

**RODOLFO ANDRÉ KUCHE SANCHES**

**Análise bidimensional de interação fluido-estrutura: Desenvolvimento de código  
computacional**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia  
de São Carlos, como requisito para a obtenção do  
Título de Mestre em Engenharia de Estruturas

**Orientador: Prof. Assoc. Humberto Breves Coda**

**São Carlos**

**2006**

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTES  
TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO,  
PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca - EESC/USP

S211a Sanches, Rodolfo André Kuche  
Análise bidimensional de interação fluido-estrutura :  
desenvolvimento de código computacional / Rodolfo André  
Kuche Sanches ; orientador Humberto Breves Coda. -- São  
Carlos, 2006.

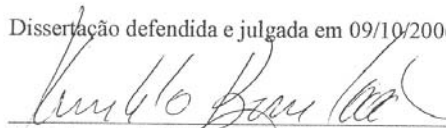
Dissertação (Mestrado - Programa de Pós-Graduação e  
Área de Concentração em Engenharia de Estruturas) --  
Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São  
Paulo.

1. Interação fluido-estrutura. 2. Método dos elementos  
finitos. 3. Dinâmica dos fluidos. I. Título.

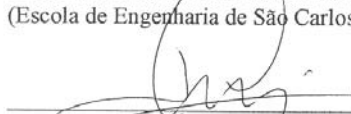
**FOLHA DE JULGAMENTO**

Candidato: Engenheiro **RODOLFO ANDRÉ KUCHE SANCHES**

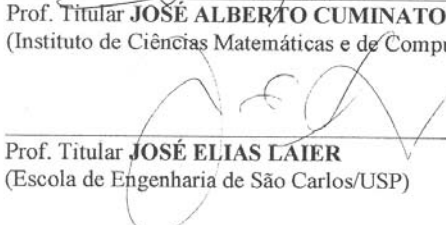
Dissertação defendida e julgada em 09/10/2006 perante a Comissão Julgadora:

  
Prof. Associado **HUMBERTO BREVES CODA (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

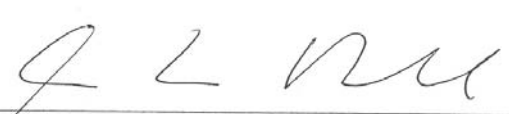
APROVADO

  
Prof. Titular **JOSÉ ALBERTO CUMINATO**  
(Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação/USP)

APROVADO

  
Prof. Titular **JOSÉ ELIAS LAIER**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

  
Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)

  
Profa. Titular **MARIA DO CARMO CALLJURI**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação



Aos meus pais, Carlos e Neuza, pela educação e pelo incentivo aos estudos que me deram.



## AGRADECIMENTOS

Agradeço:

A Deus por tudo

Aos meus pais, Carlos e Neuza pelo apoio, incentivo e amor que me dispensaram durante este trabalho

À minha namorada Leila, por todo o amor, por todo o carinho e por suportar a distância

Aos meus irmãos Rafael e Ricardo pela amizade e incentivo

Ao meu Orientador Humberto Breves Coda pela atenção extraordinária e pela amizade

Ao meu professor de Análise Matricial das Estruturas e primeiro orientador, na UNIOESTE, Humberto Correia Lima Jr., por me ajudar a desenvolver interesse pela área de métodos numéricos aplicados à mecânica das estruturas

Ao professor Geraldo Lombardi do Departamento de Engenharia Mecânica, por me apresentar a mecânica dos fluidos de uma forma bastante especial e ao professor Leandro Franco de Souza do Instituto de Matemática, por me apresentar a CFD

Ao grupo GMEC, em especial ao Rodrigo Paccola pela sua ajuda

Ao professor Venturini pela ajuda nos últimos instantes





## RESUMO

SANCHES, R. A. K. (2006). *Análise bidimensional de interação fluido-estrutura: Desenvolvimento de código computacional*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

O presente trabalho consiste no desenvolvimento de um código computacional baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), para análise bidimensional de interação fluido-estrutura. Desenvolve-se um código bidimensional para dinâmica de fluidos compressíveis, viscosos ou não, em formulação Euleriana, com base no algoritmo CBS – *Characteristic Based Split*. Então o código desenvolvido é adaptado para poder ser acoplado a um programa de formulação Lagrangeana para análise dinâmica de estruturas, o que é feito através do emprego da descrição Lagrangeana - Euleriana Arbitrária (ALE). Por fim procede-se o acoplamento com um código para análise de estruturas, de formulação posicional e não linear geométrica, baseado no Método dos Elementos Finitos.

Palavras-chave: interação fluido estrutura, método dos elementos finitos, dinâmica dos fluidos computacional, não linearidade geométrica



## ABSTRACT

SANCHES, R. A. K. (2006). *Two-dimensional fluid-structure interaction analysis: development of computational code* . Master degree Dissertation – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

The present work consists of the development of a computational code based on the Element Finite Method for fluid-structure interaction analysis. A two-dimensional fluid dynamic Eulerian code is developed based on the CBS algorithm – *Characteristic Based Split*. Then, the computational code is modified to be coupled with a Lagrangean structures dynamical code by using the Arbitrary Lagrangean – Eulerian description (ALE). At the end, the coupling is made with a positional nonlinear geometrical structural dynamics code based on the Finite Element method.

Keywords: fluid structure interaction, finite element method, computational fluid dynamics



## LISTA DE FIGURAS

|  |    |
|--|----|
| Figura 1 – volume de controle .....  | 9  |
| Figura 2 – Força atuando sobre um sistema .....  | 14 |
| Figura 3 – cinemática adotada na descrição ALE.....  | 20 |
| Figura 4 – linhas características.....   | 23 |
| Figura 5 – cinemática de deformação .....  | 37 |
| Figura 6 – seção transversal genérica .....  | 38 |
| Figura 7 – versores e vetores nas 3 configurações.....   | 39 |
| Figura 8 – fluxograma do programa de interação fluido-estrutura.....                                   | 47 |
| Figura 9 – funções de forma para os elementos finitos de fluido .....                                  | 50 |
| Figura 10 – elemento finito de 3 nós e suas variáveis .....  | 52 |
| Figura 11 – geometria e condições iniciais do canal .....  | 53 |
| Figura 12 – malha do canal com propagação de onda.....   | 54 |
| Figura 13 – propagação da onda de pressão .....  | 54 |
| Figura 14 – resultados segundo KAWAHARA e HIRANO (1983).....   | 55 |
| Figura 15 – (a) Malha para o aerofólio NACA0012 (b) Malha na região do aerofólio.                      | 56 |
| Figura 16 – distribuição de Pressão (Pa) para Mach 0,5.....  | 57 |
| Figura 17 - distribuição de massa específica (Kg/m <sup>3</sup> ) para Mach 0,5 .....                  | 57 |
| Figura 18 – distribuição dos valores da componente horizontal de velocidade (m/s) para Mach 0,5 .....  | 58 |
| Figura 19 - distribuição dos valores da componente vertical de velocidade (m/s) para Mach 0,5 .....    | 58 |
| Figura 20 – coeficientes de pressão para Mach 0,85 .....   | 59 |
| Figura 21 - distribuição de Pressão (Pa) para Mach 0,85 .....  | 60 |
| Figura 22 - distribuição de massa específica (Kg/m <sup>3</sup> ) para Mach 0,85 .....                 | 60 |
| Figura 23 - distribuição dos valores da componente horizontal de velocidade (m/s) para Mach 0,85 ..... | 61 |
| Figura 24 - distribuição dos valores da componente vertical de velocidade (m/s) para Mach 0,85 .....   | 61 |
| Figura 25 – coeficientes de pressão para Mach 0,85 .....   | 62 |
| Figura 26 - distribuição de Pressão (Pa) para Mach 1.2 .....   | 63 |
| Figura 27 - distribuição de massa específica (Kg/m <sup>3</sup> ) para Mach 1.2 .....                  | 63 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 28 - distribuição dos valores da componente horizontal de velocidade (m/s) para Mach 1,2.....                  | 64 |
| Figura 29 - distribuição dos valores da componente vertical de velocidade (m/s) para Mach 1.2.....                    | 64 |
| Figura 30 – coeficientes de pressão para Mach 1,2.....  | 65 |
| Figura 31 – malha para escoamento viscoso sobre um placa plana .....  | 66 |
| Figura 32 – distribuição dos valores da componente horizontal de velocidade adimensional sobre a placa.....           | 67 |
| Figura 33 – distribuição dos valores da componente vertical de velocidade adimensional sobre a placa.....             | 67 |
| Figura 34 – distribuição de pressão adimensional sobre a placa.....   | 68 |
| Figura 35 – distribuição de massa específica adimensional sobre a placa.....  | 68 |
| Figura 36 – distribuição de Temperatura adimensional sobre a placa .....  | 69 |
| Figura 37 – taxa de pressão vs. distância relativa da placa .....   | 69 |
| Figura 38 – geometria do canal com degrau .....   | 70 |
| Figura 39 – distribuição de massa específica sobre o degrau.....  | 72 |
| Figura 40 – distribuição de pressão sobre o degrau .....  | 73 |
| Figura 41 – contornos de densidade sobre o degrau segundo LÖHNER et al. (1984).74                                     |    |
| Figura 42 – contornos de pressão segundo LÖHNER et. al. (1984).....   | 75 |
| Figura 43 – geometria da viga.....  | 76 |
| Figura 44 – deslocamentos na extremidade do balanço (a) presente trabalho (b) MARQUES (2006).....                     | 77 |
| Figura 45 – impacto do anel (vazio) contra anteparo rígido sem atrito.....  | 78 |
| Figura 46 – impacto do anel (cheio) contra anteparo rígido sem atrito.....  | 78 |
| Figura 47 – malha para placa vertical.....  | 80 |
| Figura 48 - deslocamento no extremo da placa vs. tempo .....  | 80 |
| Figura 49 – tensões normais na placa.....   | 82 |
| Figura 50 (a-c) – pressão (Pa) sobre a placa flexível .....   | 83 |
| Figura 51 – malha para o aerofólio flexível .....   | 84 |
| Figura 52 – distribuição de pressão (Pa) (a-c) e Distribuição de tensões (Pa) (d-f) sobre o aerofólio deformado ..... | 87 |
| Figura 53 – malha para o arco .....   | 88 |
| Figura 54 – nó usado para gerar os gráficos.....  | 88 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 55 - deslocamento horizontal vs. tempo para o nó de referencia ..... | 89 |
| Figura 56 – pressão (Pa) sobre o arco de espessura de 1 cm .....            | 90 |
| Figura 57 - distribuição de pressão sobre o arco de 5 cm de espessura.....  | 91 |
| Figura 58 - tensões (Pa) no arco de 1 cm de espessura.....                  | 92 |
| Figura 59 - tensões (Pa) no arco de 5 cm de espessura.....                  | 92 |
| Figura 60 – arco treliçado .....  | 93 |
| Figura 61 – deslocamento horizontal vs. Tempo para o arco treliçado .....   | 93 |
| Figura 62 - distribuição de Pressão (Pa) sobre o arco treliçado.....        | 94 |
| Figura 63 – tensões no arco treliçado .....                                 | 95 |

## SUMÁRIO

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.  | Introdução geral.....   | 1  |
| 1.1 | Objetivos.....  | 2  |
| 1.2 | Justificativa.....  | 2  |
| 2   | Introdução técnica .....  | 4  |
| 3   | Equações governantes da mecânica dos fluidos.....   | 9  |
| 3.1 | Equação da conservação da massa .....   | 9  |
| 3.2 | Equação da conservação da quantidade de movimento .....   | 10 |
| 3.3 | Equação da conservação da Energia.....  | 11 |
| 3.4 | O tensor das tensões e a hipótese de Stokes .....   | 13 |
| 4   | Formulação Lagrangeana Euleriana Arbitrária .....   | 19 |
| 4.1 | Formulação ALE das Equações governantes da Mecânica dos Fluidos .....                             | 21 |
| 5   | Modelo Numérico para o problema Fluido-dinâmico .....   | 23 |
| 5.1 | Problemas convecção-difusão – aplicação do método das linhas características...<br>.....          | 23 |
| 5.2 | O Algoritmo CBS – <i>Characteristic based split</i> .....   | 25 |
| 5.3 | Formulação ALE do algoritmo CBS .....   | 31 |
| 5.4 | Condições de contorno .....   | 32 |
| 5.5 | Relações importantes.....   | 34 |
| 6   | Equacionamento da estrutura .....   | 35 |
| 6.1 | Formulação posicional estática para a cinemática de Reissner .....                                | 35 |
| 6.2 | Formulação posicional dinâmica.....   | 41 |
| 6.3 | Método dos Elementos Finitos Posicional para a cinemática de Reissner.....                        | 42 |
| 7   | Algoritmo para acoplamento entre fluido e estrutura.....  | 46 |
| 7.1 | Movimentação dinâmica da malha do domínio fluido .....  | 48 |
| 7.2 | Condições de contorno em velocidade na interface fluido-estrutura .....                           | 49 |
| 8   | Implementação computacional.....  | 50 |
| 8.1 | Implementação do código para mecânica dos fluidos.....  | 50 |
| 8.2 | O programa para a dinâmica das estruturas dos intervalos ao decorrer dos passos<br>no tempo. .... | 51 |
| 9   | Aplicações de mecânica dos fluidos.....   | 53 |
| 9.1 | Onda de pressão em canal .....  | 53 |



|      |   |     |
|------|---|-----|
| 9.2  | Escoamento invíscido através de um aerofólio NACA0012 de corda de um metro – Estado Estacionário .....              | 55  |
| 9.3  | Escoamento supersônico viscoso sobre uma placa – Estado Estacionário .....  | 65  |
| 9.4  | Escoamento invíscido transiente em um canal com degrau.....   | 70  |
| 10   | Aplicações de mecânica das estruturas .....   | 76  |
| 10.1 | Viga engastada. ....  | 76  |
| 10.2 | Impacto de um anel contra anteparo rígido.....  | 77  |
| 11   | Aplicações de Interação Fluido-Estrutura.....   | 79  |
| 11.1 | Escoamento sobre placa vertical engastada. ....   | 79  |
| 11.2 | Escoamento invíscido sobre uma estrutura fina elástica com a geometria do aerofólio NACA 0012 de corda de 1 m. .... | 84  |
| 11.3 | Escoamento sobre arco flexível .....  | 87  |
| 11.4 | Escoamento sobre arco com estrutura interna .....   | 92  |
| 12   | Conclusão.....  | 96  |
|      | Referências Bibliográficas .....  | 98  |
|      | ANEXO I – Integração numérica .....   | 104 |
|      | ANEXO II – variáveis adimensionais da mecânica dos fluidos .....  | 106 |



## 1. Introdução geral

Os problemas de interação fluido-estrutura estão presentes nas mais diversas áreas de engenharia, desde obras de engenharia civil, mecânica, aeronáutica, naval, e até de problemas de biomecânica, como exemplo, a circulação sanguínea, que vem sendo estudado por alguns pesquisadores da área médica tal como GIULIATTI et. al (2002), através de softwares comerciais que trabalham com elementos finitos.

Um problema muito comum de interação entre fluido e estrutura consiste na ação do vento sobre estruturas expostas à atmosfera. Para as obras civis mais comuns, costuma-se considerar o efeito do vento sobre a estrutura como um carregamento estático, porém as estruturas estão sujeitas a vibrações devido ao escoamento do fluido, que podem levar a estrutura à ruína, ANTUNES et. al (2005). Outra aproximação errada assumida no tratamento dos problemas envolvendo fluido e estrutura é o fato de que comumente se considera a estrutura rígida TEIXEIRA (2001).

Um dos exemplos mais clássicos de ruína estrutural devido a problema de interação fluido estrutura é o caso da ponte de Tacoma Narrows, uma estrutura suspensa construída no Estados Unidos, em Puget Sound, Washington, na década de 1940, que entrou em ressonância em 1948, devido à não consideração, durante o projeto, do efeito dinâmico provocado pelo escoamento, ver GLÜCK et. al (2001) por exemplo.

Desde então, tanto os estudos de aerodinâmica, aeroelasticidade e dinâmica dos sólidos obtiveram grandes avanços. Devido à complexidade e número elevado de operações de cálculo envolvidos em problemas destas áreas, o emprego de técnicas computacionais para a resolução dos mesmos tem sido bastante requisitado, de forma que, atualmente, as publicações nestas áreas concentram-se no desenvolvimento de

ferramentas computacionais baseadas em métodos numéricos para análise da interação fluido-estrutura.

## 1.1 Objetivos

Com base no que já foi apresentado, se constrói o objetivo material da pesquisa como sendo: *Desenvolvimento de código computacional para análise bidimensional transiente do acoplamento fluido-estrutura via Método dos Elementos Finitos*, o qual deverá ter importantes aplicações em engenharia, de modo a facilitar o estudo dos problemas de interação fluido-estrutura.

Dentro deste objetivo material, vários objetivos menores podem ser citados, como: o estudo aprofundado da mecânica dos fluidos e a geração de um código para sua análise bidimensional (elementos triangulares com aproximação linear), o estudo da formulação posicional para dinâmica não linear geométrica de estruturas através do uso de elementos isoparamétricos de pórtico, conforme aplicada no programa SGMEC2D, desenvolvido por MACIEL e CODA (2005) e GRECO e CODA (2006), bem como do código do programa SGMEC2D, adaptação do código de mecânica dos fluidos de forma que o mesmo possibilite acoplamento ao SGMEC2D, e, finalmente, o acoplamento fluido-estrutura.

## 1.2 Justificativa

Sendo a utilização de métodos numéricos para mecânica estrutural e dos fluidos um tema bastante atual, qualquer estudo, ou avanço, na referida área torna-se de importância relevante.

Porém, ao se desenvolver um código para interação fluido-estrutura, o qual está baseado em um algoritmo recente para dinâmica dos fluidos (ZIENKIEWICZ e TAYLOR (2000) e NITHIARASU et al. (2000)), e que usa, para a estrutura, uma formulação dinâmica posicional e não-linear geométrica, com elementos finitos de pórtico isoparamétricos de alta ordem (MACIEL e CODA (2005)), é possível simular uma variedade bastante grande de problemas importantes da engenharia, tais como: análise de escoamento bidimensional de fluidos compressíveis viscosos ou não ao redor de corpos rígidos ou flexíveis, efeito do escoamento transiente sobre corpos flexíveis

(análise dinâmica das tensões, deslocamentos e plastificação), e também o estudo de estruturas infláveis.

Com base nisto, o presente trabalho é justificado.

## **2 Introdução técnica**

No presente trabalho explora-se duas áreas da mecânica: a mecânica dos sólidos e a mecânica dos fluidos. Ambas estão baseadas nos mesmos princípios, e os materiais aos quais seus estudos são dirigidos, possuem muitas coisas em comum: tanto no meio fluido como no meio sólido ocorrem tensões e deslocamentos. Porém também existem particularidades que separam estas duas áreas sendo a principal delas, o fato de que o fluido (Newtoniano) não resiste a nenhum valor de tensões desviadoras.

Isso obriga um estudo prévio tanto da mecânica dos fluidos computacional, como da mecânica dos sólidos computacional.

### **2.1.1 A dinâmica dos fluidos computacional**

Como em todos os campos em que são aplicados métodos computacionais, a Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD), teve seu crescimento acelerado com o aumento da potência dos computadores, TEIXEIRA (1996), e continua crescendo e ganhando popularidade.

Na Mecânica dos Fluidos Computacional, os métodos numéricos das Diferenças Finitas e dos Volumes Finitos são largamente utilizados ANDERSON (1995). O Método dos Elementos Finitos (MEF) também vem encontrando o seu espaço neste campo.

O MEF começou a ser aplicado para a solução de escoamentos de fluidos compressíveis a alta velocidade há pouco mais de 20 anos TEIXEIRA (2001), devido principalmente, à extensão do método de Lax-Wendroff, que era baseado no Método das Diferenças Finitas, aos Elementos Finitos ZIENKIEWICZ e TAYLOR (2000).

O MEF foi aplicado pela primeira vez à análise de escoamentos viscosos incompressíveis na década de 1970, e com o tempo mais algoritmos foram desenvolvidos, ou algoritmos que haviam sido inicialmente desenvolvidos para Diferenças Finitas ou para Volumes Finitos foram estendidos e adaptados ao MEF tornando possível a resolução, através deste último método, de todo o tipo de problema envolvendo fluidos, ZIENKIEWICZ e TAYLOR (2000), ZIENKIEWICZ e CODINA (1994), TEIXEIRA (2001) e CHUNG (2002).

Seguindo-se o processo inicialmente introduzido no contexto das diferenças finitas por CHORIN (1968)<sup>1</sup> apud ZIENKIEWICZ e TAYLOR (2000), ZIENKIEWICZ e CODINA (1994) desenvolveram o algoritmo CBS (Characteristic Based Split), que consiste em um algoritmo de 4 passos eficiente para resolver todos os tipos de problemas de escoamento, apresentando discretização temporal explícita, a qual foi empregada no atual trabalho, ou semi-implícita.

### **2.1.2 A dinâmica das estruturas computacional**

A utilização de métodos computacionais na análise estrutural é uma atividade muito antiga e remonta os anos 1960. Tal como ocorreu com a mecânica dos fluidos o Método das Diferenças Finitas teve grande impulso no início dos desenvolvimentos computacionais. Porém, o MEF se destacou como alternativa viável e mais versátil para a solução de problemas de análise estrutural ZIENKIEWICZ e TAYLOR(2000).

Este método se desenvolveu de forma tão efetiva que hoje, apesar de existirem técnicas alternativas de análise estrutural, o MEF é a ferramenta mais difundida neste contexto. Os trabalhos de BELYTSCHKO (1977) et al., ARGYRIS et all (1978, 1979), BATHE (1975) e CRISFIELD (1991) são apenas uma ínfima mostra da intensa atividade científica em torno do desenvolvimento do MEF para a análise de estruturas em regime de grandes deslocamentos. Trabalhos de SIMO e colaboradores (1984,1986 e 1992) não podem deixar de ser mencionados pelo grande impulso ao estudo da dinâmica não linear de estruturas via MEF, com a criação e desenvolvimento da formulação corrotacional, uma das mais difundidas até os dias de hoje para a solução deste tipo de problema.

---

<sup>1</sup> A.J. Chorin; Numerical solution of Navier-Stokes equations. Math. Comput., 22, 745-762, 1968

Deve-se ressaltar, entretanto que até onde o autor conhece da literatura, o desenvolvimento da formulação posicional do MEF aplicada à análise não linear geométrica de estruturas submetidas a ações dinâmicas teve origem com o trabalho de CODA (2003) e GRECO (2004) e vem se desenvolvendo de maneira bastante satisfatória como atestam os trabalhos de GRECO & CODA (2004a e 2004b), CODA & GRECO (2006), MARQUES (2006) e MACIEL & CODA (2005).

### **2.1.3 Acoplamento fluido-estrutura**

Logo que os métodos numéricos passaram a oferecer confiança na resolução de problemas da mecânica dos Sólidos e da Mecânica dos Fluidos, passou-se ao estudo de problemas acoplados, sejam estes problemas do tipo sólidos heterogêneos, interação solo-estrutura, poro-elasticidade, poro-plasticidade ou interação entre escoamento de fluido e estrutura ZIENKIEWICZ e TAYLOR (2000).

Nos anos mais recentes, importantes progressos são notados na solução de problemas complexos de interação fluido-estrutura. Os métodos para simulação de tais problemas são divididos em dois grupos segundo TEIXEIRA e AWRUCH (2005), que são o grupo dos métodos particionados e o grupo dos métodos monolíticos.

Nos métodos particionados, as equações governantes do fluido e da estrutura são integradas no tempo separadamente. Vários pesquisadores vêm estudando o assunto através desse método, acoplando algoritmos para Dinâmica dos Fluidos a algoritmos para Dinâmica dos Sólidos, como o trabalho desenvolvido por TEIXEIRA (2001) em tese de doutoramento, onde foram desenvolvidos um algoritmo de dois passos baseado no MEF para resolução tri-dimensional do fluido, e um algoritmo de análise estrutural por elementos finitos de casca, e então acoplados.

Nos métodos monolíticos, ambos os domínios sólido e fluido são tratados como uma única entidade, sendo integrados simultaneamente no tempo, como no trabalho desenvolvido por BLOM (1998).

Dentre as características do problema encontradas na literatura, é importante observar que como a maioria dos problemas físicos de Engenharia, a mecânica dos fluidos e dos sólidos se constituem de 3 princípios fundamentais, que são: 1. Conservação da massa, 2. As três Leis de Newton são válidas e 3. Conservação da Energia.



Para modelar matematicamente os referidos problemas, primeiro escolhe-se um referencial preferencialmente inercial, e então se aplicam os três princípios básicos ao problema, podendo ser feito o uso de:

a) Um sistema isolado, que pode ser definido por um elemento ou conjunto de elementos interessante ao estudo, isolado do meio por uma fronteira impermeável à massa, de forma que um sistema terá sempre a mesma massa, permitindo apenas o transporte de calor e trabalho através da fronteira do mesmo.

b) Um Volume de Controle, definido por uma região do espaço interessante para o estudo, cuja fronteira é chamada de Superfície de Controle e é permeável à massa, ou seja, permite transporte de matéria para dentro ou para fora do Volume de Controle. Assim, geralmente, por facilitar a solução, o Volume de Controle possui o volume fixo e a massa variável.

O uso de sistemas isolados é muito interessante quando a matéria do problema físico a ser estudado não se desloca excessivamente em relação ao referencial. São exemplos desses problemas: os problemas de compressão ou descompressão de gases, problemas de hidrostática e problemas da mecânica dos sólidos. Por outro lado, o uso de Volumes de Controle torna-se muito interessante quando se trata de problemas que envolvam fluxo de massa, tal como escoamento de fluido, tal como explica FOX e MACDONALD (2001).

Desta forma, é ideal que uma formulação para uma análise de mecânica dos sólidos seja obtida por meio de um sistema isolado, gerando eficientemente uma descrição Lagrangeana do problema, enquanto é ideal que uma formulação para análise de um escoamento de fluido seja obtida através do emprego de Volume de Controle com fronteira permeável à massa, numa descrição Euleriana.

Disto resulta que, tratando-se de problemas de interação fluido-estrutura, existe a necessidade de tratar de forma diferente o domínio fluído em relação ao domínio sólido, e reformular as equações Eulerianas do fluido de forma que possam ser acopladas às equações Lagrangeanas do sólido. Isso pode ser feito gerando-se uma formulação Lagrangeana Euleriana Arbitrária (ALE), DONEA et al. (1982) e TEIXEIRA e AWRUCH (2005). Então pode-se acoplá-los impondo as corretas condições de contorno em suas fronteiras. Neste sentido deve-se estar atento para a característica explícita dos integradores temporais em mecânica dos fluidos, incluindo algoritmos de integração com passo de tempo descontínuo (NITHIARASU et al.

(2000)), e para a característica implícita dos integradores mais eficientes para análise estrutural, como o método de Newmark beta (ARGYRIS e MLEJNEK (1991)).

Assim, parece que a aplicação das condições de contato seriam dificultadas, porém a versatilidade das técnicas explícitas levam a uma simplificação muito importante que é a possibilidade de se aplicar as condições de contato de forma explícita, ou seja, aceitando a pressão e tensão (força de superfície) calculada no fluido em um passo de tempo anterior como carregamento constante no passo presente do sólido, que de forma implícita atingirá o equilíbrio e uma nova configuração que servirá de posição de referência para o fluido no seu próximo passo de tempo.

Um último detalhe a ser considerado durante a análise de interação fluido-estrutura é a movimentação da malha do domínio fluido. Dentre as técnicas para movimentação de malha apresentadas na literatura, destacam duas: A primeira trata a malha como um sistema estrutural (FARHAT (1995) e TEIXEIRA (2001)) composto por barras de treliça, rotuladas nos nós da malha, a segunda e mais empregada técnica consiste na movimentação dos nós através de uma média ponderada da distancia do nó em relação aos nós dos contornos fixo e móvel (DONEA et. al. (1982) e TEIXEIRA (2001)), e os efeitos da velocidade de movimentação da malha são levados em consideração pela formulação Lagrangeana Euleriana Arbitrária (DONEA et. al. (1982)).

### 3 Equações Governantes da Mecânica dos Fluidos

#### 3.1 Equação da conservação da massa

Baseando-se no princípio da conservação da massa, faz-se o balanço do fluxo de massa no volume de controle infinitesimal, de dimensões  $dx$ ,  $dy$  e  $dz$ , da Figura 1. Para um intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , tem-se que tal balanço deve ser igual à variação da massa no mesmo intervalo conforme eq. (1) (ANDERSON (1995))

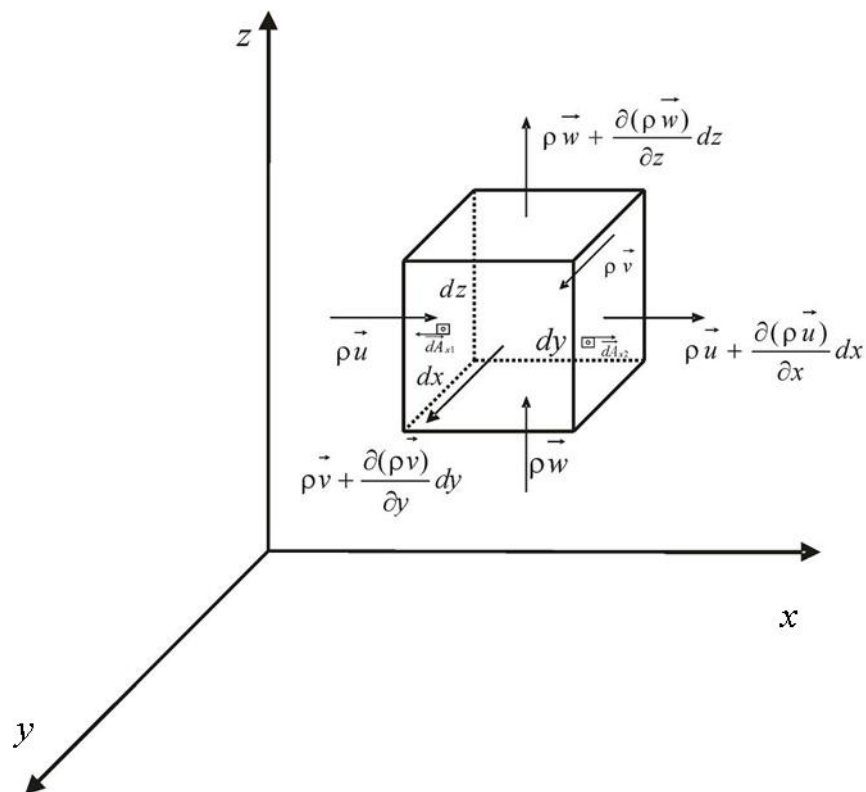


Figura 1 – volume de controle

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz = & -((\rho \vec{u}) \cdot \vec{dA}_{x_1} + (\rho \vec{v}) \cdot \vec{dA}_{y_1} + (\rho \vec{w}) \cdot \vec{dA}_{z_1}) \\ & + (\rho \vec{u} + \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial x} dx) \cdot \vec{dA}_{x_2} + (\rho \vec{v} + \frac{\partial \rho \vec{v}}{\partial y} dy) \cdot \vec{dA}_{y_2} + (\rho \vec{w} + \frac{\partial \rho \vec{w}}{\partial z} dz) \cdot \vec{dA}_{z_2} \end{aligned} \quad (1)$$

onde  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  são os vetores velocidade, respectivamente nas direções dos eixos cartesianos  $x$ ,  $y$  e  $z$ ,  $\rho$  é a massa específica do fluido e  $\vec{dA}_{x_1}$ ,  $\vec{dA}_{x_2}$ ,  $\vec{dA}_{y_1}$ ,  $\vec{dA}_{y_2}$ ,  $\vec{dA}_{z_1}$  e  $\vec{dA}_{z_2}$ , são respectivamente os vetores área referentes à primeira e a segunda face ortogonal aos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Dividindo-se pelo volume, resolvendo os produtos vetoriais e reorganizando-se a eq. (1), escreve-se a Equação da Conservação da massa, ou equação da Continuidade conforme a eq (2).

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} \quad (2)$$

### 3.2 Equação da conservação da quantidade de movimento

A segunda Lei de Newton afirma que a soma das forças externas que atuam em um corpo é igual a variação da quantidade de movimento do mesmo (força igual a massa vezes aceleração) (eq. (3)) sendo que as forças externas podem ser dadas pelas forças de superfície somadas às forças de campo.

$$\frac{D(m \cdot \vec{V})}{Dt} = \sum F_s + \sum F_c \quad (3)$$

Fazendo-se o agora o balanço da quantidade de movimento para o volume de controle Figura 1, num intervalo de tempo infinitesimal  $dt$ , tem-se que tal balanço é igual à variação da quantidade de movimento  $\rho \vec{u}$  no referido intervalo. Tomando-se então a direção do eixo  $x$ , tem-se a eq. (4). (Ziekiewicz e Taylor, 2000)

Em  $x$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) dx dy dz = & -(\rho \vec{u} \cdot \vec{dA}_{x_1}) + \rho \vec{u} \cdot \vec{dA}_{x_2} + \rho \vec{u} \cdot \vec{dA}_{x_3} \\ & + (\rho \vec{u} + \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial x} dx) \cdot \vec{dA}_{x_2} + (\rho \vec{u} + \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial y} dy) \cdot \vec{dA}_{x_3} + (\rho \vec{u} + \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial z} dz) \cdot \vec{dA}_{x_3} \end{aligned} \quad (4)$$

Resolvendo os produtos internos, multiplicando por (-1), excluindo os termos que se anulam e dividindo pelo volume, chega-se a eq.(5):

$$-\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) = \frac{\partial u\rho\vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial v\rho\vec{u}}{\partial y} + \frac{\partial w\rho\vec{u}}{\partial z} \quad (5)$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são os módulos das componentes de velocidade  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ .

