

Gustavo Cabrelli Nirschl

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS E TÉCNICAS DE ENRIQUECIMENTO  
DA APROXIMAÇÃO APLICADOS À ANÁLISE DE TUBOS CILÍNDRICOS E  
CASCAS ESFÉRICAS

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia  
de São Carlos da Universidade de São Paulo,  
como parte dos requisitos para a obtenção do  
Título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Sergio Persival Baroncini Proença

São Carlos  
2005

Dedico esta dissertação a Cristiane Prado Marin, que foi muito especial durante esses dois anos em que vivemos aqui em São Carlos.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço muito a meus pais, a meu irmão e a minha irmã, que foram muito importantes psicologicamente. Além disso, agradeço a meu sogro e a minha sogra por permitirem que sua filha dedicasse todo seu tempo para a nossa convivência nesses tempos tão difíceis.

De suma importância para o desenvolvimento do trabalho, meu orientador, Prof. Dr. Sergio Persival Baroncini Proença, realmente me orientou tanto na área técnica quanto na parte pessoal, iluminando sempre os caminhos obscuros que percorri.

Acredito que a pessoa que mais me ajudou na implementação computacional foi a Prof. Dra. Selma Hissae Shimura da Nóbrega, pós-doutoranda, que não hesitou em repassar experiências por ela realizadas, estando sempre pronta para sanar minhas dúvidas.

Devo agradecer a Michell Macedo Alves, irmão por parte de orientador, pela convivência, pelos ensinamentos espirituais e pela intensa troca de experiências. Agradeço também a Wesley Góis, a Francisco Adriano de Araújo e a Oscar Alfredo Garcia de Suarez, que tiveram também contribuições importantes no desenrolar desta pós-graduação.

Aos funcionários e professores do Departamento de Engenharia de Estruturas e à CAPES, um agradecimento merece ser perpetuado pelo apoio estrutural e financeiro concedido.

*“Algo que aprendi em uma longa vida: toda nossa ciência, medida contra a realidade, é primitiva e infantil - e ainda assim, é a coisa mais preciosa que temos”.*

*Albert Einstein*

## RESUMO

NIRSCHL, G. C. (2005). *Método dos Elementos Finitos e técnicas de enriquecimento da aproximação aplicados à análise de tubos cilíndricos e cascas esféricas*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

Sabe-se que o *Método dos Elementos Finitos* em sua forma convencional é uma ferramenta poderosa no cálculo estrutural moderno. Porém, se o problema apresenta singularidades, como os efeitos de borda tipicamente introduzidos pelos vínculos nas estruturas em casca, a análise pode exigir alto refinamento da malha. Procurando resolver mais eficientemente esse tipo de problema, especificamente em estruturas com simetria de revolução como os tubos cilíndricos e as cascas esféricas, apresentam-se neste trabalho alternativas não convencionais para o emprego do *Método dos Elementos Finitos*. Dadas as simetrias de forma e carregamento, a abordagem pode ser feita em campo unidimensional. São apresentadas as respostas analíticas, em termos de deslocamentos e esforços, para as estruturas citadas, partindo-se de suas equações diferenciais governantes. Em seguida, as formas fracas correspondentes são resolvidas pelo *Método dos Elementos Finitos*, incorporando-se alguns tipos de enriquecimento que aproveitam a estrutura deste método. Por fim, são comparados os resultados aproximados entre si e com relação aos analíticos, comprovando o grande potencial das alternativas sugeridas.

Palavras-chave: tubo cilíndrico, casca esférica, método dos elementos finitos, técnicas de enriquecimento

## ABSTRACT

NIRSCHL, G. C. (2005). *Finite Element Method and techniques of enrichment of approximation applied to the analysis of cylindrical tubes and spherical shells*. M.Sc. Dissertation – São Carlos School of Engineering, University of São Paulo, São Carlos, 2005.

It is known that the *Finite Element Method* in its conventional form is a powerful technique in the modern structural calculus. However, if the problem has singularities, as boundary effects typically introduced by the support into shell structures, the analysis may demand high refinement of the mesh. In order to resolve this type of problem more efficiently, particularly in structures with symmetry of revolution as cylindrical tubes and spherical shells, this dissertation presents non-conventional alternatives for the employment of the *Finite Element Method*. Due to the form and load symmetry, the treatment can be made in one-dimensional system. The analytical responses, in terms of displacements and efforts, are recovered to the mentioned structures, from their governing differential equations. Next, corresponding weak forms are resolved by the *Finite Element Method* and some types of enrichment that utilize the structure of this method are incorporated. Finally, the approach results are compared among themselves and with analytical results, proving the great potential of the suggested alternatives.

Keywords: cylindrical tube, spherical shell, finite element method, techniques of enrichment

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1:	Estruturas estudadas _____	1
Figura 2.1:	Regime de membrana e de flexão na casca cilíndrica _____	6
Figura 2.2:	Reservatório cilíndrico sujeito a pressão linearmente distribuída _____	9
Figura 2.3:	Convenções de sinal para deslocamento horizontal e esforços solicitantes do reservatório cilíndrico _____	11
Figura 2.4:	Casca esférica sujeita a peso próprio _____	14
Figura 2.5:	Esforços atuantes na casca esférica _____	14
Figura 2.6:	Deslocamento $\xi$ e giro $\Phi$ , em função do ângulo $\omega$ , para casca esférica _____	15
Figura 2.7:	Casca esférica sujeita a força horizontal $H_C$ e momento $M_C$ distribuído na borda _____	17
Figura 2.8:	Variáveis angulares utilizadas na formulação de casca esférica _____	19
Figura 3.1:	Discretização de um reservatório cilíndrico considerando-se elementos lineares na direção de sua altura _____	28
Figura 3.2:	Aspecto genérico da matriz de rigidez global ( $\underline{K}$ ) e do vetor de forças nodais ( $\underline{F}$ ) obtidos na formulação do MEF _____	31
Figura 3.3:	Discretização de uma casca esférica para aplicação do MEF _____	34
Figura 4.1:	Esquema de enriquecimento de uma base polinomial em $\mathfrak{R}^2$ _____	39
Figura 4.2:	Esquema de enriquecimento pelo MEFB _____	42
Figura 4.3:	Esquema de enriquecimento MEFH _____	43
Figura 4.4:	Esquema de enriquecimento MEFBA _____	44
Figura 5.1:	Janela de apresentação do aplicativo _____	49

Figura 5.2:	Janela para a escolha da estrutura a ser calculada, bem como o método de cálculo aproximado _____	50
Figura 5.3:	Janela de entrada de dados referente a reservatório cilíndrico _____	51
Figura 5.4:	Janela de entrada de dados referente a cúpula esférica sujeita a força horizontal e momento concentrado na base _____	51
Figura 5.5:	Janela de entrada de dados referente a cúpula esférica sujeita a peso próprio _____	53
Figura 5.6:	Janela de verificação gráfica dos dados de entrada referente a reservatório cilíndrico _____	53
Figura 5.7:	Janela de verificação gráfica dos dados de entrada para cúpula esférica sujeita a força horizontal e/ou momento concentrado na base _____	54
Figura 5.8:	Janela de confirmação do sucesso dos cálculos _____	54
Figura 5.9:	Janela de resultados referente a reservatório cilíndrico _____	55
Figura 5.10:	Janela de resultados referente a cúpula esférica sujeita a força horizontal e/ou momento concentrado na base _____	56
Figura 5.11:	Janela de resultados referente a cúpula esférica sujeita a peso próprio _____	56
Figura 5.12:	Exemplo de janela de gráfico de deslocamento referente a reservatório cilíndrico _____	57
Figura 6.1:	Parâmetros de entrada para a realização de exemplos comparativos relacionados à base articulada fixa de reservatório cilíndrico _____	61
Figura 6.2:	Parâmetros de entrada para a realização de exemplos comparativos relacionados à base engastada de reservatório cilíndrico _____	65
Figura 6.3:	Parâmetros de entrada para a realização de exemplos comparativos relacionados à casca esférica _____	69

## LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 6.1: Curva de deslocamento $w$ para o caso RMEFL	60
Gráfico 6.2: Curva de deslocamento $w$ para os casos RMEF, RMEFH, RMEFG e RMEFBA (base articulada fixa)	62
Gráfico 6.3: Curva de momento fletor $M_y$ para os casos RMEF, RMEFH, RMEFG e RMEFBA (base articulada fixa)	62
Gráfico 6.4: Curva de esforço cortante $Q_y$ para os casos RMEF, RMEFH, RMEFG e RMEFBA (base articulada fixa)	63
Gráfico 6.5: Curva de deslocamento $w$ para os casos RMEF, RMEFH, RMEFG e RMEFBA (base engastada)	65
Gráfico 6.6: Curva de momento fletor $M_y$ para os casos RMEF, RMEFH, RMEFG e RMEFBA (base engastada)	66
Gráfico 6.7: Curva de esforço cortante $Q_y$ para os casos RMEF, RMEFH, RMEFG e RMEFBA (base engastada)	66
Gráfico 6.8: Curva de esforço cortante $Q_\phi$ para o caso CMEF	69
Gráfico 6.9: Curva de momento fletor $M_\phi$ para o caso CMEF	70
Gráfico 6.10: Curva de esforço normal $N_\theta$ para o caso CMEF	70
Gráfico 6.11: Curva de giro $\Phi$ para o caso CMEF	71
Gráfico 6.12: Curva de deslocamento horizontal $\xi$ para o caso CMEF	71

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1: Dados de entrada utilizados para o cálculo de reservatório cilíndrico _____	59
Tabela 6.2: Dados de entrada utilizados para o cálculo de cúpula esférica _____	68

LISTA DE ABREVIATURAS

eq.	equação
eqs.	equações
fig.	figura
figs.	figuras

LISTA DE SIGLAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior;
CMEF	MEF aplicado a cascas esféricas utilizando uma base aproximativa cúbica (eq. (3.36));
MEF	Método dos Elementos Finitos;
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados;
MEFH	tipo de enriquecimento do MEF aplicado não somente a funções que formam uma partição da unidade;
MEFBA	tipo de enriquecimento do MEF em que a base inicial é ampliada mediante adição de funções especiais;
PU	partição da unidade;
RMEFL	MEF aplicado a cascas cilíndricas utilizando uma base aproximativa linear (eq. (4.4)) para resolver o regime de membrana;
RMEF	MEF aplicado a cascas cilíndricas utilizando uma base aproximativa cúbica (eq. (4.5));
RMEFH	MEFH aplicado a cascas cilíndricas utilizando as funções enriquecedoras dadas nas eqs. (4.6) e (4.7) aplicadas a todas as funções da base aproximativa;
RMEFG	MEFG aplicado a cascas cilíndricas utilizando as funções enriquecedoras dadas nas eqs. (4.6) e (4.7);
RMEFBA	MEFBA aplicado a cascas cilíndricas utilizando as funções enriquecedoras dadas nas eqs. (4.6) e (4.7);

## LISTA DE SÍMBOLOS

$y$	coordenada global de posição vertical, com origem na base do reservatório;
$w$	função que descreve o deslocamento horizontal ao longo da parede do reservatório, com valores positivos apontando para o centro da casca;
$D$	rigidez à flexão da casca;
$r$	raio médio do reservatório;
$\nu$	coeficiente de Poisson do material da parede do reservatório;
$h$	espessura da parede do reservatório;
$E$	módulo de elasticidade do material da parede do reservatório;
$p$	pressão linearmente distribuída atuando nas paredes do reservatório;
$\gamma_P$	peso específico do material da parede do reservatório;
$H$	altura total do reservatório;
$\beta$	coeficiente que aparece na formulação de reservatório cilíndrico, explicitado na eq. (2.3);
$w_P$	solução particular da eq. (2.2);
$w_h$	solução da correspondente homogênea da eq. (2.2);
$C_i$	constantes a determinar na formulação analítica de reservatório cilíndrico, com $i$ variando 1 a 4;
$N_\theta$	resultante de esforço tangencial atuando num elemento infinitesimal de reservatório cilíndrico, com sentido mostrado na fig. 2.3;
$M_y$	resultante de momento fletor atuando num elemento infinitesimal de reservatório cilíndrico, com direção e sentido mostrados na fig. 2.3;
$M_\theta$	resultante de momento fletor atuando num elemento infinitesimal de reservatório cilíndrico, com direção e sentido mostrados na fig. 2.3;
$Q_y$	resultante de esforço cortante atuando num elemento infinitesimal de reservatório cilíndrico, com sentido mostrado na fig. 2.3;

$N_y$	resultante de esforço normal atuando num elemento infinitesimal de reservatório cilíndrico, com sentido mostrado na fig. 2.3;
$f_i$	funções auxiliares usadas na formulação analítica de reservatório cilíndrico, com $i$ variando de 1 a 4;
$\bar{f}_i$	funções auxiliares usadas na formulação analítica de reservatório cilíndrico, com $i$ variando de 1 a 4;
$g$	peso próprio de cúpula esférica (por unidade de área);
$t$	espessura constante de cúpula esférica;
$R$	raio constante de cúpula esférica;
$\omega_C$	ângulo de abertura de cúpula esférica;
$N_\phi$	resultante de esforço normal atuando num elemento infinitesimal de cúpula esférica, com sentido mostrado na fig. 2.5;
$N_\theta$	resultante de esforço tangencial atuando num elemento infinitesimal de cúpula esférica, com sentido mostrado na fig. 2.5;
$M_\phi$	resultante de momento fletor atuando num elemento infinitesimal de cúpula esférica, com direção e sentido mostrados na fig. 2.5;
$M_\theta$	resultante de momento fletor atuando num elemento infinitesimal de cúpula esférica, com direção e sentido mostrados na fig. 2.5;
$Q_\phi$	resultante de esforço cortante atuando num elemento infinitesimal de cúpula esférica, com sentido mostrado na fig. 2.5;
$\omega$	posição angular medida a partir do topo da cúpula esférica;
$\nu_C$	coeficiente de Poisson do material da cúpula esférica;
$E_C$	módulo de elasticidade do material da cúpula esférica;
$\Phi$	giro, para cúpula esférica, com sentido mostrado na fig. 2.6;
$D_C$	rigidez à flexão de cúpula esférica;
$\bar{\zeta}^r$	deslocamento horizontal de membrana, para cúpula esférica, com direção e sentido mostrado na fig. 2.6;
$\bar{\Phi}$	parcela de membrana de $\Phi$ ;
$\bar{N}_\phi$	parcela de membrana de $N_\phi$ ;
$\bar{N}_\theta$	parcela de membrana de $N_\theta$ ;

$\xi$	deslocamento horizontal, para cúpula esférica, com sentido mostrado na fig. 2.6;
$H_C$	força externa horizontal uniformemente distribuída ao longo da extremidade de cúpula esférica, com sentido mostrado na fig. 2.7;
$M_C$	momento fletor externo uniformemente distribuído ao longo da extremidade de cúpula esférica, com sentido mostrado na fig. 2.7;
$\lambda$	coeficiente que aparece na formulação de cúpula esférica, explicitado na eq. (2.36);
$\Phi_F$	parcela de flexão de $\Phi$ ;
$\bar{\omega}$	posição angular medida a partir da base de cúpula esférica;
$L_i$	constantes a determinar na formulação analítica de cúpula esférica, com $i$ variando 1 a 4;
$\xi_F$	parcela de flexão de $\xi$ ;
$N_{\phi F}$	parcela de flexão de $N_{\phi}$ ;
$N_{\theta F}$	parcela de flexão de $N_{\theta}$ ;
$k_i$	funções auxiliares usadas na formulação analítica de cúpula esférica, com $i$ variando de 1 a 4;
$\bar{k}_i$	funções auxiliares usadas na formulação analítica de cúpula esférica, com $i$ variando de 1 a 4;
$\Omega$	domínio de um problema em mecânica dos sólidos;
$u$	solução exata para um campo genérico de um problema em mecânica dos sólidos;
$\Gamma$	contorno do domínio $\Omega$ , para um problema em mecânica dos sólidos;
$A$	operador diferencial genérico;
$B$	operador diferencial genérico;
$v$	função arbitrária;
$\bar{v}$	função arbitrária;
$\hat{u}$	solução aproximada para $u$ ;
$m$	maior ordem de derivada que ocorre em $A$ ou $B$ ;
$C$	operador diferencial genérico;
$D$	operador diferencial genérico;

$G$	operador diferencial genérico;
$M$	operador diferencial genérico;
$n$	número de nós adotados na discretização de um domínio $\Omega$ ;
$i$	contador;
$\varphi_i$	funções de forma genéricas associadas aos pontos $i$ e prescritas em termos de variáveis independentes;
$a_i$	parâmetros que apresentam significados associados aos valores da função incógnita, ou de suas derivadas, nos nós do domínio;
$j$	contador;
$\underline{\varphi}$	vetor contendo $\varphi_i$ ;
$\underline{a}$	vetor contendo $a_i$ ;
$\underline{K}$	matriz de rigidez global;
$\underline{F}$	vetor de forças nodais global;
$K_{i,j}$	elemento que ocupa a posição $i,j$ de matriz de rigidez global;
$e$	contador;
$N$	número de elementos;
$K_{i,j}^e$	elemento que ocupa a posição $i,j$ de matriz de rigidez local do elemento “e”;
$F_i$	elemento que ocupa a posição $i$ de vetor de forças nodais global;
$F_i^e$	elemento que ocupa a posição $i$ de vetor de forças nodais local do elemento “e”;
$h_0$	valor da espessura na base de reservatório;
$f$	função que descreve uma pequena variação linear de espessura de reservatório;
$\gamma$	coeficiente adimensional dado pela razão entre a espessura no topo e a espessura na base de reservatório cilíndrico;
$\beta_0$	coeficiente que aparece na formulação aproximada de reservatório cilíndrico, explicitado na eq. (3.15);
$D_0$	coeficiente que aparece na formulação aproximada de reservatório cilíndrico, explicitado na eq. (3.14);
$\tilde{w}$	função aproximada para $w$ ;

$h_e$	comprimento do elemento finito “e”, para reservatório cilíndrico;
$\bar{y}$	coordenada local de posição vertical, com origem na extremidade de elemento finito, para reservatório cilíndrico;
$y_e$	coordenada global do nó inicial do elemento finito “e”, para reservatório cilíndrico;
$y_{e+1}$	coordenada global do nó final do elemento finito “e”, para reservatório cilíndrico;
$\tilde{w}^e$	função $\tilde{w}$ para o elemento finito “e”;
$c_i$	constantes a determinar na formulação numérica aproximada de reservatório cilíndrico, com i variando 1 a 4;
$\tilde{w}_j^e$	graus de liberdade primários de elemento finito “e” na formulação numérica aproximada de reservatório cilíndrico, com i variando 1 a 4;
$\phi_j^e$	funções de forma hermitianas associadas ao elemento “e”, utilizadas na formulação numérica aproximada de reservatório cilíndrico, com j variando 1 a 4;
$N_j^e$	funções de forma lineares associadas ao elemento “e”, utilizadas na formulação numérica aproximada de reservatório cilíndrico, com j variando 1 a 2;
$Q_i^e$	graus de liberdade secundários de elemento finito na formulação numérica aproximada de reservatório cilíndrico, com i variando 1 a 4;
$\tilde{w}$	vetor que contém $\tilde{w}_j^e$ ;
$\tilde{M}_y^e$	função aproximada para $M_y$ no elemento finito “e”;
$\tilde{Q}_y^e$	função aproximada para $Q_y$ no elemento finito “e”;
$\tilde{M}_\theta^e$	função aproximada para $M_\theta$ no elemento finito “e”;
$\tilde{Q}_\phi$	função aproximada para $Q_\phi$ ;
$\omega_e$	coordenada angular global do nó inicial do elemento finito “e”, para cúpula esférica;

$\omega$	coordenada angular local de elemento, para cúpula esférica;
$\omega_E$	ângulo de abertura do elemento finito “E”, para cúpula esférica;
$\omega_{e+1}$	coordenada angular global do nó final do elemento finito “e”, para cúpula esférica;
$\tilde{Q}_j^e$	graus de liberdade primários de elemento finito “e” na formulação numérica aproximada de cúpula esférica, com j variando 1 a 4;
$\tilde{Q}_\phi^e$	função $\tilde{Q}_\phi$ para o elemento finito “e”;
$\bar{\phi}_j^e$	funções de forma cúbicas associadas ao elemento “e”, utilizadas na formulação numérica aproximada de cúpula esférica, com j variando 1 a 4;
$\underline{\tilde{Q}}$	vetor que contém $\tilde{Q}_j^e$ ;
$\tilde{\xi}^e$	função aproximada para $\xi$ no elemento finito “e”;
$\tilde{\Phi}^e$	função aproximada para $\Phi$ no elemento finito “e”;
$\tilde{N}_\phi^e$	função aproximada para $N_\phi$ no elemento finito “e”;
$\tilde{N}_\theta^e$	função aproximada para $N_\theta$ no elemento finito “e”;
$\tilde{M}_\phi^e$	função aproximada para $M_\phi$ no elemento finito “e”;
$\tilde{M}_\theta^e$	função aproximada para $M_\theta$ no elemento finito “e”;
x	variável de posição global de um domínio;
$g_i$	funções associadas a subdomínios;
$s_i$	subdomínios;
q	número de funções $g_i$ ;
$x_j$	nó;
$\mathfrak{S}$	família de funções de forma;
p	grau polinomial de $\mathfrak{S}$ ;
FE	função enriquecedora;
$\alpha$	número de determinada FE;
$l(j)$	número de FE adicionadas a cada nó de índice j;

$b_j^\alpha$  parâmetros nodais incógnitos acrescentados pelo enriquecimento;  
 $n_\phi$  número de funções de forma prescritas em cada elemento finito;

## SUMÁRIO

<u>RESUMO</u>	i
<u>ABSTRACT</u>	ii
<u>LISTA DE FIGURAS</u>	iii
<u>LISTA DE GRÁFICOS</u>	v
<u>LISTA DE TABELAS</u>	vi
<u>LISTA DE ABREVIATURAS</u>	vii
<u>LISTA DE SIGLAS</u>	viii
<u>LISTA DE SÍMBOLOS</u>	ix
<u>1. INTRODUÇÃO</u>	1
<b>1.1. Considerações iniciais</b>	<b>1</b>
<b>1.2. Objetivos</b>	<b>2</b>
<b>1.3. Justificativa</b>	<b>3</b>
<b>1.4. Organização do texto</b>	<b>4</b>
<u>2. CASCAS DE REVOLUÇÃO</u>	5
<b>2.1. Casca ou tubo cilíndrico</b>	<b>6</b>
<b>2.2. Casca esférica</b>	<b>13</b>
<u>3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS</u>	23
<b>3.1. Método dos Elementos Finitos aplicado ao problema das cascas cilíndricas</b>	<b>26</b>
<b>3.2. Método dos Elementos Finitos aplicado a cascas esféricas</b>	<b>33</b>
<u>4. ENRIQUECIMENTO DAS APROXIMAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS</u>	38
<b>4.1. Método dos Elementos Finitos Generalizados</b>	<b>38</b>
<b>4.2. Outras possibilidades de enriquecimento</b>	<b>42</b>
<b>4.3. Enriquecimentos do Método dos Elementos Finitos aplicados a cascas cilíndricas</b>	<b>44</b>

<b>5. PROGRAMA</b>	<b>48</b>
<b>5.1. Recursos numéricos específicos</b>	<b>48</b>
<b>5.2. Funcionamento do programa</b>	<b>49</b>
<b>6. EXEMPLOS NUMÉRICOS</b>	<b>58</b>
<b>6.1. Resultados para reservatório cilíndrico</b>	<b>58</b>
<b>6.2. Resultados para casca esférica</b>	<b>67</b>
<b>7. CONCLUSÕES</b>	<b>73</b>
<b>8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>75</b>
<b>APÊNDICE A – Proposta de solução aproximada para o problema da casca esférica sujeita a peso próprio</b>	<b>79</b>

## 1. INTRODUÇÃO

### **1.1. Considerações iniciais**

Esta pesquisa se inclui na linha de pesquisa em Métodos Numéricos da área de pós-graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, tendo apoio da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior).

A proposta está centrada na análise de estruturas em casca fina, com simetria em forma e carregamento de revolução, mediante a combinação do *Método dos Elementos Finitos* com técnicas não-convencionais de enriquecimento da aproximação. Uma combinação que serviu de base para os desenvolvimentos realizados é o *Método dos Elementos Finitos Generalizados* (MEFG), denominação esta introduzida, segundo BARROS (2002), por MELENK (1995). As alternativas numéricas escolhidas aplicam-se ao estudo das cascas com geometrias em forma de tubos cilíndricos e cúpulas esféricas (fig. 1.1).

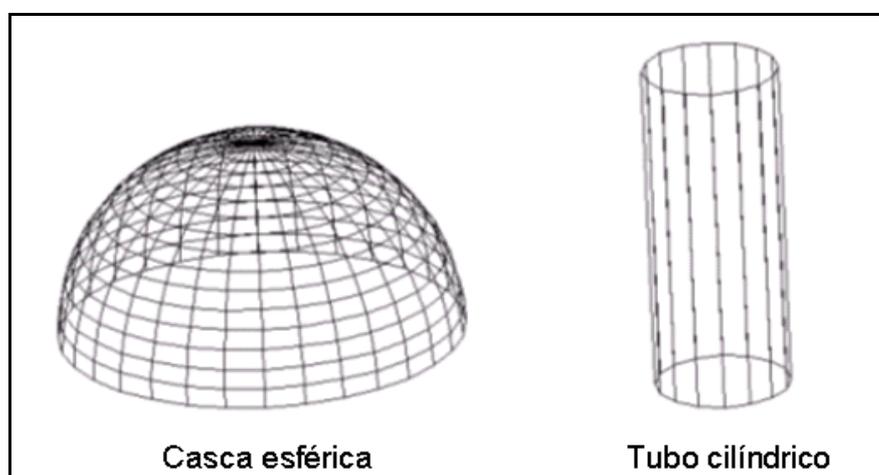


Figura 1.1: Estruturas estudadas.

A restrição a esses casos é proposital e motivada pela necessidade de adequar a abrangência do tema ao tempo disponível para a realização da dissertação. Nesse sentido, as análises conduzidas são também restritas ao campo linear. As restrições adotadas e, particularmente, a simetria de revolução permitem simplificar convenientemente a formulação para uma abordagem unidimensional.

No caso dos tubos cilíndricos, os estudos levam em consideração forças aplicadas que representam o peso próprio e forças transversais à superfície média, linearmente distribuídas ao longo do seu comprimento, representando pressões internas ou externas de diferentes naturezas. Já nas cascas esféricas, consideram-se forças representativas do peso próprio e forças e momentos distribuídos ao longo do paralelo de borda.

Um dos produtos da pesquisa realizada é a documentação e implementação computacional das formulações numéricas desenvolvidas utilizando a linguagem FORTRAN. Nesse sentido, o código de cálculo resultante reúne numa aplicação única as opções de análise de cada uma das estruturas citadas. No programa podem ser confrontadas as respostas analíticas (em termos de deslocamentos e esforços) das equações diferenciais dos problemas em análise (descritas, por exemplo, em BILLINGTON (1965)), com soluções aproximadas, obtidas pelo *Método dos Elementos Finitos* (MEF) e pelo MEF com enriquecimento.

As soluções numéricas geradas partem de aproximações locais (bases polinomiais) típicas do MEF convencional. Nas alternativas empregadas para o enriquecimento da aproximação inicial, introduzem-se novas bases polinomiais ou funções especiais que representam bem a solução exata do problema.

Há alternativas em que o enriquecimento é do tipo nodal e seletivo, sendo que cada função de enriquecimento está associada a um nó e atrela a ele um novo parâmetro nodal.

## **1.2. Objetivos**

A pesquisa realizada visa principalmente ao desenvolvimento de uma alternativa numérica não convencional mais eficiente e precisa para a avaliação

não somente dos valores da função solução mas também de suas derivadas. Outro objetivo é a disponibilização de um programa para o cálculo e visualização das soluções em deslocamentos e esforços de tubos cilíndricos e cúpulas esféricas.

