

Daniane Franciesca Vicentini

***FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE
CONTORNO PARA ANÁLISE DE FRATURA***

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Titular Wilson Sergio Venturini

São Carlos
2006

Agradecimentos

À Deus pelas oportunidades que tive, por me abençoar a cada dia com saúde, paz, capacidade e inteligência suficientes para desenvolver este trabalho.

Ao professor Venturini pela dedicação e excelente orientação, paciência e confiança que depositou em mim antes e durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Aos "irmãos" Alejandro, Botta, Edson, Eduardo, Oscar, Valério e Wesley, pela paciência dedicada nos meus "eternos" primeiros passos em elementos de contorno.

Aos professores da UFSM, em especial a Odilon Pancaro Cavalheiro, Herbert Martins Gomes, Maria Isabel Lopes, Hugo Maciel pelo incentivo.

Aos professores da EESC/USP pelas experiências trocadas e idéias discutidas, aos professores que compuseram a banca examinadora na qualificação, Paiva e Daros pelas valiosas sugestões e especialmente ao prof. Coda pela ajuda e dedicação nos momentos finais e decisivos deste trabalho.

Aos funcionários da EESC/USP pela colaboração dispensada.

À minha querida amiga Sheila Guterres, cujo coração apresenta a generosidade e bondade própria dos espíritos elevados.

Aos que foram minha "família" durante a execução desta pesquisa, e que com certeza merecem ser lembrados por suportarem os meus dias de mal-humor devido ao estresse: Deise, Giovano, Frederico, Rossana, Maribel, Marly, Ana e Beatriz.

Aos colegas e amigos que de alguma maneira, ainda que indireta, contribuíram para a realização e aprendizagem de várias etapas deste trabalho.

A Jean Carlo pelo amor e compreensão dedicados a mim para que pudesse ter tranquilidade ao realizar este trabalho.

Aos grandes Mestres que tive, começando por minha própria família até professores primários e os da pós-graduação de hoje.

Ao *Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales* pelas valiosas discussões que contribuíram grandemente para a compreensão e avanço deste trabalho.

Ao povo brasileiro e ao meu querido país, onde o estudo gratuito ainda pode ser de qualidade, apesar das imensas dificuldades.

À CAPES, FAPESP e ao Programa ALFA – ELBENet pelo apoio financeiro concedido.

“O homem de ciência..., em certa medida, pode felicitar-se de que o trabalho de seus contemporâneos tenha modificado, ainda que de modo indireto, a vida econômica por ter eliminado quase inteiramente o trabalho muscular. Mas sente-se também desanimado, já que os resultados de suas pesquisas provocaram terrível ameaça para a humanidade. Porque esses resultados foram apropriados pelos representantes do poder político, estes homens moralmente cegos”.

Albert Einstein

RESUMO

VICENTINI, D. F. (2006). *Formulação do método dos elementos de contorno para análise de fratura*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

No contexto do método dos elementos de contorno, este trabalho apresenta comparativamente três formulações em distintos aspectos. Visando a análise de sólidos bidimensionais no campo da mecânica da fratura, primeiramente é estudada a equação singular ou em deslocamentos. Em seguida, a formulação hiper-singular ou em forças de superfície é avaliada. Por último, a formulação dual, que emprega ambas equações é analisada. Para esta análise, elementos contínuos e descontínuos são empregados, equações numéricas e analíticas com ponto fonte dentro e fora do contorno são testadas, usando aproximação linear. A formulação é inicialmente empregada a problemas da mecânica da fratura elástica linear e em seguida estendida a problemas não-lineares, especialmente o modelo coesivo. Exemplos numéricos diversos averiguam as formulações, comparando com resultados analíticos ou disponíveis na literatura.

Palavras-chave: fratura, método dos elementos de contorno, modelo dual, mecânica da fratura elástica linear, coesivo.

ABSTRACT

VICENTINI, D. F. (2006). *Boundary element formulations applied to fracture mechanics*. São Carlos. M.Sc. Dissertation – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

In this work three boundary element formulations applied to fracture mechanics are studied. Aiming the analysis of two-dimensional solids with emphasis on the crack problem, the first considered method is the one based on using displacement equations only (singular formulation). The second scheme discussed in this work is a formulation based on the use of traction equations (hyper-singular formulation). Finally the dual boundary element method that uses singular and hyper-singular equations is considered. The numerical schemes have been implemented using continuous and discontinuous linear boundary and crack elements. The boundary and crack integrals were all carried out by using analytical expressions, therefore increasing the accuracy of the algebraic system obtained for each one of the studied schemes. The developed numerical programs were applied initially to elastic fracture mechanics and then extended to analyze cohesive cracks. Several numerical examples were solved to verify the accuracy of each one of the studied models, comparing the results with the analytical solutions available in the literature.

Keywords: fracture, boundary element method, dual boundary element method, linear elastic fracture mechanics, cohesive crack model.

Lista de siglas

CMTF	Critério da Máxima Tensão Principal
COD	<i>Crack Opening Displacement</i>
CSD	<i>Crack Sliding Displacement</i>
EPD	Estado Plano de Deformação
EPT	Estado Plano de Tensão
FIT	Fator de Intensidade de Tensão
LN	Linha Neutra
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MECD	Método dos Elementos de Contorno Dual
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFEL	Mecânica da Fratura Elástica Linear
MFF	Modelo de Fissura Fictícia
PF	Ponto(s) Fonte ou de Colocação
PF1	Ponto Fonte 1 ou 1º Ponto de Colocação
PF2	Ponto Fonte 2 ou 2º Ponto de Colocação
PSE	Princípio da Superposição dos Efeitos

Sumário

RESUMO

ABSTRACT

LISTA DE SIGLAS

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. REVISÃO DA BIBLIOGRAFIA.....	2
1.2. OBJETIVOS DESTE TRABALHO	6
1.3. JUSTIFICATIVA.....	6
1.4. METODOLOGIA DE TRABALHO.....	8
2. TEORIA DA ELASTICIDADE.....	10
2.1. HIPÓTESES E DEFINIÇÕES.....	10
2.2. EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO.....	12
2.3. RELAÇÕES ENTRE DEFORMAÇÃO E DESLOCAMENTO.....	13
2.4. LEI DE HOOKE GENERALIZADA.....	13
2.5. EQUAÇÕES DE COMPATIBILIDADE.....	14
2.6. CONDIÇÕES DE CONTORNO (FÓRMULA DE CAUCHY).....	14
2.7. PROBLEMAS PLANOS.....	15
2.7.1. Estado plano de tensão (EPT).....	15
2.7.2. Estado plano de deformação (EPD).....	16

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	17
3.1. INTRODUÇÃO.....	17
3.2. CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	18
3.3. REPRESENTAÇÃO INTEGRAL.....	19
3.4. SOLUÇÃO FUNDAMENTAL (KELVIN).....	21
3.5. EQUAÇÃO INTEGRAL PARA PONTOS NO CONTORNO.....	22
3.6. EQUAÇÃO INTEGRAL PARA PONTOS INTERNOS (TENSÕES).....	24
3.7. SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	24
4. MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR	29
4.1. INTRODUÇÃO.....	29
4.2. BALANÇO ENERGÉTICO.....	30
4.3. MODOS DE DEFORMAÇÃO DA FISSURA.....	32
4.4. APROXIMAÇÃO DO CAMPO DE TENSÕES.....	32
4.5. FATOR DE INTENSIDADE DE TENSÃO (FIT).....	34
4.6. CRITÉRIO DA TENACIDADE À FRATURA.....	37
4.7. DIREÇÃO DE PROPAGAÇÃO.....	37
5. MODELO DUAL	39
5.1. INTRODUÇÃO.....	39
5.2. SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	40
5.3. EQUAÇÃO EM FORÇAS DE SUPERFÍCIE.....	42
6. MODELO COESIVO	45
6.1. APRESENTAÇÃO.....	45
6.2. ALGORITMO PROPOSTO.....	50

6.2.1. Geração de nova fratura (propagação).....	51
6.2.2. Modelo incremental.....	52
6.3. ALGORITMO DE SALEH E ALIABADI.....	56
6.3.1. Cálculo das tensões na ponta da fissura.....	58
6.3.2. Propagação.....	58
7. RESULTADOS NUMÉRICOS	60
7.1. EXEMPLOS DE VIGAS ELÁSTICAS.....	60
7.2. EXEMPLOS NA MFEL.....	70
7.3. EXEMPLOS NO MODELO COESIVO.....	78
CONCLUSÕES.....	86
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89
APÊNDICE A – CONTRIBUIÇÃO NAS MATRIZES	98
ANEXO A – QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE	101
ANEXO B – INTEGRAIS ANALÍTICAS SINGULARES	104
ANEXO C – INTEGRAIS ANALÍTICAS NÃO-SINGULARES.....	108
ANEXO D – FUNÇÃO DELTA DE DIRAC	120

Capítulo

1 Introdução

Temos, na nossa história, catástrofes mundialmente conhecidas, como a que ocorreu com o *Titanic* ou com os navios "*Liberties*", da Segunda Guerra Mundial, ou ainda com o avião a jato britânico *Comet*, em 1954, entre outras. Estas impulsionaram o estudo do comportamento de materiais da indústria naval e bélica, melhorando o entendimento do comportamento de certos materiais, como o aço, que a baixas temperaturas assume um comportamento frágil. Os estudos avançaram nesse sentido, dando origem ao estudo da ciência hoje conhecida por Mecânica da Fratura.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC), ferramenta numérica alternativa ao Método dos Elementos Finitos (MEF), é bastante eficiente em problemas que apresentam concentrações de tensões. Especialmente no caso da fratura, o emprego de soluções singulares como ponderadora consegue simular a presença de singularidades na ponta da fissura com maior precisão.

Visando o uso do MEC no estudo de sólidos bidimensionais em presença da fratura, pretende-se estudar possíveis formulações, algumas já existentes, outras em desenvolvimento, com o objetivo de obter melhorias tanto na qualidade das representações obtidas, particularmente no caso de problemas não-lineares.

O método requer apenas a discretização da fissura, não sendo necessária a discretização do domínio a cada avanço e a correspondente aproximação das variáveis no interior do corpo.

Todas as implementações necessárias para a análise das estruturas são realizadas em linguagem computacional *FORTRAN*.

1.1. Revisão da bibliografia

Na literatura encontra-se hoje uma vasta quantidade de trabalhos importantes sobre o desenvolvimento de formulações do MEC em problemas de Mecânica da Fratura. Os primeiros trabalhos que trataram do problema da análise de fissuras são ainda da década de setenta, de autoria de Cruse e van Buren (1971), que empregaram elementos de contorno usuais para a modelagem da fissura, porém considerando sua forma elíptica. Essa técnica levou a erros significativos e, além disso, exigia um número grande de elementos para aproximar as variáveis da superfície da fissura, portanto não apresentou um desempenho satisfatório e foi abandonada. Cruse (1972) apud Salgado (1998) ainda mostrou que devido à existência de nós do contorno coincidentes em superfícies opostas da fissura, a aplicação direta do MEC a este tipo de problema conduz à uma matriz singular. O trabalho do Prof. Cruse em fratura teve continuidade, e em 1975 propôs uma formulação baseada no uso de funções de Green (SNYDER e CRUSE, 1975). As funções de Green representavam a solução exata de um domínio infinito com a presença da fissura que se pretendia analisar. Com essa técnica os termos integrais referentes ao contorno da fissura desaparecem e a solução é extremamente precisa. Entretanto, sua aplicação é restrita. Permite o estudo dos fatores de intensidade de tensão, porém não permite o estudo do avanço da fissura.

O uso da equação singular para o tratamento de fissuras aparece posteriormente no trabalho de Blandford et al. (1981), que utiliza a técnica das sub-regiões para simular o crescimento da fissura entre dois contornos. Venturini (1982) também utilizou uma técnica similar para separação e deslizamento em juntas. Neste caso, o problema era também não-linear, pois considerava os modelos constitutivos elasto-plásticos (von Mises e Mohr-Coulomb) para governar o estado de tensão entre as superfícies, incluindo-se também efeitos dependentes do tempo. Além desses trabalhos, a formulação singular também aparece nos trabalhos de Cen e Maier (1992) e de Liang e Li (1991) que utilizaram a técnica para a modelagem de fratura coesiva.

O modelo de sub-regiões foi bastante utilizado para a análise de fissuras, porém contém o mesmo problema computacional dos métodos de elementos

finitos clássico. Há a necessidade de se fazer uma previsão do crescimento da superfície com a definição de uma interface tentativa e depois modificar a malha em função da resposta obtida.

Uma alternativa utilizada para a modelagem de fratura é decorrente da formulação do método da descontinuidade de deslocamentos (Crouch, 1976). Esse método é similar ao método dos elementos de contorno, porém utiliza como ponderadora uma solução fundamental (função de Green) que é a resposta em um domínio infinito da aplicação de uma descontinuidade unitária. Aplicações dessa formulação foram feitas em: (Crouch e Starfield, 1983 e Wen e Fan, 1994).

Um trabalho importante foi proposto por Cruse (1988) que utilizou funções de Green para a modelagem da fissura, particularmente para o estudo dos fatores de intensidade de tensão. Os trabalhos de Mews (1987) e Telles e Guimarães (2000) também seguem essa linha com a proposição de melhoramentos. Telles propõe a obtenção numérica da função de Green e, portanto pode simular o avanço da fissura independentemente de sua geometria.

A introdução de uma equação integral adicional e hiper-singular em uma das faces da fissura foi primeiramente descrita por Watson (1986), Watson (1988) apud Saleh (1997). Nesses trabalhos, propunha-se o uso da equação singular para os nós definidos em uma das faces da fissura e a representação hiper-singular para os nós da face oposta. Para problemas tridimensionais o uso simultâneo das duas equações integrais foi feito por Gray et al. (1990).

A técnica conhecida como Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD) para a análise de problemas de fissura é hoje a mais difundida. Também foi idealizada com a utilização simultânea das equações integrais singulares e hiper-singulares, porém de maneira mais versátil. A geração de novos elementos foi idealizada e, portanto a análise do crescimento da fissura é bastante simples. O trabalho de Portela et al. (1992, 1993) é sempre utilizado como referência para a técnica. O método foi em seguida estendido a problemas tridimensionais, inclusive tratando do problema da propagação de fratura, por Mi e Aliabadi (1992^{a,b}, 1994^{a,b}, 1995). O resultado dos estudos de fratura para o caso tridimensional está resumido no livro de Mi (1996). É

interessante ainda mencionar uma série de outros trabalhos que utilizaram a técnica e introduziram avanços para alguns tipos específicos de análise. Nesse contexto, deve-se citar os trabalhos de Mellings e Aliabadi (1994) para a identificação de falhas, Sollero e Aliabadi (1994) para o estudo de compósitos e Saleh (1995; 1997) para a análise de fissuração em concreto. Ainda dentro da mecânica da fratura, algumas pesquisas interessantes comprovam sua eficácia, como Dirgantara e Aliabadi (2000) que a utilizam para a análise de placas combinando flexão e tração (uni e biaxial); Alessandri e Mallardo (1999), acoplando à técnica de otimização e análise inversa (combinando MECD com *Linear Complementary Problem - LCP*), onde a fissura é incógnita (variável de desenho) e a minimização do erro é a função de penalização (calculado entre a posição suposta inicial e a posição atual da fissura). Fedelinski et al. (1997) usaram-na convenientemente adaptada a um domínio em função do tempo para a análise de cargas dinâmicas, obtendo bons resultados.

Uma técnica alternativa que utiliza um campo de tensões iniciais para a correção do estado de tensão em fissuras mostrou-se também bastante eficiente quando a espessura da região de processo é degenerada para zero, isto é, quando a zona de processo se transforma numa fissura. Venturini utilizou essa técnica para a modelagem da fratura coesiva, inclusive modelando comportamentos que exibem *snap-back* (VENTURINI, 1994 e LOPES e VENTURINI, 1997). Esse procedimento também foi utilizado para a modelagem de deslizamento de taludes: Jiang e Venturini (1998a) para o caso bidimensional, e Jiang e Venturini (1998b) e Jiang e Venturini (2000) para o caso tridimensional e, mais recentemente, Manzoli e Venturini (2004), simulando o comportamento não-linear em problemas de descontinuidades fortes.

No campo dos MEF existem muitos trabalhos consolidados sobre fratura coesiva. O grupo da Universidade de Cornell (BITTENCOURT, 1993; HANSON et al. 2004) apresenta algumas das principais contribuições nesta área, simulando inclusive a fratura coesiva tridimensionalmente e originando o programa *cohFRANC3D*.

Mais recentemente foram feitas algumas tentativas de se modelar fratura utilizando apenas a formulação singular e definindo-se os lábios da fissura

muito próximos um do outro, similar ao que o Prof. Cruse tentou sem sucesso fazer nos anos setenta. Esse estudo feito na EESC-USP demonstrou que esse modelo é preciso desde que as integrais sobre os elementos da fissura sejam bem avaliadas, utilizando-se para isso sub-elementação adequada ou integração analítica dos termos integrais. Resultados dessa tentativa estão na dissertação de mestrado de Maciel (2003) e na tese em desenvolvimento de Leite (2003).

Nos objetivos descritos a seguir observa-se que o trabalho tem seu foco centrado na modelagem do fenômeno da fratura utilizando o MEC. Em termos de fratura mecânica é necessário mencionar também alguns trabalhos básicos que permitem o entendimento do fenômeno da iniciação e crescimento de fratura elástica linear e também coesiva. Para os problemas de fratura elástica linear o trabalho está restrito à determinação dos fatores de intensidade de tensão (IRWIN, 1957) que permitem conhecer a segurança do sólido com relação à sua integridade e também indicar o crescimento. Os fundamentos da mecânica da fratura elástica linear podem ser encontrados em textos clássicos como os de Broek (1982), Kanninen e Popelar (1985), Anderson (1995), entre outros. Há diversos procedimentos para a determinação dos fatores de intensidade de tensão, podendo inclusive ser determinado a partir dos valores das tensões que são precisos quando se utiliza o MEC. Um procedimento simples é a utilização dos valores do deslocamento do nó posicionado no quarto do elemento. Essa técnica é mostrada em Dominguez e Martinez (1984). O texto de Aliabadi e Rooke (1992) também tem bastante interesse, pois mostra procedimentos numéricos para o tratamento da fratura elástica linear através do MEC.

A fratura coesiva é um modelo de fraturamento não-linear relativamente simples. Tem origem nos trabalhos de Barenblatt (1962) e depois bastante detalhado e estudado numérica e experimentalmente nos trabalhos de Hillerborg (1976) e Carpinteri (1986). Nos livros de Karihaloo (1995), Bažant e Panas (1998), é também estudado e aplicado ao concreto e outros materiais quase frágeis.

1.2. Objetivos deste trabalho

Este trabalho objetiva um estudo das formulações do método dos elementos de contorno para a análise do problema de fratura de meios contínuos planos. Pretende-se inicialmente implementar a formulação dual do método (que emprega as equações singular e hiper-singular). Para a confrontação dos resultados e análise da eficiência de cada um desses procedimentos as equações algébricas de cada uma dessas formulações serão obtidas com o emprego de integrações analíticas dos elementos da fissura. Será também experimentado o uso de sub-elementação para a verificação da sua potencialidade e também aferir a integração analítica. As formulações serão inicialmente escritas para a fratura elástica linear. Pretende-se ainda analisar as formulações com a inclusão do modelo coesivo (*cohesive crack model*).

1.3. Justificativa

No contexto atual, os métodos numéricos têm sido amplamente utilizados no estudo da mecânica da fratura e propagação de fissuras. Dentre eles, destaca-se o MEF, que pode ser aplicado a um vasto número de problemas físicos.

No entanto, se gasta tempo para aproximação da solução. As soluções obtidas não satisfazem plenamente a equação que governa o problema no domínio, mas sim na medida em que o domínio é subdividido. Funções polinomiais são testadas, sendo utilizadas para aproximar a solução dentro dos elementos finitos. Para problemas que envolvem singularidades, tais como o campo de tensões na ponta de uma fissura, o uso do MEF requer uma discretização muito boa da malha em torno do ponto singular. Além disso, em uma análise de propagação de fissuras, geralmente é necessário modificar a malha em grandes porções do domínio do problema ao invés de tentar acomodar as alterações de posição da ponta da fissura.

Desde sua introdução, por volta dos anos 60, o MEC vem sendo utilizado como uma ferramenta alternativa ao MEF. Conceitualmente, a principal

diferença entre os dois métodos é que no MEC uma aproximação analítica para a solução é tomada pela adoção de funções peso, chamada solução fundamental, a qual satisfaz a equação que governa. Na maioria dos casos, a formulação é obtida de maneira que não contenha integrais no domínio do problema. Sendo assim, somente o contorno necessita ser discretizado em elementos, resultando em ganho substancial na preparação do modelo assim como um sistema algébrico de equações muito menor a ser resolvido. Uma boa discretização é ainda necessária próxima às singularidades; no entanto ela está restrita aos contornos do problema, exigindo significativamente menos nós e elementos do que no MEF.

O MEC é particularmente vantajoso em problemas envolvendo singularidades e contornos em movimento, como os problemas de propagação de fissuras. As formulações requerem pouca discretização, não há modificação na malha com o crescimento da fissura e a aproximação necessária das variáveis é sempre pouco significativa.

Uma desvantagem é que as matrizes são carregadas.

O MEC teve um desenvolvimento rápido, principalmente a partir da década de oitenta. Muitas têm sido as propostas de formulações para análise com aplicação nos mais diversos problemas de engenharia, como por exemplo, não-linearidade física (plasticidade, visco-plasticidade, visco-elasticidade), não-linearidade geométrica, mecânica da fratura, contato, problemas transientes, vibrações, propagação de ondas, problemas de concentração de tensão e de delaminação, materiais compostos dentre outros. As formulações do método também aparecem como promissoras para um grande número de casos de mecânica das rochas e mecânica dos solos (ambos caracterizados por apresentar domínios infinitos) e de grande interesse na indústria petrolífera e em geociências. Além de outras aplicações na engenharia, como placas (por representar corretamente concentração de tensões), interação solo-estrutura, bioengenharia e várias outras, onde pode ser utilizado como único modelo numérico ou combinado com outros convenientemente.

Neste trabalho pretende-se estudar possíveis formulações objetivando a obtenção de melhorias tanto na qualidade das representações como também

nos processos de solução do sistema de equações, em particular no caso dos problemas não-lineares.

Com o trabalho proposto, pretende-se voltar ao tema fratura mecânica que já foi abordado em outros trabalhos desenvolvidos no grupo da USP/São Carlos. Os trabalhos anteriores, embora tenham chegado a formulações interessantes, não permitiram fazer um confronto entre as diversas possibilidades existentes e tampouco fazer um estudo sobre a melhoria dos modelos numéricos em termos de precisão para sua utilização, quer em programas computacionais específicos ou como parte integrante de um sistema computacional maior.

O confronto proposto é no mínimo interessante, pois permitirá uma real análise das possibilidades quando comparadas entre si. Além disso, a introdução de melhorias na aproximação e nos procedimentos de integração vai dar mais confiabilidade aos modelos a serem analisados. A obtenção de um diagnóstico mais preciso para qualificar e fazer uma análise comparativa entre os modelos é o real interesse da proposta. Além disso, deve também se considerar como justificativa a introdução de melhorias específicas nos modelos que já foram descritos nos objetivos.

1.4. Metodologia de trabalho

Pretende-se melhorar uma ferramenta numérica para o estudo de formação e crescimento de fissuras. Optou-se por utilizar o método da colocação onde a equação de equilíbrio em sua forma integral é escrita para um ponto. Essa formulação é mais simples que outras alternativas, que acabam necessitando de integração dupla para originar matrizes simétricas. Poderia ainda utilizar outras soluções fundamentais alternativas ou procurar funções de *Green* alternativas. Porém, o caminho escolhido, além de ser confiável quanto aos resultados finais, é também mais seguro para um trabalho de mestrado.

No contexto dos métodos de colocação pretende-se utilizar as representações integrais singulares e hiper-singulares, isto é, a representação

dos deslocamentos, sua derivada e, posteriormente, analisar estas equações numa mesma análise em problemas de fratura, constituindo o MECD.

Pretende-se utilizar procedimentos seguros nas avaliações das integrais sobre elementos de contorno ao longo da fissura melhorando assim a precisão do sistema de equações necessária principalmente em problemas não-lineares. Neste caso, modelos mais adequados para a solução podem ser introduzidos.

2 Teoria da elasticidade

Neste capítulo, serão apresentados alguns conceitos básicos da teoria da elasticidade tridimensional que servirão de embasamento para os temas seguintes. Posteriormente simplificações serão feitas para adequar ao problema bidimensional. Para este estudo, foi consultada a seguinte bibliografia: Timoshenko & Goodier (1980), Valliappan (1981), Villaça & Garcia (1996).

2.1. Hipóteses e definições

A teoria aqui apresentada é válida no seguinte contexto:

- Considera-se que o material constituinte dos sólidos em análise apresenta comportamento elástico-linear.
- Admite-se material homogêneo, contínuo e isótropo;

Um ponto qualquer de um determinado corpo com as condições acima mencionadas apresenta as seguintes variáveis (com suas componentes) para o problema tridimensional:

⇒ deslocamento: representado pelo vetor $\bar{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}$.

⇒ força de massa ou volumétrica: representada pelo vetor $\bar{b} = \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix}$.

⇒ força de superfície: representada pelo vetor $\bar{P} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix}$.

⇒ deformação: representada pelo tensor¹ $\bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{Bmatrix}$ ou

$$\bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}.$$

É a taxa de variação dos deslocamentos em relação ao espaço cartesiano (descrição Lagrangeana). Assim:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (2.4)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (2.5)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (2.6)$$

⇒ tensão: representada pelo tensor $\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$ ou $\bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$.

¹ *Tensor* é uma matriz ou vetor que expressa uma relação entre grandezas físicas independentemente do sistema de coordenadas escolhido. Um tensor de ordem zero é um escalar, ordem 1, um vetor, ordem 2 é uma matriz, ordem 3 é uma matriz cúbica e existe ainda tensor de 4ª ordem (quatro índices variando).

As componentes de tensão estão representadas no elemento infinitesimal dado a seguir:

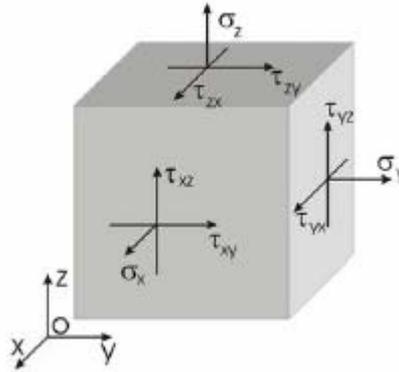


Figura 2.1 – Estado de tensões tridimensional de um ponto– Timoshenko & Goodier (1980)

2.2. Equações de equilíbrio

Dado um corpo no espaço, diz-se que o mesmo está em equilíbrio se as seguintes condições forem satisfeitas, para um ponto qualquer (elemento infinitesimal) do mesmo:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + b_x = 0 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + b_y = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + b_z = 0 \quad (2.9)$$

ou, em notação indicial²:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0, \quad \text{com } (i, j = 1, 3). \quad (2.10)$$

² Da notação indicial: $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \sigma_{ij,j}$, com o índice antes da vírgula indicando a direção da componente de

σ e o índice após a vírgula indicando a direção da componente em que é derivada. O índice i varia primeiro.

As componentes com um índice são as componentes normais e as demais cisalhantes ao plano em que ocorrem.

É importante salientar que a propriedade de simetria é aqui válida, quando impõe-se o equilíbrio rotacional ao elemento, ou seja:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yz} = \tau_{zy} \text{ e } \tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (2.11)$$

Ressaltando que o estudo será em 2D, os índices referentes ao eixo cartesiano z desaparecem.

2.3. Relações entre deformação e deslocamento

As relações entre deformação e deslocamento (definição clássica) já foram mostradas de (2.1) a (2.6), contudo nesse estudo é mais conveniente apresentar essas relações expressas pela notação indicial, de forma mais compacta:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.12)$$

2.4. Lei de Hooke generalizada

Pela Lei de Hooke, é possível escrever uma relação (linear) entre tensão e deformação que é dada por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.13)$$

onde C_{ijkl} é um tensor de quarta ordem, contendo as propriedades elásticas do material. Essa relação também pode ser encontrada na bibliografia (para materiais isotrópicos) como:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (2.14)$$

onde λ e G são as chamadas constantes de Lamè, dadas por:

$$\lambda = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \quad (2.15)$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.16)$$

G é chamado de módulo de elasticidade transversal do material, E é o módulo de elasticidade longitudinal do material, ν é o coeficiente de Poisson ou módulo de Young e δ_{ij} é a função delta de Kroneker³.

A relação inversa também é muito utilizada:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma_{kk} \delta_{ij} \right) \quad (2.17)$$

2.5. Equações de compatibilidade

Partindo da condição que assegura a continuidade do campo de deslocamentos, eq. (2.1) a (2.6), da Lei de Hooke e das derivadas das equações de equilíbrio, chega-se a outra relação, a equação diferencial em tensões, que pode ser escrita em função dos deslocamentos. Para o nosso estudo, é mais conveniente apresentar esta forma:

$$\frac{1}{(1-2\nu)} u_{j,ij} + u_{i,ij} + \frac{b_i}{G} = 0, \quad \text{com } i, j = 1, \dots, 3 \quad (2.18)$$

que é também conhecida como Equação de Navier (3D).

2.6. Condições de contorno (fórmula de Cauchy)

Dado um ponto em equilíbrio, qualquer superfície passante por este ponto define um conjunto de forças de superfície cujas componentes são dadas pelo vetor:

$$p_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \quad (2.19)$$

$$p_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z \quad (2.20)$$

$$p_z = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_z n_z \quad (2.21)$$

ou, em notação indicial:

$$p_i = \sigma_{ij} n_j \quad (2.22)$$

³ Função delta de Kronecker é uma função equivalente a 1 quando $i = j$ e a 0 quando $i \neq j$.

onde n_j é o vetor normal à superfície considerada, contendo os co-senos diretores.

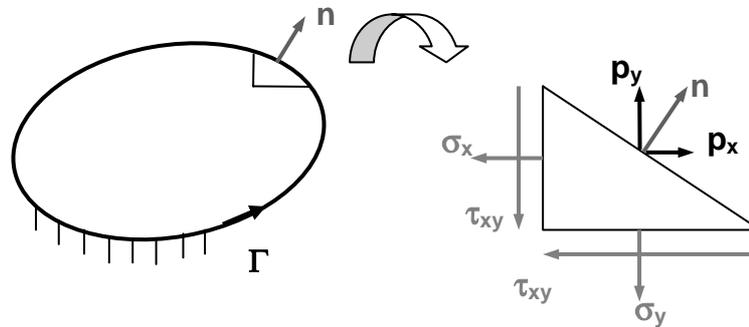


Figura 2.2 – Forças de superfície atuantes em um elemento diferencial bidimensional.

Em duas dimensões as eq. (2.19) e (2.20) se resumem a:

$$p_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \quad (2.23)$$

$$p_y = \tau_{yx} n_x + \sigma_y n_y \quad (2.24)$$

tendo em vista que a componente z , das relações, some.

2.7. Problemas planos

Em certos problemas tridimensionais, é bastante útil fazer simplificações para modelos bidimensionais, desprezando uma grandeza em relação às demais. Assim, se pode ter estado plano de tensão ou de deformação.

No Método dos Elementos de Contorno (MEC) trabalha-se com a formulação do estado plano de deformação, cuja solução fundamental é conhecida. Quando o problema estiver no estado plano de tensão, é necessária uma correção no coeficiente de Poisson, com a seguinte alteração:

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (2.25)$$

2.7.1. Estado plano de tensão (EPT)

Ocorre quando uma das dimensões (espessura) é bem menor em relação às demais, podendo ser considerada como um diferencial. A tensão é então

considerada constante na espessura e as componentes na direção desta espessura podem ser desprezadas. Estruturas onde o carregamento considerado atua em seu plano médio, sem ser perpendicular a ele, como vigas paredes e chapas, são bons exemplos deste modelo. Neste estado a configuração de tensões na terceira dimensão é nula, ou seja:

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0 \quad (2.26)$$

2.7.2. Estado plano de deformação (EPD)

Ocorre quando uma das dimensões é muito maior que as demais, tanto que se pode considerar que os deslocamentos e, portanto, as deformações nesta direção (direção da maior dimensão) são desprezíveis. É muito mais freqüente em problemas de engenharia, sendo esta a razão pela qual se aplica o coeficiente de Poisson corrigido no caso de EPT. Barragens, túneis, tubos enterrados são exemplos desse estado plano. Aqui as componentes de deformação na terceira dimensão são nulas, ou seja:

$$\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (2.27)$$

3 *Método dos Elementos de Contorno*

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos e a formulação do método, que foram utilizados para o presente estudo.

Para o desenvolvimento deste capítulo foi consultada a seguinte bibliografia: Brebbia e Domingues (1992), Venturini (1988), Wutzow (2003), Assan (2003) e Maciel (2003).

3.1. Introdução

O Método dos Elementos de Contorno (MEC), consiste numa ferramenta numérica para a resolução das equações integrais que governam o problema, fazendo-se aproximações da geometria do contorno (discretização) do domínio em elementos e dos valores de contorno. A aproximação da geometria é mostrada na Figura 3.1.

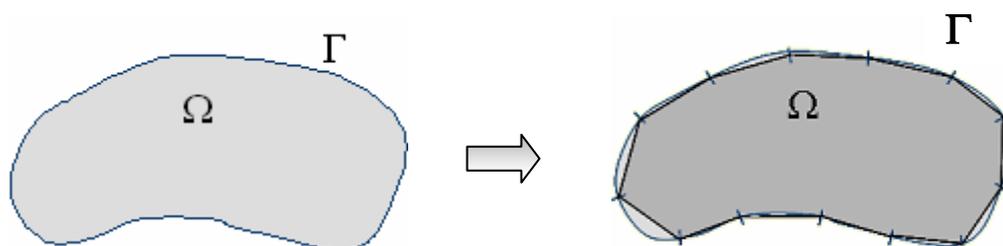


Figura 3.1 – Discretização do problema pelo MEC.

Em relação a outros métodos numéricos, o MEC apresenta menor necessidade de entrada de dados (entrada somente das coordenadas inicial e final dos nós dos elementos) e melhor aproximação dos problemas quando definidos por regiões infinitas e problemas de concentração de tensões

(mecânica da fratura). No entanto as matrizes do sistema de equações são completas e não simétricas.

