

# **ANÁLISE DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO UTILIZANDO MODELOS DE BIELAS E TIRANTES**

**Daniel dos Santos**

Dissertação apresentada à Escola de  
Engenharia de São Carlos da Universidade de São  
Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do  
título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: José Samuel Giongo

São Carlos

2006



“A grande virtude é persistir por mais um momento, quando tudo parece perdido.”

Ao querido tio Euclides Pereira (*in memoriam*) que, apesar de não ter sido engenheiro civil, amava como poucos essa profissão.

## AGRADECIMENTOS

---

A Deus, por estar sempre presente em minha vida, zelando por mim e mostrando-me o melhor caminho a tomar, mesmo que, nele, existam inúmeras barreiras necessárias para o meu crescimento.

Aos meus pais, que dedicaram sua vida exclusivamente à criação dos filhos, pela doação e apoio incondicionais. Certamente nós, eu e meu irmão, nunca poderemos retribuir à altura tamanha dedicação.

Ao José Samuel Giongo que, muito mais que orientador, por muitos anos foi meu tutor, um verdadeiro pai em São Carlos. Agradeço imensamente pela paciência, pela compreensão e, especialmente, pelo apoio nos momentos difíceis. Agradeço também pelos ensinamentos não só relativos a engenharia, mas também a ética pessoal e profissional, política, economia, educação e todos os demais setores que fazem parte de nossas vidas.

À minha Mi, pelo amor e pela compreensão intermináveis.

Ao meu irmão Michel, meu espelho para agir corretamente, por suas dicas na elaboração da dissertação.

Aos amigos de São Carlos Moacir, Anibal, Fredão, Julião e Slow, pelo companheirismo, pelas boas risadas e pelos inesquecíveis momentos felizes que pude desfrutar ao longo desses anos.

Ao Paná e ao Marião, acima de tudo pela amizade, mas também pelo constante e irrestrito apoio e pelos momentos que deixam essa vida menos dura.

Aos demais companheiros de São Carlos, em especial ao Zé Sérgio, Ricardinho, Gordão, Pedrão, Anselmo, Sudano e Gustavão, pelas dicas, conselhos e trocas de conhecimento que contribuíram com esse trabalho.

A toda a minha família, que sempre me apoiou e que foi imprescindível nos momentos difíceis.

Ao tio Pereira (*in memorian*), meu grande incentivador nessa profissão.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, que muito contribuíram para o meu crescimento profissional.

Aos funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, pela competência na realização de seus serviços e por estarem sempre dispostos a ajudar.

À CAPES, pelo apoio financeiro à pesquisa.

## SUMÁRIO

---

<b>LISTA DE FIGURAS .....</b>	<b>IX</b>
<b>LISTA DE TABELAS .....</b>	<b>XII</b>
<b>RESUMO .....</b>	<b>XV</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>XVII</b>
<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 PRELIMINARES .....	1
1.2 OBJETIVO .....	2
1.3 JUSTIFICATIVA .....	2
1.4 MÉTODOS E TÉCNICAS .....	3
1.5 APRESENTAÇÃO DA DISSERTAÇÃO .....	4
<b>2 AS VIGAS E O MODELO DE BIELAS E TIRANTES .....</b>	<b>5</b>
2.1 PRELIMINARES .....	5
2.2 ANÁLISE ESTRUTURAL .....	6
2.2.1 INTRODUÇÃO .....	6
2.2.2 POSIÇÕES DE VIGAS E LAJES .....	8
2.2.3 DESENHOS PRELIMINARES DE FORMAS .....	9
2.3 MECANISMOS DE RUÍNA EM VIGAS (FUSCO, 1984) .....	9
2.3.1 GENERALIDADES .....	9
2.3.2 TIPOS DE RUÍNA .....	10
2.4 A ANALOGIA CLÁSSICA DA TRELIÇA .....	11
2.4.1 PRELIMINARES .....	11
2.4.2 HIPÓTESES BÁSICAS .....	12

2.4.2.1	Posição relativa dos banzos .....	13	
2.4.2.2	Inclinação das diagonais ( $\theta$ ) .....	13	
2.4.2.3	Inclinação da armadura transversal ( $\alpha$ ) .....	13	
2.4.2.4	Limitação da tensão na armadura transversal .....	14	
2.4.2.5	Deslocamento do diagrama de momentos fletores .....	14	
2.5 ANALOGIA DA TRELIÇA GENERALIZADA: PRINCIPAIS			
IMPERFEIÇÕES DA TRELIÇA CLÁSSICA .....			15
2.6 MODELO PLÁSTICO DE TRELIÇA .....			17
2.7 DEDUÇÃO DAS EXPRESSÕES SEGUNDO O CÓDIGO MODELO			
CEB-FIP (1990) .....			18
2.7.1 GENERALIDADES .....			18
2.7.2 CONDIÇÕES PARA APLICAÇÃO DOS MODELOS .....			19
2.7.3 EXPRESSÕES PARA DIMENSIONAMENTO .....			19
2.7.3.1 Banzo tracionado .....			21
2.7.3.1.1 Força solicitante de cálculo .....			21
2.7.3.1.2 Força resistente de cálculo .....			22
2.7.3.1.3 Condição de segurança .....			23
2.7.3.2 Banzo comprimido .....			23
2.7.3.2.1 Força solicitante de cálculo .....			23
2.7.3.2.2 Força resistente de cálculo .....			24
2.7.3.2.3 Condição de segurança .....			24
2.7.3.3 Bielas .....			24
2.7.3.3.1 Força solicitante de cálculo .....			24
2.7.3.3.2 Força resistente de cálculo .....			25
2.7.3.3.3 Condição de segurança .....			26
2.7.3.4 Tração na armadura transversal .....			26
2.7.3.4.1 Força solicitante de cálculo .....			26
2.7.3.4.2 Força resistente de cálculo .....			26
2.7.3.4.3 Condição de segurança .....			26
2.7.4 DETERMINAÇÃO DA INCLINAÇÃO DAS BIELAS .....			27
2.8 O MODELO DE BIELAS E TIRANTES .....			28
2.8.1 HISTÓRICO .....			28
2.8.2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE O MODELO .....			30



2.8.3 PRINCÍPIOS BÁSICOS DO MODELO DE BIELAS E TIRANTES .....	32
2.8.4 DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA DO MODELO .....	34
2.8.5 REGIÕES CONTÍNUAS (B) E DESCONTÍNUAS (D) .....	35
2.8.6 TIPOS FUNDAMENTAIS DE NÓS .....	37
2.8.7 PARÂMETROS DE RESISTÊNCIA DAS REGIÕES NODAIS .....	40
2.8.7.1 SCHLAICH & SCHÄFER (1988, 1991) .....	41
2.8.7.1.1 Nó N1 .....	42
2.8.7.1.2 Nó N2 .....	42
2.8.7.1.3 Nó N3 .....	43
2.8.7.1.4 Nó N4 .....	44
2.8.7.1.5 Nó N5 .....	44
2.8.7.1.6 Nó N6 .....	45
2.8.7.1.7 Nó N7 .....	46
2.8.7.1.8 Nó N8 .....	46
2.8.7.1.9 Nó N9 .....	47
2.8.7.2 MACGREGOR (1988) .....	48
2.8.7.3 Apêndice A do ACI 318 (2002) .....	49
2.8.8 PARÂMETROS DE RESISTÊNCIA DAS BIELAS .....	49
2.8.8.1 Norma canadense CSA-A-23.3-94 (1994) .....	49
2.8.8.2 Resistência das bielas segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988, 1991) .....	50
2.8.8.3 Resistência das bielas segundo o Apêndice A do ACI 318 (2002) .....	50
2.8.9 PARÂMETROS DE RESISTÊNCIA DOS TIRANTES .....	51

### **3 COMPORTAMENTO E VERIFICAÇÃO DE VIGAS SEGUNDO AS NORMAS PROPOSTAS .....**

**52**

3.1 CRITÉRIOS DA NBR 6118:2003 .....	52
3.1.1 GENERALIDADES .....	52
3.1.2 VERIFICAÇÃO DO ESTADO LIMITE ÚLTIMO .....	53
3.1.2.1 Modelo de cálculo I .....	53
3.1.2.2 Modelo de cálculo II .....	54

3.1.3	ARMADURA MÍNIMA E ESPAÇAMENTOS .....	55
3.1.4	RELAÇÃO ENTRE A NBR 6118:2003 E O CÓDIGO MODELO CEB-FIP (1990) .....	55
3.1.4.1	Verificação da compressão diagonal do concreto.....	56
3.1.4.1.1	NBR 6118:2003 .....	56
3.1.4.1.2	MC CEB-FIP (1990) .....	56
3.1.4.1.3	Compatibilização .....	57
3.1.4.2	Cálculo da armadura transversal .....	58
3.1.4.2.1	NBR 6118:2003 .....	58
3.1.4.2.2	MC CEB-FIP (1990) .....	58
3.1.4.2.3	Compatibilização .....	58
3.2	CRITÉRIO DO EUROCODE 2 (1992).....	59
3.2.1	GENERALIDADES .....	59
3.2.2	VERIFICAÇÃO DA RUPTURA DO CONCRETO.....	60
3.2.3	CÁLCULO DA ARMADURA TRANSVERSAL .....	60
3.2.4	ARMADURA MÍNIMA E ESPAÇAMENTO.....	60
3.3	CRITÉRIO DO ACI 318M (1995) .....	61
3.3.1	GENERALIDADES .....	61
3.3.2	CONTRIBUIÇÃO DO CONCRETO.....	62
3.3.3	DIMENSIONAMENTO DA ARMADURA TRANSVERSAL.....	63
3.3.4	ARMADURA MÍNIMA E ESPAÇAMENTO.....	64
<b>4</b>	<b>DETERMINAÇÃO DO COMPRIMENTO DE ANCORAGEM DAS ARMADURAS DAS VIGAS.....</b>	<b>65</b>
4.1	INTRODUÇÃO .....	65
4.2	FUNDAMENTOS TEÓRICOS - RECOMENDAÇÕES DA FIB (1999).. .....	66
4.2.1	MODELAGEM ANALÍTICA DO COMPRIMENTO DE ANCORAGEM .....	66
4.2.1.1	Idealizações e simplificações assumidas na modelagem .....	66
4.2.2	APROXIMAÇÕES DO MC CEB-FIP (1990) PARA MODELAGEM DE EMENDA .....	67

4.2.2.1	Relação simplificada entre a tensão de aderência e o escorregamento da armadura .....	67
4.2.2.2	Equação diferencial da emenda .....	67
4.2.2.3	Resistência de cálculo do concreto .....	69
4.2.2.4	Comprimento básico de transferência .....	70
4.2.3	<i>MODELOS ANALÍTICOS AVANÇADOS PARA CÁLCULO DO COMPRIMENTO DE ANCORAGEM</i> .....	70
4.2.4	<i>IMPORTÂNCIA DA LIGAÇÃO ENTRE BARRA DE AÇO E CONCRETO PARA A SEGURANÇA ESTRUTURAL</i> .....	72
4.2.5	<i>REGIÕES DE ANCORAGEM</i> .....	72
4.2.5.1	Comportamento da ancoragem de barras retas, ganchos, curvas, laços e telas soldadas .....	72
4.2.5.2	Comprimento de ancoragem necessário .....	73
4.2.5.3	Comprimento mínimo de ancoragem .....	74
4.2.5.4	Ancoragem de feixe de barras .....	74
4.2.6	<i>DISPOSITIVOS DE ANCORAGEM</i> .....	74
4.2.7	<i>ANCORAGEM FORA DO APOIO E NO APOIO</i> .....	75
4.2.7.1	Ancoragem fora do apoio .....	75
4.2.7.2	Ancoragem no apoio .....	76
4.2.8	<i>EMENDAS DE BARRAS EM ELEMENTOS ESTRUTURAIS</i> ..	76
4.2.8.1	Emendas por traspasse de barras tracionadas .....	76
4.2.8.2	Comprimento necessário para emendas por traspasse de barras tracionadas .....	77
4.3	<i>ADERÊNCIA</i> .....	79
4.3.1	<i>ANÁLISE DA ADERÊNCIA COMO INDICADO EM NORMAS</i> ..	79
4.3.1.1	Introdução .....	79
4.3.1.2	Condições de aderência .....	79
4.3.1.3	Tensão de aderência entre a armadura e o concreto ..	80
4.3.1.3.1	Cálculo da tensão de aderência de cálculo na ancoragem segundo o Eurocode 2 (1992) .....	80
4.3.1.3.2	Cálculo da tensão de aderência de cálculo na ancoragem segundo a NBR 6118:2003 .....	81

4.3.1.4	Valores das tensões de aderência de projeto segundo o Eurocode 2 (1992) e segundo a NBR 6118:2003 .....	82
<b>4.3.2</b>	<b>ANCORAGEM .....</b>	<b>83</b>
4.3.2.1	Introdução .....	83
4.3.2.2	Comprimento básico de ancoragem .....	83
4.3.2.2.1	Comprimento básico de ancoragem segundo o Eurocode 2 (1992) .....	83
4.3.2.2.2	Comprimento básico de ancoragem segundo a NBR 6118:2003 .....	84
4.3.2.2.3	Comprimento básico de ancoragem segundo o ACI 318 (1995) .....	84
4.3.2.3	Métodos de ancoragem .....	85
4.3.2.3.1	Recomendações segundo o Eurocode 2 (1992) ..	85
4.3.2.3.2	Recomendações segundo a NBR 6118:2003 .....	85
4.3.2.4	Diâmetros mínimos dos pinos de dobramento .....	86
4.3.2.5	Armadura transversal .....	86
4.3.2.6	Comprimento de ancoragem necessário .....	87
4.3.2.6.1	Comprimento de ancoragem necessário segundo o Eurocode 2 (1992) .....	87
4.3.2.6.2	Comprimento de ancoragem necessário segundo a NBR 6118:2003 .....	88
4.3.2.6.3	Comprimento de ancoragem necessário segundo o ACI 318 (1995) .....	89
<b>4.3.3</b>	<b>EMENDAS POR TRASPASSE PARA BARRAS OU FIOS .....</b>	<b>89</b>
4.3.3.1	Arranjo das emendas .....	89
4.3.3.2	Armadura transversal .....	90
<b>4.3.4</b>	<b>ANCORAGEM DE ESTRIBOS E DE ARMADURA DE CISALHAMENTO .....</b>	<b>90</b>
<b>5</b>	<b>O PROGRAMA CAST .....</b>	<b>92</b>
5.1	CONCEITOS GERAIS .....	92
5.2	A MODELAGEM NO CAST (2000) PASSO-A-PASSO .....	93
5.2.1	DESCRIÇÃO DO PROJETO .....	94

5.2.2	DEFINIÇÃO DO ELEMENTO ESTRUTURAL.....	95
5.2.3	OBTENÇÃO DAS FORÇAS NO MODELO DE BIELAS E TIRANTES .....	95
5.2.4	DEFINIÇÃO DAS PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS.....	96
5.2.5	VERIFICAÇÃO DAS TENSÕES.....	98
<b>6</b>	<b>MODELAGENS DAS VIGAS E ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>99</b>
6.1	ROTINA PARA VERIFICAÇÕES DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO DE SEÇÕES RETANGULARES SUBMETIDAS A FLEXÃO SEGUNDO A NBR 6118:2003 .....	99
6.2	MODELOS VB - VIGAS DE CONCRETO ARMADO BIAPOIADAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTOS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDOS	102
6.2.1	MODELO VB1 - PROPRIEDADES INICIAIS .....	104
6.2.1.1	Propriedades gerais .....	104
6.2.1.2	Determinação de $k_c$ , $k_s$ e $A_s$ .....	105
6.2.1.3	Cálculo de $M_{d,lim}$ , $V_{d,u}$ e $V_{d,min}$ .....	105
6.2.1.4	Verificação das bielas segundo o MC CEB-FIP (1990)... .....	105
6.2.1.5	Verificação das bielas segundo a NBR 6118:2003 ...	107
6.2.1.6	Resultados da modelagem .....	107
6.2.2	MODELO VB2 - VB1 COM ACRÉSCIMO DE CARREGAMENTO .....	124
6.2.2.1	Geometria e ações.....	124
6.2.2.2	Determinação de $k_c$ , $k_s$ e $A_s$ .....	124
6.2.2.3	Cálculo de $M_{d,lim}$ , $V_{d,u}$ e $V_{d,min}$ .....	125
6.2.2.4	Verificação das bielas segundo o MC CEB-FIP (1990)... .....	125
6.2.2.5	Verificação das bielas segundo a NBR 6118:2003 ...	126
6.2.2.6	Resultados da modelagem .....	126
6.2.3	MODELO VB3 - MUDANDO-SE A INCLINAÇÃO DAS BIELAS.. .....	135
6.2.3.1	Geometria e ações.....	135
6.2.3.2	Determinação de $k_c$ , $k_s$ e $A_s$ .....	135

6.2.3.3	Cálculo de $M_{d,lim}$ , $V_{d,u}$ e $V_{d,min}$ .....	135	
6.2.3.4	Verificação das bielas segundo o MC CEB-FIP (1990)... .....	136	
6.2.3.5	Verificação das bielas segundo a NBR 6118:2003 ...	137	
6.2.3.6	Resultados da modelagem .....	137	
<b>6.3 MODELO VF: VIGA DE CONCRETO ARMADO COM FURO NA ALMA SUBMETIDA A CARREGAMENTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDO E A CARREGAMENTOS PONTUAIS .....</b>			<b>145</b>
6.3.1 <i>Introdução</i> .....		145	
6.3.2 <i>Resultados da modelagem</i> .....		146	
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS .....</b>			<b>164</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>			<b>168</b>

## LISTA DE FIGURAS

---

Figura 2.1 - Tipos de ruína segundo FUSCO (1984).....	11
Figura 2.2 - Cobertura do diagrama de força de tração solicitante pelo diagrama resistente [NBR 6118:2003].....	15
Figura 2.3 - Modelo fundamental da alma [MC CEB-FIP, 1990].....	18
Figura 2.4 - Esquemas para dedução das forças nos membros da treliça [MC CEB-FIB, 1990].....	20
Figura 2.5 - Processo do caminho de carga.....	32
Figura 2.6 - Modelo de bielas e tirantes aplicado a um apoio em dente de uma viga.....	34
Figura 2.7 - Regiões (B) e (D) para uma viga.....	36
Figura 2.8 - Regiões (B) e (D) e modelo de treliça para uma viga (SILVA & GIONGO, 2000).....	36
Figura 2.9 - Exemplo básico de nós contínuos e nós singulares em modelo de bielas e tirantes.....	37
Figura 2.10 - Nó N1 segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991).....	42
Figura 2.11 - Nó N2 segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991).....	43
Figura 2.12 - Nó N3 segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991).....	43
Figura 2.13 - Nó N4 segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991).....	44

Figura 2.14 - Nó N5 segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991).....	45
Figura 2.15 - Nó N6 segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991).....	45
Figura 2.16 - Nó N7 segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991).....	46
Figura 2.17 - Nó N8 segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991).....	47
Figura 2.18 - Nó N9 segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991).....	48
Figura 5.1 - Todos os passos da modelagem no CAST (2000).....	94
Figura 6.1 - VB1 - Carregamento e comprimento efetivo.....	104
Figura 6.2 - VB1 - A treliça e seus elementos.....	108
Figura 6.3 - VB1 - Aplicação das forças aos nós.....	110
Figura 6.4 - Propriedades dos elementos.....	111
Figura 6.5 - Propriedades dos nós.....	111
Figura 6.6 - VB1 - Forças nos membros da treliça.....	116
Figura 6.7 - VB1 - Fatores de utilização dos elementos.....	116
Figura 6.8 - VB1 - Disposição das armaduras dos tirantes da treliça.....	121
Figura 6.9 - VB1 - Resumo.....	123
Figura 6.10 - VB2 - Forças nos membros da treliça.....	129
Figura 6.11 - VB2 - Fatores de utilização dos elementos.....	129
Figura 6.12 - VB2 - Disposição das armaduras dos tirantes da treliça.....	133
Figura 6.13 - VB2 - Resumo.....	134
Figura 6.14 - VB3 - Forças nos membros da treliça.....	139



---

Figura 6.15 - VB3 - Fatores de utilização dos elementos.....	139
Figura 6.16 - VB3 - Disposição das armaduras dos tirantes da treliça.....	143
Figura 6.17 - VB3 - Resumo.....	144
Figura 6.18 - VF - Carregamento e comprimento efetivo.....	146
Figura 6.19 (a-e) - VF - Forças nos membros da treliça.....	150-151
Figura 6.20 (a-d) - VF - Fatores de utilização dos elementos.....	152-153
Figura 6.21 (a-e) - VF - Disposição das armaduras dos tirantes da treliça.....	161-162
Figura 6.22 - VF - Resumo.....	163

## LISTA DE TABELAS

---

Tabela 2.1 - Limites inferior e superior para o ângulo formado entre as diagonais comprimidas e a armadura longitudinal da viga.....	40
Tabela 3.1 - Taxas mínimas de armadura transversal $\rho_{w,min}$ segundo o Eurocode 2 (1992).....	61
Tabela 4.1 - Tensão de aderência de projeto $f_{bd}$ segundo o Eurocode 2 (1992).....	82
Tabela 4.2 - Tensão de aderência de projeto $f_{bd}$ segundo o a NBR 6118:2003.....	82
Tabela 4.3 - Diâmetros mínimos dos pinos de dobramento segundo o Eurocode 2 (1992).....	86
Tabela 4.4 - Diâmetros mínimos dos pinos de dobramento segundo a NBR 6118:2003.....	86
Tabela 5.1 - Propriedades dos nós segundo as normas e expressões disponíveis no CAST (2000).....	96
Tabela 5.2 - Propriedades das bielas segundo as normas e expressões disponíveis no CAST (2000).....	97
Tabela 6.1 - Rotina para o cálculo da área de armadura transversal em vigas.....	100
Tabela 6.2 - VB1 - Propriedades geométricas dos elementos.....	108

Tabela 6.3 - VB1 - Propriedades geométricas dos nós.....	109
Tabela 6.4 - VB1 - Propriedades dos elementos.....	112
Tabela 6.5 - VB1 - Propriedades dos nós.....	113
Tabela 6.6 - VB1 - Fatores de utilização dos elementos da treliça.....	117
Tabela 6.7 - VB1 - Fatores de utilização dos nós da treliça.....	118
Tabela 6.8 - VB1 - Armaduras necessárias para a viga determinadas pelo CAST (2000).....	121
Tabela 6.9 - VB2 - Propriedades dos elementos.....	126
Tabela 6.10 - VB2 - Propriedades dos nós.....	128
Tabela 6.11 - VB2 - Fatores de utilização dos elementos da treliça.....	129
Tabela 6.12 - N2 - Fatores de utilização dos nós da treliça.....	130
Tabela 6.13 - VB2 - Armaduras necessárias para a viga determinadas pelo CAST (2000).....	133
Tabela 6.14 - VB3 - Propriedades dos elementos.....	137
Tabela 6.15 - VB3 - Propriedades dos nós.....	138
Tabela 6.16 - VB3 - Fatores de utilização dos elementos da treliça.....	140
Tabela 6.17 - VB3 - Fatores de utilização dos nós da treliça.....	141
Tabela 6.18 - VB3 - Armaduras necessárias para a viga determinadas pelo CAST (2000).....	143
Tabela 6.19 - VF - Propriedades dos elementos.....	146
Tabela 6.20 - VF - Propriedades dos nós.....	148
Tabela 6.21 - VF - Fatores de utilização dos elementos da treliça.....	153

---

Tabela 6.22 - VF - Fatores de utilização dos nós da treliça.....	155
Tabela 6.23 - VF - Armaduras necessárias para a viga determinadas pelo CAST (2000).....	160

## RESUMO

---

SANTOS, D. (2006). *Análise de vigas de concreto armado utilizando modelos de bielas e tirantes*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O modelo de bielas e tirantes apresenta como uma de suas vantagens a generalidade, ou seja, é capaz de representar, de modo aproximado, porém realista e sistemático, grande parte dos elementos de concreto estrutural da atualidade. Além disso, permite ao engenheiro fácil visualização físico-intuitiva do comportamento do concreto estrutural. Por outro lado, o modelo ainda tem um enorme potencial não aproveitado. Ainda não se tem um critério exato para determinação dos nós e das seções transversais das bielas de alguns elementos. Apesar de haver certas incertezas no caso de vigas-parede e principalmente de blocos de fundação, nas vigas esses elementos do modelo podem ser determinados sem grandes dificuldades. Possivelmente, a solução seria variar as dimensões das bielas e as posições dos nós, ambas hipotéticas, a fim de confrontar várias situações com resultados experimentais. Daí a grande importância da difusão do modelo de bielas e tirantes: um maior número de análises de modelagens e de resultados de ensaios levará a um maior domínio sobre o modelo. Este trabalho consiste na análise de vigas de concreto armado utilizando modelos de bielas e tirantes. São apresentados os conceitos que levaram à concepção do modelo, desde a Analogia Clássica da Treliza, chegando aos critérios para verificação dos elementos da treliza e às recomendações atuais de normas e pesquisadores. Com o auxílio do programa computacional CAST (2000), foram modeladas quatro vigas, sendo as três primeiras biapoiadas sem descontinuidades e a quarta com balanço e

descontinuidade geométrica (abertura na alma). A primeira viga biapoiada teve algumas de suas características iniciais alteradas a fim de gerar o segundo e o terceiro modelos, procurando-se estabelecer limites de carregamentos e análises comparativas. Os resultados das modelagens permitiram comparações com os resultados das verificações realizadas segundo os critérios da NBR 6118:2003 e do MC CEB-FIP (1990) e, permitiram também, identificar os aspectos de maior dificuldade na concepção de um modelo de bielas e tirantes e os pontos críticos dos mesmos, nos quais há maior possibilidade de falha nas verificações.

Palavras-chave: concreto armado, modelo de bielas e tirantes, viga.

## ABSTRACT

---

SANTOS, D. (2006). *Analysis of reinforced concrete beams using strut and tie models*. São Carlos. Dissertação (Master Degree Thesis) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

One of the main advantages presented by the strut-and-tie model is generality. This model is able to approximately represent, in a realistic and systematic way, the majority of today's reinforced concrete elements. Furthermore, it allows the physics-intuitive visualization of the behavior presented by structural concrete. On the other hand, its potentials are not fully explored yet. Up to date, there is no accurate criterion for the determination of nodes and transverse sections of some strut elements. Despite presenting some uncertainties related to the determination of wall-beams (and mainly of foundation blocks), the model can determine beams without major difficulties. Probably, the key is to vary the dimensions of the struts and the positions of the nodes, both hypothetical, in order to confront various situations with experimental data. Hence, it is very important to diffuse the strut-and-tie model: the bigger the number of modeling analysis and experimental data, the better the comprehension of the model. This work aims to analyze reinforced concrete beams employing the strut-and-tie model. Here are presented the concepts that led to the development of the model, ranging from the Truss Classic Analogy to the criteria employed to verify truss elements and the recommendations from researchers and established standards (rules or norms). Four examples of beams were modeled. Three of them were double-based and the fourth presented balance and no geometric discontinuity (with an opening). Some of the characteristics of the first double-based beam were altered in order to

generate the second and the third model, thus establishing loading limits and comparative analysis. The modeling allowed comparisons between the verifications performed in accordance with the NBR 6118:2003 and MC CEB-FIP criteria. It also allowed the identification of major difficulties and critical aspects related to the development of struts and ties, the ones that are most prone to failure in the verification process.

Keywords: reinforced concrete, strut and tie model, beam.



# 1 INTRODUÇÃO

---

## 1.1 PRELIMINARES

Ao se projetar vigas de concreto armado, o procedimento empregado é o que utiliza o dimensionamento relativo à teoria da flexão (momento fletor e força cortante). Porém, não só no aspecto científico, mas também em outros aspectos, como prático e até didático, o cálculo de vigas de concreto armado utilizando o modelo de bielas e tirantes pode ser muito valioso. Este modelo tem como principais vantagens a melhor visualização do comportamento da estrutura, podendo-se verificar de modo mais claro a distribuição das tensões, e a facilidade na identificação das regiões mais solicitadas da estrutura. O modelo também permite que o projetista o utilize em toda a estrutura, tanto nas regiões sem descontinuidades, quanto nas regiões com descontinuidades.

O trabalho pretendeu desenvolver rotina de projeto para vigas de concreto armado adotando o modelo de bielas e tirantes. Para isso foi feita extensa revisão bibliográfica, considerando os trabalhos publicados desde o início das pesquisas até os mais recentes, que levaram ao desenvolvimento de programas computacionais. Para as modelagens utilizou-se o programa computacional CAST, “Computer Aided Strut-and-Tie” (2000), específico para cálculo de estruturas de concreto simples, armado ou protendido, utilizando os princípios do modelo de bielas e tirantes. Com isso, visou-se garantir a segurança dos banzos comprimido e tracionado, de tal modo que para este se considere a retirada de serviço das barras longitudinais da armadura. Os nós, as diagonais comprimidas e os estribos tiveram suas seguranças verificadas com as condições de resistência do concreto e das barras ou fios de aço. Por fim, os comprimentos de ancoragem foram convenientemente considerados.

## 1.2 OBJETIVO

Esta pesquisa visou o dimensionamento de vigas de concreto armado utilizando-se modelos de bielas e tirantes. Procurou-se atentar para todos os critérios de verificação necessários para se garantir a segurança da viga tanto em serviço como nos estados limites últimos. Pretendeu-se, desse modo, elaborar uma opção de verificação para vigas.

O objetivo geral que se pretendeu atingir com esta dissertação foi apresentar, estudar e avaliar as prescrições das normas em relação às vigas de concreto armado e, em seguida, com o auxílio do programa computacional CAST, “Computer Aided Strut-and-Tie” (2000), propor um método para o dimensionamento de vigas de concreto armado em que não é necessário fazer a decalagem do diagrama de momentos fletores para a determinação dos pontos de interrupção das barras da armadura longitudinal, como é feito pelo modo tradicional.

## 1.3 JUSTIFICATIVA

A proposta de se analisar solução alternativa para o projeto de estruturas de concreto armado estimulou este trabalho.

Um dos elementos estruturais mais comuns em vários tipos de construções, a viga é elemento fundamental de sustentação da maioria das edificações de concreto armado. Ao mesmo tempo, o modelo de bielas e tirantes é uma das mais geniais idéias de concepção e análise estrutural do século XX e até da própria história do concreto. Esse modelo passou por evoluções e até hoje é usado e proposto por códigos e normas para o cálculo de estruturas não usuais de concreto armado, apesar de poder ser usado, também, para dimensionar estruturas usuais, como vigas biapoiadas sem descontinuidades geométricas.

Em virtude da falta de trabalhos desse gênero, pode ser de grande importância esta pesquisa, que analisa, compara e discute o dimensionamento de vigas usuais submetidas a flexão simples segundo algumas das principais Normas em vigência, bem como segundo um programa especializado em resolver estruturas pelo modelo de bielas e tirantes.

A proposta de se encontrar um método alternativo para a determinação dos pontos de interrupção das barras da armadura longitudinal, sem a necessidade do já tradicional “cobrimento” do diagrama de momentos fletores da viga, parece oportuna e surge como valiosa alternativa para os usuários de programas computacionais.

## **1.4 MÉTODOS E TÉCNICAS**

Este trabalho analisa o comportamento de vigas de concreto armado, tomando-se por base os critérios da NBR 6118:2003, do ACI 318M (1995), do EUROCODE 2 (1992), do Código de Recomendações da fib (1999) e do MC CEB-FIP (1990). Posteriormente, compara os resultados obtidos com simulação feita em computador utilizando o programa CAST (2000), o qual, utilizando-se especificamente dos princípios do modelo de bielas e tirantes, permite realizar verificações de estruturas de concreto.

Em relação ao dimensionamento de vigas, foi realizado um estudo que abrange desde a analogia de treliça, proposta por MÖRSCH no início do século XX, passando pelas grandes contribuições de SCHLAICH & SCHAFER (1987, 1988, 1991) e chegando ao dimensionamento segundo cada uma das normas. Apresentam-se, então, exemplos de verificação de vigas de concreto armado submetidas a flexão.

Em seguida discutem-se alguns aspectos relativos ao comportamento e à modelagem de vigas de concreto armado utilizando-se o programa computacional CAST (2000). Posteriormente, serão apresentados os resultados das modelagens realizadas e as conclusões em relação aos resultados obtidos, pretendendo-se avaliar o método proposto.

## **1.5 APRESENTAÇÃO DA DISSERTAÇÃO**

O Capítulo 1 apresenta preliminares em relação à utilização do modelo de bielas e tirantes, os objetivos deste trabalho, as justificativas que estimularam a elaboração do mesmo e os métodos empregados em seu desenvolvimento.

No Capítulo 2 são abordados aspectos gerais da análise estrutural, os possíveis mecanismos de ruptura das vigas, as analogias das treliças Clássica e Generalizada, as hipóteses de Bernoulli e são deduzidas as expressões para dimensionamento segundo o MC CEB-FIP (1990). Em seguida, há uma apresentação do histórico do modelo de bielas e tirantes e todas as características relativas às verificações pertinentes ao modelo.

O Capítulo 3 apresenta as verificações necessárias às vigas submetidas a esforços de flexão, segundo a NBR 6118:2003, o MC CEB-FIP (1990), o Eurocode 2 (1992) e o ACI 318M (1995).

No Capítulo 4 foi realizada extensa abordagem da ancoragem das barras das armaduras das estruturas de concreto armado e de todos os critérios necessários para o cálculo do comprimento de ancoragem de barras nas mais diversas situações.

O Capítulo 5 faz uma abordagem geral do CAST (2000), desde seu histórico, passando por suas características peculiares, até a descrição de todas as etapas necessárias na modelagem.

As modelagens das vigas VB1, VB2, VB3 VF constam no Capítulo 6, que apresenta as propriedades geométricas e dos materiais, as condições de contorno, os modelos de treliças definidos, as solicitações e as tensões nos elementos, de todos os quatro modelos.

Por fim, no Capítulo 7 são relacionadas considerações finais com base nos resultados obtidos e são fornecidas sugestões para pesquisas futuras utilizando modelos de bielas e tirantes.

## 2 AS VIGAS E O MODELO DE BIELAS E TIRANTES

---

Este capítulo apresenta a fundamentação teórica que possibilitou o desenvolvimento do trabalho. Em resumo, apresentam-se a seguir os fundamentos teóricos a respeito da análise estrutural, do comportamento e verificação de vigas pelas normas propostas, do modelo de bielas e tirantes e da determinação do comprimento de ancoragem das armaduras das vigas.

### 2.1 PRELIMINARES

O projeto usual de vigas de concreto armado é realizado, com os esforços solicitantes – momento fletor e força cortante –, com os critérios de verificação do equilíbrio das resultantes internas no concreto comprimido e nas barras das armaduras tracionadas. Ao se estudar o equilíbrio da treliça de MÖRSCH, idealizada no século retrasado, podem ser determinados os deslocamentos no diagrama de momentos fletores, a fim de estabelecer os corretos pontos de interrupção das barras longitudinais da viga. Segundo a NBR 6118:2003, “o dimensionamento das armaduras longitudinais deve conduzir a um conjunto de esforços resistentes ( $N_{Rd}$ ,  $M_{Rd}$ ) que constituam envoltória dos esforços solicitantes ( $N_{Sd}$ ,  $M_{Sd}$ ) determinados na análise estrutural”.

O modelo de bielas e tirantes, por sua vez, analisa a viga como um todo, sem a necessidade de separar os esforços solicitantes e as forças internas para equilibrá-los, constituindo-se em modelo mais realista. Assim, permite que a determinação dos comprimentos das barras longitudinais seja realizada de maneira mais simples que do que pelo modo tradicional - análise do momento fletor resistido por barra e consideração do diagrama de

momentos fletores deslocado. Ao se aplicar o modelo, os pontos de interrupção das barras longitudinais podem ser determinados facilmente, de acordo com as forças aplicadas em cada barra do banzo da treliça, ou seja, determina-se a área de armadura necessária para resistir a força resultante em cada tramo do banzo que esteja tracionado. Sabendo-se que a força varia para cada barra da treliça, os pontos de interrupção das barras da armadura longitudinal podem ser definidos, portanto, pelos nós da treliça interna da viga.

A análise da segurança da viga adotando o modelo de bielas e tirantes permite as verificações relativas aos banzos tracionado e comprimido, às diagonais comprimidas, aos pendurais e às regiões nodais.

Para uso corrente pelos projetistas, para as verificações das vigas de concreto armado utilizando o modelo de bielas e tirantes, é necessário elaborar rotina de projeto que considere convenientemente:

1. a segurança das regiões nodais;
2. as verificações das diagonais comprimidas, considerando os critérios de resistência do concreto;
3. as verificações dos pendurais (estribos), considerando os critérios de resistência das barras ou fios de aço;
4. os comprimentos de ancoragem das armaduras longitudinais.

## **2.2 ANÁLISE ESTRUTURAL**

### **2.2.1 INTRODUÇÃO**

A rigor, as estruturas precisam ser tratadas como tridimensionais, uma vez que todos os seus elementos trabalham conjuntamente. Tal procedimento, embora conduza a um projeto mais refinado, dificulta a determinação dos esforços solicitantes, em virtude do alto grau de hiperestaticidade da estrutura, exigindo o emprego de recursos computacionais sofisticados.

Alternativamente, o cálculo dos esforços solicitantes é feito por processos simplificados, aceitos pelas normas, considerando os elementos estruturais separadamente, fazendo-se as correções necessárias para garantir a segurança dos elementos isolados e da estrutura como um todo.

O sistema estrutural de uma edificação precisa ser projetado de modo que ele seja capaz de resistir não só às ações verticais, mas também às ações horizontais que possam provocar efeitos significativos ao longo da sua existência.

As ações verticais são constituídas por: peso próprio dos elementos estruturais; pesos próprios de revestimentos e de paredes divisórias, além de outras ações permanentes; ações variáveis decorrentes da utilização, cujos valores vão depender da finalidade do edifício, e outras ações específicas, como por exemplo, a massa de equipamentos.

As ações horizontais, onde não há ocorrência de abalos sísmicos, constituem-se, basicamente, da ação do vento.

A distribuição das ações verticais tem início nas lajes, que suportam, além de seus pesos próprios, outras ações permanentes e as ações variáveis de uso, incluindo, eventualmente, peso de paredes que se apóiam diretamente sobre elas. As lajes transmitem essas ações para as vigas, por meio das reações de apoio.

As vigas suportam seus pesos próprios, as reações provenientes das lajes, peso de paredes e, ainda, ações de outros elementos que nelas se apóiam como, por exemplo, as reações de apoio de outras vigas. As vigas, assim como as lajes, trabalham à flexão e transmitem as ações para os elementos verticais - pilares e paredes estruturais - por meio das respectivas reações.

Os pilares e as paredes estruturais recebem as reações das vigas que neles se apóiam, as quais, juntamente com o peso próprio desses elementos verticais, são transferidas para os andares inferiores e, finalmente, para o solo, por meio dos elementos de fundação.

As ações horizontais devem igualmente ser absorvidas pela estrutura e transmitidas, passo a passo, para a fundação. O caminho dessas ações tem início nas paredes externas do edifício, onde atua o vento. Esta ação é resistida por elementos verticais de grande rigidez, tais como pórticos, paredes estruturais e núcleos, que formam a estrutura de contraventamento. Os pilares de menor rigidez pouco contribuem na resistência às ações laterais e, portanto, podem ser ignorados na análise da estabilidade global da estrutura.

As lajes exercem importante papel na distribuição das forças decorrentes do vento entre os elementos de contraventamento, pois possuem rigidez praticamente infinita em seu plano, promovendo, assim, o travamento do conjunto.

### **2.2.2 POSIÇÕES DE VIGAS E LAJES**

A estruturação segue com o posicionamento das vigas nos diversos pavimentos. Além daquelas que ligam os pilares, formando pórticos, outras vigas podem ser necessárias, seja para dividir um painel de laje com grandes dimensões, seja para suportar uma parede divisória e evitar que ela se apoie diretamente sobre a laje.

É comum, por questões estéticas e com vistas a facilidades no acabamento e ao melhor aproveitamento dos espaços, adotar larguras de vigas em função da largura das alvenarias. As alturas das vigas ficam limitadas pela necessidade de prever espaços livres para aberturas de portas e de janelas.

Como as vigas delimitam os painéis de laje, suas disposições precisam levar em consideração o valor médio econômico do menor vão das lajes, que, para lajes maciças, é da ordem de 3,5 metros a 5,0 metros. O posicionamento das lajes fica, então, praticamente definido pelo arranjo das vigas.



### **2.2.3 DESENHOS PRELIMINARES DE FORMAS**

De posse do arranjo dos elementos estruturais, passa-se ao pré-dimensionamento, cujo propósito é a determinação aproximada das alturas das lajes e das dimensões das seções transversais dos pilares e das vigas.

As larguras das vigas são adotadas para atender condições de arquitetura ou construtivas. Sempre que possível, as vigas ficam embutidas nas alvenarias e permitem a passagem de tubulações. Costuma-se adotar para as vigas no máximo três pares de dimensões diferentes para as seções transversais.

Em edifícios residenciais, é conveniente que as alturas das vigas não ultrapassem 60 cm, para não interferir nos vãos de portas e de janelas. Por exemplo, pode-se adotar, para as vigas mais solicitadas, com vãos maiores ou aquelas que fazem parte dos pórticos de contraventamento, as dimensões 25 cm x 60 cm. As outras vigas podem ter dimensões inferiores, como 20 cm x 50 cm ou 20 cm x 40 cm. Essas dimensões podem ser adotadas em função do pré-dimensionamento e devem, posteriormente, ser verificadas nos cálculos definitivos.

A fase de estruturação do edifício termina com a elaboração dos desenhos preliminares das formas de todos os pavimentos, contendo as dimensões estimadas no pré-dimensionamento, a partir das quais calculam-se os vãos efetivos de lajes e vigas, necessários para iniciar o cálculo dos esforços solicitantes nesses elementos.

## **2.3 MECANISMOS DE RUÍNA EM VIGAS (FUSCO, 1984)**

### **2.3.1 GENERALIDADES**

O colapso de vigas de concreto armado pode ocorrer segundo ações normais ou ações tangenciais. Entende-se que no dimensionamento e

verificação a ruína desses elementos deve ocorrer somente por solicitações normais, e nunca por solicitações tangenciais.

O estado limite último para solicitações normais pode ocorrer ou por ruptura do concreto, ou por deformação plástica excessiva da armadura longitudinal.

Por outro lado, para solicitações tangenciais o estado limite último ocorre por escoamento da armadura transversal ou por esmagamento das diagonais comprimidas. Em vista disso, a ruína pode ser frágil e, por isso, precisa ser evitada.

### 2.3.2 TIPOS DE RUÍNA

Segundo FUSCO (1984) os tipos de ruína de vigas de concreto armado submetidas a solicitações cisalhantes são:

1. Ruína por força cortante-compressão: típico de peças subarmadas transversalmente. A ruína não é frágil, pois ocorre escoamento da armadura transversal e fissuração excessiva (Figura 2.1 - a);

2. Ruína por força cortante-tração: típico de peças superarmadas transversalmente. A ruína é frágil, pois ocorre esmagamento das bielas de concreto antes que a armadura transversal entre em escoamento (Figura 2.1 - b);

3. Ruína por força cortante-flexão: ocorre pela diminuição da espessura do banzo comprimido da peça, quando as fissuras diagonais se estendem até ele. Essa diminuição pode provocar acréscimo de tensões e, conseqüentemente, esmagamento do concreto. Geralmente a seção de ruína se localiza em regiões de elevadas forças concentradas (Figura 2.1 - c);

4. Ruína por flexão da armadura longitudinal: ocorre quando há deficiências localizadas na armadura longitudinal de tração, como espaçamento ou ancoragem de armadura transversal incorretos (Figura 2.1 - d).

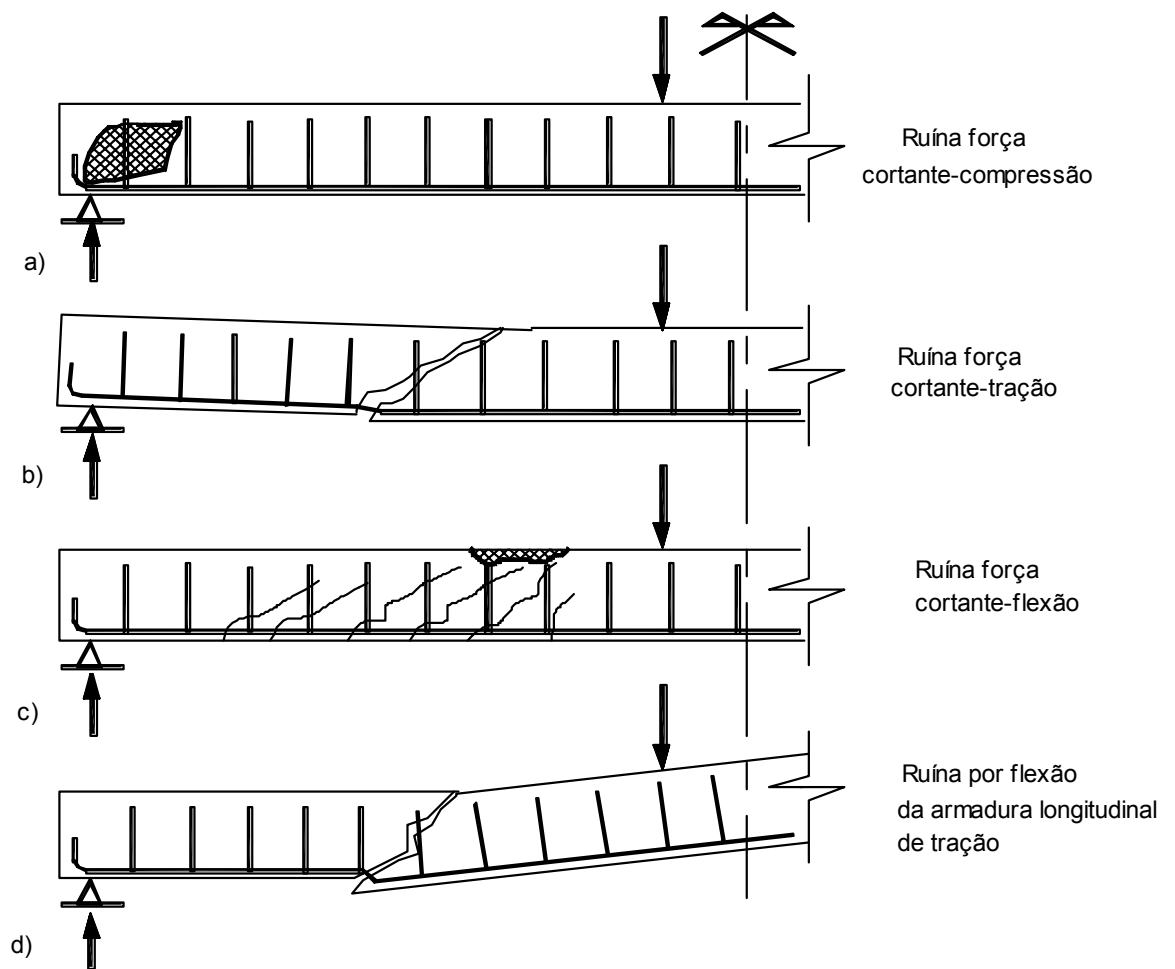


Figura 2.1 - Tipos de ruína segundo FUSCO (1984)

## 2.4 A ANALOGIA CLÁSSICA DA TRELIÇA

### 2.4.1 PRELIMINARES

A treliça clássica de MÖRSCH foi concebida no início do século XX e, desde então, vem sendo utilizada como base para o dimensionamento de vigas de concreto armado. Apesar de algumas pesquisas sugerirem alterações em sua teoria, seu aspecto geral foi mantido e está distante de ser superado, pois

o mecanismo resistente desses elementos estruturais pode ser associado ao de treliças.

A Analogia Clássica da Treliça faz a analogia entre uma viga de concreto armado, depois de fissurada, e uma treliça de banzos paralelos e, apesar de apresentar certas imperfeições, resultantes da incompatibilidade entre modelo e viga real, ainda hoje é empregada em grande escala. Nas últimas décadas propostas vêm sendo feitas por pesquisadores e engenheiros sugerindo alterações no modelo original, a fim de aperfeiçoá-lo e, principalmente, ajustar os resultados experimentais aos teóricos.

