

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**DESENVOLVIMENTO DE MODELOS  
MECÂNICO-PROBABILÍSTICOS PARA  
ESTRUTURAS DE PAVIMENTOS DE  
EDIFÍCIOS**

*Eng<sup>o</sup> Rodrigo de Azevêdo Neves*

*Tese apresentada ao Departamento de Engenharia  
de Estruturas da EESC-USP como parte dos  
requisitos necessários à obtenção do título de  
Doutor em Engenharia de Estruturas*

***Orientador:  
Prof. Tit. Wilson Sérgio Venturini***

*São Carlos, 2004*

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento  
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC/USP

N518d           Neves, Rodrigo de Azevedo  
                  Desenvolvimento de modelos mecânico-probabilísticos  
                  para estruturas de pavimentos de edifícios / Rodrigo de  
                  Azevedo Neves. -- São Carlos, 2004.

                  Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de São  
                  Carlos-Universidade de São Paulo, 2004.

                  Área: Engenharia de Estruturas.

                  Orientador: Prof. Tit. Wilson Sérgio Venturini.

                  1.Confiabilidade estrutural. 2. Múltiplos modos de  
                  falha. 3. Concreto armado. 4. Elementos finitos.  
                  5. Análise não-linear. I. Título.

**FOLHA DE JULGAMENTO**

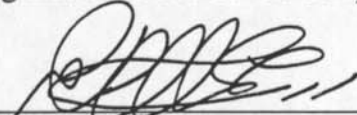
Candidato: Engenheiro **RODRIGO DE AZEVEDO NEVES**

Tese defendida e julgada em 17-12-2004 perante a Comissão Julgadora:



Prof. Titular **WILSON SERGIO VENTURINI (Orientador)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO



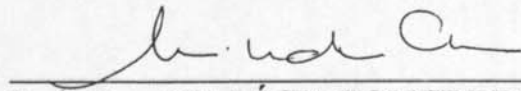
Prof. Associado **ALAA MOHAMED**  
(Clermont-Ferrant)

APROVADO



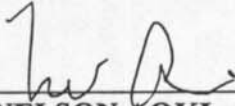
Prof. Associado **GILBERTO FRANCISCO MARTHA DE SOUZA**  
(Escola Politécnica/USP)

APROVADO



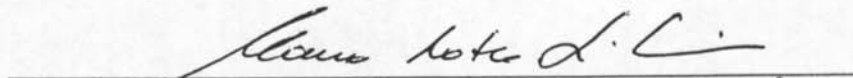
Prof. Dra. **ANA LÚCIA HOMCE DE CRESC E L DEBS**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO

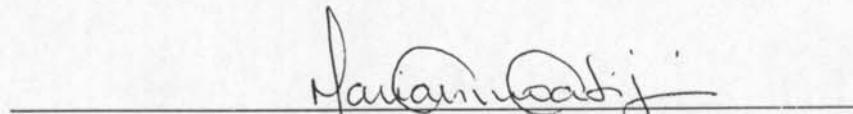


Prof. Dr. **NELSON AOKI**  
(Escola de Engenharia de São Carlos/USP)

APROVADO



Prof. Associado **MARCIO ROBERTO SILVA CORRÊA**  
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em  
Engenharia Civil (Engenharia de Estruturas)



Prof. Titular **MARIA DO CARMO CALIJURI**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação

*Dedico este trabalho  
aos meus pais*

## **Agradecimentos**

*À Deus.*

*Ao professor Wilson Sérgio Venturini, sempre dedicado, amigo e disponível ao longo de todos os meus anos em São Carlos.*

*À Raïssa, pela compreensão nas ausências e pelo apoio nas horas difíceis.*

*À minha família, que é a base de tudo.*

*Ao Professor Alaa Mohamed Chateauneuf, pela dedicação e boa vontade demonstradas durante toda a minha permanência na França.*

*Ao Professor Maurice Lemaire, pelas sugestões ao trabalho.*

*Ao Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée, em Clermont-Ferrand, França, pelo uso de suas instalações.*

*Aos colegas do departamento de estruturas, pelo companheirismo.*

*Aos funcionários do departamento de estruturas, pela presteza no atendimento.*

*À FAPESP, pelo auxílio financeiro no Brasil.*

*Ao CNPq, pelo auxílio financeiro na França.*

## **Sumário**

<b>Lista de figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de tabelas</b>	<b>xiv</b>
<b>Resumo</b>	<b>xv</b>
<b>Abstract</b>	<b>xvi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>17</b>
1.1 Generalidades	17
1.2 Objetivos	18
1.3 Justificativa	19
1.4 Metodologia	21
1.5 Síntese do conteúdo da tese	22
<b>2 Revisão Bibliográfica</b>	<b>23</b>
2.1 Introdução	23
2.2 Trabalhos publicados entre 1947 e 1979	23
2.3 Trabalhos publicados entre 1980 e 1994	26
2.4 Trabalhos publicados em 1995	30
2.5 Trabalhos publicados em 1996	31
2.6 Trabalhos publicados em 1997	33
2.7 Trabalhos publicados em 1998	35
2.8 Trabalhos publicados em 1999	37
2.9 Trabalhos publicados em 2000	40
2.10 Trabalhos publicados em 2001	43

2.11	Trabalhos publicados em 2002	47
2.12	Trabalhos publicados em 2003	51
2.13	Comentários sobre a revisão bibliográfica	53
<b>3</b>	<b>Métodos confiabilísticos</b>	<b>57</b>
3.1	Generalidades	57
3.2	Métodos exatos	60
3.2.1	Generalidades	60
3.2.2	Caso fundamental da segurança estrutural	60
3.3	Métodos de simulação	63
3.3.1	Simulação de Monte Carlo	63
3.3.2	Procedimentos de redução de variância em simulação	67
3.3.2.1	Amostra por importância	67
3.3.2.2	Simulação condicional	68
3.3.2.3	Simulação direcional	69
3.3.2.4	Amostra adaptativa	69
3.3.2.5	Simulação “Latin Hipercube”	69
3.4	Métodos de aproximação - Superfície de Resposta	69
3.5	Técnicas numéricas	76
3.5.1	Técnica geral de regressão	76
3.5.2	Otimização	79
3.5.2.1	Particularidades do caso de confiabilidade	79
3.5.2.2	Condições de otimalidade para componentes	81
3.5.2.3	Condições de otimalidade para sistemas	81
3.5.2.4	Generalidades sobre os algoritmos de otimização	82
3.5.2.5	Princípios dos algoritmos de otimização	83
3.5.2.6	Método do gradiente projetado	85
3.5.2.7	Método das penalidades	87
3.5.2.8	Método do Lagrangeano aumentado	87
3.5.2.9	Método de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler	88
3.5.2.10	Método de Newton	90
3.5.2.11	Método da programação quadrática seqüencial (SQP)	91
3.5.2.12	Método de Abdo-Rackwitz	92
3.5.2.13	Comentários finais sobre os procedimentos de otimização	92
3.6	Tratamento de distribuições correlacionadas e não Gaussianas	93
3.6.1	Generalidades	93
3.6.2	Variáveis aleatórias independentes	93
3.6.2.1	Distribuição normal equivalente	94
3.6.3	Variáveis aleatórias correlacionadas	95
3.6.3.1	Transformação de Rosenblatt	95
3.6.3.2	Transformação de Nataf	96
3.7	Cálculo da probabilidade de falha	98
3.7.1	Generalidades	98
3.7.2	Aproximação FORM (First Order Reliability Method)	99

3.7.3	Aproximações SORM (Second Order Reliability Method)	100
3.7.3.1	Hiper-esfera centrada	101
3.7.3.2	Hiper-esfera excêntrica	101
3.7.3.3	Aproximações assintóticas	102
<b>4</b>	<b>Modelo mecânico</b>	<b>103</b>
4.1	Propriedades do concreto	103
4.1.1	Aspectos gerais	103
4.1.2	Recomendações	105
4.1.3	Estados limites	108
4.2	Propriedades do aço	109
4.2.1	Modelo elasto-plástico perfeito	110
4.2.1.1	Aspectos gerais	110
4.2.1.2	Critério de plastificação	111
4.2.2	Modelo com encruamento isótropo	112
4.2.2.1	Aspectos gerais	112
4.2.2.2	Critério de plastificação	113
4.3	Análise não-linear de grelhas	114
4.3.1	Considerações sobre o método da energia	114
4.3.2	Solução do sistema de equações	116
4.3.3	Cálculo dos esforços internos	119
4.3.3.1	Linha neutra da seção	119
4.3.3.2	Integração numérica	121
4.3.4	Relações constitutivas momento x curvatura	122
4.3.5	Cálculo do vetor de esforços residuais	123
4.4	Determinação da carga última da estrutura	125
4.4.1	Algoritmo	125
4.4.2	Função de estado limite	127
<b>5</b>	<b>Modelos propostos para múltiplos estados limites</b>	<b>130</b>
5.1	Confiabilidade de sistemas	130
5.1.1	Generalidades	130
5.1.2	Idealização estrutural - sistemas em série	131
5.1.3	Idealização estrutural - sistemas em paralelo	132
5.1.4	Métodos de análise	133
5.1.4.1	Análises dos modos e efeitos de falha	134
5.1.4.2	Árvore de eventos	135
5.1.4.3	Árvore de falha	136
5.2	Obtenção da probabilidade de falha	137
5.2.1	Generalidades	137
5.2.2	Estado limite único	138
5.2.3	Estados limites múltiplos	140
5.2.4	Construção das curvas dos estados limites múltiplos	142



5.2.4.1	Generalidades	142
5.2.4.2	Imposição de falha com planos de experiência	142
5.2.4.3	Imposição de falha com Monte Carlo	143
5.2.4.4	Falha não imposta	144
5.2.5	Integração do domínio composto	144
5.3	Conexão entre os modelos propostos e a confiabilidade de sistemas	145
<b>6</b>	<b>Exemplos</b>	<b>148</b>
6.1	Grelha com duas barras	148
6.2	Grelha com 10 variáveis aleatórias	154
6.3	Viga isostática	160
6.4	Grelha com múltiplos estados limites	164
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>174</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>178</b>
	<b>Bibliografia Complementar</b>	<b>190</b>
	<b>Anexo A – Caso fundamental: exemplo numérico</b>	<b>193</b>
	<b>Anexo B – Importância da associação estatística</b>	<b>199</b>

## **Lista de figuras**

Fig. 3.1 – Regiões definidas pela função de desempenho	59
Fig. 3.2 – Tiragens de simulações de Monte Carlo	65
Fig. 3.3 – Tiragens de amostra por importância	67
Fig. 3.4 – Simulação condicional	68
Fig. 3.5 – Transformação isoprobabilística do espaço físico para o normalizado	70
Fig. 3.6 – Planos de experiência testados para 2 variáveis aleatórias	72
Fig. 3.7 – Planos de experiência com 3 variáveis aleatórias	73
Fig. 3.8 – Procedimento geral para análise de confiabilidade com RSM	74
Fig. 3.9 – Exemplo de evolução do estado limite para convergência em $\beta$	75
Fig. 3.10 – Evolução da superfície de resposta com ponto de adaptação	75
Fig. 3.11 – Evolução da superfície de resposta sem ponto de adaptação	76
Fig. 3.12 – Método do gradiente projetado	85
Fig. 3.13 – Algoritmo de Rackwitz-Fiessler	89
Fig. 3.14 – Transformação de Nataf	98
Fig. 3.15 – Interpretação de $P_f$ no caso de apenas uma variável aleatória	100
Fig. 3.16 – Erro na aproximação FORM	100
Fig. 4.1 – Diagramas de tensão nos estádios de comportamento	105

Fig. 4.2 – Tensões no concreto e na armadura entre duas seções fissuradas	106
Fig. 4.3 – Diagrama momento x curvatura proposto no CEB-158	107
Fig. 4.4 – Tensões na seção transversal segundo a NBR-6118	108
Fig. 4.5 – Diagrama tensão deformação experimental do aço	109
Fig. 4.6 – Lei constitutiva do modelo elasto-plástico perfeito	110
Fig. 4.7 – Lei constitutiva do modelo Elasto-Plástico com encruamento	113
Fig. 4.8 – Elemento de barra submetido a um carregamento genérico	115
Fig. 4.9 – Procedimento de solução através da rigidez secante	117
Fig. 4.10 – Iteração genérica	118
Fig. 4.11 – Distribuição das tensões na seção transversal	120
Fig. 4.12 – Modelo genérico escrito em momento x curvatura	122
Fig. 4.13 – Caso geral de determinação do vetor de esforços residuais	125
Fig. 4.14 – Elemento finito adotado	126
Fig. 4.15 – Algoritmo para o cálculo da carga última da grelha	127
Fig. 4.16 – Deformações limite admissíveis na seção	128
Fig. 5.1 – Sistema em série	131
Fig. 5.2 – Funções de estado limite dos vários modos	132
Fig. 5.3 – Sistema em paralelo	132
Fig. 5.4 – Árvore de eventos	136
Fig. 5.5 – Árvore de falha	137
Fig. 5.6 – Perturbações nos valores das variáveis de projeto mudam o cenário de falha	139

Fig. 5.7 – O estado limite único representa a envoltória dos modos mais importantes	140
Fig. 5.8 – Novo domínio seguro	141
Fig. 5.9 – Curvas de estado limite individuais: imposição de falha com PE's	143
Fig. 5.10 – Curvas de estado limite individuais: imposição de falha com simulação	143
Fig. 5.11 – Simulação final sobre o domínio composto	145
Fig. 6.1 – Esquema da grelha do exemplo 6.1	148
Fig. 6.2 – Modelo de elementos finitos simplificado com condições de simetria	149
Fig. 6.3 – Posicionamento das configurações mecânicas e estatísticas	149
Fig. 6.4 – Momentos fletores no primeiro e último passo de carga	150
Fig. 6.5 – Histograma do coeficiente de carga última	151
Fig. 6.6 – Isolinhas da superfície de resposta no espaço normalizado	151
Fig. 6.7 – Confiabilidade em função da correlação entre as resistências do concreto	153
Fig. 6.8 – Análise paramétrica das resistências	153
Fig. 6.9 – Análise paramétrica dos coeficientes de variação	154
Fig. 6.10 – Grelha completa e modelo simétrico	155
Fig. 6.11 – Modelo matemático e estatístico da grelha	156
Fig. 6.12 – Diagrama carga vertical x deslocamento do nó 20	157
Fig. 6.13 – Influência das variáveis aleatórias na segurança da grelha	159
Fig. 6.14 – Viga do exemplo	160
Fig. 6.15 – Isolinhas da superfície de resposta no espaço normalizado	161
Fig. 6.16 – Funções de estado limite dos múltiplos modos de falha	163

Fig. 6.17 – Esquema da grelha	164
Fig. 6.18 – Associação dos grupos de armaduras aos elementos da grelha	165
Fig. 6.19 – Nós da malha de elementos finitos	166
Fig. 6.20 – Elementos da malha	166
Fig. 6.21 – Distribuição das variáveis aleatórias no pavimento	167
Fig. 6.22 – Seleção dos modos mais importantes	168
Fig. 6.23 – Procedimento adotado para a seleção dos pontos para os conjuntos $u_m$	169
Fig. 6.24 – Importância dos modos de falha secundários na confiabilidade global	172
Fig. 6.25 – a) Principais modos de falha b) Seções críticas em análise determinística	173
Fig. A.1 – Problema físico a ser modelado	193
Fig. A.2 – Distribuição conjunta de probabilidades – visualização em 3 e 2 dimensões	195
Fig. A.3 – Função de estado limite, função conjunta, índice $\beta$ e ponto de projeto	196
Fig. A.4 – Rotação de eixos para a integração	197
Fig. B.1 – Distribuições com médias iguais e coeficientes de variação diferentes	199

## **Lista de tabelas**

Tabela 4.1 – Procedimento da rigidez secante – Adaptado de Corrêa [204]	117
Tabela 5.1 – Exemplo de planilha para uso do <i>FMEA</i>	135
Tabela 6.1 – Dados adicionais do exemplo 6.1	149
Tabela 6.2 – Índice de confiabilidade e coordenadas do ponto de projeto	152
Tabela 6.3 – Seções transversais e armaduras das vigas	156
Tabela 6.4 – Índice de confiabilidade e coordenadas do ponto de projeto da grelha	158
Tabela 6.5 – Dados do exemplo	160
Tabela 6.6 – Resultados da análise de confiabilidade	162
Tabela 6.7 – Área de aço presente nas seções segundo o grupo	165
Tabela 6.8 – Dados adicionais da grelha	167
Tabela 6.9 – Probabilidades individuais dos modos de falha	171
Tabela B.1 – Probabilidades de violação do estado limite	200

## **Resumo**

Neste trabalho, são desenvolvidas novas técnicas aproximadas de análise de confiabilidade para grelhas de concreto armado levando-se em consideração as probabilidades de falha de vários modos importantes. Realiza-se um acoplamento entre os métodos de Monte Carlo, elementos finitos e procedimentos de otimização para considerar esses modos de falha importantes e classificá-los. Esse acoplamento também permite a redução do número de chamadas ao modelo de elementos finitos. Os cenários de falha são caracterizados como o encurtamento excessivo do concreto e o alongamento do aço. Estes cenários determinam a capacidade última da estrutura, e podem ser representados por um coeficiente escalar que multiplica todas as ações presentes na estrutura. Para a determinação desses estados estruturais últimos, um procedimento incremental-iterativo é utilizado. A análise de confiabilidade é realizada em diferentes conjuntos de realizações aleatórias das variáveis de projeto. O conjunto de respostas estruturais e de realizações permite a determinação dos coeficientes da superfície de respostas da estrutura. O acoplamento realizado permite também o tratamento com estruturas de concreto com elevado número de modos de falha. Aplicam-se as técnicas em exemplos de grelhas de concreto armado.

**Palavras-Chave:** Confiabilidade Estrutural, Múltiplos Modos de Falha, Concreto Armado, Elementos Finitos, Análise Não-Linear.

## **Abstract**

In this work, new local approaches of reliability analysis applied to reinforced concrete grid structures are developed, taking into account several critical cross-section failure probabilities. Monte Carlo simulations are coupled with finite element analyses and optimization techniques with techniques to take into account the failure in the most important cross-sections, in order to classify the severity of failure modes. The failure scenario is depicted when either a concrete fiber or a steel bar reaches the predefined conventional limit. This scenario gives the structural ultimate capacity, which can be represented by a scalar coefficient multiplying all the loads acting on the structure. To achieve the failure scenario, an incremental and iterative procedure is used. To carry out the reliability analysis, the mechanical analysis has to be performed for different sets of random variable realizations of the mechanical, material and geometrical properties. The set of ultimate coefficients obtained from several mechanical analyses defines the response surface. The coupling between Monte Carlo simulations and response surface techniques applied in this work aims to reduce significantly the number of the finite element model calls, and hence to deal with real, or high-scale, reinforced concrete grids where large number of failure components can be found. The proposed procedure is then applied to reinforced concrete grids in order to show some more complex reinforced concrete examples.

**Keywords:** Structural Reliability Analysis, Multiple Failure Modes, Reinforced Concrete, Finite Element Method, Non-Linear Analysis.



# **1 Introdução**

## **1.1 Generalidades**

Estruturas de concreto armado são correntemente utilizadas para fornecer suporte às construções civis e fazem parte do cotidiano de boa parte dos Engenheiros. A concepção ou verificação de uma estrutura ou elemento estrutural de concreto armado requer o atendimento a algumas recomendações. Atendê-las nos traz o respaldo de uma margem de segurança dentro dos limites aceitos pela sociedade e pelo meio técnico. Grande parte das recomendações internacionais existentes atualmente baseia-se no uso de coeficientes parciais de segurança. Eles são aplicados como majoradores de ações e minoradores de resistências com valores convenientes para aumentar a margem de segurança contra fatores imprevistos. Entretanto, quando se realizam análises de segurança com os métodos baseados na teoria da confiabilidade, essa margem é medida pela probabilidade de a estrutura atingir um estado limite qualquer e constata-se que o uso de coeficientes parciais fixos conduz a probabilidades de falha globais não uniformes. Assim, o uso de tais coeficientes não necessariamente conduz a margens de segurança específicas em termos de probabilidades de se atingir um estado limite. Sabendo disso, a comunidade científica investiu na pesquisa das aplicações em confiabilidade para efetuar previsões sobre o comportamento estrutural frente às incertezas inerentes às ações e materiais. Hoje, o assunto é tema de pesquisa prioritário em diversos centros de pesquisa na Europa, Estados Unidos e outros países. Assim, o ramo da análise da segurança de estruturas conheceu grandes avanços nos últimos anos.

Os Engenheiros estão sempre à procura de métodos de verificação e projeto de sistemas estruturais. Os conceitos modernos de confiabilidade vêm sendo usados com frequência para este propósito. A análise de confiabilidade é uma ferramenta recente e poderosa para a previsão da segurança estrutural cuja importância para a determinação da probabilidade de falha estrutural está sendo plenamente reconhecida. Trata-se de uma

análise com base estatística que vem sendo rapidamente incorporada à solução de problemas de Engenharia. Com ela pode-se determinar com boa precisão o nível de segurança que se tem no projeto ou mesmo em uma estrutura real.

Paralelamente aos avanços nos estudos sobre a confiabilidade do concreto armado, é interessante adicionar novos modelos de cálculo aos existentes. Isso só se tornou possível graças à evolução sofrida pelos computadores nos últimos anos, o que permitiu a redução do tempo dispensado no processamento. No entanto, os problemas de confiabilidade requerem um grande número de chamadas ao modelo de elementos finitos ou de outro procedimento numérico adotado, isto é requer um grande número de soluções do sistema estrutural, e com isso o tempo computacional ainda é considerado um obstáculo a ser ultrapassado. Assim, o desenvolvimento de novos modelos mecânico-probabilísticos é necessário para suprir a constante necessidade de evolução no ramo.

## 1.2 Objetivos

O objetivo geral do presente trabalho é desenvolver um *software* para incorporação de um modelo probabilístico em grelhas de concreto armado, levando-se em conta as probabilidades de falha oriundas dos diversos modos de falha possíveis. No modelo probabilístico proposto leva-se em conta que o domínio de falha da estrutura é formado de subdomínios correspondentes a cada um dos modos de falha importantes. As incertezas podem ser consideradas em relação às ações, grupos de ações e aos parâmetros dos materiais.

Para o cumprimento dessa meta, vários objetivos específicos intermediários foram estabelecidos e cumpridos. Em uma primeira fase foi implementado o modelo não-linear para o problema proposto, com diversos melhoramentos específicos necessários. O procedimento de determinação da carga última foi realizado logo após essa etapa. Em seguida, visou-se o estudo de métodos de simulação e as técnicas de redução de variância. Depois, o método da superfície de resposta foi estudado e implementado para o uso em problemas com estado limite único. Na etapa final foi iniciado o estudo dos múltiplos modos de falha e a viabilização de sua implementação computacional, com acoplamento entre o método da superfície de resposta, simulações de Monte Carlo e técnicas de otimização.

### 1.3 Justificativa

A automatização do cálculo probabilístico de estruturas usuais de concreto armado mostra que poderá ser, em breve, uma realidade perfeitamente exequível para os calculistas de nosso país. Na EESC-USP, a preocupação atual do grupo que estuda o comportamento não-linear do concreto armado inserido nas linhas de pesquisa de mecânica das estruturas e métodos numéricos é criar procedimentos fundamentados em modelos que representem com eficácia o comportamento do material. Percebe-se que essa preocupação com o aprimoramento das técnicas está entre os objetivos principais das escolas Brasileiras de Engenharia. Vale ressaltar aqui, que a forma mais simples e comum de se analisar uma estrutura de concreto armado é através de modelos lineares. Isto se dá por razões óbvias, como por exemplo: compreensão e utilização simples, possibilidade de superposição de efeitos, e fuga de dificuldades que os engenheiros apresentam para absorver alterações dos procedimentos usuais. Entretanto, com os avanços dos modelos de cálculo, é importante que no ensino de Engenharia e em projetos usuais as técnicas mais complexas sejam incorporadas, trazendo como consequência análises estruturais mais fiéis.

A concepção de estruturas de concreto armado deve garantir a segurança dos componentes isoladamente ou do sistema como um todo. Essas estruturas têm como principal característica uma grande redistribuição de esforços, devida principalmente ao caráter fortemente não-linear dos materiais. Ao projetá-las ou verificá-las, deve-se assegurar que os deslocamentos e esforços existentes não ultrapassem determinados limites. A determinação desses estados estruturais envolve a modelagem de variáveis cujo comportamento nem sempre é totalmente conhecido. Existe, portanto, uma carência de informação sobre as grandezas envolvidas na concepção. Em um processo de aplicação contínua de carregamento esse desconhecimento faz com que a previsão do ponto de falha em um sistema desse tipo seja difícil. Esse ponto pode mudar de posição com pequenas mudanças nas configurações das variáveis do sistema, tal é a sensibilidade do modelo não-linear.

Alguns trabalhos já foram apresentados na literatura contemplando modelagens probabilísticas de elementos de concreto armado ou mesmo de alguns sistemas. Contudo, esses trabalhos não levam em conta a particularidade da mudança do ponto de falha, caracterizando sempre a estrutura com um ponto único de falha mais provável. Essa desconsideração pode ser contra a segurança, já que outros modos de falha podem

situar-se próximos ao ponto mais provável e apresentar significativa contribuição à confiabilidade do sistema.

O entendimento e concepção de variáveis estatísticas para um projeto é relativamente simples. Interpretando as variáveis dessa forma pode-se ter um avanço expressivo nos modelos mecânicos e de materiais. No contexto da engenharia de estruturas para projetos usuais, pode-se dizer que as ferramentas atuais apresentam grande precisão, refletindo assim a qualidade do projeto. É claro que mesmo nesses dois campos muito pode ser feito para aproximar melhor o comportamento dos materiais e o modelo mecânico. Porém, o que chama a atenção hoje é a defasagem da elaboração de um projeto no contexto dos modelos probabilísticos. O projeto hoje ainda é e continuará sendo por um tempo razoável, elaborado com base em coeficientes parciais que procuram levar em conta a influência de cada variável de um modo aproximado. O resultado desse modelo é ruim se comparado com a precisão observada nos métodos numéricos disponíveis atualmente para a integração das equações do problema mecânico e dos modelos de materiais. O uso dos coeficientes parciais leva a resultados finais imprevisíveis e indesejáveis em termos de probabilidades de se atingir um limite qualquer. No grupo de São Carlos existem alguns trabalhos concluídos e outros em andamento que mostram a imprecisão do procedimento adotado hoje. Apenas esse aspecto já seria de grande interesse para o trabalho proposto.

Além da justificativa acima, é necessário ressaltar que os estudos mecânico-probabilísticos idealizados aqui representam apenas mais uma etapa na tentativa de precisar probabilidades de ocorrência de estados limites. O modelo pode ser transportado e idealizado para quaisquer outros problemas mecânicos, ou estados limites, dado o caráter generalista da proposta.

Além disso, este trabalho representa a continuidade de um esforço que tem sido feito pelo grupo de confiabilidade do Departamento de Estruturas da EESC/USP na tentativa de se obter modelos mais eficientes e precisos para estruturas de edifício de concreto armado ou partes dela. O resultado nessa direção tem sido um sucesso, justificando, portanto, a presente proposta. Mais ainda, os procedimentos aqui desenvolvidos podem ser rapidamente implementados em *softwares* disponíveis no mercado, bem como no dia-a-dia dos escritórios de cálculo especializados em projeto estruturais.

## 1.4 Metodologia

Neste trabalho são tratados os pisos de pavimentos de edifícios com o emprego do subsistema estrutural grelha. A determinação das ações atuantes na grelha é feita através do cálculo de reações sobre as vigas e de outros carregamentos atuantes diretamente sobre os elementos.

O modelo mecânico contempla uma análise não-linear, considerando-se apenas a não-linearidade física, e o seu sistema global de equações é construído a partir do método dos elementos finitos.

Alguns modelos materiais foram estudados. Escolheu-se considerar a relação constitutiva do concreto submetido à compressão por meio do modelo do CEB-90. O concreto tracionado foi representado pelo modelo de Figueiras. Para o aço utilizou-se um modelo elasto-plástico com encruamento. O modelo inicialmente escrito em termos de tensão x deformação dos materiais é transformado para momento x curvatura da seção. Para a determinação das tensões resultantes no concreto nas seções transversais usa-se a integração numérica de Gauss. Em alguns modelos elas podem ser determinadas analiticamente. O sistema de equações não-lineares é resolvido numericamente através de um algoritmo incremental-iterativo do tipo Newton-Raphson, empregando-se aqui a matriz secante. Apesar de a formulação tangente apresentar uma convergência mais veloz, o uso de matrizes secantes evita os problemas inerentes às formulações tangentes quando os modelos adotados para representar os materiais podem apresentar descontinuidades de derivada.

O esforço resultante na armadura é calculado assumindo-se a compatibilidade de deformações entre as barras e o concreto ao longo de toda a sua extensão, que constitui a hipótese de perfeita aderência.

Na análise probabilística, a determinação das realizações das variáveis aleatórias é feita por escolha, segundo critérios de planos de experiência, ou aleatoriamente nos métodos que envolvem simulação.

No modelo proposto, os domínios de falha compostos foram determinados através de regressão quadrática em cada modo de falha. A construção dessas curvas individuais foi possível graças à adoção de certas técnicas numéricas ou hipóteses mecânicas, tal como a não observância das deformações limite nos modos não importantes. Ela foi efetuada usando-se a base de dados proveniente tanto de planos de experiência quanto de simulações de Monte Carlo. As simulações de Monte Carlo foram usadas também

para fazer a seleção dos modos mais importantes de falha em alguns casos. Também serviram como base na determinação de estimadores da probabilidade final no domínio composto.

Os códigos computacionais foram escritos em linguagem de programação Fortran, empregando-se o compilador Visual Fortran versão 6.0 da empresa Digital. A ferramenta utilizada para montagem e processamento dos códigos foi um computador que dispõe de um processador Pentium III de 900 MHz e 512Mb de memória RAM.

Foi realizado um estágio de um ano no *Institut Français de Mécanique Avancée*, situado na cidade de *Clermont-Ferrand*, na França, junto ao grupo dos professores Alaa Mohamed Chateaneuf e Maurice Lemaire.

## **1.5 Síntese do conteúdo da tese**

O segundo capítulo desse texto consiste na revisão bibliográfica efetuada sobre a confiabilidade em geral. As publicações são apresentadas segundo uma ordem cronológica. No final do capítulo, alguns comentários são tecidos sobre a tendência dos trabalhos.

No terceiro capítulo apresentam-se os métodos disponíveis para a determinação do índice de confiabilidade e da probabilidade final de falha de componentes. Em seguida, as técnicas numéricas e os procedimentos de otimização utilizados são apresentados.

No quarto capítulo são vistas as noções elementares sobre a análise estrutural com a consideração da não-linearidade física. Descreve-se o procedimento para o cálculo da linha neutra da seção transversal, que antecede a determinação dos esforços internos. Em ambos emprega-se o processo de integração numérica de Gauss, também explicitado. São comentadas as perdas de rigidez através do modelo adotado.

No quinto capítulo são apresentados os modelos propostos para a determinação da confiabilidade do sistema e as técnicas utilizadas para a sua implementação computacional.

No sexto capítulo apresentam-se alguns exemplos processados com a finalidade de ilustrar as aplicações das abordagens com estado limite único e com estados limites múltiplos.

Por fim, no sétimo capítulo, apresentam-se todas as conclusões obtidas pelo trabalho e sugestões para pesquisas futuras.

## **2 Revisão Bibliográfica**

### **2.1 Introdução**

Este capítulo mostra um estado da arte sobre a confiabilidade com o intuito de contextualizar o estudo globalmente. Desejou-se descobrir o que já havia sido investigado sobre o assunto, verificar se a proposta inicial apresentava objetivos coerentes e também evitar a publicação de pesquisas em duplicidade. Esta revisão foi útil para a escolha de caminhos a tomar no trabalho e para a definição de hipóteses e simplificações. O capítulo agrupa os principais trabalhos encontrados conforme a seguinte ordem: de 1947 até 1979; de 1980 a 1994; e um subitem por ano desde 1995 até 2003. Alguns assuntos relacionados à confiabilidade e às probabilidades também foram brevemente comentados.

### **2.2 Trabalhos publicados entre 1947 e 1979**

A discussão sobre o uso de novas teorias para medir a segurança estrutural é antiga e remete à primeira metade do século XX. O trabalho que primeiro discutiu efetivamente a possibilidade do uso de técnicas estatísticas para quantificar a segurança de componentes estruturais foi de o de Freudenthal, A.M. [1], que se baseou no método das tensões admissíveis. O artigo contribuiu também falando sobre as tendências de evolução da área, mostrando aplicações do conceito utilizado até hoje de probabilidade de falha. Ele definiu essa grandeza como a integral da distribuição de probabilidade das variáveis dentro de um certo domínio. Mais tarde esse autor publicou estudo semelhante [2] sobre a investigação dessa probabilidade envolvendo o estado limite de serviço e o estado limite último. Ele conclui que essas verificações são tão importantes quanto as feitas para as tensões admissíveis. A discussão realizada pelo autor é considerada como o primeiro passo no desenvolvimento da teoria baseada no conceito de função de estado limite. Segundo ele, como a falha estrutural está fortemente ligada às deformações

plásticas, uma análise não-linear se faz necessária para medir corretamente a capacidade de carga da estrutura. O artigo [3], também do mesmo autor, coloca as equações da probabilidade de falha na forma em que são utilizadas hoje e fornece algumas sugestões para que estruturas mais complexas possam ser calculadas. Seus estudos também foram os primeiros a tratarem de otimização de estruturas com restrições de risco, conforme pode ser visto na referência [4]. Esse é um dos autores clássicos da área e é frequentemente citado em trabalhos recentes.

Ang,A.H.-S. & Amin,M. [5] descrevem os conceitos básicos de uma análise que pretende considerar as incertezas das variáveis estruturais. O problema clássico R-S, cuja solução é exata, é apresentado. O autor enfatiza que a falta de dados probabilísticos é o principal entrave para a aplicação dos conceitos em maior escala e que o procedimento de cálculo da sobrevivência (confiabilidade) é o mesmo para sistemas determinados e indeterminados.

Vanmarcke,E.H. [6] descreve um método matricial geral para o cálculo da confiabilidade de estruturas em escala real que leva em conta as correlações entre os modos de falha do sistema. O trabalho dispôs-se a apresentar um procedimento de otimização do peso da estrutura com restrição de confiabilidade, permitindo levar em conta o desempenho e a segurança ao mesmo tempo.

Hasofer,A.M. & Lind,N.C. [7] escreveram provavelmente o artigo mais lido e citado sobre confiabilidade estrutural até hoje. As duas conclusões do trabalho são: “Uma medida do índice de confiabilidade de segunda ordem de um projeto ou sistema é a distância entre a média das variáveis básicas até o contorno do domínio de falha, quando todas as variáveis são medidas em unidades de desvio padrão” e “O índice de confiabilidade é invariante sob qualquer modificação do critério de falha que obedeça às leis da álgebra e da mecânica”. Estas duas afirmações são perfeitamente corretas e o estudo moderno da confiabilidade segue até os dias atuais os conceitos estabelecidos no trabalho, pois foi nesse artigo que foi proposta a utilização do índice adimensional “ $\beta$ ” em um espaço de variáveis reduzidas.

Hasofer,A.M. [8] relata que o índice de confiabilidade proposto por ele mesmo deve estar associado a uma probabilidade de falha, que é necessária para definir a confiabilidade do modelo. Ele associa o índice “ $\beta$ ” a uma distribuição chi-quadrado para fazer este cálculo.

Ang,A.H.-S. & Cornell,C.A. [9] fazem um estado da arte dos conceitos e métodos probabilísticos disponíveis para a análise de confiabilidade até aquele momento. Eles



afirmam que a informação mínima que se pode disponibilizar para uma análise probabilística é o valor esperado e mais uma medida de dispersão, que pode ser a variância. Segundo o trabalho, a falta de dados disponíveis sobre as variáveis de projeto não devem ser motivo para o abandono dessa análise, mas sim um motivo para ser introduzido o conhecimento do Engenheiro na tomada de decisão.

Lind,N.C. [10] discorre sobre a idéia da concepção probabilística. Ele sugere que esse processo pode ser feito para que seja atingido um nível especificado de confiabilidade. O trabalho também explora a idéia de se efetuar cálculo de confiabilidade de sistemas com mais de um modo de falha. Segundo o autor, já haviam sido feitas propostas para estimar a confiabilidade em função dos índices individuais de cada modo de falha. A proposta do trabalho é estabelecer um limite máximo e um mínimo para a probabilidade de falha truncando os modos pouco importantes.

Parkinson,D.B. [11] apresenta uma solução para a resolução do problema do ponto de projeto. Segundo ele, é mais útil fornecer o valor do ponto de projeto no espaço físico. Ele propõe uma formulação, válida somente em casos particulares, para encontrar esse ponto sem a necessidade de transformação para um espaço normalizado.

Ditlevsen,O. [12] discute sobre o índice de confiabilidade generalizado, que envolve a separação do índice clássico em duas parcelas. Uma é referente às incertezas não redutíveis e a outra àquelas que podem ser limitadas ou eliminadas.

Veneziano,D. [13] propõe um índice de confiabilidade “ $\gamma$ ” baseado em uma função monotônica dos limites inferior e superior da probabilidade final de falha. Segundo o autor, o índice proposto é mais geral e consistente do que o índice “ $\beta$ ”, pois se baseia em medidas de dispersão de ordem superiores.

Grigoriu,M. & Veneziano,D & Cornell,C.A. [14] relatam que um dos principais problemas da aplicação da teoria das probabilidades aos problemas de confiabilidade é a arbitrariedade na escolha das distribuições de probabilidade para as variáveis aleatórias e que este problema é maior quando o número de variáveis cresce. O artigo sugere que sejam utilizadas as ferramentas adequadas para a escolha da distribuição ótima, o que conduz a menores erros em situações de informação estatística limitada. Segundo eles, o erro diminui à medida que a quantidade de informação aumenta.

Fiessler,B. & Neumann,H.-J & Rackwitz,R. [15] comentam as vantagens do método FORM e apresentam aproximações SORM. Segundo os autores, a aproximação linear é suficientemente precisa na maioria dos casos. Entretanto, nos problemas onde se requer maior confiabilidade, ele aconselha aproximação quadrática para superfície

limite. Além disso, o autor afirma que assim como o FORM, o SORM pode também falhar nos casos onde a curvatura do estado limite aproximado não é suficiente para representar o domínio seguro.

### 2.3 Trabalhos publicados entre 1980 e 1994

Ditlevsen, O. [16] utiliza o princípio da aproximação da cauda normal, para efetuar o cálculo simplificado do índice de confiabilidade. O princípio nada mais é do que uma transformação isoprobabilística para o espaço normal padrão, onde a derivada da distribuição transformada é igual àquela da distribuição original em um ponto equivalente. Para o autor, o uso de vários hiper-planos tangentes nos múltiplos estados limites no espaço normalizado fornece uma aproximação precisa da probabilidade de falha do sistema.

Dolinski, K. [17] comenta e fornece exemplos da aproximação FORM e coloca as suas principais desvantagens até aquele momento. Segundo o autor, o método é geral, mas não é capaz de fornecer estimativa de erro a menos que se conheça a concavidade da superfície real de falha. O autor afirma também que o processo de otimização não assegura necessariamente a localização de um mínimo global.

Der Kiureghian, A. & Taylor, R.L. [18] apresentam uma formulação matricial do FORM. A técnica tem a vantagem de poder ser generalizada para estruturas mais complexas. Porém, ressaltam que uma larga quantidade de dados deve ser armazenada e também que muitos cálculos iterativos repetitivos devem ser processados. Apesar do caráter generalista, a abordagem esbarra em tempo de processamento.

Harbitz, A. [19] utiliza a técnica de amostra por importância para o cálculo da integral da probabilidade de falha. O trabalho compara essa técnica com simulação de Monte Carlo e com a integração numérica por quadratura. Para a função de importância o autor propôs a mesma função conjunta das variáveis aleatórias consideradas.

Breitung, K. [20] estuda uma aproximação para o cálculo da integral multinormal através de uma modificação nos limites de integração. Essa modificação foi realizada com a aproximação da função de estado limite por meio de séries de Taylor. A ideia foi introduzir aproximações assintóticas. Segundo o autor, o desenvolvimento da série em grau dois foi suficiente para esta representação.

Shinozuka, M. [21] utiliza a técnica dos multiplicadores de Lagrange para realizar o procedimento de otimização que visa determinar o ponto de projeto. Após isso ele

emprega o método de Monte Carlo para determinar a probabilidade de falha em um estado limite quadrático aproximado.

Kam,T.-Y. & Corotis,R.B. & Rossow,E.C. [22] determinam explicitamente as funções de estado limite de estruturas de aço com modelo mecânico elasto-plástico para casos com duas e três variáveis aleatórias. Com isso conseguem realizar uma integração numérica sobre o domínio de falha definido analiticamente e determinar a probabilidade de falha. Eles compararam os resultados do índice de confiabilidade entre os modelos com ligações flexibilizadas e os modelos com ligações rígidas. Chegam à conclusão que esse fator é importante na confiabilidade do sistema.

Ditlevsen,O. [23] discute os aspectos filosóficos da medição da segurança estrutural através de um único índice. O autor recomenda o uso de dois índices: o primeiro mediria a probabilidade de falha descartando erros grosseiros e o segundo a tendência de uma eventual falha devida a esses erros.

Melchers,R.E. [24] estuda os sistemas estruturais cuja modelagem pode ser feita por meio de uma representação em paralelo. O estudo contempla a influência da correlação das resistências dos elementos individuais na confiabilidade do sistema. Segundo ele, a confiabilidade nesses casos é significativamente sensível ao efeito de resistências fortemente correlacionadas entre os elementos.

Ditlevsen,O. & Bjerager,P. [25] estudam a determinação da confiabilidade em sistemas com alta redundância. Esta determinação é particularmente difícil, pois os sistemas apresentam alto número de modos de falha possíveis. Portanto, existem inúmeros caminhos de falhas diferentes e a escolha de apenas alguns pode levar a um estimador falso da probabilidade de falha. O autor sugere o cálculo de limites superiores e inferiores para essa probabilidade. O trabalho também mostra que qualquer margem de segurança linear relacionada com um modo de falha pode ser escrita como uma combinação linear dos limites.

Madsen,H.O. [26] compara as aproximações de primeira e segunda ordem utilizadas pelos métodos FORM/SORM com problemas onde a solução exata é possível. O exemplo mostrou que os dois métodos são precisos, embora o autor acredite que uma aproximação linear não seja suficiente em sistemas que requerem alta confiabilidade.

Frangopol,D.M. [27] estuda o problema da otimização com restrições em confiabilidade enfocando a sensibilidade do ponto ótimo em relação às variáveis de projeto. Para isso, o método “*feasible directions*” foi utilizado. O autor afirma que

estudos nessa linha podem ser facilmente aplicados aos casos com várias restrições em confiabilidade e outros parâmetros. O mesmo autor publica um trabalho semelhante com um enfoque sobre as multi-restrições [28].

Der Kiureghian,A. & Liu,P.-L. [29] investigam a determinação da confiabilidade em estruturas com pouca informação disponível sobre o modelo probabilístico. A maior contribuição do trabalho é a abordagem prática desenvolvida para o caso de distribuições conjuntas correlacionadas. Isso foi realizado com o emprego de técnicas e fórmulas empíricas na determinação do coeficiente de correlação “F” entre duas distribuições marginais dadas.

Harbitz,A. [30] propõe uma técnica de simulação baseada na exclusão das realizações aleatórias que se concentram dentro da hiper-esfera cujo raio é o índice de confiabilidade. O autor conclui que esse procedimento permite obter facilmente um estimador da probabilidade de falha.

Ditlevsen,O. & Bjerager,P. [31] realizam um estado da arte dos métodos disponíveis para a determinação da confiabilidade estrutural. O trabalho descreve a confiabilidade de elementos simples, de sistemas simples e de sistemas complexos. Para os autores, os métodos disponíveis traduzem resultados não realistas e muitos avanços devem ser agregados aos métodos para que eles se tornem ferramentas eficientes.

Ayyub,B.M. & White,G.J. [32] realizam calibração de coeficientes parciais de segurança para assegurar níveis estabelecidos de confiabilidade. O procedimento adotado foi realizado determinando-se a confiabilidade da estrutura concebida e em seguida calculando-se novos coeficientes parciais para atingir o nível de segurança desejado através de uma aproximação do valor médio das variáveis de projeto.

Der Kiureghian,A. & Lin,H.-Z. & Hwang,S.-J. [33] desenvolvem um método SORM baseado em um hiper-parabolóide em torno do ponto de projeto. Segundo os autores, o método tem fácil implementação, é pouco sensível às perturbações na função de estado limite e apresenta pequeno erro mesmo para grande número de variáveis aleatórias.

Madsen,H.O. [34] define os fatores de sensibilidade no estudo da confiabilidade. Esses fatores medem a influência de cada variável aleatória no índice de confiabilidade, permitindo-se determinar que variáveis são realmente influentes. Assim, pode-se reduzir o número de variáveis, o que se traduz em um ganho de tempo de processamento.

Rashedi,R. & Moses,F. [35] realizam um estudo de identificação dos modos de falha importantes em um sistema estrutural. O critério de seleção adotado é a importância de um modo na confiabilidade global.

Bucher,C.G. [36] apresenta uma técnica de modificação de amostra para adaptação com método de Monte Carlo chamada de “*Adaptive Sampling*”. Os resultados são comparados com Monte Carlo puro, amostra por importância, e método exato em exemplos simples. O autor afirma que o método conduz a resultados precisos e eficientes. Porém, ele não aconselha o seu uso em sistemas onde os modos de falha precisam ser tratados isoladamente.

Folse,M.D. [37] apresentam um método para o cálculo do índice de confiabilidade de estacas submetidas a carregamento lateral. O modelo mecânico engloba a interação estaca-solo com não-linearidade geométrica. O autor afirma que este é um significativo passo em direção à concepção ótima probabilística desses elementos.

Der Kiureghian,A. [38] introduz o conceito das incertezas que pertencem a um conjunto que ele chamou de “estado de conhecimento imperfeito”. Segundo ele existem dois grupos de incertezas. Um deles refere-se à aleatoriedade das propriedades dos materiais e do carregamento, que não podem ser reduzidas. Um segundo grupo é composto por incertezas devidas aos erros nos estimadores ou às imperfeições nos modelos. Essas últimas podem e devem ser reduzidas.

Bjerager,P. & Krenk,S. [39] estudam a análise de sensibilidade no método FORM. Esta análise mede a influência de cada parâmetro estrutural no índice de confiabilidade por meio de derivadas parciais.

Folz,B. & Foschi,R.O. [40] utilizam coeficientes chamados de “*system factors*” para modificar a concepção de elementos de estruturas de madeira. Eles efetuam a calibração desses fatores para atingir níveis definidos de confiabilidade.

Paliou,C. & Shinozuka,S & Chen,Y.-N. [41] desenvolvem um estudo relacionando confiabilidade e redundância estrutural de plataformas marinhas utilizando o método dos caminhos de falha. Nesse método a falha do sistema é verificada segundo uma seqüência de vários elementos. Os autores concluem que a redundância aumenta o tamanho do caminho de falha e também a confiabilidade do conjunto.

Folz,B. & Foschi,R.O. [42] estudam a confiabilidade de vigas de madeira. O modelo mecânico considera a acumulação de água em lajes suportadas pelas vigas. O problema físico é não-linear geométrico, pois a o líquido acumula-se ainda mais sobre a

estrutura deformada, aumentando a área de ocupação. Os autores realizam também uma calibração de coeficientes para atingir um nível fixo de confiabilidade.

Liu,P. & Der Kiureghian,A. [43] comparam alguns métodos de otimização utilizados para a procura do ponto de projeto. São apresentados os métodos do gradiente projetado, das penalidades, do Lagrangeano aumentado, da programação quadrática seqüencial, e o Hasofer e Lind. Para os autores, este último parece ser o mais robusto em problemas onde o modelo mecânico de elementos finitos é não-linear.

Ibrahim,Y. [44] discute novos procedimentos para o cálculo da confiabilidade baseados na melhor representação do domínio de falha tomando por base o modo de falha mais importante.

El-Tawil,K. & Muzeau,J.-P. & Lemaire,M. [45] apresentam um desenvolvimento implícito da função de estado limite que caracteriza um dos primeiros trabalhos a formalizar a superfície de resposta. Essa técnica caracteriza uma maneira de explicitar uma função aproximada do estado limite através de um processo iterativo.

Cai,G.Q. & Elishakoff,I. [46] apresentam um método SORM com o uso de curvas aproximadas hiper-parabólicas para a função de estado limite. Afirmam que o erro da aproximação FORM depende da magnitude da curvatura da superfície real de falha.

## 2.4 Trabalhos publicados em 1995

Song,B.F & Jiang,W. [47] utilizam técnicas de integração numérica para calcular a confiabilidade de sistemas com estados limites lineares em cada modo de falha. A integração é feita no espaço normalizado e o trabalho mostra que o domínio da integral torna-se simples. Isso reduz o tempo de processamento. Utiliza também técnicas de integração em uma função de densidade de probabilidade conjunta com duas e três variáveis aleatórias.

Chun,Q.Li. [48] estuda a confiabilidade de sistemas com deterioração ao longo do tempo. Ele propõe uma formulação alternativa para quando se considera o carregamento aplicado como variável aleatória. A sua abordagem é aplicável a funções de estado limite globais e a sistemas com diferentes propriedades de materiais.

SriVidya,A. & Ranganathan,R. [49] realizaram um estudo da minimização de custos em pórticos de concreto armado para um nível confiabilidade fixado. Este procedimento é conhecido como “projeto ótimo baseado em confiabilidade” ou “*Reliability based optimal design*” (RBOD). Os valores ótimos dos momentos

resistentes últimos das seções da estrutura são obtidos através da minimização das funções custo sujeitas às restrições do índice de confiabilidade.

Li,C.Q. & Melchers,R.E. [50] modelam os carregamentos atuantes em colunas de concreto armado por meio de processos estocásticos para o cálculo de sua confiabilidade considerando estados limites não-lineares. Os processos estocásticos são aqueles onde existem alterações das características das variáveis com o tempo. Segundo os autores, uma vantagem dessa proposta é que se evita o cálculo da integral multidimensional para a obtenção da probabilidade de falha.

Wei-Fenga,L. & Bulleita,W.M. [51] estudam a influência das solicitações de fluência na confiabilidade de sistemas estruturais suportados por vigas de madeira modelados com base elástica e submetidos a ações de cargas permanentes e variáveis, como por exemplo a neve. A confiabilidade global é calculada como combinação da confiabilidade dos elementos. O modelo mecânico leva em conta a acumulação de dano que ocorre durante a evolução do carregamento. Concluem que o cálculo de confiabilidade sem levar em conta o acúmulo de danificação é superestimado. Um bom critério para a falha estrutural do modelo escolhido é a adoção da hipótese de que se dois membros entram em colapso, o sistema também entra.

Mohamed,A.M. & Lemaire,M. [52] fazem o acoplamento da análise mecânica com a de confiabilidade para determinar a probabilidade de falha de estruturas de plataformas marinhas. O modelo material é simplificado com adoção de trechos lineares, enquanto que o modelo em elementos admite contempla situações de descarregamento. A confiabilidade é determinada pelo conceito de margens de segurança e são mostrados exemplos de um pórtico tubular plano e outro espacial, além de uma comparação de resultados.

## **2.5 Trabalhos publicados em 1996**

Val,D. & Bljuger,F. & Yankelevsky,D. [53], propõem um método baseado na busca direcional para solução dos problemas de otimização necessários para a determinação da probabilidade de falha. Obtiveram uma convergência estável, embora mais lenta do que a dos métodos baseados em gradientes. Compararam através de exemplos numéricos o procedimento proposto com os métodos de otimização disponíveis para este cálculo aplicados a estruturas de concreto armado.

Ellingwood,B.R. [54] ressalta que as atenções das abordagens probabilísticas desenvolvidas estão exclusivamente voltadas para o projeto de edifícios novos e que pouca coisa foi feita para a análise de confiabilidade de construções já existentes. Segundo o autor, o campo está aberto e a sua exploração constitui um desafio para os pesquisadores.

Frangopol,D.M. et al. [55] realizam um estudo sobre a confiabilidade de colunas de concreto armado curtas e esbeltas. Consideram critérios de carga última e de máxima deformação. O autor relata que a correlação entre as ações verticais e horizontais, bem como a ordem em que os carregamentos são aplicados, influenciam na confiabilidade da coluna. Como conclusão, o autor salienta que a confiabilidade pode ser uma ferramenta precisa e útil no desenvolvimento de normas para o projeto de colunas de concreto armado.

Mirza,S.A. [56] estuda o projeto e dimensionamento de colunas de concreto armado com o uso de modelos probabilísticos para resistências e ações. Várias estimativas da resistência das colunas são efetuadas a partir de modelos que levam em conta a variabilidade das resistências do aço e do concreto. O autor compara os resultados com os coeficientes parciais propostos pelo ACI e fornece algumas sugestões de coeficientes a serem usados fundamentadas na análise confiabilística.

Stewart,M.G. [57] investiga a influência que as combinações de carga de serviço propostas pela normas Australiana e Americana tem sobre a confiabilidade de vigas fletidas de aço verificadas em serviço. Ele conclui que os índices de confiabilidade encontrados não são uniformes e às vezes incoerentes. Ele sugere que o valor 1.65, correspondente ao quantil de 5%, seja usado. O autor finaliza relatando que espera que a análise de confiabilidade aplicada aos códigos existentes traga um melhora qualitativa das recomendações em serviço.

Lin,K. & Frangopol,D.M [58] apresentam um processo de otimização baseado em confiabilidade do custo de elementos de pontes de concreto armado existentes projetadas conforme as recomendações da norma americana da AASHTO. É um dos primeiros estudos realizados onde se admite que a utilização de múltiplos estados limites pode ser uma ferramenta eficiente para o cálculo da confiabilidade.



## 2.6 Trabalhos publicados em 1997

Song,B.F. [59] desenvolve uma técnica de amostragem por importância para melhorar métodos de simulação já existentes sem o uso de combinação de funções de importância. Este método aumenta a chance de um falso ponto aleatório, (*Probability of Pseudo Random Point - PPRP*) situar-se dentro do domínio de falha. A vantagem é diminuir o número de chamadas do modelo mecânico, ganhando tempo de processamento.

Moses,F. [60] questiona o modo como as análises de confiabilidade são efetuadas e faz uma revisão das metodologias empregadas. Segundo ele, para que uma análise de confiabilidade seja representativa do real problema físico é necessário que o modelo mecânico seja o mais preciso possível e que vários modos de falha sejam considerados, bem como a correlação entre ações e resistências. Ele sugere que a base de dados coletada para as distribuições estatísticas da época não é bem desenvolvida, pois dependem de processos de controle de qualidade, e que qualquer trabalho que deseje lidar com situações reais deve levar em conta esse aspecto. Apesar de afirmar que mais estudos são necessários para extrair-se o real benefício da confiabilidade, o autor afirma em sua conclusão que essa ferramenta tem ótimas perspectivas na determinação da segurança dos sistemas.

Kam,T.Y. et al [61] utilizam o método do “ $\beta$ ” modificado, proposto por Ang, A. H.-S. & Tang, W. H. [168], [169], para efetuar análise de confiabilidade à fadiga de compósitos laminados submetidos a espectros repetidos de tensões uniaxiais. Utilizam um modelo de dano para a representação do material constituinte das fibras. Realizam uma comparação com resultados experimentais obtidos para solicitações multiaxiais, observando que o procedimento conduz a bons resultados.

Lemaire,M. [62] apresenta em seu trabalho as bases matemáticas de uma análise de confiabilidade e de sensibilidade e os conceitos básicos da teoria. É mostrada técnica da árvore de falha, onde as probabilidades de falha de cada componente em um determinado caminho de falha são combinadas para se ter um modo de falha estrutural global determinado. Aplicações em estrutura de pórticos são mostradas como exemplo. O conceito básico é simples: se o domínio de falha ou de segurança de uma estrutura pode ser representado por um conjunto de funções de desempenho de um certo número de variáveis aleatórias, os métodos aproximados conseguirão definir com sucesso esse domínio.

Boyer,C. et al. [63] realizam um estudo de calibração de coeficientes parciais de segurança em estruturas de materiais compósitos amparando-se no fato de que esses coeficientes são largamente utilizados no projeto estrutural. Utilizam os métodos FORM e SORM. Um exemplo de um tubo submetido à pressão é mostrado, e os seus coeficientes parciais são calibrados para valores de confiabilidade pré-fixados.

Kima,S. & Nab,S. [64] propõem um método de superfície de resposta modificado. A função de estado limite é construída a partir de pontos advindos de uma simulação e são modificados por funções convenientes para que sejam sorteados próximos ao estado limite real, controlando a amostra. Os exemplos mostram que a técnica garante a determinação do estado limite com boa precisão mesmo quando ele é não-linear.

Val,D. & Bljuger,F. & Yankelovsky,D. [65] fazem análise de confiabilidade de pórticos planos e vigas de concreto armado utilizando a singularidade da matriz de rigidez para determinar os pontos da função de estado limite. Os modelos materiais são não-lineares e a correlação entre as propriedades dos materiais foi considerada. Ele recomendando que a correlação seja sempre considerada. Realizam análises de sensibilidade e propõem um critério de seleção de variáveis aleatórias: se a variação do índice de confiabilidade com relação a uma variável for menor do que 5% pode-se considerá-la determinística.

Mrazik,A. & Kríma,M. [66] discutem aspectos históricos da evolução dos projetos baseados em confiabilidade, enfatizando o trabalho em conjunto dos grupos com a entidade JCSS (“*Joint Committee on Structural Safety*”) para o desenvolvimento de um padrão internacional, na passagem da modelagem determinística para a estatística.

Em 1997, a revista “*Structural Safety*” publicou um número dedicado exclusivamente ao trabalho realizado pelo JCSS. Esse comitê foi fundado em 1971 com o objetivo geral de aperfeiçoar o conhecimento no ramo da segurança estrutural. Vários trabalhos foram publicados, dentre os quais dois foram considerados relevantes. Vrouwenvelder,T. [67] apresenta uma visão geral sobre os trabalhos realizados pelo JCSS, que visam a construção de um modelo de projeto estrutural completamente probabilístico. Ditlevsen,O. [68] apresentou exemplos para demonstrar que a técnica baseada em coeficientes parciais de segurança leva a níveis não uniformes de confiabilidade. O formato probabilístico escolhido mostrou forte influência no valor final do índice de confiabilidade. O autor mostrou que dois formatos de normas

diferentes levam a níveis de confiabilidade também diferente. Ele enfatiza fortemente a necessidade de padronização no ramo.