### 1.3. Justificativa

O *Método dos Elementos Finitos* é, sem dúvida, uma ferramenta bastante poderosa e difundida no âmbito da análise de estruturas. As aproximações geradas pelo método convencional são sempre de natureza polinomial.

A melhoria da aproximação pode ser obtida mediante refinamento progressivo da malha, mantendo-se fixo o grau polinomial, ou por aumento do grau sem alteração da malha.

Quando a solução exata não é “irregular” (ou altamente oscilatória), ou seja, é suficientemente “suave”, MELENK e BABUŠKA (1996) citam que são boas as propriedades de aproximação das soluções polinomiais geradas por elementos finitos nas versões  $h$  (grau fixo do polinômio e refinamento progressivo da malha) e  $p$  (malha fixa e aumento progressivo do grau polinomial).

Porém, dependendo da forma da estrutura a analisar e de suas singularidades (em termos de geometria e carregamento), o MEF exige um refinamento considerável da malha, ou a utilização de polinômios de alta ordem para a obtenção de resultados satisfatórios.

É nesse contexto que podem ser inseridas técnicas de enriquecimento do MEF, objetivando-se obter soluções satisfatórias a partir de malhas pouco refinadas e enriquecimentos da aproximação inicial definida por funções de forma polinomiais de baixo grau. O enriquecimento pode ser feito mediante funções especiais e, neste caso, aplicado com vantagens a problemas cuja solução exata tenha variações fortemente localizadas. Neste trabalho, tais idéias são empregadas na análise das cascas cilíndricas e esféricas porque essas estruturas apresentam “singularidades de borda”, ou efeitos de flexão que se concentram nas regiões de vinculação imposta.

A característica mais relevante dos procedimentos aqui adotados é o aproveitamento da estrutura convencional fornecida pelo MEF, adicionando-se as opções de enriquecimento. Há ainda, conforme já mencionado, a vantagem de que o enriquecimento possa ser seletivo, ou seja, aplicado apenas na região da estrutura que for mais conveniente, sendo as demais calculadas segundo a estrutura clássica do MEF.

#### **1.4. Organização do texto**

No capítulo 2, são apresentadas as equações diferenciais governantes das estruturas tipo casca cilíndrica e esférica, bem como suas soluções analíticas encontradas na bibliografia. Considera-se a casca cilíndrica submetida ao peso próprio e a forças transversais linearmente distribuídas na superfície média. A casca esférica é submetida ao peso próprio ou a forças e momentos uniformemente distribuídos ao longo da borda.

O *Método dos Elementos Finitos* convencional é aplicado às estruturas citadas no capítulo 3, sendo descritas no capítulo 4 as formas de enriquecimento adotadas.

O capítulo 5 descreve o programa executável criado, em termos dos recursos numéricos utilizados e em termos de seu funcionamento.

No capítulo 6 são exibidos exemplos numéricos para cascas esféricas e cilíndricas comparando-se soluções analíticas e aproximadas, em termos de deslocamentos e esforços.

As conclusões são apresentadas no capítulo 7.

Por fim, no apêndice A, é exposto um procedimento de cálculo a ser realizado para a aplicação do MEF ao sistema de equações que representa o modelo completo da casca esférica sujeita a peso próprio.

## 2. CASCAS DE REVOLUÇÃO

Uma estrutura laminar possui geometricamente uma dimensão muito menor que as outras duas, podendo ser descrita por sua superfície média e pela lei de variação de sua espessura.

A superfície média pode ser plana ou não plana. As estruturas laminares com superfície média plana distinguem-se em *chapas* e *placas* e as estruturas laminares com superfície média não plana denominam-se *cascas*. Entre estas últimas, mais especificamente as cilíndricas e as esféricas são utilizadas nesta pesquisa.

Segundo GRAVINA (1957), a teoria linear das cascas delgadas, ou finas, admite, em geral, as seguintes hipóteses fundamentais:

1 – O material que constitui a estrutura é homogêneo, isótropo e obedece à Lei de *Hooke*.

2 – A espessura é pequena em relação às outras dimensões e aos raios de curvatura da superfície média.

3 – As tensões normais à superfície média são desprezíveis em relação às demais componentes de tensão.

4 – Os pontos pertencentes, antes da deformação, a retas normais à superfície média, encontram-se sobre retas perpendiculares à superfície média deformada.

5 - Os deslocamentos são muito pequenos em relação à espessura.

A teoria linear leva a equações fundamentais lineares pelas quais permanece válida a lei da sobreposição dos efeitos. Com relação às hipóteses 2 a 5, observa-se que, no caso de estrutura de superfície com espessura muito pequena, a hipótese 5 não poderá ser admitida, sendo necessária a aplicação

de teoria de segunda ordem. Neste trabalho, admite-se somente a teoria de primeira ordem.

## 2.1. Casca ou tubo cilíndrico

Considere-se um tubo cilíndrico-circular de comprimento infinito sob a ação de pressão interna de simetria axial e continuamente distribuída ao longo de seu comprimento. Nessas condições, imaginando-se que não haja impedimento à expansão lateral, seções transversais descritas por circunferências sofrem deformação sem mudança de forma. Sendo a casca suficientemente esbelta, tensões normais elásticas se distribuem uniformemente ao longo da espessura. Estabelece-se assim um regime de comportamento dito de membrana. Por outro lado, se o tubo tem comprimento finito e as extremidades são vinculadas, a casca não é mais livre para expandir lateralmente e alguma flexão deve ocorrer na região adjacente a essas extremidades. Nos tubos de comprimento finito, é possível preservar o regime de membrana desde que a vinculação permita o livre deslocamento (e giro) da parede. A fig. 2.1 ilustra essas possibilidades descritas.

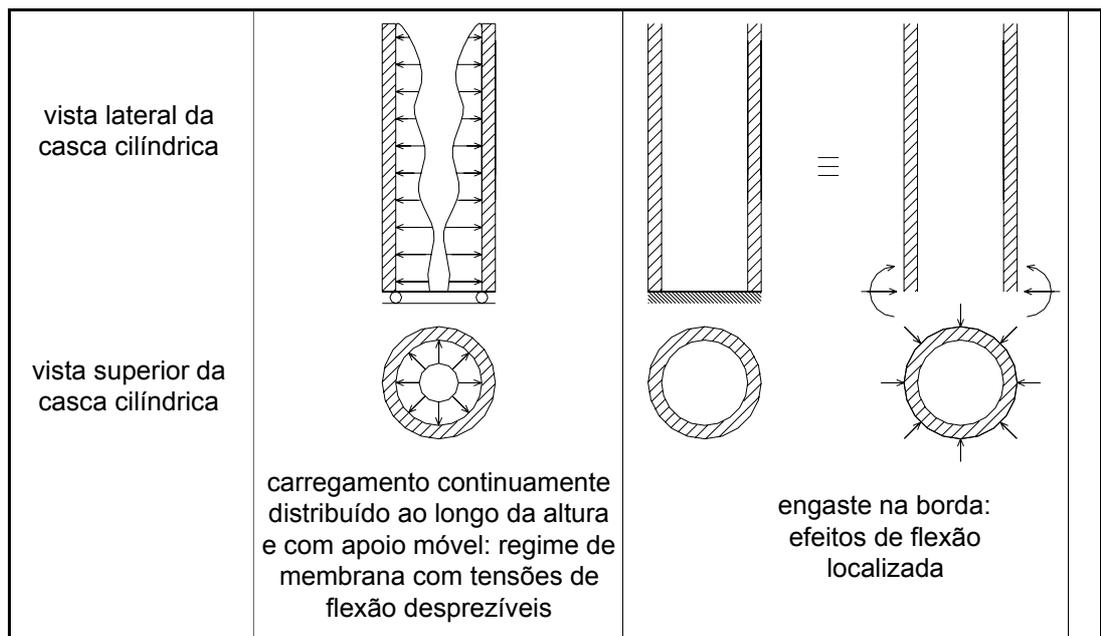


Figura 2.1: Regime de membrana e de flexão na casca cilíndrica.

Conforme TIMOSHENKO (1940), uma investigação mais completa mostra que a flexão é de característica local, com acentuada diminuição de seus efeitos (“amortecimento”) a partir de uma certa distância da extremidade vinculada. BELLUZZI (1967) cita ainda que, quanto menor é a espessura da casca em relação às suas outras dimensões, maior é esse amortecimento. Assim sendo, longe das bordas prevalece o regime de membrana.

Mesmo nas situações mais gerais de forças aplicadas, desde que se observe uma variação suave na sua distribuição, nas cascas finas a espessura pequena permite considerar adequadamente (longe das bordas) o regime de membrana. Nesse caso, admite-se distribuição uniforme das tensões normal e de cisalhamento ao longo da espessura. O regime de membrana é estaticamente determinado, pois esforços solicitantes normais e tangenciais, resultantes das tensões, podem ser determinados somente com as condições de equilíbrio.

O regime de flexão pode ser estudado mediante teorias elementares que pressupõem hipóteses de variação linear das tensões normais na espessura e parabólica das tensões de cisalhamento. As cascas em regime de flexão são estaticamente indeterminadas porque, além dos esforços solicitantes normais e tangenciais, há também, como resultantes das tensões, momentos fletores e esforços cortantes normais à superfície média da casca, BELLUZZI (1967).

Por sua indeterminação interna, a formulação do problema das cascas finas em regime de flexão exige a combinação de condições de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva, BILLINGTON (1965).

A formulação analítica para o tubo cilíndrico em regime linear de flexão decorrente de solicitação externa com simetria de revolução é clássica e encontra-se descrita em vários livros, entre eles, BELLUZZI (1967), TIMOSHENKO (1940) e BILLINGTON (1965). Tal formulação é exposta resumidamente a seguir. Observa-se que, com frequência, a partir deste ponto, será adotada a denominação: *reservatório cilíndrico*, já que será estudado o tubo cilíndrico submetido internamente a pressão linearmente distribuída.

De acordo com a bibliografia citada, são previamente estabelecidas as seguintes hipóteses:

- Simetria axial geométrica;

- simetria axial de carregamento; e
- casca delgada, ou seja, a relação entre a espessura da parede e o raio do reservatório deve ser menor ou igual a 1/20 (0,05);

Em regime geométrico e fisicamente linear, o problema dos reservatórios em regime de flexão, formulado em termos de deslocamentos axiais e radiais, resulta desacoplado. De maior interesse, neste trabalho, destaca-se a formulação em deslocamentos radiais.

Considerando-se um reservatório submetido a pressão interna linearmente distribuída ao longo de toda a sua altura (fig. 2.2), a combinação das equações de equilíbrio, compatibilidade e constitutiva leva à seguinte equação diferencial nos deslocamentos radiais:

$$\frac{d^2}{dy^2} \left( D(y) * \frac{d^2 w}{dy^2}(y) \right) + \frac{E * h(y)}{r^2} * w(y) = p(y) \quad (2.1)$$

em que:

$y$  é uma coordenada de posição vertical, com origem na base do reservatório;  
 $w(y)$  é a função que descreve o deslocamento horizontal ao longo da parede do reservatório, com valores positivos apontando para o centro da casca;

$D(y)$  é a rigidez à flexão da casca, igual a:  $\frac{E * h(y)^3}{12 * (1 - \nu^2)}$ ;

$r$  é o raio médio do reservatório;

$\nu$  é o coeficiente de Poisson;

$h(y)$  é a espessura da parede do reservatório na posição  $y$ ;

$E$  é o módulo de elasticidade; e

$p(y)$  é, no caso desta pesquisa, a função que descreve a pressão interna linearmente distribuída atuando nas paredes do reservatório.

Acrescentam-se ainda os seguintes dados:

$\gamma_P$  é o peso específico do material da parede do reservatório; e

$H$  é a altura total do tubo.

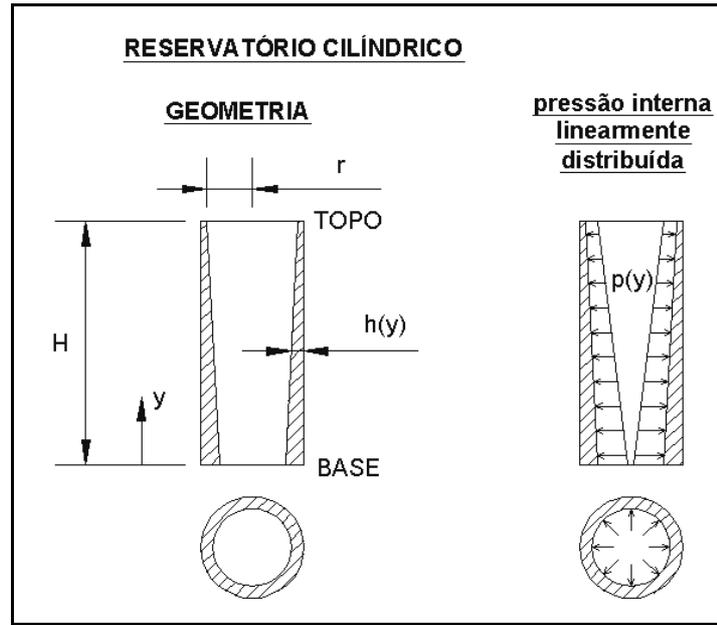


Figura 2.2: Reservatório cilíndrico sujeito a pressão linearmente distribuída.

Para o caso particular de espessura constante ( $h(y)=h$ ), a eq. (2.1) passa a ser escrita como:

$$\frac{d^4 w}{dy^4}(y) + 4 * \beta^4 * w(y) = \frac{p(y)}{D} \quad (2.2)$$

O coeficiente  $\beta$  que aparece na relação anterior tem, por definição:

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{3 * (1 - \nu^2)}{r^2 * h^2}} \quad (2.3)$$

A solução geral da equação diferencial (2.2) é dada por:

$$w(y) = w(y)_p + w(y)_h \quad (2.4)$$

em que  $w(y)_p$  é uma solução particular da eq. (2.2) e  $w(y)_h$  é a solução da correspondente equação homogênea. Tem-se, em geral, para a solução da homogênea:

$$w(y)_h = e^{(\beta * y)} * (C_1 * \cos(\beta * y) + C_2 * \text{sen}(\beta * y)) + e^{-(\beta * y)} * (C_3 * \cos(\beta * y) + C_4 * \text{sen}(\beta * y)) \quad (2.5)$$

sendo  $C_1$  a  $C_4$  constantes a determinar.

Para o caso de pressão interna linearmente distribuída, tem-se a seguinte solução particular:

$$w(y)_p = \frac{p(y) * r^2}{E * h} \quad (2.6)$$

Deve-se observar que a solução dada pela eq. (2.6) tem por correspondência o regime de membrana do reservatório, BILLINGTON (1965).

As constantes  $C_1$  a  $C_4$  dependem dos vínculos adotados em cada caso considerado. Nos textos consultados sobre os tubos cilíndricos, as constantes  $C_1$  e  $C_2$  são anuladas para efeitos de simplificação dos cálculos. Porém, desde que o reservatório seja longo, essa simplificação reproduz bem o fato de que efeitos de flexão de uma borda não se propagam até a outra borda. Neste trabalho, pretende-se resolver o problema da forma mais geral, sem levar em conta tal hipótese simplificadora. Sendo assim, a solução geral para os deslocamentos horizontais da parede do reservatório é dada por:

$$w(y) = e^{(\beta * y)} * (C_1 * \cos(\beta * y) + C_2 * \text{sen}(\beta * y)) + e^{-(\beta * y)} * (C_3 * \cos(\beta * y) + C_4 * \text{sen}(\beta * y)) + \frac{p(y) * r^2}{E * h} \quad (2.7)$$

Os esforços solicitantes (esforço tangencial  $N_\theta$ , momentos fletores  $M_y$  e  $M_\theta$  e esforço cortante  $Q_y$ ) são dados pelas seguintes equações:

$$N_\theta(y) = -\frac{E * h}{r} * w(y) \quad (2.8)$$

$$M_y(y) = -D * \frac{d^2 w}{dy^2}(y) \quad (2.9)$$

$$M_\theta(y) = \nu * M_y \quad (2.10)$$

$$Q_y(y) = -D * \frac{d^3 w}{dy^3}(y) \quad (2.11)$$

Na fig. 2.3, pode-se visualizar a convenção de sinais positivos para os esforços indicados nas eqs. (2.8) a (2.11). Nota-se que tais esforços são distribuídos por unidade de comprimento da face considerada.

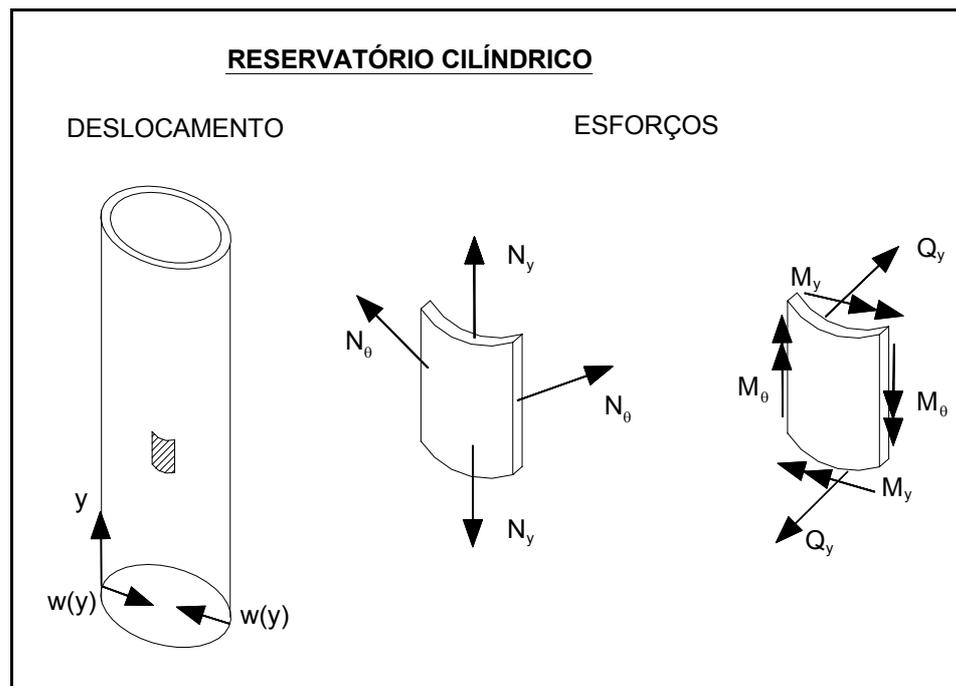


Figura 2.3: Convenções de sinal para deslocamento horizontal e esforços solicitantes do reservatório cilíndrico.

Aparece também, na fig. 2.3, o esforço  $N_y$ , que resulta do problema desacoplado do equilíbrio em relação ao peso próprio da parede. A relação para  $N_y(y)$  é a seguinte, BILLINGTON (1965):

$$N_y(y) = -\gamma_p * (H - y) * h \quad (2.12)$$

Introduzem-se, neste ponto, as seguintes funções auxiliares:

$$f_1(y) = e^{-\beta * y} * (\cos(\beta * y) + \text{sen}(\beta * y)) \quad (2.13)$$

$$f_2(y) = e^{-\beta * y} * (\cos(\beta * y) - \text{sen}(\beta * y)) \quad (2.14)$$

$$f_3(y) = e^{-\beta * y} * \cos(\beta * y) \quad (2.15)$$

$$f_4(y) = e^{-\beta * y} * \text{sen}(\beta * y) \quad (2.16)$$

$$\bar{f}_1(y) = e^{\beta * y} * (\cos(\beta * y) + \text{sen}(\beta * y)) \quad (2.17)$$

$$\bar{f}_2(y) = e^{\beta * y} * (\cos(\beta * y) - \text{sen}(\beta * y)) \quad (2.18)$$

$$\bar{f}_3(y) = e^{\beta * y} * \cos(\beta * y) \quad (2.19)$$

$$\bar{f}_4(y) = e^{\beta * y} * \text{sen}(\beta * y) \quad (2.20)$$

Considerando as eqs. (2.13) a (2.20), as relações essenciais do problema podem ser escritas como:

$$w(y) = C_1 * \bar{f}_3(y) + C_2 * \bar{f}_4(y) + C_3 * f_3(y) + C_4 * f_4(y) + \frac{p(y) * r^2}{E * h} \quad (2.21)$$

$$\frac{dw}{dy}(y) = C_1 * \beta * \bar{f}_2(y) + C_2 * \beta * \bar{f}_1(y) - C_3 * \beta * f_1(y) + C_4 * \beta * f_2(y) + \frac{dp}{dy}(y) * \frac{r^2}{E * h} \quad (2.22)$$

$$\frac{d^2w}{dy^2}(y) = -C_1 * 2 * \beta^2 * \bar{f}_4(y) + C_2 * 2 * \beta^2 * \bar{f}_3(y) + C_3 * 2 * \beta^2 * f_4(y) - C_4 * 2 * \beta^2 * f_3(y) \quad (2.23)$$

$$\frac{d^3w}{dy^3}(y) = -C_1 * 2 * \beta^3 * \bar{f}_1(y) + C_2 * 2 * \beta^3 * \bar{f}_2(y) + C_3 * 2 * \beta^3 * f_2(y) + C_4 * 2 * \beta^3 * f_1(y) \quad (2.24)$$

De maior interesse para este trabalho são as condições de contorno dos casos de base do reservatório engastada e articulada fixa, ambos com topo livre (momentos de flexão e esforço cortante nulos). A partir daí, podem ser encontrados os valores das constantes  $C_1$  a  $C_4$  e, portanto, a solução analítica do problema.

## 2.2. Casca esférica

Uma casca esférica (ou cúpula esférica) é uma estrutura laminar de dupla curvatura (ver fig. 1.1) usualmente empregada como cobertura. A teoria clássica, GRAVINA (1957), para a obtenção e resolução do problema da cúpula com carregamento de revolução é resumida a seguir.

Inicialmente considera-se uma casca esférica sujeita a peso próprio, conforme a fig. 2.4, em que:

$g$  é a função representativa do peso próprio da cúpula (por unidade de área);

$t$  é a espessura (constante) da cúpula;

$R$  é o raio cúpula; e

$\omega_c$  é o ângulo central de abertura da cúpula.

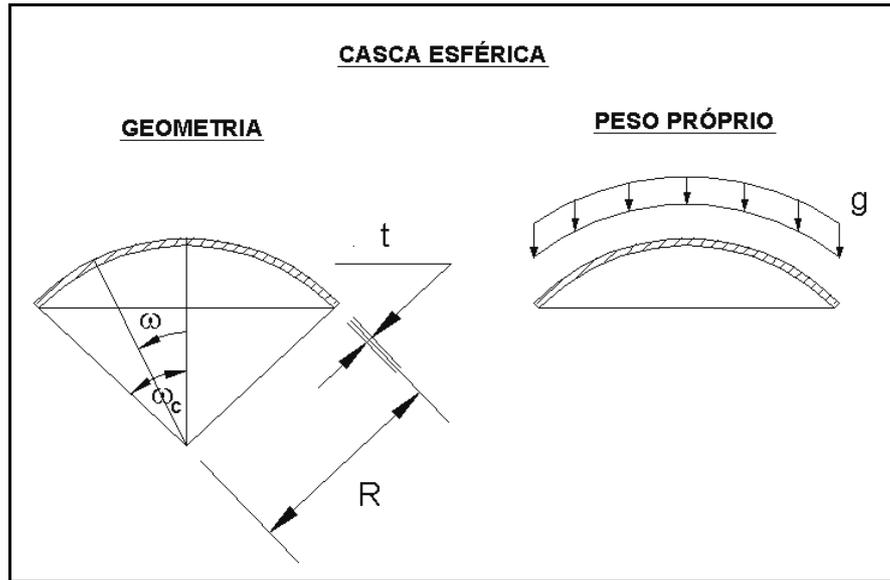


Figura 2.4: Casca esférica sujeita a peso próprio.

Considerando a estrutura com simetria de revolução em forma e carregamento, os esforços internos solicitantes e suas variações podem ser representados como indicado na fig. 2.5.

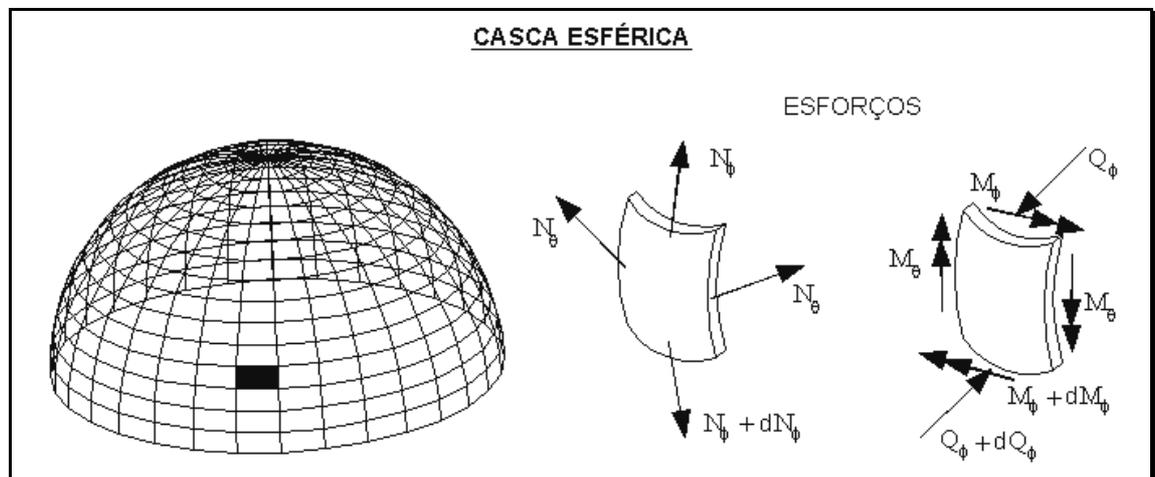


Figura 2.5: Esforços atuantes na casca esférica.

Combinando-se as relações de equilíbrio, compatibilidade entre deslocamentos e deformações e constitutiva (relações tensão – deformação), é possível exprimir o equilíbrio, reduzindo o conjunto de variáveis a  $Q_\phi$  e  $\Phi$ , mediante as seguintes relações:

$$\frac{d^2 Q_\phi}{d\omega^2}(\omega) + \frac{dQ_\phi}{d\omega}(\omega) \cot g(\omega) - Q_\phi(\omega) \cot^2 g(\omega) + \nu_C \cdot Q_\phi(\omega) = -E_C \cdot t \cdot \Phi(\omega) + R \cdot g \cdot \sin(\omega) \cdot (2 - \nu_C) \quad (2.25)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\omega^2}(\omega) + \frac{d\Phi}{d\omega}(\omega) \cot g(\omega) - \Phi(\omega) \cot^2 g(\omega) + \nu_C \cdot \Phi(\omega) = \frac{R^2}{D_C} \cdot Q_\phi(\omega) \quad (2.26)$$

em que:

$\omega$  é a posição angular medida a partir do topo da cúpula esférica (fig. 2.6);

$\Phi(\omega)$  é o giro sofrido pela tangente ao meridiano em  $\omega$  após a deformação da cúpula, como ilustrado na fig. 2.6;

$D_C$  é a rigidez à flexão da cúpula, igual a:  $\frac{E_C \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu_C^2)}$ ;

$E_C$  é o módulo de elasticidade do material da cúpula; e

$\nu_C$  é o coeficiente de Poisson do material da cúpula.

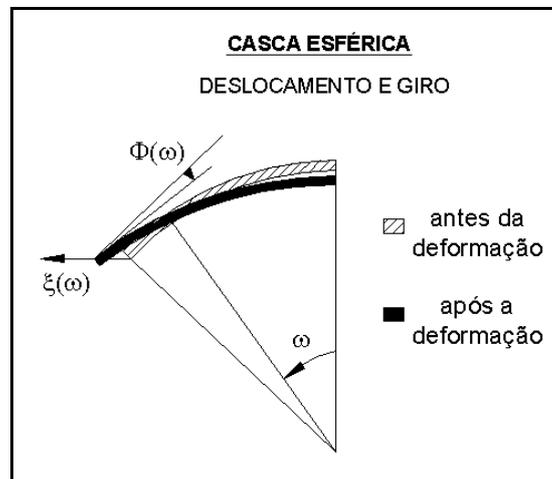


Figura 2.6: Deslocamento horizontal  $\xi$  e giro  $\Phi$ , em função do ângulo  $\omega$ , para casca esférica.