Atualmente, como importantes incrementos ao modelo de MÖRSCH, destacam-se os modelos de bielas e tirantes, nos quais os elementos ou regiões da viga real são denotados como elementos da treliça. Neste caso, as armaduras transversais são os montantes tracionados da treliça, atuando tipicamente como tirantes na viga de concreto armado. Por sua vez, as diagonais comprimidas, situadas entre duas fissuras consecutivas, trabalham como as barras das diagonais comprimidas da treliça, atuando como as bielas. Por fim, citam-se os banzos da treliça, nos quais a armadura longitudinal de tração da viga funciona como o banzo tracionado e a faixa superior de concreto como o banzo comprimido.

Em relação a ambos os modelos, serão relacionadas suas considerações básicas e principais imperfeições, procurando justificá-las, terminando por exibir o dimensionamento segundo as normas NBR 6118:2003 e ACI 318M (1995), bem como do Eurocode 2 (1992) e as prescrições do Código de Recomendações da fib (1999).

## **2.4.2 HIPÓTESES BÁSICAS**

As hipóteses admitidas pela treliça clássica baseiam-se no panorama fissurado da viga, a partir do qual se pode determinar o mecanismo de funcionamento da mesma.

### 2.4.2.1 Posição relativa dos banzos

O modelo propõe uma treliça de banzos paralelos em quase toda a extensão da viga, sendo que apenas nas regiões dos apoios o banzo superior inclina-se até se encontrar com o inferior.

### 2.4.2.2 Inclinação das diagonais ( $\theta$ )

As diagonais comprimidas apresentam inclinação  $\theta$  menor ou igual a  $45^\circ$  em relação ao eixo longitudinal da viga, sendo que  $\theta$  varia conforme a largura da alma e a taxa de armadura transversal. A delimitação das diagonais se dá segundo as fissuras, pois cada diagonal está compreendida no espaço entre duas fissuras. Experimentalmente, observa-se que as inclinações das fissuras diminuem em direção aos apoios, valendo aproximadamente  $90^\circ$  na região central da viga. Porém, os modelos de cálculo determinam um ângulo de inclinação e consideram-no constante em toda a extensão da viga.

O ângulo de inclinação mínimo é especificado segundo cada norma, porém usualmente admite-se  $\theta = 45^\circ$ , a fim de simplificar as considerações para o dimensionamento. A NBR 6118:2003 apresenta dois modelos de cálculo: o modelo I, que considera o ângulo  $\theta = 45^\circ$ , e o modelo II, que considera o ângulo  $\theta$  arbitrado livremente entre  $30^\circ$  e  $45^\circ$ .

### 2.4.2.3 Inclinação da armadura transversal ( $\alpha$ )

A armadura transversal pode apresentar inclinação  $\alpha$  entre  $45^\circ$  e  $90^\circ$  em relação ao eixo longitudinal da peça. Na prática, a grande maioria dos casos apresenta armadura transversal na posição vertical, ou seja, com  $\alpha = 90^\circ$ , em função da dificuldade de modelagem das barras da armadura com diferentes inclinações. Porém, pode-se citar que tais inclinações, apesar de não usuais, melhoram a eficiência da armadura transversal.

#### 2.4.2.4 Limitação da tensão na armadura transversal

Segundo a NBR 6118:2003, a tensão nas barras da armadura transversal  $f_{ywd}$  precisa respeitar os seguintes limites:

$$\text{Estribos: } f_{ywd} = f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s \leq 435 \text{ MPa} \quad (2.1)$$

$$\text{Barras dobradas: } f_{ywd} = 0,70 f_{yd} = 0,70 f_{yk} / \gamma_s \leq 435 \text{ MPa} \quad (2.2)$$

sendo:

$$\gamma_s = 1,15$$

#### 2.4.2.5 Deslocamento do diagrama de momentos fletores

Os esforços solicitantes relativos à flexão que atuam em uma viga de concreto de alma cheia não são exatamente iguais aos atuantes numa treliça. Na viga de concreto armado a resultante de compressão, que atua no banzo comprimido, e a de tração, que atua na armadura tracionada, para uma mesma seção, são proporcionais ao momento fletor atuante. Sendo assim, na viga, por se tratar de um elemento geometricamente contínuo, as intensidades das forças atuantes nos banzos variam ponto a ponto, ou seja, a cada diferença infinitesimal de espaço. Por outro lado, na treliça as forças apresentam valores constantes entre dois nós consecutivos, ou seja, em cada uma de suas barras.

Por conta dessa diferença, precisa-se realizar uma translação  $a_t$  do diagrama de momentos fletores de cálculo, a fim de compatibilizar modelo e viga real. Para o modelo II da NBR 6118:2003, tal translação admite os valores dados pela seguinte expressão:

$$a_t = (z / 2) (\cotg\theta - \cotg\alpha) + s_t / 2 \quad (2.3)$$

sendo:

$z$  = distância entre a resultante de compressão e a de tração nos banzos (braço de alavanca);

$\alpha$  = inclinação da armadura transversal;

$\theta$  = inclinação das bielas de concreto comprimido;

$s_t$  = espaçamento longitudinal entre os estribos.

Para vigas no modelo I, ou seja, com estribos a  $90^\circ$  e inclinação das bielas igual a  $45^\circ$ , a expressão anterior resulta:

$$a_\ell = s_t / 2 \quad (2.4)$$

A figura a seguir indica a decalagem do diagrama de momento fletor sugerida pela NBR 6118:2003.

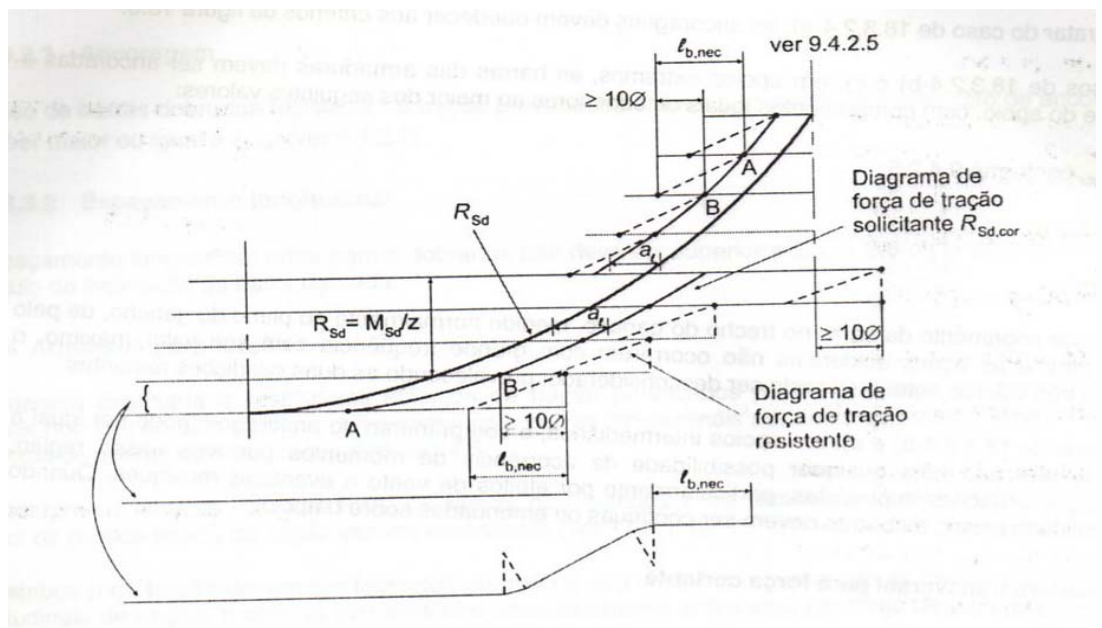


Figura 2.2 - Cobertura do diagrama de força de tração solicitante pelo diagrama resistente [NBR 6118:2003]

## 2.5 ANALOGIA DA TRELIÇA GENERALIZADA: PRINCIPAIS IMPERFEIÇÕES DA TRELIÇA CLÁSSICA

A necessidade de se generalizar a Analogia da Trelíça Clássica é pelo fato de se levar em consideração, dentre outros fatores, principalmente a hiperestaticidade da viga real. Podem ser estabelecidos três fatores como os principais responsáveis pela diferença entre os valores das tensões calculadas

teoricamente, segundo a treliça clássica, e os observados experimentalmente. São eles:

1. *Alta hiperestaticidade da viga de concreto armado;*
2. *Posição relativa dos banzos, que não são paralelos;*
3. *Diferença na inclinação das fissuras, pois na viga real a inclinação é menor que a admitida por MÖRSCH.*

As bielas diagonais são aproximadamente 20 vezes mais rígidas que os montantes tracionados, ou seja, a armadura transversal. Portanto, elas deveriam absorver uma parcela maior de tensões que a determinada pela treliça clássica. Além disso, há engastamento na ligação entre biela e banzo comprimido, pois trata-se de uma massa contínua de concreto, o que contraria a teoria, no que diz respeito às ligações nas treliças. Isso significa que as bielas trabalham também a flexão, aliviando os montantes ou as diagonais tracionadas. Observa-se experimentalmente que, como consequência desse fator, a armadura transversal será menos solicitada à medida que maior for a largura da alma da viga. Os valores das tensões de compressão calculadas nas bielas segundo a teoria da treliça clássica, no caso de estribos a  $90^\circ$ , são de 10% a 20% menores que as observadas experimentalmente em ensaios de vigas, comprovando a validade da hipótese da hiperestaticidade. No caso de estribos inclinados tal diferença aumenta para 60%, em média.

Com relação à inclinação dos banzos, verifica-se que na viga real o banzo comprimido é inclinado, o que possibilita a absorção direta de uma parcela da força cortante atuante.

As fissuras e, por consequência, as diagonais comprimidas apresentam inclinação menor que  $45^\circ$  nos trechos mais solicitados.

A Analogia Generalizada de Treliça resulta em menores taxas de armadura transversal, porém deve-se atentar para a possibilidade de esmagamento das diagonais comprimidas, pois nesse caso elas encontram-se mais solicitadas.



## 2.6 MODELO PLÁSTICO DE TRELIÇA

O modelo plástico de treliça consiste em um banzo tracionado e outro comprimido, bielas com inclinação  $\theta$  com a horizontal e estribos. Em consequência ao efeito de leque, forças concentradas e reações são transmitidas aos estribos por bielas radiais, formando um campo de tensões de compressão constituído por bielas de inclinação constante.

Uma das hipóteses da treliça plástica é que toda a força cortante deve ser resistida por estribos, sendo que, em projeto, o ideal seria proporcionar um arranjo da armadura transversal tal que todos os seus ramos atingissem o escoamento simultaneamente, quando a força de ruptura fosse alcançada. Desse modo, uma força igual a  $A_{sw} \cdot f_{yd}$  seria transmitida pela fissura, sendo  $A_{sw}$  a soma das áreas dos ramos da armadura transversal compreendida entre duas fissuras. Dessa forma, a treliça se tornaria estaticamente determinada.

Como a viga real é projetada de modo a alcançar o escoamento dos estribos anteriormente ao esmagamento do concreto, o modelo depende da plastificação dos estribos, porém independe da plastificação do concreto. Um modelo de treliça é tão mais adequado a uma determinada viga quanto mais se aproximar da situação real. Vigas de concreto armado sofrem redistribuições de forças internas, partindo do estado *elástico não-fissurado*, mudando para o estado *elástico fissurado* e chegando até o estado *plástico fissurado*. Se o modelo de treliça adotado considerar deformação excessiva para atingir plastificação completa, a treliça poderá romper-se prematuramente.

## 2.7 DEDUÇÃO DAS EXPRESSÕES SEGUNDO O CÓDIGO MODELO CEB-FIP (1990)

### 2.7.1 GENERALIDADES

A proposta do Código Modelo CEB-FIP (1990) é a utilização dos modelos para vigas de concreto armado submetidas a ação de força cortante e momento fletor.

Para o dimensionamento da armadura transversal, o MC CEB-FIP (1990) define verificações das ações atuantes e das forças resistentes nos tirantes da armadura transversal. Visando a otimização da distribuição das barras da armadura longitudinal, o código também propõe verificações das ações atuantes e das forças resistentes nos banzos tracionado e comprimido.

O modelo fundamental de um trecho típico da alma de uma viga é mostrado na [Figura 2.3](#). O braço de alavanca é representado por  $z$  e se estende desde o centro geométrico do banzo comprimido até o centro geométrico do banzo tracionado, trecho no qual os momentos fletores mantêm o mesmo sinal e podem ser considerados iguais ao valor na seção de momento fletor  $M_d$  máximo. O (menor) ângulo formado entre as bielas e os banzos (ou o comprimido, ou o tracionado) é representado por  $\theta$  e o (menor) ângulo formado entre os tirantes e os banzos (ou o comprimido, ou o tracionado) é representado por  $\alpha$ .

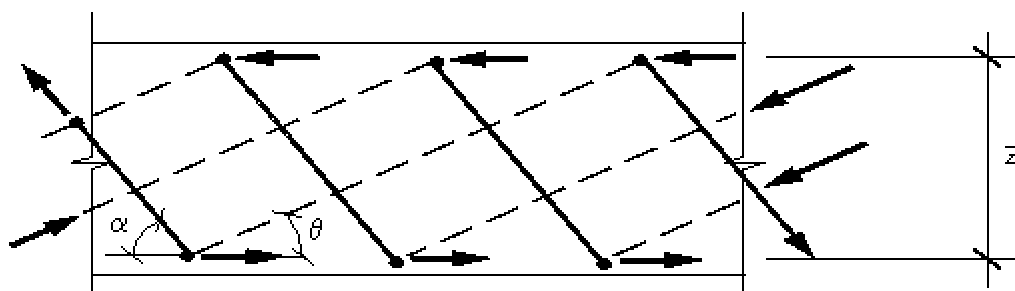


Figura 2.3 - Modelo fundamental da alma [MC CEB-FIP, 1990]

## 2.7.2 CONDIÇÕES PARA APLICAÇÃO DOS MODELOS

Segundo o CEB-FIP (1990), são condições básicas para aplicação dos modelos de bielas e tirantes:

1. É necessário que haja adequada ancoragem da armadura de cisalhamento nos banzos superior e inferior;
2. Estribos precisam ter inclinação mínima de 45° e barras dobradas de 30° em relação ao eixo da viga;
3. Os espaçamentos longitudinal e transversal entre os ramos da armadura podem ser no máximo iguais a 0,75 d ou 800 mm, sendo d a altura útil da viga;
4. A fim de limitar as aberturas das fissuras de cisalhamento, a taxa mecânica de armadura transversal  $w_{sw}$  não pode ser inferior a 0,2, como indicado nas expressões seguintes:

$$w_{sw} = A_{sw} f_{yk} / (b_w s f_{ctm} \text{sen}\alpha) \geq 0,2 \quad (2.5)$$

ou seja:

$$\frac{A_{sw}}{s} \geq 0,2 f_{ctm} \times \frac{b_w \cdot \text{sen}\alpha}{f_{yk}} \quad (2.6)$$

com ( $f_{ctm}$  = resistência média à tração do concreto), calculado por:

$$f_{ctm} = 1,4 \left( \frac{f_{ck}}{10} \right)^{2/3} \quad (2.7)$$

## 2.7.3 EXPRESSÕES PARA DIMENSIONAMENTO

A [Figura 2.4](#), apresentada a seguir, é fundamental na demonstração das solicitações externas e as conseqüentes reações internas observadas na seção transversal de uma viga de concreto armado submetida à flexão.

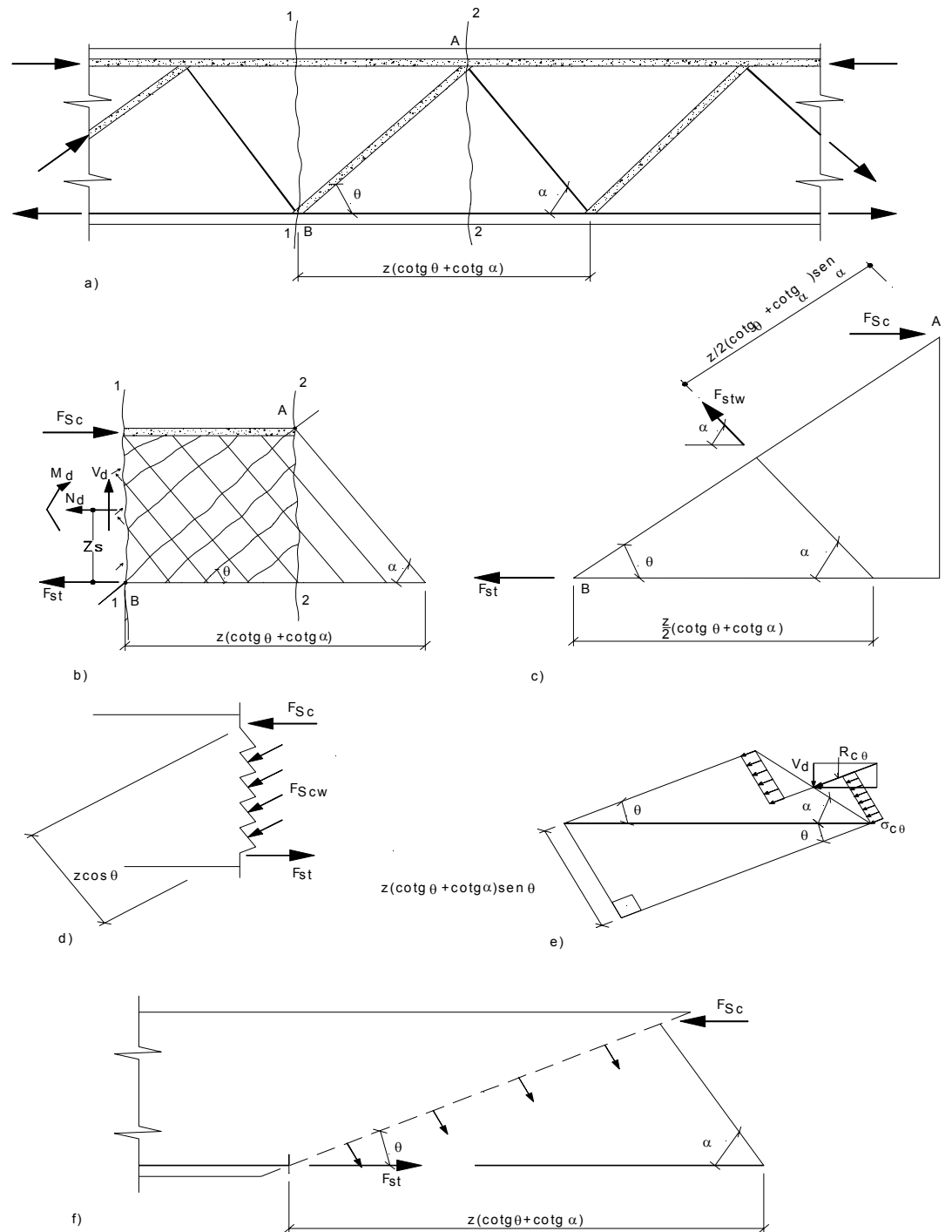


Figura 2.4 - Esquemas para dedução das forças nos membros da treliça  
[MC CEB-FIB, 1990]

A seguir apresentam-se as expressões para o dimensionamento, baseadas na Figura 2.4. Note-se que a simbologia adotada pelo MC CEB-FIB (1990) será alterada, neste trabalho, a fim de que os termos e as respectivas

expressões que eles constituem estejam de acordo com os utilizados no Brasil. Sendo assim, serão realizadas as seguintes substituições:

$F_{Sc}$  por  $R_{Sc}$  (força solicitante de compressão no concreto – banzo comprimido);

$F_{Rc}$  por  $R_{Rc}$  (força resistente de compressão no concreto – banzo comprimido);

$F_{St}$  por  $R_{St}$  (força solicitante de tração na armadura – banzo tracionado);

$F_{Rt}$  por  $R_{Rt}$  (força resistente de tração na armadura – banzo tracionado);

$F_{Scw}$  por  $R_{Scw}$  (força solicitante de compressão na alma);

$F_{Rcw}$  por  $R_{Rcw}$  (força resistente de compressão na alma);

$F_{Stw}$  por  $R_{Stw}$  (força solicitante de tração na alma).

$F_{Rtw}$  por  $R_{Rtw}$  (força resistente de tração na alma).

### 2.7.3.1 Banzo tracionado

#### 2.7.3.1.1 Força solicitante de cálculo

Segundo a [Figura 2.4 - a](#), ao se passar uma seção vertical 1-1 pelo ponto B e ao se calcular o momento fletor para as forças externas que atuam à esquerda do ponto A, obtém-se:

$$M_A = M_d + V_d (z \cot\theta) + N_d (z - z_s) \quad (2.8)$$

sendo:

$z_s$  = distância da linha de ação de  $N_d$  ao centro de gravidade da armadura de tração.

Por meio de uma seção A-B em uma fissura diagonal de inclinação  $\theta$  pode-se obter o momento fletor em A segundo os esforços internos (à esquerda):

$$M_A = R_{St} z + R_{stw} (z / 2) (\cotg\theta + \cotg\alpha) \operatorname{sen} \alpha \quad (2.9)$$

sendo:

$R_{St}$  = força solicitante no banzo tracionado;

$R_{stw}$  = força resultante em um trecho  $z$  ( $\cotg\theta + \cotg\alpha$ ) da armadura transversal (Figura 2.4 - c).

Fazendo o equilíbrio das forças verticais na Figura 2.4 - c, obtém-se:

$$R_{stw} \operatorname{sen}\alpha = V_d \Rightarrow R_{stw} = V_d / \operatorname{sen}\alpha \quad (2.10)$$

Substituindo (2.10) em (2.9) e igualando a (2.8), obtém-se:

$$R_{St} z + (V_d / \operatorname{sen}\alpha) (z / 2) (\cotg\theta + \cotg\alpha) \operatorname{sen}\alpha = M_d + V_d z \cotg\theta + N_d (z - z_s) \quad (2.11)$$

$$R_{St} z = M_d + V_d z \cotg\theta - (V_d / 2) z (\cotg\theta + \cotg\alpha) + N_d (z - z_s) \quad (2.12)$$

$$R_{St} z = M_d + N_d (z - z_s) + (V_d / 2) z (\cotg\theta - \cotg\alpha) \quad (2.13)$$

$$R_{St} = \frac{|M_d|}{z} + \frac{N_d(z - z_s)}{z} + \frac{V_d}{2} (\cotg\theta - \cotg\alpha) \quad (2.14)$$

sendo  $N_d$  positiva para tração e negativa para compressão.

No caso de ações aplicadas na face superior da viga, na seção de momento máximo (na seção de  $M_{d,max}$ ,  $V_d = 0$ , para vigas biapoiadas):

$$R_{St} \leq \frac{|M_{d,max}|}{z} + \frac{N_d(z - z_s)}{z} \quad (2.15)$$

### 2.7.3.1.2 Força resistente de cálculo

$$R_{Rt} = A_s f_{yd} \quad (2.16)$$

### 2.7.3.1.3 Condição de segurança

$$R_{St} \leq R_{Rt} \quad (2.17)$$

Portanto:

$$\frac{|M_d|}{z} + \frac{N_d(z - z_s)}{z} + \frac{V_d}{2} (\cotg \theta - \cotg \alpha) \leq A_s \cdot f_{yd} \quad (2.18)$$

### 2.7.3.2 Banzo comprimido

#### 2.7.3.2.1 Força solicitante de cálculo

Na [Figura 2.4 - b](#), passando uma seção vertical 2-2 pelo ponto A, o momento fletor em virtude das forças externas que atuam à direita de B vale:

$$M_B = M_d - N_d z_s - V_d z \cotg \theta \quad (2.19)$$

Por meio de uma seção diagonal A-B, pode-se obter o momento fletor em B, em função das forças internas (à direita):

$$M_B = R_{Sc} z - R_{Stw} (z / 2) (\cotg \theta + \cotg \alpha) \operatorname{sen} \alpha \quad (2.20)$$

sendo:

$R_{Sc}$  = força solicitante no banzo comprimido.

Igualando [\(2.19\)](#) a [\(2.20\)](#) e substituindo [\(2.10\)](#) em [\(2.20\)](#), obtém-se:

$$M_d - N_d z_s - V_d z \cotg \theta = R_{Sc} z - (V_d / \operatorname{sen} \alpha) (z / 2) (\cotg \theta + \cotg \alpha) \operatorname{sen} \alpha \quad (2.21)$$

$$R_{Sc} z = M_d - N_d z_s - (V_d / 2) z (\cotg \theta - \cotg \alpha) \quad (2.22)$$

$$R_{Sc} = \frac{|M_d|}{z} - \frac{N_d \cdot z_s}{z} - \frac{V_d}{2} (\cotg \theta - \cotg \alpha) \quad (2.23)$$

No caso de ações aplicadas na face superior da viga, na seção de momento máximo (na seção de  $M_{d,max}$ ,  $V_d = 0$ , para vigas biapoiadas):

$$R_{Sc} = \frac{|M_{d,max}|}{z} - N_d \frac{z_s}{z} \quad (2.24)$$

### 2.7.3.2 Força resistente de cálculo

$$R_{Rc} = f_{cd1} A_c + f_{ycd} A_{sc} \quad (2.25)$$

sendo:

$A_{sc}$  = área da armadura longitudinal comprimida, no caso de armadura dupla;

$A_c$  = área da seção transversal do banzo comprimido, igual a:

$$A_c = \begin{cases} b_w \cdot x \\ b_f \cdot x \\ (b_f - b_w)h_f + b_w \cdot x \end{cases}$$

Acima são fornecidos os valores de  $A_c$  para (1) seção retangular, (2) seção T com a linha neutra cortando a mesa e (3) seção T com a linha neutra cortando a alma, respectivamente, sendo  $x$  a altura da linha neutra.

### 2.7.3.2.3 Condição de segurança

$$R_{Sc} \leq R_{Rc} \quad (2.26)$$

Portanto:

$$\frac{|M_d|}{z} - \frac{N_d \cdot z_s}{z} - \frac{V_d}{2} (\cotg \theta - \cotg \alpha) \leq f_{cd1} \cdot A_c + f_{ycd} \cdot A_{sc} \quad (2.27)$$

### 2.7.3.3 Bielas

#### 2.7.3.3.1 Força solicitante de cálculo

No esquema mostrado na [Figura 2.4 - e](#), fazendo o equilíbrio das forças verticais, obtém-se:



$$R_{c\theta} \operatorname{sen}\theta = V_d \Rightarrow R_{c\theta} = V_d / \operatorname{sen}\theta \quad (2.28)$$

sendo:

$R_{c\theta}$  = resultante na biela de concreto das tensões atuantes no trecho  $z$   $(\cotg\theta + \cotg\alpha) \operatorname{sen}\theta$ .

$$\sigma_{c\theta} = \frac{R_{c\theta}}{b_w z (\cotg\theta + \cotg\alpha) \operatorname{sen}\theta} \quad (2.29)$$

Substituindo (2.28) em (2.29), tem-se:

$$\sigma_{c\theta} = \frac{V_d}{b_w z (\cotg\theta + \cotg\alpha) \operatorname{sen}^2\theta} \quad (2.30)$$

Analisando-se a [Figura 2.4 - d](#), mostra-se que:

$$\sigma_{c\theta} = \frac{R_{Scw}}{b_w \cdot z \cdot \cos\theta} \quad (2.31)$$

sendo:

$R_{Scw}$  = resultante na biela diagonal das tensões atuantes no trecho  $(z \cos\theta)$ .

Igualando (2.30) a (2.31), obtém-se:

$$\frac{V_d}{b_w \cdot z (\cotg\theta + \cotg\alpha) \operatorname{sen}^2\theta} = \frac{R_{Scw}}{b_w \cdot z \cdot \cos\theta} \quad (2.32)$$

$$R_{Scw} = \frac{V_d \cdot \cos\theta}{\operatorname{sen}\theta (\cotg\theta + \cotg\alpha) \operatorname{sen}\theta} \quad (2.33)$$

$$R_{Scw} = \frac{V_d}{\operatorname{sen}\theta} \left( \frac{\cotg\theta}{\cotg\theta + \cotg\alpha} \right) \quad (2.34)$$

### 2.7.3.3.2 Força resistente de cálculo

Segundo esquema mostrado na [Figura 2.4 - d](#), tem-se:

$$R_{Rcw} = f_{cd2} b_w z \cos\theta \quad (2.35)$$

### 2.7.3.3 Condição de segurança

$$R_{Scw} \leq R_{Rcw} \quad (2.36)$$

Portanto:

$$\frac{V_d}{\text{sen}\theta} \left( \frac{\text{cotg}\theta}{\text{cotg}\theta + \text{cotg}\alpha} \right) \leq f_{cd2} \cdot b_w \cdot z \cdot \cos\theta \quad (2.37)$$

### 2.7.3.4 Tração na armadura transversal

#### 2.7.3.4.1 Força solicitante de cálculo

$$R_{Stw} = V_d / \text{sen}\alpha \quad (2.38)$$

#### 2.7.3.4.2 Força resistente de cálculo

Pelo esquema mostrado na [Figura 2.4 - f](#), a quantidade de barras da armadura transversal distribuídas num trecho de comprimento  $z$  ( $\text{cotg}\theta + \text{cotg}\alpha$ ) pode ser obtida por:

$$\text{número de barras} = n = z (\text{cotg}\theta + \text{cotg}\alpha) / s \quad (2.39)$$

sendo:

$s$  = espaçamento dos estribos medido ao longo do eixo da peça.

Assim, a força resistente é definida por:

$$R_{Rtw} = A_{sw} n f_{yd} \quad (2.40)$$

$$R_{Rtw} = A_{sw} f_{yd} z (\text{cotg}\theta + \text{cotg}\alpha) / s \quad (2.41)$$

### 2.7.3.4.3 Condição de segurança

$$R_{Stw} \leq R_{Rtw} \quad (2.42)$$

$$V_d / \text{sen}\alpha < A_{sw} f_{yd} z (\text{cotg}\theta + \text{cotg}\alpha) / s \quad (2.43)$$

Portanto:

$$A_{sw} / s > V_d / f_{yd} z (\text{cotg}\theta + \text{cotg}\alpha) \text{sen}\alpha \quad (2.44)$$

Para armadura transversal vertical ( $\alpha = 90^\circ$ ):

$$A_{sw} / s > V_d / f_{yd} z \text{cotg}\theta \quad (2.45)$$

## 2.7.4 DETERMINAÇÃO DA INCLINAÇÃO DAS BIELAS

No projeto da viga, o ângulo  $\theta$  formado entre as bielas e o eixo longitudinal do elemento pode ser arbitrado livremente no intervalo  $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max} = 45^\circ$ .

À medida que o ângulo escolhido se aproxima do valor máximo,  $45^\circ$ , maior é a taxa de armadura transversal necessária e, por outro lado, menor é a tensão nas bielas. Contrariamente, ao se adotar um valor de  $\theta$  próximo a  $\theta_{\min}$  diminui-se a área de armadura transversal, resultando, porém, em acréscimo nas tensões de compressão atuantes nas bielas. Em vista disso, sugere-se a adoção de valores da inclinação das bielas ( $\theta$ ) os mais próximos possíveis de  $\theta_{\min}$ , pois as tensões de compressão são verificadas diretamente, pois deve-se apenas garantir que tais tensões estejam dentro dos limites estabelecidos. O valor mínimo que pode ser utilizado para a inclinação  $\theta$  das bielas varia de acordo com as normas, os códigos e os pesquisadores. O MC CEB-FIP (1990) recomenda utilizar inclinação mínima  $\theta_{\min} = 18,4^\circ$  ( $\text{cotg}\theta_{\min} = 3$ ). Esse valor mínimo sugerido pelo MC CEB-FIP (1990) está relacionado a casos de vigas em flexo-compressão, situação usual de vigas protendidas.

Porém, alguns pesquisadores discordam desse valor, justificando ser um valor muito baixo. Sugestões baseadas em investigações experimentais indicam valores para inclinação mínima das bielas comprimidas em torno de  $\theta_{\min} = 26,5^\circ$ . A NBR 6118:2003 admite, em seu modelo de cálculo II, no qual a inclinação  $\theta$  das diagonais de compressão pode ser diferente de  $45^\circ$ , valor

mínimo igual a  $30^\circ$ . Admite ainda que a parcela complementar  $V_c$  sofra redução com o aumento de  $V_{Sd}$ .

Deve-se salientar que bielas com baixas inclinações resultam em alta tensão na armadura transversal entre o início da fissuração e o estado limite último, além de requererem maior comprimento de ancoragem da armadura longitudinal. Nesse caso, o controle da fissuração pode ser limitante no projeto podendo, então, impedir valores de  $\theta$  próximos a  $\theta_{min}$ . Além disso, aconselha-se não utilizar pequenas inclinações em elementos submetidos a tração axial. Por fim, cita-se que valores de  $\theta$  próximos a  $45^\circ$  indicam que a armadura tracionada atuará sem auxílio do concreto, ao passo que, ao se aproximar  $\theta$  de seu valor mínimo, igual a  $30^\circ$ , passam a atuar os mecanismos alternativos ao de treliça.

## 2.8 O MODELO DE BIELAS E TIRANTES

### 2.8.1 HISTÓRICO

Uma das grandes idéias do século XX, em se tratando de vigas de concreto armado, a “Analogia de Treliça”, surgiu nos primórdios do século XX, criada por E. Mörsch, e foi se aprimorando ao longo dos anos. A Analogia de Treliça Clássica, a qual sugere uma analogia entre a viga de concreto armado e a treliça, foi uma das idéias mais duradouras da história do concreto armado. Durante décadas, pesquisadores apenas sugeriram modificações no modelo, porém mantendo seus conceitos básicos, ou seja, a idéia básica de MÖRSCH se mantém até os dias de hoje, mesmo apesar das sugestões e modificações propostas por pesquisadores que buscaram adaptar melhor o modelo original aos resultados experimentais.

Resultados de ensaios levaram à adoção da “Treliça de Mörsch Generalizada”, em que a inclinação das bielas comprimidas em relação ao eixo da viga variava de acordo com os comportamentos observados nos ensaios.

Uma grande evolução se observou nos anos 80, quando SCHLAICH & SCHÄFER (1988), pesquisadores de Stuttgart, Alemanha, passaram a aplicar os modelos de bielas e tirantes em outros elementos estruturais, como vigas-parede, consolos, sapatas, blocos de fundação, ligações entre viga e pilar, aberturas em vigas e apoios em dente.

MARTI (1985) utilizou-se da teoria da plasticidade e de critérios básicos, que envolviam conceitos de nós, bielas, tirantes, arcos e leques, para propor a aplicação dos modelos ao dimensionamento das armaduras longitudinais e transversais de uma viga.

Assim sendo, pode-se dizer que o modelo de bielas e tirantes teve significativo avanço e ampla divulgação somente a partir da década de 80, quando Schlaich, Schäfer e Marti conduziram à generalização da Analogia da Treliça e criaram uma base científica refinada, proporcionando considerável avanço para uma aplicação racional dos modelos em vigas.

Mais tarde, COOK & MITCHELL (1988), analisando resultados de ensaios, confirmaram a adequação dos modelos ao projeto de consolos, vigas-parede e vigas com descontinuidades geométricas.

TJHIN & KUCHMA (2002) discutiram avanços e desafios do dimensionamento utilizando o modelo de bielas e tirantes com o auxílio de programas computacionais.

SOUZA (2004) analisou amplamente o dimensionamento de elementos de concreto armado com descontinuidades, não apenas pelo modelo de bielas e tirantes, o qual o autor denomina Método das Bielas, como também pelo Método Corda-Painel. Em seu trabalho foram realizadas análises em relação à determinação de parâmetros polêmicos, como a resistência adequada para bielas e nós, bem como a configuração geométrica das regiões nodais dependente das forças que nelas atuam.

Vigas com aberturas em suas almas foram dimensionadas por RONCATTO & CAMPOS (2005), utilizando programa computacional desenvolvido pelos próprios autores. O programa “Furos em Vigas de Concreto” é capaz de estabelecer de forma automatizada o modelo de bielas e

tirantes mais adequado para a situação sob análise, determinar as solicitações nos elementos, realizar as verificações de bielas e nós e as áreas de armaduras necessárias para os tirantes.

### **2.8.2 CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE O MODELO**

A intensificação e a divulgação das pesquisas durante a década de 80 abriu definitivamente as portas para que outros pesquisadores começassem a estudar, investigar e aplicar o método. De acordo com a ASCE-ACI (1998), grande variedade de parâmetros para a resistência das bielas e das regiões nodais foram, então, propostos com base em pesquisas de âmbito experimental. Esse fato contribuiu consideravelmente para o entendimento do modelo de bielas e tirantes, possibilitando ampla discussão e gerando cada vez mais resultados experimentais para a determinação dos seus parâmetros mais significativos.

Sabe-se que a maioria dos procedimentos para a análise e o cálculo estrutural das quais dispõem os escritórios de projeto realiza análises globais e análises locais dos elementos estruturais, tais como os pilares, as lajes e as vigas. Entretanto, sabe-se também que a qualidade e a confiabilidade de um projeto estrutural, em geral, estão relacionadas não com seu comportamento global, mas sim com a precisão com que são dimensionadas as regiões de descontinuidade de seus elementos isoladamente. O que se verifica, corriqueiramente, é o uso de métodos e rotinas consagrados e confiáveis para o dimensionamento da maior parte dos elementos, mas isso não acontece quando se trata de regiões descontínuas, pois tais regiões geralmente são projetadas por modelos relativamente simples e ainda não consagrados, baseados, muitas vezes, na “experiência” do projetista. O modelo de bielas e tirantes é um método racional cientificamente comprovado, recomendado pela norma brasileira e por diversas outras normas internacionais para o dimensionamento de regiões descontínuas de elementos de concreto armado, que atende às necessidades de tais análises.

A NBR 6118:2003 aborda superficialmente o modelo de bielas e tirantes, permitindo sua utilização no dimensionamento de vigas-parede, consolos e dentes Gerber.

Por outro lado, uma das normas mais completas e abrangentes em se tratando de modelos de bielas e tirantes é a norma espanhola EHE (1999). Há capítulos específicos que determinam as regiões B e D, outros para determinação dos parâmetros de resistência das bielas, nós e tirantes e outros para a análise de estruturas não-usuais, nos quais são fornecidos modelos simplificados para se analisar vigas-parede, consolos, sapatas e blocos sobre estacas.

Apesar de o CEB-FIP Model Code (1978) já tratar do modelo de bielas e tirantes, somente na versão de 1990 é que foram disponibilizadas informações suficientes para se desenvolver projetos de elementos estruturais utilizando o modelo.

No modelo de bielas e tirantes as bielas são representadas por campos de tensões de compressão, resistidas pelo concreto, e os tirantes são representados por campos de tensões de tração, usualmente resistidas pela armadura. Ocasionalmente, o concreto pode absorver as tensões de tração, desde que sejam respeitadas as condições de segurança relativas à resistência a tração do concreto.

Buscando-se representar a estrutura real, constrói-se um modelo idealizado, o qual é constituído por barras, comprimidas e tracionadas, unidas por nós. As forças nas bielas e nos tirantes são calculadas por equilíbrio entre as forças atuantes internas e externas.

O processo do caminho de carga permite que se criem modelos analisando-se os fluxos de tensões na estrutura. Utilizando métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, podem ser expressas as tensões elásticas e suas direções principais, o que permite uma direta determinação do modelo. As bielas podem ter as direções das linhas médias dos campos de compressão e os tirantes as linhas médias dos campos de

tração. Um exemplo simplificado do processo do caminho de carga, e suas etapas básicas, pode ser observado na viga-parede da [Figura 2.5](#).

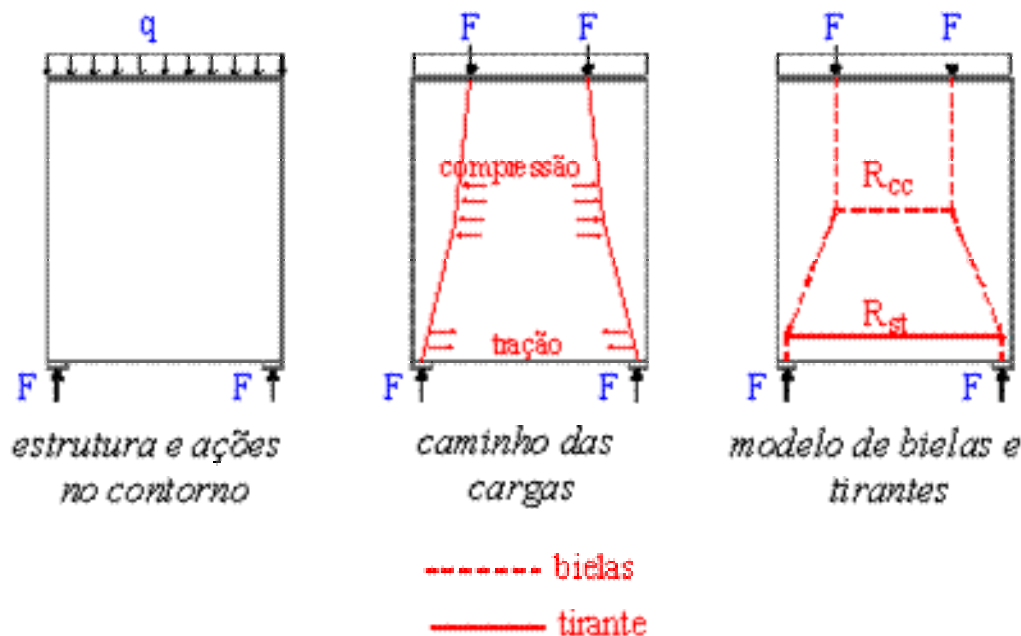


Figura 2.5 - Processo do caminho de carga

A norma canadense CSA-A23.3-94 (1994) entende que, após significativa fissuração, as trajetórias principais das tensões de compressão no concreto aproximam-se de linhas retas, as quais podem ser tomadas como bielas, os tirantes representam a armadura principal de tração e as regiões nodais são definidas pelas regiões de encontro entre bielas e tirantes. O Código Modelo CEB-FIP (1990) indica que, desde que as armaduras sejam dimensionadas de acordo com os campos de tensões elásticas, as verificações em serviço não precisam ser efetuadas.

### 2.8.3 PRINCÍPIOS BÁSICOS DO MODELO DE BIELAS E TIRANTES

Pode-se entender o modelo de bielas e tirantes como um modelo de treliça mais abrangente. Esse modelo tem por base o mecanismo resistente das vigas de concreto armado, resultando em representações dos campos de tração e compressão das mesmas. Os campos comprimidos são as diagonais



de concreto limitadas por duas fissuras consecutivas e o banzo comprimido de concreto (banzo superior, no caso de carregamento na face superior da viga), o qual pode apresentar barras de aço no caso de vigas com armadura dupla. Os campos tracionados correspondem à armadura transversal (pendurais ou montantes das treliças) e ao banzo tracionado (banzo inferior, no caso de carregamento na face superior da viga), composto pela armadura longitudinal da viga. O modelo propõe analisar a viga de concreto armado como uma treliça, estrutura formada por barras, em que as bielas e os tirantes estão ligados por nós, como mostrado na [Figura 2.8 - b](#).

Em outras palavras, o modelo consiste na representação discreta dos campos de tensão de tração e dos campos de tensão de compressão nos elementos estruturais, sendo que as bielas representam os campos principais de compressão e os tirantes representam os campos principais de tração. A tração pode ser absorvida por uma ou mais camadas de armadura. As bielas e os tirantes são interligados por elementos pontuais denominados de nós, os quais dão origem às regiões nodais. Estas, por suas vezes, constituem um volume de concreto que envolve os pontos de intersecção dos elementos do modelo. A [Figura 2.6](#) apresenta um modelo de bielas e tirantes aplicado a um apoio em dente de uma viga, com todos os seus elementos básicos descritos.

O modelo de bielas e tirantes adotado é função da geometria da estrutura e das ações atuantes em seu contorno. Segundo SILVA & GIONGO (2000), normalmente pode-se obter a geometria do modelo analisando-se os seguintes aspectos:

1. tipos de ações atuantes;
2. ângulos entre bielas e tirantes;
3. áreas de aplicação de ações e reações;
4. número de camadas das armaduras;
5. cobrimento das armaduras.

Modelos de bielas e tirantes podem ser obtidos por meio do fluxo de tensões elásticas existentes na estrutura, pelo processo do caminho de carga

ou por modelos padronizados. Caso se realizar uma análise elástica da estrutura, a fim de se determinar as tensões elásticas e suas respectivas direções principais, torna-se muito simples e imediato o desenvolvimento de um modelo adequado.

A análise elástica de uma estrutura é realizada por meio de métodos numéricos, como o método dos elementos finitos (MEF). As direções das bielas e dos tirantes é comumente adotada de acordo com a direção média dos campos de tensões de compressão e tração, respectivamente. Tais direções podem também ser determinadas de acordo com os centros de gravidade dos diagramas de tensão.

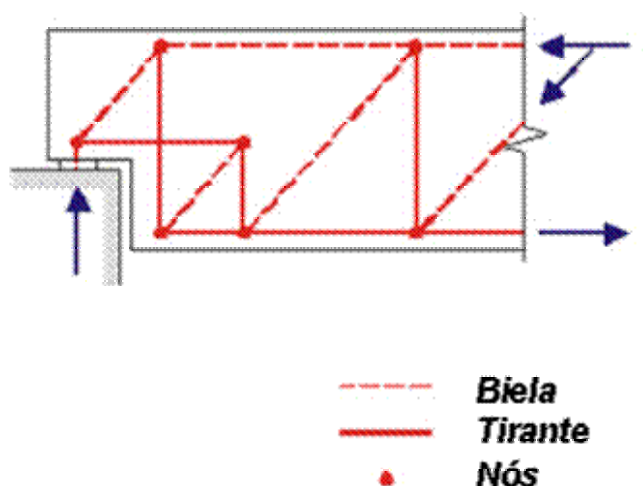


Figura 2.6 - Modelo de bielas e tirantes aplicado a um apoio em dente de uma viga

#### 2.8.4 DEFINIÇÃO GEOMÉTRICA DO MODELO

A determinação da geometria de um modelo de bielas e tirantes deve levar em conta as ações atuantes na estrutura, no que diz respeito aos tipos e áreas de aplicação, suas respectivas áreas de reações, ângulos entre bielas e tirantes.

Segundo análise do fluxo de tensões pelo elemento, por meio do processo do caminho de carga, a definição geométrica do modelo apresenta como principais fatores:

1. Considerações sobre regiões contínuas e descontínuas;
2. Ângulos entre bielas e tirantes;
3. Tipos de ações atuantes;
4. Esforços solicitantes no contorno;
5. Área de aplicação das ações e das reações;
6. Número de camadas da armadura;
7. Cobrimento da armadura.

As dimensões das bielas e das regiões nodais dependem das áreas de aplicação das ações e reações e também da armadura, quanto ao número de camadas e ao cobrimento. Já o ângulo formado entre biela e tirante está relacionado com a distribuição de tensões elásticas devida às ações atuantes.

### **2.8.5 REGIÕES CONTÍNUAS (B) E DESCONTÍNUAS (D)**

As estruturas em geral ou seus elementos estruturais podem ser divididos em regiões contínuas (B) e descontínuas (D), a fim de refinar suas análises quando da aplicação de modelos.

Tal divisão baseia-se nas *hipóteses de Bernoulli*, relativas à *distribuição linear de deformações ao longo da seção transversal*. Classificam-se como contínuas as regiões nas quais tais hipóteses são válidas e, descontínuas, nas quais não são. As regiões D são originárias de descontinuidades geométricas e/ou estáticas.

Os modelos de treliça usuais são capazes de analisar as regiões B *fissuradas*, enquanto que os modelos de bielas e tirantes representam, simplificada, o fluxo interno de tensões em regiões D, possibilitando uma análise simultânea dessas e das contínuas. Em vista disso, o modelo de bielas e tirantes mostra-se como um procedimento não só mais abrangente ou geral, como também mais sofisticado na análise e no projeto de estruturas.

Considerando a pesquisa proposta, as vigas usuais apresentam regiões descontínuas apenas nas regiões de aplicação de forças concentradas e nos apoios, sendo o restante composto por regiões contínuas, como mostram a Figura 2.7 e a Figura 2.8 - a.

