

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

*Formulação do Método dos Elementos de Contorno
para Análise de Cascas Abatidas*

Autor: Engº Eduardo Toledo de Lima Junior

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos da Universidade de São Paulo,
como parte dos requisitos necessários à obtenção
do título de mestre em engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Tit. Wilson Sergio Venturini

São Carlos, Julho de 2006

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

Lima Junior, Eduardo Toledo de
L732f Formulação do método dos elementos de contorno para
 análise de cascas abatidas / Eduardo Toledo de Lima
 Junior. -- São Carlos, 2006.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de São Carlos-
Universidade de São Paulo, 2006.

Área: Engenharia de Estruturas.

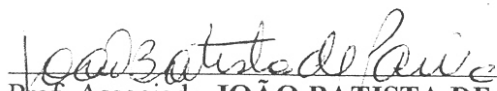
Orientador: Prof. Tit. Wilson Sergio Venturini

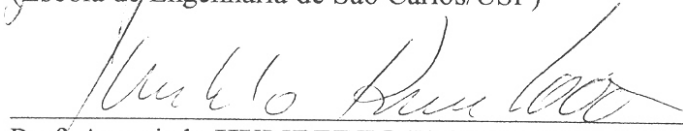
1. Método dos elementos de contorno. 2. Cascas abatidas. 3.
Mecânica computacional. 4. Mecânica das estruturas. I.
Título.

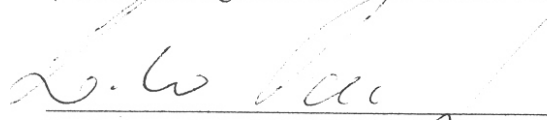
FOLHA DE JULGAMENTO


Candidato: Engenheiro **EDUARDO TOLEDO DE LIMA JUNIOR**

Dissertação defendida e julgada em 12/07/2006 perante a Comissão Julgadora:


Prof. Associado **JOÃO BATISTA DE PAIVA (Orientador substituto)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) Aprovado


Prof. Associado **HUMBERTO BREVES CODA**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) Aprovado


Prof. Associado **LEANDRO PALERMO JUNIOR**
(Universidade Estadual de Campinas/UNICAMP) Aprovado


Prof. Associado **MARCIO ANTONIO RAMALHO**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)


Profa. Titular **MARIA DO CARMO CALJURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

Aos meus pais Eduardo e Josilma,
meu irmão Guilherme e à Celina

AGRADECIMENTOS

Inicialmente a Deus, pela Vida.

Aos meus pais, Eduardo e Josilma, e ao meu irmão, Guilherme, pelo apoio e participação em todas as minhas pequenas conquistas, pelos valores humanos adquiridos, e pelo amor dentro da instituição que é a família, desde sempre. Sem eles, nada seria possível.

À Celina, por todo o carinho e apoio sempre oferecidos, pela pessoa tão especial que é, companheira ímpar em minha vida, e por seu amor, indispensável para mim, desde o ano de 1998.

Ao Prof. Tit. Wilson Sergio Venturini, pela amizade e paciência, por tantos conhecimentos transmitidos, além da dedicação e estímulo constantes para o bom decorrer do trabalho.

Ao Professor Humberto Coda, pela atenção e valorosas contribuições dadas à esta dissertação. Ao Professor João Paiva, pela amizade e suporte dados ao longo do Mestrado, além das contribuições ao trabalho.

Aos demais professores e funcionários do Departamento de Estruturas da EESC/USP que, direta ou indiretamente, contribuíram com o trabalho.

Aos Professores Dilze Codá e Severino Marques, da UFAL, pela orientação e amizade a mim oferecidas na iniciação à pesquisa.

Aos amigos do departamento, sem citar nomes para não cometer injustiças, pelo companheirismo e ótimos momentos.

Aos conterrâneos vindos da querida Maceió, Edson Costa, Geílson, Jefferson, Lucena, Márcio Félix, Netto e Walter. Em especial a Codá e Rafael, companheiros de república, e amigos estimados. Ainda, aos amigos André e Saulo, que me acolheram tão bem nos últimos meses de Mestrado. Aos alagoanos “agregados” Claudius, Dênis e Luciano Montedor.

Aos amigos Botta, Edson Leonel, Garcia, Leandro Waidemam, Luis Eduardo, Paccola e Wutzow, pelas discussões e dúvidas esclarecidas.

À CAPES, pelo financiamento da bolsa de Mestrado.

RESUMO

Lima Jr., E. T. (2006), *Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Cascas Abatidas*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006.

O presente trabalho trata da análise numérica de cascas abatidas com o uso do Método dos Elementos de Contorno (MEC). A formulação é desenvolvida a partir do acoplamento entre as equações integrais para flexão de placas delgadas e para estado plano de tensão. No esquema implementado, os termos sobre o contorno são avaliados a partir de processos analíticos e numéricos de integração. No caso das integrais de domínio, aplica-se um procedimento semi-analítico de cálculo sobre células discretas. A validação do modelo computacional desenvolvido é feita com base em resultados da literatura, obtidos com uso do método dos elementos finitos e dos elementos de contorno, além de soluções analíticas.

Palavras-chave: mecânica das estruturas, mecânica computacional, método dos elementos de contorno, cascas abatidas, integrais de domínio.

ABSTRACT

Lima Jr., E. T. (2006), *Boundary Element Formulation for Shallow Shell Analysis*. M. Sc. Dissertation – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006.

The present work deals with the numerical analysis of shallow shells using Boundary Element Method (BEM). The formulation is developed by coupling integral equations of plate bending and plane stress elasticity. In the implemented scheme, the boundary terms are evaluated with analytical and numerical processes of integration. In the case of domain integrals, a semi-analytical calculation procedure is applied on discrete cells. The validation of developed computational model is made with results from other works, obtained by use of BEM or finite element method, besides analytical solutions.

Keywords: Structural mechanics, computational mechanics, boundary element method, shallow shells, domain integrals.

SUMÁRIO

1. <u>INTRODUÇÃO</u>	1
1.1 Considerações Gerais	1
1.2 Breve Histórico	1
1.3 Objetivos	4
1.4 Metodologia	5
2. <u>ELASTOSTATICIDADE LINEAR – FUNDAMENTOS BÁSICOS</u>	6
2.1 Definição do Problema	6
2.2 Equacionamento Básico	6
2.2.1 Relações Deformação – Deslocamento	6
2.2.2 Relações de Equilíbrio	7
2.2.3 Relação Constitutiva	8
3. <u>FUNDAMENTOS DA TEORIA CLÁSSICA DE PLACAS</u>	10
3.1 Definições e Hipóteses Iniciais	10
3.2 Equacionamento Básico	11
3.2.1 Lei Constitutiva	11
3.2.2 Equações de Equilíbrio	12
3.3 Valores de Contorno	16

4. <u>EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA ELASTOSTATICIDADE BIDIMENSIONAL</u>	17
4.1 Solução Fundamental	17
4.2 Formulação Integral de Contorno	19
4.2.1 Análise em Pontos Internos ao Domínio	23
5. <u>EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA PLACAS DELGADAS</u>	24
5.1 Solução Fundamental	24
5.2 Formulação Integral de Contorno	26
5.2.1 Análise em Pontos Internos ao Domínio	31
6. <u>MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO</u>	32
6.1 Considerações Gerais	32
6.2 Elementos de Contorno e Discretização	33
6.3 MEC Aplicado ao Problema de Membrana	36
6.3.1 Obtenção dos Deslocamentos e Forças em Pontos do Contorno	36
6.3.2 Análise em Pontos Internos	38
6.4 MEC Aplicado ao Problema de Placa Delgada	39
6.4.1 Obtenção dos Deslocamentos e Forças em Pontos do Contorno	39
7. <u>MODELAGEM DE CASCAS ABATIDAS ATRAVÉS DE FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO</u>	42
7.1 Cascas Delgadas	42
7.2 Cascas Delgadas Abatidas	44
7.2.1 Equacionamento Básico	44
7.3 Formulação Integral Acoplada	47
7.3.1. Representação Algébrica das Equações Integrais	49

8. <u>ASPECTOS NUMÉRICOS COMPLEMENTARES</u>	51
8.1 Tratamento de Integrais de Domínio	51
8.1.1 Integração de Termos de Valor Conhecido	51
8.1.2 Integração em Células	53
8.2 Processo de Sub-Elementação	56
9. <u>EXEMPLOS DE APLICAÇÃO</u>	58
9.1 Estado Plano de Tensão	58
9.2 Placas Delgadas	61
9.2.1. Placa Apoiada em Dois Lados Ortogonais e Engastada nos Outros Dois	61
9.2.2. Placa Circular Apoiada	63
9.3 Cascas Delgadas Abatidas	64
9.3.1 Casca Cilíndrica de Base Quadrada, Engastada e Livre	65
9.3.2 Casca Esférica de Base Circular, Engastada	66
9.3.3 Casca Esférica de Base Quadrada, Apoiada	68
9.3.4 Casca Cilíndrica de Base Quadrada, Apoiada	69
<u>CONCLUSÃO</u>	72
<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	73
<u>ANEXO I</u>	82

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

O tema proposto no presente trabalho diz respeito ao desenvolvimento de uma formulação para análise de cascas abatidas a partir do Método dos Elementos de Contorno (MEC). Pretende-se, desta forma, explorar diversos problemas relacionados a elementos estruturais que apresentem curvaturas. Como exemplos de aplicação pode-se citar os painéis utilizados em carenagens de veículos nas indústrias mecânica e aeronáutica, bem como seu emprego em cascos de navios e embarcações em geral. No âmbito da engenharia civil, cascas abatidas aparecem com certa frequência de formas diversas, especialmente em estruturas de cobertura.

1.2. BREVE HISTÓRICO

Desde o início do século XIX tem-se conhecimento de estudos acerca de equações integrais, as quais são a base do desenvolvimento do Método dos Elementos de Contorno. Contudo, a primeira teoria clássica das equações integrais, onde os núcleos eram definidos e integráveis, é devida a Fredholm (1903). O próprio Fredholm (1906) foi pioneiro na solução de problemas de valor de contorno em elastostática a partir de formulação integral linear. A partir desse trabalho, o emprego de equações integrais ficou restrito a formulações teóricas de difícil compreensão pelos engenheiros, por serem métodos ditos indiretos. Nestes a solução do problema era obtida através de fontes fictícias aplicadas ao contorno que, após sua determinação, permitiam o cálculo das variáveis físicas do problema. Em 1967, Rizzo apresentou a primeira formulação direta para o tratamento de equações integrais, onde os núcleos

dos integrandos continham as variáveis do problema. Com base na técnica apresentada por Rizzo (1967), vários autores abordaram o problema, podendo-se citar os trabalhos de Cruse (1969, 1973, 1974), que trataram de problemas gerais da elasticidade bi e tridimensional, e Rizzo & Shippy (1968), que apresentaram a proposta de introduzir sub-regiões no tratamento de domínios não-homogêneos.

Os chamados métodos de contorno tiveram grande avanço a partir da tese de Lachat, apresentada à Universidade de Southampton em 1975, onde o autor introduziu a simplicidade e elegância que faltavam ao método, imprimindo-lhe uma maior generalidade. A partir dos desenvolvimentos de Lachat, as técnicas de resolução das equações integrais passaram a ser interpretadas como um método numérico. Consta que Brebbia (1978^a, 1978^b) foi o primeiro se referir à técnica como “Método dos Elementos de Contorno” em seus trabalhos. Nestes, a obtenção das equações integrais foi feita a partir do método dos resíduos ponderados, com escolha conveniente da função ponderadora. A partir do primeiro livro, publicado por Brebbia (1978^a), o Método passou a ser estudado de forma intensa em vários centros de pesquisa.

Telles & Brebbia (1979, 1980^a, 1980^b) mostraram o uso do MEC em problemas de elasto e viscoplasticidade, a partir da introdução de campos de tensões ou deformações iniciais no equacionamento. Venturini (1982, 1984, 1988) e Venturini & Brebbia (1983, 1984) aplicaram o Método dos Elementos de Contorno a problemas geotécnicos, inclusive na modelagem de materiais com descontinuidades.

No desenvolvimento de formulações para análise de placas, a referência inicial é devida a Jaswon et al. (1967), que resolveram a equação governante, de natureza bi-harmônica, a partir de sua decomposição em duas equações harmônicas, tratadas por formulação integral e posteriormente recombinadas. De maneira similar, outros trabalhos foram apresentados, podendo-se citar: Hansen (1976), Altiero & Sikarskie (1978) e Wu & Altiero (1979). A formulação direta para flexão de placas foi consolidada em 1978 com os trabalhos de Bezine (1978, 1981), Bezine, & Gambi (1978), Tottenham (1979) e Stern (1979, 1983).

A partir da proposição da formulação direta diversos outros trabalhos foram, ao longo do tempo, ampliando o uso do MEC em placas: Bézine (1980) propôs uma formulação mista envolvendo contorno e domínio, para análise de vibrações; Kamiya et al. (1983) aplicaram o modelo a problemas sujeitos à variação de temperatura; Van der Weeën (1982) desenvolveu a formulação para placas espessas, com base nas hipóteses de Reissner; Katsikadelis & Armenakas (1984) apresentaram formulações para o problema de placas sobre fundação elástica. Em 1987, Paiva analisou placas considerando sua interação com um pavimento de edificação e, em Venturini & Paiva (1988) adicionou-se a possibilidade de variação de espessura. Chueiri (1994) analisou placas delgadas em regime elastoplástico. Fernandes, em 1998, tratou da não-linearidade em placas, adicionando a consideração de espessura variável em Fernandes et al. (1999). Em 2002, Fernandes & Venturini propuseram a análise de placas com enrijecimento. Andrade (2001) tratou da análise de soluções fundamentais para placas espessas, pelas teorias de Reissner e Mindlin.

Newton & Tottenham (1968) apresentaram a primeira aplicação do método dos elementos de contorno ao problema de cascas abatidas, com um método semi-direto baseado na decomposição da equação governante de 4ª ordem em uma de 2ª ordem. A obtenção de soluções fundamentais para o problema foi objeto de estudo de alguns pesquisadores ao longo dos anos. Lu & Huang (1991, 1992) deduziram a solução fundamental para cascas abatidas com superfície média quadrática, considerando cisalhamento. Dentre outros trabalhos, também trataram dessas deduções Matsui & Matsuoka (1978) e Lei et al. (1995). A aplicação direta do MEC implica na necessidade de existência das soluções fundamentais, as quais, nos problemas de casca, resultam significativamente complexas.

Desta forma, um outro tipo de aproximação foi desenvolvido, o chamado *domain-boundary element method* (DBEM), sendo apresentado inicialmente por Forbes & Robinson (1969) na análise estática de cascas abatidas. Zhang & Atluri (1986) estenderam o método à análise dinâmica, com base no método dos resíduos ponderados. Com auxílio do teorema da reciprocidade, Providakis & Beskos (1991) formularam o método para problemas com vibrações. Mostrou-se a possibilidade de análise não-linear geométrica em Lin & Long (1996). A principal qualidade do DBEM é a simplicidade das soluções

fundamentais requeridas, quando comparado com a aplicação direta da solução fundamental de cascas. Porém deve-se destacar que, devido aos termos de curvatura adicionais introduzidos nas equações de equilíbrio, surgem integrais de domínio, as quais necessitam de tratamento relativamente custoso.

Com filosofia similar à utilizada no DBEM, Dirgantara & Aliabadi (1999) propuseram uma nova formulação, feita com base no acoplamento das equações integrais para flexão de placas e das equações integrais para o problema de estado plano de tensão, para analisar cascas com dupla curvatura, considerando cisalhamento. Wen et al. (2000^a, 2000^b) apresentaram uma formulação, também acoplada, com base na teoria de cascas abatidas, onde os deslocamentos de membrana e as deflexões e rotações de placa foram interpretados com funções radiais. As integrais de domínio são tratadas com a técnica de reciprocidade dual.

Em 2002, Wen et al. consideraram as cascas com enrijecedores, os quais foram modelados pela teoria de vigas curvas. Dirgantara & Aliabadi (2003) introduziram não linearidade geométrica no problema de casca abatida com dupla curvatura.

Mendonça (2002) analisou estruturas compostas por lâminas planas, acoplando os efeitos de membrana e flexão. A técnica de sub-regiões é utilizada na montagem do sistema final de equações da estrutura não-coplanar.

1.3. OBJETIVOS

Propõe-se aqui um modelo para análise numérica de cascas abatidas, com o qual pretende-se analisar estruturas que apresentem estes elementos como componente principal. A verificação dos limites de aplicabilidade da teoria utilizada, que pressupõe o abatimento da casca, é de interesse neste trabalho.

Como objetivos secundários podem-se citar o estudo e a implementação do método dos elementos de contorno aplicado à análise de placas delgadas e chapas, e o estudo de estratégias para a avaliação de integrais sobre o domínio.

1.4. METODOLOGIA

Considera-se que o comportamento das cascas pode ser entendido como uma composição dos regimes de flexão e membrana. Neste trabalho sua formulação de equilíbrio é escrita, em forma integral, a partir das equações integrais para flexão de placas e para o problema de estado plano de tensão. Com base na teoria de cascas definem-se os termos que, incorporados ao equacionamento proposto, promovem o acoplamento dos dois regimes fundamentais.

A aproximação das integrais de domínio é feita por integração sobre células. As formulações são validadas com base em exemplos da literatura, além de resultados de programas de análise numérica consagrados.

CAPÍTULO 2

ELASTOSTATICIDADE LINEAR – FUNDAMENTOS BÁSICOS

O propósito deste capítulo é a apresentação de alguns fundamentos básicos da teoria da elasticidade no espaço tridimensional, em regime linear. Para tanto, em 2.1 define-se o problema elástico, com as hipóteses pertinentes. Em 2.2 o equacionamento básico é apresentado, bem como as simplificações possíveis para tratamento de estados bidimensionais.

2.1. DEFINIÇÃO DO PROBLEMA

A análise de uma estrutura em um determinado regime deve ser pautada em algumas hipóteses a respeito do seu material constituinte, sua geometria e condições de serviço. No presente caso, valem as seguintes considerações:

- O material é isótropo, homogêneo e elástico linear;
- Não há descontinuidades no material constituinte nem nas propriedades do domínio do corpo;
- Valem os regimes de pequenos deslocamentos e deformações;
- Os campos de deslocamentos são escritos a partir de descrição Lagrangeana, ou seja, o mapeamento das coordenadas é feito em função da configuração indeformada do corpo.

2.2. EQUACIONAMENTO BÁSICO

2.2.1. Relações Deformação – Deslocamento

O conceito de deslocamento traduz as possíveis mudanças de posição de cada ponto de um corpo, sob determinada configuração de forças. Uma alteração na posição relativa entre quaisquer desses pontos, devido a um

deslocamento, configura uma deformação. Caso a posição relativa entre todos os pontos permaneça inalterada, ocorre o chamado movimento de corpo rígido. De forma geral, pode-se definir o tensor de deformações a partir de taxas de variação dos deslocamentos, como segue.

$$\varepsilon_{kj}(q) = \frac{1}{2}(u_{k,j}(q) + u_{j,k}(q) + u_{i,j}u_{i,k}) \quad (2.1)$$

O termo de ordem superior é desprezível em relação às outras derivadas, logo

$$\varepsilon_{kj}(q) = \frac{1}{2}[u_{k,j}(q) + u_{j,k}(q)] \quad (2.2)$$

2.2.2. Relações de Equilíbrio

Admita-se um corpo sólido, em regime elástico linear, com domínio Ω delimitado pelo contorno Γ . Impondo-se o equilíbrio de um elemento infinitesimal representativo de um ponto qualquer do sólido, obtém-se as equações de equilíbrio, escritas em forma condensada como segue:

$$\sigma_{kj,j}(q) + b_k(q) = 0 \quad (2.3)$$

Sendo $\sigma_{kj}(q)$ o componente do tensor de tensões e $b_k(q)$ o componente do vetor das forças de volume atuantes no corpo. As forças de superfície sobre um plano genérico passando em um ponto $Q \in \Gamma$ relacionam-se com as tensões internas pela equação de Cauchy, escrita abaixo,

$$p_k(Q) = \sigma_{jk}(Q)\eta_j \quad (2.4)$$

onde η_j representa o co-seno diretor da direção j , normal ao plano considerado.

Admitindo a ausência de momentos distribuídos no volume, vale o Teorema de Maxwell, que prova a reciprocidade das tensões cisalhantes, estabelecendo-se, assim, a simetria do tensor de tensões:

$$\sigma_{kj} = \sigma_{jk} \quad (2.5)$$

2.2.3. Relação Constitutiva

Na teoria da elasticidade, os tensores de tensão e deformação se relacionam pela chamada lei de Hooke generalizada, escrita a seguir.

$$\sigma_{kj}(\mathbf{q}) = C_{kjml} \varepsilon_{ml}(\mathbf{q}) \quad (2.6)$$

sendo C_{kjml} um tensor de 4ª ordem (81 elementos) representativo dos parâmetros elásticos do material. Considerando isotropia do material, a simetria dos tensores de 2ª ordem envolvidos e o princípio de conservação da energia, pode-se representar as propriedades elásticas do material por dois parâmetros, o módulo de elasticidade longitudinal E e o coeficiente de Poisson ν .