Borri,A. & Speranzini,E. [69] acoplam um procedimento de minimização ao modelo de elementos finitos de *softwares* comerciais para o cálculo de confiabilidade de estruturas e mostram vários exemplos com diferentes números de estado limite. Mostram também um exemplo de otimização com vários estados limites.

## 2.7 Trabalhos publicados em 1998

Arwashan,N. [70] utiliza o método dos caminhos de falha baseado em formulações matriciais para determinar de maneira eficiente a confiabilidade de tabuleiros de pontes de concreto armado. Ele assume que as resistências e carregamentos são variáveis aleatórias e considera as correlações entre essas variáveis. Segundo eles, a abordagem pode ser facilmente estendida para outros tipos estruturais.

Bljuger,E. [71], através da modificação das características em elementos finitos, propõe modelos de comportamento para o cálculo da probabilidade do aparecimento de fissuras em estruturas de concreto armado em serviço. Esses modelos permitem levar em conta as diferentes características dos elementos em concreto armado tais como carga acidental, resistência média e variação da resistência ao longo do comprimento do elemento.

Ciampoli,M. [72] desenvolveu um procedimento para análise de confiabilidade de estruturas já existentes, ou ainda em projeto, considerando efeitos de envelhecimento da estrutura, choques e terremotos. Buscou determinar modelos probabilísticos para prever a deterioração estrutural pelo envelhecimento e ação de agentes químicos. Através dessa abordagem, uma vez calculada a confiabilidade de um elemento é possível calcular a perda de confiabilidade do sistema composto pelos elementos, através de combinações convenientes.

Shiraishil,N. & Furuta,H. [73] publicaram seu trabalho em decorrência de acidentes acontecidos em Hanshin-Japão. Os acidentes foram consequência do terremoto acontecido em janeiro de 1995 que causou milhares de perdas ao país. Sob o ponto de vista técnico, os autores fizeram um estudo da importância da hiperestaticidade em infra-estruturas com o intuito de medir quão redundantes os sistemas devem ser para evitar catástrofes de igual magnitude. Utilizando várias simulações com algoritmos genéticos desenvolvem estratégias para a identificação dos modos de falha dominantes

entre os possíveis de um sistema estrutural. Entretanto, concluem que mais estudos são necessários para desenvolver um método para o cálculo de confiabilidade considerando a dependência entre colapsos individuais e o meio externo.

Casas, J.R. & Crespo-Minguillon, C. [74] construíram uma distribuição estatística para as armaduras passiva e ativa de pontes em concreto com protensão parcial. A finalidade foi avaliar a confiabilidade em relação à fadiga das peças fissuradas por gradientes térmicos ou recalques diferenciais.

Papadopoulos, V. & Papadrakakis, M. [75] mostram a análise de confiabilidade baseada em elementos finitos estocásticos e fazem aplicação em pórticos tridimensionais. O estado limite é determinado com o auxílio de simulações de Monte Carlo. Eles concluem que os resultados obtidos são realistas e mencionam que a implementação mostrou resultados eficientes em termos de tempo computacional.

Ding, K. et al. [76] propõem a técnica de redução de variância chamada de “*Latin Hyper Cube Sampling*” (LHS) combinada com um procedimento de amostragem estratificada para determinar a probabilidade de falha em problemas de mecânica da fratura. São mostradas comparações com outros métodos e concluem que a técnica LHS é eficiente e precisa.

Ellingwood, B.R. [77] faz análise de risco de componentes de concreto armado presentes de usinas nucleares considerando os efeitos de envelhecimento, mudanças em condições climáticas tais como umidade e temperatura, além de choques provenientes de acidentes.

Han, B.K. [78] fazem análise de confiabilidade e calibração de coeficientes parciais de segurança para estruturas de contenção em concreto armado sujeitas à ações de radiação. Este tipo de solicitação torna mais rigorosa a escolha do estado limite estrutural. No trabalho foi adotado o estado limite de aparecimento de fissuras.

Der Kiureghian, A. & Dakessian, T. [79] demonstram que a existência de múltiplos pontos de projeto potenciais no estudo da falha de componentes pode conduzir a erros grosseiros quando se efetuam análises de confiabilidade com métodos de primeira ou segunda ordem. Eles tentam superar essa barreira desenvolvendo um método robusto baseando-se em uma técnica de alteração do estado limite para encontrar esses múltiplos mínimos. O estado limite é modificado no ponto onde um mínimo é encontrado e assim o algoritmo passa a buscar um outro mínimo. Segundo os autores, o procedimento aumentou a precisão do cálculo da probabilidade de falha.

Pandey,M.D. [80] discute os métodos de integração utilizados para o cálculo da probabilidade de falha em problemas com número grande de variáveis aleatórias. Ele propõe um método de redução para um espaço unidimensional onde as probabilidades são condicionais e a integral resultante é escrita como um produto de integrais simples. O autor aponta que o método é simples e preciso, mesmo necessitando de validação adicional.

Stewart,M.G. & Rosowsky,D.V. [81] utilizam simulações de Monte Carlo para efetuar a previsão do comportamento ao longo do tempo em tabuleiros de pontes de concreto armado. A principal ação considerada na redução de rigidez foi a corrosão devida à aplicação de sal para degelo. Outros fatores também foram considerados tais como a cura, o cobrimento e a exposição ao ambiente marinho. Eles concluem que todas estas ações em conjunto reduzem consideravelmente a segurança do tabuleiro.

Dey,A. & Mahadevan,S. [82] realizam análises de confiabilidade de sistemas estruturais com ruptura dúctil empregando simulações com amostras modificadas pela técnica de amostra por importância. Eles escolhem uma função de importância com a mesma forma e mesma variância da função de densidade original. Os autores consideram que a combinação dessas duas técnicas é um novo método para o cálculo da confiabilidade.

Li,H. & Foschi,R.O. [83] apresentam um procedimento que chamaram de confiabilidade inversa. Eles buscam alguns parâmetros estruturais mediante índices de confiabilidade pré-estabelecidos através de uma modificação no algoritmo de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiesler.

## **2.8 Trabalhos publicados em 1999**

Hopperstad,O.S. et al. [84] utilizam o método da superfície de resposta acoplado com um modelos de elementos finitos para computar a confiabilidade de um processo industrial de formação de plásticos. Eles exemplificam assim, como os métodos baseados em confiabilidade podem ser usados para relacionar as relações entre a modelagem estatística das variáveis de projeto e a variação dos parâmetros da resposta para um determinado processo industrial.

Venini,P. & Mariani,C. [85] utilizam uma aproximação SORM assintótica para calcular a confiabilidade de sistemas estruturais. A aproximação proposta não requer transformação para o espaço normalizado. Com essa ferramenta, fazem o problema no

sentido inverso, determinando uma função de estado limite ótima para garantir requisitos de estabilidade e desempenho.

Grandhi,R.V. & Wang,L. [86] fazem uso da formulação integral de Hermite e Laguerre para desenvolver aproximações de superfícies de falha com polinômios de ordem elevada. Essa abordagem é recomendada quando as superfícies de falha têm curvaturas fortes próximas do ponto de projeto, casos onde o erro das aproximações FORM e SORM é maior.

Guan,X.L. & Melchers,R.E. [87] apresentam uma técnica de simulação direcional denominada de “*load space formulation*”. A técnica tem o objetivo de reduzir o tempo de cálculo nos problemas de determinação da probabilidade de falha. A abordagem utilizada também faz uso de elementos finitos probabilísticos. Os exemplos mostram que a técnica trouxe resultados precisos. Além disso, o tempo de processamento foi muito menor do que o requerido por simulações de Monte Carlo.

Marek,P. et al. [88] discutem o processo pelo qual passa a análise de segurança estrutural, no qual há uma contínua tendência de se evoluir para a concepção de projetos totalmente baseados em modelos probabilísticos. O trabalho mostra exemplos de análise de confiabilidade com técnicas de simulação e processadores de última geração para a época. Também efetuam análises paramétricas. Segundo eles, a confiabilidade deve ser a ferramenta do futuro para as verificações de segurança.

Mitteau,J.C. [89] afirma que um estudo do erro no cálculo das probabilidades de falha é extremamente importante na redução do tempo computacional despendido nas análises de confiabilidade. Segundo ele, conhecido o erro, deixa-se de efetuar um grande número de chamadas ao modelo de elementos finitos, porque a precisão da probabilidade de falha é diminuída. O trabalho apresenta um método para estimar o erro e diminuir o tempo de cálculo. Como resultado, exhibe comparações entre índice de confiabilidade x tempo para várias tolerâncias diferentes de erro.

Shao,S. & Murotsu,Y. [90] mostram em seu trabalho uma comparação de procedimentos diferentes para a identificação dos principais modos de falha de um sistema estrutural com elevado número de modos. São apresentados os procedimentos tradicionais divididos em três grupos, um procedimento baseado em algoritmos genéticos e um outro baseado no que é chamado de estratégia seletiva. Nessa estratégia são usadas funções convenientes para a determinação de um caminho de falha.

Camarinopoulos,L. et al. [91] realizam um estudo da confiabilidade e da sensibilidade de tubos de aço enterrados de serviços públicos destinados à condução de

água para consumo humano. A modelagem das variáveis leva em consideração a aleatoriedade da resistência dos materiais em função das ações provenientes da degradação ambiental. A idéia é utilizar a confiabilidade na prática como uma ferramenta de tomada de decisão para substituição de peças, evitando desperdícios com reparos nos tubos.

Barakat,S.A. & Malkawi,A.I.H. & Tahat,R.H. [92] realizaram otimização do peso de pilares de aço submetidos a carregamento lateral com restrições impostas no índice de confiabilidade considerando múltiplos estados limites. O peso mínimo encontrado nesse caso foi maior do que aquele obtido com aproximação em torno de um único modo de falha. Nesse caso foi comprovado que a consideração de apenas o primeiro modo de falha conduziu a uma aproximação contra a segurança da probabilidade de falha.

Zhao,Y. & Ono,T. [93] investigam a influência do número de variáveis aleatórias, do índice de confiabilidade e da curvatura da função de estado limite na probabilidade de falha. O objetivo do trabalho foi definir critérios de escolha para a utilização de um ou outro método e também mostrar os casos onde o FORM é suficiente (estados limites com curvatura pequena), onde o SORM é necessário (forte não-linearidade do estado limite) e ainda os casos onde nenhum dos dois métodos fornece boa aproximação (estados limites esféricos).

Enright,M.P. & Frangopol,D.M. [94] utilizam a técnica de amostra por importância para o cálculo da probabilidade de falha de pontes de concreto armado submetidas às ações de degradação ambiental com uma possível correlação entre as resistências. O trabalho mostra uma comparação entre os diversos modelos utilizados. A falha do sistema foi caracterizada com a falha de um elemento ou de uma série de elementos adjacentes.

Sexsmith,R.G. [95] relata as vantagens e desvantagens da abordagem probabilística da segurança. Segundo ele, as principais vantagens desse tratamento são: a racionalidade, traduzida pelo fato de que as incertezas podem e devem ser tratadas com probabilidades; o ganho de embasamento teórico para que seja assumida a responsabilidade técnica sobre o projeto; a facilidade de adaptação da teoria aos novos sistemas, materiais e ações sem necessidade de recorrência a testes onerosos, e a transportabilidade dos modelos para diferentes modelos mecânicos, tornando simples a implementação, integração, e ampliação dos campos de análise. Dentre as desvantagens citadas pelo autor estão: a dificuldade de obtenção de dados em problemas onde as

probabilidades finais são pequenas; a indisposição dos engenheiros em aplicar a teoria pela falta de dados e a falta de uniformização das abordagens já existentes inviabilizando o seu uso em normas de projeto atualmente.

Elms,D.G. [96] discute os aspectos teóricos e conceitos de segurança, risco, falha humana e outros. Segundo ele, as melhores estratégias para o tratamento das incertezas são: obtenção de informações para estreitar os limites do desconhecimento, estabelecimento de limites físicos razoáveis, uso de estimadores para tentar quantificar as incertezas, simplificação (com restrições) dos modelos mecânicos, e a concepção estrutural com o emprego de modos de falha dominantes, tornando simples a identificação do ponto crítico da estrutura.

Menzies,J.B. [97] discute as dificuldades que devem ser superadas para que o tratamento de incertezas seja realizado de maneira usual na prática da engenharia de estruturas. O autor faz um paralelo entre o que está sendo feito pelo meio técnico e quais são as necessidades dos engenheiros na prática.

Sarveswaran,V. & Roberts,M.B. [98] utilizam o FORM como uma ferramenta de tomada de decisão para determinar a data máxima de quando deve ser feita uma manutenção preventiva na infra-estrutura de pontes submetidas à corrosão. Isso foi feito impondo-se níveis mínimos de confiabilidade, a qual foi assumida como variável ao longo do tempo. Quando o índice atingiu esse valor mínimo, o tempo necessário para o reparo foi determinado.

## **2.9 Trabalhos publicados em 2000**

Basaran,C.& Chandaroy,R. [99] utilizam métodos de confiabilidade para simular testes industriais de laboratório que verificam a qualidade de materiais semicondutores utilizados em micro-eletrônica. Os testes têm custo elevado e o trabalho mostra que a sua substituição por modelos numéricos mecânico-probabilísticos pode levar a uma significativa redução de custos.

Guillaumat,L. [100] estuda o comportamento de placas formadas por materiais compostos sujeitos a carregamento de impacto. Ele emprega planos de experiência para determinar uma função de falha da estrutura em função de propriedades geométricas do material.

Imaib,K. & Frangopol,D.M. [101],[102] mostram o estudo da confiabilidade de estruturas considerando-se a não-linearidade geométrica usando-se a formulação



lagrangeana total. As estruturas analisadas tem resposta não-linear mesmo em níveis de carga muito baixos em virtude de sua elevada esbeltez. Utilizam acoplamento MEF – RSM para determinar a superfície de falha e FORM/SORM para computar as probabilidades de falha. Analisam também, casos com a introdução de dificuldades tais como a correlação entre os carregamentos, a correlação entre as resistências e o comportamento frágil e/ou dúctil dos materiais. Analisam também falhas de sistemas em série e em paralelo.

Mahadevan,S. & Raghothamachar,P. [103] determinam a confiabilidade de uma torre de transmissão e de um edifício de seis pavimentos, realizando o acoplamento de técnicas de amostragem por importância com o programa comercial ANSYS®. A técnica adaptativa proposta consiste inicialmente em classificar os modos de falha mais importantes e definir uma trajetória de falha que limita um domínio para a amostra inicial. À medida que as simulações vão sendo realizadas, mais informações sobre o domínio são incorporadas e o domínio é refinado. Eles obtêm a mesma robustez e precisão atingidas com Monte Carlo puro, de maneira mais eficiente.

Ellingwood,B.R. [104] vê com otimismo o progresso do método LRFD (“*Load and Resistance Factor Design*”). Esse método foi a primeira tentativa nos Estados Unidos de se realizar a implementação de uma abordagem probabilística para a modelagem de incertezas na construção. Embora colocando que a confiabilidade estrutural é uma excelente ferramenta, o autor afirma que ela não elimina o processo de tomada de decisão. Discutindo um pouco o aspecto filosófico da aplicação da teoria, o autor sugere que a os limites da confiabilidade sejam discutidos entre os projetistas para satisfazer as exigências da sociedade do “risco aceitável”.

Zhenga,Y. & Dasb,P.K. [105] propõem um método que faz uso de técnicas de redução de amostragem em conjunto com um procedimento para mudar o grau e/ou acrescentar termos ao polinômio da superfície de reposta. Esse procedimento foi usado para calcular a confiabilidade de placas com enrijecedores e realizar a análise de sensibilidade com relação às variáveis aleatórias. Concluem que o método proposto traz ganho de tempo quando se desejam executar análises de sensibilidades.

Vrouwenvelder,T. [106] estuda modelos de comportamento para ações estruturais extremas tais como impacto e explosões. Essas ações são responsáveis pela maioria dos colapsos estruturais. Como exemplo é feita a modelagem de ações de impacto de caminhões e navios em estruturas.

Pendola, M. et al. [107] realizam um estudo de confiabilidade em estruturas fissuradas para auxiliar na manutenção e otimização do seu funcionamento. O modelo material é baseado em mecânica da fratura. A análise de confiabilidade é feita usando o método direto e o da superfície de resposta. Um estudo da qualidade da aproximação obtida pela superfície de resposta é apresentado. O objetivo principal do trabalho é prover o projetista de uma ferramenta de tomada de decisão em um contexto industrial. Assim a estrutura pode ser reparada antes da aparição de um nível alto de risco, ou então ter a sua manutenção adiada, já que o risco é controlado.

Mainçon, P. [108] propõe um método de primeira ordem aplicável aos sistemas em série. Nesses sistemas a falha de um componente individual não implica uma falha global. Segundo o autor, o método apresentou rápida convergência e robustez comparado-o aos métodos de simulação.

Nie, J. & Ellingwood, B.R. [109] propõem um aperfeiçoamento para um método de simulação direcional. Os métodos tradicionais são dependentes das direções geradas para as simulações. A proposta do trabalho baseia-se na distribuição de pontos reutilizáveis dentro de uma hiper-esfera.

Hong, H.P. [110] investiga a correlação entre as ações raras e os colapsos estruturais que acontecem com frequência na região onde a estrutura está situada. A consideração dessa dependência afeta a confiabilidade dessas estruturas. A análise foi efetuada apenas para verificação de estruturas existentes e o autor conclui que outras análises devem ser feitas para situações de projeto.

Vu, K.A.T. & Stewart, M.G. [111] propõem um novo modelo mecânico de corrosão para determinar a probabilidade de falha em tabuleiros de pontes de concreto armado, comparando a confiabilidade de três diferentes especificações de durabilidade. Para os autores, os fatores mais influentes na probabilidade de falha foram o cobrimento das armaduras e o fator água-cimento do concreto.

Tandjiria, V. & Teh, C.I & Low, B.K. [112] mostram uma comparação de simulações de Monte Carlo com o RSM para problemas de fundações em estacas submetidas a carregamento lateral. O modelo probabilístico considerou variabilidade das propriedades mecânicas que traduzem a interação com o solo.

## 2.10 Trabalhos publicados em 2001

Stocki,R. et al. [113] comparam resultados obtidos com diferentes métodos de otimização aplicados à minimização do volume de treliças, impondo-se restrições de confiabilidade. A modelagem é híbrida, considerando-se as seções transversais discretas e a posição dos nós como variável de projeto contínua.

Milner,D.M. et al. [114] utilizam uma aproximação em segunda ordem para determinar a confiabilidade de colunas de concreto armado curtas e esbeltas, considerando correlação entre as cargas aplicadas, diferentes histórias de carregamento e múltiplos estados limites. São utilizados os diagramas de iteração das seções para traçar curvas de iso-confiabilidade. Concluem que a confiabilidade da coluna depende da história do carregamento e da correlação entre a força e o momento fletor aplicados.

Rahman,S & Rao,B.N. [115] desenvolvem uma aplicação envolvendo método dos elementos finitos sem malha e processos estocásticos para analisar a confiabilidade e sensibilidade de estruturas com elementos de barra e chapa cujo modelo constitutivo é elástico linear. A aproximação FORM é utilizada para o cálculo das probabilidades de falha. O trabalho mostra comparações com o método de Monte Carlo, provando que a abordagem efetuada traz resultados consistentes e uma boa convergência. Mencionam ainda que o emprego da técnica “*meshless*” no modelo mecânico trouxe ganho de tempo de processamento.

Levitin,G. & Lisnianski,A. [116] estudam a confiabilidade de componentes de circuitos elétricos. Os sistemas foram assumidos com dois modos de falha e foi realizada a introdução de elementos redundantes. Para o cálculo da confiabilidade utilizam o método dos algoritmos genéticos com algumas adaptações. Segundo os autores, o algoritmo desenvolvido é robusto pois convergiu sempre para a mesma solução em uma série de testes realizados.

Kanda,J. & Adachi,T. [117] estudam a influência de parâmetros probabilísticos na busca da confiabilidade ótima e custo estrutural ótimo. Eles propõem o uso de um método de otimização cujo objetivo é o mínimo custo da estrutura e mostram que é possível obter um projeto estável com confiabilidade ótima para diferentes modelos probabilísticos de carregamento. Mostram exemplos teóricos e concluem que a confiabilidade varia de maneira semelhante aos parâmetros quando o coeficiente de variação é pequeno.

Aktasa,E. et al. [118] fazem um estudo de calibração de coeficientes de segurança com base em um procedimento de otimização com restrições em custo e segurança. Consideram variação de carregamentos com o tempo. Como aplicação mostram uma ponte rodoviária projetada segunda as recomendações da AASTHO. Mostram que o algoritmo proposto consegue encontrar também os coeficientes parciais para as ações correspondentes.

Royset,J.O. et al. [119] propõem um procedimento onde a otimização e confiabilidade são desacopladas. Isso permite a escolha de quaisquer métodos de otimização ou de confiabilidade a conseqüente flexibilização do algoritmo computacional. Concluem que a técnica leva a resultados idênticos aos da análise tradicional quando as funções de estado limite são lineares.

Wen,Y.K. [120] investiga as incertezas em função do custo total esperado durante a vida útil de uma estrutura. Ele realiza um estudo paramétrico a fim de medir a influência de cada parâmetro na confiabilidade. O método é aplicado no projeto de um edifício de escritórios sujeito às ações de vento e sismos em três diferentes cidades americanas.

Ang,A.H. & Lee,J. [121] desenvolvem um estudo de otimização de custos em pórticos de concreto armado, que tem como principal ação os sismos. Efetuam o dimensionamento variando as características das ações e obtém várias configurações diferentes, determinando os níveis de danificação de cada uma. Segundo os autores, a contribuição mais importante do trabalho é colocar o custo em das estruturas em função da confiabilidade. Como aplicação mostram um edifício de escritórios de cinco pavimentos.

Esteva,L. et al. [122] fazem um estudo buscando o estabelecimento de regras normativas para o uso prático da confiabilidade no projeto de edifícios contra sismos. Utilizam método de Monte Carlo para analisar vários edifícios sujeitos a sismos de diferentes intensidades. O ojetivo é definir equações dos sismos em função da confiabilidade para o uso em projetos.

Melchers,R.E. [123] discute aspectos filosóficos da teoria da confiabilidade quando tratada como uma ferramenta de previsão de acidentes. Segundo ele, a segurança que se espera de uma estrutura consiste de duas partes independentes: Uma é a parte técnica e a outra se refere a assuntos não técnicos tais como fatores econômicos e sociais. Esta segunda parte tem influência maior na confiabilidade. Ele sugere que

uma otimização baseada em confiabilidade deve respeitar as duas partes individualmente.

Rackwitz,R. [124] propõe um estudo de projeto baseado em confiabilidade para realizar um melhor planejamento das manutenções estruturais. Ele trata as intervenções na estrutura como variáveis aleatórias e sugere que a função objetivo inclua também os custos e benefícios esperados.

Estes,A.C. & Frangopol,D.M. [125] propõem uma otimização sincronizada dos custos de manutenção e de projeto na vida útil de uma estrutura. Utilizam a técnica da árvore de falha. Uma aplicação é feita aos tabuleiros de pontes de concreto armado. Segundo o autor, apesar dessa abordagem apresentar forte dependência de uma grande quantidade de dados sobre a estrutura que normalmente não está disponível, ela é viável e eficiente de acordo com os resultados mostrados.

Stewart,M.G. [126] apresenta uma revisão de métodos e teorias para tomadas de decisão sobre a vida de pontes baseadas em risco, destacando duas: Classificação de risco e Análise de custo durante a vida útil. O autor afirma que abordagens baseadas em risco fornecem uma medida significativa do desempenho das pontes.

Zhao,Y. & Ono,T. [127] apresentam uma comparação entre os métodos para o cálculo do índice de confiabilidade baseados nos vários momentos estatísticos das variáveis aleatórias. Para isso os autores representam a função de desempenho através de momentos de ordem maior que dois, o que é um problema matematicamente simples. Dentre os métodos mostrados, aquele baseado no momento de quarta ordem (“*kurtosis*”) mostrou-se o mais conveniente em boa parte dos casos, apesar de falhar nos casos onde o momento de terceira ordem (“*skewness*”) é alto.

Melchers,R.E. & Ahammed,M. [128] estudaram problemas onde a consideração de mais de um estado limite é importante no cálculo da probabilidade final de falha. Eles demonstram duas técnicas iterativas para fornecer uma aproximação da interseção de múltiplos estados limites e a conseqüente determinação da probabilidade. A mais interessante é chamada de “Técnica das aproximações seqüenciais sucessivas”. Com ela, desloca-se a origem do sistema padrão de coordenadas para o ponto de projeto obtido em cada estado limite. Os pontos de projeto seguintes são obtidos em relação sempre à origem modificada.

Mohamed,A. & Soares,R. & Venturini,W. S. [129] utilizam RSM para a determinação da confiabilidade em pilares de concreto armado com um modelo mecânico não-linear físico e geométrico. Os autores também chegam à conclusão que o

uso de coeficientes parciais de segurança constantes conduz a níveis não constantes de confiabilidade no projeto de elementos de concreto armado. O trabalho propõe um formato de calibração coeficientes parciais para que estes sejam variáveis de acordo com vários parâmetros de projeto tais como índice de esbeltez, taxa de armadura e excentricidade.

Low,H.Y. & Hao,H. [130] demonstram uma aplicação da modelagem estatística com a consideração de ações de explosões (que são ações raras) em lajes de concreto armado projetadas segundo a Norma Inglesa. Fazem também uma parametrização do projeto para essas ações. Os resultados do modelo dinâmico com um grau de liberdade proposto no trabalho são validados com simulações de Monte Carlo.

Augusti,G. & Ciampoli,M. & Giovenale,P. [131] apresentam uma abordagem simplificada para a determinação da probabilidade de colapso de edificações monumentais (particularmente de duas igrejas situadas no interior da Itália) abaladas por terremotos. A idade secular dos monumentos aumenta o grau de incerteza com relação ao modelo mecânico a ser adotado. Os autores propõem a realização de uma análise de confiabilidade de alguns elementos isolados da estrutura e mostram que ela pode ser generalizada para obter um valor global.

Mori,Y. & Nonaka,M. [132] apresentam um procedimento de transformação de um problema de confiabilidade dependente do tempo em um equivalente não dependente através da introdução de fatores de redução da rigidez dos componentes. A deterioração ao longo do tempo foi o problema mecânico analisado.

Nowak,A.S. & Park,C. & Casas,J.R. [133] apresentam uma análise da confiabilidade de elementos de pontes de concreto armado. O estudo compara índices de confiabilidade obtidos para elementos projetados por três normas internacionais (Espanhola, Européia e Americana). É observada uma grande variação entre os códigos, mostrando o caráter não uniforme do índice “ $\beta$ ” frente aos procedimentos adotados atualmente.

Rackwitz,R. [134] apresenta um estado da arte dos métodos e problemas no campo da confiabilidade. Discute os conceitos básicos dos métodos FORM/SORM e enfatiza casos onde são falhos, propondo soluções alternativas para estes casos. No entanto, o autor afirma que o erro cometido com o seu uso é aceitável frente às incertezas dos modelos mecânico e probabilístico, além de serem muito mais eficientes do que os métodos de simulação puros. Discute também os conceitos de confiabilidade dependente e independente do tempo, simulações com amostra por importância e

otimização estrutural envolvendo confiabilidade. O aspecto filosófico de quão seguro deve ser um projeto também é discutido, sugerindo uma uniformização global das margens de risco aceitas pelo meio técnico e pela sociedade. Segundo o autor, o futuro da confiabilidade está no projeto acoplado entre índices de confiabilidade pré-estabelecidos e uma otimização global do custo estrutural respeitando esses índices.

Wen, Y.K. [135] propõe um fator de redução de risco uniforme, investigando vários parâmetros estruturais tais como a ductilidade e as incertezas nos carregamentos. O trabalho é motivado pela necessidade de novas técnicas e métodos para o desempenho de edificações submetidas a sismos, em razão do grande número de colapsos ocasionados essas ações. O trabalho considera o balanceamento de custos, o nível de segurança e a redundância estrutural. Nos resultados o autor destaca a inviabilidade de um fator que relaciona redundância e confiabilidade. Segundo ele, quando existem incertezas múltiplas, a variável dominante no custo do projeto é a que apresenta a maior incerteza.

Guan, X.L. & Melchers, R.E. [136] investigam os efeitos da variação da posição dos pontos dos planos de experiência no índice de confiabilidade, demonstrando que a probabilidade pode ser mal avaliada, de acordo com a escolha desses pontos. Segundo eles, a mudança de posição desses pontos consiste em um assunto pouco explorado.

## 2.11 Trabalhos publicados em 2002

Lee, J.-O. et al. [137] fazem uma comparação entre as abordagens empregadas no cálculo de probabilidade de falha. A primeira delas é a busca tradicional do ponto de projeto por meio da minimização da distância do centro do espaço normalizado à função de estado limite. A segunda concerne à busca de um ponto chamado de ponto de mínimo desempenho. Este ponto deve ser o ponto mais provável de falha dentre todos aqueles que possuem o mesmo índice de confiabilidade " $\beta$ ". Os autores concluem que o cálculo do MPFP (*minimum performance target point*) é melhor nos casos onde o índice de confiabilidade é alto.

Savoia, M. [138] utiliza métodos de simulação do tipo "fuzzy" para definir funções de densidade de probabilidade compatíveis com dados disponíveis. Este procedimento é útil na caracterização das distribuições de materiais. Mostra-se também um procedimento para análise de confiabilidade usando técnicas "fuzzy" com uma aplicação em um problema de flambagem.

Gharaibeh, E.S. et al. [139] mostram um procedimento baseado em confiabilidade para classificar os modos de falha críticos nos sistemas estruturais. Essa maneira de abordar o problema é particularmente interessante porque não trata os membros individualmente.

Onoufriou, T. & Frangopol, D.M. [140] apresentam uma revisão sobre os métodos de inspeção de estruturas complexas baseados em confiabilidade. Segundo o trabalho, os métodos apresentados podem ser utilizados em estruturas existentes ou novas e resultam em uma significativa redução de custos de inspeção.

Liu, C. [141] analisa tabuleiros metálicos de pontes projetadas segundo o LRFD (*Load and Resistance Factor Design*) da associação Norte-Americana AASHTO. São efetuados cálculos do índice de confiabilidade baseados em elementos finitos estocásticos estendidos. As estruturas são modeladas como grelhas e os resultados do trabalho indicam uma sensibilidade maior do índice de confiabilidade em relação às cargas laterais acidentais.

Papadrakakis, M. & Lagaros, N.D. [142] utilizam técnicas de Monte Carlo e comparam-nas com técnicas de otimização baseadas em redes neurais. Estas últimas vêm sendo bastante aplicadas a problemas de otimização e consistem em usar um método de simulação baseado em funções de mérito acopladas entre si em paralelo, direcionando a simulação. As condições de estado limite são testadas e as características das variáveis aleatórias são modificadas durante o processamento. Este modelo é baseado na arquitetura do cérebro humano. É bastante complexo, mas consiste em um campo aberto de pesquisas.

Moro, T. et al. [143] estudam a confiabilidade de um problema de contato entre dois corpos. Eles empregam multiplicadores de Lagrange na minimização numérica do funcional do problema de contato, juntamente com o método da superfície de resposta. Eles concluem que a resposta física dos corpos é fortemente influenciada pelos parâmetros probabilísticos. A aplicação mostrada é um corpo deformável cilíndrico sobre uma placa rígida.

Chilakamarri, K.B. [144] desenvolve um método de cálculo da integral multidimensional cuja resolução é necessária para a determinação da probabilidade de falha. Ele adota um procedimento chamado de “pulverização” para reduzir o espaço em que são calculadas as integrais. Conclui que o algoritmo é eficiente e tem erro controlado. Porém, o procedimento apresenta o inconveniente de só poder ser aplicado em funções de estado limite que possuem forma analítica explícita.



Sudret,B. & Der Kiureghian,A. [145] apresentam o método dos elementos finitos estocásticos espectrais e comparam-no com simulações com amostra por importância. Os autores afirmam que a aplicação dessa técnica é limitada, pois ele não funcionou nos casos de elevada probabilidade de falha.

Soares,R.C. et al. [146] apresentam um método probabilístico para o cálculo da confiabilidade de pórticos de concreto armado considerando não-linearidades materiais e geométricas, com elementos finitos corrotacionais. A análise de confiabilidade é feita através do acoplamento do modelo mecânico em elementos finitos com o método da superfície de resposta. A segurança estrutural é medida pelo índice de confiabilidade “ $\beta$ ”. Estabelecem uma relação entre os coeficientes parciais de segurança e os níveis de confiabilidade obtidos.

Quan,Q. & Gengwei,Z. [148] fazem um estudo de calibração de coeficientes parciais de segurança de vigas de concreto armado considerando o estado limite de abertura de fissuras. Os autores relatam que vários estudos de calibração de coeficientes parciais de segurança podem ser encontrados na literatura tratando de estados limites últimos, mas que poucas referências podem ser encontradas sobre as situações em serviço. A análise de sensibilidade também foi efetuada com relação a uma série de variáveis. Segundo os autores, as variáveis mais importantes na confiabilidade foram a relação entre a carga permanente e variável e a taxa de armadura na seção.

Castillo,E. [149] apresenta um método para o cálculo de confiabilidade por meio de uma transformação do conjunto de variáveis aleatórias em um hiper-cubo unitário. Ele impõe que a origem do sistema pertença à região de falha. O método é eficiente para o cálculo da integral multinormal. O autor recomenda esse método especialmente para situações onde a função de densidade de probabilidade tem a cauda truncada. Em geral nessas situações os métodos tradicionais apresentam problemas.

Petryna,Y.S et al. [150] estudam o cálculo de confiabilidade de estruturas de concreto danificadas submetidas à fadiga considerando a variação da confiabilidade com o tempo. No modelo mecânico é considerada a não-linearidade do material. Ela foi considerada com base em um modelo de dano e teve os seus parâmetros calibrados segundo resultados experimentais. O método é demonstrado com uma estrutura de concreto em arco submetida à fadiga.

Siddiqui,N.A. et al. [151] utilizam a confiabilidade de uma maneira diferente da tradicional. Eles desejam maximizar a probabilidade de falha de estruturas de concreto enterradas submetidas ao impacto de projéteis militares. O objetivo é avaliar os projéteis

e maximizar a sua penetração no concreto. Eles mostram uma análise de sensibilidade e paramétrica. Segundo os autores, o projétil analisado no exemplo deveria ter a sua velocidade de impacto dobrada para causar falha na estrutura estudada. A velocidade foi considerada a variável mais importante para maximizar a probabilidade de falha do alvo.

Melchers,R.E. & Ahammed,M. [152] apresentam um procedimento simplificado para o cálculo dos gradientes da função de resposta estrutural com o uso de simulações de Monte Carlo. O método de Monte Carlo puro, como se sabe, não permite efetuar análise de sensibilidade. O procedimento usual para calcular os gradientes é repetir a análise e empregar o método das diferenças finitas, o que é computacionalmente custoso. O método proposto por este trabalho utiliza subconjuntos de dados obtidos durante as simulações e não são necessárias realizações adicionais. A aplicação restringe-se às distribuições Gausseanas. Cinco exemplos com funções analíticas explícitas são mostrados e chegam a resultados com boa precisão.

Foschi,R.O. & Li,H. & Zhang,J. [153] apresentam um acoplamento das respostas estruturais com superfícies de resposta para o cálculo de confiabilidade, que chamam de problema direto. Além disso, apresentam o cálculo de parâmetros estruturais para atingir índices de confiabilidade pré-estabelecidos, denominado de problema inverso.

Imai,K. & Frangopol,D.M. [154] propõem uma abordagem para a verificação da confiabilidade de pontes pênses existentes considerando a não-linearidade geométrica. Segundo os autores, o maior problema de verificações desse tipo é que os dados disponíveis são sempre baseados na análise determinística com a qual o projeto foi realizado. Eles observaram que os índices de confiabilidade dos cabos foram os maiores dentre os outros componentes e os do tabuleiro foram os menores. A resistência foi a variável mais influente na confiabilidade.

Reid,S.G. [155] afirma que os níveis de segurança aceitos hoje para as análises de confiabilidade são apenas adaptações de análises anteriores e não são necessariamente os melhores. Segundo o autor, grandes avanços podem ser rapidamente incorporados às medidas da segurança com abordagens probabilísticas. Entretanto, ele enxerga poucas perspectivas de progresso no campo da otimização probabilística aplicada ao projeto de estruturas.

Vrouwenvelder,A.C.W.M. [156] discorre sobre o código modelo desenvolvido pelo JCSS em 2001, que trata do projeto totalmente baseado em abordagem probabilística. O código trata da modelagem probabilística de ações, carregamentos e

dos índices de confiabilidade a serem atingidos no projeto propriamente dito, mas não se aprofunda nos modelos mecânicos.

## 2.12 Trabalhos publicados em 2003

Frangopol,D.M. & Maute,K. [157] fazem estado da arte atual da otimização baseada em confiabilidade, termo denominado na literatura de RBDO (“*Reliability-Based Design Optimization*”). Esse procedimento consiste em fazer a otimização de alguma variável estrutural sujeita às condições impostas no índice de confiabilidade “ $\beta$ ”. Além disso, o trabalho mostra a formulação clássica do problema de confiabilidade.

Barakat,S et al. [158] fazem um estudo de confiabilidade em vigas de concreto protendido. Propõem um algoritmo do tipo SORBO (“*Single Objective Reliability-Based Optimum*”) que consiste na otimização da função custo sujeita a vários índices “ $\beta$ ” diferentes. Esses índices variam de acordo com condições encontradas no ACI. Foram considerados como aleatórios o carregamento, as propriedades dos materiais, as forças de protensão e outros. A restrições são impostas em confiabilidade, em perdas de protensão e geometria dos cabos. Há a consideração de vários estados limites tais como a resistência ao cisalhamento e à flexão, a abertura de fissuras e os deslocamentos imediatos e finais.

Frangopol,D.M. & Recek,S. [159] utilizam simulação de Monte Carlo para calcular a probabilidade de falha de placas de compósitos laminados reforçados com fibras. Concluem que a confiabilidade depende fortemente da orientação das fibras. Além disso, afirmam que ela pode ser significativamente aumentada se for realizado um processo de otimização envolvendo o número e a espessura das camadas das fibras.

Altus,E. & Givli,S. [160] calculam a confiabilidade de estruturas de barras com material heterogêneo ao longo de seu comprimento considerando também os carregamentos atuantes como aleatórios. Concluem que a iteração entre estas considerações é extremamente trabalhosa e que mais estudos devem ser realizados. O modelo constitutivo é elástico linear.

Castillo,E et al. [161] mostram aplicações de um método proposto pelos próprios autores para cálculo de confiabilidade e sensibilidade com restrições dadas por coeficientes parciais de segurança associados aos modos de falha. Dois exemplos, um

de uma estrutura de contenção de ondas e o outro com uma seção de ponte são usados para exemplificar a abordagem.

Koucký, M. [162] mostram os métodos para confiabilidade de sistemas dos tipos “k-out-of-n:G” e “k-out-of-n:F”. A primeira notação significa que um sistema opera enquanto “k” componentes operam. A segunda significa que o sistema não opera se “k” componentes falharem. Essa notação é útil para sistemas binários como por exemplo os formados por componentes de microeletrônica. Existe uma tendência dos estudos atuais de confiabilidade de adotar essa notação e várias publicações já podem ser encontradas na literatura.

Olsson, A. & Sandberg, G. & Dahlblom, O. [163] demonstram inúmeras vantagens das técnicas de redução de amostra, em particular a “*Latin hypercube sampling*” acoplada com amostra por importância. O artigo mostra exemplos onde esse acoplamento conduz a boas aproximações da probabilidade de falha com baixo número de simulações e, portanto, com ganho de tempo de processamento.

Gayton, N. & Bourinet, J.M & Lemaire, M. [164] propõem uma técnica para modificação do RSM baseada na introdução do conhecimento do especialista com o intuito de diminuir o tempo de processamento do método. A técnica é baseada na associação do domínio de segurança a um intervalo chamado de “intervalo de confiança”. Esse intervalo é verificado pelo “*resampling*”, que consiste em adicionar pontos àqueles do plano de experiência. O objetivo é apresentar uma ferramenta de validação dos resultados do RSM.

Hadianfard, M.A. & Razani, R. [165] utilizam simulações de Monte Carlo para o efetuar a verificação da influência da variação da rigidez das ligações viga-pilar na confiabilidade de pórticos planos de aço. Segundo o autor, as ligações semi-rígidas são pouco consideradas nas modelagens mecânicas de estruturas desse tipo. Os resultados mostram que as diferenças na probabilidade final de falha são grandes e que os modelos flexibilizados devem ser usados em detrimento daqueles que consideram as ligações totalmente rígidas ou totalmente flexíveis.

Val, D.V. & Stewart, G.M. [166] investigam a influência dos parâmetros especificados para a durabilidade na confiabilidade de estruturas de concreto armado submetidas à corrosão. A introdução de aços mais resistentes à corrosão é a melhor solução para aumentar a confiabilidade, mas ela apresenta um custo elevado. Assim, os autores investigam também a influência no custo de manutenção dessas estruturas em função de sua confiabilidade.

Mori, Y. & Kato, T. [167] propõem uma formulação para o uso de funções de desempenho na técnica de amostra por importância em problemas com numerosas variáveis aleatórias para o cálculo da integral multi-normal. A técnica se baseia na composição de uma única função de desempenho formada a partir de uma combinação linear de funções unidimensionais. Eles estudam a precisão e a versatilidade dessa proposta. Segundo os autores, o método apresenta convergência precisa, mas demanda mais tempo de processamento do que os outros com os quais foi comparado. Porém, a sua grande vantagem é que a sua precisão aumenta quando o número de variáveis aleatórias também aumenta.

### **2.13 Comentários sobre a revisão bibliográfica**

Os métodos de confiabilidades disponíveis aplicam-se em sua grande maioria aos componentes isoladamente. No contexto da confiabilidade, o componente representa um cenário de falha (seqüência de falha) e não necessariamente apenas um componente físico do sistema. Isso determina um modo de falha. A determinação do modo de falha mais provável é necessária para a determinação do índice de confiabilidade e para as medidas de sensibilidade e de elasticidade dos parâmetros. Entretanto, o índice não fornece informações suficientes sobre a probabilidade de falha. É necessário o estabelecimento de aproximações adicionais para relacioná-los.

Na verdade, a probabilidade de falha é dada pela integral da função de densidade conjunta sobre o domínio de falha e o índice de confiabilidade é a menor distância entre a origem do espaço normalizado e esse domínio, de modo que as relações entre essas duas grandezas são apenas obtidas por aproximações baseadas em alguma hipótese. Aproximações lineares conduzem ao método FORM e de segunda ordem ao SORM. Estimadores melhores podem ser obtidos com grande número de simulações de Monte Carlo, mas o tempo de processamento dispensado pode ser inviável.

Dentro de um procedimento de acoplamento com o MEF, o tempo de processamento nos problemas de confiabilidade é quase sempre um limitador da análise. Esse tempo está principalmente associado à quantidade de vezes que é calculada a resposta estrutural com o modelo de elementos finitos. Essas inúmeras chamadas são necessárias para atingir a convergência confiabilística. Em outras palavras, o tempo gasto para obter uma resposta do modelo MEF é muito maior do que o tempo necessário para o tratamento das informações.

Para efetuar o acoplamento mecânico-confiabilístico vários tratamentos são propostos. Ainda hoje é difícil identificar um desses tratamentos como o melhor, ou o mais adequado, já que o campo da confiabilidade ainda deve apresentar muitos avanços. Alguns desses métodos demandam a determinação de gradientes, enquanto que outros podem ser mais gerais e com isso exigir mais tempo de processamento. O meio científico mostra-se cada vez mais convencido de que os casos devem ser estudados isoladamente e a confiabilidade deve caminhar para um tratamento de casos particulares, cada um com o seu método específico. Esses métodos específicos são adaptados à natureza de cada sistema. Podem-se julgá-los medindo-se o tempo de cálculo, a precisão do resultado final e a confiança que o resultado traduz.

Vários são os métodos disponíveis para a determinação da confiabilidade. Eles podem ser classificados em três grupos:

Métodos diretos: referem-se a poucas situações cujo caráter é estritamente acadêmico e são normalmente usados para o entendimento de conceitos gerais. A função de estado limite deve ser explicitamente conhecida.

Métodos de simulação: englobam os métodos de Monte Carlo, Algoritmos genéticos, “*Fuzzy sets*”, Redes Neurais, Etc. Os métodos de simulação podem ser e são amplamente modificados com técnicas de redução de amostra, conforme observado em vários trabalhos. Tais técnicas podem ser simulações condicionais, amostra por importância, simulações direcionais, tiragens adaptativas, etc. Na teoria, esse conjunto de métodos permite o cálculo da probabilidade de falha de qualquer problema, com quaisquer hipóteses ou complexidade de função de estado limite, porém, apresentando uma convergência lenta em problemas onde a probabilidade de falha apresenta valores muito pequenos, ou em problemas com grande número de variáveis de projeto. Nas simulações, são feitas inúmeras chamadas ao MEF, inviabilizando o cálculo de boa parte dos modelos mais complexos. Entretanto, em razão de sua forte robustez, traduzida pela capacidade de conduzir ao mesmo resultado independentemente da complexidade do problema, esse conjunto de métodos é bastante utilizado para validação de resultados obtidos pelos métodos aproximados. Uma outra razão para a sua grande difusão é que estes métodos permitem a determinação direta de um estimador para a probabilidade de falha.

Métodos aproximados: são largamente utilizados atualmente com o intuito de transpor as dificuldades computacionais impostas pelos refinados modelos mecânicos existentes. Dentre esses métodos, destaca-se o método da superfície de resposta (RSM),

que fornece rápida e eficiente aproximação da probabilidade de falha. Na grande maioria dos casos a falha de um sistema estrutural não pode ser especificada em termos de uma função explícita das variáveis aleatórias e apenas uma definição implícita da função de estado limite é possível. Nesses casos, o RSM mostra-se bastante eficiente. Mas, até mesmo em casos mais simples onde a representação da superfície é possível, a aproximação numérica implícita também pode ser conveniente pelo caráter generalista que fornece ao procedimento. A solução é obtida com a construção da superfície de resposta baseada em um certo número de realizações do modelo mecânico, aproximando a função de estado limite na vizinhança do ponto de projeto. Fica claramente evidenciado nos trabalhos comentados que o uso de superfícies de resposta em confiabilidade não é recente, mas também que mais estudos são necessários para contribuir com os avanços em termos de eficiência, desempenho, e generalidade da técnica.

Os conjuntos de métodos diretos e aproximados permitem que seja feita a solução do problema de otimização para determinar o índice de confiabilidade e mais algumas informações disponíveis sobre a função de estado limite, tais como curvaturas e gradientes. É necessário então que se disponha de ferramentas para obter um estimador da probabilidade de falha. A aproximação de primeira ordem é o caso mais simples, onde se substitui a superfície de estado limite por um hiper-plano tangente a ela no ponto de projeto. A probabilidade de falha é estimada como uma função da distribuição normal padrão.

Para tentar melhorar a aproximação do cálculo da probabilidade de falha, várias aproximações de segunda ordem foram propostas, dentre as quais a hiper-esfera de Fiesller, o parabolóide de Breitung e o método de Tvedt podem ser relacionados.

Os trabalhos publicados anteriores a 1980 apresentaram um caráter de definição teórica. Naquele momento, a teoria estava sendo posta à prova e o meio científico buscava uma afirmação de que aplicações complexas no ramo poderiam ser desenvolvidas. Os trabalhos buscavam testar e validar a abordagem probabilística da segurança a fim de consolidá-la como uma ferramenta realmente eficaz.

Após essa etapa de entendimento de conceitos, as aplicações começaram a crescer e novos problemas foram surgindo, dentre os quais o tempo de processamento, que limita aplicações até os dias atuais. No período entre 1980 a 1994, vários trabalhos foram publicados na tentativa de obter uma formulação a mais geral possível para o

cálculo da integral multinormal, e a determinação do erro inerente a essas aproximações de integração.

Finalmente, na última década, observou-se uma total aceitação da confiabilidade como uma ferramenta para auxiliar na previsão da segurança de sistemas. Inúmeras áreas da Engenharia Civil tiveram seus problemas modelados através da confiabilidade tais como a segurança de edifícios, pontes, barragens, monumentos ou componentes isolados contra ações estruturais, impactos, explosões, acidentes, vibrações, sismos, corrosão e outros.

Observa-se um amplo crescimento das aplicações da confiabilidade e uma tendência do meio técnico em utilizar cada vez mais as ferramentas de estatística e otimização, acoplando-as com os devidos modelos mecânicos para efetuar a previsão da segurança de seus sistemas. Fica evidente também que a forte evolução das ferramentas de informática na última década ajuda nesse processo, pois os computadores atuais permitem a modelagem de sistemas cada vez mais complexos, inviáveis há pouco tempo, além da realização das extensas análises conforme as observadas nos trabalhos consultados.



## 3 Métodos confiabilísticos

### 3.1 Generalidades

A segurança de uma estrutura passa pelo cumprimento de algumas regras concernentes aos limites das ações, deslocamentos e deformações que nela devem se encontrar. Esses limites são resultado da evolução do conhecimento da engenharia e sofrem uma constante modificação com a sua evolução. Essa limitação é devida à falta de informação total sobre as variáveis envolvidas na concepção. A imposição de limites torna a padronização dos procedimentos mais eficaz. Apesar de as hipóteses determinísticas utilizadas representarem convenientemente os fenômenos que ocorrem nas estruturas, o grau de incerteza presentes nas variáveis pode causar comportamentos não previstos inicialmente.

O estudo da confiabilidade insere-se nesse contexto, na tentativa de prever as incertezas e flutuações nas variáveis do sistema. O seu objetivo é determinar uma probabilidade de ocorrência de um cenário de falha qualquer. A confiabilidade é definida como a habilidade do sistema em desempenhar a função para a qual foi projetado durante toda a sua vida útil, medindo a suas chance de violar um estado limite por falha ou por não satisfazer a um desempenho esperado. Em termos de estatística, a confiabilidade é o evento complementar da probabilidade de falha, conforme ilustra a Eq.(3.1):

$$R = 1 - P_f \quad (3.1)$$

onde “ $P_f$ ” denota uma probabilidade de falha durante a vida útil. A falha é caracterizada por uma situação onde se atinge algum estado limite pré-estabelecido. “ $R$ ” é a confiabilidade.

Como geralmente os valores da confiabilidade são grandes, usa-se normalmente trabalhar com a probabilidade de falha, que nos casos de estruturas civis é normalmente um valor da ordem de  $10^{-7}$  até  $10^{-3}$ .

Inúmeros fatores contribuem para o desempenho de uma estrutura tais como a geometria, as ações, a quantidade de armadura e o posicionamento das armaduras. Essas são normalmente as variáveis de projeto. O que o estudo da confiabilidade vai dizer é qual a chance de existir uma realização dessas variáveis de projeto que conduz o sistema a uma situação de falha. Posicionando as variáveis de projeto em um espaço cartesiano, podemos afirmar que existe uma região desse espaço que concentra os pontos que atendem todas as exigências do projeto. Nessa região a estrutura está segura. Na região complementar a essa, nem todos aqueles requisitos são atendidos, o que acontece em decorrência das incertezas inerentes às variáveis de projeto. Somando-se as regiões do espaço que não atendem aos requisitos vem a definição matemática da probabilidade de falha. Atribuindo-se distribuições estatísticas convenientes para as variáveis de projeto, denotam-se por  $X_i$ ,  $i = 1 \dots n$  as “ $n$ ” variáveis para as quais deveremos considerar as incertezas. Essa atribuição é uma associação estatística e pode ser feita através de estudos estatísticos, observação física, análises de laboratório, ou até mesmo através da opinião de especialistas. Porém, cabe observar que a informação disponível reflete diretamente na qualidade dos resultados.

Uma situação qualquer ou realização será denominada de “ $x_i$ ”. Existe então uma função  $G(x_i)$  que mede a resposta estrutural do sistema e determina se a realização “ $x_i$ ” pertence ou não ao conjunto de pontos que satisfazem os requisitos de segurança. Ela é chamada de função de desempenho e divide o espaço das variáveis de projeto em três regiões: Em uma delas  $G(x_i) > 0$ . Essa região é chamada de domínio seguro e simbolizada por  $\Omega_s$ . A zona onde a equação  $G(x_i) < 0$  é satisfeita é denominada de domínio de falha e representada por  $\Omega_f$ . Todos os pontos “ $x_i$ ” que pertencem a essa zona conduzem a estrutura a um estado limite. A fronteira entre as duas regiões contém os pontos que satisfazem à relação  $G(x_i) = 0$ . Ela é chamada de função de estado limite. Essa definição constitui um importante conceito no estudo de confiabilidade. Essas regiões estão indicadas na Fig. 3.1.

Na definição do modelo estatístico representam-se as variáveis cujas incertezas desejam-se considerar por meio de distribuições estatísticas convenientes. A modelagem ideal é o uso de uma função conjunta de densidade de probabilidades que possa representar todas as variáveis de projeto ao mesmo tempo no espaço. Porém, em

problemas mais complexos, dificilmente a obtenção dessa função é possível. A probabilidade de falha é calculada somando-se os pontos sob essa função que não satisfazem todas as restrições de projeto, conforme a Eq.(3.2) :

$$P_f = \int_{\Omega_F} (f_{X_1, X_2, \dots, X_n} (x_1, x_2, \dots, x_n)) dx_1, dx_2, \dots, dx_n \quad (3.2)$$

onde  $f_{X_1, X_2, \dots, X_n} (x_1, x_2, \dots, x_n)$  é a função conjunta de densidade de probabilidades.

Uma das maiores dificuldades da abordagem estatística da segurança consiste no cálculo da integral acima. Em geral, pouca ou nenhuma informação está disponível sobre a função conjunta. O valor resultante de “ $P_f$ ” é geralmente pequeno, o que faz com que os métodos de simulação sejam pouco eficientes. Assim, métodos aproximados foram propostos com o intuito de fornecer um índice de confiabilidade que nos permite obter um estimador adequado de “ $P_f$ ”. Este índice avalia o nível de segurança da estrutura e está diretamente relacionado com a probabilidade de falha. Além disso, ele permite comparar níveis de segurança de sistemas totalmente diferentes, dado o seu caráter adimensional.

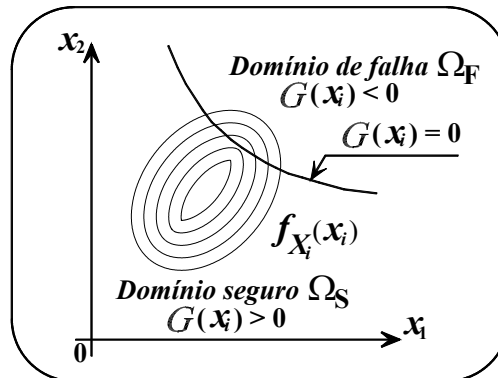


Fig. 3.1 – Regiões definidas pela função de desempenho

O procedimento comum hoje no cálculo da confiabilidade é o acoplamento com o MEF. O trabalho dos que buscam a modelagem confiabilística é árduo: de um lado, eles necessitam de numerosas chamadas ao MEF para a aplicação de suas técnicas; do outro existem estudantes, engenheiros, profissionais e também pesquisadores tentando modelar estruturas cada vez maiores e mais complexas e com milhares de graus de liberdade. Eles buscam simular da maneira mais fiel possível os fenômenos naturais através de seus *softwares*, o que torna cada vez mais lenta a determinação de uma resposta estrutural. Apesar de tudo isso, percebe-se que tal é o embasamento matemático e a quantidade de benefícios aportados pela confiabilidade, que a

determinação da segurança estrutural por meio do acoplamento dessas técnicas se faz cada vez mais presente no meio técnico.

Conforme já citado, os métodos disponíveis para a análise de confiabilidade podem ser classificados em três grupos: analíticos, de simulação e aproximados. Nas seções seguintes esses métodos são expostos mais detalhadamente.

## 3.2 Métodos exatos

### 3.2.1 Generalidades

A determinação exata da probabilidade de falha só é permitida em um número reduzido de casos cujas características são peculiares. Um número elevado de variáveis aleatórias, distribuições de probabilidades complexas ou correlação entre elas, normalmente conduzem a casos onde a integração exata é impossível. Em sua grande maioria, esse casos só são empregados para fins acadêmicos.

### 3.2.2 Caso fundamental da segurança estrutural

O caso fundamental da segurança estrutural é uma das situações especiais onde é permitida a determinação exata da probabilidade de falha. Um sistema com duas variáveis aleatórias é estudado. Suas variáveis apresentam distribuições normais não correlacionadas entre si. Uma dessas variáveis é a resistência, denotada por “ $R$ ” e a outra é a solicitação, cuja representação é “ $S$ ”. A função de desempenho no espaço físico, representada por  $G(r,s)$ , depende exclusivamente de uma realização do par de variáveis “ $r$ ” e “ $s$ ”. Um cenário de falha é caracterizado quando a solicitação atuante no sistema é superior à sua resistência, conforme indicado na Eq.(3.3):

$$G(r,s)=r-s \leq 0 \quad (3.3)$$

As variáveis “ $R$ ” e “ $S$ ” são caracterizadas por uma função conjunta de densidade de probabilidade, cuja notação é  $f_R(r,s)$ .

A medida da probabilidade da falha é associada à chance de existir um cenário de falha, ou melhor:

$$P_f = Prob\{G(r,s) \leq 0\} = Prob\{R \leq S\} \quad (3.4)$$

Como o conjunto dos pontos onde a Eq.(3.3) é satisfeita forma o domínio de falha, a probabilidade de falha é o volume sob a função conjunta nesse domínio, conforme a expressão abaixo:

$$P_f = Prob\{R-S \leq 0\} = \int_{r-s \leq 0} f_R(r,s) dr ds \quad (3.5)$$

Verifica-se então que o caso fundamental da segurança estrutural conduz a uma integral que tem a solução analítica determinável. Em seguida mostra-se o procedimento de resolução.

