

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas
acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico
através da combinação entre o MEC e o MEF**

RODRIGO RIBEIRO PACCOLA

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: Prof. Assoc. Humberto Breves Coda

**São Carlos
2004**

*Aos meus avós Augusta Antonia
Netto Ribeiro, Zeferino Ribeiro
Sobrinho e Pedro Paccola.*

AGRADECIMENTOS

Primeiramente a DEUS todo poderoso por tudo o que sou e faço.

Aos meus pais Milton e Eunice e meus irmãos Rafael e Renata pelo amor, carinho e apoio incondicional.

À minha namorada Giovana pelo amor, confiança e carinho em todos os momentos.

Ao meu orientador, Prof. Assoc. Humberto Breves Coda pelo total apoio acadêmico e pela grande amizade.

Aos amigos do GMEC, Arthur, Daniel, Leandro, Marcelo e Patrick pelas discussões e pelo companheirismo nas horas de trabalho e também de descontração.

A todos os amigos do Departamento de Engenharia de Estruturas, sem citar nomes para não cometer injustiças.

Aos demais amigos e familiares pelo apoio em todo e cada momento.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas que de alguma forma contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP pelo financiamento desta pesquisa.

*“Sem esforço de nossa parte,
Jamais atingiremos o alto da
montanha. Não desanime no meio da
estrada, siga em frente porque os
horizontes se tornarão amplos e
maravilhosos à medida que for
subindo. Mas não se iluda, pois só
atingirá o topo da montanha se
estiver decidido a enfrentar o esforço
da caminhada.”*

RESUMO

PACCOLA, R.R. (2004). *Análise não linear física de placas e cascas anisotrópicas laminadas acopladas ou não com meio contínuo tridimensional viscoelástico através da combinação entre o MEC e o MEF*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2004.

Apresenta-se neste trabalho, uma formulação de cascas laminadas anisotrópicas enrijecidas ou não, considerando-se não-linearidade física com lei de fluxo não-associativa e acoplamento com meio contínuo tridimensional viscoelástico. Para tanto, são desenvolvidos elementos finitos triangulares planos com aproximação cúbica de variáveis para modelagem das cascas e elementos de barra de mesma aproximação para os elementos de barra geral (enrijecedores). A cinemática de laminados, ou Reissner geral, é utilizada para ambos possibilitando a representação de estruturas enrijecidas excentricamente e consideração de elementos compostos de camadas com diferentes propriedades físicas e espessuras, tornando-se assim a formulação aplicável a um grande número de problemas. Com relação à plasticidade na casca, adota-se o critério de Tsai-Wu para materiais anisotrópicos gerais, obtendo-se expressões fechadas para o multiplicador plástico com fluxo não-associativo. Nas barras, critérios uniaxiais são considerados, desprezando-se a contribuição do cisalhamento na plastificação. Para estes elementos, permite-se a utilização de diagrama multilinear para a relação tensão x deformação. A modelagem do meio contínuo viscoelástico é realizada utilizando-se elementos de contorno triangulares com aproximação linear de variáveis. As soluções fundamentais de Kelvin e de Mindlin são apresentadas e implementadas. O acoplamento foi realizado utilizando-se técnica de matriz de rigidez equivalente, proporcionando uma contribuição direta das matrizes do MEC na matriz de rigidez do MEF. Exemplos gerais são resolvidos para a verificação e validação da formulação proposta e implementada.

Palavras-chave: Elementos Finitos, Elementos de Contorno, acoplamento MEC / MEF, plasticidade, viscosidade, estruturas laminadas, interação solo-estrutura.

ABSTRACT

PACCOLA, R.R. (2004). Physical non-linear analysis of anisotropic laminated plates and shells coupled or not with three-dimensional viscoelastic medium by BEM / FEM coupling. Ph.D. Thesis – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2004.

This work presents an anisotropic laminated stiffened shell formulation, considering physical non-linearity with non-associative law, coupled to viscoelastic three-dimensional continuum medium. Plane triangular finite elements with cubic approximation for nodal variables are developed to model the shell. Bar elements with the same approximation are derived for the general bar element. Laminated kinematics is used for both elements, making possible the representation of eccentrically stiffened structures and the consideration of composed elements with different properties and thickness for each layer. Therefore, the formulation is applicable for a large number of problems. In order to model plasticity in shell, the Tsai-Wu criterion for general anisotropic materials is adopted. Closed expression for the plastic multiplier using non-associative law is founded. For bars, uniaxial criterion is considered, and shear contribution for plasticity is neglected. For these elements, the use of multilinear stress x strain relation is developed. The viscoelastic continuum is modeled by triangular boundary elements with linear approximation of variables. The fundamental solutions of Kelvin and Mindlin are presented and implemented. The coupling is made by the equivalent stiffness matrix method, making possible a direct contribution of the BEM matrix on the FEM stiffness matrix. General examples are presented to verify and validate the proposed formulation.

Keywords: Finite element, Boundary element, BEM/FEM coupling, plasticity, viscosity, laminated structures, soil-structure interaction.

SUMÁRIO

RESUMO	7
ABSTRACT	8
1 INTRODUÇÃO	13
1.1 Generalidades	13
1.2 Objetivos	14
1.3 Organização do Trabalho	16
2 REVISÃO DA LITERATURA	19
2.1 Introdução	19
2.2 Método dos Elementos Finitos (MEF)	19
2.3 Método dos Elementos Contorno (MEC)	25
2.4 Critérios de Ruptura	27
3 MODELOS REOLÓGICOS	36
3.1 Introdução	36
3.2 Modelos reológicos gerais	36
4 FORMULAÇÃO PARA O ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO 2D	45
4.1 Introdução	45
4.2 Cinemática	46
4.3 Deformações	46
4.4 Tensões	47
4.5 Esforços solicitantes	48
4.5.1 Força normal	48
4.5.2 Força cortante	48
4.5.3 Momento fletor	49
4.6 Tensão residual	49
4.6.1 Força normal	50
4.6.2 Força cortante	50
4.6.3 Momento fletor	50

4.7	Princípio dos Trabalhos Virtuais – PTV	51
4.8	Exemplos de aplicação	55
4.8.1	Exemplo 01	56
4.8.2	Exemplo 02	57
4.8.3	Exemplo 03	58
4.8.4	Exemplo 04	60
5	EXTENSÃO PARA ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO LAMINADO 3D	
	LAMINADO 3D	63
5.1	Introdução	63
5.2	Cinemática	63
5.3	Deformações	64
5.4	Tensões	65
5.5	Esforços solicitantes	66
5.5.1	Força normal	66
5.5.2	Força cortante	66
5.5.3	Momentos fletores e momento torçor	67
5.6	Energia de Deformação	68
5.7	Interface gráfica	71
5.8	Não-linearidade física – elemento de pórtico	73
5.8.1	Modelos elastoplásticos uniaxiais	73
5.8.2	Multilinearidade do diagrama tensão x deformação	74
5.9	Exemplos de aplicação	75
5.9.1	Exemplo 01 – pilar com dupla excentricidade	75
5.9.2	Exemplo 02 – viga engastada de seção “L”	76
5.9.3	Exemplo 03 – viga de concreto pouco armada	77
5.9.4	Exemplo 04 – viga de concreto super armada	80
6	FORMULAÇÃO PARA O ELEMENTO FINITO DE CASCA LAMINADA	
	LAMINADA	84
6.1	Introdução	84
6.2	Cinemática	85
6.3	Deformações	86
6.4	Tensões	87
6.5	Esforços solicitantes	88

6.5.1	Forças normais	88
6.5.2	Forças cortantes	88
6.5.3	Momentos fletores e momento volvente	89
6.6	Energia de deformação	89
6.7	Elemento finito triangular – características gerais	92
7	ALGORITMO DE RETORNO PARA O CRITÉRIO DE TSAI-WU	96
7.1	Introdução	96
7.2	Relações gerais para plasticidade	97
7.3	Abordagem incremental para plasticidade	99
7.4	Algoritmo de Tsai-Wu não-associativo geral	100
8	O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	107
8.1	Introdução	107
8.2	Solução fundamental	108
8.2.1	Solução fundamental de Kelvin	109
8.2.2	Solução fundamental de Mindlin	110
8.3	Equação integral de contorno	115
8.3.1	Equação integral para pontos do domínio e do contorno	116
8.4	Equacionamento algébrico	121
8.5	Processos de integração	123
8.5.1	Integral não singular	123
8.5.2	Integral quase singular e quase hiper-singular	124
8.5.3	Integral singular	124
8.6	Esquema geral do programa de elementos de contorno	125
8.7	Exemplo de aplicação	127
9	ACOPLAMENTO ENTRE O MEC E O MEF	129
9.1	Aspectos gerais	129
9.2	Formulação geral	130
9.3	Exemplo de aplicação	133
10	EXEMPLOS GERAIS DE APLICAÇÃO	136
10.1	Introdução	136
10.2	Exemplo 01	136
10.3	Exemplo 02	138
10.4	Exemplo 03	139

10.5 Exemplo 04	140
10.6 Exemplo 05	144
10.7 Exemplo 06	146
10.8 Exemplo 07	148
10.9 Exemplo 08	150
10.10 Exemplo 09	152
10.11 Exemplo 10	154
10.12 Exemplo 11	155
10.13 Exemplo 12	157
10.14 Exemplo 13	158
10.15 Exemplo 14	159
10.16 Exemplo 15	162
10.17 Exemplo 16	163
10.18 Exemplo 17	164
11 O PROGRAMA COMPUTACIONAL	168
11.1 Introdução	168
11.2 Características gerais	168
11.3 Fluxograma	172
12 CONCLUSÕES E SUGESTÕES	173
12.1 Conclusões e considerações finais	173
12.2 Propostas de desenvolvimento	176
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	179
APÊNDICE A – ALGORITMO DE GERAÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA	190

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

A utilização de métodos numéricos para a resolução de problemas de engenharia, no caso engenharia estrutural, vem se tornando cada vez mais requisitada. Com a utilização desses processos aproximados torna-se imprescindível o emprego de computadores para permitir a obtenção de respostas confiáveis. Pode-se dizer que os avanços tecnológicos relacionados à computação vêm sendo um dos grandes responsáveis pelo crescente desenvolvimento das técnicas numéricas. Esses avanços alcançados tanto nas técnicas numéricas quanto na tecnologia de computadores, proporcionam análises cada vez mais próximas da realidade, possibilitando uma modelagem mais detalhada dos problemas de engenharia de estruturas em geral.

Com relação às técnicas numéricas, deve-se buscar o que cada uma oferece de melhor, considerando-se o tipo de análise e o meio a ser analisado. Dentre as técnicas mais difundidas, o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método dos Elementos de Contorno (MEC) destacam-se como os mais usados por pesquisadores em engenharia de estruturas do mundo todo.

O método dos elementos finitos (MEF) é uma ferramenta consagrada em sua aplicação na área de engenharia de estruturas, principalmente na análise de estruturas reticuladas e cascas, tanto para abordagem linear quanto para a análise de problemas não-lineares. Análises de meios anisotrópicos são também mais facilmente realizadas utilizando-se o MEF uma vez que as soluções fundamentais necessárias para abordagem deste problema via MEC são um tanto quanto complexas. Por ser uma técnica de domínio, o MEF traz algumas complicações em análises que envolvem domínios

infinitos, devido à interrupção destes pela necessidade de discretização. Outro ponto negativo é a necessidade de geração de um grande volume de dados de entrada para os problemas, em função da discretização do domínio.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC), apresenta-se mais apropriado para modelagem de domínios infinitos, como por exemplo o solo, uma vez que não se faz necessária a discretização do domínio, eliminando-se assim possíveis perturbações causadas por tais discretizações, além da redução do número de variáveis do problema, quando se trata de análises lineares.

O presente trabalho tem como tema geral a análise de estruturas de superfície laminadas anisotrópicas em regime viscoplástico conectadas ou não a meios contínuos 3D em regime viscoelástico através do acoplamento MEC / MEF, aproveitando-se desta forma as vantagens de cada um dos métodos.

A abrangência do trabalho, bem como a introdução do critério de ruptura de Tsai-Wu na consideração da evolução viscoplástica das estruturas de superfície laminadas baseada no MEF, e ainda o acoplamento com meio infinito em regime viscoelástico modelado pelo MEC, são as principais contribuições desta tese.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal desta pesquisa é a geração de um código computacional baseado no acoplamento entre o MEC e o MEF para a análise de estruturas de superfície (cascas ou placas) anisotrópicas em regime viscoplástico conectadas ou não a meios contínuos e enrijecidas por elementos prismáticos (vigas e pilares).

Esses desenvolvimentos estão de acordo com a relevante importância que os estudos da anisotropia tem no âmbito da engenharia, pois diversos materiais estruturais de uso corrente se comportam de forma anisotrópica. Como exemplos citam-se a madeira, a madeira laminada, matriz reforçada com fibras (concreto armado e fibra de vidro), alvenaria estrutural etc. As formulações envolvendo aplicação e modelagem de materiais que apresentam comportamento anisotrópico, naturalmente ou através da composição de materiais ortotrópicos ou até mesmo isotrópicos, vem sendo cada vez mais estudadas nos grandes centros de pesquisa em todo o mundo.

Buscam-se representações mais próximas da realidade, introduzindo-se nessas formulações uma grande quantidade de variáveis a fim de possibilitar a adequação dos modelos numéricos ao comportamento encontrado em modelos experimentais.

Neste trabalho, as estruturas de superfície são modeladas por elementos finitos aplicados a estruturas compostas por estratos (lâminas) ortotrópicos em comportamento viscoplástico, utilizando-se a teoria de Reissner-Mindlin ou cinemática de laminados de Reissner geral.

A verificação do comportamento da formulação proposta com a variação da espessura (travamento por cisalhamento) faz-se necessária e foi realizada através da análise dos resultados obtidos para os exemplos propostos. Não são desenvolvidos estudos matemáticos sobre este assunto, utilizando-se apenas os resultados dos exemplos como parâmetros para identificar se a formulação é sensível a este fenômeno e em que grau esta sensibilidade ocorre. Para facilitar tais verificações, foi incluído, nos objetivos iniciais desta pesquisa, a formulação de elementos de pórtico 2D e 3D laminados também baseados na cinemática de laminados de Reissner geral. Esta formulação de pórtico foi acoplada à formulação de casca laminada diversificando-se assim o campo de aplicação do código computacional obtido na pesquisa.

A utilização de lei de fluxo não-associativa para a plasticidade, atrelada ao critério de ruptura para materiais anisotrópicos gerais, proposto por TSAI-WU (1971), com a obtenção de expressões fechadas para o multiplicador plástico, pode ser destacada como uma contribuição importante desta pesquisa. Soma-se ainda, a estes, os conceitos de viscosidade implementados na formulação segundo abordagem diferencial praticada no grupo de pesquisa que este trabalho se insere.

A aplicação da solução fundamental de Mindlin no código computacional para análise de sólidos 3D via Método dos Elementos de Contorno facilita a análise de fundações sobre base elástica, caixas enterradas e túneis. A consideração dos efeitos viscosos foi incluída, de forma original para esta solução fundamental.

Desta forma, justifica-se o desenvolvimento da presente pesquisa, envolvendo abordagem através de métodos numéricos do tema anisotropia, com a finalidade de possibilitar uma maior e significativa abrangência de problemas da prática. Destaque deve ser dado ao acoplamento entre as formulações desenvolvidas via MEF (casca laminada anisotrópica e elemento de pórtico 3D) e via MEC (sólidos 3D aplicando a solução fundamental de Mindlin). Este acoplamento foi realizado transformando-se o sistema de equações do MEC em um equivalente ao MEF, resultando em uma matriz de rigidez equivalente que é adequadamente somada às matrizes do MEF. Procedimento este diferente da técnica de sub-regiões usualmente empregada pelos pesquisadores do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC - USP.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Um apanhado geral do conteúdo de cada capítulo é apresentado neste item. Os capítulos foram organizados de tal forma a proporcionar uma seqüência de idéias para o desenvolvimento desta pesquisa, sendo que neste primeiro capítulo são apresentadas algumas generalidades sobre o trabalho, bem como os objetivos a que este se destina.

No capítulo 2 apresenta-se uma breve revisão da literatura, destacando-se alguns pontos sobre o Método dos Elementos Finitos, Método dos Elementos de Contorno e também Critérios de Ruptura para os materiais em geral.

Modelos reológicos e suas relações constitutivas são apresentados no capítulo 3. Parte-se dos modelos simplificados e, através da associação destes onde os modelos elástico, viscoso e plástico são utilizados, obtém-se os modelos completos para a presente pesquisa.

A formulação para o elemento finito de pórtico laminado 2D é apresentada no capítulo 4, juntamente com exemplos numéricos para validação das implementações realizadas. A existência das lâminas permite que sejam considerados materiais diferentes tornando possível a representação de peças de concreto armado, cuja seção transversal é composta de concreto e de barras de aço.

De forma análoga, apresenta-se no capítulo 5 a formulação para o elemento finito de pórtico 3D, incluindo-se neste ponto as considerações sobre plasticidade envolvidas na formulação destes elementos. Os modelos introduzidos permitem que se adotem comportamentos diferentes na tração e compressão e permitem ainda que em cada uma delas este comportamento seja multilinear, ou seja, composto de vários trechos com constantes de plastificação diferentes. Tal formulação permite que seja adotado um eixo de referência para os elementos em relação ao qual sua cinemática é escrita e suas respostas fornecidas. Portanto, é possível representar elementos com carregamentos excêntricos, tal como pilares com flexão oblíqua e vigas sujeitas à torção. Novamente, exemplos são apresentados também com o intuito de se verificar o real comportamento da formulação com relação à variação da espessura destes elementos.

A formulação e as implementações relacionadas ao elemento de casca triangular plano, justificando-se pelo fato deste ter uma possibilidade maior de representação da geometria de cascas do que os elementos quadrilaterais, são abordadas

no capítulo 6. Aproveitando os recursos dos atuais softwares de manipulação algébrica do mercado, propõe-se a utilização de um elemento triangular com função de forma de aproximação cúbica para deslocamentos sobre o plano. Vale salientar que, na espessura do elemento, foi adotada hipótese de que a seção permanece plana após a deformação, porém não necessariamente perpendicular ao plano de referência (Reissner-Mindlin). Destaca-se que a aproximação quadrática utilizada para o elemento quadrilateral deixa a desejar no tocante ao cálculo de tensões em pontos distintos dos de integração para o elemento. O mesmo não acontece com o elemento triangular com aproximação cúbica para as variáveis, adiantando-se uma das conclusões desta pesquisa. A inclusão da verificação do surgimento do travamento por cortante na pesquisa fez-se necessária para esclarecer dúvidas levantadas em PACCOLA (2001). Na ocasião, técnicas de integração reduzida nas parcelas de cisalhamento foram adotadas como solução para o problema do travamento quando da utilização da formulação de placa espessa estudada para representação de placa fina. Com o início da revisão bibliográfica geral, na parte de laminados, constatou-se que existe uma diferença na abordagem da cinemática do problema que determina o surgimento ou não do travamento na formulação. Esta diferença está no fato da consideração dos giros das seções transversais serem adotados como derivada (corrigida por termo de cisalhamento) do deslocamento transversal nas formulações clássicas ou parâmetros independentes deste deslocamento na formulação de laminados.

No capítulo 7, estudos sobre algoritmo de retorno implícito para o tratamento da plasticidade nas diversas camadas foram realizados. O retorno implícito foi estabelecido por fórmulas fechadas para modelo específico de material anisotrópico.

O capítulo 8 se destina à apresentação da formulação do Método dos Elementos de Contorno, destacando-se o equacionamento integral e algébrico para obtenção das expressões implementadas. Salienta-se que foram utilizadas as implementações desenvolvidas por SOUZA (2001) para a solução fundamental de Kelvin, adaptado-se tal código para inclusão da solução fundamental de Mindlin, proposta por esta pesquisa, bem como da parcela do comportamento viscoso para o sólido. A técnica de acoplamento utilizada é apresentada no capítulo 9, onde é encontrado um exemplo para validação dos procedimentos implementados.

No capítulo 10 são apresentados exemplos gerais envolvendo os conceitos abordados no escopo da pesquisa.

De forma resumida e com o intuito apenas de destacar alguns pontos mais importantes, apresenta-se no capítulo 11 algumas características do programa computacional geral implementado.

Finalmente, o capítulo 12 se destina a apresentação das conclusões, considerações finais e também das sugestões e propostas para a continuação desta pesquisa.

CAPÍTULO 2

REVISÃO DA LITERATURA

2.1 INTRODUÇÃO

Uma breve revisão do “Estado da Arte” é apresentada neste capítulo com base no levantamento bibliográfico realizado. São destacados trabalhos relacionados à utilização do Método dos Elementos Finitos na análise plástica de placas e cascas, bem como a utilização do Método dos Elementos de Contorno para modelagem do solo e conseqüentemente do acoplamento entre os métodos. Uma breve revisão sobre critérios de ruptura para materiais isotrópicos e anisotrópicos também é apresentada neste item, destacando-se alguns trabalhos relacionados ao estudo e utilização destes critérios.

2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Como dito anteriormente, a utilização do método dos elementos finitos em engenharia de estruturas é amplamente difundida, abrangendo áreas das mais variadas e aplicações cada vez mais gerais. Uma das aplicações que vem sendo abordadas, com grande frequência e de forma geral atualmente, é a representação de estruturas compostas por lâminas, podendo ser constituídas de materiais distintos, proporcionando assim uma maior complexidade à análise do conjunto composto obtido e uma melhor modelagem de problemas da prática.

No estudo de estruturas laminadas, como pode ser visto em alguns autores tais como YANG *et al.* (1966), que se basearam em estudos realizados por HENCK (1947) - apud YANG *et al.* (1966) - onde foram considerados os efeitos do cisalhamento na deformação, MINDLIN (1951) - apud YANG *et al.* (1966) -, STAVSKY (1961), REISSNER & STAVSKY (1961) e posteriormente por WHITNEY & PAGANO

(1970), todos para análise de materiais anisotrópicos, a cinemática utilizada considera a rotação da seção transversal como parâmetro independente da derivada do deslocamento vertical no ponto, diferentemente da cinemática clássica de placas que assume o giro como dependente (mesmo que indiretamente) de tal deslocamento, como pode ser visto em REDDY (1993) entre outros.

Tal cinemática leva em consideração ainda, que os deslocamentos do contínuo são tomados em função de deslocamentos relacionados a um eixo ou plano de referência, barras ou placas e cascas respectivamente, adotado que não necessariamente coincide com o eixo que passa pelo centro de gravidade (cg) ou plano médio dos elementos. Essa consideração possibilita a formulação de elementos laminados, onde cada camada que compõe os elementos contribui de forma diferente na rigidez do conjunto, uma vez que cada camada é tomada em uma posição diferente em relação ao eixo ou plano de referência adotada para o problema.

No caso de elementos de barra, o artifício de se adotar o eixo de referência fora do eixo (cg) da peça, permite a representação de elementos com carregamentos excêntricos, tal como pilares com flexão oblíqua e vigas sujeitas à torção. A existência das “fibras” paralelas ao eixo de referência, permite que sejam considerados diferentes materiais tornando possível a representação de peças de seção composta com maior fidelidade, como por exemplo peças de concreto armado.

O acoplamento dos elementos finitos de casca e barra é facilitado e ocorre de forma direta quando se utiliza a formulação de laminados, Isso ocorre pelo fato da possibilidade de se adotar como plano de referência para a casca a sua face inferior e para o elemento de barra o eixo de referência na face superior do elemento. Com isso, a consideração da rigidez dos elementos em relação ao sistema de referência adotado se dá de forma direta, sem a necessidade da utilização de artifícios tal como o “off-set” conhecido de alguns programas comerciais, por exemplo ANSYS®.

Diversos trabalhos podem ser citados com a utilização do MEF na análise de laminados, onde são encontrados estudos e aplicações de diferentes tipos de elementos finitos, tanto quadrilaterais quanto triangulares, na busca de formulações livres de fenômenos numéricos indesejáveis como por exemplo o travamento por efeito de membrana ou cisalhamento.

LARDEUR & BATOZ (1989) apresentaram uma formulação para análise estática e dinâmica de placas compostas por camadas ortotrópicas. Os autores propuseram um elemento triangular denominado DST (Discrete Shear Triangle) livre de

travamento e composto de 3 nós e 3 graus de liberdade por nó. Essa formulação recai no elemento DKT (Discrete Kirchhoff Triangle) quando os efeitos de cisalhamento são desconsiderados, ou seja, para análise de placas finas onde a influência do cisalhamento na deformação é muito pequena. Neste trabalho, os autores apresentam ainda uma revisão sobre a consideração do efeito do cisalhamento na flexão.

Uma revisão de teorias usadas na análise de estruturas laminadas é apresentada em REDDY (1989), onde se discute a utilização de condições de simetria na análise dos modelos numéricos, comportamento não-linear geométrico e de laminados compósitos para diferentes condições de contorno.

KOSMATKA (1994) apresentou a formulação de um elemento finito triangular com 6 nós para a análise de placas laminadas, baseado na teoria de Reissner-Mindlin de placas espessas, REISSNER (1945) e MINDLIN (1951) - apud KOSMATKA (1994). Os deslocamentos transversais foram aproximados por polinômios cúbicos, enquanto os deslocamentos no plano e as rotações foram aproximados de forma quadrática.

Com base nesta mesma teoria de placas espessas de Reissner-Mindlin, MENEZES & DEVLOO (2000) apresentaram a formulação de um elemento finito quadrilateral para cascas laminadas com possibilidade de aproximação de deslocamentos (translações e rotações) linear (4 nós) e quadrática (8 ou 9 nós). Os autores consideraram na análise que cada camada do laminado pode ser constituída de materiais ortotrópicos, proporcionando assim um comportamento anisotrópico para o conjunto.

KLINKEL *et al.* (1999), apresentam a formulação de um elemento finito de casca 3D buscando a representação do comportamento anisotrópico também através da associação de camadas ortotrópicas sobrepostas. Os desenvolvimentos apresentados pelos autores consideram os efeitos da não-linearidade geométrica na formulação.

Em SADEK & TAWFIK (2000) encontra-se a formulação de um elemento finito isoparamétrico de 9 nós para placas laminadas enrijecidas. O modelo considera variação não-linear para a distribuição dos deslocamentos longitudinais ao longo da espessura da placa, eliminando assim a necessidade de coeficientes de correção para a distribuição do cisalhamento. O enrijecedor utilizado é um elemento de viga isoparamétrico de 3 nós. KANT & SWAMINATHAN (2002) apresentam soluções analíticas para placas laminadas ortotrópicas simplesmente apoiadas, porém não enrijecidas, também considerando variação não-linear para os deslocamentos

longitudinais ao longo da espessura dessas placas, para eliminar a necessidade de fatores de correção para a distribuição do cisalhamento ao longo da espessura.

LUCENA NETO & KATAOKA FILHO (2001) apresentam uma extensão de um elemento triangular com 6 nós para placas homogêneas, SZE *et al.* (1997) - apud LUCENA NETO & KATAOKA FILHO (2001) - , para o estudo de placas laminadas. Esse elemento, onde cada camada pode ser considerada ortotrópica, apresenta distribuição quadrática para as variáveis nodais, tanto translações quanto rotações.

No que diz respeito à análise elastoplástica de placas e cascas, OWEN & HINTON (1980) apresentaram aplicações do MEF em problemas envolvendo plasticidade, particularmente para estado plano de tensão e diferentes critérios de plastificação.

FIGUEIRAS (1983), OWEN & FIGUEIRAS (1983a), OWEN & FIGUEIRAS (1983b) e HINTON & OWEN (1984) aplicaram o MEF para análise de placas e cascas anisotrópicas laminadas, utilizando uma generalização do critério de plastificação de Huber-Mises nos desenvolvimentos das formulações para consideração da anisotropia. OWEN & FIGUEIRAS (1983b) propuseram uma correção das tensões cisalhantes para serem usadas no critério de plastificação em função da adoção de distribuição constante de tensões cisalhantes ao longo da espessura dos elementos.

PROENÇA (1988), apresentou um estudo sobre modelos matemáticos para representação do comportamento não-linear físico do concreto, baseando-se em procedimentos incrementais iterativos sugeridos em FIGUEIRAS (1983) e apresentando posteriormente a aplicação da formulação variacional dos modelos elastoplásticos no estudo do comportamento do concreto.

Em FERREIRA *et al.* (2000), são encontrados estudos relacionados à utilização de elementos finitos baseados em deslocamentos para representação de cascas laminadas. Neste trabalho o autor introduziu conceitos de não-linearidade física e geométrica, sendo a formulação elastoplástica considerada segundo o critério de Huber-Mises para materiais anisotrópicos. FERREIRA *et al.* (2003), apresentaram uma formulação para laminados utilizando-se o método dos elementos sem malha e polinômios de ordem superior para consideração do cisalhamento, evitando-se assim a introdução de fatores de correção para a distribuição da cortante na espessura da placa. Em FERREIRA *et al.* (2004) a teoria de laminados é utilizada para modelagem de placas e também de cascas novamente utilizando-se o método dos elementos sem malha.

Nos trabalhos de RASTGAAR AAGAAH *et al.* (2003) e WOO *et al.* (2003) são apresentados desenvolvimentos utilizando-se a teoria de laminados, sendo que neste último aplica-se o critério de Huber-Mises para modelagem da plasticidade em materiais ortotrópicos.

Em MESQUITA (1998) apresenta-se uma formulação para análise elastoplástica de cascas, com lei de fluxo associativa e critério de von Mises, utilizando-se para tanto um elemento triangular resultado do acoplamento entre um elemento de flexão de placas e um elemento de tensão plana baseado na formulação livre.

Em tese de doutoramento, MESQUITA (2002) apresenta uma formulação para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento progressivo MEC/MEF. No que diz respeito à plasticidade, modelos com lei de fluxo não-associativa foram implementados, bem como a obtenção de expressões fechadas para determinação do multiplicador plástico para os critérios de von Mises e Drucker Prager.

Outros trabalhos importantes no que diz respeito à plasticidade em geral e em meios anisotrópicos podem ser citados tais como HYER (1998), SIMO & TAYLOR (1985), SIMO & TAYLOR (1986), BRÜNIG (1995), PAPADOPOULOS & LU (2001), OMRI *et al.* (2000) e FEENSTRA & BORST (1996), JETTEUR (1986), SIMO & HUGHES (1998) e ALFANO *et al.* (1996), onde se encontram diferentes modelos para representação do comportamento não-linear físico, bem como características de algoritmos utilizados para solução dos mesmos.

Com relação à análise viscosa, em geral os trabalhos existentes na literatura são baseados em funções de fluência ou de relaxação com processos incrementais onde as solicitações são aplicadas de forma incremental na análise, TELLES & BREBIA (1982), LEMAITRE & CHABOCHE (2000), MUNAIAR (1998).

Nos trabalhos de MESQUITA (2002), MESQUITA & CODA (2002), o tratamento do problema viscoso, se dá utilizando-se de algoritmos de integração temporal onde incrementos de tempo são considerados, tal como aqueles usualmente empregados nas análises dinâmicas, diferenciando-se neste sentido das formulações usualmente aplicadas.

O procedimento de retorno para a superfície de plastificação utilizado no presente trabalho se baseia no trabalho de MESQUITA (2002) permitindo que o multiplicador plástico seja obtido de forma fechada, bem como a abordagem para o problema viscoso através de leis diferenciais e algoritmos de integração temporal.

Por se tratar de uma formulação de elementos de casca, algumas informações sobre o efeito de travamento foram estudadas e são aqui apresentadas. Atualmente muitos são os trabalhos onde são discutidas possibilidades para se contornar o efeito do travamento por cortante em elementos finitos baseados em deslocamentos. Formulações desenvolvidas para cascas espessas, quando aplicadas em problemas limites, ou seja, quando as dimensões dessas cascas guardam proporções de cascas finas, apresentam fenômenos indesejáveis que provocam o enrijecimento da estrutura. Esse fenômeno é comumente conhecido na literatura como *shear locking* ou *efeito de travamento por cisalhamento* e são atribuídos a elementos cuja formulação é baseada em deslocamentos, HUGHES (1987) - apud CHINOSI & LOVADINA (1999) -, BATHE & WILSON (1976) e ZIENKIEWICZ & TAYLOR (2000).

Técnicas de integração reduzida, onde os termos referentes à contribuição do cisalhamento são integrados de forma diferenciada, reduzindo-se o número de pontos de integração necessários para uma adequada integração, são aplicadas. Em alguns casos, essas técnicas são combinadas com a inclusão de parâmetros de correção para integração dos termos de cisalhamento e levam o nome de *integração seletiva* ou *mista*, ARNOLD & BREZZI (1993) - apud CHINOSI & LOVADINA (1999). Alguns autores afirmam que a utilização destas técnicas fornece bons resultados para alguns casos mas podem levar ao surgimento de modos espúrios de energia dependendo do tipo de condição de contorno aplicada, KOSMATKA (1994). A modificação da energia do problema também é comumente utilizada buscando calibrar a influência do efeito do cisalhamento na resposta do problema, na tentativa de se contornar o travamento na formulação.

Neste contexto, é necessário que sejam analisadas algumas informações disponíveis na literatura. Alguns autores como BUCALEM & NOBREGA (2000), BATHE *et al.* (2000), CHAPELLE & BATHE (1998) e NEVES (2000) entre outros, indicam que esses elementos baseados em aproximações de deslocamentos apresentam travamento, enquanto BARUCH (1975) e NARAVANASWAMI & ADELMAN (1974) - apud BARUCH (1975) -, indicam que caso a rotação da seção transversal seja independente da derivada do deslocamento vertical, proporciona-se o desenvolvimento de uma formulação livre do efeito de travamento por cortante. Para este tipo de elemento, o relacionamento entre tais grandezas (giro e deslocamento) surge naturalmente no decorrer do desenvolvimento da formulação quando se utiliza cinemática de laminados ou Reissner geral. São inúmeras as referências que se utilizam da cinemática de laminados,

entretanto não mencionam o fenômeno de travamento por cortante, concluindo-se assim que estes autores não se depararam com este problema, FERREIRA *et al.* (2004), RASTGAAR AAGAAH *et al.* (2003) e WOO *et al.* (2003).

Outros trabalhos, tais como BATOZ *et al.* (2000) e SYDENSTRICKER & LANDAU (2000) atribuem o travamento em elementos baseados em aproximação de deslocamentos à não representação adequada do problema real, seja ela por utilização de aproximação não adequada no grau dos polinômios dos elementos finitos ou pelo número e disposição insuficiente e inadequada de elementos finitos na malha do problema. Esse “travamento” não pode ser associado ao efeito da força cortante mas sim única e exclusivamente a não representação adequada do problema e é chamado de travamento por efeito de membrana.

Alguns testes são sugeridos nos trabalhos de CHAPELLE & BATHE (1998), BATOZ *et al.* (2000), SYDENSTRICKER & LANDAU (2000), BUCALEM & NOBREGA (2000) e CHOI & LEE (2003) entre outros, para verificação do comportamento da formulação em relação aos travamentos por efeito de membrana e cisalhamento.

O presente trabalho limita-se a verificar se os elementos utilizados nas formulações aqui apresentadas sofrem influência do efeito de travamento por membrana e cisalhamento através da comparação das respostas numéricas com respostas analíticas e numéricas de exemplos sugeridos pelos autores citados, não se desenvolvendo nenhum estudo matemático sobre o assunto.

2.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO (MEC)

A utilização do método dos elementos de contorno para representação de meios contínuos infinitos ou semi-infinitos, como dito anteriormente, é mais apropriada devido ao fato de não ser necessária a discretização do interior do domínio dos problemas, quando lineares.

Uma descrição abrangente sobre a evolução do método em geral pode ser encontrada nos trabalhos de VENTURINI (1988) e MENDONÇA (2002). A aplicação do método dos elementos de contorno para o estudo de sólidos tridimensionais teve como precursor CRUSE (1969), que utilizou a solução fundamental de Kelvin na análise de meio elásticos. NAKAGUMA (1979) apresentou em seu trabalho as vantagens da utilização das soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti e Mindlin no

estudo de sólidos tridimensionais de domínio semi-infinito, onde a aplicação se torna bastante apropriada por dispensar a discretização da superfície livre do semi-infinito.

Alguns dos trabalhos desenvolvidos no Departamento de Engenharia de Estruturas – SET – EESC relacionados à aplicação do MEC para representação do solo podem ser citados. BARBIRATO (1991) utilizou as soluções fundamentais de Kelvin, Boussinesq-Cerruti e Mindlin na análise de sólidos tridimensionais, discretizados com elementos triangulares planos. TEJERINA CALDERÓN (1996) apresentou o uso do MEC para o estudo de interação de placas com meio contínuo, inicialmente considerando o solo segundo as hipóteses de WINKLER (1867) – apud TEJERINA CALDERÓN (1996) – e posteriormente utilizando-se as soluções fundamentais de Boussinesq-Cerruti e Mindlin. ALMEIDA (2003a) apresentou em seu trabalho uma análise dinâmica de estruturas tridimensionais modeladas pelo MEF e acopladas ao solo elastoplástico modelado pelo MEC utilizando-se solução fundamental de Kelvin.

Outros autores cujos trabalhos são relacionados com a análise de sólidos tridimensionais via MEC podem ser citados, tais como, BREBBIA (1978), PAIVA & BUTTERFIELD (1997), MENDONÇA (1997) e ALMEIDA (2003b).

Para o presente trabalho utilizou-se a solução fundamental de Mindlin na modelagem do solo viscoelástico, baseando-se em técnicas praticadas no Departamento e no grupo de pesquisa, SOUZA (2001) e BARBIRATO (1999).

O acoplamento entre o MEC e o MEF tem se mostrado como uma técnica bastante empregada na solução de diversos problemas de engenharia, sobretudo na análise de problemas de interação entre a estrutura e meios contínuos, como exemplo, a interação solo-estrutura. Neste tipo de análise, comumente se utiliza o MEF para consideração da plasticidade devido à abordagem mais simples que este proporciona. O MEC, como tradicionalmente, é utilizado na modelagem do contínuo, devido à sua característica de redução de variáveis.

Segundo BELYTSCHKO *et al.* (1989), o primeiro trabalho sobre o acoplamento entre MEC e MEF foi de ZIENKIEWICZ *et al.* (1977), onde foi apresentado o método das soluções de contorno utilizado no contexto convencional do MEF. LAETHEM *et al.* (1984) apresentaram a descrição de uma avaliação estática linear computacional de estruturas de fundação, enquanto nos trabalhos de VON ESTORFF & KAUSEL (1989) e VON ESTORFF (1991) são encontrados estudos sobre o comportamento dinâmico linear de blocos envolvidos por um meio sólido infinito e sujeito a carregamentos transientes verticais e horizontais. PAN *et al.* (1994) analisaram

um pavimento dinamicamente e em regime elástico-linear pelo MEF sobre um meio sólido elastoplástico modelado pelo MEC não-linear. PAVLATOS & BESKOS (1994) desenvolveram um esquema de acoplamento no domínio do tempo para a análise dinâmica de estruturas elastoplásticas sob condições de deformações planas ou tensões planas, enquanto WEARING & BURSTOW (1994) no mesmo ano apresentaram um estudo da combinação entre o MEC e o MEF para análise bidimensional de tensões elastoplásticas e de problemas da mecânica da fratura elastoplástica bidimensional. YU *et al.* (2001) utilizaram um método alternativo chamado linear θ para melhorar a estabilidade da formulação do acoplamento linear no domínio do tempo.

No Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP, podem ser citados o trabalho de CODA (1993), onde o problema da elastodinâmica transiente tridimensional foi estudado através da formulação mista do MEF e do MEC, na ligação solo-estrutura. CODA & VENTURINI (1995), ainda numa abordagem tridimensional, exploraram o acoplamento entre os métodos para o estudo de estruturas de edifícios interagindo com as fundações. Em 1999, CODA & VENTURINI (1999) apresentaram o acoplamento entre estruturas de pórtico, modeladas pelo MEF, e corpos tridimensionais tratados pelo MEC. CODA *et al.* (1999) apresentaram um procedimento para o acoplamento geral de modelos de elementos finitos (cascas, placas e pórticos) com corpos tridimensionais modelados pelo MEC para análise de problemas estáticos e também dinâmicos. Trabalhos relacionados ao acoplamento de estacas com solo ou radiers, com ou sem presença de estacas, foram desenvolvidos por MATOS FILHO (1999), MENDONÇA (1997) e MENDONÇA & PAIVA (2000).

Neste trabalho, o acoplamento foi realizado utilizando-se matriz de rigidez equivalente, diferentemente de ALMEIDA (2003a), que aplicou técnicas de sub-regiões onde a generalização do processo de acoplamento para multi-regiões plastificadas foi desenvolvida. Outros trabalhos do departamento que podem ser citados relacionados ao acoplamento são ALMEIDA (2003b), CODA (2000), FERRO (1999), KOMATSU (1995), MESQUITA (2002), RAMALHO (1990) e TEJERINA CALDERÓN (1996), todos usando a técnica de sub-regiões.

2.4 CRITÉRIOS DE RUPTURA

Os critérios de ruptura têm por objetivo definir o limite elástico dos materiais quando submetidos a um determinado estado de tensão. Em geral os critérios são

escritos em função de tensões principais e suas superfícies representadas no espaço dessas tensões. Na sua forma mais geral, tal como apresentado em CHEN & HAN (1988), a condição de ruptura pode ser expressa por:

$$f(\sigma_{ij}, k_1, k_2, \dots) = 0 \quad 2.1$$

onde σ_{ij} é um estado de tensão qualquer e k_1, k_2, \dots são constantes do material referentes ao limite elástico determinadas experimentalmente.

A complexidade no formato da superfície de ruptura de um critério está relacionada com a forma que a função da expressão 2.1 assume. Esta forma está diretamente relacionada ao tipo de material, isotrópico, ortotrópico ou anisotrópico, que se deseja representar. Pode-se dizer que os critérios em geral são divididos em dependentes e independentes do eixo de pressão hidrostática. Normalmente, critérios aplicados a materiais dúcteis (metais) são independentes do eixo de pressão hidrostática, enquanto materiais frágeis (madeira, concreto, cerâmica, etc) são dependentes.

No presente trabalho, a caracterização da ruptura de um material, seja ele maciço ou laminado, se dá com base numa abordagem macroscópica, sendo desconsiderado o efeito de deslizamento entre estruturas individuais (matriz e reforço) em caso de laminados e compósitos respectivamente. Portanto, no decorrer deste item são apresentados os critérios de ruptura mais difundidos e empregados na análise macroscópica da resistência dos materiais isotrópicos, ortotrópicos e anisotrópicos.

Vale salientar, que os critérios para materiais anisotrópicos normalmente são estabelecidos a partir de generalizações de critérios inicialmente desenvolvidos para materiais isotrópicos, portanto, degeneram nestes quando particularizados adequadamente.

