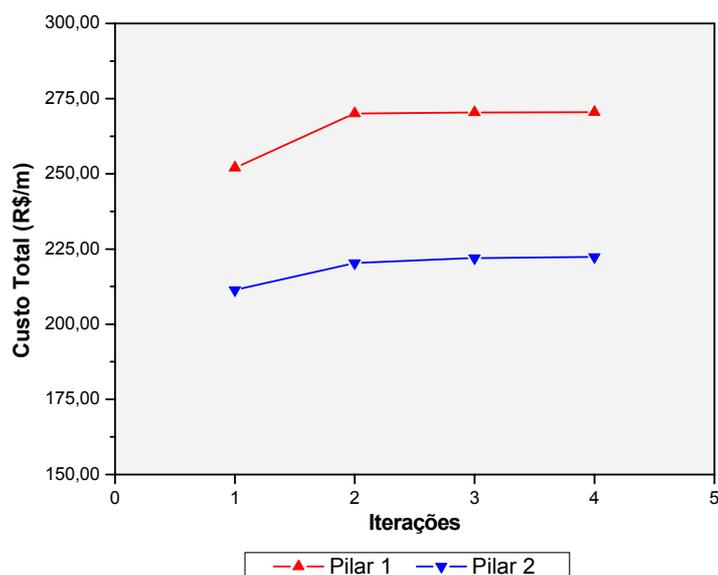


Gráfico 7.2: Resultados encontrados para os pilares a cada iteração.

Assim como foi verificado para as vigas, os pilares também mostram uma perturbação na primeira iteração, sendo que nas demais a função apresenta pouca variação na convergência para o valor ótimo, pois a redistribuição dos esforços provocada pela variação nas rigidezes dos elementos vai se dissipando até convergir para o valor de mínimo custo da seção.

No pré-dimensionamento usual geralmente se considera para a estimativa da área do pilar a resultante da divisão da Força Normal atuante pela resistência do concreto ($0,85 f_{cd}$). Para exemplificar, no caso do pilar 1 a área necessária seria de $0,26\text{m}^2$, enquanto que a área otimizada para este mesmo pilar é de $0,29\text{m}^2$. Esse ligeiro aumento, assim como para vigas, também pode ser explicado pelo alto custo do aço, o que implica no aumento da seção de concreto.

O Gráfico 7.3 mostra a comparação entre os custos totais das vigas, pilares e pórtico em cada iteração.

A convergência final da estrutura se deu na quarta iteração, sendo o custo total do pórtico de R\$ 37.309,35.

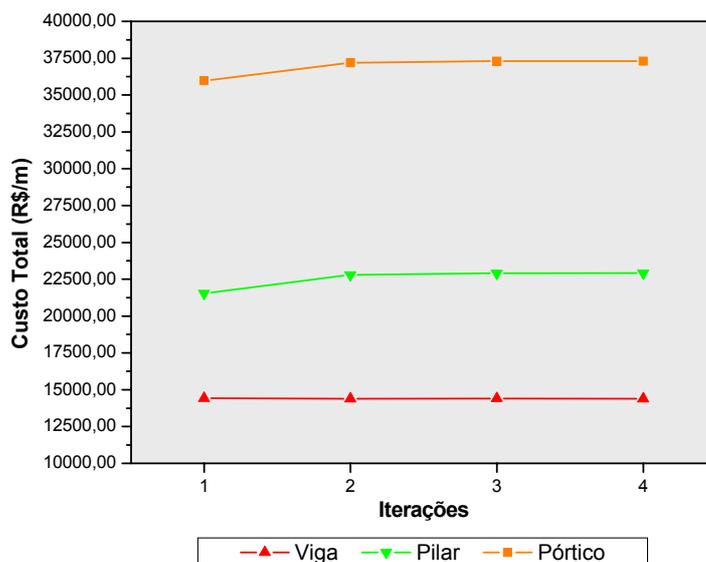


Gráfico 7.3: Custos totais das vigas, pilares e pórticos em cada iteração, ex. 01.

7.2 Exemplo 02:

Neste exemplo será otimizado o mesmo pórtico do exemplo 01 considerando forças horizontais concentradas na direção de cada pavimento, simulando a ação do vento conforme a NBR 6123:1988. Essas forças foram aplicadas em uma direção, da esquerda para a direita. Para uma análise mais profunda da ação do vento cabe ao usuário simular sua influência em outras direções.

Os valores destas forças aplicadas são apresentados na Tabela 7.3.

Tabela 7.3: Forças devidas ao vento.

Pavimento	Força do vento (kN)
1	10,27
2	9,33
3	10,15
4	10,81
5	11,37
6	11,85
7	12,28
8	12,68
9	13,03
10	13,36
11	13,67
12	13,96
13	14,23
14	14,49
15	7,36

Os resultados finais das variáveis otimizadas das vigas e dos pilares encontram-se nas tabelas a seguir.

Tabela 7.4: Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas, ex.02.

Viga	Base (cm)	Altura (cm)	Armaduras (cm ²)		Custos por metro (R\$)			
			Tração	Comp.	Concreto	Aço	Fôrma	Total
1	15	87,27	14,12	0,00	29,66	48,33	79,79	157,78
2	15	95,54	15,51	0,00	32,47	53,08	86,76	172,31
3	15	95,67	15,53	0,00	32,51	53,15	86,87	172,53
4	15	93,90	15,23	0,00	31,91	52,13	85,38	169,42
5	15	91,75	14,87	0,00	31,18	50,90	83,57	165,65
6	15	89,41	14,48	0,00	30,39	49,56	81,60	161,55
7	15	86,90	14,06	0,00	29,54	48,12	79,49	157,14
8	15	84,21	13,61	0,00	28,62	46,57	77,22	152,42
9	15	81,32	13,12	0,00	27,64	44,91	74,78	147,34
10	15	78,22	12,61	0,00	26,59	43,14	72,18	141,91
11	15	75,04	12,07	0,00	25,51	41,32	69,50	136,33
12	15	72,21	11,60	0,00	24,54	39,69	67,11	131,35
13	15	69,76	11,19	0,00	23,71	38,29	65,06	127,06
14	15	67,87	10,87	0,00	23,07	37,21	63,46	123,74
15	15	66,31	10,61	0,00	28,38	46,17	76,63	120,99

Em relação ao exemplo 01, percebe-se que o aumento nos esforços devido à ação do vento foi absorvido pelo concreto das vigas resultando em alturas variáveis em cada pavimento, pois a taxa de armadura nos dois exemplos permaneceu praticamente constante com o valor de 1,07%.

As alturas das vigas otimizadas variaram entre 11 e 16% do comprimento do maior vão, sendo a média de 13,7%, indicando novamente que devido ao preço do aço estar alto as seções econômicas das vigas são determinadas pelo aumento da área de concreto na seção. Comparando com os resultados do exemplo 01, esta média resultou maior.

A contribuição de cada parcela componente da função objetivo para o custo total das vigas foi semelhante ao exemplo anterior.

O comportamento da função de custo a cada iteração também resultou semelhante ao exemplo anterior, com uma perturbação maior na primeira iteração e pequenas variações nas demais, até convergir para a seção de mínimo custo, como pode ser observado no Gráfico 7.4.

Nota-se ainda a diferença da ordem de R\$ 50,00 por metro da viga de menor para a de maior custo, o que ocorreu devido às diferentes configurações da seção ótima em cada pavimento provenientes da ação do vento, como foi comentado.

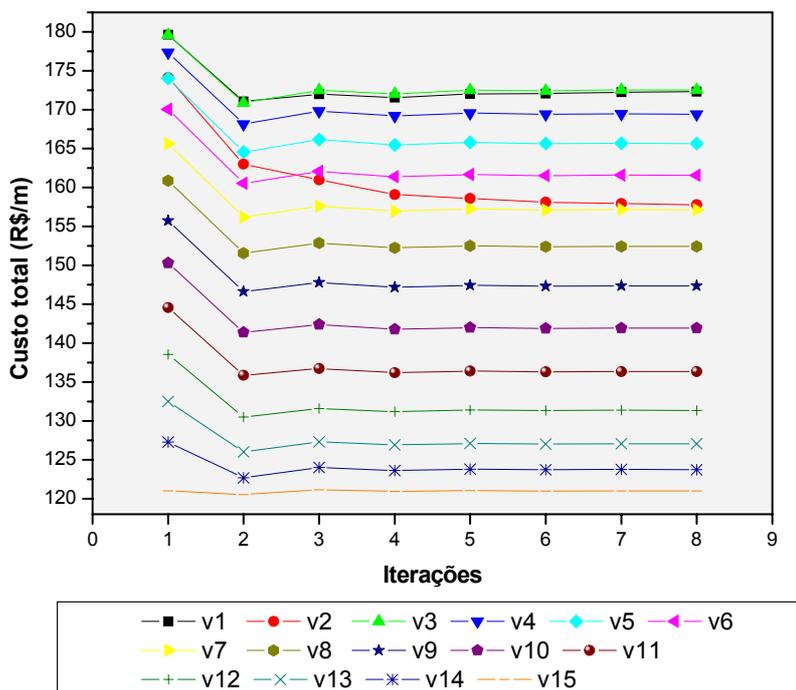


Gráfico 7.4: Resultados encontrados para as vigas a cada iteração, ex. 02.

Os coeficientes de redistribuição neste caso apresentaram em média um aumento de 1,06 para o momentos fletores positivos e uma redução de 0,98 para os negativos, variações ligeiramente maiores quando comparadas ao exemplo 01.