Sabendo-se que as variáveis tem distribuição conjunta normal não correlacionada, a integral torna-se:

$$P_f = \frac{1}{2\pi\sigma_r\sigma_s} \int_{r-s \leq 0} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{r-\mu_r}{\sigma_r}\right)^2 + \left(\frac{s-\mu_s}{\sigma_s}\right)^2\right]\right) dr ds \quad (3.6)$$

onde “ $\mu_r$ ” e “ $\mu_s$ ” são os valores médios das variáveis “ $r$ ” e “ $s$ ” e onde “ $\sigma_r$ ” e “ $\sigma_s$ ” são os valores do desvio padrão de “ $r$ ” e “ $s$ ”.

Para realizar a integração exata, deve-se primeiro efetuar uma mudança para o espaço normalizado com o auxílio das expressões abaixo:

$$\begin{aligned} u &= \frac{r-\mu_r}{\sigma_r} & v &= \frac{s-\mu_s}{\sigma_s} \\ dr &= \sigma_r du & ds &= \sigma_s ds \end{aligned} \quad (3.7)$$

A integral da Eq.(3.6) torna-se:

$$P_f = \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_r r - \sigma_s v + \mu_r - \mu_s \leq 0} \exp\left(-\frac{1}{2}(u^2 + v^2)\right) du dv \quad (3.8)$$

Para simplificar a integral, pode-se efetuar uma nova mudança de variáveis, através de uma rotação de eixos. Essa rotação faz um dos eixos coincidir com o vetor de co-senos diretores do ponto de projeto. A rotação é:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

A nova função de estado limite é:

$$\begin{aligned} G(u', v') &= (\sigma_r \cos \alpha - \sigma_s \sin \alpha) u' - (\sigma_r \sin \alpha + \sigma_s \cos \alpha) v' \\ &+ \mu_r - \mu_s = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

A tangente do ângulo “ $\alpha$ ” é a razão entre o desvio padrão da resistência e da sollicitação:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{Sen} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha} = \frac{\sigma_r}{\sigma_s} \Rightarrow \sigma_r = \sigma_s \frac{\operatorname{Sen} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha} \quad (3.11)$$

Assim, pode-se escrever a função de estado limite apenas em função de uma variável:

$$\begin{aligned} G(u', v') &= \left( \sigma_s \frac{\operatorname{Sen} \alpha}{\operatorname{Cos} \alpha} \operatorname{Cos} \alpha - \sigma_s \operatorname{Sen} \alpha \right) u' - (\sigma_r \operatorname{Sen} \alpha + \sigma_s \operatorname{Cos} \alpha) v' \\ &+ \mu_r - \mu_s = 0 \Rightarrow \\ v' &= \frac{\mu_r - \mu_s}{\sigma_r \operatorname{Sen} \alpha + \sigma_s \operatorname{Cos} \alpha} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para calcular o limite de integração, toma-se o valor do ângulo “ $\alpha$ ”:

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left( \frac{\sigma_r}{\sigma_s} \right) \quad (3.13)$$

Logo, o novo limite de integração é:

$$v_0' = \frac{\mu_r - \mu_s}{\sigma_r \operatorname{Sen} \alpha + \sigma_s \operatorname{Cos} \alpha} \quad (3.14)$$

E a função de estado limite é:

$$G(u', v') = v_0' - v' = 0 \quad (3.15)$$

Como os Jacobianos são iguais, a integral da Eq.(3.8) fica:

$$P_f = \frac{1}{2\pi} \int_{v_0'}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u'^2}{2}\right) du' \right] \exp\left(-\frac{v'^2}{2}\right) dv' \quad (3.16)$$

A integral entre parênteses vale  $\sqrt{2\pi}$ . Finalmente:

$$\begin{aligned} P_f &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{v_0'}^{\infty} \exp\left(-\frac{v'^2}{2}\right) dv' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-v_0'} \exp\left(-\frac{v'^2}{2}\right) dv' \Rightarrow \\ P_f &= \Phi(-v_0') \end{aligned} \quad (3.17)$$

Portanto, o caso fundamental é solucionado com a distribuição normal padrão da distância entre a reta do estado limite e a origem do espaço. O exemplo numérico mostrado no Anexo A permite melhor visualização das duas transformações.

### 3.3 Métodos de simulação

Simulação é um artifício com a finalidade de tentar reproduzir acontecimentos do mundo real baseado na adoção de um conjunto de hipóteses e modelos da realidade. Podem-se realizar simulações experimentais ou numéricas. Estas últimas são amplamente realizadas atualmente em razão de seu baixo custo e de grande disponibilidade de ferramentas de informática. As simulações podem ser aplicadas na Engenharia para prever o desempenho de sistemas em geral. Através de inúmeras simulações, pode-se também medir a sensibilidade da resposta do sistema em relação a um determinado parâmetro. Assim, podem-se também usar simulações para embasar concepções otimizadas. Existem hoje inúmeras técnicas para a simulação de problemas, tais como Monte Carlo, algoritmos genéticos, redes neurais, conjuntos fuzzy e outros. Nesse trabalho apenas será comentado o procedimento de Monte Carlo, por sua vasta aplicabilidade e fácil transportabilidade para inúmeras áreas onde as simulações são empregadas.

#### 3.3.1 Simulação de Monte Carlo

O método de simulação de Monte Carlo tem sua funcionalidade bem aproveitada nos problemas que envolvem variáveis aleatórias com distribuição de frequência conhecida ou assumida. Ele envolve inúmeras repetições de um processo de simulação usando em cada uma dessas repetições uma realização particular das variáveis aleatórias do problema. Essas realizações são obtidas de acordo com números aleatórios gerados conforme a conveniente distribuição de probabilidades. As repetições fornecem um conjunto de soluções, uma para cada realização, que representa a saída simulada do sistema. Essa amostra de soluções é similar, por exemplo, a uma realização de experimentos em laboratório e, portanto, os resultados também podem receber tratamento estatístico. Sendo uma técnica de amostragem, o método está sujeito aos problemas relativos a erros de amostragem. Normalmente, requerem-se amostras de tamanho elevado para que um conjunto de simulações apresente resultados que descrevam um fenômeno com boa precisão.

O núcleo do método reside na obtenção do conjunto de realizações aleatórias obedecendo a uma lei definida. Esse conjunto é construído através da geração de números aleatórios. Para gerar-se uma seqüência obedecendo a uma distribuição qualquer, deve-se gerar uma seqüência obedecendo a uma distribuição normal e em

seguida realizar uma transformação isoprobabilística para a distribuição desejada. A geração inicial deve partir de argumentos de entrada fornecidos e obedecer à distribuição uniforme contida no intervalo aberto entre zero e um. Como os algoritmos computacionais de geração são baseados em funções determinísticas, pode-se reproduzir o mesmo conjunto de números se os argumentos de entrada forem os mesmos. Por essa razão, esses conjuntos são normalmente chamados de pseudo-aleatórios.

Há pouco tempo, cerca de quinze anos, existiam livros de Simulação de Monte Carlo que continham tabelas de números aleatórios. Hoje, todo o processo é feito em computadores, onde bilhões de números aleatórios podem ser gerados rapidamente e as simulações podem ser efetuadas em poucos minutos.

O uso de um computador, máquina precisa e determinística, para produzir números aleatórios soa estranho, e pode-se afirmar que é conceitualmente impossível, já que um código computacional produz sempre uma saída previsível e não aleatória. Porém, consegue-se representar o acaso com operações complexas que produzem resultados variados. Essas operações empregam uma lógica imperceptível em um grande número realizações. Para simular um sorteio, o computador parte de um número inicial qualquer e o implanta em uma série de operações matemáticas. O número resultante das operações será um número desconhecido. Como se deseja obter um conjunto de números, este número desconhecido é tomado como o novo número inicial, e assim sucessivamente.

Efetuada a geração da seqüência aleatória com distribuição uniforme no intervalo entre zero e um, toma-se um número qualquer com uma quantidade determinada de casas decimais, por exemplo, seis casas. Define-se esse número como uma probabilidade de ocorrência, conforme a equação abaixo:

$$p_i = \underline{0.458935} | 262187243 \quad (3.18)$$

Para obter uma realização aleatória que obedece à uma distribuição qualquer (normal, por exemplo) usa-se uma transformação isoprobabilística inversa, como a exemplificada na Eq.(3.19). Obtém-se assim a ordenada da distribuição normal padrão que possui a mesma probabilidade de ocorrência, que é a realização da variável no espaço normalizado.

$$u_i = \Phi^{-1}(0.458935) \rightarrow u_i = -0.103117 \quad (3.19)$$



Para obter uma realização no espaço físico basta realizar uma transformação que depende da distribuição da variável. No caso particular da distribuição normal, a transformação é dada pela Eq.(3.20). Várias repetições dessa equação fornecem um conjunto de valores que formarão uma realização aleatória.

$$x_i = u_i \times \sigma_i + \mu_i \quad (3.20)$$

A idéia do método de Monte Carlo é substituir a integral da Eq.(3.2) por um estimador da probabilidade de falha. Isso é feito calculando-se a expectância matemática da variável aleatória  $I(x)$  definida em seguida:

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_{X_i}(x_i) dx_i = \int_{\mathbb{R}^n} I(x_i) f_{X_i}(x_i) dx_i = E(I(X)) \quad (3.21)$$

O estimador  $I(x)$  é definido por:

$$I(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega_f \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega_f \end{cases} \quad (3.22)$$

Repetindo as análises para um grande número de simulações “ $n_s$ ”, a média empírica dos valores  $I(x)$  é um estimador de “ $P_f$ ”. Significa que:

$$P_f = \frac{1}{n_s} \sum_{r=1}^{n_s} I(x_r) \quad (3.23)$$

A variância do estimador  $I(x)$  é:

$$\sigma_{I(x)}^2 = \frac{1}{n_s^2} \left[ n \sum_{r=1}^{n_s} I^2(x_r) - \left( \sum_{r=1}^{n_s} I(x_r) \right)^2 \right] \quad (3.24)$$

Graficamente visualiza-se que as tiragens são efetuadas em todo o domínio do problema e os pontos que se encontram no domínio de falha fornecem uma aproximação da probabilidade relativa dessa região, conforme a Fig. 3.2:

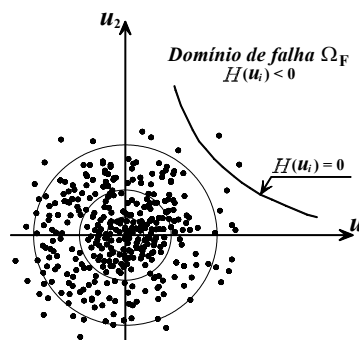


Fig. 3.2 – Tiragens de simulações de Monte Carlo

O método de Monte Carlo sem qualquer modificação constitui uma das ferramentas mais lentas para o cálculo da probabilidade de falha com razoável precisão. No entanto, é um dos que fornecem resultados com maior garantia. O resultado é o estimador já mostrado, e mais uma estimativa da variância.

A técnica de resolver problemas de integração pelo método de Monte Carlo é baseada na interpretação da teoria das probabilidades sobre o comportamento de amostras e sobre a tendência que suas médias têm de se estabilizarem à medida que o tamanho da amostra cresce. Isto é empiricamente bem documentado. Significa que em vez de se resolver um problema de integração dado por métodos matemáticos analíticos ou numéricos, pode-se aproveitar o fato de que a integral pode ser interpretada como um valor médio em um experimento estocástico adequado. Assim, é possível obter uma estimativa central (média) do valor da integral por com um elevado número de resultados independentes desse experimento. A precisão dessa estimativa pode ser medida através do uso de métodos estatísticos. A própria teoria das probabilidades prediz que o número de resultados mutuamente independentes deve ser muito grande para fornecer precisão suficiente por este método empírico o qual, em seu princípio, corresponde às apostas na roleta em Monte Carlo. Daí se conclui que ele não era um método realístico de solução antes do desenvolvimento dos computadores velozes. Hoje o disco mecânico da roleta é substituído por um algoritmo computacional que gera muito rapidamente uma seqüência conhecida de números pseudo-aleatórios.

Um inconveniente do método é que há um elevado gasto de tempo de processamento, pois é preciso um grande número de eventos para atingir-se a convergência. Nos problemas de confiabilidade, para se obter uma probabilidade de falha da ordem de  $10^{-n}$ , o número de simulações deve estar compreendido entre  $10^{n+2}$  e  $10^{n+3}$ . Como se sabe, nas estruturas em geral trabalha-se com probabilidades inferiores a  $10^{-3}$ , o que mostra porque métodos de simulação normalmente não são eficientes. Um outro problema é inerente aos métodos de simulação, que não fornecem informações suplementares sobre o ponto de projeto, ou sensibilidades do índice de confiabilidade em relação às variáveis aleatórias. Porém, como já citado, esses métodos são bastante úteis na aferição de modelos e incontáveis trabalhos científicos já foram publicados fazendo uso do método de Monte Carlo.

### 3.3.2 Procedimentos de redução de variância em simulação

Conforme comentado, os métodos de simulação requerem muitas repetições para fornecer um estimador para um experimento. Com o intuito de se necessitar de menos realizações para a obtenção de um estimador semelhante, alguns métodos de redução da variância serão expostos. O procedimento é idêntico: para cada realização, uma verificação da função de estado limite é feita e um indicador de falha recebe o valor “1” se a realização pertence ao domínio de falha. Uma estimativa é feita em função do número de falhas observado. A diferença é a introdução de funções de “peso” ou modificação das realizações.

#### 3.3.2.1 Amostra por importância

Observando-se a função de desempenho, constata-se facilmente que o volume calculado sob a função conjunta de probabilidades no domínio de falha é pequeno. Percebe-se também que grande parte desse volume está concentrada na vizinhança do ponto de projeto. Portanto, uma maneira mais eficaz de realizar simulações é concentrar as realizações aleatórias em torno desse ponto. Esse é o princípio do método, conforme ilustrado na Fig. 3.3.

Na amostra por importância, o integrando pode ser modificado através da introdução de uma função de densidade da amostra:

$$P_f = \int_{R^n} I(v) \frac{\phi_n(\{u\})}{f_V(v)} f_V(v) dv \quad (3.25)$$

onde  $f_V(v)$  é a função de densidade de probabilidade da amostra e  $I(v)$  o estimador.

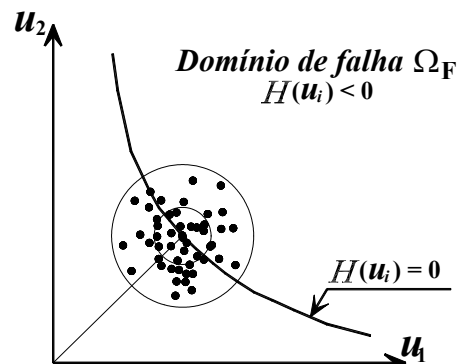


Fig. 3.3 – Tiragens de amostra por importância

Uma boa sugestão para essa função é assumi-la como normal centrada no ponto de projeto. Para simular as variáveis aleatórias com essa densidade é suficiente fazer a

geração de variáveis centradas na origem e efetuar uma transformação linear, dada por  $\{v\}^{(r)} = \{u\}^{(r)} + \{u^*\}$ , onde “r” é o número da realização. A probabilidade de falha é estimada por:

$$P_f = \frac{1}{n_s} \sum_{r=1}^{n_s} \left[ I(x_r) \times \exp \left\{ -\langle u^* \rangle \{u\}^{(r)} - \frac{\beta^2}{2} \right\} \right] \quad (3.26)$$

### 3.3.2.2 Simulação condicional

Neste tipo de adaptação o objetivo é eliminar todas as realizações que não tem chance de pertencer ao domínio de falha. Como o ponto de projeto é o ponto do domínio de falha que está mais próximo da origem, pode-se excluir o domínio definido pela hiper-esfera de raio “ $\beta$ ” centrada na origem, denominada de  $S_n^\beta$ , conforme a Fig. 3.4:

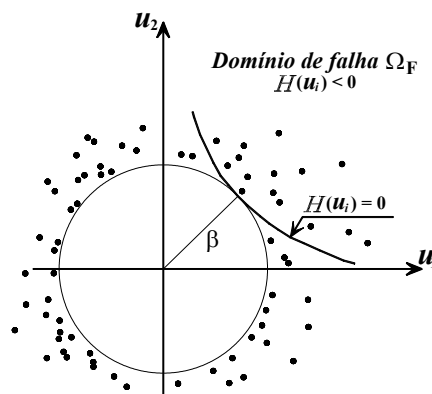


Fig. 3.4 – Simulação condicional

A probabilidade de falha é dada por:

$$P_f = P \left[ \{u\} \in \Omega_F \mid (\{u\} \notin S_n^\beta) \right] \cdot P \left[ \{u\} \notin S_n^\beta \right] \quad (3.27)$$

A probabilidade no segundo termo é a de não acontecerem realizações no interior da hiper-esfera, dada pela distribuição qui-quadrada com “n” graus de liberdade:

$$P \left[ \{u\} \notin S_n^\beta \right] = 1 - \chi_n^2(\beta^2) \quad (3.28)$$

A primeira probabilidade é obtida combinando-se direções aleatórias com distribuição uniforme e raios aleatórios com distribuição Rayleigh, que permite o sorteio de valores aleatórios entre “ $\beta$ ” e “ $\infty$ ”.

### 3.3.2.3 Simulação direcional

Semelhante à simulação condicional, pois existe a geração de direções aleatórias. No entanto, para se determinarem as coordenadas dos pontos de cada realização, as distâncias que multiplicam as direções são calculadas através da minimização de uma função de mérito na direção sorteada. Uma aproximação de grau dois pode ser utilizada. Em uma direção escolhida, o domínio de falha é definido pelos pontos cuja distância à origem é maior do que aquela calculada com a minimização.

### 3.3.2.4 Amostra adaptativa

Esse caso é uma modificação da amostra por importância. Uma primeira amostra é feita usando-se a função de importância. Depois, usam-se as informações obtidas com a primeira simulação, e calculam-se a nova média e o desvio padrão da amostra. Então, uma nova amostra pode ser obtida com nova simulação e assim sucessivamente.

### 3.3.2.5 Simulação “Latin Hipercube”

Nessa técnica, as realizações da amostra são sorteadas de modo uniforme dentro de um cubo no espaço multidimensional centrado no ponto de projeto. É suficiente tomar a aresta desse cubo como seis unidades de desvio padrão.

## 3.4 Métodos de aproximação - Superfície de Resposta

Dentre os métodos aproximados destaca-se o método da superfície de resposta (RSM). A sua combinação com outras técnicas fornece boa aproximação de “ $P_f$ ”. Ele tornou-se bastante utilizado, pois permite transpor dificuldades computacionais impostas pelos refinados modelos mecânicos usados atualmente.

A grande vantagem do RSM é permitir a construção de uma função de estado limite, além da determinação do ponto de projeto, ambos inicialmente desconhecidos. Isso é feito por meio da substituição da função de estado limite real por hiper-superfícies aproximadoras em torno da vizinhança do ponto de projeto em um processo iterativo. Esse procedimento torna a busca do ponto de projeto bastante simples, rápida e eficiente, já que a superfície real é substituída por um simples polinômio. Faz-se uso de uma transformação isoprobabilística, como indicada na Fig. 3.5, para a definição do ponto de projeto como o ponto  $P^*$  no espaço de variáveis transformadas, onde a ocorrência de uma falha é mais provável. Esse ponto define que a probabilidade de falha

do sistema é igual à probabilidade do seu ponto mais frágil. Assim, os outros modos de falha são negligenciados em favor da probabilidade obtida com o ponto de projeto.

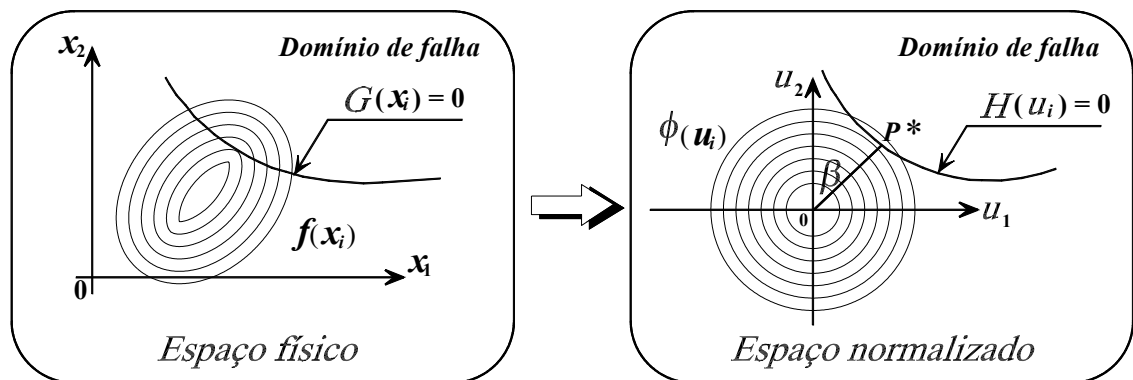


Fig. 3.5 – Transformação isoprobabilística do espaço físico para o normalizado

A definição de um índice adimensional para medir a segurança foi introduzida por Hasofer, A.M. & Lind, N.C. [7], que propuseram trabalhar no espaço de variáveis gaussianas independentes, ao invés de fazê-lo no espaço das variáveis físicas. Com a transformação esses pesquisadores mostraram que o índice é invariável. Ele tem sido utilizado com sucesso até hoje. A transformação isoprobabilística do espaço físico “ $X_i$ ” para o espaço normalizado “ $U_i$ ” dá-se por meio da expressão:

$$U_i = T_i(X_i) \quad (3.29)$$

No novo espaço, a função de desempenho tem a seguinte forma:

$$G(X_i) = G(T_i^{-1}(U_i)) \equiv H(U_i) = 0 \quad (3.30)$$

Para traçar as superfícies de resposta é necessário que se lance mão de um conjunto de situações da estrutura, que é denominado de plano de experiência (PE). Os planos de experiência constituem o principal pilar de sustentação do RSM. Cada ponto do plano é responsável por uma resposta mecânica do modelo de elementos finitos. Tendo em mãos o conjunto de pontos e as devidas respostas mecânicas, constrói-se a superfície de resposta, através do cálculo dos coeficientes de seu polinômio com o uso de técnicas de regressão linear ou não-linear. Adotou-se a técnica dos mínimos quadrados. A superfície é escrita em função das variáveis de projeto e dos coeficientes obtidos na regressão.

O índice de confiabilidade “ $\beta$ ” pode então ser definido como a mínima distância entre a origem e o domínio de falha no espaço normalizado. Essa distância e a sua direção definem o ponto  $P^*$ , mostrado na Fig. 3.5, que é o chamado ponto de projeto,

onde ocorre a maior probabilidade de falha. De acordo com essa representação física, o índice de confiabilidade “ $\beta$ ” é calculado através da solução do seguinte problema de otimização restrita:

$$\beta = \min \sqrt{\sum_i (u_i)^2} \quad (3.31)$$

Sujeito a  $G(x_i) \leq 0$

Para a solução desse problema um dos algoritmos mais conhecidos no campo da confiabilidade é o algoritmo de Rackwitz, R & Fiessler, B. [170]. Este método não é aplicável indiscriminadamente, pois é falho em alguns casos que dependem da forma da superfície de resposta e da continuidade de suas derivadas. No presente estudo não existem problemas assim. Embora o algoritmo requeira o cálculo das derivadas parciais da função de falha, o que poderia elevar o tempo computacional, ele apresenta rápida convergência.

Determinado o ponto de projeto  $P^*$ , deve-se calcular “ $P_f$ ”. Para realizar essa operação utilizam-se também métodos aproximados. A chamada aproximação em primeira ordem para “ $P_f$ ” é obtida substituindo-se a função de estado limite obtida na regressão por um hiper-plano tangente a ela no ponto  $P^*$ .

Na literatura, essa aproximação é chamada de First Order Reliability Method (FORM). A probabilidade de falha “ $P_f$ ” é dada por:

$$P_f \approx \Phi(-\beta) \quad (3.32)$$

onde  $\Phi(\bullet)$  é a função de distribuição normal cumulativa.

A precisão da aproximação FORM depende da curvatura da função de estado limite na vizinhança de “ $P_f$ ”. Aproximações melhores podem ser obtidas levando-se em essas as curvaturas, hipótese base do Second Order Reliability Method (SORM).

A execução do RSM inicia-se com a construção de uma aproximação polinomial da função de estado limite, seja no espaço físico representada por  $G(x_i)$ , ou no espaço normalizado chamada de  $H(u_i)$ .

A escolha de uma superfície de grau dois é aconselhável porque permite a rápida determinação de curvaturas além de evitar as oscilações inerentes aos polinômios de ordem mais elevada.

Por simplificação, escolheu-se construir a aproximação diretamente no espaço normalizado. A aproximação para a superfície  $H(u_i)$  é dada por um polinômio completo, conforme mostrado abaixo:

$$H(u_i) = c + \sum_{i=1}^N b_i u_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j=i}^N a_{ij} u_i u_j \quad (3.33)$$

onde  $c$ ,  $b_i$  e  $a_{ij}$  são constantes a serem determinadas.

$H(u_i)$  é definida por pelo menos  $(N+1)(N+2)/2$  pontos, mas normalmente um grande número de pontos é tomado e a aproximação é obtida por mínimos quadrados.

Dois passos são considerados essenciais: a escolha de um modelo mecânico adequado para representar a resposta estrutural e a seleção de um plano de experiência (PE) conveniente para fornecer uma representação precisa das variações do comportamento mecânico. A convergência do algoritmo de busca é diretamente relacionada à qualidade do PE selecionado. Recomenda-se também o uso de um procedimento iterativo para aumentar a precisão na busca do ponto de projeto.

Na literatura técnica podem ser encontradas numerosas propostas de PE. Cabe observar que o uso de um único PE para qualquer tipo estrutural é praticamente impossível. Em cada caso, um PE particular pode ou deve ser adotado. A Fig. 3.6 mostra os PE usados no presente estudo para o caso de duas variáveis aleatórias.

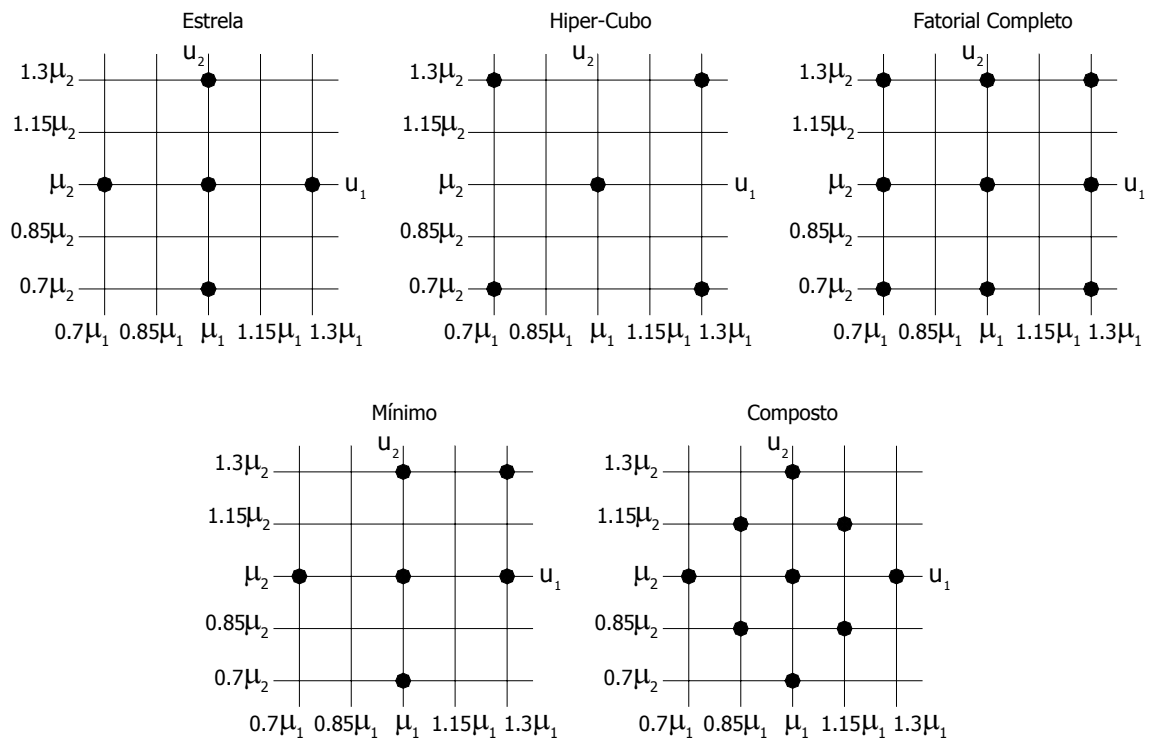


Fig. 3.6 – Planos de experiência testados para 2 variáveis aleatórias



O PE estrela é obtido calculando-se duas respostas mecânicas simétricas para cada variável. O PE hiper-cubo apresenta pontos nos vértices do hiper-cubo em um espaço qualquer e um ponto adicional no centro do espaço. O PE fatorial completo tem três níveis de mapeamento para cada variável. O PE mínimo corresponde ao número mínimo de pontos a serem obtidos na resposta numérica que permitam definir unicamente os coeficientes de um polinômio quadrático completo. O PE composto é obtido a partir de uma fusão do PE estrela com o PE hiper-cubo, apresentando cinco níveis diferentes de experimentação para cada variável. A Fig. 3.7 mostra os PE usados nos casos com três variáveis aleatórias, usando-se polinômio de segundo grau. Obviamente, um número de variáveis aleatórias maior que 3 não permite a visualização de seus PE no espaço.

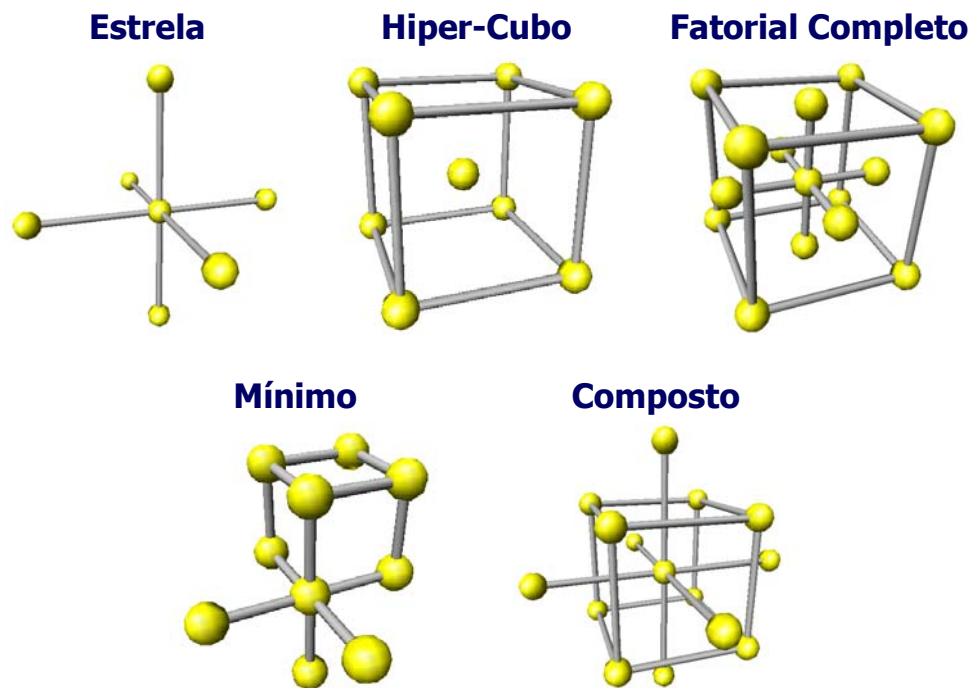


Fig. 3.7 – Planos de experiência com 3 variáveis aleatórias

O procedimento iterativo do RSM é realizado construindo-se na iteração “k”, a função  $H(u_i)$  aproximando-a pelo número de respostas requeridas pelo PE escolhido. A equação  $H(u_i)=0$  permite a determinação de um  $\beta(k)$  e um ponto de projeto  $u_i^*(k)$  com o algoritmo de Rackwitz-Fiesler. Constrói-se um novo polinômio na iteração “k+1” a partir da determinação da função implícita situada na vizinhança de  $u_i^*(k)$ . Várias iterações permitem que seja obtida uma aproximação do índice de confiabilidade e do ponto de projeto.

O problema geral de análise de confiabilidade utilizando o RSM resume-se em três passos, conforme descrito na Fig. 3.8: inicialmente é escolhido o conjunto de pontos do plano de experiência e obtém-se uma resposta estrutural para cada um deles. Uma distribuição estatística para cada variável estrutural deve ser adotada previamente. Em cada resposta mecânica encontra-se um ponto no espaço físico ou normalizado. Vários desses pontos permitem a construção da superfície de resposta. O segundo passo consiste em aplicar o algoritmo de otimização no espaço normalizado para encontrar o ponto  $P^*$ . A distância deste ponto à origem é o índice “ $\beta$ ”. Depois de determiná-lo, o passo final é calcular a Eq.(3.2). Uma boa aproximação pode ser obtida com um dos métodos FORM/SORM.

Outras dificuldades podem ser encontradas se as correlações estatísticas entre as variáveis de projeto forem consideradas ou se distribuições não gaussianas forem adotadas. É possível que existam dificuldades adicionais relacionadas à forma da função de estado limite, como por exemplo, o caso onde ela se aproxima de uma hiper-esfera. Nessa situação, existem inúmeros ou infinitos pontos de onde a distância é mínima.

No presente caso, a definição da resposta mecânica é feita de acordo com o modelo estrutural assumido. Como foi imposta uma variação estatística para as variáveis de projeto, a resposta estrutural passa a depender dos pontos do PE.

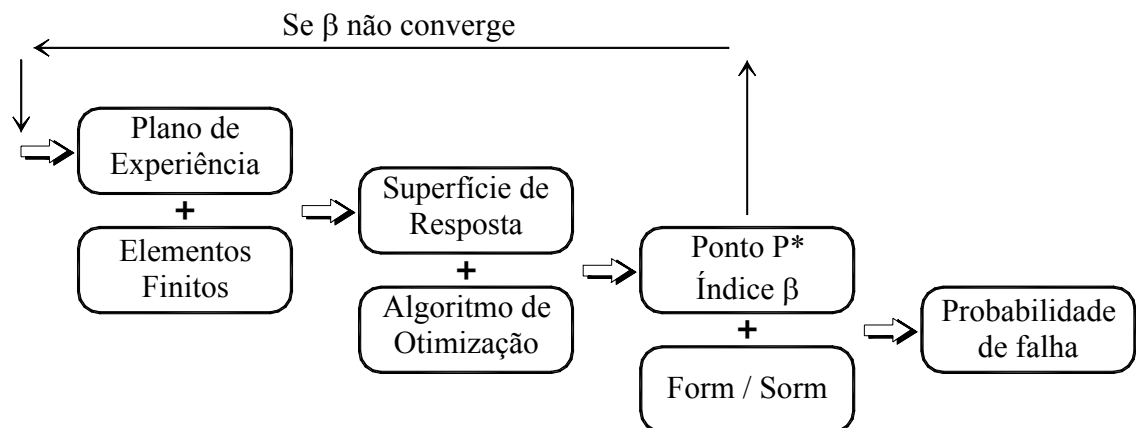


Fig. 3.8 – Procedimento geral para análise de confiabilidade com RSM

As etapas mostradas na Fig. 3.8 demonstram o procedimento generalizado para a obtenção da probabilidade de falha que, no caso do RSM, obrigatoriamente passa pela determinação do ponto de projeto. Ressalta-se que essa determinação é iterativa, pois existe uma verificação da convergência em  $\beta$ . Quando esta não se verifica, é necessário construir um novo conjunto de pontos, modificando ou não o plano de experiência. Essa

evolução é necessária para comparação de dois índices de confiabilidade entre duas iterações sucessivas. A Fig. 3.9 mostra a evolução das funções de estado limite com convergência em  $\beta$  atingida em quatro iterações.

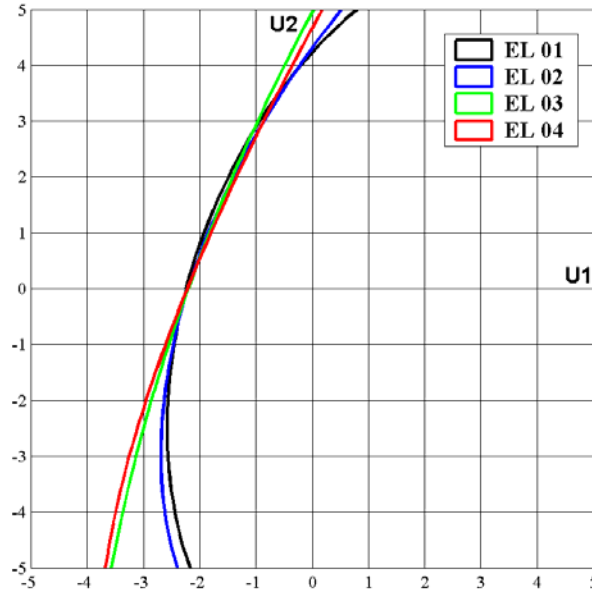


Fig. 3.9 – Exemplo de evolução do estado limite para convergência em  $\beta$

No programa implementado existem duas técnicas possíveis de evolução da superfície aproximadora: com e sem ponto de adaptação. Quando se usa ponto de adaptação, apenas um ponto do plano de experiência é eliminado de uma iteração para a outra. O critério para a eliminação do ponto é a sua distância até o ponto de projeto encontrado na iteração. Assim, o ponto mais afastado do  $P^*$  da iteração é eliminado e, portanto, apenas um ponto é necessário para gerar uma nova superfície. Esse ponto é tomado como o ponto  $P^*$  da iteração anterior. O procedimento com adaptação está mostrado na Fig. 3.10 para um PE composto.

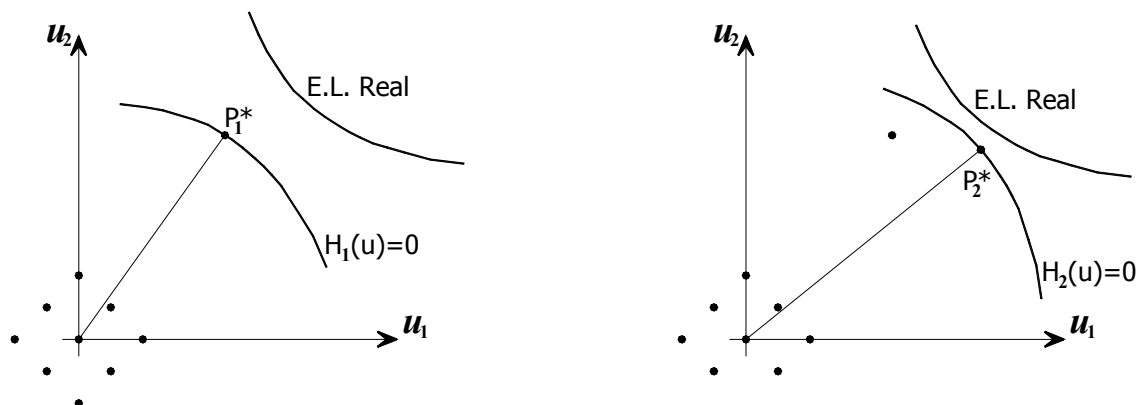


Fig. 3.10 – Evolução da superfície de resposta com ponto de adaptação

O algoritmo sem uso de ponto de adaptação elimina todos os pontos da iteração anterior e assim é necessário redefinir todos os pontos da superfície. Isso é feito com uma translação dos pontos do PE da iteração anterior, conforme pode ser visto na Fig. 3.11, também para um PE composto. O centro do PE, que coincide inicialmente com centro do sistema de coordenadas do espaço reduzido, deve ser transladado para o ponto  $P^*$  da iteração anterior, mantendo a distância relativa entre os pontos do PE.

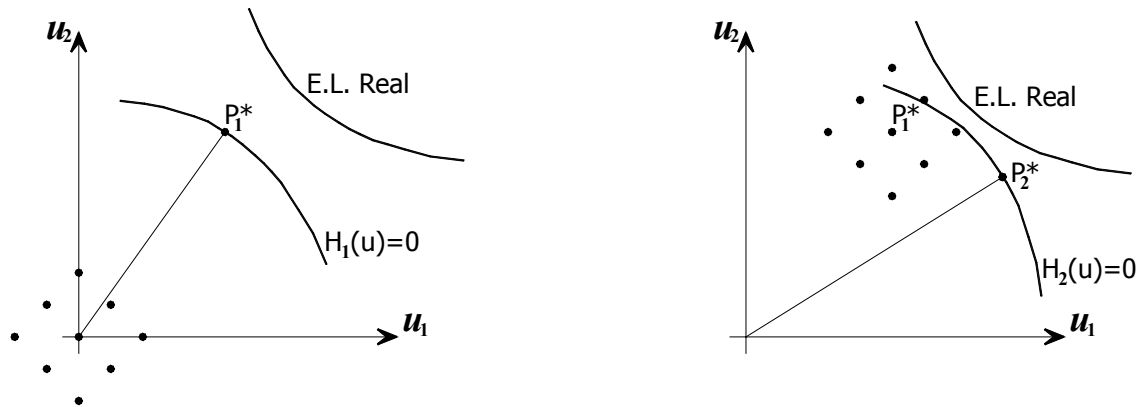


Fig. 3.11 – Evolução da superfície de resposta sem ponto de adaptação

### 3.5 Técnicas numéricas

#### 3.5.1 Técnica geral de regressão

Como já foi dito anteriormente, em uma primeira fase no método RSM não existem informações sobre a superfície de falha. Então, é necessária a utilização de um método de regressão para determinar os valores das constantes do polinômio aproximador da superfície resposta. Também já se sabe que a nuvem de pontos necessária para a montagem da regressão é obtida tomando-se as respostas mecânicas referente a cada par, ou trinca, ou quadra (e outros) de valores tomados nos pontos do plano de experiência a cada iteração do método. Já que o número de coeficientes depende do grau do polinômio e do número de variáveis aleatórias, foi necessário desenvolver um procedimento de regressão para uma função polinomial de grau e espaço quaisquer. O polinômio está no espaço de dimensão igual ao número de variáveis aleatórias mais um. O seu grau é previamente escolhido, muito embora seja normalmente adotado o valor dois. De posse do algoritmo de regressão, determina-se a equação da superfície de resposta aproximada.

A regressão é feita segundo o método dos mínimos quadrados. Portanto, minimiza-se o quadrado das distâncias entre as respostas mecânicas reais e aquelas

aproximadas pelo polinômio. Inicialmente explica-se como fazer uma regressão para um polinômio do segundo grau no espaço “n”. Posteriormente generaliza-se a formulação para um polinômio de grau qualquer. As técnicas aqui mostradas são uma compilação de outros trabalhos encontrados na literatura.

Representa-se o polinômio por  $Q(X)$ . As respostas ou pontos com os quais faz-se a regressão representa-se por  $\{R_i\}$ . Esse vetor contém as respostas mecânicas da estrutura. O polinômio  $Q(X)$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$Q(X) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i X_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_{ij} X_i X_j \quad (3.34)$$

onde “n” é o número de variáveis aleatórias.

Deve-se minimizar a soma dos quadrados das distâncias entre os pontos e a superfície aproximada. Então, o problema da regressão passa a ser um problema de otimização da seguinte forma:

$$\min_d = \min \sum_{k=1}^{np} (Q(X^k) - R^k)^2 \quad (3.35)$$

onde “np” é o número de respostas provenientes dos experimentos realizados. Como se deseja determinar o vetor de coeficientes  $\{A\}$ , escreve-se  $Q(X)$  da seguinte forma:

$$Q(X) = \{A\}^t \{X\} \quad (3.36)$$

onde:

$$\{A\}^t = \{a_0, a_1, \dots, a_n, b_{11}, \dots, b_{nn}, b_{12}, \dots, b_{(n-1)n}\} \quad (3.37)$$

$$\{X\}^t = \{1, X_1, \dots, X_n, X_1^2, \dots, X_n^2, X_1 X_2, \dots, X_{(n-1)} X_n\} \quad (3.38)$$

Logo, a função de minimização pode ser escrita como segue:

$$d = \min \sum_{k=1}^{np} \left( \left( \{A\}^t \{X^k\} - R^k \right) \left( \{X^k\}^t \{A\} - R^{k^t} \right) \right) \quad (3.39)$$

Desenvolvendo-se a Eq.(3.39) vem:

$$d = \min \sum_{k=1}^{np} \left( \{A\}^t \{X^k\} \{X^k\}^t \{A\} - 2R^k \{A\}^t \{X^k\} + R^{k^2} \right) \quad (3.40)$$

O ponto de mínimo deve satisfazer a condição de que o gradiente de “d” em relação aos coeficientes “ $a_i$ ” do vetor  $\{A\}$  seja nulo:

$$\nabla d(A) = \frac{\partial d(A)}{\partial \{A\}^t} = 0 \quad (3.41)$$

Desenvolvendo-se a Eq.(3.41) vem:

$$\nabla d(A) = \sum_{k=1}^{np} \left( 2 \{X^k\} \{X^k\}^t \{A\} - 2R^k \{X^k\} \right) = 0 \quad (3.42)$$

A Eq.(3.42) pode ser escrita na forma:

$$\nabla d(A) = \sum_{k=1}^{np} \left( \{X^k\} \{X^k\}^t \{A\} - R^k \{X^k\} \right) = 0 \quad (3.43)$$

A partir da Eq.(3.43) podem-se obter as seguintes matrizes:

$$[P] = \sum_{k=1}^{np} \left( \{X^k\} \{X^k\}^T \right) \quad (3.44)$$

$$[V] = \sum_{k=1}^{np} \left( R^k \{X^k\} \right) \quad (3.45)$$

Forma-se então o sistema de equações linear mostrado na Eq.(3.46). O vetor  $\{A\}$  contém os coeficientes procurados do polinômio aproximador.

$$[P]\{A\} = \{V\} \quad \text{ou} \quad \{A\} = [P]^{-1} \{V\} \quad (3.46)$$

Para generalizar o equacionamento para um polinômio de grau qualquer, o procedimento permanece o mesmo. Mudam-se apenas os vetores  $\{A\}$  e  $\{X\}$ , da seguinte maneira:

$$\{A\}^t = \{a_0, a_1, \dots, a_m\} \quad (3.47)$$

$$\{X\}^t = \left\{ X_1^{ME_{0,0}} \dots X_{nv}^{ME_{0,nv}}, \dots, X_1^{ME_{i,0}} \dots X_{nv}^{ME_{i,nv}}, \dots, X_1^{ME_{m,0}} \dots X_{nv}^{ME_{m,nv}} \right\} \quad (3.48)$$

onde a matriz ME é dada pela Eq.(3.49):

$$[ME]_{m \times nv} = \begin{bmatrix} i_{11} & i_{12} & \cdots & i_{1j} & \cdots & i_{1nv} \\ i_{21} & i_{22} & \cdots & i_{2j} & \cdots & i_{2nv} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ i_{k1} & i_{k2} & \cdots & i_{kj} & \cdots & i_{knv} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ i_{m1} & i_{m2} & \cdots & i_{mj} & \cdots & i_{mnv} \end{bmatrix} / i \in I \quad (3.49)$$

A matriz acima é a matriz dos expoentes do polinômio, cujas linhas “k” variando de “1” até “m” devem obedecer à relação dada pela expressão dada pela Eq.(3.50). Essa matriz também não pode conter duas linhas iguais.

$$[ME_{m \times nv}]_k = \sum_{j=1}^{nv} i_{kj} \leq \text{ngp} \quad i = 0, 1, \dots, \text{ngp} \quad (3.50)$$

onde “i” é expoente de cada variável “ $x_i$ ”, “nv” é número de variáveis aleatórias, “ngp” é o grau do polinômio e “m” é o número de coeficientes do polinômio, dado pela expressão:

$$m = \frac{(\text{ngp} + nv)!}{\text{ngp!} \times nv!} \quad (3.51)$$

Exemplo: Para três variáveis aleatórias e polinômio de grau 2, tem-se:

$$[ME]^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### 3.5.2 Otimização

#### 3.5.2.1 Particularidades do caso de confiabilidade

A definição do índice de confiabilidade passa por um problema de otimização, já que devemos encontrar uma distância mínima entre uma superfície e um ponto, conforme colocado na Eq.(3.31). A solução desse problema enfrenta problemas clássicos de otimização como, por exemplo, assegurar a convergência em direção a um mínimo global. Também não se conhece a superfície real de falha e logo não se sabe se é possível efetuar o cálculo de gradientes ou hessianas da função objetivo e nem quanto tempo será gasto na realização dos cálculos.

Não existe uma solução definitiva para essas questões, já que pertencem a um setor da matemática que ainda não apresenta respostas para todas as suas perguntas. A

otimização pode ser rápida e eficiente quando a função de estado limite for explícita e apresentar comportamento suave. Entretanto, ao invés disso, ela pode demandar recursos numéricos consideráveis ou mesmo não apresentar convergência. Isso pode acontecer com frequência com o uso de modelos mecânicos não-lineares. O número de chamadas dos modelos mecânicos é um bom indicador da eficiência.

Na análise de confiabilidade de componentes tomados isoladamente existe somente um cenário de falha e com isso um só estado limite. A distância entre a origem e esta função é um escalar positivo ou nulo, pois o ponto ótimo sem restrições é a própria origem, correspondendo à solução trivial. Como essa solução não interessa, e a restrição existe, temos a certeza de que o ponto ótimo pertence à curva de estado limite, exceto se o ponto de origem está situado no domínio de falha, o que é um caso particular e raro. Isto quer dizer que a restrição imposta  $H(u_k)=0$  é sempre ativa e vale  $H(u_k^*)=0$  no ponto  $P^*$ . Assim, torna-se mais interessante particularizar os métodos para as restrições de igualdade. O problema de otimização pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned} \text{Encontrar :} & \quad u_k^* \\ \text{Que minimiza :} & \quad d^2(u_k) = \sum_{k=1}^n (u_k^2) \\ \text{Sujeito a:} & \quad H(u_k) = 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

Nota-se que é apropriado minimizar o quadrado da distância, já que teremos apenas valores positivos e o cálculo das derivadas da função é mais simples. No caso da análise da confiabilidade de sistemas não existe regra de simplificação de restrições e o procedimento deve ser geral. Para “ $\perp$ ” restrições, o problema é:

$$\begin{aligned} \text{Encontrar :} & \quad u_k^* \\ \text{Que minimiza :} & \quad d^2(u_k) = \sum_{i=1}^n (u_k^2) \\ \text{Sujeito a:} & \quad H_i(u_k) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

A busca do ponto de projeto em sistemas é um problema de otimização com restrições de desigualdade e têm sua solução feita com técnicas de busca de restrições ativas, para as quais também se aplicam os métodos das restrições de igualdade. Os algoritmos são idênticos aos de componentes isolados adicionando-se uma estratégia de ativação e desativação de restrições. O procedimento de solução é realizado com o auxílio da introdução de multiplicadores de Lagrange.



### 3.5.2.2 Condições de otimalidade para componentes

O Lagrangeano associado ao problema da Eq.(3.52) é:

$$L(u_k, \lambda) = d^2(u_k) + \lambda H(u_k) \quad (3.54)$$

onde “ $\lambda$ ” é um multiplicador de Lagrange. O problema resume-se agora a:

$$\begin{aligned} \text{Encontrar :} & \quad u_k^*, \lambda^* \\ \text{Que minimizam :} & \quad L(u_k, \lambda) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Aplicando-se as condições de Kuhn-Tucker, obtém-se o sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(u_k, \lambda)}{\partial u_i} &= 0 \\ \frac{\partial L(u_k, \lambda)}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

A equação acima pode ser reduzida a:

$$\begin{aligned} 2u_i + \lambda \frac{\partial H(u_k)}{\partial u_i} &= 0 \\ H(u_k) &= 0 \end{aligned} \quad (3.57)$$

O mínimo encontrado será um ponto de sela, pois deve ser mínimo segundo  $u_k$  e um máximo segundo “ $\lambda$ ”.

### 3.5.2.3 Condições de otimalidade para sistemas

O Lagrangeano associado ao problema é:

$$L(u_k, \lambda_1) = d^2(u_k) + \sum_i \lambda_1 H_1(u_k) \quad (3.58)$$

onde “ $\lambda$ ” é um multiplicador de Lagrange que está associado ao estado limite  $H_1(u_k)$ , com  $\lambda_1=0$  se  $H_1(u_k)<0$  e  $\lambda_1>0$  se  $H_1(u_k)=0$ .

As condições de otimalidade de Kuhn-Tucker fornecem o sistema de equações com a correta estratégia de ativação ou desativação de restrições, conforme a Eq.(3.59):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L(\mathbf{u}_k, \lambda_1)}{\partial \mathbf{u}_i} &= 0 \\
\frac{\partial L(\mathbf{u}_k, \lambda_1)}{\partial \lambda_j} &= 0 \quad \text{Restrições ativas} \\
\lambda_1 &= 0 \quad \text{Restrições inativas}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

O sistema pode ser reduzido a:

$$\begin{aligned}
2\mathbf{u}_i + \sum_1 \lambda_1 \frac{\partial H_1(\mathbf{u}_k)}{\partial \mathbf{u}_i} &= 0 \\
\lambda_j H_j(\mathbf{u}_k) &= 0
\end{aligned} \tag{3.60}$$

#### 3.5.2.4 Generalidades sobre os algoritmos de otimização

Um algoritmo de otimização pode ser caracterizado quantitativamente e qualitativamente através de critérios convenientes de julgamento.

A classificação quantitativa pode ser medida pela convergência, que é traduzida pelo número de iterações necessárias para atingir o ponto ótimo com uma dada precisão. Ela pode ser local e global.

A convergência global traduz a capacidade do algoritmo de encontrar o ponto ótimo a partir de um ponto de partida inicial qualquer, que não se encontra necessariamente nas vizinhanças do ponto ótimo. A convergência não é afetada pela estimativa inicial do ponto de cálculo. Já a convergência local mede a capacidade do algoritmo de aproximar-se de um extremo a partir de sua vizinhança.

Um algoritmo é dito convergente se:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} = 0 \tag{3.61}$$

onde  $\varepsilon^{(k)}$  é o erro nas variáveis na iteração “k”, dado pela seguinte norma:

$$\varepsilon^{(k)} = \left\| \{\mathbf{u}\}^k - \{\mathbf{u}\}^{k-1} \right\| \tag{3.62}$$

Introduzindo-se um erro relativo dado pela Eq.(3.63)

$$\varepsilon^{-(k)} = \left\| \{\mathbf{u}\}^k - \{\mathbf{u}^*\} \right\| \tag{3.63}$$

a taxa de convergência é uma medida da diminuição do erro entre duas iterações sucessivas que pode ser traduzida pela medida “ $\gamma$ ”, conforme exposto na Eq.(3.64):

$$\begin{aligned}
\text{Convergência Linear :} & \quad \varepsilon^{-(k+1)} \leq \gamma \varepsilon^{-k} & \text{Com } 0 < \gamma < 1 \\
\text{Convergência Super Linear :} & \quad \varepsilon^{-(k+1)} \leq \gamma_k \varepsilon^{-k} & \text{Com } \lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = 0 \\
\text{Convergência Quadrática :} & \quad \varepsilon^{-(k+1)} \leq \gamma \varepsilon^{-k}{}^2 & \text{Com } \gamma \in \mathbb{R}
\end{aligned} \tag{3.64}$$

Naturalmente, a aproximação do ponto ótimo é mais rápida quando a convergência é quadrática. Porém o número de operações a executar é grande para funções com um número elevado de variáveis. Convém salientar que os métodos com taxas de convergência quadrática, tais como os de Newton, não são necessariamente convergentes e que os métodos mais robustos, como os baseados em gradientes não são sempre eficazes, apresentando taxas de convergência lineares. Geralmente são necessárias introduções de modificações a fim de atender a um melhor rendimento entre a eficácia e a robustez. De um modo pragmático, a escolha de um método de otimização já é por si só um problema de otimização entre recursos de informática e a quantidade de informação disponível para o problema.

Uma classificação razoável para a avaliação da qualidade dos algoritmos de otimização pode ser dada pelos critérios de eficácia, robustez e generalidade. A eficácia mede a quantidade de vezes que o método efetua chamadas ao modelo mecânico para atingir a convergência em uma determinada tolerância. A robustez traduz a desenvoltura do método para encontrar o ponto ótimo, qualquer que seja a configuração inicial, ou o ponto de partida do algoritmo. A generalidade mede a capacidade do método de tratar problemas de grande complexidade, elevado número de variáveis ou estados limites complexos, para os recursos computacionais disponíveis.

Certos métodos de otimização utilizam-se somente de realizações da função de desempenho (ordem zero), outros se baseiam no cálculo de gradientes (ordem um) e outros na determinação das hessianas (ordem dois). Usando-se métodos de ordem elevada diminui-se o número de iterações, mas o tempo gasto em cada uma das iterações aumenta. A escolha depende da natureza do problema e das possibilidades oferecidas pelo modelo mecânico tais como curvaturas, gradientes e hessianas.

### 3.5.2.5 Princípios dos algoritmos de otimização

A idéia fundamental dos algoritmos de otimização consiste em determinar a melhor direção de decréscimo da função cujo extremo será encontrado e percorrer uma

certa distância segundo esta direção, a partir de um ponto inicial. Este procedimento deve ser feito repetidas vezes. A escolha dessa direção advém de informações sobre a função e suas derivadas primeiras ou segundas. A distância a ser percorrida na direção escolhida é determinada com a otimização de uma função auxiliar unidimensional, ou função de mérito. Os valores do ponto de cálculo em uma iteração “k” se escrevem na forma:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \{\mathbf{u}\}^{(k)} + \alpha^{(k)} \{\mathbf{S}\}^{(k)} \quad (3.65)$$

onde  $\alpha^{(k)} > 0$  é a distância a percorrer e  $\{\mathbf{S}\}^{(k)}$  é a direção de descida.

O caminho mais curto para atingir o próximo ponto de cálculo é conhecido, mas não se sabe que distância necessita ser percorrida. O ponto ótimo pode ser facilmente encontrado por sorte, ou mais freqüentemente, haver divergência da solução. Isso é normalmente observado quando o ponto de cálculo encontra-se próximo do ponto ótimo, onde os gradientes têm valores próximos de zero.

