

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

*Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Análise
de Sólidos Multi-Fraturados*

Autor: Eng^o Edson Denner Leonel

*Dissertação apresentada ao Departamento de
Engenharia de Estruturas da EESC-USP como
parte dos requisitos necessários à obtenção do
título de Mestre em Engenharia de Estruturas.*


Orientador: Prof. Tit. Wilson Sergio Venturini

São Carlos, Março de 2006


FOLHA DE JULGAMENTO

Candidato: Engenheiro **EDSON DENNER LEONEL**

Dissertação defendida e julgada em 03-03-2006 perante a Comissão Julgadora:



Prof. Titular **WILSON SERGIO VENTURINI (Orientador)**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) Aprovado



Prof. Dr. **ADAIR ROBERTO AGUIAR**
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP) Aprovado



Prof. Dr. **GABRIEL DE OLIVEIRA RIBEIRO**
(Universidade Federal de Minas Gerais/UFMG) Aprovado



Prof. Associado **MARCIO ROBERTO SILVA CORRÊA**
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)



Profa. Titular **MARIA DO CARMO CALIJURI**
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Aos meus pais Edson e Alda
E a minha amada esposa Tânia*

Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde, paz e tranquilidade para superar mais uma importante etapa em minha vida.

A toda minha família em especial aos meus pais Edson e Alda que sempre me incentivaram me mostrando o caminho para me tornar um homem digno.

À minha amada esposa Tânia que sempre me apoiou em todos os momentos e me ajudou a transpor todos os desafios. Sem você esse sonho não seria possível.

Ao professor Wilson Sergio Venturini pelo apoio, paciência, ensinamentos ministrados e confiança na minha capacidade e em meu trabalho.

Ao amigo e professor Gabriel de Oliveira Ribeiro, Universidade Federal de Minas Gerais, pelos ensinamentos em minha iniciação científica sendo um dos grandes incentivadores do meu curso de pós-graduação.

Ao professor Adair Roberto Aguiar pelas valiosas contribuições fornecidas durante o exame de qualificação e a defesa desta dissertação.

Ao amigo Luiz Eduardo Ferreira pelas grandes sugestões principalmente nos temas relacionados à Mecânica da Fratura e ao programa FORTRAN.

Aos amigos do departamento em especial Eduardo Toledo, Gustavo Codá, Marlos, Edmar, Walter, Claudius, Valério Almeida, Luiz Vieira, Manoel Dênis pela troca de idéias sobre engenharia e pelos momentos de alegria compartilhados nas atividades desenvolvidas ao longo do curso.

Aos professores e funcionários do SET que muito contribuíram para a minha formação pessoal e profissional.

Ao CNPq pelo apoio financeiro nos primeiros meses do curso.

À FAPESP pela concessão da bolsa durante o período do curso de mestrado.

Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xii
Resumo	xiii
Abstract	xiv
1. – Introdução	1
1.1 – <i>Considerações Gerais</i>	1
1.2 – <i>Objetivos</i>	5
1.3 – <i>Justificativas</i>	6
1.4 – <i>Descrição dos Capítulos da Dissertação</i>	8
2. – Revisão Bibliográfica	10
2.1 – <i>Revisão Bibliográfica</i>	10
3. – Tópicos da Teoria da Elasticidade	18
3.1 – <i>Equações de Equilíbrio</i>	18
3.2 – <i>Relações Constitutivas</i>	20
3.3 – <i>Relações Deformação-Deslocamento</i>	21
3.4 – <i>Condições de Compatibilidade de Deformações</i>	22
3.5 – <i>Equacionamento dos Problemas Elásticos</i>	22
3.6 – <i>Simplificação do problema 3-D para Estados Planos</i>	23
4. – Mecânica do Fraturamento	25
4.1 – <i>Balanço de Energia de Griffith</i>	26
4.2 – <i>O Fator de Intensidade de Tensão</i>	29
4.3 – <i>Modos de Solicitação ao Fraturamento</i>	30
4.4 – <i>Relação entre Campo de Tensão e o Fator de Intensidade de Tensão</i>	31
4.5 – <i>A Integral J</i>	33
4.6 – <i>Mecânica do Fraturamento Aplicada ao Concreto</i>	34
4.7 – <i>Modelos de Fraturamento Coesivo</i>	37

5. - Método dos Elementos de Contorno Formulação Singular	41
5.1 – Soluções Fundamentais para os problemas Bidimensionais e Tridimensionais	42
5.2 – Equacionamento para o Problema Elástico Plano.....	44
5.3 – Aproximações sobre o Contorno.....	49
5.4 – Funções de Aproximação.....	50
5.5 – Construção do Sistema de Equações	52
5.6 – Grandezas Internas	53
6.- Método dos Elementos de Contorno Formlação Hiper - Singular.....	56
6.1 – Equação Integral em Forças de Superfície.....	58
6.2 – Aproximações sobre o Contorno.....	63
6.3 – Estratégias de Modelagem e Discretização.....	64
6.4 – Sistema Final de Equações e Atualizações	66
6.5 – Singularidade da Equação Integral em Forças de Superfície.....	67
7. - Considerações sobre a Implementação Computacional.....	74
7.1 – Extração dos Fatores de Intensidade de Tensão	74
7.1.1 - Técnica de Correlação de Deslocamentos	74
7.1.2 - Técnica Baseada no Estado de Tensão	77
7.1.3 – Comparativo entre as Técnicas para extração dos Fatores de Intensidade de Tensão	78
7.2 – Teorias de Interação de Modos de Solicitação ao Fraturamento	81
7.2.1 - Critério da Máxima Tensão Circunferencial.....	82
7.2.2 - Critério da Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial	84
7.2.3 - Critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação	85
7.2.4 - Curvas de Interação	86
7.2.5 - Critério baseado em tensão	87
7.3 – Gerador de Fissuras Iniciais	88
7.4 – Metodologia para Crescimento das Fissuras	89
7.5 – Otimização da Malha de Elementos de Contorno	90
7.6 – Pré-Processador	92
8. - Aplicações	95
8.1 – Chapa com Fissura Central.....	95
8.2 – Viga biapoiada com Carga Central.....	99
8.3 – Viga Engastada Multi-Fraturada	103
8.4 – Chapa Quadrada com Três Furos	107
8.5 – Chapa Retangular com Trinta e Dois Furos	111
9. - Conclusões	115

10. - Referências Bibliográfias	118
Anexo A. - Integrais Singulares	131
Anexo B. - Integrais Analíticas Hiper-Singulares	135
Anexo C.- Sub-Elementação.....	145
Anexo D. - O Concreto Estrutural.....	149
<i>O Concreto.....</i>	<i>149</i>
<i>Comportamento do Concreto à Compressão Uniaxial.....</i>	<i>151</i>
<i>Comportamento do Concreto à Tração Uniaxial</i>	<i>152</i>
<i>Comportamento do Concreto Sujeito a Carregamentos Cíclicos.....</i>	<i>153</i>
<i>Comportamento do Concreto sob Estados de Tensões Multiaxiais.....</i>	<i>153</i>
Anexo E. – Função Delta de Dirac.....	156
Anexo F.- Condicionamento da Matriz e Estimativas de Erros	158
Anexo G.- A Mecânica do Dano.....	161
<i>Diferenças entre Mecânica do Fraturamento e Mecânica do Dano</i>	<i>161</i>
<i>Modelos para Dano</i>	<i>162</i>

Lista de Figuras

Figura 1.1 Análise da direção da propagação da fissura. Ruptura do dente da engrenagem, (a) e (b), ruptura global da engrenagem (c) e (d). Cornell (2006) apud PEREIRA (2004)...	7
Figura 3.1 Estado de tensão. Planos inclinados com forças de superfície. WUTZOW (2003)	19
Figura 3.2 Estados deformado e indeformado para corpo em regime de pequenas deformações. Determinação dos deslocamentos e das deformações em modelos 2D	21
Figura 4.1 Evolução da energia com o aumento do comprimento da fissura.....	26
Figura 4.2 Mapeamento da tensão na extremidade da fissura.....	29
Figura 4.3 Modos básicos de solitação ao fraturamento.....	31
Figura 4.4 Zona de processos inelásticos em materiais quase-frágeis SHAH et. al (1995)	35
Figura 4.5 Representação do processo de conexão dos micro-danos.....	35
Figura 4.6 Representação de fissuras coesivas para materiais quase-frágeis	36
Figura 4.7 Configuração do modelo de DUGDALE (1960)	38
Figura 4.8 Distribuição de tensões coesivas no modelo de BARENBLATT (1962).....	39
Figura 4.9 Distribuição de tensões coesivas no modelo de HILLERBORG et. al (1976) ..	40
Figura 4.10 Diagrama tensão x abertura da fissura. Determinação da liberação de energia crítica	40
Figura 5.1 Divisão do domínio e do contorno para determinação da equação integral sobre o contorno	46
Figura 5.2 Parâmetros para cálculo da equação integral sobre o contorno	49
Figura 5.3 Coordenadas adimensionais e funções de aproximação	50
Figura 6.1 Estratégia de discretização para o método dos elementos de contorno dual.....	65
Figura 6.2 Estratégia de discretização para o emprego da formulação singular	66
Figura 6.3 Crescimento e atualização do sistema matricial final	67
Figura 6.4 Viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído	68
Figura 6.5 Resumo das análises realizadas neste exemplo.....	69
Figura 6.6 Diagrama deslocamento vertical x relação altura/comprimento para o meio do vão	69
Figura 6.7 Diagrama tensão principal σ_1 x relação altura comprimento.....	70
Figura 6.8 Análise do número de condição. Formulações sem pré-condicionamento	71
Figura 6.9 Análise do número de condição. Formulações com pré-condicionamento.....	72
Figura 7.1 Avaliação das equações de deslocamentos nas faces da fissura	75

Figura 7.2 Determinação das diferenças entre os deslocamentos normais e paralelos ao plano da fissura.....	76
Figura 7.3 Localização dos pontos fontes para utilização na técnica de correlação de deslocamentos.....	76
Figura 7.4 Localização dos pontos para extração dos fatores de intensidade de tensão	78
Figura 7.5 Geometria e carregamentos para análise dos fatores de intensidade de tensão .	79
Figura 7.6 Sistema de coordenadas para a determinação das expressões de tensão na ponta da trinca	82
Figura 7.7 Diagrama de interação de modos. Situação de ruptura. BITTENCOURT et. al (2003)	87
Figura 7.8 Procedimentos para a realização da primeira iteração para o cálculo do ângulo de propagação.....	89
Figura 7.9 Procedimentos para a realização da segunda iteração para o cálculo do ângulo de propagação.....	90
Figura 7.10 Procedimentos para otimização de malha	91
Figura 7.11 Janela inicial. Abertura do programa	92
Figura 7.12 Criação da geometria do corpo	92
Figura 7.13 Definição da discretização	92
Figura 7.14 Definição das condições de contorno.....	92
Figura 7.15 Definição dos pontos internos.....	93
Figura 7.16 Definição Param. do Met. Elem. Contorno.....	93
Figura 7.17 Definição dos Param. material	93
Figura 7.18 Definição Param. para fraturamento	93
Figura 7.19 Escolha da metodologia de análise	93
Figura 8.1 Carregamento e condições de contorno para o exemplo 1.....	95
Figura 8.2 Configuração inicial.....	96
Figura 8.3 1º incremento no comprimento	96
Figura 8.4 5º incremento no comprimento	97
Figura 8.5 Separação do corpo em duas partes	97
Figura 8.6 Campo de deslocamento na direção y.....	98
Figura 8.7 Diagrama de tensão principal de tração σ_1 . 2º incremento no comprimento.....	98
Figura 8.8 Geometria e carregamentos para a estrutura a ser analisada no exemplo 2.....	99
Figura 8.9 Configuração inicial do exemplo	100
Figura 8.10 5º incremento no comprimento da fissura.....	100

Figura 8.11 9º incremento no comprimento da fissura.....	101
Figura 8.12 Último incremento no comprimento da fissura.....	101
Figura 8.13 Configuração inicial da análise	101
Figura 8.14 Malha de elementos finitos final	101
Figura 8.15 Diagrama de tensão principal σ_1 .4º incremento no comprimento	102
Figura 8.16 Geometria e carregamentos para a análise do terceiro exemplo	103
Figura 8.17 Distribuição inicial das fissuras	104
Figura 8.18 3º Incremento no comprimento das fissuras	104
Figura 8.19 9º Incremento no comprimento das fissuras	104
Figura 8.20 12º Incremento no comprimento das fissuras	104
Figura 8.21 16º Incremento no comprimento das fissuras	105
Figura 8.22 Separação do corpo em duas partes	105
Figura 8.23 Campo de deslocamento na direção x no fim da análise	106
Figura 8.24 Diagrama de tensões principais σ_1 . 2º incremento no comprimento das fissuras	106
Figura 8.25 Geometria e condições de contorno para o exemplo quatro	107
Figura 8.26 Propagação das fissuras para o exemplo quatro. 1º hipótese	108
Figura 8.27 Propagação das fissuras para o exemplo quatro. 2º hipótese	109
Figura 8.28 Campo de deslocamento vertical final após a separação da chapa em duas partes.....	110
Figura 8.29 Diagrama carga x deslocamento para a estrutura em análise.....	110
Figura 8.30 Geometria e condições de contorno para o exemplo cinco.....	111
Figura 8.31 Configuração inicial para o exemplo quatro	112
Figura 8.32 Ruptura da estrutura analisada em duas partes	112
Figura 8.33 Diagrama carga x deslocamento para a linha de furos superior.....	113
Figura 8.34 Diagrama carga x deslocamento para a linha de furos inferior.....	113
Figura 8.35 Campo de deslocamento vertical final após a separação da chapa em duas partes.....	114
Figura A.1 Elemento de contorno com nó singular sobre o nó inicial	131
Figura A.2 Elemento de contorno com nó singular sobre o nó final.....	132
Figura A.3 Elemento de contorno descontínuo	133
Figura B.1 Ponto fonte não alinhado com o elemento. WUTZOW(2003).....	136
Figura B.2 Ponto fonte alinhado com o elemento posicionado atrás do mesmo WUTZOW(2003)	140

Figura B.3 Ponto fonte alinhado com o elemento posicionado a frente do mesmo WUTZOW(2003)	142
Figura B.4 Ponto fonte pertence ao elemento a ser integrado	143
Figura C.1 Integração com sub-elemento	146
Figura C.2 Teste para verificar a necessidade de sub-elemento	147
Figura C.3 Comprimento do	147
Figura C.4 Correção no comprimento dosub-elemento	148
Figura D.1 Diagrama tensão x deformação típico a compressão uniaxial do concreto CHEN & HAN (1988).....	151
Figura D.2 Diagrama tensão x deformação típico a tração uniaxial do concreto CHEN & HAN (1988).....	152
Figura D.3 Diagrama tensão x deformação típico carregamento cíclico MEHTA & MONTEIRO (1994)	153
Figura D.4 Diagrama da envoltória de ruptura em estados biaxiais de tensão CARRAZEDO (2002)	154
Figura E.1 Representação da função Delta de Dirac	156
Figura G.1 Representação esquemática das teorias de fraturamento e dano.....	162
Figura G.2 Representação variáveis de dano KACHANOV (1986).....	163

Lista de Tabelas

Tabela 7.1 Comparação dos fatores de intensidade de tensão para o modo I	80
Tabela 7.2 Comparação dos fatores de intensidade de tensão para o modo II	80

Resumo

LEONEL. E. D. (2006). *Método dos Elementos de Contorno Aplicado à Análise de Corpos Multi-Fraturados*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006.

Esse trabalho trata da análise de corpos multi-fraturados utilizando o Método dos Elementos de Contorno. Este método numérico é conhecido por ser robusto e preciso neste tipo de problema e também por requerer pequeno esforço computacional na criação da malha de elementos para o crescimento das fissuras. Duas metodologias para a análise do comportamento das fissuras são consideradas. A primeira é a já consagrada metodologia dual. Por meio desta técnica equações integrais distintas são aplicadas às faces da fissura. Estas equações integrais são escritas em termos de deslocamentos e forças de superfície. A segunda metodologia é a que emprega a formulação singular onde a fissura é considerada como um vazio no domínio sendo as faces da fissura separadas por uma pequena distância. No tocante ao crescimento das fissuras foi desenvolvido um procedimento especial para a determinação da direção de crescimento das fissuras o qual mostrou-se muito eficiente levando a resultados precisos. O crescimento das fissuras é efetuado considerando o fator de intensidade de tensão atuante na extremidade de cada fissura. Dessa forma, as fissuras mais solicitadas apresentam maior comprimento de propagação tornando a análise mais realista. Os fatores de intensidade de tensão são calculados por meio de duas técnicas. A primeira é a já conhecida técnica de correlação de deslocamentos a qual relaciona os deslocamentos atuantes nas faces da fissura. Uma técnica alternativa é também utilizada a qual emprega o campo de tensões presente na extremidade da fissura. Após a determinação dos fatores de intensidade de tensão quatro diferentes teorias de interação de modos podem ser utilizadas para a determinação do ângulo de propagação. Foram analisadas estruturas sendo os resultados comparados aos previstos analiticamente e também numericamente. As respostas obtidas foram satisfatórias validando assim a metodologia proposta neste trabalho.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno, Mecânica da Fratura Elástico-Linear, Propagação de Fissuras.

Abstract

LEONEL. E. D. (2006). Boundary Element Method Applied to Analysis of Multi-Fractured Bodies. M.Sc. Dissertation - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2006.

This work deals with analysis of multi-fractured bodies using Boundary Element Method. This numerical method is known to be robust and accurate in this kind of problem and by small computational effort to create elements mesh of crack growth. Two methodologies to analyze of crack behavior are considerate. The first is consecrated dual methodology. Through this technique different kind of integral equations are applied to crack boundaries. These integrals equations are written in displacements and traction variables. Second methodology is singular formulation. Through this technique crack is represented like a hole in body and the crack boundaries is separated by a small gap. For crack growth was created a special proceeding to determination crack growth direction. This method is very efficient and your results are accurate. Crack growth is made through the stress intensity factor performed in crack tip. Then the cracks more requested going to propagate with a larger length's growth turning this model very realistic. The stress intensity factors are calculated through two techniques in this work. First is the known correlation displacement technique which related displacement in crack boundaries. An alternative technique is also used which consider stress field in crack tip. After determination of stress intensity factors four different theories are used to calculate the crack growth angle. In this work were analyzed structures with results are compared with analytical and numerical answers. The results obtained went very satisfactory validating the methodology proposed.

Keywords: Boundary Element Method, Linear Elastic Fracture Mechanics, Crack growth.

1. – Introdução

1.1 – Considerações Gerais

Desde a antiguidade o ser humano procura respostas para problemas presentes em seu cotidiano. Em particular, na engenharia das estruturas, o conhecimento de uma série de problemas passa pela criação de modelos que sejam capazes de representar o comportamento mecânico das estruturas bem como dos materiais envolvidos na constituição das mesmas.

O primeiro passo para a criação dos modelos é a procura por uma representação analítica do problema. Nesse sentido o emprego de equações diferenciais torna-se uma ferramenta valiosa já que, através desse recurso matemático, se consegue unir, empregando uma teoria estrutural, as variáveis referentes às propriedades constitutivas do material, condições de compatibilidade de deformações e de equilíbrio.

Apesar de fornecerem soluções do tipo exata os modelos analíticos são limitados a uma faixa muito estreita de problemas os quais envolvem geometrias relativamente simples além de restritas condições de contorno. De forma a contornar essa limitação houve um grande impulso no desenvolvimento de métodos de análise aproximados.

Nesse contexto os métodos aproximados, muitas vezes denominados métodos numéricos, vêm fornecendo forte avanço nos procedimentos de análise de corpos deformáveis, pois permitem a resolução de problemas com geometria qualquer assim como possibilitam a simulação de diversas condições de contorno.

Apesar de formas aproximadas de cálculo já serem aplicadas com sucesso a um bom tempo, como exemplos no campo matemático podem ser citados o cálculo de expressões trigonométricas via expansão em séries e também em procedimentos de integração numérica ambos datados do século XVIII, o emprego generalizado dos métodos numéricos na análise de problemas de grande vulto em engenharia estrutural

apresentava ainda um forte entrave referente à quantidade de operações matemáticas envolvidas na solução dos diversos problemas. Este fator limitou em parte sua utilização mais ampla, mas com o advento dos equipamentos computacionais, no século XX, se obteve uma importante ferramenta para consagrar os métodos numéricos como metodologia de análise robusta, rápida e confiável.

Dentre os métodos numéricos largamente empregados na engenharia de estruturas pode-se destacar o método das diferenças finitas. Este método numérico é reconhecido como o primeiro método de tratamento numérico dos problemas de engenharia formulado em bases matemáticas, o qual atingiu o status de técnica numérica após o trabalho de SOUTHWELL (1946).

No método das diferenças finitas a transformação do sistema de equações diferenciais em um sistema de equações algébrico é efetuada mediante a aplicação do operador de diferenças. Este operador transforma as derivadas das funções contínuas em diferenças dos valores destas funções tomados em pontos discretos denominados nós. Além dos pontos nodais, onde as incógnitas do problema estão associadas, devem ser prescritas as funções de interpolação que aproximarão as grandezas envolvidas no problema.

No tocante às aplicações em engenharia estrutural o método das diferenças finitas obteve representativo sucesso principalmente nas análises de problemas planos e de placas. No entanto, nos dias atuais seu emprego ocorre cada vez com menor frequência. Isso se deve ao fato de outros métodos numéricos surgirem como alternativas mais eficientes e precisas para as análises. Apesar disso em áreas como nas engenharias elétrica, mecânica e geotécnica este método numérico ainda é empregado em análise de fluidos e de campos eletromagnéticos.

No final dos anos 50, TURNER et. al (1956), outro método numérico toma a forma como é conhecido hoje. Trata-se do método dos elementos finitos que consiste basicamente na divisão do domínio analisado em sub-regiões as quais podem ser associadas a partes físicas do modelo real. Estas sub-regiões, denominadas elementos finitos, representam, cada uma, parcelas de energia que depois de reunidas, na forma de matriz de rigidez do modelo, formam a energia interna do domínio analisado. A conexão entre os elementos finitos é feita respeitando as condições de compatibilidade e equilíbrio. Devem ainda ser definidos pontos discretos denominados nós sobre os quais se delimitam funções de interpolação, usualmente polinômios, necessárias à aproximação da resposta das variáveis envolvidas no modelo.

A formulação deste método é simples e elegante podendo ser obtida por meio de princípios variacionais ou de forma mais geral empregando a técnica de resíduos ponderados. Atualmente o método dos elementos finitos encontra-se em estágio bastante avançado sendo o método numérico mais empregado na solução de problemas de engenharia.

Deve-se destacar que, apesar de robusto e preciso, o método dos elementos finitos apresenta alguns inconvenientes em sua formulação baseada em deslocamentos. Dentre estes podem ser citados o custo computacional na geração da malha de elementos, a presença de elementos excessivamente distorcidos compromete a solução do problema, o método não favorece a solução de problemas que envolvem propagação de fissuras, já que estas não podem ser simuladas no interior dos elementos e assim a sua evolução requer uma alteração contínua da malha. Estes fatores motivam a busca por outros métodos numéricos de forma a encontrar soluções para os problemas apresentados.

Neste contexto outros métodos numéricos foram desenvolvidos e são hoje alvo de estudos em diversos centros de pesquisa no mundo. Dentre esses métodos numéricos destacam-se aqui os métodos sem malha e o método dos elementos finitos generalizados. O primeiro método citado caracteriza-se pela independência, das equações básicas que governam o modelo discreto, da definição de uma malha de elementos no domínio. Devido à ausência de elementos a aproximação das grandezas envolvidas no problema é realizada em pontos no domínio global. Diferentes famílias de funções de aproximação podem ser utilizadas na interpolação das variáveis do problema destacando-se os polinômios, as funções de base radial e séries como as de Taylor e de Fourier. Diversos são os métodos sem malha podendo-se citar: método de Trefftz, método das soluções fundamentais, método de Kansa e método das nuvens. Aplicações dos métodos sem malha em fraturamento e em outras áreas são apresentadas em BELYTSCHKO et al (1996), ASKES et al.(2000), e em BELYTSCHKO & FLEMING (1999).

Já o método dos elementos finitos generalizados pode ser entendido como uma técnica distinta de geração de funções de forma incorporando, na estrutura básica do método dos elementos finitos, recursos dos métodos sem malha. Este método surgiu com os trabalhos de BABUŠKA et al.(1994), MELENK & BABUŠKA (1996) e DUARTE & ODEN (1996) e tem como uma de suas vantagens a possibilidade de enriquecimento das funções de forma utilizadas na análise. Este procedimento é

efetuado empregando as técnicas do método das nuvens. Neste caso a nuvem é definida não como uma região circular, mas sim composta pelos elementos presentes ao redor do nó em questão. Tais funções são geralmente polinômios, porém se conhecido o comportamento das variáveis a serem analisadas no problema, funções de forma mais apropriadas podem ser empregadas.

Deve-se salientar que, com exceção a alguns métodos sem malha, os métodos numéricos descritos anteriormente aproximam a equação diferencial, que governa o problema analisado, por meio de um sistema de equações algébricas que utiliza valores de domínio e de contorno sendo por este motivo conhecidos como métodos de domínio. Assim espera-se que a resposta numérica se aproxime da resposta analítica com o aumento da discretização empregada. No entanto, este procedimento eleva consideravelmente o número de variáveis envolvidas na análise aumentando assim o número de operações matemáticas a serem efetuadas e conseqüentemente o sistema de equações a ser solucionado.

Uma forma alternativa aos métodos de domínio pode ser obtida empregando as técnicas de contorno que se caracterizam por efetuar o processo de discretização apenas no contorno do sistema em consideração. Esta técnica dá origem ao método dos elementos de contorno cujo desenvolvimento é efetuado tomando equações integrais, escritas sobre o contorno, as quais são obtidas a partir das equações diferenciais que governam o comportamento do meio contínuo. Esta característica do método conduz a uma redução na dimensão do problema analisado diminuindo, conseqüente, o volume de dados a considerar. Apesar desta vantagem as matrizes resultantes das integrações sobre os elementos no contorno são densas e não simétricas dificultando a utilização de técnicas especiais na resolução do sistema de equações. A formulação deste método pode ser obtida de forma geral empregando a técnica dos resíduos ponderados ou em casos específicos, como em problemas elásticos, utilizando o teorema de Betti.

O método dos elementos de contorno apresentou um rápido desenvolvimento principalmente a partir da década de setenta. Apesar de ser uma técnica relativamente recente este método tem-se mostrado uma alternativa viável para o estudo de diversos tipos de problemas de engenharia, principalmente aqueles onde a presença de elevados gradientes das variáveis envolvidas (concentração de tensão, por exemplo) tornam-se complicadores na análise. Deve-se atentar também que, apesar do grande avanço observado, muitos progressos ainda podem ser obtidos em campos como análises tridimensionais, soluções auto-adaptativas, mecânica da fratura, entre outras.

Muitas têm sido as propostas de formulações para a análise dos mais diversos problemas de engenharia via método dos elementos de contorno. Dentre estas podem ser destacadas algumas que foram tema de trabalhos desenvolvidos no “Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos”, por exemplo, não-linearidades físicas, como plasticidade e visco-plasticidade, VANALLI (2004), mecânica da fratura, LEITE (2006) e LOVON (2006), problemas transientes, CODA (1993), propagação de ondas, CODA (1990) e problemas de concentração de tensão, MACIEL (2003).

As formulações do método também aparecem como promissoras para um grande número de problemas tais como: mecânica dos solos, VENTURINI (1982), placas, RIBEIRO (1992), interações solo-estrutura, PAIVA (1993), e várias outras aplicações onde pode ser utilizado como único modelo numérico empregado para a montagem das equações ou combinado com outros métodos quando conveniente.

1.2 – Objetivos

A presente pesquisa se insere no conjunto de trabalhos que trata do desenvolvimento do método dos elementos de contorno visando sua utilização em diversos problemas de engenharia. Nessas situações este método numérico ou já é reconhecido como uma solução eficiente ou tem potencial para gerar um procedimento recomendável necessitando apenas de desenvolvimentos mais adequados para melhorar a precisão e quando possível diminuir tempos de processamento.

O objetivo principal do trabalho é desenvolver um modelo numérico, com base na formulação do método dos elementos de contorno, que permita a análise de domínios planos multi-fraturados, sob as condições previstas pela mecânica da fratura elástico-linear, bem como a evolução do grau de deterioração destes quando solicitados.

Para atingir tal meta, objetivos secundários são estabelecidos. O primeiro deles refere-se ao aprofundamento nos conhecimentos da teoria da mecânica da fratura, principalmente nos tópicos referentes aos critérios de propagação das fissuras bem como nas teorias de interação de modos de sollicitação ao fraturamento. Tais conceitos são importantes por possibilitar uma consistente e confiável formulação do método numérico.

Outro objetivo é a análise de modelos, via método dos elementos de contorno, que utilizem em sua discretização somente a equação integral em força de superfície. Este estudo é necessário para verificação da estabilidade da solução já que por meio desta abordagem são utilizadas equações integrais hiper-singulares as quais, em algumas situações, podem conduzir ao mau condicionamento do sistema matricial final.

Por fim considera-se a implementação computacional de duas metodologias para a análise de corpos multi-fissurados. A primeira delas é a metodologia dual apresentada em PORTELA (1992). Esta forma de análise é elegante e eficiente, porém, o uso de equações integrais hiper-singulares merece atenção especial. De forma a comparar o desempenho da formulação dual é considerada também a formulação baseada somente na equação integral em deslocamentos a qual é denominada por muitos como clássica. Por meio desta metodologia a fissura é considerada como um vazio no domínio sendo as faces da fissura separadas por uma pequena distância.

1.3 – Justificativas

O problema de perda de rigidez devido a danificações tem sido tema de pesquisas em diversas instituições no país e no exterior nos últimos anos. Os resultados verificados até o presente momento são animadores já que, modelos numéricos vêm sendo obtidos a partir de formulações do método dos elementos de contorno que são precisos e confiáveis nesse tipo de problema, que é de fato bastante complexo.

Um dos principais aspectos abordados diz respeito à localização das deformações e conseqüente formação da fissura. A presente pesquisa está inserida neste contexto. Pretende-se com esta dissertação dar continuidade aos trabalhos desenvolvidos e em desenvolvimento baseados em formulações do método dos elementos de contorno em fratura para estudar o caso de problemas planos com multi-fraturamento inicial que, após solitação, vai apresentar perda de rigidez e localização (coalescência) das fissuras.

Um campo promissor de aplicação do modelo numérico desenvolvido ocorre na indústria aeronáutica. Sabe-se que grande parte das peças mecânicas utilizadas em aviões é produzida por processo de estampagem. Uma das conseqüências deste processo é a formação de microfissuras localizadas nas bordas das peças. Quando essas peças

sofrem a ação de carregamentos estas microfissuras podem se conectar gerando uma fissura maior que poderá causar a ruína da peça.

Outra possível aplicação do modelo numérico desenvolvido é na análise de componentes de motores. Como exemplo pode-se considerar a engrenagem apresentada na Fig. (1.1). Em determinadas análises é de grande interesse do engenheiro estrutural avaliar o caminho da propagação da fissura. Dependendo da sollicitação presente na engrenagem a fissura poderá propagar de forma a romper apenas o dente da engrenagem, conforme apresentado nas Fig. (1.1.a) e Fig. (1.1.b). Ou então poderá ocorrer a ruptura global da engrenagem conforme ilustra as Fig. (1.1.c) e Fig. (1.1.d).

Os dois exemplos discutidos anteriormente reforçam a importância da correta determinação do carregamento que inicia o processo de crescimento das fissuras e também da possível trajetória de ruína da peça. A avaliação correta destes fatores é de grande valia para a obtenção de uma estrutura que consiga aliar o correto nível de segurança e que apresente custo adequado.

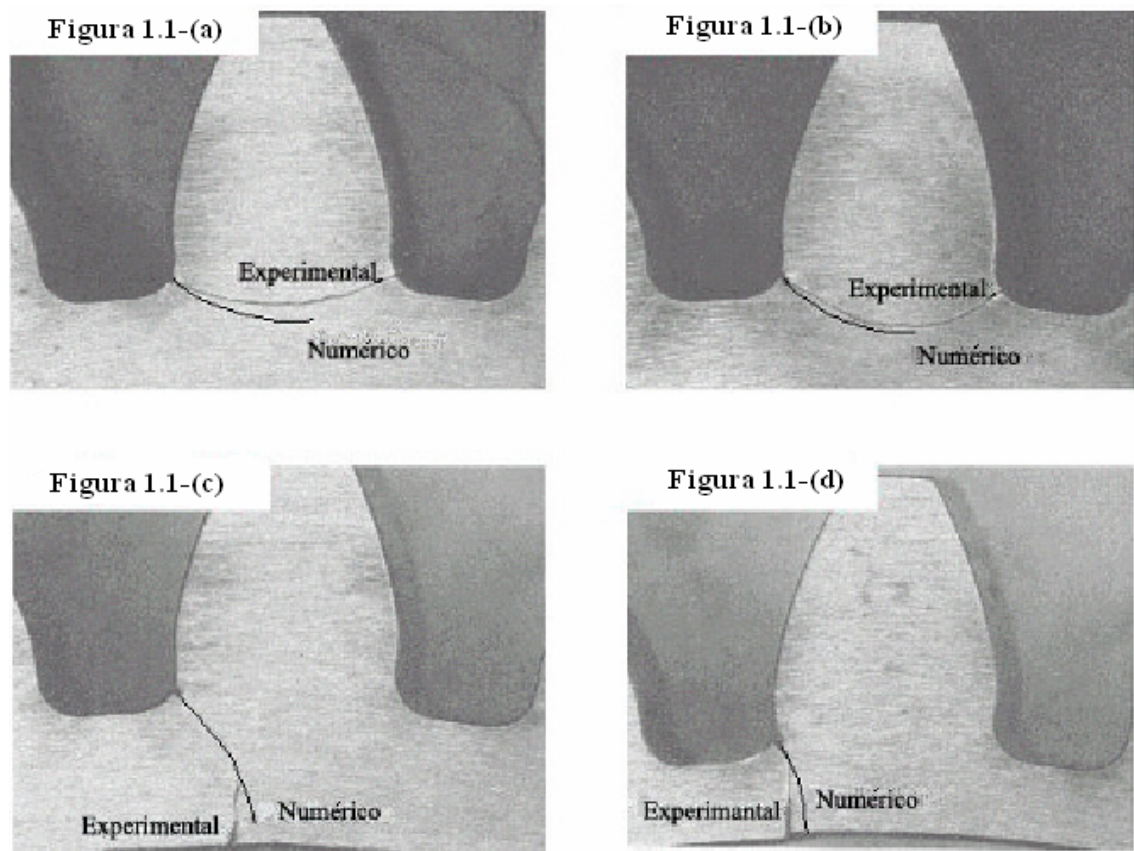


Figura 1.1 Análise da direção da propagação da fissura. Ruptura do dente da engrenagem, (a) e (b), ruptura global da engrenagem (c) e (d). Cornell (2006) apud PEREIRA (2004).

Por meio da metodologia implementada neste trabalho é possível também efetuar a reconstituição do processo de ruptura de peças que sofreram ruína estrutural. Assim é possível determinar as condições que regiram a ruína estrutural a partir da configuração de ruptura da peça. Esta potencialidade pode ser muito bem explorada em perícias técnicas como ferramenta na determinação dos motivos que levaram à ruína as peças estruturais.

1.4 – Descrição dos Capítulos da Dissertação

O presente trabalho enquadra-se dentro da área de métodos numéricos abrangendo conceitos referentes ao método dos elementos de contorno bem como da mecânica da fratura.

A dissertação está dividida em nove capítulos sendo que desse total cinco abordam conceitos necessários ao desenvolvimento do trabalho.

No segundo capítulo é efetuada a revisão bibliográfica sobre os temas referidos na dissertação. Inicialmente são apresentados trabalhos que discutem o desenvolvimento do método dos elementos de contorno desde sua origem matemática. Em seguida apresentam-se os trabalhos desenvolvidos no “Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos” e que são de importância para contextualizar a presente dissertação na evolução das linhas de pesquisa do departamento. A parte final destina-se aos trabalhos que abordam a análise de problemas de fraturamento por meio das diversas formulações do método dos elementos de contorno.

O capítulo três remete aos conceitos referentes à teoria da elasticidade. Tais tópicos são de importância para a compreensão do equacionamento de diversos problemas de fratura assim como da formulação do método dos elementos de contorno.

No quarto capítulo são considerados os tópicos referentes a mecânica da fratura. Neste capítulo o balanço de energia, o qual permite a verificação sobre as condições de estabilidade à propagação da fissura, bem como as expressões para cálculo de tensão para o problema de Griffith são enfatizados.

A dedução da formulação do método dos elementos de contorno para o problema elástico bidimensional é efetuada no capítulo cinco. As soluções fundamentais

de Kelvin e as equações integrais do método são obtidas. A montagem do sistema matricial resultante e a obtenção das grandezas internas ao contorno são apresentadas.

No sexto capítulo é desenvolvida a formulação para a metodologia dual em elementos de contorno. Além das equações integrais utilizadas por esta formulação são discutidos tópicos referentes à singularidade envolvida nos núcleos integrais. Neste capítulo é efetuada a análise de uma viga empregando apenas a equação integral de força de superfície sendo os resultados comentados.

O capítulo sete aborda considerações sobre as implementações computacionais realizadas. Neste capítulo são apresentadas as teorias de interação de modos bem como os critérios para a determinação da instabilidade ao crescimento da fissura. Apresentam-se os métodos de extração do fator de intensidade de tensão assim como o pré-processador desenvolvido para fornecer maior agilidade na entrada dos dados necessários à análise. A metodologia para o crescimento das fissuras e o processo de otimização da malha de elementos são também discutidos.

O capítulo oito trata dos exemplos que validam o modelo numérico desenvolvido.

O capítulo nove apresenta as conclusões obtidas com o desenvolvimento do trabalho e discute possíveis sugestões para pesquisas futuras.

2. – Revisão Bibliográfica

Neste capítulo são apresentados alguns trabalhos que foram de grande importância no desenvolvimento do método dos elementos de contorno e na sua aplicabilidade a problemas de fraturamento. Inicialmente são abordados os trabalhos que discutem a origem e o desenvolvimento do método dos elementos de contorno até o estágio atual. Em seguida apresentam-se alguns trabalhos desenvolvidos no “Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos” e que são de importância na contextualização da presente dissertação na evolução das linhas de pesquisa do departamento. Já na parte final encontram-se os trabalhos que tratam da análise dos diversos problemas de fraturamento por meio das diversas formulações existentes do método dos elementos de contorno.

2.1 – Revisão Bibliográfica

A base matemática do método dos elementos de contorno é constituída, em sua essência, na transformação da equação diferencial que rege um determinado problema em uma equação integral. Nesse sentido deve-se destacar o trabalho do matemático norueguês ABEL (1823). Abel foi o primeiro a deduzir uma equação integral para solucionar o problema do “pêndulo isócrono”. Outro passo importante ocorreu com VOLTERRA (1896), no campo dos problemas de potencial, onde foram empregadas equações integrais para o estudo da distribuição de cargas elétricas na superfície de uma esfera.

De posse da grande potencialidade dos métodos integrais FREDHOLM (1903) realizou o primeiro estudo aprofundado sobre as equações integrais. Neste trabalho Fredholm demonstrou que podem ser encontradas soluções para alguns tipos de equações integrais e posteriormente desenvolveu condições para a determinação da

existência e unicidade de tais soluções na forma dos Teoremas de Fredholm. O desenvolvimento das equações integrais prosseguiu e os trabalhos HILBERT (1904) e POINCARÉ (1910) podem ser destacados no tocante ao desenvolvimento e tratamento das equações integrais singulares.

Em seguida, os pesquisadores MUSKHELISHVILI (1953), MIKHLIN (1957, 1965) e SMIRNOV (1964) apresentaram soluções para problemas de elasticidade linear. Estes autores inspiraram-se no trabalho de KELLOG (1929) o qual foi o pioneiro no emprego de equações integrais aplicada à solução de problemas governados pela equação de Laplace.

KUPRADZE (1965) propôs uma formulação numérica em deslocamentos para corpos sob o regime elástico linear. MASSONET et. al (1965) efetua a descrição de uma solução numérica para problemas de valores de tensões no contorno formulada em termos de uma equação integral singular baseada na solução de Kelvin.

Todos os trabalhos até aqui apresentados versam sobre problemas de equações integrais analisadas via métodos indiretos. Os métodos indiretos foram os primeiros a serem empregados e tem essa denominação por exprimirem a solução do problema analisado em função de variáveis fictícias associadas ao contorno. As variáveis físicas do problema são obtidas a partir dos valores calculados para as variáveis fictícias, as quais não tem significado físico, e são obtidas a partir das condições de contorno em um determinado número de pontos. Os métodos indiretos, segundo PALERMO JR (1989), são reconhecidos também como métodos de contorno menos robustos. A forma mais simples deste método consiste no uso de soluções singulares unitárias que satisfazem as equações diferenciais do problema no domínio.

JASWON (1963) e SYMM (1963) introduziram o equacionamento do problema elástico bidimensional usando as variáveis físicas do problema mas ainda mantendo uma função de tensão auxiliar. Como estão presentes na análise variáveis físicas e fictícias esse método é conhecido na literatura como método semi-direto.

O trabalho de RIZZO (1967) foi o primeiro a apresentar uma formulação direta para o tratamento de equações integrais com aplicações em elasticidade bidimensional. Deve-se destacar que nas formulações diretas as incógnitas são as próprias variáveis físicas do problema e, no caso de RIZZO (1967), são os deslocamentos e forças de superfície. Neste trabalho a discretização do contorno foi efetuada por elementos de geometria reta sendo que os deslocamentos e forças de superfície são considerados constantes dentro de cada elemento.

Vários outros trabalhos seguiram ao de RIZZO (1967). Dentre eles destacam-se os de CRUSE (1968, 1969, 1973) que estendeu a formulação plana para problemas tridimensionais e o de RIZZO & SHIPPY (1968) que sugeriram o emprego de sub-regiões para o tratamento de domínios não homogêneos.

SWELDON & CRUSE (1971) e RICARDELA (1973) apresentam formulações para análises elastoplásticas admitindo-se materiais anisótropos. Apesar do forte desenvolvimento observado, principalmente a partir dos trabalhos de RIZZO (1967), foi LACHAT (1975) que conseguiu apresentar uma maior generalização do método. Este trabalho apresenta um eficiente tratamento numérico do método empregando representações paramétricas dos elementos no contorno e das funções de aproximação das forças de superfície e dos deslocamentos nas quais admitiam-se variações lineares, quadráticas e cúbicas. As integrais são calculadas por meio de fórmulas de quadratura gaussiana. LACHAT (1975) também propôs a técnica de sub-regiões não só para análise de domínios não homogêneos mas também para permitir que o sistema de equações resultante fosse definido por blocos possibilitando assim o emprego de algoritmos de resolução mais eficientes.

BREBBIA (1978b) introduziu a formulação das equações integrais empregando a técnica dos resíduos ponderados. A partir desse ponto o método das equações integrais poderia ser combinado a outras técnicas numéricas, tratando ambas por meio da técnica dos resíduos ponderados, possibilitando assim um equacionamento elegante bem como consistente. Deve-se também a BREBBIA (1978a, 1978b, 1984) o nome “Método dos Elementos de Contorno” que a partir de então tornou-se corrente em detrimento ao então conhecido método das equações integrais.

De posse da formulação em resíduos ponderados e a abrangência em relação ao campo de atuação do método dos elementos de contorno várias formulações são desenvolvidas envolvendo problemas de placas, mecânica dos solos e das rochas, não linearidade física, mecânica da fratura, interação solo-estrutura entre outros.

De forma a possibilitar a realização desses tipos de análises o acoplamento com o método dos elementos finitos tornou-se de grande valia. Nessa junção a principal vantagem é que cada método é associado à sub-estruturas onde proporciona resultados mais confiáveis. Os pioneiros a empregarem a combinação método dos elementos finitos e método dos elementos de contorno foram McDONALD & WEXLER (1972), os quais aplicaram a problemas relacionados a eletricidade. Já CHEN & MEI (1974) o fizeram para problemas de mecânica dos fluidos onde o método dos elementos de

contorno representava um meio infinito, o fluido. Em relação à engenharia estrutural ZIENKIEWICZ et. al (1977), SHAW & FALBY (1977) e OSIAS et. al (1977) foram os primeiros a empregarem o acoplamento entre os dois métodos numéricos para a análise de sólidos deformáveis utilizando-se sub-regiões. Já os problemas onde o acoplamento entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos não é feito por meio de sub-regiões são tratados em VALLABHAN & SIVAKUMAR (1986), CODA & VENTURINI (1999) e CODA (2001). Nestes trabalhos fibras, analisadas como elementos finitos, representam enrijecedores no domínio do problema, o qual é analisado via método dos elementos de contorno.

WEARING & BURSTOW (1994) aplicaram a junção dos métodos numéricos para análise de problemas elastoplásticos e de mecânica da fratura elastoplástica convencional.

No tocante às pesquisas desenvolvidas no “Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos” devem ser destacados alguns trabalhos que contribuíram substancialmente para a excelência do departamento nessa área de pesquisa.

Inicialmente RODRIGUES (1986) fez o estudo de problemas elásticos lineares bidimensionais por meio de elementos lineares contínuos e também descontínuos. Neste trabalho é também abordada a técnica de resolução de sistemas lineares por blocos para problemas que utilizam sub-regiões. PALERMO JR (1989) considerou estruturas de parede fina isotrópicas atuando em regime elástico linear. Tais estruturas eram consideradas de forma estratificada sendo cada lâmina capaz de simular efeitos de um estado plano de tensão acoplado a efeitos de flexão.

Diversas pesquisas tratam da análise de placas pelo método dos elementos de contorno. Estes trabalhos empregam as diversas teorias conhecidas para representação do comportamento das placas assim como idealizam o comportamento do material sob a realização de análise não-linear. Nesse contexto RIBEIRO (1992), CHUEIRI (1994), SILVA (1996) e FERNANDES (1998) devem ser mencionados.

Quanto a problemas envolvendo interação solo-estrutura vários são os trabalhos já desenvolvidos. Nestas pesquisas são consideradas interação entre estaca/solo, placa/solo e bloco de fundação/solo tanto em análises bidimensionais quanto tridimensionais. Ainda admite-se a hipótese de simulação do solo de forma estratificada ou não. Nessa área os trabalhos de PAIVA (1993), FERRO (1999) e ALMEIDA, V.S. (2003) podem ser destacados. Ainda em relação a esse tópico problemas relacionados a

escavação do solo são também tratados. Nesse campo de pesquisa os trabalhos de MESQUITA (2002) e KOMATSU (1995) também se destacam.

No tocante a análises dinâmicas alguns trabalhos desenvolvidos devem ressaltados. Diversas são as formulações empregadas bem como os tipos de estruturas consideradas podendo-se citar os trabalhos de CODA (1990, 1993) e ALMEIDA, F, P, A. (2003).

Em relação a problemas de fraturamento, tema alvo deste trabalho, podem ser mencionadas algumas publicações que permitiram o avanço desse ramo de pesquisa ao nível observado atualmente. Inicialmente serão citados os trabalhos que empregaram o método dos elementos finitos para a análise desse tipo de problema. Isso se deve ao fato de ser esse método numérico o primeiro a permitir análises de problemas mais amplos com sucesso como apresentado em NGO & SCORDELIS (1967) e RASHID (1968).

Dentro do escopo do método dos elementos finitos duas metodologias podem ser empregadas para a análise de problemas de fraturamento. A primeira delas trata as fissuras de forma discreta, ou seja, cada fissura é tratada de forma individual sendo cada uma de suas faces representada por uma aresta de um elemento finito. Por meio dessa metodologia a propagação das fissuras é realizada efetuando novas conectividades para os elementos localizados à frente da extremidade da fissura e assim criando novos contornos. Apesar de ser de difícil implementação essa metodologia é tratada nos trabalhos de HILLERBORG et al. (1976), INGRAFFEA & GERSTLEN (1984), INGRAFFEA & SAOUMA (1985) e MARTHA et al (1988).

A segunda metodologia empregada pelo método dos elementos finitos analisa o comportamento das fissuras mantendo a continuidade do campo de deslocamentos. Nestes modelos os efeitos da concentração do dano, formação da fissura e sua propagação são simulados por meio da avaliação da relação constitutiva do material no trecho pós-ruptura, ou seja, após o estado de tensão atuante superar um estado admissível. Dentre os trabalhos que empregam essa metodologia pode-se citar LEONEL et al. (2003) o qual analisa estruturas de concreto prescrevendo ruptura frágil do material à tração e comportamento elasto-plástico à compressão. Já os trabalhos de BAZANT (1982), BAZANT & OH (1983) e BAZANT & CEDOLIN (1983) consideram o comportamento de amolecimento do material. A diferença básica entre os modelos que empregam esta última metodologia refere-se às diferentes abordagens para consideração da degradação da rigidez do material. Destacam-se nesse campo os modelos que empregam micro-planos como em ZDENEK et al. (2004) e JIRASEK et

al. (2004). Através desse modelo as propriedades do material são avaliadas em diversos planos inclinados permitindo uma eficiente determinação da evolução das propriedades do material com o carregamento.

Ainda em relação aos problemas de fraturamento outros tipos de análises também são tratadas via método dos elementos finitos. Dentre esses problemas destacam-se aqueles relacionados à determinação do fator de intensidade de tensão como nos trabalhos de SIH et al. (1962), MURAKAMI (1976) e BEZINE et al. (2005). Já no tocante a trabalhos envolvendo fadiga podem ser citados ELBER (1970), NEWMAN (1976) e ONATE et. al. (2005).

Quanto aos trabalhos que tratam o problema de fraturamento empregando o método dos elementos de contorno atualmente são encontradas na literatura uma vasta quantidade de trabalhos importantes sobre o desenvolvimento de formulações bem como de técnicas de análise. Um dos primeiros trabalhos que trataram do problema da análise de trincas é ainda da década dos setenta de autoria de CRUSE & VAN BUREN (1971). Neste trabalho os autores analisaram o campo de tensões próximo a trinca em modelos elásticos tridimensionais. Já CRUSE (1972) analisou modelos bi e tridimensionais aproximando a geometria da trinca por uma forma elíptica. Esta técnica levou a erros significativos e, além disso, exigia um número grande de elementos para aproximar as variáveis da superfície da fissura, portanto não apresentou um desempenho satisfatório e foi abandonada.