As equações diferenciais (2.25) e (2.26) possuem solução geral composta por uma solução homogênea e uma solução particular. Aqui, como no caso da casca cilíndrica, a solução de membrana constitui boa aproximação para a solução particular do sistema, desde que, segundo BELLUZZI (1967), a espessura da casca seja suficientemente pequena em relação ao raio.

Para o regime de membrana (em que  $Q_\phi = M_\phi = M_\theta = 0$ ), reproduzem-se em seguida as relações representativas do deslocamento horizontal  $\bar{\xi}$  e do giro  $\bar{\Phi}$ , além dos esforços  $\bar{N}_\phi$  e  $\bar{N}_\theta$ , todos em função do ângulo  $\omega$  (ver figs. 2.5 e 2.6).

$$\bar{\xi}(\omega) = \frac{g \cdot R^2}{E_C \cdot t} \cdot \text{sen}(\omega) \cdot \left( \frac{1 + \nu_C}{1 + \cos(\omega)} - \cos(\omega) \right) \quad (2.27)$$

$$\bar{\Phi}(\omega) = \frac{g \cdot R}{E_C \cdot t} \cdot (2 + \nu_C) \cdot \text{sen}(\omega) \quad (2.28)$$

$$\bar{N}_\phi(\omega) = - \frac{g \cdot R}{(1 + \cos(\omega))} \quad (2.29)$$

$$\bar{N}_\theta(\omega) = g \cdot R \cdot \left( \frac{1}{1 + \cos(\omega)} - \cos(\omega) \right) \quad (2.30)$$

Encontrada a solução particular do sistema (regime de membrana), passa-se a resolver a parte homogênea ou de flexão, ou seja, o sistema (2.25) e (2.26) com  $g = 0$ . Portanto, o sistema a ser resolvido torna-se:

$$\frac{d^2 Q_\phi}{d\omega^2}(\omega) + \frac{dQ_\phi}{d\omega}(\omega) \cdot \cot g(\omega) - Q_\phi(\omega) \cdot \cot^2 g(\omega) + \nu_C \cdot Q_\phi(\omega) = -E_C \cdot t \cdot \Phi_F(\omega) \quad (2.31)$$

$$\frac{d^2 \Phi_F}{d\omega^2}(\omega) + \frac{d\Phi_F}{d\omega}(\omega) \cdot \cot g(\omega) - \Phi_F(\omega) \cdot \cot^2 g(\omega) - \nu_C \cdot \Phi_F(\omega) = \frac{R^2}{D_C} \cdot Q_\phi(\omega) \quad (2.32)$$

em que  $\Phi_F$  é a parcela de flexão de  $\Phi$ .

O problema de flexão reúne os efeitos dos vínculos nas bordas ou ainda, de forma equivalente, os efeitos da aplicação externa de uma força horizontal  $H_c$  e momento externo  $M_c$  distribuídos na borda da casca esférica (fig. 2.7).

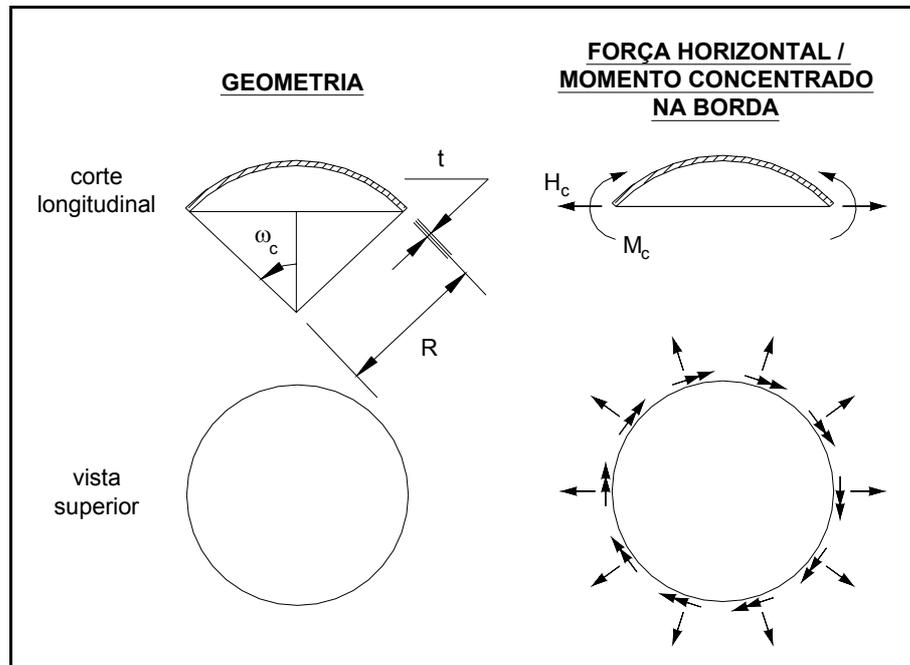


Figura 2.7: Casca esférica sujeita a força horizontal  $H_c$  e momento  $M_c$  distribuído na borda.

A solução rigorosa do sistema (2.31) e (2.32) é detalhada na literatura, por exemplo, por meio de séries hipergeométricas, mas apresenta-se muito trabalhosa, especialmente nos casos de estruturas delgadas, ou seja, com valores elevados da constante  $\lambda$  (eq. (2.36)). Além disso, nesses casos, a convergência das séries se dá com razão quase nula, BELLUZZI (1967).

Conforme GRAVINA (1957), na maioria das aplicações práticas em estruturas civis, o valor de  $\lambda$  é alto de modo que a obtenção das constantes de integração pode ser simplificada.

Uma das possíveis soluções analíticas válidas para coeficientes  $\lambda$  elevados, ou seja, cascas delgadas, é dada pelo *Método de Geckeler*. Tal método considera o amortecimento dos efeitos das singularidades de borda, como ocorre nos tubos. Segundo GRAVINA (1957), a solução de *Geckeler* é válida também para cascas abatidas ( $\omega_c$  pequeno), desde que a relação  $R/t$

seja grande. De fato, BELLUZZI (1967) cita que as aproximações fornecidas pelo *Método de Geckeler* são suficientemente boas inclusive para  $\omega_C$  em torno de 15 graus. Cita ainda que raramente são empregadas cascas mais abatidas.

Desde que as hipóteses do *Método de Geckeler* sejam satisfeitas, os termos de ordem de derivação mais baixa das relações (2.31) e (2.32) podem ser desconsiderados em relação aos termos de ordens mais altas, obtendo-se:

$$\frac{d^2 Q_\phi}{d\omega^2}(\omega) = -E_C * t * \Phi_F(\omega) \quad (2.33)$$

$$\frac{d^2 \Phi_F}{d\omega^2}(\omega) = \frac{R^2}{D_C} * Q_\phi(\omega) \quad (2.34)$$

Combinando-se (2.34) e (2.33), de modo a eliminar o giro  $\Phi_F$ , tem-se finalmente a equação diferencial que representa o regime de flexão da casca esférica:

$$\frac{d^4 Q_\phi}{d\omega^4}(\omega) + 4 * \lambda^4 * Q_\phi(\omega) = 0 \quad (2.35)$$

em que:

$$\lambda = 4 \sqrt{3 * (1 - \nu_C^2) * \left(\frac{R}{t}\right)^2} \quad (2.36)$$

A solução da eq. (2.35) é semelhante àquela apresentada para o tubo cilíndrico (eq. (2.5)). Sendo assim:

$$Q_\phi(\bar{\omega}) = e^{(\lambda * \bar{\omega})} * (L_1 * \cos(\lambda * \bar{\omega}) + L_2 * \sen(\lambda * \bar{\omega})) + e^{-(\lambda * \bar{\omega})} * (L_3 * \cos(\lambda * \bar{\omega}) + L_4 * \sen(\lambda * \bar{\omega})) \quad (2.37)$$

em que:

$\bar{\omega} = \omega_C - \omega$  (ver fig. 2.8); e

$L_1$  a  $L_4$  são constantes a determinar.

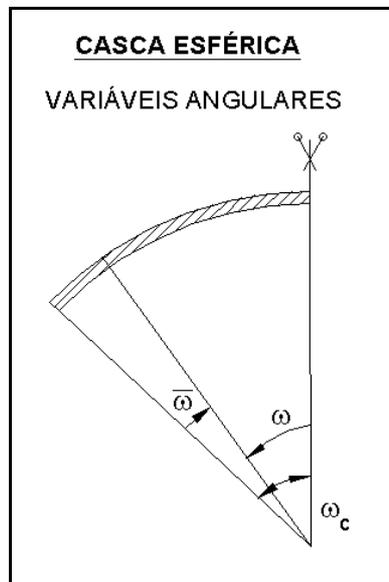


Figura 2.8: Variáveis angulares utilizadas na formulação da casca esférica.

De acordo com GRAVINA (1957), os esforços solicitantes e as variáveis cinemáticas, para o regime de flexão, resultam então pelas seguintes equações:

$$\xi_F(\bar{\omega}) = \frac{R * \text{sen}(\omega_C - \bar{\omega})}{E_C * t} * \left( \frac{dQ_\phi}{d\omega}(\bar{\omega}) + v_C * Q_\phi(\bar{\omega}) * \cot g(\omega_C - \bar{\omega}) \right) \quad (2.38)$$

$$\Phi_F(\bar{\omega}) = \frac{1}{E_C * t} * \frac{d^2 Q_\phi}{d\bar{\omega}^2}(\bar{\omega}) \quad (2.39)$$

$$N_{\phi F}(\bar{\omega}) = -Q_\phi(\bar{\omega}) * \cot g(\omega_C - \bar{\omega}) \quad (2.40)$$

$$N_{\theta F}(\bar{\omega}) = \frac{dQ_\phi}{d\omega}(\bar{\omega}) \quad (2.41)$$

$$M_{\phi}(\bar{\omega}) = \frac{D_C}{R * E_C * t} * \frac{d^3 Q_{\phi}}{d\bar{\omega}^3}(\bar{\omega}) \quad (2.42)$$

$$M_{\theta}(\bar{\omega}) = \nu_C * M_{\phi}(\bar{\omega}) \quad (2.43)$$

Introduzem-se, neste ponto, exatamente como feito para tubos, as seguintes funções auxiliares:

$$k_1(\bar{\omega}) = e^{-\lambda * \bar{\omega}} * (\cos(\lambda * \bar{\omega}) + \text{sen}(\lambda * \bar{\omega})) \quad (2.44)$$

$$k_2(\bar{\omega}) = e^{-\lambda * \bar{\omega}} * (\cos(\lambda * \bar{\omega}) - \text{sen}(\lambda * \bar{\omega})) \quad (2.45)$$

$$k_3(\bar{\omega}) = e^{-\lambda * \bar{\omega}} * \cos(\lambda * \bar{\omega}) \quad (2.46)$$

$$k_4(\bar{\omega}) = e^{-\lambda * \bar{\omega}} * \text{sen}(\lambda * \bar{\omega}) \quad (2.47)$$

$$\bar{k}_1(\bar{\omega}) = e^{\lambda * \bar{\omega}} * (\cos(\lambda * \bar{\omega}) + \text{sen}(\lambda * \bar{\omega})) \quad (2.48)$$

$$\bar{k}_2(\bar{\omega}) = e^{\lambda * \bar{\omega}} * (\cos(\lambda * \bar{\omega}) - \text{sen}(\lambda * \bar{\omega})) \quad (2.49)$$

$$\bar{k}_3(\bar{\omega}) = e^{\lambda * \bar{\omega}} * \cos(\lambda * \bar{\omega}) \quad (2.50)$$

$$\bar{k}_4(\bar{\omega}) = e^{\lambda * \bar{\omega}} * \text{sen}(\lambda * \bar{\omega}) \quad (2.51)$$

Com as funções anteriores, as relações necessárias para a completa caracterização do problema podem ser escritas como:

$$Q_{\phi}(\bar{\omega}) = L_1 * \bar{k}_3(\bar{\omega}) + L_2 * \bar{k}_4(\bar{\omega}) + L_3 * k_3(\bar{\omega}) + L_4 * k_4(\bar{\omega}) \quad (2.52)$$

$$\frac{dQ_\phi}{d\bar{\omega}}(\bar{\omega}) = L_1 * \lambda * \bar{k}_2(\bar{\omega}) + L_2 * \lambda * \bar{k}_1(\bar{\omega}) - L_3 * \lambda * k_1(\bar{\omega}) + L_4 * \lambda * k_2(\bar{\omega}) \quad (2.53)$$

$$\frac{d^2Q_\phi}{d\bar{\omega}^2}(\bar{\omega}) = -L_1 * 2 * \lambda^2 * \bar{k}_4(\bar{\omega}) + L_2 * 2 * \lambda^2 * \bar{k}_3(\bar{\omega}) + L_3 * 2 * \lambda^2 * k_4(\bar{\omega}) - L_4 * 2 * \lambda^2 * k_3(\bar{\omega}) \quad (2.54)$$

$$\frac{d^3Q_\phi}{d\bar{\omega}^3}(\bar{\omega}) = -L_1 * 2 * \lambda^3 * \bar{k}_1(\bar{\omega}) + L_2 * 2 * \lambda^3 * \bar{k}_2(\bar{\omega}) + L_3 * 2 * \lambda^3 * k_2(\bar{\omega}) + L_4 * 2 * \lambda^3 * k_1(\bar{\omega}) \quad (2.55)$$

É preciso lembrar que, no caso de casca esférica sujeita a peso próprio, os efeitos de membrana precisam ser adicionados a essas soluções.

A imposição das condições de contorno em cada caso permite identificar os valores das constantes  $L_1$  a  $L_4$  e, portanto, caracterizar a solução analítica de flexão do problema.

As condições de contorno, para o caso de base articulada fixa e topo livre, são:

- 1) esforço cortante  $Q_\phi$  no topo da casca ( $\bar{\omega} = \omega_C$ ) nulo;
- 2) giro ( $\Phi = \bar{\Phi} + \Phi_F$ ) no topo da casca ( $\bar{\omega} = \omega_C$ ) nulo;
- 3) deslocamento ( $\xi = \bar{\xi} + \xi_F$ ) na base da casca ( $\bar{\omega} = 0$ ) nulo; e
- 4) momento fletor  $M_\phi$  na base da casca ( $\bar{\omega} = 0$ ) nulo;

No caso de base engastada e topo livre:

- 1) esforço cortante  $Q_\phi$  no topo da casca ( $\bar{\omega} = \omega_C$ ) nulo;
- 2) giro ( $\Phi = \bar{\Phi} + \Phi_F$ ) no topo da casca ( $\bar{\omega} = \omega_C$ ) nulo;
- 3) deslocamento ( $\xi = \bar{\xi} + \xi_F$ ) na base da casca ( $\bar{\omega} = 0$ ) nulo; e
- 4) giro ( $\Phi = \bar{\Phi} + \Phi_F$ ) na base da casca ( $\bar{\omega} = 0$ ) nulo;

Para o problema da casca esférica sujeita a aplicação externa de uma força horizontal  $H_C$  e momento  $M_C$  distribuído na borda, têm-se as seguintes condições de contorno:

- 1) esforço cortante  $Q_\phi$  no topo da casca ( $\bar{\omega} = \omega_C$ ) nulo;
- 2) momento fletor  $M_\phi$  no topo da casca ( $\bar{\omega} = \omega_C$ ) nulo;
- 3) esforço cortante  $Q_\phi$  na base da casca ( $\bar{\omega} = 0$ ) igual a  $-H_C \cdot \text{sen}(\omega_C)$ ; e
- 4) momento fletor  $M_\phi$  na base da casca ( $\bar{\omega} = 0$ ) igual a  $M_C$ ;

### 3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Classicamente os problemas de valor de contorno em mecânica dos sólidos são expressos na forma de uma equação diferencial definida em todo o domínio ( $\Omega$ ) do sólido, cuja solução ( $u$ ) deve satisfazer certas condições sobre o contorno ( $\Gamma$ ) desse domínio. A equação diferencial e as restrições de contorno podem ser expressas em forma implícita, respectivamente, por:

$$\boxed{A(u) = 0} \quad (3.1)$$

$$\boxed{B(u) = 0} \quad (3.2)$$

Nas relações anteriores,  $B$  e  $A$  são operadores diferenciais que apresentam redação particular para cada problema considerado. A forma anterior é dita forte por exigir que suas soluções sejam verificadas em todos os pontos do domínio e contorno, respectivamente.

Uma maneira de relaxar essa exigência é exprimir o mesmo problema na forma de integrais ponderadas:

$$\boxed{\int v^T * A(u) d\Omega \equiv 0} \quad (3.3)$$

$$\boxed{\int_{\Gamma} \bar{v}^T * B(u) d\Gamma \equiv 0} \quad (3.4)$$

em que  $v$  e  $\bar{v}$  são funções arbitrárias de ponderação com regularidade suficiente para que as integrais façam sentido.

É possível mostrar que, se (3.3) e (3.4) são satisfeitas para todo  $v$  e  $\bar{v}$ , então as relações (3.1) e (3.2) devem ser satisfeitas em todos os pontos do domínio e do contorno, ZIENKIEWICZ (1986).

Imaginando-se uma aproximação  $\hat{u}$  para a solução, substituída nas relações (3.3) e (3.4), segue que  $A(\hat{u})$  e  $B(\hat{u})$  representam, respectivamente, o resíduo, ou o erro, na verificação da equação diferencial e das condições de contorno. Dessa forma, (3.3) e (3.4) passam a ser integrais ponderadas de tais resíduos, constituindo a chamada formulação em *Resíduos Ponderados*.

Ambas as formas anteriores podem ser resumidas numa única relação:

$$\boxed{\int_{\Omega} v^T * A(\hat{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{v}^T * B(\hat{u}) d\Gamma = 0} \quad (3.5)$$

que, uma vez satisfeita para todo  $v$  e  $\bar{v}$ , é também equivalente à satisfação das equações diferenciais (3.1) e suas condições de contorno (3.2).

Na discussão anterior, foi implicitamente suposto que integrais como (3.5) são possíveis de serem calculadas. Conforme ZIENKIEWICZ (1986), inicialmente é usual limitar a escolha de  $v$  e  $\bar{v}$  a uma mesma função de valor finito. As restrições sobre a função  $\hat{u}$  dependem das ordens de derivação empregadas nos operadores  $A(\hat{u})$  ou  $B(\hat{u})$ . Se a derivada de maior ordem ( $m$ ) ocorrer em qualquer termo de  $A(\hat{u})$  ou  $B(\hat{u})$ , então a função  $\hat{u}$  tem que ser tal que sua derivada de ordem  $m-1$  seja contínua.

Em muitas ocasiões, é possível realizar uma integração por partes sobre (3.5) e obter a forma:

$$\boxed{\int_{\Omega} C(v)^T * D(\hat{u}) d\Omega + \int_{\Gamma} G(v)^T * M(\hat{u}) d\Gamma = 0} \quad (3.6)$$

Na eq. (3.6), os operadores  $D$  e  $M$  contêm ordens de derivadas mais baixas do que aquelas dos operadores  $A$  e  $B$  na eq. (3.5). Nesse caso, uma ordem de continuidade mais baixa pode ser assumida para a função  $\hat{u}$ , pagando-se um preço de exigência de continuidade mais alta para  $v$ . Por isso, a forma (3.6) é dita fraca, sendo mais conveniente do que a do problema

original, particularmente se, em cada integral, ordens de derivada iguais aparecerem nos operadores diferenciais.

O *Método dos Elementos Finitos* propõe a construção da aproximação para a solução na seguinte forma:

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \varphi_i \mathbf{a}_i = \underline{\underline{\boldsymbol{\varphi}}}^T \underline{\underline{\mathbf{a}}} \quad (3.7)$$

em que:

$n$  é o número de pontos, ou nós, adotados que compõem discretização do domínio  $\Omega$ ;

$\varphi_i$  são funções de forma associadas aos nós  $i$ , expressas em termos de variáveis independentes (tais como coordenadas  $x, y$ , etc.); e

$\mathbf{a}_i$  são parâmetros que apresentam significados associados aos valores da função incógnita, ou de suas derivadas, nos nós.

No chamado *Procedimento de Galerkin*, empregam-se para a aproximação de  $v$  as mesmas funções de forma da aproximação para  $u$ , ou

$$\text{seja, } v = \sum_{i=1}^n \varphi_i \mathbf{a}_i .$$

Substituindo-se a aproximação de  $v$  na eq. (3.6) e impondo-se que a mesma seja válida para qualquer combinação de  $\mathbf{a}_i$  (não todos nulos), obtém-se um conjunto de  $n$  relações integrais:

$$\int_{\Omega} C(\varphi_j) * D(u) d\Omega + \int_{\Gamma} G(\varphi_j) * M(u) d\Gamma = 0 \quad j = 1, n \quad (3.8)$$

Se as equações diferenciais são lineares, ao substituir a aproximação para  $u$ , o sistema de equações (3.8) produzirá um conjunto de equações lineares que pode ser representado na forma:

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{a}}} + \underline{\underline{\mathbf{F}}} = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad (3.9)$$

Por outro lado, como se apresenta, por exemplo, em ZIENKIEWICZ (1986), no sentido de propiciar maior sistematização à geração da aproximação, as funções de forma são definidas localmente sobre elementos (ou subdomínios, por sua vez associados ao conjunto de nós da discretização), de modo que o sistema discreto (3.9) pode ser montado a partir das contribuições de cada elemento.

Simbolicamente, essa contribuição pode ser representada por:

$$\boxed{K_{ij} = \sum_{e=1}^N K_{ij}^e; \quad F_i = \sum_{e=1}^N F_i^e;} \quad (3.10)$$

em que N é o número de elementos.

### 3.1. Método dos Elementos Finitos aplicado ao problema das cascas cilíndricas

De início, a equação diferencial da casca cilíndrica (eq. (2.1)) é reescrita de modo a permitir levar em conta, convenientemente, a possibilidade de variação da espessura. Nesse sentido, considere-se a espessura do reservatório dada por:

$$\boxed{h(y) = h_0 * f(y)} \quad (3.11)$$

em que  $h_0$  é a espessura na base do reservatório.

Para o caso de variação linear da espessura ao longo da altura do reservatório, pode-se definir  $f(y)$  como:

$$\boxed{f(y) = 1 - \left[ \frac{(1-\gamma)}{H} \right] * y} \quad (3.12)$$

em que  $\gamma$  é um coeficiente adimensional definido pela razão entre a espessura no topo e a espessura na base do reservatório.

Deste modo, a eq. (2.1) passa a apresentar a seguinte forma:

$$\frac{d^2}{dy^2} \left( f(y)^3 * \frac{d^2 w}{dy^2}(y) \right) + 4 * \beta_0^4 * f(y) * w(y) = \frac{p(y)}{D_0} \quad (3.13)$$

em que:

$$D_0 = \frac{E * h_0^3}{12 * (1 - \nu^2)} \quad (3.14)$$

$$\beta_0 = \sqrt[4]{\frac{E * h_0}{4 * r^2 * D_0}} \quad (3.15)$$

Considerando-se, então, uma solução aproximada  $\tilde{w}(y)$ , obtém-se, inicialmente, a seguinte forma em resíduos ponderados:

$$\int_0^H v(y) * \left\{ \frac{d^2}{dy^2} \left( f(y)^3 * \frac{d^2 \tilde{w}}{dy^2}(y) \right) + 4 * \beta_0^4 * f(y) * \tilde{w}(y) - \frac{p(y)}{D_0} \right\} * dy = 0 \quad (3.16)$$

em que:

$v(y)$  é uma função de ponderação; e

$\tilde{w}(y)$  deve apresentar, pelo menos, continuidade até a ordem 3.

A seguir é feita a discretização do domínio (a geratriz do reservatório) em um conjunto de nós e elementos. Neste trabalho, cada elemento contém 2 nós nas suas extremidades (fig. 3.1). Na fig. 3.1, os graus de liberdade associados a cada nó são indicados sobre um elemento genérico, bem como as outras variáveis utilizadas na formulação.

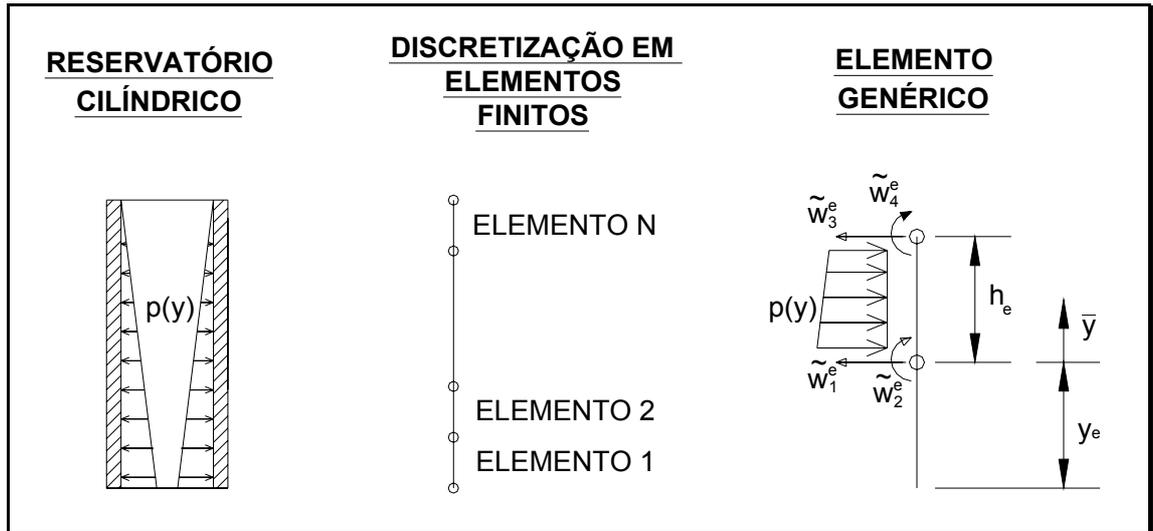


Figura 3.1: Discretização de um reservatório cilíndrico considerando-se elementos lineares na direção de sua geratriz.

Dada a divisão do domínio, a integral que aparece na eq. (3.16) passa a ser composta pela soma das integrais sobre os elementos. Pode-se então representar a forma fraca para um elemento genérico.

Derivando-se duas vezes por partes a primeira parcela da eq. (3.16), obtém-se, para um elemento genérico:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \frac{d}{dy} \left( f(y)^3 * \frac{d^2 \tilde{w}}{dy^2}(y) \right) * v(y) \right]_{y_e}^{y_{e+1}} - f(y)^3 * \left[ \frac{d^2 \tilde{w}}{dy^2}(y) * \frac{dv}{dy}(y) \right]_{y_e}^{y_{e+1}} + \\
 & + \int_{y_e}^{y_{e+1}} f(y)^3 * \frac{d^2 \tilde{w}}{dy^2}(y) * \frac{d^2 v}{dy^2}(y) * dy + \int_{y_e}^{y_{e+1}} 4 * \beta_0^4 * f(y) * \tilde{w}(y) * v(y) * dy = \quad (3.17) \\
 & = \int_{y_e}^{y_{e+1}} \frac{p(y)}{D_0} * v(y) * dy
 \end{aligned}$$

em que:

$y_e$  e  $y_{e+1}$  são, respectivamente, as coordenadas dos nós inicial e final do elemento “e”.

Note-se que, na eq. (3.17), a diferenciação sobre  $v(y)$  e  $\tilde{w}(y)$  é da mesma ordem. De modo a garantir a existência da integral com valor finito,

dentro dos limites do elemento, adota-se uma função aproximadora polinomial de grau 3:

$$\tilde{w}^e(\bar{y}) = c_1 + c_2 * \bar{y} + c_3 * \bar{y}^2 + c_4 * \bar{y}^3 \quad (3.18)$$

onde a coordenada local  $\bar{y}$  tem origem numa das extremidades do elemento.

