

Oscar Javier Begambre Carrillo

DETECÇÃO DE DANO A PARTIR DA RESPOSTA DINÂMICA DA ESTRUTURA:
ESTUDO ANALÍTICO COM APLICAÇÃO A ESTRUTURAS DO TIPO VIGA.

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Tit. José Elias Laier

São Carlos 2004

Dedico às minhas companheiras de todas as horas,
Liliana e Zoraida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. José Elias Laier, pelo privilégio de contar com sua competente orientação durante a realização desta pesquisa.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Estruturas EESC-USP, pela ajuda e colaboração prestadas.

Aos colegas e amigos pela amizade e companheirismo.

A todos os funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas EESC-USP, pelo apoio.

À CAPES, pela bolsa de estudo.

À minha família.

*“Hay hombres que luchan un día y son buenos,
Hay hombres que luchan un año y son mejores,
Hay hombres que luchan muchos años y son muy buenos,
Y hay hombres que luchan toda la vida, esos son los imprescindibles...”*
Berthold Brecht

RESUMO

BEGAMBRE C., O. J. (2004). *Detecção de dano a partir da resposta dinâmica da estrutura: Estudo analítico com aplicação a estruturas do tipo viga*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

O objetivo deste trabalho é estudar métodos dinâmicos de detecção de dano em vigas, em especial os métodos baseados na variação da flexibilidade medida dinamicamente. Os métodos revisados formam parte das técnicas de **Detecção de Dano Não Destrutivas (DDND)**. Nas técnicas **DDND** o dano é localizado por comparação entre o estado sadio e o danificado da estrutura. Neste trabalho, o problema de vibração inverso é apresentado e a matriz de flexibilidade estática da estrutura é determinada a partir de seus parâmetros modais. Com ajuda de um **Modelo de Elementos Finitos (MEF)** são mostrados os diferentes padrões de variação da matriz de flexibilidade produzidos pela presença do dano. Baseando-se nestes padrões é possível identificar a posição do dano dentro da estrutura, como indicado pelos diversos exemplos apresentados.

Palavras-chave: Detecção de dano; Problema inverso de vibração; Parâmetros modais; Matriz de flexibilidade; Dinâmica das estruturas.

ABSTRACT

BEGAMBRE C., O. J. (2004). *Damage detection by structure's dynamic response: An analytical study with applications to beam type structures*. M.Sc. Dissertation – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

The purpose of this work is to study dynamic methods for damage detection in beam structures. The attention is devoted to the methods based on dynamically measured flexibility. The reviewed methods are part of **N**ondestructive **D**amage **D**etection techniques (**NDD**). In the **NDD** techniques the damage is determined through the comparison between the undamaged and damaged state of the structure. In this work the inverse vibration problem is presented and the structure's flexibility matrix calculated from his modal parameters. The **F**inite **E**lements **M**odel (**FEM**) is employed to show that a clear pattern exist for the changes in the flexibility matrix produced due to the presence of damage. The flexibility matrix changes is used to identify and locate damage as indicated by the several examples presented.

Keywords: Damage detection; Inverse vibration problem; Modal parameters; Flexibility matrix; Dynamic of structures.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	10
2.EQUAÇÕES DE MOVIMENTO PARA VIGAS	16
2.1 Introdução.....	16
2.2 Vibração Transversal de uma Viga.....	16
2.3 Vibração Livre não Amortecida: Problema do Auto-valor	19
2.4 Ortogonalidade das Autofunções.....	21
2.5 Frequências e Formas Modais para Vibração Lateral de Viga.....	23
2.5.1 Viga em Balanço	24
2.5.2 Viga Simplesmente Apoiada.....	25
2.5.3 Viga Livre – Livre.....	27
2.4.4 Viga Engastada-Engastada.....	30
2.6 Vibração Livre Amortecida	32
3.EQUAÇÃO DE MOVIMENTO POR ELEMENTOS FINITOS.....	33
3.1 Introdução.....	33
3.2 Elemento Finito Dinâmico de Viga.....	33
3.3 Matriz de Massa do Elemento de Viga.....	38
3.4 Matriz de Amortecimento	39
3.5 Matriz de Rigidez	40
3.6 Vibração Livre não Amortecida: Problema do Auto-valor	40
3.7 Vibração Livre Amortecida: Amortecimento Proporcional (Clássico)	44
3.8 Vibração Livre Amortecida: Amortecimento não Proporcional (não Clássico).	45
4. MÉTODOS DINÂMICOS DE DETECÇÃO DE DANO.....	48
4.1 Introdução.....	48
4.2 Classificação dos métodos.....	52
4.2.1 Variações de Frequência	53
4.2.2 Variações das Formas Modais.....	56

4.2.3 Variações da Curvatura das Formas Modais e Variações da Energia de Deformação.....	58
4.2.4 Métodos de Ajuste de Matriz ou Métodos de Ajuste de Modelos.....	62
4.2.5 Métodos Baseados na Flexibilidade Medida Dinamicamente.....	66
4.2.5.1 Método da Variação de Flexibilidade ou Método da Diferença de Flexibilidade.....	67
4.2.5.2 Método da Checagem da Unidade.....	71
4.2.5.3 Método da Matriz Erro de Rigidez.....	71
4.2.5.4 Método da Variação de Curvatura da Flexibilidade.....	72
4.2.6 Métodos não Lineares.....	73
5. EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	76
5.1 Introdução.....	76
5.2 Viga em balanço.....	77
5.3 Viga Simplesmente apoiada.....	82
5.4 Viga Livre – livre.....	86
5.5 Dano Múltiplo: Viga simplesmente apoiada.....	90
5.6 Discussão de Resultados e Comentários.....	93
6. CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....	96
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	98
ANEXO A – LISTAGEM DO PROGRAMA.....	103

1. Introdução

A tarefa de detectar dano em uma estrutura utilizando sua resposta dinâmica está longe de ser um problema resolvido, devido à grande quantidade de variáveis que podem ter influência na sua resposta dinâmica, mesmo que as variações decorrentes não sejam necessariamente indicadoras da existência de dano. Neste trabalho, as máximas variações nas frequências naturais encontradas foram da ordem de 4.23% para a viga em balanço, de 2.98% para a viga simplesmente apoiada e de 3.7% para a viga livre-livre. Sendo que todas elas foram calculadas em condições ideais. Quando estas variações são comparadas às variações devidas a fatores ambientais reportadas na literatura, algo da ordem de 6%, fica evidente a necessidade de se incluir nos algoritmos de detecção a modelagem dos efeitos ambientais no comportamento dinâmico da estrutura. Um método geral de detecção que possa ser aplicado a todo tipo de estruturas deveria incorporar, entre outros elementos, a influência de fatores ambientais, das condições reais de construção, das propriedades físicas dos materiais e dos métodos experimentais na determinação dos parâmetros modais da estrutura e seu monitoramento durante longos períodos de tempo.

Monitorar e detectar dano estrutural em suas primeiras etapas é de grande interesse nas áreas de engenharia civil, mecânica e aeroespacial, já que quase toda indústria deseja detectar danos em sua infraestrutura da forma mais rápida possível, devido aos grandes benefícios econômicos, e de diminuição de risco a vida humana, que esta tecnologia potencialmente oferece.

O dano pode ser definido, em termos gerais, como as variações introduzidas em um sistema, que afetam adversamente seu atual ou futuro desempenho. Implícito nesta definição está o conceito de que dano não tem significado sem uma comparação entre dois diferentes estados do sistema, um dos quais é assumido como o inicial e quase sempre é o estado não danificado.

Os atuais métodos de detecção de dano são visuais ou experimentais localizados, tais como análise de imagens tomográficas (NAGY *et. al*, 2003), métodos acústicos ou de ultra-som, métodos de campo magnético, raios X, corrente de Eddy e métodos de campo térmico (DOHERTY, 1987). Todas estas técnicas experimentais necessitam que a vizinhança do dano seja conhecida *a priori* e que a porção da estrutura a se inspecionar seja acessível. Além destas limitações, estes métodos só podem detectar dano em ou próximo da superfície da estrutura.

A necessidade de um método de detecção de dano global que possa ser aplicado a estruturas complexas tem conduzido ao desenvolvimento de métodos que examinam variações nas características de vibração da estrutura. Estes métodos formam parte das técnicas de **Detecção de Dano Não Destrutivas (DDND)**.

A idéia básica da detecção de dano é a de que os parâmetros modais (frequências, formas modais e amortecimento modal), que são funções das propriedades físicas da estrutura (massa, amortecimento e rigidez), ao experimentar qualquer mudança destas propriedades causarão mudança nos parâmetros modais. Este fato permite a detecção de dano a partir da resposta dinâmica da estrutura.

Em muitos dos métodos propostos, os dados medidos em um experimento são usados para refinar ou modificar o modelo de elementos finitos (**MEF**), de forma tal que o modelo faça previsões acuradas do comportamento dinâmico observado da estrutura, possibilitando a determinação da posição do dano (FRISWELL E MOTHERSHEAD (1995)).

Essa mencionada abordagem do problema é recomendável para estruturas complexas, porem o uso de modos individuais no ajuste produz algumas dificuldades, tais como:

- Seleção dos modos a serem utilizados, quer dizer, que o analista deve escolher os modos e frequências que serão usadas no algoritmo de detecção.
- Este tipo de métodos precisa reduzir o modelo numérico empregado ou de expandir os dados modais medidos, devido ao fato de que nem todos os graus de liberdade considerados no modelo numérico podem ser tratados experimentalmente (dificuldades de ordem pratica).

- Uma outra dificuldade mencionada por Doebling, Peterson e Kenneth (1996) é o alto custo computacional de minimizar uma norma de erro não linear.

Por estas razões, métodos de detecção que relacionem diretamente o dano com a resposta da estrutura estão sendo cada vez mais empregados na engenharia civil. Dentre estes métodos pode-se mencionar: **Variações das Formas Modais** (e frequências modais). **Variações da Curvatura das Formas Modais**, **Variações da Matriz de Flexibilidade** e **Variações da Curvatura da Flexibilidade**.

Devido a que as formas modais são altamente influenciadas por danos locais, elas também podem ser usadas de forma efetiva para localizar danos (PANDEY, BISWAS E SAMMAN 1991, FOX 1992 E SALAWU E WILLIAMS 1994).

Recentemente, a matriz de flexibilidade medida dinamicamente tem sido usada para detecção de danos em pontes (JAUREGUI E FARRAR, 1996a, 1996b E DOEBLIG E FARRAR, 1996) e fuselagens de aviões (ROBINSON *ET.AL.* 1996) e as Curvaturas das Formas Modais tem sido empregadas para localizar dano em pontes (WAHAB E DE ROECK, 1999).

O interesse principal do presente trabalho esta no estudo e formulação de métodos analíticos de detecção de dano via análise da resposta dinâmica da estrutura, em especial os baseados na variação de flexibilidade medida dinamicamente (métodos baseados na resposta da estrutura). Para isto é apresentado o problema inverso de vibração, uma vez que ele inclui a derivação das relações entre a matriz de rigidez, a matriz de flexibilidade estrutural e os parâmetros modais da estrutura.

Aplicam-se os métodos propostos por Pandey e Biswas (1994), (1995) e Lu, Ren e Zhao (2002), para detecção de dano em vigas, mediante implementação de um programa computacional e da realização de simulações numéricas com os seguintes cenários de dano: Dano Individual, Dano Múltiplo, Influencia do nível de Dano introduzido e das condições de contorno. É testada a eficácia dos métodos na detecção de dano em cada um dos cenários mencionados assim como também é estudado o efeito do número de modos utilizados na detecção.

O Método de Elementos Finitos (MEF) foi usado para realizar as simulações numéricas. O elemento finito dinâmico de viga utilizado (modelo de Euler – Bernoulli) tem dois graus de liberdade por nó (rotação e deslocamento vertical), com sua massa concentrada nos nós.

Os parâmetros modais (formas modais e frequências naturais) foram calculados a partir do problema de auto-valor generalizado para vibração livre não amortecida, que é governado pela clássica relação matricial:

$$[K]\{q\} = \omega^2 [M]\{q\} \quad (1.1)$$

Onde:

$[K]$ = Matriz de rigidez global da estrutura.

$[M]$ = Matriz de massa global da estrutura.

$\{q\}$ = Auto-vetor ou forma modal do sistema.

ω = Frequência natural do sistema.

O Fluxograma geral do programa que foi implementado para realizar os exemplos incluídos neste estudo é apresentado na figura 1 a título de informação preliminar:

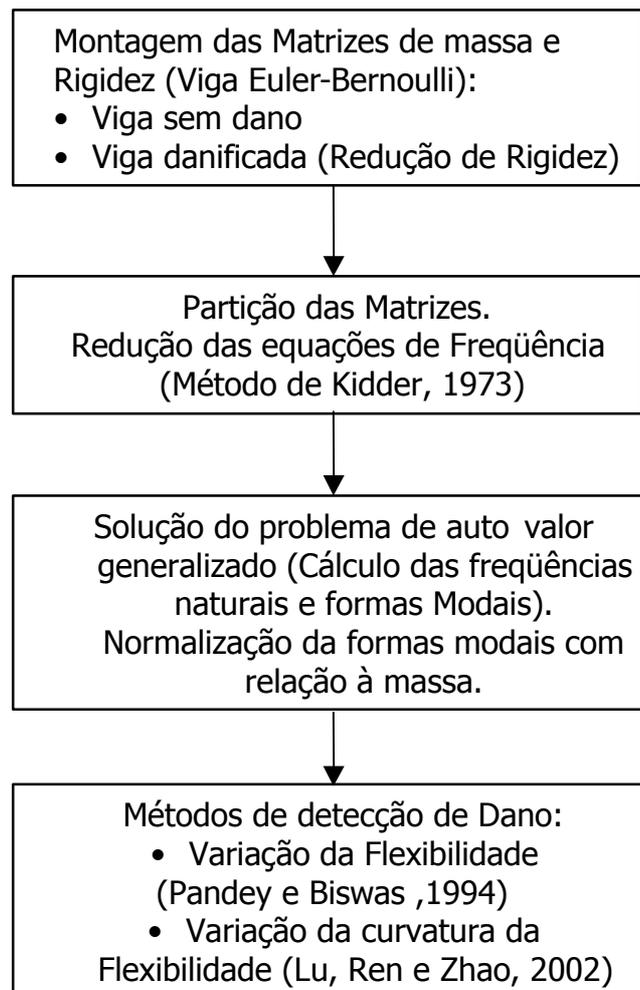


Figura 1. Fluxograma geral para simular e detectar danos em vigas.

Como as estruturas analisadas neste trabalho (vigas), foram modeladas com elementos finitos unidimensionais (elemento de Euler –Bernoulli) e o dano nas vigas modelado como uma redução do módulo de elasticidade para um elemento específico (e não como um defeito geométrico a exemplo de fissura), os resultados obtidos nas simulações são indicadores de dano, sendo o dano entendido (e simulado) como uma variação nas propriedades constitutivas do modelo de elementos finitos da estrutura (CAWLEY E ADAMS 1979, FOX 1992, PANDEY E BISWAS 1994 E 1995, HJELMSTAD E SHIN 1996 E LU, REN E ZHAO 2002).

O conteúdo deste trabalho é agora, no que se segue, objeto de exposição mais detalhada.

Nos capítulos dois e três é apresentado um completo estudo teórico sobre a determinação dos parâmetros de vibração de vigas (frequências naturais e formas modais), oferecendo-se tanto a solução exata do problema quanto a solução aproximada do mesmo. No capítulo dois, a equação de movimento para o modelo de viga de Euler-Bernoulli é estabelecida e sua solução feita através do método de separação de variáveis, chegando-se no problema de auto-valor para sistemas contínuos. A solução do problema do auto-valor para vibração livre não amortecida fornece os parâmetros de vibração para as vigas. Estes parâmetros são calculados para a viga em balanço, viga simplesmente apoiada, viga com ambos os extremos livres e para uma viga bi-engastada. No capítulo três, apresenta-se o elemento finito dinâmico de viga, que foi utilizado para elaborar os exemplos do capítulo cinco. O problema de auto-valor para vibração livre não amortecida e amortecida é estudado e sua solução, neste caso, fornece os parâmetros de vibração para vigas, modeladas como sistema discreto. Estes parâmetros são ferramentas fundamentais para os métodos de detecção de dano, objeto do capítulo quatro.

O Capítulo quatro proporciona uma visão ampla sobre os diversos métodos de detecção de dano, via resposta dinâmica da estrutura, reportados na literatura. Estes métodos são conhecidos como técnicas de detecção de dano não destrutivas (**DDND**). Aqui é estudado o problema de vibração inverso, e cuja solução pode ser usada para detectar danos.

Diversos exemplos de aplicação dos algoritmos de detecção de dano baseados na flexibilidade medida dinamicamente são apresentados no capítulo cinco, todos eles elaborados com base no programa implementado em linguagem Fortran, apresentado no

(anexo A). Neste capítulo fez-se um amplo estudo, que inclui diversos cenários de dano e condições de contorno.

No capítulo Seis são apresentadas as conclusões da dissertação, encerrando-se a exposição do tema naquilo que mais de perto interessa.

2. Equações de Movimento para Vigas

2.1 Introdução

A resposta dinâmica de um sistema estrutural contínuo é dada pela solução das equações diferenciais que o governam o movimento, as quais por sua vez devem satisfazer certas condições prescritas ao longo do contorno. O conjunto de equações diferenciais parciais que governam o problema, junto com as condições de contorno prescritas é conhecido como Problema de Valor de Contorno.

No caso mais geral, o problema do movimento estrutural envolve as três coordenadas espaciais e uma coordenada temporal. A formulação das equações do problema e das condições de contorno é em quase todos os casos, direta. Porém, a solução analítica do problema, na maioria dos casos é impossível ou muito difícil de se obter. Uma solução matemática exata em forma fechada só existe para problemas com geometrias simples e/ou com propriedades uniformes do material. É por este motivo que muitos problemas práticos devem ser resolvidos por métodos aproximados ou métodos numéricos. No caso das vigas é possível de se obter uma solução analítica do problema para vários tipos de condições de contorno, a qual fornece uma visão do comportamento do sistema, além de ajudar na formulação e validação de métodos aproximados e de métodos numéricos para resolver o problema de vibração.

2.2 Vibração Transversal de uma Viga

A figura 2 mostra uma viga com rigidez à flexão $EI(x)$ e massa $m(x)$ por unidade de comprimento e comprimento L , em função da coordenada espacial x . A viga é considerada vibrando no seu plano sob a ação da força $P(x,t)$. O deslocamento transversal é representado em função da coordenada temporal t e da coordenada espacial x , e denominado por $U(x,t)$ ou simplesmente U .

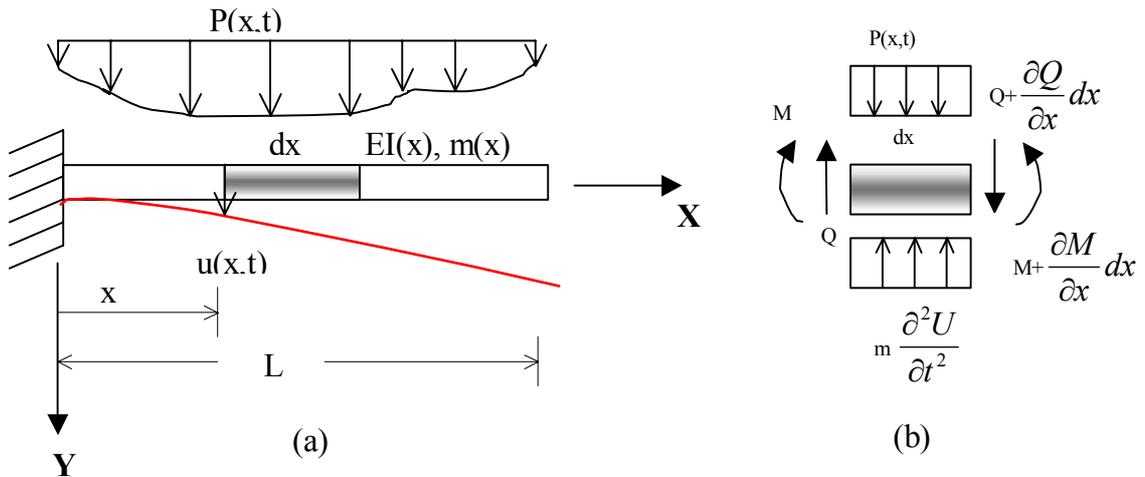


Figura 2. Vibração lateral de Viga.

Tendo-se em conta a teoria de pequenos deslocamentos, e sem se levar em conta a deformação por cortante nem a inércia de rotação, admitindo-se distribuição linear de tensões, e aplicando-se o modelo Kelvin para materiais visco-elásticos, pode-se formular a equação para a vibração de vigas (flexão simples) da forma exposta no que segue.

O equilíbrio de momentos para um elemento diferencial (figura 2b), implica em:

$$-\frac{\partial M}{\partial x} dx + Q dx = 0 \therefore \frac{\partial M}{\partial x} = Q \quad (2.1)$$

onde se desprezam os termos de ordem superior. O momento de flexão denomina-se M e o esforço cortante Q .

Aplicando-se a segunda lei de Newton na direção Y tem-se:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -P(x,t) \quad (2.2)$$

onde m é a massa por unidade de comprimento e $P(x,t)$ a carga distribuída atuante.

A teoria elementar da flexão ao assumir a permanência de seções planas na deformação por flexão prescreve:

$$\varepsilon_x = -y \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (2.3)$$

onde ε_x é a deformação da fibra longitudinal da viga no nível y .

Tendo-se em conta o modelo Kelvin (WARBURTON, 1976), a relação entre tensões e deformações fica:

$$\sigma_x = E \left[\varepsilon_x + c \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} \right] = -Ey \left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right] \quad (2.4)$$

onde E é o módulo de elasticidade, c o fator de amortecimento e σ_x a tensão normal.

Tendo-se em vista que o momento de flexão atende a relação:

$$M = \int_A \sigma_x \cdot y \cdot dA \quad (2.5)$$

onde A é a área da seção transversal da viga, substituindo-se a eq. (2.4) na (2.5) tem-se:

$$M = -E \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right) \cdot \int_A y^2 dA \quad (2.6a)$$

Por outro lado, para uma viga de seção constante pode-se escrever:

$$M = -EI \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right) \quad (2.6b)$$

Além disso, das eqs.(2.1), (2.2) e (2.6b) pode-se então concluir:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + c \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} \right) \right] + m \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = P(x, t) \quad (2.7)$$

Mais ainda, designando-se a derivada com relação ao tempo por um ponto acima da variável (\dot{U}), e a derivada com relação ao espaço por um número romano como expoente (U^I), pode-se escrever a eq.(2.7) da forma seguinte:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \left(U^{II} + c \dot{U}^{II} \right) \right] + m \ddot{U} = P(x, t) \quad (2.8)$$

A eq.(2.8) é, pois, a equação diferencial parcial de segunda ordem que governa a vibração transversal de viga, segundo o clássico **modelo Euler-Bernoulli**, no qual despreza-se o efeito da deformação por cisalhamento e a inércia de rotação (HUMAR, 1990).

Dada a ordem das derivadas presentes em (2.8), para obter solução única desta equação deve-se especificar quatro condições de contorno e duas condições iniciais. A notação apresentada na eq.(2.8) para as derivadas será empregada no restante deste estudo.

Por exemplo, para uma viga simplesmente apoiada as 4 condições de contorno ficam:

$$\begin{aligned} U(x=0,t) = 0 & & EIU''(x=0,t) = 0 \\ U(x=L,t) = 0 & \text{ e } & EIU''(x=L,t) = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

sendo as duas condições iniciais:

$$\begin{aligned} U(x,t=0) &= f(x) \\ \dot{U}(x,t=0) &= f_v(x) \end{aligned} \quad (2.10)$$

onde as funções $f(x)$ e $f_v(x)$ indicam condições de deslocamentos e velocidades iniciais ao longo da viga, podendo ser nulas no caso de repouso.

Para uma viga engastada – livre (figura 2) as condições de contorno são:

$$\begin{aligned} U(x=0,t) &= 0 \\ U'(x=0,t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.11)$$

e

$$\begin{aligned} EIU''(x=L,t) &= 0 \\ EIU'''(x=L,t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

com as condições iniciais definidas pela equação (2.10).

Para uma viga livre-livre tem-se:

$$\begin{aligned} EIU''(x=0,t) = EIU''(x=L,t) &= 0 \\ EIU'''(x=0,t) = EIU'''(x=L,t) &= 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

com as condições iniciais indicadas pela equação (2.10).

Existem outros tipos de condições de contorno, como, por exemplo, no caso da vibração de uma viga em balanço com um disco rígido soldado na extremidade livre (massa concentrada), mas não serão abordadas na presente discussão.

2.3 Vibração Livre não Amortecida: Problema do Autovalor

A equação de vibração livre não amortecida para uma viga com produto de rigidez $EI(x)$ e massa distribuída $m(x)$ constantes obtém-se da eq.(2.8) fazendo-se $c = 0$ e $P(x, t) = 0$, ou seja:

$$EI \cdot U^{IV} + m\ddot{U} = 0 \quad (2.14)$$

que se constitui numa equação diferencial parcial homogênea linear de quarta ordem. Adotando-se como solução da eq.(2.14) uma função da forma:

$$U(x,t) = u(x) \cdot T(t) \quad (2.15)$$

onde se emprega a técnica da separação de variáveis, sendo $u(x)$ uma função só da variável x e $T(t)$ uma função exclusiva do tempo. Substituindo-se a eq.(2.15) na (2.14) tem-se:

$$\frac{u^{IV}}{\frac{m}{EI} \cdot u} = -\frac{\ddot{T}}{T} = \omega^2 \quad (2.16)$$

Como os termos da esquerda da eq.(2.16), incluindo a massa m e a rigidez à flexão EI , são funções só de x , enquanto que os termos da direita são funções só do tempo, tal igualdade será válida, se e só se, ambas as partes da equação forem iguais a uma constante, geralmente chamada de **constante de separação**. Admitindo-se por conveniência uma **constante de separação** quadrática ω^2 (a constante de separação ω^2 deve ser positiva para garantir que a função $T(t)$ seja harmônica), a eq.(2.16) permite, pois explicitar duas equações separadas, ou seja:

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0 \quad (2.17)$$

e

$$u^{IV} - \omega^2 \cdot \frac{m}{EI} \cdot u = 0 \quad (2.18)$$

A solução da equação (2.17) é do tipo:

$$T = F \sen \omega \cdot t + G \cos \omega \cdot t \quad (2.19)$$

sendo que as duas constantes F e G devem ser determinadas das condições iniciais do problema.

Vale observar que se como constante de separação tivesse sido escolhido um número negativo, a solução para a função $T(t)$ envolveria um deslocamento com crescimento exponencial, que é inadmissível para o problema físico tratado.

As condições de contorno quando o deslocamento é da forma da eq.(2.15) podem ser escritas em forma resumida como:

$$\left((EI \cdot u^{II}) (u^I) \right)_0^L = 0 \quad (2.20a)$$

$$\left((EI \cdot u^{III}) (u) \right)_0^L = 0 \quad (2.20b)$$

Para a eq.(2.20a) ser satisfeita duas possibilidades existem. A primeira consiste na nulidade do momento $EIu^{II} = 0$, e a segunda na nulidade da declividade $U^I = 0$. A

eq.(2.20b) será satisfeita se o esforço cortante se anula $EIu''' = 0$, ou então se o deslocamento não ocorre $U = 0$.

A eq.(2.18) junto com as condições dadas pelas eqs.(2.20), representa um **problema de auto-valor** em termos de funções para vibração transversal de vigas (modeladas como sistemas contínuos).

Mediante substituição, pode-se verificar que $\mathbf{u}(x)=\mathbf{0}$ é uma possível solução da Eq.(2.18), porém, esta solução é trivial e de pouco interesse, já que, não representa movimento do sistema. Uma solução não trivial é possível só para valores especiais de ω^2 . Em geral, existem infinitos valores da constante de separação, separados por intervalos discretos, que satisfazem à equação (2.18), e esses valores são chamados de **autos-valores** do sistema. A raiz quadrada do auto-valor, ω , é conhecida como a **freqüência natural** do sistema. Correspondendo a cada auto-valor, existe uma solução para $\mathbf{u}(x)$, chamada de **auto-função** ou **forma modal**. Cada par $(\omega_i, u_i(x))$ é conhecido como modo de vibração natural da viga. A autofunção $u_i(x)$ representa a “deformada” da viga para o modo de vibração i , com $i = 1, \dots, \alpha$.