O trabalho do Prof. T. A Cruse em fraturamento teve continuidade, e em 1975 propôs uma formulação baseada no uso de funções de Green, SNYDER & CRUSE (1975). As funções de Green representavam a solução exata de um domínio infinito com a presença da fissura que se pretendia analisar. Com esta técnica os termos integrais referentes ao contorno da trinca desaparecem e a solução é extremamente precisa. Sua aplicação é, entretanto restrita. Permite o estudo dos fatores de intensidade de tensão, porém a análise de problemas de propagação de fissuras ainda é pouco abrangente como apresenta TELLES & GUIMARAES (2000), REDDY & CHENG (2004) e TELLES et. al (2005). Ainda em relação a esta formulação alguns livros acabaram tornando-se fortes referencias e devem receber atenção especial como CRUSE (1988) e ALIABADI & ROOKE (1992).

O uso da equação singular, equação integral em deslocamentos, para o tratamento de fissuras aparece posteriormente no trabalho de BLANDFORD et al. (1981), que utiliza a técnica das sub-regiões para simular o crescimento da fissura entre

dois contornos. Esse recurso é muito semelhante ao empregado VENTURINI (1982) para representação da separação e deslizamento em juntas.

A formulação singular também aparece nos trabalhos de CEN & MAIER (1992) e de LIANG & LI (1991) que utilizaram a técnica para a modelagem de fraturamento coesivo. O modelo de sub-regiões contém o mesmo problema computacional dos métodos de elementos finitos. Há a necessidade de se fazer previsões sobre o crescimento da superfície da fissura com as correspondentes modificações da malha em função da resposta obtida.

Vários outros trabalhos aparecem na literatura como variações destes ou utilizando outra metodologia. É oportuno mencionar o método de descontinuidade de deslocamentos, CROUCH (1976), com aplicações práticas mostradas em CROUCH & STARFIELD (1983), WEN & FAN (1994), MEWS (1987) e mais recentemente YAN (2004, 2006). Por meio desta metodologia a diferença entre os deslocamentos das faces da fissura é introduzida na formulação sendo necessário, portanto, apenas a discretização de uma face da fissura.

Uma técnica alternativa para a representação desses problemas é a que emprega um campo de tensões iniciais para a correção do estado de tensão nas fissuras. A espessura da região de processo é degenerada para zero, isto é quando a zona de processo se transforma numa fissura. Com a eliminação das tensões da zona de processo se simula a presença da fissura. Esta técnica mostrou-se bastante eficiente e foram os seguintes os trabalhos de destaque publicados VENTURINI (1994), LOPES & VENTURINI (1997), JIANG & VENTURINI (1998, 2000).

Outra técnica promissora na análise de problemas de fraturamento baseia-se na utilização das equações integrais de deslocamentos e de forças de superfície para nós definidos nas superfícies opostas de uma fissura. Com esse procedimento, o número de incógnitas e equações independentes para os pontos da fissura é igual, garantindo, portanto solução do sistema final de equações algébricas. Este procedimento aparece inicialmente nos trabalhos de WATSON (1986, 1988) para problemas bidimensionais e depois no trabalho de GRAY et al. (1990) para problemas tridimensionais.

A técnica é hoje bem difundida e conhecida como método dos elementos de contorno dual. Diversos trabalhos tornaram a técnica mais versátil ampliando seu campo de utilização. Nesta linha destacam-se PORTELA (1992), PORTELA et al. (1992, 1993, 2004), MI & ALIABADI (1992a, 1992b, 1994a, 1994b, 1995), MI (1996), MELLINGS & ALIABADI (1994), SOLLERO & ALIABADI (1994) e SALEH

(1997), CHEN et al. (1999), KEBIR et al. (2006) e ARMENTANI & CITARELLA (2006).

Mais recentemente houveram alguns trabalhos voltados para a modelagem de fissuras utilizando apenas a formulação singular, porém empregado-a de forma diferente ao proposto na análise via sub-regiões. Nestes modelos as faces da fissura são definidas muito próximas uma da outra. Este estudo demonstrou que esse modelo é preciso desde que as integrais sobre os elementos presentes na discretização da fissura sejam bem avaliadas, utilizando-se para isso sub-elementação adequada ou integração analítica dos termos integrais. Resultados desses esforços estão nos trabalhos de MACIEL (2003) e LEITE (2006). Outros trabalhos que tratam da simulação de descontinuidades em meios contínuos também devem ser mencionados como os de ROCHA (1988), AGOSTINHO (1998) e ROCHA (1999).

De forma a permitir a análise de uma gama maior de materiais ampliou-se o conceito de fraturamento englobando a fratura coesiva. Esses modelos têm origem nos trabalhos de DUGDALE (1960) e BAREMBLATT (1962) e depois bastante detalhado e estudado numérica e experimentalmente nos trabalhos de HILLERBORG et. al (1976) e CARPINTERI (1992).

Neste modelo considera-se a existência de uma zona de processo localizada na frente da região onde há a separação propriamente dita das superfícies da fissura. Nessa zona de processo, ocorre a perda de rigidez com o aumento das micro-fissuras e a conseqüente dissipação de energia. Sendo essa zona pequena, uma possível aproximação seria considerar que a dissipação se dá na forma de uma fissura fictícia colocada à frente da fratura real. Nessa região fictícia idealiza-se uma abertura fictícia que ainda permite a transferência de tensão entre as superfícies da fissura. A relação constitutiva que governa a tensão máxima na zona de processo e a abertura da fissura exhibe sempre um comportamento de amolecimento.

A representação mais simples desse modelo é utilizar uma curva linear dada por dois parâmetros do material, abertura fictícia máxima e resistência máxima de tração. Na literatura há diversas outras aproximações sugeridas. Alguns recentes trabalhos importantes realizados sobre o assunto além dos já mencionados são BARPI & VALENTE (1998), PLANAS, et. al (2003), CARPINTERI et. al. (2003), TVERGAARD (2003), ELICES et. al (2002), MAI (2002).

3. – Tópicos da Teoria da Elasticidade

O rápido progresso em vários campos da tecnologia tem criado a necessidade de novos tipos de materiais bem como de estruturas. Esse desenvolvimento requer formas mais racionais e econômicas no emprego desses novos materiais assim como a otimização dos materiais de uso corrente. Isso tem motivado os engenheiros estruturais a buscarem procedimentos mais precisos e completos como forma de avaliar o comportamento das novas estruturas e também aprimorar a modelagem das estruturas clássicas.

Dentre as ferramentas empregadas para esse fim destaca-se a teoria da elasticidade. Apesar de ser necessário, muitas vezes, o conhecimento do comportamento dos materiais além da fase elástica a teoria da elasticidade fornece fortes subsídios para o desenvolvimento de teorias que tratam, de forma mais abrangente, o processo de mudança de rigidez do material como as teorias da plasticidade, do dano e da fratura. Além disso, as suas relações permitem a formulação de métodos numéricos como é o caso do método dos elementos de contorno.

Na seqüência deste capítulo serão apresentadas algumas relações de interesse para a compreensão da formulação do problema elástico pelo método dos elementos de contorno.

3.1 – Equações de Equilíbrio

O estado de tensão em um ponto, de um corpo em equilíbrio, pode ser ilustrado representando o ponto estudado por um elemento de dimensões infinitesimais conforme apresenta a Fig. (3.1). Nesta figura estão apresentadas as componentes de tensão considerando o sistema de coordenadas cartesianas.

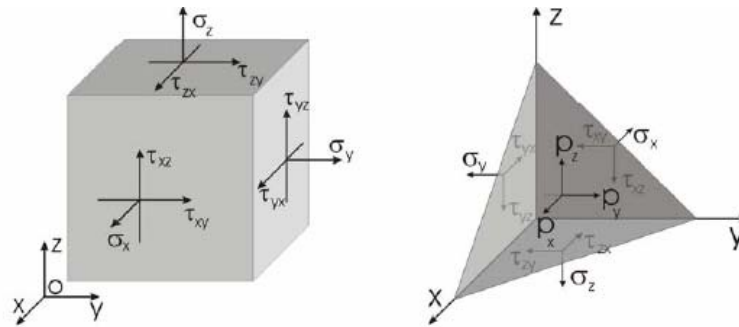


Figura 3.1 Estado de tensão. Planos inclinados com forças de superfície. WUTZOW (2003)

O estado de tensão é caracterizado se conhecidas as nove componentes de tensão, sendo seis componentes cisalhantes e três normais. Estas componentes de tensão não são todas independentes. Considerando o equilíbrio no elemento infinitesimal em termos de momentos pode-se verificar que:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.1)$$

sendo:

σ_{ij} tensões internas ao corpo.

Efetuada agora o equilíbrio em termos de forças é possível encontrar a equação de equilíbrio do corpo que pode ser representada indicialmente por:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (3.2)$$

em que:

b_i valores das forças de corpo presentes atuantes na direção i .

$\sigma_{ij,j}$ derivada da tensão ij em relação a direção j .

O equilíbrio deve também ser satisfeito na superfície do corpo. Dessa forma o estado de tensão, adjacente à superfície do corpo considerado, deve ser decomposto na direção do contorno de forma a igualar-se às forças de superfície atuantes. A Fig. (3.1) apresenta as forças de superfície atuantes sobre um plano inclinado em um elemento de dimensões infinitesimais. Indicialmente esta relação de equilíbrio pode ser representada como:

$$P_i = \sigma_{ij} \cdot \eta_j \quad (3.3)$$

onde:

P_i forças de superfície.

η_j cossenos diretores da normal ao contorno.

3.2 – Relações Constitutivas

Em elasticidade linear clássica há uma única relação envolvendo tensões e deformações que é denominada Lei de Hooke generalizada. Por meio dessa lei, representada por um tensor de quarta ordem, cada componente de tensão é linearmente relacionada com todas as componentes de deformação do ponto em estudo. Esta relação é também válida no sentido inverso, ou seja, as componentes de deformação são linearmente relacionadas às componentes de tensão via tensor inverso das propriedades constitutivas. A Lei de Hooke generalizada pode ser representada de forma geral como:

$$[\sigma] = [D_c] \cdot [\varepsilon] \quad (3.4)$$

onde:

$[D_c]$ tensor de quarta ordem contendo as propriedades constitutivas do material.

$[\sigma]$ tensor de segunda ordem das tensões internas ao corpo.

$[\varepsilon]$ tensor de segunda ordem das deformações do corpo.

Para materiais anisótropos o tensor constitutivo contém 81 termos independentes os quais são função somente da direção dos eixos de referência. Contando com a simetria dos tensores de tensão e deformação o número de termos independentes do tensor constitutivo diminui para 36. Este número pode ser consideravelmente reduzido admitindo-se comportamento isotrópico para os materiais. Empregando este artifício é possível descrever o tensor D_c somente através do módulo de elasticidade longitudinal, E , e do coeficiente de Poisson, ν .

A Lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos pode ser escrita de forma concisa indicialmente conforme apresenta a Eq. (3.5).

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \cdot \left[\frac{\nu}{(1-2 \cdot \nu)} \cdot \delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk} + \varepsilon_{ij} \right] \quad (3.5)$$

sendo:

δ_{ij} delta de Kroenecker.

ε_{ij} deformações do corpo.

ν coeficiente de Poisson.

E módulo de elasticidade longitudinal.

De forma inversa as deformações podem ser relacionadas às tensões por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \cdot \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{kk} \cdot \delta_{ij} \quad (3.6)$$

3.3 – Relações Deformação-Deslocamento

A Fig. (3.2) ilustra as configurações deformada e indeformada de um corpo sujeito a um regime de pequenas deformações. Tomando a vizinhança de um ponto P, antes da deformação, verifica-se que este ponto desloca-se para o ponto P', após a ação do carregamento, sendo o deslocamento dado pela subtração dos vetores posição R' e R. Nessa situação a deformação pode ser obtida considerando a variação dos deslocamentos ao longo de uma direção de interesse. Assim as deformações estão diretamente relacionadas aos gradientes dos deslocamentos.

No âmbito do regime de pequenas deformações as componentes do estado de deformação em um corpo podem ser descritas empregando a simplificação da descrição via deformações infinitesimais. Por meio desta simplificação as deformações podem ser obtidas de acordo com a Eq. (3.7).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.7)$$

em que:

$u_{i,j}$ derivada do deslocamento da direção i em relação a direção j .

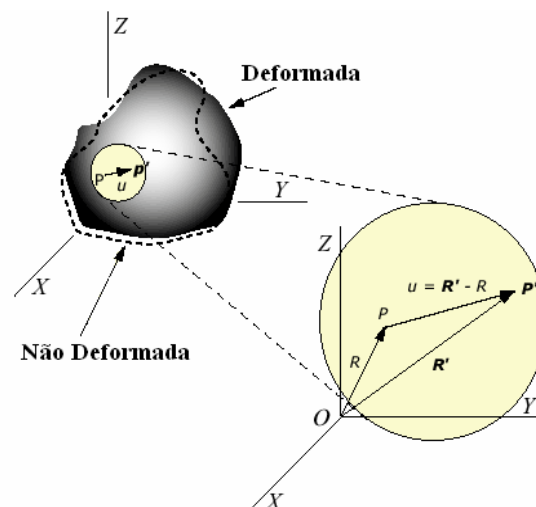


Figura 3.2 Estados deformado e indeformado para corpo em regime de pequenas deformações. Determinação dos deslocamentos e das deformações em modelos 2D.

Tratando-se de regimes de grandes deformações a descrição do estado de deformação deve ser realizada empregando os recursos da deformação finita. Por meio desta descrição as deformações não são linearmente relacionadas ao gradiente dos deslocamentos. A não linearidade da relação entre deformação e deslocamento se faz pela inserção de um produto diferencial como apresenta a Eq. (3.8).

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \cdot (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{j,i} \cdot u_{i,j}) \quad (3.8)$$

3.4 – Condições de Compatibilidade de Deformações

A relação deformação-deslocamento, apresentada na Eq. (3.7), representa um sistema composto por três componentes de deslocamentos e seis de deformação. De forma a resolver problemas empregando o caminho inverso ao sugerido por essa relação, ou seja, obter um campo de deslocamentos para um dado estado de deformação, torna-se necessário o emprego de equações de compatibilidade em termos de deformação. A teoria cinemática de corpos deformáveis prevê que a compatibilidade deve ser efetuada através da relação Eq. (3.9).

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (3.9)$$

3.5 – Equacionamento dos Problemas Elásticos

O equacionamento de problemas elásticos é necessário para a determinação de tensões, deformações e deslocamentos em corpos sujeitos a esforços externos e a condições de restrição aos deslocamentos. Para a determinação das grandezas mencionadas acima fazem-se necessários o emprego das relações constitutiva, deformação-deslocamento e de equilíbrio. Além disso, as grandezas determinadas devem obedecer às condições de contorno impostas assim como as condições de compatibilidade. No total do equacionamento resultam 15 equações para a obtenção de 15 variáveis desconhecidas, as quais podem ser enunciadas: 6 tensões, 6 deformações e 3 deslocamentos.

Dependendo das condições de contorno impostas, as equações podem ser manipuladas de forma a tornar a resolução mais conveniente. No caso do problema

estudado apresentar somente forças de superfície aplicada é desejável que as equações sejam escritas em termos de tensões. Caso contrário se estiverem presentes condições de contorno em termos de deslocamentos aplicados é mais vantajoso resolver o sistema de equações em termos de deslocamentos.

3.6 – Simplificação do Problema 3-D para Estados Planos

O equacionamento de problemas elásticos pode muitas vezes ser simplificado dependendo da geometria do corpo a ser analisado bem como das condições de contorno aplicadas. A transformação de problemas tridimensionais em problemas bidimensionais dá origem aos problemas ditos planos, os quais podem ser divididos em planos de tensão e planos de deformação.

Um problema é dito ser plano de deformação quando os vetores de deslocamento dos pontos pertencentes ao corpo em questão são paralelos entre si. Isso resulta que todos os pontos originalmente pertencentes a um plano, antes de o corpo ser deformado, permanecem nesse mesmo plano após a atuação das ações externas. Nessa classe de problemas enquadram-se, normalmente, problemas cuja geometria do corpo analisado apresenta uma de suas dimensões muito superior às demais como em barragens, tubulações e estruturas de contenção. Nesses casos citados o plano sob o qual estarão contidos os pontos é um plano normal a maior dimensão do corpo.

Admitindo por simplicidade que o plano que contém os deslocamentos do corpo seja o xy tem-se que as deformações presentes nesses tipos de problema são: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$. O estado de tensão é representado pelas seguintes componentes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$, sendo que σ_z é função das tensões σ_x, σ_y .

Já os problemas de estado plano de tensão são caracterizados pela distribuição de tensões no corpo ser essencialmente plana. Nesta classe de problemas podem ser citadas estruturas cuja geometria apresente uma de suas dimensões muito menor que as demais como vigas-parede, chapas e paredes. Nestes casos o carregamento é considerado como composto por forças aplicadas de forma paralela ao plano formado pelas duas maiores dimensões do corpo sendo ainda distribuídas uniformemente ao longo da direção da menor dimensão (espessura).

Considerando que o plano formado pelas duas maiores dimensões do corpo seja o xy o estado de tensão do corpo pode ser representado pelas seguintes componentes: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$. Já o estado de deformação é caracterizado pelas componentes: $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}$. Nessa situação ε_z é função das deformações $\varepsilon_x, \varepsilon_y$.

4. – Mecânica do Fraturamento

Com o advento da revolução industrial o emprego do aço e também de outros materiais metálicos em aplicações estruturais ganhou forte impulso. Destacam-se nesse período as estruturas de caldeiras a vapor, largamente empregadas nas indústrias e em meios de transporte como trens. No século XX as grandes guerras mundiais foram eventos que proporcionaram também grande aplicação aos materiais metálicos.

Apesar do amplo emprego estrutural dos metais diversas estruturas apresentaram falhas sob níveis de carregamento muito inferiores aos previstos no projeto. Dentre as falhas mais conhecidas destacam-se a dos navios “Liberty”. Dos 2.500 navios produzidos para a II Guerra mundial 145 partiram-se ao meio (ainda parado nas docas) e 700 apresentaram danos que impossibilitaram sua utilização.

A explicação para esse grande prejuízo pode ser obtida atentando-se para falhas inerentes aos materiais constituintes da estrutura. Nesse período o processo de fabricação dos metais ainda era consideravelmente deficiente. Assim, micro-falhas pré-existentes nos materiais davam início a um progressivo processo de fraturamento levando a estrutura ao colapso.

Como forma de solucionar esses problemas, que já se arrastavam desde o século XIX, deu-se início ao estudo da mecânica da fratura elástico-linear. As teorias da mecânica da fratura elástico-linear tornaram-se uma poderosa ferramenta para a análise e resolução de problemas envolvendo fissuras cuja zona de comportamento não-linear a frente da fissura é desprezível, ou seja, materiais de comportamento frágil na ruptura. A primeira análise de sucesso empregando os conceitos da mecânica da fratura ocorreu em 1920 com Griffith o qual analisou de forma consistente a propagação de fissuras em vidros. A formulação empregada por Griffith consistia na realização de um balanço de energia no qual se verifica a propagação da fissura quando ocorre redução da energia

total da estrutura. Esta diminuição (dissipação) da energia é utilizada na criação de novas superfícies para a fissura.

4.1 – Balanço de Energia de Griffith

Durante o fenômeno de fraturamento ocorre o crescimento das fissuras pré-existentes no sólido e com isso novas superfícies para estas são criadas caracterizando um processo não conservativo de energia. Dessa forma a realização de um balanço de energia, ou seja, a procura pelo ponto a partir do qual a variação de energia total em relação ao comprimento da fissura é nula, foi a solução encontrada por Griffith para a modelagem do crescimento das fissuras conforme ilustra a Fig. (4.1).

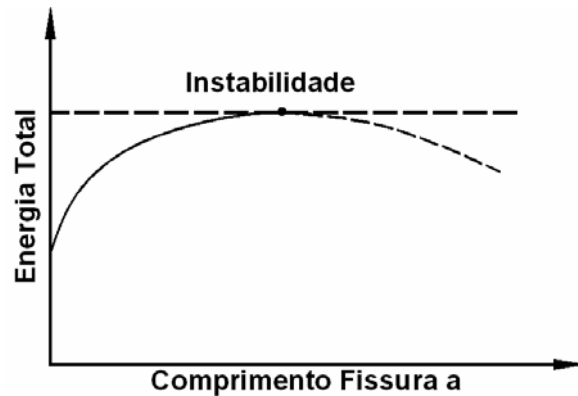


Figura 4.1 Evolução da energia com o aumento do comprimento da fissura.

Empregando a 1ª Lei da Termodinâmica é possível decompor a energia total presente no sistema corpo fissurado/carregamento externo. Segundo esta lei pode-se verificar que o trabalho realizado pelos carregamentos atuantes, somado à energia térmica aplicada ao corpo é igual a variação das energias potencial interna e cinética além da energia dissipada pelo corpo com o aumento das superfícies da fissura. Essa igualdade de energia é apresentada na Eq. (4.1), ressaltando que o ponto sobre as variáveis denota variação no tempo, ou seja, representa o valor da grandeza em um determinado instante.

$$\dot{W} + \dot{Q} = \dot{Y} + \dot{O} + \dot{Z} \quad (4.1)$$

em que:

\dot{W} trabalho das forças externas. $\dot{W} = \int_{\sum T} P_k \cdot \dot{u}_k dT + \int_{\Omega} \rho \cdot b_k \cdot \dot{u}_k d\Omega$, sendo ρ a densidade do material, $\sum T$ o somatório do contorno onde atua as forças de superfície e Ω o domínio do corpo.

\dot{Q} representa a energia térmica fornecida. $\dot{Q} = \int_{\sum q} q_k \cdot \eta_k dq + \int_{\Omega} \rho \cdot h_u d\Omega$, onde q é o vetor de condução de calor por unidade de superfície, h_u representa fontes unitárias por unidade de massa e $\sum q$ indica as superfícies sob as quais estão aplicados os carregamentos térmicos.

\dot{Y} energia potencial interna. $\dot{Y} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho \cdot \lambda d\Omega \right)$, λ é a densidade de energia interna por unidade de massa.

\dot{O} energia cinética. $\dot{O} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \dot{u}_k \cdot \dot{u}_k d\Omega \right)$

$\dot{Z} = \frac{d}{dt} \left(\int_{\sum A} \gamma dA \right)$, γ é a energia necessária para a formação de novas superfícies (unitárias) da fissura.

Em muitos problemas de engenharia, dentre os quais enquadraram-se aqueles tratados neste trabalho, pode-se admitir que a propagação das fissuras ocorre de forma quase estática. Nessa condição os campos de velocidades de deslocamento, \dot{u}_k , desenvolvidos no corpo são pequenos e assim a variação da energia cinética, \dot{O} que é proporcional ao quadrado dessa grandeza, pode ser desprezado (deve-se destacar que essa parcela não pode ser omitida em problemas envolvendo campos dinâmicos).

Outra parcela que pode ser omitida, ainda considerando os problemas tratados neste trabalho, refere-se a da energia térmica \dot{Q} . Isso ocorre devido ao fato de carregamentos térmicos não serem objeto dos estudos aqui propostos. Assim a propagação das fissuras ocorrerá sob condições adiabáticas.

De acordo com as condições descritas pode-se reescrever o balanço de energia apresentado na Eq. (4.1) da seguinte forma:

$$\dot{W} = \dot{Y} + \dot{Z} \quad (4.2)$$

Para os problemas onde a Eq. (4.2) é válida as mudanças que ocorrem ao longo do tempo são causadas por variações no comprimento das fissuras. Assim pode-se minimizar esta expressão, diferenciando seus termos em relação ao comprimento da fissura, a , de forma a se determinar as condições segundo as quais ocorrerá o crescimento das fissuras. Empregando a regra da cadeia na diferenciação tem-se:

$$\frac{\partial W}{\partial a} - \frac{\partial Y}{\partial a} = \frac{\partial Z}{\partial a} \quad (4.3)$$

Realizando uma breve análise dos termos da Eq. (4.3) pode-se constatar que o termo $\frac{\partial W}{\partial a}$ representa a variação de energia, em relação ao comprimento da fissura, decorrente do trabalho do carregamento externo aplicado. Já a parcela $\frac{\partial Y}{\partial a}$ contabiliza a variação da energia potencial elástica do corpo em relação ao comprimento da fissura. Assim pode-se verificar que o primeiro membro da Eq. (4.3) representa, portanto, a quantidade de energia que é fornecida para o crescimento da fissura.

Já o segundo membro da Eq. (4.3) representa a energia de superfície elástica da fissura, ou seja, a energia necessária para a formação de novas superfícies para a fissura. Este termo pode ser denominado também de resistência, R , já que a fissura não cresce se o primeiro membro da Eq. (4.3) for menor que o seu segundo membro.

Analogamente pode-se definir os termos do primeiro membro da Eq. (4.3) como taxa de liberação de energia, G . Assim:

$$R = \frac{\partial Z}{\partial a} \quad (4.4)$$

$$G = \frac{\partial}{\partial a}(W - Y) \quad (4.5)$$

A Eq. (4.3) representa um critério para o crescimento das fissuras podendo ser escrita de forma geral como:

$$G \leq R \quad (4.6)$$

Assim, ocorrerá a propagação das fissuras quando a taxa de liberação de energia, G , atingir um valor crítico que é característico do material em estudo.

4.2 – O Fator de Intensidade de Tensão

Apesar da eficácia do processo de balanço de energia na determinação da propagação das fissuras verifica-se que a sua obtenção é uma árdua tarefa. Além disso, o termo G , referente a energia fornecida para o crescimento das fissuras, reflete o estado energético global da estrutura. Assim esse processo torna-se ineficaz e custoso quando é necessária a avaliação do comportamento isolado das fissuras que é de fato um estudo local. De forma a contornar este entrave IRWIN (1957) propôs que o balanço de energia pode ser obtido empregando uma grandeza especial denominada fator de intensidade de tensões, K . Por meio do parâmetro K é possível realizar a correta avaliação do campo de tensões a frente da extremidade da fissura e assim saber a evolução do seu comportamento.

Na teoria proposta pela mecânica da fratura elástico-linear o estado de tensão na extremidade da fissura pode ser obtido empregando a Eq. (4.7):

$$\sigma_{ij} = \frac{K}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot f_{ij}(\theta) \quad (4.7)$$

sendo:

K Fator de Intensidade de Tensão.

r distância da extremidade da fissura ao ponto considerado.

θ coordenada cilíndrica em um ponto referenciada a extremidade da fissura, como apresenta a Fig. (4.2).

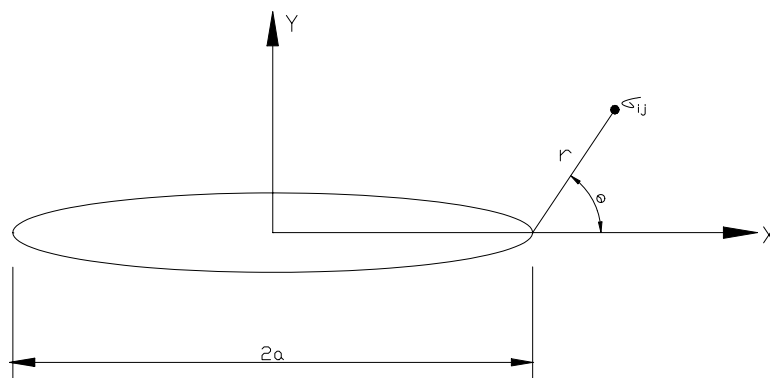


Figura 4.2 Mapeamento da tensão na extremidade da fissura

O valor do fator de intensidade de tensão para diversos problemas e materiais pode ser obtido em “handbooks”, dentre os quais podem ser destacados SIH (1973) e

MURAKAMI (1987), ou mesmo em livros dedicados ao estudo de mecânica da fratura como BROEK (1986).

IRWIN (1957) demonstrou que se uma fissura tem seu comprimento aumentado de uma extensão infinitesimal, da , o trabalho realizado pelo campo de tensões na extremidade da fissura devido ao crescimento da mesma é equivalente a mudança na energia de deformação, $G \cdot da$. Assim é possível determinar um fator de intensidade de tensão crítico correspondente a uma taxa de liberação de energia crítica.

Considerando problemas planos a relação entre a energia crítica e o fator de intensidade de tensão é dada por:

$$G_c = \frac{K_c^2}{E} \quad (4.8)$$

A Eq. (4.8) representa a taxa crítica de energia liberada para o problema plano de tensão. Para os problemas de estado plano de deformação essa variável é obtida de forma análoga, assim:

$$G_c = \frac{K_c^2}{E} \cdot (1 - \nu^2) \quad (4.9)$$

Além de ser um parâmetro local, o emprego do fator de intensidade de tensão ainda apresenta outra grande vantagem se comparado ao balanço de energia. Sabe-se que o fator de intensidade de tensão crítico, K_c , é uma propriedade do material. Assim a sua determinação pode ser realizada por meio de análises experimentais, em estado plano de deformação, considerando diversos tipos de materiais bem como diferentes geometrias.

4.3 – Modos de Solicitação ao Fraturamento

A Fig. (4.3) apresenta os modos básicos de solicitação ao fraturamento para corpos tridimensionais. Na verdade existem infinitos modos de fraturamento possíveis, no entanto todos podem ser obtidos combinando-se os modos básicos. Para os casos tratados neste trabalho, problemas planos, apenas os modos de solicitação I e II estão presentes.

Conforme apresenta a Fig. (4.3) os modos básicos de fraturamento podem ser assim descritos:

⇒ Modo I, Modo de Abertura: Nesse modo de fraturamento as faces da fissura separam-se simetricamente relativamente ao plano formado por elas antes da ocorrência da deformação. Dessa forma após a deformação as faces da fissura permanecem simétricas com relação aos planos xy e xz .

⇒ Modo II, Modo de Deslizamento: Esse modo caracteriza-se pelo fato das faces da fissura apresentarem anti-simetria com relação ao plano xz e simetria com relação ao plano xy após a ocorrência da deformação. As faces da fissura separam-se em direções opostas, mas sob o mesmo plano.

⇒ Modo III, Modo de Rasgamento: As faces da fissura nesse modo separam-se de forma anti-simétrica com relação aos planos formados pelos eixos xy e xz . A separação entre as faces da fissura ocorre de forma transversalmente oposta.

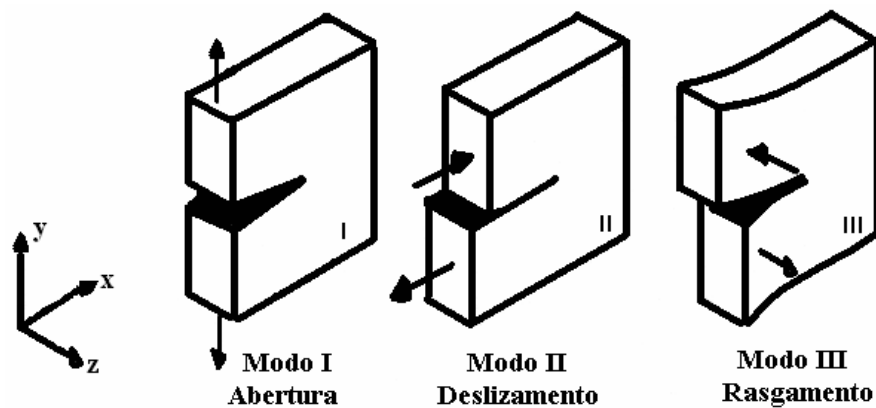


Figura 4.3 Modos básicos de solicitação ao fraturamento. BROEK (1986)

4.4 – Relação entre Campo de Tensão e o Fator de Intensidade de Tensão

Em diversas situações problemas tridimensionais podem ser transformados, sem perdas sensíveis de representatividade, em problemas planos. Os modelos planos são largamente empregados em elasticidade e em problemas de fraturamento tornando possível o equacionamento de alguns tipos de problemas.

O desenvolvimento de modelos analíticos para os problemas de fraturamento plano passa pela determinação do fator de intensidade de tensão. Este fator é uma grandeza fundamental que governa o campo de tensão a frente da extremidade da fissura. O fator de intensidade de tensão depende tanto da geometria quando das

condições de contorno presentes no corpo. Existem diversas maneiras para a sua determinação as quais podem ser divididas em:

↗ Teóricos: método de Westergaard, método semi-inverso, método do potencial complexo e métodos energéticos.

↗ Numéricos: funções de green, funções ponderadoras, método dos elementos finitos e método dos elementos de contorno.

↗ Experimentais: foto-elasticidade, métodos óticos e extensométricos.

Os métodos teóricos são geralmente restritos a chapas de dimensões infinitas com condições de contorno simplificadas. Para situações mais complexas empregam-se os métodos numéricos e experimentais.

Apesar de os métodos teóricos não atingirem uma ampla gama de problemas esses são de grande valia principalmente na calibração de modelos numéricos. Nesse contexto pode-se citar WESTERGAARD (1939) o qual empregou funções de tensão complexas para a determinação do campo de tensão para os três modos básicos de fraturamento. A seguir serão apresentadas as expressões obtidas por Westergaard sendo sua dedução obtida em livros mecânica da fratura como PAPADOPOULOS (1993).

Para o modo I:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\end{aligned}\quad (4.10)$$

Modo II:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{-K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right] \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{3 \cdot \theta}{2}\right)\right]\end{aligned}\quad (4.11)$$

Modo III:

$$\begin{aligned}\tau_{xy} &= \frac{-K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \tau_{yz} &= \frac{-K_{III}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}\quad (4.12)$$

Onde as variáveis r e θ podem ser facilmente localizadas na Fig. (4.2).

4.5 – A Integral J

A integral J trata de uma forma alternativa para a realização do balanço de energia proposto na Eq. (4.1). Esta integral é válida desde que o material seja elástico, não necessariamente linear. A integral J pode ser avaliada por meio de uma integral de linha que independe do caminho escolhido para a integração conforme RICE (1968).

Dessa forma para um contorno geral a integral J é dada por:

$$J = \int_{\Gamma} W_E dy - \int_{\Gamma} P_i \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x} ds \quad (4.13)$$

em que:

W_E densidade de energia de deformação dada por $W_E = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}$

P_i forças de superfície

A integral J pode ser obtida também por meio da minimização da energia potencial total para um aumento no comprimento da fissura.

$$J = \frac{-d\Pi}{da} \quad (4.14)$$

sendo:

Π energia potencial total

Para materiais elástico-lineares sabe-se que:

$$G = \frac{-d\Pi}{da} \quad (4.15)$$

E assim a integral J pode ser relacionada ao fator de intensidade de tensões por:

$$J = G = \frac{K^2}{E} \quad (4.16)$$

A Eq. (4.16) representa a expressão para problemas plano de tensão. Para os problemas de estado plano de deformação essa relação pode ser reescrita como:

$$J = G = \frac{K^2}{E} \cdot (1 - \nu^2) \quad (4.17)$$

O trabalho de PEREIRA (2004) aborda a extração do fator de intensidade de tensão por meio da integral J e de suas variações. Neste trabalho pode-se destacar uma técnica, inicialmente proposta em LI et. al (1985), que transforma a integral J, originalmente uma integral de linha, em uma integral de área de forma a tornar sua utilização via método dos elementos finitos mais conveniente.

4.6 – Mecânica do Fraturamento Aplicada ao Concreto

Sabe-se que durante o processo de fraturamento surge, à frente da extremidade da fissura, uma zona onde ocorrem processos inelásticos sendo, esta zona, denominada de zona de processos inelásticos. De acordo com o comportamento estrutural do material a zona de processo apresenta diferentes características. Para materiais dúcteis esta zona apresenta dimensões grandes se comparadas ao comprimento da fissura além de esta ser governada pela tensão de escoamento do material. Já para materiais frágeis a área de abrangência da zona de processo é pequena em relação ao comprimento da fissura analisada.

Existem também os materiais quase-frágeis em que a zona de processo apresenta um comportamento intermediário entre os presentes nos materiais dúcteis e frágeis. Suas dimensões são grandes em relação ao comprimento da fissura e a resistência coesiva das partículas a frente da fissura é bem maior se comparada a dos materiais frágeis. Esse comportamento pode ser explicado, em parte, pela presença de micro-danos, que são na verdade micro-fissuras, vazios e poros do material, localizados a frente da extremidade da fissura conforme apresenta a Fig. (4.4). Devido a concentração de tensão existente estes micro-danos provocam uma perda de rigidez progressiva do material. O crescimento dos micro-danos acaba por gerar interconexões (coalescência) entre eles a qual delimita a direção da propagação bem como os incrementos de comprimento da fissura principal. A Fig. (4.5) ilustra a presença dos micro-danos na zona de processo bem como a sua coalescência.

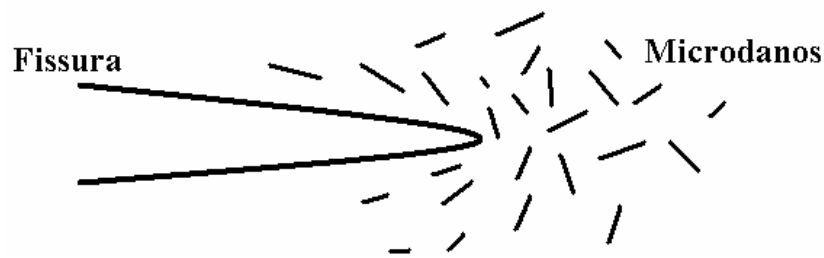


Figura 4.4 Zona de processos inelásticos em materiais quase-frágeis SHAH et. al (1995)

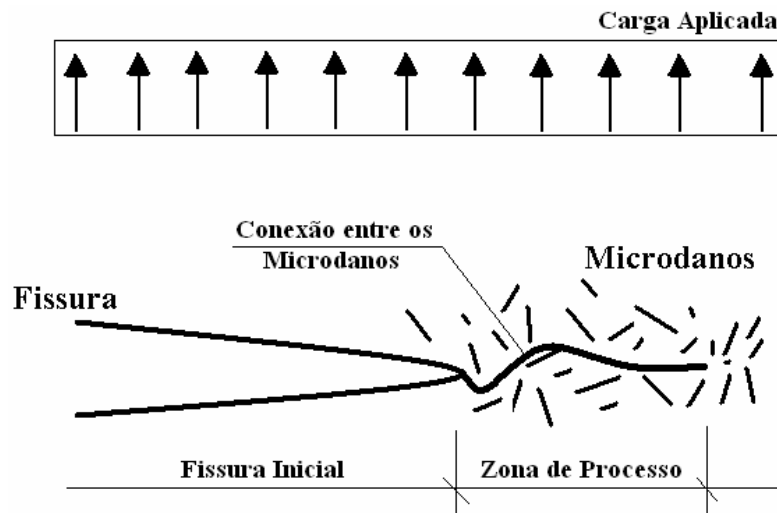


Figura 4.5 Representação do processo de conexão dos micro-danos

A zona de processo caracteriza-se também por dissipar uma grande quantidade de energia. A energia absorvida é empregada na danificação do material e assim a fissura propaga mesmo sob tensão inferior a tensão última. A presença do amolecimento (Anexo D), observada em curvas tensão x deformação uniaxial à compressão e tração de concretos, é atribuída ao efeito da zona de processo.

No tocante ao concreto, além da zona de processo, outros fatores devem ser também levados em conta. Inicialmente, a presença de vazios e de agregados graúdos à frente da extremidade da fissura deve ser considerada. A mudança brusca de rigidez provocada por estes dois fatores altera o regime de propagação da fissura influenciando substancialmente o seu comportamento. Outro fator de grande interesse na análise é o intertravamento dos agregados o qual torna o elemento estrutural em questão mais rígido já que permite a transferência de tensões por atrito, entre as faces da fissura, mesmo com a fissura configurada.

Devido à presença da zona de processo a fissura apresenta, à frente de sua extremidade, uma região de rigidez inferior ao restante do corpo. Em um material quase-frágil a fissura pode ser modelada como apresenta a Fig. (4.6), onde a fissura e a

zona de processo são representadas por uma fissura de comprimento efetivo a . A resistência da zona de processo é representada por uma tensão $\sigma(w)$ denominada tensão coesiva cujo valor é igual a resistência à tração do material no fim da zona de processo. A tensão coesiva tende a fechar a fissura, sendo uma função do deslocamento da abertura da fissura, e diminui conforme o ponto aproxima-se da extremidade de abertura da fissura.

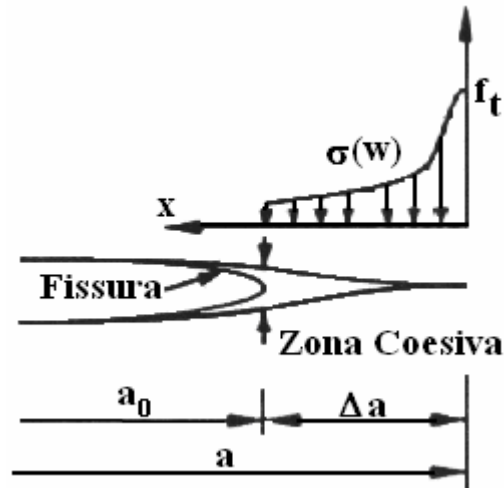


Figura 4.6 Representação de fissuras coesivas para materiais quase-frágeis.

Empregando esta representação para as fissuras em materiais quase-frágeis tem-se que a taxa de energia total liberada, devido à carga aplicada, é balanceada por dois mecanismos de dissipação de energia de fratura. A primeira contribuição refere-se à energia consumida durante o fraturamento na criação de novas superfícies para a fissura. Já a segunda parcela representa a energia necessária para superar a tensão coesiva e assim propagar a fissura. Dessa forma:

$$G_q = G_{Ic} + G_\sigma \quad (4.18)$$

em que:

G_q taxa total de liberação de energia.

G_{Ic} energia para superação da superfície da fissura.

G_σ energia da zona coesiva.

A partir da Eq. (4.18) pode-se descrever a propagação de fissuras para materiais quase-frágeis ou então a partir dessa relação realizar aproximações sobre o mecanismo de dissipação de energia e obter diferentes modelos para previsão da propagação de fissuras. Com base nessas aproximações os modelos da mecânica da fratura não-linear

de materiais quase-frágeis podem ser classificados como de fissura fictícia e fissura elástica equivalente.

Por meio do modelo de fissura fictícia assume-se que a energia necessária para criar novas superfícies é pequena se comparada à energia necessária para separá-las. Conseqüentemente pode-se admitir que $G_{Ic} = 0$. Nesse campo de modelos destacam-se os de HILLERBORG et. al. (1976) e BAZANT & OH (1983).

Os modelos de fissura elástica equivalente prescrevem que a zona de processo nos materiais quase-frágeis pode ser descrita pelo critério de energia de Griffith. Dessa forma, nesse modelo a fissura é governada por um critério da mecânica da fratura elástico-linear e o comprimento efetivo da fissura é basicamente o que diferencia os diversos modelos propostos. Dentre esses modelos destacam-se os de JENQ & SHAH (1985), BAZANT & KAZEMI (1990) e NALLATHAMBI & KARIHALOO (1986).

PLANAS & ELICES (1990) apud SHAH et al. (1995) compararam resultados numéricos, empregando os modelos de fissura fictícia e fissura elástica equivalente, a resultados experimentais. A comparação permite concluir que determinando adequadamente as propriedades de fraturamento do material os dois conjuntos de modelos são capazes de representar, com considerável precisão, estruturas cujas dimensões são as de utilização corrente em laboratório. Entretanto esses modelos apresentam diferenças consideráveis quando aplicadas a estruturas de maior porte. Apesar da presença do fator de escala, uma das explicações para essa discrepância pode estar no fato da estimação não precisa do comprimento efetivo das fissuras.

4.7 – Modelos de Fraturamento Coesivo

Sabe-se que a mecânica da fratura elástico-linear tem sido uma valiosa ferramenta para resolução de problemas de fraturamento quando a zona de processos inelásticos a frente da extremidade da fissura apresenta dimensões desprezíveis se comparada às dimensões da fissura ou mesmo a outras dimensões significativas do corpo. No entanto, a dimensão da zona de processo presente em materiais dúcteis e cimentícios não segue a configuração apresentada nos materiais frágeis sendo consideravelmente maior. Isso faz com que sejam necessárias modificações na teoria original de forma a esta conseguir representar esses fenômenos.

A proposição dessas modificações deu origem aos modelos coesivos os quais apresentam aproximações sobre o comportamento da zona de processo de materiais com diferentes comportamentos estruturais. Por meio desses modelos a zona de processo é exposta a uma tensão, denominada tensão coesiva, que tende a fechar a fissura. A tensão coesiva, entretanto, atua somente em uma porção da extremidade da fissura denominada de zona coesiva.

O primeiro modelo coesivo proposto deve-se a DUGDALE (1960) o qual aplica-se, principalmente, a materiais dúcteis. Segundo esse modelo a fissura real é substituída por uma fissura denominada efetiva cujo comprimento é maior que o da fissura real devido ao acréscimo no comprimento decorrente da presença de uma zona plástica, da , a frente da extremidade da fissura conforme ilustra a Fig. (4.7).

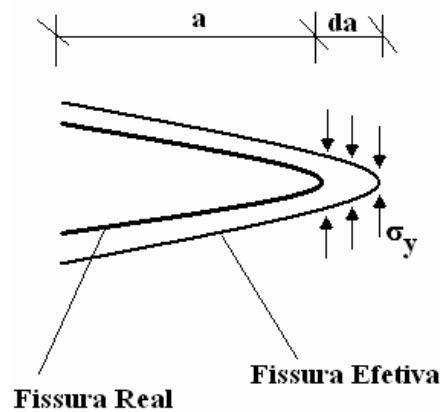


Figura 4.7 Configuração do modelo de DUGDALE (1960)

A extensão no comprimento da fissura, da , está sujeita a tensões de plastificação (tensões coesivas) constantes atuando no sentido de fechar as extremidades da fissura. O comprimento da é tal que as tensões singulares na extremidade da fissura desaparecem e assim o fator de intensidade de tensão torna-se igual a zero.

Outro modelo coesivo proposto trata do de BARENBLATT (1962). Este modelo assume também que as tensões coesivas atuam em uma pequena região de dimensão c , sendo c muito menor que a dimensão da fissura, fazendo as faces da fissura fecharem-se suavemente. A Fig. (4.8) ilustra uma fissura de comprimento $2a$ com a zona coesiva de comprimento c sujeito a atuação das tensões coesivas.

As tensões coesivas dependem da abertura das faces da fissura δ_c . Quando a abertura atinge um valor considerado crítico as tensões coesivas cessam e a propagação da fissura ocorre.

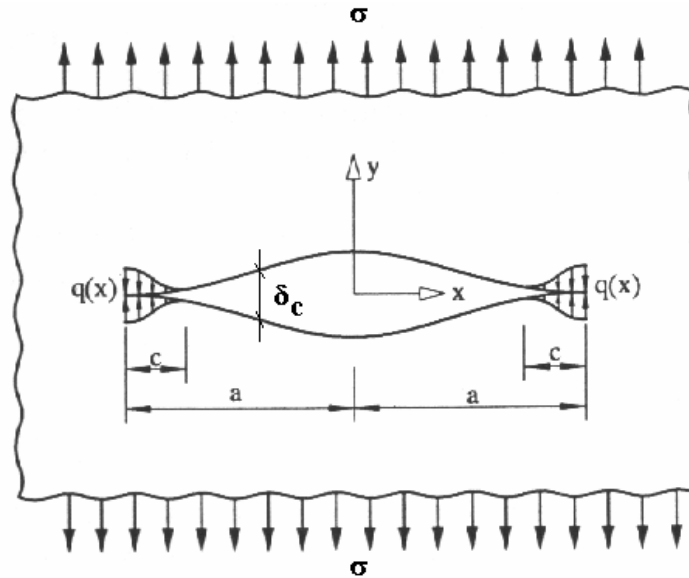


Figura 4.8 Distribuição de tensões coesivas no modelo proposto por BARENBLATT (1962).

A partir do modelo de BARENBLATT (1962) surgiram outras propostas de modelos como os de MODEER (1979), PETERSSON (1981) e GUSTAFSSON (1985). No entanto a diferença básica entre eles refere-se a dimensão da zona coesiva e a forma da distribuição das tensões coesivas.

A primeira teoria de mecânica da fratura não-linear aplicada a materiais quase-frágeis foi proposta por HILLERBORG et. al (1976). Neste trabalho foi incluído o amolecimento à tração na zona de processo por meio de uma fissura fictícia próxima à fissura pré-existente cujas faces estão sujeitas à tensões coesivas. O termo fictício é empregado para ressaltar o fato que essa parte da fissura não pode ser descontínua com total separação das faces como em uma fissura de tração livre. A Fig. (4.9) ilustra a atuação da tensão coesiva na fissura do modelo de HILLERBORG et. al. (1976), devendo-se destacar neste modelo o fato da tensão coesiva não ser constante ao longo da zona coesiva. Essa tensão aumenta de zero, em um ponto referenciado a abertura crítica da extremidade da fissura, até seu valor pleno igual à resistência à tração do material na extremidade da fissura. Outro fator de destaque é que nesse modelo a dimensão da zona de processo pode não ser pequena em comparação com o comprimento da microfissura pré-existente, assim como no modelo para materiais elastoplásticos.

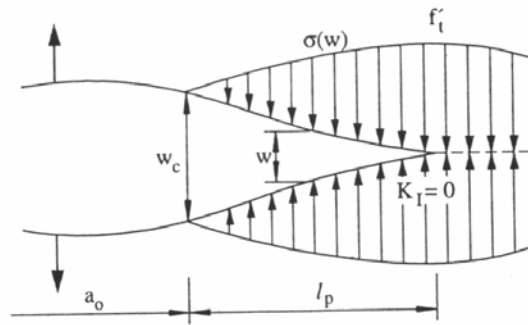


Figura 4.9 Distribuição de tensões coesivas no modelo de HILLERBORG et. al. (1976).

A energia de fraturamento, necessária para a representação do processo de amolecimento do concreto à tração, pode ser obtida por meio da relação tensão deslocamento na zona de amolecimento. A área sob a curva de amolecimento a tração, como apresenta a Fig. (4.10), exprime o valor da energia liberada durante o processo de fissuração nessa região.