Na Tabela 7.5 são apresentados os resultados ótimos dos pilares.

Tabela 7.5: Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares, ex. 02.

Pilar	Base (cm)	Altura (cm)	Armadura (cm ²)	Custos por metro (R\$)			
				Concreto	Aço	Fôrma	Total
1	24	120,00	24,66	270,92	65,26	84,42	270,92
2	24	120,00	55,01	375,07	65,26	188,57	375,07

Devido à ação do vento houve uma inversão nas solicitações nos pilares em relação ao exemplo 01, em que o pilar 2 passou a resistir a esforços mais críticos que o pilar 1. Pode-se então fazer um comentário semelhante ao exemplo anterior, de que apesar de as dimensões dos dois serem iguais, durante a otimização a seção atingiu sua altura máxima (120cm) e o acréscimo dos esforços do pilar 2 foi absorvido pela armadura, resultando em um aumento de 68,7% do custo da seção. O pilar 1 manteve os mesmos custos do exemplo anterior, como pode ser observado no Gráfico 7.5.

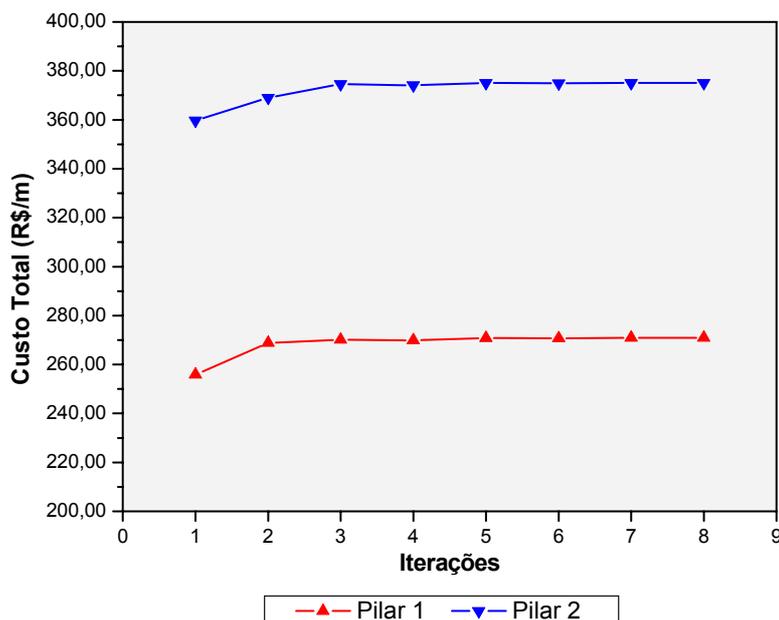


Gráfico 7.5: Resultados encontrados para os pilares para cada iteração, ex. 02.

Neste exemplo o valor usual da área do pilar 2 obtido pelo pré-dimensionamento usual seria de $0,27\text{m}^2$, enquanto que a área otimizada para este mesmo pilar é de $0,28\text{m}^2$.

Geralmente quando se dimensiona um pilar são considerados os esforços atuantes no seu primeiro tramo, ou seja, o primeiro trecho do pilar, situado no pavimento térreo do pórtico, pois neste caso a força normal usualmente é a maior. Mas não se pode descartar a possibilidade de que outro tramo do pilar esteja sujeito a solicitações que levem a um dimensionamento mais crítico que no primeiro, principalmente quando a estrutura está sob a ação do vento, o que resulta em esforços solicitantes totalmente assimétricos.

O programa elaborado neste estudo faz a otimização de todos os tramos do pilar e ao final de cada iteração compara as alturas das seções, adotando para o pilar inteiro a maior como a seção ótima. Na Tabela 7.2 são apresentados os valores ótimos de cada tramo dos dois pilares ao final da última iteração. O tramo 1 é a seção do pilar localizada em sua base e o tramo 15 está localizado em seu topo.

Pode-se confirmar que o tramo da base dos pilares foi o que apresentou a maior altura da seção. Sendo assim, a consideração desta seção para todo o pilar está a favor da segurança. O exemplo 01 também apresentou a altura do tramo da base maior que as demais.

Tabela 7.6: Tramos otimizados de cada pilar.

Tramo	Altura (cm)	
	Pilar 1	Pilar 2
1	120,00	120,00
2	106,50	120,00
3	99,60	120,00
4	93,07	120,00
5	86,19	112,50
6	78,88	102,86
7	71,99	94,23
8	64,80	85,61
9	57,31	78,74
10	53,05	72,62
11	49,97	67,86
12	48,77	64,40
13	49,21	61,75
14	40,00	63,05
15	40,00	40,00

A impressão destes resultados é importante para o engenheiro, pois no caso de estruturas de muitos andares pode ser adotada uma redução da seção a partir de determinado pavimento, e esses dados dão subsídio a estas considerações.

O Gráfico 7.6 mostra a comparação entre os custos totais das vigas, pilares e pórtico em cada iteração. Neste exemplo a estrutura converge na oitava iteração, com um custo global de R\$ 47.938,88. O custo final do pórtico sofreu um acréscimo de 28,5% em relação à estrutura sem a aplicação da ação do vento, enquanto que as vigas sofreram um acréscimo de custo de 24,3% e os pilares de 31%.

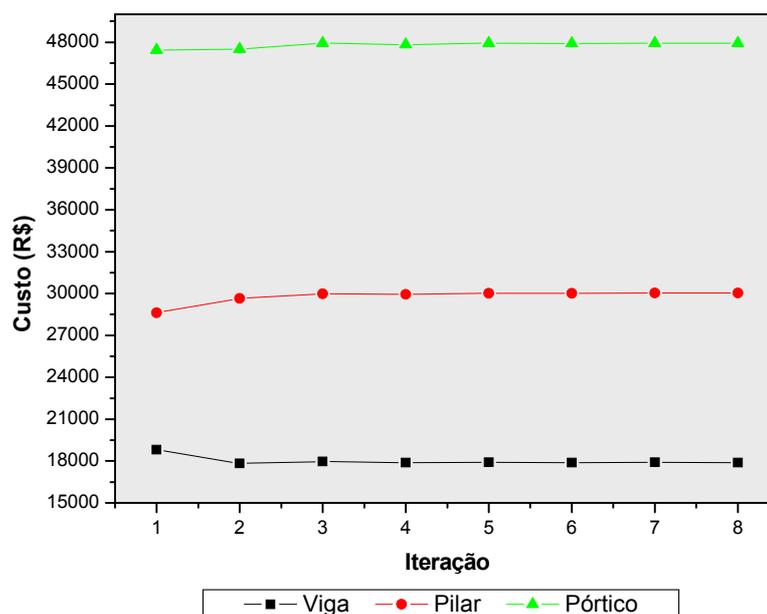


Gráfico 7.6: Custos totais das vigas, pilares e pórticos em cada iteração, ex. 02.

7.3 Exemplo 03:

O exemplo apresentado a seguir consiste em um pórtico plano, assimétrico, composto por 12 pavimentos de 3,0m de altura cada. Em todas as vigas foi aplicado um carregamento vertical de 40kN/m, além do peso próprio que é calculado pelo programa a partir das dimensões iniciais dos elementos fornecidas como dados de entrada, sendo atualizado a cada iteração. Seu modelo esquemático pode ser observado na Figura 7.2.

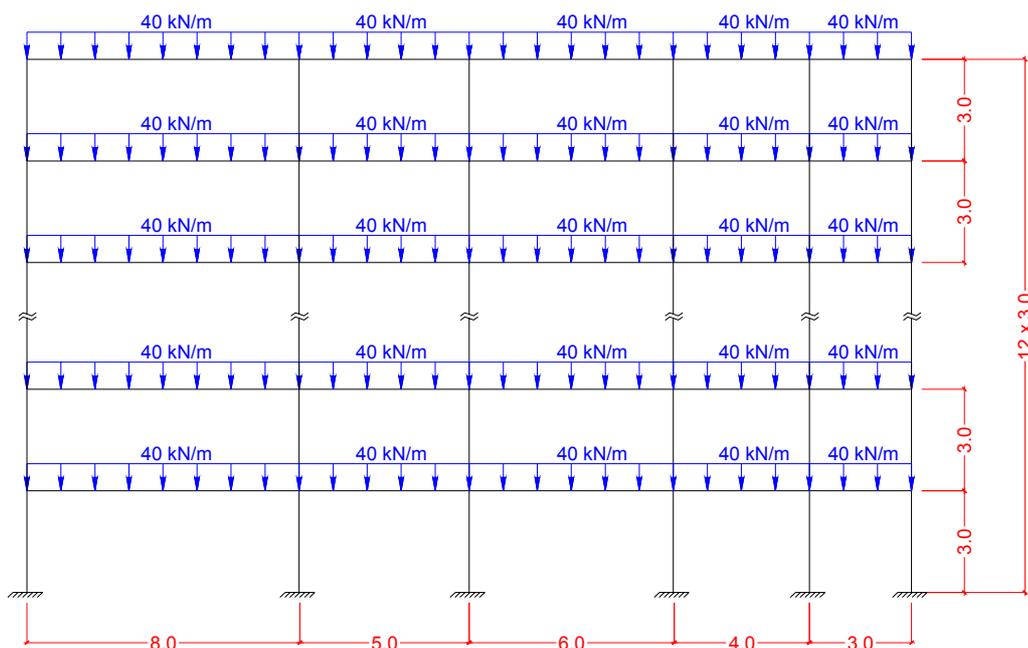


Figura 7.2: Pórtico formado por doze pavimentos e seis pilares.