Da segunda Lei de Newton conclui-se que:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{u}) + \frac{\partial u\rho\vec{u}}{\partial x} + \frac{\partial v\rho\vec{u}}{\partial y} + \frac{\partial w\rho\vec{u}}{\partial z} = \frac{1}{dxdydz}(\sum \vec{F}_c + \sum \vec{F}_s) \quad (6)$$

Chamando de  $g$  a constante de forças de campo, pode escrever o módulo da soma das Forças externas conforme a eq.(7):

$$\frac{1}{dxdydz}(\sum F_c + \sum F_s) = g_x\rho + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7)$$

onde  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\partial \tau_{xz}$  são as tensões desviadoras e  $p$  é a pressão.

Substituindo a norma da eq.(6) na eq.(7), chega-se a forma final da equação da quantidade de movimento na direção x (eq.(8)).

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial u\rho u}{\partial x} + \frac{\partial v\rho u}{\partial y} + \frac{\partial w\rho u}{\partial z} = g_x\rho + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (8)$$

Repetindo-se o processo para os demais eixos cartesianos, chega-se às equações eq. (9) e eq.(10).

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial u\rho v}{\partial x} + \frac{\partial v\rho v}{\partial y} + \frac{\partial w\rho v}{\partial z} = g_y\rho + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial y} \quad (9)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial u\rho w}{\partial x} + \frac{\partial v\rho w}{\partial y} + \frac{\partial w\rho w}{\partial z} = g_z\rho + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (10)$$

### 3.3 Equação da conservação da Energia

De todas as Equações já expostas neste capítulo, nota-se que as variáveis independentes são as velocidades, a pressão e a densidade. Ou seja, tem-se 5 variáveis para 4 equações, o que torna impossível resolver o sistema até aqui.

Da primeira Lei da termodinâmica, tem-se que a energia interna do sistema é a soma de todas as energias (cinética, potencial, etc.) de todas as partículas que o constituem e, como tal, sendo uma propriedade do sistema, de forma que a variação da energia interna só depende dos estados inicial e final da transformação considerada.

No caso do escoamento, a energia interna do sistema pode variar devido a troca de energia e trabalho com a vizinhança de acordo com a eq. (11)

$$\Delta(\rho E) = Q - W \quad (11)$$

onde  $E$  é a energia total,  $Q$  é o fluxo de calor e  $W$  é o trabalho realizado.

Ou seja, para o sistema em análise:

$$\frac{D(\rho E)}{Dt} = Q - W \quad (12)$$

Escrevendo-se o balanço de energia interna para o volume de controle da Figura 1 num intervalo infinitesimal  $dt$ , tem-se a eq. 13.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho E)dxdydz &= ((\rho E\bar{u})d\vec{A}_{x_1} + (\rho E\bar{v})d\vec{A}_{y_1} + (\rho E\bar{w})d\vec{A}_{z_1}) \\ &- ((\rho E\bar{u} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho E\bar{u})dx)d\vec{A}_{x_2} + (\rho E\bar{v} + \frac{\partial}{\partial y}(\rho E\bar{v})dy)d\vec{A}_{y_2} \\ &+ (\rho E\bar{w} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho E\bar{w})dz)d\vec{A}_{z_2}) \end{aligned} \quad (13)$$

dividindo-se a Eq. 13 pelo volume, chega-se a eq. 14:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho E\bar{u}) - \frac{\partial}{\partial y}(\rho E\bar{v}) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho E\bar{w}) \quad (14)$$

da primeira Lei da Termodinâmica (eq. 12), obtém-se a (eq. 15).

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho E\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho E\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho E\bar{w}) - \frac{Q}{dxdydz} + \frac{W}{dxdydz} = 0 \quad (15)$$

Fazendo-se o balanço da quantidade de calor no volume de controle, encontra-se que  $Q$  pode ser expresso pela eq. (16) onde  $k$  é o coeficiente de condutividade térmica e  $T$  é a temperatura.

$$\frac{Q}{dxdydz} = k \frac{\partial}{\partial x}T + k \frac{\partial}{\partial y}T + k \frac{\partial}{\partial z}T \quad (16)$$

O trabalho pode ser dividido em 3 parcelas: a primeira, que pode ser chamada de trabalho de escoamento, é a parcela referente às forças normais (pressão), a segunda, age em sentido contrário ao escoamento ocasionando a chamada perda de carga, deve-se as tensões tangenciais geradas pela viscosidade, e a terceira parcela refere-se ao trabalho realizado pelas forças de campo. Fazendo o balanço de trabalho sobre o volume de controle e dividindo-se pelo volume, chega-se à eq. (17).

$$\begin{aligned}
\frac{W}{dxdydz} &= \frac{\partial}{\partial x}(-pu) + \frac{\partial}{\partial y}(-pv) + \frac{\partial}{\partial z}(-pw) + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}u) + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}v) + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}w)\right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}v) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}u) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}w) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz}w) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}u) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy}v)) + \rho g_x u \\
&+ \rho g_y v + \rho g_z w
\end{aligned} \quad (17)$$

Das eq. (15), (16) e (17), chega-se à forma final da Equação da conservação da Energia (eq. (18)), Sendo assumida para a pressão a relação constitutiva dada pela Lei dos gases perfeitos, de Clapeyron (eq. (19)).

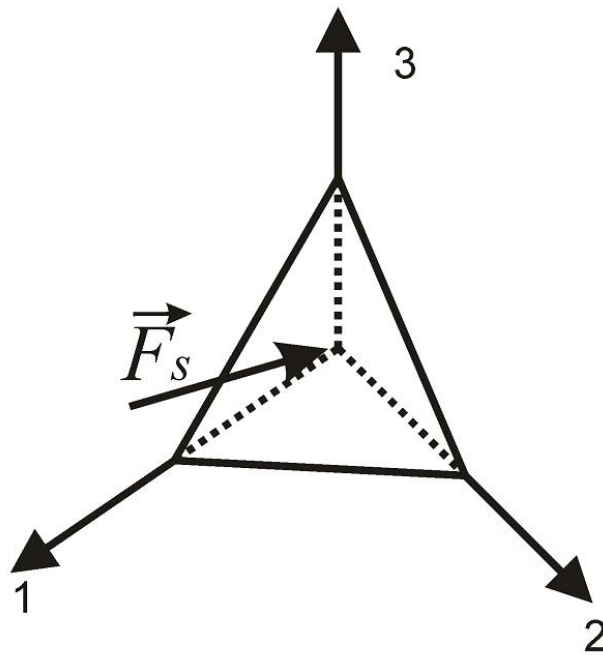
$$\begin{aligned}
&: \\
\frac{\partial}{\partial t}(\rho E) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho Eu) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho Ev) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho Ew) - k \frac{\partial}{\partial x}T - k \frac{\partial}{\partial y}T - k \frac{\partial}{\partial z}T \\
&+ \frac{\partial}{\partial x}(-pu) + \frac{\partial}{\partial y}(-pv) + \frac{\partial}{\partial z}(-pw) + \left(\frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xx}u) + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xy}v) + \frac{\partial}{\partial x}(\tau_{xz}w)\right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yy}v) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx}u) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yz}w) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zz}w) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx}u) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zy}v)) \\
&+ \rho g_x u + \rho g_y v + \rho g_z w = 0
\end{aligned} \quad (18)$$

$$p = \rho RT \quad (19)$$

### 3.4 O tensor das tensões e a hipótese de Stokes

Para que se possa compreender a hipótese de Stokes, é necessário que se faça um estudo sobre as principais propriedades do tensor das tensões, conforme segue, através da definição de tensões de Cauchy (VALLIAPPAN (1981)).

Tomando-se o sistema fluido da Figura 2, uma força de superfície  $\vec{F}_s$ , que atue sobre o mesmo, ao ser decomposta obedece a uma única restrição: A componente normal necessariamente existe e tem sentido do meio para o sistema. Já as componentes tangenciais, se existirem, podem ter sentido qualquer. Assim, uma força de superfície pode gerar um estado com 9 tensões não nulas.



**Figura 2 – Força atuando sobre um sistema**

Decompondo-se a força  $\vec{F}_s$ , as componentes  $\vec{F}_{ii}$ , paralela ao eixo  $i$  ( $x, y$ , ou  $z$ ), sempre existe, e pode ser escrita em função da área  $A_i$ , que tem o eixo  $i$  perpendicular, e da tensão normal  $\sigma_{ii}$ , e do versor  $\vec{i}$  normal à área  $A_i$ , com mesma direção e sentido do eixo  $i$ , conforme a eq.(20).

$$\vec{F}_{ii} = -A_i \vec{i} \cdot \vec{i} \sigma_{ii} \cdot \vec{i} = -A_i \sigma_{ii} \vec{i} \quad (20)$$

Já as componentes tangenciais, se existirem, serão duas em cada face e serão normais entre si com sentido compatível com o problema (depende da direção e sentido do escoamento). A componente tangencial que atua na superfície  $A_i$  na direção  $j$   $k$  ( $i$  e  $j$  podem ser  $x, y$ , ou  $z$ ) podem ser escritas em função dos versores e das tensões tangenciais  $\tau_{ij}$  e  $\tau_{ik}$ , de acordo com a eq. 21

$$\vec{F}_{ij} = -A_i \vec{i} \cdot \vec{i} \tau_{ij} \cdot \vec{j} = -A_i \tau_{ij} \cdot \vec{j} \quad (21)$$

O tensor das tensões pode então ser escrito como:



$$T = \begin{bmatrix} -\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -\sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -\sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{Eq. 22}$$

Uma propriedade importante que o tensor das tensões apresenta é a simetria, a qual pode ser facilmente demonstrada fazendo-se o somatório de momento em torno de cada um dos eixos, o que pode ser feito com o auxílio da equação de Euler do movimento giratório.

Dependendo do plano considerado, os valores das tensões normais e tangenciais se alteram, sendo possível achar um plano que tenha o máximo valor para a tensão normal, no qual as tensões tangenciais serão nulas, e as tensões normais são chamadas tensões principais, VALLIAPAN (1981).

Conhecendo-se o estado de tensões em um plano, pode-se calcular as tensões normais em outro plano, multiplicando-se o tensor das tensões pelo vetor dos cossenos diretores do referido plano. (eq. (23))

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{nx} \\ \sigma_{ny} \\ \sigma_{nz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -\sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -\sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Partindo-se do tensor das tensões em um sistema de coordenadas, pode-se conhecer o tensor e qualquer outro sistema de coordenadas obtido pela rotação do primeiro, através do teorema de Cauchy, conforme eq. (24):

$$\begin{bmatrix} -\sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & -\sigma_{y'y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & -\sigma_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & -\sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & -\sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Aplicando-se a eq. (23) ao estado principal de tensões, chamando as tensões principais de  $\sigma$ , e em seguida substituindo na eq. (24), é obtido o sistema da eq. (26), o qual admite solução trivial quando o determinante constituinte não é nulo e ou não trivial quando seu determinante é nulo.

$$\begin{bmatrix} -\sigma_{x'x'} - \sigma & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & -\sigma_{y'y'} - \sigma & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & -\sigma_{z'z'} - \sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (25)$$

Assim, obtém-se a eq. (26), na qual as 3 raízes correspondem à 3 tensões principais e os 3 coeficientes das variáveis devem ser invariantes e são mostrados na eq. (27).

$$\begin{aligned} & \sigma^3 + (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\sigma^2 + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma \\ & + (\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\tau_{xy}^2 - \sigma_{yy}\tau_{yz}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \\ I_2 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \\ I_3 &= \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\tau_{xy}^2 - \sigma_{yy}\tau_{yz}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} \end{aligned} \quad (27)$$

A hipótese de Stokes afirma qualitativamente que para um fluido estático as tensões normais em um ponto são constantes e independem da direção do plano de análise, que as flutuações que possam ocorrer são devidas à existência de escoamento e de o fluido ser real, e por fim, que as flutuações são de ordens de grandeza menores que o valor das tensões normais, adota-se um tensor médio, com valores médios  $\sigma_m$ , e sobre esses valores se adiciona o incremento de perturbação  $\tau_{ii}$  devido ao escoamento, de forma a ter-se um tensor médio diagonal (eq. 28) e um tensor desvio (eq. 29), tal que o tensor das tensões seja a soma dos dois.

$$T_m = \begin{bmatrix} -\sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\tau = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (29)$$

### 3.4.1 Lei da viscosidade de Newton

A Lei da viscosidade de Newton estabelece que a tensão tangencial para fluidos escoando paralelamente à uma superfície com uma velocidade  $V$  de

componentes  $u_i$ ,  $u_j$ , e  $u_k=0$ , onde  $k$  é a direção perpendicular à superfície é dada pela Eq. 30, onde  $\mu$  é uma propriedade do fluido chamada viscosidade dinâmica FOX e MACDONALD (2000).

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (30)$$

Pelo primeiro invariante da eq.19, tem-se que a soma das tensões  $\tau_{ii}$  deve ser nula. Deve-se então estabelecer a relação funcional entre  $\tau_{ii}$  e as taxas de deformação de forma a satisfazer esta condição.

Assim, define-se  $\tau_{ii}$  através da eq. 31, onde  $\lambda$  é um coeficiente que deve fazer satisfazer o primeiro invariante.

$$\tau_{ii} = 2\mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \lambda Div(V) \quad (31)$$

Embora para escoamentos incompressíveis o valor de  $\lambda$  não tenha significado, pois o divergente da velocidade é nulo, para os escoamentos compressíveis ele se faz necessário.

A hipótese de Stokes consiste na eq. (32):

$$3\lambda + 2\mu = 0 \quad (32)$$

Assim, das equações eq. (29), (30) e (32), escreve-se o tensor desvio para escoamento compressíveis de fluidos Stokesianos (eq. (33)).

$$\tau = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3}\mu Div(V) + 2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & -\frac{2}{3}\mu Div(V) + 2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) & \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \mu\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & -\frac{2}{3}\mu Div(V) + 2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right) \end{bmatrix} \quad (33)$$

Ou, escrevendo-se a eq. (33) em uma notação indicial, finalmente tem-se a eq. (34).

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \quad (34)$$

Considerando válida a relação da eq. (34) para as equações da quantidade de movimento (eq. (9) - eq. (11)), tem-se as equações completas de Navier-Stokes em formulação Euleriana.

#### 4 Formulação Lagrangeana Euleriana Arbitrária

A descrição Lagrangeana expressa o movimento de um meio contínuo em termos da configuração inicial e do tempo (referência fixa) e é tradicionalmente usada na mecânica dos sólidos, onde o propósito das análises em geral é determinar os deslocamentos dos pontos de um corpo a partir de sua forma inicial. A descrição Euleriana, por outro lado, é definida em termos da configuração deformada e do tempo, sendo muito aplicada a mecânica dos fluidos, onde as variáveis geralmente são velocidades e não deslocamentos, ver por exemplo VALLIAPPAN (1981).

Sendo o fluido modelado por uma formulação Euleriana e o sólido por uma formulação Lagrangeana (método particionado), surgem dificuldades para se analisar ambos simultaneamente. A solução para o acoplamento entre o fluido e a estrutura é descrever o fluido através da formulação lagrangeana-euleriana arbitrária (ALE) (TEIXEIRA (2001)).

A formulação ALE é obtida introduzindo-se um domínio de referência com movimento arbitrário e independente dos pontos materiais, conforme a Figura 5 onde  $R$ ,  $C(t_0)$  e  $C(t)$  são respectivamente os domínios de referência e contínuo no tempo inicial  $t_0$  e final  $t$ . O domínio  $R$  será tomado como o domínio computacional, contendo a malha de pontos da formulação do MEF. Uma partícula na formulação ALE, tal como na formulação lagrangeana, é definida nas suas coordenadas materiais na configuração inicial do contínuo, mas o processo de definição é indireto e feito sobre o vetor posição  $\xi$  que está ligado à variável  $a$  e à variável  $t$ , de acordo com a lei que rege o movimento do domínio de referência (DONEA et al. (1982)).

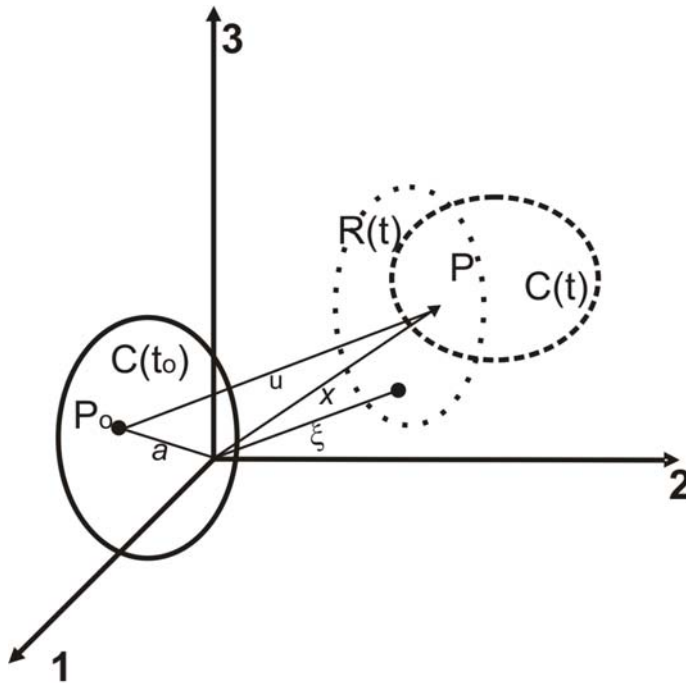


Figura 3 – cinemática adotada na descrição ALE

Então, conforme DONEA et. Al. (1982), a formulação ALE pode ser vista como um mapeamento da configuração inicial do contínuo para a configuração atual do plano de referência. O Jacobiano  $J$  da eq. (35) liga o domínio de referência e o domínio material.

$$J = \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial a_j} \right| \quad (35)$$

Trabalhando-se algebricamente (ver DONEA et. Al. (1982)), obtém-se a relação da eq. (36):

$$\frac{\partial J}{\partial t} = J \nabla \cdot w \quad (36)$$

onde  $w$  é a velocidade de movimentação do domínio de referência.

Para estudar a cinemática da formulação ALE, toma-se, por exemplo, uma propriedade física  $f(\xi_i, t)$ , expressa na representação de referência, igual a  $\bar{f}(a_i, t)$ , visto que  $\xi_i$ , componente de  $\xi$  com  $i = 1, 2$  ou  $3$ , é dependente de  $a_i$ , escrevendo-se a eq. (37).

$$\frac{\partial \bar{f}(a_i, t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\xi_i, t)}{\partial t} \Big|_{\xi} + \frac{\partial f(\xi_i, t)}{\partial \xi_i} \left( \frac{\partial \xi_i}{\partial t} \right) \quad (37)$$

Observando-se que  $\frac{\partial \xi_i}{\partial t}$  é a velocidade  $w_i$ , tem-se a Eq. 38:

$$\nabla \cdot (fw_i) = f\nabla \cdot w_i + w_i \cdot \nabla f \quad (38)$$

das eq. (36) e (38), tem-se finalmente a cinemática da propriedade  $f$  representada pela eq. (39).

$$\frac{\partial (Jf)}{\partial t} = J \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (fw) \right] \quad (39)$$

#### 4.1 Formulação ALE das equações governantes da Mecânica dos Fluidos

Tomando-se as Equação governantes (eq.(2), (8)-(10) e (18)) observa-se que estas podem ser reescritas indicialmente, com os índices  $i, j$  e  $k$  sendo  $x, y$  ou  $z$ , conforme eq. (40), (41) e (42).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} \quad (40)$$

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial t} = - \frac{\partial (u_j \rho u_i)}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (41)$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \rho E) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j p) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} u_j) \quad (42)$$

Fazendo  $f = \rho$  na eq. (39) e levando-se em conta a eq. (40), chega-se à eq. (43):

$$\frac{\partial (\rho J)}{\partial t} = J \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho (w_i - u_i)) \quad (43)$$

Com o auxílio das eq. (36) e (38), pode-se escrever a eq. (43) na forma diferencial, eq. (44):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} (w_i - u_i) - \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (44)$$

a qual pode ser reescrita conforme a eq. (45), que representa a equação da conservação da massa na descrição ALE.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \quad (45)$$

Procedendo-se da mesma forma com as eq. (41) e (42), obtém-se a formulação ALE das equações da conservação da quantidade de movimento e da energia (eq. (46) e eq. (47)).

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(u_j \rho u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \rho g_i = w_j \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_j} \quad (46)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial(u_j \rho E)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial(u_j p)}{\partial x_j} - \frac{\partial(\tau_{ij} u_j)}{\partial x_j} = w_i \frac{\partial(\rho E)}{\partial x_i} \quad (47)$$

Observa-se que quando a velocidade da malha  $w$  for nula, a formulação é a Euleriana, e quando a velocidade  $w$  for igual à velocidade  $u$  a formulação é a Lagrangeana (DONEA et al. (1982)).



## 5 Modelo numérico para o problema fluido-dinâmico

### 5.1 Problemas convecção-difusão – aplicação do método das linhas características

Se uma partícula se propaga com uma determinada característica, com determinada velocidade constante  $u$ , que é idêntica à velocidade de convecção para problemas escalares (NITHIARASU et al. (2000)), a distância  $y$  percorrida por esta partícula, para um caso unidimensional linear é expressa pela eq. (48), onde  $t$  representa o tempo.

$$y = x + u(t_{n+1} - t_n) \quad (48)$$

Da Figura 4, pode-se escrever a eq. (49):

$$\phi(x)_n = \phi(y)_{n+1} \quad (49)$$

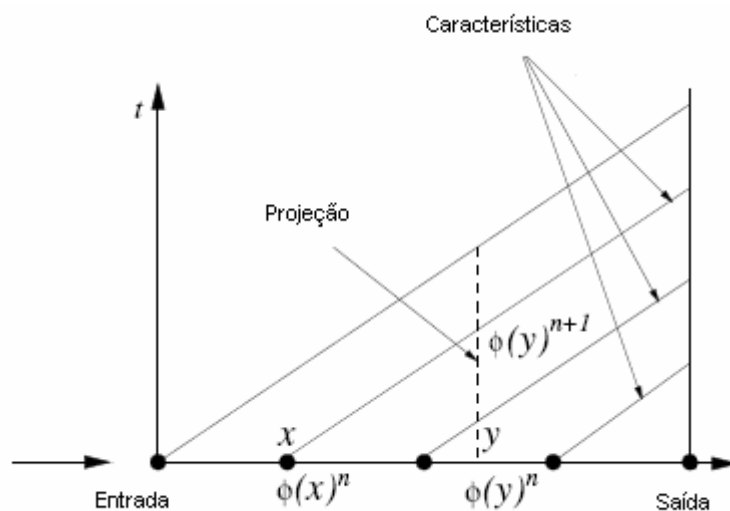


Figura 4 – linhas características

à qual é possível ponderar e integrar sobre o domínio de forma a obter-se a forma fraca da mesma (eq.(50)).

As funções ponderadoras correspondentes a  $x$  ou a  $y$  podem ser aplicadas para tal, aqui, opta-se pela função ponderadora  $w(y)$  em  $y$ .

$$\int_{\Omega} \phi(x)_n w(y) d\Omega = \int_{\Omega} \phi(y)_{n+1} w(y) d\Omega \quad (50)$$

Fazendo-se também a ponderação no espaço, tem-se:

$$\int_{\Omega} N_i(x) \phi(x)_{n,i} N_j(y) d\Omega = \int_{\Omega} N_i(y) \phi(y)_{n+1,i} N_j(y) d\Omega \quad (51)$$

Como  $N_i(x)$  e  $N_i(y)$  estão em diferentes posições no espaço, não é possível integração exata.

Usa-se então um método que consiste em uma expansão local por série de Taylor (NITHIARASU et al. (2000)). A equação de convecção escalar em uma dimensão sobre uma característica, é expressa na eq. (52):

$$\frac{d\phi}{dt}(x', t) = 0 \quad (52)$$

Onde  $x'$  representa as coordenadas características. Discretizando-se a eq. (52) no tempo, tem-se:

$$\frac{\phi(y)_{n+1} - \phi(x)_n}{\Delta t} = 0 \quad (53)$$

É necessário, para que se torne viável a integração, que se tenha  $\phi(x)_n$  em função dos valores em  $y$ . Para isso pode-se fazer o uso da expansão por série de Taylor.

Para tal, o processo pode iniciar-se com a expansão apresentada na eq. (54):

$$\phi(x)_n = \phi(y)_n - (y-x) \frac{\partial \phi(y)_n}{\partial x} + \frac{(y-x)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(y)_n}{\partial x^2} - \frac{(y-x)^3}{6} \frac{\partial^3 \phi(y)_n}{\partial x^3} + \dots \quad (54)$$

calculando-se  $(y-x)$  a partir da eq. (48) e substituindo na eq. (54), resulta:

$$\phi(x)_n = \phi(y)_n - \Delta t u \frac{\partial \phi(y)_n}{\partial x} + \frac{(\Delta t u)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(y)_n}{\partial x^2} - \frac{(\Delta t u)^3}{6} \frac{\partial^3 \phi(y)_n}{\partial x^3} + \dots \quad (55)$$

Substituindo-se a eq. (55) na eq. (53), obtém-se a eq. (56):

$$\frac{\phi(y)_{n+1} - \phi(y)_n}{\Delta t} = -u \frac{\partial \phi(y)_n}{\partial x} + \frac{\Delta t u^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(y)_n}{\partial x^2} - \frac{\Delta t^2 u^3}{6} \frac{\partial^3 \phi(y)_n}{\partial x^3} + \dots \quad (56)$$

Deve notar-se que para uma convecção linear a velocidade média  $u$  é constante e não é necessário mais aproximações, porém para convecção não linear, mais

aproximações são necessárias. A eq. (56) é uma forma não conservativa da convecção, sendo diretamente aplicável a problemas incompressíveis ou sem aproximações de divergência, com velocidade constante (NITHIARASU et. al, (2000)).

Para se obter a forma conservativa da equação de convecção com propagação não linear, NITHIARASU et. al, (2000) usa a aproximação para  $u\phi(x)$  apresentada na eq. (57).

$$u\phi(x)_n = u\phi(y)_n - (y-x) \frac{\partial}{\partial x} (u\phi(y))_n + \frac{(y-x)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u\phi(y))_n - \frac{(y-x)^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} (u\phi(y))_n \quad (57)$$

Assumindo que a eq. (48) é válida, isolando-se  $\Delta t$  na mesma e substituindo na eq. (53) e em seguida na, chega-se à eq. (58 a), que é a forma do método simples baseado em características para uma equação escalar de convecção linear. Para uma convecção não linear são necessárias mais aproximações, o que pode ser feito segundo NITHIARASU(2000), introduzindo-se uma aproximação para  $u\phi(x)$ , conforme (58 b), da qual é possível chegar-se à equação (58 c).

(a)

$$\frac{\phi(y)_{n+1} - \phi(y)_n}{\Delta t} = -\frac{\partial}{\partial x} (u\phi(y))_n + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u\phi(y))_n - \frac{\Delta t^2 u^2}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} (u\phi(y))_n + O(\Delta t^3)$$

(b)

$$u\phi(x)_n = u\phi(y)_n - (y-x) \frac{\partial}{\partial x} (u\phi(y))_n + \frac{(y-x)^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u\phi(y))_n - \frac{(y-x)^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} (u\phi(y))_n \quad (58)$$

(c)

$$\frac{\phi(y)_{n+1} - \phi(y)_n}{\Delta t} = -\frac{\partial}{\partial x} (u\phi(y))_n + \frac{\Delta t}{2} u \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u\phi(y)) \right]_n - \frac{\Delta t^2}{6} u^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u\phi(y)) \right]_n + O(\Delta t^3)$$

Esta última equação é a forma conservativa do método característico simples para uma equação de convecção escalar, e é a base para o algoritmo CBS.

## 5.2 O Algoritmo CBS – *Characteristic based split*

Este algoritmo foi primeiramente apresentado por ZIENKIEWICZ E CODINA (1994), e desde então vários autores já aplicaram o mesmo pra resolver problemas de dinâmica dos fluidos.

Para a obtenção do algoritmo, inicialmente considera-se as equações da conservação da massa, conservação da quantidade de movimento e conservação da energia, na forma diferencial, escritas indicialmente, conforme as eq. (40)-(42).

O algoritmo é obtido primeiramente retirando-se os termos referentes à pressão da eq. (41), substituindo  $\rho u_i$  por  $U_i^*$  e expandindo de maneira semelhante à apresentada no item anterior (método das características), tem-se a eq.(59):

$$\Delta U_i^* = \Delta t \left[ -\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \rho u_i) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i + \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \rho u_i) - \rho g_i \right) \right]. \quad (59)$$

Na equação 62, todos os termos do lado direito são conhecidos no tempo  $n$ , de forma que  $U_i^*$  pode ser expresso segundo a eq. (60).

$$\Delta U_i^* = U_i^* - (\rho u_i (t = n)) \quad (60)$$

Como no cálculo de  $\Delta U_i^*$  não se considerou os efeitos da pressão, para se calcular a variação da quantidade de movimento no passo de tempo  $\Delta t$ , deve-se fazer uma correção, restituindo-se tal influência. Assim, das equações eq. (41) e (60), pode-se corrigir  $\Delta U_i^*$  de modo a obter-se a variação da quantidade de movimento no intervalo  $\Delta t$  (eq. (61)).

$$\Delta \rho u_i = \Delta U_i^* - \Delta t \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \quad (61)$$

Fazendo-se uma aproximação das derivadas da pressão em relação às direções  $x_i$ , de tal forma que sejam tratadas como uma quantidade conhecida avaliada no tempo  $t = t_n + \theta_2 \Delta t$  obtém-se a eq. (62), com a eq. (63) sendo válida, observando-se que o parâmetros  $\theta_2$  pode variar de 0 a 1, tornado o algoritmo explícito no tempo quando  $\theta_2$  for nulo, ou semi-implícito, ou semi-implícito caso contrário.

$$\Delta \rho u_i = \Delta U_i^* - \Delta t \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \quad (62)$$

$$\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} = \theta_2 \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} + (1-\theta_2) \frac{\partial p^n}{\partial x_i} \quad (63)$$

Ou ainda, em função da variação da pressão  $\Delta p$ , avaliada no intervalo  $\Delta t$ , entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$  tem-se a eq. (64).

$$\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} = \frac{\partial p^n}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \quad (64)$$

Utilizando-se a equação da conservação da massa (Eq.40), pode-se escrever a aproximação eq. (65):

$$\Delta \rho = -\Delta t \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i(t = t_n + \theta_1 \Delta t)) = -\Delta t \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) + \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta(\rho u_i)) \right] \quad (65)$$

onde  $\theta_1$  tem o mesmo significado descrito para  $\theta_2$ .