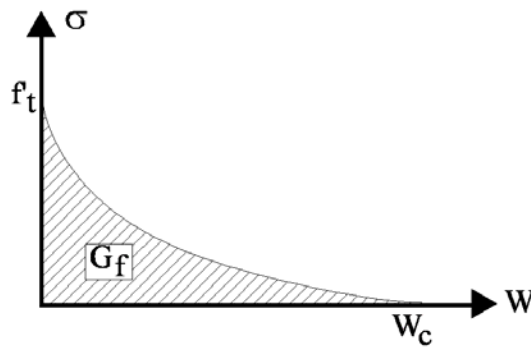


Figura 4.10 Diagrama tensão x abertura da fissura. Determinação da liberação de energia crítica

A área do diagrama acima pode ser obtida por meio das seguintes integrais:

$$G_f = \int_{f_t}^0 w(\sigma) d\sigma = \int_0^{w_c} \sigma(w) dw \quad (4.19)$$

em que:

G_f energia gasta para ruptura do corpo.

w abertura da fissura.

$\sigma(w)$ tensão coesiva.

5. - Método dos Elementos de Contorno Formulação Singular

Os métodos numéricos, de forma geral, apresentaram forte evolução a partir da década de setenta quando os computadores assumiram a função de execução de operações matemáticas facilitando e agilizando os procedimentos de análise.

Nesse contexto destaca-se o método dos elementos de contorno, o qual é uma opção interessante para análises em diversos campos como mecânica dos sólidos, aeromecânica, geomecânica entre outros. Além disso, o método tem se mostrado muito promissor em áreas como mecânica dos solos, mecânica da fratura e mecânica das estruturas devido a precisão e confiabilidade na modelagem de problemas de domínio infinito bem como de problemas onde surgem grandes concentrações de tensão. Outra grande vantagem é a capacidade de associação com outros métodos numéricos, em especial o método dos elementos finitos, ampliando assim as possibilidades em simulação de problemas.

O método dos elementos de contorno é um método numérico que utiliza equações integrais escritas sobre o contorno, obtidas a partir das equações diferenciais que descrevem o fenômeno físico, para a análise dos problemas físicos. Devido a essas transformações o método foi, no início de seu desenvolvimento, conhecido também como método das equações integrais. Segundo ALIABADI & ROOKE (1992), existem várias formas para o desenvolvimento da formulação do método dos elementos de contorno. O emprego do teorema da reciprocidade de Betti talvez seja a forma mais direta de obtenção do equacionamento. Ainda podem ser empregados os conceitos de resíduos ponderados, como apresentado em BREBBIA & DOMINGUEZ (1992).

A formulação do método dos elementos de contorno pode ser dividida, basicamente, em duas diferentes categorias. A primeira, e talvez a mais empregada, refere-se a formulação direta. Por meio dessa formulação as grandezas envolvidas no problema são empregadas e obtidas diretamente sem a necessidade de funções auxiliares. No caso dos problemas elásticos as variáveis principais são os deslocamentos

e forças de superfície. Já a formulação indireta é caracterizada por certo desprendimento em relação a alguns aspectos do problema físico. Isso se deve ao fato do emprego de funções fictícias na representação das grandezas do problema físico. Dessa forma os parâmetros do problema analisado, tais como deslocamentos e forças de superfície, não são utilizados diretamente e sua determinação é obtida por integrações das funções fictícias definidas na formulação. Essa formulação teve grande aplicação em campos como eletromagnetismo e mecânica dos fluidos.

5.1 – Soluções Fundamentais para os Problemas Bidimensionais e Tridimensionais

Para o desenvolvimento da formulação do método dos elementos de contorno torna-se necessária a obtenção de soluções fundamentais para as grandezas envolvidas no problema. Para problemas elásticos as soluções fundamentais representam as respostas de um domínio infinito sujeito a um carregamento unitário pontual localizado em um ponto denominado ponto fonte.

As soluções fundamentais de problemas elástico-lineares são atribuídas a Kelvin e podem ser obtidas por meio da equação de equilíbrio do corpo representada pela Eq. (3.2). Inicialmente tem-se que a carga unitária pontual aplicada no ponto fonte é representada pela função Delta de Dirac, Anexo E. Levando essa condição à equação de equilíbrio, Eq. (3.2), verifica-se que a função Delta de Dirac deve ser igual ao carregamento de corpo b_i .

$$b_i = \Delta^f \cdot e_i \quad (5.1)$$

sendo:

Δ^f função delta de Dirac aplicada no ponto fonte.

e_i versor necessário para definição da direção de aplicação da carga.

De posse desse resultado a equação de equilíbrio do corpo, Eq. (3.2), pode ser reescrita em termos de deslocamentos. Para realizar esse procedimento deve-se empregar a Lei de Hooke generalizada, Eq. (3.5), a qual relaciona tensões a deformações, e em seguida aplicar as relações deformação-deslocamento, Eq. (3.7), ambas discutidas no capítulo 3. Procedendo dessa forma a equação de equilíbrio em

termos de deslocamento, para material isótopo sob estado plano de deformação, pode ser definida como:

$$\left(\frac{1}{1-2\nu}\right) \cdot u_{i,ij} + u_{j,ii} + \frac{\Delta^f \cdot e_i}{\mu} = 0 \quad (5.2)$$

A solução da Eq. (5.2) representa a solução fundamental para deslocamentos. No caso plano de deformação a solução é dada por:

$$u_{ik}^*(f, c) = \frac{1}{8 \cdot \pi \cdot \mu \cdot (1-\nu)} \cdot \left[(3-4\nu) \cdot \ln\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \delta_{ik} + r_{,l} \cdot r_{,k} \right] \quad (5.3)$$

em que:

$r_{,k}$ derivada da distância, entre o ponto fonte e os pontos onde devem ser avaliados a solução fundamental, pontos campo, em relação a direção k .

Deve-se destacar que o símbolo * representa variáveis associadas ao estado fundamental. Efetuando a diferenciação da Eq. (5.3) é possível obter a expressão para a solução fundamental das deformações. O resultado dessa operação é dado por:

$$\varepsilon_{ilk}^*(f, c) = \frac{-1}{8 \cdot \pi \cdot \mu \cdot (1-\nu) \cdot r} \cdot \left[(1-2\nu) \cdot (r_{,k} \cdot \delta_{il} + r_{,l} \cdot \delta_{ik}) - r_{,i} \cdot \delta_{lk} + 2 \cdot r_{,i} \cdot r_{,l} \cdot r_{,k} \right] \quad (5.4)$$

A partir da solução fundamental das deformações pode se aplicar a Lei de Hooke generalizada, Eq. (3.5), e assim obter a expressão para a solução fundamental das tensões conforme apresenta a Eq. (5.5).

$$\sigma_{ilk}^*(f, c) = \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot (1-\nu) \cdot r} \cdot \left[(1-2\nu) \cdot (r_{,k} \cdot \delta_{il} + r_{,l} \cdot \delta_{ik} - r_{,i} \cdot \delta_{lk}) + 2 \cdot r_{,i} \cdot r_{,l} \cdot r_{,k} \right] \quad (5.5)$$

Por fim, o equilíbrio pode ser efetuado no contorno com o objetivo de obter a expressão para a solução fundamental das forças de superfície. Efetuando esse procedimento resulta a seguinte expressão:

$$P_{ik}^*(f, c) = \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot (1-\nu) \cdot r} \cdot \left\{ r_{,n} \cdot \left[(1-2\nu) \cdot \delta_{ik} + 2 \cdot r_{,l} \cdot r_{,k} \right] + (1-2\nu) \cdot (\eta_l \cdot r_{,k} - \eta_k \cdot r_{,l}) \right\} \quad (5.6)$$

Para problemas tridimensionais o procedimento para a obtenção das soluções fundamentais é análogo. A seguir são apresentadas as expressões das soluções fundamentais para o problema tridimensional.

$$u_{lk}^*(f, c) = \frac{1}{16 \cdot \pi \cdot \mu \cdot (1 - \nu) \cdot r} \cdot [(3 - 4 \cdot \nu)] \cdot \delta_{lk} + r_{,l} \cdot r_{,k} \quad (5.7)$$

$$\varepsilon_{ilk}^*(f, c) = \frac{-1}{16 \cdot \pi \cdot \mu \cdot (1 - \nu) \cdot r^2} \cdot [(1 - 2 \cdot \nu) \cdot (r_{,k} \cdot \delta_{il} + r_{,l} \cdot \delta_{ik}) - r_{,i} \cdot \delta_{lk} + 3 \cdot r_{,i} \cdot r_{,l} \cdot r_{,k}] \quad (5.8)$$

$$\sigma_{ilk}^*(f, c) = \frac{-1}{8 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^2} \cdot [(1 - 2 \cdot \nu) \cdot (r_{,k} \cdot \delta_{il} + r_{,l} \cdot \delta_{ik} - r_{,i} \cdot \delta_{lk}) + 3 \cdot r_{,i} \cdot r_{,l} \cdot r_{,k}] \quad (5.9)$$

$$P_{lk}^*(f, c) = \frac{-1}{8 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r^2} \cdot \left\{ r_{,n} \cdot [(1 - 2 \cdot \nu) \cdot \delta_{lk} + 3 \cdot r_{,l} \cdot r_{,k}] + (1 - 2 \cdot \nu) \cdot (\eta_{l, r_{,k}} - \eta_{k, r_{,l}}) \right\} \quad (5.10)$$

As expressões das soluções fundamentais apresentadas anteriormente possuem uma característica importante que é a singularidade, representada pela distância entre os pontos fonte e campo. Quando os pontos fonte e campo aproximam-se o valor das soluções fundamentais tendem a infinito. Isso requer um procedimento mais preciso de integração dos termos das matrizes constituintes do problema. Para contornar esse problema pode ser empregado o processo de sub-elementação, Anexo C, onde o elemento de contorno considerado é subdividido em elementos menores permitindo um melhor mapeamento das grandezas envolvidas tornando o processo de integração das equações mais preciso.

5.2 – Equacionamento para o Problema Elástico Plano

O equacionamento do problema elástico via método dos elementos de contorno pode ser efetuado com sucesso e de forma expedita empregando o princípio da reciprocidade de Betti. Este teorema estabelece que o trabalho realizado pelas tensões de um estado I sobre as deformações de um estado II é igual ao trabalho das tensões do estado II sobre as deformações do estado I admitindo-se o mesmo material em ambos os estados. Esse teorema pode ser representado por meio da Eq. (5.11).

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^I \cdot \varepsilon_{ij}^{II} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{II} \cdot \varepsilon_{ij}^I d\Omega \quad (5.11)$$

Aplicando esta equação para a formulação do método dos elementos de contorno deve-se substituir um dos estados do problema pelo estado fundamental, ou seja, representado pelas soluções fundamentais. Assim a Eq. (5.11) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ilk}^*(f, c) \cdot \varepsilon_{lk}(c) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{lk}(c) \cdot \varepsilon_{ilk}^*(f, c) d\Omega \quad (5.12)$$

Aplicando a relação deformação-deslocamento, Eq. (3.7), é possível exprimir a relação (5.12) em termos de deslocamentos.

$$\int_{\Omega} \sigma_{ilk}^*(f, c) \cdot u_{l,k}(c) d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{lk}(c) \cdot u_{il,k}^*(f, c) d\Omega \quad (5.13)$$

Integrando por partes ambos os termos da Eq. (5.13) e aplicando a condição de equilíbrio de superfície, representada pela Eq. (3.3), pode-se obter uma expressão envolvendo tensões, deslocamentos e forças de superfície tanto do estado fundamental quanto do problema estudado. Dessa forma:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ilk,k}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Omega + \int_{\Gamma} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma = -\int_{\Omega} \sigma_{lk,k}(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Omega + \int_{\Gamma} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Gamma \quad (5.14)$$

Nesse ponto deve-se empregar a equação de equilíbrio, representada pela Eq. (3.2), tanto no problema real quanto no problema fundamental como forma de substituir os termos de derivada das tensões por forças de corpo. Deve-se atentar para o fato que no problema fundamental a carga de corpo, b_i , é igual à função Delta de Dirac, Δ^f . Efetuando essas substituições pode-se reescrever a Eq. (5.14) como:

$$\int_{\Omega} \Delta^f \cdot u_l(c) d\Omega + \int_{\Gamma} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma = \int_{\Omega} b_l(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Omega + \int_{\Gamma} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Gamma \quad (5.15)$$

Integrando o termo detentor da função Delta de Dirac obtém-se a seguinte expressão:

$$u_i(f) + \int_{\Gamma} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma = \int_{\Gamma} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{il}^*(f, c) \cdot b_l(c) d\Omega \quad (5.16)$$

A Eq. (5.16) representa a identidade Somigliana, a qual fornece os valores de deslocamento e tensões em qualquer ponto do domínio dependendo dos valores dos deslocamentos e forças de superfície, conhecidos sobre o contorno, das forças de corpo e das soluções fundamentais.

Como o método dos elementos de contorno pertence a classe das técnicas de contorno torna-se necessário transformar a Eq. (5.16), válida para todo domínio, em uma equação integral válida somente para valores de contorno. Para efetuar esse

processo é necessário inicialmente admitir a divisão do domínio e do contorno em duas partes, conforme apresenta a Fig. (5.1), podendo ambas serem expressas por:

$$\hat{\Omega} = \Omega - \bar{\Omega} + \Omega_\varepsilon \quad (5.17)$$

$$\hat{\Gamma} = \Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon \quad (5.18)$$

As grandezas Ω_ε e Γ_ε referem-se a introdução de um semi-círculo, de raio r , estando o ponto de colocação situado em seu centro conforme ilustra a Fig. (5.1). Assim a identidade Somigliana fica avaliada no contorno se as parcelas desta equação referentes à Ω_ε e Γ_ε forem consideradas no limite de r tendendo a zero.

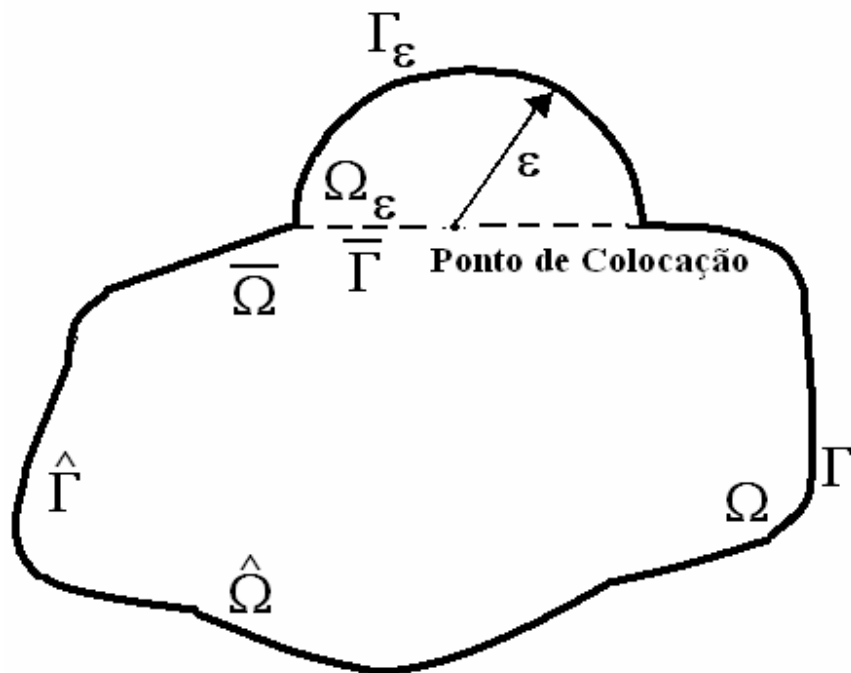


Figura 5.1 Divisão do domínio e do contorno para determinação da equação integral sobre o contorno

Procedendo dessa maneira a identidade Somigliana passa a ser expressa por:

$$u_i(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \bar{\Omega} + \Omega_\varepsilon} u_{il}^*(f, c) \cdot b_l(c) d\Omega - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma \quad (5.19)$$

Por facilidade a análise da Eq. (5.19) será efetuada considerando-se cada termo isoladamente. Tomando inicialmente o primeiro termo do segundo membro desta equação pode-se reescrevê-lo como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Gamma \quad (5.20)$$

A singularidade logarítmica presente na solução fundamental de deslocamentos, Eq. (5.3), é classificada, de acordo com PORTELA (1992), como do tipo fraca. De acordo com este grau de singularidade pode-se verificar que o segundo termo do segundo membro da Eq. (5.20) anula-se durante a realização da operação de limite. Já o primeiro termo deste membro permanece de forma a ser avaliado no contorno.

Voltando à Eq. (5.19) o segundo termo do segundo membro pode ser analisado mais facilmente se escrito da seguinte maneira:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \bar{\Omega} + \Omega_\varepsilon} u_{il}^*(f, c) \cdot b_l(c) d\Omega = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - \bar{\Omega}} u_{il}^*(f, c) \cdot b_l(c) d\Omega + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} u_{il}^*(f, c) \cdot b_l(c) d\Omega \quad (5.21)$$

De forma análoga ao termo já analisado, Eq. (5.20), constata-se que a singularidade presente na expressão fundamental de deslocamento leva o segundo termo do segundo membro da Eq. (5.21) a tomar valor nulo durante a execução do limite. Já o primeiro termo permanece de forma a ser avaliado no domínio.

O último termo do segundo membro da Eq. (5.19) deve ser analisado reescrevendo-o como segue:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma \quad (5.22)$$

A singularidade forte, $1/r$, da solução fundamental para forças de superfície, Eq. (5.6), leva a um comportamento diferente desse termo em relação aos demais já considerados. O primeiro termo do segundo membro da Eq. (5.22) deve ser avaliado segundo os conceitos do valor principal de Cauchy. Para a sua existência os deslocamentos prescritos no contorno devem obedecer à condição de continuidade de Hölder expressa pela seguinte relação:

$$\left| u_{(c)}^j - u_{(f)}^j \right| \leq B \cdot r_{(f,c)}^g \quad (5.23)$$

sendo:

B, g constantes reais positivas. $|B| < \infty$ e $0 < g \leq 1$

$r_{(f,c)}$ distância entre os pontos fonte e campo.

Obedecendo à condição expressa pela Eq. (5.23) o termo analisado pode ser avaliado no contorno do problema. Já a análise do segundo termo do segundo membro da Eq. (5.22) será efetuada considerando a expansão dos deslocamentos, em torno do

ponto fonte, em série de Taylor. Será considerado somente o primeiro termo desta série já que os demais termos anulam-se durante a execução da operação limite. Dessa forma é possível obter a expressão representada pela Eq. (5.24).

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(f) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(f) d\Gamma \quad (5.24)$$

Esta expressão pode ser simplificada como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot (u_l(c) - u_l(f)) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(f) d\Gamma \quad (5.25)$$

Levando em conta a continuidade da função de deslocamentos no ponto fonte tem-se que o primeiro termo do segundo membro da Eq. (5.25) é nulo. Assim:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma = u_l(f) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} P_{il}^*(f, c) d\Gamma \quad (5.26)$$

Dessa forma verifica-se que a integração e a realização da operação limite do segundo termo do segundo membro da Eq. (5.22) gera um termo independente que deve ser, inicialmente isolado, e em seguida adicionado ao termo livre de deslocamento presente no primeiro termo da Eq. (5.19).

Considerando, portanto os resultados previstos pelas Eq. (5.20), Eq. (5.21) e Eq. (5.22) a expressão da identidade Somigliana escrita para o contorno toma a seguinte forma:

$$c_{il}(f, c) \cdot u_l(f) + \int_{\Gamma} P_{il}^*(f, c) \cdot u_l(c) d\Gamma = \int_{\Gamma} P_l(c) \cdot u_{il}^*(f, c) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{il}^*(f, c) \cdot b_l(c) d\Omega \quad (5.27)$$

sendo:

\int integral de valor principal de Cauchy.

O termo c_{il} , resultante da adição do termo apresentado no primeiro membro da Eq. (5.19) com o termo livre conseqüente da avaliação do último termo do segundo membro dessa mesma equação do domínio para o contorno, é dependente da geometria do contorno analisado. Conforme apresenta VENTURINI (1988) os valores para esse termo podem ser obtidos empregando-se o seguinte tensor:

$$c_{il} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} + \frac{\text{Cos}(2 \cdot \gamma) \cdot \text{Sen}(\alpha)}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} & \frac{\text{Sen}(2 \cdot \gamma) \cdot \text{Sen}(\alpha)}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \\ \frac{\text{Sen}(2 \cdot \gamma) \cdot \text{Sen}(\alpha)}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} & \frac{\alpha}{2 \cdot \pi} + \frac{\text{Cos}(2 \cdot \gamma) \cdot \text{Sen}(\alpha)}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Sendo α e γ dependentes da posição do ponto singular sobre o contorno. A Fig. (5.2) ilustra a obtenção dessas variáveis.

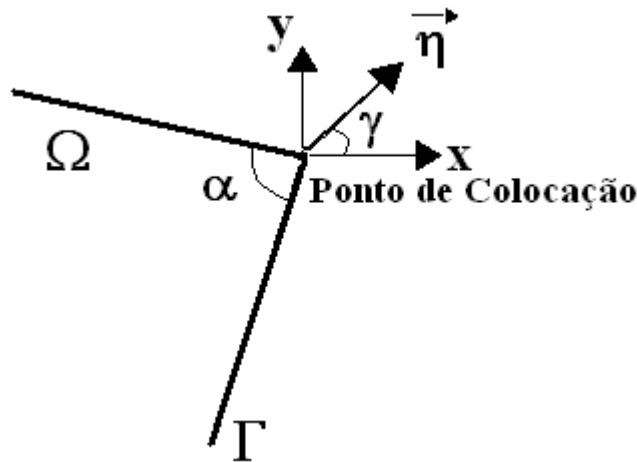


Figura 5.2 Parâmetros para cálculo da equação integral sobre o contorno

Se o ponto de colocação não estiver sob um ponto de angulosidade, ao contrário da Fig. (5.2), o tensor (5.28) torna-se igual a uma matriz identidade multiplicada por $\frac{1}{2}$.

5.3 – Aproximações sobre o Contorno

Após a dedução da equação integral em deslocamentos para pontos sobre o contorno torna-se necessária a sua utilização pelo método dos elementos de contorno. Para tanto o contorno do problema analisado deve ser discretizado em elementos de contorno. Estas entidades efetuam a aproximação da geometria do problema sendo necessários também para a delimitação de funções de aproximação que permitirão a aproximação das grandezas envolvidas no problema.

De acordo com o grau de aproximação empregado para as grandezas envolvidas no problema os elementos de contorno podem ser classificados como constantes, lineares, quadráticos, cúbicos e de ordem superior. Há também a possibilidade de adoção de diferentes graus de aproximação tanto para a geometria quanto para as grandezas envolvidas no problema. Essa particularidade conduz a caracterização dos

elementos de contorno os quais podem ser sub-paramétricos, isoparamétricos e super-paramétricos.

Para o desenvolvimento do presente trabalho serão considerados elementos de contorno lineares isoparamétricos. Desconsiderando as forças de corpo a Eq. (5.27) pode ser discretizada da seguinte forma:

$$[c]\{u\}^p + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [P^*]\{u\} d\Gamma_j \right) = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [u^*]\{P\} d\Gamma_j \right) \quad (5.29)$$

sendo:

NE o número de elementos de contorno adotados para a descrição do problema.

p o ponto fonte considerado.

5.4 – Funções de Aproximação

Como o elemento de contorno adotado é o linear as funções de aproximação necessárias são duas e estas podem ser definidas em termos de coordenadas adimensionais. A Fig. (5.3) apresenta o comportamento das funções de forma ao longo do elemento bem como as coordenadas adimensionais utilizadas.

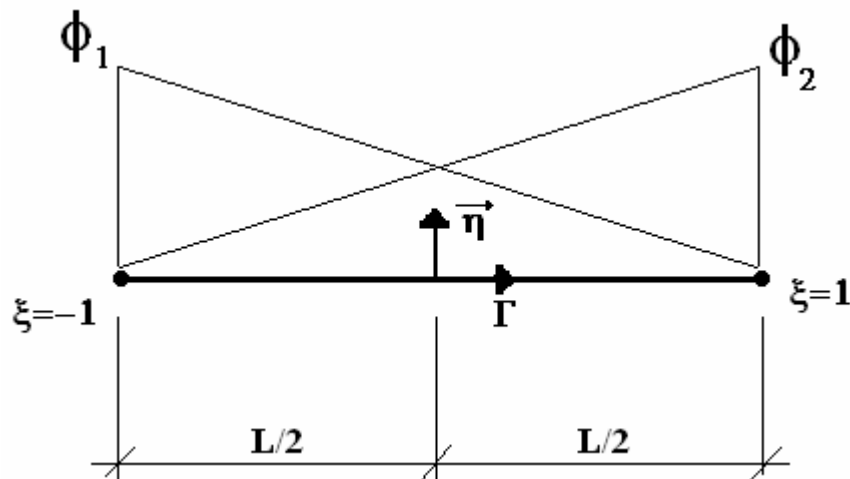


Figura 5.3 Coordenadas adimensionais e funções de aproximação

Para este elemento as funções de aproximação são:

$$\phi_1 = \frac{1-\xi}{2} \quad (5.30)$$

$$\phi_2 = \frac{1+\xi}{2} \quad (5.31)$$

Os deslocamentos no interior do elemento de contorno são descritos por meio das funções de aproximação e dos valores nodais disponíveis, assim:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = [\Phi] \{u\}_n^j \quad (5.32)$$

De forma análoga as forças de superfície podem ser expressas por:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_1^2 \\ P_2^2 \end{Bmatrix} = [\Phi] \{P\}_n^j \quad (5.33)$$

Os termos u_k^l e P_k^l indicam deslocamentos e forças de superfície atuantes no nó l segundo a direção k . Já os vetores $\{u\}_n^j$ e $\{P\}_n^j$ representam deslocamentos e forças de superfície nodais presentes nos nós pertencentes ao elemento j atuando segundo a direção n .

A geometria do elemento é aproximada de forma semelhante à apresentada nas Eq. (5.32) e Eq. (5.33). A interpolação pode ser representada como:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^1 \\ y^1 \\ x^2 \\ y^2 \end{Bmatrix} = [\Phi] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}_n^j \quad (5.34)$$

Depois de incorporadas as funções de interpolação nas expressões de deslocamentos e forças de superfície deve-se reescrever a Eq. (5.29) substituindo nessa expressão as Eq. (5.32) e Eq. (5.33). Assim.

$$[c][\Phi]^p \{u\}_n^p + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [P^*][\Phi] d\Gamma_j \right) \{u\}_n^j = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [u^*][\Phi] d\Gamma_j \right) \{P\}_n^j \quad (5.35)$$

Na Eq. (5.35) o termo $\{u\}_n^p$ representa os deslocamentos nodais do elemento onde encontra-se o ponto fonte.

5.5 – Construção do Sistema de Equações

As integrais apresentadas na Eq. (5.35) relacionam deslocamentos do ponto de colocação considerado às forças de superfície e deslocamentos nodais dos demais elementos presentes na malha construída. Dessa forma as matrizes resultantes do processo de integração contém a influência de todos os elementos presentes na malha sendo por isso muitas vezes denominadas de matrizes de influência.

A Eq. (5.35) pode ser reescrita de uma forma mais compacta admitindo-se variáveis auxiliares.

$$\left[\hat{H}_{INF} \right]^{pj} = \int_{\Gamma_j} [P^*] [\Phi] d\Gamma_j \quad (5.36)$$

$$\left[G_{INF} \right]^{pj} = \int_{\Gamma_j} [u^*] [\Phi] d\Gamma_j \quad (5.37)$$

Admitindo-se ainda a seguinte simplificação:

$$\left[H_{INF} \right] = \begin{cases} \left[\hat{H}_{INF} \right]^{pj} & \text{se } j \notin p \\ \left[\hat{H}_{INF} \right]^{pj} + [c][\phi]^p & \text{se } j \in p \end{cases} \quad (5.38)$$

Pode-se reescrever a Eq. (5.35) de forma mais compacta como:

$$\sum_{j=1}^{NE} [H_{INF}]^{pj} \{u\}_n^j = \sum_{j=1}^{NE} [G_{INF}]^{pj} \{P\}_n^j \quad (5.39)$$

Nos problemas elásticos planos sabe-se que o número de graus de liberdade por nó é quatro, sendo dois deslocamentos e duas forças de superfície. No entanto a metade destes parâmetros é conhecida diretamente por meio da aplicação das condições de contorno do problema. Dessa forma o problema passa a ser resolvido se for escrito um número de equações igual a duas vezes o número de nós da malha. Escrevendo as equações para todos os pontos de colocação do modelo tem-se um sistema resultante da ordem de duas vezes o número de nós da malha e que pode ser representado de forma geral como:

$$[H]\{u\} = [G]\{P\} \quad (5.40)$$

A resolução do sistema matricial apresentado na Eq. (5.40) somente é possível aplicando-se as condições de contorno do problema. Para introduzir as condições de contorno no sistema as matrizes $[H]$ e $[G]$ devem ser manipuladas de tal forma que todas as variáveis conhecidas estejam no primeiro membro enquanto que incógnitas no segundo. Esse procedimento é feito mediante troca de colunas entre as duas matrizes citadas obtendo-se o seguinte sistema:

$$[A]\{Inc\} = [B]\{VP\} \quad (5.41)$$

em que:

$[A]$ e $[B]$ formas modificadas das matrizes $[H]$ e $[G]$ respectivamente.

$\{Inc\}$ vetor das incógnitas.

$\{VP\}$ vetor das variáveis prescritas.

5.6 – Grandezas Internas

Depois de conhecidos os valores dos deslocamentos e das forças de superfície no contorno algumas grandezas importantes podem ser determinadas no interior do domínio.

Os deslocamentos, nos pontos internos, podem ser obtidos de forma expedita empregando-se a identidade Somigliana. Escrevendo-a na forma matricial para pontos internos tem-se:

$$\{u\}^{pi} + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [P^*][\Phi] d\Gamma_j \right) \{u\}_n^j = \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [u^*][\Phi] d\Gamma_j \right) \{P\}_n^j \quad (5.42)$$

onde:

$\{u\}^{pi}$ representa os deslocamentos no ponto interno pi .

Substituindo na Eq. (5.42) as Eq. (5.36) e Eq. (5.37) pode-se obter uma expressão mais compacta para a descrição dos deslocamentos nos pontos internos:

$$\{u\}^{pi} + \sum_{j=1}^{NE} [H'_{INF}]^{pj} \{u\}_n^j = \sum_{j=1}^{NE} [G'_{INF}]^{pj} \{P\}_n^j \quad (5.43)$$

Deve-se salientar que para a obtenção dos deslocamentos internamente ao domínio os pontos fonte passam a ser os pontos determinados no interior do domínio.

Por esse motivo as matrizes H e G recebem o símbolo ‘ para diferenciá-las das matrizes H e G utilizadas na obtenção dos deslocamentos e forças de superfície no contorno.

As tensões nos pontos internos podem ser obtidas empregando-se a Eq. (3.5) modificada pela introdução da relação entre deformações e deslocamentos, Eq. (3.7). Dessa forma é possível escrever a seguinte expressão para as tensões:

$$\sigma_{ij}^{pi} = \frac{2 \cdot \mu \cdot \nu}{(1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \delta_{ij} \cdot u_{i,l} + \mu \cdot (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5.44)$$

Substituindo a identidade Somigliana Eq. (5.16) na Eq. (5.44), e desprezando as forças de corpo, é possível obter a seguinte expressão para as tensões:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{pi} = & \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2 \cdot \mu \cdot \nu}{(1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial u_{lk}^*}{\partial x_l} + \mu \cdot \left(\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right\} P_k d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \left\{ \frac{2 \cdot \mu \cdot \nu}{(1 - 2 \cdot \nu)} \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{\partial P_{lk}^*}{\partial x_l} + \mu \cdot \left(\frac{\partial P_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial P_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \right\} u_k d\Gamma \end{aligned} \quad (5.45)$$

A Eq. (5.45) pode ser escrita de forma compacta como:

$$\sigma_{ij}^{pi} = \int_{\Gamma} D_{kij} \cdot P_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} \cdot U_k d\Gamma \quad (5.46)$$

Sendo os termos D_{kij} e S_{kij} dados pelas seguintes expressões:

$$D_{kij} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r} \cdot \left\{ (1 - 2 \cdot \nu) \cdot (r_{,k} \cdot \delta_{ij} + r_{,j} \cdot \delta_{ki} - r_{,i} \cdot \delta_{jk}) + 2 \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} \cdot r_{,k} \right\} \quad (5.47)$$

$$\begin{aligned} S_{kij} = & \frac{E}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu^2) \cdot r^2} \cdot \left\{ 2 \cdot r_{,n} \cdot \left[(1 - 2 \cdot \nu) \cdot r_{,k} \cdot \delta_{ij} + \nu \cdot (r_{,j} \cdot \delta_{ik} + r_{,i} \cdot \delta_{jk}) - 4 \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} \cdot r_{,k} \right] \right. \\ & + 2 \cdot \nu \cdot (\eta_{,i} \cdot r_{,j} \cdot r_{,k} + \eta_{,j} \cdot r_{,i} \cdot r_{,k}) \\ & \left. + (1 - 2 \cdot \nu) \cdot (2 \cdot \eta_{,k} \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} + \eta_{,j} \cdot \delta_{ik} + \eta_{,i} \cdot \delta_{jk}) - (1 - 4 \cdot \nu) \cdot \eta_{,k} \cdot \delta_{ij} \right\} \end{aligned} \quad (5.48)$$

Em forma matricial a Eq. 5.46 pode ser escrita como:

$$\left\{ \sigma \right\}^{pi} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{NE} [G_{INF}^n] \{p\}_n^j - \sum_{j=1}^{NE} [H_{INF}^n] \{u\}_n^j \quad (5.45)$$

As matrizes H_{INF}'' e G_{INF}'' indicam as matrizes resultantes do processo de integração das variáveis S_{kij} e D_{kij} respectivamente sendo o ponto fonte o ponto interno ao domínio.

6. - Método dos Elementos de Contorno Formulação Hiper-Singular

O método dos elementos de contorno é um método numérico que vem despontando como uma ferramenta robusta e precisa para a análise de diversos tipos de problemas de engenharia. Dentre estes problemas destacam-se aqueles onde grandes concentrações de tensão e deformação estão presentes. Em particular, estruturas que apresentam descontinuidades internas, como fissuras, apresentam grande concentração de tensão sendo, portanto um grande campo de aplicação do método.

Diversas são as metodologias para a análise de problemas de fraturamento via método dos elementos de contorno. A primeira a ser proposta trata do emprego da formulação singular, a qual é baseada somente na equação integral em deslocamentos apresentada na Eq. (5.27). Por meio desta formulação os elementos de contorno adotados na discretização de ambas as faces da fissura empregam equações algébricas baseadas na Eq. (5.27). Utilizando esse procedimento a fissura é considerada no modelo como um vazio, estando as faces da fissura separadas por uma pequena distância. Assim quando menor for a distância entre as faces da fissura mais próxima a geometria do modelo numérico estará do modelo real. No entanto à medida que se adota a distância entre as faces da fissura próxima a zero o sistema de equações algébricas resultantes tende a ser singular. Isso ocorre pelo fato da localização de pontos fontes, simetricamente dispostos em faces opostas da fissura, ser muito próxima. Assim o processo de integração das soluções fundamentais em deslocamentos e forças de superfície gera linhas idênticas no sistema matricial final tornando-o singular.

Técnicas especiais de integração, como sub-elementação, podem ser empregadas, no entanto formulações mais avançadas tornaram-se necessárias para analisar o problema.

As fissuras podem ser tratadas também por meio de uma formulação que incorpora a perda de rigidez causada pela presença da fissura nas soluções fundamentais

empregadas. Esta formulação utiliza as conhecidas funções de Green as quais prescrevem soluções fundamentais compatíveis que eliminam a necessidade da discretização das faces da fissura. Apesar de ser uma formulação elegante o método das funções de Green é limitado apresentando algumas restrições principalmente no tocante à análise da propagação das fissuras.

Já o método da descontinuidade de deslocamento supera a dificuldade na modelagem da fissura substituindo cada par de nós coincidentes, no contorno da fissura, por um único ponto fonte. Neste método a diferença dos deslocamentos entre os contornos da fissura é introduzida como funções desconhecidas no problema e dessa forma a fissura é modelada com um contorno único. Apesar da redução de esforço computacional na análise da fissura, novas variáveis são introduzidas nas integrais de contorno dificultando o emprego do método.

Outra abordagem para a análise dos problemas de fraturamento é via método das sub-regiões. Por meio dessa metodologia consideram-se nós coincidentes na fissura, os quais recebem condições de contorno referentes à compatibilidade dos domínios envolvidos. A fissura é definida no encontro dos domínios envolvidos e, apesar disso, a principal dificuldade do método encontra-se na introdução das condições de contorno. Com o crescimento da fissura torna-se necessária a reconstrução e reaplicação das condições de contorno nos nós afetados pelo crescimento da fissura o que acaba por deixar a utilização do método bastante custosa. Este método gera um grande sistema de equações algébricas.

Outra formulação possível é a proposta pelo método dual. Por meio desta metodologia o domínio analisado pode ser considerado como uma única sub-região e os contornos da fissura, localizados na mesma posição física, são discretizados sendo que cada face da fissura é representada por um tipo de equação integral. Uma face da fissura é descrita empregando-se a equação integral em deslocamentos descrita pela Eq. (5.27). Já a face oposta da fissura é representada por uma equação integral escrita em termos de forças de superfície a qual será deduzida a seguir neste capítulo. Apesar da existência de pontos fontes com mesma localização o sistema de equações resultante não é singular. Esse procedimento é mais geral para a análise de domínios multi-fraturados. Um fator de grande importância a ser destacado nesse método é a singularidade e hiper-singularidade presente nas equações envolvidas demandando um procedimento adequado de integração.

6.1 – Equação Integral em Forças de Superfície

Para a obtenção das equações necessárias à análise via método dos elementos de contorno dual torna-se necessário inicialmente retomar a identidade Somigliana representada pela Eq. (6.1).

$$u_i(f) + \int_{\Gamma} P_{ij}^*(f, c) \cdot u_j(c) d\Gamma = \int_{\Gamma} P_j(c) \cdot u_{ij}^*(f, c) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ij}^*(f, c) \cdot b_j(c) d\Omega \quad (6.1)$$

Deve-se perceber que a Eq. (6.1) é diferenciável, pois os termos P_{ij}^* e u_{ij}^* dependem unicamente da distância entre os pontos fonte e campo. Efetuando a diferenciação da Eq. (6.1) e admitindo-se a ausência de forças de corpo presentes no problema obtém-se a seguinte expressão:

$$u_{i,k}(f) - \int_{\Gamma} P_{ij,k}^*(f, c) \cdot u_j(c) d\Gamma = - \int_{\Gamma} P_j(c) \cdot u_{ij,k}^*(f, c) d\Gamma \quad (6.2)$$

Em que as derivadas dos campos fundamentais são referenciadas ao ponto fonte.

O campo de tensões é obtido introduzindo-se na Eq. (6.2) a relação constitutiva do material considerado, Eq.(3.5). Efetuando este procedimento é possível escrever a expressão da identidade Somigliana em termos de tensões da seguinte forma:

$$\sigma_{ij}(f) + \int_{\Gamma} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma \quad (6.3)$$

Nesta equação os termos S_{kij} e D_{kij} contêm as derivadas dos termos P_{ij}^* e u_{ij}^* respectivamente. Admitindo-se o emprego das soluções fundamentais de Kelvin, os termos S_{kij} e D_{kij} , para problemas planos de deformação, podem ser escritos como:

$$D_{kij}(f, c) = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu) \cdot r} \cdot \left\{ (1 - 2 \cdot \nu) \cdot (r_{,k} \cdot \delta_{ij} + r_{,j} \cdot \delta_{ki} - r_{,i} \cdot \delta_{jk}) + 2 \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} \cdot r_{,k} \right\} \quad (6.4)$$

$$S_{kij}(f, c) = \frac{E}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu^2) \cdot r^2} \cdot \left\{ 2 \cdot r_{,n} \cdot \left[(1 - 2 \cdot \nu) \cdot r_{,k} \cdot \delta_{ij} + \nu \cdot (r_{,j} \cdot \delta_{ik} + r_{,i} \cdot \delta_{jk}) - 4 \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} \cdot r_{,k} \right] \right. \\ \left. + 2 \cdot \nu \cdot (\eta_{,i} \cdot r_{,j} \cdot r_{,k} + \eta_{,j} \cdot r_{,i} \cdot r_{,k}) \right. \quad (6.5)$$

$$\left. + (1 - 2 \cdot \nu) \cdot (2 \cdot \eta_{,k} \cdot r_{,i} \cdot r_{,j} + \eta_{,j} \cdot \delta_{ik} + \eta_{,i} \cdot \delta_{jk}) - (1 - 4 \cdot \nu) \cdot \eta_{,k} \cdot \delta_{ij} \right\}$$

A Eq. (6.3) é válida para pontos localizados no domínio do problema. Aplicando a proposta do método dos elementos de contorno deve-se, portanto avaliar esta equação apenas nos pontos localizados sobre o contorno.

Para efetuar esse procedimento é necessário tomar um ponto no domínio muito próximo ao contorno e em seguida fazer a distância entre eles tender a zero conforme ilustra a Fig. (5.1) apresentada no capítulo 5.

Efetuando esse procedimento tem-se:

$$\sigma_{ij}(f) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma \quad (6.6)$$

Por facilidade cada termo da Eq. (6.6) será analisado isoladamente. Tomando primeiramente o termo D_{kij} pode-se perceber que este apresenta uma singularidade do tipo forte representada pelo fator $1/r$. Para a execução do limite proposto na Eq. (6.6) pode-se inicialmente reescrever o termo considerado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(f) d\Gamma - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(f) d\Gamma \end{aligned} \quad (6.7)$$

A análise pode ser melhor conduzida agrupando-se os termos comuns da relação anterior. Assim:

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) \cdot [P_k(c) - P_k(f)] d\Gamma \\ &+ P_k(f) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma \end{aligned} \quad (6.8)$$

Para o prosseguimento da análise deve-se assumir a existência da continuidade de Hölder, apresentada na Eq. (6.9), para os termos representantes das forças de superfície aplicadas no contorno como se segue:

$$|P_{(c)}^j - P_{(f)}^j| \leq B \cdot r_{(f,c)}^g \quad (6.9)$$

Admitindo a existência da continuidade de Hölder verifica-se que o primeiro termo do segundo membro da Eq. (6.8) é nulo.

O segundo termo do lado direito da Eq. (6.8) é integrável e resulta um fator independente após a realização da operação de limite. Essa operação resulta o termo:

$$P_k(f) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} D_{kij}(f, c) d\Gamma = A_{kij}(f, c) \cdot P_k(f) \quad (6.10)$$

O termo A_{kij} é um fator que depende das propriedades elásticas do material e do sistema de coordenadas adotado.

Já o último termo do segundo membro da Eq. (6.8) resulta uma integral imprópria que deve ser avaliada ao longo do contorno. Essa integral deve ser avaliada empregando-se a técnica do valor principal de Cauchy podendo ser representada como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma = \mathcal{P} \int_{\Gamma} D_{kij}(f, c) \cdot P_k(c) d\Gamma \quad (6.11)$$

Tomando agora a análise do termo S_{kij} , Eq. (6.6), verifica-se a presença de uma hiper-singularidade, representada pelo fator $1/r^2$, conforme descreve a Eq. (6.5). Para realizar a análise do termo citado deve-se inicialmente efetuar a expansão dos deslocamentos, em torno do ponto fonte, em série de Taylor e em seguida tomar os dois primeiros termos. Os demais termos da série não serão representados, pois anulam-se durante a execução da operação limite. Efetuando este procedimento obtém-se a seguinte relação para o termo S_{kij} :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma + \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot u_{k,m}(f) \cdot (x_m(c) - x_m(f)) d\Gamma &- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot u_{k,m}(f) \cdot (x_m(c) - x_m(f)) d\Gamma + \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(f) d\Gamma &- \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(f) d\Gamma + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma \quad (6.12) \end{aligned}$$

Reorganizando os termos da Eq. (6.12) obtém-se:

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot [u_k(c) - u_k(f) - u_{k,m}(f) \cdot (x_m(c) - x_m(f))] d\Gamma \\
&+ u_k(f) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) d\Gamma + u_{k,m}(f) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) \cdot (x_m(c) - x_m(f)) d\Gamma \\
&+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma \quad (6.13)
\end{aligned}$$

Admitindo-se que as derivadas dos deslocamentos no contorno possuam continuidade de Hölder, de acordo com a Eq. (6.14), pode-se verificar que o primeiro termo do segundo membro da Eq.(6.13) é nulo.

$$|u_k(c) - u_k(f) - u_{k,m}(f) \cdot (x_m(c) - x_m(f))| \leq B \cdot |x_m(c) - x_m(f)|^{q+1} \quad (6.14)$$

Já o segundo e o quarto termos do segundo membro da Eq. (6.13) devem ser analisados conjuntamente. Esse procedimento deve ser efetuado, pois o segundo termo gera, depois da integração, um fator com singularidade e assim durante a execução da operação de limite seu valor tenderá ao infinito. Esta singularidade é contornada com a soma desses dois termos, já que o quarto termo é uma integral imprópria. A expressão resultante da soma dos dois termos considerados deve ser analisada por meio dos conceitos da técnica de valor principal de Hadamard podendo ser representada como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma + u_k(f) \cdot \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f, c) d\Gamma \right\} = \not\int_{\Gamma} S_{kij}(f, c) \cdot u_k(c) d\Gamma \quad (6.15)$$

em que:

$\not\int$ integral de valor principal de Hadamard.

PORTELA (1992) apresenta que a singularidade presente no segundo termo do primeiro membro da Eq. (6.15) é sempre cancelada com outro termo singular liberado do processo de integração do primeiro termo desse mesmo membro, resultando portanto um valor finito.

Já o terceiro termo do segundo membro da Eq. (6.13) é integrável e resulta um termo independente, após a execução da operação limite, que deve ser analisado separadamente, assim:

$$u_{k,m}(f) \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} S_{kij}(f,c) \cdot (x_m(c) - x_m(f)) d\Gamma = B_{kijm}(f,c) \cdot u_{k,m}(f) \quad (6.16)$$

O fator B_{kijm} depende das propriedades elásticas do material e também do sistema de coordenadas empregado.

De forma a propor uma melhor organização do equacionamento os termos independentes provenientes da análise dos fatores S_{kij} e D_{kij} podem ser adicionados de forma a gerar um único termo independente. PORTELA (1992) apresenta que a junção dos resultados das Eq. (6.10) e Eq. (6.16) produzem:

$$A_{kij} \cdot P'_k - B_{kijm} \cdot u'_{k,m} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}(f) \quad (6.17)$$

O fator $\frac{1}{2}$ resulta da consideração de contorno suave no posicionamento do ponto fonte. Sob essa condição devem ser empregados elementos de contorno descontínuos para a representação das faces da fissura. Isso ocorre pelo fato do equacionamento requerer a continuidade da derivada do deslocamento a qual é respeitada com o ponto fonte internamente ao elemento como nos elementos descontínuos.

Dessa forma a equação integral para a representação das tensões somente com pontos sob o contorno pode ser escrita como:

$$\frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij}(f) + \int_{\Gamma} S_{kij}(f,c) \cdot u_k(c) d\Gamma = \int_{\Gamma} D_{kij}(f,c) \cdot P_k(c) d\Gamma \quad (6.18)$$

Para a obtenção da equação integral para a representação das forças de superfícies deve ser utilizada a Eq. (3.3) a qual relaciona tensões e forças de superfícies por meio do equilíbrio. Efetuando este equilíbrio obtém-se:

$$\frac{1}{2} \cdot P_i(f) + \eta_j \cdot \int_{\Gamma} S_{kij}(f,c) \cdot u_k(c) d\Gamma = \eta_j \cdot \int_{\Gamma} D_{kij}(f,c) \cdot P_k(c) d\Gamma \quad (6.19)$$

As equações integrais apresentadas nas Eq. (6.19) e Eq. (5.27) devem ser empregadas conjuntamente na discretização das faces da fissura no modelo dual.

Neste trabalho o processo de integração das equações integrais escritas em termos de deslocamentos é efetuado de forma numérica por meio da quadratura de

Gauss. Com o objetivo de tornar o cálculo mais preciso é empregado o procedimento de sub-elementação o qual pode ser consultado com detalhes no Anexo C.

Já para as equações integrais em termos de forças de superfície o processo de integração é efetuado de forma analítica. Para tanto foram consultados os trabalhos de WUTZOW (2003) e FOLTRAN (1999) os quais determinaram as expressões analíticas para tal problema empregando o elemento de contorno linear. Estas expressões são apresentadas nos Anexo A e Anexo B.

6.2 – Aproximações sobre o Contorno

De forma análoga ao já descrito no capítulo anterior, para a equação integral em deslocamentos, no emprego do método dos elementos de contorno deve-se efetuar a discretização da equação integral em forças de superfície, Eq. (6.19). Dessa forma:

$$\frac{1}{2} \cdot [I] \{P\}^p + \eta \cdot \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [S] \{u\} d\Gamma_j \right) = \eta \cdot \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} [D] \{P\} d\Gamma_j \right) \quad (6.20)$$

sendo:

$[I]$ matriz identidade.

A partir da Eq. (6.20) é possível a obtenção de matrizes de influência as quais podem ser representadas de forma concisa como:

$$\sum_{j=1}^{NE} [H_{INF}^{F.Superf.}]^{pj} \{u\}_n^j = \sum_{j=1}^{NE} [G_{INF}^{F.Superf.}]^{pj} \{P\}_n^j \quad (6.21)$$

Analogamente ao descrito para a formulação singular pode-se impor as condições de contorno do problema sobre a Eq. (6.21) e assim obter o sistema matricial final o qual pode é apresentado na Eq. (6.22)

$$[A] \{Inc\} = [B] \{VP\} \quad (6.22)$$

De forma geral o processo de discretização da Eq. (6.19) sobre o contorno é idêntico ao ilustrado para a formulação singular. A diferença encontra-se nos núcleos integrais já que para os estados fundamentais as expressões são diferentes.

6.3 – Estratégias de Modelagem e Discretização

O processo de criação da malha de elementos de contorno é de grande importância visto que é a partir deste que criam-se os nós e os elementos de contorno sobre os quais são definidas as funções para aproximação tanto da geometria quanto das grandezas envolvidas no problema. Além dos elementos e nós o processo de discretização gera também pontos fontes ao longo do contorno, os quais são usualmente relacionados ao posicionamento dos nós, e que são de grande importância para o emprego e definição das equações integrais.