Com base nessa simplificação, pode-se escrever a lei constitutiva como:

$$\sigma_{kj}(\mathbf{q}) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{kj} \varepsilon_{ll}(\mathbf{q}) + 2G \varepsilon_{kj}(\mathbf{q}) \quad (2.7)$$

sendo G o módulo de elasticidade transversal, escrito da forma:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.8)$$

o tensor δ_{kj} , conhecido como delta de Kronecker, é definido por:

$$\delta_{kj} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, k = j \\ 0, k \neq j \end{cases} \quad (2.9)$$

A forma inversa de (2.7) é útil na obtenção de campos de deformações, sendo escrita a seguir.

$$\varepsilon_{kj}(\mathbf{q}) = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{kj}(\mathbf{q}) - \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{ii}(\mathbf{q}) \delta_{kj} \right) \quad (2.10)$$

Substituindo-se (2.2) em (2.7) pode-se representar as tensões em termos de deslocamentos:

$$\sigma_{kj}(q) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{kj} u_{1,1}(q) + G[u_{k,j}(q) + u_{j,k}(q)] \quad (2.11)$$

Reescrevendo a equação de Cauchy (2.4), obtém-se

$$p_k(Q) = \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{1,1}(Q) \eta_k + G[u_{j,k}(Q) \eta_j + u_{k,\eta}(Q)] \quad (2.12)$$

A substituição de (2.11) em (2.3) leva à equação de equilíbrio em deslocamentos, a chamada equação de Navier,

$$u_{k,jj}(q) + \frac{1}{1-2\nu} u_{j,kj}(q) + \frac{b_k(q)}{G} = 0 \quad (2.13)$$

Nos problemas de engenharia, comumente pode-se recorrer a análises em âmbito bidimensional, simplificando o processo de solução. Assim, é necessário introduzir algumas simplificações na formulação até aqui descrita.

Numa primeira situação, admitem-se nulas as componentes de deformação ao longo de uma das dimensões do corpo, o denominado estado plano de deformação (EPD). Esta simplificação é comumente adotada quando uma das dimensões do corpo em estudo é bem maior do que as outras duas. Para esse caso, a formulação apresentada permanece inalterada, observando-se que os índices passam a variar de 1 a 2.

Já no chamado estado plano de tensão (EPT) supõem-se nulas as tensões ao longo de uma das dimensões do corpo, ao longo da qual também atua o carregamento. Essas duas hipóteses representam bem corpos que apresentam uma dimensão muito menor que as demais, por exemplo a espessura de uma placa. A formulação para o EPT pode ser derivada a partir da utilizada no EPD, redefinindo a constante elástica de poisson, a seguir:

$$\nu' = \frac{\nu}{1+\nu} \quad (2.14)$$

CAPÍTULO 3

FUNDAMENTOS DA TEORIA CLÁSSICA DE PLACAS

Este capítulo trata de alguns pontos importantes no tocante ao estudo de placas delgadas. O item 3.1 traz conceitos básicos e hipóteses admitidas na teoria clássica de placas. Em 3.2 apresenta-se o equacionamento básico envolvido, sendo a consideração das condições de contorno no problema descrita no item 3.3.

3.1. DEFINIÇÕES E HIPÓTESES INICIAIS

Entende-se por placa um corpo delimitado por duas superfícies planas e paralelas, separadas de uma distância muito pequena em relação às demais dimensões, a espessura da placa (t). Ainda, o carregamento atua na direção normal ao plano médio, como é chamado o plano paralelo às faces da placa e eqüidistante destas, no caso de espessura constante.

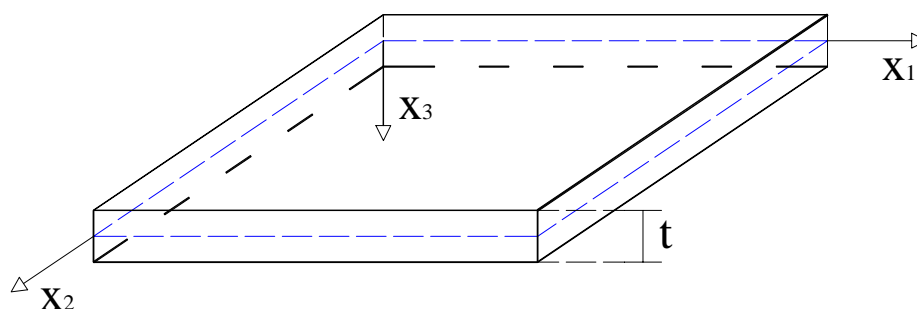


Figura 3.1 – Esquema ilustrativo da placa e definição do sistema de coordenadas

Serão admitidas aqui as hipóteses devidas à Kirchhoff (1876), para tratamento de placas delgadas:

- Os deslocamentos transversais da placa são pequenos em relação à espessura;
- São nulas as tensões cisalhantes nas faces inferior e superior da placa;
- Qualquer reta normal à superfície média indeformada permanece normal e reta após a deformação;
- Na lei constitutiva, desprezam-se as tensões normais atuantes em planos paralelos ao plano médio;

Além destas, valem as hipóteses admitidas na teoria da elasticidade.

3.2. EQUACIONAMENTO BÁSICO

3.2.1. Lei Constitutiva

A partir da relação (2.2) e seguindo a notação da figura 3.1, pode-se explicitar as componentes nulas de deformação da forma:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = 0 \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = 0\end{aligned}\tag{3.1}$$

Lembrando que os deslocamentos u_1 e u_2 são lineares ao longo da espessura (x_3), a integração das equações (3.1) resulta:

$$\begin{aligned}u_1 &= -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ u_2 &= -x_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\end{aligned}\tag{3.2}$$

O campo de deslocamentos considerado na direção 3 é o referente à superfície média, denotado aqui por w , logo:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_1} \\
 u_2 &= -x_3 \frac{\partial w}{\partial x_2} \\
 u_3 &= w
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Vale destacar que os deslocamentos u , v e w são funções apenas de x_1 e x_2 . Os termos não-nulos do tensor de deformações podem agora ser escritos:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\
 \varepsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \\
 \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = -x_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}
 \end{aligned} \tag{3.4}$$

Com base na lei de Hooke generalizada para material isótropo (2.7), e admitindo estado plano de tensões, as tensões em termos de deslocamentos valem:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{11} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left[x_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \right] \\
 \sigma_{22} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left[x_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right) \right] \\
 \sigma_{12} &= -2Gx_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

3.2.2. Equações de Equilíbrio

Definindo-se um sistema coordenado no plano médio da placa, como na figura 3.1, tome-se um elemento infinitesimal, ilustrado abaixo.

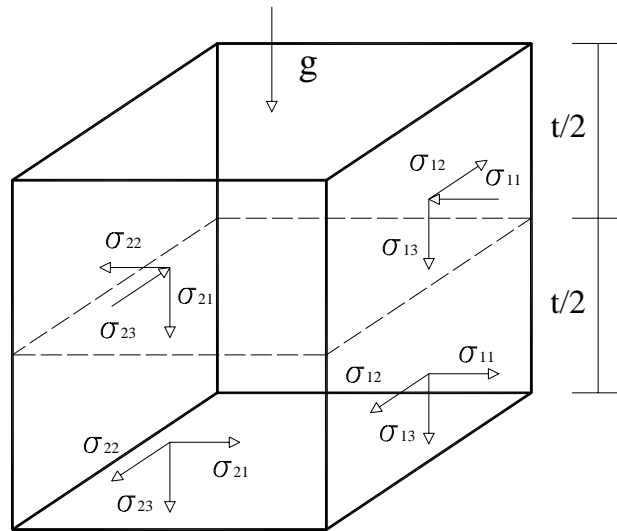


Figura 3.2 – Esquema dos esforços solicitantes em um elemento da placa

A imposição do equilíbrio das forças na direção vertical (\$x_3\$), incluindo um possível carregamento distribuído \$g\$, leva à expressão

$$\int_{-t/2}^{t/2} \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + b_3 + g \right) dx_3 = 0 \quad (3.6)$$

que, desprezadas as forças de volume, resulta em:

$$\frac{\partial q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial q_2}{\partial x_2} + g = 0 \quad (3.7)$$

A expressão acima é escrita em função dos esforços cortantes \$q_i\$, que valem

$$q_i = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{i3} dx_3, \quad i = 1, 2 \quad (3.8)$$

ou, em deslocamentos

$$q_i = -D(w_{,ikk}) \quad (3.9)$$

onde a constante D está associada à rigidez flexional da placa, e depende de propriedades geométricas e de material, como segue.

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (3.10)$$

As equações correspondentes ao equilíbrio de momentos em relação aos eixos x_1 e x_2 resultam

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial m_{22}}{\partial x_2} - q_2 &= 0 \\ \frac{\partial m_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial m_{12}}{\partial x_2} - q_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

sendo:

$$m_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{ij} x_3 dx_3 \quad , i = 1 \dots 2 \quad (3.12)$$

ou, em deslocamentos:

$$m_{ij} = -D \frac{1-\nu}{2} \left[2w_{,ij} + \frac{2\nu}{1-\nu} w_{,kk} \delta_{ij} \right] \quad (3.13)$$

Como visto nas equações (3.7) e (3.11), as representações de equilíbrio da placa foram desenvolvidas em termos de esforços resultantes m_{ij} e q_i . Cabe ressaltar que isso é feito com base na hipótese de que as tensões possuem distribuição linear ao longo da espessura, podendo ser representados os esforços por suas resultantes na superfície média (Fig. 3.3).

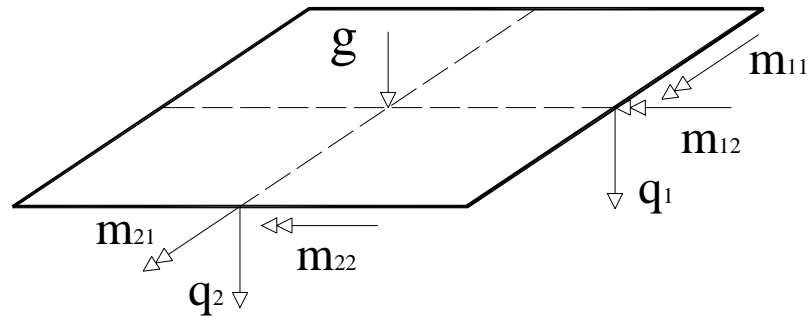


Figura 3.3 – Esquema das resultantes dos esforços

A partir das equações (3.9) e (3.13) e utilizando a fórmula de Cauchy (2.4), pode-se reescrever os esforços fletor e cortante, agora como forças de contorno,

$$Q_n = -D(w_{,kki})\eta_i$$

$$M_i = -D \frac{1-\nu}{2} \left[2w_{,ik}\eta_k + \frac{2\nu}{1-\nu} w_{,kk}\eta_i \right]$$

Observe-se que o momento na borda é uma grandeza vetorial, representada por suas duas componentes nas direções globais.

Manipulando-se as equações (3.7) e (3.11), chega-se a equação de equilíbrio condensada da placa, a seguir.

$$\frac{\partial^2 m_{11}}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 m_{22}}{\partial x_2^2} - \frac{\partial q_1}{\partial x_1} - \frac{\partial q_2}{\partial x_2} = 0 \tag{3.14}$$

De posse da representação das tensões em termos de deslocamentos (3.5), pode-se reescrever as integrais das expressões dos esforços, originando uma outra forma da equação diferencial governante, em deslocamentos:

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = \frac{g}{D} \tag{3.15}$$

Geralmente, na descrição de problemas de placa, é conveniente a adoção de um sistema de coordenadas alternativo, baseado nas direções

normal e tangencial ao contorno da placa. O estudo das condições de contorno do problema, feita a seguir, será referenciado nesse novo sistema ns .

3.3. VALORES DE CONTORNO

Com base no conhecimento do problema físico de placas delgadas, têm-se como condições de contorno as seguintes grandezas:

$$w, \frac{\partial w}{\partial n}, \frac{\partial w}{\partial s} \text{ (essenciais ou de Dirichlet)}$$

$$Q_n, M_n, M_{ns} \text{ (naturais ou de Neumann)}$$

A solução pela teoria de Kirchhoff, onde se desprezam as tensões normais na direção 3, recai na equação diferencial (3.15), que requer quatro condições de contorno. Logo, duas condições, uma natural e uma essencial, tornam-se redundantes na solução do problema, de forma que a condição essencial $\frac{\partial w}{\partial s}$ é desprezada. Com relação às condições naturais, o momento cruzado M_{ns} é incorporado à força cortante Q_n , dando origem a um novo esforço cortante equivalente, definido pela expressão:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \quad (3.16)$$

Os valores de contorno para os tipos de vínculo mais comuns são dados,

$$w = 0, M_n = \bar{M} \text{ (apoio simples)}$$

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ (engaste)}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0, V_n = 0 \text{ (engaste móvel)}$$

$$M_n = 0, V_n = 0 \text{ (livre)}$$

CAPÍTULO 4

EQUACÕES INTEGRAIS PARA ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL

Definem-se aqui a solução do problema elástico no estado fundamental, a chamada solução de Kelvin (4.1), bem como as equações integrais de contorno correspondentes, ambas necessárias ao desenvolvimento da formulação do MEC.

4.1. SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Para a caracterização do problema fundamental, considera-se um domínio infinito Ω^* , submetido a uma carga concentrada unitária atuante no ponto s (ponto fonte), ao longo da direção i . A fim de representar o carregamento unitário, reescreve-se a parcela $b_k(q)$, da equação de equilíbrio do problema elástico (2.3), como uma distribuição delta de Dirac, ponderada por um delta de Kronecker que relaciona as direções i e k ,

$$b_{ik}(q) = \delta(s, q) \delta_{ik} \quad (4.1)$$

A distribuição de Dirac, comumente utilizada na representação de forças concentradas em elasticidade, assume valores nulos ou que tendem ao infinito, como segue:

$$\delta(s, q) = \begin{cases} \infty, s = q \\ 0, s \neq q \end{cases} \quad (4.2)$$

Uma propriedade importante desta função é a seguinte:

$$\int_{\Omega} f(y)\delta(x, y)d\Omega(y) = f(x) \quad (4.3)$$

A equação de equilíbrio (2.3), para fins de solução fundamental, pode então ser escrita da forma:

$$\sigma_{ik,j}^*(s, q) + \delta(s, q)\delta_{ik} = 0 \quad (4.4)$$

onde $\sigma^*(s, q)$ é o tensor de tensões no estado fundamental. Todas as grandezas referentes ao estado fundamental serão indicadas no texto com um asterisco (*).

A partir da equação (2.2) escreve-se a Lei de Hooke (2.7) em termos de deslocamentos. Derivando esta em relação à x_j , obtém-se o primeiro termo da equação acima, que resulta:

$$\frac{1}{1-2\nu} u_{ij,kj}^*(s, q) + u_{ik,jj}^*(s, q) + \frac{1}{G} \delta(s, q)\delta_{ik} = 0 \quad (4.5)$$

onde $u^*(s, q)$ representa o campo de deslocamentos no estado fundamental.

As soluções da equação (4.5), para os casos bi e tridimensional, valem:

$$u_{ik}^*(s, q) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[-(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ik} + r_i r_k \right] \quad (2-D) \quad (4.6)$$

$$u_{ik}^*(s, q) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \left[(3-4\nu)\delta_{ik} + r_i r_k \right] \quad (3-D) \quad (4.7)$$

sendo r a distância entre os pontos fonte e de avaliação, s e q , respectivamente.

Derivando-se a equação (4.7) em relação a x_j , e substituindo na expressão (2.2), obtém-se o tensor de deformações no problema fundamental. Este será aqui apresentado numa expressão geral, válida para os casos em

duas ou três dimensões, a depender das constantes auxiliares α e β , como segue:

$$\varepsilon_{ijk}^*(s, q) = -\frac{1}{8\pi\alpha(1-\nu)Gr^\alpha} \left[(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik}) - r_{,i}\delta_{jk} + \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (4.8)$$

$$\alpha = 1; \beta = 2 \quad (2\text{-D})$$

$$\alpha = 2; \beta = 3 \quad (3\text{-D})$$

A partir da lei de Hooke, pode-se escrever as tensões, como segue:

$$\sigma_{ijk}^*(s, q) = -\frac{1}{4\pi\alpha(1-\nu)r^\alpha} \left[(1-2\nu)(r_{,k}\delta_{ij} + r_{,j}\delta_{ik} - r_{,i}\delta_{jk}) + \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (4.9)$$

É também de interesse a expressão da força de superfície relacionada à solução fundamental. De posse da expressão acima, e fazendo uso da fórmula de Cauchy (2.4), chega-se à:

$$p_{ik}^*(s, q) = -\frac{1}{4\pi\alpha(1-\nu)r^\alpha} \left\{ \left[(1-2\nu)\delta_{ij} + \beta r_{,i}r_{,j} \right] r_{,n} - (1-2\nu)(r_{,i}\eta_j - r_{,j}\eta_i) \right\} \quad (4.10)$$

4.2. FORMULAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

A aplicação do método dos elementos de contorno a um determinado corpo requer a representação do equilíbrio deste na forma integral, a qual pode ser obtida a partir de métodos de resíduos ponderados, definindo como função ponderadora a solução fundamental para a variável básica do problema que, no problema elástico por exemplo, corresponde aos deslocamentos u_{ik}^* .

Embora o procedimento via resíduos ponderados seja consagrado, adota-se aqui uma metodologia alternativa, proposta por Somigliana (1886), baseada no teorema da reciprocidade de Betti. O teorema fundamenta-se no princípio da conservação de energia e define que, para um sólido de volume V entre dois estados quaisquer, vale a relação:

$$\int_V \sigma_1(q) \varepsilon_2(q) dV = \int_V \varepsilon_1(q) \sigma_2(q) dV \quad (4.11)$$

Desta forma, admita-se um domínio finito Ω , delimitado pelo contorno Γ , inserido num meio infinito Ω^* . Considera-se a existência de dois carregamentos, sendo que um deles atua na região Ω , correspondendo ao problema real. O segundo, relacionado ao problema fundamental, atua no domínio infinito Ω^* . Com base no teorema supracitado, é possível escrever

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}(q) \varepsilon_{ijk}^*(s, q) d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{jk}(q) \sigma_{ijk}^*(s, q) d\Omega \quad (4.12)$$

Pela equação de deformação deslocamento (2.2), a expressão assume a forma

$$\int_{\Omega} \sigma_{jk}(q) u_{ik,j}^*(s, q) d\Omega = \int_{\Omega} u_{k,j}(q) \sigma_{ijk}^*(s, q) d\Omega \quad (4.13)$$

Integrando-se por partes, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \sigma_{jk}(Q) u_{ik}^*(s, Q) \eta_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk,j}(q) u_{ik}^*(s, q) d\Omega = \\ \int_{\Gamma} \sigma_{ijk}^*(Q) u_k(Q) \eta_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ijk,j}^*(q) u_k(s, q) d\Omega \end{aligned} \quad (4.14)$$

Com base na equação de Cauchy (2.4), pode-se escrever

$$\int_{\Gamma} P_k u_{ik}^*(s, Q) d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jk,j}(q) u_{ik}^*(s, q) d\Omega = \int_{\Gamma} P_{ik}^* u_k(Q) d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ijk,j}^*(q) u_k(q) d\Omega \quad (4.15)$$

Pode-se substituir as derivadas das tensões que aparecem nas integrais de domínio pelos valores das cargas de volume correspondentes (Eq. 2.3 e 4.3), resultando

$$\int_{\Gamma} P_k u_{ik}^*(s, Q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_k(q) u_{ik}^*(s, q) d\Omega = \int_{\Gamma} P_{ik}^* u_k(Q) d\Gamma + \int_{\Omega} \delta(s, q) \delta_{ik} u_k(q) d\Omega \quad (4.16)$$

Utilizando-se da propriedade da distribuição de Dirac mostrada na equação (4.3), pode-se organizar a equação acima da forma que segue.

$$u_i(s) = \int_{\Gamma} P_k(Q) u_{ik}^*(s, Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ik}^*(s, Q) u_k(Q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_k(q) u_{ik}^*(s, q) d\Omega \quad (4.17)$$

A equação Somigliana, escrita acima, define o campo de deslocamentos em um ponto de colocação s do domínio, a partir dos deslocamentos e forças medidas em pontos do contorno.

Para fins de utilização do MEC, é necessária uma representação integral dos deslocamentos de pontos do contorno. Para sua obtenção, introduz-se um domínio complementar, em forma de um semicírculo de raio ω , em torno do ponto de colocação S (Fig. 4.1), de forma que este possa ser tratado como ponto interno, pela já conhecida equação Somigliana.