Para realizar uma busca apropriada, um controle rigoroso da distância  $\alpha^{(k)}$  mostrada na Eq.(3.65) deve ser efetuado. Boas escolhas dessa distância podem acelerar a convergência. Em geral, calcula-se essa distância com a otimização de uma função de mérito  $\psi(\alpha^{(k)})$ . Esse problema pode ser enunciado como:

$$\begin{aligned} \text{Encontrar :} & \quad \alpha^{(k)} \\ \text{Que minimiza :} & \quad \psi \left[ \{\mathbf{u}\}^{(k)} + \alpha^{(k)} \{\mathbf{S}\}^{(k)} \right] \end{aligned} \quad (3.66)$$

A otimização dessa função unidimensional acrescenta um tempo de processamento ao algoritmo, mas permite reduzir o número total de iterações. No final, o balanço é normalmente positivo.

Para a solução dos problemas de otimização restrita, numerosos algoritmos podem ser encontrados na literatura. Dentre eles, os mais conhecidos (mas nem sempre mais utilizados) são:

- Métodos de ordem zero: Bisseção;
- Métodos de primeira ordem: Gradiente projetado, Método das Penalidades, Lagrangeano aumentado;
- Métodos de segunda ordem: Newton, Programação quadrática seqüencial.

Existem ainda alguns métodos híbridos, onde são feitas modificações para evitar determinações de derivadas de ordem mais elevada. Dentre eles, apenas o método de Abdo-Rackwitz [171] será comentado.

No caso particular de confiabilidade, foram feitas adaptações a alguns desses métodos, obtendo-se os conhecidos algoritmos de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler, e o de Abdo-Rackwitz. Os métodos de ordem zero não necessitam de cálculo de gradientes, mas apresentam convergência bastante lenta, pois demandam muitas chamadas ao modelo mecânico. Nos problemas de confiabilidade são praticamente inviáveis e por isso também não serão descritos detalhadamente. Apenas alguns métodos serão expostos nas próximas seções, extraídos de um conjunto de trabalhos da literatura.

### 3.5.2.6 Método do gradiente projetado

O princípio deste método é buscar o ponto ótimo movendo o ponto de busca sobre as equações das restrições ativas. Elas constituem um espaço ativo no qual se resolve o problema da otimização. O procedimento divide-se em duas fases, conforme ilustrado na Fig. 3.12:

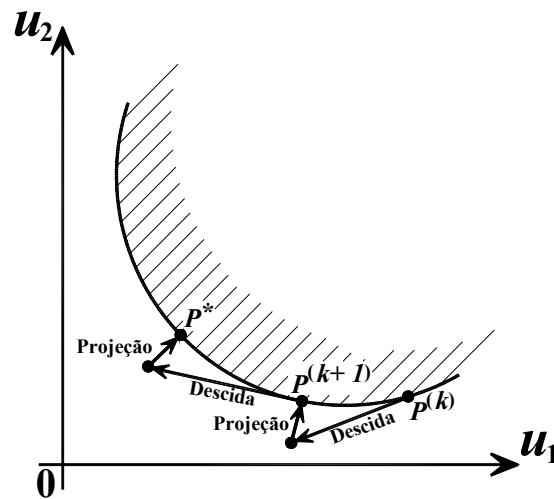


Fig. 3.12 – Método do gradiente projetado

Fase de descida: define-se a direção que minimiza a função objetivo, incluindo-se a restrição imposta. Isto permite deslocar o ponto de cálculo na direção de minimização mais eficaz (a direção de maior descida é a oposta à direção do gradiente). Se a trajetória for retilínea, o ponto de cálculo deverá sair da região da restrição (exceto se a restrição for linear e coincidente com a direção escolhida).

Fase de projeção: para evitar que as restrições ativas não sejam violadas, uma correção da posição do ponto se faz necessária. Esta correção é feita com a projeção do

ponto de cálculo sobre a restrição ativa, em uma reta normal a ela, que passa pelo ponto de cálculo.

O problema pode ser formalmente colocado como:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar :} & \quad d^2(\mathbf{u}_k) \\ \text{Sujeito a :} & \quad \langle \nabla_{\mathbf{u}} H \rangle \{\mathbf{u}\} + \mathbf{c} = 0 \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde o símbolo  $\langle \bullet \rangle$  indica transposição.

O Lagrangeano associado ao problema é:

$$L(\mathbf{u}_k, \lambda) = d^2(\mathbf{u}_k) + \lambda (\langle \nabla_{\mathbf{u}} H \rangle \{\mathbf{u}\} + \mathbf{c}) \quad (3.68)$$

A primeira condição de Kuhn-Tucker fornece:

$$\{\nabla_{\mathbf{u}} d^2\} + \lambda \{\nabla_{\mathbf{u}} H\} = \{0\} \quad (3.69)$$

Já que a restrição não é linear, o ponto de cálculo não está sempre sobre a restrição, e logo existe um resíduo na equação anterior, que é determinado por:

$$\{\mathbf{R}\} = \{\nabla_{\mathbf{u}} d^2\} + \lambda \{\nabla_{\mathbf{u}} H\} \quad (3.70)$$

Para permanecer o mais próximo possível de uma restrição ativa, deve-se minimizar esse resíduo. Aplicando-se o método dos mínimos quadrados, vem:

$$\|\{\mathbf{R}\}\{\mathbf{R}\}\|^2 = \lambda^2 \langle \nabla_{\mathbf{u}} H \rangle \{\nabla_{\mathbf{u}} H\} + 2\lambda \langle \nabla_{\mathbf{u}} H \rangle \{\nabla_{\mathbf{u}} d^2\} + \langle \nabla_{\mathbf{u}} d^2 \rangle \{\nabla_{\mathbf{u}} d^2\} \quad (3.71)$$

Derivando-se o termo da esquerda em relação a “ $\lambda$ ” vem:

$$\langle \nabla_{\mathbf{u}} H \rangle \{\nabla_{\mathbf{u}} H\} \lambda + \langle \nabla_{\mathbf{u}} H \rangle \{\nabla_{\mathbf{u}} d^2\} = 0 \quad (3.72)$$

É possível agora determinar o valor do multiplicador de Lagrange:

$$\lambda = -[\langle \nabla_{\mathbf{u}} H \rangle \{\nabla_{\mathbf{u}} H\}]^{-1} \langle \nabla_{\mathbf{u}} H \rangle \{\nabla_{\mathbf{u}} d^2\} \quad (3.73)$$

Portanto, a direção de descida é:

$$\{\mathbf{S}\} = \{\nabla_{\mathbf{u}} d^2\} - [\langle \nabla_{\mathbf{u}} H \rangle \{\nabla_{\mathbf{u}} H\}]^{-1} \langle \nabla_{\mathbf{u}} H \rangle \{\nabla_{\mathbf{u}} d^2\} \quad (3.74)$$

onde o primeiro termo vem da minimização da função objetivo e o segundo é oriundo da restrição a satisfazer.

### 3.5.2.7 Método das penalidades

Este método é baseado na introdução de funções de penalização que são aplicadas sempre que uma restrição é violada. O problema é:

$$\text{Minimizar : } \quad \Pi(\{u\}, r) = d^2(\{u\}) + \psi(r, H(\{u\})) \quad (3.75)$$

onde “r” é o parâmetro de penalidade e “ $\psi$ ” é uma função de penalização ou de mérito. As penalidades podem ser de três tipos:

- Exterior: aplica-se a penalização se a restrição é violada;
- Interior: aplica-se a penalização antes da restrição ser violada;
- Estendida: aplica-se a penalização próximo ao limite da restrição.

Várias formas para a função de penalização “ $\psi$ ” podem ser encontradas na literatura, como por exemplo:

$$\begin{aligned} \text{Exterior : } & \quad r \|H(\{u\})\| \\ \text{Interior : } & \quad r \frac{1}{H(\{u\})} \\ & \quad r \log(H(\{u\})) \\ \text{Exterior} & \quad r f(H(\{u\})) \quad \text{com} \quad (3.76) \\ & \quad f = \frac{1}{H(\{u\})} \quad \text{Se } H(\{u\}) \geq H_0 \\ & \quad f = \frac{1}{H_0 \left[ 2 - \frac{H(\{u\})}{H_0} \right]} \quad \text{Se } H(\{u\}) \leq H_0 \end{aligned}$$

Geralmente, a função de penalização torna o sistema de equações mal condicionado. Por isso, os métodos de primeira ordem podem apresentar convergência lenta. Também se podem encontrar na literatura afirmações de que esses métodos são mais lentos ainda nos casos de restrições de igualdade. Por isso não são muito usados nos problemas de confiabilidade.

### 3.5.2.8 Método do Lagrangeano aumentado

O problema de mau condicionamento do sistema existente no método das penalidades pode ser evitado com a adoção de uma função de mérito aplicada não à função objetivo, mas ao Lagrangeano do sistema. Essa é a idéia do presente método.

$$\text{Minimizar: } \Pi(\{u\}, \lambda, r) = d^2(\{u\}) + \lambda H(\{u\}) + \frac{1}{2} r [H(\{u\})]^2 \quad (3.77)$$

Esse procedimento mostrou-se melhor do que os métodos de penalidades em estado puro. Porém, a escolha de “r” e “λ” é difícil e o método não é geral.

### 3.5.2.9 Método de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiessler

Dentre os processos de otimização aplicados à confiabilidade, destaca-se o presente algoritmo, comumente chamado de algoritmo de Rackwitz-Fiessler. Ele leva em conta as particularidades do problema de busca do ponto de projeto e consiste em uma adaptação de um algoritmo de otimização de primeira ordem para a busca de  $P^*$ , conforme definido por Hasofer e Lind. É um procedimento eficaz mesmo se a convergência não é garantida. Algumas modificações permitiram construir um algoritmo globalmente convergente. Para encontrar o ponto de projeto, toma-se na iteração “k” um ponto  $P^{(k)}$  e suas coordenadas  $\{u\}^{(k)}$ . Este ponto não necessita pertencer à restrição e portanto, a equação  $H(u_i)$  pode ser diferente de zero. Desenvolvendo-se a função em série de Taylor em primeira ordem em torno deste ponto temos:

$$H(u_i) = H(u_i^{(k)}) + \langle \nabla H(u_i) \rangle_{u^{(k)}} (\{u\} - \{u\}^{(k)}) + O^2 \quad (3.78)$$

A equação do hiper-plano tangente à função  $H(u_i)$  no ponto  $\{u\}^{(k)}$  é:

$$\langle \nabla H(u_i) \rangle_{u^{(k)}} \{u\} + c = 0 \quad (3.79)$$

O ponto  $P^{(k+1)}$  deve satisfazer a condição de estar sobre a função de estado limite:

$$H(u_i^{(k+1)}) = H(u_i^{(k)}) + \langle \nabla H(u_i) \rangle_{u^{(k)}} (\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}) = 0 \quad (3.80)$$

Dividindo-se a Eq.(3.80) pela norma do gradiente e introduzindo-se o vetor de cossenos diretores abaixo:

$$\{\alpha\} = \frac{\{\nabla H(u_i)\}}{\|\nabla H(u_i)\|} \quad (3.81)$$

vem:

$$\frac{H(u_i^{(k)})}{\|\nabla H(u_i)\|_{u^{(k)}}} + (\langle u \rangle^{(k+1)} - \langle u \rangle^{(k)}) \{\alpha\}^{(k)} = 0 \quad (3.82)$$



Organizando-se, vem:

$$\langle \mathbf{u} \rangle^{(k+1)} \{ \alpha \}^{(k)} = \langle \mathbf{u} \rangle^{(k)} \{ \alpha \}^{(k)} - \frac{H(\mathbf{u}_1^{(k)})}{\| \nabla H(\mathbf{u}_1) \|_{\mathbf{u}^{(k)}}} \quad (3.83)$$

Se o algoritmo é convergente, na iteração “ $k \rightarrow \infty$ ”, teremos:

$$\begin{aligned} d\{ \mathbf{u}_1 \}^{(k)} &= \beta \\ \{ \mathbf{u} \} &= -\beta \{ \alpha \} \end{aligned} \quad (3.84)$$

Ou:

$$\{ \mathbf{u} \}^{(k+1)} = -\beta^{(k)} \{ \alpha \}^{(k)} \Rightarrow \beta^{(k)} = -\{ \mathbf{u} \}^{(k+1)} \{ \alpha \}^{(k)} \quad (3.85)$$

E portanto, pode-se re-escrever a Eq.(3.83):

$$\beta^{(k)} = -\left( \langle \mathbf{u} \rangle^{(k)} \right) \{ \alpha \}^{(k)} + \frac{H(\mathbf{u}_1^{(k)})}{\| \nabla H(\mathbf{u}_1) \|_{\mathbf{u}^{(k)}}} \quad (3.86)$$

Para interpretar fisicamente o algoritmo, basta explicitar a Eq.(3.83):

$$\{ \mathbf{u} \}^{(k+1)} = \left( \langle \mathbf{u} \rangle^{(k)} \{ \alpha \}^{(k)} \right) \{ \alpha \}^{(k)} - \frac{H(\mathbf{u}_1^{(k)})}{\| \nabla H(\mathbf{u}_1) \|_{\mathbf{u}^{(k)}}} \{ \alpha \}^{(k)} \quad (3.87)$$

A Eq.(3.87) possui dois termos. O primeiro é responsável pela projeção de  $P^{(k)}$  em  $P^{(k')}$ . Este ponto está contido na reta normal ao hiper-plano tangente que passa pela origem do sistema de coordenadas. O segundo termo é uma correção segundo o gradiente e projeta o ponto  $P^{(k')}$  em  $P^{(k+1)}$ . As duas parcelas estão indicadas na Fig. 3.13.

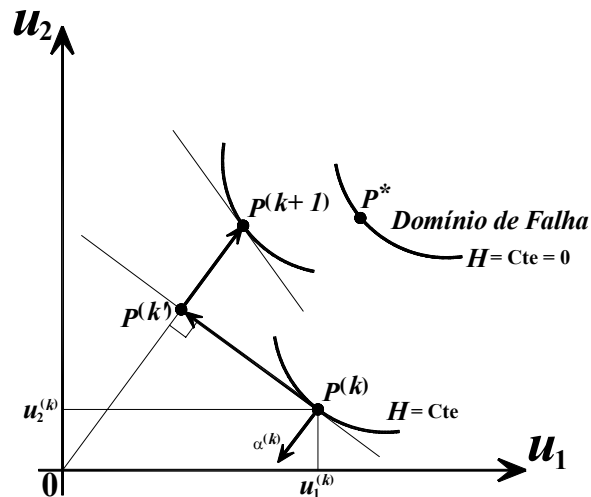


Fig. 3.13 – Algoritmo de Rackwitz-Fiessler

O algoritmo pode ser resumido nos seguintes passos:

- 1 – Escolha de um ponto inicial  $\{u\}^0$ , que na ausência de maiores informações, é tomado como a origem do espaço;
- 2 – Calcular a função de estado limite  $H(u_1^{(k)})$ ;
- 3 – Calcular o vetor gradiente da função de estado limite  $\{\nabla H(u_1)^{(k)}\}$ , sua norma  $\|\{\nabla H(u_1)\}^{(k)}\|$  e o vetor de co-senos diretores  $\{\alpha\}^{(k)}$ ;
- 4 – Calcular o índice  $\beta$  da iteração “k” através da Eq.(3.86);
- 5 – Calcular o ponto de projeto da iteração através da Eq.(3.85);
- 6 – Se a condição  $\|\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}\| \leq \varepsilon$  for verdadeira, terminar o cálculo. Caso contrário fazer  $k = k + 1$  e voltar ao passo 2.

Depois de verificada a convergência, verifica-se que  $\{u\}^{(k+1)} \cong \{u\}^{(k)}$  e que  $H(u_1^{(k)}) \cong 0$ .

Um critério de parada é obtido a partir da norma do vetor  $\{u\}$ , como descrito no passo 6. Um critério melhor pode ser obtido a partir de uma tolerância aplicada a todos os componentes do vetor  $\{u\}$ .

Este algoritmo e suas variações consistem em um dos mais utilizados no campo da confiabilidade, pois permite determinar o índice de confiabilidade de um problema com função de estado limite desconhecida.

### 3.5.2.10 Método de Newton

Constituindo-se em um método de segunda ordem, esse método apresenta um desenvolvimento até a segunda derivada em série de Taylor da função objetivo em torno do ponto de cálculo  $\{u\}^{(k)}$ . Embora não sendo sempre convergente, é um algoritmo rápido. O problema de otimização pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar : } & \langle \nabla d^2 \rangle \{\Delta u\} + \frac{1}{2} \langle \Delta u \rangle [\nabla^2 d^2] \{\Delta u\} \\ \text{Sujeito a : } & \langle \nabla H \rangle \{\Delta u\} + c = 0 \end{aligned} \quad (3.88)$$

O Lagrangeano associado ao problema é:

$$L(\{\Delta u\}, \lambda) = \langle \nabla d^2 \rangle \{\Delta u\} + \frac{1}{2} \langle \Delta u \rangle [\nabla^2 d^2] \{\Delta u\} + \lambda (\langle \nabla H \rangle \{\Delta u\} + c) \quad (3.89)$$

As condições de Kuhn-Tucker trazem o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} [\nabla^2 d^2] & \{\nabla H\} \\ \langle \nabla H \rangle & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta u\} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\{\nabla d^2\} \\ -c \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

Sabendo-se que  $\langle \nabla d^2 \rangle = 2\langle u \rangle$  e que  $[\nabla^2 d^2] = 2[I]$ , temos:

$$\begin{bmatrix} 2[I] & \{\nabla H\} \\ \langle \nabla H \rangle & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta u\} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\{u\} \\ -c \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

Solucionando-se o sistema acima, obtém-se o ponto ótimo que satisfaz as restrições impostas.

### 3.5.2.11 Método da programação quadrática seqüencial (SQP)

Esse método utiliza informações sobre os gradientes da função e suas curvaturas.

O problema é o seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar : } & \|\{u\}\|^2 \\ \text{Sujeito a : } & H(u_1) = 0 \end{aligned} \quad (3.92)$$

O Lagrangeano associado é:

$$L(\{u\}, \lambda) = \frac{1}{2} \|\{u\}\|^2 + \lambda H(u_1) \quad (3.93)$$

As condições de Kuhn-Tucker fornecem:

$$\begin{aligned} \nabla_u L(\{u\}, \lambda) &= 0 \\ H(u_1) &= 0 \end{aligned} \quad (3.94)$$

Desenvolvendo-se a Eq.(3.94) e expandindo-a em série de Taylor vem:

$$\begin{aligned} \{u\}^{(k)} + \lambda \{\nabla_u H(u_1)\}^{(k)} + [\nabla_u^2 L(\{u\}, \lambda)]^{(k)} \{\Delta u\} &= 0 \\ H(u_1) = H(u_1)^{(k)} + \langle \nabla_u H(u_1) \rangle^{(k)} \{\Delta u\} &= 0 \end{aligned} \quad (3.95)$$

Pode-se então montar o sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} [\nabla_u^2 L(\{u\}, \lambda)]^{(k)} & \{\nabla_u H(u_1)\}^{(k)} \\ \langle \nabla_u H(u_1) \rangle^{(k)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta u\} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\{u\}^{(k)} \\ -H(u_1)^{(k)} \end{bmatrix} \quad (3.96)$$

A resolução do sistema iterativo acima permite identificar a direção de descida  $\{\Delta u\}$ . Este algoritmo é eficaz e robusto. Seu único problema é que ele demanda o cálculo de Hessianas, o que representa um custo computacional não desprezível quando se tratam de problemas com número elevado de variáveis aleatórias. Vários autores propuseram modificações no algoritmo a fim de evitar a determinação das derivadas segundas. Porém, normalmente estes procedimentos tornam-no menos robusto.

### 3.5.2.12 Método de Abdo-Rackwitz

Os métodos híbridos surgiram pra tentar aproveitar a simplicidade dos métodos de primeira ordem e também a rápida convergência dos métodos de segunda ordem. Dentre os métodos híbridos, o de Abdo-Rackwitz apresenta boa relação custo x convergência.

Para evitar o cálculo de Hessianas, o método propõe a supressão da contribuição das derivadas segundas do estado limite na formulação SQP. A Hessiana do Lagrangeano é aproximada da seguinte maneira:

$$[\nabla_u^2 L(\{u\}, \lambda)] \cong \nabla^2 \left( \frac{1}{2} \|\{u\}\|^2 \right) = 2[I] \quad (3.97)$$

O Sistema de equações se resume a:

$$\begin{bmatrix} 2[I] & \{\nabla_u H(u_i)\}^{(k)} \\ \langle \nabla_u H(u_i) \rangle^{(k)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\Delta u\} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\{u\}^{(k)} \\ -H(u_i)^{(k)} \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

que corresponde à fórmula de Newton, na Eq.(3.91).

A vantagem desse método está no ganho de tempo devido à eliminação do cálculo das Hessianas. Estudos já realizados demonstraram que o método é bastante eficiente para um número elevado de variáveis aleatórias. Segundo a literatura, ele converge um pouco mais lentamente do que o SQP. No entanto, ele se apresenta muito mais rápido e mais robusto do que o algoritmo de Rackwitz-Fiessler.

### 3.5.2.13 Comentários finais sobre os procedimentos de otimização

É difícil definir um procedimento de otimização como sendo o melhor para a busca do ponto de projeto. Para cada problema certos métodos são melhores que outros. De um modo global, os métodos baseados em gradientes se mostram robustos, com tempo de processamento elevado em casos de muitas variáveis, já que os gradientes são

normalmente determinados por diferenças finitas. O procedimento de Rackwitz-Fiessler faz bom uso das características particulares do problema, o que o faz bastante econômico, sem, no entanto assegurar a convergência em todas as situações. Uma outra conclusão que se apresenta é aquela de que o método de Abdo-Rackwitz aparenta ter a melhor combinação entre eficácia e robustez.

### 3.6 Tratamento de distribuições correlacionadas e não Gaussianas

#### 3.6.1 Generalidades

Na definição do índice de confiabilidade  $\beta$  é obrigatória a sua determinação em um espaço de variáveis aleatórias normalizado e não correlacionado. Assim, é mais adequado escrever as funções de estado limite nesse espaço. As distribuições de variáveis são ditas independentes quando a sua frequência de ocorrência não se modifica em virtude da presença de outra variável, o que não acontece nas variáveis dependentes ou correlacionadas. Em geral, depois de efetuadas as devidas associações estatísticas, as variáveis aleatórias apresentam distribuições de probabilidades expressas no espaço físico. Então, é necessário o uso de transformações isoprobabilísticas e suas inversas para a implementação do modelo confiabilístico. Essas transformações permitem escrever no espaço padrão as associações descritas no espaço físico e vice-versa. Também permitem a passagem de distribuições correlacionadas para as independentes equivalentes. Em seguida mostram-se algumas transformações. A adequação dessas técnicas depende de cada caso e é uma decisão estritamente técnica.

#### 3.6.2 Variáveis aleatórias independentes

Se as “i” variáveis aleatórias são independentes, efetua-se a transformação separadamente em cada uma delas, igualando-se as funções acumulativas em um ponto qualquer:

$$\Phi(u_i) = F_{x_i}(x_i) \quad (3.99)$$

Assim, as transformações direta e inversa são dadas respectivamente por:

$$T(X) \Rightarrow u_i = \Phi^{-1}(F_{x_i}(x_i)) \quad (3.100)$$

$$T^{-1}(U) \Rightarrow x_i = F_{x_i}^{-1}(\Phi(u_i)) \quad (3.101)$$

Em termos de implementação computacional, o índice  $\beta$  deve ser calculado com uma minimização no espaço normal padrão. Então, as variáveis  $u_i$  escritas nesse espaço tem distribuição normal com média zero e desvio padrão unitário. Portanto, as distribuições não podem ser integradas analiticamente e conseqüentemente essas transformações, que dependem de integração para a determinação das funções cumulativas ponto a ponto, devem ser efetuadas de maneira numérica. Existem inúmeras propostas para a realização dessas integrais, já que nos casos práticos geralmente as funções de distribuição adotadas em geral não possibilitam integração analítica.

### 3.6.2.1 Distribuição normal equivalente

Nessa técnica as variáveis sofrem a transformação isoprobabilística separadamente e assim, se as variáveis são independentes, esse método fornece a solução exata. Logo, nos casos onde não há correlação, o procedimento descrito a seguir é fortemente indicado.

O método consiste apenas em encontrar os parâmetros de uma distribuição normal equivalente, igualando-se a distribuições cumulativas. Com esses dados a transformação direta e a inversa são facilmente aplicáveis. Este é uma das técnicas mais simples de transformação

Os parâmetros da distribuição equivalente  $\mu_i$  e  $\sigma_i$  devem ser determinados segundo uma seqüência de passos. Primeiro, igualam-se as funções de distribuição acumuladas em um ponto qualquer:

$$\Phi\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) = F_{x_i}(x_i) \quad (3.102)$$

onde  $\Phi$  é a função cumulativa normal.

Em seguida, igualam-se as funções de densidade no ponto escolhido. Essas funções são obtidas por meio da derivada da Eq.(3.102) em relação à variável  $x_i$ , conforme a expressão abaixo:

$$\frac{1}{\sigma_i} \varphi\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right) = f_{x_i}(x_i) \quad (3.103)$$

onde  $\varphi$  é a função normal equivalente.

A partir da Eq.(3.102) pode-se escrever:

$$\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} = \Phi^{-1} \left[ F_{x_i}(x_i) \right] \quad (3.104)$$

Assim, o desvio padrão da distribuição normal equivalente é obtido com a substituição da Eq.(3.104) na Eq.(3.103):

$$\sigma_i = \frac{\varphi \left( \Phi^{-1} \left[ F_{x_i}(x_i) \right] \right)}{f_{x_i}(x_i)} \quad (3.105)$$

Reescrevendo-se a Eq.(3.103) obtém-se a média da distribuição normal equivalente, e portanto os dois parâmetros da distribuição equivalente estão determinados.

$$\mu_i = x_i - \sigma_i \Phi^{-1} \left[ F_{x_i}(x_i) \right] \quad (3.106)$$

### 3.6.3 Variáveis aleatórias correlacionadas

No trabalho de Mohamed,A. et al. [172] são estabelecidas as bases para as transformações isoprobabilísticas partindo de distribuições correlacionadas quaisquer. Pode-se utilizar tanto a transformação descrita no trabalho de Rosenblatt,M. [173] quanto a formulação do artigo de Nataf,A. [174]. Teoricamente, a primeira é a melhor solução, pois opera sobre a lei de distribuição conjunta que mede a freqüência de todas as variáveis aleatórias ao mesmo tempo. Porém, na maioria dos casos reais é impossível realizar a associação estatística com o emprego de uma função conjunta englobando todas as variáveis desejadas. Em geral apenas os valores médios, os desvios padrão, a matriz de correlação  $\rho_{ij}$  e as funções de distribuição marginal são conhecidos. Com esses dados à disposição, a transformação de Nataf é a mais indicada.

#### 3.6.3.1 Transformação de Rosenblatt

Conforme já dito, essa transformação é indicada quando a lei de distribuição conjunta correlacionada é conhecida. Ela é dada pela Eq.(3.107):

$$T(\mathbf{X}) \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{u}_1 = \Phi^{-1} [F_{x_1}(x_1)] \\ \mathbf{u}_2 = \Phi^{-1} [F_{x_2}(x_2 | x_1)] \\ \vdots \\ \mathbf{u}_i = \Phi^{-1} [F_{x_i}(x_i | x_1, x_2, \dots, x_{i-1})] \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n = \Phi^{-1} [F_{x_n}(x_n | x_1, x_2, \dots, x_{n-1})] \end{cases} \quad (3.107)$$

onde  $F_{x_i}(x_i | x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1})$  é a função de distribuição condicional de  $x_i$  dada por:

$$F_{x_i}(x_i | x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) = \frac{\int_{-\infty}^{x_i} f_{x_1, \dots, x_{i-1}, t}(x_1, \dots, x_{i-1}, t) dt}{f_{x_1, \dots, x_{i-1}}(x_1, \dots, x_{i-1})} \quad (3.108)$$

em que “t” é a variável auxiliar para a representação da distribuição normal cumulativa.

A relação inversa da transformação de Rosenblatt é:

$$T^{-1}(\mathbf{U}) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = F_{x_1}^{-1} [\Phi(u_1)] \\ x_2 = F_{x_2}^{-1} [\Phi(u_2 | u_1)] \\ \vdots \\ x_i = F_{x_i}^{-1} [\Phi(u_i | u_1, u_2, \dots, u_{i-1})] \\ \vdots \\ x_n = F_{x_n}^{-1} [\Phi(u_n | u_1, u_2, \dots, u_{n-1})] \end{cases} \quad (3.109)$$

### 3.6.3.2 Transformação de Nataf

A transformação de Nataf é a ideal nos casos onde apenas as distribuições marginais correlacionadas são conhecidas. Se existem duas variáveis aleatórias físicas correlacionadas  $x_1$  e  $x_2$  de funções marginais  $F_{x_i}(x_i)$  e  $\hat{u}_1$  e  $\hat{u}_2$  são essas mesmas variáveis escritas em um espaço normal padrão correlacionado, a relação entre essas variáveis pode ser escrita pela seguinte transformação:

$$\hat{u}_i = \Phi^{-1}(F_{x_i}(x_i)) \quad i = 1, 2 \quad (3.110)$$

Segundo a regra da transformação de Nataf, existe uma função de densidade conjunta que pode ser associada às variáveis  $x_1$  e  $x_2$ :

$$f_{x_1, x_2}(x_1, x_2) = \varphi_2(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \rho_{0,12}) \frac{f_{x_1}(x_1) f_{x_2}(x_2)}{\varphi(\hat{u}_1) \varphi(\hat{u}_2)} \quad (3.111)$$



onde  $\varphi_2(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \rho_{0,12})$  é a função de densidade no espaço normal padrão, sempre de dimensão 2 (as variáveis são sempre tomadas duas a duas) com média zero, desvio padrão unitário e correlação igual a  $\rho_{0,12}$ .

A relação entre  $\rho_{0,12}$  e  $\rho_{12}$  está implícita na definição de correlação. Portanto, pode-se exprimir  $\rho_{0,12}$  em função das densidades marginais de  $x_i$ , ou seja:

$$\rho_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1} \right) \left( \frac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2} \right) \varphi_2(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \rho_{0,12}) d\hat{u}_1 d\hat{u}_2 \quad (3.112)$$

Os valores do coeficiente de correlação no espaço normal padrão correlacionado  $\rho_{0,12}$  estão sempre situados no intervalo fechado entre  $-1$  e  $+1$ .

No artigo de Der Kiureghian e Liu [29] são propostas fórmulas numéricas para essa transformação através da introdução do coeficiente abaixo:

$$f = \frac{\rho_{0,12}}{\rho_{12}} \quad (3.113)$$

onde  $f$  depende dos coeficientes de variação, dos coeficientes de correlação no espaço físico e das distribuições marginais de ambas as variáveis. As expressões utilizadas para o cálculo de  $f$  encontram-se também no artigo de Der Kiureghian e Liu [29].

Como os coeficientes de correlação no espaço físico  $\rho_{ij}$  são dados para car par de variáveis correlacionadas, determina-se o valor de  $f_{ij}$  para cada um deles. Assim, multiplicando-se as duas matrizes termo a termo, obtêm-se a matriz de correlação no espaço normal padrão:

$$[\rho_0] \equiv \rho_{0,ij} = f_{ij} \cdot \rho_{ij} \quad (3.114)$$

No presente momento, as variáveis estão escritas no espaço normal padrão correlacionado. Assim, para possibilitar o cálculo do índice  $\beta$  é necessário efetuar uma segunda mudança de espaços, agora para o espaço normal padrão não correlacionado. Isso é efetuado aplicando-se uma simples triangularização de Cholesky:

$$[\rho_0] = [L] \cdot [L]^t \quad (3.115)$$

Atribuindo-se à matriz  $[\Gamma_0]$  a inversa da matriz triangular inferior da decomposição de  $[\rho_0]$  usando a técnica de Cholesky, obtêm-se

$$[\Gamma_0] = [L]^{-1} \quad (3.116)$$

Assim, a descrição das variáveis no espaço normal padrão não correlacionado pode ser escrita como:

$$u_i = T_i(x_j) = \Gamma_{0,ij} \hat{u}_j = \Gamma_{0,ij} \Phi^{-1}(F_{x_j}(x_j)) \quad (3.117)$$

Um esquema geral do procedimento usado na transformação de Nataf pode ser visto na Fig. 3.14.

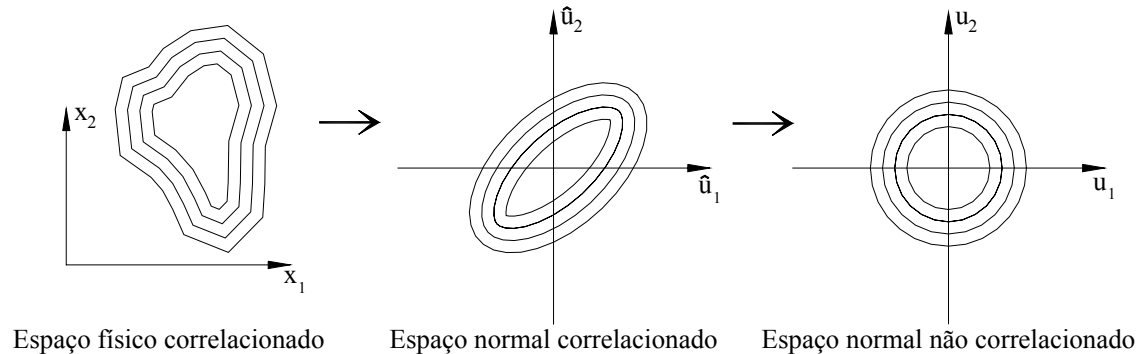


Fig. 3.14 – Transformação de Nataf

Assim, a transformação de um modo global consiste em duas passagens. A transformação inversa e a direta podem ser escritas na forma matricial:

$$\{u\} = [\Gamma_0] \cdot \{\hat{u}\} = [\Gamma_0] \cdot \left\{ \Phi^{-1} \left( F_{\{x\}}(\{x\}) \right) \right\} \quad (3.118)$$

$$\{\hat{u}\} = [\Gamma_0]^{-1} \{u\} \quad \{u\} = [L] \cdot \{u\} \quad (3.119)$$

$$\{x\} = \left\{ F_{\{x\}}^{-1} \left( \Phi(\{\hat{u}\}) \right) \right\} = \left\{ F_{\{x\}}^{-1} \left( \Phi([L] \cdot \{u\}) \right) \right\} \quad (3.120)$$

## 3.7 Cálculo da probabilidade de falha

### 3.7.1 Generalidades

O objetivo de qualquer análise confiabilística é baseado na determinação da probabilidade de falha associada a uma ou várias funções de estado limite. Os métodos baseados em técnicas de simulação fornecem diretamente essa grandeza. Entretanto, com o uso dos métodos aproximados descritos anteriormente apenas o ponto de ruína mais provável é obtido. A introdução de aproximações suplementares em torno do ponto de projeto para a determinação da probabilidade de falha se faz necessária.

Atualmente são bastante utilizadas as aproximações lineares e quadráticas, bases dos métodos FORM e SORM. Supõe-se que essas aproximações serão no futuro

substituídas por técnicas mais eficientes, dada a grande quantidade de trabalhos científicos existente atualmente sobre o assunto. No entanto, hoje essas técnicas aparecem como eficazes sob a condição de uma certa validação de seus resultados. Normalmente esse processo de validação é calcado em um número reduzido de simulações.

A resolução do problema de otimização característico descrito na Eq.(3.31) conduz à determinação do índice de confiabilidade “ $\beta$ ” e dos co-senos diretores do ponto de falha mais provável  $P^*$ . Uma constatação interessante feita sobre métodos de cálculo da probabilidade de falha é que o ponto de projeto apresenta a máxima densidade de probabilidade da função dentro do domínio de falha e que essa densidade decresce muito rapidamente à medida que a distância cresce no sentido contrário à origem.

### 3.7.2 Aproximação FORM (First Order Reliability Method)

Esta aproximação consiste em associar ao valor do índice de confiabilidade “ $\beta$ ” a probabilidade de falha:

$$P_f = \Phi(-\beta) \quad (3.121)$$

onde:

$$\Phi_n(u) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\frac{\|u\|^2}{2}} \quad (3.122)$$

Essa hipótese consiste em substituir a superfície de estado limite onde  $H(u)=0$  por um hiper-plano tangente ao ponto de ruína mais provável. A equação desse plano ( $P$ ) é dada por:

$$(P): \tilde{h}(u) = \sum_i \alpha_i u_i + \beta = 0 \quad (3.123)$$

Não existem meios de exprimir a função  $\Phi$  por expressões matemáticas equivalentes. O seu cálculo é dado em tabelas e pode ser feito apenas numericamente em calculadoras e computadores.

O FORM pode ser facilmente compreendido quando se analisam problemas com apenas uma variável aleatória. Nesse caso, o valor do índice de confiabilidade se confunde com o valor da abscissa no espaço normal padrão com o sinal trocado, conforme indicado na Fig. 3.15:

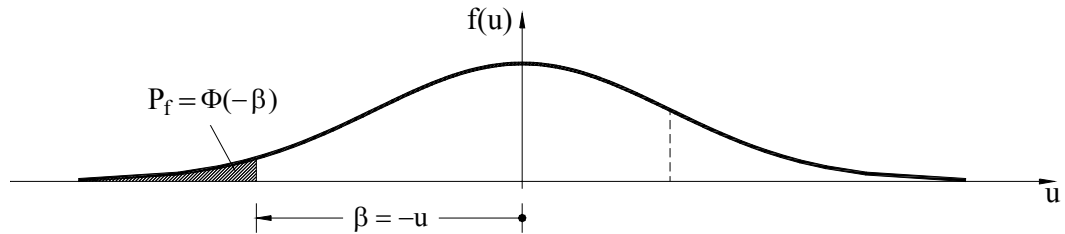


Fig. 3.15 – Interpretação de  $P_f$  no caso de apenas uma variável aleatória

O erro na aproximação FORM depende da forma da superfície de ruína. Se ela for côncava, a aproximação é a favor da segurança e vice-versa. Conforme a Fig. 3.16, uma aproximação desse tipo é suficientemente precisa se a curvatura da superfície de ruína for pequena e a probabilidade de ruína tiver um valor muito pequeno. Na prática, geralmente ocorrem casos como esses e por isso a aproximação FORM é bem aceita e correntemente utilizada.

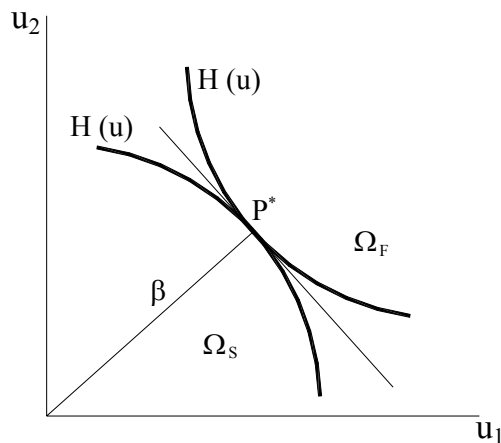


Fig. 3.16 – Erro na aproximação FORM

### 3.7.3 Aproximações SORM (Second Order Reliability Method)

Vários autores buscaram a melhoria da aproximação da probabilidade de falha através de um melhor conhecimento sobre a geometria da função de estado limite na vizinhança do ponto de projeto. A função de estado limite é aproximada por uma hiper-superfície de grau 2 no lugar do plano tangente usado no FORM. O polinômio resultante pode ter os coeficientes completos ou não. Além do índice de confiabilidade, é necessário conhecer as curvaturas principais da superfície de ruína. Há o requisito de que no ponto de projeto  $P^*$  a superfície quadrática aproximadora deve ser contínua e duas vezes diferenciável, além ter o mesmo plano tangente e a mesma curvatura principal que a superfície de ruína real. São disponíveis várias aproximações para a forma da superfície quadrática usada no SORM. A escolha dessa superfície depende da

precisão requerida e do tempo que se pode dispor com o processamento. A seguir citam-se algumas aproximações encontradas na literatura.

### 3.7.3.1 Hiper-esfera centrada

A aproximação em segunda ordem mais simples da superfície de ruína é conseguida com a adoção de um domínio de segurança esférico centrado. Ele é definido por uma hiper-esfera centrada na origem do espaço normalizado. Portanto, a equação da função de estado limite é:

$$H(u_i^*) \approx \sum_{i=1}^n u_i^{*2} - \beta^2 = \chi_n^2 - \beta^2 \quad (3.124)$$

em que  $\chi_n^2(\cdot)$  é a distribuição qui-quadrada no espaço multidimensional “n”. O valor de “n” depende do número de variáveis aleatórias.

A probabilidade de falha contabiliza os pontos do espaço multidimensional que se encontram fora da hiper-esfera, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P_f &= P[H(u_i) \leq 0] \\ P_f &\cong P[\chi_n^2 - \beta^2 \leq 0] = P[\chi_n^2 \leq \beta^2] = 1 - \chi_n^2(\beta^2) \end{aligned} \quad (3.125)$$

### 3.7.3.2 Hiper-esfera excêntrica

Uma aproximação aparentemente melhor que a hiper-esfera centrada é obtida por uma hiper-esfera excêntrica. O raio “R” é calculado como a média da curvatura principal do estado limite, tomada no ponto de projeto e o centro é definido pela linha reta que contém a direção do co-seno diretor. A probabilidade de ruína é aproximada por:

$$P_f \cong 1 - \chi_{n,\delta}^2(R^2) \quad (3.126)$$

em que  $\chi_{n,\delta}^2(\cdot)$  é a distribuição qui-quadrada no espaço multidimensional “n” com o parâmetro  $\delta = R + \beta$  controlando a excentricidade da esfera. O valor de “n” depende do número de variáveis aleatórias.

### 3.7.3.3 Aproximações assintóticas

São aproximações parabólicas da função de estado limite e geralmente apresentam boa aproximação da probabilidade de ruína. Para o seu desenvolvimento devem ser feitas duas rotações no espaço normal padrão. A intenção dessas rotações é eliminar os termos cruzados da função e deduzir expressões analíticas.

Breitung [20] desenvolveu uma equação simples baseada em expressões assintóticas da probabilidade de falha para valores altos do índices de confiabilidade. A função de estado limite é aproximada por uma superfície parabólica com as mesmas curvaturas principais no ponto de projeto. De acordo com Breitung, o desenvolvimento assintótico fornece:

$$P_f \cong \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta k_i)^{-1/2} \quad (3.127)$$

onde os “ $k_i$ ” são as curvaturas principais da superfície de ruína no ponto de projeto.

A Eq.(3.127) é conhecida como fórmula de Breitung, a qual pode ser compreendida como um fator de correção que multiplica o resultado obtido pelo FORM. Esta expressão converge para a solução exata quando “ $\beta$ ” tende a infinito.

Tvedt [175] desenvolveu uma expressão assintótica para valores pequenos do índice de confiabilidade melhor que a anterior, a qual é baseada na expansão da série de Taylor. Esta expressão é dada por:

$$P_f \cong T_1 + T_2 + T_3 \quad (3.128)$$

$$T_1 = \Phi(-\beta) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta k_i)^{-1/2} \quad (3.129)$$

$$T_2 = [\beta \Phi(-\beta) - \varphi(-\beta)] \left[ \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta k_i)^{-1/2} - \prod_{i=1}^{n-1} (1 - (1 + \beta) k_i)^{-1/2} \right] \quad (3.130)$$

$$T_3 = (1 + \beta) [\beta \Phi(-\beta) - \varphi(-\beta)] \times \left[ \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \beta k_i)^{-1/2} - \operatorname{Re} \left[ \prod_{i=1}^{n-1} (1 - (j + \beta) k_i)^{-1/2} \right] \right] \quad (3.131)$$

onde  $\operatorname{Re}[\cdot]$  é a parte real da expressão e  $j = \sqrt{-1}$  é o número imaginário. Note-se que o termo  $T_1$  é o mesmo dado por Breitung.

## 4 Modelo mecânico

### 4.1 Propriedades do concreto

#### 4.1.1 Aspectos gerais

Representar o comportamento do concreto armado com modelos numéricos é tarefa difícil. Pelo que se conhece sobre a variabilidade das propriedades do concreto e do aço, além do evidente comportamento não-linear desses materiais em resposta às ações externas, o problema toma proporções grandes que, mesmo com toda a tecnologia atual, ainda não é possível prever com rigor o seu desempenho. Apenas com a modesta análise não-linear de uma viga de concreto armado submetida à flexão simples já se constata que há uma quantidade de cálculos grande o bastante para ser realizada somente com o auxílio de um computador.

Vários pesquisadores já efetuaram modelagens relativamente complexas do material, como Carvalho,R.C. [176]. Ele faz um estudo utilizando a técnica da analogia de grelha para representar pisos de edifícios. Ele realizou simulações de perdas de rigidez utilizando o modelo do CEB-90 baseado em relações momento x curvatura seguindo um procedimento incremental para a análise não-linear.

O trabalho de Ciloni,A.D. [177] descreve modelagens para peças lineares de concreto armado considerando-se a não-linearidade física e relações momento x curvatura médias propostas pelo CEB-90 e ACI. No trabalho constam análises feitas considerando-se a não-linearidade geométrica em estruturas de pórticos planos.

Machado,C.P. [178] analisa os efeitos da fluência no comportamento de peças lineares de concreto armado. Simula estruturas protendidas utilizando modelos próprios para computar os efeitos da fissuração com atuação constante dos esforços ao longo do tempo e também apresenta um estudo dos modelos do CEB-90 [179], Ghali-Favre [180] e Debernardi [181].

Oliveira,R.S. [181] realizou a integração de modelos não-lineares de concreto armado para elementos de barra e placa em um sistema de análise não-linear de pavimentos utilizando um diagrama momento x curvatura trilinear.

Sanches Jr,F. [183] também trabalhou com análises não-lineares de concreto armado usando os modelos de Ghali-Favre e Debernardi escritos em momento x curvatura. O trabalho considerou também os efeitos de deformações por fluência do concreto e destacou a forte redistribuição de esforços devida à presença da armadura. Os modelos desenvolvidos foram utilizados também em um sistema de grelhas adotado para representar estruturas de pavimentos de edifícios.

Modelos fundamentados na mecânica do dano contínuo, como nos trabalhos de Mazars,J. [184], Lemaitre, J. [185] e Lemaitre,J & Chaboche,J.-L. [186] permitem uma melhor definição da distribuição de tensões na seção transversal de elementos lineares, o que resulta em melhor refinamento do equilíbrio.

Existem inúmeros trabalhos que buscam realizar um modelo simples e preciso para o concreto armado. Contudo, à proporção que as ferramentas disponíveis permitem, essa modelagem tende a abandonar as simplificações assumidas, descartar aproximações e refinar hipóteses, para tentar avaliar melhor as perdas de rigidez nos elementos. Os modelos não-lineares para o concreto armado estão abrindo espaço e calcando-se em teorias complexas como a mecânica do dano, a mecânica da fratura e a teoria da plasticidade. Passam assim, a levar em conta na determinação das resultantes dos esforços internos, efeitos nunca antes modelados simultaneamente tais como efeitos viscosos, fluência, retração, variação da rigidez e outros. Nesse sentido, podem-se citar alguns dos trabalhos mais recentes sobre modelos para concreto que englobam aspectos raramente levados em conta há pouco tempo tais como:

- Contribuição do concreto intacto entre fissuras “tension stiffening” [187];
- Modelos de dano anisotrópicos [188];
- Modelos viscoplásticos [189];
- Modelos viscoplásticos com dano [190];
- Aderência com plasticidade [191];
- Dano baseado na dissipação de energia [192];
- Danificação ao cisalhamento [193];
- Modelos baseados em mecânica da fratura [194];
- Modelos considerando bloqueio (*interlock*) entre os agregados ou efeito de pino da armadura (*dowel action*) [195];



Os trabalhos [196], [197], [198] e [199], publicados no ano de 2004 estão entre os mais atuais e merecem ser vistos.

#### 4.1.2 Recomendações

O comportamento não-linear do material é devido à resposta sempre complexa do concreto. As peças apresentam baixíssima resistência à tração, com um quadro de microfissuração até mesmo antes de serem carregadas. Segundo Neville, A.M. [200] esse fenômeno se deve a processos físicos existentes na interface entre a matriz de pasta de cimento e os agregados presentes no concreto. Assim, pode-se concluir que a heterogeneidade é uma característica inerente ao material.

Submetida a baixas solicitações, uma seção de concreto armado ainda resiste às tensões de tração, e o concreto situado na região abaixo da linha neutra da seção ainda não está fissurado. Essa situação distingue o estágio I de comportamento. A resistência à tração do concreto é superada quando há um aumento na intensidade do carregamento, e inicia-se o processo de fissuração na região tracionada. Quando o concreto não resiste mais à tração, caracteriza-se o estágio II. Neste estágio, o concreto solicitado à compressão apresenta resposta que ainda pode ser considerada linear. Se o carregamento for aumentado ainda mais, atinge-se um ponto limite, caracterizado pelo valor máximo do momento resistente. Esta situação define o limite da resistência do material e é denominada de estágio III. A importância de se definirem esses limites aparece quando se efetuam as verificações da estrutura em serviço, ou o seu dimensionamento. Os diagramas característicos de tensões na seção transversal de cada estágio de comportamento do concreto armado podem ser vistos na Fig. 4.1.

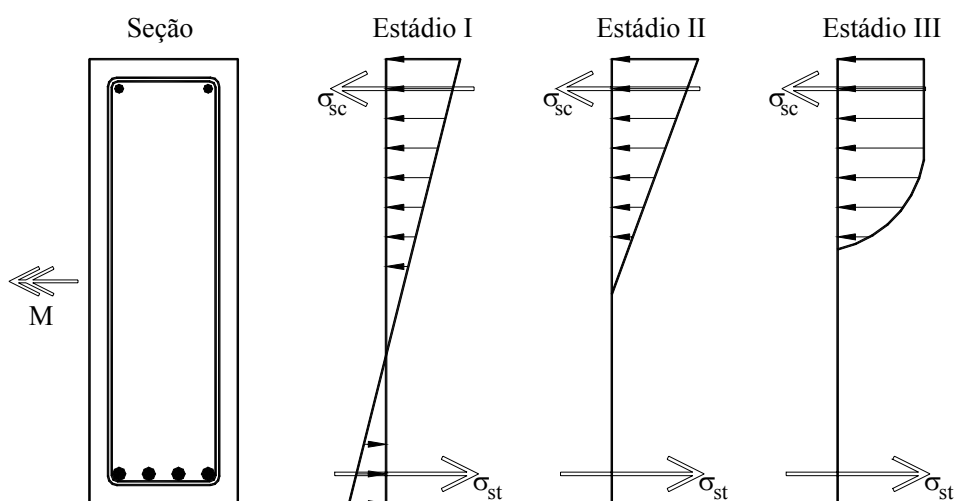


Fig. 4.1 – Diagramas de tensão nos estágios de comportamento

Ao observar o quadro da fissuração em um elemento de concreto armado percebe-se que ela ocorre nas seções onde estão presentes as maiores tensões de tração. Observa-se também que as seções ao longo do comprimento da peça não apresentam um estágio de comportamento único. Algumas seções entre as fissuras permanecem não fissuradas, gerando um mecanismo particular de absorção de esforços. Esse fenômeno acontece devido ao fato de a tensão de tração no concreto na seção fissurada ser nula, enquanto que nas demais seções situadas entre fissuras os valores das tensões são diferentes de zero e crescem à medida que a seção se afasta da fissura. Para haver equilíbrio na seção fissurada, a armadura recebe o esforço que deveria ser resistido pelo concreto. Com isso ocorre um aumento repentino do esforço de tração na armadura no instante da fissuração.

Essa característica faz com que os diagramas de tensões no concreto e na armadura ao longo do comprimento da peça apresentem configurações peculiares. Um esquema dessas configurações pode ser visto na Fig. 4.2. Então, mesmo para elementos com seção transversal constante, as propriedades físicas alteram-se ao longo do comprimento como consequência da fissuração. Esclarece-se assim porque o mecanismo resistente do material é diferente para cada seção, e porque cada uma se encontra submetida a uma distribuição de tensões diferente. A situação real de uma seção localizada entre duas fissuras é um estado intermediário compreendido entre os limites dos estádios I e II.

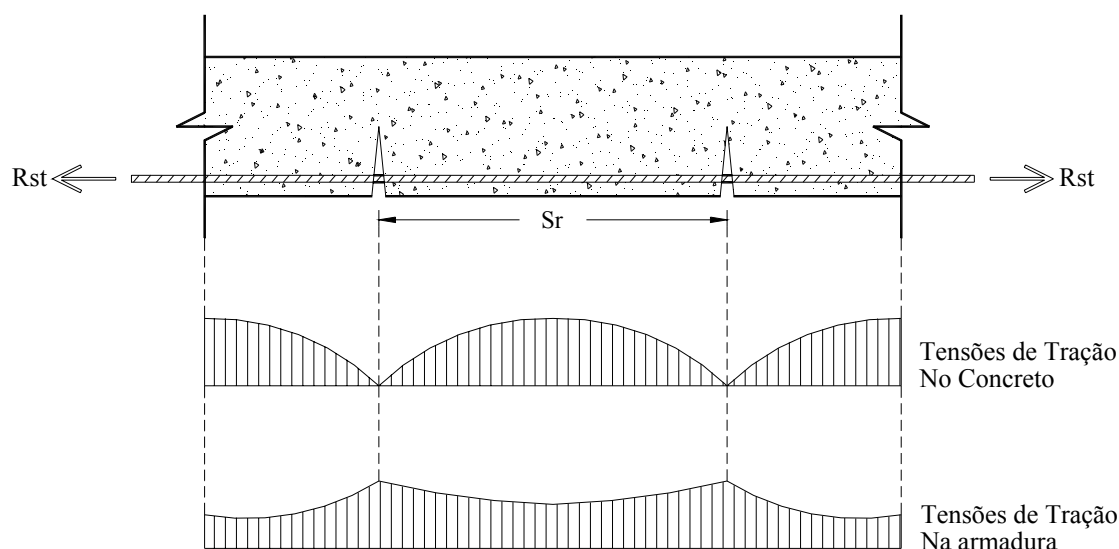


Fig. 4.2 – Tensões no concreto e na armadura entre duas seções fissuradas

Existem vários modelos que levam em consideração esse mecanismo de absorção de esforços. No CEB-158<sup>e</sup> [201] é proposto um modelo momento-curvatura para uma

seção de concreto armado, conforme pode ser observado na Fig. 4.3. Segundo essa recomendação, o ramo não-linear do diagrama inicia-se no ponto em que é atingido o momento de fissuração da peça, dado pela expressão:

$$m_r = \frac{f_{ctm} I_1}{(h - x_1)} \quad (4.1)$$

em que  $f_{ctm}$  é a resistência média do concreto à tração,  $I_1$  é o momento de inércia da seção homogeneizada,  $h$  é a altura da seção, e  $x_1$  é a posição da linha neutra no estágio I.

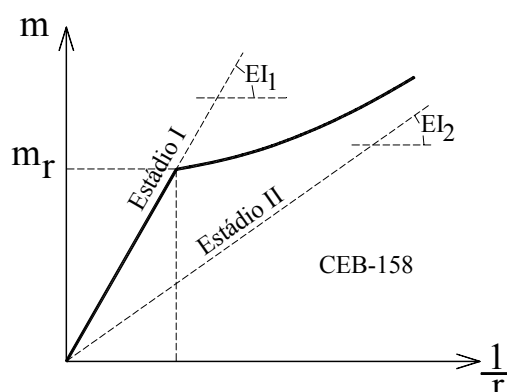


Fig. 4.3 – Diagrama momento x curvatura proposto no CEB-158

A NBR-6118 indica que as verificações em serviço para as peças de concreto armado sejam feitas no estágio II e que o dimensionamento seja feito considerando-se as hipóteses relativas ao estágio III. Observando-se o diagrama momento x curvatura do CEB-158, percebe-se que a verificação da Norma Brasileira encontra-se em níveis altos de segurança.

Relações momento x curvatura, ou distribuições de tensões em função de deformações são modelos mecânicos utilizados nas verificações em serviço ou para dimensionamento que consideram que a seção transversal seja homogênea. Qualquer um dos dois pode conduzir a bons resultados se formulados corretamente. Não se justifica a afirmação de que um seja melhor que o outro. O que se faz comumente é desconsiderar defeitos localizados, como fissuração, ou modificação no módulo de elasticidade além de se considerar o material contínuo. Porém, procura-se representar com fidelidade a somatória dos defeitos presentes na peça para melhor avaliar as perdas de rigidez do material. Assim, mesmo com toda a evolução dos modelos, o uso do modelo baseado em momento x curvatura do CEB é suficientemente preciso para a finalidade do presente trabalho.

### 4.1.3 Estados limites

Estado limite é a situação onde a estrutura não desempenha mais a função para a qual foi projetada. Na norma Brasileira são definidos dois Estados Limites que devem ser considerados em projetos de peças de concreto armado: Estados limites últimos e Estados limites de utilização. Os Estados limites últimos são aqueles relacionados ao colapso da estrutura ou parte dela, ou qualquer outra forma de ruína estrutural que determine a paralisação do uso da estrutura. São três os estados limites últimos considerados pela norma Brasileira: esmagamento do concreto, alongamento excessivo da armadura e instabilidade.

Um estado limite de utilização é atingido quando a estrutura ou parte dela apresenta deslocamentos inaceitáveis ou aberturas de fissuras grandes o suficiente para comprometerem a sua finalidade principal. Computam-se aqui também os requisitos de durabilidade. Os códigos vigentes em cada país fixam seus limites de deformações, as leis de variações de tensões nas seções transversais conforme a resistência do concreto e também estabelecem que outros estados limites de utilização devem ser verificados.

Na verificação da segurança estrutural deve-se manter afastada a possibilidade de uma seção qualquer da estrutura atingir um estado limite. Isso é feito fixando-se deformações máximas para o encurtamento do concreto e para o alongamento da armadura. Fixando-se as deformações admissíveis na seção dos elementos estruturais é possível dimensioná-los para combater as solicitações desejadas. Nas verificações em serviço devem ser computadas as ações de serviço, que são majoradas por coeficientes adequados. A norma Brasileira recomenda que seja utilizado o diagrama parábola-retângulo de tensões para o concreto submetido aos esforços de compressão, conforme ilustra a Fig. 4.4 e um diagrama elasto-plástico perfeito para as barras da armadura.