Os resultados finais das variáveis otimizadas das vigas encontram-se na tabela a seguir.

Tabela 7.7: Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas, ex. 03.

Viga	Base (cm)	Altura (cm)	Armaduras (cm ²)		Custos por metro (R\$)			
			Tração	Comp.	Concreto	Aço	Fôrma	Total
1	15	55,96	8,87	0,00	19,02	30,37	53,43	102,82
2	15	55,86	8,86	0,00	18,99	30,32	53,35	102,66
3	15	55,74	8,84	0,00	18,94	30,25	53,25	102,44
4	15	55,63	8,82	0,00	18,91	30,18	53,16	102,25
5	15	55,53	8,80	0,00	18,87	30,13	53,07	102,08
6	15	55,45	8,79	0,00	18,85	30,08	53,00	101,93
7	15	55,47	8,79	0,00	18,85	30,09	53,02	101,96
8	15	55,53	8,80	0,00	18,87	30,13	53,07	102,06
9	15	55,57	8,81	0,00	18,89	30,15	53,11	102,15
10	15	55,62	8,82	0,00	18,90	30,18	53,15	102,23
11	15	55,71	8,83	0,00	18,93	30,23	53,22	102,39
12	15	55,83	8,85	0,00	18,97	30,30	53,32	102,60

Assim como no exemplo 01 os valores ótimos da altura das vigas também resultaram aproximados, no entanto apresentaram valores médios de 7% do comprimento do maior vão, abaixo dos valores de pré-dimensionamento adotados na prática pelos engenheiros projetistas.

A contribuição de cada parcela componente da função objetivo para o custo total das vigas foi semelhante em todos os pavimentos e ao exemplo 01, sendo da ordem de 18,5% para o concreto, de 29,5% para o aço e de 52% para a fôrma.

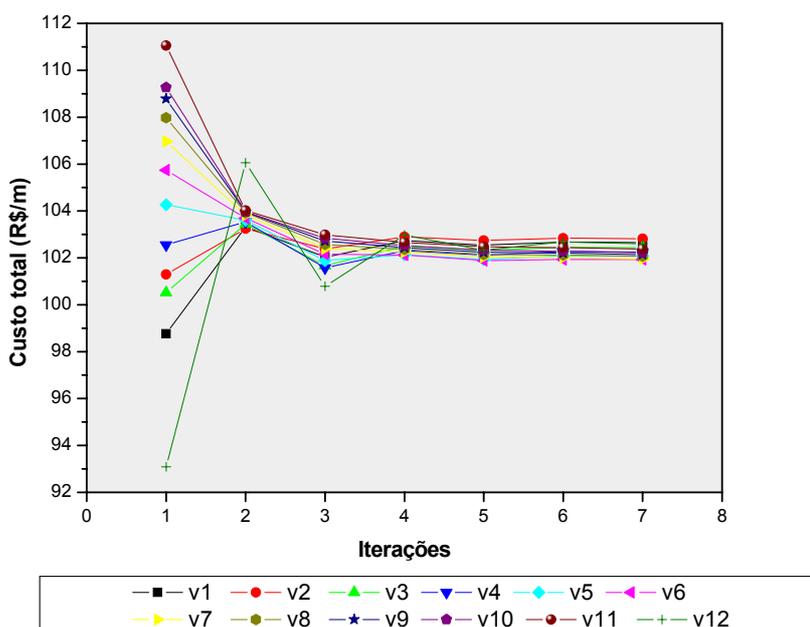


Gráfico 7.7: Resultados encontrados para as vigas a cada iteração, ex. 03.

O Gráfico 7.7 apresenta os resultados dos custos das vigas em cada iteração. Assim como no exemplo 01, neste exemplo também há uma grande perturbação na convergência para o custo mínimo na primeira iteração. Nas demais as variações reduzem e a função se aproxima do valor ótimo.

Em relação à redistribuição dos esforços finais da estrutura, os valores encontrados para os coeficientes de redistribuição de cada viga também resultaram dentro dos limites prescritos pela NBR 6118:2003, apresentando em média um acréscimo da ordem de 1,026 para os momentos fletores positivos e uma redução de 0,98 para os momentos negativos.

Na Tabela 7.8 são apresentados os resultados ótimos dos pilares.

Tabela 7.8: Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares, ex. 03.

Pilar	Base (cm)	Altura (cm)	Armadura (cm ²)	Custos por metro (R\$)			
				Concreto	Aço	Fôrma	Total
1	19	70,59	5,36	30,39	18,36	75,43	124,18
2	19	95,00	12,20	40,90	41,74	95,99	178,63
3	19	87,41	6,64	37,63	22,74	89,59	149,96
4	19	81,38	6,19	35,03	21,17	84,52	140,72
5	19	56,81	4,32	24,46	14,78	63,83	103,06
6	19	22,99	1,75	9,90	5,98	35,35	51,23

Comparando as áreas das seções obtidas para cada pilar pelo programa com os valores usualmente utilizados pelos engenheiros de estruturas, verificou-se que a maior diferença ocorre no pilar 1, em que a área obtida pelo pré-dimensionamento usual seria de 0,09m², enquanto que a área otimizada para este mesmo pilar é de 0,13m². A justificativa é a mesma comentada anteriormente em relação ao alto custo do aço.

O Gráfico 7.8 mostra o comportamento da função de custo em cada iteração dos pilares.

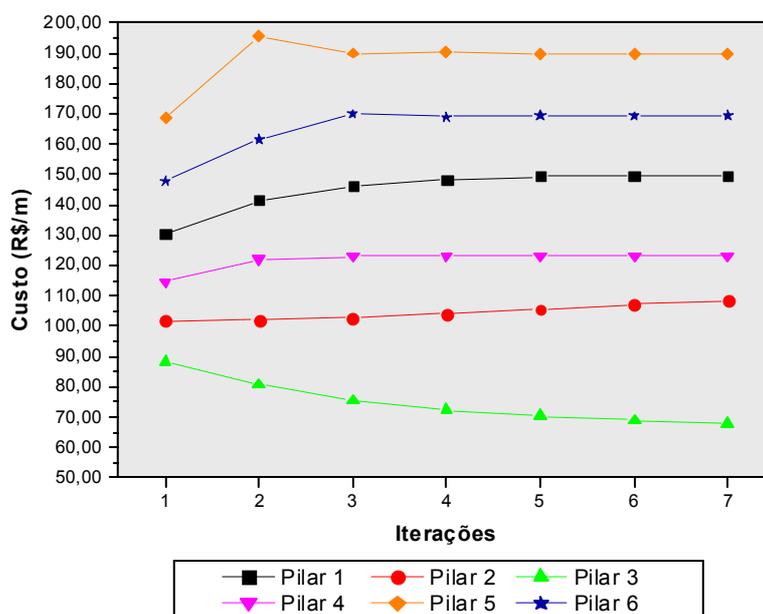


Gráfico 7.8: Resultados encontrados para os pilares a cada iteração, ex.03.

Neste caso também se verifica uma perturbação na primeira iteração e a convergência nas demais.

A contribuição de cada parcela componente da função objetivo para o custo total dos pilares foi em média de 23,4% para o concreto, de 15,7% para o aço e de 60,9% para a fôrma.

O Gráfico 7.9 mostra a comparação entre os custos totais das vigas, pilares e pórtico em cada iteração.

Neste exemplo o custo total das vigas foi mais alto que o dos pilares. Isto é explicado porque neste caso existem mais metros lineares de vigas do que de pilares, ao contrário do exemplo 01.

A convergência final da estrutura se deu na sétima iteração, sendo o custo total do pórtico de R\$ 58.836,10.

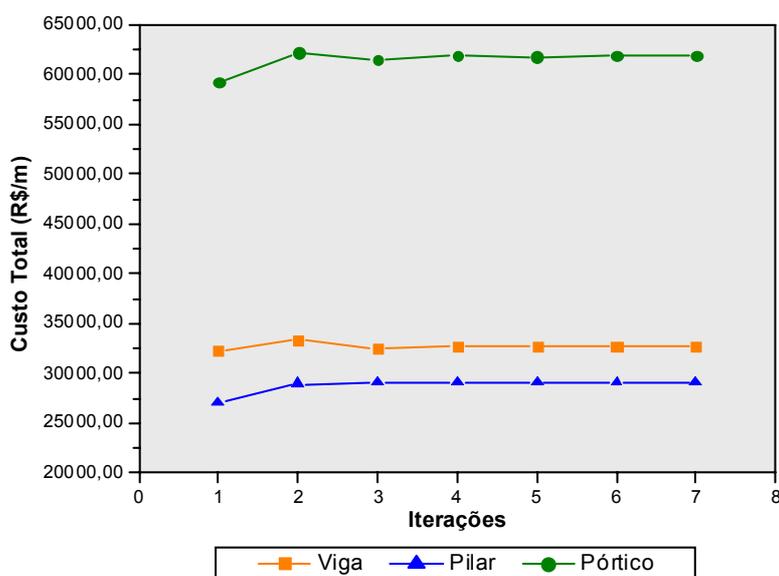


Gráfico 7.9: Custos totais das vigas, pilares e pórticos em cada iteração, ex. 03.

7.4 Exemplo 04:

Neste exemplo será otimizado o mesmo pórtico do exemplo 03 considerando forças horizontais concentrados na direção de cada pavimento, simulando a ação do vento. Os valores destas forças consideradas são apresentados na Tabela 7.9.