2.4 Ortogonalidade das Autofunções

Admitindo-se que ω_i^2 e ω_j^2 são dos autos valores da viga, e que $\mathbf{u}_i(x)$ e $\mathbf{u}_j(x)$ são as autofunções correspondentes e sabendo-se que as autofunções devem satisfazer a eq.(2.18), pode-se escrever:

$$\{EI \cdot u_i(x)'''\}' = \omega_i^2 m u_i(x) \quad (2.21)$$

$$\{EI \cdot u_j(x)'''\}' = \omega_j^2 m u_j(x) \quad (2.22)$$

Multiplicando-se ambos os lados da eq.(2.21) por \mathbf{u}_j e integrando-se sobre o comprimento (omitindo-se a parte que indica função de x), tem-se:

$$\int_0^L u_j u_i'''' EI \cdot dx = \omega_i^2 \int_0^L m u_j u_i dx \quad (2.23)$$

Reduzindo-se a parte esquerda da eq.(2.23) mediante integrações parciais sucessivas, e usando o fato de que \mathbf{u}_i e \mathbf{u}_j devem satisfazer as condições de contorno nos dois extremos da viga, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int_0^L u_j u_i^{IV} EI \cdot dx &= u_j u_i^{III} EI \Big|_0^L - \int_0^L u_j' u_i^{III} EI \cdot dx \\
&= u_j EI \cdot u_i'' \Big|_0^L + \int_0^L u_j'' EI u_i'' dx \\
&= \int_0^L EI u_i'' u_j'' dx
\end{aligned} \tag{2.24}$$

A eq.(2.23) fica com isso reduzida a:

$$\int_0^L EI \cdot u_i'' u_j'' dx = \omega_i^2 \int_0^L m u_i u_j dx \tag{2.25}$$

Agora, multiplicando-se ambos os lados da eq.(2.22) por u_i , e integrando-se sobre o comprimento, tem-se:

$$\int_0^L u_i EI u_j^{IV} dx = \omega_j^2 \int_0^L m u_i u_j dx \tag{2.26}$$

Reduzindo-se a eq.(2.26) de igual forma que a eq.(2.23), chega-se em:

$$\int_0^L EI \cdot u_i'' u_j'' dx = \omega_j^2 \int_0^L m u_i u_j dx \tag{2.27}$$

Subtraindo-se a eq.(2.27) da eq.(2.25):

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \int_0^L m u_i u_j dx = 0 \tag{2.28}$$

Ou ainda:

$$\int_0^L m u_i u_j dx = 0 \tag{2.29}$$

dado que $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$.

Substituindo-se a eq.(2.29) na eq.(2.23) e na eq.(2.26) tem-se:

$$\int_0^L u_i EI \cdot u_j^{IV} dx = \int_0^L u_j EI \cdot u_i^{IV} dx = 0 \tag{2.30}$$

As equações (2.29) e (2.30) expressam a propriedade de ortogonalidade das **auto-funções**. Esta propriedade indica que **auto-funções** correspondentes a dois autos valores diferentes são ortogonais entre si.

Se u_i for uma solução da eq.(2.18), poder-se-ia verificar facilmente, por substituição, que ηu_i , sendo η uma constante, também será uma solução da eq.(2.18).

Além disso, se u_i satisfizer as condições de contorno dadas pelas eqs.(2.20), ηu_i também satisfará essas mesmas condições.

É evidente, então, que a magnitude das autofunções não é única e que elas podem ser escaladas na forma que se desejar. O procedimento de se escalar as autofunções é chamado de **normalização**. Existem diversos procedimentos de normalização, porém um dos mais convenientes, desde o ponto de vista da dinâmica de estruturas, é o de normalização com relação à massa, dado pela seguinte equação:

$$\int_0^L m \phi_i^2(x) dx = 1 \quad (2.31)$$

onde $\phi_i(x)$ é uma auto-função normalizada com relação á massa. Um comentário final sobre as autofunções é que duas autofunções com autos valores idênticos não são necessariamente ortogonais entre si, porém, elas serão ortogonais com todas as outras autofunções que tiverem diferentes autos-valores. Autofunções dentro de um conjunto com o mesmo auto-valor, não são únicas, qualquer combinação linear de dois ou mais membros do conjunto, será também uma autofunção do sistema.

2.5 Freqüências e Formas Modais para Vibração Lateral de Viga

Para o caso especial de uma viga uniforme, sem se levar em conta a inércia de rotação, o amortecimento e a deformação por cortante, o problema de auto-valor tem a forma eq.(2.18), ou seja:

$$EI \cdot u^{IV} = \omega^2 m u \quad (2.32)$$

Fazendo-se agora:

$$\frac{\omega^2 m}{EI} = \lambda^{*4} \quad (2.32a)$$

a eq.(2.32) fica:

$$u^{IV} - \lambda^{*4} u = 0 \quad (2.33)$$

cuja solução é dada por:

$$u = A e^{\alpha \cdot x} \quad (2.34)$$

Substituindo-se a eq.(2.34) e suas quatro derivadas sucessivas na eq.(2.33), tem-se finalmente a equação característica:

$$\left(\alpha^2 - \lambda^{*2}\right)\left(\alpha^2 + \lambda^{*2}\right) = 0 \quad (2.35)$$

cujas raízes são:

$$\alpha = \pm \lambda^*$$

e

$$\alpha = \pm i \cdot \lambda^*$$

Portanto, uma solução geral da eq.(2.33) é então dada por:

$$u = A \operatorname{sen} \lambda^* x + B \cos \lambda^* x + C \operatorname{senh} \lambda^* x + D \operatorname{cosh} \lambda^* x \quad (2.36)$$

onde A , B , C e D são constantes arbitrárias que devem ser determinadas a partir das condições de contorno do problema, como mostrado nas seções seguintes.

2.5.1 Viga em Balanço

Para uma viga em balanço de seção uniforme e comprimento L , as condições de contorno são:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u'(0) &= 0 \\ u''(L) &= 0 \\ u'''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.37)$$

Substituindo-se a eq.(2.36) e suas derivadas nas eqs.(2.37), obtém-se as seguintes quatro equações lineares nas constantes A , B , C e D :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen} \lambda^* L & -\operatorname{cos} \lambda^* L & \operatorname{senh} \lambda^* L & \operatorname{cosh} \lambda^* L \\ -\operatorname{cos} \lambda^* L & \operatorname{sen} \lambda^* L & \operatorname{cosh} \lambda^* L & \operatorname{senh} \lambda^* L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

As eqs.(2.38) são um conjunto de equações homogêneas, que tem uma solução diferente de zero para os coeficientes A , B , C e D , se e só se, o determinante da matriz for igual a zero. Isto impõe a seguinte condição:

$$\operatorname{cosh} \lambda^* L \cdot \cos \lambda^* L + 1 = 0 \quad (2.39)$$

conhecida como **equação de freqüência**. A solução da equação transcendente (2.39) pode ser obtida por diversos métodos numéricos. Esta equação produz um número infinito de raízes (valores λ_i^*), e portanto de freqüências ω_i . As freqüências naturais do sistema ω_i podem ser calculadas da seguinte forma. Fazendo-se $\lambda_i = \lambda_i^* L$ (Raízes da equação de freqüência) e utilizando a eq.(2.32a) tem-se:

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^*}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Onde :

$$\lambda_i \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1.8751 \\ \lambda_2 = 4.6941 \\ \lambda_3 = 7.854 \\ \lambda_i = (2i-1)\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (2.40a)$$

$$i = 1, \dots, \alpha$$

Para a cada valor de λ_i^* , pode se obter uma autofunção $u(x)$, substituindo λ_i^* nas eqs.(2.38) e calculando-se os coeficientes **A**, **B**, **C**, a partir de um valor unitário, por exemplo, arbitrado para a constante **D** (**D=1**). Com os coeficientes assim determinados a eq.(2.36) fornece as formas modais do sistema, que para a viga em balanço são:

$$u_i = \cosh \lambda_i^* x - \cos \lambda_i^* x + \left[\frac{\cosh \lambda_i^* L + \cos \lambda_i^* L}{\sinh \lambda_i^* L + \sin \lambda_i^* L} \right] [\sinh \lambda_i^* x - \sin \lambda_i^* x] \quad (2.40b)$$

$$\text{com } i = 1, \dots, \alpha$$

2.5.2 Viga Simplesmente Apoiada

Neste caso as condições de contorno são:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ EI \cdot u''(0) &= 0 \\ u(L) &= 0 \\ EI \cdot u''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

Mais uma vez, substituindo-se a eq.(2.36) e sua segunda derivada nas eq.(2.41), chega-se no seguinte sistema homogêneo de equações:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ \operatorname{sen} \lambda^* L & \cos \lambda^* L & \operatorname{senh} \lambda^* L & \cosh \lambda^* L \\ -\operatorname{sen} \lambda^* L & -\cos \lambda^* L & \operatorname{senh} \lambda^* L & \cosh \lambda^* L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

Das duas primeiras eqs. (2.42) sabe-se que $\mathbf{B}=\mathbf{D}=\mathbf{0}$. Substituindo-se este resultado nas duas ultimas eqs.(2.42) tem-se:

$$C \operatorname{senh} \lambda^* L = 0 \quad (2.43)$$

$$A \operatorname{sen} \lambda^* L = 0 \quad (2.44)$$

Já que $\operatorname{senh} \lambda^* L$ não pode ser zero (uma raiz nula significa, neste caso, ausência de movimento), a constante C deve ser nula. Assim, a eq.(2.44) pode ser satisfeita escolhendo-se $A=\mathbf{0}$, mas isto levaria à solução trivial $\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{0}$, ou seja, sem movimento. Uma solução não nula é possível só se:

$$\operatorname{sen} \lambda^* L = 0 \quad (2.45)$$

que é a **equação de frequência** para a viga simplesmente apoiada, e cuja solução determina o valor de λ^* e por tanto de ω .

Como soluções da eq.(2.45) têm-se os seguintes valores:

$$\lambda_i^* L = \lambda_i = i\pi \quad (2.46)$$

com $i = 1, \dots, \alpha$, sendo que $i = 0$ não esta incluída porque representa um estado sem movimento do sistema ($\lambda^* = 0$). As frequências do sistema podem ser calculadas usando-se a eqs.(2.32a) e (2.46), ou seja:

$$\omega = \frac{\lambda_i^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (2.47)$$

Assim, para cada valor de λ_i^* , obter-se-á uma solução diferente para $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, (**autofunção**). As autofunções para uma viga simplesmente apoiada são (substituindo os valores $\mathbf{B}=\mathbf{C}=\mathbf{D}=\mathbf{0}$ na Eq. (2.36)):

$$u_i = A \operatorname{sen} \left(\frac{i\pi}{L} x \right) \quad (2.48)$$

Como a magnitude das autofunções u_i é arbitraria, pode-se normalizá-las com relação à massa utilizando-se a eq.(2.31):

$$\int_0^L m \left(A \operatorname{sen} \left(\frac{i\pi}{L} x \right) \right)^2 dx = 1 \quad (2.49)$$

Para uma viga com massa constante, o valor do coeficiente A após a normalização fica:

$$A = \sqrt{\frac{1}{m \int_0^L \sin^2\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx}} = \sqrt{\frac{2}{mL}} \quad (2.50)$$

E, finalmente, substituindo-se o valor de A da eq.(2.50) na eq.(2.48), obtém-se as autofunções normalizadas com relação à massa, ϕ_i , para a viga simplesmente apoiada:

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{2}{mL}} \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad i = 1, \dots, \alpha \quad (2.51)$$

Para uma viga simplesmente apoiada (e todas as vigas tratadas neste estudo), vibrando livremente e sem amortecimento, a amplitude de vibração em cada modo varia com o tempo, porém, todos os pontos dela estão em fase (vide solução para $T(t)$ no tempo, eq(2.17)), ou seja, todos eles passam pela posição de equilíbrio ao mesmo tempo. Os pontos onde a forma modal cruza o eixo x são chamados de **nós**, e os nós sempre são pontos estacionários.

2.5.3 Viga Livre – Livre

Esta viga não possui qualquer restrição contra deslocamentos de corpo rígido. Neste caso tem-se um sistema semidefinido com as seguintes condições de contorno:

$$\begin{aligned} u''(0) &= 0 \\ u'''(0) &= 0 \\ u''(L) &= 0 \\ u'''(L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.52)$$

Mais uma vez, substituindo-se a segunda e terceira derivadas da eq. (2.36) nas condições de contorno (2.52), chega-se no seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin \lambda^* L & -\cos \lambda^* L & \sinh \lambda^* L & \cosh \lambda^* L \\ -\cos \lambda^* L & \sin \lambda^* L & \cosh \lambda^* L & \sinh \lambda^* L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

que fornecerão valores não nulos para os coeficientes A , B , C e D só se o determinante da matriz envolvida for nulo. Calculando-se o determinante da matriz de coeficientes da eq.(2.53) e igualando a zero, obtém-se a equação de frequência do sistema:

$$1 - \cosh \lambda^* L \cos \lambda^* L = 0 \quad (2.54)$$

Como se pode notar, a eq.(2.54) possui duas raízes λ_i^* nulas, ou seja, $\lambda_0^* = 0$ e $\lambda_1^* = 0$. Como no caso da viga simplesmente apoiada, é possível que estas raízes representem soluções triviais do sistema.

Para verificar se as autofunções correspondentes às raízes nulas representam um estado de movimento ou não, substituem-se os valores de $\lambda^* = 0$ na eq.(2.33):

$$u^{IV} = 0 \quad (2.55)$$

que tem solução da forma:

$$u = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 \quad (2.56)$$

Calculando-se agora a segunda e a terceira derivadas da eq.(2.56) e substituindo-se o resultando nas eqs.(2.52) tem-se que $A_3 = A_4 = 0$, e, portanto, a eq.(2.56) fica:

$$u = A_1 + A_2 x \quad (2.57)$$

que por sua vez apresenta duas autofunções, correspondentes aos dois auto-valores nulos. Pode-se selecionar duas autofunções, por exemplo, A_1 e $A_2 x$, mas deve-se notar que qualquer combinação linear destas funções também é uma autofunção.

As duas autofunções não são ortogonais, porém mediante uma apropriada combinação linear é possível se obter duas funções ortogonais. Se a primeira e a segunda autofunções são: A_1 e $A_1 + A_2 x$, para se cumprir com a ortogonalidade deve-se obedecer:

$$\int_0^L (A_1 + A_2 x) m A_1 dx = 0 \quad (2.58)$$

Ou

$$A_2 = -\frac{2A_1}{L}$$

As duas autofunções podem ser representadas por:

$$\begin{aligned} u_0 &= A_1 \\ u_1 &= A_1 \left(1 - \frac{2x}{L} \right) \end{aligned} \quad (2.59)$$

sendo que as autofunções da eq.(2.59) podem ser escaladas de maneira arbitrária, de forma tal, que B_1 e $B_2(1-2x/L)$ sejam também autofunções do sistema. Utilizando-se a eq.(2.31) para normalizar as autofunções com relação à massa pode-se calcular B_1 e B_2 de modo que:

$$\int_0^L B_1^2 m dx = 1$$

$$B_1 = \frac{1}{\sqrt{mL}}$$
(2.60)

ou seja:

$$\int_0^L B_2^2 \left(1 + \frac{2x}{L}\right)^2 m dx = 1$$

$$B_2 = \sqrt{\frac{3}{mL}}$$
(2.61)

sendo que as duas autofunções normalizadas com relação à massa ficam:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{mL}}$$
(2.62)

e

$$\phi_1 = \sqrt{\frac{3}{mL}} \left(1 - \frac{2x}{L}\right)$$
(2.63)

e, com isso, as autofunções dadas pela eq.(2.59) podem ser associadas com os deslocamentos de corpo rígido da viga, que consiste numa rotação ao redor do centro da viga eq.(2.63) e numa translação na direção y eq.(2.62).

As raízes da equação transcendente (2.54) podem ser calculadas numericamente, sendo que correspondendo a cada raiz existe uma auto-função que pode ser determinada solucionando-se a eq.(2.53) para os coeficientes A , B , C com a condição $D=1$. Substituindo-se tais valores resultantes na eq.(2.36), e seguindo-se o anterior procedimento, chega-se em:

$$u_i = \cosh \lambda_i^* x + \cos \lambda_i^* x + \left[\frac{\cos \lambda_i^* L - \cosh \lambda_i^* L}{\sinh \lambda_i^* L - \sin \lambda_i^* L} \right] [\sin \lambda_i^* x + \sinh \lambda_i^* x]$$
(2.64)

As anteriores autofunções não estão necessariamente normalizadas com relação à massa, porém, elas são ortogonais entre si e também ortogonais com relação aos dois movimentos de corpo rígido.

Finalmente, as frequências naturais calculadas a partir das eqs.(2.54) e (2.32a) são:

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Onde :

$$\lambda_i^* L = \lambda_i \quad (2.65)$$

$$\lambda_i \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 4.730 \\ \lambda_4 = 7.853 \\ \lambda_5 = 10.996 \\ \lambda_i = (2i+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, \alpha$$

2.4.4 Viga Engastada-Engastada

As condições de contorno para a viga com os dois extremos engastados são:

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u'(0) &= 0 \\ u(L) &= 0 \\ u'(L) &= 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

Novamente, substituindo-se a eq.(2.36) e sua primeira derivada nas condições de contorno eqs.(2.66), tem-se as seguintes equações para os coeficientes **A**, **B**, **C** e **D**:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ \text{sen } \lambda^* L & \cos \lambda^* L & \text{senh } \lambda^* L & \cosh \lambda^* L \\ \cos \lambda^* L & -\text{sen } \lambda^* L & \cosh \lambda^* L & \text{senh } \lambda^* L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

A equação de frequência é obtida então igualando-se o determinante da matriz de coeficientes da eq.(2.67) a zero, ou seja:

$$1 - \cosh \lambda^* L \cos \lambda^* L = 0 \quad (2.68)$$

que conduz a um número infinito de autos-valores. Para cada um deles existe uma autofunção que pode ser determinada substituindo-se o valor de λ_i^* na eq.(2.67), e calculando-se os coeficientes **A**, **B**, **C** com a consideração **D=I**. Assim, a i-ésima autofunção fica:

$$u_i = -\cos \lambda_i^* x + \cosh \lambda_i^* x + \left[\frac{\cos \lambda_i^* L - \cosh \lambda_i^* L}{\sinh \lambda_i^* L - \sin \lambda_i^* L} \right] [\sinh \lambda_i^* x - \sin \lambda_i^* x] \quad (2.69)$$

Como se pode observar, a eq.(2.68) possui duas raízes nulas, a exemplo do caso da viga livre-livre. Com isso, é possível que essas duas raízes representem soluções triviais do problema, e, se este for o caso, tais raízes não devem ser levadas em conta. Para verificar se as auto-funções correspondentes às raízes nulas representam ou não movimento, deve-se substituir o valor nulo do auto-valor na eq.(2.33), ou seja:

$$u^{IV} = 0 \quad (2.55 \text{ Repetida})$$

que tem solução da forma:

$$u = A_1 + A_2 x + A_3 x^2 + A_4 x^3 \quad (2.56 \text{ Repetida})$$

Substituindo-se a eq.(2.56) nas condições de contorno eqs.(2.66), tem-se:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= 0 \\ A_3 L^2 + A_4 L^3 &= 0 \\ 2A_3 L + 3A_4 L^2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.70)$$

que são satisfeitas tomando-se $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = 0$ e, portanto, as raízes nulas significam estrutura em repouso.

Da eqs.(2.32a) e (2.68) se pode calcular as frequências naturais do sistema, que são dadas por:

$$\omega_i = \frac{\lambda_i^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

Onde :

$$\lambda_i = \lambda_i^* L \quad (2.71)$$

$$\lambda_i \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 4.730 \\ \lambda_2 = 7.853 \\ \lambda_3 = 10.996 \\ \lambda_i = (2i+1)\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$i = 1, \dots, \alpha$$

Ficando encerrado assim o estudo do problema de auto-valor que fornece os parâmetros de vibração para vigas (formas modais e frequências naturais) em vibração livre não amortecida.

2.6 Vibração Livre Amortecida

Desprezando-se a inércia de rotação e a deformação por cortante, mas incluindo o efeito do amortecimento, a equação de movimento obtém-se da eq.(2.8) com $\mathbf{P}(\mathbf{x},t)=\mathbf{0}$, ou seja:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \left(u'' + c \dot{u}'' \right) \right] + m \ddot{u} = 0 \quad (2.72)$$

e, neste caso, o método de separação de variáveis não consegue desacoplar as variações espaciais das temporais. Portanto, verifica-se que não existem modos e frequências similares aos encontrados no estudo da vibração livre não amortecida.

3. Equação de Movimento por Elementos Finitos

3.1 Introdução

O método dos elementos finitos (**MEF**) é o mais difundido procedimento numérico para solucionar equações diferenciais de maneira aproximada. Sua principal característica reside no fato de o domínio no qual está definido o problema ser dividido em subdomínios (figura 3), e a variável dependente de natureza contínua do problema (neste caso $U(x,t)$) ficar definida por seus valores aproximados em pontos discretos chamados de nós. Nos demais pontos que não os nós, o valor da variável é aproximado pelas funções de forma (geralmente polinômios). Nas seguintes seções apresenta-se a formulação da equação de movimento para vigas via **MEF** a partir da qual é possível obter as formas modais e as frequências naturais de vibração.

3.2 Elemento Finito Dinâmico de Viga

Considerando-se a viga da figura 2 e a equação de equilíbrio dada pela eq. (2.8), para uma viga com inércia, módulo de elasticidade, amortecimento e massa constante tem-se:

$$EIU^{IV} + cEI\dot{U}^{\cdot IV} + m\ddot{U} = P(x,t) \quad (3.1)$$

Admitindo-se para efeito desta análise condições lineares e empregando-se o método de Galerkin para calcular uma solução aproximada da eq.(3.1), pode-se estabelecer as equações de movimento correspondentes do método dos elementos finitos da forma apresentada no que se segue.

Multiplicando-se a eq.(3.1) por uma função arbitrária $\Psi(x)$, chamada de função peso, utilizando-se $\vartheta(x,t)$ como função para aproximar o campo de deslocamentos

$U(x,t)$ e integrando-se sobre o domínio do problema, tem-se (omitindo a notação para as variáveis independentes):

$$\int_0^L \Psi \left[EI \mathcal{G}^{IV} + cEI \dot{\mathcal{G}}^{IV} + m \ddot{\mathcal{G}} - P(x,t) \right] dx = 0$$

ou

(3.2)

$$\underbrace{\int_0^L \Psi EI \mathcal{G}^{IV} dx}_1 + \underbrace{\int_0^L \Psi cEI \dot{\mathcal{G}}^{IV} dx}_2 + \int_0^L \Psi m \ddot{\mathcal{G}} dx - \int_0^L \Psi P(x,t) dx = 0$$

onde L é o comprimento do elemento de viga (figura 3).

Cumpres assinalar que a eq.(3.2) estabelece que o erro da solução aproximada adotada \mathcal{G} seja zero no sentido integral ponderado (característica básica do método de Galerkin).

Integrando-se por partes duas vezes os termos 1 e 2 indicados por chaves horizontais na eq.(3.2) tem-se:

$$\underbrace{\int_0^L \Psi EI \mathcal{G}^{IV} dx}_1 = \left[\Psi EI \mathcal{G}^{III} - \Psi' EI \mathcal{G}^{II} \right]_0^L + EI \int_0^L \Psi'' \mathcal{G}^{II} dx$$
(3.3)

$$\underbrace{\int_0^L \Psi cEI \dot{\mathcal{G}}^{IV} dx}_2 = cEI \left[\left[\Psi \dot{\mathcal{G}}^{III} - \Psi' \dot{\mathcal{G}}^{II} \right]_0^L + \int_0^L \Psi'' \dot{\mathcal{G}}^{II} dx \right]$$
(3.4)

Por outro lado, sabendo-se que:

$$M = -EI \left(\mathcal{G}^{II} + c \dot{\mathcal{G}}^{II} \right)$$
(3.5)

$$Q = -EI \left(\mathcal{G}^{III} + c \dot{\mathcal{G}}^{III} \right)$$

substituindo-se a eq.(3.3), eq.(3.4) e eq.(3.5) na eq.(3.2) e agrupando termos tem-se:

$$\int_0^L EI \Psi'' \mathcal{G}^{II} dx + \int_0^L cEI \Psi'' \dot{\mathcal{G}}^{II} dx + \int_0^L m \Psi \ddot{\mathcal{G}} dx = \int_0^L \Psi P(x,t) dx + \left[-\Psi(-Q) + \Psi'(-M) \right]_0^L$$
(3.6)

Como na eq.(3.6) os níveis de derivação na variável espaço foram uniformizados entre a solução aproximada \mathcal{G} e a função peso Ψ , a eq.(3.6) é conhecida como forma fraca do problema. Além disso, ela requer condições de continuidade menos rigorosas para a função \mathcal{G} (função desconhecida), além de incorporar as condições de contorno

naturais (forças) do problema (ultimo termo do lado direito da eq.(3.6)). Desta forma a solução aproximada \mathcal{G} só deve satisfazer às condições essenciais do problema.

Tomando-se como função para aproximar o campo de deslocamentos da viga uma função do tipo:

$$\mathcal{G}(x,t) = [A + Bx + Cx^2 + Dx^3] \quad (3.7)$$

Os coeficientes A , B , C e D podem ser determinados em função dos deslocamentos dos extremos do elemento i , como se ilustra na figura 3, e tendo-se em conta o exposto na eq.(3.7), ou seja:

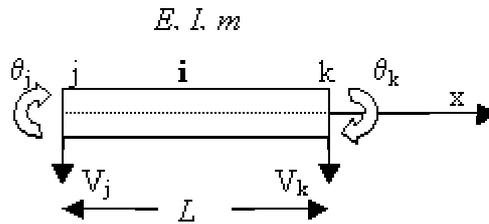


Figura 3. Elemento finito dinâmico de viga.

$$\begin{cases} \mathcal{G}(0,t) = V_j(t) = A \\ \mathcal{G}'(0,t) = \theta_j(t) = B \\ \mathcal{G}(L,t) = V_k(t) = A + BL + CL^2 + DL^3 \\ \mathcal{G}'(L,t) = \theta_k(t) = B + 2CL + 3DL^2 \end{cases} \quad (3.8)$$

Resolvendo-se o sistema anterior nos coeficientes A , B , C e D , chega-se em:

$$\begin{aligned} A &= V_j(t) \\ B &= \theta_j(t) \\ C &= \frac{3}{L^2}(V_k(t) - V_j(t)) - \frac{1}{L}(\theta_k(t) + \theta_j(t)) \\ D &= -\frac{2}{L^3}(V_k(t) - V_j(t)) - \frac{1}{L^2}(\theta_k(t) + \theta_j(t)) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Substituindo-se as eq.(3.9) na eq.(3.7) e agrupando-se termos, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x,t) &= \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right)V_j(t) + \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\theta_j(t) + \left(-\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)V_k(t) \\ &\quad + \left(-\frac{x}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\theta_k(t) \end{aligned} \quad (3.10)$$

A eq.(3.10) é a representação da forma de vibração da viga como superposição de quatro funções polinomiais multiplicadas por uma coordenada que varia no tempo $V_i(t)$. Estas coordenadas funcionam como incógnitas do sistema e seus valores devem

ser determinados mediante a solução da equação de movimento (eq.(3.6)). O número de coordenadas $V_i(t)$ é igual ao número de graus de liberdade considerados do sistema.

