

Gustavo Codá dos S. C. Marques

ESTUDO E DESENVOLVIMENTO DE CÓDIGO
COMPUTACIONAL BASEADO NO MÉTODO DOS
ELEMENTOS FINITOS PARA ANÁLISE DINÂMICA NÃO
LINEAR GEOMÉTRICA DE SÓLIDOS BIDIMENSIONAIS

Dissertação apresentada à Escola de
Engenharia de São Carlos, da Universidade
de São Paulo, como parte dos requisitos
para obtenção do Título de Mestre em
Estruturas.

Orientador: Prof. Assoc. Humberto Breves Coda

São Carlos

2006

Aos meus pais, Severino e Dilze, e meus irmãos, Fernando e Clarissa, por terem sido as pessoas mais importantes durante essa minha longa trajetória.

À Alessandra, com amor e carinho.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me dar saúde e força para enfrentar os obstáculos que surgiram ao longo desta caminhada.

Ao meu pai, Severino, por ser um exemplo de pai, de engenheiro civil e de professor, servindo sempre como um espelho para minha vida pessoal e profissional. A minha mãe, Dilze, também por ser um exemplo de mãe e de profissional, por sempre estar presente em meus momentos mais difíceis com uma palavra de conforto e de incentivo. Enfim, por tudo o que vocês significam em minha vida.

Ao meu irmão, Fernando, pela amizade e por todos os ensinamentos passados ao longo de minha vida, servindo sempre como um exemplo de inteligência e força de vontade. A minha irmã, Clarissa, por toda amizade, palavras de carinho e de incentivo ao longo desta caminhada.

À minha namorada Alessandra, por toda a paciência e compreensão ao suportar esses dois últimos anos em que ficamos separados pela distância. Por todo o amor, carinho e torcida para que minha caminhada chegasse ao fim com sucesso.

Ao meu orientador, Humberto Breves Coda, pela excelente orientação e dedicação ao longo desta pesquisa. Por toda amizade, paciência, compreensão e palavras de incentivo ao longo destes dois anos de trabalho.

A todos os meus familiares que de alguma forma foram importantes na minha trajetória profissional e pessoal.

Aos meus companheiros de república, Eduardo Toledo e Rafael Piatti, por esses dois anos de convivência, por todo o incentivo e amizade crescente desde nossa graduação.

Aos amigos e membros da colônia alagoana de São Carlos: André, Antônio Netto, “Claudius Barbosa”, Eduardo Lucena, Edson Costa, Geilson, Jefferson, Jerônimo, “Luciano Montedor”, Márcio Félix, Saulo e Walter.

A todos os amigos que fizeram parte da turma de mestrado 2004.

Aos companheiros de sala no departamento: Edson Leonel, Marlos e Edmar, por esses dois anos de convívio e troca de conhecimentos.

A todos os amigos do departamento de Estruturas e de São Carlos, sem citar nomes para não cometer injustiças.

Aos membros do GMEC, principalmente a Rodrigo Paccola pelos ensinamentos e contribuições valiosas ao longo deste trabalho.

Finalmente, a CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – pelo suporte financeiro.

RESUMO

Marques, G. C. S. C. (2006). *Estudo e desenvolvimento de código computacional baseado no método dos elementos finitos para análise dinâmica não linear geométrica de sólidos bidimensionais*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de uma formulação e sua implementação computacional para se analisar, via Método dos Elementos Finitos (MEF), o comportamento dinâmico não linear geométrico de sólidos bidimensionais. Trata-se o comportamento geometricamente não linear através de uma formulação posicional classificada como Lagrangeana total com cinemática exata. No estudo do comportamento dinâmico utiliza-se um algoritmo de integração temporal baseado na família de integradores temporais de Newmark. Para a consideração do impacto adota-se uma técnica que utiliza como integrador temporal o algoritmo de Newmark, modificado de forma a garantir sua estabilização, e limita-se a posição de cada nó da estrutura que por ventura sofra impacto. O código computacional desenvolvido é validado através de exemplos tradicionais da literatura científica. Analisam-se exemplos com comportamento apenas não linear geométrico e não linear geométrico dinâmico com ou sem impacto.

Palavras-chave: análise não linear geométrica; dinâmica; impacto; elementos finitos.

ABSTRACT

Marques, G. C. S. C. (2006). Study and development of computational code based on the finite element method to dynamic geometrically nonlinear analysis of bidimensional solids. M.Sc. Dissertation – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2006.

The main goal of this work is the development of a formulation and its computational implementation, based on the finite element method (FEM), to analyze the dynamic geometrically nonlinear behavior of bidimensional solids. The geometrically nonlinear behavior is treated with a positional formulation classified as total Lagrangean with exact kinematics. In the study of the dynamic behavior, a time integration algorithm based on the family of time integrators of Newmark is applied. In order to consider the impact, a technique based on the time integrator of Newmark, modified to assure its stabilization, is used. This technique limits the position of each node that suffers impact. The developed computational code is validated through benchmarks of scientific literature. Examples with static geometrically nonlinear and dynamic geometrically nonlinear behavior, with or without impact, are analyzed.

Keywords: geometrically nonlinear analysis; dynamic; impact; finite element method.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 – MUDANÇA DE CONFIGURAÇÃO DE UM CORPO.	11
FIGURA 2.2 – CONFIGURAÇÕES INICIAL E ATUAL, MAPEADAS A PARTIR DE UM MESMO ESPAÇO ADIMENSIONAL.	13
FIGURA 2.3 – ELEMENTO TRIANGULAR COM 10 NÓS.	14
FIGURA 2.4 – ENERGIA POTENCIAL TOTAL PARA UMA ESTRUTURA EM DUAS POSIÇÕES DISTINTAS.	19
FIGURA 3.1 – ESQUEMA DA CHAPA ENGASTADA.	28
FIGURA 3.2 – CONFIGURAÇÃO DESLOCADA FINAL DO CHAPA.	29
FIGURA 3.3 – ESQUEMA DO BLOCO ENGASTADO.	30
FIGURA 3.4 – CONFIGURAÇÃO DESLOCADA FINAL DO BLOCO PARA ANÁLISE I.	31
FIGURA 3.5 – CONFIGURAÇÃO DESLOCADA FINAL DO BLOCO PARA ANÁLISE II.	31
FIGURA 3.6 – ESQUEMA DA VIGA ENGASTADA.	32
FIGURA 3.7 – DESLOCAMENTO HORIZONTAL X CARGA APLICADA.	33
FIGURA 3.8 – DESLOCAMENTO VERTICAL X CARGA APLICADA.	33
FIGURA 3.9 – CONFIGURAÇÃO DESLOCADA FINAL DA VIGA.	34
FIGURA 3.10 – ESQUEMA DO PILAR COM CARGA EXCÊNTRICA.	35
FIGURA 3.11 – DESLOCAMENTO HORIZONTAL X CARGA APLICADA.	35
FIGURA 3.12 – CONFIGURAÇÕES DESLOCADAS DO PILAR PARA ALGUNS NÍVEIS DE CARREGAMENTO.	36
FIGURA 3.13 – ESQUEMA DA VIGA ENGASTADA COM CARGA TRANSVERSAL APLICADA NO CENTRO.	37
FIGURA 3.14 – CARGA APLICADA X DESLOCAMENTO HORIZONTAL DO APOIO B.	38
FIGURA 3.15 – CARGA APLICADA X DESLOCAMENTO VERTICAL DO PONTO A.	38
FIGURA 3.16 – CONFIGURAÇÕES DESLOCADAS DA VIGA PARA ALGUNS NÍVEIS DE CARREGAMENTO.	39
FIGURA 3.16 – CONFIGURAÇÕES DESLOCADAS DA VIGA PARA ALGUNS NÍVEIS DE CARREGAMENTO.	40
FIGURA 3.17 – CARGA APLICADA X DESLOCAMENTO VERTICAL (LIMA & GARCIA, 2003).	40
FIGURA 4.1 – IMPACTO ENTRE UMA ESTRUTURA E UM ANTEPARO RÍGIDO.	49
FIGURA 4.2 – IMPACTO ENTRE UMA ESTRUTURA E UM ANTEPARO RÍGIDO.	50
FIGURA 4.3 – REGIÕES DE ESTABILIDADE EM FUNÇÃO DE β E γ	52
FIGURA 5.1 – ESQUEMA DA BARRA ENGASTADA.	55
FIGURA 5.2 – GRÁFICO DE CARREGAMENTO DO EXEMPLO 1.	55
FIGURA 5.3 – TEMPO X DESLOCAMENTO HORIZONTAL DO GRAU DE LIBERDADE ANALISADO.	56
FIGURA 5.4 – ESQUEMA DA VIGA ENGASTADA.	56
FIGURA 5.5 – GRÁFICO DE CARREGAMENTO DO EXEMPLO 2.	57
FIGURA 5.6 – TEMPO X DESLOCAMENTO DO GRAU DE LIBERDADE ANALISADO.	57
FIGURA 5.7 – ESQUEMA DA VIGA ENGASTADA.	58
FIGURA 5.8 – GRÁFICO DE CARREGAMENTO DO EXEMPLO 2.	59
FIGURA 5.9 – TEMPO X DESLOCAMENTO DO GRAU DE LIBERDADE HORIZONTAL.	59
FIGURA 5.10 – TEMPO X DESLOCAMENTO DO GRAU DE LIBERDADE VERTICAL.	60
FIGURA 5.11 – TEMPO X DESLOCAMENTO DO GRAU DE LIBERDADE HORIZONTAL.	60
FIGURA 5.12 – TEMPO X DESLOCAMENTO DO GRAU DE LIBERDADE VERTICAL.	61
FIGURA 5.13 – CONFIGURAÇÃO DESLOCADA FINAL DA VIGA PARA $F = 100000 lb$	61
FIGURA 5.14 – CONFIGURAÇÃO DESLOCADA FINAL DA VIGA PARA $F = 500000 lb$	62
FIGURA 5.15 – ESQUEMA DA VIGA ENGASTADA.	63
FIGURA 5.16 – GRÁFICO DE CARREGAMENTO DO EXEMPLO 2.	63
FIGURA 5.17 – TEMPO X DESLOCAMENTO DO GRAU DE LIBERDADE VERTICAL.	64
FIGURA 5.18 – ESQUEMA DO CONJUNTO BIELA-MANIVELA.	64
FIGURA 5.19 – DISCRETIZAÇÃO DE MALHA DO CONJUNTO BIELA-MANIVELA.	66
FIGURA 5.20 – TEMPO X DESLOCAMENTO ANGULAR NO CENTRO DE GIRO.	66
FIGURA 5.21 – CONFIGURAÇÕES DESLOCADAS DO CONJUNTO BIELA-MANIVELA PARA ALGUNS INSTANTES DE TEMPO.	67

FIGURA 5.22 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÃO NO CONJUNTO BIELA MANIVELA DURANTE UM INSTANTE DE TEMPO $t = 0,075 s$	68
FIGURA 5.23 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÃO (DIREÇÕES PRINCIPAIS) NO CONJUNTO BIELA MANIVELA DURANTE UM INSTANTE DE TEMPO.	69
FIGURA 5.24 – ESQUEMA DO IMPACTO ENTRE BARRA E ANTEPARO RÍGIDO.	70
FIGURA 5.25 – COORDENADA DO PONTO AO LONGO DO EIXO X DESLOCAMENTO PARA $t = 5$	71
FIGURA 5.26 – COORDENADA DO PONTO AO LONGO DO EIXO X DESLOCAMENTO PARA $t = 5$	72
FIGURA 5.27 – ESQUEMA DO IMPACTO ENTRE BARRA E ANTEPARO RÍGIDO.	73
FIGURA 5.28 – TEMPO X VELOCIDADE HORIZONTAL DO PONTO QUE SOFRE IMPACTO.	73
FIGURA 5.29 – TEMPO X POSIÇÃO HORIZONTAL DO PONTO QUE SOFRE IMPACTO.	74
FIGURA 5.30 – ESQUEMA DAS DUAS BARRAS.	75
FIGURA 5.31 – ESQUEMA DO IMPACTO ENTRE BARRA E ANTEPARO RÍGIDO.	75
FIGURA 5.32 – TEMPO X POSIÇÃO HORIZONTAL DO PONTO QUE SOFRE IMPACTO.	76
FIGURA 5.33 – TEMPO X VELOCIDADE HORIZONTAL DO PONTO QUE SOFRE IMPACTO.	77
FIGURA 5.34 – TEMPO X FORÇA DE CONTATO HORIZONTAL DO PONTO QUE SOFRE IMPACTO.	77
FIGURA 5.35 – ESQUEMA DO IMPACTO DE ANEL E ANTEPARO RÍGIDO.	78
FIGURA 5.36 – DISCRETIZAÇÃO DE MALHA DO ANEL.	79
FIGURA 5.37 – CONFIGURAÇÃO DESLOCADA DA ESTRUTURA ANELAR.	79
FIGURA 5.38 – ESQUEMA DO IMPACTO DE DISCO E ANTEPARO RÍGIDO.	80
FIGURA 5.39 – DISCRETIZAÇÃO DE MALHA DO DISCO.	80
FIGURA 5.40 – CONFIGURAÇÃO DESLOCADA DO DISCO.	81
FIGURA 5.41 – CONFIGURAÇÃO DESLOCADA DO DISCO.	82

LISTA DE TABELAS E QUADROS

QUADRO 2.1 – ESQUEMA DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.....	27
QUADRO 3.1 – DADOS DE ENTRADA DO EXEMPLO 1.....	29
QUADRO 3.2 – DADOS DE ENTRADA DO EXEMPLO 2.....	30
QUADRO 3.3 – DADOS DE ENTRADA DO EXEMPLO 3.....	33
QUADRO 3.4 – DADOS DE ENTRADA DO EXEMPLO 4.....	35
QUADRO 3.5 – DADOS DE ENTRADA DO EXEMPLO 5.....	38
QUADRO 4.1 – ESQUEMA DO ALGORITMO DE NEWMARK.....	48
TABELA 4.1 – CONDIÇÕES PARA EXISTÊNCIA DE IMPACTO, E RESPECTIVAS LIMITAÇÕES.....	51
TABELA 4.2 – MÉTODOS DA FAMÍLIA NEWMARK.....	51
QUADRO 5.1 – DADOS DE ENTRADA DO EXEMPLO 1.....	55
QUADRO 5.2 – DADOS DE ENTRADA DO EXEMPLO 2.....	57
QUADRO 5.3 – DADOS DE ENTRADA DO EXEMPLO 3.....	58
QUADRO 5.4 – DADOS DE ENTRADA DO EXEMPLO 4.....	63
QUADRO 5.5 – DADOS DE ENTRADA DO EXEMPLO 5.....	65
QUADRO 5.6 – CONDIÇÕES PARA APLICAÇÃO DA CARGA F	65
QUADRO 5.7 – DADOS DE ENTRADA DO EXEMPLO 6.....	70
QUADRO 5.8 – DADOS DE ENTRADA DO EXEMPLO 7.....	72
QUADRO 5.9 – DADOS DE ENTRADA DO EXEMPLO 8.....	75
QUADRO 5.10 – DADOS DE ENTRADA DO EXEMPLO 9.....	78
QUADRO 5.11 – DADOS DE ENTRADA DO EXEMPLO 10.....	80

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS.....	III
RESUMO	IV
ABSTRACT	V
LISTA DE FIGURAS	VI
LISTA DE TABELAS E QUADROS	VIII
SUMÁRIO	IX
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	1
1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	2
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	9
2 FORMULAÇÃO NÃO LINEAR GEOMÉTRICA APLICADA A PROBLEMAS ESTÁTICOS	10
2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	10
2.2 FUNÇÃO MUDANÇA DE CONFIGURAÇÃO E MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO	11
2.3 ENERGIA POTENCIAL TOTAL	19
2.4 CONJUGADOS DE TENSÃO E DE DEFORMAÇÃO	21
2.5 TEOREMA DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL TOTAL	22
2.6 FORMULAÇÃO NUMÉRICA	23
3 EXEMPLOS ESTÁTICOS.....	28
3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	28
3.2 EXEMPLO 1 – CHAPA TRACIONADA	28
3.3 EXEMPLO 2 – BLOCO ENGASTADO TRACIONADO	30
3.4 EXEMPLO 3 – VIGA ENGASTADA COM CARGA TRANSVERSAL APLICADA NA EXTREMIDADE LIVRE.....	32
3.5 EXEMPLO 4 – PILAR COM CARGA EXCÊNTRICA	34
3.6 EXEMPLO 5 – VIGA ENGASTADA COM CARGA TRANSVERSAL APLICADA NO CENTRO	37
4 FORMULAÇÃO NÃO LINEAR GEOMÉTRICA APLICADA A PROBLEMAS DINÂMICOS COM OU SEM IMPACTO	41
4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	41
4.2 BALANÇO DE ENERGIA	42
4.3 FUNCIONAL DE ENERGIA APROXIMADO – NEWMARK.....	44
4.4 FORMULAÇÃO NUMÉRICA	46
4.5 IMPACTO DE ESTRUTURAS CONTRA ANTEPAROS RÍGIDOS.....	49
4.5.1 PARÂMETROS β E γ E A REGULARIZAÇÃO DA SOLUÇÃO DO IMPACTO	51
5 EXEMPLOS DINÂMICOS COM OU SEM IMPACTO	54
5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	54
5.2 EXEMPLO 1 – BARRA ENGASTADA SUBMETIDA A CARREGAMENTO AXIAL DE TRAÇÃO	54
5.3 EXEMPLO 2 – VIGA ENGASTADA AMORTECIDA.....	56
5.4 EXEMPLO 3 – VIGA ENGASTADA SUBMETIDA A UM CARREGAMENTO TRANSVERSAL	58
5.5 EXEMPLO 4 – VIGA ENGASTADA COM AMORTECIMENTO SUBMETIDA A UM CARREGAMENTO TRANSVERSAL	62
5.6 EXEMPLO 5 – CONJUNTO BIELA – MANIVELA.....	64
5.7 EXEMPLO 6 – IMPACTO UNIDIRECIONAL ENTRE BARRA E ANTEPARO RÍGIDO	70
5.8 EXEMPLO 7 – IMPACTO UNIDIRECIONAL ENTRE BARRA E ANTEPARO RÍGIDO	72
5.9 EXEMPLO 8 – IMPACTO UNIDIRECIONAL ENTRE DUAS BARRAS	74

5.10 EXEMPLO 9 – IMPACTO DE ANEL E ANTEPARO RÍGIDO.....	78
5.11 EXEMPLO 10 – IMPACTO DE UM DISCO E ANTEPARO RÍGIDO	80
6 CONCLUSÕES	83
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	86

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O conhecimento do comportamento mecânico de uma estrutura, dentro de um regime não linear, é essencial para a concepção de estruturas cada vez mais leves e esbeltas sem ocorrer diminuição no seu padrão de segurança e de qualidade. Para isso, é necessário se utilizar teorias mais complexas, como formulações não lineares, de forma a melhor caracterizar o comportamento dos materiais utilizados na construção de estruturas e sua geometria, dentro dos critérios de segurança e utilização das mesmas.

Nesse sentido, o objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de uma formulação e sua implementação computacional, baseada no potencial de energia total e na primeira lei da termodinâmica, para se analisar, via Método dos Elementos Finitos (MEF), o comportamento dinâmico não linear geométrico de sólidos bidimensionais.

Neste trabalho são considerados dois tipos de não linearidade; a não linearidade geométrica, caracterizada por se estabelecer o equilíbrio da estrutura na configuração deslocada e a não linearidade de contato, caracterizada pelas mudanças nas condições de contorno da estrutura na colisão.

O comportamento geometricamente não linear será tratado através de uma formulação posicional, desenvolvida em CODA (2003) e GRECO & CODA (2004), e que pode ser classificada como Lagrangeana total com cinemática exata. Para a modelagem

dinâmica, utilizar-se-á um algoritmo de integração temporal baseado na família de integradores temporais de Newmark.

Por fim, utilizar-se-á uma técnica de impacto entre estrutura e anteparo rígido que consiste na limitação de posição de cada nó da estrutura que por ventura sofra impacto.

Todos esses conceitos integram os objetivos gerais de estudo e sistematização para sua implementação em programa computacional considerando a não linearidade geométrica de sólidos bidimensionais.

As implementações computacionais das formulações são desenvolvidas na linguagem de programação FORTRAN.

No próximo tópico será apresentada uma revisão bibliográfica sobre os temas abordados na dissertação, como: não linearidade geométrica, métodos numéricos para solução de sistemas não lineares, dinâmica e formulações para problemas de contato/impacto.

1.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O conhecimento do comportamento mecânico geometricamente não linear é objeto de interesse em diversos campos da Engenharia. A complexidade das formulações matemáticas é um dos grandes problemas da análise não linear geométrica em estruturas, tendo como consequência a existência de poucas soluções analíticas disponíveis na literatura científica. Em se tratando de soluções analíticas, podem-se citar os artigos de BISSHOPP & DRUCKER (1945), onde se encontram solução para vigas engastadas, e MATTIASSON (1981), onde se apresentam respostas obtidas pela solução de integrais do tipo elíptica, para problemas de viga engastada, quadro articulado e quadro rígido.

Neste trabalho, a etapa de revisão bibliográfica divide-se em três tópicos compostos por: não linearidade geométrica, métodos numéricos para resolução de problemas não lineares e formulações de impacto.

Os problemas que apresentam não linearidade geométrica são abordados através de diferentes formulações. A diferença principal entre as formulações está na forma com que as coordenadas são descritas. As formulações podem ser tratadas através de descrição Lagrangeana ou Euleriana. A característica que define a descrição Lagrangeana é a de

medir as mudanças de configuração nas estruturas a partir de um referencial fixo no espaço, enquanto que na Euleriana as mudanças de configuração na estrutura são medidas a partir de um referencial móvel no espaço.

A descrição Lagrangeana pode ser classificada em total, atualizada, ou parcialmente atualizada, onde na atualizada a configuração de referência é atualizada durante os incrementos de carga ou tempo, na parcialmente atualizada a configuração de referência é atualizada apenas no início dos incrementos de carga e na total a configuração de referência é sempre fixa, tomada como configuração inicial. Tais definições podem ser encontradas em WONG & TINLOI (1990).

A formulação adotada, baseada no MEF, para resolução da não linearidade geométrica da estrutura é a definida como Lagrangeana total. As formulações classificadas como tal podem ser encontradas nos artigos de MONDKAR & POWELL (1977), SURANA (1983) e SCHULZ & FILIPPOU (2001). Formulações classificadas como Lagrangeana atualizada podem ser encontradas em MEEK & TAN (1984), GATTASS & ABEL (1987) e GADALA *et al* (1984). Formulações classificadas como Lagrangeana parcialmente atualizada podem ser encontradas em PETERSON & PETERSSON (1985) e WONG & TINLOI (1990).

A formulação com descrição Euleriana, pode ser encontrada em ORAN & KASSIMALI (1976) e IZZUDIN & ELNASHAI (1993). A formulação co-rotacional, caracterizada pela utilização de sistemas de coordenadas locais nos elementos finitos, pode ser encontrada em CRISFIELD (1990), PACOSTE & ERIKSSON (1996), BEHDINAN *et al* (1998) e THEN & CLARKE (1998).

Outro artigo original que trata sobre não linearidade geométrica é o de RIKS (1979), que apresenta formulação incremental para busca de solução em problemas de flambagem. O ponto fundamental deste artigo é a identificação de fenômenos não lineares tradicionais, como pontos limite (de carga e de deslocamento) e pontos de bifurcação.

No presente trabalho, adota-se uma formulação posicional não linear geométrica classificada como Lagrangeana total com cinemática exata desenvolvida em CODA (2003).

Em se tratando de problemas de natureza não linear, faz-se com que seja necessária a presença de estratégias numéricas para sua resolução. Algumas das principais estratégias podem ser encontradas em RIKS (1972), que apresenta o clássico método de Newton-

Raphson, em HAISLER & STRICKLIN (1977) e BATOZ & DHATT (1979), encontra-se o método do Controle de Deslocamento, em YANG & McGUIRE (1985) o método do Controle do Trabalho, em RIKS (1979) e CRISFIELD (1981) o método do Controle do Comprimento de Arco.

No artigo de CRISFIELD (1981) apresenta-se a estratégia do comprimento de arco na versão modificada, desenvolvida de forma a resolver problemas contendo os fenômenos não lineares de snap-back.

Outro artigo que merece destaque sobre estratégias numéricas para resolução de problemas não lineares é o de YANG & SHIEH (1990), que apresenta uma estratégia unificada com objetivo de facilitar a incorporação de diversos métodos numéricos presentes na literatura científica. Neste artigo, apresentam-se ainda as estratégias de Newton-Raphson, controle de deslocamento e método do comprimento de arco desenvolvidos segundo o esquema unificado. As estratégias são testadas em problemas estruturais onde se encontram presentes pontos críticos da análise não linear geométrica.

A estratégia do comprimento de arco pode ser encontrada ainda no artigo de SOUZA NETO & FENG (1999), enquanto que a estratégia do controle de deslocamento variável em FUJII *et al* (1992).

Nesta dissertação utiliza-se o método clássico de Newton-Raphson para a solução de sistemas não lineares, tendo em vista que neste estágio de pesquisa não se está preocupado com a solução de snap-backs ou pontos de bifurcação.

O conhecimento do comportamento dinâmico de uma estrutura é de extrema importância para Engenharia estrutural, visto que na natureza as ações aplicadas às estruturas são geralmente variáveis com o tempo.

A equação que rege o equilíbrio dinâmico de uma estrutura é diferencial nas variáveis posição e tempo, fazendo com que seja necessária a utilização de um algoritmo de integração temporal. Na literatura científica existem diversos métodos para integração das equações de movimento, sendo que a escolha do método mais adequado varia principalmente com o tipo de análise dinâmica que se deseja realizar.

Os algoritmos de integração temporal são geralmente classificados em dois grupos, os algoritmos explícitos e os implícitos.

Segundo BATHE (1996), os algoritmos explícitos são os que as variáveis no intervalo de tempo seguinte são determinadas apenas em função das variáveis obtidas nos intervalos de tempo passados, ou seja:

$$u_{n+1} = f(u_n, \dot{u}_n, \ddot{u}_n, u_{n-1}, \dots) \quad (1.1)$$

Os algoritmos implícitos são definidos em BATHE (1996) como aqueles cujo valor da incógnita base no intervalo de tempo $(n+1)$ é dependente do seu próprio valor, além da história ao longo dos tempos passados, ou seja:

$$u_{n+1} = f(u_{n+1}, \dot{u}_{n+1}, \ddot{u}_{n+1}, u_n, \dots) \quad (1.2)$$

Como exemplo de algoritmo explícito pode-se citar o Método da Diferença Central, considerado um dos mais tradicionais métodos utilizados na mecânica computacional. O Método da Diferença Central pode ser encontrado em COOK *et al* (1989) e KRYSL & BELYTSCHKO (1998).

Como exemplos de algoritmos implícitos podem-se citar os algoritmos da família de integração Newmark (NEWMARK, 1959). Dentro dos algoritmos de integração implícitos da família Newmark, podem-se citar os métodos: da Aceleração Média (ou Regra Trapezoidal), o da Aceleração Linear e o de Fox-Goodwin. Maiores detalhes sobre cada método em particular podem ser encontrados em HUGHES (1987), COOK *et al* (1989) e BATHE *et al* (1996).

Neste trabalho adota-se o método de Newmark da Regra Trapezoidal para a solução dinâmica de estruturas convencionais (sem ocorrência de impacto).

A metodologia relacionada ao impacto é ampla e diversificada, existindo diversas técnicas e métodos aplicados conforme o problema em análise, não existindo uma forma generalizada.

Em se tratando de métodos numéricos aplicados a problemas envolvendo impacto, o artigo de HUGHES *et al* (1976) é considerado como um marco. Este representa uma grande contribuição para o desenvolvimento de aproximações em elementos finitos utilizando

multiplicadores de Lagrange. No trabalho são considerados problemas elásticos sem plastificação ou atrito.

No artigo de BATHE & CHAUDHARY (1985), apresenta-se uma formulação para tratar problemas bidimensionais de contato com grandes deformações envolvendo atrito, utilizando multiplicadores de Lagrange. Já o artigo de BATHE & CHAUDHARY (1986), apresenta uma formulação tridimensional clássica baseada na técnica do multiplicador de Lagrange com o objetivo de resolver problemas de impacto.

Em CARPENTER *et al* (1991) apresenta-se uma formulação quase-explicíta para abordar problemas de impacto com atrito. Este apresenta um algoritmo de integração temporal, baseado no método de Gauss-Seidel modificado. A técnica da integração temporal é aperfeiçoada em TAYLOR & PAPADOPOULOS (1993), através da utilização de multiplicadores de Lagrange expressos em termos de velocidade e aceleração, com o objetivo de garantir condições de contato e separação entre os corpos envolvidos no impacto. Em HU (1997) apresentou-se um algoritmo de integração temporal que tem como característica partir de uma hipótese simples relacionada com as acelerações que se desenvolvem na região de contato durante o impacto. Esse algoritmo resulta em estratégia simples de estabilização da maioria dos algoritmos de impacto existentes na literatura, que tendem a ser instáveis em problemas que apresentem atrito.

Em se tratando de problemas que envolvem impacto, uma das primeiras dificuldades que aparece é o da sua identificação. Na literatura científica existem diversos tipos de algoritmos que apresentam como objetivo identificar a ocorrência do impacto. Os algoritmos mais simples e conhecidos com esse intuito são os baseados nas áreas de influência próximas aos elementos do corpo alvo. Dentre esses, se enquadram os algoritmos baseados no conceito de território (área de influência local de cada elemento alvo) e os algoritmos do tipo “pinball” (áreas de influência circulares ou esféricas do elemento alvo). Algoritmos baseados no conceito de território podem ser encontrados no artigo de ZHONG & NILSSON (1996), enquanto que os do tipo “pinball” podem ser encontrados em BELYTSCHKO & NEAL (1991) e BELYTSCHKO & YEH (1993).

Devido ao fato dos algoritmos baseados nas áreas de influência aproximarem a posição e o instante do impacto, conseqüentemente nem sempre apresentando resultados muito confiáveis, é freqüente a utilização conjunta destes com funções de penalização.

Outro exemplo de algoritmos de impacto pode ser encontrado em LORENZANA & GARRIDO (1998) e WANG *et al* (2001), são os baseados no balanço das forças de superfície na região de contato.

Outro fato proveniente da dificuldade de identificação do instante em que iniciará o impacto, é que nem sempre se chega ao instante exato do impacto utilizando intervalos de tempo constante. Fazendo com que uma das saídas seja a utilização de algoritmos de integração descontínuos. Técnicas de integração temporal descontínuas baseadas no método de Galerkin podem ser encontradas em HULBERT (1992) e KARAOGLAN & NOOR (1997). Em CHO & KIM (1999), encontra-se uma técnica de integração descontínua no tempo utilizando a técnica de penalização. Em CZEKANSKI *et al.* (2001), apresenta-se um novo algoritmo de integração do tipo Newmark modificado com utilização de multiplicadores de Lagrange na formulação.

Segundo CHEN *et al.* (1993) e MAHMOUD *et al* (1998), o contato deve ser admitido sem atrito, para que assim sejam evitadas oscilações indesejáveis. Sendo que essa consideração traria uma limitação do modelo em relação a muitas aplicações de impacto. Como já descrito anteriormente, estas oscilações desaparecem utilizando o esquema de integração proposto por HU (1997). Modelos complexos de atrito, apresentando comportamento não linear nas superfícies de contato, são encontrados em WRIGGERS *et al.* (1990), ODEN & PIRES (1983) e ODEN & MARTINS (1985). Em WRIGGERS *et al.* (1990), apresenta-se uma lei de atrito baseada em fenômenos micro-mecânicos. No artigo de ODEN & PIRES (1983), apresentam-se leis de atrito não lineares e não locais enquanto que em ODEN & MARTINS (1985) apresentam-se formulações numéricas de atrito para problemas de impacto. No artigo de SIMO & LAURSEN (1992), apresenta-se uma formulação baseada no método do multiplicador de Lagrange aplicada a problemas de impacto envolvendo atrito. Em CHEN *et al.* (1993) apresenta-se uma formulação com base no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) aplicada a problemas de impacto com atrito e utilizando função de relaxação viscoelástica.

Formulações que não consideram a existência de atrito na superfície de contato podem ser encontradas em SOLBERG & PAPADOPOULOS (1998) e LANDENBERG & ELZAFRANY (1999). O artigo de SOLBERG & PAPADOPOULOS (1998) baseia-se na técnica do multiplicador de Lagrange, enquanto que LANDENBERG & ELZAFRANY

(1999) utiliza funções de penalização utilizando elementos descontínuos nas superfícies de contato.

A técnica de penalização é definida pela consideração de uma função (de penalização) para relacionar a aproximação relativa entre os corpos à intensidade das forças de contato. Nela, as equações de movimento dos corpos já estão definidas e o problema de contato passa a ser um problema de condições de contorno interdependentes.

O trabalho de ARMERO & PETOCZ (1998) também não considera problemas com atrito e apresenta uma técnica de penalização com via a alcançar a conservação da energia total do sistema. Em HEINSTEIN *et al.* (2000), apresenta-se uma técnica que utiliza a conservação de energia dos corpos separados, cada corpo com suas condições de contorno, e utilizando a estratégia de penalização no contato do impacto. Outro artigo onde se pode encontrar técnica de penalização é o de HALLQUIST *et al.* (1985).

Uma técnica que utiliza conservação de momento e equações de restrição de velocidade nos pontos que sofreram impacto é apresentada no artigo de WASFY & NOOR (1997).

Nos artigos FARAHANI *et al.* (2000) e FARAHANI *et al.* (2001) é apresentada uma técnica em que se realiza uma forma particular de acoplamento para resolver o problema de impacto. Esta técnica é caracterizada por uma transformação na qual os graus de liberdade normais nas regiões de contato são eliminados e as forças de contato são calculadas após o sistema de equações ser resolvido.

No presente trabalho, adota-se um esquema de impacto contra anteparo rígido baseado em SIMO *et al.* (1986) e GRECO (2004). O esquema tem como princípio básico a limitação de posição de cada nó da estrutura que sofrer impacto. Nele será considerado impacto, sem atrito, entre sólidos bidimensionais e anteparo rígido. Na modelagem do impacto o algoritmo de integração temporal adotado será o de Newmark modificado por HU (1997), tal como apresentado em GRECO (2004).

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Neste tópico apresenta-se a organização dos capítulos desta dissertação. Esta dissertação está organizada em seis capítulos. O primeiro capítulo, de introdução, trata da relevância do tema abordado, onde procura-se enfatizar a importância de formulações numéricas para análise não linear de estruturas. Ainda no primeiro capítulo, traz-se uma revisão bibliográfica sobre os diversos tópicos relacionados ao código computacional, como: não linearidade geométrica, dinâmica de estruturas, métodos numéricos para solução de problemas não lineares e impacto.