Entre os critérios mais difundidos para materiais isotrópicos podemos encontrar os critérios de Tresca e von Mises, específicos para metais, que são independentes do eixo de pressão hidrostática e os critérios da Máxima tensão de Rankine, Mohr-Coulomb e Drucker Prager, para materiais frágeis, onde a dependência em relação ao eixo de pressão hidrostática se faz presente.

Dentre os citados, apresentam-se as características gerais para os critérios de von Mises e Drucker Prager, critérios isotrópicos também implementados nos códigos computacionais deste trabalho.

De acordo com CHEN & HAN (1988), o critério de von Mises data de 1913 e baseia-se na tensão octaédrica cisalhante como tensão de escoamento para a expressão do critério. Como dito anteriormente, este critério é específico para materiais isotrópicos, em especial metais e tem por característica a independência com relação ao eixo hidrostático.

A superfície de von Mises pode então ser representada pela seguinte expressão, MESQUITA (2002) e SIMO & HUGHES (1998):

$$f = \bar{f}(\sigma) - \bar{\sigma} = \left(\frac{1}{2} \sigma^T P \sigma \right)^{1/2} - \bar{\sigma} \leq 0 \quad 2.2$$

O termo P que aparece na expressão 2.2 é uma matriz simétrica definida como:

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad 2.3$$

O tensor de um determinado estado de tensão atuante no ponto em análise é representado por σ e escrito na forma vetorial como:

$$\sigma^T = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23}] \quad 2.4$$

A tensão $\bar{\sigma}$ é a octaédrica de escoamento encontrada em ensaio de tração simples e dada como:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_o}{\sqrt{3}}, \text{ onde } \sigma_o \text{ é a tensão de escoamento do material.} \quad 2.5$$

A representação gráfica da superfície do critério de von Mises segundo as direções de tensão principal é apresentada na Figura 2.1.

Ainda segundo CHEN & HAN (1988), o critério de Drucker Prager, formulado em 1952, é uma simples modificação do critério de von Mises, onde a influência da componente de tensão hidrostática é introduzida através da inclusão de um termo adicional linear no critério de von Mises. Este critério é específico para materiais isotrópicos e, devido à possibilidade de consideração de diferentes tensões de escoamento para tração e compressão, é aplicado a materiais frágeis como o concreto.

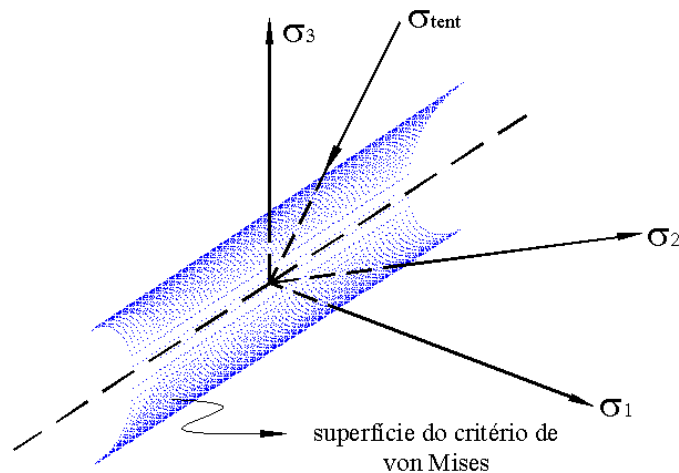


Figura 2.1 – Superfície do critério de von Mises.

A superfície de Drucker Prager pode então ser representada pela seguinte expressão:

$$f = \bar{f}(\sigma) - \bar{\sigma} = \left(\frac{1}{2} \sigma^T P \sigma \right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma - \bar{\sigma} \leq 0 \quad 2.6$$

onde os termos P e σ são os mesmos apresentados nas equações 2.3 e 2.4, respectivamente. O novo vetor μ para inclusão dos termos lineares é definido como:

$$\mu = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0] \quad 2.7$$

Os parâmetros de escoamento $\bar{\sigma}$ e α são definidos em função da coesão “ c ” e ângulo de atrito interno do material “ ϕ ”, ou seja:

$$\bar{\sigma} = \sigma_o, \text{ onde: } \alpha = \frac{2 \text{ sen } \phi}{\sqrt{3}(3 - \text{sen } \phi)} \text{ e } \sigma_o = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \text{sen } \phi)} \quad 2.8$$

Para $\alpha = 0$ a expressão 2.6 recai na expressão do critério de von Mises. A representação gráfica da superfície do critério de Drucker Prager segundo as direções de tensão principal é apresentada na Figura 2.2 a seguir.

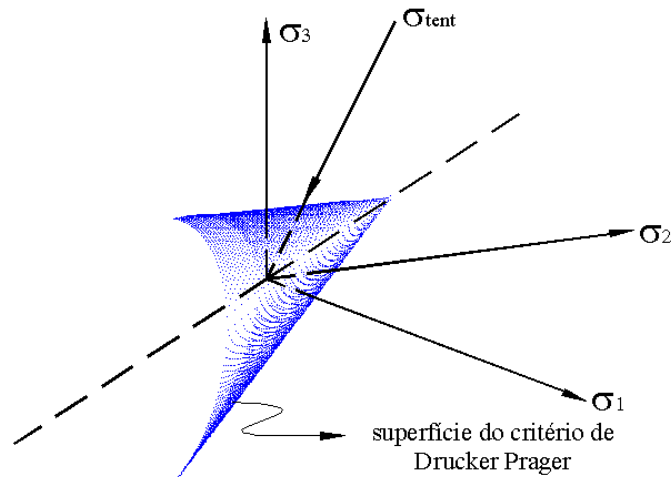


Figura 2.2 – Superfície do critério de Drucker Prager.

Para o caso de materiais ortotrópicos e anisotrópicos, os critérios mais utilizados são os critérios da Máxima Tensão de Tração, proposto em 1967 por Waddoups como uma extensão para o critério de Rankine, critério da Máxima Deformação, sendo este similar ao critério de Waddoups para tensão, critério de Hill como extensão do critério de von Mises, o critério de Tsai-Hill proposto por TSAI (1968) e baseado no critério de Hill, critério de Hoffman como extensão dos dois anteriores e Huber-Mises também como extensão do critério de Hill, critério de Hashin, para materiais fibrosos unidirecionais e critério de Tsai-Wu, sendo este último, proposto por TSAI & WU (1971), o mais completo em termos de consideração da anisotropia geral dos materiais. Trabalhos como os de BRÜNIG (1995), CLOUSTON & LAM (2001) e KOLAKOWSKI (2003) podem ser citados como exemplo da utilização do critério de Tsai-Wu na análise de materiais anisotrópicos gerais. Por este motivo, apesar de se estar considerando materiais compostos por lâminas ortotrópicas nesta pesquisa, optou-se por estudar e implementar o critério de Tsai-Wu nos códigos desenvolvidos neste trabalho.

O critério proposto por TSAI & WU (1971) baseia-se na teoria de ruptura representada por tensores polinomiais sugerida inicialmente por Gol'denblat e Koprov

em 1965. Os autores procuraram simplificar e ao mesmo tempo melhorar a versão sugerida por Gol'denblat e Koprov. A superfície de ruptura no espaço das tensões é descrita pela seguinte expressão:

$$L_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \Rightarrow (i, j = 1, 2, \dots, 6) \quad 2.9$$

onde F é o tensor desviador de resistência e L o hidrostático.

Expandindo-se a expressão 2.9 obtém-se:

$$\begin{aligned} & L_1 \sigma_1 + L_2 \sigma_2 + L_3 \sigma_3 + L_4 \sigma_4 + L_5 \sigma_5 + L_6 \sigma_6 + \\ & + F_{11} \sigma_1^2 + 2F_{12} \sigma_1 \sigma_2 + 2F_{13} \sigma_1 \sigma_3 + 2F_{14} \sigma_1 \sigma_4 + 2F_{15} \sigma_1 \sigma_5 + 2F_{16} \sigma_1 \sigma_6 + \\ & + F_{22} \sigma_2^2 + 2F_{23} \sigma_2 \sigma_3 + 2F_{24} \sigma_2 \sigma_4 + 2F_{25} \sigma_2 \sigma_5 + 2F_{26} \sigma_2 \sigma_6 + \\ & + F_{33} \sigma_3^2 + 2F_{34} \sigma_3 \sigma_4 + 2F_{35} \sigma_3 \sigma_5 + 2F_{36} \sigma_3 \sigma_6 + \\ & + F_{44} \sigma_4^2 + 2F_{45} \sigma_4 \sigma_5 + 2F_{46} \sigma_4 \sigma_6 + \\ & + F_{55} \sigma_5^2 + 2F_{56} \sigma_5 \sigma_6 + \\ & + F_{66} \sigma_6^2 = 1 \end{aligned} \quad 2.10$$

Matricialmente, o critério pode ser representado da seguinte forma:

$$f = \bar{f}(\sigma) - 1 = (\sigma^T F \sigma + L^T \sigma) - 1 = 0 \quad 2.11$$

onde F e L assumem a forma descrita em 2.12:

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & F_{16} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_{24} & F_{25} & F_{26} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_{34} & F_{35} & F_{36} \\ F_{41} & F_{42} & F_{43} & F_{44} & F_{45} & F_{46} \\ F_{51} & F_{52} & F_{53} & F_{54} & F_{55} & F_{56} \\ F_{61} & F_{62} & F_{63} & F_{64} & F_{65} & F_{66} \end{bmatrix} \text{ e } L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \\ L_5 \\ L_6 \end{bmatrix} \quad 2.12$$

Os termos lineares σ_i consideram tensões que descrevem rupturas induzidas por diferenças entre tensões positivas e negativas e, em conjunto com os termos quadráticos $\sigma_i \sigma_j$, definem um elipsóide no espaço de tensões principais. De acordo

com TSAI & WU (1971), os valores dos termos de interação F_{ij} são limitados pela desigualdade:

$$\frac{1}{2}F_{ii}F_{jj} - F_{ij}^2 \geq 0 \quad 2.13$$

condição essa que, geometricamente, assegura que a superfície de ruptura intercepte cada eixo de tensão e que sua forma seja de um elipsóide, Figura 2.3.

Para o caso de materiais ortotrópicos, ainda segundo TSAI & WU (1971), abordados neste trabalho, a expressão apresentada em 2.10 se reduz a:

$$\begin{aligned} &L_1\sigma_1 + L_2\sigma_2 + L_3\sigma_3 + \\ &+F_{11}\sigma_1^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2F_{13}\sigma_1\sigma_3 + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 + \\ &+F_{33}\sigma_3^2 + F_{44}\sigma_4^2 + F_{55}\sigma_5^2 + F_{66}\sigma_6^2 = 1 \end{aligned} \quad 2.14$$

Matricialmente tem-se:

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 & 0 & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \text{ e } L = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2.15$$

onde as tensões σ_4 , σ_5 e σ_6 são, respectivamente, as tensões de cisalhamento τ_{13} , τ_{23} e τ_{12} .

A representação gráfica da superfície do critério de Tsai-Wu segundo as direções de tensões principais é apresentada na Figura 2.3.

Segundo os autores, o tensor de resistência F_{ij} possui as mesmas propriedades de simetria elástica que os tensores constitutivos de rigidez (C_{ij}) e de flexibilidade (S_{ij}) dos materiais, inclusive o mesmo número de elementos independentes e diferentes de zero. Sendo assim, as transformações necessárias entre sistemas de coordenadas podem ser realizadas de acordo com as conhecidas leis para manipulação tensorial. Afirmam também, que a maioria dos critérios existentes são limitados a materiais ortotrópicos,

enquanto que o presente critério pode ser aplicado para materiais anisotrópicos gerais, permitindo inclusive, transformações do tensor de resistência F_{ij} para outros sistemas de coordenadas.

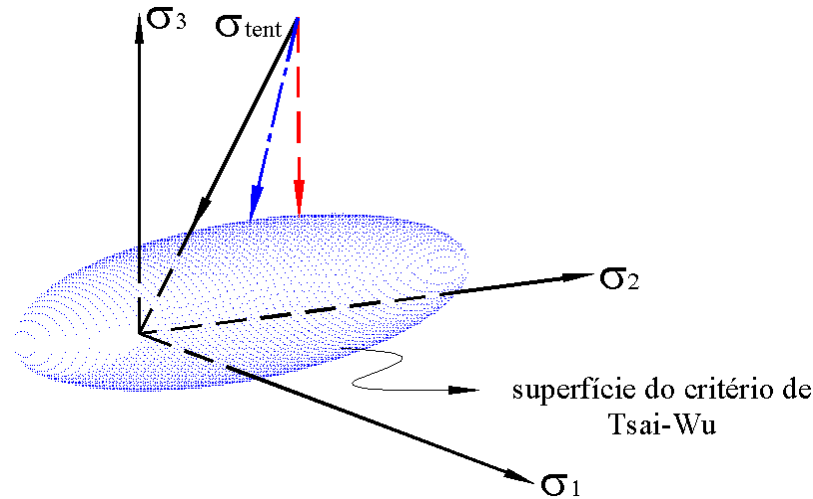


Figura 2.3 – Superfície do critério de Tsai-Wu.

Os elementos de L_i e F_{ij} são determinados em laboratório através de ensaios de tração e de compressão simples, bem como, de cisalhamento puro. Portanto, os parâmetros de resistência podem ser escritos por:

$$\begin{aligned}
 L_1 &= \frac{1}{X} - \frac{1}{X'} ; & L_2 &= \frac{1}{Y} - \frac{1}{Y'} ; & L_3 &= \frac{1}{Z} - \frac{1}{Z'} & (a) \\
 L_4 &= \frac{1}{Q} - \frac{1}{Q'} ; & L_5 &= \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} ; & L_6 &= \frac{1}{S} - \frac{1}{S'} & (b) \\
 F_{11} &= \frac{1}{X \cdot X'} ; & F_{22} &= \frac{1}{Y \cdot Y'} ; & F_{33} &= \frac{1}{Z \cdot Z'} & (c) \\
 F_{44} &= \frac{1}{Q \cdot Q'} ; & F_{55} &= \frac{1}{R \cdot R'} ; & F_{66} &= \frac{1}{S \cdot S'} & (d)
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

onde X e X' ; Y e Y' ; Z e Z' são, respectivamente, as resistências à tração e a compressão nas direções das fibras 1, 2 e 3; Q e Q' ; R e R' ; S e S' são, respectivamente, as resistências positiva e negativa ao cisalhamento puro nos planos 1-3, 2-3 e 1-2.

Para a determinação experimental dos termos F_{ij} (com $i \neq j$) não são suficientes ensaios uniaxiais ou de cisalhamento simples. Sua determinação requer combinações de estados de tensões, sendo possível então, inúmeras combinações e formas diferentes de ensaios. A determinação desses valores não se caracteriza como objetivo deste trabalho. Portanto, informações mais detalhadas sobre esses ensaios podem ser encontrados em

TSAI & WU (1971), SHIH & LEE (1978), HYER (1998), HUYBRECHTS *et al.* (2002), MAGAGNIN FILHO (1996) e VANALLI (2004), bem como informações complementares sobre o critério de um modo geral.

Uma outra forma de se obter tais propriedades de resistência é por meio de transformações das propriedades de resistências entre sistemas de coordenadas, valendo-se de operações idênticas às que podem ser efetuadas com os tensores constitutivos C_{ij} e S_{ij} .

Baseando-se nos parâmetros de resistência envolvidos na expressão polinomial do critério, verificam-se as possibilidades de falha previstas, podendo ser desde uma simples ruptura por tração, como a combinação de um estado biaxial de sollicitação, onde também se pode verificar a ruptura do corpo por efeito do cisalhamento.

CAPÍTULO 3

MODELOS REOLÓGICOS

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se a formulação geral para o método dos elementos finitos partindo-se do problema elástico-linear e, depois de introduzidos os conceitos de plasticidade e da abordagem diferencial de viscosidade chega-se na expressão completa viscoplástica para o MEF.

Deve-se comentar que o modelo viscoplástico que foi implementado nesta pesquisa não apresenta comportamento instantâneo visando simplicidade nas implementações, sendo que tal comportamento pode ser introduzido na formulação seguindo procedimento descrito para materiais isotrópicos modelados pelo MEC em MESQUITA (2002).

3.2 MODELOS REOLÓGICOS GERAIS

A adoção de modelos simplificados para a representação da relação constitutiva dos materiais é necessária devido à complexidade da representação do real comportamento destes. Os chamados Modelos Reológicos básicos buscam a representação da relação existente entre tensão e deformação para alguns materiais específicos e mais simples de serem modelados. A complexidade do comportamento de outros, no entanto, exige que esses modelos iniciais sejam combinados a fim de se alcançar o resultado desejado.

Neste sentido, são apresentados a seguir modelos reológicos uniaxiais simplificados, para o comportamento dos materiais, que são utilizados neste trabalho.

Parte-se do comportamento elástico-linear sendo introduzidos conceitos de viscosidade e plasticidade gradativamente para se obter a expressão final da representação viscoplástica. As expressões obtidas são utilizadas na formulação do Método dos Elementos Finitos aqui apresentada.

O modelo elástico-linear, representado esquematicamente por uma mola como a da Figura 3.1, caracteriza-se pelo aparecimento de deformações elásticas instantâneas à aplicação de solicitações estáticas, independentes do tempo. Em caso de descarregamento, essas deformações são totalmente recuperadas, não ocorrendo portanto o surgimento de deformações residuais. Para este modelo, a relação constitutiva se dá através da Lei de Hooke, ou seja:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad 3.1$$

onde σ_{ij} e ε_{kl} são tensões e deformações respectivamente e C_{ijkl} é a matriz constitutiva elástica para o material, podendo esta ser isotrópica, ortotrópica, ou ainda, na forma mais geral, anisotrópica.

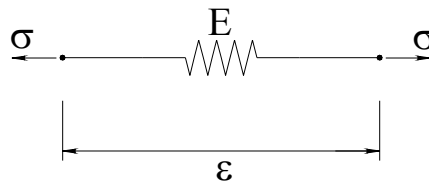


Figura 3.1 – Modelo elástico linear.

A representação para o modelo viscoso é dada por um amortecedor, Figura 3.2, sendo que este modelo apresenta um comportamento dependente do tempo. Desta forma, mantendo-se constante a solicitação aplicada, ocorrerá variação das deformações ao longo do tempo. A relação constitutiva para o modelo linear é dada por:

$$\sigma_{ij} = \eta_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad 3.2$$

onde η_{ijkl} é a matriz viscosa escrita em função de parâmetros representativos, determinados experimentalmente, da viscosidade do material. Na equação 3.2 fica determinado que as tensões dependem da velocidade de deformação do material.

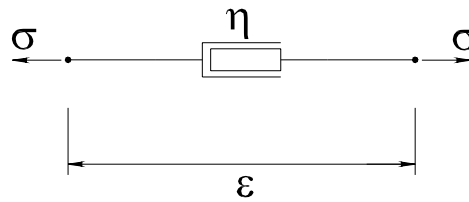


Figura 3.2 – Modelo viscoso.

A composição dos modelos elástico e viscoso, proporcionando uma abordagem viscoelástica, se dá pela combinação destes modelos. Deste modo, adota-se para este trabalho o modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt, representado pelo arranjo em paralelo de um amortecedor e de uma mola, Figura 3.3:

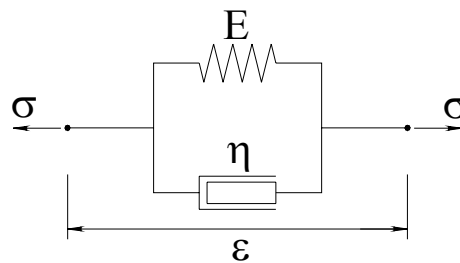


Figura 3.3 – Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt.

Para o modelo e Kelvin-Voigt, as deformações na mola e no amortecedor são iguais, portanto:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^v \tag{3.3}$$

onde ε_{ij} , ε_{ij}^e e ε_{ij}^v são, respectivamente, as deformações totais, elástica e viscosa.

A tensão total é dada pela tensão elástica atuante na mola somada à tensão viscosa do amortecedor, ou seja:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^v \tag{3.4}$$

sendo estas tensões definidas como:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \text{ e } \sigma_{ij}^v = \eta_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^v = \eta_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \tag{3.5}$$

onde, como visto anteriormente, C_{ijkl} é a matriz constitutiva elástica e η_{ijkl} é a matriz viscosa, que para materiais isotrópicos, pode ser representada na forma indicial por:

$$\eta_{ijlm} = \theta_\lambda \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \theta_\mu \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \quad 3.6$$

onde θ_λ e θ_μ são coeficientes representativos da viscosidade do material, determinados em ensaios simples de cisalhamento e de tração uniaxial. Os termos λ e μ são as conhecidas constantes de Lamé para materiais isotrópicos, expressos da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \text{ e } \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad 3.7$$

Entretanto, na grande maioria dos materiais, a matriz viscosa η_{ijkl} pode assumir uma forma mais simples, tornando-se dependente apenas de um único parâmetro viscoso γ . Desta forma, tem-se $\gamma = \theta_\lambda = \theta_\mu$ sendo a matriz viscosa escrita da seguinte forma:

$$\eta_{ijkl} = \gamma C_{ijkl} \quad 3.8$$

Adota-se, portanto, a expressão simplificada para a matriz viscosa dada pela equação 3.8 para os desenvolvimentos do presente trabalho. Desta forma, a expressão 3.4 para as tensões pode ser escrita como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \gamma C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (\text{para } \gamma = \theta_\lambda = \theta_\mu) \quad 3.9$$

O tratamento do problema viscoso, neste trabalho, se dá utilizando-se de algoritmos de integração temporal (MESQUITA (2002), MESQUITA & CODA (2002)), onde incrementos de tempo são considerados, tal como aqueles usualmente empregados nas análises dinâmicas, diferentemente das formulações usuais (LEMAITRE & CHABOCHE (2000), MUNAIAR (1998)), onde a viscosidade do material é considerada fazendo-se uso de funções de fluência ou de relaxação sendo que as solicitações são aplicadas de forma incremental.

Para o modelo plástico, a representação simplificada se dá através do deslizamento no freio que ocorre a partir do momento em que a tensão de escoamento σ_o é ultrapassada, Figura 3.4. As deformações provenientes deste mecanismo, quando se ultrapassa a tensão de escoamento do material, são imediatas e irreversíveis.

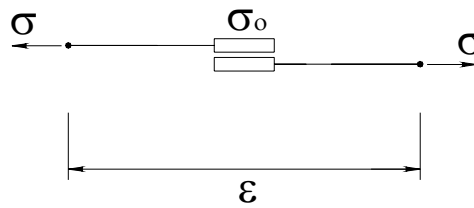


Figura 3.4 – Modelo plástico.

O modelo reológico representativo para o problema elastoplástico é obtido pelo arranjo em série de uma mola com outro arranjo sólido-mola em paralelo, tal como na Figura 3.5:

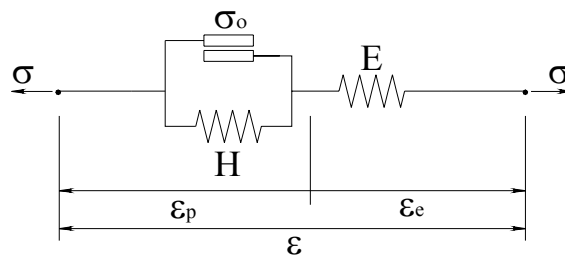


Figura 3.5 – Modelo elastoplástico.

onde H define o módulo plástico tangente do material (endurecimento) e σ_0 a tensão de escoamento.

Neste caso, a deformação total é definida pela soma da deformação no trecho elástico e no trecho plástico:

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^p \tag{3.10}$$

onde $\varepsilon_{kl}^p = \int d\varepsilon_{kl}^p$ ao longo do desenvolvimento das deformações.

Com isso, a tensão total fica definida por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \int_0^{\varepsilon_{kl}^p} d\varepsilon_{kl}^p \right) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \sigma_{ij}^p \tag{3.11}$$

com $\sigma_{ij}^p = \int d\sigma_{ij}^p = \int C_{ijkl} d\varepsilon_{kl}^p$ encontrado no algoritmo de retorno descrito no capítulo 7.

Tendo-se apresentado os modelos para os problemas viscoelástico e elastoplástico, introduz-se o modelo reológico para o problema viscoplástico. O modelo

adotado, para o presente trabalho, é representado pelo arranjo em paralelo do modelo viscoso de Kelvin-Voigt com o modelo elastoplástico, Figura 3.6:

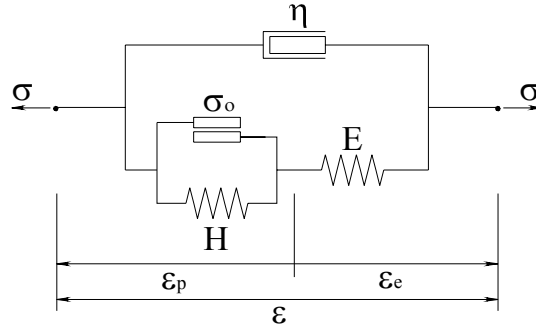


Figura 3.6 – Modelo viscoplástico.

Neste caso, as deformações são relacionadas por meio da seguinte expressão:

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^v = \varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^p \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{kl}^e = \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p \quad 3.12$$

onde ε_{kl} , ε_{kl}^e , ε_{kl}^v e ε_{kl}^p são, respectivamente, a deformação total, elástica, viscosa e plástica. A tensão total do conjunto é definida pela soma das tensões viscosa no amortecedor e elastoplástica no trecho elastoplástico, como:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{ep} + \sigma_{ij}^v \quad 3.13$$

Analogamente, σ_{kl} , σ_{kl}^{ep} e σ_{kl}^v são, respectivamente, tensões total, elastoplástica e viscosa, sendo que:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{ep} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \\ \sigma_{ij}^v &= \eta_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^v = \gamma C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \end{aligned} \quad 3.14$$

onde C_{ijkl} é a matriz constitutiva elástica, η_{ijkl} é a matriz viscosa definida pela equação 3.6.

Desta forma, as tensões totais da expressão 3.13 podem ser reescritas na forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^e + \gamma C_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) + \gamma C_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} + \gamma\dot{\varepsilon}_{kl}) - \sigma_{ij}^p \quad 3.15$$

As expressões aqui encontradas, para os diversos modelos e representações, podem então ser utilizadas para os desenvolvimentos das formulações baseadas no Método dos Elementos Finitos. Isto se dá através da introdução das expressões aqui encontradas nos termos da Energia de Deformação ou PTV, escritos em função do problema que se deseja abordar.

Portanto, partindo-se da expressão do Princípio da Mínima Energia Potencial Total para se encontrar as equações de equilíbrio algébricas, pode-se escrever estas na forma matricial e então resolver o problema que se está tratando com a utilização de rotinas para resolução de sistemas lineares.

A energia potencial total pode ser escrita como:

$$\Pi = U + V - P \quad 3.16$$

onde U é a energia de deformação contendo o termo elástico e plástico, tal como:

$$U = U^e + U^p = \int_{\Omega} \int_0^{\varepsilon} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{ij}^p \varepsilon_{ij} d\Omega \quad 3.17$$

Em 3.16, P é a energia potencial das forças externas (conservativas) e V é um potencial dissipativo onde, segundo LANCZOS (1970), seu diferencial é dado por:

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} = \gamma C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \delta \varepsilon_{ij} \quad \text{ou} \quad \frac{\delta V}{\delta \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_{ij}} = \gamma C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad 3.18$$

Deve-se observar que para se escrever 3.17 se usou a seguinte medida de pequenos deslocamentos:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad 3.19$$

e o fato do tensor constitutivo ser simétrico.

Em 3.19 $u_{i,j}$ representa a derivada do deslocamento na direção “i” em relação a direção “j”, com i e j variando de 1 até 3 para o caso tridimensional.

A parcela de velocidade de deformação dada por $\dot{\epsilon}_{kl}$ na expressão 3.18 é escrita da seguinte forma:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad 3.20$$

onde a parcela de velocidade de deslocamento, aproximada de forma linear ao longo do tempo, é escrita como:

$$\dot{u}_i^t = \frac{(u_i^t - u_i^{t-1})}{\Delta t} \quad 3.21$$

onde Δt é o intervalo de análise, o índice “t” representa o instante atual e pode ser suprimido nas expressões que seguem, conseqüentemente o índice “t-1” representa o valor da grandeza calculado no instante anterior, e portanto conhecido no instante atual.

Para se obter o equacionamento algébrico para o problema, deve-se ainda substituir as expressões de deformações e velocidade de deformações apresentadas em 3.19 e 3.20 respectivamente, em 3.17 e 3.18 e posteriormente as aproximações para os deslocamentos e suas derivadas que, genericamente, são dadas por:

$$\begin{aligned} u_i &= \phi^j \bar{u}_i^j \\ u_{i,k} &= \phi^{j,k}(\xi) \bar{u}_i^j \end{aligned} \quad 3.22$$

onde a barra sobre as variáveis de deslocamento indica que são valores nodais.

Antes de se efetuar a integração da expressão obtida no domínio do corpo dividido em elementos, é necessário que se realize a minimização do funcional da energia, derivando-se o funcional em relação a cada um dos parâmetros nodais existentes na expressão encontrada.

Assim, são encontradas as equações de equilíbrio que, depois de integradas nos elementos, fornecem as equações algébricas que devem ser resolvidas para se obter a solução do problema que está sendo modelado.

Organizando-se estas equações na forma matricial, tem-se:

$$KU + \gamma K\dot{U} = F + F^p \quad 3.23$$

onde K é a matriz de rigidez, U e \dot{U} os vetores de deslocamentos e velocidades nodais respectivamente, F o vetor de forças nodais e F^p o vetor de resíduo plástico.

Neste caso, a equação de equilíbrio é diferencial no tempo e algébrica no espaço devido a parcela referente ao comportamento viscoso onde, da mesma forma que em 3.21, assume-se a seguinte aproximação temporal para o vetor de velocidades nodais:

$$\dot{U} = \frac{U_{t+1} - U_t}{\Delta t} \text{ originando } \left(I + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) KU_{t+1} = F + \frac{\gamma}{\Delta t} KU_t \quad 3.24$$

resultando em algoritmo de passo simples com iterações no passo de tempo para definição do equilíbrio temporal. O vetor F^p é o vetor de forças residuais proveniente da integração das tensões residuais ao longo dos elementos.

A solução do equacionamento matricial apresentado em 3.23, estabelece um estado de tensão que deve ser submetido à expressão do critério de plastificação adotado, a fim de se verificar se a solução encontrada satisfaz tal expressão. Caso esta verificação não seja satisfeita, aplica-se o resíduo referente à parcela F^p , resultando em um processo iterativo, em marcha, onde novos valores de deslocamento devem ser calculados até que se encontre o equilíbrio e a expressão do critério de plastificação seja satisfeita.

Por razões didáticas, a transformação da expressão integral de 3.16 na expressão algébrica 3.23 e posteriormente no processo em marcha 3.24 será feita para elementos de barra 2D e 3D (linear) e de casca (não-linear) nos próximos capítulos, apesar do processo não-linear completo ter sido implementado numericamente em todos os casos.

CAPÍTULO 4

FORMULAÇÃO PARA O ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO 2D

4.1 INTRODUÇÃO

Apresenta-se a formulação de um elemento finito de pórtico com 3 graus de liberdade por nó e aproximação quadrática para variáveis. Sendo assim, o elemento possui 3 nós sendo que para cada um dos nós são estabelecidas duas translações (vertical e horizontal) e uma rotação. A cinemática a ser adotada é utilizada para laminados e leva em consideração o efeito do esforço cortante na deformação. A existência das lâminas permite que sejam considerados materiais diferentes tornando possível a representação de peças de seção composta, como por exemplo uma simplificação de peças de concreto armado. Tal cinemática considera a rotação da seção transversal como grau de liberdade independente, ou seja, não é dada como a derivada do deslocamento vertical em relação ao eixo horizontal, nem como uma correção desta derivada para se introduzir a energia devida à força cortante na peça. Com isso, assume-se que seções planas permanecem planas, porém não ortogonais ao eixo do elemento após a deformação.

Este elemento foi desenvolvido com o único intuito de ajudar a verificar se o tipo de cinemática adotado para os elementos 3D está livre do travamento por força cortante ou, caso não esteja, qual a limitação da formulação adotada.

Alguns exemplos são apresentados constatando-se que ao se considerar vigas tidas como finas a partir da cinemática de laminados o problema de travamento não ocorre.

4.2 CINEMÁTICA

A cinemática para o elemento de pórtico bi-dimensional é apresentada a seguir, sendo que os deslocamentos para o sistema de referência adotado no centro da camada são dados em função dos deslocamentos do sistema de referência adotado para o problema. Tem-se portanto a cinemática para um ponto “P” qualquer dada por:

$$\begin{aligned} u_p(x, y) &= u_0(X) + \theta_0(X) \cdot (f + y) \\ v_p(x, y) &= v_0(X) \end{aligned} \quad 4.1$$

Sendo x e y o sistema de referência no centro da camada, X e Y o sistema na referência adotada, f a excentricidade entre o cg da camada e o eixo de referência e h a altura da camada, sendo ainda o sentido positivo do giro dado pela regra da mão direita .

Para facilitar o entendimento das expressões apresentadas em 4.1, ilustra-se na Figura 4.1 o deslocamento de um ponto “P” de uma camada “a” em relação ao eixo do elemento, tomando-se como base os deslocamentos medidos no eixo de referência adotado:

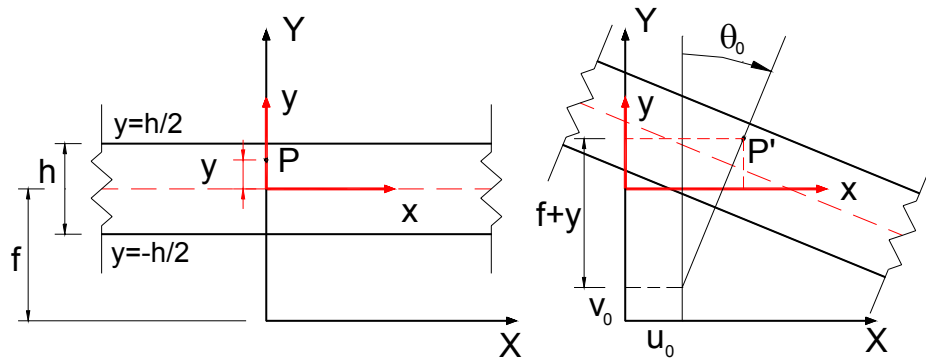


Figura 4.1 – Cinemática de um ponto “P” qualquer.

4.3 DEFORMAÇÕES

Obtidos os deslocamentos através das expressões cinemáticas adotadas para o problema, determinam-se as deformações (pequenos deslocamentos) em função das derivadas das equações cinemáticas.

Vale salientar que não serão introduzidas aproximações de elementos finitos até que sejam encontradas as expressões de equilíbrio, neste capítulo, pela aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_p(x, y)}{\partial x} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v_p(x, y)}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad 4.2$$

Expandindo-se as expressões apresentadas em 4.2, tem-se as equações gerais para as deformações em função das derivadas dos deslocamentos calculados no ponto “P” dadas por:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_o(X)}{\partial X} + \frac{\partial \theta_o(X)}{\partial X} \cdot (y + f) \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\theta_o(X) + \frac{\partial v_o(X)}{\partial X} \right)\end{aligned}\quad 4.3$$

4.4 TENSÕES

Uma vez escritas as deformações em função das derivadas dos deslocamentos e giros, aplica-se a Lei Constitutiva (ainda linear) para os materiais, obtendo-se as tensões para o ponto “P” da camada do elemento de pórtico em questão.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E \cdot \varepsilon_x \\ \tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy}\end{aligned}\quad 4.4$$

Substituindo-se as expressões das deformações de 4.3 em 4.4 tem-se:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E \cdot \left(\frac{\partial u_o(X)}{\partial X} + \frac{\partial \theta_o(X)}{\partial X} \cdot (y + f) \right) \\ \tau_{xy} &= G \cdot \left(\theta_o(X) + \frac{\partial v_o(X)}{\partial X} \right)\end{aligned}\quad 4.5$$

Novamente, as expressões obtidas estão em função das derivadas dos deslocamentos e giros, uma vez que estes serão aproximados pelo Método dos Elementos Finitos.

4.5 ESFORÇOS SOLICITANTES

Os esforços solicitantes são obtidos integrando-se as tensões normal e de cisalhamento ao longo da largura e da espessura dos elementos. Tais esforços são tomados em relação ao eixo de referência adotado para o problema, sendo as tensões normais calculadas em cada camada e posteriormente transferidas para o referido eixo, computando-se os momentos fletores provenientes da transferência dessas tensões. O mesmo procedimento ocorre com as tensões de cisalhamento, sendo que estas não provocam momento em relação ao eixo de referência.

4.5.1 FORÇA NORMAL

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A \sigma_x \cdot dA = \int_A E \cdot \left(\frac{\partial u_o(X)}{\partial X} + \frac{\partial \theta_0(X)}{\partial X} \cdot (y + f) \right) \cdot dA = \\
 &= A \cdot E \cdot \left(\frac{\partial u_o(X)}{\partial X} + \frac{\partial \theta_0(X)}{\partial X} \cdot f \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Em 4.6, “b” é a largura do elemento de pórtico, na implementação numérica do caso bidimensional “b” foi considerada constante por simplicidade.

4.5.2 FORÇA CORTANTE

$$\begin{aligned}
 V_Y &= \int_A \tau_{xy} \cdot k \cdot dA = \int_A G \cdot \left(\theta_0(X) + \frac{\partial v_o(X)}{\partial X} \right) \cdot k \cdot dA = \\
 &= k \cdot G \cdot A \cdot \left(\theta_0(X) + \frac{\partial v_o(X)}{\partial X} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.7}$$

Novamente, em 4.7, “b” é a largura do elemento de pórtico e “k” é o fator de correção adotado por ter-se considerado seção plana (giro constante) ao longo da espessura do elemento de pórtico e conseqüentemente distribuição constante da cortante ao longo da seção transversal do elemento de pórtico.

4.5.3 MOMENTO FLETOR

O momento apresentado em 4.8 surge como conseqüência da transferência das tensões normais atuantes nas camadas para o eixo de referência adotado. Portanto, o momento é dado pelo produto entre a tensão normal e sua distância ao eixo de referência adotado. A distância para este caso é dada pela excentricidade existente entre o eixo do elemento e eixo de referência, acrescida da coordenada vertical (y) do ponto “P” com seu valor real, ou seja, considerando seu sinal.

$$\begin{aligned}
 M_x &= \int_A \sigma_x \cdot (y + f) \cdot dA = \\
 &= \int_A E \cdot \left(\frac{\partial u_o(X)}{\partial X} + \frac{\partial \theta_0(X)}{\partial X} \cdot (y + f) \right) \cdot (y + f) \cdot dA = \\
 &= E \cdot A \cdot f \cdot \frac{\partial u_o(X)}{\partial X} + E \cdot I \cdot \frac{\partial \theta_0(X)}{\partial X} + E \cdot A \cdot f^2 \cdot \frac{\partial \theta_0(X)}{\partial X}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Os sentidos positivos dos esforços solicitantes podem ser visualizados na Figura 4.2 a seguir.

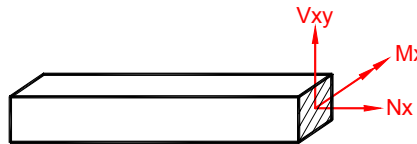


Figura 4.2 – Convenção de sinais para os esforços solicitantes.

4.6 TENSÃO RESIDUAL

A consideração da existência de uma tensão residual no cálculo dos esforços solicitantes tem o intuito de introduzir na formulação a idéia inicial para posterior consideração de comportamento não-linear físico nos problemas tridimensionais (pórtico e casca). Inicialmente poderia ser esta tensão proveniente de uma variação de temperatura ao longo da espessura do elemento de pórtico, uma vez que tal variação causaria o surgimento de tensões que provocariam esforços solicitantes nos elementos.

Com base nesta idéia, apresentam-se as expressões dos esforços solicitantes considerando-se a inclusão de tensões residuais nas expressões dadas em 4.9, 4.10 e 4.11.

4.6.1 FORÇA NORMAL

$$\begin{aligned}
 N &= \int_A (\sigma_x - \sigma_x^r) \cdot dA = \int_A \left(E \cdot \left(\frac{\partial u_o(X)}{\partial X} + \frac{\partial \theta_0(X)}{\partial X} \cdot (y + f) \right) - \sigma_x^r \right) dA = \\
 &= A \cdot E \cdot \left(\frac{\partial u_o(X)}{\partial X} + \frac{\partial \theta_0(X)}{\partial X} \cdot f \right) - \int_A \sigma_x^r dA
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

4.6.2 FORÇA CORTANTE

$$\begin{aligned}
 V_Y &= \int_A (\tau_{xy} - \tau_{xy}^r) k \cdot dA = \int_A \left(G \cdot \left(\theta_0(X) + \frac{\partial v_o(X)}{\partial X} \right) - \tau_{xy}^r \right) k \cdot dA = \\
 &= k \cdot A \cdot G \cdot \left(\theta_0(X) + \frac{\partial v_o(X)}{\partial X} \right) - k \cdot \int_A \tau_{xy}^r dA
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

4.6.3 MOMENTO FLETOR

$$\begin{aligned}
 M_X &= \int_A (\sigma_x - \sigma_x^r) \cdot (y + f) \cdot dA = \\
 &= \int_A \left(E \cdot \left(\frac{\partial u_o(X)}{\partial X} + \frac{\partial \theta_0(X)}{\partial X} \cdot (y + f) \right) - \sigma_x^r \right) \cdot (y + f) \cdot dA = \\
 &= E \cdot A \cdot f \cdot \left(\frac{\partial u_o(X)}{\partial X} \right) + E \cdot I \cdot \frac{\partial \theta_0(X)}{\partial X} + E \cdot A \cdot f^2 \cdot \frac{\partial \theta_0(X)}{\partial X} - \int_A \sigma_x^r \cdot (y + f) \cdot dA
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

A parcela referente à tensão residual permanece na integral pois pode assumir valores diferentes em cada um dos pontos de Gauss distribuídos ao longo da espessura, devendo portanto ser integrada numericamente em tempo de processamento no programa desenvolvido.

4.7 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS – PTV

O equilíbrio, representado pela aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais, possibilita a obtenção da matriz de rigidez e do vetor de cargas nodais envolvidos na formulação. O relacionamento entre tais grandezas é alcançado quando são igualados os trabalhos virtuais interno e externo da estrutura.