Aproximando-se  $\rho u_i(t = t_n + \theta_1 \Delta t)$  por  $\rho u_i(t) + \Delta U_i^*$  dado pela eq. (59) mais  $\rho u_i$  acrescido dos termos devidos a pressão, truncando-se negligenciando os termos de ordem superior da série de Taylor em  $U_i^*$ , chega-se à eq.(66):

$$\Delta \rho = -\Delta t \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) + \theta_1 \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta U_i^*) - \Delta t \theta_1 \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} + \theta_2 \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x_i^2} \right) \right] \quad (66)$$

Assim, da eq. (59) obtém-se  $\Delta U_i^*$ , da eq. (66) obtém-se  $\Delta \rho$ , e através da eq.(65) encontra-se  $\Delta(\rho u_i)$ , faltando resolver a equação da conservação da energia (eq.(42)), que pelo mesmo processo pode ser discretizada no tempo conforme a eq.(67).

$$\begin{aligned} \Delta(\rho E) = \Delta t \left( -\frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \rho E) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i p) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} u_j) - \rho g_i u_i \right) \\ + \frac{\Delta t^2}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \rho E) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i p) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} u_j) - \rho g_i u_i \right) \end{aligned} \quad (67)$$

### 5.2.1 Obtenção das formas variacionais e solução via MEF

As variáveis são aproximadas pelas funções de forma  $\phi$ , conforme as eq. (68)-  
(73):

$$\rho u_i = \phi(\overline{\rho u_i}) \quad (68)$$

$$u_i = \phi \overline{u_i} \quad (69)$$

$$\Delta U_i^* = \phi \overline{U_i^*} \quad (70)$$

$$\Delta \rho = \phi \overline{\rho} \quad (71)$$

$$\Delta p = \phi \overline{p} \quad (72)$$

onde:

$$\phi = \{\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_n\} \quad (73)$$

Usando o método de resíduos ponderados segundo o processo de Galerkin (a função aproximadora é igual a função ponderadora), da eq.(59), tem-se a eq. (74):

$$\int \phi \Delta U_i^* d\Omega = \Delta t \int \phi \left[ -\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \rho u_i) + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i + \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \rho u_i) - \rho g_i \right) \right] d\Omega. \quad (74)$$

Integrando-se o segundo e o quarto termo do lado direito da igualdade por partes e aplicando o teorema do divergente, aparecem termos a serem integrados no contorno, porém, a parcela do quarto termo é desconsiderada devido ao produto entre os vetores normais e as velocidades serem nulos, conforme a eq.(75):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \Delta U_i^* d\Omega = \Delta t \left[ -\int_{\Omega} \phi \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \rho u_i) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \tau_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \phi \rho g_i d\Omega \right] \\ + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial (u_k \phi)}{\partial x_k} \left( -\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \rho u_i) + \rho g_i \right) d\Omega + \Delta t \int_{\Gamma} \phi \tau_{ij} n_j d\Gamma \end{aligned} \quad (75)$$

Com base nas eq. (68)-(73), pode-se escrever matricialmente a eq. (75) (eq. (76)):

$$M \overline{\Delta U_i^*} = \Delta t \left[ -C(\overline{\rho u_i}) - K_{\tau u_i} \overline{u_1} - K_{\tau u_i} \overline{u_2} + f_i + \Delta t (K(\overline{\rho u_i}) + f_{si}) \right] \quad (76)$$

onde as matrizes de massa  $M$ , a matriz de convecção  $C$ , e as demais matrizes e vetores são descritos nas eq. (77)-(85), e as barras superiores indicam valores nodais.

$$M = \int_{\Omega} \phi^T \phi d\Omega \quad (77)$$

$$C = \int_{\Omega} \phi^T \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \phi) d\Omega \quad (78)$$

$$K_{\tau u_1 x_1} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial x_1} \mu \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \frac{4}{3} \right) + \frac{\partial \phi^T}{\partial x_2} \mu \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \right) d\Omega \quad (79)$$

$$K_{\tau u_2 x_1} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial x_1} \mu \left( -\frac{2}{3} \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial \phi^T}{\partial x_2} \mu \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) \right) d\Omega \quad (80)$$

$$K_{\tau u_1 x_2} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial x_2} \mu \left( -\frac{2}{3} \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial \phi^T}{\partial x_1} \mu \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \right) \right) d\Omega \quad (81)$$

$$K_{\tau u_2 x_2} = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \phi^T}{\partial x_2} \mu \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_2} \frac{4}{3} \right) + \frac{\partial \phi^T}{\partial x_1} \mu \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) \right) d\Omega \quad (82)$$

$$f_i = \int_{\Omega} \phi^T \rho g_i d\Omega + \int_{\Gamma} \phi^T \tau_{ij} n_j d\Gamma \quad (83)$$

$$K = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k \phi^T) \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \phi) d\Omega \quad (84)$$

$$f_{si} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (u_k \phi^T) \rho g_i d\Omega \quad (85)$$

Aplicando-se o mesmo método para a eq.(66), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \Delta \rho d\Omega = & -\Delta t \int_{\Omega} \phi \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) d\Omega - \theta_1 \Delta t \int_{\Omega} \phi \frac{\partial}{\partial x_i} (\Delta U^*_i) d\Omega \\ & + \Delta t^2 \theta_1 \int_{\Omega} \phi \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} + \theta_2 \frac{\partial^2 \Delta p}{\partial x_i^2} \right) d\Omega \end{aligned} \quad (86)$$

Integrando-se os termos à direita da igualdade da eq. (86) por partes e aplicando-se o teorema do divergente, chega-se à eq. (87):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi \Delta \rho d\Omega = & -\Delta t \int_{\Omega} \phi \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \rho u_i + \theta_1 \Delta U^*_i - \Delta t \theta_1 \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \right) \right) d\Omega \\ & - \Delta t \int_{\Gamma} \phi \left( \rho u_i + \theta_1 \Delta U^*_i - \Delta t \theta_1 \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \right) \right) n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (87)$$

que é escrita matricialmente conforme a eq. (88), com as novas matrizes e vetores descritos nas eq. (89)-(91).

$$M \overline{\Delta \rho} + \Delta t^2 \theta_1 \theta_2 H \overline{\Delta p} = \Delta t \left( G_i (\overline{\rho u_i} + \theta_1 \overline{\Delta U}^*_i) - \Delta t \theta_1 H \overline{p} - f_p \right) \quad (88)$$

$$G_i = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \phi d\Omega \quad (89)$$

$$H = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \phi d\Omega \quad (90)$$

$$f_p = \Delta t \int_{\Gamma} \phi \left( \overline{(\rho u_i)} + \theta_1 \overline{\Delta U}^*_i - \Delta t \theta_1 \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) \right) n_i d\Gamma \quad (91)$$

Aplicando-se o método de Galerkin à eq. (62), tem-se como resultado a eq. (92).

$$\int_{\Omega} \phi \Delta \rho u_i d\Omega = \int_{\Omega} \phi \Delta U^*_i d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \phi \frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i} d\Omega + \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \phi u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (92)$$

Integrando-se o último termo por partes, aplicando o teorema do divergente, lembrando-se que e desprezando-se a integral sobre o contorno, e expandindo a aproximação numérica  $\frac{\partial p^{n+\theta_2}}{\partial x_i}$ , chega-se à eq. (93),

$$\int_{\Omega} \phi \Delta \rho u_i d\Omega = \int_{\Omega} \phi \Delta U^*_i d\Omega - \Delta t \int_{\Omega} \phi \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} + \theta_2 \frac{\partial \Delta p}{\partial x_i} \right) d\Omega - \frac{\Delta t^2}{2} \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (\phi u_k) \left( \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) d\Omega, \quad (93)$$

cuja forma matricial é dada nas eq. (94) e (95).

$$M \Delta \overline{\rho u_i} = M \overline{\Delta U}^*_i - \Delta t G_i^T (\overline{p} + \theta_2 \overline{\Delta p}) - \frac{\Delta t^2}{2} P_i \overline{p} \quad (94)$$

onde:

$$P_i = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} (\phi^T u_k) \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\Omega. \quad (95)$$

Finalmente, seguindo o mesmo processo para a Equação da Conservação da Energia (eq. (67)), chega-se à eq. (96) cuja forma matricial é apresentada nas eq. (97).



$$\begin{aligned} \Delta(\rho E) = & \Delta t \left[ \int_{\Omega} \phi \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i (\rho E + p)) d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \left( \tau_{ij} u_j + k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) d\Omega \right] \\ & + \frac{\Delta t^2}{2} \left[ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \phi) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} (-u_i (\rho E + p)) \right) d\Omega \right] \\ & + \Delta t \int_{\Gamma} \phi \left( \tau_{ij} u_j + k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) n_i d\Gamma \end{aligned} \quad (96)$$

$$M \Delta \overline{\rho E} = \Delta t \left[ C \overline{(\rho E + p)} + K_T \overline{T} + K_{\tau_{ei}} \overline{u_i} + f_e - \Delta t (K_u \overline{(\rho E + p)}) \right] \quad (97)$$

Com as matrizes dadas por:

$$K_T = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (98)$$

$$K_{\tau_{ei}} = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} (\tau_{ji} \phi) d\Omega \quad (99)$$

$$f_e = \int_{\Gamma} \phi^T \left( \tau_{ij} u_j + k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) n_i d\Gamma \quad (100)$$

### 5.2.2 Intervalo de tempo estável

Para que o presente algoritmo na forma explícita tenha estabilidade, o intervalo de tempo a ser utilizado para cada elemento, definido pelo problema de convecção difusão, é função do tamanho do elemento e da velocidade do escoamento e do som no fluido, conforme eq. (101), (NITHIARASU et al., (2000), ZIENKIEWICZ e TAYLOR (2000)):

$$\Delta t_{conv} = \frac{h}{|V| + c}, \quad (101)$$

onde  $V$  é o módulo da velocidade no nó  $i$ ,  $c$  é a velocidade do som, e  $h$  mede o tamanho relativo do elemento, sendo que para os problemas bidimensionais, é obtido da eq. (102), onde  $Lado_i$  é o comprimento do lado oposto ao ponto  $i$ :

$$h = \min(2 * \text{Área}_{elemento} / Lado_i) \quad (102)$$

### 5.3 Formulação ALE do Algoritmo CBS

Para finalmente obter-se a formulação ALE do algoritmo apresentado, basta aplicar o método das linhas características de Galerkin aos termos do lado direito das

eq. (45), (46) e (47), e em seguida escreve-los matricialmente, agrupando-os corretamente às eq. (76), (88), e (97). Aqui será apresentada somente a forma explícita das equações com  $\theta_1$  igual a 1 e  $\theta_2$  igual a zero, sendo que esta foi a forma utilizada no trabalho conforme as eq. (103), (104) e (105) onde as barras superiores indicam valores nodais, com a matriz  $L$  descrita na eq. (106).

$$M\Delta\overline{U}_i^* = \Delta t \left[ -C(\overline{\rho u}_i) - K_{u_1} \overline{u}_1 - K_{u_2} \overline{u}_2 + f_i + \Delta t(K(\overline{\rho u}_i) + f_{si}) \right] + \Delta t L \overline{\rho u}_i \quad (103)$$

$$M\Delta\overline{\rho} = \Delta t \left[ G_i(\overline{\rho u}_i + \Delta\overline{U}_i^*) - \Delta t H \overline{p} - f_p \right] + \Delta t L \overline{\rho} \quad (104)$$

$$M\Delta\overline{\rho E} = \Delta t \left[ C(\overline{\rho E} + p) + K_T \overline{T} + K_{\epsilon i} \overline{u}_i + f_e - \Delta t(K_u(\overline{\rho E} + p)) \right] + \Delta t L \overline{\rho E} \quad (105)$$

$$L = \int_{\Omega} w_i \frac{\partial \phi^T}{\partial x_i} \phi d\Omega \quad (106)$$

#### 5.4 Condições de contorno

Como os problemas de fluido podem ter um domínio cuja extensão possa ser considerada infinita, ou também domínio bem definido em todo o contorno, divide-se então as condições de contorno em: i) Condições fictícias e ii) Condições Reais, (ZIENKIEWICZ e TAYLOR (2000)).

##### i) Condições fictícias

Ocorrem por exemplo em escoamentos em domínios abertos, onde é necessário criar um contorno com características consideradas no infinito, uma vez que este contorno é apenas uma limitação da computação. Na determinação deste contorno, e dos valores especificados sobre o mesmo, leva-se em conta que a medida em que a distância do objeto (sólido) cresce, o escoamento tende ao escoamento não perturbado (escoamento no infinito) na entrada e nos lados, porém na saída os efeitos causados pelo sólido podem continuar por uma longa distância.

Assim, deve-se ter que se o escoamento é subsônico, a especificação de todas as quantidades, exceto a densidade pode ser feita nos lados e na entrada do contorno. Na

saída existem várias possibilidades para se impor as condições de contorno. Zienkiewicz e Taylor, 2000 apresentam as seguintes:

- a) Denotando as suposições as mais óbvias no que diz respeito à tração e às velocidades
- b) Uma condição de gradiente de tração zero e tensões existentes

Já se o escoamento é supersônico, todas as variáveis podem ser prescritas na entrada, mas na saída não são especificadas condições de contorno, uma vez que as perturbações causadas pelas condições de contorno não podem viajar tão rápido como a velocidade do som.

#### ii) Condições Reais

Estas condições são devidas aos limites do domínio fluido fisicamente definidos. Na parte do contorno que faz fronteira com sólido, tem-se a velocidade normal igual a zero e a velocidade tangencial também nula caso seja tratado de um escoamento viscoso ou a tensão tangencial nula caso o escoamento seja invíscido.

Como condições reais, ainda têm-se as condições de contorno com tração prescrita. Para superfícies livres a tração é prescrita igual a zero, ou, pode-se prescrever quaisquer valores causados por escoamento sendo imposta à superfície.

Nas primeiras aplicações do algoritmo CBS, nenhuma condição de contorno foi imposta nas velocidades para avaliar-se  $\Delta U^*_i$ , e os valores no contorno eram utilizados para calcular a tração no contorno, então, os valores de  $\Delta U^*_i$  encontrados no contorno eram abandonados (ZIENKIEWICZ et. al. (1999)). Posteriormente, NITHIARASU (2000), verificou que as condições de contorno devem ser impostas para o caso acima, implicando em melhores resultados.

A imposição das condições de contorno reais pode então ser feita através da imposição de velocidade normal às paredes e força de superfície tangencial nula nos pontos dos contornos de paredes sólidas, ou no caso viscoso, através da imposição da velocidade normal e tangencial nula na parede devido ao atrito, e a força de superfície tangencial diferente de zero. Também é importante notar que o termo que se refere ao contorno na eq. (104) deve ser nulo, pois o fluxo normal à parede é nulo, conforme eq. (107).

$$n_i \rho u_i = n_i \left( \rho u_i + (\Delta U)_i - \Delta t \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (107)$$

### 5.5 Relações importantes

Tomando a velocidade do escoamento e a massa específica como variáveis principais do problema, torna-se importante a aplicação de relações das quais possam ser extraídas as demais variáveis. Essas relações são, a eq. (19), mais as equações eq. (108-110) que são obtidas do cálculo da energia total, da equação de estado dos gases e da equação de Poisson (ver por exemplo ZIENKIEWICZ e TAYLOR(2000)):

$$E = Tc_v + \frac{1}{2} u_i u_i \quad (108)$$

$$c^2 = (\gamma - 1)Tc_p \quad \text{com} \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v} \quad \text{e} \quad R = c_p - c_v \quad (109)$$

$$p = (\gamma - 1) \left( \rho E - \frac{1}{2} \rho u_i u_i \right) \quad (110)$$

Onde  $c_p$  é o calor específico à pressão constante e  $c_v$  é o calor específico a volume constante.

## 6 Equacionamento da estrutura

Como já mencionado, no presente trabalho fez-se uso do código desenvolvido por MACIEL e CODA (2005), o qual se baseia em uma formulação não linear geométrica desenvolvida por CODA (2003). Embora o foco principal deste trabalho seja a formulação da dinâmica dos fluidos no acoplamento fluido-estrutura, devido à formulação para a estrutura ser muito recente, neste capítulo descreve-se tal formulação.

### 6.1 Formulação posicional estática para a cinemática de Reissner

Inicialmente, considera-se o princípio da mínima energia potencial para elasticidade conservativa, escrito em termos das posições (eq. (111)):

$$\Pi = U_e - P \quad (111)$$

onde  $\Pi$  é a energia potencial total,  $U_e$  é a energia de deformação e  $P$  é a energia potencial das forças aplicadas.

Adotando-se uma lei constitutiva linear, a energia de deformação pode ser escrita, em uma descrição Lagrangeana, em relação ao volume inicial (MACIEL e CODA (2005)):

$$U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 = \int_{V_0} \frac{1}{2} \{ \sigma \varepsilon + \tau \gamma \} dV_0 \quad (112)$$

onde  $\sigma$  e  $\tau$  são as componentes normal e tangencial das “tensões de engenharia”, estando a energia conjugada às componentes  $\varepsilon$  e  $\gamma$  das “deformações não

lineares de engenharia”, propostas por CODA (2003) e CODA e GRECO (2004), obtidas dividindo-se a diferença entre o comprimento  $ds$  de uma fibra qualquer do corpo (paralela ao eixo médio) em uma posição qualquer e seu comprimento na configuração de referência  $ds_0$  pelo comprimento na configuração inicial (eq. (113)).

$$\varepsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \quad (113)$$

MACIEL e CODA (2005) assumem que em uma posição de referência não deformada, a Energia de deformação é nula. A energia potencial das forças, concentradas e conservativas, é escrita como na eq. (114):

$$P = F_j p_j \quad (114)$$

onde  $p_j$  é o conjunto de coordenadas ou posições atuais do corpo. Pode ser observado que a energia potencial das forças aplicadas não é nula na configuração de referência.

Das eq. (111), (112) e (114), escreve-se o potencial de energia total conforme eq. (115):

$$\Pi = \int_{V_0} \frac{1}{2} \{ \sigma \varepsilon + \tau \gamma \} dV_0 - F_j p_j \quad (115)$$

Torna-se então necessário mapear a geometria do corpo em estudo e ter o conhecimento da relação entre esse mapeamento e as “deformações de engenharia” adotadas. MACIEL e CODA (2005) fazem o mapeamento empregando a cinemática de Reissner, para tal, primeiro toma -se um corpo com a configuração de referência ( $B_0$ ) e uma configuração atual ( $B_1$ ) com o espaço adimensional  $\eta\xi$  fazendo um “elo” entre  $B_0$  and  $B_1$  como mostra a Figura 5.

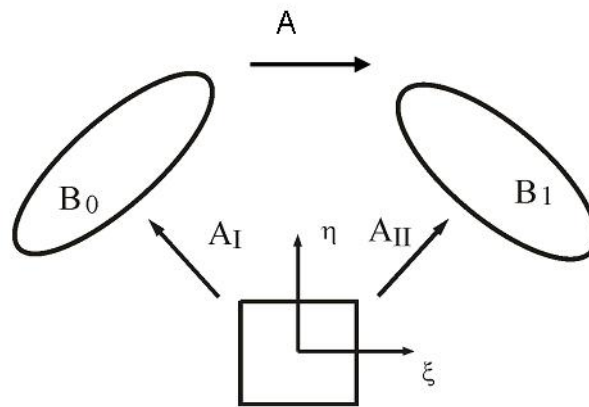


Figura 5 – cinemática de deformação

A configuração de referência é a indeformada, consistindo a descrição Lagrangeana. As seções transversais são consideradas inicialmente perpendiculares à linha central o mesmo não ocorrendo na configuração atual (hipótese de Reisner).  $A_I$ , como representado na Figura 5, é um gradiente de deformação auxiliar, do espaço adimensional para a configuração inicial do corpo e depende das posições nodais iniciais e cinemática adotada. De modo semelhante,  $A_{II}$  é um gradiente de deformação auxiliar, do espaço adimensional para a configuração final do corpo, e depende das posições nodais finais, ou atuais.

Um ponto  $p(x,y)$  qualquer dentro do corpo é escrito em função das coordenadas adimensionais e posições iniciais ou atuais conforme as eq. (116) e (117) (MACIEL e CODA (2005):

$$p^0(\xi, \eta) = p_m^0(\xi) + \frac{h}{2} \eta \bar{N}^0(\xi) \quad (116)$$

$$p^1(\xi, \eta) = p_m^1(\xi) + \frac{h}{2} \eta \bar{N}^1(\xi) \quad (117)$$

onde  $p_m^i = (x_m^i, y_m^i)$  é um ponto sobre a linha média com  $i$  representando a configuração inicial ou atual,  $h$  é a espessura do elemento e  $\bar{N}^i$  é um vetor unitário que define a posição de uma seção transversal genérica conforme representado na Figura 6.

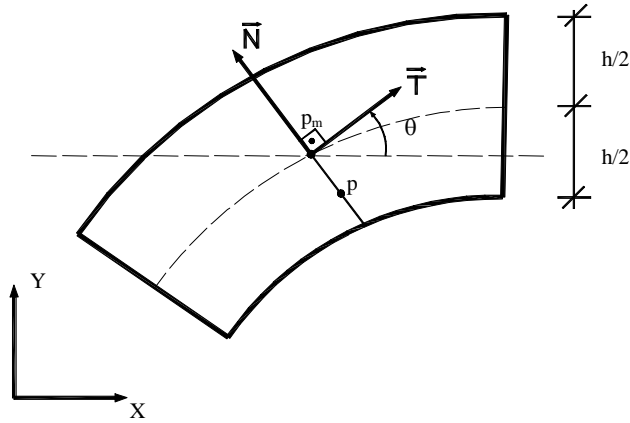


Figura 6 – seção transversal genérica

O vetor  $\vec{T}$  é tomado como tangencial à linha média apenas na configuração inicial, de modo a facilitar os cálculos das deformações. Com base na Figura 6, escrevem-se os vetores  $\vec{N}^i$  e  $\vec{T}^i$  através das eq. (118) e (119), onde  $\theta^i$  é o ângulo global para uma seção transversal genérica na configuração  $i$ .

$$\vec{T}^i = (\cos \theta^i, \sin \theta^i) \quad (118)$$

$$\vec{N}^i = (-\sin \theta^i, \cos \theta^i) \quad (119)$$

Das eq. (116)-(119), escrevem-se as coordenadas do ponto  $p_m^i = (x_m^i, y_m^i)$  conforme as eq. (120) e (121):

$$x^i(\xi, \eta) = x_m^i(\xi) - \frac{h}{2} \eta \sin \theta^i(\xi) \quad (120)$$

$$y^i(\xi, \eta) = y_m^i(\xi) + \frac{h}{2} \eta \cos \theta^i(\xi). \quad (121)$$

Os Gradientes do espaço adimensional para a configuração inicial quando  $i=I$ , ou do espaço para a configuração deformada, quando  $i=II$ , conforme mostrados na Figura 7, são obtidos derivando-se as equações (120) e (121), conforme eq. (122):

$$A^i = \begin{bmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{dx^i}{d\xi} & \frac{dx^i}{d\eta} \\ \frac{dy^i}{d\xi} & \frac{dy^i}{d\eta} \end{bmatrix}, \quad (122)$$

sendo os valores da matriz  $A^i$  os seguintes: (eq. (123)-(126))



$$A_{11}^i = \frac{dx_m^i}{d\xi} - \frac{h}{2}\eta \frac{d\theta^i}{d\xi} \cos \theta^{(i)} \quad (123)$$

$$A_{12}^i = -\frac{h}{2} \sin \theta^i \quad (124)$$

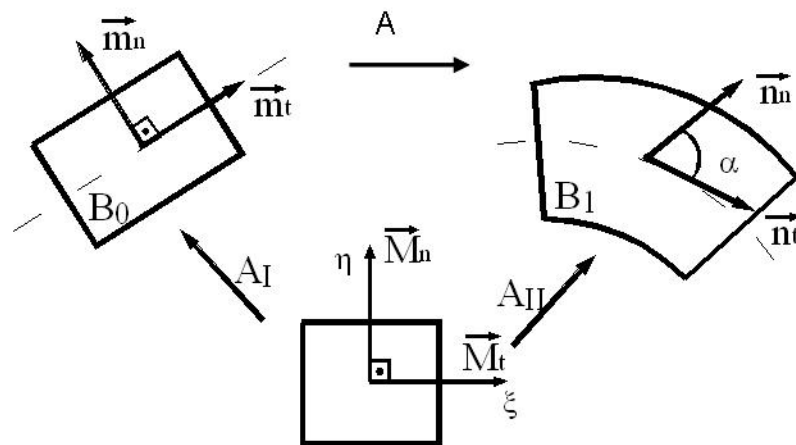
$$A_{21}^i = \frac{dx_m^i}{d\xi} - \frac{h}{2}\eta \frac{d\theta^i}{d\xi} \sin \theta^{(i)} \quad (125)$$

$$A_{22}^i = \frac{h}{2} \cos \theta^i \quad (126)$$

Os estiramentos  $\lambda_t$  e  $\lambda_n$  podem ser calculados, seguindo as direções adimensionais  $\xi$  e  $\eta$  com o uso dos vetores unitários  $\vec{M}_t = [1,0]^T$  e  $\vec{M}_n = [0,1]^T$  (ver Figura 7) como segue nas equações (127) e (128):

$$\lambda_t^i = \lambda(\vec{M}_t) = \left| A^i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right| = \sqrt{(A_{11}^i)^2 + (A_{21}^i)^2} \quad (127)$$

$$\lambda_n^i = \lambda(\vec{M}_n) = \left| A^i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right| = 1 \quad (128)$$



**Figura 7 – versores e vetores nas 3 configurações**

nota-se que nas direções 2 e 3 não ocorre deformação nesta formulação, ou seja,  $\lambda_2 = 1$  e  $\lambda_3 = 1$ .

O ângulo  $\alpha$  entre os vetores  $\vec{m}_t$  and  $\vec{m}_n$ , na configuração deformada, é calculado na eq. (129):

$$\alpha = \arccos \left\{ \frac{[1 \ 0][A_{II}^T \ A_{II}] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\lambda_t'' \lambda_n''} \right\} = \arccos \left\{ \frac{A_{11}'' A_{12}'' + A_{21}'' A_{22}''}{\sqrt{(A_{11}'')^2 + (A_{21}'')^2}} \right\} \quad (129)$$

Então se escreve a distorção não linear “de engenharia” como:

$$\gamma_m = \alpha - \frac{\pi}{2}, \quad (130)$$

os estiramentos  $\lambda_t$  e  $\lambda_n$  em relação à configuração inicial  $B_0$  conforme eq. (131) e (132), e as deformações não lineares “de engenharia”  $\varepsilon_t$  e  $\varepsilon_n$  nas direções  $\vec{T}$  e  $\vec{N}$ , conforme as eq. (133) e (134).

$$\lambda_t = \frac{\lambda_t''}{\lambda_t'} = \frac{\sqrt{(A_{11}'')^2 + (A_{21}'')^2}}{\sqrt{(A_{11}')^2 + (A_{21}')^2}} \quad (131)$$

$$\lambda_n = \frac{\lambda_n''}{\lambda_n'} = 1 \quad (132)$$

$$\varepsilon_t = \lambda_t - 1 \quad (133)$$

$$\varepsilon_n = \lambda_n - 1 = 0 \quad (134)$$

Finalmente, a energia específica de deformação para uma lei constitutiva linear simples, é escrita na eq. (135), onde  $E$  é o modulo de elasticidade do material.

$$u_e = \frac{1}{2} E \left( \varepsilon_t^2 + \frac{\gamma_m^2}{2} \right) \quad (135)$$

Substituindo-se a eq. (135) na eq. (112), tem-se a energia de deformação (eq. (136)):

$$U_e = \int_{V_0} \frac{1}{2} E \left( \varepsilon_i^2 + \frac{\gamma_m^2}{2} \right) dV_0, \quad (136)$$

de forma que o potencial de energia (eq. (115)), pode agora ser escrito conforme a eq. (136 – b):

$$\Pi = \int_{V_0} \frac{1}{2} E \left( \varepsilon_i^2 + \frac{\gamma_m^2}{2} \right) dV_0 - F_j p_j. \quad (136-b)$$

## 6.2 Formulação posicional dinâmica

Quando o problema torna-se dinâmico, adiciona-se ao princípio da mínima energia potencial, conforme escrito na eq. (111), um termo  $K$ , referente à energia cinética e outro termo  $Q$ , referente à dissipação por amortecimento, conforme eq. (137).

$$\Pi = U_e - P + K + Q \quad (137)$$

A Energia cinética é calculada conforme a eq. (138):

$$K = \frac{I}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{x}_i \dot{x}_i dv_0 \quad (138)$$

onde  $\dot{x}_i$  são as velocidades e  $\rho_0$  a densidade. O termo dissipativo  $Q$ , tem sua forma diferencial de acordo com a eq. (139) (ver GRECO e CODA (2006)):

$$\frac{\partial}{\partial p_i} Q(t, x) = \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial p_i} q(x, t) dv_0 = \int_{V_0} \lambda_m \dot{x}_i dv_0 \quad (139)$$

onde  $q$  é o funcional dissipativo,  $\lambda_m$  é uma constante de proporcionalidade e  $p_i$ , que agora varia no tempo, é a posição.

Substituindo-se as eq. (138), (136) e (114) na eq. (137) e derivando-se a mesma em relação a uma posição nodal genérica  $X_s$ , sendo  $X_i$  a posição  $i$ , e aplicando o princípio do mínimo potencial de energia, tem-se a eq. (140) (equação do equilíbrio dinâmico ou de movimento):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_0}{\partial X_s} &= \int_{V_0} \frac{\partial u_e(\xi, X_i)}{\partial X_s} dV_0 - F_s + \int_{V_0} \rho_0 \ddot{x}_i(\xi, X_i) dv_0 \\ &+ \int_{V_0} \lambda_m \rho_0 \dot{x}_s(\xi, X_i) dv_0 = 0 \end{aligned} \quad (140)$$

onde  $\ddot{x}_i$  é a aceleração. Ainda, na forma vetorial (eq. (141)):

$$g = \frac{\partial U_e}{\partial X_s} + F_{iner.} + F_{amort.} - F_{ext} = 0 \quad (141)$$

onde  $F_{iner.}$  são as forças inerciais,  $F_{amort.}$  são as forças devido ao amortecimento e  $F_{ext.}$  são as forças eternas.

Expandindo-se eq. (141), em  $X_i$  por série de Taylor, têm-se:

$$g(X_k + \Delta X_k) = g(X_k) + \frac{\partial g(X_k)}{\partial X_k} \Delta X_k + O^2 = 0. \quad (142)$$

Negligenciando os termos de ordem  $O^2$ , finalmente chega-se à eq. (143) com a eq. (144) válida para o caso de cargas conservativas.

$$\Delta X_k = - \left( \frac{\partial g(X_k)}{\partial X_k} \right)^{-1} g(X_k) \quad (143)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial X_k} &= \int_{V_0} \frac{\partial^2 u_e(\xi, X_i)}{\partial X_s \partial X_k} dV_0 + \int_{V_0} \rho_0 \left( \frac{\partial \ddot{x}_i(\xi, X_i)}{\partial X_k} \right) dv_0 \\ &+ \int_{V_0} \lambda_m \rho_0 \frac{\partial \dot{x}_i(\xi, X_i)}{\partial X_k} dv_0 = 0 \end{aligned} \quad (144)$$

### 6.3 Método dos Elementos Finitos Posicional para a cinemática de Reissner

#### 6.3.1 Formulação estática

As variáveis da eq. (120) e da eq. (121),  $x_m$ ,  $y_m$  e  $\theta$  são aproximadas pelas funções de forma  $\Phi_i$ , conforme as eq. (145-147):

$$x_m = \Phi_i X_i \quad (145)$$

$$y_m = \Phi_i Y_i \quad (146)$$

$$\theta = \Phi_i \Theta_i \quad (147)$$

onde os vetores  $X_i$ ,  $Y_i$  e  $\Theta_i$  são variáveis nodais e  $\Phi_i$  representa as funções de forma.

Da substituição das equações eq. (146) e eq. (147) na eq. (120) e eq. (121), resultam as equações eq. (148) e eq. (149).

$$x = \Phi_i X_i - \frac{h}{2} \eta \operatorname{sen}(\Phi_i \Theta_i) \quad (148)$$

$$y = \Phi_i Y_i + \frac{h}{2} \eta \operatorname{cos}(\Phi_i \Theta_i) \quad (149)$$

A partir das equações eq. (148) e eq. (149), o gradiente de deformações da eq. (122), é escrito conforme as equações eq. (150-153), com  $\beta_j = \frac{d\Phi_j}{d\xi}$ .

$$A_{11}^i = \beta_j X_j^i - \frac{h}{2} \eta (\beta_j \Theta_j^i) \operatorname{cos}(\Phi_k \Theta_k^i) \quad (150)$$

$$A_{12}^i = -\frac{h}{2} \eta \operatorname{sen}(\Phi_k \Theta_k^i) \quad (151)$$

$$A_{21}^i = \beta_j Y_j^i - \frac{h}{2} \eta (\beta_j \Theta_j^i) \operatorname{sen}(\Phi_k \Theta_k^i) \quad (152)$$

$$A_{22}^i = \frac{h}{2} \eta \operatorname{cos}(\Phi_k \Theta_k^i) \quad (153)$$

Excluindo-se os termos inerciais e dissipativos, a eq. (144) pode ser transformada na eq. (154):

$$\left. \frac{\partial g_i}{\partial X_k} \right|_{(X_\ell^0)} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial X_k} \right|_{(X_\ell^0)} = \int_{V_0} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial X_i \partial X_k} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{nt}}{\partial X_i \partial X_k} \right) dV_0 \Big|_{X_\ell^0} = H_{ki}^0 \quad (154)$$

onde  $f_i$  é o vetor gradiente da energia de deformação,  $X_\ell^0$  é uma posição tentativa escolhida e a matriz  $H_{ki}^0$  (eq. (155)) é a matriz Hessiana do potencial de energia total.

$$H = \int_{V_0} \frac{\partial^2 u_e(\xi, X_s)}{\partial X_i \partial X_k} dV_0 = \int_{V_0} u_{e,ik} dv_0 \quad (155)$$

Assim, da eq. (143):

$$\Delta X_k = -(H_{ki}^0)^{-1} g_i(X_\ell^0) = (H_{ki}^0)^{-1} (F_i - f_i(X_\ell^0)). \quad (156)$$

À Eq. 156 aplica-se o processo de Newton-Rapson, resolvendo-se o sistema.

### 6.3.2 Formulação dinâmica

Analisando-se as forças inerciais da eq. (141), escreve-se as mesmas em função da energia cinética  $K$ , de acordo com a eq. (157), onde  $M$  é dada na eq. (158)

$$F_{inert.} = \frac{\partial K}{\partial \dot{X}_s} = M\ddot{X}_s \quad (157)$$

$$M = \int_{V_0} \rho_0 \phi_i \phi_k dV_0 \quad (158)$$

A matriz  $M$  é a matriz de massa do elemento finito, e pode ser convenientemente concentrada. Assim, a eq. (141) é desenvolvida e reescrita como:

$$f = \frac{\partial U_e}{\partial X} - F + M\ddot{X} + C\dot{X} = 0 \quad (159)$$

que representa o equilíbrio dinâmico, e, num dado instante ( $S+1$ ), resulta na eq. (160), onde  $C$  deve-se ao amortecimento e assumida proporcional à massa.

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{S+1} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{S+1} - F_{S+1} + M\ddot{X}_{S+1} + C\dot{X}_{S+1} = 0 \quad (160)$$

Aplicando-se o método de Newmark  $\beta$  na eq. (160) (GRECO e CODA (2006)), tem-se as equações (161) e (162).

$$X_{S+1} = X_S + \Delta t \dot{X}_S + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{X}_S + \beta \ddot{X}_{S+1} \right] \quad (161)$$

$$\dot{X}_{S+1} = \dot{X}_S + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{X}_S + \gamma \Delta t \ddot{X}_{S+1} \quad (162)$$

Da substituição das aproximações eq. (161) e eq. (162) na eq. (160), obtém-se a eq. (163):

$$\begin{aligned} g(X_{S+1}) = \left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{S+1} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X} \right|_{S+1} - F_{S+1} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} X_{S+1} - M Q_S + C R_S \\ + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} X_{S+1} - \gamma \Delta t C Q_S = 0 \end{aligned} \quad (163)$$

onde  $Q_S$  e  $R_S$  representam a contribuição dinâmica do instante anterior, conforme eq. (164) e eq. (165).

$$Q_S = \frac{X_S}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{X}_S}{\beta \Delta t} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{X}_S \quad (164)$$

$$R_S = \dot{X}_S + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{X}_S \quad (165)$$

Expandindo-se por série de Taylor, tem-se:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} \right|_{s+1} = \nabla g(X_{s+1}) = \left. \frac{\partial^2 U_e}{\partial X^2} \right|_{s+1} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} \quad (166)$$

Assumindo a aproximação da eq. (167), onde os índices 0 indicam posições iniciais assumidas como tentativa para  $X_{s+1}$  (ver GRECO e CODA (2006)), usa-se o método de Newton-Raphson (eq. 168) para resolver a equação não-linear.