Definindo-se as funções de forma como:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) \\ \xi_2 &= \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right) \\ \xi_3 &= \left(-\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) \\ \xi_4 &= \left(-\frac{x}{L} + \frac{x^3}{L^2}\right)\end{aligned}\tag{3.11}$$

as quais são conhecidas como funções de forma de Hermite, vale registrar garantem continuidade dos deslocamentos e rotações entre elementos vizinhos. Tendo-se em conta as eq.(3.11), a eq.(3.7) pode ser escrita como:

$$\mathcal{G}(x,t) = \left\{ \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} V_j \\ \theta_j \\ V_k \\ \theta_k \end{matrix} \right\}\tag{3.12}$$

Utilizando-se as funções $\Psi_i = \xi_i$ (com $i = 1,2,3,4$) como funções peso e a função expressa na eq.(3.12) como função para aproximar o campo de deslocamentos da viga, e sendo $\xi_1(0) = \xi_2(0) = \xi_3(L) = \xi_4(L) = 1$, pode-se escrever com base na relação dada na eq.(3.6) as seguintes quatro equações que permitem explicitar os valores de V_j , θ_j , V_k e θ_k :

$$\begin{aligned}\int_0^L EI \left\{ \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{matrix} \right\}^{\text{II}} \left\{ \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{matrix} \right\}^{\text{II}} \left\{ \begin{matrix} V_j \\ \theta_j \\ V_k \\ \theta_k \end{matrix} \right\} dx + \int_0^L cEI \left\{ \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{matrix} \right\}^{\text{II}} \left\{ \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \dot{V}_j \\ \dot{\theta}_j \\ \dot{V}_k \\ \dot{\theta}_k \end{matrix} \right\} dx \\ + \int_0^L m \left\{ \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \ddot{V}_j \\ \ddot{\theta}_j \\ \ddot{V}_k \\ \ddot{\theta}_k \end{matrix} \right\} dx = \int_0^L \left\{ \begin{matrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{matrix} \right\} P(x,t) dx + \left\{ \begin{matrix} -Q_j \\ M_j \\ Q_k \\ -M_k \end{matrix} \right\}\end{aligned}\tag{3.13}$$

onde Q e M são a força cortante e o momento aplicado no contorno do elemento. Empregando-se notação matricial, a eq.(3.13) toma a forma:

$$[M_E]\{\ddot{V}_E\} + [C_E]\{\dot{V}_E\} + [K_E]\{V_E\} = \{P_E\} \quad (3.14)$$

onde:

$\{V_E\}$ = Vetor de deslocamentos nodais do elemento.

A matriz de massa do elemento fica então definida por:

$$[M_E] = \int_0^L m \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{Bmatrix} dx \quad (3.15)$$

A matriz de amortecimento do elemento tendo-se em vista tratar-se de material visco-elástico é dada por:

$$[C_E] = \int_0^L cEI \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{Bmatrix} dx \quad (3.16)$$

A matriz de rigidez do elemento passa a ser expressa por:

$$[K_E] = \int_0^L EI \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi_4 \end{Bmatrix} dx \quad (3.17)$$

e o vetor de carregamentos dado por:

$$\{P_E\} = \int_0^L \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{Bmatrix} P(x,t) dx + \begin{Bmatrix} -Q_j \\ M_j \\ Q_k \\ -M_k \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

A eq.(3.14) é a equação de movimento para um sistema discreto nos seus múltiplos graus de liberdade; neste caso para uma viga modelada utilizando só um elemento finito. Atentando-se para o fato de que as matrizes globais de rigidez $[K]$, massa $[M]$, amortecimento $[C]$ e o vetor de carregamentos $\{P\}$ para uma viga modelada com N elemento finitos, podem ser calculadas como o somatório das contribuições de

cada elemento do conjunto, é possível gerar as matrizes para o sistema utilizando o seguinte procedimento:

$$[K] = \sum_{E=1}^N [K_E]; [M] = \sum_{E=1}^N [M_E]; [C] = \sum_{E=1}^N [C_E]; \{P\} = \sum_{E=1}^N \{P_E\} \quad (3.19)$$

Tendo-se em vista as eqs.(3.19), a eq.(3.14) pode ser escrita para uma viga modelada com N elementos finitos da seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{V}\} + [C]\{\dot{V}\} + [K]\{V\} = \{P\} \quad (3.20)$$

onde $\{V\}$ é o vetor de deslocamentos nodais globais.

3.3 Matriz de Massa do Elemento de Viga

A matriz de massa definida pela eq.(3.15) é conhecida como **matriz de massa consistente**. Como pode ser visto, ela é calculada usando as mesmas funções de forma empregadas na derivação da matriz de rigidez. Para as funções adotadas tem-se:

$$[M] = \frac{mL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Comparando-se a (3.15) com a (3.17), percebe-se que a expressão para a matriz de rigidez envolve a segunda derivada das funções de formas, enquanto que para o cálculo da matriz de massa são usadas as funções de forma. Isto sugere que para calcular a matriz de massa de um elemento, poder-se-iam utilizar funções de forma diferentes (de ordem menor, por exemplo) de aquelas usadas para determinar a matriz de rigidez.

Uma aproximação razoável utilizada como uma alternativa pratica no método dos elementos finitos para calcular a matriz de massa para vibrações de flexão em vigas, pode ser feita mediante o emprego das seguintes funções de forma:

$$\xi_1 = \begin{cases} 1 & x \leq L/2 \\ 0 & x > L/2 \end{cases} \quad \xi_2 = 0 \quad (3.22)$$

$$\xi_3 = \begin{cases} 0 & x < L/2 \\ 1 & x \geq L/2 \end{cases}$$

$$\xi_4 = 0$$

Para estas funções de forma, a matriz de massa calculada com a eq.(3.15) fica:

$$[M] = mL \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

A matriz anterior é chamada de **matriz de massa concentrada (*lumped*)**, e nela a inércia referente aos graus de liberdade rotacionais é negligenciada, sendo considerada apenas a massa do elemento concentrada nos graus de liberdade de translação.

Existem outras aproximações possíveis para a matriz de massa, porém, a utilizada neste estudo é a matriz de massa concentrada indicada, em face das seguintes razões: (1) os graus de liberdade rotacionais têm inércia negligenciada permitindo-se sua posterior eliminação mediante o processo de condensação estática; (2) a matriz de massa correspondente é diagonal, o qual resulta em considerável diminuição do esforço computacional de armazenamento.

3.4 Matriz de Amortecimento

Devido à dificuldade de se definir o coeficiente de amortecimento \mathbf{c} nos termos da eq.(3.16) e com base nas características físicas do sistema, é mais fácil tratarem-se as forças de amortecimento de forma aproximada. Existem varias maneiras para construir uma matriz aproximada de amortecimento, de forma tal que produza valores específicos de amortecimento para um ou vários modos. Entre elas pode-se mencionar as seguintes: amortecimento proporcional à massa ($[C] = \beta[M]$), amortecimento proporcional à rigidez ($[C] = \beta_1[K]$) e amortecimento de Rayleigh ($[C] = \beta[M] + \beta_1[K]$) (HUMAR, 1990) onde β e β_1 são constantes que devem ser calculadas, por exemplo, a partir do amortecimento desejado para os modos i e j .

Uma matriz de amortecimento pode ser necessária nas seguintes situações: quando uma integração direta das equações de movimento vai ser usada em vez da técnica de superposição modal ou quando se vai fazer uma análise não linear.

3.5 Matriz de Rigidez

Para o elemento estudado, a matriz de rigidez é calculada a partir das funções de forma, eqs.(3.11) e do expresso na eq.(3.17), ou seja:

$$[K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

A matriz de rigidez dada pela eq.(3.24) é idêntica à matriz de rigidez estática, uma vez que na aproximação do campo de deslocamentos foram empregadas funções de forma idênticas às usadas na análise estática de vigas.

3.6 Vibração Livre não Amortecida: Problema do Auto-valor

A equação para vibração livre não amortecida segundo a configuração dada nos termos do método dos elementos finitos pode ser obtida da eq.(3.20) fazendo-se $[C] = 0$ e $\{P\} = 0$, ou seja:

$$[M]\{\ddot{V}\} + [K]\{V\} = \{0\} \quad (3.25)$$

A equação matricial (3.25), por sua vez, tem solução vetorial da forma:

$$\{V\} = \{q\} \text{sen}(\omega \cdot t + \delta) \quad (3.26)$$

onde $\{q\}$ é um vetor arbitrário, ω é a frequência de vibração e δ é o ângulo de fase, sendo todos estes parâmetros incógnitas do problema. Substituindo a eq.(3.26) e sua segunda derivada na eq.(3.25) tem-se:

$$[[K] - \omega^2 [M]]\{q\} \text{sen}(\omega \cdot t + \alpha) = \{0\} \quad (3.27)$$

Como a eq.(3.27) deve ser válida para todos os valores de t , pode-se escrever:

$$[K]\{q\} = \omega^2 [M]\{q\} \quad (3.28)$$

A eq.(3.28) representa o problema do auto-valor conhecido como **problema de auto-valor generalizado** ou **problema de auto-valor linearizado**. Em geral, para um

sistema de N graus de liberdade, a solução da eq.(3.28) fornece N valores de ω^2 que são reais e positivos. Porém, se a matriz $[M]$ for singular, a eq.(3.28) terá um ou mais autos valores infinitos. Por outro lado, quando $[K]$ for singular, a eq.(3.28) terá um ou mais autos-valores nulos. Associado a cada auto-valor existe um auto vetor $\{q\}$.

Na análise de vibrações as raízes quadradas dos autos-valores do problema de auto-valor generalizado são chamadas de **freqüências do sistema** e os autos vetores são chamados de **formas modais reais**.

Para se resolver o problema de auto-valor dado pela eq.(3.28) existem diversos métodos numéricos que podem ser agrupados da seguinte forma:

-Métodos de Transformação: Tais métodos são de emprego indicado quando as matrizes envolvidas são de pequena ordem. Dentre esses métodos merecem destaque o método generalizado de Jacobi, o método da transformação de House-Holder, o da transformação denominada QR e o denominado LR. É uma característica desses métodos o fato de o cálculo envolver todos os autos-valores e autos-vetores do problema, sem possibilidade de tratamento separado. Vale assinalar que a linguagem Fortran disponibiliza para seus usuários uma completa biblioteca de sub-rotinas para análise do problema de auto-valor dentro dessa técnica. Neste trabalho foi utilizada a rotina **DGVCSP** do IMSL® MATH/LIBRARY (Visual Numerics™ 1997, capítulo 2, p. 407) para o cálculo dos autos vetores e autos valores da eq.(3.28). Os resultados encontrados com esta rotina foram idênticos aos obtidos mediante a aplicação do método de Jacobi Generalizado. A sub-rotina para este método pode ser encontrada em Bathe (1996), no capítulo 11, págs. 924-927. As duas técnicas mencionadas acima podem ser aplicadas para matrizes de pequena ordem. Suas vantagens são o baixo custo, simplicidade e elegância.

-Métodos de iteração: São métodos ideais para problemas envolvendo matrizes de ordem elevada, particularmente quando só são requeridos alguns poucos autos valores e autos vetores do problema. Entre estes, os métodos de iteração de Sub-espço e o de Lanczos são os mais populares.

-Métodos de busca de Determinante: Tais métodos caracterizam-se por calcular inicialmente as raízes da equação de freqüência (polinômio característico). A avaliação dos coeficientes da equação de freqüência demanda um grande número de operações numéricas, e, além disto, as raízes da equação de freqüência se mostram

muito sensíveis aos valores dos coeficientes. Assim, pequenos erros na avaliação destes coeficientes, levam a uma perda significativa de precisão nos valores das raízes.

Uma excelente apresentação destes três grupos de métodos para solução do problema de auto valor pode ser encontrada em Bathe (1996), Humar (1990) e Weaver e Johnston (1987).

Os autos vetores obtidos com a eq.(3.28) possuem uma característica especial chamada de propriedade de ortogonalidade ou simplesmente **ortogonalidade**. Sejam ω_i^2 e ω_j^2 dois autos-valores distintos, e $\{q\}_i$ e $\{q\}_j$ seus correspondentes autos vetores.

Assim, pode-se escrever:

$$[K]\{q\}_i = \omega_i^2 [M]\{q\}_i \quad (3.29)$$

$$[K]\{q\}_j = \omega_j^2 [M]\{q\}_j \quad (3.30)$$

Pré-multiplicando-se ambos os lados da eq.(3.29) por $\{q\}_j^T$, tem-se:

$$\{q\}_j^T [K]\{q\}_i = \omega_i^2 \{q\}_j^T [M]\{q\}_i \quad (3.31)$$

Transpondo-se as matrizes de ambos os lados da eq.(3.31), e usando-se a propriedade de simetria das matrizes de massa e rigidez, ou seja:

$$[K]^T = [K] \text{ e } [M]^T = [M]$$

tem-se:

$$\{q\}_j^T [K]\{q\}_i = \omega_i^2 \{q\}_j^T [M]\{q\}_i \quad (3.32)$$

Pré-multiplicando-se ambos os lados da eq(3.30) por $\{q\}_i^T$ chega-se em:

$$\{q\}_i^T [K]\{q\}_j = \omega_j^2 \{q\}_i^T [M]\{q\}_j \quad (3.33)$$

Subtraindo-se a eq.(3.33) da eq.(3.32), tem-se:

$$(\omega_i^2 - \omega_j^2) \{q\}_i^T [M]\{q\}_j = 0 \quad (3.34)$$

ou ainda:

$$\{q\}_i^T [M]\{q\}_j = 0 \quad (3.35)$$

onde supõe-se $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$.

A eq.(3.35) estabelece, pois, que dois autos vetores correspondentes a diferentes autos valores são ortogonais com relação à matriz de massa. Em geral a propriedade de ortogonalidade pode ser escrita como:

$$\{q\}_i^T [M]\{q\}_j = 0 \quad (3.36)$$

onde se supõe $i \neq j$.

Substituindo-se a eq.(3.36) na eq.(3.32) tem-se:

$$\{q\}_i^T [K] \{q\}_j = 0 \quad (3.37)$$

onde novamente supõe-se $i \neq j$.

Como as componentes dos autos-vetores são conhecidas só em sentido relativo, é conveniente normaliza-los. Uma forma apropriada nesse sentido e muito comum de escalar as formas modais é a normalização com relação à massa, na qual os autos vetores devem satisfazer a seguinte relação:

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_i = 1 \quad (3.38)$$

onde $\{\phi\}_i$ denota o i -ésima **forma modal** normalizada com relação à massa. As propriedades de ortogonalidade para as formas modais normalizadas segundo a eq.(3.38) são, pois:

$$\{\phi\}_i^T [M] \{\phi\}_j = \delta_{ij} \quad (3.39)$$

$$\{\phi\}_i^T [K] \{\phi\}_j = \omega_i^2 \delta_{ij} \quad (3.40)$$

com:

$$\delta_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

$$\delta_{ij} = 1 \quad i = j$$

A matriz $[\Phi]_{N \times N}$ formada reunindo-se as N formas modais $\{\phi\}_i$ de um sistema numa mesma matriz é chamada de **matriz modal**, e tem grande aplicação nas análises de vibração (livre e forçada), e também no estudo de diversos métodos de detecção de danos, como será visto no capítulo 4. A matriz modal é definida da seguinte maneira :

$$[\Phi] = [\{\phi\}_1 \quad \{\phi\}_2 \quad \cdot \quad \cdot \quad \{\phi\}_N] \quad (3.41)$$

Usando-se as propriedades de ortogonalidade dadas pelas eq.(3.39) e eq.(3.40), chega-se nas seguintes expressões que representam as propriedades de ortogonalidade do sistema:

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (3.42)$$

$$[\Phi]^T [K] [\Phi] = [\Omega] \quad (3.43)$$

onde:

$$[\Omega] = \text{Matriz diagonal dos autos valores } \omega^2 \text{ do sistema.}$$

As propriedades do problema de auto-valor generalizado dado pela eq.(3.28) podem assim ser resumidos:

-Os autos valores do problema generalizado, no qual as matrizes $[K]$ e $[M]$ são simétricas, são todos reais.

-Quando as matrizes de massa e rigidez são positivas definidas, os autos valores são todos positivos.

-Se a matriz de rigidez $[K]$ for singular, pelo menos um dos autos valores será nulo. Se a matriz $[M]$ for singular, no mínimo um dos autos valores será infinito.

-Os autos vetores são ortogonais com relação tanto a matriz de massa quanto à matriz de rigidez (eqs.(3.39) e (3.40)).

-Um vetor arbitrário de ordem M , pode ser expresso como superposição dos auto vetores de um problema de auto-valor generalizado de tamanho $M \times M$.

3.7 Vibração Livre Amortecida: Amortecimento Proporcional (Clássico)

Quando se trabalha com amortecimento proporcional, as formas modais são as mesmas do caso não amortecido e as freqüências naturais têm valores muito próximos dos valores do caso sem amortecimento correspondente. Por exemplo, para o modelo com amortecimento proporcional à rigidez, ou seja, $[C] = \beta_1 [K]$, pré-multiplicando-se e pós-multiplicando-se a matriz $[C]$ pela matriz $[\Phi]$ obtém-se: $[\Phi]^T \beta_1 [K] [\Phi] = \beta_1 [\Omega] = [c]$, onde $[c]$ é uma matriz diagonal que contém os coeficientes de amortecimento dos modos do sistema. O fato da matriz $[c]$ ser diagonal significa que as formas modais do sistema sem amortecimento são idênticas às formas modais do sistema amortecido.

Por outro lado, efetuando-se a seguinte transformação de coordenadas: $\{V\} = [\Phi]\{Y\}$, onde $\{Y\}$ é um vetor de coordenadas transformadas (coordenadas normais), e substituindo-o na eq.(3.20) (com $\{P\} = 0$), é possível o desacoplamento das N equações simultâneas de movimento, e obter-se as freqüências modais amortecidas do sistema (ω_{iA}), que para o problema estudado são dadas por $\omega_{iA} = \omega_i \sqrt{1 - \gamma_i^2}$, com γ_i sendo a razão de amortecimento para o modo i .

3.8 *Vibração Livre Amortecida: Amortecimento não Proporcional (não Clássico).*

Quando o amortecimento não pode ser desprezado na eq.(3.20), e o amortecimento não é proporcional (ou do tipo clássico), as frequências e formas modais dependerão da matriz de rigidez, da matriz de massa e da matriz de amortecimento do sistema estrutural. Para determinar as formas modais e frequências neste caso pode-se proceder da seguinte forma.

Tomando-se como solução da eq.(3.20) o expresso na eq.(3.44), ou seja:

$$\{V\} = \{q\}e^{at} \quad (3.44)$$

e substituindo-se a eq.(3.44) e suas derivadas na eq.(3.20), chega-se em:

$$(a^2[M] + a[C] + [M])\{q\} = \{0\} \quad (3.45)$$

A eq.(3.45) terá solução não trivial para o vetor $\{q\}$, se e só se, o determinante da matriz coeficiente da eq.(3.46) for nulo, ou seja:

$$\det(a^2[M] + a[C] + [K]) = 0 \quad (3.46)$$

Assim sendo, a eq.(3.45) representa o *Problema de Auto-valor Quadrático*, e sua solução fornece $2N$ autos valores (a) e seus correspondente autos-vetores $\{q\}$. O problema pode ser transformado em um problema de auto-valor standard ou em um problema de auto-valor generalizado, permitindo-se assim o uso dos métodos de solução mencionados no item 3.6, porém, a transformação implica em se dobrar a ordem das matrizes envolvidas; portanto aumenta o esforço computacional da solução.

Para se obter a forma modal generalizada, primeiro define-se um vetor de tamanho $2N \times 1$, que contem as velocidades e deslocamentos desconhecidos, ou seja:

$$\eta = \begin{Bmatrix} \{\dot{V}\} \\ \{V\} \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

As equações de movimento escritas nos termos da forma ampliada (3.47) ganham as seguintes redações:

$$[M]\{\dot{V}\} - [M]\{V\} = 0 \quad (3.48)$$

$$[M]\{\ddot{V}\} + [C]\{\dot{V}\} + [K]\{V\} = 0 \quad (3.49)$$

Combinando-se as eqs.(3.48) e (3.49) tem-se:

$$\begin{bmatrix} [0] & [M] \\ [M] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v} \\ \dot{v} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

ou ainda:

$$[A]\{\dot{\eta}\} = [B]\{\eta\} \quad (3.51)$$

onde:

$$[A] = \begin{bmatrix} [0] & -[M] \\ -[M] & -[C] \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} -[M] & [0] \\ [0] & [K] \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

A eq.(3.51) é chamada de equação de movimento reduzida, com as matrizes $[A]$ e $[B]$ sendo matrizes simétricas e de ordem $2N$, e tem solução da forma:

$$\{\eta\} = \{v\}e^{ft} \quad (3.54)$$

Substituindo-se a eq.(3.54) na eq.(3.51) tem-se:

$$[B]\{v\} = f[A]\{v\} \quad (3.55)$$

que é a equação do problema do auto-valor generalizado, e cujos autos-vetores e auto-valores são dados pelo vetor $\{v\}$ e pelos valores f . Transformado-se a eq.(3.55) na forma standard, chega-se em:

$$\begin{bmatrix} -[M]^{-1}[C] & -[M]^{-1}[K] \\ [I] & [0] \end{bmatrix} \{v\} = f\{v\} \quad (3.56)$$

sendo que a eq.(3.56) representa o problema de auto-valor standard com ordem igual a $2N$. Como a matriz apresenta coeficientes reais, os auto-valores devem ser reais ou estar em pares complexo conjugados. Os autos-vetores correspondentes aos auto-valores complexos são também complexos, e aparecem em pares conjugados. Um auto-vetor complexo é chamado de **forma modal complexa**. Vale assinalar que quase todos os sistemas estruturais são sub-amortecidos, e, neste caso, todos os auto-valores são complexos e estão em pares conjugados com parte real negativa.

As propriedades de ortogonalidade, como nos casos anteriores, podem ser escritas como:

$$\{v\}_i^T [A] \{v\}_j = 0 \quad (3.57)$$

$$\{v\}_i^T [B] \{v\}_j = 0 \quad (3.58)$$

com $f_i \neq f_n$.

Para encerrar o estudo sobre os parâmetros de vibração de vigas, apresentam-se na Tabela 1 as diferenças básicas entre uma **forma modal real** e uma **forma modal complexa**:

Tabela 1. Comparação entre formas modais reais e formas modais complexas*.

Forma modal real	Forma real complexa
A forma modal é uma onda estacionária, com pontos nodais estacionários fixos.	A forma modal pode ser descrita por uma onda viajante sem pontos nodais estacionários.
Todos os pontos passam pelo máximo ou mínimo no mesmo instante do tempo.	Todos os pontos não passam pelo máximo ao mesmo tempo.
Todos os pontos passam por zero no mesmo instante do tempo.	Todos os pontos não passam por zero ao mesmo tempo.
Todos os pontos ou estão totalmente em fase ou fora de fase com relação a outro ponto da estrutura.	Os pontos têm uma relação de fase geral que não necessariamente é de 0 ou de 180 graus.
As formas modais reais do caso não amortecido são as mesmas do caso com amortecimento clássico e são definidas por números reais.	As formas modais complexas não podem ser descritas com números reais

*(ABITABILE 2002, p.18, tradução nossa).

4. Métodos Dinâmicos de Detecção de Dano

4.1 Introdução

Seguindo o memorável raciocínio de Tarantola (1994) e admitindo-se que se pode definir um conjunto de parâmetros do modelo (massa, rigidez, amortecimento, geometria), que descrevem completamente o comportamento de um sistema físico, é possível definir de forma operacional um conjunto de parâmetros observáveis (formas modais, frequência e amortecimento), de tal forma, que seus valores reais dependam dos parâmetros do modelo.

Segundo aquele autor, resolver o problema direto é predizer os valores dos parâmetros observáveis a partir dos valores dos parâmetros do modelo. Por exemplo, resolver o problema do auto-valor da vibração livre não amortecida de vigas é um problema direto, no qual devem ser definidas as matrizes de massa e rigidez da estrutura (parâmetros do modelo), para depois calcular, a partir deles, as frequências e formas modais da viga (parâmetros observáveis).

Resolver o problema inverso consistirá em inferir, a partir dos valores dos parâmetros observáveis, valores para os parâmetros do modelo. Continuando com o exemplo da viga, determinar as matrizes de massa e rigidez com base em dados experimentais da vibração da viga (frequências e formas modais), seria resolver o problema inverso de vibração.

O problema de detecção de dano em estruturas é um típico problema de engenharia com dados incompletos e inexatos, que pode ser atacado com duas estratégias diferentes. A primeira, considerando-o como um problema inverso, no qual a presença e posição do dano devem ser determinadas a partir de variações na resposta dinâmica da estrutura. A segunda alternativa é tratar o problema como um problema direto, ou seja, calculando-se as variações na resposta dinâmica a partir de um tipo

conhecido de dano, e determinando sua presença (ou ausência) por comparação entre a resposta do modelo e a resposta real da estrutura.

Neste trabalho, entende-se por dano a degeneração estrutural que resulta em perda parcial de rigidez de um ou vários elementos da estrutura. O termo localizar é utilizado no sentido de determinar a posição geométrica do dano dentro da estrutura.

Para utilizar a informação modal de uma estrutura como ferramenta prática de diagnóstico e localização de danos, devem ser considerados vários fatores que afetam a resposta dinâmica da mesma, e que não necessariamente indicam a presença de falhas ou dano. Os efeitos dos fatores ambientais como umidade e temperatura nas frequências naturais, a confiabilidade e consistência dos procedimentos de aquisição de dados e as variações nas condições de apoio, que afetam a resposta dinâmica da estrutura, mas, que não implicam risco para ela, devem ser levados em conta para determinar até que ponto os dados modais obtidos servem para diferenciar as variações produzidas pelo dano dentro da estrutura daquelas devidas às mudanças aleatórias causadas por erro experimental ou por variações ambientais (CORNWELL ET.AL, 1999 E FOX, 1992).

O interesse deste capítulo está no estudo e formulação de métodos analíticos de detecção de dano, sendo o dano modelado como uma redução da rigidez de um elemento da malha de elementos finitos da estrutura e adotando-se condições ideais para a análise de vibração, tais como: material homogêneo e isotrópico, comportamento linear da estrutura, ausência de erro experimental nas medições e de variações de temperatura e umidade.

Durante as últimas três décadas do século 20, diversos métodos de detecção de dano a partir da resposta dinâmica da estrutura tem sido propostos, entre eles vale destacar os que se seguem.

O trabalho apresentado por Lifshitz e Rotem (1969), tal vez o primeiro na área, é uma proposta a detecção de dano via medidas de vibração. Eles indicam uma pesquisa da variação do módulo de elasticidade dinâmico e sua relação com mudanças de frequência em elastômeros.

Cawley e Adams (1979) desenvolvem e aplicam um método baseado nas variações de frequência para detectar defeitos em placas retangulares de alumínio (problema 2D). A região danificada da placa é localizada dentro das restrições impostas pela simetria. A presença de dano é indicada imediatamente a partir da variação nas frequências naturais.

Lieven e Ewins (1988), propõem o **COMAC** (Coordiante **M**odal Assurance Criterion) como método de comparação e correlação entre formas modais. O **COMAC** correlaciona dois conjuntos de formas modais, que podem ser obtidos tanto de forma experimental quanto de forma analítica e identifica as coordenadas responsáveis pela falta de correlação. A técnica é utilizada para detectar regiões inconsistentes (com aumentos de massa) dentro de uma estrutura de molas e massa com oito graus de liberdade.

Stubs, Kim e Toppole (1992), apresentam um método baseado no decremento na energia de deformação modal entre dois graus de liberdade estrutural definido pela curvatura das formas modais.

Saiidi, Douglas e Feng (1994) chegam na conclusão de que não é possível de se usar as variações de frequência para determinar perda de protensão em elementos de concreto protendido devido ao fato de que variações pequenas nos parâmetros estruturais (rigidez dos apoios, propriedades da seção transversal, entre outros fatores) introduzem variações nas frequências, que são da mesma ordem de grandeza das mudanças produzidas pela perda de protensão.

Pandey e Biswas (1994 e 1995), apresentam um método de detecção baseado nas variações da matriz de flexibilidade da estrutura. Resultados de diversos exemplos numéricos e experimentais demonstram que a posição do dano pode ser obtida usando-se os dois primeiros modos de vibração somente.

Sampaio, Maia e Silva (1999) propõem o método da curvatura das **FRF's** (Funções de Resposta em Frequência), que é uma extensão do método proposto por Pandey, Biswas e Samman (1991), para todas as frequências medidas e não só para as frequências modais. A principal vantagem do método é sua simplicidade.

Cornwell, Doebling e Farrar (1999) estudam métodos baseados nas mudanças da energia de deformação para localizar danos. Originalmente, estes métodos foram empregados para vigas (curvatura unidimensional). O estudo apresentado generaliza o método para estruturas 2D.

Cornwell *et al.* (1999) apresentam resultados de análises experimentais sobre variação dos parâmetros modais com a temperatura, para uma ponte no Novo México. Eles reportam uma variação de até 6% nas frequências modais em um período de 24 horas, indicando que essa variabilidade deve ser levada em conta nos algoritmos de detecção de dano.

Filho, Roitman e Magluta (2000) utilizam a metodologia de ajuste de modelos por matriz ótima, propondo uma solução alternativa ao problema da esparcidade real dos modelos, e, mediante simulações numéricas com diferentes cenários de dano em pórticos, conseguem indicar, em quase todas as simulações, a região do dano.