Para a realização da discretização torna-se necessária a definição de uma estratégia a qual está intrinsecamente ligada às exigências da análise como, por exemplo, das condições de existência das equações integrais. O atendimento dessas exigências conduz à correta utilização da formulação possibilitando assim análises consistentes do problema. No método dos elementos de contorno dual algumas condições devem ser observadas para a definição de uma estratégia de discretização dentre as quais podem ser citadas:

↗ Discretização simétrica das faces da fissura para obtenção das integrais dos valores principais de Cauchy e Hadamard.

↗ Para a existência das equações integrais de deslocamento e força de superfície a continuidade de deslocamento e força de superfície deve ser observada. As continuidades necessárias na formulação são:

$$u_k(f) \in C^{0,\alpha} \text{ para valor principal de Cauchy.}$$

$$u_k(f) \in C^{1,\alpha} \text{ e } P_k(f) \in C^{0,\alpha} \text{ para valor principal de Hadamard.}$$

Devido às condições de continuidade exigidas pelos deslocamentos e forças de superfície para a existência de suas respectivas equações integrais considerações especiais devem ser efetuadas a respeito do tipo de elemento a ser utilizado na discretização das faces da fissura o qual deve ser descontínuo.

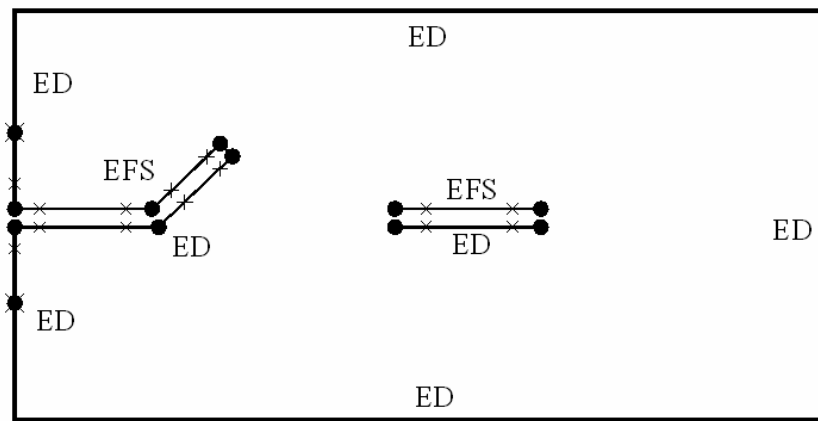
Já em termos do emprego das equações integrais via método dos elementos de contorno dual a estratégia de utilização das mesmas podem ser assim enunciadas:

↗ Para cada fissura a equação integral de deslocamentos é aplicada aos pontos fontes pertencentes a uma face da fissura.

↗ Para os pontos fontes pertencentes a face oposta é aplicada a equação integral de força de superfície.

↗ Para as partes do contorno não pertencentes às fissuras a equação integral em deslocamentos é aplicada.

Por meio dessas considerações sobre a modelagem a formulação do método dos elementos de contorno dual torna-se uma ferramenta robusta para a análise de fissuras que estejam totalmente imersas no domínio do problema quanto aquelas que interceptam o contorno do problema (trincas de aresta). A Fig. (6.1) apresenta o emprego das equações integrais via metodologia dual.



- Localização do Nó
- × Localização do Ponto Fonte
- ED Equação em Deslocamento
- EFS Equação em Força de Superfície

Figura 6.1 Estratégia de discretização para o método dos elementos de contorno dual

Para a utilização da formulação singular, baseada somente na equação integral em deslocamentos, as exigências na estratégia para a discretização são menores se comparadas às do modelo dual. Os elementos a serem empregados na discretização das faces da fissura podem ser tanto contínuos quanto descontínuos, no entanto a discretização deve ser simétrica para conduzir à correta extração dos fatores de intensidade de tensão. As únicas exigências para a análise por meio desta metodologia referem-se ao emprego somente da equação integral baseada em deslocamentos para a representação do comportamento do corpo e a necessidade da separação das faces da fissura. Para que o sistema final de equações não seja singular torna-se necessário a imposição de um afastamento das faces da fissura. Assim a fissura é representada como um vazio no domínio do problema. Neste trabalho ainda é utilizado um elemento de

contorno, localizado na extremidade da fissura, para a união das faces da fissura. Assim a geometria da fissura não é corretamente avaliada por meio desse modelo.

Através desta metodologia podem ser analisadas fissuras imersas no domínio e também as que interceptam o contorno. A Fig. (6.2) apresenta a distribuição dos elementos bem como do afastamento das faces da fissura necessários à utilização da formulação singular.

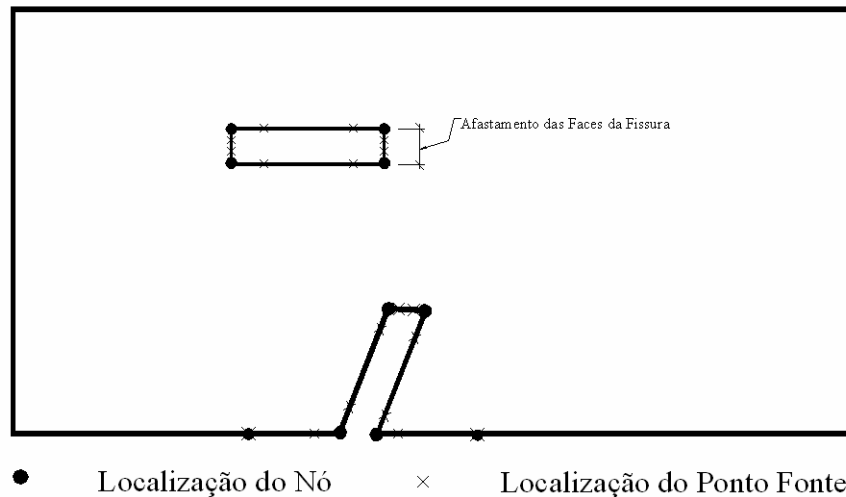


Figura 6.2 Estratégia de discretização para o emprego da formulação singular

6.4 – Sistema Final de Equações e Atualizações

Durante a análise de problemas envolvendo o crescimento de fissuras o processo de reconstrução total ou de grande parte da malha de elementos de contorno não é necessário. Isso ocorre pelo fato da criação de novos elementos acontecer, em grande parte, nas fissuras que tiveram seu comprimento aumentado. Eventualmente durante o processo de propagação as fissuras presentes no problema podem interceptar um ou mais elementos presentes no contorno. Quando esse processo ocorre a discretização do modelo é refeita apenas localmente afetando unicamente o elemento que sofreu a interceptação.

Devido à nova discretização os elementos criados irão gerar novas equações as quais devem ser reunidas às equações já existentes objetivando atualizar o sistema total de equações. Dessa forma novas linhas e colunas serão adicionadas ao sistema matricial final. A atualização de posições já existentes não é necessária desde que não haja a interseção entre as fissuras que propagam e os elementos de contorno já existentes. A

Fig (6.3) apresenta de forma esquemática o crescimento do sistema matricial final durante o processo de propagação das fissuras.

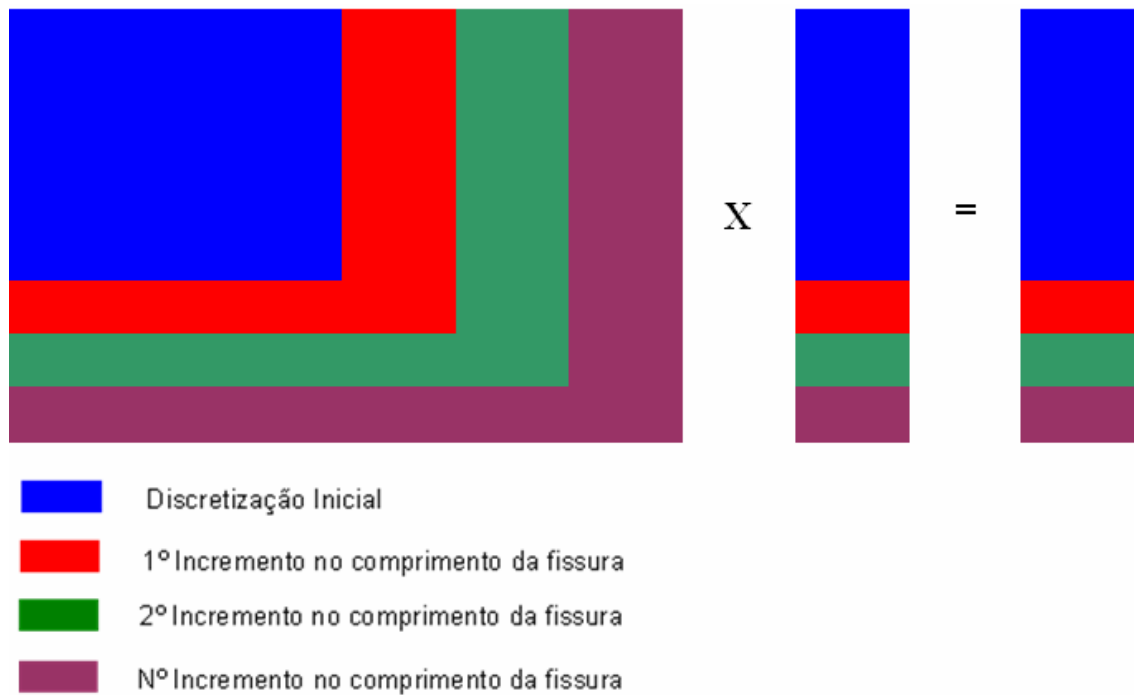


Figura 6.3 Crescimento e atualização do sistema matricial final

6.5 – Singularidade da Equação Integral em Forças de Superfície

A formulação obtida para a análise de domínios fissurados apresenta uma particularidade referente ao grau de singularidade presente nas equações integrais. Na equação integral que descreve o deslocamento, Eq. (5.27), as singularidades presentes são do tipo fraca, devido a presença do fator $\ln(r)$ como apresentado na Eq. (5.3), e do tipo forte decorrente do termo $\frac{1}{r}$ na Eq. (5.6). Já para a equação integral em forças de superfície as singularidades presentes são do tipo forte e hiper-singularidade decorrente dos termos $\frac{1}{r}$ e $\frac{1}{r^2}$ respectivamente, como apresentado nas Eq. (6.4) e Eq. (6.5).

De forma a avaliar a influência das singularidades dos núcleos integrais foi analisado um exemplo onde foram empregadas isoladamente as formulações que utilizam as equações integrais em deslocamentos e em força de superfície.

O exemplo considerado é o apresentado na Fig. (6.4). Trata-se de uma viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído em sua face superior. O vão da

viga é considerado igual a 5,0 metros sendo o carregamento de 5,0 kN/m². Foram consideradas diversas alturas para a seção transversal da viga. Este procedimento foi efetuado com o objetivo de verificar a estabilidade numérica da solução a medida que ocorre a redução da altura da seção. Sabe-se que o método dos elementos de contorno apresenta dificuldades na análise de domínios planos onde uma das dimensões do corpo seja substancialmente menor que a outra.

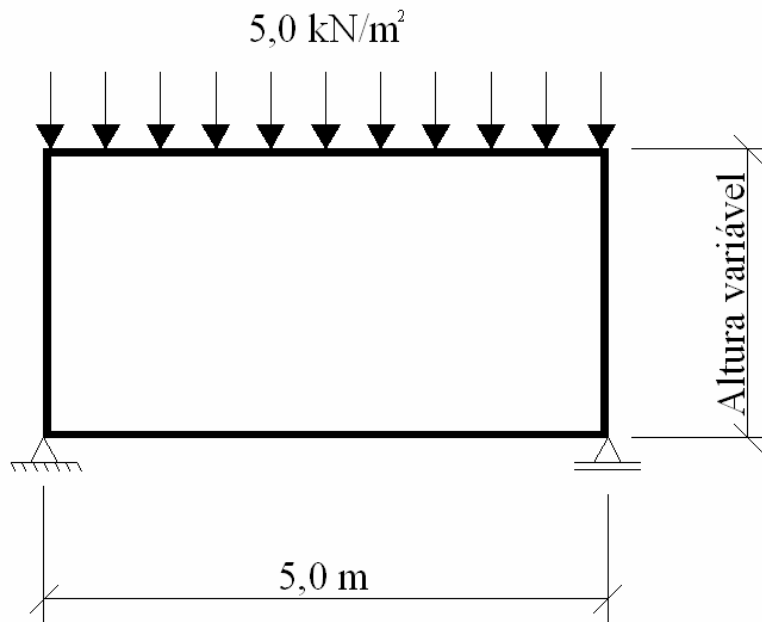


Figura 6.4 Viga biapoiada com carregamento uniformemente distribuído.

As propriedades dos materiais adotados no exemplo são:

$$E = 210 \cdot 10^6 \frac{kN}{m^2} \quad \nu = 0,30$$

A análise da viga se inicia com a altura sendo igual ao vão, ou seja, 5,0 metros. A partir daí a altura é reduzida gradativamente até que as formulações consideradas percam estabilidade numérica.

A formulação em deslocamento é aplicada considerando o ponto fonte localizado sobre o contorno. Já por meio da formulação em força de superfície o ponto fonte é considerado sobre o contorno e também localizado externamente ao domínio. A distância de afastamento neste último caso é de 1/10 do comprimento do menor elemento presente na discretização do contorno. Ainda em relação às análises por meio desta última formulação é considerada a utilização do processo de pré-condicionamento o qual foi utilizado com o objetivo de reduzir a singularidade no sistema matricial final. Esse processo é descrito com maiores detalhes no Anexo F.

O conjunto das análises realizadas pode ser condensado como apresenta a Fig. (6.5):

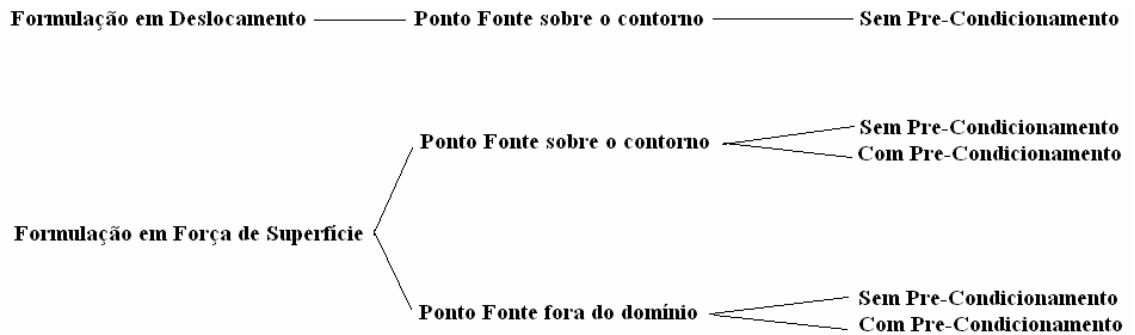


Figura 6.5 Resumo das análises realizadas neste exemplo.

Inicialmente serão discutidos os resultados obtidos para os deslocamentos verticais (flecha) no meio do vão por meio das formulações já descritas. Na Fig. (6.6) é apresentado o diagrama comparativo sendo que no eixo das ordenadas considera-se o deslocamento obtido pelas variações da formulação em força de superfície considerada dividida pelo resultado apresentado pela formulação em deslocamento.

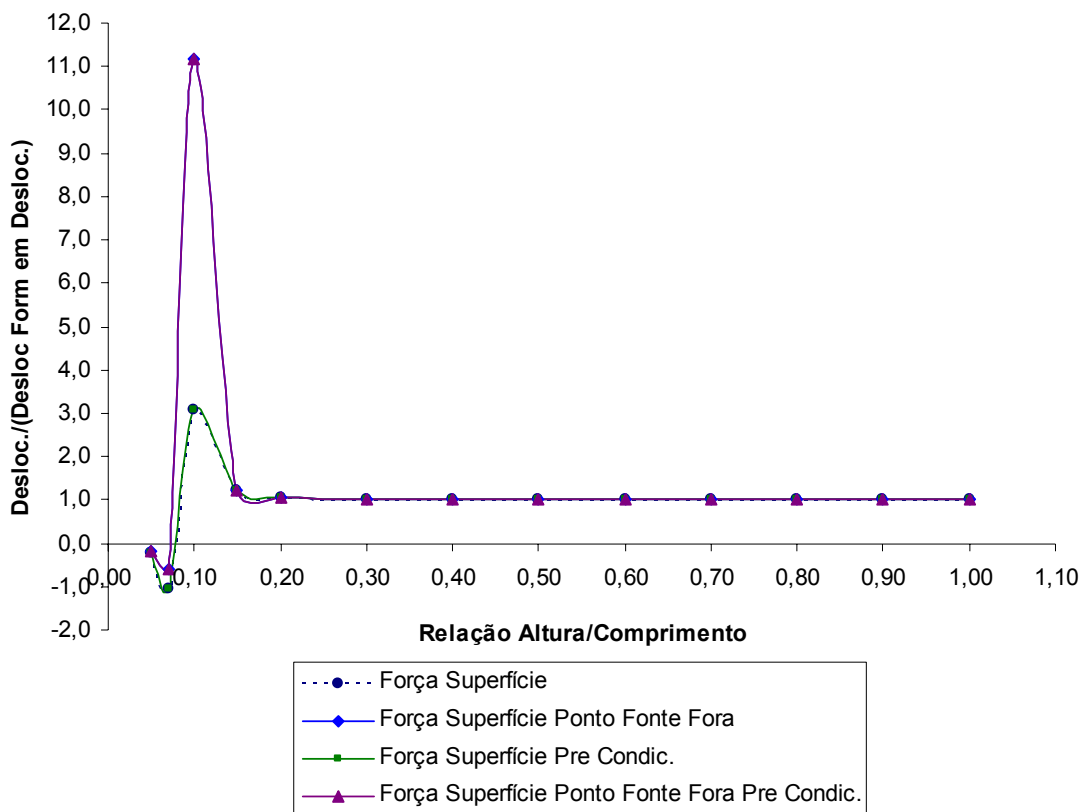


Figura 6.6 Diagrama deslocamento vertical x relação altura/comprimento para o meio do vão.

Inicialmente pode-se perceber que os resultados para todas as formulações empregadas são muito semelhantes para grande parte do intervalo de variação considerado. Consta-se que a partir do instante em que a relação altura/comprimento do vão atinge o valor igual a 0,15 os valores dos deslocamentos começam a divergir. Verifica-se também que a presença do pré-condicionamento não alterou o resultado final. Esse comportamento pode ser atribuído ao fato da matriz resultante do processo de troca de colunas entre as matrizes H e G não ser diagonalmente dominante.

Outra grandeza analisada foi a tensão principal de tração, σ_1 , atuante em um ponto no meio do vão e posicionado a uma distância igual a 10% da altura da viga em relação a face inferior da mesma. Na Fig. (6.7) encontram-se os resultados comparativos ressaltando que no eixo das ordenadas é considerada a tensão principal de tração fornecida pelos modelos que utilizam equação integral de força de superfície dividido pelo resultado obtido no modelo que emprega equação integral em deslocamento.

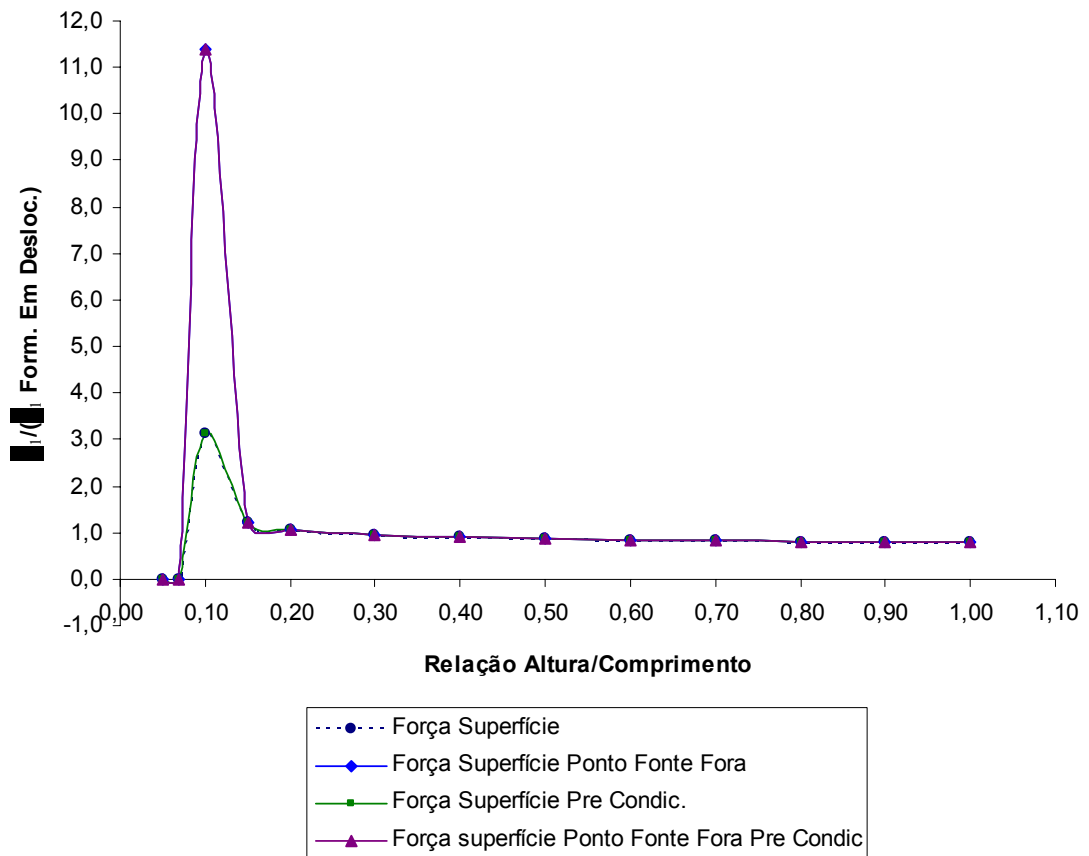


Figura 6.7 Diagrama tensão principal σ_1 x relação altura/comprimento.

O comportamento da tensão principal de tração é muito semelhante ao observado na análise da flecha discutido anteriormente. Este resultado é até previsível visto que as tensões são grandezas internas obtidas a partir dos valores calculados e

Capítulo 6 – Método dos Elementos de Contorno Formulação Hiper-Singular

prescritos no contorno. Verifica-se que até a relação altura/comprimento do vão igual a 0,15 os resultados das formulações empregadas são praticamente iguais, no entanto para valores inferiores a este os resultados apresentam divergência. A realização do procedimento de pré-condicionamento não alterou os resultados para a análise confirmando assim o fato de que o sistema matricial final é denso e não simétrico.

Ainda em relação a este exemplo foi analisado também o comportamento do número de condição do sistema matricial resultante. O número de condição reflete a instabilidade do sistema e pode ser consultado com maiores detalhes no Anexo F.

O número de condição deve ser analisado conjuntamente com o número de graus de liberdade do problema. Adota-se esse procedimento pelo fato do número de graus de liberdade refletir a ordem da dimensão das matrizes envolvidas no problema. Nas Fig. (6.8) e Fig. (6.9) encontram-se os resultados da evolução do número de condição com o número de graus de liberdade e também com a relação altura/comprimento do vão.

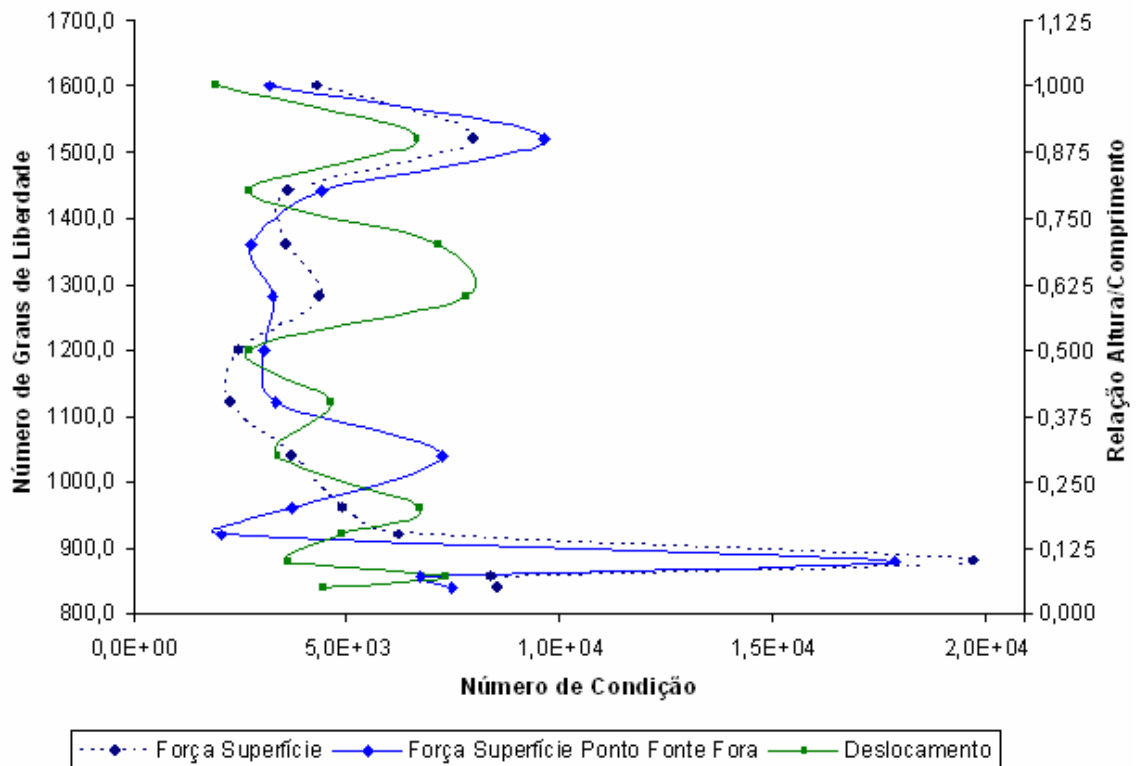


Figura 6.8 Análise do número de condição. Formulações sem pré-condicionamento.

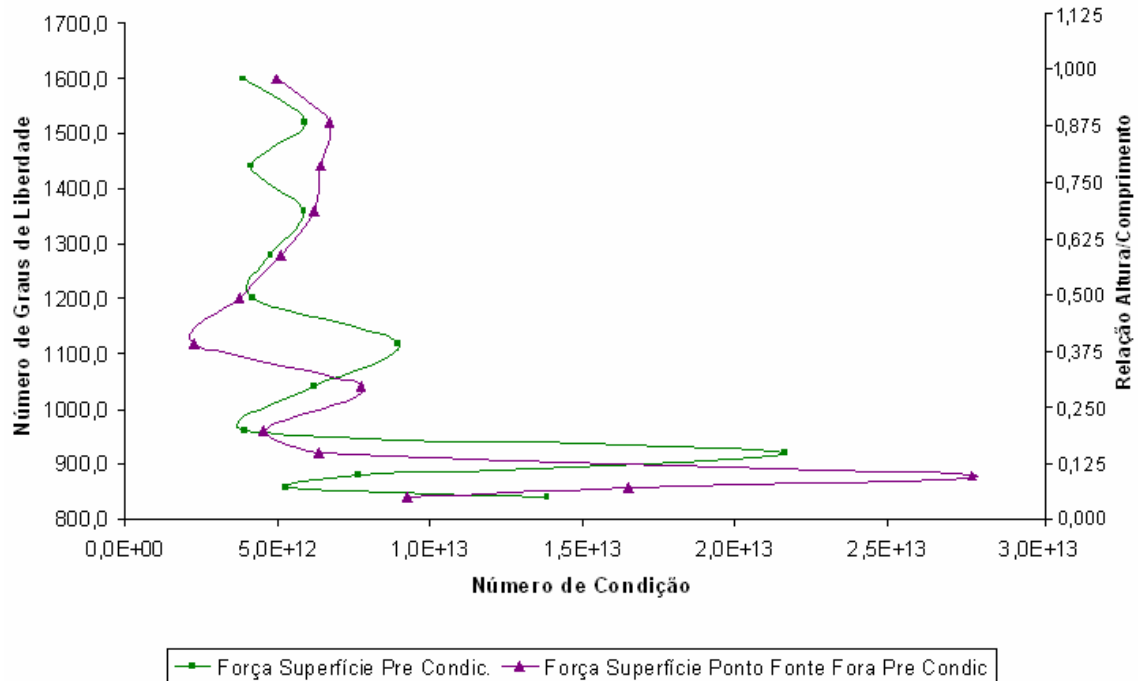


Figura 6.9 Análise do número de condição. Formulações com pré-condicionamento.

Analisando primeiramente o diagrama apresentado na Fig. (6.8) pode-se perceber que os modelos, em que foi empregada a formulação em força de superfície, apresentam uma forte elevação do número de condição quando a relação entre a altura/comprimento do vão alcança 0,10. Esse resultado é coerente com os deslocamentos e tensões principais já discutidos anteriormente os quais divergem quando a relação citada alcança valores inferiores a 0,15. Já a evolução do número de condição dos modelos que utilizam a formulação em deslocamentos é consideravelmente estável. Esse resultado é esperado já que as respostas por meio dessa formulação apresentaram-se estáveis para os intervalos analisados.

Considerando agora os resultados apresentados na Fig. (6.9) observa-se que por meio das formulações consideradas nestes modelos o número de condição é substancialmente superior aos dos modelos analisados e com os resultados ilustrados na Fig. (6.8). Esse resultado pode ser explicado em parte pela consideração do processo de pré-condicionamento. A matriz pré-condicionadora utilizada pode não ter sido adequada para o tipo de problema analisado. Isso ocorre porque a matriz decorrente do processo de troca das colunas entre as matrizes H e G é densa enquanto a matriz pré-condicionadora utilizada é uma matriz diagonal. Assim o pré-condicionamento acabou por tornar o sistema mais instável causando, portanto efeito contrário ao que se pretendia.

Apesar disso os resultados apresentados anteriormente podem ser justificados devido a forte influência do termo hiper-singular, constante na matriz H, sobre o sistema matricial final. De acordo com o modelo analisado existem apenas três graus de liberdade do modelo que são restritos sendo dois na direção vertical (y) e um na direção horizontal (x). Dessa forma a matriz resultante da troca de colunas entre as matrizes H e G será constituída apenas por três colunas da matriz G sendo as demais pertencentes a matriz H.

Conforme já citado anteriormente o método dos elementos de contorno, mesmo em sua formulação em deslocamentos, apresenta dificuldades quando da análise de domínios cuja geometria apresente uma dimensão consideravelmente menor que a outra (admitindo-se o caso plano). Quando é utilizada a formulação em força de superfície a maior singularidade presente acentua este efeito. Assim a partir do momento em que a relação altura/comprimento do vão atinge o valor de 0,15 os resultados começam a divergir. Para a formulação em deslocamentos, desde que sejam utilizados procedimentos de sub-elementação, resultados confiáveis podem ser alcançados para relações inferiores a 0,15.

7. - Considerações sobre a Implementação Computacional

Neste capítulo serão abordados tópicos importantes relacionados às implementações computacionais efetuadas. Serão discutidos os métodos de extração dos fatores de intensidade de tensão, as teorias de interação de modos de sollicitação ao fraturamento bem como a técnica utilizada para determinação da direção de propagação das fissuras. O procedimento de otimização de malha e o Pré-Processador desenvolvido serão também apresentados.

7.1 – Extração dos Fatores de Intensidade de Tensão

Inicialmente os métodos de extração dos fatores de intensidade de tensão são discutidos. Neste trabalho duas técnicas são utilizadas sendo que a primeira é a já consagrada técnica de correlação dos deslocamentos a qual foi empregada com sucesso em análises como nos trabalhos de BITTENCOURT et. al. (2003) e CARVALHO (1998). Outra técnica considerada é a baseada no estado de tensão a frente da extremidade da fissura utilizada por MACIEL (2003), inspirada no trabalho de PARIS & CAÑAS (1997), e aplicada com pequenas modificações no trabalho de PORTELA (2004).

7.1.1 - Técnica de Correlação de Deslocamentos

A determinação dos fatores de intensidade de tensão por meio da técnica de correlação de deslocamento é efetuada mediante o correlacionamento dos deslocamentos, determinados numericamente nos pontos nodais do elemento localizado na extremidade da fissura, com soluções analíticas.

Por meio das funções de tensão de WESTERGAARD (1939) é possível obter as equações que descrevem o campo de deslocamento na região próxima à extremidade da fissura as quais são apresentadas nas Eq. (7.1) e Eq. (7.2).

$$u = \frac{K_I}{2 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[(\kappa - 1) + 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{2 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[(\kappa + 1) + 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (7.1)$$

$$v = \frac{K_I}{2 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[(\kappa + 1) - 2 \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{2 \cdot \mu} \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[(\kappa - 1) + 2 \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (7.2)$$

em que:

κ é igual a $3 - 4 \cdot \nu$ se Estado Plano de Deformação e $\frac{3 - 4 \cdot \nu}{1 + \nu}$ Estado Plano de Tensão.

θ ângulo de inclinação do ponto considerado em relação a extremidade da fissura.

r distância do ponto considerado a extremidade da fissura.

u deslocamento paralelo as faces da fissura.

v deslocamento normal as faces da fissura.

A determinação das expressões para a avaliação dos fatores de intensidade de tensão é efetuada avaliando as Eq. (7.1) e Eq. (7.2) para ângulos iguais a π e $-\pi$, ou seja, nas faces da fissura conforme como ilustrado na Fig. (7.1).

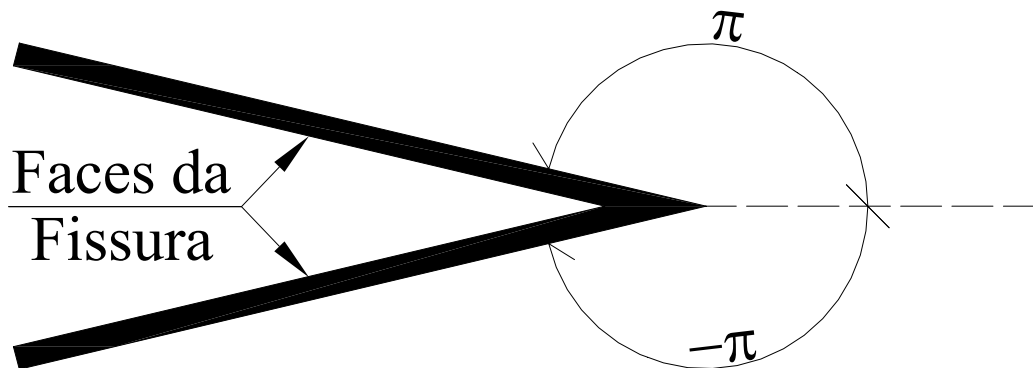


Figura 7.1 Avaliação das equações de deslocamentos nas faces da fissura

As expressões obtidas da avaliação das Eq. (7.1) e Eq. (7.2) para os ângulos iguais a π e $-\pi$ devem ser subtraídas de forma a obter equações que definam os fatores de intensidade de tensão em função da diferença entre os deslocamentos das faces da fissura. Efetuando esta operação são obtidas as Eq. (7.3) e Eq. (7.4) as quais referenciam os fatores de intensidade de tensão à diferença entre os deslocamentos paralelo e perpendicular ao plano da fissura.

$$K_I = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{r}} \cdot \frac{\mu}{(\kappa + 1)} \cdot COD \quad (7.3)$$

$$K_{II} = \sqrt{\frac{2 \cdot \pi}{r}} \cdot \frac{\mu}{(\kappa + 1)} \cdot CSD \quad (7.4)$$

sendo:

COD “Crack Open Displacement” diferença entre os deslocamentos perpendiculares ao plano da fissura.

CSD “Crack Sliding Displacement” diferença entre os deslocamentos paralelos ao plano da fissura.

A Fig. (7.2) ilustra mais claramente as formas de cálculo das diferenças entre os deslocamentos perpendiculares e paralelos ao plano da fissura.

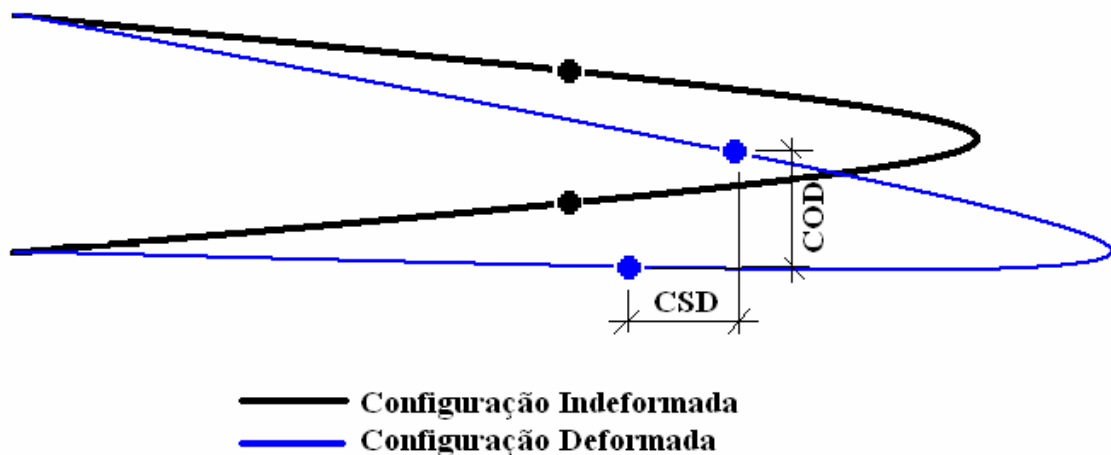


Figura 7.2 Determinação das diferenças entre os deslocamentos normais e paralelos ao plano da fissura.

Para a implementação computacional deste critério foram considerados os deslocamentos dos dois pares de pontos fontes pertencentes aos dois elementos localizados na extremidade da fissura como apresenta a Fig. (7.3).

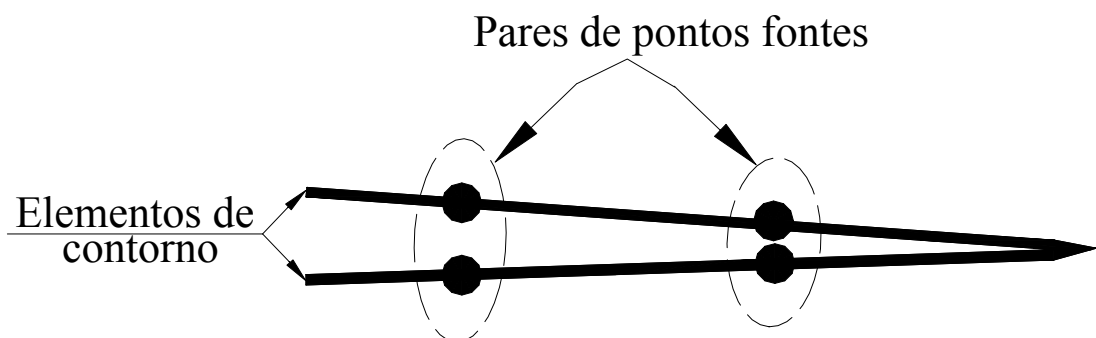


Figura 7.3 Localização dos pontos fontes para utilização na técnica de correlação de deslocamentos.

Os fatores de intensidade de tensão são calculados inicialmente com o primeiro par de pontos fontes, mais próximo à extremidade da fissura. Em seguida o cálculo é repetido considerando os pontos fontes localizados na extremidade do elemento mais distante da ponta da fissura.

Os fatores de intensidade de tensão para a fissura são considerados como sendo a média aritmética dos valores obtidos para os dois pares de pontos fontes dos elementos localizados na extremidade da fissura. Esse procedimento é preciso e fornece bons resultados como será apresentado mais adiante.

7.1.2 - Técnica Baseada no Estado de Tensão

Neste tópico é abordada a metodologia para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão proposta por MACIEL (2003). Esse processo é uma padronização da técnica proposta por PARIS & CAÑAS (1997) os quais sugerem que os fatores de intensidade de tensão podem ser obtidos a partir da geração de curvas de tensão, em função da distância à extremidade da fissura, para diversos pontos localizados a frente da ponta da fissura. Deve-se destacar que os pontos selecionados apresentam a mesma inclinação da fissura resultando, portanto $\theta = 0$. As expressões que relacionam o estado de tensão a distância referente a extremidade da fissura foram apresentadas no capítulo 4 recebendo a seguinte numeração Eq. (4.10), Eq. (4.11) e Eq. (4.12). Após a criação das curvas efetua-se o processo de linearização das mesmas, via operador logaritmo, e em seguida realiza-se uma regressão linear sendo o fator de intensidade de tensão determinado em função das variáveis resultantes da regressão. Esse procedimento é bastante custoso já que exige uma grande quantidade de pontos internos para o cálculo das tensões.

A metodologia utilizada neste trabalho consiste em escolher apenas três pontos para a realização da extração tornando assim o processo mais simples e rápido. De acordo com as análises realizadas por MACIEL (2003) os pontos ideais para a realização da extração são aqueles localizados a distância de $\frac{1}{8} \cdot a, \frac{1}{7} \cdot a, \frac{1}{6} \cdot a$, sendo a a metade do comprimento da fissura conforme apresenta a Fig. (7.4).

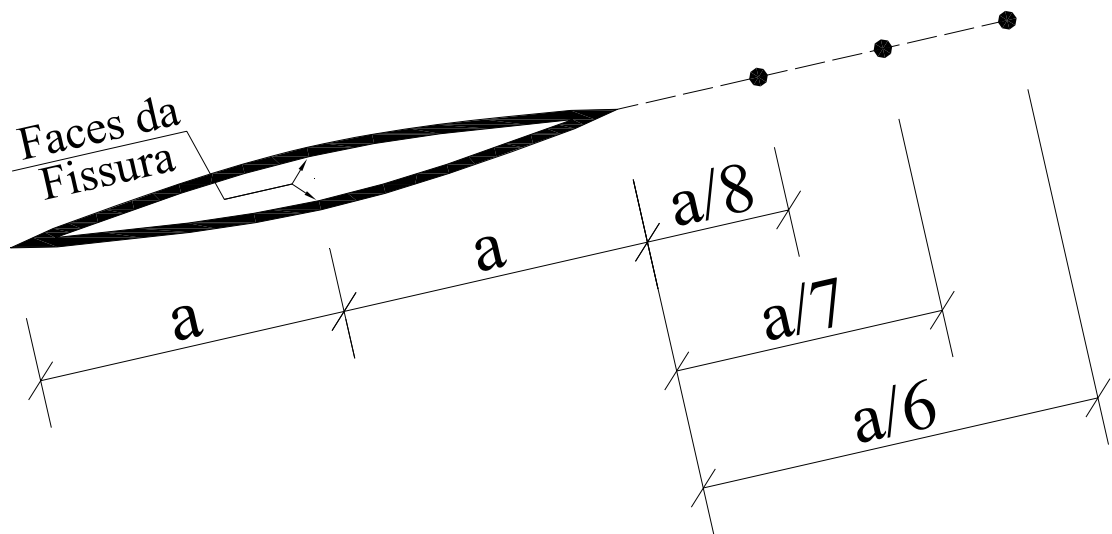


Figura 7.4 Localização dos pontos para extração dos fatores de intensidade de tensão.

Com o auxílio das Eq. (4.10), Eq. (4.11) e Eq. (4.12) os fatores de intensidade de tensão são determinados em cada um dos três pontos. Após a realização desse procedimento efetua-se a média aritmética dos valores obtidos nos três pontos resultando assim os fatores de intensidade de tensão para a fissura.

Este procedimento é muito semelhante a técnica de correlação de deslocamentos descrita no item anterior. A diferença é que nesse método utilizam-se expressões analíticas de tensão para a avaliação dos fatores de intensidade de tensão e não os deslocamentos como descrito no item 7.1.1.

7.1.3 – Comparativo entre as Técnicas para extração dos Fatores de Intensidade de Tensão

De forma a comparar as técnicas de extração dos fatores de intensidade de tensão utilizadas neste trabalho é analisado a seguir um exemplo. Trata-se de uma viga biapoiada com uma carga concentrada no centro do vão apresentando ainda uma fissura localizada em seu centro conforme ilustra a Fig. (7.5).

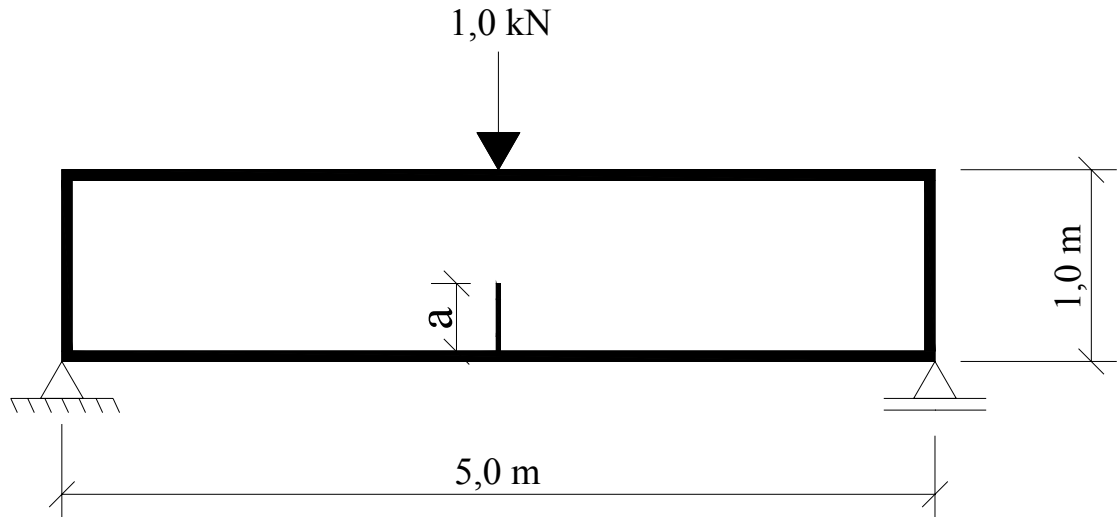


Figura 7.5 Geometria e carregamentos para análise dos fatores de intensidade de tensão.

Os dados utilizados como parâmetros da fissura e do material foram:

$$E = 210 \cdot 10^6 \frac{kN}{m^2} \quad \nu = 0,20 \quad a = 0,275 m$$

A solução analítica para o problema em questão é apresentada em BROEK (1986) sendo é igual a:

$$K_I = \frac{P_v \cdot S_v}{B_v \cdot W_v^{3/2}} \cdot \frac{3 \cdot \left(\frac{a}{W_v}\right)^{1/2} \cdot \left[1,99 - \frac{a}{W_v} \cdot \left(1 - \frac{a}{W_v}\right) \cdot \left(2,15 - 3,93 \cdot \left(\frac{a}{W_v}\right) + 2,7 \cdot \left(\frac{a}{W_v}\right)^2 \right) \right]}{2 \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{a}{W_v}\right) \cdot \left(1 - \frac{a}{W_v}\right)^{3/2}} \quad (7.5)$$

em que:

S_v vão da viga

W_v altura da viga

a extensão da fissura

B_v espessura do corpo

P_v valor da carga concentrada

No exemplo em questão é solicitado somente o modo I de fraturamento. Assim a resposta analítica para o fator de intensidade de tensão no modo dois deve ser nula.

Para a comparação dos fatores de intensidade de tensão as duas formulações em elementos de contorno utilizadas nesse trabalho, formulação singular e dual, são

empregadas. Para o exemplo em questão o afastamento entre as faces da fissura considerado é de 0,001 m para a utilização da formulação singular.

Nas tabelas a seguir encontram-se os resultados referentes as respostas obtidas para a estrutura.

Tabela 7.1 Comparação dos fatores de intensidade de tensão para o modo I.

Número de Elementos na Discretização da Fissura	Formulação Dual		Formulação Singular		Resultado Analítico
	Técnica de Correlação de Deslocamentos	Metodologia MACIEL	Técnica de Correlação de Deslocamentos	Metodologia MACIEL	
8	7,20234	7,34373	7,58523	7,78646	7,13620
10	7,18487	7,16234	7,56841	7,71810	
12	7,13221	6,99795	7,52266	7,67350	

Tabela 7.2 Comparação dos fatores de intensidade de tensão para o modo II.

Número de Elementos na Discretização da Fissura	Formulação Dual		Formulação Singular		Resultado Analítico
	Técnica de Correlação de Deslocamentos	Metodologia MACIEL	Técnica de Correlação de Deslocamentos	Metodologia MACIEL	
8	0,01694	0,02026	0,42836	0,66918	0,00000
10	0,01639	0,01886	0,40237	0,67778	
12	0,01710	0,01942	0,39810	0,67889	

Conforme apresentam os resultados das Tab. (7.1) e Tab. (7.2) pode-se verificar que por meio de ambas as formulações empregadas os resultados obtidos podem ser considerados como satisfatórios. Considerando inicialmente os resultados para o fator de intensidade de tensão no modo I percebe-se que com o aumento da discretização as respostas numéricas tendem às respostas analíticas.

Por meio da formulação dual constata-se que os resultados são muito próximos aos previstos analiticamente mesmo com o emprego de uma discretização não muito refinada nas faces da fissura. Através desta formulação, a técnica de correlação de deslocamentos apresentou as melhores respostas sendo a diferença encontrada, em relação ao modelo analítico, de 0,05% considerando a maior discretização empregada. Já via formulação singular os resultados encontrados não são tão precisos quanto os obtidos pela formulação dual, no entanto podem ser considerados como satisfatórios. Considerando a técnica de correlação de deslocamentos, a qual forneceu os melhores resultados, a diferença encontrada é de 5,4%. Apesar de a diferença encontrada ser consideravelmente superior à observada utilizando-se a formulação dual este resultado pode ser encarado como bom. Isso ocorre pelo fato de, na formulação singular, a fissura ser considerada como um vazio no domínio do problema sendo as extremidades da fissura unidas por um elemento de pequeno comprimento. Assim a geometria da fissura

não é corretamente descrita levando a valores maiores para o fator de intensidade de tensão.