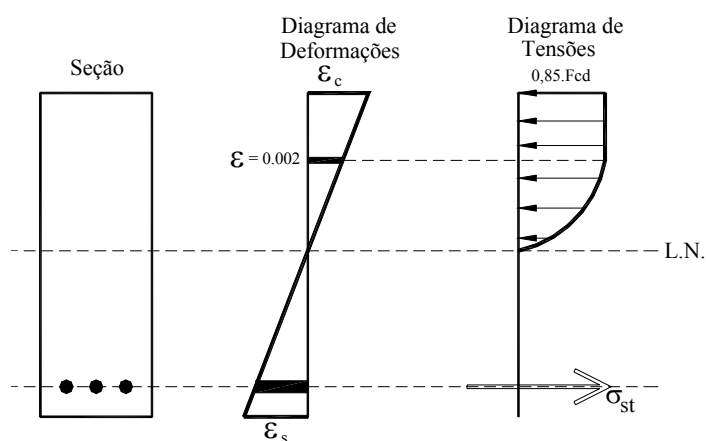


Fig. 4.4 – Tensões na seção transversal segundo a NBR-6118

Na verificação em serviço recomendada pelo CEB-158<sup>e</sup>, permite-se considerar o “tension stiffening”, que é a colaboração do concreto intacto nas seções presentes entre duas fissuras consecutivas. Esta consideração leva a um pequeno aumento da rigidez da peça em relação à simples consideração do estágio II puro.

## 4.2 Propriedades do aço

A resposta do aço frente às solicitações normais é previsível, pois o material apresenta baixa variabilidade de suas propriedades mecânicas. A plastificação e a ductilidade ficam evidentes em qualquer ensaio de tração uniaxial envolvendo materiais metálicos. A plastificação é caracterizada pelo aparecimento de deformações residuais permanentes. O bom comportamento do aço permite que o seu comportamento seja previsto com modelos elasto-plásticos uniaxiais. Podem-se considerar como principais modelos do comportamento elasto-plástico uniaxial aqueles que consideram o encruamento nulo (elasto-plástico perfeito) e os com encruamento linear. Estes modelos nada mais são do que aproximações matemáticas teóricas para tentar reproduzir um diagrama tensão x deformação do aço obtido em laboratório, conforme pode ser exemplificado na Fig. 4.5.

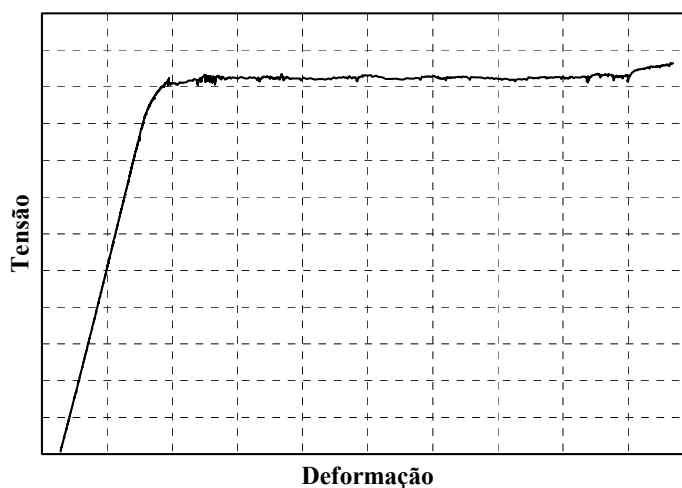


Fig. 4.5 – Diagrama tensão deformação experimental do aço

Os modelos mostrados a seguir são ditos em taxas porque apresentam suas grandezas definidas em função da sua derivada em relação ao tempo. Os modelos aplicados computacionalmente não são escritos em taxas, mas sim em passo finito. Isso quer dizer que para a obtenção de um determinado estado de tensões, as deformações devem ser aplicadas em incrementos discretos. O motivo é óbvio: em linguagem

computacional todo incremento de deformação deve ter um valor real, mesmo sendo muito pequeno.

O uso do modelo do aço no contexto geral serve para determinar a tensão no aço, conhecida a deformação na fibra de concreto correspondente à armadura. Considera-se a armadura pelo seu eixo em uma única camada, e assume-se a hipótese da perfeita aderência entre o aço e o concreto.

As relações aqui tratadas são baseadas em hipóteses de pequenos deslocamentos e portanto também em pequenas deformações.

Muitos autores estudaram modelos elasto-plásticos, já que são fartamente utilizados nas aplicações correntes de engenharia. O trabalho de Proença, S.P.B. [202] apresenta teoria e aplicações dos modelos, constituindo-se em uma publicação bastante consultada. No trabalho de Hinton, H. & Owen, D.R.J. [203] aborda-se o assunto de maneira ampla no contexto do método dos elementos finitos. Para maiores detalhes recomenda-se essa referência. Essa família de modelos fornece resultados apenas razoáveis aplicados ao concreto armado, já que o concreto apresenta ruptura frágil. Entretanto, no tratamento de materiais metálicos, onde se observa grande ductilidade devida à estrutura interna dos mesmos, estes modelos são extremamente viáveis.

#### 4.2.1 Modelo elasto-plástico perfeito

##### 4.2.1.1 Aspectos gerais

Sob um aspecto mais genérico, os modelos são normalmente representados por um trecho linear, e um ou dois outros trechos onde as tensões e deformações têm outras razões de proporcionalidade diferentes do módulo de elasticidade. Após a plastificação, quem passa a registrar a evolução da deformação no tempo é a deformação plástica acumulada  $\varepsilon^p$ . O modelo elasto-plástico perfeito está indicado na Fig. 4.6:

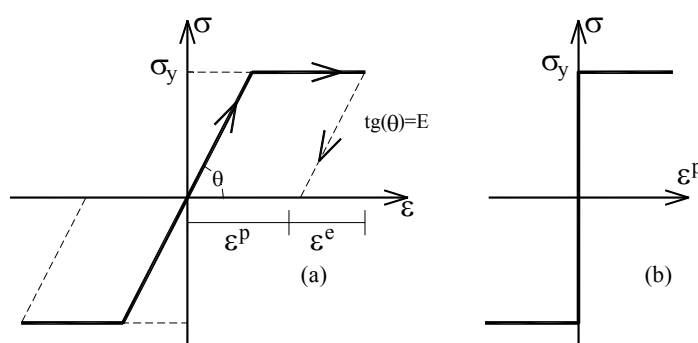


Fig. 4.6 – Lei constitutiva do modelo elasto-plástico perfeito

Observando-se o modelo, escrevem-se as seguintes equações:

$$\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p \quad (4.2)$$

$$\sigma = E \cdot \varepsilon^e = E(\varepsilon - \varepsilon^p) \quad (4.3)$$

Como as grandezas  $\sigma$ ,  $\varepsilon$  e  $\varepsilon^p$  dependem do tempo, podem ser escritas em termos de taxas. Então:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{d\varepsilon^p}{dt} \quad (4.4)$$

onde o indicador  $\dot{\bullet}$  sobre a variável indica derivada em relação ao tempo “t”.

As deformações plásticas irreversíveis aparecem quando essa taxa é diferente de zero. Assim, a deformação plástica em um certo intervalo de tempo  $[t_1, t_2]$  é:

$$\varepsilon^p = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\varepsilon}^p dt \quad (4.5)$$

A relação  $\sigma$  x  $\varepsilon$  também pode ser expressa em função de taxas:

$$\dot{\sigma} = E \cdot \dot{\varepsilon}^e = E(\dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}^p) \quad (4.6)$$

#### 4.2.1.2 Critério de plastificação

Para definir os estados de tensão admissíveis do modelo define-se um critério de plastificação, que é uma função “f” dependente da tensão. Para o presente modelo, o critério é representado pela seguinte equação:

$$f(\sigma) = |\sigma| - \sigma_y \leq 0 \quad (f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \quad (4.7)$$

onde se lê: f é função de R em R.

O conjunto de estados de tensão admissíveis engloba todos aqueles em que se verifica a relação  $f(\sigma) \leq 0$ . As deformações plásticas só existirão caso o valor da tensão atuante seja igual ao da tensão de escoamento  $\sigma_y$ .

Analisando-se o critério de plastificação, surgem as seguintes situações:

- Se  $f(\sigma) < 0$ , então  $|\sigma| < \sigma_y$  e o material se encontra na fase elástica.
- Se  $f(\sigma) = 0$ , então  $|\sigma| = \sigma_y$  e o material se encontra na fase plástica.
- Se  $f(\sigma) > 0$  há um estado de tensões não admitido pelo modelo.

Pode-se ainda definir a grandeza auxiliar  $\dot{\lambda}$  como o módulo da velocidade de deformação plástica, onde:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\lambda} \text{Sgn}(\sigma) \quad (4.8)$$

A grandeza  $\text{Sgn}(\sigma)$  é o sinal da tensão solicitante, assim determinado:

$$\text{Sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{Se } \sigma > 0 & \text{(tração)} \\ -1 & \text{Se } \sigma < 0 & \text{(Compressão)} \end{cases} \quad (4.9)$$

A Eq.(4.9) vale somente para  $f(\sigma)=0$ , já que se esta condição não for verificada não existe variação na deformação plástica e como consequência:

$$\dot{\varepsilon} = 0 \quad (4.10)$$

Observando-se agora a unilateralidade das grandezas “f” e “λ”, podemos definir algumas relações de interesse. A chamada condição de complementaridade de Kuhn-Tucker é assim escrita:

$$\dot{\lambda} \cdot f = 0 \quad (4.11)$$

Além disso, definem-se as seguintes situações:

Quando  $\dot{f} < 0$  configura-se um descarregamento e portanto  $\dot{\lambda} = 0$ ;

Quando  $\dot{f} = 0$  tem-se  $\dot{\lambda} > 0$ ;

A situação  $\dot{f} > 0$  é inadmissível.

Define-se então a relação que é chamada de condição de consistência:

$$\dot{\lambda} \cdot \dot{f} = 0 \quad \text{para } \dot{f} \leq 0 \quad (4.12)$$

## 4.2.2 Modelo com encruamento isótropo

### 4.2.2.1 Aspectos gerais

Estuda-se agora o modelo elasto-plástico com encruamento isótropo, que é de interesse no presente trabalho. O diagrama tensão x deformação característico pode ser visto na Fig. 4.7a.



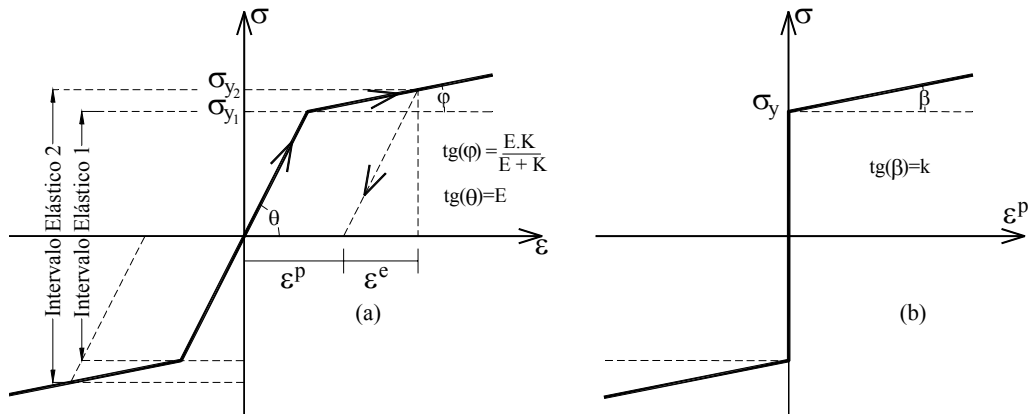


Fig. 4.7 – Lei constitutiva do modelo Elasto-Plástico com encruamento

Nesse modelo ocorre a expansão do intervalo elástico “1” para o intervalo elástico “2” de maneira simétrica em relação ao seu centro na origem do diagrama das tensões. No espaço das tensões esse fenômeno se caracteriza por um aumento da superfície de plastificação sem translação da mesma.

As equações que regem esse modelo são determinadas de maneira análoga ao modelo anterior:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \quad (4.13)$$

$$\dot{\sigma} = E \cdot \left( \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^p \right) \quad (4.14)$$

#### 4.2.2.2 Critério de plastificação

O critério de plastificação do modelo elasto-plástico com encruamento é:

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_y + K \cdot \alpha) \leq 0 \quad (f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}) \quad (4.15)$$

onde “f” é função de R em R, “K” é chamado de módulo plástico. Ele é dado pela tangente da reta no diagrama  $\sigma \varepsilon^p$ , conforme mostrado na Fig. 4.7b. “α” é uma variável que evolui proporcionalmente à deformação plástica que controla a expansão do intervalo elástico com a plastificação.

O parâmetro “K” é dado por:

$$K = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} \quad (4.16)$$

A função “f” depende de “ $\sigma$ ” e “ $\alpha$ ”. Ela limita um conjunto de tensões admissíveis que varia de amplitude à medida que “ $\alpha$ ” varia. Então, define-se a grandeza

$$\dot{\alpha} = \left| \dot{\varepsilon}^p \right| \quad (4.17)$$

de tal maneira que ao terminar um ciclo de tensão, mesmo sem existirem deformações plásticas, a tensão limite  $\sigma_y$  cresce de um valor  $K\alpha$ , conforme visto anteriormente, já que:

$$\sigma_{y2} = \sigma_{y1} + K\alpha \quad (4.18)$$

Valem também as relações de complementaridade e de consistência, com a mesma restrição de  $\dot{f} \leq 0$ . Dessas equações pode-se determinar:

$$\dot{\lambda} = \frac{\text{Sign}(\sigma) \cdot E \cdot \dot{\varepsilon}}{E + K} \quad (4.19)$$

$$\dot{\varepsilon}^p = \dot{\lambda} \text{Sign}(\sigma) = \frac{E \cdot \dot{\varepsilon}}{E + K} \quad (4.20)$$

$$\dot{\sigma} = \dot{\varepsilon} - \frac{E \cdot \dot{\varepsilon}}{E + K} = \frac{E \cdot K}{E + K} \dot{\varepsilon} \quad \text{se } \dot{\lambda} > 0 \quad (4.21)$$

### 4.3 Análise não-linear de grelhas

#### 4.3.1 Considerações sobre o método da energia

A energia potencial de um sistema elástico é igual à soma de duas componentes distintas. Uma é a energia potencial dos esforços internos, que é chamada de energia de deformação e a outra é a energia produzida pelas cargas externas. Existem também expressões de energia relacionadas aos vínculos elásticos discretos (molas) e vínculos elásticos contínuos (bases elásticas). A expressão para o cálculo da energia potencial total é:

$$\pi = u + W \quad (4.22)$$

onde “ $\pi$ ” representa a energia potencial total da estrutura, “u” significa a somatória das energias produzidas pelos esforços internos e “W” é a somatória da energia produzida pelas cargas externas atuantes na estrutura.

A energia de deformação é a energia que a estrutura absorve quando se deforma em virtude de sollicitações externas. Ela é oriunda dos trabalhos realizados pelos esforços internos ao atuarem sobre os deslocamentos que cada um produz. A fórmula geral para o seu cálculo é dada por:

$$u = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dV \quad (4.23)$$

Para se obter a energia potencial advinda das ações externas deve-se efetuar o produto entre cada força atuante e o deslocamento na respectiva direção de sua aplicação. No caso de carregamentos distribuídos no domínio do corpo, deve-se efetuar a integral do produto entre a função que representa a ação pela função que representa os deslocamentos na devida direção.

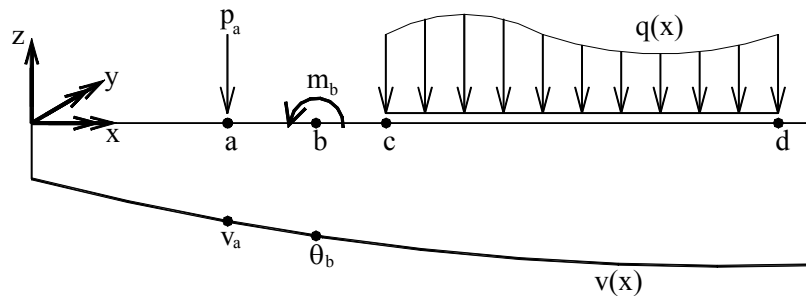


Fig. 4.8 – Elemento de barra submetido a um carregamento genérico

Conforme definida anteriormente, a energia potencial das cargas no caso do exemplo mostrado na Fig. 4.8 é:

$$w_i = -p_a v_a - m_b \theta_b - \int_c^d q(x) \cdot v(x) \cdot dx \quad (4.24)$$

Segundo o princípio da mínima energia potencial total, a variação dessa energia é nula quando um corpo está em equilíbrio. Logo, tem-se:

$$\frac{d\pi}{dv_i} = 0 \quad (4.25)$$

onde, os “ $v_i$ ” são os deslocamentos na direção ‘i’.

O equilíbrio do sistema, representado pela Eq.(4.25), possibilita o cálculo dos seus deslocamentos mesmo com a consideração de hipóteses não-lineares. Considere-se então um material com relações constitutivas não-lineares escritas em determinado modelo. Para garantir a obtenção de um estado estrutural em equilíbrio aplica-se a Eq.(4.25). A diferença é que nas hipóteses não-lineares o sistema admite deformações

residuais. Assim, aparecem termos complementares na expressão da energia de deformação e ela será dada por:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_r \quad (4.26)$$

onde o termo “ $\mathbf{u}_r$ ” corresponde ao produto da parcela das deformações não-lineares pelas respectivas componentes de tensão, integradas no volume do corpo.

Assim, no caso não-linear, a Eq.(4.22) deve ser escrita da seguinte maneira:

$$\pi = (\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}) + W \quad (4.27)$$

#### 4.3.2 Solução do sistema de equações

O vetor de resíduos consiste na parcela de energia de deformação que não é absorvida pelo sistema em um determinado nível de deslocamentos. Para acontecer o equilíbrio, essa parcela deverá ser transformada em carregamento nodal e reaplicada ao sistema. Então, os novos deslocamentos serão função dos resíduos a serem aplicados e o sistema de equações é escrito da seguinte maneira:

$$[\mathbf{K}] \times \{\mathbf{U} + \Delta \mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (4.28)$$

O sistema mostrado na Eq.(4.28) é não-linear. Existem inúmeras técnicas para solucionar esse tipo de sistema. Geralmente essas técnicas diferem apenas quanto à velocidade de convergência da solução.

Para solucionar o sistema de equações não-lineares no presente trabalho empregaram-se matrizes de rigidez secante, que consistem em uma variante dos procedimentos tipo Newton. A técnica é iterativa e o sistema de equações de equilíbrio é escrito em função da rigidez secante:

$$[\mathbf{K}]_s \times \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (4.29)$$

Ou, se escrito em função das parcelas da matriz de rigidez:

$$\left( [\mathbf{K}]_L + [\mathbf{K}]_N \right) \times \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{F}\} \quad (4.30)$$

onde a parcela  $[\mathbf{K}]_L$  refere-se à parte linear e  $[\mathbf{K}]_N$  à parcela que é função dos deslocamentos residuais  $\Delta \mathbf{U}$  descritos na Eq (4.28).

A finalidade do procedimento é obter um estado estrutural em equilíbrio em todas as etapas de aplicação de carga. Esse equilíbrio é atingido no ponto onde a curva intercepta o nível de carga aplicado. Para isto realizam-se atualizações da matriz de rigidez secante, que são decorrentes da determinação de novos níveis de deslocamentos, conforme ilustra a Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Procedimento da rigidez secante – Adaptado de Corrêa [204]

It.	Matriz Secante	Deslocamentos	Esforço Resistente
1	$[K]_{s1} = [K]_L$	$\{U\}_1 = [K]_L^{-1} \times \{F\}_T$	$\{F\}_1 = ([K]_L + [K]_N(\{U\}_1)) \times \{U\}_1$
2	$[K]_{s2} = [K]_L + [K]_N(\{U\}_1)$	$\{U\}_2 = ([K]_L + [K]_N(\{U\}_1))^{-1} \times \{F\}_T$	$\{F\}_2 = ([K]_L + [K]_N(\{U\}_2)) \times \{U\}_2$
3	$[K]_{s3} = [K]_L + [K]_N(\{U\}_2)$	$\{U\}_3 = ([K]_L + [K]_N(\{U\}_2))^{-1} \times \{F\}_T$	$\{F\}_3 = ([K]_L + [K]_N(\{U\}_3)) \times \{U\}_3$
4	$[K]_{s4} = [K]_L + [K]_N(\{U\}_3)$	$\{U\}_4 = ([K]_L + [K]_N(\{U\}_3))^{-1} \times \{F\}_T$	$\{F\}_4 = ([K]_L + [K]_N(\{U\}_4)) \times \{U\}_4$
⋮	⋮	⋮	⋮
i	$[K]_{si} = [K]_L + [K]_N(\{U\}_{i-1})$	$\{U\}_i = ([K]_L + [K]_N(\{U\}_{i-1}))^{-1} \times \{F\}_T$	$\{F\}_i = ([K]_L + [K]_N(\{U\}_i)) \times \{U\}_i$

A partir da Tabela 4.1 escrevem-se as seguintes relações:

$$\{F\}_i = ([K]_L + [K]_N(\{U\}_i)) \times \{U\}_i \quad (4.31)$$

$$\{U\}_{i+1} = ([K]_L + [K]_N(\{U\}_i))^{-1} \times \{F\}_T \quad (4.32)$$

O procedimento iterativo da Tabela 4.1 pode ser compreendido na Fig. 4.9:

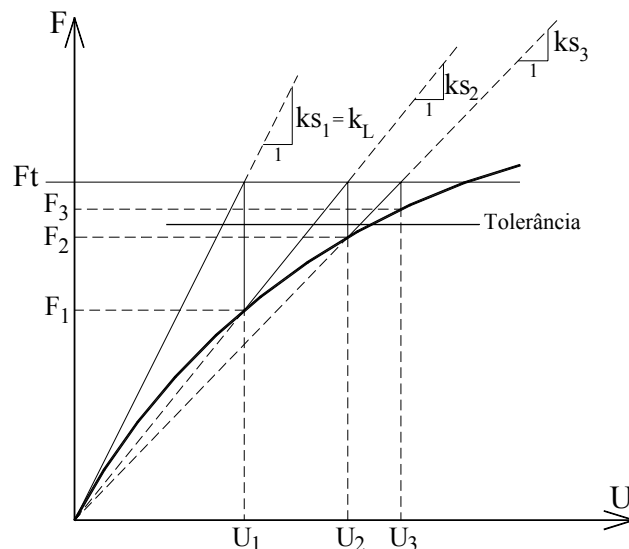


Fig. 4.9 – Procedimento de solução através da rigidez secante

A partir da Eq.(4.31) conclui-se que:

$$\{U\}_i = ([K]_L + [K]_N(\{U\}_i))^{-1} \times \{F\}_i \quad (4.33)$$

Subtraindo-se a Eq.(4.33) da Eq.(4.32), obtém-se:

$$\{U\}_{i+1} - \{U\}_i = ([K]_L + [K]_N(\{U\}_i))^{-1} \times (\{F\}_T - \{F\}_i) \quad (4.34)$$

Ou melhor:

$$\Delta\{U\}_i = ([K]_s(\{U\}_i))^{-1} \times \Delta\{F\}_i \quad (4.35)$$

Representando-se graficamente a Eq.(4.35), tem-se:

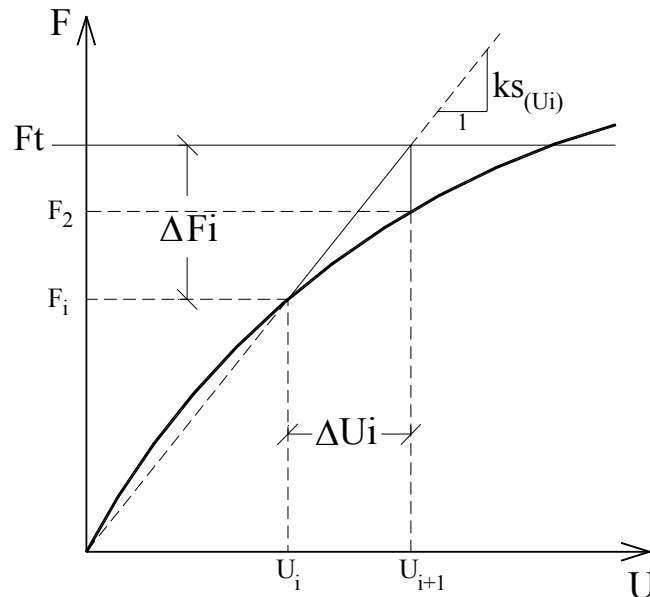


Fig. 4.10 – Iteração genérica

Observando-se a Fig. 4.10 percebe-se que o vetor  $\Delta\{F\}_i$  é a parcela de forças do sistema que não está em equilíbrio na iteração “i”. Portanto, essa quantidade deve ser reaplicada em forma de carregamento.

Deve-se re-equilibrar o sistema calculando-se o acréscimo de deslocamentos  $\Delta\{U\}_i$  produzido por  $\Delta\{F\}_i$  no instante em que a rigidez secante vale  $[K]_{s(\{U\}_i)}$ , isto é, no nível de deslocamentos “U<sub>i</sub>”.

O novo campo de deslocamentos é dado por  $\{U\}_{i+1} = \{U\}_i + \Delta\{U\}_i$  e o processo é recomeçado. As iterações acabam quando a norma do vetor resíduo  $\{F\}_T - \{F\}_i$  for menor que uma tolerância pré-estipulada. Isso caracteriza a convergência.

A convergência foi verificada também segundo um critério de deslocamentos. Um critério baseada na norma do vetor resíduo, conforme Hinton,H. & Owen,D.R.J. [203] foi adotado:

$$\|\varphi\| = \frac{\left| \sqrt{\sum_{m=1}^N (u_m^i)^2} - \sqrt{\sum_{m=1}^N (u_m^{i-1})^2} \right|}{\sqrt{\sum_{m=1}^N (u_m^1)^2}} \times 100 < \delta \quad (4.36)$$

onde “i” representa a iteração atual, “i-1” representa a iteração anterior, o índice “1” significa a primeira iteração de cada incremento de carga,  $\delta$  é uma tolerância pré-estipulada para a investigação da convergência, N representa o número de graus de liberdade do problema e  $\varphi$  é um parâmetro de comparação. Quando a Eq.(4.36) for satisfeita, a convergência foi alcançada.

### 4.3.3 Cálculo dos esforços internos

#### 4.3.3.1 Linha neutra da seção

Para efetuar o cálculo dos esforços internos foi utilizada a integração das tensões na área da seção transversal. Como o diagrama tensão x deformação é não-linear, a sua integração analítica pode ser trabalhosa. A integração analítica foi realizada apenas no modelo do CEB-90 e em outros com trechos lineares. Como se deseja desenvolver uma técnica geral, parte-se para um procedimento de integração numérica.

Para que seja conhecida a distribuição de tensões em uma seção transversal é necessário saber o valor das deformações em cada fibra. Assim, alocaram-se ao longo da altura da seção transversal doze pontos de Gauss fixando-se as suas abscissas conforme descrito em Brebbia,C.A. & Dominguez,J. [205]. Considerou-se que a base das seções é constante ao longo do comprimento do elemento.

Em um modelo de integração Gaussiano aproxima-se a distribuição de tensões por um polinômio de grau “2N-1”, em que “N” é o número de pontos de Gauss. Então, a aproximação feita no presente estudo é realizada por meio de um polinômio do 23º grau. A resultante das tensões no concreto é obtida através da integração numérica com o emprego de pontos de Gauss e é descrita no item seguinte.

A Fig. 4.11 mostra as tensões na seção transversal provenientes do aço e do concreto.

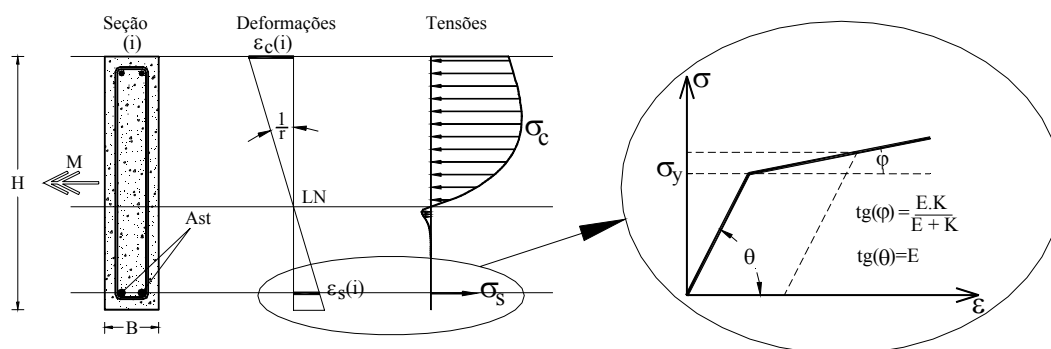


Fig. 4.11 – Distribuição das tensões na seção transversal

Para se determinarem os valores das deformações em cada ponto de Gauss é necessário conhecerem-se a curvatura da seção e a posição da linha neutra. A curvatura é obtida diretamente através da aplicação das funções de forma usadas no método dos elementos finitos. A linha neutra é obtida impondo-se a condição de que a força normal resultante na seção é nula, já que no problema de grelha não foi considerada a influência do esforço normal na matriz de rigidez. Assim, procura-se através de um procedimento iterativo de bissecção o zero da função que relaciona a força normal presente na seção e a linha neutra para uma dada curvatura da seção.

O cálculo da linha neutra segue o roteiro abaixo:

- Determina-se a curvatura da seção, que é função do nível de deslocamentos e da rigidez;
- Assume-se inicialmente a linha neutra no centro da seção;
- Determina-se a força normal por integração.
- Ajusta-se a posição da linha neutra conforme o sinal do esforço necessário para atingir o equilíbrio. O ajuste é feito tomando-se a metade do intervalo anterior. Recalcula-se a força normal que deve ser menor que a anterior, ou então ter sinal contrário.

A linha neutra tem a seguinte expressão:

$$LN_{(j)} = LN_{(j-1)} \pm \frac{H_s}{2^{(j+1)}} \quad (4.37)$$

onde “J” é a iteração atual.

O sinal da expressão acima é definido pelos sinais da curvatura e do esforço normal resultante na seção. O processo pára quando o esforço normal resultante na



seção for menor que uma tolerância pré-estipulada, ou quando “J” for grande o suficiente para que as mudanças de posição da linha neutra não produzam mais variações significativas nesse esforço.

#### 4.3.3.2 Integração numérica

Para calcular o momento fletor na seção devido ao concreto usa-se a expressão:

$$M_{\text{CON}} = \int_A \sigma_{(y)} y \, dA \quad (4.38)$$

A parcela devida à armadura é dada por:

$$M_{\text{AÇO}} = (A_{s1}\sigma_{s1} - A_{s2}\sigma_{s2}) \times \left( d - \frac{hs}{2} \right) \quad (4.39)$$

Transformando-se a Eq.(4.38) no domínio do elemento, a expressão total do momento interno pode ser escrita da seguinte maneira:

$$M_{\text{INT}} = \left( b_s \int_{-hs/2}^{hs/2} \sigma(y) y \, dy \right) + (A_{s1}\sigma_{s1} - A_{s2}\sigma_{s2}) \times \left( d_s - \frac{hs}{2} \right) \quad (4.40)$$

onde  $\sigma(y)$  é a tensão no concreto na fibra “y” e  $\sigma_{s1}$  e  $\sigma_{s2}$  são as tensões nas armaduras.

A integral presente no primeiro termo do segundo membro da Eq.(4.40) refere-se à parcela do momento proveniente das tensões no concreto. Essa parcela pode ser transformada numa somatória equivalente de termos em um domínio normalizado, da seguinte maneira:

$$b_s \int_{-hs/2}^{hs/2} \sigma(y) y \, dy = b_s \int_{-1}^1 \sigma(\xi) \frac{h_s}{2} \frac{h_s}{2} \xi \, d\xi = \frac{b_s h_s^2}{4} \sum_{i=1}^n \sigma(\xi_i) \xi_i w_i \quad (4.41)$$

onde os valores  $\sigma(\xi_i)$  são as tensões calculadas de acordo com o modelo nos pontos adimensionais  $\xi_i$ . Assim, escrevem-se as expressões utilizadas neste trabalho para o cálculo do momento fletor e do esforço normal na seção:

$$M_{\text{INT}} = \frac{b_s h_s^2}{4} \sum_{i=1}^n \sigma(\xi_i) \xi_i w_i + (A_{s1}\sigma_{s1} - A_{s2}\sigma_{s2}) \times \left( d_s - \frac{hs}{2} \right) \quad (4.42)$$

$$N_{\text{INT}} = \frac{b_s h_s}{2} \sum_{i=1}^n \sigma(\xi_i) w_i + (A_{s1}\sigma_{s1} + A_{s2}\sigma_{s2}) \quad (4.43)$$

#### 4.3.4 Relações constitutivas momento x curvatura

O modelo constitutivo do concreto foi utilizado no presente trabalho para determinar as tensões correspondentes a um determinado estado de deformações em uma fibra genérica da seção de concreto. Porém, deve-se também considerar a nova rigidez avaliada a partir do diagrama momento x curvatura. Conforme já citado, optou-se pelo uso de matrizes de rigidez secantes, que apesar de convergirem mais lentamente que as tangentes, evitam problemas com saltos ou inflexões nos modelos. Esses fatores conduzem à falta de unicidade da solução em procedimentos baseados no uso de matrizes tangentes.

Uma transformação entre um modelo de tensão x deformação para um modelo momento x curvatura foi realizada em Neves, R.A. [206] através do abatimento na inclinação da rigidez secante à curva. Optou-se por utilizar formulação semelhante no presente trabalho, como mostra a Fig. 4.12:

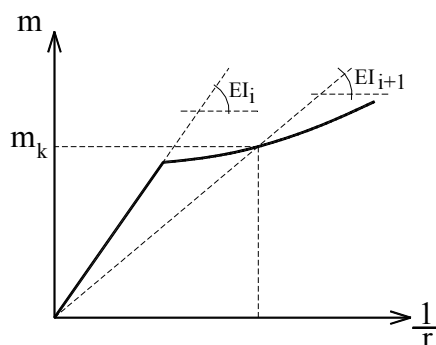


Fig. 4.12 – Modelo genérico escrito em momento x curvatura

A consideração da diminuição da rigidez é realizada atualizando-se o produto EI. Isso é feito apenas dividindo-se o momento interno encontrado na integração do modelo sobre o domínio da seção na iteração atual pela respectiva curvatura. Porém, um mesmo elemento possui curvaturas diferentes no seu nó inicial e nó final e o valor EI deve ser único na sua matriz de rigidez. Para contornar esse problema assumiu-se um valor médio da rigidez do elemento para a iteração seguinte, conforme a expressão:

$$EI_{i+1} = \frac{1}{2} \left[ \frac{(M_1)_i}{\left(\frac{1}{r_1}\right)_i} + \frac{(M_2)_i}{\left(\frac{1}{r_2}\right)_i} \right] \quad (4.44)$$

onde  $M_1$  e  $M_2$  são, respectivamente, os momentos atuantes no nó inicial e final do elemento na iteração 'i'.

#### 4.3.5 Cálculo do vetor de esforços residuais

Considere-se um elemento de barra onde existe um resíduo de momentos ao longo da sua extensão e deseja-se reaplicá-lo à estrutura em forma de esforço externo. A transformação desses resíduos em esforço externo é obtida através do emprego do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Sabe-se que as curvaturas da seção podem ser relacionadas aos deslocamentos através da matriz “ $\beta$ ”. Essa matriz é obtida a partir de operadores de derivadas sobre as funções de forma empregadas para a aproximação dos deslocamentos ao longo do comprimento do elemento. Assim:

$$\frac{1}{r} = \beta^t \varphi \quad (4.45)$$

onde  $\omega$  representa os deslocamentos virtuais.

A relação entre uma variação no campo de curvaturas e deslocamentos virtuais é:

$$\delta \frac{1}{r} = \beta^t \delta \varphi \quad (4.46)$$

Pelo PTV, em um elemento de barra de comprimento “L”, o trabalho virtual do carregamento externo  $\chi_e$  sobre o deslocamento virtual relativo  $\delta \omega$  é a igual ao trabalho virtual dos resíduos de momento sobre a deformação virtual  $\delta(1/r)$ :

$$\Psi_e^T \delta \varphi = \int_L \Delta M_0^T \delta \frac{1}{r} dL \quad (4.47)$$

Logo:

$$\Psi_e^T \delta \varphi = \int_L \beta \Delta M_0^T \delta \varphi dL \quad (4.48)$$

Dividindo-se a Eq.(4.47) e a Eq.(4.48) por “ $\delta \omega$ ”, obtém-se o vetor de esforços residuais para o elemento “e”. Assim:

$$\Psi_e^T = \int_L \Delta M_0^T \beta dL \quad (4.49)$$

onde  $\Delta M_0$  é uma função que descreve a variação dos resíduos de momento ao longo do elemento finito.

A partir da resolução da Eq.(4.49) mostra-se o algoritmo para a determinação dos resíduos. São conhecidos os valores nodais dos deslocamentos segundo os eixos locais

do elemento. A curvatura na extremidade do elemento é aproximada por uma função dos deslocamentos nodais  $\varphi_e$ , dada por.

$$\frac{1}{r} = \beta^t \varphi_e \quad (4.50)$$

O momento correspondente a essa curvatura é determinado através do emprego do modelo material adotado. O resíduo de momento  $\Delta M_k$ , é determinado em uma iteração “i” para cada nó “k” do elemento de acordo com a Eq.(4.51):

$$\Delta M_k = M_k - M_{r,k} \quad (4.51)$$

Conhecidos os resíduos de momento fletor nos nós inicial “i” e final “j” pode-se escrever a função  $\Delta M(x)$  para uso na Eq.(4.49). Emprega-se uma aproximação linear para o resíduo em cada nó. Portanto:

$$\Delta M(x)_i = \Delta M_i - \frac{\Delta M_i}{L} x \quad (4.52)$$

$$\Delta M(x)_j = \Delta M_j - \frac{\Delta M_j}{L} (L - x) \quad (4.53)$$

Efetuando-se a integração dada na Eq.(4.49) com a introdução das aproximações dadas em Eq.(4.52) e Eq.(4.53) obtêm-se os vetores de carregamentos residuais, onde a contribuição de cada nó do elemento é tomada de maneira isolada. Assim resulta:

$$\Psi_{e,i} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta M_i}{L} \\ 0 \\ \frac{\Delta M_i}{L} \\ \frac{\Delta M_i}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e \quad \Psi_{e,j} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta M_j}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta M_j}{L} \\ 0 \\ \Delta M_j \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

O vetor de resíduos totais para um elemento “e” em uma iteração é formado com a soma das parcelas “ $\Psi_{e,i}$ ” e “ $\Psi_{e,j}$ ” indicadas acima. Os esforços residuais globais da estrutura são obtidos a partir da consideração da contribuição de cada elemento.

Resumindo: para a obtenção do vetor de esforços residuais a serem reaplicados na estrutura, é necessário efetuar uma transformação do vetor de resíduos em momentos fletores em um vetor de forças nodais.

A Fig. 4.13 mostra a determinação do carregamento residual em um nó genérico “Q” usando-se as equações expostas. O procedimento é igual em todos os nós

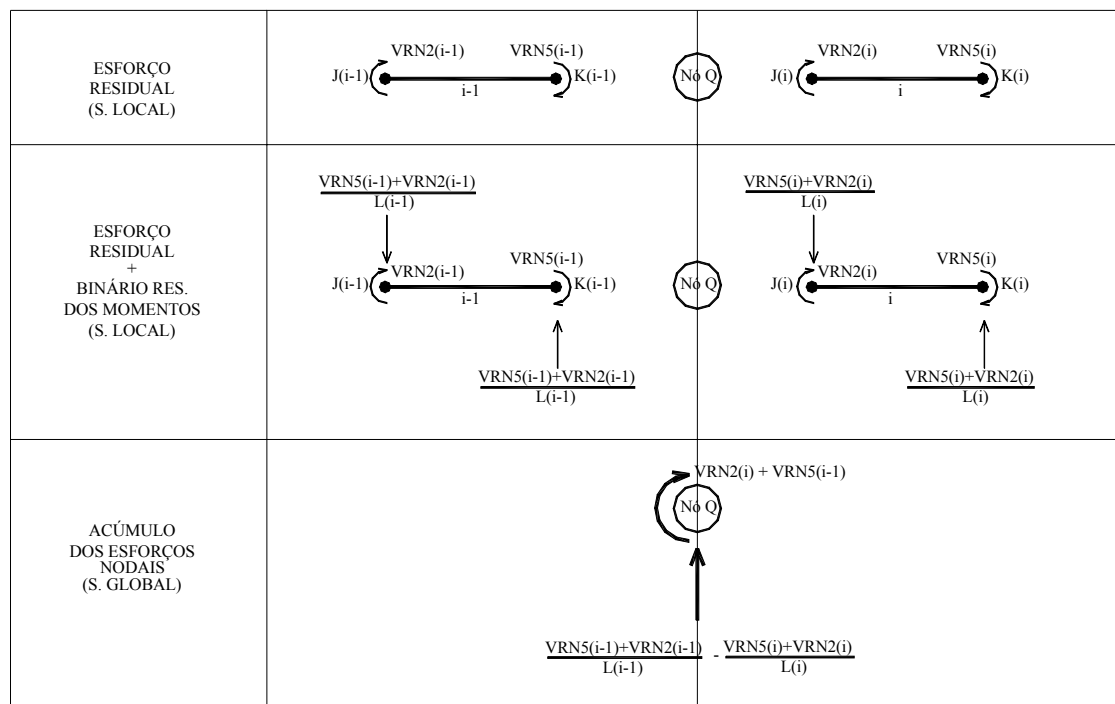


Fig. 4.13 – Caso geral de determinação do vetor de esforços residuais

Calculados os esforços nodais a serem reaplicados, basta reaplicar diretamente estes valores ao sistema e reiniciar o processo iterativo descrito anteriormente até que o critério de convergência esteja verificado. Depois de exposto o algoritmo usado na solução do sistema, é necessária ainda uma modificação no seu arranjo para a determinação precisa da carga última da grelha. Esse procedimento é descrito a seguir.

## 4.4 Determinação da carga última da estrutura

### 4.4.1 Algoritmo

Na presente análise, apenas as ações atuantes fora do plano da grelha de concreto armado foram consideradas. Também não foram efetuadas correções não-lineares para o esforço cortante e os momentos de torção no sistema local, cujos valores foram determinados somente para garantir o equilíbrio do sistema. Por essa razão, apenas a parcela de energia devida aos momentos fletores é considerada no modelo de elementos finitos.

O elemento de viga adotado pode ser visto na Fig. 4.13. Como já dito, ele é um elemento clássico com três graus de liberdade por nó, sendo um de translação e dois de rotação.

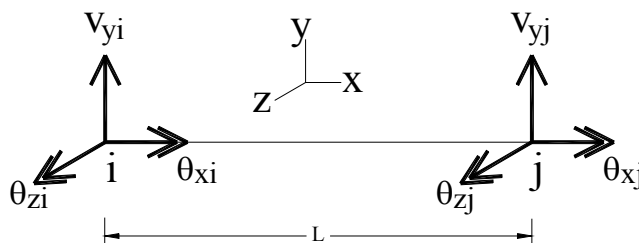


Fig. 4.14 – Elemento finito adotado

A equação que governa a estrutura pode ser obtida simplesmente reunindo as contribuições individuais das matrizes de cada elemento. A equação é:

$$[K_s][U] = [F] \quad (4.55)$$

onde  $[K_s]$  é a matriz global de rigidez secante da estrutura,  $[F]$  é o vetor de forças nodais aplicadas e  $[U]$  é a solução do sistema em termos de deslocamentos nodais.

Como se pretende usar o sistema acima para solucionar problemas de grelhas em concreto armado assumindo comportamento não-linear, o sistema deve ser solucionado em um contexto não-linear. Um esquema empregando matrizes secantes foi utilizado. Assim o sistema é válido para relacionar incrementos de força “ $\Delta F$ ” e deslocamento “ $\Delta U$ ”.

Esse modelo mecânico foi adaptado para obter cargas últimas de um sistema de grelha. As cargas últimas podem corresponder a um estado limite último ou de serviço. Como o comportamento dos elementos estruturais foi assumido não-linear, as cargas últimas só podem ser determinadas com precisão a partir de um processo iterativo, onde o carregamento é continuamente aumentado até que o estado limite assumido seja atingido. A matriz de rigidez secante do sistema deve ser atualizada durante todas as iterações.

É necessário aumentar gradativamente o carregamento através da aplicação de passos de carga até que uma deformação limite seja atingida em uma seção transversal da grelha. A deformação limite pode acontecer no concreto ou no aço. Essa condição corresponde ao estado limite global da estrutura onde se considera, em uma primeira instância, que o comportamento pós-falha do sistema não é importante para a análise.

O procedimento computacional para determinar com precisão o valor da carga última é feito dividindo-se globalmente todas ações aplicadas na estrutura por um fator “ $\eta$ ”. Esse fator é aplicado seqüencialmente e pode ser subdividido quando a força total aplicada estiver na vizinhança da carga última, pois as deformações na estrutura são muito sensíveis aos acréscimos de força em baixos níveis de rigidez. Assim, o coeficiente de carga última é o número de vezes “ $\eta$ ” que a estrutura suporta até atingir o primeiro estado limite. O algoritmo do procedimento pode ser visto na Fig. 4.15.

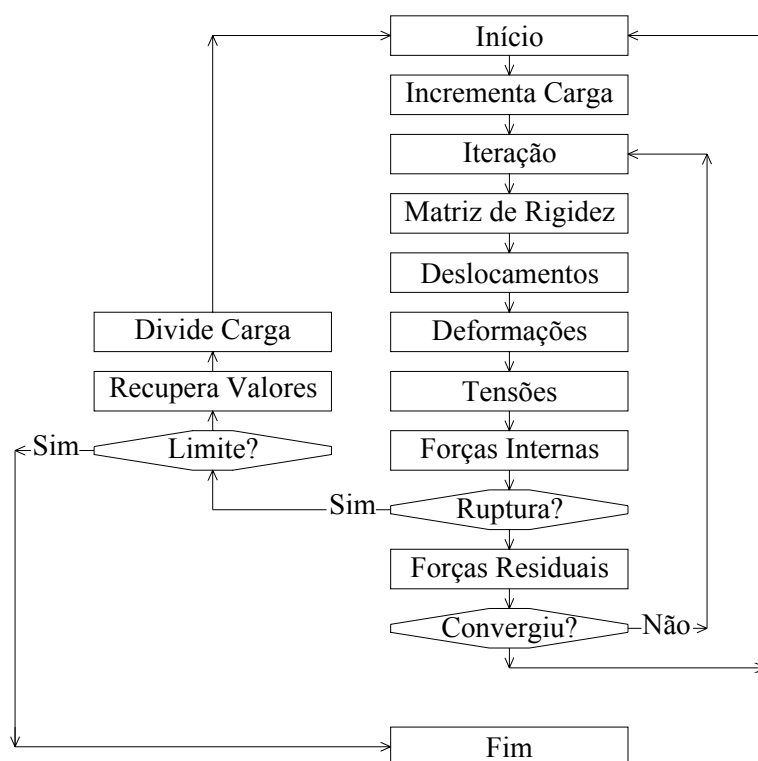


Fig. 4.15 – Algoritmo para o cálculo da carga última da grelha

Devido ao forte grau de não-linearidade envolvido, este procedimento pode levar bastante tempo dependendo da malha escolhida para a grelha e também dos valores adotados para as tolerâncias nos vários processos iterativos. No contexto confiabilístico deste trabalho, este procedimento é a resposta mecânica.

#### 4.4.2 Função de estado limite

A condição mais importante a ser testada no algoritmo exposto anteriormente é a falha dos materiais. O teste é efetuado em todas as seções da estrutura durante todas as iterações e passos de carga do algoritmo e em todas as respostas mecânicas. As deformações últimas admitidas pelos materiais devem ser previamente definidas. Isto é

feito como na Fig. 4.16. Quando uma dessas deformações é atingida, caracteriza-se a falha.

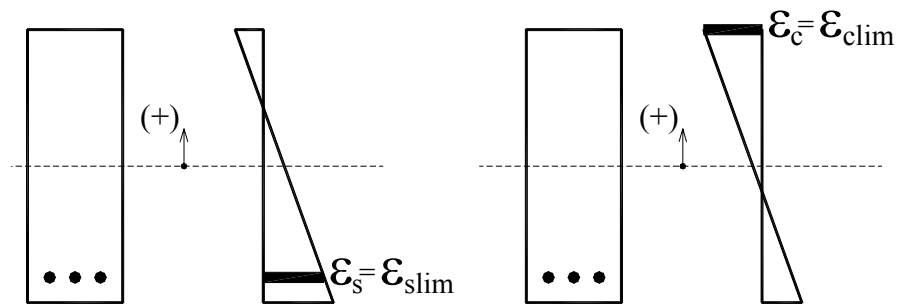


Fig. 4.16 – Deformações limite admissíveis na seção

A solução do modelo numérico conforme as técnicas apresentadas representa apropriadamente o comportamento da estrutura em níveis próximos ao seu estado limite. Ela fornece os deslocamentos, deformações, tensões e forças provocadas pela aplicação do carregamento externo.

Conforme mencionado, a carga última da estrutura é definida pelo alcance de uma deformação limite em qualquer seção da estrutura. Dependendo da realização das variáveis, a falha pode acontecer em uma seção transversal diferente, comprovando a existência de múltiplos modos possíveis de falha. Essa hipótese leva à definição de uma função de múltiplos estados limite na grelha:

$$\begin{aligned} G_{ci} &= \varepsilon_{clim} - \varepsilon_{ci} \\ G_{si} &= \varepsilon_{slim} - \varepsilon_{si} \end{aligned} \quad (4.56)$$

onde  $G_{ci}$  e  $G_{si}$  representam respectivamente os estados limite no concreto e no aço na seção transversal “i”.  $\varepsilon_{ci}$ ,  $\varepsilon_{clim}$ ,  $\varepsilon_{slim}$  e  $\varepsilon_{si}$  são as deformações nos materiais. O índice “i” refere-se à deformação calculada na iteração e o índice “lim” à deformação limite assumida.

A capacidade última da estrutura é matematicamente definida como:

$$P_{ult} = P \mid \min \{ G_{ci} \leq 0 \cup G_{si} \leq 0 \} \quad (4.57)$$

Observando-se a equação acima, nota-se que a carga última é obtida com a envoltória dos carregamentos que correspondem às deformações últimas em cada seção transversal. Para cada realização de variáveis uma carga última estrutural é determinada, relativa a um cenário de falha específico. Isso determina uma resposta mecânica do modelo.



Por simplificação divide-se a carga última pela carga aplicada e obtém-se:

$$\lambda = \frac{P_{ult}}{P_{apl}} \quad (4.58)$$

onde “ $\lambda$ ” é chamado de coeficiente de carga última e “ $P_{apl}$ ” é a carga aplicada na estrutura.

Nessas condições, pode-se escrever a função de estado limite no espaço físico e normalizado.

$$\begin{aligned} G(x_i) &= P_{ult}(x_i) - P_{apl} \\ H(u_i) &= \lambda(u_i) - 1 \end{aligned} \quad (4.59)$$

onde “ $x_i$ ” são as variáveis no espaço físico e “ $u_i$ ” são as variáveis normalizadas.

## **5 Modelos propostos para múltiplos estados limites**

### **5.1 Confiabilidade de sistemas**

#### 5.1.1 Generalidades

A análise de confiabilidade de um sistema estrutural aborda tanto a definição dos vários estados limites possíveis como também o cálculo da probabilidade de se atingir um desses estados limites, usualmente definidos como falha.

Matematicamente constata-se que se trata com um sistema quando a função de estado limite é composta de vários trechos, cada um representando falhas diferentes, podendo inclusive ser de natureza bastante distinta. Em geral, a representação dos trechos pode indicar pontos onde a função de estado limite global é descontínua. Cada uma dessas curvas é responsável por descrever a barreira de um modo de falha local específico. Um sistema estrutural é uma combinação de elementos individuais que são dispostos de determinada maneira para desempenhar uma função mecânica. Assim, obrigatoriamente a sua falha depende de um certo evento que combina falhas de seus elementos. Ao contrário do que vimos até aqui, a falha de um elemento não obrigatoriamente implica em uma falha global, embora existam casos onde essa regra é válida.

A probabilidade de falha para cujo cálculo foram apresentados os métodos anteriores é capaz de avaliar a chance de violação de um estado limite. Essa condição é verificada em um elemento pertencente ao sistema. Assim, o sistema possui vários elementos, cujas probabilidades de falha podem levá-lo a um estado limite. Uma grelha, por exemplo, pode apresentar ruptura à flexão, à torção ou ao cisalhamento. Em sistemas com um grande número de modos de falha, a probabilidade de falha final é normalmente obtida através de uma combinação das probabilidades de falha individuais de seus elementos.

Para definir os sistemas será utilizada aqui uma representação gráfica que fornece uma rápida associação visual ao problema tratado. Para utilizá-la, algumas convenções devem ser assimiladas, como a representação dos elementos por caixas com o seu número ou nome no interior. As operações de entrada e saída são representadas por setas.

Trata-se nessa seção de mostrar sucintamente os conceitos básicos para a análise de confiabilidade de sistemas estruturais complexos, formados por componentes sujeitos a falhas. Os conceitos aqui apresentados são válidos não apenas para sistemas estruturais, mais para quaisquer outros, tais como linhas de produção, controle de tráfego, sistemas de abastecimento, sistemas operacionais, dentre outros.

### 5.1.2 Idealização estrutural - sistemas em série

No sistema em série, se apenas um de seus elementos apresenta uma falha, o sistema perde a capacidade de funcionar ou de resistir. O exemplo mais simples é o de uma corrente e seus elos: se o elo mais fraco rompe, rompe-se a corrente. Aliás, é comum na literatura encontrar a denominação de *weakest link* para os sistemas que assim podem ser representados. Assim, a confiabilidade do sistema em série é medida pela confiabilidade do seu elemento mais frágil. Estruturas estaticamente determinadas são consideradas sistemas em série, pois a falha de um vínculo leva à falha do sistema, como por exemplo, em uma treliça isostática. A Fig. 5.1 mostra um exemplo de um sistema em série.

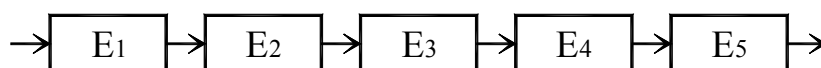


Fig. 5.1 – Sistema em série

A probabilidade de falha do sistema acima é dada pela probabilidade de que o seu elemento mais frágil falhe. Essa grandeza, dada pela Eq.(5.1), está submetida à condição de que não haja correlação entre as probabilidades dos elementos, isto é, os eventos devem ser independentes.

$$P_f = P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5) \quad (5.1)$$

onde  $E_i$  representa a falha do componente  $i$ .

Os modos de falha são representado por uma função de estado limite  $G(x_i) = 0$ . Assim, no espaço das variáveis físicas, por extensão direta do problema básico de confiabilidade temos:

$$P_f = \int_{D_1+D_2} (f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)) dx_1, dx_2, \dots, dx_n \quad (5.2)$$

onde os domínios  $D_1$  e  $D_2$  estão mostrados na Fig. 5.2.

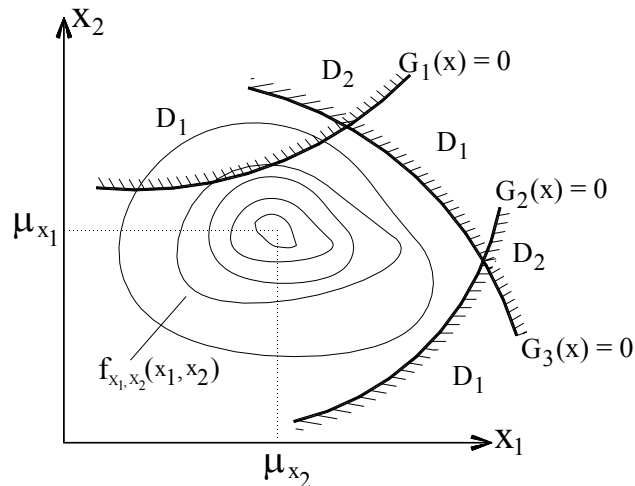


Fig. 5.2 – Funções de estado limite dos vários modos

### 5.1.3 Idealização estrutural - sistemas em paralelo

Quando os elementos de um sistema estrutural se comportam de tal maneira ou apresentam conectividade segundo uma disposição que a violação de um estado limite em um elemento não caracteriza a falha do sistema, o problema de confiabilidade é dito redundante, ou paralelo. Nesse modelo os elementos do sistema estão conectados em paralelo, conforme a Fig. 5.3. A falha de um sistema em paralelo requer a falha de todos os elementos do sistema. Em estruturas estaticamente indeterminadas, com muitas seções possíveis de falha, não há o colapso total até que várias dessas seções se encontrem em uma situação limite.

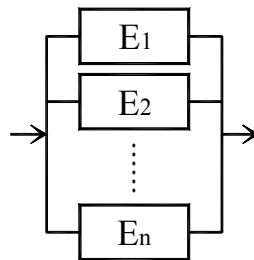


Fig. 5.3 – Sistema em paralelo

Em problemas estruturais, a redundância pode ser classificada como ativa e passiva. A redundância ativa ocorre quando o elemento participa do comportamento estrutural mesmo em baixos níveis de carregamento. A redundância passiva é caracterizada quando um determinado elemento só passa a funcionar depois de um certo nível de deterioração da estrutura. Esse tipo de redundância é particularmente interessante, pois implica intuitivamente em uma capacidade de reserva. Entretanto, a influência da redundância ativa depende do comportamento mecânico dos materiais constituintes dos elementos. Nos sistemas em paralelo com baixa redundância ou componentes frágeis, a falha de um componente é suficiente para provocar a falha do sistema, a não ser que o elementos em situação de falha não apresente maiores contribuições à redundância do sistema.

Algumas considerações sobre a relação entre a confiabilidade de sistemas estruturais e redundância podem ser encontradas nos trabalhos de Ditlevsen, O. & Bjerager, P. [25] e Shiraishil, N. & Furuta, H. [73].

A probabilidade de falha do sistema mostrado na Fig. 5.3, quando todos os elementos apresentam redundância ativa, é:

$$P_f = P(E_1 \cap E_2 \cap \dots \cap E_n) \quad (5.3)$$

onde  $E_i$  representa a falha do componente  $i$ .