Podem-se expressar as constantes  $c_1$  a  $c_4$  em termos dos graus de liberdade primários (deslocamento e giro nos nós de coordenadas locais 0 e  $h_e$ ), definidos por:

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1^e = \tilde{w}^e(0) & \quad \tilde{w}_2^e = \frac{d\tilde{w}^e}{d\bar{y}}(0) \\ \tilde{w}_3^e = \tilde{w}^e(h_e) & \quad \tilde{w}_4^e = \frac{d\tilde{w}^e}{d\bar{y}}(h_e) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Nessas condições, a aproximação passa a ser representada por:

$$\tilde{w}^e(\bar{y}) = \sum_{j=1}^4 \tilde{w}_j^e * \phi_j^e(\bar{y}) \quad (3.20)$$

As quatro funções de forma do elemento, indicadas em (3.20), são dadas por:

$$\begin{aligned} \phi_1^e(\bar{y}) &= 1 - 3 * \left(\frac{\bar{y}}{h_e}\right)^2 + 2 * \left(\frac{\bar{y}}{h_e}\right)^3 \\ \phi_2^e(\bar{y}) &= \bar{y} * \left(1 - \frac{\bar{y}}{h_e}\right)^2 \\ \phi_3^e(\bar{y}) &= 3 * \left(\frac{\bar{y}}{h_e}\right)^2 - 2 * \left(\frac{\bar{y}}{h_e}\right)^3 \\ \phi_4^e(\bar{y}) &= \bar{y} * \left[\left(\frac{\bar{y}}{h_e}\right)^2 - \frac{\bar{y}}{h_e}\right] \end{aligned} \quad (3.21)$$

As funções de forma (3.21) constituem uma base aproximativa hermitiana cúbica para o MEF. Outra base de interesse é a linear, indicada abaixo:

$$\boxed{\begin{aligned} N_1^e(\bar{y}) &= 1 - \frac{\bar{y}}{h_e} \\ N_2^e(\bar{y}) &= \frac{\bar{y}}{h_e} \end{aligned}} \quad (3.22)$$

Tal base será usada apenas para a obtenção da solução de membrana do reservatório que, no caso de espessura constante da parede, é representada por uma função deslocamento linear.

A substituição das aproximações para  $v(y)$  e  $\tilde{w}(y)$  na eq. (3.17) leva a um conjunto de equações para o elemento finito genérico, dado por:

$$\boxed{\sum_{j=1}^4 [K_{i,j}^e * \tilde{w}_j^e] - F_i^e = 0 \quad (i=1, \dots, 4)} \quad (3.23)$$

em que:

$$\boxed{K_{i,j}^e = \int_0^{h_e} f(y_e + \bar{y})^3 * \frac{d^2 \phi_i^e}{d\bar{y}^2}(\bar{y}) * \frac{d^2 \phi_j^e}{d\bar{y}^2}(\bar{y}) + 4 * \beta_0^4 * f(y_e + \bar{y}) * \phi_i^e(\bar{y}) * \phi_j^e(\bar{y}) * d\bar{y}} \quad (3.24)$$

$$\boxed{F_i^e = \int_0^{h_e} \frac{p(y_e + \bar{y})}{D_0} * \phi_i^e(\bar{y}) * d\bar{y} + Q_i^e} \quad (3.25)$$

Os termos (3.24) compõem a chamada matriz de rigidez do elemento que, neste caso, é simétrica; já na eq. (3.25) agrupam-se, no chamado vetor de forças nodais do elemento “e”, as forças nodais correspondentes às forças diretamente aplicadas e às forças nodais prescritas nas extremidades do elemento.

Considerando-se então todo o conjunto de elementos compoendo a estrutura do reservatório, as contribuições das matrizes de rigidez e dos vetores de forças nodais dos elementos geram o seguinte sistema global:

$$\underline{\underline{K}} \tilde{\underline{W}} = \underline{\underline{F}} \quad (3.26)$$

em que:

$\underline{\underline{K}}$  é a matriz de rigidez global;

$\underline{\underline{F}}$  é o vetor de forças nodais global; e

$\tilde{\underline{W}}$  é o vetor que contém as incógnitas nodais globais do problema.

A geração em uma forma matricial do sistema global resolvente a partir das contribuições dos elementos está indicada na fig. 3.2, em que N é o número de elementos.

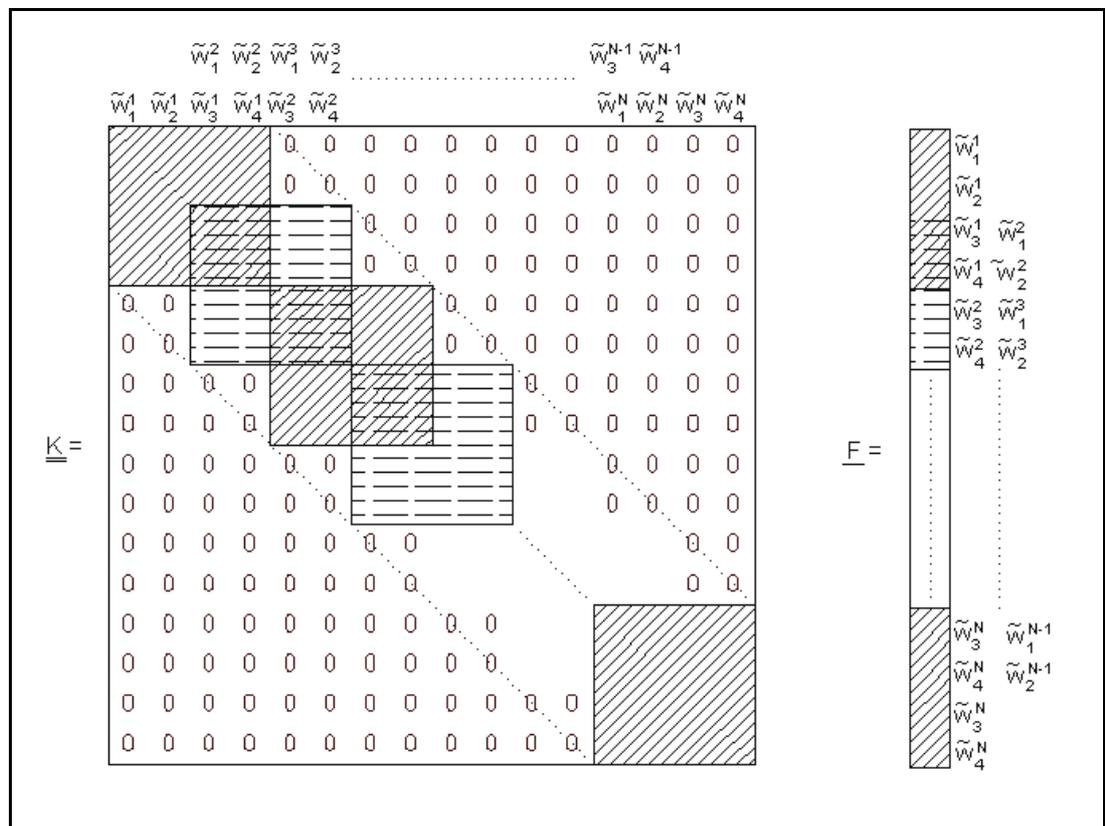


Figura 3.2: Aspecto genérico da matriz de rigidez global ( $\underline{\underline{K}}$ ) e do vetor de forças nodais ( $\underline{\underline{F}}$ ) obtidos na formulação do MEF.

Na matriz  $\underline{\underline{K}}$  representada na fig. 3.2, cada quadrado preenchido representa a matriz de rigidez de um elemento, cujos valores são calculados pela eq. (3.24). No vetor  $\underline{F}$ , cada retângulo preenchido representa o vetor de forças nodais de um elemento, com seus valores calculados pela eq. (3.25).

A estrutura da matriz de rigidez global ( $\underline{\underline{K}}$ ), representada na fig. 3.2, tem uma variação em banda, porque os nós do problema estão, por hipótese, numerados seqüencialmente no sentido crescente de  $y$ , e é simétrica. A sobreposição de duas linhas e duas colunas entre matrizes de rigidez locais acontece porque há dois parâmetros comuns (deslocamento e giro) por nó entre elementos consecutivos, o que, portanto, constitui uma característica específica do MEF para aproximação de grau 3.

Observa-se que, na ausência de forças nodais concentradas, os termos  $Q_i^e$  (ver eq. (3.25)) anulam-se na sobreposição. As condições de contorno essenciais devem ser impostas diretamente no sistema (3.26). Para o conjunto de problemas analisados, considera-se que o contorno superior é livre e o inferior pode ser engastado (deslocamento e giro no nó da base nulos) ou articulado fixo (deslocamento no nó da base nulo).

Uma vez encontrado o vetor incógnito, é possível novamente considerar o arranjo de elementos e encontrar os esforços ao longo de cada elemento finito, por meio das seguintes equações:

$$\tilde{N}_0^e(\bar{y}) = -\frac{E * h(y_e + \bar{y})}{r} * \tilde{w}^e(\bar{y}) \quad (3.27)$$

$$\tilde{M}_y^e(\bar{y}) = -D_0 * f(y_e + \bar{y})^3 * \left( \sum_{j=1}^4 \tilde{w}_j^e * \frac{d^2 \phi_j^e}{dy^2}(\bar{y}) \right) \quad (3.28)$$

$$\tilde{Q}_y^e(\bar{y}) = \frac{d\tilde{M}_y^e}{dy}(\bar{y}) \quad (3.29)$$

$$\tilde{M}_0^e(\bar{y}) = v * \tilde{M}_y^e(\bar{y}) \quad (3.30)$$

### 3.2. Método dos Elementos Finitos aplicado a cascas esféricas

Conforme já apresentado, o problema da casca esférica sujeita a peso próprio apresenta um sistema de equações diferenciais a ser resolvido (eqs. (2.25) e (2.26)). A maneira mais adequada de resolução numérica consiste na aplicação do MEF diretamente ao sistema de equações diferenciais descrito na forma de integrais ponderadas. Tal procedimento, entretanto, vai além dos limites propostos para esta dissertação. Não obstante, a proposta de formulação está detalhada no apêndice A.

Uma alternativa escolhida para limitar a análise é a aplicação do MEF apenas ao problema dos efeitos de uma força horizontal  $H_C$  e momento externo  $M_C$  distribuídos ao longo da borda da casca esférica. Deste modo, podem ser utilizados procedimentos semelhantes aos feitos para casca cilíndrica, aplicados agora à equação diferencial (2.35), por conveniência repetida abaixo:

$$\boxed{\frac{d^4 Q_\phi}{d\omega^4}(\omega) + 4 * \lambda^4 * Q_\phi(\omega) = 0} \quad (3.31)$$

em que  $\lambda$  é dado na eq. (2.36).

Considerando uma solução aproximada  $\tilde{Q}_\phi(\omega)$ , a forma em resíduos ponderados de (3.31) fica:

$$\boxed{\int_0^{\omega_C} v(\omega) * \left\{ \frac{d^4 \tilde{Q}_\phi}{d\omega^4}(\omega) + 4 * \lambda^4 * \tilde{Q}_\phi(\omega) \right\} * d\omega = 0} \quad (3.32)$$

em que:

$v(\omega)$  é uma função de ponderação; e

$\tilde{Q}_\phi(\omega)$  deve apresentar continuidade mínima até a ordem 3.

A divisão do domínio em um conjunto de elementos é feita em função do ângulo de abertura da casca. Analogamente ao caso do reservatório

cilíndrico, cada elemento contém dois nós de extremidade (fig. 3.3). Na fig. 3.3, os graus de liberdade associados a cada nó são indicados sobre um elemento genérico, bem como outras variáveis usadas na formulação.

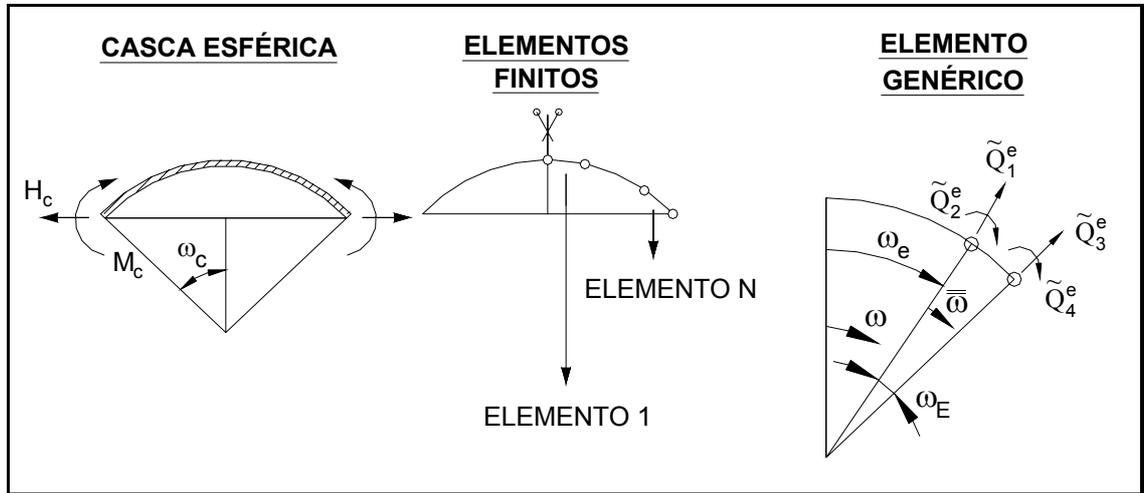


Figura 3.3: Discretização de uma casca esférica para aplicação do MEF.

Derivando-se duas vezes por partes a primeira parcela da eq. (3.32), obtém-se a forma fraca de (3.31). Considerando-se a subdivisão em elementos para um elemento genérico, tal forma resulta:

$$\left[ \frac{d^3 \tilde{Q}_\phi}{d\omega^3}(\omega) * v(\omega) \right]_{\omega_e}^{\omega_{e+1}} - \left[ \frac{d^2 \tilde{Q}_\phi}{d\omega^2}(\omega) * \frac{dv}{d\omega}(\omega) \right]_{\omega_e}^{\omega_{e+1}} + \int_{\omega_e}^{\omega_{e+1}} \frac{d^2 \tilde{Q}_\phi}{d\omega^2}(\omega) * \frac{d^2 v}{d\omega^2}(\omega) * d\omega + \int_{\omega_e}^{\omega_{e+1}} 4 * \lambda^4 * \tilde{Q}_\phi(\omega) * v(\omega) * d\omega = 0 \quad (3.33)$$

em que:

$\omega_e$  e  $\omega_{e+1}$  são as coordenadas angulares do nó inicial e final do elemento “e”, respectivamente.

Adotando-se uma função aproximadora polinomial de grau máximo 3, como feito para tubos, em coordenadas locais do elemento, os parâmetros nodais assumem os seguintes significados:

$$\begin{aligned}
 \tilde{Q}_1^e &= \tilde{Q}_\phi^e(0) & \tilde{Q}_2^e &= \frac{d\tilde{Q}_\phi^e}{d\omega}(0) \\
 \tilde{Q}_3^e &= \tilde{Q}_\phi^e(\omega_E) & \tilde{Q}_4^e &= \frac{d\tilde{Q}_\phi^e}{d\omega}(\omega_E)
 \end{aligned}
 \tag{3.34}$$

Resulta, para o elemento finito genérico:

$$\tilde{Q}_\phi^e(\omega) = \sum_{j=1}^4 \tilde{Q}_j^e * \bar{\phi}_j^e(\omega)
 \tag{3.35}$$

sendo as funções de forma dadas por:

$$\begin{aligned}
 \bar{\phi}_1^e(\omega) &= 1 - 3 * \left(\frac{\omega}{\omega_E}\right)^2 + 2 * \left(\frac{\omega}{\omega_E}\right)^3 \\
 \bar{\phi}_2^e(\omega) &= \omega * \left(1 - \frac{\omega}{\omega_E}\right)^2 \\
 \bar{\phi}_3^e(\omega) &= 3 * \left(\frac{\omega}{\omega_E}\right)^2 - 2 * \left(\frac{\omega}{\omega_E}\right)^3 \\
 \bar{\phi}_4^e(\omega) &= \omega * \left[\left(\frac{\omega}{\omega_E}\right)^2 - \frac{\omega}{\omega_E}\right]
 \end{aligned}
 \tag{3.36}$$

em que:

$\omega_E$  é o ângulo de abertura do elemento “E”; e

$\omega$  é a coordenada angular local, indicada na fig. 3.3.

Substituindo-se (3.35) em (3.33) e considerando-se para  $v(\omega)$  uma aproximação dada pelas mesmas funções de forma de  $\tilde{Q}_\phi(\omega)$ , resulta:

$$\sum_{j=1}^4 [K_{i,j}^e * \tilde{Q}_j^e] = 0
 \tag{3.37}$$

em que:

$$\mathbf{K}_{i,j}^e = \int_0^{\omega E} \frac{d^2 \bar{\phi}_i^e(\bar{\omega})}{d\bar{\omega}^2} * \frac{d^2 \bar{\phi}_j^e(\bar{\omega})}{d\bar{\omega}^2} + 4 * \lambda^4 * \bar{\phi}_i^e(\bar{\omega}) * \bar{\phi}_j^e(\bar{\omega}) * d\bar{\omega} \quad (3.38)$$

As contribuições das matrizes de rigidez e dos vetores de forças nodais dos elementos geram o seguinte sistema global para casca esférica:

$$\mathbf{K} \tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{0} \quad (3.39)$$

onde  $\tilde{\mathbf{Q}}$  é o vetor que contém as incógnitas nodais do problema.

A geração do sistema global resolvente em forma matricial segue sistemática idêntica àquela apresentada para casca cilíndrica indicada na fig. 3.2.

As condições de contorno devem ser impostas diretamente ao sistema (3.39) e correspondem à força  $H_C$  e momento  $M_C$  aplicados na borda inferior da casca. Nesse sentido é preciso observar que  $M_\phi$  tem por correspondência a terceira derivada de  $Q_\phi$ . No problema casca esférica, considera-se que o contorno superior, por estar distante da borda inferior, apresenta esforços cortante e momento nulos, como feito para a obtenção da solução analítica, no item 2.2.

Depois de encontrado o vetor incógnito, é possível voltar ao arranjo de elementos e encontrar, além do esforço cortante  $\tilde{Q}_\phi$  dado na eq. (3.35), as outras variáveis de interesse por meio das seguintes equações:

$$\tilde{\xi}_5^e(\bar{\omega}) = \frac{R * \text{sen}(\omega_e + \bar{\omega})}{E_C * t} * \left( - \frac{d\tilde{Q}_\phi^e(\bar{\omega})}{d\bar{\omega}} + \nu_C * \tilde{Q}_\phi^e(\bar{\omega}) * \cot g(\omega_e + \bar{\omega}) \right) \quad (3.40)$$

$$\tilde{\Phi}^e(\bar{\omega}) = \frac{1}{E_C * t} * \frac{d^2 \tilde{Q}_\phi^e}{d\bar{\omega}^2}(\bar{\omega}) \quad (3.41)$$

$$\tilde{N}_\phi^e(\bar{\omega}) = -\tilde{Q}_\phi^e(\bar{\omega}) * \cot g(\omega_e + \bar{\omega}) \quad (3.42)$$

$$\tilde{N}_\theta^e(\bar{\omega}) = -\frac{d\tilde{Q}_\phi^e}{d\bar{\omega}}(\bar{\omega}) \quad (3.43)$$

$$\tilde{M}_\phi^e(\bar{\omega}) = -\frac{D_C}{R * E_C * t} * \frac{d^3 \tilde{Q}_\phi^e}{d\bar{\omega}^3}(\bar{\omega}) \quad (3.44)$$

$$\tilde{M}_\theta^e(\bar{\omega}) = v_C * \tilde{M}_\phi^e(\bar{\omega}) \quad (3.45)$$

em que:

$\tilde{\xi}^e$  é a função aproximada para deslocamento horizontal no elemento finito “e” (fig. 2.6);

$\tilde{\Phi}^e$  é a função aproximada para giro no elemento finito “e” (fig. 2.6);

$\tilde{N}_\phi^e$  é a função aproximada para esforço normal  $N_\phi$  no elemento finito “e” (fig. 2.5);

$\tilde{N}_\theta^e$  é a função aproximada para esforço tangencial  $N_\theta$  no elemento finito “e” (fig. 2.5);

$\tilde{M}_\phi^e$  é a função aproximada para momento  $M_\phi$  no elemento finito “e” (fig. 2.5); e

$\tilde{M}_\theta^e$  é a função aproximada para momento  $M_\theta$  no elemento finito “e” (fig. 2.5).

## 4. ENRIQUECIMENTO DAS APROXIMAÇÕES DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O enriquecimento das aproximações tem por objetivo obter respostas melhores sem a necessidade do emprego de discretizações muito refinadas. As alternativas de enriquecimento adotadas neste trabalho são o procedimento proposto pelo *Método dos Elementos Finitos Generalizados* e a ampliação da base de funções mediante adição direta de funções especiais. Tais procedimentos serão mais bem explicados a seguir.

### **4.1. Método dos Elementos Finitos Generalizados**

Conforme a definição apresentada em TORRES (2003), o *Método dos Elementos Finitos Generalizados* (MEFG) é um procedimento que incorpora na estrutura básica do MEF técnicas e recursos dos chamados *Métodos sem Malha*, com o propósito de melhorar a aproximação no domínio do problema. DUARTE, BABUŠKA e ODEN (2000) citam que o MEFG tem como principal característica o uso de uma “partição da unidade” (PU), que, entre outras propriedades, é um conjunto de funções cujo somatório dos valores em cada ponto do domínio resulta na unidade<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Num ponto  $x$ , um conjunto de funções  $g_i(x)$ , associadas a subdomínios  $s_i$  que o contém, compõem uma partição da unidade (PU), se forem atendidas as seguintes condições:

1)  $g_i(x) \in C_0^\infty(s_i)$ ;

2)  $\sum_{i=1}^q g_i(x) = 1$ ;

3)  $g_i(x) \geq 0$  em  $s_i$ ; e

4) o conjunto  $g_i(x)$  é associado a um número finito de suportes  $s_i$ .

Para fins práticos, a condição 1 pode ser relaxada no sentido de que funções de suporte compacto até uma certa ordem de derivada podem, ainda assim, ser consideradas uma PU. A condição 2 é a mais importante, em termos de aplicação, e somente ela tem sido exigida para a caracterização de uma PU.

Uma diferença entre os *Métodos sem Malha* e o MEFG é justamente a escolha da partição da unidade. No MEFG, a PU é fornecida pelas funções de forma do MEF convencional e, nos métodos sem malha, a PU é fornecida, por exemplo, pelo *Método dos Mínimos Quadrados Móveis*.

Segundo DUARTE, BABUŠKA e ODEN (2000), o MEFG foi proposto independentemente por BABUŠKA, CALOZ e OSBORN (1994), DUARTE (1996), DUARTE e ODEN (1995, 1996a, 1996b), MELENK e BABUŠKA (1996), ODEN, DUARTE e ZIENKIEWICZ (1996) e BABUŠKA e MELENK (1997).

No MEF clássico, como relatado em MELENK e BABUŠKA (1996), embora seja possível construir espaços de funções não-polinomiais que fornecem boas propriedades de aproximação local, tal procedimento não garante a continuidade das funções entre elementos. Já o MEFG, oferece maneiras para construir espaços de aproximação conformes utilizando funções não-polinomiais, o que é garantido pela PU.

Uma visualização da explicação acima pode ser encontrada em BARROS (2002), reproduzida na fig. 4.1.

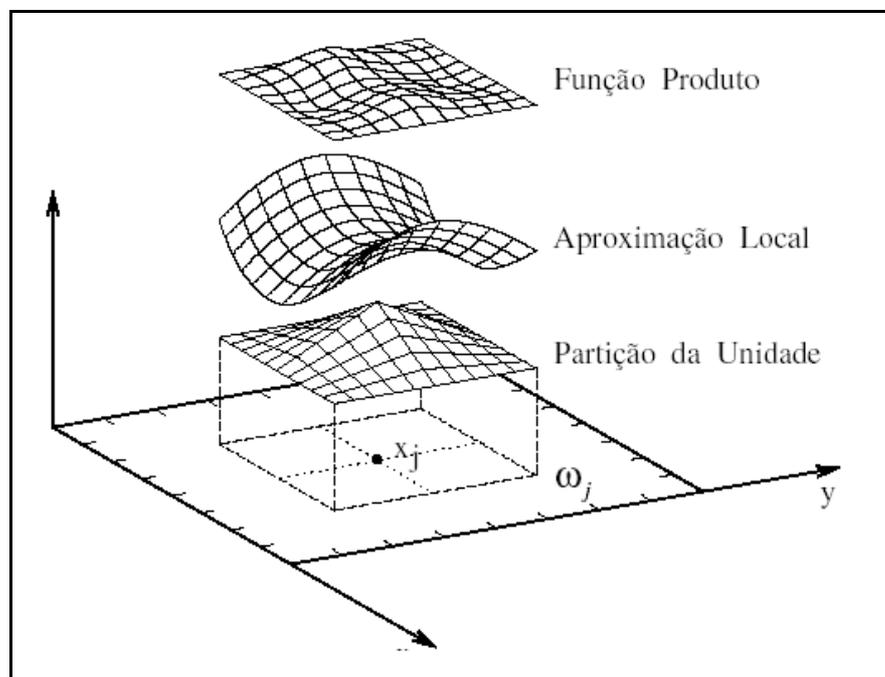


Figura 4.1: Esquema de enriquecimento de uma base polinomial em  $\mathbb{R}^2$ . Fonte: BARROS (2002).

Na fig. 4.1, encontra-se representada a PU, formada pelo conjunto de quatro funções de forma dos quatro elementos finitos que têm por vértice comum o nó  $x_j$ . A PU indicada é geradora de aproximações com continuidade  $C^0$ . Na mesma figura, representa-se uma função especial arbitrária (parte local de uma função enriquecedora global) e o resultado do produto entre a função e a PU. Esse produto no interior de cada elemento apresenta as características aproximadoras da função local, ao mesmo tempo em que herda o suporte compacto da PU. Consegue-se, além disso, que a aproximação global, obtida em um dado elemento pela combinação das funções produto relativas a cada nó, seja construída sem penalizar a continuidade (no caso, do tipo  $C^0$ ) entre os elementos, que, portanto, se mantêm conformes.

No MEFG, o número de funções de forma é aumentado, sendo composto pelas funções de forma originais do MEF mais uma combinação delas com outras funções, chamadas “enriquecedoras”. A diferença básica entre o MEF hierárquico e o MEFG está relacionada à forma de enriquecimento. Por exemplo, se somente as funções da base aproximativa que constituem uma PU são enriquecidas, o método resultante é, então, MEFG. Porém, se forem enriquecidas também outras funções da base aproximativa, que não constituam todas uma PU, o enriquecimento não é, a rigor, um MEFG, e sim um MEF hierárquico.

Sobre a escolha das funções enriquecedoras, DUARTE, BABUŠKA e ODEN (2000) explicam que a função enriquecedora deve, por hipótese, representar bem a solução sobre o domínio de cada elemento finito.

Como já mencionado, haverá, portanto, uma família ampliada de funções de forma, representada matematicamente como:

$$\mathfrak{F}_n^p = \left\{ \varphi_j \cup \varphi_j * FE_j^\alpha \right\} \quad j = 1, n; \quad \alpha = 1, l(j) \quad (4.1)$$

Na eq. (4.1),  $p$  é o grau polinomial da família de funções de forma resultante,  $\varphi_j$  são as funções de forma (PU) referentes aos  $n$  nós de índice  $j$ ,  $FE_j^\alpha$  é a função de índice  $\alpha$  que multiplica (ou enriquece) a PU atrelada a cada

nó de índice  $j$ . Finalmente,  $l(j)$  é o contador para o número de funções adicionadas a cada nó de índice  $j$ .

Deste modo, a nova função aproximadora de um campo  $u$ , num domínio governado pela variável  $x$ , tem a seguinte forma:

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) * \hat{u}_j + \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) \sum_{\alpha=1}^{l(j)} FE(x)_j^\alpha * b_j^\alpha \quad (4.2)$$

em que  $b_j^\alpha$  são parâmetros nodais incógnitos acrescentados pelo enriquecimento e que aparecem no vetor solução do sistema linear do problema. Tais parâmetros podem não ter significado físico.