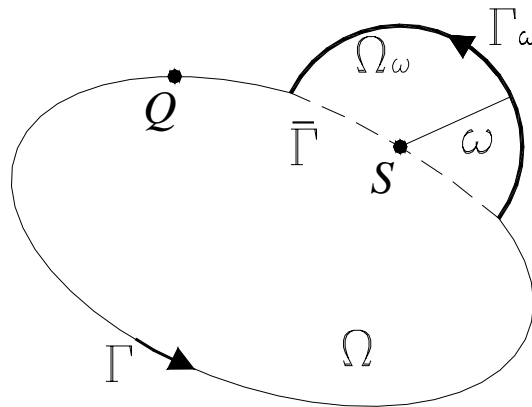


Figura 4.1 – Inclusão do domínio complementar infinitesimal

Redefinindo (4.17), considerando a inclusão do domínio infinitesimal, obtém-se

$$\begin{aligned} u_i(S) = & \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} P_k(Q) u_{ik}^*(S, Q) d\Gamma + \int_{\Gamma_\omega} P_k(Q) u_{ik}^*(S, Q) d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} P_{ik}^*(S, Q) u_k(Q) d\Gamma - \int_{\Gamma_\omega} P_{ik}^*(S, Q) u_k(Q) d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} b_k(q) u_{ik}^*(S, q) d\Omega + \int_{\Omega_\omega} b_k(q) u_{ik}^*(S, q) d\Omega \end{aligned} \quad (4.18)$$

Para a caracterização de S como ponto de contorno, faz-se o limite da expressão acima quando ω tende a zero. Aplicando o limite, as integrais sobre $\Gamma - \bar{\Gamma}$ permanecem iguais às originais sobre Γ . As integrais sobre Ω_ω e Γ_ω se anulam, exceto a que contém os deslocamentos sobre o contorno infinitesimal, a qual apresenta singularidade de ordem $\frac{1}{r}$, devendo ser resolvida em termos de valor principal de Cauchy. Desta forma, a equação Somigliana adaptada para pontos do contorno resulta

$$C_{ik} u_k(S) = \int_{\Gamma} P_k(Q) u_{ik}^*(S, Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{ik}^*(S, Q) u_k(Q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_k(q) u_{ik}^*(S, q) d\Omega \quad (4.19)$$

A avaliação do termo C_{ik} depende do trecho do contorno onde está localizado o ponto fonte. Consideram-se as possibilidades de contorno suave, com uma única tangente passando pelo ponto, e contorno anguloso. Os valores são definidos a seguir:

$$C_{ik} = \frac{1}{2} \delta_{ik} \text{ (suave)} \quad (4.20)$$

$$C_{ik} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\text{sen}(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} \\ \frac{\text{sen}(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{\cos(2\gamma)\text{sen}(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} \end{bmatrix} \text{ (anguloso)} \quad (4.21)$$

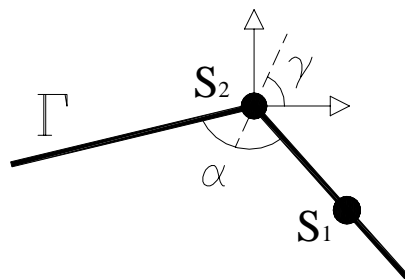


Figura 4.2 – Pontos S_1 e S_2 em contorno suave e anguloso, respectivamente

4.2.1. Análise em Pontos Internos ao Domínio

Com base nos valores calculados sobre o contorno, pode-se avaliar os deslocamentos e tensões em pontos internos. A equação Somigliana (4.17), fornece os valores de deslocamento num ponto qualquer do domínio. Substituindo essa definição integral dos deslocamentos na lei de Hooke, obtém-se a expressão das tensões,

$$\sigma_{ij}(s) = - \int_{\Gamma} S_{ijk}(s, Q) u_k(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, Q) P_k(Q) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ijk}(s, q) b_k(q) d\Omega \quad (4.22)$$

os tensores S_{ijk} e D_{ijk} valem:

$$S_{ijk} = \frac{G}{2\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{jk}r_{,i} + \delta_{ik}r_{,j}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \right. \\ \left. + 2\nu(\eta_i r_{,j} r_{,k} + \eta_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(2\eta_k r_{,i} r_{,j} + \eta_i \delta_{jk} + \eta_j \delta_{ik}) - (1-4\nu)\eta_k \delta_{ij} \right\} \quad (4.23)$$

$$D_{ijk} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left[(1-2\nu)(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right] \quad (4.24)$$

CAPÍTULO 5

EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA PLACAS DELGADAS

O objetivo do capítulo é equacionar o problema de placas delgadas de forma integral. A exemplo do capítulo anterior, inicialmente apresenta-se a solução fundamental correspondente, sendo a formulação integral mostrada na seqüência, em 5.2.

5.1. SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

Como já colocado no item 4.1, a definição de problema fundamental está relacionada a um domínio infinito onde atua uma carga concentrada unitária. No presente caso admite-se uma placa circular, sujeita a uma carga transversal no ponto fonte s , admitido no centro da placa. A solução fundamental consiste na deflexão em um ponto qualquer q na vizinhança do ponto fonte, quando considera-se o raio tendendo ao infinito.

Em se tratando de um domínio circular, é conveniente escrever o equilíbrio da placa (eq. 3.12) em coordenadas polares. O operador bi-harmônico, no sistema polar (r, θ) , é escrito da forma

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \quad (5.1)$$

A representação da carga unitária na equação de equilíbrio da placa (3.12) é feita a partir da função delta de Dirac, definida nas equações (4.2) e (4.3), sendo o equilíbrio reescrito para o problema fundamental da forma

$$\nabla^4 w^*(s, q) = \frac{\delta(s, q)}{D} \quad (5.2)$$

a solução desta equação é dada por:

$$w^*(s, q) = \frac{C_1}{4} r^2 \ln(r) + (C_2 - C_1) \frac{r^2}{8} + C_3 \ln(r) + C_4 \quad (5.3)$$

Na determinação das constantes observe-se inicialmente que, devido à simetria em torno do ponto fonte, neste a taxa de variação do deslocamento em relação ao raio é nula, levando a $C_3 = 0$. Tomando um círculo de raio r em torno do ponto fonte, e impondo-se o equilíbrio de forças na direção transversal obtém-se, após algum algebrismo, o valor de C_1 :

$$C_1 = \frac{1}{2\pi D} \quad (5.4)$$

A avaliação das constantes C_2 e C_4 é feita a partir das condições de contorno da placa. No problema fundamental, onde o raio tende ao infinito, as constantes podem ser arbitradas, sendo aqui admitidas nulas conforme sugerido por Paiva (1987). Assim, a solução fundamental resulta:

$$w^*(s, q) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln(r) - \frac{1}{2} \right) \quad (5.5)$$

A partir da expressão acima pode-se escrever, para o problema fundamental, outras grandezas envolvidas na solução de placa, como a rotação e os esforços preponderantes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w^*(s, q)}{\partial x_i} &= \frac{r \ln(r)}{4\pi D} \frac{\partial r}{\partial x_i} \\ q_i^*(s, q) &= -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial r}{\partial x_i} \\ m_{ij}^*(s, q) &= -\frac{1}{4\pi} \left\{ [\nu + \nu \ln(r) + \ln(r)] \delta_{ij} + (1 - \nu) \frac{\partial r}{\partial x_i} \frac{\partial r}{\partial x_j} \right\} \end{aligned} \quad (5.6)$$

5.2. FORMULAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

Conforme já mostrado em 4.2, a obtenção da equação integral pode ser feita a partir do teorema da reciprocidade de Betti, procedimento aqui adotado.

Admite-se uma placa de domínio finito Ω , delimitado pelo contorno Γ , inserida em outra de meio infinito Ω^* . Considera-se a existência de dois carregamentos, sendo que um deles atua na região Ω , correspondendo ao problema real. O segundo, relacionado ao problema fundamental, atua no domínio infinito Ω^* . Com base no teorema da reciprocidade de Betti, é possível escrever

$$\int_V \sigma_{ij}^*(s, q) \varepsilon_{ij}(q) dV = \int_V \sigma_{ij}(q) \varepsilon_{ij}^*(s, q) dV \quad (5.7)$$

Com base nas hipóteses de Kirchhoff, e escrevendo-se as tensões e deformações em termos de deslocamentos, a integração ao longo da espessura leva a

$$\int_{\Omega} m_{ij}^*(s, q) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(q) d\Omega = \int_{\Omega} m_{ij}(q) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(s, q) d\Omega \quad (5.8)$$

Fazendo integração por partes, obtém-se a expressão:

$$\int_{\Gamma} \left(m_{ij}(Q) \frac{\partial w^*}{\partial x_i}(s, Q) \eta_j - \frac{\partial m_{ij}}{\partial x_j}(Q) w^*(s, Q) \eta_i \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 m_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}(Q) w^*(s, Q) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(m_{ij}^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial x_i}(Q) \eta_j - \frac{\partial m_{ij}^*}{\partial x_j}(s, Q) w(Q) \eta_i \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial^2 m_{ij}^*}{\partial x_i \partial x_j}(s, q) w(q) d\Omega \quad (5.9)$$

Com base nas equações de equilíbrio de placas,

$$\int_{\Gamma} \left(M_i(Q) \frac{\partial w^*}{\partial x_i}(s, Q) - Q_n(Q) w^*(s, Q) \right) d\Gamma - \int_{\Omega} g(q) w^*(s, q) d\Omega = \int_{\Gamma} \left(M_i^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial x_i}(Q) - Q_n^*(s, Q) w(Q) \right) d\Gamma - \int_{\Omega} g^*(s, q) w(q) d\Omega \quad (5.10)$$

Pode-se manipular os termos das integrais de contorno em que constam momento e rotação, a fim de se trabalhar com um sistema de coordenadas normal e tangencial ao contorno Γ , como segue

$$\begin{aligned} M_i(Q) \frac{\partial w^*}{\partial x_i}(s, Q) &= M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(s, Q) + M_{ns}(Q) \frac{\partial w^*}{\partial s}(s, Q) \\ M_i^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial x_i}(Q) \eta_j &= M_n^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + M_{ns}^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Aplicando a propriedade da distribuição de Dirac ao último termo da equação (5.10), esta pode ser reescrita assim:

$$\begin{aligned} w(s) &= \int_{\Gamma} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(s, Q) - M_{ns}(Q) \frac{\partial w^*}{\partial s}(s, Q) + Q_n(Q) w^*(s, Q) \right) d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma} \left(-M_n^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - M_{ns}^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial s}(Q) + Q_\eta(s, Q) w(Q) \right) d\Gamma \\ &+ \int_{\Omega} g(q) w^*(s, q) d\Omega \end{aligned} \quad (5.12)$$

Conforme visto no capítulo 3, o momento volvente M_{ns} e a rotação na direção tangencial $\frac{\partial w}{\partial s}$ podem ser reescritos. A integração do termo de $M_{ns}(Q)$ leva a:

$$\int_{\Gamma} M_{ns}(Q) \frac{\partial w^*}{\partial s}(s, Q) d\Gamma = \sum_{k=1}^{N_t} M_{ns}^k(Q) w^*(s, Q) \Big|_{\Gamma_1^k}^{\Gamma_2^k} - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}(Q) w^*(s, Q) d\Gamma \quad (5.13)$$

na qual N_t representa o número total de trechos definidos por uma única normal, sendo estes trechos limitados pelos extremos Γ_1^k e Γ_2^k . Para um domínio fechado, o número de trechos com descontinuidade geométrica N_t corresponde ao número de vértices do contorno. Logo, a somatória da equação acima é equivalente a uma somatória em termos de N_v , que representa o número de vértices da placa, como segue:

$$\sum_{k=1}^{N_t} M_{ns}^k(Q) w^*(s, Q) \Big|_{\Gamma_1^k}^{\Gamma_2^k} = \sum_{k=1}^{N_v} \left[M_{ns}^p(Q) - M_{ns}^a(Q) \right] \Big|_k w^*(s, Q) \quad (5.14)$$

M_{ns}^p e M_{ns}^a são os momentos volventes posterior e anterior de um vértice, como ilustrado na figura 5.1. A partir destes define-se a chamada reação de canto R_c da placa, a qual é necessária para manutenção do equilíbrio da placa na teoria de Kirchhoff,

$$R_c = \left[M_{ns}^p(Q) - M_{ns}^a(Q) \right] \Big|_c \quad (5.15)$$

Analogamente, para o termo correspondente ao problema fundamental:

$$R_c^* = \left[M_{ns}^{*p}(s, Q) - M_{ns}^{*a}(s, Q) \right] \Big|_c \quad (5.16)$$

Aplicando um procedimento semelhante, elimina-se $\frac{\partial w}{\partial s}$, de forma que a equação dos deslocamentos num ponto do domínio (Eq. 5.12) resulta da forma

$$\begin{aligned} w(s) = & \int_{\Gamma} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(s, Q) + V_n(Q) w^*(s, Q) \right) d\Gamma + \sum_{k=1}^{N_v} R_c(Q) w^*(s, Q) \\ & - \int_{\Gamma} \left(-M_n^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(s, Q) w(Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_v} R_c^*(s, Q) w(Q) \\ & + \int_{\Omega_g} (g(q) w^*(s, q)) d\Omega_g \end{aligned} \quad (5.17)$$

sendo V_n e V_n^* os esforços cortantes equivalentes (Eq. 3.15), e Ω_g representa a área efetiva do carregamento $g(q)$.

Com base no princípio de Saint-Venant, e na análise discreta do contorno, pode-se admitir que a reação de canto R_c é distribuída ao longo dos elementos adjacentes, de forma que o termo referente à reação é omitido da equação (5.17), sem prejuízo significativo da precisão dos resultados.

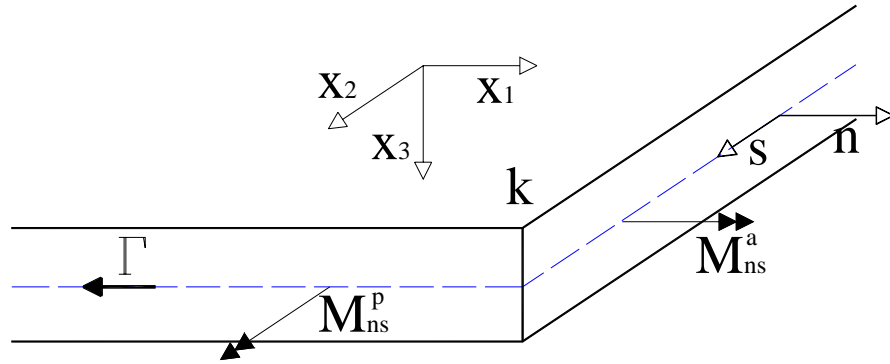


Figura 5.1 – Definição dos momentos anterior e posterior ao canto “k” da placa

Para a aplicação do MEC, necessita-se da formulação integral para um ponto genérico S do contorno. Num procedimento semelhante ao mostrado no capítulo 4, introduz-se um domínio complementar Ω_ϵ em torno de um ponto de canto da placa (Fig. 5.2). Fazendo deste o ponto fonte, ele está inserido no novo domínio, de forma que seus deslocamentos podem ser obtidos pela equação integral (5.17).

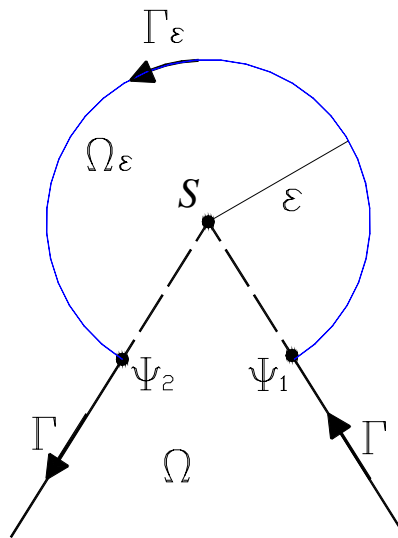


Figura 5.2 – Inclusão do domínio complementar em torno do canto da placa

Ficam definidos dois novos vértices Ψ_1 e Ψ_2 , em substituição ao ponto de canto inicialmente definido, sendo a equação reescrita assim:

$$\begin{aligned}
w(s) = & \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) + V_n(Q) w^*(S, Q) \right) d\Gamma \\
& + \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) + V_n(Q) w^*(S, Q) \right) d\Gamma_\varepsilon \\
& - \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left(-M_n^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(s, Q) w(Q) \right) d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_\varepsilon} \left(-M_n^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(s, Q) w(Q) \right) d\Gamma_\varepsilon \\
& - \sum_{k=1}^{N_v-1} [R_c^*(S, Q) w(Q)] \Big|_k - [R_c^*(S, Q) w(Q)] \Big|_{\Gamma_1} - [R_c^*(S, Q) w(Q)] \Big|_{\Gamma_2} \\
& + \int_{\Omega_g} (g(q) w^*(S, q) w(Q)) d\Omega_g
\end{aligned} \tag{5.18}$$

A definição de S como ponto de contorno é feita impondo-se a condição limite do raio ε tender a zero, em cada termo da equação dos deslocamentos. Operando estes limites corretamente, como mostrado em Chueiri (1994), obtém-se a equação integral para pontos do contorno:

$$\begin{aligned}
C(S)w(S) = & \int_{\Gamma} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) + V_n(Q) w^*(S, Q) \right) d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma} \left(-M_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(S, Q) w(Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_v} R_c^*(S, Q) w(Q) \\
& + \int_{\Omega_g} (g(q) w^*(S, q)) d\Omega_g
\end{aligned} \tag{5.19}$$

a constante $C(S)$ depende do ângulo interno do vértice da placa β , sendo definida por

$$C(S) = \frac{\beta(S)}{2\pi} \tag{5.20}$$

5.2.1. Análise em Pontos Internos ao Domínio

A deflexão num ponto interno qualquer da placa pode ser calculada por (5.17). A partir desta, obtém-se a representação integral dos esforços cortante e fletor, definidos em (3.9) e (3.13):

$$\begin{aligned}
 q_j(s) = & \int_{\Gamma} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w_j^*}{\partial n}(s, Q) + V_n(Q) w_j^*(s, Q) \right) d\Gamma \\
 & - \int_{\Gamma} \left(-M_{nj}^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_{nj}^*(s, Q) w(Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_v} R_{cj}^*(s, Q) w(Q) \\
 & + \int_{\Omega_g} \left(g(q) w_j^*(s, q) \right) d\Omega_g
 \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}
 M_{ij}(s) = & \int_{\Gamma} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w_{ij}^*}{\partial n}(s, Q) + V_n(Q) w_{ij}^*(s, Q) \right) d\Gamma \\
 & - \int_{\Gamma} \left(-M_{nij}^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_{nij}^*(s, Q) w(Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_v} R_{cij}^*(s, Q) w(Q) \\
 & + \int_{\Omega_g} \left(g(q) w_{ij}^*(s, q) \right) d\Omega_g
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

Sendo que as variáveis genéricas X_j^* e X_{ij}^* são escritas de acordo com os esforços cortante e fletor, respectivamente, como mostrado abaixo:

$$X_j^*(s, Q) = -D \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 X^*}{\partial x_k \partial x_k}(s, Q) \right) \tag{5.23}$$

$$X_{ij}^*(s, Q) = -D \frac{1-\nu}{2} \left[2 \frac{\partial^2 X^*}{\partial x_i \partial x_j}(s, Q) + \left(\frac{2\nu}{1-\nu} \right) \frac{\partial^2 X^*}{\partial x_k \partial x_k}(s, Q) \delta_{ij} \right] \tag{5.24}$$

As derivadas das soluções fundamentais, calculadas no ponto fonte s , são apresentadas no anexo I.

CAPÍTULO 6

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Neste capítulo faz-se uma breve apresentação do método dos elementos de contorno. Alguns comentários gerais são postos em 6.1, e em 6.2 define-se a filosofia do método. A aplicação do MEC aos problemas de membrana e de placa é ilustrada nos itens 6.3 e 6.4, respectivamente.

6.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

Diante das dificuldades na obtenção de soluções analíticas para problemas de modelagem em geral, surgem os chamados métodos numéricos, baseados em soluções aproximadas calculadas em pontos discretos do domínio em análise.

Dentre estes, o método dos elementos finitos (MEF) por muitos anos figurou como a alternativa mais amplamente difundida no meio científico, com utilização em diversas áreas do conhecimento.

Os desenvolvimentos em métodos de elementos de contorno foram impulsionados a partir da identificação de limitações do MEF em aplicações de engenharia, especialmente aquelas que apresentavam algum tipo de singularidade resultando, por exemplo, em campos de tensões tendendo ao infinito em determinados pontos.

Uma das vantagens do MEC é a necessidade de discretização apenas na superfície de contorno, e não em todo o volume. Desta forma, as malhas de elementos de contorno normalmente resultam menos densas que as utilizadas em elementos finitos, podendo levar a uma maior facilidade de modelagem e menor custo computacional. No caso em análise, considerando que existem integrais de domínio, utiliza-se um procedimento de discretização deste em

células, o que não inviabiliza o uso do MEC, mantendo-o competitivo em relação a outros métodos aproximados.

6.2. ELEMENTOS DE CONTORNO E DISCRETIZAÇÃO

Partindo da formulação integral de um problema, escrita para pontos do contorno, seu tratamento depende da descrição clara desse contorno.

O objetivo principal do MEC é, com base no equacionamento integral, a montagem de um sistema de equações algébricas que permite a determinação direta dos valores de contorno aproximados e, a partir deles, dos demais valores necessários à análise. Naturalmente, são infinitas as equações possíveis de serem escritas, visto que pode-se aplicar a formulação integral a infinitos pontos da fronteira, do domínio ou pontos externos a este.

A representação equivalente do contorno, em dimensão finita, é feita com a definição de nós que delimitam os chamados elementos de contorno. Esta parametrização do contorno pode ser exata ou aproximada, dependendo da geometria do domínio em análise e do tipo de parametrização adotada. A figura 6.1 ilustra as duas situações, com o uso de elementos lineares.