Analogamente ao caso do sistema em série, se cada modo de falha pode ser representado por uma função  $G(x_i) = 0$ , a probabilidade de falha do sistema é:

$$P_f = \int_{D_2} (f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)) dx_1, dx_2, \dots, dx_n \quad (5.4)$$

onde  $D_2$  é o domínio representado na Fig. 5.2.

Assim, as características dos elementos individuais do sistema em paralelo são importantes, já que o colapso do sistema ocorre apenas quando todos os componentes atingem um estado limite.

#### 5.1.4 Métodos de análise

A discussão da segurança de sistemas configura uma ênfase diferente da que tinha sido feita até o presente momento. Enquanto antes todas as falhas eram incluídas na determinação da confiabilidade, atenta-se agora para aquelas que podem de um modo combinado, conduzir o sistema a uma situação de colapso.

A análise dessas situações é particularmente difícil, e se torna mais difícil à medida que o número de elementos associados cresce. Assim, é difícil tomar decisões de projeto, manutenção e operação de sistemas com muitos modos possíveis de falha. Nas estruturas de concreto, os valores pequenos das probabilidades de falha individuais dificulta a obtenção de bases de dados, nas quais se baseiam os métodos gerais para a determinação da confiabilidade de sistemas.

Provavelmente a tarefa mais importante ao eliminar modos ou caminhos não importantes de falha em um sistema é a definição dos caminhos possíveis que podem conduzir o sistema a um colapso. Essa identificação requer uma boa compreensão do Engenheiro sobre o sistema estudado, compreendendo a sua operação e as limitações de cada um dos seus componentes e mesmo os mais experientes podem deixar de levar em conta um modo de falha. Por isso várias técnicas de confiabilidade de sistemas foram desenvolvidas. Três delas são comentadas a seguir.

#### 5.1.4.1 Análises dos modos e efeitos de falha

O método das análises dos modos e efeitos de falha, que normalmente é tratado pela sigla FMEA vinda do inglês *Failure Modes and Effect Analysis* é uma das técnicas mais empregadas na enumeração de possíveis modos de falha pelos quais um componente pode deixar de operar. Consiste basicamente em um método de avaliação de produtos, de processos ou de serviços, usado para identificar os possíveis modos de falha do sistema e também prever as conseqüências de cada um desses modos sobre o seu comportamento, a fim de orientar as possíveis correções antes da ocorrência da falha. É uma técnica de natureza qualitativa, embora algumas estimativas da probabilidade de falha possam ser obtidas. A representação desse método, bastante usado em linhas de produção, é geralmente através de tabelas. Essas tabelas constam dos componentes que podem apresentar falhas, os seus modos possíveis de falha e ainda os efeitos e danos causados por cada uma delas. Em resumo, seus objetivos são identificar as falhas críticas em cada componente com suas causas e conseqüências, classificar as falhas e analisar a confiabilidade do sistema. Segundo a literatura, é bastante utilizado em processos industriais. A Tabela 5.1 mostra uma planilha típica de uso do FMEA aplicada a um problema de falha de motores adaptada de Lewis, E.E. [207].

Tabela 5.1 – Exemplo de planilha para uso do *FMEA*

Análises dos modos e efeitos de falha - Subsistema: Motor						
Item	Modo de falha	Causa da falha	Efeitos da falha	Probabilidade de ocorrência	Importância	Ações para reduzir a taxa de falhas
Caixa do motor	Ruptura	Falha humana	Inutilização	0,0006	Crítica	Controle da manufatura
		Defeito no material				Melhor controle de qualidade
		Danificação durante o transporte				Melhor acondicionamento
		Danificação durante o manuseio				Treinamento para manuseio
		Pressão elevada				Inspeção: testes de pressão
Motor	Separação da caixa	Limpeza inadequada da caixa	Queima em excesso / Consumo elevado	0,0001	Média	Controle da limpeza
	Fissuração	Tensão elevada	Aquecimento / Pressão elevada	0,0001	Crítica	Armazenamento com temperatura controlada
	Descolamento	Uso de material pouco aderente	Ruptura durante operação	0,0001	Crítica	Controle do material

A Tabela 5.1 é útil para demonstrar a aplicação da técnica, que é largamente empregada na determinação da confiabilidade de sistemas em geral.

#### 5.1.4.2 Árvore de eventos

Em muitos cenários de colapso a falha de um determinado componente, denominada de falha inicial, pode conduzir a resultados variados sob um aspecto de redistribuição de esforços. Esses resultados podem variar da simples absorção do esforço por um outro componente, ou simplesmente produzir o colapso de todo o sistema. As conseqüências podem ser determinadas medindo-se como a progressão do acidente é afetada pela falha de modos ou de elementos subseqüentes. Nessas situações, o método como o da árvore de eventos é bastante útil para sistemas complexos. A idéia é iniciar perguntando o que acontece se o evento de falha inicial acontecer em seguida

verificar cada uma das possíveis seqüências de falha que se sucedem. Depois de definidas as seqüências, devem-se associar probabilidades a cada uma delas. Com isso, medem-se as chances de uma falha global, caracterizando a técnica como quantitativa.

#### 5.1.4.3 Árvore de falha

A árvore de falha é uma técnica dedutiva empregada para determinar os modos ou caminhos potenciais de falha e de uma maneira mais geral, para estimar a probabilidade de falha. A rigor, a árvore de falha é usada para determinar a confiabilidade do sistema em função de seus componentes. Ela é centrada na determinação das causas do evento indesejado (falha), relacionado esse evento no topo da árvore. Inclusive, na representação gráfica ele é representado nessa posição. A diferença entre a árvore de eventos e a árvore de falha é que nesta última só entram os eventos de falha. A árvore de eventos considera as duas possibilidades, embora as duas descrevam o mesmo fenômeno. As Fig. 5.4 e Fig. 5.5 mostram respectivamente uma árvore de eventos e uma de falha adaptadas de Lewis, E.E. [207], que descrevem o evento de falha na instalação elétrica de uma edificação.

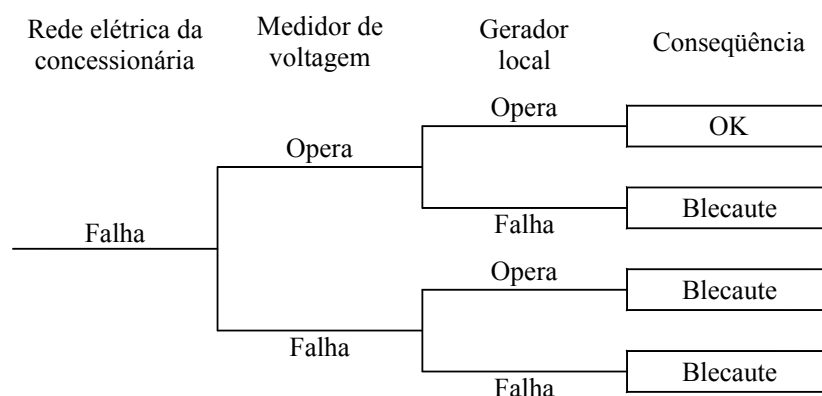


Fig. 5.4 – Árvore de eventos

Depois de vistos os métodos clássicos de confiabilidade de sistemas, na seção seguinte apresentam-se os modelos desenvolvidos e propostos para a determinação da probabilidade de falha.



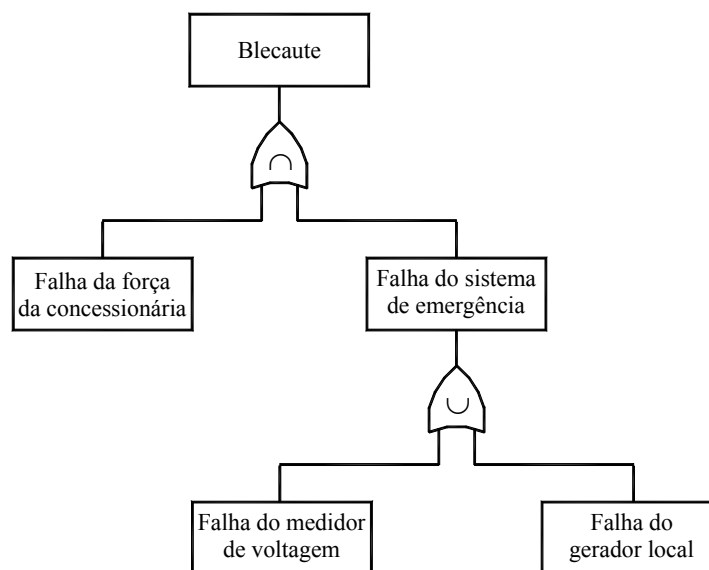


Fig. 5.5 – Árvore de falha

## 5.2 Obtenção da probabilidade de falha

### 5.2.1 Generalidades

Vários métodos foram propostos na literatura com a finalidade de generalizar a obtenção da probabilidade de falha de sistemas estruturais. Algumas considerações foram traçadas no sentido de realizar modelagens do carregamento, como nos trabalhos de Ellingwood, B.R. [77] e Han, B.K. [78]. Existem também abordagens considerando modelos lineares na tentativa de simplificar a análise e aumentar o seu desempenho, como no artigo de Mohamed, A.M. & Lemaire, M. [52]. No caso particular de estruturas de concreto, os trabalhos de Soares, R.C. et al. [146] e [147] mostram o desenvolvimento de um modelo probabilístico para o cálculo de confiabilidade levando em conta modelos não-lineares físicos e geométricos. O acoplamento entre o MEF e o RSM é implementado para avaliar o índice de confiabilidade do sistema. No trabalho de Melchers, R.E. & Ahammed, M. [128] é realizada uma discussão sobre a consideração do uso de mais de uma função de estado limite para introduzir melhorias no cálculo da probabilidade final de falha de um sistema.

Nas seções seguintes confronta-se o acoplamento MEF/RSM realizado através de um estado limite único com o uso de várias dessas funções. Algumas técnicas são propostas para a obtenção aproximada das curvas. Desenvolve-se um processo de

integração no domínio obtido com os vários estados limites através do método de Monte Carlo.

### 5.2.2 Estado limite único

Uma técnica eficiente e precisa para essa determinação da confiabilidade da estrutura referente à violação de um estado limite último é baseada na superfície de resposta que aproxima globalmente a capacidade resistente última do sistema. Essa superfície fornece o ponto correspondente ao máximo valor da curva de carga onde uma deformação limite é atingida em uma seção qualquer. A carga última da estrutura é definida com o uso do coeficiente  $\lambda$  já apresentado anteriormente, no item 4.4:

$$P_u = \lambda(x_i) \times P_a \quad (5.5)$$

$$\lambda \in \mathfrak{R} / \varepsilon_c(i) = \varepsilon_{c,lim}(i) \quad \text{ou} \quad \varepsilon_s(i) = \varepsilon_{s,lim}(i)$$

onde as deformações limite são fixadas igualmente em todas as “ $N_s$ ” seções da estrutura com os seguintes valores:

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon_{c,lim}(i) = -0,35\% \\ \varepsilon_{s,lim}(i) = 1,00\% \end{array} \right\} i = 1, N_s \quad (5.6)$$

Levando-se em consideração o primeiro modo de falha, que corresponde à falha global, a função de desempenho pode ser definida por:

$$G(x_i) = P_u(x_i) - P_a \quad (5.7)$$

onde  $P_u(x_i)$  é a carga última da estrutura em função do vetor de variáveis aleatórias  $x_i$  calculada conforme a Eq.(5.5), o vetor  $x_i$  corresponde às variáveis aleatórias descritas no espaço físico e  $P_a$  é o carregamento externo aplicado.

No caso de se considerar as incertezas embutidas no carregamento, essa grandeza também vai ser dependente do vetor  $x_i$ . A expressão (5.7) pode ser escrita no espaço normalizado. Dividindo-a pelo carregamento aplicado considerado não aleatório, essa função pode ficar simplificada como a seguir:

$$H(u_i) = \lambda(u_i) - 1 \quad (5.8)$$

onde  $\lambda(u_i)$  é a carga última da estrutura dada em função do vetor de variáveis aleatórias normalizadas  $u_i$ .

Uma constatação importante que pode ser feita é a de que o cenário de falha em uma realização aleatória é desconhecido. Isso dificulta a tentativa de previsão do ponto de falha mais provável. Essa é uma dificuldade inerente ao uso da técnica porque o uso de uma função de estado limite única reúne uma aproximação de vários modos de falha. Porém, essa abordagem é largamente utilizada, pois apresenta simplicidade de uso e fornece boas aproximações da probabilidade final de falha.

Entretanto, se os sistemas estruturais apresentarem um conjunto de modos de falha cujas probabilidades de falha são próximas entre si, o índice de confiabilidade não levará em consideração as probabilidades dos modos inferiores. Com isso, a probabilidade global é subestimada, contra a segurança. Além disso, outra desvantagem constatada é que uma pequena perturbação imposta aos valores das variáveis de projeto pode mudar completamente o cenário de falha, conforme indica a Fig. 5.6. Os valores das probabilidades de falha são bastante sensíveis a essas variações.

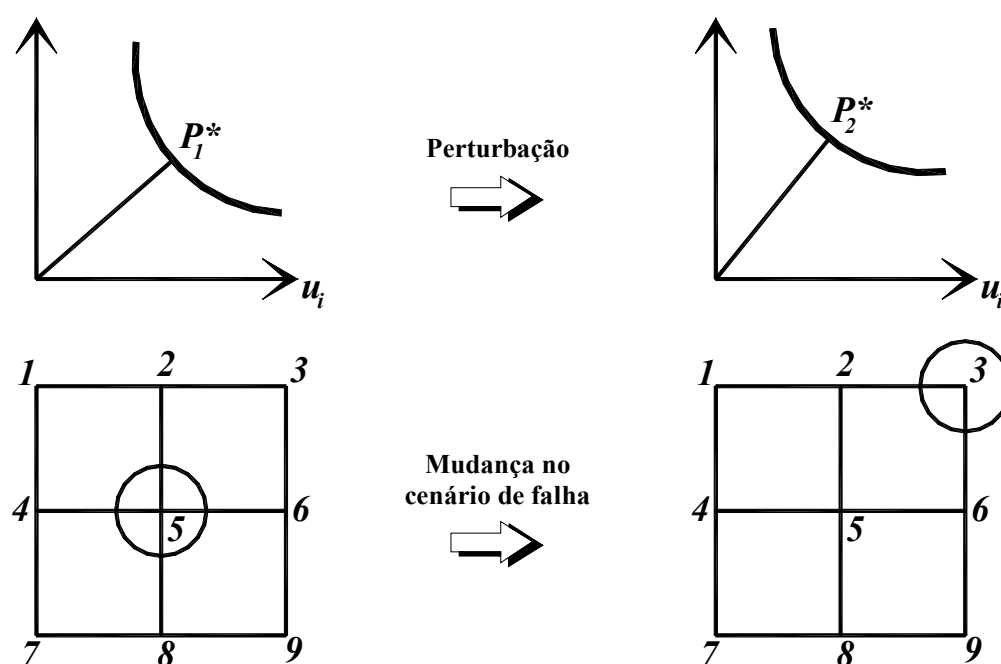


Fig. 5.6 – Perturbações nos valores das variáveis de projeto mudam o cenário de falha

No caso da grelha de concreto armado, o comportamento mecânico pode ser caracterizado mais fielmente com a introdução de possibilidades de manipulação de múltiplos pontos de falha, por exemplo, em cada seção transversal da estrutura. Então, a proposta baseada em cargas últimas pode ser implementada no sentido de se construir funções de estado limite baseadas em cargas últimas locais. Além de opcional, essa maneira de tratar o problema pode se tornar necessária para a análise de confiabilidade de sistemas com precisão e desempenho razoáveis. O objetivo é construir os domínios

de falha e de segurança de uma maneira mais precisa e assim realizar uma melhor estimativa da probabilidade de falha, como pode ser visto a seguir.

### 5.2.3 Estados limites múltiplos

A busca do ponto de projeto, necessária para a determinação do índice de confiabilidade, com a adoção de um estado limite único fornece o ponto de falha mais provável  $P^*$ . O uso de um único estado limite implica que a probabilidade de falha desse ponto é igual à probabilidade do sistema. O uso de superfície de resposta com uma única função de estado limite leva à conclusão preliminar de que essa verificação baseada na carga última global fornece uma função de estado limite que funciona como uma envoltória dos modos importantes de falha, conforme ilustrado na Fig. 5.7. Isto quer dizer que essa técnica não é capaz de avaliar modos secundários de falha, pois a análise mecânica não requer a determinação de estados estruturais em um domínio pós-falha.

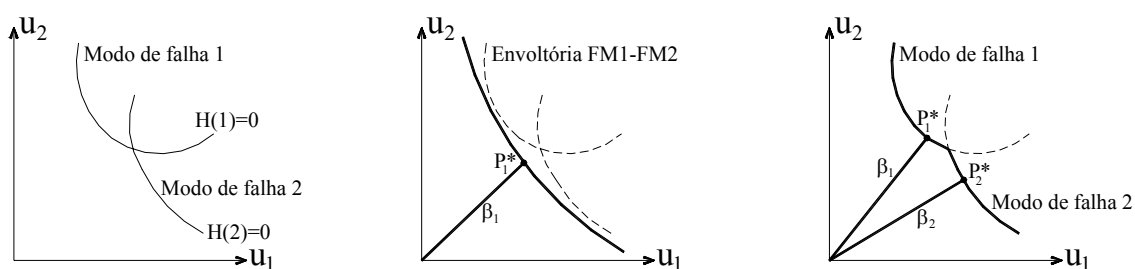


Fig. 5.7 – O estado limite único representa a envoltória dos modos mais importantes

Na grelha de concreto armado, onde existem vários pontos suscetíveis de serem o ponto de falha mais provável, mediante pequenas variações nas características das variáveis de projeto as probabilidades dos modos secundários podem ser elevadas e podem apresentar forte influência se consideradas na determinação da probabilidade final de falha. Assim, em vez de tomar-se a envoltória de todos os modos de falha, deseja-se levar em conta as funções de todos esses modos individualmente, ou mesmo realizar uma seleção de modos conforme determinado critério, verificando a influência dessas considerações na confiabilidade global do sistema. Caso a contribuição do modo de falha mais influente seja elevada em relação aos modos secundários, a consideração de múltiplos estados limites fornece resultados semelhantes ao uso de um estado limite único. Por outro lado, se essas probabilidades forem semelhantes, as diferenças podem ser elevadas.

Em geral, não é possível afirmar se uma estrutura apresenta modos de falha secundários importantes ou não. Isso acontece porque a sensibilidade da confiabilidade em relação aos modos secundários pode ser elevada. No caso da grelha de concreto armado, modificações relativas entre taxas de armaduras nas seções, ou nos parâmetros estatísticos dos materiais normalmente conduzem a mudanças na importância dos modos de falha. Portanto, torna-se difícil assegurar qual das abordagens é suficiente para a aproximação da probabilidade final. Portanto, o ideal é sempre verificar a influência dos modos secundários, onde há sempre uma precisão melhor, com tempo de processamento que depende do número requerido de realizações aleatórias. Isso pode representar um pequeno acréscimo de tempo computacional, mas permite avaliar se a aproximação com o emprego de um estado limite único fornece precisão suficiente ou não.

Assim, o objetivo principal dessa abordagem é separar os estados limites individualmente com a finalidade de verificar a influência das probabilidades de cada um dos respectivos modos de falha. Esse conjunto de modos dos quais se quer medir a influência pode passar previamente por critérios de seleção para que os modos claramente não influentes sejam eliminados. Aliás, recomenda-se fortemente que essa seleção seja efetuada, descartando cálculos desnecessários e resultando em ganho de tempo de processamento. A idéia principal é construir as curvas de estado limite para cada modo de falha como indica a Fig. 5.8. Nessa figura pode-se observar o procedimento de considerar o domínio composto ao invés de aproximações polinomiais em torno do ponto de projeto.

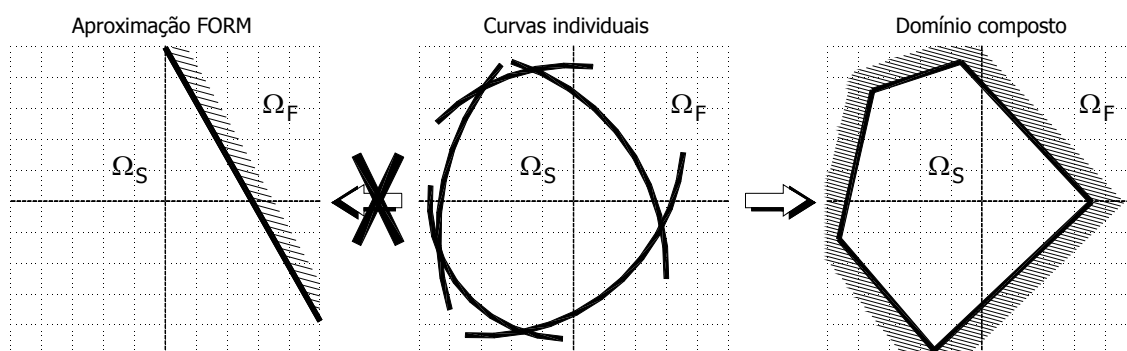


Fig. 5.8 – Novo domínio seguro

Então, deseja-se abandonar a aproximação FORM, ou mesmo SORM, onde se utiliza uma função em torno do ponto de projeto para definir um domínio de falha aproximado. A nova hipótese é definir um domínio seguro composto a partir de várias aproximações lineares ou quadráticas, conforme a Fig. 5.8. Esse domínio composto

representa uma aproximação constituída de vários estados limites. Ele não é o domínio real ou exato, mas certamente é uma aproximação melhor do que as proposições em primeiro ou segundo grau. A probabilidade final do sistema é calculada por simulação nesse domínio limitado pelos estados limites dos vários modos.

Assim, a definição desse domínio passa pela construção das curvas individuais de cada modo de falha. A construção dessas curvas não é imediata, pois os problemas manipulados requerem um caráter geral para os casos de grande número de variáveis aleatórias. Para isso, alguns procedimentos foram propostos conforme explicado a seguir.

#### 5.2.4 Construção das curvas dos estados limites múltiplos

##### 5.2.4.1 Generalidades

A proposta de separação dos estados limites de cada modo de falha passa por um procedimento de construção das curvas referentes a cada um desses estados limites, em todos os modos previamente selecionados. Várias técnicas foram experimentadas na tentativa de exprimir essas curvas, que se constituem em polinômios no espaço “n” igual ao número de variáveis aleatórias mais um. No entanto, em decorrência da complexidade dos cálculos e da necessidade de generalidade da técnica, poucas soluções foram satisfatórias. As estratégias aceitáveis foram divididas em dois grupos: com imposição da falha e sem imposição de falha. Dentro do grupo com falha imposta, foram testados métodos com planos de experiência e com Monte Carlo. A seguir, esses procedimentos são detalhados.

##### 5.2.4.2 Imposição de falha com planos de experiência

Essa estratégia consiste em forçar a ocorrência de uma falha segundo um modo, para todos os pontos de um plano de experiência. Portanto, a obtenção da carga última não passa exatamente pelo procedimento descrito na Fig. 4.15, já que existe a negligência da condição de deformação limite atingida nos modos onde não se deseja a falha. Além disso, a condição relativa à ruptura é apenas verificada no modo de falha requerido. A Fig. 5.9 mostra um esquema simplificado da obtenção das curvas.

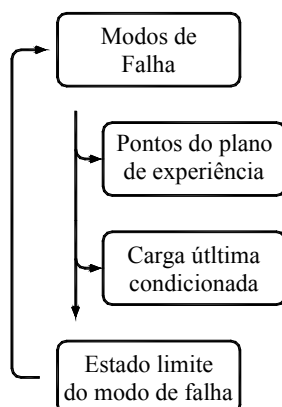


Fig. 5.9 – Curvas de estado limite individuais: imposição de falha com PE's

Efetuando-se a repetição desse artifício para todos os modos de falha, uma superfície de resposta é construída para um deles, não observando as deformações limites nos outros modos, quando atingidas antes do modo desejado. A carga última calculada nessa situação foi chamada na figura de carga última condicionada.

#### 5.2.4.3 Imposição de falha com Monte Carlo

A imposição de falha segundo o método de Monte Carlo segue o mesmo princípio empregado no item anterior. A diferença é que as realizações aleatórias não são previamente escolhidas. Da mesma maneira, existe um *looping* de modos onde a falha deve ser verificada. Fixado um modo de falha, leva-se a estrutura a um estado limite na várias realizações, o que permite efetuar a regressão necessária para construir a devida função. A Fig. 5.10 mostra esse procedimento.

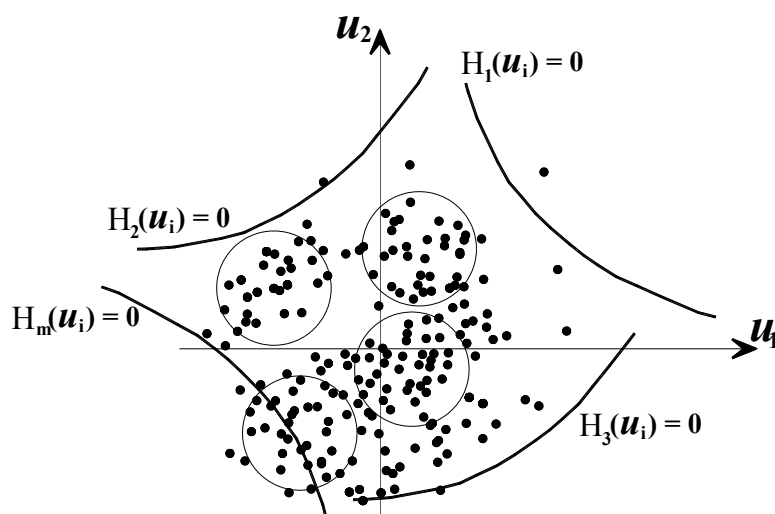


Fig. 5.10 – Curvas de estado limite individuais: imposição de falha com simulação

#### 5.2.4.4 Falha não imposta

A imposição de falha segundo os inúmeros modos importantes torna-se trabalhosa quando o número de variáveis aleatórias cresce. Assim, adotou-se outra estratégia de traçado das funções de estado limite dos vários modos de falha. Se as deformações apresentadas em um determinado modo estiverem próximas da deformação última, a realização é selecionada para compor um conjunto de realizações aleatórias para cada modo de falha.

Assim foram criadas as funções de estado limite local, não mais em função de todas as realizações aleatórias, mas apenas em função das realizações que produzem uma deformação limite no modo (ou próxima do limite). Devido ao caráter aleatório das realizações, esse procedimento é válido sem nenhuma perda de precisão para o processo. Além disso, como os cálculos das simulações são independentes entre si, pode-se realizá-las em paralelo de forma trivial em vários computadores ao mesmo tempo, o que permite uma redução do tempo proporcionalmente à disponibilidade de computadores. Esse procedimento está explicado no exemplo mostrado no item 6.4 deste trabalho.

#### 5.2.5 Integração do domínio composto

Os índices de confiabilidade podem ser calculados separadamente para levar em consideração os “n” primeiros modos mais importantes, caracterizando a sua influência na probabilidade global do sistema. Os modos mais importantes serão simplesmente aqueles que apresentarem probabilidade mais próxima. Sabendo-se que os valores das probabilidades de falha decrescem rapidamente com relação ao índice de confiabilidade, a escolha dos “n” modos mais importantes é importante para evitar a realização de cálculos desnecessários, aumentando a eficiência computacional. A precisão do resultado final é pouco alterada com uma seleção conveniente. Um bom critério de seleção é não levar em consideração os modos de falha cuja probabilidade seja menor do que  $10^{-3}$  vezes a probabilidade de falha do primeiro modo.

Assim, depois de realizada a seleção dos modos importantes e da definição de suas funções de estado limite, o domínio de falha está definido e pode-se avaliar a probabilidade de falha final do sistema de violar qualquer um desses estados limites. Para essa estimativa, utilizou-se simplesmente o método de Monte Carlo. Uma avaliação da função de estado limite de cada modo de falha é realizada em todas as realizações. Caso ela seja negativa, conta-se uma falha global. Ao final, essa contagem é



dividida pelo número de simulações para a determinação do estimador. A Fig. 5.11 ilustra a simulação sobre o domínio composto.

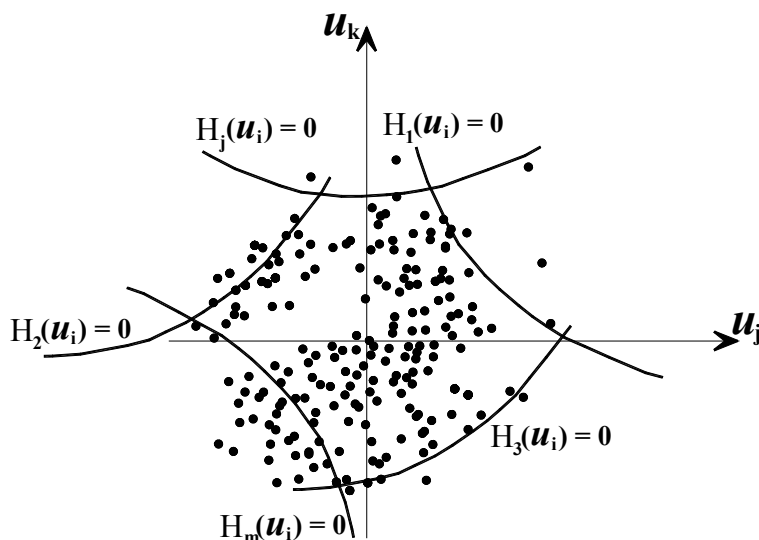


Fig. 5.11 – Simulação final sobre o domínio composto

### 5.3 Conexão entre os modelos propostos e a confiabilidade de sistemas

Nos sistemas complexos com muitos componentes, a presença de diferentes modos de falha acarreta a necessidade de um procedimento para identificação e avaliação das conseqüências das falhas segundo esses modos. A probabilidade de falha do sistema pode ser calculada calculando-se a integral da função de densidade conjunta sobre os domínios definidos pelas curvas de estado limite desses vários modos. Como a integração é possível apenas em um pequeno número de situações, os métodos aproximados também são aplicados ao caso de sistemas. As ferramentas usuais mostradas permitem a avaliação de sistemas em série e em paralelo.

A análise de confiabilidade desses sistemas requer um acoplamento entre os métodos de confiabilidade aproximados e o método dos elementos finitos. Os métodos baseados no emprego de uma função de estado limite única disponíveis atualmente para determinar as probabilidades dos sistemas requerem um alto número de chamadas ao modelo mecânico. Para realizar a análise do sistema, as suas variáveis aleatórias devem ser consideradas. Assim, as análises com RSM baseadas em planos de experiência numéricos ou aleatórios devem contemplar esse número de chamadas. Esse número cresce muito rapidamente com o número de variáveis aleatórias e pode se tornar inviável para os recursos computacionais disponíveis.

Na seção 5.2 foram propostas algumas técnicas aproximadas para a determinação da confiabilidade dos sistemas estruturais usando um acoplamento entre as técnicas de simulação e superfície de resposta. Os procedimentos propostos neste trabalho para a determinação da confiabilidade das grelhas são baseados em um modelo de confiabilidade em série, pois a confiabilidade do sistema é medida pela violação de um estado limite qualquer, que caracteriza o ponto mais frágil. Aliás, as normas existentes para projeto ou verificação estrutural sempre recomendam a não violação de estados limites últimos, sejam eles quais forem. Assim, em termos de recomendações práticas, não é possível realizar a verificação ou projeto de um sistema em paralelo, pois a situação indesejável é atingida quando um estado limite qualquer é violado. Por exemplo, a formação de rótulas plásticas, que mesmo não conduzindo o sistema a uma situação de colapso, é considerada uma situação de estado limite, que não deve ser violada. Nas rótulas plásticas, as deformações últimas prescritas em normas (0,001 e - 0,00035) devem ser necessariamente respeitadas em todas as seções. Nesses termos, a verificação prática do sistema é sempre realizada em série, já que as recomendações atuais não fazem sequer referência às situações de colapso total do sistema.

Porém, a presente proposta contempla os dois tipos de análise. Observando-se cuidadosamente a Fig. 5.2 percebe-se que a simulação pode ser realizada para obterem-se os pontos que estão tanto no domínio  $D_1+D_2$ , quanto no domínio  $D_2$  isoladamente. A simulação realizada no domínio  $D_1+D_2$  fornece a probabilidade de falha em série, isto é, a falha acontece quando qualquer estado limite é violado. No entanto, as simulações cujo critério de falha é baseado apenas no domínio  $D_2$ , que representam a violação das intersecções de estados limites, traduzem as situações de colapso total do sistema. Qualquer outra possibilidade pode ser idealizada, bastando apenas escolher o domínio correto de integração.

A primeira situação (domínio  $D_1+D_2$ ) representa, por exemplo, a formação de uma rótula plástica em um nó de uma estrutura de concreto. Dependendo do seu grau de redundância, pode não haver colapso. Porém, como essa situação é indesejada, convencionou-se que a estrutura apresentou uma falha, já que violou um estado limite.

No segundo caso (domínio  $D_2$ ), existe uma formação de uma seqüência de rótulas plásticas que acarretará um acidente estrutural. Conforme já dito, as normas não recomendam esse tipo de verificação. Contudo, essa é uma outra vantagem da presente proposta, pois, além de precisar a probabilidade de violação de um estado limite

qualquer do sistema, ela permite, com um número bem mais elevado de simulações, determinar também a probabilidade de um colapso estrutural.

## 6 Exemplos

### 6.1 Grelha com duas barras

Com a finalidade de mostrar uma aplicação que utiliza uma função única de estado limite em problemas estruturais, analisa-se o caso simples de uma estrutura formada por duas vigas que se cruzam como na Fig. 6.1. Em virtude da simetria de geometria e de carregamento, o modelo em elementos finitos pode ser simplificado para uma viga de vão simples engastada em uma extremidade e livre na outra. A viga do modelo resultante possui carga concentrada  $P$  aplicada no meio do vão.

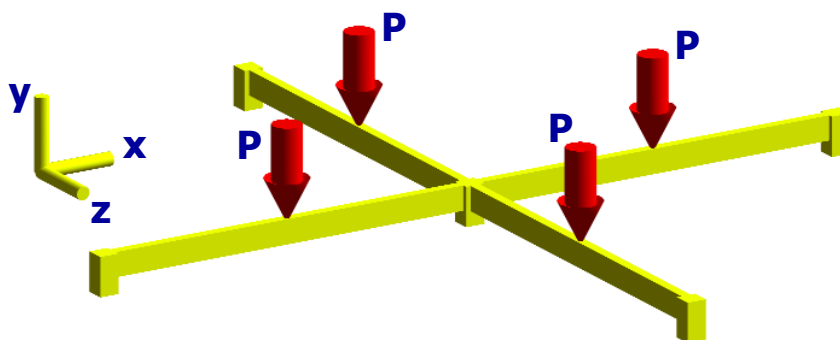


Fig. 6.1 – Esquema da grelha do exemplo 6.1

O comprimento é dividido em oito elementos finitos e ao longo dele foram estabelecidas duas regiões com configurações mecânicas e estatísticas diferentes para as seções transversais da viga. A primeira região compreende o trecho que vai de  $x = 0$  até  $x = L/4$  e foi chamada de trecho 1 (os dois primeiros elementos). O segundo trecho é referente aos seis elementos restantes da viga e foi chamado de trecho 2. No trecho 1 a resistência do concreto é representada por  $f_{c1}$  e a resistência do aço por  $f_{s1}$ . No trecho 2 essas grandezas são denominadas respectivamente de  $f_{c2}$  e  $f_{s2}$ . Com a finalidade de permitir o traçado das funções resultantes, apenas as resistências do concreto foram consideradas como variáveis aleatórias. A discretização da viga está mostrada na Fig. 6.2 e o posicionamento das regiões adotadas na Fig. 6.3.

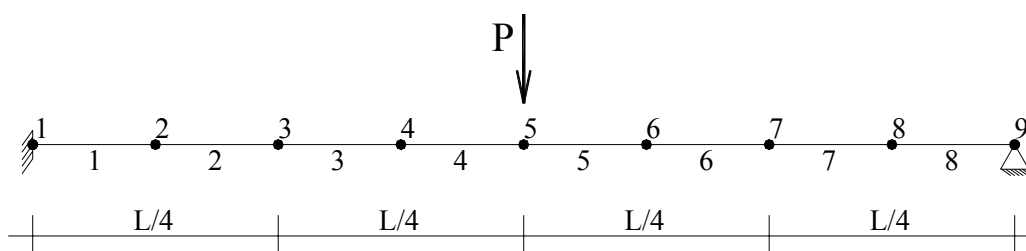


Fig. 6.2 – Modelo de elementos finitos simplificado com condições de simetria

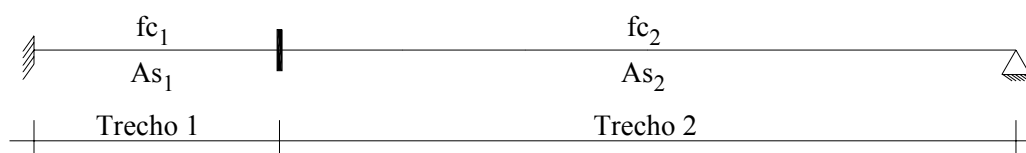


Fig. 6.3 – Posicionamento das configurações mecânicas e estatísticas

A associação estatística dessas variáveis foi realizada com o emprego de distribuições gaussianas nas quais os valores médios das resistências nos trechos 1 e 2 estão representados respectivamente por  $f_{cm1}$  e  $f_{cm2}$  e os desvios padrão por  $\sigma_{c1}$  e  $\sigma_{c2}$ . Os dados desse exemplo estão descritos na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Dados adicionais do exemplo 6.1

Parâmetro	Valor
$L$	4.000,0 mm
$f_Y$	500,0 N/mm <sup>2</sup>
$E_Y$	210.000,0 N/mm <sup>2</sup>
$b$	120,0 mm
$h$	300,0 mm
$P$	40.000,0 N
<i>Incrementos de carga</i>	10
$As1_{Inf}$	4 $\phi$ 5mm
$As1_{Sup}$	4 $\phi$ 10mm
$As2_{Inf}$	4 $\phi$ 10mm
$As2_{Sup}$	4 $\phi$ 5mm
$\epsilon_{c\ ult}$	-0,0035
$\epsilon_{s\ ult}$	0,0100
$f_{Cm1} = f_{Cm2}$	30,0 N/mm <sup>2</sup>
$\sigma_{CM1} = \sigma_{CM2}$	4,2 N/mm <sup>2</sup>

A análise mecânica da viga indica duas seções onde houve grande predominância de ocorrência de falhas, que estão situadas nos nós 1 e 5, mostrados na Fig. 6.2. Dependendo das resistências dos concretos e da relação entre elas, a redistribuição dos

esforços internos conduzirá a diferentes seqüências de falhas. Como exemplo, a Fig. 6.4 mostra a evolução dos momentos fletores na viga. Nessa figura, os valores dos momentos estão divididos pelo valor do momento na extremidade engastada, fornecendo uma relação com o momento nesse ponto. Os valores são mostrados apenas no primeiro e no último passo de carga. No primeiro, a redistribuição de esforços é pequena porque o sistema é praticamente linear e o índice mostrado é próximo da razão puramente linear entre os dois momentos, que vale 10/12 ou 0,833. Quando o carregamento aumenta, os efeitos não-lineares se fazem presentes e o índice tende para o valor unitário, o que comprova que em níveis de deformação próximos a um estado limite os módulos dos valores dos momentos positivos e negativos tendem a se igualar.

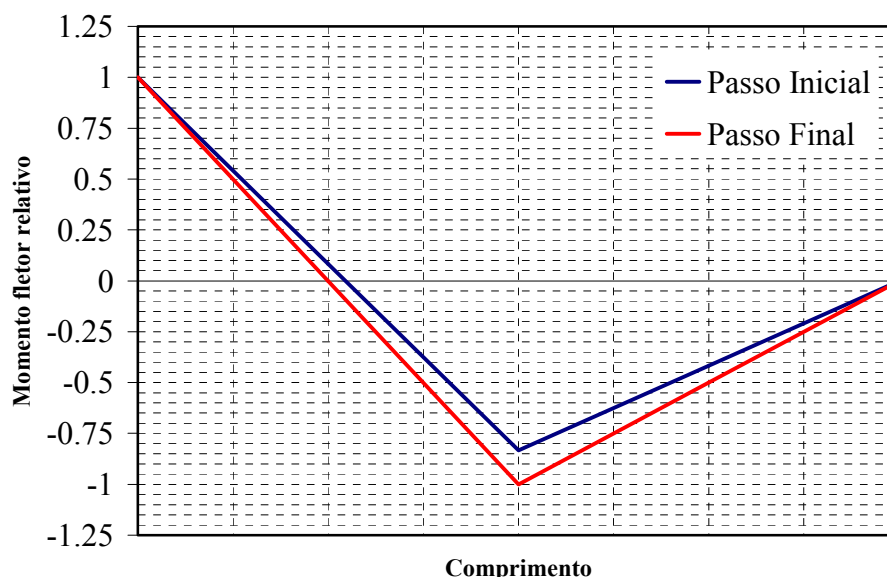


Fig. 6.4 – Momentos fletores no primeiro e último passo de carga

O método de Monte Carlo foi utilizado para realizar as simulações com a finalidade de escrever a equação da superfície de resposta. Essa superfície aproxima o coeficiente de carga última  $\lambda$  em função das variáveis aleatórias escolhidas. O valor médio do coeficiente após a realização das simulações foi de 1,074 e o desvio padrão encontrado foi de 0,034. A distribuição de ocorrência dessa variável pode ser vista na Fig. 6.5. Apenas 0,6% das realizações da amostra aleatória apresentaram coeficiente de carga crítica abaixo do valor 1,0. Inclusive, o valor de 0,6% é um estimador aproximado da probabilidade de falha, embora determinado de maneira simples. Entretanto, conforme já citado, para fornecer resultados mais precisos, o método de Monte Carlo requer grande número de simulações. Isso conduz a um alto tempo de processamento e por essa razão devem ser usados os métodos de superfícies de resposta com planos de

experiência ou algum outro critério de seleção para diminuir o número de pontos necessários para a avaliação da confiabilidade.

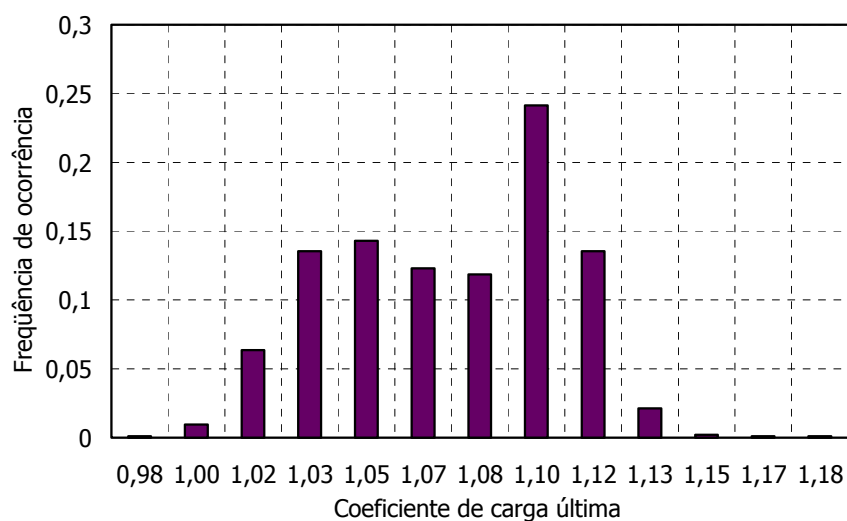


Fig. 6.5 – Histograma do coeficiente de carga última

Os pontos obtidos na simulação foram usados na regressão para a obtenção da superfície representativa da resposta estrutural. Depois da realização de mil simulações, o seguinte polinômio foi encontrado:

$$G(f_{C1}, f_{C2}) = 10^{-3} (81,495 - 8,22f_{C2} - 0,048f_{C2}^2 + 11,75f_{C1} + 0,118f_{C1}f_{C2} - 0,192f_{C1}^2) \quad (6.1)$$

que no espaço normalizado é escrito conforme a equação abaixo:

$$H(u_1, u_2) = 0,077 - 0,0301u_2 - 0,000769u_2^2 + 0,014u_1 + 0,00189u_1u_2 - 0,00308u_1^2 \quad (6.2)$$

A isolinhas da Eq.(6.2) podem ser traçadas no espaço normalizado, e são mostradas na Fig. 6.6.

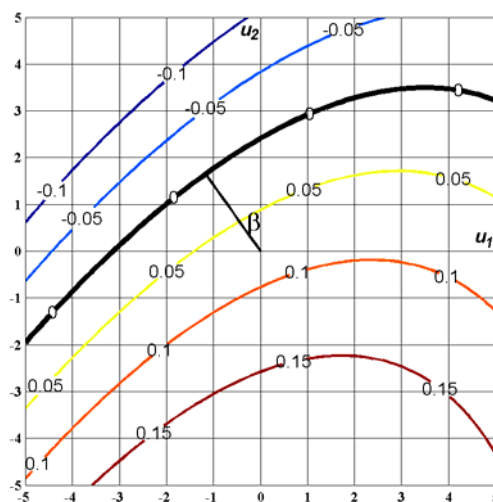


Fig. 6.6 – Isolinhas da superfície de resposta no espaço normalizado

Para determinar o índice de confiabilidade  $\beta$  é necessário apenas levar em consideração a isolinha onde a função de estado limite  $H(u_1, u_2)$  vale zero, destacada em maior espessura na Fig. 6.6, e aplicar o devido algoritmo de otimização com o propósito de buscar a distância mínima entre essa curva e a origem do espaço.

O índice de confiabilidade e o ponto de projeto foram encontrados com o emprego do algoritmo de Rackwitz & Fiessler [170] e estão mostrados na Tabela 6.2:

Tabela 6.2 – Índice de confiabilidade e coordenadas do ponto de projeto

Índice $\beta$	2,021
Coordenadas do ponto de projeto	$u_1 = -1,173$
	$u_2 = 1,648$

O índice de confiabilidade encontrado foi  $\beta = 2,021$ , que corresponde a uma probabilidade de falha de 2,16%. Uma importante ressalva a ser feita é de que probabilidade de falha real é menor, já que nesse exemplo estão incluídos coeficientes parciais de segurança no carregamento aplicado  $P_A$ . Isso significa que a probabilidade real de ruptura é dada pelo produto da probabilidade do carregamento aplicado  $P_A$  superar a carga última  $P_U$  pela probabilidade das cargas em regime de utilização  $P(G, Q)$  superarem o valor do carregamento aplicado. Matematicamente, a equação da probabilidade real é escrita como na expressão abaixo.

$$\Pr[P(G, Q) \geq P_U] = \Pr[P_U \leq P_A | P_A] \cdot \Pr[P(G, Q) \geq P_A] \quad (6.3)$$

onde  $P_A$  é a carga aplicada,  $P_U$  é a carga última,  $P(G, Q)$  é o carregamento em regime de utilização em função das cargas permanentes  $G$  e variáveis  $Q$ .

O resultado anterior é obtido assumindo-se uma associação estatística onde a correlação entre as resistências dos concretos é nula, isto é, as distribuições estatísticas são independentes. Para destacar o papel da correlação estatística a análise foi repetida para vários coeficientes de correlação diferentes. Por meio da Fig. 6.7 pode-se constatar a evolução do índice de confiabilidade em função da correlação entre as duas variáveis aleatórias adotadas. Pela forma da curva constata-se que ao garantir ao sistema estrutural uma constituição de materiais mais homogênea obtêm-se níveis de confiabilidade mais elevados. A probabilidade de falha cai do valor inicial de  $2,16 \times 10^{-2}$  para  $2,38 \times 10^{-4}$ . Com isso enfatiza-se ainda mais a necessidade do controle de qualidade



entre os materiais constituintes do sistema nas seções críticas, garantindo a homogeneidade para assegurar níveis satisfatórios de confiabilidade.

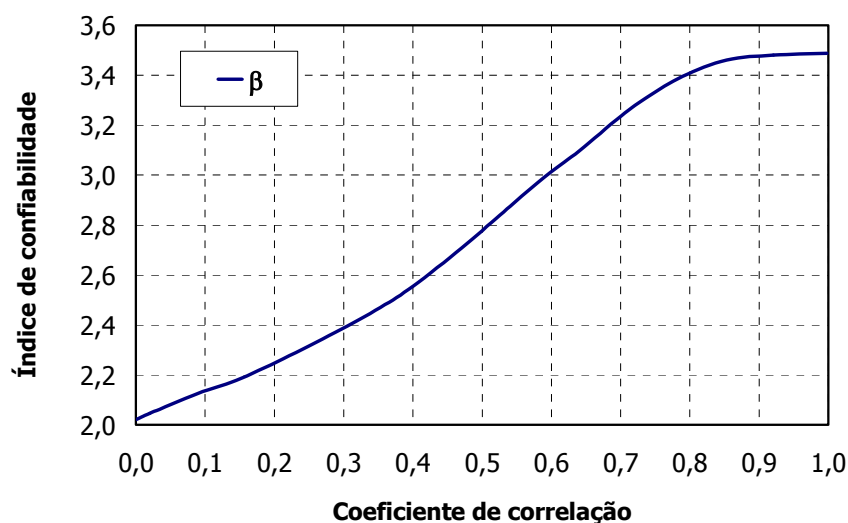


Fig. 6.7 – Confiabilidade em função da correlação entre as resistências do concreto

A variação dos parâmetros da associação estatística também apresenta influência sobre o índice de confiabilidade do sistema. O software Phimeca [208] foi empregado para a finalidade de avaliar a evolução da confiabilidade em função de uma variação paramétrica. A Fig. 6.8 mostra as variações sofridas pelo índice  $\beta$  em função da variação das resistências médias dos dois concretos adotados  $f_{cm1}$  e  $f_{cm2}$ . De acordo com cada caminho de redistribuição de esforços as resistências médias realizam um papel oposto em relação à segurança estrutural. A confiabilidade cresce com o aumento da resistência média no concreto no trecho 1, enquanto que ela decresce rapidamente com o aumento da resistência no trecho 2.

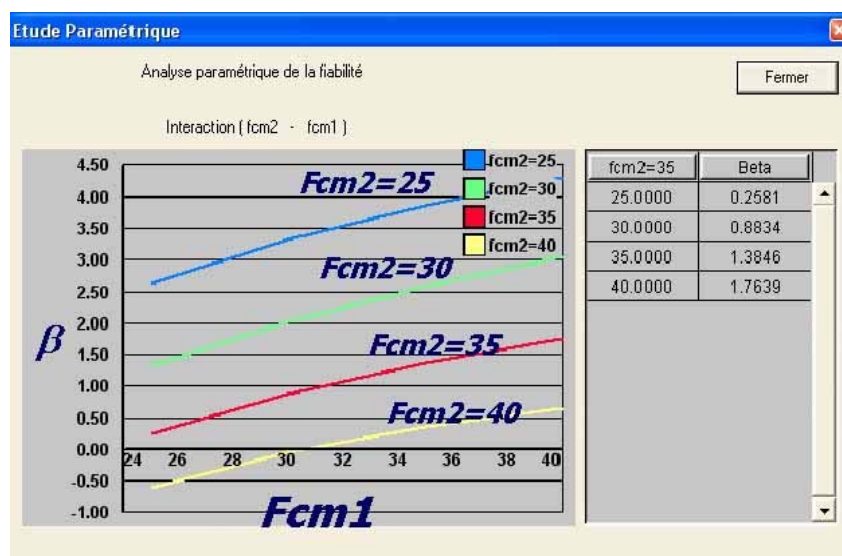


Fig. 6.8 – Análise paramétrica das resistências

Observando-se a superfície aproximadora mostrada na Fig. 6.6, constata-se que essa análise é coerente, já que ao percorrer-se o eixo segundo a variável  $u_1$ , que corresponde ao concreto no trecho 1, há uma tendência de afastamento do estado limite, enquanto que algum acréscimo na direção  $u_2$  conduzirá a pontos mais próximos ou dentro do domínio de falha.

A razão física desse comportamento é que as falhas ocorridas na armadura são ocasionadas quando os valores médios da resistência do concreto no trecho 2 são elevados. Quanto mais alta é a resistência no trecho 2 em relação ao trecho 1, maior atenção deve ser dada às deformações na armadura situada na posição da carga.

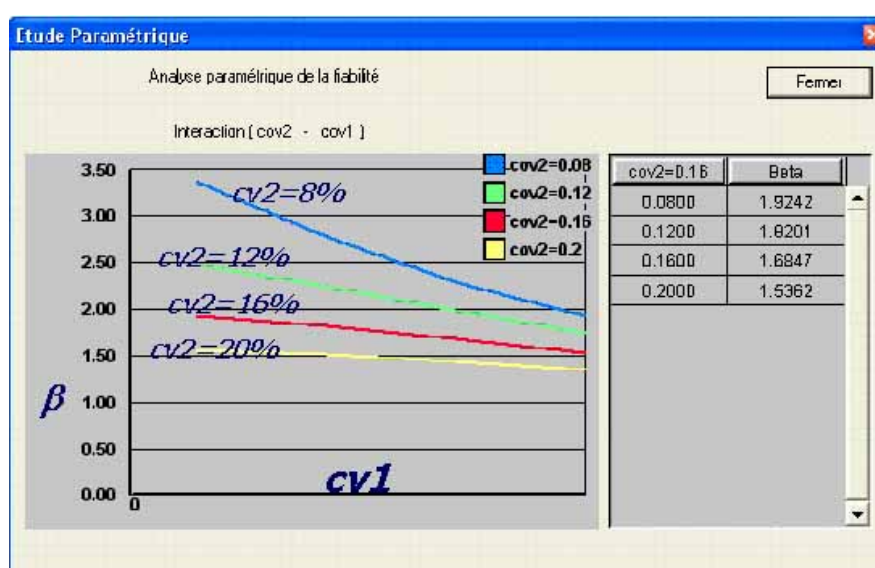


Fig. 6.9 – Análise paramétrica dos coeficientes de variação

A Fig. 6.9 demonstra a influência de alterações nos coeficientes de variação dos dois concretos por meio de uma análise paramétrica da interação entre eles. Quando a associação estatística contempla grande variabilidade, a confiabilidade do sistema claramente diminui. Melhorias nesse desempenho podem ser introduzidas com o emprego de um controle da variabilidade das propriedades dos materiais.

## 6.2 Grelha com 10 variáveis aleatórias

Para demonstrar uma aplicação mais realista do uso de uma função de estado limite única no estudo da confiabilidade, propõe-se a grelha mostrada na Fig. 6.10.

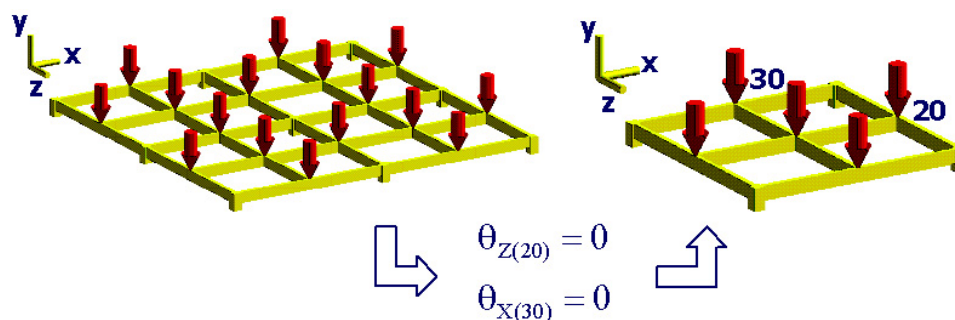


Fig. 6.10 – Grelha completa e modelo simétrico

Este tipo de estrutura é bastante encontrado em edifícios para cobrir vãos médios, fornecendo suporte às lajes dos pisos de edifícios. A estrutura, cujas dimensões gerais são 16 x 16m, é composta de dez vigas que são suportadas por nove pilares. Quatro desses pilares são posicionados nos cantos da grelha, outros quatro no centro de cada vão lateral e um foi disposto no centro da estrutura. Nenhuma seção transversal das vigas apresenta variação de dimensões ou armaduras ao longo de seu comprimento. Todas as vigas têm base de 120mm e altura de 300mm. A armadura em cada seção depende das forças internas. Para realizar a determinação das reações das lajes sobre as vigas considera-se a hipótese da aplicação de um carregamento uniformemente distribuído sobre toda a superfície do piso. Assim, através de um simples procedimento de cálculo de áreas de influência dos nós carregados, supõe-se que os nós internos da estrutura estejam submetidos ao carregamento  $P$  e os nós do contorno ao carregamento  $P/2$ . O valor de  $P$  foi encontrado igual a 8 kN, de acordo com a adoção de carregamentos padronizados. Sob a consideração de um elemento finito por trecho entre as intersecções, o sistema apresenta 80 seções possíveis de falha, o que levaria a pelo menos 160 modos de falha. Para reduzir o tempo computacional e permitir a adoção de discretizações melhores em cada trecho, o número total de variáveis aleatórias é convenientemente reduzido assumindo-se condições de simetria em deslocamento nos nós 20 e 30, também indicadas na Fig. 6.10. Além disso, o valor dos carregamentos verticais aplicados nesses dois nós deve ser reduzido à metade no modelo simétrico resultante. Assim, a grelha pode ser representada por um quarto do sistema original, com um número menor de variáveis aleatórias e sem significativa perda de precisão.

A malha de elementos finitos e o posicionamento das resistências dos concretos estão mostrados na Fig. 6.11, onde as dimensões estão indicadas em metros. As variáveis aleatórias correspondem aos concretos indicados na mesma figura. Existem dez variáveis aleatórias: nove escolhidas nos nós situados nos pontos onde há uma

intersecção de elementos e uma para o resto da estrutura. As resistências dos concretos  $f_{ci}$  têm distribuição normal com média  $f_{cmi} = 35$  Mpa e desvio padrão  $\sigma_{fci} = 2.1$  Mpa, onde o índice “i” varia de 1 até 10.