Pai e Young (2001) apresentam um método de detecção de dano em vigas usando formas operacionais de deflexão (**ODS-Operational Deflection Shape**). A **ODS** é a deformada da estrutura quando submetida a uma excitação harmônica de frequência única. As **ODS** são medidas com um scanner de laser. Resultados numéricos e experimentais demonstram que o método localiza com sucesso trincas (largura de 1.1 mm e altura variável entre 8mm e 1.75 mm) em uma viga de alumínio simplesmente apoiada, de comprimento 717.5 mm, altura 25.4 mm e largura 3.32 mm, entre outros cenários de dano estudados.

Teughels, Maeck e De Roeck (2002) propõem um método de detecção de dano mediante ajuste do modelo de elementos finitos, usando funções de dano. Eles conseguem detectar, localizar e quantificar o dano em uma viga de concreto reforçado.

Patsias e Staszewskiy (2002) propõem um método de detecção, baseado na medida óptica das formas modais. Com esta informação é possível calcular a variação absoluta da curvatura das formas modais, que, como foi demonstrado por Pandey, Biswas e Samman (1991), é indicadora da presença de dano na estrutura. O método é aplicado para detectar dano em uma viga em balanço com sucesso.

Galindez *et.al.* (2003), estão atualmente implementando o sistema de monitoramento para detectar dano na ponte pênsil Pereira - Dos Quebradas (Colômbia). Os resultados preliminares das simulações numéricas, para vários cenários de dano, mostram que as formas modais mostram-se sensitivas a quase todos os tipos de dano, mas que as primeiras dez frequências naturais não mudam, inclusive para casos extremos de dano nos cabos.

Kim *et. al.*(2003), estudam e avaliam duas metodologias para **Deteção de Dano Não Destrutivo (DDND)**, para as quais poucas frequências naturais e/ou formas modais estão disponíveis. As duas técnicas conseguem quantificar e localizar dano estrutural em uma viga de concreto modelada pelo **MEF**.

Nas seguintes seções são estudados e descritos em detalhes vários dos métodos de detecção de dano existentes que podem ser aplicados a vigas.

4.2 Classificação dos métodos.

Existem múltiplos métodos reportados na literatura que tratam o problema de detecção de dano a partir da resposta dinâmica da estrutura, em Doebling *et.al* (1996), Salawu (1997) e Doebling, Farrar e Prime (1998), onde encontra-se um completíssimo resumo sobre literatura recente em esta área. Segundo estes autores, dependendo do tipo de dados medidos e/ou da técnica empregada para identificar o dano, os métodos de detecção de dano podem ser classificados nos seguintes grupos:

Variações de frequência

Varição das formas modais

Variações das curvaturas das formas modais

Método de ajuste de matriz ou de ajuste de modelos

Métodos baseados na flexibilidade medida dinamicamente

Métodos não lineares

Rytter (1993), define um sistema de classificação, dividindo os métodos de detecção de dano em quatro categorias:

Nível 1: Métodos que detectam a presença de dano na estrutura.

Nível 2: Métodos que localizam o dano na estrutura.

Nível 3: Métodos que quantificam a severidade do dano na estrutura.

Nível 4: Métodos que prevêm a vida útil remanescente da estrutura.

Uma outra classificação pode ser feita, diferenciando entre métodos que utilizam só os dados **experimentais** (abordagem baseada na resposta da estrutura) para localizar a falha, e métodos que precisam de dados **experimentais e modelos analíticos** (métodos de ajuste de modelos ou - model updating methods) para resolver o problema de detecção.

4.2.1 Variações de Frequência

O método da variação de frequência é um método de **nível 2** ou **3**, que consiste em identificar a presença, estimar a localização e quantificar o dano a partir de variações nas frequências naturais, que como é sabido, por si sós, não são suficientes para dar uma localização única do dano, e, portanto, estes métodos precisam de um modelo analítico prévio para localizar o dano. Esta técnica se classifica dentro dos métodos que requerem dados experimentais e modelos analíticos.

Neste método, a variação na frequência natural $\delta\omega_i$ do modo i de uma estrutura devida à presença de dano localizado é modelada como função do vetor de posição do dano, $\{\rho\}$, e da redução de rigidez causada pelo dano, ΔK , assim sendo, tem-se:

$$\delta\omega_i = f_i(\Delta K, \{\rho\}) \quad (4.1)$$

Expandindo-se esta função em torno do estado não danificado ($\Delta K = 0$), e desprezando-se os termos de segunda ordem, a eq.(4.1) pode ser aproximada por:

$$\delta\omega_i = f_i(0, \{\rho\}) + \Delta K \frac{\partial f}{\partial(\Delta K)}(0, \{\rho\}) + \rho \frac{\partial f}{\partial \rho}(0, \{\rho\}) \quad (4.2)$$

Como $f_i(0, \{\rho\}) = 0$ para todos os $\{\rho\}$, já que não existe variação de frequência sem dano, e sabendo-se que, por causa da expansão em torno do estado não danificado $\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}(0, \{\rho\}) = 0$, pode se escrever para o modo i :

$$\delta\omega_i = \Delta K \cdot h_i(\{\rho\}) \quad (4.3)$$

De forma análoga, a variação de frequência no modo j fica:

$$\delta\omega_j = \Delta K \cdot h_j(\{\rho\}) \quad (4.4)$$

Assim, considerando-se que a variação de rigidez seja independente da frequência, uma nova relação pode-se escrever:

$$\frac{\delta\omega_i}{\delta\omega_j} = \frac{h_i(\{\rho\})}{h_j(\{\rho\})} \equiv g(\{\rho\}) \quad (4.5)$$

A eq.(4.5) expressa que a razão da variação de frequência em dois modos é função apenas da localização do dano. Posições onde a relação teórica $\delta\omega_i/\delta\omega_j$ for igual ao valor medido experimentalmente serão, portanto, possíveis locais danificados.

É preciso agora calcular as variações de frequência da estrutura devidas ao dano num determinado local. O método baseia-se em considerar o dano como uma redução

local de rigidez. Uma forma de calcular as variações nas freqüências naturais, devidas ao dano, num determinado elemento da malha de elementos finitos é reduzir a rigidez desse elemento e repetir a análise dinâmica confrontando-se os resultados. Isto pode ser feito para um elemento de cada vez, de forma tal, que as variações teóricas das freqüências, para danos introduzidos em diferentes lugares, possam ser determinadas. Em vez de realizar a análise dinâmica total para calcular as variações de freqüência, pode ser usada uma *análise de sensibilidade* ou *análise de perturbação* para se obter as variações de freqüência. Mediante o emprego deste método as sensitividades das freqüências naturais de um sistema às variações de rigidez são calculadas a partir das formas modais da estrutura não danificada, e estas formas modais são obtidas na análise dinâmica inicial.

O problema básico que é resolvido na análise dinâmica é (eq(3.28)):

$$([K] - \lambda[M])\{q\} = \{0\} \quad (4.6)$$

onde:

$[K]$ = Matriz de rigidez global do sistema.

$[M]$ = Matriz de massa global do sistema.

$\{q\}$ = Autos vetores do sistema.

$\omega^2 = \lambda$ Autos valores do sistema.

Considerando-se o efeito de uma variação pequena de rigidez ΔK na matriz $[K]$, e com variações similares nos outros parâmetros, a eq.(4.6) fica:

$$([K + \Delta K] - [M + \Delta M](\lambda + \Delta\lambda))\{q + \Delta q\} = \{0\} \quad (4.7)$$

onde ΔM é a variação da matriz de massa, $\Delta\lambda$ é a variação dos autos valores do sistema e ΔK é a variação na matriz de rigidez devida ao dano localizado. Realizando-se as multiplicações indicadas na eq.(4.7), desprezando-se os termos de segunda ordem, sabendo-se que no modelo adotado $\Delta M = 0$ e empregando-se a eq.(4.6) a eq.(4.7) passa a se redigir:

$$\Delta K\{q\} - \Delta\lambda[M]\{q\} + [K]\Delta\{q\} - \lambda[M]\Delta\{q\} = \{0\} \quad (4.8)$$

Multiplicando-se a eq.(4.8) por $\{q\}^T$ tem-se:

$$\{q\}^T \Delta K\{q\} - \Delta\lambda\{q\}^T [M]\{q\} + (\{q\}^T [K] - \lambda\{q\}^T [M])\Delta\{q\} = \{0\} \quad (4.9)$$

Já que as matrizes de massa e rigidez são simétricas, a transposta da eq.(4.6) multiplicada por $\Delta\{q\}$ fica:

$$\left(\{q\}^T [K] - \lambda \{q\}^T [M]\right) \Delta \{q\} = \{0\} \quad (4.10)$$

Substituindo-se a eq.(4.10) na eq.(4.9), tem-se:

$$\Delta \lambda_i = \frac{\{q\}_i^T \Delta K \{q\}_i}{\{q\}_i^T [M] \{q\}_i} \quad (4.11)$$

que expressa a variação das freqüências naturais em função das variações de rigidez ΔK , da matriz de massa original do sistema e das formas modais.

Como ΔK , neste caso, representa a variação da matriz de rigidez devida a redução de rigidez de um elemento, ΔK será uma matriz com todos os elementos nulos, exceto aqueles afetados pela redução de rigidez (dano). ΔK pode ser calculada a partir da primeira eq.(3.19) e utilizando a seguinte expressão:

$$\Delta K = [K] - [K]^D \quad (4.12)$$

onde $[K]^D$ é a matriz global de rigidez danificada.

A eq.(4.12) pode ser usada junto com a eq.(4.11) para determinar as **sensitividades** das freqüências naturais ao dano em qualquer ponto da estrutura.

Usando-se o procedimento anterior, as medidas de variações de freqüência em um par de modos indicarão o local onde possivelmente existe dano, isto é, pontos onde a relação de variação de freqüência determinada experimentalmente é igual à relação teórica:

$$\left(\frac{\delta \omega_i}{\delta \omega_j}\right)_{Ex} = \left(\frac{\Delta \lambda_i}{\Delta \lambda_j}\right) \quad (4.13)$$

Com as eqs.(4.11) e (4.12) pode-se estimar, de forma grosseira, a severidade do dano. A comparação das variações de freqüência medidas experimentalmente para um modo, com os valores obtidos pela análise de sensibilidade para um elemento danificado (grau de dano conhecido), fornece uma indicação da severidade do dano em termos do grau de danificação introduzido no modelo teórico. Este método foi proposto por Cawley e Adams (1979). Os autores mostram, através de resultados de ensaios, que o método pode ser usado para detectar, localizar e quantificar (de forma grosseira) dano em estruturas. A técnica é aplicável a qualquer sistema que possa ser modelado com elementos finitos.

Da discussão anterior, fica em evidencia, que este método é altamente sensível a qualidade das medições das freqüências, e, por tanto, deve ser utilizado com muita precaução.

4.2.2 *Variações das Formas Modais.*

Este método considera o que pode ser feito em relação à detecção de dano, a partir de dados experimentais somente, evitando-se assim o alto custo de desenvolver um **MEF** e validá-lo. Neste método é feita uma comparação gráfica das formas modais para indicar a localização do dano. Os parâmetros usados são a **diferença relativa** e a **diferença direta** (ou simplesmente **diferença**), que são calculadas usando as formas modais da estrutura sem dano e as forma modais da estrutura danificada. Estes parâmetros podem ser calculados usando as eqs.(4.14) e (4.15) (FOX (1992)), ou seja:

$$\{DR\} = \frac{\{q_{SD}\}_i - \{q_D\}_i}{\{q_{SD}\}_i} \quad (4.14)$$

$$\{DD\} = \{q_{SD}\}_i - \{q_D\}_i \quad (4.15)$$

onde:

$\{DR\}$ = Diferença Relativa entre formas modais.

$\{DD\}$ = Diferença Direta entre formas modais.

$\{q_{SD}\}_i$ = i-ésima forma modal da estrutura sem dano.

$\{q_D\}_i$ = i-ésima forma modal da estrutura danificada.

O método da **diferença relativa** fornece informação sobre variações na amplitude da forma modal (efeito de **escala**) e variações na posição dos nós (efeito de **defasagem**). Para dar claridade a estes dois conceitos parece sugestivo estudar o seguinte exemplo. Tome-se uma função senoidal de amplitude A e a mesma função com amplitude αA . Na figura 4 apresentam-se a diferença relativa e a diferença direta entre as duas funções, calculadas segundo as eqs.(4.14) e (4.15).

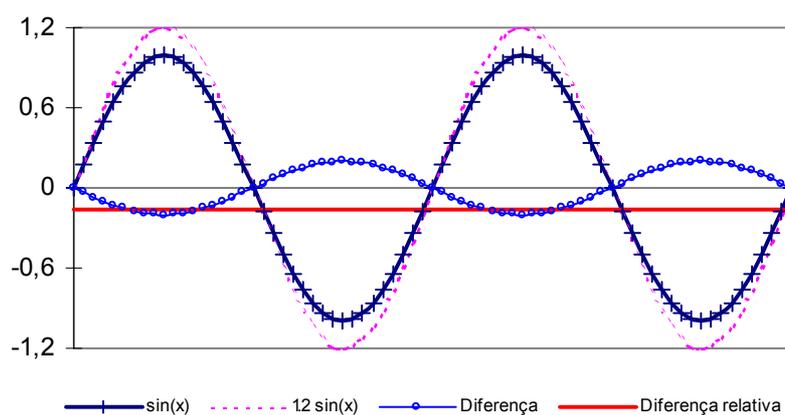


Figura 4 –Efeito da Variação de amplitude função $\sin(x)$.

Da figura 4, pode-se observar que a diferença entre funções escaladas de forma diferente é uma função que possui a mesma forma que as funções originais e com nós nas mesmas posições. Porém, a diferença relativa tem um valor constante, indicando-se a existência de uma diferença de escala entre as funções.

A figura 5 apresenta a mesma função senoidal, mas com uma defasagem de dois graus. A curva da diferença entre as duas funções apresenta uma pequena oscilação, com um máximo na região dos nós da função original. A diferença relativa tem uma variação brusca com picos bem diferenciados na vizinhança dos nós onde as maiores variações relativas nas formas modais acontecem. Tomando-se a informação fornecida pelas figuras 4 e 5, pode-se constatar que o método da diferença relativa se mostra bastante eficiente para detectar pequenas mudanças nas formas modais, devidas a variações nas posições nodais e às mudanças de escala.

Traçando-se as curvas de diferencia entre formas modais para uma viga com e sem dano, Fox (1992) encontrou um padrão interessante que se repete em todos os modos de vibração, qual seja, uma descontinuidade das curvas na região onde esta presente o dano, inclusive para os modos que apresentam variações de frequência pequenas.

Uma desvantagem dos métodos baseados em variação das formas modais é que, para defini-las razoavelmente, é preciso medir o deslocamento num número suficiente de pontos. Pelas características mencionadas, estes métodos podem ser amplamente aplicados para detecção de dano em vigas. Este método pode ser classificado como de nível 2.

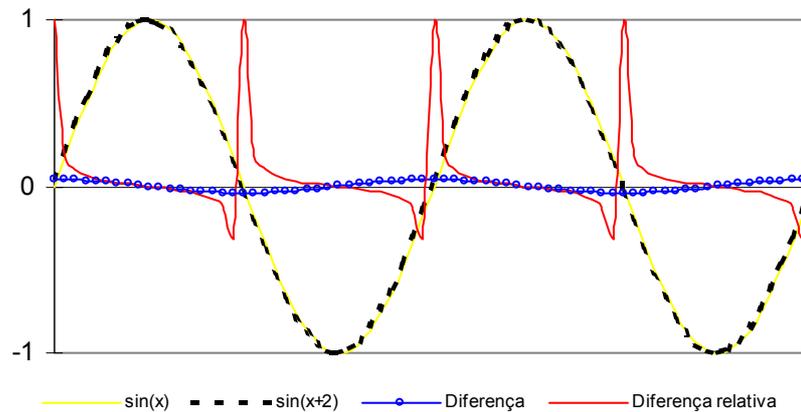


Figura 5 - Efeito da Variação de fase função $\sin(x)$.

4.2.3 *Variações da Curvatura das Formas Modais e Variações da Energia de Deformação.*

A existência de uma fissura ou dano em uma seção de uma estrutura reduz a rigidez no lugar onde esta se encontra. A redução em EI (E é o módulo de elasticidade e I é o momento de inércia da seção) produz um aumento na grandeza da curvatura v'' na seção, como se deduz da expressão clássica da resistência : $v'' = M / EI$ onde M é o momento de flexão na seção.

Já que, as variações da curvatura são locais, e dependem da redução de EI , elas podem ser usadas para detectar, localizar e quantificar danos (PANDEY, BISWAS E SAMMAN, 1991 e SALAWU E WILLIAMS, 1994). Espera-se que a diferença absoluta da curvatura das formas modais entre a estrutura sem dano e a danificada apresente um máximo na região danificada. Além disto, a máxima diferença aumenta à medida que o grau de redução de rigidez aumenta na zona danificada. As curvaturas são calculadas a partir das formas modais usando-se uma aproximação de diferença central:

$$v_{ij}'' = \frac{(q_{(i+1)j} - 2q_{ij} + q_{(i-1)j})}{l^2} \quad (4.16)$$

onde:

l = comprimento do elemento de viga utilizado.

v_{ij}'' = i -ésimo elemento do i -ésimo vetor de curvatura.

q_{ij} = i -ésimo elemento da j -ésima forma modal.

A diferença absoluta da curvatura, **DC**, é calculada como:

$$DC = \left| v_k'' - v_k''^D \right| \quad (4.17)$$

com:

v_k'' = Curvatura da forma modal k da estrutura intacta.

$v_k''^D$ = Curvatura da forma modal k da estrutura danificada.

Neste método, a simulação do dano também é feita reduzindo o modulo de elasticidade **E** para cada elemento selecionado E isto implica que só dano afetando a rigidez estrutural pode ser considerado.

Para se levar em conta todos os modos medidos, Wahab e De Roeck (1999) propuseram o chamado Fator de Dano de Curvatura (**FDC**), que simplesmente é uma média aritmética das diferenças de curvatura entre a estrutura sadia e a danificada, ou seja:

$$FDC = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left| v_k'' - v_k''^D \right| \quad (4.18)$$

onde n é o número total de modos considerados.

Um outro método que emprega as formas modais, especificamente as curvaturas das formas modais, proposto por Stubbs, Kim e Toppole (1992) baseia-se na variação da **energia modal de deformação**. Para vigas, este método pode ser estabelecido da seguinte forma.

A energia de deformação para a viga Euler – Bernoulli, de comprimento L , sem dano é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4.19)$$

onde u é uma função que representa a deformada da viga (vide eq.(2.15)). Para um forma modal qualquer, $q_i(x)$, a energia associada com esta forma modal é dada por:

$$U_i = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4.20)$$

Se a viga for dividida em N partes, então a energia associada com cada sub região j , devida ao i -ésimo modo, vem a ser dada por:

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \int_{a_j}^{a_{j+1}} (EI)_j \left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4.21)$$

Definido-se a energia fracionaria, F_{ij} , como a relação entre a energia de deformação da região j para o modo i , U_{ij} , e a energia de deformação total para o modo i U_i , tem-se:

$$F_{ij} = \frac{U_{ij}}{U_i} \quad (4.22)$$

e, mais ainda:

$$\sum_{j=1}^N F_{ij} = 1 \quad (4.23)$$

A eq.(4.23) expressa que a somatória das energias fracionarias para as N regiões estudadas venha ser igual à unidade. Para a viga danificada, pode-se definir quantidades similares, ou seja:

$$U_i^D = \frac{1}{2} \int_0^L EI^D \left(\frac{\partial^2 q_i^D}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4.24)$$

$$U_{ij}^D = \frac{1}{2} \int_{a_j}^{a_{j+1}} (EI)^D_j \left(\frac{\partial^2 q_j^D}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (4.25)$$

$$F_{ij}^D = \frac{U_{ij}^D}{U_i^D} \quad (4.26)$$

$$\sum_{j=1}^N F_{ij}^D = 1 \quad (4.27)$$

onde D indica a quantidade calculada usando-se a estrutura danificada. Escolhendo-se sub-regiões pequenas, a rigidez à flexão para a j -ésima região, $(EI)_j^D$, pode ser considerada constante, e portanto F_{ij}^D fica:

$$F_{ij}^D = \frac{(EI)_j^D \int_{a_j}^{a_{j+1}} \left(\frac{\partial^2 q_i^D}{\partial x^2} \right)^2 dx}{U_i^D} \quad (4.28)$$

Admitindo-se que o dano esteja localizado numa única sub-região, então a energia fracionaria permanecerá relativamente constante nas regiões não danificadas. Utilizando as eqs(4.23) e (4.27), tem-se que $F_{ij} = F_{ij}^D$. Para um dano localizado na sub região $j = l$, e usando-se o modo i , pode-se escrever:

$$\frac{(EI)_l \int_{a_l}^{a_{l+1}} \left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial x^2} \right)^2 dx}{U_i} = \frac{(EI)_l^D \int_{a_l}^{a_{l+1}} \left(\frac{\partial^2 q_i^D}{\partial x^2} \right)^2 dx}{U_i^D} \quad (4.29)$$

Supondo-se que EI e EI^D sejam constantes, e essencialmente iguais ao longo da viga, a eq.(4.29) pode ser re-escrita usando-se as eqs.(4.20) e (4.24) de tal forma que forneça uma indicação da variação da rigidez à flexão na sub região l , para o modo de vibração i , ou seja:

$$\frac{(EI)_l}{(EI)_l^D} = \frac{\int_{a_l}^{a_{l+1}} \left(\frac{\partial^2 q_i^D}{\partial x^2} \right) dx / \int \left(\frac{\partial^2 q_i^D}{\partial x^2} \right) dx}{\int_{a_l}^{a_{l+1}} \left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial x^2} \right) dx / \int \left(\frac{\partial^2 q_i}{\partial x^2} \right) dx} \equiv \frac{\mathcal{G}_{il}^D}{\mathcal{G}_{il}} \quad (4.30)$$

Para considerar todos os modos medidos, p , no cálculo, define-se o **índice de dano** para a sub região l como:

$$\zeta_l = \frac{\sum_{i=1}^p \mathcal{G}_{il}^D}{\sum_{i=1}^p \mathcal{G}_{il}} \quad (4.31)$$

A eq.(4.31) fornece a variação de rigidez na região l devida à contribuição de todos os modos de vibração. É evidente que as regiões com $\zeta_l=1$ não estão danificadas. Quanto maior ζ_l , maiores as chances de o dano estar localizado no elemento l .

Admitindo-se que o conjunto dos índices de dano ζ_l representam uma amostra de uma população que pode ser representada por uma variável aleatória normalmente distribuída, um índice de dano normalizado pode ser obtido usando-se:

$$\Gamma_l = \frac{\zeta_l - \overline{\zeta_l}}{\sigma_l} \quad (4.32)$$

onde:

$\overline{\zeta_l}$ = Media dos índices de dano.

σ_l = Desvio padrão dos índices de dano.

A transformação dada pela eq.(4.32) permite utilizar a distribuição normal padrão (reduzida), $\mathbf{N}(\mathbf{0},\mathbf{1})$, para definir potenciais zonas danificadas. Por exemplo, nos trabalhos de Cornwell, Doebling e Farrar (1999) e de Jauregui e Farrar (1996), regiões com índices de dano normalizado, Γ_l , maior que dois, ou seja, valores de Γ_l afastados mais do que dois desvios padrão da media, estão associados com locais danificados.

Uma vantagem da formulação apresentada é que as formas modais empregadas não precisam ser normalizadas. A apresentação anterior esta baseada no trabalho de Stubbs, Kim e Toppole (1992). A principal desvantagem deste método é a dificuldade

para se calcular as derivadas e integrais quando as formas modais são estimadas a partir de poucos pontos de medição na estrutura.

4.2.4 Métodos de Ajuste de Matriz ou Métodos de Ajuste de Modelos

São métodos baseados na modificação das matrizes do modelo estrutural (massa, rigidez e amortecimento) a partir dos parâmetros modais medidos, visando reproduzir, da melhor forma possível, a resposta da estrutura (estática ou dinâmica), medida experimentalmente. Uma característica básica dos métodos diretos de ajuste é que reproduzem os dados medidos de forma exata (modelos representacionais). Porém, o ajuste é feito, de forma tal, que o ruído devido aos erros nas medidas não seja reproduzido. Por isso, na implementação destes métodos, é preciso que o modelo matemático da estrutura (**MEF**, por exemplo) e as medições experimentais sejam acurados e de alta qualidade.

A principal desvantagem destes métodos é que as matrizes ajustadas perdem seu sentido físico original. Por exemplo, a matriz de rigidez ajustada geralmente é uma matriz cheia e sem elementos nulos, perdendo-se a informação sobre conectividade dos elementos da estrutura (FRISWELL e MOTTHERSHEAD, 1995).

Para evitar esses problemas, e para levar em conta no ajuste que as matrizes de rigidez podem acumular valores não nulos (em razão da presença do dano) em locais onde a matriz original de rigidez continha elementos nulos (devido ao cancelamento de forças durante a montagem da matriz global), Filho, Roitman e Magluta (2000) propuseram o uso no ajuste de uma matriz ponderadora, eq.(4.39), que acumula valores absolutos das contribuições elementares, resolvendo-se assim o problema da esparsidade real do modelo. Um completíssimo tratamento destes métodos pode ser encontrado no livro de Friswell e Mottershead (1995).

A formulação e solução do problema de ajuste das matrizes de flexibilidade e rigidez (método direto) segundo Baruch (1978b) pode ser feita da seguinte maneira: Seja $[\Gamma]$ ($n \times m$) uma matriz retangular que contem as formas modais medidas, e corrigidas (segundo o método proposto por Baruch e Bar Itzhack, 1978a), de forma tal, que cumpram com a condição: $[\Gamma]^T [M] [\Gamma] = [I]$, e seja $[\Omega_M]$ uma matriz diagonal

($m \times m$), que contem as frequências medidas do sistema. Busca-se uma matriz de rigidez $[Y]$ que **minimize** a norma euclidiana (função objetivo) que se segue:

$$Ne = 1/2 \left\| \left[[M]^{1/2} \right]^{-1} ([Y] - [K]) \left[[M]^{1/2} \right]^{-1} \right\| = \frac{1}{2} \sum_{1,j}^n \left[\sum_{h,k=1}^n m_{ih}^* (y_{hk} - k_{hk}) m_{kj}^* \right]^2 \quad (4.33)$$

e que satisfaça as restrições dadas pelas eqs.(4.34) e (4.35), ou seja:

$$[Y][\Gamma] = [M][\Gamma][\Omega_M^2] \quad (4.34)$$

$$[Y]^T = [Y] \quad (4.35)$$

A restrição dada pela eq (4.34) é necessária e suficiente para que $[\Gamma]$ e $[\Omega_M^2]$ sejam soluções da equação de movimento, eq.(4.36):

$$[M]\{\ddot{V}\} + [Y]\{V\} = \{0\} \quad (4.36)$$

A eq.(4.35) indica que a matriz de rigidez corrigida deve ser simétrica e a eq. (4.33) é uma forma de medir quão próximas estão as duas matrizes $[Y]$ e $[K]$. Nas anteriores equações, m é o número de autos valores medidos e n o número de graus de liberdade do modelo e:

$[Y]$ = Matriz ($n \times n$) de rigidez corrigida a ser calculada.

$[K]$ = Matriz ($n \times n$) de rigidez original, geralmente obtida mediante medições ou pelo **MEF**.

$[M]$ = Matriz ($n \times n$) de massa positiva definida, tomada como parâmetro conhecido do sistema.

$[\Gamma]$ = Matriz ($n \times m$) de Formas modais medidas normalizadas.

$\{V\}$ = Vetor de deslocamentos nodais.

m_{ij}^* = Elemento (i,j) da matriz $[M]^{-1/2}$

y_{ij} = Elemento (i,j) da matriz $[Y]$

k_{ij} = Elemento (i,j) da matriz $[K]$

Para resolver o problema em apreço emprega-se o método de multiplicadores de Lagrange. A função aumentada, Lg , deve ser minimizada para se obter a matriz de rigidez $[Y]$; e isso pode ser obtido a partir das eqs.(4.33), (4.34) e (4.35), apresentando-se a seguinte redação:

$$\begin{aligned}
Lg = & \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left[\underbrace{\sum_{h,k=1}^n m_{ih}^* (y_{hk} - k_{hk}) m_{kj}^*}_{\text{Fun. Objetivo}} \right]^2 + \underbrace{\sum_{i,j=1}^n \chi_{ij}^Y (y_{i,j} - y_{ji})}_{\text{Re st. Simetria}} \\
& + 2 \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \chi_{ij} \sum_{h=1}^n (y_{ih} \Gamma_{hj} - m_{ij} \Gamma_{hj} \omega_j^2)}_{\text{Re st. Movimento}}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

onde:

m_{ij} = Elementos da matriz de massa $[M]$.