3.2. Condições de contorno

Em um problema elástico bidimensional, nos deparamos com as seguintes condições de contorno:

- Condições de contorno essenciais (do tipo Dirichlet): no problema elástico estas condições equivalem a deslocamentos (vetor).

$$u = \bar{u} \quad (3.1)$$

- Condições de contorno naturais (do tipo Neuman): no problema elástico estas condições equivalem a forças de superfície (distribuídas).

$$p = \bar{p} \quad (3.2)$$

A barra indica que o valor é conhecido. Na Figura 3.2 temos um exemplo da aplicação das condições de contorno.

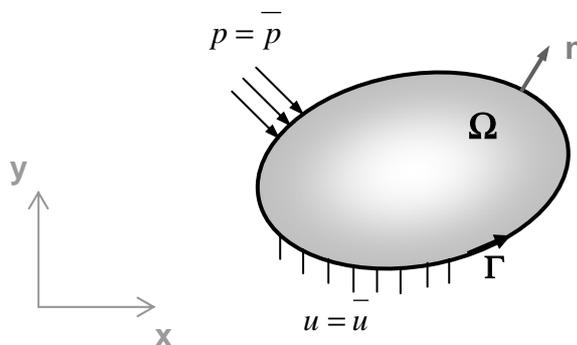


Figura 3.2 – Condições de contorno em um domínio elástico.

O contorno Γ é percorrido de maneira que o domínio Ω esteja sempre à esquerda, desta maneira garantindo que o vetor normal n esteja apontando para fora do domínio. Assim, quando o contorno é percorrido no sentido anti-horário, o sólido é como o mostrado na Figura 3.2. Se o contorno for percorrido no sentido horário, o sólido discretizado é uma cavidade em um meio infinito (Figura 3.3).

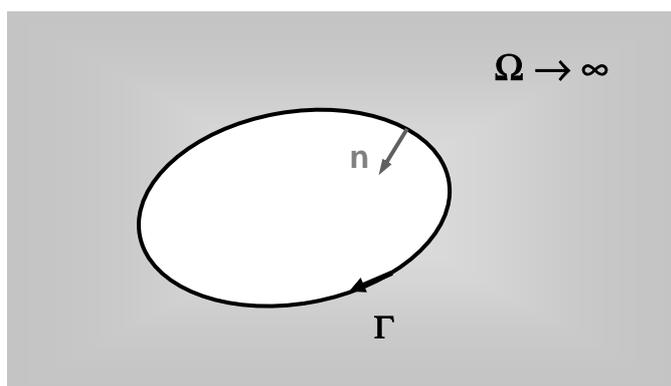


Figura 3.3 – Exemplo de domínio infinito, discretização de cavidade.

3.3. Representação integral

O equacionamento geral para o MEC pode ser obtido pelo teorema da reciprocidade de Betti ou através do Método dos Resíduos Ponderados. Neste trabalho, o ponto de partida será o Método dos Resíduos Ponderados.

O MEC se aplica a problemas que podem ser representados pela equação de Laplace:

$$\nabla^2 u = 0 \quad (3.3)$$

Com a adição de um termo independente, a equação denominada agora Poisson fica assim definida:

$$\nabla^2 u + b = 0 \quad (3.4)$$

onde b são fontes distribuídas no domínio e ∇^2 é o operador Laplaciano⁴.

Com a introdução de um erro ou resíduo, se pode escrever:

$$\nabla^2 u + b = R \quad (3.5)$$

Multiplicando essa equação por uma função ponderadora ou peso ω e integrando no domínio, a igualdade não é alterada:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u + b) \omega d\Omega = 0 \quad (3.6)$$

⁴ O Laplaciano de uma função A , qualquer, é dado pela derivada segunda parcial da função A :

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2}, \text{ em 2D.}$$

Essa equação apresenta apenas o resíduo de domínio, que é o usual do método dos resíduos ponderados. Para se obter o equacionamento completo com o não atendimento dos valores prescritos no contorno, é necessário integrá-la por partes duas vezes, impor as condições de contorno e integrar por partes no sentido inverso para se chegar à conhecida forma fraca dos Resíduos Ponderados (*Weak Formulation*), para o problema potencial:

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u + b) \omega d\Omega + \int_{\Gamma_1} (u - \bar{u}) \frac{d\omega}{dn} d\Gamma - \int_{\Gamma_2} \left(\frac{du}{dn} - \frac{d\bar{u}}{dn} \right) \omega d\Gamma = 0 \quad (3.7)$$

Desenvolvendo analogamente para o problema elástico, onde o termo referente à equação de Poisson ($\nabla^2 u + b = 0$) é a equação de equilíbrio ($\sigma_{ij,j} + b_i = 0$), se pode escrever a eq. (3.7) como:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) u_i^* d\Omega - \int_{\Gamma_1} (\bar{u}_i - u_i) p_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma_2} (p_i - \bar{p}_i) u_i^* d\Gamma = 0 \quad (3.8)$$

Onde $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, Γ_1 é a região do contorno onde os deslocamentos são conhecidos (prescritos) e as forças de contorno desconhecidas, Γ_2 as forças de contorno são conhecidas e os deslocamentos incógnitos. Os termos com asterisco (*) são relativos à solução fundamental, que será vista no próximo item.

No problema elástico, a eq. (3.4) é a equação de equilíbrio (2.10), que pode ser escrita em função da deformação ε (pela Lei de Hooke generalizada) e esta, por sua vez, é função dos deslocamentos, eq. (2.12). Desta maneira, esta relação satisfaz a equação de Laplace, sendo função indireta das derivadas segundas dos deslocamentos.

Manipulando-se a eq. (3.8), chega-se à conhecida identidade Somigliana, que fornece os valores dos deslocamentos nos pontos internos u_l em função de u_i e p_i (termos no contorno):

$$u_l(s) = \int_{\Gamma} u_{li}^*(s, q) p_i(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{li}^*(s, q) u_i(q) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{li}^*(s, q) b_i(q) d\Omega \quad (3.9)$$

onde l é a direção da componente atuante. Lembrar que, para $s \notin \Omega$, $u_i(s) = 0$.

3.4. Solução fundamental (Kelvin)

A solução fundamental pode ser vista, fisicamente, pela ação de uma carga unitária e concentrada aplicada num ponto “s” (ponto fonte), cujo efeito é medido em um ponto qualquer “q”, de domínio infinito.

Trabalhando a equação de Navier, eq. (2.18), é possível obter a solução fundamental em deslocamentos para o problema elástico bidimensional, EPD (para o EPT basta aplicar o coeficiente de Poisson corrigido, como já mencionado) através da substituição de b_i do equilíbrio, eq. (2.10), pela distribuição delta de Dirac (anexo D) multiplicado pelo delta de Kronecker.

$$u_{ij}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[-(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ij} + r_i r_j \right] \quad (3.10)$$

Derivando-se esta solução e substituindo-se na eq. (2.12), obtém-se a solução fundamental em componentes de deformação:

$$\varepsilon_{ijk}^* = -\frac{1}{8\pi Gr(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik}) - r_i \delta_{jk} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \quad (3.11)$$

Da lei de Hooke generalizada, eq. (2.13), os valores para tensão podem ser também obtidos:

$$\sigma_{ijk}^* = -\frac{1}{4\pi r(1-\nu)} \left[(1-2\nu)(r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik}) - r_i \delta_{jk} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \quad (3.12)$$

E, finalmente a solução fundamental para forças de superfície é dada pela fórmula de Cauchy, eq. (2.22), assumindo a seguinte forma:

$$p_{ij}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} + 2r_{,i} r_{,j} \right] + (1-2\nu)(n_i r_{,j} - n_j r_{,i}) \right\} \quad (3.13)$$

onde r é a distância entre o ponto fonte (ou de colocação) “s” ao ponto campo “q”. E $\frac{\partial r}{\partial n}$ é dado por:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} \quad (3.14)$$

e o asterisco indica solução fundamental.

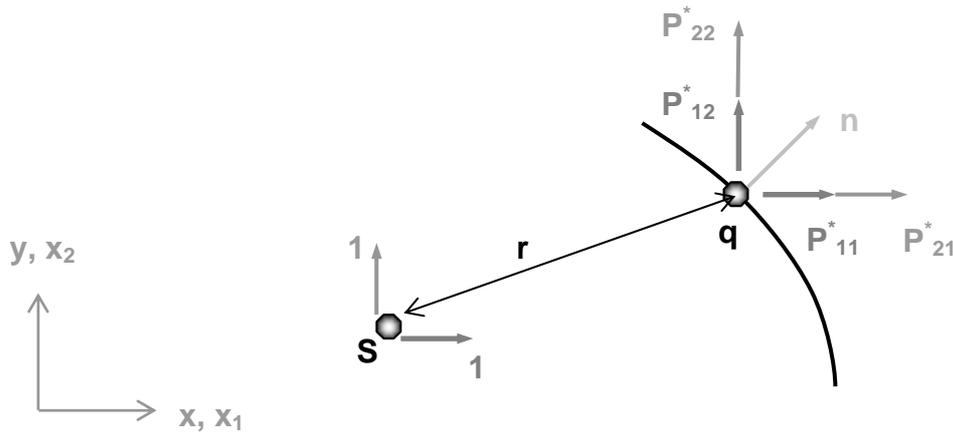


Figura 3.4 – Componentes de p^* .

Desse modo, para cada ponto fonte tem-se as seguintes matrizes para forças de superfície e deslocamento:

$$[p^*] = \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \text{ e } [u^*] = \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

cujos elementos (u_{ij}^* e p_{ij}^*) da primeira linha referem-se à carga unitária na primeira direção (x ou x_1) e os da segunda linha à direção y ou x_2 (ver Figura 3.4).

3.5. Equação integral para pontos no contorno

Para ponto fonte pertencente ao contorno (uma particularidade de ponto pertencente ao domínio), deve-se utilizar um artifício a fim de evitar a singularidade (quando o raio for $\cong 0$, na divisão $1/r$ ou $1/r^2$, o resultado tende ao infinito) que ocorre quando a integração passar no próprio ponto. Assim, é usual acrescentar um domínio complementar infinitesimal, um semicírculo (no caso bidimensional) sobre o ponto fonte (coincidindo com o centro do semicírculo), englobando-o. No limite, quando o raio desse semicírculo tender a zero, a resposta será a verdadeira.

Assim, a Somigliana para pontos do contorno assume a seguinte forma:

$$c_{ii} u_i(s) = \int_{\Gamma} u_{ii}^*(s, q) p_i(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ii}^*(s, q) u_i(q) d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ii}^*(s, q) b_i(q) d\Omega \quad (3.16)$$

onde $c_{ii} = \frac{1}{2} \delta_{ij}$ para contornos suaves. Para contornos com angulosidades (ver Figura 3.5), c_{ii} é dado pelos coeficientes da matriz:

$$c = \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{2\pi} + \frac{\cos(2\gamma)\sin(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\sin(2\gamma)\sin(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} \\ \frac{\sin(2\gamma)\sin(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} & \frac{\alpha}{2\pi} - \frac{\cos(2\gamma)\sin(\alpha)}{4\pi(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

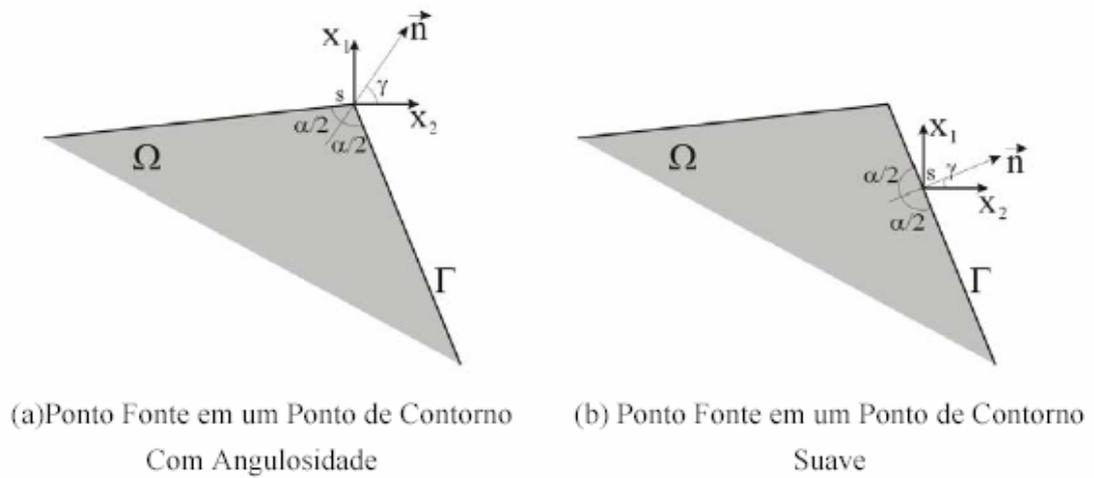


Figura 3.5 – Ponto fonte no contorno – Wutzow (2003).

Neste estudo a parcela das forças volumétricas da eq. (3.16) foi desprezada. Genericamente, a Somigliana pode ser escrita (já com a exclusão do termo):

$$c_{ii}u_i(s) = \int_{\Gamma} u_n^*(s, q) p_i(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_n^*(s, q) u_i(q) d\Gamma \quad (3.18)$$

e os coeficientes c_{ii} podem ser representados pelos elementos das matrizes:

- $c = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ para pontos no contorno (suave);
- pela eq. (3.17) para pontos no contorno (com angulosidades);
- $c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ para pontos fora do domínio;
- $c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ para pontos internos (será apresentado a seguir).

3.6. Equação integral para pontos internos (tensões)

Derivando a Somigliana, eq. (3.9), e substituindo na Lei de Hooke, juntamente com as relações de deformação e deslocamento, é possível obter-se a equação para os pontos internos em tensões:

$$\sigma_{ij}(s) = \int_{\Gamma} D_{ijk} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk} u_k d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ijk} b_k d\Omega \quad (3.19)$$

onde D_{ijk} e S_{ijk} são tensores de terceira ordem, dados por:

$$D_{ijk} = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_l} + G \left(\frac{\partial u_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \quad (3.20)$$

que se transforma em:

$$D_{ijk} = \frac{1}{r} \left\{ (1-2\nu) (\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right\} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad (3.21)$$

e

$$S_{ijk} = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} \frac{\partial p_{ik}^*}{\partial x_l} + G \left(\frac{\partial p_{ik}^*}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{jk}^*}{\partial x_i} \right) \quad (3.22)$$

ou ainda:

$$S_{ijk} = \frac{2G}{r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + 2\nu (n_i r_{,j} + n_j r_{,i}) r_{,k} + \right. \\ \left. + (1-2\nu) (2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad (3.23)$$

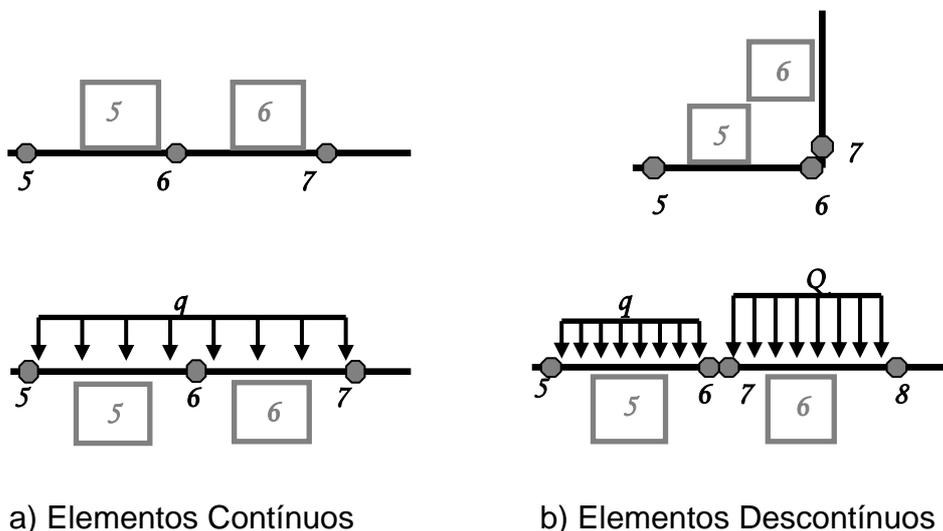
Neste trabalho despreza-se as forças volumétricas, desaparecendo o último termo da (3.19).

3.7. Sistema de equações

Agora será abordado o procedimento da obtenção da forma algébrica das representações descritas anteriormente.

Para cada nó do problema, deve ser informada uma das condições de contorno: ou deslocamento ou força deve ser prescrito nos nós. Para este trabalho, são utilizados elementos lineares isoparamétricos contínuos (Figura 3.6-a) ou descontínuos (Figura 3.6-b), sendo este utilizado para captar melhor

certos parâmetros tais como diferença entre carregamentos em elementos adjacentes ou condições de contorno diferentes em um mesmo nó. Além desses parâmetros, a aproximação utilizada para campos de deslocamento de forças de superfície, foi a linear (polinômio do 1º grau).



a) Elementos Contínuos

b) Elementos Descontínuos

Figura 3.6 – Elementos contínuos e descontínuos.

Para explicar os passos de resolução do sistema de equações, comecemos pela equação Somigliana, eq. (3.18), na forma mais geral e já sem o termo das forças de massa, repetida aqui por conveniência:

$$c_{ik}u_k(s) = \int_{\Gamma} u_{ik}^*(s, q) p_k(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ik}^*(s, q) u_k(q) d\Gamma$$

As integrais de contorno podem ser transformadas em soma de integrais sobre os elementos, e a geometria destes pode ser escrita em função das coordenadas dos nós que o definem e de funções interpoladoras:

$$c_{ik}u_k = \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} u_{ik}^* p_k d\Gamma - \sum_{j=1}^{NE} \int_{\Gamma_j} p_{ik}^* u_k d\Gamma \quad (3.24)$$

onde u e p são expressos em funções aproximadoras:

$${}^j u_k = \phi_m {}^j U_k^m \quad (3.25)$$

$${}^j p_k = \phi_m {}^j P_k^m \quad (3.26)$$

O índice j representa o elemento, m o nó e k a direção da componente.

Rearranjando e substituindo as funções aproximadoras:

$$c_{ik}u_k = -\sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} p_{ik}^* \phi_m d\Gamma_j \right) \cdot U_k^m + \sum_{j=1}^{NE} \left(\int_{\Gamma_j} u_{ik}^* \phi_m d\Gamma_j \right) \cdot P_k^m \quad (3.27)$$

onde NE representa o número de elementos de contorno em que o mesmo foi discretizado. Os termos entre parênteses geram duas matrizes: $[ah]$ e $[ag]$, respectivamente, conforme for variando os elementos e os nós. Portanto, para cada elemento é gerado um conjunto de matrizes e vetores do tipo:

$$\begin{bmatrix} ah_{11}^1 & ah_{12}^1 & ah_{11}^2 & ah_{12}^2 \\ ah_{21}^1 & ah_{22}^1 & ah_{21}^2 & ah_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.28)$$

ou

$$\begin{bmatrix} ag_{11}^1 & ag_{12}^1 & ag_{11}^2 & ag_{12}^2 \\ ag_{21}^1 & ag_{22}^1 & ag_{21}^2 & ag_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_1^2 \\ P_2^2 \end{Bmatrix} \quad (3.29)$$

conforme o caso. A Figura 3.7 ilustra o posicionamento dos termos da matriz, devido a uma carga S, atuando nas direções $i=1$ (x) e $i=2$ (y).

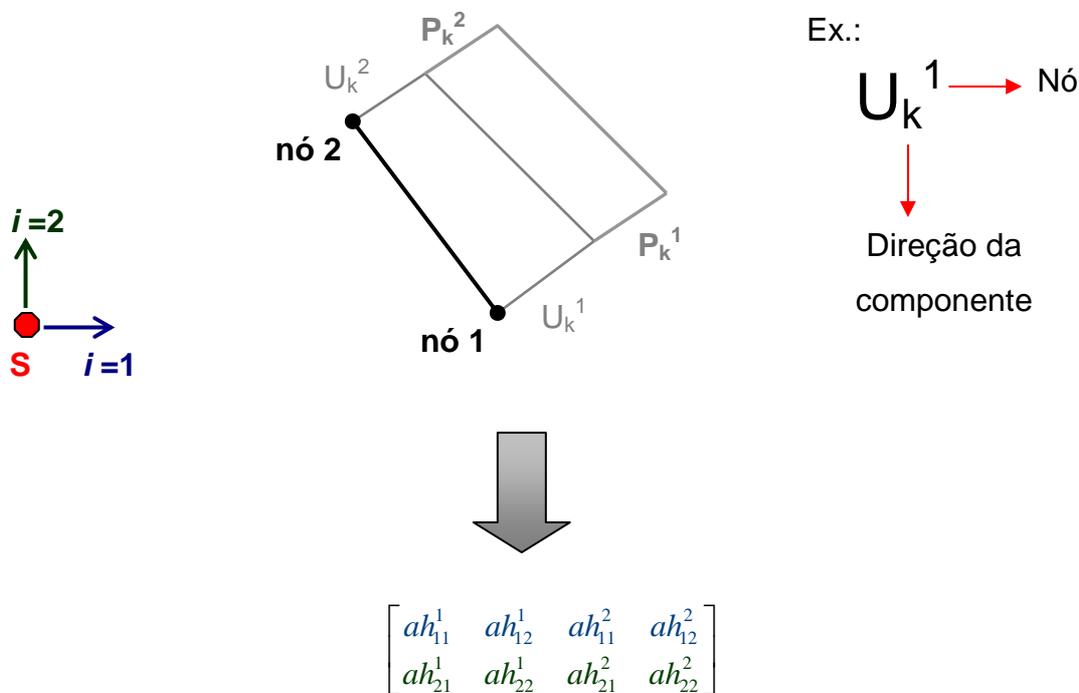


Figura 3.7 – Geração das matrizes e vetores locais.

Cada matriz destas é então montada em uma matriz global $[H]$ e $[G]$ que terá ordem $2 \cdot NC \times 2 \cdot NC$ (ponto fora ou sobre o contorno), já que para cada ponto fonte (que para aproximação linear deve ser dois, coincidindo assim com o número de nós do contorno), temos duas direções (x ou y). Por exemplo, tomando o caso mais simples, quando $[c]=0$ (ponto fora), o problema final a ser resolvido é do tipo:

$$[0] = -[H]\{U\} + [G]\{P\} \quad (3.30)$$

ou:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} \quad (3.31)$$

Quando o ponto fonte for interno ou sob o contorno, ou seja, a submatriz $[c]$ for diferente de zero, os respectivos termos são adicionados aos da matriz $[H]$ e o mesmo sistema é resolvido.

Ambos vetores conterão valores conhecidos e desconhecidos (desde que não seja um caso de movimento de corpo rígido) misturados. Assim, com um correspondente código, transfere-se os valores conhecidos e agrupando-os em uma única matriz $[A]$ ou num vetor $\{B\}$ (dependendo se provinha de matriz ou vetor), o sistema final de equações consiste na resolução de:

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (3.32)$$

sendo $\{X\}$, o vetor contendo todas as incógnitas do problema (deslocamento e forças de superfície misturadas).

Após a resolução deste sistema de equações, os valores calculados são transferidos para a posição correspondente nas matrizes e vetores. Com os valores de contorno conhecidos – forças de superfície $\{P\}$ e deslocamentos $\{U\}$ - é possível calcular os deslocamentos dos pontos internos, $\{u\}^p$, dados por:

$$\{u\}^p = -[H']\{U\} + [G']\{P\} \quad (3.33)$$

Agora, as matrizes $[H']$ e $[G']$ terão dimensão $2 \cdot NI \times 2 \cdot NC$, sendo NI o número de pontos internos. Para o cálculo das tensões nos pontos internos,

são utilizadas as equações (3.21) e (3.23) que formarão os elementos das matrizes $[G^e]$ e $[H^e]$ respectivamente.

$$\{\sigma\} = -[H^e]\{U\} + [G^e]\{P\} \quad (3.34)$$

Estas terão dimensão $3 \times N_{ix} \times 2 \times N_C$ e será obtido, com a resolução desse sistema, um vetor contendo os valores das tensões σ_x , τ_{xy} e σ_y para cada ponto interno.

Para a resolução das integrais com as quais se obtém as matrizes do sistema de equações, podem ser aplicadas várias técnicas. Pode-se fazer isto numericamente ou analiticamente. Para o cálculo numérico foi empregada a quadratura de Gauss-Legendre (Anexo A).

No processo de montagem global das matrizes, é importante salientar que quando ocorrer nó simples ou elemento contínuo, a contribuição é levada em conta e as parcelas dos nós coincidentes são somadas nas $[H]^e$'s e $[G]^e$'s. Contudo, quando o elemento for descontínuo ou nó duplo, não há contribuição entre estes nós.

Capítulo

4 *Mecânica da fratura elástica linear*

Neste capítulo serão apresentados conceitos fundamentais para o estudo da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL), de interesse a este trabalho.

Para o estudo do presente capítulo foram utilizadas as seguintes referências: Maciel (2003), Lopes (1996), Salgado (1998), Saleh (1997), Mi (1996), Broek (1986) e outros que serão convenientemente citados.

4.1. Introdução

A fratura é um mecanismo de falha potencialmente catastrófico, caracterizado pela propagação instável de fissuras extremamente rápida e é, geralmente, o evento final de um processo durante o qual o nível de resistência é gradualmente reduzido pela presença de propagação de fissuras.

Especialmente a MFEL tem ampla aplicação em materiais de comportamento frágil, onde praticamente não ocorre deformação plástica antes e durante o processo de surgimento de fissuras.

O ponto inicial é geralmente uma pequena fenda ou pré-fissura em uma região de concentração de tensões, cujo caminho se desenvolve até transformar-se em uma fissura.

Se a estrutura é submetida a processos cíclicos de carga, então a fissura aumenta, inicialmente a taxas muito baixas (com cargas abaixo do limite), em um processo conhecido como propagação de fissuras por fadiga. Este processo, crescendo de maneira estável e lenta, alcançará um nível crítico de tensão, e neste instante, a estrutura não é mais capaz de suportar as cargas e ocorre a fratura.

A fadiga foi definida (experimentalmente) como o número de ciclos de carga necessários para causar a falha para um determinado valor de

carregamento aplicado. Geralmente 95% dos ciclos de carga são gastos para a iniciação da fissura e os 5% restantes para a propagação lenta. Uma vez que o momento em que ocorrerá a fadiga for determinado, sua vida operacional ficará restrita, até que se substitua o componente antes da iniciação das fissuras ocorrer.

Portanto, o tempo de vida útil de um material é baseado no número de ciclos de cargas antes da iniciação da fissura.

A Mecânica da Fratura é a ferramenta usada na análise de tolerância de dano para estudar propagação de fissuras por fadiga, estudando materiais e estruturas que contenham fendas na forma de fissuras visíveis ou detectáveis.

4.2. Balanço energético

Griffith (1920) estudou o balanço de energia em uma chapa de espessura unitária, constituída de material elástico, submetida a uma tensão σ e contendo uma fissura interna de extensão $2a$, como ilustra a Figura 4.1. A presença de uma fissura reduz o nível de resistência estrutural, e quando a extensão da fissura é aumentada de uma certa quantidade da , a energia potencial total armazenada pelo sistema diminui devido à perda de energia elástica de deformação:

$$\frac{dU_p}{da} = -\zeta \quad (4.1)$$

onde U_p é a energia potencial total e ζ a taxa de perda de energia de deformação.

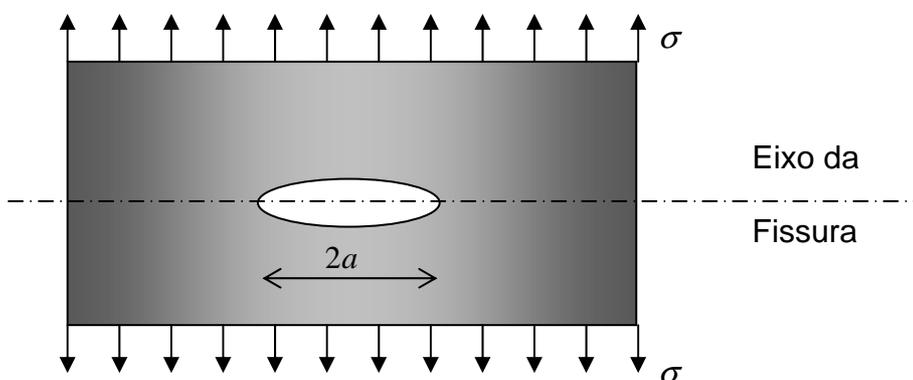


Figura 4.1 – Chapa com uma fissura central sujeita à tensão uniaxial.

O balanço energético do processo de fratura é expresso pela relação:

$$\frac{dU_p}{da} + \frac{dW}{da} = 0 \quad (4.2)$$

onde W é o trabalho realizado.

Para que a fratura ocorra, a taxa de energia de deformação perdida deve ser no mínimo igual à taxa de energia absorvida necessária para formar as duas novas superfícies da fissura, como expressa a relação:

$$\frac{dW}{da} = 2\delta_s \leq \zeta \quad (4.3)$$

onde δ_s é a densidade de energia de superfície por unidade de área e o 2 refere-se à existência de duas superfícies de fissura.

Utilizando os resultados de uma análise de concentração de tensões feita por Inglis (1913) apud Saleh (1997) para o caso de uma chapa infinita contendo um entalhe agudo elíptico, a taxa de energia de deformação perdida é calculada como:

$$\zeta = \frac{\pi\sigma^2 a}{E'} \quad (4.4)$$

onde E' é o módulo de elasticidade (E) do material no caso de E.P.T. ou $E/(1-\nu^2)$ no caso de E.P.D.. Substituindo-se a eq. (4.4) na relação (4.3), é possível a obtenção da tensão de fratura crítica:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2\delta_s E'}{\pi a_c}} \quad (4.5)$$

onde a_c é o tamanho crítico da fissura.

O trabalho de Griffith (1920) foi desenvolvido para o vidro, material com deformação plástica muito limitada. Neste caso, a energia total necessária para a fratura é aproximadamente igual à energia de superfície. No entanto, para materiais mais dúcteis como os metais, a energia de fratura costuma ser em ordem de grandeza muito maior do que a energia de superfície ($S \gg \delta_s$).

Orowan (1952) propôs uma modificação à eq. (4.5), para usá-la em materiais dúcteis. Ele sugeriu a substituição da energia de superfície $2\delta_s$ da equação por uma energia efetiva de fratura, dada por $2(\delta_s + \delta_p)$, onde δ_p é a propriedade do material que define a taxa de energia de deformação plástica

por área unitária fissurada. Assim, o critério de falha para materiais dúcteis é dado por:

$$\sigma_c = \sqrt{\frac{2(\delta_s + \delta_p) E'}{\pi a_c}} \quad (4.6)$$

Irwin (1948) apud Mi (1996), preferiu formular o problema em termos da taxa da perda de energia elástica:

$$\zeta = \zeta_c = 2(\delta_s + \delta_p) \quad (4.7)$$

onde ζ_c é a energia global da fissura.

4.3. Modos de deformação da fissura

Uma estrutura com fissura pode apresentar um ou mais modos de deformação. Basicamente, existem três modos:

- Modo I, Modo de Abertura ou Tração
- Modo II, Modo de Escorregamento ou Cisalhamento
- Modo III ou Modo de Rasgamento

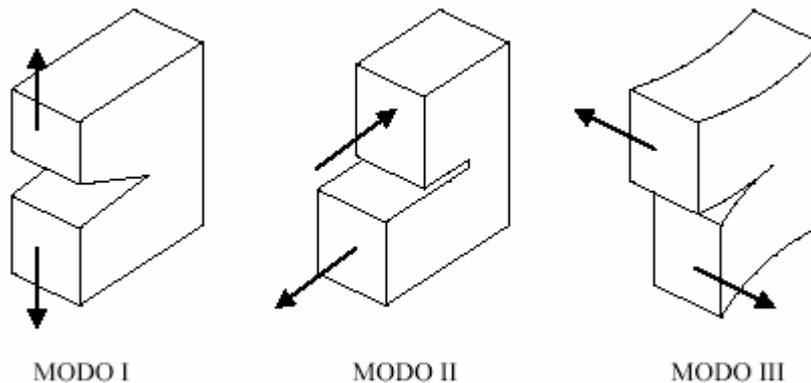


Figura 4.2 – Modos básicos de deformação.

4.4. Aproximação do campo de tensões

Irwin (1957), estudou o problema do campo de tensões em torno da ponta da fissura usando a teoria da elasticidade linear.

Considere uma chapa qualquer, sendo solicitada em seu próprio plano, como mostra a Figura 4.3:

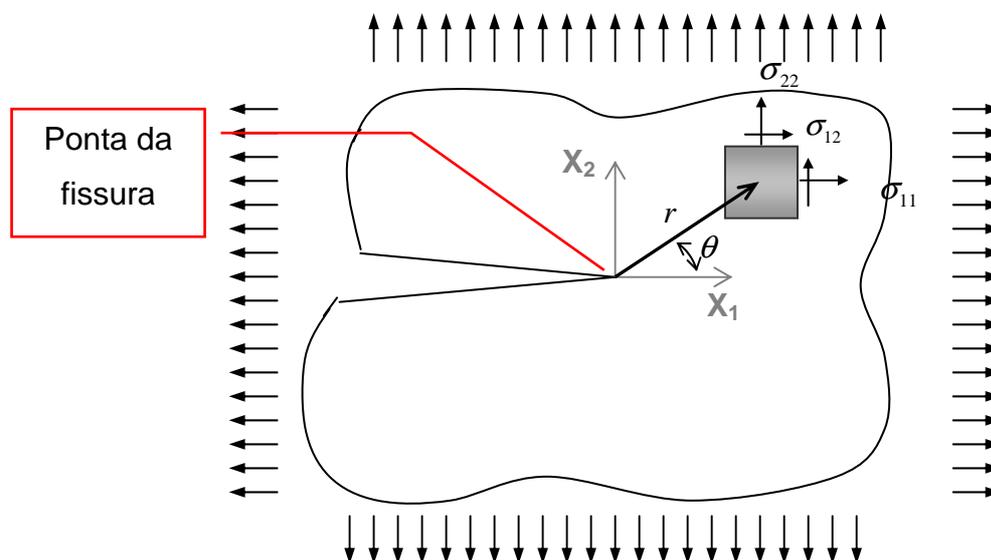


Figura 4.3 – Campo de tensões próximos à ponta da trinca

A distribuição de tensões em um elemento próximo à ponta da fissura é dada por:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(r, \theta) \quad , \quad i, j = 1, 2 \quad (4.8)$$

onde r é a distância do elemento infinitesimal à ponta da trinca e θ o ângulo indicado na Figura 4.3. $f_{ij}(r, \theta)$ são funções trigonométricas conhecidas. K é uma constante chamada Fator de Intensidade de Tensão (FIT), e é obtida da relação:

$$K = y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (4.9)$$

onde y é uma função que depende da geometria do corpo, lugar da fissura e carregamento.