Em relação aos fatores de intensidade de tensão solicitados no modo II percebe-se que por meio da utilização do método dual os resultados são mais precisos que os obtidos via formulação singular. Este comportamento acompanha a tendência dos resultados apresentados para o modo de solitação I sendo a explicação para tal já descrita no parágrafo anterior. Por meio da formulação dual os erros encontrados são de 1,7%, para a técnica de correlação de deslocamentos, e de 1,9% para a metodologia proposta por MACIEL (2003). Já na formulação singular esse erro aumenta sendo igual a 4%, com a técnica de correlação de deslocamentos, e de 6,8% para a metodologia de MACIEL (2003).

7.2 – Teorias de Interação de Modos de Solitação ao Fraturamento

O processo de fratura provoca no corpo em análise uma progressiva perda de rigidez a qual em casos extremos chega à ruína em virtude do crescimento e coalescência das fissuras. Por meio do estudo da mecânica da fratura é possível a definição de critérios de forma a se conseguir determinar a direção de propagação da fissura assim como a carga crítica de fraturamento.

Muitos são os critérios propostos para tal objetivo dentre os quais podem ser destacados os critérios da máxima tensão circunferencial, máxima taxa de liberação de energia (critério G) e mínima densidade de energia de deformação (critério S). É possível ainda definir um critério baseado no estado de tensão à frente da fissura o qual é concebido a partir de trabalhos empíricos.

Neste trabalho os quatro critérios acima citados foram considerados na implementação computacional. A seguir será efetuada uma breve descrição destes critérios sendo que maiores detalhes sobre o assunto poderão ser consultados em livros referências como BROEK (1986) e MI (1996).

7.2.1 - Critério da Máxima Tensão Circunferencial

O critério da máxima tensão circunferencial foi proposto por ERDOGAN e SIH (1963) e define que a fissura irá crescer perpendicularmente à direção de atuação da máxima tensão circunferencial presente na extremidade da fissura.

Para a determinação da formulação para o cálculo do ângulo de propagação é necessária, inicialmente, a obtenção das relações que exprimem o estado de tensão na região próxima a extremidade da fissura. Considerando o sistema de coordenadas como apresentado na Fig. (7.6) e empregando as funções de tensão de WESTERGAARD (1939) é possível determinar estas expressões as quais podem ser escritas como:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[K_I \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} \cdot K_{II} \cdot \text{sen}(\theta) \right] \quad (7.6)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[K_I \cdot \text{sen}(\theta) + K_{II} \cdot (3 \cdot \cos(\theta) - 1) \right] \quad (7.7)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot r}} \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[K_I \cdot \left(1 + \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) + \frac{3}{2} \cdot K_{II} \cdot \text{sen}(\theta) - 2 \cdot K_{II} \cdot \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (7.8)$$

sendo:

$\sigma_{\theta\theta}$ Tensão Circunferencial.

σ_{rr} Tensão Radial.

$\tau_{r\theta}$ Tensão Cisalhante.

K_I fator de intensidade de tensão para o modo I de fraturamento.

K_{II} fator de intensidade de tensão para o modo II de fraturamento.

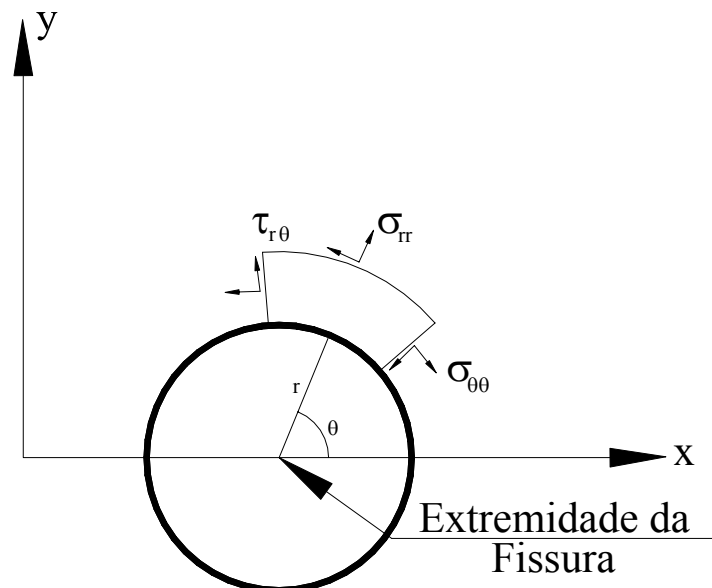


Figura 7.6 Sistema de coordenadas para a determinação das expressões de tensão na ponta da fissura.

Para a determinação do ângulo de propagação a tensão circunferencial, $\sigma_{\theta\theta}$, deve ser máxima e conseqüentemente uma tensão principal. De acordo com os conceitos da Mecânica dos Sólidos para que essa situação ocorra a tensão de cisalhamento deve ser nula. Assim para determinar a direção de propagação da fissura, θ_p , deve-se fazer $\tau_{r\theta} = 0$. Por meio dessa condição é possível obter:

$$K_I \cdot \text{sen}(\theta_p) + K_{II} \cdot (3 \cdot \cos(\theta_p) - 1) = 0 \quad (7.9)$$

Empregando relações trigonométricas é possível reescrever a relação acima como:

$$\tan\left(\frac{\theta_p}{2}\right) = \frac{1}{4} \left[\frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}}\right)^2 + 8} \right] \quad (7.10)$$

Por meio da resolução da Eq. (7.10) são obtidos dois ângulos sendo que o ângulo a ser considerado como o de propagação é aquele que maximiza o valor da tensão circunferencial, Eq. (7.6).

Esta teoria também prevê a determinação do valor da tenacidade ao fraturamento calculada numericamente. Na literatura, MI (1996) e BITTENCOURT et. al (2003), essa grandeza é também denominada de fator de intensidade de tensão efetivo ou equivalente e para a sua determinação deve-se reescrever a Eq.(7.6) de forma mais conveniente. Assim:

$$\sigma_{\theta\theta} \cdot \sqrt{2 \cdot \pi \cdot r} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \left[K_I \cdot \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} \cdot K_{II} \cdot \text{sen}(\theta) \right] \quad (7.11)$$

Comparando o primeiro membro da Eq. (7.11) com a Eq. (4.7) apresentada no capítulo 4 é possível verificar que esse membro é equivalente ao fator de intensidade de tensão. Dessa forma pode-se definir o fator de intensidade de tensão equivalente, o qual deverá ser comparado à tenacidade ao fraturamento do material para a verificação da estabilidade à propagação da fissura, por meio da seguinte relação:

$$K_{Eq} = K_I \cos^3\left(\frac{\theta_p}{2}\right) - 3 \cdot K_{II} \cdot \cos^2\left(\frac{\theta_p}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta_p}{2}\right) \quad (7.12)$$

A denominação fator de intensidade de tensão equivalente é atribuída por ser essa variável uma combinação dos fatores de intensidade de tensão para os modos I e II.

7.2.2 - Critério da Máxima Taxa de Liberação de Energia Potencial

O critério da máxima taxa de liberação de energia potencial se baseia na energia potencial que é liberada durante o processo de fraturamento. Para propagações colineares (que não mudam de direção) em regime elástico linear, a taxa de liberação de energia é igual a soma das energias liberadas para os modos de fraturamento I e II.

$$G = G_I + G_{II} \quad (7.13)$$

sendo:

G_I a taxa de liberação de energia para modo I puro.

G_{II} a taxa de liberação de energia para modo II puro.

Da teoria da mecânica do fraturamento a taxa de liberação de energia potencial está relacionada aos fatores de intensidade de tensão por meio das seguintes relações:

$$G_I = \frac{\kappa + 1}{8 \cdot \mu} \cdot K_I^2 \quad (7.14)$$

$$G_{II} = \frac{\kappa + 1}{8 \cdot \mu} \cdot K_{II}^2 \quad (7.15)$$

No entanto nem sempre a propagação das fissuras ocorre de forma colinear, como no fraturamento em modo misto. Nessa situação, a propagação da fissura ocorre em uma direção arbitrária. No trabalho de HUSSAIN, PU & UNDERWOOD (1974) foi sugerido que o crescimento da fissura ocorra na direção que provoca a máxima taxa de liberação de energia de fraturamento. Para isso esses autores estabeleceram uma equação, utilizando uma função de mapeamento com variáveis complexas, onde θ define uma direção radial com respeito à ponta da fissura corrente. Utilizando a técnica proposta, HUSSAIN PU & UNDERWOOD (1974) chega-se à seguinte expressão:

$$G(\theta) = \frac{4}{E} \cdot \left(\frac{1}{3 + \cos^2(\theta)} \right)^2 \cdot \left(\frac{1 - \theta/\pi}{1 + \theta/\pi} \right)^{\theta/\pi} \cdot \left[(1 + 3 \cdot \cos^2(\theta)) \cdot \bar{K}_I^2 + \right. \\ \left. + 8 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \cdot \bar{K}_I \cdot \bar{K}_{II} + (9 - 5 \cdot \cos^2(\theta)) \cdot \bar{K}_{II}^2 \right] \quad (7.16)$$

Dessa forma o ângulo de propagação é obtido a partir da maximização da variável $G(\theta)$ na Eq. (7.16). Assim como a taxa de liberação de energia, nesta

expressão os fatores de intensidade de tensões \bar{K}_I e \bar{K}_{II} também foram definidos como funções de θ , conforme as equações a seguir.

$$\bar{K}_I = \left(\frac{4}{3 + \cos^2(\theta)} \right)^2 \cdot \left(\frac{1 - \theta/\pi}{1 + \theta/\pi} \right)^{\theta/2\pi} \cdot \left[K_I \cdot \cos(\theta) + \frac{3}{2} \cdot K_{II} \cdot \sin(\theta) \right] \quad (7.17)$$

$$\bar{K}_{II} = \left(\frac{4}{3 + \cos^2(\theta)} \right)^2 \cdot \left(\frac{1 - \theta/\pi}{1 + \theta/\pi} \right)^{\theta/2\pi} \cdot \left[K_{II} \cdot \cos(\theta) - \frac{1}{2} \cdot K_I \cdot \sin(\theta) \right] \quad (7.18)$$

Além desse critério prever que a fissura propaga na direção de máxima taxa de liberação de energia potencial verifica-se também que a condição de estabilidade para o crescimento é dada pela seguinte relação:

$$G(\theta) = \frac{\kappa + 1}{8 \cdot \mu} \cdot K_{EQ}^2 \quad (7.19)$$

Assim a Eq. (7.19) representa a expressão para o cálculo do fator de intensidade de tensão equivalente que será comparado à tenacidade ao fraturamento para verificação da condição de estabilidade ao crescimento da fissura.

7.2.3 - Critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação

Neste critério, proposto por SIH (1974), a direção da propagação da fissura é determinada pelo valor da densidade de energia de deformação, S , nas proximidades da fissura. A energia de deformação é definida como a energia armazenada no sistema devido a mudanças no estado de deformação. Para corpos elásticos lineares essa energia pode ser escrita como:

$$Energia\ Deformação = \int_V \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dV \quad (7.20)$$

A densidade de energia de deformação, portanto pode ser definida como:

$$\frac{d}{dV} (Energia\ Deformação) = \frac{d}{dV} \left(\int_V \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} dV \right) = \frac{1}{2} \cdot \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij} \quad (7.21)$$

Utilizando a Lei de Hooke generalizada, Eq. (3.5), juntamente com as equações que relacionam os fatores de intensidade de tensão às tensões na extremidade da fissura, Eq. (4.10), Eq. (4.11) e Eq. (4.12), é possível obter a expressão para a determinação da densidade de energia a qual é apresentada na Eq. (7.22).

$$S(\theta) = a_{11} \cdot K_I^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot K_I \cdot K_{II} + a_{22} \cdot K_{II}^2 \quad (7.22)$$

Nessa expressão os termos a_{ij} são dados por:

$$a_{11} = \frac{1}{16 \cdot \mu} [(1 + \cos(\theta)) \cdot (\kappa - \cos(\theta))] \quad (7.23)$$

$$a_{12} = \frac{1}{16 \cdot \mu} \cdot \sin(\theta) \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - (\kappa - 1)] \quad (7.24)$$

$$a_{22} = \frac{1}{16 \cdot \mu} \cdot [(\kappa + 1) \cdot (1 - \cos(\theta)) + (1 + \cos(\theta)) \cdot (3 \cdot \cos(\theta) - 1)] \quad (7.25)$$

Assim o ângulo de propagação é aquele que minimiza o termo $S(\theta)$ apresentado na Eq. (7.22).

Por meio desse critério define-se que a fissura irá propagar na direção em que a densidade de energia de deformação for mínima. Além disso, a estabilidade para o crescimento das fissuras é efetuada por meio da seguinte relação:

$$S_{cr} = \frac{\kappa - 1}{8 \cdot \pi \cdot \mu} \cdot K_{IC}^2 \quad (7.26)$$

Nesse critério verifica-se que a fissura irá propagar quando a densidade de energia de deformação atingir um valor crítico S_{cr} . Esse valor é relacionado a tenacidade ao fraturamento por meio da Eq. (7.26).

7.2.4 - Curvas de Interação

As três teorias de interação de modos de sollicitação ao fraturamento descritas para a determinação da direção de propagação das fissuras podem ser representadas através de curvas de interação. O lugar geométrico da fratura em modo combinado para os três critérios pode ser visualizado na Fig. (7.7). De acordo com os critérios, uma

fissura irá propagar quando os fatores de intensidade de tensão para os modos I e II atingirem valores que ultrapassem as respectivas curvas de interação.

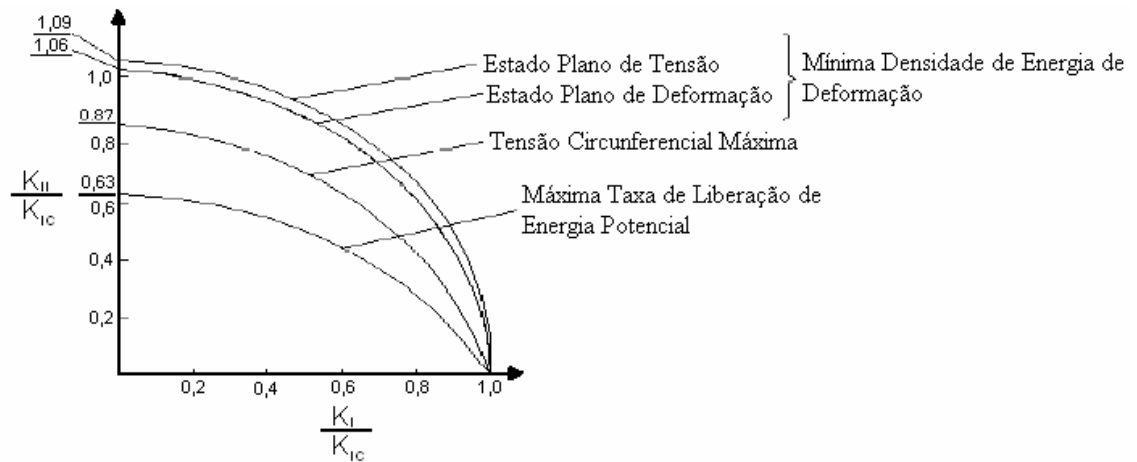


Figura 7.7 Diagrama de interação de modos. Situação de ruptura. BITTENCOURT et. al. (2003).

7.2.5 - Critério baseado em tensão

O critério aqui descrito parte de uma adaptação do critério proposto por TANAKA (1974). Este critério pode ser utilizado quando o método de extração dos fatores de intensidade de tensão é baseado na técnica proposta por MACIEL (2003). Por meio desta técnica o estado de tensão no corpo é avaliado em pontos localizados a frente da extremidade da fissura. Através desse critério admite-se que a fissura irá propagar na direção perpendicular a direção de atuação da máxima tensão principal de tração, σ_1 . Para a avaliação do ângulo de propagação é utilizada a seguinte relação:

$$\tan(2 \cdot \theta_p) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (7.27)$$

Para a determinação do ângulo, θ_p , por meio da expressão acima é utilizada a média aritmética dos valores de tensões avaliados nos pontos de extração. O ângulo de atuação da máxima tensão principal de tração é aquele que maximiza a Eq. (7.28).

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2 \cdot \theta) + \tau_{xy} \cdot \sin(2 \cdot \theta) \quad (7.28)$$

A esse ângulo é adicionado 90° e assim tem-se o ângulo de propagação.

O valor do fator de intensidade de tensão equivalente é obtido empregando a relação proposta por TANAKA (1974) o qual efetua processo semelhante, no entanto as grandezas avaliadas à frente da extremidade da fissura são os deslocamentos. O fator de intensidade de tensão equivalente é dado por:

$$K_{Eq} = \sqrt[4]{K_I^4 + 8 \cdot K_{II}^4} \quad (7.29)$$

7.3 – Gerador de Fissuras Iniciais

Para a análise do comportamento de fissuras em domínios bidimensionais é necessária, inicialmente, a correta definição dos parâmetros geométricos da fissura assim como de sua localização. No código computacional desenvolvido neste trabalho a geração das fissuras iniciais no domínio do problema pode ser efetuada por meio de dois diferentes caminhos.

O primeiro deles refere-se a prescrição das propriedades geométricas da fissura pelo usuário do programa. Dessa forma o usuário deverá informar o número de fissuras considerado na análise, as coordenadas cartesianas do centro da fissura bem como seu comprimento e ângulo de inclinação em relação ao sistema de coordenadas adotado.

Outra opção de criação das fissuras é via geração aleatória dentro do domínio a ser analisado. Para tal foi utilizada uma biblioteca interna do FORTRAN 6.0 específica para geração de números aleatórios. São geradas aleatoriamente as coordenadas do centro da fissura assim como seu comprimento e ângulo de inclinação em relação sistema de eixos cartesianos considerado.

Deve-se ressaltar que as duas metodologias de criação de fissuras podem ser utilizadas conjuntamente, permitindo ao usuário prescrever uma parte das fissuras presentes na análise sendo o programa responsável pela geração das propriedades das demais fissuras de forma aleatória.

Após a criação das fissuras testes são efetuados para a eliminação de fissuras que inicialmente dividam o domínio analisado em duas ou mais partes. Nestes testes são consideradas fissuras isoladas e também fissuras que interceptam outras fissuras internas ao domínio e que cuja configuração de conexão caracteriza a divisão do domínio analisado. Após a criação das fissuras é efetuada a discretização das mesmas.

7.4 – Metodologia para Crescimento das Fissuras

O programa computacional desenvolvido neste trabalho tem como objetivo a análise de corpos sujeitos a presença de múltiplas fissuras em seu domínio. Assim torna-se necessária a correta avaliação do comportamento das fissuras bem como do seu processo de crescimento.

Para a correta definição do comprimento e ângulo para a propagação é efetuado um procedimento com o objetivo de minimizar os erros provenientes desta etapa. Inicialmente o crescimento das múltiplas fissuras é efetuado considerando o valor do fator de intensidade de tensão equivalente presente em cada uma. Admite-se que o crescimento de cada fissura é linearmente proporcional ao fator de intensidade de tensão equivalente. Assim, a fissura que apresentar o maior fator de intensidade de tensão equivalente terá seu comprimento acrescido por um valor pré-definido na análise enquanto as demais fissuras apresentarão comprimento na propagação linearmente proporcional ao comprimento de propagação pré-definido na análise de acordo com o fator de intensidade de tensão equivalente atuante.

Definidos os comprimentos iniciais de propagação deve-se então determinar o ângulo de propagação. Para a correta definição dessa grandeza propõe-se aqui uma metodologia a qual pode ser executada em duas etapas. Na primeira, conforme ilustra a Fig. (7.8), o comprimento de propagação da fissura é igual ao determinado inicialmente sendo proporcional ao fator de intensidade de tensão equivalente atuante. Após a criação dos nós e elementos da fissura é calculada a direção da propagação do próximo tramo da fissura considerando uma das teorias de interação de modos já descrita.

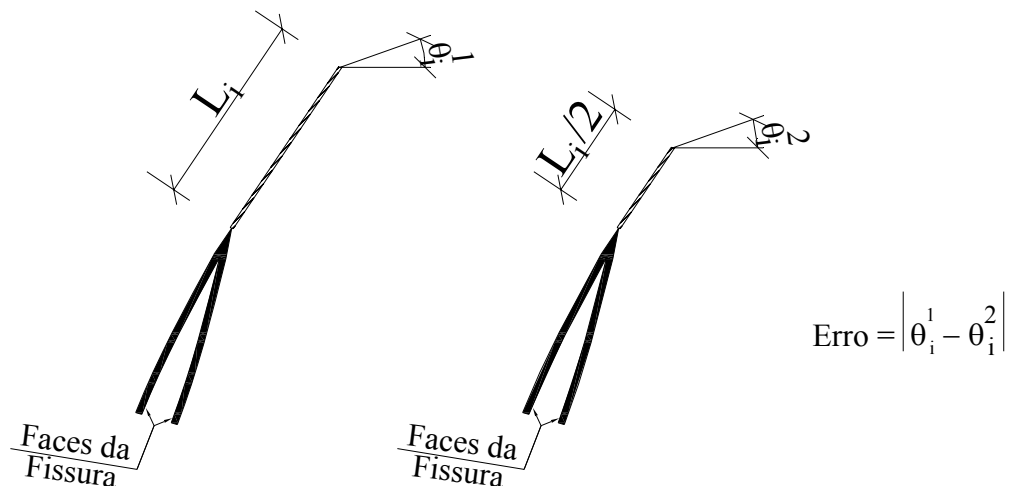


Figura 7.8 Procedimentos para a realização da primeira iteração para o cálculo do ângulo de propagação.

Na segunda etapa o procedimento é repetido, no entanto o comprimento do tramo de propagação da fissura é igual a metade do comprimento considerado na etapa anterior. Compara-se o ângulo de propagação obtido na primeira etapa com o ângulo de propagação fornecido na segunda etapa. Se a diferença entre eles encontrar-se dentro de uma tolerância pré-estabelecida na análise o tramo empregado na primeira etapa é criado e o fator de intensidade de tensão equivalente é novamente calculado.

Caso contrário o processo é repetido, efetuando-se uma nova iteração, considerando como comprimento de propagação da primeira etapa o comprimento do tramo de propagação da segunda etapa da iteração anterior conforme ilustra a Fig. (7.9).

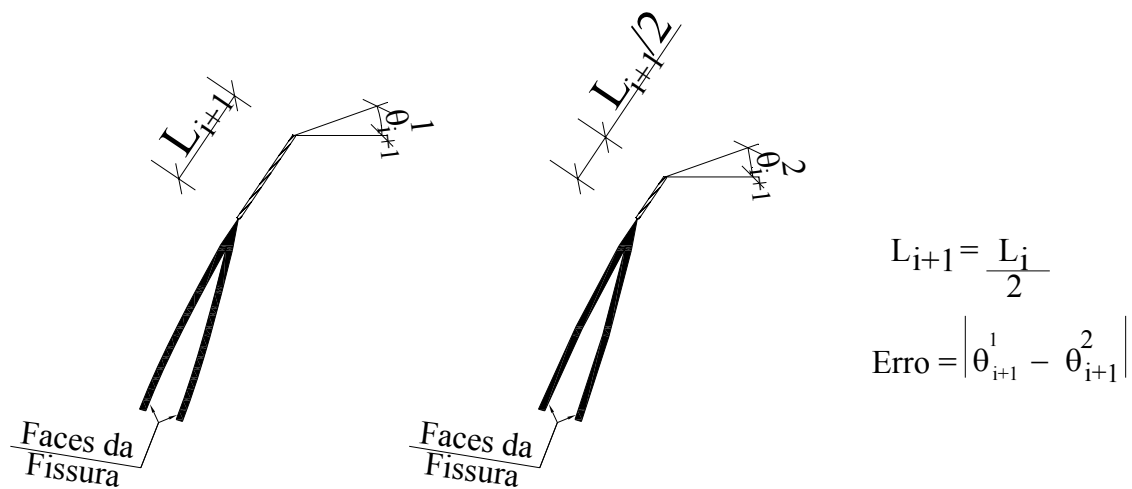


Figura 7.9 Procedimentos para a realização da segunda iteração para o cálculo do ângulo de propagação.

Este procedimento é robusto e estável levando a resultados muito precisos conforme será apresentado no capítulo seguinte.

7.5 – Otimização da Malha de Elementos de Contorno

Foi desenvolvido também um algoritmo com o objetivo de otimizar a malha de elementos de contorno existente na discretização. Este algoritmo reduz o número de elementos utilizados na discretização das faces das fissuras já distantes da ponta da mesma. Dessa forma a discretização é mais refinada na região próxima a extremidade da fissura, ou seja, onde grandes concentrações de tensões e deformações estão presentes.

O procedimento de atuação deste algoritmo é simples e pode ser acompanhado com o auxílio da Fig. (7.10). Primeiramente, a fissura inicial presente no domínio do problema é discretizada utilizando elementos com comprimento máximo igual ao pré-especificado na análise. Durante o processo de propagação da fissura a determinação do comprimento do crescimento da fissura bem como do seu ângulo de inclinação são efetuados segundo os procedimentos descritos na seção 7.4. Durante este processo a discretização do tramo que será acrescido à fissura também é efetuada observando-se o comprimento máximo de elemento pré-especificado na análise. Após determinado o comprimento e ângulo de propagação a discretização do trecho anterior é eliminada sendo este tramo representado somente por dois elementos de contorno cada um em uma face da fissura.

Este processo é repetido sendo otimizada a discretização dos tramos distantes da extremidade da fissura. Por fim apenas os dois tramos mais próximos à ponta da fissura apresentam discretização conforme especificado pelo usuário, o último convergido e o trecho em que é efetuado o processo descrito na seção 7.4.

A grande vantagem deste procedimento é a utilização da discretização refinada somente onde necessário. Neste trabalho todos os exemplos empregam esse procedimento de otimização de malha. Testes preliminares mostraram que os resultados obtidos com o procedimento de otimização são iguais aos verificados sem este processo. Assim esta ferramenta reduz o tempo de processamento levando a resultados também confiáveis.

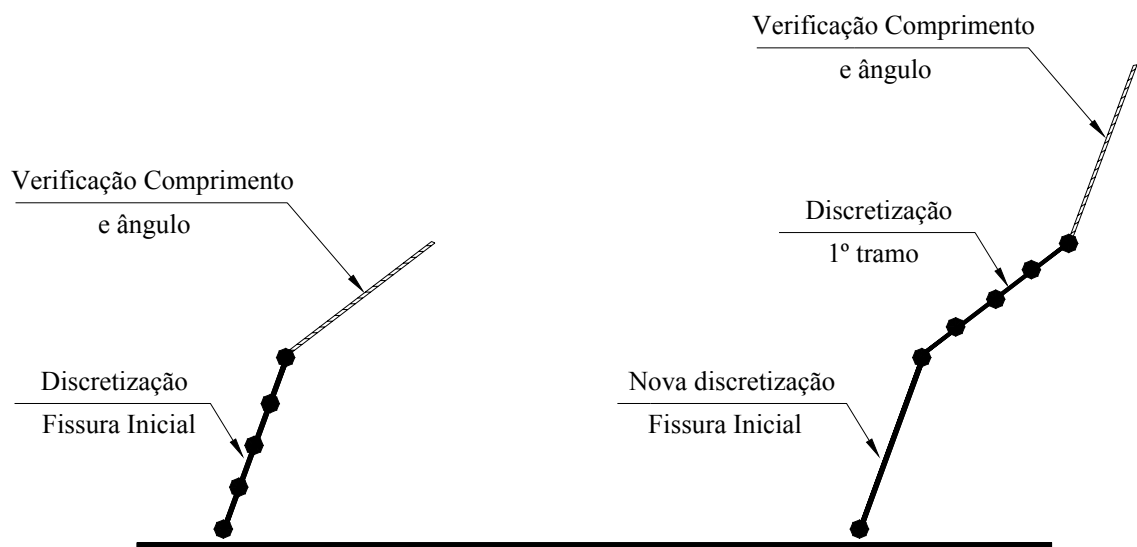


Figura 7.10 Procedimentos para otimização de malha.

7.6 – Pré-Processador

De forma a tornar mais ágil a modelagem dos problemas a serem analisados foi desenvolvido um pré-processador para os dois programas de resolução criados (baseados no modelo dual e na equação integral de deslocamentos). Este programa tem como objetivo gerar o arquivo de entrada de dados para os dois programas citados.

A linguagem computacional escolhida para o desenvolvimento do pré-processador foi o Visual Fortran, a mesma linguagem que foi empregada na criação dos programas de resolução. Nas figuras a seguir serão apresentadas algumas janelas principais para a construção dos modelos.



Figura 7.11 Janela inicial. Abertura do programa.

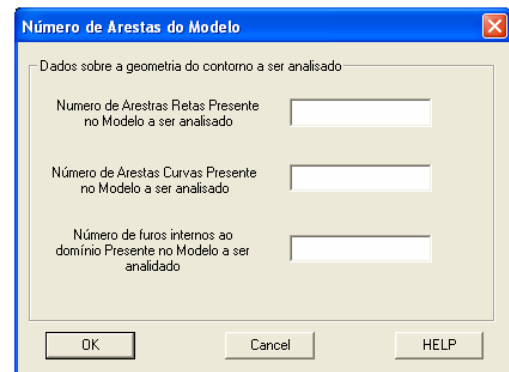


Figura 7.12 Criação da geometria do corpo.

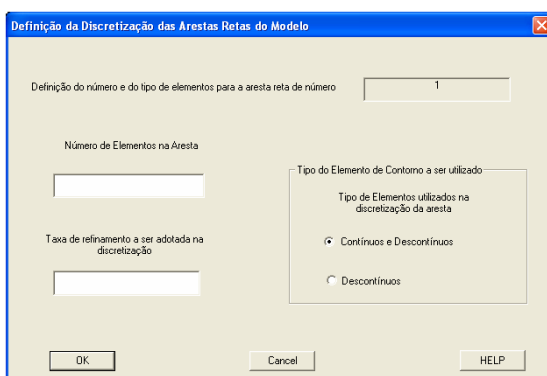


Figura 7.13 Definição da discretização

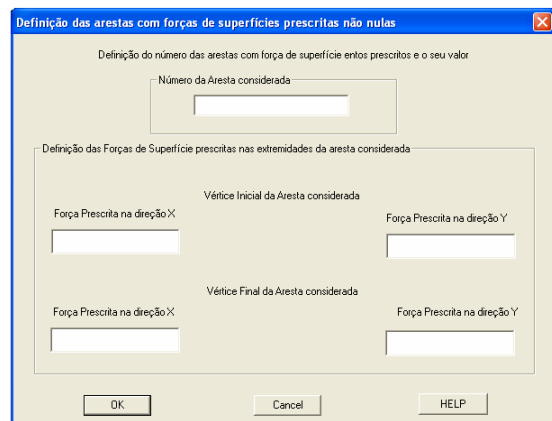


Figura 7.14 Definição das condições de contorno.

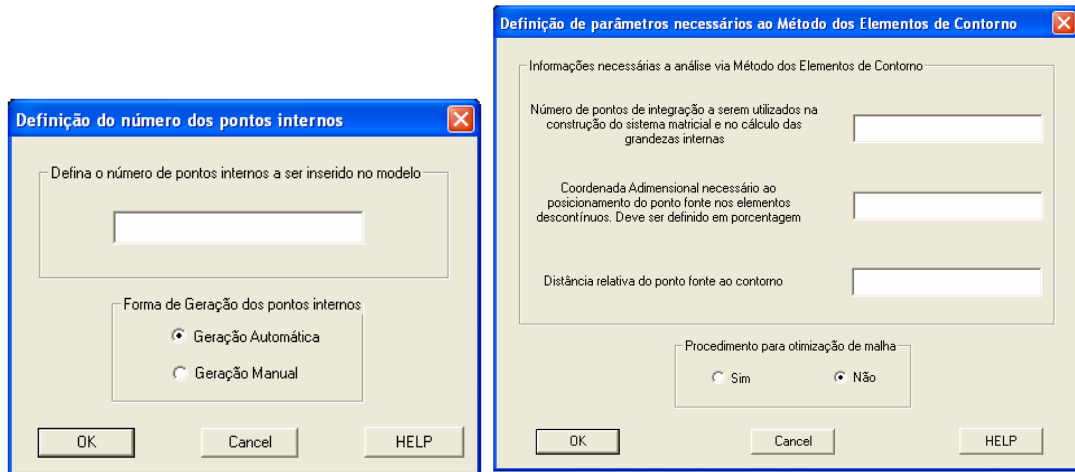


Figura 7.15 Definição dos pontos internos Figura 7.16 Definição Param. do Met. Elem. Contorno.

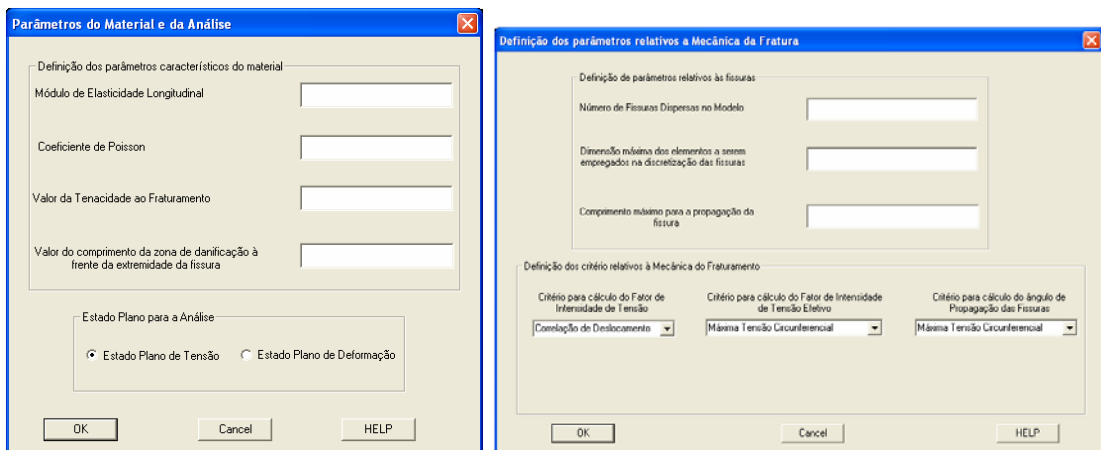


Figura 7.17 Definição dos Param. material. Figura 7.18 Definição Param. para fraturamento.

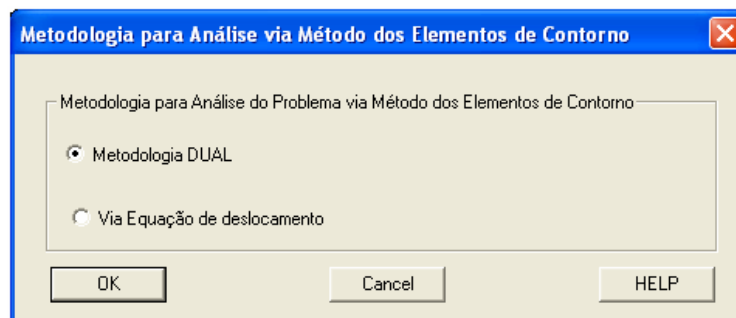


Figura 7.19 Escolha da metodologia de análise.

Verifica-se que através do pré-processador a entrada dos dados a serem processados torna-se mais rápida e a possibilidade de erros diminui substancialmente. Por meio deste programa é possível a construção de malhas com comprimento progressivo de elemento, assim pode-se efetuar a discretização de malhas refinadas em regiões com grandes concentrações de tensão e deformação. Para tanto deve ser informado a taxa de refinamento.

Além disso, é possível a construção de geometrias curvas. As coordenadas nodais são definidas sobre o contorno curvo enquanto elementos retos são criados entre estes nós. Contornos internos ao domínio podem também ser criados bastando somente identificá-los.

A definição dos parâmetros de análise e do material como tenacidade ao fraturamento, módulo de elasticidade longitudinal, coeficiente de Poisson, número de passos de carga entre outros, torna-se também bastante facilitada.

8. - Aplicações

Neste capítulo serão abordadas algumas aplicações referentes à metodologia de análise de fissuras discutida nos capítulos anteriores. Consideram-se cinco exemplos onde as formulações em deslocamento e dual serão empregadas.

8.1 – Chapa com Fissura Central

O primeiro exemplo refere-se a uma chapa quadrada simplesmente apoiada em sua base apresentando deslocamento prescrito não nulo na borda superior conforme apresenta a Fig. (8.1). A fissura considerada encontra-se posicionada no centro geométrico da chapa.

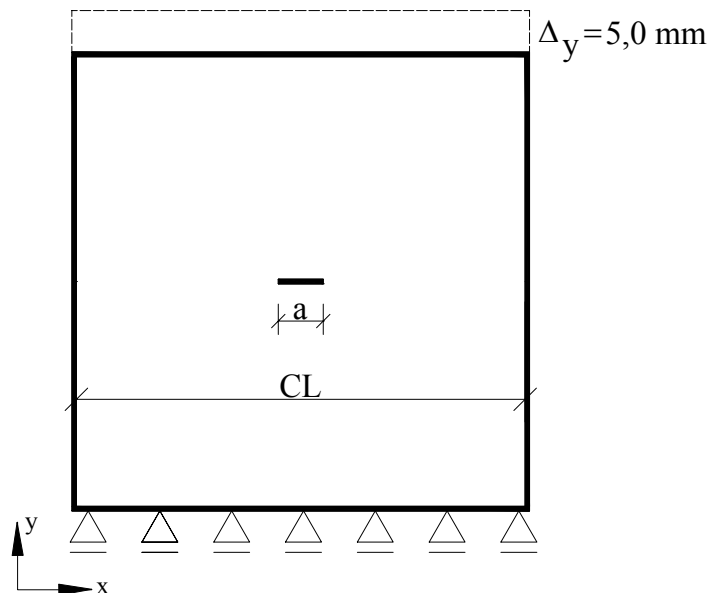


Figura 8.1 Carregamento e condições de contorno para o exemplo 1.

Os parâmetros adotados no exemplo são:

$$a = 0,10m$$

$$E = 210 \cdot 10^6 \frac{kN}{m^2}$$

$$\nu = 0,30$$

$$CL = 2,00m$$

O valor da tenacidade ao fraturamento adotada é $40080 \text{ kN/m}^{1/2}$. Este valor corresponde a liga metálica INCONEL 600 cujas características foram determinadas por GODEFROID et. al. (2004).

Foram utilizados 160 elementos de contorno na discretização do contorno externo da geometria sendo que os elementos utilizados nas faces da fissura apresentam comprimento máximo igual a 0,02 m. A análise foi realizada empregando a teoria de interação da máxima taxa de liberação de energia potencial sendo utilizada a técnica de correlação dos deslocamentos para a determinação dos fatores de intensidade de tensão. O carregamento foi aplicado considerando 50 passos de carga com tolerância à convergência igual a 1° . Neste exemplo as formulações dual e singular foram utilizadas. Por meio desta última metodologia a distância de separação das faces da fissura é igual a 0,001 m.

Os resultados para a análise realizada podem ser observados nas figuras a seguir. Inicialmente será comentado o caminho do crescimento das fissuras. Por meio das duas formulações empregadas constatou-se que o caminho da propagação das fissuras foi o mesmo. As Fig. (8.2), Fig. (8.3), Fig. (8.4) e Fig. (8.5) apresentam tal resultado para alguns incrementos no comprimento.

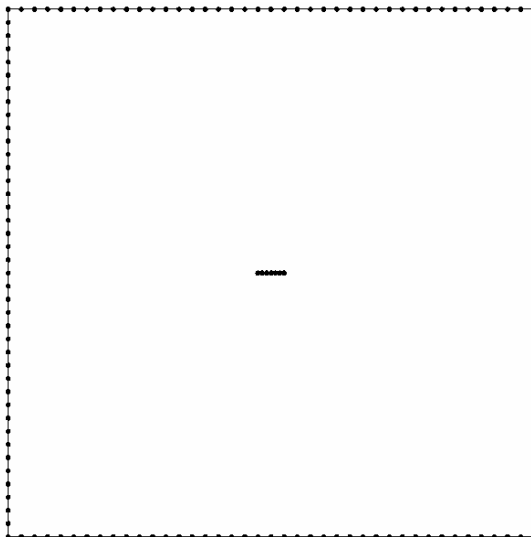


Figura 8.2 Configuração Inicial

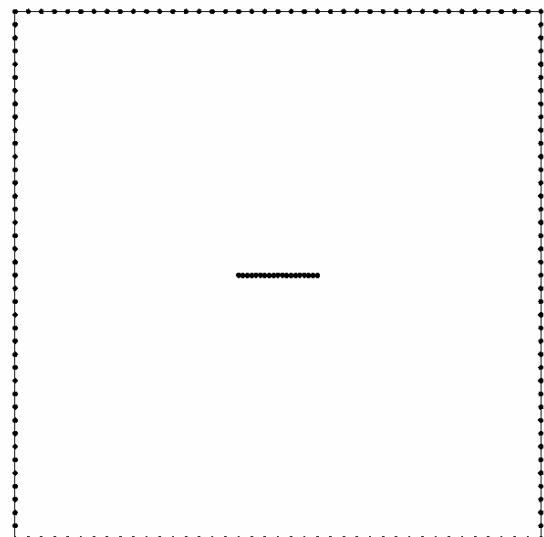


Figura 8.3 1º incremento no comprimento

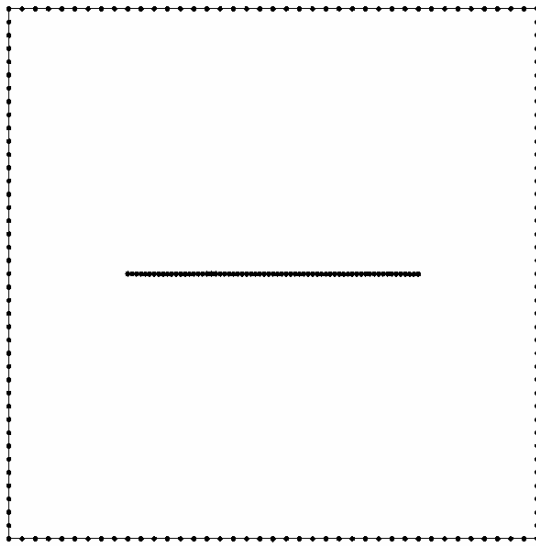


Figura 8.4 5° incremento no comprimento

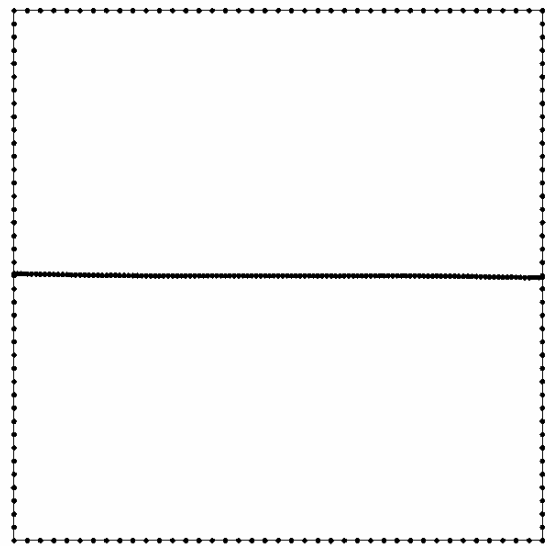


Figura 8.5 Separação do corpo em duas partes

Este exemplo é conhecido na literatura por apresentar somente modo de sollicitação ao fraturamento I. Assim os resultados obtidos são coerentes já que a propagação da fissura ocorreu sem mudanças sensíveis de inclinação em relação à observada na fissura inicial.

O campo de deslocamentos apresenta também interessante resultado. O processo de crescimento da fissura evoluiu até a ocorrência da separação da estrutura em duas partes. Como o carregamento aplicado é constituído por um deslocamento não nulo é possível a obtenção de uma configuração de equilíbrio para a estrutura após a ocorrência da ruína da mesma. Nesta situação a parte superior do corpo apresenta um deslocamento igual ao aplicado enquanto a parte inferior permanece com deslocamento nulo. Este comportamento é o encontrado na análise. Pode-se verificar tal resultado por meio da Fig. (8.6).

Deve-se notar que este resultado somente é possível devido ao fato do carregamento externo ser um deslocamento não nulo. Assim, é possível obter uma configuração de equilíbrio após a ruptura do corpo em duas partes. Sendo o carregamento composto por uma força de superfície o sistema de equações seria singular no momento da separação das partes do corpo.

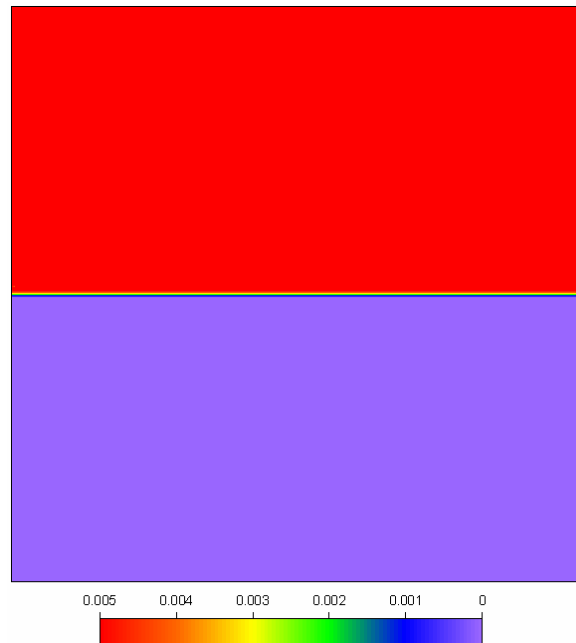


Figura 8.6 Campo de deslocamento na direção y.

Outro resultado de grande importância é o apresentado na Fig. (8.7). Trata-se do comportamento da tensão principal de tração, σ_1 . Pode-se verificar a grande concentração de tensão presente nas extremidades da fissura. Deve-se notar também a simetria das tensões em relação às faces da fissura o que torna mais evidente o caminho de crescimento da fissura.

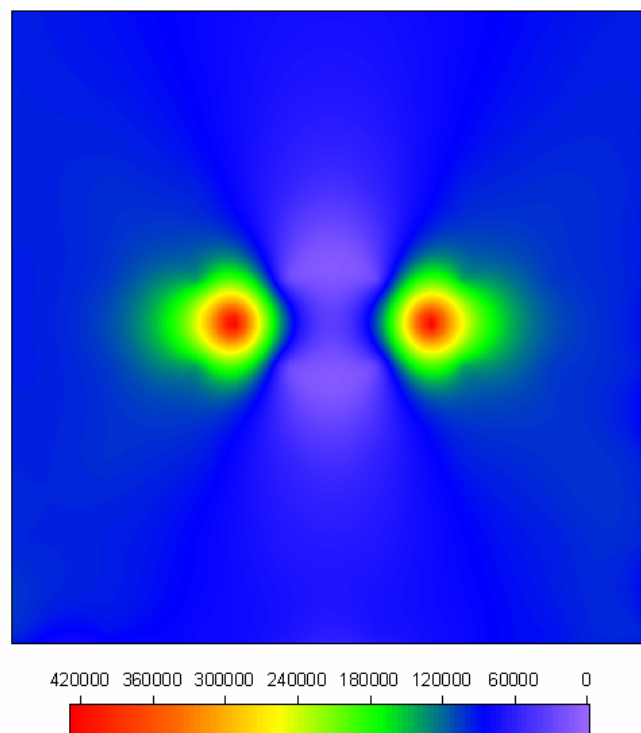


Figura 8.7 Diagrama de tensão principal de tração σ_1 . 2º incremento no comprimento.

Neste exemplo as formulações dual e singular foram utilizadas para a análise. Verificou-se que por meio de ambas as formulações consideradas os resultados obtidos foram muito semelhantes não havendo variações sensíveis das respostas encontradas. Esta constatação reforça a validação das implementações computacionais efetuadas para os códigos computacionais que tratam das formulações descritas.

8.2 – Viga biapoiada com Carga Central

Neste exemplo considera-se uma viga biapoiada com uma carga concentrada na linha de centro do vão conforme apresenta a Fig. (8.8). O vão da viga considerado é de 2,0 m enquanto a altura da seção transversal é igual a 0,80 m. A carga concentrada considerada é de 1,0 kN.

A tenacidade ao fraturamento considerada para o material é igual a $1,0 \text{ kN/m}^{1/2}$. Esse procedimento foi considerado pois não se está interessado, neste exemplo, na determinação da instabilidade ao crescimento da fissura mas sim na trajetória de crescimento das fissuras.

Os parâmetros adotados no exemplo são:

$$a = 0,04m$$

$$E = 210 \cdot 10^6 \frac{kN}{m^2}$$

$$\nu = 0,20$$

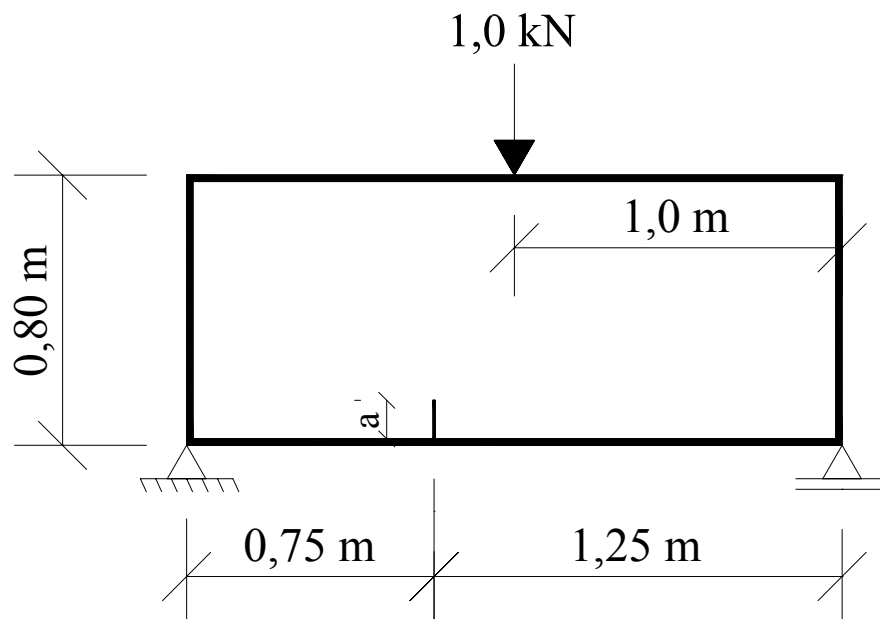


Figura 8.8 Geometria e carregamentos para a estrutura a ser analisado no exemplo 2.