No segundo capítulo apresenta-se a formulação posicional não linear geométrica aplicada a problemas estáticos e a estratégia numérica adotada para a resolução do problema não linear. O código computacional não linear geométrico implementado é validado através de exemplos tradicionais na literatura científica, e os resultados obtidos são apresentados no capítulo três.

No capítulo quatro apresentam-se as formulações relacionadas à dinâmica das estruturas e ao impacto. Em se tratando de dinâmica das estruturas, mostra-se o algoritmo de integração temporal de Newmark e comenta-se sobre a instabilidade que ele pode apresentar em problemas com impacto introduzindo-se a modificação necessária para sua estabilização. O código computacional dinâmico não linear geométrico considerando impacto, é validado através de exemplos tradicionais na literatura científica, e os resultados obtidos são apresentados no capítulo cinco.

Por fim, no capítulo seis são apresentadas às conclusões da dissertação e sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2

FORMULAÇÃO NÃO LINEAR GEOMÉTRICA APLICADA A PROBLEMAS ESTÁTICOS

2.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo descreve-se e aprimora-se uma formulação posicional não linear geométrica, apresentada inicialmente em CODA (2003), para o tratamento de sólidos bidimensionais considerando-se grandes deslocamentos. O termo posicional da formulação vem do fato desta não considerar no equacionamento os deslocamentos como variáveis, e sim as posições nodais do corpo.

A formulação posicional não linear geométrica adotada é apresentada através de três etapas. Inicialmente descreve-se o conceito de função mudança de configuração e de seu respectivo gradiente. Como segunda etapa chega-se na equação de equilíbrio para problemas estáticos a partir da equação da energia potencial total e através da aplicação do teorema da mínima energia potencial total. A equação de equilíbrio estático é apresentada em função da energia de deformação acumulada no corpo em estudo, e conseqüentemente do gradiente da função mudança de configuração.

Por fim, a terceira etapa é caracterizada pela aplicação do método de Newton-Raphson, transformando a formulação adotada em um processo incremental e iterativo. Muitos dos conceitos matemáticos aqui descritos podem ser vistos com detalhes em OGDEN (1984) e CIARLET (1993).

2.2 FUNÇÃO MUDANÇA DE CONFIGURAÇÃO E MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO

Considera-se um corpo deformável submetido a um sistema de forças em equilíbrio (resultante nula em forças e momentos). É fato que se o corpo fosse rígido esse sistema de forças não realizaria trabalho qualquer que fosse a mudança de posição do corpo. Porém, para um sistema conservativo onde as forças estão aplicadas em um corpo elástico, o trabalho realizado por essas forças será armazenado no corpo por causa da sua deformação. A energia armazenada é denominada energia de deformação. A quantificação da energia de deformação é conseguida através da avaliação da mudança de forma ponto a ponto no contínuo.

Para um ponto do contínuo, a deformação pode ser entendida como a alteração da forma de uma vizinhança do ponto pela função mudança de configuração.

De forma a definir o conceito da função mudança de configuração, considera-se um corpo (conjunto de partículas X) na sua configuração inicial (denominada B_0) sofrendo alterações na sua posição e chegando a sua configuração final (denominada B_1), conforme apresentado na Figura 2.1.

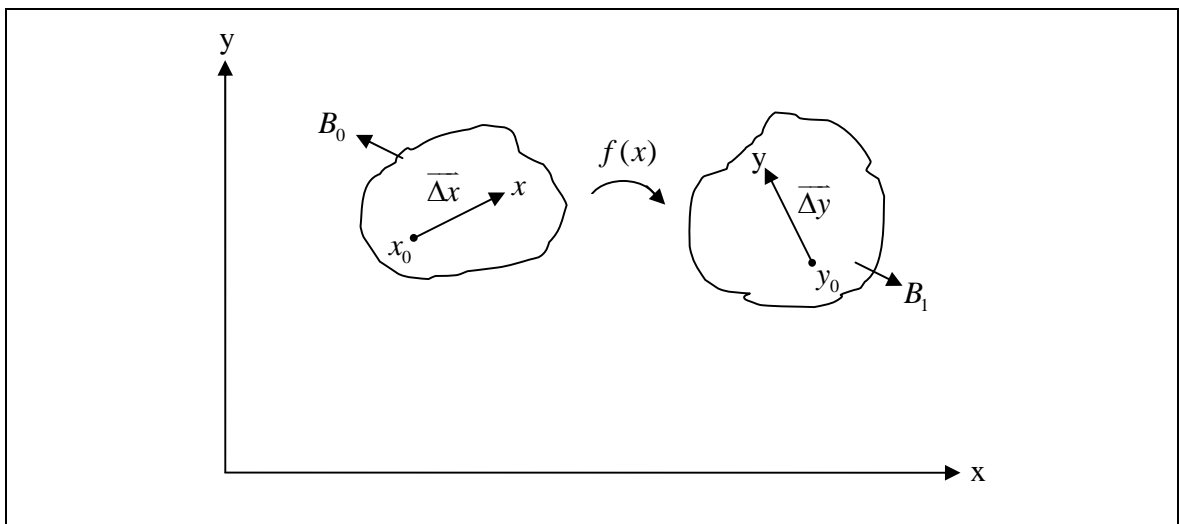


Figura 2.1 – Mudança de Configuração de um corpo.

A função mudança de configuração é uma função matemática cujo gradiente irá indicar a mudança de direção e comprimento do vetor infinitesimal dx no ponto x_0 para

dy em uma nova posição, no ponto y_0 na configuração genérica. Essa função pode ser escrita em torno do ponto x_0 da seguinte forma:

$$y = f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \mathbf{Grad} f|_{x_0} \Delta x + O^2 \quad (2.1)$$

ou, simplificando a notação

$$y = y_0 + \mathbf{Grad} f|_{x_0} \Delta x + O^2 \quad (2.2)$$

fazendo o limite da eq (2.2) para $\Delta x \rightarrow 0$, tem-se

$$dy = \mathbf{Grad} f|_{x_0} dx \quad (2.3)$$

A eq (2.3) pode ser descrita na forma matricial

$$\begin{Bmatrix} dy_1 \\ dy_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial f_1 / \partial x_1 & \partial f_1 / \partial x_2 \\ \partial f_2 / \partial x_1 & \partial f_2 / \partial x_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{Bmatrix} \quad (2.4)$$

e na forma indicial

$$dy_i = \partial f_i / \partial x_j|_{x_0} dx_j \quad (2.5)$$

fazendo com que

$$A = A_{x_0} = \partial f_i / \partial x_j|_{x_0} \quad (2.6)$$

tem-se

$$dy = A dx \quad (2.7)$$

tal que A é um tensor que representa o gradiente da função mudança de configuração, e indica a mudança de forma do corpo no ponto x_0 quando este sai da configuração inicial

para a configuração “final” (atual) y . Devido ao fato da referência permanecer fixa e ser a configuração inicial, a descrição é denominada Lagrangeana.

Um ponto importante a se observar é que, como a medida de deformação a ser adotada é baseada na descrição referencial Lagrangeana, todas as operações integrais e diferenciais devem ser realizadas no volume inicial do corpo.

Conforme já descrito anteriormente, a formulação não linear geométrica aqui descrita é baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF), portanto a função mudança de configuração necessita ser parametrizada por valores nodais e funções de forma.

Seja um elemento finito, com grau de aproximação qualquer e sobre o qual se mapeia, por meio de funções de forma usuais, o contínuo a partir das posições (configuração inicial e atual) de pontos nodais, tendo o espaço adimensional como base para o mapeamento numérico, conforme Figura 2.2.

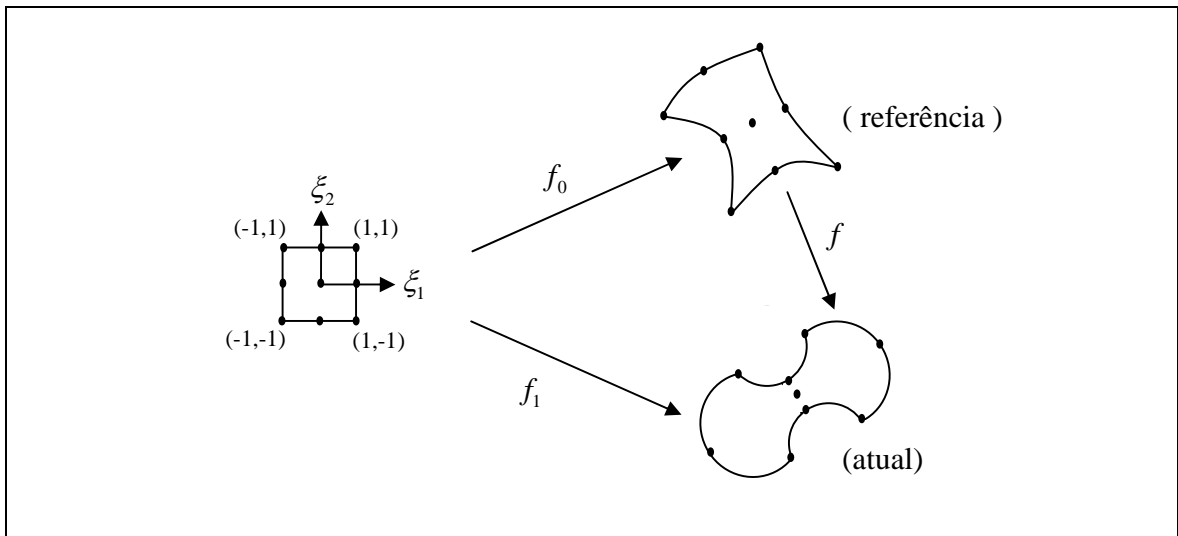


Figura 2.2 – Configurações inicial e atual, mapeadas a partir de um mesmo espaço adimensional.

De acordo com a eq (2.6) podem-se criar dois mapeamentos f_0 e f_1 de (ξ_1, ξ_2) para a configuração inicial e final do corpo respectivamente.

Assim se escreve:

$$A_0 = \begin{bmatrix} \partial f_{01} / \partial \xi_1 & \partial f_{01} / \partial \xi_2 \\ \partial f_{02} / \partial \xi_1 & \partial f_{02} / \partial \xi_2 \end{bmatrix} \quad A_1 = \begin{bmatrix} \partial f_{11} / \partial \xi_1 & \partial f_{11} / \partial \xi_2 \\ \partial f_{12} / \partial \xi_1 & \partial f_{12} / \partial \xi_2 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

sendo que em f_{ij} , j representa a direção x ou y e i representa o mapeamento 0 ou 1.

Deve-se observar que:

$$f_{ij} = \phi^k(\xi_1, \xi_2) X_{ij}^k \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial \xi_1} = \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_1} X_{ij}^k \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial \xi_2} = \frac{\partial \phi^k}{\partial \xi_2} X_{ij}^k \quad (2.11)$$

na qual ϕ representa as funções de forma do elemento finito referentes ao nó k .

Assim, o gradiente da mudança de configuração total f , parametrizado por valores nodais e funções de forma, fica dado por:

$$A = A_1(\xi_1, \xi_2) A_0^{-1}(\xi_1, \xi_2) \quad (2.12)$$

Na implementação do código computacional utiliza-se um elemento finito triangular com aproximação cúbica, denominado elemento QST (ASSAN (1999) e SAVASSI (1996)), conforme apresentado na Figura 2.3.

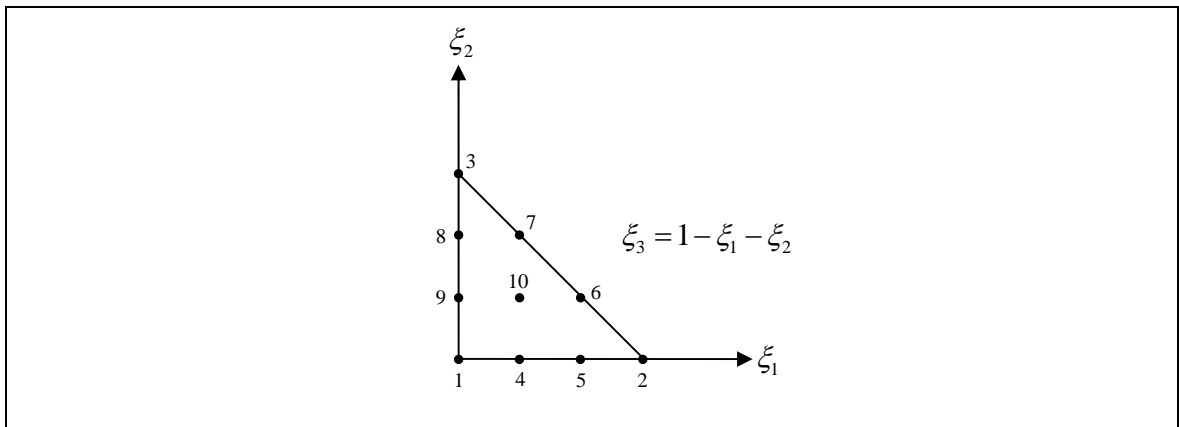


Figura 2.3 – Elemento triangular com 10 nós.

As funções de forma nodais para o elemento finito triangular com aproximação cúbica (ASSAN (1999) e SAVASSI (1996)), são:

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{1}{2} \xi_1 (3\xi_1 - 1)(3\xi_1 - 2) \\
 \phi_2 &= \frac{1}{2} \xi_2 (3\xi_2 - 1)(3\xi_2 - 2) \\
 \phi_3 &= \frac{1}{2} \xi_3 (3\xi_3 - 1)(3\xi_3 - 2) \\
 \phi_4 &= \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3\xi_1 - 1) \\
 \phi_5 &= \frac{9}{2} \xi_1 \xi_2 (3\xi_2 - 1) \\
 \phi_6 &= \frac{9}{2} \xi_2 \xi_3 (3\xi_2 - 1) \\
 \phi_7 &= \frac{9}{2} \xi_2 \xi_3 (3\xi_3 - 1) \\
 \phi_8 &= \frac{9}{2} \xi_3 \xi_1 (3\xi_3 - 1) \\
 \phi_9 &= \frac{9}{2} \xi_3 \xi_1 (3\xi_1 - 1) \\
 \phi_{10} &= 27 \xi_1 \xi_2 \xi_3
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

As derivadas das funções de forma em relação à ξ_1 e ξ_2 são:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} &= \frac{27}{2} \xi_1^2 - 9\xi_1 + 1 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2} = 0 \\
 \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} &= 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2} = \frac{27}{2} \xi_2^2 - 9\xi_2 + 1 \\
 \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi_1} &= -\frac{11}{2} + 18\xi_1 + 18\xi_2 - \frac{27}{2} \xi_1^2 - 27\xi_1 \xi_2 - \frac{27}{2} \xi_2^2 \quad \text{e} \\
 \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi_2} &= -\frac{11}{2} + 18\xi_1 + 18\xi_2 - \frac{27}{2} \xi_1^2 - 27\xi_1 \xi_2 - \frac{27}{2} \xi_2^2 \\
 \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi_1} &= 27\xi_1 \xi_2 - \frac{9}{2} \xi_2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi_2} = \frac{9}{2} \xi_1 (3\xi_1 - 1) \\
 \frac{\partial \phi_5}{\partial \xi_2} &= \frac{9}{2} \xi_2 (3\xi_2 - 1) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_5}{\partial \xi_1} = 27\xi_1 \xi_2 - \frac{9}{2} \xi_1 \\
 \frac{\partial \phi_6}{\partial \xi_1} &= -\frac{9}{2} \xi_2 (3\xi_2 - 1) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_6}{\partial \xi_2} = 36\xi_2 - \frac{9}{2} - 27\xi_1 \xi_2 + \frac{9}{2} \xi_1 - \frac{81}{2} \xi_2^2
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_7}{\partial \xi_1} &= -\frac{45}{2} \xi_2 + 27 \xi_1 \xi_2 + 27 \xi_2^2 & \text{e} & \frac{\partial \phi_7}{\partial \xi_2} = 9 - \frac{45}{2} \xi_1 - 45 \xi_2 + \frac{27}{2} \xi_1^2 + 54 \xi_1 \xi_2 + \frac{81}{2} \xi_2^2 \\ \frac{\partial \phi_8}{\partial \xi_1} &= -45 \xi_1 + \frac{81}{2} \xi_1^2 + 54 \xi_1 \xi_2 + 9 - \frac{45}{2} \xi_2 + \frac{27}{2} \xi_2^2 & \text{e} & \frac{\partial \phi_8}{\partial \xi_2} = -\frac{45}{2} \xi_1 + 27 \xi_1^2 + 27 \xi_1 \xi_2 \\ \frac{\partial \phi_9}{\partial \xi_1} &= -\frac{81}{2} \xi_1^2 + 36 \xi_1 - \frac{9}{2} - 27 \xi_1 \xi_2 + \frac{9}{2} \xi_2 & \text{e} & \frac{\partial \phi_9}{\partial \xi_2} = -\frac{9}{2} \xi_1 (3 \xi_1 - 1) \\ \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \xi_1} &= 27 \xi_2 - 54 \xi_1 \xi_2 - 27 \xi_2^2 & \text{e} & \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \xi_2} = 27 \xi_1 - 27 \xi_1^2 - 54 \xi_1 \xi_2 \end{aligned}$$

De posse dos valores das derivadas das funções de forma nodais determinam-se os gradientes da função mudança de configuração das posições inicial e atual, e posteriormente através da eq (2.12) o gradiente de f parametrizado por valores nodais e funções de forma.

O conhecimento das expressões referentes às deformações longitudinais e de distorção é de extrema importância para o entendimento da formulação não linear geométrica adotada. Elas são apresentadas em função do gradiente da função mudança de configuração e conseqüentemente dos parâmetros ξ_1 e ξ_2 .

Para se chegar à expressão das deformações longitudinais (ε_x e ε_y) é necessário conceituar o alongamento relativo. Para isso, consideram-se dois vetores unitários u e v , respectivamente, no sentido das fibras dx (pertencente ao sólido indeformado) e dy (pertencente ao sólido deformado), respectivamente.

O alongamento relativo (definido pela variável λ), ou estiramento, entre uma fibra inicialmente em uma direção e sentido qualquer u , na configuração inicial, e que após mudança de configuração resultou na direção e sentido v na configuração atual, pode ser definido a partir das seguintes relações:

$$dy = A dx \tag{2.15}$$

$$|dy|v = A|dx|u \tag{2.16}$$

$$|dy|v^t |dy|v = |dx|u^t A^t A u |dx| \tag{2.17}$$

$$|dy|^2 = u^t A^t A u |dx|^2 \tag{2.18}$$

$$\frac{|dy|}{|dx|} = \left\{ u' (A' Au) \right\}^{\frac{1}{2}} = \lambda(u) \quad (2.19)$$

Logo, o alongamento relativo pode ser definido como a razão entre o comprimento final de uma fibra e seu comprimento inicial.

A deformação longitudinal de engenharia em relação à configuração de referência na direção u pode ser definida como:

$$\varepsilon(u, \xi) = \frac{|dy| - |dx|}{|dx|} = \lambda(u, \xi) - 1 \quad (2.20)$$

A deformação não linear de engenharia é objetiva, segundo OGDEN (1984).

Observa-se que esta medida é não linear, pois o vetor \vec{u} não é paralelo ao vetor \vec{v} .

Para se considerar a deformação ε_x , faz-se $u = \{1 \ 0\}$, enquanto que para a deformação ε_y , tem-se $u = \{0 \ 1\}$.

A expressão da distorção γ_{xy} é determinada em função do denominado ângulo de distorção. Para se conceituar o ângulo de distorção consideram-se dois vetores, u e u' , posicionados na configuração de referência, com direções quaisquer e não coincidentes e suas respectivas fibras infinitesimais.

$$dx = u |dx| \quad dx' = u' |dx'| \quad (2.21)$$

Define-se o ângulo entre os dois vetores como:

$$\cos \Theta = u \cdot u' \quad (2.22)$$

Considerando-se que na configuração final têm-se duas novas direções v e v' associadas às fibras inicialmente em u e u' , faz-se com que o novo ângulo entre as fibras do material seja dado por:

$$\cos \theta = v \cdot v' \quad (2.23)$$

Fazendo-se a relação entre u e v tem-se

$$|dy|v = A|dx|u \quad (2.24)$$

chegando a

$$v = Au \frac{|dx|}{|dy|} = \frac{Au}{\lambda(u)} \quad (2.25)$$

e conseqüentemente

$$v' = \frac{Au'}{\lambda(u')} \quad (2.26)$$

concluindo

$$\cos \theta = \frac{u \cdot (A' Au')}{\lambda(u)\lambda(u')} \quad (2.27)$$

Denomina-se a diferença $\Theta - \theta$ de ângulo de distorção entre as direções u e u' no plano formado por estes vetores (configuração de referência).

De posse da expressão que define o ângulo θ , e fazendo com que u e u' sejam ortogonais (logo $\Theta = \pi/2$), calcula-se a distorção de engenharia:

$$\gamma_{xy} = \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2} - \arccos \left(\frac{u \cdot (A' Au')}{\lambda(u)\lambda(u')} \right) \quad (2.28)$$

A deformação ε_{xy} é dada por:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\gamma_{xy}}{2} \quad (2.29)$$

2.3 ENERGIA POTENCIAL TOTAL

De acordo com a Figura 2.4, o funcional de energia potencial total (Π), para problemas estáticos, pode ser escrito através de dois tipos de energia, conforme eq (2.30)

$$\Pi = U_e - P \quad (2.30)$$

na qual U_e e P representam a energia de deformação e a energia potencial das forças externas, respectivamente.

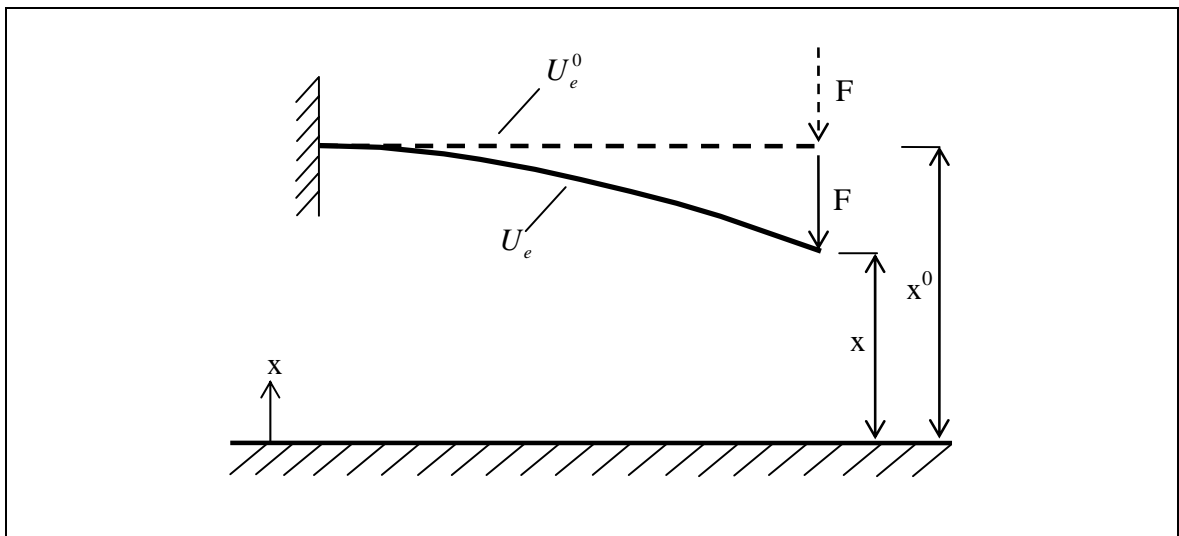


Figura 2.4 – Energia potencial total para uma estrutura em duas posições distintas.

A energia de deformação é fornecida através da integral (no volume inicial) da energia de deformação específica (u_e) em relação às posições, conforme eq (2.31).

$$U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad (2.31)$$

A energia potencial das forças externas para um sistema de forças concentradas conservativo é escrita como:

$$P = F_i X_i \quad (2.32)$$

sendo que F_i representam as forças aplicadas e X_i as coordenadas onde as forças estão atuando. O índice i é referente ao grau de liberdade na qual força e posição estão associados. Neste estudo são consideradas apenas forças concentradas.

Substituindo as eqs (2.31) e (2.32) na eq (2.30) tem-se

$$\Pi = \int_{V_0} u_e dV_0 - F_i X_i \quad (2.33)$$

A energia de deformação específica Lagrangeana pode ser calculada utilizando-se qualquer par conjugado de tensão e deformação. Aplicando-se uma lei constitutiva elástica linear, sobre a medida de deformação de engenharia, tem-se que a energia de deformação específica é dada por:

$$u_e = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.34)$$

na qual ε_{ij} representa o pseudo-tensor de deformações e σ_{ij} o pseudo-tensor de tensões.

Na próxima seção determina-se a forma como se calcula os conjugados de tensão e de deformação.

2.4 CONJUGADOS DE TENSÃO E DE DEFORMAÇÃO

O pseudo-tensor de deformações é formado pelas deformações longitudinais ε_x e ε_y , e pela distorção γ_{xy} , todos apresentados no item 2.2 deste capítulo.

O pseudo-tensor de tensões é dado, seguindo lei linear, pela multiplicação de uma matriz constitutiva, adotada na formulação, pelo pseudo-tensor de deformações, conforme eq (2.35).

$$\sigma = K\varepsilon \quad (2.35)$$

sendo a matriz K representada por:

$$K = \frac{E}{1+\bar{\nu}} \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\bar{\nu}} & \frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} & 0 \\ \frac{\bar{\nu}}{1-\bar{\nu}} & \frac{1}{1-\bar{\nu}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

A expressão da lei constitutiva (eq (2.36)) quando substituída na eq (2.35), e considerado o parâmetro $\bar{\nu}$ igual ao coeficiente de Poisson do material, corresponde ao denominado estado plano de tensões (EPT). De modo a se considerar estado plano de deformações (EPD), deve-se fazer:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1-\nu} \quad (2.37)$$

A partir da eq (2.35) têm-se as expressões referentes aos componentes do pseudo-tensor de tensões ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$):

$$\sigma_x = K(1,1)\varepsilon_x + K(1,2)\varepsilon_y + K(1,3)\gamma_{xy} = K(1,1)\varepsilon_x + K(1,2)\varepsilon_y$$

$$\sigma_y = K(2,1)\varepsilon_x + K(2,2)\varepsilon_y + K(2,3)\gamma_{xy} = K(2,1)\varepsilon_x + K(2,2)\varepsilon_y \quad (2.38)$$

$$\tau_{xy} = K(3,1)\varepsilon_x + K(3,2)\varepsilon_y + K(3,3)\gamma_{xy} = K(3,3)\gamma_{xy}$$

Substituindo a expressão do tensor de tensões na energia de deformação específica ((2.34)) e lembrando-se que K é simétrica, tem-se:

$$u_e = \frac{1}{2} \left\{ K(1,1)\varepsilon_x^2 + 2K(1,2)\varepsilon_x\varepsilon_y + K(2,2)\varepsilon_y^2 + K(3,3)\gamma_{xy}^2 \right\} \quad (2.39)$$

A propriedade de tensão-deformação conjugada é obtida fazendo-se a derivada da eq (2.39) em relação a cada deformação encontrando-se a tensão associada.

2.5 TEOREMA DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL TOTAL

A minimização do funcional de energia potencial total representa a configuração de equilíbrio do corpo em estudo. Um fato a ser observado é que a equação referente à minimização pode ser escrita em função de derivadas parciais em relação a parâmetros quaisquer, conforme:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e(\xi, X_i)}{\partial \alpha} dV_0 - \frac{\partial (F_i X_i)}{\partial \alpha} = 0 \quad (2.40)$$

A partir do Método dos Elementos Finitos Posicional tem-se a concepção de que os parâmetros no qual o funcional de energia potencial total deve ser minimizado são as posições dos pontos do corpo e que a partir desses pontos podem-se aproximar as configurações do contínuo conforme eq (2.41). Portanto, para cada ponto do elemento finito tem-se:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial X_s} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e(\xi, X_i)}{\partial X_s} dV_0 - F_s = 0 \quad (2.41)$$

simplificando a eq (2.41) tem-se que:

$$g = \frac{\partial U_e}{\partial X_s} - F_{ext_s} = 0 \quad (2.42)$$

sendo que as variáveis $\partial U_e / \partial X_s$ e F_{ext_s} representam o vetor de forças internas e o vetor de forças externas respectivamente.

A eq (2.42) representa a equação de equilíbrio para um problema estático, ou seja, quando $g = 0$ tem-se forças internas iguais à forças externas aplicadas. Outro ponto importante a ser observado está na natureza não linear da eq (2.42).

2.6 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Como mostrado anteriormente a equação que rege o equilíbrio da estrutura é de caráter não linear e é satisfeita na sua configuração de equilíbrio. Para se determinar tal configuração expande-se a eq (2.42) em série de Taylor, truncada a partir dos termos lineares, chegando-se a:

$$0 = g(X) \cong g(X^0) + \nabla g(X^0) \Delta X \quad (2.43)$$

A eq (2.43) pode ser trabalhada de forma a melhor se adequar ao Método de Newton-Raphson (RIKS, 1972), como mostrado abaixo:

$$\nabla g(X^0) \Delta X = -g(X^0) \quad (2.44)$$

O vetor de resíduos é obtido a partir da eq (2.42) calculada na posição tentativa X^0 , tal como:

$$g(X^0) = \frac{\partial U_e}{\partial X_s} - F_{ext} = f_{int_s} - f_{ext} \quad (2.45)$$

O vetor de forças internas $\partial U_e / \partial X$ é determinado através da integral no volume inicial, da derivada da energia de deformação específica, conforme mostrado na eq (2.46):

$$f_{\text{int}_s} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e(\xi, X_i)}{\partial X_s} dV_0 \quad (2.46)$$

A energia de deformação específica, apresentada na eq (2.39), encontra-se em função das deformações não lineares de engenharia:

$$u_e = u_e(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}) \quad (2.47)$$

logo, a derivada desta em relação as posições X_i é dada por:

$$\frac{\partial u_e}{\partial X_s} = \frac{\partial u_e}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial X_s} + \frac{\partial u_e}{\partial \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial X_s} + \frac{\partial u_e}{\partial \gamma_{xy}} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial X_s} \quad (2.48)$$

Derivando-se a eq (2.42) em relação às posições nodais chega-se à matriz hessiana do sistema:

$$\frac{\partial g}{\partial X_l} = \frac{\partial^2 U_e}{\partial X_s \partial X_l} \quad (2.49)$$

A partir da eq (2.49) conclui-se que a matriz hessiana é dada pela integral no volume inicial da derivada segunda da energia de deformação específica, conforme mostrado na eq (2.50):

$$H_{sl} = \int_{V_0} \frac{\partial^2 u_e(\xi, X_i)}{\partial X_s \partial X_l} dV_0 \quad (2.50)$$

logo, seguindo o mesmo raciocínio da derivada primeira, a derivada segunda da energia de deformação específica em relação as posições é dada por :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_e}{\partial X_s \partial X_l} = & \left(\frac{\partial^2 u_e}{\partial^2 \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial X_l} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial \varepsilon_x \partial \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial X_l} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial \varepsilon_x \partial \gamma_{xy}} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial X_l} \right) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial X_s} + \frac{\partial u_e}{\partial \varepsilon_x} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial X_s \partial X_l} + \\ & \left(\frac{\partial^2 u_e}{\partial \varepsilon_y \partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial X_l} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial^2 \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial X_l} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{xy}} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial X_l} \right) \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial X_s} + \frac{\partial u_e}{\partial \varepsilon_y} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial X_s \partial X_l} \\ & + \left(\frac{\partial^2 u_e}{\partial \gamma_{xy} \partial \varepsilon_x} \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial X_l} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial \gamma_{xy} \partial \varepsilon_y} \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial X_l} + \frac{\partial^2 u_e}{\partial^2 \gamma_{xy}} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial X_l} \right) \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial X_s} + \frac{\partial u_e}{\partial \gamma_{xy}} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial X_s \partial X_l} \end{aligned} \quad (2.51)$$

De acordo com as eqs (2.46) e (2.50) sabe-se que para a solução do sistema não linear apresentado na eq (2.44) não é necessário apenas a utilização de um método numérico para resolução de sistemas não lineares, mas também a utilização de uma técnica de integração numérica de modo a solucionar as integrais referentes ao vetor de forças internas e a matriz hessiana. Para tanto, utiliza-se a técnica de integração numérica de Hammer (BREBBIA & DOMINGUEZ, 1992).

Este método de integração tem como princípio básico substituir uma soma integral por uma soma discreta (somatório). Portanto as eqs (2.46) e (2.50) podem ser reescritas da seguinte forma

$$f_{int_s} = \sum_{i\xi=1}^{NPH} \left(\frac{\partial u_e(\xi, X_i)}{\partial X_s} \right) \det(A_0(\xi_{i\xi})) W_{i\xi} \quad (2.52)$$

$$H_{sl} = \sum_{i\xi=1}^{NPH} \left(\frac{\partial^2 u_e(\xi, X_i)}{\partial X_s \partial X_l} \right) \det(A_0(\xi_{i\xi})) W_{i\xi} \quad (2.53)$$

na qual $i\xi$ é o índice referente ao somatório, a variável NPH representa o número de pontos de Hammer e $W_{i\xi}$ o peso utilizado na técnica de integração numérica

Realizada a integração numérica determina-se o vetor de forças internas local e a matriz hessiana local de cada elemento.

De posse das matrizes hessiana locais e dos vetores de forças internas locais monta-se, a partir das restrições de graus de liberdade do sistema estrutural em estudo, a matriz hessiana global da estrutura e o vetor de forças internas global da estrutura.

A partir da matriz hessiana e do vetor de forças residuais, resolve-se o sistema apresentado na eq (2.44) e determinam-se as correções de posição ΔX . Durante o processo iterativo, devem ser feitas modificações nas posições:

$$X = X + \Delta X \quad (2.54)$$

De posse do vetor ΔX , verifica se ele é suficientemente pequeno dentro de determinada tolerância. Para isso, utiliza-se uma expressão denominada critério de convergência, que é dada por:

$$erro = \frac{\|\Delta X\|}{\|X_0\|} \leq TOL \quad (2.55)$$

sendo que $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana.

Estando o critério de convergência satisfeito, muda-se para um novo passo de carga.

O processo poderia ser apenas iterativo, porém é definido como incremental e iterativo para garantir que a posição inicial de previsão não seja muito distante da posição de equilíbrio do sistema, reduzindo o número de iterações e melhorando a convergência do processo.

O Quadro 2.1 apresenta a esquematização do método de Newton-Raphson implementado neste trabalho.

Quadro 2.1 – Esquema do método de Newton-Raphson.