:

$$0 = g(X) \cong g(X^0) + \nabla g(X^0) \Delta X \quad (167)$$

$$\nabla g(X^0) \Delta X = -g(X^0) \quad (168)$$

Resolvendo-se  $\Delta X$  e calculando uma nova posição tentativa para  $X_{s+1}$  (eq. 169), resta corrigir a aceleração conforme eq. (170).

$$X_{s+1} = X^0 + \Delta X \quad (169)$$

$$\ddot{X}_{s+1} = \frac{X_{s+1}}{\beta \Delta t^2} - Q_s \quad (170)$$

Para o cálculo de  $F$  utiliza-se a mesma matriz hessiana definida na formulação estática.

## 7 Algoritmo para acoplamento entre fluido e estrutura

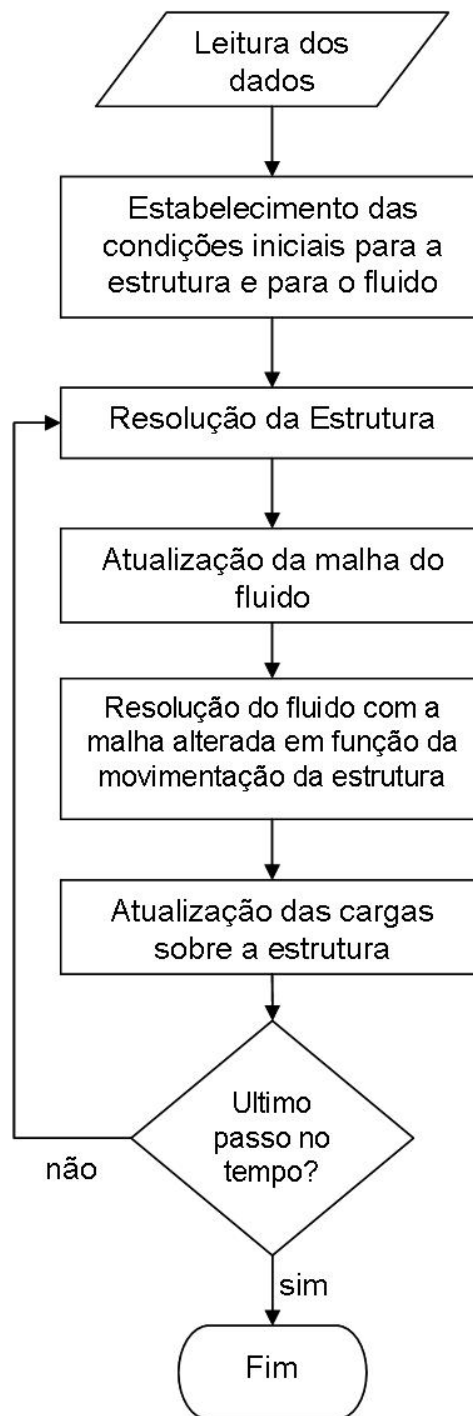
O esquema de acoplamento utilizado foi o esquema particionado, conforme já definido no capítulo 2, e segue o procedimento descrito no fluxograma da Figura 8.

A atualização das cargas sobre a estrutura no tempo  $t$  é feita fazendo a componente de carga normal igual à força de superfície normal do fluido no contorno que é fronteira com a estrutura e a componente de carga tangencial igual à força de superfície tangencial no mesmo ponto, conforme eq. (171) e eq. (172), onde o índice  $i$  representa o nó do domínio fluido comum à estrutura e  $n_x$  e  $n_y$  são os as componentes em  $x$  e em  $y$  do vetor normal no ponto  $i$ , para fora do domínio do fluido.

$$qn_i = \left[ -\tau_{yy} n_y n_y - \tau_{xx} n_x n_x - p - 2\tau_{xy} n_x n_y \right]_i \quad (171)$$

$$qt_i = \left[ \tau_{yx} (-n_y n_y + n_x n_x) + (\tau_{yy} - \tau_{xx}) n_y n_x \right]_i \quad (172)$$





**Figura 8 – Fluxograma do programa de interação fluido-estrutura**

## 7.1 Movimentação dinâmica da malha do domínio fluido

Quando se considera a interação entre fluido e estrutura, o domínio do fluido deve ser compatível com os deslocamentos do sólido, e portanto faz-se necessário a deformação da malha de elementos de fluido com o avanço no tempo. Nesta mudança de posição da malha a formulação ALE é essencial.

Uma das formas de tratar este problema está em tratar a malha como um conjunto de barras elásticas, rotuladas nos nós, e cuja rigidez aumenta ao aproximar-se do contorno da estrutura. Outra forma de movimentação dos pontos pode ser uma forma puramente matemática, que relacione a malha indeformada e a malha deformada através de uma função quadrática, na qual cada ponto à esquerda ou abaixo de determinado nó da estrutura, se deslocará igual à estrutura se a sua abscissa (no caso à esquerda) é igual à do nó, diminuindo o deslocamento, chegando a zero no contorno definido pela fronteira do problema. (TEIXEIRA (2001))

Neste trabalho adotou-se como critério principal para a deformação da malha, que a mesma tenha mínimas alterações na forma (ângulos) dos elementos na região da estrutura (onde em geral a discretização é bem mais detalhada), de forma que os pontos próximos à estrutura terão deslocamentos próximos aos da estrutura, e, a medida em que os pontos se afastam da estrutura, os deslocamentos diminuem. Para os pontos no contorno da estrutura o deslocamento será igual ao da estrutura, e para os pontos no contorno da discretização do problema, o deslocamento será nulo. Assim, o método utilizado é semelhante ao utilizado por TEIXEIRA (2001), e consiste na distribuição das velocidades  $w_i^k$  dos pontos  $k$  da malha, na direção do eixo  $i=x$  ou  $y$ , variando de acordo com a distância aos pontos no contorno da estrutura, onde  $w_i^k$  assume o valor da velocidade do ponto comum à estrutura  $u_i^k$ ,  $i$  a distância aos pontos do contorno fixo, onde a velocidade  $w_i^k$  é nula, conforme a eq. (173).

$$w_i^k = \frac{\sum_{j=1}^{ne} a_{kj} u_i^j}{\sum_{j=1}^{ne} a_{kj} + \sum_{l=1}^{nf} b_{kl}} \quad (173)$$

onde  $ne$  é o número de nós da estrutura,  $nf$  é o número de nós no contorno fixo,  $a_{kj}$  são os coeficientes de influência dos nós da estrutura no ponto  $k$  conforme eq. (174), e  $b_{kl}$  são os coeficientes de influência dos nós do contorno fixo no ponto  $k$  conforme eq. (175).

$$a_{kj} = \frac{1}{d_{kj}^{e1}} \quad (174)$$

$$b_{kl} = \frac{1}{d_{kl}^{e2}} \quad (175)$$

onde  $d_{kj}$  é a distância entre o nó  $k$  e o nó  $j$  e  $e1$  e  $e2$  são expoentes referentes à influencia dos contornos móvel e fixo, arbitrados pelo operador do programa.

## 7.2 Condições de contorno em velocidade na interface fluido-estrutura

As condições de contorno para o fluido na fronteira com a estrutura, consistem em fazer, para o caso de escoamentos viscosos, devido à condição de aderência às superfícies sólidas, a velocidade do fluido igual à velocidade da malha no contorno, que é igual à velocidade da estrutura conforme a técnica adotada (ver eq. (173)). Isso implica para a descrição ALE, que no contorno com a estrutura a formulação acaba sendo Lagangeana, torna-se mista ao afastar-se do referido contorno, e no contorno fixo, torna-se completamente Euleriana.

Para os escoamentos invíscidos, a componente de velocidade do fluido tangencial à estrutura é livre, porém a componente de velocidade normal é igual à componente de velocidade normal da estrutura, que é igual à componente de velocidade normal da malha, conforme eq. (176),

$$w_n^{\Gamma_e} = u_n^{\Gamma_e} = -u_x^{\Gamma_e} n_x - u_y^{\Gamma_e} n_y \quad (176)$$

onde  $\Gamma_e$  é o contorno da fronteira com a estrutura.

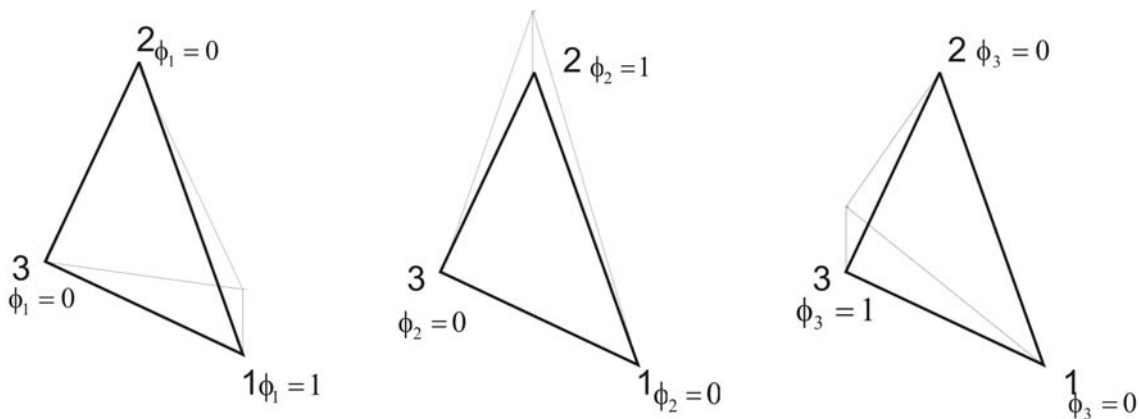
Como a formulação é explícita para o fluido, a aplicação destas condições é trivial.

## 8 Implementação computacional

Optou-se pela linguagem FORTRAN por ser uma linguagem que já possui muitas bibliotecas de sub-rotinas numéricas disponíveis e pela simplicidade da referida linguagem.

### 8.1 Implementação do código para mecânica dos fluidos

Para o fluido utilizou-se elementos triangulares com 3 nós e funções aproximadoras lineares  $\phi_i$ , onde  $i$  é o número do nó variando de 1 a 3, observando-se a partição da unidade conforme a Figura 11.



**Figura 9 – Funções de forma para os elementos finitos de fluido**

A integração das matrizes e vetores foi feita numericamente (ver ANEXO I), utilizando-se o método dos pontos de Hammer para as integrais sobre o domínio dos elementos, e o método da quadratura de Gauss para as integrais sobre o contorno (ASSAN (2003)), pois embora tenham sido utilizadas funções de forma lineares, cuja integração analítica não é muito complicada, a utilização de integrais numéricas facilita a futura elevação da ordem das funções de forma.

A matriz de massa foi usada na forma concentrada (a massa é dividida igualmente nos nós do elemento), uma vez que de acordo com a literatura (ZIENKIEWICZ e TAYLOR (2000) e LEWIS et al. (2004)) os efeitos dessa aproximação são bastante reduzidos e o ganho em tempo de processamento é muito grande.

### **8.1.1 Determinação do intervalo de tempo estável**

Existem de modo geral 3 diferentes maneiras de se estabelecer o intervalo de tempo (ZIENKIEWICZ e TAYLOR (2000) e NITHIARASU et al. (2000)).

1. Nos problemas onde o que interessa é o estado estacionário, o “intervalo local de tempo” é usado, no qual um intervalo para cada nó é avaliado segundo o menor intervalo de tempo para os elementos conectados ao referido nó, segundo a eq. (102) e usado.
2. Quando se busca da forma mais exata a solução para qualquer problema transiente, é usado o chamado “mínimo intervalo de tempo”, que é o menor de todos os intervalos locais.
3. A terceira opção é usar um intervalo fixo prescrito pelo operador do programa. Para tal o Operador deve ter certa experiência em resolver problemas de escoamento de fluido.

Neste trabalho, quando o interessante é o problema transiente, como no caso do problema de interação fluido-estrutura, o Operador do programa sugere um intervalo de tempo, o qual é verificado e usado caso seja menor que o mínimo intervalo calculado para cada elemento, ou então substituído pelo mínimo intervalo. Quando o interessante é obter o estado estacionário, é usada a primeira opção descrita.

Deve-se notar que o fato do algoritmo ser explícito facilita a utilização de diferentes intervalos no tempo para os elementos, permitindo inclusive a variação ao decorrer do tempo.

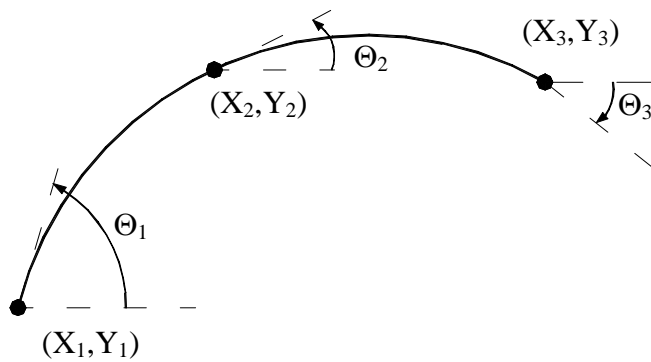
## **8.2 O programa para a dinâmica das estruturas dos intervalos ao decorrer dos passos no tempo.**

Conforme desenvolvido por MACIEL e CODA (2005), o código para mecânica das estruturas permite ao operador escolher o número de nós de cada elemento finito, sendo o grau das funções de forma  $\Phi$  igual ao número de nós do elemento menos 1 ( $n_{nos}-1$ ), ver Figura 10, e as aproximações feitas conforme as eq. (177-179)

$$x_m = \Phi_i X_i \quad (177)$$

$$y_m = \Phi_i Y_i \quad (178)$$

$$\theta = \Phi_i \Theta_i \quad (179)$$



**Figura 10 – elemento finito de 3 nós e suas variáveis**

As funções de forma e suas derivadas são calculadas automaticamente pelas formulas gerais dos polinômios de Lagrange.

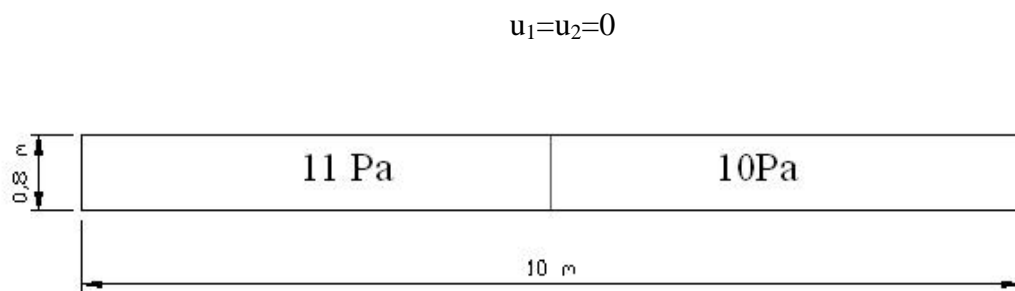
As integrais são feitas usando quadratura de Gauss com número de pontos de integração igual ao número de nós do elemento.

## 9 Aplicações de mecânica dos fluidos

Com o objetivo de validar o código desenvolvido para mecânica dos fluidos, foram resolvidos exemplos encontrados na literatura para comparações.

### 9.1 Onda de pressão em canal

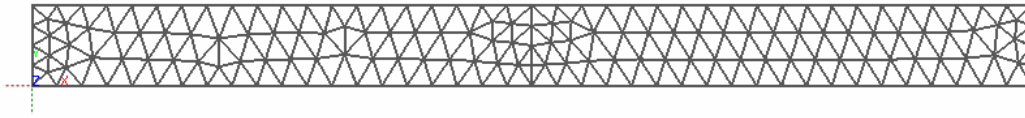
O primeiro problema consiste na propagação da onda de pressão em um fluido compressível invíscido, contido em um canal de dimensões 10 m x 0,8 m, conforme a Figura 11. No instante inicial metade do canal possui pressão de 11 Pa, e a outra metade de 10 Pa, e as velocidades são nulas em todo o fluido.



**Figura 11 – Geometria e condições iniciais do canal**

A velocidade do som no fluido foi considerada  $c=1000$  m/s, e a relação entre o calor específico à pressão constante e à temperatura constante foi considerada  $\gamma=1,4$ .

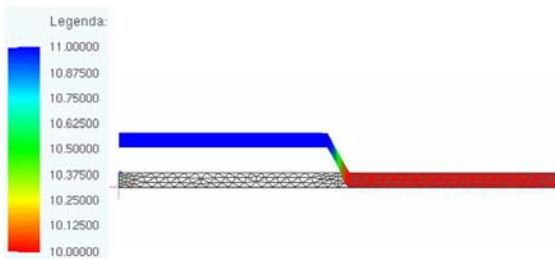
A malha utilizada foi uma malha não estrutura de 179 nós e 268 elementos triangulares, conforme a figura 12, e um intervalo de tempo  $\Delta t=10^{-5}$ s.



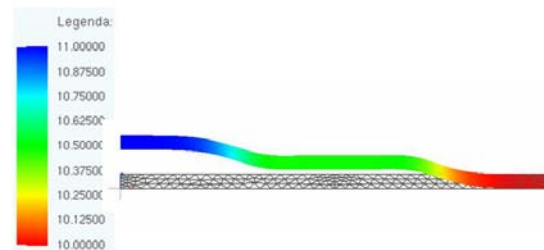
**Figura 12 – malha do canal com propagação de onda**

Na análise do problema, teve como resultado uma propagação da onda de pressão a partir do instante  $t=0.0$  s, sofrendo reflexão nas paredes no instante  $t=0.005$  s e completando um ciclo no instante  $t=0.01$  s, conforme a Figura 13 (a), (b), (c), (d) e (e).

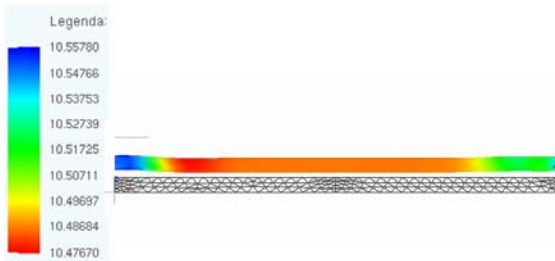
(a)  $t=0,0$



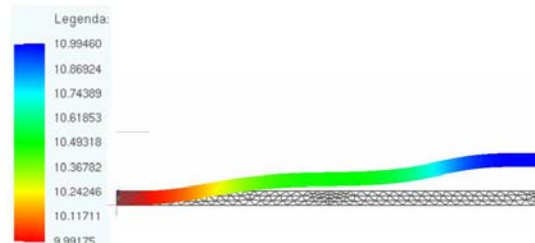
(b)  $t=0,0025$



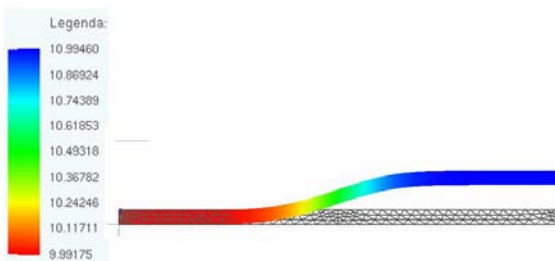
(c)  $t=0,005$



(d)  $t=0,0075$



(e)  $t=0,01$



**Figura 13 – propagação da onda de pressão**



Na figura 14 (a-d) apresentam-se os resultados deste exemplo, obtidos através de análise unidimensional por KAWAHARA e HIRANO (1983) apud TEIXEIRA (1996) p. 29<sup>2</sup>, nos instantes 0,0025 s, 0,005 s, 0,0075 s e 0,01 s

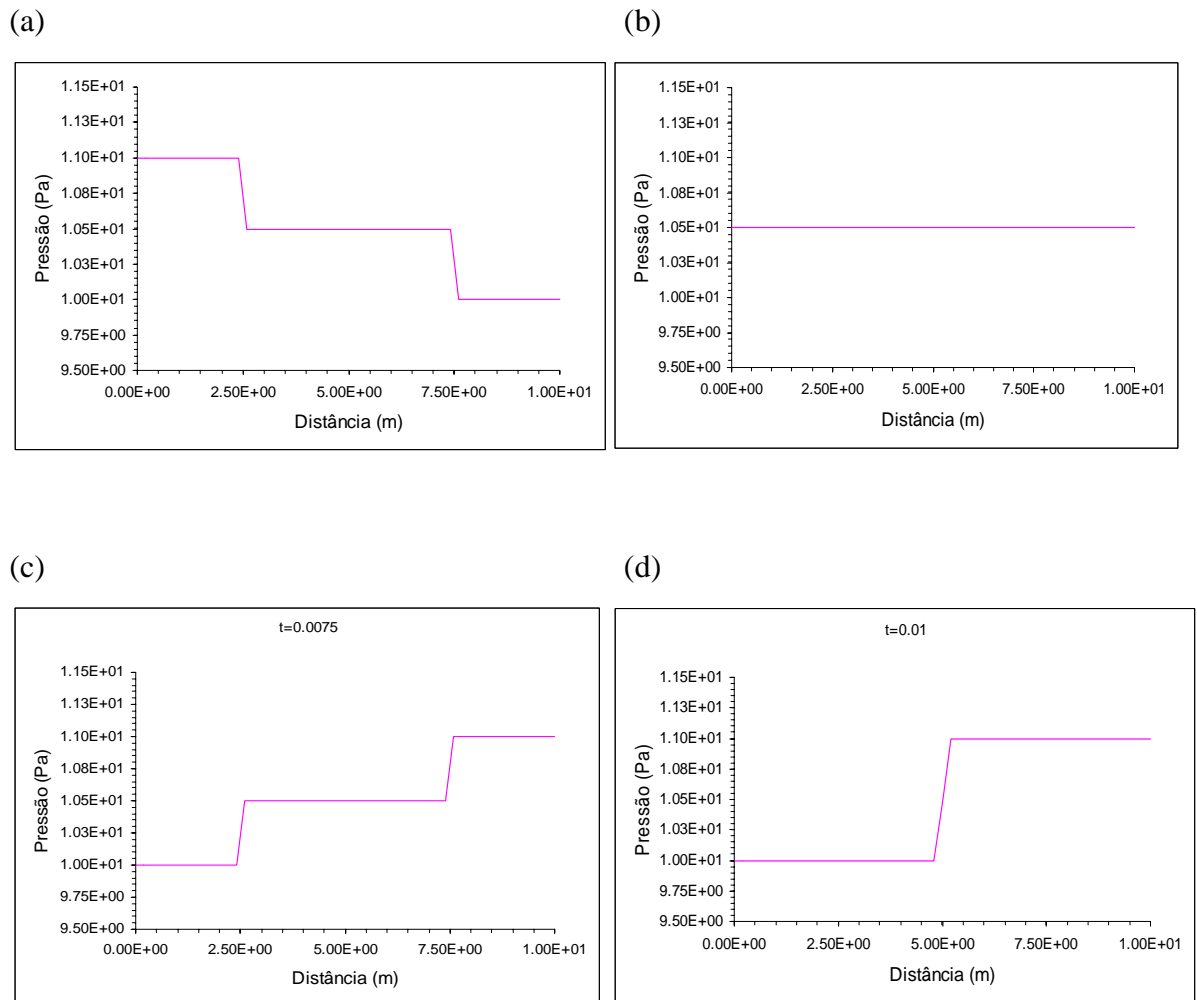


Figura 14 – resultados segundo KAWAHARA e HIRANO (1983)

## 9.2 Escoamento invíscido através de um aerofólio NACA0012 de corda de um metro – Estado Estacionário

<sup>2</sup> KAWAHARA, M.; HIRANO, H. A finite element method for high Reynolds number viscous fluid flow using two step explicit scheme. International Journal for Numerical Methods, v.1.,p.141-147, 1983

Com a finalidade de testar o algoritmo para 3 valores de número de mach diferentes, resolveu-se o problema de escoamento sobre um aerofólio NACA0012, de corda de 1 m, utilizando-se a mesma malha usada por NITHIARASU (2000) (ver figura 15 (a) e (b)), com 7351 elementos e 3753 nós.

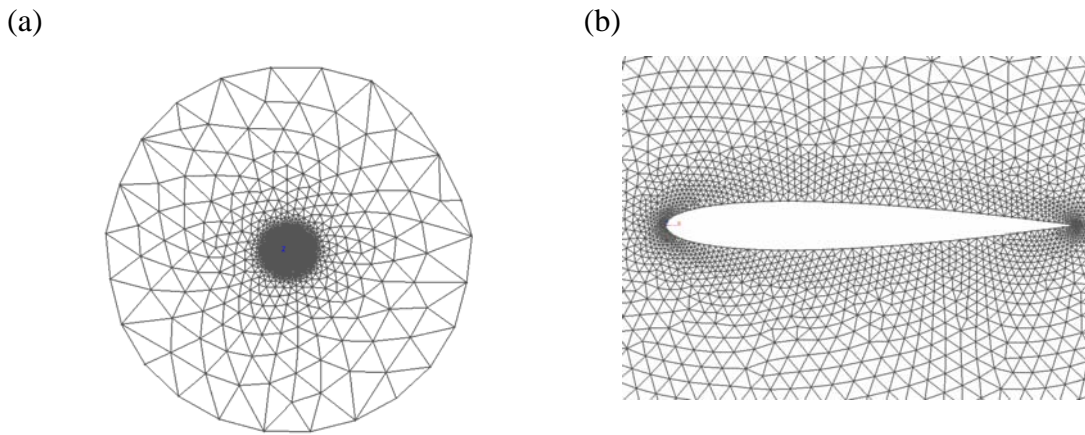


Figura 15 – (a) Malha para o aerofólio NACA0012 (b) Malha na região do aerofólio

Utilizaram-se intervalos de tempo locais conforme descrito no capítulo 8, uma vez que o objetivo era o estado estacionário e devido à diversidade de tamanhos dos elementos. A utilização de intervalo de tempo global neste problema pode não levar a um bom resultado devido à diferença muito grande nos tamanhos dos elementos, o que pode levar as alterações das propriedades nos elementos maiores a perderem a significância, dependendo da precisão do computador.

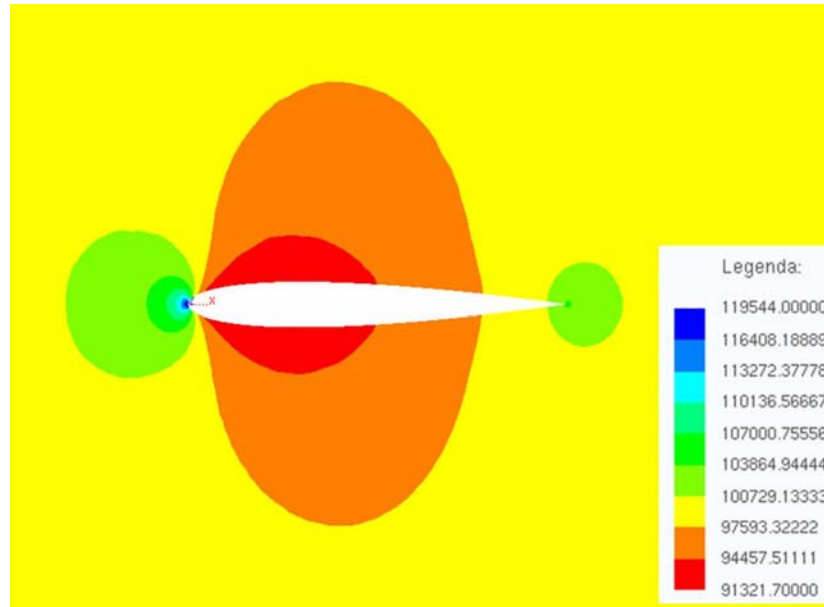
### 9.2.1 Escoamento subsônico (Mach 0,5)

As propriedades do escoamento são:

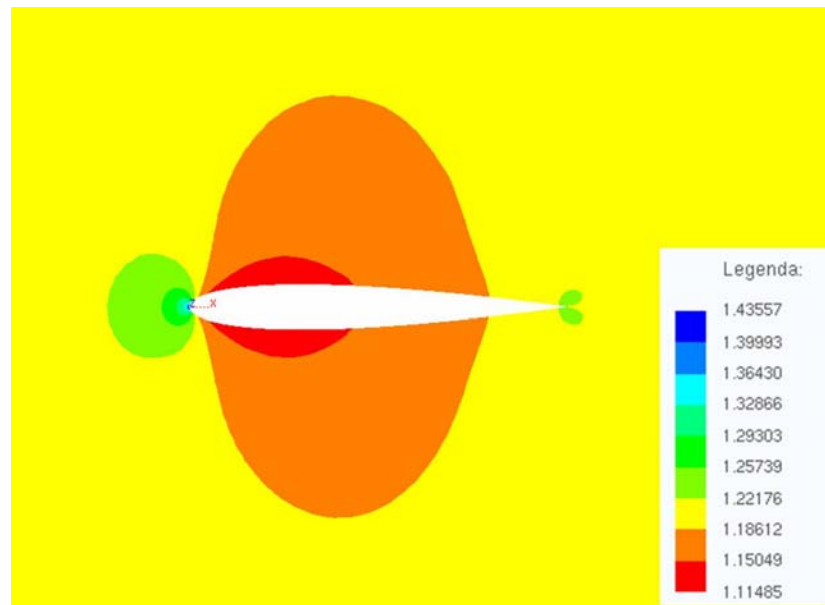
|  |   |
|--|---|
| Velocidade do som:   | $c=340$ m/s                                     |
| Velocidade do escoamento não perturbado nas direções $x$ e $y$ : | $u_{\infty} = 170$ m/s,<br>$v_{\infty} = 0$ m/s |
| Massa Específica:  | $\rho = 1,2$ Kg/m <sup>3</sup>                  |
| Calor específico a pressão constante:                            | $c_p = 1005,2$ J/(kg.K)                         |
| Calor específico a volume constante:                             | $c_v = 718$ J/(kg.K)                            |

Como condições de contorno, adotaram-se: velocidade e pressão prescritas iguais às iniciais na entrada, escoamento paralelo na saída e velocidade normal nula nas paredes do aerofólio.

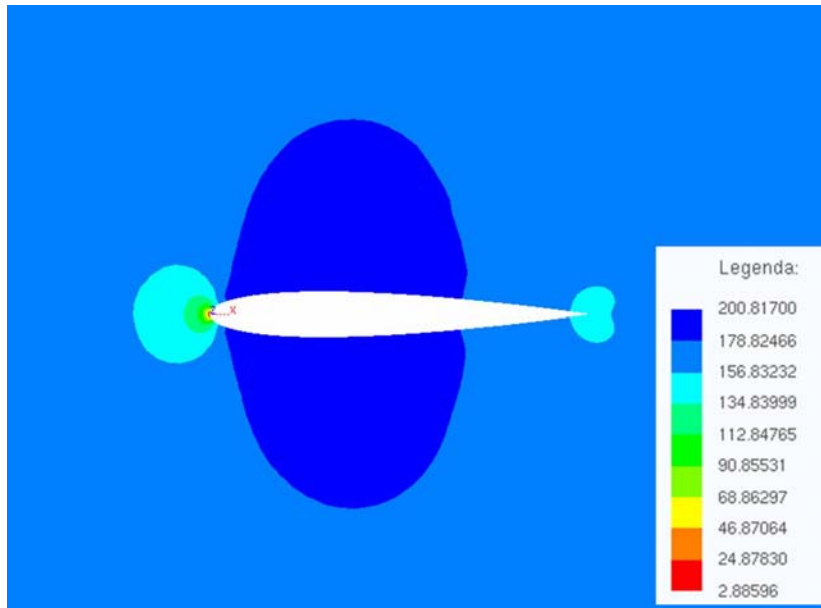
Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 16, 17, 18 e 19:



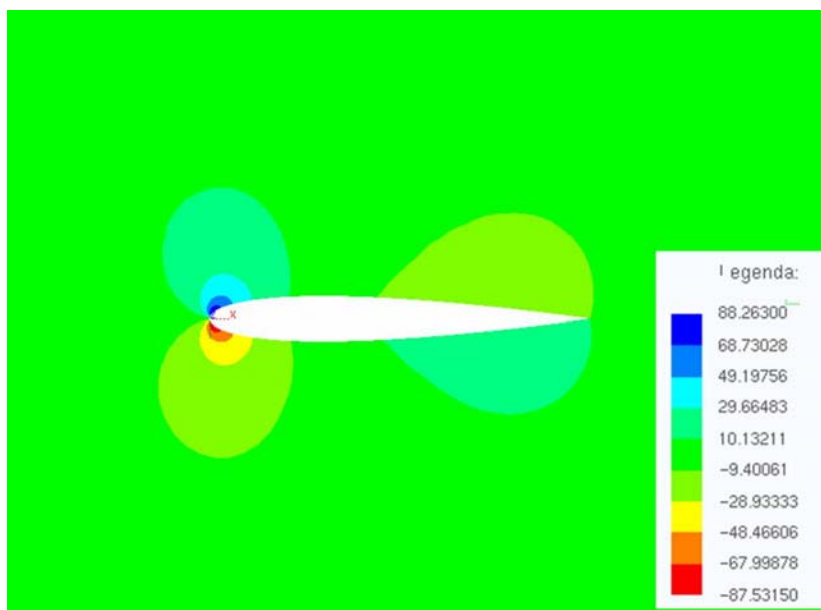
**Figura 16 – Distribuição de Pressão (Pa) para Mach 0,5**



**Figura 17 - Distribuição de massa específica (Kg/m³) para Mach 0,5**



**Figura 18 – Distribuição dos valores da componente horizontal de velocidade (m/s) para Mach 0,5**



**Figura 19 - Distribuição dos valores da componente vertical de velocidade (m/s) para Mach 0,5**

No gráfico da Figura 20 é feita a comparação entre os coeficientes de pressão  $C_p$  calculados segundo a eq. (180), obtidos pelo presente trabalho com os obtidos por NITHIARU et al. (2000) e por TEIXEIRA (2001). Observa-se a grande semelhança entre os resultados, especialmente entre NITHIARU et al. (2000) e o presente trabalho, uma vez que é utilizado a mesma malha e o mesmo algoritmo (CBS), proposto por ZIENKIEWICZ e CODINA (1994).

$$C_p = \frac{p - p_\infty}{1/2 \rho u_\infty^2} \quad (180)$$

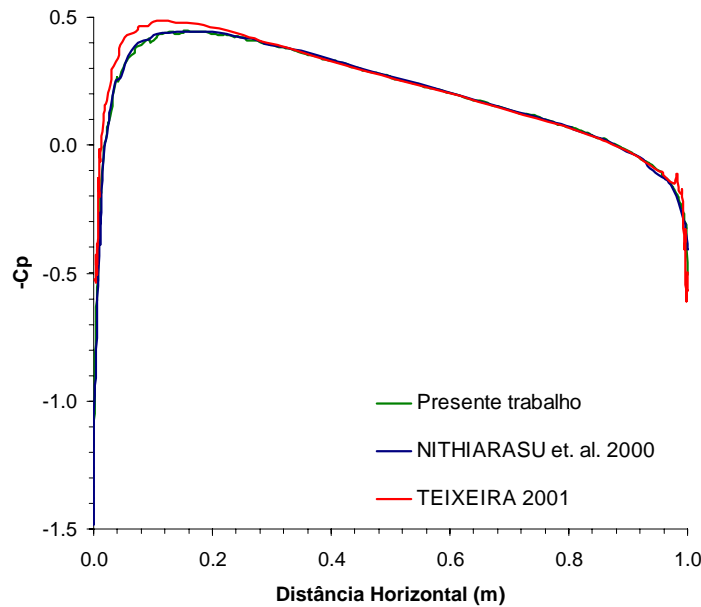


Figura 20 – Coeficientes de pressão para Mach 0,85

### 9.2.2 Escoamento transsônico (Mach 0,85)

Para este problema, mudam-se em relação ao anterior a velocidade do escoamento não perturbado na direção  $x$ , que passa a ser,  $u_\infty = 289$  m/s e as condições de contorno na saída, onde não é imposta nenhuma condição de contorno, pelo motivo de que uma vez que as perturbações causadas pelas condições de contorno não podem viajar tão rápido como a velocidade do som.