O FIT (K), pode ser decomposto em função dos três modos básicos de deformação. Indica-se com subscrito o modo de deformação ao que está associado, assim sendo, para o modo misto⁶ (entre os modos I e II), por exemplo, as tensões são:

⁶ Modo misto é o estado de deformação caracterizado pela presença de mais de um modo básico. Os modos I e II são mais comumente encontrados em problemas de engenharia.

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (4.10)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] \quad (4.11)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right)\right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (4.12)$$

e os deslocamentos u_i são dados por:

$$u_1 = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{1}{2}(\kappa-1) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{1}{2}(\kappa+1) + \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (4.13)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{1}{2}(\kappa+1) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] + \frac{K_{II}}{G} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\frac{1}{2}(1-\kappa) + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \quad (4.14)$$

onde $G = E/2(1+\nu)$ é o módulo de elasticidade transversal, eq. (2.16). O

coeficiente $\kappa = (3-4\nu)$ para E.P.D. e $\kappa = \frac{(3-\nu)}{(1+\nu)}$ para E.P.T.

Vários trabalhos propõem métodos para obtenção dos FIT e ângulo de propagação da fissura. Para os FIT, a integral J é um dos mais conhecidos (numericamente falando), consistindo na integração ao redor da fissura, quantificando a taxa de energia disponibilizada para o fraturamento. Anderson (1995), Blandford et al. (1981), Fett & Munz (1997), Martínez & Dominguez (1984) apresentam algumas das técnicas existentes para extração dos FIT.

4.5. Fator de Intensidade de Tensão (FIT)

Considere a Figura 4.4:

$$K_I = COD \frac{E}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \text{ e } K_{II} = CSD \frac{E}{8} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad (4.18)$$

Enquanto que para o EPD tem-se:

$$K_I = COD \frac{G}{4(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \text{ e } K_{II} = CSD \frac{G}{4(1-\nu)} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad (4.19)$$

Estes valores podem ser calculados para r (ver Figura 4.4) coincidente com alguns nós da fissura.

Uma técnica bastante simples, apresentada por París & Cañas (1997), baseada nas tensões em frente à fissura, foi também empregada. Neste trabalho será apresentado um procedimento análogo, mas para os COD obtidos nos nós ao longo da fissura. Partindo da eq. (4.18), para o modo I, a técnica propõe a aplicação da função logarítmica a ambos os lados desta equação e o agrupamento dos valores constantes:

$$\ln(COD) = \ln\left(\frac{8}{E\sqrt{2\pi}} K_I\right) + 0,5 \ln(r) \quad (4.20)$$

Os valores de COD , obtidos pelo MEC em diversos nós são plotados em um gráfico em função da distância r à ponta da fissura, onde se observa que nos pontos localizados muito próximos à ponta ocorre um erro numérico, devido à presença da singularidade. Para obter os valores de COD diretamente dos últimos nós da fissura, deveriam ser empregados elementos especiais, já que a aproximação adotada foi linear.

Fazendo um gráfico $\ln(COD)$ por $\ln(r)$, seleciona-se uma região com os pontos onde a resposta é admissível (comparada com a analítica).

A equação (4.20) pode assim ser reescrita:

$$\ln COD = b + m \ln r \quad (4.21)$$

Portanto, utilizando-se os valores obtidos para vários pontos pode-se determinar a reta que melhor representa a equação (4.21) e assim pode-se ajustar uma linha de tendência. O valor de m é obtido pela inclinação da reta e a partir dessa aproximação uma resposta admissível para o FIT pode ser obtida por:

$$K_I = \frac{e^b E \sqrt{2\pi}}{8} \quad (4.22)$$

para o EPT.

4.6. Critério da tenacidade à fratura

Para o EPD, o valor da tenacidade à fratura K_{IC} (ou fator de intensidade de tensão crítico) não deverá ultrapassar o valor de K_I , para o modo I de deformação.

$$K_I \geq K_{IC} \quad (4.23)$$

No caso de EPT, analogamente tem-se:

$$K_I \geq K_C \quad (4.24)$$

onde K_C é a tenacidade à fratura para o estado plano de tensão.

Ou seja, a partir de um certo valor crítico K_C ou K_{IC} , dependendo do caso, a fissura irá se propagar.

Para o modo misto de deformação, não há teorias consolidadas desenvolvidas no momento.

4.7. Direção de propagação

O Critério da Máxima Tensão Principal (CMTP), adotado neste trabalho, postula, de acordo com Erdogan & Sih (1963), que a propagação ocorrerá na direção perpendicular à máxima tensão principal. Desta forma, é gerada automaticamente uma série de pontos ao redor da ponta da fissura e a cada um destes é feito o cálculo das tensões girado em seus respectivos ângulos, obtendo-se assim a tensão principal em cada um (equivalente á tensão circunferencial, em coordenadas polares), como mostra a Figura 4.4. Após este processo, a posição do ponto com a máxima tensão principal indicará a direção ou ângulo θ de propagação. O raio (r) será o tamanho do incremento (Δa).

O CMTP pode ser usado tanto na MFEL quanto no fraturamento não-linear.

Pela MFEL a propagação ocorrerá se o valor estimado de K_I superar um valor crítico, K_{IC} (EPD) e K_{IC} (EPT).

Para o modelo em forças coesivas a propagação ocorrerá se a tensão obtida pelo CMTP ultrapassar a tensão resistente do material, f_t' .

Capítulo

5 *Modelo Dual*

5.1. Introdução

Utilizando a equação Somigliana, eq. (3.18) ou também chamada equação em deslocamentos para a modelagem da fissura como superfície usual de contorno, não é possível desprezar o tamanho da abertura Δ da mesma. Como será apresentado posteriormente, para valores de até 10^{-4} se obteve bons resultados, o que não aconteceu para valores menores de Δ (ou seja, abertura tendendo à zero). Este problema já foi estudado por Portela, Aliabadi & Rooke (1992), concluindo que para utilizar $\Delta = 0$ deveria ser adotado um outro procedimento, que foi chamado de Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD). O “dual” se deve ao fato de em uma das faces da fissura ser aplicada a equação em deslocamento “U” e na outra a sua derivada, a equação em forças de superfície “P”. Na Figura 5.1, tem-se um exemplo para o modo I de deformação, nas condições de contorno indicadas. Também é representada a estratégia de modelagem da fissura, mostrando qual equação (U ou P) é aplicada em cada contorno.

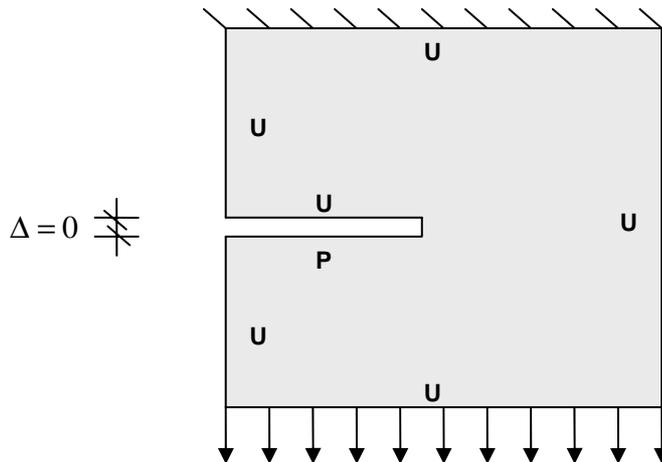


Figura 5.1 – Estratégia de modelagem da fissura.

5.2. Sistema de equações

Na ausência de forças volumétricas, a representação integral dos deslocamentos num ponto fonte interno é dada por:

$$u_i(s) = \int_{\Gamma} u_{ii}^*(s, q) p_i(q) d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ii}^*(s, q) u_i(q) d\Gamma \quad (5.1)$$

Derivando-se esta equação com relação ao ponto fonte para obtê-la em deformações e em seguida substituindo na Lei de Hooke, se chega à equação em tensões:

$$\sigma_{ij}(s) = \int_{\Gamma} D_{ijk} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk} u_k d\Gamma \quad (5.2)$$

Levando-se esta integral para um contorno suave, no limite quando o ponto interno tende a um ponto do contorno, de acordo com Portela et al. (1993), a eq. (5.2) pode ser reescrita como:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij}(s) = \int_{\Gamma} D_{ijk} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{ijk} u_k d\Gamma \quad (5.3)$$

As integrais da eq. (5.3) devem ser calculadas no contexto do valor principal de Cauchy e de Hadamard, respectivamente. Aplicando-se a fórmula de Cauchy, eq. (2.22) na eq. (5.3), determina-se a equação integral em forças de superfície:

$$\frac{1}{2} p_i = -n_j \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma + n_j \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma \quad (5.4)$$

onde n_j é o vetor normal ao contorno na posição do ponto fonte.

Esta equação utilizada em uma superfície da fratura associada à equação de deslocamento escrita para a outra superfície da fratura permite que a abertura (Δ) seja igual à zero (Figura 5.1).

Analogamente à equação em deslocamento, é montado um sistema global de equações, porém com parcelas obtidas pela integração entre contorno-contorno (CC), fissura-contorno (FC), contorno-fissura (CF) e fissura-fissura (FF). Assim as matrizes H e G globais do sistema ficarão:

$$\begin{bmatrix} H_{CC}^U & H_{CF}^U \\ H_{FC}^U & H_{FF}^U \\ H_{FC}^P & H_{FF}^P \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} G_{CC}^U & G_{CF}^U \\ G_{FC}^U & G_{FF}^U \\ G_{FC}^P & G_{FF}^P \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

sendo que nos termos com índice “P” será aplicada a equação em forças de superfície, eq. (5.4) e nos termos com índice “U” a equação em deslocamento, eq. ((5.1)).

As equações algébricas obtidas para o lado da fratura onde se aplica a eq. (5.4) podem ser escritas matricialmente como:

$$\frac{1}{2} p = -H_{FC}^P U_C - H_{FF}^P U_F + G_{FC}^P P_C + G_{FF}^P P_F \quad (5.6)$$

lembrando que p pode ser escrito com a aproximação do elemento:

$p = \phi_1(\bar{\xi}) + \phi_2(\bar{\xi})$, sendo $\bar{\xi}$ a coordenada adimensional do ponto singular. Portanto a equação acima fica:

$$0 = -H_{FC}^P U_C - H_{FF}^P U_F + G_{FC}^P P_C + G_{FF}^P P_F - \frac{1}{2} \left[\phi_1(\bar{\xi}) p_1^P + \phi_2(\bar{\xi}) p_2^P \right] \quad (5.7)$$

Para um melhor entendimento destas contribuições nas matrizes H e G, no Apêndice A é mostrado um problema simples para elucidar esta questão.

Na MFEL, os valores do vetor P nos nós da fratura são todos conhecidos e iguais à zero (condição de contorno natural nas faces da fissura). Portanto o sistema global consistirá na resolução de:

$$\begin{bmatrix} H_{CC}^U & H_{CF}^U \\ H_{FC}^U & H_{FF}^U \\ H_{FC}^P & H_{FF}^P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_C \\ U_F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{CC}^U & G_{CF}^U \\ G_{FC}^U & G_{FF}^U \\ G_{FC}^P & G_{FF}^P \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_C \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (5.8)$$

Novamente agrupam-se os termos conhecidos e desconhecidos, resolvendo:

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (5.9)$$

onde $\{X\}$ é o vetor com as incógnitas do problema a serem calculadas, entre deslocamentos e forças de superfície.

Na não-linearidade haverá forças de superfície nas faces da fissura (no caso do modelo coesivo, por exemplo).

Para esta modelagem, é utilizada a integração analítica com ponto fonte sobre o contorno. Para os pontos internos é utilizada a integração numérica com subelementação.

5.3. Equação em forças de superfície

Partindo da eq. (5.4), hipersingular, será apresentada a dedução analítica de um dos termos para aproximação linear de um elemento com o ponto fonte contido nele mesmo ou na face oposta da fissura (que possui as mesmas coordenadas, porém co-senos diretores diferentes). As demais equações são apresentadas nos anexos B e C.

Seja a solução fundamental para o termo S_{kij} da eq. (5.4), dada por:

$$S_{kij} = \frac{2G}{r^2} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[(1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] + 2\nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + \right. \\ \left. + (1-2\nu) (2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \frac{1}{4\pi(1-\nu)} \quad (5.10)$$

O termo em $\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)$ é igual a zero, pois o raio de integração é perpendicular ao vetor normal do elemento ($\bar{r} \cdot \bar{n} = 0$), restando apenas:

$$S_{kij} = \frac{1}{r^2} K_3 \quad (5.11)$$

onde:

$$K_3 = \frac{G}{2\pi(1-\nu)} \left\{ 2\nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu) (2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right\} \quad (5.12)$$

é uma função que depende unicamente dos co-senos diretores do elemento a ser integrado. A integração ficará, conforme eq. (5.4):

$$\int_{\Gamma} S_{kij} \phi_m d\Gamma = \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} K_3 \phi_m d\Gamma = K_3 \int_{\Gamma} \frac{1}{r^2} \phi_m d\Gamma \quad (5.13)$$

Dividindo-se o elemento a ser integrado em parcelas a e b , como indicado na Figura 5.2:

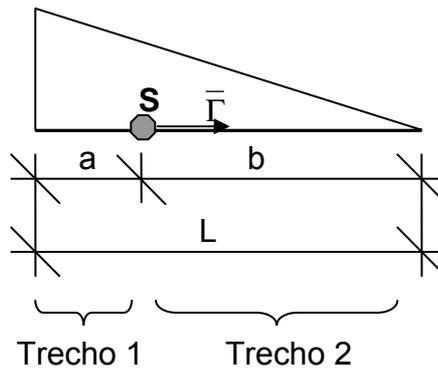


Figura 5.2 – Divisão em trechos para integração.

A integral (5.13) fica:

$$\int_{\Gamma} S_{kij} \phi_m d\Gamma = K_3 \int_{-a}^b \frac{1}{r^2} \phi_m d\bar{\Gamma} = K_3 \left\{ \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{1}{r^2} \phi_m d\bar{\Gamma} + \int_{\varepsilon}^b \frac{1}{r^2} \phi_m d\bar{\Gamma} \right\} \quad (5.14)$$

onde ε representa uma distância infinitesimal medida em relação ao ponto fonte. Para as funções de forma, temos, de acordo com a Figura 5.3:



Figura 5.3 – Funções de forma ϕ_1 e ϕ_2 .

onde d é uma distância genérica a partir do ponto fonte e L a dimensão do elemento. Mas $d = \bar{\Gamma} + a$, portanto:

$$\phi_1 = \frac{1}{L}(L-d) = \frac{1}{L}(L-\bar{\Gamma}-a) = \frac{1}{L}(b-\bar{\Gamma}) \quad (5.15)$$

$$e \quad \phi_2 = \frac{d}{L} = \frac{(\bar{\Gamma} + a)}{L} = \frac{1}{L}(\bar{\Gamma} + a) \quad (5.16)$$

Aqui será mostrado o cálculo do termo com a função de forma ϕ_1 , que chamaremos de S_{kij}^1 . De acordo com as figuras e substituindo em (5.15), para o Trecho 1 têm-se as seguintes relações:

$$\bar{\Gamma} = -r \therefore d\bar{\Gamma} = -dr \text{ e } \phi_1 = \frac{1}{L}(b+r) \quad (5.17)$$

e para o Trecho 2 têm-se:

$$\bar{\Gamma} = r \therefore d\bar{\Gamma} = dr \text{ e } \phi_1 = \frac{1}{L}(b-r) \quad (5.18)$$

Resolvendo-se a integral (5.14) com a mudança dos limites de integração, tem-se:

$$S_{kij}^1 = K_3 \left\{ \int_a^\varepsilon \frac{1}{r^2} \phi_{1(\text{trecho1})} d\bar{\Gamma} + \int_\varepsilon^b \frac{1}{r^2} \phi_{1(\text{trecho2})} d\bar{\Gamma} \right\} \quad (5.19)$$

Substituindo-se as equações (5.17) e (5.18):

$$S_{kij}^1 = K_3 \left\{ \int_a^\varepsilon \frac{1}{r^2} \frac{1}{L} (b+r) (-dr) + \int_\varepsilon^b \frac{1}{r^2} \frac{1}{L} (b-r) dr \right\} \quad (5.20)$$

Manipulando mais esta equação se chega a:

$$S_{kij}^1 = K_3 \left\{ \frac{b}{\varepsilon L} - \frac{b}{aL} - \frac{\ln \varepsilon}{L} + \frac{\ln a}{L} - \frac{1}{L} + \frac{b}{\varepsilon L} - \frac{\ln b}{L} + \frac{\ln \varepsilon}{L} \right\} \quad (5.21)$$

Lembrando que neste caso sobra um termo infinito da integral ao redor do ponto singular, portanto pode-se cancelar o termo em $1/\varepsilon$:

$$S_{kij}^1 = \frac{1}{L} K_3 \left\{ -\frac{b}{a} + \ln a - 1 - \ln b \right\} \quad (5.22)$$

6 Modelo Coesivo

6.1. Apresentação

O modelo coesivo tem grande aplicação no estudo e simulação de materiais de comportamento quase-frágeis, tais como alguns tipos de rochas e concreto.

No concreto, antes mesmo da aplicação de cargas, a estrutura pode apresentar ou desenvolver microfissuras (na interface agregado gráudo e argamassa) devidas à segregação, expansão e contração térmica da argamassa, além da diferença de rigidez entre os materiais argamassa e agregado, entre outras causas. Por este motivo a resistência à tração do concreto é muito menor que a resistência à compressão ($\sigma_T \cong 10\% \sigma_C$). Portanto o estudo a respeito do comportamento destas fissuras e de sua propagação é de grande importância.

De acordo com o estado de tensão e deformação, é possível definir três diferentes regiões em torno da ponta da fissura, como mostra a Figura 6.1, para dois materiais amplamente utilizados em construção civil:

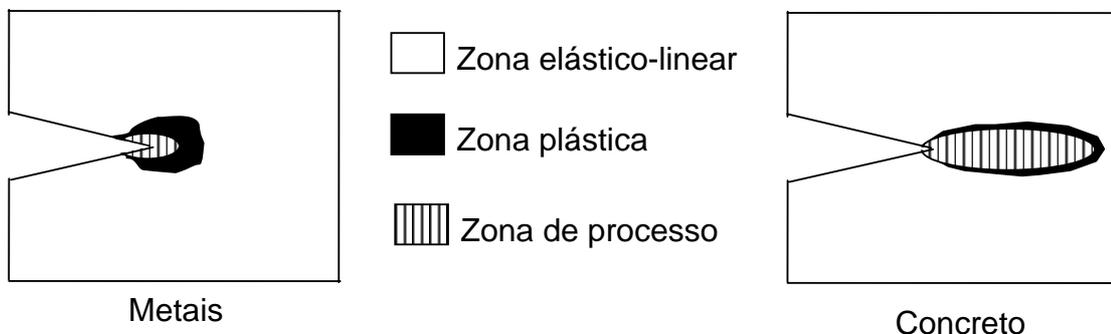


Figura 6.1 – Tensão na região em frente à ponta da fissura (SALEH, 1997).

No concreto a zona de processo é alongada em frente à ponta da fissura e não apresenta deformação plástica significativamente grande. Esta provavelmente é uma das razões pela qual a Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) não pode ser aplicada ao material concreto.

O modelo coesivo, que se originou inicialmente dos clássicos trabalhos de Barenblatt (1962), Dugdale (1960) e Hillerborg (1976) é um modelo não-linear de fraturamento que estabelece que a zona de processo de fratura pode ser modelada como um prolongamento adequado da fissura. Dentro da zona de processo, ocorrem forças coesivas ou fictícias que estão relacionadas com a abertura da fratura através do amolecimento do material. O modelo coesivo é uma aproximação de uma zona de fratura localizada, adotada com o objetivo principal de simplificar matematicamente, desde que preserve os aspectos mais relevantes da realidade física.

A zona de processo é então modelada como uma fissura fictícia, em frente à fissura livre de forças de superfície. A localização da deformação é idealizada como uma abertura das faces da fissura, enquanto a tensão coesiva simula o comportamento tensão-amolecimento.

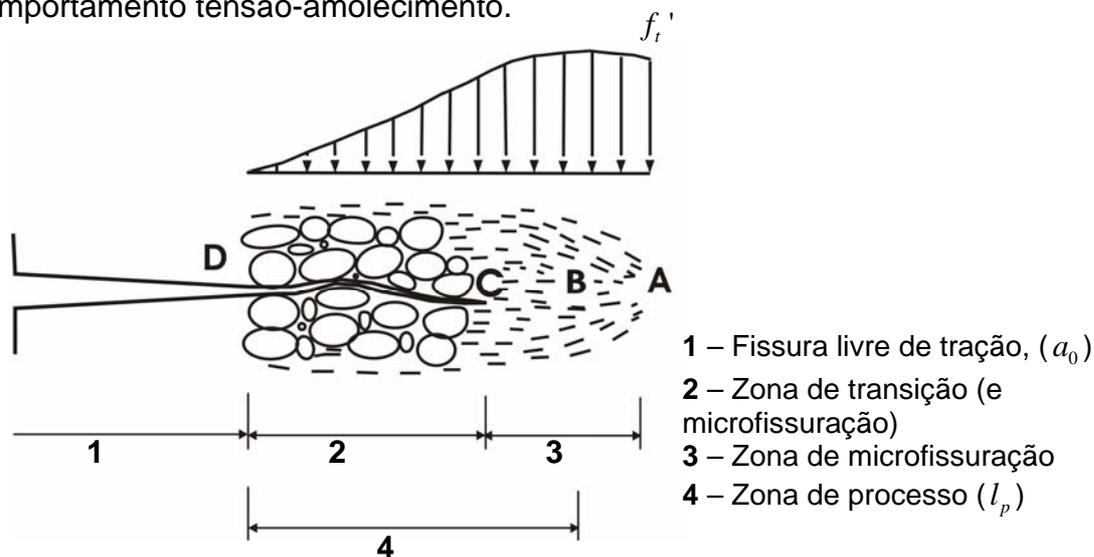


Figura 6.2 – Zona de processo de fraturamento em frente à fissura livre de tração real.

Na Figura 6.2, f_t' é a resistência à tração do material, a região compreendida entre D e B indica onde está ocorrendo o amolecimento. Em frente à região A o material ainda apresenta integridade e portanto obedece à

Lei de Hooke (regime elástico-linear). Este comportamento pode ser mecanicamente visualizado pelo gráfico tensão x deformação da Figura 6.3:

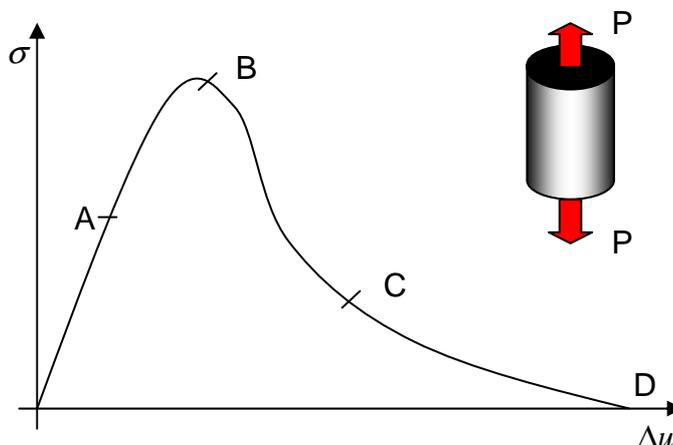


Figura 6.3 – Comportamento mecânico à tração de um material quase-frágil.

Ao atingir certo carregamento (tensão máxima de tração), a fissura aparece (ponto A) e o material deixa o regime elástico. A abertura fictícia (com a transferência de tensões entre as superfícies ou o amolecimento do material) se dá até o ponto D. A partir do ponto D, ocorre o cessamento de transferência de tensão, isto é, quando ultrapassar uma abertura crítica Δu_c (Figuras 6.2 e 6.3) a fissura abre realmente.

Uma vez que a fissura foi formada, as forças coesivas p transferidas através das faces da fissura são assumidas dependentes dos deslocamentos Δu por uma lei constitutiva $p = p(\Delta u)$ ou $\sigma = \sigma(\Delta u)$ que descreve o comportamento de amolecimento do material. O comportamento em qualquer ponto é isotrópico, elástico-linear até atingir a resistência à tração do material ou tensão crítica, f_t' .

Hillerborg (1976), propõe uma relação entre forças (de superfície) coesivas e deslocamentos bastante simples. Uma curva linear monotônica de amolecimento (semelhante à da Figura 6.3, ramo descendente BCD) é assumida para o modo puro I de abertura e a área sob a curva é o que chamamos de energia de fratura específica, G_c (Figura 6.4):

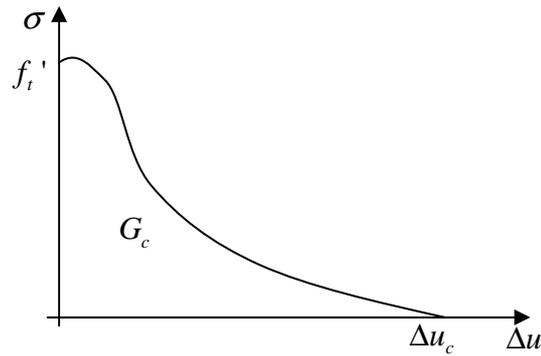


Figura 6.4 – Simplificação do modelo de Hilleborg.

Esta área, dada por:

$$G_c = \int_0^{\Delta u_c} \sigma d\Delta u \quad (6.1)$$

representa a quantidade de energia absorvida por unidade de área fissurada.

A fissura se propaga quando as tensões na ponta superaram a tensão crítica f_t' . Imediatamente quando a fissura abre, a tensão na ponta não é igual a zero, mas sofre uma redução à medida que aumenta essa abertura até atingir seu valor crítico, Δu_c . Na parte onde $\Delta u < \Delta u_c$ a "fissura" em realidade corresponde a uma zona microfissurada com alguns ligamentos de tensão residual sendo transferidos. O modelo coesivo ou da fissura fictícia é assim chamado para ressaltar o fato de que na região em frente à ponta da fissura ainda existem forças resistentes que não permitem a separação completa do material, e que este fenômeno ocorre gradualmente.

Aproximadamente, é permitido adotar para o modelo as simplificações dadas na Figura 6.5, dependendo do material que se pretende simular.

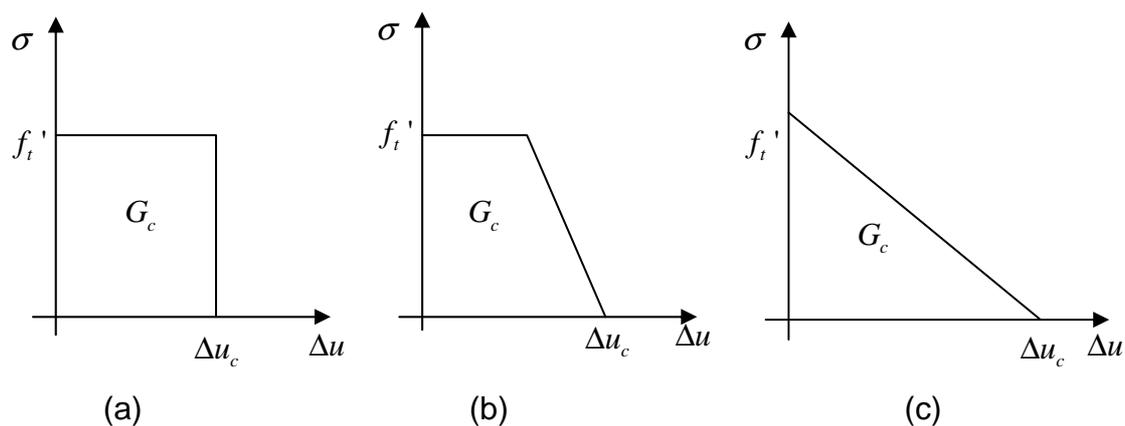


Figura 6.5 – Diferentes hipóteses de possíveis modelos tensão (σ) x abertura (Δu) em aplicações práticas.

Assim, o primeiro caso (a), poderia ser mais indicado a materiais dotados de certa flexibilidade, como os aços que têm grande ductilidade por exemplo. O caso (c) parece ser o mais adequado para materiais quase-frágeis (comportamento da Figura 6.4) como o concreto, já que o comportamento corresponde razoavelmente bem com a resposta para tensão obtida por Evans & Marathe (1968) apud Hilleborg (1976).

Da equação (6.1), temos portanto:

$$\Delta u_c = 2G_c / f_t' \quad (6.2)$$

Sendo assim, o material em frente à ponta da fissura será governado pela Lei Coesiva, de acordo com a Figura 6.5 c, dada por :

$$\sigma = f_t' \left(1 - \frac{\Delta u}{\Delta u_c} \right) \quad (6.3)$$

Em síntese, as hipóteses clássicas do modelo de fissura fictícia (MFF) ou coesiva, são (ver Figura 6.6):

- 1) a zona de fratura começa a se desenvolver em um ponto quando a máxima tensão principal alcança a resistência característica à tração do material (f_t');
- 2) a zona de fratura se desenvolve perpendicularmente à máxima tensão principal;

- 3) o material na zona de fratura é parcialmente danificado, mas ainda capaz de transmitir tensão. A tensão depende da abertura;
- 4) as propriedades do material externas à zona da fratura são consideradas elástico-linear e dadas pelas relações tensão/deformação.

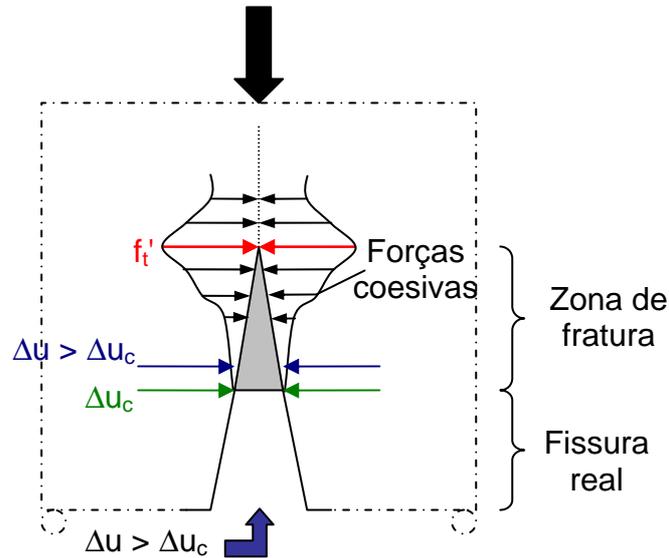


Figura 6.6 – Modelo de Fissura Fictícia (SALEH e ALIABADI; 1995).

É importante notar algumas diferenças entre os modelos propostos por Dugdale e Barenblatt com o modelo coesivo (KARIHALOO; 1995). No modelo de Dugdale, as tensões corretoras na zona de processo são constantes enquanto que no coesivo seguem a lei apresentada na equação (6.3). No modelo de Barenblatt, o tamanho da zona de processo de fraturamento (ou zona coesiva do modelo de Barenblatt) deve ser pequeno em relação ao tamanho da macro-fissura pré existente, o que no modelo coesivo independe.

6.2. Algoritmo proposto

O algoritmo incremental proposto, baseado no modelo coesivo, é a seguir apresentado. O processo iterativo está implementado somente para problemas em modo I de fraturamento. Neste trabalho são desprezadas as forças tangenciais na face da fissura, somente sendo consideradas as forças normais à mesma.

6.2.1. Geração de nova fratura (propagação)

O modelo para a propagação ou geração de novos elementos de fratura aplica-se ao primeiro ou a qualquer outro elemento de uma fratura já existente.

Conhecido um ponto de partida, que tanto pode ser um nó escolhido, pesquisado ou gerado; ou ainda no caso de já ser um elemento de fratura a ponta do último elemento, calculam-se as tensões em pontos internos quaisquer distantes $1/4$ do tamanho admitido para um elemento de fratura ($\Delta a = L_f/4$). São definidos pontos num arco de circunferência que começa a partir do vetor normal à fratura e termina depois de percorrer 180° no sentido anti-horário.

Calcula-se para cada um dos pontos gerados o estado de tensão (todos os incrementos devem ser considerados; o valor da tensão nos novos pontos é calculado a partir dos valores acumulados) com suas respectivas componentes normais relativas às retas que unem a ponta da fissura e os pontos da semi-circunferência.

O ponto que definirá o novo elemento de fratura corresponde ao que apresentar a máxima tensão de tração na direção normal à fissura (CMTP), se essa tensão ultrapassar o valor do critério para uma abertura zero ($\Delta u = 0 \therefore \sigma^v = f_t'$).

Para a definição do elemento criam-se dois pontos (nós). O primeiro, PF1 indicado na Figura 6.8, foi o que definiu a direção da fissura (direção em que irá propagar-se) e está localizado a $\Delta a = L_f/4$ da ponta do último elemento de fratura ou do nó selecionado. O segundo ponto, PF2 do elemento de fratura dista $3L_f/4$ da ponta, sendo L_f o tamanho do novo elemento de fratura.

Analogamente ao PF1, de tensão normal elástica σ_1^e , calculam-se as tensões normais σ_2^e para o segundo ponto.

Considerando-se que o elemento de fratura foi gerado num incremento de carga (ou de deslocamento), os incrementos dos valores de contorno devem ser acumulados:

$$U_k^{ac} = U_{k-1}^{ac} + \delta U_k^{ac} \quad (6.4)$$

$$P_k^{ac} = P_{k-1}^{ac} + \delta P_k^{ac} \quad (6.5)$$

sendo k o incremento da criação do elemento.

Estes vetores permitirão calcular as tensões nos novos pontos internos gerados através da eq. (3.34):

$$\{\sigma\} = -[H^n]\{U_k^{ac}\} + [G^n]\{P_k^{ac}\} \quad (6.6)$$

Com os novos elementos de fratura sendo gerados automaticamente, as equações ou matrizes H e G terão suas dimensões aumentadas conforme indicado na Figura 6.7, onde a parte em amarelo delimita os termos obtidos com o ponto fonte no contorno integrando elemento no próprio contorno (sempre será o mesmo) e as partes indicadas em laranja e rosa mostram o sentido da expansão das matrizes globais H e G:

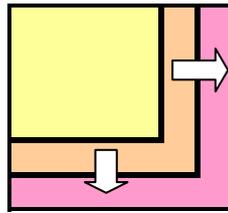


Figura 6.7 – Expansão das matrizes H e G.