O trabalho virtual interno é dado pelo produto entre os esforços solicitantes e as variações dos deslocamentos virtuais em relação ao eixo de referência.

$$W_{\text{int}} = \int_L \left[N_x \cdot \frac{\partial \delta u_p(x, -f)}{\partial X} + V_y \cdot \left(\frac{\partial \delta u_p(X, -f)}{\partial Y} + \frac{\partial \delta v_p(X, -f)}{\partial X} \right) + M_x \cdot \frac{\partial \delta \theta_0(X)}{\partial X} \right] dx \quad 4.12$$

Após efetuar-se algumas simplificações paralelamente à substituição das expressões dos esforços, deslocamentos e suas derivadas, obtém-se a seguinte expressão para o PTV:

$$W_{\text{int}} = \int_L \left[\left(AE \left(\frac{\partial u_o(X)}{\partial X} + \frac{\partial \theta_0(X)}{\partial X} f \right) - \int_A \sigma_x^r dA \right) \cdot \frac{\partial \delta u_o(X)}{\partial X} + \left(kAG \left(\theta_0(X) + \frac{\partial v_o(X)}{\partial X} \right) - k \int_A \tau_{xy}^r dA \right) \cdot \left(\delta \theta_0(X) + \frac{\partial \delta v_o(X)}{\partial X} \right) + \left(f \left(AE \frac{\partial u_o(X)}{\partial X} - \int_A \sigma_x^r dA \right) + EI \frac{\partial \theta_0(X)}{\partial X} + EAf^2 \frac{\partial \theta_0(X)}{\partial X} \right) \frac{\partial \delta \theta_0(X)}{\partial X} \right] dx \quad 4.13$$

Seguindo a idéia apresentada em MENEZES *et al.* (2001) para elemento de casca laminada, o PTV pode ainda ser representado matricialmente agrupando-se os deslocamentos virtuais e reais e suas respectivas derivadas em vetores e as grandezas relacionadas à cinemática, geometria e propriedades do material em matrizes chamadas aqui de matrizes de contribuição. Uma posterior integração dessas matrizes, ao longo do elemento, irá fornecer a matriz de rigidez para o elemento de pórtico laminado, através da superposição das mesmas.

As matrizes de contribuição, assim denominadas em MENEZES *et al.* (2001), são as matrizes que aparecem na equação 4.14.

$$\begin{aligned}
 W_{\text{int}} = & \int_L \left\{ \delta u_0 \quad \delta v_0 \quad \delta \theta_0 \right\} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k.G.A \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \int_A \tau_{xy}^r dA \end{Bmatrix} \right\} + \\
 & + \left\{ \delta u_{0,X} \quad \delta v_{0,X} \quad \delta \theta_{0,X} \right\} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k.G.A \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \int_A \sigma_x^r dA \\ k \int_A \tau_{xy}^r dA \\ f \int_A \sigma_x^r dA \end{Bmatrix} \right\} + \\
 & + \left\{ \delta u_0 \quad \delta v_0 \quad \delta \theta_0 \right\} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k.G.A & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{0,X} \\ v_{0,X} \\ \theta_{0,X} \end{Bmatrix} + \\
 & + \left\{ \delta u_{0,X} \quad \delta v_{0,X} \quad \delta \theta_{0,X} \right\} \cdot \begin{bmatrix} E.A & 0 & E.A.f \\ 0 & 0 & 0 \\ E.A.f & 0 & E.I + E.A.f^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_{0,X} \\ v_{0,X} \\ \theta_{0,X} \end{Bmatrix} dx
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Antes de se efetuar a referida integração, faz-se necessária portanto a introdução da aproximação de elementos finitos. Vale salientar que para qualquer aproximação desejada a formulação passa a ser modificada deste ponto em diante, não sendo necessário portanto que sejam refeitos todos os passos até aqui apresentados.

De forma genérica, para qualquer aproximação das variáveis, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_0 \\ \delta v_0 \\ \delta \theta_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \dots & \phi_n & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & \phi_n & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ \theta_0^1 \\ \delta u_0^1 \\ \delta v_0^1 \\ \delta \theta_0^1 \\ \vdots \\ u_0^n \\ v_0^n \\ \theta_0^n \\ \delta u_0^n \\ \delta v_0^n \\ \delta \theta_0^n \end{Bmatrix}}_{\{\{u\}, \{\delta u\}\}}$$

4.15

$$\begin{Bmatrix} u'_0 \\ v'_0 \\ \theta'_0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u'_0 \\ \delta v'_0 \\ \delta \theta'_0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi'_1 & 0 & 0 & \phi'_2 & 0 & 0 & \dots & \phi'_n & 0 & 0 \\ 0 & \phi'_1 & 0 & 0 & \phi'_2 & 0 & \dots & 0 & \phi'_n & 0 \\ 0 & 0 & \phi'_1 & 0 & 0 & \phi'_2 & \dots & 0 & 0 & \phi'_n \end{bmatrix} \cdot \{\{u\}, \{\delta u\}\}$$

As funções de forma para a aproximação quadrática mencionada no início da formulação são dadas em 4.16.

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 - \xi) \quad \phi_2(\xi) = (1 - \xi^2) \quad \phi_3(\xi) = \frac{1}{2}(\xi^2 + \xi) \quad 4.16$$

As derivadas destas funções de forma são dadas em 4.17.

$$\phi_1'(\xi) = \frac{1}{2}(2\xi - 1) \quad \phi_2'(\xi) = -2\xi \quad \phi_3'(\xi) = \frac{1}{2}(2\xi + 1) \quad 4.17$$

Graficamente tem-se:

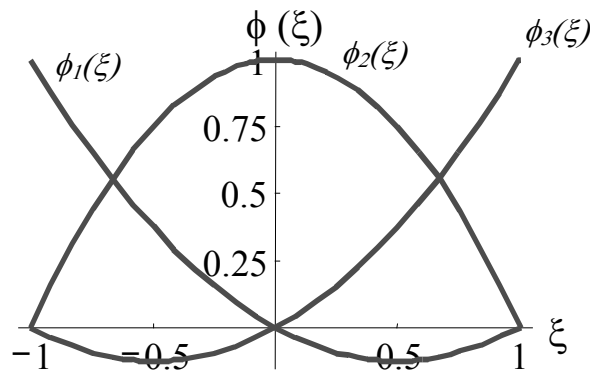


Figura 4.3 – Funções de forma para o elemento quadrático.

Adotada e introduzida a aproximação, substituí-se as expressões de 4.15 particularizadas para aproximação quadrática, na forma matricial do PTV em 4.14, são obtidas as matrizes e os vetores de 4.19 antes ainda de se efetuar a integração ao longo do eixo do elemento. Como simplificação assume-se em 4.18:

$$\begin{aligned} [\phi] &= \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \phi_3 \end{bmatrix} \\ [\phi'] &= \begin{bmatrix} \phi_1' & 0 & 0 & \phi_2' & 0 & 0 & \phi_3' & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1' & 0 & 0 & \phi_2' & 0 & 0 & \phi_3' & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1' & 0 & 0 & \phi_2' & 0 & 0 & \phi_3' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad 4.18$$

$$\begin{aligned}
 W_{\text{int}} = & \int_L \left[\begin{matrix} \{\delta u\}^T \cdot [\phi]^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k.G.A \end{bmatrix} \cdot [\phi] \cdot \{u\} + \\
 & + \{\delta u\}^T \cdot [\phi']^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k.G.A \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot [\phi] \cdot \{u\} + \\
 & + \{\delta u\}^T \cdot [\phi]^T \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & k.G.A & 0 \end{bmatrix} \cdot [\phi'] \cdot \{u\} + \\
 & + \{\delta u\}^T \cdot [\phi']^T \cdot \begin{bmatrix} E.A & 0 & E.A.f \\ 0 & 0 & 0 \\ E.A.f & 0 & E.I + E.A.f^2 \end{bmatrix} \cdot [\phi'] \cdot \{u\} + \\
 & - \{\delta u\}^T \cdot [\phi]^T \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ k \int_A \tau_{xy}^r dA \end{Bmatrix} - \{\delta u\}^T \cdot [\phi']^T \cdot \begin{Bmatrix} \int_A \sigma_x^r dA \\ k \int_A \tau_{xy}^r dA \\ f \int_A \sigma_x^r dA \end{Bmatrix} \end{matrix} \right] dx
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Finalmente, parte-se para a integração da expressão obtida em 4.19 e com isso encontra-se a matriz de rigidez do elemento de pórtico laminado. A integração pode ser feita analiticamente ou numericamente e em tempo de processamento, em caso de programação. Neste caso, para obtenção da forma analítica da matriz de rigidez e do vetor de esforços referentes às tensões residuais, aplica-se a integração analítica.

Portanto, fazendo-se a integração das funções que acompanham as matrizes de contribuição, obtém-se a matriz de rigidez para o elemento de pórtico laminado dada em 4.20.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{7.E.A}{3.L} & 0 & \frac{7.E.A.f}{3.L} & -\frac{8.E.A}{3.L} & 0 & -\frac{8.E.A.f}{3.L} & \frac{E.A}{3.L} & 0 & \frac{E.A.f}{3.L} \\ 0 & \frac{7.k.G.A}{3.L} & -\frac{1.k.G.A}{2} & 0 & -\frac{8.k.G.A}{3.L} & -\frac{2.k.G.A}{3} & 0 & \frac{1.k.G.A}{3.L} & \frac{k.G.A}{6} \\ \frac{7.E.A.f}{3.L} & -\frac{1.k.G.A}{2} & \frac{7.E.A.f^2}{3.L} + \frac{7.E.I}{3.L} + \frac{2.L.k.G.A}{15} & -\frac{8.E.A.f}{3.L} & \frac{2.k.G.A}{3} & -\frac{8.E.A.f^2}{3.L} + \frac{8.E.I}{3.L} + \frac{L.k.G.A}{15} & \frac{E.A.f}{3.L} & -\frac{1.k.G.A}{6} & \frac{E.A.f^2}{3.L} + \frac{E.I}{3.L} - \frac{L.k.G.A}{30} \\ \frac{8.E.A}{3.L} & 0 & -\frac{8.E.A.f}{3.L} & \frac{16.E.A}{3.L} & 0 & \frac{16.E.A.f}{3.L} & \frac{8.E.A}{3.L} & 0 & -\frac{8.E.A.f}{3.L} \\ 0 & -\frac{8.k.G.A}{3.L} & \frac{2.k.G.A}{3} & 0 & \frac{16.k.G.A}{3.L} & 0 & 0 & -\frac{8.k.G.A}{3.L} & \frac{2.k.G.A}{3} \\ \frac{8.E.A.f}{3.L} & -\frac{2.k.G.A}{3} & -\frac{8.E.A.f^2}{3.L} - \frac{8.E.I}{3.L} + \frac{L.k.G.A}{15} & \frac{16.E.A.f}{3.L} & 0 & \frac{16.E.A.f^2}{3.L} + \frac{16.E.I}{3.L} + \frac{8.L.k.G.A}{15} & -\frac{8.E.A.f}{3.L} & \frac{2.k.G.A}{3} & -\frac{8.E.A.f^2}{3.L} - \frac{8.E.I}{3.L} + \frac{L.k.G.A}{15} \\ \frac{E.A}{3.L} & 0 & \frac{E.A.f}{3.L} & -\frac{8.E.A}{3.L} & 0 & -\frac{8.E.A.f}{3.L} & \frac{7.E.A}{3.L} & 0 & \frac{7.E.A.f}{3.L} \\ 0 & \frac{1.k.G.A}{3.L} & -\frac{1.k.G.A}{6} & 0 & -\frac{8.k.G.A}{3.L} & \frac{2.k.G.A}{3} & 0 & \frac{7.k.G.A}{3.L} & \frac{1.k.G.A}{2} \\ \frac{E.A.f}{3.L} & \frac{k.G.A}{6} & \frac{E.A.f^2}{3.L} + \frac{E.I}{3.L} - \frac{L.k.G.A}{30} & -\frac{8.E.A.f}{3.L} & \frac{2.k.G.A}{3} & -\frac{8.E.A.f^2}{3.L} - \frac{8.E.I}{3.L} + \frac{L.k.G.A}{15} & \frac{7.E.A.f}{3.L} & \frac{1.k.G.A}{2} & \frac{7.E.A.f^2}{3.L} + \frac{7.E.I}{3.L} + \frac{2.L.k.G.A}{15} \end{bmatrix}$$

4.20

A parcela do vetor de cargas referente as tensões residuais assume a forma de 4.21:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_V \phi_1' \sigma_x^r dV \\ k \int_V \phi_1' \tau_{xy}^r dV \\ k \int_V \phi_1' \tau_{xy}^r dV + f \int_V \phi_1' \sigma_x^r dV \\ \int_V \phi_2' \sigma_x^r dV \\ k \int_V \phi_2' \tau_{xy}^r dV \\ k \int_V \phi_2' \tau_{xy}^r dV + f \int_V \phi_2' \sigma_x^r dV \\ \int_V \phi_3' \sigma_x^r dV \\ k \int_V \phi_3' \tau_{xy}^r dV \\ k \int_V \phi_3' \tau_{xy}^r dV + f \int_V \phi_3' \sigma_x^r dV \end{array} \right\} \quad 4.21$$

Com o elemento de pórtico, pode-se adotar como eixo de referência as faces externas ou internas dos elementos, não ficando preso ao eixo do cg dos mesmos.

Uma opção de utilização deste elemento é o cálculo de pilares engastados com carregamento excêntrico, visto que permite-se adotar o eixo de referência como sendo a linha de ação do carregamento excêntrico, uma vez que este é sempre fornecido em relação ao referido eixo.

4.8 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

Para todos os exemplos, adota-se eixo “X” como sendo horizontal e com sentido positivo para a direita. O eixo “Y” é adotado como sendo perpendicular ao papel e com sentido positivo entrando no mesmo servindo para medir os giros sempre em torno do eixo “Y” no caso dos pórticos planos. Finalmente, o eixo “Z” é adotado vertical e com sentido positivo para cima. A convenção de sinal para rotação é dada para cada um dos eixos segundo a regra da mão direita. A direção dos eixos pode ser visualizada na Figura 4.4.

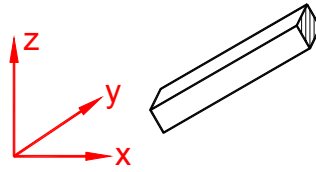
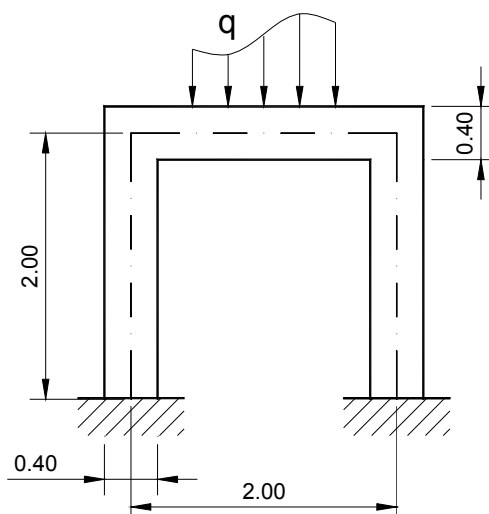


Figura 4.4 – Convenção de sinais – Eixos Globais.

4.8.1 EXEMPLO 01

Os dados para este exemplo estão apresentados na Figura 4.5 e os resultados são obtidos para três situações distintas. Primeiramente considerando os eixos de referência adotados nos eixos dos elementos e considerando um carregamento uniformemente distribuído “ q_1 ” ao longo de todo o comprimento do elemento horizontal do pórtico. Neste caso, os elementos do pórtico possuem comprimento de 2 m e altura de 0.40 m. A segunda situação de cálculo é realizada adotando-se os eixos de referência nas faces dos elementos internas ao pórtico. Para esta situação, os elementos verticais possuem 1.8 m de comprimento e o elemento horizontal passa a ter comprimento igual a 1.60 m. Para que haja uma equivalência completa entre os dois casos, a carga uniformemente distribuída “ q_2 ” aplicada na segunda situação passa a ser dada por: $q_2 = 2 \cdot q_1 / 1.6$. Na terceira situação, os elementos verticais possuem 2.20 m de comprimento enquanto que o elemento horizontal possui 2.40 m. Novamente, para que a equivalência seja mantida, o carregamento distribuído “ q_3 ” passa a ser dado por: $q_3 = 2 \cdot q_1 / 2.4$. A largura adotada para os elementos é de 0.20 m.



Dados gerais para o exemplo:

$$E = 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2;$$

$$G = 1.05 \times 10^8 \text{ kN/m}^2;$$

- a) 1ª Situação: $q_1 = -120 \text{ kN/m}$;
- b) 2ª Situação: $q_2 = -150 \text{ kN/m}$;
- c) 3ª Situação: $q_3 = -100 \text{ kN/m}$;

Figura 4.5 – Pórtico plano com carregamento distribuído.

Foram utilizados 2 elementos finitos para discretizar cada um dos elementos estruturais do problema (dois pilares e uma viga) utilizando-se portanto um total de 6 elementos finitos para o exemplo do pórtico.

Os resultados de deslocamentos vertical, horizontal e rotação na extremidade (nó) e no centro do elemento horizontal do pórtico para as três situações de análise, são apresentados na Tabela 4.1.

Como se pode observar na Tabela 4.1, as respostas variam bastante ao se considerar o eixo de referência nas diferentes situações. O valor mais significativo da análise é o deslocamento no centro do vão, onde se observou uma redução de tal valor quando se desloca o eixo de referência dos elementos tanto para o interior quanto para o exterior, indicando que (pelo menos para problemas lineares) a situação mais desfavorável é a situação (a) normalmente empregada na prática.

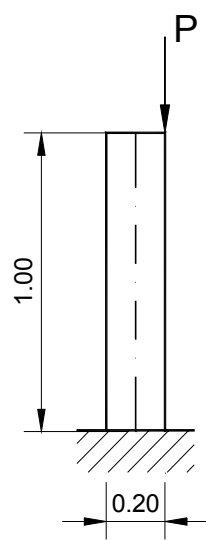
Tabela 4.1 – Deslocamento vertical, horizontal e rotação para a extremidade e centro do elemento horizontal para as duas situações de análise.

		Desl. X	Desl. Z	Rot. Y
a)	Nó	0,0000011726	-0,0000142857	0,0000604163
	Centro	0,0000000000	-0,0000677478	0,0000000000
b)	Nó	0,0000034793	-0,0000128259	0,0000162276
	Centro	0,0000000000	-0,0000386072	0,0000000000
c)	Nó	0,0000087749	-0,0000049784	0,0000405841
	Centro	0,0000000000	-0,0000562743	0,0000000000

4.8.2 EXEMPLO 02

Este exemplo simula linearmente o comportamento de um pilar com base engastada e extremidade superior livre submetido a um carregamento concentrado e excêntrico, sendo aplicado no eixo em um dos lados do pilar como pode ser visto na Figura 4.6. Os demais dados necessários para o exemplo também são apresentados na referida figura.

Utilizou-se apenas um elemento finito para representação do problema pelo fato da forma final da estrutura neste caso poder ser representada por uma função quadrática, sendo desta forma alcançada com a utilização de apenas um elemento finito já que o elemento utilizado tem aproximação quadrática para as variáveis.



Dados gerais para o exemplo:

$$P = - 1000 \text{ kN};$$

$$E = 10 \times 10^8 \text{ kN/m}^2;$$

$$G = 5 \times 10^8 \text{ kN/m}^2;$$

$$\text{Largura} = 0.20 \text{ m};$$

$$\text{Excentricidade} = 0.10 \text{ m};$$

Figura 4.6 – Pilar com carga excêntrica.

Esperam-se como resultados deste exemplo deslocamentos, horizontal e vertical, e rotação na extremidade carregada do pilar devido ao efeito provocado pela excentricidade da carga de compressão aplicada. Tais resultados podem ser observados na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Deslocamento vertical, horizontal e rotação.

Desl. X	Desl. Z	Rot. Y
0,0003750	-0,0001000	0,0007500

Os valores encontrados são exatamente os esperados pela teoria técnica de flexão (problema livre de cisalhamento).

Deve-se comentar que os elementos de pórtico (ou viga) laminados devem estar disponíveis na literatura, porém a sua utilização em problemas homogêneos (uma única lâmina) com ou sem eixo excêntrico é uma contribuição, ainda que modesta, desta pesquisa.

4.8.3 EXEMPLO 03

Apresenta-se neste exemplo a simulação do comportamento de uma viga em balanço, submetida a carregamento vertical concentrado na extremidade livre. O objetivo do presente exemplo é verificar o comportamento do elemento finito de pórtico plano com relação à ação do esforço cortante, ou seja, verificar se o elemento utilizado sofre influência do efeito de travamento por cortante.

Foram utilizados 10 elementos finitos de igual tamanho para simulação deste exemplo, sendo calculado para vários valores de altura, podendo-se com isso colocar os resultados numéricos e analíticos em gráficos para posterior comparação desses valores. As características geométricas e físicas do exemplo são apresentadas na Figura 4.7.

A Tabela 4.3 contém os resultados obtidos para o presente exemplo. Nela são apresentados os valores de deslocamento vertical na extremidade livre, obtidos numericamente e analiticamente (teoria técnica de flexão), bem como a razão e a razão relativa entre tais valores.

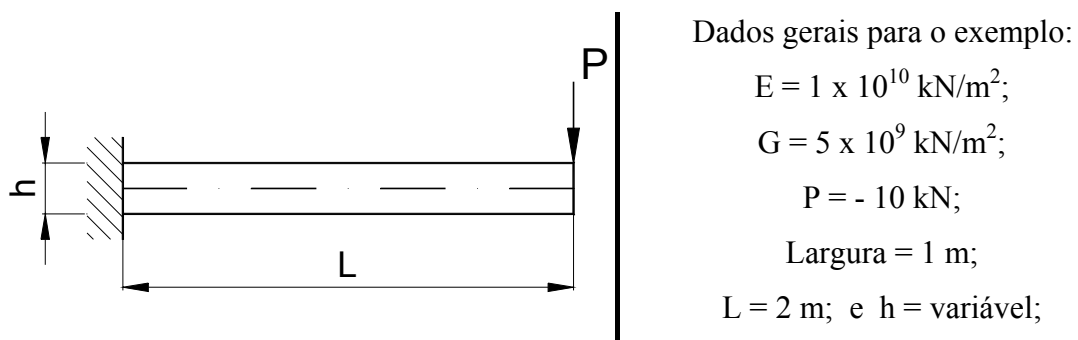


Figura 4.7 – Viga em balanço com carga concentrada na extremidade livre.

Apresenta-se ainda uma coluna denominada “Influência do Cisalhamento” onde se adota o valor de deslocamento obtido para a menor espessura (Razão Relativa = 0.25%) como sendo exato e em função deste valor são calculados os valores da influência do cisalhamento.

Os valores de deslocamento para espessuras menores que 0.02 m apesar de excessivamente grandes não tem o objetivo de serem reais, apenas de se comparar as soluções numéricas com a solução da teoria técnica.

Tabela 4.3 – Resultados obtidos

H	H/L	Deslocamento Vertical		Razão wa/wn	Razão Relativa	Influência do Cisalhamento
		Teoria Técnica	Numérica			
0.00002	0.00001	4.00E+06	3.99007E+06	0.99752	0.25%	0.00%
0.0002	0.0001	4.00E+03	3.99000E+03	0.99750	0.25%	0.00%
0.002	0.001	4.00E+00	3.99001E+00	0.99750	0.25%	0.00%
0.02	0.01	4.00E-03	3.99131E-03	0.99783	0.22%	-0.03%
0.2	0.1	4.00E-06	4.02320E-06	1.00580	-0.58%	-0.83%
0.3	0.15	1.19E-06	1.20110E-06	1.01343	-1.34%	-1.59%
0.4	0.2	5.00E-07	5.12000E-07	1.02400	-2.40%	-2.65%
0.5	0.25	2.56E-07	2.65600E-07	1.03750	-3.75%	-4.00%
1	0.5	3.20E-08	3.68000E-08	1.15000	-15.00%	-15.25%
1.5	0.75	9.48E-09	1.27000E-08	1.33945	-33.95%	-34.19%
2	1	4.00E-09	6.40000E-09	1.60000	-60.00%	-60.25%

Como era de se esperar, apenas para uma relação acima de $1/6$ e $1/10$ entre a espessura e o comprimento da viga, a influência do cisalhamento torna-se significativa e a teoria técnica não se aplica. De forma geral, a teoria técnica pode ser aplicada nos casos onde a relação h/L seja menor que $1/6$, sendo que para Reissner-Mindlin, pode-se chegar até valores entre $1/4$ e $1/3$ para h/L e, acima disso, torna-se necessária a utilização de modelos tridimensionais.

Na Figura 4.8 são apresentados os valores de deslocamento vertical na extremidade livre da viga encontrados na Tabela 4.3.

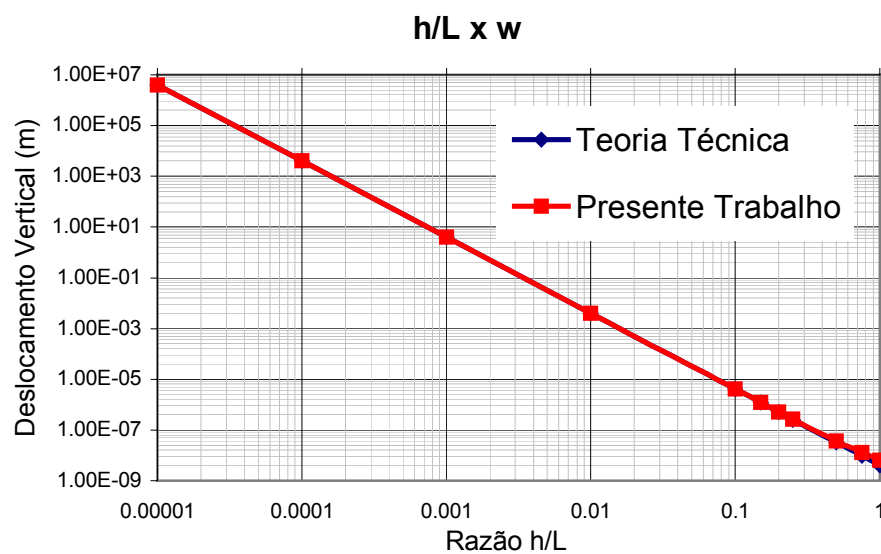


Figura 4.8 – Deslocamento vertical para diferentes relações h/L .

Deve-se notar ainda que este exemplo não apresenta travamento por cortante para $h \rightarrow 0$.

4.8.4 EXEMPLO 04

Este exemplo trata de uma viga bi-apoiada e submetida a um momento anti-horário concentrado no centro do vão como pode ser visto na Figura 4.9, juntamente com as demais características gerais do exemplo.

Os resultados foram obtidos para diferentes malhas de elementos com o intuito de verificar a influência direta de uma discretização inadequada na solução do problema.

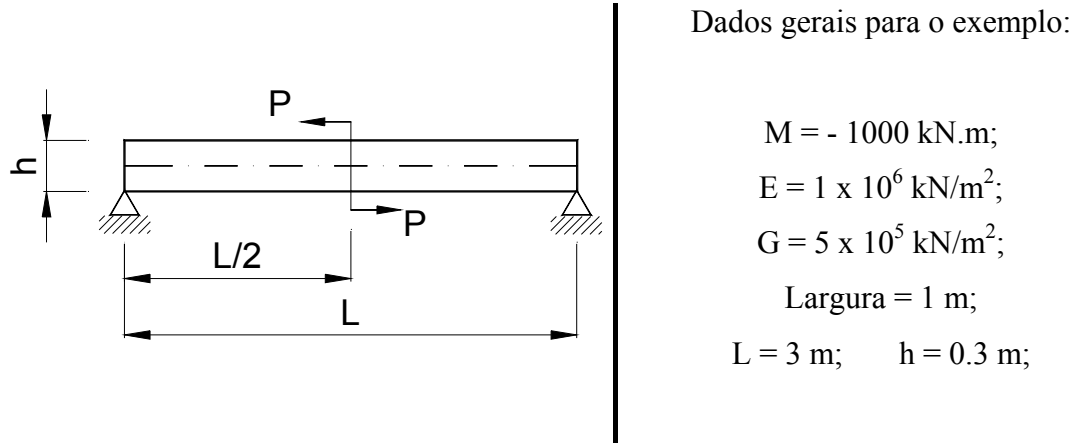


Figura 4.9 – Viga biapoiada com momento concentrado no meio do vão.

Foram utilizadas malhas contendo desde 2 até 7 elementos finitos e os resultados são apresentados em gráficos independentes, ou seja, apresenta-se um primeiro gráfico com as discretizações ímpares comparadas com o resultado analítico (teoria técnica de flexão) para o exemplo e um segundo gráfico com as discretizações pares também comparando-se com a resposta analítica do problema.

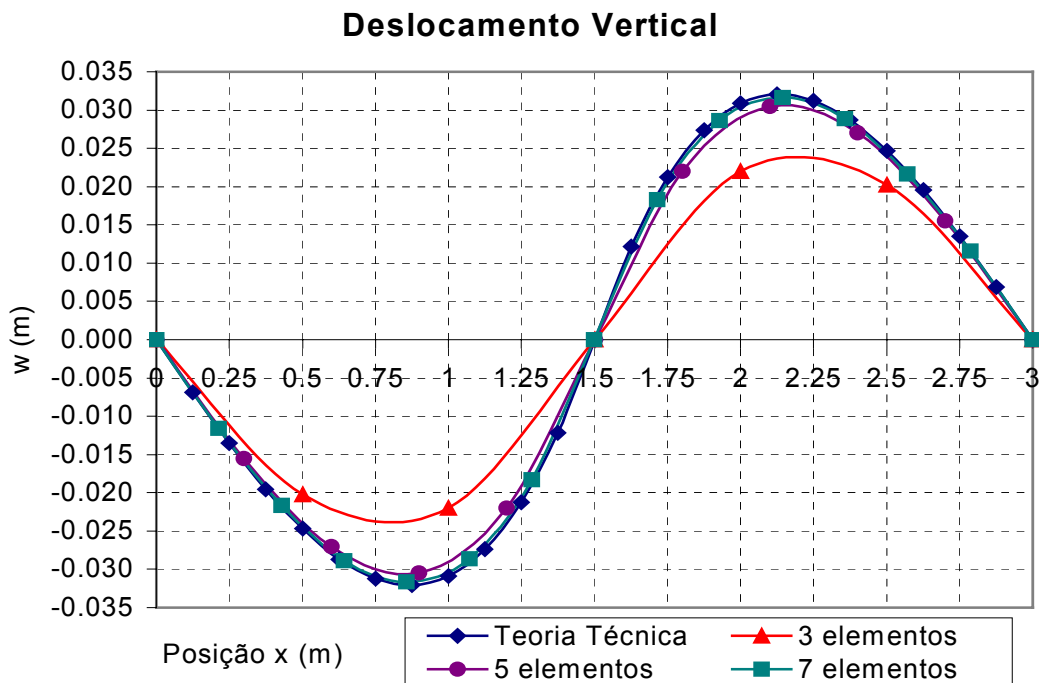


Figura 4.10 – Discretizações ímpares.

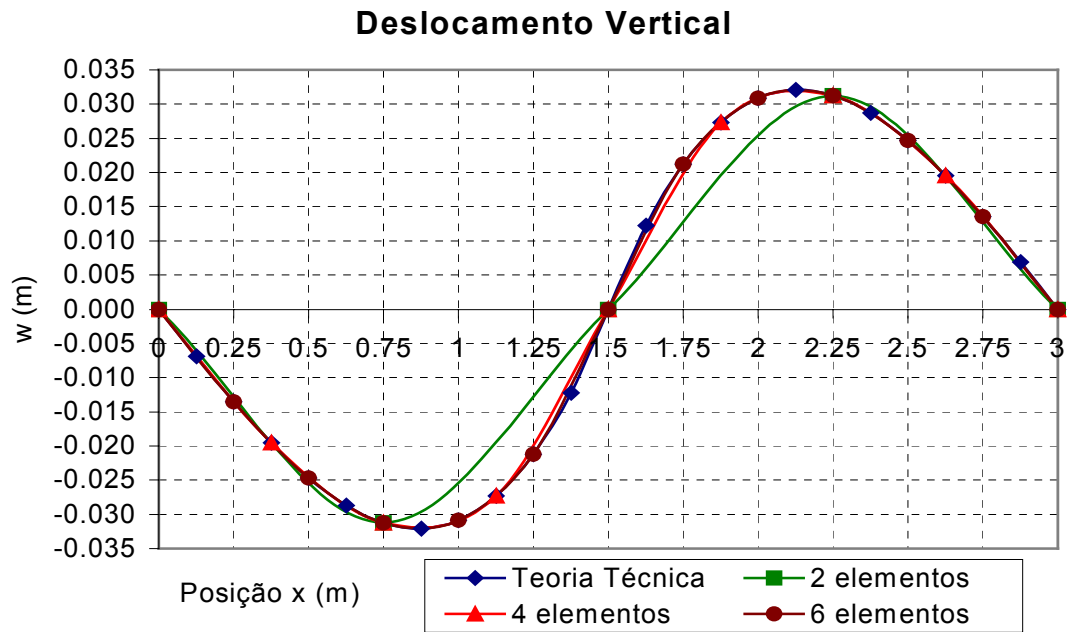


Figura 4.11 – Discretizações pares.

Como pode ser observado nos gráficos apresentados, uma discretização com dois elementos forneceu melhores resultados que uma discretização contendo 3 elementos. Essa verificação também pode ser feita continuamente para pares de discretizações par e ímpar.

No caso da primeira comparação, obtém-se tais resultados pelo fato de que com 3 elementos, a rotação do nó central da viga coincide com o nó central de um dos elementos obrigando que este elemento fique reto na sua configuração deformada. Isso não acontece com a discretização de 2 elementos, onde o nó central da viga coincide com um nó de extremidade do elemento, proporcionando uma maior adequação da aproximação com a forma final da viga.

Esse exemplo, apesar de simples, mostra claramente quão dependente da malha se torna a análise de elementos finitos, não somente no tocante ao número de elementos, mas também no posicionamento dos mesmos dentro da malha.

Aplicações não-lineares serão mostradas no capítulo 5.

CAPÍTULO 5

EXTENSÃO PARA ELEMENTO FINITO DE PÓRTICO LAMINADO 3D

5.1 INTRODUÇÃO

Analogamente ao elemento finito de pórtico 2D, apresenta-se um elemento finito de pórtico 3D com 6 graus de liberdade por nó e aproximação quadrática para tais graus de liberdade. Portanto, o elemento possui 3 nós sendo que para cada um dos nós são aproximadas três translações e três rotações. Da mesma forma, a cinemática a ser adotada é a utilizada para laminados e já foi introduzida na formulação do elemento de pórtico 2D.

Com o artifício de se adotar o eixo de referência fora do eixo da peça como já foi visto, é possível representar elementos com carregamentos excêntricos, tal como pilares com flexão oblíqua e vigas sujeitas à torção. A existência de “fibras” paralelas ao eixo de referência, permite que sejam considerados diferentes materiais tornando possível a representação de peças de seção composta com maior fidelidade, como por exemplo concreto armado.

5.2 CINEMÁTICA

Com o intuito de se representar seções mais gerais, a formulação aqui apresentada foi utilizada para camadas consideradas retangulares e triangulares, sendo suas características geométricas ilustradas na Figura 5.1 a seguir.

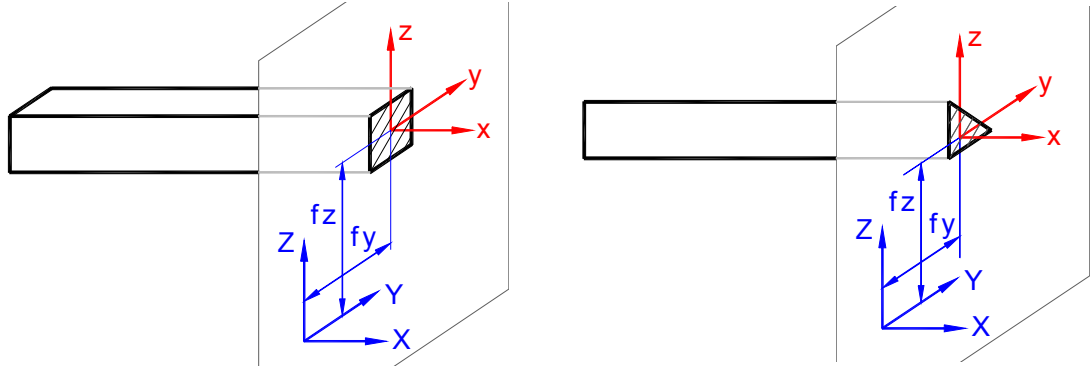


Figura 5.1 – Configuração para determinação da cinemática do elemento 3D.

A cinemática para o elemento de pórtico 3D assume portanto a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 u_p(x, y, z) &= u_0(X) - \theta_0^z(X) \cdot (f_Y + y) + \theta_0^Y(X) \cdot (f_Z + z) \\
 v_p(x, y, z) &= v_0(X) - \theta_0^X(X) \cdot (f_Z - f_{Zcc_cg} + z) \\
 w_p(x, y, z) &= w_0(X) + \theta_0^X(X) \cdot (f_Y - f_{Ycc_cg} + y)
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

onde f_{Zcc_cg} e f_{Ycc_cg} são as coordenadas do centro de torção (ou cisalhamento) da seção em relação ao centro de gravidade. O sentido positivo das rotações é dado pela regra da mão direita, ou seja, sentido destrógiro.

5.3 DEFORMAÇÕES

Seguindo os mesmos passos do elemento de pórtico 2D, tendo-se estabelecidas as relações cinemáticas para o problema, apresentam-se as expressões das deformações em um ponto “P” genérico de uma camada qualquer, sendo estas deformações dadas pelas derivadas dos deslocamentos apresentados em 5.1.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u_p(x, y, z)}{\partial x} \\
 \varepsilon_{xy} &= \frac{\gamma_{xy}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_p(x, y, z)}{\partial x} \right) \\
 \varepsilon_{xz} &= \frac{\gamma_{xz}}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p(x, y, z)}{\partial z} + \frac{\partial w_p(x, y, z)}{\partial x} \right)
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

5.4 TENSÕES

Apresentadas as expressões das deformações em 5.2, introduz-se a Lei Constitutiva do material utilizada e com isso determina-se as equações que fornecem os valores de tensão em um ponto “P” genérico de uma camada qualquer do elemento de pórtico.

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E \cdot \varepsilon_x \\ \tau_{xy} &= k \cdot G_{xy} \cdot \gamma_{xy} \\ \tau_{xz} &= k \cdot G_{xz} \cdot \gamma_{xz}\end{aligned}\tag{5.3}$$

Substituindo-se as derivadas das expressões de 5.1 em 5.2 e o resultado disto em 5.3 tem-se:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= E \cdot \left(\frac{\partial u_0(X)}{\partial X} - \frac{\partial \theta_0^z(X)}{\partial X} \cdot (f_Y + Y) + \frac{\partial \theta_0^y(X)}{\partial X} \cdot (f_Z + z) \right) \\ \tau_{xy} &= k \cdot G_{xy} \cdot \left(-\theta_0^z(X) + \frac{\partial v_0(X)}{\partial X} - \frac{\partial \theta_0^x(X)}{\partial X} \cdot (\bar{f}_Z + z) \right) \\ \tau_{xz} &= k \cdot G_{xz} \cdot \left(\theta_0^y(X) + \frac{\partial w_0(X)}{\partial X} + \frac{\partial \theta_0^x(X)}{\partial X} \cdot (\bar{f}_Y + Y) \right)\end{aligned}\tag{5.4}$$

onde: $\bar{f}_Y = f_Y - f_{Ycc_cg}$ e $\bar{f}_Z = f_Z - f_{Zcc_cg}$

Considerando-se a possibilidade de existência de tensões residuais para posterior inclusão de não-linearidade física, tem-se as expressões das tensões totais dadas por:

$$\begin{aligned}\sigma_x^t &= E \cdot \varepsilon_x - \sigma_x^r \\ \tau_{xy}^t &= k \cdot G_{xy} \cdot \gamma_{xy} - k \cdot \tau_{xy}^r \\ \tau_{xz}^t &= k \cdot G_{xz} \cdot \gamma_{xz} - k \cdot \tau_{xz}^r\end{aligned}\tag{5.5}$$

Na forma expandida, tem-se as expressões gerais para as tensões na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\sigma_x^t &= E \cdot \left(\frac{\partial u_0(X)}{\partial X} - \frac{\partial \theta_0^z(X)}{\partial X} \cdot (f_Y + Y) + \frac{\partial \theta_0^y(X)}{\partial X} \cdot (f_Z + z) \right) - \sigma_x^r \\
\tau_{xy}^t &= k \cdot G_{xy} \cdot \left(-\theta_0^z(X) + \frac{\partial v_0(X)}{\partial X} - \frac{\partial \theta_0^x(X)}{\partial X} \cdot (f_Z + z) \right) - k \cdot \tau_{xy}^r \\
\tau_{xz}^t &= k \cdot G_{xz} \cdot \left(\theta_0^y(X) + \frac{\partial w_0(X)}{\partial X} + \frac{\partial \theta_0^x(X)}{\partial X} \cdot (f_Y + Y) \right) - k \cdot \tau_{xz}^r
\end{aligned} \tag{5.6}$$

5.5 ESFORÇOS SOLICITANTES

Da mesma forma, os esforços solicitantes são obtidos integrando-se as tensões normal e de cisalhamento ao longo da largura e da espessura das camadas. Tais esforços são tomados em relação ao eixo de referência adotado para o problema, sendo as tensões normais calculadas em cada camada e posteriormente transferidas para o referido eixo, computando-se os momentos fletores provenientes da transferência dessas tensões normais. O mesmo procedimento ocorre com as tensões de cisalhamento, sendo que estas provocam momento torçor em relação ao eixo de referência.

5.5.1 FORÇA NORMAL

A força normal calculada para o ponto “P” de uma camada (ilustrada retangular) qualquer é dada pela equação 5.7 e é transferida para o eixo de referência adotado.

$$N = \int_A \sigma_x dA \tag{5.7}$$

5.5.2 FORÇA CORTANTE

Como expressões para o cisalhamento, tem-se em 5.8.

$$\begin{aligned}
V_y &= \int_A k \cdot \tau_{xy} dA \\
V_z &= \int_A k \cdot \tau_{xz} dA
\end{aligned} \tag{5.8}$$

Em 5.8, a constante “k” é um fator de correção adotado por ter-se considerado giro constante ao longo da espessura e largura do elemento de pórtico (seção plana) e conseqüentemente distribuição constante da tensão de cisalhamento ao longo da seção transversal da peça.

5.5.3 MOMENTOS FLETORES E MOMENTO TORÇOR

Os momentos fletores e o momento torçor são apresentados a seguir:

$$M_x = \int_A kk \cdot (\tau_{xz}(f_y + y) - \tau_{xy}(f_z + z)) dA$$

$$M_y = \int_A \sigma_x(f_z + z) dA$$

$$M_z = \int_A -\sigma_x(f_y + y) dA$$
5.9

Em 5.9, a nova constante “kk” que aparece na expressão é proveniente da correção em função da forma da seção para determinação do momento torçor. Este fator de forma varia, como o próprio nome diz, com a forma da seção transversal da peça em estudo - TIMOSHENKO e GOODIER (1982).

Da mesma forma que para o pórtico 2D, os momentos fletores e o momento torçor de 5.9 surgem como conseqüência da transferência das tensões normais e cisalhantes atuantes no eixo do elemento para o eixo de referência adotado para o problema. A distância entre os referidos eixos é a excentricidade que, dependendo do momento a ser calculado, é acrescida da coordenada “y” ou “z”, dependendo do caso, do ponto “P” com seu valor real, ou seja, considerando seu sinal.