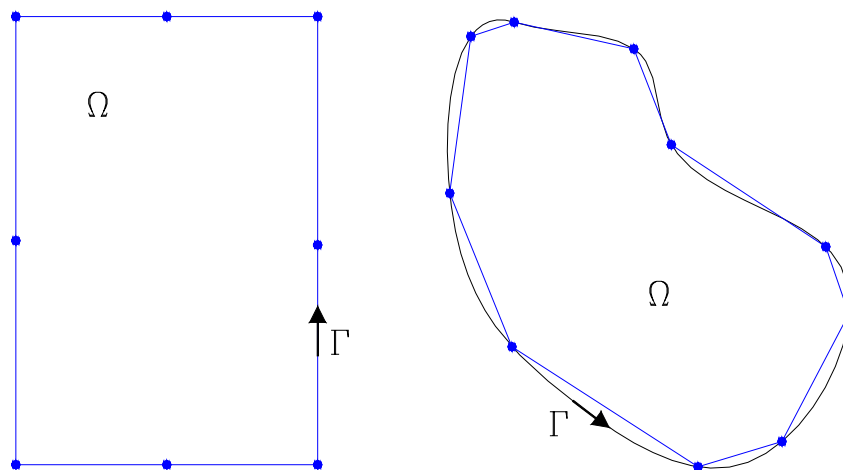


Figura 6.1 – Discretizações de contorno exata e aproximada

Além da caracterização geométrica do elemento, deve-se aproximar as variáveis de interesse do problema, com base em funções aproximadoras e nos seus valores nodais em determinados pontos. É comum a utilização de funções polinomiais.

As funções de aproximação da geometria do contorno e das variáveis envolvidas podem ser escolhidas livremente, a depender do tipo de problema estudado e da precisão requerida dos resultados. A combinação de duas funções de parametrização iguais dá origem ao elemento do tipo isoparamétrico.

No presente trabalho será utilizado o elemento isoparamétrico linear, ilustrado a seguir.

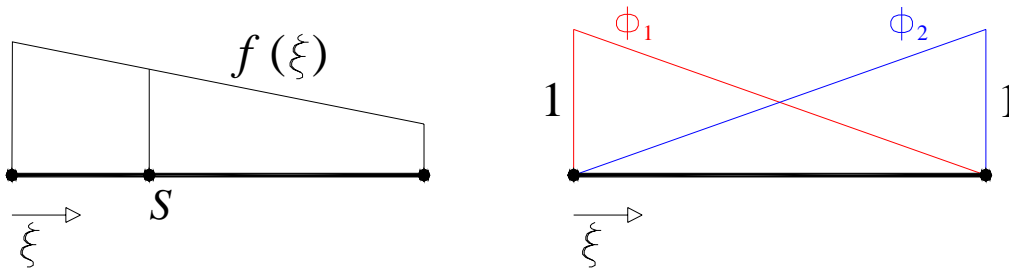


Figura 6.2 – Elemento isoparamétrico linear

Onde ϕ_1 e ϕ_2 são as funções que aproximam a distribuição linear $f(\xi)$, definidas sobre a coordenada local adimensional $\xi = [0,1]$. Logo, as coordenadas de um ponto S ou a variável de interesse avaliada neste ponto podem ser escritas segundo a mesma forma aproximada,

$$x_m(S) = \phi_n(S)x_m^n \tag{6.1}$$

$$a_m(S) = \phi_n(S)a_m^n \tag{6.2}$$

O índice m refere-se à direção coordenada e n ao nó considerado no elemento.

Partindo da equação (6.2), pode-se representar matricialmente os deslocamentos e forças de superfície sobre um elemento genérico. Para um problema bidimensional, têm-se:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} \tag{6.3}$$

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^1 \\ p_2^1 \\ p_1^2 \\ p_2^2 \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

De forma análoga para as coordenadas:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

Em alguns problemas, onde se precise representar descontinuidades entre elementos adjacentes, pode-se utilizar a idéia de elemento descontínuo (Fig. 6.3). A operacionalização deste conceito pode ser feita definindo-se nós duplos, que são nós com mesma coordenada, e valores associados distintos.

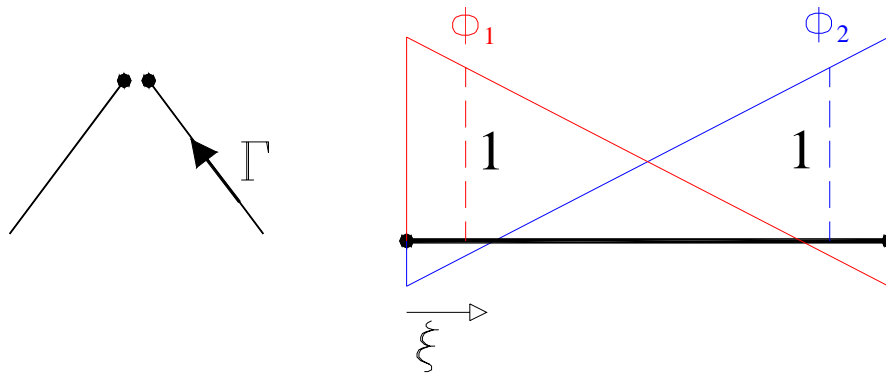


Figura 6.3 – Elementos adjacentes descontínuos, com nó duplo; Funções de interpolação num elemento descontínuo

6.3. MEC APLICADO AO PROBLEMA DE MEMBRANA

6.3.1. Obtenção dos Deslocamentos e Forças em Pontos do Contorno

A equação integral dos deslocamentos no contorno de uma chapa (4.19) pode ser escrita, de forma discreta, como segue:

$$[C][\phi]^S \{u\}^S + \sum_{j=1}^{N_e} \left(\int_{\Gamma_j} [P^*][\phi] d\Gamma_j \right) \{u\}^j = \sum_{j=1}^{N_e} \left(\int_{\Gamma_j} [u^*][\phi] d\Gamma_j \right) \{P\}^j + \int_{\Omega_b} u^* b_k d\Omega \quad (6.6)$$

sendo N_e o número de elementos em que foi dividido o contorno. A equação acima relaciona os deslocamentos do ponto fonte aos valores de deslocamentos e forças nodais num elemento qualquer j .

Fazendo a transformação para o espaço da coordenada homogênea ξ , surge o operador jacobiano J , o qual é constante no elemento linear,

$$[C][\phi]^S \{u\}^S + \sum_{j=1}^{N_e} |J| \left(\int_{\xi} [P^*][\phi] d\xi \right) \{u\}^j = \sum_{j=1}^{N_e} |J| \left(\int_{\xi} [u^*][\phi] d\xi \right) \{P\}^j + \int_{\Omega_b} u^* b_k d\Omega \quad (6.7)$$

Na formulação do método dos elementos de contorno, o sistema implícito acima é escrito em função das chamadas matrizes de influência, \hat{H} e G , definidas pelas integrais destacadas nos parênteses. A avaliação da integral referente às forças de volume, apresentada no capítulo 8, dá origem a um vetor de cargas independentes nas duas direções globais, $\{F_m\}_{2N_p,1}$.

$$[C][\phi]^S \{u\}^S + \sum_{j=1}^{N_e} |J| [\hat{H}] \{u\}^j = \sum_{j=1}^{N_e} |J| [G] \{P\}^j + \{F_m\} \quad (6.8)$$

No procedimento de resolução do sistema, as parcelas à esquerda da igualdade são condensadas num único termo,

$$[H] = [\hat{H}] + [C][\phi]^S \quad \text{para } S \in \Gamma \quad (6.9)$$

Caso o ponto fonte não pertença ao contorno, tem-se $[H] = [\hat{H}]$. A equação (6.8) assume a nova forma a seguir.

$$\sum_{j=1}^{N_e} J[H]\{u\}^j = \sum_{j=1}^{N_e} J[G]\{P\}^j + \{F_m\} \quad (6.10)$$

Considerando que o problema em questão é bidimensional, a integração de (6.10) para cada ponto de colocação resulta em

$$\{H\}_{1,2N_p}\{U\}_{2N_p,1} = \{G\}_{1,2N_p}\{P\}_{2N_p,1} + F_m \quad (6.11)$$

sendo N_p o número de pontos utilizados na discretização do contorno. Cada ponto possui 4 valores incógnitos, os deslocamentos e forças nas duas direções. Metade destes valores são impostos como condições de contorno, de forma que a solução do sistema demanda a obtenção de $2N_p$ equações. Para tanto, escreve-se duas equações para cada ponto fonte, originando o sistema de equações final:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{F_m\} \quad (6.12)$$

Com a inclusão das condições de contorno, é conveniente rearranjar as matrizes do sistema, de forma que os valores incógnitos estejam no primeiro membro, e os valores prescritos no segundo. Fazendo a troca das colunas das matrizes, a equação (6.12) pode ser reescrita da forma:

$$[A]\{X\} = [A1]\{\bar{X}\} + \{F_m\} \quad (6.13)$$

Efetuando-se o produto dos termos à direita da igualdade, tem-se o sistema linear resultante, que pode ser resolvido segundo qualquer técnica conhecida.

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (6.14)$$

Admitindo a ocorrência de um movimento de corpo rígido, com forças de superfície nulas, a equação (6.12) fornece:

$$\{H\}\{U\} = 0 \tag{6.15}$$

Expressando a singularidade da matriz H segundo as duas direções, independentemente, tem-se:

$$\sum_{j=1}^{N_p} H_{2j-1} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{N_p} H_{2j} = 0 \tag{6.16}$$

ou seja, é propriedade da matriz que, em uma linha, a soma dos elementos das colunas ímpares seja nulo. Idem para a soma das colunas pares.

6.3.2. Análise em pontos internos

De posse dos valores de deslocamentos e forças de superfícies nos pontos do contorno discretizado (valores de contorno já obtidos com a solução do problema), pode-se obter os deslocamentos e tensões em pontos internos ao domínio. Reescrevendo a equação Somigliana de forma discreta para um ponto interno s , tem-se:

$$\{u\}^s = -\sum_{j=1}^{N_e} |J| [H_i] \{u\}^j + \sum_{j=1}^{N_e} |J| [G_i] \{P\}^j + \{F_i_m\} \tag{6.17}$$

Os 3 valores de tensão são dados pela expressão:

$$\{\sigma\}^s = -\sum_{j=1}^{N_e} [S] \{u\}^k + \sum_{j=1}^{N_e} [D] \{P\}^k + \{F_i_m\} \tag{6.18}$$

onde os tensores [S] e [D] são definidos em (4.23) e (4.24).

6.4. MEC APLICADO AO PROBLEMA DE PLACA DELGADA

6.4.1. Obtenção dos Deslocamentos e Forças em Pontos do Contorno

A representação integral dos deslocamentos no contorno de uma placa (Eq. 5.19) pode ser escrita de forma discreta como segue:

$$\begin{aligned}
 C(S)w(S) &= \sum_{j=1}^{N_e} \left(\int_{\Gamma} -\frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial n} \phi d\Gamma \right) M_n^j + \sum_{j=1}^{N_e} \left(\int_{\Gamma} w^*(S, Q) \phi d\Gamma \right) V_n^j \\
 &- \sum_{j=1}^{N_e} \left(\int_{\Gamma} -M_n^*(S, Q) \phi d\Gamma \right) \frac{\partial w^j}{\partial n} - \sum_{j=1}^{N_e} \left(\int_{\Gamma} V_n^*(S, Q) \phi d\Gamma \right) w^j \\
 &+ \sum_{k=1}^{N_v} R_c(Q) w^*(S, Q) - \sum_{k=1}^{N_v} R_c^*(S, Q) w(Q) + \int_{\Omega_g} (g(q) w^*(S, q)) d\Omega_g
 \end{aligned} \tag{6.19}$$

Escrevendo em termos da coordenada adimensional ξ , referida na Figura (6.2), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 C(S)w(S) &= \sum_{j=1}^{N_e} |J| \left(\int_{\Gamma} -\frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial n} \phi d\xi \right) M_n^j + \sum_{j=1}^{N_e} |J| \left(\int_{\Gamma} w^*(S, Q) \phi d\xi \right) V_n^j \\
 &- \sum_{j=1}^{N_e} |J| \left(\int_{\Gamma} -M_n^*(S, Q) \phi d\xi \right) \frac{\partial w^j}{\partial n} - \sum_{j=1}^{N_e} |J| \left(\int_{\Gamma} V_n^*(S, Q) \phi d\xi \right) w^j \\
 &+ \sum_{k=1}^{N_v} R_c(Q) w^*(S, Q) - \sum_{k=1}^{N_v} R_c^*(S, Q) w(Q) + \int_{\Omega_g} (g(q) w^*(S, q)) d\Omega_g
 \end{aligned} \tag{6.20}$$

Após as integrações sobre todos os elementos serem feitas para todos os nós do contorno, chega-se ao sistema matricial,

$$[C]\{w\} + [\hat{H}]\{U\} = [G]\{P\} + \{F_b\} \tag{6.21}$$

onde o vetor $\{U\}_{2N_p,1}$ contém os deslocamentos e rotações normais ao contorno e o vetor $\{P\}_{2N_p,1}$ contém os esforços normais ao contorno. No caso

de um ponto localizado sobre um dos cantos da placa, seus valores correspondentes estarão nesses mesmos vetores citados acima, na posição correspondente. No vetor $\{F_b\}$ constam os valores resultantes da integração da carga de domínio.

De forma similar ao problema de membrana, pode-se reescrever (6.21) da forma a seguir:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{F_b\} \quad (6.22)$$

Trocando-se as colunas das matrizes de influência, pode-se agrupar os termos prescritos no lado direito da equação, e os valores incógnitos do lado esquerdo,

$$[A]\{X\} = [A1]\{\bar{X}\} + \{F_b\} \quad (6.23)$$

ou seja

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (6.24)$$

Como visto, cada ponto possui 4 valores incógnitos. Metade destes valores são impostos como condições de contorno, de forma que a solução do sistema demanda a obtenção de $2N_p$ equações. A versatilidade do método permite que sejam quaisquer estas equações. Comumente, escrevem-se, para cada nó da discretização, a equação de deslocamentos (6.22), e a primeira derivada desta, que fornece as rotações. Neste trabalho, conforme experiência do orientador, opta-se por escrever apenas a equação de deslocamentos, e associar dois pontos fonte a cada nó do contorno. É importante o devido posicionamento do segundo ponto fonte, considerando que pontos próximos levam a problemas de mau condicionamento das matrizes, incorrendo em singularidade destas.

Uma possibilidade para a escolha do primeiro ponto de colocação é tomá-lo como sendo o próprio nó, ou um nó interno ao elemento correspondente, no caso de elemento descontínuo. O segundo ponto pode ser

externo e normal ao primeiro, a uma distância compreendida entre 1% e 20% do tamanho do elemento. A figura a seguir apresenta um esquema ilustrativo.

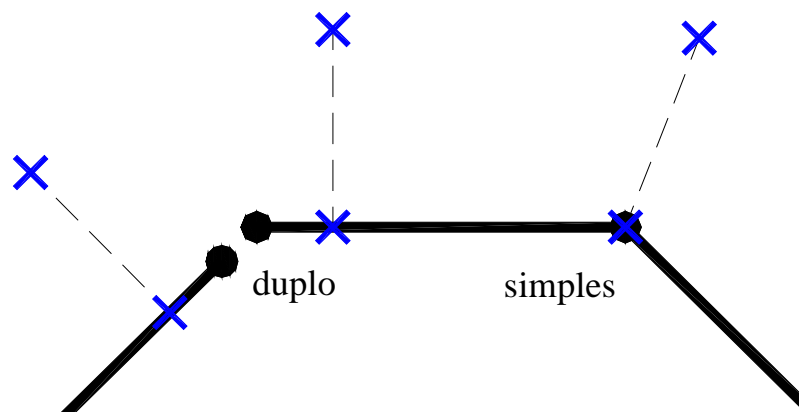


Figura 6.4 – Pontos de colocação nos casos de nó simples e duplo

CAPÍTULO 7

MODELAGEM DE CASCAS ABATIDAS ATRAVÉS DE FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

Apresenta-se aqui uma metodologia para a análise de cascas abatidas a partir do acoplamento entre membrana e placa. O item 7.1 traz conceitos iniciais acerca das cascas delgadas. A definição das hipóteses de abatimento da casca, bem como sua formulação básica são apresentadas em 7.2. A formulação do MEC a ser utilizada consta do item 7.3.

7.1. CASCAS DELGADAS

Define-se por casca o elemento estrutural curvo dotado de uma dimensão significativamente pequena, em relação às outras duas dimensões e aos raios principais de curvatura, e submetido aos efeitos de flexão e membrana. O efeito de flexão é semelhante ao sofrido por uma placa, enquanto que a parcela de membrana está ligada a deformações do plano médio da casca nesta mesma superfície. O local dos pontos equidistantes das duas superfícies que delimitam a casca é chamada superfície média, sobre a qual fazem-se as principais suposições e análises.

A curvatura de uma casca pode ser definida, em uma direção coordenada i , como sendo:

$$K_i = \frac{1}{R_i} \tag{7.1}$$

Sendo R_i o raio de curvatura da casca referente à direção i .

As cascas podem ser classificadas em delgadas ou espessas, com base na relação entre sua espessura h e o raio de curvatura R . Segundo Novozhilov (1964), a esbeltez da casca pode ser definida pela inequidade:

$$\frac{h}{R} \leq \frac{1}{20} \quad (7.2)$$

A teoria que trata as cascas delgadas foi desenvolvida por Love (1888), fortemente baseada na formulação de Kirchhoff para placas delgadas. Nesta formulação clássica, também chamada de teoria de Kirchhoff-Love, fazem-se as seguintes suposições: Um segmento de reta normal à superfície média permanece retilíneo e normal à esta após a sua deformação; As componentes de tensão agindo em planos paralelos a superfície média podem ser desprezadas. Além destas, continuam valendo as considerações de material elástico linear, isotrópico e homogêneo.

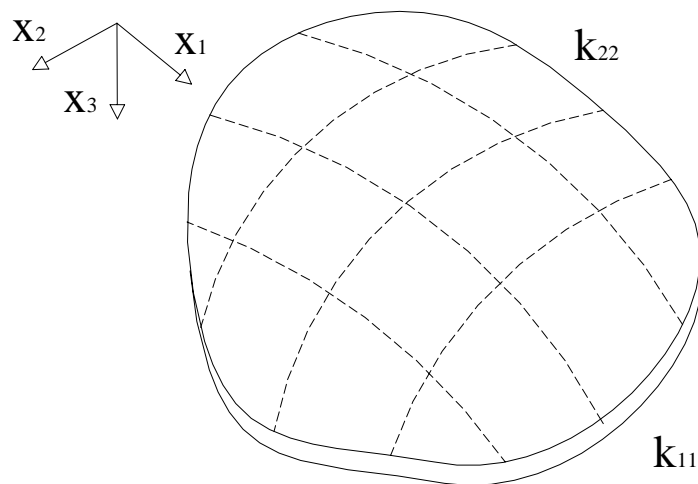


Figura 7.1 – Casca abatida com curvaturas principais

Definiu-se aqui o elemento estrutural denominado casca delgada, com as hipóteses pertinentes à teoria linear utilizada. Este trabalho limita-se a apresentar, a seguir, a formulação utilizada no tratamento de cascas delgadas com certo grau de abatimento. O equacionamento completo para as cascas finas pode ser consultado em Novozhilov (1964).

7.2. CASCAS DELGADAS ABATIDAS

Admite-se uma casca, com superfície média definida por:

$$x_3 = x_3(x_1, x_2) \quad (7.3)$$

Esta pode ser considerada abatida se, para todos os pontos da superfície média, verificar-se

$$\left(\frac{\partial x_3}{\partial x_1}\right)^2 \ll 1, \left(\frac{\partial x_3}{\partial x_2}\right)^2 \ll 1 \quad (7.4)$$

o que implica que as curvaturas são pequenas.

A teoria de cascas abatidas é regida pelas seguintes simplificações,

- As componentes tangenciais do deslocamento são pequenas em relação à componente transversal,
- As tensões cisalhantes podem ser omitidas nas duas primeiras equações de equilíbrio do elemento de casca delgada,
- Os termos de ordem superior envolvendo as derivadas de x_3 podem ser desprezados.

7.2.1. Equacionamento Básico

Considere-se que a casca possui superfície média quadrática, dada por:

$$x_3 = -\frac{1}{2}(K_{11}x_1^2 + K_{22}x_2^2) \quad (7.5)$$

sendo K_{11} e K_{22} as curvaturas principais da casca nas direções indicadas. O equacionamento de equilíbrio da casca é escrito a seguir,

$$N_{\alpha\beta,\beta} + q_\alpha = 0 \quad (7.6)$$

$$Q_{\alpha,\alpha} - K_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} + q_3 = 0 \quad (7.7)$$

$$M_{\alpha\beta,\beta} - Q_\alpha = 0 \quad (7.8)$$

sendo $N_{\alpha\beta}$, Q_α , $M_{\alpha\beta}$ as resultantes dos esforços normal, cortante e fletor respectivamente. As cargas de volume são representadas por q_α .

No qual os índices variam de 1 a 2. Visando apresentar de forma mais concisa a formulação, tomam-se u_α e w como sendo os deslocamentos nas direções 1, 2 e 3, respectivamente. Nesse equacionamento simplificado as curvaturas cruzadas K_{12} e K_{21} são consideradas nulas, de forma que se analisam cascas com curvaturas principais apenas.