A análise do problema apresentado foi realizada empregando a teoria de interação da mínima densidade de energia de deformação sendo utilizada a técnica de correlação dos deslocamentos para a determinação dos fatores de intensidade de tensão. Foram empregados 560 elementos na discretização do contorno externo da geometria sendo que os elementos utilizados nas faces da fissura apresentam comprimento máximo igual a 0,02 m. O carregamento foi aplicado por meio de 10 passos de carga com tolerância à convergência igual a 1° . Neste exemplo optou-se por utilizar somente a formulação dual.

Os resultados deste exemplo foram comparados aos previstos pelo programa FRANC2D desenvolvido pela Universidade de Cornell/EUA. Esse programa está disponível gratuitamente na “*home page*” desta universidade na internet sendo que dentro de suas capacidades está a análise da propagação de fissuras utilizando o método dos elementos finitos.

Será analisada inicialmente a trajetória desenvolvida pela fissura durante a sua propagação. As Fig. (8.9), Fig. (8.10), Fig. (8.11) e Fig. (8.12) apresentam a propagação para alguns incrementos no comprimento da fissura.



Figura 8.9 Configuração inicial do exemplo.

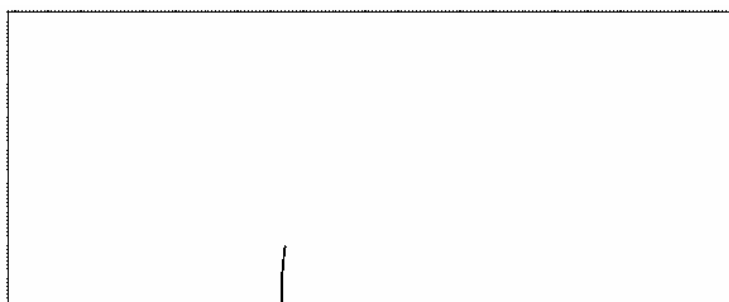


Figura 8.10 5º incremento no comprimento da fissura.



Figura 8.11 9º Incremento no comprimento da fissura.

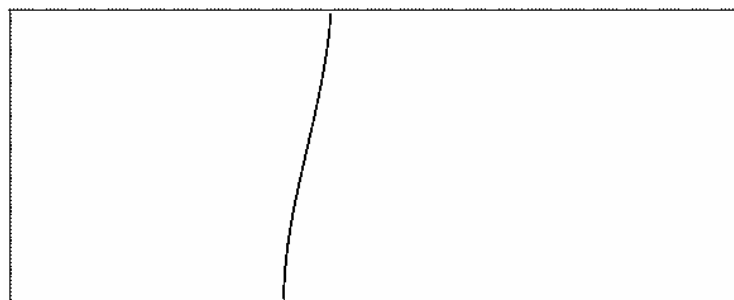


Figura 8.12 Último incremento no comprimento da fissura.

A modelagem deste exemplo por meio do programa FRANC2D foi efetuada com os resultados apresentados a seguir. Através do modelo criado no FRANC2D foi considerada a técnica de correlação dos deslocamentos para a determinação dos fatores de intensidade de tensão e também a teoria de interação da mínima densidade de energia de deformação para determinação do ângulo de propagação. Nas Fig. (8.13) e Fig. (8.14) encontram-se as configurações inicial e final para a análise realizada.

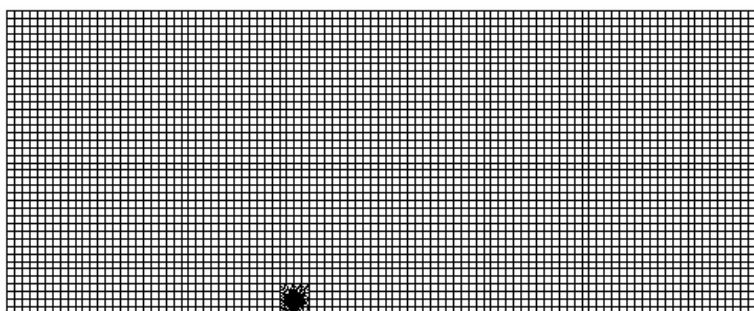


Figura 8.13 Configuração inicial da análise.

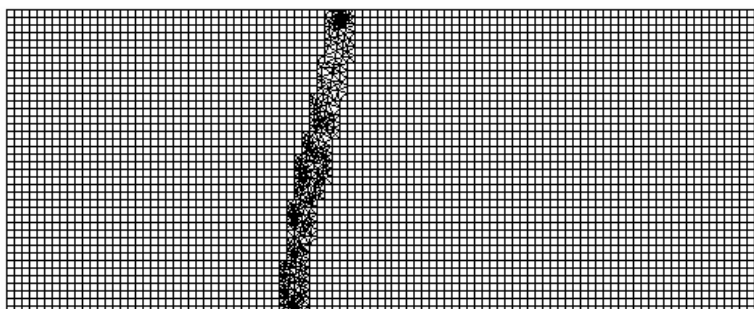


Figura 8.14 Malha de elementos finitos final.

As Fig. (8.12) e Fig. (8.14) podem ser comparadas verificando que o caminho de propagação desenvolvido pela fissura, por meio das análises efetuadas pelos dois programas utilizados, é muito semelhante não apresentando variações sensíveis. A coordenada cartesiana em que a fissura analisada corta a face superior da viga é a mesma por meio dos dois modelos numéricos considerados. Dessa forma considera-se validado o procedimento proposto para o crescimento das fissuras.

O diagrama de tensão principal de tração, σ_1 , é também avaliado sendo apresentado na Fig. (8.15). Nesta figura pode-se perceber a grande concentração de existente na extremidade da fissura.

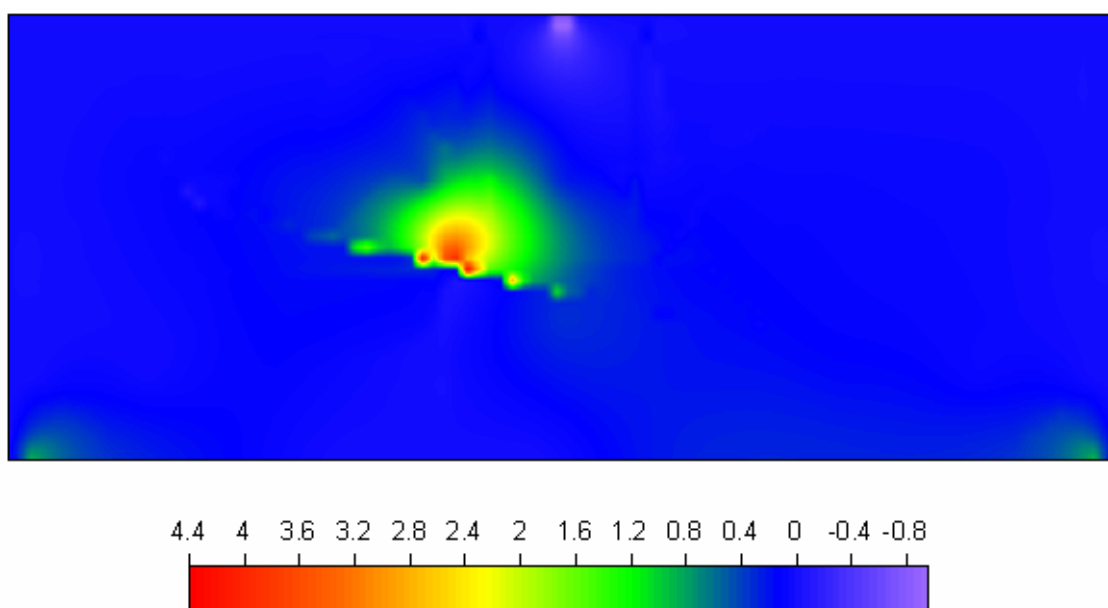


Figura 8.15 Diagrama de tensão principal σ_1 4º incremento no comprimento.

Deve-se destacar também a substancial redução do número de elementos na análise pelo procedimento desenvolvido via método dos elementos de contorno em comparação ao utilizado pelo FRANC2D. Considerando o modelo criado no FRANC2D foram empregados 50752 elementos. Já pela análise via método dos elementos de contorno esse número cai bruscamente sendo necessários somente 630 elementos. Assim pode-se dizer que a metodologia de análise proposta via método dos elementos de contorno é mais eficaz na modelagem desse tipo de problema.

Neste exemplo os resultados obtidos pela formulação singular não foram satisfatórios. Não foi possível, por meio desta formulação, a obtenção da trajetória de ruína prevista pelo modelo construído no FRANC2D. Esse fato pode ser explicado pela representação geométrica não adequada das faces da fissura, o que conduziu a uma

avaliação não precisa dos fatores de intensidade de tensão solicitados no modo II que são na verdade os responsáveis pela mudança na direção da trajetória da fissura. Assim esta formulação não será aplicada aos demais exemplos desta dissertação.

8.3 – Viga Engastada Multi-Fraturada

Esse exemplo trata da análise de uma viga engastada apresentando 4 metros de vão por 2 metros de altura de seção transversal conforme ilustra a Fig. (8.16). Neste exemplo foi utilizado o gerador de fissuras aleatórias no domínio do problema. Consideram-se 50 fissuras cuja distribuição é apresentada na Fig. (8.17).

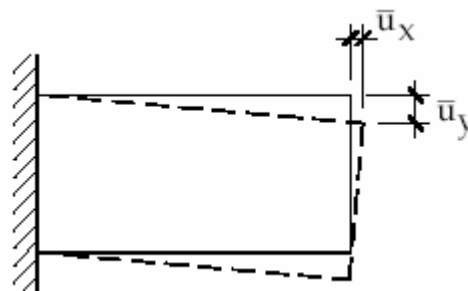


Figura 8.16 Geometria e carregamentos para a análise do terceiro exemplo.

O carregamento aplicado à viga refere-se a dois deslocamentos prescritos não nulos na extremidade do balanço sendo seus valores iguais a $\bar{u}_x = 0.005$ m e $\bar{u}_y = -0.003$ m. A tenacidade ao fraturamento adotada para o material é igual a $104000 \text{ kN/m}^{1/2}$, que corresponde ao aço SAE 1020. Já o módulo de elasticidade longitudinal foi considerado igual a $210 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$ enquanto o coeficiente de Poisson é igual a 0,3.

A análise do problema apresentado foi realizada empregando a teoria da máxima tensão circunferencial sendo utilizada a técnica de correlação dos deslocamentos para a determinação dos fatores de intensidade de tensão. Foram utilizados 300 elementos na discretização do contorno externo da geometria sendo que os elementos utilizados nas faces da fissura apresentam comprimento máximo igual a 0,05 m. O carregamento externo foi aplicado por meio de 50 passos de carga com tolerância à convergência igual a 3°. Nesse exemplo foi utilizada somente a formulação dos elementos de contorno dual.

Inicialmente é analisado o comportamento do crescimento das fissuras e sua coalescência. Nas Fig. (8.17), Fig. (8.18), Fig. (8.19), Fig. (8.20), Fig. (8.21) e Fig. Capítulo 8 – Aplicações

(8.22) são apresentados os diagramas ilustrativos do crescimento das fissuras e da localização da danificação para alguns incrementos no comprimento das fissuras.

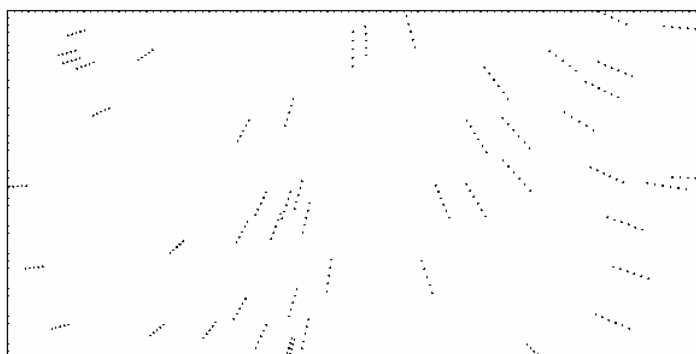


Figura 8.17 Distribuição inicial das fissuras.

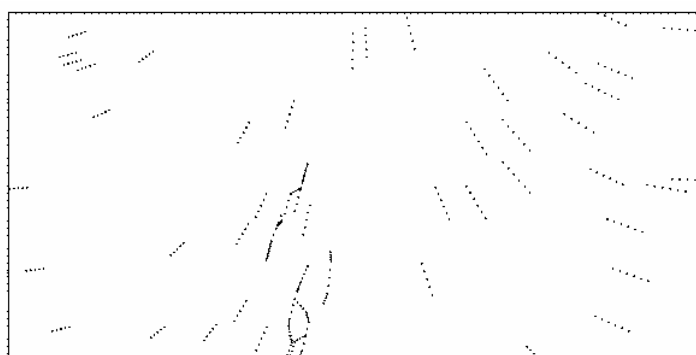


Figura 8.18 3º Incremento no comprimento das fissuras.

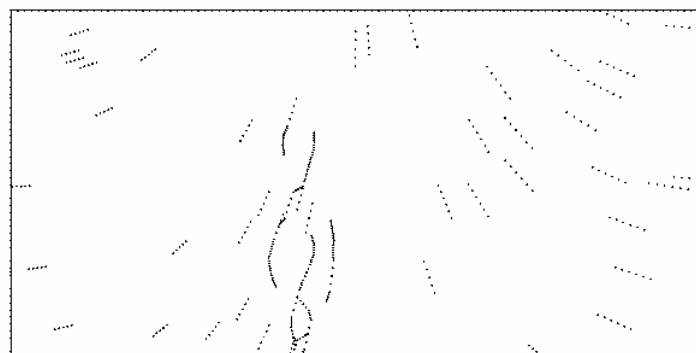


Figura 8.19 9º Incremento no comprimento das fissuras.

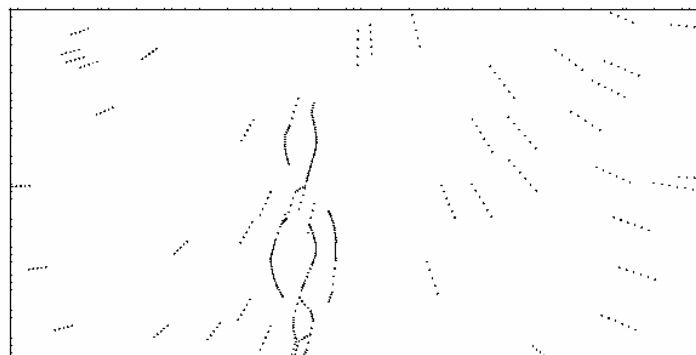


Figura 8.20 12º Incremento no comprimento das fissuras.

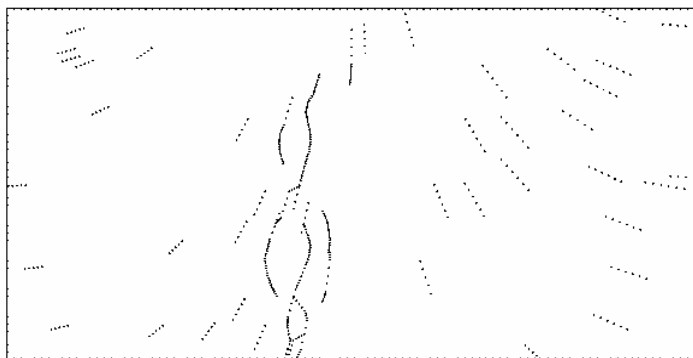


Figura 8.21 16º Incremento no comprimento das fissuras.

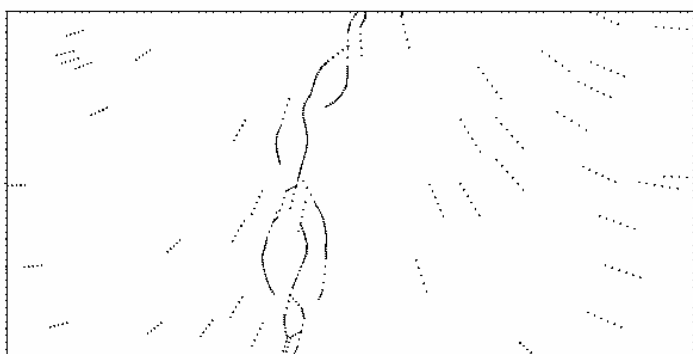


Figura 8.22 Separação do corpo em duas partes.

Por meio das figuras que ilustram o crescimento das fissuras apresentadas anteriormente pode-se perceber que grande parte das fissuras que tiveram seu comprimento aumentado estavam localizadas no centro do vão. Portanto para a distribuição das fissuras iniciais considerada é essa a região de localização de dano e ruína do corpo.

Após a coalescência das fissuras houve a ruptura da viga a qual foi dividida em duas partes. O campo de deslocamento é também analisado. Na Fig. (8.23) é apresentado o campo de deslocamento atuante na direção x obtido para o último incremento de carga da análise.

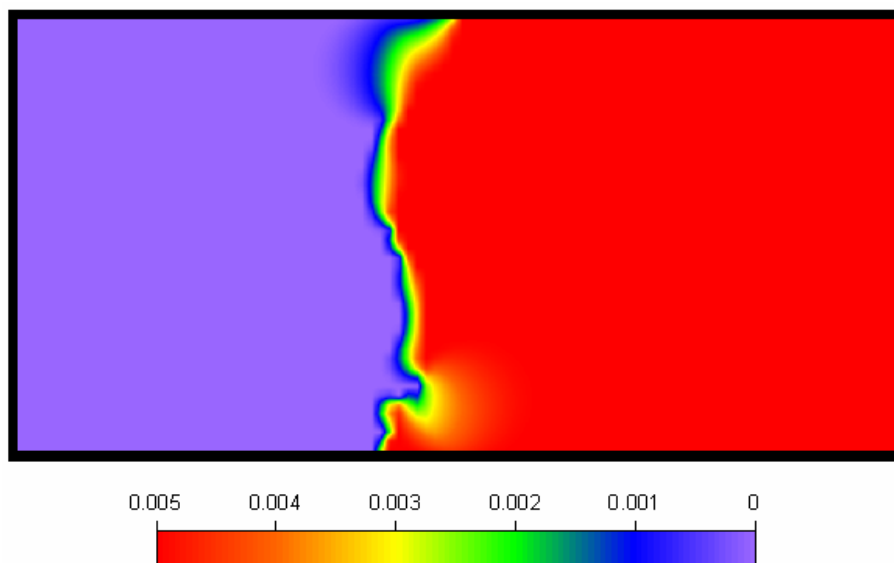


Figura 8.23 Campo de deslocamento na direção x no fim da análise.

O diagrama de tensão principal de tração, σ_1 , é apresentado na Fig. (8.24). Pode-se verificar por meio deste diagrama a grande concentração de tensões existente no centro do vão, reforçando assim a correta definição do plano de ruína.

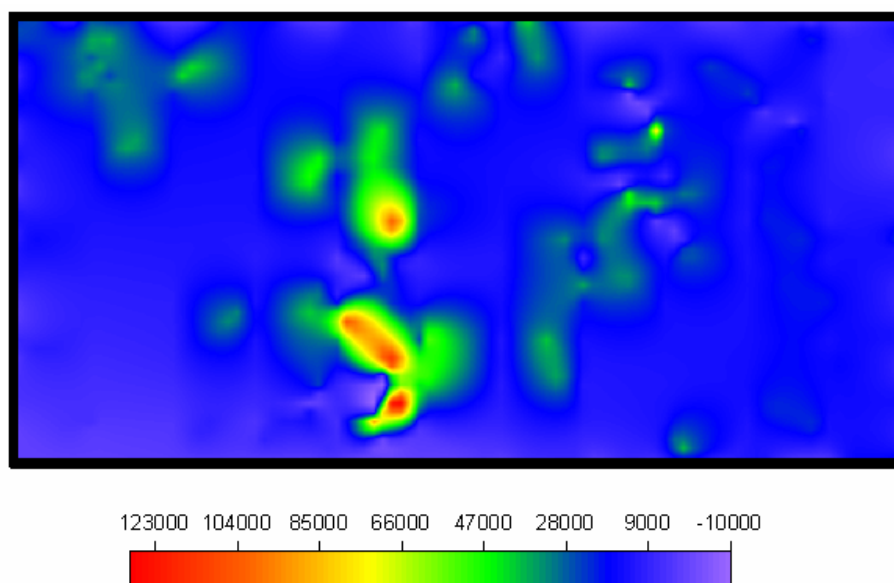


Figura 8.24 Diagrama de tensões principais σ_1 . 2º incremento no comprimento das fissuras.

Por meio da formulação desenvolvida neste trabalho é possível prever a carga de ruína assim como a trajetória de ruptura de qualquer corpo bidimensional cujo material obedeça às restrições de aplicação da teoria da mecânica da fratura elástico-linear. Para tanto deve-se escolher um número ideal de fissuras a ser distribuído aleatoriamente no

domínio do problema. Esse número de fissuras deve ser tal que, mesmo se aumentado, se verifique variação desprezível na trajetória de ruína e na carga última do problema analisado. Tal procedimento deveria ser efetuado neste trabalho, no entanto o custo computacional envolvido na análise de problemas com número muito elevado de fissuras é extremamente elevado. Dessa forma sugere-se o emprego de computação paralela para a resolução desse problema o qual será desenvolvido no doutoramento do autor.

8.4 – Chapa Quadrada com Três Furos

Este exemplo refere-se a uma chapa quadrada com deslocamento não nulo prescrito em sua na borda superior contendo três furos conforme ilustra a Fig. (8.25). Esta estrutura é largamente utilizada em aviões principalmente como parte integrante de sua fuselagem.

A chapa considerada apresenta comprimento de lado igual a 100 cm tendo os furos diâmetro igual a 5 mm. Os furos estão posicionados na linha de centro da chapa estando igualmente espaçados em 25 cm. A chapa está vinculada somente na metade inferior dos furos conforme ilustra a Fig. (8.25).

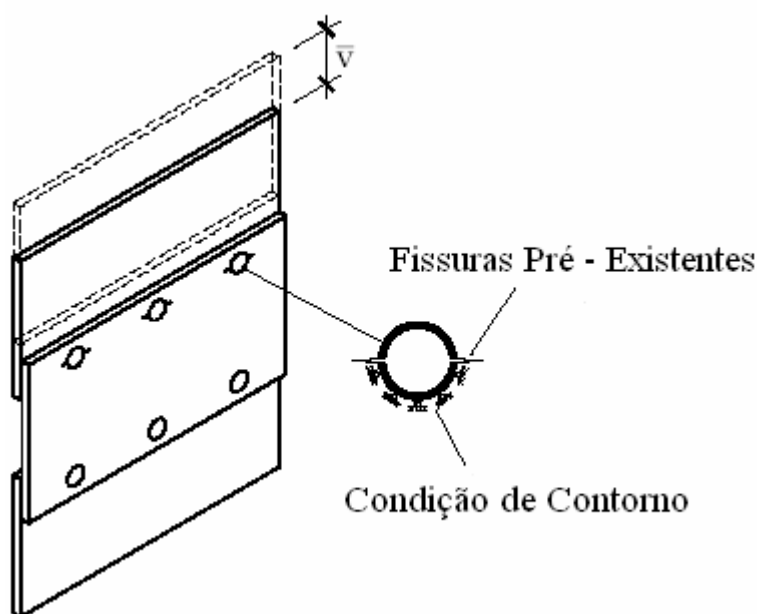


Figura 8.25 Geometria e condições de contorno para o exemplo quatro.

O carregamento é composto por um deslocamento prescrito na extremidade superior sendo o valor aplicado igual a \bar{v} 1,0 mm. A tenacidade ao fraturamento adotada para o material é igual a $104000 \text{ kN/m}^{1/2}$, que corresponde ao aço SAE 1020, enquanto o módulo de elasticidade longitudinal foi considerado igual a $210 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$ e o coeficiente de Poisson igual a 0,3.

A análise do problema apresentado foi realizada empregando a teoria da máxima tensão circunferencial sendo utilizada a técnica de correlação dos deslocamentos para a determinação dos fatores de intensidade de tensão. Foram utilizados 640 elementos na discretização do contorno da geometria sendo que os elementos utilizados nas faces da fissura apresentam comprimento máximo igual a 0,06 m. O carregamento foi aplicado considerando-se 200 passos de carga com tolerância à convergência igual a 3° . Neste exemplo foi utilizada somente a formulação em elementos de contorno dual.

O comprimento das fissuras sofreu duas considerações para a análise deste exemplo. Em ambas as situações o comprimento é gerado aleatoriamente, no entanto as restrições efetuadas referem-se ao comprimento inicial da fissura. Na primeira hipótese as fissuras apresentam comprimento máximo igual a $6,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ e mínimo de $4,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$, enquanto na segunda hipótese o intervalo de consideração dos comprimentos é limitado por $1,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ e $1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$.

O caminho de propagação da análise encontra-se apresentado nas Fig. (8.26) e Fig. (8.27) para as duas hipóteses respectivamente.

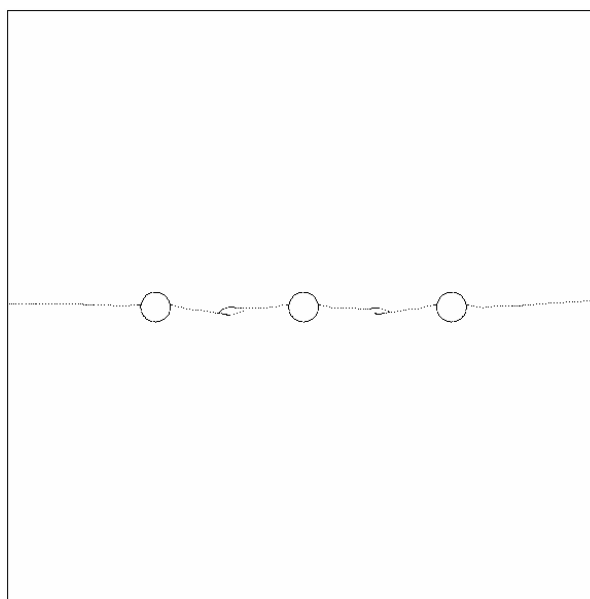


Figura 8.26 Propagação das fissuras para o exemplo quatro. 1º hipótese.

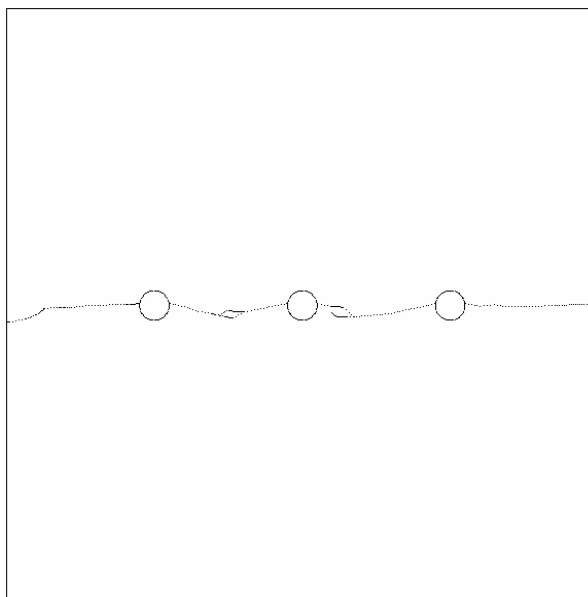


Figura 8.27 Propagação das fissuras para o exemplo quatro. 2º hipótese.

De acordo com as Fig. (8.26) e Fig. (8.27) pode-se verificar que os resultados apresentados são coerentes. Isso se deve ao fato do modo principal de sollicitação ao fraturamento atuante na estrutura analisada ser o modo I. No entanto nas proximidades do encontro entre as fissuras ou mesmo na interseção entre a fissura e o contorno da estrutura surgem a influência dos esforços cisalhantes o que excita o modo II de fraturamento. Isso explica as inclinações das fissuras presentes nos trechos descritos.

Constata-se também que na análise da segunda hipótese sobre o comprimento das fissuras o tramo de propagação da fissura pertencente ao primeiro furo do lado esquerdo da chapa sofre uma deflexão quando se encontra próximo ao contorno. Este comportamento pode ser esperado já que, nessa condição, além da influência já esperada dos esforços cisalhantes, a estrutura encontra-se, nesse instante, no limite de instabilidade o que torna o efeito cisalhante mais forte.

O campo de deslocamento pode também ser analisado. Na Fig. (8.28) é apresentado o diagrama de deslocamento na direção vertical para a primeira hipótese de comprimento inicial das fissuras. Escolheu-se essa hipótese pela suavidade do encontro das fissuras com o contorno. Apesar disso as respostas para o campo de deslocamento é consideravelmente semelhante para as duas hipóteses estudadas.

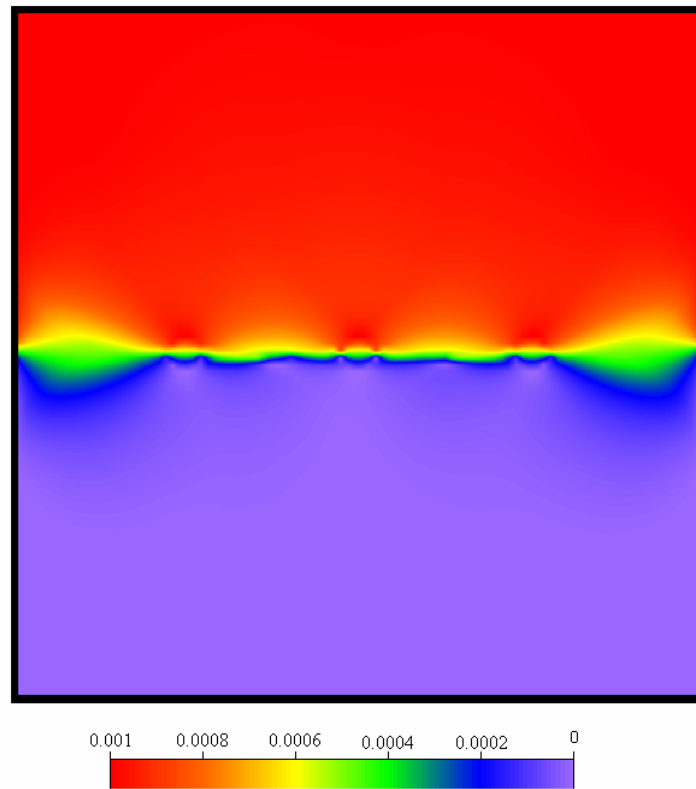


Figura 8.28 Campo de deslocamento vertical final após a separação da chapa em duas partes.

O trabalho necessário para o rompimento da chapa pode ser analisado por meio do diagrama carga x deslocamento. Este diagrama é apresentado na Fig. (8.29) podendo-se ressaltar o comportamento de ruptura frágil para a análise.

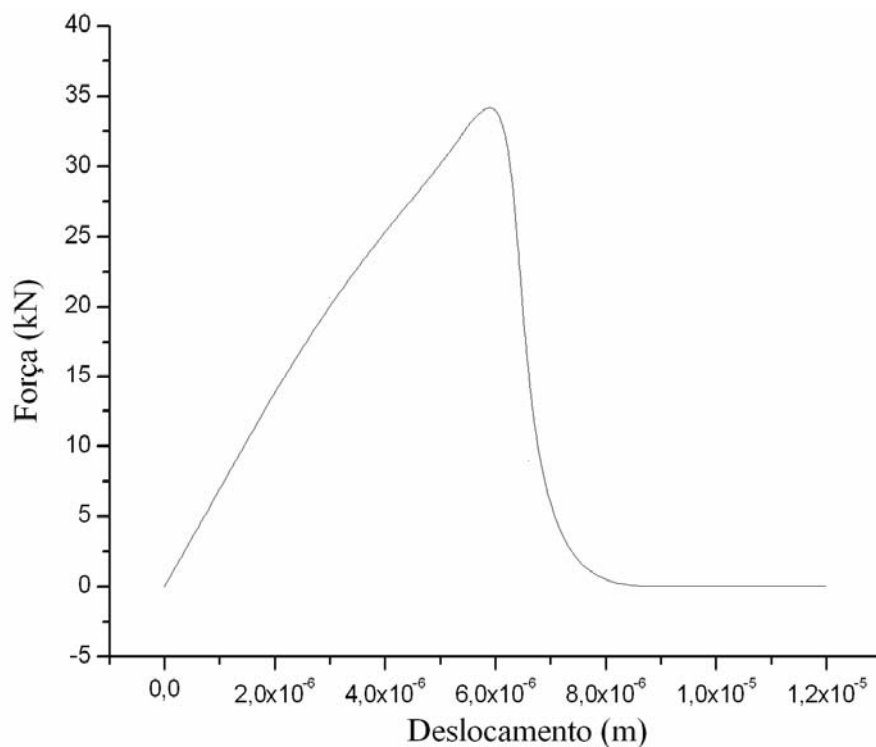


Figura 8.29 Diagrama carga x deslocamento para a estrutura em análise.

8.5 – Chapa Retangular com Trinta e Dois Furos

Este exemplo refere-se a uma extensão do problema tratado no tópico anterior. Trata-se de uma chapa retangular, com deslocamento não nulo prescrito em sua na borda superior, apresentando trinta e dois furos conforme mostra a Fig. (8.30). Esta estrutura é largamente utilizada nas indústrias aeronáutica e automobilística para a ligação das chapas constituintes de peças pertencentes, principalmente, a aviões e automóveis.

A chapa considerada apresenta comprimento e altura iguais a 100 cm e 50 cm, respectivamente, contendo furos cujo diâmetro é considerado igual a 20 mm. Os furos estão posicionados em quatro camadas, sendo em cada uma delas oito furos, os quais estão distribuídos uniformemente ao longo da chapa. O espaçamento entre os furos é igual a 10 cm tanto na direção horizontal quanto na vertical. A chapa está vinculada somente na metade inferior dos furos conforme ilustra a Fig. (8.30).

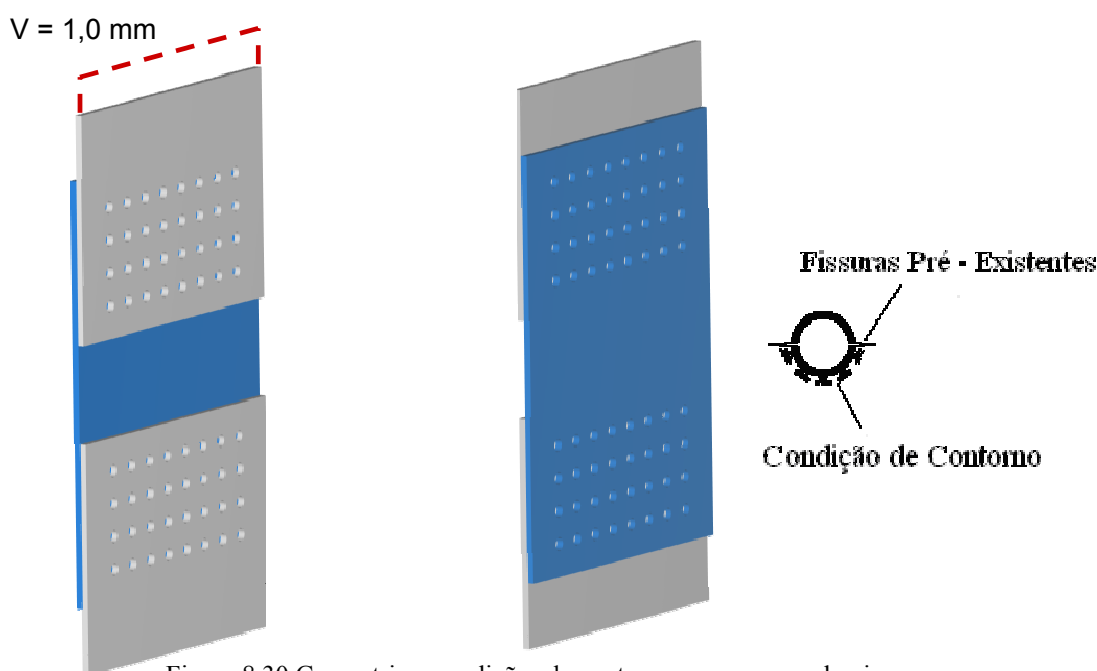


Figura 8.30 Geometria e condições de contorno para o exemplo cinco.

O carregamento é composto por um deslocamento prescrito na extremidade superior sendo o valor aplicado igual a $\bar{v} = 1,0$ mm. A tenacidade ao fraturamento adotada para o material é igual a $104000 \text{ kN/m}^{1/2}$, enquanto o módulo de elasticidade longitudinal foi considerado igual a $210 \cdot 10^6 \text{ kN/m}^2$ e o coeficiente de Poisson 0,3.

A análise do problema apresentado foi realizada empregando a teoria da máxima tensão circunferencial sendo utilizada a técnica de correlação dos deslocamentos para a determinação dos fatores de intensidade de tensão. Foram utilizados 1174 elementos na discretização do contorno da geometria sendo que os elementos utilizados nas faces da fissura apresentam comprimento máximo igual a 0,015 m. O carregamento foi aplicado considerando-se 50 passos de carga com tolerância à convergência igual a 3°. Neste exemplo foi utilizada somente a formulação em elementos de contorno dual.

O comprimento das fissuras para a análise é gerado aleatoriamente estando estes valores limitados ao intervalo de $2,64 \cdot 10^{-4}$ m e $1,94 \cdot 10^{-4}$ m.

A configuração inicial para a análise do problema bem como a trajetória de crescimento das fissuras podem ser observadas nas Fig. (8.31) e Fig. (8.32) respectivamente.

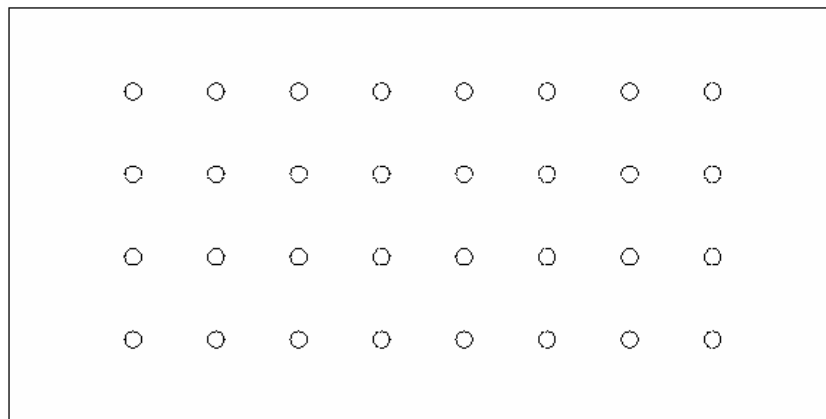


Figura 8.31 Configuração inicial para o exemplo quatro.



Figura 8.32 Ruptura da estrutura analisada em duas partes.

De acordo com a Fig. (8.32) pode-se verificar que a trajetória de ruptura da peça é muito semelhante à observada para o exemplo quatro. Assim como naquela situação o modo principal de sollicitação ao fraturamento atuante é o modo I. Apenas nas

proximidades da conexão entre as fissuras observa-se uma leve deflexão da trajetória de crescimento das fissuras o que pode ser explicado pelo efeito do esforço cisalhante.

A ruptura do corpo deu-se na linha de furos mais próxima a borda onde foi aplicado o carregamento. Assim tal ponto pode ser apontado como região mais solicitada da estrutura. Nas Fig. (8.33) e Fig. (8.34) encontram-se os diagramas carga x deslocamento para duas linhas de furos da estrutura. A primeira linha de furos considerada é a mais próxima à borda onde foi aplicado o carregamento sendo esta denominada de linha de furos superior. A segunda é a linha de furos estudada é mais distante da borda de aplicação do carregamento sendo atribuída a ela a denominação de linha de furos inferior.

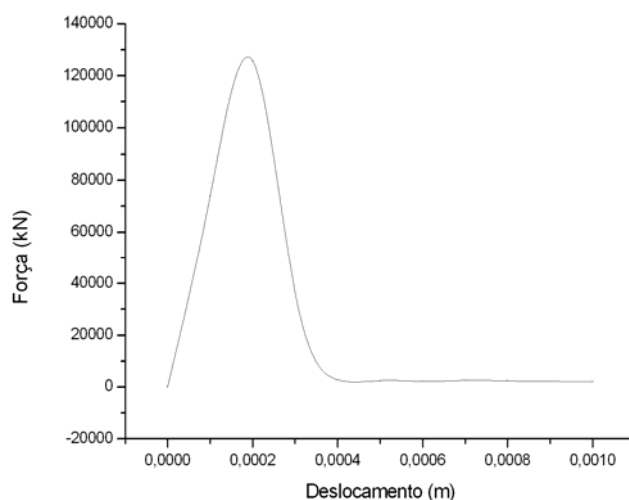


Figura 8.33 Diagrama carga x deslocamento para a linha de furos superior.

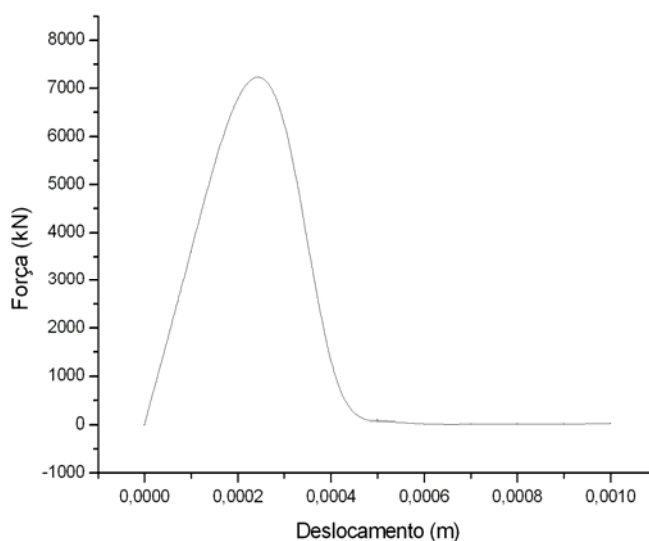


Figura 8.34 Diagrama carga x deslocamento para a linha de furos inferior.

Conforme apresentam as Fig. (8.33) e Fig. (8.34) a carga absorvida pela linha de furos superior é muito maior se comparada à linha de furos inferior. Esse resultado reforça a linha de ruína obtida na trajetória de crescimento das fissuras a qual ocorreu na linha de furos superior. Assim, esse resultado indica que as linhas de furos inferiores apresentam pouca eficiência para a distribuição dos esforços da ligação.

O campo de deslocamento é também analisado. Na Fig. (8.35) é apresentado o diagrama de deslocamento na direção vertical para o último incremento no carregamento, ou seja, após a ruptura do corpo em duas partes.

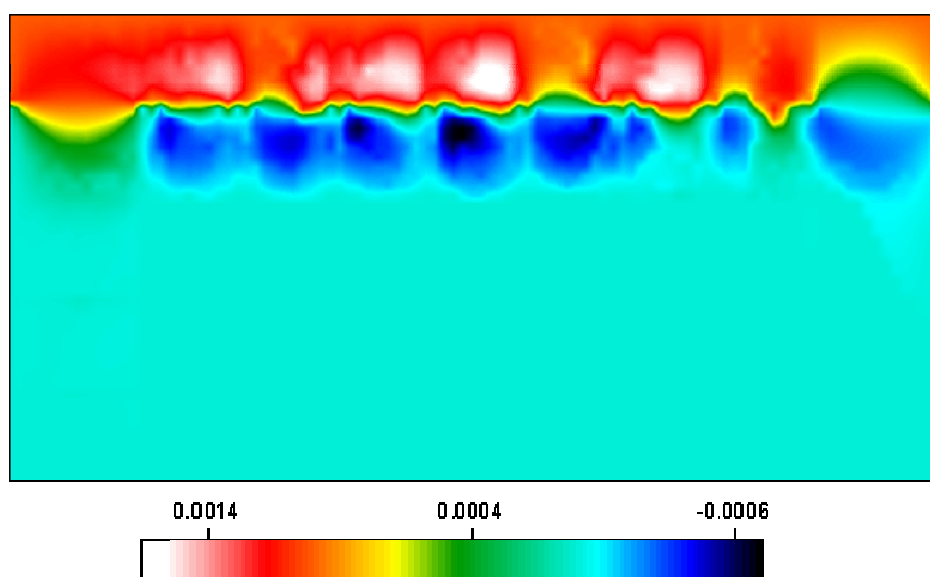


Figura 8.35 Campo de deslocamento vertical final após a separação da chapa em duas partes.

9. - Conclusões

Nesta dissertação diversos aspectos relacionados às formulações do método dos elementos de contorno bem como das teorias da mecânica da fratura foram estudadas. Inicialmente foi revisada a teoria da mecânica da fratura abordando os conceitos e as relações que descrevem o comportamento dos materiais elástico-lineares, elasto-plásticos e quase frágeis. Esse estudo é de importância não somente para a compreensão das metodologias implementadas computacionalmente, mas também para servir como referência complementar deste tópico que na grande maioria das dissertações e teses consultadas são tratadas com superficialidade.

Em relação às formulações do método dos elementos de contorno existentes para a análise de fissuras foram descritas brevemente neste trabalho as funções de Green, a técnica da descontinuidade de deslocamento além da formulação proposta pelo orientador desta pesquisa, VENTURINI (1994), que utiliza campo de tensões iniciais. No entanto ênfase maior foi dada ao estudo das formulações singular e dual. Considerando essas duas últimas metodologias atribui-se grande importância à dedução das equações integrais visto que o presente trabalho é o primeiro a tratar da metodologia dual no “Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos”. Espera-se que os estudos sobre as metodologias descritas possam ser úteis para os próximos pesquisadores que desenvolverão trabalhos na área de danificação de materiais via métodos numéricos.

Das contribuições fornecidas por este trabalho pode ser destacado o estudo da estabilidade numérica da equação integral em forças de superfície. Esse estudo, considerado no capítulo 6, mostra que a presença das singularidades, existente nos núcleos integrais da equação integral citada, deve ser analisada criteriosamente visto que os resultados podem divergir dos esperados, analiticamente ou mesmo via outra técnica numérica, a partir de certas condições de contorno e também geométricas.

O estudo descrito no parágrafo anterior é de grande utilidade na apresentação e validação da formulação dual. Verifica-se que utilizando esta formulação o número das equações resultantes da avaliação sobre o contorno das equações integrais em deslocamento são em maior número se comparadas às provenientes das equações integrais em força de superfície. Esse fato conduz a uma pequena influência desse último conjunto de equações sobre o sistema de equações final tornando a análise estável.

Em relação às estruturas tratadas nesta dissertação, capítulo 8, pode se perceber que o modelo dual forneceu resultados confiáveis e precisos consagrando ainda mais este método no campo da análise de problemas de fraturamento. Sem dúvida o método dos elementos de contorno dual é um método robusto e confiável para a análise do comportamento e estabilidade à propagação de fissuras.

A formulação singular também foi considerada. No entanto, por meio desta metodologia, a geometria da fissura não é corretamente descrita levando a erros na determinação dos fatores de intensidade de tensão. O erro na avaliação dessas grandezas compromete substancialmente a determinação da direção da propagação o que torna essa metodologia pouco eficaz na análise de problemas que envolvam, como modo principal de solitação ao fraturamento, o modo II. No entanto essa formulação se mostrou muito precisa na análise de problemas de fraturamento que apresentem, como modo dominante de solitação ao fraturamento, o modo I. Tal comportamento pode ser comprovado por meio do exemplo 1 do capítulo 8.

O processo de crescimento das fissuras neste trabalho foi desenvolvido de forma a minimizar o erro existente na determinação da trajetória de crescimento das fissuras. Este procedimento apresentou-se muito estável fornecendo resultados confiáveis como os apresentados nos exemplos do capítulo 8. Além disso, o procedimento de otimização de malha, descrito no capítulo 7, mostrou-se bastante eficiente no tratamento do problema de crescimento de fissuras permitindo a redução do sistema de equações da análise sem perda na precisão dos resultados.

O desenvolvimento do pré-processador deve também ser destacado. Este programa auxiliar permite a geração de arquivos contendo a entrada de dados do problema a ser analisado fornecendo assim maior agilidade na modelagem evitando a ocorrência de erros do usuário na informação dos dados iniciais bem como minimiza o tempo gasto na criação de arquivos de entrada de dados.

Outro fato a se destacar são as teorias da mecânica da fratura elástico-linear consideradas no trabalho. Foram admitidas quatro teorias de interação de modos de fraturamento o que enriquece as possibilidades de análise.

Apesar dos resultados obtidos por este trabalho serem de grande relevância sugestões para o seu melhoramento e continuidade podem ser fornecidos. Inicialmente verificou-se que a análise de exemplos com um número elevado de elementos de contorno leva a um custo computacional muito elevado. Isso não permitiu a determinação do número ótimo de fissuras conforme explicado no terceiro exemplo descrito no capítulo 8. Dessa forma melhoramentos no código computacional podem ser efetuados para reduzir o número de variáveis armazenadas. Outra possibilidade é a utilização de computação paralela. Essa última opção parece ser mais adequada de forma a ampliar os horizontes da análise possibilitando assim a consideração de estruturas bem mais complexas do que as apresentadas neste trabalho.

Outro avanço que pode ser efetuado é a incorporação de enrijecedores. Este artifício permitirá a análise de corpos que apresentem componentes especiais com função de enrijecimento do domínio. Essa metodologia é descrita em BOTTA (2003) e será desenvolvido no doutoramento do autor.

Podem ser considerados também materiais com diferentes comportamentos como os elásto-plásticos e os quase-frágeis. Dessa forma o leque de aplicação do programa será consideravelmente ampliado. Para tanto devem ser desenvolvidos algoritmos para a aplicação das tensões coesivas na região de influência bem como sua correção para verificação do crescimento da fissura.

Outros tipos de problemas podem também ser acoplados a partir do programa desenvolvido. Dentre esses destaca a fadiga a qual é responsável por grande parte dos acidentes nas indústrias aeronáutica, naval e automobilística. A partir da análise do problema de fadiga podem ser acopladas outras teorias como as de otimização e confiabilidade. Dessa forma poderá ser especificado um índice de confiabilidade limite sendo o comprimento das fissuras e o número de ciclos da fadiga parâmetros limitadores do processo.

Espera-se com esse trabalho dar uma contribuição, mesmo que de pequena monta, ao estudo da danificação de corpos bidimensionais e propagação de fissuras. Esse tema é de grande importância, no entanto é tratado de forma simplificada por meio dos profissionais da área técnica. Espera-se também com esse trabalho auxiliar os trabalhos a serem desenvolvidos no futuro.

10. - Referências Bibliográficas

ABEL, N.H. (1823). Ouvres complètes Norvegien Christiania, v.1.