Os sentidos positivos dos esforços solicitantes podem ser visualizados na Figura 5.2 a seguir.

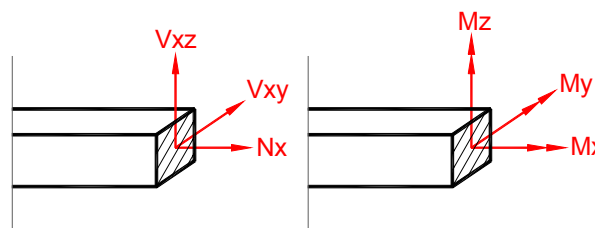


Figura 5.2 – Convenção de sinais para os esforços solicitantes.

5.6 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

É possível escrever as condições de equilíbrio aplicando o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) usando as forças internas, tal como MENEZES *et al.* (2001) para elemento de casca laminada e também como apresentado no item anterior para o elemento de pórtico bi-dimensional. Para este item, optou-se por utilizar o Princípio da Mínima Energia Potencial Total para representação das condições de equilíbrio.

Portanto, apresenta-se a expressão da Energia de Deformação para o problema e através dela obtém-se a matriz de rigidez e o vetor de cargas nodais envolvidos na formulação.

Vale salientar que, uma vez que as grandezas até aqui apresentadas são dadas em função dos graus de liberdades e de suas derivadas incluindo-se apenas a Lei constitutiva do material e indicando-se a integração ao longo da seção transversal da peça, a Energia de Deformação final também será expressa em função desses graus de liberdade e de suas derivadas. Isso possibilita a visualização da posterior introdução da aproximação de variáveis na formulação no ato da aplicação do método dos elementos finitos.

Portanto, tem-se a Energia de Deformação escrita da seguinte forma, levando-se em consideração a existência de tensões residuais para posterior introdução de não-linearidade física como dito anteriormente.

$$Energia = U = \int \left(\frac{1}{2} (\varepsilon_x \sigma_x + \gamma_{xy} \tau_{xy} + \gamma_{xz} \tau_{xz}) - (\varepsilon_x \sigma_x^r + \gamma_{xy} \tau_{xy}^r + \gamma_{xz} \tau_{xz}^r) \right) dV \quad 5.10$$

Substituindo-se os valores das grandezas envolvidas na equação 5.10 tem-se como resultado a expressão 5.11.

A Energia, a exemplo do que foi apresentado para o PTV, pode ser representada matricialmente agrupando-se os deslocamentos e suas respectivas derivadas em vetores e as grandezas relacionadas à cinemática, geometria e propriedades do material, em matrizes chamadas aqui de matrizes de contribuição. Uma posterior integração dessas matrizes ao longo do elemento irá fornecer a matriz de rigidez para o elemento de pórtico 3D laminado.

$$\begin{aligned}
 U = & \int \left(\frac{1}{2} \cdot E \cdot \left(\frac{\partial u_0(X)}{\partial X} - \frac{\partial \theta_0^Z(X)}{\partial X} \cdot (f_Y + Y) + \frac{\partial \theta_0^Y(X)}{\partial X} \cdot (f_Z + z) \right)^2 + \right. \\
 & \frac{1}{2} \cdot k \cdot G_{xy} \cdot \left(-\theta_0^Z(X) + \frac{\partial v_0(X)}{\partial X} - \frac{\partial \theta_0^X(X)}{\partial X} \cdot (\bar{f}_Z + z) \right)^2 + \\
 & \frac{1}{2} \cdot k \cdot G_{xz} \cdot \left(\theta_0^Y(X) + \frac{\partial w_0(X)}{\partial X} + \frac{\partial \theta_0^X(X)}{\partial X} \cdot (\bar{f}_Y + Y) \right)^2 - \\
 & \sigma_x^r \cdot \left(\frac{\partial u_0(X)}{\partial X} - \frac{\partial \theta_0^Z(X)}{\partial X} \cdot (f_Y + Y) + \frac{\partial \theta_0^Y(X)}{\partial X} \cdot (f_Z + z) \right) - \\
 & k \cdot \tau_{xy}^r \cdot \left(-\theta_0^Z(X) + \frac{\partial v_0(X)}{\partial X} - \frac{\partial \theta_0^X(X)}{\partial X} \cdot (\bar{f}_Z + z) \right) - \\
 & \left. k \cdot \tau_{xz}^r \cdot \left(\theta_0^Y(X) + \frac{\partial w_0(X)}{\partial X} + \frac{\partial \theta_0^X(X)}{\partial X} \cdot (\bar{f}_Y + Y) \right) \right) dV
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Para simplificar a expressão da Energia a ser apresentada, tem-se os vetores dos deslocamentos e suas derivadas representados por:

$$\{u\}^T = \{u_0 \ v_0 \ w_0 \ \theta_0^X \ \theta_0^Y \ \theta_0^Z\} \text{ e } \{u'\} = \{u'_0 \ v'_0 \ w'_0 \ \theta_0^{X'} \ \theta_0^{Y'} \ \theta_0^{Z'}\} \tag{5.12}$$

Portanto, a expressão da Energia assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{2} \int \left\{ \{u\}^T \cdot \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xy} \end{array} \right] \cdot \{u\} - 2 \cdot \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -k \cdot \tau_{xz}^r \\ -k \cdot \tau_{xy}^r \end{array} \right] \right\} + \\
 & \left\{ \{u\}^T \cdot \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{xz} & G_{xz}(\bar{f}_Y + y) & 0 & 0 \\ 0 & -G_{xy} & 0 & G_{xy}(\bar{f}_Z + z) & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \{u\} \right\} + \\
 & \left\{ \{u\}^T \cdot \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{xz} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \cdot \{u\} - 2 \cdot \left[\begin{array}{c} -\sigma_x^r \\ -k \cdot \tau_{xy}^r \\ -k \cdot \tau_{xz}^r \\ k \cdot \tau_{xy}^r(\bar{f}_Z + z) - k \cdot \tau_{xz}^r(\bar{f}_Y + y) \\ -\sigma_x^r \\ \sigma_x^r \end{array} \right] \right\} + \\
 & \left. \left\{ \{u\}^T \cdot \left[\begin{array}{cccccc} E & 0 & 0 & 0 & E \cdot (f_Z + z) & -E \cdot (f_Y + y) \\ 0 & G_{xy} & 0 & -G_{xy}(\bar{f}_Z + z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{xz} & G_{xz}(\bar{f}_Y + y) & 0 & 0 \\ 0 & -G_{xy}(\bar{f}_Z + z) & G_{xz}(\bar{f}_Y + y) & G_{xz}(\bar{f}_Y + y)^2 + G_{xy}(\bar{f}_Z + z)^2 & 0 & 0 \\ E \cdot (f_Z + z) & 0 & 0 & 0 & E \cdot (f_Z + z)^2 & -E \cdot (f_Z + z) \cdot (f_Y + y) \\ -E \cdot (f_Y + y) & 0 & 0 & 0 & -E \cdot (f_Z + z) \cdot (f_Y + y) & E \cdot (f_Y + y)^2 \end{array} \right] \cdot \{u\} \right\} dV
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

As matrizes que aparecem em 5.13, a exemplo do que foi feito para o pórtico 2D e em MENEZES *et al.* (2001) para elemento de casca laminada, serão aqui denominadas de “matrizes de contribuição” e serão utilizadas para posterior determinação da matriz de rigidez do elemento de pórtico. Isso se dará através da superposição dessas matrizes de contribuição tomadas após a introdução da aproximação de variáveis desejada, integradas ao longo da seção da peça e do elemento finito e diferenciadas em relação aos parâmetros nodais.

Analogamente, antes de se efetuar a referida integração, faz-se necessária portanto a introdução da aproximação de elementos finitos. Vale salientar que para qualquer aproximação desejada a formulação passa a ser modificada deste ponto em diante, não sendo necessário portanto que sejam refeitos todos os passos até aqui apresentados.

De forma genérica, para qualquer aproximação das variáveis, tem-se:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_0^X \\ \theta_0^Y \\ \theta_0^Z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \phi_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \phi_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \phi_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \phi_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi_n \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{Bmatrix} u_0^1 \\ v_0^1 \\ w_0^1 \\ \theta_0^{X2} \\ \theta_0^{Y2} \\ \theta_0^{Z2} \\ \vdots \\ u_0^n \\ v_0^n \\ w_0^n \\ \theta_0^{Xn} \\ \theta_0^{Yn} \\ \theta_0^{Zn} \end{Bmatrix}}_{\{\bar{u}\}} \\
 \begin{Bmatrix} u'_0 \\ v'_0 \\ w'_0 \\ \theta_0^{X'} \\ \theta_0^{Y'} \\ \theta_0^{Z'} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \phi'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \phi'_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \phi'_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi'_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \phi'_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \phi'_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \phi'_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \phi'_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi'_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi'_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \phi'_n \end{bmatrix} \cdot \{\bar{u}\}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

As funções de forma para a aproximação quadrática mencionada no início da formulação são as mesmas dadas em 4.16 sendo suas derivadas dadas em 4.17.

Adotada e introduzida a aproximação, substitui-se as expressões de 5.14 particularizadas para aproximação quadrática, na forma matricial da Energia em 5.13 e com isso são obtidas as matrizes análogas às obtidas em 4.19 antes ainda de se efetuar a integração ao longo da seção transversal e do eixo do elemento.

Finalmente, parte-se para a integração da expressão análoga à obtida em 4.19 e com isso pode-se encontrar a matriz de rigidez do elemento de pórtico laminado. A integração pode ser feita analiticamente ou numericamente e em tempo de processamento, em caso de programação. Neste trabalho a integração foi feita numericamente, principalmente para permitir o cálculo não-linear.

As expressões finais não foram aqui apresentadas por motivo de espaço, em função da matriz de rigidez resultante da integração ser de ordem 18×18 .

A adaptação da formulação para introdução de aproximação cúbica de variáveis foi realizada com o objetivo de se efetuar o acoplamento com o elemento de casca de mesma aproximação. Vale salientar que o programa permite que se utilize aproximação quadrática ou cúbica de variáveis, de acordo com a necessidade do usuário. Portanto, a implementação das duas aproximações de variáveis foi mantida no código computacional final deste trabalho.

5.7 INTERFACE GRÁFICA

Desenvolveu-se um aplicativo para geração do arquivo de entrada de dados a ser interpretado pelo programa de pórtico 3D. Tal aplicativo faz a leitura das camadas previamente definidas pelo usuário em um editor de arquivo “dxf” e desenha estas camadas na tela. Posteriormente, o aplicativo permite que o usuário subdivida estas camadas de forma a melhorar a discretização da seção transversal a fim de obter melhores resultados para problemas não-lineares.

Feita a subdivisão de acordo com as necessidades exigidas pelo usuário, parte-se para as próximas telas do programa onde serão definidas as características geométricas e dos materiais do problema a ser tratado, bem como condições de contorno envolvidas.

Vale salientar que esta ferramenta tem como finalidade facilitar a entrada de dados do programa. Ela não está ligada diretamente ao programa de pórtico 3D, gerando apenas um arquivo de entrada de dados podendo este ser alterado após sua geração. Sendo assim, é necessário que se execute o programa de pórtico 3D após a geração do arquivo de entrada.

Novamente, é importante saber que se o usuário não desejar utilizar o aplicativo para a geração do arquivo de entrada de dados, este deve ser criado de forma a respeitar a formatação exigida para posterior interpretação do programa de pórtico 3D.

Como ilustração, seguem algumas das telas do aplicativo desenvolvido para geração do arquivo de entrada de dados. Tais ilustrações são apenas exemplos de como o usuário estará interagindo com o aplicativo e aqui são apresentadas única e exclusivamente com este caráter.

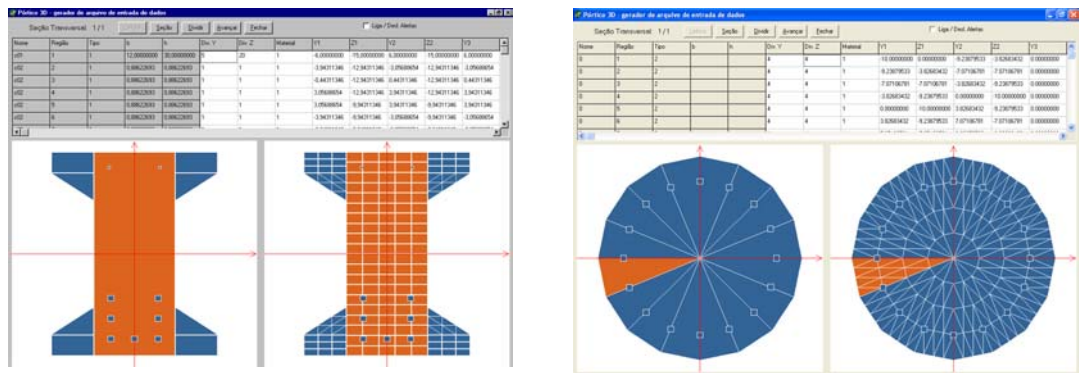


Figura 5.3 – Tela Inicial – subdivisão das camadas.

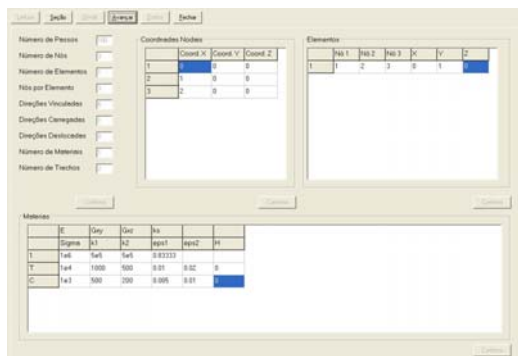


Figura 5.4 – Dados gerais e característica mecânica dos materiais.

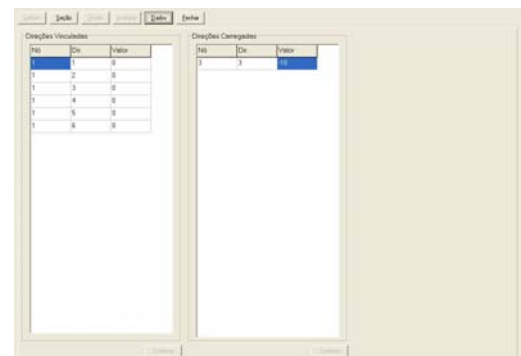


Figura 5.5 – Prescrição das condições de contorno.

5.8 NÃO-LINEARIDADE FÍSICA – ELEMENTO DE PÓRTICO

Modelos não-lineares foram introduzidos na formulação do elemento de pórtico 2D e pórtico 3D, considerando apenas um critério de plastificação que leva em consideração somente as tensões normais na seção transversal, ou seja, modelos não-lineares uniaxiais. Peca-se no sentido de não se estar considerando o efeito do cisalhamento na plastificação, porém, alguns exemplos foram testados e os resultados obtidos se encontram próximos dos experimentais para vigas de concreto pouco armada e super armada.

O modelo introduzido permite que se adote comportamentos diferentes na tração e compressão e permite ainda que em cada uma delas este comportamento seja multilinear, ou seja, composto de vários trechos com comportamento plástico diferente. Desta forma possibilita-se uma melhor representação das curvas tensão x deformação de materiais quaisquer (tanto matriz como reforço) obtidas em ensaios de laboratório.

5.8.1 MODELOS ELASTOPLÁSTICOS UNIAXIAIS

A não-linearidade física é aqui considerada na análise da estrutura segundo 4 modelos elastoplásticos uniaxiais usuais, que são: elastoplasticidade perfeita, elastoplástico com encruamento isotrópico, cinemático ou misto, sendo este último utilizado no programa e obtido através da combinação do isotrópico e do cinemático. Portanto, dependendo das constantes adotadas na análise do problema, o modelo pode degenerar para qualquer um dos demais modelos citados, pois a elastoplasticidade perfeita é uma particularização do modelo com encruamento isotrópico.

A seguir apresenta-se o critério de plastificação para o modelo com encruamento misto como sendo:

$$f(\sigma, k, q) = |\sigma - q| - (\sigma_y + H.k) \leq 0 \quad 5.15$$

Os parâmetros que aparecem na expressão 5.15 tem o seguinte significado:

- H define o “módulo plástico de encruamento isotrópico”;
- k é a evolução da deformação plástica até o instante da análise;
- q define a evolução da tensão de escoamento em cada instante;

No procedimento implementado não se prevê a atualização da matriz de rigidez, ou seja, não se determina a matriz de rigidez tangente em caso de plastificação fazendo então com que o programa tenha a necessidade de efetuar um maior número de iterações ou passos de correção para encontrar o equilíbrio num passo onde ocorra plastificação de algum elemento.

Outro ponto mencionado na introdução deste item é a possibilidade de se considerar comportamentos diferentes na tração e compressão para os materiais das camadas envolvidas na análise.

Um ponto importante a salientar com relação às camadas, é que à medida que o número dessas camadas é aumentado espera-se uma melhora dos resultados a serem obtidos, isto devido ao fato de um maior número de camadas implicar em um maior número de pontos para a integração numérica e conseqüentemente uma melhor representação do comportamento da seção transversal plastificada dos elementos. Em contrapartida, esse aumento do número de camadas provoca um substancial aumento do custo computacional envolvido no problema verificado pelo fato de que as variáveis envolvidas na resolução do sistema irão aparecer em número maior. Portanto, a discretização da seção transversal deve ser feita de forma coerente para representar adequadamente ou de forma próxima ao real o comportamento do problema, porém seguindo procedimentos criteriosos a fim de não ocorrer um comprometimento da simulação por motivos do alto custo computacional.

5.8.2 MULTILINEARIDADE DO DIAGRAMA TENSÃO X DEFORMAÇÃO

Com relação ao comportamento dos materiais, assim como foi dito anteriormente, tem-se no procedimento implementado a possibilidade de se considerar um comportamento multilinear para o diagrama tensão x deformação dos materiais. Isso possibilita uma melhor representação do comportamento dos materiais em caso de ocorrência de plastificação. Esse comportamento multilinear pode ser melhor visualizado na Figura 5.6 apresentada a seguir.

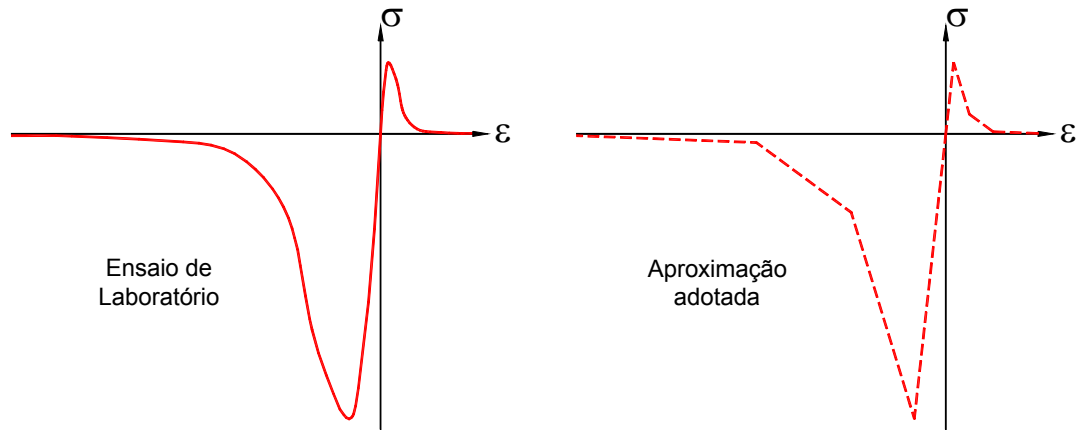


Figura 5.6 – Comportamento de um material frágil (concreto por exemplo).

Como pode ser visto, Figura 5.6, a aproximação adotada para o comportamento do material pode ser bem próxima do comportamento médio encontrado em laboratório. Essa aproximação pode ser cada vez mais fiel à medida que um maior número de trechos é introduzido no diagrama aproximado.

5.9 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

São apresentados 4 exemplos gerais de aplicação com o objetivo de verificar o comportamento da formulação de pórtico 3D apresentada. Os dois primeiros exemplos são lineares e são apresentados para verificação da formulação com relação ao comportamento 3D e efeito de torção. Os outros dois exemplos apresentados na sequência são simulações de ensaios realizados por TAKEYA (1972a,b), e ALVARES (1993) que consideraram vigas de concreto armado apoiadas nas duas extremidades e submetidas a carregamentos concentrados nos terços do vão. Para estes últimos, considera-se análise não-linear física para os modelos. Demais detalhes estão especificados em cada um dos exemplos que seguem.

5.9.1 EXEMPLO 01 – PILAR COM DUPLA EXCENTRICIDADE

Este exemplo simula o comportamento de um pilar com base engastada e extremidade superior livre submetido a um carregamento concentrado e excêntrico, sendo aplicado no eixo de uma das arestas do pilar como pode ser visto na Figura 5.7.

Os demais dados necessários para o exemplo também são apresentados na referida figura.

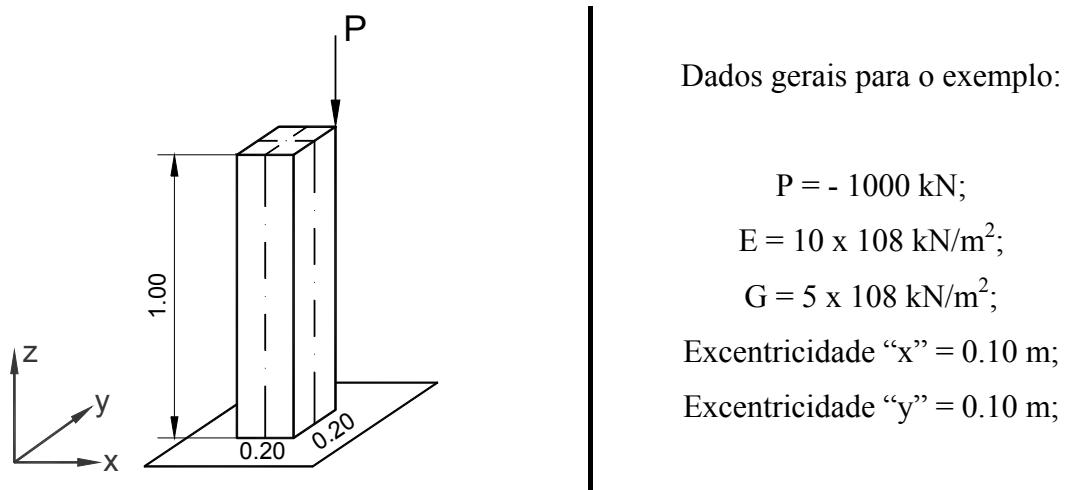


Figura 5.7 – Pilar com dupla excentricidade.

O sistema de referência adotado tem as direções dadas na Figura 5.7, com eixo “Z” coincidente com o eixo de aplicação do carregamento.

Esperam-se como resultados deste exemplo deslocamentos, horizontais e vertical, e rotação na extremidade livre do pilar em torno dos eixos “X” e “Y” devido ao efeito provocado pela excentricidade da carga de compressão aplicada no topo do mesmo. Tais resultados podem ser observados na Tabela 5.1 e são iguais aos determinados utilizando-se a teoria técnica de flexão.

Tabela 5.1 – Deslocamentos e rotações na extremidade livre do pilar.

Desl. X	Desl. Y	Desl. Z	Rot. X	Rot. Y	Rot. Z
0,0003750	0,0003750	-0,0001750	-0,0007500	0,0007500	0,0000000

5.9.2 EXEMPLO 02 – VIGA ENGASTADA DE SEÇÃO “L”

Este exemplo representa uma viga engastada submetida a um carregamento transversal aplicado na extremidade livre, Figura 5.8. Duas situações são consideradas: (a) a carga está aplicada no centro de cisalhamento da seção transversal (b) a carga está aplicada no centro de gravidade da seção transversal, como apresentado na Figura 5.8. Foram utilizados 3 elementos finitos para a simulação deste exemplo.

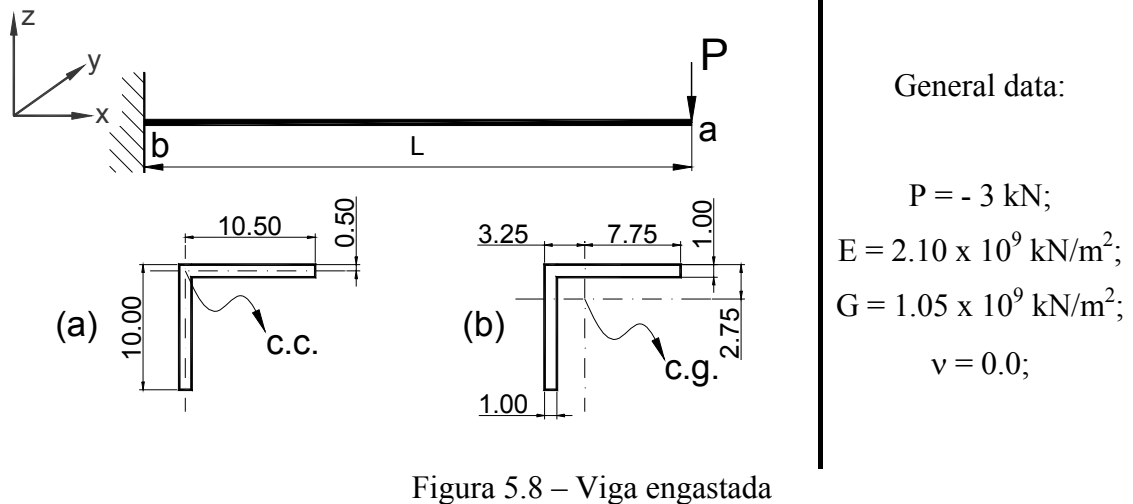


Figura 5.8 – Viga engastada

Elemento finito com aproximação quadrática foi utilizado para rodar este problema. Os resultados são apresentados na Tabela 5.2. É importante salientar que os deslocamentos são medidos no eixo de referência, isto é, cc ou cg para cada caso.

Tabela 5.2 – Deslocamentos e rotações para as duas situações (m e rad) - (ponto a)

Situação	Desl. X	Desl. Y	Desl. Z	Rot. X	Rot. Y	Rot. Z
(a)	0,000197	0,005461	-0,010410	0,000000	0,005341	0,002807
(b)	0,000000	0,005459	-0,010410	-0,000067	0,005341	0,002807

Como esperado, para situação (b) surgiram efeitos de torção enquanto para situação (a) isto não ocorre. Para situação (a), como as fibras superiores da estrutura estão tracionadas, são esperados deslocamentos na direção “X”, para situação (b), como o eixo de referência está no centro de gravidade da seção transversal, não aparecerão deslocamentos na direção “X”.

5.9.3 EXEMPLO 03 – VIGA DE CONCERTO POUCO ARMADA

A viga de concreto armado deste exemplo tem comprimento de 1.35 m e seção transversal de 11.4x10 cm, sendo apoiada nas duas extremidades e sofrendo um carregamento concentrado nos terços do vão como ilustra a Figura 5.9. Tal como no ensaio de laboratório, o exemplo foi rodado considerando controle de deslocamento nos pontos de aplicação das cargas, ou seja, foram aplicados passos de recalques em lugar dos passos de carga nos pontos carregados indicados na Figura 5.9.

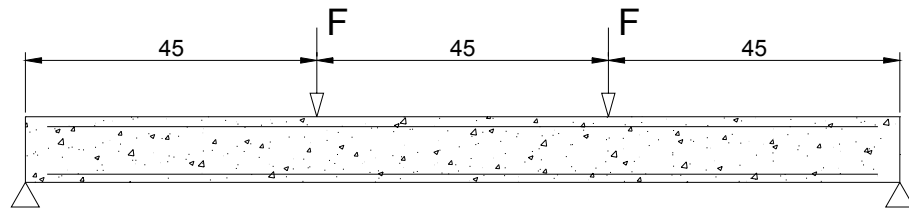


Figura 5.9 – Esquema estrutural.

A viga possui armadura longitudinal superior constituída por $2\phi 10$ mm e armadura longitudinal inferior também constituída por $2\phi 10$ mm. A disposição das armaduras está detalhada na Figura 5.10, sendo que na Figura 5.11 encontra-se a seção transversal equivalente adotada para o exemplo.

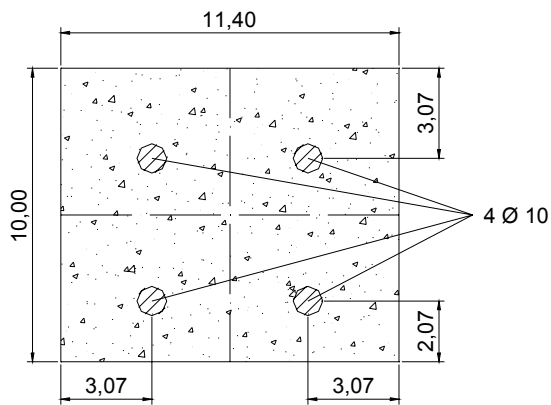


Figura 5.10 – Seção transversal.

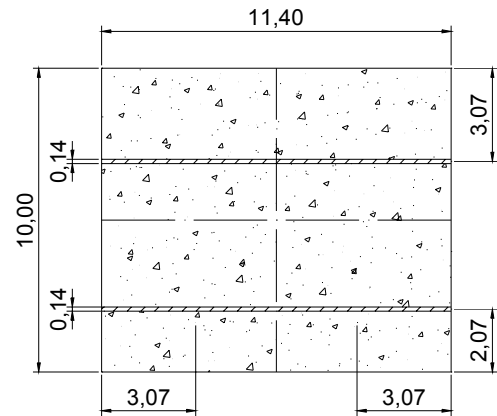


Figura 5.11 – Seção equivalente.

As áreas de armaduras adotadas para a seção equivalente são iguais às áreas das barras adotadas para a viga diferindo apenas no formato porém mantendo-se a mesma posição do centro de gravidade, tal como pode ser visto na Figura 5.11, desta forma economiza-se na integração não prejudicando a qualidade da resposta.

Inicialmente, a seção de concreto foi dividida em 3 partes. Após esta primeira divisão utilizada para entrada de dados, as faixas de concreto sofreram uma segunda divisão com o intuito de melhorar o comportamento da resposta não-linear na seção transversal. As faixas de concreto externas sofrem uma divisão em 4 partes iguais cada e a faixa central sofreu uma divisão em 6 partes iguais. As faixas referentes ao aço não sofreram subdivisão por serem consideradas de espessura satisfatória. Portanto, a seção transversal deste exemplo é composta de 16 camadas entre concreto e aço, sendo que para cada camada foram adotados 16 (4×4) pontos de Gauss para efeito de integração numérica na seção transversal.

Na longitudinal a viga foi dividida em 10 elementos finitos de diferentes tamanhos com uma maior concentração no centro do vão para se obter uma melhor representação da seção onde se inicia a plastificação.

O concreto foi adotado com diferentes comportamentos para tração e compressão e a curva tensão x deformação do material foi aproximada por 3 trechos com constantes elásticas diferentes. Tal comportamento é descrito com os dados da Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Constantes elásticas do concreto.

Tensão de Escoamento	Elástico	Tremos			Unidades kgf e cm
		1º	2º	3º	
Tração 3×10^1	44×10^4	0	-12.95×10^4	0	E_{trecho}
		6.8×10^{-5}	30×10^{-5}	45×10^{-5}	Deformação
Comp. 22×10^1	44×10^4	32×10^4	2×10^4	0	E_{trecho}
		0.5×10^{-3}	1×10^{-3}	2×10^{-3}	Deformação

Para o aço, foram adotados 2 trechos para o diagrama tensão x deformação, ou seja, material plástico perfeito e comportamento igual para tração e compressão. Os valores adotados para o aço são:

Tensão de escoamento: 5×10^3 kgf/cm²; Módulo de Elasticidade: 196×10^4 kgf/cm².

A Figura 5.12 ilustra os resultados de deslocamentos verticais no centro do vão obtidos para o exemplo comparados com a faixa de resultados experimentais. Como dito anteriormente, foram aplicados recalques de 2 cm nos pontos indicados como carregados na Figura 5.9.

Como pode-se observar, os resultados são plenamente satisfatórios mostrando a eficiência do elemento laminado em modelar materiais compostos como o concreto armado. Acredita-se que a pequena diferença entre as respostas se refere ao fato de não se estar considerando o cisalhamento no critério de plastificação. Outro fator é o da não consideração do deslizamento entre a armadura e o concreto, podendo causar um enrijecimento na fase final do problema.

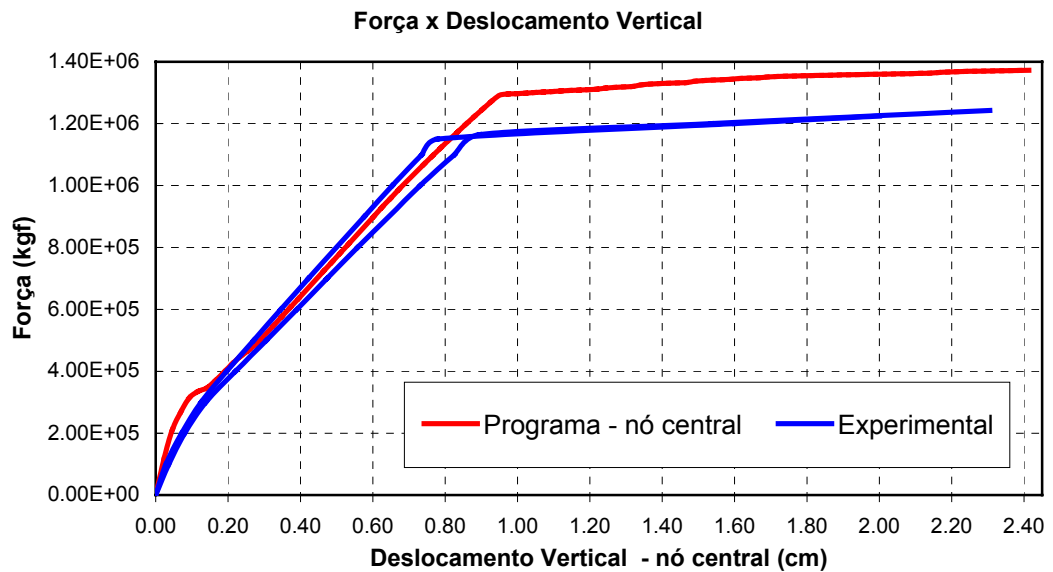


Figura 5.12 – Deslocamento vertical no centro do vão – Experimental e Numérico

5.9.4 EXEMPLO 04 – VIGA DE CONCRETO SUPER ARMADA

Para este exemplo, a viga de concreto armado possui comprimento de 2.40 m e seção transversal de 12x30 cm, sendo também apoiada nas duas extremidades e sofrendo um carregamento concentrado nos terços do vão como ilustra a Figura 5.13. Porém, da mesma forma que para o exemplo 1, este foi rodado considerando controle de deslocamento nos pontos de aplicação das cargas, ou seja, foram aplicados passos de recalques em lugar dos passos de carga nos pontos carregados indicados na Figura 5.13.

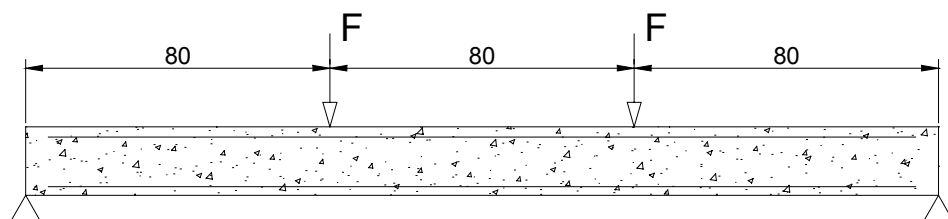


Figura 5.13 – Esquema estrutural.

A viga deste exemplo possui armadura longitudinal superior constituída por $2\phi 5$ mm e armadura longitudinal inferior constituída por $7\phi 10$ mm sendo que a disposição de tais armaduras está detalhada na Figura 5.14. A Figura 5.15 ilustra a seção transversal equivalente adotada para o exemplo tal como mostrado para o exemplo anterior.

Novamente, as áreas de armaduras adotadas para a seção equivalente são iguais às áreas das barras adotadas para a viga diferindo apenas no formato porém mantendo-se a mesma posição do centro de gravidade, tal como pode ser visto na Figura 5.15.

A seção de concreto neste exemplo foi considerada maciça, adotando-se uma simplificação e não sendo descontada a área de concreto em comum com a área de aço por ser esta considerada pequena em relação a área total de concreto da seção transversal.

De forma análoga ao apresentado para o exemplo anterior, a camada de concreto sofreu uma divisão na direção vertical em 50 partes iguais com o intuito de melhorar o comportamento da resposta não-linear na seção transversal. Novamente, as camadas referentes ao aço não sofreram subdivisão por serem consideradas de dimensões satisfatórias. Portanto, a seção transversal deste exemplo é composta de 59 camadas entre concreto e aço sendo que para cada camada foram adotados 16 pontos de Gauss para efeito de integração numérica.

Na longitudinal manteve-se a divisão da viga em 10 elementos finitos de diferentes tamanhos possuindo também uma maior concentração no centro do vão para se obter uma melhor representação da seção onde se inicia a plastificação

Da mesma forma, o concreto foi adotado com diferentes comportamentos para tração e compressão e a curva tensão x deformação do material foi aproximada por 5 trechos com constantes elásticas diferentes para compressão e 3 para tração. Tal comportamento é descrito com os dados da Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Constantes elásticas do concreto.

Tensão de Escoamento	Elástico	Tuchos					Unidades kgf e cm
		1°	2°	3°	4°	5°	
T _F 2x10 ¹	2.5x10 ⁵	0	-2.5x10 ⁵	0	-	-	E _{trecho}
		0.8x10 ⁻⁴	1.6x10 ⁻⁴	2.4x10 ⁻⁴	-	-	Deformação
C _{Comp.} 2x10 ²	2.5x10 ⁵	7x10 ⁴	3.85x10 ³	0	-8.15x10 ⁴	0	E _{trecho}
		0.8x10 ⁻³	1.8x10 ⁻³	3.1x10 ⁻³	8x10 ⁻³	10.9x10 ⁻³	Deformação

O aço foi adotado idêntico ao exemplo anterior, ou seja, foram adotados 2 trechos para o diagrama tensão x deformação e comportamento igual para tração e compressão. Os valores adotados para o aço são:

Tensão de escoamento: 5×10^3 kgf/cm²; Módulo de Elasticidade: 196×10^4 kgf/cm².

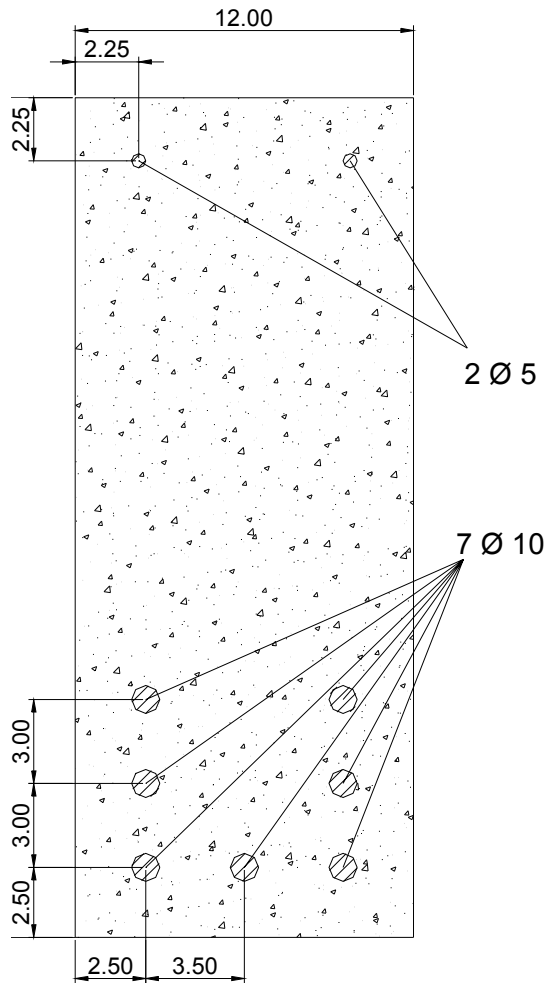


Figura 5.14 – Seção transversal.

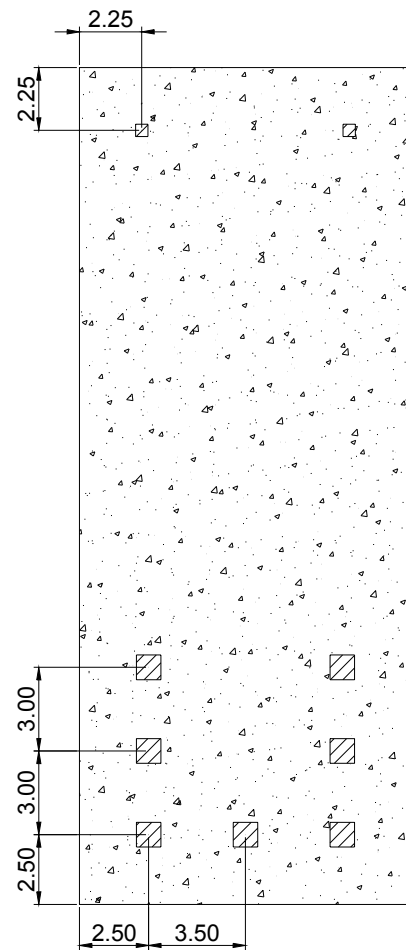


Figura 5.15 – Seção equivalente.

A Figura 5.16 ilustra os resultados de deslocamentos verticais no centro do vão obtidos para o exemplo comparados com a faixa de resultados experimentais. Como dito anteriormente, foram aplicados recalques de 2 cm nos pontos indicados como carregados na Figura 5.13.

Novamente, o enrijecimento numérico pode estar relacionado a mecanismos não acoplados no modelo como cisalhamento e deslizamento de armadura.

Algumas considerações podem ser apresentadas sobre os resultados obtidos nos dois últimos exemplos. Tais resultados são considerados satisfatórios pois além da simplificação adotada para a lei de plastificação nenhum dos parâmetros obtidos em ensaio foi modificado ou mesmo adequado para que os resultados encontrados pudessem ser mais próximos dos resultados de ensaio obtidos. Tais parâmetros apenas foram lançados no exemplo e os resultados obtidos de forma a verificar o funcionamento do programa. Talvez uma melhor discretização da seção transversal da

peça venha a surtir efeitos positivos nos resultados, porém não pode ser esquecido o aumento do custo computacional que tal modificação acarreta.