As componentes de deformação são expressas em função dos deslocamentos da superfície média, como segue:

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left[u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + 2K_{\alpha\beta} w \right] \quad (7.9)$$

Considerando a teoria de Kirchhoff-Love as resultantes de esforços em termos de deslocamentos, escritas para o estado plano de tensão, valem

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1-\nu}{2} B \left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + B \left[(1-\nu) K_{\alpha\beta} + \nu K_{\phi\phi} \delta_{\alpha\beta} \right] w \quad (7.10)$$

$$Q_\alpha = -D(w_{,\gamma\beta}) \quad (7.11)$$

$$M_{\alpha\beta} = \frac{1-\nu}{2} D \left(w_{,\alpha\beta} + w_{,\beta\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} w_{,\gamma\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (7.12)$$

com a rigidez de membrana B definida considerando a espessura t da casca:

$$B = \frac{Et}{(1-\nu^2)} \quad (7.13)$$

Derivando-se (7.10) em relação a β e substituindo na primeira equação de equilíbrio (7.6), obtém-se a expressão a seguir:

$$\frac{1-\nu}{2} \mathbf{B} \left(u_{\alpha,\beta\beta} + u_{\beta,\alpha\beta} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma\beta} \delta_{\alpha\beta} \right) + \bar{q}_\alpha^m = 0 \quad (7.14)$$

Verifica-se que a primeira parcela, a menos de uma força de volume q_α , corresponde ao equilíbrio do problema isolado de membrana. Define-se ainda um termo de forças equivalentes:

$$\bar{q}_\alpha^m = q_\alpha + \mathbf{B} \left[(1-\nu) \mathbf{K}_{\alpha\beta} + \nu \mathbf{K}_{\phi\phi} \delta_{\alpha\beta} \right] w_{,\beta} \quad (7.15)$$

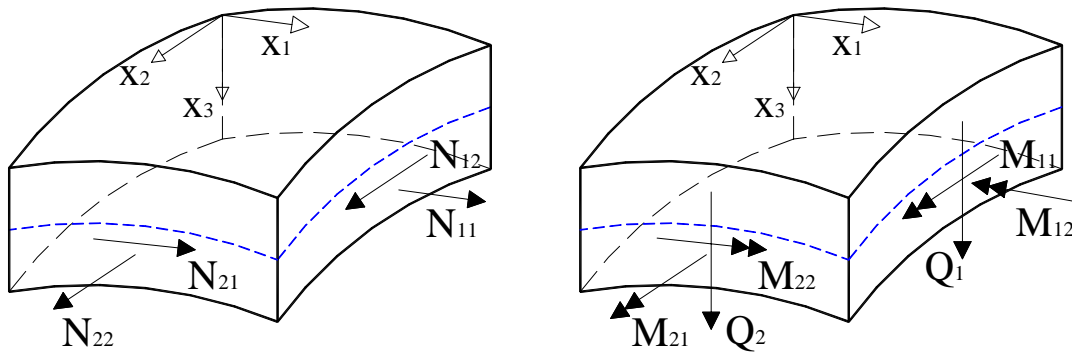


Figura 7.2 – Esforços de membrana e flexão atuantes na casca

Deriva-se a equação (7.8) em relação a α ,

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} - Q_{\alpha,\alpha} = 0 \quad (7.16)$$

a fim de incorporar o valor de $Q_{\alpha,\alpha}$ dado em (7.7), resultando:

$$M_{\alpha\beta,\alpha\beta} - \mathbf{K}_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} + q_3 = 0 \quad (7.17)$$

Substituindo as expressões das resultantes em termos de deslocamentos, pode-se reescrever a expressão acima, como segue:

$$\frac{1-\nu}{2} \mathbf{D} \left(w_{,\alpha\alpha\beta\beta} + w_{,\beta\alpha\alpha\beta} + \frac{2\nu}{1-\nu} w_{,\gamma\gamma\alpha\beta} \delta_{\alpha\beta} \right) + \bar{q}_3^f = 0 \quad (7.18)$$

as forças equivalentes são dadas, para o caso de flexão, por:

$$\overline{q}_3^f = q_3 - K_{\alpha\beta} \mathbf{B} \left\{ \frac{(1-\nu)}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) + \nu u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} + [(1-\nu)K_{\alpha\beta} + \nu K_{\phi\phi} \delta_{\alpha\beta}] w \right\} \quad (7.19)$$

Pode-se verificar que os termos de forças equivalentes promovem o acoplamento dos problemas de membrana e flexão, os quais definem o comportamento mecânico da casca.

7.3. FORMULAÇÃO INTEGRAL ACOPLADA

De posse das equações de equilíbrio do problema de casca abatida (Eqs. 7.6 e 7.17), o procedimento de obtenção da formulação integral correspondente segue um roteiro semelhante ao já apresentado nos itens 4.2 e 5.2, para os casos de membrana e placa isoladamente.

Para a equação do regime de membrana deve-se observar que a tensão $\sigma_{\alpha\beta}$, representada na equação (7.10), a menos da multiplicação da espessura da casca, apresenta-se em dois termos: um primeiro que corresponde ao comportamento puramente de membrana, e um segundo associado à correção de rigidez imposta pelo acoplamento com o regime de flexão, como segue:

$$N_{\alpha\beta} = \frac{1-\nu}{2} \mathbf{B} \left(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + \frac{2\nu}{1-\nu} u_{\gamma,\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) + \mathbf{B} \left[(1-\nu)K_{\alpha\beta} + \nu K_{\phi\phi} \delta_{\alpha\beta} \right] w = N_{\alpha\beta}^m + N_{\alpha\beta}^b$$

Assim, o teorema da reciprocidade de Betti pode ser escrito da forma:

$$\int_{\Omega} \sigma_{\beta\gamma}^m(q) \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}^*(s,q) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{\beta\gamma}^b(q) \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}^*(s,q) d\Omega = \int_{\Omega} \varepsilon_{\beta\gamma}(q) \sigma_{\alpha\beta\gamma}^*(s,q) d\Omega \quad (7.20)$$

Após o desenvolvimento da expressão acima, a equação integral válida em pontos do contorno resulta da forma

$$\begin{aligned} C_{\alpha\beta} u_{\beta}(S) &= \int_{\Gamma} P_{\beta}(Q) u_{\alpha\beta}^*(S,Q) d\Gamma - \int_{\Gamma} P_{\alpha\beta}^*(S,Q) u_{\beta}(Q) d\Gamma - \\ & \mathbf{B} \int_{\Gamma} u_{\alpha\beta}^*(S,q) \left[(1-\nu)k_{\beta\gamma} + \nu k_{\phi\phi} \delta_{\beta\gamma} \right] w \eta_{\gamma}(q) d\Gamma + \\ & \mathbf{B} \int_{\Omega} u_{\alpha\beta}^*(S,q) \left[(1-\nu)k_{\beta\gamma} + \nu k_{\phi\phi} \delta_{\beta\gamma} \right] w_{,\gamma}(q) d\Omega + \int_{\Omega} u_{\alpha\beta}^*(S,q) q_{\alpha}(q) d\Omega \end{aligned} \quad (7.21)$$

Já a equação dos deslocamentos no contorno da placa (5.19), pode ser reescrita, com o termo de acoplamento, da forma

$$\begin{aligned}
 C(S)w(S) = & \int_{\Gamma} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) + V_n(Q) w^*(S, Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_v} R_c^*(S, Q) w(Q) \\
 & - \int_{\Gamma} \left(-M_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(S, Q) w(Q) \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \overline{q_3^f}(q) w^*(S, q) d\Omega
 \end{aligned} \quad (7.22)$$

A substituição de $\overline{q_3^f}$ em (7.22) leva ao resultado a seguir.

$$\begin{aligned}
 C(S)w(S) = & \int_{\Gamma} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) + V_n(Q) w^*(S, Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_v} R_c^*(S, Q) w(Q) \\
 & - \int_{\Gamma} \left(-M_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(S, Q) w(Q) \right) d\Gamma + \int_{\Omega} q_3(q) w^*(S, q) d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} K_{\alpha\beta}(q) N_{\alpha\beta}(q) w^*(S, q) d\Omega
 \end{aligned} \quad (7.23)$$

A equação integral dos esforços de membrana $N_{\alpha\varepsilon}$ ou das tensões $\sigma_{\alpha\varepsilon}$ pode ser obtida com a substituição da equação (7.21), adaptada para pontos internos, na Lei de Hooke, como segue:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\alpha\varepsilon}(s) = & - \int_{\Gamma} S_{\alpha\beta\varepsilon}(s, Q) u_{\beta}(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{\alpha\beta\varepsilon}(s, Q) P_{\beta}(Q) d\Gamma + \int_{\Omega} D_{\alpha\beta\varepsilon}(s, q) q_{\beta}(q) d\Omega - \\
 & B \int_{\Omega} D_{\alpha\beta\varepsilon}(s, q) \left[(1-\nu) k_{\beta\gamma, \gamma} + \nu k_{\phi\phi, \gamma} \delta_{\beta\gamma} \right] w \eta_{\gamma}(q) d\Omega + \\
 & B \int_{\Omega} D_{\alpha\beta\varepsilon}(s, q) \left[(1-\nu) k_{\beta\gamma, \gamma} + \nu k_{\phi\phi, \gamma} \delta_{\beta\gamma} \right] w_{, \gamma}(q) d\Omega
 \end{aligned} \quad (7.24)$$

É válido afirmar que os esforços $N_{\alpha\varepsilon}$ são iguais às tensões ao nível da superfície média multiplicadas pela espessura da casca.

$$N_{\alpha\varepsilon}(s) = t \sigma_{\alpha\varepsilon}(s) \quad (7.25)$$

É ainda de interesse obter a representação integral dos deslocamentos de flexão para pontos internos.

$$\begin{aligned}
 w(s) = & \int_{\Gamma} \left(-M_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(s, Q) + V_n(Q) w^*(s, Q) \right) d\Gamma - \sum_{k=1}^{N_s} R_c^*(s, Q) w(Q) \\
 & - \int_{\Gamma} \left(-M_n^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) + V_n^*(s, Q) w(Q) \right) d\Gamma + \int_{\Omega} q_3(q) w^*(s, q) d\Omega \\
 & - \int_{\Omega} K_{\alpha\beta}(q) N_{\alpha\beta}(q) w^*(s, q) d\Omega
 \end{aligned} \tag{7.26}$$

7.2.1. Representação Algébrica das Equações Integrais

As equações (7.21), (7.23), (7.24) e (7.26) compõem um sistema de equações determinado que permite a obtenção dos valores de interesse.

Apresentam-se a seguir as expressões algébricas das equações supracitadas, na ordem em que foram definidas no item anterior. Vale destacar que a somatória $K_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta}$ é representada pela variável \overline{N}_m .

$$\begin{aligned}
 [H_m]_{2n,2n} \{U_m\}_{2n,1} &= [G_m]_{2n,2n} \{P_m\}_{2n,1} - [S_m]_{2n,2n} \{U_b\}_{2n,1} + [R_m]_{2n,2i} \{W_f\}_{2i,1} + \{F_m\}_{2n,1} \\
 [H_b]_{2n,2n} \{U_b\}_{2n,1} &= [G_b]_{2n,2n} \{P_b\}_{2n,1} + [J_b]_{2n,i} \{\overline{N}_m\}_{i,1} + \{F_b\}_{2n,1} \\
 \{\overline{N}_m\}_{i,1} &= -[H'_m]_{i,2n} \{U_m\}_{2n,1} + [G'_m]_{i,2n} \{P_m\}_{2n,1} - [S'_m]_{i,2n} \{U_b\}_{2n,1} + [Q_m]_{i,i} \{W_b\}_{i,1} + \{F'_m\}_{i,1} \\
 \{W_b\}_{i,1} &= -[H'_b]_{i,2n} \{U_b\}_{2n,1} + [G'_b]_{i,2n} \{P_f\}_{2n,1} + [J'_f]_{i,i} \{\overline{N}_m\}_{i,1} + \{F'_b\}_{i,1}
 \end{aligned} \tag{7.27}$$

A representação matricial do sistema (7.27) é dada a seguir:

$$\begin{bmatrix} H_m & -R_m & S_m & 0 \\ 0 & 0 & H_b & -J_b \\ H'_m & -Q_m & S'_m & I \\ 0 & I & H'_b & -J'_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ W_b \\ U_b \\ \overline{N}_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_m & 0 \\ 0 & G_b \\ G'_m & 0 \\ 0 & G'_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_m \\ P_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_m \\ F_b \\ F'_m \\ F'_b \end{Bmatrix} \tag{7.28}$$

sendo n o número de pontos no contorno e i o número de pontos no interior do domínio, os quais, na metodologia adotada, constituem os nós de células.

A solução deste sistema acoplado leva aos valores de:

- Deslocamentos de membrana nos pontos de contorno $\{U_m\}$
- Forças de membrana nos pontos de contorno $\{P_m\}$
- Deslocamentos de flexão nos pontos de contorno $\{U_f\}$
- Forças de flexão nos pontos de contorno $\{P_f\}$
- Deflexões nos pontos internos $\{w_f\}$
- Forças de membrana equivalentes nos pontos internos $\{\bar{N}_c\}$

Com base nestes valores calculados pode-se obter as tensões de membrana, pela lei de Hooke, e os esforços de flexão, pelas equações (3.9) e (3.13), para os pontos internos.

CAPÍTULO 8

ASPECTOS NUMÉRICOS COMPLEMENTARES

Inicialmente, este capítulo traz alguns pontos relevantes no que diz respeito ao tratamento de integrais sobre o domínio. No item 8.2 apresenta-se um breve comentário acerca de um processo de sub-elementação utilizado em procedimentos de integração numérica.

8.1. TRATAMENTO DE INTEGRAIS DE DOMÍNIO

As integrais sobre o domínio que constam na formulação apresentada podem ser subdivididas em duas classes básicas. Na primeira o núcleo da integral, que consiste em uma solução fundamental ou suas derivadas, multiplica um termo de valor conhecido sobre o domínio (eq. 8.1), como é o caso das integrais das forças de corpo. Outra situação é aquela em que o termo multiplicado é incógnita do sistema (eq. 8.2).

$$\int_{\Omega} X^* \bar{T} \, d\Omega \quad (8.1)$$

$$\int_{\Omega} X^* T \, d\Omega \quad (8.2)$$

8.1.1. Integração de Termos de Valor Conhecido

Este procedimento é utilizado no cálculo de integrais do tipo (8.1). O objetivo é transferir a integral do domínio para o contorno, de forma que esta possa ser avaliada de forma mais simples.

Admite-se a existência de uma primitiva da solução fundamental:

$$\nabla^2 L = X^* \quad (8.3)$$

A integral pode então ser reescrita da forma:

$$\int_{\Omega} \mathbf{X}^* \bar{T} \, d\Omega = \int_{\Omega} \nabla^2 \mathbf{L} \bar{T} \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial y^2} \right) \bar{T} \, d\Omega \quad (8.4)$$

Fazendo-se uma integração por partes, têm-se:

$$\int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{L}}{\partial y^2} \right) \bar{T} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x} \eta_x + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial y} \eta_y \right) \bar{T} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial y} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right) d\Omega \quad (8.5)$$

Uma segunda integração por partes leva a

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x} \eta_x + \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial y} \eta_y \right) \bar{T} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \eta_x + \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \eta_y \right) \mathbf{L} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \right) \mathbf{L} \, d\Omega \quad (8.6)$$

Por fim, a integral original no domínio resulta:

$$\int_{\Omega} \nabla^2 \mathbf{L} \cdot \bar{T} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial n} \right) \bar{T} \, d\Gamma - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial n} \right) \mathbf{L} \, d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla^2 \bar{T} \cdot \mathbf{L} \, d\Omega \quad (8.7)$$

Vale destacar que podem-se fazer sucessivas integrações, a fim de anular a integral de domínio que resta no último termo do desenvolvimento. Ao fim de duas integrações, como mostrado acima, é possível tratar integrais cujo termo \bar{T} possua distribuição constante ou linear.

Como exemplo, mostra-se a aplicação do método à integral $\int_{\Omega} w^* g \, d\Omega$,

admitindo que a carga transversal g seja linear, dada por $g = ax + by + c$.

Considerando que as soluções fundamentais são escritas em função da distância r , é conveniente representar o operador Laplaciano em coordenadas cilíndricas, vale:

$$\nabla^2 \mathbf{L} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial r} \right) \quad (8.8)$$

A primitiva da solução fundamental é então calculada:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial L}{\partial r} \right) = w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln(r) - \frac{1}{2} \right) \quad (8.9)$$

Integrando em r duas vezes, obtém-se, respectivamente:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{1}{32\pi D} r^3 \left(\ln(r) - \frac{3}{4} \right) \quad (8.10)$$

$$L = \frac{1}{128\pi D} r^4 (\ln(r) - 1) \quad (8.11)$$

Sobre o contorno de normal n , pode-se escrever:

$$\frac{\partial L}{\partial n} = \frac{\partial L}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (8.12)$$

Com relação ao carregamento, têm-se:

$$g = ax + by + c \Rightarrow \nabla^2 g = 0 \quad (8.13)$$

$$\frac{\partial g}{\partial n} = \frac{\partial g}{\partial x} \eta_x + \frac{\partial g}{\partial y} \eta_y = a\eta_x + b\eta_y \quad (8.14)$$

Ficam então definidos os termos das integrais de contorno apresentadas em (8.7), que podem ser calculadas usualmente, por integração de Gauss.

8.1.2. Integração em Células

Podem-se utilizar diversas metodologias para o tratamento dos termos de domínio do tipo (8.2). Adota-se aqui um procedimento de cálculo semi-analítico dessas integrais, a partir da definição da variável de interesse em regiões discretas do domínio.

Considere uma porção do domínio Ω , discretizada em células Ω_m , como ilustrado a seguir.

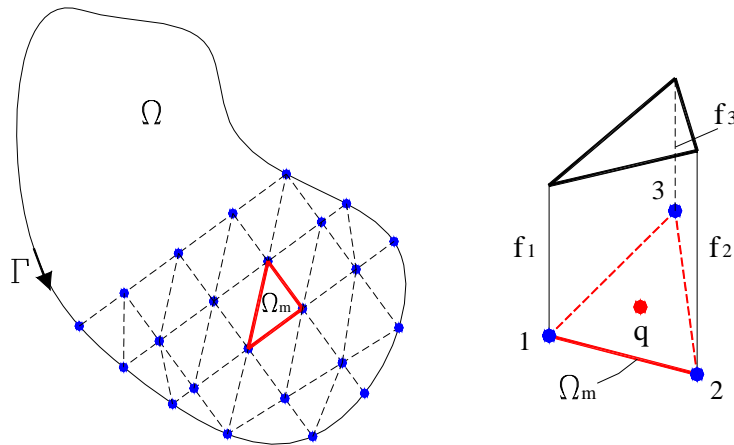


Figura 8.1 – Divisão do domínio em células; exemplo de aproximação linear

Aproximando o valor de $f(q)$ em cada célula por uma função $\phi_1(q)$, têm-se:

$$f_m(q) = \phi_1(q)f_1^m \tag{8.15}$$

Desta forma, uma integral que contém o termo em $f(q)$ pode ser escrita como um somatório das integrais de cada célula, por exemplo:

$$\int_{\Omega} u^*(S, q)f(q)d\Omega = \sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\Omega_m} u^*(S, q)\phi_1(q)d\Omega_m f_1^m \tag{8.16}$$

A integração de um termo de domínio sobre as células resulta numa matriz de coeficientes, que representa a influência dos valores f_1 . Substituindo-se os f_1 obtém-se as influências dos deslocamentos e suas derivadas.

No presente trabalho, utilizam-se células planas triangulares com três nós, e aproximação linear para as variáveis.

Como ilustração, mostra-se o cálculo da integral de acoplamento da equação de membrana: $\int_{\Omega} u_{ik}^* B [(1-\nu)K_{kj} + \nu K_{mn} \delta_{kj}] w_{,j} d\Omega$.