Tabela 7.9: Forças devidas ao vento.

Pavimento	Força do vento (kN)
1	5,57
2	6,62
3	7,33
4	7,87
5	8,33
6	8,71
7	9,06
8	9,36
9	9,64
10	9,90
11	10,14
12	5,18

Os resultados finais das variáveis otimizadas das vigas e dos pilares encontram-se nas tabelas a seguir.

Tabela 7.10: Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas, ex.04.

Viga	Base (cm)	Altura (cm)	Armaduras (cm ²)		Custos por metro (R\$)			
			Tração	Comp.	Concreto	Aço	Fôrma	Total
1	15	58,29	9,27	0,00	19,81	31,71	55,40	106,92
2	15	58,79	9,35	0,00	19,98	32,00	55,82	107,80
3	15	58,60	9,32	0,00	19,92	31,89	55,66	107,47
4	15	58,25	9,26	0,00	19,80	31,69	55,36	106,85
5	15	57,84	9,19	0,00	19,66	31,45	55,02	106,13
6	15	57,42	9,12	0,00	19,52	31,21	54,66	105,39
7	15	57,00	9,05	0,00	19,37	30,97	54,31	104,66
8	15	56,59	8,98	0,00	19,23	30,73	53,96	103,93
9	15	56,19	8,91	0,00	19,10	30,51	53,63	103,23
10	15	55,80	8,85	0,00	18,96	30,28	53,30	102,54
11	15	55,55	8,81	0,00	18,88	30,14	53,08	102,10
12	15	55,95	8,87	0,00	19,02	30,37	53,43	102,82

Neste exemplo o aumento nos esforços decorrente da ação do vento, assim como no exemplo 02, foi resistido pelo concreto, o que pode ser visto pelo ligeiro aumento nas alturas das vigas de cada pavimento. Isso porque a taxa de armadura tanto no exemplo 03 quanto no 04 não apresentaram variação, mantendo-se em torno 1,06%.

Em relação às alturas das vigas otimizadas os valores médios foram de 7,15% do comprimento do maior vão, abaixo dos valores de pré-dimensionamento adotados usualmente mas acima daqueles encontrados para a estrutura sem a ação do vento.

A contribuição de cada parcela componente da função objetivo para o custo total das vigas se manteve semelhante aos exemplos anteriores.

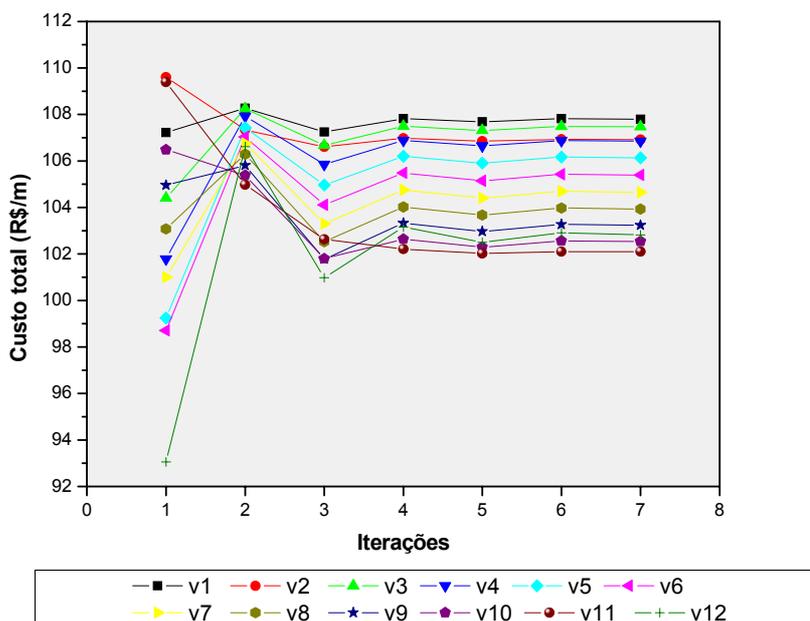


Gráfico 7.10: Resultados encontrados para as vigas a cada iteração, ex. 04.

Como pode ser observado no Gráfico 7.10, o comportamento da função de custo a cada iteração também foi semelhante aos exemplos anteriores. Nota-se ainda que devido à ação do vento as alturas das vigas em cada pavimento ficaram menos uniformes que no exemplo sem a consideração do vento, refletindo em uma diferença nos custos de cada uma. Essa diferença foi de apenas R\$ 5,70 por metro da viga de menor para a de maior custo.

Em relação aos coeficientes de redistribuição, os resultados foram bastante parecidos aos encontrados nos exemplos já apresentados, sendo na média um aumento de 1,03 para os momentos fletores positivos e uma redução de 0,97 para os negativos.

Na Tabela 7.11 são apresentados os resultados ótimos dos pilares.

Tabela 7.11: Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares, ex. 04.

Pilar	Base (cm)	Altura (cm)	Armadura (cm ²)	Custos por metro (R\$)			
				Concreto	Aço	Fôrma	Total
1	19	69,94	5,31	30,11	18,19	74,89	123,20
2	19	95,00	15,49	40,90	53,01	95,99	189,89
3	19	95,00	9,48	40,90	32,43	95,99	169,32
4	19	87,19	6,63	37,54	22,68	89,41	149,63
5	19	60,39	4,59	26,00	15,71	66,85	108,55
6	19	33,90	2,58	14,60	8,82	44,55	67,96

As dimensões e as armaduras da maioria dos pilares aumentaram com a influência do vento em relação ao exemplo 03. Isso gerou, conseqüentemente, um aumento nos custos da seção.

Foi observado ainda que o pilar da extremidade esquerda foi o único que apresentou redução nos esforços solicitantes, diminuindo os custos desta seção.

Em relação à comparação entre o pré-dimensionamento usual e os valores determinados pelo programa observaram-se resultados idênticos aos encontrados para a estrutura sem a consideração da ação do vento.

O Gráfico 7.11 mostra a comparação entre os custos totais dos pilares em cada iteração.

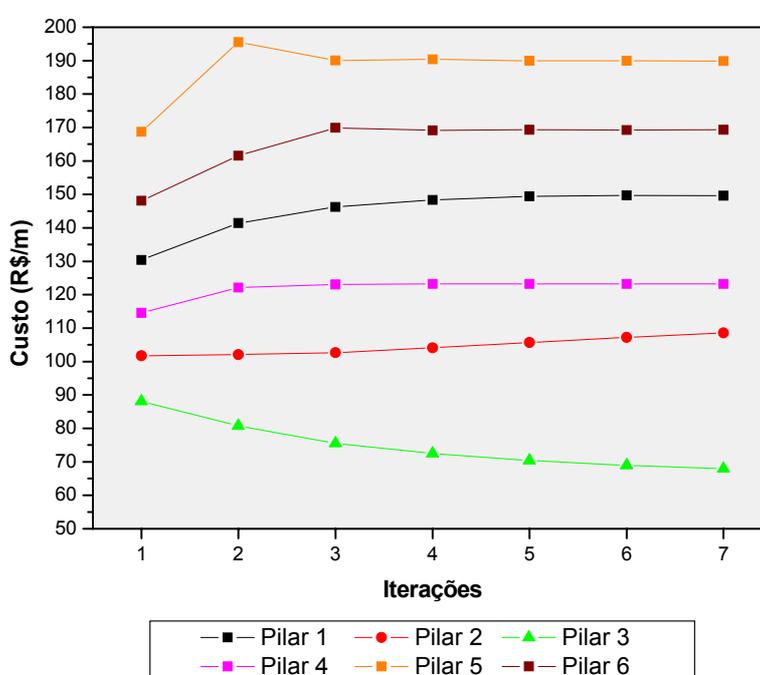


Gráfico 7.11: Resultados encontrados para os pilares para cada iteração, ex. 04.

Neste exemplo a estrutura converge na sétima iteração, com um custo global de R\$ 61.863,60. O custo final do pórtico sofreu um acréscimo de 5,15% em relação à estrutura sem a aplicação da ação do vento, enquanto que as vigas sofreram um acréscimo de custo de 2,63% e os pilares de 8,13%.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

8.1 Conclusões

Os objetivos foram alcançados ao passo que o programa determina os valores ótimos dos elementos estruturais. Isto foi comprovado por meio das validações das vigas e dos pilares realizadas para os diferentes exemplos estudados. Para estender os resultados ótimos dos elementos isolados à estrutura de pórticos, optou-se por utilizar a aproximação combinada em substituição à aproximação global, pois esta tende a gerar um esforço computacional muito grande para os casos aqui estudados. Assim, a estrutura foi processada localmente por meio da otimização das seções transversais das vigas e dos pilares. O resultado global foi obtido pelas iterações realizadas, em que, após definidas as seções ótimas dos elementos isolados, a estrutura é reprocessada e novamente otimizada, até que não haja mais uma redistribuição significativa dos esforços.

Em relação à otimização dos pilares, foi observado que independente do domínio de deformação onde a seção está, as curvas que representam as funções de custo em relação ao aumento da solicitação normal basicamente podem ser divididas em dois trechos. No primeiro o valor mais econômico é determinado com o aumento da altura, mantendo a armadura próxima à mínima. No segundo as retas apresentam um leve aumento na inclinação, quando a altura passa a ser limitada pelo seu valor máximo e apenas a armadura aumenta para resistir ao incremento dos esforços. Isso sugere que a seção tem uma perda de economia no segundo trecho, o que pode ser explicado pela imposição da simetria das armaduras resultando em algumas camadas subutilizadas.