A. INICIALIZAÇÕES

A.1 Inicializa o vetor posição X (com a última posição de equilíbrio conhecida) e faz-se $\Delta X = 0$

B. PARA CADA INCREMENTO DE CARGA

B.1 Atualiza-se o vetor de cargas externas aplicadas, fazendo $F_{ext} = F_{ext} + \Delta F_{ext}$

B.2 Calcula-se o vetor de forças internas global (F_{int})

B.3 Calcula-se o vetor de resíduos ou de forças desequilibradas $g = F_{int} - F_{ext}$

B.4 Monta-se a matriz hessiana global da estrutura ∇g

B.5 Resolve-se o sistema $\nabla g \Delta X = -g$

B.6 Atualiza-se posição $X = X + \Delta X$

B.7 Calcula-se o erro e verifica-se o critério de convergência $erro = \frac{\|\Delta X\|}{\|X_0\|} \leq TOL$

B.8 Se o critério de convergência for satisfeito vá para B.1 senão volte para B.2

C. FIM

CAPÍTULO 3

EXEMPLOS ESTÁTICOS

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo analisam-se alguns sistemas estruturais onde se encontram presentes fenômenos não lineares geométricos. Os sistemas analisados apresentam como objetivo servir de exemplos de validação para o programa não linear geométrico estático implementado e cuja formulação encontra-se no capítulo 2.

Para a visualização dos resultados obtidos, através da formulação numérica posicional, utiliza-se o pós-processador do GMEC (Grupo de Mecânica Computacional) desenvolvido em PACCOLA & CODA (2005).

3.2 EXEMPLO 1 – CHAPA TRACIONADA

No primeiro exemplo estuda-se o caso de uma chapa (Figura 3.1) submetida a um carregamento de tração F .

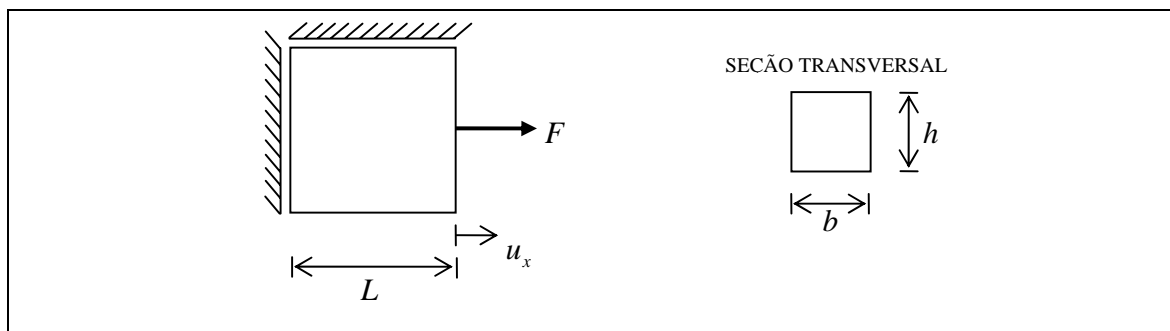


Figura 3.1 – Esquema da chapa engastada.

Os dados de entrada para o problema são apresentados no Quadro 3.1.

Quadro 3.1 – Dados de entrada do exemplo 1.

$E = 1$
$L = 0,5$
$h = 0,5$
$b = 1$ (espessura)
$\nu = 0,5$ (coeficiente de Poisson)

Este exemplo é aqui utilizado para testar a lei constitutiva adotada com coeficiente de Poisson diferente de zero.

Na análise, a chapa foi discretizada em 2 elementos finitos e foram aplicados 10 passos de carga de $F = 0,05$. Estuda-se o comportamento dos deslocamentos horizontal e vertical do bloco.

Na Figura 3.2 apresenta-se a configuração deslocada final do bloco.

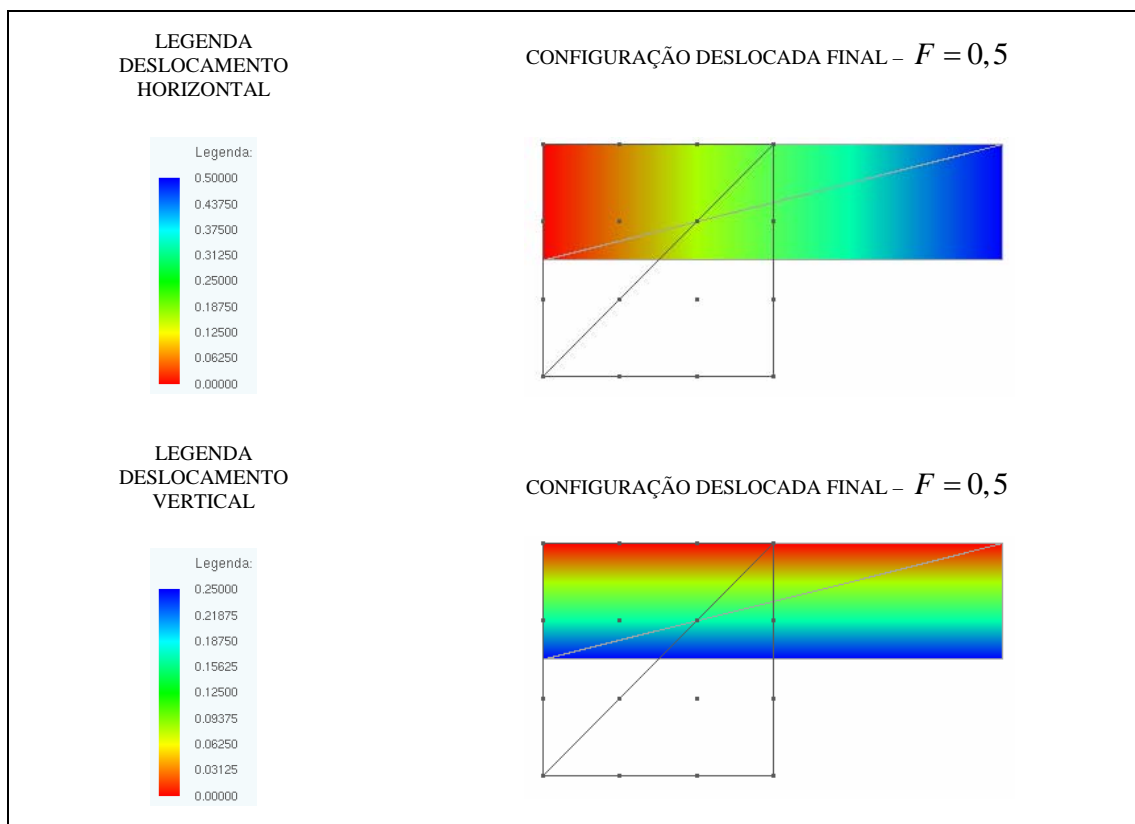


Figura 3.2 – Configuração deslocada final da chapa.

Analisando-se a Figura 3.2 percebe-se que os resultados obtidos coincidem com os esperados para o exemplo em estudo, fazendo com que o bloco deslocasse horizontalmente em 1 e verticalmente em 0,25.

3.3 EXEMPLO 2 – BLOCO ENGASTADO TRACIONADO

Como segundo exemplo estuda-se o caso de um bloco engastado submetido a uma força de tração na extremidade (Figura 3.3).

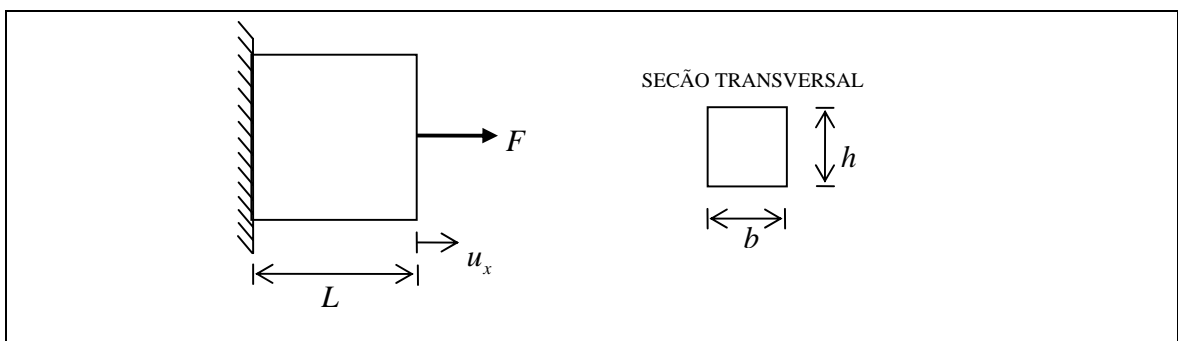


Figura 3.3 – Esquema do bloco engastado.

Para o estudo realizam-se duas análises; inicialmente faz-se o coeficiente de Poisson igual a zero e depois diferente de zero para verificar a sua influência nos resultados obtidos. Nas duas análises considera-se estado plano de deformações (EPD).

Os dados de entrada para o problema são apresentados no Quadro 3.2.

Quadro 3.2 – Dados de entrada do exemplo 2.

$E = 1$
$L = 1$
$h = 1$
$b = 1$ (espessura)
Análise I - $\nu = 0$ (coeficiente de Poisson)
Análise II - $\nu = 0,3$ (coeficiente de Poisson)

Nas análises, o bloco foi discretizado em 20 elementos finitos e foram aplicados 10 passos de carga de $F = 0,1$.

Na Figura 3.4 apresenta-se a configuração deslocada final do bloco para análise I (coeficiente de Poisson igual a $\nu = 0$).

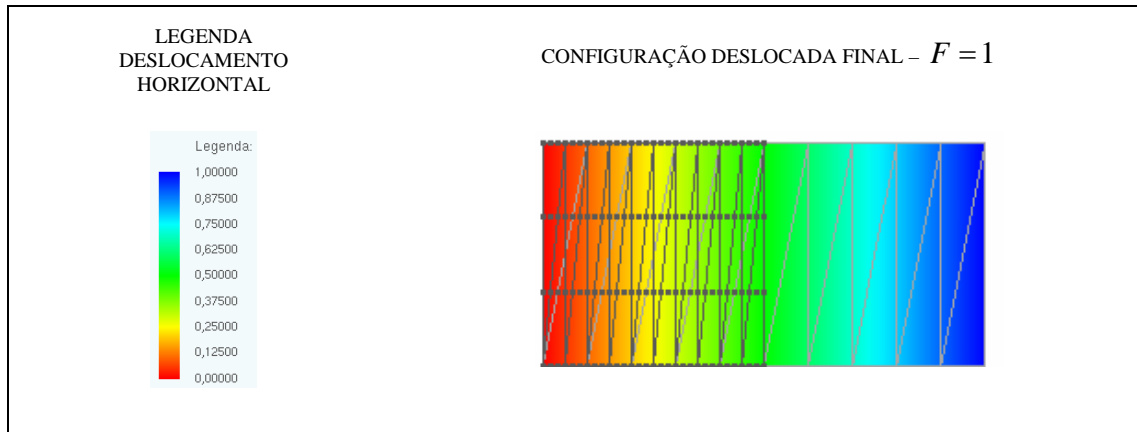


Figura 3.4 – Configuração deslocada final do bloco para análise I.

Analisando-se a Figura 3.4 percebe-se que a formulação apresentou o resultado esperado fazendo com que o bloco se deslocasse apenas horizontalmente e com valor unitário.

Na Figura 3.5 apresenta-se a configuração deslocada final do bloco para análise II (coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$).

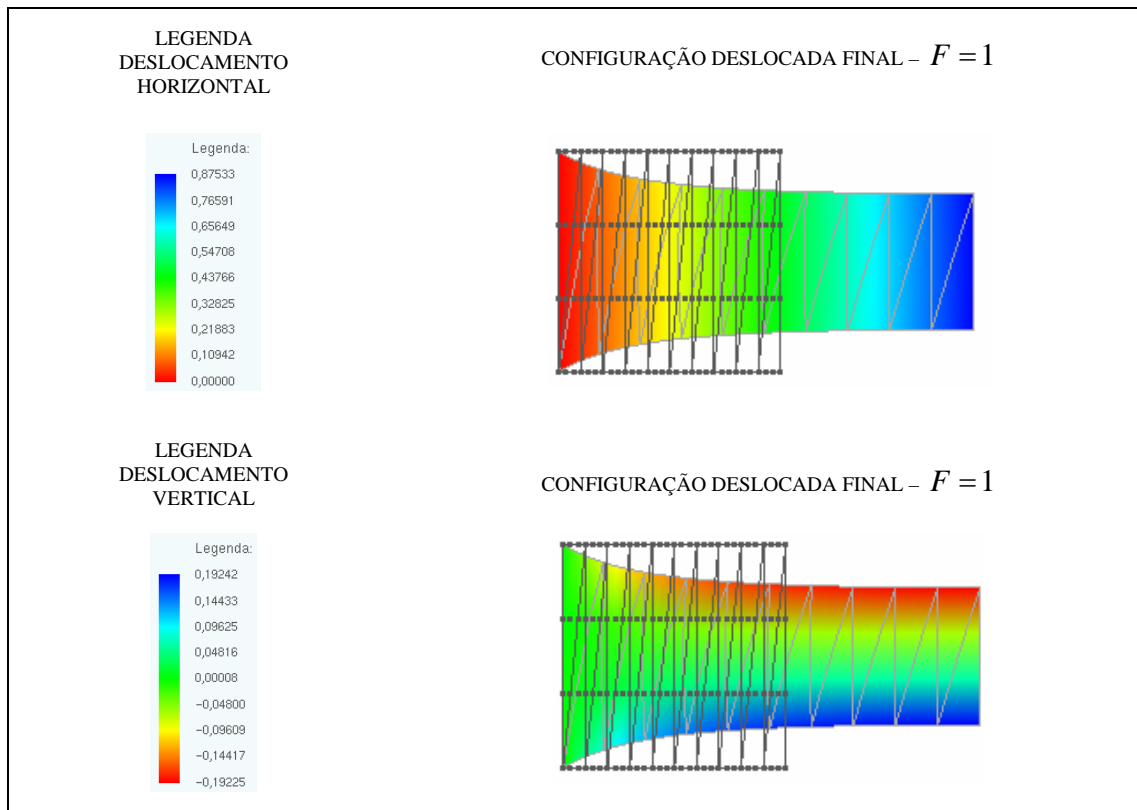


Figura 3.5 – Configuração deslocada final do bloco para análise II.

Observando-se a Figura 3.5 percebe-se que os resultados obtidos foram os esperados para o exemplo em estudo. O efeito do coeficiente de Poisson (diferente de zero) faz com que o bloco tanto se desloque menos na direção horizontal quanto tenha um estreitamento de seção.

3.4 EXEMPLO 3 – VIGA ENGASTADA COM CARGA TRANSVERSAL APLICADA NA EXTREMIDADE LIVRE

Neste terceiro exemplo analisa-se o comportamento de uma viga engastada com uma carga transversal aplicada na extremidade, conforme Figura 3.6.

Este exemplo é muito utilizado como teste para formulações que apresentem como objetivo a análise não linear de estruturas, por se conhecer sua solução analítica e pelas características de seu comportamento não linear. Este pode ser encontrado em MATTIASSON (1981) e FUJII (1983).

Para se processar este exemplo em código computacional de chapa adota-se $\nu = 0$, permitindo-se que se utilizem as dimensões estabelecidas na Figura 3.6.

Na análise realizada, são investigados os deslocamentos horizontal e vertical do nó em que a carga transversal encontra-se aplicada.

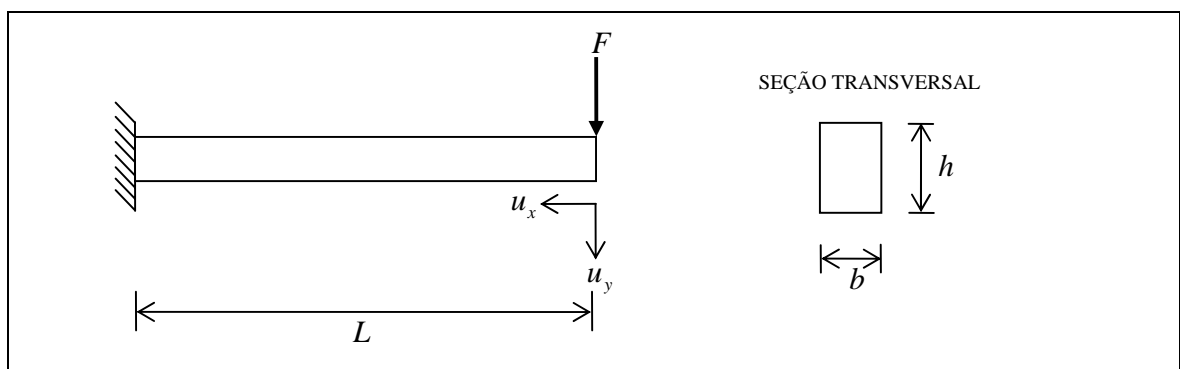


Figura 3.6 – Esquema da viga engastada.

Os dados de entrada para o problema são apresentados no Quadro 3.3.

Nas Figuras 3.7 e 3.8 encontram-se as soluções numéricas obtidas com a utilização da formulação numérica posicional e comparadas com as soluções analíticas para pórtico plano.

Quadro 3.3 – Dados de entrada do exemplo 3.

$E = 210,010^9 Pa$
$L = 10 m$
$h = 0,0178 m$
$b = 1m$ (espessura)
$\nu = 0$ (coeficiente de Poisson)

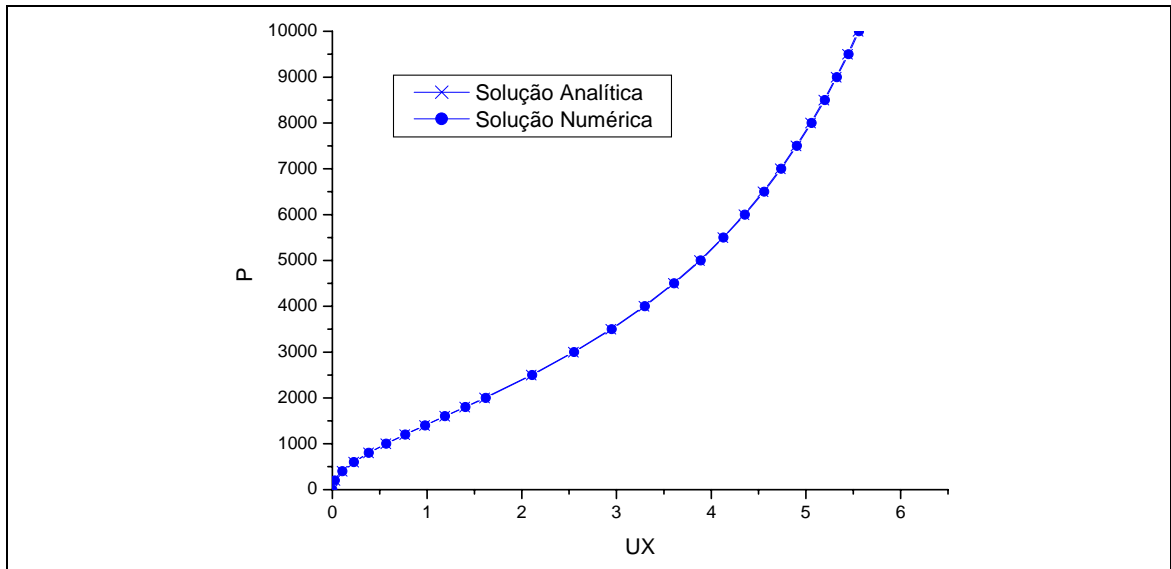


Figura 3.7 – Deslocamento horizontal x carga aplicada.

No estudo, a viga foi discretizada em 120 elementos finitos e foram aplicados 100 passos de cargas de 100 N .

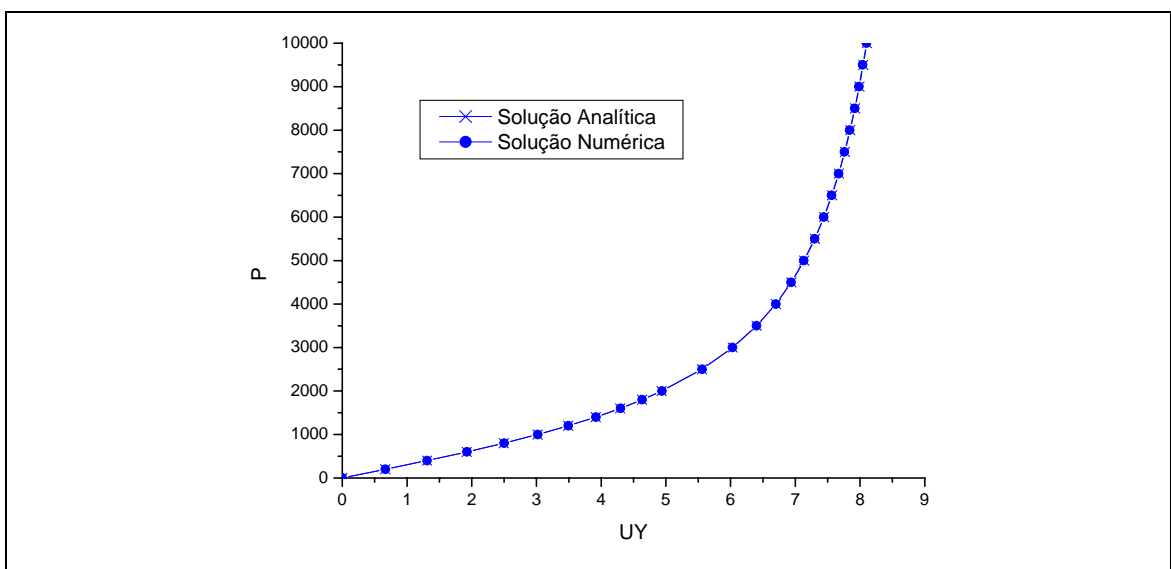


Figura 3.8 – Deslocamento vertical x carga aplicada.

Na Figura 3.9 encontra-se a configuração deslocada final da viga.

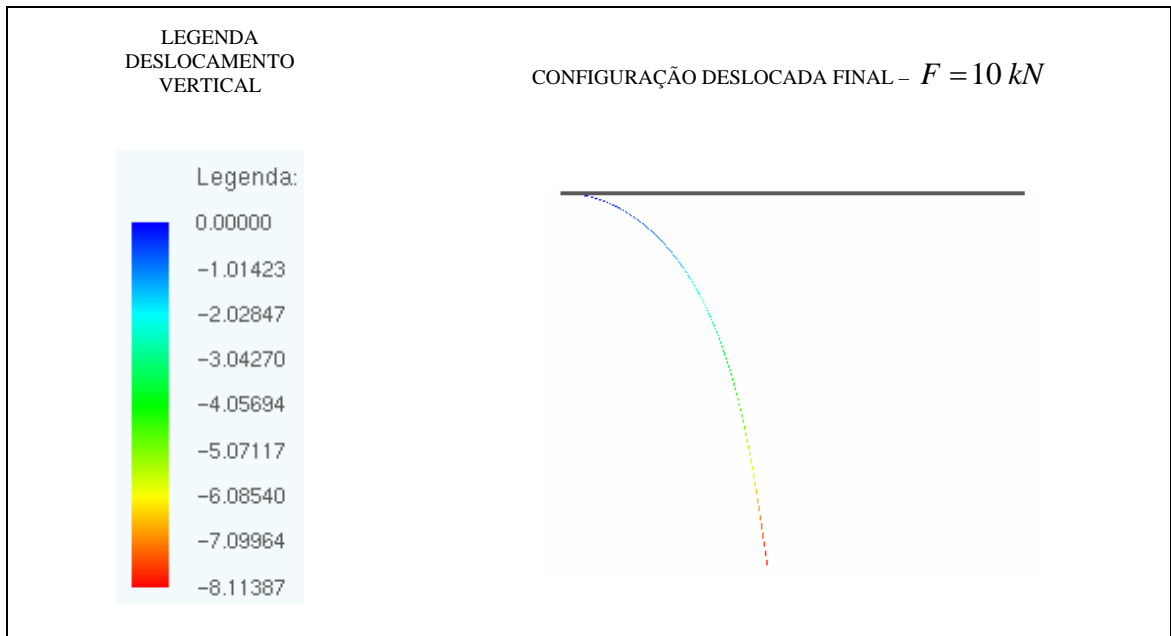


Figura 3.9 – Configuração deslocada final da viga.

Observando-se os gráficos apresentados nas Figuras 3.7 e 3.8, percebe-se que tanto em relação ao deslocamento horizontal quanto ao deslocamento vertical a formulação posicional não linear geométrica implementada apresentou excelentes resultados, tanto que a resposta em ambos os casos coincide com a resposta analítica do exemplo.

3.5 EXEMPLO 4 – PILAR COM CARGA EXCÊNTRICA

No quarto exemplo analisa-se um dos mais tradicionais problemas em se tratando de análise não linear de estruturas. Trata-se de um pilar com base engastada (Figura 3.10), e com uma carga longitudinal excêntrica aplicada em seu extremo.

Este problema também pode ser denominado de linha elástica de Euler e pode ser encontrado nos artigos de FUJII (1983) e SIMO *et al* (1984).

Para análise, o pilar foi discretizado em 80 elementos finitos e foram aplicados 371 passos de carga de 100 kN .

Os dados de entrada para o problema são apresentados no Quadro 3.4.

Na Figura 3.11 encontra-se a solução numérica obtida com a utilização da formulação numérica posicional não linear geométrica.

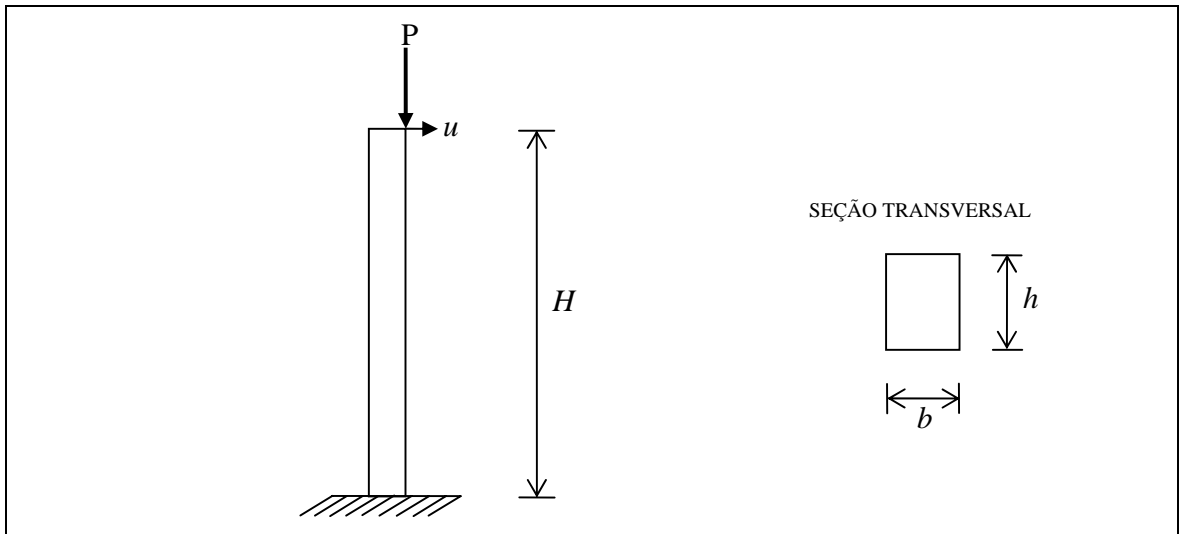


Figura 3.10 – Esquema do pilar com carga excêntrica.

Quadro 3.4 – Dados de entrada do exemplo 4.

$E = 210,0 \cdot 10^9 \text{ Pa}$
$H = 2 \text{ m}$
$h = 0,0663 \text{ m}$
$b = 1 \text{ m}$ (espessura)
$\nu = 0$ (coeficiente de Poisson)

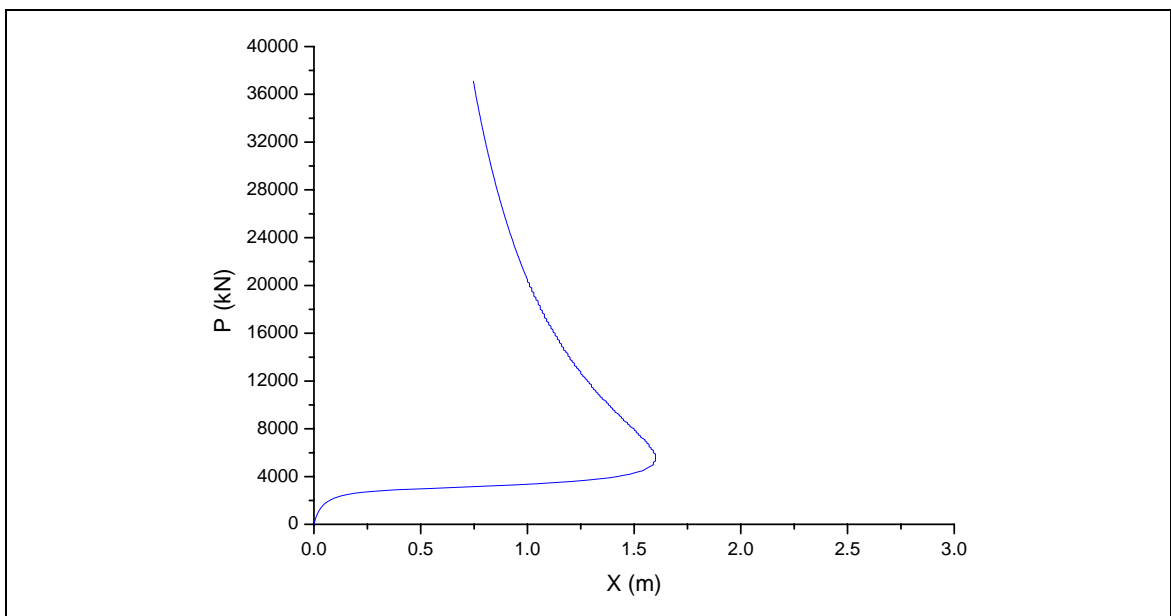


Figura 3.11 – Deslocamento horizontal x carga aplicada.

Na Figura 3.12 encontram-se as configurações deslocadas do pilar para alguns níveis de carregamento.

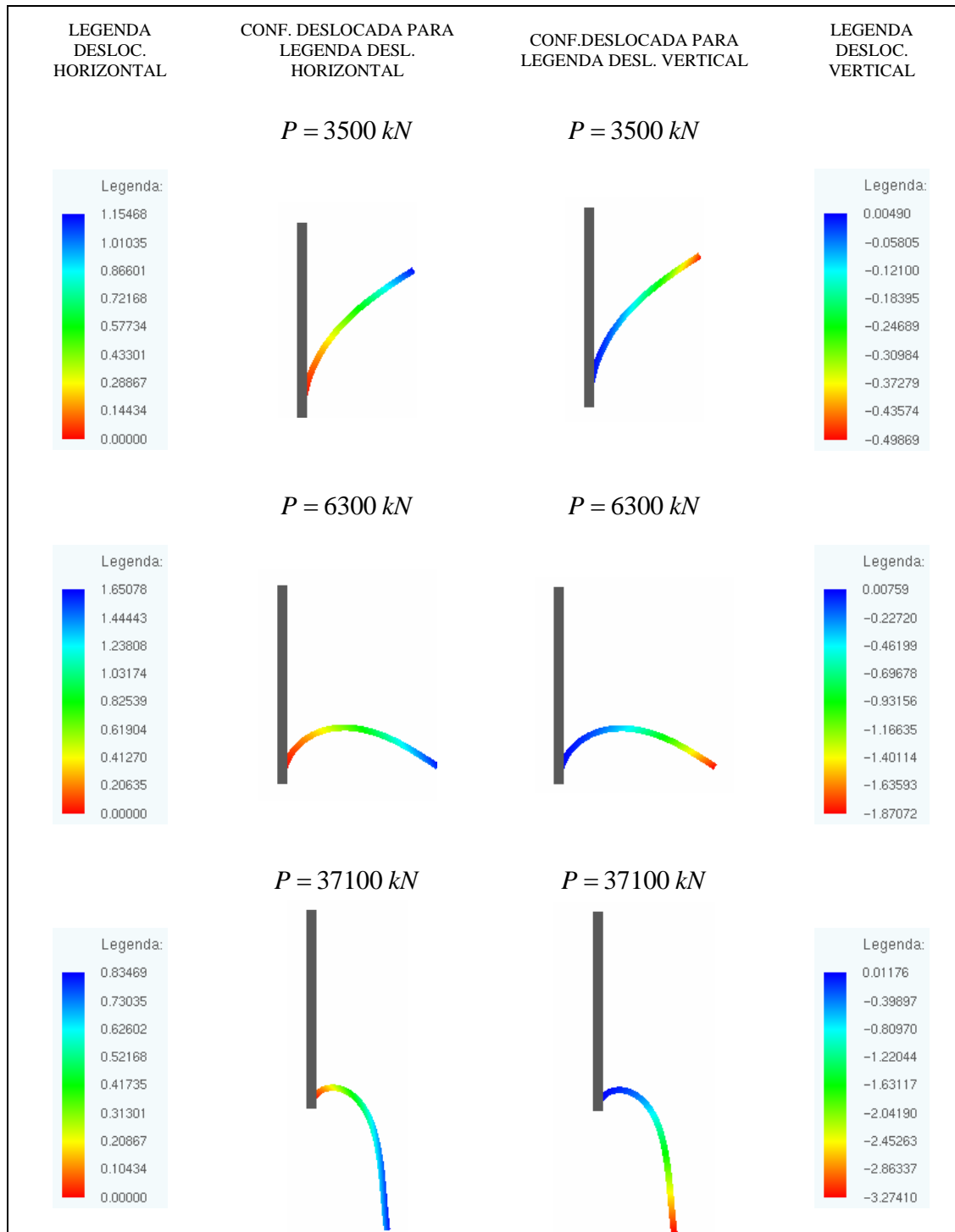


Figura 3.12 – Configurações deslocadas do pilar para alguns níveis de carregamento.

A justificativa para que este exemplo seja muito encontrado na literatura técnica é o fato de que apesar de sua geometria simples, possui um comportamento mecânico altamente não linear, sendo um bom teste para a verificação da eficiência de modelos não lineares.

Analisando-se a Figura 3.11, percebe-se que os resultados obtidos coincidem com os valores da referência (carga crítica e deslocamentos).

3.6 EXEMPLO 5 – VIGA ENGASTADA COM CARGA TRANSVERSAL APLICADA NO CENTRO

Como quinto exemplo, analisa-se o caso de uma viga engastada na extremidade esquerda com grau de liberdade horizontal livre na extremidade direita e com uma carga transversal aplicada no centro, conforme Figura 3.13. Este exemplo pode ser encontrado em LIMA & GARCIA (2003).

Na análise são investigados os comportamentos dos graus de liberdade vertical (w) do ponto A e horizontal (u) do ponto B.

Para análise, a viga foi discretizada em 24 elementos finitos e foram aplicados 48 passos de carga de $0,5 \text{ kN}$.