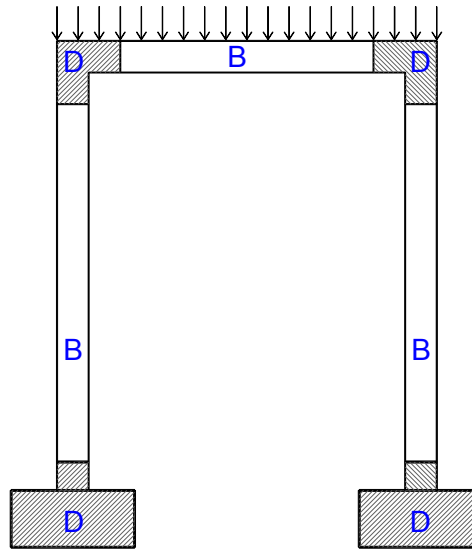


Figura 2.7 - Regiões (B) e (D) para uma viga

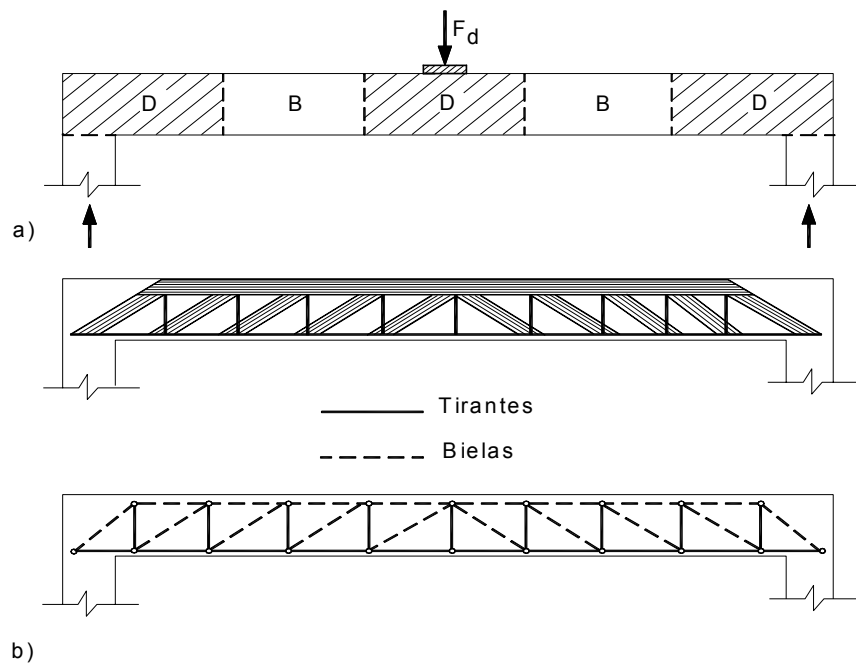


Figura 2.8 - Regiões (B) e (D) e modelo de treliça para uma viga (SILVA & GIONGO, 2000)

## 2.8.6 TIPOS FUNDAMENTAIS DE NÓS

Um nó ou região nodal é uma idealização de uma região de concreto na qual ocorrem mudanças bruscas nas direções das forças, provindas das bielas comprimidas, dos tirantes tracionados, de forças de ancoragem e forças externas – ações concentradas ou reações de apoio. Porém, essa mudança brusca de direção das forças, a qual se idealiza, simplificada, acontecer pontualmente, na realidade ocorre num determinado comprimento e numa determinada largura do elemento estrutural de concreto armado.

Segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988), os nós dos modelos de bielas e tirantes podem ser de dois tipos, adiante discutidos:

Nós singulares ou concentrados (“concentrated” ou “singular”): são nós onde forças concentradas são aplicadas e o desvio da força é feito localizadamente. Estes nós são críticos e devem ter as suas tensões verificadas, a fim de equilibrar as forças oriundas das bielas e dos tirantes sem produzir deformações excessivas capazes de provocar fissuração;

Nós contínuos (“continuous” ou “smeared”): nestes nós o desvio da força ocorre em comprimentos satisfatórios, em que as armaduras podem ser ancoradas sem maiores problemas. Desde que os critérios de ancoragem sejam verificados, estes nós usualmente não são críticos, não necessitando de verificações adicionais.

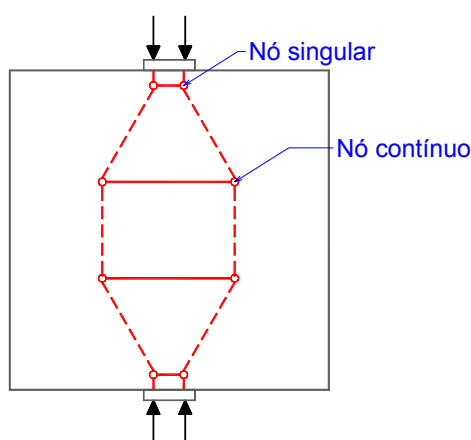


Figura 2.9 - Exemplo básico de nós contínuos e nós singulares em modelo de bielas e tirantes

Segundo BOUNASSAR (1995), no dimensionamento de nós é necessário garantir que o concreto da região nodal seja capaz de resistir o estado de tensões a qual está submetido e que a armadura possa resistir à força de tração requerida. De maneira geral, nós contínuos não apresentam problemas de resistência, desde que as ancoragens das armaduras sejam convenientemente verificadas e detalhadas. Isso garante que não ocorram pontos de concentração de tensões, haja vista que a transferência de forças nestes nós acontece de modo gradual, em comprimentos suficientes.

Por outro lado, em nós onde ocorrem situações em que as forças são resultantes de campos de tensão concentrados, há necessidade de transferência das tensões em dimensões reduzidas, configurando, assim, os nós singulares. Estes nós necessitam de criteriosa análise de resistência e detalhamento das armaduras ali concorrentes. Para o dimensionamento, é necessário se dispor da geometria do nó, do estado de tensões ao qual está submetido, da resistência do concreto e das condições de ancoragem das armaduras.

Há muitas alternativas sugeridas por pesquisadores para a definição geométrica dos nós concentrados, tais quais as sugeridas por MARTI (1985a), SCHLAICH & SCHÄFER (1988) e TJHIN & KUCHMA (2002).

Segundo MARTI (1985), deve-se adotar as larguras das bielas de tal forma que todas as que concorrem num mesmo nó apresentem a mesma intensidade de tensão. Dessa forma, a tensão no interior do nó será igual à tensão das bielas, configurando, assim, um estado de tensões pseudo-hidroestático. Neste caso em particular, os lados das regiões nodais serão perpendiculares às direções dos eixos das bielas e, para a verificação da segurança, bastará apenas a verificação das bielas concorrentes em cada nó.

De acordo com TJHIN & KUCHMA (2002), tradicionalmente procura-se estabelecer um arranjo nodal de maneira que as tensões em todos os seus lados sejam iguais. Isso pode ser feito dimensionando-se as fronteiras do nó, de maneira que elas sejam proporcionais e perpendiculares às forças atuantes naquele nó.

Para a definição da largura do nó no qual concorre um tirante pode-se admitir que a força do tirante seja de compressão e que ela esteja atuando além do nó. Os nós considerados dessa maneira são denominados de hidrostáticos, pois o estado biaxial de tensão resultante no interior do nó também será hidrostático. Essa recomendação é idêntica àquela proposta por MARTI (1985a), citada anteriormente.

Ainda segundo TJHIN & KUCHMA (2002), principalmente em situações em que os nós são formados pelo encontro de mais de três elementos, a idealização como hidrostático pode ser muito trabalhosa, pois os eixos dos elementos tende, a não ser coincidentes.

Regiões nodais formadas pelo cruzamento de quatro elementos, por exemplo, são de difícil investigação. Nesses casos, podem ser adotadas as recomendações de SCHLAICH & ANAGNOSTOU (1990), que propõem a construção de uma região nodal modificada. Essa região é dividida em várias regiões nodais triangulares hidrostáticas conectadas por escoras prismáticas curtas. Nesse caso, a verificação da segurança em cada um dos nós formados pode ser feita utilizando um critério simples de ruptura, como o de Coulomb.

SCHLAICH & SCHÄFER (1988, 1991) propuseram um método simplificado para configurações típicas de nós. Segundo os pesquisadores, o nó tem sua geometria definida pela intersecção das dimensões das bielas e dos tirantes, cujos eixos devem coincidir. Assim, as tensões planas atuantes em todos os lados da região nodal não precisam ser iguais, porém as tensões em cada lado do nó devem ser constantes e devem permanecer abaixo de um limite pré-estabelecido para a tensão nodal.

Segundo BOUNASSAR (1995), nós atravessados por armaduras ou que possuam armaduras ancoradas terão suas seguranças verificadas caso a tensão no concreto sobre a placa de apoio e a tensão na(s) biela(s) forem verificadas.

## 2.8.7 PARÂMETROS DE RESISTÊNCIA DAS REGIÕES NODAIS

Os nós são elementos que merecem atenção especial, pois precisam garantir adequada transferência de forças entre bielas e tirantes.

Um fator limitante para a segurança e a confiabilidade de um nó é o ângulo formado pelas bielas e tirantes que nele concorrem. Quanto menor este ângulo, menor a resistência à compressão da biela.

A tabela seguinte apresenta os intervalos permitidos para o ângulo formado entre uma biela e um tirante, segundo recomendações das principais normas internacionais e alguns pesquisadores.

Tabela 2.1 - Limites inferior e superior para o ângulo formado entre as diagonais comprimidas e a armadura longitudinal da viga

Valores limites para o ângulo $\theta$	
Norma ou pesquisador	Ângulo permitido
NBR 6118:2003	$30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$
ACI 318 (2002)	$25^\circ \leq \theta \leq 65^\circ$
EUROCODE 2 (1992)	$31^\circ \leq \theta \leq 59^\circ$
Projeto de revisão do EUROCODE 2 (1999)	$21^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$
CEB-FIP Model Code (1990)	$18,4^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$
FUSCO (1984)	$26^\circ \leq \theta \leq 63^\circ$
SCHLAICH & SCHÄFER (1988, 1991)	$45^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$

Em virtude do estado multiaxial de tensões os quais os nós são submetidos, diferentes valores de resistência à compressão devem ser adotados. A resistência à compressão do concreto da região nodal segundo YUN & RAMIREZ (1996) depende dos seguintes fatores:

Tensões de tração relativas à ancoragem de tirantes na zona nodal ou abaixo dela;



Confinamento das zonas nodais relativo às reações, às bielas, às placas de ancoragem para protensão, às armaduras de elementos adjacentes e às armaduras em laço;

Efeitos de descontinuidade de deformação junto à região nodal quando há tirantes deformados ancorados.

Para a classificação das regiões nodais serão adotados os parâmetros da ASCE-ACI (1998) e da ACI 318 (2002), haja vista que o próprio CAST (2000) toma por base a norma norte-americana. Suas prescrições sugerem a classificação das regiões nodais como:

**CCC:** região nodal circundada somente por bielas;

**CCT:** região nodal circundada por bielas e por um único tirante;

**CTT:** região nodal circundada por uma única biela e por tirantes em uma ou mais direções;

**TTT:** região nodal circundada por três ou mais tirantes.

Apresentam-se a seguir recomendações para a verificação das regiões nodais segundo as principais normas e alguns pesquisadores.

### **2.8.7.1 SCHLAICH & SCHÄFER (1988, 1991)**

Os critérios básicos de resistência nodal, segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988, 1991), são:

$f_e = 1,0 f_{cd}$  para nós só com bielas, criando um estado de tensão biaxial ou triaxial (2.46)

$f_e = 0,8 f_{cd}$  para nós onde há barras tracionadas ancoradas, sendo que uma parcela da resistência é reservada para a aderência (2.47)

sendo:

$f_e$  = resistência da região nodal

$f_{cd}$  = resistência de cálculo do concreto segundo a norma utilizada.

SCHLAICH & SCHÄFER (1988, 1991), em seus trabalhos, descreveram nove diferentes situações de nós singulares e suas respectivas verificações simplificadas, a fim de garantir suas seguranças. Estes nós são apresentados a seguir.

### 2.8.7.1.1 Nó N1

Típico nó CCC, em que uma biela termina no canto da estrutura, conforme ilustra a [Figura 2.10](#). Neste caso, o nó será seguro se:

$$\sigma_1 \leq 1,1f_{cd} \quad (2.48)$$

$$\sigma_2 \leq 1,1f_{cd} \quad (2.49)$$

$$\sigma_3 \leq 1,1f_{cd} \quad (2.50)$$

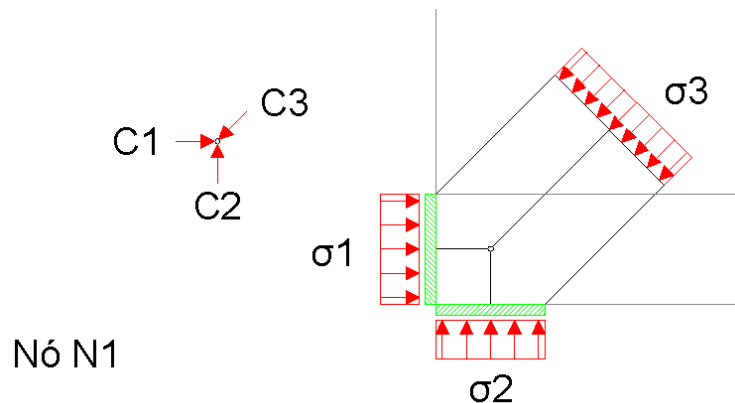


Figura 2.10 - Nó N1 segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991)

### 2.8.7.1.2 Nó N2

Típico nó CCC, em que duas bielas se encontram e são equilibradas por uma reação de compressão, seja ela proveniente de um pilar ou de uma placa de apoio, conforme ilustra a [Figura 2.11](#). Neste caso, o nó será seguro se:

$$\sigma_1 = 1,1f_{cd} \quad (2.51)$$

Nota-se que, para que a condição anterior seja verificada, deve-se escolher espessuras adequadas para as bielas, a fim de fazer com que a tensão  $\sigma_1$  seja a governante.

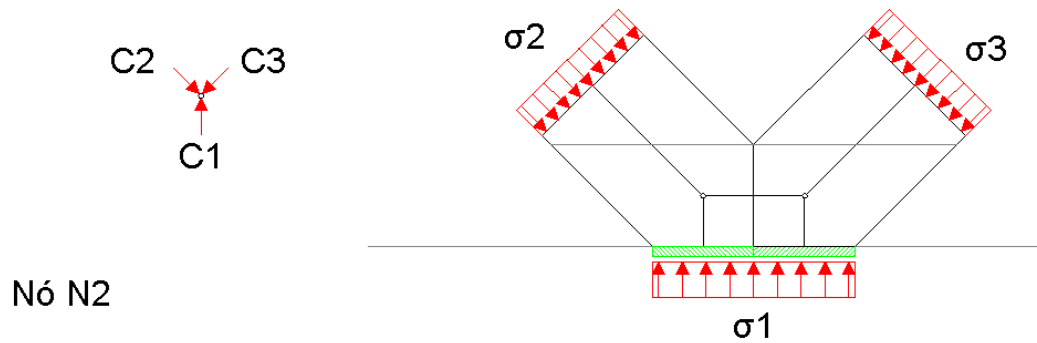


Figura 2.11 - Nó N2 segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991)

### 2.8.7.1.3 Nó N3

Típico nó CCC, em que há introdução de força de compressão na face da estrutura, como em casos de armadura ativa, conforme ilustra a Figura 2.12. Neste caso, o nó será seguro se:

$$\sigma_1 \leq 1,1f_{cd} \tag{2.52}$$

$$\sigma_2 \leq 1,1f_{cd} \tag{2.53}$$

Nota-se que a tensão interna do nó também deve ser inferior a esse limite.

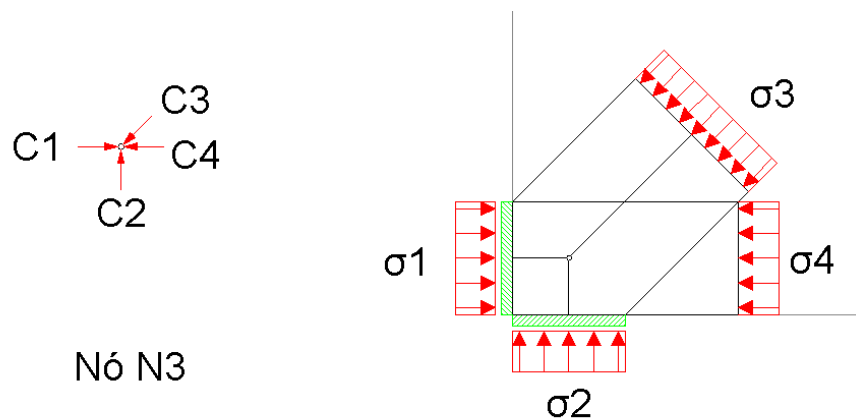


Figura 2.12 - Nó N3 segundo SCHLAICH &amp; SCHÄFER (1988; 1991)

#### 2.8.7.1.4 Nó N4

Típico nó CCC, em que aparece uma reação de apoio na face da estrutura conforme ilustra a Figura 2.13. Neste caso, o nó será seguro se:

$$\sigma_1 \leq 1,1f_{cd} \quad (2.54)$$

$$\sigma_2 \leq 1,1f_{cd} \quad (2.55)$$

Nota-se que, como no caso anterior, a tensão interna do nó também deve ser inferior a esse limite.

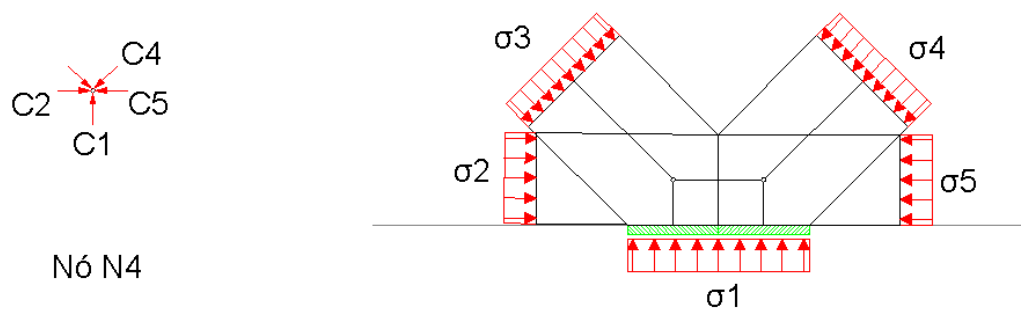


Figura 2.13 - Nó N4 segundo SCHLAICH &amp; SCHÄFER (1988; 1991)

#### 2.8.7.1.5 Nó N5

Típico nó CCT, em que há ancoragem de um tirante em uma região afastada das faces da estrutura, conforme ilustra a Figura 2.14.

Neste caso, o nó será seguro se:

$$\sigma_1 \leq 1,1f_{cd} \quad (2.56)$$

$$\sigma_2 \leq 1,1f_{cd} \quad (2.57)$$

Nota-se que, em todo caso em que há tirante, o comprimento de ancoragem do mesmo deve ser verificado.

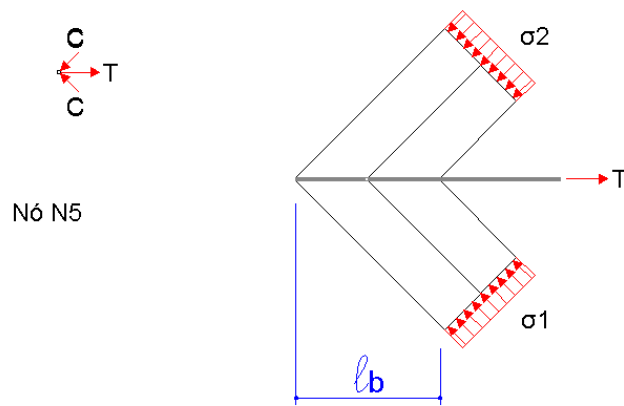


Figura 2.14 - Nó N5 segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991)

### 2.8.7.1.6 Nó N6

Típico nó CCT, em que há um tirante passando por uma região de apoio da estrutura conforme ilustra a Figura 2.15. Neste caso, o nó será seguro se:

$$\sigma_1 \leq 0,8f_{cd} \tag{2.58}$$

$$\sigma_2 \leq 0,8f_{cd} \tag{2.59}$$

Nota-se que, em todo caso em que há tirante, o comprimento de ancoragem do mesmo deve ser verificado.

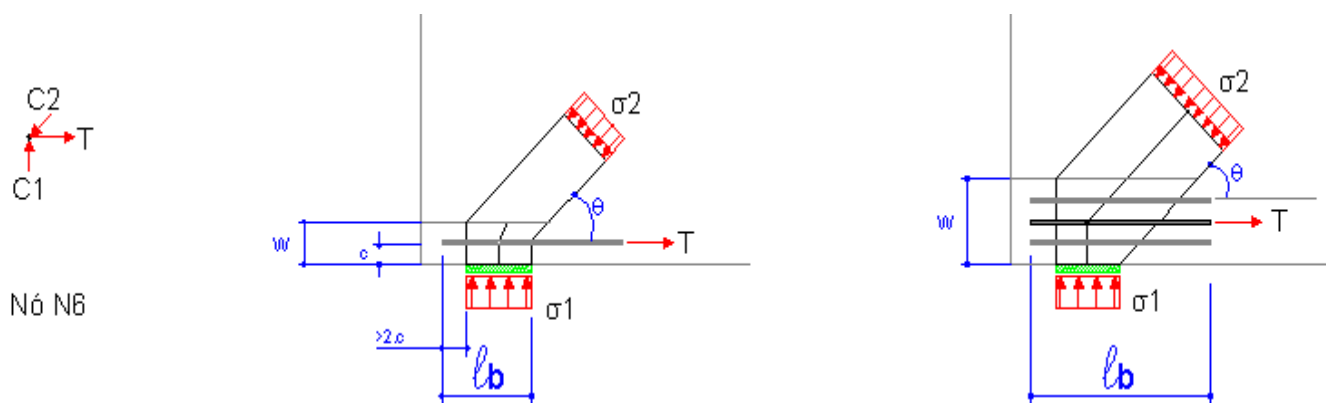


Figura 2.15 - Nó N6 segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991)

### 2.8.7.1.7 Nó N7

Típico nó CTT, em que há duas ou mais forças de tração atuando no nó. Esta configuração é típica de banzos tracionados de vigas ou vigas-parede, conforme ilustra a [Figura 2.16](#). Neste caso, o nó será seguro se:

$$\sigma_1 \leq 0,8f_{cd} \quad (2.60)$$

Nota-se que, em todo caso em que há tirante, o comprimento de ancoragem do mesmo deve ser verificado. Como recomendação adicional, as barras do tirante  $T_2$  devem ter pequenos diâmetros e ser bem distribuídas. Além disso, elas devem envolver as barras do tirante  $T_1$ .

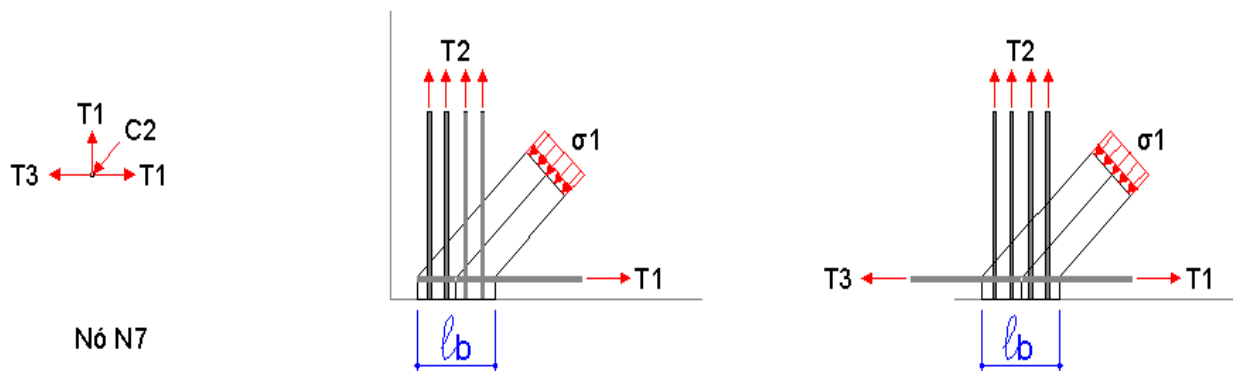


Figura 2.16 - Nó N7 segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991)

### 2.8.7.1.8 Nó N8

Típico nó CCT, em que há uma única força de tração atuando no nó. Este nó é uma composição dos nós N1 e N6, conforme ilustra a [Figura 2.17](#). Neste caso, o nó será seguro se:

$$\sigma_1 \leq 1,0f_{cd} \quad (2.61)$$

$$\sigma_2 \leq 1,0f_{cd} \quad (2.62)$$

Nota-se que, em todo caso em que há tirante, o comprimento de ancoragem do mesmo deve ser verificado.

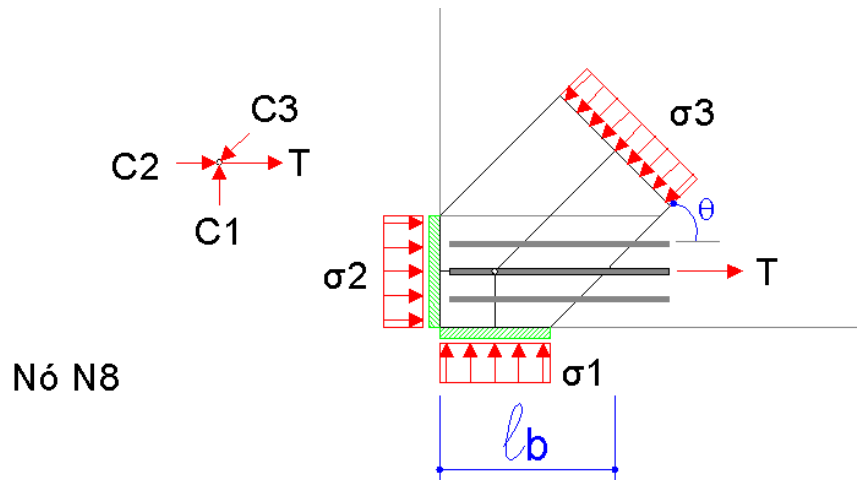


Figura 2.17 - Nó N8 segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991)

### 2.8.7.1.9 Nó N9

Típico nó CTT, em que há mais de uma resultante de tração atuando no nó. Este nó é uma composição de dois nós N8 e, sendo assim, sua verificação se dá da mesma forma. Trata-se de um nó típico de apoio de viga contínua ou viga-parede contínua, conforme ilustra a [Figura 2.16](#). Neste caso, o nó será seguro se:

$$\sigma_1 \leq 1,0f_{cd} \quad (2.63)$$

$$\sigma_2 \leq 1,0f_{cd} \quad (2.64)$$

Nota-se que, em todo caso em que há tirante, o comprimento de ancoragem do mesmo deve ser verificado.

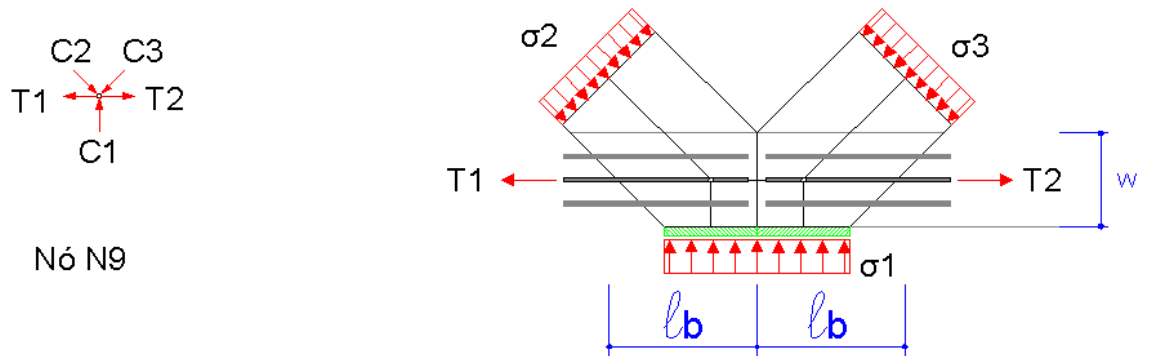


Figura 2.18 - Nó N9 segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991)

Por fim, segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988; 1991), na verificação dos nós singulares, os quais estão sujeitos a tensões do tipo “garrafa”, uma região D está completamente segura se:

- 1) todas as forças de tração são resistidas por armaduras que apresentem adequados comprimentos e demais condições de ancoragem;
- 2) a tensão na placa de apoio ou placa de ancoragem mais solicitada for inferior a  $0,6f_{cd}$ .

### 2.8.7.2 MACGREGOR (1988)

Os critérios básicos de resistência nodal, segundo MACGREGOR (1988), são:

$f_e = 0,85 f_c$  para nós CCC, ou seja, submetidos apenas a compressão, por bielas e placas de apoio (2.65)

$f_e = 0,65 f_c$  para nós CCT, ou seja, em que é ancorado apenas um tirante; (2.66)

$f_e = 0,50 f_c$  para nós CTT ou TTT, ou seja, que ancoram tirantes em duas ou mais direções. (2.67)

sendo:

$f_e$  = resistência da região nodal



### 2.8.7.3 Apêndice A do ACI 318 (2002)

De acordo com o Apêndice A do ACI 318 (2002), os critérios de resistência da região nodal são:

$$\phi \cdot F_{nn} \geq F_u \quad (2.68)$$

$$F_{nn} = f_{cu} \cdot A_n \quad (2.69)$$

$$f_{cu} = 0,85 \cdot \beta_s \cdot f_c' \quad (2.70)$$

sendo:

$f_c'$  = resistência característica do concreto;

$\phi = 0,85$ ;

$\beta_s = 1,0$  para regiões nodais circundadas por bielas e/ou placas de apoio (nós tipo CCC);

$\beta_s = 0,80$  para regiões nodais ancorando somente um tirante (nós tipo CCT);

$\beta_s = 0,60$  para regiões nodais ancorando dois ou mais tirantes (nós tipo CTT).

## 2.8.8 PARÂMETROS DE RESISTÊNCIA DAS BIELAS

### 2.8.8.1 Norma canadense CSA-A-23.3-94 (1994)

Segundo a CSA-A-23.3-94 (1994), as dimensões das bielas devem assegurar que a força de compressão calculada não exceda o valor de:

$$\Phi_c \cdot A_{cs} \cdot f_{cv} \quad (2.71)$$

sendo:

$\Phi_c$  = fator de segurança do concreto = 0,6;

$A_{cs}$  = área da seção transversal da biela;

$f_{cv}$  = parâmetro de resistência da biela.

### **2.8.8.2 Resistência das bielas segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988, 1991)**

Os critérios básicos de resistência das bielas, segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988, 1991), são:

$$0,85 f_{cd} \text{ para estado de tensão uniaxial e sem perturbação;} \quad (2.72)$$

0,68  $f_{cd}$  para campos de compressão com fissuras paralelas às tensões de compressão; (2.73)

$$0,51 f_{cd} \text{ para campos de compressão com fissuras inclinadas.} \quad (2.74)$$

### **2.8.8.3 Resistência das bielas segundo o Apêndice A do ACI 318 (2002)**

Os critérios básicos de resistência das bielas, segundo o Apêndice A do ACI 318 (2002), são:

$$\phi \cdot F_{ns} \geq F_u \quad (2.75)$$

$$F_{ns} = f_{cu} \cdot A_c \quad (2.76)$$

$$f_{cu} = 0,85 \cdot \beta_s \cdot f_c' \quad (2.77)$$

sendo:

$f_c'$  = resistência característica do concreto;

$$\phi = 0,85;$$

$\beta_s = 1,0$  para bielas uniformes de seção constante;

$\beta_s = 0,75$  para bielas do tipo garrafa que satisfaçam o item A.3.3 de distribuição de malha de armadura, encontrado no Apêndice A do ACI-318 (2002);

$\beta_s = 0,60 \cdot \lambda$  para bielas do tipo garrafa que não satisfaçam o item A.3.3 de distribuição de malha de armadura, encontrado no Apêndice A do ACI-318 (2002).

## 2.8.9 PARÂMETROS DE RESISTÊNCIA DOS TIRANTES

Quase sempre as forças internas de tração na estrutura resultantes do modelo adotado são absorvidas por tirantes constituídos por uma ou mais camadas de barras de aço, devido à limitada capacidade resistente do concreto em absorver esforços de tração. Ainda assim, caso se necessite, pode-se prover a estrutura de tirantes de concreto. Segundo SCHLAICH & SCHÄFER (1988, 1991), deve-se considerar a resistência à tração do concreto somente quando se esperar ruptura frágil ou zonas de ruptura localizadas.

A seguir são fornecidas as expressões para o dimensionamento de tirantes de concreto e tirantes de aço:

$$A_s = \gamma_f \cdot R_{st} / f_{yd} \quad (2.78)$$

$$A_c = \gamma_f \cdot R_{st} / f_{td} \quad (2.79)$$

sendo:

$A_s$  = área necessária do tirante de aço;

$A_c$  = área necessária do tirante de concreto;

$R_{st}$  = força de tração atuante;

$f_{yd}$  = resistência ao escoamento de cálculo do aço;

$f_{td}$  = resistência à tração de cálculo do concreto;

$\gamma_f$  = coeficiente de majoração das ações.

## 3 COMPORTAMENTO E VERIFICAÇÃO DE VIGAS SEGUNDO AS NORMAS PROPOSTAS

---

### 3.1 CRITÉRIOS DA NBR 6118:2003

#### 3.1.1 GENERALIDADES

A norma brasileira NBR 6118:2003 “Projeto de estruturas de concreto – Procedimento” mantém a analogia entre a viga de concreto armado fletida e o modelo de treliça de banzos paralelos para a verificação da segurança, acrescido de mecanismos resistentes complementares existentes no interior da peça, a componente adicional  $V_c$ . Nesta versão atual realizam-se as verificações necessárias em termos de *forças atuantes* na armadura transversal e nas bielas de concreto, ao contrário da versão anterior, a NBR 6118:1978, que realizava as verificações em termos de *tensões*.

São propostos dois modelos alternativos de cálculo, sendo o primeiro mais simplificado em relação ao segundo:

1. **Modelo de cálculo I:** considera as diagonais de compressão inclinadas de  $\theta = 45^\circ$  em relação ao eixo longitudinal da peça e a parcela de contribuição  $V_c$  apresenta valor supostamente constante;

2. **Modelo de cálculo II:** considera as diagonais de compressão com inclinação arbitrada livremente no intervalo  $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$  em relação ao eixo longitudinal da peça e a parcela de contribuição  $V_c$  apresenta valores inferiores em relação ao modelo anterior.

Em relação à NBR 6118:2003, as prescrições da NBR 6118:1978 relativas aos esforços solicitantes, reduções nas forças cortantes para seções próximas a apoios e peças de altura variável foram mantidas. Para solicitações uniformemente distribuídas, a força cortante considerada na seção próxima ao apoio é a mesma que atua na seção distante ( $d / 2$ ) da face do apoio.

### 3.1.2 VERIFICAÇÃO DO ESTADO LIMITE ÚLTIMO

Em uma determinada seção, a resistência do elemento precisa verificar as seguintes condições:

$$V_{Sd} \leq V_{Rd2} \quad (3.1)$$

e

$$V_{Sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (3.2)$$

sendo:

$V_{Sd}$  = força cortante solicitante de cálculo na seção;

$V_{Rd2}$  = força cortante resistente de cálculo, relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto;

$V_c$  = parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça;

$V_{sw}$  = parcela absorvida pela armadura transversal.

#### 3.1.2.1 Modelo de cálculo I

Neste modelo, a resistência da peça é assegurada pela verificação da compressão diagonal no concreto (3.3) e pelo cálculo da armadura transversal (3.5), segundo as expressões:

$$V_{Rd2} = 0,27 \alpha_v f_{cd} b_w d \quad (3.3)$$

$$\alpha_v = (1 - f_{ck} / 250) \quad (3.4)$$

$$V_{sw} = (A_{sw} / s) 0,9 d f_{ywd} (\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{cos}\alpha) \quad (3.5)$$

sendo:

$V_c = 0$  nas peças tracionadas em que a linha neutra se situa fora da seção;

$V_c = V_{c0}$  na flexão simples e na flexo-tração com a linha neutra cortando a seção;

$$V_c = (V_{c0} + V_{c0} M_0 / M_d) \leq 2 V_{c0} \text{ na flexo-compressão;}$$

$M_0$  = momento fletor que anula a tensão normal de compressão na borda da seção;

$M_d$  = momento fletor de cálculo máximo no trecho em análise.

$$V_{c0} = 0,6 f_{ctd} b_w d \quad (3.6)$$

$$f_{ctd} = f_{ctk,inf} / \gamma_c \quad (3.7)$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7 f_{ctm} \quad (3.8)$$

$$f_{ctm} = 0,3 f_{ck}^{2/3}, \text{ sendo } f_{ck} \text{ em MPa} \quad (3.9)$$

### 3.1.2.2 Modelo de cálculo II

Neste segundo modelo, a resistência da peça é assegurada pela verificação da compressão diagonal no concreto (3.10) e pelo cálculo da armadura transversal (3.11), segundo as expressões:

$$V_{Rd2} = 0,54 \alpha_v f_{cd} b_w d \operatorname{sen}^2\theta (\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\theta) \quad (3.10)$$

$$V_{sw} = (A_{sw} / s) 0,9 d f_{ywd} (\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\theta) \operatorname{sen}\alpha \quad (3.11)$$

sendo:

$V_c = 0$  nas peças tracionadas em que a linha neutra se situa fora da seção;

$V_c = V_{c1}$  na flexão simples e na flexo-tração com a linha neutra cortando a seção;

$$V_c = (V_{c1} + V_{c1} M_0 / M_d) \leq 2 V_{c1} \text{ na flexo-compressão;}$$

$M_0$  = momento fletor que anula a tensão normal de compressão na borda da seção;

$M_d$  = momento fletor de cálculo máximo no trecho em análise;

$$V_{c1} = V_{c0} \text{ quando } V_d = V_{c0};$$

$$V_{c1} = 0 \text{ quando } V_d = V_{Rd2}.$$

Observação:

No cálculo de  $V_{c1}$ , para valores intermediários deve-se interpolar linearmente.

### 3.1.3 ARMADURA MÍNIMA E ESPAÇAMENTOS

A taxa geométrica de armadura transversal mínima da qual todos os elementos lineares fletidos submetidos à ação de força cortante devem estar providos é dada pela expressão:

$$\rho_{sw,min} = A_{sw} / b_w s \sin \alpha \geq 0,2 f_{ctm} / f_{yk} \quad (3.12)$$

O espaçamento longitudinal mínimo entre estribos deve apenas permitir a passagem do vibrador para que se garanta um bom adensamento do concreto. Já o espaçamento máximo deve atender às seguintes condições:

$$\text{se } V_d \leq 0,67 V_{Rd2} \Rightarrow s_{m\acute{a}x} = 0,6 d \leq 300 \text{ mm} \quad (3.13)$$

$$\text{se } V_d > 0,67 V_{Rd2} \Rightarrow s_{m\acute{a}x} = 0,3 d \leq 200 \text{ mm} \quad (3.14)$$

### 3.1.4 RELAÇÃO ENTRE A NBR 6118:2003 E O CÓDIGO MODELO CEB-FIP (1990)

As expressões finais obtidas pelo Código Modelo CEB-FIP (1990), apesar de apresentarem nomenclatura diferente daquelas fornecidas pela NBR 6118:2003, são do mesmo gênero, mostrando também a validade dos

esquemas de forças internas e externas igualmente para a norma brasileira. Serão apresentadas, a seguir, similaridades entre as expressões fornecidas por cada uma das duas normas. Para a norma brasileira, utilizaremos as expressões do modelo de cálculo II, por ser mais geral, pois tal como o MC CEB-FIP (1990), considera a inclinação  $\theta$  das bielas livre, não necessariamente  $\theta = 45^\circ$  como o modelo de cálculo I

### 3.1.4.1 Verificação da compressão diagonal do concreto

Condição de segurança:

$$\text{NBR 6118:2003:} \quad V_{Sd} < V_{Rd2} \quad (3.15)$$

$$\text{CEB-FIP (1990):} \quad R_{Scw} < R_{Rcw} \quad (3.16)$$

#### 3.1.4.1.1 NBR 6118:2003

$$V_{Rd2} = 0,54 \alpha_v f_{cd} b_w d \text{sen}^2\theta (\text{cotg}\theta + \text{cotg}\alpha) \quad (3.17)$$

sendo:

$$\alpha_v = (1 - f_{ck} / 250) \quad (3.18)$$

$$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c \quad (3.19)$$

$$\gamma_c = 1,4$$

#### 3.1.4.1.2 MC CEB-FIP (1990)

$$R_{Scw} = (V_d / \text{sen}\theta) [\text{cotg}\theta / (\text{cotg}\theta + \text{cotg}\alpha)] \quad (3.20)$$

e

$$R_{Rcw} = f_{cd2} b_w z \text{cos}\theta \quad (3.21)$$

sendo:

$$f_{cd2} = 0,6 (1 - f_{ck} / 250) f_{cd} \quad (3.22)$$

$$f_{cd} = f_{ck} / \gamma_c \quad (3.23)$$



$$\gamma_c = 1,5$$

### 3.1.4.1.3 Compatibilização

Igualando  $R_{Scw}$  a  $R_{Rcw}$  e isolando  $V_d$ , obtém-se:

$$V_d = (f_{cd2}) b_w d \text{sen}^2\theta (\text{cotg}\alpha + \text{cotg}\theta) \quad (3.24)$$

que, por sua vez, é aproximadamente igual a  $V_{Rd2}$ , fornecida segundo a NBR 6118:2003:

$$V_d \sim V_{Rd2}$$

$$(f_{cd2}) b_w d \text{sen}^2\theta (\text{cotg}\theta + \text{cotg}\alpha) \sim [0,54 (1 - f_{ck} / 250) (f_{ck} / \gamma_c)] b_w d \text{sen}^2\theta (\text{cotg}\theta + \text{cotg}\alpha) \quad (3.25)$$

Portanto, a pequena diferença existente entre as expressões para verificação da compressão diagonal do concreto segundo a NBR 6118:2003 e o Código Modelo CEB-FIP (1990), se verifica nos termos:

$$(f_{cd2}) \sim [0,54 (1 - f_{ck} / 250) (f_{ck} / \gamma_c)] \quad (3.26)$$

1º termo:

$$\begin{aligned} f_{cd2} &= 0,6 (1 - f_{ck} / 250) f_{cd} = (0,6 / \gamma_c) [(1 - f_{ck} / 250) f_{ck}] = \\ &= (0,6 / 1,5) [(1 - f_{ck} / 250) f_{ck}] \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$f_{cd2} = 0,4 [(1 - f_{ck} / 250) f_{ck}] \quad (3.28)$$

2º termo:

$$\begin{aligned} [0,54 (1 - f_{ck} / 250) (f_{ck} / \gamma_c)] &= (0,54 / \gamma_c) [(1 - f_{ck} / 250) f_{ck}] = \\ &= (0,54 / 1,4) [(1 - f_{ck} / 250) f_{ck}] = 0,386 [(1 - f_{ck} / 250) f_{ck}] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Comparando-se o 1º e o 2º termos, temos:

$$0,4 [(1 - f_{ck} / 250) f_{ck}] \sim 0,386 [(1 - f_{ck} / 250) f_{ck}] \quad (3.30)$$

ou seja:

$$0,4 \sim 0,386$$

A relação entre esses valores indica, portanto, diferença de 3,5%.

### 3.1.4.2 Cálculo da armadura transversal

Condição de segurança:

$$\text{NBR 6118:2003:} \quad V_{Sd} < V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (3.31)$$

$$\text{CEB-FIP (1990):} \quad R_{Stw} < R_{Rtw} \quad (3.32)$$

#### 3.1.4.2.1 NBR 6118:2003

$$V_{sw} = (A_{sw} / s) 0,9 d f_{ywd} (\cotg\theta + \cotg\alpha) \text{sen}\alpha \quad (3.33)$$

sendo:

$$0,9 d = z \quad (3.34)$$

#### 3.1.4.2.2 MC CEB-FIP (1990)

$$R_{Stw} = V_d / \text{sen}\alpha \quad (3.35)$$

e

$$R_{Rtw} = A_{sw} f_{yd} z (\cotg\theta + \cotg\alpha) / s \quad (3.36)$$

#### 3.1.4.2.3 Compatibilização

Igualando  $R_{Stw}$  a  $R_{Rtw}$  e isolando  $V_d$ , obtém-se:

$$V_d = (A_{sw} / s) f_{yd} z \text{sen}\alpha (\cotg\theta + \cotg\alpha) \quad (3.37)$$

que, por sua vez, é aproximadamente igual ao termo  $V_{sw}$ , considerado pela NBR 6118:2003. Para representar de forma idêntica os dois termos, basta apenas fazer as seguintes substituições, como a seguir:

$$z = 0,9 d$$

$$f_{yd} = f_{ywd}$$

Portanto:

$$V_d = V_{sw}$$

$$(A_{sw} / s) (z) (f_{yd}) \operatorname{sen} \alpha (\cotg \theta + \cotg \alpha) = V_{sw} (A_{sw} / s) (0,9 d) (f_{ywd}) \operatorname{sen} \alpha (\cotg \theta + \cotg \alpha) \quad (3.38)$$

Lembrando que o termo complementar  $V_c$  da NBR 6118:2003, referente à parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça, não é considerada pelo MC CEB-FIP (1990) nessa verificação.

## 3.2 CRITÉRIO DO EUROCODE 2 (1992)

### 3.2.1 GENERALIDADES

A verificação da segurança de elementos estruturais fletidos, segundo o EUROCODE 2 (1992), também se baseia na treliça de MÖRSCH, considerando-se forças atuantes e resistentes na armadura transversal e nas bielas de concreto. As forças resistentes consideradas são:

$V_{Rd1}$  = força cortante resistente do elemento sem armadura transversal;

$V_{Rd2}$  = força cortante máxima que pode ser resistida sem o esmagamento das bielas comprimidas de concreto;

$V_{Rd3}$  = força cortante que pode ser absorvida pelo elemento com armadura transversal.

Considera-se a força cortante atuante na seção próxima ao apoio a mesma que a atuante na seção que dista  $d$  da face do apoio. Essa consideração difere do critério da NBR 6118:2003, a qual considera, para solicitações uniformemente distribuídas, força cortante na seção próxima ao apoio a mesma que atua na seção distante  $(d / 2)$  da face do apoio.

### 3.2.2 VERIFICAÇÃO DA RUPTURA DO CONCRETO

Condição de segurança:

$$V_{Sd} < V_{Rd2} \quad (3.39)$$

$$V_{Rd2} = (0,5 \nu f_{cd}) b_w 0,9 d (1 + \cotg \alpha) \quad (3.40)$$

sendo:

$$\nu = (0,7 - f_{ck} / 200) \geq 0,5, \text{ sendo } f_{ck} \text{ em MPa} \quad (3.41)$$

### 3.2.3 CÁLCULO DA ARMADURA TRANSVERSAL

É necessário se calcular a área de armadura transversal quando  $V_{Sd} > V_{Rd1}$ . A resistência ao cisalhamento da seção com armadura transversal é dada por:

$$V_{Sd} = V_{Rd3} = V_{cd} + V_{wd} \quad (3.42)$$

$$V_{cd} = V_{Rd1} \quad (3.43)$$

$$V_{wd} = (A_{sw} / s) 0,9 d f_{ywd} \quad (3.44)$$

sendo:

$V_{cd}$  = contribuição do concreto;

$V_{wd}$  = contribuição da armadura transversal.

### 3.2.4 ARMADURA MÍNIMA E ESPAÇAMENTO

As taxas de armadura mínima admitem os valores mostrados na tabela a seguir, em função das classes de resistência do concreto e do aço, sendo a taxa de armadura dada pela seguinte expressão:

$$\rho_w = \frac{A_{sw}}{b_w \cdot s \cdot \sen \alpha} \quad (3.45)$$

Tabela 3.1 - Taxas mínimas de armadura transversal  $\rho_{w,min}$  segundo o Eurocode 2 (1992)

<b>Taxas mínimas de armadura transversal <math>\rho_{w,min}</math> - Eurocode 2 (1992)</b>			
<b>Classe do concreto</b>	<b>Classe do aço</b>		
	S220	S400	S500
C12/15 e C20/25	0,0016	0,0009	0,0007
C25/30 e C35/45	0,0024	0,0013	0,0011
C40/50 e C50/60	0,0030	0,0016	0,0013

Observação:

Na tabela acima, para a classe C20/25 o primeiro valor é a resistência obtida em corpos-de-prova cilíndricos e o segundo em corpos-de-prova cúbicos.