Os resultados obtidos são apresentados nas Figuras 21, 22, 23 e 24:

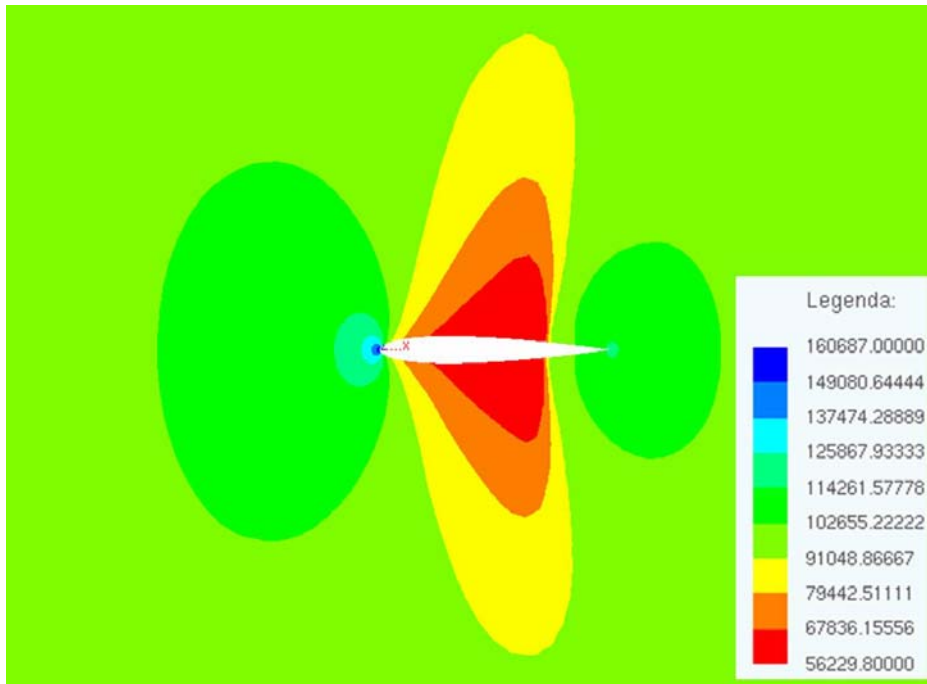


Figura 21 - Distribuição de Pressão (Pa) para Mach 0,85

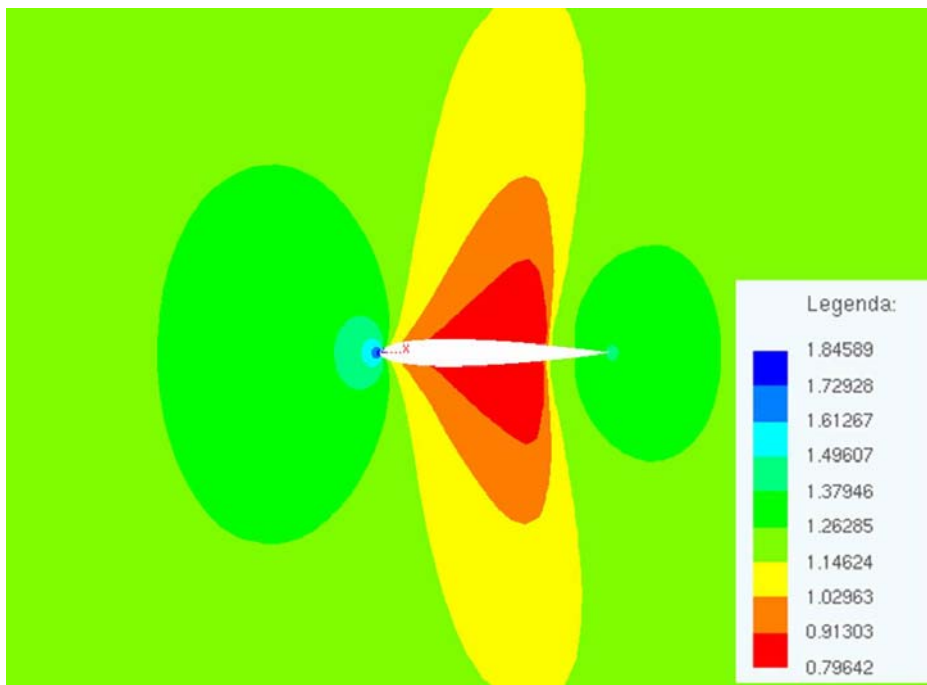


Figura 22 - Distribuição de massa específica (Kg/m<sup>3</sup>) para Mach 0,85

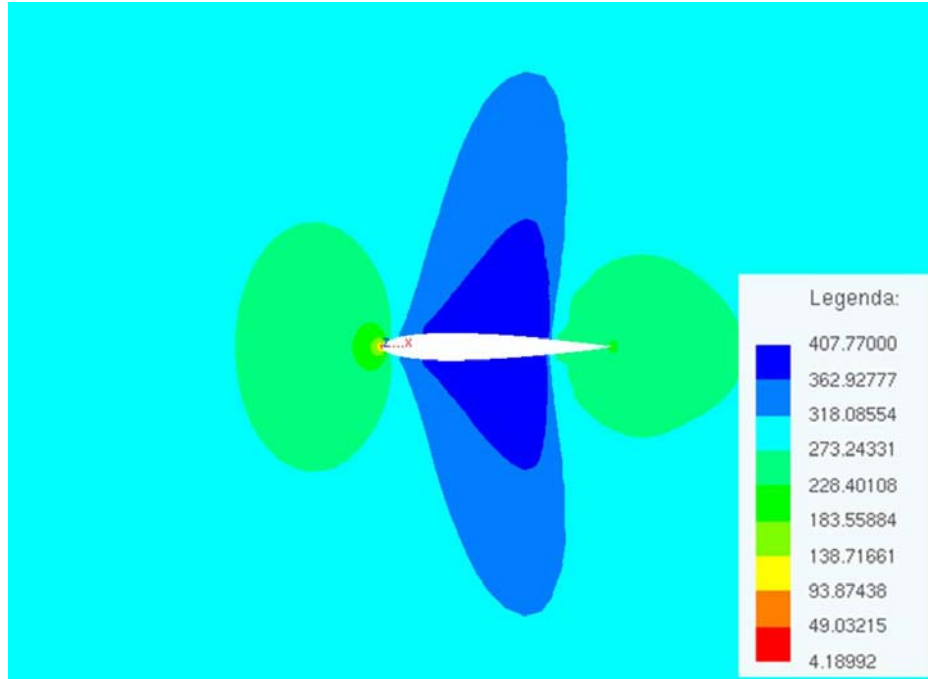


Figura 23 - Distribuição dos valores da componente horizontal de velocidade (m/s) para Mach 0,85

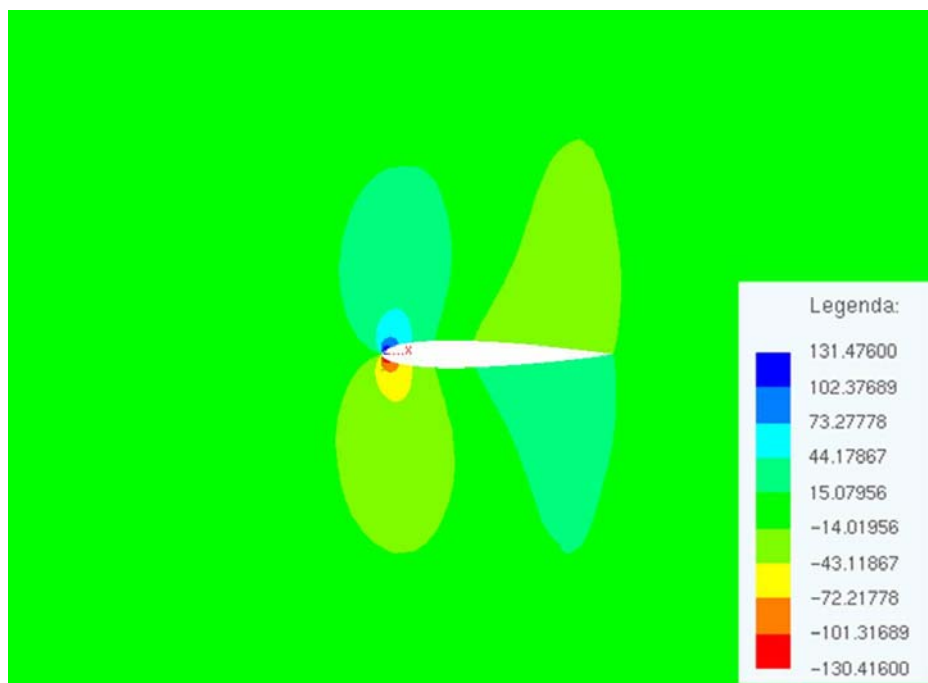


Figura 24 - Distribuição dos valores da componente vertical de velocidade (m/s) para Mach 0,85

Apresenta-se no gráfico da Figura 25 a comparação entre os coeficientes de pressão, obtidos pelo presente trabalho com os obtidos por NITHIARASU et al. (2000), PULLIUM e BARTON (1986) apud NITHIARASU et al. (2000) p. 19<sup>3</sup>, constatando-se a grande proximidade entre os resultados.

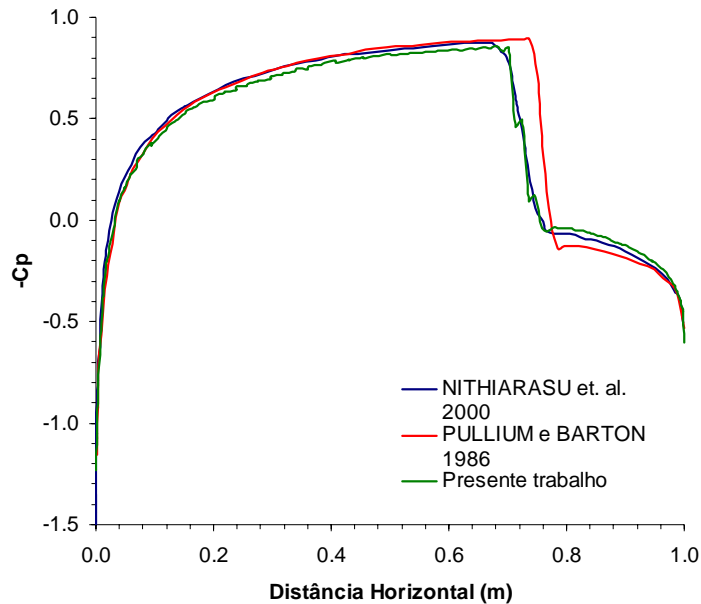


Figura 25 – Coeficientes de pressão para Mach 0,85

### 9.2.3 Escoamento supersônico (Mach 1,2)

Altera-se agora a velocidade do escoamento não perturbado na direção  $x$ , que passa a ser,  $u_{\infty} = 408$  m/s, com as mesmas condições de contorno do anterior (transônico), obtendo-se os resultados das Figuras 26, 27, 28 e 29.

---

<sup>3</sup> PULLIUM, T. H. e BARTON, J. T. **Euper computaional of AGARD working goup 07, Airfoil test cases**, AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting, Jan 14-17, 1986, Reno, Nevada.



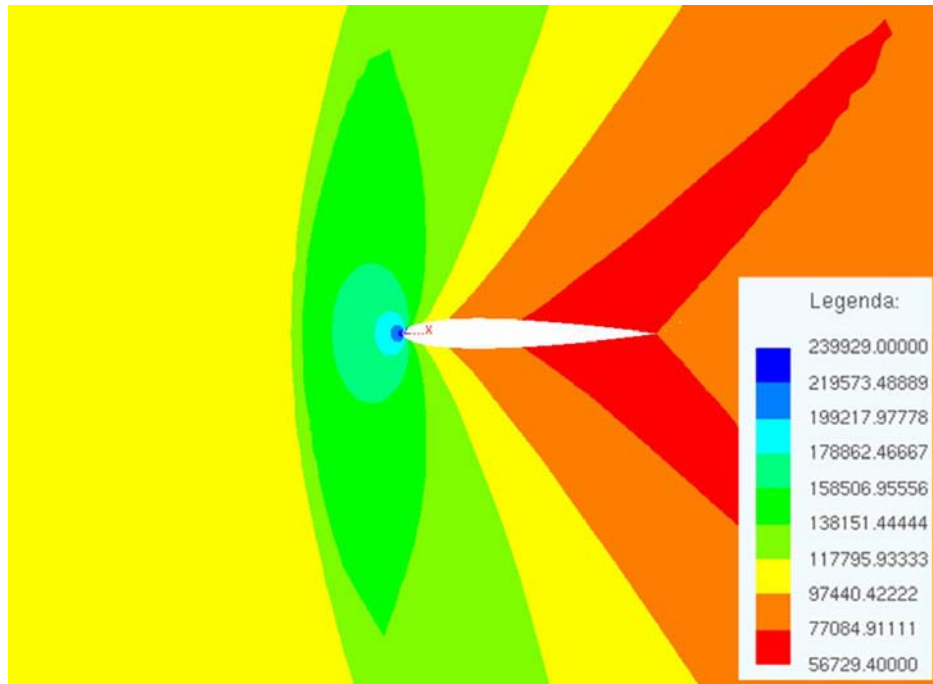


Figura 26 - Distribuição de Pressão (Pa) para Mach 1.2

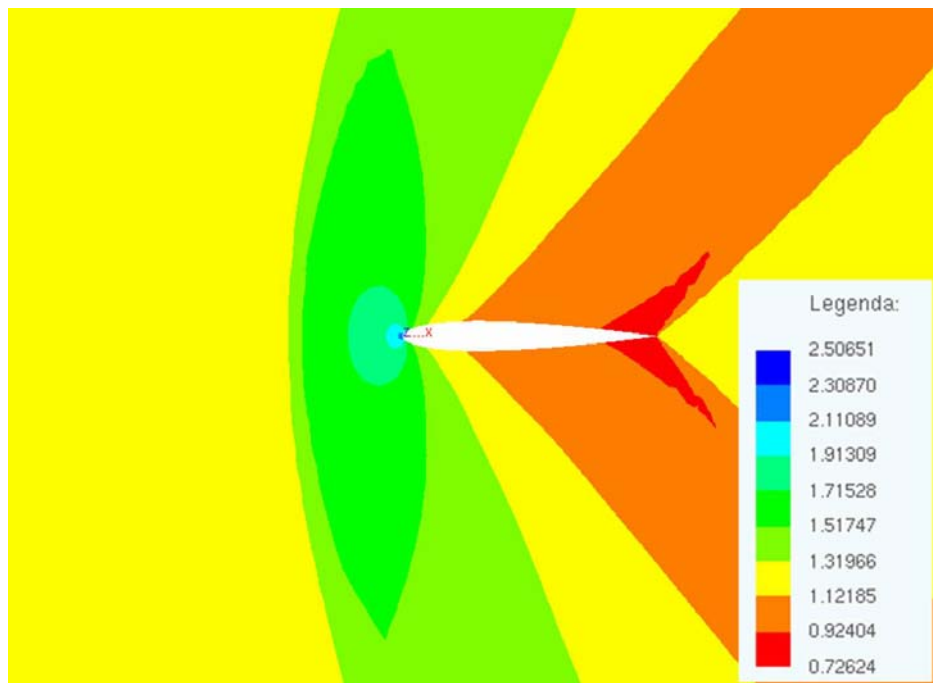


Figura 27 - Distribuição de massa específica (Kg/m³) para Mach 1.2

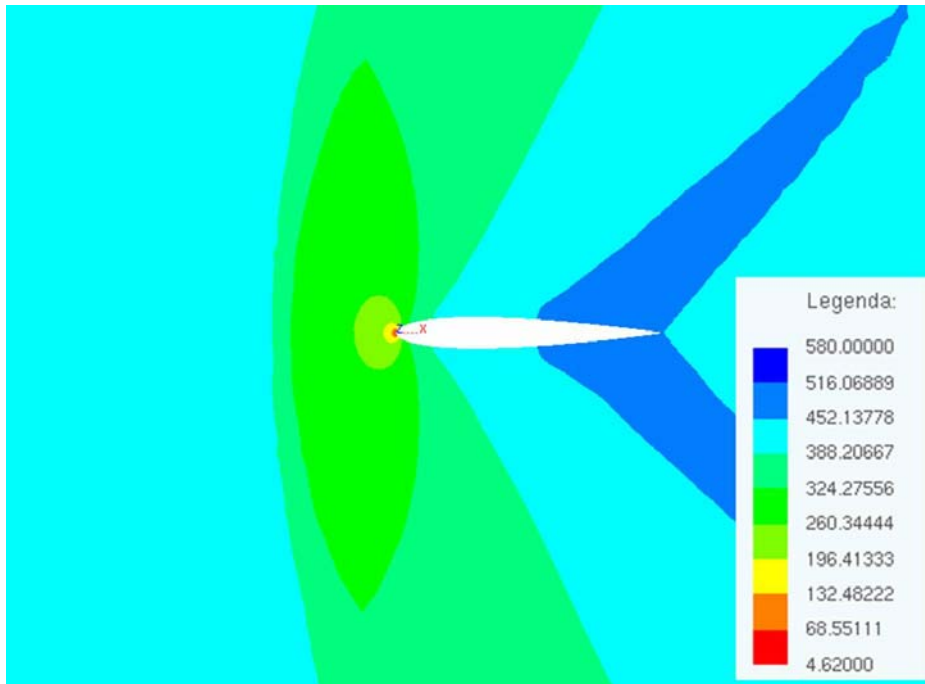


Figura 28 - Distribuição dos valores da componente horizontal de velocidade (m/s) para Mach 1,2

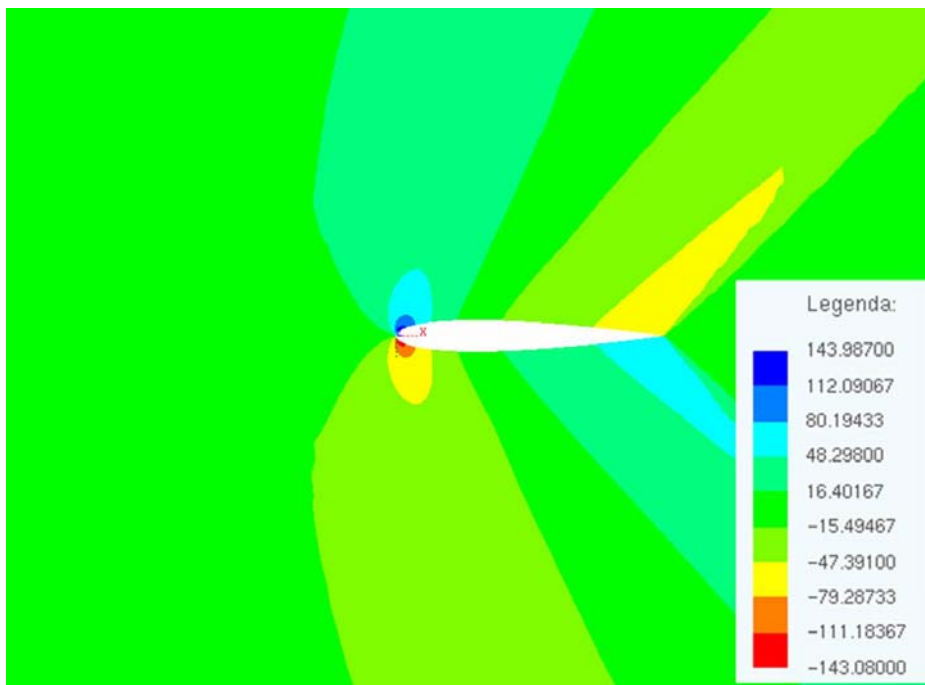


Figura 29 - Distribuição dos valores da componente vertical de velocidade (m/s) para Mach 1,2

Finalmente, apresenta-se no gráfico da Figura 30, a comparação entre os coeficientes de pressão, obtidos pelo presente trabalho com os obtidos por NITHIARSU

et al. (2000), PULLIUM e BARTON (1986) apud NITHIARSU et al. (2000) p. 19<sup>4</sup>, para os quais as curvas são idênticas.

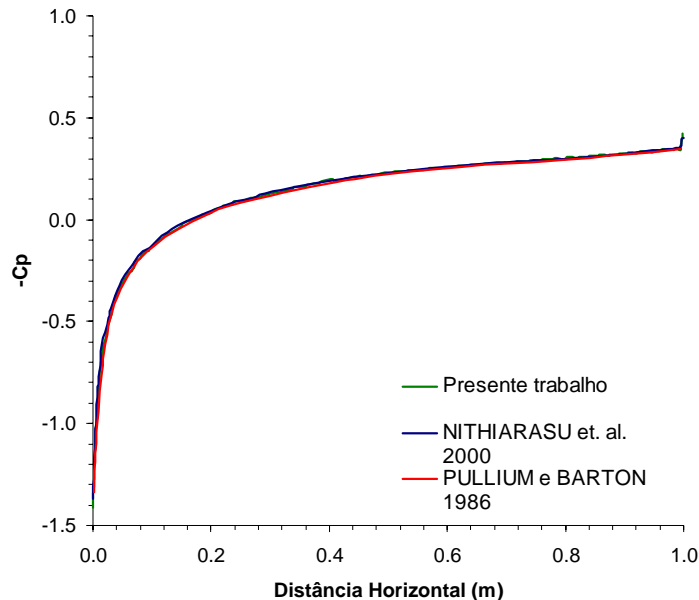


Figura 30 – Coeficientes de pressão para Mach 1,2

### 9.3 escoamento supersônico viscoso sobre uma placa – Estado Estacionário

Este problema consiste no escoamento viscoso, supersônico sobre uma placa plana, a Mach 3, com uma velocidade adimensional (Ver ANEXO II) na direção horizontal do fluxo não perturbado  $\tilde{u}_\infty = 1$ , número de Reynolds  $Re=1000$ , massa específica adimensional  $\rho=1$ , relação entre calor específico à pressão constante e calor específico a volume constante  $\gamma = 1.2$  e número de Prandtl  $Pr=0,72$ . O comprimento de referência tomado foi o comprimento da placa igual a 1.

As condições de contorno aplicadas na entrada foram de fluxo não perturbado na entrada, velocidade nula e temperatura constante e igual à de estagnação  $Te$  (eq.

---

<sup>4</sup> PULLIUM, T. H. e BARTON, J. T. **Euper computaional of AGARD working goup 07, Airfoil test cases**, AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting, Jan 14-17, 1986, Reno, Nevada.

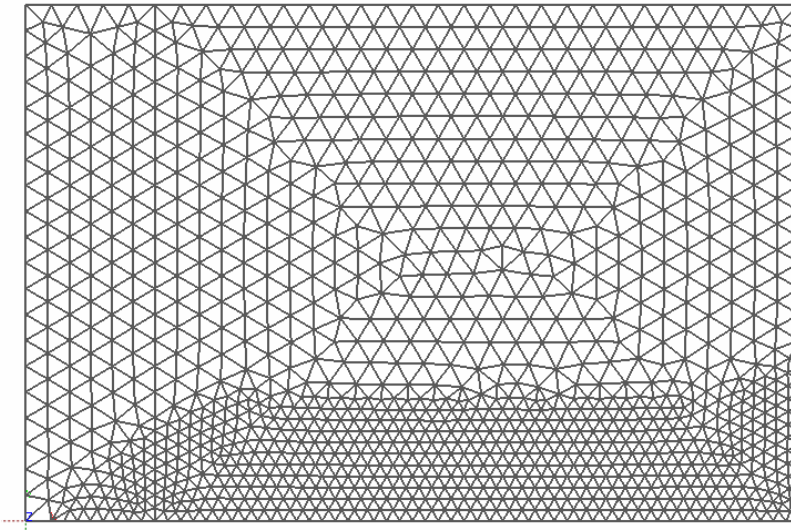
(181)) no contorno da placa, e valores extrapolados do domínio nas saídas (contorno superior e da direita).

$$T_e = T_\infty \left( 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2_\infty \right) \quad (181)$$

Para a viscosidade, considerou-se a Lei de Sutherland para o ar, conforme eq. (182), onde os índices 0 indicam valores iniciais.

$$\mu = \mu_0 \left( \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \left( \frac{T_0 + 110,4}{T + 110,4} \right) \quad (182)$$

A malha utilizada (Figura 31), possui 2310 elementos e 1224 nós, e os resultados estão apresentados nas Figuras 33, 34, 35, 36 e 37.



**Figura 31 – Malha para escoamento viscoso sobre um placa plana**

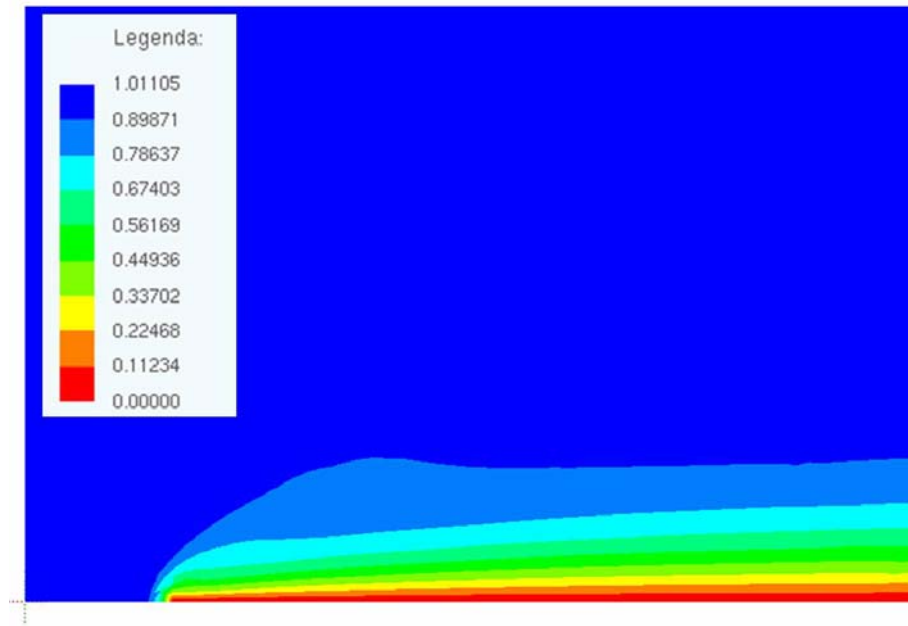


Figura 32 – Distribuição dos valores da componente horizontal de velocidade adimensional sobre a placa

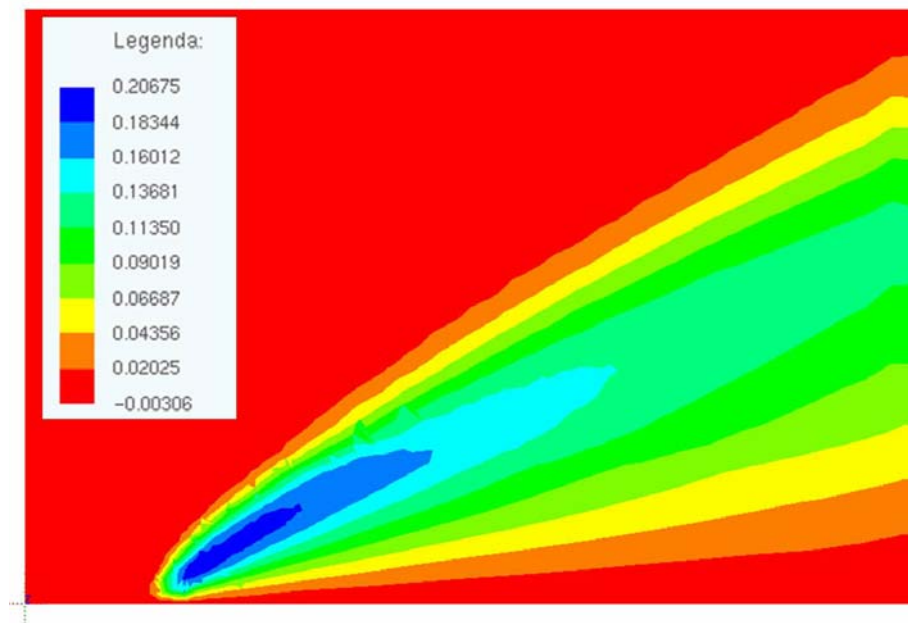
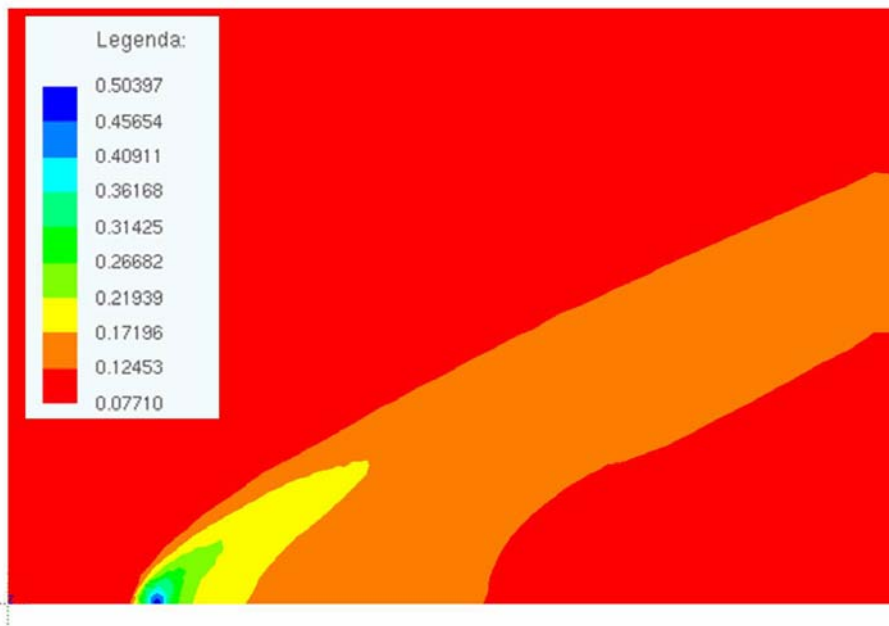
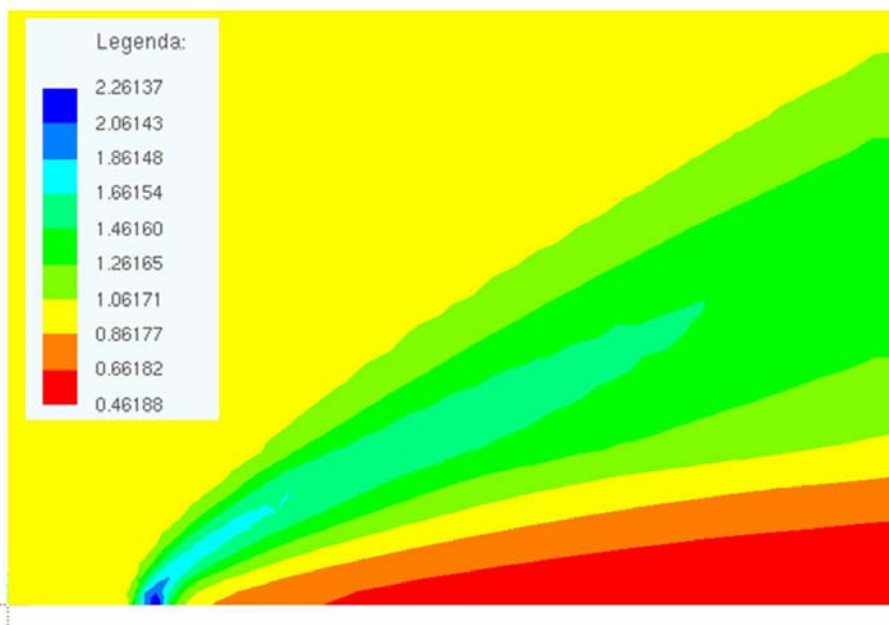


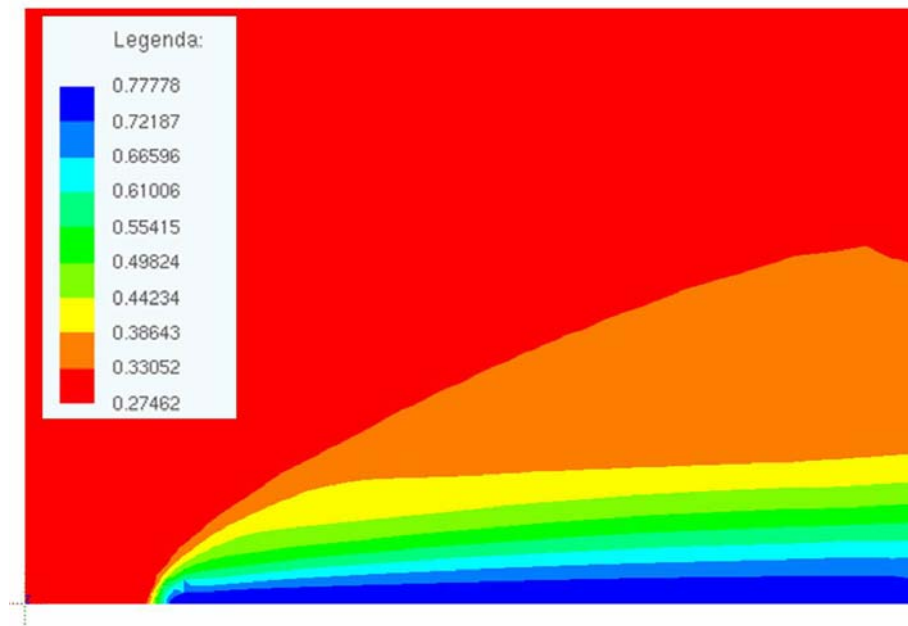
Figura 33 – Distribuição dos valores da componente vertical de velocidade adimensional sobre a placa



**Figura 34 – Distribuição de pressão adimensional sobre a placa**

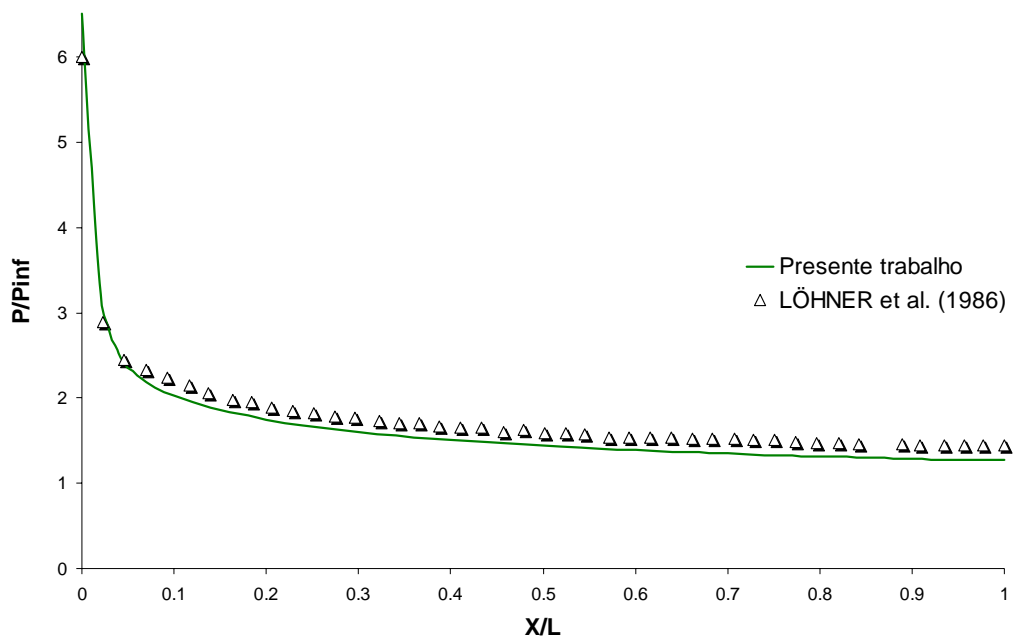


**Figura 35 – Distribuição de massa específica adimensional sobre a placa**



**Figura 36 – Distribuição de Temperatura adimensional sobre a placa**

No gráfico da Figura 37 apresenta-se a comparação da pressão no contorno da placa dividida pela pressão no escoamento não perturbado vs. Distância horizontal relativa da placa  $x/L$ , onde  $L$  é o comprimento da placa obtida pelo presente trabalho, com a obtida por LÖHNER et al. (1986). Observa-se boa proximidade entre os resultados.