AGOSTINHO, P.C.P. (1998). Associação de chapas através da combinação dos métodos dos elementos de contorno e finitos considerando enrijecedores e crack coesivo. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ALIABADI, M.H; ROOKE, D.P. (1992). Numerical Fracture Mechanics, Southampton, Computational Mechanics Publications.

ALMEIDA, F.P.A. (2003). Aplicação do acoplamento entre o MEC e o MEF para o estudo da interação dinâmica elastoplástica entre o solo e estruturas. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ALMEIDA, V.S. (2003). Análise da interação solo não-homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ARMENTANI, E; CITARELLA, R. (2006). DBEM and FEM analysis on non-linear multiple crack propagation in an aeronautic doubler-skin assembly. International Journal of Fatigue. Em processo de publicação.

ASKES, H; PAMIN, J; DE BORST, R. (2000). Dispersion analysis and element-free Galerkin solutions of second-and fourth order gradient enhanced damage models, Int J Num Meth Engrg, V.49, 811-832.

BABUŠKA, I; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. (1994). Special finite element method for a classe of second order elliptic problems with rough coefficients. SIAM Journal on Numerical Analysis, V.31, n.4,727-981.

BARENBLATT, G.I. (1962). The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture. In: Advances in Applied Mechanics, V. 7, 55-129.

BARROSO, L. C; BARROSO, M. M. A; CAMPOS, F. F. F; CARVALHO, M. L. B; MAIA, M. L. (1987). Cálculo Numérico, 2º Ed., Editora Harba, Sao Paulo.

BARPI, F; VALENTE, S. (1998). Size-effects induced bifurcation phenomena during multiple cohesive crack propagation. International Journal of Solids and Structures, V.35, 1851-1861.

- BAZANT, Z. P. (1982). Crack band model for fracture of Geomaterials, Proc. 4 th Intern. Confer. on Numerical Methods in Geomechanics, held in Edmonton, Alberta Canadá, June 1982.
- BAZANT, Z. P; CEDOLIN, L. (1983). Finite Element modelling of crack band propagation. Journal of Structural Engineer, ASCE, V.109, 69-92.
- BAZANT, Z.P; KAZEMI,M.T (1990). Determination of Fracture Energy, Process Zone Length and Brittleness Number from Size Effect, with Application to rock and concrete, International Journal of Fracture, V. 44, 111-131.
- BAZANT, Z. P; OH,B.H. (1983). Crack band theory for fracture of concrete, Materials and Structures (RILEM, Paris), V.16, 155-177.
- BELYTSCHKO, T; FLEMING, M. (1999). Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method, Computers and Structures,V. 71,173-195.
- BELYTSCHKO, T; KRONGAUZ, Y; ORGAN, D; FLEMING, M; KRYSL, P. (1996). Meshless methods: An overview and recent developments. Computer Meth Appld Mech Engrg; V.139, 3-47.
- BEZINE, G; COURTIN, S; GARDIN, C; HAMOUDA, H. B. H. (2005). Advantages of the J-integral approach for calculating stress intensity factors when using the commercial finite element software ABAQUS, Engineering Fracture Mechanics, V. 72, 2174-2185.
- BITTENCOURT, T. N; MIRANDA, A. C. O; MEGGIOLARO, M. A; CASTRO, J. T. P; MARTHA, L. F .(2003). Fatigue life and crack path predictions in generic 2D structural components. Engineering Fracture Mechanics,V. 70, 1259–1279.
- BLANDFORD, G. E; INGRAFFEA, A. R; LIGGET, J. A. (1981). Two-dimensional Stress Intensify Factor computations using the Boundary Element Method. Int. J. Num. Meth. Engn., V.17, 387-404.
- BOTTA, A. S. (1998). Cálculo de Esforços e Deslocamentos em Estruturas reticuladas considerando-se a Mecânica do Dano para a Modelagem do Concreto Armado, Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- BOTTA, A. S. (2003). Método dos elementos de contorno para análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformações. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- BREBBIA, C. A. (1978a). The Boundary element method for engineers, London, Pentech Press.
- BREBBIA, C. A. (1978b). Weighted residual classification of aproximate methods. Appl. Math. Modelling, v.2, n.3.
- BREBBIA, C. A; WALKER, S. (1980). Boundary Element Techniques in Engineering, London, Newnes-Butterworths.

- BREBBIA, C. A. (1984). *The Boundary Element for Engineers*, London, Pentech Press.
- BREBBIA, C. A; DOMINGUEZ, J. (1992). *Boundary Elements – An Introductory Course*, Southampton, McGraw Hill.
- BROEK, D. (1986). *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Kluwer Academic Publ. Dordrecht.
- BUDERKIN, F. M; STONE, D. E. W. (1966). The crack Opening Displacement Approach to Fracture Mechanics in Yielding, *Jour. of Strain Analysis*, V.1, 145-153.
- CARRAZEDO, R.(2002). *Mecanismos de Confinamento e suas Implicações no Reforço de Pilares de Concreto por Encamisamento com Compósito de Fibras de Carbono*. Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- CARPINTERI, A. (1992). *Meccanica dei Materiali e della Frattura*. Pitagora Editrice, Bologna.
- CARPINTERI, A; CORNETTI, P; BARPI, F; VALENTE, S. (2003). Cohesive crack model description of ductile to brittle size-scale transition: dimensional analysis vs. renormalization group theory, *Engineering Fracture Mechanics*, V.70, 1809-1839.
- CARVALHO, C. V. A (1998). *Simulação Bidimensional Adaptativa por Elementos Finitos de processos de Fraturamento por Fadiga*. Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro.
- CEN, Z; MAIER, G. (1992). Bifurcations and Instabilities in Fracture of Cohesive-softening structures: A boundary element analysis, *Fatigue Fract. Engng Mater.*, V.15, 911-928.
- CHEN, W.F; HAN, D.J. (1988). *Plasticity for Structural Engineers*, McGraw Hill.
- CHEN, W. F; MEI, C.C. (1974). Oscillations and wave forces in a man-made harbour. In: *Naval Hydro Symp.*, 10th, Dept. of Civil Eng., MIT., Cambridge, USA.
- CHEN, T; WANG, B; CEN, Z; WU, Z. (1999). A symmetric Galerkin multi-zone boundary element method for cohesive crack growth, *Engineering Fracture Mechanics*, V.63, 591-609.
- CHUEIRI, L. H. M. (1994). *Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas*. Tese (Doutorado), – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- CODA, H. B. (1990). *Análise da vibração livre de meios elásticos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno*. Dissertação (Mestrado), – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- CODA, H. B. (1993). *Análise tridimensional transiente de estruturas pela combinação entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos*. Tese (Doutorado), – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

CODA, H. B; VENTURINI, W. S. (1999). On the coupling of 3D BEM and FEM frame model applied to elastodynamic analysis. *International Journal of Solids and Structures*, V.36, n.31-32, 4789-4804.

CODA, H.B. (2001). Dynamic and static non-linear analysis of reinforced media: a BEM/FEM coupling approach. *Computers & Structures*, V.79, 2751-2765.

CORNELL Fracture Group (2006). Ithaca, NY: Cornell University. Disponível em: <http://www.cfg.cornell.edu/projects/spiral_bevel.html>. Acesso em: 10 out. 2005.

CROUCH, S. L. (1976). Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, V.10, 301-342.

CROUCH, S. L.; STARFIELD, A. M. (1983). *Boundary element method in solid mechanics*. George Allen and Unwin.

CRUSE, T. A. (1968). A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem II, *Journal of Math. Analysis and Applications*, V.22, 341.

CRUSE, T. A. (1969). Numerical solutions in three dimensional elastostatics. *Int. Journal of Solid and Structures*, V.5, 1259-1274.

CRUSE, T. A. (1972). Numerical Evaluation of elastic stress intensity factor by the boundary –integral equation method. In: Swedlon, JL, ed. *The surface crack: Physical Problems and computational solutions*. New York.

CRUSE, T.A. (1973). Application of the boundary-integral equation method to three dimensional stress analysis. *Computer and Structures*, V. 3, 509-527.

CRUSE, T. A. (1988). *Boundary Element Analysis in Computational Fracture Mechanics*, Dordrecht, Computational Mechanics Publications.

CRUSE, T. A; RIZZO, F. J. (1968). A Direct Formulation and Numerical Solution of the General Transient Elastodynamic Problem I, *Journal of Math. Analysis and Applications*, V. 22, 244.

CRUSE, T. A.; VANBUREN, W. (1971). Three dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. *Int. Journal Mech.*, V. 7, 1-15.

DAVIS, P.J; RABINOWITZ, P. (1984). *Methods of numerical integration*, Computer Science and Applied Mathematics, Orlando.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. (1996). *Hp clouds – an hp meshless method*. Numerical Methods for Partial Differential Equations. John Wiley & Sons, 1 - 34.

DUGDALE, D.S. (1960). Yielding of steel sheets containing slits. *J. of Mechanics and Physics of Solids*, V.8, 100-104.

ELBER, W. (1970). Fatigue crack closure under cyclic tension, *Engineering of Fracture Mechanics*, V. 2, 37-44.

ELICES, M; GUINEA, G.V; PLANAS, J; GOMEZ, J. (2002). The cohesive zone model: Advantages, Limitations and Challenges. *Engineering of Fracture Mechanics*, V.69, 137-163.

ERDOGAN, F; SIH, G.C (1963) – On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *J. Basic Engng.*, V.85, 519-527.

FERNANDES, G. R.(1998). O método dos elementos de contorno aplicado à análise não-linear de placas. Dissertação (Mestrado), – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

FERRO, N. C. P. (1999). Uma combinação MEC/MEF para análise de interação solo-estrutura. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

FOLTRAN, C.E. (1999). Análise de problemas planos em regime elasto-plástico pelo método dos elementos de contorno. Campinas. Dissertação (mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas.

FREDHOLM, I. (1903). Sur une classe d'équation fonctionnelles, *Acta Math*, V.27, 365-390.

GODEFROID, L. M; LOPES, M; AL-RUBAIE, K.S. (2004). Tenacidade à Fratura e Propagação de Trinca de Fadiga de uma Superliga INCONEL 600, *Revista Matéria*, V.9, 315-324.

GRAY, L. J; MARTHA, L. F; INGRAFFEA, A. R. (1990). Hyper singular integrals in boundary element fracture analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, V.29, 135-1158.

GUSTAFSSON, P.J. (1985). Fracture Mechanics Studies of non-Yielding Materials Like concrete: Modeling of Tensile Fracture and Applied Strength Analysis. Report N° TVBM-1007, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund Sweden.

HADAMARD, J.(1902). Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique, *Bull. Univ. Princeton*, V.13, 46-52.

HILBERT, D.(1904). Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie, *Verh. III, Int Math. Kongr, Heidelberg*.

HILLERBORG, A; MODEER, M; PETERSSON, P.E. (1976). Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, *Cements Concrete Research*, V.6, 773-782.

HUSSAIN, M.A; PU, S.U; UNDERWOOD, J (1974) – Strain Energy release rate for a crack under combined mode I and II, *ASTM STP*, V. 560, 2-28.

INGRAFFEA, A.R; GERSTLEN, W. (1984). Non-Linear Fracture Models for Discrete Crack Propagation, *Application of Fracture Mechanics to Cementitious Composites*. S.P.Shah editor. Martinus Nijhoff Publishers, 171-209.

INGRAFFEA, A.R; SAOUMA, V. (1985). Numerical Modelling of Discrete Crack Propagation in Reinforced and Plain Concrete. Cap. 4 de *Application of Fracture*

Mechanics to Concrete Structures, G.C Sih and A. DiTommaso editors, . Martinus Nijhoff Publishers.

IRWIN, G.R. (1957). Analysis of Stress and Strain near the end of a crack traversing a plate, *Journal of Applied Mechanics*, Trans. ASME, V.24, 361-364.

JASWON, M.A. (1963). Integral equation methods in potential theory I. *Proc. Royal Society Ser.*, V. A275, 23-32.

JENQ, Y.S; SHAH,S.P (1985). A Two Parameter Fracture Model for Concrete, *Journal of Engineering Mechanics*, V.111, n.4, 1227-1241.

JIANG, Y.S; VENTURINI, W.S. (1998). Limit analysis of slope stability with boundary element methods. In: *The IV world congress on comp. mechanics*, June 29 to 2 July, 1998, Buenos Aires, Argentina.

JIANG, Y.S; VENTURINI, W.S. (2000). A general boundary element method for analysis of slope stability. In: *Computational Civil and Structural Engineering*, eds. G. de Roeck & B.H.V. Topping, 191-198, Civil-comp Press.

JIRASEK,M; ZDENEK,P; BAZANT,Z.P; CAROL,L. (2004). A framework for microplane models at large strain with application to hyperelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, V.41, 511-557.

KACHANOV, L.M. (1958). On the Time to Failure under Creep Conditions, *Izv. Akad. Nauk. SSR, Otd. Tekhn.* n.8, 26-31.

KACHANOV, L.M. (1986). *Introduction to Continuum Damage Mechanics*, Martinus Nighoff Publishers.

KACHANOV, L.M; LEMAITRE,J. (1987). *Continuum Damage Mechanics, Theory and Applications*, Springer Verlag.

KEBIR,H; ROELANDT,J.M; CHAMBON,L. (2006).Dual boundary element method modelling of aircraft structural joints with multiple site damage. *Engineering Fracture Mechanics*. V. 73, 418–434.

KELLOG,O.D. (1929). *Foundations of Potencial Theory*, Springer Verlag, Germany.

KOMATSU, J.S. (1995). Estudo de problemas de escavação através da combinação elementos de contorno e elementos finitos. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

KRAJCINOVIC, D. (2000). *Damage Mechanics : Accomplismentes, trends and needs*. *International Journal of Solids and Structures*, V.37, 267-277.

KRAJCINOVIC, D; MASTILOVIC,S. (2001). Brittle and quasi-ductile at large strain rates. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, V.35, 9-18.

KUPRADZE, V.D. (1965). *Potencial methods in the theory of elasticity*. Jerusalem: Israel Program for Scientific Translations.

LACHAT, J.C. (1975). A further development of the boundary integral technique for elastostatics. Southampton, Ph. D. Thesis – University of Southampton.

LEITAO, V.M.A. (1994). Boundary Elements in Nonlinear Fracture Mechanics, Computational Mechanics publications.

LEITE, L.G.S. (2006). Formulação do método dos elementos de contorno para de domínios enrijecidos na presença de fratura e dano. Tese de doutorado em desenvolvimento, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

LEMAITRE, J; CHABOCHE, J.L. (1990). Mechanics of Solid Materials, Cambridge University Press.

LEONEL, E.D; RIBEIRO, G.O; PAULA, F.A. (2003). Simulação Numérica de Estruturas de Concreto Armado via MEF/ANSYS. In: V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, 7 a 10 de junho de 2003, São Paulo, Brasil.

LI, F. Z.; SHIH, C. F.; NEEDLEMAN, A. (1985). A comparison of methods for calculating energy release rates. Engineering fracture mechanics, V.21, n.2, 405-421.

LIANG, R.Y; LI, Y.N. (1991). Simulations of non-linear fracture process zone in cementitious material a boundary element approach, J. Computational Mechanics, V.7, 413-427.

LOPES JR, M.C; VENTURINI, W.S. (1997). Cohesive crack analysis by the boundary element method. In: Complas V,eds. Oñate, E. & Owen, D.R.J., Pineridge Press.

LOVON, O.B.R. (2006). Formulação h-adaptativa do método dos elementos de contorno (MEC) para modelagem de fratura elástica linear. Tese de doutorado em desenvolvimento, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MASSONET, C.E; ZIENKIEWICZ, O.C; HOLLISTER, G.S. (1965). Numerical use for integral procedures. Stress analysis. London: Wiley, cap. 10.

McDONALD, B.H.; WEXLER, A. (1972). Finite element solution of unbounded field problems. IEE Trans. Microwave Theory and Tech., MTT-20, 841-47.

MAI, Y.W. (2002). Cohesive zone and crack–resistance (R)-curve of cementitious materials and their fibre-reinforced composites, Engineering Fracture Mechanics, V.69, 219-234.

MACIEL, D.N. (2003), Determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão Estáticos e Dinâmicos via MEC com integração analítica em coordenadas locais. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MARTHA,L.F; WAWRZYNEK,P.A; INGRAFFEA,A.R. (1988). Computational Environment for the Simulation of Fracture Processes in Three Dimensions, in Anal. Numer. Aspects of Three Dimensional Fracture Process, A.J. Rosakis et al.(Editors), ASME, AMD 91, 321-327.

- MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. (1996). The partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, V.139, 289-314.
- MELLINGS, S.C; ALIABADI, M.H. (1994). Three-dimensional flaw identification using sensitivity analysis. In: Brebbia, C.A. (ed.), *Boundary elements methods 16th*, 149-156.
- MESQUITA, A.D. (2002). *Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento MEC/MEF progressivo. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.*
- MEHTA, P.K; MONTEIRO, P.J.M. (1994). *Concreto Estrutura Propriedades e Materiais*, Editora PINI.
- MEWS, H. (1987). Calculation of stress intensity factors for various crack problems with the Boundary Element Method. In: C.A.Brebbia, W.L.Wendland and G.Kuhn (Eds). *Boundary Elements IX*, Springer Verlag.
- MI, Y. (1996). Three-dimensional analysis of crack growth. *Topics in Engineering*. V.28, Comp. Mech. Publications.
- MI, Y; ALIABADI, M.H. (1992a). Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, V.10, 161-171.
- MI, Y; ALIABADI, M.H. (1992b). Dual boundary element method for analysis of 3-D crack problems. In: *boundary element 14*, Brebbia C.A. (ed.), V.2, 315-329.
- MI, Y; ALIABADI, M.H. (1994a). Three-dimensional crack growth simulation using BEM, *Computers & Structures*, V.52, 871-878.
- MI, Y; ALIABADI, M.H. (1994b). Discontinuous crack-tip elements: application to 3-D boundary element method. *Int. J. of Fracture*, V.67, R67-R71.
- MI, Y; ALIABADI, M.H. (1995), An automatic procedure for mixed-mode crack growth analysis. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, V.11, 167-177.
- MIKHLIN, S.G. (1957). *Integral equations*. London: Pergamon Press.
- MIKHLIN, S.G. (1965). *Multi-dimensional singular integrals and integral equations*. Oxford: Pergamon Press.
- MIKHLIN, S.G. (1965). *Approximate methods for solution of differential and integral equations*. Oxford: Pergamon Press.
- MODEER, M. (1979). *A Fracture Mechanics Approach to Failure Analysis of concrete Materials*, Report N° TVBM-1001, Division of Building Materials, Lund institute of Technology, Lund, Sweden.

- MURAKAMI, Y. (1976). A simple procedure for the accurate determination of stress intensity factors by finite element method. *Engineering Fracture Mechanics*, V. 8, 643-655.
- MURAKAMI, Y. (1987). *Stress Intensity Factors Handbook*, Pergamon Press.
- MUSKHELISHVILI, N.I. (1953). Some basic problems of mathematical theory of elasticity. Groningen, Holand: Noordhoff.
- NALLATHAMBI, P; KARIHALOO, B.L. (1986). Determination of Specimen-Size Independent Fracture Toughness of Plain Concrete. *Magazine of Concrete Research*, V.38, n.135, 67-76.
- NEWMAN, J.C.J. (1976). A Finite Element Analysis of Fatigue Crack Closure, *ASTM*, 490, 281-301.
- NGO, D; SCORDELIS, A.C. (1967). Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, *Journal of the American Concrete Institute*, V.64, 152-163.
- ONATE, E; OLLER, S; SALOMON, O. (2005). A continuum mechanics model for mechanical fatigue analysis. *Computational Materials Science*, V. 32, Issue 2, 175-195.
- OSIAS, J.R; WILSON, R.B; SEITELMAN, R.A. (1977). Combined boundary integral equation finite element analysis of solids. In: *Symposium on Innovative Numerical Analysis in Applied Eng. Science*, 1st, Versailles, CETIM – Proc.
- PAIVA, J.B. (1993). *Formulação do Método dos Elementos de Contorno para Análise da Interação solo estrutura*. São Carlos. Tese de Livre Docência. Escola de Engenharia de São Carlos – USP.
- PALERMO JR, L. (1989). *Análise de peças delgadas como associação de placas pelo método dos elementos de contorno*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- PAPADOPOULOS, G.A. (1993). *Fracture mechanics: the experimental method of caustics and the det.-criterion of fracture*. London, Springer-Verlag.
- PARIS, F; CAÑAS, J. (1997). *Boundary Element Method fundamentals and applications*, Oxford University Press.
- PEREIRA, J.P.A (2004). *Extração dos Fatores de Intensidade de Tensão utilizando a solução do método dos elementos finitos generalizados*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
- PETERSSON, P.E. (1981). *Crack growth and development of Fracture Zone in Plain Concrete and similar materials*, Report N° TVBM-1006, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund Sweden.
- PLANAS, J; ELICES, M. (1990). Fracture Criteria for concrete: Mathematical approximations and experimental validation, *Engineering Fracture Mechanics*, V. 35 n.1,2,3.

PLANAS, J; ELICES, M; GUINEA, G.V; GÓMEZ, F.J; CENDÓN, D.A; ARBILLA, I. (2003), Generalizations and specializations of cohesive crack models, *Engineering Fracture Mechanics*, V.70, 1759-1776.

POINCARÉ, H.(1910). *Lecons de Mécanique Céleste*, V.3, Chap.10, Paris.

PORTELA, A. (1992). Dual boundary element incremental analysis of crack growth. PhD Thesis, Wessex Institute of Technology, Univ. of Portsmouth, Southampton.

PORTELA, A; ALIABADI, M.H; ROOKE, D.P. (1992). Dual boundary element method: Efficient implementation for cracked problems. *Int. J. Num. Meth. Engn.*, V.33, 1269-1287.

PORTELA, A; ALIABADI, M.H; ROOKE, D.P. (1993). Dual boundary element incremental analysis of crack propagation. *Computers & Structures*, V.46, 237-247.

PORTELA, A; MATOS, P.F.P; MOREIRA, P.M.G.P; CASTRO, P.M.S.T. (2004). Dual boundary element analysis of cracked plates: post-processing implementation of the singularity subtraction technique. *Computers and Structures*, V. 82. 1443–1449.

RASHID, Y.R. (1968). Analysis of Prestressed Concrete Pressure Vessels, *Nuclear Engng and Design*, V.7, 334-344.

REDDY, J.N; CHENG, Z.Q. (2004). Green's functions for an anisotropic thin plate with a crack or an anticrack, *International Journal of Engineering Science*. V.42, 271–289.

RIBEIRO, G. O. (1992). Sobre a formulação do Método dos Elementos de Contorno para a Flexão de Placas usando as hipóteses de Reissner. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos.

RICARDELLA, P.C. (1973). An implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity. Pittsburg: Dept. Mech. Eng., Carnegie-Mellon University

RICE, J.R. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, . *J. Appl Mech*, n. 35, 379-386.

RIZZO, F.J. (1967). An Integral Equation Approach to Boundary Value Problems of Classical Elastostatics, *Quarterly of Applied Mathematics*, V.25, 83-95.

RIZZO, F.J; SHIPPY, D.F. (1968). A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem, *Int. Journ. Solid Structures*, V.4, 1161-1179.

ROCHA, F.S. (1988). Análise de Descontinuidade pelo Método dos Elementos de Contorno, Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos.

ROCHA, J.A.L. (1999). Contribuição para a teoria termodinamicamente consistente da fratura. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos.

RODRÍGUEZ, J.C.G. (1986), Sobre o emprego do método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

SALEH, A.L. (1997). Crack growth in concrete using boundary elements. Topics in Engineering, V. 30, Comp. Mech. Publ.

SHAW, R.P; FALBY, W. (1977). FEBIE: A combined finite element-boundary integralequations method. In: Symposium on Innovative Numerical Analysis in Applied Eng. Science, 1st, Versailles. Proceedings.

SHAH, S.P; SWARTZ, S.E; OUYANG, C. (1995). Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and other quasi-Brittle Materials, John Wiley & Sons, Inc.

SIH,G; PARIS,P; ERDOGAN,F. (1962). Crack tip stress intensity factors for plane extension and plane bending problems. ASME, Série E, V. 84, 306-312.

SIH, G.C. (1973). Handbook of stress Intensity Factor, Institute of Fracture and Solid Mechanics, Lehigh University.

SHI,G,C (1974) – Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems, Int. Journal Fract. Mechanics, V. 10, 305-321.

SILVA, N.A. (1996). Aplicação do Método dos Elementos de Contorno a Placas com enrijecedores utilizando a Teoria de Reissner. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos.

SMIRNOV, V.J. (1964). Integral equations and partial differential equations in a course in higher mathematics, London, Addison-Wesley

SNYDER, M. D; CRUSE, T.A. (1975). Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates, Int. J. Fracture, V.11, 315-328.

SOLLERO, P; ALIABADI, M.H. (1994). Anisotropy analysis of cracks emanating from circular holes in composite laminates using the boundary element. Eng. Fract. Mech., V.49, 213-224.

SOUTHWELL, R.V. (1946). Relaxation Methods in Theoretical Physics, Oxford University Press, London

SYMM, G.T. (1963). Integral equation methods in potential theory II. Proc. Royal Society Ser., v. A275, 33-46.

SWEDLON, G.L; CRUSE, T.A. (1971). Formulation of boundary integral equations for the three dimensional elastoplastic flow. Int. Journal Solids Structures, V.7, 1673-1683.

TANAKA, K. (1974). Fatigue propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis. Engng. Fract. Mech. V.6, 493-507.

TELLES, J.C.F; GUIMARÃES, S. (2000). Green's function: A numerical generation for fracture mechanics problems via Boundary Elements. *Comput. Meth. Appl. Mech.*, V.188, 847-858.

TELLES, J.C.F; GUIMARÃES, S; SILVEIRA, N.P.P (2005). A numerical Green's function BEM formulation for crack growth simulation, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, V. 29,978-985.

TIMOSHENKO, S.P; GOODIER, J.N. (1970). *Theory of Elasticity*, McGraw Hill.

TURNER, M.J; CLOUGH, R.W; MARTIN, H.C; TOPP, J.L. (1956). Stiffness and deflection analysis for complex structures. *Journal Aeronautic Science*, V. 23, n. 9, 805-823.

TVERGAARD, V. (2003). Cohesive zone representations of failure between elastic or rigid solids and ductile solids, *Engineering Fracture Mechanics*, V.70, 1859-1868.

VALLABHAN, C.V.G; SIVAKUMAR, J. (1986). Coupling of BEM and FEM for 3D problems in geotechnical engineering. In: 2nd Boundary Element Technology Conference, MIT, Massachusetts, USA, Proceedings, 675-686.

VANALLI, L. (2004). O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e compostos, Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos.

VENTURINI, W.S. (1982). Application of the boundary element formulation to solve geomechanical problems. Southampton, Ph. D. Thesis – University of Southampton.

VENTURINI, W.S ; BREBBIA, C.A. (1983). Some applications of the boundary element method in geomechanics. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, V.7, 419-434.

VENTURINI, W.S. (1988). Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia. São Carlos. Tese de Livre Docência. Escola de Engenharia de São Carlos – USP.

VENTURINI, W.S. (1994). A new boundary element formulation for crack analysis. In: Brebbia, C.A., (ed.) *Boundary element method XVI*. Southampton/Boston, Computational Methods Publ., 405-412.

VOLTERRA, V. (1896). Sulla inversione degli integrali multipli. *Atti Accad Naz Lincei Rend Cl Sci Fis Mat Natur*. V. 5, 289-300.

WATSON, J.O. (1986). Hermitian cubic end singular elements for plane strain. In: Banerjee P K & Watson J O (eds) *Developments in boundary element methods 4*. Elsevier Applied Science Publ. 1-28.

WATSON, J.O. (1988). Hermitian cubic boundary element for the analysis of cracks of arbitrary geometry. In Cruse, T A (ed) *Advances in Boundary Element Methods*. Springer-Verlag.

WEARING, J.C; BURSTOW, M.C. (1994). Elastoplastic analysis using the coupled boundary element finite element technique. *Engineering analysis with Boundary elements*, V.14, 39-49.

WEN, P; FAN, T. (1994). The discontinuity displacement method applied to three-dimensional co-planar crack problem for any boundary value condition. *Eng. Fract. Mech.*, V.48, 691-702.

WESTERGAARD, H.M. (1939). Bearing pressures and cracks, *J. Appl. Mechanics* n.6 49-53

WUTZOW, W.W. (2003). *Formulação do Método dos Elementos de Contorno para análise de chapas com Enrijecedores*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

YAN,X (2004).A numerical analysis of cracks emanating from a square hole in a rectangular plate under biaxial loads. Technical Note. *Engineering Fracture Mechanics*. V.71. 1615–1623.

YAN,X (2006).Multiple crack fatigue growth modeling by displacement discontinuity method with crack-tip elements. *Applied Mathematical Modelling*. Em processo de publicação.

ZDENEK, P;BAZANT,Z.P; LUZIO,G.D. (2004). Nonlocal microplane model with strain softening yield limits. *International Journal of Solids and Structures*, V.41, 7209-7240.

ZIENKIEWICZ, O.C; KELLY,D.W; BETTESS, P. (1977), The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, V.11, 355-375.

Anexo A. - Integrais Singulares

De forma a tornar as relações mais compactas segue inicialmente a definição de algumas constantes que serão empregadas nas expressões das integrais constantes nas matrizes H e G.

$$C_1 = \frac{(1-2\nu)}{4 \cdot \pi \cdot (1-\nu)} \quad (\text{A.1})$$

$$C_2 = \frac{L}{16 \cdot \pi \cdot \mu \cdot (1-\nu)} \quad (\text{A.2})$$

Nas expressões a serem apresentadas os termos φ_1 e φ_2 representam os cossenos diretores da normal ao elemento de contorno integrado.

Elemento de Contorno Contínuo

As expressões apresentadas referem-se ao nó singular localizado na posição nodal inicial do elemento integrado.

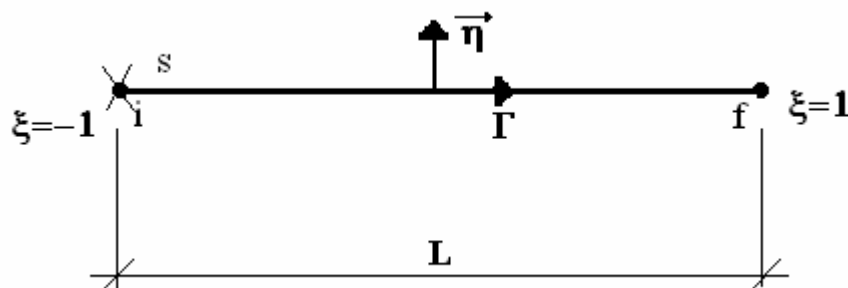


Figura A.1 Elemento de contorno com nó singular sobre o nó inicial

Matriz H

$$H_{12}^1 = C_1 \cdot (1 - \ln(L))$$

$$H_{12}^2 = -C_1$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{22}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^2 = 0$$

(A.3)

Matriz G

$$G_{11}^1 = C_2 \cdot \left[(3 - 4 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + \varphi_2^2 \right]$$

$$G_{22}^1 = C_2 \cdot \left[(3 - 4 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + \varphi_1^2 \right]$$

$$G_{11}^2 = C_2 \cdot \left[(3 - 4 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + \varphi_2^2 \right]$$

$$G_{22}^2 = C_2 \cdot \left[(3 - 4 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + \varphi_1^2 \right]$$

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^1 = G_{21}^2 = -C_2 \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2$$

(A.4)

Caso o ponto singular situe-se sobre o nó final do elemento de contorno integrado as expressões passam a ser.

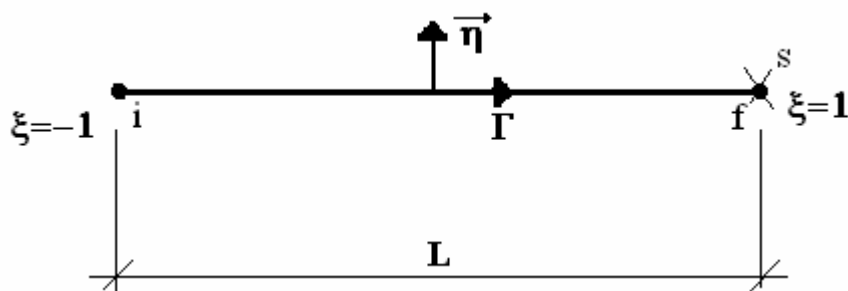


Figura A.2 Elemento de contorno com nó singular sobre o nó final

Matriz H

$$H_{12}^1 = C_1$$

$$H_{12}^2 = -C_1 \cdot (1 - \ln(L))$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{22}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^2 = 0$$

(A.5)

Matriz G

$$G_{11}^1 = C_2 \cdot \left[(3 - 4 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + \varphi_2^2 \right]$$

$$G_{22}^1 = C_2 \cdot \left[(3 - 4 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + \varphi_1^2 \right]$$

$$G_{11}^2 = C_2 \cdot \left[(3 - 4 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + \varphi_2^2 \right]$$

$$G_{22}^2 = C_2 \cdot \left[(3 - 4 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + \varphi_1^2 \right]$$

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^1 = G_{21}^2 = -C_2 \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2$$

(A.6)

Elemento de Contorno Descontínuo

A seguir serão apresentadas as expressões para os elementos de contorno descontínuos.

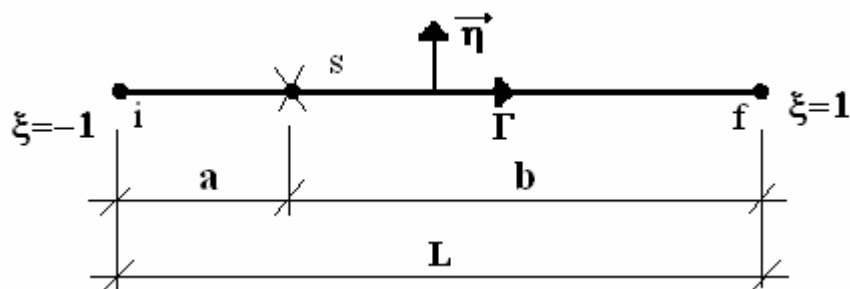


Figura A.3 Elemento de contorno descontínuo

Matriz H

$$H_{12}^1 = \frac{C_1}{L} \cdot \left(L - b \cdot \text{Ln}\left(\frac{b}{a}\right) \right)$$

$$H_{12}^2 = \frac{C_1}{L} \cdot \left(a \cdot \text{Ln}\left(\frac{a}{b}\right) - L \right)$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1 \tag{A.7}$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{22}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^2 = 0$$

Matriz G

$$G_{11}^1 = \frac{2 \cdot C_2}{L^2} \cdot \left\{ -(3 - 4 \cdot v) \cdot \left[\left(a \cdot b + \frac{a^2}{2} \right) \cdot \text{Ln}(a) + \frac{b^2}{2} \cdot \text{Ln}(b) - \left(\frac{a^2}{4} + a \cdot b + \frac{3 \cdot b^2}{4} \right) + \frac{L^2}{2} \cdot \varphi_2^2 \right] \right\}$$

$$G_{22}^1 = \frac{2 \cdot C_2}{L^2} \cdot \left\{ -(3 - 4 \cdot v) \cdot \left[\left(a \cdot b + \frac{a^2}{2} \right) \cdot \text{Ln}(a) + \frac{b^2}{2} \cdot \text{Ln}(b) - \left(\frac{a^2}{4} + a \cdot b + \frac{3 \cdot b^2}{4} \right) + \frac{L^2}{2} \cdot \varphi_1^2 \right] \right\}$$

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^1 = G_{21}^2 = -C_2 \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \tag{A.8}$$

$$G_{11}^2 = \frac{2 \cdot C_2}{L^2} \cdot \left\{ -(3 - 4 \cdot v) \cdot \left[\left(a \cdot b + \frac{b^2}{2} \right) \cdot \text{Ln}(b) + \frac{a^2}{2} \cdot \text{Ln}(a) - \left(\frac{b^2}{4} + a \cdot b + \frac{3 \cdot a^2}{4} \right) + \frac{L^2}{2} \cdot \varphi_2^2 \right] \right\}$$

$$G_{22}^2 = \frac{2 \cdot C_2}{L^2} \cdot \left\{ -(3 - 4 \cdot v) \cdot \left[\left(a \cdot b + \frac{b^2}{2} \right) \cdot \text{Ln}(b) + \frac{a^2}{2} \cdot \text{Ln}(a) - \left(\frac{b^2}{4} + a \cdot b + \frac{3 \cdot a^2}{4} \right) + \frac{L^2}{2} \cdot \varphi_1^2 \right] \right\}$$

Anexo B. - Integrais Analíticas Hiper-Singulares

Para tornar as relações mais compactas a seguir serão definidas algumas constantes.

$$C_1 = \frac{-1}{8 \cdot \pi \cdot \mu \cdot (1 - \nu)} \quad (\text{B.1})$$

$$C_2 = (3 - 4 \cdot \nu) \quad (\text{B.2})$$

$$C_3 = \frac{-1}{4 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \quad (\text{B.3})$$

$$C_4 = (1 - 2 \cdot \nu) \quad (\text{B.4})$$

$$C_5 = (1 - 4 \cdot \nu) \quad (\text{B.5})$$

$$C_6 = \frac{\mu}{2 \cdot \pi \cdot (1 - \nu)} \quad (\text{B.6})$$

$$\phi_1 = \left(1 - \frac{y_s}{L}\right) \quad (\text{B.7})$$

$$\phi_2 = \frac{y_s}{L} \quad (\text{B.8})$$

Nas expressões a serem apresentadas os termos ϕ_1 e ϕ_2 não são as funções de forma, mas sim as partes constantes das mesmas que foram usadas para simplificar a representação dos resultados.

Ponto Fonte não alinhado com o elemento

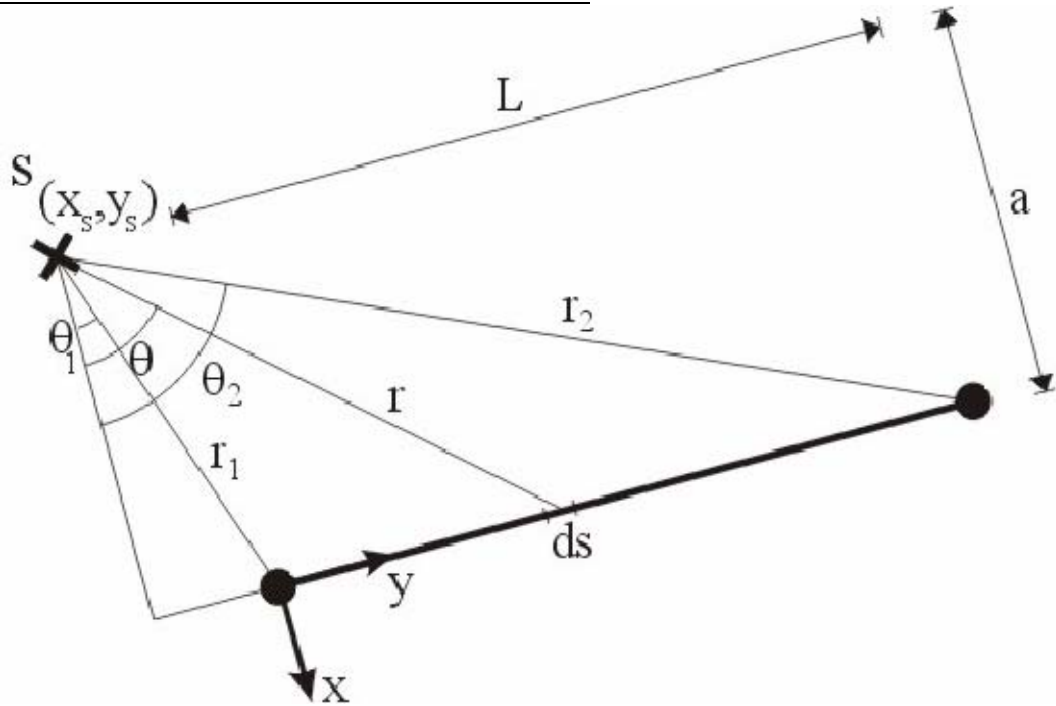


Figura B.1 Ponto fonte não alinhado com o elemento. WUTZOW (2003).

Matriz S

$$S_{11}^1 = \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 + 4 \cdot \nu) \cdot (\text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2) - (2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2))^3 + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + 3 \cdot \theta_2 \right) + (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \theta_2 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[-(2 \cdot C_4 + 4 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta_2)^2 + \right. \\ \left. + 2 \cdot \cos(\theta_2)^4 - (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \left. \right\} - \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 + 4 \cdot \nu) \cdot (\text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1) + \right. \right. \\ \left. \left. - (2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1))^3 + 3 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + 3 \cdot \theta_1 \right) + (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \theta_1 \right] \cdot \phi_1 + \\ \left. - \frac{a}{L} \cdot \left[-(2 \cdot C_4 + 4 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta_1)^2 + 2 \cdot \cos(\theta_1)^4 - (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\} \quad (\text{B.9})$$

$$S_{12}^1 = \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[-(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta_2)^2 + 2 \cdot \cos(\theta_2)^4 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot (-\text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \right. \right. \\ \left. \left. + \theta_2) - (-2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2))^3 + \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right] \right\} + \\ - \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[-(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta_1)^2 + 2 \cdot \cos(\theta_1)^4 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot (-\text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \theta_1) - (-2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1))^3 + \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\} \quad (\text{B.10})$$

$$S_{21}^1 = S_{12}^1 \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned}
S_{22}^1 &= \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \theta_2 - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2)^3 + \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right) \right] \cdot \phi_1 + \right. \\
&\left. - \frac{a}{L} \cdot \left[-\nu \cdot \left(\text{sen}(\theta_2)^2 + \cos(\theta_2)^2 + 2 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right) \right] - 2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^4 - C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right\} + \\
&- \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \theta_1 - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1)^3 + \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right) \right] \cdot \phi_1 + \right. \\
&\left. - \frac{a}{L} \cdot \left[-\nu \cdot \left(\text{sen}(\theta_1)^2 + \cos(\theta_1)^2 + 2 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right) \right] - 2 \cdot \text{sen}(\theta_1)^4 - C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right\} \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{31}^1 &= \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \theta_2 - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2)^3 + \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right) \right] \cdot \phi_1 + \right. \\
&\left. - \frac{a}{L} \cdot \left[-2 \text{sen}(\theta_2)^4 - (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \right\} + \\
&- \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \theta_1 - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1)^3 + \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right) \right] \cdot \phi_1 + \right. \\
&\left. - \frac{a}{L} \cdot \left[-2 \text{sen}(\theta_1)^4 - (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\} \quad (\text{B.13})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{32}^1 &= \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[-(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta_2)^2 - 2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^4 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \left(-\text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \right. \right. \right. \\
&\left. \left. \left. + \theta_2 \right) - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^3 \cdot \cos(\theta_2) - 3 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + 3 \cdot \theta_2 \right) \right] \right\} + \\
&- \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[-(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta_1)^2 - 2 \cdot \cos(\theta_1)^4 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \left(-\text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \right. \right. \right. \\
&\left. \left. \left. + \theta_1 \right) - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_1)^3 \cdot \cos(\theta_1) - 3 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + 3 \cdot \theta_1 \right) \right] \right\} \quad (\text{B.14})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{11}^2 &= \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 + 4 \cdot \nu) \cdot \left(\text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right) - \left(2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2)^3 + \right. \right. \right. \\
&\left. \left. \left. + 3 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + 3 \cdot \theta_2 \right) + (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \theta_2 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[-(2 \cdot C_4 + 4 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta_2)^2 + \right. \right. \\
&\left. \left. + 2 \cdot \cos(\theta_2)^4 - (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \right\} - \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 + 4 \cdot \nu) \cdot \left(\text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right) + \right. \right. \\
&\left. \left. - \left(2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1)^3 + 3 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + 3 \cdot \theta_1 \right) + (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \theta_1 \right] \cdot \phi_2 + \right. \\
&\left. + \frac{a}{L} \cdot \left[-(2 \cdot C_4 + 4 \cdot \nu) \cdot \cos(\theta_1)^2 + 2 \cdot \cos(\theta_1)^4 - (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\} \quad (\text{B.15})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{12}^1 = \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[-(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \cos(\theta_2)^2 + 2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^4 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot (-\text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \right. \right. \\
\left. \left. + \theta_2) - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2)^3 + \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right) \right] \right\} + \\
- \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[-(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \cos(\theta_1)^2 + 2 \cdot \cos(\theta_1)^4 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot (-\text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \right. \right. \\
\left. \left. + \theta_1) - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1)^3 + \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right) \right] \right\} \quad (\text{B.16})
\end{aligned}$$

$$S_{21}^2 = S_{12}^2 \quad (\text{B.17})$$

$$\begin{aligned}
S_{22}^2 = \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \theta_2 - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2)^3 + \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right) \right] \cdot \phi_2 + \right. \\
\left. + \frac{a}{L} \cdot \left[-v \cdot \left(\text{sen}(\theta_2)^2 + \cos(\theta_2)^2 + 2 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right) \right] - 2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^4 - C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right\} + \\
- \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \theta_1 - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1)^3 + \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right) \right] \cdot \phi_2 + \right. \\
\left. + \frac{a}{L} \cdot \left[-v \cdot \left(\text{sen}(\theta_1)^2 + \cos(\theta_1)^2 + 2 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right) \right] - 2 \cdot \text{sen}(\theta_1)^4 - C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right\} \quad (\text{B.18})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{31}^2 = \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \theta_2 - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2)^3 + \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right) \right] \cdot \phi_2 + \right. \\
\left. + \frac{a}{L} \cdot \left[-2 \text{sen}(\theta_2)^4 - (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) \right] \right\} + \\
- \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \theta_1 - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1)^3 + \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right) \right] \cdot \phi_2 + \right. \\
\left. + \frac{a}{L} \cdot \left[-2 \text{sen}(\theta_1)^4 - (2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) \right] \right\} \quad (\text{B.19})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{32}^2 = \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[-(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \cos(\theta_2)^2 - 2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^4 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot (-\text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \right. \right. \\
\left. \left. + \theta_2) - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^3 \cdot \cos(\theta_2) - 3 \cdot \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + 3 \cdot \theta_2 \right) \right] \right\} + \\
- \frac{C_6}{a} \cdot \left\{ \left[-(C_4 + 2 \cdot v) \cdot \cos(\theta_1)^2 - 2 \cdot \cos(\theta_1)^4 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \left[(C_4 + 2 \cdot v) \cdot (-\text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \right. \right. \\
\left. \left. + \theta_1) - \left(-2 \cdot \text{sen}(\theta_1)^3 \cdot \cos(\theta_1) - 3 \cdot \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + 3 \cdot \theta_1 \right) \right] \right\} \quad (\text{B.20})
\end{aligned}$$

Matriz D

$$D_{11}^1 = -C_3 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 1) \cdot \theta_2 + \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[-C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 1) \cdot \theta_1 + \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[-C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \right\} \quad (\text{B.21})$$

$$D_{12}^1 = -C_3 \cdot \left\{ \left[C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[-C_4 \cdot (\tan(\theta_2) - \theta_2) - \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[-C_4 \cdot (\tan(\theta_1) - \theta_1) - \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\} \quad (\text{B.22})$$

$$D_{21}^1 = -C_3 \cdot \left\{ \left[-C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[C_4 \cdot (\tan(\theta_2) - \theta_2) - \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[-C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[C_4 \cdot (\tan(\theta_1) - \theta_1) - \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\} \quad (\text{B.23})$$

$$D_{22}^1 = -C_3 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 1) \cdot \theta_2 - \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[(-C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 1) \cdot \theta_1 - \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[(-C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \right\} \quad (\text{B.24})$$

$$D_{31}^1 = -C_3 \cdot \left\{ \left[(-C_4 + 1) \cdot \theta_2 - \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[(C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[(-C_4 + 1) \cdot \theta_1 - \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[(C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \right\} \quad (\text{B.25})$$

$$D_{32}^1 = -C_3 \cdot \left\{ \left[(-C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[C_4 \cdot (\tan(\theta_2) - \theta_2) + \frac{2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^5}{\cos(\theta_2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^3 + \cos(\theta_2) + 3 \cdot \cos(\theta_2) \cdot \text{sen}(\theta_2) - 3 \cdot \theta_2 \right] \right\} + C_3 \cdot \left\{ \left[(-C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) + \right. \right. \\ \left. \left. - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \cdot \phi_1 - \frac{a}{L} \cdot \left[C_4 \cdot (\tan(\theta_1) - \theta_1) + \frac{2 \cdot \text{sen}(\theta_1)^5}{\cos(\theta_1)} + 2 \cdot \text{sen}(\theta_1)^3 + \cos(\theta_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \text{sen}(\theta_1) - 3\theta_1 \right] \right\} \quad (\text{B.26})$$

$$D_{11}^2 = -C_3 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 1) \cdot \theta_2 + \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[-C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 1) \cdot \theta_1 + \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[-C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \right\} \quad (\text{B.27})$$

$$D_{12}^2 = -C_3 \cdot \left\{ \left[C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[-C_4 \cdot (\tan(\theta_2) - \theta_2) - \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[-C_4 \cdot (\tan(\theta_1) - \theta_1) - \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\} \quad (\text{B.28})$$

$$D_{21}^2 = -C_3 \cdot \left\{ \left[-C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[C_4 \cdot (\tan(\theta_2) - \theta_2) - \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) + \theta_2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[-C_4 \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[C_4 \cdot (\tan(\theta_1) - \theta_1) - \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\} \quad (\text{B.29})$$

$$D_{22}^2 = -C_3 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 1) \cdot \theta_2 - \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[(-C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 1) \cdot \theta_1 - \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[(-C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \right\} \quad (\text{B.30})$$

$$D_{31}^2 = -C_3 \cdot \left\{ \left[(-C_4 + 1) \cdot \theta_2 - \text{sen}(\theta_2) \cdot \cos(\theta_2) \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[(C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\ + C_3 \cdot \left\{ \left[(-C_4 + 1) \cdot \theta_1 - \text{sen}(\theta_1) \cdot \cos(\theta_1) \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[(C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \right\} \quad (\text{B.31})$$

$$D_{32}^2 = -C_3 \cdot \left\{ \left[(-C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_2)) - \text{sen}(\theta_2)^2 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[C_4 \cdot (\tan(\theta_2) - \theta_2) + \frac{2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^5}{\cos(\theta_2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2 \cdot \text{sen}(\theta_2)^3 + \cos(\theta_2) + 3 \cdot \cos(\theta_2) \cdot \text{sen}(\theta_2) - 3 \cdot \theta_2 \right] \right\} + C_3 \cdot \left\{ \left[(-C_4 - 2) \cdot \text{Ln}(\cos(\theta_1)) + \right. \right. \\ \left. \left. - \text{sen}(\theta_1)^2 \right] \cdot \phi_2 + \frac{a}{L} \cdot \left[C_4 \cdot (\tan(\theta_1) - \theta_1) + \frac{2 \cdot \text{sen}(\theta_1)^5}{\cos(\theta_1)} + 2 \cdot \text{sen}(\theta_1)^3 + \cos(\theta_1) + \right. \right. \\ \left. \left. + 3 \cdot \cos(\theta_1) \cdot \text{sen}(\theta_1) - 3 \theta_1 \right] \right\} \quad (\text{B.32})$$

Ponto Fonte alinhado com o elemento posicionado atrás do mesmo

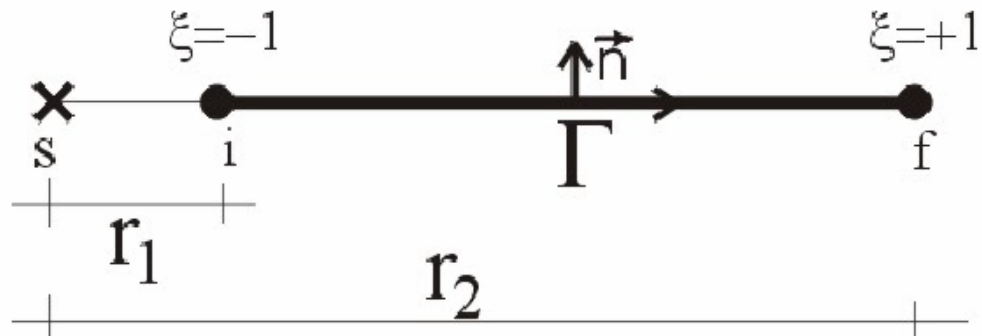


Figura B.2 Ponto fonte alinhado com o elemento posicionado atrás do mesmo. WUTZOW (2003).