O espaçamento longitudinal máximo entre os ramos da armadura transversal depende do valor da força solicitante de cálculo  $V_{Sd}$  e da força cortante que provoca a ruptura das bielas de concreto  $V_{Rd2}$ , segundo as expressões a seguir:

$$\text{se } V_{Sd} \leq (1 / 5) V_{Rd2} \Rightarrow s_{max} = 0,8 d \leq 30 \text{ cm} \quad (3.46)$$

$$\text{se } (1 / 5) V_{Rd2} < V_{Sd} \leq (2 / 3) V_{Rd2} \Rightarrow s_{max} = 0,6 d \leq 30 \text{ cm} \quad (3.47)$$

$$\text{se } V_{Sd} > (2 / 3) V_{Rd2} \Rightarrow s_{max} = 0,3 d \leq 20 \text{ cm} \quad (3.48)$$

### 3.3 CRITÉRIO DO ACI 318M (1995)

#### 3.3.1 GENERALIDADES

A verificação da segurança de elementos submetidos a força cortante, segundo o ACI 318M (1995), baseia-se na comparação entre a força cortante

solicitante de cálculo e a resistente na seção considerada. Dessa forma, obtém-se:

$$V_u \leq \phi V_n \quad (3.49)$$

$$V_n = V_c + V_s \quad (3.50)$$

sendo:

$V_u$  = força cortante solicitante de cálculo;

$V_n$  = força cortante resistente da seção;

$\phi$  = coeficiente de redução da resistência, obtido experimentalmente, sendo que  $\phi = 0,85$  no caso de cisalhamento;

$V_c$  = parcela da força cortante absorvida pelo concreto;

$V_s$  = parcela da força cortante absorvida pela armadura.

Desde que não haja força concentrada próxima ao apoio da peça, permite-se uma redução da força cortante solicitante, considerando-a igual à força cortante atuante na seção transversal que dista  $d$  da face do apoio.

### 3.3.2 CONTRIBUIÇÃO DO CONCRETO

Para seções submetidas à ação de força cortante, a parcela de força cortante absorvida pelo concreto pode ser calculada pela seguinte expressão:

$$V_c = (\sqrt{f'_c} / 6) \cdot b_w \cdot d \quad (3.51)$$

$$\sqrt{f'_c} \leq 25 / 3 \text{ MPa}$$

sendo:

$f'_c$  = resistência à compressão do concreto, definida a partir do quantil de 1%.

Para seções em que atuam simultaneamente momento fletor e força cortante:

$$V_c = \left[ \left( \sqrt{f'_c} + 120 \cdot \rho_w \cdot \frac{V_u \cdot d}{M_u} \right) / 7 \right] \cdot b_w \cdot d \leq 0,30 \cdot \sqrt{f'_c} \cdot b_w \cdot d \quad (3.52)$$

$$\rho = A_s / b_w d \quad (3.53)$$

$$(V_u d / M_u) \leq 1,0 \quad (3.54)$$

sendo:

$M_u$  = momento fletor solicitante de cálculo que ocorre simultaneamente à força cortante na seção considerada;

$\rho$  = taxa de armadura longitudinal.

### 3.3.3 DIMENSIONAMENTO DA ARMADURA TRANSVERSAL

No caso de estribos verticais, a resultante das tensões de tração absorvida pela armadura é dada pela expressão:

$$V_s = \frac{A_v \cdot f_y \cdot d}{s} \leq \left( 2 \cdot \sqrt{f'_c} / 3 \right) b_w \cdot d \quad (3.55)$$

sendo:

$A_v$  = área de armadura transversal;

$s$  = espaçamento entre estribos;

$f_y$  = resistência de escoamento da armadura, limitada em 400 MPa.

Portanto:

$$V_u = \phi V_n \Rightarrow V_n = V_u / \phi \quad (3.56)$$

$$V_n = V_c + V_s \Rightarrow V_s = V_n - V_c \quad (3.57)$$

$$\frac{A_v}{s} = \frac{V_s}{f_y \cdot d} \cdot 100, \text{ sendo } (A_v / s) \text{ em } (\text{cm}^2/\text{m}) \quad (3.58)$$

### 3.3.4 ARMADURA MÍNIMA E ESPAÇAMENTO

A área de armadura transversal mínima é obtida por:

$$\frac{A_{v,min}}{s} = \frac{b_w}{3 \cdot f_y}, \text{ sendo } (A_{v,min} / s) \text{ em } (\text{cm}^2/\text{m}) \text{ e } b \text{ em mm} \quad (3.59)$$

O espaçamento máximo não deve ser superior à metade da altura útil ( $d / 2$ ) e nem superior a 60 cm. Além disso, quando  $V_s > (\sqrt{f_c} / 3) \cdot b_w \cdot d$ , os espaçamentos acima deverão ser reduzidos à metade.



## 4 DETERMINAÇÃO DO COMPRIMENTO DE ANCORAGEM DAS ARMADURAS DAS VIGAS

---

### 4.1 INTRODUÇÃO

As barras da armadura de elementos de concreto armado são responsáveis pela absorção e pela transferência das tensões de tração que os solicitam. Não se pode esquecer, entretanto, que as barras da armadura de aço funcionam também auxiliando o concreto a resistir tensões de compressão, como no caso típico de pilares. A distribuição das barras da armadura longitudinal, no caso de vigas, visa uma otimização dos comprimentos das barras em função do diagrama de momentos fletores de cálculo, ou seja, há como se determinar os pontos de interrupções de cada barra, a fim de concentrá-las nas regiões de maior momento solicitante. Porém, nas seções transversais em que as barras tracionadas poderiam ser interrompidas, para que as tensões absorvidas pela armadura de aço possam ser transferidas para a massa de concreto, há ainda a necessidade de provê-las de um comprimento adicional, o comprimento de ancoragem básico,  $\ell_b$ .

O comprimento de ancoragem está relacionado com diversos fatores, pelos quais é significativamente afetado, como a posição da barra durante a concretagem, segundo a qual definem-se regiões favoráveis e desfavoráveis quanto à aderência, o tipo de superfície da barra a ser ancorada, que pode ser lisa, dentada ou nervurada, a resistência característica ao escoamento da barra e também a resistência característica à compressão do concreto.

## **4.2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS - RECOMENDAÇÕES DA fib (1999)**

### **4.2.1 MODELAGEM ANALÍTICA DO COMPRIMENTO DE ANCORAGEM**

#### **4.2.1.1 Idealizações e simplificações assumidas na modelagem**

Resultados de pesquisas analíticas e experimentais permitiram melhor entendimento dos efeitos, no desempenho dos comprimentos de ancoragem, de parâmetros críticos como confinamento e espaçamento das barras, propriedades dos materiais etc. Entretanto, por razões práticas é necessário realizar simplificações, porém, os modelos para o cálculo do comprimento de ancoragem devem incluir os seguintes aspectos: o tipo de colapso (rompimento ou arrancamento com ou sem rompimento parcial), o tipo de carregamento (ações estáticas ou cíclicas, pulsantes ou reversas), a ação de confinamento (confinamento ativo ou passivo) e o tipo de concreto.

A modelagem numérica deve ajustar-se à filosofia de projeto usada para estruturas de concreto armado.

Para o ACI 318M (1995) o cálculo do comprimento de ancoragem é feito considerando uma força que deve ser absorvida de modo adequado ao longo deste comprimento.

O MC CEB-FIP (1990) indica que não só a força na ancoragem deve ser considerada, como também as intensidades das deformações na região do comprimento de ancoragem.

Portanto, dois procedimentos analíticos podem ser seguidos: um, tradicional que analisa a relação força-deformação desenvolvidos na região do comprimento de ancoragem e, dois, o que considera a modelagem completa da região levando em conta a relação (força versus deformação) e o escorregamento da barra.

## **4.2.2 APROXIMAÇÕES DO MC CEB-FIP (1990) PARA MODELAGEM DE EMENDA**

### **4.2.2.1 Relação simplificada entre a tensão de aderência e o escorregamento da armadura**

O MC CEB-FIP (1990) fornece critérios simplificados com vista a uso prático para considerar a relação entre a tensão de aderência na região do comprimento de ancoragem e o escorregamento. Essa relação é sempre referida como uma lei constitutiva para emendas. Nesse contexto considera-se como lei constitutiva, pois a emenda não é uma propriedade física intrínseca, mas a resposta mecânica da união entre o concreto e a armadura sobre certas condições específicas de contorno. O modelo para cálculo do comprimento de ancoragem é baseado em resultados experimentais e a relação fornecida entre tensão de aderência e o escorregamento deve ser considerada como uma curva estatística média, que pode ser aplicada como uma formulação geral para uma grande quantidade dos casos. Portanto, uma segurança adicional é necessária ao considerar as curvas de tensão de aderência na região do comprimento de ancoragem versus escorregamento, pelo menos nos casos em que é necessário um projeto mais criterioso. Deve-se ter em mente que, para um dado valor de escorregamento, um coeficiente de variação da tensão de aderência na região do comprimento de ancoragem de 30% é freqüentemente encontrado em séries de ensaios experimentais.

### **4.2.2.2 Equação diferencial da emenda**

O modelo segundo o MC CEB-FIP (1990) para cálculo do comprimento de ancoragem é uma aproximação global para permitir cálculo expedito. O modelo pode ser aplicado para prever formação de fissuras e determinar o alongamento da barra na região da ancoragem ou para determinar o comprimento de ancoragem de barras da armadura. No estado não-fissurado assumem-se iguais tensões no concreto e no aço em função das condições de compatibilidade da região de ancoragem. Após a formação de uma fissura, a tensão que age na barra é considerada transmitida da barra de aço para o

concreto por meio do comprimento de ancoragem. A uma distância igual ou maior do que o comprimento de transferência,  $l_t$ , as condições de compatibilidade do estado não-fissurado são adotadas. A determinação do comprimento de ancoragem é feita considerando o equilíbrio entre um segmento de barra da armadura e o concreto que a envolve.

A seção crítica é o fim do segmento, no ponto em que a tensão atuante na barra é conhecida. A distribuição das tensões na região do comprimento de ancoragem é obtida considerando as relações locais entre tensão versus escorregamento definidas com base em resultados experimentais. A força na outra extremidade do segmento de barra é obtida diretamente por equilíbrio. Se a característica da relação tensão versus deformação da barra de aço tem uma tangente positiva definida por toda a zona deformada, então é possível obter as deformações ao longo da barra ancorada em adição à distribuição de tensões. O decréscimo local do deslocamento relativo ao longo do comprimento relativo  $l_t$  é caracterizado pela diferença de deformação entre a barra de aço e o concreto adjacente.

As equações diferenciais que descrevem o comportamento de uma barra simples envolta por concreto podem ser dadas como descritas a seguir.

Equilíbrio da barra da armadura:

$$A_s (d\sigma_s / dx) + \Sigma_0 \tau(s) = 0 \quad (4.1)$$

Relação entre deformação e deslocamento:

$$\varepsilon_s - \varepsilon_c = ds / dx \quad (4.2)$$

Equilíbrio do elemento de concreto armado:

$$A_c (d\sigma_c / dx) + A_s (d\sigma_s / dx) = 0 \quad (4.3)$$

sendo:

$A_s$  = área da seção transversal da barra da armadura;

$A_c$  = área da seção transversal de concreto;

$\Sigma_0$  = perímetro da circunferência da barra da armadura;

$\tau(s)$  = tensão na emenda como função do escorregamento relativo (s);

$\sigma_s$  = tensão no aço;

$\sigma_c$  = tensão no concreto;

$\varepsilon_s$  = deformação no aço;

$\varepsilon_c$  = deformação no concreto de área  $A_c$ .

### 4.2.2.3 Resistência de cálculo do concreto

A distribuição da tensão no comprimento de transferência das tensões entre a barra e o concreto é não-linear, e pode ser considerada por meio da equação diferencial e da relação entre a tensão e o escorregamento. No entanto, para aplicações práticas sob condições de carregamento de serviço é conveniente usar o valor médio da tensão na região de ancoragem. Este princípio é aplicado tanto para análise de ancoragem de armaduras passivas quanto de armaduras ativas.

Para armadura passiva, o valor de cálculo da tensão média de aderência  $f_{bd}$  é dada por:

$$f_{bd} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 f_{ctd} \quad (4.4)$$

sendo:

$\eta_1$  = fator geométrico que leva em conta a rugosidade da barra, com os seguintes valores:

2,25 para barras com nervuras e telas soldadas com fios lisos ou sem nervuras, desde que haja número suficiente de nós de barras soldadas na zona de ancoragem,

1,4 para barras dentadas e

1,0 para barras lisas;

$\eta_2$  = fator relativo à localização da barra na fôrma por ocasião da concretagem, com vista a aderência, sendo:

1,0 para barras em zona de boa aderência e

0,7 para situações de má aderência;

$\eta_3$  = fator que leva em conta o diâmetro da barra, com valores:

1,0 para barras com diâmetros inferiores a 32mm e

$(132 - \phi) / 100$ , para diâmetros maiores que 32mm, sendo  $\phi$  o diâmetro da barra;

$$f_{ctd} = f_{ctk,min} / 1,50 \quad (4.5)$$

#### 4.2.2.4 Comprimento básico de transferência

Considerando a tensão média aproximada na emenda, o MC CEB-FIP (1990) define os comprimentos básicos de ancoragem para diferentes tipos de armaduras e diferentes casos de carregamentos. O comprimento básico de ancoragem, denominado  $l_b$ , isto é, o comprimento necessário para transferir a tensão atuante numa barra para a massa de concreto que a envolve é dado por:

$$l_b = (\phi / 4) (f_{yd} / f_{bd}) \quad (4.6)$$

sendo:

$l_b$  = comprimento básico de ancoragem;

$\phi$  = diâmetro da barra;

$f_{yd}$  = resistência de escoamento de cálculo da barra;

$f_{bd}$  = resistência de aderência de cálculo.

### 4.2.3 MODELOS ANALÍTICOS AVANÇADOS PARA CÁLCULO DO COMPRIMENTO DE ANCORAGEM

A modelagem tradicional usada para descrever o comportamento da região de comprimento de ancoragem, como a indicada pelo MC CEB-FIP

(1990), consiste em adotar dados experimentais para justificar análises numéricas. Essas aproximações são muito práticas e efetivas em grande escala computacional, onde sistemas estruturais completos podem ser modelados. Entretanto, elas apresentam claras limitações, implícitas nos modelos empíricos.

No comportamento observado da emenda, muitas das limitações e influências que são causadas pela experimentação poderiam ser evitadas caso os modelos analíticos do comprimento de ancoragem pudessem ser usados para completar os estudos experimentais. Modelos teóricos têm sido desenvolvidos, usando uma aproximação mais fundamental dos mecanismos de emenda. Em tais modelos, a relação tensão de aderência versus escorregamento da barra não é mais uma propriedade de entrada, mas sim um resultado computacional que leva em conta a geometria pré-determinada, as propriedades dos materiais e as condições globais de contorno. Portanto, alguns dos mecanismos-base dos modelos de emenda expressam a relação entre a tensão no comprimento de ancoragem e o escorregamento como função da fissura formada no concreto na região da ancoragem.

Os modelos de plasticidade para a região do comprimento de ancoragem usam uma aproximação analítica alternativa, na qual a tensão de aderência e o escorregamento estão de acordo com a tensão radial de confinamento e a deformação. Os mecanismos de fraturas aplicados para estimar a capacidade de confinamento do concreto permitem uma classificação mais exata dos mecanismos de deformação que contribuem com o escorregamento da emenda (isto é, deformação elástica, cone secundário formado por fissuração, fissuração radial e esmagamento do concreto). As modelagens em elementos finitos podem ser aplicadas com sucesso para analisar o comportamento da emenda. Em particular, análises de elementos finitos em 3D provavelmente são capazes de fornecer soluções mais compreensíveis, no entanto, as exigências computacionais as tornam pouco práticas para modelagens em grande escala de sistemas estruturais completos. Todavia, essa preocupação, que em geral é aplicada a muitos sistemas estruturais refinados, não desvaloriza como um procedimento pertinente para

obter as relações características entre a tensão na emenda e o escorregamento para modelos globais, como foi feito por meio de análises experimentais.

#### **4.2.4 IMPORTÂNCIA DA LIGAÇÃO ENTRE BARRA DE AÇO E CONCRETO PARA A SEGURANÇA ESTRUTURAL**

As ligações entre as barras da armadura com o concreto que as envolvem influenciam em muitos aspectos o comportamento das estruturas de concreto armado. Certamente a emenda desempenha um importante papel no comportamento da fissuração (aberturas e espaçamentos das fissuras) e na resistência à tração. Ela pode ser um elemento importante para a capacidade última de carregamento de estruturas de concreto armado, visto que afeta a ancoragem de barras e a resistência de ligações. Além disso, a capacidade de deformação dos elementos e, portanto, a capacidade de redistribuição de esforços em estruturas estaticamente indeterminadas é diretamente influenciada pela emenda: o comprimento de uma rótula plástica, que é importante para a capacidade de rotação de elementos de concreto armado depende, entre outras coisas, da força transferida das barras da armadura para o concreto, entre fissuras seqüentes. Por essa razão a modelagem adequada do comportamento da emenda é de extrema importância.

#### **4.2.5 REGIÕES DE ANCORAGEM**

##### **4.2.5.1 Comportamento da ancoragem de barras retas, ganchos, curvas, laços e telas soldadas**

O escorregamento não difere consideravelmente para barras com ganchos, curvas e laços com mesmo diâmetro de curva. Com o intuito de ter condições simples e uniformes para todos os tipos de ancoragem, o escorregamento no início da ancoragem é admitido como critério de projeto. É necessário que a deformação no início da ancoragem seja aproximadamente



igual para todos os tipos de ancoragem de barras deformadas com pontas retas tanto em serviço quanto no estado limite último. Essa condição pode ser satisfeita com uma redução proporcional do comprimento de ancoragem reto. Baseado nisso, os efeitos favoráveis dos ganchos ou curvas em barras comprimidas não devem ser considerados e, portanto, ganchos e curvas devem ser evitados em barras comprimidas.

#### 4.2.5.2 Comprimento de ancoragem necessário

O comprimento de ancoragem necessário é calculado usando a seguinte expressão:

$$l_{b,net} = \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 l_b (A_{s,cal} / A_{s,ef}) \geq l_{b,min} \quad (4.7)$$

sendo:

$l_b$  = comprimento básico de ancoragem;

$\alpha_1$  = fator de forma da barra, sendo considerado igual a:

1,0 para qualquer ancoragem sob compressão e ancoragem reta sob tração e

0,7 para laços e curvas tracionados com cobrimento suficiente de concreto;

$\alpha_2$  = fator de barra transversal soldada, valendo 0,7 para todas as ancoragens, caso a barra transversal esteja soldada;

$\alpha_3$  = fator de confinamento do concreto, sendo igual a:

1,0 para todas as ancoragens sob compressão e

0,7 a 1,0 para barras sob tração, dependente do revestimento de concreto;

$\alpha_4$  = fator de barra transversal não-soldada, igual a 1,0 para todas as ancoragens sob compressão, dependente do confinamento da armadura;

$\alpha_5$  = fator de pressão transversal, valendo de 0,7 a 1,0 para ancoragens sob tração, dependente da pressão.

O produto dos fatores  $\alpha_3 \alpha_4 \alpha_5$  é limitado em 0,7 para barras com alta aderência e em 1,0 para fios ou barras lisas ou não dentadas, o que praticamente significa que os fatores de redução por confinamento são aplicados somente para barras rugosas.

No estado limite último emprega-se um fator de segurança geral de 2,1, constituído por um produto de fatores de segurança.

#### 4.2.5.3 Comprimento mínimo de ancoragem

Além de todas as determinações anteriores, existe, ainda, um comprimento mínimo de ancoragem a ser respeitado, tanto para barras tracionadas quanto para barras comprimidas, que vale:

$l_{b,min}$  = o maior valor entre  $0,3 l_b$ ,  $10 \phi$  e 100 mm para barras tracionadas;

$l_{b,min}$  = o maior valor entre  $0,6 l_b$ ,  $10 \phi$  e 100 mm para barras comprimidas.

#### 4.2.5.4 Ancoragem de feixe de barras

Para evitar tensões concentradas no concreto, os feixes de barras devem ser ancorados em ponta reta e em seções não coincidentes, sendo que a alternância entre as seções deverá ser equivalente a: 1,2 vez o comprimento individual no caso de feixe de 2 barras, 1,3 vez o mesmo comprimento no caso de 3 barras ou 1,4 vez no caso de 4 barras.

### 4.2.6 DISPOSITIVOS DE ANCORAGEM

Em vez de ancoragem por barras com laços, a força de tração pode ser transferida por meio de dispositivos de ancoragem, principalmente naqueles

casos em que são possíveis regiões com pequenos espaços destinados ao comprimentos de ancoragem necessário. As relações entre solicitações e capacidade dos dispositivos de ancoragem e suas conexões com a barra da armadura podem sempre ser demonstradas por ensaios e, se possível, por modelo analítico. Para considerar segurança suficiente, o valor de cálculo da resistência da ancoragem não deve ser superior a 50% da força última de ancoragem, quando não for necessário considerar os efeitos de fadiga por ações cíclicas e não maior que 70% da força de fadiga determinada experimentalmente para garantir a segurança da ancoragem.

## **4.2.7 ANCORAGEM FORA DO APOIO E NO APOIO**

### **4.2.7.1 Ancoragem fora do apoio**

As barras da armadura podem ser tiradas de serviço antes dos apoios, porém, quando isto for feito elas devem ser convenientemente ancoradas, garantindo um comprimento de ancoragem calculado com as indicações anteriores. O comprimento de ancoragem de barras tiradas de serviço fora dos apoios é medido a partir desta seção transversal, determinada pela intersecção do diagrama de forças de tração nas barras ( $R_{st}$ ) com o eixo que representa a barra e disposto paralelamente à linha de fecho da viga. O segmento de reta que liga o maior valor do momento fletor de cálculo ou de forças nas barras da armadura ( $R_{st}$ ) a linha de fecho do diagrama, é dividido pelo número de barras indicado pelo cálculo das armaduras para absorver as tensões de tração oriundas da flexão.

A determinação dos comprimentos das barras por esse processo pode diferir da distribuição calculada e essa determinação dos comprimentos será demonstrada de forma aproximada. Além disso, o comprimento de ancoragem real pode ser menor que o valor calculado quando há imprecisões de execução. Por essas razões, o comprimento de ancoragem pode ser dado por  $l_{b,net} + 100$  mm além da seção, onde não é mais necessário transferir toda a força atuante na barra.

O comprimento de ancoragem de barras inclinadas que terminam em região de concreto comprimido pode ser medido a partir da linha neutra.

#### **4.2.7.2 Ancoragem no apoio**

O ponto de início de ancoragem das barras prolongadas até os apoios é considerado contido na seção da viga coincidente com a borda do apoio (pilar, por exemplo). Não se conhece a correta seção para se considerar o início da ancoragem, entretanto é eficaz adotar-se a borda do apoio em função da pressão transversal atuante nas barras a serem ancoradas. Caso contrário, aparece nessa região fissuras que influenciam negativamente na ancoragem. A influência favorável da armadura transversal soldada é calculada para ser considerada caso ela esteja dentro do comprimento de ancoragem, isto é, para dentro da borda do apoio.

O comprimento mínimo de ancoragem com início na face do apoio pode ser reduzido a 2/3 do valor  $\ell_{b,\min}$  calculado considerando a influência da pressão transversal uniaxial na direção do apoio. Uma intensidade suficientemente alta de pressão transversal (aproximadamente 5 N/mm<sup>2</sup>) é geralmente observada em vigas, especialmente nos casos em que o comprimento de ancoragem deve ser curto. Embora a pressão transversal em chapas seja muitas vezes menor, as fissuras geralmente não aparecerão só na borda do apoio, como considerado nos cálculos, mas a uma certa distância dele, em função de menor força cisalhante. Desse modo, o comprimento de ancoragem necessário é maior e a força sobre o apoio é menor, comparados aos valores considerados nos cálculos.

### **4.2.8 EMENDAS DE BARRAS EM ELEMENTOS ESTRUTURAIS**

#### **4.2.8.1 Emendas por traspasse de barras tracionadas**

Emendas são usadas sempre que o comprimento das barras (12 m, em geral) é insuficiente tendo em vista o comprimento do elemento estrutural e,

portanto, são necessárias emendas convenientemente estudadas para garantir segurança.

Em geral, emendas são usadas para sobrepor (uma parte) das barras e uni-las, por meio de solda ou de métodos mecânicos semelhantes a luvas rosqueadas ou comprimidas. Além disso, a pressão de contato em suas pontas pode ser usada para transmitir a força de compressão das barras.

No caso de emendas por traspasse, a força transferida entre as barras emendadas é proveniente do concreto. As forças vinculares agem nas bielas (massa adjacente de concreto) entre as barras emendadas e se desenvolvem inclinadas em relação ao eixo das barras. Os componentes radiais da força nas bielas produzem tração na região do cobrimento da peça e podem ocasionar ruína, no estado limite último, na região da emenda por traspasse. Isso ocorre quando as forças que provocam o rompimento crescem consideravelmente em direção às extremidades das emendas, usualmente aí se inicia a ruptura.

#### **4.2.8.2 Comprimento necessário para emendas por traspasse de barras tracionadas**

A conexão de barras não admite a influência negativa do comportamento de nenhum elemento em serviço, nem nos estados limites últimos, comparado com o comportamento do elemento com armadura contínua.

As aberturas das fissuras inclinadas nas extremidades das emendas no estado limite de serviço não devem ser consideravelmente maiores do que aquelas fora da região de emenda e não se permite o aparecimento de fissuras longitudinais. Para se garantir que a eventual ruptura de uma emenda ocorra por escorregamento da barra de aço e não por ruptura do concreto adjacente, um fator de segurança geral de 2,1 é necessário em contraste com os 5% dos resultados negativos obtidos nos testes. Portanto, o comprimento de ancoragem necessário assegura que, em geral, o rompimento do cobrimento do concreto é descartado e o MC CEB-FIP (1990) inclui uma formulação similar

à do projeto do comprimento de ancoragem necessário,  $l_{b,net}$ , para o projeto do comprimento de traspasse,  $l_0$ , apresentado a seguir:

$$l_0 = \alpha_1 \alpha_3 \alpha_4 \alpha_5 \alpha_6 l_b (A_{s,cal} / A_{s,ef}) \geq l_{0,min} \quad (4.8)$$

sendo:

$l_b$  = comprimento básico de ancoragem;

$\alpha_1$  = fator de forma da barra;

$\alpha_3$  = fator de confinamento do concreto;

$\alpha_4$  = fator de barra transversal não-soldada;

$\alpha_5$  = fator de pressão transversal;

$\alpha_6$  = fator de porcentagem de sobreposição, valendo entre 1,2 e 2,0, dependente da porcentagem de barras com traspasse dentro de uma distância de  $1,3 l_0$  medida a partir do centro do comprimento de traspasse;

$l_{0,min}$  = comprimento de traspasse mínimo necessário.

O valor mínimo para comprimento necessário para emenda por traspasse é fornecido a seguir:

$l_{0,min}$  = o maior valor entre  $0,3 \alpha_6 l_b$ ,  $15 \phi$  e 200 mm.

Deve-se ressaltar que os comprimentos de traspasse são determinados a partir do menor cobrimento de concreto possível e da armadura transversal. Muitas vezes é possível diminuir o comprimento de traspasse considerando um acréscimo na espessura de cobrimento de concreto e/ou um acréscimo na quantidade de armadura transversal.

## **4.3 ADERÊNCIA**

### **4.3.1 ANÁLISE DA ADERÊNCIA COMO INDICADO EM NORMAS**

#### **4.3.1.1 Introdução**

A aderência é a propriedade que impede o deslocamento relativo entre a barra e o concreto, nas peças de concreto armado. Ela pode ser de três tipos:

1. Aderência por adesão, ocorrida em função das ligações físico-químicas entre o cimento e as barras;

2. Aderência por atrito, que atua no sentido a impedir o deslocamento relativo entre os materiais e que depende diretamente da compressão uniformemente distribuída exercida pelo concreto sobre a barra, em virtude da retração e, principalmente, depende da rugosidade superficial da barra;

3. Aderência mecânica, por causa das nervuras das barras de alta aderência, nas barras lisas em função do processo de fabricação e até à rugosidade de ambas em virtude da corrosão. Tais saliências funcionam como elementos de apoio externos (alusão aos consolos) e mobilizam tensões de compressão no concreto.

#### **4.3.1.2 Condições de aderência**

As situações de boa e má aderência determinadas segundo o Eurocode 2 (1992) são semelhantes às da NBR 6118:2003, apresentando as seguintes diferenças:

1. Condição de boa aderência para peças com  $h \leq 25$  cm;
2. Delimitação de boa condição de aderência para  $h/2$  (inferior) da peça, no caso de peças com  $25 \text{ cm} < h \leq 60$  cm.

### 4.3.1.3 Tensão de aderência entre a armadura e o concreto

O Eurocode 2 (1992) apresenta valores das tensões de aderência de cálculo para emendas em zonas de boas condições. Caso contrário, os valores devem ser multiplicados por 0,7, admitindo coeficiente de minoração da resistência do concreto  $\gamma_c = 1,5$ . Ressalta-se que, ao contrário da NBR 6118:2003, o Eurocode 2 (1992) não diferencia barras dentadas de barras nervuradas.

Em seguida, serão fornecidas as expressões para determinação da tensão de aderência de cálculo, considerando as informações do Eurocode 2 e da NBR 6118:2003.

#### 4.3.1.3.1 Cálculo da tensão de aderência de cálculo na ancoragem segundo o Eurocode 2 (1992)

A tensão de aderência de cálculo na ancoragem é dependente da conformação superficial das barras. Segundo o Eurocode 2 (1992), a tensão é dada pelas seguintes expressões, respectivamente para barras lisas e para as demais barras:

$$\text{Barras lisas: } f_{bd} = (0,36 f_{ck}^{1/2}) / 1,5 = 0,24 f_{ck}^{1/2} \quad (4.9)$$

$$\text{Demais barras: } f_{bd} = (2,25 f_{ctk}^{0,05}) / 1,5 = 0,315 f_{ck}^{2/3} \quad (4.10)$$

sendo:

$f_{bd}$  = tensão de aderência de cálculo;

$f_{ck}$  = resistência característica à compressão do concreto;

$f_{ctk}$  = resistência característica à tração do concreto.

Observação:

Essas expressões referem-se a barras com diâmetro não maior que 32 mm. Caso contrário, o valor obtido deve ser multiplicado por um coeficiente igual a  $(132 - \phi) / 100$ , com  $\phi$  dado em mm.



O Eurocode 2 (1992) apresenta, ainda, um coeficiente adicional em casos onde há pressão transversal. Nesses casos, os valores da tensão de aderência devem ser multiplicados por  $(1 - 0,04 p)^{-1}$ , sendo  $p$  a pressão transversal média em  $N/mm^2$  e atentando para o fato de que esse coeficiente não pode assumir valores superiores a 1,4.

#### 4.3.1.3.2 Cálculo da tensão de aderência de cálculo na ancoragem segundo a NBR 6118:2003

A resistência de aderência de cálculo  $f_{bd}$  entre armadura e concreto na ancoragem de armaduras passivas deve ser obtida pela seguinte expressão:

$$f_{bd} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 f_{ctd} \quad (4.11)$$

sendo:

$$f_{ctd} = f_{ctk,inf} / \gamma_c \quad (4.12)$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7 f_{ctm} \quad (4.13)$$

$$f_{ctm} = 0,3 f_{ck}^{2/3} \quad (4.14)$$

Simplificadamente, obtém-se:

$$f_{bd} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 0,21 f_{ck}^{2/3} / \gamma_c \quad (4.15)$$

sendo:

$f_{bd}$  = tensão de aderência de cálculo;

$f_{ck}$  = resistência característica à compressão do concreto;

$\eta_1$  = 1,0 para barras lisas, 1,4 para barras entalhadas ou 2,25 para barras nervuradas;

$\eta_2$  = 1,0 para situações de boa aderência ou 0,7 para situações de má aderência;

$\eta_3$  = 1,0 para  $\phi \leq 32$  mm ou  $(132 - \phi) / 100$  ( $\phi$  em mm) para  $\phi > 32$  mm.

#### 4.3.1.4 Valores das tensões de aderência de projeto segundo o Eurocode 2 (1992) e segundo a NBR 6118:2003

Serão apresentadas, a seguir, duas tabelas relativas aos valores da tensão de aderência de cálculo,  $f_{bd}$ , em MPa, segundo diferentes resistências do concreto e segundo, também, condições de boa ou má aderência. A primeira é referente às expressões fornecidas segundo o Eurocode 2 (1992) e a segunda refere-se às expressões segundo a NBR 6118:2003

Tabela 4.1 - Tensão de aderência de projeto  $f_{bd}$  segundo o Eurocode 2 (1992)

Tensão de aderência de projeto $f_{bd}$ (MPa) – Eurocode 2 (1992)				
$f_{ck}$ (MPa)	Barras lisas		Barras com alta aderência com $\phi \leq 32\text{mm}$ ou telas soldadas	
	BOA	MÁ	BOA	MÁ
12	0,90	0,63	1,60	1,12
16	1,00	0,70	2,00	1,40
20	1,10	0,77	2,30	1,61
25	1,20	0,84	2,70	1,89
30	1,30	0,91	3,00	2,10
35	1,40	0,98	3,40	2,38
40	1,50	1,05	3,70	2,59
45	1,60	1,12	4,00	2,80
50	1,70	1,19	4,30	3,01

Tabela 4.2 - Tensão de aderência de projeto  $f_{bd}$  segundo o a NBR 6118:2003

Tensão de aderência de projeto $f_{bd}$ (MPa) – NBR 6118:2003						
$f_{ck}$ (MPa)	Barras lisas ( $\eta_1 = 1,0$ )		Barras ( $\eta_1 = 1,4$ )		Barras ( $\eta_1 = 2,25$ )	
	BOA	MÁ	BOA	MÁ	BOA	MÁ

20	1,11	0,77	1,55	1,08	2,49	1,74
25	1,28	0,90	1,80	1,26	2,89	2,02
30	1,45	1,01	2,03	1,42	3,26	2,28
35	1,60	1,12	2,25	1,57	3,61	2,53
40	1,75	1,23	2,46	1,72	3,95	2,76
45	1,90	1,33	2,66	1,86	4,27	2,99
50	2,04	1,43	2,85	2,00	4,58	3,21

## 4.3.2 ANCORAGEM

### 4.3.2.1 Introdução

Para que as barras possam transferir integralmente as tensões absorvidas para o concreto, utilizam-se dois tipos básicos de ancoragem, por aderência, no qual as forças são transferidos por um comprimento reto da barra, que pode apresentar ou não gancho na extremidade, e por dispositivos mecânicos acoplados à barra, responsáveis pela transmissão dos esforços.

### 4.3.2.2 Comprimento básico de ancoragem

O comprimento básico de ancoragem corresponde ao comprimento reto necessário para ancorar a força ( $A_s f_{yd}$ ) em uma barra, assumindo tensão constante na barra igual a  $f_{bd}$ .

#### 4.3.2.2.1 Comprimento básico de ancoragem segundo o Eurocode 2 (1992)

O comprimento básico de ancoragem, segundo o Eurocode 2 (1992), é determinado pela expressão:

$$\ell_b = (\phi / 4) (f_{yd} / f_{bd}) \quad (4.16)$$

sendo:

$\phi$  = diâmetro nominal da barra;

$f_{yd}$  = resistência ao escoamento de cálculo da barra;

$f_{bd}$  = tensão de aderência de cálculo entre a barra e o concreto.

Para feixes de 2 barras, o diâmetro  $\phi$  da equação anterior deve ser igual a  $\phi\sqrt{2}$ .

#### **4.3.2.2.2 Comprimento básico de ancoragem segundo a NBR 6118:2003**

O comprimento básico de ancoragem, segundo a NBR 6118:2003, é determinado exatamente igual ao Eurocode 2 (1992), sendo que a principal diferença é observada no cálculo da tensão de aderência ( $f_{bd}$ ) segundo cada norma, como foi anteriormente apresentado.

$$\ell_b = (\phi / 4) (f_{yd} / f_{bd}) \quad (4.17)$$

sendo:

$\phi$  = diâmetro nominal da barra;

$f_{yd}$  = resistência ao escoamento de cálculo da barra;

$f_{bd}$  = tensão de aderência de cálculo entre a barra e o concreto.

#### **4.3.2.2.3 Comprimento básico de ancoragem segundo o ACI 318 (1995)**

O comprimento básico de ancoragem, segundo o ACI 318 (1995), é determinado pela expressão:

$$\ell_{db} = 0,02 d_b f_y / (f_c')^{1/2} \quad (4.18)$$

sendo:

$\ell_{db}$  = comprimento básico de ancoragem;

$d_b$  = diâmetro nominal da barra, em in.;

$f_y$  = resistência ao escoamento da barra, em psi;

$f_c'$  = resistência característica à compressão do concreto, em psi.

O comprimento básico de ancoragem não deve ser inferior a  $0,0003 d_b f_y$ . Além disso, pode ser multiplicado pelo fator  $(A_{s,req} / A_{s,prov})$ , se a área de armadura existente for maior que a necessária.

Lembra-se que:

1 in. = 1' = 2,54 cm

1 psi = 0,006895 MPa

1 p = 1 lb = 4,448 N

#### **4.3.2.3 Métodos de ancoragem**

Além dos métodos usuais de ancoragem por aderência de armaduras passivas, as normas apresenta algumas recomendações, que devem ser adotadas. Elas serão apresentadas a seguir.

##### **4.3.2.3.1 Recomendações segundo o Eurocode 2 (1992)**

1. Ancoragens retas ou curvas de  $90^\circ$  não devem ser usadas para ancorar barras lisas ou com diâmetro superior a 8 mm;
2. Curvas, ganchos ou laços não são recomendados para uso em compressão, exceto para barras lisas, que podem estar submetidas à tração nas zonas de ancoragem, para determinados carregamentos;
3. Precisam ser evitados rompimentos e desprendimento de lascas no concreto ocasionados por concentrações de ancoragens, respeitando-se os diâmetros mínimos dos pinos de dobramento e o cobrimento mínimo de concreto.

##### **4.3.2.3.2 Recomendações segundo a NBR 6118:2003**

Para barras tracionadas:

1. As barras lisas precisam ter obrigatoriamente gancho;
2. Não devem apresentar gancho as barras que tiverem alternância de solicitação, de tração e compressão;
3. Não é recomendado o uso de gancho em barras com  $\phi \geq 32$  mm ou em feixe de barras.

Para barras comprimidas:

Só poderão ser ancoradas sem ganchos.

#### 4.3.2.4 Diâmetros mínimos dos pinos de dobramento

Serão apresentadas, a seguir, tabelas contendo os diâmetros mínimos dos pinos de dobramento.

Tabela 4.3 - Diâmetros mínimos dos pinos de dobramento segundo o Eurocode 2 (1992)

Diâmetros mínimos dos pinos de dobramento – Eurocode 2 (1992)		
BITOLA	BARRAS LISAS	BARRAS COM ALTA ADERÊNCIA
< 20 mm	2,5 $\phi$	4 $\phi$
$\geq$ 20 mm	5 $\phi$	7 $\phi$

Tabela 4.4 - Diâmetros mínimos dos pinos de dobramento segundo a NBR 6118:2003

Diâmetros mínimos dos pinos de dobramento – NBR 6118 (2003)			
BITOLA	CA - 25	CA - 50	CA - 60
< 20 mm	4 $\phi$	5 $\phi$	6 $\phi$
$\geq$ 20 mm	5 $\phi$	8 $\phi$	-

#### 4.3.2.5 Armadura transversal

Segundo o Eurocode 2 (1992), no caso de vigas, a armadura transversal deve ser sempre utilizada para:

1. Ancoragens de barras tracionadas em que não há compressão transversal relativa a reação de apoio, como no caso de apoios indiretos;

2. Todas as ancoragens sobre compressão.

A área total mínima da armadura transversal é calculada por:

$$\sum A_{st} = n A_{st} \quad (4.19)$$

$$\sum A_{st} \geq A_s / 4 \quad (4.20)$$

sendo:

$n$  = número de barras ao longo do comprimento de ancoragem;

$A_{st}$  = área de uma barra da armadura transversal;

$A_s$  = área de uma barra da armadura longitudinal.

A armadura transversal deve ser igualmente distribuída ao longo do comprimento de ancoragem. No mínimo uma barra deve ser posicionada na região do gancho, curva ou laço. Para barras sobre compressão, a armadura transversal deve circundar as barras longitudinais e estar concentrada no fim da ancoragem, estendendo-se por, no mínimo,  $4\phi$  da barra ancorada.

#### **4.3.2.6 Comprimento de ancoragem necessário**

O comprimento de ancoragem necessário para barras ou fios, segundo cada norma, é determinado como a seguir.

##### **4.3.2.6.1 Comprimento de ancoragem necessário segundo o Eurocode 2 (1992)**

O comprimento de ancoragem necessário, segundo o Eurocode 2 (1990), é dado pela seguinte expressão:

$$l_{b,net} = \alpha_a l_b (A_{s,req} / A_{s,prov}) \geq l_{b,min} \quad (4.21)$$

sendo:

$\alpha_a = 1,0$  para barras lisas ou  $0,7$  para barras tracionadas com gancho com cobrimento no plano normal ao do gancho  $\geq 3\phi$ ;

$A_{s,req}$  = área de armadura necessária;

$A_{s,prov}$  = área de armadura efetiva;

$\ell_{b,min}$  = o maior valor entre  $0,3 \ell_b$ ,  $10 \phi$  e  $100$  mm para ancoragem sobre tração;

$\ell_{b,min}$  = o maior valor entre  $0,6 \ell_b$ ,  $10 \phi$  e  $100$  mm para ancoragem sobre compressão.

#### **4.3.2.6.2 Comprimento de ancoragem necessário segundo a NBR 6118:2003**

O comprimento de ancoragem necessário, segundo a NBR 6118:2003, é dado pela seguinte expressão:

$$\ell_{b,nec} = \alpha \ell_b A_{s,calc} / A_{s,ef} \geq \ell_{b,min} \quad (4.22)$$

sendo:

$\alpha = 1,0$  para barras sem gancho;

$\alpha = 0,7$  para barras tracionadas com gancho, com cobrimento no plano normal ao do gancho  $\geq 3\phi$ ;

$\alpha = 0,7$  quando houver barras transversais soldadas;

$\alpha = 0,5$  quando houver barras transversais soldadas e gancho, com cobrimento no plano normal ao do gancho  $\geq 3\phi$ ;

$A_{s,calc}$  = área de armadura calculada para resistir ao esforço solicitante;

$A_{s,ef}$  = área de armadura existente;

$\ell_{b,min}$  = o maior valor entre  $0,3 \ell_b$ ,  $10 \phi$  e  $100$  mm;



### 4.3.2.6.3 Comprimento de ancoragem necessário segundo o ACI 318 (1995)

Para barras comprimidas, o comprimento de ancoragem necessário, segundo o ACI 318 (1995), é determinado pela expressão:

$$l_d = l_{db} (A_{s,req} / A_{s,prov}) \quad (4.23)$$

sendo:

$l_d$  = comprimento de ancoragem necessário;

$l_{db}$  = comprimento básico de ancoragem;

$A_{s,req}$  = área de armadura necessária;

$A_{s,prov}$  = área de armadura existente;

$f_y$  = resistência ao escoamento da barra, em psi;

$f_c'$  = resistência característica à compressão do concreto, em psi.

O comprimento de ancoragem necessário,  $l_{db}$ , não deve ser inferior a 8 in..

## 4.3.3 EMENDAS POR TRASPASSE PARA BARRAS OU FIOS

### 4.3.3.1 Arranjo das emendas

As emendas entre barras devem ser realizadas em seções alternadas e não devem estar localizadas em zonas de altas tensões. Em qualquer seção, devem ser realizadas simetricamente e paralelas à outra face do elemento.

Os métodos de ancoragem apresentados também são aplicados para emendas por traspasse.

### 4.3.3.2 Armadura transversal

Se o diâmetro  $\phi$  das barras traspassadas for menor que 16 mm, ou se a porcentagem dessas barras em alguma seção for menor que vinte por cento, então a armadura transversal mínima necessária para outras solicitações (por exemplo armadura de cisalhamento ou barras de distribuição) é considerada suficiente.

Porém, se o diâmetro  $\phi$  for maior ou igual a 16 mm, então a armadura transversal deve:

1. Ter uma área total (soma de todos os ramos paralelos à camada de armadura emendada) não inferior à área  $A_s$  de uma barra emendada ( $\sum A_{st} \geq 1,0 A_s$ );
2. Ser posicionada entre a armadura longitudinal e a superfície do concreto.

### 4.3.4 ANCORAGEM DE ESTRIBOS E DE ARMADURA DE CISALHAMENTO

1. A ancoragem de estribos e de armadura de cisalhamento deve ser, normalmente, efetuada por meio de ganchos ou por armadura transversal soldada. Barras de alta aderência (CA-50) ou fios (CA-60) também podem ser ancorados por laços. Uma barra deve ser posicionada no interior de um gancho ou laço;

2. Respeitar a curvatura permissível de ganchos ou laços, conforme já visto neste trabalho;

3. A ancoragem como um todo é considerada satisfatória:

3.1. Quando a curva de um laço ou gancho é estendida reto não inferior a: (i)  $5\phi$  ou 50 mm se é uma continuação de um arco de  $135^\circ$  ou mais ou (ii)  $10\phi$  ou 70 mm se é uma continuação de um arco de  $90^\circ$ ;

3.2. Quando, perto do fim de uma barra reta, houver: (i) duas barras transversais soldadas ou (ii) uma única barra transversal soldada, com diâmetro não inferior a 1,4 diâmetro da barra.

## 5 O PROGRAMA CAST

---

### 5.1 CONCEITOS GERAIS

Neste capítulo são apresentadas considerações a respeito da modelagem numérica, os fundamentos teóricos e o funcionamento do programa CAST (2000), o qual foi adotado para a modelagem das vigas de concreto armado.

O programa computacional gráfico CAST, Computer Aided Strut and Tie (2000), é capaz de realizar a análise e o dimensionamento de uma estrutura de concreto armado ou protendido com base no modelo de bielas e tirantes. O programa começou a ser desenvolvido em 1997 na Universidade de Illinois at Urbana-Champaign, nos Estados Unidos da América, e passou por atualizações. Uma versão inicial do programa foi introduzida pela primeira vez no Congresso do ACI de 2000, em Toronto, Canadá, por Dan Kuchma e Tjen Tjhin, após a apresentação do trabalho "Advances and Challenges to Design by the Strut-and-Tie Method".

O CAST é de domínio público, e sua primeira versão está disponível no site da Universidade de Illinois para download desde 2000 e, hoje, após várias atualizações, constitui-se em um programa muito útil ao ensino de estruturas de concreto, por suas potencialidades didáticas, também podendo ser utilizado por engenheiros projetistas em dimensionamentos de estruturas ou apenas regiões de descontinuidades.

A interface utilizada é simples e possibilita a criação e a modificação de elementos estruturais e dos possíveis modelos de bielas e tirantes, os quais precisam ser determinados pelo usuário. Esse aspecto chama a atenção, pois

o programa não dispõe de um processo de otimização que determina automaticamente o modelo mais adequado e, uma vez que isso é tarefa exclusiva do usuário, é necessário embasamento teórico acerca do modelo de bielas e tirantes, suas limitações e peculiaridades. Por outro lado, não exige solução única, possibilitando grande variedade de soluções para cada estrutura. Nesse aspecto, entram o conhecimento técnico-científico e a experiência do usuário do programa a fim de encontrar o modelo mais adequado, que leve em consideração economia e aspectos construtivos da estrutura. Além disso, excetuando-se alguns aspectos normativos que dizem respeito às verificações de nós e bielas e ao dimensionamento dos tirantes, o programa não dispõe de procedimentos que realizem nem as verificações pertinentes a cada estrutura, nem as recomendações e exigências gerais das normas, tal qual ancoragem e verificações de Estados Limites de Serviço. Mais uma vez, esses aspectos ficam sob responsabilidade do usuário, que precisa assegurar que todas essas exigências sejam respeitadas. Essa necessidade de se atentar a aspectos não considerados pelo programa não desestimula sua utilização, haja vista que isso é fato comum ao se utilizar programa computacional para dimensionamento de estruturas. Além disso, sua facilidade em variar o modelo de bielas e tirantes adotado para um mesmo carregamento, a disponibilidade de rotinas para o dimensionamento de modelos de bielas e tirantes submetidos a múltiplos casos de carregamento e a simples automatização dos cálculos são fatores que vão ao encontro das necessidades do projetista de estruturas.