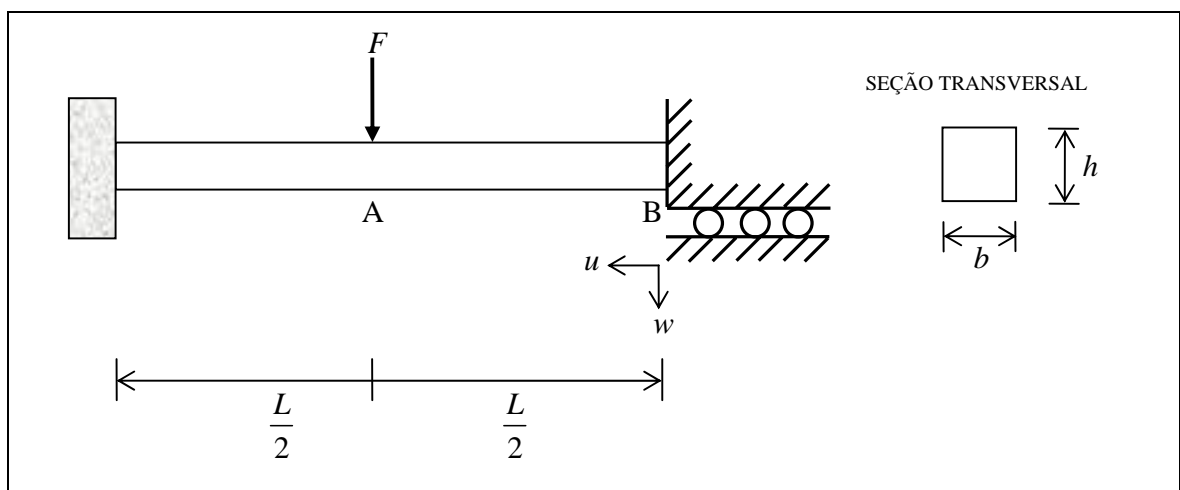


Figura 3.13 – Esquema da viga engastada com carga transversal aplicada no centro.

Os dados de entrada para o problema são apresentados no Quadro 3.5.

Quadro 3.5 – Dados de entrada do exemplo 5.

$E = 24000 \text{ kN/cm}^2$ $L = 100 \text{ cm}$ $h = 1 \text{ cm}$ $b = 1 \text{ cm}$ (espessura) $\nu = 0$ (coeficiente de Poisson)

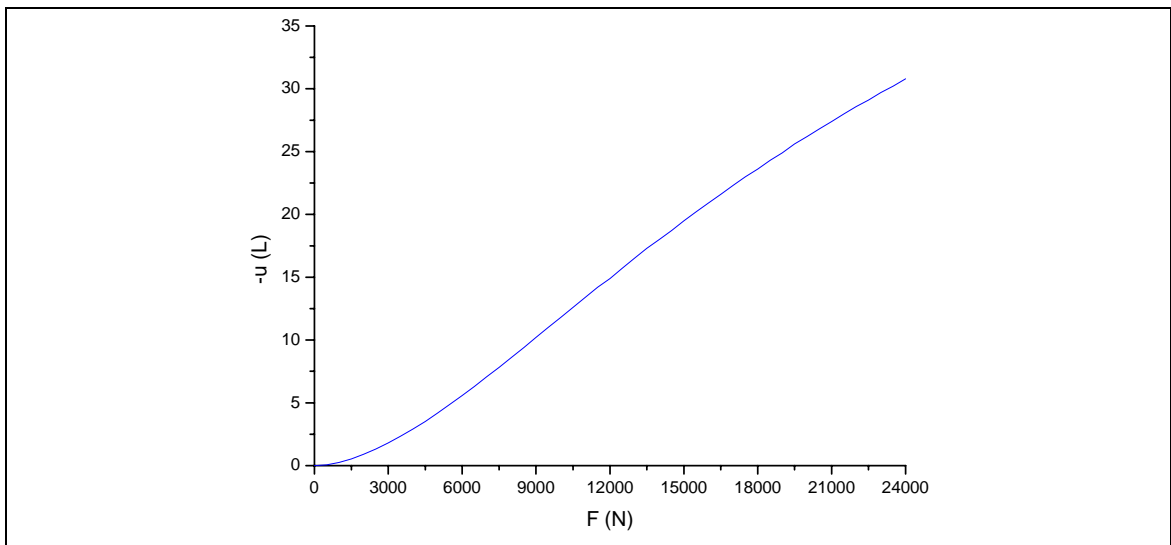


Figura 3.14 – Carga aplicada x deslocamento horizontal do apoio B.

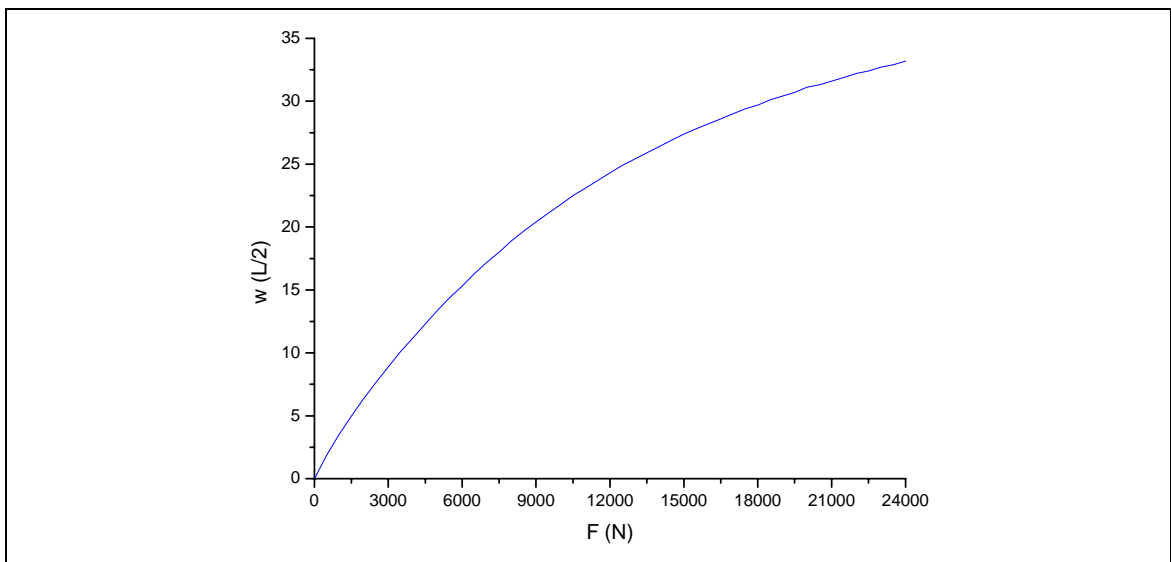


Figura 3.15 – Carga aplicada x deslocamento vertical do ponto A.

Na Figura 3.14 encontra-se o gráfico do comportamento do grau de liberdade horizontal da extremidade direita da viga obtida com a utilização da formulação numérica posicional não linear geométrica.

Na Figura 3.15 encontra-se o gráfico do comportamento do grau de liberdade vertical do centro da viga (ponto de aplicação da carga) obtida com a utilização da formulação numérica posicional não linear geométrica.

Para efeito de comparação, mostram-se na Figura 3.17 os gráficos referentes aos deslocamentos horizontal ($u(L)$) e vertical ($w(L/2)$), retirados de LIMA & GARCIA (2003).

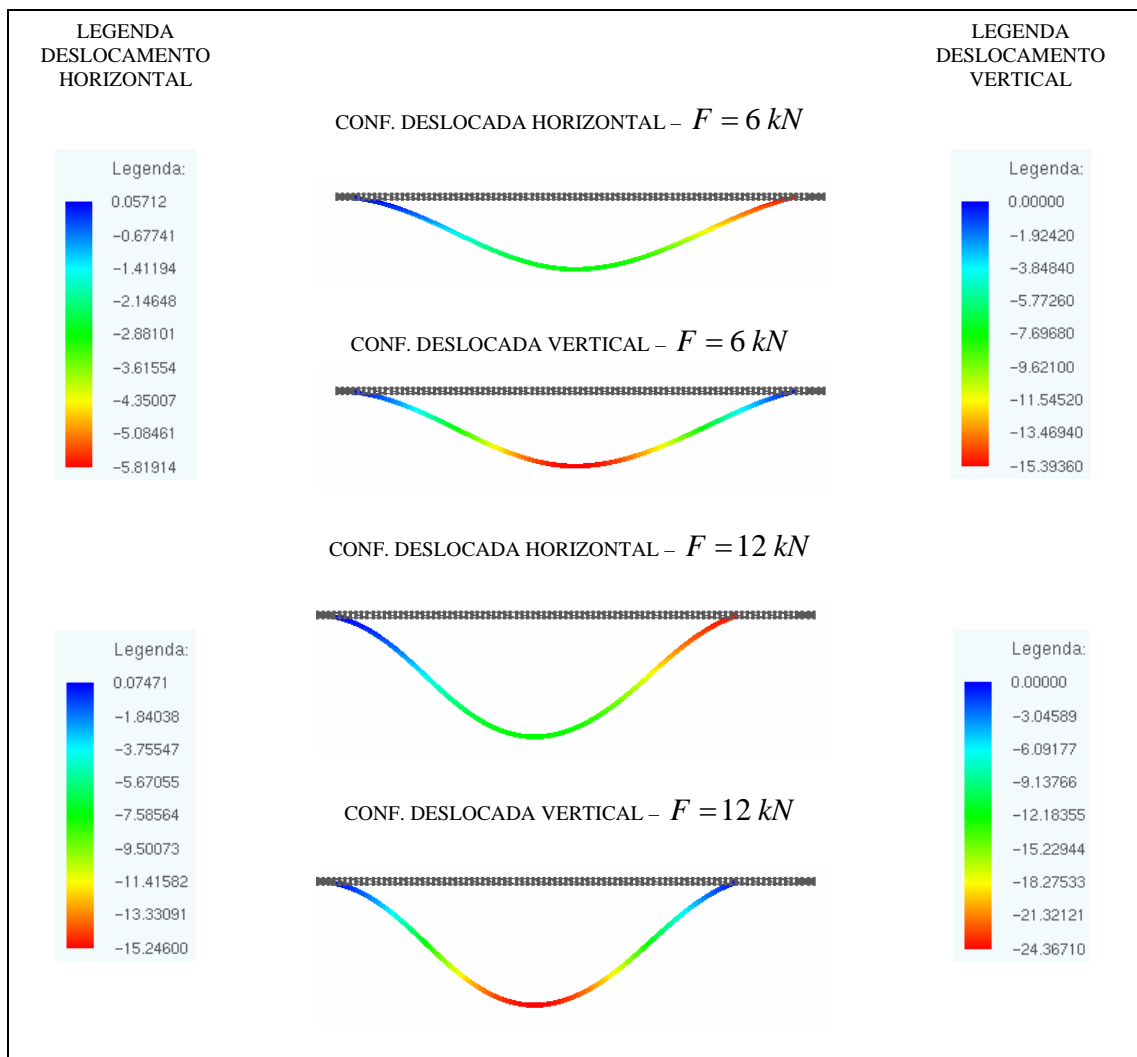


Figura 3.16 – Configurações deslocadas da viga para alguns níveis de carregamento.

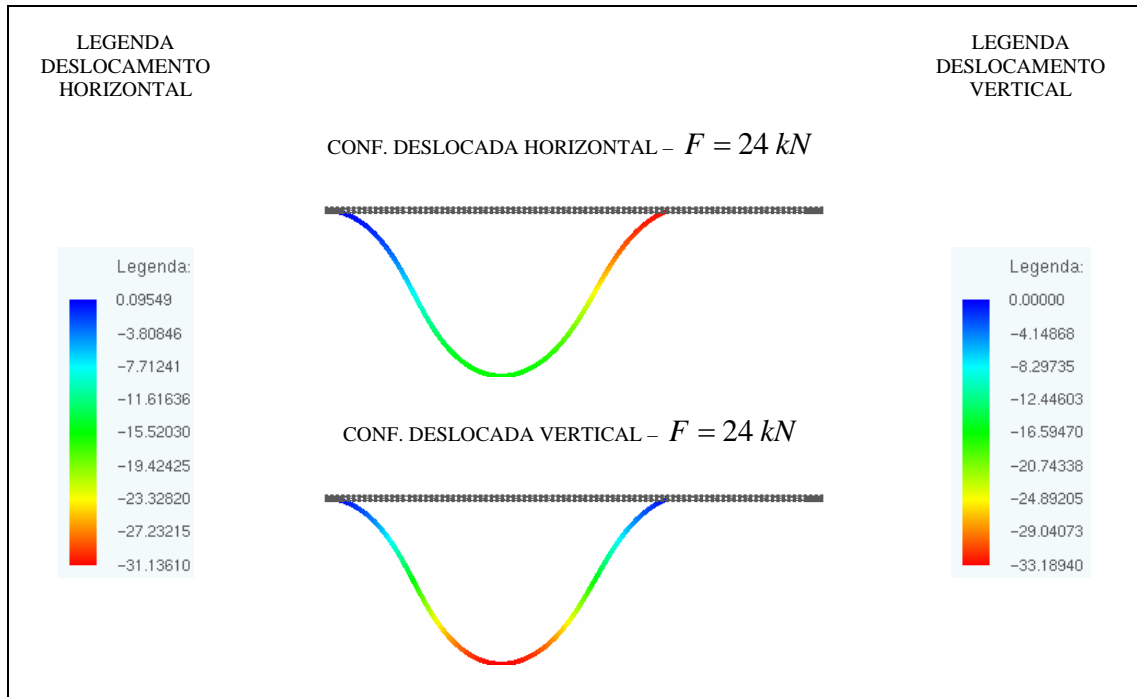


Figura 3.16 – Configurações deslocadas da viga para alguns níveis de carregamento.

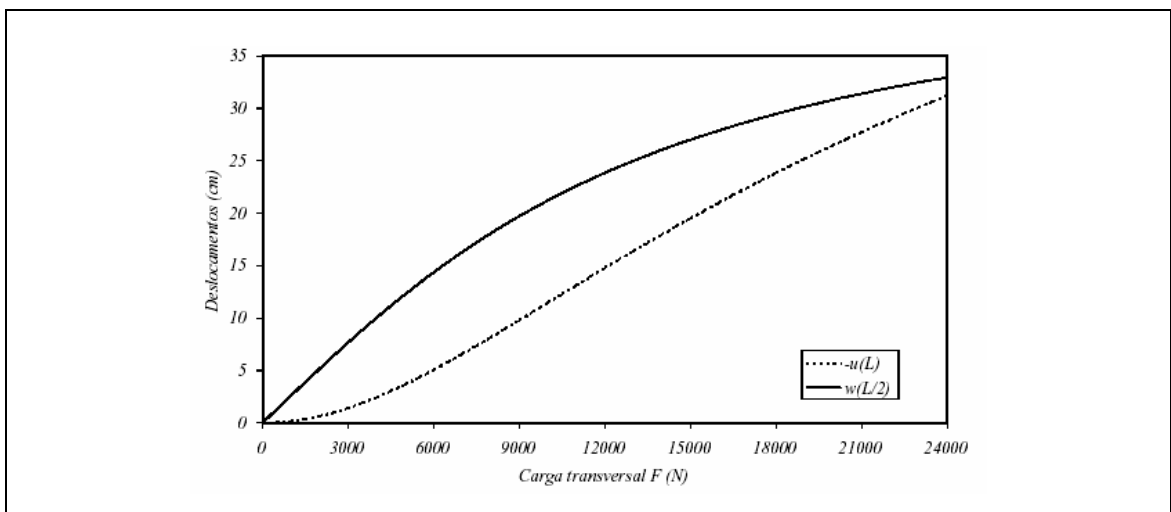


Figura 3.17 – Carga aplicada x deslocamento vertical (LIMA & GARCIA, 2003).

Na Figura 3.16 encontram-se as configurações deslocadas da viga para alguns níveis de carregamento.

CAPÍTULO 4

FORMULAÇÃO NÃO LINEAR GEOMÉTRICA APLICADA A PROBLEMAS DINÂMICOS COM OU SEM IMPACTO

4.1 Considerações Iniciais

Neste capítulo, inicialmente descreve-se a formulação dinâmica baseada na formulação posicional não linear geométrica, desenvolvida para problemas estáticos, apresentada no capítulo anterior. Posteriormente, descreve-se o modelo de impacto adotado neste trabalho.

A formulação dinâmica aqui adotada é apresentada a partir de duas etapas. A primeira etapa tem início na expressão do funcional de energia potencial total chegando-se na equação de equilíbrio dinâmico a partir da aplicação do teorema da mínima energia potencial total. A formulação matemática adotada em dinâmica das estruturas é baseada em equações diferenciais nas variáveis posição e tempo. Desta forma, a segunda etapa apresenta como objetivo integrá-las no tempo utilizando-se como ferramenta matemática o método de integração de Newmark.

Como terceira e última etapa tem-se a aplicação do método iterativo de Newton-Raphson na equação de equilíbrio dinâmica integrada pelo método de Newmark.

Por fim, apresenta-se o esquema de impacto adotado nesta dissertação e comenta-se sobre a necessidade de alteração das constantes de integração do algoritmo de Newmark, para casos envolvendo impacto de forma a eliminar possíveis instabilidades na análise.

4.2 Balanço de energia

De acordo com a Figura 2.4 (Capítulo 2), o funcional de energia potencial total pode ser escrito através de quatro tipos de energia, conforme eq (4.1):

$$\Pi = U_e - P + K + Q \quad (4.1)$$

sendo que U_e , P , K e Q representam a energia de deformação, energia potencial, energia cinética e energia de dissipação (ou perda de energia por amortecimento, GRECO & CODA (2006)), respectivamente.

Conforme já visto no capítulo 2, a energia de deformação é fornecida através da integral no volume inicial da energia de deformação específica (u_e) em relação às posições.

$$U_e = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad (4.2)$$

A energia potencial para um sistema de forças concentradas conservativo é escrita como:

$$P = -F_i X_i \quad (4.3)$$

sendo F_i as forças aplicadas e X_i as coordenadas dos seus pontos de aplicação. O índice i é referente ao grau de liberdade na qual força e posição estão associados. Neste estudo são consideradas apenas forças concentradas.

A energia cinética é dada por:

$$K = \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{x}_i \dot{x}_i dV_0 \quad (4.4)$$

na qual os termos \dot{x}_i e ρ_0 representam as velocidades e a densidade de massa, respectivamente. O termo de energia que representa a perda por amortecimento é escrito já diferenciado em relação às posições nodais como:

$$\frac{\partial Q}{\partial X_i} = \int_{V_0} \frac{\partial q}{\partial X_i} dV_0 = \int_{V_0} \lambda_m \rho_0 \dot{x}_i dV_0 \quad (4.5)$$

na qual q representa o funcional de energia específica dissipativa e λ_m é a constante de amortecimento proporcional. Substituindo as eqs (4.2)-(4.5) na eq (4.1) tem-se que:

$$\Pi = \int_{V_0} u_e dV_0 - F_i X_i + \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{x}_i \dot{x}_i dV_0 + Q \quad (4.6)$$

Aplicando-se o teorema da mínima energia potencial, na eq (4.6), em relação à posição nodal X_s^k , sendo k o nó e s a direção, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial X_s^k} = & \int_{V_0} \frac{\partial u_e(\xi, X_i)}{\partial X_s^k} dV_0 - F_s + \int_{V_0} \phi_s^k \rho_0 \phi_z^l \ddot{x}_z^l(\xi, X_i) dV_0 + \\ & \int_{V_0} \lambda_m \phi_s^k \rho_0 \phi_z^l \dot{x}_z^l(\xi, X_i) dV_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

simplificando a eq (4.7), encontra-se:

$$g = \frac{\partial U_e}{\partial X_s} + F_{inerc} + F_{amort} - F_{ext} = 0 \quad (4.8)$$

tal que as variáveis $\partial U_e / \partial X_i$, F_{inerc} , F_{amort} e F_{ext} representam o vetor de forças internas, o vetor de força inerciais, o vetor de forças referentes ao amortecimento e o vetor de forças externas respectivamente.

A matriz de massa para cada elemento finito é definida como:

$$M_{(ks)(lz)} = \int_{V_0} \phi_s^k \rho_0 \phi_z^l dV_0 \quad (4.9)$$

no qual (ks) e (lz) representam os graus de liberdade globais.

O vetor de forças inerciais e o vetor de forças referentes ao amortecimento podem ser escritos como:

$$F_{inerc} = \int_{V_0} \phi_s^k \rho_0 \phi_z^l \ddot{x}_z^l dV_0 = \ddot{x}_z^l \int_{V_0} \phi_s^k \rho_0 \phi_z^l dV_0 = M \ddot{x}_i \quad (4.10)$$

$$F_{amort} = \int_{V_0} \lambda_m \phi_s^k \rho_0 \phi_z^l \dot{x}_z^l dV_0 = \lambda_m \dot{x}_z^l \int_{V_0} \phi_s^k \rho_0 \phi_z^l dV_0 = C \dot{x}_i \quad (4.11)$$

sendo C a matriz de amortecimento proporcional à massa, \dot{x}_i o vetor de velocidade e \ddot{x}_i o vetor de aceleração.

Portanto, a equação de equilíbrio dinâmico pode ser escrita da seguinte forma:

$$g = \frac{\partial U_e}{\partial X_i} - F_{ext} + M \ddot{x}_i + C \dot{x}_i = 0 \quad (4.12)$$

4.3 FUNCIONAL DE ENERGIA APROXIMADO – NEWMARK

A eq (4.12) é diferencial nas variáveis posição (X) e tempo (t), necessitando assim da utilização de um algoritmo de integração do tipo Newmark de forma a integrá-la no tempo.

Assim, escreve-se a eq (4.12) para um instante de tempo atual ($S+1$) como:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial X} \right|_{S+1} = \left. \frac{\partial U_e}{\partial X_S} \right|_{S+1} - F_{S+1} + M \ddot{X}_{S+1} + C \dot{X}_{S+1} = 0 \quad (4.13)$$

Na eq (4.13) o vetor de forças internas é calculado de forma idêntica ao problema estático. O vetor de forças externas (carregamentos nodais) é definido para cada passo de tempo através da seguinte expressão:

$$F_{S+1} = F_0 \left[C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3 + C_5 \text{sen}(C_6 t) + C_7 \cos(C_8 t) + C_9 e^{C_{10} t} \right] \quad (4.14)$$

na qual as constantes C_i são dados de entrada do programa e representam o tipo de força adotada no passo de tempo.

Aplicam-se na equação de equilíbrio, para um instante de tempo atual, as expressões de Newmark de posição e de velocidade aproximadas, dadas por:

$$X_{S+1} = X_S + \Delta t \dot{X}_S + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{X}_S + \beta \ddot{X}_{S+1} \right] \quad (4.15)$$

$$\dot{X}_{S+1} = \dot{X}_S + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{X}_S + \gamma \Delta t \ddot{X}_{S+1} \quad (4.16)$$

sendo β e γ constantes referentes ao método de Newmark (GRECO, 2004) e Δt o intervalo de tempo.

Nas eqs. (4.15) e (4.16), pode-se isolar a aceleração do passo de tempo atual e posteriormente substituir na equação dinâmica de equilíbrio (eq(4.13)), resultando em:

$$g(X_{S+1}) = \frac{\partial \Pi}{\partial X} \Big|_{S+1} = \frac{\partial U_t}{\partial X} \Big|_{S+1} - F_{S+1} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} X_{S+1} - M Q_S + C R_S + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} X_{S+1} - \gamma \Delta t C Q_S = 0 \quad (4.17)$$

tal que os vetores Q_S e R_S representam as contribuições dinâmicas relativas ao passado (passo S) e são dadas por:

$$Q_S = \frac{X_S}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{X}_S}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{X}_S \quad (4.18)$$

$$R_S = \dot{X}_S + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{X}_S \quad (4.19)$$

O vetor $g(X_{S+1})$ na eq (4.17) será nulo caso o equilíbrio dinâmico esteja satisfeito, caso contrário representa o resíduo de forças do sistema.

Derivando-se a eq (4.13) novamente em relação à posição atual chega-se a matriz hessiana para o problema dinâmico.

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial X^2} = \nabla g(X^0) = \left. \frac{\partial^2 U_t}{\partial X^2} \right|_{S+1} + M \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \lambda_m}{\beta \Delta t} \right) \quad (4.20)$$

sendo o primeiro termo $\left. \frac{\partial^2 U_t}{\partial X^2} \right|_{S+1}$ idêntico ao determinado no capítulo destinado a formulação não linear geométrica estática.

4.4 FORMULAÇÃO NUMÉRICA

Da mesma forma que no caso estático, a equação que rege o equilíbrio dinâmico da estrutura, segundo a presente formulação, também é de caráter não linear e é satisfeita pela configuração de equilíbrio. Para encontrar a configuração de equilíbrio, expande-se a eq (4.17) em série de Taylor, até os termos lineares, chegando-se a:

$$0 = g(X) \cong g(X^0) + \nabla g(X^0) \Delta X \quad (4.21)$$

A eq (4.21) pode ser trabalhada de forma a melhor se adequar ao método de Newton-Raphson, como mostrado abaixo:

$$\nabla g(X^0) \Delta X = -g(X^0) \quad (4.22)$$

O vetor de resíduos é obtido a partir da eq (4.17), fazendo-se X^0 idêntico à última posição de equilíbrio conhecida $X^0 = X_{s+1}$. Para o início do intervalo de tempo $X_{s+1} = X_s$.

$$g(X^0) = \left. \frac{\partial U_t}{\partial X} \right|_{S+1} - F_{S+1} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} X_{S+1} - M Q_S + C R_S + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} X_{S+1} - \gamma \Delta t C Q_S = 0 \quad (4.23)$$

A partir da resolução do sistema apresentado na eq (4.22) chegam-se as correções das posições ΔX . Durante o processo iterativo, devem ser feitas correções nas posições X_{S+1} e nas acelerações \ddot{X}_{S+1} :

$$X_{S+1} = X_S + \Delta X \quad (4.24)$$

$$\ddot{X}_{S+1} = \frac{X_{S+1}}{\beta \Delta t^2} - Q_S \quad (4.25)$$

Logo após as correções de posição e aceleração, calculam-se as velocidades pela eq (4.16).

De posse do vetor ΔX , verifica-se se o mesmo é suficientemente pequeno dentro de determinada tolerância. Para isso, utiliza-se uma expressão denominada critério de convergência, que para este trabalho foi adotada a eq (4.26).

$$erro = \frac{\|\Delta X\|}{\|X_0\|} \leq TOL \quad (4.26)$$

sendo que $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana.

Estando o critério de convergência satisfeito, muda-se para um novo passo de tempo. Para este novo passo os valores de passado (S) assumem os valores recém calculados ($S+1$).

É importante ressaltar que, antes de dar início ao processo iterativo atribuem-se valores iniciais para as variáveis posição, velocidade e aceleração. Em se tratando de posição é conveniente considerar as posições tanto de passado (S) como de presente ($S+1$) iguais à posição inicial do corpo. No caso da velocidade e aceleração de passado, estas podem ser admitidas como nulas ou então considerar uma velocidade inicial do corpo, onde a partir desta e através da eq (4.27) calcula-se a sua respectiva aceleração inicial.

$$\ddot{X}_0 = M^{-1} \left[F_0 - C\dot{X}_0 - \frac{\partial U_t}{\partial X} \Big|_0 \right] \quad (4.27)$$

O Quadro 4.1 apresenta a esquematização do algoritmo de Newmark implementado neste trabalho.

Quadro 4.1 – Esquema do algoritmo de Newmark.

<p>A. INICIALIZAÇÕES</p> <p>A.1 Define-se o intervalo de tempo Δt</p> <p>A.2 Inicializa-se os vetores X_S e \dot{X}_S (condições iniciais, ou seja $S = 0$) e faz $\Delta X = 0$</p> <p>A.3 Calcula-se o vetor de forças desequilibradas (vetor de resíduos) $g_0 = F_0 - C\dot{X}_0 - \frac{\partial U_t}{\partial X} \Big _0$</p> <p>A.5 Calcula-se $\ddot{X}_0 = M^{-1} \left[F_0 - C\dot{X}_0 - \frac{\partial U_t}{\partial X} \Big _0 \right]$</p> <p>B. PARA CADA INCREMENTO DE TEMPO</p> <p>B.1 Atualiza-se posição $X_{S+1} = X_S + \Delta X$</p> <p>B.2 Atualiza-se aceleração $\ddot{X}_{S+1} = \frac{X_{S+1} - X_S}{\beta \Delta t^2} - Q_S$</p> <p>B.3 Atualiza-se velocidade $\dot{X}_{S+1} = \dot{X}_S + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{X}_S + \gamma \Delta t \ddot{X}_{S+1}$</p> <p>B.4 Calcula-se o vetor de forças desequilibradas</p> $g = F_{\text{int}} - F_{S+1} + \frac{M}{\beta \Delta t^2} X_{S+1} - M Q_S + C R_S + \frac{\gamma C}{\beta \Delta t} X_{S+1} - \gamma \Delta t C Q_S$ <p>B.5 Calcula-se $\nabla g \Delta X = -g$</p> <p>B.6 Calcula-se o erro e verifica-se o critério de convergência $erro = \frac{\ \Delta X\ }{\ X_0\ } \leq TOL$</p> <p>B.7 Se o critério de convergência for satisfeito vá para B.8 senão volte para B.1</p> <p>B.8 Atualizam-se as variáveis de passado</p> $X_S = X_{S+1}$ $\dot{X}_S = \dot{X}_{S+1}$ $\ddot{X}_S = \ddot{X}_{S+1}$ <p>B.9 Volta-se para B com novo passo de tempo</p> <p>C. FIM</p>
--

4.5 IMPACTO DE ESTRUTURAS CONTRA ANTEPAROS RÍGIDOS

Nesta seção apresenta-se o esquema adotado para a consideração do impacto na implementação computacional. Conforme já afirmado anteriormente, neste trabalho será considerado o impacto, sem atrito, entre sólidos bidimensionais e anteparos rígidos.

O esquema de impacto adotado, baseado em SIMO *et al* (1986) e GRECO (2004), consiste na limitação de posições dos nós impactantes da estrutura.

De forma a apresentar o esquema de impacto adotado neste trabalho considera-se, na situação I da Figura 4.1, uma estrutura A (estrutura projétil) distante δ de um anteparo B (anteparo rígido). Na situação II faz-se com que a estrutura A se encontre em movimento e em direção ao anteparo, fazendo com que o impacto só ocorra se:

$$X - \delta \geq 0 \quad (4.28)$$

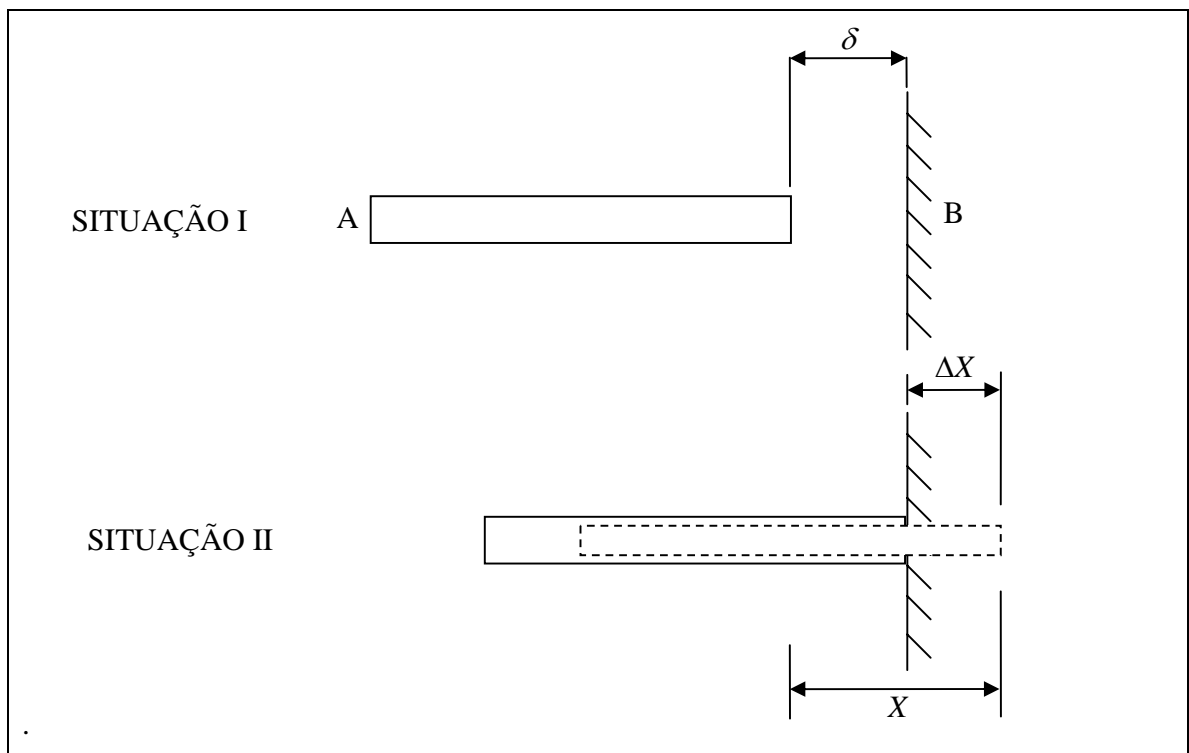


Figura 4.1 – Impacto entre uma estrutura e um anteparo rígido.

Na situação II da Figura 4.1, deve-se fazer a limitação das posições dos nós da estrutura projétil que satisfazem a condição para o impacto (eq (4.28)), fazendo com que as suas coordenadas horizontais sejam igualadas as do anteparo rígido. Portanto para os nós que sofrerem impacto deve-se fazer:

$$X_{NÓ} = X_{ANTEPARO} \quad (4.29)$$

Nesta situação calcula-se $f_{int} \neq 0$ nos pontos impactantes que contribuirá no vetor de resíduo ($g = f_{cont} = f_{ext} - f_{int}$) de forma a garantir a força necessária à reflexão do corpo. Como as forças internas calculadas serão sempre devidas às correções ortogonais à superfície de colisão, ter-se-á a situação de impacto sem atrito. Este procedimento simula de forma indireta a técnica do multiplicador de Lagrange descrita em GRECO (2004) e GRECO *et al* (2004).

De forma mais geral, considera-se o caso da Figura 4.2, onde a estrutura projétil encontra-se cercada pelos anteparos I, II, III, IV.