A função de forma linear é dada por:

$$\phi_1 = \frac{1}{2A_c} (\alpha_0 + \varphi_0 x + \gamma_0 y) \tag{8.17}$$

Sendo A_c a área da célula, e os termos α_0 , φ_0 e γ_0 definidos por notação cíclica, com $i, j, k = 1 \dots 3$, como segue:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= x_j y_k - x_k y_j \\ \varphi_0 &= y_j - y_k \\ \gamma_0 &= x_k - x_j \end{aligned} \tag{8.18}$$

Pode-se então aproximar a variável $w_{,j}$:

$$(w_{,j})_m = \phi_{1,j} w_1^m \tag{8.19}$$

E representar a integral da forma a seguir,

$$\sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\Omega_m} u_{ik}^* B \left[(1-\nu)K_{kj} + \nu K_{mn} \delta_{kj} \right] \phi_{1,j} d\Omega_m w_1^m \tag{8.20}$$

Condensando os valores constantes no termo $F_{kj} = B \left[(1-\nu)K_{kj} + \nu K_{mn} \delta_{kj} \right]$, explicitando a expressão da solução fundamental, e escrevendo a integral em coordenadas cilíndricas, obtém-se (8.21), que pode ser integrada analiticamente em r , resultando em (8.22)

$$\sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\theta} \int_r \frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \left[(4\nu-3) \ln(r) \delta_{ik} + r_i r_{,k} \right] F_{kj} \phi_{1,j} r dr d\theta w_1^m \tag{8.21}$$

$$\sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\theta} \frac{r^2}{16\pi(1-\nu)G} \left[(4\nu-3) \left(\ln(r) - \frac{1}{2} \right) \delta_{ik} + r_i r_{,k} \right] F_{kj} \phi_{1,j} d\theta w_1^m \tag{8.22}$$

Após esse passo analítico, a integral é escrita sobre o contorno da célula m , de forma a ser integrada numericamente com quadratura de Gauss.

$$\sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\Gamma_m} \frac{r^2}{16\pi(1-\nu)G} \left[(4\nu-3) \left(\ln(r) - \frac{1}{2} \right) \delta_{ik} + r_i r_{,k} \right] F_{kj} \phi_{1,j} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_m \right) w_1^m \tag{8.23}$$

Definem-se coordenadas homogêneas ξ_p , $p=1...3$ para os lados da célula triangular. Em função dessas coordenadas, pode-se representar a integral:

$$\sum_{m=1}^{N_{cel}} \int_{\Gamma_m} |J|_p \frac{r}{16\pi(1-\nu)G} \left[(4\nu-3) \left(\ln(r) - \frac{1}{2} \right) \delta_{ik} + r_i r_{,k} \right] F_{kj} \phi_{1,j} \frac{\partial r}{\partial n} d\xi_p w_1^m \quad (8.24)$$

Por integração de Gauss, têm-se o esquema final, a ser implementado:

$$\sum_{m=1}^{N_{cel}} \sum_{p=1}^3 \sum_{ng=1}^{Ng} |J|_p \left\{ \frac{r}{16\pi(1-\nu)G} \left[(4\nu-3) \left(\ln(r) - \frac{1}{2} \right) \delta_{ik} + r_i r_{,k} \right] F_{kj} \phi_{1,j} \right\}_{ng} \frac{\partial r}{\partial n} w_1^m \quad (8.25)$$

8.2. PROCESSO DE SUB-ELEMENTAÇÃO

No processo de integração numérica, quando o ponto de colocação estiver relativamente próximo ao elemento a ser mapeado ($r \rightarrow 0$), os núcleos das integrais apresentam elevados gradientes. Assim a integral torna-se quase singular, conduzindo a resultados ruins. Na tentativa de evitar essa perturbação pode-se utilizar o artifício de dividir o elemento em trechos menores, dimensionados automaticamente de forma a compatibilizar as ordens de grandeza do comprimento de cada sub-elemento e da distância ao ponto de colocação. A figura a seguir ilustra a situação:

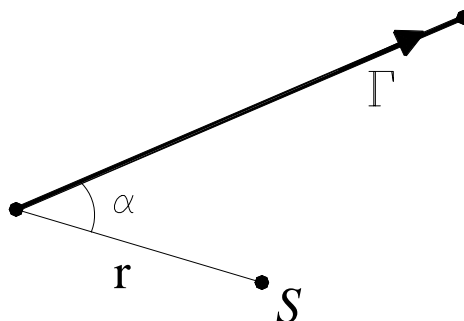


Figura 8.2 – Ponto fonte próximo ao elemento mapeado

O comprimento do sub-elemento é calculado com base no ângulo α indicado. Caso este seja inferior a 60° , admita-se o triângulo isósceles indicado na figura seguinte. O comprimento é dado pela intersecção da mediatriz relativa ao lado de tamanho r com o elemento.

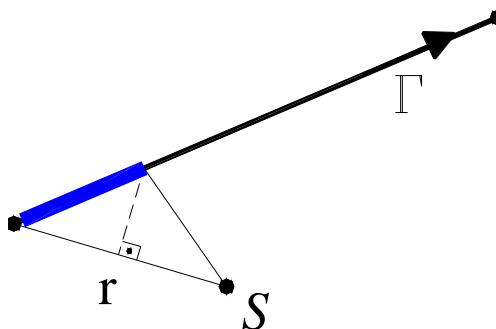


Figura 8.3 – Dimensionamento do sub-elemento

Para valores de α superiores a 60° , tomam-se sub-elementos de comprimento igual ao raio r .

CAPÍTULO 9

EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

A metodologia aqui desenvolvida foi implementada em linguagem MATLAB®, dando origem ao programa *SSPLBE – Shallow Shell Problem with Linear Boundary Element*.

No presente capítulo apresentam-se algumas aplicações do programa. Inicialmente, analisam-se exemplos de estado plano e de placas, a fim de validar a implementação para problemas desacoplados de membrana e flexão, respectivamente. O item 9.3 trata de exemplos de cascas abatidas, principal objeto de estudo do trabalho.

9.1. ESTADO PLANO DE TENSÃO

Admite-se uma chapa retangular engastada em uma das bordas, solicitada por um carregamento de superfície uniforme, como ilustrado na figura 9.1. A chapa tem dimensões $a = 1,50$ m; $b = 0,50$ m, estando sujeita a uma carga de 10 kN/m^2 . Os parâmetros elásticos valem $E = 1 \text{ kN/m}^2$; $\nu = 0$.

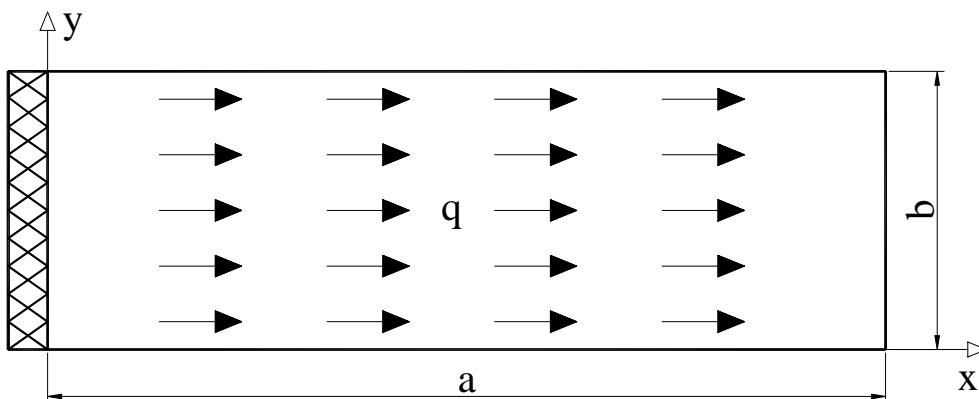


Figura 9.1 – Chapa engastada sujeita à carga uniformemente distribuída

O problema equivalente à este, no domínio unidimensional, é o de uma barra engastada e uniformemente solicitada ao longo de seu comprimento. Com base na resistência dos materiais, os campos de deslocamento e tensão normal na barra são dados por:

$$u(x) = -\frac{q}{2EA} x^2 + \frac{qL}{EA} x \quad (9.1)$$

$$\sigma_{xx}(x) = \frac{q}{A} (L - x)$$

A seguir apresentam-se os diagramas de deslocamento e tensão normal na chapa, calculados com o programa desenvolvido, além das curvas obtidas analiticamente a partir das equações (9.1).

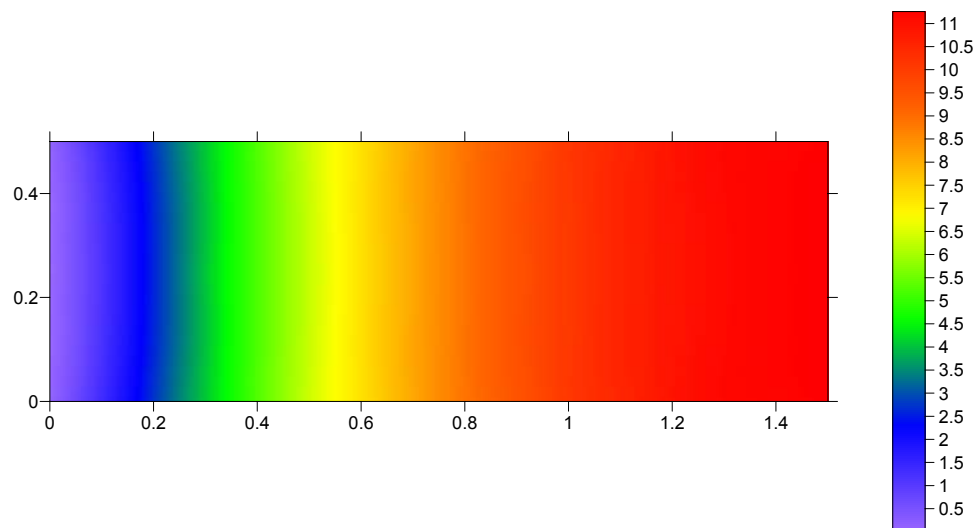


Figura 9.2 – Diagrama de deslocamento horizontal na chapa (m)

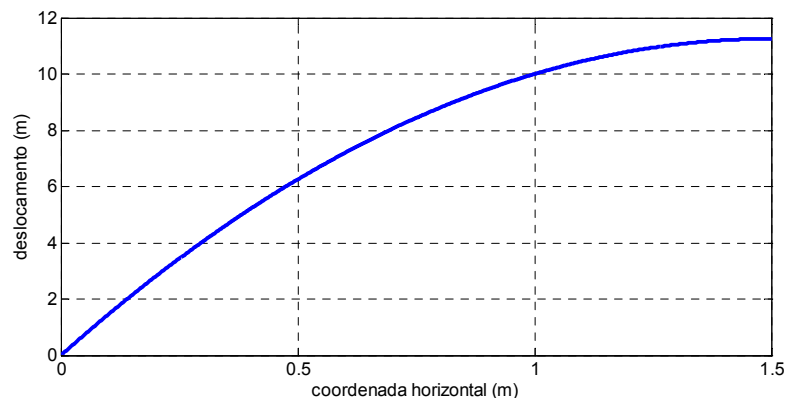


Figura 9.3 – Deslocamento horizontal obtido analiticamente para a barra

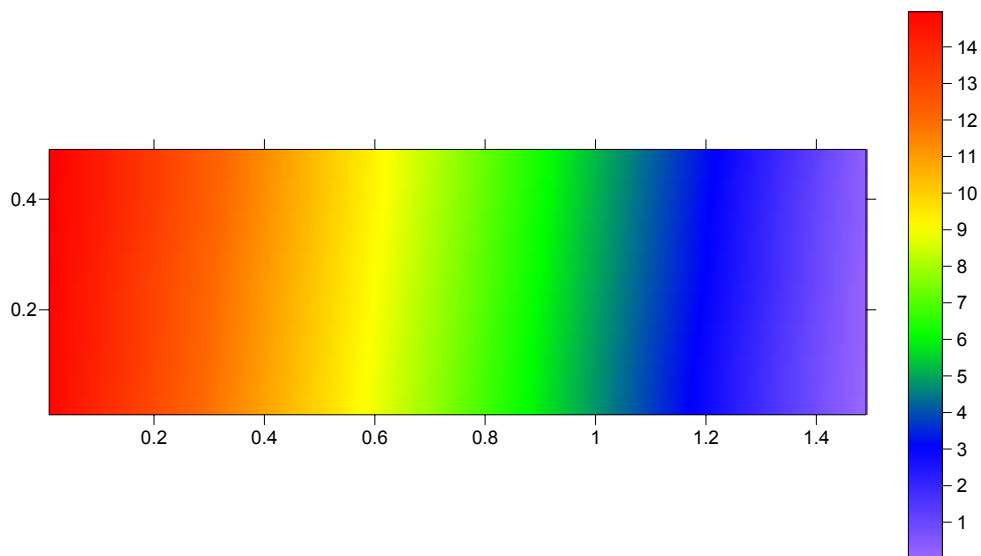


Figura 9.4 – Diagrama de tensão normal na direção horizontal (kN/m²)

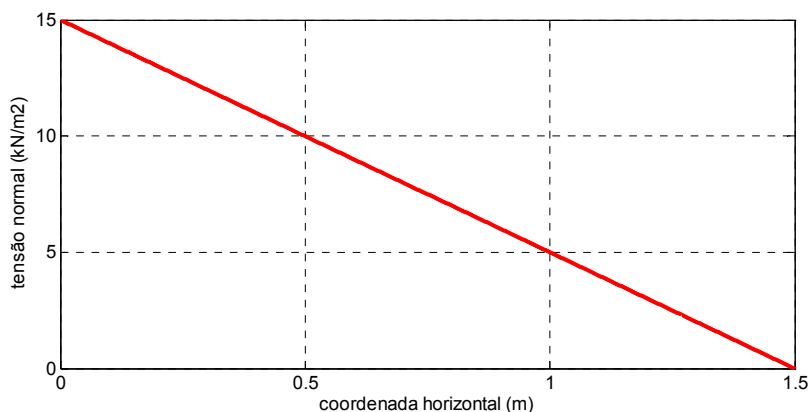


Figura 9.5 – Tensão normal horizontal obtida analiticamente para a barra

Com base no exposto acima, pode-se observar a congruência entre os resultados fornecidos pelo programa proposto e os calculados analiticamente.

Vale destacar que a malha utilizada é de 10 elementos, integrados por 4 pontos de Gauss. Os pontos fonte são afastados do contorno de uma distância equivalente a 100% comprimento do elemento correspondente, e o processo de sub-elementação é utilizado. Sem esse processo, faz-se a colocação dos pontos fonte sobre o contorno, sendo necessários 40 elementos e 96 pontos de integração por elemento para obtenção de resultados equivalentes.

Nos exemplos seguintes, a colocação do primeiro ponto singular é feita sobre o contorno, enquanto que o segundo é afastado de 100% do tamanho do elemento correspondente.

9.2 PLACAS DELGADAS

Apresentam-se exemplos de placas delgadas, encontrados na literatura, a fim de validar a implementação feita com base na Teoria de Kirchhoff.

9.2.1. Placa Apoiada em Dois Lados Ortogonais e Engastada nos Outros Dois

Trata-se de uma placa quadrada, com 2 m de lado e 6 cm de espessura, sob um carregamento de 400 N/m^2 . Admita-se módulo de elasticidade de $2,05 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ e coeficiente de Poisson nulo. O problema é analisado em Bares (1969). Utilizam-se 24 pontos de integração, e diferentes discretizações no contorno. Não há processo de sub-elementação.

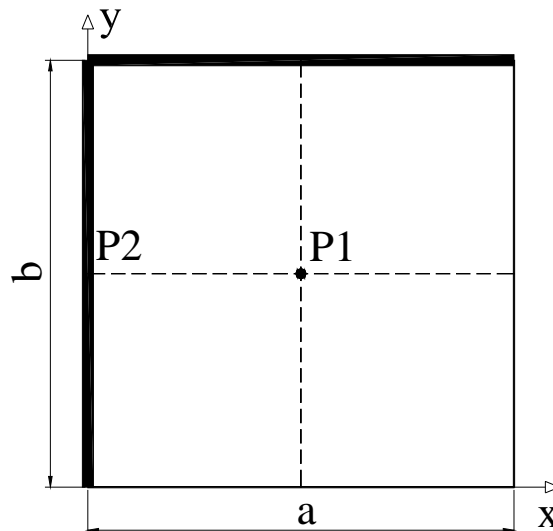


Figura 9.6 – Placa apoiada/engastada com carga uniforme

A tabela a seguir apresenta os resultados obtidos nos pontos destacados, confrontados com os de valores de referência.

Tabela 9.1 – Valores de deflexão e momentos nos pontos especificados (N, m)

Método	W P1	M_{xx} P1	M_{yy} P1	M_n P2	
Bares(1969)	$3,642 \times 10^{-6}$	37,44	37,44	-108,32	
Presente Estudo	16 elem.	$3,654 \times 10^{-6}$	37,47	37,47	-115,22
	32 elem.	$3,649 \times 10^{-6}$	37,46	37,46	-109,74
	64 elem.	$3,649 \times 10^{-6}$	37,46	37,46	-108,72

Nas figuras 9.7 e 9.8 apresentam-se alguns diagramas traçados com resultados do programa, representando as distribuições dos campos de deslocamento transversal e momentos sobre a superfície média da placa.

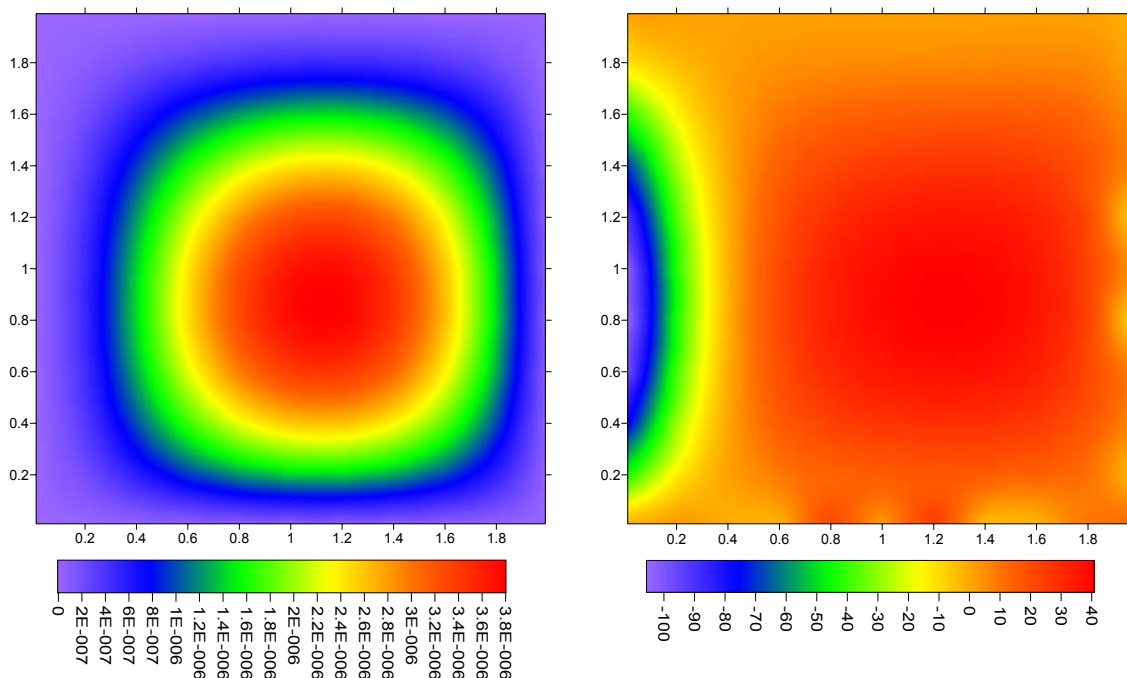


Figura 9.7 – Deflexão (m); Momento M_{xx} (N.m)

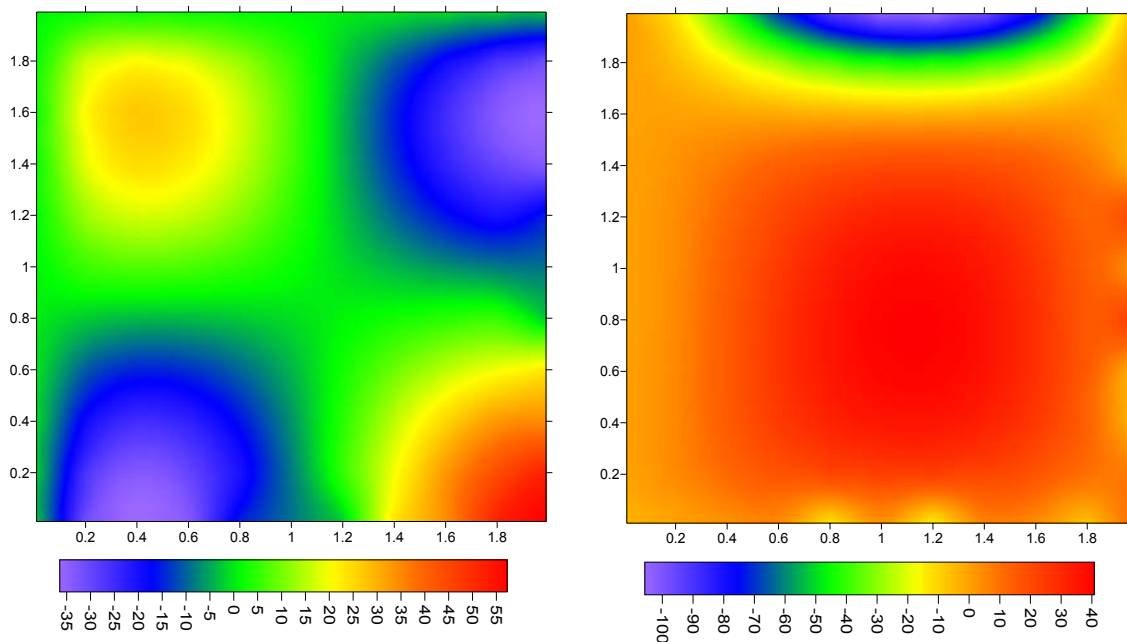


Figura 9.8 – Momento M_{xy} (N.m); Momento M_{yy} (N.m)

9.2.2. Placa Circular Apoiada

Considere-se uma placa circular simplesmente apoiada, de diâmetro $d = 2 \text{ m}$ e espessura $h = 6 \text{ cm}$. Os dados de carregamento e propriedades do material constituinte são os mesmos aplicados no exemplo 9.2.1.