Matriz S

$$S_{11}^1 = C_6 \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \left(-\frac{1}{r_2} \right) \right] \cdot \phi_1 - \frac{1}{L} \cdot [(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot Ln(r_2)] \right\} +$$

$$-C_6 \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] \cdot \phi_1 - \frac{1}{L} \cdot [(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot Ln(r_1)] \right\} \quad (B.33)$$

$$S_{11}^2 = C_6 \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \left(-\frac{1}{r_2} \right) \right] \cdot \phi_2 - \frac{1}{L} \cdot [(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot Ln(r_2)] \right\} +$$

$$-C_6 \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] \cdot \phi_2 - \frac{1}{L} \cdot [(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot Ln(r_1)] \right\} \quad (B.34)$$

$$S_{22}^1 = C_6 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \left(-\frac{1}{r_2} \right) \right] \cdot \phi_1 - \frac{1}{L} \cdot [(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot Ln(r_2)] \right\} +$$

$$-C_6 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] \cdot \phi_1 - \frac{1}{L} \cdot [(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot Ln(r_1)] \right\} \quad (B.35)$$

$$S_{22}^2 = C_6 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \left(-\frac{1}{r_2} \right) \right] \cdot \phi_2 + \frac{1}{L} \cdot [(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot Ln(r_2)] \right\} +$$

$$-C_6 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] \cdot \phi_2 + \frac{1}{L} \cdot [(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot Ln(r_1)] \right\} \quad (B.35)$$

$$S_{31}^1 = S_{11}^1 \quad (B.36)$$

$$S_{31}^2 = S_{11}^2 \quad (B.37)$$

$$S_{12}^1 = S_{21}^1 = S_{32}^1 = S_{12}^2 = S_{21}^2 = S_{32}^2 = 0 \quad (B.38)$$

Matriz D

$$D_{12}^1 = C_3 \cdot C_4 \cdot \left\{ -\left(\frac{r_2}{L} \right) - \phi_2 \cdot Ln(r_2) + Ln(r_2) + \left(\frac{r_1}{L} \right) - \phi_2 \cdot Ln(r_1) - Ln(r_1) \right\} \quad (B.39)$$

$$D_{12}^2 = C_3 \cdot C_4 \cdot \left\{ \left(\frac{r_2}{L} \right) + \phi_2 \cdot Ln(r_2) - \left(\frac{r_1}{L} \right) - \phi_2 \cdot Ln(r_1) \right\} \quad (B.40)$$

$$D_{32}^1 = (-C_3 \cdot C_4 - 2 \cdot C_3) \cdot \left\{ -\left(\frac{r_2}{L} \right) + \phi_2 \cdot Ln(r_2) + Ln(r_2) + \left(\frac{r_1}{L} \right) + \phi_2 \cdot Ln(r_1) - Ln(r_1) \right\} \quad (B.41)$$

$$D_{12}^2 = (-C_3 \cdot C_4 - 2 \cdot C_3) \cdot \left\{ \left(\frac{r_2}{L} \right) + \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_2) - \left(\frac{r_1}{L} \right) - \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_1) \right\} \quad (\text{B.42})$$

$$D_{21}^1 = -D_{12}^1 \quad (\text{B.43})$$

$$D_{21}^2 = -D_{12}^2 \quad (\text{B.44})$$

$$D_{11}^1 = D_{22}^1 = D_{31}^1 = D_{11}^2 = D_{22}^2 = D_{31}^2 = 0 \quad (\text{B.45})$$

Ponto Fonte alinhado com o elemento posicionado a frente do mesmo

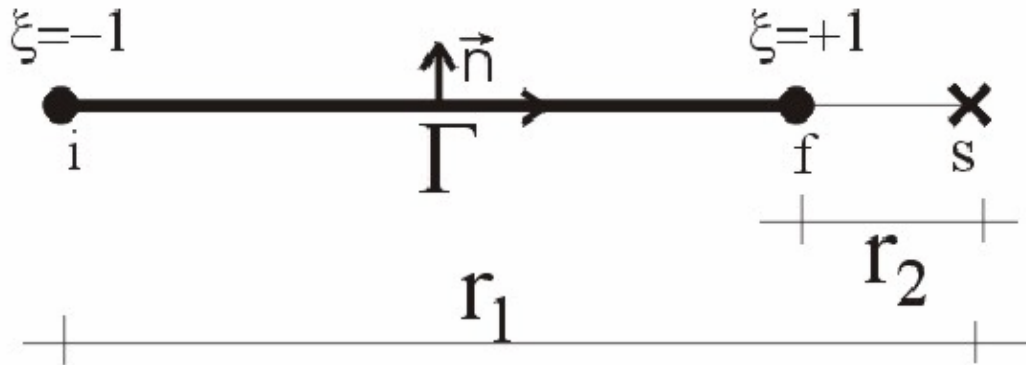


Figura B.3 Ponto fonte alinhado com o elemento posicionado a frente do mesmo. WUTZOW (2003).

Matriz S

$$S_{11}^1 = C_6 \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] \cdot \phi_1 - \frac{1}{L} \cdot [(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(r_2)] \right\} + \\ - C_6 \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \cdot \phi_1 - \frac{1}{L} \cdot [(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(r_1)] \right\} \quad (\text{B.46})$$

$$S_{11}^2 = C_6 \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] \cdot \phi_2 + \frac{1}{L} \cdot [(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(r_2)] \right\} + \\ - C_6 \cdot \left\{ \left[(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \cdot \phi_2 + \frac{1}{L} \cdot [(2 \cdot C_4 - C_5) \cdot \text{Ln}(r_1)] \right\} \quad (\text{B.47})$$

$$S_{22}^1 = C_6 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] \cdot \phi_1 - \frac{1}{L} \cdot [(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \text{Ln}(r_2)] \right\} + \\ - C_6 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \cdot \phi_1 - \frac{1}{L} \cdot [(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \text{Ln}(r_1)] \right\} \quad (\text{B.48})$$

$$S_{22}^2 = C_6 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] \cdot \phi_2 + \frac{1}{L} \cdot [(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \text{Ln}(r_2)] \right\} +$$

$$-C_6 \cdot \left\{ \left[(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \cdot \phi_2 + \frac{1}{L} \cdot [(C_4 + 2 \cdot \nu) \cdot \text{Ln}(r_1)] \right\} \quad (\text{B.49})$$

$$S_{31}^1 = S_{11}^1 \quad (\text{B.50})$$

$$S_{31}^2 = S_{11}^2 \quad (\text{B.51})$$

$$S_{12}^1 = S_{21}^1 = S_{32}^1 = S_{12}^2 = S_{21}^2 = S_{32}^2 = 0 \quad (\text{B.52})$$

Matriz D

$$D_{12}^1 = C_3 \cdot C_4 \cdot \left\{ \left(\frac{r_2}{L} \right) - \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_2) + \text{Ln}(r_2) + \left(\frac{r_1}{L} \right) - \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_1) - \text{Ln}(r_1) \right\} \quad (\text{B.53})$$

$$D_{12}^2 = C_3 \cdot C_4 \cdot \left\{ -\left(\frac{r_2}{L} \right) + \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_2) + \left(\frac{r_1}{L} \right) - \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_1) \right\} \quad (\text{B.54})$$

$$D_{32}^1 = (-C_3 \cdot C_4 - 2 \cdot C_3) \cdot \left\{ \left(\frac{r_2}{L} \right) - \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_2) + \text{Ln}(r_2) - \left(\frac{r_1}{L} \right) - \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_1) - \text{Ln}(r_1) \right\} \quad (\text{B.55})$$

$$D_{12}^2 = (-C_3 \cdot C_4 - 2 \cdot C_3) \cdot \left\{ \left(\frac{r_2}{L} \right) + \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_2) + \left(\frac{r_1}{L} \right) - \phi_2 \cdot \text{Ln}(r_1) \right\} \quad (\text{B.56})$$

$$D_{21}^1 = -D_{12}^1 \quad (\text{B.57})$$

$$D_{21}^2 = -D_{12}^2 \quad (\text{B.58})$$

$$D_{11}^1 = D_{22}^1 = D_{31}^1 = D_{11}^2 = D_{22}^2 = D_{31}^2 = 0 \quad (\text{B.59})$$

Ponto Fonte pertence ao elemento a ser integrado

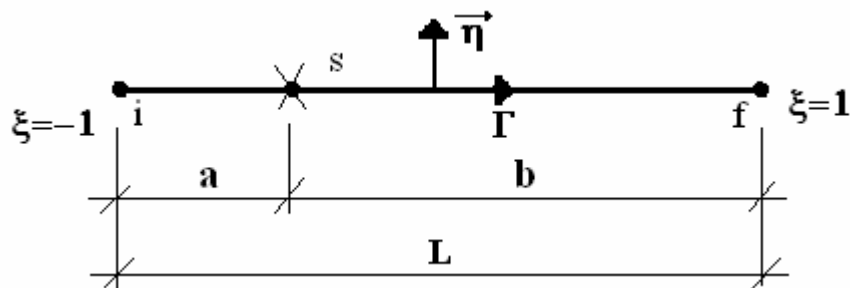


Figura B.4 Ponto fonte pertence ao elemento a ser integrado.

Matriz S

$$S_{ij}^1 = C_3 \cdot \left\{ \text{Ln}(a) - \text{Ln}(b) - \frac{b}{a} - 1 \right\} \quad (\text{B.60})$$

$$S_{ij}^2 = C_3 \cdot \left\{ -\ln(a) + \ln(b) - \frac{a}{b} - 1 \right\} \quad (\text{B.61})$$

Matriz D

$$D_{ij}^1 = C_4 \cdot \left\{ b \cdot [\ln(a) - \ln(b) + 1] + a \right\} \quad (\text{B.62})$$

$$D_{ij}^2 = C_4 \cdot \left\{ a \cdot [\ln(a) - \ln(b) - 1] - a \right\} \quad (\text{B.63})$$

Anexo C.- Sub-Elementação

Quando o ponto de colocação considerado não pertencer ao elemento de contorno a ser integrado procedimentos numéricos devem ser empregados para a realização do processo de integração. Normalmente emprega-se o procedimento de integração de Gauss-Legendre o qual consiste em aproximar o valor de uma dada integral, situada em um intervalo normalizado e -1 a 1 , pela integral de um polinômio interpolador nesse trecho. A integral do polinômio é efetuada tomando-se o somatório do valor da função polinomial em determinadas abscissas multiplicado-os por fatores de ponderação.

No entanto quando o ponto de colocação encontra-se não muito distante do elemento de contorno a ser integrado o procedimento numérico de integração não conduz a bons resultados. Isso se deve ao fato do núcleo dos termos integrais apresentarem elevados gradientes tornando a integral quase singular mesmo com um número elevado de pontos de integração.

De forma a contornar esse problema pode ser utilizada a técnica de sub-elementação o qual consiste basicamente em dividir o elemento de contorno a ser integrado em elementos menores (sub-elementos). Os sub-elementos podem ser de igual comprimento ou então tomar a forma progressiva, sendo essa última a mais indicada.

Para a formulação dos sub-elementos admite-se como válida a seguinte relação:

$$\int_{\Gamma_j} f(\Gamma_j) \varphi_\eta d\Gamma_j = \sum_{i=1}^{NSub} \int_{\Gamma_{ji}} f(\Gamma_{ji}) \varphi_\eta d\Gamma_{ji} \quad (C.1)$$

Onde o posicionamento das variáveis pode ser visualizado na Fig. (C.1).

Transformando o intervalo de integração em coordenadas adimensionais η pode-se reescrever a Eq. (C.1) como:

$$\begin{aligned} \Gamma = a_i &\rightarrow \eta = -1 \\ \Gamma = b_i &\rightarrow \eta = 1 \end{aligned} \quad (C.2)$$

$$\int_{\Gamma_j} f(\Gamma_j) \varphi_\eta d\Gamma_j = \sum_{i=1}^{NSub} \frac{L_i}{2} \int_{-1}^1 f(\eta) \varphi_\eta d\eta \quad (C.3)$$

Deve-se atentar para o fato de que as funções de forma φ_η estão referenciadas ao sistema adimensional ε . No procedimento de sub-elementação o sistema adimensional adotado é na variável η e assim uma correlação entre os dois sistemas deve existir para o cálculo da integral.

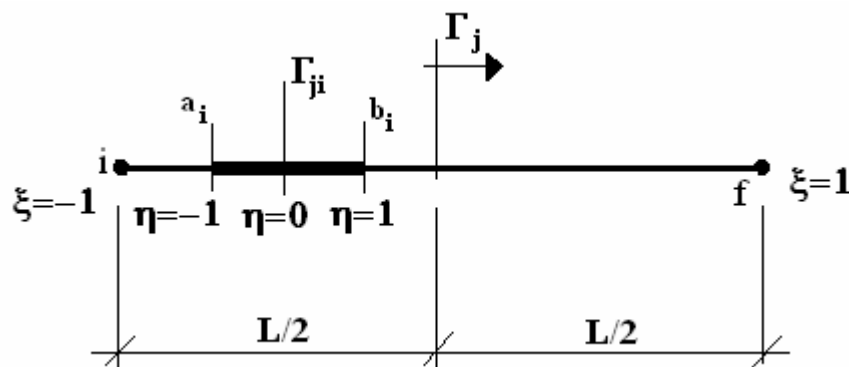


Figura C.1 Integração com sub-elemento

Para a aplicação do procedimento de sub-elementação deve-se inicialmente pesquisar quais os elementos de contorno que realmente necessitam dessa ferramenta para a melhoria da precisão das integrais envolvidas. Para identificá-los, e determinar quais as dimensões dos sub-elementos, deve-se inicialmente calcular a distância do ponto de colocação ao elemento a ser integrado bem como os co-senos diretores da reta representativa dessa distância conforme apresenta a Fig. (C.2).

$$r = \sqrt{(x_i - x_a)^2 + (y_i - y_a)^2} \quad (C.4)$$

$$\cos(\beta) = \frac{x_a - x_i}{r} \quad (C.5)$$

$$\text{sen}(\beta) = \frac{y_a - y_i}{r} \quad (C.6)$$

Da Fig. (C.2) pode-se constatar que:

$$\gamma = \beta - \alpha \rightarrow \cos(\gamma) = \cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \text{sen}(\alpha) \cdot \text{sen}(\beta) \quad (C.7)$$

E assim o ângulo ψ pode ser escrito como:

$$\psi = \pi - \gamma \quad (C.8)$$

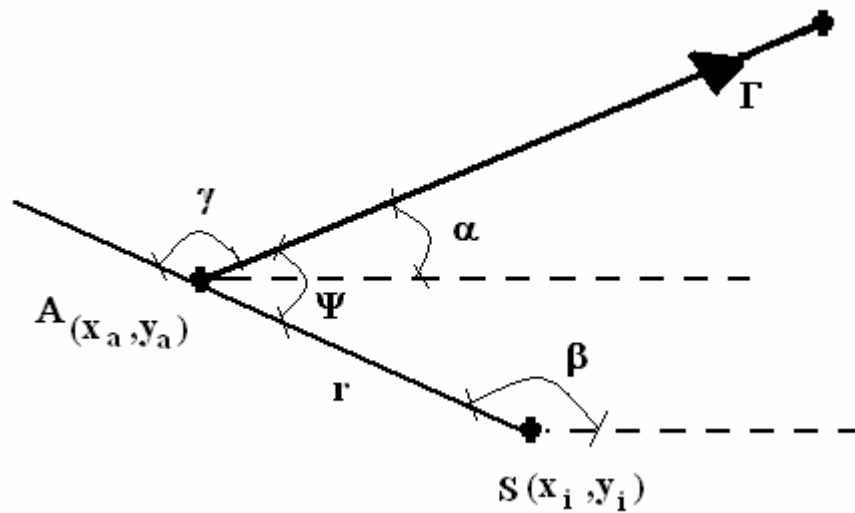


Figura C.2 Teste para verificar a necessidade de sub-elemento

O teste a ser efetuado refere-se ao ângulo ψ . Se esse ângulo for inferior a 60° então o comprimento do sub-elemento será dado pela interseção da mediatriz da distância r com o elemento a ser integrado conforme apresenta a Fig. (C.3).

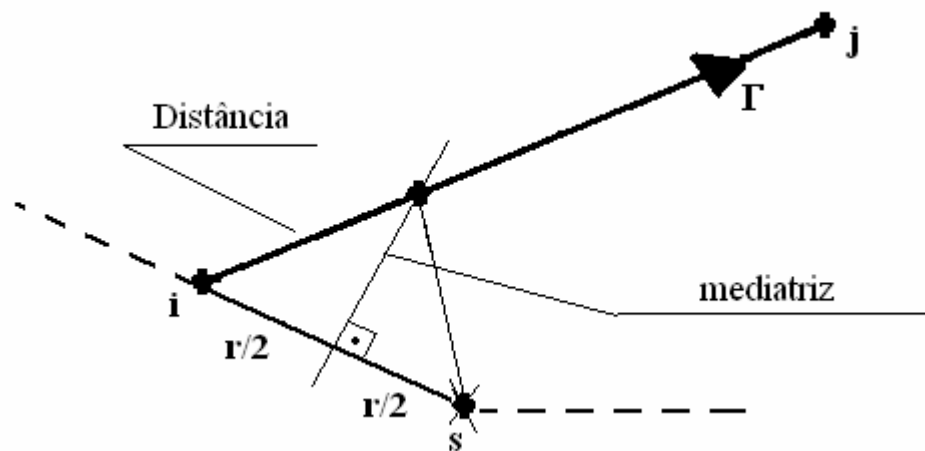


Figura C.3 Comprimento do sub-elemento

Dessa forma o comprimento do sub-elemento será dado pela seguinte relação:

$$\cos(\psi) = \frac{\left(\frac{r}{2}\right)}{\text{distância}} \rightarrow \text{distância} = \left| \frac{r}{2 \cdot \cos(\psi)} \right| \quad (\text{C.9})$$

Conforme apresenta a Eq. (C.8) pode-se concluir que:

$$\cos(\psi) = -\cos(\gamma) \quad (\text{C.10})$$

Caso o ângulo ψ seja maior que 60° o comprimento do sub-elemento será igual a distância r .

Esse procedimento deve ser repetido até que o somatório do comprimento dos sub-elementos seja maior ou igual ao elemento integrado. Caso esse somatório resulte em comprimento superior ao do elemento integrado o último sub-elemento deve sofrer um processo de correção de comprimento de forma que o somatório sempre coincida com o comprimento total do elemento integrado.

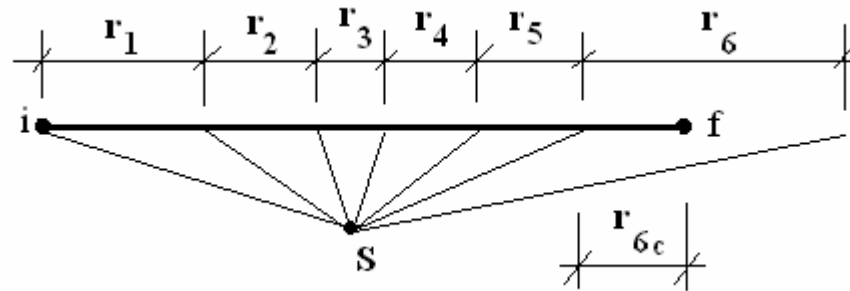


Figura C.4 Correção no comprimento do sub-elemento

Anexo D. - O Concreto Estrutural

O concreto é um dos materiais de maior utilização no campo da engenharia civil, tanto pelo custo associado quanto pelo fácil acesso. Além disso, o concreto não requer mão de obra especializada (ao contrário do aço) o que permite sua utilização inclusive em regiões de menores recursos econômico e humano.

Apesar de sua larga utilização o concreto apresenta um comportamento substancialmente complexo em consequência de sua não homogeneidade. Dessa forma fatores como ruptura frágil, diferentes respostas a tensões de tração e compressão e relação tensão-deformação não-linear encontram explicação em sua intrincada estrutura interna.

O Concreto

O concreto é o material mais empregado em edificações e um dos materiais mais utilizados no mundo. O consumo de concreto só é menor que o da água no planeta sendo aproximadamente de seis bilhões de toneladas/ano.

Esse elevado consumo pode ser atribuído a algumas propriedades do concreto que o tornam mais adequado em diversas aplicações:

- *Resistência à água:* Os elementos de concreto apresentam um bom comportamento quando submetidos à ação da água. Essa propriedade o faz adequado como material constituinte de barragens, tanques e condutos de água como pode ser observado no Brasil e em grande parte do mundo. Se corretamente executado a durabilidade dessas estruturas pode ser considerável como se observa em condutos de água na Itália e em reservatórios na Grécia.

- *Facilidade de adequação de formas*: O concreto fresco apresenta uma consistência plástica que o permite fluir por formas complexas. Pode-se constatar essa propriedade em inúmeras estátuas e monumentos dispersos pelo mundo.
- *Economicamente acessível*: Dos materiais estruturais o concreto é o que apresenta menor custo além de ser o mais facilmente disponível no canteiro. Segundo estudos realizados por MEHTA e MONTEIRO (1994) estima-se que o preço por quilograma de concreto pode chegar a R\$ 0,06 em algumas regiões. Além disso, grande quantidade de resíduos industriais podem ser reciclados no concreto tornando-o ainda adequado do ponto de vista de conservação de recursos naturais.

Apesar de todas essas vantagens em relação ao emprego do concreto o conhecimento de suas propriedades físicas e de seu comportamento sob várias combinações de tensões ainda merecem atenção especial dos pesquisadores.

O concreto pode ser definido como um material composto consistindo de uma matriz de aglomerante sobre a qual estão dispersas partículas de agregados. Sua estrutura altamente não homogênea faz com que o concreto apresente características marcantes como ruptura frágil, relação tensão-deformação não linear, diferentes reações e comportamentos a tensões de tração e compressão e efeitos dependentes do tempo. Esse comportamento característico do concreto é largamente influenciado pela zona de transição presente em sua microestrutura interna.

A zona de transição localiza-se ao redor dos agregados graúdos formando uma região interfacial entre o agregado graúdo e a pasta de cimento. Essa zona é geralmente menos resistente que os demais constituintes do concreto exercendo, portanto, influência sensível no comportamento mecânico do concreto.

A formação da zona de transição deve-se a exsudação interna, ou seja, pela formação de uma película de água ao redor dos agregados graúdos, decorrente dos processos de adensamento. Isso faz com que a relação água/cimento seja mais elevada nas proximidades dos agregados graúdos. O fato dessa região apresentar fator água/cimento mais elevado a torna suscetível a formação de produtos de hidratação relativamente grandes, destacando-se a Etringita e a Portlandita, fazendo com que essa região seja mais porosa do que a matriz aglomerante. Além da porosidade a orientação em planos de clivagem da Portlandita torna a zona de transição consideravelmente menos resistente.

Comportamento do Concreto à Compressão Uniaxial

A resistência do concreto é fortemente influenciada pelo processo de fissuração tanto na zona de transição quanto na matriz aglomerante. Um diagrama tensão-deformação uniaxial típico de um ensaio de compressão apresentado na Fig. (D.1) ilustra essa dependência.

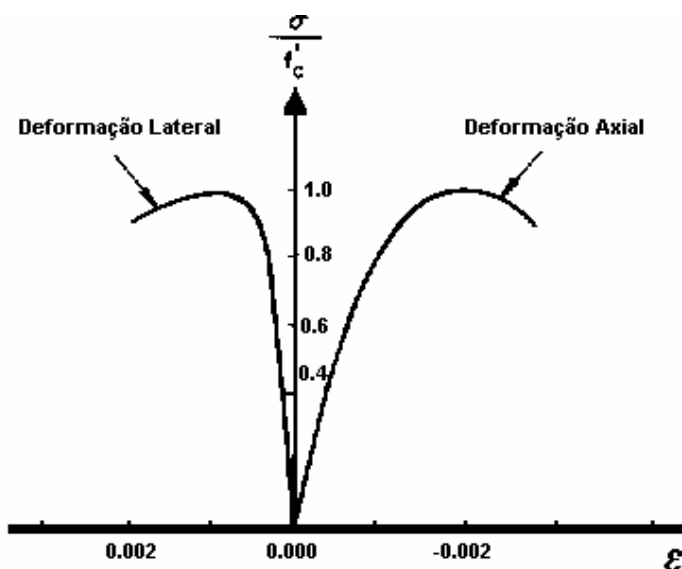


Figura D.1 Diagrama tensão x deformação típico compressão uniaxial do concreto CHEN & HAN (1988)

Para cargas até 30% da resistência à compressão uniaxial, F_c , observa-se um comportamento praticamente elástico-linear, pois cargas nessa faixa não afetam significativamente as microfissuras presentes na zona de transição.

Com tensões no intervalo entre 30% a 50% F_c começa a ocorrer a extensão das fissuras presentes na zona de transição devido à concentração de tensões na extremidade das fissuras. Diz-se que esse trecho apresenta propagação estável de fissuras, pois mantido o carregamento constante não ocorre propagação das fissuras.

No intervalo de carregamento entre 50% a 75% F_c inicia-se a extensão das microfissuras presentes na matriz aglomerante e aliada à rápida propagação das fissuras da zona de transição tende a tornar o sistema instável.

A propagação das fissuras no concreto torna-se instável para carregamentos superiores a 75% F_c . Nesse intervalo ocorre a conexão entre as fissuras da zona de transição e da matriz aglomerante e rapidamente observa-se a ruína da peça.

Comportamento do Concreto à Tração Uniaxial

O comportamento do concreto à tração uniaxial apresenta algumas semelhanças em relação ao observado na compressão uniaxial o que pode ser constatado em um diagrama tensão-deformação típico de um ensaio de tração, apresentado na Fig. (D.2).

Para níveis de tensão inferiores a 60% resistência à tração uniaxial, F_t , a propagação das fissuras pode ser desprezada, sendo esse limite considerado como elástico.

Para tensões no intervalo de 60% a 75% F_t inicia-se a extensão das fissuras tanto na zona de transição quanto na matriz de argamassa.

Acima de 75% F_t observa-se o início do ramo descendente da curva causado pela conexão das fissuras da zona de transição e da matriz aglomerante. Esse intervalo de carregamento é muito curto devido à rápida propagação das fissuras no elemento tracionado.

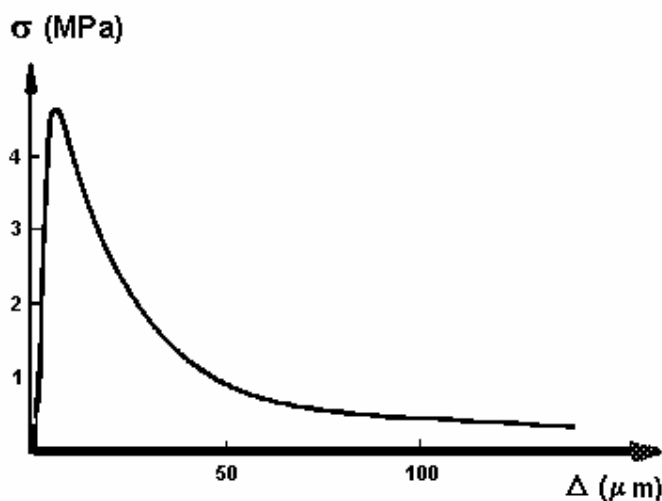


Figura D.2 Diagrama tensão x deformação típico a tração uniaxial do concreto CHEN & HAN (1988)

Observa-se através dos diagramas das Fig. (D.1) e Fig. (D.2) que o intervalo estável de propagação das fissuras é menor na tração. Esse fenômeno ocorre pois a energia necessária para extensão das fissuras à tração é consideravelmente menor que à compressão. Esse fato explica o comportamento frágil observado na ruptura à tração e também a ductilidade constatada na ruptura à compressão. Além disso, a menor energia necessária para extensão das fissuras na tração é o principal motivo para a resistência do concreto à tração ser significativamente menor comparada à resistência à compressão.

Comportamento do Concreto Sujeito a Carregamentos Cíclicos

Em relação a carregamentos cíclicos pode-se verificar que elementos de concreto submetidos a esse tipo de carregamento não apresentam danos significativos se as tensões não superarem 50% F_c . Para carregamentos cíclicos com tensões no intervalo de 50% a 75% de F_c constata-se uma degradação progressiva da rigidez (módulo de elasticidade e resistência) que pode ser atribuída ao contínuo processo de fissuração tanto na zona de transição quanto na matriz aglomerante. Um diagrama tensão-deformação do concreto em ensaios cíclicos pode ser observado na Fig. (D.3).

Conforme apresenta a Fig. (D.3) verifica-se que aumentando o número de ciclos as curvas de descarregamento apresentam não linearidades e uma curva característica de histerese é formada no recarregamento.

Para níveis de tensão superiores a 75% F_c o comportamento é semelhante, porém a não linearidade das curvas carga e descarga tornam-se mais acentuadas.

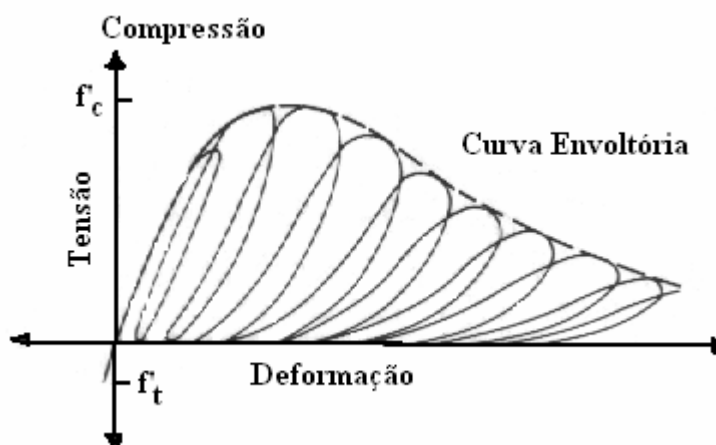


Figura D.3 Diagrama tensão x deformação típico carregamento cíclico MEHTA & MONTEIRO (1994)

Comportamento do Concreto sob Estados de Tensões Multiaxiais

O comportamento do concreto sujeito a estados de tensão biaxiais e multiaxiais difere substancialmente dos observados nos estados uniaxiais. Nos estados de tensão biaxiais e multiaxiais, quando estão envolvidas tensões de compressão, surgem tensões que provocam confinamento no material o que acaba por aumentar a capacidade resistente além da ductilidade da peça estrutural. A Fig. (D.4) apresenta uma envoltória típica de peças de concreto expostas a carregamentos biaxiais.

Conforme apresentado por CARRAZEDO (2002) para tensões de compressão iguais em duas direções o ganho em resistência do material pode alcançar 16%. O aumento máximo de resistência pode chegar a 27% quando a relação entre as tensões σ_1 e σ_2 é próxima de 0,50.

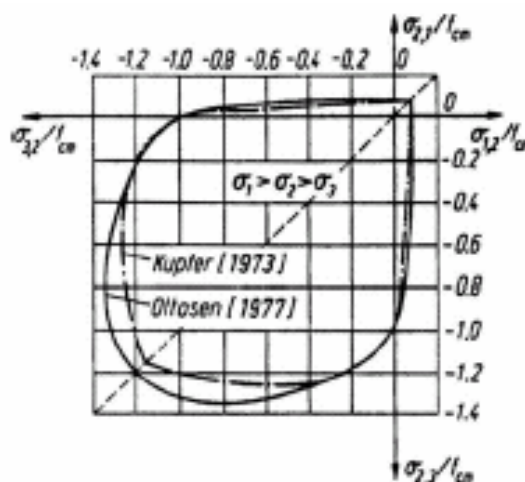


Figura D.4 Diagrama da envoltória de ruptura em estados biaxiais de tensão CARRAZEDO (2002)

Quando uma peça de concreto está submetida a um estado de compressão-tração a resistência à compressão apresenta queda praticamente linear à medida que se aumentam as tensões de tração.

Para o estado biaxial de tração constata-se que a resistência do concreto à tração mantém-se praticamente igual à apresentada em um ensaio uniaxial.

No tocante a estados multiaxiais de tensões ainda não há um conjunto de ensaios padrões que comprovem o comportamento do concreto quando sujeito a esse tipo de sollicitação. Mesmo entre os pesquisadores do concreto ainda não existe um consenso sobre qual a forma de ruptura do concreto quando sujeito a estados multiaxiais de tensão.

Muitos pesquisadores da área de modelagem numérica de estruturas de concreto armado têm representado o comportamento do concreto considerando critérios elasto-plásticos. Os resultados observados através dessa consideração são satisfatórios como apresentado em LEONEL et.al.(2003) apesar do elevado custo computacional.

Uma outra abordagem fortemente empregada no estudo sobre considerações mais realistas do comportamento das estruturas de concreto armado trata do emprego da mecânica do dano e do fraturamento. A mecânica da fratura fornece uma poderosa ferramenta para análise de fissuração que é um critério de crescimento das fissuras

baseado em energia. Esse critério pode ser aliado as variáveis de Dano avaliando mais precisamente a degradação da rigidez do elemento de concreto.

Anexo E. – Função Delta de Dirac

A função Delta de Dirac é de grande valia na representação de ações pontuais como cargas concentradas em problemas da teoria da elasticidade ou mesmo de impulsos na Teoria Cinemática da Física. As propriedades da função Delta de Dirac são estudadas no campo da Teoria das Funções Generalizadas sendo sua obtenção possível por meio da diferenciação da função degrau unitário ou Heaviside.

A Fig. (E.1) apresenta a representação da função Delta de Dirac.

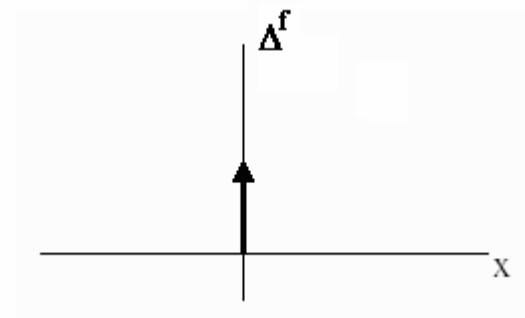


Figura E.1 Representação da função Delta de Dirac.

A função Delta de Dirac pode ser definida como:

$$\Delta^f = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0 \\ \infty, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (\text{E.1})$$

Existem algumas propriedades interessantes da função Delta de Dirac. Inicialmente admita-se conhecida uma função $f(x)$ conhecida e bem definida no ponto $x=0$. Pode ser mostrado por meio do teorema da média para integrais que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \Delta^f(x) dx = f(0) \quad (\text{E.2})$$

Essa propriedade é algumas vezes denominada de propriedade de filtragem da função Delta e ocorre pelo fato da variação da função $f(x)$ em torno do ponto $x=0$ ser desprezível.

De forma mais geral pode-se definir que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot \Delta^f(x-a) dx = f(a) \quad (\text{E.3})$$

Os conceitos da função Delta de Dirac podem também ser expandidos para domínios planos. Nessa situação pode-se definir:

$$\Delta^f(p, Q) = \begin{cases} 0, & \text{se } p \neq Q \\ \infty, & \text{se } p = Q \end{cases} \quad (\text{E.4})$$

De forma análoga tem-se

$$\int_{\Omega} f(Q) \cdot \Delta^f(p, Q) d\Omega = f(p) \quad (\text{E.5})$$

Deve-se ressaltar que este tipo de formulação não é correta com os conceitos comuns de uma função matemática, isto é, as ações concentradas como forças ou impulsos não são funções, mas, apesar disto, são tratadas formalmente como sendo funções, permitindo o estabelecimento de várias propriedades, sendo que, pelo uso destas, obtém-se resultados corretos.

Anexo F.- Condicionamento da Matriz e Estimativas de Erros

O conceito de problemas matemáticos bem postos foi formalizado pelo matemático francês Jacques Hadamard no final do Séc. XX. De acordo com HADAMARD (1902) um problema bem posto é aquele que apresenta solução única possuindo ainda a característica de que pequenas perturbações nos dados de entrada provocam pequenas perturbações nos resultados, sendo esta última característica denominada estabilidade do problema com relação aos dados.

A estabilidade (instabilidade) nos dá informações sobre a sensibilidade do método de cálculo numérico aos erros de arredondamentos acumulados nos cálculos bem como de pequenas variações das grandezas envolvidas no problema. Um sistema é considerado estável quando pequenas perturbações nos dados de entrada conduzem a soluções próximas. Quando isso não ocorre, considera-se o método de cálculo numérico instável.

No entanto a análise de problemas bem postos nem sempre conduz a soluções corretas. Podem ocorrer casos em que o problema matemático é bem posto mas utiliza-se um procedimento numérico instável para a obtenção de sua solução. O mal condicionamento da solução pode ser atribuído a quase singularidade do sistema matricial resultante. Uma forma adequada de se mensurar o quão mal condicionado é o sistema de equações considerado é por meio do número de condição. Esse fator informa o quanto a matriz está inconsistente, ou seja, mostra o grau de singularidade existente na matriz.

BARROSO et. al (1987) apresenta a definição do número de condição o qual pode ser obtido por meio da seguinte relação:

$$N^{\circ} \text{ Condição} = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (\text{F.1})$$

sendo:

$\|A\|$ norma da matriz considerada, A.

$\|A^{-1}\|$ norma da inversa da matriz considerada, A.

BARROSO et. al (1987) apresenta também as formas mais usuais de se expressar a norma para matrizes. Dentre elas destacam-se:

Norma de soma máxima de coluna

$$\|A\| = \max_{i \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{F.2})$$

em que:

$|a_{ij}|$ valor absoluto dos termos da matriz considerada, A.

n número de colunas

Norma da máxima soma de linha

$$\|A\| = \max_{i \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \quad (\text{F.3})$$

em que:

m número de linhas

Norma de Frobenius

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij}^2} \quad (\text{F.4})$$

Norma Espectral

$$\|A\| = \begin{cases} \lambda_{\max} & \text{se } A = A^T \\ \Lambda_{\max} & \text{se } A \neq A^T \end{cases} \quad (\text{F.5})$$

onde:

λ_{\max} maior autovalor da matriz A

Λ_{\max} maior valor singular da matriz A. $\Lambda_{\max} = \sqrt{\lambda_{\max}(A \cdot A^T)}$

Para problemas onde o sistema matricial envolvido apresenta matrizes densas, como é a do Método dos Elementos de Contorno, a norma adequada é a espectral. Isso se deve pois, para esses tipos de matrizes, os autovalores são medidas mais significativas do que os termos constituintes da matriz.

$$N^{\circ} \text{Condição} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} & \text{se } A = A^T \\ \frac{\Lambda_{\max}}{\Lambda_{\min}} & \text{se } A \neq A^T \end{array} \right\} \quad (\text{F.6})$$

Por meio da Eq. (F.6) verifica-se que quanto maior for o número de condição mais mal condicionado será o sistema final de equações. Pelo contrário quanto mais próximo de 1 for o número de condição da matriz mais estável será a solução.

Apesar de um sistema mal condicionado fornecer resultados que pode não ser confiáveis existem formas de se manipular o sistema matricial de forma a torná-lo menos instável. Uma das técnicas utilizadas para tal fim é a do pré-condicionamento. Esse procedimento é relativamente simples sendo constituído basicamente pela pré e pós multiplicação do sistema matricial por uma matriz de pré-condicionamento.

Considere inicialmente o sistema matricial apresentado na Eq. (F.7).

$$[A] \cdot \{x\} = \{B\} \quad (\text{F.7})$$

sendo:

$[A]$ matriz de valores conhecidos.

$\{x\}$ vetor de incógnitas.

$\{B\}$ vetor de valores independentes.

O procedimento de pré-condicionamento ocorre pela multiplicação do primeiro e segundo membro da Eq. (F.7) por uma matriz pre-condicionadora. Assim:

$$\left[\bar{A} \right] [A] \cdot \{x\} = \left[\bar{A} \right] \{B\} \quad (\text{F.8})$$

onde:

$\left[\bar{A} \right]$ matriz pré-condicionadora

A matriz pré-condicionadora pode ser determinada de acordo com o tipo de análise considerada. No presente trabalho a matriz pré-condicionadora adotada é a apresentada pela Eq. (F.9), sendo formada pelo inverso dos elementos da diagonal da matriz A.

$$\left[\bar{A} \right] = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{[A]_{ij}} & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{array} \right\} \quad (\text{F.9})$$

Anexo G.- A Mecânica do Dano

Diversos materiais de utilização contínua em engenharia são expostos a condições mecânicas e ou ambientais desfavoráveis durante sua vida útil. Tais condições geram mudanças na microestrutura interna desses materiais levando, na grande maioria dos casos, a reduções na resistência e durabilidade.

De forma a permitir a criação de modelos para a representação de materiais expostos a níveis de degradação surgiu a mecânica do dano contínuo. Conforme apresenta LEMAITRE & CHABOCHE (1990) o desenvolvimento da mecânica do dano iniciou-se em 1958 quando KACHANOV (1958) publicou o primeiro trabalho dedicado as variáveis de dano contínuas.

O objetivo da mecânica do dano é descrever a influência do dano na rigidez e resistência do material. Para isso KACHANOV (1958) descreveu o processo de degradação da rigidez do material por meio de um escalar denominado variável de dano. No entanto, com o desenvolvimento das pesquisas, percebeu-se que esse processo é melhor descrito por meio de um tensor de dano que é aplicado ao tensor representativo das propriedades constitutivas do material.

Diferenças entre Mecânica do Fraturamento e Mecânica do Dano

Apesar de representarem com considerável precisão materiais que apresentam processos de fissuração (danificação) as teorias da mecânica da fratura e mecânica do dano apresentam uma diferença marcante que deve ser ressaltada.

A mecânica da fratura lida com defeitos discretos e de tamanho significativo dentro da região de análise do fenômeno. Essa teoria considera ainda que o material, a partir de uma determinada distância em relação à extremidade da fissura, mantém suas características elásticas iniciais. Já a mecânica do dano trata as microfissuras distribuídas continuamente e de forma aleatória na região de análise do fenômeno, com

as propriedades mecânicas do material se alterando em função do grau de deterioração presente. A fissura discreta pode ser entendida como resultado de uma localização de micro-defeitos.

KRAJCIKOVIC (2000) ressaltam o fato de que em diversos corpos reais tanto as fissuras discretas quanto as microfissuras podem estar atuando conjuntamente. Procurando representar cada fenômeno isoladamente obtêm-se valores de carga última diferentes ao observado no corpo real. BOTTA (1998) comenta que um modelo mais realista deve englobar tanto aspectos pertencentes à mecânica do fraturamento quanto a mecânica do dano. A Fig. (G.1) apresenta uma representação esquemática de cada teoria.

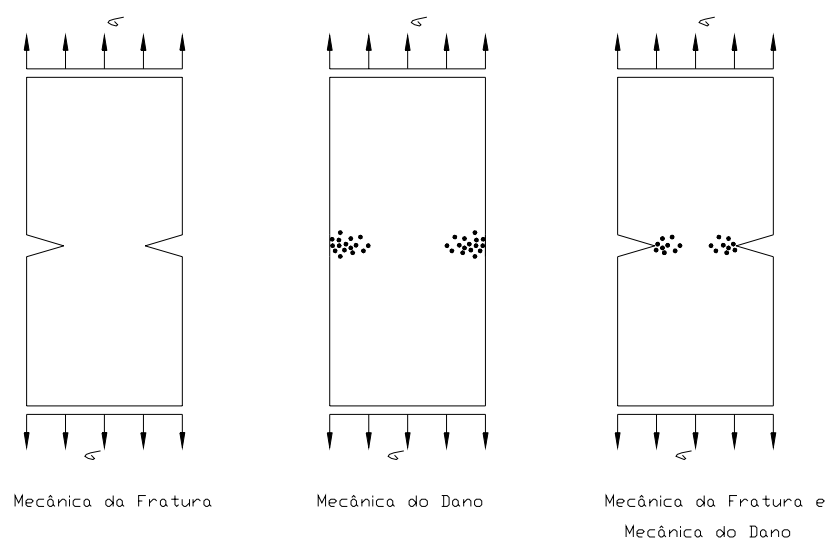


Figura G.1 Representação esquemática das teorias de fraturamento e dano

Modelos para Dano

Os modelos empregando a teoria do dano podem ser formulados para representar diversos fenômenos associados à danificação da microestrutura interna dos materiais. Dentre os modelos propostos KACHANOV (1986) destaca aqueles associados a fluência, materiais elasto-plásticos e fadiga.

No tocante ao emprego da teoria do dano aplicado a modelos numéricos destaca-se o modelo de dano isotrópico. Por meio desse modelo o dano no material é considerado através de uma variável denominada variável de dano isotrópico.

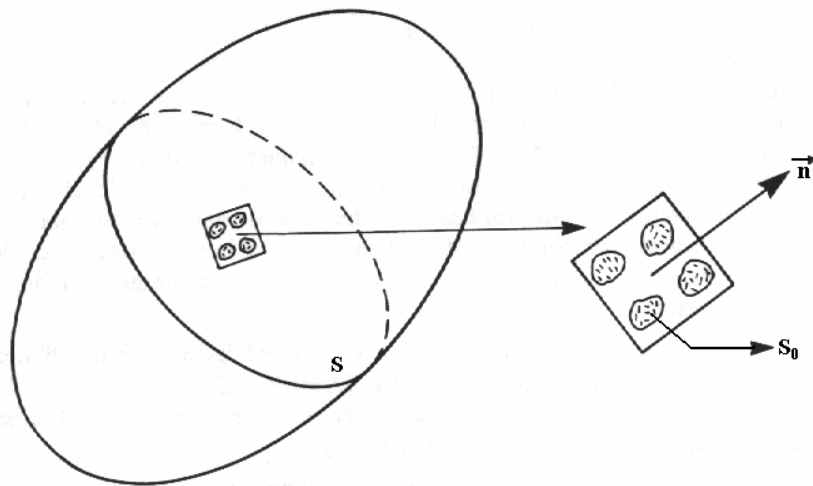


Figura G.2 Representação variáveis de dano KACHANOV (1986)

Empregando-se esse modelo o dano é considerado igual em todas as direções e pode ser definido pela razão entre as áreas plenas e danificadas ilustradas na Fig. (G.2).

$$D = \frac{S_0}{S} \quad (\text{G.1})$$

em que:

S_0 área danificada.

S área sã.

D variável de Dano.

Pode-se inferir que $0 \leq D \leq 1$. Quanto mais próximo de zero encontra-se D menor o dano presente no material. Já para o caso de D tender a um verifica-se uma situação de proximidade de ruína do material.

Admitindo que exista uma força F atuando segundo a normal n apresentada na Fig. (G.2) pode-se definir uma tensão efetiva dada por:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} \quad (\text{G.2})$$

sendo:

$\tilde{\sigma}$ = tensão efetiva.

F = força.

\tilde{S} = área útil.

Por meio da Eq. (G.2) pode-se inserir diretamente a variável de dano no cálculo da tensão efetiva conforme apresenta a Eq. (G.3):

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1-D)} \quad (\text{G.3})$$

onde:

σ = Estado de tensão sem danificação

Empregando a hipótese de deformação equivalente pode-se aplicar a Eq. (G.3) à Lei de Hooke como ilustra a Eq. (G.4).

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\sigma}}{E} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = \frac{\sigma}{(1-D) \cdot E} \quad (\text{G.4})$$

em que:

E = Módulo de Elasticidade Longitudinal.

Para a criação de modelos numéricos é usual aplicar a variável de Dano no tensor representativo das propriedades do material como mostra o denominador da Eq. (G.4). Assim pode-se definir um tensor com as propriedades efetivas do material.

$$\tilde{E} = (1-D) \cdot E \quad (\text{G.5})$$

E dessa forma a lei associando tensões a deformações poder ser reescrita da seguinte forma:

$$\sigma = \tilde{E} \cdot \varepsilon \quad (\text{G.6})$$

Existem diversos modelos para representação de dano em materiais os quais diferenciam-se pela diferente abordagem na evolução do dano com a aplicação do carregamento. No trabalho de BOTTA (1998) os modelos de Mazars e Cervera são aplicados com sucesso.

O emprego dessa teoria, por meio de modelos numéricos, tem permitido a realização de um elo conectando os estudos sobre a deterioração microscópica do material sob tensão e modelos usuais empregados em projetos de engenharia.