ω_j = j-ésima frequência medida.

χ_{ij}^Y, χ_{ij} = Multiplicadores de Lagrange.

A função lagrangeana dada pela eq.(4.37) deve ser minimizada com relação aos elementos da matriz de rigidez $[Y]$. Derivando-se a eq.(4.37) com relação a cada um desses elementos, igualando o resultado a zero e procedendo-se às transformações necessárias, obtém-se:

$$\begin{aligned}
[Y] = & [K] - [K][\Gamma][\Gamma]^T [M] - [M][\Gamma][\Gamma]^T [K] + [M][\Gamma][\Gamma]^T [K][\Gamma][\Gamma]^T [M] \\
& + [M][\Gamma][\Omega_M^2][\Gamma]^T [M]
\end{aligned} \tag{4.38}$$

A eq.(4.38) fornece a matriz de rigidez $[Y]$ buscada, em função da matriz de formas modais medidas normalizadas $[\Gamma]$, da matriz de massa $[M]$ do sistema e das frequências naturais medidas $[\Omega_M]$.

Da anterior discussão, fica evidente que no, ajuste da matriz de rigidez, não foi utilizada a informação sobre a conectividade da estrutura. Além disto, a função objetivo definida pela eq.(4.33), pode originar variações percentuais maiores nos elementos da matriz de rigidez com valores baixos, que para os elementos com valores numéricos elevados. Para evitar estes problemas, Filho, Roitman e Magluta (2000), baseando-se no trabalho de Kabe (1985) e Verçosa (1995a), propuseram a seguinte restrição:

$$[Y] = [K_c] \otimes [\gamma] \tag{4.39}$$

onde:

\otimes = Operador que indica multiplicação elemento a elemento.

$[\gamma]$ = Matriz de coeficientes de ajuste da matriz de rigidez. Esta matriz é a incógnita do problema.

γ_{ij} = Elemento (i,j) da matriz $[\gamma]$.

$[K_c]$ = Matriz de conectividade, ou matriz ponderadora.

A matriz $[K_c]$ é obtida através da acumulação dos valores absolutos das contribuições locais de rigidez durante o processo de montagem da matriz de rigidez global da estrutura. Como sabido, durante a montagem da matriz de rigidez global, surgem zeros devido ao equilíbrio de forças, já em uma estrutura danificada os respectivos elementos da matriz de rigidez afetados pelo dano poderiam não acumular valores nulos. A matriz $[K_c]$ representa esta possibilidade.

A matriz $[\gamma]$, e portanto a matriz $[Y]$, pode ser obtida a partir do trabalho de Kabe (1985), estabelecendo-se que $[\gamma]$ minimiza a seguinte função erro:

$$\varepsilon = \|[i] - [i] \otimes [\gamma]\| \quad (4.40)$$

com:

$$i_{ij} = 1 \quad k^c_{ij} \neq 0$$

$$i_{ij} = 0 \quad k^c_{ij} = 0$$

onde k^c_{ij} elemento i,j da matriz ponderadora $[K_c]$.

A minimização da eq.(4.40) esta sujeita às restrições dadas pelas eq. (4.34) e (4.36), com a matriz $[Y]$ definida pela eq.(4.39). A função ε independe das grandezas dos elementos da matriz de rigidez original, e visa minimizar as variações percentuais dos mesmos durante o processo. Compondo a função Lagrangeana e derivando-a com relação a cada γ_{ij} , igualando estas derivadas a zero e realizando as transformações necessárias, obtêm-se as equações:

$$[Y] = [K_c] \otimes [\gamma] = [K_c] - \frac{1}{4} [Z] \otimes ([\eta][\Gamma]^T + [\Gamma][\eta]^T) \quad (4.41)$$

e:

$$4([M][\Gamma][\Omega_m^2] - [K_c][\Gamma]) + \{[\Gamma] \otimes [\eta][\Gamma]^T\}[\Gamma] + \{[\Gamma] \otimes [\Gamma][\eta]^T\}[\Gamma] = 0 \quad (4.42)$$

onde:

$$[Z] = [K_c] \otimes [K_c].$$

$$[\eta] = \text{Matriz de multiplicadores de Lagrange } \eta_{ij}$$

A partir da equação (4.42) pode-se calcular a matriz $[\eta]$, que, substituída na eq.(4.41), fornece a matriz de rigidez $[Y]$.

A localização de danos usando-se o método de ajuste de modelos pode ser feita comparando-se as duas matrizes de rigidez $[K]$ e $[Y]$, como proposto por Filho, Roitman e Magluta (2000).

Criando-se uma matriz de rigidez erro com a seguinte forma:

$$|K_E|_{ij} = \frac{|k_{ij} - y_{ij}|}{|k_{ij}^c|} \quad \text{se} \quad |k_{ij}^c| \neq 0$$

e: (4.43)

$$|K_E|_{ij} = 0 \quad \text{se} \quad |k_{ij}^c| = 0$$

onde:

$|K_E|_{ij}$ = Elemento i,j da matriz de rigidez erro.

$|k_{ij}^c|$ = Elemento i,j da matriz ponderadora ou matriz de conectividade.

k_{ij} = Elemento i,j da matriz de rigidez original.

y_{ij} = Elemento i,j da matriz de rigidez ajustada (corrigida).

O dano poderá ser localizado através das variações bruscas dos elementos da matriz de rigidez erro. Da anterior discussão, fica claro que o método é bastante exigente para realizar a detecção, requerendo o desenvolvimento de um **MEF** requintado para a abordagem da estrutura, além de precisar de medições de alta qualidade, para não falar do alto custo computacional requerido pela minimização. O método acima exposto pode ser classificado como de nível 2, segundo a classificação de Ritter (1993).

4.2.5 Métodos Baseados na Flexibilidade Medida Dinamicamente

A matriz de flexibilidade estrutural pode ser calculada usando-se só as frequências e formas modais medidas (**Flexibilidade Modal**), com a grande vantagem que pode ser construída a partir de modos truncados sem perda de exatidão, como estabelecido por Pandey e Biswas (1994), (1995). No limite, se todos os modos forem medidos, a matriz de flexibilidade calculada tendera assintoticamente à matriz de flexibilidade estática da estrutura (que é a inversa da matriz de rigidez). A matriz de

flexibilidade representa a resposta estática em deslocamento da estrutura a um vetor de carregamento estático. Estas propriedades da matriz de flexibilidade a tornam uma ferramenta muito útil para a detecção de dano.

Dentro deste conjunto de métodos para detecção de dano via resposta dinâmica da estrutura alguns se destacam e são objeto de uma apresentação mais detalhada no que se segue.

4.2.5.1 Método da Variação de Flexibilidade ou Método da Diferença de Flexibilidade

Neste método, a matriz de flexibilidade é formulada como a inversa da matriz de rigidez estática. O dano é detectado por comparação da matriz de flexibilidade gerada a partir dos modos de vibração da estrutura danificada, com a matriz de flexibilidade, gerada a partir dos modos e vibração da estrutura sem dano. A matriz de flexibilidade medida dinamicamente é mais sensível a variações nas baixas frequências da estrutura devido à sua relação inversa com o quadrado das frequências modais.

Como passo prévio do método é preciso normalizar as formas modais com relação à massa. Para tanto, toma-se a propriedade de ortogonalidade dada pela eq.(3.42) com a seguinte redação:

$$[q]^T [M] [q] = [M_g] \quad (\text{propriedade de ortogonalidade dos autos vetores})$$

onde:

$[q]$ = Matriz de formas modais do sistema (não normalizada).

$[M]$ = Matriz de massa original do sistema.

$[M_g]$ = Matriz de massa generalizada (Matriz diagonal)

Agora divide-se cada elemento de cada coluna da matriz $[q]$ pela raiz quadrada do termo correspondente da matriz de massa generalizada, obtendo-se assim, a matriz de formas modais normalizadas :

$$[\Phi] = [q] \cdot [M_g]^{-1/2}$$

onde $[\Phi]$ é a matriz de formas modais normalizadas com relação à massa. Usando-se a propriedade de ortogonalidade dada pela eq.(3.42), repetida aqui por comodidade, ou seja, eq.(4.44):

$$[\Phi]^T [M] [\Phi] = [I] \quad (4.44)$$

e usando-se a matriz $[\Phi]$, pode-se obter expressões para a matriz de rigidez e de flexibilidade da estrutura em função dos parâmetros modais da seguinte maneira:

-O problema de auto-valor em termos de rigidez, para vibração livre, pode ser escrito usando a eq.(3.30) como:

$$[K] [\Phi] = [M] [\Phi] [\Omega] \quad (4.45)$$

onde $[\Omega]$ é a matriz diagonal de autos valores (ω^2). Pré-multiplicando-se a eq. (4.45) por $[K]^{-1} = [f]$, e pós-multiplicando-a por $[\Omega]^{-1}$, tem-se:

$$[\Phi] [\Omega]^{-1} = [f] [M] [\Phi] \quad (4.46)$$

que representa o problema de auto-valor em termos de flexibilidade. Os autos-vetores das eqs.(4.45) e (4.46) são os mesmos, mas os respectivos autos valores são recíprocos (BERMAN E FLANNELLY 1971). O modo dominante da eq.(4.45) é aquele com a maior frequência e o modo dominante da eq. (4.46) é aquele com a menor frequência.

A eq.(4.44) pode ser escrita das seguintes formas:

$$[\Phi]^T [M] = [\Phi]^{-1} \quad (4.47)$$

ou

$$[M] [\Phi] = [\Phi]^{T-1} \quad (4.48)$$

As eqs. (4.47) e (4.48) podem ser escritas devido ao fato de que a matriz de formas modais para um sistema com N graus de liberdade consiste de N vetores modais independentes, e por tanto é uma matriz não singular e pode ser invertida.

Agora, pós-multiplicando a eq.(4.45) por $[\Phi]^{-1}$ e utilizando a propriedade dada pela eq. (4.47), tem-se:

$$[K] = [M] [\Phi] [\Omega] [\Phi]^T [M] \quad (4.49)$$

A eq. (4.49) é a expansão da matriz de rigidez em termos de seus autos vetores e autos valores. Substituindo a eq. (4.48) na eq. (4.46) e pós-multiplicando-a por $[\Phi]^T$, tem-se:

$$[f] = [\Phi] [\Omega]^{-1} [\Phi]^T \quad (4.50)$$

A eq. (4.50) representa a expansão da matriz de flexibilidade em função de seus autos-valores e autos-vetores. Os resultados dados pela eqs. (4.49) e (4.50) podem ser escritos como somatórios das contribuições modais, ou seja:

$$[f] = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i^2} \{\phi\}_i \{\phi\}_i^T \quad (4.51)$$

e

$$[K] = [M] \cdot \left(\sum_{i=1}^N \omega_i^2 \{\phi\}_i \{\phi\}_i^T \right) \cdot [M] \quad (4.52)$$

onde:

$[f]$ = Matriz de flexibilidade do sistema, calculada dinamicamente.

$[K]$ = Matriz de rigidez do sistema, calculada dinamicamente.

$[M]$ = Matriz de massa do sistema.

$\{\phi\}_i$ = Vetor contendo a i-esima forma modal normalizada.

ω_i = i-esima frequência modal.

N = Número de graus de liberdade do sistema.

Da eq. (4.52) pode-se notar que a contribuição modal à matriz de rigidez aumenta à medida que aumenta a frequência. Para se obter uma estimativa acurada da rigidez, todos os modos de vibração da estrutura devem ser medidos ou no mínimo os modos de frequências altas. Isto representa uma restrição severa, do ponto de vista prático, para os métodos que utilizam a diferença entre matrizes de rigidez para detectar danos.

Na prática, em estruturas complexas só uns poucos modos de baixa frequência podem ser medidos. Por outro lado, a eq.(4.51) mostra que a contribuição modal à matriz de flexibilidade diminui à medida que a frequência aumenta, ou seja, que a matriz de flexibilidade converge rapidamente para valores crescentes da frequência. Portanto, a partir de poucos modos de baixa frequência, pode ser feita uma boa estimativa da matriz de flexibilidade. Esta característica da matriz de flexibilidade é utilizada por Pandey e Biswas (1994) e (1995) para localizar e quantificar dano em vigas. O raciocínio usado por eles pode ser resumido da seguinte forma: como a presença de uma fissura ou dano localizado dentro de uma estrutura reduz sua rigidez, e como a flexibilidade é a inversa da rigidez, uma redução de rigidez deve incrementar a flexibilidade da estrutura, indicando-se de esta forma a presença de dano.

Para detectar o dano numa estrutura usando o método da variação de flexibilidade medida dinamicamente devem ser calculados (experimental ou numericamente) os parâmetros modais do sistema. Usando a eq.(4.51) estima-se a matriz de flexibilidade para dois estados diferentes da estrutura, sendo o primeiro

considerado como o estado intacto $[f]$ ou sem dano, e o segundo como o estado danificado $[f^D]$. Com as matrizes de flexibilidade anteriores, calcula-se a matriz de variação de flexibilidade $[\Delta]$:

$$[\Delta] = [f] - [f^D] \quad (4.53)$$

Para cada grau de liberdade j , define-se $\overline{\eta}_j$ como o valor máximo absoluto dos elementos na coluna correspondente de $[\Delta]$:

$$\overline{\eta}_j = \max_i |\eta_{ij}| \quad (4.54)$$

onde η_{ij} são elementos de $[\Delta]$.

Para se detectar e localizar o dano pode ser feito um gráfico que apresente a variação de flexibilidade para cada ponto de medição (ou nó). O dano ficará localizado nos pontos onde a variação de flexibilidade apresente uma variação brusca, um valor máximo de variação, ou um valor máximo local, dependendo das condições de contorno. Diversos exemplos de aplicação deste método são apresentados no Capítulo V.

Lu, Ren e Zhao (2002) introduziram uma modificação no método, que consiste em se usar como medida da variação de flexibilidade os elementos da diagonal da matriz $[\Delta]$, de maneira tal que a localização do dano fica definida pelo grau de liberdade j onde $\overline{\eta}_{ii}$ é máximo, ou seja:

$$\overline{\eta}_j = \max_i |\overline{\eta}_{ii}| \quad (4.55)$$

Duffey et.al.(2000) aplicaram o método da variação de flexibilidade em problemas de vibração axial de barras, estudando o caso de dano simultâneo. Para estes casos conseguiram detectar e localizar elementos danificados com redução de 10% na rigidez.

A técnica anterior pode ser classificada como de nível três e suas principais vantagens, que a tornam muito atraente do ponto de vista prático, são sua independência de qualquer modelo analítico da estrutura estudada e seu baixíssimo custo computacional (o cálculo das variações de flexibilidade é simples, vide eqs.(4.51), (4.53) e (4.54)), porém o sucesso do método depende, em alto grau, da qualidade e quantidade das medições, ou seja, quantos mais pontos de medida dentro da estrutura mais chances existem de detectar o dano.

4.2.5.2 Método da Checagem da Unidade.

O método da checagem da unidade é baseado na relação pseudo-inversa entre a matriz de flexibilidade dinamicamente medida e a matriz de rigidez da estrutura. Definindo-se uma matriz erro da forma:

$$[e] = [f^D] \cdot [K] - [I] \quad (4.56)$$

onde:

$[f^D]$ = Matriz de flexibilidade dinamicamente medida, estrutura danificada.

$[K]$ = Matriz de rigidez da estrutura sem dano.

$[I]$ = Matriz identidade.

esta relação pode ser usada para detectar os graus de liberdade com maior variação de flexibilidade. Usa-se uma matriz pseudo-inversa devido ao fato de que a matriz de flexibilidade medida dinamicamente apresenta colunas linearmente dependentes. Lin (1990) propôs o método da checagem da unidade para localizar erros na modelagem e usou a localização do elemento com maior erro em cada coluna para determinar a posição do erro.

4.2.5.3 Método da Matriz Erro de Rigidez

Apresentado por He e Ewins (1986), o método está baseado no cálculo de uma matriz erro que é função da variação de flexibilidade na estrutura e da matriz de rigidez sem dano, ou seja:

$$[e] = [K][\Delta f][K] \quad (4.57)$$

onde:

$[\Delta f] = [f^D] - [f]$

$[f]$ = Matriz de flexibilidade da estrutura sem dano.

Para identificação de dano, a matriz de rigidez geralmente fornece mais informação que a matriz de massa, e por isso é mais usada. Os dois métodos anteriores utilizam a matriz de rigidez, que como visto no item 4.2.5.1, é difícil de se determinar a partir só de medidas experimentais, e, portanto estes métodos tendem a serem abandonados.

4.2.5.4 Método da Variação de Curvatura da Flexibilidade

Como sabido, os elementos da i -ésima coluna da matriz de flexibilidade representam a deformada assumida pela estrutura quando aplicada uma carga unitária no grau de liberdade i . O somatório de todas as colunas da matriz de flexibilidade representa a deformada da estrutura, quando aplicado um carregamento unitário em cada grau de liberdade. A curva assim obtida recebe o nome de **flexibilidade de carga uniforme**. Como mostrado por Jauregui e Farrar (1996a), a variação da curvatura da deformada produzida por uma carga uniforme pode ser utilizada para localizar dano. Em função da curvatura da deformada produzida por uma carga uniforme F'' , a variação de curvatura no local i pode ser avaliada usando-se:

$$\Delta F'' = \left| F_i^{D''} - F_i'' \right| \quad (4.58)$$

e

$$F'' = \frac{(F_{(i+1)} - 2F_{(i)} + F_{(i-1)})}{h^2} \quad (4.59)$$

onde:

$\Delta F''$ = Variação absoluta de curvatura.

$F_i^{D''}$ e F_i'' = Curvaturas para a estrutura danificada e para a estrutura sadia, respectivamente.

F_i = Deslocamentos da superfície de flexibilidade de carga uniforme, no local i .

h = Distancia entre pontos de medida, (Sensores).

Pode ser utilizada, por exemplo, a interpolação entre pontos de medida para obter-se dados de deslocamentos em pontos intermediários, ou pode-se usar um polinômio que ajuste os dados para se obter a curva que represente a deformada de carga uniforme.

Uma alternativa proposta por Lu, Ren e Zhao (2002) é a seguinte: partindo-se do fato que, para uma estrutura sadia, o gráfico da curvatura possui uma forma suave, e que, portanto, um pico ou descontinuidade no gráfico indica uma variação anormal de flexibilidade/rigidez, na posição onde está a descontinuidade, o dano pode ser localizado utilizando-se esta informação. A vantagem prática do método reside no fato

de que seu cálculo não depende da comparação entre dois estados diferentes da estrutura (não precisa de dados de referencia). A curvatura da flexibilidade pode ser calculada empregando-se o método de diferença central, da forma seguinte:

$$F_i^C = \frac{(f_{(i-1,i-1)} - 2f_{i,i} + f_{(i+1,i+1)})}{\Delta h^2} \quad (4.60)$$

com

$$i = 2, \dots, n-1$$

onde:

F_i^C = i-ésimo elemento do vetor de curvatura da flexibilidade.

$f_{i,i}$ = i-ésimo elemento diagonal da matriz de flexibilidade danificada.

Δh = Comprimento do elemento ou distancia entre pontos de medição.

n = Número de graus de liberdade.

No Capitulo V apresentam-se vários exemplos de aplicação deste método.

4.2.6 Métodos não Lineares.

Do ponto de vista da dinâmica das estruturas, o comportamento não linear de uma estrutura se pode manifestar como uma variação nas frequências naturais devidas à mudança da posição (e grandeza) da excitação aplicada, ou como uma distorção nas curvas das **FRF's** (**F**unções de **R**esposta em **F**requência). Do ponto de vista das propriedades do material, o comportamento não linear pode surgir quando, durante a vibração da estrutura, as tensões em determinados lugares atingem valores tais que as deformações nesses lugares tornam-se plásticas, ou quando existem fissuras de fadiga dentro do material. Nestes casos, a localização dessas regiões (danos) pode ser feita seguindo o método proposto por Lin e Ewins (1990).

O método está baseado na correlação entre os dados obtidos com o **MEF** e os dados modais medidos. As relações que formam a base do método são estabelecidas a partir do problema de auto-valor, da seguinte forma: supondo-se que o modelo analítico da estrutura e as medições dos autos valores e autos vetores correspondentes a dois níveis de excitação para o modo i estejam disponíveis, pode-se escrever as seguintes relações:

$$((([M] + [\Delta M])\lambda_i^1 + ([K] + [\Delta K]))\{q_i^1\}) = \{0\} \quad (4.61)$$

$$([\mathbf{M}] + [\Delta\mathbf{M}])\lambda_i^2 + ([\mathbf{K}] + [\Delta\mathbf{K}] + [\Delta\mathbf{K}_D])\{q_i^2\} = \{0\} \quad (4.62)$$

onde:

$$\lambda_i^1, \{q_i^1\}, \lambda_i^2, \{q_i^2\} = \text{parâmetros modais medidos nos níveis de excitação 1 e 2,}$$

correspondentes ao i -ésimo modo.

$[\Delta\mathbf{K}]$ e $[\Delta\mathbf{M}]$ = erros na modelagem da matriz rigidez e de massa, (matrizes de perturbação).

$[\Delta\mathbf{K}_D]$ = Matriz de erro de rigidez devido à presença da não linearidade (dano).

Multiplicando-se a eq.(4.61) por $\{q_i^2\}^T$, e a eq.(4.62) por $\{q_i^1\}^T$ tem-se:

$$[[\Delta\mathbf{M}]\lambda_i^1 + [\Delta\mathbf{K}]]\{q_i^1\}\{q_i^2\}^T = [[\mathbf{M}]\lambda_i^1 + [\mathbf{K}]]\{q_i^1\}\{q_i^2\}^T \quad (4.63)$$

$$[[\Delta\mathbf{M}]\lambda_i^2 + [\Delta\mathbf{K}] + [\Delta\mathbf{K}_D]]\{q_i^2\}\{q_i^1\}^T = [[\mathbf{M}]\lambda_i^2 + [\mathbf{K}]]\{q_i^2\}\{q_i^1\}^T \quad (4.64)$$

Subtraindo (4.63) de (4.64), e ordenando, tem-se:

$$\begin{aligned} & ([\mathbf{M}]\lambda_i^1 + [\mathbf{K}])\{q_i^1\}\{q_i^2\}^T - ([\mathbf{M}]\lambda_i^2 + [\mathbf{K}])\{q_i^2\}\{q_i^1\}^T = [\Delta\mathbf{M}](\lambda_i^2\{q_i^2\}\{q_i^1\}^T - \lambda_i^1\{q_i^1\}\{q_i^2\}^T) \\ & + [\Delta\mathbf{K}](\{q_i^2\}\{q_i^1\}^T - \{q_i^1\}\{q_i^2\}^T) + [\Delta\mathbf{K}_D]\{q_i^2\}\{q_i^1\}^T \end{aligned} \quad (4.65)$$

sendo que a parte esquerda da eq.(4.65) é chamada de matriz $[\Pi]$. A matriz $[\Pi]$ é função de parâmetros conhecidos (medidos em dois níveis de excitação diferentes e das matrizes de massa e rigidez do sistema original) e deve satisfazer a condição:

$$\lim_{\lambda_i^1 \rightarrow \lambda_i^2} [\Pi(\{q_i^1\}, \{q_i^2\}, \lambda_i^1, \lambda_i^2)] = [0] \quad (4.66)$$

Como $\{q_i^2\}$ é uma forma modal (não clássica) perturbada de $\{q_i^1\}$, devida à mudança de rigidez produzida pela não linearidade e supondo-se que os erros de modelagem, $[\Delta\mathbf{M}]$ e $[\Delta\mathbf{K}]$, sejam da mesma magnitude que a variação de rigidez causada pela não linearidade $[\Delta\mathbf{K}_D]$, as seguintes simplificações podem ser feitas:

$$\{q_i^2\}\{q_i^1\}^T - \{q_i^1\}\{q_i^2\}^T \approx 0 \quad (4.67)$$

$$\lambda_i^2\{q_i^2\}\{q_i^1\}^T - \lambda_i^1\{q_i^1\}\{q_i^2\}^T \approx 0 \quad (4.68)$$

Então, com aproximação de primeira ordem, a eq.(4.65) pode ser escrita como:

$$[\Delta\mathbf{K}_D]\{q_i^2\}\{q_i^1\}^T = [\Pi] \quad (4.69)$$

Se $[\Delta\mathbf{K}_D]$ for um dano localizado, ou seja, que só os elementos afetados pela não linearidade serão diferentes de zero e que o resto serão nulos, então, após a

5. Exemplos Numéricos

5.1 Introdução

Nos exemplos apresentados a seguir estuda-se o comportamento dos métodos de detecção de dano em vigas baseados nas variações da flexibilidade. Para cada uma das vigas propostas como exemplo, é realizado um estudo sobre o comportamento dos métodos na detecção de danos segundo suas características, ou seja: Dano Individual (um elemento afetado por perda de rigidez), Dano Múltiplo (elementos afetados por perda de rigidez em forma simultânea), Influência do nível de dano introduzido no desempenho do método (redução do módulo de elasticidade E), e, por último, o efeito do número de modos na localização do dano.

Cada viga foi dividida em 32 elementos finitos iguais (figura 7), e as condições de contorno consideradas foram:

- Viga simplesmente apoiada (VS).
- Viga em balanço (VB).
- Viga Livre-Livre (VL).

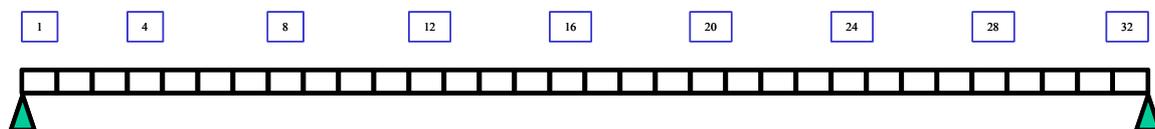


Figura 7. Viga para os exemplos numéricos.

Todas as vigas estudadas correspondem ao perfil $W_{310 \times 23.8}$, com as propriedades apresentadas na tabela 2.

Em cada exemplo, as formas modais correspondentes aos deslocamentos verticais $\{q_v\}$ (deslocamentos medidos durante um ensaio real) e as frequências modais do sistema, foram calculadas usando-se o programa apresentado no anexo A.

Tabela 2- Propriedades do perfil $W_{310 \times 23,8}$

Propriedade	Valor
Área	0.00304 m ²
Inércia	4.29E-5 m ⁴
P	7837.1 Kg/m ³
E	199.95E9 N/m ²
v	0.3
L	2.44 m

5.2 Viga em balanço

Os exemplos estudados para a viga em balanço, avaliam o comportamento dos métodos baseados nas variações da flexibilidade, para diversos cenários de dano. Nestes exemplos, o dano é individual, ou seja, é danificado um elemento de cada vez. Um resumo dos cenários de dano pode ser observado na tabela 3:

Tabela 3. Exemplos Numéricos dano individual. Viga em Balanço (VB).

Exemplo de Dano	Elemento Danificado	Modos usados	Redução de E (%)	Resultado Figura N _o	Método
VB1	4,8,12,16,20,24,28	3 prim.	50	8	Variação da Flexibilidade
VB2	20	1 ^o ,2 ^o e 7 ^o	50	9	
VB3	20	3 prim.	90,70,50,30,10	10	
VB4	4,16,20,28	5 prim.	50	11	Curvatura da Flexibilidade
VB5	20	1 ^o ,2 ^o ,3 ^o ,5 ^o ,7 ^o	50	12	
VB6	20	3 prim.	90,50,10	13	

As frequências e as variações de frequência obtidas para os exemplos VB1 e VB4 estão nas tabelas 4 e 5:

Tabela 4. Frequências naturais Redução de 50% em E. Viga em Balanço (VB).

Exemplos VB1 e VB4								
Frequências naturais (Hz).								
Modo	Sem Dano	D4	D8	D12	D16	D20	D24	D28
1	56,373	53,989	54,816	55,466	55,926	56,202	56,331	56,369
2	352,893	348,294	352,755	347,757	342,598	343,297	348,380	352,234
3	987,126	985,430	970,711	966,990	986,692	969,425	955,050	977,437
4	1932,387	1929,692	1887,421	1931,755	1880,258	1924,628	1892,300	1889,157
5	3191,079	3164,128	3164,330	3117,314	3184,681	3106,047	3187,100	3092,952

Na tabela 4, a nomenclatura D_i , com $i = 1, \dots, 32$, indica que o elemento danificado corresponde ao i -ésimo elemento da viga da figura 7.