Acrescenta-se que o enriquecimento pode ser seletivo, isto é, feito apenas em uma região específica do domínio, sendo a parte restante aproximada com a estrutura convencional do MEF.

Como exemplo do procedimento de enriquecimento, considere-se uma base aproximativa do MEF dada por 4 funções de forma,  $\varphi_1^e$ ,  $\varphi_2^e$ ,  $\varphi_3^e$  e  $\varphi_4^e$ , e seja FE uma certa função enriquecedora. Admita-se que, dessa base, apenas  $\varphi_1^e$  e  $\varphi_3^e$  formem uma partição da unidade. De acordo com o MEFG, para a região enriquecida, haverá 6 funções de forma:  $\varphi_1^e$ ,  $\varphi_2^e$ ,  $\varphi_3^e$ ,  $\varphi_4^e$ ,  $\varphi_1^e * FE$  e  $\varphi_3^e * FE$ . Na fig. 4.2 está representado o sistema correspondente ao exemplo, para o caso de 2 elementos, com três nós enriquecidos, indicando-se hachuradas as linhas e colunas adicionadas pelo enriquecimento.

Nota-se que, devido ao maior número de funções de forma, no MEFG, a integração da matriz de rigidez é consideravelmente mais trabalhosa do que no MEF, fato este confirmado por pesquisas citadas em DUARTE, BABUŠKA e ODEN (2000).

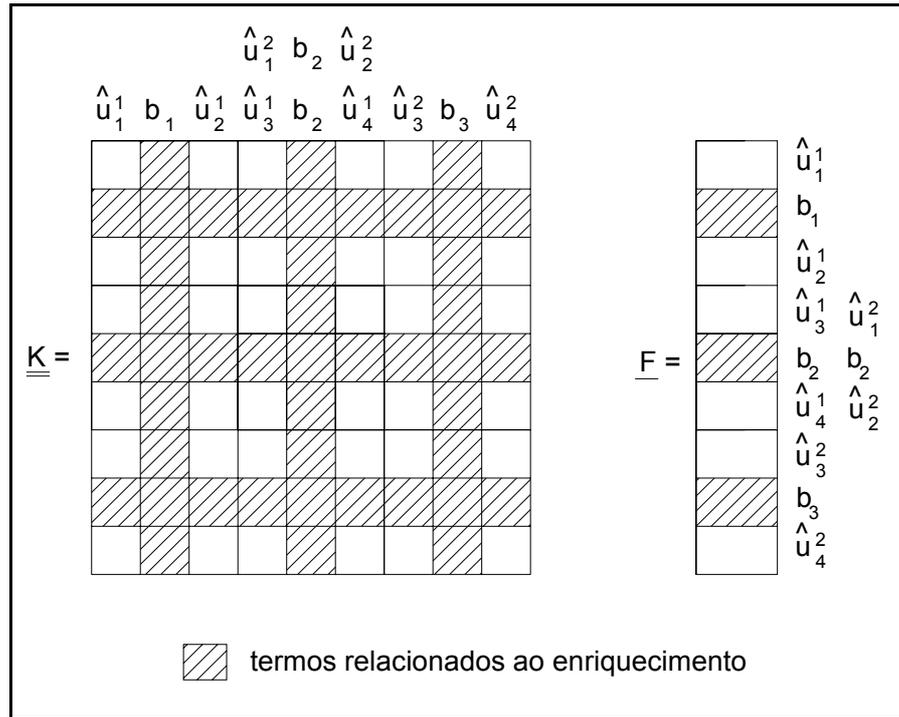


Figura 4.2: Esquema de enriquecimento pelo MEFG.

## 4.2. Outras possibilidades de enriquecimento

Além do MEFG, outras possibilidades de enriquecimento serão exploradas neste trabalho. Para facilitar as explicações, as outras alternativas de enriquecimento serão simbolizadas por: MEFH e MEFBA, a serem detalhadas a seguir.

### MEFH

O procedimento chamado aqui de MEFH é em essência um método hierárquico pois pode conter funções da base aproximativa que não formam PU multiplicadas por funções de enriquecimento.

Considerando-se a mesma base aproximativa do MEF dada no item 4.1 e uma certa função enriquecedora FE, de acordo com o MEFH, o elemento finito apresentará 8 funções de forma representadas por  $\varphi_1^e$ ,  $\varphi_2^e$ ,  $\varphi_3^e$  e  $\varphi_4^e$ ,  $\varphi_1^e * FE$ ,  $\varphi_2^e * FE$ ,  $\varphi_3^e * FE$ ,  $\varphi_4^e * FE$ .

Na fig. 4.3 está indicado um sistema genérico montado de acordo com o MEFH, para 2 elementos, indicando-se hachuradas as linhas e colunas adicionadas pelo enriquecimento.

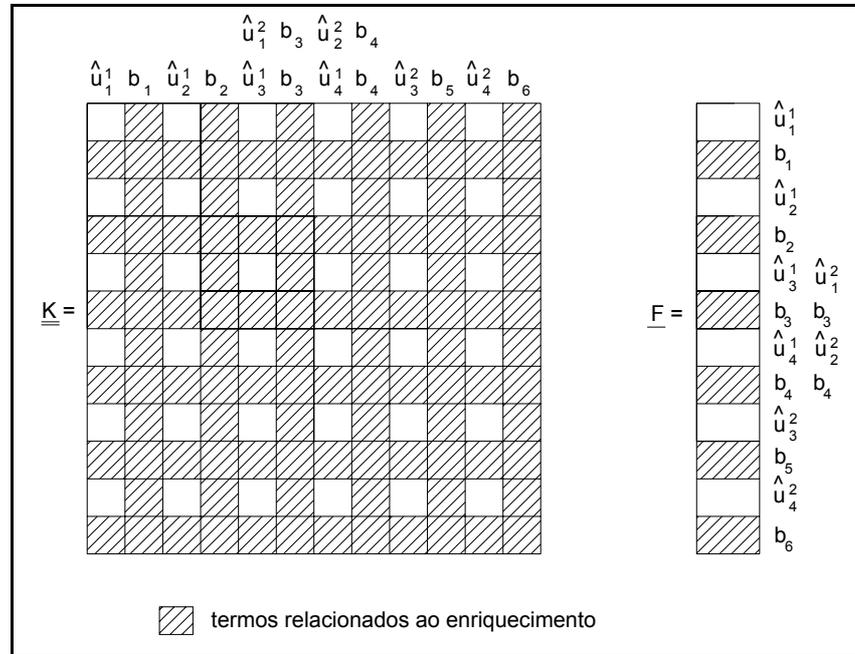


Figura 4.3: Esquema de enriquecimento MEFH.

### MEFBA

O procedimento chamado aqui de MEFBA tem características diferentes do MEFH e do MEFH. Neste caso, a base inicial é ampliada mediante adição de funções de forma especiais de interesse. Obviamente, a cada função adotada, há um grau de liberdade primário adicional introduzido.

Neste caso, o sistema global terá um aumento em sua ordem igual ao número de funções enriquecedoras. Encontra-se na fig. 4.4 uma visualização de um sistema genérico do MEFBA com 2 elementos e 1 função enriquecedora adicionada à mesma base polinomial descrita no item 4.1.

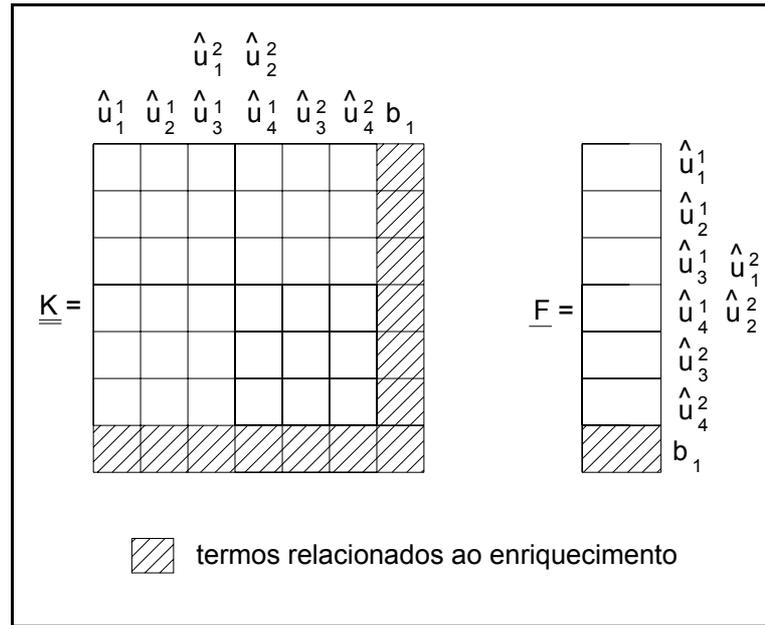


Figura 4.4: Esquema de enriquecimento MEFBA.

A função aproximadora de um campo  $u$ , num domínio governado pela variável  $x$  global, no caso do MEFBA, tem a seguinte forma:

$$\hat{u}(x) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(x) * \hat{u}_j + \sum_{\alpha=1}^{l(j)} (FE(x))_{\alpha} * b_{\alpha} \quad (4.3)$$

Comparando-se os sistemas criados de acordo com o MEFG (fig. 4.2), MEFH (fig. 4.3) e MEFBA (fig. 4.4), nota-se que o MEFBA apresenta uma montagem mais simples, porém tal procedimento não permite o enriquecimento seletivo (além do que, perde-se a estrutura em banda da matriz do sistema).

### 4.3. Enriquecimentos do Método dos Elementos Finitos aplicados a cascas cilíndricas

No caso das cascas cilíndricas empregam-se para funções de enriquecimento as funções dadas nas eqs. (2.15) e (2.16), já que fazem parte da solução analítica para espessura constante. Tendo-se em vista o conjunto de elementos da discretização, a estratégia adotada consiste em usar como

função de enriquecimento em cada elemento somente a parte local da função enriquecedora global que a ele corresponde. Tais funções, bem como as bases aproximativas utilizadas (3.21) e (3.22), estão reproduzidas abaixo:

$$\begin{aligned} N_1^e(\bar{y}) &= 1 - \frac{\bar{y}}{h_e} \\ N_2^e(\bar{y}) &= \frac{\bar{y}}{h_e} \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \phi_1^e(\bar{y}) &= 1 - 3 * \left( \frac{\bar{y}}{h_e} \right)^2 + 2 * \left( \frac{\bar{y}}{h_e} \right)^3 \\ \phi_2^e(\bar{y}) &= \bar{y} * \left( 1 - \frac{\bar{y}}{h_e} \right)^2 \\ \phi_3^e(\bar{y}) &= 3 * \left( \frac{\bar{y}}{h_e} \right)^2 - 2 * \left( \frac{\bar{y}}{h_e} \right)^3 \\ \phi_4^e(\bar{y}) &= \bar{y} * \left[ \left( \frac{\bar{y}}{h_e} \right)^2 - \frac{\bar{y}}{h_e} \right] \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$f_3(y) = e^{-\beta * y} * \cos(\beta * y) \quad (4.6)$$

$$f_4(y) = e^{-\beta * y} * \text{sen}(\beta * y) \quad (4.7)$$

As combinações de enriquecimento do MEF com aplicação às cascas cilíndricas estão descritas abaixo com siglas a elas associadas.

1) RMEFL: Caso particular do MEF utilizando as funções de forma lineares dadas em (4.4). Aplica-se essa aproximação exclusivamente para análise do regime de membrana (base deslizante) do reservatório com espessura constante.

2) RMEF: Outro caso particular do MEF convencional sem enriquecimento utilizando como base aproximativa as funções de forma dadas em (4.5).

3) RMEFH: MEFH utilizando como base aproximativa as funções de forma dadas em (4.5) e realizando enriquecimento com as funções (4.6) e (4.7) sobre todas as funções da base. As funções de forma resultantes em cada elemento são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \Theta_1^e(\bar{y}) &= \phi_1^e(\bar{y}) \\
 \Theta_2^e(\bar{y}) &= \phi_1^e(\bar{y}) * f_3(y_e + \bar{y}) \\
 \Theta_3^e(\bar{y}) &= \phi_1^e(\bar{y}) * f_4(y_e + \bar{y}) \\
 \Theta_4^e(\bar{y}) &= \phi_2^e(\bar{y}) \\
 \Theta_5^e(\bar{y}) &= \phi_2^e(\bar{y}) * f_3(y_e + \bar{y}) \\
 \Theta_6^e(\bar{y}) &= \phi_2^e(\bar{y}) * f_4(y_e + \bar{y}) \\
 \Theta_7^e(\bar{y}) &= \phi_3^e(\bar{y}) \\
 \Theta_8^e(\bar{y}) &= \phi_3^e(\bar{y}) * f_3(y_e + \bar{y}) \\
 \Theta_9^e(\bar{y}) &= \phi_3^e(\bar{y}) * f_4(y_e + \bar{y}) \\
 \Theta_{10}^e(\bar{y}) &= \phi_4^e(\bar{y}) \\
 \Theta_{11}^e(\bar{y}) &= \phi_4^e(\bar{y}) * f_3(y_e + \bar{y}) \\
 \Theta_{12}^e(\bar{y}) &= \phi_4^e(\bar{y}) * f_4(y_e + \bar{y})
 \end{aligned}
 \tag{4.8}$$

4) RMEFG: MEFH utilizando como base aproximativa as funções de forma dadas em (4.5) e enriquecimento com as funções (4.6) e (4.7), limitado às funções que constituem uma PU. As funções de forma, para cada elemento, são dadas por:

$$\begin{aligned}
 \Theta_1^e(\bar{y}) &= \phi_1^e(\bar{y}) \\
 \Theta_2^e(\bar{y}) &= \phi_1^e(\bar{y}) * f_3(y_e + \bar{y}) \\
 \Theta_3^e(\bar{y}) &= \phi_1^e(\bar{y}) * f_4(y_e + \bar{y}) \\
 \Theta_4^e(\bar{y}) &= \phi_2^e(\bar{y}) \\
 \Theta_5^e(\bar{y}) &= \phi_3^e(\bar{y}) \\
 \Theta_6^e(\bar{y}) &= \phi_3^e(\bar{y}) * f_3(y_e + \bar{y}) \\
 \Theta_7^e(\bar{y}) &= \phi_3^e(\bar{y}) * f_4(y_e + \bar{y}) \\
 \Theta_8^e(\bar{y}) &= \phi_4^e(\bar{y})
 \end{aligned}
 \tag{4.9}$$

5) RMEFBA: MEFBA utilizando como base aproximativa as funções de forma dadas em (4.5), sendo realizado enriquecimento mediante ampliação da base inicial com as funções (4.6) e (4.7). As funções de forma, para cada elemento, são dadas por:

$$\begin{aligned} \Theta_1^e(\bar{y}) &= \phi_1^e(\bar{y}) \\ \Theta_2^e(\bar{y}) &= \phi_2^e(\bar{y}) \\ \Theta_3^e(\bar{y}) &= \phi_3^e(\bar{y}) \\ \Theta_4^e(\bar{y}) &= \phi_4^e(\bar{y}) \\ \Theta_6^e(\bar{y}) &= f_3(y_e + \bar{y}) \\ \Theta_6^e(\bar{y}) &= f_4(y_e + \bar{y}) \end{aligned} \tag{4.10}$$

## 5. PROGRAMA

Foi criado um programa em linguagem FORTRAN para pré-processamento, resolução e visualização gráfica de análises de cascas cilíndricas e esféricas. As respostas são fornecidas em termos de deslocamentos e esforços, colocando-se em confronto soluções analíticas (apresentadas no capítulo 2) e soluções aproximadas (apresentadas nos capítulos 3 e 4).

### **5.1. Recursos numéricos específicos**

Para o cálculo das integrais que aparecem nas formulações é utilizada a *Regra de Simpson*, segundo procedimento descrito em SWOKOWSKI (1995), sendo utilizados 500 pontos por elemento. Essa quantidade foi utilizada por resultar, segundo testes numéricos, em valores para as integrais suficientemente próximos dos exatos.

O procedimento numérico para a resolução do sistema linear de equações é o *Método de Gauss* (inicialmente, com escalonamento na matriz dos coeficientes desenvolvendo, em seguida, a eliminação com pivoteamento parcial). As subrotinas referentes a esse procedimento foram extraídas de PROENÇA (1986).

As funções de forma e suas derivadas foram fornecidas analiticamente ao programa, não necessitando de procedimentos numéricos aproximados para a obtenção de seus valores.

## 5.2. Funcionamento do programa

O programa criado tem seu funcionamento descrito segundo as etapas abaixo:

1) A primeira janela (fig. 5.1), que aparece quando da execução do aplicativo, é uma apresentação.

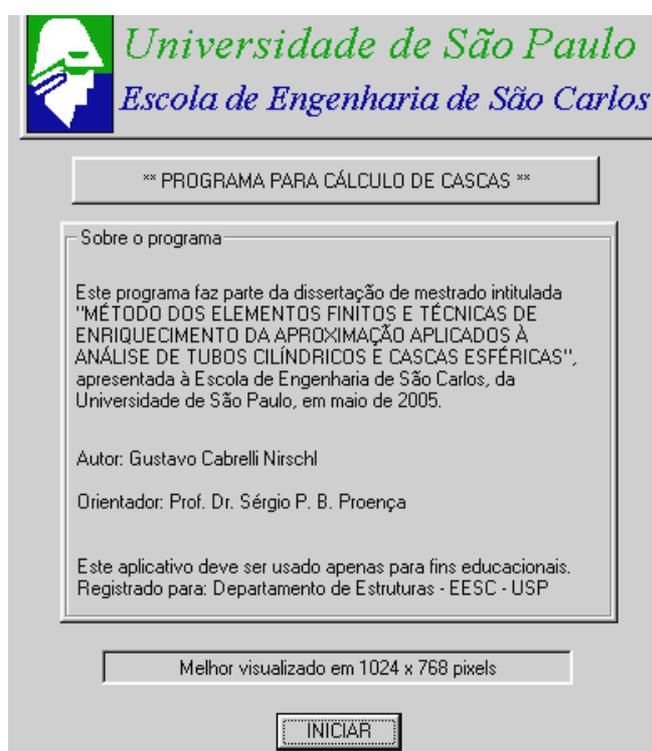


Figura 5.1: Janela de apresentação do aplicativo.

2) Acionando-se o botão “INICIAR”, aparece a janela para as escolhas da estrutura a ser calculada bem como da base aproximativa de funções do MEF (fig. 5.2). Nota-se que, independentemente da escolha do método aproximado, os gráficos de respostas exibem sempre a solução analítica da estrutura.

A janela da fig. 5.2 tem, além das caixas de lista para a escolha da estrutura e do método de cálculo, o botão “SAIR”, que fecha o aplicativo, o botão “AJUDA”, que abre outras janelas com alguns tópicos explicativos sobre o funcionamento do programa, e o botão “AVANÇAR”, que deve ser acionado

depois de selecionadas a estrutura e a base aproximativa do método de cálculo.

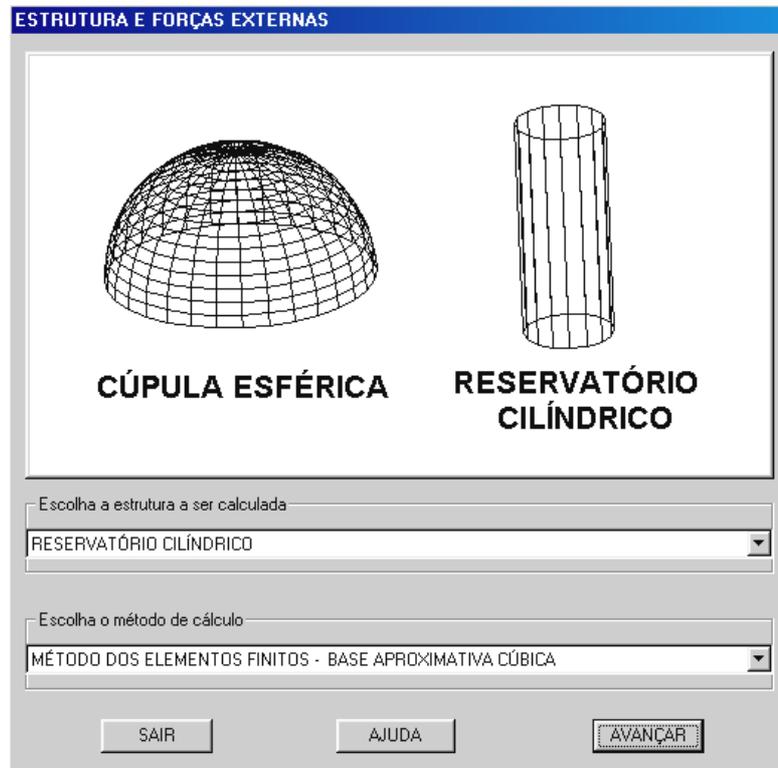


Figura 5.2: Janela para a escolha da estrutura a ser calculada, bem como do método de cálculo aproximado.

São disponíveis duas estruturas, reservatório cilíndrico e cúpula esférica. O reservatório cilíndrico pode ser analisado somente com forças linearmente distribuídas na parede e a cúpula admite análise dos efeitos de peso próprio (somente solução analítica) ou de forças e momentos distribuídos uniformemente em sua extremidade.

3) Dependendo da escolha estrutural, uma janela aparece para a entrada de dados referentes à geometria, às forças externas e ao método de enriquecimento (se desejado). Na fig. 5.3 é mostrada a janela de entrada de dados para reservatório cilíndrico e, na fig. 5.4, a janela de entrada de dados para cúpula esférica sujeita a força horizontal e momento concentrado na extremidade. Essas duas opções permitem o cálculo aproximado.



Os dados referentes ao número de elementos finitos, seguindo a convenção dada na figura que aparece na janela de entrada de dados, devem ser preenchidos no grupo “DADOS SOBRE O MEF”.

Se o usuário quiser utilizar elementos de comprimentos iguais em todo o domínio, deve apenas colocar o número de elementos na caixa de edição do grupo “TODOS OS ELEMENTOS COM O MESMO COMPRIMENTO” e acionar, em seguida, o botão “INCLUIR ELEMENTOS” naquele grupo. Fazendo isso, os comprimentos dos elementos são exibidos na lista do grupo “COMPRIMENTO DOS ELEMENTOS”, bem como são exibidos o somatório dos comprimentos dos elementos e o número de elementos nas caixas estáticas do canto inferior direito do grupo “DADOS SOBRE O MEF”.

Para se utilizar comprimentos diferentes dos elementos, seus valores devem ser cadastrados um a um, na caixa de edição do grupo “ELEMENTOS COM COMPRIMENTOS DIFERENTES”, acionando-se o botão “INCLUIR ELEMENTO” para, de fato, incluir um elemento na lista do grupo “COMPRIMENTO DOS ELEMENTOS”. Neste caso, pode-se conferir se o somatório dos comprimentos dos elementos é coerente, por meio da caixa estática do canto inferior esquerdo do grupo “DADOS SOBRE O MEF”.

Cadastrados os elementos, devem ser fornecidos os dados sobre o enriquecimento, no grupo “DADOS SOBRE O ENRIQUECIMENTO”. Deve-se escolher o tipo de enriquecimento por meio da caixa de lista no grupo “ESCOLHA O TIPO DE ENRIQUECIMENTO”, sendo que as funções enriquecedoras podem ser visualizadas acionando-se o botão “VER FUNÇÕES DISPONÍVEIS”. Feito isso, incluem-se os nós a serem enriquecidos por meio dos botões no grupo “NÓS A SEREM ENRIQUECIDOS”. Tais nós podem ser cadastrados um a um, no grupo “INCLUSÃO INDIVIDUAL”, ou todos de uma vez, pelo botão “TODOS”. Na lista “NÓS ENRIQUECIDOS” aparecem os nós a serem enriquecidos.

Na fig. 5.5 aparece a janela de entrada de dados para cúpula esférica sujeita a peso próprio, em que apenas é possível a análise da solução analítica.

**DADOS DE ENTRADA - CÚPULA ESFÉRICA**

SAIR / VOLTAR    AJUDA    ENTRE COM OS DADOS DO PROBLEMA, CLIQUE NO BOTÃO "CALCULAR" E AGUARDE    CALCULAR

Dados geométricos da cúpula

Ângulo de abertura (graus)

Raio (L)

Espessura (L)

Base deslizante  
 Base articulada fixa  
 Base engastada

Dados do material da cúpula

Coefficiente de Poisson

Módulo de elasticidade (F/L<sup>2</sup>)

Peso próprio da cúpula (F/L<sup>2</sup>)

Verificação

Hipótese de casca delgada:  
 ESPESSURA / RAILO menor ou igual a 0.05.

ESPESSURA / RAILO =  OK

Figura 5.5: Janela de entrada de dados referente a cúpula esférica sujeita a peso próprio.

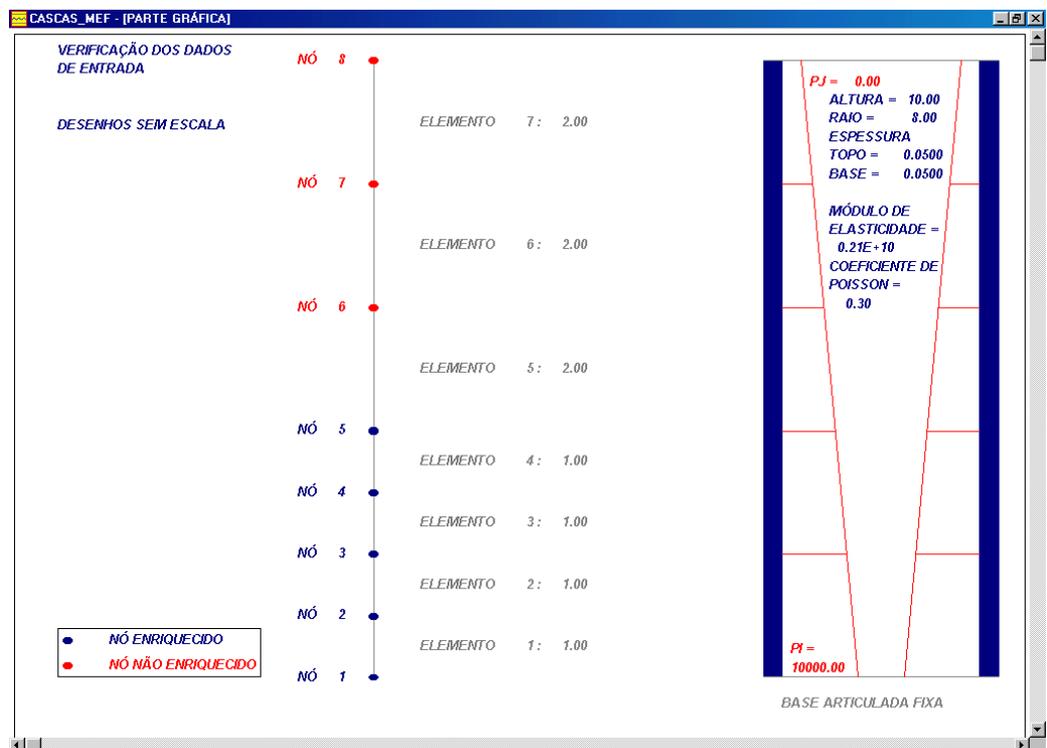


Figura 5.6: Janela de verificação gráfica dos dados de entrada referente a reservatório cilíndrico.

4) Preenchidos os dados de entrada, pode-se conferir visualmente os dados fornecidos, para os casos representados nas figs. 5.3 e 5.4, acionando-se o botão “VERIFICAR DADOS”. Aparece uma janela gráfica independente, como a das figs. 5.6 (reservatório cilíndrico) e 5.7 (cúpula esférica), cujos desenhos são apenas para verificação, não apresentando uma escala definida.