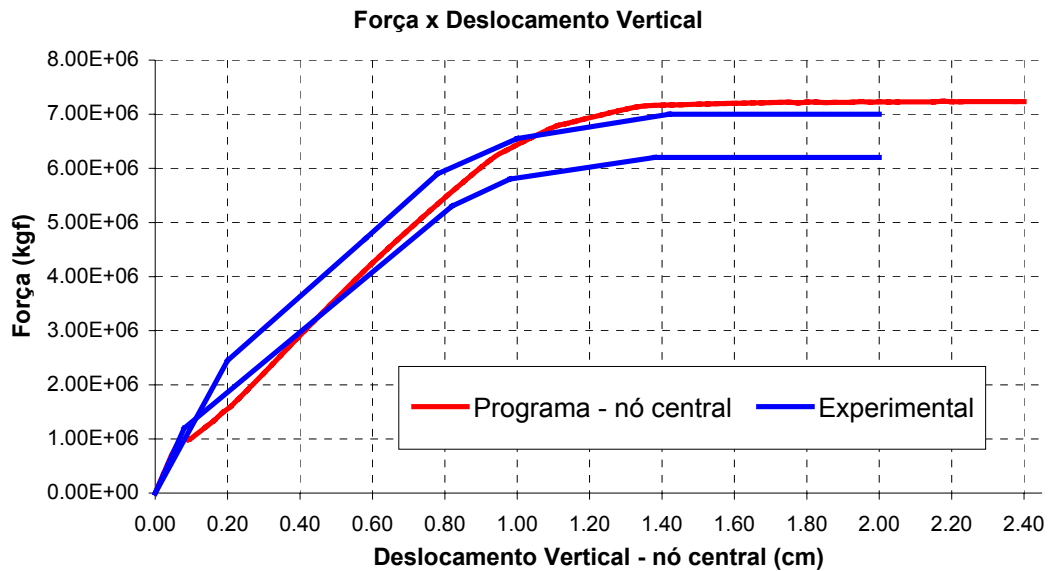


Figura 5.16 – Deslocamento vertical no centro do vão – Experimental e Numérico

Além da discretização, outro ponto de forte influência nos resultados é a representação da curva tensão x deformação do concreto que, apesar de se ter adotado vários trechos para sua representação, baseando-se em ensaios de compressão obtidos nas referências, pode-se estar pecando na representação destes valores para compressão e principalmente para a tração onde se estima uma resistência em torno de 10% do valor da sua resistência à compressão.

CAPÍTULO 6

FORMULAÇÃO PARA O ELEMENTO FINITO DE CASCA LAMINADA

6.1 INTRODUÇÃO

De maneira similar ao que foi apresentado para o elemento de pórtico e desenvolvido em PACCOLA (2001), com base nos trabalhos de MENEZES e DEVLOO (2000) e DEVLOO *et al.* (1999), para o elemento de placa quadrilateral com aproximação linear e quadrática de variáveis, propõe-se o desenvolvimento de um elemento de casca (fóliculos triangulares planos) com cinemática de laminados ou Reissner geral. Novamente, as rotações em relação aos eixos da casca são tomadas como variáveis independentes da derivada do deslocamento vertical em relação aos eixos. Com isso, seções inicialmente planas permanecem planas mas não obrigatoriamente perpendiculares à superfície da placa. Os elementos das camadas podem possuir diferentes características mecânicas e em direções diferentes, podendo assim ser adotados materiais ortotrópicos distintos para cada lâmina. Com isso, se alcança um comportamento anisotrópico para o conjunto das camadas em questão. Adota-se aproximação quadrática ou cúbica para os parâmetros nodais, sendo estes 3 translações e 3 rotações independentes entre si. O elemento finito adotado tem forma triangular possuindo 6 ou 10 nós, dependendo da aproximação adotada.

Vale salientar que esta cinemática, para problemas lineares, foi estudada e implementada em PACCOLA (2001) utilizando-se elementos quadrilaterais de 4, 8 e 9 nós. Apresenta-se neste item a formulação do elemento triangular introduzindo-se de forma simples, os termos não-lineares na formulação em forma de tensões residuais.

A consideração de ortotropia para os materiais acarreta a imposição de uma condição que estabelece uma relação entre os módulos de elasticidade longitudinais e coeficientes de Poisson nas duas direções de ortotropia ou direção das fibras (1 e 2). Essa condição é apresentada na equação 6.1. Simplificações para o estado plano de tensões foram admitidas bem como consideração de pequenos deslocamentos e pequenas deformações

$$E_1\nu_2 = E_2\nu_1 \quad 6.1$$

A verificação da presente formulação com relação ao efeito de travamento por cortante se faz necessária em função do grande número de informações encontradas na literatura, onde se afirma que elementos baseados em deslocamentos apresentam travamento. Neste sentido, exemplos são apresentados no capítulo 10 com a finalidade de se verificar o real comportamento da formulação com relação a este efeito indesejável.

A seqüência para o desenvolvimento da formulação é basicamente a mesma apresentada para o elemento de pórtico, sendo complementada apenas no tocante às características relacionadas a ortotropia considerada para os materiais.

6.2 CINEMÁTICA

A cinemática apresentada a seguir é utilizada em alguns trabalhos referentes ao estudo de laminados e fornece os deslocamentos no plano médio das lâminas em função dos deslocamentos em relação a um plano de referência previamente adotado paralelo, porém excêntrico, ao plano médio da lâmina.

Portanto, tem-se a cinemática expressa na forma apresentada em 6.2:

$$\begin{aligned} u_p(x, y, x) &= u(X) + \theta_y(X) \cdot (f_z + z) \\ v_p(x, y, x) &= v(X) - \theta_x(X) \cdot (f_z + z) \\ w_p(x, y, x) &= w(X, Y) \end{aligned} \quad 6.2$$

Para facilitar a visualização dos deslocamentos equacionados nas expressões da cinemática, a exemplo do que foi feito para pórtico 2D e 3D, apresenta-se a Figura 6.1 a seguir:

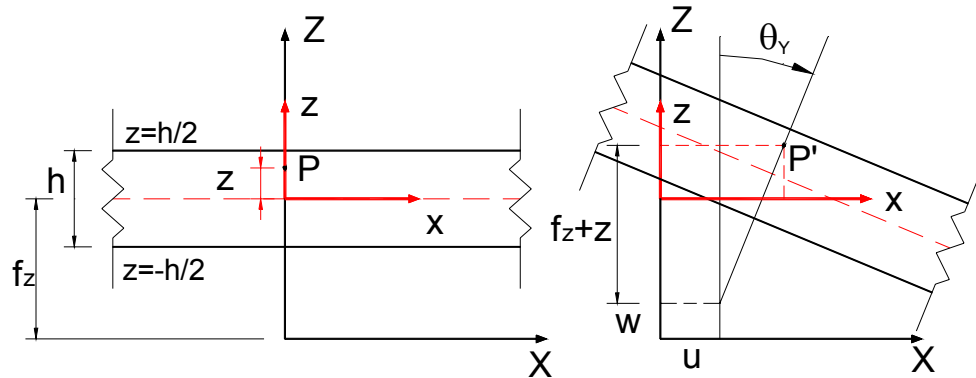


Figura 6.1 – Cinemática para um ponto “P” qualquer.

Para facilitar o desenvolvimento do formalismo matemático envolvido na formulação do elemento de casca, admite-se inicialmente que os eixos ou direções das fibras coincidam com o sistema de referência local adotado para cada elemento (eixos em vermelho na Figura 6.1). Esse sistema local possui os eixos “x” e “y” no plano do elemento, tendo o eixo “x” direção dada pela incidência dos nós 1 e 2 do elemento. O eixo “y” por sua vez é perpendicular a “x” e em sentido destrógiro em relação ao eixo “x” em torno do eixo “z” perpendicular ao plano do elemento e de orientação para cima. Obtidas as matrizes para este sistema de referência, basta aplicar rotações nestas para se obter os coeficientes envolvidos na formulação em relação a outros sistemas de referência.

6.3 DEFORMAÇÕES

Uma vez que se está formulando um elemento de casca, adota-se na presente formulação a rotação absoluta θ_z da camada em torno do eixo perpendicular ao plano do elemento de casca, tal como em MENEZES & DEVLOO (2000).

A essa rotação, faz-se corresponder uma deformação fictícia ϵ_{θ_z} calculada no plano de referência (abscissa “- f”). Essa deformação fictícia associa uma medida de deformação à diferença entre θ_z e o movimento de corpo rígido correspondente à rotação infinitesimal do plano de referência em torno do eixo z, no ponto calculado, e é dada por:

$$\epsilon_{\theta_z} = \theta_z(x_r, y_r) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_p(x, y, -f)}{\partial x} - \frac{\partial u_p(x, y, -f)}{\partial y} \right) \quad 6.3$$

As deformações do ponto P são calculadas em função dos seus deslocamentos de translação no sistema de referência local e são apresentadas na equação 6.4. Vale salientar que são adotadas hipóteses de estado plano de tensão.

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{\theta z} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_p(x, y, z)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_p(x, y, z)}{\partial y} \\ \theta_z(x_r, y_r) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_p(x, y, -f)}{\partial x} - \frac{\partial u_p(x, y, -f)}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_p(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial u_p(x, y, z)}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_p(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_p(x, y, z)}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_p(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_p(x, y, z)}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad 6.4$$

6.4 TENSÕES

A consideração da lei constitutiva, para materiais ortotrópicos, juntamente com as expressões apresentadas para as deformações, dadas em função das derivadas dos deslocamentos, fornece as tensões num ponto do elemento de casca. Considerando-se a possibilidade de existência de tensões residuais para posterior inclusão de não-linearidade física no problema, tem-se:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{\theta z} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{E_x(\varepsilon_x + \nu_y \varepsilon_y)}{1 - \nu_x \nu_y} - \sigma_x^r \\ \frac{E_y(\varepsilon_y + \nu_x \varepsilon_x)}{1 - \nu_x \nu_y} - \sigma_y^r \\ S \varepsilon_{\theta z} \\ kG_{xz} \gamma_{xz} - k \tau_{xz}^r \\ kG_{yz} \gamma_{yz} - k \tau_{yz}^r \\ G_{xy} \gamma_{xy} - \tau_{xy}^r \end{Bmatrix} \quad 6.5$$

onde S é uma constante fictícia definida no item 6.5.3.

A exemplo do que foi apresentado para o elemento de pórtico, as expressões obtidas estão em função das derivadas dos deslocamentos e giros, uma vez que são estes que serão aproximados pelo Método dos Elementos Finitos. Esta aproximação de variáveis será introduzida na formulação após a apresentação da expressão do equilíbrio do problema dada pela energia potencial total.

6.5 ESFORÇOS SOLICITANTES

Os esforços solicitantes por unidade de comprimento são indicados a seguir nas equações de 6.6 à 6.8 e são dados pela integração das respectivas tensões ao longo da espessura do elemento finito. Vale salientar que esses esforços são calculados no Plano de Referência adotado para o problema excêntrico ao plano médio da casca em função do sistema de referência local para cada camada.

6.5.1 FORÇAS NORMAIS

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_x dz, \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_y dz \quad \text{e} \quad N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{xy} dz \quad 6.6$$

6.5.2 FORÇAS CORTANTES

$$V_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k\tau_{xz} dz \quad \text{e} \quad V_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} k\tau_{yz} dz \quad 6.7$$

A constante “k” que aparece em 6.7 é um coeficiente de correção entre a distribuição de tensões devido à força cortante, adotada constante ao longo da espessura da placa, e a real distribuição dessas tensões de cisalhamento. Para este trabalho, da mesma forma que em REDDY (1989) e MENEZES e DEVLOO (2000), “k” assume o valor de 5/6. Este parâmetro pode ser melhorado com base em estudos mais elaborados efetuados por OWEN & FIGUEIRAS (1983b), onde dependendo da espessura e materiais das camadas determina-se um coeficiente de correção específico para cada problema em análise.

6.5.3 MOMENTOS FLETORES E VOLVENTE

$$M_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z+f) \sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z+f) \sigma_y dz \quad \text{e} \quad M_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (z+f) \tau_{xy} dz \quad 6.8$$

Os momentos M_x e M_y são denominados Momentos Fletores e M_{xy} é designado de Momento Volvente.

Além destes, para a representação do problema das cascas, considera-se também um momento fictício $M_{\theta z} = Sh\varepsilon_{\theta z}$, associado à deformação fictícia correspondente à θz . O valor da constante S utilizado neste trabalho, seguindo o proposto em MENEZES e DEVLOO (2000) é um valor considerado pequeno e igual a $10^{-6}E_x$, onde E_x é o módulo de elasticidade longitudinal na direção “x” do material.

Esta grandeza é muito importante na análise de cascas abatidas e placas utilizando-se o elemento proposto, pois evita que singularidades presentes em formulações usuais de casca composta por folículos planos venham a surgir.

Da mesma forma que para o pórtico, os momentos fletores surgem como consequência da transferência dos esforços normais atuantes no plano médio das camadas do elemento para o eixo de referência adotado para o problema.

6.6 ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

A representação das condições de equilíbrio para o problema é realizada através da utilização do Princípio da Mínima Energia Potencial Total. Neste sentido, pode-se escrever a expressão da Energia de Deformação para o problema e obter-se a matriz de rigidez e o vetor de cargas nodais para a presente formulação. Da mesma forma que o apresentado para a formulação de pórtico, uma vez que as grandezas até aqui apresentadas são dadas em função dos graus de liberdades e de suas derivadas, incluindo-se apenas a lei constitutiva do material e indicando-se a integração ao longo da espessura das camadas do elemento de casca, a Energia de Deformação final também será expressa em função desses graus de liberdade e de suas derivadas. Isso possibilita a visualização da posterior introdução da aproximação de variáveis a ser utilizada na formulação. Portanto, tem-se:

$$U = \int \left[\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} - \{\varepsilon\}^T \{\sigma^r\} \right] dV \quad 6.9$$

Substituindo-se as equações das deformações e tensões encontradas anteriormente podemos escrever a expressão geral da energia para a presente formulação. Em função dos termos a serem substituídos, a expressão torna-se longa para ser trabalhada manualmente.

Para tanto, seguindo metodologia descrita em PACCOLA (2001), pode-se agrupar os deslocamentos e suas respectivas derivadas em vetores e as grandezas relacionadas à cinemática, geometria e propriedades do material em matrizes denominadas matrizes de contribuição. Uma posterior integração dessas matrizes ao longo do elemento fornecerá a matriz de rigidez do elemento de casca.

Para simplificar a expressão da Energia a ser apresentada, têm-se os vetores dos deslocamentos e de suas derivadas representados por:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta_0^x \\ \theta_0^y \\ \theta_0^z \end{Bmatrix}, \quad \{u'_x\} = \begin{Bmatrix} u'_x \\ v'_x \\ w'_x \\ \theta'_{X,x} \\ \theta'_{Y,x} \\ \theta'_{Z,x} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{u'_y\} = \begin{Bmatrix} u'_y \\ v'_y \\ w'_y \\ \theta'_{X,y} \\ \theta'_{Y,y} \\ \theta'_{Z,y} \end{Bmatrix} \quad 6.10$$

Após se ter efetuado uma manipulação matemática da expressão geral obtida, esta assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \int \left[\{u\}^T [M_{00}] \{u\} + \{u\}^T [M_{0x}] \{u'_x\} + \right. \\ \left. \{u'_x\}^T [M_{x0}] \{u\} + \{u\}^T [M_{0y}] \{u'_y\} + \{u'_y\}^T [M_{y0}] \{u\} + \right. \\ \left. \{u'_y\}^T [M_{xy}] \{u'_x\} + \{u'_x\}^T [M_{yx}] \{u'_y\} + \{u'_x\}^T [M_{xx}] \{u'_x\} + \right. \\ \left. \{u'_y\}^T [M_{yy}] \{u'_y\} + 2 \{u\}^T [\bar{M}_{00}] \{\sigma^r\} + \right. \\ \left. 2 \{u'_x\}^T [\bar{M}_{10}] \{\sigma^r\} + 2 \{u'_y\}^T [\bar{M}_{20}] \{\sigma^r\} \right] dV \quad 6.11 \end{aligned}$$

onde a lei constitutiva para o material e as 9 matrizes de contribuição são dadas por:

$$\begin{aligned}
 C &= \begin{bmatrix} \frac{E_x}{(1-\nu_1\nu_2)} & \frac{\nu_2 E_x}{(1-\nu_1\nu_2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_2 E_x}{(1-\nu_1\nu_2)} & \frac{E_y}{(1-\nu_1\nu_2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{xz} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{yz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \\
 M_{xx} &= \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 & 0 & C_{11}(f_z+z) & 0 \\ 0 & \frac{C_{33}}{4} + C_{66} & 0 & -C_{66}(f_z+z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & kC_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{66}(f_z+z) & 0 & C_{66}(f_z+z)^2 & 0 & 0 \\ C_{11}(f_z+z) & 0 & 0 & 0 & C_{11}(f_z+z)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 M_{yy} &= \begin{bmatrix} \frac{C_{33}}{4} + C_{66} & 0 & 0 & 0 & C_{66}(f_z+z) & 0 \\ 0 & C_{22} & 0 & -C_{22}(f_z+z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & kC_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{22}(f_z+z) & 0 & C_{22}(f_z+z)^2 & 0 & 0 \\ C_{66}(f_z+z) & 0 & 0 & 0 & C_{66}(f_z+z)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 M_{xy} &= \begin{bmatrix} 0 & C_{12} & 0 & -C_{12}(f_z+z) & 0 & 0 \\ -\frac{C_{33}}{4} + C_{66} & 0 & 0 & 0 & C_{66}(f_z+z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{66}(f_z+z) & 0 & 0 & 0 & -C_{66}(f_z+z)^2 & 0 \\ 0 & C_{12}(f_z+z) & 0 & -C_{12}(f_z+z)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 M_{0x} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & kC_{44} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-C_{33}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_{0y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -kC_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{C_{33}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\bar{M}_{00} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{M}_{10} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & -f_z - z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & f_z + z & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{M}_{20} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & f_z + z & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -f_z - z & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} M_{yx} &= M_{xy}^T \\ M_{x0} &= M_{0x}^T \\ M_{y0} &= M_{0y}^T \end{aligned}$$

Neste ponto da formulação, antes de se efetuar a integração das matrizes de contribuição, faz-se necessária a introdução da aproximação de elementos finitos. Novamente, vale salientar que para qualquer aproximação desejada a formulação passa a ser modificada deste ponto em diante, não sendo necessário portanto que sejam refeitos todos os passos até aqui apresentados.

As funções de forma para a aproximação cúbica são apresentadas no item seguinte deste capítulo. Adotada e introduzida a aproximação, substituem-se as expressões na forma matricial da energia de deformação e com isso obtém-se a matriz de rigidez para o elemento finito de casca triangular plano.

Da mesma forma que para a formulação de pórtico laminado, a integração foi feita numericamente, para permitir o cálculo não-linear e as expressões finais também não foram aqui apresentadas por motivo de espaço, ou seja, a matriz de rigidez resultante da integração é de ordem 60x60, inviabilizando sua visualização e apresentação neste texto.

6.7 ELEMENTO FINITO TRIANGULAR – CARACTERÍSTICAS GERAIS

Um breve estudo deste tipo de geometria foi realizado baseando-se nos trabalhos de ODEN *et al.* (1981), REDDY (1993) e ASSAN (1999), sendo tal geometria apresentada a seguir juntamente com as funções de forma e suas derivadas que foram utilizadas para aproximação das variáveis nodais envolvidas no problema.

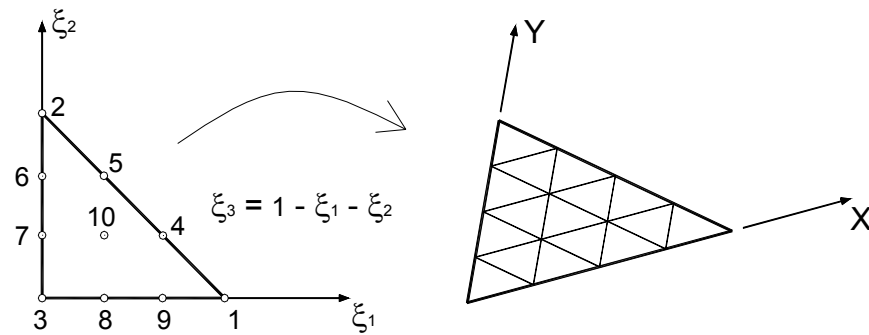


Figura 6.2 – Elemento mestre triangular – mapeamento.

As funções de forma para o elemento triangular com aproximação cúbica, encontradas utilizando-se um algoritmo desenvolvido para obtenção de tais funções, Apêndice A, são apresentadas em 6.13 e suas derivadas em 6.14. Vale salientar que o algoritmo desenvolvido foi utilizado para criar uma biblioteca de elementos triangulares planos com diferentes aproximações para as variáveis nodais.

$$\begin{aligned}
 \phi_1 &= \frac{9}{2} \xi_1 \left(\xi_1 - \frac{2}{3} \right) \left(\xi_1 - \frac{1}{3} \right) & \phi_2 &= \frac{9}{2} \xi_2 \left(\xi_2 - \frac{2}{3} \right) \left(\xi_2 - \frac{1}{3} \right) \\
 \phi_3 &= \frac{9}{2} \xi_3 \left(\xi_3 - \frac{2}{3} \right) \left(\xi_3 - \frac{1}{3} \right) & \phi_4 &= \frac{27}{2} \left(\xi_1 - \frac{1}{3} \right) \xi_1 \xi_2 \\
 \phi_5 &= \frac{27}{2} \left(\xi_2 - \frac{1}{3} \right) \xi_1 \xi_2 & \phi_6 &= \frac{27}{2} \left(\xi_2 - \frac{1}{3} \right) \xi_2 \xi_3 \\
 \phi_7 &= \frac{27}{2} \left(\xi_3 - \frac{1}{3} \right) \xi_2 \xi_3 & \phi_8 &= \frac{27}{2} \left(\xi_3 - \frac{1}{3} \right) \xi_1 \xi_3 \\
 \phi_9 &= \frac{27}{2} \left(\xi_1 - \frac{1}{3} \right) \xi_1 \xi_3 & \phi_{10} &= 27 \xi_1 \xi_2 \xi_3
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

O algoritmo para geração automática das funções de forma do elemento triangular plano, bem como de suas derivadas, foi desenvolvido com base nas expressões gerais encontradas em REDDY (1993) e ZIENKIEWICZ (1985) e com a utilização de um software de manipulação simbólica.

Os desenvolvimentos apresentados neste trabalho, tanto para o elemento de pórtico quanto para o elemento de casca, foram realizados considerando-se análise linear elástica e tensão residual qualquer. Para obtenção das expressões gerais para o problema viscoplástico implementado neste trabalho, faz-se necessário que se retorne à expressão da energia de deformação, para a formulação do elemento de casca, e nesta

seja considerada a expressão geral para tensões apresentada no item correspondente de modelos reológicos, onde se encontram apresentadas as expressões para tensões para análises viscoelástica, elastoplástica e viscoplástica. A consideração das tensões residuais facilita este procedimento.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_1} &= \frac{27}{2} \xi_1^2 - 9\xi_1 + 1 & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_1} &= 0 \\
 \frac{\partial \phi_1}{\partial \xi_2} &= 0 & \frac{\partial \phi_2}{\partial \xi_2} &= \frac{27}{2} \xi_2^2 - 9\xi_2 + 1 \\
 \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi_1} &= -\frac{27}{2} \xi_3^2 + 9\xi_3 - 1 & \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi_1} &= \frac{27}{2} \xi_1 \xi_2 - \frac{9}{2} \xi_2 \\
 \frac{\partial \phi_3}{\partial \xi_2} &= -\frac{27}{2} \xi_3^2 + 9\xi_3 - 1 & \frac{\partial \phi_4}{\partial \xi_2} &= \frac{27}{2} \xi_1^2 - \frac{9}{2} \xi_1 \\
 \frac{\partial \phi_5}{\partial \xi_1} &= \frac{27}{2} \xi_2^2 - \frac{9}{2} \xi_2 & \frac{\partial \phi_6}{\partial \xi_1} &= -\frac{27}{2} \xi_2^2 + \frac{9}{2} \xi_2 \\
 \frac{\partial \phi_5}{\partial \xi_2} &= \frac{27}{2} \xi_1 \xi_2 - \frac{9}{2} \xi_1 & \frac{\partial \phi_6}{\partial \xi_2} &= -\frac{27}{2} \xi_2^2 + 27\xi_2 \xi_3 + \frac{9}{2} (\xi_2 - \xi_3) \\
 \frac{\partial \phi_7}{\partial \xi_1} &= -27\xi_2 \xi_3 + \frac{9}{2} \xi_2 & \frac{\partial \phi_8}{\partial \xi_1} &= \frac{27}{2} \xi_3^2 - 27\xi_1 \xi_3 + \frac{9}{2} (\xi_1 - \xi_3) \\
 \frac{\partial \phi_7}{\partial \xi_2} &= \frac{27}{2} \xi_3^2 - 27\xi_2 \xi_3 + \frac{9}{2} (\xi_2 - \xi_3) & \frac{\partial \phi_8}{\partial \xi_2} &= -27\xi_1 \xi_3 + \frac{9}{2} \xi_1 \\
 \frac{\partial \phi_9}{\partial \xi_1} &= -\frac{27}{2} \xi_1^2 + 27\xi_1 \xi_3 + \frac{9}{2} (\xi_1 - \xi_3) & \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \xi_1} &= 27\xi_2 \xi_3 - 27\xi_1 \xi_2 \\
 \frac{\partial \phi_9}{\partial \xi_2} &= -\frac{27}{2} \xi_1^2 + \frac{9}{2} \xi_1 & \frac{\partial \phi_{10}}{\partial \xi_2} &= 27\xi_1 \xi_3 - 27\xi_1 \xi_2;
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Assim, efetuando-se a devida manipulação matemática dessas expressões, podem ser apresentadas as equações de equilíbrio algébrico gerais, na forma matricial, para os modelos acima citados, tal como em MESQUITA & CODA (2002) e MESQUITA (2002).

Para o modelo viscoelástico tem-se as tensões dadas por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} + \gamma C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \tag{6.15}$$

Neste caso, a equação de equilíbrio, diferencial no tempo e algébrica no espaço, pode ser escrita como:

$$KU + \gamma K\dot{U} = F \quad 6.16$$

onde assume-se a seguinte aproximação temporal para o vetor de velocidades nodais:

$$\dot{U} = \frac{U_{t+\Delta t} - U_t}{\Delta t} \text{ originando } \left(I + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) KU_{t+\Delta t} = F + \frac{\gamma}{\Delta t} KU_t \quad 6.17$$

que é um algoritmo de passo simples.

As tensões para o modelo elastoplástico são representadas por:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \int_0^{\varepsilon_{kl}^p} d\varepsilon_{kl}^p \right) = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - \sigma_{ij}^p \quad 6.18$$

que substituída nas demonstrações para o caso elástico fornece a equação de equilíbrio algébrico com a seguinte forma:

$$KU = F + F^p \quad 6.19$$

sendo F^p o vetor de forças residuais acumuladas proveniente da integração das tensões residuais ao longo dos elementos.

Já o modelo completo viscoplástico tem as tensões escritas da seguinte forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e + \gamma C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} = C_{ijkl} \left(\varepsilon_{kl} - \int_0^{\varepsilon_{kl}^p} d\varepsilon_{kl}^p \right) + \gamma C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} = C_{ijkl} (\varepsilon_{kl} + \gamma \dot{\varepsilon}_{kl}) - \sigma_{ij}^p \quad 6.20$$

e portanto equação de equilíbrio algébrica representada matricialmente por:

$$KU + \gamma K\dot{U} = F + F^p \quad 6.21$$

utiliza-se a mesma aproximação descrita em 6.17 para \dot{U} resultando em algoritmo de passo simples com iterações no passo de tempo para definição do equilíbrio temporal.

Como dito anteriormente, o procedimento de retorno para a superfície de plastificação já foi escolhido e se baseia no trabalho de MESQUITA (2002) permitindo que o multiplicador plástico seja obtido de forma fechada. Apresenta-se o referido procedimento no capítulo 7 deste trabalho para materiais anisotrópicos gerais com particularização para materiais ortotrópicos.

CAPÍTULO 7

ALGORITMO DE RETORNO PARA O CRITÉRIO DE TSAI-WU

7.1 INTRODUÇÃO

A consideração de comportamento não-linear dos materiais nas análises de estruturas implica na necessidade de utilização de procedimentos numéricos, através dos quais torna-se possível integrar as equações constitutivas, que regem o comportamento desses materiais, ao longo do “corpo” em questão. Esses procedimentos numéricos devem possuir certas características necessárias à boa integração das grandezas envolvidas no problema com o intuito de possibilitar a minoração dos erros numéricos e uma convergência satisfatória.

A utilização de algoritmos do tipo tangente acarreta um alto custo computacional para geração da matriz de rigidez global da estrutura atualizada, além do custo relacionado a atualização das tensões. Este último está associado à obtenção do multiplicador plástico de forma iterativa, como tradicionalmente se faz, através da resolução da equação dada pela condição de consistência.

Porém, como pode ser observado em MESQUITA (2002), é possível se obter expressões fechadas para o cálculo do multiplicador plástico, através da manipulação das relações constitutivas do modelo proposto, evitando-se assim erros de precisão do processo iterativo e o custo computacional extra.

Ainda em MESQUITA (2002), são encontrados desenvolvimentos utilizando-se de algoritmos implícitos para atualização das tensões para o caso tridimensional. Naquele trabalho, as expressões fechadas para o multiplicador plástico foram obtidas para os critérios de von Mises e Drucker Prager com encruamento isotrópico com base

em leis de fluxo associativa e não-associativa. Esta última com retorno associado à variação volumétrica do material na fase plástica.

No presente trabalho, determinam-se as expressões fechadas para o caso não-associativo para o critério de Tsai-Wu para materiais anisotrópicos gerais e estado plano de tensão.

7.2 RELAÇÕES GERAIS PARA PLASTICIDADE

No caso de plasticidade uniaxial, como a apresentada para o elemento de pórtico 3D, o limite elástico estabelecido para os materiais é dado por um intervalo de valores de tensão que satisfazem o critério de plastificação estabelecido. Numa análise multiaxial, esse intervalo de valores é substituído por uma superfície comumente conhecida como *superfície de plastificação*, onde valores de tensão que pertencem a esta superfície e a seu interior são considerados elásticos e portanto não provocam deformações irreversíveis (plásticas).

Matematicamente, se escreve a expressão para a superfície de plastificação da seguinte forma:

$$f(\sigma_{ij}, \kappa) = \bar{f}(\sigma_{ij}) - \bar{\sigma}(\kappa) = 0 \quad 7.1$$

onde $\bar{\sigma}$ é uma tensão equivalente função do parâmetro de encruamento κ , e \bar{f} é uma função do estado de tensão σ_{ij} .

Sendo a equação 7.1 satisfeita, ou seja ($f = 0$), significa que um estado de tensão limite foi alcançado para o problema. Valores negativos de f indicam um descarregamento (ou estado de tensão elástico) e conseqüente retorno à região elástica do diagrama tensão x deformação. Valores positivos de f caracterizam uma situação de carregamento plástico e são inadmissíveis, indicando o aparecimento de deformações irreversíveis (plásticas). A ocorrência de uma previsão $f > 0$, de acordo com o modelo de encruamento adotado para o material, provoca uma evolução na superfície de plastificação, buscando alcançar um novo estado de tensão que resulte sobre a superfície.

A taxa de deformação total pode ser decomposta em uma parcela elástica reversível ($\dot{\varepsilon}_{ij}^e$) e uma parcela plástica irreversível ($\dot{\varepsilon}_{ij}^p$).

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad 7.2$$

A taxa de deformação elástica é relacionada com a taxa de tensão através da matriz constitutiva elástica C_{ijlm}^e , da seguinte forma:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijlm}^e \dot{\varepsilon}_{lm}^e \quad 7.3$$

A taxa de deformação plástica pode ser expressa através da seguinte relação:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \partial_{\sigma} g_{ij} \quad 7.4$$

onde $\dot{\lambda}$ é uma constante de proporcionalidade denominada multiplicador plástico, que deve satisfazer as seguintes condições de complementaridade de Kuhn-Tucker,

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad f \leq 0 \quad e \quad \dot{\lambda} \cdot f = 0 \quad 7.5$$

O termo g na equação 7.4 é um potencial plástico com unidade de tensão. O caso particular de $g = f$ é conhecido como plasticidade associativa. Uma forma alternativa de se idealizar o fluxo plástico, adotada neste trabalho, é através da seguinte relação:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} n_{ij} \quad 7.6$$

onde n_{ij} é um tensor que define a direção do fluxo plástico. Assim, se a direção adotada n_{ij} não for normal a superfície de plastificação no espaço das tensões principais, pode-se dizer que esta lei é não associativa.

Para o caso de encruamento por deformação e critério de Tsai-Wu, o escalar $\dot{\kappa}$ é relacionado com a norma do tensor das taxas de deformações plásticas da seguinte forma:

$$\dot{\kappa}^2 = \dot{\varepsilon}^{eq} = K \left\| \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right\| \Rightarrow \kappa^2 = \varepsilon^{eq} = \int K \left\| \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right\| \quad 7.7$$

onde $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ é o tensor das taxas de deformações plásticas, ε^{eq} é conhecida como deformação plástica equivalente e K é um termo cujo valor deve ser escolhido de tal forma que a partir do modelo generalizado possa-se recuperar o caso unidimensional. A obtenção do valor de K é explicitada nos itens que se seguem.

7.3 ABORDAGEM INCREMENTAL PARA PLASTICIDADE

As equações em taxa são transformadas em equações que dependem de incrementos de carga, onde são conhecidas as variáveis num determinado nível de carga i e devem ser atualizadas para se obter as variáveis do novo estado em $i+1$. O procedimento implícito utilizado para determinação dessas variáveis no nível de carga $i+1$ baseia-se nas condições de Kuhn-Tucker, ou condições de complementaridade, dadas por:

$$\Delta\lambda_{i+1} \geq 0, \quad f_{i+1} \leq 0 \quad e \quad \Delta\lambda_{i+1} f_{i+1} = 0 \quad 7.8$$

Portanto, tem-se para o algoritmo:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1} &= \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_{i+1} \\ \sigma_{i+1} &= C^e (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^p) \\ \varepsilon_{i+1}^p &= \varepsilon_i^p + \Delta\varepsilon_{i+1}^p \\ \kappa_{i+1} &= \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} \end{aligned} \quad 7.9$$

Admite-se inicialmente que o primeiro passo seja puramente elástico, ou seja, um estado de tentativa, portanto:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1} &= \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_{i+1} \\ \sigma_{i+1}^{ten} &= C^e (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^p) \\ \kappa_{i+1}^{ten} &= \kappa_i \\ f(\sigma_{i+1}^{ten}, \kappa_{i+1}^{ten}) &= \bar{f}(\sigma_{i+1}^{ten}) - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}^{ten}) \end{aligned} \quad 7.10$$

Tendo-se estabelecido o estado de tentativa, ou também conhecida como *etapa de previsão*, pode-se verificar se o estado de tensão respeita a condição de consistência imposta pelo critério. Caso a condição de consistência seja satisfeita, o estado de tensão é admissível e não provoca deformações irreversíveis. Caso contrário, um novo estado de tensão deve ser procurado de forma que a condição de consistência seja satisfeita. Desta forma:

$$\begin{aligned}\sigma_{i+1} &= \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} C^e n_{i+1} \\ \varepsilon_{i+1}^p &= \varepsilon_i^p + \Delta\lambda_{i+1} n_{i+1} \\ \kappa_{i+1} &= \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1}(\Delta\lambda_{i+1})\end{aligned}\tag{7.11}$$

A correção do estado de tensão depende da determinação do multiplicador plástico do instante atual. Portanto, utilizando-se a expressão da condição de consistência, pode-se obter uma expressão fechada para determinação de $\Delta\lambda$ no instante $i+1$, ou seja:

$$f(\sigma_{i+1}, \kappa_{i+1}) = \bar{f}(\sigma_{i+1}) - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}) = 0\tag{7.12}$$

Substituindo-se as expressões de 7.11 em 7.12, encontramos uma expressão que fica dependente apenas de $\Delta\lambda_{i+1}$. A solução desta equação fornece o valor de $\Delta\lambda$ que recupera um novo estado de tensão compatível com o modelo adotado. O valor de $\Delta\lambda$ pode ser obtido de duas formas: através de processos iterativos, tradicionalmente utilizados, ou com a obtenção de expressões fechadas baseadas na variação volumétrica da fase plástica que, como dito anteriormente, são menos custosas computacionalmente e não incorrem em erros de precisão.

7.4 ALGORITMO DE TSAI-WU NÃO-ASSOCIATIVO GERAL

O critério de plastificação utilizando-se a superfície de Tsai-Wu pode ser escrito como:

$$f = \bar{f}(\sigma) - \bar{\sigma}(\kappa) = \sigma^T F \sigma + \sigma^T L - \bar{\sigma}(\kappa) \leq 0\tag{7.13}$$

Na expressão anterior, F é uma matriz simétrica composta pelos valores limites de tensão de escoamento do material sendo definida, segundo apresentado no item 2.4 do capítulo 2 para o critério de Tsai-Wu particularizado para materiais ortotrópicos, na forma apresentada em 7.14.

O termo L é um vetor que caracteriza a dependência do critério em relação a tensão hidrostática e é definido em 7.15.

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 & 0 & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \quad 7.14$$

$$L^T = \{L_1 \quad L_2 \quad L_3 \quad 0 \quad 0 \quad 0\} \quad 7.15$$

σ é o tensor de tensões escrito em forma vetorial como:

$$\sigma^T = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{12}] \quad 7.16$$

A tensão equivalente $\bar{\sigma}$ é definida, neste trabalho, segundo uma lei de encruamento isotrópica linear escrita em função do encruamento isotrópico κ e seu respectivo parâmetro de encruamento H .

$$\bar{\sigma}(\kappa) = H^2 k^2 \quad 7.17$$

Para que a expressão anterior respeite o estabelecido no item 2.4 do capítulo 2, onde a expressão geral para o critério de Tsai-Wu é apresentada, deve-se assumir inicialmente o valor de k igual a $1/H$.

As deformações plásticas incrementais são definidas segundo uma lei de fluxo não associativa. Esta idealização parte da suposição de que o sólido ao plastificar poderá se comportar como um fluido compressivo ou incompressivo, ou seja, não se pode condicionar o fluxo plástico a uma superfície, responsável em princípio por definir

apenas os limites elásticos do material. Assim, imagina-se, a partir das observações da mecânica dos fluidos, que se deve estabelecer a direção do fluxo plástico mantendo uma relação com as tensões (analogia pressão/fluxo do fluido), sendo esta relação semelhante à relação elástica (tensão/deformação). Neste sentido, pode-se escolher um tensor qualquer “ n ” como sendo a direção do fluxo plástico, porém é interessante que este esteja relacionado à direção da tensão de tentativa, tal como:

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda \cdot n = \Delta \lambda \cdot \varepsilon^{ten} = \Delta \lambda C^{p-1} \sigma^{ten} \quad 7.18$$

onde C^p é uma matriz semelhante à matriz constitutiva elástica.

Para o caso associativo, baseando-se no desenvolvimento apresentados em MESQUITA (2002) para os critérios de von Mises e Drucker Prager, a expressão para o incremento de deformação plástica para o critério de Tsai-Wu assume a seguinte forma:

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \Delta \lambda \partial_{\sigma} f = \Delta \lambda (F \sigma + L) \quad 7.19$$

A particularização da expressão 7.18 adotando-se no lugar da matriz constitutiva plástica C^p , a matriz elástica C^e , faz com que o fluxo plástico tenha seu retorno dado na direção das tensões elásticas aplicadas ao corpo. Com a utilização da forma geral, esta direção de retorno pode ser qualquer dependendo de quão compressível seja o material em estudo na fase plástica. Para se obter material incompressível na fase plástica adota-se C^p semelhante a uma lei constitutiva isotrópica com “Coeficiente de Poisson Plástico” (ν_p) igual a meio. Dessa forma, pode-se quantificar qualquer grau de compressibilidade do material plastificado. Assim, a expressão de atualização das deformações plásticas fica escrita como:

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta \varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta \lambda_{i+1} C^{p-1} \sigma_{i+1}^{ten} \quad 7.20$$

O incremento $\Delta \kappa$ é obtido considerando-se hipótese de encruamento por deformação. Para tanto tem-se:

$$\Delta \kappa^2 = \Delta \varepsilon^{eq} = K \left\| \Delta \varepsilon_{ij}^p \right\| = K \Delta \lambda^2 \left(\left(C^{p-1} \sigma_{i+1}^{ten} \right)^T F \left(C^{p-1} \sigma_{i+1}^{ten} \right) \right) \quad 7.21$$

onde K tem unidade de tensão e deve ser determinado para que a expressão permita a recuperação do caso unidimensional. Como a degeneração do problema ortotrópico ficaria complicada usando a norma indicada em 7.21, propõe-se a seguinte norma para simplificação das expressões:

$$\Delta \kappa^2 = \Delta \varepsilon^{eq} = K \left\| \Delta \varepsilon_{ij}^p \right\| = K \Delta \lambda^2 (\sigma^{ten^T} F \sigma^{ten}) \quad 7.22$$

Deve-se recuperar o fator de escala para se compor o parâmetro de encruamento k como segue, onde o coeficiente K deve ser determinado para esta nova situação, guardando-se ainda a necessidade de se retornar para o caso unidimensional.

Conseqüentemente a expressão de atualização do parâmetro de encruamento fica:

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta \kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta \lambda_{i+1} \sqrt{K \sigma_{i+1}^{ten^T} F \sigma_{i+1}^{ten}} \quad 7.23$$

Retornando à parte da expressão da superfície de plastificação referente à evolução do critério tem-se:

$$\bar{\sigma}(\kappa) = H^2 \kappa_{i+1}^2 = H^2 \left(\kappa_i^2 + \Delta \lambda_{i+1}^2 K \sigma_{i+1}^{ten^T} F \sigma_{i+1}^{ten} + 2 \kappa_i \Delta \lambda_{i+1} \sqrt{K \sigma_{i+1}^{ten^T} F \sigma_{i+1}^{ten}} \right) \quad 7.24$$

Da expressão 7.24 entende-se que K deve ter dimensão da inversa da tensão ao quadrado. Para que o critério degenera no caso unidimensional (direção ortotrópica 1) K deve assumir o seguinte valor:

$$K = \frac{1}{E_1^2} \quad 7.25$$

considerando-se portanto degeneração na direção 1 com módulo de elasticidade longitudinal E_1 .

Agora deve-se encontrar a expressão de atualização das tensões.

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta\sigma_{i+1} = \sigma_i + C^e (\Delta\varepsilon_{i+1} - \Delta\varepsilon_{i+1}^p) \quad 7.26$$

Definindo-se um estado de tentativa elástico é possível escrever a equação 7.26 como:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{ten} - C^e \Delta\varepsilon_{i+1}^p \quad 7.27$$

Substituindo-se a expressão de $\Delta\varepsilon_{i+1}^p$ dada pela equação 7.18 na expressão de atualização das tensões 7.27, encontra-se:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{ten} - C^e \Delta\lambda_{i+1} C^{p-1} \sigma_{i+1}^{ten} = \left(1 - C^e \Delta\lambda_{i+1} C^{p-1}\right) \sigma_{i+1}^{ten} \quad 7.28$$

A consideração de retorno relacionada à direção elástica, como pode ser visto na equação 7.28 não provoca o aparecimento de tensões residuais em direções diferentes da estabelecida pela tentativa elástica, ao contrário dos modelos clássicos com lei de fluxo associativa ou mesmo com matriz plástica diferente da matriz elástica.