6.2.2. Modelo incremental

Para mostrar como as equações algébricas são aplicadas na simulação do processo de abertura de uma fissura (tomada apenas uma por simplicidade, porém sem a perda da generalidade do processo) admitimos a situação do sólido no incremento de carga (ou de deslocamento) δP_k . No final do incremento anterior ($k-1$), a situação de equilíbrio apresentava as seguintes variáveis:

- Abertura da fissura (fictícia): $\Delta u_{k-1} = 0$;
- Tensão verdadeira (coesiva) no incremento $k-1$ (admite-se k como sendo o incremento da criação do elemento) dada pelo critério:
 $\sigma_{k-1}^v = f_t'$;
- Deslocamentos acumulados no contorno: $\{U_c^{ac}\}_{k-1}$;

- Deslocamentos acumulados na fratura: $\{U_f^{ac}\}_{k-1}$.

Corrigidas as matrizes (com a possibilidade de novos elementos se for o caso), aplica-se δP_k e obtêm-se os respectivos incrementos dos valores de contorno atual $\delta\{U_c\}_k$ e $\delta\{P_c\}_k$, incrementos de deslocamentos dos nós da fratura $\delta\{U_f\}_k$ e incremento da abertura da fratura $\delta\{\Delta u_k\}$.

Neste instante recalcula-se a tensão verdadeira atual, definida como critério do modelo coesivo:

$$\sigma_k^v = f_t' \left(1 - \frac{\Delta u_{k-1}}{\Delta u_c} \right) \quad (6.7)$$

onde f_t' e Δu_c são a resistência à tração do material e a abertura crítica da fissura, respectivamente.

Usando a relação de Cauchy, a força (de superfície) verdadeira atual a ser aplicada na nova fratura coesiva será:

$$p_k^v = n\sigma_k^v \quad (6.8)$$

Acumulam-se os incrementos para cálculo dos valores totais:

$$\{U_c^{ac}\}_k = \{U_c^{ac}\}_{k-1} + \delta\{U_c^{ac}\}_k \quad \text{e} \quad \{U_f^{ac}\}_k = \{U_f^{ac}\}_{k-1} + \delta\{U_f^{ac}\}_k \quad (6.9)$$

$$\{P_c^{ac}\}_k = \{P_c^{ac}\}_{k-1} + \delta\{P_c^{ac}\}_k \quad \text{e} \quad \{P_f^{ac}\}_k = \{P_f^{ac}\}_{k-1} + \delta\{P_f^{ac}\}_k$$

No incremento inicial não tem fratura (o sólido começa íntegro), portanto os valores são obtidos com incrementos elásticos e os valores relativos à fratura coesiva ainda não gerada permanecem iguais a zero até a colocação da mesma.

Note-se que os valores de $\delta\{P_f\}_k$ serão as correções atuais aplicadas e $\delta\{U_f\}_k$ os deslocamentos atuais nos nós da fratura obtidos através destas correções, que levarão à obtenção de $\delta\{\Delta u_k\}$, abertura atual da fissura.

Com o valor da abertura da fratura atual Δu_k , recomeçam as iterações a partir da aplicação do critério, eq. (6.7).

O processo iterativo cessa, com a adição de novo incremento se for o caso, assim que $(\Delta u_k - \Delta u_{k-1}) < TOL$, sendo TOL uma certa tolerância admitida.

Para melhor entendimento do processo incremental e iterativo, considere um problema elástico, em princípio íntegro, como o da Figura 6.8. São indicados pelo usuário (mas poderiam ser pesquisados, gerados automaticamente, etc.) os dois primeiros nós onde começará a fraturar, neste caso foram escolhidos os nós 14 e 15 (deverão obrigatoriamente ser duplos).

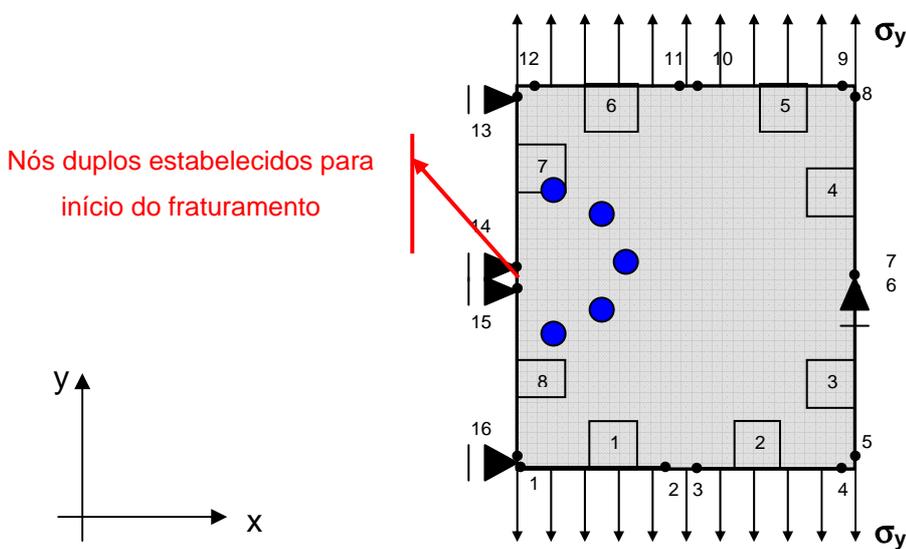


Figura 6.8 – Corpo íntegro com os pontos internos indicados.

Ao redor dos pontos escolhidos, é gerada uma série de pontos internos, cujas tensões rodadas serão calculadas (pontos representados em azul). Neste caso, qualquer tensão interna será igual a σ_y , mas após rotacionar, será verificada qual delas possui a máxima tensão principal (em seu sistema local). Se superar o critério (f_t'), o ponto de maior tensão principal será o primeiro Ponto Fonte (PF1) do elemento novo de fratura fictícia, e por esta razão também é calculada a tensão para um segundo ponto fonte (PF2), na mesma direção do primeiro, como indica a Figura 6.9.

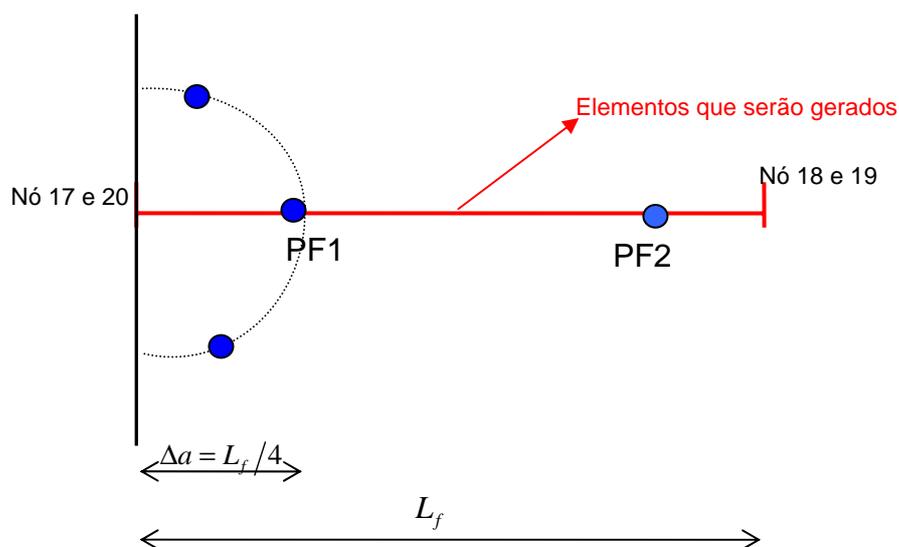


Figura 6.9 – Geração dos PF.

Essas tensões são as chamadas tensões elásticas, assim:

$$\sigma_1^e = \sigma_{PF1} \text{ e } \sigma_2^e = \sigma_{PF2}$$

Verifica-se o critério do modelo: se $\sigma_1^e > f_t'$, as tensões são extrapoladas para os extremos dos elementos, gerando novo elemento de fratura e começa o processo iterativo. Caso contrário, acrescenta-se novo incremento de carga ou deslocamento até ultrapassar (pois ainda está na fase elástica).

Começa a iteração zerando as variáveis: $\Delta u_{k-1} = 0$, onde Δu é a abertura da fratura e σ^v é a tensão verdadeira, dada por: $\sigma_{k-1}^v = f_t' \left(1 - \frac{0}{\Delta u_c}\right) = f_t'$ no início do processo iterativo.

Em outras palavras, quando os esforços externos aplicados produzem uma tensão elástica local que supera o f_t' do material, é introduzida uma descontinuidade ao problema, chamada fratura fictícia ou coesiva, que segue a eq. (6.3) e onde as forças aplicadas em sua superfície são destinadas a manter a coesão do material, representando um certo ligamento existente entre as partículas da região.

O processo iterativo é bastante simples, seguindo sempre os mesmos passos descritos na seqüência:

- 1) Calcula-se a tensão verdadeira com a Lei Coesiva: $\sigma^v = f_t \left(1 - \frac{\Delta u}{\Delta u_c} \right)$,
onde Δu_c é a abertura crítica (quando $\Delta u > \Delta u_c$, $\sigma^v = 0$);
- 2) Após transformar estas tensões para o sistema global, calculam-se as forças de superfície, usando a fórmula de Cauchy: $p_y^v = \tau_{xy} n_x + \sigma^v n_y$;
- 3) Aplicam-se estas forças como indicado na Figura 6.10.

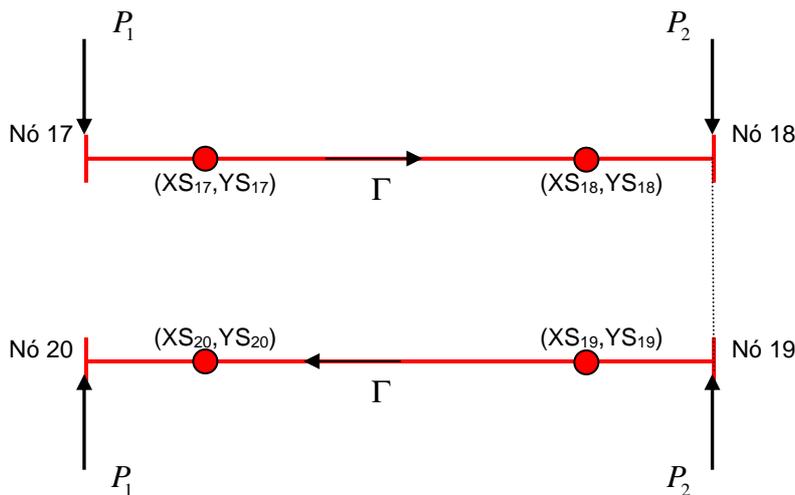


Figura 6.10 – Forças de superfície aplicadas nas faces da fissura.

- 4) Testa-se a convergência do processo: Se $(\Delta u_k - \Delta u_{k-1}) > TOL$, volta para nova iteração; se $(\Delta u_k - \Delta u_{k-1}) < TOL$ significa que convergiu e em seguida verifica se necessita a adição de novo incremento ou fratura. TOL é uma certa tolerância estipulada e os vetores acumulados durante o processo incremental são utilizados para o cálculo dos novos pontos internos.

6.3. Algoritmo de Saleh e Aliabadi

De acordo com o MFF, a zona de fratura pode ser representada por meio das forças coesivas em ambas faces. Em geral, quando uma fissura fictícia se desenvolve, a descontinuidade de deslocamento na fissura não necessita ser perpendicular à ela, ou seja, Δu tem duas componentes: Δu_t e Δu_n (Figura 6.11).

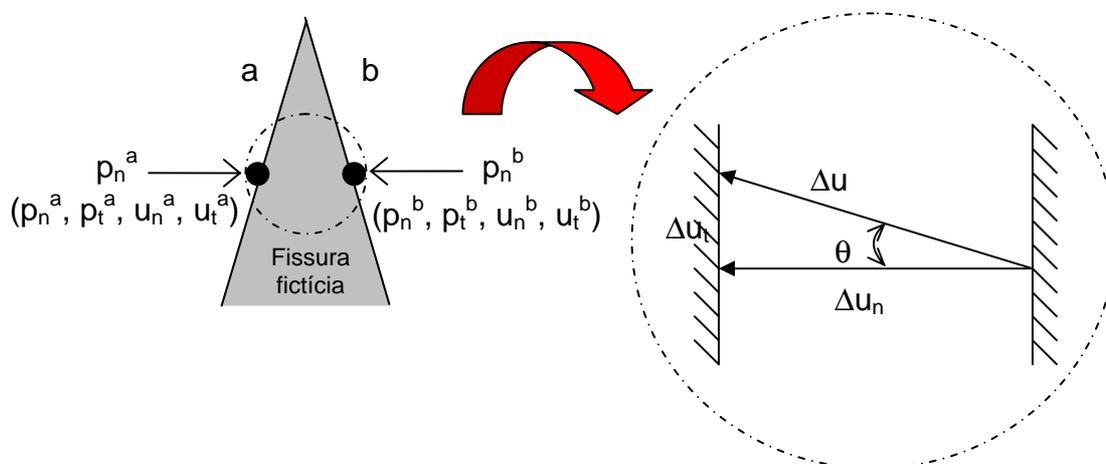


Fig. 6.11 – Componentes dos deslocamentos da abertura da fissura, Δu .

Considera-se que somente Δu_n dissipa energia. Na Figura 6.11 também são mostrados os parâmetros desconhecidos para as componentes de u e p (deslocamentos e forças de superfície), na fissura fictícia (área sombreada).

Por simplicidade considera-se que somente Δu_n causa dissipação de energia e está associado às forças normais. Estas forças são referidas como forças de superfície, no contexto do MECAD. Assumindo uma lei constitutiva linear, com amolecimento (Figura 6.5 c), a relação entre força de superfície normal e deslocamento no sistema local de coordenadas (n,p) , pode ser escrito como:

$$p_n = f_t \left(1 - \frac{\Delta u_n}{\Delta u_c} \right) \quad \text{e} \quad p_{nt} = 0 \quad (6.10)$$

onde Δu_n é a abertura normal à fissura (ou COD) ($\Delta u_n = u_n^b - u_n^a$). Quanto à transmissão das tensões ao longo da zona de fratura, considera-se que não há garantias nas forças de superfície na direção tangencial ($p_t \neq 0$) e nem descontinuidade no deslocamento tangencial ($\Delta u_t = u_t^b - u_t^a = 0$). Na interface da zona da fratura, para manter o equilíbrio, as seguintes condições são impostas:

$$p_n^a = -p_n^b \quad ; \quad p_t^a = -p_t^b \quad (6.11)$$

6.3.1. Cálculo das tensões na ponta da fissura

Quando um sólido é submetido a um carregamento, as tensões na ponta da fissura teoricamente tendem ao infinito. Para um material real isto é impossível. O que ocorre é o desenvolvimento de uma zona de fratura, reduzindo a concentração de tensões na ponta. Para o modelo de Saleh e Aliabadi, quando esta tensão excede a resistência à tração do material, a fissura irá propagar perpendicularmente à máxima tensão principal. A tensão na ponta é estimada por extrapolação de três pontos internos calculados em frente à ponta da fissura (N_1 , N_2 e N_3 , indicados na Figura 6.12).

6.3.2. Propagação

Na Figura 6.12, o processo iterativo proposto por Saleh e Aliabadi (1995) é ilustrado:

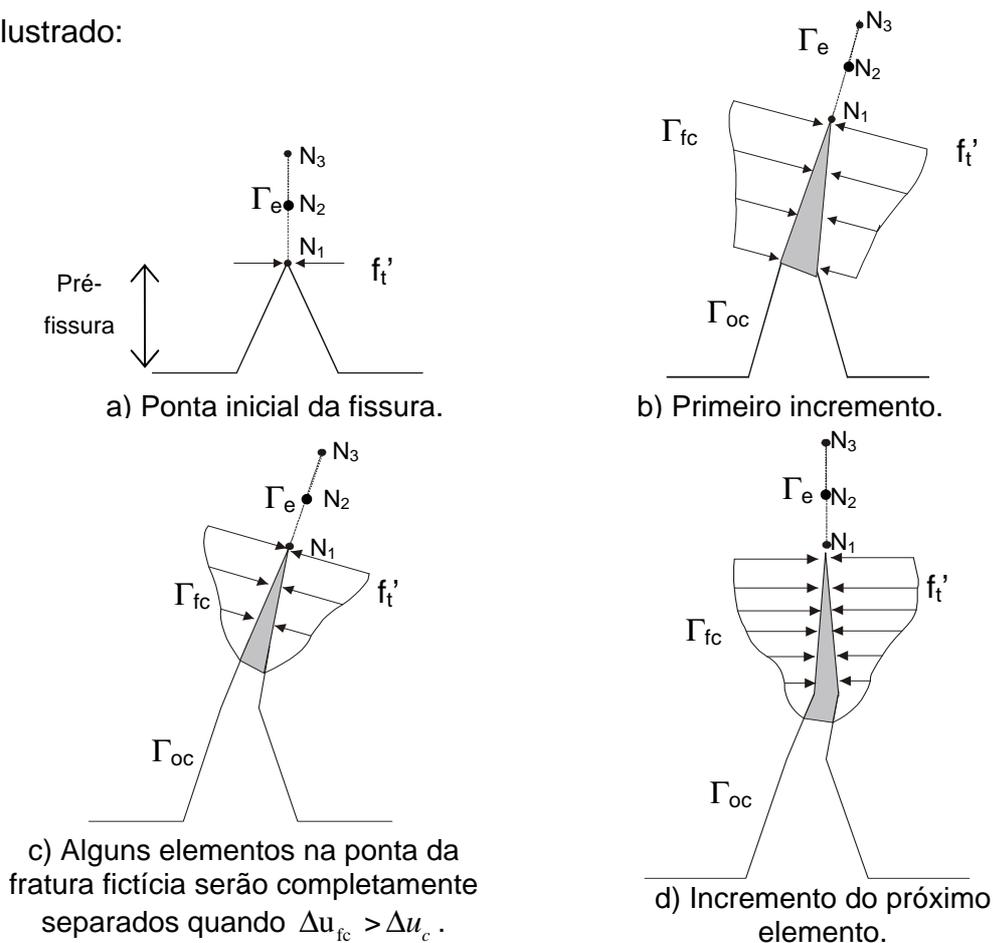


Figura 6.12 – Processo iterativo de propagação (ALIABADI e SALEH; 2002).

onde Γ_{oc} é o contorno da fissura já aberto, Γ_{fc} contorno da fissura fictícia, Γ_e é o contorno elástico.

7 Resultados Numéricos

Serão apresentados aqui resultados de exemplos analisados com as formulações desenvolvidas. Exemplos estes que comprovam a eficiência dos modelos implementados e mostram que mesmo usando elementos simples o fenômeno da fratura é simulado com relativa precisão. Assim, serão apresentados resultados que não merecem ser negligenciados, obtidos desde vigas elásticas até problemas de fraturamento não-linear com o modelo coesivo, todos usando as formulações expostas. As análises foram feitas admitindo-se espessura do sólido unitária (EPT).

7.1. Exemplos de vigas elásticas

Neste trabalho foram feitas diversas análises para testar as formulações, antes de empregá-la na diretamente na análise de fratura. Entre estas, ainda no problema elástico, o estudo de vigas como um problema elástico 2D utilizando o MEC com integração analítica e numérica sem sub-elementação. Utilizando as equações singular e hiper-singular comparativamente com a resposta analítica do problema pela resistência dos materiais, os problemas estudados estão representados na Figura 7.1:

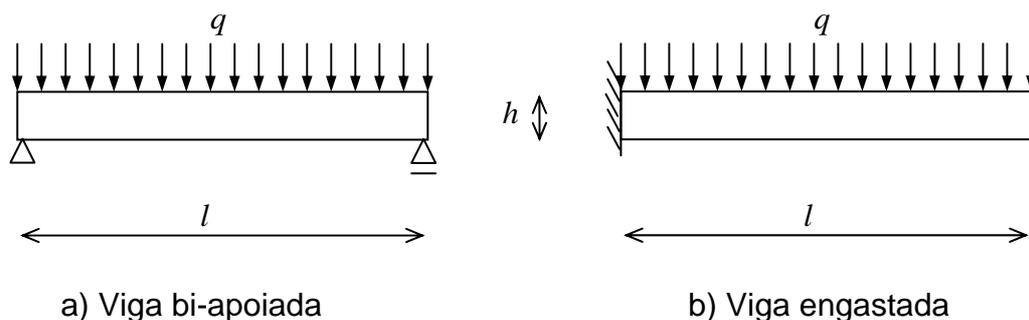


Figura 7.1 – Exemplos de vigas elásticas.

Foi utilizada a mesma discretização em ambos problemas: 68 elementos de mesmo tamanho, 72 nós (mistos), 45 pontos internos, $E = 1000 \text{ KN/cm}^2$, $\nu = 0,45$, EPT, $h = 40 \text{ cm}$, $l = 300 \text{ cm}$, $q = 1 \text{ KN/cm}^2$.

Os Pontos Fonte (PF) ou de colocação são gerados automaticamente a partir de uma distância (aqui foi adotada em cm, mas sem perder a generalidade poderia aplicar-se a problemas em unidades coerentes) determinada pelo usuário no arquivo de dados, podendo ser desde zero (PF no contorno) até onde se queira (PF fora). Variando essa distância em relação ao elemento que o gerou foi feita uma análise objetivando descobrir se existe uma distância ideal para o posicionamento do PF ou se esse fator não alteraria o resultado.

A resposta analítica aproximada obtida a partir da teoria de vigas para o problema é apresentada na Tabela 7.1:

Tabela 7.1 – Resposta analítica para o problema de vigas.

a) Viga bi-apoiada	$f_{m\acute{a}x} = \frac{5ql^4}{384EI}$	$\sigma_x(y) = \frac{M \cdot y}{I}$
b) Viga engastada	$f_{m\acute{a}x} = \frac{ql^4}{8EI} + \frac{ql^2}{2GA_C}$	$\sigma_x(y) = \frac{M \cdot y}{I}$

onde $f_{m\acute{a}x}$ é a flecha máxima, y é a distância da Linha Neutra (LN) até a fibra considerada, M é o momento fletor na seção considerada, I é o momento de inércia da seção, E e G são os módulos de elasticidade longitudinal e transversal respectivamente e σ_x é a tensão em x . O valor de A_C é dado por:

$$A_C = \frac{5}{6}bh \quad (7.1)$$

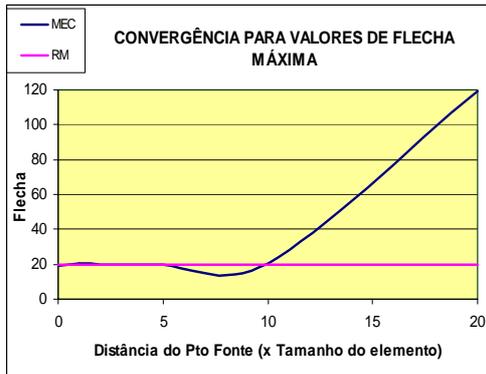
onde b é a espessura (unitária).

Os valores analisados foram tomados no meio do vão para ambas vigas.

Usando a equação em deslocamentos ou singular, os resultados são apresentados nos diagramas das Figuras 7.2 à 7.13.

Equação em Deslocamento – Viga a) bi-apoiada

Integração Analítica



Integração Numérica

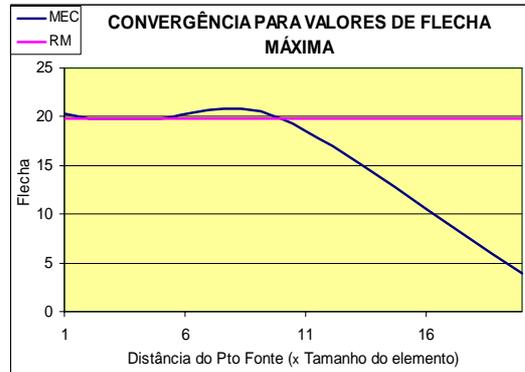
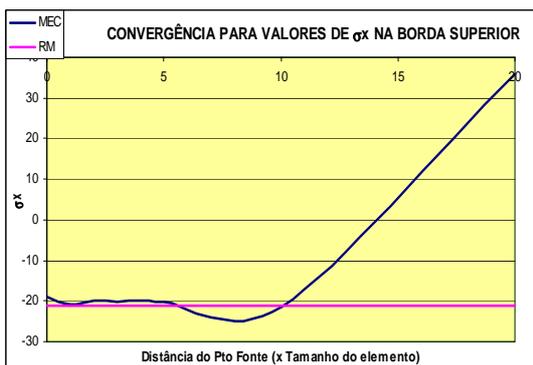


Figura 7.2 – Convergência para flecha máxima em cm, Viga a).

A distância do PF, representada no gráfico, é a distância multiplicada pelo tamanho do elemento (em cm).

Equação em Deslocamento – Viga a) bi-apoiada

Integração Analítica



Integração Numérica

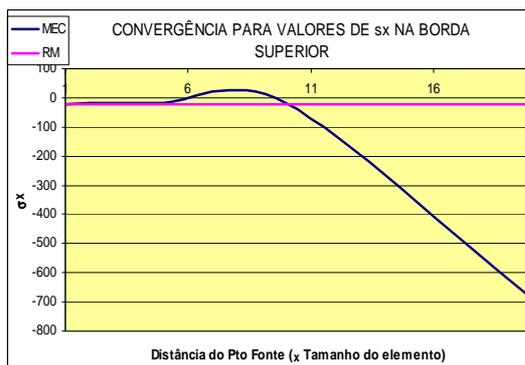
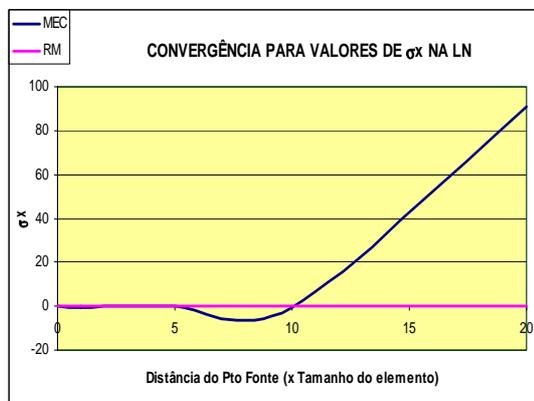


Figura 7.3 – Convergência para tensão na fibra superior em KN/cm^2 , Viga a).

Equação em Deslocamento – Viga a) bi-apoiada

Integração Analítica



Integração Numérica

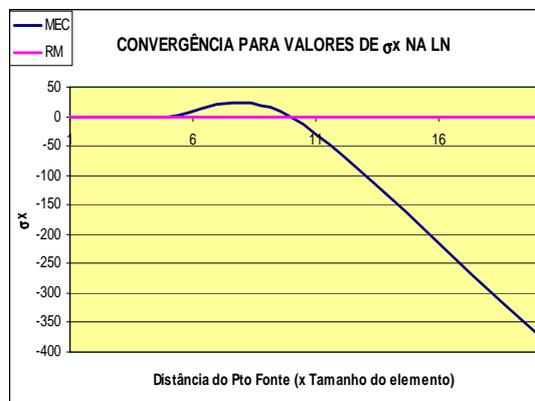
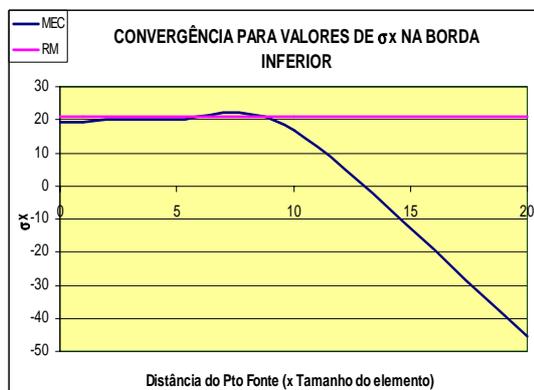


Figura 7.4 – Convergência para tensão na Linha Neutra em KN/cm^2 , Viga a).

Equação em Deslocamento – Viga a) bi-apoiada

Integração Analítica



Integração Numérica

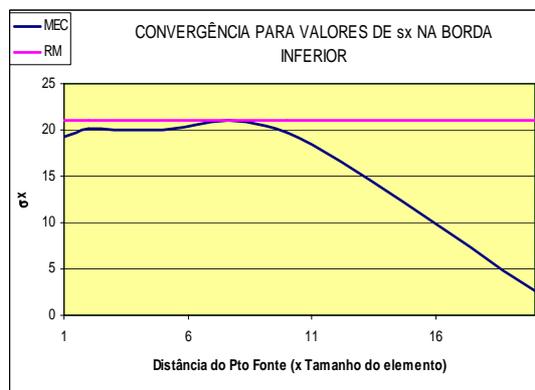
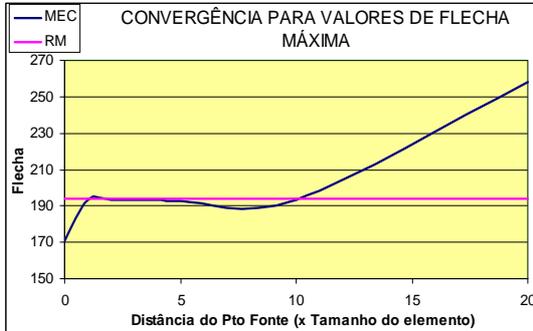


Figura 7.5 – Convergência para tensão na fibra inferior em KN/cm^2 , Viga a).

Para a viga engastada, foram obtidos os seguintes resultados:

Equação em Deslocamento – Viga b) engastada

Integração Analítica



Integração Numérica

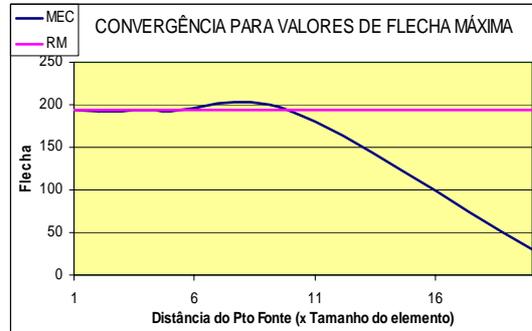
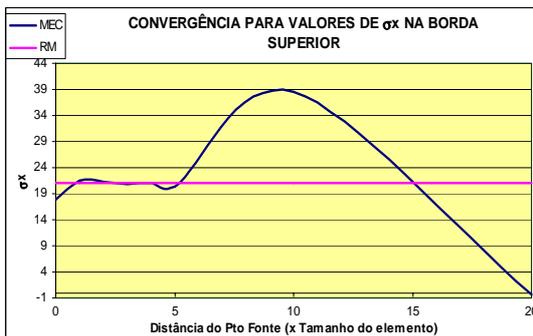


Figura 7.6 – Convergência para flecha máxima em cm, Viga b).

Equação em Deslocamento – Viga b) engastada

Integração Analítica



Integração Numérica

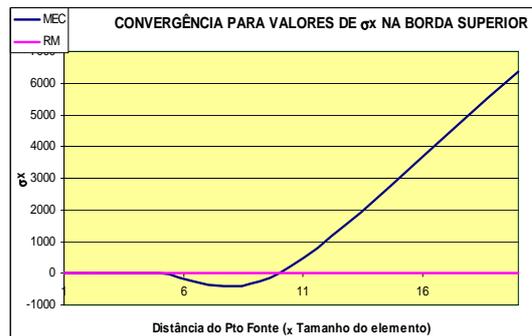
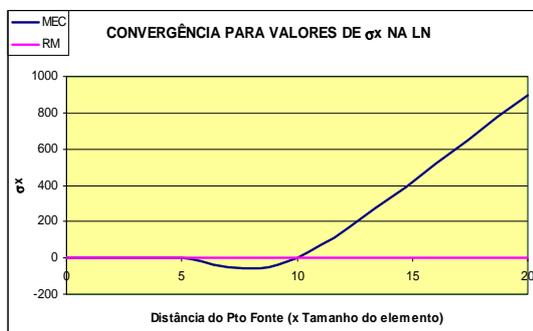


Figura 7.7 – Convergência para tensão na fibra superior em KN/cm^2 , Viga b).

Equação em Deslocamento – Viga b) engastada

Integração Analítica



Integração Numérica

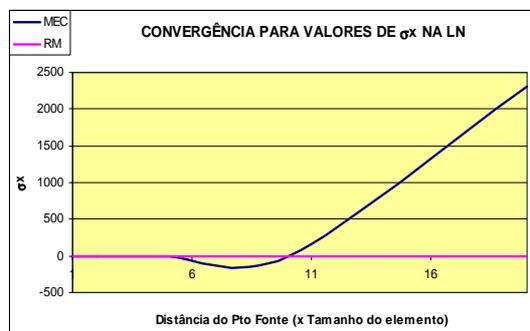
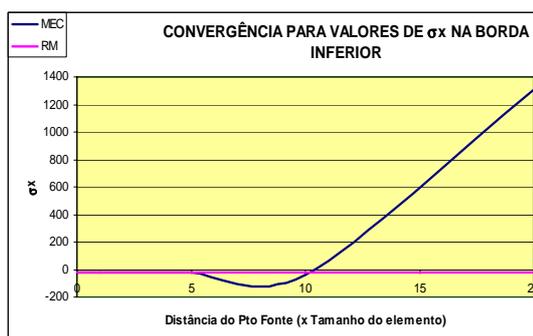


Figura 7.8 – Convergência para tensão na Linha Neutra em KN/cm^2 , Viga b).

Equação em Deslocamento – Viga b) engastada

Integração Analítica



Integração Numérica

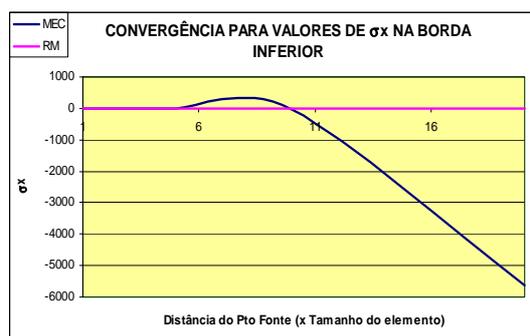


Figura 7.9 – Convergência para tensão na fibra inferior em KN/cm^2 , Viga b).