Nota-se ainda que as proporções do custo de cada parcela que compõem a função objetivo são de aproximadamente 23% do custo total para a parcela de concreto, de 16% para a armadura e de 61% para a fôrma na maioria dos casos estudados. Deve ser observado que este estudo não considerou o reaproveitamento das fôrmas, o que poderia resultar em outras proporções de custos da função objetivo e mudar a configuração ótima dos pilares.

No programa de otimização da seção transversal das vigas, como foi explicado, a altura ótima é encontrada a princípio sem restrição de deslocamentos. Em seguida, se a flecha máxima exigida pela NBR 6118:2003 não for atendida, a altura é aumentada até aquela ser alcançada. Nos exemplos estudados nota-se que, quando a flecha é a restrição ativa do problema, ou seja, quando a altura é aumentada para atender a esta restrição, para a maioria dos esforços solicitantes o custo de fôrma é o mais alto, mas conforme aumenta a solicitação sua porcentagem de contribuição para o custo total diminui enquanto que a do aço aumenta.

Em relação às armaduras, os resultados apontam para uma seção ótima composta apenas por armadura de tração, deixando a armadura de compressão inutilizada, indicando que a seção econômica é determinada quando somente a área de concreto comprimida está resistindo aos esforços solicitantes de compressão, configurando vigas simplesmente armadas.

A partir dos resultados encontrados nos exemplos de pórticos planos pode-se analisar o comportamento em conjunto das vigas e dos pilares. Observou-se que os esforços solicitantes nas estruturas sujeitas à ação do vento são maiores na maioria dos elementos que nos da estrutura sem a consideração do vento. Isto implica em seções transversais maiores, tanto das vigas quanto dos pilares, e conseqüentemente de maiores custos.

Verificou-se ainda que as alturas e as armaduras das vigas em cada pavimento da estrutura sem a ação do vento apresentaram uma uniformidade, enquanto que no outro caso houve variações, refletindo em uma diferença nos custos de cada viga.

Em relação às iterações realizadas pelo programa, devido à definição aleatória das dimensões iniciais da viga dadas pelo usuário há uma grande perturbação na convergência para o custo mínimo na primeira iteração. Nas demais as variações reduzem conforme ocorre a redistribuição dos esforços na estrutura e a função se aproxima do valor ótimo. Deve ser ressaltado que as dimensões iniciais não afetam os resultados finais, influenciando apenas na velocidade de convergência do programa.

Nos exemplos 1 e 2, as alturas das vigas otimizadas apresentaram valores ente 11 e 16% do comprimento do maior vão, o que se mostra bastante próximo dos valores de pré-dimensionamento adotados usualmente pelos engenheiros projetistas, que variam geralmente de 8 a 10%. Mas estes exemplos podem ser considerados atípicos, pois como foi comentado eles foram elaborados com o intuito de verificar a majoração dos esforços devido aos momentos de segunda ordem globais.

Sendo assim, neste caso esse ligeiro aumento pode ser explicado devido às peculiaridades da estrutura, que podem ter levado a seções econômicas com a altura maior que a usualmente pré-dimensionada.

Já nos exemplos 3 e 4 nota-se uma configuração mais convencional de pórtico plano, sendo que para estes casos os valores da altura das vigas em média foi de 7,15% do comprimento do maior vão, ficando abaixo do usualmente utilizado. Contudo os pilares apresentaram área da seção transversal maiores que o usualmente pré-dimensionado, o que pode ser explicado pelo custo do aço utilizado, que nos dias atuais encontra-se bastante alto em relação aos anos anteriores, sendo, portanto, a seção de mínimo custo definida pelo aumento da área de concreto em substituição ao aumento das armaduras.

Todos os resultados expostos nesta pesquisa foram obtidos considerando os custos já apresentados para cada componente da função objetivo. No entanto, fazendo uma comparação com pesquisas anteriores foi constatada uma perceptível diferença entre estes resultados, o que levou à conclusão de que as seções ótimas dos elementos são determinadas em função das proporções de contribuição dos custos dos componentes para a função de custo total utilizadas.

O programa de otimização de pórticos planos desenvolvido pode ser utilizado nos escritórios de cálculo de estruturas para auxiliar na escolha do projeto mais econômico com a certeza de estar atendendo às condições arquitetônicas, de segurança e construtivas, trazendo benefícios econômicos tanto para o projetista, que terá seu tempo poupado, quanto para o construtor, que terá menos gastos para executar a estrutura.

8.2 Sugestões para pesquisas futuras:

- Considerar a força cortante na otimização das vigas, incluindo como variável a armadura transversal (estribos);
- Otimizar seções de pilares trabalhando a flexão oblíqua, deixando sua variação mais ampla e realista;
- Utilizar o pilar trabalhando a flexão oblíqua em um programa para otimização de pórtico espacial, realizando desta forma a otimização da estrutura por aproximação global;
- Incluir as lajes dos pavimentos no processo de otimização da estrutura.

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABENDROTH, R. E. e SALMON, C. G. (1986). *Sensitivity study of optimization RC restrained end T-sections*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.112, n.8, p.1928-1943, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

ADAMU, A. e KARIHALOO B. L. (1994a). *Minimum cost design of RC beams using DCOC, Part I: Beams with freely-varying cross-section*. Structural Optimization, v.7, n.4, p.237-251. Jun, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

ADAMU, A. e KARIHALOO B. L. (1995b). *Minimum cost design of RC frames using the DCOC method, Part I: Columns under uniaxial bending actions*. Structural Optimization, v.10, n.1, p.16-32. Ago, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

AHMADKHANLOU, F. e ADELI, H. (2005). *Optimum cost design of reinforced concrete slabs using neural dynamics model*. Engineering Applications of Artificial Intelligence, n.18, p 65–72.

AL-SALLOUM, Y. A. e SIDDIQI, G. H. (1994). *Cost-optimum design of reinforced concrete beams*. ACI Structural Journal, v.91, n.6, p.647-655. Nov/Dez, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6118: projeto de estruturas de concreto – procedimento*. Rio de Janeiro, 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NB1: projeto de estruturas de concreto – procedimento*. Rio de Janeiro, 1978

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6123 – Forças devidas ao vento em edificações*. Rio de Janeiro, 1988.

BALLING, R. J. e YAO, X. (1997). *Optimization of reinforced concrete frames*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.123, n.2, p.193-202. Fev, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

BARROS, M.H.F.M. (2004). *Closed form solution of optimal design of rectangular reinforced concrete sections*. Engineering Computations, v.21, n.7, p.761-776.

BAZARAA, M. S. e SHETTY, C. M. (1979). *Nonlinear programming: theory and algorithms*. New York, John Wiley & Sons.

BROWN, R. H. (1975). *Minimum cost selection of one-way slab thickness*. Journal of Structural Division, ASCE, v.101, n.12, p.2585-2590, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

CAMP, C.; PEZESHK, S.; CAO, G. (1998). *Optimized design of two-dimensional structures using a genetic algorithm*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.124, n.5, p.551-559, Mai.

CAMP, C. V. et al. (2003). *Flexural design of reinforced concrete frames using a genetic algorithm*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.129, n.1, p.105-115, Jan.

CHAKRABARTY, B. K. (1992a). *Models for optimal design of reinforced concrete beams*. Computer & Structures, v.42, n.3, p.447-451, Fev, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

CHAVES, I. A. (2004). *Otimização de pilares de concreto armado mediante uniformização do índice de confiabilidade*. Dissertação (mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

CHOI, C. e KWAK, H. (1990). *Optimum RC member design with predetermined discrete sections*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.116, n.10, p.2634-2655, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

CHOU, T. (1977). *Optimum reinforced concrete T-beam sections*. Journal of Structural Division, ASCE, v.103, n.8, p.1605-1617, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

COHN, M. Z. e DINOVIETZ, A.S (1994). *Application of structural optimization*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.120, n.2, p.617-650, Fev.

COHN, M. Z. e LOUNIS, Z. (1993). *Optimum limit design of continuous prestressed concrete beams*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.119, n.12, p.3551-3570, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

COHN, M. Z. e MacRae, A. J. (1984a). *Optimization of structural concrete beams*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.110, n.7, p.1573-1588, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

CONVERSE, A. O. (1977). *Otimização*. Ed. da Universidade de São Paulo: São Paulo.

DINNO, K. S. e MEKHA, B. B. (1993). *Optimal design of reinforced concrete frames based on inelastic analysis*. Computers and Structures, v.47, n.2, p.245-252, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

EZELDIN, A. S. e HSU, C. T. (1992). *Optimization of reinforced fibrous concrete beams*. ACI Structural Journal, v.89, n.1, p.106-114, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

FADAEI, M. J. e GRIERSON, D. E. (1996). *Design optimization of 3D reinforced concrete structures*. Structural Optimization, v.12, n.2/3, p.127-134. Out, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

FRIEL, L. L., (1974). *Optimum singly reinforced concrete sections*. ACI Journal, v.71, n.11, p.556-558, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

FERREIRA, C. C. et al. (2003). *Optimal design of reinforced concrete T-sections in bending*. Engineering Structures, n. 25, p 951-964.

GOBLE, G. G. e LAPAY, W. S. (1971). *Optimum design of prestressed beams*. ACI Journal, v.68, n.9, p.712-178, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

GILL, P.E., W. Murray, M.A. Saunders, and M.H. Wright (1985), Model building and practical aspects of nonlinear programming, in Computational Mathematical Programming, (edited by K. Schittkowski), NATO ASI Series, 15, Springer-Verlag, Berlin, Germany.