Agora deve-se encontrar a expressão da condição de consistência de maneira que se possa resolve-la e assim determinar o multiplicador plástico. Assim, para o instante atual o critério de plastificação fica escrito como:

$$f_{i+1} = \sigma_{i+1}^T F \sigma_{i+1} + \sigma_{i+1}^T L - \bar{\sigma}(\kappa) = 0 \quad 7.29$$

Desenvolvendo-se o primeiro termo da equação 7.29 e utilizando-se a expressão de atualização das tensões em 7.28, encontra-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{i+1}^T F \sigma_{i+1} + \sigma_{i+1}^T L &= \left(I - \Delta\lambda_{i+1} C^e C^{p-1}\right) \sigma_{i+1}^{tenT} F \left(I - \Delta\lambda_{i+1} C^e C^{p-1}\right) \sigma_{i+1}^{ten} \\ &\quad + \sigma_{i+1}^{tenT} \left(I - \Delta\lambda_{i+1} C^e C^{p-1}\right) L \end{aligned} \quad 7.30$$

Aplicando-se a definição de encruamento expressa pela equação 7.23, a segunda parte da equação 7.29 fica escrita como:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}) = & +H^2\kappa_i^2 + H^2\Delta\lambda_{i+1}^2 K\sigma_{i+1}^{tenT} F\sigma_{i+1}^{ten} \\ & +2H^2\kappa_i^2\Delta\lambda_{i+1}\sqrt{K\sigma_{i+1}^{tenT} F\sigma_{i+1}^{ten}} \end{aligned} \quad 7.31$$

Substituindo as expressões 7.30 e 7.31 na expressão do critério de plastificação em 7.29, encontra-se:

$$\begin{aligned} f_{i+1} = & \left(I - \Delta\lambda_{i+1}C^e C^{p-1}\right)\sigma_{i+1}^{tenT} F\left(I - \Delta\lambda_{i+1}C^e C^{p-1}\right)\sigma_{i+1}^{ten} \\ & +\sigma_{i+1}^{tenT}\left(I - \Delta\lambda_{i+1}C^e C^{p-1}\right)L - H^2\kappa_i^2 - H^2\Delta\lambda_{i+1}^2 K\sigma_{i+1}^{tenT} F\sigma_{i+1}^{ten} \\ & -2H^2\kappa_i^2\Delta\lambda_{i+1}\sqrt{K\sigma_{i+1}^{tenT} F\sigma_{i+1}^{ten}} = 0 \end{aligned} \quad 7.32$$

Note que a expressão encontrada para determinação da expressão fechada para o valor de $\Delta\lambda$ é uma equação do segundo grau e suas raízes podem ser facilmente encontradas. Para tanto tem-se:

$$f_{i+1} = \alpha\Delta\lambda_{i+1}^2 + \beta\Delta\lambda_{i+1} + \gamma = 0 \text{ onde:} \quad (a)$$

$$\alpha = \sigma_{i+1}^{tenT} C^e C^{p-1} F C^e C^{p-1} \sigma_{i+1}^{ten} - H^2 K \sigma_{i+1}^{tenT} F \sigma_{i+1}^{ten} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} \beta = & -\sigma_{i+1}^{tenT} C^e C^{p-1} F \sigma_{i+1}^{ten} - \sigma_{i+1}^{tenT} F C^e C^{p-1} \sigma_{i+1}^{ten} \\ & -\sigma_{i+1}^{tenT} C^e C^{p-1} L - 2H^2\kappa_i^2 \sqrt{K\sigma_{i+1}^{tenT} F\sigma_{i+1}^{ten}} \end{aligned} \quad (c) \quad 7.33$$

$$\gamma = \sigma_{i+1}^{tenT} F \sigma_{i+1}^{ten} + \sigma_{i+1}^{tenT} L - H^2\kappa_i^2 \quad (d)$$

Se o valor de α dado pela equação 7.33b, for nulo, então a expressão 7.33a recai numa equação de 1º grau e o valor de $\Delta\lambda$ é único para a expressão. Caso contrário, serão encontradas 2 raízes para a equação sendo que o valor de $\Delta\lambda$ a ser adotado deve ser o menor dentre os valores positivos das raízes encontradas.

Para uma melhor compreensão de todo o procedimento implícito aqui discutido, apresentam-se os passos do algoritmo para o critério de Tsai-Wu.

1. Atualizar as deformações e calcular as tensões e parâmetro de encruamento de tentativa

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_{i+1}$$

$$\sigma_{i+1}^{ten} = C^e (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^p)$$

$$\kappa_{i+1}^{ten} = \kappa_i$$

2. Verificar o critério de plastificação com as tensões de tentativa

$$f_{i+1}^{ten} = \sigma_{i+1}^{tenT} F \sigma_{i+1}^{ten} + \sigma_{i+1}^{tenT} L - \bar{\sigma}(\kappa)$$

3. Se $f_{i+1}^{ten} \leq 0$

3.1 Então:

3.1.1 Finalizar

3.2 Se não:

3.2.1 Determinar $\Delta\lambda_{i+1}$

$$n_{i+1} = C^{p-1} \sigma_{i+1}^{ten}$$

$$K = \frac{1}{E_1^2} \text{ para degeneração na direção 1.}$$

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \text{ adotado-se o menor valor positivo.}$$

3.2.2 Atualizar as variáveis internas com o valor de $\Delta\lambda_{i+1}$

$$\sigma_{i+1} = \left(1 - C^e \Delta\lambda_{i+1} C^{p-1}\right) \sigma_{i+1}^{ten}$$

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\lambda_{i+1} n_{i+1}$$

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\lambda_{i+1} \sqrt{K \left(\sigma_{i+1}^{tenT} F \sigma_{i+1}^{ten} \right)}$$

Figura 7.1 - Algoritmo de integração implícito para o critério de Tsai-Wu.

Semelhantemente aos algoritmos com lei de fluxo associativa e não-associativa para os critérios de von Mises e Drucker Prager apresentados em MESQUITA (2002), foi possível encontrar a expressão fechada do multiplicador plástico para lei de fluxo não-associativa geral para o critério de Tsai-Wu. Novamente, as mesmas vantagens mencionadas anteriormente com relação ao uso da expressão do $\Delta\lambda$ são aqui reproduzidas, no que diz respeito ao custo computacional e erros numéricos devido ao cálculo aproximado. Deve-se mencionar que os critérios de von Mises e Drucker Prager podem ser reproduzidos por uma degeneração do critério de Tsai-Wu.

CAPÍTULO 8

MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

8.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se a formulação do Método dos Elementos de Contorno (MEC) para sólidos elásticos tridimensionais utilizada no presente trabalho para modelagem de sólidos 3D finitos e semi-infinitos. São apresentadas as soluções fundamentais dos problemas abordados, bem como a formulação integral e o equacionamento algébrico com base no trabalho desenvolvido por SOUZA (2001), cujas implementações foram utilizadas e adaptadas para a presente pesquisa.

Portanto, as implementações relacionadas ao MEC foram desenvolvidas pelo referido autor, que utilizou a solução fundamental de Kelvin para meios infinitos em sua formulação. De acordo com esta formulação, o contorno é discretizado utilizando-se elementos triangulares planos com aproximação linear e as integrais singulares são desenvolvidas semi-analiticamente, sendo ainda introduzidas na formulação técnicas de integração de contorno considerando-se a eficiência e a precisão para a integral quase singular.

Este programa foi adaptado implementando-se as expressões da solução fundamental de Mindlin para meios semi-infinitos, sendo que as integrais singulares foram obtidas com a utilização da propriedade de movimento de corpo rígido, não se utilizando da integração semi-analítica proposta pelo autor para o tratamento da solução fundamental de Kelvin. Outras adaptações algébricas foram necessárias para possibilitar o acoplamento MEC / MEF e serão descritas no capítulo 9.

A seguir são apresentadas as soluções fundamentais para os problemas de Kelvin e Mindlin, bem como as formulações integral e algébrica do MEC e algumas das

principais características da formulação implementada e apresentada em SOUZA (2001).

8.2 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL

No desenvolvimento de uma formulação baseada no método dos elementos de contorno é necessário um conhecimento prévio da chamada solução fundamental, que é escolhida de acordo com o problema a ser solucionado.

São utilizadas no presente trabalho, como dito anteriormente, as soluções fundamentais de Kelvin e Mindlin para modelagem de meios infinitos e semi-infinitos respectivamente.

A solução de um problema fundamental é definida como a resposta de um corpo elástico e de domínio infinito, submetido à ação de uma força estática e unitária.

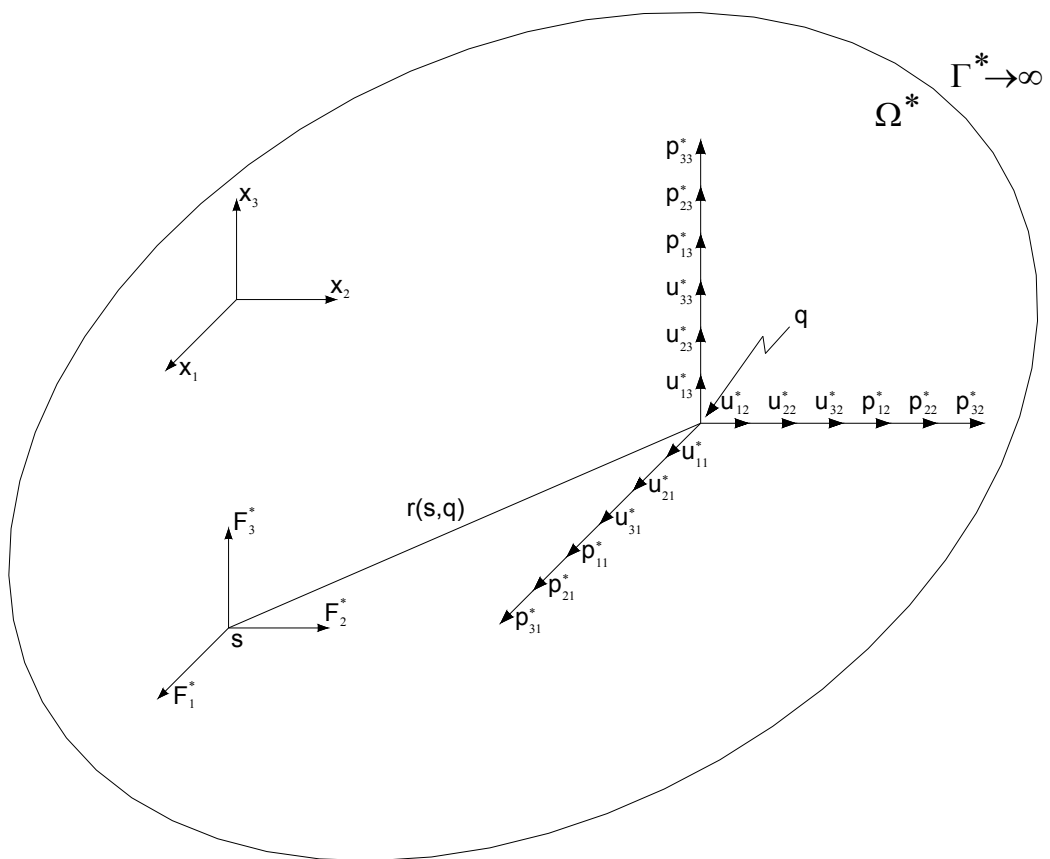


Figura 8.1 - Componentes dos tensores de deslocamentos e forças de superfície

Os deslocamentos são expressos por u_{ij} e as forças de superfície por p_{ij} , onde o primeiro índice refere-se à direção da carga unitária aplicada e o segundo a direção do efeito provocado, como mostrado na Figura 8.1.

8.2.1 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE KELVIN

A solução fundamental de Kelvin tornou-se a mais utilizada e difundida entre os pesquisadores da área de métodos numéricos, por ser a mais abrangente e mais simples de ser implementada. Esta solução, de acordo com LOVE (1944) – apud SOUZA (2001), foi desenvolvida por Lord Kelvin e é determinada considerando-se um domínio Ω , como um sólido elástico, isotrópico, homogêneo e infinito, Figura 8.2.

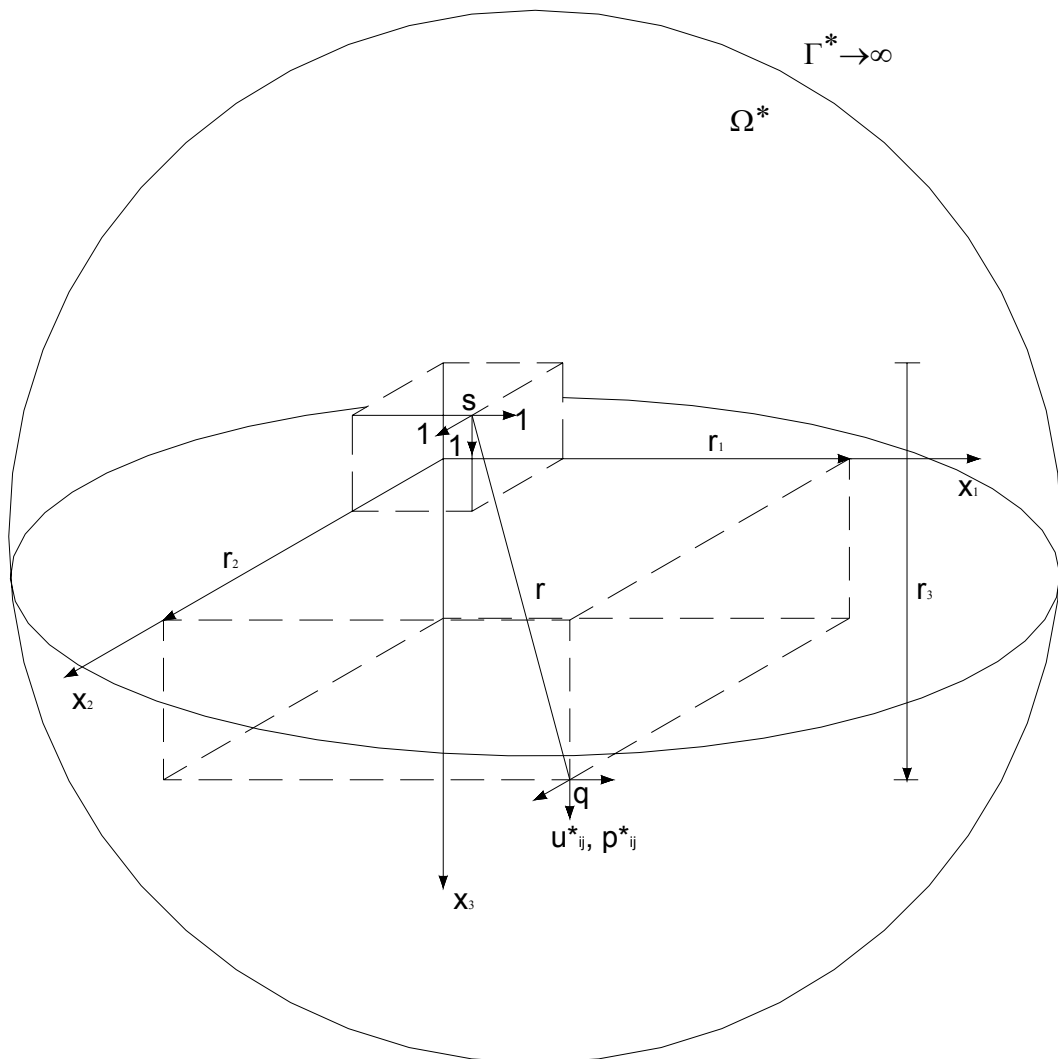


Figura 8.2 - Problema fundamental de Kelvin

Onde:

Ω^* : domínio que se estende ao infinito

Γ^* : contorno que também se estende ao infinito

x_i : corresponde aos eixos cartesianos

r : distância entre os pontos s e q

r_i : componentes cartesianas de r

s : ponto fonte com as forças unitárias nas três direções

q : ponto onde serão avaliadas as respostas às forças unitárias

u_{ij}^* : deslocamentos fundamentais

p_{ij}^* : forças de superfície fundamentais

As expressões encontradas para a solução do problema fundamental de Kelvin em termos de deslocamentos e forças de superfície, para o estado tridimensional, são as seguintes:

$$u_{ij}^*(s, q) = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} [(3-4\nu) \cdot \delta_{ij} + r_{,i} \cdot r_{,j}] \quad 8.1$$

$$P_{ij}^*(s, q) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)r^2} \left\{ [(1-2\nu) \cdot \delta_{ij} + 3 \cdot r_{,i} \cdot r_{,j}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu) \cdot (r_{,i} \cdot n_j - r_{,j} \cdot n_i) \right\} \quad 8.2$$

8.2.2 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE MINDLIN

A solução fundamental de Mindlin (MINDLIN (1936) – apud BARBIRATO (1999)) é caracterizada pela consideração de um domínio Ω , como um sólido elástico, isotrópico, homogêneo e semi-infinito, Figura 8.3, diferindo-se assim do problema fundamental de Kelvin. Na referida figura, o plano $X_3=0$ representa a superfície de contorno livre de forças de superfície.

As expressões das soluções fundamentais de deslocamento e força de superfície são dadas em 8.3, sendo que as de força são obtidas em função do tensor de tensões do problema fundamental e das componentes do vetor normal à superfície no ponto $q(n_k)$, ou seja, aplicando-se a fórmula de Cauchy para determinação de forças de superfície num determinado plano que passa pelo ponto em estudo.

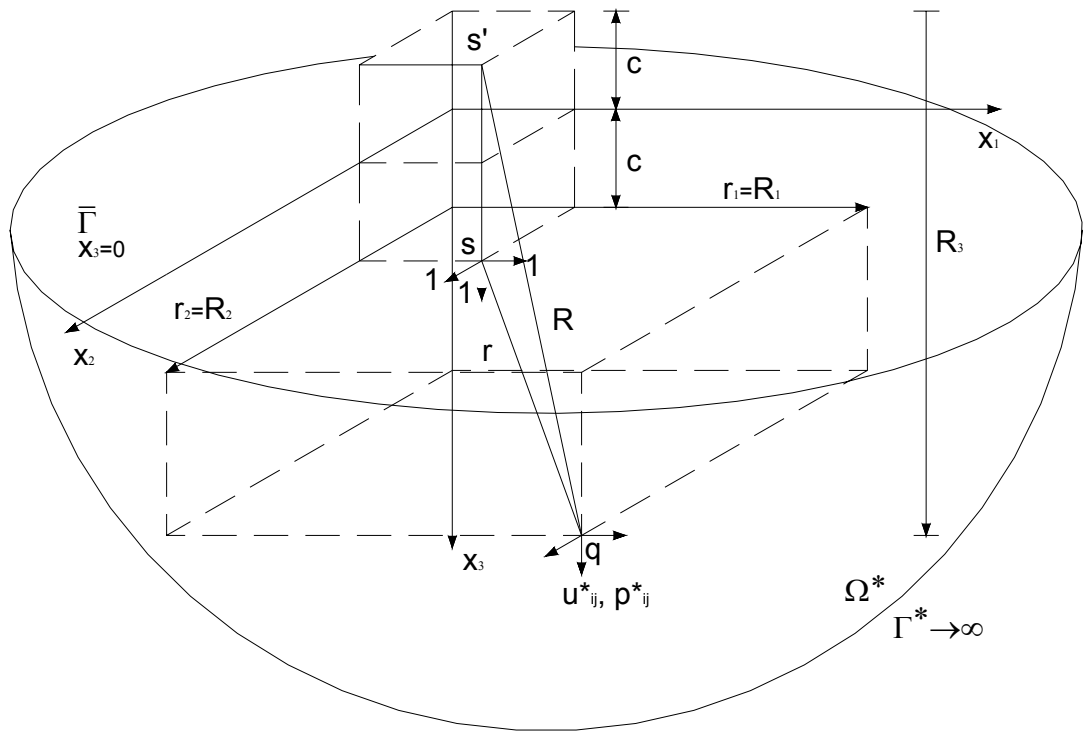


Figura 8.3 - Problema fundamental de Mindlin

Onde:

Ω^* : domínio que se estende ao semi-espaço infinito

Γ^* : contorno que também se estende ao semi-espaço infinito

x_i : corresponde aos eixos cartesianos

r : distância entre os pontos s e q

R : distância entre os pontos s' e q

r_i : componentes cartesianas de r

R_i : componentes cartesianas de R

s : ponto fonte com as forças unitárias nas três direções

s' : imagem do ponto fonte

q : ponto onde serão avaliadas as respostas às forças unitárias

u_{ij}^* : deslocamentos fundamentais

p_{ij}^* : forças de superfície fundamentais

c : distância entre o ponto fonte “ s ” e a superfície livre de tração “ $x_3=0$ ”

Portanto, para os deslocamentos fundamentais tem-se:

$$u_{11}^* = K_d \left\{ \frac{C_3}{r} + \frac{r_1^2}{r^3} + \frac{1}{R} + \frac{C_3 r_1^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left(1 - \frac{3r_1^2}{R^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{4C_1 C_2}{R + R^3} \left(1 - \frac{r_1^2}{R(R + R^3)} \right) \right\} \quad (a)$$

$$u_{12}^* = K_d r_1 r_2 \left\{ \frac{1}{r^3} + \frac{C_3}{R^3} - \frac{6cz}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R + R^3)^2} \right\} \quad (b)$$

$$u_{13}^* = K_d r_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{C_3 r_3}{R^3} - \frac{6cz R_3}{R^5} + \frac{4C_1 C_2}{R(R + R^3)} \right\} \quad (c)$$

$$u_{21}^* = u_{12}^* \quad (d)$$

$$u_{22}^* = K_d \left\{ \frac{C_3}{r} + \frac{r_2^2}{r^3} + \frac{1}{R} + \frac{C_3 r_2^2}{R^3} + \frac{2cz}{R^3} \left(1 - \frac{3r_2^2}{R^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{4C_1 C_2}{R + R^3} \left(1 - \frac{r_2^2}{R(R + R^3)} \right) \right\} \quad (e) \quad 8.3$$

$$u_{23}^* = \frac{r_2}{r_1} u_{13}^* \quad (f)$$

$$u_{31}^* = K_d r_1 \left\{ \frac{r_3}{r^3} + \frac{C_3 r_3}{R^3} + \frac{6cz R_3}{R^5} - \frac{4C_1 C_2}{R(R + R^3)} \right\} \quad (g)$$

$$u_{32}^* = \frac{r_2}{r_1} u_{31}^* \quad (h)$$

$$u_{33}^* = K_d \left\{ \frac{C_3}{r} + \frac{r_3^2}{r^3} + \frac{8C_1^2 - C_3}{R} + \frac{C_3 R_3^2 - 2cz}{R^3} + \frac{6cz R_3^2}{R^5} \right\} \quad (i)$$

A expressão para determinação das forças de superfície é então definida por:

$$p_{ij}^* = \sigma_{jk}^* n_k \quad 8.4$$

Para as expressões do tensor das tensões tem-se:

$$\sigma_{11}^{*I} = K_s r_1 \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} + \frac{C_2 C_3}{R^3} - \frac{3C_3 r_1^2}{R^5} + \right. \quad (a) \quad 8.5$$

$$\left. - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[3 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[3c - C_4 R_3 + \frac{5r_1^2 z}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{12}^{*I} = K_s r_2 \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} + \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 r_1^2}{R^5} + \right. \quad (b)$$

$$\left. - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[I - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] - \frac{6c}{R^5} \left[I - \frac{5r_1^2 z}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{13}^{*I} = K_s \left\{ -\frac{C_2 r_3}{r^3} - \frac{3r_1^2 r_3}{r^5} + \frac{C_2 r_3}{R^3} - \frac{3C_3 r_1^2 R_3}{R^5} + \right. \quad (c)$$

$$\left. - \frac{6c}{R^5} \left[zR_3 - C_2 r_1^2 - \frac{5r_1^2 z R_3}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{21}^{*I} = \sigma_{12}^{*I} \quad (d)$$

$$\sigma_{22}^{*I} = K_s r_1 \left\{ \frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} + \frac{C_2 C_3}{R^3} - \frac{3C_3 r_2^2}{R^5} + \right. \quad (e)$$

$$\left. - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[I - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[c - C_2 R_3 + \frac{5r_2^2 z}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{23}^{*I} = K_s r_1 r_2 \left\{ -\frac{3r_3}{r^5} - \frac{3C_3 R_3}{R^5} + \frac{6c}{R^5} \left[C_2 + \frac{5zR_3}{R^2} \right] \right\} \quad (f)$$

$$\sigma_{31}^{*I} = \sigma_{13}^{*I} \quad (g)$$

$$\sigma_{32}^{*I} = \sigma_{23}^{*I} \quad (h)$$

$$\sigma_{33}^{*I} = K_s r_1 \left\{ \frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} - \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 R_3^2}{R^5} + \frac{6c}{R^5} \left[3c - C_2 R_3 + \frac{5zR_3^2}{R^2} \right] \right\} \quad (i)$$

$$\sigma_{11}^{*2} = K_s r_2 \left\{ \frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_1^2}{r^5} + \frac{C_2 C_3}{R^3} - \frac{3C_3 r_1^2}{R^5} + \right. \quad (j)$$

$$\left. - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[I - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[c - C_2 R_3 + \frac{5r_1^2 z}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{12}^{*2} = K_s r_1 \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} + \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 r_2^2}{R^5} + \right. \quad (k)$$

$$\left. - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[I - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] - \frac{6cz}{R^5} \left[I - \frac{5r_2^2}{R^2} \right] \right\}$$

$$\sigma_{13}^{*2} = \sigma_{23}^{*I} \quad (l)$$

$$\sigma_{21}^{*2} = \sigma_{12}^{*2} \quad (\text{m})$$

$$\sigma_{22}^{*2} = K_s r_2 \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_2^2}{r^5} + \frac{C_2 C_5}{R^3} - \frac{3C_3 r_2^2}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[3 - \frac{r_2^2(3R+R_3)}{R^2(R+R_3)} \right] + \frac{6c}{R^5} \left[3c - C_4 R_3 + \frac{5r_2^2 z}{R^2} \right] \right\} \quad (\text{n})$$

$$\sigma_{23}^{*2} = K_s \left\{ -\frac{C_2 r_3}{r^3} - \frac{3r_2^2 r_3}{r^5} + \frac{C_2 r_3}{R^3} - \frac{3C_3 r_2^2 R_3}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{6c}{R^5} \left[zR_3 - C_2 r_2^2 - \frac{5r_2^2 z R_3}{R^2} \right] \right\} \quad (\text{o})$$

$$\sigma_{31}^{*2} = \sigma_{13}^{*2} \quad (\text{p})$$

$$\sigma_{32}^{*2} = \sigma_{23}^{*2} \quad (\text{q})$$

$$\sigma_{33}^{*2} = \frac{r_2}{r_1} \sigma_{33}^{*1} \quad (\text{r})$$

$$\sigma_{11}^{*3} = K_s \left\{ \frac{C_2 r_3}{r^3} - \frac{3r_1^2 r_3}{r^5} + \frac{C_2(3r_3 - 4\nu R_3)}{R^3} - \frac{3C_3 r_1^2 r_3}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[1 - \frac{r_1^2(3R+R_3)}{R(R+R_3)} - \frac{r_1^2}{R^2} \right] + \frac{6cR_3}{R^5} \left[C_2 z - 2\nu c - \frac{5r_1^2 z}{R^2} \right] \right\} \quad (\text{s})$$

$$\sigma_{12}^{*3} = K_s r_1 r_2 \left\{ -\frac{3r_3}{r^5} - \frac{3C_3 r_2^2}{R^5} - \frac{30czR_3}{R^7} - \frac{4C_1 C_2}{R^2(R+R_3)} \left[\frac{1}{R+R_3} + \frac{1}{R} \right] \right\} \quad (\text{t})$$

$$\sigma_{13}^{*3} = K_s r_1 \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} + \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 z R_3}{R^5} + \frac{3c(3z+c)}{R^5} - \frac{30czR_3^2}{R^7} \right\} \quad (\text{u})$$

$$\sigma_{21}^{*3} = \sigma_{12}^{*3} \quad (\text{v})$$

$$\sigma_{22}^{*3} = K_s \left\{ \frac{C_2 r_3}{r^3} - \frac{3r_2^2 r_3}{r^5} + \frac{C_2(3r_3 - 4\nu R_3)}{R^3} - \frac{3C_3 r_2^2 r_3}{R^5} + \right. \\ \left. - \frac{4C_1 C_2}{R(R+R_3)^2} \left[1 - \frac{r_2^2}{R(R+R_3)} - \frac{r_2^2}{R^2} \right] + \frac{6cR_3}{R^5} \left[C_2 z - 2\nu c - \frac{5r_2^2 z}{R^2} \right] \right\} \quad (\text{w})$$

$$\sigma_{23}^{*3} = K_s r_2 \left\{ -\frac{C_2}{r^3} - \frac{3r_3}{r^5} + \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 R_3}{R^5} + \frac{3c(3z+c)}{R^5} - \frac{30czR_3^2}{R^7} \right\} \quad (\text{x})$$

$$\sigma_{31}^{*3} = \sigma_{13}^{*3} \quad (\text{y})$$

$$\sigma_{32}^{*3} = \sigma_{23}^{*3} \quad (\text{z})$$

$$\sigma_{33}^{*3} = K_s \left\{ -\frac{C_2 r_3}{r^3} - \frac{3r_3^2}{r^5} + \frac{C_2}{R^3} - \frac{3C_3 z R_3^2}{R^5} + \frac{3cR_3(5z+c)}{R^5} - \frac{30czR_3^3}{R^7} \right\} \quad (\text{aa})$$

Os parâmetros existentes nas expressões até aqui apresentadas e mostrados na Figura 8.3 são definidos a seguir.

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{r_i r_i} = |s - q| \\ R &= \sqrt{R_i R_i} = |s' - q| \\ r_i &= X_i(q) - X_i(s) \\ R_i &= X_i(q) - X_i(s') \end{aligned} \quad (\text{a})$$

$$\begin{aligned} r_{,i} &= \frac{r_i}{r} \\ c &= X_3(s) \geq 0 \\ z &= X_3(q) \geq 0 \end{aligned}$$

$$K_d = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \quad (\text{b}) \quad 8.6$$

$$K_s = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \quad (\text{c})$$

$$\begin{aligned} C_1 &= 1 - \nu \\ C_2 &= 1 - 2\nu \\ C_3 &= 3 - 4\nu \\ C_4 &= 3 - 2\nu \\ C_5 &= 5 - 4\nu \end{aligned} \quad (\text{d})$$

8.3 EQUAÇÃO INTEGRAL DE CONTORNO

As equações integrais de contorno relacionam deslocamentos de um ponto qualquer do domínio com deslocamentos e esforços no contorno de um determinado corpo através de integrais que envolvem as soluções fundamentais, sendo, portanto, base para a formulação do método dos elementos de contorno.

A obtenção dessas equações pode se dar através da aplicação do teorema da reciprocidade de Betti ou da técnica dos resíduos ponderados, utilizando-se a solução fundamental do problema como função ponderadora, tendo sido esta última utilizada no

trabalho de SOUZA (2001). Outros trabalhos que utilizaram esta técnica podem ser consultados como CODA (1990), CODA (2000) e VENTURINI (1988).

8.3.1 EQUAÇÃO INTEGRAL PARA PONTOS DO DOMÍNIO E DO CONTORNO

Seja considerado um espaço infinito que contenha um sólido tridimensional de domínio Ω e contorno Γ dividido em Γ_1 (deslocamentos prescritos) e Γ_2 (forças de superfície prescritas).

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_1 \text{ (condições de contorno essenciais)} \quad 8.7$$

$$p_i = \bar{p}_i \quad \text{em } \Gamma_2 \text{ (condições de contorno naturais)} \quad 8.8$$

O traço em cima dos valores u_i e p_i indica valores prescritos de deslocamentos e forças de superfície respectivamente.

Pondera-se a equação de equilíbrio conforme a expressão abaixo:

$$(\sigma_{ij,i} + b_j) \cdot u_j^* = 0 \quad 8.9$$

Efetua-se uma integração em todo o domínio do corpo em estudo, a igualdade 8.9 é mantida, portanto:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,i} \cdot u_j^* \cdot d\Omega + \int_{\Omega} b_j \cdot u_j^* \cdot d\Omega = 0 \quad 8.10$$

Realiza-se uma integração por partes na primeira parcela de 8.10, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,i} \cdot u_j^* \cdot d\Omega = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \cdot n_i \cdot u_j^* \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot u_{j,i}^* \cdot d\Omega \quad 8.11$$

Aplica-se a fórmula de Cauchy para determinação das forças de superfície na integral sobre o contorno Γ :

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij,i} \cdot u_j^* \cdot d\Omega = \int_{\Gamma} p_j \cdot u_j^* \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot u_{j,i}^* \cdot d\Omega \quad 8.12$$

Valendo-se da simetria do tensor de tensões e da definição do tensor de deformações:

$$\sigma_{ij} \cdot u_{j,i}^* = \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ji}^* = \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^* \quad 8.13$$

Sendo:

ε_{ij}^* : campo de deformação do problema fundamental

Substituindo a relação obtida em 8.13 na integral sobre o domínio no lado direito da igualdade 8.12 e o resultado em 8.10, tem-se:

$$\int_{\Gamma} p_j \cdot u_j^* \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^* \cdot d\Omega + \int_{\Omega} b_j \cdot u_j^* \cdot d\Omega = 0 \quad 8.14$$

É necessário que se manipule a integral sobre o domínio, que contém o tensor de tensões, da expressão 8.14 para se obter a equação integral final para o método. Pela Lei de Hooke, tem-se:

$$\sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^* = C_{ij}^{kl} \cdot \varepsilon_{kl} \cdot \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{kl} \cdot C_{ij}^{kl} \cdot \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{kl} \cdot C_{kl}^{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^* = \varepsilon_{kl} \cdot \sigma_{kl}^* \quad 8.15$$

A penúltima passagem na expressão 8.15 é devido à simetria do tensor constitutivo elástico. E de forma análoga, mas inversa, à propriedade 8.13, tem-se:

$$\varepsilon_{ij} \cdot \sigma_{ij}^* = u_{j,i} \cdot \sigma_{ij}^* \quad 8.16$$

Portanto a integral sobre o domínio na expressão 8.14, fica:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \cdot \varepsilon_{ij}^* \cdot d\Omega = \int_{\Omega} u_{j,i} \cdot \sigma_{ij}^* \cdot d\Omega \quad 8.17$$

Efetuada-se uma integração por partes em 8.17, transforma-se tal integral em uma integral sobre o contorno:

$$\int_{\Omega} u_{j,i} \cdot \sigma_{ij}^* \cdot d\Omega = \int_{\Gamma} u_j \cdot n_i \cdot \sigma_{ij}^* \cdot d\Gamma - \int_{\Omega} u_j \cdot \sigma_{ij,i}^* \cdot d\Omega \quad 8.18$$

Aplicando-se a fórmula de Cauchy na integral sobre o contorno da expressão 8.18, e levando-se esse resultado à expressão 8.14, de acordo com a igualdade 8.17, obtém-se:

$$\int_{\Gamma} p_j \cdot u_j^* \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j \cdot p_j^* \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} u_j \cdot \sigma_{ij,i}^* \cdot d\Omega + \int_{\Omega} b_j \cdot u_j^* \cdot d\Omega = 0 \quad 8.19$$

Lembrando ainda que, sendo o campo de deslocamento fundamental, elástico e estático, este respeita a seguinte equação de equilíbrio:

$$\sigma_{ij,i}^* + b_j^* = 0 \quad 8.20$$

E, portanto a expressão 8.19 pode ser escrita em sua forma final:

$$\int_{\Gamma} p_j \cdot u_j^* \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} b_j \cdot u_j^* \cdot d\Omega = \int_{\Gamma} u_j \cdot p_j^* \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} b_j^* \cdot u_j \cdot d\Omega \quad 8.21$$

Para transformar a expressão 8.21 numa forma integral sobre a qual se possa realizar uma análise numérica, é preciso uma breve explicação do problema fundamental, como é descrito pela equação 8.20. Mas para um melhor entendimento torna-se necessário dividir o sistema de equações 8.20 nas três equações que representam o problema:

$$\begin{aligned} \sigma_{i1,i} + b_1^* &= 0 \\ \sigma_{i2,i} + b_2^* &= 0 \\ \sigma_{i3,i} + b_3^* &= 0 \end{aligned} \quad 8.22$$

O problema fundamental é constituído por 3 casos de carregamento. No primeiro aplica-se apenas uma força concentrada e unitária na direção 1, portanto:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{1i1,i} + \delta^*(s, q) &= 0 \\
 \sigma_{1i2,i} + 0 &= 0 \\
 \sigma_{1i3,i} + 0 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{8.23}$$

Onde $\delta^*(s, q)$: distribuição Delta de Dirac – BARBIRATO (1999).

Na equação 8.23, o índice adicional “1” representa o primeiro problema fundamental e, portanto, a direção do carregamento concentrado.

Conseqüentemente, no segundo problema fundamental, a força concentrada e unitária atua na direção 2, o que resulta:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{2i1,i} + 0 &= 0 \\
 \sigma_{2i2,i} + \delta^*(s, q) &= 0 \\
 \sigma_{2i3,i} + 0 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{8.24}$$

Analogamente, tem-se para o terceiro problema fundamental:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{3i1,i} + 0 &= 0 \\
 \sigma_{3i2,i} + 0 &= 0 \\
 \sigma_{3i3,i} + \delta^*(s, q) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{8.25}$$

E de maneira geral, tem-se:

$$\sigma_{kij,i}^* + b_{kj}^* = 0
 \tag{8.26}$$

Onde:

$$b_{kj}^* = \delta_{kj} \cdot \delta(s, q)
 \tag{8.27}$$

Sendo δ_{kj} o delta de Kronecker. O conjunto de soluções dos problemas “k” denomina-se solução fundamental do problema elastostático (u_{kj}^*).

Substituindo-se os estados u_{kj}^* e de seu carregamento correspondente b_{kj}^* na expressão 8.21 e trocando-se devidamente o índice “k” por “i”, tem-se a equação integral de contorno para deslocamento.

$$u_i(s) = \int_{\Gamma} p_j(Q) \cdot u_{ij}^*(s, Q) \cdot d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j(Q) \cdot p_{ij}^*(s, Q) \cdot d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(q) \cdot u_{ij}^*(s, q) \cdot d\Omega \quad 8.28$$

Esta equação é chamada de Identidade Somigliana que determina valores de deslocamentos para pontos internos através de deslocamentos e forças de superfície do contorno, u_j e p_j respectivamente.

A equação integral para pontos no contorno (trecho suave) tem o seguinte aspecto:

$$c_{ij}(S) \cdot u_j(S) + \int_{\Gamma} u_j(Q) \cdot p_{ij}^*(S, Q) \cdot d\Gamma(Q) = \int_{\Gamma} p_j(Q) \cdot u_{ij}^*(S, Q) \cdot d\Gamma(Q) + \int_{\Omega} b_j(q) \cdot u_{ij}^*(S, q) \cdot d\Omega(q) \quad 8.29$$

Onde:

$$c_{ij}(S) = \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad 8.30$$

Para pontos externos ao domínio pode-se obter uma expressão semelhante à 8.29, mas com o coeficiente c_{ij} igual a zero. Assim a expressão 8.29 torna-se uma expressão geral cujo coeficiente c_{ij} possui os seguintes valores:

$$\begin{aligned} c_{ij}(S) &= \delta_{ij} && \text{p/ pontos internos} \\ c_{ij}(S) &= \frac{1}{2} \cdot \delta_{ij} && \text{p/ pontos do contorno suave} \\ c_{ij}(S) &= 0 && \text{p/ pontos externos} \end{aligned} \quad 8.31$$

O Método dos Elementos de Contorno tem origem com a avaliação numérica da expressão 8.29. Esta formulação é denominada de formulação direta, pois a equação 8.29 expressa deslocamentos e forças de superfície de pontos do contorno do sólido, e tais variáveis possuem significado físico imediato.

As integrais analíticas para pontos no contorno para a solução fundamental de Mindlin devem ser realizadas utilizando-se da propriedade do movimento de corpo rígido, como descrito no item 8.5.3.

8.4 EQUACIONAMENTO ALGÉBRICO

As equações integrais de contorno, que servem de base ao Método dos Elementos de Contorno, são transformadas em equações algébricas para serem utilizadas e isso se dá com a discretização do contorno em elementos com determinada aproximação e forma, a fim de que possam ser resolvidas numericamente.

Em geral, os elementos utilizados para a discretização de um sólido tridimensional possuem a forma triangular ou quadrangular, podendo ser planos ou curvos. Estes elementos possuem funções interpoladoras, definidas por polinômios que podem ser constantes, lineares, quadráticos ou de ordem superior.

Para se escrever o equacionamento algébrico do método é necessário inicialmente escrever as coordenadas cartesianas de um ponto P qualquer de um elemento em função das coordenadas dos nós que o definem. Portanto tem-se:

$$x_i = \Phi_k \cdot X_i^k \quad 8.32$$

Onde:

x_i : coordenadas cartesianas do ponto P

Φ_k : funções interpoladoras

X_i^k : coordenadas cartesianas dos nós do elemento

Que em forma matricial pode ser expressa da seguinte forma:

$$x = \Phi^T X^n \quad 8.33$$

De maneira análoga são determinadas expressões para deslocamentos e forças de superfície:

$$u = \Phi^T U^n \quad 8.34$$

$$p = \Phi^T P^n \quad 8.35$$

Da mesma forma, as forças volumétricas são dadas pela seguinte expressão:

$$b = \Phi_c^T B^n \quad 8.36$$

Onde:

Φ e Φ_c : funções interpoladoras do elemento e da célula, respectivamente.

U^n e P^n : valores de deslocamentos e forças de superfície nodais do elemento, respectivamente.

B^n : valores de forças volumétricas nodais da célula.

Substituindo-se as aproximações apresentadas sobre a Identidade Somigliana de 8.28 para um ponto S qualquer, uma discretização do contorno em L elementos e uma discretização do domínio em M células, determina-se a seguinte equação algébrica:

$$\begin{aligned} c(S) \cdot u(S) + \sum_{i=1}^L \left[\int_{\Gamma_i} p^*(S, Q) \cdot \Phi^T(Q) \cdot d\Gamma(Q) \right] \cdot U^N(Q) = \\ \sum_{i=1}^L \left[\int_{\Gamma_i} u^*(S, Q) \cdot \Phi^T(Q) \cdot d\Gamma(Q) \right] \cdot P^N(Q) \\ + \sum_{j=1}^M \left[\int_{\Omega_j} u^*(S, q) \cdot \Phi_c^T(q) \cdot d\Omega(q) \right] \cdot B^N(q) \end{aligned} \quad 8.37$$

Onde o índice N nos vetores U, P e B indica que se trata dos vetores com os valores de todos os elementos ou células, e não somente do elemento i ou da célula j.