Usando a equação em forças de superfície foi feita a análise para a equação analítica, a numérica não foi implementada para esta formulação já que mais adiante, no modelo dual, só seria utilizada a analítica. Usando apenas nós duplos, o contorno foi discretizado em 136 nós. Foram obtidos os seguintes diagramas para a viga (a) bi-apoiada:

Equação em Forças de Superfície – Viga a) bi-apoiada

Integração Analítica

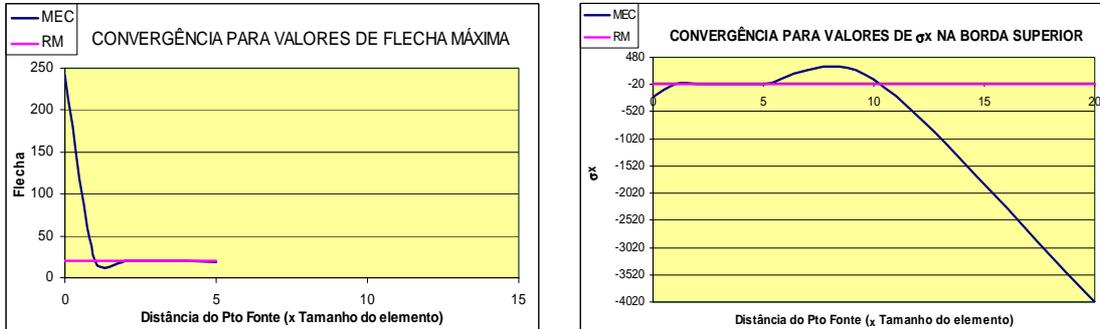


Figura 7.10 – Convergência para flecha máxima em cm e tensão na fibra superior em KN/cm^2 , Viga a).

Nesta figura, avaliando a convergência para flecha máxima, os valores para Distância do PF a partir de 5 cm não foram considerados pois a resposta nos nós duplos no meio do vão da viga divergia.

Equação em Forças de Superfície – Viga a) bi-apoiada

Integração Analítica

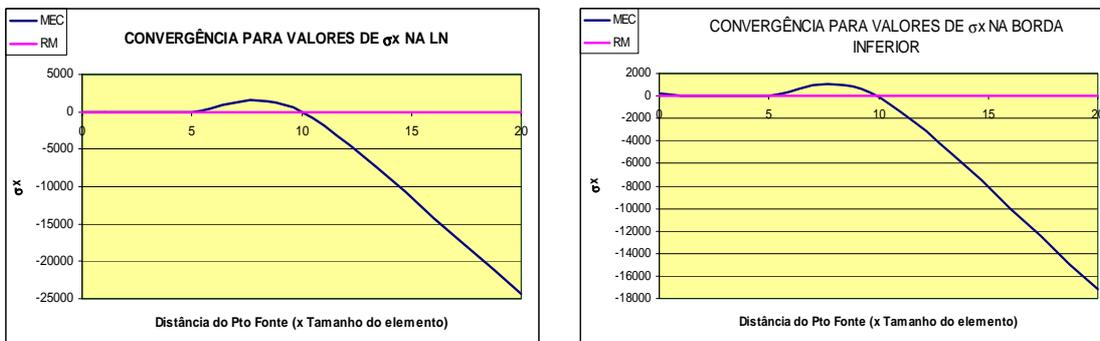


Figura 7.11 – Convergência para tensão na Linha Neutra e fibra inferior em KN/cm^2 , Viga a).

Para a Viga b), engastada, os resultados obtidos foram os seguintes:

Equação em Forças de Superfície – Viga b) engastada

Integração Analítica

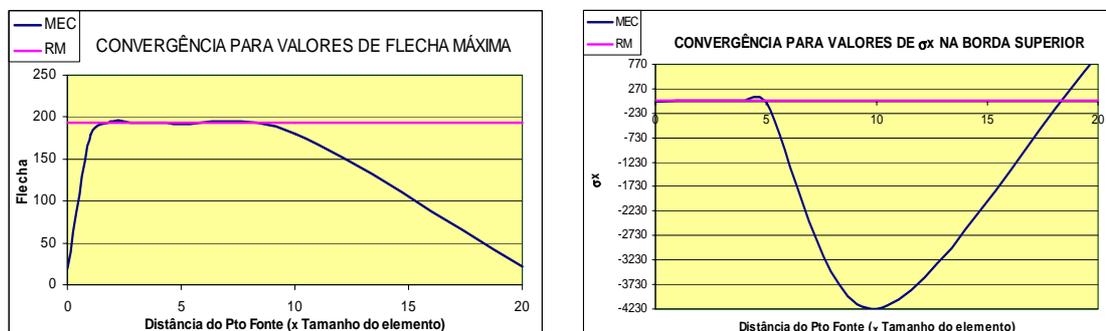


Figura 7.12 – Convergência para flecha máxima em cm e tensão na fibra superior em KN/cm^2 , Viga b).

Equação em Forças de Superfície – Viga b) engastada

Integração Analítica

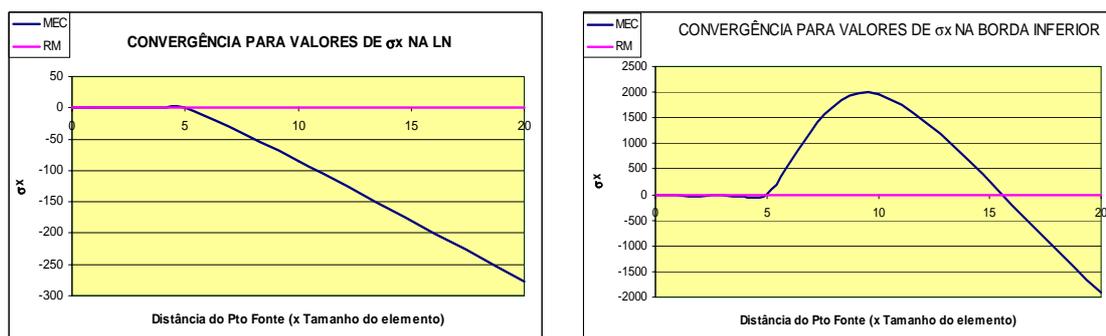


Figura 7.13 – Convergência para tensão na Linha Neutra e fibra inferior em KN/cm^2 , Viga b).

Para PF fora do elemento de integração, observa-se que em praticamente todos os diagramas apresentados, uma Distância do PF x Tamanho do elemento adequada seria de até 4 cm, sendo que para distâncias muito grandes com relação ao tamanho do elemento, os valores já não fazem sentido algum. Isto se deve a que neste caso o raio de integração nas equações analíticas (ver anexo C) para um PF infinitamente longe é praticamente o mesmo para qualquer ponto do contorno.

Para PF no contorno, ou seja, Distância do PF x Tamanho do elemento igual a zero, notou-se que em alguns casos a resposta não correspondeu exatamente à analítica do problema.

Observou-se, ainda, que para a equação em forças de superfície apresentou maior sensibilidade que a equação em deslocamentos. Em função disto, deve-se ter maior cautela na escolha do problema, discretização, geometria e malha, já que as respostas podem ser instáveis, devido à hiper-singularidade $\frac{1}{r^2}$ da formulação.

A seguir são apresentadas as deformadas e os gradientes de tensão das vigas a) e b) respectivamente. Na primeira foi aplicada a equação em forças de superfície, com integração analítica dos termos integrais, com PF fora distando o triplo do tamanho do elemento e na segunda foi aplicada a equação em deslocamentos também com integração analítica, mas com o PF sobre o contorno.

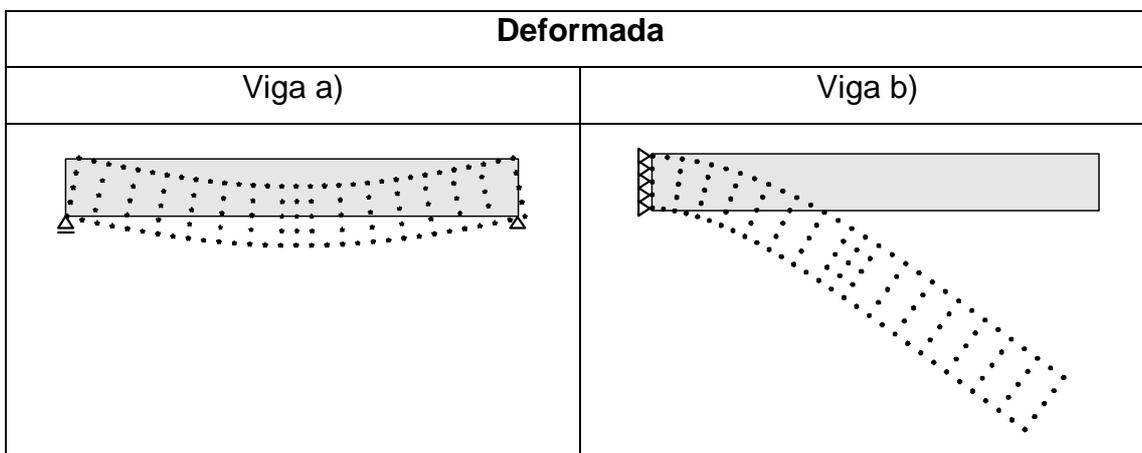


Figura 7.14 - Deformada das vigas a) e b).

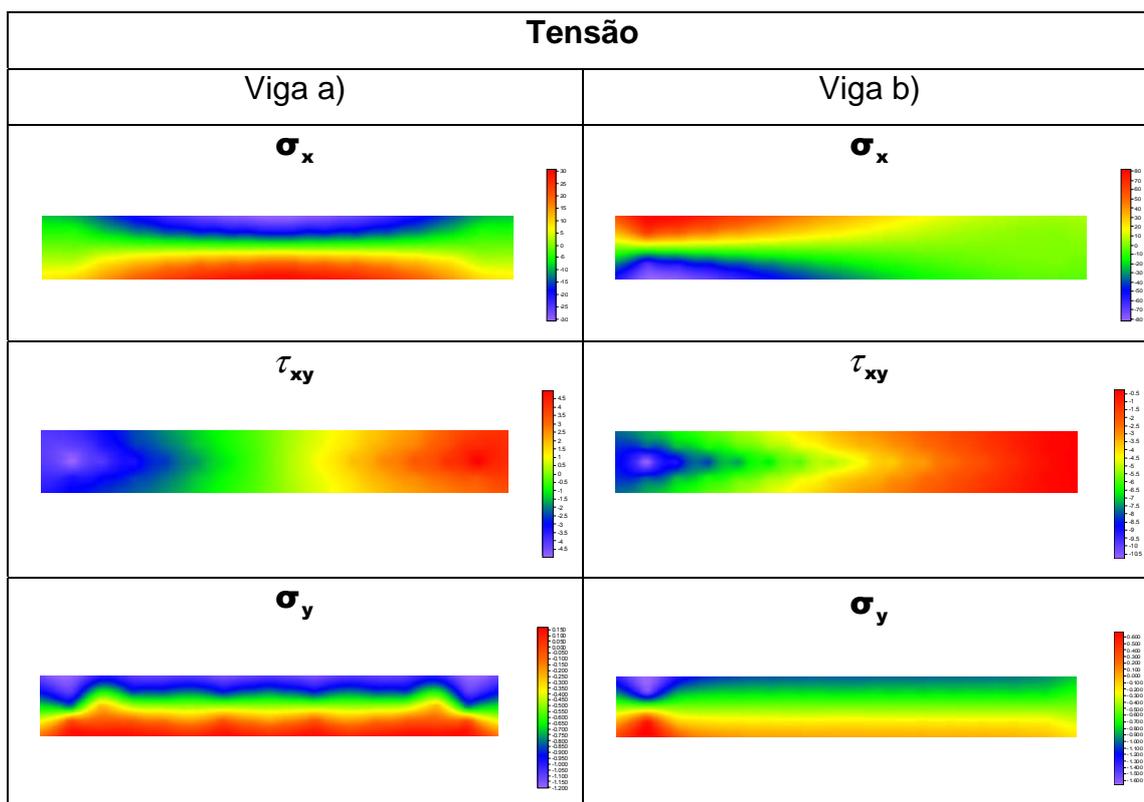


Figura 7.15 – Gradientes de Tensão para as Vigas a) e b).

Observa-se que para a viga a), as tensões (tanto em σ_x como em σ_y) máximas de tração ocorrem, conforme esperado, nas fibras inferiores (indicado em vermelho) e as mínimas nas superiores (indicado em azul). O diagrama de tensão cisalhante (τ_{xy}) apresentou simetria que, para esta viga, era esperada.

Para a viga b), as tensões na região próxima ao engaste indicam que ocorre maior tração na parte superior e compressão na parte inferior, condizente com a deformada da viga, apresentada. O diagrama de tensão cisalhante para a viga b) apresenta-se também coerente, com valores próximos a zero na extremidade em balanço que vão crescendo em direção ao engaste.

7.2. Exemplos na MFEL

Para a análise dos exemplos de MFEL as três formulações do MEC (singular, hiper-singular e dual) já discutidas, são utilizadas, todas com o ponto fonte pertencendo ao contorno e com integrais analíticas sobre os elementos de contorno e de fratura.

Seja uma chapa de dimensões $50 \times 50 \text{ cm}^2$ com fissura de aresta medindo $a = 20 \text{ cm}$, $E = 3000 \text{ KN/cm}^2$, $\nu = 0,2$, tensão $p = \sigma = 10 \text{ KN/cm}^2$ em modo puro I. Este exemplo foi feito com o objetivo de visualizar onde ocorreria a tensão máxima, avaliar as formulações e verificar até que abertura da fissura pode-se obter respostas razoáveis.

Analisando-se somente a equação hiper-singular e em seguida somente a singular, foram utilizados 40 elementos de contorno, 3 elementos de fratura para a singular e 9 elementos de fratura para a hiper-singular. As condições de contorno para o problema em análise são apresentadas na Figura 7.16.

Na Tabela 7.2 são apresentados os diagramas de tensão (σ_y) e as deformadas obtidas variando o tamanho da abertura da boca da fissura, Δu , usando a equação hiper-singular. Na deformada é apresentada a posição deslocada dos pontos do contorno e internos discretizados.

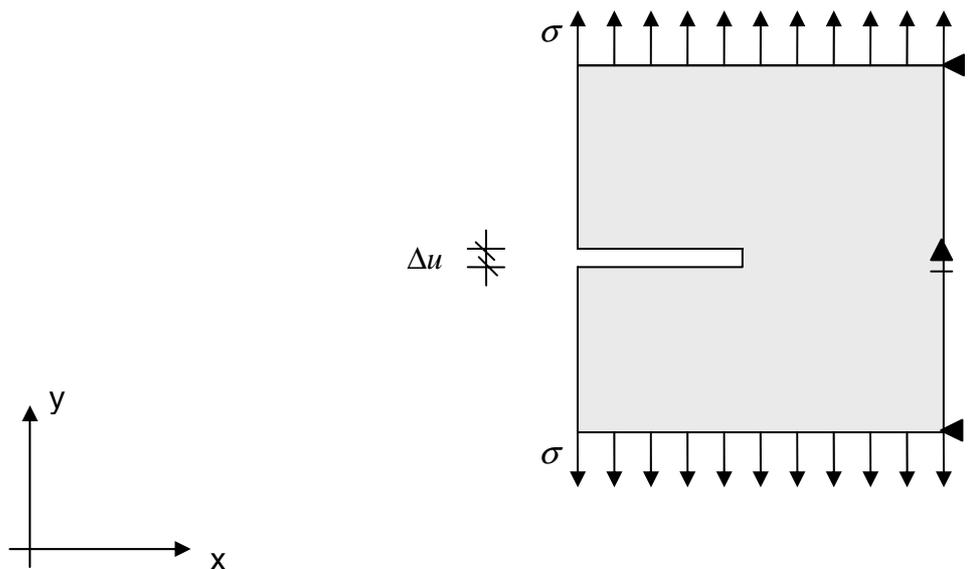


Figura 7.16 – Problema analisado variando a abertura Δu .

Tabela 7.2 – Variação de Δu para a equação hiper-singular.

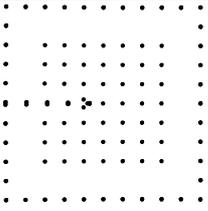
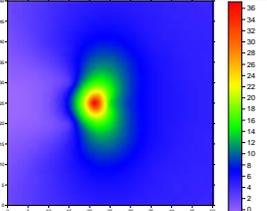
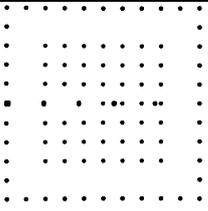
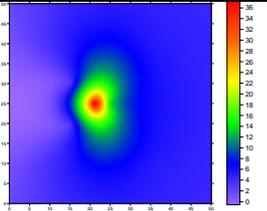
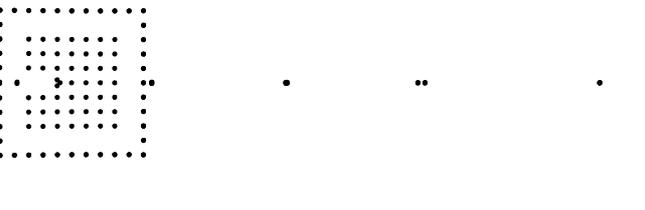
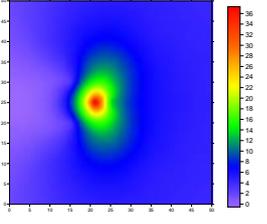
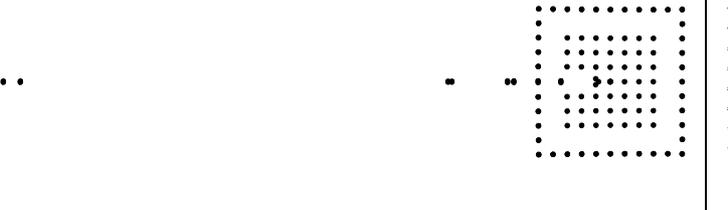
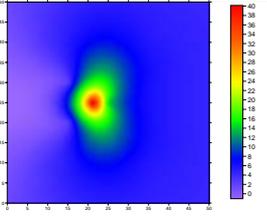
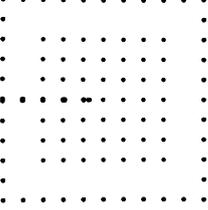
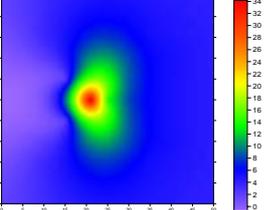
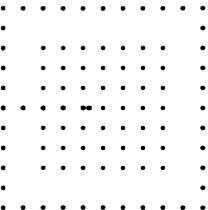
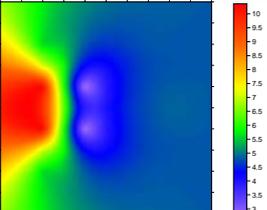
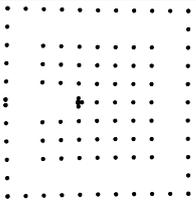
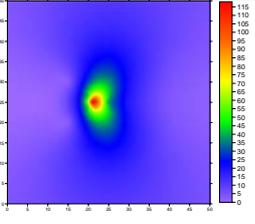
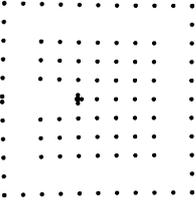
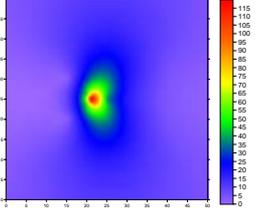
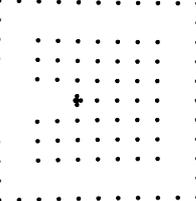
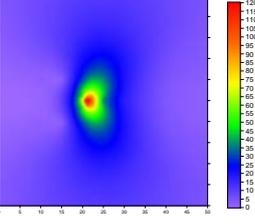
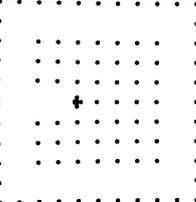
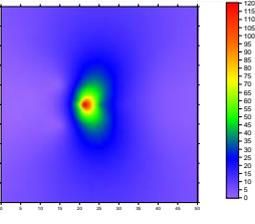
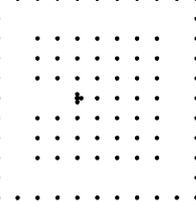
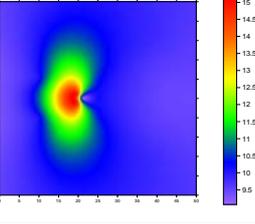
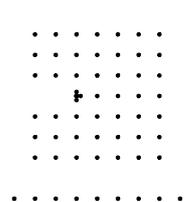
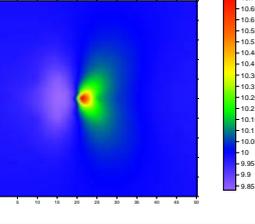
Equação em forças de superfície (hiper-singular)		
Abertura (cm)	Deformada	Tensão (σ_y)
$\Delta u = 1 \times 10^{-1}$		
$\Delta u = 1 \times 10^{-2}$		
$\Delta u = 1 \times 10^{-3}$		
$\Delta u = 1 \times 10^{-4}$		
$\Delta u = 1 \times 10^{-5}$		
$\Delta u = 1 \times 10^{-6}$		

Tabela 7.3 – Variação de Δu para a equação singular.

Equação em deslocamento (singular)		
Abertura (cm)	Deformada	Tensão (σ_y)
$\Delta u = 1 \times 10^{-1}$		
$\Delta u = 1 \times 10^{-2}$		
$\Delta u = 1 \times 10^{-3}$		
$\Delta u = 1 \times 10^{-4}$		
$\Delta u = 1 \times 10^{-5}$		
$\Delta u = 1 \times 10^{-6}$		

Pela Tabela 7.2, observa-se pelas deformadas que para aberturas menores que $1 \times 10^{-1} \text{ cm}$ (até $1 \times 10^{-4} \text{ cm}$) já ocorre um erro numérico devido à proximidade das faces da fissura, provavelmente ocasionado pela hiper-singularidade presente na formulação. Assim, os nós da fissura são deslocados para fora do corpo, perdendo sentido físico. Entretanto as tensões apresentam-se estáveis para uma abertura de até $1 \times 10^{-5} \text{ cm}$.

O mesmo problema apresentado na Figura 7.16, foi também analisado usando a equação singular ou em deslocamentos.

Na Tabela 7.3 são apresentados os diagramas de tensão (σ_y) e as deformadas obtidas variando-se o tamanho da abertura da fissura, Δu usando agora a equação singular. Analogamente à equação hiper-singular, na deformada é apresentada a posição deslocada dos pontos do contorno e internos discretizados.

Por esta tabela, nota-se que as respostas estão coerentes, com a máxima tensão (representada em vermelho) ocorrendo na ponta da fissura. Apenas quando a abertura é de $1 \times 10^{-5} \text{ cm}$ que este máximo ocorre à esquerda da posição da ponta da fissura. As deformadas indicam a abertura em modo I, com exceção das aberturas de $1 \times 10^{-5} \text{ cm}$ e $1 \times 10^{-6} \text{ cm}$, onde não ocorre uma abertura visível.

Analisa-se em seguida um problema de fratura central, caracterizado pelo modo I. O problema estudado é o apresentado na Figura 7.17. Adotou-se $W = 200 \text{ cm}$, $a = 5 \text{ cm}$, $p = \sigma = 10 \text{ KN/cm}^2$, $E = 3000 \text{ KN/cm}^2$, $\nu = 0$ e EPT.

Resolvendo este problema com a equação singular, a malha foi modelada usando simetria de $1/4$ do problema da Figura 7.17. O problema foi discretizado usando 118 elementos no contorno e 20 na fratura, sem refinamento e 36 pontos internos.

O FIT foi extraído com base no procedimento apresentado no capítulo 4. Fazendo um gráfico $\ln r \times \ln COD$ (com o valor de r sendo dado pela distância entre o nó do elemento e a ponta da fissura e os COD obtidos com os deslocamentos nodais), pode-se determinar a reta que melhor ajusta a função e assim determinar uma linha de tendência. Para isto, os resultados obtidos no primeiro elemento (o da ponta) e os elementos mais distantes à ponta foram

desprezados para a obtenção de um intervalo de dados aceitáveis, de acordo com a linha de tendência.

Assim, o valor obtido ($K_I = 40,55 \text{KN.cm}^{-3/2}$) apresentou um erro de somente 2,4% com relação à resposta analítica ($K_I = 39,6 \text{KN.cm}^{-3/2}$) para uma chapa infinita, dada pela equação (7.2):

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \quad (7.2)$$

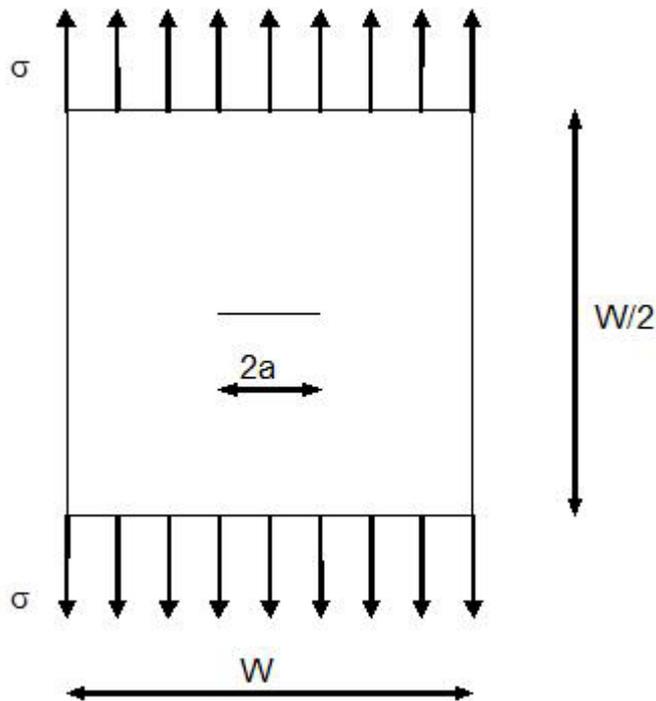


Figura 7.17 – Fratura central, problema em modo puro I.

Resolvendo o mesmo problema com a equação hiper-singular, utilizando uma malha idêntica ao problema com a equação singular, mas somente com nós duplos, a resposta obtida apresentou um erro de 1,84% comparado com a solução analítica do problema.

Para obtenção do intervalo de interesse, foram desprezadas as respostas obtidas para os dois elementos mais próximos à ponta, evidentemente os mais distantes também e assim o valor do FIT estimado foi:

$$K_I = 40,33 \text{KN.cm}^{-3/2} \quad (7.3)$$

Apesar da resposta aqui obtida ter sido melhor do que usando a equação singular, o intervalo de dados de interesse para o ajuste da linha de tendência foi menor.

Usando o MECD, o problema foi discretizado com simetria de 1/2 da Figura 7.17. Utilizou-se 160 elementos de contorno e 44 na fissura, solução analítica para o contorno, numérica com sub-elementação para os pontos internos.

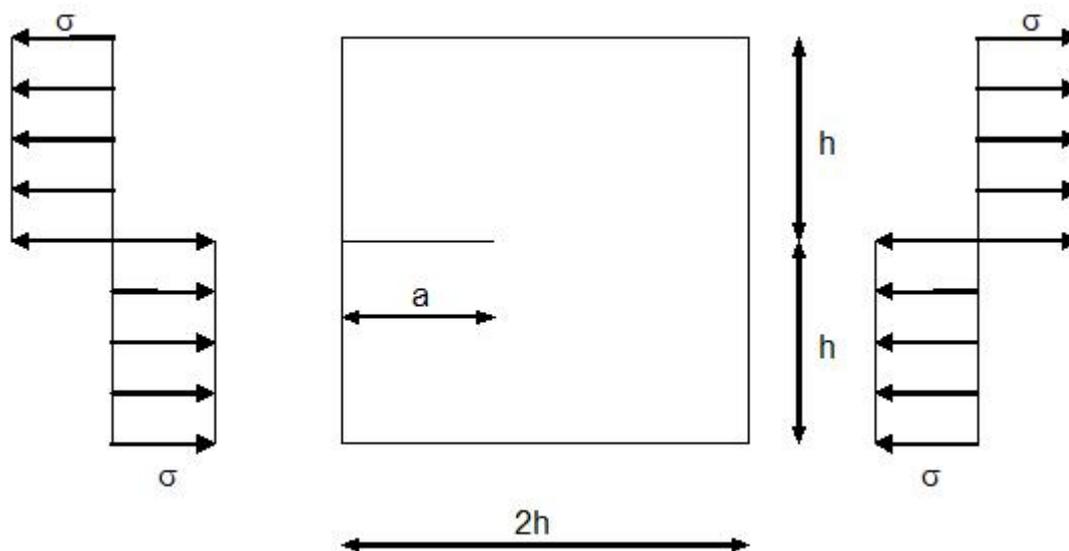
Foi feito um pequeno refinamento da malha na região de interesse para aproximar melhor a resposta. Os resultados no primeiro elemento da ponta foram desprezados para a obtenção do intervalo de interesse.

O valor obtido para K_I neste caso, foi:

$$K_I = 39,24 \text{KN.cm}^{-3/2} \quad (7.4)$$

apresentando um erro de menos de 1% com a resposta analítica do problema.

Considere agora uma chapa em modo puro II, também utilizando o MECD. Adotando-se $h = 24$, $a = h/3$, $E = 3000$, $\nu = 0,3$, $\sigma = 10$, em unidades coerentes. Foi utilizada uma malha de 8 elementos no contorno e 4 na fratura somente, com 12 pontos internos. A Figura 7.18 mostra o problema estudado:



7.18 – Problema em modo puro II.

Neste exemplo foi feita somente a análise de propagação de uma fratura. Os resultados para o ângulo de propagação foram comparados à Figura 7.19,

que apresenta um gráfico mostrando a relação do ângulo formado entre a inclinação da fissura e a direção de carregamento, em diferentes critérios de propagação.

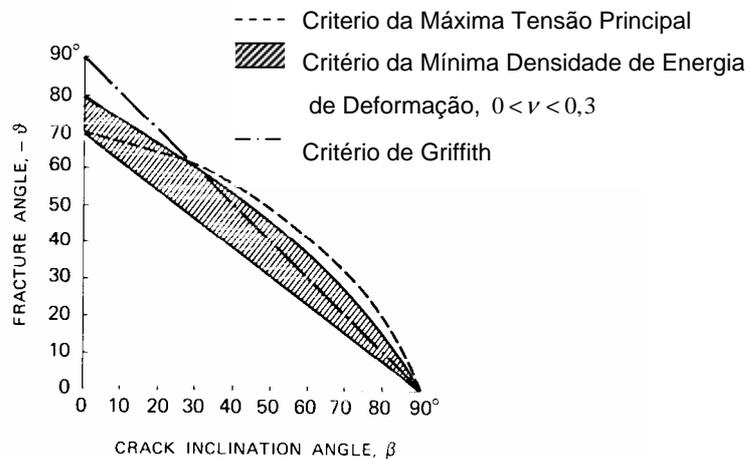


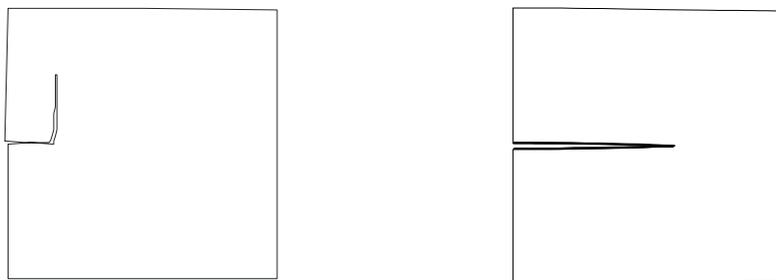
Figura 7.19 – Direção de propagação (CARPINTERI; 1986).

Na Figura 7.19, β é o ângulo formado entre a inclinação da fissura e a direção de aplicação do carregamento.

Para este exemplo o ângulo β é zero e, de acordo com o gráfico, a direção de propagação será dada entre 70° e 90° (eixo local na ponta da fissura), dependendo do critério adotado. No modelo, o ângulo inicial de propagação obtido apresentou um erro de 2,85% de acordo com o CMTP. Está, portanto, na faixa aceitável pelo critério da mínima densidade de energia de deformação e um erro de 20% com o critério de Griffith (Figura 7.19).

Observou-se que variando a distância r em que foram calculadas as tensões principais (Figura 4.4), este ângulo pode variar. Recomenda-se, portanto, avaliar estas tensões até certa relação incremento/tamanho de pré-fissura, para o qual apresentou valores razoáveis até $\Delta a/a = 0,2$. Devido a que nos pontos mais próximos à ponta as tensões tendem ao infinito, é mais fácil identificar qual dos pontos terá a maior tensão nesta região do que na região em que estas tensões começam a apresentar-se homogêneas (mais distante da ponta).

Na Figura 7.20 ilustra-se uma representação com os ângulos de propagação obtidos, respectivamente para problemas de modo puro II e I:



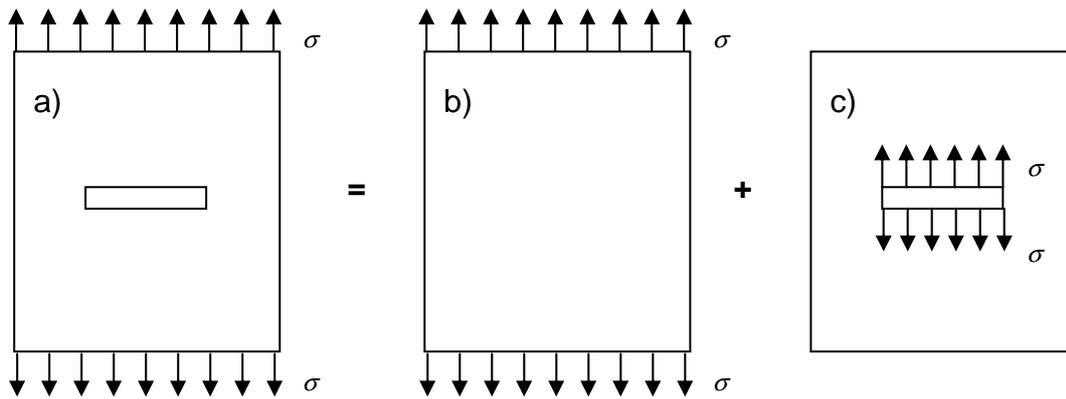
7.20 – Direção de propagação para (a) modo puro II e (b) modo puro I.

Pela Figura 7.20 (a) nota-se que num primeiro instante atua o modo II puro, até que esta fissura esteja a aproximadamente 90° da original, onde começa a atuar (localmente) o modo puro I, fazendo com que a fissura prossiga nesta mesma direção até a ruptura total.

No modo I, Figura 7.20 (b), a fissura propagará sempre no seu próprio eixo, perpendicularmente à máxima tensão principal.