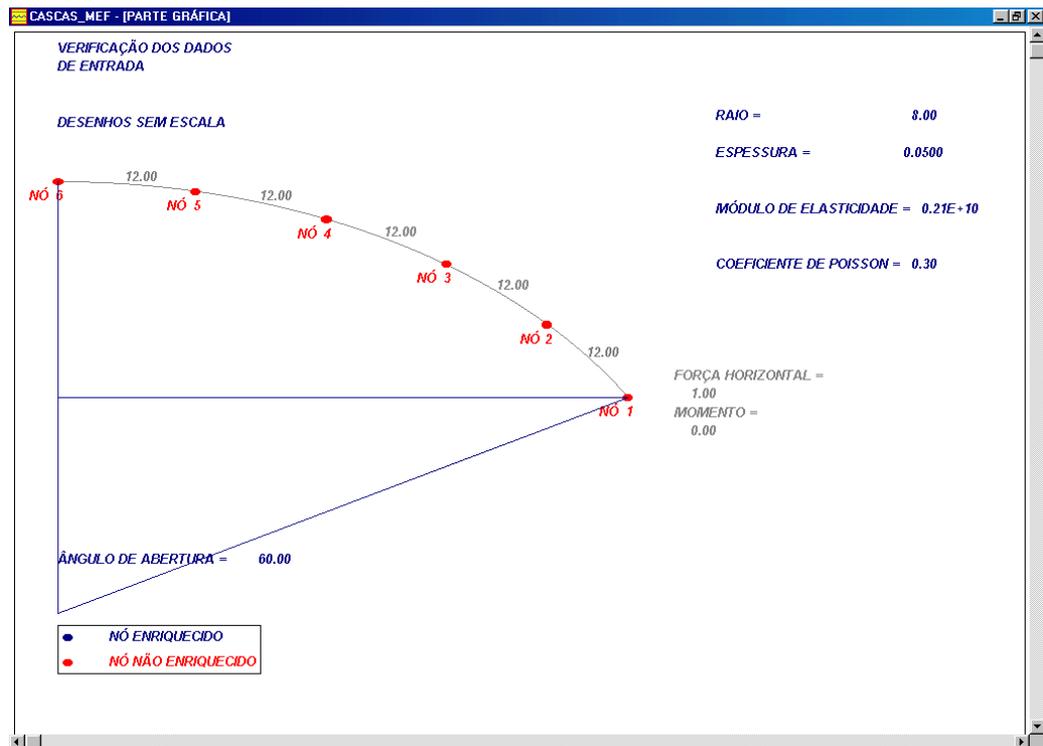


Figura 5.7: Janela de verificação gráfica dos dados de entrada para cúpula esférica sujeita a força horizontal e momento concentrado na base.

5) Preenchidos e verificados os dados de entrada, nas janelas das figs. 5.3, 5.4 ou 5.5, aciona-se o botão “CALCULAR”, aparecendo uma janela de confirmação (fig. 5.8) depois de concluído o processamento.

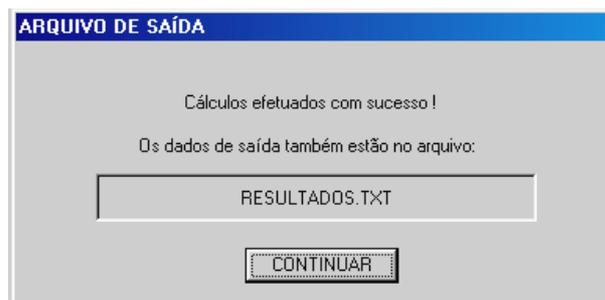


Figura 5.8: Janela de confirmação do sucesso dos cálculos.

Como explicado na janela da fig. 5.8, além das janelas dos dados de saída no programa, os dados numéricos de saída são impressos no arquivo RESULTADOS.TXT.

Acionando-se o botão “CONTINUAR” na janela da fig. 5.8, aparece a janela referente aos resultados. Nas figs. 5.9, 5.10 e 5.11 são mostradas as janelas de resultados para os três casos representados nas figs. 5.3, 5.4 e 5.5, respectivamente.

Nas janelas das figs. 5.9, 5.10 e 5.11, aparece uma figura referente à convenção para os sentidos positivos dos parâmetros de saída. Tal ilustração também não oferece interatividade nem obedece a uma escala geométrica, constando apenas para auxiliar a compreensão dos dados de saída.

Os dados de saída têm seus valores impressos em listas organizadas segundo os valores nodais (caso haja método de cálculo aproximado) após pós-processamento (coluna esquerda) e segundo 200 pontos igualmente espaçados sobre o domínio (coluna direita).

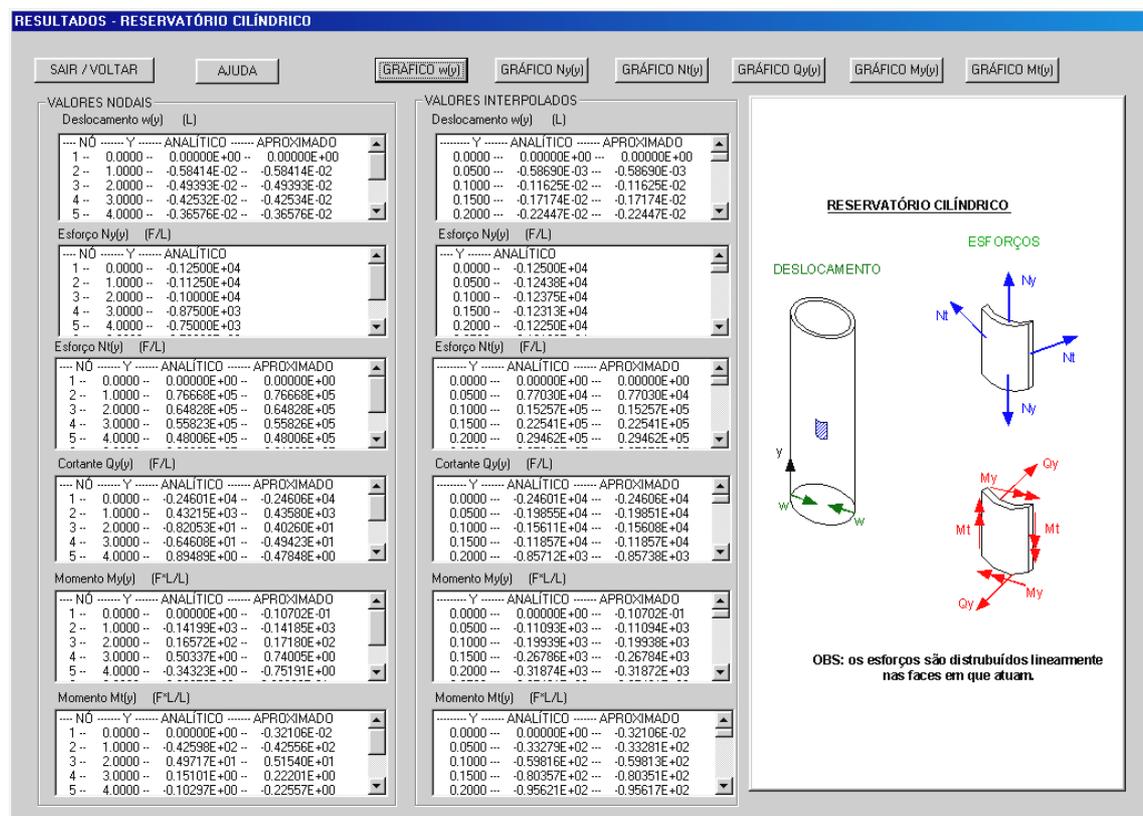


Figura 5.9: Janela de resultados referente a reservatório cilíndrico.

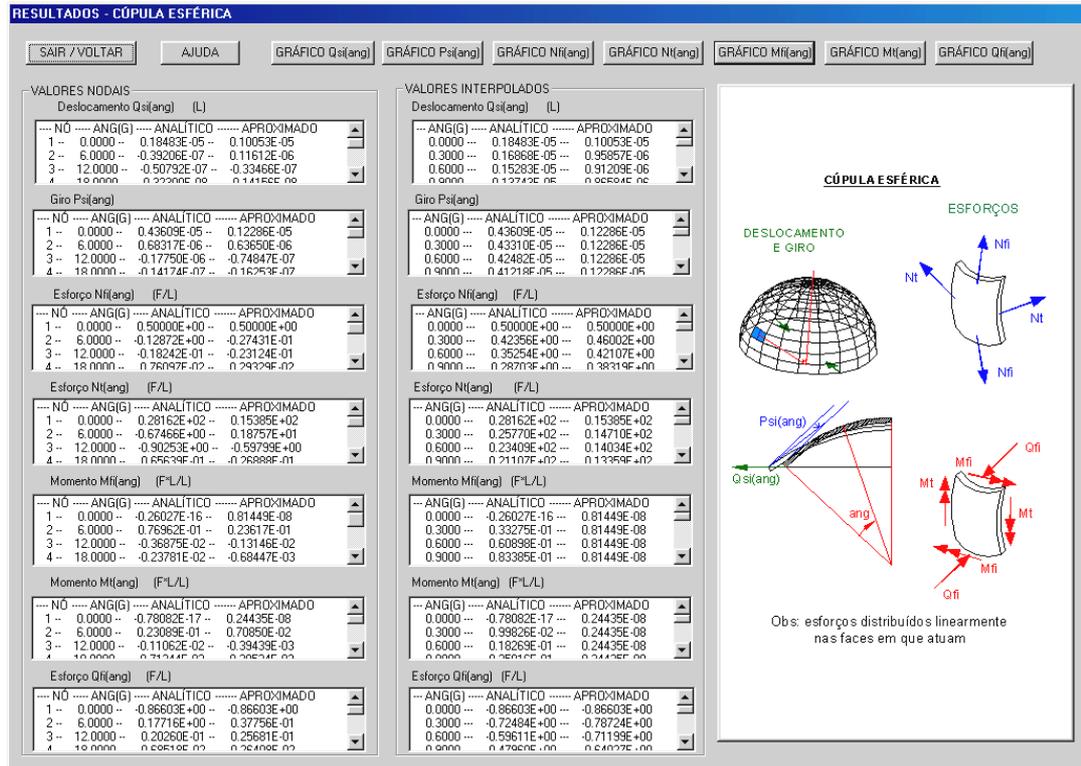


Figura 5.10: Janela de resultados referente a cúpula esférica sujeita a força horizontal e momento concentrado na base.

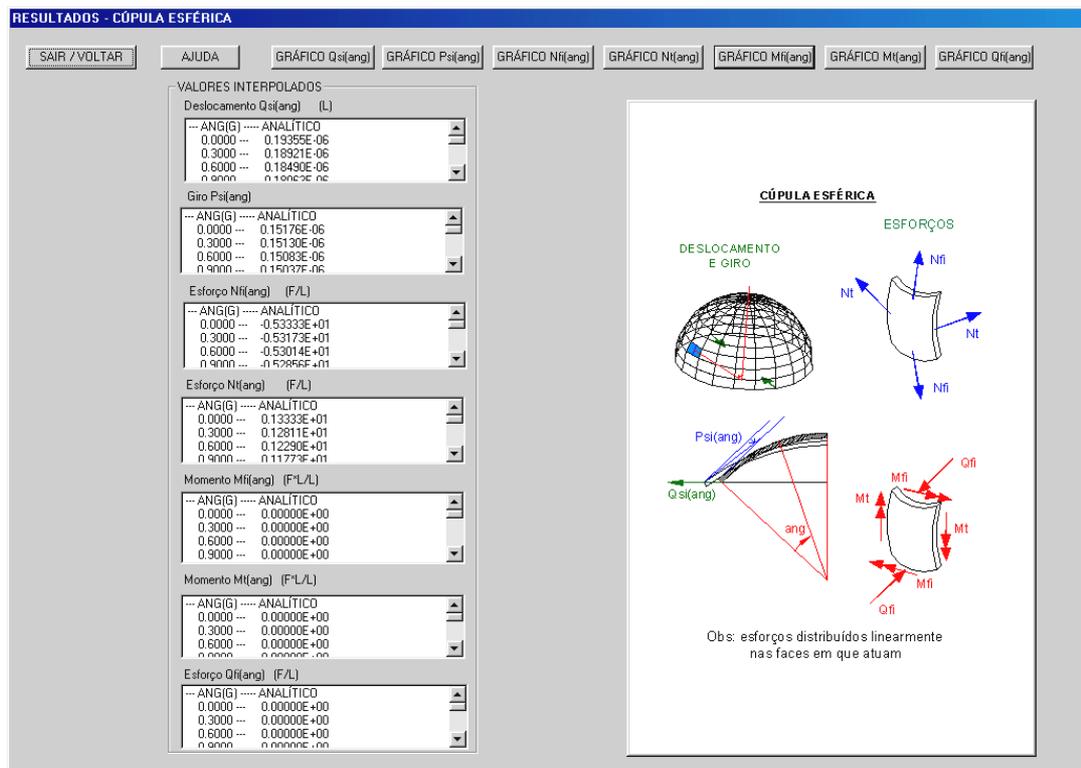


Figura 5.11: Janela de resultados referente a cúpula esférica sujeita a peso próprio.

Nas janelas das figs. 5.9, 5.10 e 5.11, existem ainda botões na parte superior que, depois de acionados, exibem, em uma janela gráfica independente, os gráficos correspondentes aos parâmetros ao longo do domínio. Na fig. 5.12 é exibido um exemplo de gráfico de saída de deslocamento para reservatório cilíndrico.

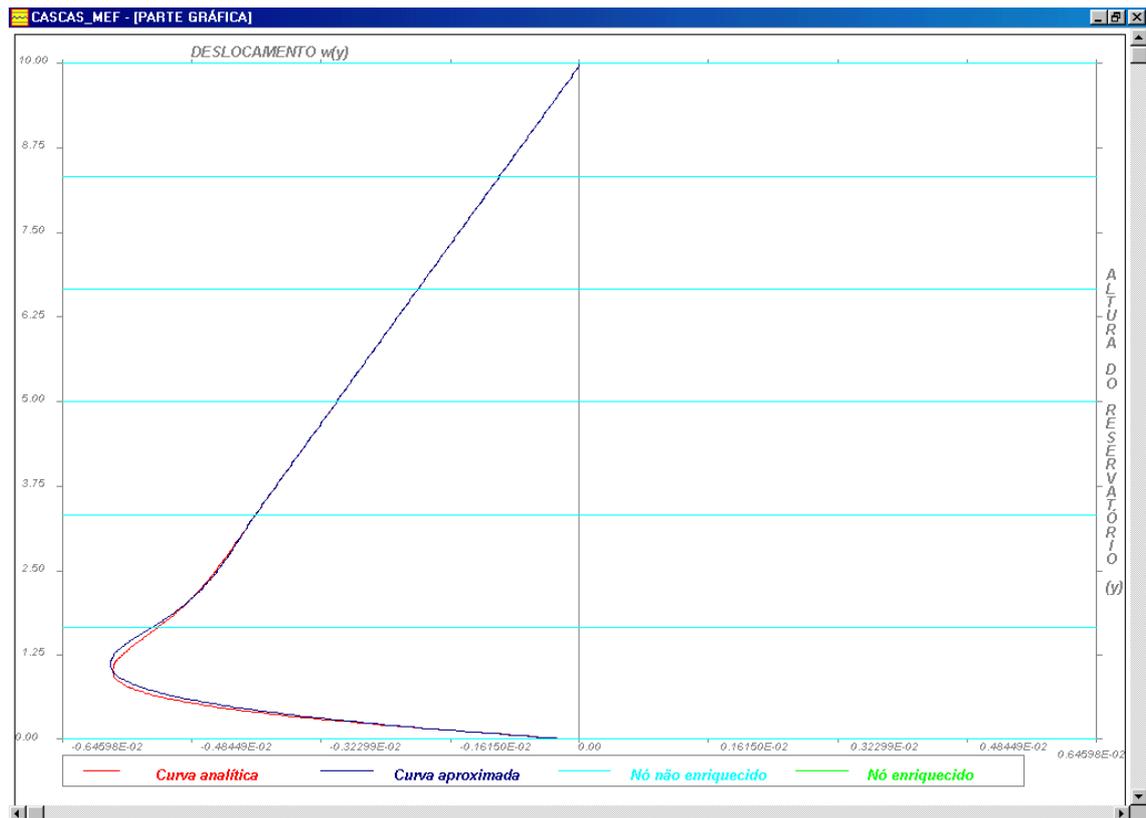


Figura 5.12: Exemplo de janela de gráfico de deslocamento referente a reservatório cilíndrico.

Uma última consideração é que a aplicação criada não é restrita a um sistema fixo de unidades, ficando a cargo do usuário uma entrada de dados coerente.

Para facilitar este processo, estão indicadas, ao lado das caixas de edição de entrada de dados e ao lado dos valores de saída, as dimensões de cada variável, sendo elas:

L: dimensão de comprimento; e

F: dimensão de força.

## 6. EXEMPLOS NUMÉRICOS

### **6.1. Resultados para reservatório cilíndrico**

A fim de comprovar o potencial das alternativas de enriquecimento aplicadas ao caso do reservatório cilíndrico, mostram-se, neste item, exemplos comparativos entre os resultados obtidos utilizando-se o MEF (procedimentos RMEFL e RMEF) e os procedimentos enriquecidos (RMEFH, RMEFG e RMEFBA). Os resultados são comparados entre si e com relação à resposta analítica.

No programa, conforme descrito no item anterior, o tubo cilíndrico pode ser analisado considerando-se:

- espessura linearmente variável da parede (somente para solução aproximada);
- malha com elementos de tamanhos variáveis entre si; e
- enriquecimento seletivo de nós do domínio.

Comparam-se valores de deslocamento horizontal  $w$ , esforço cortante  $Q_y$  e momento fletor  $M_y$ , com suas convenções de sinal e direção visualizadas nas fig. 2.3. Os valores de  $N_\theta$  e  $M_\theta$  não são aqui exibidos, já que são proporcionais a  $w$  e  $M_y$ , respectivamente (ver eq. (3.27) e (3.30)). Também  $N_y$  não é analisado, pois numa análise em primeira ordem é independente do problema de flexão (eq. 2.12).

Como dados de entrada foram escolhidos valores coerentes com a hipótese de casca delgada. Tais valores estão mostrados na tabela 6.1.

Tabela 6.1: Dados de entrada utilizados para o cálculo de reservatório cilíndrico.

PARÂMETRO	VALOR
Altura (m)	10,00
Raio (m)	8,00
Espessura constante (m)	0,05
Coefficiente de Poisson	0,30
Módulo de elasticidade (kN/m <sup>2</sup> )	2,10*10 <sup>9</sup>
Peso específico do líquido de preenchimento (kN/m <sup>3</sup> )	1000,00

Como vinculação de base, consideram-se três tipos possíveis para o reservatório: deslizante, articulada fixa e engastada.

#### Base deslizante

O primeiro caso analisado refere-se ao regime de membrana do reservatório. Para este caso, como já explicado, o único procedimento aproximado possível é o RMEFL, descrito no item 4.3.

Somente com um elemento, os deslocamentos obtidos com o procedimento RMEFL são idênticos aos da solução analítica de membrana. Isto acontece porque a solução de membrana, para o caso de espessura constante, tem uma forma linear, exatamente descrita pela base aproximativa linear.

No gráfico 6.1, é apresentada a solução aproximada dos deslocamentos para 10 elementos igualmente espaçados, além da solução analítica.

Naturalmente, o esforço cortante  $Q_y$  e o momento fletor  $M_y$  são nulos, de acordo com as hipóteses do regime de membrana.

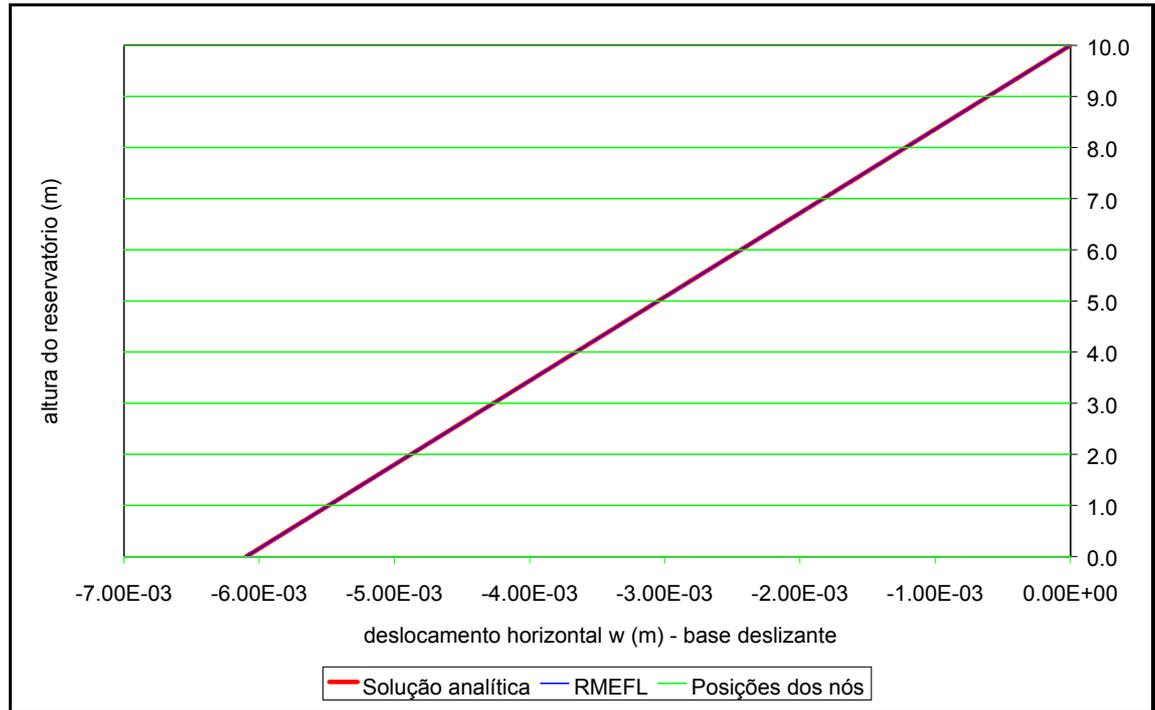


Gráfico 6.1: Curva de deslocamento  $w$  para o caso RMEFL.

### Base articulada fixa

Para esse tipo de vinculação, os resultados aproximados, de um modo geral, melhoram com o aumento progressivo do número de elementos e/ou com o refinamento da malha de elementos próximo à base.

O procedimento RMEF apresenta resultados em deslocamento próximos dos analíticos a partir de 10 elementos igualmente espaçados. Já para esforços, que decorrem das derivadas das funções polinomiais de aproximação, são necessários muito mais elementos para reduzir o erro em relação às soluções analíticas (que têm funções exponenciais como diretrizes).

Os procedimentos RMEFH, RMEFG e RMEFBA apresentam soluções bem melhores, especialmente com relação aos esforços, já que as derivadas das funções enriquecedoras (exponenciais) fornecem ainda relações exponenciais. Com 2 elementos igualmente espaçados (todos os nós enriquecidos), o RMEFH já fornece resultados bem próximos dos exatos, inclusive para os esforços, enquanto o RMEFG exige ao menos 4 elementos igualmente espaçados para representar bem a curva de deslocamentos, sendo os esforços, no entanto, ainda ruins.

A boa constatação resulta do RMEFBA que, com apenas 1 elemento, apresenta soluções quase exatas para deslocamento e esforços.

Para uma comparação mais eficaz entre os procedimentos descritos, considera-se uma discretização como a mostrada na fig. 6.1 abaixo, com refinamento da malha próximo à base e enriquecimento seletivo (limitado à região da base - procedimentos RMEFH e RMEFG). Lembra-se que, no caso RMEFBA, o enriquecimento seletivo não faz sentido.

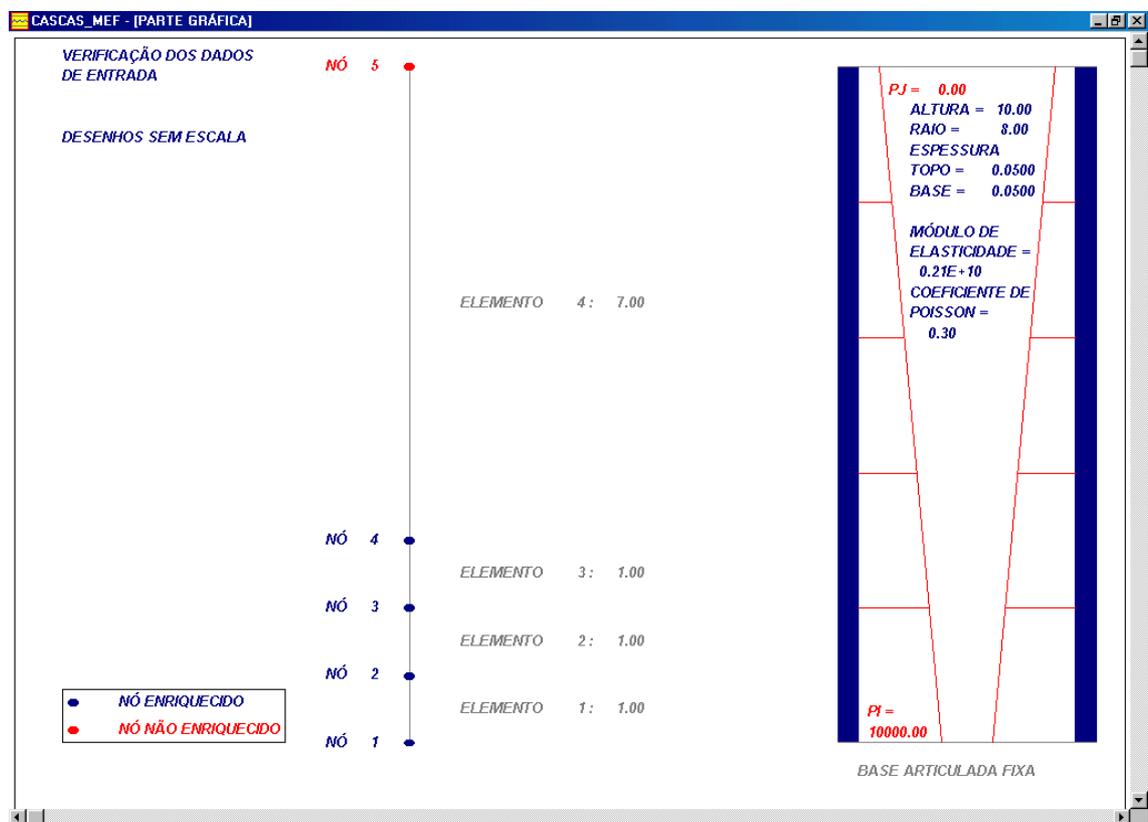


Figura 6.1: Parâmetros de entrada para a realização de exemplos comparativos relacionados à base articulada fixa de reservatório cilíndrico.

Nos gráficos 6.2 a 6.4 estão as curvas obtidas para deslocamento horizontal  $w$ , momento fletor  $M_y$  e esforço cortante  $Q_y$ , relacionados aos referidos procedimentos e à solução analítica.