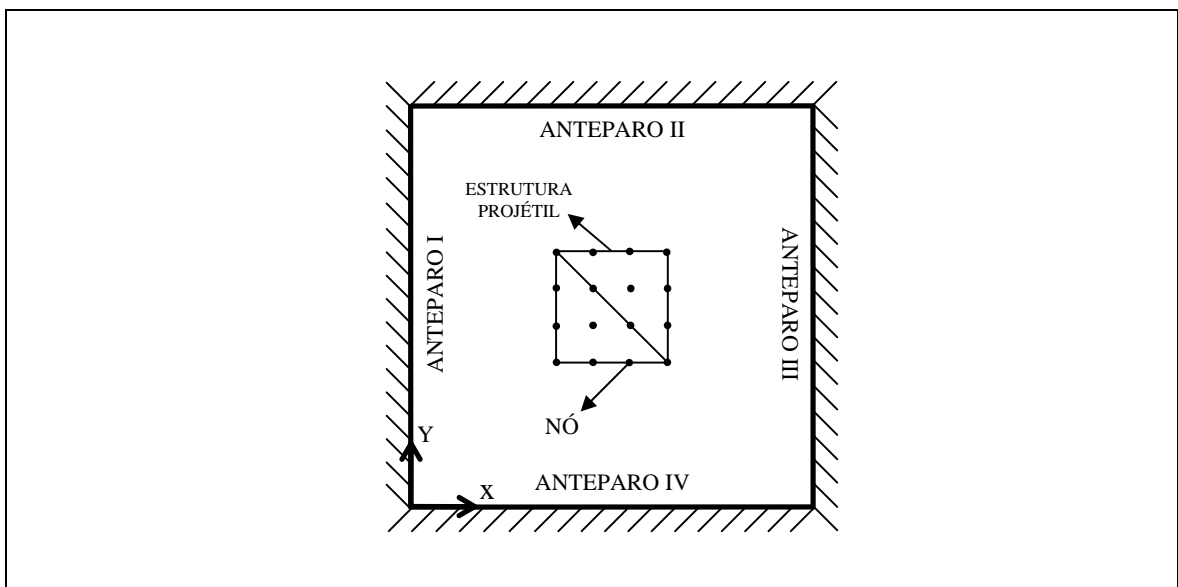


Figura 4.2 – Impacto entre uma estrutura e um anteparo rígido.

Aplicando-se a metodologia adotada, na Tabela 4.1 encontram-se as condições para que ocorra impacto nos anteparos I, II, III e IV e as respectivas correções nas posições dos nós impactantes.

Tabela 4.1 – Condições para existência de impacto, e respectivas restrições.

ANTEPARO	CONDIÇÃO	LIMITAÇÃO
I	$X_{NÓ} < X_{ANT^I}$	$X_{NÓ} = X_{ANT^I}$
II	$Y_{NÓ} > Y_{ANT^{II}}$	$Y_{NÓ} = Y_{ANT^{II}}$
III	$X_{NÓ} > X_{ANT^{III}}$	$X_{NÓ} = X_{ANT^{III}}$
IV	$Y_{NÓ} < Y_{ANT^{IV}}$	$Y_{NÓ} = Y_{ANT^{IV}}$

4.5.1 Parâmetros β e γ e a regularização da solução do impacto

Na família de algoritmos Newmark existem diversos métodos que apresentam como diferença entre si, os valores das constantes β e γ . Os parâmetros β e γ estão diretamente relacionados a propriedades como estabilidade, precisão e amortecimento dos métodos (COOK *et al*, 1989).

Na Tabela 4.2 encontram-se alguns dos métodos da família Newmark com seus respectivos valores das constantes β e γ .

Tabela 4.2 – Métodos da família Newmark.

MÉTODO	TIPO	β	γ
Aceleração Média	implícito	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Aceleração Linear	implícito	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
Fox-Goodwin	implícito	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
Diferença Central	explícito	0	$\frac{1}{2}$

Neste trabalho adota-se o Método da Aceleração Média (ou da Regra Trapezoidal) por ser um método reconhecidamente eficiente na solução dinâmica de estruturas convencionais (sem ocorrência de impacto). Porém, de acordo com CARPENTER *et al*

(1991), TAYLOR & PAPADOPOULOS (1993) e SOLBERG & PAPADOPOULOS (1998), o mesmo não apresenta a mesma eficiência em problemas com ocorrência de impacto, especialmente em problemas com existência de altas frequências.

Uma solução possível para se corrigir a instabilidade numérica gerada em problemas envolvendo impacto pode ser encontrada em HU (1997). No mesmo foi apresentado um algoritmo de integração temporal que tem como base partir de uma hipótese relacionada com as acelerações que se desenvolvem na região de contato durante o impacto. O artigo propõe um algoritmo que se enquadra na família de Newmark, que conforme determinado em GRECO (2004) corresponde ao algoritmo clássico com $\gamma = 1,5$ e $\beta = 1,0$.

Na Figura 4.3 apresentam-se as regiões de estabilidade em função dos parâmetros de Newmark β e γ .

De acordo com a Figura 4.3, os parâmetros propostos por HU (1997) ($\gamma = 1,5$ e $\beta = 1,0$) encontram-se no limite da região de estabilidade sobre a curva β . Da mesma forma, os parâmetros clássicos de integração temporal utilizados em problemas dinâmicos de estruturas convencionais ($\gamma = 0,5$ e $\beta = 0,25$) encontram-se no limite da região de estabilidade na intersecção da reta γ e da curva β , também gerando um algoritmo estável.

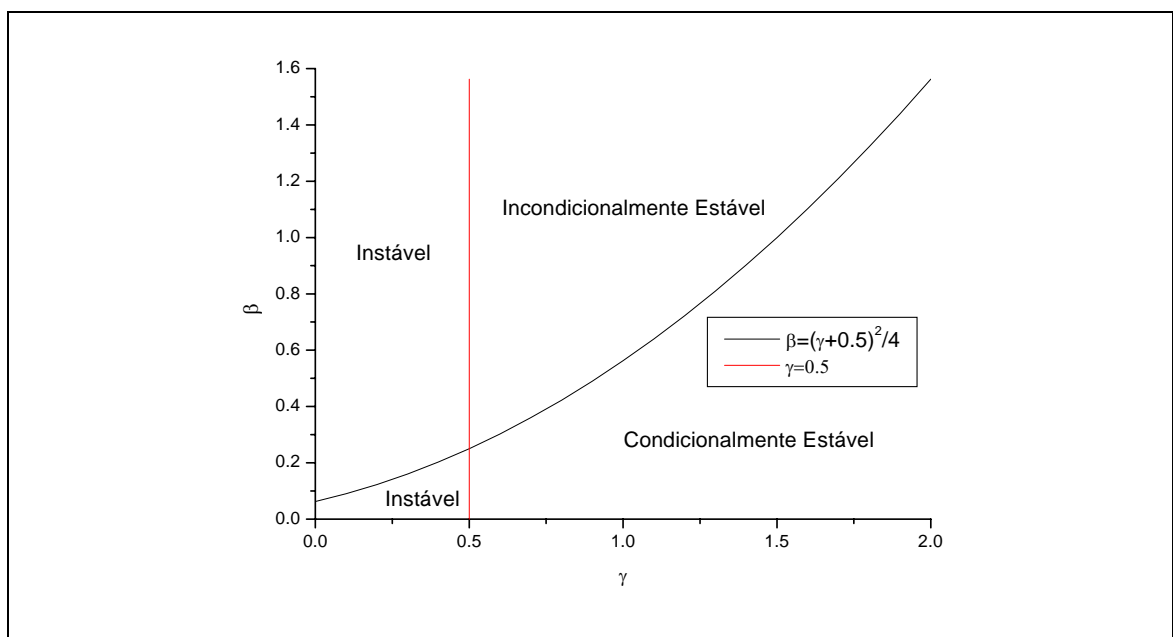


Figura 4.3 – Regiões de estabilidade em função de β e γ .

Segundo GRECO (2004), o termo estabilidade aplicado a um algoritmo de integração temporal faz referência apenas à característica do algoritmo em apresentar solução para qualquer discretização temporal (Δt), não garantindo porém a qualidade da resposta numérica obtida. Na formulação clássica de Newmark ($\gamma = 0,5$ e $\beta = 0,25$), pequenos valores de Δt podem gerar respostas oscilatórias para o campo das forças de contato. Enquanto que para a formulação modificada por HU (1997) é importante que se adote Δt pequeno. Valores pequenos fazem com que exista um pequeno amortecimento numérico resultando erros de fase.

O algoritmo de integração temporal de Newmark modificado por HU (1997) pode ser classificado em incondicionalmente estável, para qualquer Δt existe resposta, e em convergente, quanto menor Δt a resposta converge para a resposta esperada.

CAPÍTULO 5

EXEMPLOS DINÂMICOS COM OU SEM IMPACTO

5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo analisam-se exemplos de validação para o programa não linear geométrico dinâmico implementado, com ou sem consideração de impacto, e cuja formulação encontra-se no capítulo 4.

Para a visualização dos resultados obtidos, através da formulação numérica posicional, utiliza-se o pós-processador do GMEC (Grupo de Mecânica Computacional) desenvolvido em PACCOLA & CODA (2005).

5.2 EXEMPLO 1 – BARRA ENGASTADA SUBMETIDA A CARREGAMENTO AXIAL DE TRAÇÃO

Neste primeiro exemplo analisa-se o comportamento de uma barra engastada submetida a uma força de tração aplicada na extremidade livre, conforme Figura 5.1.

Este exemplo é muito utilizado como teste para formulações que apresentem como objetivo a análise dinâmica de estruturas.

Na análise é investigado o comportamento do grau de liberdade horizontal dos nós em que a força de tração encontra-se aplicada.

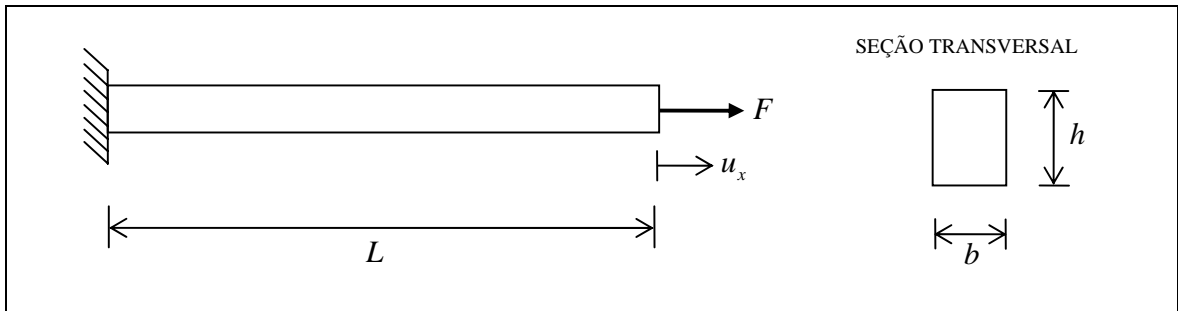


Figura 5.1 – Esquema da barra engastada.

Os dados de entrada para o problema são apresentados no Quadro 5.1.

Quadro 5.1 – Dados de entrada do exemplo 1.

$E = 1$
$L = 10$
$h = 1$
$b = 1$ (espessura)
$\rho = 1$
$c_m = 0$
$\Delta t = 1$
$\nu = 0$ (coeficiente de Poisson)

A barra foi discretizada em 20 elementos finitos e o gráfico de carregamento é apresentado na Figura 5.2.

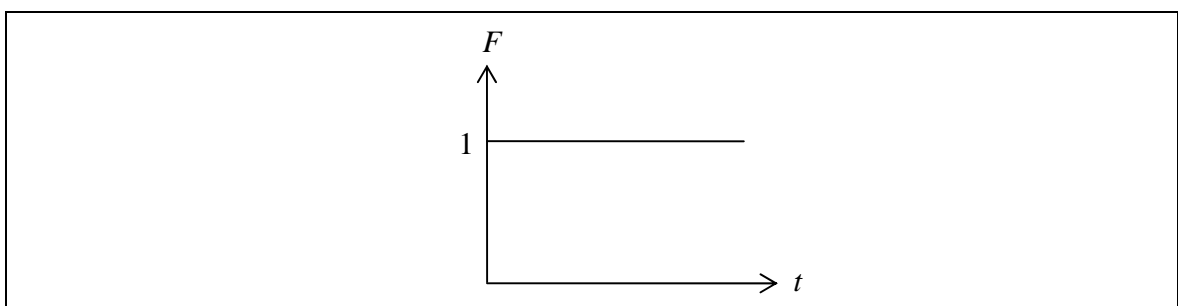


Figura 5.2 – Gráfico de carregamento do exemplo 1.

Na Figura 5.3 encontra-se a solução numérica, do deslocamento horizontal, obtida com a utilização da formulação numérica posicional dinâmica.

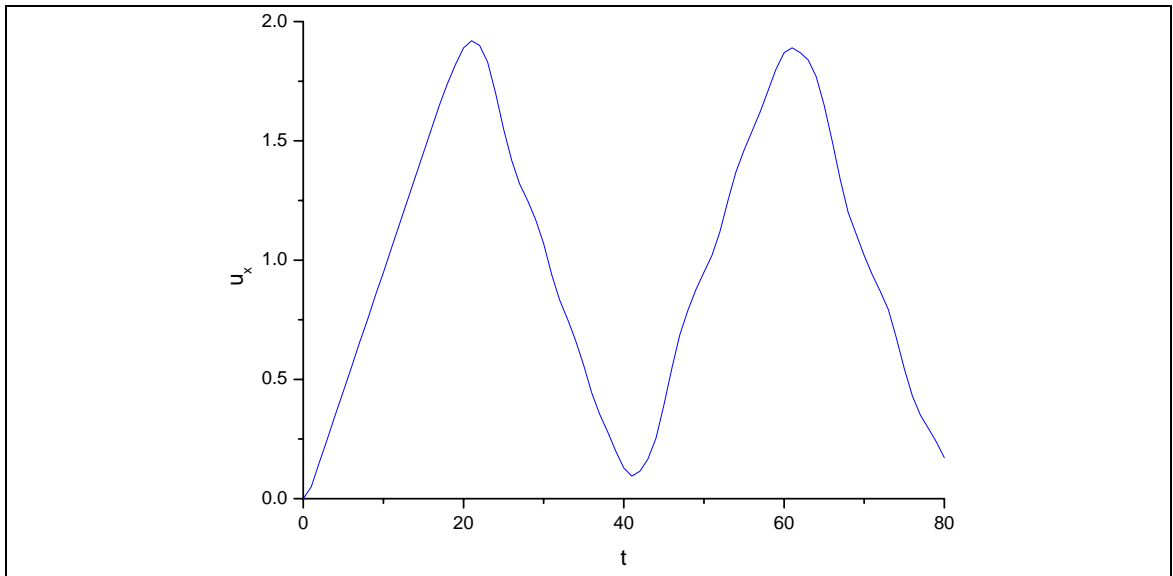


Figura 5.3 – Tempo x deslocamento horizontal do grau de liberdade analisado.

Este resultado está em concordância com a resposta analítica do problema, que apresenta pico máximo de 2 e espaço temporal entre picos de 40. As oscilações e o amortecimento são devidos a discretização adotada.

5.3 EXEMPLO 2 – VIGA ENGASTADA AMORTECIDA

No segundo exemplo analisa-se o caso de uma viga engastada submetida a uma carga transversal dinâmica em sua extremidade, conforme Figura 5.4.

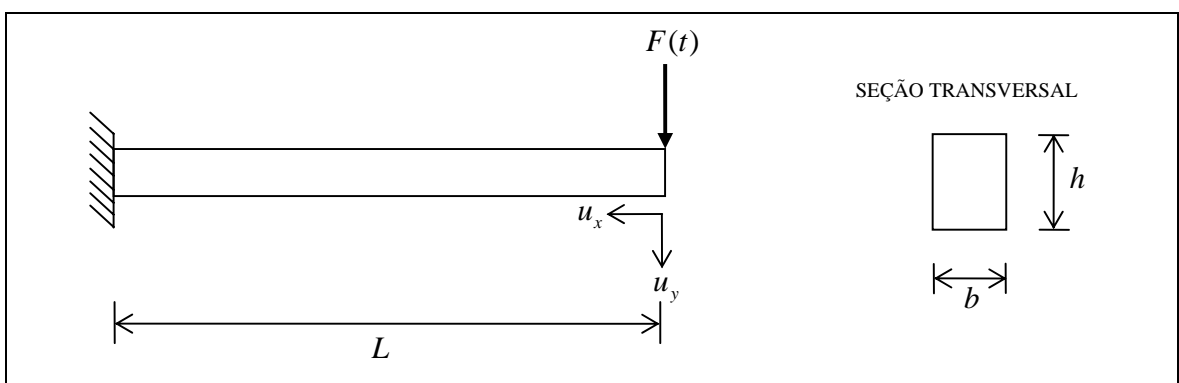


Figura 5.4 – Esquema da viga engastada.

Este exemplo pode ser utilizado como teste para o termo da formulação relacionado ao amortecimento e pode ser encontrado em GRECO (2004).

Os dados de entrada para o problema são apresentados no Quadro 5.2.

Quadro 5.2 – Dados de entrada do exemplo 2.

$E = 210,010^9 Pa$
$L = 1,20 m$
$h = 0,1856 m$
$b = 1 m$ (espessura)
$\rho = 1691,81 N s^2 / m^4$
$c_m = 200 s^{-1}$
$\nu = 0$ (coeficiente de Poisson)

Na análise, a viga foi discretizada em 80 elementos finitos e aplicou-se um carregamento dinâmico de impacto na extremidade livre da viga (Figura 5.5).

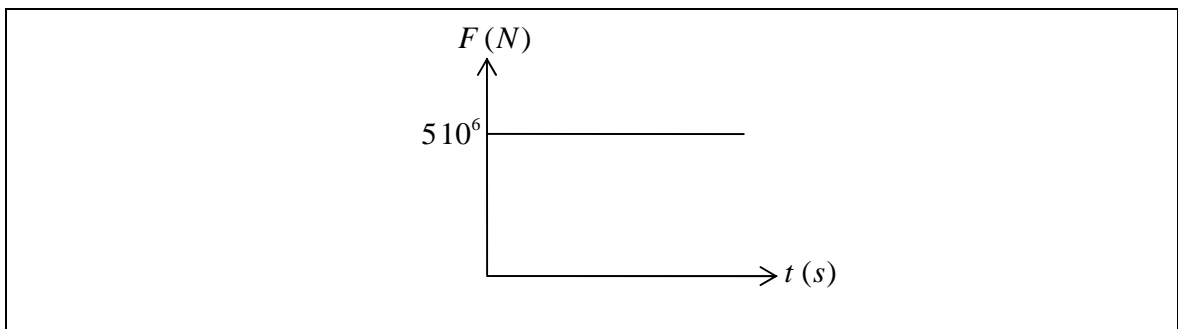


Figura 5.5 – Gráfico de carregamento do exemplo 2.

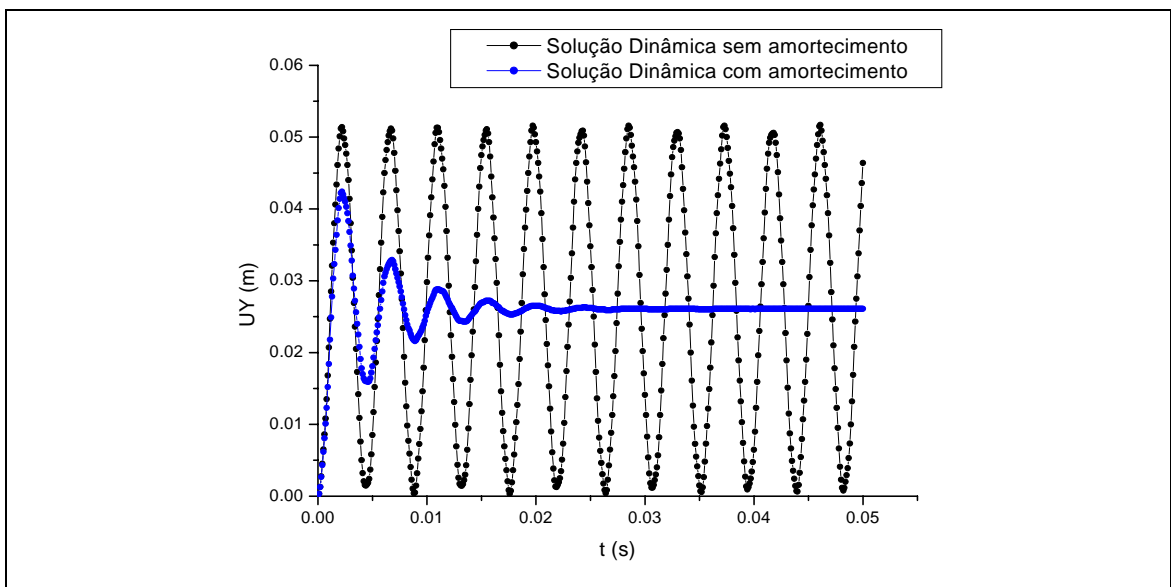


Figura 5.6 – Tempo x deslocamento do grau de liberdade analisado.

Para se processar este exemplo em código computacional de chapa adota-se $\nu = 0$, permitindo-se que se utilizem as dimensões estabelecidas na Figura 5.4.

Na Figura 5.6 encontra-se a solução numérica, do deslocamento vertical, obtida com a utilização da formulação numérica posicional dinâmica. Apresenta-se a resposta dinâmica elástica para as situações sem amortecimento e amortecida. Os resultados estão praticamente iguais aos da referência, omitindo-se detalhes das comparações.

5.4 EXEMPLO 3 – VIGA ENGASTADA SUBMETIDA A UM CARREGAMENTO TRANSVERSAL

No terceiro exemplo analisa-se uma viga engastada (Figura 5.7) submetida a um carregamento transversal cujo esquema encontra-se demonstrado na Figura 5.8. Este exemplo pode ser encontrado no artigo de BEHDINAN *et al.* (1998) e em GRECO (2004).

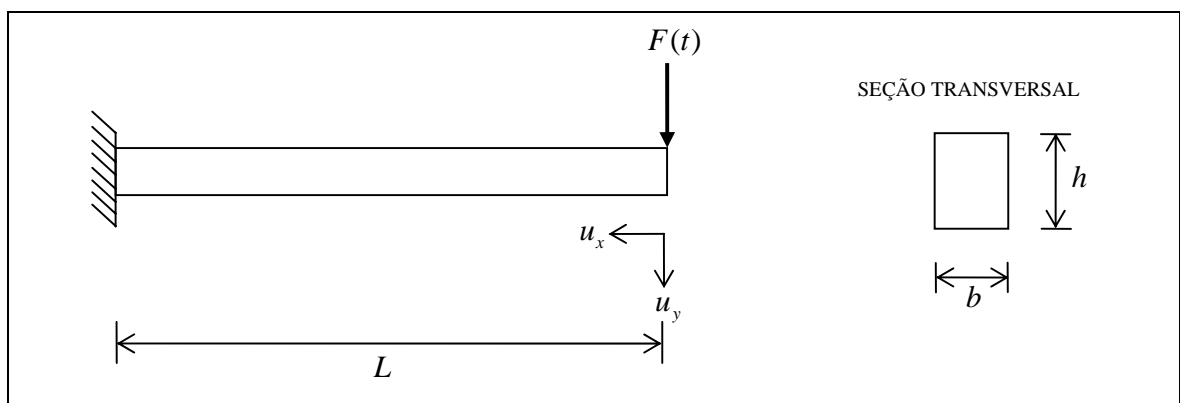


Figura 5.7 – Esquema da viga engastada.

Os dados de entrada para o problema são apresentados no Quadro 5.3.

Quadro 5.3 – Dados de entrada do exemplo 3.

$E = 30000 \text{ ksi}$
$L = 120 \text{ in}$
$h = 10,627 \text{ in}$
$b = 1 \text{ in}$ (espessura)
$\rho = 9,4116 \cdot 10^{-3} \text{ lb s}^2 / \text{in}^4$
$c_m = 0 \text{ s}^{-1}$
$\Delta t = 0,01 \text{ s}$
$\nu = 0$ (coeficiente de Poisson)

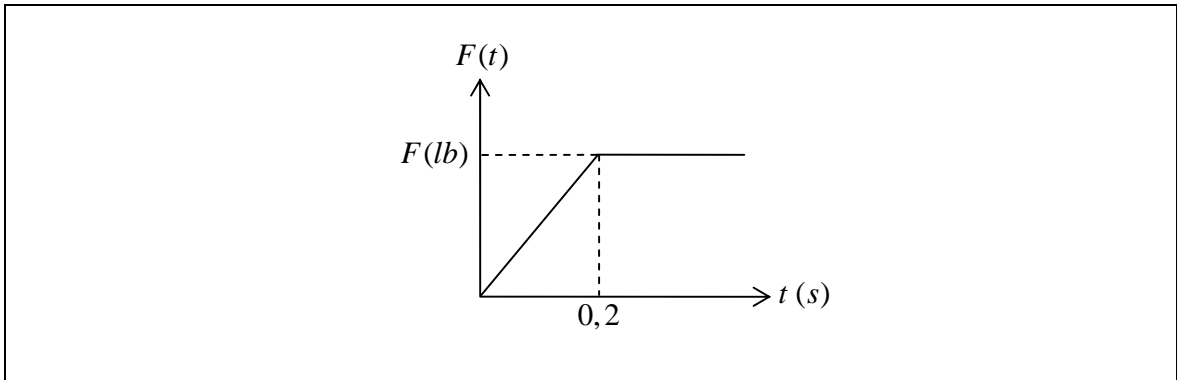


Figura 5.8 – Gráfico de carregamento do exemplo 2.

Na análise, a viga foi discretizada em 80 elementos finitos e foram aplicados dois carregamentos distintos iguais a $F = 100000 \text{ lb}$ e $F = 500000 \text{ lb}$ (Figura 5.8).

Nas Figuras 5.9 e 5.10 encontram-se a solução numérica obtida com a utilização da formulação posicional dinâmica para os deslocamentos segundo os graus de liberdade horizontal e vertical do nó em que a carga está aplicada.

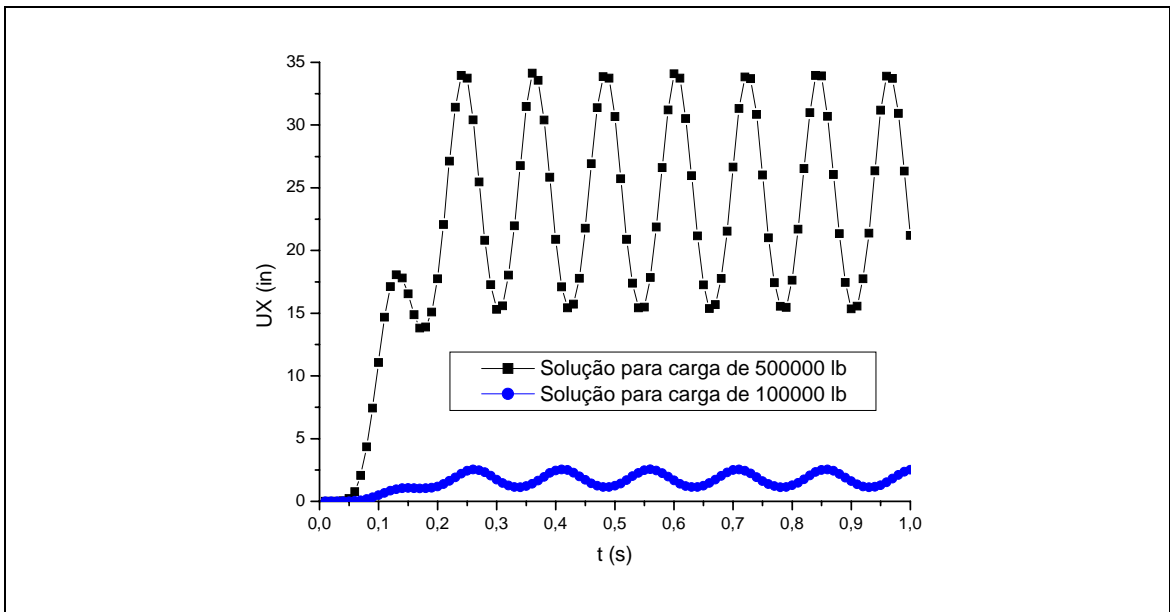


Figura 5.9 – Tempo x deslocamento do grau de liberdade horizontal.

A Figura 5.13 mostra a configuração deformada final da viga para $F = 100000 \text{ lb}$.

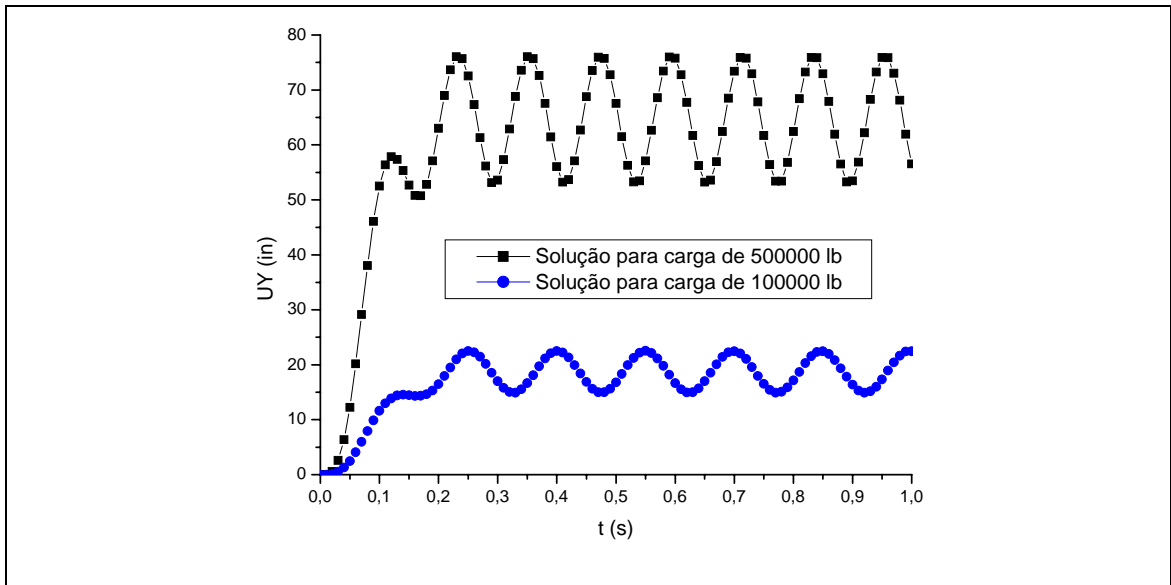


Figura 5.10 – Tempo x deslocamento do grau de liberdade vertical.

As Figuras 5.11 e 5.12 mostram os gráficos dos deslocamentos segundo os graus de liberdade horizontal e vertical retirados de GRECO (2004), onde se utilizou elementos de barra.

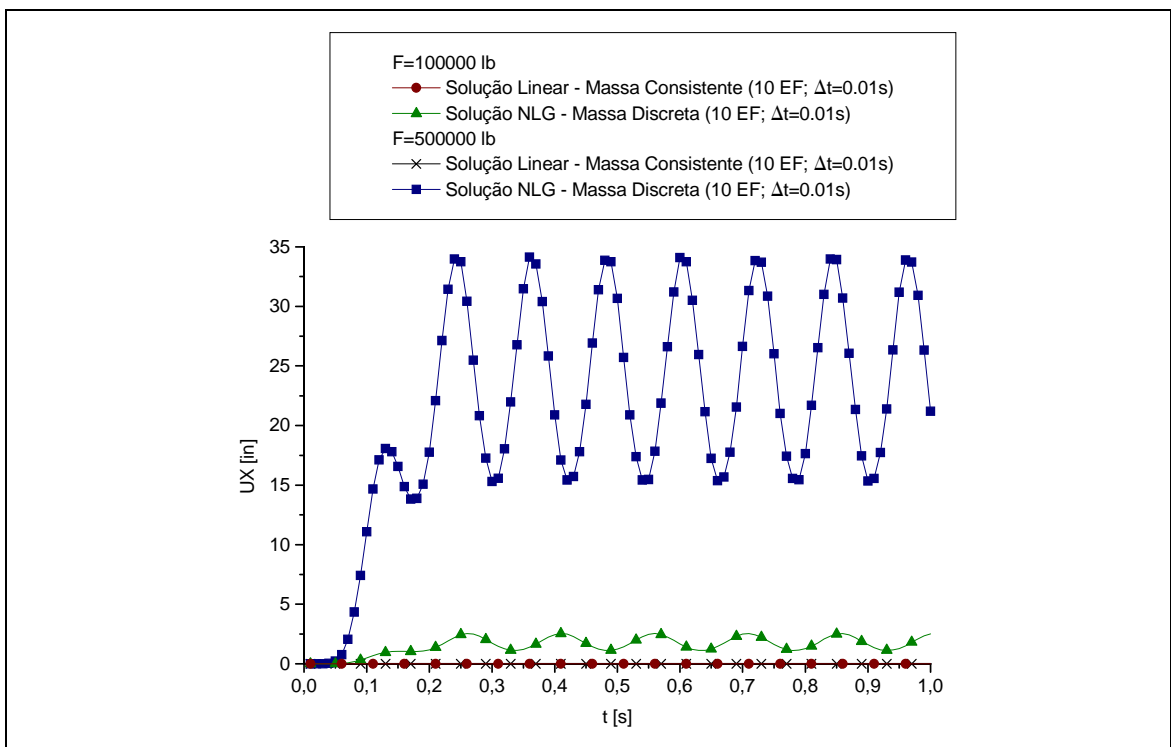


Figura 5.11 – Tempo x deslocamento do grau de liberdade horizontal.

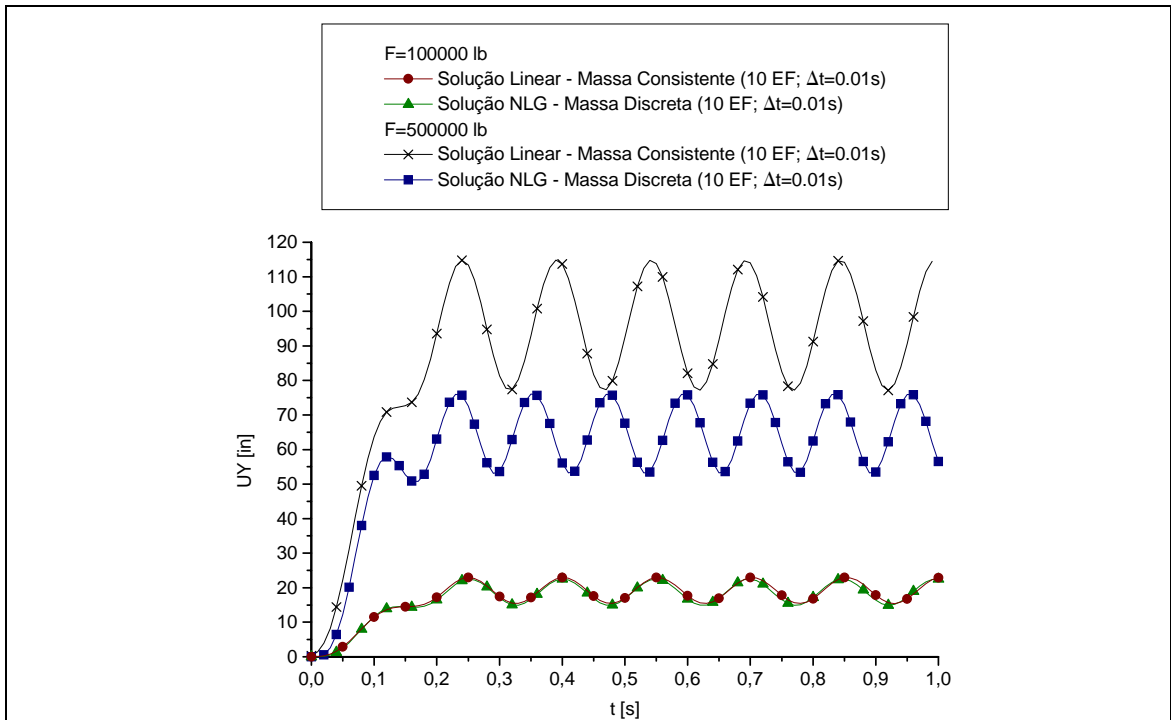


Figura 5.12 – Tempo x deslocamento do grau de liberdade vertical.