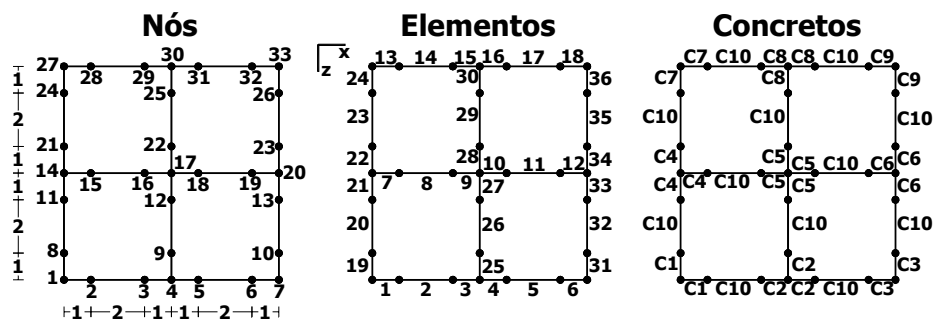


Fig. 6.11 – Modelo matemático e estatístico da grelha

A Tabela 6.3 mostra os dados adicionais do exemplo, incluindo-se as restrições de simetria para os elementos situados nos trechos 27-33 e 7-33, onde os carregamentos, quantidade de armadura e seção de concreto devem estar reduzidos à metade.

Tabela 6.3 – Seções transversais e armaduras das vigas

Elementos	H (mm)	B (mm)	As Inf	As Sup
14,17,32,35	300	60	2 $\phi$ 8	2 $\phi$ 8
13,18,31,36	300	60	2 $\phi$ 8	2 $\phi$ 10
15,16,33,34	300	60	2 $\phi$ 10	2 $\phi$ 8
2,5,11,20,23,29	300	120	2 $\phi$ 10	2 $\phi$ 10
1,6,12,19,24,30	300	120	2 $\phi$ 10	4 $\phi$ 10
3,4,7-10,21,22,25-28	300	120	4 $\phi$ 10	2 $\phi$ 10

A intensidade do comportamento não linear de uma estrutura depende fortemente das relações entre as armaduras presentes nas seções. Neste exemplo esse comportamento é mais aparente, pois se constata, por exemplo, em uma análise determinística não-linear que a razão entre os momentos fletores nos nós 32 e 33 é próxima do valor 1,0 quando o valor da carga última é atingido. Essa relação é bastante diferente da verificada no primeiro incremento de carga, ainda em uma fase praticamente elástica. Em muitos casos também alguns momentos negativos chegam a mudar de sinal devida à decalagem do diagrama de momentos fletores ocasionada pela redistribuição de esforços. Como de costume nas vigas de concreto armado, verificam-se dois pontos principais de redução da rigidez global do modelo, uma na fissuração do concreto e outra na plastificação das barras da armadura. Quando essa redução ocorre, modificam-se bruscamente os campos de deslocamentos.

A Fig. 6.12 mostra o diagrama carga x deslocamento vertical medido no nó 20, comprovando o mecanismo de absorção de esforços de um sistema de concreto armado.

Podem-se visualizar as duas regiões principais de redução de rigidez conduzindo a grandes deslocamentos no incremento de carga onde ocorrem a fissuração do concreto e a plastificação do aço.

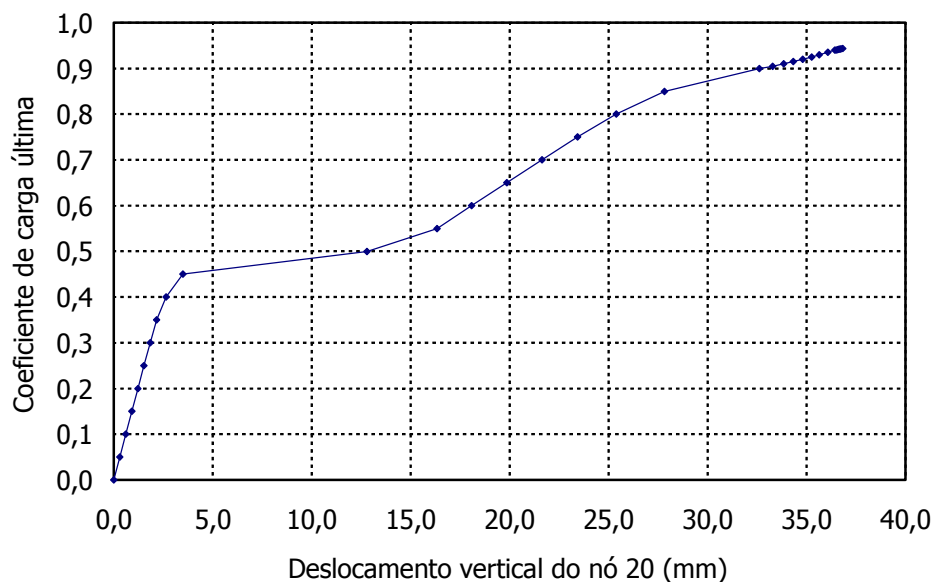


Fig. 6.12 – Diagrama carga vertical x deslocamento do nó 20

Em alguns casos depara-se no algoritmo com elementos da estrutura apresentando rigidezes negativas, situação tipicamente encontradas nos problemas onde as seções apresentam taxa de armadura abaixo dos valores convencionais. Nesses casos, as taxas devem ser revistas para um melhor aproveitamento dos materiais. Nessa fase de maior acréscimo de deslocamentos, as armaduras passam a contribuir mais na rigidez das seções e do sistema. Há também uma pequena contribuição do concreto intacto entre as fissuras, considerada pelo modelo material adotado, que pode ocasionar pequenos aumentos de rigidez, perceptível nas variações de inclinação presentes nos diagramas carga x deslocamento. Na evolução do carregamento, quando finalmente a carga aplicada gera uma tensão no aço superior à sua tensão de escoamento, outro grande incremento de deslocamentos pode ser verificado. A forma dessa curva é bastante sensível à taxa de aço presente nas seções transversais de toda a grelha.

A análise de confiabilidade foi realizada efetuando-se o acoplamento entre uma regressão quadrática e o método de simulação de Monte Carlo. Em outras palavras, a superfície de reposta foi obtida a partir da regressão efetuada com os pontos obtidos na simulação, da mesma maneira realizada no exemplo anterior. Para determinar um polinômio completo do segundo grau no espaço de dez variáveis são necessários 66 coeficientes e conseqüentemente pelo menos 66 pontos. A técnica de regressão permite

determinar esses coeficientes a partir das 1000 análises realizadas do modelo de elementos finitos, nos quais os dados de entrada são realizações aleatórias e as repostas do sistema.

Utilizando o polinômio obtido, a otimização pode ser realizada e o índice de confiabilidade calculado. Os resultados dessa análise estão indicados na Tabela 6.4 .

Tabela 6.4 – Índice de confiabilidade e coordenadas do ponto de projeto da grelha

Índice $\beta$	1,671
	$u_1 = 0,001$
	$u_2 = -0,271$
	$u_3 = -0,040$
	$u_4 = -0,502$
Coordenadas do ponto de projeto	$u_5 = -0,472$
	$u_6 = 0,877$
	$u_7 = 0,087$
	$u_8 = 0,903$
	$u_9 = -0,073$
	$u_{10} = 0,146$

No espaço das variáveis normalizadas, as coordenadas do ponto de projeto mostradas acima indicam em unidades de desvio-padrão de cada variável aleatória quanto cada uma delas deve ser transladada a partir da origem dos espaços para indicar o ponto de falha mais provável. Isso quer dizer, por exemplo, que valores positivos de uma coordenada do ponto de projeto indicam que a variável correspondente deve sofrer um decréscimo para que haja um aumento da confiabilidade e vice-versa. Assim, a partir da Tabela 6.4 observa-se que acréscimos na resistência média dos concretos situados nas regiões 2,3,4,5 e 9 ou um melhor controle de seu desvio padrão conduzem a aumentos na confiabilidade do sistema. Novamente, a redistribuição de esforços desempenha um papel importante no fenômeno. Quando se checam os efeitos dos acréscimos de resistência em determinadas regiões e a modificação da forma do diagrama de momentos fletores, nota-se que os momentos mais altos podem encontrar seções mais frágeis, ocasionando falhas em níveis de carga mais baixos, o que diminui a confiabilidade.

Para classificar quais são as variáveis mais importantes dentre as que apresentam alguma influência na probabilidade final do sistema, é necessário medir os fatores de importância, ou de sensibilidade, que dependem dos co-senos do vetor determinado pela origem do espaço normalizado e pelo ponto  $P^*$ .

A Fig. 6.13 mostra esses fatores de importância com relação a cada variável. Como conclusão observa-se que a resistência do concreto nas posições C6 e C8 ( $f_{c6}$  e  $f_{c8}$ ) apresentam a maior influência na segurança. De fato, esses concretos estão posicionados em regiões submetidas a momentos fletores elevados e também a fortes descontinuidades de forças cortantes.

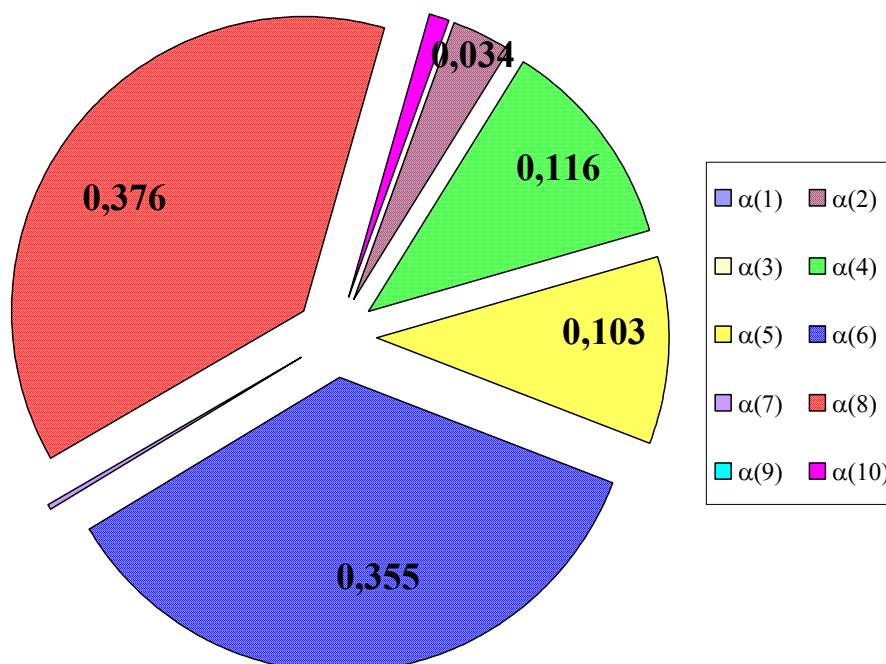


Fig. 6.13 – Influência das variáveis aleatórias na segurança da grelha

Os resultados mostrados confirmam a importância do mecanismo resistente das estruturas de concreto armado, principalmente nos níveis próximos às deformações últimas, onde as rigidezes são pequenas e os acréscimos de carga produzem fortes mudanças no campo de deslocamentos. A análise feita para esse exemplo pode ser rapidamente estendida para estruturas semelhantes.

Ressalta-se que o índice  $\beta$  e a coordenada de  $P^*$  dependem fortemente das configurações de armadura escolhidas nas regiões da viga, pois elas influenciam diretamente a determinação das cargas últimas em cada realização. Assim, pequenas mudanças nas variáveis aleatórias modificam os cenários de falha e a segurança estrutural.

Um resultado satisfatório a ser destacado no exemplo é o desempenho do procedimento para a determinação da confiabilidade. O acoplamento entre o método dos elementos finitos, o método de Monte Carlo e técnicas de regressão para o traçado das superfícies de respostas trouxeram bons resultados, mantendo a sua robustez.

### 6.3 Viga isostática

Para demonstrar uma aplicação do uso de estados limites múltiplos em um sistema simples, uma viga como a da Fig. 6.14 foi utilizada. Por simplificação não se discretizou a viga ao longo do comprimento. Assim, o modelo apresenta somente um elemento finito cujo carregamento consiste em dois momentos fletores concentrados em suas extremidades. Para possibilitar o traçado dos diagramas, novamente foram consideradas apenas duas variáveis aleatórias, o que permite construir e visualizar em duas dimensões as funções de estado limite. Admitiu-se que a viga apresenta um concreto com distribuição estatística gaussiana igual em todo o seu comprimento, com uma média denotada por  $f_c$  e um desvio padrão  $\sigma_c$ . Da mesma maneira, a armadura também foi considerada constante e igual ao longo do comprimento, com distribuição gaussiana de média  $f_y$  e desvio padrão  $\sigma_y$ . Os coeficientes de variação do concreto e do aço foram tomados como de 18% e 12% respectivamente. Dois modos de falha foram considerados: o esmagamento do concreto e o escoamento do aço. Nesse exemplo a superfície de reposta foi traçada a partir de planos de experiência e para isso um PE composto foi escolhido.

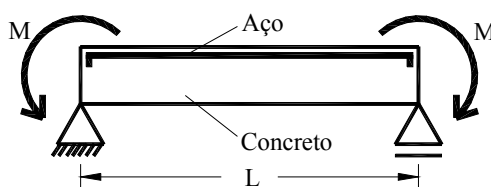


Fig. 6.14 – Viga do exemplo

Os dados adicionais utilizados no exemplo estão descritos na Tabela 6.5:

Tabela 6.5 – Dados do exemplo

Parâmetro	Valor	Parâmetro	Valor
$L$	1.000,0 mm	$A_{S_{Sup}}$	17 $\phi$ 10mm
$f_y$	500,0 N/mm <sup>2</sup>	$d$	875,0 mm
$f_c$	30,0 N/mm <sup>2</sup>	$\varepsilon_{slim}$	0,0100
$E_y$	210.000,0 N/mm <sup>2</sup>	$\varepsilon_{clim}$	-0,0035
$b$	120,0 mm	$\sigma_y$	60,0 N/mm <sup>2</sup>
$h$	1.000,0 mm	$\sigma_c$	5,4 N/mm <sup>2</sup>
$M$	250.000.000,0 N.mm	$Grau$	2
$A_{S_{Sup}}$	17 $\phi$ 10mm	PE	Composto



A análise mecânica da viga indicou falha ocorrendo nos dois modos de ruptura escolhidos. Dependendo das resistências do aço e do concreto fornecidas pelos pontos do plano de experiência, a redistribuição de esforços internos conduziu a diferentes seqüências de falha, ora por escoamento da armadura, ora por esmagamento do concreto.

Inicialmente foi realizada a análise sem considerar os múltiplos estados limites. Isso foi realizado para permitir a realização de uma comparação entre as duas abordagens. Devido ao grau de dificuldade dos modelos mais refinados, não foram realizadas comparações com maior complexidade.

O ponto de projeto foi encontrado com onze chamadas ao modelo de elementos finitos. Como o plano de experiência escolhido necessita de nove respostas mecânicas iniciais, conclui-se que durante o algoritmo dois pontos foram substituídos por pontos mais próximos à função. As linhas de isovalores da função de desempenho adimensional  $H(u_i)$  podem ser vistas na Fig. 6.15, traçadas no espaço normal padrão. A variável  $u_1$  corresponde ao concreto e a variável  $u_2$  ao aço. Nomeou-se a curva onde  $H(u_i) = 0$  de função de estado limite envoltória, já que a probabilidade obtida é a do modo preponderante.

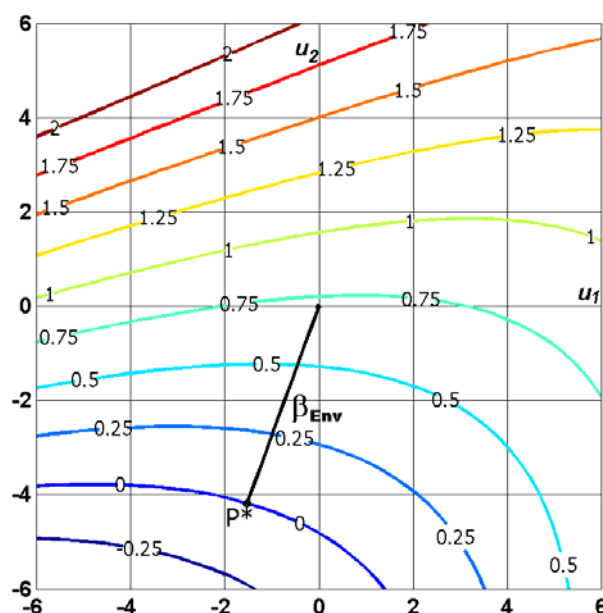


Fig. 6.15 – Isolinhas da superfície de resposta no espaço normalizado

O cálculo do índice de confiabilidade foi efetuado através do algoritmo de Rackwitz & Fiessler, já explicitado anteriormente. Com isso, é possível também determinar as coordenadas do ponto de projeto indicado acima, que corresponde à

mínima distância da curva  $H(u_i) = 0$  à origem. A Tabela 6.6 indica as coordenadas do ponto  $P^*$  e o valor do índice de confiabilidade:

Tabela 6.6 – Resultados da análise de confiabilidade

Índice $\beta$	4,423
Coordenadas do ponto de projeto	$u_1 = -1,515$ $u_2 = 4,155$

O índice de confiabilidade encontrado foi de aproximadamente 4,423, correspondente a  $P_f = 0,00000487$  para uma aproximação FORM. As coordenadas do ponto de projeto mostram que a segurança da estrutura é mais sensível às variações na resistência do aço, pois a variação do índice de confiabilidade é maior com relação à variável  $u_2$ . Esse fenômeno é também devido à redistribuição de esforços, já que os valores da carga última do sistema são mais sensíveis às variações no valor da resistência do aço, interferindo na forma da função de estado limite.

A interpretação física da probabilidade de falha é o significado concreto de toda análise probabilística. Além da sensibilidade já contida nas informações dos co-senos diretores do ponto de projeto, o número obtido nos informa que aproximadamente 487 em cada 100.000.000 de combinações possíveis para o par formado pela resistência do concreto e resistência do aço conduzirão a estrutura a uma situação de falha.

Depois da realização da análise com um estado limite único, deseja-se determinar qual a diferença na confiabilidade se vários estados limites forem considerados. Assim, realizou-se em seguida a abordagem proposta no presente trabalho, onde se consideram os múltiplos estados limites. Nesse exemplo, a determinação das curvas foi realizada com o emprego da imposição de ruptura segundo um determinado modo com o uso de planos de experiência, conforme descrito anteriormente nesse trabalho. Isso leva à construção de uma função de estado limite para cada um dos modos, conforme pode ser visto na Fig. 6.16. As superfícies são adimensionais.

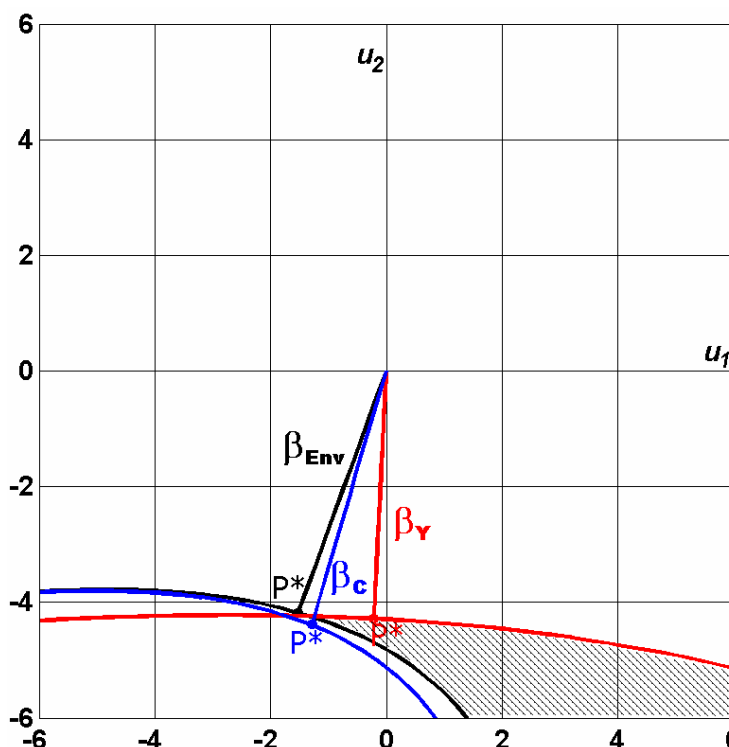


Fig. 6.16 – Funções de estado limite dos múltiplos modos de falha

As equações das três funções são:

$$\begin{aligned}
 H_{Env} &= 0.7142 - 0.1746u_2 - 0.0054u_2^2 - 0.0059u_1 - 0.0160u_1u_2 - 0.0056u_1^2 = 0 \\
 H_Y &= 0.7687 + 0.1741u_2 - 0.0011u_2^2 - 0.0130u_1 - 0.0054u_1u_2 + 0.0018u_1^2 = 0 \\
 H_C &= 0.7123 + 0.1733u_2 + 0.0066u_2^2 - 0.0054u_1 - 0.0171u_1u_2 + 0.0059u_1^2 = 0
 \end{aligned} \quad (6.4)$$

onde as funções  $H_{env}$ ,  $H_C$  e  $H_Y$  representam, respectivamente, as funções de estado limite envoltória, do concreto e do aço.

Fica evidente que o domínio de falha definido pelas curvas de estado limite do aço e do concreto é mais preciso do que aquele determinado pela envoltória dos modos. A função de estado limite envoltória não consegue contemplar a área hachurada mostrada na Fig. 6.16, ao passo que o domínio composto é capaz de fazê-lo.

Finalmente, em uma segunda fase de simulações, foram processadas  $10^8$  realizações, gerando-se pontos aleatoriamente no espaço das variáveis normalizadas, levando-se em conta o domínio de falha limitado pelas funções  $H_C$  e  $H_Y$ . O valor calculado para a probabilidade de falha final da viga foi de  $P_f = 1,683 \times 10^{-5}$ , que é cerca de 3,5 vezes maior do que o valor obtido com a aproximação FORM.

Conforme já mencionado anteriormente, o tempo computacional dispensado é uma das barreiras no estudo da confiabilidade de modelos mais complexos. No presente exemplo, o tempo gasto na obtenção das curvas de estado limite individuais é

aproximadamente o produto do tempo de gasto para o traçado de um estado limite pelo número de curvas a ser considerado. Isso quer dizer que em relação à análise com um estado limite, o algoritmo demanda mais tempo. Porém, na segunda fase da simulação, onde foram realizadas as  $10^8$  realizações no domínio composto, o ganho de tempo é extraordinário. Isso porque que cada reposta mecânica proveniente do modelo de elementos finitos deste exemplo consome em média três segundos e com isso o tempo consumido para realizar as simulações da segunda fase através de um modelo baseado em elementos finitos seria extremamente alto, enquanto que a presente proposta foi realizada em um tempo de três horas. Além desse ganho de tempo a precisão obtida na determinação do domínio de falha foi melhor. Enfim, possibilita-se ainda o processamento de modelos mais complexos, conforme pode ser visto na seção seguinte.

#### 6.4 Grelha com múltiplos estados limites

Uma aplicação da proposta do uso de múltiplos estados limites sem imposição de falha foi realizada em uma grelha como a da Fig. 6.17. Essa grelha é igual à do exemplo 6.2 sem a adoção de condições de simetria. A grelha possui 16x16m com vigas cruzadas dispostas a cada 4m, e possui nove pilares de suporte, sendo que nos pilares de canto se consideram extremidades engastadas. Assim, nenhum deslocamento é permitido nesses pontos. Os valores dos carregamentos foram obtidos a partir de cargas usuais. Supõe-se que os nós internos estão submetidos à carga P e os nós do contorno a uma carga equivalente à metade dessa quantidade.

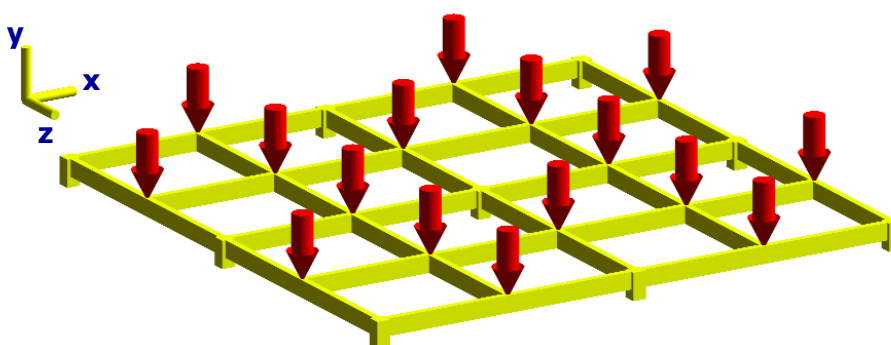


Fig. 6.17 – Esquema da grelha

As dimensões das seções transversais foram pré-determinadas e o dimensionamento da armadura foi realizado de acordo com as recomendações do CEB. Por simplificação, o arranjo de armadura nas seções foi dividido em grupos, sendo diferente em dez regiões de acordo com a magnitude dos momentos fletores. A Fig.

6.18 indica os grupos aos quais pertencem cada um dos elementos da grelha. A Tabela 6.7 indica os valores das áreas de aço para cada um dos grupos adotados.

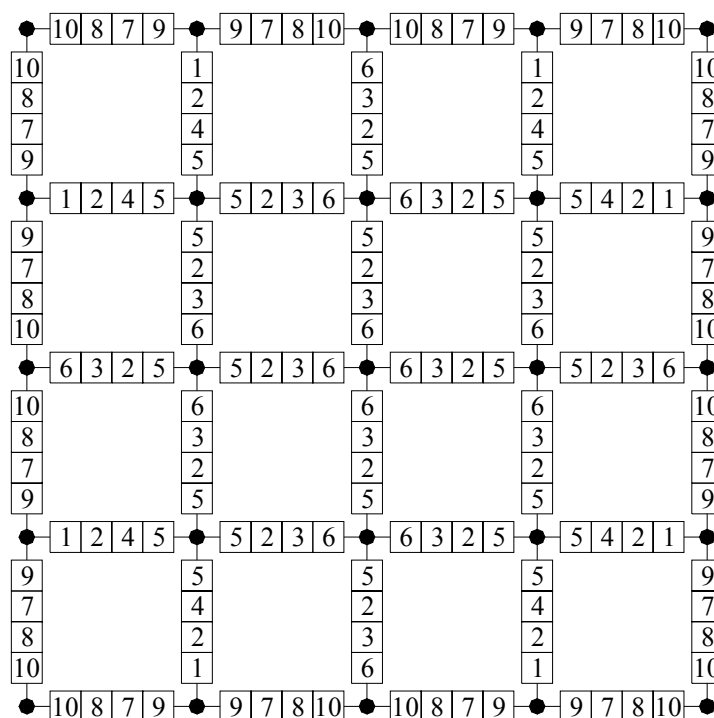


Fig. 6.18 – Associação dos grupos de armaduras aos elementos da grelha

Tabela 6.7 – Área de aço presente nas seções segundo o grupo

N	$A_{s_{inf}} \text{ cm}^2$	$A_{s_{sup}} \text{ cm}^2$
1	165,72	39,27
2	332,22	39,27
3	39,27	328,30
4	548,60	39,27
5	715,12	39,27
6	39,27	706,68
7	878,08	39,27
8	39,27	878,08
9	1643,84	39,27
10	39,27	1643,84

Para a construção da malha de elementos finitos, posicionou-se um nó a cada metro, o que levou à obtenção de 145 nós e 160 elementos, como indicado na Fig. 6.19 e também na Fig. 6.20. Já que foram tomados dois modos de falha por seção, e cada elemento contém dois nós, então 640 modos de falha diferentes devem ser levados em conta inicialmente.

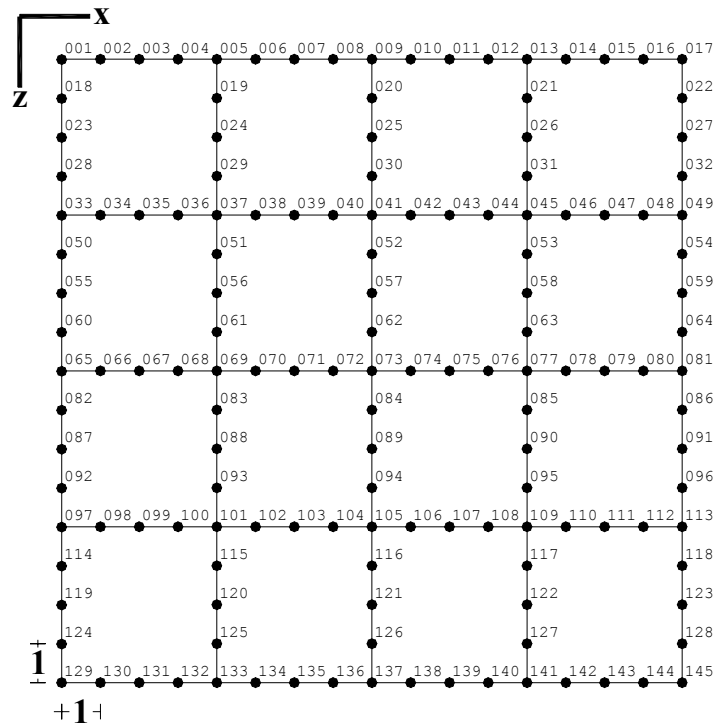


Fig. 6.19 – Nós da malha de elementos finitos

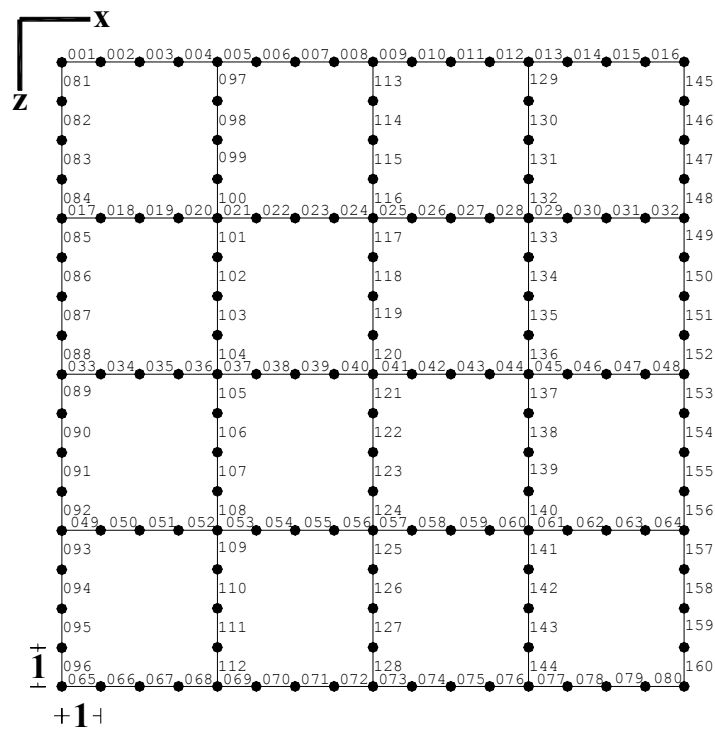


Fig. 6.20 – Elementos da malha

Uma observação importante a ser feita é que o número de modos de falha é independente do número de variáveis aleatórias. Aliás, as variáveis aleatórias foram tomadas como as resistências dos concretos,  $f_{ci}$ , com “i” variando de 1 até 26. Isso significa que 26 concretos diferentes foram considerados. Os concretos com resistências

de 1 até 25 foram posicionados nos pontos onde há um cruzamento entre as vigas. O arranjo dos aços adotados como aleatórios foi realizado da mesma maneira. Nos elementos intermediários de todo o pavimento foram considerados o concreto e o aço de número 26. A distribuição das variáveis aleatórias está mostrada na Fig. 6.21 e os dados necessários estão indicados na Tabela 6.8. O arranjo de concreto e de aço levou à consideração de 52 variáveis aleatórias. O carregamento, que foi tomado como a 53ª variável aleatória foi considerado em uma segunda fase, na etapa de simulação, modificando diretamente a função de estado limite, conforme será explicado mais adiante.

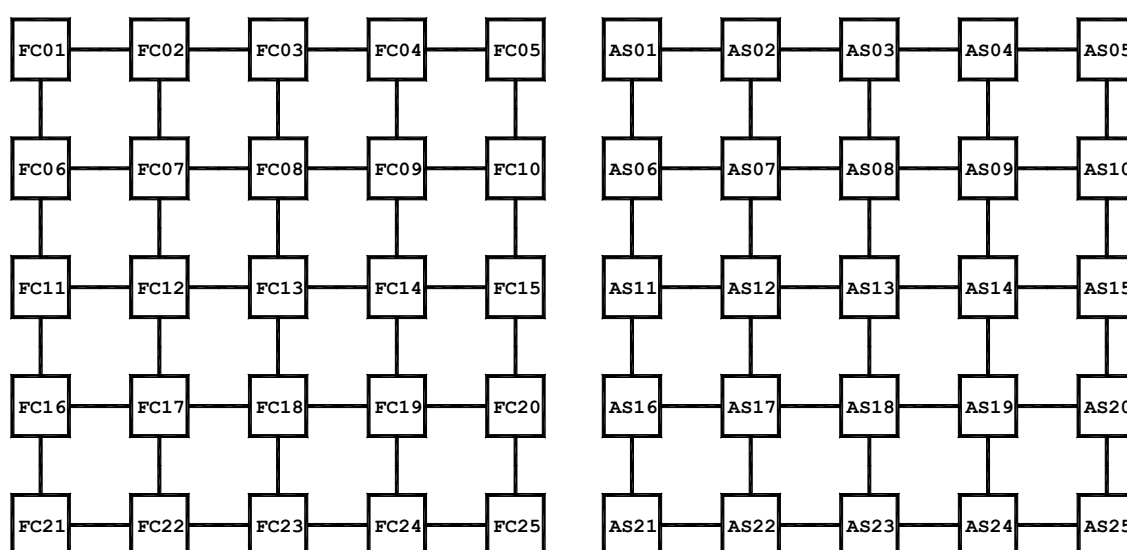


Fig. 6.21 – Distribuição das variáveis aleatórias no pavimento

Tabela 6.8 – Dados adicionais da grelha

Parâmetro	Valor
$f_{cm1-26}$	30,0 N/mm <sup>2</sup>
$\sigma_{cm1-26}$	3,6 N/mm <sup>2</sup>
$f_{ym1-26}$	500,0 N/mm <sup>2</sup>
$\sigma_{ym1-26}$	30,0 N/mm <sup>2</sup>
$E_y(1-26)$	210.000,0 N/mm <sup>2</sup>
b(1-160)	200,0 mm
h(1-160)	500,0 mm
$\epsilon_{cult}$	-0,0035
$\epsilon_{sult}$	0,0100
P	100.000,0 N

Para realizar análise de confiabilidade da grelha, um procedimento de seleção de modos foi adotado, com a finalidade de aumentar a precisão das funções de estado limite oriundas de equações obtidas com regressão em cima de pontos aleatórios. Foram realizadas 5.800 simulações de Monte Carlo, obtendo-se a carga crítica global de acordo com o procedimento descrito na Fig. 4.15. As deformações foram determinadas em todos os nós em todas essas realizações aleatórias. Ao final dessa simulação inicial, apenas 89 dentre os 640 modos de falha possíveis apresentaram pelo menos uma falha. Com o descarte dos 10% modos de falha que apresentaram menos falhas dentre esses que apresentaram pelo menos uma falha, obtiveram-se exatamente 50 modos importantes. A esse conjunto de modos importantes deu o nome de  $\Omega$ . Esse procedimento de seleção em duas fases está indicado na Fig. 6.22.

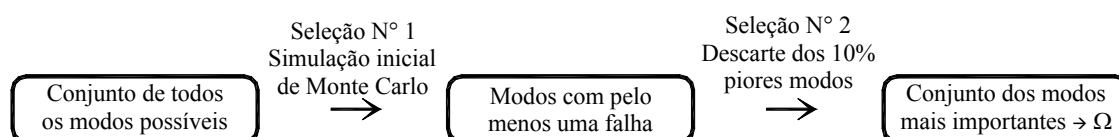


Fig. 6.22 – Seleção dos modos mais importantes

Após a obtenção do conjunto dos modos mais importantes  $\Omega$ , uma outra seleção deve ser realizada, conforme já dito, apenas com o intuito de garantir fidelidade às funções de estado limite. Isso porque as funções de carga última foram definidas localmente para cada modo de falha do conjunto  $\Omega$ . Assim, deseja-se escolher que realizações são importantes para cada um deles, objetivando-se a diminuição do erro no polinômio aproximador de cada uma das funções. A seleção define apenas que realizações serão usadas como pontos das regressões de cada modo, montando um conjunto  $u_m$  de realizações aleatórias importantes para cada modo. Então, as equações de carga última locais devem obedecer às seguintes restrições:

$$\begin{aligned} \lambda_{m}(u_i) = f(u_i) \quad | \quad u_i \in u_m \\ u_i \in u_m \Leftrightarrow \varepsilon_{\text{inf } m} < \varepsilon_m(u_i) < \varepsilon_{\text{sup } m} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Por meio da Eq.(6.5), observa-se que as realizações aleatórias  $u_i$  só pertencem ao conjunto  $u_m$  se a deformação resultante em um modo estiver dentro de limites fixados. Portanto, a realização aleatória  $u_i$  só entra na regressão do modo local se a deformação correspondente ao modo estiver compreendida dentro de limites escolhidos.

A coluna “N” na Fig. 6.23 representa a enumeração das 5.800 simulações de Monte Carlo obtidas das realizações aleatórias  $u_i$ . Se uma deformação encontrada em



um modo satisfaz a Eq.(6.5) em uma determinada realização, o ponto é escolhido para compor a regressão daquele modo.

Depois de todo esse processo de seleção, uma regressão em cada modo de falha é feita utilizando-se apenas esses pontos situados na vizinhança de cada um deles. Isso permite uma determinação de uma função de estado limite local bastante precisa. Essas funções de estado limite locais ou do modo foram denominadas de  $\lambda_m(u_i)$ . Para identificar o polinômio de segundo grau nas 52 variáveis aleatórias iniciais, a superfície de repostas foi construída sem termos cruzados, que requer pelo menos  $(1+2N)$  pontos, onde “N” é o número de variáveis aleatórias. A eliminação desses termos permitiu um ganho de tempo na determinação dos polinômios individuais de cada modo de falha.

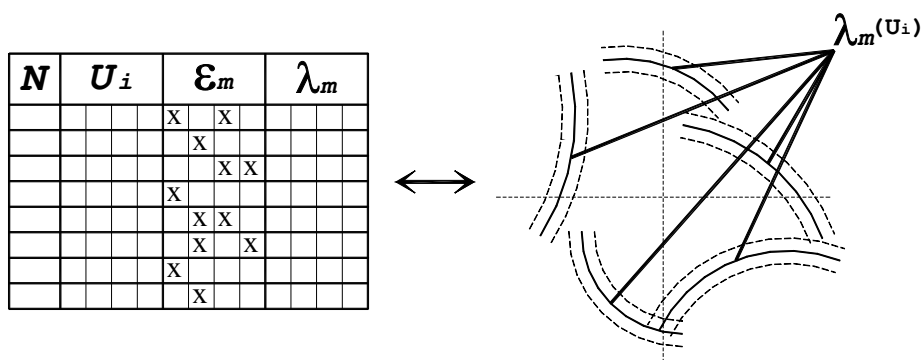


Fig. 6.23 – Procedimento adotado para a seleção dos pontos para os conjuntos  $u_m$

Com as funções individuais de cada modo  $\lambda_m(u_i)$ , que aproximam o coeficiente de carga última, podem-se realizar mais simulações. Assim, é possível agora simular o comportamento mecânico da estrutura com um grande ganho de tempo computacional, em relação ao tempo gasto nas simulações iniciais. Para realizar apenas esse primeiro processamento, foram gastas aproximadamente 60 horas ocupando 13 microcomputadores simultaneamente, o que implica um tempo médio em torno de 8 minutos para a determinação de apenas uma carga última com as tolerâncias e discretização desejadas.

Assim, após a definição dessas funções, é possível escrever as funções de estado limite. Elas são definidas segundo cada um dos modos do conjunto  $\Omega$  e as suas equações têm a seguinte forma:

$$G(u_i) = \lambda_m(u_i) - \gamma_{(q,g)}P \quad (6.6)$$

onde o coeficiente  $\gamma_{(q,g)}$  introduz a aleatoriedade no carregamento aplicado P. A associação estatística dessa variável é simples, pois o seu valor médio é unitário. O

coeficiente de variação das cargas em geral é elevado, e o valor 16% foi tomado. Os parâmetros dessa associação estão indicados na Eq.(6.7):

$$\begin{aligned}\mu_{\gamma_{(q,g)}} &= 1,0 \\ \sigma_{\gamma_{(q,g)}} &= 0,16\end{aligned}\tag{6.7}$$

Após a realização de  $10^7$  simulações de Monte Carlo, os resultados mostrados na Tabela 6.9 mostram uma probabilidade de falha coerente e constata-se que existem inúmeros modos de falha apresentando razoável influência na confiabilidade dessa estrutura em particular. Dos 50 modos de falha presentes no conjunto  $\Omega$ , observa-se que os últimos não apresentam grandes influências na probabilidade final do sistema quando tomados isoladamente. Porém, a sua contribuição somada é bastante significativa.

Tabela 6.9 – Probabilidades individuais dos modos de falha

Modos	$\beta$	$P_f$	Nó	Elemento	Tipo
1	-3,544	1,968E-04	031	131	Aço
2	-4,060	2,450E-05	104	055	Aço
3	-4,094	2,120E-05	063	135	Aço
4	-4,189	1,400E-05	110	062	Aço
5	-4,194	1,370E-05	113	157	Aço
6	-4,250	1,070E-05	115	110	Aço
7	-4,294	8,800E-06	005	005	Aço
8	-4,344	7,000E-06	029	099	Aço
9	-4,364	6,400E-06	041	116	Concreto
10	-4,364	6,400E-06	077	045	Concreto
11	-4,367	6,300E-06	100	051	Aço
12	-4,393	5,600E-06	005	004	Aço
13	-4,397	5,500E-06	041	117	Concreto
14	-4,397	5,500E-06	049	148	Aço
15	-4,401	5,400E-06	081	048	Concreto
16	-4,405	5,300E-06	105	124	Concreto
17	-4,409	5,200E-06	073	120	Concreto
18	-4,431	4,700E-06	069	037	Concreto
19	-4,435	4,600E-06	069	036	Concreto
20	-4,440	4,500E-06	013	012	Aço
21	-4,445	4,400E-06	105	125	Concreto
22	-4,455	4,200E-06	065	033	Concreto
23	-4,465	4,000E-06	077	044	Concreto
24	-4,465	4,000E-06	073	040	Concreto
25	-4,471	3,900E-06	073	041	Concreto
26	-4,471	3,900E-06	137	128	Concreto
27	-4,476	3,800E-06	133	069	Aço
28	-4,476	3,800E-06	073	121	Concreto
29	-4,476	3,800E-06	036	019	Aço
30	-4,494	3,500E-06	133	068	Aço
31	-4,494	3,500E-06	117	142	Aço
32	-4,500	3,400E-06	109	141	Aço
33	-4,500	3,400E-06	141	077	Aço
34	-4,500	3,400E-06	033	085	Aço
35	-4,513	3,200E-06	009	113	Concreto
36	-4,520	3,100E-06	097	092	Aço
37	-4,527	3,000E-06	037	020	Aço
38	-4,527	3,000E-06	101	109	Aço
39	-4,527	3,000E-06	049	149	Aço
40	-4,527	3,000E-06	141	076	Aço
41	-4,534	2,900E-06	046	030	Aço
42	-4,541	2,800E-06	109	061	Aço
43	-4,549	2,700E-06	033	084	Aço
44	-4,565	2,500E-06	045	132	Aço
45	-4,574	2,400E-06	113	156	Aço
46	-4,582	2,300E-06	101	052	Aço
47	-4,592	2,200E-06	037	100	Aço
48	-4,601	2,100E-06	045	029	Aço
49	-4,622	1,900E-06	013	013	Aço
50	-4,658	1,600E-06	097	093	Aço

Uma avaliação quantitativa da influência dos modos secundário pode ser observada na Fig. 6.24. Constatase que se apenas o modo de falha mais importante for considerado, a probabilidade final de falha será aproximadamente a metade daquela que leva em conta a simulação realizada nos estados limites dos modos do conjunto  $\Omega$ .

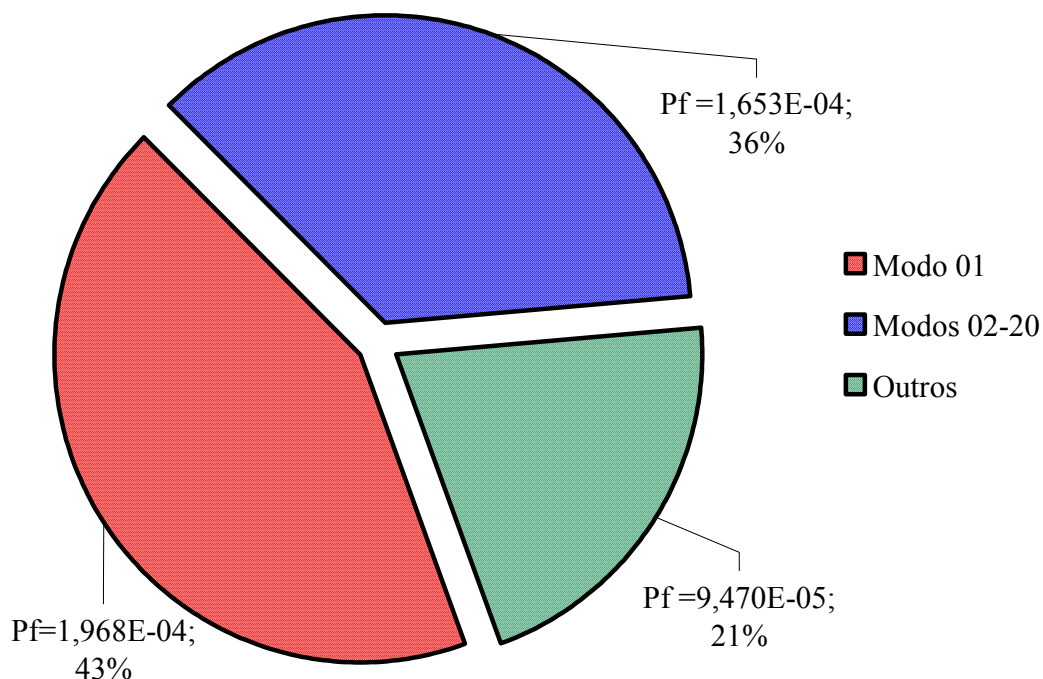


Fig. 6.24 – Importância dos modos de falha secundários na confiabilidade global

O índice de confiabilidade global e a probabilidade final de falha estão indicados na Eq.(6.8).

$$\begin{aligned} P_f &= 4,6 \times 10^{-4} \\ \beta &= 3,314 \end{aligned} \quad (6.8)$$

A Fig. 6.25a mostra a posição e o tipo dos modos de falha que contribuem para a obtenção da probabilidade de falha final e o respectivo índice de confiabilidade. Alguma simetria pode ser verificada e há uma tendência de seu aumento com o número de simulações iniciais. A Fig. 6.25b mostra os pontos onde a falha se verifica em uma possível análise determinística. Nesse tipo de análise as falhas sempre são verificadas nos pontos onde ocorrem os momentos fletores mais elevados.

Cabe aqui efetuar a ressalva de que os pontos de falha da análise probabilística dependem fortemente dos arranjos de armadura escolhidos. Em uma análise determinística, isso levaria apenas a uma modificação dos pontos simétricos. Novamente, isso é explicável pelas diferentes redistribuições de esforços provocadas principalmente pela presença do aço.

Para o arranjo de armaduras adotado, os resultados da análise de confiabilidade mostraram na análise com múltiplos modos de falha que as seções que apresentaram maior número de falhas foram aquelas onde estava situado o arranjo de armadura de número 4 (Fig. 6.18). Em seguida, alguns pontos onde haviam elevados momentos

fletores ou com a presença de cargas aplicadas também apresentaram alto número de falhas.

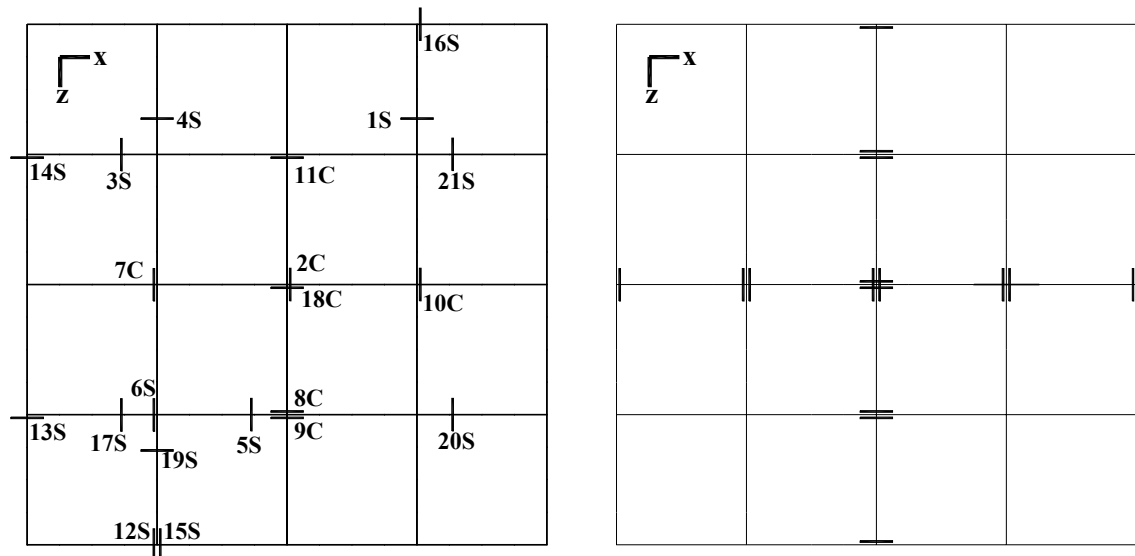


Fig. 6.25 – a) Principais modos de falha b) Seções críticas em análise determinística

Este exemplo mostra a importância dos efeitos devidos à consideração da aleatoriedade dos parâmetros da grelha de concreto armado em uma situação próxima à ruptura, bem como da introdução do grau de aleatoriedade nas ações aplicadas. Os resultados mostraram um índice de confiabilidade bastante satisfatório.

## 7 Conclusão

A teoria de confiabilidade aplicada às estruturas é uma tentativa de se considerar as incertezas presentes nas variáveis envolvidas no projeto. Para o estudo e posterior aplicação dessa teoria foi inicialmente realizada uma revisão bibliográfica que serviu de parâmetro para as decisões tomadas ao longo do trabalho. Essa pesquisa mostrou um intenso progresso da teoria da confiabilidade desde a sua formalização na primeira metade do século XX até os dias atuais. Constatou-se que os primeiros trabalhos apresentavam uma tendência à consolidação da técnica, buscando maneiras de mostrar ao meio técnico a eficácia e a utilidade da teoria. Esse objetivo foi alcançado e as aplicações progrediram, à medida que as ferramentas de informática o permitiam. Porém, apenas nos últimos vinte anos é que se pôde constatar a maior evolução de pesquisas referentes ao tema e verifica-se atualmente uma total aceitação da teoria da confiabilidade como uma ferramenta para subsidiar a previsão da segurança de elementos ou sistemas.

Há hoje uma grande tendência para a diversificação das aplicações de confiabilidade em vários ramos da ciência. A Engenharia de Estruturas, em particular, faz uso de modelos baseados em confiabilidade para realizar a previsão das probabilidades de falha de edifícios, pontes, barragens, monumentos e outros. Existe também uma forte tendência à realização do acoplamento de processos de otimização com índices de confiabilidade para a realização de projetos e verificações otimizadas submetidos a índices de confiabilidade pré-estabelecidos.

A intensa evolução recentemente experimentada pela informática foi fundamental no desenvolvimento de aplicações complexas. No entanto, as aplicações realizadas também continuam em forte evolução, e o tempo computacional ainda é um obstáculo considerado primordial em muitas análises. Assim, verifica-se que os métodos confiabilísticos e suas aplicações evoluem paralelamente ao avanço da informática. Esses métodos são divididos em três grupos: exatos, de simulação e aproximados. O primeiro grupo é para uso acadêmico. O segundo engloba os métodos de sorteio de

realizações, como o método de Monte Carlo, com ou sem modificação de amostra. O terceiro grupo contempla os métodos desenvolvidos para fornecer aproximações da probabilidade de falha com rapidez e precisão. Dentre eles, o método da superfície de resposta é correntemente usado, já que permite a determinação eficiente do ponto de projeto e do índice de confiabilidade em problemas onde o estado limite real é desconhecido. Constatou-se na literatura que o uso de superfícies de resposta não é recente, mas que o método constitui um campo ainda aberto a pesquisas.

No acoplamento com o MEF, o tempo gasto nos problemas de confiabilidade é um aspecto a ser levado em conta. O caminho crítico passa pelo número de chamadas do modelo mecânico responsáveis pelas repostas estruturais, que são necessárias para se atingir a convergência. Logo, o tempo gasto no modelo mecânico é muito maior do que no modelo confiabilístico. Assim, é difícil definir um dos métodos como o melhor ou o mais adequado para o acoplamento com o MEF. A relação entre desempenho e precisão deve ser verificada em cada caso. Os critérios de julgamento são em geral o tempo de cálculo, a precisão do resultado final e a confiança que o resultado traduz.

Os modelos para concreto armado foram amplamente estudados. Embora com a atual existência de modelos bastante refinados para o material, o uso de um procedimento baseado em um modelo momento x curvatura proveniente de uma transformação dos modelos em tensão x deformação mostrou-se suficientemente precisa para o objetivo do presente trabalho. Implementou-se um algoritmo para o cálculo da carga última da grelha de concreto armado considerando-se esses modelos não-lineares. O uso de elementos de barras com o modelo momento x curvatura trouxe a velocidade necessária à determinação carga última. Porém, há no algoritmo a necessidade de realizar-se a integração das tensões no aço e no concreto nos nós extremos do elemento para a determinação dos esforços. Dentre as várias opções imaginadas inicialmente, com elementos de chapa e placa, a solução adotada com grelhas apresentou uma melhor relação entre tempo x precisão necessária para o uso nos modelos de confiabilidade.

Na abordagem com um estado limite único, o ponto de projeto denominado de  $P^*$  é o ponto de falha mais provável e a sua falha representa a falha do sistema. Verificou-se que o estado limite único representa uma envoltória dos estados limites dos modos de falha secundários e por isso não permite que as probabilidades desses modos sejam levadas em consideração. Para as grelhas, o inconveniente maior dessa técnica é que uma perturbação em qualquer das variáveis modifica o cenário de falha, como a seção e

o tipo de ruína. No entanto, esse método é bastante utilizado e fornece boas aproximações do índice de confiabilidade, como visto na literatura.

O uso de estados múltiplos conduziu a uma obtenção mais precisa da probabilidade de falha, já que o domínio de falha é definido de uma maneira mais precisa do que com o emprego de aproximações em primeira ou segunda ordem. O uso de planos de experiência para a montagem das curvas individuais de estado limite mostrou-se adequado para número reduzido de variáveis aleatórias, quando se utiliza o procedimento de imposição de falha nos devidos modos. Já a construção das curvas com o emprego do método de Monte Carlo, também com imposição de falha, mostrou-se viável para um pequeno número de situações.

A técnica utilizada para o cálculo da confiabilidade sem a imposição de falha, permitiu a seleção dos modos de falha importantes, e conduziu a resultados coerentes da probabilidade de falha do sistema. A seleção realizada acarreta um grande ganho de tempo de processamento. A vantagem da simulação do presente trabalho em relação ao Monte Carlo puro é que ela é realizada apenas sobre polinômios e não sobre modelos mecânicos complexos. Isso permite o uso de modelos mais complexos ou simplesmente do ganho de tempo, como mostrado no exemplo do item 6.4. Ela permite a extensão para a determinação de probabilidades de falha de sistemas de modo global, permitindo avaliar as suas probabilidades de colapso. Isso é feito definindo-se as regiões cuja intersecção conduz a estrutura a essa situação. O procedimento com falha não induzida mostrou-se o melhor do ponto de vista da generalização da técnica, pois forneceu resultados coerentes mesmo com alto número de variáveis aleatórias.

Os temas para futuras pesquisas relacionados à seqüência deste trabalho podem ser diversos. Pode-se citar a incorporação de modelos que modifiquem os valores dos pontos de um plano de experiência com translação a cada superfície, ou mesmo com uma certa rotação. Novos modelos para a construção de múltiplos estados limites podem melhorar a sua precisão. O uso de métodos de simulação nos domínios complexos para determinar os pontos presentes nas intersecções dos estados limites individuais mostra-se uma razoável trajetória em direção à simulação do colapso de sistemas e a sua investigação pode ser uma interessante pesquisa.

Com relação ao modelo mecânico, existe a possibilidade de incorporação de elementos de placa e chapa ou ainda a implementação de modelos não-lineares já existentes para as armaduras transversais. Modelos materiais podem ter a sua



confiabilidade avaliada, como os baseados em mecânica do dano ou fratura, onde se podem inclusive encontrar modelos com incorporação de anisotropia.

A rigor, como a teoria da confiabilidade se trata de uma ferramenta estritamente matemática, ela pode ser acoplada a qualquer modelo mecânico baseado em qualquer hipótese cinemática e em problemas dependentes ou não de sua variação no tempo.

Por último, verifica-se que a consideração de incertezas através das devidas associações estatísticas para o cálculo da confiabilidade consiste em um tema atual, relevante e está se tornando uma das linhas de pesquisa mais procuradas nos grandes centros de pesquisa mundiais.