Tomando-se o número de pontos fonte igual ao número de nós do contorno, a equação 8.37 pode-se escrever matricialmente:

$$CU + \hat{H}U = GP + DB \quad 8.38$$

Onde \hat{H} , G e D : matrizes determinadas através das integrais numéricas sobre os elementos e células, e C é a matriz dos termos livres dados em 8.31 para as linhas referentes à equação 8.37.

Adicionando-se a matriz C à matriz \hat{H} , obtém-se:

$$HU = GP + DB \quad 8.39$$

O sistema algébrico de equações apresentado em 8.39 é o sistema para solução do problema elástico tridimensional, utilizando-se soluções fundamentais de Kelvin e Mindlin, adaptando-se para Mindlin a questão da determinação das integrais singulares com a utilização da propriedade do movimento de corpo rígido.

Com aplicação das condições de contorno em 8.39 através da troca de colunas entre as matrizes H e G e dos valores prescritos dos vetores U e P , consegue-se obter um sistema algébrico onde as incógnitas ficam todas do lado esquerdo da igualdade e assim torna-se possível a utilização de procedimentos para resolução de sistemas lineares para se determinar a resposta do problema.

$$AX = F \quad 8.40$$

Onde:

A : matriz cujas colunas correspondem a valores incógnitos.

X : vetor das incógnitas de deslocamentos e forças de superfície.

F : vetor obtido através da multiplicação da matriz G e o vetor P com os valores já trocados, podendo este ainda ser acrescido da contribuição das forças de volume DB .

8.5 PROCESSOS DE INTEGRAÇÃO

Os processos de integração utilizados são os apresentados em SOUZA (2001), uma vez que, como dito anteriormente, as implementações relacionadas ao Método dos Elementos de Contorno foram obtidas to referido trabalho e adaptadas para o problema que se deseja tratar. Uma breve descrição das técnicas empregadas é apresentada a seguir, lembrando-se que estas se encontram detalhadas em SOUZA (2001).

8.5.1 INTEGRAL NÃO SINGULAR

A integral não singular ocorre quando o ponto fonte não pertence ao elemento a ser integrado e quando o ponto fonte não está muito próximo ao elemento. Este tipo de integração é a forma mais direta de se calcular a integral sobre um elemento, sendo que para elementos triangulares planos, a integração é feita através da quadratura de HAMMER *et al.* (1956) e é estabelecida em função das coordenadas homogêneas.

Técnicas de subdivisão dos elementos são aplicadas para que se realize uma melhor integração nos elementos que se encontram mais próximos do ponto fonte a ser integrado. A integração não singular é realizada neste trabalho exatamente como descrito e implementado por SOUZA (2001) para ambas soluções fundamentais.

8.5.2 INTEGRAL QUASE SINGULAR E QUASE HIPER-SINGULAR

Nos casos em que o ponto fonte se encontra muito próximo ao elemento e a utilização da quadratura de Hammer torna-se muito dispendiosa devido ao grande número de sub-elementos necessários para uma boa integração, é preciso recorrer a um método alternativo para avaliar essa integral de forma mais rápida, no caso da formulação implementada por SOUZA (2001), baseado no trabalho de MOM-MA *et al.* (1996) – apud SOUZA (2001), que efetua a integração em elementos unidimensionais através da quadratura de Gauss com subdivisão progressiva dos elementos. Maiores detalhes podem ser encontrados no referido trabalho.

As integrações quase singular e quase hiper-singular também são realizadas neste trabalho exatamente como descrito e implementado por SOUZA (2001). Uma descrição ainda mais detalhada pode ser vista em ALMEIDA (2003a).

8.5.3 INTEGRAL SINGULAR

Quando o ponto fonte pertence ao elemento a ser integrado e este ponto está contido no contorno diz-se que essa integral é uma integral singular, pois a solução fundamental possui termos ($1/r$ e $1/r^2$) que não podem ser integrados diretamente pelas técnicas descritas anteriormente. Para se efetuar tal integral é preciso recorrer à mudança das coordenadas cartesianas para coordenadas polares.

A integral sobre este elemento pode ser resolvida de três formas, sendo as duas primeiras semi-analíticas e a terceira analítica:

- Analiticamente em r e numericamente com a quadratura de Gauss em θ ;
- Analiticamente em r e com uma transformação da parte angular para linear no contorno de cada lado do elemento e efetuando-se essa parte numericamente com a quadratura de Gauss;
- Analiticamente em r e θ .

No trabalho de SOUZA (2001) as integrais singulares foram obtidas para solução fundamental de Kelvin de forma semi-analítica, de acordo com o segundo procedimento citado e o termo livre calculado utilizando-se a propriedade do movimento de corpo rígido, BREBBIA *et al.* (1984).

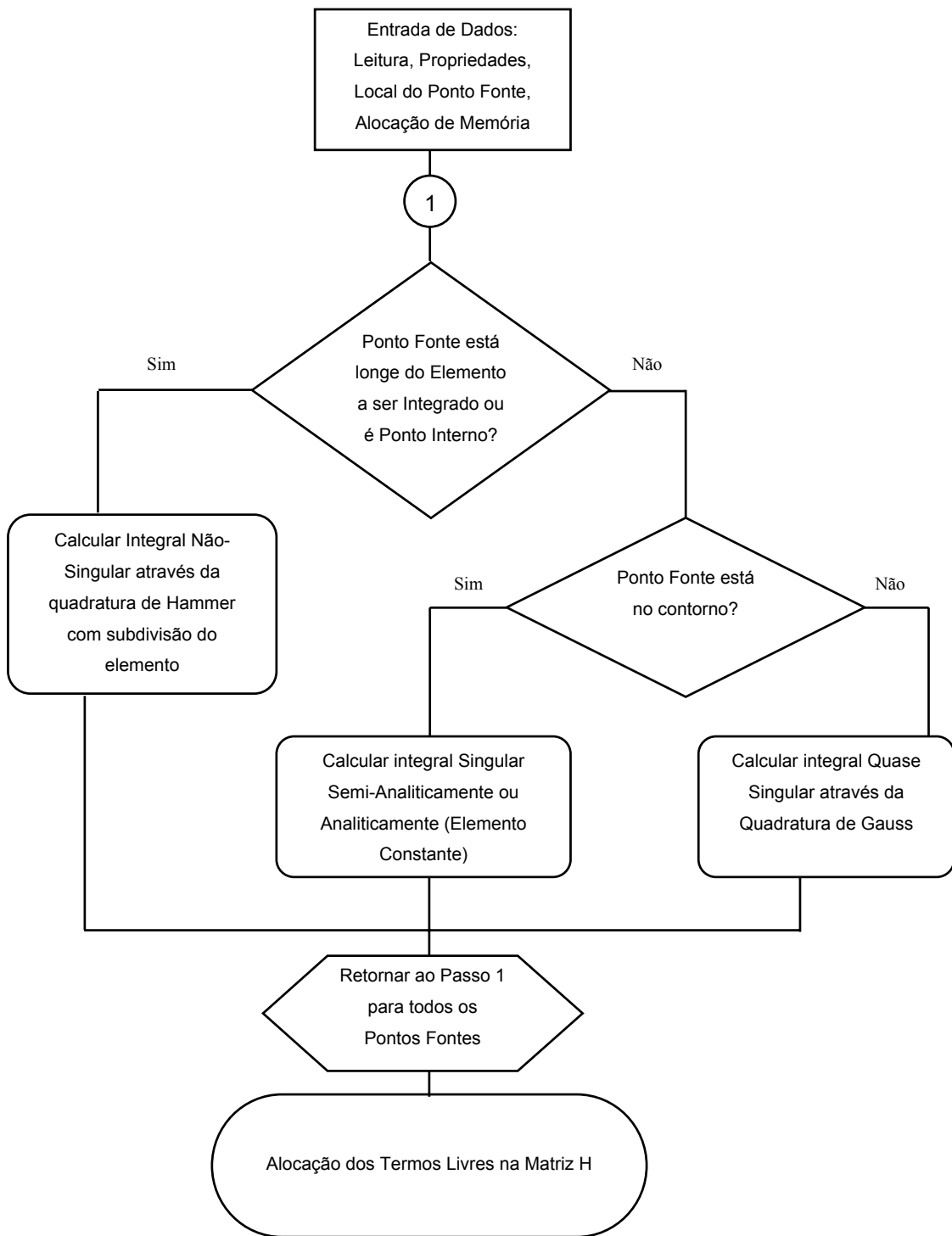


Figura 8.4 - Fluxograma da montagem das equações com base em SOUZA (2001).

A consideração da viscoelasticidade no MEC se fundamenta teoricamente no modelo constitutivo de Kelvin mostrado no capítulo 3 e em desenvolvimentos matemáticos descritos em MESQUITA (2002) e MESQUITA & CODA (2002). Sua implementação, entretanto, é descrita no capítulo 9, e se faz diretamente na formulação

acoplada, observando imediata semelhança nas manipulações algébricas das matrizes (de rigidez) oriundas do MEC e do MEF.

8.7 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

A formulação implementada por SOUZA (2001) e utilizada neste trabalho já foi testada e os exemplos são apresentados no referido trabalho. Para verificar as modificações referentes à inclusão da solução fundamental de Mindlin no programa computacional, apresenta-se um exemplo de carregamento uniformemente distribuído sobre a superfície do semi-infinito, proposto por BARBIRATO (1999), que utilizou as soluções fundamentais de Kelvin e Mindlin para resolução do problema. Os dados gerais do exemplo, incluindo geometria e condições de contorno, são apresentados na Figura 8.5.

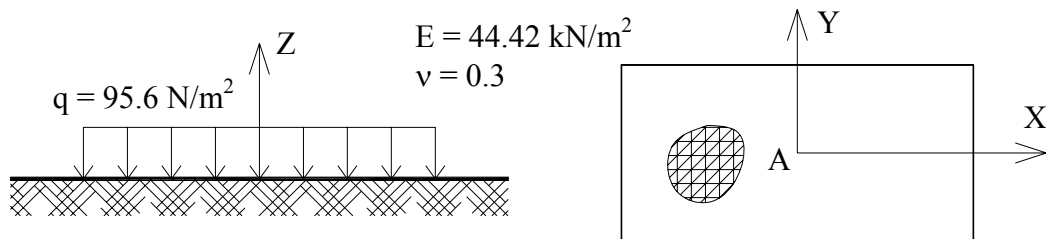


Figura 8.5 – Área retangular na superfície do semi-infinito submetida ao carregamento uniformemente distribuído.

Sabe-se que para solução fundamental de Mindlin apenas a superfície carregada precisa ser discretizada, não sendo necessária a discretização da superfície livre de tração do semi-infinito, como é o caso quando da aplicação da solução fundamental de Kelvin, adequada para espaço infinito. No entanto, como apresentado em BARBIRATO (1999), utiliza-se a mesma discretização para ambas as soluções fundamentais. Foram utilizadas 20 x 20 divisões de elementos de contorno triangulares, com aproximação linear de variáveis. Os resultados são apresentado na Tabela 8.1.

Tabela 8.1 – Resultados de deslocamento na direção vertical para o ponto “A”.

BARBIRATO (1999)		Presente Trabalho	
Kelvin	Mindlin	Kelvin	Mindlin
2.742	2.829	2.675	2.711

Analisando-se os resultados apresentados na Tabela 8.1, podemos concluir que as modificações realizadas para inclusão da solução fundamental de Mindlin forneceram bons resultados, bem como concluir que a pequena diferença entre as respostas pode estar relacionada com a diferença das estratégias de integração numérica utilizadas nos dois trabalhos. Deve-se comentar que as técnicas utilizadas aqui são mais confiáveis que aquelas aplicadas em BARBIRATO (1999) – ver SOUZA (2001) e ALMEIDA (2003a).

CAPÍTULO 9

ACOPLAMENTO ENTRE O MEC E O MEF

9.1 ASPECTOS GERAIS

O acoplamento entre o Método dos Elementos de Contorno e o Método dos Elementos Finitos pode ser realizado de diferentes maneiras, destacando-se a técnica de sub-regiões, tradicionalmente utilizada no acoplamento entre várias regiões modeladas pelo MEC, onde deslocamentos e esforços são compatibilizados na interface do acoplamento entre os diferentes domínios modelados, sendo também esta a idéia geral para as outras formas de acoplamento. Na presente pesquisa optou-se por aplicar a transformação das matrizes de contorno em matriz de rigidez equivalente ao MEF, de forma similar ao apresentado em BREBBIA & DOMINGUEZ (1992).

Na técnica de sub-regiões a equação de equilíbrio algébrica encontrada para o MEF deve ser manipulada de tal forma a se encontra uma nova equação compatível com aquela escrita pelo MEC. Já no procedimento aqui proposto, como dito anteriormente, obtém-se o acoplamento entre as equações de equilíbrio algébricas dos dois métodos através de adequações nas matrizes obtidas pelo MEC, transformando as cargas de superfície em cargas concentradas e manipulando-se as matrizes H e G e a matriz resultante da transformação de tal forma a se obter uma matriz denominada aqui de “matriz de rigidez equivalente”. Deve-se comentar que este tipo de manipulação preliminar é feita em algumas técnicas de sub-regiões, porém o tratamento algébrico final resulta em matriz esparsa onde as incógnitas da interface estão presentes e formam o sistema grande e esparso.

Na técnica aqui utilizada, as forças de interface devem ser resolvidas (se desejadas) depois da solução do sistema de equações. Assim o sistema global a ser

resolvido é menor, tornando o processo bastante econômico quando comparado às técnicas de sub-regiões difundidas na literatura.

As características gerais sobre o tipo de acoplamento utilizado nesta pesquisa são apresentadas a seguir, juntamente com um exemplo genérico de acoplamento baseado em um problema fictício e um exemplo de aplicação geral.

9.2 FORMULAÇÃO GERAL

Pelo que foi descrito do acoplamento, fazendo-se uso da equação algébrica 8.39 obtida para o MEC no capítulo 8, a menos dos termos de carregamentos de domínio, tem-se:

$$HU = GP \quad 9.1$$

Para o MEF, a equação de equilíbrio algébrica pode ser escrita por:

$$KU = F \quad 9.2$$

O vetor dos carregamentos nodais F pode ser escrito em função das forças de superfície P da seguinte forma:

$$F = G_{ef}P \quad 9.3$$

Onde G_{ef} é a matriz originada da integração das funções de forma ao longo dos elementos que transforma forças de superfície em carregamentos nodais concentrados tal como descrito tradicionalmente no MEF, CODA *et al.* (1999). Fazendo-se uso da relação 9.3 na sua forma inversa, pode-se escrever o vetor de forças de superfície como:

$$P = G_{ef}^{-1}F \quad 9.4$$

Substituindo-se 9.4 em 9.1, obtém-se a equação de equilíbrio algébrica do MEC escrita em função dos carregamentos nodais concentrados, ou seja:

$$HU = GG_{ef}^{-1}F \quad 9.5$$

Assumindo-se que $\bar{G} = GG_{ef}^{-1}$ e multiplicando-se a equação 9.5 por \bar{G}^{-1} nos dois lados da igualdade, resulta:

$$\bar{G}^{-1}HU = F \quad 9.6$$

Deve-se comentar que para problemas infinitos e semi-infinitos (Solução fundamental de Mindlin) as matrizes “G” são sempre pequenas.

Com estas manipulações, as equações 9.2 e 9.6 puderam ser escritas de forma similar. Efetuando-se uma última simplificação, obtém-se a expressão final do MEC a ser acoplada com as equações de equilíbrio algébricas do MEF, sendo dadas por:

$$\bar{K}U = F \quad 9.7$$

$$\text{Onde } \bar{K} = \bar{G}^{-1}H .$$

O acoplamento entre as variáveis obtidas pelos métodos se dá de forma direta (somando termos), naturalmente respeitando-se os graus de liberdade existentes em cada uma das formulações independentemente, sendo 3 translações comuns entre ambos e mais 3 rotações para o MEF. Salienta-se que, da maneira que o acoplamento foi implementado, permite-se qualquer combinação dos graus de liberdade que se deseja realizar, por exemplo, acoplando-se somente o grau de liberdade vertical no caso de uma placa apoiada em um solo. Esta flexibilidade torna a formulação um tanto quanto mais geral para realização da combinação entre os métodos.

As matrizes do MEC sofreram as modificações apresentadas antes de se efetuar a imposição das condições de contorno através da troca de colunas das matrizes H e G, como tradicionalmente se faz no MEC. As condições de contorno de força e deslocamento serão aplicadas após a realização do acoplamento entre os métodos, fazendo-se uso da técnica de zeros e 1 ou troca de colunas de acordo com o problema que se esteja analisar.

A equação de equilíbrio algébrica para o problema acoplado assume portanto a forma estabelecida em 9.8:

$$(K + \bar{K})U = F \quad 9.8$$

Introduzindo-se a viscosidade na formulação tal como apresentado no capítulo 3, a expressão 9.8 assume a forma de 9.9 para o caso mais simples da consideração da viscosidade, ou seja, considerando que todas as camadas e elementos finitos possuam o mesmo parâmetro de viscosidade.

$$KU + \gamma K \dot{U} + \bar{K}U + \bar{\gamma} \bar{K} \dot{U} = F \quad 9.9$$

O vetor de velocidade de deslocamento \dot{U} , adotando-se uma aproximação linear, é dado por:

$$\dot{U} = \frac{U_{t+1} - U_t}{\Delta t} \quad 9.10$$

Substituindo-se 9.10 em 9.9 e isolando apenas as incógnitas no lado esquerdo da equação, resulta em:

$$\left(\left(I + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) K + \left(I + \frac{\bar{\gamma}}{\Delta t} \right) \bar{K} \right) U_{t+1} = F + \left(\frac{\gamma}{\Delta t} K + \frac{\bar{\gamma}}{\Delta t} \bar{K} \right) U_t \quad 9.11$$

Buscando exemplificar de forma mais clara o acoplamento entre os métodos, considere um problema onde os elementos finitos estão conectados a 16 nós, numerados seqüencialmente de 1 a 16, sendo cada um com 6 graus de liberdade. O acoplamento entre os elementos de contorno, conectados aos nós 6, 7, 10 e 11, se dá apenas no grau de liberdade 3 dos referidos nós, ficando portanto os demais graus de liberdade livres de qualquer tipo de acoplamento.

Portanto, a ordem do sistema gerado para cada um dos métodos isoladamente é de 96 e 12 equações, sendo para o MEF e para o MEC respectivamente. Para o sistema acoplado, o número de equações é obtido somando-se os graus de liberdade dos dois métodos e subtraindo-se os graus acoplados entre ambos. Portanto, somando-se os 96

graus referentes ao MEF e os 12 referentes ao MEC e do resultado descontando-se os 4 graus de liberdade acoplados, resulta em um sistema final composto de 104 equações.

Transportando-se o que foi dito para uma figura, é possível visualizar a contribuição das matrizes do MEF e do MEC na matriz final acoplada, destacando-se os graus de liberdade com contribuição dos dois métodos e também os não acoplados.

Na Figura 9.1, são apresentados os graus de liberdade para os 16 nós que compõem o problema, expandindo-se apenas esses graus para os nós acoplados entre os métodos. Os nós adicionais e que aparecem sublinhados são referentes aos graus de liberdade pertencentes ao MEC e não acoplados ao MEF.

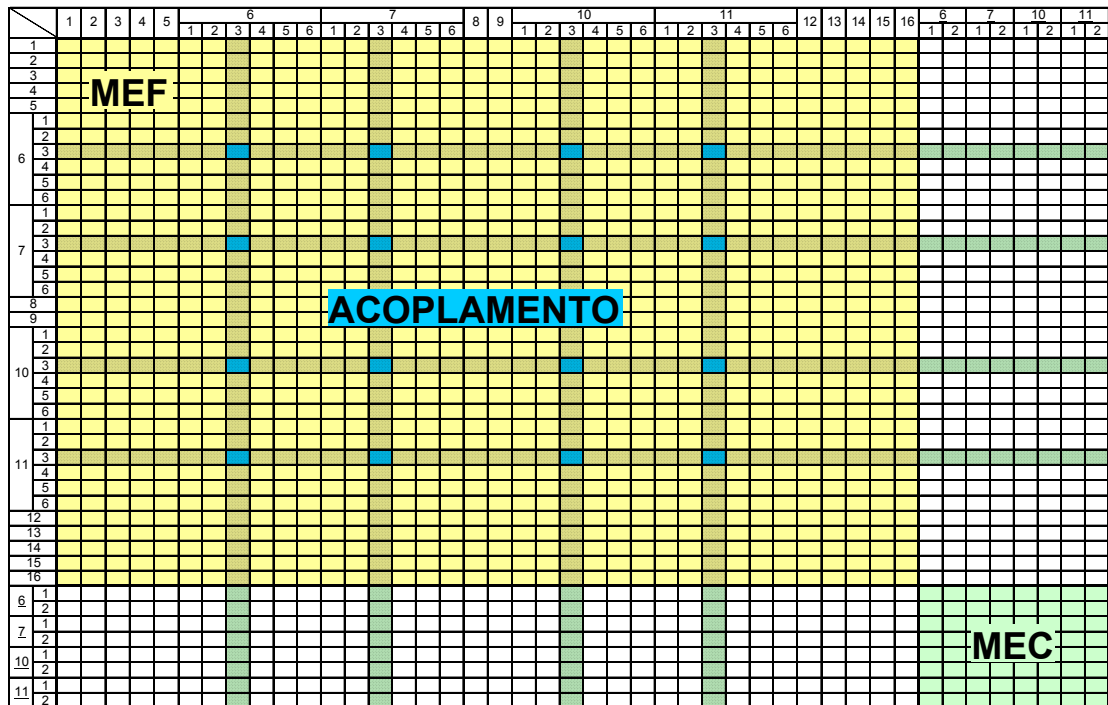


Figura 9.1 – Matriz de rigidez acoplada.

9.3 EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Este exemplo trata de uma placa quadrada de lado “L” sobre o semi-infinito e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído “q” sobre toda área. Os dados utilizados para o exemplo cuja geometria se encontra na Figura 9.2 são apresentados na Tabela 9.1.

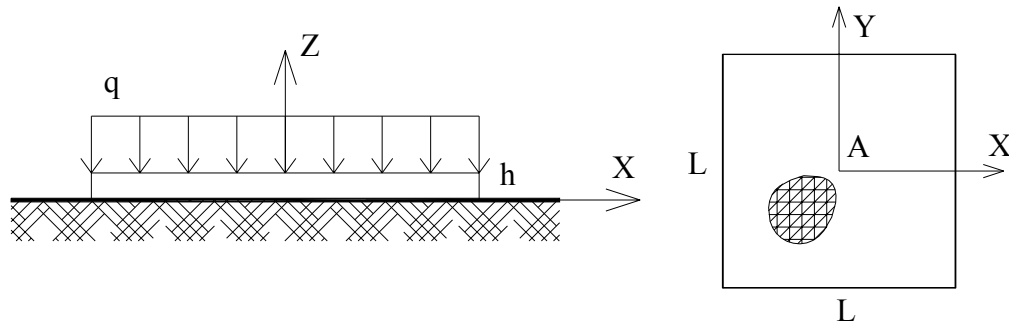


Figura 9.2 – Placa quadrada submetida a carregamento uniformemente distribuído.

Tabela 9.1 – Dados gerais para o exemplo.

Placa	Solo	Gerai
$E = 2.1 \times 10^{10} \text{ N / m}^2$	$E = 2.1 \times 10^9 \text{ N / m}^2$	$L = 20 \text{ m}$
$\nu = 0.25$	$\nu = 0.13$	$q = 300000 \text{ N / m}^2$

Os resultados de deslocamento vertical são obtidos para o ponto “A” no centro da placa. São calculados os deslocamentos para diferentes espessuras para a placa, saindo de 5 m até 0 m, onde se considera o carregamento aplicado diretamente ao solo. Os resultados são comparados com ALMEIDA (2003a) e são apresentados na Tabela 9.2. Foram utilizados 6 x 6 divisões de elementos triangulares com aproximação cúbica de variáveis para representação da placa e conseqüentemente 18 x 18 divisões de elementos triangulares com aproximação linear para a representação do solo. Os 3 graus de liberdade dos nós de contorno estão acoplados com a placa e foi adotado o plano médio da placa como plano de referência para o exemplo.

Tabela 9.2 – Resultados de deslocamento vertical para o centro da placa.

h (m)	ALMEIDA (2003a) x 10 ⁻³	Presente Trabalho x 10 ⁻³	Diferença (%)
5.0	2.4230	2.5158	3.83
2.5	2.7631	2.7945	1.14
1.5	2.8464	2.8744	0.98
0.5	2.9286	2.9265	0.07
0.0	3.1202	3.1435	0.75

Analisando-se os resultados apresentados na Tabela 9.2, verifica-se a eficiência da técnica utilizada para realização do acoplamento entre o MEC e o MEF, bem como da solução fundamental de Mindlin implementada no programa de SOUZA (2001). A pequena diferença encontrada entre as respostas está relacionada à discretização e a aproximação de elementos finitos utilizadas para a placa, diferentes nos dois trabalhos comparados.

Deve-se comentar que se espera deslocamentos maiores para a formulação aqui proposta (placa espessa) devido à aplicação da cinemática de Reissner geral. Em ALMEIDA (2003a) a cinemática de Kirchhoff foi empregada.

CAPÍTULO 10

EXEMPLOS GERAIS DE APLICAÇÃO

10.1 INTRODUÇÃO

Exemplos gerais são aqui mostrados, buscando-se explorar a potencialidade da formulação apresentada e implementada nesta pesquisa. Entende-se que não foram esgotadas todas as possibilidades de análises propiciadas por esta formulação, em virtude do grau de dificuldade de se representar certas geometrias e também em função do grande número de dados gerados, para uma refinada discretização no caso de elementos finitos, e conseqüente capacidade de equipamentos necessários para o processamento desses exemplos. Mesmo assim, acredita-se que com os exemplos apresentados a seguir consegue-se verificar o real funcionamento e validação da formulação implementada.

Neste sentido, parte-se de análises lineares elásticas, avançando para simulação de problemas onde os comportamentos viscoso e plástico possam ser verificados. Alguns exemplos iniciais para verificação da formulação de elementos finitos com relação ao surgimento de efeito de travamento por cortante também são apresentados e comparados com respostas analíticas disponíveis na literatura.

10.2 EXEMPLO 01

Neste primeiro exemplo, uma comparação do elemento de casca com as respostas analítica e numérica obtidas para o elemento de pórtico laminado no item 4.8.3 é realizada, Figura 10.1. O objetivo desta comparação é a verificação da formulação de casca laminada com relação ao efeito de travamento por cortante, uma

vez que neste exemplo a relação entre a espessura e o comprimento da estrutura foi variada de 1/1 até 1/100.000 sendo para esta última considerada a espessura como extremamente fina.

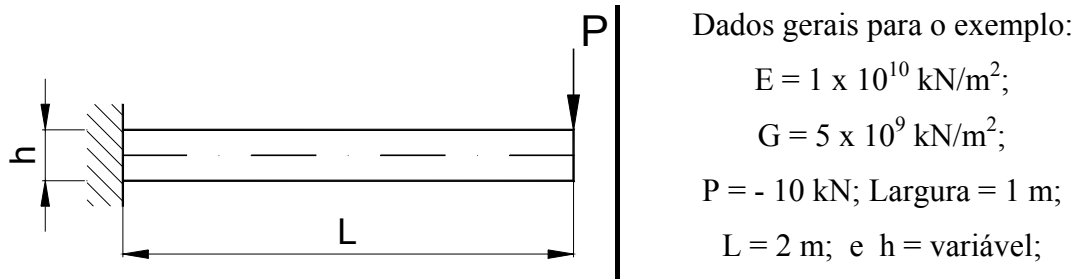


Figura 10.1 – Viga em balanço com carga concentrada na extremidade livre.

Foram utilizados 4x4 divisões de elementos triangulares com aproximação cúbica para discretização deste problema.

A Tabela 10.1 apresenta os resultados obtidos para as diversas relações de h/L utilizadas. Com estes resultados, pode-se concluir que o elemento finito de casca desenvolvido, com aproximação cúbica de variáveis, não apresenta problemas com relação ao efeito de travamento por cisalhamento.

Novamente, analisando-se a coluna de “Influência do Cisalhamento” da Tabela 10.1, podemos verificar que o efeito do cisalhamento torna-se significativo para valores de h/L maiores que 1/6.

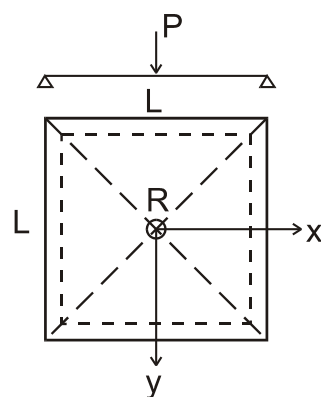
Tabela 10.1 – Resultados obtidos

h	h/L	Deslocamento Vertical			Razão w_{casca}/w_a	Razão $w_{pórt.}/w_a$	Razão Relativa	Influência do Cisalhamento
		T. Técnica	Pórtico	Casca				
0.00002	0.00001	4.00E+06	3.99E+06	4.00E+06	1.0008	0.99752	0.08%	0.00%
0.0002	0.0001	4.00E+03	3.99E+03	4.00E+03	1.0000	0.99750	0.00%	0.08%
0.002	0.001	4.00E+00	3.99E+00	4.00E+00	1.0000	0.99750	0.00%	0.08%
0.02	0.01	4.00E-03	3.99E-03	4.00E-03	1.0000	0.99783	0.00%	0.08%
0.2	0.1	4.00E-06	4.02E-06	4.02E-06	1.0060	1.00580	0.60%	0.52%
0.3	0.15	1.19E-06	1.20E-06	1.20E-06	1.0135	1.01343	1.35%	1.27%
0.4	0.2	5.00E-07	5.12E-07	5.12E-07	1.0240	1.02400	2.40%	2.32%
0.5	0.25	2.56E-07	2.66E-07	2.66E-07	1.0375	1.03750	3.75%	3.67%
1	0.5	3.20E-08	3.68E-08	3.68E-08	1.1500	1.15000	15.00%	14.92%
1.5	0.75	9.48E-09	1.27E-08	1.27E-08	1.3375	1.33945	33.75%	33.67%
2	1	4.00E-09	6.40E-09	6.40E-09	1.6000	1.60000	60.00%	59.92%

As respostas para o elemento de casca para pequenas espessuras são exatamente iguais às analíticas em função da aproximação cúbica do elemento ser da mesma ordem que a resposta analítica, o mesmo não ocorrendo com o elemento de pórtico onde foi utilizada aproximação quadrática para as variáveis.

10.3 EXEMPLO 02

Este segundo exemplo, BATOZ *et al.* (2000), trata de uma placa simplesmente apoiada nas quatro bordas e submetida a um carregamento concentrado no centro da mesma. A geometria da placa fina, bem como sua configuração de carregamento e vinculação podem ser verificadas na Figura 10.2. Os resultados numéricos obtidos para o elemento proposto com aproximação cúbica e para o elemento quadrilateral usando aproximação quadrática (MENEZES *et al.* (2001) e PACCOLA (2001)) são comparados com a teoria clássica de placas de Kirchhoff.



Dados gerais para o exemplo:

$$P = 4 \text{ kN};$$

$$L = 2 \text{ m}; h = 0.02 \text{ m}$$

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kN/m}^2;$$

$$G = 8.08 \times 10^6 \text{ kN/m}^2;$$

$$\nu = 0.3;$$

$$h / L = 1/100 \text{ – Placa Fina.}$$

Figura 10.2 – Placa simplesmente apoiada

Somente $\frac{1}{4}$ da estrutura foi discretizado aproveitando-se da simetria do problema. Uma malha de 10x10 divisões de elementos quadrilaterais foi utilizada, enquanto uma malha 5x5 divisões de elementos triangulares foi adotada. Os deslocamentos verticais (numérico e analítico) são apresentados na Figura 10.3. A razão entre as respostas analítica e a numérica no centro da placa é de 0.998 para o elemento quadrilateral e 1.002 para o triangular.

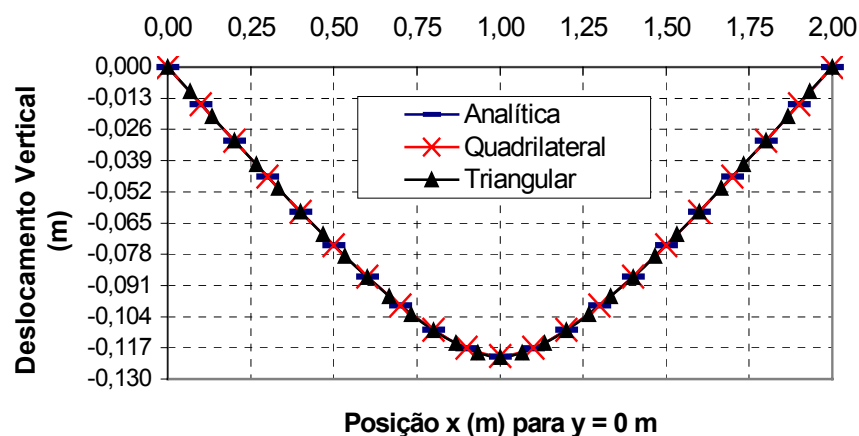


Figura 10.3 – Deslocamento Vertical da faixa central da placa

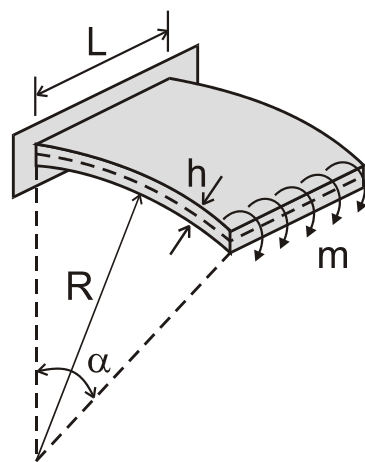
Analisando os resultados apresentados na Figura 10.3, podemos concluir que elementos de casca baseados na cinemática de laminados, tais como os aqui utilizados, são livres do travamento por cortante e podem ser usados para modelar placas espessas e finas.

10.4 EXEMPLO 03

Para o terceiro exemplo, BUCALEM & NÓBREGA (2000), uma casca engastada é modelada por 10x10 divisões de elementos quadrilaterais e 200 (10x10 divisões para melhor representação da geometria) elementos finitos triangulares. A geometria da casca e a configuração de carregamento e vinculação podem ser verificadas na Figura 10.4.

Na Figura 10.5 podem ser encontrados os resultados numéricos e analíticos obtidos para o deslocamento vertical para uma faixa de pontos contidos ao longo da borda livre perpendicular à borda engastada da casca.

A relação entre a resposta analítica e a resposta numérica na extremidade livre da casca onde foi aplicado o momento distribuído é de 1.005 (quad. e triang.) para os deslocamentos horizontal e vertical e também para a rotação. A resposta analítica foi obtida aplicando-se PTV em problema de pórtico curvo segundo hipótese de Euler-Bernoulli.



Dados gerais para o exemplo:

$$\begin{aligned}
 R &= 2 \text{ m}; \\
 m &= 240 \text{ kN.m/m}; \\
 \alpha &= 30^\circ; \\
 h &= 0.02 \text{ m}; \\
 L &= 1 \text{ m}; \\
 E &= 2.1 \times 10^8 \text{ kN/m}^2; \\
 G &= 1.05 \times 10^8 \text{ kN/m}^2; \\
 \nu &= 0.0;
 \end{aligned}$$

Figura 10.4 – Casca engastada

Esta diferença está associada à descrição da geometria (elementos planos) e não pode ser atribuída a qualquer tipo de travamento. Novamente, pode-se concluir que a cinemática adotada não apresenta travamento.

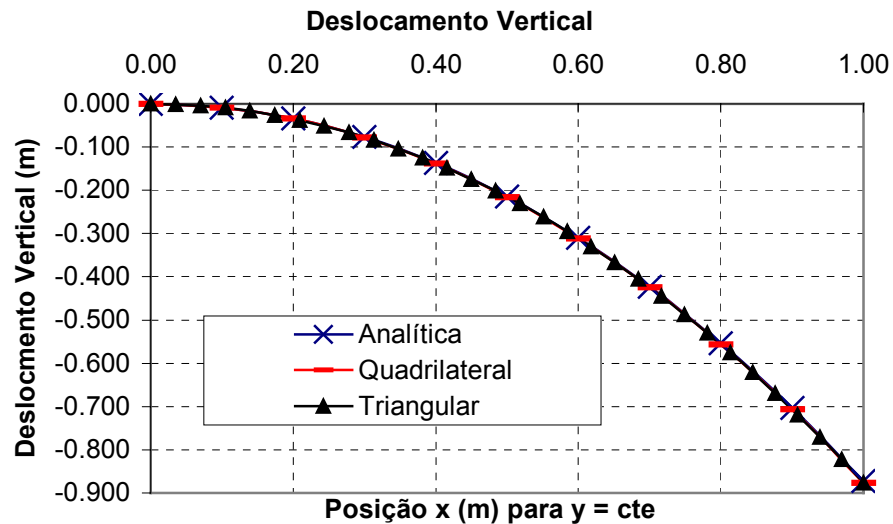


Figura 10.5 – Deslocamento vertical na borda livre perpendicular ao carregamento

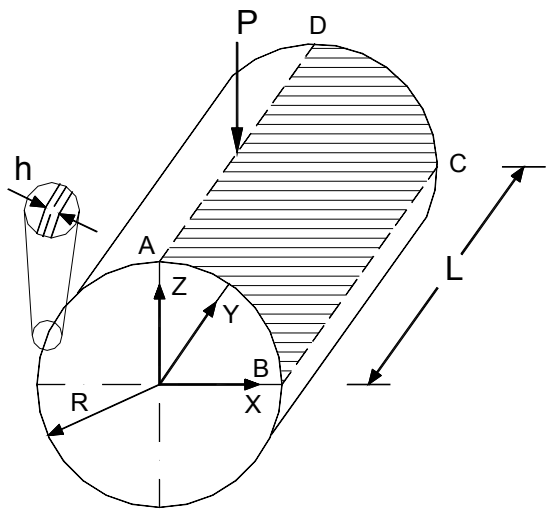
10.5 EXEMPLO 04

Este exemplo é sugerido por vários autores tais como, CHAPELLE & BATHE (1998), BUCALEM & NOBREGA (2000), BATOZ *et al.* (2000), SYDENSTRICKER & LANDAU (2000) e CHOI & LEE (2003) entre outros, para verificação do travamento dos elementos de casca com relação a cortante e efeito de membrana.

Trata-se de um cilindro de diâmetro igual ao comprimento, submetido a um carregamento concentrado simétrico e diametralmente oposto na posição $L/2$ do eixo do cilindro como ilustra a Figura 10.6. Os parâmetros geométricos e físicos para o exemplo são dados na referida figura.

Nos trabalhos citados, os autores buscam novos elementos finitos, sendo alguns triangulares, com formulação mista ou com maior número de graus de liberdade para poder representar o problema sem o aparecimento de travamento.

Novamente, elemento quadrilateral (aproximação quadrática – MENEZES *et al.* (2001) e PACCOLA(2001)), e triangular são adotados para rodar este exemplo. As discretizações são apresentadas na Figura 10.7 (quadrilateral - quadrático) e Figura 10.9 (Triangular - cúbico) e são referentes a $1/4$ do cilindro, correspondendo à área ABCD em destaque na Figura 10.6.



Dados gerais para o exemplo:

- $P = - 1 \text{ N};$
- $E = 3 \times 10^{10} \text{ N/m}^2;$
- $G = 1.5 \times 10^{10} \text{ N/m}^2;$
- $R = 3 \text{ m};$
- $h = 0.03\text{m};$
- $L = 6 \text{ m};$
- $\nu = 0.3;$

Figura 10.6 – Cilindro e carregamento.

A Tabela 10.2 auxilia o entendimento das discretizações adotadas para o problema para o elemento quadrilateral.

Tabela 10.2 – Características das discretizações adotadas.

Número da Malha	Número de Elementos nas direções	
	Circunferência	Eixo
1	10	10
2	10	15
3	10	30
4	20	30
5	20	30 elementos finitos com malha refinada próximo ao carregamento aplicado
6	20 elementos finitos com malha refinada nas proximidades do carregamento aplicado	30 elementos finitos com malha refinada nas proximidades do carregamento aplicado

Os resultados de deslocamento vertical no ponto de aplicação da carga “P” são mostrados na Figura 10.8.

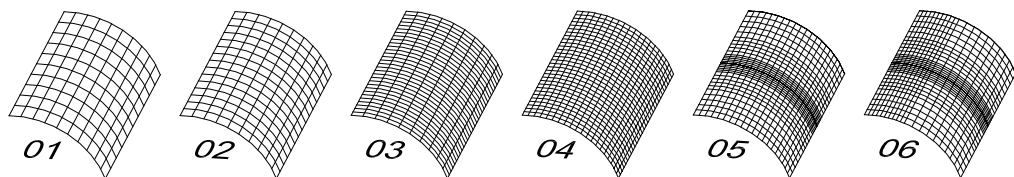


Figura 10.7 – Discretizações adotadas.

As malhas 04, 05 e 06 possuem o mesmo número de elementos, porém as malhas 05 e 06 possuem uma melhor discretização nas proximidades do ponto de aplicação do carregamento. Isto justifica o incremento da convergência no final do gráfico apresentado na Figura 10.8. Os resultados obtidos para estas 3 malhas realmente melhoraram à medida que se caminhou da malha 04 para a malha 06, mostrando que uma melhor discretização nas proximidades da aplicação do carregamento, onde irão ocorrer inflexões na placa deformada, possibilita a obtenção de resultados melhores para um mesmo número de elementos da discretização. O elemento finito triangular proposto, com aproximação cúbica, proporcionou bons resultados com apenas 288 elementos, como apresentado na Figura 10.8 e Figura 10.9. Isto se dá devido a flexibilidade de representação de inflexões que a aproximação cúbica proporciona. A mesma precisão foi obtida usando 2501 nós para a melhor discretização de elementos quadrilaterais (malha 06 – 600 elementos) e usando 1354 nós para o elemento triangular proposto.

Para se obter resultados mais próximos da resposta analítica, LINDBERG *et al.* (1969) – apud Manual do Programa ADINA[®] (2002), outras duas discretizações com elementos triangulares foram utilizadas, ambas para 1/8 do cilindro, ou 1/2 da área em destaque da Figura 10.6. Na primeira, foram utilizados 392 elementos, totalizando 1837 nós, obtendo-se um erro de 3.13 %. Na segunda, Figura 10.10, foram utilizados 520 elementos, usando 2425 nós e obtendo-se um erro de 2.07%.