Tabela 5. Variação de Frequências naturais. Redução de 50% em E.
Viga em Balanço.

Exemplo VB1							
Variação de Frequência (%)							
Modo	D4	D8	D12	D16	D20	D24	D28
1	4,23	2,76	1,61	0,79	0,30	0,07	0,01
2	1,30	0,04	1,46	2,92	2,72	1,28	0,19
3	0,17	1,66	2,04	0,04	1,79	3,25	0,98
4	0,14	2,33	0,03	2,70	0,40	2,07	2,24
5	0,84	0,84	2,31	0,20	2,66	0,12	3,08

Das Tabelas 4 e 5, é evidente que, para todos os casos de dano individual, existe uma variação de frequência. Porém, com só esta informação é difícil se obter a posição exata do dano. Com base nos dados da coluna D16 da tabela 5, poder-se-ia dizer que o dano (dano no elemento 16) está perto do meio do vão da viga, devido ao fato de que as maiores variações percentuais de frequência acontecem no segundo e quarto modos. Isso significa que o dano está próximo do local onde o momento é máximo (para estes modos). O modo três é o menos afetado, sinalizando que o dano deve estar contíguo de um nó (neste modo). Contudo, a posição do dano é definida de forma qualitativa e com ajuda da informação contida nas formas modais. A análise anterior aplica-se para vigas uniformes, mas, para estruturas mais complexas, uma interpretação similar é mais difícil.

Para descobrir a posição do dano, empregando-se as formas modais, utilizou-se primeiro o método da variação de flexibilidade. De acordo com a eq.(4.51), uma boa estimativa da matriz de flexibilidade pode ser obtida usando-se os modos de baixa frequência. Com a matriz de flexibilidade gerada a partir das eqs.(4.51), (4.53) e (4.55) e aplicando o método de detecção descrito no item 4.2.5.1, obtiveram-se, para os exemplos VB1, VB2 e VB3, as seguintes curvas de detecção de dano (figuras 8, 9 e 10). A figura 8 mostra que a variação de flexibilidade é quase zero entre o extremo engastado e o elemento danificado, aumentado-se linearmente a partir do elemento danificado à medida que se avança na direção do extremo livre, onde a variação atinge seu máximo valor. Por tanto, a posição do dano neste exemplo é a indicada de forma

clara, pelo ponto onde a flexibilidade começa a aumentar (variação brusca de flexibilidade).

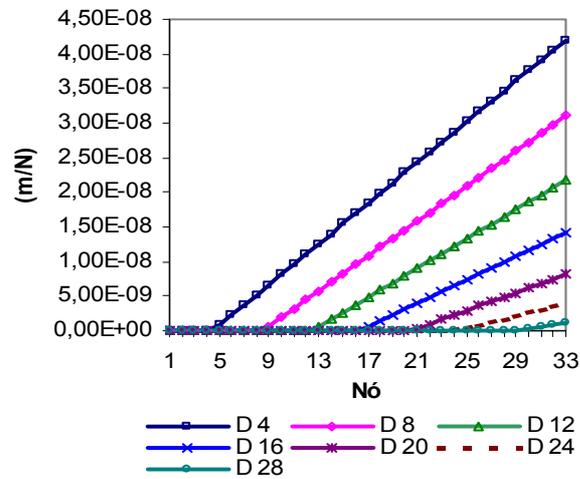


Figura 8. Variação de Flexibilidade Viga em Balanço para os elementos 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28 danificados, um de cada vez. Três primeiros modos usados. Redução de 50% em E. Exemplo VB1.

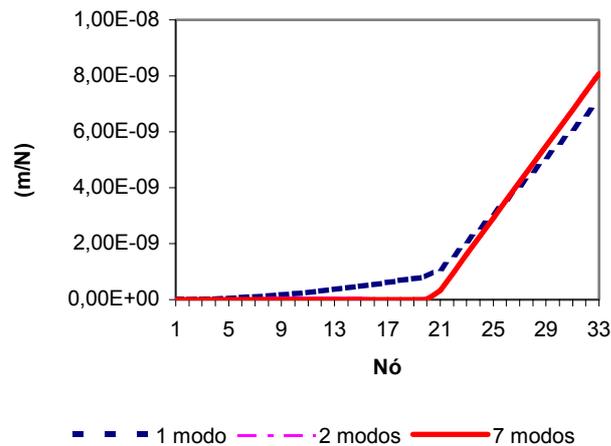


Figura 9. Variação de Flexibilidade Viga em balanço em função do número de modos usados. 50% redução em E. Elemento 20 danificado (D20), Exemplo VB2.

Da figura 9, fica claro que a curva de variação de flexibilidade converge utilizando-se apenas os dois primeiros modos. O dano está localizado no ponto aonde a variação linear começa. Quando utilizado só o primeiro modo, a identificação não é direta, quer dizer, não fica claro se existem um ou dois locais danificados (elemento 6 e elemento 20).

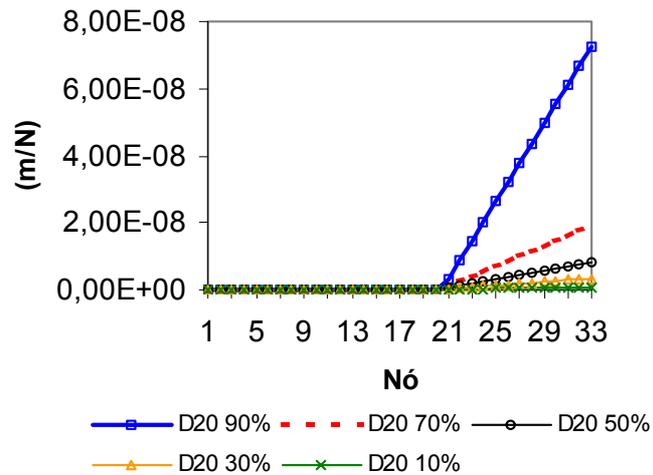


Figura 10. Variação de Flexibilidade Viga em balanço em função do aumento de dano. Elemento 20 danificado. Três primeiros modos usados. Exemplo VB3.

A figura 10 mostra que existe uma relação entre nível de dano introduzido na estrutura e a declividade da variação de flexibilidade. Este fato pode ser usado para quantificar a severidade do dano. Para danos de menor severidade espera-se uma declividade menor. O método consegue detectar danos de até 10% de redução de rigidez.

Aplicando-se o método estudado no item 4.2.5.4 aos exemplos VB4, VB5 e VB6, obtém-se os seguintes resultados, Figuras 11, 12 e 13 respectivamente:

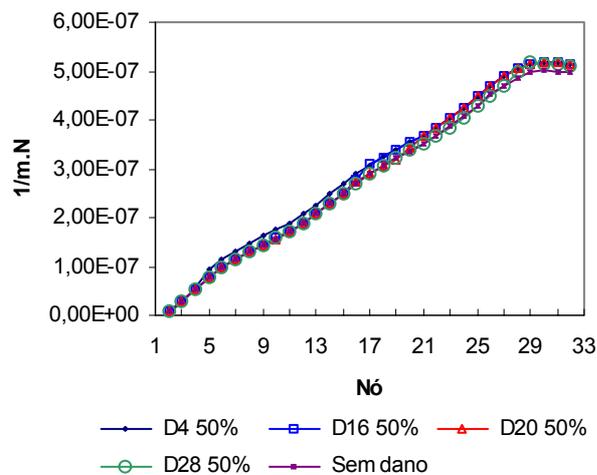


Figura 11. Curvatura da Flexibilidade Viga em Balanço para os elementos 4, 16, 20 e 28 danificados, um de cada vez. Cinco primeiros modos usados. Redução de 50% em E. Exemplo VB4.

A figura 11 indica que o método da curvatura da flexibilidade não consegue detectar dano na viga. A curvatura permanece quase inalterada para todos os casos estudados.

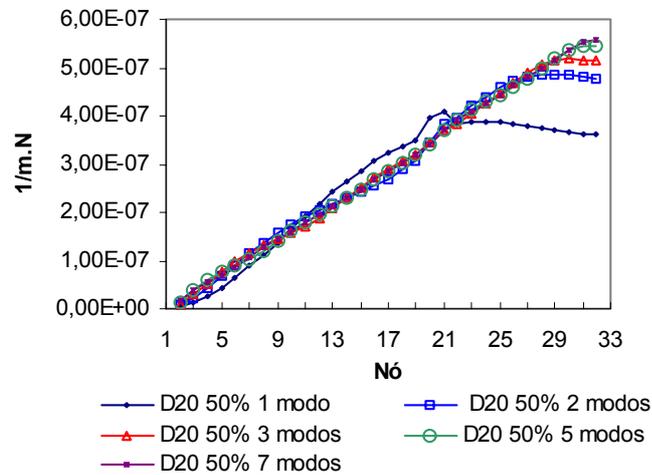


Figura 12. Curvatura da Flexibilidade Viga em Balanço em função do número de modos usados. Elemento 20 danificado. Redução de 50% em E. Exemplo VB5.

Da figura 12, é evidente que uma boa estimativa da curvatura da flexibilidade pode ser obtida usando-se só os três primeiros modos. A curvatura calculada com o primeiro modo fornece uma indicação da posição do dano (variação brusca no elemento 20). Quando utilizados dois ou mais modos, a curva sobe a inclinação e repete o mesmo comportamento da figura 11; o qual indica que, neste caso, o método é sensível ao número de modos empregados.

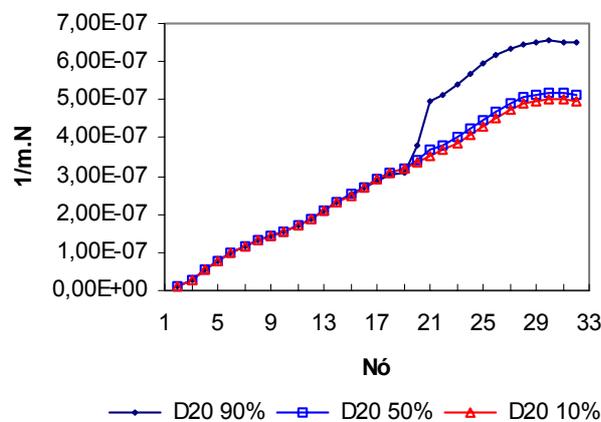


Figura 13. Curvatura da Flexibilidade Viga em balanço em função do aumento de dano. Elemento 20 danificado. Três primeiros modos usados. Exemplo VB6.

O método de curvatura da flexibilidade só consegue identificar o local danificado para redução de rigidez de 90%, que é um dano severo. Como mostrado na figura 13, a curvatura aumenta fortemente a partir do elemento 20, mantendo-se o incremento constante para os elementos localizados entre o extremo livre e o elemento 20; razão pela qual, a curva sobe bruscamente.

5.3 *Viga Simplesmente apoiada*

Para os exemplos de viga simplesmente apoiada (VS) da tabela 6, os resultados são apresentados nas figuras 14, 15, 16, 17, 18 e 19 e nas tabelas 7 e 8.

Tabela 6. Exemplos Numéricos Dano Individual, Viga simplesmente apoiada (VS) e Viga livre-livre (VL).

Exemplo de Dano	Elemento Danificado	Modos usados	Redução de E (%)	Resultado Figura N _o	Método
VS1e VL1	4,8,12,16,	3 prim.	50	14 e 20	
VS2 e VL2	20	1 ^o ,7 ^o – 1 ^o ,3 ^o ,7 ^o	50	15 e 21	Variação da Flexibilidade
VS3 e VL3	20	3 prim.	90,70,50,30,10	16 e 22	
VS4 e VL4	4,16,20,28	5 prim.	50	17 e 23	
VS5 e VL5	20	1 ^o a 5 ^o	50	18 e 24	Curvatura da Flexibilidade
VS6 e VL6	20	3 prim.	90,50,30,10	19 e 25	

Tabela 7. Frequências naturais Redução de 50% em E. Viga simplesmente apoiada.

Exemplos VS1, VS4							
Frequências naturais (Hz).							
Modo	Sem Dano	D4	D8	D12	D16	D20	D28
1	158,312	157,749	156,117	154,410	153,596	154,095	157,410
2	633,249	625,346	614,910	622,274	633,005	625,786	621,681
3	1424,804	1393,281	1399,372	1422,049	1385,362	1413,619	1385,883
4	2532,955	2464,145	2529,327	2465,411	2529,260	2466,479	2467,541
5	3957,642	3857,014	3926,018	3919,255	3858,139	3952,879	3892,908

Das tabelas 7 e 8, fica claro que a presença de dano na estrutura modifica as frequências naturais, mas, não fornece informação suficiente para localizá-lo. Para dano

introduzido no elemento 4 e no elemento 28 (extremos da viga), as maiores variações percentuais nas frequências naturais (tabela 8), apresentam-se nos modos três e quatro, indicando-se que o dano deve estar próximo dos locais de momento máximo para estes modos. Nesta situação, existem duas regiões que poderiam estar danificadas. Mesmo utilizando-se a informação qualitativa sobre as forma modais, a posição do dano fica indeterminada.

Tabela 8. Variação de Frequências naturais. Redução de 50% em E. Viga em Balanço.

Exemplos VS1, VS4						
Variação de Frequências(%)						
Modo	D4	D8	D12	D16	D20	D28
1	0,36	1,39	2,46	2,98	2,66	0,57
2	1,25	2,90	1,73	0,04	1,18	1,83
3	2,21	1,78	0,19	2,77	0,79	2,73
4	2,72	0,14	2,67	0,15	2,62	2,58
5	2,54	0,80	0,97	2,51	0,12	1,64

Aplicando-se o método de variação da flexibilidade descrito no item 4.2.5.1 obtiveram-se, para os exemplos VS1, VS2 e VS3 as seguintes curvas de detecção de dano, figuras 14, 15, 16 respectivamente:

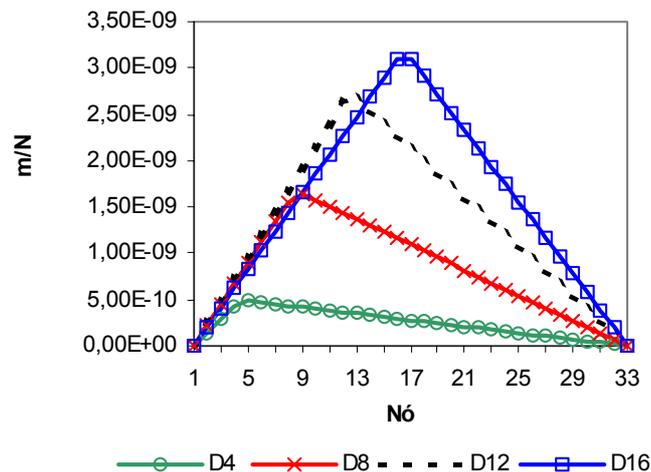


Figura 14. Variação de Flexibilidade Viga simplesmente apoiada para os elementos 4, 8, 12, 16 danificados, um de cada vez. Redução de 50% em E. Três primeiros modos usados. Exemplo VS1.

Para a viga simplesmente apoiada, a região (elemento) que apresenta a maior variação de flexibilidade indica a região danificada. O comportamento da variação é linear, tomando valores nulos nos extremos (figura 14).

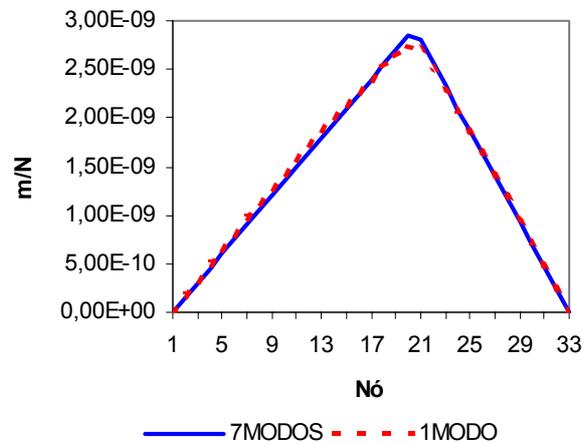


Figura 15. Variação de Flexibilidade Viga simplesmente apoiada em função do número de modos usados. Elemento 20 danificado. 50% de redução em E. Exemplo VS2.

Da figura 15 é evidente que uma boa estimativa da variação de flexibilidade pode ser obtida usando-se apenas o primeiro modo. A posição do dano também é determinada com só o primeiro modo.

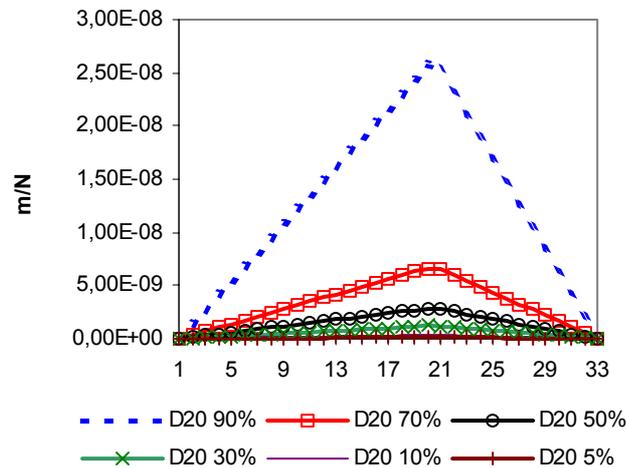


Figura 16. Variação de Flexibilidade Viga Simplesmente apoiada em função do aumento de dano. Elemento 20 danificado. Três primeiros modos usados. Exemplo VS3.

Da figura 16, vê-se que, o método localiza com sucesso o dano quando a redução de rigidez é de 10%, e mais uma vez uma quantificação do dano pode ser feita a

partir desta informação. Quanto maior a variação da flexibilidade maior a severidade do dano.

Aplicando-se o método da variação de curvatura da flexibilidade descrito no item 4.2.5.4, aos exemplos VS4, VS5 e VS6, tem-se as seguintes curvas, figuras 17, 18 e 19:

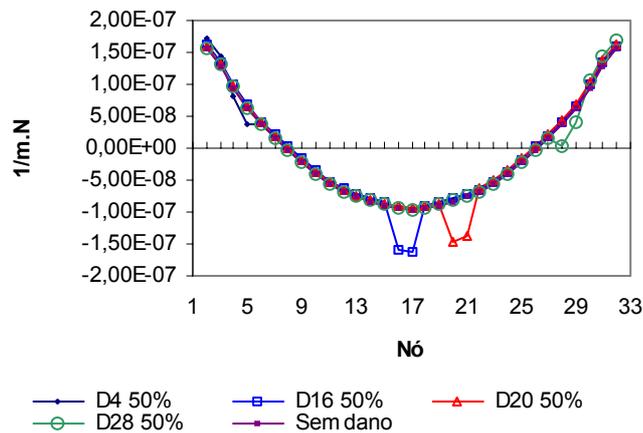


Figura 17. Curvatura da flexibilidade Viga simplesmente apoiada. Elementos 4, 16, 20 e 28 danificados, um de cada vez. Redução de 50% em E. Cinco primeiros modos usados. Exemplo VS4.

A figura 17 mostra que, para as condições de contorno de este exemplo, o método da curvatura da flexibilidade consegue identificar a posição dos elementos danificados, mostrando, neste caso, igual desempenho que o método da variação da flexibilidade.

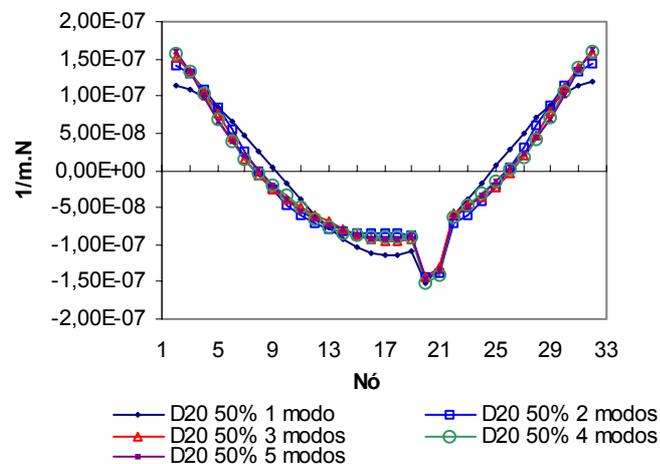


Figura 18. Curvatura da Flexibilidade Viga simplesmente apoiada em função do número de modos usados. Elemento 20 Danificado. Redução de 50% em E. Exemplo VS5.

Da figura 18, conclui-se que a posição do dano pode-se obter usando-se só os dois primeiros modos de vibração. A posição do dano é indicada pela forte descontinuidade na curva.

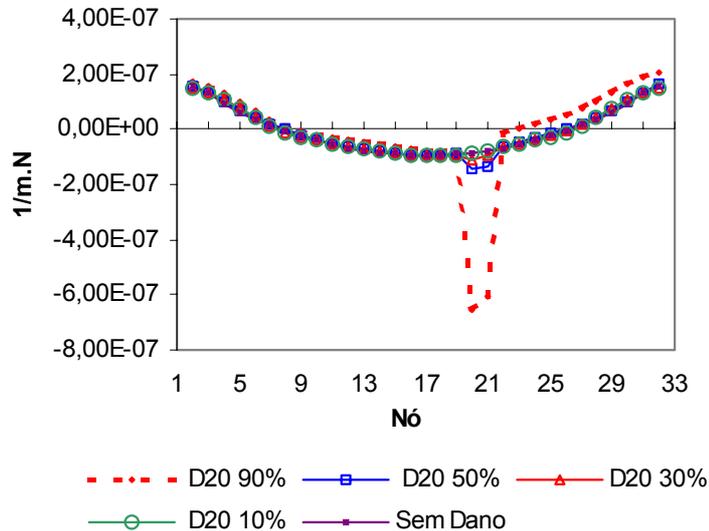


Figura 19. Curvatura de flexibilidade Viga simplesmente apoiada em função do aumento de dano. Elemento 20 danificado. Exemplo VS6.

A figura 19 mostra que o método da variação da curvatura de flexibilidade é sensível a danos de até 30% de redução no módulo de elasticidade.

5.4 Viga Livre – livre

Para a viga livre são estudados os mesmos exemplos que para a viga simplesmente apoiada (Vide tabela 6), e os resultados obtidos para as frequências naturais são apresentados nas tabelas 9 e 10:

Tabela 9. Frequências naturais. Redução de 50% em E. Viga Livre.

Exemplos VL1, VL4							
Frequências naturais (Hz).							
Modo	Sem dano	D4	D8	D12	D16	D20	D28
1	357,794	357,499	354,313	348,203	344,542	346,835	357,097
2	984,225	979,641	955,874	960,16	983,614	967,033	974,648
3	1925,654	1901,078	1870,264	1924,946	1874,408	1918,211	1882,771
4	3176,587	3104,639	3147,088	3103,812	3170,942	3092,127	3079,441
5	4735,606	4596,964	4729,627	4667,132	4620,803	4721,081	4601,289

Tabela 10. Variação de Frequências naturais. Redução de 50% em E. Viga Livre-Livre.

Exemplos VL1, VL4						
Variação de Frequências (%).						
Modo	D4	D8	D12	D16	D20	D28
1	0,08	0,97	2,68	3,70	3,06	0,19
2	0,47	2,88	2,45	0,06	1,75	0,97
3	1,28	2,88	0,04	2,66	0,39	2,23
4	2,26	0,93	2,29	0,18	2,66	3,06
5	2,93	0,13	1,45	2,42	0,31	2,84

Utilizando-se o método de variação da flexibilidade para os exemplos propostos (tabela 6) para a viga com ambos os extremos livres, obtêm-se os resultados das figuras 20, 21 e 22.

A figura 20 mostra que, para as condições de contorno deste exemplo, o método da variação da flexibilidade identifica a região danificada como sendo aquela onde existe um máximo local. O máximo global ocorre no extremo livre mais próximo da região danificada.

Na figura 21 mostra-se a que a detecção do dano pode ser feita usando-se apenas o primeiro modo. A figura 22 mostra que dano até 10% de redução de rigidez é detectado pelo método. Das figuras 20, 21, 22 pode-se concluir que os máximos globais de variação sempre se apresentam em um dos extremos da viga.

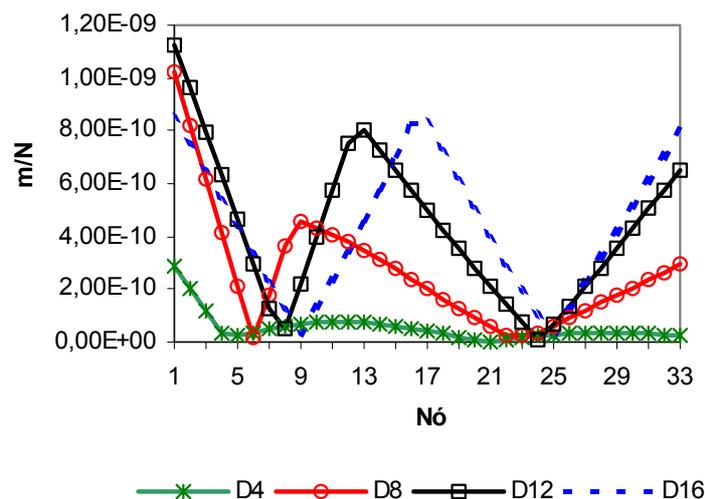


Figura 20. Variação da flexibilidade Viga Livre para os elementos 4, 8, 12, 16 danificados, um de cada vez. Redução de 50% em E. Três primeiros modos usados. Exemplo VL1.

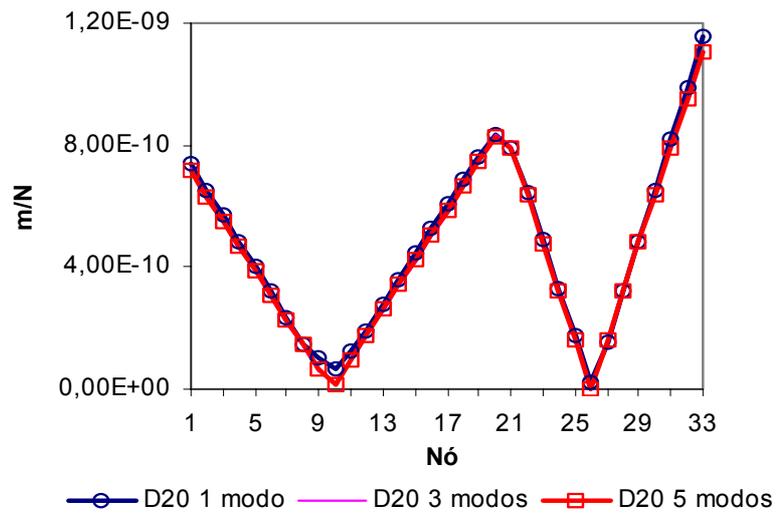


Figura 21. Variação de Flexibilidade Viga livre-livre em função do número de modos usados. Elemento 20 danificado. 50% de redução em E. Exemplo VL2.

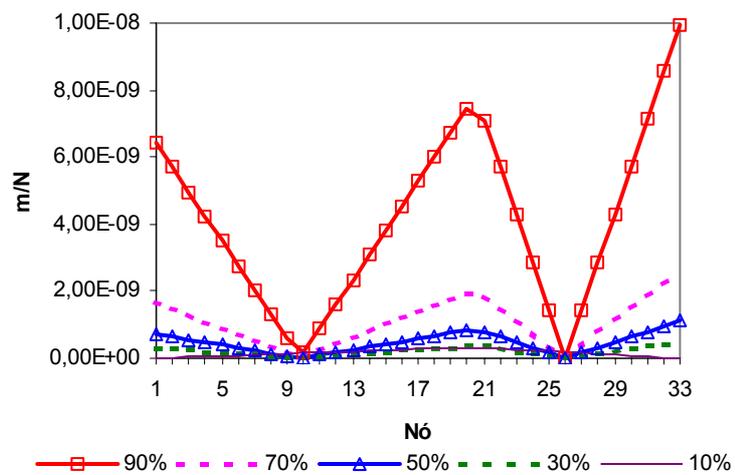


Figura 22. Variação de Flexibilidade Viga Livre em função do aumento de dano. Elemento 20 danificado. Três primeiros modos usados. Exemplo VL3.