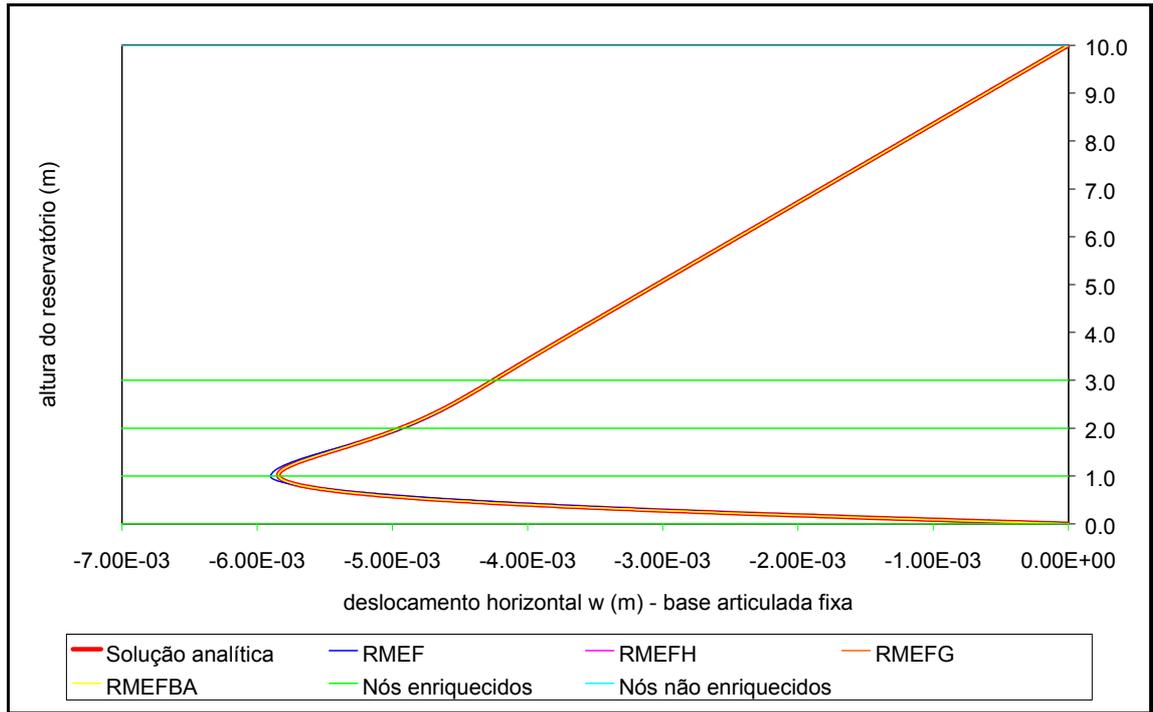


Gráfico 6.2: Curva de deslocamento  $w$  para os casos RMEF, RMEFH, RMEFG e RMEFBA (base articulada fixa).

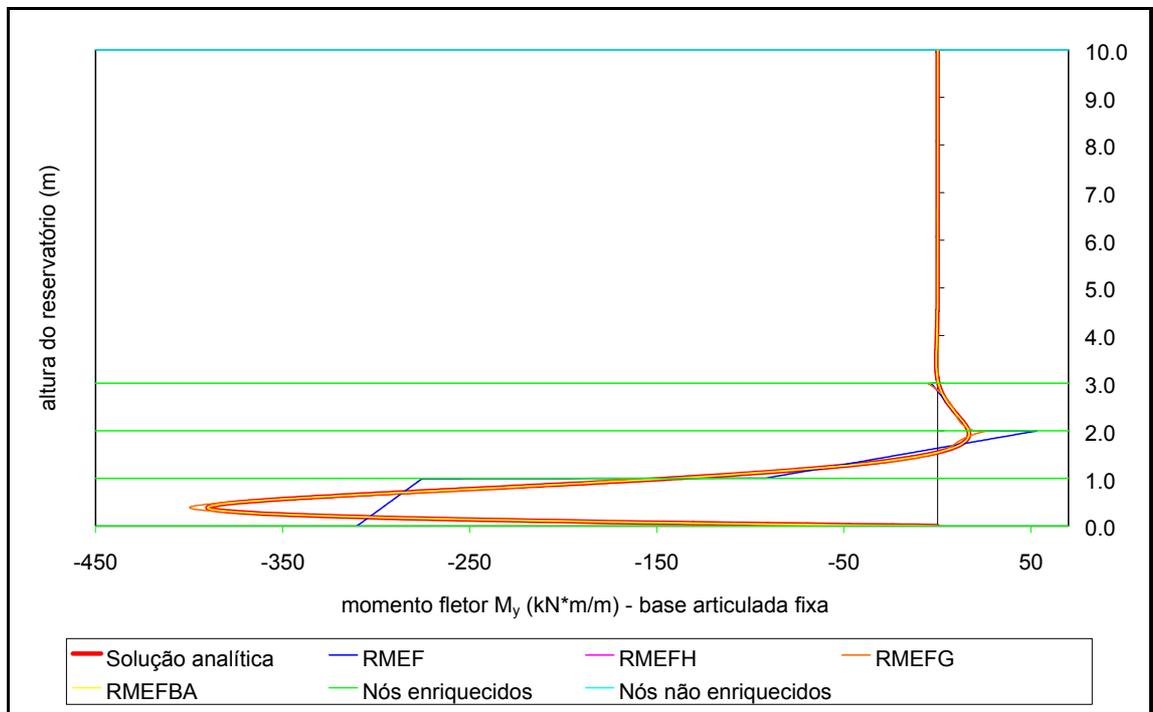


Gráfico 6.3: Curva de momento fletor  $M_y$  para os casos RMEF, RMEFH, RMEFG e RMEFBA (base articulada fixa).

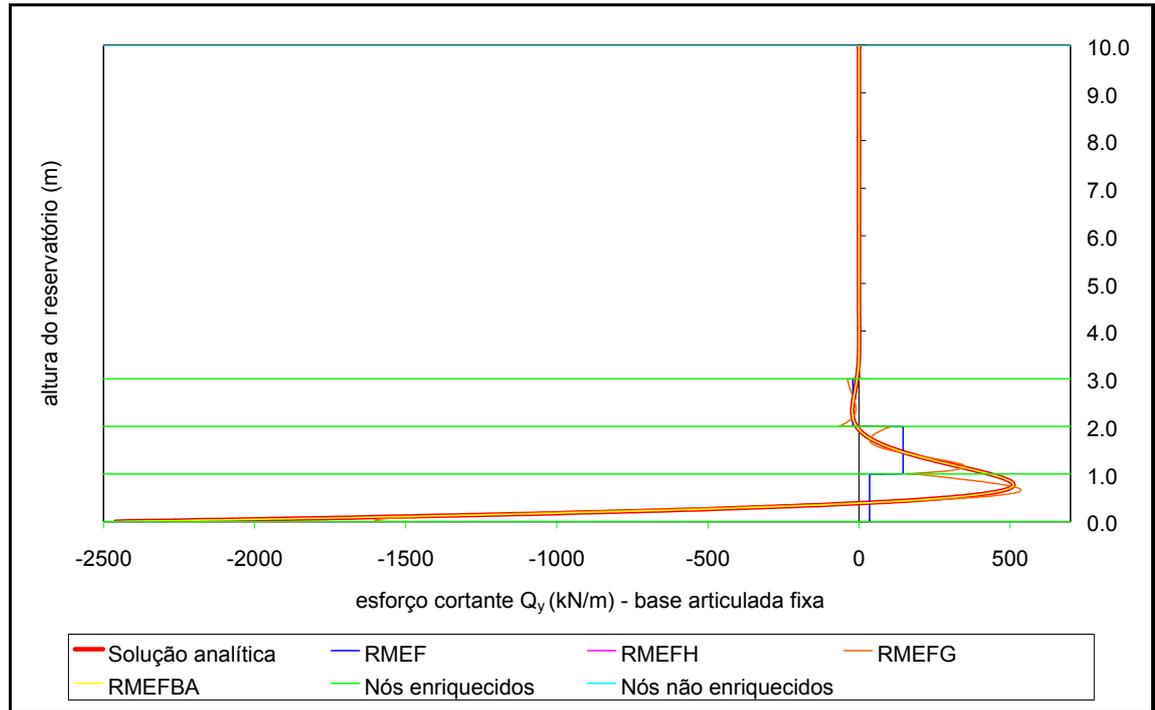


Gráfico 6.4: Curva de esforço cortante  $Q_y$  para os casos RMEF, RMEFH, RMEFG e RMEFBA (base articulada fixa).

Nota-se, por meio da análise do gráfico 6.2, que o deslocamento fica bem representado por todos os métodos propostos, havendo sensível melhora dos procedimentos enriquecidos (RMEFH, RMEFG e RMEFBA) em relação ao RMEF.

Em se tratando dos esforços, as diferenças entre o RMEF e os procedimentos enriquecidos (gráficos 6.3 e 6.4) são mais marcantes, já que, no RMEF, como explicado, as derivadas da segunda das funções de forma fornecem funções aproximadoras lineares, o que pode ser confirmado pelo gráfico 6.3, comprometendo os resultados para momento fletor. Além disso, as terceiras derivadas produzem curvas constantes que não aproximam bem a curva de esforço cortante (gráfico 6.4). Nos procedimentos enriquecidos, as derivadas das funções enriquecedoras exponenciais resultam ainda em funções exponenciais, melhorando sensivelmente as aproximações dos esforços no interior dos elementos.

A partir de outros testes realizados, nota-se que, com um número menor de elementos, as diferenças entre o RMEF e os procedimentos enriquecidos aumentam significativamente.

Comparando-se os procedimentos enriquecidos, pode-se afirmar que o RMEFH e o RMEFBA apresentam os melhores resultados. No caso do RMEFH, o custo computacional, apesar de pequeno, é bem maior do que aquele gasto na resolução do RMEF ou do RMEFBA, por conta do aumento do sistema linear a ser resolvido. Este fato, que é desprezível para o caso unidimensional, pode vir a ser importante num equacionamento em duas ou três dimensões.

Portanto, o procedimento RMEFBA pode ser interessante visto que o enriquecimento causa pequeno aumento da ordem do sistema linear e os resultados são muito melhores do que os apresentados pelo RMEF.

O procedimento RMEFG não se mostrou muito eficiente, sendo o que apresentou os piores resultados entre os procedimentos enriquecidos.

### Base engastada

Os testes mostram que para a base engastada são necessários mais elementos finitos para aproximar bem os resultados, em comparação com a base articulada fixa. Tais resultados são qualitativamente iguais aos apresentados para essa última base, em se tratando da comparação entre o RMEF e os procedimentos enriquecidos (RMEFH, RMEFG e RMEFBA).

Nos gráficos 6.5 a 6.7 estão exibidos resultados para um reservatório com base engastada, de acordo com os dados da tabela 6.1 e com a discretização apresentada na fig. 6.2.

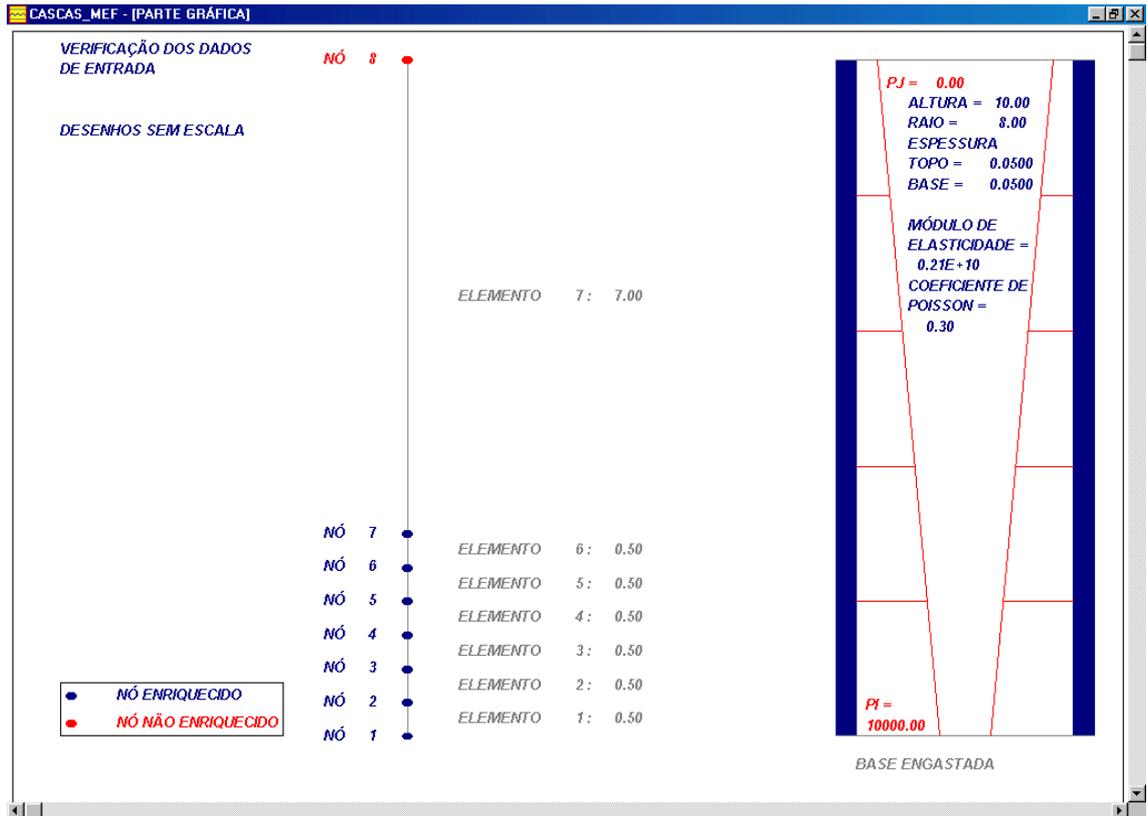


Figura 6.2: Parâmetros de entrada para a realização de exemplos comparativos relacionados à base engastada de reservatório cilíndrico.

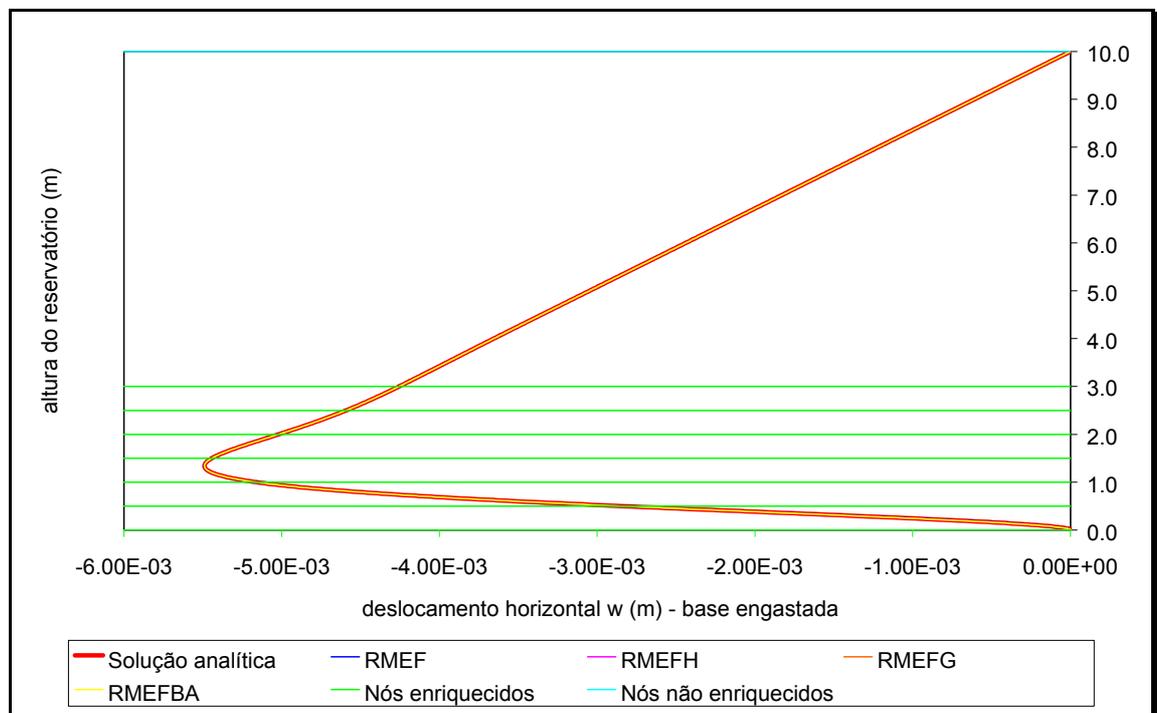


Gráfico 6.5: Curva de deslocamento  $w$  para os casos RMEF, RMEFH, RMEFG e RMEFBA (base engastada).

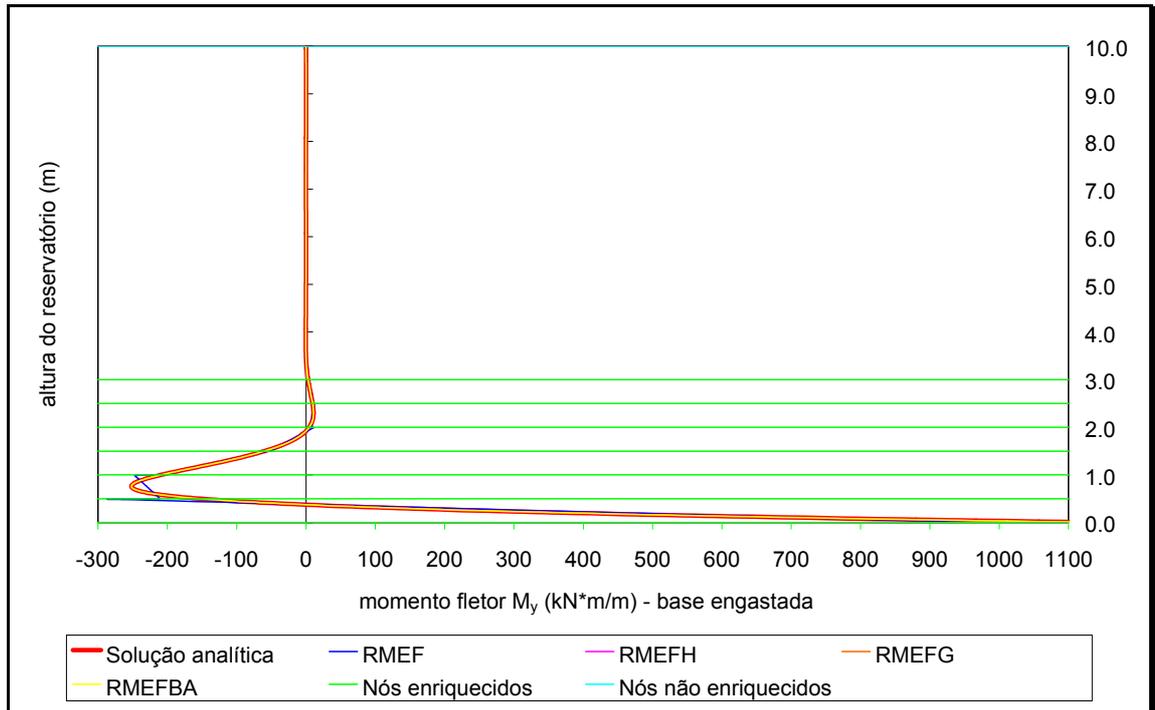


Gráfico 6.6: Curva de momento fletor  $M_y$  para os casos RMEF, RMEFH, RMEFG e RMEFBA (base engastada).

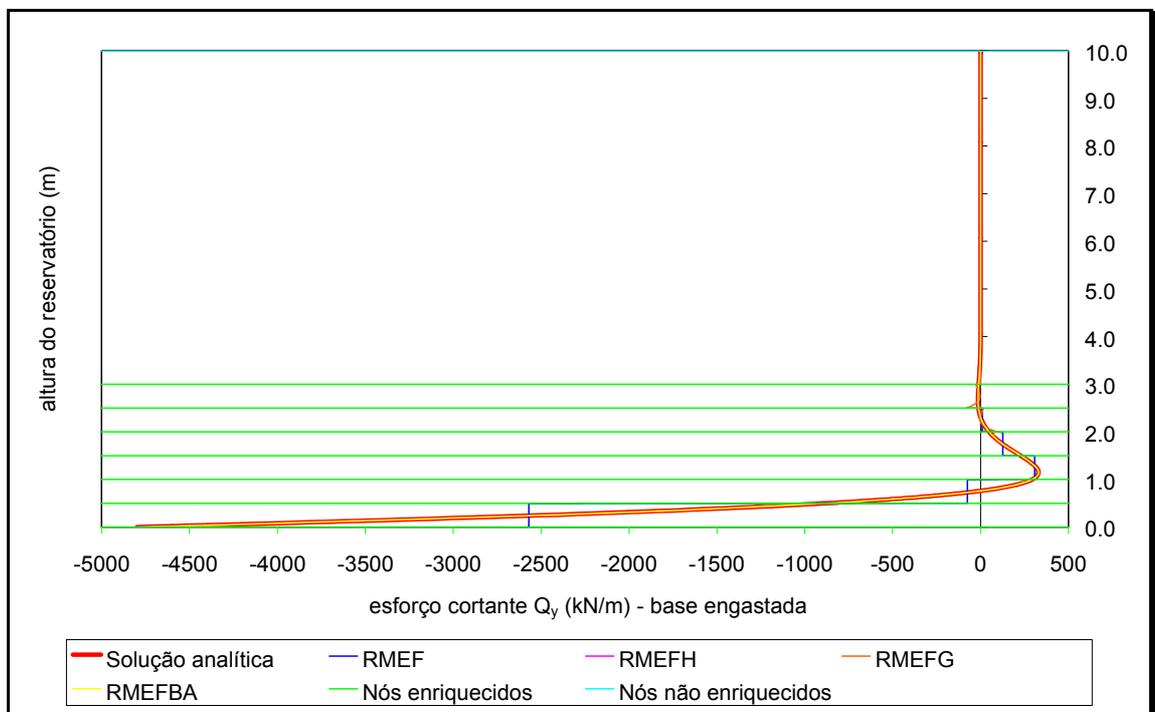


Gráfico 6.7: Curva de esforço cortante  $Q_y$  para os casos RMEF, RMEFH, RMEFG e RMEFBA (base engastada).

## 6.2. Resultados para casca esférica

No caso da casca esférica, em tempo para a realização deste trabalho, foi possível desenvolver análises considerando-se somente o MEF convencional. Os casos analisados foram de estrutura submetida a força horizontal e momento uniformemente distribuídos em sua extremidade.

Observa-se que o caso da cúpula sujeita a peso próprio não é analisado por meio de métodos aproximados, mas somente suas respostas analíticas são obtidas, em termos de deslocamento horizontal, giro e dos esforços apresentados na fig. 2.5. A resposta analítica foi inserida no programa de cálculo que fornece, como já explicado, respostas numéricas e gráficas para os casos de base deslizante (regime de membrana), base articulada fixa e base engastada.

### → Cúpula sujeita a força horizontal e momento distribuídos uniformemente em sua extremidade

Os resultados para o MEF aplicado ao problema da casca esférica (procedimento CMEF) são comparados com as respostas analíticas.

No programa para casca esférica é possível a aplicação de malha de elementos com tamanho variável entre si.

Obtêm-se valores de esforço cortante  $Q_\phi$ , momento fletor  $M_\phi$ , esforço tangencial  $N_\theta$ , giro  $\Phi$  e deslocamento horizontal  $\xi$ , convencionados positivamente de acordo com os sentidos visualizados nas figs. 2.5 e 2.6. Os valores de  $N_\phi$  e  $M_\theta$  não estão aqui exibidos, já que são proporcionais a  $Q_\phi$  e  $M_\phi$ , respectivamente (ver eqs. (3.42) e (3.45)).

Indicando a força horizontal distribuída uniformemente na extremidade da casca esférica por  $H_c$  e o momento distribuído uniformemente na extremidade da casca esférica por  $M_c$ , são três os casos analisados:

- 1)  $H_c = 1 \text{ kN/m}$  e  $M_c = 0$ ;
- 2)  $H_c = 0$  e  $M_c = 1 \text{ kN*m/m}$ ; e
- 3)  $H_c = 1 \text{ kN/m}$  e  $M_c = 1 \text{ kN*m/m}$ .

Para os três casos, os resultados fornecidos pelo procedimento aproximado CMEF melhoram na medida em que se aumenta o número de elementos finitos. Comparando-se com o MEF aplicado a reservatório cilíndrico, são necessários muito mais elementos ou um refinamento muito maior para se obter boas respostas.

Por exemplo, os resultados com 40 elementos finitos igualmente espaçados no domínio são próximos dos analíticos, mas ainda não coincidentes.

Para as análises mostradas a seguir, foram escolhidos dados de entrada coerentes com a hipótese de casca delgada. Tais valores de entrada são mostrados na tabela 6.2.

Tabela 6.2: Dados de entrada utilizados para o cálculo de cúpula esférica.

PARÂMETRO	VALOR
Ângulo de abertura (graus)	60
Raio (m)	8,00
Espessura constante (m)	0,05
Coefficiente de Poisson	0,30
Módulo de elasticidade (kN/m <sup>2</sup> )	2,10*10 <sup>9</sup>
Hc (kN/m)	1,00
Mc (kN*m/m)	1,00

Uma observação que se deve fazer é que os ângulos utilizados no programa são considerados em radianos, sendo os dados de entrada angulares, em graus, convertidos internamente.

A seguir, estão apresentadas comparações utilizando-se os dados da tabela 6.2 e uma discretização de acordo com a fig. 6.3.

Nos gráficos 6.8 a 6.12, estão as curvas obtidas para esforço cortante  $Q_\phi$ , momento fletor  $M_\phi$ , esforço tangencial  $N_\theta$ , giro  $\Phi$  e deslocamento horizontal  $\xi$ , relacionados ao procedimento CMEF e à solução analítica.

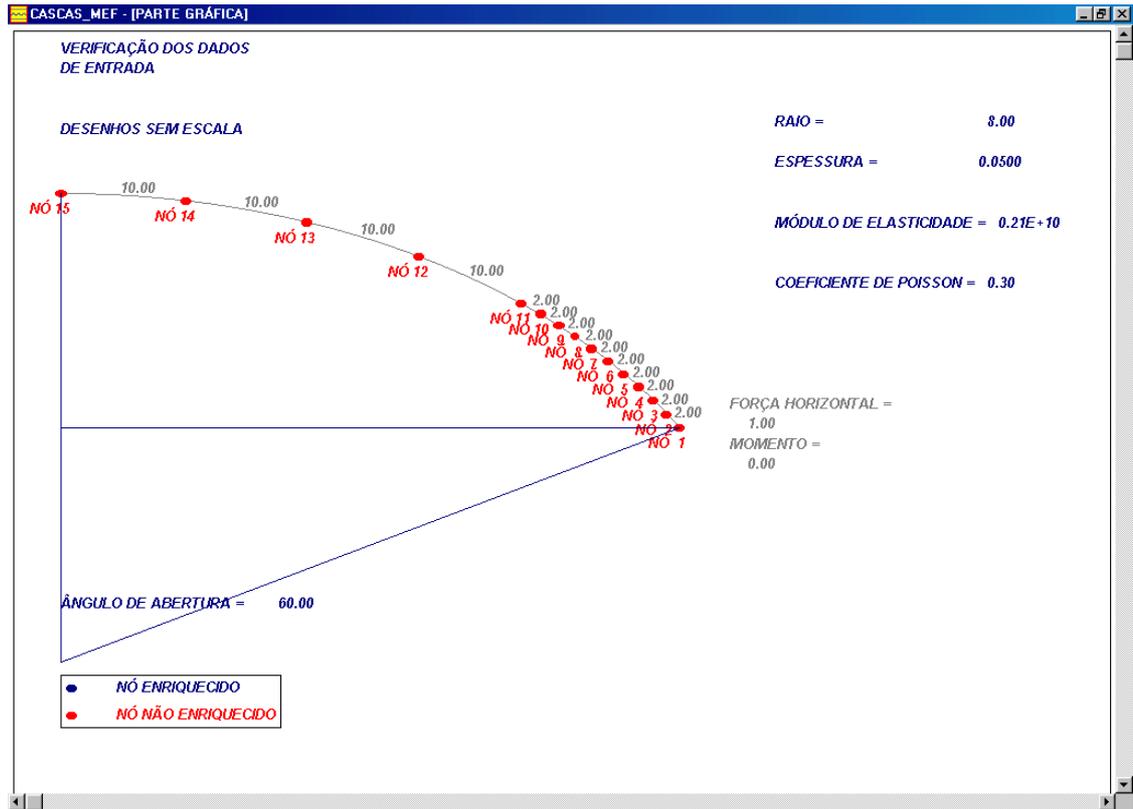


Figura 6.3: Parâmetros de entrada para a realização de exemplos comparativos relacionados à casca esférica.