GUNARATNAM, D. J., e SIVAKUMARAN, N. S. (1978). *Optimum design of reinforced concrete slabs*. The Structural Engineering, v.56B, n.3, p.61-67, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

HAN, S. H., ADAMU, A. e KARIHALOO B. L. (1995). *Application of DCOC to optimum prestressed concrete beam design*. Engineering Optimization, v.25, n.3, p.179-200, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

HUANCHUN, S. e ZHENG, C. (1985). *Two-level optimum design of reinforced concrete frames with integer variables*. Engineering Optimization, v.9, n.3, p.219-232, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

KANAGASUNDARAM, S. e KARIHALOO, B.L. (1990). *Minimum cost design of reinforced concrete structures*. Structural Optimization, v.2, p.173-184, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

KANAGASUNDARAM, S. e KARIHALOO, B.L. (1991a). *Minimum cost design of reinforced concrete structures*. Computers and Structures, v.41, n.6, p.1357-1364, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

KANAGASUNDARAM, S. e KARIHALOO, B.L. (1991b). *Minimum cost reinforced concrete beams and columns*. Computers and Structures, v.41, n.3, p.509-518, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

KALEEL, M. A. e ITANI, R. Y. (1993). *Optimization of partially prestressed concrete girders under multiple strength and serviceability criteria*. Computers and Structures, v.49, n.3, p.427-438, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

KIRSCH, U. (1972). *Optimum design of prestressed beams*. Computers and Structures, v.2, n.4, p.573-583, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

KIRSCH, U. (1993). *Effective approximations for topological optimization*. The World Congress on Optimal Design of Structural Systems, Rio de Janeiro, 1993. Anais. Rio de Janeiro COPPE/Federal University of Rio de Janeiro. v.1, p. 3-10.

KOCER, F. Y. e ARORA, J. S. (1996). *Design of prestressed concrete transmission poles: optimization approach*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.122, n.7, p.804-814. Jul, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

KRISHNAMOORTHY, C. S. e MOSI, D. R. (1981). *Optimal design of reinforced concrete frames based on inelastic analysis*. Engineering Optimization, v.5, n.3, p.151-167, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

KUHN, H. W.; TUCKER, A. W. (1951). *Nonlinear programming*. Proceedings of 2nd Berkeley Symp. on Mathematics, Statistics and Probability. University of California Press, Berkeley, California. p.481-492.

LEPS, M. e SEJNOHA, M. (2003). *New approach to optimization of reinforced concrete beams*. Computers and Structures, n.81, p.1957-1966.

LOUNIS, Z. e COHN, M. Z. (1993b). *Multiobjective optimization of prestressed concrete structures*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.119, n.3, p.794-808, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

LUENBERGER, D. G. (1989). *Linear and nonlinear programming*. 2 ed. Reading, Mass.: Addison-Wesley.

MacRae, A. J e COHN, M. Z. (1987). *Optimization of prestressed concrete flat plates*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.113, n.5, p.943-957, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

MEDRANO, M. S. (1994). *Aplicações de programação matemática em análise estrutural*. Dissertação (mestrado) – Escola Politécnica de São Paulo, Universidade de São Paulo.

MOHARRAMI, H. e GRIERSON, D.E. (1993). *Computer-automated design of reinforced concrete frameworks*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.119, n.7, p.2036-2058. Jul, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

NAAMAN, A. E. (1976). *Minimum cost versus minimum weight of prestressed slabs*. Journal of the Structural Division, ASCE, v.102, n.7, p.1493-1505. Jul, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

PAUL, H., DAS GUPTA, N. C., e YU, C. H. (1990). *A geometric programming method for cost-optimal design of a modular floor system*. Engineering optimization, v.16, n.3, p.205-220, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

PARK, M. H. e HARIK, I. E. (1987). *Optimum design of horizontally curved R/C slabs*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.113, n.11, p.2195-2211, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

PRAKASH, A., AGARWALA, S. K., e SINGH, K. K. (1988). *Optimum design of reinforced concrete sections*. Computers and Structures, v.30, n.4, p.1009-1011. Abr, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

RATH, D. P. et al. (1999). *Shape optimization of RC flexural members*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.125, n.2, p.1439-1446, Dez.

SAOUMA, V. E., e MURAD, R. S. (1984). *Partially prestressed concrete beam optimization*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.110, n.3, p.589-604, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998). *Cost optimization of concrete structures*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.124, n.5, p.570-578, Mai.

SCHITTKOWSKI, K. (1983), *On the convergence of a sequential quadratic programming method with an augmented Lagrangian line search function*, Mathematik Operations for schung und Statistik, Serie Optimization, 14.

SCHITTKOWSKI, K. (1986), *NLPQL: A FORTRAN subroutine solving constrained nonlinear programming problems*, (edited by Clyde L. Monma), Annals of Operations Research, 5.

SOARES R. C. (1997). *Otimização de seções transversais de vigas de concreto armado sujeitas à flexão: aplicação à pavimentos*. Dissertação (mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

SPIRES, D. e ARORA, J. S. (1990). *Optimal design of tall RC-framed tube buildings*. Journal of Structural Engineering, ASCE, v.116, n.4, p.877-897, Abr, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

STOER, J. (1985). *Principles of sequential quadratic programming methods for solving nonlinear programs*, in Computational Mathematical Programming, (edited by K. Schittkowski), NATO ASI Series, 15, Springer-Verlag, Berlin, Germany.

TEMPLEMAN, A.B. (1983). Optimization methods in structural design practice. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.109, n.10, p.2420-2433, Out.

VANDERPLAATS, G.N. (1984). Numerical optimization techniques for engineering design. New York, Mc.Graw - Hill.

VENTURINI, W. S. (1987). Dimensionamento de peças retangulares de concreto armado solicitadas à flexão reta. Apostila – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

VIANNA, L. C. C. (2003). *Otimização de seções transversais de concreto armado: aplicação a pórticos*. Dissertação (mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

ZIELINSKI, Z.A., LONG, W. e TROITSKY, M.S. (1995). Designing reinforced concrete short-tied columns using the optimization technique. *ACI Structural Journal*, v.92, n.5, p.619-626, Set/Out, in SARMA, K. C. e ADELI, H. (1998).

APÊNDICE I – Complementos da otimização matemática

Serão apresentados a seguir alguns conceitos e definições matemáticas a fim de aprofundar o estudo da otimização numérica.

Definições

Matriz Hessiana

Seja uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e diferenciável. Se $f(x)$ for de classe C^2 , ou seja, se for duas vezes diferenciável e tiver segunda derivada contínua, então a matriz Hessiana é definida como:

$$H(x) = \nabla^2 f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Pode-se definir uma matriz simétrica H como positiva (ou negativa) definida se a forma quadrática $Q = x^t H x$ for positiva (ou negativa) para todo x , e igual a zero se e somente se $x = 0$. Em contrapartida, uma matriz simétrica H será chamada positiva semi-definida se a forma quadrática $Q = x^t H x$ for não negativa para todo x . Isto acontece quando os autovalores da matriz são não-negativos. E ainda, quando $(-H)$ for positiva semi-definida, então H será negativa semi-definida.

Se a matriz das derivadas segundas em x^* for positiva definida, então o ponto estacionário será mínimo. Se for negativa definida, então o ponto estacionário será máximo.

Esquemáticamente, temos:

Matriz positiva definida

$$Q = x^t H x > 0 \quad \forall x \text{ e igual a zero se, e somente se, } x = 0 ;$$

Matriz negativa definida

$$Q = x^t H x < 0 \quad \forall x \text{ e igual a zero se, e somente se, } x = 0 ;$$

Matriz positiva semi-definida

$$Q = x^t H x \geq 0 \quad \forall x ;$$

Matriz negativa semi-definida

$$Q = x^t (-H) x \geq 0 \quad \forall x .$$

Cone de direções viáveis

Seja S um conjunto não vazio em R^n , e seja $x \in S$. O cone de direções viáveis de S, definido por D, é dado por:

$$D = \{d: d \neq 0 \text{ e } x^* + \lambda d \in S, \text{ para todo } \lambda \in (0, \delta) \text{ sendo } \delta > 0\}$$

Cada vetor $d \in D$ e $d \neq 0$ é chamado de direção viável.

Convexidade

Um conjunto $\Omega \subset R^n$ será convexo se o segmento de reta ligando dois pontos quaisquer em Ω permanecer inteiramente dentro de Ω . Formalmente, para dois pontos quaisquer $x \in \Omega$ e $y \in \Omega$, tem-se:

$$\alpha x + (1-\alpha)y \in \Omega, \quad \text{para todo } \alpha \in [0,1].$$

f será uma função convexa se o seu domínio for um conjunto convexo e se para dois pontos quaisquer x e y neste domínio, o gráfico de f permanecer sob ou abaixo da reta ligando $(x, f(x))$ para $(y, f(y))$ no espaço R^{n+1} . Isto é,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y), \text{ para todo } \alpha \in [0,1].$$

A união de dois conjuntos convexos pode ser um conjunto convexo ou não-convexo, mas a interseção de dois ou mais conjuntos convexos é sempre um conjunto convexo, conforme mostra a Figura 10.1.