O procedimento de propagação é feito de maneira bastante simples, apenas adicionando os novos elementos gerados que formarão o prolongamento da fissura anterior.

Ainda no MECD, foi feito um exemplo de aplicação do Princípio da Superposição dos Efeitos (PSE), válido para a MFEL (Bažant e Planas; 1998), com o objetivo de averiguar as equações integrais. O PSE postula que o estado de tensões, deformações e deslocamentos (consequentemente os FIT também) em um sólido pode ser decomposto na soma de outros estados, com aplicações em diversos tipos de problemas. Seja o problema da Figura 7.21:



7.21 – Princípio da Superposição dos Efeitos (PSE). a) Problema inicial, obtido pela adição dos problemas b) e c).

De acordo com o PSE, o problema a) pode ser obtido da soma dos problemas b) e c). O primeiro, corpo íntegro elástico submetido a esforços no contorno de tração e o segundo, problema com fissura central e esforços aplicados nas faces da mesma.

Este exemplo foi feito utilizando $\sigma = p = 10$, uma chapa de dimensões 100×50 e a fissura medindo 10, em unidades coerentes. Valendo-se da simetria, os resultados obtidos no problema a) foram exatamente iguais aos resultados dos problemas b) e c) somados, para tensões internas e deslocamentos nos nós do contorno. Este problema ratifica a qualidade das integrais obtidas, comprovando sua precisão.

7.3. Exemplos no modelo coesivo

O modelo coesivo proposto foi implementado a partir do MECD. Através do CMTP, a direção da propagação da fratura é automaticamente localizada e gerada, sem a necessidade de serem adotados elementos de fratura pré-estabelecidos e nem remodelar a malha do contorno.

Os sólidos começam íntegros, sendo dado um ponto de partida para início do fraturamento.

Considere o problema da Figura 7.22. Foi utilizada uma malha bastante simples, com somente 6 elementos no contorno e a fratura gerada automaticamente com dois elementos (um em cada face). O problema começa

sem nenhuma fissura e a posição escolhida para o início do fraturamento está indicada. Adotou-se $L=1$, $E=1$, $\nu=0$, $\Delta u_c=100000$, $f_t'=0,333$, $\Delta a=0,0125$ e o deslocamento aplicado $\delta=1$ dividido em 10 incrementos em unidades coerentes.

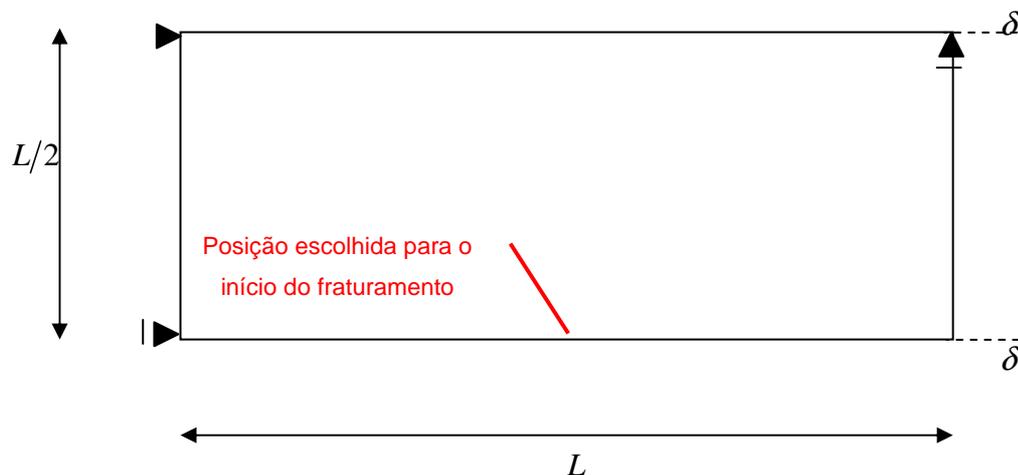


Figura 7.22 – Chapa com deslocamento (δ) aplicado.

Com $\Delta u_c \rightarrow \infty$, o exemplo escolhido em realidade é o modelo de Dugdale, sendo as forças aplicadas na fissura sempre constantes e iguais à f_t' . As tensões internas e os deslocamentos podem ser facilmente averiguados pela solução elástica para este problema, ainda quando o sólido está íntegro. Ao superar o f_t' , a tensão verdadeira a ser calculada pelo critério

$\left[\sigma^v = f_t' \left(1 - \frac{\Delta u}{\Delta u_c \rightarrow \infty} \right) \right]$ será sempre $\sigma^v = f_t'$. Devido a essas condições, a

abertura da fissura final será constante e igual a 0,067.

O diagrama tensão verdadeira σ^v por abertura da fissura Δu obtido está de acordo com o modelo, como mostra a Figura 7.23:

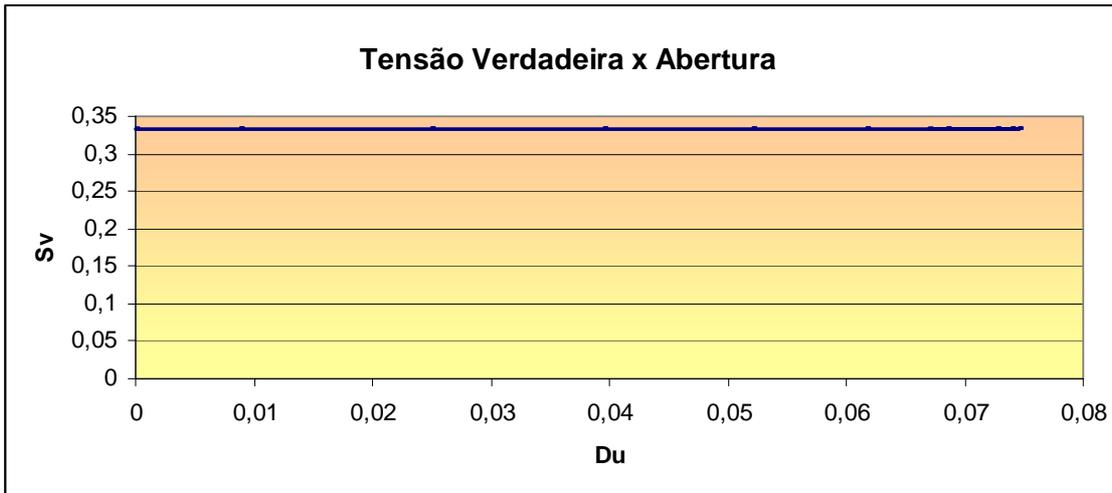


Figura 7.23 – Modelo coesivo - Diagrama $\sigma^v \times \Delta u$.

Pela Figura 7.23 observa-se que como a abertura crítica tende ao infinito as tensões serão sempre constantes e iguais a $f_t' = 0,333$, pois neste caso particular o problema recai no modelo de Dugdale. A fissura será toda coesiva, já que o programa não está preparado para continuar incrementando carga/deslocamento após a ponta da fissura ter atingido o contorno.

Observando o comportamento do modelo apresentado na Figura 7.24, onde são plotados os valores das forças (P) x deslocamentos (δ) nodais para o ponto no canto superior direito da Figura 7.22, verifica-se que o modelo está coerente. As forças variam pouco à medida em que são gerados novos elementos de fratura, em seguida tendendo a permanecer na força equivalente à da tensão máxima de tração do material.

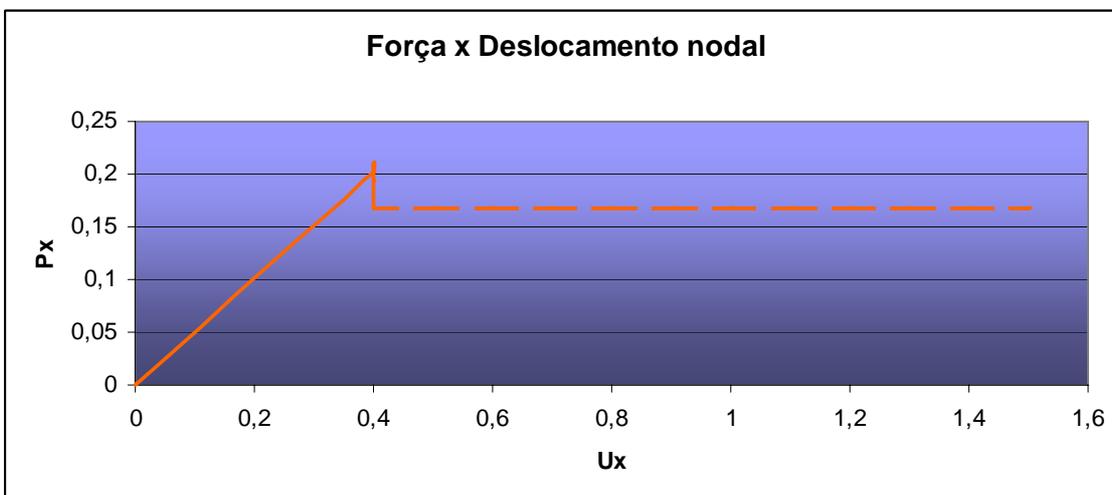


Figura 7.24 – Curva do comportamento da chapa.

Na Figura 7.24 a linha contínua representa a resposta obtida através do algoritmo e a linha tracejada mostra o aumento do deslocamento do ponto para uma mesma força. Como o programa não permite que se continue adicionando carga/deslocamento após a ponta da fissura ter atingido o contorno (ainda não representando a ruptura total do material portanto, afinal o processo ainda se encontra na zona coesiva) a resposta só pôde ser obtida até a linha contínua apresentada.

Na Figura 7.25 é apresentada a deformada final do problema, onde os pontos em azul são os nós do contorno e fratura. A zona coesiva, que ainda mantém um certo ligamento entre as partículas da região, é também representada nesta figura.

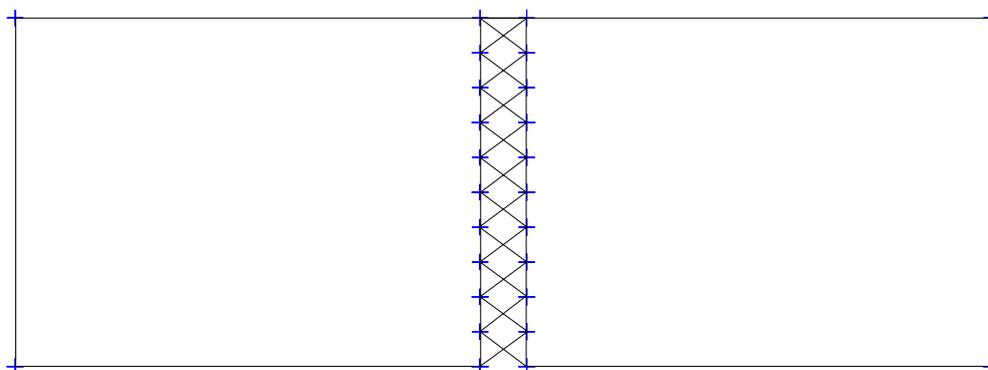


Figura 7.25 – Deformada final do problema mostrando a zona coesiva.

Suponhamos agora a viga bi-apoiada abaixo, submetida a esforços em 3 pontos:

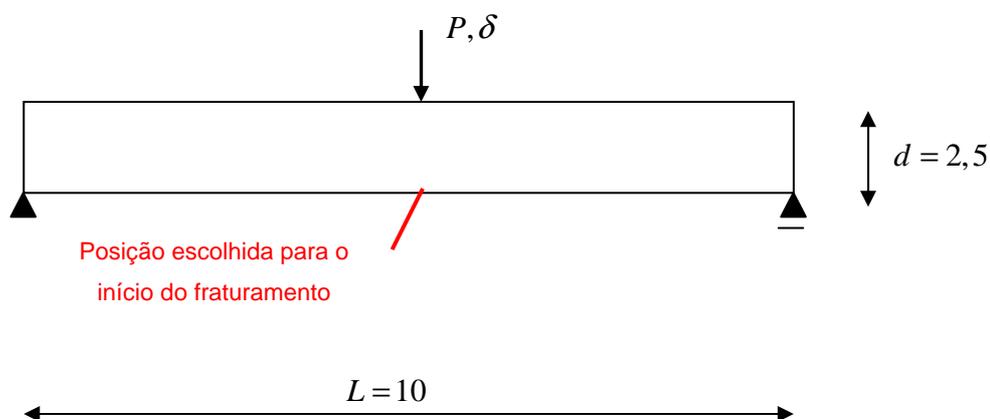


Figura 7.26 – Viga bi-apoiada com carga ou deslocamento central aplicado.

As propriedades do material analisado são: $E = 1386100,106$, $\nu = 0,15$, $f_t' = 230$, $\Delta u_c = 0,00276555$, $\Delta a = 0,0625$ e $\delta = 0,006$. O número de incrementos foi variado, justamente para poder comparar as possibilidades entre si. A malha foi composta por 50 elementos de contorno.

A Figura 7.27 apresenta o diagrama tensão verdadeira σ^v por abertura da fissura Δu , onde observa-se que obedece à relação linear regida pela eq. (6.3) do modelo coesivo, sendo que a tensão verdadeira para aberturas maiores que a crítica é zero.

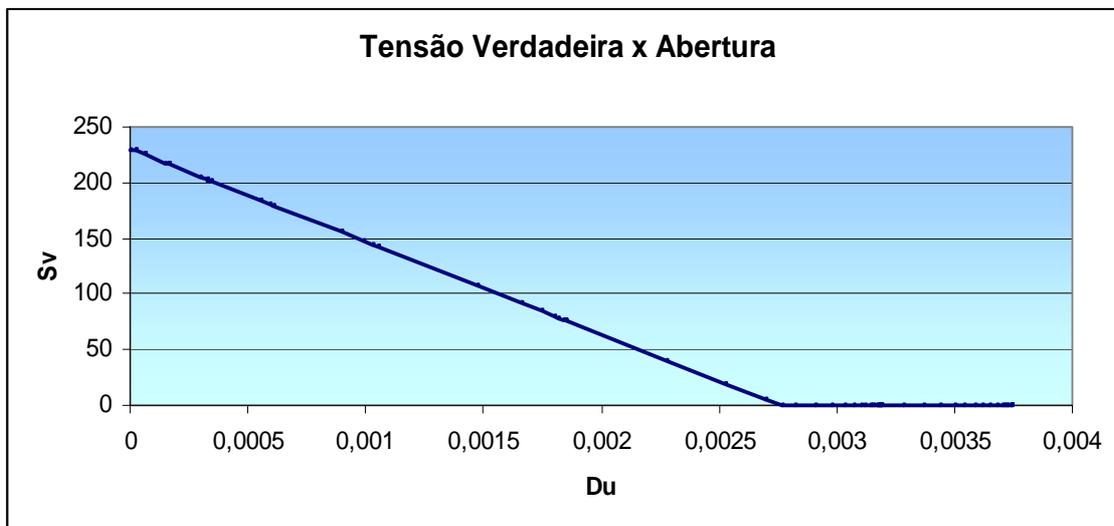


Figura 7.27 – Modelo coesivo - Diagrama $\sigma^v \times \Delta u$.

A curva obtida para este problema variando o número de incrementos na aplicação de carga/deslocamento, é apresentada na Figura 7.28. Observa-se que após superar o trecho elástico-linear o modelo proposto apresenta resposta mais rígida que a referência, na primeira parte do gráfico. Acredita-se que isto acontece devido à simplificação do modelo proposto, que apenas verifica a geração de novo elemento de fratura depois que a fratura anterior convergiu ou estabilizou.

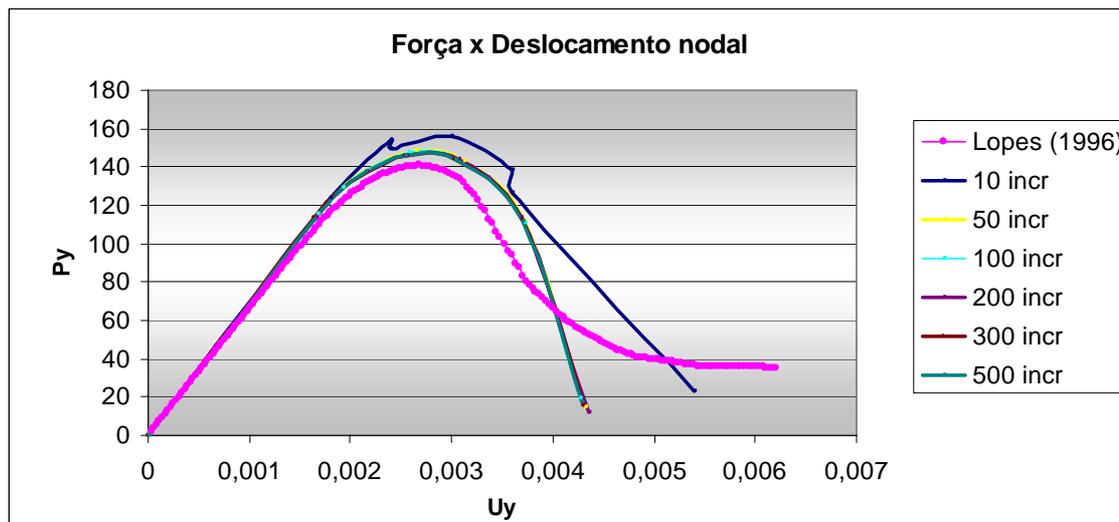


Figura 7.28 – Curva obtida com o modelo proposto.

Observa-se que utilizando somente 10 incrementos a resposta não apresentou-se adequada, já para incrementos de 50 até 500 a resposta apresentou ínfima variação. Isto se deve à robustez do método, que mesmo para discretizações pobres e poucos incrementos, é capaz de captar a curva do comportamento. Ainda nos incrementos entre 50 a 500, nota-se uma certa defasagem no ramo descendente com relação à curva de Lopes, o que é perfeitamente aceitável, tendo em vista que ao se aproximar o momento da ruptura do material, praticamente não há tensão residual resistindo e a ruptura se dá abruptamente.

Manzoli e Venturini (2004) e outros autores (SALEH e ALIABADI; 1995), apresentam a resposta esperada do comportamento para um problema similar, viga bi-apoiada com deslocamento central aplicado, mas de espessura $t = 5$ e diferentes propriedades de material. Usando o MEC, MEF e análise experimental, o gráfico do comportamento que apresentam estes autores mostra um intervalo aceitável para a curva do modelo, conforme Figura 7.29.

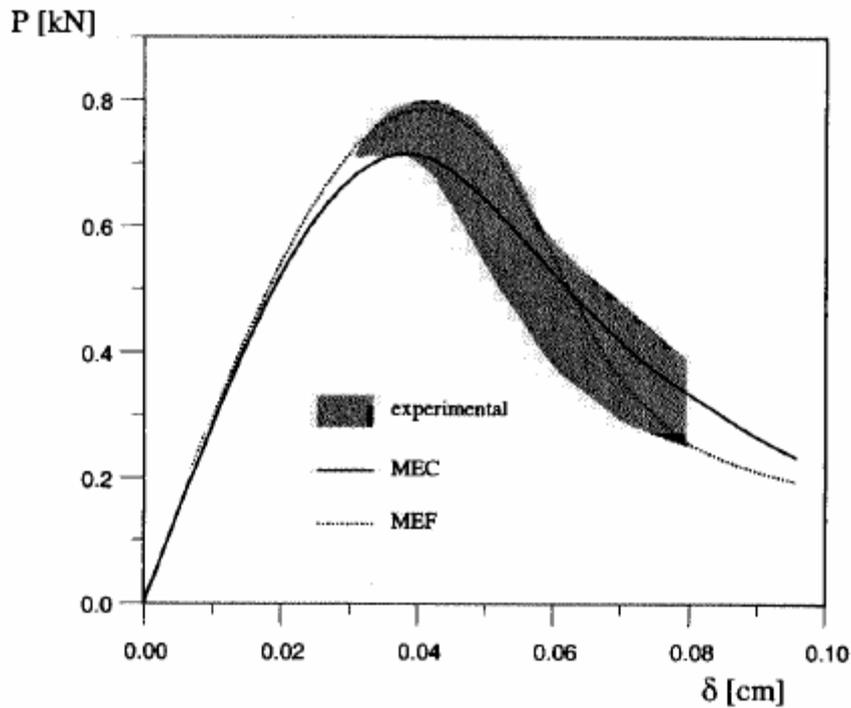


Figura 7.29 – Comportamento do modelo.

Através da Figura 7.30 se pode visualizar deformada para 8 elementos de fratura, no incremento 69, aumentada 100 vezes com a representação da zona coesiva:

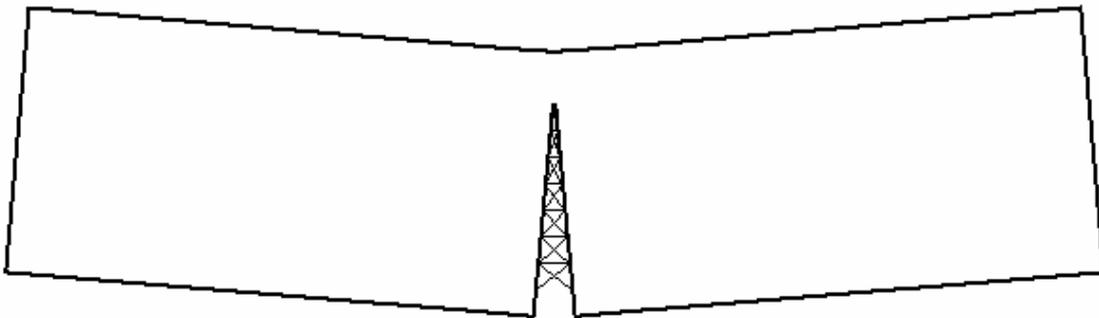


Figura 7.30 – Deformada da viga.

Nesta representação pode-se verificar que a direção de propagação está correta e que nesta iteração e incremento de carga (100 incrementos) apenas o primeiro elemento de fratura abriu, sendo os demais pertencentes à zona coesiva.

Pretende-se, em estágio posterior ao da pesquisa, testar a geração de novo elemento coesivo de fratura concomitantemente ao teste de estabilização da abertura do mesmo, corrigindo-se a rigidez excedente na primeira parte do processo.

Conclusões

Neste trabalho diversos aspectos da formulação do MEC na análise de problemas, especialmente de fratura puderam ser avaliados.

Na literatura, não encontram-se facilmente modelos com integrais analíticas que tratem de problemas de fratura. Ainda que utilizando aproximação linear, portanto simples, pode-se afirmar que de maneira geral o MEC é uma excelente ferramenta numérica para analisar fratura e problemas envolvendo singularidades.

Na análise das vigas elásticas, foi verificado que a distância dos pontos de colocação com relação ao elemento alteram a resposta. Com base nas análises feitas, conclui-se que uma distância ideal para avaliar a resposta seria de até 4 (Distância do PF x Tamanho do elemento) cm (a unidade pode ser generalizada ao adotar-se unidades coerentes).

A equação em forças de superfície é menos estável para análise de problemas elástico-lineares e também em problemas de fratura ou envolvendo singularidades. As respostas até apresentam-se coerentes em determinados casos, mas para obter uma resposta segura é mais indicada a equação em deslocamentos.

Entretanto, as equações singular e hiper-singular quando usadas em uma mesma análise em problemas de fratura (MECD), mostraram-se muito eficientes.

Observa-se que o estudo da propagação pelo MECD é realmente bastante simples, sem a necessidade de remodelar a malha do contorno, e os resultados são confiáveis, mesmo com pouca discretização.

Também neste caso, notou-se uma grande sensibilidade quanto à discretização da malha, havendo uma relação entre a malha do contorno e a da fissura. Refinar certa região de interesse, por exemplo, produz uma resposta

muito melhor do que se utilizar elementos de tamanho constante. Nesse contexto, parece ser de fundamental importância um estudo de malha, tal como o modelo adaptativo, para a geração da malha do problema inicial, pois se verificou uma existência de certa relação entre a discretização do contorno (dimensão dos elementos, se constantes ou com refinamento) e da fissura, no cálculo do FIT.

Para a propagação, entretanto, verificou-se que a discretização da malha é pouco afetada. Porém, observou-se também que a escolha do tamanho dos elementos de fratura gerados pode interferir na propagação, pois o CMTP identifica melhor a direção de propagação para pontos mais próximos à ponta, onde as tensões são infinitas. Com base neste estudo, recomenda-se portanto usar um comprimento de geração de pontos internos/tamanho da fissura de até 0,2.

Tanto os modelos que utilizam apenas a equação singular ou a hiper-singular também podem ser usados para análise de problemas de fratura. Apesar do modelo hiper-singular ter obtido melhor resultado, as respostas variaram muito durante sua análise, apresentando uma sensibilidade muito maior quando comparada à solução fornecida pela equação singular somente, que é mais estável. Portanto, fatores como geometria, refinamento, distância do ponto de colocação influem muito mais no modelo que utiliza a equação hiper-singular que no modelo que usa a singular.

Para a análise do fraturamento não-linear com o modelo coesivo descrito no Capítulo 6, as respostas obtidas foram satisfatórias, ainda que a uma análise por enquanto restrita a problemas somente em modo I.

Inicialmente, o corpo está íntegro e escolhe-se o ponto onde iniciará a fratura, mas este procedimento poderia ser otimizado, gerando automaticamente uma ou varias fissuras em pontos onde ocorresse a máxima tensão.

O modelo aqui proposto para a fratura coesiva não se presta a captar a extensão ou tamanho da zona coesiva, uma das importantes respostas de interesse nesta área. Devido a que é gerado um novo elemento de fratura somente após o anterior ter convergido, nem sempre esta zona poderá ser prevista corretamente. Com esta simplificação não é possível portanto precisar

a dimensão da zona coesiva, mas pretende-se corrigir este problema em desenvolvimentos futuros.

O gráfico de comportamento para a viga bi-apoiada obtido, apresenta-se um pouco mais rígido em seu trecho ascendente quando comparado com a bibliografia, no entanto esta resposta pode ser considerada satisfatória. O fato de o ramo descendente final da curva não seguir constante com o deslocamento crescente, deve-se à limitação que o programa apresenta de não permitir adição de cargas ou iterações ao atingir o contorno.

O caminho de propagação poderia ter sido estabelecido desde o principio, como é apresentado na maioria da literatura; entretando preferiu-se testar o CMTF gerando automaticamente a fratura e o seu avanço para posteriormente ter mais liberdade de aplicação em problemas, inclusive em modos mistos de fraturamento, ou em problemas mais complexos, onde não se conhece *a priori* o caminho da propagação.

De maneira geral, pode-se notar a potencialidade do MEC usado como ferramenta numérica na aplicação em problemas elásticos e da Mecânica da Fratura, seja linear ou não linear. As soluções são precisas mesmo usando pouca discretização, incrementos e com aproximação linear, confirmando a eficácia do método.

Referências Bibliográficas

ALESSANDRI, C.; MALLARDO, V. (1999). *Crack identification in two-dimensional unilateral contact mechanics with the boundary element method*. Comp. Mech., 24, p. 100-109.

ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. (1992). *Numerical fracture mechanics*. The Netherlands, Kluwer Academic Press.

ALIABADI, M. H.; SALEH, A. L.(2002). *Fracture mechanics analysis of cracking in plain and reinforced concrete using the boundary element method*. Eng. Fract. Mech., p.267-280.

ANDERSON, T. L. (1995). *Fracture mechanics fundamentals and applications*. CRC Press, USA.

ASSAN, A. E. (2003). *Método dos elementos finitos – primeiros passos*. 2ª edição, Ed. UNICAMP, Campinas.

BARBIRATO, J. C. C.; VENTURINI, W. S. (1998). *Boundary element method for three-dimensional cohesive crack problems*. Fourth world congress on computational methods, Buenos Aires.

BARENBLATT, G. I. (1962). *The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*. In: Advances in Applied Mechanics. Vol. 7, p. 55-129.

BAŽANT, Z. P.; PLANAS, J. (1998). *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. CRC Press LLC.

BITTENCOURT, T. N. (1993). *Computer simulation of linear and nonlinear crack propagation in cementitious materials*. PhD. Thesis, Cornell University.

BLANDFORD, G. E.; INGRAFFEA, A. R.; LIGGETT, J. A. (1981). *Two-dimensional stress intensity factor computation using the boundary element method. Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 17, p. 387-404.

BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J (1992). *Boundary elements: an introductory course*. Second edition, Computacional Mechanics Publications, Southampton, Mcgraw-Hill Book Company.

BROEK, D. (1986). *Elementary engineering fracture mechanics*. Martinus Nijhoff and Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London.

CARPINTERI, A. (1986). *Mechanical damage and crack growth in concrete*. Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht. The Netherlands.

CEN, Z.; MAIER G. (1992). *Bifurcations and instabilities in fracture of cohesive-softening structures: A boundary element analysis*. *Fatigue Fract. Engng Mater.*, 15, p. 911-928.

CROUCH, S. L. (1976). *Solution of plane elasticity problems by the displacement discontinuity method*. *Int. J. Num. Meth. Eng*, 10, p. 301-342.

CROUCH, S. L.; STARFIELD, A. M. (1983). *Boundary element method in solid mechanics*. George Allen and Unwin.

CRUSE, T. A. (1988). *Boundary element analysis in computational fracture mechanics*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

CRUSE, T. A.(1972). *Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary integral equation method.the surface crack: phisical problems and computational solutions*. Swedlow L. J., ASME, New York, p. 153-170.

CRUSE, T. A.; VAN BUREN, W. (1971). *Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack*. *Int. J. Frac. Mech.*, 7, p. 1-15.

DIRGANTARA, T.; ALIABADI, M. H. (2000). *Crack Growth analysis of plates Loaded by bending and tension using dual boundary element method*. Int. J. Fracture, 105, p. 27- 47.

DOMINGUEZ, J.; MARTINEZ, J. (1984). *Short communication on the use of quarter point boundary elements for stress intensity factor calculations*. Int. J. Num. Meth. In Engn., 20, p. 1941-1950.

DUGDALE, D. (1960). *Yielding of steel sheets containing slits*. J. Mech. Phys. Solids, 8, p. 100 – 104.

ERDOGAN, F.; SIH, G.C. (1963). *On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear*. Trans. ASME, Journal of Basic Engineering. Vol. 85, p. 519-527.

EVANS, P. H.; MARATHE, M. S. (1968). *Microcracking and stress-strain curves for concrete in tension*. Materials and Structures (RILEM), nº 1, p. 61-64.

EWALDS, H. L.; WANHILL, R. J. H. (1984). *Fracture mechanics*. Victoria, Australia.

FEDELINSKI, P.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. (1997). *The time-domain DBEM for rapidly growing cracks*. Int. J. Num. Meth. In Engn., 40, p. 1555-1572.

FETT, T.; MUNZ, D. (1997). *Stress intensity factors and weight functions*. Computational Mechanics Publications, Southampton UK and Boston USA.

GRAY L. J., MARTHA, L. F., INGRAFFEA, A. R. (1990). *Hyper singular integrals in boundary element fracture analysis*. Int. J. Num. Meth. Eng., 29, p. 1135-1158.

GRIFFITH, A. A. (1920). *The phenomena of rupture and flow in solids*. Phil. Trans. Roy. Soc. Series A., Vol. 221, p. 163-198.

HANSON, J. H.; BITTENCOURT, T. N.; INGRAFFEA, A. R. (2004). *Three-dimensional influence coefficient method for cohesive crack simulations*. Engineering Fracture Mechanics, 71 p. 2109-2124.

HILLERBORG, A., MODEER, M.; PETERSSON, P.E. (1976). *Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*. Cem. Concr. Res., 6, p. 773-782.

INGLIS, C.E. (1913). *Stresses in a plate due to the presence of cracks and sharp corners*. Trans. Inst. Naval Architects. Vol. 55, p. 219-231.

IRWIN, G. R. (1957). *Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate*. Trans. ASME J. Appl. Mech., Vol. 24, p.361-364.

ISHIKAWA, H.; KITAGAWA, H.; OKAMURA, H. (1980). *J Integral of a mixed mode crack and its application*. Proc. 3rd. Int. Conf. on Mechanical Behavior of Materials. Vol. 3, p.447-455.

JIANG, Y. S.; VENTURINI, W. S. (1998). *Cálculo da Estabilidade de Taludes Tridimensionais pelo Métodos dos Elementos de Contorno*. In: XI Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos e Geotecnia, UnB, Brasília.

JIANG, Y.; VENTURINI, W.S. (2000). *A general boundary element method for analysis of slope stability*. In: DE ROECK, G.; TOPPING, B.H.V., eds. Computational civil and structural engineering (Proc. 5th International Conference on Computational Structures Technology / 2nd International Conference on Engineering Computational Technology, Leuven, Belgium, 6-8 September, 2000). Edinburgh, Civil-Comp Press. p. 191-196. (ISBN: 0-948749-73-3)

JIANG, Y.S.; VENTURINI, W. S. (1998). *Limit analysis of slope stability with boundary element methods*. In: The IV world congress on comp. mechanics, June 29 to 2 July, 1998, Buenos Aires, Argentina.

KANNINEN, M. F.; POPELAR, C. H. (1985). *Advanced Fracture mechanics*. Oxford University Press.

KARIHALOO, B. L. (1995). *Fracture Mechanics & Structural Concrete*. Pearson Education Print, Person Education. US.

LEITÃO, V. M. A. (1994). *Boundary elements in nonlinear fracture mechanics*. Topics in Engineering, Vol. 21. Computational Mechanics Publications Southampton UK and Boston USA.

LEITE, L. G. S. (2003). *Formulação do método dos elementos de contorno de domínios enrijecidos na presença de fratura e dano*. Tese (doutorado) em desenvolvimento - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

LIANG, R. Y.; LI, Y. N.(1991). *Simulations of non-linear fracture process zone in cementitious material a boundary element approach*. J. Computational Mechanics, 7, p. 413-427.

LOPES JR., M. C. (1996). *Modelagem numérica do crescimento de fraturas através do método dos elementos de contorno*. Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

LOPES JR., M. C.; VENTURINI, W. S.(1997). *Cohesive crack analysis by the boundary element method*. In: Complas V, eds. Oñate, E. & Owen, D.R.J., Pineridge Press.

LOVÓN, O. R. (2005). *Formulação h-adaptativa do método dos elementos de contorno para elasticidade bidimensional com ênfase na propagação da fratura*. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MACIEL, D. N. (2003). *Determinação dos fatores de intensidade de tensão estáticos e dinâmicos via mec com integração analítica em coordenadas locais*. Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

MANZOLI, O. L.; VENTURINI, W. S. (2004). *Uma formulação do MEC para a simulação numérica de descontinuidades fortes*. Rev. Int. Mét. Num. Cál. Dis. Ing., Vol. 20, 3, p. 215-234.