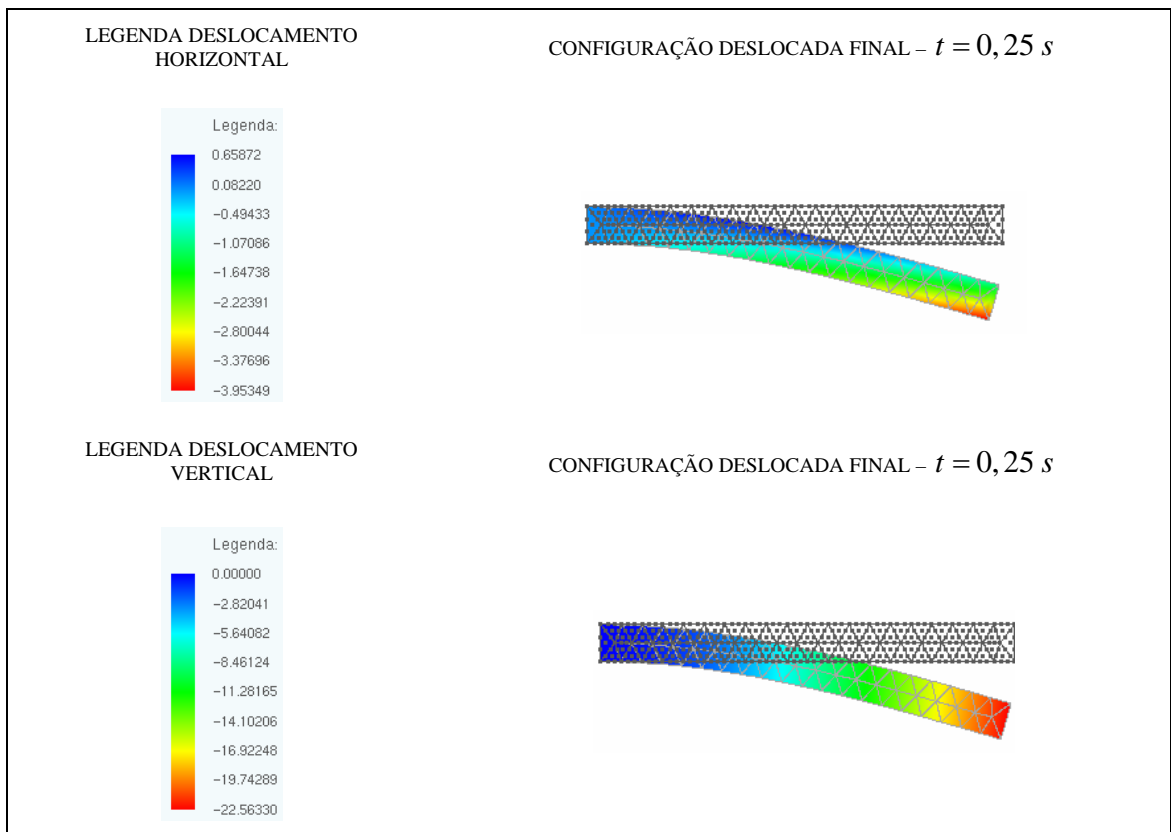


Figura 5.13 – Configuração deslocada final da viga para $F = 100000 lb$.

A Figura 5.14 mostra a configuração deslocada final da viga para $F = 500000 \text{ lb}$.

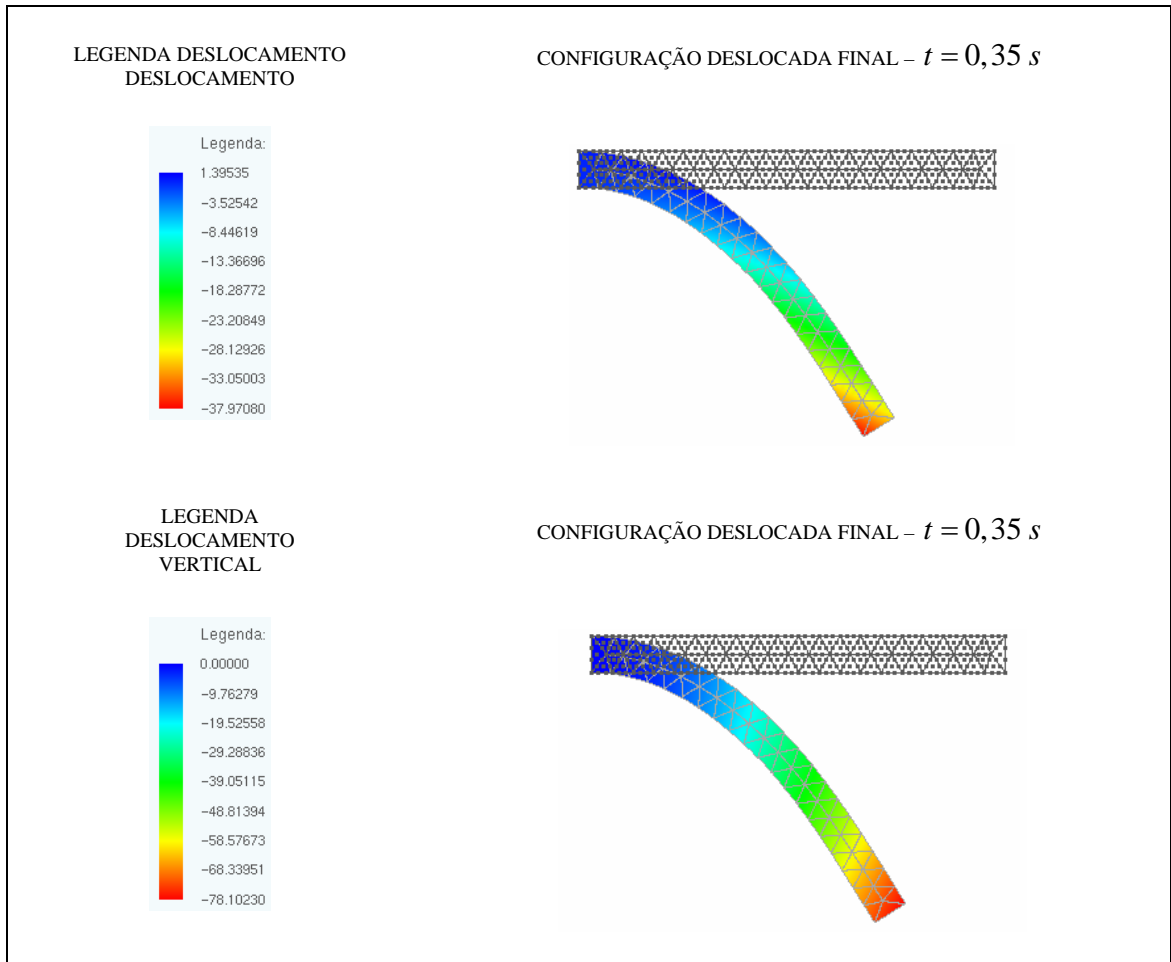


Figura 5.14 – Configuração deslocada final da viga para $F = 500000 \text{ lb}$.

Analisando-se as Figuras de 5.9 a 5.12, percebe-se que os resultados obtidos com a presente formulação são coincidentes com GRECO (2004).

5.5 EXEMPLO 4 – VIGA ENGASTADA COM AMORTECIMENTO SUBMETIDA A UM CARREGAMENTO TRANSVERSAL

Como quarto exemplo, analisa-se o caso de uma viga engastada com amortecimento e submetida a um carregamento transversal de impacto (Figura 5.15). Este exemplo pode ser encontrado no artigo de BEHDINAN *et al.* (1998).

Os dados de entrada para o problema são apresentados no Quadro 5.4.

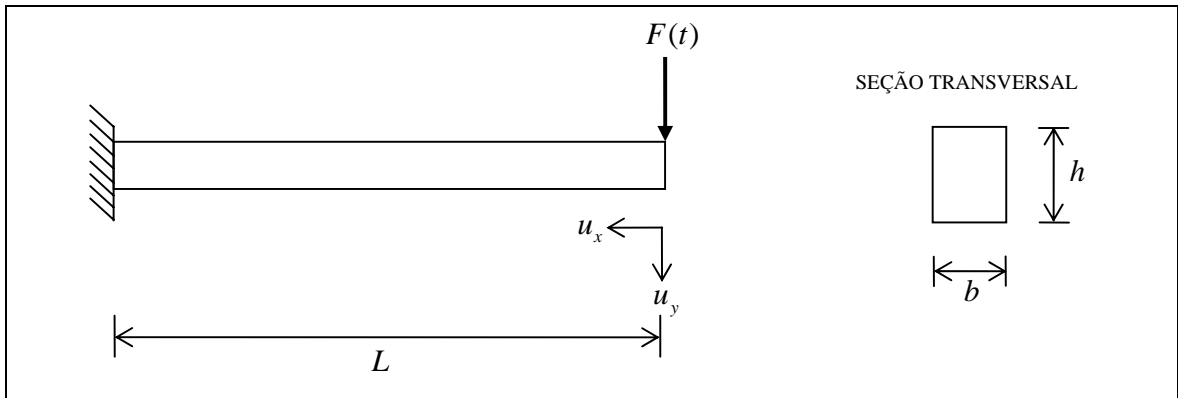


Figura 5.15 – Esquema da viga engastada.

Quadro 5.4 – Dados de entrada do exemplo 4.

$E = 30000 \text{ ksi}$
$L = 120 \text{ in}$
$h = 10,627 \text{ in}$
$b = 1 \text{ in}$ (espessura)
$\rho = 9,4116 \cdot 10^{-3} \text{ lb s}^2 / \text{in}^4$
$c_m = 0 \text{ s}^{-1}$
$\Delta t = 0,01 \text{ s}$
$\nu = 0$ (coeficiente de Poisson)

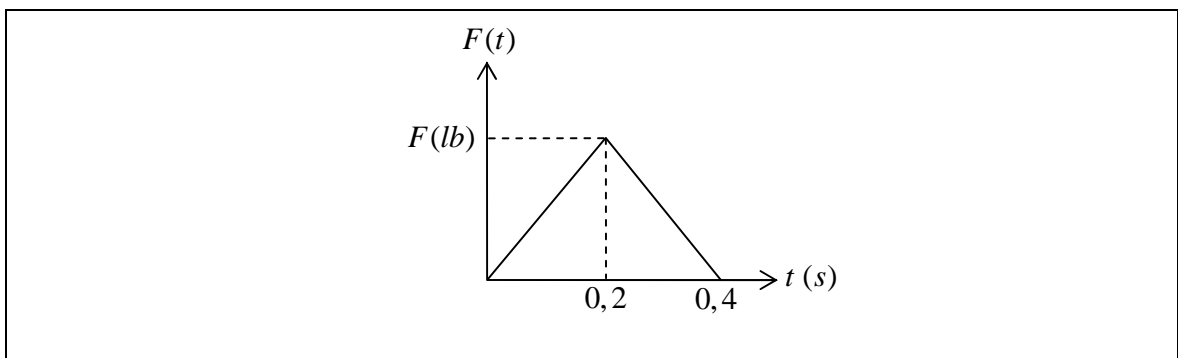


Figura 5.16 – Gráfico de carregamento do exemplo 2.

Na análise, a viga foi discretizada em 80 elementos finitos e foi aplicado um carregamento igual a 100000 lb .

Na Figura 5.17 encontra-se a solução numérica para o deslocamento vertical do nó em que a carga está aplicada.

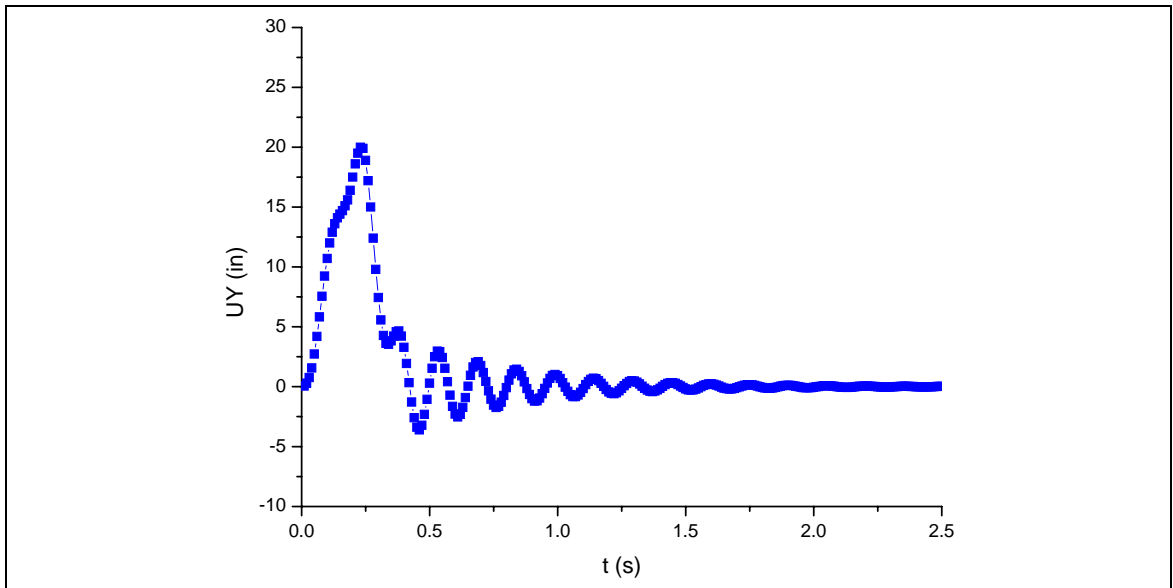


Figura 5.17 – Tempo x deslocamento do grau de liberdade vertical.

5.6 EXEMPLO 5 – CONJUNTO BIELA – MANIVELA

Como quinto exemplo, verifica-se a eficiência do programa na análise de um conjunto biela-manivela (Figura 5.18). Este exemplo foi baseado em CODA *et al* (2005), onde se utilizou elementos de barra.

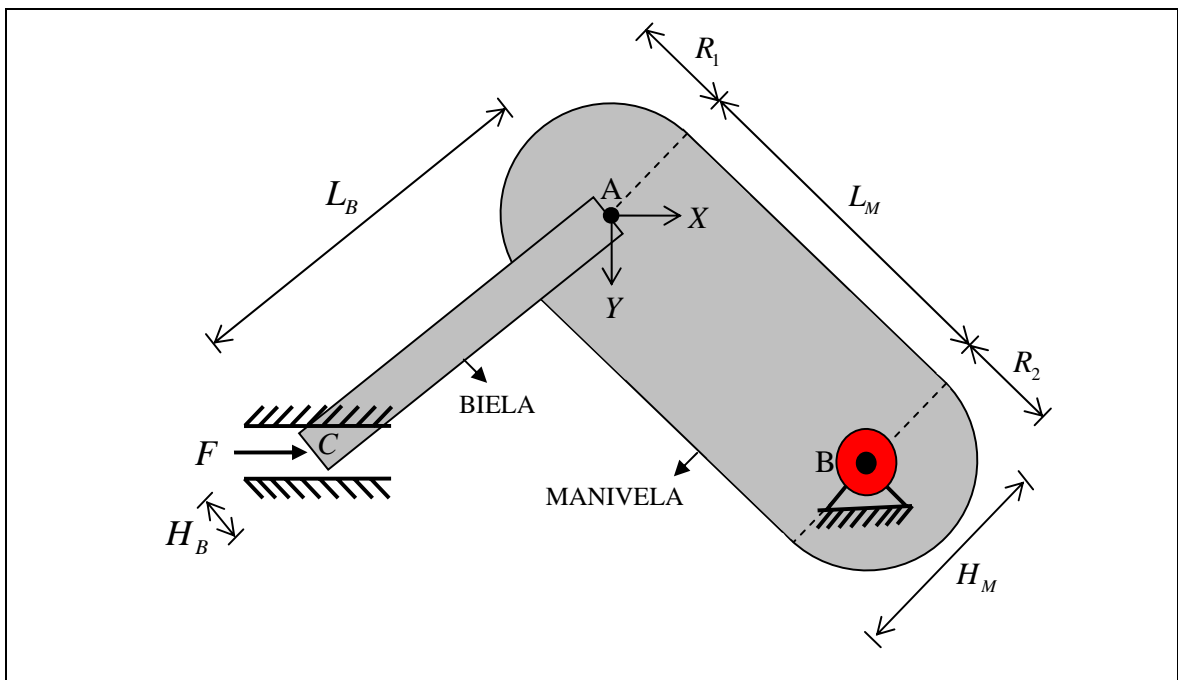


Figura 5.18 – Esquema do conjunto biela-manivela.

Na Figura 5.18, o ponto A representa um nó pertencente simultaneamente à biela e a manivela enquanto que o ponto B representa o centro de giro do conjunto.

A manivela é composta por um retângulo com dimensões H_M e L_M e por duas semi-circunferências, de raio R_1 e R_2 , nas extremidades. Os pontos A e B ficam localizados no centro de cada extremidade (menores lados) do retângulo.

Os dados de entrada para o problema são apresentados no Quadro 5.5.

Quadro 5.5 – Dados de entrada do exemplo 5.

$E = 2,110^9 \text{ kg} / \text{cm} \cdot \text{s}^2$
$L_B = 14,4 \text{ cm}$
$H_B = 2 \text{ cm}$
$h_B = 1 \text{ cm}$ (espessura)
$L_M = 10,0 \text{ cm}$
$H_M = 2R_1 = 2R_2 = 9 \text{ cm}$
$h_m = 1 \text{ cm}$ (espessura)
$R_1 = 4,5 \text{ cm}$
$R_2 = 4,5 \text{ cm}$
$\rho = 0,00790 \text{ kg/cm}^3$
$c_m = 5 \text{ s}^{-1}$
$\Delta t = 0,00025 \text{ s}$
$\nu = 0$ (coeficiente de Poisson)

A força $F = 1000 \cdot 10^2 \text{ kg.cm/s}^2$ encontra-se aplicada durante o tempo em que a manivela permanece próxima à posição de máximo aproveitamento de força.

No Quadro 5.6, apresentam-se as condições em que a força F encontra-se aplicada, considerando-se o sistema de eixos (fixo) adotado na Figura 5.18.

Quadro 5.6 – Condições para aplicação da força F .

$-14,10 < X_C < 5,10$
$\dot{X}_C \leq 0$

No Quadro 5.6, X_C representa a posição horizontal do ponto de aplicação da força F .

Na análise, o conjunto biela-manivela foi discretizado em 381 elementos e foram utilizados 6000 passos de tempo. Na Figura 5.19 apresenta-se o conjunto biela-manivela com sua respectiva discretização de malha. Neste exemplo não se preocupou com a qualidade da malha, apenas em verificar o funcionamento do código para problemas com grandes rotações e mudanças de posição.

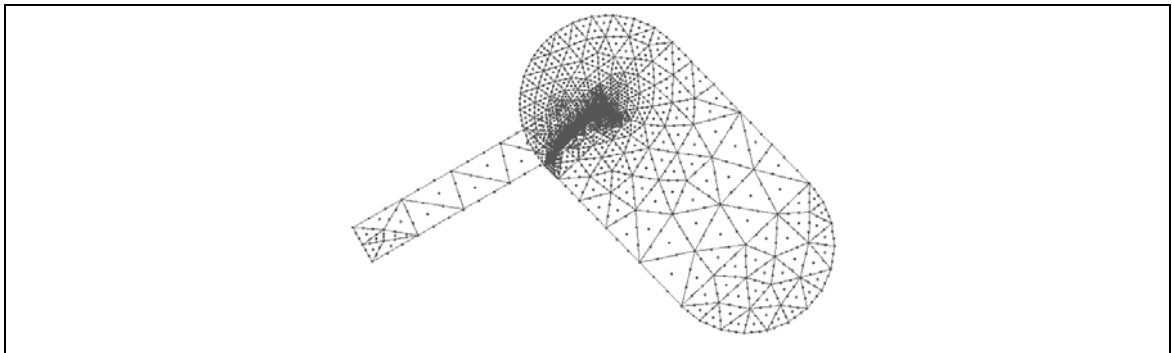


Figura 5.19 – Discretização de malha do conjunto biela-manivela.

Os parâmetros do integrador de Newmark adotados foram idênticos aos utilizados em CODA *et al* (2005), sendo os mesmos iguais a $\gamma = 0,55$ e $\beta = 0,30$.

Na Figura 5.20 encontra-se a solução numérica da velocidade angular do centro de giro em função do tempo obtida com a utilização da formulação numérica posicional dinâmica.

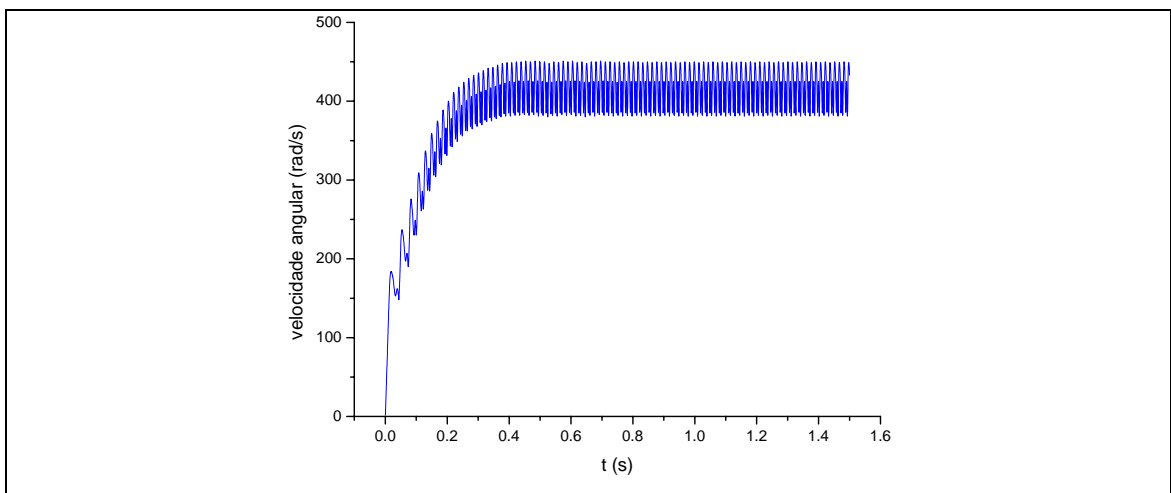


Figura 5.20 – Tempo x deslocamento angular no centro de giro.

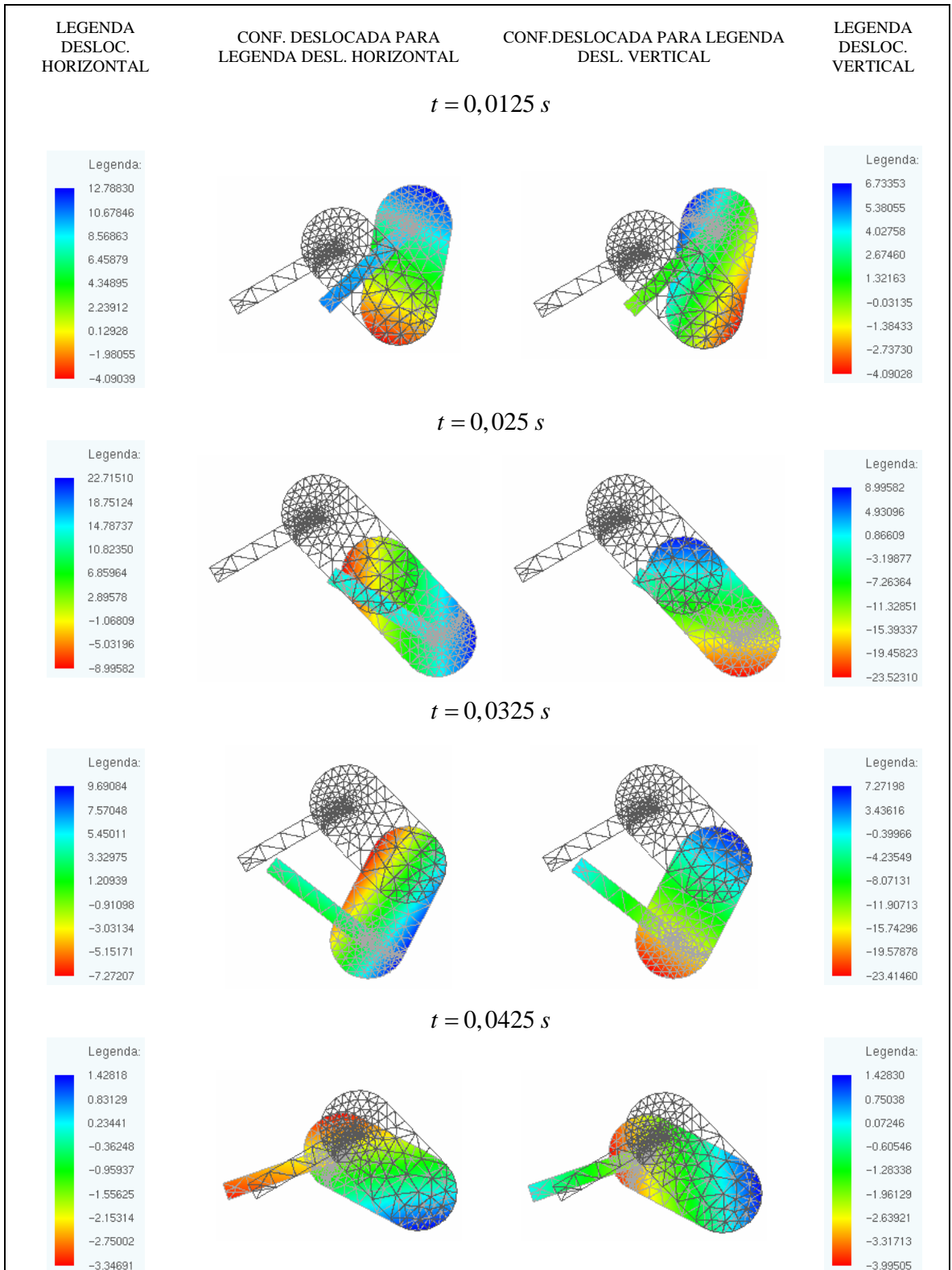


Figura 5.21 – Configurações deslocadas do conjunto biela-manivela para alguns instantes de tempo.

Na Figura 5.21 encontram-se as configurações deslocadas do conjunto biela-manivela para alguns valores de tempo.

Para um melhor entendimento do comportamento mecânico do conjunto biela-manivela é interessante a realização de uma análise de tensões. Neste caso, realiza-se um breve estudo da distribuição das tensões σ_x e σ_y ao longo do conjunto biela manivela durante um determinado instante de tempo.

Na Figura 5.22 apresenta-se a distribuição das tensões (σ_x e σ_y) para o instante de tempo $t = 0,075 s$.

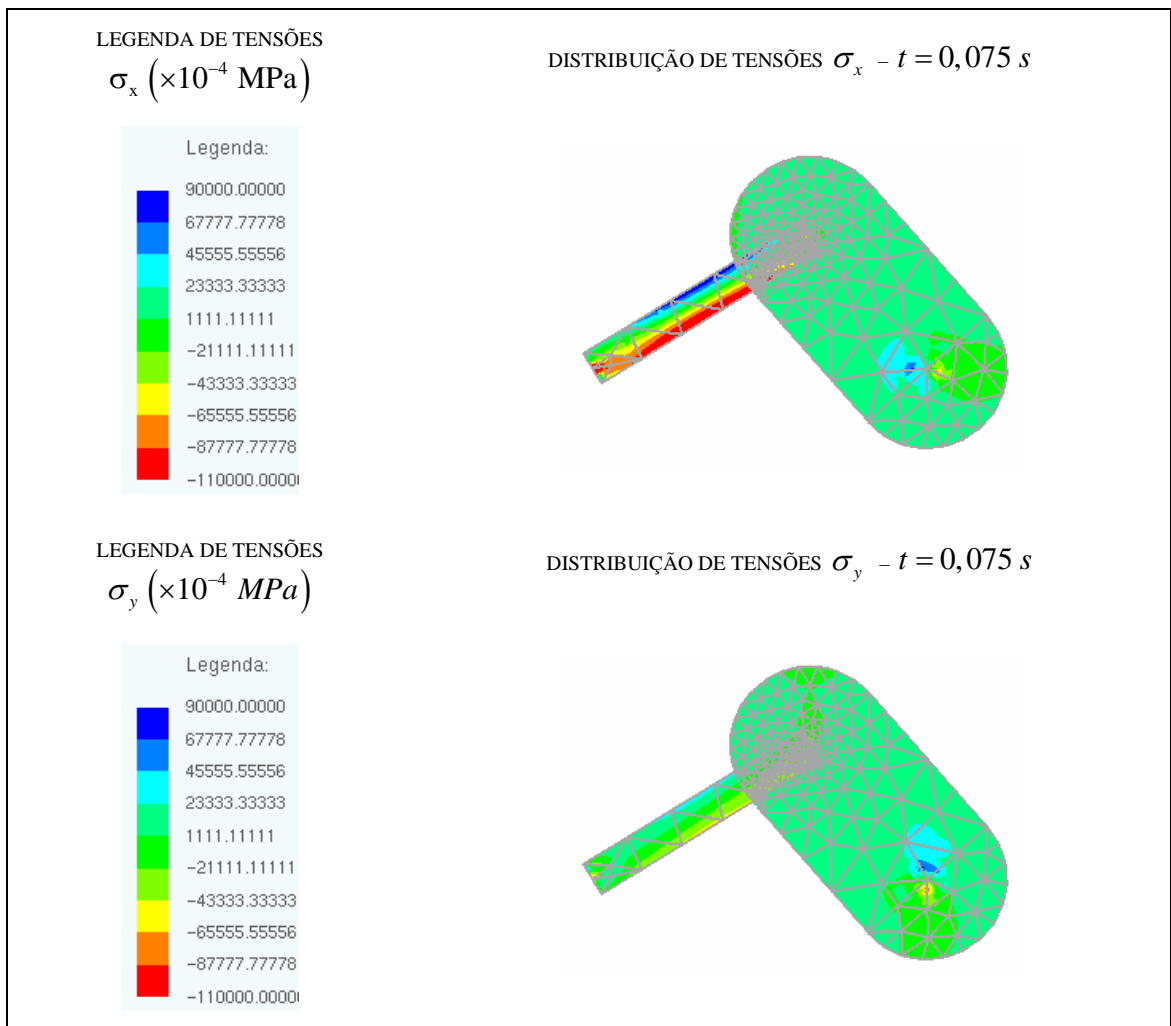


Figura 5.22 – Distribuição de tensão no conjunto biela manivela durante um instante de tempo $t = 0,075 s$.

Observando-se a Figura 5.22 percebe-se que a distribuição da tensão σ_x indica que, durante a aplicação da força e aceleração de rotação no sentido horário, a parte superior da biela encontra-se tracionada longitudinalmente enquanto que a parte inferior comprimida.

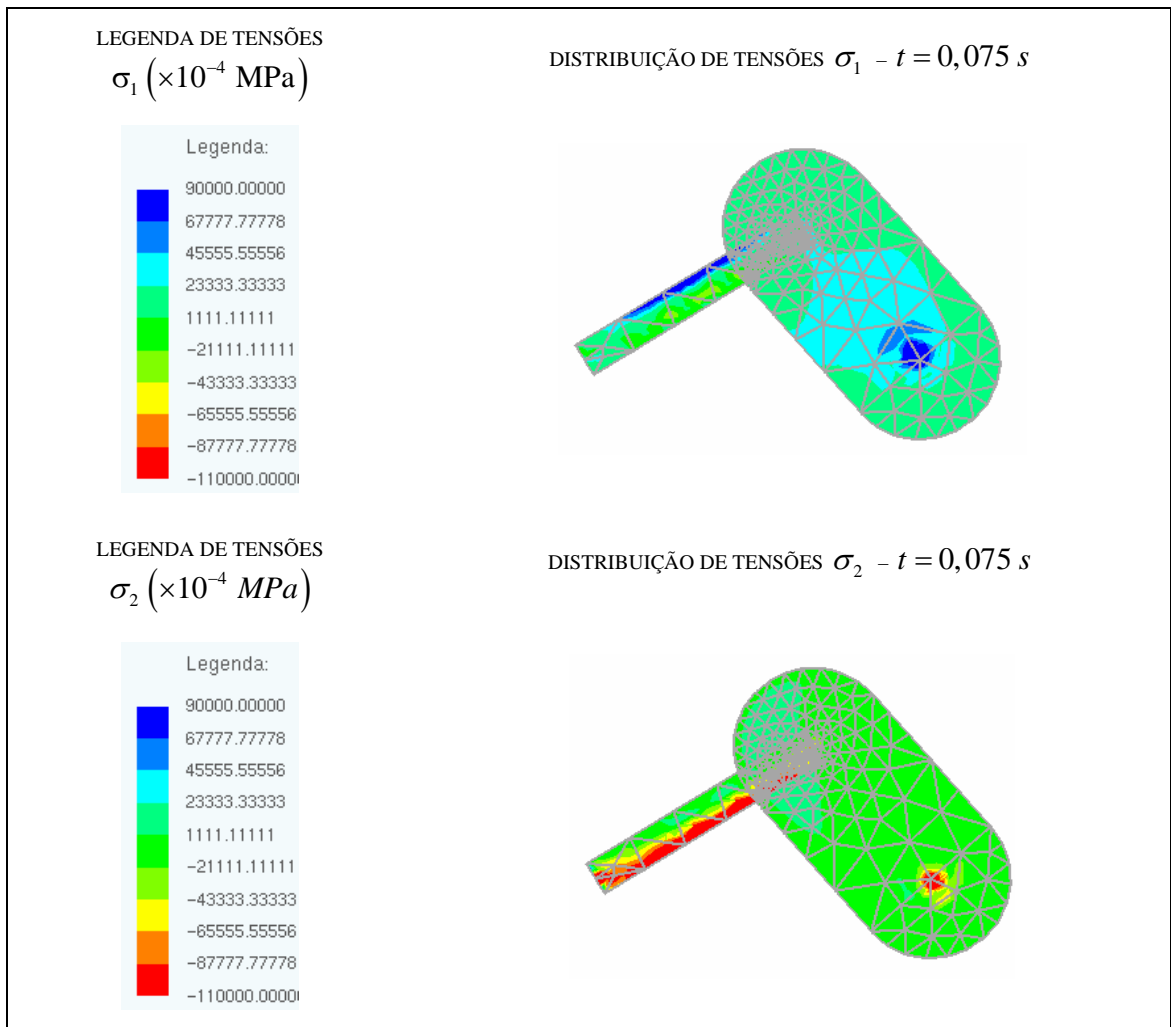


Figura 5.23 – Distribuição de tensão (direções principais) no conjunto biela manivela durante um instante de tempo.