## **5.2 A MODELAGEM NO CAST (2000) PASSO-A-PASSO**

A [Figura 5.1](#), a seguir, apresenta um diagrama que mostra todos os passos da modelagem utilizando o “Computer Aided Strut and Tie” (2000). Dentre eles, há os que são de responsabilidade do projetista e outros automáticos do programa. Por exemplo, o projetista apenas define a geometria do modelo estrutural, como a treliça para o caso de vigas, mas é o programa, após compilação, que define quais elementos estão tracionados e quais estão

comprimidos, de acordo com a disposição das barras da treliça e dos carregamentos.

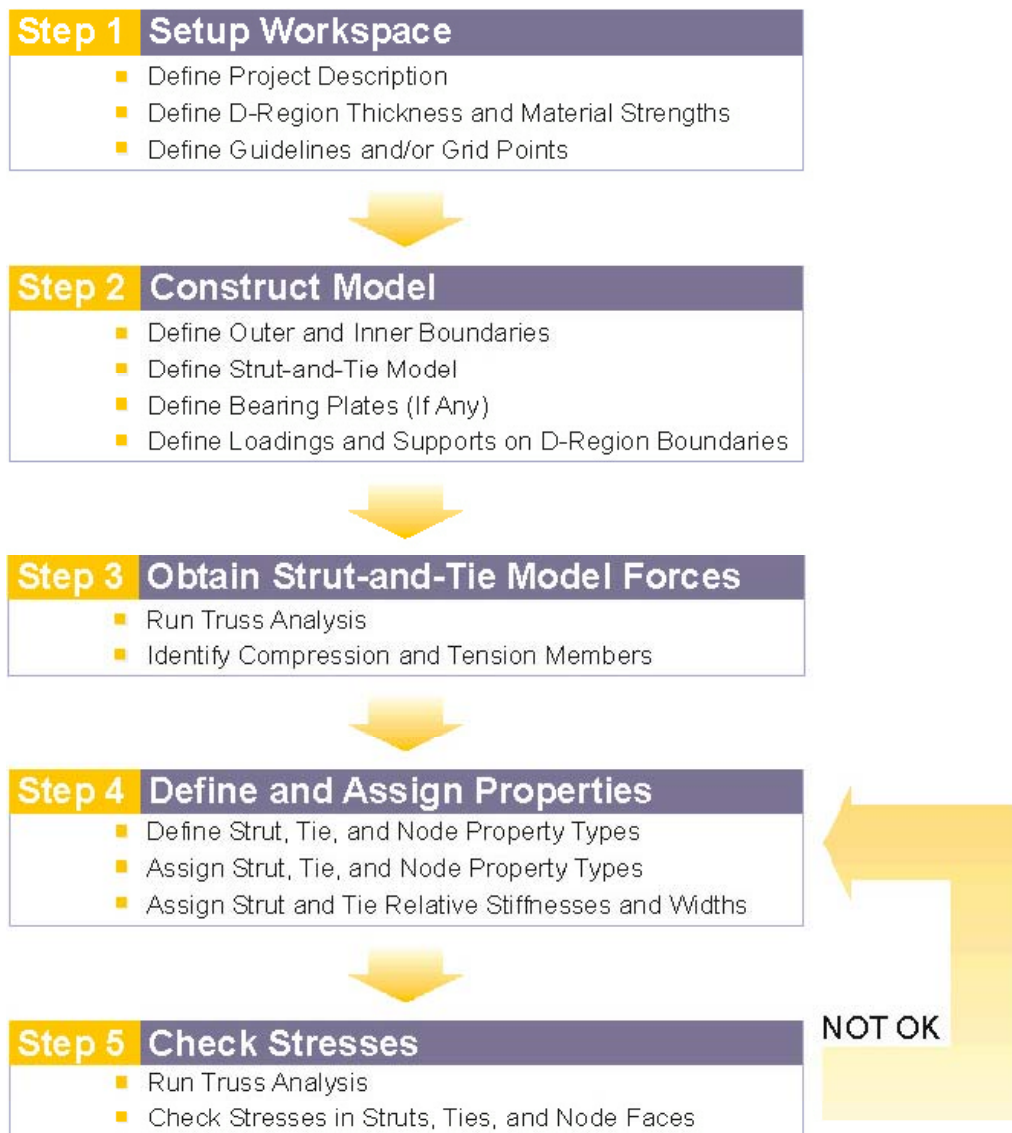


Figura 5.1 - Todos os passos da modelagem no CAST (2000)

### 5.2.1 DESCRIÇÃO DO PROJETO

O primeiro passo ao se utilizar o CAST (2000) é descrever o projeto, fornecendo os seguintes dados:

- 1) Nome do projeto;
- 2) Projetista;

- 3) Data;
- 4) Possíveis anotações ou lembretes.

Em seguida, definem-se as propriedades gerais do projeto:

- 1) Espessura da região D, em mm;
- 2) Resistência característica à compressão do concreto, em MPa;
- 3) Resistência característica à tração do concreto, em MPa;
- 4) Resistência característica à tração do aço, em MPa.

### **5.2.2 DEFINIÇÃO DO ELEMENTO ESTRUTURAL**

- 1) Definição das propriedades geométricas do elemento;

- 2) Determinação da treliça associada ao modelo de bielas e tirantes.

Vale lembrar que esta etapa cabe exclusivamente ao projetista, ou seja, o programa não é capaz de determinar automaticamente um modelo de treliça adequado para o elemento analisado, muito menos utilizar processos de otimização para se obter, dentre várias possibilidades, um modelo ótimo de treliça. Essa etapa é, portanto, uma das mais importantes, haja vista que, caso o projetista não determine um modelo de treliça adequado às condições de contorno, o programa será incapaz de gerar qualquer tipo de resposta;

- 3) Definição dos carregamentos e dos apoios do modelo.

### **5.2.3 OBTENÇÃO DAS FORÇAS NO MODELO DE BIELAS E TIRANTES**

Nesta etapa, realiza-se a compilação da treliça definida pelo usuário, obtendo-se as seguintes definições:

1) Identificação dos membros tracionados e comprimidos da treliça e dos estabilizadores, que são barras pertencentes à treliça que não estão sujeitas nem a tração, nem a compressão;

2) Determinação das intensidades das forças nos membros da treliça.

## 5.2.4 DEFINIÇÃO DAS PROPRIEDADES DOS ELEMENTOS

1) Atribuição das propriedades das bielas, dos tirantes e dos nós.

Para a verificação de nós e bielas, há a possibilidade de se utilizar valores das resistências propostos por pesquisadores e normas, predefinidos pelo programa, como também é possível determinar valores desejados. As [Tabela 5.1](#) e a [Tabela 5.2](#), a seguir, apresentam todos os valores predefinidos pelo programa para nós e bielas, os quais podem ser arbitrariamente adotados pelo usuário.

**Tabela 5.1 - Propriedades dos nós segundo as normas e expressões disponíveis no CAST (2000)**

Propriedades dos nós							
Eq. Códigos	Fator Eficiência	Fator Redução Resistência	Fator Resultante	f <sub>ck</sub> (MPa)			
				20	30	40	50
ACI CCC	0,850	0,750	0,638	12,75	19,13	25,50	31,88
ACI CCT	0,680	0,750	0,510	10,20	15,30	20,40	25,50
ACI CTT	0,510	0,750	0,383	7,65	11,48	15,30	19,13
Marti (1985) CCC	0,600	0,750	0,450	9,00	13,50	18,00	22,50
Schlaich (1987) CCC	0,850	0,750	0,638	12,75	19,13	25,50	31,88
Schlaich (1987) CCT / CTT	0,680	0,750	0,510	10,20	15,30	20,40	25,50
MacGregor (1997) CCC	0,777	0,750	0,583	11,66	17,48	23,31	29,14
MacGregor (1997) CCT	0,661	0,750	0,496	9,92	14,87	19,83	24,79
MacGregor (1997) CTT	0,583	0,750	0,437	8,75	13,12	17,49	21,86



Tabela 5.2 - Propriedades das bielas segundo as normas e expressões disponíveis no CAST (2000)

Propriedades das bielas							
Eq. Códigos	Fator Eficiência	Fator Redução Resistência	Fator Resultante	f <sub>ck</sub> (MPa)			
				20	30	40	50
ACI prismatic	0,850	0,750	0,638	12,75	19,13	25,50	31,88
ACI "forma garrafa" c/ armad.	0,637	0,750	0,478	9,56	14,33	19,11	23,89
ACI "forma garrafa" s/ armad.	0,510	0,750	0,383	7,65	11,48	15,30	19,13
ACI bielas em elem. tracionados	0,340	0,750	0,255	5,10	7,65	10,20	12,75
ACI bielas para todos os outros casos	0,510	0,750	0,383	7,65	11,48	15,30	19,13
Nielsen (1978)	0,550	0,750	0,413	8,25	12,38	16,50	20,63
Ramirez & Breen (1983)	0,515	0,750	0,386	7,73	11,59	15,45	19,31
Marti (1985)	0,600	0,750	0,450	9,00	13,50	18,00	22,50
Schlaich (1987) biela não fissurada	0,850	0,750	0,638	12,75	19,13	25,50	31,88
Schlaich (1987) biela c/ armad. tracionada perpendicular ao seu eixo	0,680	0,750	0,510	10,20	15,30	20,40	25,50
Schlaich (1987) biela c/ armad. tracionada perpendicular ao seu eixo	0,680	0,750	0,510	10,20	15,30	20,40	25,50
Schlaich (1987) biela c/ fissuras de grande abertura	0,340	0,750	0,255	5,10	7,65	10,20	12,75
MacGregor (1997) biela não fissurada	0,777	0,750	0,583	11,66	17,48	23,31	29,14
MacGregor (1997) biela fissurada c/ armad. perpendicular ao seu eixo	0,622	0,750	0,467	9,33	14,00	18,66	23,33
MacGregor (1997) biela fissurada s/ armad. perpendicular ao seu eixo	0,505	0,750	0,379	7,58	11,36	15,15	18,94
MacGregor (1997) biela em zona tracionada	0,466	0,750	0,350	6,99	10,49	13,98	17,48

2) Definição das propriedades geométricas das bielas e dos tirantes e das áreas das armaduras dos tirantes e suas respectivas disposições em camadas (quando for necessária mais de uma).

Salienta-se que os elementos comprimidos também podem apresentar armadura comprimida, caso se deseje. Cita-se que o projetista pode, como alternativa, limitar a tensão em cada membro do modelo. Para isso, ao invés de estabelecer as dimensões dos membros, há a possibilidade de apenas determinar a porcentagem a ser atingida da capacidade (resistência) última do

membro, sendo que, no passo seguinte - análise automática da treliça pelo CAST (2000) -, ao invés de o programa verificar a tensão no membro, ele irá definir automaticamente suas propriedades geométricas a fim de configurar a intensidade de tensão definida pelo projetista.

### 5.2.5 VERIFICAÇÃO DAS TENSÕES

1) Nova análise automática da treliça, porém agora não apenas determinando quais de seus membros estão tracionados e quais estão comprimidos e as intensidades das forças em cada barra, mas também apresentando as tensões em cada elemento do modelo: bielas, tirantes e nós.

Para os membros que o projetista tenha optado por limitar as tensões, o programa determinará automaticamente suas dimensões, como explicado anteriormente.

2) Após a conferência das tensões nas bielas, nos tirantes e nos nós, caso alguns destes estejam com solicitação superior à sua capacidade, o projetista tem muitas alternativas para solucionar o problema. Para isso, ele pode:

- alterar a treliça, apenas modificando sua geometria, sem alterar a quantidade de elementos, ou até mesmo excluindo ou adicionando membros. Em relação aos banzos, ao se alterar suas posições, ocorre a mudança da posição da linha neutra da viga, de acordo com o interesse do projetista;

- alterar as propriedades geométricas da estrutura, como as dimensões da seção transversal (sua espessura e sua altura);

- aumentar a taxa de armadura do tirante ou adicionar armadura à biela, se necessário;

- aumentar a resistência do concreto, alternativa pouco usual na prática;

No caso de serem necessárias alterações, o projetista deve apenas voltar ao passo correspondente e, então, retomar a modelagem normalmente.

## **6 MODELAGENS DAS VIGAS E ANÁLISE DOS RESULTADOS**

---

Neste capítulo, primeiramente apresenta-se rotina para cálculo da área de armadura transversal em vigas de concreto armado de seções retangulares submetidas a flexão segundo a NBR 6118:2003. Em seguida, apresentam-se as modelagens realizadas com o auxílio do programa computacional CAST (2000).

### **6.1 ROTINA PARA VERIFICAÇÕES DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO DE SEÇÕES RETANGULARES SUBMETIDAS A FLEXÃO SEGUNDO A NBR 6118:2003**

A rotina a seguir visa facilitar as verificações de vigas submetidas a flexão e o cálculo da área de armadura transversal das mesmas.

Tabela 6.1 - Rotina para o cálculo da área de armadura transversal em vigas

Rotina para o cálculo da área de armadura transversal				CA-50 e CA-60
CLASSE DE RESISTÊNCIA DO CONCRETO	FORÇA CORTANTE RESISTENTE MÍNIMA			FORÇA CORTANTE RESISTENTE ÚLTIMA $\tau_{c,u}$ (kN/cm <sup>2</sup> )
	CONTRIBUIÇÃO DO CONCRETO $\tau_c$ (kN/cm <sup>2</sup> )	TAXA MÍNIMA DE ARMADURA TRANSVERSAL $\rho_{sw,min}$ (%)		
GRUPO I	C20	0,0663	0,0884	0,3549
	C25	0,0769	0,1026	0,4339
	C30	0,0869	0,1159	0,5091
	C35	0,0963	0,1284	0,5805
	C40	0,1053	0,1404	0,6480
	C45	0,1139	0,1518	0,7116
	C50	0,1221	0,1629	0,7714

Rotina para o cálculo da área de armadura transversal em vigas:

1. Força cortante resistente mínima:

$$V_{Rd,min} = (\tau_c + 39,15 \rho_{sw,min}) b_w d \quad [\text{kN}] \quad (6.1)$$

2. Força cortante resistente última:

$$V_{d,u} = V_{Rd2} = \tau_{c,u} b_w d \quad [\text{kN}] \quad (6.2)$$

3. Força cortante resistente de cálculo em função da área de armadura por unidade de comprimento:

$$V_{Rd3} = V_c + V_{sw} = (\tau_c + 39,15 \rho_{sw}) b_w d \quad [\text{kN}] \quad (6.3)$$

4. Área das barras da armadura transversal:

$$A_{sw} / (s n) = \rho_{sw} (b_w / n) 100 \quad [\text{cm}^2/\text{m}] \quad (6.4)$$

5. Área mínima das barras da armadura transversal:

$$A_{sw,min} / (s n) = \rho_{sw,min} (b_w / n) 100 \quad [\text{cm}^2/\text{m}] \quad (6.5)$$

6. Diâmetro dos estribos:

$$5 \text{ mm} \leq \Phi_{\text{est}} \leq b_w / 10 \quad [\text{cm}^2/\text{m}] \quad (6.6)$$

7. Espaçamento longitudinal máximo entre estribos:

$$\text{se } V_d \leq 0,67 V_{Rd2} \Rightarrow s_{\text{max}} = 0,6 d \leq 30 \text{ cm} \quad (6.7)$$

$$\text{se } V_d > 0,67 V_{Rd2} \Rightarrow s_{\text{max}} = 0,3 d \leq 30 \text{ cm} \quad (6.8)$$

8. Espaçamento transversal máximo entre ramos sucessivos:

$$\text{se } V_d \leq 0,20 V_{Rd2} \Rightarrow s_{t,\text{max}} = d \leq 80 \text{ cm} \quad (6.9)$$

$$\text{se } V_d > 0,20 V_{Rd2} \Rightarrow s_{t,\text{max}} = 0,6 d \leq 35 \text{ cm} \quad (6.10)$$

9.  $A_{sw}$  = área da seção transversal dos ramos verticais dos estribos;

10.  $s$  = espaçamento entre os estribos, medido segundo o eixo longitudinal do elemento estrutural;

11.  $b_w$  = largura média da alma, medida ao longo da altura útil da seção. Para  $b_w > 5.d$ , o dimensionamento do elemento linear deve ser feito com os critérios de laje;

12.  $d$  = altura útil da seção transversal;

13.  $n$  = número de ramos perpendiculares ao plano horizontal do elemento estrutural;

14. Tensão na armadura transversal:

$$f_{ywd} = f_{yd} \leq 435 \text{ MPa} \quad (6.11)$$

## **6.2 MODELOS VB - VIGAS DE CONCRETO ARMADO BIAPOIADAS SUBMETIDAS A CARREGAMENTOS UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDOS**

Esta viga foi modelada e dimensionada de três maneiras distintas. Os dados iniciais da primeira viga, VB1, em relação às vigas VB2 e VB3, serão considerados como valores padrões iniciais no que diz respeito:

- à geometria da viga: comprimento, largura e espessura;
- à geometria da treliça: comprimentos e disposição das barras e nós;
- às condições de contorno: carregamento e apoios; e
- às características dos materiais: resistências do concreto e do aço.

A viga VB2 tem exatamente as mesmas propriedades geométricas que a viga VB1, tanto em relação às dimensões da viga (comprimento e seção transversal), quanto em relação às dimensões e à configuração geométrica da treliça, porém houve um aumento no carregamento que elevou a intensidade do momento solicitante máximo,  $M_d$ , próximo ao momento limite resistente  $M_{d,lim}$  desta viga.

A viga VB3, por sua vez, apresenta exatamente o mesmo carregamento que a viga VB1, porém houve uma modificação na treliça, pois na VB1 a inclinação das bielas  $\theta$  é de  $45^\circ$  (modelo I da NBR 6118:2003) e na VB3 a inclinação das bielas  $\theta$  é de  $39,81^\circ$  (modelo II da NBR 6118:2003).

As modificações feitas na modelo VB1, que geraram os modelos VB2 e VB3, buscaram avaliar o comportamento e a validade do CAST (2000). Para as três vigas foram comparadas as intensidades das forças obtidas nas modelagens com as respectivas intensidades obtidas segundo verificações utilizando a NBR 6118:2003 e o MC CEB-FIP (1990).

As relações entre os valores das modelagens e os das normas estão expressos em porcentagem para que, no capítulo conclusivo, as diferenças sejam discutidas com clareza.

Em relação ao carregamento a que a viga está submetida, este poderia ser aplicado à treliça de quatro maneiras diferentes. Num primeiro caso, seria considerado o comprimento total da viga, ou seja, 3,80 metros, e todos os nós do banzo superior da treliça seriam carregados, de acordo com suas respectivas áreas de influência. Uma segunda hipótese seria ainda considerar o comprimento total da viga, 3,80 m, mas agora não mais carregar os nós extremos da treliça, a fim de melhor representar o comportamento da viga real, na qual as regiões superiores das extremidades praticamente não apresentam função estrutural. Neste caso, o carregamento relativo aos dois nós extremos da viga seria igualmente dividido pelos nós restantes. O terceiro caso seria como o primeiro, porém consideraria o comprimento efetivo da viga, ou seja, os 3,60 metros distantes entre as linhas centrais dos pilares, como se faz em projetos não assistidos por computador. O último caso, o qual foi escolhido nesta modelagem, é similar ao segundo, ou seja, não foram carregados os nós de cada extremidade da viga, porém considerou-se o comprimento efetivo da viga, e não o comprimento total, a fim de se obter melhor parâmetro de comparação entre os valores obtidos nas modelagens e os obtidos nos dimensionamentos realizados manualmente segundo a NBR 6118:2003 e o MC CEB-FIP (1990). Vale lembrar que a força aplicada na treliça já foi majorada, ou seja, já foi aplicada com seu valor de projeto.

A seguir estão relacionadas algumas propriedades atribuídas a todas as 3 vigas, VB1, VB2 e VB3:

$$\text{Aço: CA-50} \Rightarrow f_y = 500 \text{ MPa}$$

Coefficiente de ponderação das ações:

$$\gamma_f = 1,4$$

Coefficiente de ponderação da resistência do concreto, para as verificações segundo a NBR 6118:2003 e o MC CEB-FIP (1990):

$$\gamma_c = 1,4$$

Coefficiente de ponderação da resistência do aço, para as verificações segundo a NBR 6118:2003 e o MC CEB-FIP (1990):

$$\gamma_s = 1,15$$

Nas modelagens, foram atribuídos coeficientes de ponderação dos materiais ligeiramente diferentes dos utilizados nas verificações das normas. O CAST (2000) utiliza como padrão para todas as verificações e, portanto, para todos os coeficientes, os valores e recomendações do ACI, referentes à versão de janeiro de 2000. Sendo assim, o coeficiente de ponderação dos materiais é fator multiplicador de suas resistências.

Nas modelagens optou-se por admitir as considerações e as verificações referentes ao ACI, exceto para os valores dos coeficientes de ponderação do concreto ( $\phi_c$ ) e do aço ( $\phi_s$ ) que assumiram, respectivamente:

$$\phi_c \approx \gamma_c^{-1} \Rightarrow \phi_c = 0,75$$

$$\phi_s \approx \gamma_s^{-1} \Rightarrow \phi_s = 0,85$$

## 6.2.1 MODELO VB1 - PROPRIEDADES INICIAIS

### 6.2.1.1 Propriedades gerais

O modelo VB1 constitui-se de uma viga de concreto armado, biapoiada, com um carregamento uniformemente distribuído em toda a sua extensão. Possui seção transversal retangular de 20 cm x 40 cm. A [Figura 6.1](#) mostra o comprimento efetivo da viga VB1, suas condições de apoio e o carregamento a que ela está submetida.

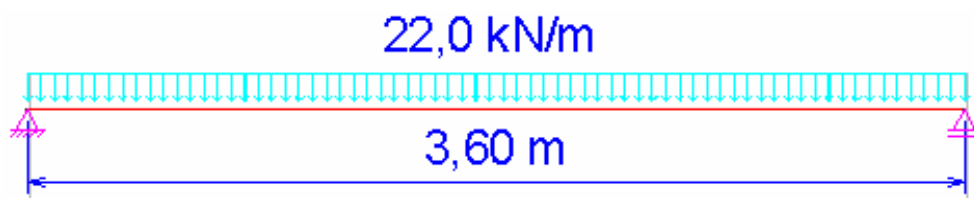


Figura 6.1 - VB1 - Carregamento e comprimento efetivo

Seção transversal:  $b_w = 20$  cm



$$h = 40 \text{ cm}$$

$$\text{Comprimento efetivo da viga: } \ell_{\text{efetivo,viga}} = 360 \text{ cm} = 3,6 \text{ m}$$

$$\text{Concreto: C25} \Rightarrow f_{ck} = 25 \text{ MPa}$$

$$R_k = 22 \text{ [kN/m]} \cdot (3,6 / 2) \text{ [m]} = 39,6 \text{ kN}$$

$$M_k = p \cdot \ell^2 / 8 = 22 \cdot 3,6^2 / 8 \qquad M_d = 1,4 \cdot M_k = 49,90 \text{ kN.m}$$

$$V_k = 39,6 \text{ kN} \qquad V_d = 1,4 \cdot V_k = 55,44 \text{ kN}$$

### 6.2.1.2 Determinação de $k_c$ , $k_s$ e $A_s$

$$k_c = b \cdot d^2 / M_d = 20 \cdot 36^2 / 4990 = 5,19$$

$$\text{C25} \Rightarrow k_s = 0,025$$

$$k_s = A_s \cdot d / M_d \Rightarrow A_s = k_s \cdot M_d / d = 0,025 \cdot 4990 / 36 = 3,47 \text{ cm}^2$$

### 6.2.1.3 Cálculo de $M_{d,\text{lim}}$ , $V_{d,u}$ e $V_{d,\text{min}}$

$$M_{d,\text{lim}} = b \cdot d^2 / k_{c,\text{lim}} = 20 \cdot 36^2 / 1,8 = 14400 \text{ kN.cm} = 144,00 \text{ kN.m}$$

$$V_{d,u} = 0,1 \cdot \tau_{wu} \cdot b \cdot d = 0,1 \cdot 4,500 \cdot 20 \cdot 36 = 324,0 \text{ kN}$$

$$V_{d,\text{min}} = 0,1 \cdot \tau_{w\text{min}} \cdot b \cdot d = 0,1 \cdot 1,182 \cdot 20 \cdot 36 = 85,1 \text{ kN}$$

$$V_{d,\text{max}} = 55,5 \text{ kN} < V_{d,u} = 324,0 \text{ kN} \Rightarrow \text{condição ok!}$$

A verificação acima indica que a força cortante máxima atuante na viga é inferior à força cortante última a qual a viga é capaz de suportar.

### 6.2.1.4 Verificação das bielas segundo o MC CEB-FIP (1990)

$$R_{\text{Scw}} = (V_d / \text{sen}\theta) \cdot [\text{cotg}\theta / (\text{cotg}\theta + \text{cotg}\alpha)]$$

sendo:

$$\alpha = \text{inclinação dos estribos} = 90^\circ \Rightarrow \text{cotg}\alpha = 0;$$

$$\theta = \text{inclinação das bielas} = 45^\circ \Rightarrow \text{sen}\theta = 2^{1/2} / 2 ; \text{cotg}\theta = 1;$$

Quando  $V_d = V_{d,max}$ , temos:

$$R_{Scw} = (55,5 \cdot 2^{1/2} / 2) \cdot [1 / (1 + 0)]$$

O cálculo da força solicitante de compressão atuante nas bielas da viga também visa estabelecer comparação, a fim de verificar a validade da modelagem. Os valores das forças nos elementos podem ser conferidos adiante, na [Figura 6.6](#) e na [Tabela 6.8](#). A [Figura 7.7](#) apresenta os fatores de utilização dos elementos da treliça.

$$R_{Scw} = 78,5 \text{ kN}$$

$$R_{Scw,CAST} = 78,4 \text{ kN (Figura 6.6; Tabela 6.8)}$$

**A diferença entre as forças solicitantes de compressão nas bielas, tomando-se o valor obtido segundo verificação do MC CEB-FIP (1990) e o valor da biela mais solicitada da treliça, segundo modelagem no CAST (2000), é praticamente nula (0,1%).**

$$R_{Rcw} = f_{cd2} \cdot b \cdot z \cdot \cos\theta$$

$$f_{cd2} = 0,60 \cdot (1 - f_{ck} / 250) \cdot f_{cd} = 0,60 \cdot (1 - 25 / 250) \cdot (2,5 / 1,4) =$$

$$= 0,964 \text{ kN/cm}^2$$

$$k_c = b \cdot d^2 / M_d = 5,19 \Rightarrow \beta_x = 0,17$$

$$\beta_x = x / d \Rightarrow x = \beta_x \cdot d = 0,17 \cdot 36 = 6,1 \text{ cm}$$

$$z = d - 0,4 \cdot x = 36 - 0,4 \cdot 6,1 = 33,56 \text{ cm} \quad \text{obs: } z/d = 0,93$$

$$R_{Rcw} = 0,964 \cdot 20 \cdot 33,56 \cdot 2^{1/2} / 2$$

$$R_{Scw} = 78,5 < R_{Rcw} = 457,5 \text{ kN} \Rightarrow \text{condição ok!}$$

A condição anterior indica que a capacidade resistente das bielas de concreto da viga é maior do que a solicitação a que elas estão submetidas.

Conhecendo-se o braço do momento  $z$ , de acordo com o próprio momento máximo atuante, pode-se determinar a força solicitante de tração no banzo inferior da viga ( $R_{st}$ ), relativa ao valor do momento aplicado, a fim de estabelecer comparação com o valor da força de tração determinada pela

modelagem ( $R_{st,CAST}$ ). É considerada a força de tração atuante nas barras mais solicitadas do banzo inferior da viga, que são as duas barras centrais.

$$R_{st} = M_d / z + N_d$$

$$N_d = 0$$

$$R_{st} = 4990 / 33,56$$

$$R_{st} = 148,7 \text{ kN}$$

$$R_{st,CAST} = 181,4 \text{ kN (Figura 6.6; Tabela 6.8)}$$

**Portanto, o CAST (2000) está 18% a favor da segurança.**

### 6.2.1.5 Verificação das bielas segundo a NBR 6118:2003

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \text{sen}^2\theta \cdot (\cot\alpha + \cot\theta)$$

sendo:

$$\alpha = \text{inclinação dos estribos} = 90^\circ \Rightarrow \cot\alpha = 0;$$

$$\theta = \text{inclinação das bielas} = 45^\circ \Rightarrow \text{sen}^2\theta = 0,5 ; \cot\theta = 1;$$

$$\alpha_v = [1 - (f_{ck} / 250)]$$

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot [1 - (25 / 250)] \cdot (2,5 / 1,4) \cdot 20 \cdot 36 \cdot 0,5 \cdot (0 + 1)$$

$$V_{Sd} = 55,5 \text{ kN} < V_{Rd2} = 312,4 \text{ kN} \Rightarrow \text{condição ok!}$$

### 6.2.1.6 Resultados da modelagem

Neste primeiro modelo serão apresentadas inúmeras figuras e tabelas, a fim de representar de maneira completa todas as características da modelagem no CAST (2000) e de mostrar a grande variedade de respostas, gráficas ou numéricas, que o programa é capaz de fornecer. Ressalta-se que, para os modelos seguintes, serão apresentadas apenas as figuras e tabelas de maior relevância para análise. A [Figura 6.2](#) apresenta as propriedades da treliça, onde as bielas estão representadas por linhas azuis descontínuas e os

tirantes por linhas alaranjadas contínuas. Os pontos vermelhos são os nós internos da viga, pertencentes à treliça, e os pontos cinzas são os nós situados nas faces a viga, nos quais são aplicados os carregamentos e definidos os apoios. As barras vermelhas descontínuas são os estabilizadores, elementos pertencentes à treliça definida pelo usuário que, para as determinadas condições de apoio e ações atuantes, não estão solicitados. Como, para as três primeiras modelagens, há simetria na viga, na treliça e no carregamento, será exibida apenas meia viga, quando se considerar conveniente.

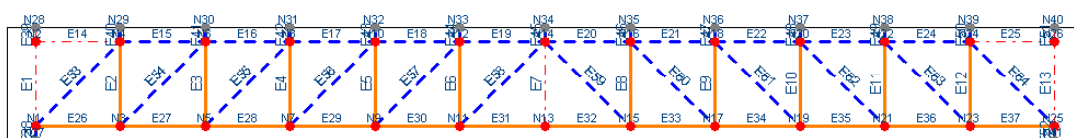


Figura 6.2 - VB1 - A treliça e seus elementos

A [Tabela 6.2](#) mostra as propriedades geométricas de cada um dos elementos da treliça e a [Tabela 6.3](#) apresenta as propriedades geométricas de cada um dos nós da treliça.

Tabela 6.2 - VB1 - Propriedades geométricas dos elementos

Row #	Element ID	Function	End I ID	End J ID	Length (mm)	Direction (deg.)
1	E1	Stabilizer	N1	N2	300,0	90,00
2	E2	Strut-and-Tie	N3	N4	300,0	90,00
3	E3	Strut-and-Tie	N5	N6	300,0	90,00
4	E4	Strut-and-Tie	N7	N8	300,0	90,00
5	E5	Strut-and-Tie	N9	N10	300,0	90,00
6	E6	Strut-and-Tie	N11	N12	300,0	90,00
7	E7	Stabilizer	N13	N14	300,0	90,00
8	E8	Strut-and-Tie	N15	N16	300,0	90,00
9	E9	Strut-and-Tie	N17	N18	300,0	90,00
10	E10	Strut-and-Tie	N19	N20	300,0	90,00
11	E11	Strut-and-Tie	N21	N22	300,0	90,00
12	E12	Strut-and-Tie	N23	N24	300,0	90,00
13	E13	Stabilizer	N25	N26	300,0	90,00
14	E14	Stabilizer	N2	N4	300,0	0,00
15	E15	Strut-and-Tie	N4	N6	300,0	0,00
16	E16	Strut-and-Tie	N6	N8	300,0	0,00
17	E17	Strut-and-Tie	N8	N10	300,0	0,00
18	E18	Strut-and-Tie	N10	N12	300,0	0,00
19	E19	Strut-and-Tie	N12	N14	300,0	0,00
20	E20	Strut-and-Tie	N14	N16	300,0	0,00
21	E21	Strut-and-Tie	N16	N18	300,0	0,00

22	E22	Strut-and-Tie	N18	N20	300,0	0,00
23	E23	Strut-and-Tie	N20	N22	300,0	0,00
24	E24	Strut-and-Tie	N22	N24	300,0	0,00
25	E25	Stabilizer	N24	N26	300,0	0,00
26	E26	Strut-and-Tie	N1	N3	300,0	0,00
27	E27	Strut-and-Tie	N3	N5	300,0	0,00
28	E28	Strut-and-Tie	N5	N7	300,0	0,00
29	E29	Strut-and-Tie	N7	N9	300,0	0,00
30	E30	Strut-and-Tie	N9	N11	300,0	0,00
31	E31	Strut-and-Tie	N11	N13	300,0	0,00
32	E32	Strut-and-Tie	N13	N15	300,0	0,00
33	E33	Strut-and-Tie	N15	N17	300,0	0,00
34	E34	Strut-and-Tie	N17	N19	300,0	0,00
35	E35	Strut-and-Tie	N19	N21	300,0	0,00
36	E36	Strut-and-Tie	N21	N23	300,0	0,00
37	E37	Strut-and-Tie	N23	N25	300,0	0,00
38	E38	Strut-and-Tie	N27	N1	50,0	90,00
39	E39	Stabilizer	N2	N28	50,0	90,00
40	E40	Strut-and-Tie	N4	N29	50,0	90,00
41	E41	Strut-and-Tie	N6	N30	50,0	90,00
42	E42	Strut-and-Tie	N8	N31	50,0	90,00
43	E43	Strut-and-Tie	N10	N32	50,0	90,00
44	E44	Strut-and-Tie	N12	N33	50,0	90,00
45	E45	Strut-and-Tie	N14	N34	50,0	90,00
46	E46	Strut-and-Tie	N16	N35	50,0	90,00
47	E47	Strut-and-Tie	N18	N36	50,0	90,00
48	E48	Strut-and-Tie	N20	N37	50,0	90,00
49	E49	Strut-and-Tie	N22	N38	50,0	90,00
50	E50	Strut-and-Tie	N24	N39	50,0	90,00
51	E51	Stabilizer	N26	N40	50,0	90,00
52	E52	Strut-and-Tie	N41	N25	50,0	90,00
53	E53	Strut-and-Tie	N1	N4	424,3	45,00
54	E54	Strut-and-Tie	N3	N6	424,3	45,00
55	E55	Strut-and-Tie	N5	N8	424,3	45,00
56	E56	Strut-and-Tie	N7	N10	424,3	45,00
57	E57	Strut-and-Tie	N9	N12	424,3	45,00
58	E58	Strut-and-Tie	N11	N14	424,3	45,00
59	E59	Strut-and-Tie	N14	N15	424,3	315,00
60	E60	Strut-and-Tie	N16	N17	424,3	315,00
61	E61	Strut-and-Tie	N18	N19	424,3	315,00
62	E62	Strut-and-Tie	N20	N21	424,3	315,00
63	E63	Strut-and-Tie	N22	N23	424,3	315,00
64	E64	Strut-and-Tie	N24	N25	424,3	315,00

Tabela 6.3 - VB1 - Propriedades geométricas dos nós

Row #	Node ID	Function	X (mm)	Y (mm)	Direction (deg.)
1	N1	Strut-and-Tie	0,0	50,0	0,00
2	N2	Strut-and-Tie	0,0	350,0	0,00
3	N3	Strut-and-Tie	300,0	50,0	0,00
4	N4	Strut-and-Tie	300,0	350,0	0,00
5	N5	Strut-and-Tie	600,0	50,0	0,00

6	N6	Strut-and-Tie	600,0	350,0	0,00
7	N7	Strut-and-Tie	900,0	50,0	0,00
8	N8	Strut-and-Tie	900,0	350,0	0,00
9	N9	Strut-and-Tie	1200,0	50,0	0,00
10	N10	Strut-and-Tie	1200,0	350,0	0,00
11	N11	Strut-and-Tie	1500,0	50,0	0,00
12	N12	Strut-and-Tie	1500,0	350,0	0,00
13	N13	Strut-and-Tie	1800,0	50,0	0,00
14	N14	Strut-and-Tie	1800,0	350,0	0,00
15	N15	Strut-and-Tie	2100,0	50,0	0,00
16	N16	Strut-and-Tie	2100,0	350,0	0,00
17	N17	Strut-and-Tie	2400,0	50,0	0,00
18	N18	Strut-and-Tie	2400,0	350,0	0,00
19	N19	Strut-and-Tie	2700,0	50,0	0,00
20	N20	Strut-and-Tie	2700,0	350,0	0,00
21	N21	Strut-and-Tie	3000,0	50,0	0,00
22	N22	Strut-and-Tie	3000,0	350,0	0,00
23	N23	Strut-and-Tie	3300,0	50,0	0,00
24	N24	Strut-and-Tie	3300,0	350,0	0,00
25	N25	Strut-and-Tie	3600,0	50,0	0,00
26	N26	Strut-and-Tie	3600,0	350,0	0,00
27	N27	Load/Support	0,0	0,0	180,00
28	N28	Load/Support	0,0	400,0	0,00
29	N29	Load/Support	300,0	400,0	0,00
30	N30	Load/Support	600,0	400,0	0,00
31	N31	Load/Support	900,0	400,0	0,00
32	N32	Load/Support	1200,0	400,0	0,00
33	N33	Load/Support	1500,0	400,0	0,00
34	N34	Load/Support	1800,0	400,0	0,00
35	N35	Load/Support	2100,0	400,0	0,00
36	N36	Load/Support	2400,0	400,0	0,00
37	N37	Load/Support	2700,0	400,0	0,00
38	N38	Load/Support	3000,0	400,0	0,00
39	N39	Load/Support	3300,0	400,0	0,00
40	N40	Load/Support	3600,0	400,0	0,00
41	N41	Load/Support	3600,0	0,0	180,00

A Figura 6.3 exibe os carregamentos nos nós da viga, de acordo com as áreas de influência e os critérios anteriormente discutidos

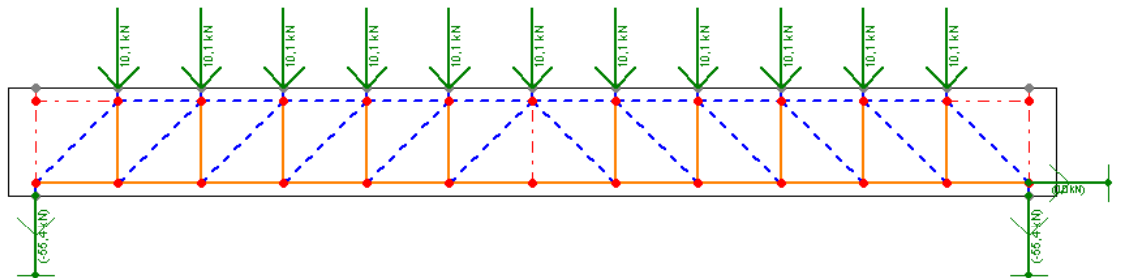


Figura 6.3 - VB1 - Aplicação das forças aos nós

A Figura 6.4 exibe as propriedades atribuídas aos elementos e a Figura 6.5 aos nós, ambas as tarefas de responsabilidade do projetista.

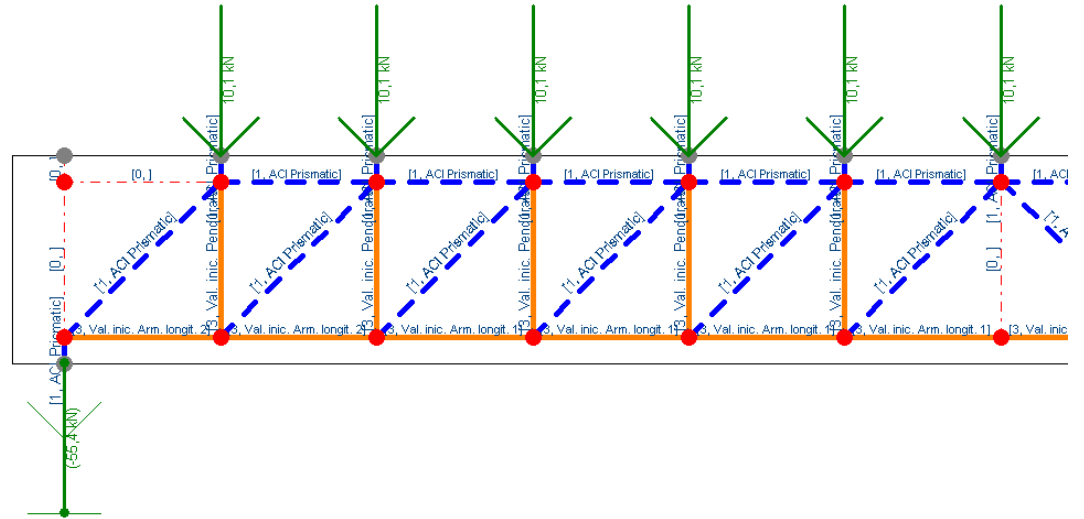


Figura 6.4 - Propriedades dos elementos

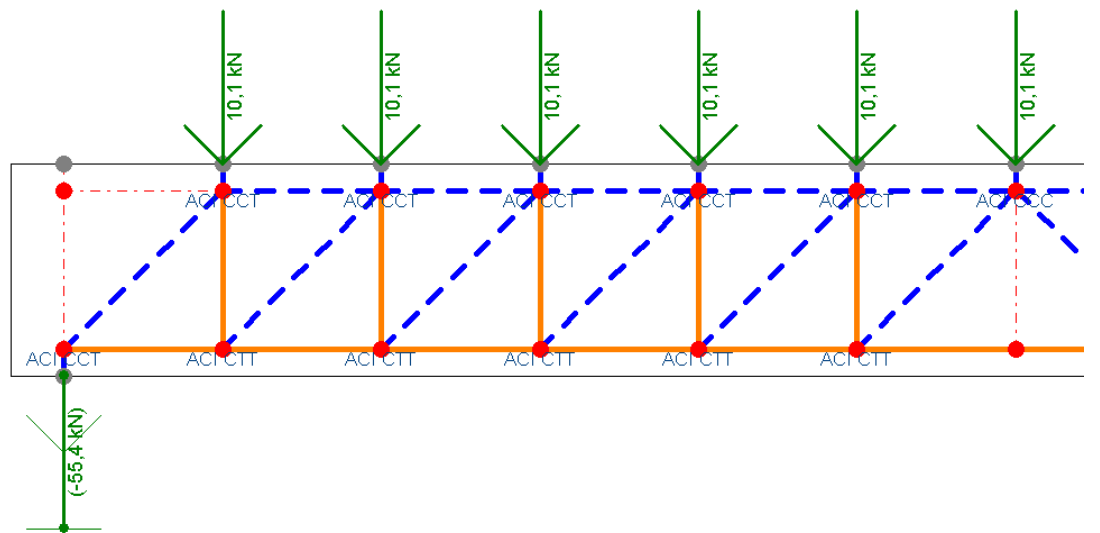


Figura 6.5 - Propriedades dos nós

A Tabela 6.4 exibe relatório das propriedades atribuídas aos elementos e a Tabela 6.5, por sua vez, das propriedades atribuídas aos nós.

Tabela 6.4 - VB1 - Propriedades dos elementos

Row #	Element ID	Rel. Stiffness	Width (mm)	Property Type	Property Type Name
1	E1	1.000	100,0	Undefined	Undefined
2	E2	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Pendurais
3	E3	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Pendurais
4	E4	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Pendurais
5	E5	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Pendurais
6	E6	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Pendurais
7	E7	1.000	100,0	Undefined	Undefined
8	E8	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Pendurais
9	E9	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Pendurais
10	E10	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Pendurais
11	E11	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Pendurais
12	E12	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Pendurais
13	E13	1.000	100,0	Undefined	Undefined
14	E14	1.000	100,0	Undefined	Undefined
15	E15	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
16	E16	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
17	E17	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
18	E18	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
19	E19	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
20	E20	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
21	E21	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
22	E22	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
23	E23	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
24	E24	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
25	E25	1.000	100,0	Undefined	Undefined
26	E26	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Arm. longit. 2
27	E27	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Arm. longit. 2
28	E28	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Arm. longit. 1
29	E29	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Arm. longit. 1
30	E30	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Arm. longit. 1
31	E31	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Arm. longit. 1
32	E32	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Arm. longit. 1
33	E33	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Arm. longit. 1
34	E34	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Arm. longit. 1
35	E35	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Arm. longit. 1
36	E36	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Arm. longit. 2
37	E37	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Val. inic. Arm. longit. 2
38	E38	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
39	E39	1.000	100,0	Undefined	Undefined
40	E40	1.000	20,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
41	E41	1.000	20,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
42	E42	1.000	20,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
43	E43	1.000	20,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
44	E44	1.000	20,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
45	E45	1.000	20,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
46	E46	1.000	20,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
47	E47	1.000	20,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
48	E48	1.000	20,0	Concrete Strut	ACI Prismatic



49	E49	1.000	20,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
50	E50	1.000	20,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
51	E51	1.000	100,0	Undefined	Undefined
52	E52	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
53	E53	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
54	E54	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
55	E55	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
56	E56	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
57	E57	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
58	E58	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
59	E59	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
60	E60	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
61	E61	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
62	E62	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
63	E63	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
64	E64	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic

Tabela 6.5 - VB1 - Propriedades dos nós

Row #	Node ID	Property Type
1	N1	ACI CCT
2	N2	NA
3	N3	ACI CTT
4	N4	ACI CCT
5	N5	ACI CTT
6	N6	ACI CCT
7	N7	ACI CTT
8	N8	ACI CCT
9	N9	ACI CTT
10	N10	ACI CCT
11	N11	ACI CTT
12	N12	ACI CCT
13	N13	NA
14	N14	ACI CCC
15	N15	ACI CTT
16	N16	ACI CCT
17	N17	ACI CTT
18	N18	ACI CCT
19	N19	ACI CTT
20	N20	ACI CCT
21	N21	ACI CTT
22	N22	ACI CCT
23	N23	ACI CTT
24	N24	ACI CCT
25	N25	ACI CCT
26	N26	NA
27	N27	NA
28	N28	NA
29	N29	NA
30	N30	NA
31	N31	NA
32	N32	NA

33	N33	NA
34	N34	NA
35	N35	NA
36	N36	NA
37	N37	NA
38	N38	NA
39	N39	NA
40	N40	NA
41	N41	NA

Definidas todas as características necessárias para se realizar as verificações convenientes, o próximo passo é analisar as solicitações que estão submetidos os elementos do modelos de bielas e tirantes. Apesar de o programa ser capaz de fornecer uma grande variedade de dados para análise, os principais são constituídos pelas porcentagens das capacidades resistentes de cada elemento e de cada nó, o que já é suficiente para se verificar a validade do modelo. Caso as verificações de todos os elementos e nós apontem que em nenhum elemento a solicitação é maior que a capacidade resistente, pode-se garantir que, ao menos em relação ao modelo de bielas e tirantes adotado, está garantida a segurança estrutural da viga.