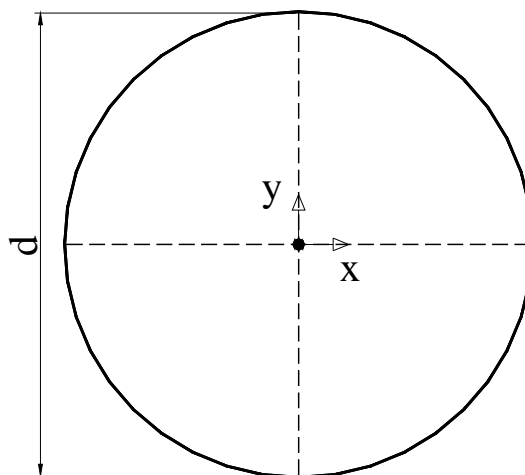


Figura 9.9 – Placa circular apoiada com carga uniforme

As soluções analíticas para a deflexão e para o momento fletor na direção radial são apresentados em Timoshenko (1959).

Os resultados obtidos com o uso do programa são comparados com os valores de referência, como mostrado nas figuras a seguir.

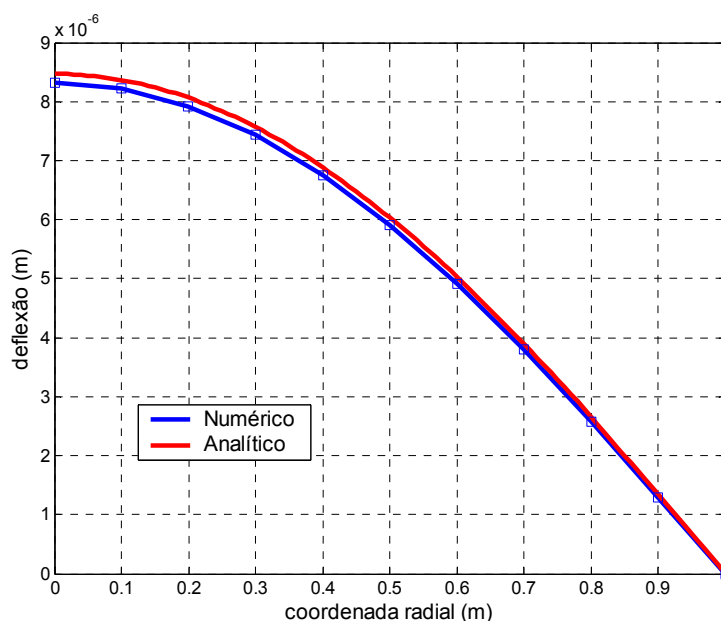


Figura 9.10 – Deslocamentos transversais analítico e numérico

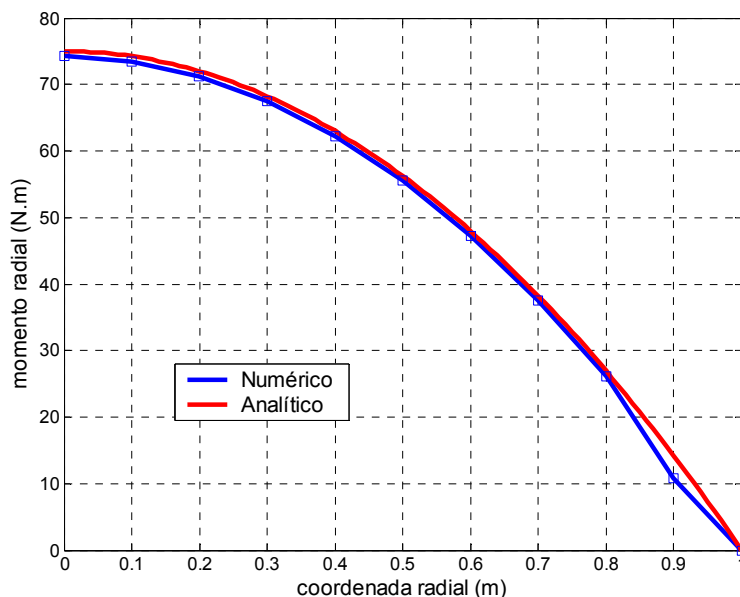


Figura 9.11 – Momentos na direção radial, analítico e numérico

Tabela 9.2 – Deflexão e esforços no ponto central (N, m)

Método	W	Q _r	M _r
Timoshenko (1959)	8,468 x 10 ⁻⁶	0	75
Presente Estudo (32 elementos)	8,325 x 10 ⁻⁶	0	74,28

A malha utilizada possui 32 elementos, e 4 pontos de Gauss. Não se utiliza processo de sub-elementação.

Pode-se observar que o modelo proposto apresenta bons resultados frente aos valores de referência, ainda que com aproximações relativamente pobres para a geometria circular do contorno e para o campo de deslocamento.

9.3 CASCAS DELGADAS ABATIDAS

A seguir analisam-se exemplos de cascas, com diferentes geometrias e níveis de abatimento. A validação dos valores obtidos com o uso do programa desenvolvido é feita com base em resultados da literatura e provenientes da aplicação do Método dos Elementos Finitos.

9.3.1 Casca Cilíndrica de Base Quadrada, Engastada e Livre

Admite-se uma casca de curvatura cilíndrica, com raio de 100 m, e base quadrada de dimensões unitárias (Fig. 9.12). O carregamento transversal vale $q_3 = 0,006853 \text{ N/m}^2$, o módulo de elasticidade longitudinal é de 1000 N/m^2 e o coeficiente de Poisson é igual a 0,3. A espessura da casca é $h = 0,1 \text{ m}$.

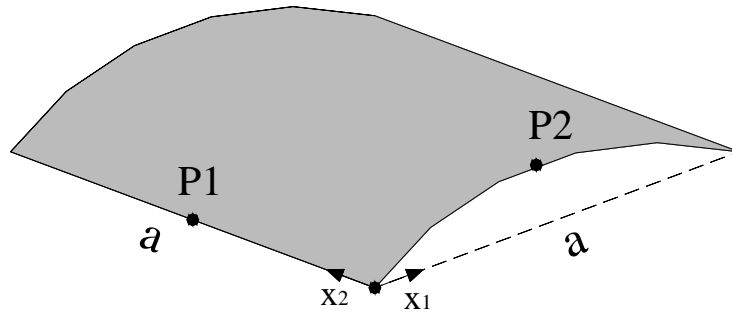


Figura 9.12 – Casca Cilíndrica, engastada nas bordas retas e livre nas bordas curvas

Na análise com uso do programa desenvolvido, adotam-se 40 elementos de contorno, e 32 células sobre o domínio, como ilustrado em 9.13.

Os resultados são validados por um pacote comercial, baseado no método dos elementos finitos. Para tanto, utilizam-se 400 elementos do tipo quadrilateral isoparamétrico com aproximação quadrática, o qual é bastante indicado para o tipo de problema em análise, segundo instruções do programa.

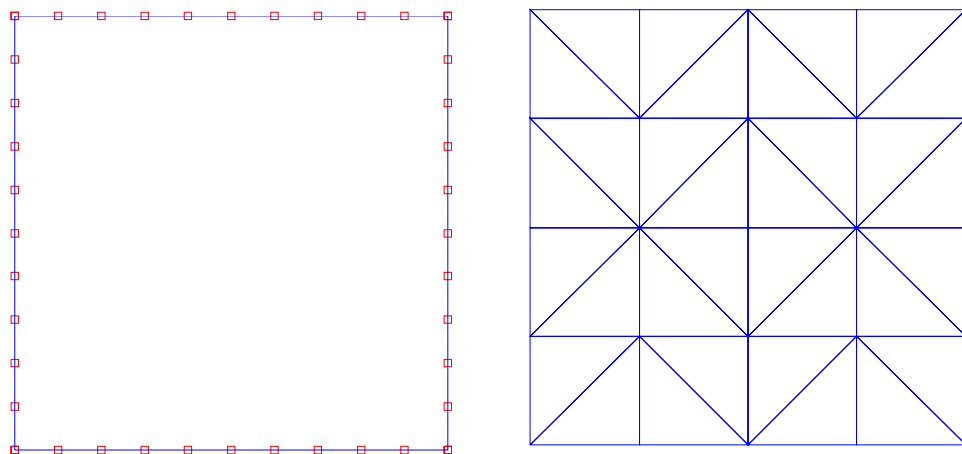


Figura 9.13 – Discretizações utilizadas no contorno e no domínio

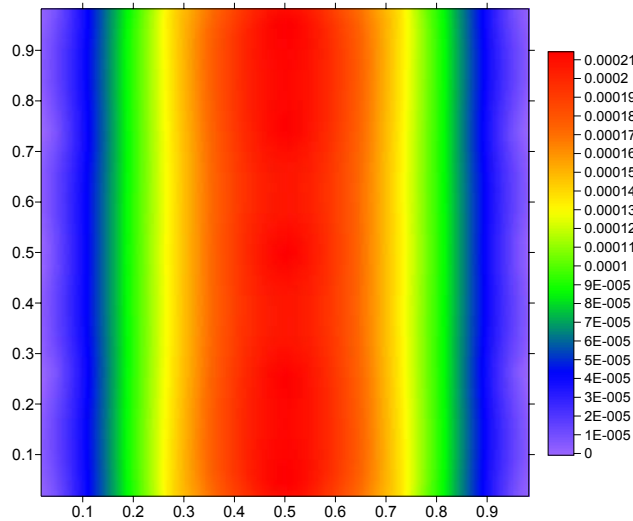


Figura 9.14 – Deslocamento transversal obtido com a proposta apresentada

Alguns valores obtidos com a presente proposta são confrontados com os resultados de referência, como mostra a tabela 9.3. O diagrama de deslocamento transversal é apresentado acima.

Tabela 9.3 – Deflexão no ponto central e forças de contorno (N, m)

Método	W_0	N_n P2	N_n P1	Q_n P1	M_n P1
Refer. MEF	2,30E-04	2,70E-05	1,20E-04	3,12E-04	-4,67E-04
Presente Estudo	2,15E-04	2,77E-05	1,25E-04	3,35E-04	-4,70E-04

Verifica-se uma razoável conformidade entre os valores propostos e os resultados do método dos elementos finitos.

9.3.2 Casca Esférica de Base Circular, Engastada

Analisa-se neste exemplo uma casca em forma de cunha esférica, com 10 m de diâmetro, espessura de 0.01 m e raio de curvatura $R = 100$ m. As propriedades mecânicas e de carregamento valem: $E/q_3 = 2,1 \times 10^5$ N/m² e $\nu = 0,3$. Considera-se a borda perfeitamente engastada, sendo as condições de contorno $u_\alpha = 0$ e $M_n = 0$.

A validação do exemplo é feita com base em dois trabalhos da literatura. Em Dirgantara & Aliabadi (1999), apresenta-se uma análise pelo método dos elementos de contorno, além resultados obtidos com uso de um programa

comercial (SAP90), baseado em elementos finitos. Na formulação via MEC proposta no trabalho supracitado, a flexão é tratada pela Teoria de Reissner, e as integrais de domínio são computadas por aproximação sobre células quadrilaterais com geometria quadrática e aproximação constante para as variáveis. Ainda, utilizam-se elementos de contorno quadráticos isoparamétricos. Neste trabalho referenciado, utilizam-se 16 elementos de contorno e 81 células. A malha de elementos finitos utilizada possui 540 elementos. O segundo trabalho, Wen et al. (2000) utiliza o MEC para a análise do problema, com elementos quadráticos isoparamétricos na aproximação do contorno. As integrais de domínio são transformadas para o contorno através do método da reciprocidade dual (Nardini & Brebbia). Utiliza-se a Teoria de Reissner. O contorno é discretizado em 16 elementos, e 25 pontos são utilizados no mapeamento do domínio.

No presente trabalho, analisa-se apenas um quarto da estrutura, em razão da simetria. Utilizam-se 36 elementos de contorno e 82 células, como ilustrado na figura 9.15.

A tabela 9.4 lista alguns resultados, tais como a deflexão no ponto central, e as forças no contorno.

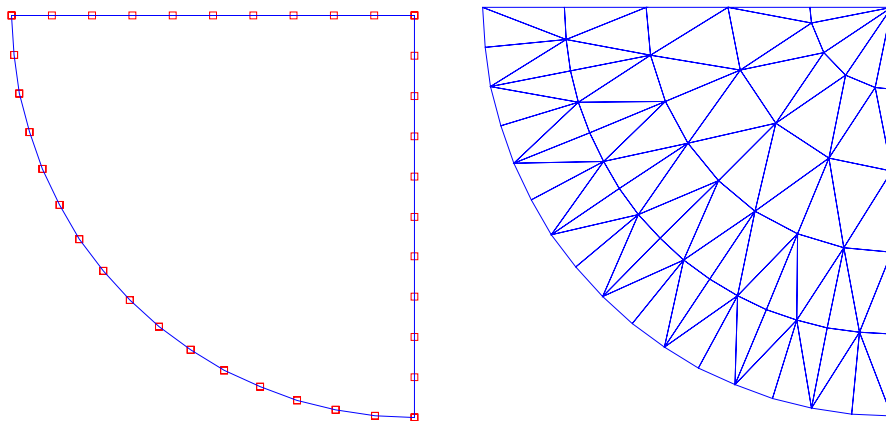


Figura 9.15 – Discretizações utilizadas no contorno e no domínio

Tabela 9.4 – Deflexão e forças no contorno da casca esférica (N,m)

Resultado	Presente	Refer. 1 MEC	Refer. 2 MEC	Refer. MEF
W_0	0,205	0,209	0,211	0,210
N_n	22,812	22,300	22,729	22,879
Q_n	1,667	1,386	1,429	-
M_n	1,463	1,499	1,507	1,492

Verifica-se uma razoável concordância dos valores aqui obtidos com os resultados de referência. Deve-se ressaltar que na modelagem de apenas um quarto da estrutura existe o inconveniente do canto livre, que pode levar à perturbações na solução em sua vizinhança.

9.3.3. Casca Esférica de Base Quadrada, apoiada

Uma casca com base quadrada de 2 m de lado e 5 cm de espessura, possui curvaturas $K_{11} = K_{22} = 1/80 \text{ m}^{-1}$. Admite-se $E/q_3 = 1 \times 10^5 \text{ N/m}^2$, com coeficiente de Poisson nulo.

Os valores obtidos são confrontados com resultados de um pacote comercial baseado no MEF. Para tanto, considera-se uma malha de 400 elementos quadrilaterais isoparamétricos. No programa proposto, o contorno é dividido em 4 elementos e o domínio discretizado em 32 células.

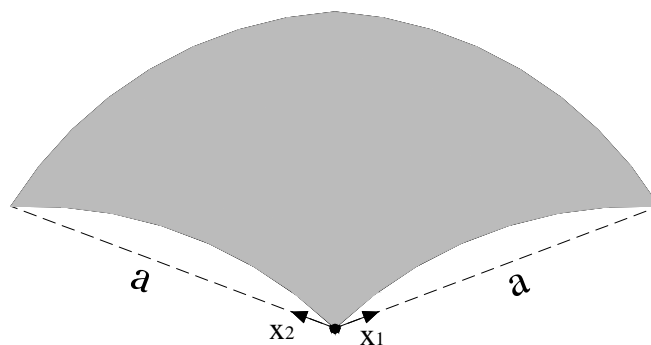


Figura 9.16 – Casca esférica de base quadrada

A tabela 9.5 ilustra a comparação entre os valores de deflexão no ponto central da casca, além da rotação e força de membrana normais ao contorno, no ponto central de uma borda. Os resultados apresentam-se satisfatórios.

Tabela 9.5 – Deflexão e forças no contorno da casca esférica (N,m)

Método	W_0	dw/dn	N_n
Refer. MEF	6,120E-02	1,025E-01	1,892
Presente Estudo	6,240E-02	1,030E-01	1,756

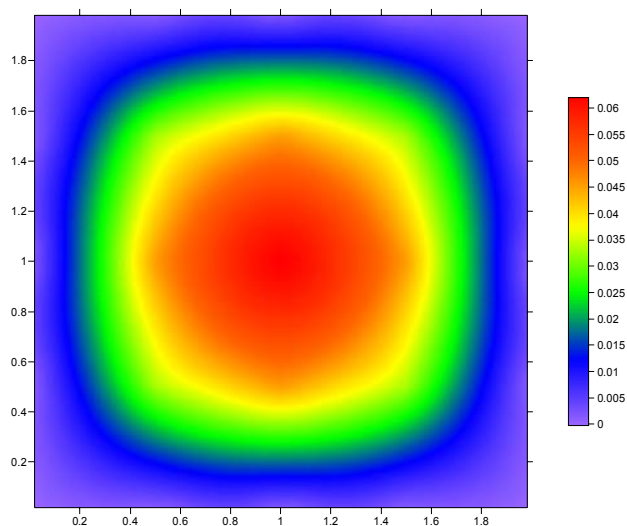


Figura 9.17 – deslocamento transversal

Na figura 9.17 traça-se o diagrama de deslocamentos transversais obtido com o programa proposto.

9.3.4. Casca Cilíndrica de Base Quadrada, Apoiada

O objetivo deste exemplo é validar a implementação desenvolvida na análise de cascas com diferentes níveis de abatimento. Para tanto parte-se de uma placa, e incrementa-se a curvatura em uma direção apenas. Vale destacar que a literatura não estabelece limites para o abatimento das cascas, de forma que os resultados serão confrontados com valores obtidos através de análise com um pacote comercial baseado no MEF.

Admita-se uma placa quadrada com 2 m de lado e 6 cm de espessura, apoiada nas quatro bordas. O carregamento transversal é uniforme, de valor $q_3 = 100 \text{ N/m}^2$. As propriedades de material são as seguintes: $E = 2,05 \times 10^6 \text{ N/m}^2$; $\nu = 0,3$.

A imposição de curvatura na direção x_1 dá origem a uma casca cilíndrica, como mostrado na Figura 9.13. Os raios de curvatura adotados valem 200 m, 100 m, 50 m e 20 m.

A malha utilizada na análise via elementos finitos possui 400 elementos quadrilaterais isoparamétricos de aproximação quadrática.

As discretizações utilizadas no contorno e no domínio do problema, 40 elementos e 32 células, respectivamente, são semelhantes às apresentadas no exemplo 9.3.1. A integração numérica foi realizada com 2 pontos de Gauss.

Tabela 9.6 – Deflexões no ponto central (m)

Raio de Curvatura	Relação f_0/a	Presente	Refer. MEF	Erro (%)
∞	0	0,16069	0,16104	-0,22%
200	1,25E-03	0,16011	0,16005	0,04%
100	2,50E-03	0,15941	0,15925	0,10%
50	5,00E-03	0,15668	0,15405	1,71%
20	1,25E-02	0,13371	0,12537	6,65%

Com base nos valores da tabela acima, nota-se a perda de congruência entre os resultados obtidos com o programa desenvolvido e os valores de referência, à medida que diminui-se o raio de curvatura. Isso pode significar uma limitação da própria formulação utilizada, que não representa adequadamente o ganho de rigidez devido ao comportamento de membrana em casos de curvatura mais acentuada.

Um outro aspecto que deve ser ressaltado é o ganho de rigidez, ainda que pequeno no presente caso, da estrutura com o aumento da curvatura. Segundo os valores de referência, o deslocamento máximo cai cerca de 22% na casca de maior curvatura analisada, em relação à placa. Esse percentual é de 17% nos resultados aqui propostos. A figura a seguir serve de ilustração.

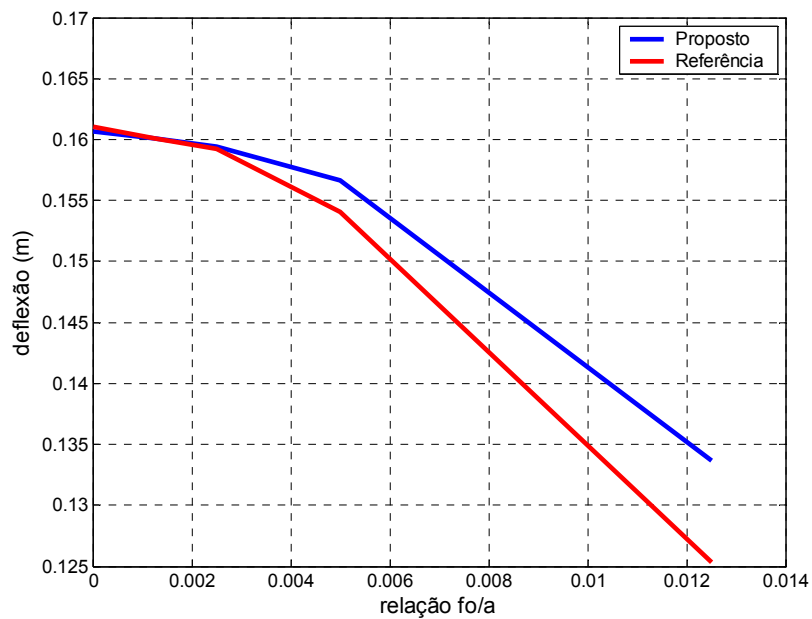


Figura 9.18 – Deflexões na linha central para os vários níveis de abatimento

CONCLUSÃO

Apresentou-se um modelo numérico para análise de cascas abatidas, o qual apresentou desempenho satisfatório numa validação feita com base em outros trabalhos e em resultados de programas comerciais consagrados, baseados no método dos elementos finitos.