Para se obter os valores destas tensões segundo a direção do eixo da biela faz-se a análise das tensões principais na Figura 5.23. A tensão σ_1 mostra o nível de tração da parte superior da biela enquanto os outros valores de σ_1 são menores e na direção transversal da biela. Os valores da tensão σ_2 indicam o nível da tensão de compressão na parte inferior da

biela enquanto os outros valores de σ_2 são menores (em módulo) e estão na direção transversal ao eixo da biela.

5.7 EXEMPLO 6 – IMPACTO UNIDIRECIONAL ENTRE BARRA E ANTEPARO RÍGIDO

Com este exemplo inicia-se a seção de exemplos dinâmicos com impacto. Inicialmente analisa-se o caso do impacto entre uma barra, com velocidade constante, e um anteparo rígido (Figura 5.24). Este exemplo pode ser encontrado em TAYLOR & PAPADOPOULOS (1993). As variáveis envolvidas no problema são consideradas como adimensionais.

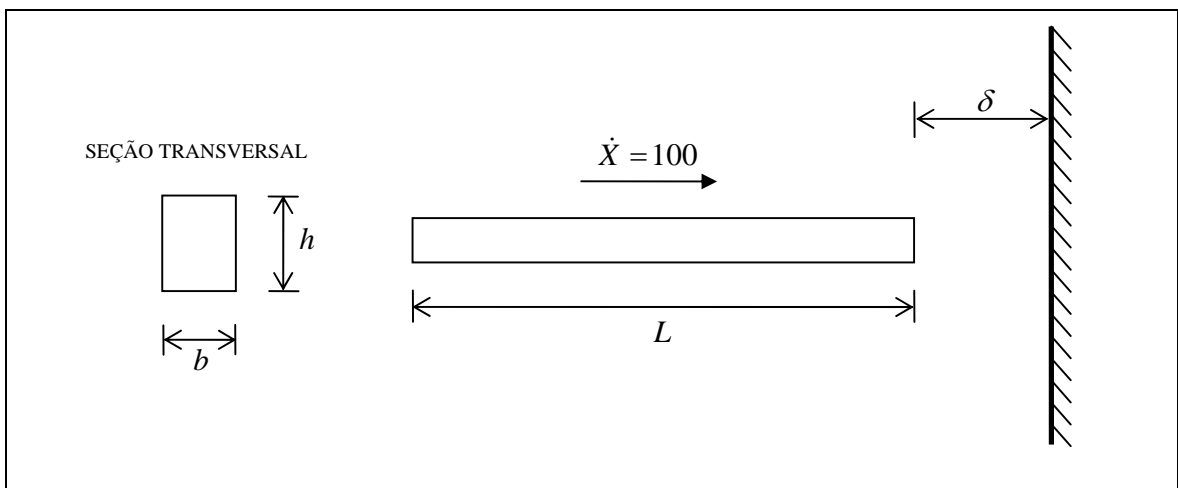


Figura 5.24 – Esquema do impacto entre barra e anteparo rígido.

Os dados de entrada para o problema são apresentados no Quadro 5.7.

Quadro 5.7 – Dados de entrada do exemplo 6.

$E = 1$
$L = 10$
$h = 1$
$b = 1$ (espessura)
$\rho = 1$
$c_m = 0$
$\delta = 0,0075$
$\nu = 0$ (coeficiente de Poisson)

Na análise, a barra foi discretizada em 20 elementos finitos e foi utilizado um intervalo de tempo $\Delta t = 0,0001$.

Foram investigados os comportamentos do deslocamento e da velocidade no eixo da barra após o impacto no instante $t = 5$. As respostas obtidas, através da formulação numérica, foram comparadas com a solução analítica do problema.

Na Figura 5.25 apresenta-se a solução numérica dos deslocamentos ao longo do eixo da barra no instante $t = 5$.

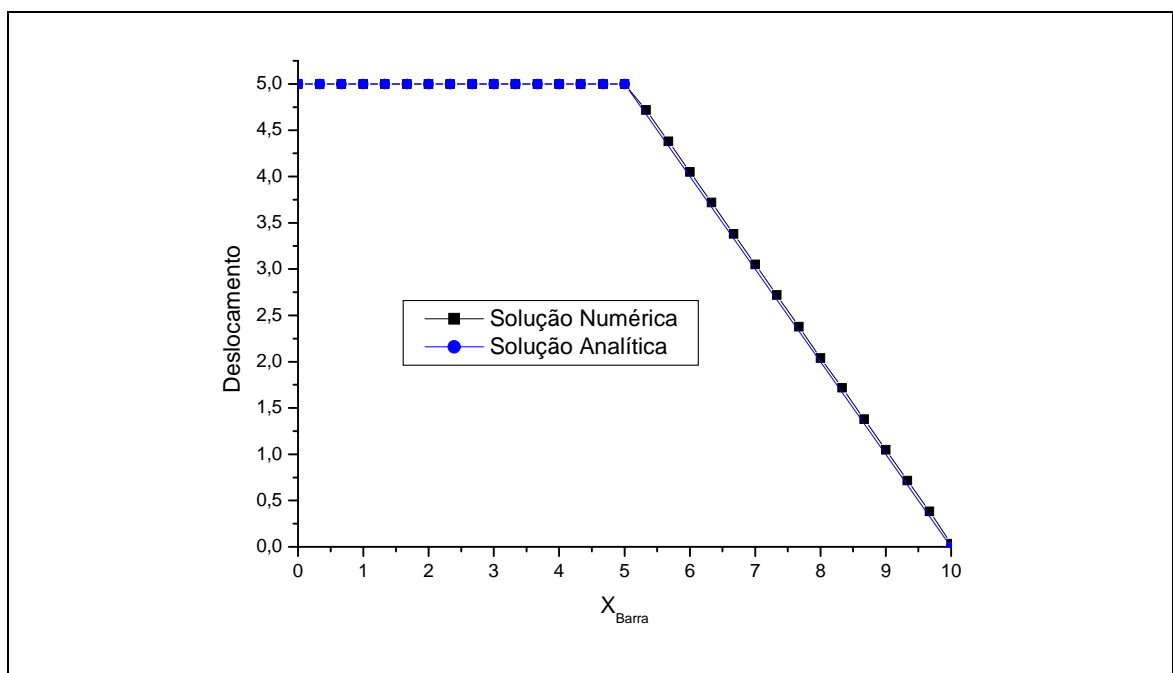


Figura 5.25 – Coordenada do ponto ao longo do eixo x deslocamento para $t = 5$.

Na Figura 5.26 apresenta-se a solução numérica da velocidade ao longo do eixo da barra no instante $t = 5$.

Observando-se a Figura 5.26, percebe-se que no tempo $t = 5$ a onda de impacto se encontra no meio da barra ocasionando um salto de valores na velocidade, exatamente nesta posição. A partir da Figura 5.25 (deslocamentos do eixo da barra), verifica-se que no instante $t = 5$ metade da barra apresentou efeitos da limitação ao deslocamento provocada pelo impacto no anteparo rígido.

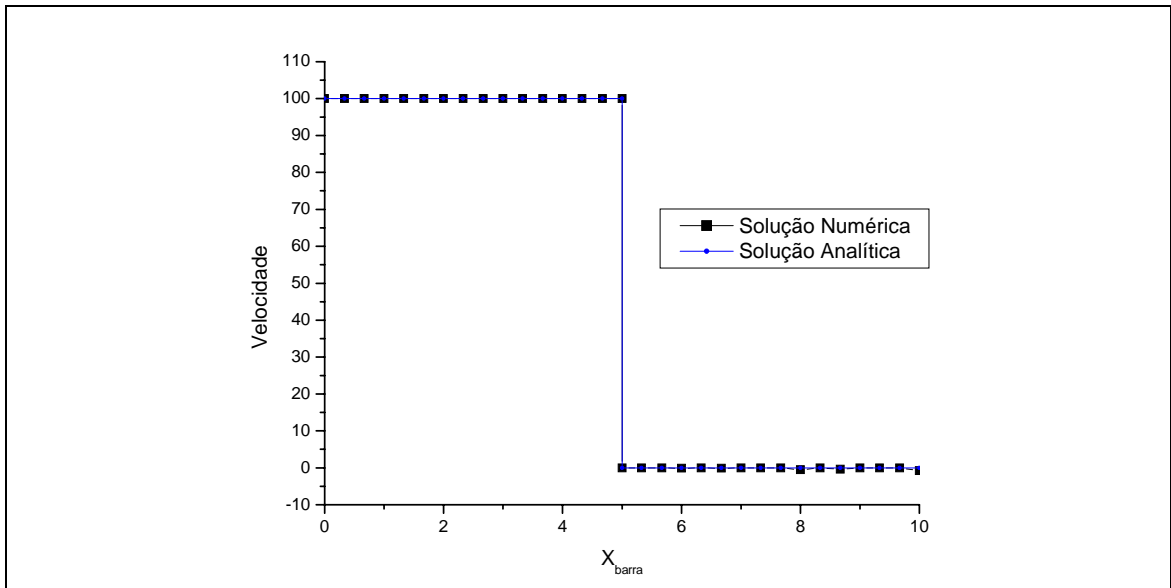


Figura 5.26 – Coordenada do ponto ao longo do eixo x deslocamento para $t = 5$.

Analisando-se as Figuras 5.25 e 5.26 percebe-se que a formulação implementada apresentou excelentes resultados, fazendo com que as respostas encontradas coincidisse com a solução analítica do problema.

5.8 EXEMPLO 7 – IMPACTO UNIDIRECIONAL ENTRE BARRA E ANTEPARO RÍGIDO

Este exemplo trata do impacto axial entre uma barra uniforme, com velocidade constante, com um anteparo rígido (Figura 5.27). Este exemplo pode ser encontrado em ARMERO & PETOCZ (1998). As variáveis envolvidas no problema são consideradas como adimensionais.

Os dados de entrada para o problema são apresentados no Quadro 5.8.

Quadro 5.8 – Dados de entrada do exemplo 7.

$E = 1$
$L = 1$
$h = 1$
$b = 1$ (espessura)
$\rho = 1$
$c_m = 0$
$\delta = 0,05$
$\nu = 0$ (coeficiente de Poisson)

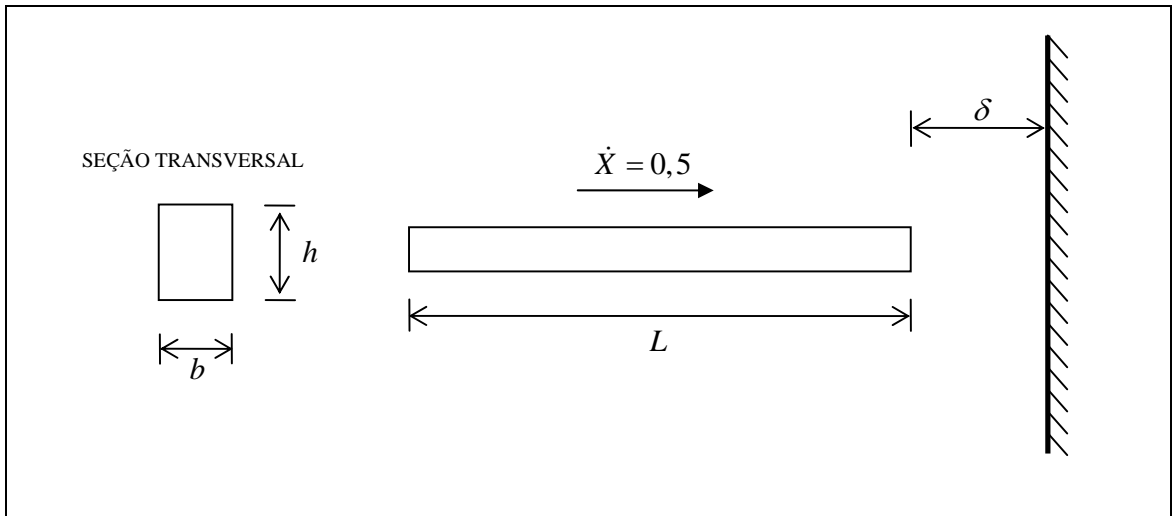


Figura 5.27 – Esquema do impacto entre barra e anteparo rígido.

Na análise, a barra foi discretizada em 20 elementos finitos e foi utilizado um intervalo de tempo $\Delta t = 0,01$.

Foram investigados os comportamentos da força de contato e da velocidade dos nós que sofreram impacto. As respostas obtidas, através da formulação numérica, foram comparadas com a solução analítica do problema.

Na Figura 5.28 apresenta-se a solução numérica da velocidade dos nós que sofreram impacto.

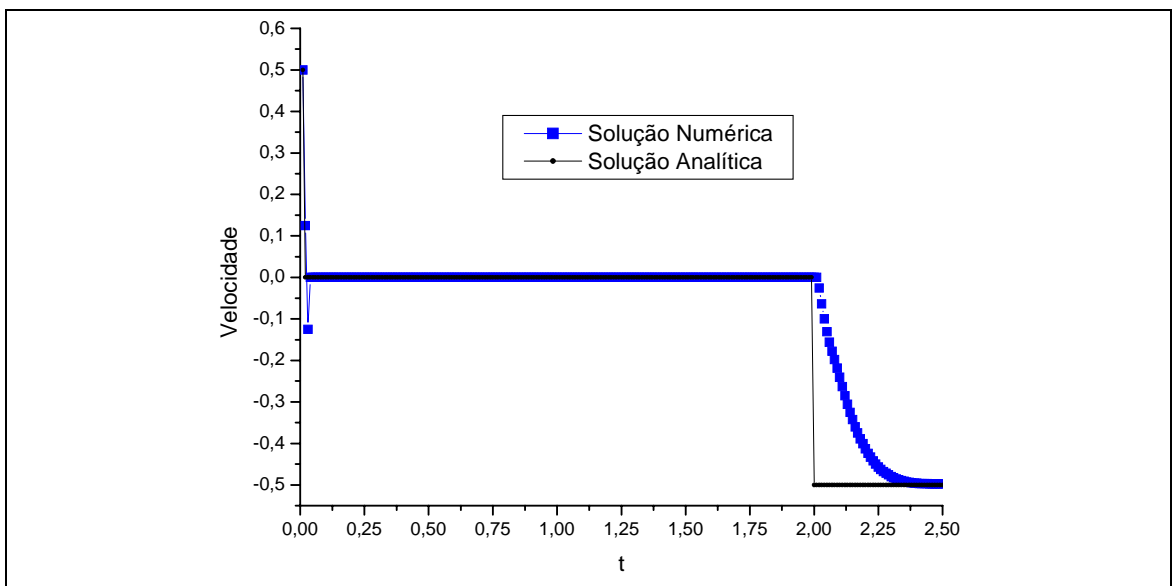


Figura 5.28 – Tempo x velocidade horizontal do ponto que sofre impacto.

Na Figura 5.29 encontra-se a solução numérica da força de contato dos nós que sofreram impacto.

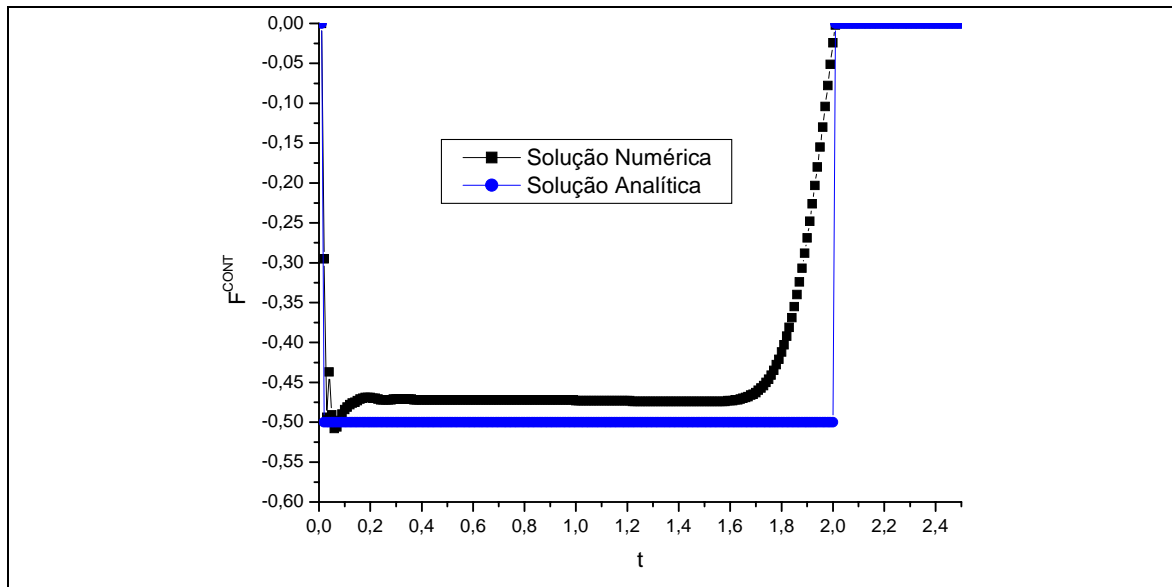


Figura 5.29 – Tempo x posição horizontal do ponto que sofre impacto.

Observando-se a Figura 5.28 percebe-se que o impacto ocasiona um salto de velocidade na extremidade da barra. No período de duração do impacto ($t=2$) a velocidade dos pontos em contato é praticamente nula, aumentando de valor logo após o impacto, porém com sentido contrário ao movimento inicial. Deve-se comentar que a solução analítica, baseada em conservação da quantidade de movimento, apresenta como velocidade de reflexão a velocidade média final do corpo e não do ponto em questão, vide exemplo 8.

5.9 EXEMPLO 8 – IMPACTO UNIDIRECIONAL ENTRE DUAS BARRAS

Como terceiro exemplo dinâmico, com existência de impacto, estuda-se o caso do impacto entre duas barras iguais (Figura 5.30), apresentando mesma velocidade inicial, mas se movimentando em sentidos opostos. Este exemplo pode ser encontrado em CARPENTER *et al* (1991) e em GRECO & CODA (2004).

Na análise, discretiza-se a barra em 20 elementos finitos e utiliza-se um intervalo de tempo $\Delta t = 0,5 \cdot 10^{-6} s$.

Os dados de entrada para o problema são apresentados no Quadro 5.9.

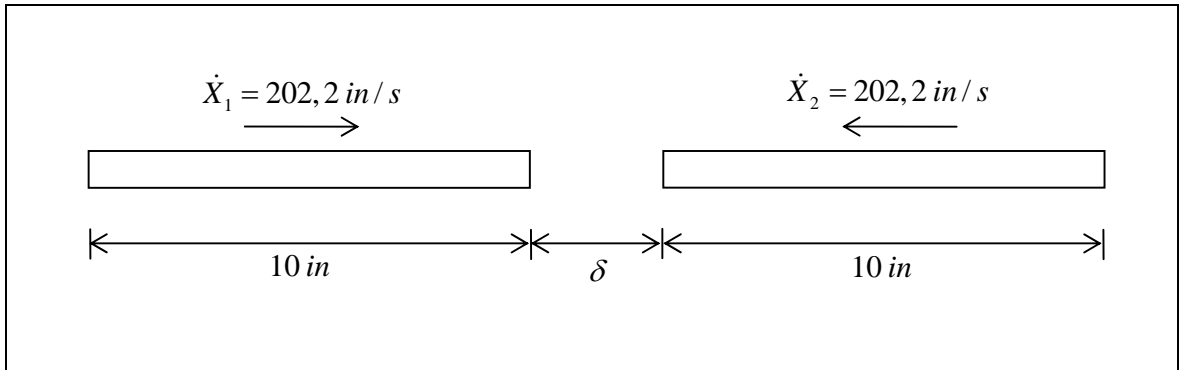


Figura 5.30 – Esquema das duas barras.

Quadro 5.9 – Dados de entrada do exemplo 8.

$E = 30000,0 \text{ ksi}$
$L = 10 \text{ in}$
$h = 1 \text{ in}$
$b = 1 \text{ in}$ (espessura)
$\rho = 7,337 \cdot 10^{-4} \text{ lb s}^2 / \text{in}^4$
$c_m = 0 \text{ s}^{-1}$
$\delta = 0,02 \text{ in}$
$\nu = 0$ (coeficiente de Poisson)

Como as duas barras apresentam mesma velocidade, o problema pode ser considerado como o impacto entre uma barra e um anteparo rígido, conforme Figura 5.31.

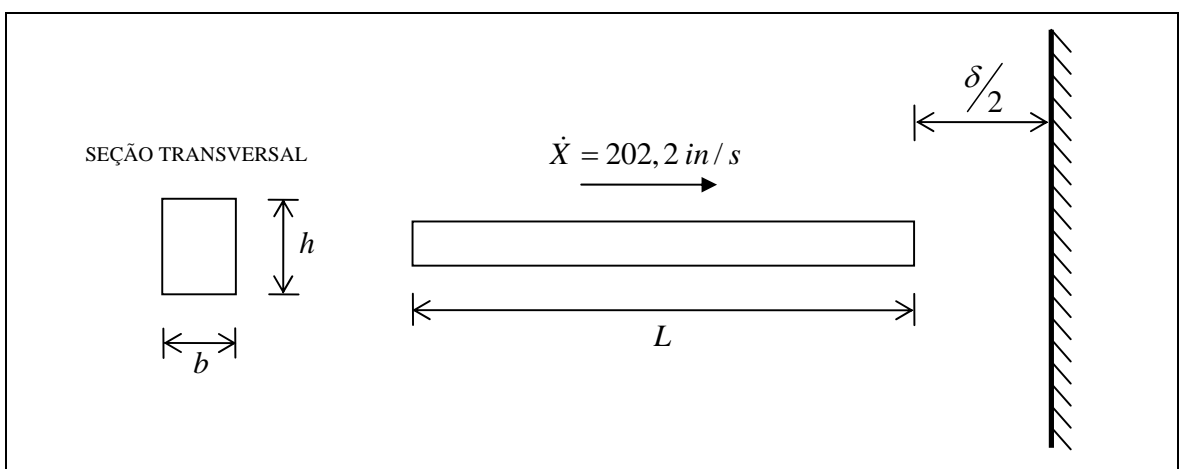


Figura 5.31 – Esquema do impacto entre barra e anteparo rígido.

Foram investigados os comportamentos dos graus de liberdade horizontais, das forças de contato e das velocidades dos nós que sofreram impacto inicialmente. As respostas obtidas, através da formulação numérica foram comparadas com a solução analítica do problema, que pode ser encontrada em CARPENTER *et al* (1991).

Na Figura 5.32 apresenta-se a solução numérica obtida com a formulação posicional dinâmica para a posição horizontal dos nós que sofreram impacto.

Na Figura 5.33 apresenta-se o comportamento da velocidade horizontal, dos nós que sofrem impacto inicialmente, ao longo do tempo.

Por fim, na Figura 5.34 analisa-se o comportamento da força de contato, do ponto que sofre impacto na barra 1, ao longo do tempo.

A resposta numérica, apresentada na Figura 5.34, trata do somatório dos valores de força de contato nodais obtidos para os nós que sofreram impacto.

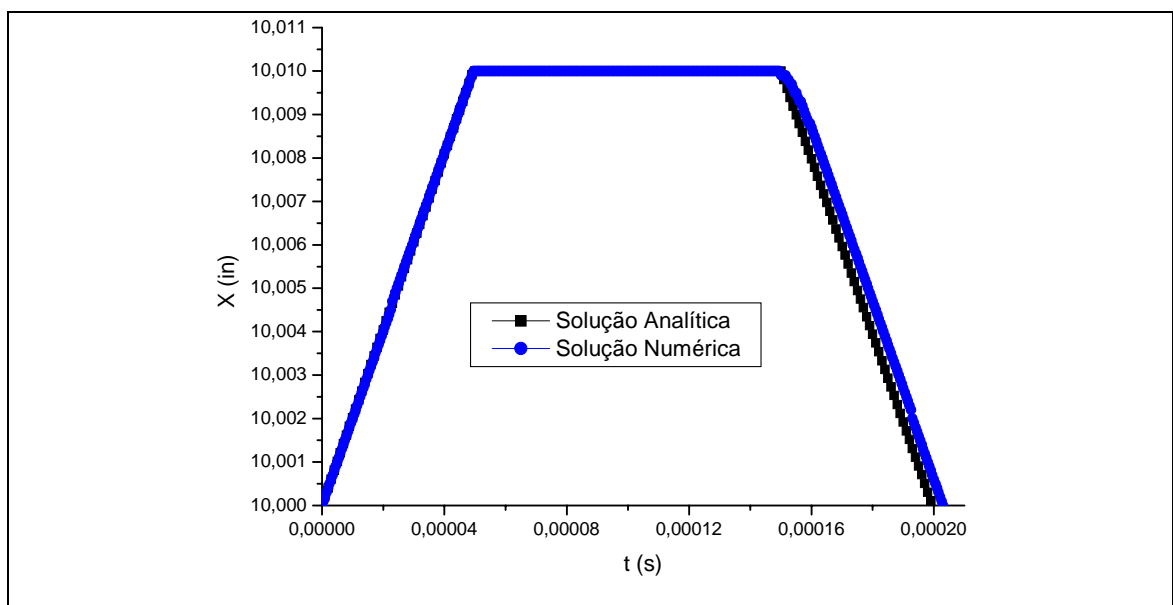


Figura 5.32 – Tempo x posição horizontal do ponto que sofre impacto.

Na Figura 5.32 percebe-se que a posição horizontal da barra cresce linearmente até o instante da colisão ($t = 4,9455 \cdot 10^{-5} s$). O impacto ocorre aproximadamente entre os tempos $t = 4,9455 \cdot 10^{-5} s$ e $t = 16 \cdot 10^{-5} s$, quando a barra se desprende do anteparo rígido e retorna.

Analisando-se a Figura 5.33, percebe-se que após a separação das barras a velocidade do ponto em estudo oscila em relação à velocidade de $-202,2 \text{ in/s}$. Este fato pode ser justificado pelo movimento oscilatório apresentado pela barra após o impacto, não sendo representado pela solução analítica simplificada e baseada em conservação da quantidade de movimento. Novamente as soluções numéricas estão em ótima concordância com as analíticas.

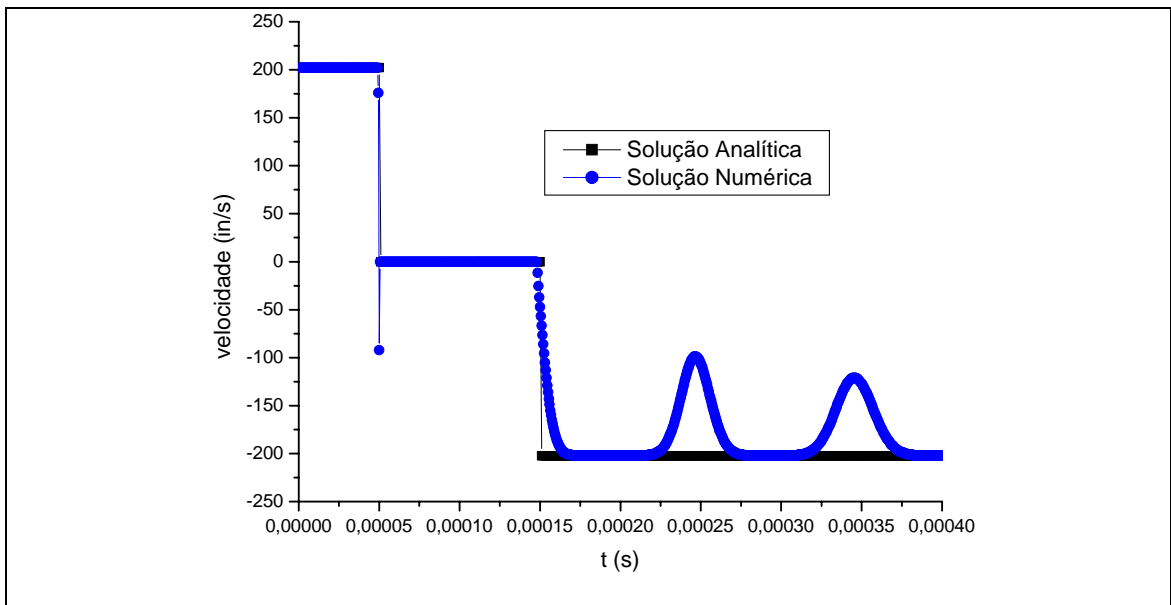


Figura 5.33 – Tempo x velocidade horizontal do ponto que sofre impacto.

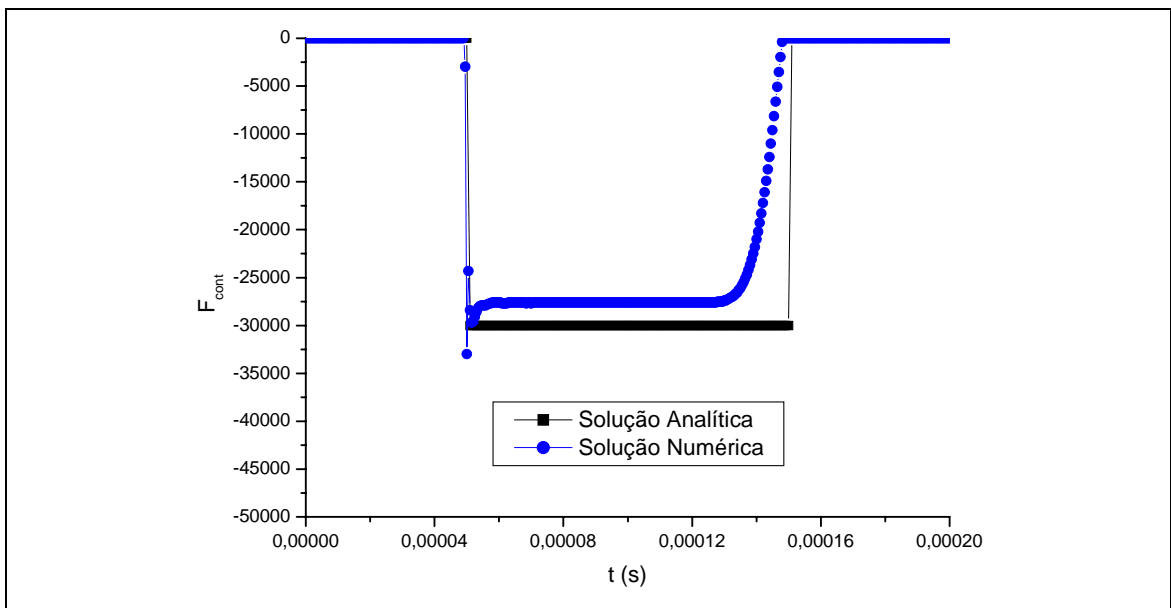


Figura 5.34 – Tempo x força de contato horizontal do ponto que sofre impacto.

5.10 EXEMPLO 9 – IMPACTO DE ANEL E ANTEPARO RÍGIDO

Como segundo exemplo de impacto, analisa-se o caso do impacto entre uma malha anelar e um anteparo rígido horizontal (Figura 5.35). A estrutura se movimenta seguindo uma trajetória inclinada em relação ao anteparo e com velocidade constante.

Este exemplo foi baseado em WRIGGERS *et al* (1990) e GRECO (2004). Neste exemplo, as variáveis são consideradas adimensionais.

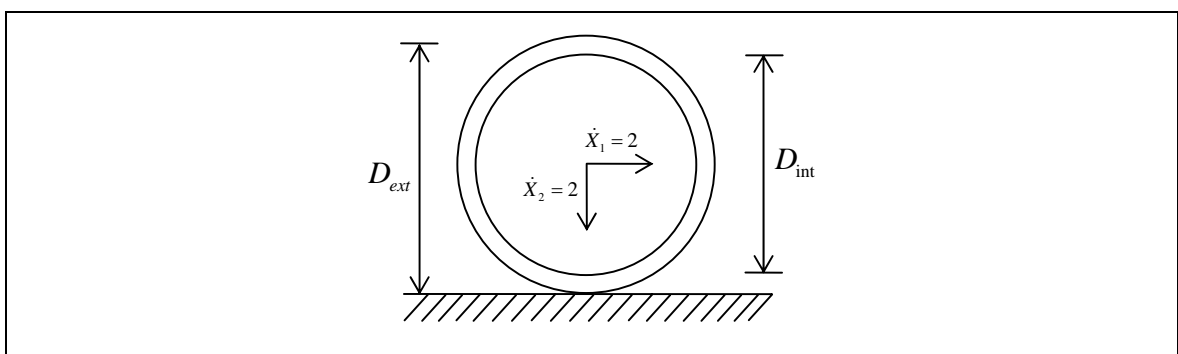


Figura 5.35 – Esquema do impacto de anel e anteparo rígido.

Os dados de entrada para o problema são apresentados no Quadro 5.10.

Quadro 5.10 – Dados de entrada do exemplo 9.

$E = 100,0$
$D_{ext} = 20$
$D_{int} = 18$
$b = 1$ (espessura)
$\rho = 0,01$
$c_m = 0 s^{-1}$
$\nu = 0$ (coeficiente de Poisson)

Na Figura 5.36 apresenta-se a estrutura anelar com sua respectiva discretização de malha.

Na análise, a estrutura anelar foi discretizada em 80 elementos finitos e foi adotado um intervalo de tempo igual a $\Delta t = 0,05$.

Na Figura 5.37 apresenta-se a configuração deslocada da estrutura anelar para o caso sem atrito.

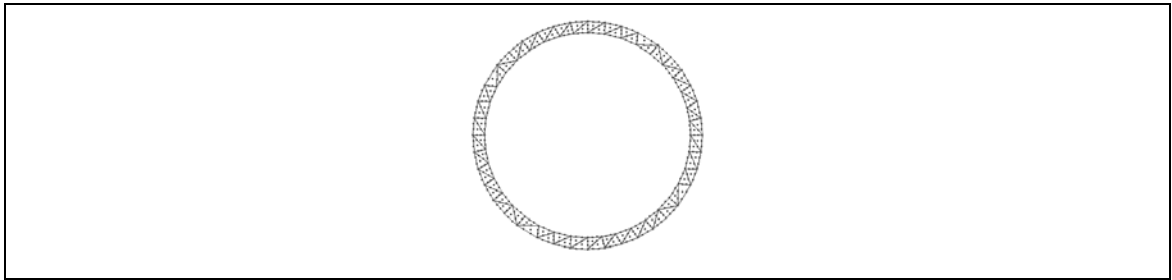


Figura 5.36 – Discretização de malha do anel.