Ressalta-se que, para que o modelo seja válido, o projetista deve se assegurar de que todas as condições por ele determinadas sejam válidas. Há inúmeros fatores que podem gerar incompatibilidades entre o modelo e a viga real. Os principais são:

1) Concepção incorreta do tipo de biela definida, ou do tipo de nó definido pelo projetista. Vale lembrar que bielas e nós assumem coeficientes de segurança dependentes de suas configurações na treliça. Portanto, determinações equivocadas ou duvidosas podem estar contra a segurança estrutural;

2) Inadequada ancoragem das armaduras que atravessam os nós. Há configurações de nós que consideram tirantes os atravessando. Porém, para se garantir o esperado funcionamento e, conseqüentemente, a validade das capacidades resistentes, deve-se garantir que os tirantes estejam corretamente ancorados a essas regiões nodais;

3) Insuficientes comprimentos de ancoragem necessários para armaduras. O comprimento de ancoragem é um fator muito importante que também deve ser considerado no modelo de bielas e tirantes. Portanto, devem ser consideradas todas as prescrições pertinentes a cada caso. No caso das barras da armadura longitudinal das vigas, deve-se considerar o comprimento de ancoragem básico além dos pontos de interrupção de cada barra determinado pelas forças nas barras das treliças;

4) Determinação de dimensões - largura e espessura - incorretas para bielas e tirantes. As barras da treliça têm as áreas de suas seções transversais definidas pelos comprimentos de suas larguras e pela espessura da estrutura. Considerando que a espessura é um fator que dificilmente gera dúvidas, pois pode-se considerar como espessura efetiva dos elementos a espessura total da estrutura, as dúvidas recaem nas determinações das larguras efetivas de bielas e tirantes. Deve-se verificar se as larguras adotadas não ultrapassam os limites da estrutura. Em seguida, é interessante dispor corretamente as barras das armaduras dos tirantes, em camadas quando necessário, a fim de garantir que os tirantes da treliça tenham espessuras suficientes para que não ocorra ruptura localizada na face de encontro entre o tirante e o nó ao qual ele está conectado;

5) Definição de nós como contínuos ou singulares. Até hoje não existem critérios bem definidos para distinguir nós contínuos e nós concentrados. Tendo em vista que nós contínuos, que são aqueles em que há espaço suficiente para que os desvios das forças neles atuantes sejam suaves, não são críticos e, portanto, não precisam ser verificados, é necessário muita cautela para se definir um nó como contínuo.

Além desses aspectos principais, todas as demais verificações necessárias às vigas devem ser realizadas, como as verificações para Estados Limites de Serviço. Cita-se que, caso a treliça adotada não seja estaticamente determinada ou caso não haja correta disposição de suas barras, o CAST (2000) indicará que há algum problema e não fornecerá ao projetista nenhuma resposta.

A seguir apresentam-se as respostas obtidas na modelagem da viga VB1. Essas respostas são apresentadas em porcentagens de solicitação dos elementos, ou seja, em forma da relação solicitação dividida pela resistência. Valores iguais ou superiores à unidade indicam que o elemento está fora de serviço, ou seja, sua capacidade última foi atingida.

A Figura 6.6 apresenta as forças solicitantes aplicadas em cada membro da treliça. Valores positivos indicam tração e negativos indicam compressão.

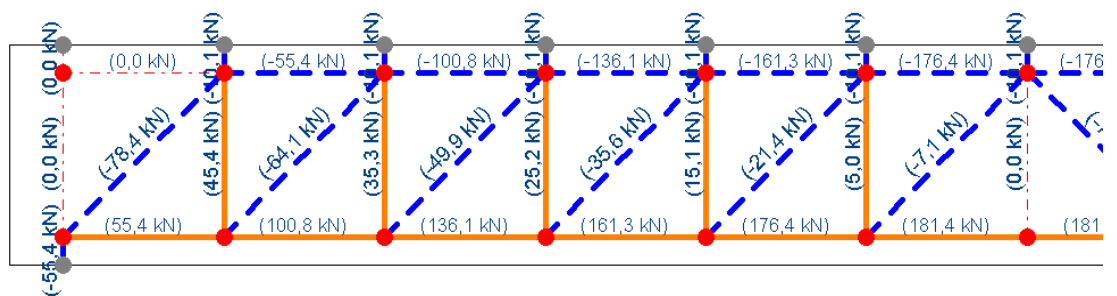


Figura 6.6 - VB1 - Forças nos membros da treliça

A Figura 6.7 apresenta a envoltória resistência a que está submetida a viga. Os valores entre parênteses representam a razão entre a solicitação no elemento e a resistência do mesmo, também chamada de fator de utilização. Valores baixos tendem às cores frias (azul) e valores altos tendem às cores quentes (vermelho).

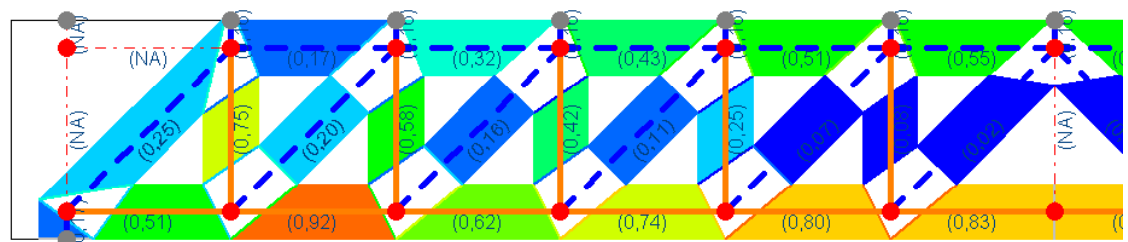


Figura 6.7 - VB1 - Fatores de utilização dos elementos

A Tabela 6.6 apresenta os fatores de utilização de todos os elementos da treliça e a Tabela 6.7 de todos os nós.

Tabela 6.6 - VB1 - Fatores de utilização dos elementos da treliça

Row #	Element ID	Force (kN)	Stress (MPa)	Stress Ratio	f <sub>c</sub> Ratio
1	E1	0,0	NA	NA	NA
2	E2	45,4	319,44	0,75	NA
3	E3	35,3	248,45	0,59	NA
4	E4	25,2	177,46	0,42	NA
5	E5	15,1	106,48	0,25	NA
6	E6	5,0	35,49	0,08	NA
7	E7	0,0	NA	NA	NA
8	E8	5,0	35,49	0,08	NA
9	E9	15,1	106,48	0,25	NA
10	E10	25,2	177,46	0,42	NA
11	E11	35,3	248,45	0,59	NA
12	E12	45,4	319,44	0,75	NA
13	E13	0,0	NA	NA	NA
14	E14	0,0	NA	NA	NA
15	E15	-55,4	2,77	0,17	0,11
16	E16	-100,8	5,04	0,32	0,20
17	E17	-136,1	6,80	0,43	0,27
18	E18	-161,3	8,06	0,51	0,32
19	E19	-176,4	8,82	0,55	0,35
20	E20	-176,4	8,82	0,55	0,35
21	E21	-161,3	8,06	0,51	0,32
22	E22	-136,1	6,80	0,43	0,27
23	E23	-100,8	5,04	0,32	0,20
24	E24	-55,4	2,77	0,17	0,11
25	E25	0,0	NA	NA	NA
26	E26	55,4	214,88	0,51	NA
27	E27	100,8	390,70	0,92	NA
28	E28	136,1	263,72	0,62	NA
29	E29	161,3	312,56	0,74	NA
30	E30	176,4	341,86	0,80	NA
31	E31	181,4	351,63	0,83	NA
32	E32	181,4	351,63	0,83	NA
33	E33	176,4	341,86	0,80	NA
34	E34	161,3	312,56	0,74	NA
35	E35	136,1	263,72	0,62	NA
36	E36	100,8	390,70	0,92	NA
37	E37	55,4	214,88	0,51	NA
38	E38	-55,4	2,77	0,17	0,11
39	E39	0,0	NA	NA	NA
40	E40	-10,1	2,52	0,16	0,10
41	E41	-10,1	2,52	0,16	0,10
42	E42	-10,1	2,52	0,16	0,10
43	E43	-10,1	2,52	0,16	0,10
44	E44	-10,1	2,52	0,16	0,10
45	E45	-10,1	2,52	0,16	0,10
46	E46	-10,1	2,52	0,16	0,10
47	E47	-10,1	2,52	0,16	0,10
48	E48	-10,1	2,52	0,16	0,10
49	E49	-10,1	2,52	0,16	0,10
50	E50	-10,1	2,52	0,16	0,10

51	E51	0,0	NA	NA	NA
52	E52	-55,4	2,77	0,17	0,11
53	E53	-78,4	3,92	0,25	0,16
54	E54	-64,1	3,21	0,20	0,13
55	E55	-49,9	2,49	0,16	0,10
56	E56	-35,6	1,78	0,11	0,07
57	E57	-21,4	1,07	0,07	0,04
58	E58	-7,1	0,36	0,02	0,01
59	E59	-7,1	0,36	0,02	0,01
60	E60	-21,4	1,07	0,07	0,04
61	E61	-35,6	1,78	0,11	0,07
62	E62	-49,9	2,49	0,16	0,10
63	E63	-64,1	3,21	0,20	0,13
64	E64	-78,4	3,92	0,25	0,16

Tabela 6.7 - VB1 - Fatores de utilização dos nós da treliça

Row #	Node ID	Node Side	Force (kN)	Stress (MPa)	Stress Ratio	f <sub>c</sub> Ratio
1	N1	E1	0,0	0,00	0,00	0,00
2		E26	55,4	2,77	0,22	0,11
3		E38	-55,4	2,77	0,22	0,11
4		E53	-78,4	3,92	0,31	0,16
5	N2	E1	0,0	NA	NA	NA
6		E14	0,0	NA	NA	NA
7		E39	0,0	NA	NA	NA
8	N3	E2	45,4	2,27	0,24	0,09
9		E26	55,4	2,77	0,29	0,11
10		E27	100,8	5,04	0,53	0,20
11		E54	-64,1	3,21	0,34	0,13
12	N4	E2	45,4	2,27	0,18	0,09
13		E14	0,0	0,00	0,00	0,00
14		E15	-55,4	2,77	0,22	0,11
15		E40	-10,1	2,52	0,20	0,10
16		E53	-78,4	3,92	0,31	0,16
17	N5	E3	35,3	1,76	0,18	0,07
18		E27	100,8	5,04	0,53	0,20
19		E28	136,1	6,80	0,71	0,27
20		E55	-49,9	2,49	0,26	0,10
21	N6	E3	35,3	1,76	0,14	0,07
22		E15	-55,4	2,77	0,22	0,11
23		E16	-100,8	5,04	0,40	0,20
24		E41	-10,1	2,52	0,20	0,10
25		E54	-64,1	3,21	0,25	0,13
26	N7	E4	25,2	1,26	0,13	0,05
27		E28	136,1	6,80	0,71	0,27
28		E29	161,3	8,06	0,84	0,32
29		E56	-35,6	1,78	0,19	0,07
30	N8	E4	25,2	1,26	0,10	0,05
31		E16	-100,8	5,04	0,40	0,20
32		E17	-136,1	6,80	0,53	0,27
33		E12	10,1	2,52	0,20	0,10
34		E55	49,9	2,49	0,26	0,10

35	N9	E5	15,1	0,76	0,08	0,03
36		E29	161,3	8,06	0,84	0,32
37		E30	176,4	8,82	0,92	0,35
38		E57	-21,4	1,07	0,11	0,04
39	N10	E5	15,1	0,76	0,06	0,03
40		E17	-136,1	6,80	0,53	0,27
41		E18	-161,3	8,06	0,63	0,32
42		E43	-10,1	2,52	0,20	0,10
43		E56	-35,6	1,78	0,14	0,07
44	N11	E6	5,0	0,25	0,03	0,01
45		E30	176,4	8,82	0,92	0,35
46		E31	181,4	9,07	0,95	0,36
47		E58	-7,1	0,36	0,04	0,01
48	N12	E6	5,0	0,25	0,02	0,01
49		E18	-161,3	8,06	0,63	0,32
50		E19	-176,4	8,82	0,69	0,35
51		E44	-10,1	2,52	0,20	0,10
52		E57	-21,4	1,07	0,08	0,04
53	N13	E7	0,0	NA	NA	NA
54		E31	181,4	NA	NA	NA
55		E32	181,4	NA	NA	NA
56	N14	E7	0,0	0,00	0,00	0,00
57		E19	-176,4	8,82	0,55	0,35
58		E20	-176,4	8,82	0,55	0,35
59		E45	-10,1	2,52	0,16	0,10
60		E58	-7,1	0,36	0,02	0,01
61		E59	-7,1	0,36	0,02	0,01
62	N15	E8	5,0	0,25	0,03	0,01
63		E32	181,4	9,07	0,95	0,36
64		E33	176,4	8,82	0,92	0,35
65		E59	-7,1	0,36	0,04	0,01
66	N16	E8	5,0	0,25	0,02	0,01
67		E20	-176,4	8,82	0,69	0,35
68		E21	-161,3	8,06	0,63	0,32
69		E46	-10,1	2,52	0,20	0,10
70		E60	-21,4	1,07	0,08	0,04
71	N17	E9	15,1	0,76	0,08	0,03
72		E33	176,4	8,82	0,92	0,35
73		E34	161,3	8,06	0,84	0,32
74		E60	-21,4	1,07	0,11	0,04
75	N18	E9	15,1	0,76	0,06	0,03
76		E21	-161,3	8,06	0,63	0,32
77		E22	-136,1	6,80	0,53	0,27
78		E47	-10,1	2,52	0,20	0,10
79		E61	-35,6	1,78	0,14	0,07
80	N19	E10	25,2	1,26	0,13	0,05
81		E34	161,3	8,06	0,84	0,32
82		E35	136,1	6,80	0,71	0,27
83		E61	-35,6	1,78	0,19	0,07
84	N20	E10	25,2	1,26	0,10	0,05
85		E22	-136,1	6,80	0,53	0,27
86		E23	-100,8	5,04	0,40	0,20
87		E48	-10,1	2,52	0,20	0,10

88		E62	-49,9	2,49	0,20	0,10
89	N21	E11	35,3	1,76	0,18	0,07
90		E35	136,1	6,80	0,71	0,27
91		E36	100,8	5,04	0,53	0,20
92		E62	-49,9	2,49	0,26	0,10
93	N22	E11	35,3	1,76	0,14	0,07
94		E23	-100,8	5,04	0,40	0,20
95		E24	-55,4	2,77	0,22	0,11
96		E49	-10,1	2,52	0,20	0,10
97		E63	-64,1	3,21	0,25	0,13
98	N23	E12	45,4	2,27	0,24	0,09
99		E36	100,8	5,04	0,53	0,20
100		E37	55,4	2,77	0,29	0,11
101		E63	-64,1	3,21	0,34	0,13
102	N24	E12	45,4	2,27	0,18	0,09
103		E24	-55,4	2,77	0,22	0,11
104		E25	0,0	0,00	0,00	0,00
105		E50	-10,1	2,52	0,20	0,10
106		E64	-78,4	3,92	0,31	0,16
107	N25	E13	0,0	0,00	0,00	0,00
108		E37	55,4	2,77	0,22	0,11
109		E52	-55,4	2,77	0,22	0,11
110		E64	-78,4	3,92	0,31	0,16
111	N26	E13	0,0	NA	NA	NA
112		E25	0,0	NA	NA	NA
113		E51	0,0	NA	NA	NA
114	N27	E38	-55,4	NA	NA	NA
115	N28	E39	0,0	NA	NA	NA
116	N29	E40	-10,1	NA	NA	NA
117	N30	E41	-10,1	NA	NA	NA
118	N31	E42	-10,1	NA	NA	NA
119	N32	E43	-10,1	NA	NA	NA
120	N33	E44	-10,1	NA	NA	NA
121	N34	E45	-10,1	NA	NA	NA
122	N35	E46	-10,1	NA	NA	NA
123	N36	E47	-10,1	NA	NA	NA
124	N37	E48	-10,1	NA	NA	NA
125	N8	E49	-10,1	NA	NA	NA
126	N39	E50	-10,1	NA	NA	NA
127	N40	E51	0,0	NA	NA	NA
128	N41	E52	-55,4	NA	NA	NA

A [Tabela 6.8](#) apresenta as armaduras necessárias para a viga calculadas segundo as forças atuantes em cada tirante, determinadas pelo CAST (2000).



Tabela 6.8 - VB1 - Armaduras necessárias para a viga determinadas pelo CAST (2000)

Arm. longitudinal							
F <sub>st</sub> (kN)	f <sub>vd</sub> (kN/cm <sup>2</sup> )	A <sub>s,nec</sub> (cm <sup>2</sup> )	1,1 A <sub>s,nec</sub> (cm <sup>2</sup> )	A <sub>s,ef</sub>	#	A <sub>s,ef</sub> (cm <sup>2</sup> )	Stress ratio
181,40	43,5	4,17	4,59	4 φ 13	1	5,16	0,81
176,40	43,5	4,06	4,46	4 φ 13	1	5,16	0,79
161,30	43,5	3,71	4,08	4 φ 13	1	5,16	0,72
136,10	43,5	3,13	3,44	4 φ 13	1	5,16	0,61
100,80	43,5	2,32	2,55	2 φ 13	2	2,58	0,90
55,40	43,5	1,27	1,40	2 φ 13	2	2,58	0,49

Arm. transversal							
F <sub>sw</sub> (kN)	f <sub>vd</sub> (kN/cm <sup>2</sup> )	A <sub>sw,nec</sub> (cm <sup>2</sup> )	1,1 A <sub>sw,nec</sub> (cm <sup>2</sup> )	A <sub>s,ef</sub>	#	A <sub>s,ef</sub> (cm <sup>2</sup> )	Stress ratio
45,40	43,5	1,04	1,15	2 φ 10	1	1,42	0,73
35,30	43,5	0,81	0,89	2 φ 10	1	1,42	0,57
25,20	43,5	0,58	0,64	2 φ 10	1	1,42	0,41
15,10	43,5	0,35	0,38	2 φ 10	1	1,42	0,24
5,00	43,5	0,11	0,13	2 φ 10	1	1,42	0,08

A Figura 6.8 mostra a disposição das armaduras dos tirantes da treliça calculadas pelo CAST (2000). Vale lembrar que o programa não considera os comprimentos de ancoragem e principalmente que, apesar de a armadura transversal dada pelo programa referir-se à armadura necessária para suportar as tensões de tração daquelas regiões, essa não é a maneira mais conveniente e usual de se detalhar a armadura transversal, os estribos. Portanto, deve-se distribuir convenientemente a armadura dos pendurais na forma de estribos, como se faz usualmente no detalhamento de vigas de concreto armado.

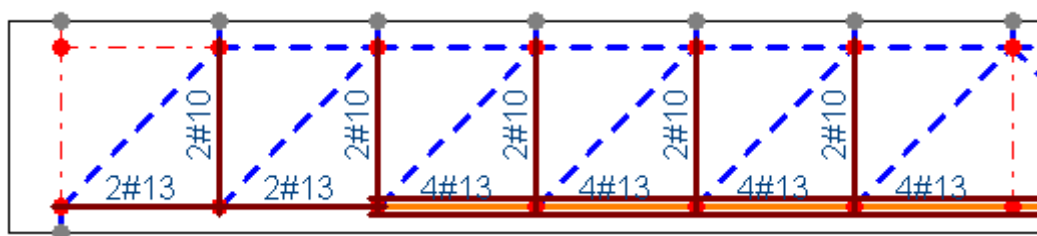


Figura 6.8 - VB1 - Disposição das armaduras dos tirantes da treliça

Por fim, apresenta-se o resumo da viga, conforme a Figura 6.9, onde constam os dados de geometria, carregamento e reações com valores característicos, diagramas de força cortante e momento fletor, ambos de

cálculo, cobrimento do diagrama pelas barras da armadura longitudinal, já acrescidas dos comprimentos de ancoragem necessários, treliça do modelo de bielas e tirantes e disposição das barras da armadura longitudinal, também já acrescidas dos respectivos comprimentos de ancoragem. Lembra-se que não foram feitas as verificações das ancoragens nos apoios. A representação das barras da armadura longitudinal determinadas segundo o modelo de bielas e tirantes aparece como boa alternativa em relação ao método tradicional, pois não há a necessidade do cobrimento do diagrama de momentos fletores.

Cita-se que, também nas determinações das armaduras pelo método tradicional, foram utilizadas as bitolas e as respectivas áreas das seções transversais das barras relativas ao ACI 318 (1995) pois, como para as armaduras do modelo no CAST (2000) foram utilizadas tais características, visou-se padronizar e facilitar as comparações.

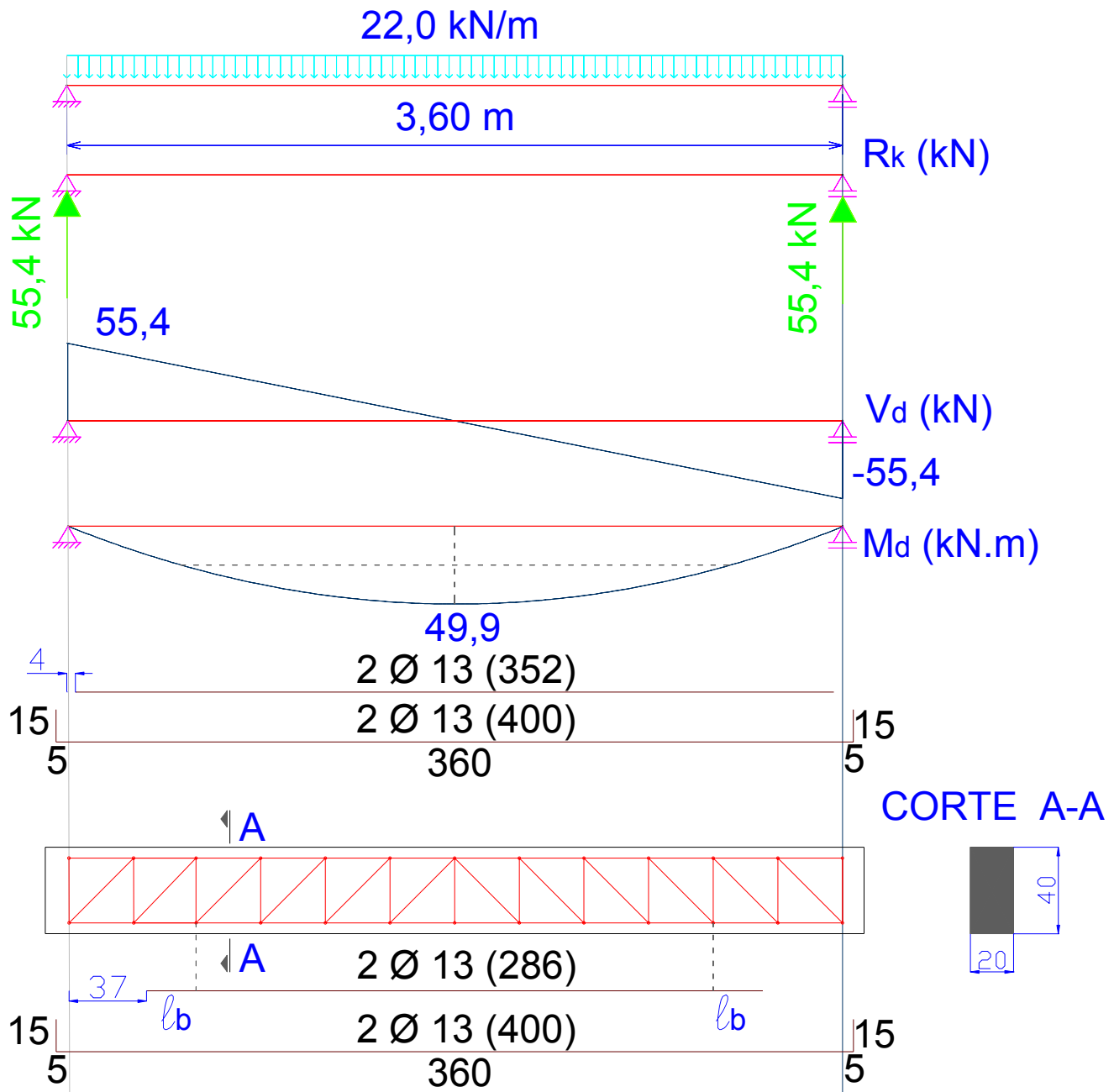


Figura 6.9 - VB1 - Resumo

## 6.2.2 MODELO VB2 - VB1 COM ACRÉSCIMO DE CARREGAMENTO

Este item apresenta uma tentativa de se alcançar a capacidade limite da viga, a fim de averiguar a possibilidade de falhas na modelagem. Portanto, optou-se por aumentar o carregamento de forma que  $M_d \approx M_{d,lim}$ . Esta modelagem compreendeu todas as etapas da modelagem anterior, porém serão exibidos somente os resultados de maior interesse. As etapas das verificações também são as mesmas.

### 6.2.2.1 Geometria e ações

As características geométricas deste modelo são idênticas ao do modelo anterior, VB1.

$$M_{d,lim} / M_d = 144,00 / 49,90 = 2,89$$

Dessa forma, optou-se por multiplicar  $(g + q)$  por 2,9:

$$(g + q) = 22 \cdot 2,9 = 63,8 \text{ kN/m}$$

$$R_k = 114,8 \text{ kN}$$

$$M_d = 144,7 \text{ kN.m}$$

$$V_d = 160,8 \text{ kN}$$

### 6.2.2.2 Determinação de $k_c$ , $k_s$ e $A_s$

$$k_c = b \cdot d^2 / M_d = 20 \cdot 36^2 / 14470 = 1,79$$

$$C25 \Rightarrow k_s = 0,031$$

$$k_s = A_s \cdot d / M_d \Rightarrow A_s = k_s \cdot M_d / d = 0,031 \cdot 14470 / 36$$

$$A_s = 12,46 \text{ cm}^2$$

### 6.2.2.3 Cálculo de $M_{d,lim}$ , $V_{d,u}$ e $V_{d,min}$

$$M_{d,lim} = 144,00 \text{ kN.m}$$

$$V_{d,u} = 0,1 \cdot \tau_{wu} \cdot b \cdot d = 0,1 \cdot 4,500 \cdot 20 \cdot 36 = 324,0 \text{ kN}$$

$$V_{d,min} = 0,1 \cdot \tau_{wmin} \cdot b \cdot d = 0,1 \cdot 1,182 \cdot 20 \cdot 36 = 85,1 \text{ kN}$$

$$V_{d,max} = 160,8 \text{ kN} < V_{d,u} = 324,0 \Rightarrow \text{condição ok!}$$

### 6.2.2.4 Verificação das bielas segundo o MC CEB-FIP (1990)

$$R_{Scw} = (V_d / \text{sen}\theta) \cdot [\text{cotg}\theta / (\text{cotg}\theta + \text{cotg}\alpha)]$$

sendo:

$$\alpha = \text{inclinação dos estribos} = 90^\circ \Rightarrow \text{cotg}\alpha = 0;$$

$$\theta = \text{inclinação das bielas} = 45^\circ \Rightarrow \text{sen}\theta = 2^{1/2} / 2; \text{cotg}\theta = 1;$$

Quando  $V_d = V_{d,max}$ , temos:

$$R_{Scw} = (160,8 \cdot 2^{1/2} / 2) \cdot [1 / (1 + 0)]$$

$$R_{Scw} = 227,4 \text{ kN}$$

$$R_{Scw,CAST} = 227,4 \text{ kN}$$

**A diferença entre os valores é nula.**

$$R_{Rcw} = f_{cd2} \cdot b \cdot z \cdot \cos\theta$$

$$f_{cd2} = 0,60 \cdot (1 - f_{ck} / 250) \cdot f_{cd} = 0,60 \cdot (1 - 25 / 250) \cdot (2,5 / 1,4) =$$

$$= 0,964 \text{ kN/cm}^2$$

$$k_c = b \cdot d^2 / M_d = 1,79 \Rightarrow \beta_x = 0,628$$

$$\beta_x = x / d \Rightarrow x = \beta_x \cdot d = 0,628 \cdot 36 = 22,61 \text{ cm}$$

$$z = d - 0,4 \cdot x = 36 - 0,4 \cdot 22,61 = 26,96 \text{ cm} \quad \text{obs: } z/d = 0,75$$

$$R_{Rcw} = 0,964 \cdot 20 \cdot 26,96 \cdot 2^{1/2} / 2$$

$$R_{Scw} = 227,4 < R_{Rcw} = 367,5 \text{ kN} \Rightarrow \text{condição ok!}$$

Conhecendo-se  $z$ , pode-se determinar a resultante  $R_{st}$  no banzo tracionado, de acordo com o valor do momento fletor da seção.

$$R_{st} = M_d / z + N_d$$

$$N_d = 0$$

$$R_{st} = 14470 / 29,96$$

$$R_{st} = 536,7 \text{ kN}$$

$$R_{st,CAS}T = 526,1 \text{ kN}$$

Portanto, o CAST (2000) está 2% contra a segurança.

### 6.2.2.5 Verificação das bielas segundo a NBR 6118:2003

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \text{sen}^2\theta \cdot (\text{cotg}\alpha + \text{cotg}\theta)$$

sendo:

$$\alpha = \text{inclinação dos estribos} = 90^\circ \Rightarrow \text{cotg}\alpha = 0;$$

$$\theta = \text{inclinação das bielas} = 45^\circ \Rightarrow \text{sen}^2\theta = 0,5 ; \text{cotg}\theta = 1;$$

$$\alpha_v = [1 - (f_{ck} / 250)]$$

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot [1 - (25 / 250)] \cdot (2,5 / 1,4) \cdot 20 \cdot 36 \cdot 0,5 \cdot (0 + 1)$$

$$V_{Sd} = 160,8 \text{ kN} < V_{Rd2} = 312,4 \text{ kN} \Rightarrow \text{condição ok!}$$

### 6.2.2.6 Resultados da modelagem

A seguir apresentam-se as figuras e as tabelas relativas aos principais resultados gerados pelo modelo VB2.

Tabela 6.9 - VB2 - Propriedades dos elementos

Row #	Element ID	Rel. Stiffness	Width (mm)	Property Type	Property Type Name
1	E1	1.000	100,0	Undefined	Undefined
2	E2	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Pendurais 1

3	E3	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Pendurais 2
4	E4	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Pendurais 2
5	E5	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Pendurais 3
6	E6	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Pendurais 3
7	E7	1.000	100,0	Undefined	Undefined
8	E8	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Pendurais 3
9	E9	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Pendurais 3
10	E10	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Pendurais 2
11	E11	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Pendurais 2
12	E12	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Pendurais 1
13	E13	1.000	100,0	Undefined	Undefined
14	E14	1.000	100,0	Undefined	Undefined
15	E15	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
16	E16	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
17	E17	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
18	E18	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
19	E19	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
20	E20	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
21	E21	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
22	E22	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
23	E23	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
24	E24	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
25	E25	1.000	100,0	Undefined	Undefined
26	E26	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Arm. longit. 2
27	E27	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Arm. longit. 2
28	E28	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Arm. longit. 2
29	E29	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Arm. longit. 1
30	E30	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Arm. longit. 1
31	E31	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Arm. longit. 1
32	E32	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Arm. longit. 1
33	E33	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Arm. longit. 1
34	E34	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Arm. longit. 1
35	E35	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Arm. longit. 2
36	E36	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Arm. longit. 2
37	E37	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Md Arm. longit. 2
38	E38	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
39	E39	1.000	100,0	Undefined	Undefined
40	E40	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
41	E41	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
42	E42	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
43	E43	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
44	E44	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
45	E45	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
46	E46	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
47	E47	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
48	E48	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
49	E49	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
50	E50	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
51	E51	1.000	100,0	Undefined	Undefined
52	E52	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
53	E53	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
54	E54	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
55	E55	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
56	E56	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic

57	E57	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
58	E58	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
59	E59	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
60	E60	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
61	E61	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
62	E62	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
63	E63	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
64	E64	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic

Tabela 6.10 - VB2 - Propriedades dos nós

Row #	Node ID	Property Type
1	N1	ACI CCT
2	N2	NA
3	N3	ACI CTT
4	N4	ACI CCT
5	N5	ACI CTT
6	N6	ACI CCT
7	N7	ACI CTT
8	N8	ACI CCT
9	N9	ACI CTT
10	N10	ACI CCT
11	N11	ACI CTT
12	N12	ACI CCT
13	N13	NA
14	N14	ACI CCC
15	N15	ACI CTT
16	N16	ACI CCT
17	N17	ACI CTT
18	N18	ACI CCT
19	N19	ACI CTT
20	N20	ACI CCT
21	N21	ACI CTT
22	N22	ACI CCT
23	N23	ACI CTT
24	N24	ACI CCT
25	N25	ACI CCT
26	N26	NA
27	N27	NA
28	N28	NA
29	N29	NA
30	N30	NA
31	N31	NA
32	N32	NA
33	N33	NA
34	N34	NA
35	N35	NA
36	N36	NA
37	N37	NA
38	N38	NA
39	N39	NA
40	N40	NA



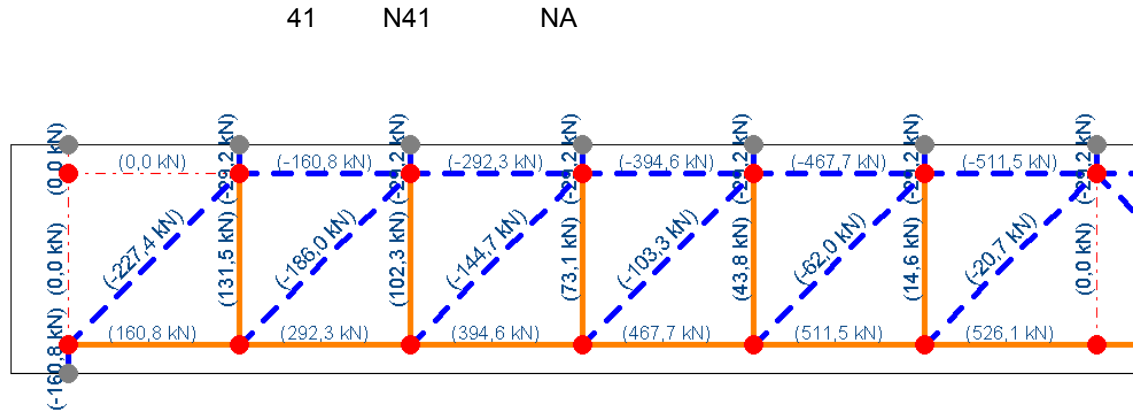


Figura 6.10 - VB2 - Forças nos membros da treliça

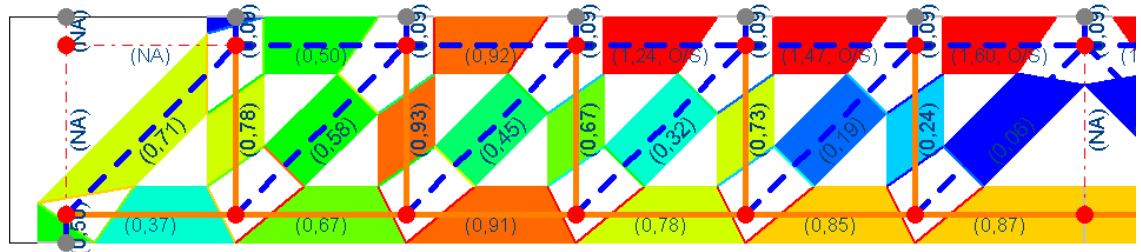


Figura 6.11 - VB2 - Fatores de utilização dos elementos

Tabela 6.11 - VB2 - Fatores de utilização dos elementos da treliça

Row #	Element ID	Force (kN)	Stress (MPa)	Stress Ratio	f'c Ratio
1	E1	0,0	NA	NA	NA
2	E2	131,5	330,49	0,78	NA
3	E3	102,3	396,53	0,93	NA
4	E4	73,1	283,24	0,67	NA
5	E5	43,8	308,77	0,73	NA
6	E6	14,6	102,92	0,24	NA
7	E7	0,0	NA	NA	NA
8	E8	14,6	102,92	0,24	NA
9	E9	43,8	308,77	0,73	NA
10	E10	73,1	283,24	0,67	NA
11	E11	102,3	396,53	0,93	NA
12	E12	131,5	330,49	0,78	NA
13	E13	0,0	NA	NA	NA
14	E14	0,0	NA	NA	NA
15	E15	-160,8	8,04	0,50	0,32
16	E16	-292,3	14,62	0,92	0,59
17	E17	-394,6	19,73	1,238 (O/S)	0,79
18	E18	-467,7	23,38	1,467 (O/S)	0,94

19	E19	-511,5	25,58	1,605 (O/S)	1,023 (O/S)
20	E20	-511,5	25,58	1,605 (O/S)	1,023 (O/S)
21	E21	-467,7	23,38	1,467 (O/S)	0,94
22	E22	-394,6	19,73	1,238 (O/S)	0,79
23	E23	-292,3	14,62	0,92	0,59
24	E24	-160,8	8,04	0,50	0,32
25	E25	0,0	NA	NA	NA
26	E26	160,8	157,61	0,37	NA
27	E27	292,3	286,57	0,67	NA
28	E28	394,6	386,87	0,91	NA
29	E29	467,7	329,82	0,78	NA
30	E30	511,5	360,74	0,85	NA
31	E31	526,1	371,04	0,87	NA
32	E32	526,1	371,04	0,87	NA
33	E33	511,5	360,74	0,85	NA
34	E34	467,7	329,82	0,78	NA
35	E35	394,6	386,87	0,91	NA
36	E36	292,3	286,57	0,67	NA
37	E37	160,8	157,61	0,37	NA
38	E38	-160,8	8,04	0,50	0,32
39	E39	0,0	NA	NA	NA
40	E40	-29,2	1,46	0,09	0,06
41	E41	-29,2	1,46	0,09	0,06
42	E42	-29,2	1,46	0,09	0,06
43	E43	-29,2	1,46	0,09	0,06
44	E44	-29,2	1,46	0,09	0,06
45	E45	-29,2	1,46	0,09	0,06
46	E46	-29,2	1,46	0,09	0,06
47	E47	-29,2	1,46	0,09	0,06
48	E48	-29,2	1,46	0,09	0,06
49	E49	-29,2	1,46	0,09	0,06
50	E50	-29,2	1,46	0,09	0,06
51	E51	0,0	NA	NA	NA
52	E52	-160,8	8,04	0,50	0,32
53	E53	-227,4	11,37	0,71	0,46
54	E54	-186,0	9,30	0,58	0,37
55	E55	-144,7	7,23	0,45	0,29
56	E56	-103,3	5,17	0,32	0,21
57	E57	-62,0	3,10	0,20	0,12
58	E58	-20,7	1,03	0,07	0,04
59	E59	-20,7	1,03	0,07	0,04
60	E60	-62,0	3,10	0,20	0,12
61	E61	-103,3	5,17	0,32	0,21
62	E62	-144,7	7,23	0,45	0,29
63	E63	-186,0	9,30	0,58	0,37
64	E64	-227,4	11,37	0,71	0,46

Tabela 6.12 - VB2 - Fatores de utilização dos nós da treliça

Row #	Node ID	Node Side	Force (kN)	Stress (MPa)	Stress Ratio	f'c Ratio
1	N1	E1	0,0	0,00	0,00	0,00
2		E26	160,8	8,04	0,63	0,32

3		E38	-160,8	8,04	0,63	0,32
4		E53	-227,4	11,37	0,89	0,46
5	N2	E1	0,0	NA	NA	NA
6		E14	0,0	NA	NA	NA
7		E39	0,0	NA	NA	NA
8	N3	E2	131,5	6,58	0,69	0,26
9		E26	160,8	8,04	0,84	0,32
10		E27	292,3	14,62	1,53 (O/S)	0,59
11		E54	-186,0	9,30	0,97	0,37
12	N4	E2	131,5	6,58	0,52	0,26
13		E14	0,0	0,00	0,00	0,00
14		E15	-160,8	8,04	0,63	0,32
15		E40	-29,2	1,46	0,12	0,06
16		E53	-227,4	11,37	0,89	0,46
17	N5	E3	102,3	5,12	0,54	0,21
18		E27	292,3	14,62	1,53 (O/S)	0,59
19		E28	394,6	19,73	2,06 (O/S)	0,79
20		E55	-144,7	7,23	0,76	0,29
21	N6	E3	102,3	5,12	0,40	0,21
22		E15	-160,8	8,04	0,63	0,32
23		E16	-292,3	14,62	1,15 (O/S)	0,59
24		E41	-29,2	1,46	0,12	0,06
25		E54	-186,0	9,30	0,73	0,37
26	N7	E4	73,1	3,65	0,38	0,15
27		E28	394,6	19,73	2,06 (O/S)	0,79
28		E29	467,7	23,38	2,45 (O/S)	0,94
29		E56	-103,3	5,17	0,54	0,21
30	N8	E4	73,1	3,65	0,29	0,15
31		E16	-292,3	14,62	1,15 (O/S)	0,59
32		E17	-394,6	19,73	1,55 (O/S)	0,79
33		E42	-29,2	1,46	0,12	0,06
34		E55	-144,7	7,23	0,57	0,29
35	N9	E5	43,8	2,19	0,23	0,09
36		E29	467,7	23,38	2,45 (O/S)	0,94
37		E30	511,5	25,58	2,68 (O/S)	1,02 (O/S)
38		E57	-62,0	3,10	0,32	0,12
39	N10	E5	43,8	2,19	0,17	0,09
40		E17	-394,6	19,73	1,55 (O/S)	0,79
41		E18	-467,7	23,38	1,83 (O/S)	0,94
42		E43	-29,2	1,46	0,12	0,06
43		E56	-103,3	5,17	0,41	0,21
44	N11	E6	14,6	0,73	0,08	0,03
45		E30	511,5	25,58	2,68 (O/S)	1,02 (O/S)
46		E31	526,1	26,31	2,75 (O/S)	1,05 (O/S)
47		E58	-20,7	1,03	0,11	0,04
48	N12	E6	14,6	0,73	0,06	0,03
49		E18	-467,7	23,38	1,83 (O/S)	0,94
50		E19	-511,5	25,58	2,01 (O/S)	1,02 (O/S)
51		E44	-29,2	1,46	0,12	0,06
52		E57	-62,0	3,10	0,24	0,12
53	N13	E7	0,0	NA	NA	NA
54		E31	526,1	NA	NA	NA
55		E32	526,1	NA	NA	NA
56	N14	E7	0,0	0,00	0,00	0,00

57		E19	-511,5	25,58	1,61 (O/S)	1,02 (O/S)
58		E20	-511,5	25,58	1,61 (O/S)	1,02 (O/S)
59		E45	-29,2	1,46	0,09	0,06
60		E58	-20,7	1,03	0,07	0,04
61		E59	-20,7	1,03	0,07	0,04
62	N15	E8	14,6	0,73	0,08	0,03
63		E32	526,1	26,31	2,75 (O/S)	1,05 (O/S)
64		E33	511,5	25,58	2,68 (O/S)	1,02 (O/S)
65		E59	-20,7	1,03	0,11	0,04
66	N16	E8	14,6	0,73	0,06	0,03
67		E20	-511,5	25,58	2,01 (O/S)	1,02 (O/S)
68		E21	-467,7	23,38	1,83 (O/S)	0,94
69		E46	-29,2	1,46	0,12	0,06
70		E60	-62,0	3,10	0,24	0,12
71	N17	E9	43,8	2,19	0,23	0,09
72		E33	511,5	25,58	2,68 (O/S)	1,02 (O/S)
73		E34	467,7	23,38	2,45 (O/S)	0,94
74		E60	-62,0	3,10	0,32	0,12
75	N18	E9	43,8	2,19	0,17	0,09
76		E21	-467,7	23,38	1,83 (O/S)	0,94
77		E22	-394,6	19,73	1,55 (O/S)	0,79
78		E47	-29,2	1,46	0,12	0,06
79		E61	-103,3	5,17	0,41	0,21
80	N19	E10	73,1	3,65	0,38	0,15
81		E34	467,7	23,38	2,45 (O/S)	0,94
82		E35	394,6	19,73	2,01 (O/S)	0,79
83		E61	-103,3	5,17	0,54	0,21
84	N20	E10	73,1	3,65	0,29	0,15
85		E22	-394,6	19,73	1,55 (O/S)	0,79
86		E23	-292,3	14,62	1,15 (O/S)	0,59
87		E48	-29,2	1,46	0,12	0,06
88		E62	-144,7	7,23	0,57	0,29
89	N21	E11	102,3	5,12	0,54	0,21
90		E35	394,6	19,73	2,01 (O/S)	0,79
91		E36	292,3	14,62	1,53 (O/S)	0,59
92		E62	-144,7	7,23	0,76	0,29
93	N22	E11	102,3	5,12	0,40	0,21
94		E23	-292,3	14,62	1,15 (O/S)	0,59
95		E24	-160,8	8,04	0,63	0,32
96		E49	-29,2	1,46	0,12	0,06
97		E63	-186,0	9,30	0,73	0,37
98	N23	E12	131,5	6,58	0,69	0,26
99		E36	292,3	14,62	1,53 (O/S)	0,59
100		E37	160,8	8,04	0,84	0,32
101		E63	-186,0	9,30	0,97	0,37
102	N24	E12	131,5	6,58	0,52	0,26
103		E24	-160,8	8,04	0,63	0,32
104		E25	0,0	0,00	0,00	0,00
105		E50	-29,2	1,46	0,12	0,06
106		E64	-227,4	11,37	0,89	0,46
107	N25	E13	0,0	0,00	0,00	0,00
108		E37	160,8	8,04	0,63	0,32
109		E52	-160,8	8,04	0,63	0,32
110		E64	-227,4	11,37	0,89	0,46

111	N26	E13	0,0	NA	NA	NA
112		E25	0,0	NA	NA	NA
113		E51	0,0	NA	NA	NA
114	N27	E38	-160,8	NA	NA	NA
115	N28	E39	0,0	NA	NA	NA
116	N29	E40	-29,2	NA	NA	NA
117	N30	E41	-29,2	NA	NA	NA
118	N31	E42	-29,2	NA	NA	NA
119	N32	E43	-29,2	NA	NA	NA
120	N33	E44	-29,2	NA	NA	NA
121	N34	E45	-29,2	NA	NA	NA
122	N35	E46	-29,2	NA	NA	NA
123	N36	E47	-29,2	NA	NA	NA
124	N37	E48	-29,2	NA	NA	NA
125	N38	E49	-29,2	NA	NA	NA
126	N39	E50	-29,2	NA	NA	NA
127	N40	E51	0,0	NA	NA	NA
128	N41	E52	-160,8	NA	NA	NA

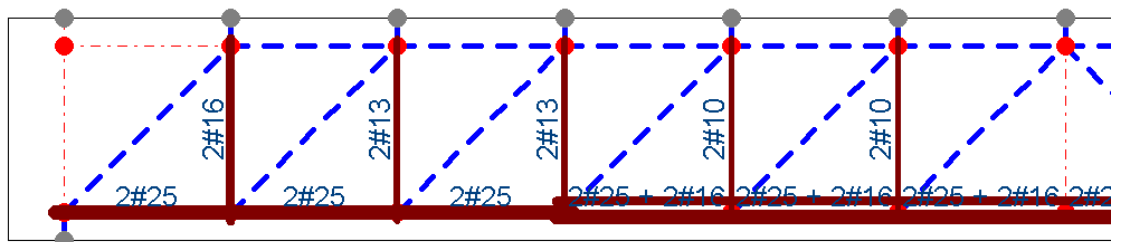
Tabela 6.13 - VB2 - Armaduras necessárias para a viga determinadas pelo CAST (2000)

Arm. longitudinal							
F <sub>st</sub> (kN)	f <sub>vd</sub> (kN/cm <sup>2</sup> )	A <sub>s,nec</sub> (cm <sup>2</sup> )	1,1 A <sub>s,nec</sub> (cm <sup>2</sup> )	A <sub>s,ef</sub>	#	A <sub>s,ef</sub> (cm <sup>2</sup> )	Stress ratio
526,10	43,5	12,09	13,30	2 φ 25 + 2 φ 16	1	14,18	0,85
511,50	43,5	11,76	12,93	2 φ 25 + 2 φ 16	1	14,18	0,83
467,70	43,5	10,75	11,83	2 φ 25 + 2 φ 16	1	14,18	0,76
394,60	43,5	9,07	9,98	2 φ 25	2	10,2	0,89
292,30	43,5	6,72	7,39	2 φ 25	2	10,2	0,66
160,80	43,5	3,70	4,07	2 φ 25	2	10,2	0,36

Arm. transversal							
F <sub>sw</sub> (kN)	f <sub>vd</sub> (kN/cm <sup>2</sup> )	A <sub>sw,nec</sub> (cm <sup>2</sup> )	1,1 A <sub>sw,nec</sub> (cm <sup>2</sup> )	A <sub>s,ef</sub>	#	A <sub>s,ef</sub> (cm <sup>2</sup> )	Stress ratio
131,50	43,5	3,02	3,33	2 φ 16	1	3,98	0,76
102,30	43,5	2,35	2,59	2 φ 13	2	2,58	0,91
73,10	43,5	1,68	1,85	2 φ 13	2	2,58	0,65
43,80	43,5	1,01	1,11	2 φ 10	3	1,42	0,71
14,60	43,5	0,34	0,37	2 φ 10	3	1,42	0,24

Figura 6.12 - VB2 - Disposição das armaduras dos tirantes da treliça



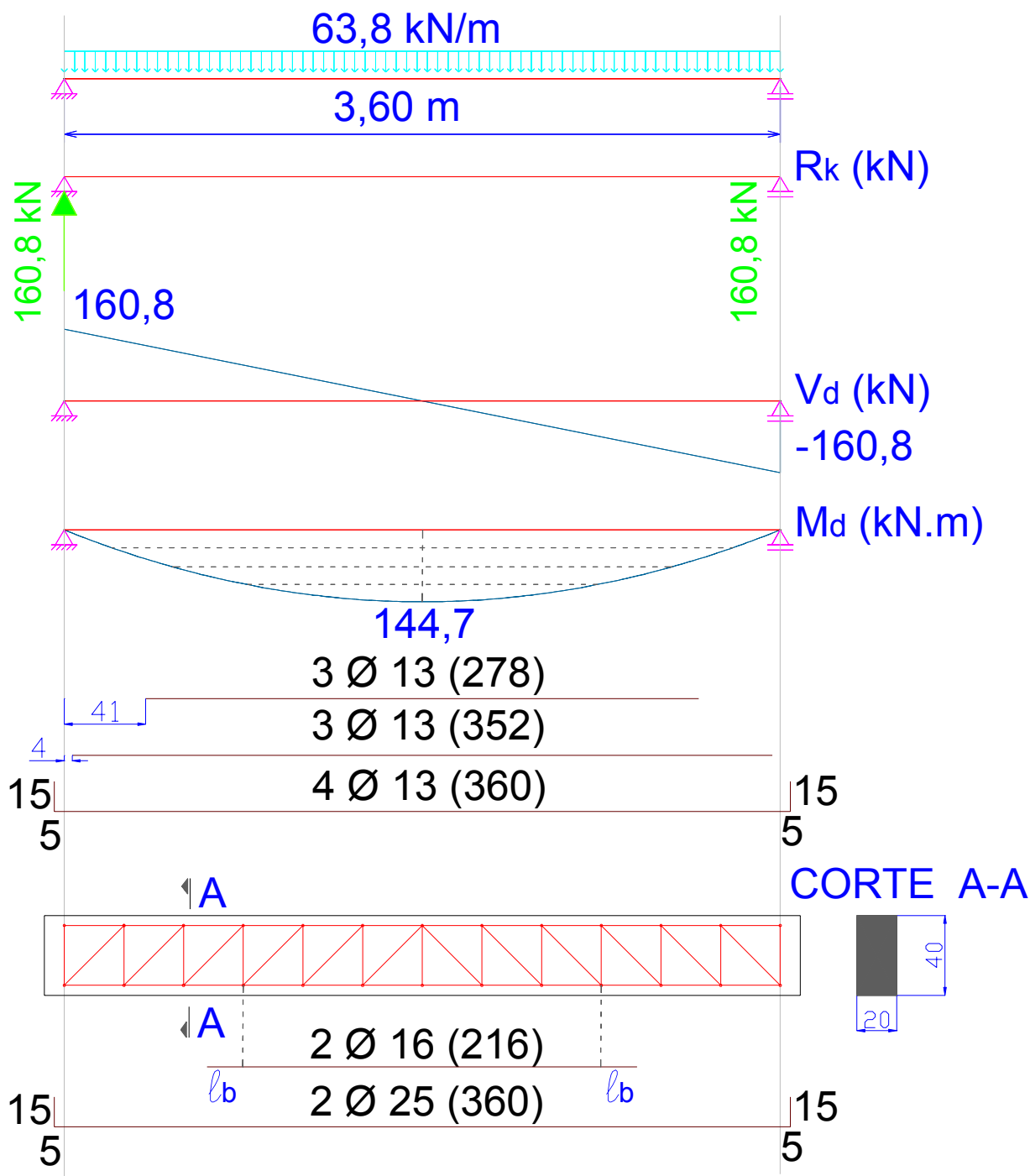


Figura 6.13 - VB2 - Resumo

Os fatores de utilização de vários nós e várias bielas apresentam valores acima da unidade, ou seja, esses elementos estão fora de serviço e, portanto, deve-se fazer alterações no projeto da viga. Uma alternativa é elevar a resistência do concreto e se, ainda assim, a solução estiver distante, é necessário alterar as características geométricas da viga, alternativa que pode encontrar dificuldades nas exigências arquitetônicas ou até mesmo estruturais.