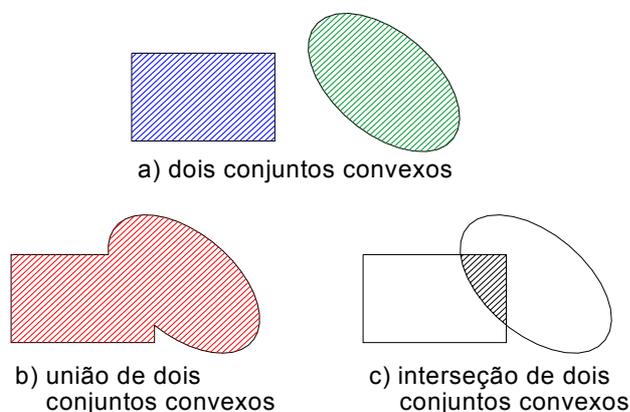


Figura10.1: Exemplos de conjuntos convexos e não-convexos

Proposição 01:

Seja uma função $f \in C^2$. f é uma função convexa em um conjunto convexo não vazio Ω se, e somente se, a matriz hessiana F da função f for semidefinida positiva em Ω .

Problemas sem restrições

Problemas sem restrições são da forma:

minimizar $f(x)$ sem nenhuma restrição ao vetor x .

Condições necessárias para garantir a solução

Dado um ponto qualquer do domínio de $f(x)$, deve ser determinado, se possível, se este ponto é um mínimo local ou global de f . Faz-se necessário então caracterizar um ponto de mínimo, o que pode ser feito pelo comportamento das derivadas primeiras de f no ponto x em questão.

Condições de primeira ordem

As condições abaixo usam o vetor gradiente, definido como sendo o vetor das primeiras derivadas parciais da função. Por isso se chamam condições de primeira ordem. Em uma função escalar, o vetor gradiente é usado para encontrar as direções de pesquisa em algoritmos de otimização, pois sempre apontam para a direção em que a função cresce.

Teorema 01:

Seja uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em x^* . Se existe um vetor d , tal que

$$\nabla f(x^*)^t d < 0,$$

então existe um $\delta > 0$ de forma que

$$f(x^* + \lambda d) < f(x^*)$$

para cada $\lambda \in (0, \delta)$, então d é uma direção descendente de f em x^* .

Corolário 01:

Seja uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em x^* . Se x^* é um ponto de mínimo local, então $\nabla f(x^*) = 0$.

Condições de segunda ordem

Análogo ao item anterior, as condições seguintes usam os termos da matriz Hessiana, cujos elementos são as derivadas parciais segundas da função. Por isso se chamam condições de segunda ordem.

Teorema 02:

Seja uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em x^* . Se x^* é um ponto de mínimo local, então $\nabla f(x^*) = 0$ e $H(x^*)$ é semi-definida positiva.

Condições suficientes para garantir a solução

As condições anteriores são necessárias para um ponto ser uma solução ótima local. No entanto, devem existir condições suficientes para que o ponto seja um mínimo local, apresentadas a seguir.

Teorema 03:

Seja uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em x^* . Se $\nabla f(x^*) = 0$ e $H(x^*)$ é positiva definida, então x^* é um ponto de mínimo local.

O teorema acima determina então as condições suficientes para x^* ser um ponto mínimo local.

Problemas com restrições de desigualdades

Agora os problemas são da forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{Sujeito a} & g_j(x) \leq 0 \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, p \\ & x \in \Omega \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

O teorema a seguir dará uma visão geométrica dos problemas com restrições de desigualdades.

Teorema 04:

Seja o problema de minimizar uma função $f(x)$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sujeita a $x \in S$, onde S é um conjunto não vazio em \mathbb{R}^n . Seja f diferenciável em um ponto $x^* \in S$. Se x^* é um ponto de mínimo local, então $F_0 \cap D = \emptyset$, onde

$$F_0 = \{d: \nabla f(x^*)^t d < 0\} \quad \text{e}$$

D é o cone de direções viáveis de S em x^* .

Da definição de cone de direções viáveis e do teorema 01, fica claro que um pequeno movimento partindo de x^* ao longo de um vetor $d \in D$ leva a outros pontos viáveis, pontos estes que reduzem o valor de f . Assim, se x^* é um mínimo local e se $\nabla f(x^*)^t d < 0$, então $d \notin D$, ou seja, toda direção descendente não pode ser uma direção viável.

No teorema acima podemos perceber que F_0 é um semi espaço aberto definido em termos do vetor gradiente $\nabla f(x^*)$ e D não é necessariamente definido em termos dos gradientes das funções envolvidas. Vamos então converter a condição geométrica $F_0 \cap D = \emptyset$ em uma definição algébrica mais usual contendo as equações do problema. Para isso, definimos um cone aberto G_0 em termos dos gradientes das restrições de desigualdade em x^* tal que $G_0 \subset D$, indicado no seguinte teorema:

Teorema 05:

Seja $g_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para $j = 1, 2, \dots, p$ e Ω um conjunto não vazio em \mathbb{R}^n . Considere o problema P da forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{Sujeito a} & g_j(x) \leq 0 \text{ para } j = 1, 2, \dots, p \\ & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Seja x^* um ponto viável e $J = \{j: g_j(x^*) = 0\}$. Sejam ainda f e g_j , para $j \in J$, diferenciáveis em x^* e g_j , para $j \notin J$, continua em x^* . Se x^* é um ponto de mínimo local, então $F_0 \cap G_0 = \emptyset$, onde

$$\begin{aligned} F_0 &= \{d: \nabla f(x^*)^t d < 0\} \\ G_0 &= \{d: \nabla g_j(x^*)^t d < 0 \text{ para } j \in J\}. \end{aligned}$$

Fica claro, a partir do teorema 05, que se $F_0 \cap D = \emptyset$ precisa ocorrer em x^* e $G_0 \subset D$, então $F_0 \cap G_0 = \emptyset$ é também uma condição de mínimo necessária para o problema P.

Sabendo que F_0 e G_0 são ambos definidos em termos dos vetores gradientes, podemos utiliza-las como condições de mínimo para o problema. Usaremos então a condição $G_0 \subset D$ para desenvolver as condições de Fritz John.

Teorema 06:

Sejam as funções $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para $j = 1, 2, \dots, p$, e seja o problema P da forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{Sujeito a} & g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{array}$$

Seja x^* um ponto viável e $J = \{j: g_j(x^*) = 0\}$. Sejam ainda f e g_j , para $j \in J$, diferenciáveis em x^* e g_j , para $j \notin J$, continua em x^* . Se x^* é uma solução local para o problema P, então existem os escalares μ_0 e μ_j para $j \in J$, de forma que

$$\begin{aligned} \mu_0 \nabla f(x^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \mu_0, \mu_j &\geq 0, \quad \text{para } j \in J \\ (\mu_0, \mu_J) &\neq (0,0) \end{aligned}$$

onde μ_J é o vetor cujas componentes são μ_j , para $j \in J$. Seja ainda g_j , para $j \notin J$, diferenciável em x^* , então as condições de Fritz John podem ser escritas na forma equivalente:

$$\begin{aligned} \mu_0 \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \mu_j g_j(x^*) &= 0, \quad \text{para } j \in J \\ \mu_0, \mu_j &\geq 0, \quad \text{para } j \in J \\ (\mu_0, \mu) &\neq (0,0) \end{aligned}$$

onde μ é o vetor cujas componentes são μ_j , para $j = 1, 2, \dots, p$.

Nas condições de Fritz John, os escalares μ_0 e μ_j , para $j = 1, 2, \dots, p$ são chamados de multiplicadores de Lagrange. A condição $\mu_j g_j(x^*) = 0$ para $j = 1, 2, \dots, p$ é chamada de condição de complementaridade. Ela implica em $\mu_j = 0$ se a desigualdade for inativa, ou seja, se $g_j(x^*) < 0$. Já para o caso da restrição ser ativa, μ_j pode ou não ser nulo. Mas se o multiplicador de Lagrange μ_0 for igual a zero, as condições de Fritz John não usam nenhuma informação em relação ao gradiente da função objetivo, não tendo valor prático para localizar o ponto ótimo. Tendo como interesse os casos em que $\mu_0 > 0$, Kuhn e Tucker (1951) desenvolveram condições de mínimo necessárias para a solução do problema que, acrescentadas às condições de Fritz John, garantem que ocorra $\mu_0 > 0$, sendo chamadas de qualificação das restrições.

No teorema a seguir, utilizando a qualificação da restrição que impõe que os vetores gradientes das restrições ativas sejam linearmente independentes, obtemos as condições de Kuhn Tucker, apresentadas no teorema 07 a seguir.

Teorema 07: Condições necessárias de Kuhn-Tucker

Sejam as funções $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para $j = 1, 2, \dots, p$, e seja o problema P da forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) \\ \text{Sujeito a} \quad & g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \\ & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Seja x^* um ponto viável e $J = \{j: g_j(x^*) = 0\}$. Sejam ainda f e g_j , para $j \in J$, diferenciáveis em x^* , g_j , para $j \notin J$, contínua em x^* e $\nabla g_j(x^*)$, para $j \in J$, linearmente independente. Se x^* é uma solução local para o problema P, então existem os escalares μ_j , para $j \in J$, de forma que

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \mu_j &\geq 0, \quad \text{para } j \in J \end{aligned}$$

Seja ainda g_j , para $j \notin J$, diferenciável em x^* , então as condições de Kuhn Tucker podem ser escritas na forma equivalente:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \mu_j g_j(x^*) &= 0, \quad \text{para } j \in J \\ \mu_j &\geq 0, \quad \text{para } j \in J \end{aligned}$$

Nas condições de Kuhn Tucker, os escalares μ_j também são chamados de multiplicadores de Lagrange, e a condição de que $\mu_j g_j(x^*) = 0$ para $j = 1, 2, \dots, p$, é referida como condição de complementaridade.