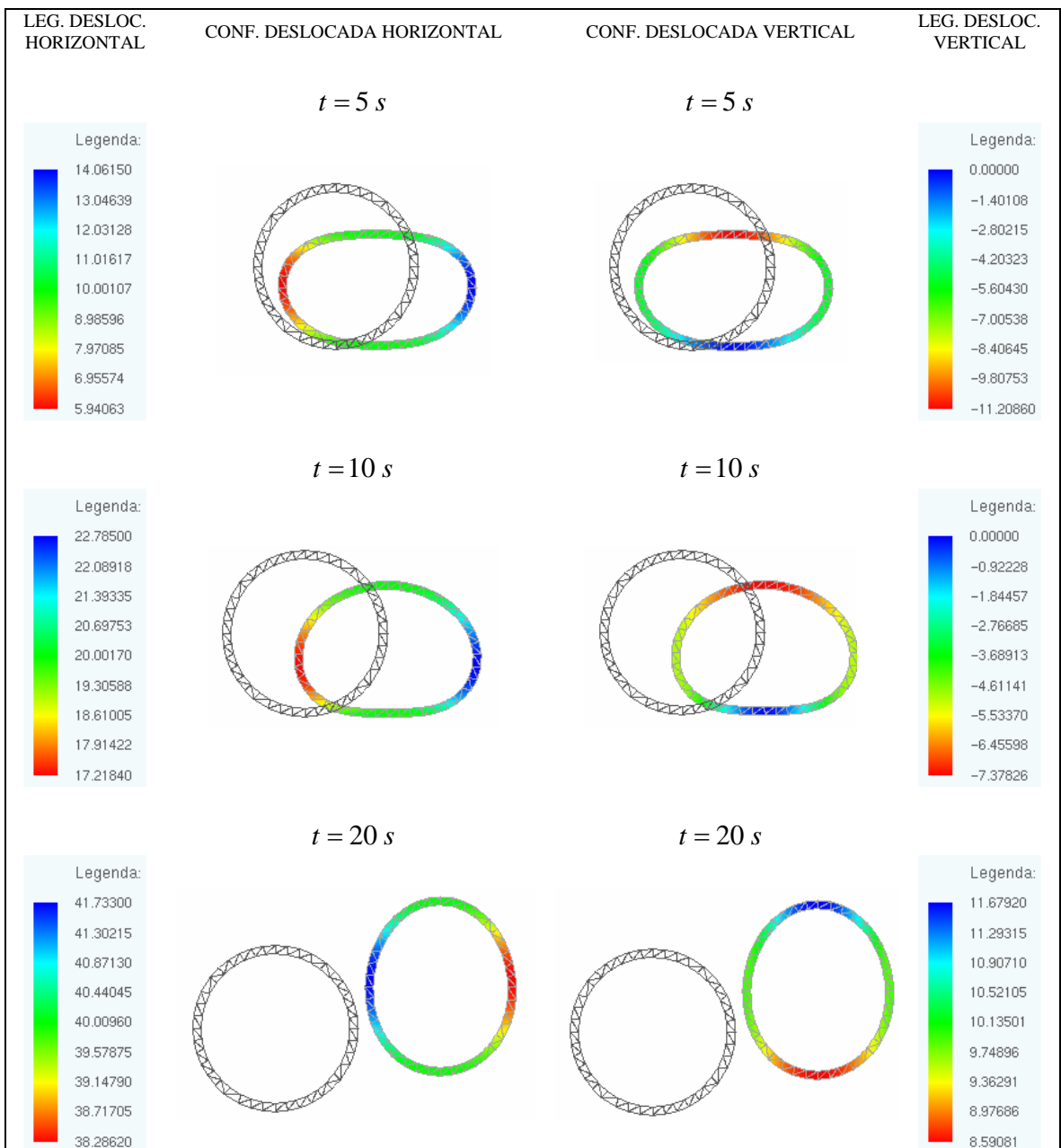


Figura 5.37 – Configuração deslocada da estrutura anelar.

5.11 EXEMPLO 10 – IMPACTO DE UM DISCO E ANTEPARO RÍGIDO

Como segundo exemplo de impacto, analisa-se o caso do impacto entre um disco e um anteparo rígido horizontal (Figura 5.38). A estrutura se movimenta seguindo uma trajetória inclinada em relação ao anteparo e com velocidade constante.

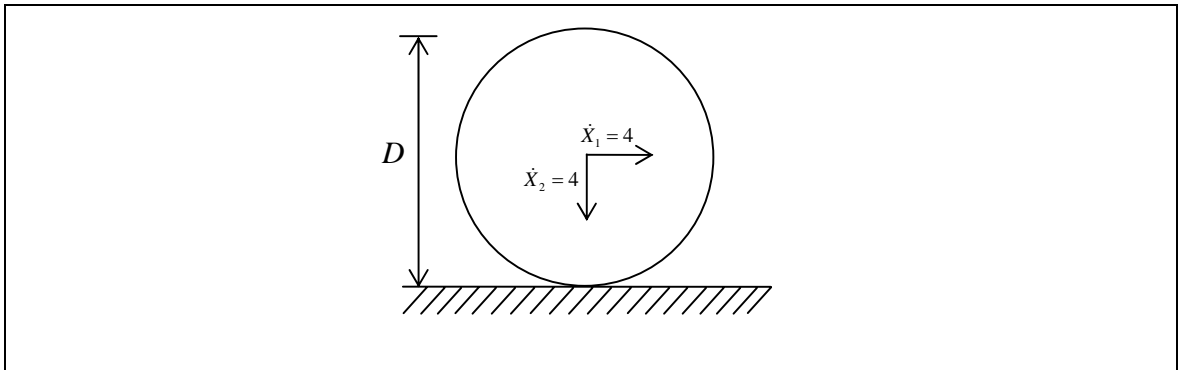


Figura 5.38 – Esquema do impacto de disco e anteparo rígido.

Os dados de entrada para o problema são apresentados no Quadro 5.11.

Quadro 5.11 – Dados de entrada do exemplo 10.

$E = 1,0$
$D = 20$
$b = 1$ (espessura)
$\rho = 0,01$
$c_m = 0 s^{-1}$
Análise I - $\nu = 0$ (coeficiente de Poisson)
Análise II - $\nu = 0,3$ (coeficiente de Poisson)

Para o estudo realizam-se duas análises, inicialmente faz-se o coeficiente de Poisson igual a zero e depois diferente de zero para verificar a sua influência nos resultados obtidos.

Na Figura 5.39 apresenta-se o disco com sua respectiva discretização de malha.

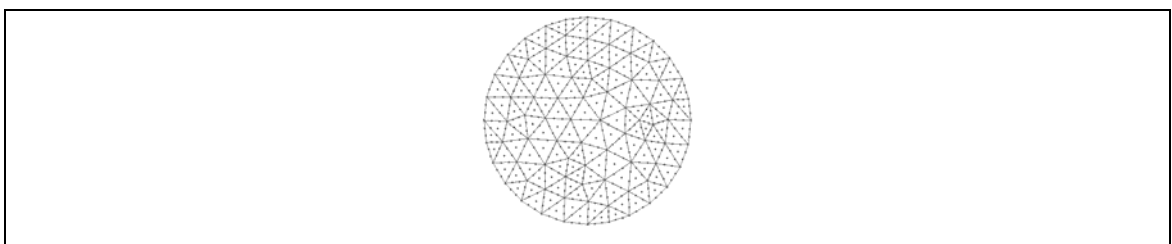


Figura 5.39 – Discretização de malha do disco.

Na análise, o disco foi discretizado em 138 elementos finitos e foi adotado um intervalo de tempo igual a $\Delta t = 0,05$.

Na Figura 5.40 apresenta-se a configuração deslocada do disco para o caso sem atrito e com coeficiente de Poisson $\nu = 0$.

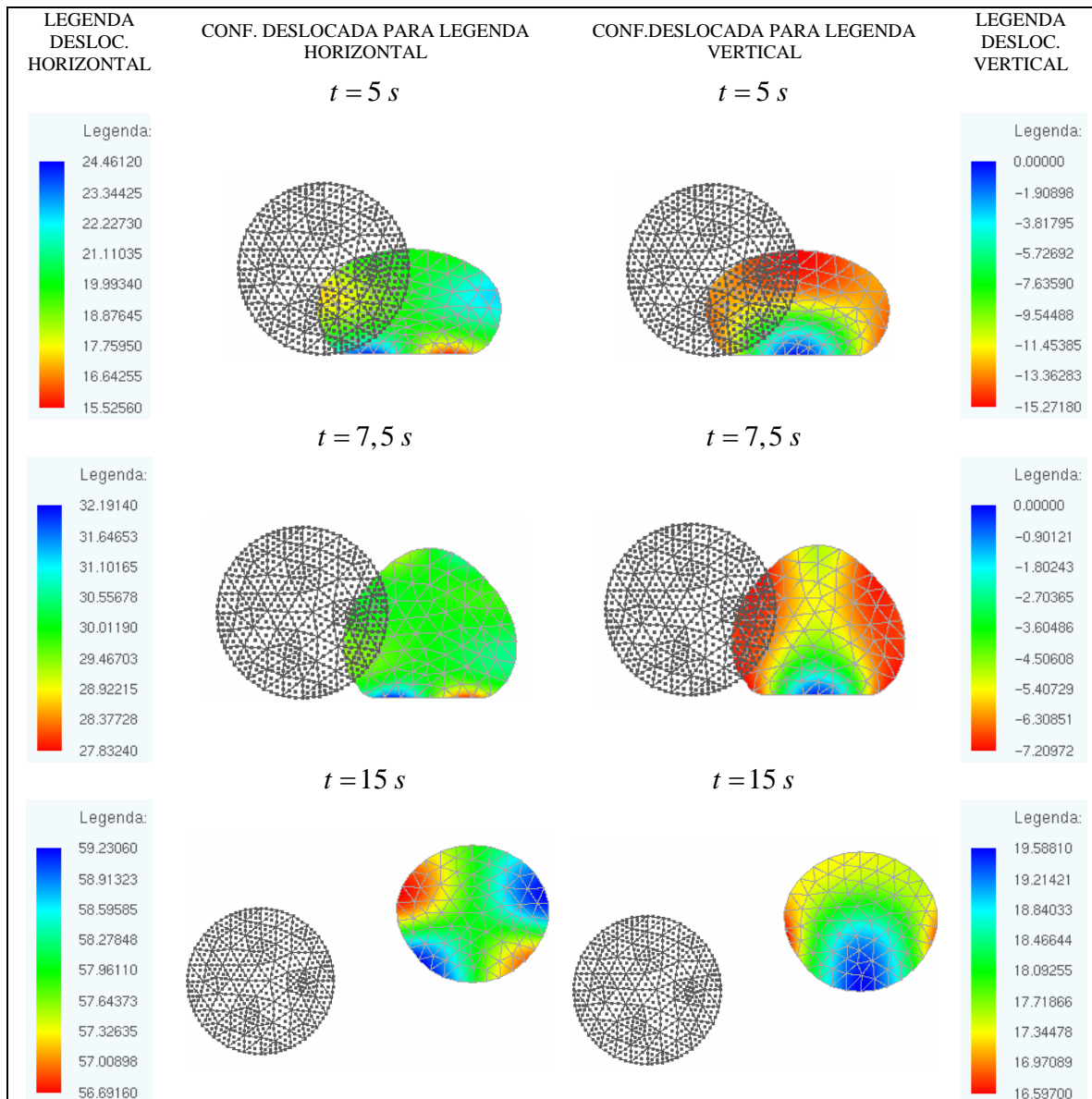


Figura 5.40 – Configuração deslocada do disco.

Na Figura 5.41 apresenta-se a configuração deslocada do disco para o caso sem atrito e com coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$.

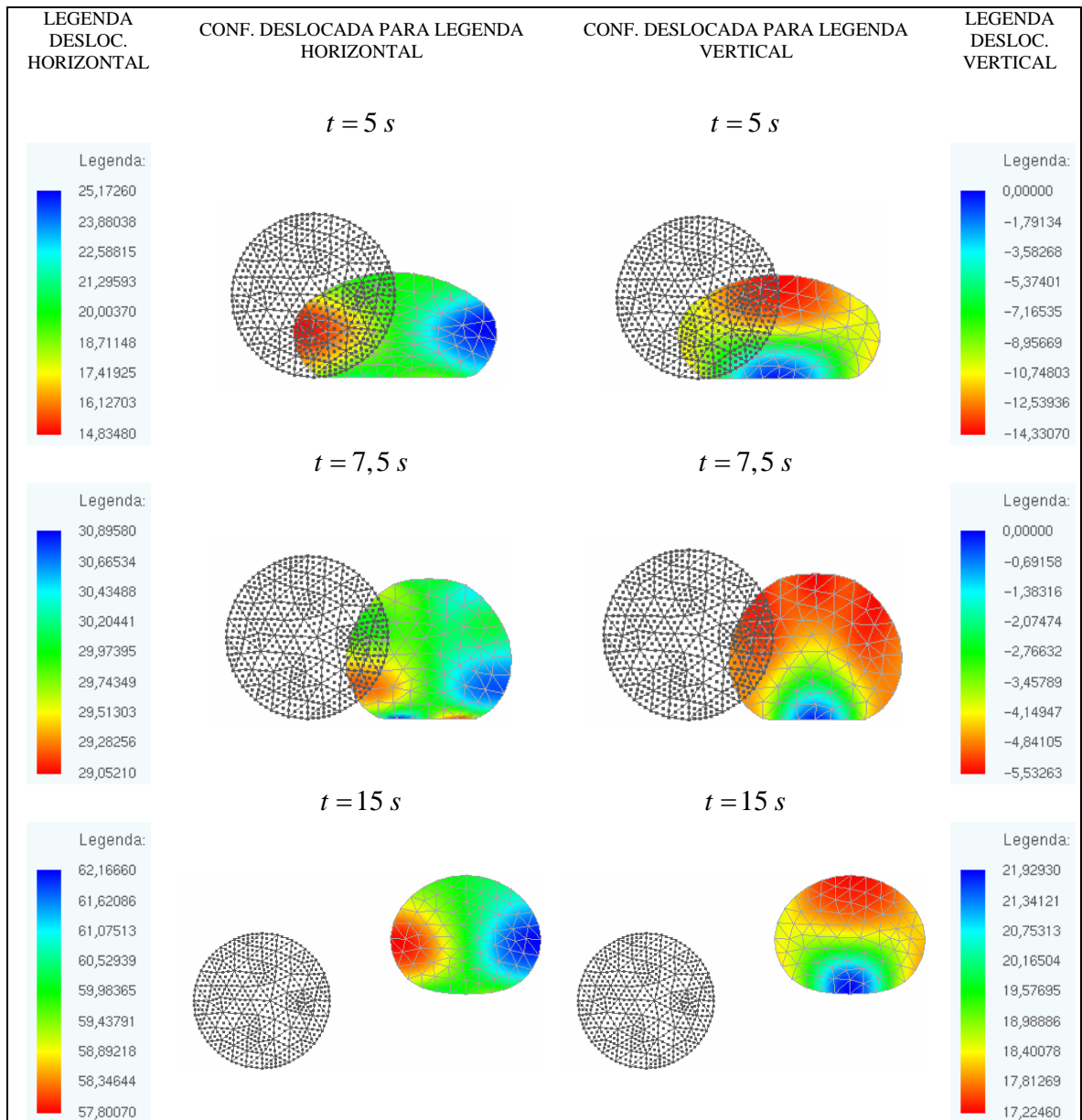


Figura 5.41 – Configuração deslocada do disco.

Observando-se as Figuras 5.40 e 5.41, percebe-se claramente o efeito do coeficiente de Poisson na configuração deformada do disco ao longo do tempo. Com o coeficiente de Poisson diferente de zero a esfera apresentou uma configuração deformada mais esticada horizontalmente do que quando foi admitido igual a zero, além disso, no conjunto, se mostrou levemente mais rígida adiantando a saída na reflexão.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES

Esta dissertação tem como objetivo principal o estudo do comportamento dinâmico não linear geométrico de sólidos bidimensionais. Apresenta-se uma formulação implementada e testada em exemplos conhecidos, para se analisar via Método dos Elementos Finitos (MEF), o comportamento dinâmico não linear geométrico de sólidos bidimensionais com possível consideração de impacto.

Um dos principais pontos em relação ao tema abordado nesta dissertação é que ele contempla temas relacionados a algumas das principais linhas de pesquisa em Engenharia de Estruturas, como: não linearidade geométrica, dinâmica das estruturas e impacto.

Para a consideração do comportamento não linear geométrico, apresenta-se e aprimora-se no capítulo 2 uma formulação posicional estática, desenvolvida em CODA (2003), para o tratamento de sólidos bidimensionais considerando-se grandes deslocamentos.

Valida-se a formulação não linear geométrica posicional estática através de exemplos conhecidos da literatura científica. Nos exemplos analisados a formulação implementada apresentou excelentes resultados quando comparada com solução analítica ou trabalhos da literatura.

No capítulo 4, a formulação NLG posicional é aqui expandida para o caso dinâmico. A consideração do comportamento dinâmico da estrutura é realizada através da incorporação, no código computacional, de um algoritmo de integração temporal baseado na família de integradores temporais de Newmark (GRECO & CODA, 2006). A adoção do

algoritmo de integração temporal da Regra Trapezoidal se restringe a problemas envolvendo estruturas convencionais (sem consideração de impacto).

Da mesma forma que o código computacional não linear geométrico estático, o código dinâmico não linear geométrico desenvolvido é validado considerando-se tradicionais exemplos da literatura científica, apresentando excelentes resultados quando comparados com a literatura pesquisada.

É importante observar que para o caso do exemplo da Biela- manivela não se adota para a consideração do problema dinâmico, o algoritmo da Regra Trapezoidal e sim um algoritmo da família Newmark modificado através dos parâmetros $\gamma = 0,55$ e $\beta = 0,30$. Os parâmetros adotados neste exemplo são justificados em CODA *et al* (2005) por obter resultados mais estáveis e precisos na análise de máquinas em alta rotação.

Por fim, o código computacional implementado é mais uma vez expandido com a possibilidade de se considerar o impacto entre estruturas e anteparos rígidos. A inclusão do impacto é realizada com um esquema simplificado, baseado em SIMO *et al* (1986) e GRECO (2004), que consiste na limitação de posições dos nós impactantes da estrutura.

É importante enfatizar que para estruturas com comportamento dinâmico não convencionais (com consideração de impacto), a utilização do algoritmo de integração temporal da regra trapezoidal pode gerar respostas instáveis. Estas instabilidades na solução desaparecem quando o algoritmo de Newmark clássico ($\gamma = 0,5$ e $\beta = 0,25$) é substituído pelo algoritmo de Newmark modificado por HU (1997) ($\gamma = 1,5$ e $\beta = 1,0$).

Um ponto importante para o esquema de impacto implementado é que para alguns exemplos é importante a consideração de Δt pequeno, pois quando não são podem fazer com que exista um amortecimento numérico indesejável que pode resultar em erro de fase. Este fenômeno pode ser explicado por o algoritmo de Newmark modificado por HU (1997) ser classificado em incondicionalmente estável, para qualquer Δt existe resposta, e em convergente, quanto menor Δt a resposta converge para a resposta esperada.

Com a inclusão do impacto no código computacional não linear geométrico dinâmico, o mesmo passa a ter a capacidade de analisar o impacto, sem atrito, entre sólidos bidimensionais e anteparos rígidos.

O código não linear geométrico com impacto é testado em exemplos existentes na literatura consultada, apresentando resultados muito bons quando comparados com a mesma ou com suas respectivas soluções analíticas.

Portanto, com todos os aspectos acima citados, tem-se que os objetivos desta dissertação de mestrado foram devidamente cumpridos, com o estudo e posterior implementação de uma formulação não linear geométrica dinâmica para sólidos bidimensionais, com capacidade de se analisar problemas dinâmicos convencionais ou não convencionais.

Definem-se como desenvolvimentos futuros a consideração de mais tipos de impacto, inclusão do atrito, consideração de mais estruturas envolvidas e a implementação da não linearidade física na formulação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARGYRIS, J. H.; STDOLTSINIS, J.; PIMENTA, P. M.; WUSTENBERG, H. (1984). Natural finite element techniques for viscous-flow motion. *Computer methods applied mechanics and engineering*, v.45, p.3-55.

ARMERO, F.; PETOCZ, E. (1998). Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.158, p.269-300.

ASSAN, A. E. (2003). Método dos Elementos Finitos: primeiros passos. 2. ed. Editora UNICAMP, Campinas, São Paulo.

BATHE, K. J. (1996). Finite Element Procedures. Prentice-Hall International Editions.

BATHE, K. J.; BOLOURSHI, S. (1979). Large displacement analysis of 3-dimensional beam structures, *International journal for numerical methods in engineering*, v.14, p.961-986.

BATHE, K.J; CHAUDHARY, A.B. (1985). A solution method for planar and axisymmetric contact problems. *International journal for numerical methods in engineering*, v.21, p.65-88.

BATHE, K.J; CHAUDHARY, A.B. (1986). A solution method for static and dynamic analysis of three-dimensional contact problems with friction. *Computer & structures*, v.24, p.855-873.

BATOZ, J. L.; DHATT, G. (1979). Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. *International journal for numerical methods in engineering*, v.14, p.1262-1267.

BEHDINAN, K.; STYLIANOU, M.C; TABARROK, B. (1998). Co-rotational dynamic analysis of flexible beams. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.154, p. 151-161.

- BELYTSCHKO, T.; NEAL, M. O. (1991). Contact-impact by the pinball algorithm with penalty and Lagrangian methods. *International journal for numerical methods in engineering*, v.31, p.547-572.
- BELYTSCHKO, T.; YEAH, I.S. (1993). The splitting pinball method for contact-impact problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.105, p.375-393.
- BISSHOPP, K. E.; DRUCKER, D.C. (1945). On the deflection of a cantilever beam. *Quarterly of applied mathematics*, v.3, p.272-275.
- BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. (1992). Boundary elements and introductory course. Computational Mechanics Publications, second edition, Southampton Boston, 1992.
- CARPENTER, N. J.; TATLOR, R. L.; KATONA, M. G. (1991). Lagrange constraints for transient finite element surface contact. *International journal for numerical methods in engineering*, v.32, p.103-128.
- CARRAZEDO, R. (2004). Estudo do impacto tridimensional entre estruturas modeladas pelo MEF e seguindo modelo constitutivo termoplástico. Projeto de Doutorado SET-EESC-USP.
- CHEN, W. H.; CHANG, C. M.; YEH, J. T. (1993). An incremental relaxation finite element analysis of viscoelastic problems with contact and friction. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.109, p.315-329.
- CHO, J. Y.; KIM, S. J. (1999). Discontinuous time-integration method for dynamic contact/impact problems. *AIAA journal*, v.37, n.7, p.874-880.
- CHUCHKEEPSAKUL, S; BUCHAROEN, S.; HUANG, T. (1995). Elastic of simple variable-arc-length beam subjectd to end moment. *Journal of engineering mechanics-ASCE*, v.121, p.767-772.
- CIARLET, P. G. (1993). *Mathematical Elasticity*. North Holland.
- CODA, H. B. (2003). Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF, Texto complementar para concurso de professor titular, SET-EESC-USP, 2004.
- CODA, H. B.; OLIVEIRA, M. G; PACCOLA, R. R. (2005). Simulação de motor a combustão utilizando formulação não linear geométrica. In: XXVI Congresso latino-americano de métodos computacionais em engenharia, Guarapari, Espírito Santo, Brasil, 2005.
- COLLINS, I. F.; (2003). The theory of frictional, elastic/plastic materials, *Key engineering materials*, v.232, c.2, p.71-76.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S. e PLESHA, M. E. (1989). Concepts and applications of finite element analysis. Third Edition. *Jonh Wiley & Sons*.

CRISFIELD, M. A (1981). A fast incremental-iterative solution procedure that handles snap-through. *Computer & structures*, v.13, p.55-62.

CRISFIELD, M. A (1990). A consistent corotational formulation for nonlinear three-dimensional beam-elements. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.81, p.131-150.

CZEKANSKI, A.; MEGUID, S.A.; EL-ABBASI, N.; REFAAT, M.H. (2001). On the elastodynamic solution of frictional contact problems using variational inequalities. *International journal for numerical methods in engineering*, v.50, p.611-627.

FANCELLO, E. A; FEIJOO, R. A. (1994). Shape optimization in frictionless contact problems. *International journal for numerical methods in engineering*, v.37, p.2311-2335.

FARAHANI, K.; MOFID, M.; VAFAI, A. (2000). A solution method for general contact-impact problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.187, p.69-77.

FARAHANI, K.; MOFID, M.; VAFAI, A. (2001). United elements method for general contact-impact problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.191, p.843-860.

FUJII, F. (1983). A simple mixed formulation for elastica problems. *Computer & Structures*, v.17, p.79-88.

FUJII, F.; CHOONG, K.K; GONG, S.X. (1992). Variable displacement control to overcome turning points of nonlinear elastic frames. *Computer & Structures*, v.44, p.133-136.

GADALA, M. S.; DOKAINISH, M.A.; ORAVAS, G.A. (1984). Formulation methods of geometric and material nonlinearity problems. *International journal for numerical methods in engineering*, v.20, p.887-914.

GATTASS, M., ABEL, J. F. (1987). Equilibrium considerations of the updated Lagrangian formulation of beam-columns with natural concepts. *International journal for numerical methods in engineering*, v.24, p.2119-2141.

GRECO, M. (2004). Análise de problemas de contato/impacto em estruturas de comportamento não linear pelo Método dos Elementos Finitos. Tese de doutorado, EESC-USP, 2004.

GRECO, M; CODA, H. B. (2004). A simple and precise FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description, *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.193, p.3541-3557.

- GRECO, M; CODA, H. B. (2004). An alternative contact/impact identification algorithm for 2D structural problems, *Computational Mechanics*, Springer, p.410-422.
- GRECO, M; CODA, H. B. (2006). Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis, *Journal of sound and vibration*, 290, p.1141-1174.
- HASLER, W. E.; STRICKLIN, J. A. (1977). Displacement incrementation in nonlinear structure analysis by the self-correcting method. *International journal for numerical methods in engineering*, v.11, p.3-10.
- HALLQUIST, J.O.; GOUDREAU, G. L.; BENSON, D. J. (1985). Sliding interfaces with contact-impact in large-scale Lagrangian computations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.51, p.107-137.
- HASHIGUCHI, K. (2001). On the thermomechanical approach to the formulation of plastic constitutive equations, *Soils and foundations*. v.41, c.4, p.89-94.
- HEINSTEIN, M. W.; MELLO, F.J.; ATTAWAY, S. W.; LAURSEN, T. A. (2000). Contact-impact modeling in explicit transient dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.187, p.621-640.
- HU, N. (1997). A solution method for dynamic contact problems. *Computer & structures*, v.63, p.1053-1063.
- HULBERT, G. M. (1992). Time finite element methods for structural dynamics. *International journal for numerical methods in engineering*, v.33, p.307-331.
- HUGHES, T. J. R. (1987). The finite element method – linear static and dynamic finite element analysis. Prentice-Hall International Editions.
- HUGHES, T. J. R.; LEVIT, I; WINGET, J. (1983). An element-by-element solution algorithm for problems of structural and solids mechanics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.36, p.241-254.
- HUGHES, T. J. R.; TAYLOR, R. L.; SACKMAN, J.L.; CURNIER, A.; KANOKNUKULCHAI, W. (1976). A finite element method for a class of a contact-impact problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.8, p.249-276.
- IZZUDIN, B. A.; ELNASHAI, A. S. (1993). Eulerian formulation for large-displacement analysis of space frames. *Journal of engineering mechanics-ASCE*, v.119, p.549-569.
- KARAOGLAN, L.; NOOR, A. K. (1997). Space-time finite element method for the sensitivity analysis of contact/impact response of axisymmetric composite structures. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.144, p. 371-389.
- KRYSL, P; BELYTSCHKO, T. (1998). Object-oriented parallelization of explicit structural dynamics with PVM, *Computer & Structures*, v.66, p.259-273.

- LANCZOS, C. (1986). *The variational Principles of Mechanics*. 4.ed. New York, Dover Publications.
- LANDENBERG, A.; EL-ZAFRANY, A. (1999). Boundary element análisis of elastic contact problems using gap finite elements. *Computer & structures*, v.71, p.651-661.
- LIMA, J. M. F; GARCIA, L.F.T. (2003). Método das diferenças finitas energéticas na flexão de barras com forte não linearidade geométrica. *Sitientibus*, Feira de Santana, n.28, p.121-144.
- LORENZANA, A.; GARRIDO, J. A. (1998). A boundary element approach for contact problems involving large displacements. *Computer & structures*, v.68, p.315-324.
- MAHMOUD, F. F.; ALI_ELDIN, S. S.; HASSAN, M. M; EMAM, S. A. (1998). An incremental mathematical programming model for solving multi-phase frictional contact problems. *Computer & structures*, v.68, p.567-581.
- MALVERN, L. E. (1969). *Introduction to the mechanics of a Continuous Médium*. Prentice Hall.
- MATTIASSON, K. (1981). Numerical results from large deflection beam and frame problems analysed by means of elliptic integrals. *International journal for numerical methods in engineering*, v.17, p.145-153.
- MESCHKE, G.; GRASBERGER, S.; (2003). Numerical modeling of coupled hygro-mechanical degradation of cementitious materials, *Journal of engineering mechanics-ASCE*, v.129, c.4, p.383-392.
- MONDKAR, D. P.; POWELL, G. H. (1977). Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. *International journal for numerical methods in engineering*. v.11, p.499-520.
- MEEK, J. L.; TAN, H. S. (1984). Geometrically nonlinear-analysis of space frames by an incremental iterative technique. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.47, p.261-282.
- NEWMARK, N. M. (1959). A method of computation for structural dynamics, *Journal of engineering mechanics division*, v.85, p.67-94.
- ODEN, J. T.; PIRES, E. B. (1983). Nonlocal and nonlinear friction laws and variational principles for contact problems in elasticity. *Journal of applied mechanics*, ASME, v.50, p.67-76.
- ODEN, J. T.; MARTINS, J. A. C. (1985). Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.52, p.67-76.

- OGDEN, R. W. (1984). Non-linear elastic deformations. Ellis Horwood, Series: Mathematics and its applications.
- ORAN, C.; KASSIMALI, A. (1976). Large deformations of framed structures under static and dynamic loads. *Computer & structures*, v.6, p.539-547.
- OWEN, D. R. J.; HINTON, E. (1980). Finite elements in plasticity: theory and practice. Swansea, Pineridge Press.
- PACCOLA, R. R.; CODA, H. B. (2005). Desenvolvimento e disponibilização de softwares acadêmicos de análise estrutural baseados no MEF, MEC e combinação de ambos. Relatório Científico FAPESP, USP, São Carlos, São Paulo.
- PACOSTE, C.; ERIKSSON, A. (1996). Beam elements in instability problems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.144, p.163-197.
- PETERSON, A.; PETERSSON, A. N. (1996). Large-deformation analysis of flexible beams. *International journal of solids and structures*, v.33, p.1335-1353.
- RIKS, E. (1972). The application of Newton's methods to the problem of elastic stability. *Journal of applied mechanics*, v.39, p.1060-1066.
- RIKS, E. (1979). Incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. *International journal of solids and structures*, v.15, p.529-551.
- SANTAOJA, K. (2003). Derivation of the normality rule for time-dependent deformation using the principle of maximal rate of entropy production archives of mechanics. p.501-518.
- SAVASSI, W. (1996). Introdução ao método dos elementos finitos em análise linear de estruturas. Escola de Engenharia de São Carlos, USP-SP. 260 p.
- SCHULZ, M.; FILIPPOU, F. C. (2001). Non-linear spatial Timoshenko beam element with curvature interpolation. *International journal for numerical methods in engineering*, v.50, p. 761-785.
- SIMO, J. C.; HJELMSTAD, K. D.; TAYLOR, R. L. (1984). Numerical formulation of elasto-viscoplastic response of beams accounting for the effect of shear. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.42, p.301-330.
- SIMO, J. C.; LAURSEN, T. A. (1992). An augmented Lagrangian treatment of contact problems involving friction. *Computer & structures*, v.42, p.97-116.
- SIMO, J. C.; WRIGGERS, K. H.; SCHWEIZERHOF, H.; TAYLOR, R. L. (1986). Finite deformation post-buckling analysis involving inelasticity and contact constraints. *International journal for numerical methods in engineering*, v.23, p.779-800.

- SOLBERG, J. M.; PAPADOPOULOS, P. (1998). A finite element method for contact/impact. *Finite elements in analysis and design*, v.30, p.297-311.
- SOLKONIKOV, I. S. (1956). *Mathematical Theory of Elasticity*, New York, Mac Graw-Hill Book co.
- SOUZA NETO, E. A.; FENG, Y. T. (1999). On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and ‘snap-backs’. *Computer methods in applied mechanics and engineering*. v.179, p.81-89.
- SURANA, K. S. (1983). Geometrically non-linear formulation for 2 dimensional curved beam elements. *Computer & structures*, v.17, p.105-114.
- TAYLOR, R.L; PAPADOPOULOS, P. (1993). On the finite element method for dynamic contact/impact problems. *International journal for numerical methods in engineering*, v.36, p.2123-2140.
- THEN, L. H.; CLARKE, M. J. (1998). Co-rotational and Lagrangian formulations for elastic three-dimensional beam finite elements. *Journal of constructional steel research*, v.48, p.123-144.
- VANALLI, L. (2004). O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos compostos. Tese de Doutorado, SET – EESC – USP.
- VIEIRA, L. C. L. M; RAMOS JR, A. S. (2004). Estudo de algoritmos de integração elemento por elemento para análise dinâmica não linear de estruturas. Dissertação de Mestrado, Departamento de Estruturas, UFAL, 2004.
- WANG, F; CHENG, J.; YAO, Z. FFS contact searching algorithm for dynamic finite element analysis. *International journal for numerical methods in engineering*, v.52, p.655-672.
- WASFY, T. M.; NOOR, A. K. (1997). Computational procedure for simulating the contact/impact response in flexible multibody systems. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.147, p.153-166.
- WONG, M. B.; TINLOI, F. (1990). Geometrically nonlinear analysis of elastic framed structures. *Computers & structures*, v.34, p.633-640.
- WRIGGERS, P.; VAGNER, W.; MIEHE, C. (1990). Finite element formulation of large deformation impact-contact problems with friction. *Computer & structures*, v.37, p.319-331.
- YANG, Y. B.; MCGUIRE, W. (1985). A work control method for geometrically nonlinear analysis. In NUMETA 85 – 1985 International conference on numerical methods in engineering: Theory and applications. Edited by J. Middleton & G. N. Pande, University College Swansea, Wales, UK, p.913-921.

YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. (1990). Solution Method for nonlinear problems with multiple critical points. *AIAA Journal*, v.28, p.2110-2116.

ZHONG, Z-H.; NILSSON, L. (1996). A unified algorithm based on the territory concept. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.130, p. 1-16.