## 6.2.3 MODELO VB3 - MUDANDO-SE A INCLINAÇÃO DAS BIELAS

### 6.2.3.1 Geometria e ações

Mudando-se a inclinação das bielas de forma que:

Comprimento efetivo da viga:  $\ell_{\text{efetivo,viga}} = 360 \text{ cm}$

Optou-se por dividir a viga em 10 tramos, de forma que:

$$\ell_{\text{tramo}} = 360 / 10 = 36 \text{ cm}$$

Como os estribos formam ângulo reto com o eixo da viga e a distância entre o banzo superior e o banzo inferior é de 30 centímetros, temos para a inclinação das bielas:

$$\alpha = 90^\circ ; \theta = \arctg(30 / 36) = 39,81^\circ$$

Concreto: C25  $\Rightarrow f_{ck} = 25 \text{ MPa}$

$$R_k = 22 \text{ [kN/m]} \cdot (3,6 / 2) \text{ [m]} = 39,6 \text{ kN}$$

$$M_k = p \cdot \ell^2 / 8 = 22 \cdot 3,6^2 / 8 \qquad M_d = 1,4 \cdot M_k = 49,90 \text{ kN.m}$$

$$V_k = 39,6 \text{ kN} \qquad V_d = 1,4 \cdot V_k = 55,44 \text{ kN}$$

### 6.2.3.2 Determinação de $k_c$ , $k_s$ e $A_s$

$$k_c = b \cdot d^2 / M_d = 20 \cdot 36^2 / 4990 = 5,19$$

$$\text{C25} \Rightarrow k_s = 0,025$$

$$k_s = A_s \cdot d / M_d \Rightarrow A_s = k_s \cdot M_d / d = 0,025 \cdot 4990 / 36 = 3,47 \text{ cm}^2$$

### 6.2.3.3 Cálculo de $M_{d,\text{lim}}$ , $V_{d,u}$ e $V_{d,\text{min}}$

$$M_{d,\text{lim}} = b \cdot d^2 / k_{c,\text{lim}} = 20 \cdot 36^2 / 1,8 = 14400 \text{ kN.cm} = 144,00 \text{ kN.m}$$

$$V_{d,u} = 0,1 \cdot \tau_{wu} \cdot b \cdot d = 0,1 \cdot 4,500 \cdot 20 \cdot 36 = 324,0 \text{ kN}$$

$$V_{d,\text{min}} = 0,1 \cdot \tau_{w\text{min}} \cdot b \cdot d = 0,1 \cdot 1,182 \cdot 20 \cdot 36 = 85,1 \text{ kN}$$

$$V_{d,max} = 55,5 \text{ kN} < V_{d,u} = 324,0 \text{ kN} \Rightarrow \text{condição ok!}$$

#### 6.2.3.4 Verificação das bielas segundo o MC CEB-FIP (1990)

$$R_{Scw} = (V_d / \text{sen}\theta) \cdot [\text{cotg}\theta / (\text{cotg}\theta + \text{cotg}\alpha)]$$

sendo:

$$\alpha = \text{inclinação dos estribos} = 90^\circ \Rightarrow \text{cotg}\alpha = 0;$$

$$\theta = \text{inclinação das bielas} = 39,81^\circ;$$

Quando  $V_d = V_{d,max}$ , temos:

$$R_{Scw} = (55,5 / \text{sen}39,81) \cdot [\text{cotg}39,81 / (\text{cotg}39,81 + \text{cotg}90)]$$

$$R_{Scw} = 86,7 \text{ kN}$$

$$R_{Scw,CAST} = 86,6 \text{ kN}$$

**A diferença entre os valores é praticamente nula (0,1%).**

$$R_{Rcw} = f_{cd2} \cdot b \cdot z \cdot \cos\theta$$

$$f_{cd2} = 0,60 \cdot (1 - f_{ck} / 250) \cdot f_{cd} = 0,60 \cdot (1 - 25 / 250) \cdot (2,5 / 1,4) =$$

$$= 0,964 \text{ kN/cm}^2$$

$$k_c = b \cdot d^2 / M_d = 5,19 \Rightarrow \beta_x = 0,17$$

$$\beta_x = x / d \Rightarrow x = \beta_x \cdot d = 0,17 \cdot 36 = 6,1 \text{ cm}$$

$$z = d - 0,4 \cdot x = 36 - 0,4 \cdot 6,1 = 33,56 \text{ cm} \quad \text{obs: } z/d = 0,93$$

$$R_{Rcw} = 0,964 \cdot 20 \cdot 33,56 \cdot \cos39,81$$

$$R_{Scw} = 86,7 < R_{Rcw} = 497,0 \text{ kN} \Rightarrow \text{condição ok!}$$

Conhecendo-se  $z$ , pode-se determinar a resultante  $R_{st}$  no banzo tracionado, de acordo com o valor do momento fletor da seção.

$$R_{st} = M_d / z + N_d$$

$$N_d = 0$$



$$R_{st} = 4990 / 33,56$$

$$R_{st} = 148,7 \text{ kN}$$

$$R_{st,CAST} = 184,8 \text{ kN}$$

Portanto, o CAST (2000) está 20% a favor da segurança.

### 6.2.3.5 Verificação das bielas segundo a NBR 6118:2003

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot \alpha_v \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \cdot \text{sen}^2 \theta \cdot (\cot \alpha + \cot \theta)$$

sendo:

$$\alpha = \text{inclinação dos estribos} = 90^\circ \Rightarrow \cot \alpha = 0;$$

$$\theta = \text{inclinação das bielas} = 39,81^\circ;$$

$$\alpha_v = [1 - (f_{ck} / 250)]$$

$$V_{Rd2} = 0,54 \cdot [1 - (25 / 250)] \cdot (2,5 / 1,4) \cdot 20 \cdot 36 \cdot \text{sen}^2 39,81 \cdot (\cot 90 + \cot 39,81)$$

$$V_{sd} = 55,5 \text{ kN} < V_{Rd2} = 256,1 \text{ kN} \Rightarrow \text{condição ok!}$$

### 6.2.3.6 Resultados da modelagem

A seguir apresentam-se as figuras e as tabelas relativas aos principais resultados gerados pelo modelo VB3.

Tabela 6.14 - VB3 - Propriedades dos elementos

Row #	Element ID	Rel. Stiffness	Width (mm)	Property Type	Property Type Name
1	E65	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
2	E66	1.000	100,0	Undefined	Undefined
3	E69	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Pendurais
4	E70	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
5	E72	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Pendurais
6	E73	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
7	E75	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Pendurais
8	E76	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
9	E78	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Pendurais
10	E79	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
11	E81	1.000	100,0	Undefined	Undefined
12	E82	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic

13	E84	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Pendurais
14	E85	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
15	E87	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Pendurais
16	E88	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
17	E90	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Pendurais
18	E91	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
19	E93	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Pendurais
20	E94	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
21	E95	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
22	E96	1.000	100,0	Undefined	Undefined
23	E98	1.000	100,0	Undefined	Undefined
24	E99	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
25	E100	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
26	E101	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
27	E102	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
28	E103	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
29	E104	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
30	E105	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
31	E106	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
32	E107	1.000	100,0	Undefined	Undefined
33	E108	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Arm. longit. 3
34	E109	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Arm. longit. 2
35	E110	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Arm. longit. 2
36	E111	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Arm. longit. 1
37	E112	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Arm. longit. 1
38	E113	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Arm. longit. 1
39	E114	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Arm. longit. 1
40	E115	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Arm. longit. 2
41	E116	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Arm. longit. 2
42	E117	1.000	100,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Teta Arm. longit. 3
43	E118	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
44	E119	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
45	E120	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
46	E121	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
47	E122	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
48	E123	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
49	E124	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
50	E125	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
51	E126	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
52	E127	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic

Tabela 6.15 - VB3 - Propriedades dos nós

Row #	Node ID	Property Type
1	N42	NA
2	N43	ACI CCT
3	N44	NA
4	N47	ACI CTT
5	N48	ACI CCT
6	N49	NA
7	N51	ACI CTT
8	N52	ACI CCT

9	N53	NA
10	N55	ACI CTT
11	N56	ACI CCT
12	N57	NA
13	N59	ACI CTT
14	N60	ACI CCT
15	N61	NA
16	N63	NA
17	N64	ACI CCC
18	N65	NA
19	N67	ACI CTT
20	N68	ACI CCT
21	N69	NA
22	N71	ACI CTT
23	N72	ACI CCT
24	N73	NA
25	N75	ACI CTT
26	N76	ACI CCT
27	N77	NA
28	N79	ACI CTT
29	N80	ACI CCT
30	N81	NA
31	N82	NA
32	N83	ACI CCT
33	N84	NA

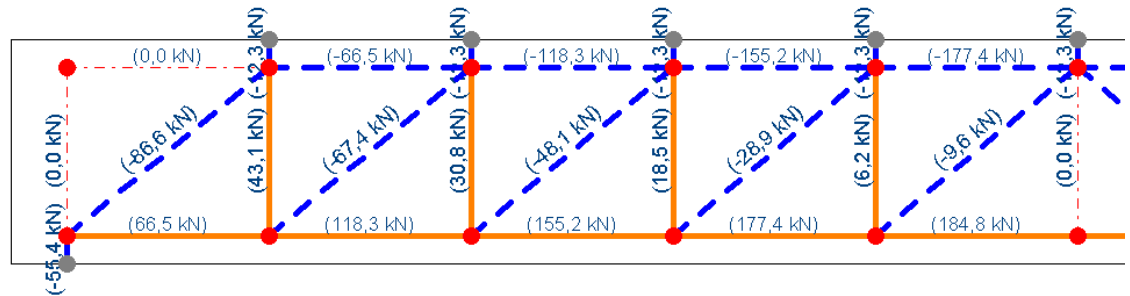


Figura 6.14 - VB3 - Forças nos membros da treliça

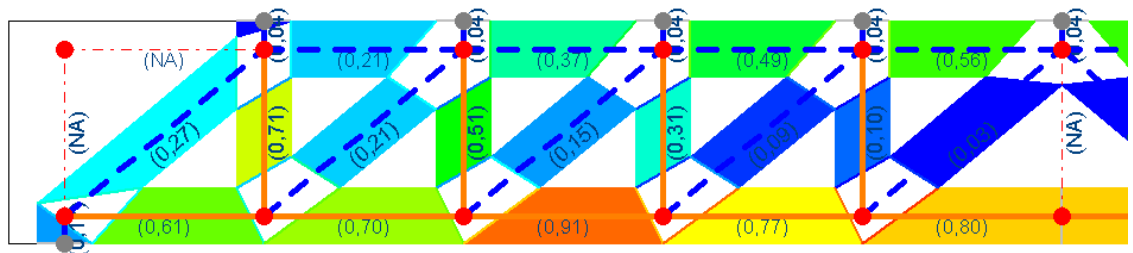


Figura 6.15 - VB3 - Fatores de utilização dos elementos

Tabela 6.16 - VB3 - Fatores de utilização dos elementos da treliça

Row #	Element ID	Force (kN)	Stress (MPa)	Stress Ratio	f <sub>c</sub> Ratio
1	E65	-55,4	2,77	0,17	0,11
2	E66	0,0	NA	NA	NA
3	E69	43,1	303,66	0,71	NA
4	E70	-12,3	0,62	0,04	0,03
5	E72	30,8	216,90	0,51	NA
6	E73	-12,3	0,62	0,04	0,03
7	E75	18,5	130,14	0,31	NA
8	E76	-12,3	0,62	0,04	0,03
9	E78	6,2	43,38	0,10	NA
10	E79	-12,3	0,62	0,04	0,03
11	E81	0,0	NA	NA	NA
12	E82	-12,3	0,62	0,04	0,03
13	E84	6,2	43,38	0,10	NA
14	E85	-12,3	0,62	0,04	0,03
15	E87	18,5	130,14	0,31	NA
16	E88	-12,3	0,62	0,04	0,03
17	E90	30,8	216,90	0,51	NA
18	E91	-12,3	0,62	0,04	0,03
19	E93	43,1	303,66	0,71	NA
20	E94	-12,3	0,62	0,04	0,03
21	E95	-55,4	2,77	0,17	0,11
22	E96	0,0	NA	NA	NA
23	E98	0,0	NA	NA	NA
24	E99	-66,5	3,33	0,21	0,13
25	E100	-118,3	5,91	0,37	0,24
26	E101	-155,2	7,76	0,49	0,31
27	E102	-177,4	8,87	0,56	0,36
28	E103	-177,4	8,87	0,56	0,36
29	E104	-155,2	7,76	0,49	0,31
30	E105	-118,3	5,91	0,37	0,24
31	E106	-66,5	3,33	0,21	0,13
32	E107	0,0	NA	NA	NA
33	E108	66,5	257,86	0,61	NA
34	E109	118,3	295,68	0,70	NA
35	E110	155,2	388,08	0,91	NA
36	E111	177,4	327,32	0,77	NA
37	E112	184,8	340,96	0,80	NA
38	E113	184,8	340,96	0,80	NA
39	E114	177,4	327,32	0,77	NA
40	E115	155,2	388,08	0,91	NA
41	E116	118,3	295,68	0,70	NA
42	E117	66,5	257,86	0,61	NA
43	E118	-86,6	4,33	0,27	0,17
44	E119	-67,4	3,37	0,21	0,14
45	E120	-48,1	2,41	0,15	0,10
46	E121	-28,9	1,44	0,09	0,06
47	E122	-9,6	0,48	0,03	0,02
48	E123	-9,6	0,48	0,03	0,02
49	E124	-28,9	1,44	0,09	0,06
50	E125	-48,1	2,41	0,15	0,10

51	E126	-67,4	3,37	0,21	0,14
52	E127	-86,6	4,33	0,27	0,17

Tabela 6.17 - VB3 - Fatores de utilização dos nós da treliça

Row #	Node ID	Node Side	Force (kN)	Stress (MPa)	Stress Ratio	fc Ratio
1	N42	E65	-55,4	NA	NA	NA
2	N43	E65	-55,4	2,77	0,22	0,11
3		E66	0,0	0,00	0,00	0,00
4		E108	66,5	3,33	0,26	0,13
5		E118	-86,6	4,33	0,34	0,17
6	N44	E66	0,0	NA	NA	NA
7		E98	0,0	NA	NA	NA
8	N47	E69	43,1	2,16	0,23	0,09
9		E108	66,5	3,33	0,35	0,13
10		E109	118,3	5,91	0,62	0,24
11		E119	-67,4	3,37	0,35	0,14
12	N48	E69	43,1	2,16	0,17	0,09
13		E70	-12,3	0,62	0,05	0,03
14		E98	0,0	0,00	0,00	0,00
15		E99	-66,5	3,33	0,26	0,13
16		E118	-86,6	4,33	0,34	0,17
17	N49	E70	-12,3	NA	NA	NA
18	N51	E72	30,8	1,54	0,16	0,06
19		E109	118,3	5,91	0,62	0,24
20		E110	155,2	7,76	0,81	0,31
21		E120	-48,1	2,41	0,25	0,10
22	N52	E72	30,8	1,54	0,12	0,06
23		E73	-12,3	0,62	0,05	0,03
24		E99	-66,5	3,33	0,26	0,13
25		E100	-118,3	5,91	0,46	0,24
26		E119	-67,4	3,37	0,26	0,14
27	N53	E73	-12,3	NA	NA	NA
28	N55	E75	18,5	0,92	0,10	0,04
29		E110	155,2	7,76	0,81	0,31
30		E111	177,4	8,87	0,93	0,36
31		E121	-28,9	1,44	0,15	0,06
32	N56	E75	18,5	0,92	0,07	0,04
33		E76	-12,3	0,62	0,05	0,03
34		E100	-118,3	5,91	0,46	0,24
35		E101	-155,2	7,76	0,61	0,31
36		E120	-48,1	2,41	0,19	0,10
37	N57	E76	-12,3	NA	NA	NA
38	N59	E78	6,2	0,31	0,03	0,01
39		E111	177,4	8,87	0,93	0,36
40		E112	184,8	9,24	0,97	0,37
41		E122	-9,6	0,48	0,05	0,02
42	N60	E78	6,2	0,31	0,02	0,01
43		E79	-12,3	0,62	0,05	0,03
44		E101	-155,2	7,76	0,61	0,31
45		E102	-177,4	8,87	0,70	0,36
46		E121	-28,9	1,44	0,11	0,06

47	N61	E79	-12,3	NA	NA	NA
48	N63	E81	0,0	NA	NA	NA
49		E112	184,8	NA	NA	NA
50		E113	184,8	NA	NA	NA
51	N64	E81	0,0	0,00	0,00	0,00
52		E82	-12,3	0,62	0,04	0,03
53		E102	-177,4	8,87	0,56	0,36
54		E103	-177,4	8,87	0,56	0,36
55		E122	-9,6	0,48	0,03	0,02
56		E123	-9,6	0,48	0,03	0,02
57	N65	E82	-12,3	NA	NA	NA
58	N67	E84	6,2	0,31	0,03	0,01
59		E113	184,8	9,24	0,97	0,37
60		E114	177,4	8,87	0,93	0,36
61		E123	-9,6	0,48	0,05	0,02
62	N68	E84	6,2	0,31	0,02	0,01
63		E85	-12,3	0,62	0,05	0,03
64		E103	-177,4	8,87	0,70	0,36
65		E104	-155,2	7,76	0,61	0,31
66		E124	-28,9	1,44	0,11	0,06
67	N69	E85	-12,3	NA	NA	NA
68	N71	E87	18,5	0,92	0,10	0,04
69		E114	177,4	8,87	0,93	0,36
70		E115	155,2	7,76	0,81	0,31
71		E124	-28,9	1,44	0,15	0,06
72	N72	E87	18,5	0,92	0,07	0,04
73		E88	-12,3	0,62	0,05	0,03
74		E104	-155,2	7,76	0,61	0,31
75		E105	-118,3	5,91	0,46	0,24
76		E125	-48,1	2,41	0,19	0,10
77	N73	E88	-12,3	NA	NA	NA
78	N75	E90	30,8	1,54	0,16	0,06
79		E115	155,2	7,76	0,81	0,31
80		E116	118,3	5,91	0,62	0,24
81		E125	-48,1	2,41	0,25	0,10
82	N76	E90	30,8	1,54	0,12	0,06
83		E91	-12,3	0,62	0,05	0,03
84		E105	-118,3	5,91	0,46	0,24
85		E106	-66,5	3,33	0,26	0,13
86		E126	-67,4	3,37	0,26	0,14
87	N77	E91	-12,3	NA	NA	NA
88	N79	E93	43,1	2,16	0,23	0,09
89		E116	118,3	5,91	0,62	0,24
90		E117	66,5	3,33	0,35	0,13
91		E126	-67,4	3,37	0,35	0,14
92	N80	E93	43,1	2,16	0,17	0,09
93		E94	-12,3	0,62	0,05	0,03
94		E106	-66,5	3,33	0,26	0,13
95		E107	0,0	0,00	0,00	0,00
96		E127	-86,6	4,33	0,34	0,17
97	N81	E94	-12,3	NA	NA	NA
98	N82	E95	-55,4	NA	NA	NA
99	N83	E95	-55,4	2,77	0,22	0,11
100		E96	0,0	0,00	0,00	0,00

101		E117	66,5	3,33	0,26	0,13
102		E127	-86,6	4,33	0,34	0,17
103	N84	E96	0,0	NA	NA	NA
104		E107	0,0	NA	NA	NA

Tabela 6.18 - VB3 - Armaduras necessárias para a viga determinadas pelo CAST (2000)

Arm. longitudinal							
$F_{st}$ (kN)	$f_{yd}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$A_{s,nec}$ (cm <sup>2</sup> )	$1,1 A_{s,nec}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{s,ef}$	#	$A_{s,ef}$ (cm <sup>2</sup> )	Stress ratio
184,80	43,5	4,25	4,67	2 $\phi$ 13 + 4 $\phi$ 10	1	5,42	0,78
177,40	43,5	4,08	4,49	2 $\phi$ 13 + 4 $\phi$ 10	1	5,42	0,75
155,20	43,5	3,57	3,92	2 $\phi$ 13 + 2 $\phi$ 10	2	4,00	0,89
118,30	43,5	2,72	2,99	2 $\phi$ 13 + 2 $\phi$ 10	2	4,00	0,68
66,50	43,5	1,53	1,68	2 $\phi$ 13	3	2,58	0,59

Arm. transversal							
$F_{sw}$ (kN)	$f_{yd}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$A_{sw,nec}$ (cm <sup>2</sup> )	$1,1 A_{sw,nec}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{sw,ef}$	#	$A_{sw,ef}$ (cm <sup>2</sup> )	Stress ratio
43,10	43,5	0,99	1,09	2 $\phi$ 10	1	1,42	0,70
30,80	43,5	0,71	0,78	2 $\phi$ 10	1	1,42	0,50
18,50	43,5	0,43	0,47	2 $\phi$ 10	1	1,42	0,30
6,20	43,5	0,14	0,16	2 $\phi$ 10	1	1,42	0,10

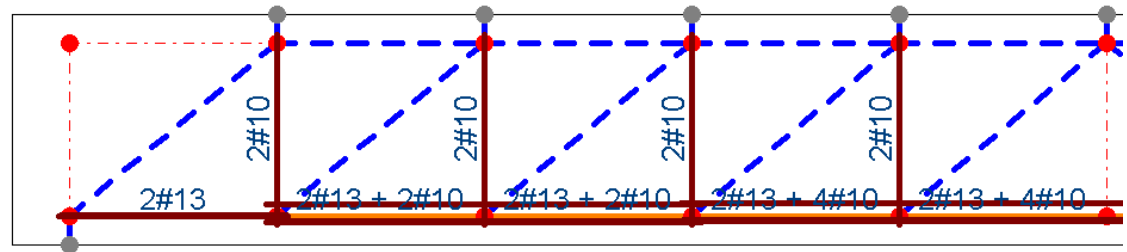


Figura 6.16 - VB3 - Disposição das armaduras dos tirantes da treliça

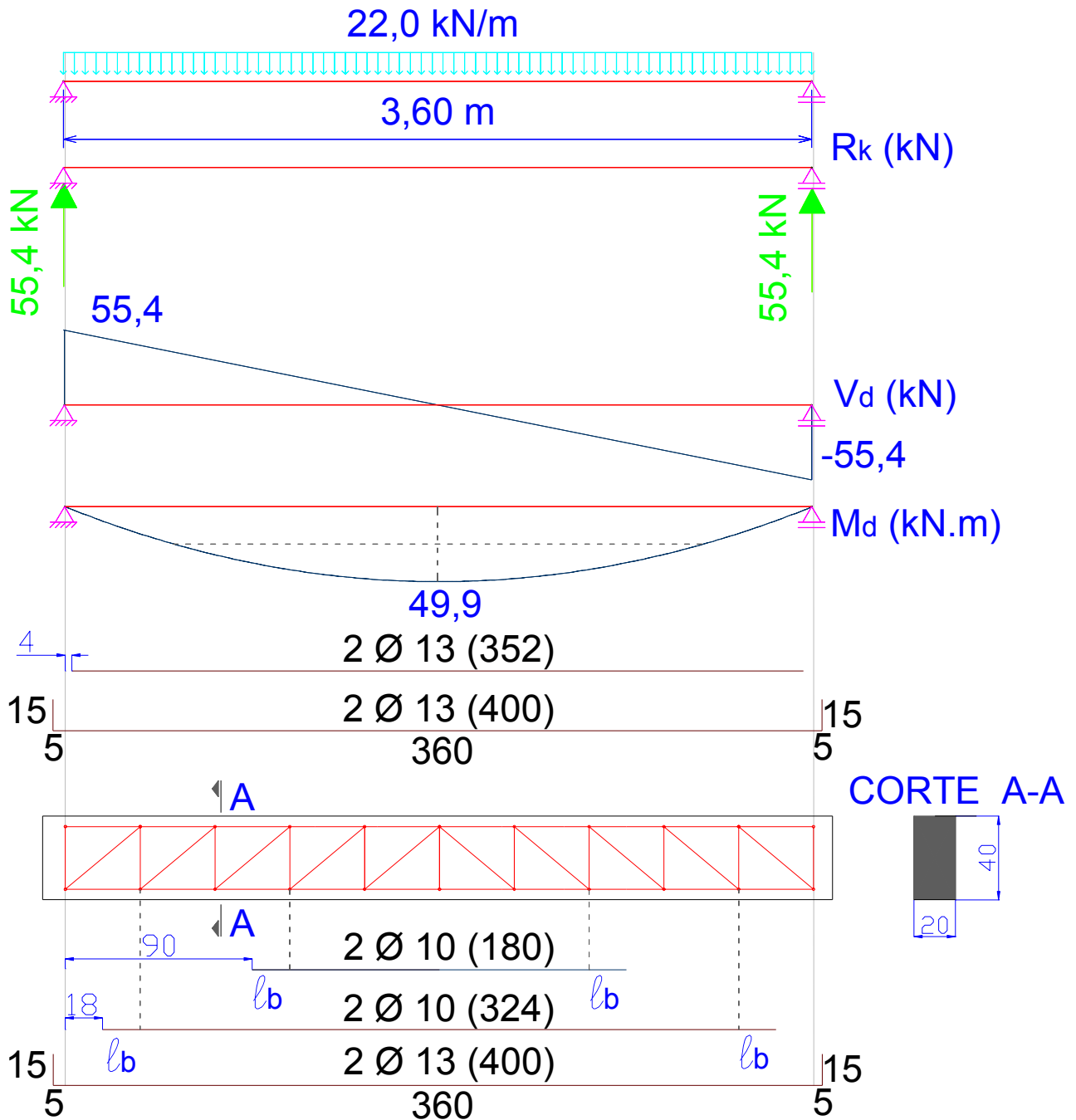


Figura 6.17 - VB3 - Resumo

Este modelo permitiu verificar a compatibilidade entre os valores das forças solicitantes atuantes na viga e as respectivas forças solicitantes nos elementos de treliça, mesmo para bielas com inclinação diferente de 45°, ou seja, para o modelo de cálculo II da NBR 6118:2003.



## **6.3 MODELO VF: VIGA DE CONCRETO ARMADO COM FURO NA ALMA SUBMETIDA A CARREGAMENTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDO E A CARREGAMENTOS PONTUAIS**

### **6.3.1 Introdução**

Este modelo foi inicialmente apresentado por RONCATTO & CAMPOS FILHO (2005), que verificaram apenas a região de descontinuidade (região do furo) utilizando o programa computacional “Furos em vigas de concreto”, desenvolvido pelos próprios autores. Após um processo iterativo, os autores chegaram a valores que garantiam a segurança da região D da viga, após verificarem critérios de segurança e calcularem as áreas de armadura necessárias. RONCATTO & CAMPOS FILHO (2005) destacam que as verificações por eles realizadas limitam-se apenas à região D da viga e que as armaduras dos tirantes por eles calculadas devem ser somadas às demais armaduras provenientes do dimensionamento da viga toda. O modelo aqui apresentado tomou como base praticamente todas as características do modelo de RONCATTO & CAMPOS FILHO (2005), salvo aproximações em valores e pequenas incertezas. Pode-se dizer, portanto, que o modelo aqui apresentado é igual ao estudado pelos pesquisadores.

Essa modelagem tem como objetivo utilizar um modelo de bielas e tirantes para verificar toda a viga, sem fazer distinção entre as regiões contínuas e descontínuas.

O comprimento efetivo da viga ( $l_{\text{efetivo,viga}}$ ) é igual a 900 cm e o concreto tem resistência característica ( $f_{ck}$ ) de 25 MPa.

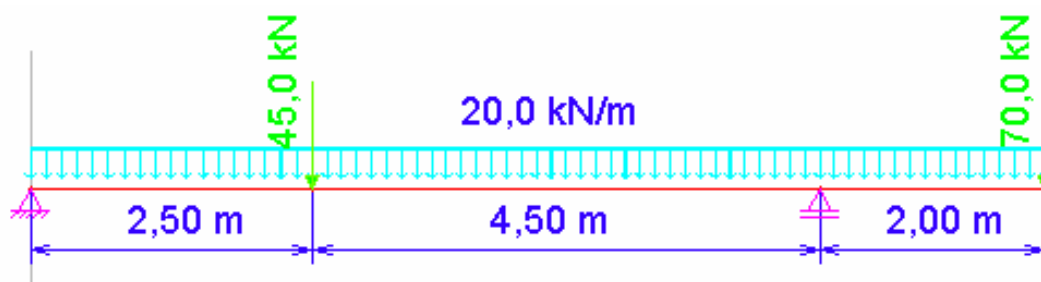


Figura 6.18 - VF - Carregamento e comprimento efetivo

### 6.3.2 Resultados da modelagem

A seguir apresentam-se as figuras e as tabelas relativas aos principais resultados gerados pelo modelo VF.

Tabela 6.19 - VF - Propriedades dos elementos

Row #	Element ID	Rel. Stiffness	Width (mm)	Property Type	Property Type Name
1	E1	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
2	E2	1.000	200,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
3	E3	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
4	E4	1.000	120,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As5
5	E5	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
6	E6	1.000	120,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As5
7	E7	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
8	E8	1.000	120,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As5
9	E9	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
10	E10	1.000	120,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As5
11	E11	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
12	E12	1.000	120,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As5
13	E13	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
14	E14	1.000	120,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As5
15	E15	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
16	E16	1.000	120,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As5
17	E17	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
18	E18	1.000	220,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As3
19	E19	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
20	E20	1.000	200,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As4
21	E21	1.000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
22	E22	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
23	E23	1.000	0,0	Undefined	Undefined
24	E24	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
25	E25	1.000	200,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Pendurais 2
26	E26	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
27	E27	1.000	200,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Pendurais 2
28	E28	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
29	E29	1.000	200,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Pendurais 2
30	E30	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic

31	E31	1.000	200,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Pendurais 2
32	E32	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
33	E33	1.000	200,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Pendurais 2
34	E34	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
35	E35	1.000	200,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Pendurais 1
36	E36	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
37	E37	1.000	200,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Pendurais 1
38	E38	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
39	E39	1.000	200,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Pendurais 1
40	E40	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
41	E41	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
42	E42	1.000	4,9	Concrete Strut	ACI Prismatic
43	E43	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
44	E44	1.000	200,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Pendurais 1
45	E45	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
46	E46	1.000	200,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Pendurais 1
47	E47	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
48	E48	1.000	200,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Pendurais 1
49	E49	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
50	E51	1.000	0,0	Undefined	Undefined
51	E52	1.000	100,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
52	E53	1.000	80,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As2
53	E54	1.000	200,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
54	E55	1.000	0,0	Undefined	Undefined
55	E56	1.000	70,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As1
56	E57	1.000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
57	E58	1.000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
58	E59	1.000	70,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As1
59	E60	1.000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
60	E61	1.000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
61	E62	1.000	70,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As1
62	E63	1.000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
63	E64	1.000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
64	E65	1.000	70,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As1
65	E66	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
66	E67	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
67	E68	1000	70,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As1
68	E69	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
69	E70	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
70	E71	1000	70,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As1
71	E72	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
72	E73	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
73	E74	1000	70,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As1
74	E75	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
75	E76	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
76	E77	1000	80,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	As6
77	E78	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
78	E79	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
79	E80	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
80	E81	1000	80,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Arm. longit. BI 1
81	E82	1000	200,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
82	E83	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
83	E84	1000	80,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Arm. longit. BI 1
84	E85	1000	200,0	Concrete Strut	ACI Prismatic

85	E86	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
86	E87	1000	80,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Arm. longit. BI 1
87	E88	1000	200,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
88	E89	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
89	E90	1000	80,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Arm. longit. BI 1
90	E91	1000	200,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
91	E92	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
92	E93	1000	80,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Arm. longit. BI 1
93	E94	1000	200,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
94	E95	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
95	E96	1000	80,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Arm. longit. BI 2
96	E97	1000	200,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
97	E98	1000	120,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
98	E99	1000	80,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Arm. longit. BI 2
99	E100	1000	200,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
100	E101	1000	120,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Arm. longit. BS 2
101	E102	1000	80,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
102	E103	1000	200,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
103	E104	1000	120,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Arm. longit. BS 2
104	E105	1000	80,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
105	E106	1000	200,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
106	E107	1000	120,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Arm. longit. BS 1
107	E108	1000	80,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
108	E109	1000	200,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
109	E110	1000	120,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Arm. longit. BS 1
110	E111	1000	80,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
111	E112	1000	200,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
112	E113	1000	120,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Arm. longit. BS 1
113	E114	1000	80,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
114	E115	1000	200,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
115	E116	1000	120,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Arm. longit. BS 1
116	E117	1000	80,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
117	E118	1000	200,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
118	E119	1000	120,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Arm. longit. BS 2
119	E120	1000	0,0	Undefined	Undefined
120	E121	1000	200,0	Concrete Strut	ACI Prismatic
121	E122	1000	120,0	Non-Prestressed Reinforcement Tie	Arm. longit. BS 2
122	E123	1000	0,0	Undefined	Undefined

Tabela 6.20 - VF - Propriedades dos nós

Row #	Node ID	Property Type
1	N1	NA
2	N2	ACI CCT
3	N3	ACI CCC
4	N4	NA
5	N5	ACI CTT
6	N6	ACI CCT
7	N7	NA
8	N8	ACI CTT
9	N9	ACI CCT
10	N10	NA

11	N11	ACI CTT
12	N12	ACI CCT
13	N13	NA
14	N14	ACI CTT
15	N15	ACI CCT
16	N16	NA
17	N17	ACI CTT
18	N18	ACI CCT
19	N19	NA
20	N20	ACI CTT
21	N21	ACI CCT
22	N22	NA
23	N23	ACI CTT
24	N24	ACI CCT
25	N25	NA
26	N26	ACI CTT
27	N27	ACI CCT
28	N28	NA
29	N29	ACI CTT
30	N30	ACI CTT
31	N31	ACI CCC
32	N32	NA
33	N33	NA
34	N34	ACI CCC
35	N35	NA
36	N36	ACI CTT
37	N37	ACI CCT
38	N38	NA
39	N39	ACI CTT
40	N40	ACI CCT
41	N41	NA
42	N42	ACI CTT
43	N43	ACI CCT
44	N44	NA
45	N45	ACI CTT
46	N46	ACI CCT
47	N47	NA
48	N48	ACI CTT
49	N49	ACI CTT
50	N50	NA
51	N51	ACI CTT
52	N52	ACI CTT
53	N53	NA
54	N54	ACI CCT
55	N55	ACI CTT
56	N56	NA
57	N57	ACI CCT
58	N58	ACI CTT
59	N59	NA
60	N60	NA
61	N61	ACI CCC
62	N62	ACI CTT
63	N63	NA
64	N64	ACI CCT

65	N65	ACI CTT
66	N66	NA
67	N67	ACI CCT
68	N68	ACI CTT
69	N69	NA
70	N70	ACI CCT
71	N71	ACI CTT
72	N72	NA
73	N74	NA
74	N75	ACI CCT
75	N76	NA
76	N77	NA

As figuras a seguir, 6.19a a 6.19e representam a viga VF por completo, que foi subdividida em 5 partes, buscando ampliar as imagens e permitir melhor visualização. O mesmo ocorre para as figuras 6.20a a 6.20d e 6.21a a 6.21e.

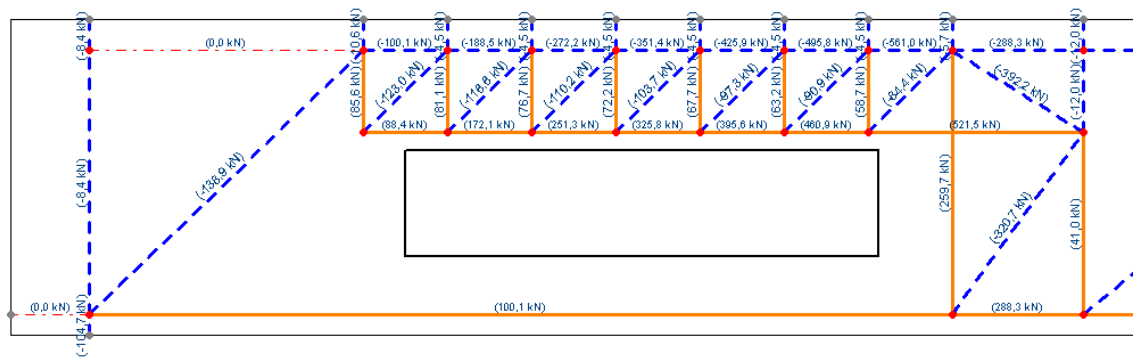


Figura 6.19a - VF - Forças nos membros da treliça

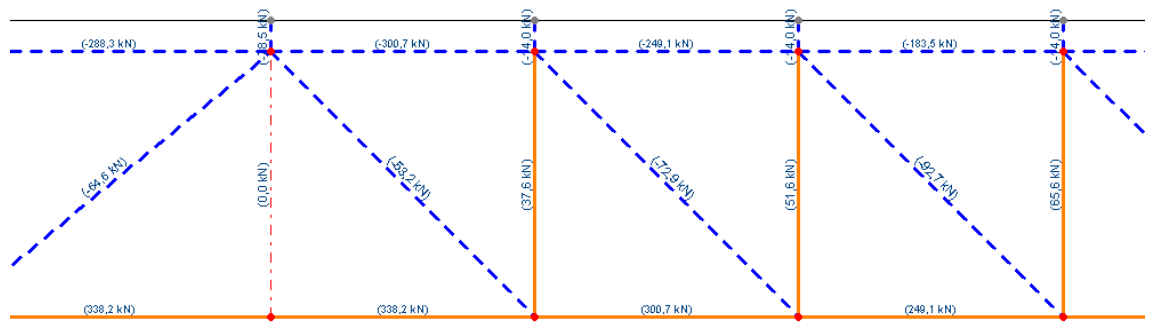


Figura 6.19b - VF - Forças nos membros da treliça

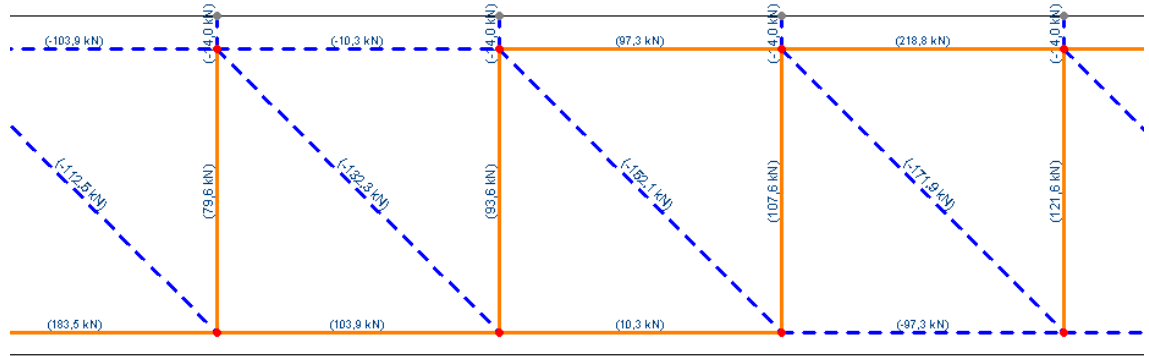


Figura 6.19c - VF - Forças nos membros da treliça

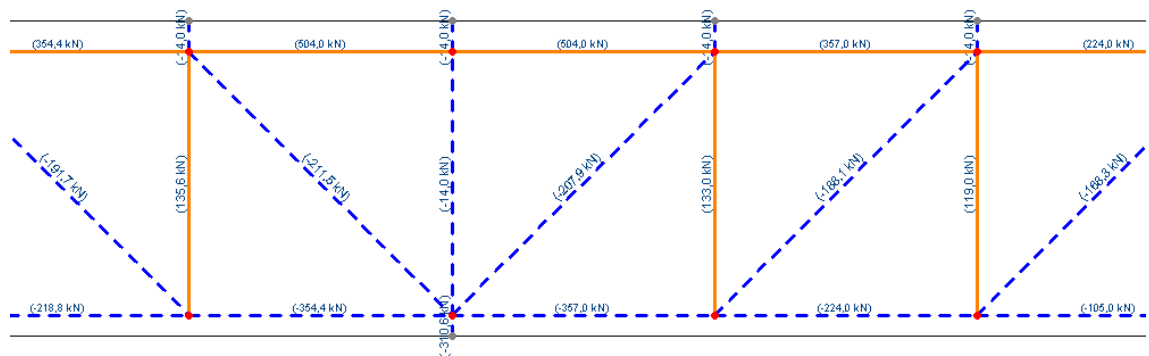


Figura 6.19d - VF - Forças nos membros da treliça

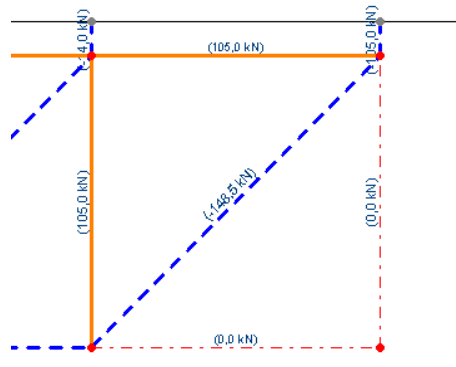


Figura 6.19e - VF - Forças nos membros da treliça

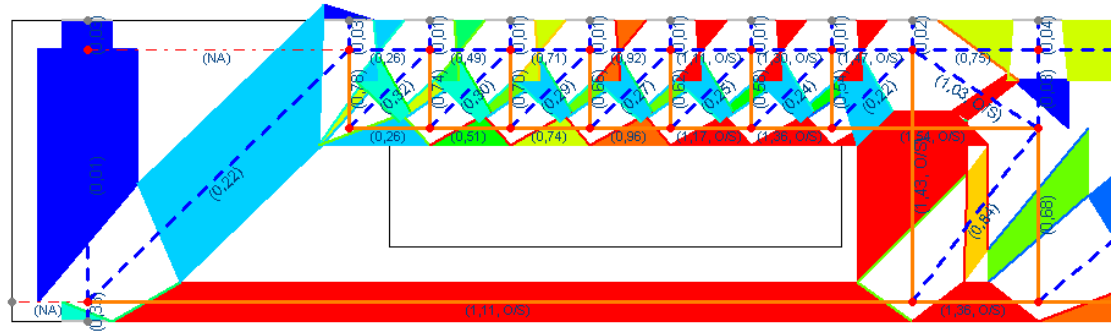


Figura 6.20a - VF - Fatores de utilização dos elementos

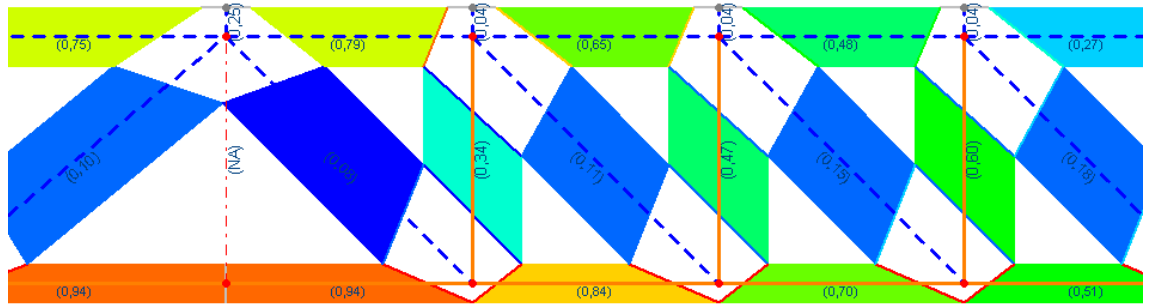


Figura 6.20b - VF - Fatores de utilização dos elementos

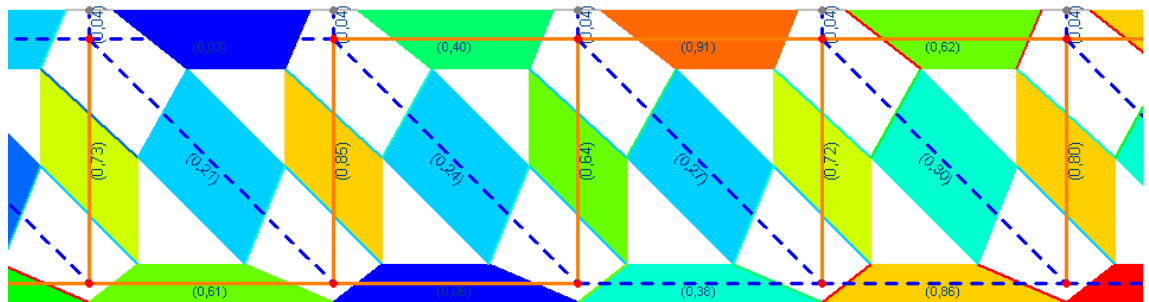


Figura 6.20c - VF - Fatores de utilização dos elementos



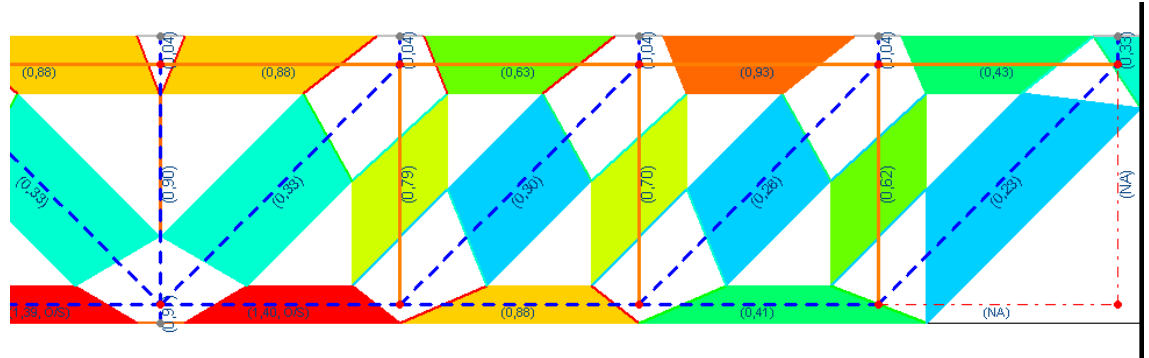


Figura 6.20d - VF - Fatores de utilização dos elementos

Tabela 6.21 - VF - Fatores de utilização dos elementos da treliça

Row #	Element ID	Force (kN)	Stress (MPa)	Stress Ratio	f'c Ratio
1	E1	-104,7	5,23	0,33	0,21
2	E2	-8,4	0,21	0,01	0,01
3	E3	-8,4	0,42	0,03	0,02
4	E4	85,6	331,85	0,78	NA
5	E5	-10,6	0,53	0,03	0,02
6	E6	81,1	314,48	0,74	NA
7	E7	-4,5	0,22	0,01	0,01
8	E8	76,7	297,12	0,70	NA
9	E9	-4,5	0,22	0,01	0,01
10	E10	72,2	279,76	0,66	NA
11	E11	-4,5	0,22	0,01	0,01
12	E12	67,7	262,39	0,62	NA
13	E13	-4,5	0,22	0,01	0,01
14	E14	63,2	245,03	0,58	NA
15	E15	-4,5	0,22	0,01	0,01
16	E16	58,7	227,66	0,54	NA
17	E17	-4,5	0,22	0,01	0,01
18	E18	259,7	609,58	1,43 (O/S)	NA
19	E19	-5,7	0,29	0,02	0,01
20	E20	41,0	288,43	0,68	NA
21	E21	-12,0	0,50	0,03	0,02
22	E22	-12,0	0,60	0,04	0,02
23	E23	0,0	NA	NA	NA
24	E24	-78,5	3,93	0,25	0,16
25	E25	37,6	145,67	0,34	NA
26	E26	-14,0	0,70	0,04	0,03
27	E27	51,6	199,93	0,47	NA
28	E28	-14,0	0,70	0,04	0,03
29	E29	65,6	254,20	0,60	NA
30	E30	-14,0	0,70	0,04	0,03
31	E31	79,6	308,46	0,73	NA
32	E32	-14,0	0,70	0,04	0,03
33	E33	93,6	362,73	0,85	NA
34	E34	-14,0	0,70	0,04	0,03