MARTÍNEZ, J.; DOMINGUEZ, J. (1984). *On the use of quarter-point boundary elements for stress intensity factor computations*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 20, pp 1941-1950.

MELLINGS, S. C.; ALIABADI, M. H. (1994). *Three-dimensional flaw identification using sensitivity analysis*. In: Brebbia, C.A. (ed.), Boundary elements methods 16th, p. 149-156.

MEWS H. (1987). *Calculation of stress intensity factors for various crack problems with the Boundary Element Method*. In: C.A.Brebbia, W.L.Wendland and G.Kuhn (Eds). Boundary Elements IX, Springer Verlag.

MI, Y. (1996). *Three-dimensional analysis of crack growth*. Topics in Engineering, Vol. 28, Computational Mechanics Publications, Southampton UK and Boston USA.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. (1992). *Dual boundary element method for three-dimensional fracture mechanics analysis*. Engineering Analysis with Boundary Elements, 10, p. 161-171.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. (1992). *Dual boundary element method for analysis of 3-D crack problems*. In: boundary element 14, Brebbia C.A. (ed.), Vol. 2, p. 315-329.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. (1994). *Discontinuous crack-tip elements: application to 3-D boundary element method*. Int. J. of Fracture, 67, R67-R71.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. (1994). *Three-dimensional crack growth simulation using BEM*. Computers & Structures, 52, p. 871-878.

MI, Y.; ALIABADI, M. H. (1995). *An automatic procedure for mixed-mode crack growth analysis*. Communications in Numerical Methods in Engineering, 11, p. 167-177.

OROWAN, E. (1952). *Fundamentals of brittle behaviour in metals, in fatigue and fracture of metals*. Murray W. M. (ed), p. 139-167.

PARÍS, F.; CAÑAS, J. (1997). *Boundary element method fundamentals and applications*. Oxford, Oxford University Press.

PARIS, P. C.; ERDOGAN, F. (1963). *A critical analysis of crack propagation laws*. J. Basic Engng. Vol. 85, p. 528-534.

PORTELA, A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. (1991). *Dual boundary element incremental analysis of crack propagation*. Computers & Structures, Vol. 46, p. 237-247.

PORTELA, A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. (1992). *The dual boundary element method, effective implementation for crack problems*. Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 33, p. 1269-1287.

RICE, J. R. (1968). *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*. Trans. ASME, J. Appl. Mech.. Vol. 35, p. 379-386.

ROCHA, F. S. (1988). *Análise de descontinuidade pelo método dos elementos de contorno*. Dissertação (doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

SALEH, A. L.; ALIABADI, M. H. (1995). *Crack growth analysis in concrete using boundary element method*. Engineering Fracture Mechanics. Vol. 51 nº 4, p. 533-545.

SALEH, A. L. (1997). *Crack growth in concrete using boundary elements*. Topics in Engineering, Vol. 30, Computational Mechanics Publications, Southampton UK and Boston USA.

SALGADO, N. K. (1998). *Boundary element methods for damage tolerance design of aircraft structures*. Topics in Engineering, Vol. 33, Computational Mechanics Publications, Southampton UK and Boston USA.

SALVADORI, A. (1999). *Quasi brittle fracture mechanics by cohesive crack models and symmetric Galerkin Boundary Element Method*. Dissertação (doutorado) – Politécnico de Milão, Itália.

SNYDER, M. D.; CRUSE, T. A. (1975). *Boundary integral equation analysis of cracked anisotropic plates*. *Int. J. Fracture*. Vol. 11, p. 315-328.

SOLLERO, P.; ALIABADI, M. H. (1994). *Anisotropy analysis of cracks emanating from circular holes in composite laminates using the boundary element*. *Eng. Fract. Mech.*, 49, p. 213-224.

TELLES, J. C. F.; GUIMARÃES, S. (2000). *Green's function: A numerical generation for fracture mechanics problems via Boundary Elements*. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 188, p. 847-858.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. (1980). *Teoria da elasticidade*. 3ª edição, Ed. Guanabara Dois S. A., Rio de Janeiro.

VALLIAPPAN, S. (1981). *Continuum mechanics – fundamentals*. A.A. Balkema, Rotterdam.

VENTURINI, W. S. (1988). *Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia*. Tese (Livre-docência) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

VENTURINI, W. S. (1994). *A new boundary element formulation for crack analysis*. In: Brebbia, C.A., (ed.) *Boundary element method XVI*. Southampton/Boston, Computational Methods Publ., p. 405-412.

VENTURINI, W. S. (1982). *Application of the Boundary Element Formulation to Solve Geomechanical Problems*. Ph.D. Thesis, University of Southampton.

VILLAÇA, S. F.; GARCIA, L. F. T. (1996). *Introdução à teoria da elasticidade*. Rio de Janeiro, COPPE.

WATSON, J. O. (1986). *Hermitian cubic and singular elements for plate strain*. *Developments in Boundary Element Methods 4*. Banerjee P. K. Ad Watson J. O. (eds), Elsevier Applied Science Publishes, p. 1-28.

WEN, P.; FAN, T. (1994). *The discontinuity displacement method applied to three-dimensional co-planar crack problem for any boundary value condition*. Eng Fract. Mech., 48, p. 691-702.

WUTZOW, W. W. (2003). *Formulação do método dos elementos de contorno para análise de chapas com enrijecedores*. Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Apêndice

A Contribuição nas matrizes

Acreditando que seja muito útil apresentar a disposição dos coeficientes nas suas respectivas matrizes do model dual (MECD) e com o objetivo de auxiliar a trabalhos futuros que ingressem no mesmo tema, neste anexo será apresentada a contribuição dos coeficientes nas matrizes G e H, no que se refere à posição.

Tendo em vista que essas matrizes não apresentam propriedades como nos elementos finitos, este anexo pode ser de grande utilidade.

Seja um problema de fratura com a seguinte geometria:

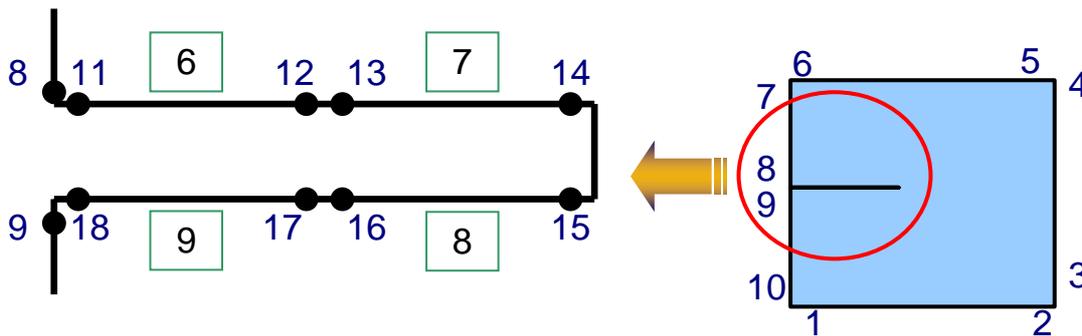


Figura 1 – Problema de fratura.

Esta figura é representativa, sendo, em realidade, a abertura entre as faces igual a zero e as coordenadas dos nós dos elementos 6 e 7 idênticas às dos elementos 9 e 8 respectivamente. Assim, por exemplo quando um ponto fonte do elemento 9 estiver integrando ele mesmo e o elemento 6, haverá contribuição na matriz G (supondo que na face inferior será aplicada a equação em forças de superfície).

Nas figuras a seguir são representadas as matrizes para este problema:

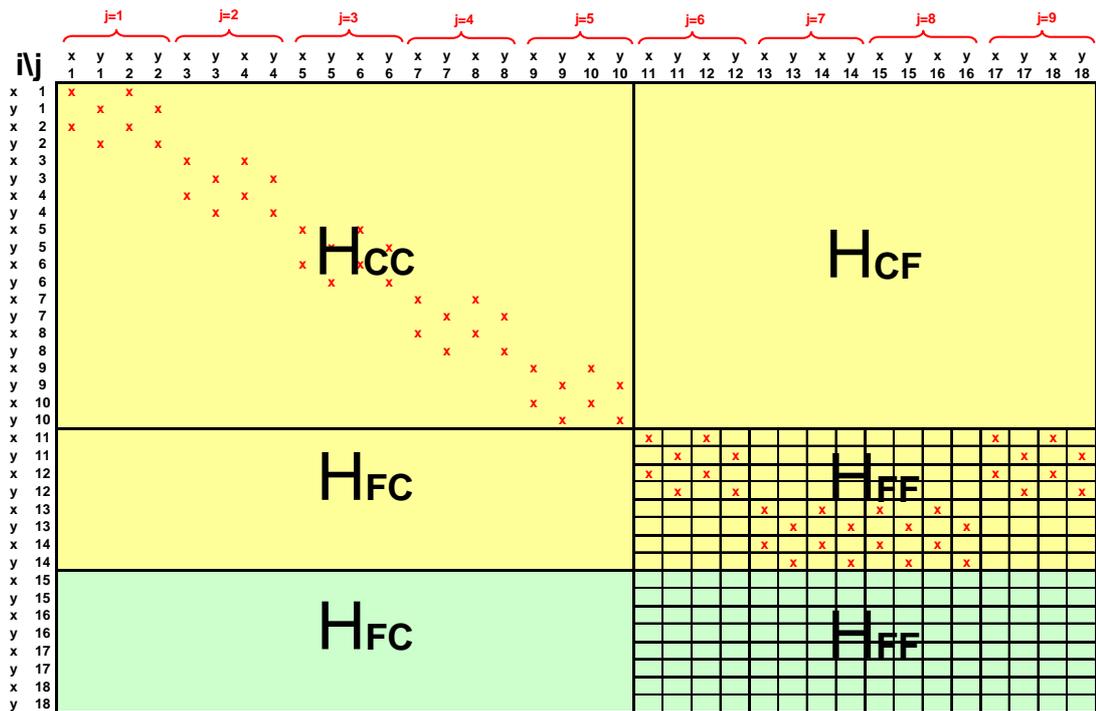


Figura 2 – Contribuição na matriz H.

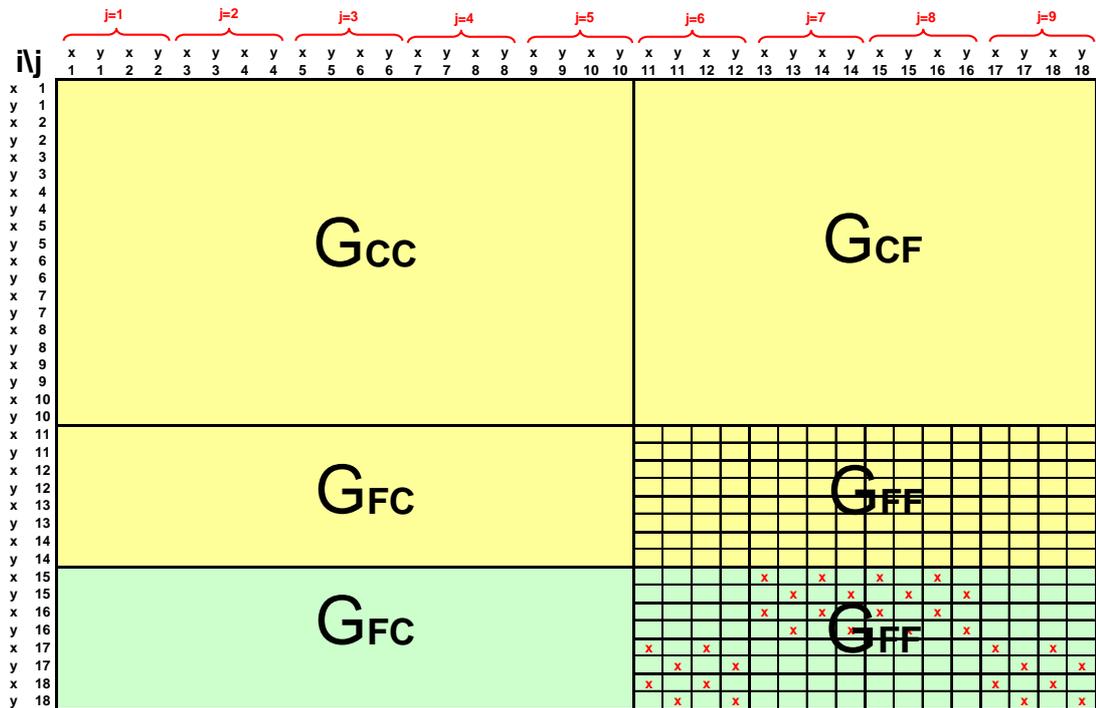


Figura 3 – Contribuição na matriz G.

onde a parte representada em amarelo aplica-se a equação em deslocamentos e na parte representada em verde a equação em forças de superfícies é aplicada.

As partes assinaladas em vermelho mostram as posições onde entram as contribuições. O primeiro subíndice indica o posicionamento do ponto fonte e o segundo indica onde está integrando (exemplo: CF quer dizer ponto fonte pertencente ao contorno integrando no elemento de fratura).

Anexo

A *Quadratura de Gauss-Legendre*

O estudo contido neste anexo baseou-se nos livros dos professores Assan (2003) e Brebbia & Domingues (1992).

Dada uma função $f(x)$ contínua e definida num intervalo $a \leq x \leq b$, é possível calcular o valor aproximado (numérico) da integral dessa função em certos pontos x_i , tais que $a \leq x_i \leq b$ utilizando uma combinação linear dos mesmos. Assim:

$$\int_a^b f(x)dx \cong w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2) + \dots + w_i f(x_i) + \dots + w_n f(x_n) \quad (\text{A.1})$$

onde $f(x_i)$ é o valor da função no ponto x_i e w_i são valores denominados pesos da função neste ponto. Para cada número n de pontos existe um peso equivalente, e estes valores são tabelados.

Obviamente que quanto maior o número de pontos utilizados na aproximação, melhor o resultado, enquanto que uma aproximação com somente 1 ponto de Gauss, por exemplo, a resposta é bastante grosseira.

Fazendo a transformação para coordenadas adimensionais ξ , válida num intervalo $-1 \leq \xi \leq 1$, a eq. (A.1) fica:

$$\int_a^b f(x)dx = J \int_{-1}^1 g(\xi)d\xi = J \sum_{i=1}^{NG} w_i g(\xi_i) \quad (\text{A.2})$$

onde NG é o número de pontos de Gauss da integração, J é o *Jacobiano* da transformação, dado por:

$$J = \frac{(b-a)}{2} \quad (\text{A.3})$$

Estes pontos estão localizados simetricamente em relação ao centro do intervalo a ser integrado e os pares simétricos possuem o mesmo peso. Por exemplo, para até 4 números de Gauss temos:

Tabela A.1 – Pontos de Gauss.

NG	i	Valor (ξ_i)	Peso (w)
1	1	0	2
2	1	$+\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
	2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
3	1	$\sqrt{0,6}$	$\frac{5}{9}$
	2	0	$\frac{8}{9}$
	3	$-\sqrt{0,6}$	$\frac{5}{9}$
4	1	0,8611363116	0,3478548451
	2	0,3399810435	0,6521451549
	3	-0,3399810435	0,6521451549
	4	-0,8611363116	0,3478548451

Para muitas funções de fácil resolução analítica não é muito comum a utilização deste método, mas para funções mais complexas esta é uma ferramenta matemática muito eficiente. Para exemplificar, vamos calcular a integral de duas funções simples.

- a) Dada a função $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ no intervalo $1 \leq x \leq 2$, encontrar a solução analítica e a numérica.

⇒ Solução Analítica:

$$\int_1^2 (2x^2 + 3x - 1) dx = \left(\frac{2x^3}{3} \right)_1^2 + \left(\frac{3x^2}{2} \right)_1^2 - (x)_1^2 = \frac{2}{3}(2^3 - 1^3) + \frac{3}{2}(2^2 - 1^2) - (2 - 1)$$

$$\int_1^2 (2x^2 + 3x - 1) dx = \frac{49}{6} \cong 8,1667$$

⇒ Solução Numérica (utilizando 2 pontos de Gauss):

$$J = \frac{(2-1)}{2} = \frac{1}{2}; \quad NG = 2 \quad p/i=1 \Rightarrow \xi_1 = +\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow w_1 = 1$$

$$p/i=2 \Rightarrow \xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow w_2 = 1$$

$$\text{Da transformação: } \begin{vmatrix} x & \xi & 1 \\ a & -1 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = \frac{(b-a)\xi}{2} + \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 (2x^2 + 3x - 1) dx &= J \sum_{i=1}^2 w_i g(\xi) = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 \left[2 \left(\frac{1}{2} \xi_1 + \frac{3}{2} \right)^2 + 3 \left(\frac{1}{2} \xi_1 + \frac{3}{2} \right) - 1 \right] + 1 \left[2 \left(\frac{1}{2} \xi_2 + \frac{3}{2} \right)^2 + 3 \left(\frac{1}{2} \xi_2 + \frac{3}{2} \right) - 1 \right] \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \left[2 \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2} \right)^2 + 3 \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2} \right) - 1 \right] + \left[2 \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2} \right)^2 + 3 \left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2} \right) - 1 \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\int_1^2 (2x^2 + 3x - 1) dx = \frac{49}{6} \cong 8,1667$$

b) Dada a função $f(x) = x^2$ no intervalo $0 \leq x \leq 1$, encontrar a solução analítica e a numérica.

\Rightarrow Solução Analítica:

$$\int_0^1 (x^2) dx = \left(\frac{x^3}{3} \right)_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

\Rightarrow Solução Numérica (utilizando 2 pontos de Gauss):

$$J = \frac{(1-0)}{2} = \frac{1}{2}; \quad NG = 2 \quad p/i=1 \Rightarrow \xi_1 = +\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow w_1 = 1$$

$$p/i=2 \Rightarrow \xi_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow w_2 = 1$$

$$\text{Da transformação: } \begin{vmatrix} x & \xi & 1 \\ a & -1 & 1 \\ b & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x = \frac{(b-a)\xi}{2} + \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 (x^2) dx = J \sum_{i=1}^2 w_i g(\xi) = \frac{1}{2} \left\{ 1 \left[\left(\frac{1}{2} \xi_1 + \frac{1}{2} \right)^2 \right] + 1 \left[\left(\frac{1}{2} \xi_2 + \frac{1}{2} \right)^2 \right] \right\} = \frac{1}{3}$$

Anexo

B *Integrais Analíticas Singulares*

As equações contidas neste anexo encontram-se na dissertação de Wutzow (2003).

Sendo as constantes:

$$K_1 = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)}$$

$$K_2 = \frac{L}{16\pi G(1-\nu)}$$

$$K_3 = \frac{G}{2\pi(1-\nu)L} \left\{ 2\nu [n_{i,j}r_{i,k} + n_{j,i}r_{j,k}] + (1-2\nu) [2n_{k,r}r_{i,j} + n_{j,i}\delta_{ik} + n_{i,j}\delta_{jk}] - (1-4\nu)n_{k,i}\delta_{ij} \right\}$$

$$K_4 = \frac{1}{4\pi(1-\nu)L} \left\{ -[(1-2\nu)(r_{j,i}\delta_{ki} + r_{i,j}\delta_{kj} - r_{k,i}\delta_{ij}) + 2r_{k,i}r_{j,i}] \right\}$$

as componentes das matrizes $[H]$ e $[G]$ (para os casos B.1, B.2 e B.3), além das matrizes $[S]$ e $[D]$ para o caso B.2 são:

Caso B.1) Ponto Fonte coincidente ao primeiro nó do elemento de integração

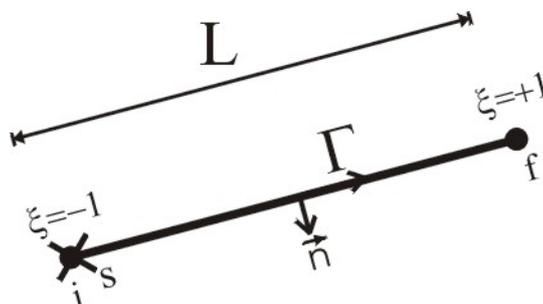


Figura B.1 – Ponto fonte coincidindo com o primeiro nó do elemento a ser integrado – Wutzow (2003).

$$H_{12}^1 = K_1(1 - \ln(L))$$

$$H_{12}^2 = -K_1$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{22}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^2 = 0$$

$$G_{11}^1 = K_2 \left[(3 - 4\nu) \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + \theta_2^2 \right]$$

$$G_{22}^1 = K_2 \left[(3 - 4\nu) \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + \theta_1^2 \right]$$

$$G_{11}^2 = K_2 \left[(3 - 4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + \theta_2^2 \right]$$

$$G_{22}^2 = K_2 \left[(3 - 4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(L) \right) + \theta_1^2 \right]$$

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^1 = G_{21}^2 = -K_2 \theta_1 \theta_2$$

Caso B.2) Ponto Fonte dentro do elemento de integração

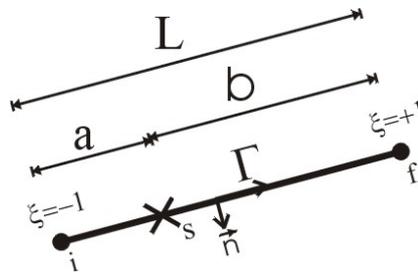


Figura B.2 – Ponto fonte dentro do elemento – Wutzow (2003).

$$H_{12}^1 = \frac{K_1}{L} \left(-b \ln\left(\frac{b}{a}\right) + L \right)$$

$$H_{12}^2 = \frac{K_1}{L} \left(a \ln\left(\frac{a}{b}\right) - L \right)$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{22}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^2 = 0$$

$$G_{11}^1 = \frac{2K_2}{L^2} \left\{ -(3 - 4\nu) \left[\left(ab + \frac{a^2}{2} \right) \ln(a) + \frac{b^2}{2} \ln(b) - \left(\frac{a^2}{4} + ab + \frac{3b^2}{4} \right) + \frac{L^2}{2} \theta_2^2 \right] \right\}$$

$$G_{22}^1 = \frac{2K_2}{L^2} \left\{ -(3-4\nu) \left[\left(ab + \frac{a^2}{2} \right) \text{Ln}(a) + \frac{b^2}{2} \text{Ln}(b) - \left(\frac{a^2}{4} + ab + \frac{3b^2}{4} \right) + \frac{L^2}{2} \theta_1^2 \right] \right\}$$

$$G_{11}^2 = \frac{2K_2}{L^2} \left\{ -(3-4\nu) \left[\left(ab + \frac{b^2}{2} \right) \text{Ln}(b) + \frac{a^2}{2} \text{Ln}(a) - \left(\frac{b^2}{4} + ab + \frac{3a^2}{4} \right) + \frac{L^2}{2} \theta_2^2 \right] \right\}$$

$$G_{22}^2 = \frac{2K_2}{L^2} \left\{ -(3-4\nu) \left[\left(ab + \frac{b^2}{2} \right) \text{Ln}(b) + \frac{a^2}{2} \text{Ln}(a) - \left(\frac{b^2}{4} + ab + \frac{3a^2}{4} \right) + \frac{L^2}{2} \theta_1^2 \right] \right\}$$

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^1 = G_{21}^2 = -K_2 \theta_1 \theta_2$$

$$S_{ij}^1 = K_3 \left\{ \text{Ln}(a) - \text{Ln}(b) - \frac{b}{a} - 1 \right\}$$

$$S_{ij}^2 = K_3 \left\{ -\text{Ln}(a) + \text{Ln}(b) - \frac{a}{b} - 1 \right\}$$

$$D_{ij}^1 = K_4 \left\{ b[\text{Ln}(a) - \text{Ln}(b) + 1] + a \right\}$$

$$D_{ij}^2 = K_4 \left\{ a[\text{Ln}(a) - \text{Ln}(b) - 1] - b \right\}$$

Caso B.3) Ponto Fonte coincidente ao segundo nó do elemento de integração

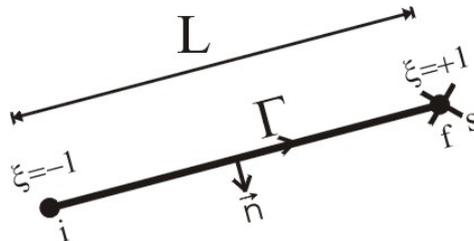


Figura B.3 – Ponto fonte coincidindo com o segundo nó do elemento a ser integrado – Wutzow (2003).

$$H_{12}^1 = K_1$$

$$H_{12}^2 = -K_1 (1 - \text{Ln}(L))$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{22}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^2 = 0$$

$$G_{11}^1 = K_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \text{Ln}(L) \right) + \theta_2^2 \right]$$

$$G_{22}^1 = K_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \text{Ln}(L) \right) + \theta_1^2 \right]$$

$$G_{11}^2 = K_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + \theta_2^2 \right]$$

$$G_{22}^2 = K_2 \left[(3-4\nu) \left(\frac{3}{2} - \ln(L) \right) + \theta_1^2 \right]$$

$$G_{12}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^1 = G_{21}^2 = -K_2 \theta_1 \theta_2$$

Aqui as constantes θ_1 e θ_2 representam os co-senos diretores da normal ao elemento a ser integrado.

Anexo

C *Integrais Analíticas Não Singulares*

As equações contidas neste anexo encontram-se na dissertação de Wutzow (2003).

Sendo as constantes:

$$K_1 = \frac{-1}{8\pi G(1-\nu)}$$

$$K_2 = (3-4\nu)$$

$$K_3 = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)}$$

$$K_4 = (1-2\nu)$$

$$K_5 = (1-4\nu)$$

$$K_6 = (3-4\nu)$$

$$K_7 = \frac{G}{2\pi(1-\nu)}$$

$$\phi_1 = \left(1 - \frac{y_s}{L}\right)$$

$$\phi_2 = \frac{y_s}{L}$$

as componentes das matrizes $[H]$, $[G]$, $[S]$ e $[D]$ (para os casos C.1, C.2 e C.3) são:

Caso C.1) Ponto Fonte não alinhado ao elemento de integração

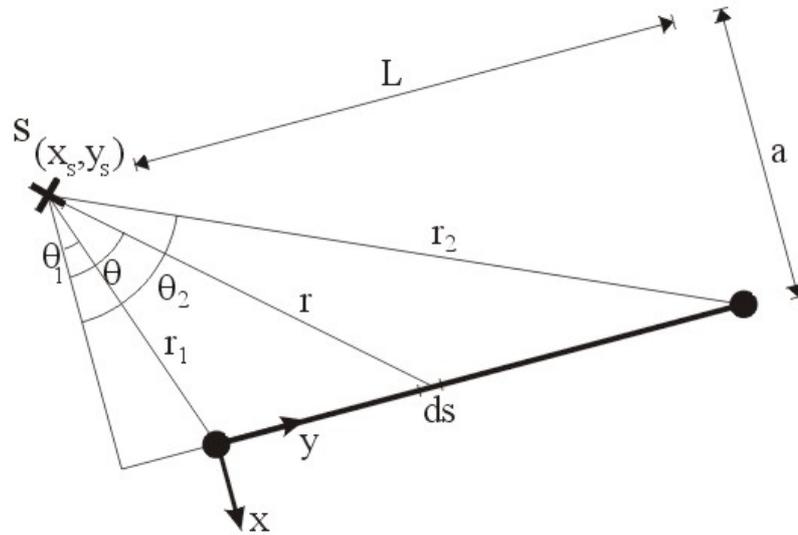


Figura C.1 – Ponto fonte não alinhado ao elemento – Wutzow (2003).

$$\begin{aligned}
 H_{11}^1 &= K_3 \left\{ K_4 \left[\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) \frac{a}{L} + \theta_2 \phi_1 \right] + (\text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) + \theta_2) \phi_1 + \text{Cos}(\theta_2)^2 \frac{a}{L} \right\} + \\
 &\quad - K_3 \left\{ K_4 \left[\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) \frac{a}{L} + \theta_1 \phi_1 \right] + (\text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) + \theta_1) \phi_1 - \text{Cos}(\theta_1)^2 \frac{a}{L} \right\} \\
 H_{12}^1 &= K_3 \left\{ K_4 \left[-\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) \phi_1 + (-\text{Tg}(\theta_2) + \theta_2) \frac{a}{L} \right] - (-\text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) + \theta_2) \frac{a}{L} + \right. \\
 &\quad \left. - \text{Cos}(\theta_2)^2 \phi_1 \right\} - K_3 \left\{ K_4 \left[-\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) \phi_1 + (-\text{Tg}(\theta_1) + \theta_1) \frac{a}{L} \right] + \right. \\
 &\quad \left. - (-\text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) + \theta_1) \frac{a}{L} - \text{Cos}(\theta_1)^2 \phi_1 \right\} \\
 H_{21}^1 &= K_3 \left\{ K_4 \left[\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) \phi_1 - (-\text{Tg}(\theta_2) + \theta_2) \frac{a}{L} \right] - (-\text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) + \theta_2) \frac{a}{L} + \right. \\
 &\quad \left. - \text{Cos}(\theta_2)^2 \phi_1 \right\} - K_3 \left\{ K_4 \left[\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) \phi_1 - (-\text{Tg}(\theta_1) + \theta_1) \frac{a}{L} \right] + \right. \\
 &\quad \left. - (-\text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) + \theta_1) \frac{a}{L} - \text{Cos}(\theta_1)^2 \phi_1 \right\} \\
 H_{22}^1 &= K_3 \left\{ K_4 \left[\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) \frac{a}{L} + \theta_2 \phi_1 \right] + (-\text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) + \theta_2) \phi_1 + \text{Sen}(\theta_2)^2 \frac{a}{L} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{2a \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2))}{L} \right\} - K_3 \left\{ K_4 \left[\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) \frac{a}{L} + \theta_1 \phi_1 \right] + (-\text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) + \theta_1) \phi_1 + \right. \\
 &\quad \left. + \text{Sen}(\theta_1)^2 \frac{a}{L} + \frac{2a \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1))}{L} \right\}
 \end{aligned}$$

$$H_{11}^2 = K_3 \left\{ K_4 \left[-\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) \frac{a}{L} + \theta_2 \phi_2 \right] + (\text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) + \theta_2) \phi_2 - \text{Cos}(\theta_2)^2 \frac{a}{L} \right\} +$$

$$- K_3 \left\{ K_4 \left[-\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) \frac{a}{L} + \theta_1 \phi_2 \right] + (\text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) + \theta_1) \phi_2 - \text{Cos}(\theta_1)^2 \frac{a}{L} \right\}$$

$$H_{12}^2 = K_3 \left\{ K_4 \left[-\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) \phi_2 - (-\text{Tg}(\theta_2) + \theta_2) \frac{a}{L} \right] + (-\text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) + \theta_2) \frac{a}{L} + \right.$$

$$\left. -\text{Cos}(\theta_2)^2 \phi_2 \right\} - K_3 \left\{ K_4 \left[-\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) \phi_2 - (-\text{Tg}(\theta_1) + \theta_1) \frac{a}{L} \right] + \right.$$

$$\left. + (-\text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) + \theta_1) \frac{a}{L} - \text{Cos}(\theta_1)^2 \phi_2 \right\}$$

$$H_{21}^2 = K_3 \left\{ K_4 \left[\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) \phi_2 + (-\text{Tg}(\theta_2) + \theta_2) \frac{a}{L} \right] + (-\text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) + \theta_2) \frac{a}{L} + \right.$$

$$\left. -\text{Cos}(\theta_2)^2 \phi_2 \right\} - K_3 \left\{ K_4 \left[\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) \phi_2 + (-\text{Tg}(\theta_1) + \theta_1) \frac{a}{L} \right] + \right.$$

$$\left. + (-\text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) + \theta_1) \frac{a}{L} - \text{Cos}(\theta_1)^2 \phi_2 \right\}$$

$$H_{22}^2 = K_3 \left\{ K_4 \left[-\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) \frac{a}{L} + \theta_2 \phi_2 \right] + (-\text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) + \theta_2) \phi_2 - \text{Sen}(\theta_2)^2 \frac{a}{L} + \right.$$

$$\left. -\frac{2a \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2))}{L} \right\} - K_3 \left\{ K_4 \left[-\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) \frac{a}{L} + \theta_1 \phi_2 \right] + (-\text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) + \theta_1) \phi_2 + \right.$$

$$\left. -\text{Sen}(\theta_1)^2 \frac{a}{L} - \frac{2a \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1))}{L} \right\}$$

$$G_{11}^1 = K_1 \left\{ K_2 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{\text{Cos}(\theta_2)} \right) \left[\text{Tg}(\theta_2) \phi_1 - \frac{a}{2L \text{Cos}(\theta_2)^2} \right] + (-\text{Tg}(\theta_2) + \theta_2) \phi_1 + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{a}{4L \text{Cos}(\theta_2)^2} \right] - \theta_2 \phi_1 - \frac{a}{L} \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) \right\} - K_1 \left\{ K_2 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{\text{Cos}(\theta_1)} \right) \left[\text{Tg}(\theta_1) \phi_1 + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. - \frac{a}{2L \text{Cos}(\theta_1)^2} \right] + (-\text{Tg}(\theta_1) + \theta_1) \phi_1 + \frac{a}{4L \text{Cos}(\theta_1)^2} \right] - \theta_1 \phi_1 - \frac{a}{L} \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) \right\}$$

$$G_{12}^1 = K_1 \left\{ \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) \phi_1 + \frac{(\text{Tg}(\theta_2) - \theta_2)}{L} \right\} - K_1 \left\{ \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) \phi_1 + \frac{(\text{Tg}(\theta_1) - \theta_1)}{L} \right\}$$