**Figura 37 – Taxa de pressão vs. distância relativa da placa**

#### 9.4 Escoamento invíscido transiente em um canal com degrau

Neste exemplo o fluido está em escoamento supersônico não perturbado, então no instante inicial da análise são impostas as restrições de velocidade nas paredes. A geometria do problema, bem como a malha utilizada, com 1204 nós e 2246 elementos, é mostrada na Figura 38.

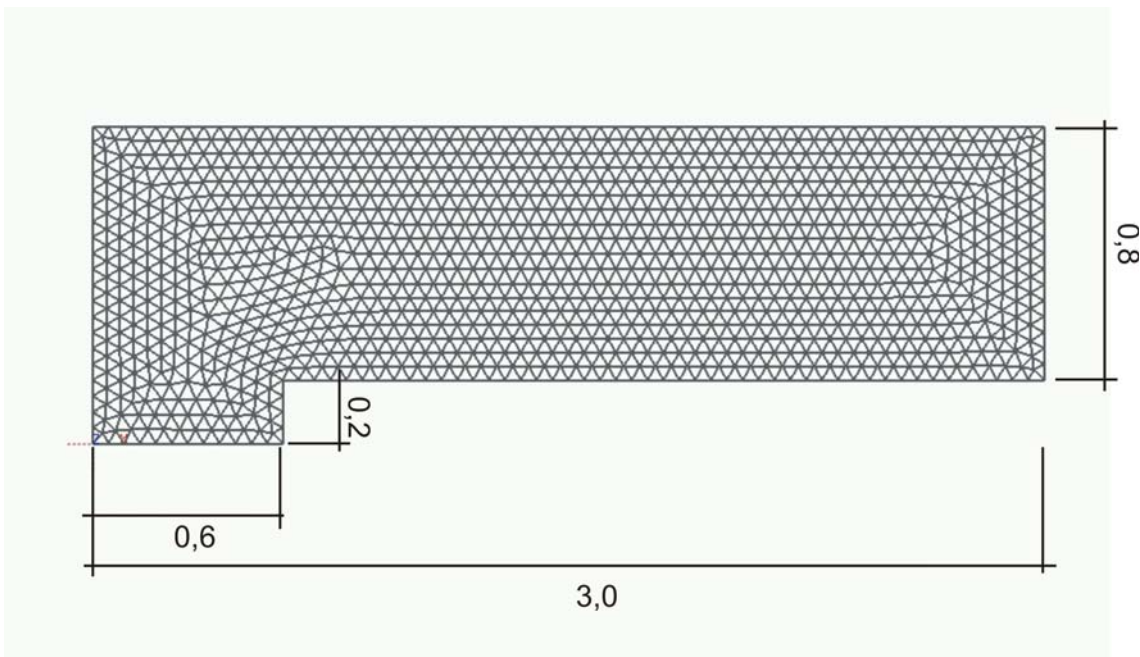
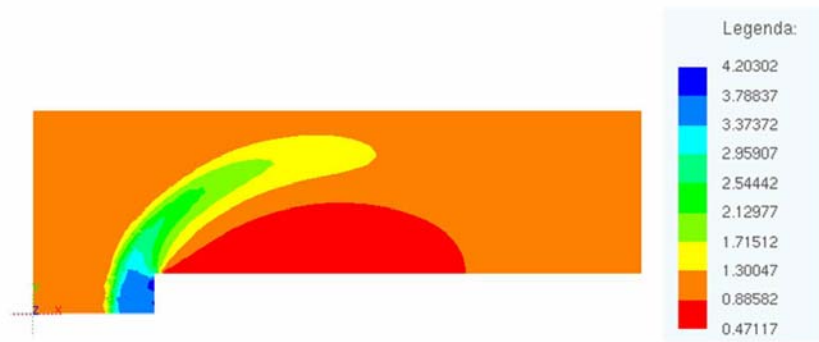
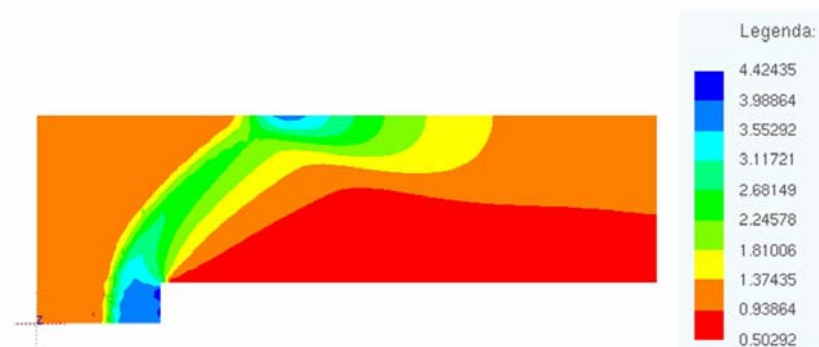
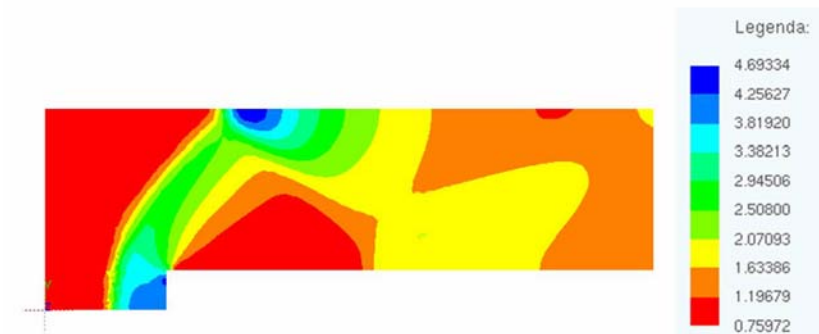
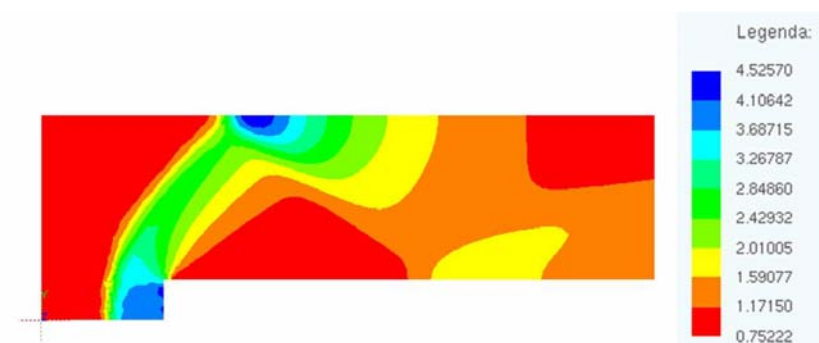


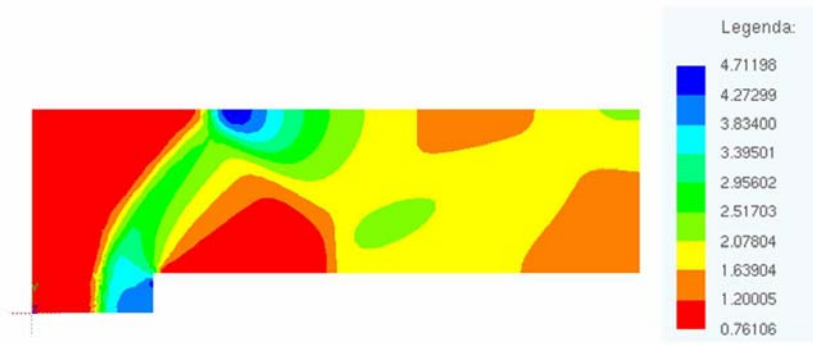
Figura 38 – Geometria do canal com degrau

As condições de contorno impostas na entrada foram de escoamento não perturbado (componente horizontal de velocidade adimensional  $\tilde{u}_\infty = 1$ , número de Mach 3, e densidade adimensional  $\tilde{\rho}_\infty = 1$ ), nas paredes se restringiu o fluxo na direção normal e na saída não se aplicou condições de contorno. A relação entre os calores específicos adotada foi  $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1,4$  e o intervalo de tempo adimensional utilizado foi de 0,0005.

As distribuições de massa específica e de pressão adimensionais, conforme ANEXO II, são mostradas em vários instantes nas Figuras 39 (a)-(e) e 40 (a)-(e), e possuem contornos bastante semelhantes com os obtidos por LÖHNER et al. (1984), apresentados nas Figuras 41 (a) – (e) e 42 (a) – (e).



(a)  $t=0,5$ (b)  $t=1$ (c)  $t=2$ (d)  $t=3$

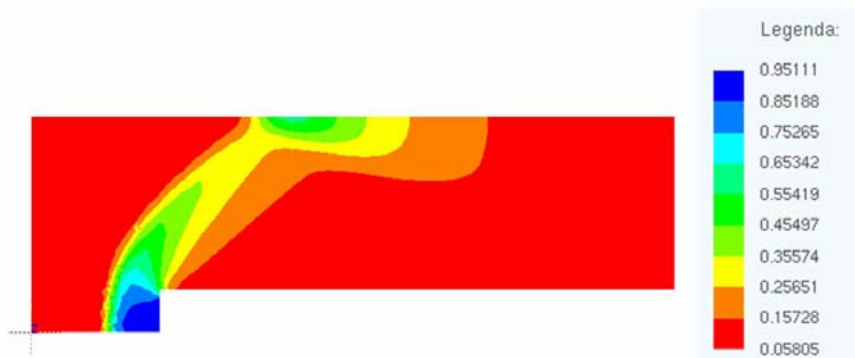


(e) t=4

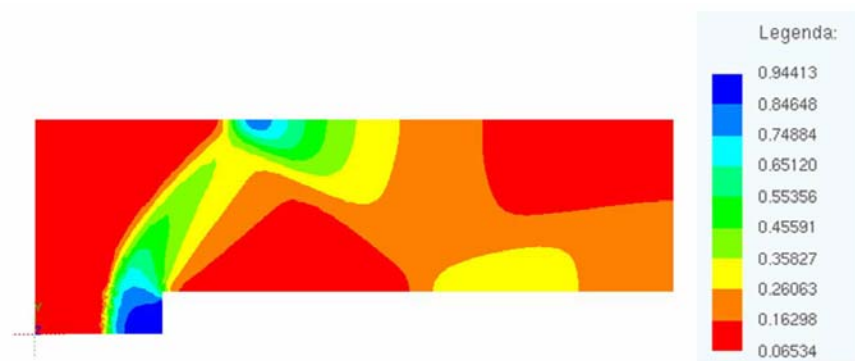
Figura 39 – distribuição de massa específica sobre o degrau



(a) t=0,5



(b) t=1



(c) t=2

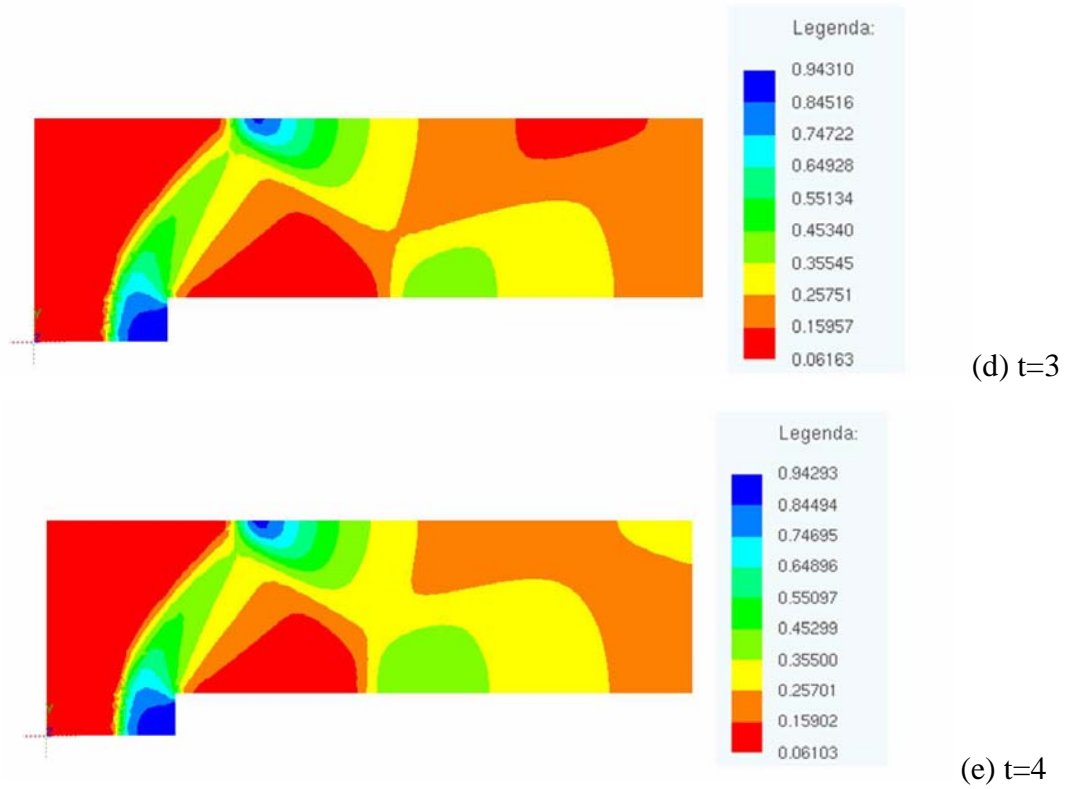
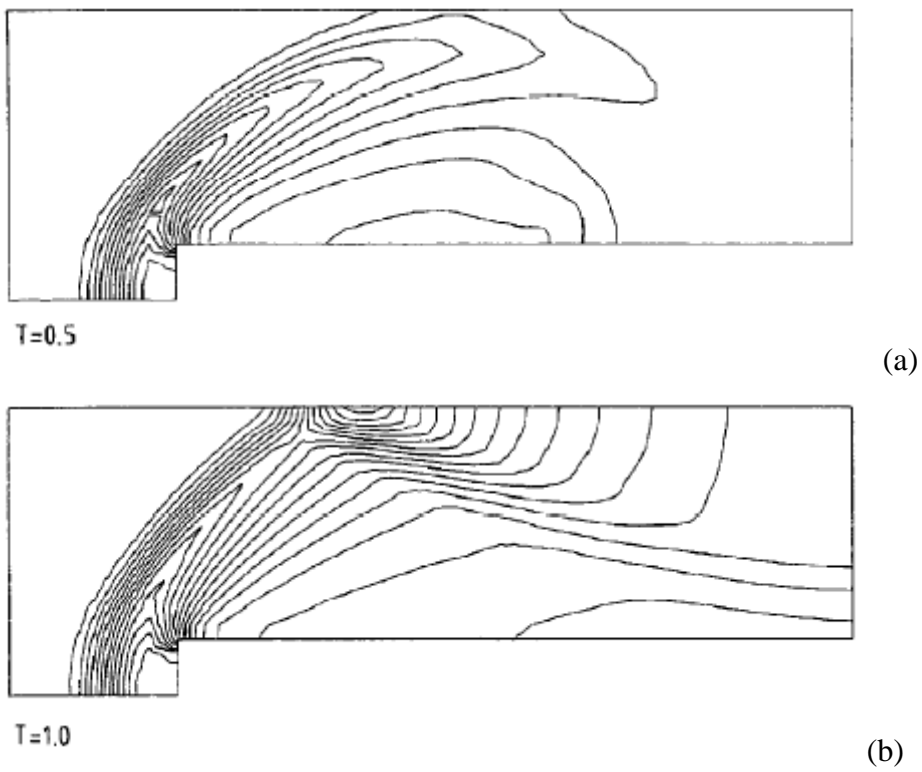
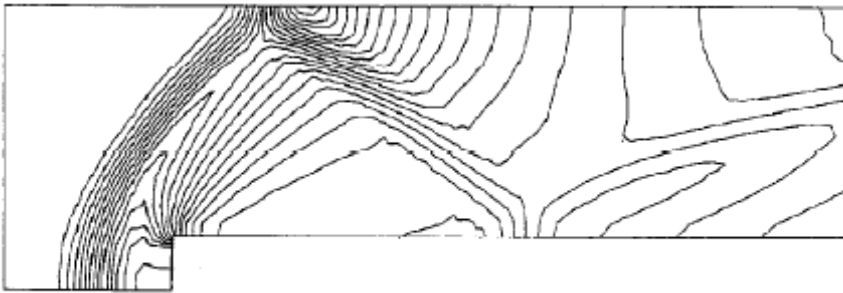


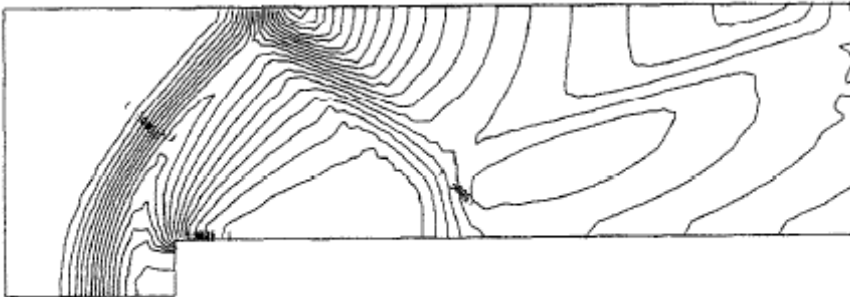
Figura 40 – distribuição de pressão sobre o degrau





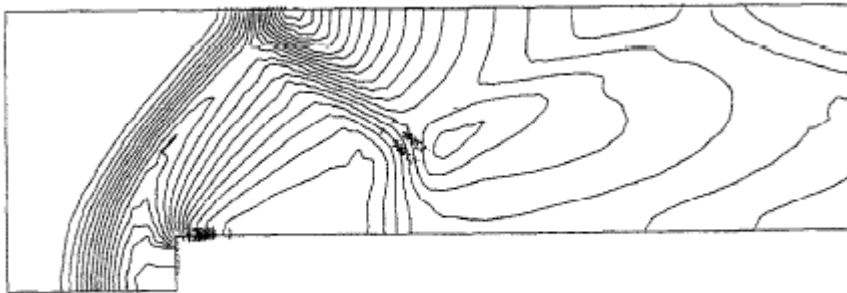
T=2.0

(c)



T=3.0

(d)



T=4.0

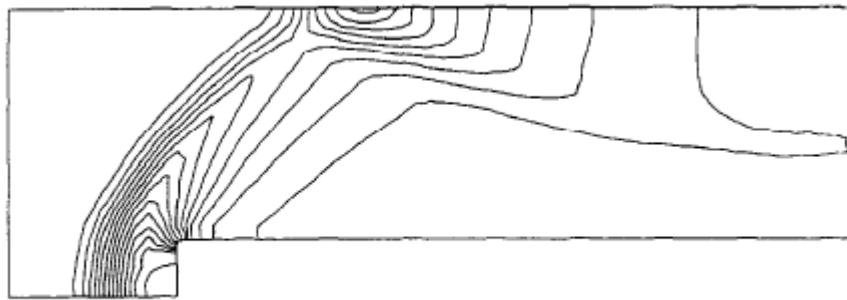
(e)

Figura 41 – contornos de densidade sobre o degrau segundo LÖHNER et al. (1984)



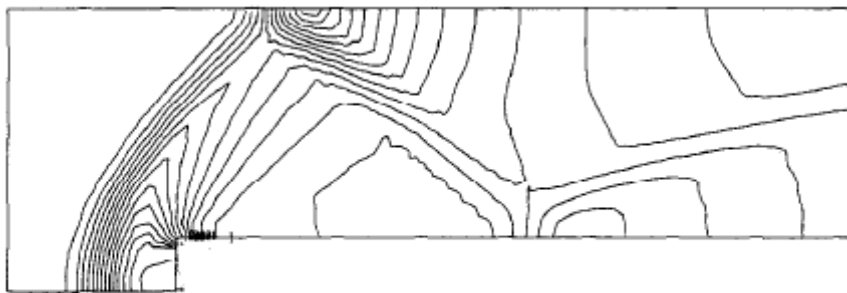
T=0.5

(a)



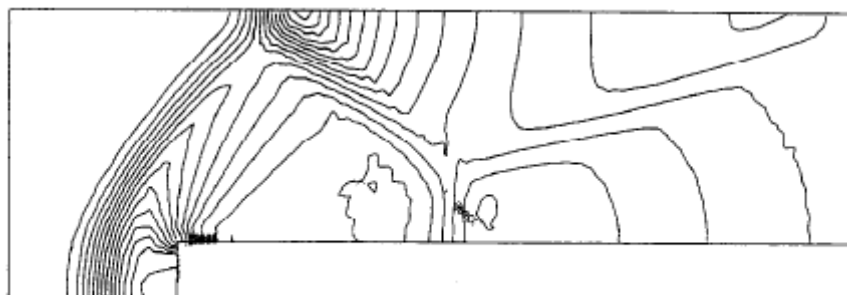
T=1.0

(b)



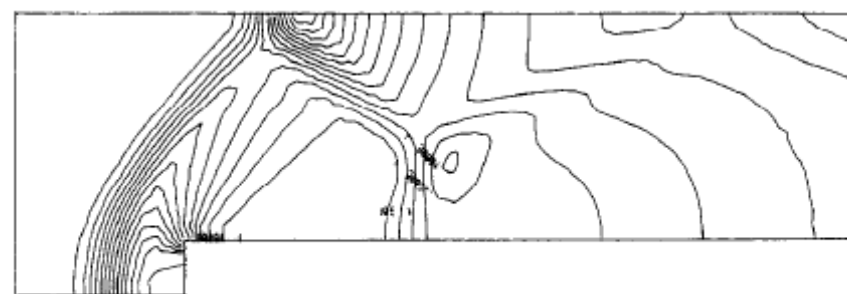
T=2.0

(c)



T=3.0

(d)



T=4.0

(e)

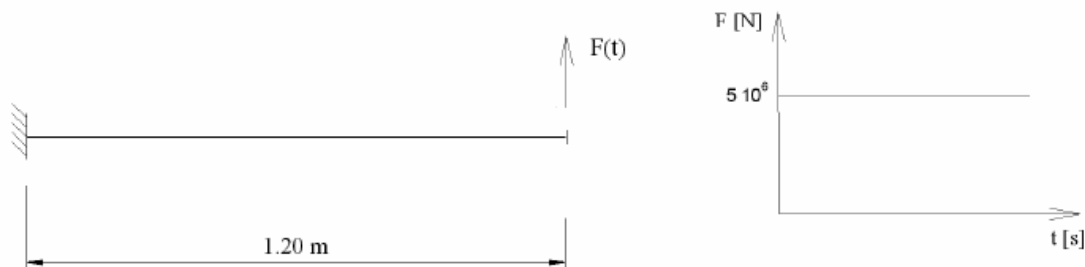
Figura 42 – contornos de pressão segundo LÖHNER et. al. (1984)

## 10 Aplicações de mecânica das estruturas

Neste capítulo apresentam-se duas aplicações simples que mostram o funcionamento do código de dinâmica das estruturas posicional e não linear geométrico, conforme utilizado neste trabalho.

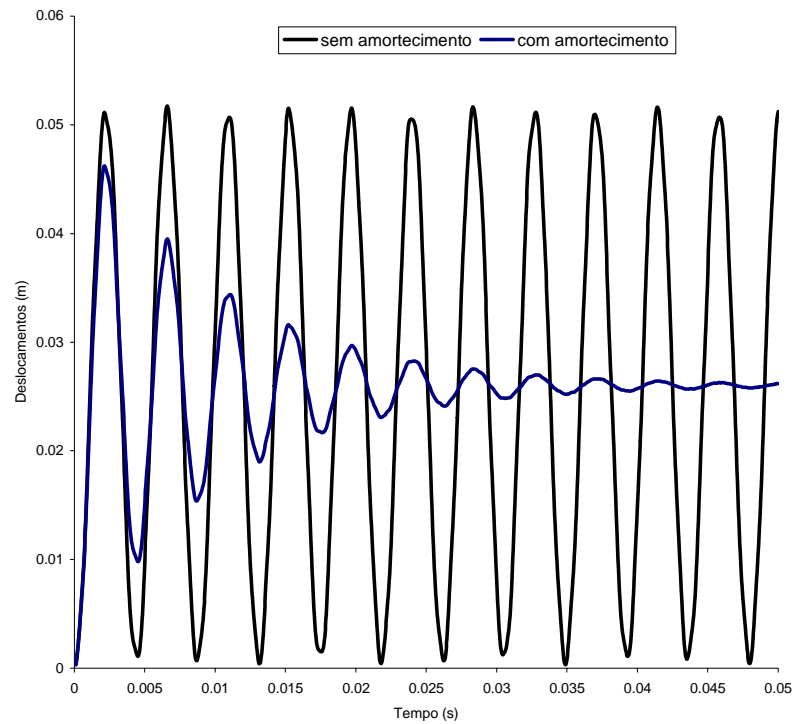
### 10.1 Viga engastada.

Este problema consiste em uma viga em balanço, conforme a Figura 43 com módulo de elasticidade  $E=210$  GPa, momento de inércia  $I=0,000533$  m<sup>4</sup>, área de seção transversal  $A= 0,1856$  m<sup>2</sup>, e massa específica  $\rho=1691,81$  Kg/m<sup>3</sup> na qual é aplicado no instante inicial um carregamento concentrado de 5000000 N.

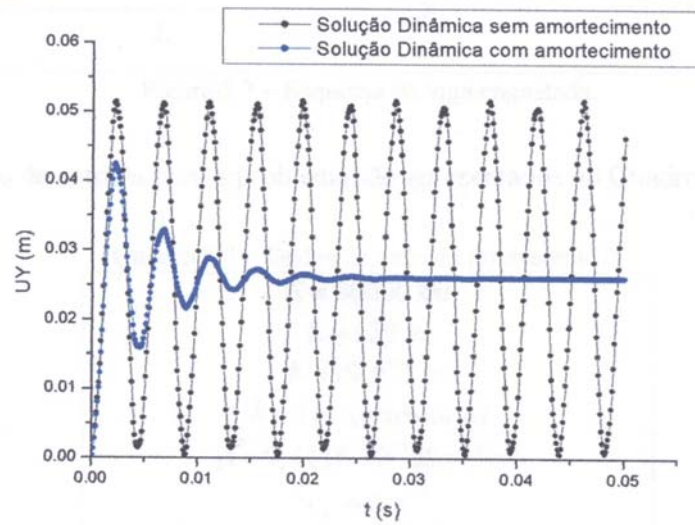


**Figura 43 – geometria da viga**

A viga foi dividida em 4 elementos de 4 nós (aproximação cúbica), e os deslocamentos verticais na extremidade do balanço são mostrados na Figura 44, onde são comparados com o resultado obtido por MARQUES (2006), através de simulação utilizando elementos bidimensionais (sólido). Na primeira análise, considerou-se a estrutura sem amortecimento, já na segunda, considerou-se uma constante de amortecimento de 200 s<sup>-1</sup>.



(a)



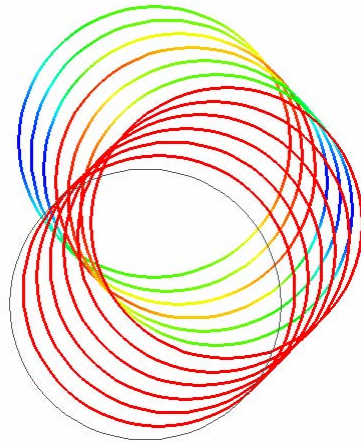
(b)

**Figura 44 – deslocamentos na extremidade do balanço (a) presente trabalho (b) MARQUES (2006)**

## 10.2 Impacto de um anel contra anteparo rígido

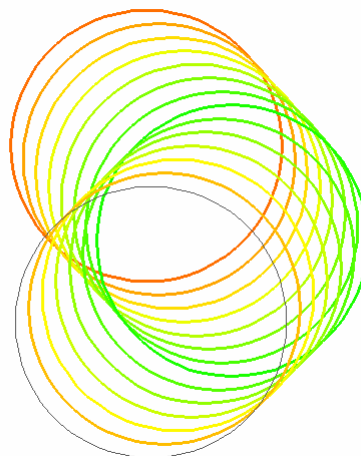
Este problema trata-se de um anel (de um material elástico) com seção transversal circular de raio  $r = 0,2\text{cm}$  e com raio médio de  $R = 10\text{cm}$ , o qual é submetido a uma velocidade inicial de componentes horizontal e vertical  $v_0 = 10\text{cm/s}$  e

choca-se contra um anteparo rígido distante. A densidade do material é  $1\text{kg}/\text{dm}^3$  e seu módulo de elasticidade. A tolerância em posição para este caso foi de  $3 \times 10^{-6}$  e o passo de tempo utilizado foi de  $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}\text{s}$ .



**Figura 45 – impacto do anel (vazio) contra anteparo rígido sem atrito**

A mesma análise foi realizada para a estrutura submetida a uma pressão interna (força por unidade de comprimento 2D) de  $p = 0,25\text{N}/\text{m}$  e seu resultado é mostrado na Figura 46.



**Figura 46 – impacto do anel (cheio) contra anteparo rígido sem atrito**



## 11 Aplicações de Interação Fluido-Estrutura

Tendo os códigos sido validados pelas aplicações anteriores, passa-se agora às aplicações de interação fluido-estrutura.

### 11.1 Escoamento sobre placa vertical engastada.

Esta aplicação consiste no escoamento de um fluido viscoso sobre uma placa vertical engastada ao chão, como acontece em muitas obras civis. Deve-se notar a aproximação bidimensional para a placa, uma vez que esta passa a comportar-se como uma viga.