35	E35	107,6	270,31	0,64	NA
36	E36	-14,0	0,70	0,04	0,03
37	E37	121,6	305,49	0,72	NA
38	E38	-14,0	0,70	0,04	0,03
39	E39	135,6	340,66	0,80	NA
40	E40	-14,0	0,70	0,04	0,03
41	E41	-310,6	15,53	0,97	0,62
42	E42	-14,0	14,34	0,90	0,57
43	E43	-14,0	0,70	0,04	0,03
44	E44	133,0	334,17	0,79	NA
45	E45	-14,0	0,70	0,04	0,03
46	E46	119,0	298,99	0,70	NA
47	E47	-14,0	0,70	0,04	0,03
48	E48	105,0	263,82	0,62	NA
49	E49	-14,0	0,70	0,04	0,03
50	E51	0,0	NA	NA	NA
51	E52	-105,0	5,25	0,33	0,21
52	E53	100,1	469,99	1,11 (O/S)	NA
53	E54	-138,9	3,47	0,22	0,14
54	E55	0,0	NA	NA	NA
55	E56	88,4	111,03	0,26	NA
56	E57	-123,0	5,13	0,32	0,21
57	E58	-100,1	4,17	0,26	0,17
58	E59	172,1	216,25	0,51	NA
59	E60	-116,6	4,86	0,31	0,19
60	E61	-188,5	7,85	0,49	0,31
61	E62	251,3	315,66	0,74	NA
62	E63	-110,2	4,59	0,29	0,18
63	E64	-272,2	11,34	0,71	0,45
64	E65	325,8	409,26	0,96	NA
65	E66	-103,7	4,32	0,27	0,17
66	E67	-351,4	14,64	0,92	0,59
67	E68	395,6	497,05	1,17 (O/S)	NA
68	E69	-97,3	4,05	0,25	0,16
69	E70	-425,9	17,74	1,11 (O/S)	0,71
70	E71	460,9	579,03	1,36 (O/S)	NA
71	E72	-90,9	3,79	0,24	0,15
72	E73	-495,8	20,66	1,30 (O/S)	0,83
73	E74	521,5	655,20	1,54 (O/S)	NA
74	E75	-84,4	3,52	0,22	0,14
75	E76	-561,0	23,38	1,47 (O/S)	0,94
76	E77	288,3	580,04	1,37 (O/S)	NA
77	E78	-320,7	13,36	0,84	0,53
78	E79	-392,2	16,34	1,03 (O/S)	0,65
79	E80	-288,3	12,01	0,75	0,48
80	E81	338,2	424,94	0,94	NA
81	E82	-64,6	1,62	0,10	0,07
82	E83	-288,3	12,01	0,75	0,48
83	E84	338,2	424,94	0,94	NA
84	E85	-53,2	1,33	0,08	0,05
85	E86	-300,7	12,53	0,79	0,50
86	E87	300,7	377,72	0,84	NA
87	E88	-72,9	1,82	0,11	0,07
88	E89	-249,1	10,38	0,65	0,42

89	E90	249,1	312,92	0,70	NA
90	E91	-92,7	2,32	0,15	0,09
91	E92	-183,5	7,65	0,48	0,31
92	E93	183,5	230,53	0,51	NA
93	E94	-112,5	2,81	0,18	0,11
94	E95	-103,9	4,33	0,27	0,17
95	E96	103,9	261,10	0,61	NA
96	E97	-132,3	3,31	0,21	0,13
97	E98	-10,3	0,43	0,03	0,02
98	E99	10,3	25,96	0,06	NA
99	E100	-152,1	3,80	0,24	0,15
100	E101	97,3	171,22	0,40	NA
101	E102	-97,3	6,08	0,38	0,24
102	E103	-171,9	4,30	0,27	0,17
103	E104	218,8	385,27	0,91	NA
104	E105	-218,8	13,68	0,86	0,55
105	E106	-191,7	4,79	0,30	0,19
106	E107	354,4	264,10	0,62	NA
107	E108	-354,4	22,15	1,39 (O/S)	0,89
108	E109	-211,5	5,29	0,33	0,21
109	E110	504,0	375,56	0,88	NA
110	E111	-357,0	22,31	1,40 (O/S)	0,89
111	E112	-207,9	5,20	0,33	0,21
112	E113	504,0	375,56	0,88	NA
113	E114	-224,0	14,00	0,88	0,56
114	E115	-188,1	4,70	0,30	0,19
115	E116	357,0	266,02	0,63	NA
116	E117	-105,0	6,56	0,41	0,26
117	E118	-168,3	4,21	0,26	0,17
118	E119	224,0	394,37	0,93	NA
119	E120	0,0	NA	NA	NA
120	E121	-148,5	3,71	0,23	0,15
121	E122	105,0	184,86	0,44	NA
122	E123	0,0	NA	NA	NA

Tabela 6.22 - VF - Fatores de utilização dos nós da treliça

Row #	Node ID	Node Side	Force (kN)	Stress (MPa)	Stress Ratio	f'c Ratio
1	N1	E1	-104,7	NA	NA	NA
2	N2	E1	-104,7	5,23	0,41	0,21
3		E2	-8,4	0,21	0,02	0,01
4		E53	100,1	6,26	0,49	0,25
5		E54	-138,9	3,47	0,27	0,14
6		E123	0,0	NA	NA	NA
7	N3	E2	-8,4	0,21	0,01	0,01
8		E3	-8,4	0,42	0,03	0,02
9		E55	0,0	NA	NA	NA
10	N4	E3	-8,4	NA	NA	NA
11	N5	E4	85,6	3,57	0,37	0,14
12		E56	88,4	6,31	0,66	0,25
13		E57	-123,0	5,13	0,54	0,21
14	N6	E4	85,6	3,57	0,28	0,14

15		E5	-10,6	0,53	0,04	0,02
16		E54	-138,9	3,47	0,27	0,14
17		E55	0,0	NA	NA	NA
18		E58	-100,1	4,17	0,33	0,17
19	N7	E5	-10,6	NA	NA	NA
20	N8	E6	81,1	3,38	0,35	0,14
21		E56	88,4	6,31	0,66	0,25
22		E59	172,1	12,30	1,29 (O/S)	0,49
23		E60	-116,6	4,86	0,51	0,19
24	N9	E6	81,1	3,38	0,27	0,14
25		E7	-4,5	0,22	0,02	0,01
26		E57	-123,0	5,13	0,40	0,21
27		E58	-100,1	4,17	0,33	0,17
28		E61	-188,5	7,85	0,62	0,31
29	N10	E7	-4,5	NA	NA	NA
30	N11	E8	76,7	3,19	0,33	0,13
31		E59	172,1	12,30	1,29 (O/S)	0,49
32		E62	251,3	17,95	1,88 (O/S)	0,72
33		E63	-110,2	4,59	0,48	0,18
34	N12	E8	76,7	3,19	0,25	0,13
35		E9	-4,5	0,22	0,02	0,01
36		E60	-116,6	4,86	0,38	0,19
37		E61	-188,5	7,85	0,62	0,31
38		E64	-272,2	11,34	0,89	0,45
39	N13	E9	-4,5	NA	NA	NA
40	N14	E10	72,2	3,01	0,31	0,12
41		E62	251,3	17,95	1,88 (O/S)	0,72
42		E65	325,8	23,27	2,43 (O/S)	0,93
43		E66	-103,7	4,32	0,45	0,17
44	N15	E10	72,2	3,01	0,24	0,12
45		E11	-4,5	0,22	0,02	0,01
46		E63	-110,2	4,59	0,36	0,18
47		E64	-272,2	11,34	0,89	0,45
48		E67	-351,4	14,64	1,15 (O/S)	0,59
49	N16	E11	-4,5	NA	NA	NA
50	N17	E12	67,7	2,82	0,30	0,11
51		E65	325,8	23,27	2,43 (O/S)	0,93
52		E68	395,6	28,26	2,96 (O/S)	1,13 (O/S)
53		E69	-97,3	4,05	0,42	0,16
54	N18	E12	67,7	2,82	0,22	0,11
55		E13	-4,5	0,22	0,02	0,01
56		E66	-103,7	4,32	0,34	0,17
57		E67	-351,4	14,64	1,15 (O/S)	0,59
58		E70	-425,9	17,74	1,39 (O/S)	0,71
59	N19	E13	-4,5	NA	NA	NA
60	N20	E14	63,2	2,63	0,28	0,11
61		E68	395,6	28,26	2,96 (O/S)	1,13 (O/S)
62		E71	460,9	32,92	3,44 (O/S)	1,32 (O/S)
63		E72	-90,9	3,79	0,40	0,15
64	N21	E14	63,2	2,63	0,21	0,11
65		E15	-4,5	0,22	0,02	0,01
66		E69	-97,3	4,05	0,32	0,16
67		E70	-425,9	17,74	1,39 (O/S)	0,71
68		E73	-495,8	20,66	1,62 (O/S)	0,83

69	N22	E15	-4,5	NA	NA	NA
70	N23	E16	58,7	2,45	0,26	0,10
71		E71	460,9	32,92	3,44 (O/S)	1,32 (O/S)
72		E74	521,5	37,25	3,90 (O/S)	1,49 (O/S)
73		E75	-84,4	3,52	0,37	0,14
74	N24	E16	58,7	2,45	0,19	0,10
75		E17	-4,5	0,22	0,02	0,01
76		E72	-90,9	3,79	0,30	0,15
77		E73	-495,8	20,66	1,62 (O/S)	0,83
78		E76	-561,0	23,38	1,83 (O/S)	0,94
79	N25	E17	-4,5	NA	NA	NA
80	N26	E18	259,7	5,90	0,62	0,24
81		E53	100,1	6,26	0,65	0,25
82		E77	288,3	18,02	1,88 (O/S)	0,72
83		E78	-320,7	13,36	1,40 (O/S)	0,53
84	N27	E18	259,7	5,90	0,46	0,24
85		E19	-5,7	0,29	0,02	0,01
86		E75	-84,4	3,52	0,28	0,14
87		E76	-561,0	23,38	1,84 (O/S)	0,94
88		E79	-392,2	16,34	1,28 (O/S)	0,65
89		E80	-288,3	12,01	0,94	0,48
90	N28	E19	-5,7	NA	NA	NA
91	N29	E20	41,0	1,02	0,11	0,04
92		E77	288,3	18,02	1,88 (O/S)	0,72
93		E81	338,2	21,14	2,21 (O/S)	0,85
94		E82	-64,6	1,62	0,17	0,07
95	N30	E20	41,0	1,02	0,11	0,04
96		E21	-12,0	0,50	0,05	0,02
97		E74	521,5	37,25	3,90 (O/S)	1,49 (O/S)
98		E78	-320,7	13,36	1,40 (O/S)	0,53
99		E79	-392,2	16,34	1,71 (O/S)	0,65
100	N31	E21	-12,0	0,50	0,03	0,02
101		E22	-12,0	0,60	0,04	0,02
102		E80	-288,3	12,01	0,75	0,48
103		E83	-288,3	12,01	0,75	0,48
104	N32	E22	-12,0	NA	NA	NA
105	N33	E23	0,0	NA	NA	NA
106		E81	338,2	NA	NA	NA
107		E84	338,2	NA	NA	NA
108	N34	E23	0,0	NA	NA	NA
109		E24	-78,5	3,93	0,25	0,16
110		E82	-64,6	1,62	0,10	0,07
111		E83	-288,3	12,01	0,75	0,48
112		E85	-53,2	1,33	0,08	0,05
113		E86	-300,7	12,53	0,79	0,50
114	N35	E24	-78,5	NA	NA	NA
115	N36	E25	37,6	0,94	0,10	0,04
116		E84	338,2	21,14	2,21 (O/S)	0,85
117		E85	-53,2	1,33	0,14	0,05
118		E87	300,7	18,79	1,97 (O/S)	0,75
119	N37	E25	37,6	0,94	0,07	0,04
120		E26	-14,0	0,70	0,06	0,03
121		E86	-300,7	12,53	0,98	0,50
122		E88	-72,9	1,82	0,14	0,07

123		E89	-249,1	10,38	0,81	0,42
124	N38	E26	-14,0	NA	NA	NA
125	N39	E27	51,6	1,29	0,14	0,05
126		E87	300,7	18,79	1,97 (O/S)	0,75
127		E88	-72,9	1,82	0,19	0,07
128		E90	249,1	15,57	1,63 (O/S)	0,62
129	N40	E27	51,6	1,29	0,10	0,05
130		E28	-14,0	0,70	0,06	0,03
131		E89	-249,1	10,38	0,81	0,42
132		E91	-92,7	2,32	0,18	0,09
133		E92	-183,5	7,65	0,60	0,31
134	N41	E28	-14,0	NA	NA	NA
135	N42	E29	65,6	1,64	0,17	0,07
136		E90	249,1	15,57	1,63 (O/S)	0,62
137		E91	-92,7	2,32	0,24	0,09
138		E93	183,5	11,47	1,20 (O/S)	0,46
139	N43	E29	65,6	1,64	0,13	0,07
140		E30	-14,0	0,70	0,06	0,03
141		E92	-183,5	7,65	0,60	0,31
142		E94	-112,5	2,81	0,22	0,11
143		E95	-103,9	4,33	0,34	0,17
144	N44	E30	-14,0	NA	NA	NA
145	N45	E31	79,6	1,99	0,21	0,08
146		E93	183,5	11,47	1,20 (O/S)	0,46
147		E94	-112,5	2,81	0,29	0,11
148		E96	103,9	6,49	0,68	0,26
149	N46	E31	79,6	1,99	0,16	0,08
150		E32	-14,0	0,70	0,06	0,03
151		E95	-103,9	4,33	0,34	0,17
152		E97	-132,3	3,31	0,26	0,13
153		E98	-10,3	0,43	0,03	0,02
154	N47	E32	-14,0	NA	NA	NA
155	N48	E33	93,6	2,34	0,25	0,09
156		E96	103,9	6,49	0,68	0,26
157		E97	-132,3	3,31	0,35	0,13
158		E99	10,3	0,65	0,07	0,03
159	N49	E33	93,6	2,34	0,25	0,09
160		E34	-14,0	0,70	0,07	0,03
161		E98	-10,3	0,43	0,05	0,02
162		E100	-152,1	3,80	0,40	0,15
163		E101	97,3	4,05	0,42	0,16
164	N50	E34	-14,0	NA	NA	NA
165	N51	E35	107,6	2,69	0,28	0,11
166		E99	10,3	0,65	0,07	0,03
167		E100	-152,1	3,80	0,40	0,15
168		E102	-97,3	6,08	0,64	0,24
169	N52	E35	107,6	2,69	0,28	0,11
170		E36	-14,0	0,70	0,07	0,03
171		E101	97,3	4,05	0,42	0,16
172		E103	-171,9	4,30	0,45	0,17
173		E104	218,8	9,12	0,95	0,37
174	N53	E36	-14,0	NA	NA	NA
175	N54	E37	121,6	3,04	0,24	0,12
176		E102	-97,3	6,08	0,48	0,24

177		E103	-171,9	4,30	0,34	0,17
178		E105	-218,8	13,68	1,07 (O/S)	0,55
179	N55	E37	121,6	3,04	0,32	0,12
180		E38	-14,0	0,70	0,07	0,03
181		E104	218,8	9,12	0,95	0,37
182		E106	-191,7	4,79	0,50	0,19
183		E107	354,4	14,77	1,54 (O/S)	0,59
184	N56	E38	-14,0	NA	NA	NA
185	N57	E39	135,6	3,39	0,27	0,14
186		E105	-218,8	13,68	1,07 (O/S)	0,55
187		E106	-191,7	4,79	0,38	0,19
188		E108	-354,4	22,15	1,74 (O/S)	0,89
189	N58	E39	135,6	3,39	0,35	0,14
190		E40	-14,0	0,70	0,07	0,03
191		E107	354,4	14,77	1,54 (O/S)	0,59
192		E109	-211,5	5,29	0,55	0,21
193		E110	504,0	21,00	2,20 (O/S)	0,84
194	N59	E40	-14,0	NA	NA	NA
195	N60	E41	-310,6	NA	NA	NA
196	N61	E41	-310,6	15,53	0,97	0,62
197		E42	-14,0	14,34	0,90	0,57
198		E108	-354,4	22,15	1,39 (O/S)	0,89
199		E109	-211,5	5,29	0,33	0,21
200		E111	-357,0	22,31	1,40 (O/S)	0,89
201		E112	-207,9	5,20	0,33	0,21
202	N62	E42	-14,0	14,34	1,50 (O/S)	0,57
203		E43	-14,0	0,70	0,07	0,03
204		E110	504,0	21,00	2,20 (O/S)	0,84
205		E113	504,0	21,00	2,20 (O/S)	0,84
206	N63	E43	-14,0	NA	NA	NA
207	N64	E44	133,0	3,33	0,26	0,13
208		E111	-357,0	22,31	1,75 (O/S)	0,89
209		E114	-224,0	14,00	1,10 (O/S)	0,56
210		E115	-188,1	4,70	0,37	0,19
211	N65	E44	133,0	3,33	0,35	0,13
212		E45	-14,0	0,70	0,07	0,03
213		E112	-207,9	5,20	0,54	0,21
214		E113	504,0	21,00	2,20 (O/S)	0,84
215		E116	357,0	14,87	1,56 (O/S)	0,60
216	N66	E45	-14,0	NA	NA	NA
217	N67	E46	119,0	2,98	0,23	0,12
218		E114	-224,0	14,00	1,10 (O/S)	0,56
219		E117	-105,0	6,56	0,52	0,26
220		E118	-168,3	4,21	0,33	0,17
221	N68	E46	119,0	2,98	0,31	0,12
222		E47	-14,0	0,70	0,07	0,03
223		E115	-188,1	4,70	0,49	0,19
224		E116	357,0	14,87	1,56 (O/S)	0,60
225		E119	224,0	9,33	0,98	0,37
226	N69	E47	-14,0	NA	NA	NA
227	N70	E48	105,0	2,63	0,21	0,11
228		E117	-105,0	6,56	0,52	0,26
229		E120	0,0	NA	NA	NA
230		E121	-148,5	3,71	0,29	0,15

231	N71	E48	105,0	2,63	0,28	0,11
232		E49	-14,0	0,70	0,07	0,03
233		E118	-168,3	4,21	0,44	0,17
234		E119	224,0	9,33	0,98	0,37
235		E122	105,0	4,37	0,46	0,18
236	N72	E49	-14,0	NA	NA	NA
237	N74	E51	0,0	NA	NA	NA
238		E120	0,0	NA	NA	NA
239	N75	E51	0,0	NA	NA	NA
240		E52	-105,0	5,25	0,41	0,21
241		E121	-148,5	3,71	0,29	0,15
242		E122	105,0	4,37	0,34	0,18
243	N76	E52	-105,0	NA	NA	NA
244	N77	E123	0,0	NA	NA	NA

Tabela 6.23 - VF - Armaduras necessárias para a viga determinadas pelo CAST (2000)

Arm. longitudinal positiva							
$F_{st}$ (kN)	$f_{vd}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$A_{s,nec}$ (cm <sup>2</sup> )	$1,1 A_{s,nec}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{s,ef}$	#	$A_{s,ef}$ (cm <sup>2</sup> )	Stress ratio
338,25	43,5	7,78	8,55	4 $\phi$ 16	1	7,96	0,98
338,25	43,5	7,78	8,55	4 $\phi$ 16	1	7,96	0,98
300,67	43,5	6,91	7,60	4 $\phi$ 16	1	7,96	0,87
249,08	43,5	5,73	6,30	4 $\phi$ 16	1	7,96	0,72
183,50	43,5	4,22	4,64	4 $\phi$ 16	1	7,96	0,53
103,92	43,5	2,39	2,63	2 $\phi$ 16	2	3,98	0,60
10,33	43,5	0,24	0,26	2 $\phi$ 16	2	3,98	0,06

Arm. longitudinal negativa							
$F_{sw}$ (kN)	$f_{vd}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$A_{sw,nec}$ (cm <sup>2</sup> )	$1,1 A_{s,nec}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{s,ef}$	#	$A_{s,ef}$ (cm <sup>2</sup> )	Stress ratio
97,25	43,5	2,24	2,46	2 $\phi$ 19	2	5,68	0,39
218,83	43,5	5,03	5,53	2 $\phi$ 19	2	5,68	0,89
354,42	43,5	8,15	8,96	2 $\phi$ 22 + 2 $\phi$ 19	1	13,42	0,61
504,00	43,5	11,59	12,74	2 $\phi$ 22 + 2 $\phi$ 19	1	13,42	0,86
504,00	43,5	11,59	12,74	2 $\phi$ 22 + 2 $\phi$ 19	1	13,42	0,86
357,00	43,5	8,21	9,03	2 $\phi$ 22 + 2 $\phi$ 19	1	13,42	0,61
224,00	43,5	5,15	5,66	2 $\phi$ 19	2	5,68	0,91
105,00	43,5	2,41	2,66	2 $\phi$ 19	2	5,68	0,42

Arm. Transversal							
$F_{sw}$ (kN)	$f_{vd}$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$A_{sw,nec}$ (cm <sup>2</sup> )	$1,1 A_{s,nec}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{s,ef}$	#	$A_{s,ef}$ (cm <sup>2</sup> )	Stress ratio
37,58	43,50	0,86	0,95	2 $\phi$ 13	2	2,58	0,33
51,58	43,50	1,19	1,30	2 $\phi$ 13	2	2,58	0,46
65,58	43,50	1,51	1,66	2 $\phi$ 13	2	2,58	0,58
79,58	43,50	1,83	2,01	2 $\phi$ 13	2	2,58	0,71
93,58	43,50	2,15	2,37	2 $\phi$ 13	2	2,58	0,83
107,58	43,50	2,47	2,72	2 $\phi$ 16	1	3,98	0,62
121,58	43,50	2,79	3,07	2 $\phi$ 16	1	3,98	0,70



135,58	43,50	3,12	3,43	2 $\phi$ 16	1	3,98	0,78
133,00	43,50	3,06	3,36	2 $\phi$ 16	1	3,98	0,77
119,00	43,50	2,74	3,01	2 $\phi$ 16	1	3,98	0,69
105,00	43,50	2,41	2,66	2 $\phi$ 16	1	3,98	0,61

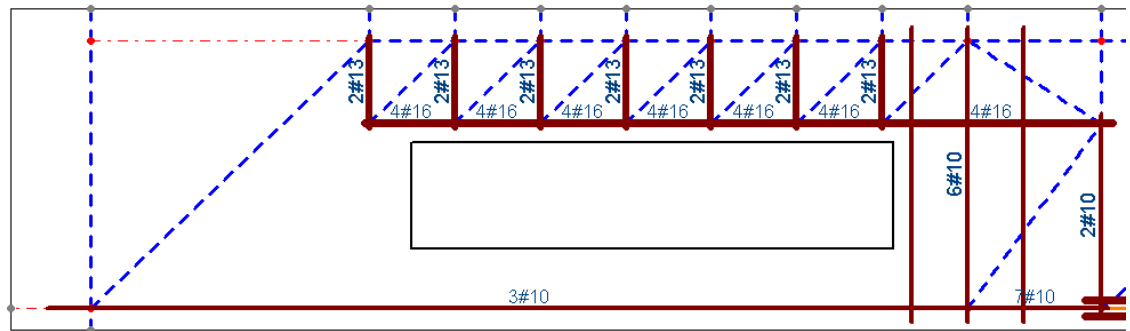


Figura 6.21a - VF - Disposição das armaduras dos tirantes da treliça

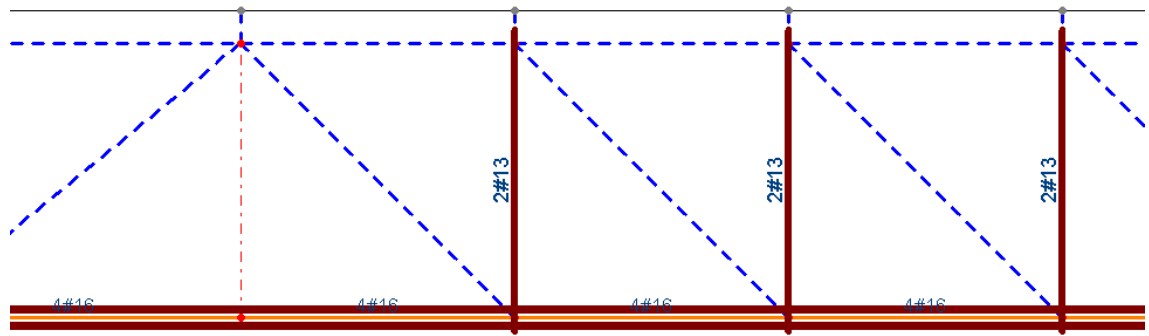


Figura 6.21b - VF - Disposição das armaduras dos tirantes da treliça

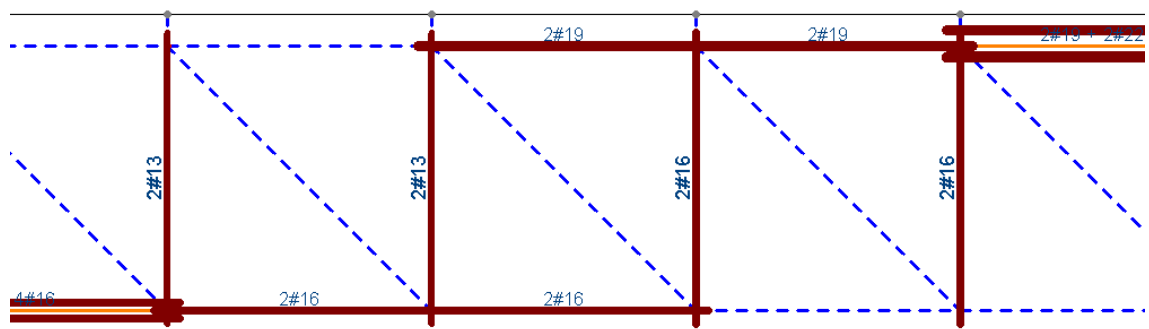


Figura 6.21c - VF - Disposição das armaduras dos tirantes da treliça

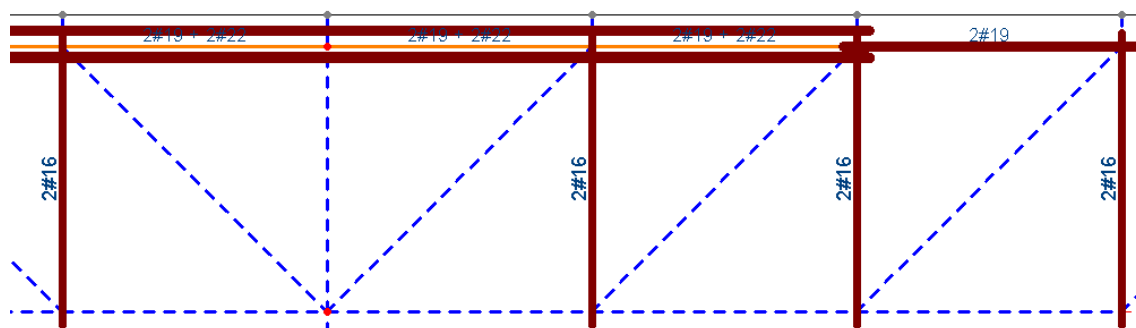


Figura 6.21d - VF - Disposição das armaduras dos tirantes da treliça

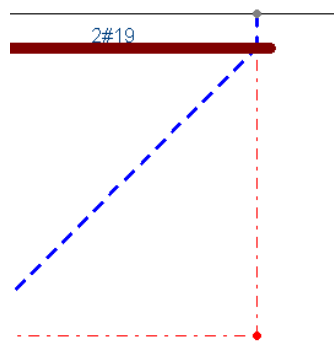


Figura 6.21e - VF - Disposição das armaduras dos tirantes da treliça

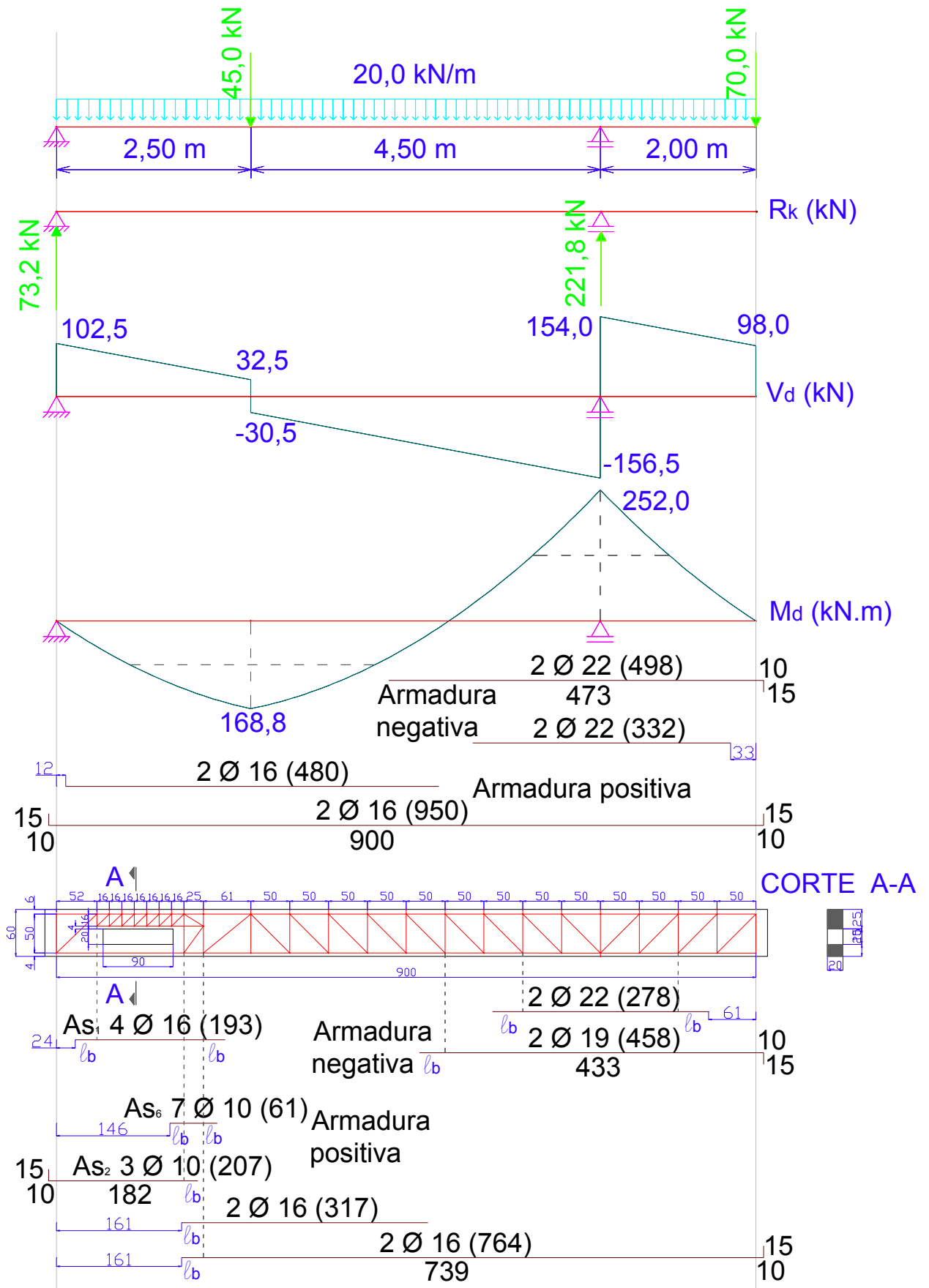


Figura 6.22 - VF - Resumo

## **7 CONSIDERAÇÕES FINAIS E SUGESTÕES PARA FUTURAS PESQUISAS**

---

O modelo de bielas e tirantes proporciona ao projetista ótima representação da estrutura e de seu comportamento. Além disso, pode ser aplicado não somente nas regiões contínuas de uma estrutura, mas também em suas regiões descontínuas, onde não são válidas as hipóteses de Bernoulli.

Apesar de suas significativas vantagens, o modelo apresenta um grande inconveniente: sua aplicação. A falta de consenso a respeito dos valores limites para as intensidades das tensões das inúmeras configurações de nós, bem como da própria geometria dos mesmos; das corretas configurações geométricas das bielas e suas respectivas resistências, dependentes da geometria da região D e do caminhamento das ações são fatores que dificultam sua aplicabilidade e difusão. Também por esses motivos, várias normas e códigos tratam desses assuntos de maneira superficial ou até mesmo nem tratam.

O modelo de bielas e tirantes já é, para muitas estruturas – ou parte delas –, em geral as mais complexas, a única alternativa de determinação e verificação estrutural, mas dificilmente é empregado em estruturas comuns, como em vigas usuais. Em vista disso tudo, a utilização do CAST (2000) aparece como alternativa muito interessante na verificação e no dimensionamento de vigas de concreto armado usuais. Sua interface agradável e sua fácil e rápida utilização configuram excelente auxílio a projetistas que fazem uso de computador, ao passo que o programa é de domínio público na rede mundial de computadores. Ao utilizar o CAST (2000), o projetista pode desfrutar da maior vantagem do modelo de bielas e tirantes, que é a ótima visualização do comportamento da estrutura. Além disso, como característica

inerente ao modelo, o projetista tem o poder de determinar, de certa forma, o comportamento estrutural e, assim, definir a geometria da treliça de acordo com o comportamento desejado.

Outra grande vantagem da modelagem de estruturas utilizando bielas e tirantes é a possibilidade de múltiplas soluções. Sabe-se que a qualidade e a experiência do projetista são fundamentais na modelagem, pois há a necessidade de se prever o comportamento estrutural a fim de se construir o modelo mais adequado, ou seja, aquele que possibilitará o melhor comportamento. No caso das vigas, essa tarefa é simples. Como seu comportamento é bem conhecido, não há grande variedade de possíveis soluções e, conseqüentemente, isso minimiza a chance de erro por parte do projetista, outro fator estimulante para a utilização do CAST (2000). Porém, sem dúvida alguma, a maior vantagem apresentada pelo programa é sua capacidade de verificar automaticamente as regiões nodais. Tendo em vista que a verificação de nós é a tarefa mais complicada quando da aplicação de um modelo de bielas e tirantes, certamente o CAST (2000) mostra-se como um enorme auxílio aos projetos estruturais por modelos de bielas e tirantes.

É necessário ressaltar a importância de se distribuir adequadamente as barras das armaduras dos tirantes em camadas quando possível, a fim de se garantir as larguras efetivas dos mesmos, visando diminuir as tensões nas faces dos nós aos quais cada tirante está conectado. Como são realizadas verificações para cada face do nó, é interessante que as áreas de cada um dos elementos conectados a cada nó sejam suficientes para resistir a tensão ali existente. Portanto, como as áreas efetivas dos tirantes são determinadas pela espessura da estrutura, que é um valor fixo, e pelas larguras efetivas dos respectivos tirantes, visa-se distribuir as barras da armadura de forma que se obtenha a maior espessura efetiva para cada elemento.

O modelo VB1 não teve nenhum de seus elementos levados à ruína, ou seja, todos os elementos da treliça apresentaram fator de utilização inferiores a 1.

Já o modelo VB2, por apresentar um grande acréscimo no carregamento em relação ao VB1, teve muitos de seus elementos levados à

ruína. Uma primeira tentativa é alterar as características geométricas da viga, porém muitas vezes esse procedimento esbarra em condições impostas pela arquitetura ou pela própria estrutura. Em seguida, pode-se tentar aumentar as taxas de armadura dos elementos e, se necessário, armar também os elementos comprimidos. Em último caso, pode-se optar por aumentar a resistência do concreto, porém essa modificação é muito incomum em projetos usuais.

Mudando-se a inclinação das bielas, o objetivo do modelo VB3 foi verificar a interação entre banzos e diagonais, no que diz respeito à absorção de parcelas das forças em cada um desses elementos da treliça, ou seja, da interação entre bielas e banzos quando da absorção e transferência das parcelas horizontais das forças resultantes em cada nó em que eles se encontram. Pôde-se perceber que as bielas efetivamente interferem no equilíbrio dos banzos, sendo que, para as configurações das treliças dos modelos VB1, VB2 e VB3, elas agem majorando as forças nos elementos tracionados, do banzo inferior, e minorando as forças nos elementos comprimidos do banzo superior que fazem parte do mesmo painel da treliça ou seja, que estão igualmente distantes em relação ao eixo y convencional. Essa interferência se inverte em caso de inversão da disposição adotada para as bielas. Isso explica algumas diferenças entre os valores de  $R_{st}$  calculados por equilíbrio de seção e os valores de  $R_{st}$  determinados pelo CAST (2000).

Quanto aos valores da força cortante, pôde-se comprovar a validade das expressões para o dimensionamento da NBR 6118: 2003 e do MC CEB-FIP (1990), que aparentam representar perfeitamente o esquema resistente das diagonais, haja vista que ambos os dimensionamentos tomam como princípio o comportamento da viga como treliça. Além disso, foi possível também comprovar a idéia de que, para vigas com configurações semelhantes às dos três primeiros modelos, as regiões superiores das extremidades praticamente não têm função estrutural, confirmando o conceito de que o banzo superior, paralelo ao inferior na região central da viga, tende a se inclinar até se encontrar com o banzo inferior na região do apoio.

A viga inicialmente analisada por RONCATTO & CAMPOS FILHO (2005) não verifica as condições de segurança. Fazendo-se uma análise geral, ou seja, completa para toda a viga, pode-se verificar que, com os valores adotados para a resistência do concreto e para a seção transversal, a verificação de toda a viga utilizando modelo de bielas e tirantes acusa intensidades altíssimas para os fatores de utilização dos elementos. Portanto, as propriedades geométricas e todas as demais características apresentadas por essa viga são insuficientes para resistir aos carregamentos nela aplicados.

Em todas as modelagens foram consideradas bielas de concreto de seção prismática, sem armadura de compressão. Porém, caso seja necessário, pode-se armar as bielas, a fim de que elas sejam capazes de suportar maiores intensidades de tensões.

As normas para dimensionamento de estruturas de concreto armado estabelecem critérios para se prover a estrutura de uma taxa de armadura mínima. Esse fator, em alguns casos, pode comprometer o comportamento do modelo de bielas e tirantes adotado. Como a idealização da treliça depende da disposição, prevista ou desejada (proposital), dos elementos que ela compõem, em casos em que, segundo o modelo, deveria haver tirantes com taxas de armadura inferiores às mínimas, a necessidade de se dispor a quantidade mínima de armadura pode alterar o comportamento inicialmente esperado pelo engenheiro.

Um trabalho futuro poderia estudar casos em que a treliça apresenta taxas de armadura inferiores às mínimas para alguns de seus tirantes e propor soluções ou alternativas para esses casos, avaliando se há alterações seguras no modelo inicialmente adotado que, ainda assim, garanta um comportamento adequado à estrutura.

Outros aspectos ainda delicados do modelo de bielas e tirantes, e que não dispensam estudos, são a verificação da segurança das regiões nodais e os critérios para determinação dos nós como contínuos e concentrados. Ainda não há suficiente clareza em relação a esses fatores, os quais contribuem para um certo desestímulo da aplicação do modelo e, portanto, seria de grande importância científica novas pesquisas a esses respeitois.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (1995). ACI 318/95 - Building code requirements for structural concrete. Detroit, Michigan.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (1992). *ACI Manual of Concrete Practice*. Detroit. Part 3.

ASCE-ACI COMMITTEE 445 ON SHEAR AND TORSION (1988). *Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete*. Journal of Structural Engineering. ASCE, Vol. 124, No. 12. December 1998, pp. 1375-1417.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2004). *NBR 6118:2003 – Projeto de estruturas de concreto – procedimento*. Rio de Janeiro.

BOUNASSAR, J.F. (1995). *Dimensionamento e comportamento do betão estrutural em zonas de descontinuidade*. 405p. Tese (Doutorado) – Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, Portugal, 1995.

CAST (2000). *Computer Aided Strut-And-Tie*. University of Illinois at Urbana Champaign. United States of America.  
[http://www.cee.uiuc.edu/kuchma/strut\\_and\\_tie/](http://www.cee.uiuc.edu/kuchma/strut_and_tie/)

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON (1990). CEB-FIP model code 1990: first draft, Addendum, *Bulletim D'Information*, n.198, Sep.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON (1991). CEB-FIP model code 1990: final draft. *Bulletim D'Information*, n.203-205, Jul.



COMISIÓN PERMANENTE DEL HORMIGÓN – Ministério de Fomento (2001). *Instrucción de Hormigon Estructural (EHE)*. Madri, Espanha, 2001.

COMMISSION OF THE EUROPEAN COMMUNITIES (1989). *Eurocode 2 – Design of concrete structures*. Bruxelas.

COOK, W.; MITCHELL, D. (1988). Studies of disturbed regions near discontinuities in reinforced concrete members. *ACI Structural Journal*, v.85, n.2, p.206-216, Mar-Apr.

EUROCODE N.2. *Design of concrete structures*. Part 1: general rules and rules for buildings, 1989.

EUROPEAN COMMITTEE STANDARDIZATION (1992). *Eurocode 2 – Design of concrete structures*. Part 1: General rules and rules for buildings. London, BSI.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BÉTON (fib/CEB-FIP). *Structural Concrete*. fib Bulletin, números 1 a 3 (3 volumes). Lausanne, Suíça, 1999.

FUSCO, P.B. (1984). *Estruturas de concreto: solicitações tangenciais*. São Paulo, EPUSP.

FUSCO, P.B. (1994). *Técnicas de armar as estruturas de concreto*. São Paulo, Editora Pini.

FUSCO, P.B. (1991). *As armaduras mínimas de tração no concreto estrutural*. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, 2., São Paulo, 1991. *Anais*. São Paulo, EPUSP/PEF. p. 665-700.

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. (1977). *Construções de concreto: princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado*. Rio de Janeiro, Interciência, v.1, p.175-218.

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. (1978a). *Construções de concreto: casos especiais de dimensionamento de estruturas de concreto armado*. Rio de Janeiro, Interciência, v.2, p.19-58.

LEONHARDT, F.; MONNIG, E. (1978b). *Construções de concreto: princípios básicos sobre armação de estruturas de concreto armado*. 1.ed.Rio de Janeiro, Interciência. v.3.

MARTI, P.(1985). *Basic Tools of Reinforced Concrete Beam Design*. ACI Journal. Proceedings. Vol. 82, No. 1. January-February. pp. 45-56.

MACGREGOR, J.G. (1988). *Reinforced concrete: mechanics and design*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall.

OZCEBE, G.; ERSOY, U.; TANKUT, T. (1999). Evaluation of minimum shear reinforcement requirements for higher strength concrete. ACI Structural Journal, v. 96, n. 3, p. 361-368, May-June.

RONCATTO, C.; CAMPOS FILHO, A. (2005). *Aplicação do método das bielas e tirante ao projeto automático de furos na alma de vigas de concreto armado*. In: Congresso Brasileiro do Concreto, 47, Recife, 2005. *Anais*.

SCHAFER, K.; SCHLAICH, J. (1988). Consistent design of structural concrete using strut and tie models. In: COLÓQUIO SOBRE COMPORTAMENTO E PROJETO DE ESTRUTURAS, 5., Rio de Janeiro, 1988. *Anais*.PUC/RJ.

SCHLAICH, J.; ANAGNOSTOU, G. (1990). Stress fields for nodes of strut and tie models. ASCE, Journal of Structural Engineering, v.116, n.1, Stuttgart, p.13-23, 1990.

SCHLAICH, J.; SCHAFER, K.; JENNEWEIN, M. (1987). Towards a consistent design of structural concrete. *PCI Journal*, v.32, n.3, p.74-150, May-June.

SCHLAICH, J.; SCHAFER, K. (1991). Design and detailing of structural concrete using strut and tie models. *The Structural Engineer*, v.69, n.6, Mar.

SILVA, R.C.; GIONGO, J.S. (2000). Modelos de bielas e tirantes aplicados a estruturas de concreto armado. São Carlos, EESC-USP.

SOUZA, R.A. (2004). Concreto estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades. 379 p. Tese (Doutorado). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2004.

TJHIN, T.N.; KUCHMA, D.A. (2002). Computer-based tools by design by strut-and-tie method: advances and challenges. *ACI Structural Journal*, v.99, n.5, p.586-594, 2002.

YUN, Y.M.; RAMIREZ, J.A. (1996). Strength of struts and nodes in strut-tie model. *Journal of Structural Engineering*, v.122, n.1, p.20-28, 1996.