APÊNDICE I I – Formulação para otimização de pilares

Diante das considerações feitas no item 4.4, o problema da otimização da seção transversal de pilares pode ser apresentado da seguinte forma:

Minimizar: $F(x) = c_1 \cdot (b_w \cdot x_1) + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot (b_w + x_1)$

Sujeito a:

Situação 1

Domínios 2, 3 e 4

Modelo 1: $0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{2} \cdot \left[73,5 \cdot \left(1 - \frac{d'}{x_3} \right) - f_{yd} \right] - N_d = 0$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{4} \cdot \left[73,5 \cdot \left(1 - \frac{d'}{x_3} \right) + f_{yd} \right] \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0$$

Modelo 2: $0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 - N_d = 0$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{2} \cdot f_{yd} \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0$$

Modelo 3: $0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{2} \cdot \left\{ 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] + f_{yd} \right\} - N_d = 0$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{4} \cdot \left\{ f_{yd} - 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] \right\} \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0$$

Domínio 4a:

Modelo 1: $0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{2} \cdot \left[\frac{73,5}{x_3} \cdot (x_3 - x_1 + d') + f_{yd} \right] - N_d = 0$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{4} \cdot \left[f_{yd} - \frac{73,5}{x_3} \cdot (x_3 - x_1 + d') \right] \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0$$

Sub-domínio 5a:

Modelo 1: $0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{2} \cdot \left(294 \cdot \frac{x_3 - x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1} + f_{yd} \right) - N_d = 0$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{4} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \cdot \frac{x_3 - x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0$$

$$\text{Modelo 2: } 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{2} \cdot \left(294 \cdot \frac{2x_3 - x_1}{7x_3 - 3x_1} \right) - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{4} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(294 \cdot \frac{x_1 - 2d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0$$

Sub-domínio 5b:

$$\text{Modelo 1: } 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{2} \cdot \left(294 \cdot \frac{x_3 - x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1} + f_{yd} \right) - N_d = 0$$

$$\frac{x_2}{4} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \cdot \frac{x_3 - x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0$$

$$\text{Modelo 2: } 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{2} \cdot \left(294 \cdot \frac{2x_3 - x_1}{7x_3 - 3x_1} \right) - N_d = 0$$

$$\frac{x_2}{4} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(294 \cdot \frac{x_1 - 2d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0$$

Situação 2

Domínios 2, 3 e 4

$$\text{Modelo 1: } 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{3} \cdot \left\{ 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] + 73,5 \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \frac{x_1}{x_3} \right) + f_{yd} \right\} - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{6} \cdot \left\{ f_{yd} - 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] \right\} \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0$$

$$\text{Modelo 2: } 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - d - 0,4x_3) + \frac{x_2}{3} \cdot f_{yd} \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0$$

$$\text{Modelo 3: } 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{3} \cdot \left[73,5 \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \frac{x_1}{x_3} \right) \right] - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - d - 0,4x_3) + \frac{x_2}{3} \cdot f_{yd} \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0$$

$$\text{Modelo 4: } 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 - \frac{x_2}{3} \cdot f_{yd} - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - d - 0,4x_3) + \frac{x_2}{3} \cdot f_{yd} \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0$$

Domínio 4a:

$$\text{Modelo 1: } 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{3} \cdot \left[\frac{36,75}{x_3} \cdot (4x_3 - 3x_1 + 2d') + f_{yd} \right] - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{6} \cdot \left[f_{yd} - \frac{73,5}{x_3} \cdot (x_3 - x_1 + d') \right] \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0$$

$$\text{Modelo 2: } 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{3} \cdot \left[\frac{73,5}{x_3} \cdot (x_3 - x_1 + d') + 2f_{yd} \right] - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{6} \cdot \left[f_{yd} - \frac{73,5}{x_3} \cdot (x_3 - x_1 + d') \right] \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0$$

Sub-domínio 5a:

$$\text{Modelo 1: } 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{3} \cdot \left(147 \cdot \frac{4x_3 - 3x_1 + 2d'}{7x_3 - 3x_1} + f_{yd} \right) - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{6} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(\sigma_3 - 294 \cdot \frac{x_3 - x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0$$

$$\text{Modelo 2: } 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{3} \cdot \left(49 \cdot \frac{2x_3 - x_1}{7x_3 - 3x_1} \right) - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{6} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(196 \cdot \frac{x_1 - 2d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0$$

Sub-domínio 5b:

$$\text{Modelo 1: } 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{3} \cdot \left(147 \cdot \frac{4x_3 - 3x_1 + 2d'}{7x_3 - 3x_1} + f_{yd} \right) - N_d = 0$$

$$\frac{x_2}{6} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \cdot \frac{x_3 - x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0$$

$$\text{Modelo 2: } 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{3} \cdot \left(49 \cdot \frac{2x_3 - x_1}{7x_3 - 3x_1} \right) - N_d = 0$$

$$\frac{x_2}{6} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(196 \cdot \frac{x_1 - 2d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0$$

Situação 3**Domínios 2, 3 e 4**

Modelo 1:
$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \left[f_{yd} + \frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - x_1 - d') \right] - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{24} \cdot \left[\frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - x_1 - d') + 7f_{yd} \right] \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0$$

Modelo 2:
$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \left[\frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - 2x_1 + d') + \frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - x_1 - d') \right] - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{24} \cdot \left[\frac{24,5}{x_3} \cdot (x_1 - 2d') + 6f_{yd} \right] \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0$$

Modelo 3:
$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \left\{ 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] + \frac{24,5}{x_3} \cdot (6x_3 - 3x_1) + f_{yd} \right\} - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{24} \cdot \left\{ \frac{24,5}{x_3} \cdot (x_1 - 2d') - 220,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] + 3f_{yd} \right\} \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0$$

Modelo 4:
$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \left\{ 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] + \frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - 2x_1 + d') + 2f_{yd} \right\} - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{24} \cdot \left\{ 4f_{yd} - 220,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] - \frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - 2x_1 + d') \cdot (x_1 - 2d') \right\} - M_d = 0$$

Modelo 5:
$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 - \frac{x_2}{4} \cdot f_{yd} - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + 7f_{yd} \cdot \frac{x_2}{24} \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0$$

Modelo 6:
$$0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \left\{ 73,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] + \frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - x_1 - d') + f_{yd} \right\} - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{24} \cdot \left\{ 3f_{yd} - 220,5 \cdot \left[1 - \left(\frac{x_1 - d'}{x_3} \right) \right] - \frac{24,5}{x_3} \cdot (3x_3 - x_1 - d') \cdot (x_1 - 2d') \right\} - M_d = 0$$

Domínio 4a:

$$\text{Modelo 1: } 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \cdot \left[\frac{36,75}{x_3} \cdot (4x_3 - 3x_1 + 2d') + 2f_{yd} \right] - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) +$$

$$\frac{x_2}{24} \cdot \left[4f_{yd} + \frac{36,75}{x_3} \cdot (7x_1 - 8x_3 + 6d') \right] \cdot (x_1 - 2d') - M_d = 0$$

Sub-domínio 5a:

$$\text{Modelo 1: } 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \cdot \left(98 \cdot \frac{6x_3 - 5x_1 + 4d'}{7x_3 - 3x_1} + 2f_{yd} \right) - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) +$$

$$\frac{x_2}{24} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(98 \cdot \frac{11x_1 - 12x_3 - 10d'}{7x_3 - 3x_1} + 4f_{yd} \right) - M_d = 0$$

$$\text{Modelo 2: } 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \cdot \left(294 \cdot \frac{3x_3 - 2x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1} + f_{yd} \right) - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) +$$

$$\frac{x_2}{24} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(98 \cdot \frac{10x_1 - 9x_3 - 11d'}{7x_3 - 3x_1} + 3f_{yd} \right) - M_d = 0$$

$$\text{Modelo 3: } 0,68 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 + \frac{x_2}{4} \cdot \left(588 \cdot \frac{2x_3 - x_1}{7x_3 - 3x_1} \right) - N_d = 0$$

$$0,34 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_3 \cdot (x_1 - 0,8 \cdot x_3) + \frac{x_2}{24} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(980 \cdot \frac{x_1 - 2d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0$$

Sub-domínio 5b:

$$\text{Modelo 1: } 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{4} \cdot \left(98 \cdot \frac{6x_3 - 5x_1 + 4d'}{7x_3 - 3x_1} + 2f_{yd} \right) - N_d = 0$$

$$\frac{x_2}{24} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(4f_{yd} + 98 \cdot \frac{-12x_3 + 11x_1 - 10d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0$$

$$\text{Modelo 2: } 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{4} \cdot \left(294 \cdot \frac{3x_3 - 2x_1 + d'}{7x_3 - 3x_1} + f_{yd} \right) - N_d = 0$$

$$\frac{x_2}{24} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(98 \cdot \frac{10x_1 - 9x_3 - 11d'}{7x_3 - 3x_1} + 3f_{yd} \right) - M_d = 0$$

Modelo 3: $0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot x_1 + \frac{x_2}{4} \cdot \left(588 \cdot \frac{2x_3 - x_1}{7x_3 - 3x_1} \right) - N_d = 0$

$$\frac{x_2}{24} \cdot (x_1 - 2d') \cdot \left(980 \cdot \frac{x_1 - 2d'}{7x_3 - 3x_1} \right) - M_d = 0$$