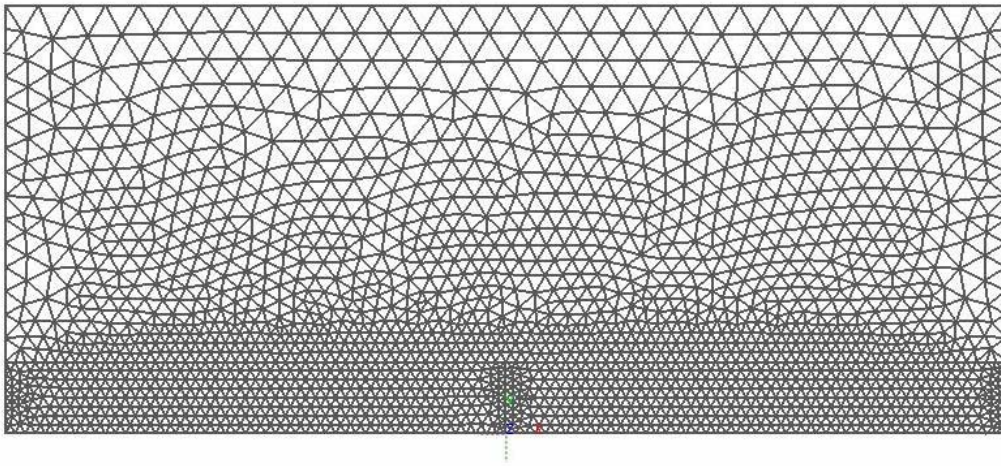
O fluido apresenta inicialmente as seguintes propriedades em todo o domínio:

|  |  |
|--|--|
| Velocidade do som:   | $c=340$ m/s                                    |
| Velocidade do escoamento não perturbado nas direções $x$ e $y$ : | $u_{\infty} = 10$ m/s,<br>$v_{\infty} = 0$ m/s |
| Massa Específica:  | $\rho = 1,2$ Kg/m <sup>3</sup>                 |
| Calor específico a pressão constante:                            | $c_p = 1005,2$ J/(kg.K)                        |
| Calor específico a volume constante:                             | $c_v = 718$ J/(kg.K)                           |
| Viscosidade dinâmica   | $\mu = 0.0000179$ Pa.s                         |
| Condutividade térmica nula.                                      |  |

No instante inicial, são impostas todas as componentes de velocidade nulas no contorno inferior, componentes de velocidade iguais às da estrutura no contorno com a estrutura, condição de simetria na parte superior (fluxo vertical nulo) e mantêm-se todos os valores fixos na entrada e prescreve-se a pressão e a velocidade vertical na saída.

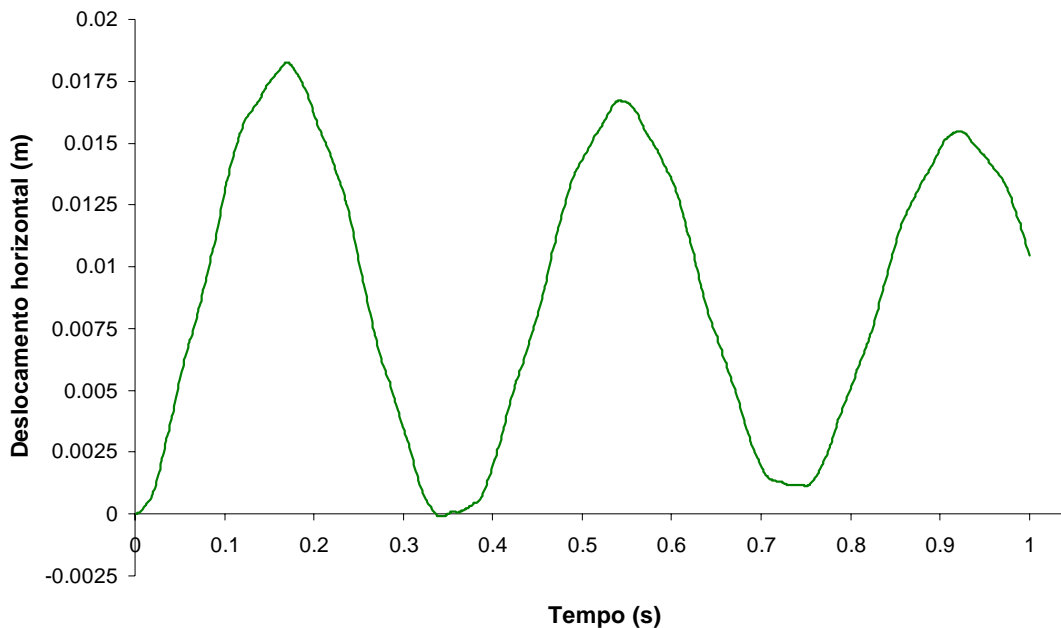
A estrutura possui as dimensões de 1 m de altura, por 1 m de largura, por 0,1 m de espessura, módulo de elasticidade longitudinal de 210 MPa e massa específica de 7800 Kg/m<sup>3</sup>. A constante de amortecimento da estrutura é nula.

A malha utilizada possui 2079 nós, sendo 10 deles coincidentes de modo a permitir aplicar as condições de contorno nos dois lados da estrutura, 3956 elementos triangulares de aproximação linear para o fluido e 3 elementos, 2 de 4 nós (cúbicos) e um de 5 nós (quarto grau), conforme a Figura 47.



**Figura 47 – malha para placa vertical**

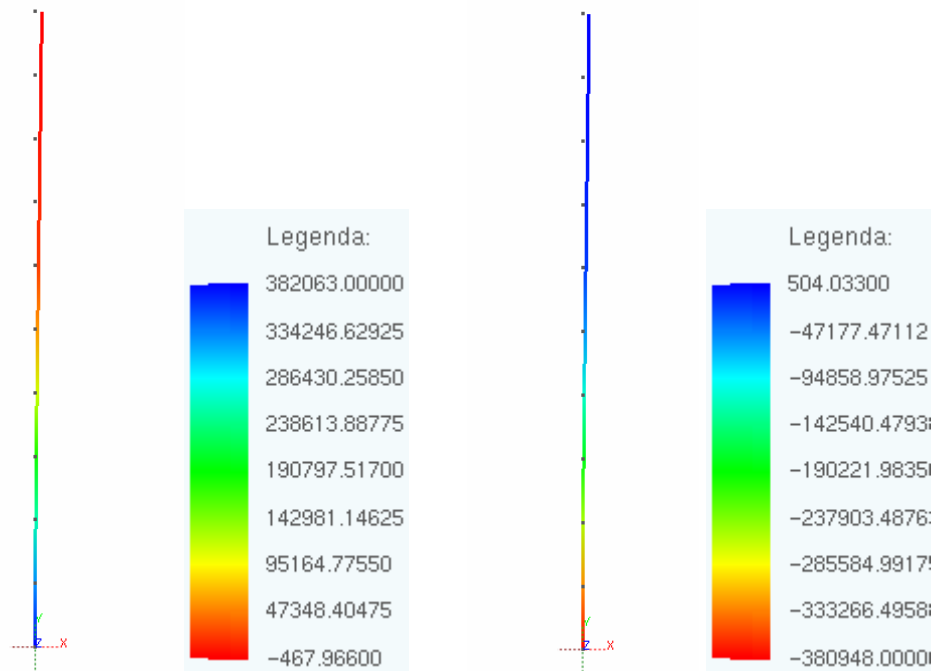
A estrutura começa a oscilar, sendo o primeiro igual a 0,34 s, e ao decorrer do tempo vai tendo as oscilações amortecidas pelo fluido, conforme Figura 48.



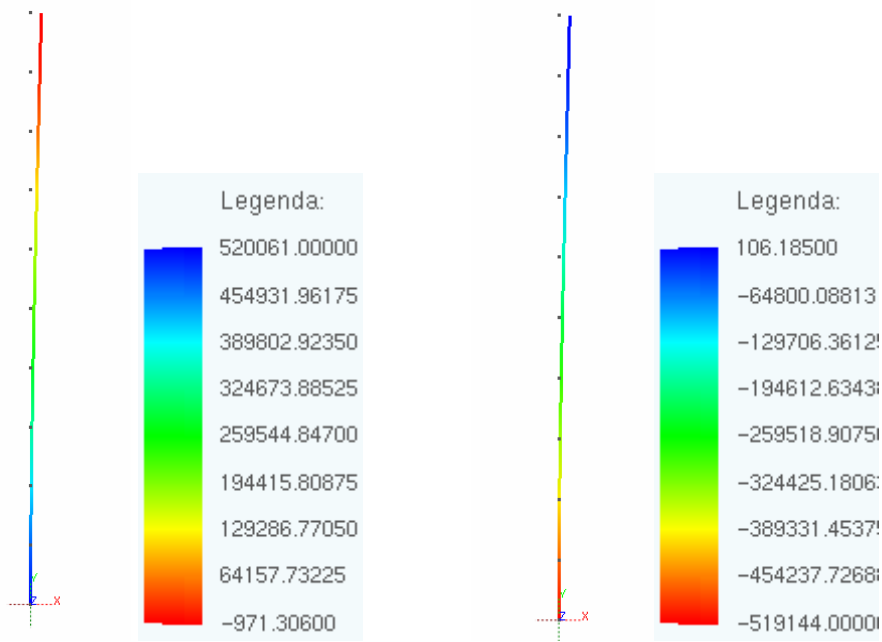
**Figura 48 - deslocamento no extremo da placa vs. tempo**

As tensões normais  $\sigma_{xx}$ , sendo  $x$  o eixo longitudinal da estrutura, nas faces esquerda e direita, nos instantes 0,085 s, 0,175 s e 0,25 s, são mostradas respectivamente nas figuras 49 (a-c) e (d-e), e na Figura 50 (a-c) apresenta-se a distribuição de pressão sobre a placa flexível em instantes do primeiro ciclo de oscilação da estrutura. Utilizou-se um intervalo de tempo de 0,001 s para a estrutura, sendo que o intervalo de tempo do fluido foi 50 vezes menor, uma vez que para a malha do fluido esse era o intervalo adequado e para a estrutura não se torna interessante um intervalo muito pequeno (ver TEIXEIRA (2001)). Assim cada ciclo até uma nova análise da estrutura possui 50 passos para o fluido.

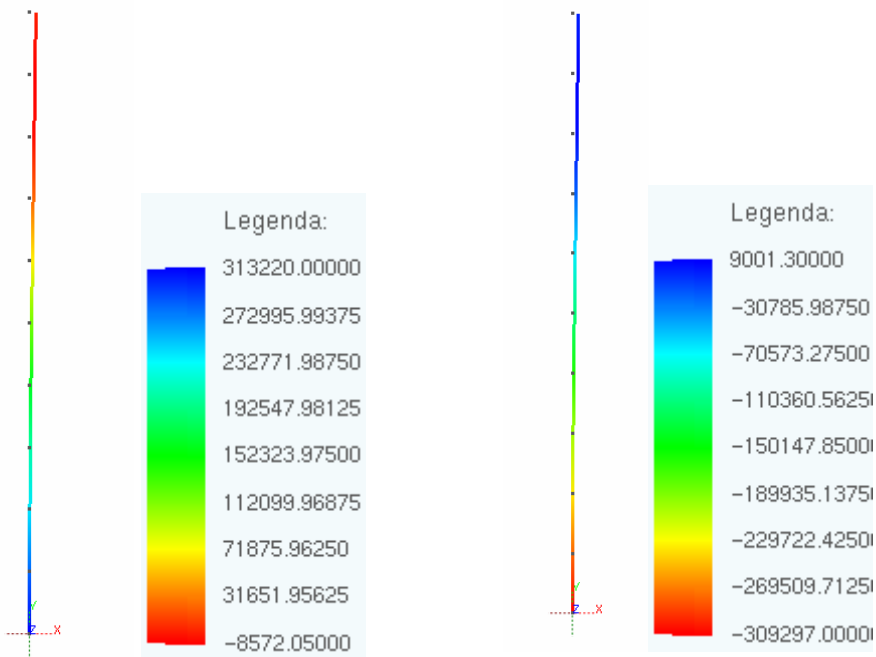
(a) tensão na face esquerda (Pa)  $t = 0,085$  s    (d) tensão na face direita (Pa)  $t = 0,085$  s



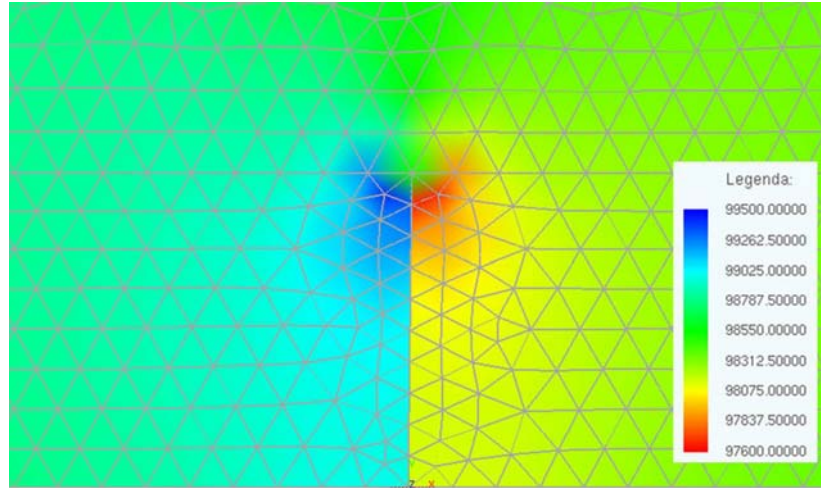
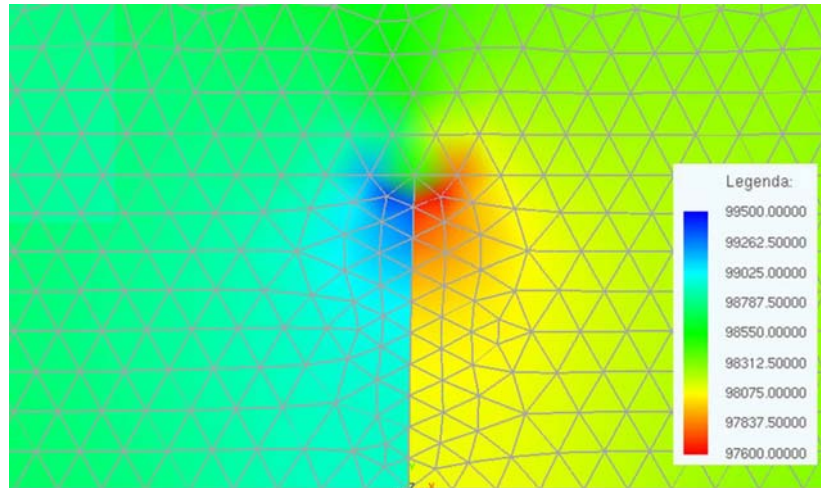
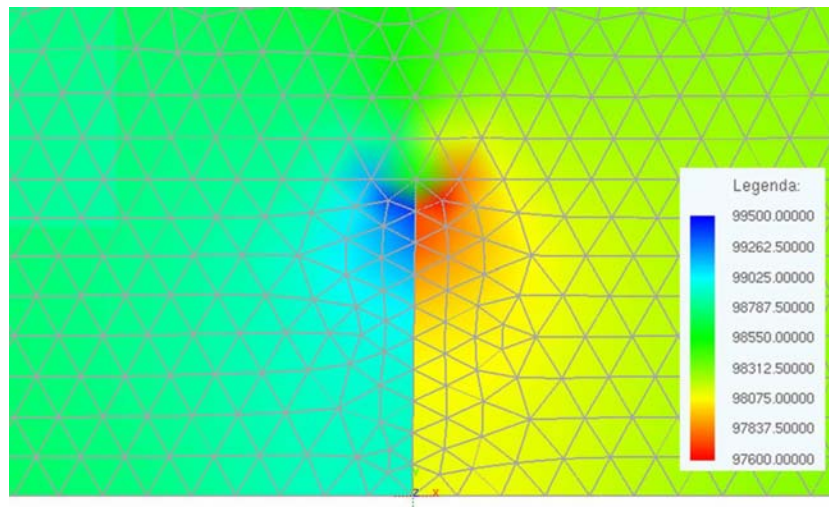
(b) tensão na face esquerda (Pa)  $t = 0,175$  s    (e) tensão na face direita (Pa)  $t = 0,175$  s



(c) tensão na face esquerda (Pa)  $t=0,250$  s    (f) tensão na face direita (Pa)  $t=0,250$  s



**Figura 49 – tensões normais na placa**

(a)  $t=0,085$  s(b)  $t=0,175$  s(c)  $t=0,250$  s**Figura 50 (a-c) – pressão (Pa) sobre a placa flexível**

## 11.2 Escoamento invíscido sobre uma estrutura fina elástica com a geometria do aerofólio NACA 0012 de corda de 1 m.

Este exemplo consiste em um escoamento invíscido sobre um aerofólio NACA0012, de corda de 1 m, com as seguintes características:

Fluido: Velocidade do som: 340 m/s, Velocidade horizontal do escoamento 255 m/s (Mach=0,75), Velocidade vertical do escoamento nula, Massa específica 1,2 Kg/m<sup>3</sup>, calor específico a pressão constante: 1005,2 J/(kg.K) e calor específico a volume constante: 718 J/(kg.K).

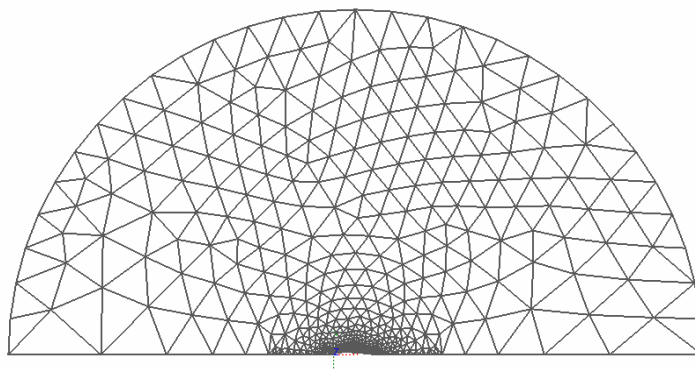
Sólido: Módulo de Elasticidade: 4200 MPa, coeficiente de Poisson: 0, seção transversal retangular, de 1 m de largura por espessura de 3 mm e massa específica: 2500 Kg/m<sup>3</sup>, pressão interna igual a pressão inicial do fluido.

Foram adotadas as seguintes condições de contorno:

Fluido: Velocidade e pressão prescritas iguais às iniciais na entrada, Escoamento paralelo na saída, velocidade normal nas paredes do aerofólio igual a da estrutura e simetria em relação ao eixo x

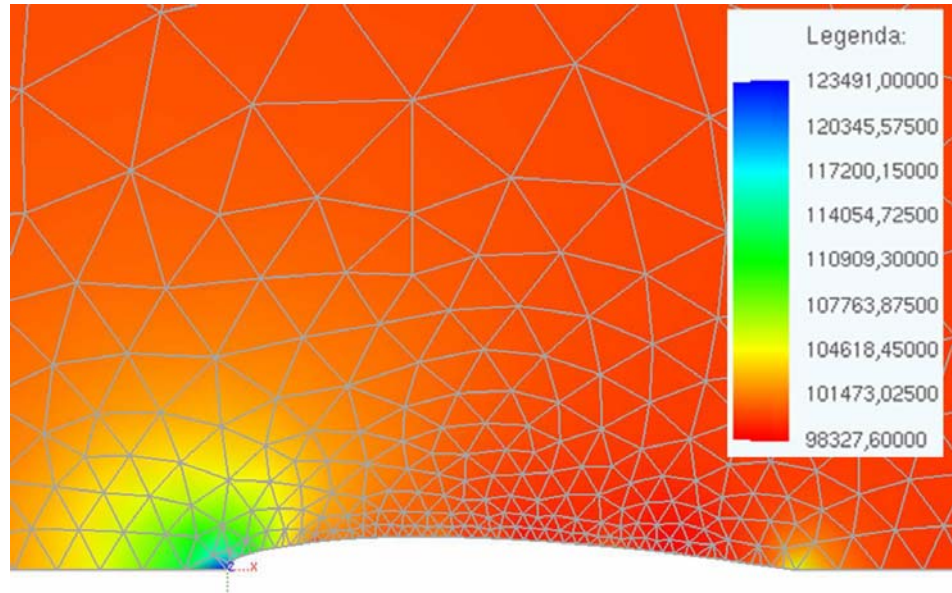
Sólido: engastado no início do aerofólio e engaste livre sobre o eixo x no fim (simetria).

Optou-se por considerar a simetria do problema de forma a obter ganhos na velocidade de processamento. A malha utilizada é mostrada na Figura (51) e possui 557 nós e 982 elementos. A estrutura é modelada por 16 elementos de 4 nós (cúbicos) e 1 elemento de 3 nós (quadrático). O intervalo de tempo para o sólido foi de 0,0001 s, com um ciclo de 100 interações para o fluido (intervalo de 0,000001 s).

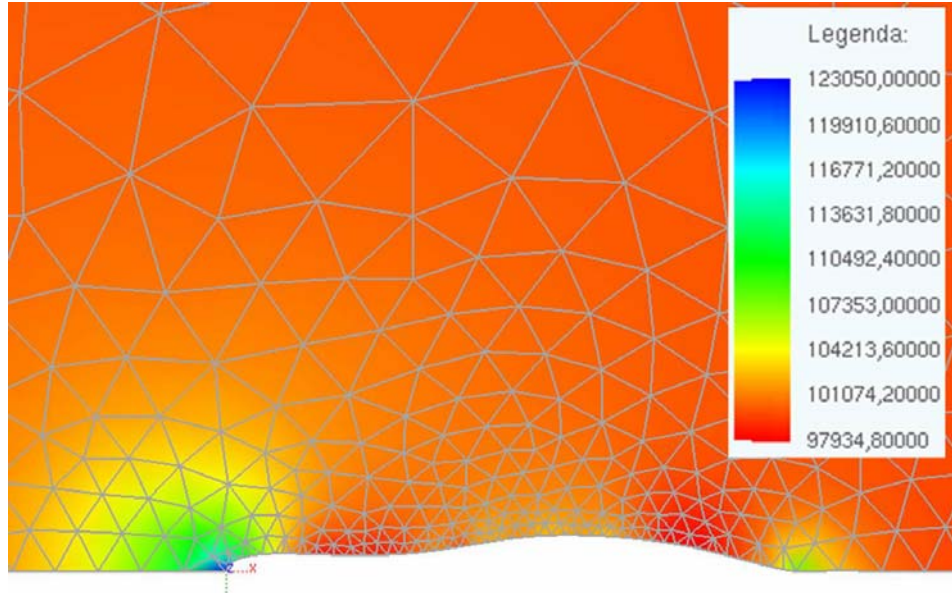


**Figura 51 – malha para o aerofólio flexível**

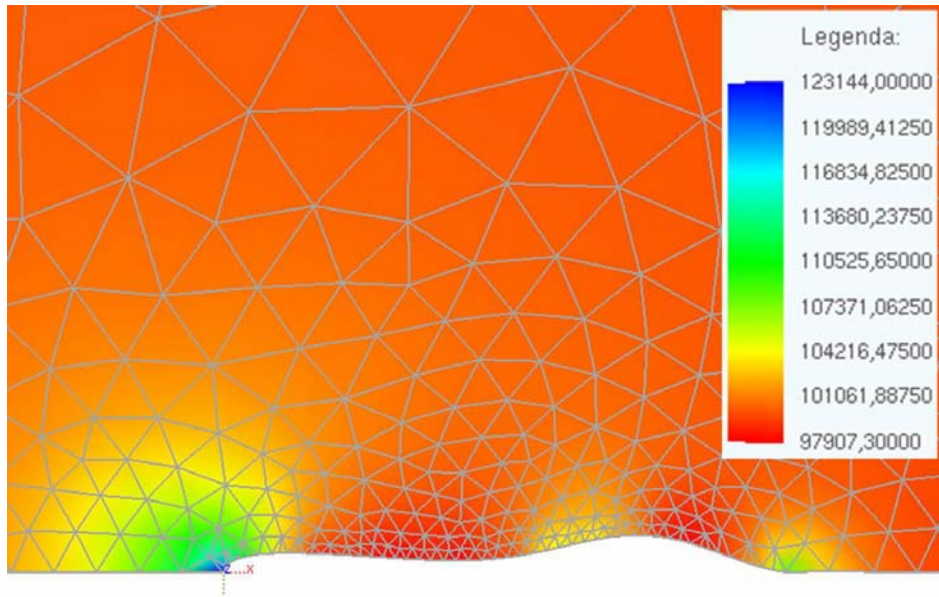
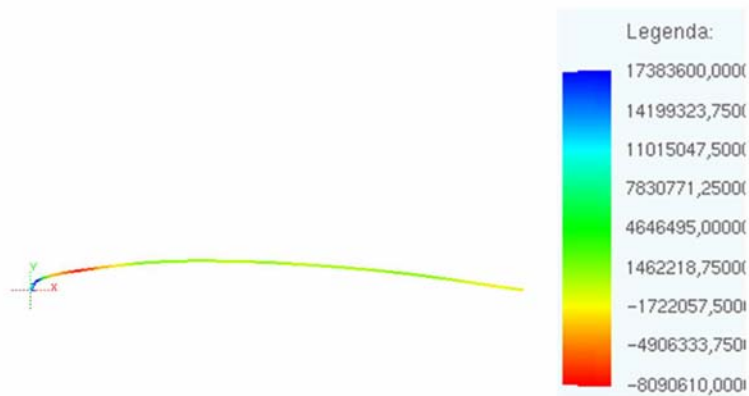
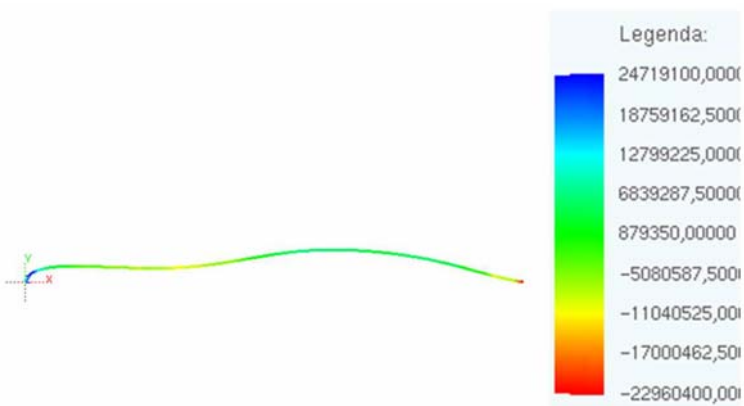
A distribuição de pressão sobre a estrutura deformada nos instantes 0,005, 0,02 e 0,03 s é apresentada na Figura (52) (a-c) e a distribuição de tensões normais na face externa da estrutura, paralelas à linha média é mostrada na Figura (52) (d-e).



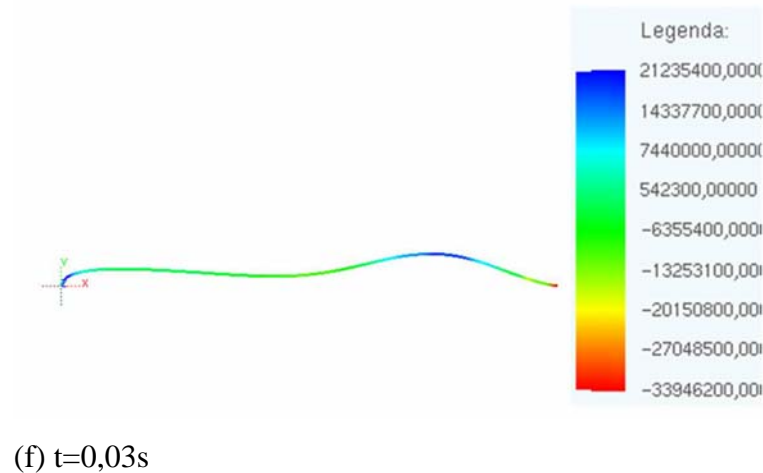
(a)  $t=0,005$  s



(b)  $t=0,02$ s

(c)  $t=0,03$  s(d)  $t=0,005$  s(d)  $t=0,02$  s





**Figura 52 – distribuição de pressão (Pa) (a-c) e Distribuição de tensões (Pa) (d-f) sobre o aerofólio deformado**

### 11.3 escoamento sobre arco flexível

Neste exemplo de aplicação, tomou-se um arco de  $180^\circ$  e raio de 20 m de material com módulo de elasticidade longitudinal  $E=210$  GPa e coeficiente de Poisson nulo. Testaram-se duas seções transversais diferentes, a primeira com espessura de 1 cm e largura de 1 m, e a segunda com espessura de 5 cm e largura de 1 m.

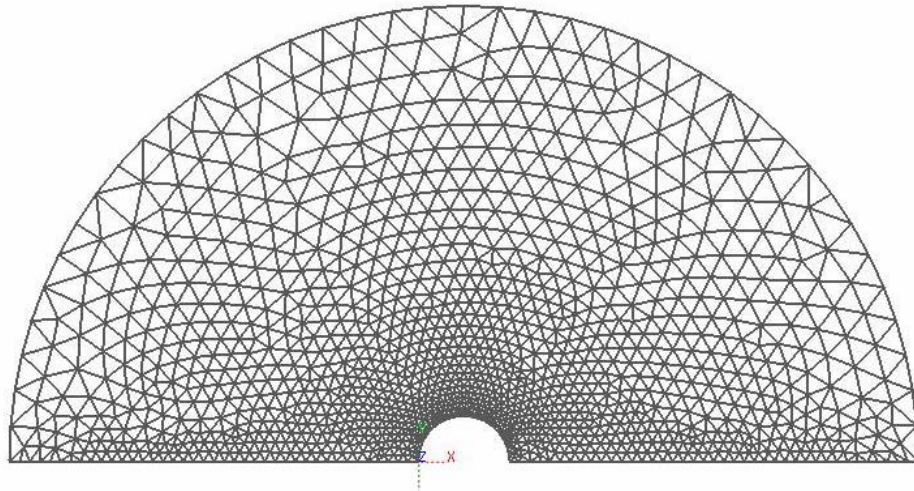
O escoamento não perturbado apresenta:

|  |   |
|--|---|
| Velocidade do som:   | $c=345$ m/s   |
| Velocidade do escoamento não perturbado nas direções $x$ e $y$ : | $u_\infty = 30(y/10)^{0,28}$ m/s,<br>$v_\infty = 0$ m/s |
| Massa Específica:  | $\rho = 1,21$ Kg/m <sup>3</sup>                         |
| Calor específico a pressão constante:                            | $c_p = 1005,2$ J/(kg.K)                                 |
| Calor específico a volume constante:                             | $c_v = 718$ J/(kg.K)                                    |
| Viscosidade dinâmica   | $\mu = 0.0000179$ Pa.s                                  |
| Condutividade térmica nula.                                      |   |

No instante inicial consideram-se as propriedades acima para todo o domínio de fluido, então se impõe a condição de contorno na estrutura. Na entrada prescreveu-se

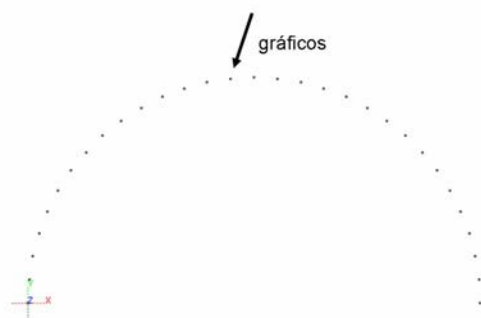
as velocidades, na saída prescreveu-se a pressão e a velocidade vertical e internamente ao arco, impôs-se uma pressão constante igual a 100281 Pa (fluxo não perturbado).

A malha para o domínio do fluido (ver Figura 53) possui 1272 nós e 2392 elementos. A estrutura foi discretizada com 31 nós e 10 elementos de aproximação cúbica. Para a estrutura foi de 0,01 s, com um ciclo de 100 passos de 0,0001 s para o fluido.