## Referências Bibliográficas

- [1] Freudenthal,A.M. The safety of structures. Transactions of ASCE, Volume 112, 1947, Pages 125–180.
- [2] Freudenthal,A.M. Safety and the probability of structural failure. Transactions of ASCE, Volume 121, 1956, Pages 1337–1397.
- [3] Freudenthal,A.M. & Garrelts,J.M. & Shinozuka,M. The analysis of structural safety. Journal of the Structural Division, ASCE, Volume 92, No. ST1, February 1966, Pages 267-325.
- [4] Kupfer,H. & Freudenthal,A.M. Structural optimization and risk control. In: Proceedings of the Second International Conference on Structural Safety and Reliability, Warner Verlag, 1977, pages 627-639.
- [5] Ang,A.H.-S. & Amin,M. Reliability of structures and structural systems. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Volume 94, No. EM2, April 1968, Pages 671-691.
- [6] Vanmarcke,E.H. Matrix formulation of reliability analysis and reliability based-design. Computers & Structures. Volume 3, Issues 4, 1973, Pages 757-770.
- [7] Hasofer,A.M. & Lind,N.C. Exact and invariant second moment code format. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE. Volume 100, No. EM1, February 1974, Pages 111-121.
- [8] Hasofer,A.M. Reliability index and failure probability. Journal of Structural Mechanics, Volume 3, Issue 1, 1974, Pages 25-27.
- [9] Ang,A.H.-S. & Cornell,C.A. Reliability bases of structural safety and design. Journal of the Structural Division, ASCE, Volume 100, No. ST9, September 1974, Pages 1755-1769.
- [10] Lind,N.C. Formulations of probabilistic design. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Volume 103, No. EM2, February 1977, Pages 273-284.
- [11] Parkinson,D.B. Solution for second moment reliability index. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Volume 104, No. EM5, October 1978, Pages 1267-1275.
- [12] Ditlevsen,O. Generalized second moment reliability index. Journal of Structural Mechanics, Volume 7, Issue 4, 1979, Pages 435-451.
- [13] Veneziano,D. New index of reliability. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Volume 105, No. EM2, April 1979, Pages 277-296.
- [14] Grigoriu,M. & Veneziano,D & Cornell,C.A. Probabilistic modeling as decision making. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Volume 105, No. EM4, August 1979, Pages 585-596.
- [15] Fiessler,B. & Neumann,H.-J & Rackwitz,R. Quadratic limit states in structural reliability. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Volume 105, No. EM4, August 1979, Pages 661-676.

- [16] Ditlevsen, O. Principle of normal tail approximation. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, Volume 107, No. EM6, December 1981, Pages 1191-1208.
- [17] Dolinski, K. First-order second-moment approximation in reliability of structural systems: Critical review and alternative approach. *Structural Safety*, Volume 1, Issue 3, 1982-1983, Pages 211-231.
- [18] Der Kiureghian, A. & Taylor, R.L. Numerical methods in structural reliability. In: *Proceedings of the 4th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, ICASP, Firenze, Italy, 1983*. Pages 769-784.
- [19] Harbitz, A. Efficient and accurate probability of failure calculation by use of the importance sampling technique. In: *Proceedings of the Fourth International Conference on Applications of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering, ICASP, Firenze, Italy, 1983*. Pages 825-836.
- [20] Breitung, K. Asymptotic approximations for multinormal integrals. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Volume 110, No. 3, January 1983, Pages 357-366.
- [21] Shinozuka, M. Basic analysis of structural safety. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Volume 109, No. 3, March 1983, Pages 721-740.
- [22] Kam, T.-Y. & Corotis, R.B. & Rossow, E.C. Reliability of nonlinear framed structures. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Volume 109, No. 7, July 1983, Pages 1585-1601.
- [23] Ditlevsen, O. Fundamental postulate in structural safety. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Volume 109, No. 4, August 1983, Pages 1096-1102.
- [24] Melchers, R.E. Reliability of parallel structural systems. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Volume 109, No. 11, November 1983, Pages 2651-2665.
- [25] Ditlevsen, O. & Bjerager, P. Reliability of highly redundant plastic structures. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Volume 110, No. 5, May 1984, Pages 671-693.
- [26] Madsen, H.O. First order vs. second order reliability analysis of series structures. *Structural Safety*, Volume 2, Issue 3, 1985, Pages 207-214.
- [27] Frangopol, D.M. Sensitivity of reliability-based optimum design. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Volume 111, No. 8, August 1985, Pages 1703-1721.
- [28] Frangopol, D.M. Structural optimization using reliability concepts. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Volume 111, No. 11, November 1985, Pages 2288-2301.
- [29] Der Kiureghian, A. & Liu, P.-L. Structural reliability under incomplete probability information. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Volume 112, No. 1, January 1986, Pages 85-104.
- [30] Harbitz, A. An efficient sampling method for probability of failure calculation. *Structural Safety*, Volume 3, Issue 2, January 1986, Pages 109-115.
- [31] Ditlevsen, O. & Bjerager, P. Methods of structural systems reliability. *Structural Safety*, Volume 3, Issues 3-4, August 1986, Pages 195-229.
- [32] Ayyub, B.M. & White, G.J. Reliability-conditioned partial safety factors. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Volume 113, No. 2, February 1987, Pages 279-294.
- [33] Der Kiureghian, A. & Lin, H.-Z. & Hwang, S.-J. Second order reliability approximations. *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Volume 113, No. 8, August 1987, Pages 359-378.

- [34] Madsen,H.O. Omission sensitivity factors. *Structural Safety*, Volume 5, Issue 1, January 1988, Pages 35-45.
- [35] Rashedi,R. & Moses,F. Identification of failure modes in system reliability. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Volume 114, No. 2, February 1988, Pages 292-313.
- [36] Bucher,C.G. Adaptive sampling - an iterative fast Monte Carlo procedure. *Structural Safety*, Volume 5, Issue 2, June 1988, Pages 119-126.
- [37] Folse,M.D. Reliability analysis for laterally loaded piles. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Volume 115, No. 5, May 1989, Pages 1011-1020.
- [38] Der Kiureghian,A. Measures of structural safety under imperfect states of knowledge. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Volume 115, No. 5, May 1989, Pages 1119-1140.
- [39] Bjerager,P. & Krenk,S. Parametric sensitivity in first order reliability theory. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Volume 115, No. 7, July 1989, Pages 1577-1582.
- [40] Folz,B. & Foschi,R.O. Reliability-based design of wood structural systems. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Volume 115, No. 7, July 1989, Pages 1666-1680.
- [41] Paliou,C. & Shinozuka,S & Chen,Y.-N. Reliability and redundancy of offshore structures. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Volume 116, No. 2, February 1990, Pages 359-378.
- [42] Folz,B. & Foschi,R.O. Reliability of timber beams subjected to ponding. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Volume 116, No. 2, February 1990, Pages 490-499.
- [43] Liu,P. & Der Kiureghian,A. Optimization algorithms for structural reliability. *Structural Safety*, Volume 9, Issue 3, February 1991, Pages 161-177.
- [44] Ibrahim,Y. General strategy for structural systems reliability analysis. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Volume 117, No. 3, March 1991, Pages 789-807.
- [45] El-Tawil,K. & Muzeau,J.-P. & Lemaire,M. Reliability method to solve mechanical problems with implicit limit state. In: Rackwitz R, Thoft-Christensen P. *Reliability and optimization of structural systems '91*. Proceedings of the 4th IFIP WG 7.5 Conference, Munich, German, September 1991, Pages 181-190.
- [46] Cai,G.Q. & Elishakoff,I. Refined second-order reliability analysis. *Structural Safety*, Volume 14, Issue 4, July 1994, Pages 267-276.
- [47] Song,B.F. & Jiang,W. An equivalent linear method for structural system reliability with nonlinear safety margins. *Computers & Structures*. Volume 55, Issue 6, 1995, Pages 1095-1100.
- [48] Chun,Q.Li. Computation of the failure probability of deteriorating structural systems. *Computers & Structures*. Volume 56, Issue 6, 1995, Pages 1073-1079.
- [49] SriVidya,A. & Ranganathan,R. Reliability based optimal design of reinforced concrete frames. *Computers & Structures*. Volume 57, Issue 4, 1995, Pages 651-661.
- [50] Li,C.Q. & Melchers,R.E. Failure probability of reinforced concrete columns under stochastic loads. *Engineering Structures*. Volume 17, Issue 6, 1995, Pages 419-424.
- [51] Wei-Fenga,L. & Bulleita,W.M. Approximate reliability analysis of wood structural systems. *Structural Safety*. Volume 17, Issue 2, August 1995, Pages 59-78.

- [52] Mohamed,A.M. & Lemaire,M. Linearized mechanical model to evaluate reliability of offshore structures. *Structural Safety*. Volume 17, Issue 3, October 1995, Pages 167-193.
- [53] Val,D. & Bljoger,F. & Yankelevsky,D. Optimization problem solution in reliability analysis of reinforced concrete structures. *Computers & Structures*. Volume 60, Issue 3, 1996, Pages 351-355.
- [54] Ellingwood,B.R. Reliability-based condition assessment and LRFD for existing structures. *Structural Safety*. Volume 18, Issues 2-3, 1996, Pages 67-80.
- [55] Frangopol,D.M. et al. A new look at reliability of reinforced concrete columns. *Structural Safety*. Volume 18, Issues 2-3, 1996, Pages 123-150.
- [56] Mirza,S.A. Reliability-based design of reinforced concrete columns. *Structural Safety*. Volume 18, Issues 2-3, 1996, Pages 179-194.
- [57] Stewart,M.G. Optimization of serviceability load combinations for structural steel beam design. *Structural Safety*. Volume 18, Issues 2-3, 1996, Pages 225-238.
- [58] Lin,K. & Frangopol,D.M Reliability-based optimum design of reinforced concrete girders. *Structural Safety*. Volume 18, Issues 2-3, 1996, Pages 239-258.
- [59] Song,B.F. A technique for computing failure probability of a structure using importance sampling. *Computers & Structures*. Volume 62, Issue 4,1997, Pages 659-665.
- [60] Moses,F. Problems and prospects of reliability-based optimization. *Engineering Structures*. Volume 19, Issue 4, 1997, Pages 293-301.
- [61] Kam,T.Y. et al. Fatigue reliability analysis of composite laminates under spectrum stress. *International Journal of Solids and Structures*. Volume 34, 1997, Pages 1441-1461
- [62] Lemaire,M. Reliability and mechanical design. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 55, Issue 2, February 1997, Pages 163-170.
- [63] Boyer,C. et al. Design of a composite structure to achieve a specified reliability level. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 56, Issue 3, June 1997, Pages 273-283.
- [64] Kima,S. & Nab,S. Response surface method using vector projected sampling points. *Structural Safety*. Volume 19, Issue 1, 1997, Pages 3-19. *Asian-Pacific Symposium on Structural Reliability and Its Applications*.
- [65] Val,D. & Bljoger,F. & Yankelevsky,D. Reliability evaluation in nonlinear analysis of reinforced concrete structures. *Structural Safety*. Volume 19, Issue 2, 1997, Pages 203-217.
- [66] Mrazik,A. & Krma,M. Probability-based design standards of structures. *Structural Safety*, Volume 19, Issue 2, 1997, Pages 219-234.
- [67] Vrouwenvelder,T. The JCSS probabilistic model code. *Structural Safety*, Volume 19, Issue 3, 1997, Pages 245-251.
- [68] Ditlevsen,O. Structural reliability codes for probabilistic design - a debate paper based on elementary reliability and decision analysis concepts. *Structural Safety*, Volume 19, Issue 3, 1997, Pages 253-270.
- [69] Borri,A. & Speranzini,E. Structural reliability analysis using a standard deterministic finite element code. *Structural Safety*, Volume 19, Issue 4, 1997, Pages 361-382.
- [70] Arwashan,N. Matrix formulation for the calculation of structural systems reliability. *Computers & Structures*. Volume 66, Issue 5, 1998, Pages 525-534.
- [71] Bljoger,E. Models of R.C. structures for probabilistic serviceability analysis. *Computers & Structures*. Volume 67, Issues 1-3, 1998, Pages 19-27.

- [72] Ciampoli, M. Time dependent reliability of structural systems subject to deterioration. *Computers & Structures*. Volume 67, Issues 1-3, 1998, Pages 29-35.
- [73] Shiraishil, N. & Furuta, H. Reliability assessment and assurance of infrastructure systems. *Computers & Structures*. Volume 67, Issues 1-3, 1998, Pages 147-155.
- [74] Casas, J.R. & Crespo-Minguillon, C. Probabilistic response of prestressed concrete bridges to fatigue. *Engineering Structures*. Volume 20, Issue 11, 1998, Pages 940-947.
- [75] Papadopoulos, V. & Papadrakakis, M. Stochastic finite element-based reliability analysis of space frames. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Volume 13, Issue 1, January 1998, Pages 53-65.
- [76] Ding, K. et al. Latin hypercube sampling used in the calculation of the fracture probability. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 59, Issue 2, February 1998, Pages 239-242.
- [77] Ellingwood, B.R. Issues related to structural aging in probabilistic risk assessment of nuclear power plants. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 62, Issue 3, December 1998, Pages 171-183.
- [78] Han, B.K. Reliability assessment and design load factors for reinforced concrete containment structures. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 62, Issue 3, December 1998, Pages 235-240.
- [79] Der Kiureghian, A. & Dakessian, T. Multiple design points in first and second-order reliability. *Structural Safety*, Volume 20, Issue 1, 1998, Pages 37-49.
- [80] Pandey, M.D. An effective approximation to evaluate multinormal integrals. *Structural Safety*, Volume 20, Issue 1, 1998, Pages 51-67.
- [81] Stewart, M.G. & Rosowsky, D.V. Time-dependent reliability of deteriorating reinforced concrete bridge decks. *Structural Safety*, Volume 20, Issue 1, 1998, Pages 91-109.
- [82] Dey, A. & Mahadevan, S. Ductile structural system reliability analysis using adaptive importance sampling. *Structural Safety*, Volume 20, Issue 2, 1998, Pages 137-154.
- [83] Li, H. & Foschi, R.O. An inverse reliability method and its application. *Structural Safety*, Volume 20, Issue 3, 1998, Pages 257-270.
- [84] Hopperstad, O.S. et al. Reliability-based analysis of a stretch-bending process for aluminium extrusions. *Computers & Structures*. Volume 71, Issue 1, 1999, Pages 63-75.
- [85] Venini, P. & Mariani, C. Reliability as a measure of active control effectiveness. *Computers & Structures*. Volume 73, Issues 1-5, 1999, Pages 465-473.
- [86] Grandhi, R.V. & Wang, L. Higher-order failure probability calculation using nonlinear approximations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Volume 168, Issues 1-4, 1999, Pages 185-206.
- [87] Guan, X.L. & Melchers, R.E. A load space formulation for probabilistic finite element analysis of structural reliability. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Volume 14, Issues 1-2, January 1999, Pages 73-81.
- [88] Marek, P. et al. Transition from partial factors method to Simulation-Based Reliability Assessment in structural design. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Volume 14, Issues 1-2, January 1999, Pages 105-118.
- [89] Mitteau, J.C. Error evaluations for the computation of failure probability in static structural reliability problems. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Volume 14, Issues 1-2, January 1999, Pages 119-136.

- [90] Shao,S. & Murotsu,Y. Approach to failure mode analysis of large structures. Probabilistic Engineering Mechanics, Volume 14, Issues 1-2, January 1999, Pages 169-177.
- [91] Camarinopoulos,L. et al. Assessment of the time-dependent structural reliability of buried water mains. Reliability Engineering & System Safety. Volume 65, Issue 1, June 1999, Pages 41-53.
- [92] Barakat,S.A., Malkawi,A.I.H. & Tahat,R.H. Reliability-based optimization of laterally loaded piles. Structural Safety, Volume 21, Issue 1, March 1999, Pages 45-64.
- [93] Zhao,Y. & Ono,T. A general procedure for first/second-order reliability method (FORM/SORM). Structural Safety, Volume 21, Issue 2, June 1999, Pages 95-112.
- [94] Enright,M.P. & Frangopol,D.M. Reliability-based condition assessment of deteriorating concrete bridges considering load redistribution. Structural Safety, Volume 21, Issue 2, June 1999, Pages 159-195.
- [95] Sexsmith,R.G. Probability-based safety analysis - value and drawbacks. Structural Safety, Volume 21, Issue 4, December 1999, Pages 303-310.
- [96] Elms,D.G. Achieving structural safety: theoretical considerations. Structural Safety, Volume 21, Issue 4, December 1999, Pages 311-333.
- [97] Menzies,J.B. What researchers do and what practitioners need. Structural Safety, Volume 21, Issue 4, December 1999, Pages 349-356.
- [98] Sarveswaran,V. & Roberts,M.B. Reliability analysis of deteriorating structures - the experience and needs of practising engineers. Structural Safety, Volume 21, Issue 4, December 1999, Pages 357-372.
- [99] Basaran,C.& Chandaroy,R. Using finite element analysis for simulation of reliability tests on solder joints in microelectronic packaging. Computers & Structures. Volume 74, Issue 2, 2000, Pages 215-231.
- [100] Guillaumat,L. Reliability of composite structures – impact loading. Computers & Structures. Volume 76, Issues 1-3, 2000, Pages 163-172.
- [101] Imaib,K. & Frangopol,D.M. Geometrically nonlinear finite element reliability analysis of structural systems. I: theory. Computers & Structures. Volume 77, Issue 6, 2000, Pages 677-691.
- [102] Frangopol,D.M. & Imaib,K. Geometrically nonlinear finite element reliability analysis of structural systems. II: applications. Computers & Structures. Volume 77, Issue 6, 2000, Pages 693-709.
- [103] Mahadevan,S. & Raghathamachar,P. Adaptive simulation for system reliability analysis of large structures. Computers & Structures. Volume 77, Issue 6, 2000, Pages 725-734.
- [104] Ellingwood,B.R. LRFD: implementing structural reliability in professional practice. Engineering Structures. Volume 22, Issue 2, 2000, Pages 106-115.
- [105] Zhenga,Y. & Dasb,P.K. Improved response surface method and its application to stiffened plate reliability analysis. Engineering Structures. Volume 22, Issue 5, 2000, Pages 544-551.
- [106] Vrouwenvelder,T. Stochastic modelling of extreme action events in structural engineering. Probabilistic Engineering Mechanics, Volume 15, Issue 1, January 2000, Pages 109-117.
- [107] Pendola,M. et al. Combination of finite element and reliability methods in nonlinear fracture mechanics. Reliability Engineering & System Safety. Volume 70, Issue 1, October 2000, Pages 15-27.

- [108] Mainçon,P. A first order reliability method for series systems. *Structural Safety*, Volume 22, Issue 1, 21 February 2000, Pages 5-26.
- [109] Nie,J. & Ellingwood,B.R. Directional methods for structural reliability analysis. *Structural Safety*, Volume 22, Issue 3, 2000, Pages 233-249.
- [110] Hong,H.P. Distribution of structural collapses and optimum reliability for infrequent environmental loads. *Structural Safety*, Volume 22, Issue 4, 2000, Pages 297-311.
- [111] Vu,K.A.T. & Stewart,M.G. Structural reliability of concrete bridges including improved chloride-induced corrosion models. *Structural Safety*, Volume 22, Issue 4, 2000, Pages 313-333.
- [112] Tandjiria,V. & The,C.I & Low,B.K. Reliability analysis of laterally loaded piles using response surface methods. *Structural Safety*, Volume 22, Issue 4, 2000, Pages 335-355.
- [113] Stocki,R.et al. Study on discrete optimization techniques in reliability-based optimization of truss structures. *Computers & Structures*. Volume 79, Issues 22-25, 2001, Pages 2235-2247.
- [114] Milner,D.M. et al. New light on performance of short and slender reinforced concrete columns under random loads. *Engineering Structures*. Volume 23, Issue 2, 2001, Pages 147-157.
- [115] Rahman,S & Rao,B.N. An element-free Galerkin method for probabilistic mechanics and reliability. *International Journal of Solids and Structures*. Volume 38, 2001, Pages 9313-9330.
- [116] Levitin,G. & Lisnianski,A. Structure optimization of multi-state system with two failure modes. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 72, Issue 1, April 2001, Pages 75-89.
- [117] Kanda,J. & Adachi,T. Influence of probability distribution of loads on optimum reliability. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 73, Issue 3, September 2001, Pages 197-204.
- [118] Aktasa,E. et al. Cost and safety optimization of structural design specifications. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 73, Issue 3, September 2001, Pages 205-212.
- [119] Royset,J.O. et al. Reliability-based optimal structural design by the decoupling approach. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 73, Issue 3, September 2001, Pages 213-221.
- [120] Wen,Y.K. Minimum lifecycle cost design under multiple hazards. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 73, Issue 3, September 2001, Pages 223-231.
- [121] Ang,A.H. & Lee,J. Cost optimal design of R/C buildings. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 73, Issue 3, September 2001, Pages 233-238.
- [122] Esteva,L. et al. Reliability functions for earthquake resistant design. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 73, Issue 3, September 2001, Pages 239-262.
- [123] Melchers,R.E. Rational optimization of reliability and safety policies. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 73, Issue 3, September 2001, Pages 263-268.
- [124] Rackwitz,R. Optimizing systematically renewed structures. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 73, Issue 3, September 2001, Pages 269-279.
- [125] Estes,A.C. & Frangopol,D.M. Minimum expected cost-oriented optimal maintenance planning for deteriorating structures: application to concrete



- bridge decks. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 73, Issue 3, September 2001, Pages 281-291.
- [126] Stewart, M.G. Reliability-based assessment of ageing bridges using risk ranking and life cycle cost decision analyses. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 74, Issue 3, December 2001, Pages 263-273.
- [127] Zhao, Y. & Ono, T. Moment methods for structural reliability. *Structural Safety*, Volume 23, Issue 1, 2001, Pages 47-75.
- [128] Melchers, R.E. & Ahammed, M. Estimation of failure probabilities for intersections of non-linear limit states. *Structural Safety*, Volume 23, Issue 2, 2001, Pages 123-135.
- [129] Mohamed, A. & Soares, R. & Venturini, W. S. Partial safety factors for homogeneous reliability of nonlinear reinforced concrete columns. *Structural Safety*, Volume 23, Issue 2, 2001, Pages 137-156.
- [130] Low, H.Y. & Hao, H. Reliability analysis of reinforced concrete slabs under explosive loading. *Structural Safety*, Volume 23, Issue 2, 2001, Pages 157-178.
- [131] Augusti, G. & Ciampoli, M. & Giovenale, P. Seismic vulnerability of monumental buildings. *Structural Safety*, Volume 23, Issue 3, 2001, Pages 253-274.
- [132] Mori, Y. & Nonaka, M. LRFD for assessment of deteriorating existing structures. *Structural Safety*, Volume 23, Issue 4, October 2001, Pages 297-313.
- [133] Nowak, A.S. & Park, C. & Casas, J.R. Reliability analysis of prestressed concrete bridge girders: comparison of Eurocode, Spanish Norma IAP and AASHTO LRFD. *Structural Safety*, Volume 23, Issue 4, October 2001, Pages 331-344.
- [134] Rackwitz, R. Reliability analysis - a review and some perspectives. *Structural Safety*, Volume 23, Issue 4, October 2001, Pages 365-395.
- [135] Wen, Y.K. Reliability and performance-based design. *Structural Safety*, Volume 23, Issue 4, October 2001, Pages 407-428.
- [136] Guan, X.L. & Melchers, R.E. Effect of response surface parameter variation on structural reliability estimates. *Structural Safety*, Volume 23, Issue 4, October 2001, Pages 429-444.
- [137] Lee, J.-O. et al. A comparative study on reliability-index and target-performance-based probabilistic structural design optimization. *Computers & Structures*. Volume 80, Issues 3-4, 2002, Pages 257-269.
- [138] Savoia, M. Structural reliability analysis through fuzzy number approach, with application to stability. *Computers & Structures*. Volume 80, Issue 12, 2002, Pages 1087-1102.
- [139] Gharaibeh, E.S. et al. Reliability-based importance assessment of structural members with applications to complex structures. *Computers & Structures*. Volume 80, Issue 12, 2002, Pages 1113-1131.
- [140] Onoufriou, T. & Frangopol, D.M. Reliability-based inspection optimization of complex structures: a brief retrospective. *Computers & Structures* Volume 80, Issue 12, 2002, Pages 1133-1144.
- [141] Liu, C. Reliability validation of multigirder steel bridges designed by LRFD. *Computers & Structures*. Volume 80, Issue 32, 2002, Pages 2515-2527.
- [142] Papadrakakis, M. & Lagaros, N.D. Reliability-based structural optimization using neural networks and Monte Carlo simulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Volume 191, Issue 32, 2002, Pages 3491-3507.
- [143] Moro, T. et al. Reliability analysis of a mechanical contact between deformable solids. *Probabilistic Engineering Mechanics*, Volume 17, Issue 3, July 2002, Pages 227-232.

- [144] Chilakamarri,K.B. A new method in static structural reliability. Probabilistic Engineering Mechanics, Volume 17, Issue 4, October 2002, Pages 317-325.
- [145] Sudret,B. & Der Kiureghian,A. Comparison of finite element reliability methods. Probabilistic Engineering Mechanics, Volume 17, Issue 4, October 2002, Pages 337-348.
- [146] Soares,R.C. et al. Reliability analysis of non-linear reinforced concrete frames using the response surface method. Reliability Engineering & System Safety. Volume 75, Issue 1, January 2002, Pages 1-16.
- [147] Soares,R.C. Um estudo sobre modelos mecânico-probabilísticos para pórticos de concreto armado. Tese de doutorado, EESC-USP, 2001.
- [148] Quan,Q. & Gengwei,Z. Calibration of reliability index of RC beams for serviceability limit state of maximum crack width. Reliability Engineering & System Safety. Volume 75, Issue 3, March 2002, Pages 359-366.
- [149] Castillo,E. Computing failure probabilities.Applications to reliability analysis. Reliability Engineering & System Safety. Volume 77, Issue 2, August 2002, Pages 131-141.
- [150] Petryna,Y.S et al. Reliability of reinforced concrete structures under fatigue. Reliability Engineering & System Safety. Volume 77, Issue 3, September 2002, Pages 253-261.
- [151] Siddiqui,N.A. et al. Reliability analysis of projectile penetration into geological targets. Reliability Engineering & System Safety. Volume 78, Issue 1, October 2002, Pages 13-19.
- [152] Melchers,R.E. & Ahammed,M. Gradient estimation for applied Monte Carlo analyses. Reliability Engineering & System Safety. Volume 78, Issue 3, December 2002, Pages 283-288.
- [153] Foschi,R.O. & Li,H. & Zhang,J. Reliability and performance-based design: a computational approach and applications. Structural Safety, Volume 24, Issues 2-4, April-October 2002, Pages 205-218.
- [154] Imai,K. & Frangopol,D.M. System reliability of suspension bridges. Structural Safety, Volume 24, Issues 2-4, April-October 2002, Pages 219-259.
- [155] Reid,S.G. Specification of design criteria based on probabilistic measures of design performance. Structural Safety, Volume 24, Issues 2-4, April-October 2002, Pages 333-345.
- [156] Vrouwenvelder,A.C.W.M. Developments towards full probabilistic design codes. Structural Safety, Volume 24, Issues 2-4, April-October 2002, Pages 417-432.
- [157] Frangopol,D.M. & Maute,K. Life-cycle reliability-based optimization of civil and aerospace structures. Computers & Structures. Volume 81, Issue 7, 2003, Pages 397-410.
- [158] Barakat,S et al. Single objective reliability-based optimization of prestressed concrete beams. Computers & Structures. Volume 81, Issues 26-27, 2003, Pages 2501-2512.
- [159] Frangopol,D.M. & Recek,S. Reliability of fiber-reinforced composite laminate plates. Probabilistic Engineering Mechanics, Volume 18, Issue 2, April 2003, Pages 119-137.
- [160] Altus,E. & Givli,S. Strength reliability of statically indeterminate heterogeneous beams. International Journal of Solids and Structures. Volume 40, 2003, Pages 2069-2083.
- [161] Castillo,E et al. An alternative approach for addressing the failure probability-safety factor method with sensitivity analysis. Reliability Engineering & System Safety. Volume 82, Issue 2, November 2003, Pages 207-216.

- [162] Koucký, M. Exact reliability formula and bounds for general k-out-of-n systems. *Reliability Engineering & System Safety*. Volume 82, Issue 2, November 2003, Pages 229-231.
- [163] Olsson, A. & Sandberg, G. & Dahlblom, O. On Latin hypercube sampling for structural reliability analysis. *Structural Safety*, Volume 25, Issue 1, January 2003, Pages 47-68.
- [164] Gayton, N. & Bourinet, J.M & Lemaire, M. CQ2RS: a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis. *Structural Safety*, Volume 25, Issue 1, January 2003, Pages 99-121.
- [165] Hadianfard, M.A. & Razani, R. Effects of semi-rigid behavior of connections in the reliability of steel frames. *Structural Safety*, Volume 25, Issue 2, April 2003, Pages 123-138.
- [166] Val, D.V. & Stewart, G.M. Life-cycle cost analysis of reinforced concrete structures in marine environments. *Structural Safety*, Volume 25, Issue 4, October 2003, Pages 343-362.
- [167] Mori, Y. & Kato, T. Multinormal integrals by importance sampling for series system reliability. *Structural Safety*, Volume 25, Issue 4, October 2003, Pages 363-378.
- [168] Ang, A.H-S. & Tang, W.H. Probability concepts in engineering planning and design. Volume II, Wiley, 1975.
- [169] Ang, A.H.-S. & Tang, W.H. Probability Concepts in Engineering Planning and Design, Vol II. Rainbon-Bridge. 1984.
- [170] Rackwitz, R & Fiessler, B. Structural reliability under combined random load sequences Matrix formulation of reliability analysis and reliability based-design. *Computers & Structures*. Volume 9, Issues 5, 1978, Pages 489-494.
- [171] Abdo, T. & Rackwitz, R. A new  $\beta$  point algorithm for large time invariant and time variant reliability problems. In: *Reliability and optimisation of structures*. 90 Proc. of the 3rd WG 7.5 IFIP Conference, 1990:1-11.
- [172] Mohamed, A. et al. Couplage mécano-fiabiliste. Méthodologie pour les variables dépendantes ou corrélées. LaRAMA – Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée. Clermont Ferrant, France. 1997.
- [173] Rosenblatt, M. Remarks on multivariate transformation. *Annals of Mathematics and Statistics*, Vol. 23, No 3, September, 1952, pages 470-472.
- [174] Nataf, A. Détermination des distribution dont les marges sont données. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences*, Vol 25, pages 42-43. Paris, France, 1962.
- [175] Tvedt, L. Two-second order approximations to the failure probability. *Veritas Report RDIV/20-004-83*. Det norske Veritas, Oslo, Norway, 1983.
- [176] Carvalho, R.C. Análise não-linear de pavimentos de edifícios de concreto armado através da analogia de grelha. Tese de Doutorado. EESC-USP, 1994.
- [177] Ciloni, A.D. Sobre o comportamento em serviço de estruturas planas de concreto armado. Tese de doutorado. EESC-USP. 1993.
- [178] Machado, C.P. Tensões, Deformações e deslocamentos em estruturas de concreto armado e protendido, Dissertação de mestrado. EPUSP. 1989.
- [179] Comité Européen du Béton. CEB-FIP-Model code 1990, MC-90. *Bulletin d'information* n. 195, 196 e 198. 1990.
- [180] Ghali, A. & Favre, R. *Concrete Structures; Stresses and deformations*. Chapman & Hall, 1nd edition, 1986.
- [181] Debernardi, P.G. Behaviour of Concrete Structures in Service. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Volume 115, No. 1, January 1989, Pages 32-50.

- [182] Oliveira,R.S. Análise de pavimentos de edificios de concreto armado com a consideração da não-linearidade física. Dissertação de Mestrado, EESC-USP, 1997.
- [183] Sanches Jr,F. Cálculo de esforços e deslocamentos em pavimentos de edificios considerando-se modelos próprios para o concreto armado. Dissertação de mestrado, EESC-USP, 1998.
- [184] Mazars J. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure. Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6, Paris, 1984.
- [185] Lemaitre, J. A course on damage mechanics, Springer-Verlag, 1992.
- [186] Lemaitre,J & Chaboche,J.-L. Mechanics of solid materials. Cambridge University Press. 1994.
- [187] Choi,C.-K. & Cheung,S.-H. Tension stiffening model for planar reinforced concrete members. Computers & Structures, Volume 59, Issue 1, April 1996, Pages 179-190.
- [188] Papa,E. & Taliercio,A. Anisotropic damage model for the multiaxial static and fatigue behaviour of plain concrete. Engineering Fracture Mechanics, Volume 55, Issue 2, September 1996, Pages 163-179.
- [189] Cela,J.J.L. Analysis of reinforced concrete structures subjected to dynamic loads with a viscoplastic Drucker–Prager model. Applied Mathematical Modelling, Volume 22, Issue 7, July 1998, Pages 495-515.
- [190] Faria,R. & Oliver,J & Cervera,M. A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures. International Journal of Solids and Structures, Volume 35, Issue 14, May 1998, Pages 1533-1558.
- [191] Guo,J. & Cox,J.V. Implementation of a plasticity bond model for reinforced concrete. Computers & Structures, Volume 77, Issue 1, June 2000, Pages 65-82.
- [192] Comi,C. & Perego,U. Fracture energy based bi-dissipative damage model for concrete. International Journal of Solids and Structures, Volume 38, Issues 36-37, September 2001, Pages 6427-6454.
- [193] Scotta,R. et al. A scalar damage model with a shear retention factor for the analysis of reinforced concrete structures: theory and validation. Computers & Structures, Volume 79, Issue 7, March 2001, Pages 737-755.
- [194] Bazant,Z.P. Concrete fracture models: testing and practice. Engineering Fracture Mechanics, Volume 69, Issue 2, January 2002, Pages 165-205.
- [195] Martín-Pérez,B. & Pantazopoulou,S.J. Effect of bond, aggregate interlock and dowel action on the shear strength degradation of reinforced concrete. Engineering Structures, Volume 23, Issue 2, February 2001, Pages 214-227.
- [196] Kafka,V. Concrete under complex loading: mesomechanical model of deformation and of cumulative damage. European Journal of Mechanics - A/Solids, Volume 23, Issue 1, January-February 2004, Pages 63-75.
- [197] Krätzig,W.B. & Pölling,R. An elasto-plastic damage model for reinforced concrete with minimum number of material parameters. Computers & Structures, Volume 82, Issues 15-16, June 2004, Pages 1201-1215.
- [198] Rosselló,C. & Elices,M. Fracture of model concrete 1. Types of fracture and crack path. Cement and Concrete Research, Volume 34, Issue 8, August 2004, Pages 1441-1450.
- [199] Alliche,A. Damage model for fatigue loading of concrete. International Journal of Fatigue, Volume 26, Issue 9, September 2004, Pages 915-921.
- [200] Neville,A.M. Propriedades do concreto. Pini, São Paulo, SP, 1996.

- [201] CEB Design Manual Cracking and Deformations. Bulletin d'information 158<sup>e</sup>.
- [202] Proença,S.P.B. Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto. Tese de Doutorado, EESC-USP, 1988.
- [203] Hinton,H. & Owen,D.R.J. Finite elements in plasticity. Swansea, U.K, Pineridge Press,1980.
- [204] Corrêa,M.R.S. Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios. Tese de doutorado. EESC-USP. 1991.
- [205] Brebbia,C.A. & Dominguez,J. Boundary elements: an introductory course. 2.ed. Southampton, CMP / New York, MC-Graw-Hill, 1992.
- [206] Neves,R.A. Cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas de pisos de edifícios considerando-se a influência das tensões cisalhantes. Dissertação de Mestrado. EESC-USP. 2000.
- [207] Lewis,E.E. Introduction to Reliability Engineering. 2nd Edition, Wiley, 1995.
- [208] Phimeca Engineering SA. PHIMECA Software – Reliability-based analysis and design. Users manual, Aubière, France, 2001.

## Bibliografia Complementar

- [209] Augusti, G. & Barata, A. & Casciatti, F. Probabilistic methods in structural engineering. London, Chapman and Hall, 1984.
- [210] Bathe, K.J. Finite element procedures in engineering analysis. Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1982.
- [211] Bernardo, T.R.R. Contribuição à análise de confiabilidade em pavimentos de edifícios de concreto armado. Dissertação de mestrado, EESC-USP, 1999.
- [212] Chen, W.F. & Lui, E.M. Plasticity for structural engineers. New York, McGraw-Hill, 1988.
- [213] Chen, W.F. Plasticity in reinforced concrete. New York, McGraw-Hill, 1982.
- [214] Ciloni, A.D. Sobre o comportamento em serviço das estruturas planas de concreto armado. Tese de doutorado, EESC-USP, 1993.
- [215] Corrêa, M.R.S. Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios. Tese de doutorado, EESC-USP, 1991.
- [216] Ditlevsen, O & Madsen, H.O. Structural Reliability Methods, Wiley, 1996.
- [217] Figueiras, J.A. Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells. Tese de doutorado, University of Wales, 1983.
- [218] Frangopol, D.M. & Corotis, R.B. & Rackwitz, R. Reliability and optimization of structural systems, Pergamon, 1996.
- [219] Fusco, P.B. Estruturas de concreto: fundamentos estatísticos da segurança das estruturas. Brasil, McGraw-Hill, 1977.
- [220] Gere, J.M. & Weaver Jr, W. Análisis de estructuras reticulares. México, Espanha, Companhia Editorial Continental, 1967.
- [221] Ghali, A. & Favre, R. Concrete structures: structures and deformation. London, Chapman & Hall, 1986.
- [222] Hinton, H & Owen, D.R.J. & Taylor, C. Recent advances in non-linear computational mechanics. Swansea, UK. Pineridge Press. 1982.
- [223] Hofer, E. When to separate uncertainties and when not to separate. Reliability Engineering & System Safety. Treatment of Aleatory and Epistemic Uncertainty. Volume 54, Issues 2-3, November-December 1996, Pages 113-118.
- [224] Lemaire, M. & Mohamed, A. Formation complémentaire en fiabilité mécanique. LaRama – Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée. Clermont-Ferrand, France, 1999.
- [225] Lemaire, M. Comunicação Pessoal. 2003-2004.
- [226] Lemaire, M. et al. Fiabilité et mécanique. LaRama – Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée. Clermont-Ferrand, France, 1998.
- [227] Lemaire, M. et al. Fiabilité et sûreté de fonctionnement des systèmes mécaniques. LaRama – Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée. Clermont-Ferrand, France, 1996.

- [228] Lemaire, M. et al. Less approximations for sorm integrals. Applications of Statistics and Probability. Icas 7. Vol.2, p.1003-1010, 1995.
- [229] Lemaire, M. et al. Propagation of uncertainties in a system: application of form sorm methods in rams engineering. Applications of Statistics and Probability. Icas 7. Vol.2, p.1065-1070, 1995.
- [230] Lemaitre, J. & Chaboche, J.L. Mécanique des materiaux solids. Paris, Dunod, 1985.
- [231] Marek, P. & Gustar, M. & Anagnos, T. Simulation-based reliability assessment for structural engineers, CRC Press, 1996.
- [232] Mazars, J. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure. Tese de doutorado, Université Paris 6, 1984.
- [233] Melchers, R.E. Structural reliability analysis and prediction. Ellis Horwood / Wiley, Chichester, 1987.
- [234] Mendenhall, W. & Sincich, T. Statistics for Engineering and the Sciences. Third Edition, Prentice-Hall International, New Jersery, 1994.
- [235] Mohamed, A. & Lemaire, M. Discussion on: structural reliability analysis using a standard deterministic finite element code. Structural Safety, Volume 20, Issue 4, December 1998, Pages 391-397.
- [236] Mohamed, A. Comunicação Pessoal. 2003-2004.
- [237] Mohamed, A. et al. Finite element and reliability: a method for compound variables - application on a cracked heating system. Nuclear Engineering and Design, Volume 185, Issues 2-3, 15 October 1998, Pages 185-202.
- [238] Mohamed, A. Ryfes theoretical manual. Versão 1.0. LaRama – Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée. Clermont-Ferrand, France.
- [239] Nowak, A.S. & Collins, K.R. Reliability of structures, McGraw-Hill, 2000.
- [240] Owen, D.R.J. & Hinton, H. Finite element in plasticity: theory and practice. Pineridge Press, 1980.
- [241] Press, W.H. et al. Numerical recipes in FORTRAN: the art of scientific computing. Second Edition, Cambridge University Press, 1994.
- [242] Proença, S.P.B. sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto. Tese de doutorado, EESC-USP, 1988.
- [243] Ramalho, M.A. Sistemas para análise de estruturas considerando interação com o meio elástico. Tese de doutorado, EESC-USP, 1990.
- [244] Rausand, M. & Øien, K. The basic concepts of failure analysis. Reliability Engineering & System Safety, Volume 53, Issue 1, July 1996, Pages 73-83.
- [245] Rosowsky, D.V. Estimation of design loads for reduced reference periods. Structural Safety, Volume 17, Issue 1, March 1995, Pages 17-32.
- [246] Sanches Júnior, F. Análise de esforços e deslocamentos em pisos de edifícios considerando-se modelos do concreto armado. Dissertação de mestrado, EESC-USP, 1998.
- [247] Schneider, J. Introduction to Safety and Reliability of Structures. International Association for Bridge and Structural Engineering IABSE, 1997
- [248] Selected papers by Alfred M. Freudenthal. Civil Engineering Classics. ASCE, New York, 1981.
- [249] Souza, G.F.M. Análise de confiabilidade estrutural à fadiga de risers rígidos. Tese de doutorado, EP-USP, 1994.
- [250] Tichý, M. Applied methods of structural reliability. Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [251] Vetterling, W.T. et al. Numerical recipes example book (FORTRAN). Second Edition, Cambridge University Press, 1994.

- [252] Yellman, T.W. & Murray, T.M. Comment on 'The meaning of probability in probabilistic safety analysis'. *Reliability Engineering & System Safety*, Volume 49, Issue 2, 1995, Pages 201-205.



## Anexo A – Caso fundamental: exemplo numérico

Para demonstrar um exemplo do caso fundamental da segurança, imagine-se a barra tracionada, mostrada na Fig. A.1. A tensão solicitante é “s”, que vale  $F/A$ . A tensão resistente é chamada de “r”. A associação estatística é realizada com distribuições gaussianas tanto para “r” quanto para “s”. A resistência tem média  $\mu_r$  e desvio padrão  $\sigma_r$  e a solicitação tem média  $\mu_s$  e desvio padrão  $\sigma_s$ .

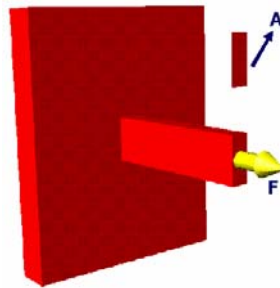


Fig. A.1 – Problema físico a ser modelado

Como as distribuições são normais, têm-se:

$$f_r(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_r} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{r-\mu_r}{\sigma_r} \right)^2} \quad f_s(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_s} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{s-\mu_s}{\sigma_s} \right)^2} \quad (\text{A.1})$$

No caso fundamental, as variáveis são consideradas independentes e, portanto a distribuição conjunta de probabilidades é dada pelo produto das distribuições normais individuais, conforme a Eq.(A.2):

$$f_{r,s}(r,s) = f_r(r) \times f_s(s) \quad (\text{A.2})$$

ou:

$$f_{r,s}(r,s) = \frac{1}{2\pi \sigma_r \sigma_s} e^{-\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{r-\mu_r}{\sigma_r} \right)^2 + \left( \frac{s-\mu_s}{\sigma_s} \right)^2 \right]} \quad (\text{A.3})$$

Em seguida, atribuem-se os valores aos parâmetros das distribuições da resistência e da solicitação, conforme a Eq.(A.4):

$$\begin{aligned} \mu_R &= 30,0 \text{ MPa} & \mu_S &= 26,0 \text{ MPa} \\ \sigma_R &= 1,0 \text{ MPa} & \sigma_S &= 2,0 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

E a função de distribuição conjunta é:

$$f_{R,S}(r,s) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}[(r-30)^2 + (0.5s-13)^2]} \quad (\text{A.5})$$

A função de estado limite desse problema é facilmente obtida, já que as situações de falha acontecem quando a resistência é menor do que a solicitação. Assim a função de estado limite é dada por uma reta a 45 graus, conforme a Eq.(A.6):

$$G = r - s = 0 \quad (\text{A.6})$$

A probabilidade de violação do estado limite é:

$$P_f = \int \int_{r-s < 0} f_{R,S}(r,s) dr ds = \int \int_{r-s < 0} \left[ \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}[(r-30)^2 + (0.5s-13)^2]} \right] dr ds \quad (\text{A.7})$$

Com a atribuição estatística mostrada na Eq.(A.5), obtém-se a função conjunta de distribuição de probabilidades, conforme a Fig. A.2. Foi utilizado um fator de escala de 1000 na vertical para ajudar a visualização em 3 dimensões. A função de estado limite da Eq.(A.6) também está indicada. A inclinação de 45 graus dessa reta é melhor visualizada na figura em 2 dimensões.

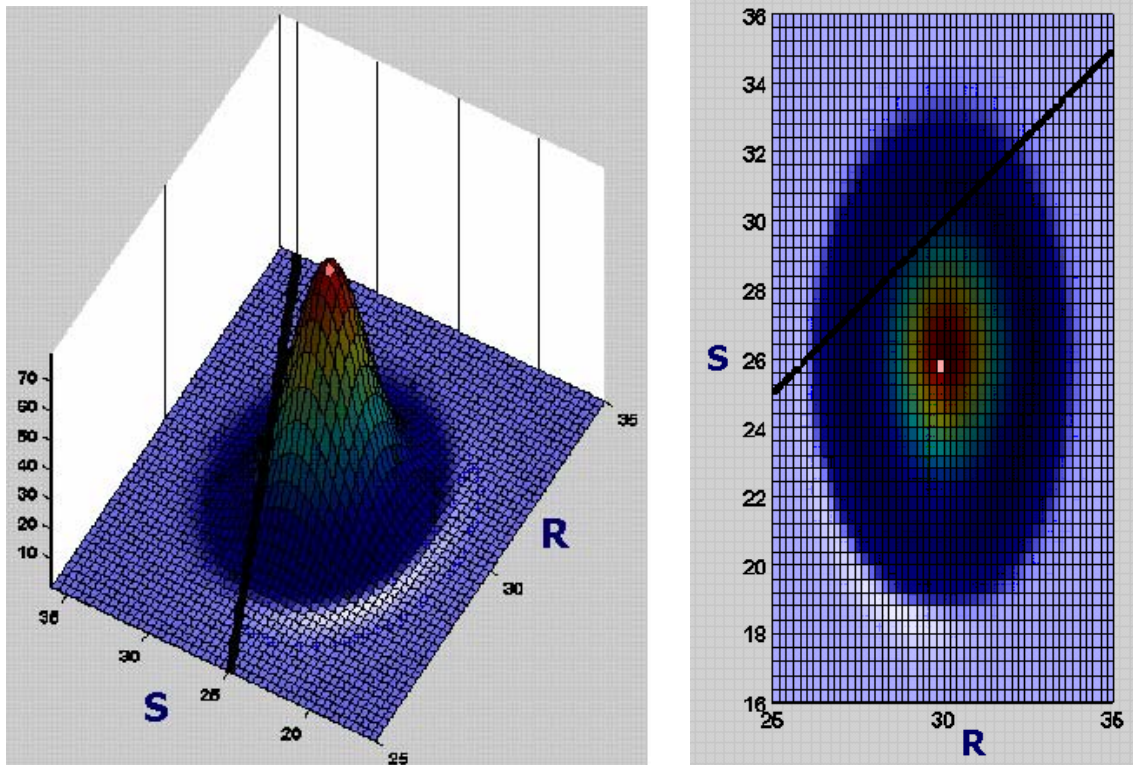


Fig. A.2 – Distribuição conjunta de probabilidades – visualização em 3 e 2 dimensões

Em seguida, a transformação isoprobabilística abaixo deve ser realizada:

$$\begin{aligned} u &= \frac{r - \mu_r}{\sigma_r} & v &= \frac{s - \mu_s}{\sigma_s} \\ dr &= \sigma_r du & ds &= \sigma_s dv \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

de onde se obtém:

$$\begin{aligned} u &= r - 30 & v &= 0.5s - 13 \\ dR &= du & dS &= 2dv \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A nova função conjunta é:

$$f_{u,v}(u, v) = \frac{1}{4\pi} e^{-\frac{1}{2}[u^2 + v^2]} \quad (\text{A.10})$$

A nova função de estado limite é:

$$g(u, v) = u - 2v + 4 = 0 \quad (\text{A.11})$$

A probabilidade de violação do estado limite é:

$$P_f = \int \int_{u-2v+4 < 0} \left[ \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}[u^2 + v^2]} \right] du dv \quad (\text{A.12})$$

Para encontrar a distância mínima, um equacionamento simples pode ser usado:

$$\begin{aligned}
 u &= 2v - 4 \\
 d^2(u, v) &= u^2 + v^2 = 4v^2 - 16v + 16 + v^2 = 5v^2 - 16v + 16 \\
 d_{\min}^2(u, v) &= 10v - 16 = 0 \rightarrow P^* \Leftrightarrow v = 1,6; u = -0,8 \\
 \beta &= \sqrt{1,6^2 + 0,8^2} = 1,78885438199983
 \end{aligned}
 \tag{A.13}$$

Vários métodos existem para encontrar esses parâmetros. Porém, a simplicidade do exemplo permite que seja usado o equacionamento acima. Essa nova função de estado limite, a função conjunta no espaço normalizado, o índice de confiabilidade e o ponto de projeto podem ser vistos na Fig. A.3.

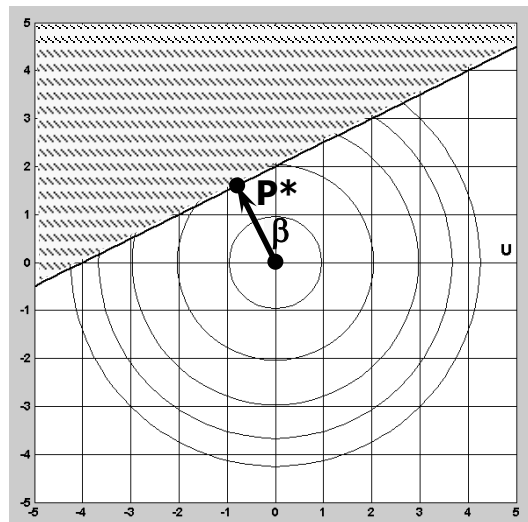


Fig. A.3 – Função de estado limite, função conjunta, índice  $\beta$  e ponto de projeto

Para calcular a área hachurada na Fig. A.3, que corresponde à probabilidade de falha do problema, é necessário efetuar uma nova mudança de variáveis, através de uma rotação de eixos. As novas variáveis  $u'$  e  $v'$  correspondem aos eixos “u” e “v” girados de um certo ângulo “ $\alpha$ ”. Esse ângulo é dado pelo eixo vertical “u” com a reta que contém o índice de confiabilidade  $OP^*$ . Esse ângulo vale:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\sigma_r}{\sigma_s}\right) \text{ ou } \arctan\left(\frac{u(P^*)}{v(P^*)}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 0,4636476 \text{ rad}
 \tag{A.14}$$

O novo sistema é:

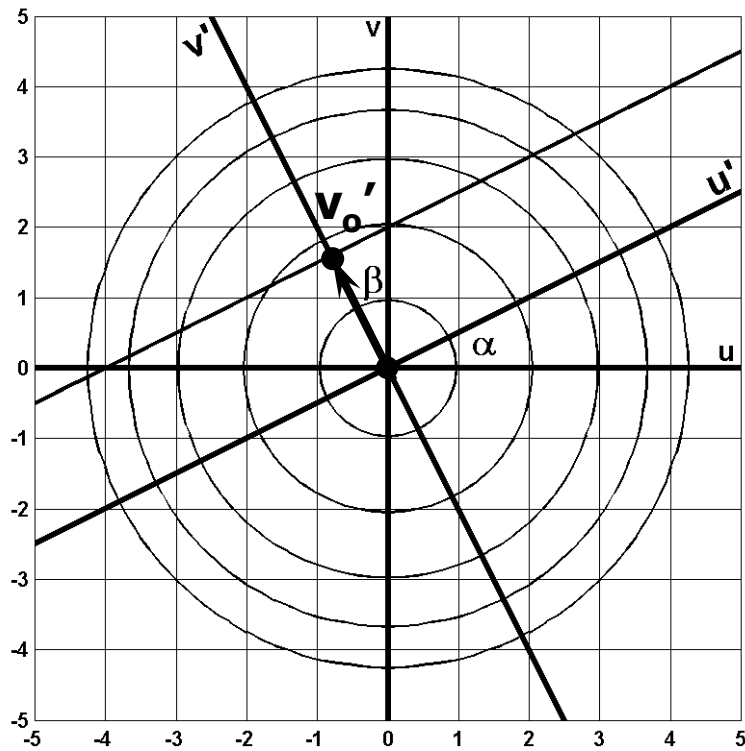


Fig. A.4 – Rotação de eixos para a integração

A mudança de variáveis é dada pela equação:

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

A nova função de estado limite é:

$$\begin{aligned} G(u', v') &= (0,894427195 - 2 \times 0,447213587)u' \\ &\quad - (0,447213587 + 2 \times 0,894427195)v' + 4 = 0 \\ G(u', v') &= -2,23606797749979 v' + 4 = 0 \\ G(u', v') &= 1,78885438199983 - v' = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

O limite de integração é:

$$v_0' = \frac{4}{2,23606797749979} = 1,78885438199983 \quad (\text{A.17})$$

Já que a matriz de rotação é ortogonal,  $u^2 + v^2 = u'^2 + v'^2$ . Como as bases  $uv$  e  $u'v'$  são constituídas de vetores perpendiculares,  $du' dv' = du dv$ . Assim, a Eq.(A.12) pode ser escrita no espaço das variáveis rotacionadas:

$$P_f = \frac{1}{2\pi} \int_{1,78885438199983}^{\infty} \left[ \left( \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{u'^2}{2}\right) du' \right) \exp\left(-\frac{v'^2}{2}\right) \right] dv' \quad (\text{A.18})$$

A integral entre parênteses vale  $\sqrt{2\pi}$ . Finalmente:

$$P_f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{1,78885438199983}^{\infty} \exp\left(-\frac{v'^2}{2}\right) dv' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-1,78885438199983} \exp\left(-\frac{v'^2}{2}\right) dv' \quad (\text{A.19})$$

$$P_f = \Phi(-1,78885438199983)$$

$$P_f = 3,682\%$$

O ponto de projeto  $P^*(-0,8;1,6)$  corresponde no espaço físico ao par de resistência e sollicitação de  $(29,2;29,2)$ . Entrando com as coordenadas desse ponto como argumento na Eq.(A.3), obtém-se uma probabilidade de 1,607%. Esse valor corresponde quase à metade da probabilidade de toda a área hachurada na Fig. A.3, comprovando que as probabilidades dos pontos se diminuem muito rapidamente à medida que eles se afastam do ponto de projeto em direção ao domínio de falha.

## Anexo B – Importância da associação estatística

A equação para o cálculo da probabilidade de violação de um estado limite depende da lei de variação estatística atribuída às variáveis de projeto. A operação de passagem das variáveis determinísticas para variáveis probabilísticas, com as devidas distribuições de probabilidade, é a associação estatística. Dessa maneira, a análise de confiabilidade depende fortemente dos parâmetros estatísticos das distribuições escolhidas.

Assim, para demonstrar a sensibilidade da probabilidade de violação de um estado limite, tomou-se um problema de associação de uma variável normal e mediu-se a probabilidade que esta variável tem de violar um estado limite.

Foram realizadas várias associações estatísticas para a variável  $x$ , todas com a média tomada com o valor 30,0 e diferentes coeficientes de variação, e mediram-se as probabilidades dessa variável possuir um valor menor do que 28,0. A Fig. B.1 mostra essas distribuições para os coeficientes de variação de 1,2,3,6 e 12%. A barreira que se quer calcular a probabilidade de violação cujo valor é 28,0, também está indicada na figura.

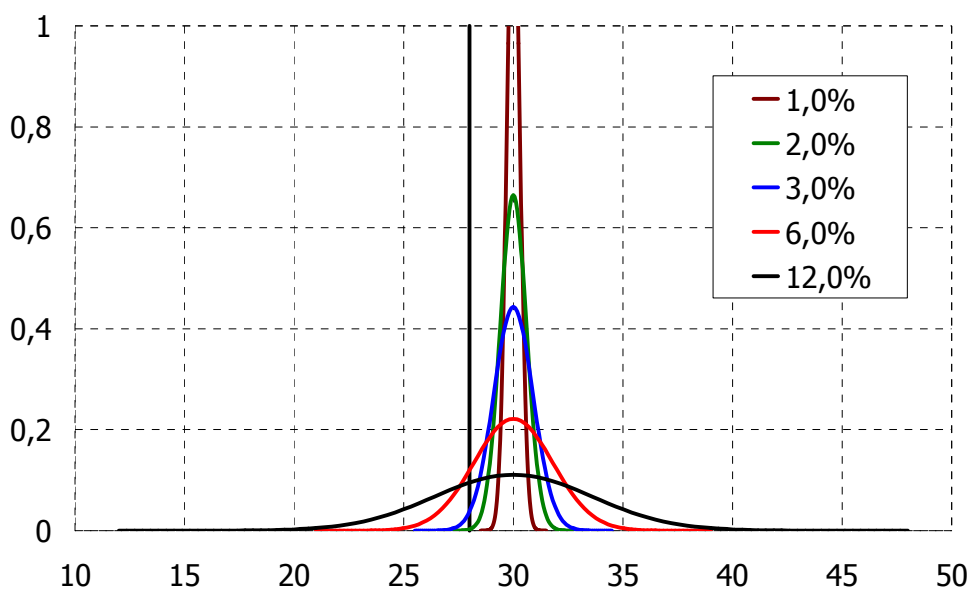


Fig. B.1 – Distribuições com médias iguais e coeficientes de variação diferentes

Em seguida, realizou-se a integração da distribuição normal, obtendo-se as probabilidades indicadas na Tabela B.1.

Tabela B.1 – Probabilidades de violação do estado limite

CV	P (x < xi)	Falha em Cada
1%	1,315E-11	7,602E+10
2%	4,291E-04	2,330E+03
3%	1,313E-02	7,614E+01
6%	1,333E-01	7,504E+00
12%	2,893E-01	3,457E+00

Analisando-se esses resultados, verifica-se, que uma associação de um coeficiente de variação de 2% à média de 30,0 garante aproximadamente que apenas uma realização em cada 2.330 apresentará um valor menor do que o estado limite. Porém, se o coeficiente de variação aumenta para 3%, a probabilidade de se obter um valor menor do que o desejado aumenta cerca de 30 vezes.

Pela simples análise acima, demonstra-se a influência da associação estatística na probabilidade final de falha e a forte dependência da análise de confiabilidade da informação disponível sobre as variáveis de projeto. Recomenda-se assim, que o máximo de informação seja obtido sobre os parâmetros de projeto antes de avaliar a segurança com a análise de confiabilidade.