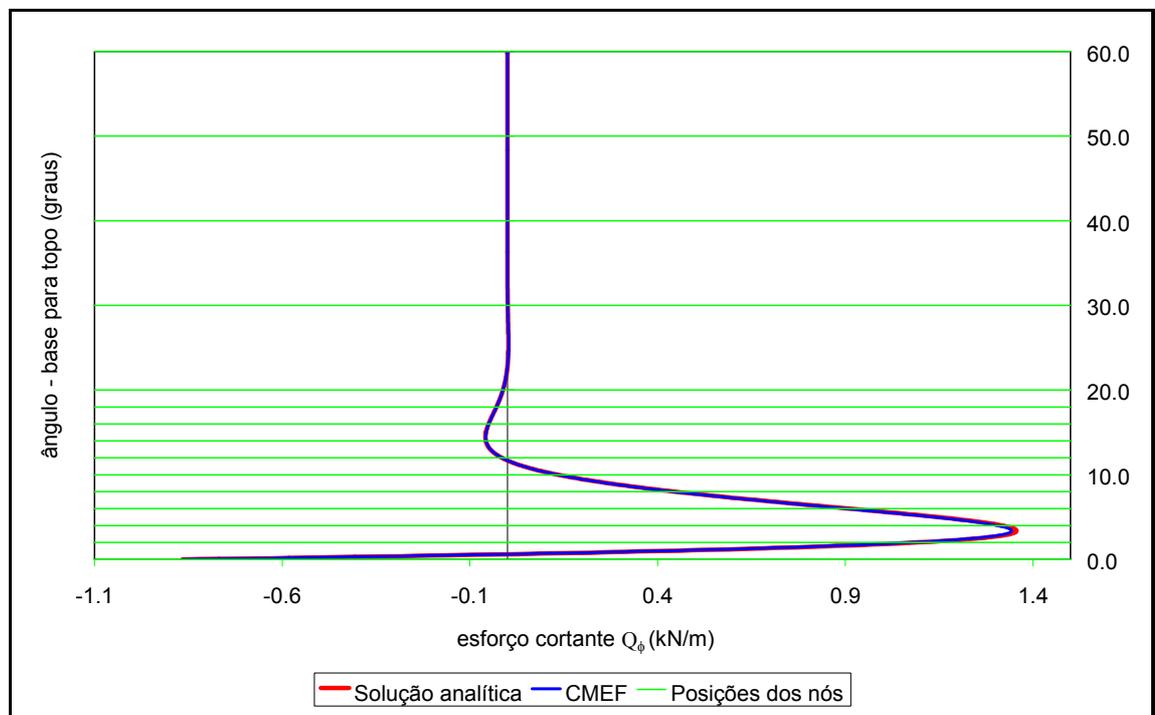


Gráfico 6.8: Curva de esforço cortante  $Q_\phi$  para o caso CMEF.

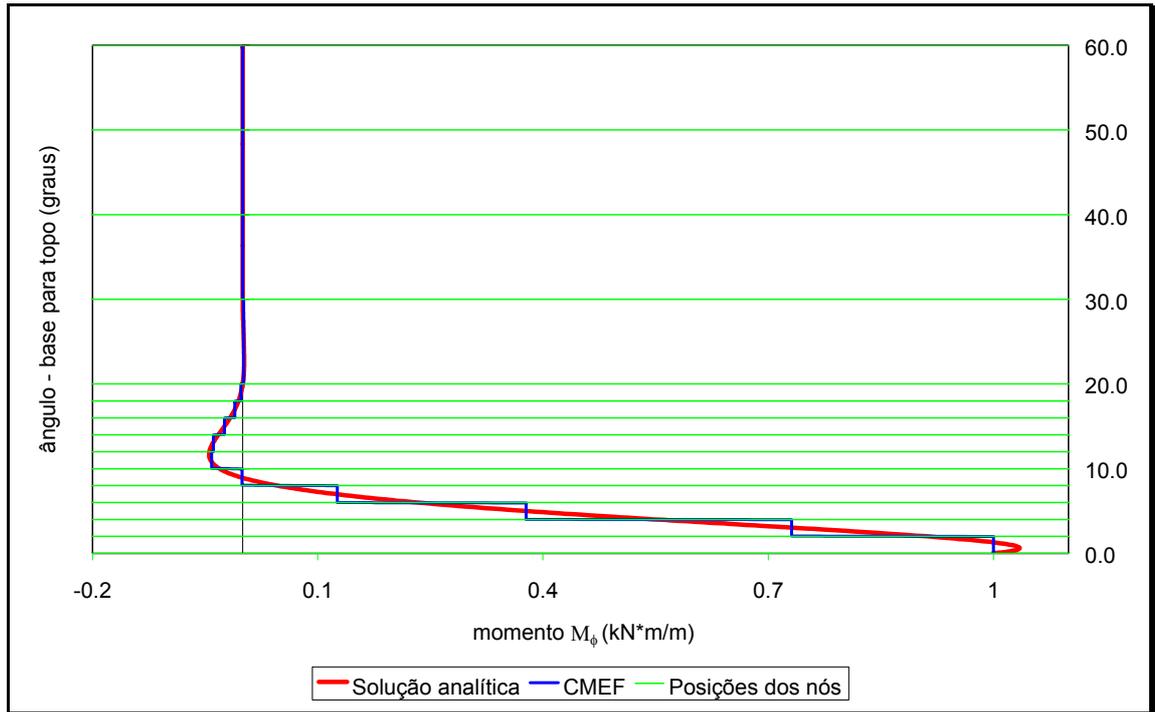


Gráfico 6.9: Curva de momento fletor  $M_\phi$  para o caso CMEF.

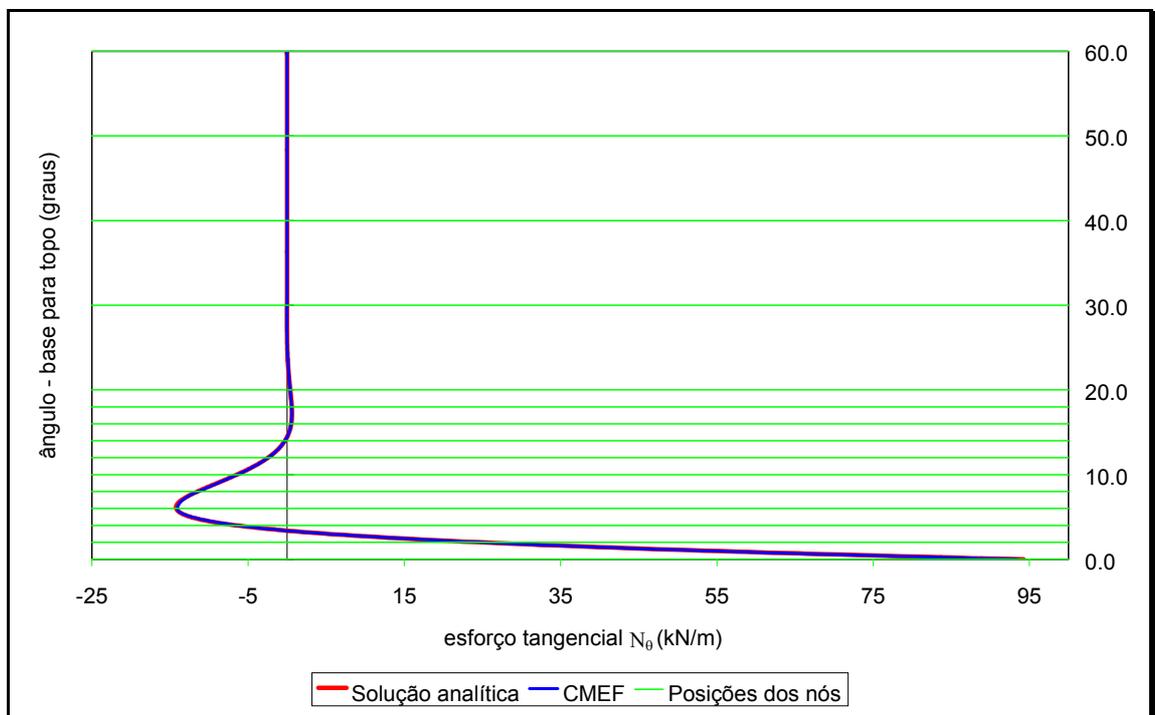


Gráfico 6.10: Curva de esforço tangencial  $N_\theta$  para o caso CMEF.

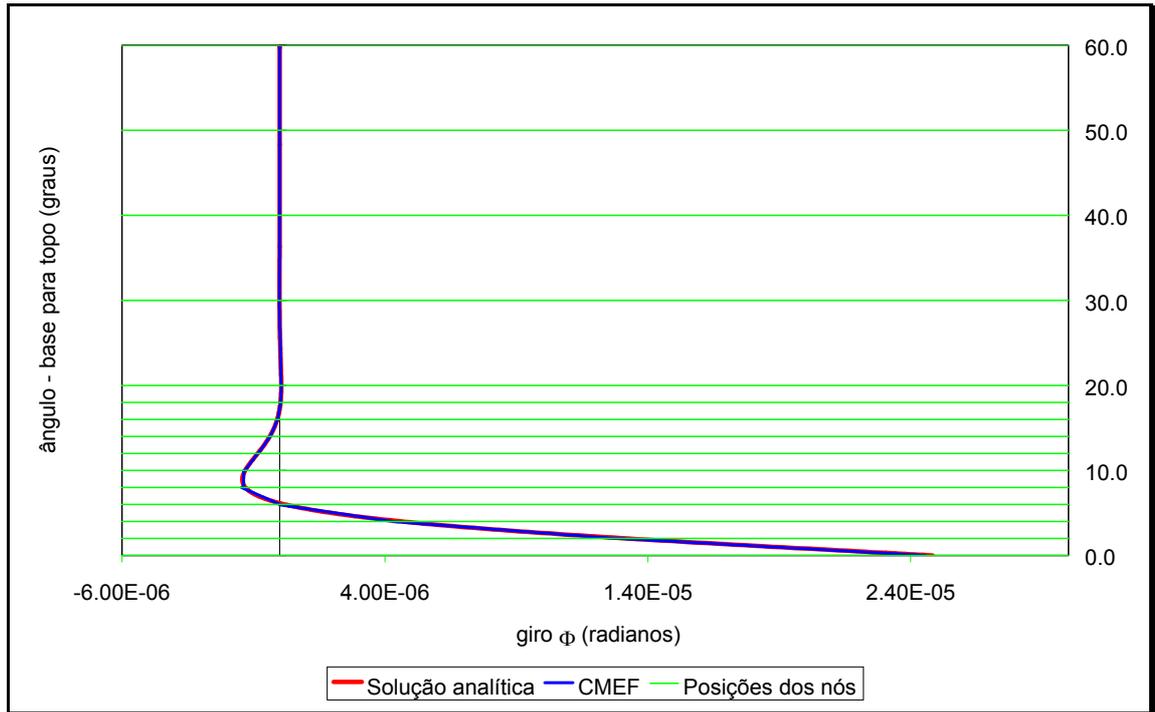


Gráfico 6.11: Curva de giro  $\Phi$  para o caso CMEF.

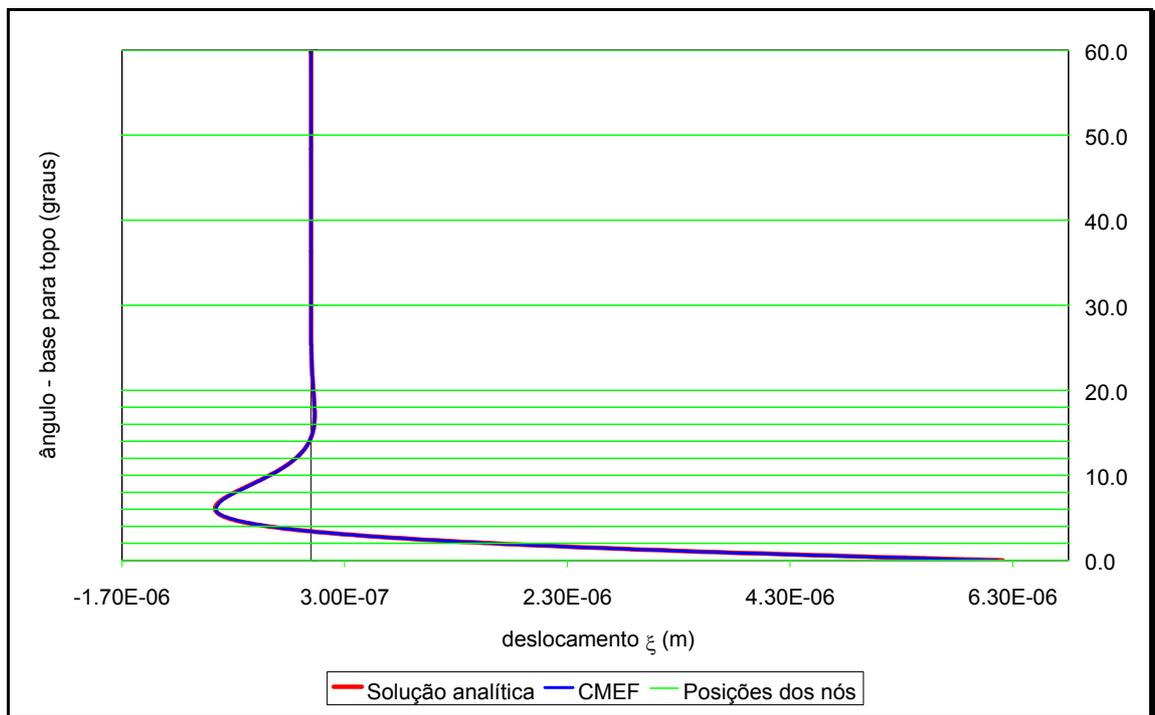


Gráfico 6.12: Curva de deslocamento horizontal  $\xi$  para o caso CMEF.

Uma análise dos gráficos anteriores revela o potencial do refinamento do procedimento CMEF. Nota-se que as respostas para todos parâmetros, exceto momento fletor  $M_\phi$  (gráfico 6.9), são bem próximas das exatas. Mas,

mesmo para  $M_\phi$ , a função aproximada, formada por polinômios lineares, apresenta resposta coerente segundo a teoria apresentada (esse esforço é proporcional à terceira derivada do esforço cortante).

Evidentemente as alternativas de enriquecimento podem ser aplicadas também às cascas esféricas. Particularmente, os enriquecimentos com funções com as características das soluções analíticas podem ser muito eficientes na aproximação dos problemas com efeitos de borda localizados.

Entretanto, de modo a incluir também o caso da casca sob peso próprio, a formulação adequada a ser explorada seria aquela indicada no apêndice A, que considera o problema em forma forte formulado mediante um sistema de duas equações diferenciais.

Essa é, portanto, uma possibilidade clara de prosseguimento para a pesquisa aqui iniciada.

## 7. CONCLUSÕES

Várias conclusões podem ser tiradas dos procedimentos analisados nesta dissertação. Em geral, nota-se o grande potencial do enriquecimento com funções especiais aplicado a reservatório cilíndrico, principalmente em relação à descrição dos esforços.

No caso de reservatório cilíndrico, em se tratando dos procedimentos enriquecidos (RMEFH, RMEFG e RMEFBA), com 10 elementos uniformes, os valores já se mostram satisfatórios, enquanto o RMEF não produz resultados bons o suficiente, mais especificamente em termos de esforços. De fato, os gráficos dos esforços apresentam descontinuidades entre os elementos, já que a base aproximativa hermitiana tem funções com continuidade reduzida nas ordens de derivadas associadas ao momento e à cortante. As descontinuidades nos esforços diminuem com os procedimentos de enriquecimento, quase desaparecendo para o RMEFH e para o RMEFBA. Destaca-se novamente que, com apenas 1 elemento finito, a solução de deslocamento pelo RMEFBA iguala-se à analítica e, com apenas 2 elementos, o mesmo acontece com o RMEFH.

Um último comentário sobre as análises feitas para reservatório cilíndrico é que o enriquecimento pelo RMEFH, aplicado a todas as funções da base hermitiana, produz melhores resultados do que aquele feito com o RMEFG, em que somente funções que formam uma PU são enriquecidas.

Portanto, ao se considerar a PU, os resultados e a eficiência dos procedimentos de enriquecimento dependem fortemente da base aproximativa utilizada. De fato, considerando-se bases muito simples, apesar dos esforços serem mais bem representados, no interior dos elementos, pelos procedimentos enriquecidos em comparação com o MEF convencional, a

continuidade entre os elementos, nas ordens de derivadas, não é necessariamente garantida, pois está atrelada ao grau de continuidade da PU.

Comparando-se as soluções aproximadas não enriquecidas entre casca cilíndrica e esférica, nota-se uma dificuldade maior para se obter respostas coerentes no caso da cúpula. Enquanto o RMEF produz resultados satisfatórios com 10 elementos igualmente espaçados, o CMEF necessita de 40 elementos.

Como propostas para a continuação dos trabalhos têm-se o enriquecimento aplicado ao MEF na análise dos efeitos de borda da casca esférica e a implementação do MEF e dos procedimentos de enriquecimento ao caso de cúpula esférica sujeita a peso próprio, cuja formulação está proposta no apêndice A.

## 8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASSAN, A. E. (2003). *Método dos elementos finitos: primeiros passos*. 2ª ed., Campinas, SP.

BABUŠKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. (1994). Special finite element method for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, v. 31, n. 4, p. 745–981. 1994.

BABUŠKA, I.; MELENK, J. M. (1997). The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 40, p. 727–758.

BARROS, F. B. (2002). *Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas*. 222p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2002.

BATHE, K. J. (1996). *Finite Element Procedures*. Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall.

BECKER, E. B.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. (1986). *Finite Elements. An Introduction*. Vol. 1. Englewood Cliffs, N.J. Prentice Hall.

BELLUZZI, O. (1967). *Ciência de la Contruccion*. Vol. 3. Madrid. Aguilar.

BILLINGTON, D. P. (1965). *Thin shell concrete structures*. McGraw Hill Book Company, Inc.

DUARTE, C. A. (1996). *The hp-cloud method*. Tese (Doutorado)—The University of Texas at Austin. 1996.

DUARTE, C. A.; BABUŠKA, I.; ODEN, J. (2000). Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computers & Structures*, v. 77, n. 2, p. 215–232.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. (1995). *Hp Clouds - A Meshless Method to Solve Boundary- Value Problem*. [S.I.]. Technical Report.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. (1996a). An h-p adaptive method using cloud. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, p. 237–262.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. (1996b). H-p Clouds—an h-p Meshless Method. In: *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. [S.I.]: John Wiley & Sons, Inc., p. 1–34.

GECKELER, J. W. (1926). Ueber die Festigkeit ascensymmetrischer Schalen. *Forschungsarbeiten auf den Gebiete des Ingenieurwesens*, n<sup>o</sup> 276, ed. V.D.I. Berlin.

GRAVINA, P. B. J. (1957). *Teoria e cálculo das cascas*. São Paulo.

MELENK, J. M. *On Generalized Finite Element Methods*. (1995). Tese (Doutorado) - University of Maryland, College Park. 1995.

MELENK, J. M.; BABUŠKA, I. (1996). The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 39, p. 289–314.

ODEN, J. T.; DUARTE, C. A.; ZIENKIEWICZ, O. C. (1996). *A New Cloud-Based hp Finite Element Method*. Austin, Texas, USA.

PROENÇA, S. P. B. (1986). *Diferenças finitas na integração das equações de técnica do meio contínuo*. 174p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 1986.

REDDY, J. N. (1993). *An introduction to the Finite Element Method*. New York. McGraw-Hill.

ROCKEY, K. C.; EVANS, H.R. (1985). *The Finite Element Method – A basic introduction*. New York. John Wiley.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. (1988). *Calculo numérico : aspectos teóricos e computacionais*. São Paulo. McGraw-Hill.

SAVASSI, W. (1996). *Introdução ao método dos elementos finitos: em análise linear de estruturas*. São Carlos, SP. EESC.

SWOKOWSKI (1995). *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo. Makron Books.

TIMOSHENKO, S. (1940). *Theory of Plates and Shells*. Nova York e Londres. McGraw Hill Book Company, Inc.

TORRES, I. F. R. (2003). *Desenvolvimento e aplicação do método dos elementos finitos Generalizados em análise tridimensional não-linear de*

*sólidos*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2003.

VISUAL FORTRAN (1998). *Manuais*.

ZIENKIEWICZ, O. C. (1986). *The Finite element method*. London; New-York. McGraw-Hill.

APÊNDICE A – Proposta de solução aproximada para o problema da casca esférica sujeita a peso próprio

Como visto no capítulo 2, o problema da casca esférica sujeita a peso próprio fica expresso por um sistema de equações diferenciais. Tais equações (eqs. (2.25) e (2.26)) estão repetidas abaixo:

$$\frac{d^2 Q_\phi}{d\omega^2}(\omega) + \frac{dQ_\phi}{d\omega}(\omega) * \cot g(\omega) - Q_\phi(\omega) * \cot^2 g(\omega) + v_C * Q_\phi(\omega) = -E_C * t * \Phi(\omega) + R * g * \text{sen}(\omega) * (2 - v_C) \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\omega^2}(\omega) + \frac{d\Phi}{d\omega}(\omega) * \cot g(\omega) - \Phi(\omega) * \cot^2 g(\omega) - v_C * \Phi(\omega) = \frac{R^2}{D_C} * Q_\phi(\omega) \quad (\text{A.2})$$

Segundo BECKER, CALOZ E ODEN (1986), é possível estender a análise via MEF para sistemas de equações diferenciais.

De início, cada uma das eqs. (A.1) e (A.2) passa a ser substituída por uma forma integral ponderada. Em seguida, realiza-se uma integração por partes das parcelas que envolvem derivadas de segunda ordem de  $Q_\phi$  e  $\Phi$ . Resultam as chamadas formas fracas.

As formas fracas podem então ser “discretizadas” a partir da divisão do domínio de solução em elementos. Para um elemento genérico, considerando-se que  $Q_\phi$  e  $\Phi$  são aproximados por  $\tilde{Q}_\phi$  e  $\tilde{\Phi}$ , respectivamente, resultam:

$$\left[ \frac{d\tilde{Q}_\phi}{d\omega}(\omega) * v(\omega) \right]_{\omega_e}^{\omega_{e+1}} - \int_{\omega_e}^{\omega_{e+1}} \frac{d\tilde{Q}_\phi}{d\omega}(\omega) * \frac{dv}{d\omega}(\omega) * d\omega + \int_{\omega_e}^{\omega_{e+1}} \cot g(\omega) * \frac{d\tilde{Q}_\phi}{d\omega}(\omega) * v(\omega) * d\omega + \int_{\omega_e}^{\omega_{e+1}} (v_C - \cot^2 g(\omega)) * \tilde{Q}_\phi(\omega) * v(\omega) * d\omega + - \int_{\omega_e}^{\omega_{e+1}} E_C * t * \tilde{\Phi}(\omega) * v(\omega) * d\omega = \int_{\omega_e}^{\omega_{e+1}} R * g * \text{sen}(\omega) * (2 - v_C) * v(\omega) * d\omega \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}
& \left[ \frac{d\tilde{\Phi}}{d\omega}(\omega) * \bar{v}(\omega) \right]_{\omega_e}^{\omega_{e+1}} - \int_{\omega_e}^{\omega_{e+1}} \frac{d\tilde{\Phi}}{d\omega}(\omega) * \frac{d\bar{v}}{d\omega}(\omega) * d\omega + \\
& \int_{\omega_e}^{\omega_{e+1}} \cot g(\omega) * \frac{d\tilde{\Phi}}{d\omega}(\omega) * \bar{v}(\omega) * d\omega + \\
& \int_{\omega_e}^{\omega_{e+1}} (-v_C - \cot g^2(\omega)) * \tilde{\Phi}(\omega) * \bar{v}(\omega) * d\omega + \\
& - \int_{\omega_e}^{\omega_{e+1}} \frac{R^2}{D_C} * \tilde{Q}_\phi(\omega) * \bar{v}(\omega) * d\omega = 0
\end{aligned} \tag{A.4}$$

em que  $\omega_e$  e  $\omega_{e+1}$  representam as posições angulares dos nós de extremidade do elemento finito “e”

Segundo o MEF, as interpolações para os campos incógnitos podem ser representadas por:

$$\tilde{Q}_\phi^e(\bar{\omega}) = \sum_{j=1}^{n\phi} \tilde{Q}_j^e * \varphi_j^e(\bar{\omega}) \tag{A.5}$$

$$\tilde{\Phi}^e(\bar{\omega}) = \sum_{j=1}^{n\phi} \tilde{\Phi}_j^e * \varphi_j^e(\bar{\omega}) \tag{A.6}$$

em que:

$n\phi$  é o número de funções de forma  $\varphi$  prescritas em cada elemento “e”;

$\tilde{Q}_j^e$  são os valores nodais relacionados ao esforço cortante e suas derivadas; e

$\tilde{\Phi}_j^e$  são os valores nodais relacionados ao giro e suas derivadas.

Quando se substitui (A.5) e (A.6) em (A.3) e (A.4), encontram-se  $2*n\phi$  equações algébricas. As  $n\phi$  primeiras equações, já em coordenadas angulares locais do elemento, são dadas por (A.7) e as restantes são representadas em (A.8).

$$\int_0^{\omega_E} \left[ \begin{aligned} & -\frac{d\varphi_i(\omega)}{d\omega} * \frac{d\varphi_j(\omega)}{d\omega} * \tilde{Q}_j + \cot g(\omega) * \frac{d\varphi_i(\omega)}{d\omega} * \varphi_j(\omega) * \tilde{Q}_j + \\ & + (v_C - \cot g^2(\omega)) * \varphi_i(\omega) * \varphi_j(\omega) * \tilde{Q}_j + \\ & - E_C * t * \varphi_i(\omega) * \varphi_j(\omega) * \tilde{\Phi}_j \end{aligned} \right] * d\omega = \int_0^{\omega_E} R * g * \text{sen}(\omega) * (2 - v_C) * \varphi_j(\omega) * d\omega \quad (\text{A.7})$$

$$\int_0^{\omega_E} \left[ \begin{aligned} & -\frac{d\varphi_i(\omega)}{d\omega} * \frac{d\varphi_j(\omega)}{d\omega} * \tilde{\Phi}_j + \cot g(\omega) * \frac{d\varphi_i(\omega)}{d\omega} * \varphi_j(\omega) * \tilde{\Phi}_j + \\ & + (-v_C - \cot g^2(\omega)) * \varphi_i(\omega) * \varphi_j(\omega) * \tilde{\Phi}_j + \\ & - \frac{R^2}{D_C} * \varphi_i(\omega) * \varphi_j(\omega) * \tilde{\Phi}_j \end{aligned} \right] * d\omega = 0 \quad (\text{A.8})$$

em que  $\omega_E$  é o ângulo de abertura do elemento “E”.

Portanto, as componentes da matriz do sistema e do vetor de força serão explicitadas a partir de dois tipos de equações. Para  $i$  e  $j$  variando de 1 a  $n\phi$ , tem-se as formas (A.9) e (A.10) e para  $i$  e  $j$  variando de  $(n\phi+1)$  a  $(2 * n\phi)$ , tem-se as formas (A.11) e (A.12).

$$K_{i,j}^e = \int_0^{\omega_E} \left[ \begin{aligned} & -\frac{d\varphi_i(\omega)}{d\omega} * \frac{d\varphi_j(\omega)}{d\omega} + \cot g(\omega) * \frac{d\varphi_i(\omega)}{d\omega} * \varphi_j(\omega) + \\ & + (v_C - \cot g^2(\omega)) * \varphi_i(\omega) * \varphi_j(\omega) + \\ & - E_C * t * \varphi_i(\omega) * \varphi_j(\omega) \end{aligned} \right] * d\omega \quad (\text{A.9})$$

$$F_j^e = \int_0^{\omega_E} R * g * \text{sen}(\omega) * (2 - v_C) * \varphi_j(\omega) * d\omega \quad (\text{A.10})$$

$$K_{i,j}^e = \int_0^{\omega_E} \left[ -\frac{d\varphi_i(\omega)}{d\omega} * \frac{d\varphi_j(\omega)}{d\omega} + \cot g(\omega) * \frac{d\varphi_i(\omega)}{d\omega} * \varphi_j(\omega) + \right. \\ \left. + (-v_C - \cot g^2(\omega)) * \varphi_i(\omega) * \varphi_j(\omega) + \right] * d\omega \quad (\text{A.11})$$

$$-\frac{R^2}{D_C} * \varphi_i(\omega) * \varphi_j(\omega)$$

$$F_j^e = 0 \quad (\text{A.12})$$