O programa desenvolvido mostrou-se significativamente sensível à densidade do mapa de células utilizado no domínio, bem como à relação entre a quantidade de células e de elementos no contorno.

Como propostas para trabalhos futuros, a implementação de elementos de contorno e células com aproximações de ordem maior pode ser interessante, a fim de diminuir a densidade das malhas utilizadas neste trabalho.

A introdução de enrijecedores no domínio das cascas, bem como seu acoplamento com vigas, possibilitará a análise de estruturas reais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Altiero, N.J. & Sikarskie, D.L., *A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form*. Computer & Structures, 9, 163-168, 1978.
- Andrade, R. C., *Uma Análise das Soluções Fundamentais Aplicáveis às Placas Espessas Pelas Teorias de Reissner e Mindlin e Suas Relações com a Teoria Clássica para uso no Método dos Elementos de Contorno*. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Campinas, Campinas, 2001.
- Axelrad, E. L., *Theory of Flexible Shells*, Elsevier, Amsterdam, 1987.
- Bares, R., *Tables Pour le Calcul des Dalles et des Parois*. Ed. Dunod, Paris, 1969.
- Barretto, S.F.A., *Análise elastodinâmica de placas através do MEC com interação solo-estrutura*. Tese de doutorado, EESC-USP, 1995.
- Bezine G. P., *A mixed boundary integral-finite-element approach to plate vibration problems*. Mechanics research communications, 7 (3), 141-150, 1980.
- Bezine, G.P. & Gambi, D.A., *A new integral equation formulation for plate bending problems*. In: Recent advances in boundary element methods, Brebbia, C.A. ed., Pentech Press, 1978
- Bézine, G.P., *Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions*, Mech. Res. Comm., 5 (4), 197-206, 1978.
- Bezine, G.P., *A boundary integral equation method for plate flexure with conditions inside the domain*. Int. J. Num. Meth. Eng., v.17, p.1647-1657, 1981.
- Billington, D. P., *Thin Shell Concrete Structures – Second edition*. Mcgraw-Hill, US, 1982.

- Billington, D. P., *Thin Shell Concrete Structures*. Mcgraw-Hill, US, 1965.
- Brebbia, C. A., *Weighted Residual Classification of Approximate Methods*. Applied Mathematical Modelling, 2 (3), 1978.
- Brebbia, C.A., Telles, J.C.F & Wrobel, L.C. *Boundary element techniques. Theory and applications in engineering*, Springer-Verlag: Berlin and New York, 1984.
- Brebbia, C.A., *The Boundary element method for engineers*. Pentech Press, London, 1978.
- Chaves, E.W.V., *Análise de placas com variação de espessura através do método dos elementos de contorno*. Dissertação de mestrado, EESC-USP, 1997.
- Chueiri, L.H.M., *Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos, 1994.
- Cruse, T.A., *An Improved Boundary-Integral Equation Method for Three Dimensional Elastic Stress Analysis*. Computers and Structures, 4, pp.741-754, 1974.
- Cruse, T.A., *Aplication of the Boundary-Integral Equation Method to Three Dimensional Stress Analysis*. Computers and Structures, 3, pp.509-527, 1973.
- Cruse, T.A., *Numerical solutions in three-dimensional elastostatics*. Int. J. Solids & Structures, 5, p.1259-1274, 1969.
- Danson, D. J., *Analysis of Plate Bending Problems by Direct Boundary Element Method*. Dissertação (Mestrado), University of Southampton, Southampton, 1979.
- Dirgantara, T., Aliabadi, M. H.; *A New Boundary Element Formulation For Shear Deformable Shells Analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, V. 45 (9), pp. 1257-1275, 1999.

- Dirgantara, T., Aliabadi, M. H.; *Dual Boundary Element Formulation for Fracture Mechanics Analysis of Shear Deformable Shells*, International Journal of Solids and Structures, V. 38 (44-45), pp. 7769-7800, 2001.
- Dirgantara, T., Aliabadi, M. H.; *Non-linear fracture mechanics analysis of fuselage panels using BEM*, Advances In Fracture And Damage Mechanics: Key Engineering Materials, V. 251 (2), pp. 115-121, 2003.
- Fernandes G.R. & Venturini W.S., *Non-linear Boundary Element Analysis of Plates Applied to Concrete Slabs*. In: Engineering analysis with Boundary Elements, V. 26, p. 169-181, 2002.
- Fernandes, G.R. & Venturini, W.S., *Stiffened plate bending analysis by boundary element method*. Computational Mechanics, 28, p. 275-281, 2002.
- Fernandes, G.R. *Análise não-linear de estruturas de pavimentos de edifícios através do método dos elementos de contorno*. São Carlos. 272p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2003.
- Fernandes, G.R., Chaves E. W.V. & Venturini, W.S., *Plate bending boundary element formulation considering variable thickness*. Engineering Analysis with boundary elements, V. 23, 405-418, 1999.
- Fernandes, G.R., *O método dos elementos de contorno aplicado à análise não-linear de placas*. Dissertação de mestrado, EESC-USP, 1998.
- Forbes, D. J. & Robinson, A. R.; *Numerical Analysis of Elastic Plates and Shallow Shells by an Integral Equation Method*. In: Structural Research Series Report, N. 345, University of Illinois, Urbana, 1969.
- Fredholm, I., *Solution d'un Problème Fondamental de la Theorie de l'élasticité*. Arkiv for Matematik, Astromi och Fysik, 2 (28): 3-8, 1906.
- Fredholm, I., *Sur une Classe d'equations fonctionelles*. Acta Math., v.27, p.365-390, 1903.
- Hansen, E. B., *Numerical solution of integro-differential and singular equations for plate bending problems*. J. of Elasticity, v.6, n.1, p.39-56, 1976

- Hartley, G.A., *Development of plate bending elements for frame analysis*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 17 (2): 93-104, 1996
- Hartmann, F. & Zotemantel, R., *The direct boundary element method in plate bending*, Int. J. Num. Meth. Eng., 23(11), 2049-2069, 1986.
- Jaswon, M.A. & Maiti, M., *An integral formulation of plate bending problems*. J. Eng. Math., 2, 83-93, 1968.
- Jaswon, M.A., Maiti, M. & Symm, G.T., *Numerical biharmonic analysis and some applications*. Int. J. Solids & structures, 3, 309-332, 1967.
- Kamiya N, Sawaki Y. & Nakamura Y., *Non-linear bending analyses of heated sandwich plates and shells by the boundary element method*. Res Mechanica, 8 (1), 29-38, 1983.
- Kamiya, N. & Sawaki, Y., *An integral equation approach to finite deflection of elastic plates*. International Journal of Non-linear Mechanics, 17, 187-194, 1982.
- Katsikadelis, J. T. & Armenakas, A. E., *Analysis of clamped plates on elastic foundation by the boundary integral method*. J. of Applied Mechanics, ASCE, v.110, n.7, p.1085-1104, 1984.
- L.G.S. Leite, H.B. Coda & W.S. Venturini, *Two-dimensional solids reinforced by thin bars using the boundary element method*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 27, 193-201, 2003.
- Lachat, J.C. & Watson, J.O., *Effective numerical treatment of boundary integral equations: a formulation for three-dimensional elastostatics*. Int. J. Num. Methods Eng., 10, 991-1005, 1976.
- Lachat, J.C., *A further development of the boundary integral technique for elastostatics*. PhD Thesis, Southampton University, Southampton, 1975.
- Lu, P. & Huang, M., *Boundary Element Analysis of Shallow Shells Involving Shear Deformation*. International Journal of Solids and Structures, 29 (10): 1273-1282, 1992.

- Manzoli, O. L. *Formulação do método dos elementos de contorno para placas sobre fundação elástica*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos –USP, 1992.
- Nardini, D. & Brebbia, C. A.. *A new approach to free vibration analysis using a boundary element method*. Boundary Element Methods in Engineering, Brebbia, C. A., ed., 1982;
- Oliveira Neto, L., *Análise de placas de borda curva pelo método dos elementos de contorno*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos –USP, 1991.
- Oliveira Neto, L., *Uma formulação do método dos elementos de contorno com três parâmetros nodais em deslocamentos para placas delgadas e suas aplicações a problemas de engenharia estrutural*. Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos, 1998.
- Oliveira Neto, L.; Paiva, J.B. *A special BEM for elastostatic analysis of building floor slabs on columns*. Computers & Structures, v.81, n.6, p.359-372, March, 2003.
- Oliveira Neto, L.; Paiva, J.B. *Analysis of curved edge plates by the boundary element method*. Engineering Analysis with Boundary Elements, v.12, n.1, p.57-64, 1993.
- Paiva, J.B. & Venturini, W.S. *Alternative technique for the solution of plate bending problems using the boundary element method*. Advances in Engineering Software, v.14, n.4, p.265-271, 1992.
- Paiva, J.B., *Boundary element formulation for building slabs*. Engineering Analysis with Boundary Elements, v.17, n.2, p.105-110, March, 1996.
- Paiva, J.B., *Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estrutura*. São Carlos. 195p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1987.
- Paiva, J.B.; Venturini, W.S. *Alternative boundary element approach to compute efforts along zoned domain interfaces*. Engineering Analysis with Boundary Elements, v.12, n.2, p.143-148, 1993.

- Palermo Jr., L.: Rachid, M.: Venturini, W.S. *Analysis of thin walled structures using the boundary element method*. Engineering Analysis with Boundary Elements, v.9, n.4, p.359-363, 1992.
- Ribeiro, G.O., *Sobre a formulação do método dos elementos de contorno de placas usando as hipóteses de Reissner*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos –USP, 1992.
- Ribeiro, G.O., Venturini, W.S. *Aplicação do método dos elementos de contorno para análise de placas submetidas à variação de temperatura*. Revista Brasileira de Engenharia, Caderno de Engenharia Estrutural, v.9, n.1, p.27-38, março, 1992.
- Rizzo, F.J. & Shippy, D. J., *A Formulation and Solution Procedure for the General Non-Homogeneous Elastic Inclusion Problem*. International Journal of Solids and Structures, 4: 1161-1179, 1968.
- Rizzo, F.J., *An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics*. Quart. Appl. Math., 25: 83-95, 1967.
- Sih, G. C. & Hagendorf, H. C., *On Cracks in Shells with Shear Deformation*, In: Mechanics of Fracture, Sih, G. C., ed., V. 3, 1997.
- Silva, N.A., *Aplicação do método dos elementos de contorno às placas com enrijecedores utilizando a teoria de Reissner*. Tese (Doutorado). EESC-USP, 1996.
- Song, GS. & Mukherjee, S., *Boundary element method analysis of bending of elastic plates of arbitrary shape with general boundary conditions*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 3, 36-44, 1986.
- Stern, M., *Boundary integral equations for bending of thin plates*. In: BREBBIA, C.A. ed. Progress in boundary element methods. London, Pentech Press, v.l. 2, 1983.
- Stern, M.A., *A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems*, Int. J. Solids Structures, 15, 769-782, 1979.
- Tejerina Calderon, E., *Sobre o uso do método dos elementos de contorno - MEC para o estudo de interação de placas com o meio contínuo*. Tese de doutorado, EESC-USP, 1996.

- Tejerina Calderon, E., *Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos, 1991.
- Telles, J. C. F. & Brebbia, C. A., *Elastoplastic Boundary Element Analysis*. In: Proc. Europe-U.S. Workshop on Nonlinear Finite Element Analysis in Structural Mechanics, Wunderlich, W. et al., eds., Springer-Verlag, 1980.
- Telles, J. C. F. & Brebbia, C. A., *On the Application of the Boundary Element Method to Plasticity*. In: Applied Mathematics Modelling, V. 3, pp. 466-470, 1979.
- Telles, J. C. F. & Brebbia, C. A., *The Boundary Element Method in Plasticity*. In: New Developments in Bondary Element Methods, Brebbia, C. A., ed., CML, 1980.
- Timoshenko S. & Woinowsky-Krieger S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1959.
- Tosaka, N., *Integral Equation Method for Shallow Shell Bending Problems*. In: Shells, Membranes and Space Frames, Proceedings IASS Symposium, Heki, K., ed., V. 1, pp. 169-176, Elsevier Science, Amsterdam, 1986.
- Tottenham, H., *The Boundary Element Method for Plates and Shells*. In: Developments in Boundary Element Methods – 1, Banerjee, P. K. & Butterfield, R., eds., Applied Science, London, 1979.
- Van Der Weeën, F. *Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model*, In: Boundary element methods in engineering, Brebbia, C.A., ed., Springer-Verlag, 1982.
- Venturini, W. S. & Brebbia, C. A., *Boundary Element Formulation for Nonlinear Applications in Geomechanics*. In: Applied Mathematical Modelling, V. 8, pp. 251-260, 1988.
- Venturini, W. S. & Brebbia, C. A., *Some Applications of the Boundary Element Methods in Geomechanics*. In: Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech., V. 7, pp. 419-434, 1983.

- Venturini, W. S., *Application of the Boundary Element Formulation to Solve Geomechanical Problems*. Ph. D. Thesis, University of Southampton, 1982.
- Venturini, W. S., *Boundary Element Methods in Geomechanics (Lectures Notes in Engineering)*. Springer-Verlag, 1984.
- Venturini, W. S.; *Um Estudo sobre o Método dos Elementos de Contorno e suas Aplicações em Problemas de Engenharia*, Tese de Livre-Docência, 1988. *suas Aplicações em Problemas de Engenharia*, Tese de Livre-Docência, 1988.
- Venturini, W.S., Paiva, J.B. *Boundary element for plate bending analysis*. Engineering Analysis with Boundary Elements, v.11, n.1, p.1-8, 1993.
- Venturini, W.S.; Paiva, J.B. *Plate bending analysis by the boundary element method considering zoned thickness domain*. Software for Engineering Workstations, v.4, n.4, p.183-185, Oct. 1988.
- Wen, P. H., Aliabadi M. H. and Young, A.; *Boundary element analysis of curved cracked panels with adhesively bonded patches*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, V.58 (1), pp. 43-61, 2003.
- Wen, P. H., Aliabadi, M. H. and Young, A.; *Application of Dual Reciprocity Method to Plates and Shells*, Engineering Analysis with Boundary Elements, V. 24 (7-8), pp. 583-590, 2000.
- Wen, P. H., Aliabadi, M. H. and Young, A.; *Boundary Element Analysis of Reinforced Shear Deformable Shells*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, V. 54 (6), pp. 789-808, 2002.
- Wen, P. H., Aliabadi, M. H. and Young, A.; *Fracture mechanics analysis of curved stiffened panels using BEM*, International Journal of Solids and Structures, V. 4 (1), pp. 219-236, 2003.
- Wen, P. H., Aliabadi, M. H. and Young, A.; *Plane Stress and Plate Bending Coupling in BEM Analysis of Shallow Shells*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, V. 48 (8), pp. 1107-1125, 2000.
- Wu, B. C. & Altiero, N. J., *A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions*. Computers & Structures, v.10, p.107-117, 1979

Wutzow, W. W., *Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise de Chapas com Enrijecedores*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos, 2003.

ANEXO I

**DERIVADAS DAS SOLUÇÕES FUNDAMENTAIS PARA PLACAS
DELGADAS**

Apresentam-se aqui as expressões das derivadas de soluções fundamentais da teoria de placas, necessárias ao cálculo dos esforços cortante e fletor, dados em (5.21) e (5.22).

$$\frac{\partial w^*}{\partial x_i}(s, Q) = -\frac{r}{4\pi D} \ln(r) r_{,i} \quad (\text{A1.1})$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(s, Q) = \frac{1}{4\pi D} (r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \ln(r)) \quad (\text{A1.2})$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k^2}(s, Q) = \frac{1}{4\pi D} (1 + 2 \ln(r)) \quad (\text{A1.3})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k^2}(s, Q) \right] = -\frac{1}{2\pi r D} r_{,i} \quad (\text{A1.4})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(s, Q) \right] = -\frac{1}{4\pi D} \left[r_{,i} (r_{,k} \eta_k) + \eta_i \ln(r) \right] \quad (\text{A1.5})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(s, Q) \right] = \frac{1}{4\pi r D} \left[(2r_{,i} r_{,j} - \delta_{ij}) r_{,k} \eta_k - r_{,i} \eta_j - r_{,j} \eta_i \right] \quad (\text{A1.6})$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(s, Q) \right] = \frac{1}{2\pi r D} r_{,k} \eta_k \quad (\text{AI.7})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k^2} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(s, Q) \right) \right] = \frac{1}{2\pi r^2 D} (2r_{,i} r_{,k} \eta_k - \eta_i) \quad (\text{AI.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^*}{\partial x_i}(s, Q) &= \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu)(r_{,k} s_k)^2 [4r_{,i}(r_{,k} \eta_k) - \eta_i] - \right. \\ &\left. 4(1-\nu)(r_{,k} s_k)(r_{,k} \eta_k) s_i + (3-\nu)[\eta_i - 2r_{,i}(r_{,k} \eta_k)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{AI.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(s, Q) &= \frac{1}{4\pi r^3} \left\{ 2(1-\nu)(r_{,k} s_k)^2 [24r_{,i} r_{,j}(r_{,k} \eta_k) - \right. \\ &4(r_{,i} \eta_j + r_{,j} \eta_i + \delta_{ij}(r_{,k} \eta_k))] + 2(1-\nu)(r_{,k} s_k) [2(\eta_i s_j + \eta_j s_i) - \\ &8(r_{,k} \eta_k)(r_{,i} s_j + r_{,j} s_i)] + 4(1-\nu)(r_{,k} \eta_k)(s_i s_j) + \\ &\left. (3-\nu)[2\delta_{ij}(r_{,k} \eta_k) - 8r_{,i} r_{,j}(r_{,k} \eta_k) + 2(r_{,i} \eta_j + r_{,j} \eta_i)] \right\} \end{aligned} \quad (\text{AI.10})$$

$$\frac{\partial V_n^*}{\partial x_k^2}(s, Q) = -\frac{1-\nu}{\pi r^3} r_{,k} \eta_k [4(r_{,i} s_i)^2 - 1] \quad (\text{AI.11})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k^2}(s, Q) \right] &= -\frac{(1-\nu)}{\pi r^4} \left\{ (r_{,k} s_k)^2 [24 \cdot r_{,i} \cdot (r_{,i} \eta_i) - 4 \cdot \eta_i] - \right. \\ &\left. (r_{,i} \eta_i) [8s_i(r_{,k} s_k) + 4r_{,i}] + \eta_i \right\} \end{aligned} \quad (\text{AI.12})$$

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial x_i}(s, Q) = \frac{1}{4\pi r} \left\{ (1+\nu)r_{,i} - 2(1-\nu)(r_{,k} \eta_k) [r_{,i}(r_{,k} \eta_k) - \eta_i] \right\} \quad (\text{AI.13})$$

$$\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k^2}(s, Q) = -\frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu) [1 - 2(r_{,k} \eta_k)^2] \right\} \quad (\text{AI.14})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{M}_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(s, \mathbf{Q}) = & \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ (1+\nu)(\delta_{ij} - 2r_i r_j) + \right. \\ & 2(1-\nu) \left[\eta_i \eta_j - 2r_j \eta_i (r_k \eta_k) - (\delta_{ij} - 2r_i r_j) (r_k \eta_k)^2 - \right. \\ & \left. \left. 2r_i (r_k \eta_k) (\eta_j - r_j (r_k \eta_k)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A1.15})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{M}_n^*}{\partial x_k^2}(s, \mathbf{Q}) \right] = -\frac{(1-\nu)}{\pi r^3} \left[r_i + 2\eta_i (r_k \eta_k) - 4r_i (r_k \eta_k)^2 \right] \quad (\text{A1.16})$$

$$\frac{\partial \mathbf{M}_{ns}^*}{\partial x_i}(s, \mathbf{Q}) = -\frac{(1-\nu)}{4\pi r} \left[2r_i (r_k \eta_k) (r_k s_k) - \eta_i (r_k s_k) - s_i (r_k \eta_k) \right] \quad (\text{A1.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{M}_{ns}^*}{\partial x_i \partial x_j}(s, \mathbf{Q}) = & \frac{(1-\nu)}{4\pi r^2} \left\{ 2 \left[(r_k s_k) (r_i \eta_j + r_j \eta_i) + \right. \right. \\ & (r_k \eta_k) (r_i s_j + r_j s_i) + (r_k \eta_k) (r_k s_k) (\delta_{ij} - 4 \cdot r_i r_j) \left. \right] - \\ & \left. (\eta_i s_j + \eta_j s_i) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A1.18})$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{M}_{ns}^*}{\partial x_k^2}(s, \mathbf{Q}) = \frac{(1-\nu)}{\pi r^2} \left[(r_k s_k) (r_l \eta_l) \right] \quad (\text{A1.19})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{M}_n^*}{\partial x_k^2}(s, \mathbf{Q}) \right] = \frac{(1-\nu)}{\pi r^3} \left[4r_i (r_k s_k) (r_l \eta_l) - \eta_i (r_k s_k) - s_i (r_l \eta_l) \right] \quad (\text{A1.20})$$