Aplicando-se o método da variação da curvatura da flexibilidade à viga com os dois extremos livres, têm-se os seguintes resultados, figuras 23, 24 e 25:

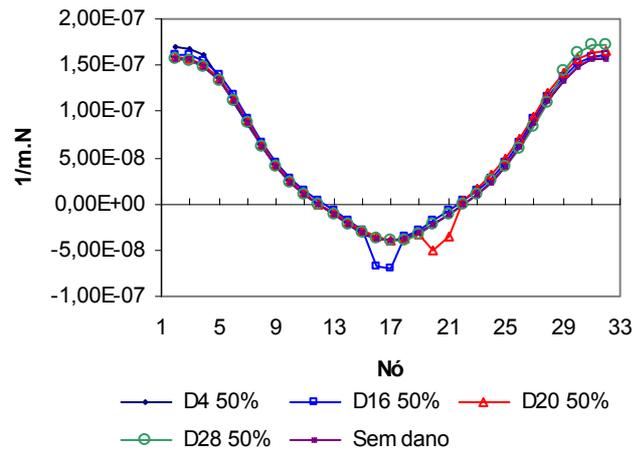


Figura 23. Curvatura da flexibilidade Viga livre-livre. Elementos 4, 16, 20 e 28 danificados, um de cada vez. Redução de 50% em E. Cinco primeiros modos usados. Exemplo VL4.

O método de variação da curvatura não consegue identificar danos nos elementos 4 e 28 próximos dos extremos livres como se pode ver da figura 23. A posição do dano é determinada, para elementos centrais, com o uso do primeiro modo. Porém para se obter uma estimativa mais acurada da variação da flexibilidade é necessário usar os três primeiros modos (figura 24). A menor severidade de dano que o método consegue indicar é de 30% de redução da rigidez (figura 25).

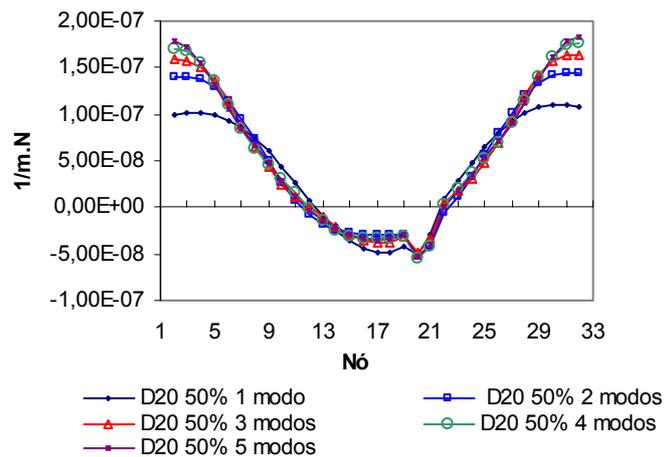


Figura 24. Curvatura da Flexibilidade Viga livre-livre em função do número de modos usados. Elemento 20 danificado. Redução de 50% em E. Exemplo VL5.

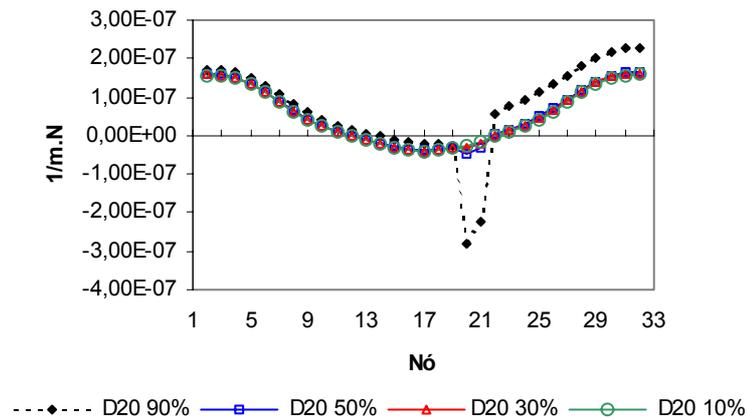


Figura 25. Curvatura de flexibilidade Viga Livre em função do aumento de dano. Elemento 20 danificado. Exemplo VL6.

5.5 Dano Múltiplo: Viga simplesmente apoiada

Os exemplos numéricos para a viga simplesmente apoiada com dano múltiplo estão resumidos na tabela 11:

Tabela 11. Exemplos Numéricos Dano Múltiplo. Viga Simplesmente apoiada (Vs).

Exemplo de Dano	Elemento Danificado	Modos usados	Redução de E (%)	Resultado Figura N _o	Método
Vs1	14,16,18	3 prim.	5,5,5	26	Variação de Flexibilidade e Curvatura da flexibilidade
Vs2	14,16,18	3 prim.	10,5,10		
Vs3	14,16,18	3 prim.	30,30,30		
Vs4	14 e 18	3 prim.	10 e 10		
Vs5	14 e 18	3 prim.	30 e 30		
<i>Vs1</i>	14,16,18	3 prim.	5,5,5	28	Variação da Curvatura da Flexibilidade
<i>Vs2</i>	14,16,18	3 prim.	10,5,10		
<i>Vs3</i>	14,16,18	3 prim.	30,30,30		
<i>Vs4</i>	14 e 18	3 prim.	10 e 10		
<i>Vs5</i>	14 e 18	3 prim.	30 e 30		

Os resultados da análise correspondentes aos exemplos da tabela 11, utilizando-se o método de variação da flexibilidade, são apresentados nas figuras 26, 27.

O método da variação da flexibilidade não consegue distinguir, em nenhum dos três cenários de dano estudados, os elementos individuais danificados, sem se importar com a magnitude do dano introduzido (figuras 26). O método indica uma região

danificada localizada em torno do elemento 17. Já na figura 27 é possível identificar os dois elementos danificados (elementos 14 e 18).

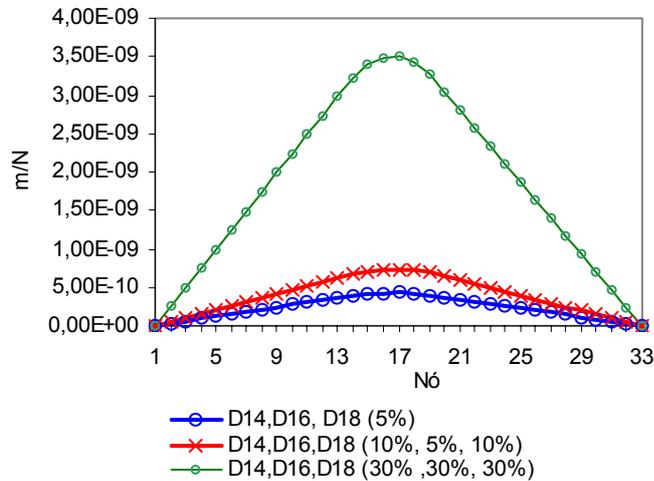


Figura 26. Variação de Flexibilidade Viga simplesmente apoiada. Elementos 14, 16 e 18 danificados simultaneamente. Três primeiros modos usados. Exemplos Vs1, Vs2 e Vs3.

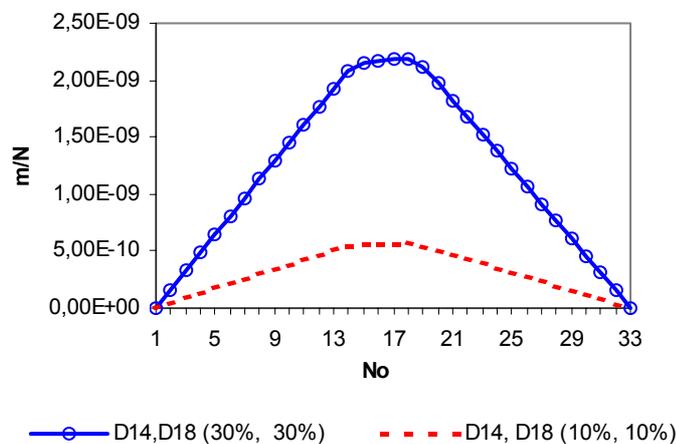


Figura 27. Variação de Flexibilidade Viga simplesmente apoiada. Elementos 14 e 18 danificados simultaneamente. Três primeiros modos usados. Exemplo Vs4 e Vs5.

Os resultados fornecidos pelo método da variação de curvatura da flexibilidade para o exemplo analisado são apresentados nas figuras 28 e 29. Para o caso de três elementos muito próximos danificados simultaneamente (elementos 14, 16 e 18), a detecção indicada pelo método é ambígua, fornecendo indícios sobre uma região danificada entre os elementos 14 e 18 (figura 28). Com um refinamento da malha de

elementos finitos seria possível identificar, também como danificado, o elemento 16. Para dois elementos danificados ao mesmo tempo, próximo um de outro (elementos 14 e 18), o método consegue identificar os dois locais danificados para uma redução de 10% na rigidez dos elementos (figura 29).

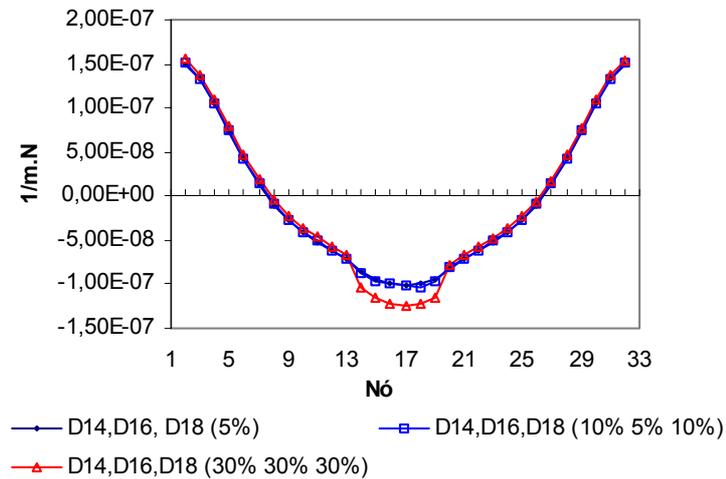


Figura 28. Curvatura da Flexibilidade Viga simplesmente apoiada. Elementos 4, 16 e 18 danificados simultaneamente. Redução de 50% em E. Exemplos $Vs1$, $Vs2$ e $Vs3$.

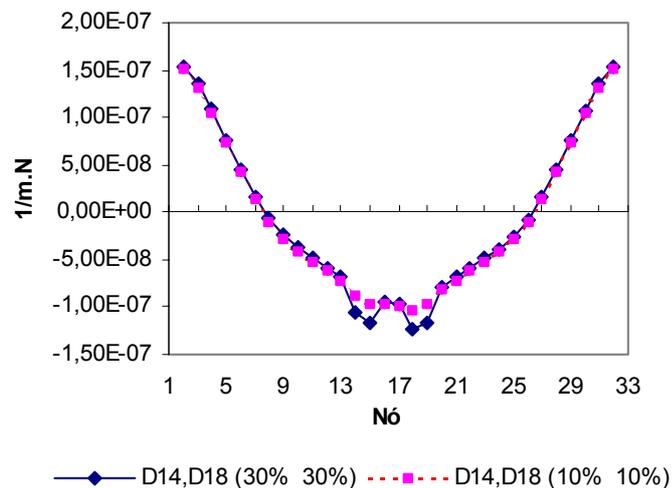


Figura 29. Curvatura da flexibilidade Viga simplesmente apoiada. Elementos 14 e 18 danificados simultaneamente. Três primeiros modos usados. Redução de 50% em E. Exemplo $Vs4$ e $Vs5$.

5.6 Discussão de Resultados e Comentários

No trabalho de Pandey e Biswas (1994), a variação de flexibilidade máxima reportada, por exemplo, para a viga em balanço, com elemento 4 danificado (redução de 50% em E) é de **1.02E-4 (in/lb)**, enquanto que no presente estudo, o valor obtido para a variação de flexibilidade para a mesma condição é de **7.33E-6 (in/lb)**. Este último valor foi obtido a partir de três análises diferentes. A primeira, utilizando-se o programa desenvolvido neste trabalho para detecção de danos em vigas, e a segunda, com uma simulação empregando-se os programas ANSYS e MATHCAD e uma terceira, com um cálculo simples (método da carga unitária), cujas descrições são apresentadas a seguir.

Utilizando o primeiro teorema de Castigliano, calcula-se o deslocamento do extremo livre para a viga sem dano e o mesmo deslocamento para a viga danificada (Dano no elemento 4, 50% redução da rigidez). Com estes dados, utilizando-se a eq.(5.1), determina-se a variação da flexibilidade, Δ , para o extremo livre da viga, ou seja:

$$\Delta = |\delta_D - \delta| \quad (5.1)$$

onde δ_D e δ são o deslocamento do extremo livre da viga danificada e do extremo livre da viga sadia, respectivamente. Os deslocamentos anteriores podem ser calculados de acordo com a eq.(5.2):

$$\delta = \frac{\partial W}{\partial P} \quad (5.2)$$

onde W é a energia de deformação para a viga, neste caso, para a viga em balanço e P é um carregamento unitário, aplicado no lugar onde se quer determinar δ . Para a viga em balanço (com as propriedades dadas na tabela 2), tem-se:

$$W_D = \frac{1}{2} \left[\int_0^{2.135} \frac{(Px)^2}{EI} dx + \int_{2.135}^{2.21125} \frac{(Px)^2}{EI_D} dx + \int_{2.21125}^{2.44} \frac{(Px)^2}{EI} dx \right] \quad (5.3)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{2.44} \frac{(Px)^2}{EI} dx \quad (5.4)$$

onde W_D e W são a energia de deformação para a viga danificada e para a viga sem dano. Utilizando-se a eq.(5.2) os deslocamentos ficam:

$$\delta_D = 6.0649E - 7(m/N)$$

e

$$\delta = 5.645E - 7(m/N)$$

A variação de flexibilidade, usando-se a eq.(5.1) é $\Delta = 4.198E-8(m/N)$ ou em unidades do sistema inglês $7.33E-6(in/Lb)$, que é o valor reportado na figura 30b. Uma comparação entre o resultado reportado no artigo de Pandey e Biswas (1994) e o obtido neste estudo pode observar-se na figura 30:

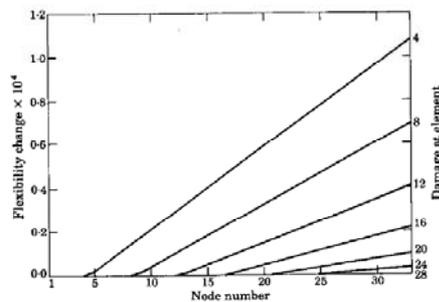
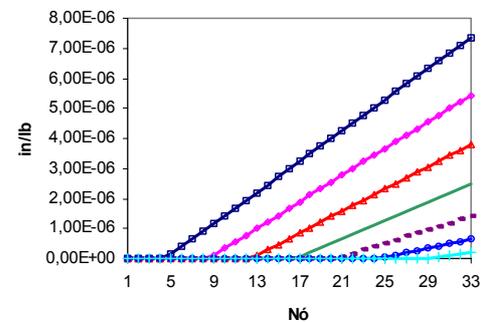


Figure 2. Plot of flexibility change for typical damage locations (50% reduction in E) for the cantilever be

(a)



— Dan 4 — Dan 8 — Dan 12 — Dan 16
 - - - Dan 20 — Dan 24 — Dan 28

(b)

Figura 30. Comparação de resultados para a viga em balanço: (a) resultado reportado por Pandey e Biswas (1994) e (b) resultado obtido com o presente trabalho.

Como pode observar-se da fig. 30, o comportamento das curvas é igual, e a detecção do dano é realizada com sucesso. Uma comparação entre frequências para a viga em balanço calculadas neste trabalho e as fornecidas no artigo de Pandey e Biswas de (1994), apresenta-se na tabela 12:

Da tabela 12, fica claro que, as frequências calculadas no presente estudo estão em completo acordo com as reportadas no artigo, estabelecendo-se, assim, a validade deste trabalho.

Tabela 12. Lista de Frequências Naturais viga em balanço. Elemento 4 danificado (50%)

Frequências viga sem dano (Hz)			Frequências viga D4, (Hz)		%Diferença entre Frequências	
Freq. Teórica	Freq. Artigo P e B (1994)	Presente Trabalho	Freq. Artigo	Presente Trabalho	Art./Trab. Sem dano	Art./Trab. D4
56,398	56,407	56,373	54,022	53,989	0,060	0,061
353,450	353,106	352,893	348,505	348,294	0,060	0,060
989,453	987,722	987,126	986,025	985,430	0,060	0,060
1939,328	1933,554	1932,387	1930,858	1929,692	0,060	0,060
3205,827	3193,006	3191,079	3166,039	3164,128	0,060	0,060
4788,952	4764,812	4761,936	4683,906	4681,079	0,060	0,060
6688,701	6647,884	6643,871	6506,356	6502,428	0,060	0,060

6. Conclusões e Trabalhos Futuros

As técnicas baseadas nas variações de flexibilidade estudadas neste trabalho precisam de malhas de sensores refinadas (muitos pontos de medição), e, felizmente, esta dificuldade está sendo superada com o aparecimento de transdutores de baixo custo, alta sensibilidade e tamanho menor adaptados para este tipo de problema. Estes sensores possibilitam o monitoramento da estrutura em um número maior de pontos, facilitando-se assim a implementação destes métodos. Por outro lado, as técnicas baseadas nas variações de flexibilidade oferecem a vantagem de não depender de um modelo analítico para realizar a detecção do dano.

Como parte deste trabalho, foi apresentado o cálculo da matriz de flexibilidade das vigas utilizando a técnica da vibração inversa. Com base nas equações da formulação de vibração inversa, implementou-se um programa de elementos finitos que gera a matriz de flexibilidade a partir dos parâmetros modais. Os parâmetros modais da estrutura foram calculados mediante a solução do problema de auto-valor generalizado. A matriz de flexibilidade gerada foi usada como entrada para os algoritmos de detecção de dano.

Neste trabalho, a capacidade dos métodos de detecção de dano baseados na medição dinâmica da flexibilidade foi comprovada através de diferentes simulações de dano em vigas. O método de Pandey e Biswas teve o melhor desempenho quanto à determinação da posição do dano individual nos três casos estudados. O método da variação da curvatura da flexibilidade teve sucesso nos casos de detecção de dano para a viga simplesmente apoiada e para a viga com os dois extremos livres, mas, falhou totalmente quando aplicado à viga em balanço. Na detecção de dano múltiplo, o método da variação da curvatura da flexibilidade mostrou melhor desempenho que o método da variação da flexibilidade. Das simulações apresentadas, pode-se concluir que o efeito de três trincas pequenas sobre a variação da flexibilidade para a viga simplesmente apoiada é maior do que o efeito de uma única trinca maior. O anterior indica que uma

combinação dos dois métodos é recomendável para casos práticos, onde não se conhece de antemão a posição do dano, nem o número de locais danificados.

A continuidade do tema envolve uma abordagem da detecção de danos que inclua a comportamento não linear da estrutura, além, de ter a capacidade de reconhecer padrões de “comportamento estrutural”. Para isto, podem ser utilizadas ferramentas computacionais analíticas como as Redes Neurais e os Sistemas Inteligentes. Estas técnicas vêm sendo aplicadas à solução de problemas tão diversos como o processamento de linguagem, previsão do tempo e reconhecimento de imagens, muitos dos quais ainda não possuem uma solução satisfatória.

A maioria dos métodos de detecção de dano reportados na literatura aplica-se quase sempre a situações ideais (comportamento linear da estrutura, obtenção dos parâmetros modais em condições de laboratório controladas), e, a estruturas unidimensionais. Este fato indica que é preciso muito trabalho experimental para chegar em resultados conclusivos sobre o desempenho dos métodos teóricos propostos na literatura internacional, quando aplicados a estruturas bi ou tridimensionais em condições normais de uso. Neste sentido seria interessante realizar, por exemplo, uma análise modal experimental sobre um pórtico danificado, e, a partir destes dados, testar o desempenho dos vários métodos de detecção de dano estudados neste trabalho.

Referências Bibliográficas

AVITABILE, P. (2002). *Modal Space: Back to basis*. Experimental techniques, may/jun ,p.17-18.

BARUCH, M.; BAR ITZHACK, I.K. (1978-a). *Optimal weighed ortogonalization of measured modes*. AIAA Journal, v.16, n. 4 (Apr), p. 346-351.

BARUCH, M. (1978-b). *Optimization Procedure to Correct Stiffness and Flexibility Matrices Using Vibration Tests*. AIAA Journal, v.16, n. 11 (Nov), p. 1208-1210.

BATHE, K-J. (1996). *Finite Element Procedures*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall.

BERMAN, A.; FLANNELLY, W.G. (1971). *Theory of Incomplete Models of Dynamic Structures*. AIAA Journal, 9(8), p. 1481–1486.

CAWLEY, P.; ADAMS, R.D. (1979). *The Locations of Defects in Structures from Measurements of Natural Frequencies*. Journal of Strain Analysis, 14 (2), p.49–57.

CORNWELL, P.; DOEBLING, S.W.; FARRAR, C. R. (1999). *Application of the Strain Energy Damage Detection method to Plate-like Structures*. Los Alamos National Laboratory, ESA-EA, MS P946. Disponível em: <http://ext.lanl.gov/projects/damage_id/>. Acesso em: 15 jan.2003.

CORNWELL, P.J. et.al. (1999). *Environmental Variability of Modal Properties*. Experimental Techniques, Nov/Dec, p. 45-48.

DOEBLING, S. W. et.al. (1996). *Damage Identification and Health Monitoring of Structural and Mechanical Systems from Changes in Their Vibration Characteristics: A Literature Review*. Los Alamos National Laboratory Report LA-13070-MS. Disponível em: <http://ext.lanl.gov/projects/damage_id/>. Acesso em: 15 jan.2003.

DOEBLING, S.W.; FARRAR, C. R. (1996). *Computation of Structural Flexibility for Bridge Health Monitoring using Ambient Modal Data*. Proc. of 11th ASCE Engineering

mechanics Conference, Y.K. Lin and T.C. Su, Ed. Ft. Lauderdale, FL, May, 1996 p. 1114-1117. Disponível em: <http://ext.lanl.gov/projects/damage_id/>. Acesso em: 15 jan.2003.

DOEBLING, S. W.; FARRAR, C. R.; PRIME, M. B. (1998). *A Summary Review of Vibration-Based Damage Identification Methods*. The Shock and Vibration Digest, Vol. 30, No. 2, p. 91-105.

DOEBLING, S.W.; PETERSON, L.D.; KENNETH, F.A. (1996). *Estimation of Reciprocal Residual Flexibility from Experimental Modal Data*. AIAA JOURNAL, Vol. 34, No. 8, p. 1678 – 1685.

DOHERTY, J. E. (1987). *Nondestructive Evaluation*. Chapter 12 in Handbook on Experimental Mechanics. Ed. A.S. Kobayashi. Society For Experimental Mechanics, Inc.

DUFFEY, T. A. et.al.(2000). *Vibration-Based Damage Identification in Structures Exhibiting Axial and Torsional Response*. Los Alamos National Laboratory LA-UR-00-672. Disponível em: <http://ext.lanl.gov/projects/damage_id/>. Acesso em: 15 jan.2003.

FILHO, L.; ROITMAN, N.;MAGLUTA,C. (2000). *Detecção de Danos Estruturais através de Métodos Diretos de Ajuste de Modelos*. XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria, 13-17 Noviembre, Punta Del Este, Uruguay.

FOX, C. H. J. (1992). *The Location of Defects in Structures: A Comparison of the use of Natural Frequency and Mode Shape Data*. Proceedings 10th International Modal Analysis Conference, San Diego, California, Vol.1, p.522-528.

FRISWELL, M.I.; MOTTERSHEAD, J. E. (1995). *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. 1 ed. Dordrecht, The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

GALÍNDEZ, N. et.al. (2003). *Implementation of a Modal Identification Methodology on the Pereira-Dos Quebradas Cable-stayed Bridge*. 16th ASCE Engineering Mechanics Conference, July-16-18, University of Washington, Seattle.

HE, J.; EWINS, D.J. (1986). Analytical Stiffness Matrix Correction Using Measured Vibration Modes. *Modal Analysis: The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, 1(3), p.9–14.

HJELMSTAD K.D.; SHIN, S. (1996). *Crack Identification in a Cantilever Beam from Modal Response*. Journal of Sound and Vibration, 198(5), p.527-545.

HUMAR, J.L. (1990). *Dynamics of Structures*. 1 ed. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall.

JAUREGUI, D.V AND FARRAR, C.R. (1996a). *Comparison of Damage Identification Algorithms on Experimental Modal Data from a Bridge*. Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, p.1423-1429.

JAUREGUI, D.V AND FARRAR, C.R. (1996b). *Damage Detection Algorithms Applied to Numerical Modal Data from a Bridge*. Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, p.119-125

KABE, A. M. (1985). *Stiffness Matrix Adjustment Using Mode Data*, AIAA Journal, v. 23, n. 9 (Sep), p. 1431-1436.

KIDDER, R. L. (1973). *Reduction of Structural Frequency Equations*, AIAA Journal, v.11, n. 6 (Jun), p.892.

KIM, J.-T. ET.AL. (2003). *Damage Identification in Beam-type Structures: Frequency-based Method vs Mode-shape-based Method*. Engineering Structures, (25) , p.57–67

LIEVEN, N.A.J.; EWINS, D.J.(1988). *Spatial correlation of mode shapes, the coordinate modal assurance criterion (COMAC)*.in Proc. of the 6th International Modal Analysis Conference, p.690–695.

LIFSHITZ, J.M.; ROTEM, A. (1969). *Determination of Reinforcement Unbonding of Composites by a Vibration Technique*. Journal of Composite Materials, 3, p. 412–423.

LIN, R.M.; EWINS, D.J. (1990). *On the Location of Structural Nonlinearity from Modal Testing—A Feasibility Study*. in Proc. of the 8th International Modal Analysis Conference, p.358–364.

LIN, C. S. (1990). *Location of Modeling Errors Using Modal Test Data*. AIAA Journal, 28, p.1650–1654.

LU, Q.;REN, G.; ZHAO, Y. (2002). *Multiple Damage Location with Flexibility Curvature and relative Frequency Change for Beam Structures*. Journal of Sound and vibration, 253(5), p.1101-1114.

NAGY, E. ET.AL.(2003). *3D Analysis of tomographic images*. 16th ASCE Engineering Mechanics Conference, July 16-18, University of Washigton, Seattle.

PAI, F.P.;YOUNG, L.G. (2001). *Damage Detection of Beams using Opertional Deflection Shapes*. International Journal of Solids and Structures, 38 , p.3161-3192

PANDEY, A.K.; BISWAS, M.; SAMMAN, M.M. (1991). *Damage Detection from Changes in Curvature Mode Shapes*. Journal of Sound and Vibration, 145(2), p. 321–332.

PANDEY, A.K.; BISWAS, M. (1994). *Damage Detection in Structures Using Changes in Flexibility*. Journal of Sound and Vibration, Vol. 169, No. 1, p 3-17.

PANDEY, A.K.; BISWAS, M. (1995). *Experiemental Verification of Flexibility Difference Method for Locating Damage in Structures*. Journal of Sound and Vibration, 184(2), p.311-328.

PATSIAS, S.; STASZEWSKIY, W.J. (2002). *Damage Detection Using Optical Measurements and Wavelets*. Structural Health Monitoring, V1, No.1, p. 5-22.

ROBINSON, N. A. et.al. (1996). *Damage Detection in Aircraft Structures Using Dynamically Measured Static Flexibility Matrices*. Proceedings of the 14th International Modal Analysis Conference, Dearborn, MI, Feb. 1996, p. 857–865.

SAIID, M.; DOUGLAS, B.; FENG, S. (1994). *Prestress Force Effect on Vibration Frequency of Concrete Bridges*. Journal of Structural Engineering, ASCE, 120(7), p.2233–41.

SALAWU, O.S. (1994). *Detection of structural damage through changes in frequency: A review*. Engineering Structures, V19. N_o9, p. 718-723.

SALAWU, O.S.; WILLIAMS, C. (1994). *Damage Location Using Vibration Mode Shapes*. Proceedings of the 12th International Modal Analysis Conference, p.933-939.

SAMPAIO, R.P.C; MAIA, N.N. M. AND SILVA, J. M.M. (1999). *Damage Detection using Frequency-Response-Function Curvature Method*. Journal of Sound and Vibration, 226(5), p.1029–1042.

STUBBS, N.; J.-T. KIM; K. TOPOLE. (1992). *An Efficient and Robust Algorithm for Damage Localization in Offshore Platforms*. Proceedings of the ASCE Tenth Structures Congress, p.543-546.

TARANTOLA, A. (1994). *Inverse Problem Theory: Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation*. Ed. Elsevier, Amsterdam, The Netherlands.