$$G_{21}^1 = G_{12}^1$$

$$\begin{aligned}
G_{22}^1 = & K_1 \left\{ K_2 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{\text{Cos}(\theta_2)} \right) \right] \left[\text{Tg}(\theta_2) \phi_1 - \frac{a}{2L \text{Cos}(\theta_2)^2} \right] + (-\text{Tg}(\theta_2) + \theta_2) \phi_1 + \right. \\
& \left. + \frac{a}{4L \text{Cos}(\theta_2)^2} \right] + (-\text{Tg}(\theta_2) + \theta_2) \phi_1 + \frac{a \text{Tg}(\theta_2)^2}{2L} + \frac{a \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2))}{L} \left. \right\} + \\
& - K_1 \left\{ K_2 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{\text{Cos}(\theta_1)} \right) \right] \left[\text{Tg}(\theta_1) \phi_1 - \frac{a}{2L \text{Cos}(\theta_1)^2} \right] + (-\text{Tg}(\theta_1) + \theta_1) \phi_1 + \right. \\
& \left. + \frac{a}{4L \text{Cos}(\theta_1)^2} \right] + (-\text{Tg}(\theta_1) + \theta_1) \phi_1 + \frac{a \text{Tg}(\theta_1)^2}{2L} + \frac{a \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1))}{L} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_{11}^2 = & K_1 \left\{ K_2 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{\text{Cos}(\theta_2)} \right) \right] \left[\text{Tg}(\theta_2) \phi_2 + \frac{a}{2L \text{Cos}(\theta_2)^2} \right] + (-\text{Tg}(\theta_2) + \theta_2) \phi_2 + \right. \\
& \left. - \frac{a}{4L \text{Cos}(\theta_2)^2} \right] - \theta_2 \phi_2 + \frac{a}{L} \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) \left. \right\} - K_1 \left\{ K_2 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{\text{Cos}(\theta_1)} \right) \right] \left[\text{Tg}(\theta_1) \phi_2 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{a}{2L \text{Cos}(\theta_1)^2} \right] + (-\text{Tg}(\theta_1) + \theta_1) \phi_2 - \frac{a}{4L \text{Cos}(\theta_1)^2} \right] - \theta_1 \phi_2 + \frac{a}{L} \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$G_{12}^2 = K_1 \left\{ \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) \phi_2 - \frac{(\text{Tg}(\theta_2) - \theta_2)}{L} \right\} - K_1 \left\{ \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) \phi_2 - \frac{(\text{Tg}(\theta_1) - \theta_1)}{L} \right\}$$

$$G_{21}^2 = G_{12}^2$$

$$\begin{aligned}
G_{22}^2 = & K_1 \left\{ K_2 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{\text{Cos}(\theta_2)} \right) \right] \left[\text{Tg}(\theta_2) \phi_2 + \frac{a}{2L \text{Cos}(\theta_2)^2} \right] + (-\text{Tg}(\theta_2) + \theta_2) \phi_2 + \right. \\
& \left. - \frac{a}{4L \text{Cos}(\theta_2)^2} \right] + (-\text{Tg}(\theta_2) + \theta_2) \phi_2 - \frac{a \text{Tg}(\theta_2)^2}{2L} - \frac{a \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2))}{L} \left. \right\} + \\
& - K_1 \left\{ K_2 \left[\text{Ln} \left(\frac{a}{\text{Cos}(\theta_1)} \right) \right] \left[\text{Tg}(\theta_1) \phi_2 + \frac{a}{2L \text{Cos}(\theta_1)^2} \right] + (-\text{Tg}(\theta_1) + \theta_1) \phi_2 + \right. \\
& \left. - \frac{a}{4L \text{Cos}(\theta_1)^2} \right] + (-\text{Tg}(\theta_1) + \theta_1) \phi_2 - \frac{a \text{Tg}(\theta_1)^2}{2L} - \frac{a \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1))}{L} \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{11}^1 = & \frac{K_7}{a} \left\{ \left[(2K_4 + 4v)(\text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) + \theta_2) - (2\text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2))^3 + \right. \right. \\
& \left. \left. + 3\text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) + 3\theta_2 \right) + (2K_4 - K_5) \theta_2 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[-(2K_4 + 4v) \text{Cos}(\theta_2)^2 + \right. \\
& \left. + 2\text{Cos}(\theta_2)^4 - (2K_4 - K_5) \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) \right] \left. \right\} - \frac{K_7}{a} \left\{ \left[(2K_4 + 4v)(\text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) + \theta_1) + \right. \right. \\
& \left. \left. - (2\text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1))^3 + 3\text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) + 3\theta_1 \right) + (2K_4 - K_5) \theta_1 \right] \phi_1 + \\
& \left. - \frac{a}{L} \left[-(2K_4 + 4v) \text{Cos}(\theta_1)^2 + 2\text{Cos}(\theta_1)^4 - (2K_4 - K_5) \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$S_{12}^1 = \frac{K_7}{a} \left\{ \left[-(K_4 + 2v) \cos(\theta_2)^2 + 2 \cos(\theta_2)^4 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[(tk_1 + 2v) (-\sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + \theta_2) - \left(-2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)^3 + \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + \theta_2 \right) \right] \right\} +$$

$$- \frac{K_7}{a} \left\{ \left[-(K_4 + 2v) \cos(\theta_1)^2 + 2 \cos(\theta_1)^4 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[(K_4 + 2v) (-\sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + \theta_1) - \left(-2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1)^3 + \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + \theta_1 \right) \right] \right\}$$

$$S_{21}^1 = S_{12}^1$$

$$S_{22}^1 = \frac{K_7}{a} \left\{ \left[(K_4 + 2v) \theta_2 - \left(-2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)^3 + \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + \theta_2 \right) \right] \phi_1 + \right.$$

$$\left. - \frac{a}{L} \left[-v \left(\sin(\theta_2)^2 + \cos(\theta_2)^2 + 2 \ln(\cos(\theta_2)) \right) - 2 \sin(\theta_2)^4 - K_4 \ln(\cos(\theta_2)) \right] \right\} +$$

$$- \frac{K_7}{a} \left\{ \left[(K_4 + 2v) \theta_1 - \left(-2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1)^3 + \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + \theta_1 \right) \right] \phi_1 + \right.$$

$$\left. - \frac{a}{L} \left[-v \left(\sin(\theta_1)^2 + \cos(\theta_1)^2 + 2 \ln(\cos(\theta_1)) \right) - 2 \sin(\theta_1)^4 - K_4 \ln(\cos(\theta_1)) \right] \right\}$$

$$S_{31}^1 = \frac{K_7}{a} \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \theta_2 - \left(-2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)^3 + \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + \theta_2 \right) \right] \phi_1 + \right.$$

$$\left. - \frac{a}{L} \left[-2 \sin(\theta_2)^4 - (2K_4 - K_5) \ln(\cos(\theta_2)) \right] \right\}$$

$$- \frac{K_7}{a} \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \theta_1 - \left(-2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1)^3 + \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + \theta_1 \right) \right] \phi_1 \right.$$

$$\left. - \frac{a}{L} \left[-2 \sin(\theta_1)^4 - (2K_4 - K_5) \ln(\cos(\theta_1)) \right] \right\}$$

$$S_{32}^1 = \frac{K_7}{a} \left\{ \left[-(K_4 + 2v) \cos(\theta_2)^2 - 2 \sin(\theta_2)^4 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[(K_4 + 2v) (-\sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + \theta_2) - \right. \right.$$

$$\left. \left(-2 \sin(\theta_2)^3 \cos(\theta_2) - 3 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + 3 \theta_2 \right) \right] \right\} +$$

$$- \frac{K_7}{a} \left\{ \left[-(K_4 + 2v) \cos(\theta_1)^2 - 2 \sin(\theta_1)^4 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[(K_4 + 2v) (-\sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + \theta_1) - \right. \right.$$

$$\left. \left(-2 \sin(\theta_1)^3 \cos(\theta_1) - 3 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + 3 \theta_1 \right) \right] \right\}$$

$$S_{11}^2 = \frac{K_7}{a} \left\{ \left[(2K_4 + 4v) (\sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + \theta_2) - \left(2 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2)^3 + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. 3 \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + 3 \theta_2 \right) + (2K_4 - K_5) \theta_2 \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[-(2K_4 + 4v) \cos(\theta_2)^2 + \right.$$

$$\left. 2 \cos(\theta_2)^4 - (2K_4 - K_5) \ln(\cos(\theta_2)) \right] \right\} - \frac{K_7}{a} \left\{ \left[(2K_4 + 4v) (\sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + \theta_1) + \right. \right.$$

$$\left. \left(2 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1)^3 + 3 \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + 3 \theta_1 \right) + (2K_4 - K_5) \theta_1 \right] \phi_2 + \right.$$

$$\left. \frac{a}{L} \left[-(2K_4 + 4v) \cos(\theta_1)^2 + 2 \cos(\theta_1)^4 - (2K_4 - K_5) \ln(\cos(\theta_1)) \right] \right\}$$

$$S_{12}^2 = \frac{K_7}{a} \left\{ \left[-(K_4 + 2\nu) \cos(\theta_2)^2 + 2\cos(\theta_2)^4 \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[(K_4 + 2\nu) (-\sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + \theta_2) - \left(-2\sin(\theta_2) \cos(\theta_2)^3 + \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + \theta_2 \right) \right] \right\} +$$

$$-\frac{K_7}{a} \left\{ \left[-(K_4 + 2\nu) \cos(\theta_1)^2 + 2\cos(\theta_1)^4 \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[(K_4 + 2\nu) (-\sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + \theta_1) - \left(-2\sin(\theta_1) \cos(\theta_1)^3 + \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + \theta_1 \right) \right] \right\}$$

$$S_{21}^2 = S_{12}^2$$

$$S_{22}^2 = \frac{K_7}{a} \left\{ \left[(K_4 + 2\nu) \theta_2 - \left(-2\sin(\theta_2) \cos(\theta_2)^3 + \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + \theta_2 \right) \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[-\nu \left(\sin(\theta_2)^2 + \cos(\theta_2)^2 + 2\ln(\cos(\theta_2)) \right) - 2\sin(\theta_2)^4 - K_4 \ln(\cos(\theta_2)) \right] \right\} +$$

$$-\frac{K_7}{a} \left\{ \left[(K_4 + 2\nu) \theta_1 - \left(-2\sin(\theta_1) \cos(\theta_1)^3 + \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + \theta_1 \right) \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[-\nu \left(\sin(\theta_1)^2 + \cos(\theta_1)^2 + 2\ln(\cos(\theta_1)) \right) - 2\sin(\theta_1)^4 - K_4 \ln(\cos(\theta_1)) \right] \right\}$$

$$S_{31}^2 = \frac{K_7}{a} \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \theta_2 - \left(-2\sin(\theta_2) \cos(\theta_2)^3 + \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + \theta_2 \right) \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[-2\sin(\theta_2)^4 - (2K_4 - K_5) \ln(\cos(\theta_2)) \right] \right\}$$

$$-\frac{K_7}{a} \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \theta_1 - \left(-2\sin(\theta_1) \cos(\theta_1)^3 + \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + \theta_1 \right) \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[-2\sin(\theta_1)^4 - (2K_4 - K_5) \ln(\cos(\theta_1)) \right] \right\}$$

$$S_{32}^2 = \frac{K_7}{a} \left\{ \left[-(K_4 + 2\nu) \cos(\theta_2)^2 - 2\sin(\theta_2)^4 \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[(K_4 + 2\nu) (-\sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + \theta_2) - \left(-2\sin(\theta_2)^3 \cos(\theta_2) - 3\sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + 3\theta_2 \right) \right] \right\} +$$

$$-\frac{K_7}{a} \left\{ \left[-(K_4 + 2\nu) \cos(\theta_1)^2 - 2\sin(\theta_1)^4 \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[(K_4 + 2\nu) (-\sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + \theta_1) - \left(-2\sin(\theta_1)^3 \cos(\theta_1) - 3\sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + 3\theta_1 \right) \right] \right\}$$

$$D_{11}^1 = -K_3 \left\{ \left[(K_4 + 1) \theta_2 + \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[-K_4 \ln(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \right\} +$$

$$+ K_3 \left\{ \left[(K_4 + 1) \theta_1 + \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[-K_4 \ln(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \right\}$$

$$D_{12}^1 = -K_3 \left\{ \left[K_4 \ln(\cos(\theta_2)) - \cos(\theta_2)^2 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[-K_4 (\operatorname{Tg}(\theta_2) - \theta_2) - \sin(\theta_2) \cos(\theta_2) + \theta_2 \right] \right\} +$$

$$+ K_3 \left\{ \left[K_4 \ln(\cos(\theta_1)) - \cos(\theta_1)^2 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[-K_4 (\operatorname{Tg}(\theta_1) - \theta_1) + \sin(\theta_1) \cos(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
D_{21}^1 &= -K_3 \left\{ \left[-K_4 \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) - \text{Cos}(\theta_2)^2 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[K_4 (\text{Tg}(\theta_2) - \theta_2) - \text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \theta_2 \right] \right\} + K_3 \left\{ \left[-K_4 \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) - \text{Cos}(\theta_1)^2 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[K_4 (\text{Tg}(\theta_1) - \theta_1) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\} \\
D_{22}^1 &= -K_3 \left\{ \left[(K_4 + 1) \theta_2 - \text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[(-K_4 - 2) \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) - \text{Sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\
&\quad + K_3 \left\{ \left[(K_4 + 1) \theta_1 - \text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[(-K_4 - 2) \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) - \text{Sen}(\theta_1)^2 \right] \right\} \\
D_{31}^1 &= -K_3 \left\{ \left[(-K_4 + 1) \theta_2 - \text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[(K_4 - 2) \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) - \text{Sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\
&\quad + K_3 \left\{ \left[(-K_4 + 1) \theta_1 - \text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[(K_4 - 2) \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) - \text{Sen}(\theta_1)^2 \right] \right\} \\
D_{32}^1 &= -K_3 \left\{ \left[(-K_4 - 2) \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) - \text{Sen}(\theta_2)^2 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[K_4 (\text{Tg}(\theta_2) - \theta_2) + \frac{2 \text{Sen}(\theta_2)^5}{\text{Cos}(\theta_2)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2 \text{Sen}(\theta_2)^3 + \text{Cos}(\theta_2) + 3 \text{Cos}(\theta_2) \text{Sen}(\theta_2) - 3 \theta_2 \right] \right\} + K_3 \left\{ \left[(-K_4 - 2) \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \text{Sen}(\theta_1)^2 \right] \phi_1 - \frac{a}{L} \left[K_4 (\text{Tg}(\theta_1) - \theta_1) + \frac{2 \text{Sen}(\theta_1)^5}{\text{Cos}(\theta_1)} + 2 \text{Sen}(\theta_1)^3 + \text{Cos}(\theta_1) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 3 \text{Cos}(\theta_1) \text{Sen}(\theta_1) - 3 \theta_1 \right] \right\} \\
D_{11}^2 &= -K_3 \left\{ \left[(K_4 + 1) \theta_2 + \text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[-K_4 \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) - \text{Cos}(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\
&\quad + K_3 \left\{ \left[(K_4 + 1) \theta_1 + \text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[-K_4 \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) - \text{Cos}(\theta_1)^2 \right] \right\} \\
D_{12}^2 &= -K_3 \left\{ \left[K_4 \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) - \text{Cos}(\theta_2)^2 \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[-K_4 (\text{Tg}(\theta_2) - \theta_2) - \text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \theta_2 \right] \right\} + K_3 \left\{ \left[K_4 \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) - \text{Cos}(\theta_1)^2 \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[-K_4 (\text{Tg}(\theta_1) - \theta_1) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\} \\
D_{21}^2 &= -K_3 \left\{ \left[-K_4 \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) - \text{Cos}(\theta_2)^2 \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[K_4 (\text{Tg}(\theta_2) - \theta_2) - \text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \theta_2 \right] \right\} + K_3 \left\{ \left[-K_4 \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) - \text{Cos}(\theta_1)^2 \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[K_4 (\text{Tg}(\theta_1) - \theta_1) + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) + \theta_1 \right] \right\} \\
D_{22}^2 &= -K_3 \left\{ \left[(K_4 + 1) \theta_2 - \text{Sen}(\theta_2) \text{Cos}(\theta_2) \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[(-K_4 - 2) \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) - \text{Sen}(\theta_2)^2 \right] \right\} + \\
&\quad + K_3 \left\{ \left[(K_4 + 1) \theta_1 - \text{Sen}(\theta_1) \text{Cos}(\theta_1) \right] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[(-K_4 - 2) \text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) - \text{Sen}(\theta_1)^2 \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$D_{31}^2 = -K_3 \left\{ [(-K_4 + 1)\theta_2 - \text{Sen}(\theta_2)\text{Cos}(\theta_2)]\phi_2 + \frac{a}{L} [(K_4 - 2)\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) - \text{Sen}(\theta_2)^2] \right\} +$$

$$+ K_3 \left\{ [(-K_4 + 1)\theta_1 - \text{Sen}(\theta_1)\text{Cos}(\theta_1)]\phi_2 + \frac{a}{L} [(K_4 - 2)\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) - \text{Sen}(\theta_1)^2] \right\}$$

$$D_{32}^2 = -K_3 \left\{ [(-K_4 - 2)\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_2)) - \text{Sen}(\theta_2)^2]\phi_2 + \frac{a}{L} \left[K_4 (\text{Tg}(\theta_2) - \theta_2) + \frac{2\text{Sen}(\theta_2)^5}{\text{Cos}(\theta_2)} + \right. \right.$$

$$+ 2\text{Sen}(\theta_2)^3 + \text{Cos}(\theta_2) + 3\text{Cos}(\theta_2)\text{Sen}(\theta_2) - 3\theta_2 \left. \right] \right\} + K_3 \left\{ [(-K_4 - 2)\text{Ln}(\text{Cos}(\theta_1)) + \right.$$

$$- \text{Sen}(\theta_1)^2] \phi_2 + \frac{a}{L} \left[K_4 (\text{Tg}(\theta_1) - \theta_1) + \frac{2\text{Sen}(\theta_1)^5}{\text{Cos}(\theta_1)} + 2\text{Sen}(\theta_1)^3 + \text{Cos}(\theta_1) + \right.$$

$$+ 3\text{Cos}(\theta_1)\text{Sen}(\theta_1) - 3\theta_1 \left. \right] \right\}$$

Aqui as constantes θ_1 e θ_2 representam ângulos, conforme Figura C.1.

Caso C.2) Ponto Fonte alinhado ao elemento, anterior a ele

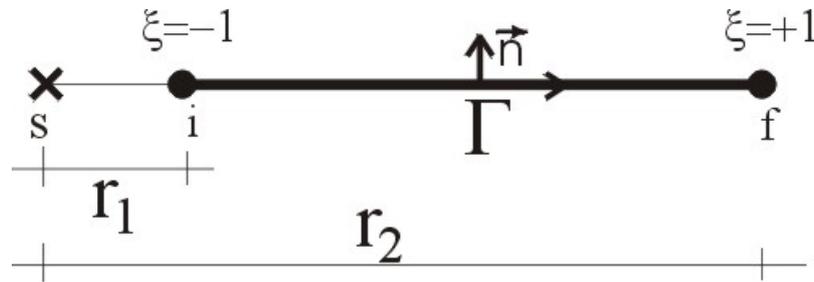


Figura C.2 – Ponto fonte alinhado ao elemento de integração, posicionado antes do mesmo – Wutzow (2003).

$$H_{12}^1 = K_3 * K_4 \left[\text{Ln}(r_2)\phi_1 - \frac{r_2}{L} \right] - K_3 * K_4 \left[\text{Ln}(r_1)\phi_1 - \frac{r_1}{L} \right]$$

$$H_{12}^2 = K_3 * K_4 \left[\text{Ln}(r_2)\phi_2 + \frac{r_2}{L} \right] - K_3 * K_4 \left[\text{Ln}(r_1)\phi_2 + \frac{r_1}{L} \right]$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^1 = H_{22}^2 = 0$$

$$G_{11}^1 = K_1 * \left\{ K_6 \left[(\text{Ln}(r_2)r_2 - r_2)\phi_1 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_2^2\text{Ln}(r_2) - \frac{1}{4}r_2^2 \right) \right] \right\} +$$

$$- K_1 * \left\{ K_6 \left[(\text{Ln}(r_1)r_1 - r_1)\phi_1 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_1^2\text{Ln}(r_1) - \frac{1}{4}r_1^2 \right) \right] \right\}$$

$$G_{11}^2 = K_1 * \left\{ K_6 \left[(\text{Ln}(r_2)r_2 - r_2)\phi_2 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_2^2 \text{Ln}(r_2) - \frac{1}{4}r_2^2 \right) \right] \right\} +$$

$$-K_1 * \left\{ K_6 \left[(\text{Ln}(r_1)r_1 - r_1)\phi_2 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_1^2 \text{Ln}(r_1) - \frac{1}{4}r_1^2 \right) \right] \right\}$$

$$G_{22}^1 = K_1 * \left\{ K_6 \left[(\text{Ln}(r_2)r_2 - r_2)\phi_1 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_2^2 \text{Ln}(r_2) - \frac{1}{4}r_2^2 \right) \right] - r_2\phi_1 + \frac{r_2^2}{2L} \right\} +$$

$$-K_1 * \left\{ K_6 \left[(\text{Ln}(r_1)r_1 - r_1)\phi_1 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_1^2 \text{Ln}(r_1) - \frac{1}{4}r_1^2 \right) \right] - r_1\phi_1 + \frac{r_1^2}{2L} \right\}$$

$$G_{22}^2 = K_1 * \left\{ K_6 \left[(\text{Ln}(r_2)r_2 - r_2)\phi_2 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_2^2 \text{Ln}(r_2) - \frac{1}{4}r_2^2 \right) \right] - r_2\phi_2 - \frac{r_2^2}{2L} \right\} +$$

$$-K_1 * \left\{ K_6 \left[(\text{Ln}(r_1)r_1 - r_1)\phi_2 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_1^2 \text{Ln}(r_1) - \frac{1}{4}r_1^2 \right) \right] - r_1\phi_2 - \frac{r_1^2}{2L} \right\}$$

$$G_{12}^1 = G_{21}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^2 = 0$$

$$S_{11}^1 = K_7 * \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \left(-\frac{1}{r_2} \right) \right] \phi_1 - \frac{1}{L} [(2K_4 - K_5) \text{Ln}(r_2)] \right\} +$$

$$-K_7 * \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] \phi_1 - \frac{1}{L} [(2K_4 - K_5) \text{Ln}(r_1)] \right\}$$

$$S_{11}^2 = K_7 * \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \left(-\frac{1}{r_2} \right) \right] \phi_2 + \frac{1}{L} [(2K_4 - K_5) \text{Ln}(r_2)] \right\} +$$

$$-K_7 * \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] \phi_2 + \frac{1}{L} [(2K_4 - K_5) \text{Ln}(r_1)] \right\}$$

$$S_{22}^1 = K_7 * \left\{ \left[(K_4 + 2v) \left(-\frac{1}{r_2} \right) \right] \phi_1 - \frac{1}{L} [(K_4 + 2v) \text{Ln}(r_2)] \right\} +$$

$$-K_7 * \left\{ \left[(K_4 + 2v) \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] \phi_1 - \frac{1}{L} [(K_4 + 2v) \text{Ln}(r_1)] \right\}$$

$$S_{22}^2 = K_7 * \left\{ \left[(K_4 + 2v) \left(-\frac{1}{r_2} \right) \right] \phi_2 + \frac{1}{L} [(K_4 + 2v) \text{Ln}(r_2)] \right\} +$$

$$-K_7 * \left\{ \left[(K_4 + 2v) \left(-\frac{1}{r_1} \right) \right] \phi_2 + \frac{1}{L} [(K_4 + 2v) \text{Ln}(r_1)] \right\}$$

$$S_{31}^1 = S_{11}^1$$

$$S_{31}^2 = S_{11}^2$$

$$S_{12}^1 = S_{21}^1 = S_{32}^1 = S_{12}^2 = S_{21}^2 = S_{32}^2 = 0$$

$$D_{12}^1 = K_3 * K_4 \left\{ -\left(\frac{r_2}{L} \right) - \phi_2 \text{Ln}(r_2) + \text{Ln}(r_2) + \left(\frac{r_1}{L} \right) - \phi_2 \text{Ln}(r_1) - \text{Ln}(r_1) \right\}$$

$$D_{12}^2 = K_3 * K_4 \left\{ \left(\frac{r_2}{L} \right) + \phi_2 \text{Ln}(r_2) - \left(\frac{r_1}{L} \right) - \phi_2 \text{Ln}(r_1) \right\}$$

$$D_{32}^1 = (-K_3 * K_4 - 2K_3) \left\{ -\left(\frac{r_2}{L}\right) - \phi_2 \text{Ln}(r_2) + \text{Ln}(r_2) + \left(\frac{r_1}{L}\right) + \phi_2 \text{Ln}(r_1) - \text{Ln}(r_1) \right\}$$

$$D_{12}^2 = (-K_3 * K_4 - 2K_3) \left\{ \left(\frac{r_2}{L}\right) + \phi_2 \text{Ln}(r_2) - \left(\frac{r_1}{L}\right) - \phi_2 \text{Ln}(r_1) \right\}$$

$$D_{21}^1 = -D_{12}^1$$

$$D_{21}^2 = -D_{12}^2$$

$$D_{11}^1 = D_{22}^1 = D_{31}^1 = D_{11}^2 = D_{22}^2 = D_{31}^2 = 0$$

$$D_{32}^2 = (-K_3 * K_4 - 2K_3) \left\{ \left(\frac{r_2}{L}\right) + \phi_2 \text{Ln}(r_2) - \left(\frac{r_1}{L}\right) - \phi_2 \text{Ln}(r_1) \right\}$$

Caso C.3) Ponto Fonte alinhado ao elemento, posterior a ele

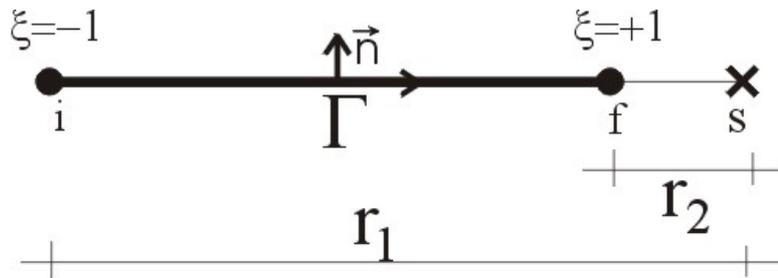


Figura C.3 – Ponto fonte alinhado ao elemento de integração, posicionado após o mesmo – Wutzow (2003).

$$H_{12}^1 = K_3 * K_4 \left[\text{Ln}(r_2) \phi_1 + \frac{r_2}{L} \right] - K_3 * K_4 \left[\text{Ln}(r_1) \phi_1 + \frac{r_1}{L} \right]$$

$$H_{12}^2 = K_3 * K_4 \left[\text{Ln}(r_2) \phi_2 - \frac{r_2}{L} \right] - K_3 * K_4 \left[\text{Ln}(r_1) \phi_2 - \frac{r_1}{L} \right]$$

$$H_{21}^1 = -H_{12}^1$$

$$H_{21}^2 = -H_{12}^2$$

$$H_{11}^1 = H_{11}^2 = H_{22}^1 = H_{22}^2 = 0$$

$$G_{11}^1 = -K_1 * \left\{ K_6 \left[(\text{Ln}(r_2) r_2 - r_2) \phi_1 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} r_2^2 \text{Ln}(r_2) - \frac{1}{4} r_2^2 \right) \right] \right\} +$$

$$+ K_1 * \left\{ K_6 \left[(\text{Ln}(r_1) r_1 - r_1) \phi_1 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2} r_1^2 \text{Ln}(r_1) - \frac{1}{4} r_1^2 \right) \right] \right\}$$

$$G_{11}^2 = -K_1 * \left\{ K_6 \left[(\ln(r_2)r_2 - r_2)\phi_2 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_2^2 \ln(r_2) - \frac{1}{4}r_2^2 \right) \right] \right\} +$$

$$+ K_1 * \left\{ K_6 \left[(\ln(r_1)r_1 - r_1)\phi_2 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_1^2 \ln(r_1) - \frac{1}{4}r_1^2 \right) \right] \right\}$$

$$G_{22}^1 = -K_1 * \left\{ K_6 \left[(\ln(r_2)r_2 - r_2)\phi_1 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_2^2 \ln(r_2) - \frac{1}{4}r_2^2 \right) \right] - r_2\phi_1 - \frac{r_2^2}{2L} \right\} +$$

$$+ K_1 * \left\{ K_6 \left[(\ln(r_1)r_1 - r_1)\phi_1 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_1^2 \ln(r_1) - \frac{1}{4}r_1^2 \right) \right] - r_1\phi_1 - \frac{r_1^2}{2L} \right\}$$

$$G_{22}^2 = -K_1 * \left\{ K_6 \left[(\ln(r_2)r_2 - r_2)\phi_2 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_2^2 \ln(r_2) - \frac{1}{4}r_2^2 \right) \right] - r_2\phi_2 + \frac{r_2^2}{2L} \right\} +$$

$$+ K_1 * \left\{ K_6 \left[(\ln(r_1)r_1 - r_1)\phi_2 - \frac{1}{L} \left(\frac{1}{2}r_1^2 \ln(r_1) - \frac{1}{4}r_1^2 \right) \right] - r_1\phi_2 + \frac{r_1^2}{2L} \right\}$$

$$G_{12}^1 = G_{21}^1 = G_{12}^2 = G_{21}^2 = 0$$

$$S_{11}^1 = K_7 * \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] \phi_1 - \frac{1}{L} [(2K_4 - K_5) \ln(r_2)] \right\} +$$

$$- K_7 * \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \phi_1 - \frac{1}{L} [(2K_4 - K_5) \ln(r_1)] \right\}$$

$$S_{11}^2 = K_7 * \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] \phi_2 + \frac{1}{L} [(2K_4 - K_5) \ln(r_2)] \right\} +$$

$$- K_7 * \left\{ \left[(2K_4 - K_5) \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \phi_2 + \frac{1}{L} [(2K_4 - K_5) \ln(r_1)] \right\}$$

$$S_{22}^1 = K_7 * \left\{ \left[(K_4 + 2v) \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] \phi_1 - \frac{1}{L} [(K_4 + 2v) \ln(r_2)] \right\} +$$

$$- K_7 * \left\{ \left[(K_4 + 2v) \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \phi_1 - \frac{1}{L} [(K_4 + 2v) \ln(r_1)] \right\}$$

$$S_{22}^2 = K_7 * \left\{ \left[(K_4 + 2v) \left(\frac{1}{r_2} \right) \right] \phi_2 + \frac{1}{L} [(K_4 + 2v) \ln(r_2)] \right\} +$$

$$- K_7 * \left\{ \left[(K_4 + 2v) \left(\frac{1}{r_1} \right) \right] \phi_2 + \frac{1}{L} [(K_4 + 2v) \ln(r_1)] \right\}$$

$$S_{31}^1 = S_{11}^1$$

$$S_{31}^2 = S_{11}^2$$

$$S_{12}^1 = S_{21}^1 = S_{32}^1 = S_{12}^2 = S_{21}^2 = S_{32}^2 = 0$$

$$D_{12}^1 = K_3 * K_4 \left\{ \frac{r_2}{L} - \phi_2 \ln(r_2) + \ln(r_2) + \frac{r_1}{L} - \phi_2 \ln(r_1) - \ln(r_1) \right\}$$

$$D_{12}^2 = K_3 * K_4 \left\{ -\frac{r_2}{L} + \phi_2 \ln(r_2) + \frac{r_1}{L} - \phi_2 \ln(r_1) \right\}$$

$$D_{32}^1 = (-K_3 * K_4 - 2K_3) \left\{ \frac{r_2}{L} - \phi_2 \ln(r_2) + \ln(r_2) - \frac{r_1}{L} + \phi_2 \ln(r_1) - \ln(r_1) \right\}$$

$$D_{12}^2 = (-K_3 * K_4 - 2K_3) \left\{ \frac{r_2}{L} + \phi_2 \ln(r_2) + \frac{r_1}{L} - \phi_2 \ln(r_1) \right\}$$

$$D_{21}^1 = -D_{12}^1$$

$$D_{21}^2 = -D_{12}^2$$

$$D_{11}^1 = D_{22}^1 = D_{31}^1 = D_{11}^2 = D_{22}^2 = D_{31}^2 = 0$$

$$D_{32}^2 = (-K_3 * K_4 - 2K_3) \left\{ -\left(\frac{r_2}{L} \right) + \phi_2 \ln(r_2) + \frac{r_1}{L} - \phi_2 \ln(r_1) \right\}$$

Aqui as constantes ϕ_1 e ϕ_2 foram empregadas, mas não devem ser confundidas com as funções de forma do problema.

Anexo

D Função Delta de Dirac

O estudo contido neste anexo baseou-se nos trabalhos de Lopes (1996) e Wutzow (2003).

A função delta de Dirac constitui uma ferramenta capaz de representar forças concentradas na Teoria da Elasticidade ou fontes concentradas na Teoria Potencial. Pode ser deduzida a partir da função representada a seguir:

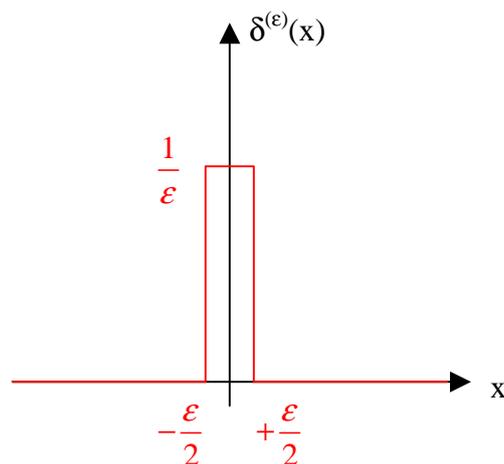


Figura D.1 – Definição da função delta de Dirac.

Sendo a função $\delta^{(\varepsilon)}(x)$ definida por:

$$\delta^{(\varepsilon)}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & \text{para } -\frac{\varepsilon}{2} < x < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0, & \text{para } |x| > \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

onde ε é um número positivo.

Dada a integral:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{(\varepsilon)}(x) f(x) dx \quad (\text{D.1})$$

onde $f(x)$ é uma função qualquer, bem definida em $x=0$. Se ε for suficientemente pequeno, a variação de $f(x)$ no intervalo efetivo de integração $\left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ é negligenciável e $f(x)$ permanece praticamente igual a $f(0)$, de forma que:

$$I \cong f(0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = f(0) \quad (\text{D.2})$$

A aproximação é melhor quanto menor for ε . Na passagem ao limite, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtém-se a definição da função delta de Dirac pela relação:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0) \quad (\text{D.3})$$

válida para qualquer função $f(x)$ definida na origem. Uma definição mais geral seria:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx = f(x_0) \quad (\text{D.4})$$

O conceito da função delta de Dirac pode ser facilmente estendido a domínios n -dimensionais. Considerando-se uma função f que depende da localização de cada ponto no corpo, define-se $\delta(p, Q)$ como a função delta de Dirac, quando são válidas as seguintes propriedades:

$$\delta(p, Q) = \begin{cases} \infty, & \text{se } p = Q \\ 0, & \text{se } p \neq Q \end{cases} \quad (\text{D.5})$$

$$\int_{\Omega} g(Q) \delta(p, Q) d\Omega = g(p) \quad (\text{D.6})$$

A função delta de Dirac também pode ser representada por:

$$\delta(p, Q) = \Delta^p \quad (\text{D.7})$$