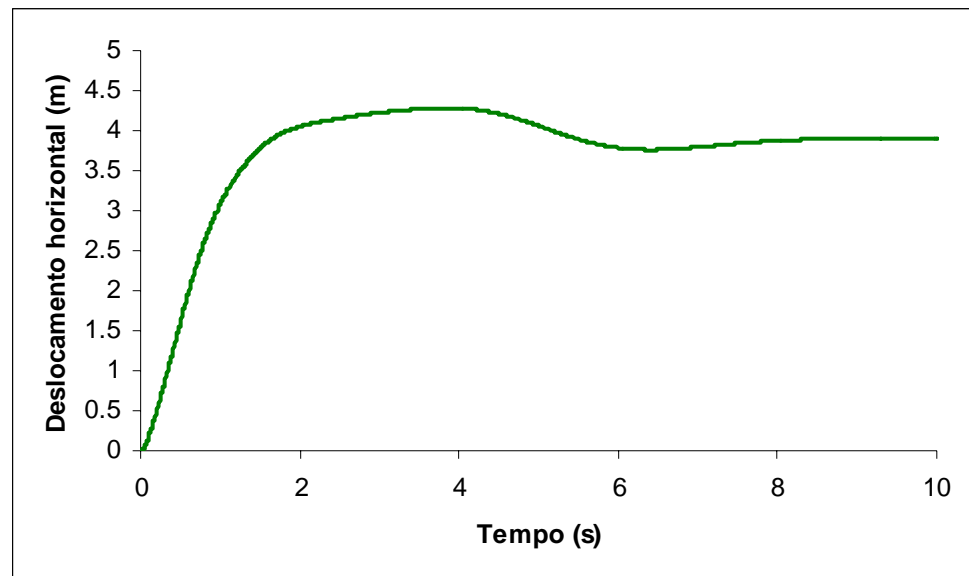
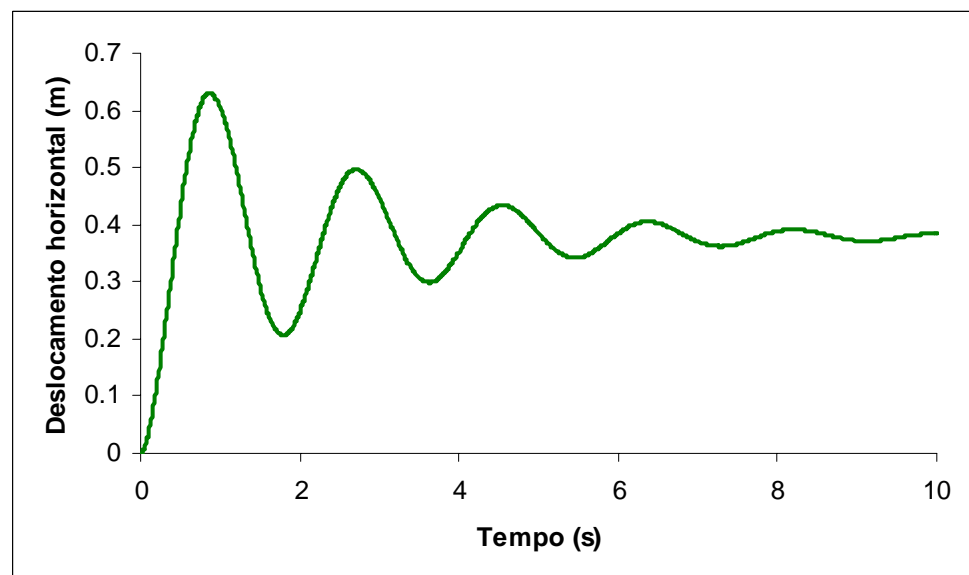


**Figura 53 – malha para o arco**

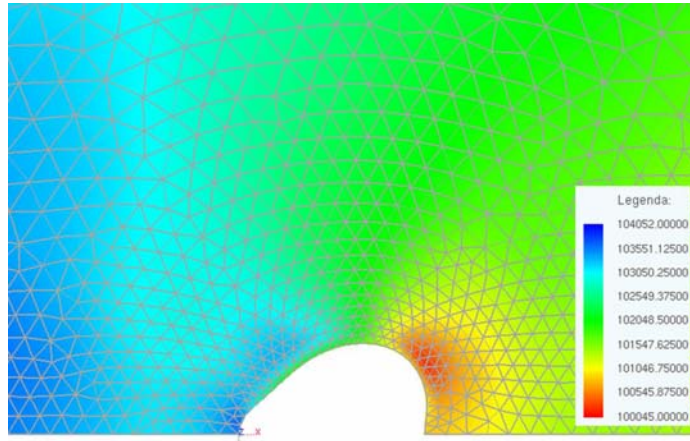
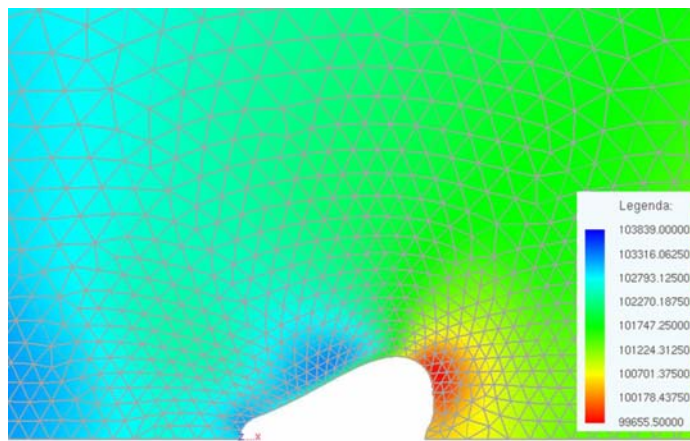
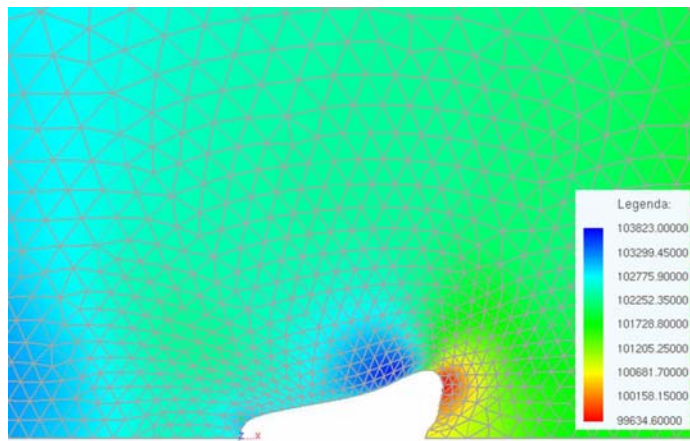
Nos gráficos da figuras 55 (a) e (b), apresenta-se respectivamente o deslocamento horizontal do nó destacado na figura 54 com o passar do tempo para o arco com espessura de 1 cm e para o com espessura 5 cm.

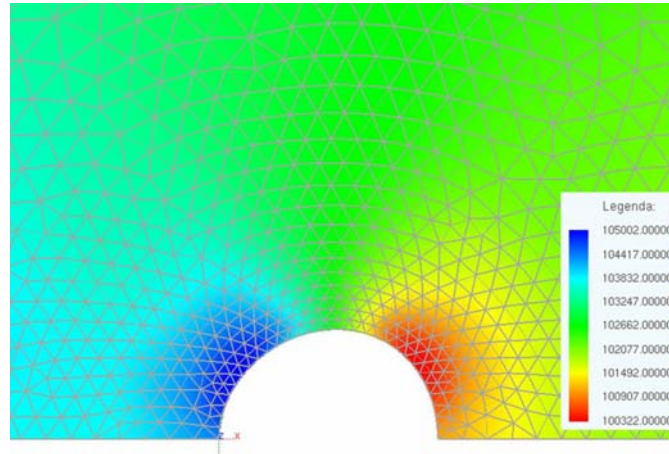
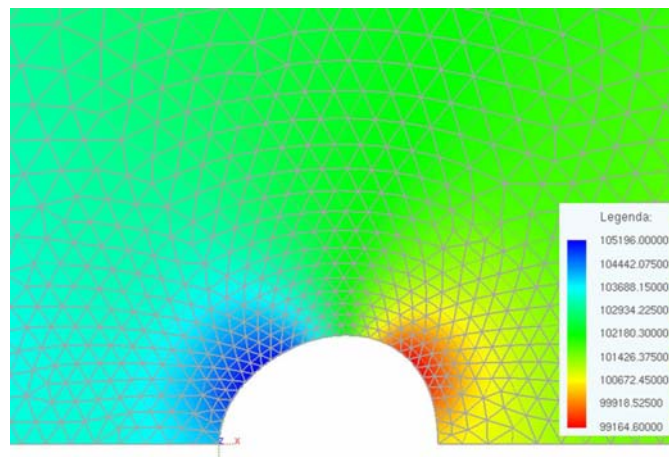
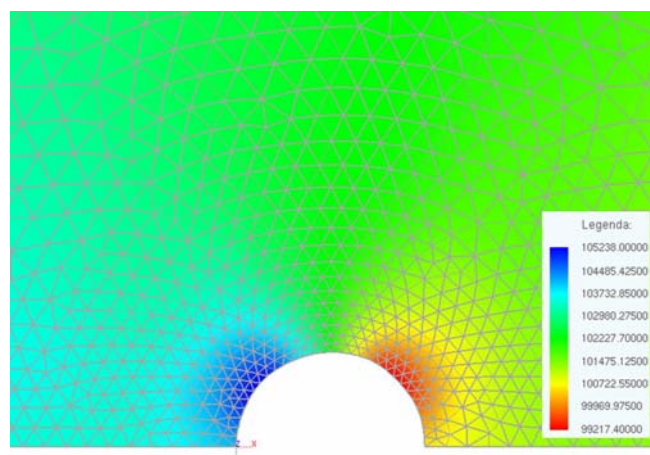


**Figura 54 – Nó usado para gerar os gráficos**

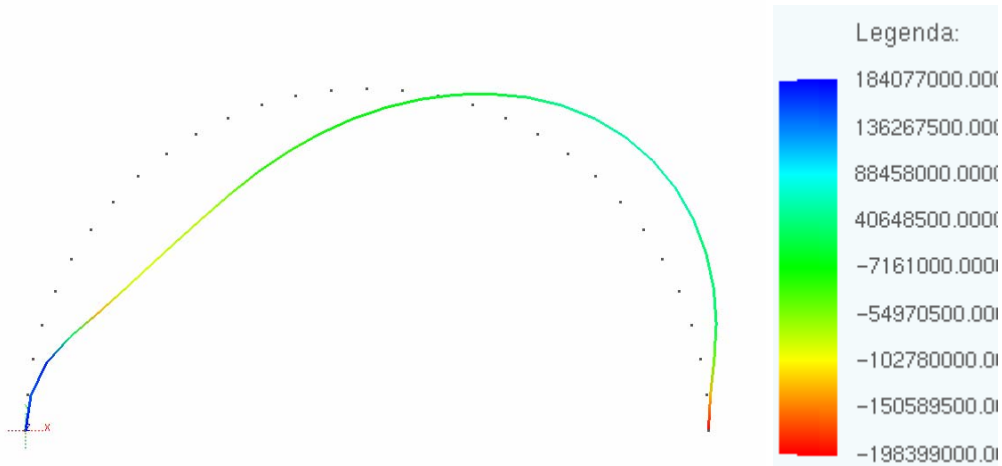
(a)  $e=1$  cm(b)  $e=5$  cm**Figura 55 - deslocamento horizontal vs. tempo para o nó de referencia**

Na Figura 56 (a-c) é mostrado a distribuição de pressão sobre o arco de espessura 1 cm deformado nos instantes 0,5 s, 1 s e 2 s, enquanto na Figura 57 (a-c), é mostrado a distribuição de pressão sobre o arco de espessura 5 cm deformado nos instantes 0,35 s, 0,95 s e 1,87 s.

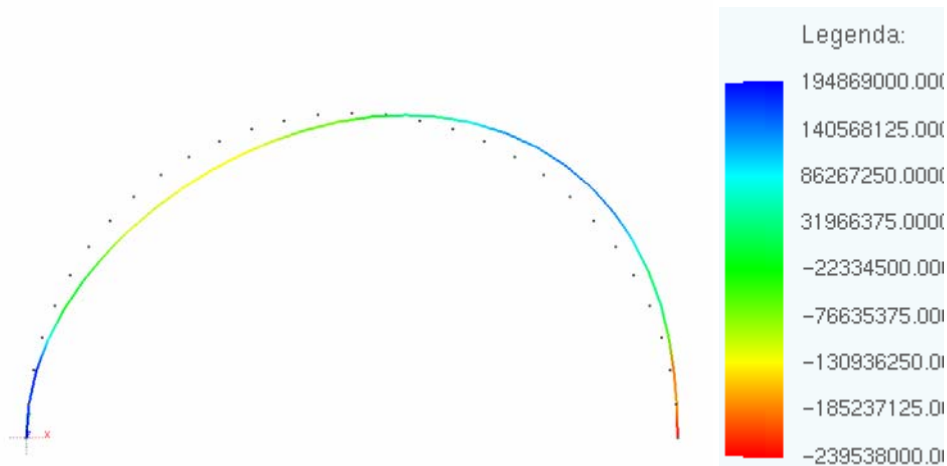
(a)  $t=0,5$  s(b)  $t=1,0$  s(b)  $t=2,0$  s**Figura 56 – pressão (Pa) sobre o arco de espessura de 1 cm**

(a)  $t=0,35$  s(b)  $t=0,95$  s(c)  $t=1,87$  s**Figura 57 - distribuição de pressão sobre o arco de 5 cm de espessura**

Nas figuras 58 e 59, apresenta-se a distribuição de tensões normais  $\sigma_{xx}$ , sendo  $x$  o eixo longitudinal da estrutura, nas faces externas do arco de 1 cm de espessura no instante  $t=0,5$  s e do arco de 5 cm de espessura, no instante  $t=0,95$  s.



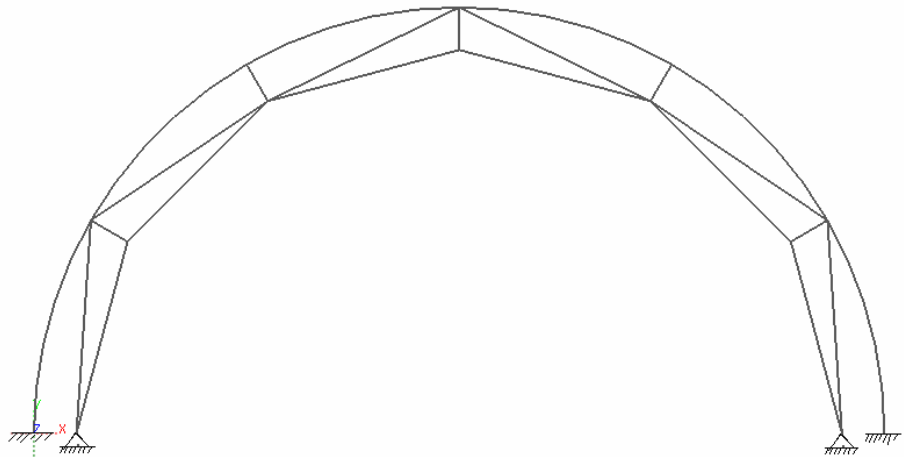
**Figura 58 - tensões (Pa) no arco de 1 cm de espessura**



**Figura 59 - tensões (Pa) no arco de 5 cm de espessura**

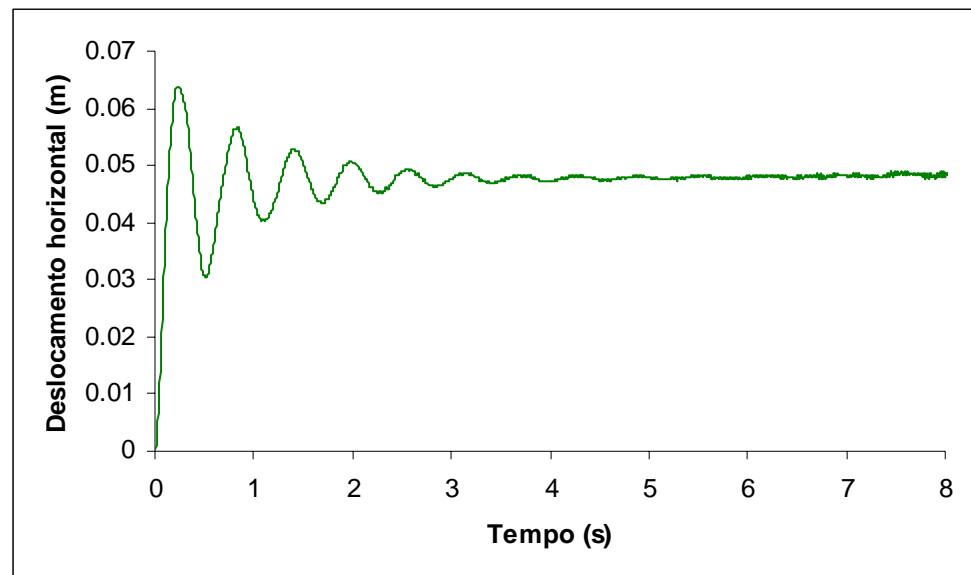
#### 11.4 Escoamento sobre arco com estrutura interna

Tomando-se o arco de espessura  $e=1$  cm do item 11.3, criou-se uma estrutura interna ao mesmo, toda composta por barras rotuladas nos nós e com as mesmas propriedades do arco, conforme a Figura 60.

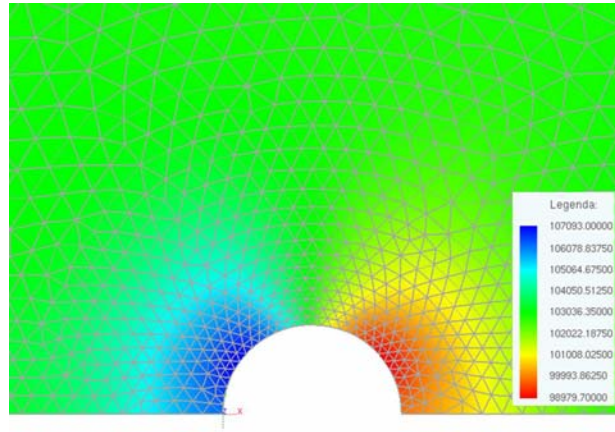
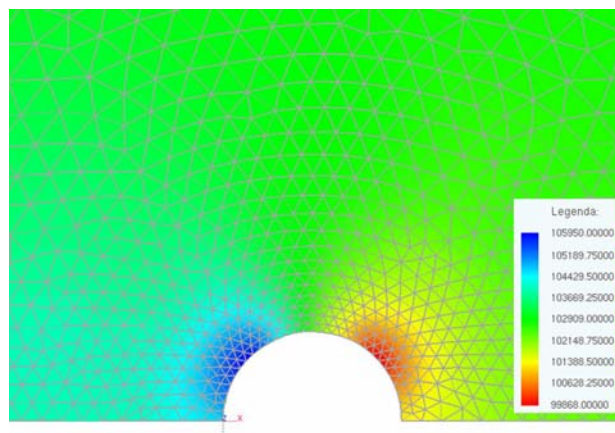
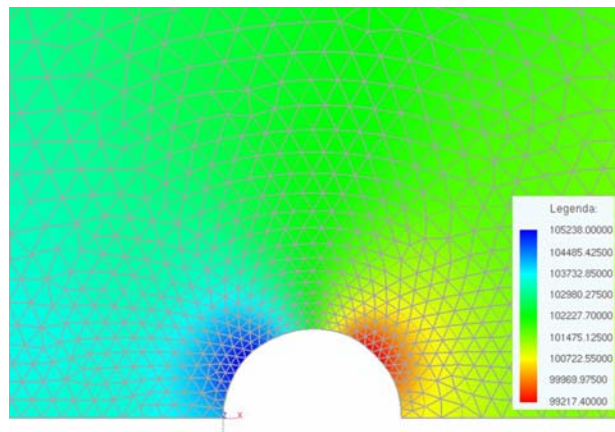


**Figura 60 – arco treçado**

Utilizando-se a mesma malha para o fluido, as mesmas propriedades e condições de contorno, e o mesmo nó de referência do item 11.3, foi possível gerar o gráfico da figura 61, onde nota-se o elevado aumento de rigidez em relação ao mesmo arco sem a estrutura interna. As distribuições de pressão mostradas na Figura 62 (a-c) foram obtidas para os instantes  $t=0,05$  s,  $t=0,12$  s e  $t=1,8$  s.

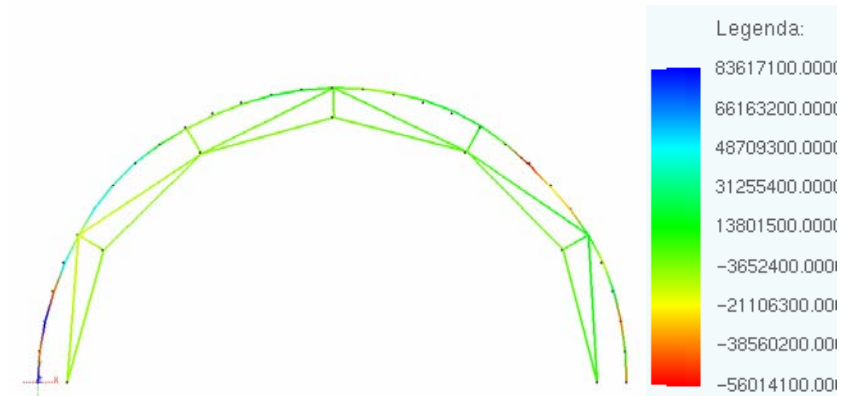


**Figura 61 – Deslocamento horizontal vs. Tempo para o arco treçado**

(a) $t=0,05$  s(b) $t=0,12$  s(c) $t=1,8$  s**Figura 62 - distribuição de pressão (Pa) sobre o arco treçado**



Na figura 63 apresenta-se a distribuição de tensões normais  $\sigma_{xx}$  na face externa do arco, no instante  $t=6,5$  s. Deve-se observar que as variações nas barras de treliça devem ser desprezadas, uma vez que são produzidas pelo posprocessador usado, que interpola os valores nodais.



**Figura 63 – tensões (Pa) no arco treliçado**

## 12 Conclusão

Neste trabalho, realiza-se primeiramente um estudo da mecânica dos fluidos de forma a obter-se um código computacional baseado no Método dos Elementos Finitos para simular problemas desta área, o que é feito através do algoritmo CBS (*Characteristic Based Split*) em sua versão explícita e cuja eficácia para escoamentos compressíveis é demonstrada através das simulações feitas para escoamentos invíscidos e viscosos. Em seguida, o algoritmo, baseado nas equações descritas na forma Euleriana, é adaptado de forma a permitir acoplamento de forma particionada com um algoritmo Lagrangeano para mecânica das Estruturas. Por fim, estuda-se o algoritmo para mecânica das estruturas desenvolvido por MACIEL e CODA (2005) e procede-se o acoplamento, apresentando-se exemplos de aplicações do código para estruturas e do acoplamento.

Muitas foram as dificuldades evidenciadas durante este trabalho para elaboração de algoritmos que simulem problemas de interação fluido estrutura. Dentre estas dificuldades destacam-se, por exemplo, a formulação e características diferentes para os dois materiais, a dificuldade em se encontrar as condições de contorno adequadas a cada problema e a qualidade do equipamento utilizado, uma vez que à medida que os problemas a serem simulados vão se tornando mais ricos em detalhes, faz-se necessário uma discretização bem mais refinada, elevando bastante o tempo de processamento.

Como pode ser observado, os objetivos deste trabalho, que se resumem em desenvolver um código computacional bidimensional para mecânica dos fluidos que possa ser acoplado a um outro código para mecânica das estruturas de formulação não linear geométrica posicional, foram totalmente alcançados, porém, os seguintes aspectos

podem ser levantados como importantes para futuros estudos: 1) Melhoria do desempenho do algoritmo e da sua interação com o usuário, incluindo processamento paralelo, 2) Estudo aprofundado sobre instabilidade e amortecimento numérico que possam ocorrer no algoritmo, 3) Implementação de modelos de turbulência, 4) Implementação de elementos finitos iso-paramétricos de maior ordem para o fluido e 5) Implementação de algum modelo de adaptação de malha para o domínio do fluido.

### Referências Bibliográficas

ANDERSON, J. D., Jr. *Computational Fluid Dynamics – The Basics with Applications*. Editado por McGraw-Hill, Inc., Nova York, Estados Unidos, 1995 1ª Ed. p. 547

ANTUNES, A.R.E.; LYRA, P. R. M. E WILLMERSDORF, R. B. A *Methodology and Computational System for the Simulation of Fluid-Structure Interaction Problem*. J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng. 2005:03 pp225-265

ARGYRIS, J.H.; BALMER, H.; DOLTSINIS, J.S.; DUNNE, P.C.; HAASE, M.; KLEIBER, M.; MALEJANNAKIS, G.A.; MLEJNEK, H.P.; MULLER, M.; SCHARPF, D.W. (1979). *Finite-element method - natural approach*, Computer methods in applied mechanics and engineering, v.17, p.1-106.

ARGYRIS, J.H.; DUNNE, P.C.; SCHARPF, D.W. *Large displacement small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom*, Computer methods in applied mechanics and engineering, 1978 v.14, p.401-451.

ARGYRIS, J. MLEJNEK, H. P. *Dynamics of structures, Texts on computational mechanics, v..5, North-Holland, Amsterdam*, 1991.

ASSAN, A. E. *Método dos Elementos Finitos: primeiros passos*. Editado por Editora UNICAMP, Campinas, São Paulo 20032ª Ed. p. 298

BELYTSCHKO, T., SCHWER, L.,

KLEIN, M.J. (1977). *Large displacement, transient analysis of space frames*, International journal for numerical methods in engineering, v.11, p.65-84.

BATHE, K.J.; BOLOURCHI, S. (1979). *Large displacement analysis of 3-dimensional beam structures*, International journal for numerical methods in engineering, v.14, p.961-986.

BATHE, K.J.; RAMM, E.; WILSON, E.L. *Finite element formulations for large deformation dynamic analysis*, International journal for numerical methods in engineering, 1975 v.9, pp.353-386.

BAUER, B.E. *Practical parallel programming*. San Diego, Academic Press, 1992

BLOM, F. J. *A monolithic fluid-structure interaction algorithm applied to the piston problem*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1998 v. pp 369-391.

CODA H.B., *Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: Uma formulação posicional baseada no MEF*, Tese apresentada à EESC – USP, a concurso de professor titular, São Carlos, 2003.

CODA, H.B. GRECO, M., *A simple and precise FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193, 3541-3557, 2004.

CHORIN, A. J.; *Numerical solution of Navier-Stokes equations*. Math. Comput., 22, 745-762, 1968

CHUNG, T., J. *Computational Fluid Dynamics* Editado por Cambridge University Press, Cambridge, Inglaterra, 2002.

CRISFIELD, M.A. (1991). *Non-Linear finite element analysis of solids and structures*. v.1. England, John Wiley & Sons

DONEA, J.; GIULIANI, S.; LAVAL, H.; QUARTAPELLE, L. *Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equations by a fractional step method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1982, v.33, p. 53-73.

FARHAT, C. *Computation in sciences, methods and algorithms on supercomputing for engineering – COSMASE*. Advanced course on computational fluid dynamics. Lausanne, Suíça, 1995.

FOX, R. W.; McDONALD, A. T. *Introdução à mecânica dos fluidos*. Editado por LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S. A., Rio de Janeiro, RJ, 2001. p504.

GIULIATTI, S.; DE SANTO, M. C.; JÚNIOR, M. F.; JÚNIO, C. Q.; *A Simulação Computacional Aplicada na Área Médica CBIS'2002 - VIII Congresso Brasileiro de Informática em Saúde – Natal/RN, 2002*

GLÜCK, M.; BREUER, M.; DURST, M.; HALFMANN, A.; RANK E. *Computation of fluid-structure interaction on lightweight structures* J. of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 2001 pp1351–1368

GRECO M *Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo Método dos Elementos Finitos*. Tese de Doutorado, EESC-USP, 2004. p. 152

GRECO M, CODA HB *A simple and precise FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description* Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering, 2004 a, v.193, pp. 3541-3557

GRECO M, CODA HB *Na alternative contact/impact identification algorithm for 2D structural problems* Computational Mechanics, Springer, 2004 b, pp. 410-422

GRECO M, CODA HB *Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis* Journal of Sound Vibration 290 - 1141- 1174 March 2006

GRECO M, CODA HB, VENTURINI WS *An alternative contact/impact identification algorithm for 2d structural problems*, Computational Mechanics 34 (5): 410-422, 2004

GRECO, M, GESUALDO F.A.R, VENTURINI, W.S., CODA, H. B., *Nonlinear positional formulation for space truss analysis*. Finite Elements in Analysis and Design. (42), 12 pp1079-1086, (August 2006)

KAWAHARA, M.; HIRANO, H. *A finite element method for high Reynolds number viscous fluid flow using two step explicit scheme*. International Journal for Numerical Methods, v.1, 1983 .,pp.141-147

LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P. e SEETHARAMU, K. N. *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. Editado por John Wiley & Sons, Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chinchester, West Sussex, England, 2004. p341.

LÖHNER, R.; MORGAN, K.; PERAIRE, J.; ZIENKIEWICZ, O. C. e KONG, L. *Finite Element Methods for Compressible Flow*, 1986, pp. 27-53

MACIEL D.N, CODA, H.B. *Positional description for non-linear 2D static and dynamic frame analysis by FEM with Reissner Kinematics*, Computational Fluid and Solid Mechanics, MIT, Boston, 2005

MARQUES, GCSC, **Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no MEF para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais**, Dissertação de Mestrado, SET-EESC-USP, 2006. p. 93

NITHIARASU, P. *On boundary conditions of the characterisc based split (CBS) algorithm for fluid dynamics*. Int. J. Numer. Meth. Engng 2002; 54, pp523-536

NITHIARASU, P.; CODINA, R. e ZIENKIEWICZ, O. C. *The Characteristic Based Split (CBS) Scheme – a unified approach to fluid dynamics*. Int. J. Numer. Meth. Engng 2000; 00, pp.1-34.

PULLIUM, T. H. e BARTON, J. T. *Euper computaional of AGARD working goup 07, Airfoil test cases*, AIAA 23rd Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada. Jan 14-17, 1986,

QUEIRÓS JÚNIOR, A.C., PACCOLA, R.R., CODA, H.B., *Impacto de automóveis em barreira de Contenção*, CDRom - CILAMCE 26, Guarapari-Espírito Santo, 2005

SIMO, J., C.; HJELMSTAD, K.D. and TAYLOR, R.,L.(1984). *Numerical formulations of elasto-viscoplastic response of beams accounting for the effect of shear*, Comp. Meth. In Appl. Mech. And Engn. 42 301-330.

SIMO, J.C.; LAURSEN, T.A. (1992). *An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction*, Computers & structures, v.42, p.97-116.

SIMO, J.C.; WRIGGERS, P.; SCHWEIZERHOF, K.H.; TAYLOR, R.L. (1986). *Finite deformation postbuckling analysis involving inelasticity and contact constraints*, International journal for numerical methods in engineering, v.23, p.779-800.

SORIANO, HL, *Método dos Elementos Finitos em Análise de Estruturas*, EDUSP, 2003.

TEIXEIRA, P. R. F E AWRUCH, A. M. *Numerical Simulation of fluid-structure interaction using the finite element method*. Computers na Fluids, 2005, v.34, pp. 249-273

TEIXEIRA, P. R. F. *Simulação Numérica de Escoamentos Tridimensionais de Fluidos Compressíveis Aplicando o Método de Elemnetos Finitos*. Dissertação de



Mestrado, UFRGS, Rio Grande do Sul, 1996

TEIXEIRA, P. R. F. *Simulação Numérica da Interação de Escoamentos Tridimensionais de Fluidos Compressíveis e Incompressíveis e Estruturas Deformáveis Usando o Método de Elementos Finitos*. Tese de Doutorado, UFRGS, Rio Grande do Sul, 2001

VALLIAPPAN, S. *Continuum mechanics fundamentals* Editado por: A.A.BALKEMA, Rotterdam, 1981. p.227

WILLIAM H. PRESS, SAUL A. TEUKOLSKY, WILLIAM T. VETTERLING, BRIAN P. FLANNERY *Numerical Recipes in Fortran 90*. Cambridge University Press, 1996

WRIGGERS, P.; SIMO, J.C. (1990). *A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points*, International journal for numerical methods in engineering, v.30, p.155-176.

ZIENKIEWICZ, O. C. e CODINA, R. *Search For a General Fluid Mechanics Algorithm*. Frontiers of Computational Fluid Dynamics, Editado por J. Wiley, Nova York, 1994, pp. 101-113

ZIENKIEWICZ, O. C., ROJEK, R. L. e TAYLOR, R. L. *Triangles and tetrahedral in explicit dynamic codes for solids*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1999, v. 43 pp. 565-583

ZIENKIEWICZ, O. C., ROJEK, R. L. e TAYLOR, R. L. *Triangles and tetrahedral in explicit dynamic codes for solids*. International Journal for Numerical Methods in Engineering. 1999, v. 43 pp. 565-583

ZIENKIEWICZ, O. C. e TAYLOR, R. L. *The Finite Element Method*. Editado por Butterworth-heinemann Linacre house, Jordan Hill, Oxford, England, 2000. v3 – *Fluid Dynamics* 5ª Ed. p334

### ANEXO I – Integração numérica

Atribuição dos pontos e pesos de Hammer para integração no domínio dos elementos triangulares – 4 pontos:

$$\text{HAMf}(1,1)=1.d0/3.d0$$

$$\text{HAMf}(1,2)=1.d0/3.d0$$

$$\text{HAMf}(1,3)=1.d0/3.d0$$

$$\text{whf}(1)=-9.d0/32.d0$$

$$\text{HAMf}(2,1)=.6d0$$

$$\text{HAMf}(2,2)=.2d0$$

$$\text{HAMf}(2,3)=.2d0$$

$$\text{whf}(2)=25.d0/96.d0$$

$$\text{HAMf}(3,1)=.2d0$$

$$\text{HAMf}(3,2)=.6d0$$

$$\text{HAMf}(3,3)=.2d0$$

$$\text{whf}(3)=25./96.0d0$$

$$\text{HAMf}(4,1)=.2d0$$

$$\text{HAMf}(4,2)=.2d0$$

$$\text{HAMf}(4,3)=.6d0$$

$$\text{whf}(4)=25.d0/96.d0$$

$$\int_{\Omega} f d\Omega = J \sum_{i=1}^4 \text{whf}(i) f(i)$$

Atribuição dos pontos de Gauss para integração no contorno dos elementos triangulares – 4 pontos:

$$\text{gauss}(1)=0.8611363116d0$$

$$\text{wg}(1)=0.3478548451d0$$

$$\text{gauss}(2)=.3399810435d0$$

$$\text{wg}(2)=0.6521451549d0$$

$$\text{gauss}(3)=-0.3399810435d0$$

$$\text{wg}(3)=0.6521451549d0$$

gauss(4)=-0.8611363116d0

wg(4)=0.3478548451d0

$$\int_{\Omega} f d\Gamma = J \sum_{i=1}^4 wg(i) f(i)$$

## ANEXO II – variáveis adimensionais da mecânica dos fluidos

No presente trabalho fez-se uso em alguns casos de adimensionalização de variáveis para que fosse possível comparação com a literatura. A adimensionalização seguiu as equações abaixo, onde as barras representam grandezas adimensionais e as variáveis possuem os mesmos símbolos adotados no trabalho:

Tempo:

$$\bar{t} = \frac{tu_{\infty}}{L}$$

Espaço:

$$\bar{x} = \frac{x}{L}$$

Massa específica:

$$\bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_{\infty}}$$

Pressão:

$$\bar{p} = \frac{p}{\rho_{\infty}u_{\infty}^2}$$

Velocidade:

$$\bar{u} = \frac{u}{u_{\infty}}$$

Energia:

$$\bar{E} = \frac{E}{u_{\infty}^2}$$

Temperatura:

$$\bar{T} = \frac{Tc_p}{u_{\infty}^2}$$

Grupos adimensionais:

$$\text{Número de Reynolds: } Re = \frac{\rho u_{\infty} L}{\mu}, \text{ Número de Prandt: } Pr = \frac{\mu c_p}{k_{ref}}$$