TEUGHEL, A.; MAECK, J.; DE ROECK, G. (2002). *Damage Assessment by FE Model Updating using Damage Functions*. Computers and structures, 80, p.1869-1879.

VERÇOSA, C. A. M. (1995-a). *Localização de Falhas Estruturais Utilizando Métodos de Ajuste de Modelos por Matriz Ótima*. Tese de D. Sc. Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

WEAVER, W. JR.; JOHNSTON, P. R. (1987). *Structural Dynamics by Finite Elements*. Ed. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice – Hall.

WAHAB A. M.M.; DE ROECK, G. (1999). *Damage Detection in Bridges using Modal Curvatures: Application to a Real Damage Scenario*. Journal of Sound and Vibration, 226(2), p.217-235.

WAHAB A. M.M.; DE ROECK, G. (1999). *Damage Detection in Bridges using Modal Curvatures: Application to a Real Damage Scenario*. Journal of Sound and Vibration, 226(2), p.217-235.

WARBURTON, G.B. (1976). *The Dynamical behaviour of Structures*. 2. ed. Oxford, Pergamon Press.

Visual NumericsTM (1997), IMSL[®] *Fortran Routines for Mathematical Applications*.

ANEXO A – Listagem do programa

O programa realiza primeiramente a montagem das matrizes de rigidez e de massa da viga em estudo (viga sadia e viga danificada). O elemento finito dinâmico de viga usado é descrito no capítulo 3 deste trabalho. A geometria da viga, suas condições de apoio e os dados do material são fornecidos durante a etapa de entrada de dados. O seguinte passo efetuado pelo programa é realizar a partição das matrizes, e, seguindo o método proposto por Kidder (1973) é feita a montagem das equações de frequência reduzidas. A solução das equações de frequência é realizada mediante a rotina DGVCSP do Fortran, que calcula todos os auto valores e auto vetores do problema de auto valor generalizado para a viga sem dano e para a viga danificada. Devido á partição feita nas matrizes, as formas modais calculadas correspondem aos deslocamentos verticais da viga, que são os deslocamentos medidos durante um ensaio real.

Com as matrizes de formas modais e de frequência naturais, obtidas no passo anterior, o programa determina, utilizando a técnica de vibração inversa (ver seção 4.2.5.1), a matriz de flexibilidade correspondente aos dois estados da viga, quais são: viga sadia e viga danificada. Finalmente, utilizando o algoritmo proposto por Pandey e Biswas (1994), estudado na seção 4.2.5.1 deste trabalho, o programa calcula a variação de flexibilidade da viga e fornece os dados para realizar as curvas de variação de flexibilidade apresentadas nos exemplos do capítulo 5. O programa pode ser utilizado para vigas de seção constante com as seguintes condições de apoio: viga simplesmente apoiada, viga com os dois extremos livres, viga com ambos os extremos engastados e viga em balanço.

Listagem do programa para calculo da variação da flexibilidade a partir dos parâmetros modais. Visual Fortran professional Edition 6.0.0:

```

use imsl
!DECLARAÇÃO VETORES DE PROPRIEDADES DO ELEMENTO
real*8,dimension(:),allocatable::IE,LE,EE,EEDN
REAL *8 IT,LT,E,RE,ME,PI,IP,W,DAN,AS,FI,POISS
!DECLARAÇÃO MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ
real*8,dimension(:,:),allocatable::A,B,DELTAFLX,rigte,flexte
!Declaração sub-matrizes de massa e rigidez
real*8,dimension(:,:),allocatable::A11,A12,A21,A22,B11,B21,B22,B12
real*8,dimension(:,:),allocatable::Bk,M11,M22,M33,M44,M55,M111
real*8,dimension(:,:),allocatable::FLEXABS
!Declaração matrizes de massa e rigidez do elemento
DIMENSION RE(4,4),ME(4,4)
REAL *8 CRE1,CRE2,CRE3,CRE4,MASS,R,AR,MASS1,MASS2,MASS3,MASS4
REAL *8 MASS5,MASS6
!DECLARAÇÃO LISTA DE RESTRIÇÃO
INTEGER,dimension(:),allocatable::LR,LRC
!DECLARAÇÃO VARIÁVEIS PARA GRAUS DE LIBERDADE
INTEGER M,NR,NRJ,NJ,GLV,GLV1,GLG,GLG1,NF,NME,T
!Declaração da matriz inversa
real*8,dimension(:,:),allocatable::AINV
!Declaração das matrizes para calculo da Matriz Rigidez Ar reduz.
real*8,dimension(:,:),allocatable::Kr,Kr1,Ak,AD
!VARIÁVEIS PARA CALCULO DE AUTOS VETORES E AUTOS VALORES
real*8,dimension(:),allocatable::EVAL,EVALDN,FLEXVAR,varEVAL
real*8,dimension(:,:),allocatable::EVEC,EVECT,M1,M2,FF,EVECDN
real*8,dimension(:,:),allocatable::EVECTDN,M1DN,M2DN,FFDN
real*8,dimension(:,:),allocatable::FMODDN,FLEXDN,FMODTDN
!DECLARAÇÃO TEMPORARIA PARA VERIFICAR NORMALIZAÇÃO DE AUTOS
VETORES
real*8,dimension(:,:),allocatable::F1,F2,F3
!VARIÁVEIS PARA FORMAS MODAIS COMPLETAS
real*8,dimension(:,:),allocatable::FMOD,FMODT,FLEX
!ENTRADA DO NOME DE ARQUIVO PARA GRAVAR O 'FILE' CORRESPONDENTE AO
EXEMPLO CALCULADO
CHARACTER*12 AN
!ENTRADA DE DADOS DA ESTRUTURA
10 WRITE(*,*)'DADOS DA ESTRUTURA'
WRITE(*,*)'NOME DO ARQUIVO PARA GRAVAR DADOS (MAXIMO 4
CARACTERES):'
READ(*,*)AN
WRITE(*,*)'Tipo de viga:1.Livre-livre;2.Outro(Simples,balanco,bE)'
READ(*,*)T
WRITE(*,*)'ENTRE COM A AREA DA SECAO AR='
READ(*,*)AR
WRITE(*,*)'ENTRE COM A DENSIDADE DO MATERIAL R='
READ(*,*)R
WRITE(*,*)'ENTRE COM O COMPRIMENTO LT='
READ(*,*)LT
WRITE(*,*)'ENTRE COM A INERCIA DA SECAO IT='
READ(*,*)IT
WRITE(*,*)'ENTRE COM O MODULO DE ELASTICIDADE E='
READ(*,*)E
WRITE(*,*)'ENTRE COM O NUMERO DE ELEMENTOS M='
READ(*,*)M
WRITE(*,*)'ENTRE COM O NUMERO DE RESTRICOES DE APOIO NR='

```

```

READ(*,*)NR
WRITE(*,*)'ENTRE COM O NUMERO DE NOS COM RESTRICAO NRJ='
READ(*,*)NRJ
WRITE(*,*)'ENTRE COM O NUMERO DE ELEMENTOS DANIFICADOS='
READ(*,*)ND
WRITE(*,*)'ENTRE COM O NUMERO DE MODOS PARA EXPANSAO='
READ(*,*)NME
NJ=M+1
N=2*NJ-NR
JN=2*NJ
!ALOCANDO VETORES DE PROPRIEDADES E DE RESTRICÃO
ALLOCATE(IE(M),LE(M),EE(M),EEDN(M))
ALLOCATE(LR(JN),LRC(JN))
DO I=1,M
    LE(I)=LT/M
    IE(I)=IT
    EE(I)=E
    EEDN(I)=E
ENDDO
!INTRODUZ O DANO NO ELEMENTO
IF(ND.GT.0.0) THEN
    DO I=1,ND
        WRITE(*,*)'ENTRE COM O NUMERO DO ELEMENTO
DANIFICADO='
        READ(*,*)JDAN
        WRITE(*,*)'ENTRE COM % DE REDUÇÃO DE ELASTICIDADE
ELM='
        READ(*,*)DAN
        EEDN(JDAN)=DAN*E/100
    ENDDO
    ELSE
    CONTINUE
ENDIF
!INICIALIZAR A LISTA DE RESTRICAO
DO J1=1,JN
    LR(J1)=0.
ENDDO
DO J=1,NRJ
    WRITE(*,*)'ENTRE NUMERO DO NO COM RESTRICAO:'
    READ(*,*)K
    WRITE(*,*)'ENTRE DESLOC.VERTICAL NO',K,': LIVRE=0 ; FIXO=1'
    READ(*,*)LR(K)
    WRITE(*,*)'ENTRE GIRO NO',K,': LIVRE=0 ; FIXO=1'
    READ(*,*)LR(K+M+1)
ENDDO
!INICIALIZAR O PRIMEIRO ELEMENTO DA LISTA DE RESTR. ACUMULADAS
WRITE(*,*)'LISTA DE RESTRICAO ACUMULADA LRC():'
LRC(1)=LR(1)
DO K=2,JN
    LRC(K)=LRC(K-1)+LR(K)
ENDDO
!ZERAR AS MATRIZES DE RIGIDEZ(A) E DE MASSA(B)
!CALCULO GRAUS DE LIBERDADE ATIVOS VERTICAIS E HORIZONTAIS
GLV=NJ-LRC(NJ);GLV1=GLV+1
GLG=NJ-(LRC(JN)-LRC(NJ));GLG1=GLG+1
ALLOCATE(A(JN,N),B(JN,N))
DO J=1,N
    DO K=1,N
        A(K,J)=0.
    ENDDO

```

```

ENDDO
DO J=1,N
    DO K=1,N
        B(K,J)=0.
    ENDDO
ENDDO
!GERAÇÃO DA MATRIZ DE MASSA
DO I=1,M
    J1=I
    J2=I+M+1
    K1=I+1
    K2=I+M+2
    MASS=R*AR*LE(I)/2
    MASS1=0
    MASS2=0
    MASS3=0
    MASS4=0
    MASS5=0
    MASS6=0
    !NOVA NUMERACAO PARA OS DESLOCAMENTOS (PARTIÇÃO)
    IF(LR(J1)) 100,101,100
100    J1=N+LRC(J1)
        GOTO 110
101    J1=J1-LRC(J1)
110    IF(LR(J2)) 102,103,102
102    J2=N+LRC(J2)
        GOTO 120
103    J2=J2-LRC(J2)
120    IF(LR(K1)) 104,105,104
104    K1=N+LRC(K1)
        GOTO 130
105    K1=K1-LRC(K1)
130    IF(LR(K2)) 106,107,106
106    K2=N+LRC(K2)
        GOTO 140
107    K2=K2-LRC(K2)
!GERACAO DA MATRIZ DE MASSA
140    CONTINUE
    ME(1,1)=MASS ; ME(2,2)=MASS
    ME(1,2)=0 ; ME(1,3)=0;ME(1,4)=0
    ME(2,1)=0 ; ME(2,3)=0;ME(2,4)=0
    ME(3,1)=0 ; ME(3,2)=0;ME(3,3)=0 ;ME(3,4)=0
    ME(4,1)=0 ; ME(4,2)=0;ME(4,3)=0 ;ME(4,4)=0
    IF(LR(I)) 160,150,160
150        B(J1,J1)=ME(1,1)+B(J1,J1)
            B(K1,J1)=ME(2,1)
            B(J2,J1)=ME(3,1)+B(J2,J1)
            B(K2,J1)=ME(4,1)
160    IF(LR(I+M+1)) 180,170,180
170        B(J1,J2)=ME(1,3)+B(J1,J2)
            B(K1,J2)=ME(2,3)
            B(J2,J2)=ME(3,3)+B(J2,J2)
            B(K2,J2)=ME(4,3)
180    IF(LR(I+1)) 200,190,200
190        B(J1,K1)=ME(1,2)
            B(K1,K1)=ME(2,2)+B(K1,K1)
            B(J2,K1)=ME(3,2)
            B(K2,K1)=ME(4,2)+B(K2,K1)
200    IF(LR(I+M+2)) 220,210,220
210        B(J1,K2)=ME(1,4)

```

```

        B(K1,K2)=ME(2,4)+B(K1,K2)
        B(J2,K2)=ME(3,4)
        B(K2,K2)=ME(4,4)+B(K2,K2)
220  CONTINUE
      ENDDO
      !PARTIÇÃO DA MATRIZ de massa (PREPARA METODO KIDDER,1973)
      ALLOCATE(B11(GLV,GLV))
      DO JA=1,GLV
        DO JA1=1,GLV
          B11(JA1,JA)=B(JA1,JA)
        ENDDO
      ENDDO
      ALLOCATE(Ak(GLV,GLV))
      call DANO(T,M,JN,IE,LE,EE,GLV,GLV1,GLG,N,LR,LRC,Ak)
      !CALCULO DA MATRIZ DE MASSA REDUZIDA Bk
      ALLOCATE(Bk(GLV,GLV))
      Bk=B11
      !CALCULO DE FREQUENCIAS
      PI=acos(-1.0)
      ALLOCATE(EVAL(GLV))
      ALLOCATE(EVEC(GLV,GLV))
      !CHAMA FUNÇÃO PARA CALCULO DE TODOS OS AUTOS-VALORES E AUTOS-
VETORES
      CALL DGVCSP(GLV,Ak,GLV,Bk,GLV,EVAL,EVEC,GLV)
      IP=DGPISP(GLV,GLV,Ak,GLV,Bk,GLV,EVAL,EVEC,GLV)
      WRITE(1,*) 'INDICE DE PERFORMANCE:'
      WRITE(1,*)IP
      !NORMALIZAÇÃO DOS AUTOS VETORES COM RELAÇÃO Á MASSA (THOMSOM
1981;LAN 1999)
      ALLOCATE(EVECT(GLV,GLV))
      DO I=1,GLV
        DO J=1,GLV
          EVECT(I,J)=EVEC(J,I)
        ENDDO
      ENDDO
      ALLOCATE(M1(GLV,GLV))
      ALLOCATE(M2(GLV,GLV))
      ALLOCATE(FF(GLV,GLV))
      M1=MATMUL(Bk,EVEC)
      M2=MATMUL(EVECT,M1)
      DO I=1,GLV
        DO J=1,GLV
          FF(J,I)=EVEC(J,I)/SQRT(M2(I,I))
        ENDDO
      ENDDO
      !GERAÇÃO DE FORMAS MODAIS COMPLETAS(30/07/2003)
      !FMOD=MATRIZ FORMAS MODAIS, FLEX= MAT DE FLEXIBILIDADE
      !FMODT=MAT. FORMAS MODAIS TRANSPOSTA
      ALLOCATE(FMOD(NJ,GLV))
      ALLOCATE(FLEX(NJ,NJ))
      ALLOCATE(FMODT(GLV,NJ))
      !ZERA MATRIZEZ DE FORMAS MODAIS E FLEXIBILIDADE
      DO I=1,NJ
        DO J=1,GLV
          FMOD(I,J)=0
        ENDDO
      ENDDO
      DO I=1,GLV
        DO J=1,NJ
          FMODT(I,J)=0

```

```

        ENDDO
ENDDO
DO I=1,NJ
    DO J=1,NJ
        FLEX(I,J)=0
    ENDDO
ENDDO
!GERA MATRIZ DE FORMAS MODAIS COMPLETA
!viga LIVRE LIVRE
IF(T.EQ.1) THEN
    DO I=1,GLV
        DO J=1,GLV
            FMOD(I,J)=FF(I,J)
        ENDDO
    ENDDO
ELSE
    !VIGA COM APOIOS
    if(LR(1).EQ.0.0) THEN
        DO J=1,GLV
            FMOD(1,J)=FF(1,J)
        ENDDO
    ELSE
        DO J=1,GLV
            FMOD(1,J)=0.0
        ENDDO
    ENDIF
!PREENCHE A MATRIZ DE FORMAS MODAIS
    DO I=2,NJ
        IF(LR(I).EQ.0.0) THEN
            DO J=1,GLV
                FMOD(I,J)=FF((I-1),J)
            ENDDO
        ELSE
            DO J=1,GLV
                FMOD(I,J)=0.0
            ENDDO
        ENDIF
    ENDDO
ENDIF
!CRIAR A MATRIZ FMODT
DO I=1,GLV
    DO J=1,NJ
        FMODT(I,J)=FMOD(J,I)
    ENDDO
ENDDO
!processo para se obter a matriz de flexibilidade EXPANDIDA a partir das FM
IF(T.EQ.1) THEN
    do L=3,NME
        J=GLV-L+1
        W=1/EVAL(J)
        do I=1,NJ
            do K=1,NJ
                FLEX(K,I)=W*(FMOD(K,J)*FMODT(J,I))+FLEX(K,I)
            ENDDO
        ENDDO
    ENDDO
ELSE
    do L=1,NME
        J=GLV-L+1

```

```

        W=1/EVAL(J)
    do I=1,NJ
        do K=1,NJ
            FLEX(K,I)=W*(FMOD(K,J)*FMODT(J,I))+FLEX(K,I)
        ENDDO
    ENDDO
ENDIF

ALLOCATE(AD(GLV,GLV))
CALL DANO(T,M,JN,IE,LE,EEDN,GLV,GLV1,GLG,N,LR,LRC,AD)
!CALCULO DE FREQUENCIAS DANIFICADAS
ALLOCATE(EVALDN(GLV))
ALLOCATE(EVECDN(GLV,GLV))
!CHAMA FUNÇÃO PARA CALCULO DE TODOS OS AUTOS-VALORES E AUTOS-
VETORES
CALL DGVCSP(GLV,AD,GLV,Bk,GLV,EVALDN,EVECDN,GLV)
!NORMALIZAÇÃO DOS AUTOS VETORES DANIFICADOS
!COM RELAÇÃO Á MASSA (THOMSOM 1981;LAN 1999)
ALLOCATE(EVECTDN(GLV,GLV))
DO I=1,GLV
    DO J=1,GLV
        EVECTDN(I,J)=EVECDN(J,I)
    ENDDO
ENDDO
ALLOCATE(M1DN(GLV,GLV))
ALLOCATE(M2DN(GLV,GLV))
ALLOCATE(FFDN(GLV,GLV))
M1DN=MATMUL(Bk,EVECDN)
M2DN=MATMUL(EVECTDN,M1DN)
DO I=1,GLV
    DO J=1,GLV
        FFDN(J,I)=EVECDN(J,I)/SQRT(M2DN(I,I))
    ENDDO
ENDDO
!GERAÇÃO DE FORMAS MODAIS COMPLETAS DANIFICADAS
!FMODDN=MATRIZ FORMAS MODAIS COM DANO, FLEXDN= MAT DE
FLEXIBILIDADE DN
!FMODTDN=MAT. FORMAS MODAIS TRANSPOSTA DANO
ALLOCATE(FMODDN(NJ,GLV))
ALLOCATE(FLEXDN(NJ,NJ))
ALLOCATE(FMODTDN(GLV,NJ))
!ZERA MATRIZEZ DE FORMAS MODAIS E FLEXIBILIDADE
DO I=1,NJ
    DO J=1,GLV
        FMODDN(I,J)=0
    ENDDO
ENDDO
DO I=1,GLV
    DO J=1,NJ
        FMODTDN(I,J)=0
    ENDDO
ENDDO
DO I=1,NJ
    DO J=1,NJ
        FLEXDN(I,J)=0
    ENDDO
ENDDO

```

```

!GERA MATRIZ DE FORMAS MODAIS COMPLETA
!VIGA LIVRE LIVRE
IF(T.EQ.1) THEN
  DO I=1,GLV
    DO J=1,GLV
      FMODDN(I,J)=FFDN(I,J)
    ENDDO
  ENDDO

ELSE
  if(LR(1).EQ.0.0) THEN
    DO J=1,GLV
      FMODDN(1,J)=FFDN(1,J)
    ENDDO
  ELSE
    DO J=1,GLV
      FMODDN(1,J)=0.0
    ENDDO
  ENDIF
!PREENCHE A MATRIZ DE FORMAS MODAIS
DO I=2,NJ
  IF(LR(I).EQ.0.0) THEN
    DO J=1,GLV
      FMODDN(I,J)=FFDN((I-1),J)
    ENDDO
  ELSE
    DO J=1,GLV
      FMODDN(I,J)=0.0
    ENDDO
  ENDIF
ENDDO
ENDIF
!CRIAR A MATRIZ FMOODTDN
DO I=1,GLV
  DO J=1,NJ
    FMOODTDN(I,J)=FMOODDN(J,I)
  ENDDO
ENDDO
!processo para se obter a matriz de flexibilidade EXPANDIDA a partir das FM
IF(T.EQ.1) THEN
  do L=3,NME
    J=GLV-L+1
    W=1/EVALDN(J)
    do I=1,NJ
      do K=1,NJ
        FLEXDN(K,I)=W*(FMOODDN(K,J)*FMOODTDN(J,I))+FLEXDN(K,I)
      ENDDO
    ENDDO
  ENDDO

ELSE
  do L=1,NME
    J=GLV-L+1
    W=1/EVALDN(J)
    do I=1,NJ
      do K=1,NJ
        FLEXDN(K,I)=W*(FMOODDN(K,J)*FMOODTDN(J,I))+FLEXDN(K,I)
      ENDDO
    ENDDO
  ENDDO

```

```

ENDIF
!CALCULO DA VARIAÇÃO DE FLEXIBILIDADE
ALLOCATE(DELTA FLEX(NJ,NJ))
DELTA FLEX=FLEX-FLEXDN
!MEDIDA DA VARIAÇÃO De FLEXIBILIDADE
ALLOCATE(FLEXABS(NJ,NJ))
DO I=1,NJ
    DO J=1,NJ
        FLEXABS(J,I)=ABS(DELTA FLEX(J,I))
    ENDDO
ENDDO
!Grava RESULTADOS EM ARQUIVO, NOME ARQUIVO:AN
open(unit=1,file=AN,status='replace')
ALLOCATE(FLEXVAR(NJ))
    FLEXVAR=MAXVAL(FLEXABS,DIM=1)
DO J=1,NJ
    WRITE(1,*)FLEXVAR(m/N)('J,')=,FLEXVAR(J)
ENDDO
write(1,*)'Lista de FREQUENCIAS Hz :!'
    NNNN=GLV+1-7
    do I=NNNN,GLV
        write(1,*)(sqrt(EVAL(I)))/(2*PI)
    enddo

write(1,*)'Lista de FREQUENCIAS DANIFICADAS Hz :!'
    NNND=GLV+1-7
    do I=NNND,GLV
        write(1,*)(sqrt(EVALDN(I)))/(2*PI)
    enddo

```

END

C

```

!CALCULO DOS PARAMETROS COM DANO
SUBROUTINE DANO(T,M,JN,IE,LE,EEDN,GLV,GLV1,GLG,N,LR,LRC,AkDN)
INTEGER GLV,GLV1,GLG,N,M,JN,NJ,T
REAL *8 CRE1DN,CRE2DN,CRE3DN,CRE4DN,AS,FI,POISS
REAL *8 IE(M),LE(M),EEDN(M),REDN(4,4)
INTEGER LR(JN),LRC(JN)
REAL *8 ADN(JN,N)
REAL *8 A11DN(GLV,GLV),A12DN(GLV,GLG),A21DN(GLG,GLV)
REAL *8 AMOLAS(GLV,GLV),A11L(GLV,GLV)
REAL *8 A22DN(GLG,GLG),AINVDN(GLG,GLG)
REAL *8 KrDN(GLG,GLV),Kr1DN(GLV,GLV),AkDN(GLV,GLV)
!ZERAR A MATRIZ DE RIGIDEZ ADN
DO J=1,N
    DO K=1,N
        ADN(K,J)=0.
    ENDDO
ENDDO
!GERAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DANIFICADA
DO I=1,M
    J1=I
    J2=I+M+1
    K1=I+1
    K2=I+M+2
    POISS=0.0 !COM INFL. CORTANTE
    AS=0.001708
    FI=0.0*(1+POISS)*IE(I)/(AS*(LE(I)**2))
    CRE1DN=(4.0+FI)*EEDN(I)*IE(I)/(LE(I)*(1+FI))

```

```

CRE2DN=6*EEDN(I)*IE(I)/((LE(I))**2*(1+FI))
CRE3DN=2.0*CRE2DN/LE(I)
CRE4DN=(2-FI)*EEDN(I)*IE(I)/(LE(I)*(1+FI))
!NOVA NUMERACAO PARA OS DESLOCAMENTOS (PARTIÇÃO)
IF(LR(J1)) 100,101,100
100  J1=N+LRC(J1)
      GOTO 110
101  J1=J1-LRC(J1)
110  IF(LR(J2)) 102,103,102
102  J2=N+LRC(J2)
      GOTO 120
103  J2=J2-LRC(J2)
120  IF(LR(K1)) 104,105,104
104  K1=N+LRC(K1)
      GOTO 130
105  K1=K1-LRC(K1)
130  IF(LR(K2)) 106,107,106
106  K2=N+LRC(K2)
      GOTO 140
107  K2=K2-LRC(K2)
      !GERACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DANIFICADA
140  CONTINUE
      REDN(1,1)=CRE3DN ; REDN(2,2)=CRE3DN
      REDN(1,2)=-CRE3DN; REDN(2,1)=-CRE3DN
      REDN(3,1)=CRE2DN;REDN(1,3)=CRE2DN;REDN(4,1)=CRE2DN
      REDN(1,4)=CRE2DN
      REDN(3,2)=-CRE2DN;REDN(2,3)=-CRE2DN;REDN(4,2)=-CRE2DN
      REDN(2,4)=-CRE2DN
      REDN(3,3)=CRE1DN ; REDN(4,4)=CRE1DN
      REDN(4,3)=CRE4DN ; REDN(3,4)=CRE4DN
      IF(LR(I)) 160,150,160
150      ADN(J1,J1)=REDN(1,1)+ADN(J1,J1)
          ADN(K1,J1)=REDN(2,1);
          ADN(J2,J1)=REDN(3,1)+ADN(J2,J1)
          ADN(K2,J1)=REDN(4,1);
160  IF(LR(I+M+1)) 180,170,180
170      ADN(J1,J2)=REDN(1,3)+ADN(J1,J2)
          ADN(K1,J2)=REDN(2,3);
          ADN(J2,J2)=REDN(3,3)+ADN(J2,J2)
          ADN(K2,J2)=REDN(4,3);
180  IF(LR(I+1)) 200,190,200
190      ADN(J1,K1)=REDN(1,2)
          ADN(K1,K1)=REDN(2,2)+ADN(K1,K1)
          ADN(J2,K1)=REDN(3,2);
          ADN(K2,K1)=REDN(4,2)+ADN(K2,K1)
200  IF(LR(I+M+2)) 220,210,220
210      ADN(J1,K2)=REDN(1,4)
          ADN(K1,K2)=REDN(2,4)+ADN(K1,K2)
          ADN(J2,K2)=REDN(3,4)
          ADN(K2,K2)=REDN(4,4)+ADN(K2,K2)
220  CONTINUE
      ENDDO
      !PARTIÇÃO DAS MATRIZES (PREPARA METODO KIDDER 1972)
      DO JA=1,GLV
          DO JA1=1,GLV
              A11DN(JA1,JA)=ADN(JA1,JA)
          ENDDO
      ENDDO
      DO JB=GLV1,N
          DO JB1=1,GLV

```

```

        JB2=JB-GLV
        A12DN(JB1,JB2)=ADN(JB1,JB)
        ENDDO
ENDDO
DO JC=1,GLV
    DO JC1=GLV1,N
        JC2=JC1-GLV
        A21DN(JC2,JC)=ADN(JC1,JC)
        ENDDO
ENDDO
DO JD=GLV1,N
    DO JD1=GLV1,N
        JD2=JD-GLV
        JD3=JD1-GLV
        A22DN(JD3,JD2)=ADN(JD1,JD)
        ENDDO
ENDDO
!CHAMA FUNÇÃO PARA INVERSÃO DE MATRIZES,INVERTIR A22DN
call dlinrg(GLG,A22DN,GLG,AINV DN,GLG)
!Calculo da matriz de rigidez Reduzida Ar. (KIDDER 1972)
If(T.EQ.1) THEN
    DO I=1,GLV
        DO J=1,GLV
            AMOLAS(I,J)=0.0
        ENDDO
    ENDDO
    AMOLAS(1,1)=0.01
    AMOLAS(GLV,GLV)=0.01
    A11L=A11DN+AMOLAS
    KrDN=MATMUL(AINV DN,A21DN)
    Kr1DN=MATMUL(A12DN,KrDN)
    AkDN=A11L-Kr1DN
ELSE
    KrDN=MATMUL(AINV DN,A21DN)
    Kr1DN=MATMUL(A12DN,KrDN)
    AkDN=A11DN-Kr1DN
ENDIF
RETURN
END

```