Esses valores também são apresentados na Figura 10.8, sendo que este pequeno erro obtido para a discretização da Figura 10.10 não pode ser associado a efeito de travamento, seja ele por cortante ou efeito de membrana.

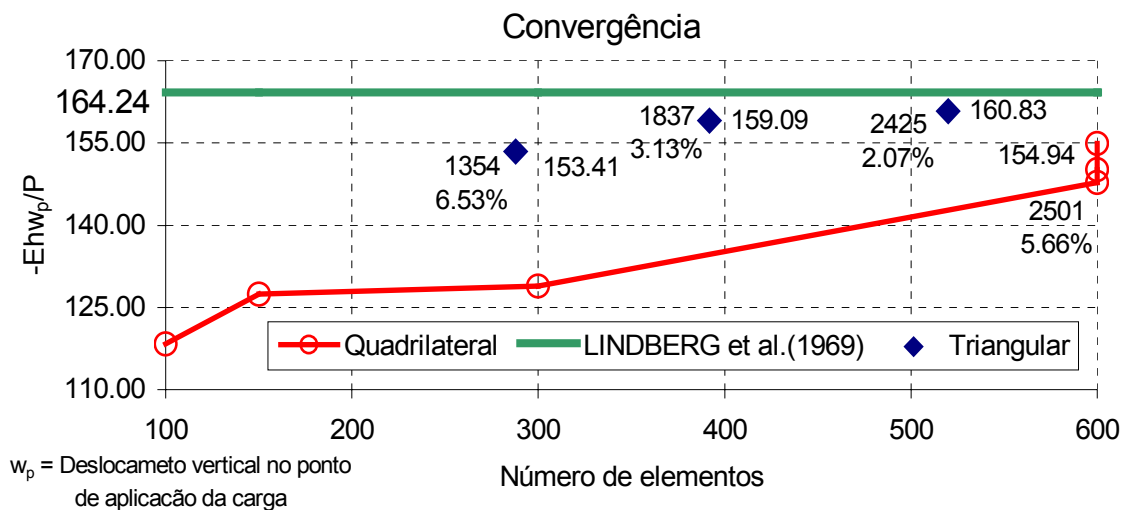


Figura 10.8 – Deslocamentos para as diferentes discretizações

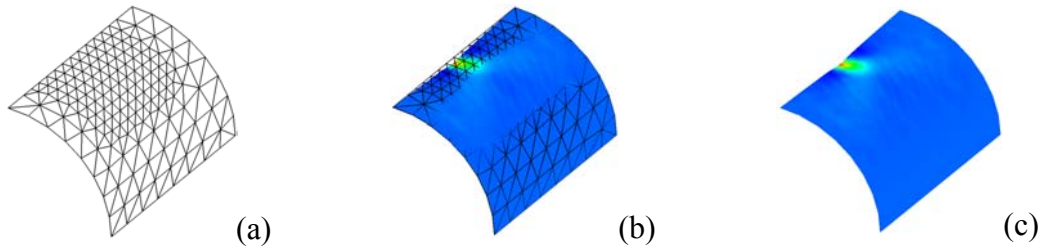


Figura 10.9 – (a) Malha triangular $1/4$; (b) e (c) Configuração deformada

A malha triangular da Figura 10.10 foi gerada buscando-se uma discretização uniforme e refinada para toda a casca, tornando possível desta forma uma melhor representação do seu comportamento com relação às inflexões que possam vir a ocorrer.

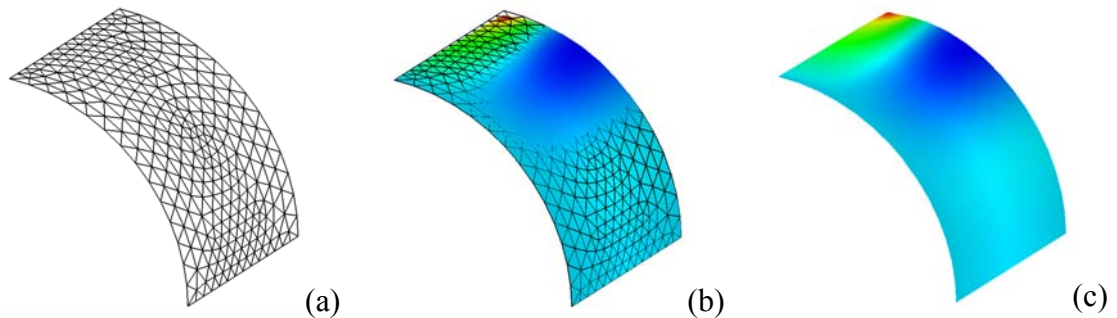


Figura 10.10 – (a) Malha triangular $1/8$; (b) e (c) Configuração deformada

Portanto, pode-se concluir que a cinemática de laminados utilizada não possui sensibilidade com relação ao efeito de travamento por cortante ou efeito de membrana, para os exemplos abordados, para uma representação adequada da geometria do problema. A aproximação cúbica proporciona uma melhora significativa nos resultados devido a melhor representação de inflexões que venham a ocorrer, bem como uma melhor representação da geometria de problemas de casca quando comparado aos elementos quadrilaterais.

Apenas como comentário e para retomar o que foi dito no início do texto referente ao elemento de pórtico 2D, o que se percebe (apesar de não estar explícito nos textos consultados) ao ler os trabalhos que tratam de travamento, é que os pesquisadores estão buscando elementos finitos que possam ser utilizados com malhas consideradas “pobres” e que os resultados obtidos com a utilização dessas malhas estejam dentro de valores considerados satisfatórios do ponto de vista de engenharia. Portanto, acredita-se que os elementos baseados em deslocamentos não apresentem travamento por membrana quando utilizados em malhas refinadas adequadamente.

10.6 EXEMPLO 05

Este exemplo, embora simples, foi formulado para verificar o comportamento da formulação viscoplástica implementada. Trata-se de uma chapa isotrópica submetida à tração simples, sendo que na fase plástica dois casos são analisados: encruamento positivo (*hardening*) e encruamento negativo (*softening*). As características geométricas, bem como propriedades do material, malha de elementos finitos e parâmetros de viscosidade e plasticidade utilizados no exemplo podem ser verificadas na Figura 10.11.

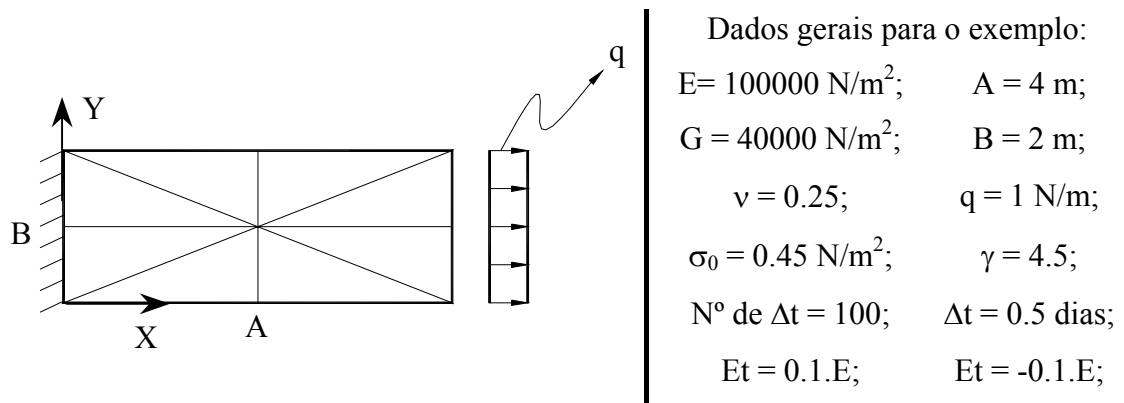


Figura 10.11 – Chapa tracionada

Os resultados de deslocamento e tensões obtidos para o centro da chapa são apresentados em gráficos a seguir, onde podemos concluir que o modelo implementado forneceu respostas satisfatórias.

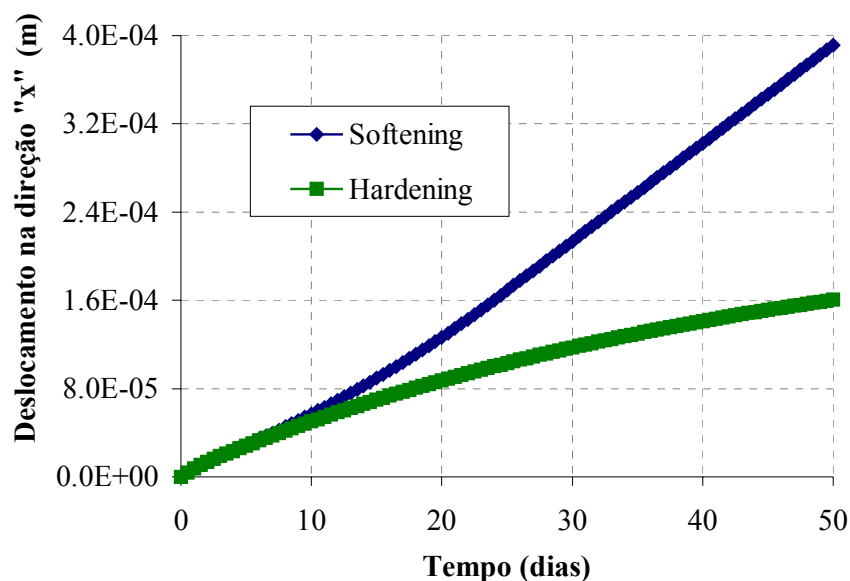


Figura 10.12 – Deslocamento na direção x para encruamento positivo e negativo.

O gráfico da Figura 10.12 se refere aos deslocamentos obtidos no centro da extremidade livre para o caso de encruamento positivo e negativo. A Figura 10.13 apresenta os resultados de tensão normal na direção “x” para o caso de encruamento positivo e a Figura 10.14 para encruamento negativo.

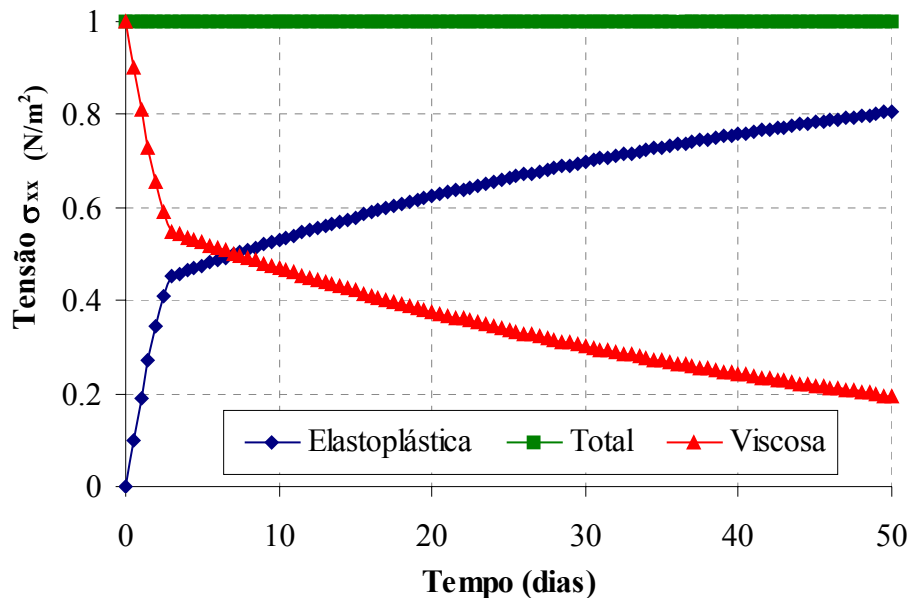


Figura 10.13 – Tensão normal na direção x para encruamento positivo.

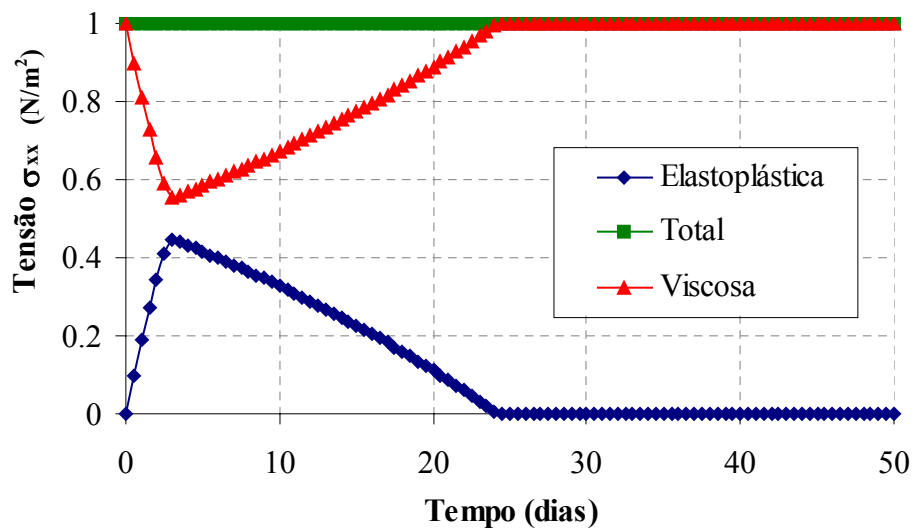


Figura 10.14 – Tensão normal na direção x para encruamento negativo.

Todos os resultados estão de acordo com o esperado, mostrando que o algoritmo de retorno, bem como o processo de solução não-linear e viscosa, estão funcionando perfeitamente. Exemplos semelhantes que apresentam exatamente os mesmos resultados podem ser vistos em MESQUITA (2002), utilizando MEC sólido 3D isotrópico e em VANALLI (2004) utilizando MEC e MEF sólido 2D.

10.7 EXEMPLO 06

Neste exemplo, o comportamento elastoplástico de uma placa quadrada engastada e submetida a uma carga concentrada no ponto central é considerado. Novamente, aproveitando-se da simetria do problema, $\frac{1}{4}$ da placa é modelado utilizando-se 10x10 divisões de elementos finitos triangulares e composta de 8 camadas de igual espessura para melhor representação da plasticidade. As características da geometria do problema e grandezas físicas do material isotrópico empregado, bem como parâmetros de plastificação, podem ser verificadas na Figura 10.15.

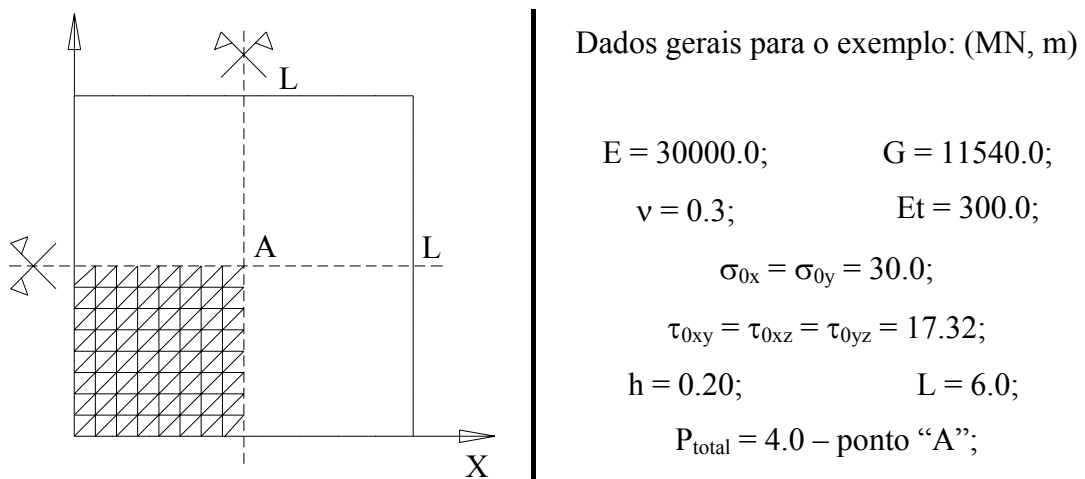


Figura 10.15 – Placa quadrada.

Os resultados são comparados com respostas obtidas por OWEN & FIGUEIRAS (1983b) onde foi utilizado o critério de plastificação tridimensional de Huber-Mises no qual as componentes de tensão são modificadas pela introdução de parâmetros anisotrópicos. Os autores utilizaram lei de fluxo associativa para as deformações plásticas e propuseram uma correção das tensões cisalhantes para serem usadas no critério de plastificação em função da adoção de distribuição constante de tensões cisalhantes ao longo da espessura da placa.

Para a formulação aqui proposta, foram analisados dois casos: (a) isotrópico - primeiramente adotando-se os parâmetros utilizados no critério de plastificação idênticos aos apresentados na Figura 10.15 e retorno na direção elástica, e (b) anisotrópico - onde foram adotados $\sigma_{0y} = 40.0$ e $\tau_{0xy} = 20.0$, para diferentes direções de retorno para a superfície do critério de plastificação e diferentes valores para “ E_y ”.

Na Figura 10.16, são apresentados os valores de deslocamento vertical, no ponto “A”, nó central da placa, em função da carga concentrada aplicada, para o caso de parâmetros de plastificação isotrópicos. Na Figura 10.17 são apresentados os resultados de OWEN & FIGUEIRAS (1983b) com parâmetros plásticos anisotrópicos, porém com constantes elásticas isotrópicas. Nesta figura apresentam-se também os resultados obtidos pelo programa desenvolvido segundo os mesmos parâmetros de OWEN & FIGUEIRAS (1983b), chamado “direção elástica”. Além disso varia-se o módulo de elasticidade na direção “Y” para $E_Y = 40000$ e a direção do fluxo plástico conforme informado na própria Figura 10.17. Isto foi feito visando mostrar a influência dos diversos parâmetros elásticos e elastoplásticos no comportamento geral da placa analisada. As unidades apresentadas para as grandezas do problema foram consideradas iguais as apresentadas na referência utilizada para comparação dos resultados.

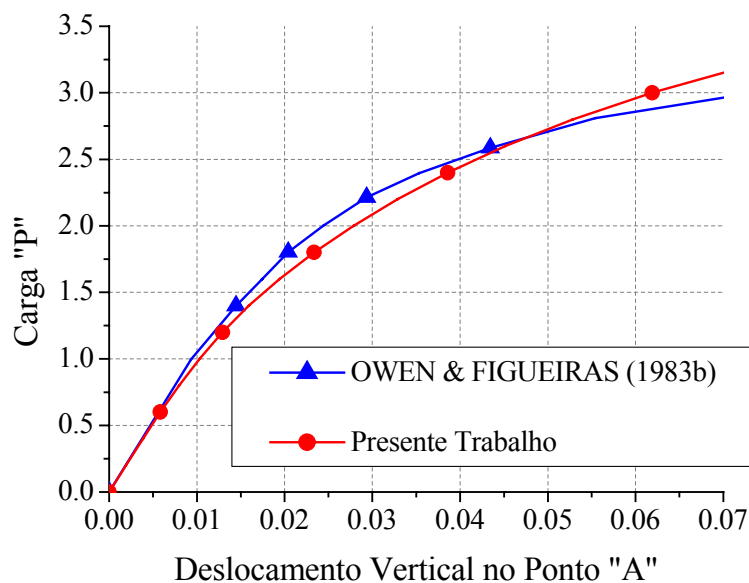


Figura 10.16 – Deslocamento vertical “w” em “A” x carga concentrada “P” - isotrópico.

Para a Figura 10.16, acredita-se que a diferença encontrada nos resultados é devida à distribuição da tensão de cisalhamento adotada constante ao longo da espessura das camadas da placa para este trabalho, bem como da malha utilizada na modelagem do problema e uma significativa diferença entre os critérios de plastificação e lei de fluxo adotados. Os autores OWEN & FIGUEIRAS (1983b), como dito anteriormente, propuseram uma correção para as tensões de cisalhamento para serem consideradas no critério de plastificação.

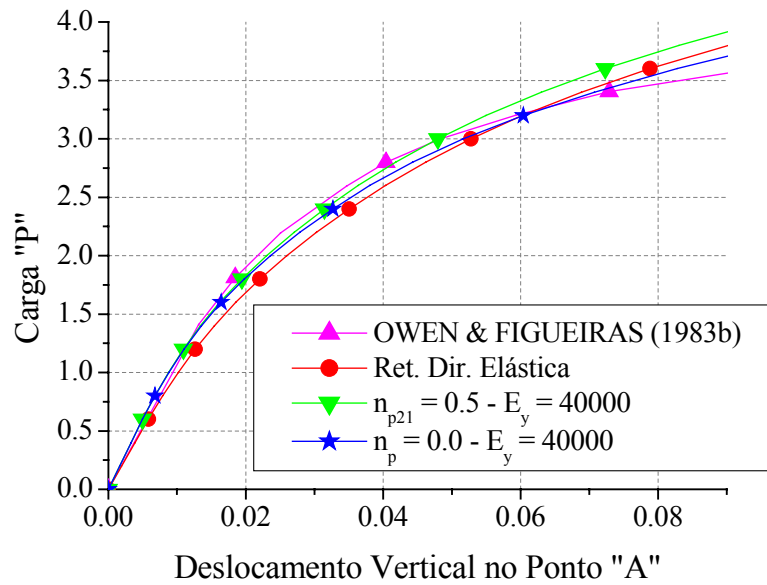
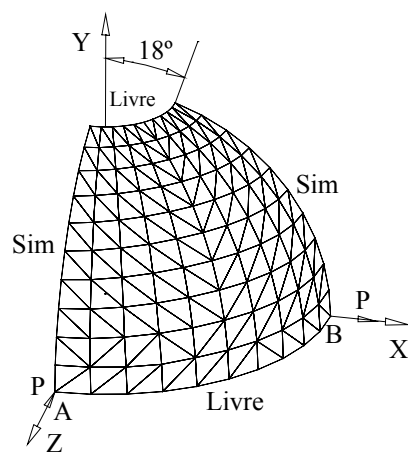


Figura 10.17 – Deslocamento vertical “w” em “A” x carga “P” - anisotrópico.

Para a Figura 10.17, observou-se que a direção do fluxo plástico tem pouca influência no comportamento geral da estrutura.

10.8 EXEMPLO 07

Uma cúpula esférica vazada submetida a carregamentos concentrados é analisada e os resultados obtidos são comparados com respostas teórica e numérica obtidas em CHEN (1992) para as mesmas configurações de malhas. As características de geometria e dos materiais para ¼ da casca, valendo-se da condição de simetria, são apresentadas na Figura 10.18.



Dados gerais para o exemplo:
(referência sem unidades)

- $P = 1;$
- $E = 6.825 \times 10^7;$
- $G = 2.625 \times 10^7;$
- $R = 10;$
- $h = 0.04;$
- $\nu = 0.3;$

Figura 10.18 – Casca esférica vazada.

Foram utilizados 10x10 (Figura 10.18), 12x12 e 16x16 divisões de elementos triangulares com aproximação cúbica para deslocamentos para obtenção das respostas aqui apresentadas. CHEN (1992) utilizou elementos triangulares planos de casca e com grau de liberdade rotacional, constituídos pelo acoplamento entre o elemento de flexão de placas DKT e elemento de membrana, com grau de liberdade rotacional, desenvolvido por ALLMAN (1984). A introdução do grau de liberdade rotacional na formulação, segundo os autores, possibilita maior flexibilidade ao elemento, propiciando uma melhor modelagem da estrutura e facilitando o acoplamento desses elementos aos elementos de placa, evitando problemas que possam surgir, quando da utilização dos elementos de casca obtidos dessa união, em análises onde os elementos da estrutura apresentam-se total ou aproximadamente coplanares. O elemento pode ser adequado ao problema de acordo com os parâmetros adotados para consideração do grau de liberdade rotacional.

O elemento de casca triangular resultante da combinação dos elementos realizada por CHEN (1992) possui 3 nós e 6 graus de liberdade nodais. Nota-se portanto, que a utilização de malhas iguais na comparação apresentada na Figura 10.19 implica na consideração de um número muito maior de graus de liberdade pela formulação aqui proposta do que pela formulação apresentada por CHEN (1992), uma vez que o presente elemento possui aproximação cúbica de deslocamento, 10 nós e 6 graus de liberdade por nó, porém não se utilizando do artifício do grau de liberdade rotacional.

Acredita-se que a utilização de elementos com grau de liberdade rotacional exige um maior conhecimento teórico por parte dos usuários dos programas gerados, no que diz respeito à adoção dos parâmetros envolvidos na formulação, o que nem sempre ocorre na prática. O mesmo fato não ocorre com a utilização do elemento proposto, pelo fato do simples refinamento da malha por parte do usuário fornecer convergência através da análise dos resultados obtidos em cada discretização utilizada.

No entanto, a necessidade de um número muito maior de graus de liberdade para obtenção das respostas torna o elemento proposto um tanto quanto caro, devido ao maior tempo de processamento e equipamento necessários para resolução do sistema gerado. Porém, a utilização de algoritmos especiais para resolução de sistemas lineares utilizando-se métodos diretos sobre matrizes esparsas, DUFF(1997), DUFF & REID (1982) e DUFF *et al.* (1990), possibilitou a utilização das malhas apresentadas sem o comprometimento das respostas e utilizando tempos de processamento muito

satisfatórios. Portanto, entende-se que o presente elemento, acoplado aos referidos algoritmos, torna-se viável para utilização em problemas onde uma discretização mais detalhada deve ser utilizada.

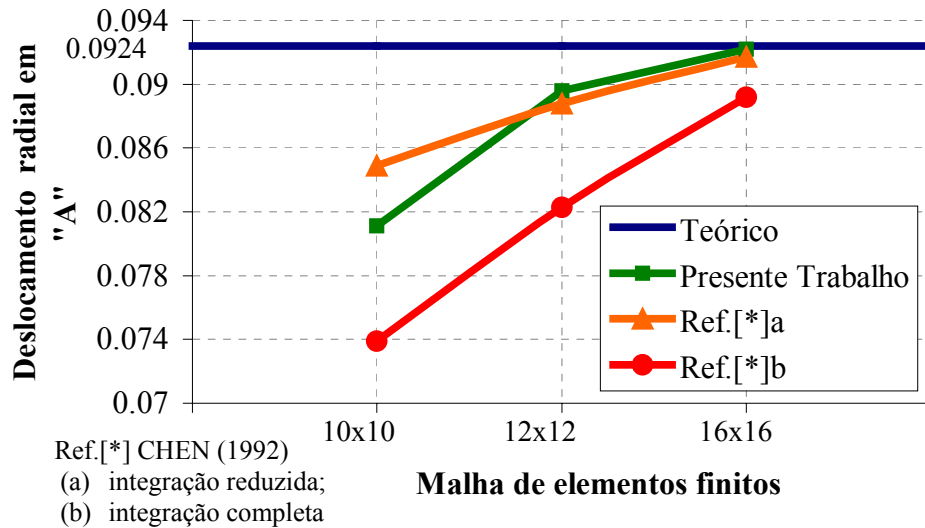


Figura 10.19 – Deslocamento radial no ponto “A” para diferentes malhas adotadas.

Na Figura 10.20, apresentam-se: (a) o mapa de deslocamento na direção “Z” e (b) a configuração deformada da casca esférica analisada. As grandezas e respostas são apresentadas desacompanhadas de unidades como encontradas nas referências.

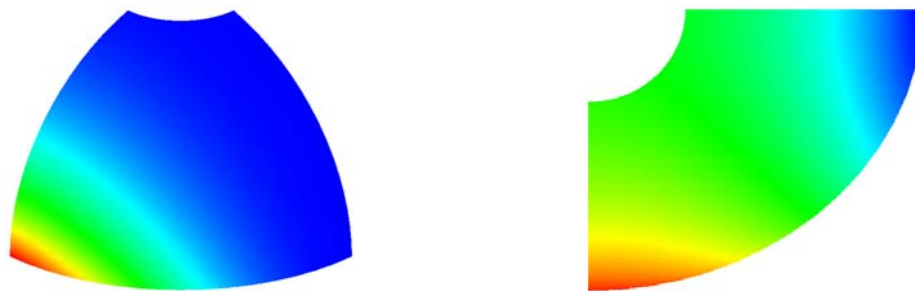


Figura 10.20 – (a) mapa de deslocamento na direção “Z”; (b) casca deformada.

10.9 EXEMPLO 08

Com o intuito de se verificar as implementações do acoplamento entre os elementos finitos de barra e casca realizadas, formulou-se este exemplo simples de uma viga bi-apoiada e submetida a um carregamento concentrado no centro do vão sobre o “eixo de referência”, Figura 10.21. A viga tem seção transversal “T” e 600 unidades de

comprimento, e foi simulada considerando-se primeiramente o elemento de pórtico laminado e posteriormente utilizando-se o acoplamento entre o elemento de pórtico e o elemento de casca laminada, como mostra a Figura 10.21. Adotou-se 2.1×10^5 como valor para o módulo de elasticidade longitudinal do material e coeficiente de Poisson nulo.

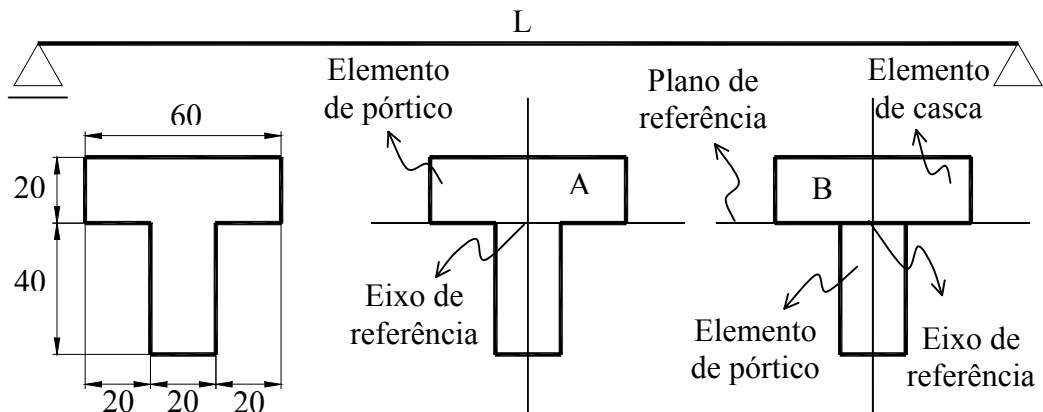


Figura 10.21 – Geometria do problema – seções transversais.

Os resultados de deslocamento vertical obtidos para o centro do vão, para uma carga de 100 u.f. são comparados com a teoria técnica de vigas e são apresentados na Tabela 10.3.

Tabela 10.3 – Deslocamento vertical “w” no centro do vão

	Teoria Técnica de viga	A - Elemento de Pórtico	B - Pórtico / Casca
w_{centro}	0.00370	0.00379	0.00387

Os resultados obtidos são considerados bons e entende-se que a inclusão do efeito de cisalhamento nas formulações aqui utilizadas justifica a pequena diferença verificada em relação à resposta da teoria técnica de viga. O acoplamento entre o elemento de casca e de barra, como era esperado, forneceu bons resultados e apresentou-se mais flexível em função do efeito de membrana na mesa (casca).

Adotou-se como referência para os elementos a interface entre o elemento de placa e o de pórtico. Especificamente para este exemplo, a adoção da referência em qualquer outra posição não acarretaria modificações nos resultados, isso porque não se restringiu o movimento horizontal em um dos apoios da viga, portanto não tendo-se o efeito da normal. Nos casos em este deslocamento é restringido, resultados diferentes devem ser obtidos dependendo-se da posição da referência adotada para problema.

Fazendo-se uma analogia a alguns tipos de ligação existentes, adotar como referência a interface dos elementos estruturais, como no exemplo, é equivalente a uma ligação entre uma placa de concreto e uma viga metálica, ligada à placa através de conectores. Um outro caso seria o de se adotar como referência o plano médio da placa ou algum plano acima deste. Na prática, esta modelagem poderia estar associada à representação de uma laje e de uma viga, ambas de concreto, pelo fato da armadura da viga se estender até a parte superior da laje. Portanto, é necessário que sejam tomados certos cuidados no momento de se idealizar o modelo a ser simulado.

10.10 EXEMPLO 09

Este exemplo trata de uma placa simplesmente apoiada, formada por 3 camadas e submetida a um carregamento uniformemente distribuído, sendo analisada para diferentes propriedades de materiais e espessuras das camadas, ou seja, seções simétricas e assimétricas. Aproveitando-se da simetria do problema, $\frac{1}{4}$ da placa é modelado utilizando 10x10 divisões de elementos finitos triangulares. Os resultados obtidos são comparados na Tabela 10.4 com respostas analíticas, SRINIVAS (1973) - apud OWEN & FIGUEIRAS (1983b), e também com respostas numéricas apresentadas por OWEN & FIGUEIRAS (1983b), onde elementos finitos derivados de elementos tridimensionais, considerando-se portanto deformações cisalhantes, são empregados. Os autores ainda assumiram deformação cisalhante constante ao longo da espessura e propuseram uma expressão para determinação do fator de correção para distribuição da tensão de cisalhamento, em função das características da seção transversal da casca, ou seja, características físicas e geométricas das laminas que compõem o conjunto. Para obtenção e comparação dos resultados, neste trabalho foram utilizados os valores de correção da distribuição de cisalhamento adotados pelos referidos autores.

A geometria do problema, bem como as características gerais do material empregado nas camadas da placa podem ser verificadas na Figura 10.22. A Tabela 10.4 exhibe, além da comparação dos resultados, valores de α_i utilizados para determinação das características dos materiais de cada camada para cada configuração de seção transversal modelada. As grandezas físicas utilizadas para as camadas são obtidas em função das grandezas apresentadas na Figura 10.22, multiplicadas pelos valores de α_i acima referidos. Nota-se que a camada central será sempre composta pelo mesmo material sendo este o apresentado na Figura 10.22, uma vez que o valor de α desta para

todos os casos é igual a 1.0. As grandezas e respostas são apresentadas desacompanhadas de unidades como encontradas nas referências utilizadas para comparação dos resultados.

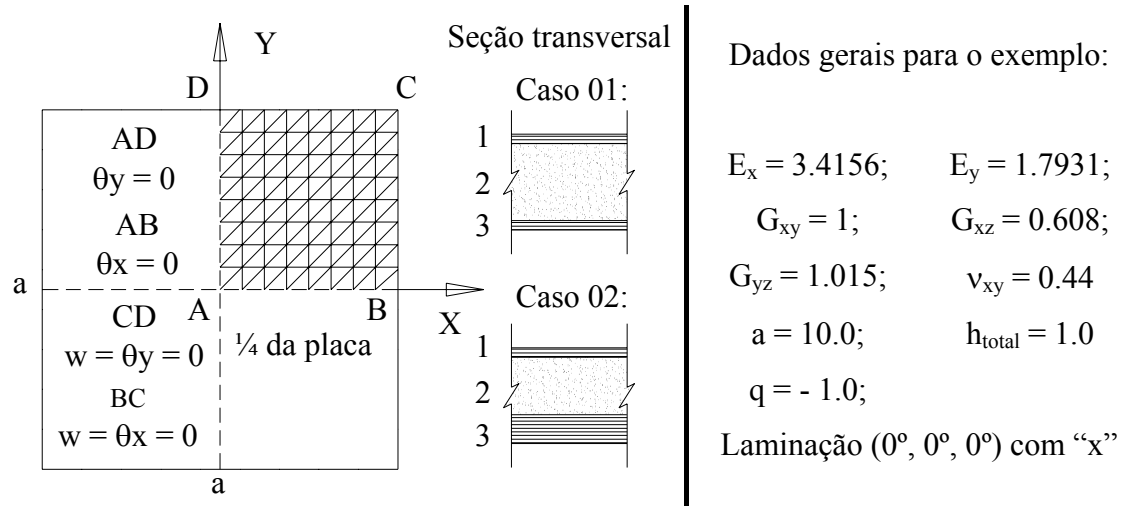


Figura 10.22 – Placa laminada ortotrópica.

Como pode ser observado na Tabela 10.4, os resultados obtidos utilizando-se a formulação aqui apresentada estão de acordo com as respostas teórica e numérica apresentadas em OWEN & FIGUEIRAS (1983b).

Tabela 10.4 – Resultados para as diferentes configurações de laminado – ponto “A”.

	α_1	α_2	α_3	h_1	h_2	h_3	k	Teórico Ref.[*]	Ref.[**]	$-\frac{w_{centro} G_{xy}}{h_{total} q}$
Caso 01	1	1	1	0.1	0.8	0.1	0.8333	181.05	183.99	181.355
	10	1	10	0.1	0.8	0.1	0.3521	41.906	41.922	41.998
	50	1	50	0.1	0.8	0.1	0.0938	16.753	16.850	16.838
	50	1	10	0.1	0.8	0.1	0.1473	28.297	28.432	28.340
Caso 02	10	1	10	0.1	0.6	0.3	0.2449	34.549	34.921	34.745

k - fator de correção da distribuição do cisalhamento na espessura da placa - Ref.[**]

[*] - SRINIVAS (1973) - apud OWEN & FIGUEIRAS (1983b)

[**] - OWEN & FIGUEIRAS (1983b)

A Figura 10.23 apresentada o mapa de deslocamento vertical para a região discretizada e configuração de geometria referente ao “Caso 02” da Tabela 10.4.

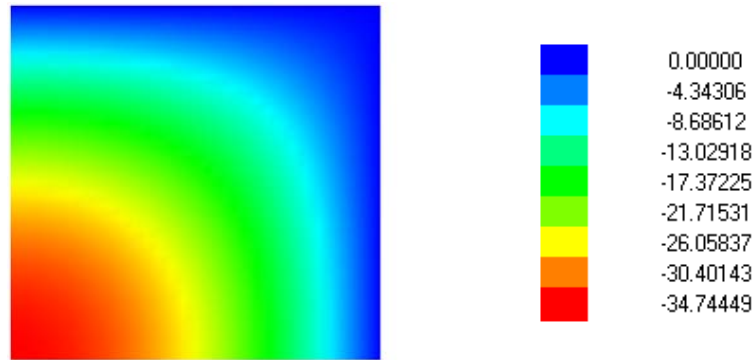


Figura 10.23 – Mapa de deslocamento vertical para a região discretizada – Caso 02.

10.11 EXEMPLO 10

Uma placa quadrada com dupla simetria, enrijecida por elementos de barra e submetida a um carregamento uniformemente distribuído é analisada. A placa tem 2.0 m de largura e 0.02 m de espessura e os enrijecedores tem seção retangular com largura 0.01 m e altura 0.1 m. Foram utilizados 8 enrijecedores equidistantes ortogonais aos lados da placa paralelos às direções “x” e “y”, Figura 10.24. A ligação entre os elementos de placa e barra é feita na face inferior da placa e superior da barra, ou seja, na interface entre os elementos como pode ser verificado na Figura 10.24. Aproveitando-se da simetria, $\frac{1}{4}$ da placa é analisado utilizando-se 9 x 9 divisões de elementos triangulares, sendo que os elementos de barra acompanham a divisão da malha triangular. Demais dados necessário para o problema também podem ser encontrados na Figura 10.24. Este exemplo é sugerido em SADEK & TAWFIK (2000) e BISWAL & GHOSH (1994) sendo portanto os resultados aqui obtidos comparados com os referidos autores.

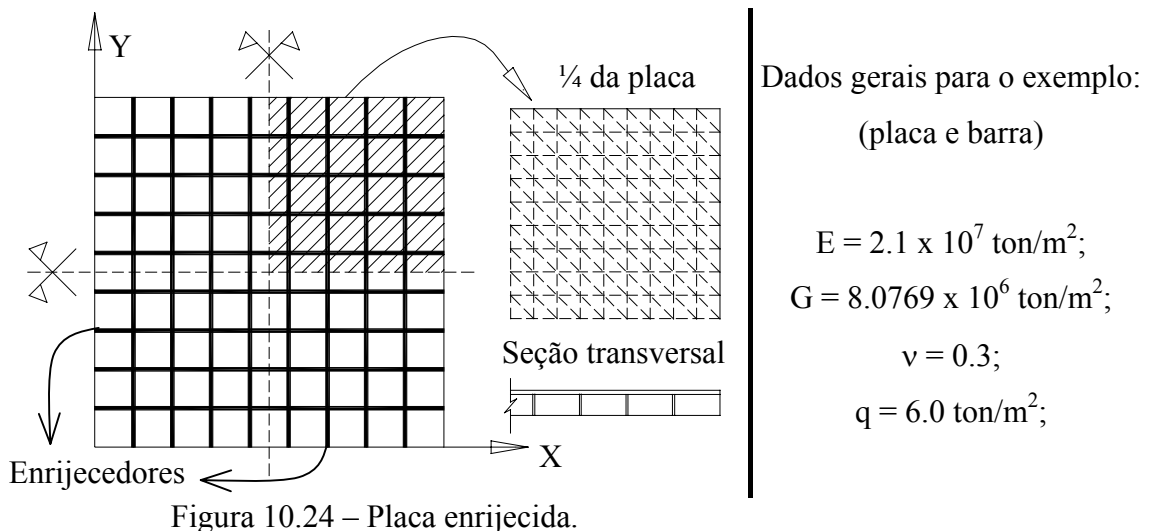


Figura 10.24 – Placa enrijecida.

As unidades apresentadas para as grandezas do problema foram consideradas iguais as apresentadas por SADEK e TAWFIK (2000).

Na Tabela 10.5, são apresentados os valores de deslocamento vertical no ponto central da placa comparados aos resultados obtidos pelos autores anteriormente citados.

Tabela 10.5 – Deslocamento vertical “w” no centro da placa (mm)

BISWAL & GHOSH (1994)	SADEK & TAWFIK (2000)	Presente Trabalho
2.0189	1.9256	1.8791

Os resultados fornecidos por SADEK & TAWFIK (2000) e BISWAL & GHOSH (1994) apresentaram-se mais flexíveis, pelo fato desses autores terem considerado na formulação deformações cisalhantes de ordem superior.

Em BISWAL & GHOSH (1994), foi utilizada a cinemática de Kirchhoff modificada para incluir a dependência de deformações cisalhantes de ordem superior acrescidas de parâmetro corretor. Já em SADEK & TAWFIK (2000), a cinemática utilizada é a de laminados, para elemento de 9 nós e 7 graus de liberdade por nó, porém com deformações cisalhantes de ordem superior, sendo ainda utilizado pelo autor o artifício de integração reduzida nas parcelas de cisalhamento.

Com base nos resultados, sendo que para o presente trabalho assumiu-se distribuição constante para o cisalhamento, pode-se perceber que a influência dessa distribuição é pequena.

10.12 EXEMPLO 11

Este exemplo apresenta o comportamento de uma placa quadrada e isotrópica, com um enrijecedor no centro e na direção do eixo “y”, submetida a um carregamento uniformemente distribuído, tal como em KOLLI & CHANDRASHEKHARA (1996). Adotou-se como referência para a placa e para a viga o plano médio da placa. A geometria do problema, bem como as demais características da análise, estão apresentadas na Figura 10.25.

Foram utilizadas 16 x 16 divisões de elementos finitos triangulares para modelagem de $\frac{1}{2}$ da placa, sendo que a discretização dos elementos de barra acompanha a divisão da malha triangular.

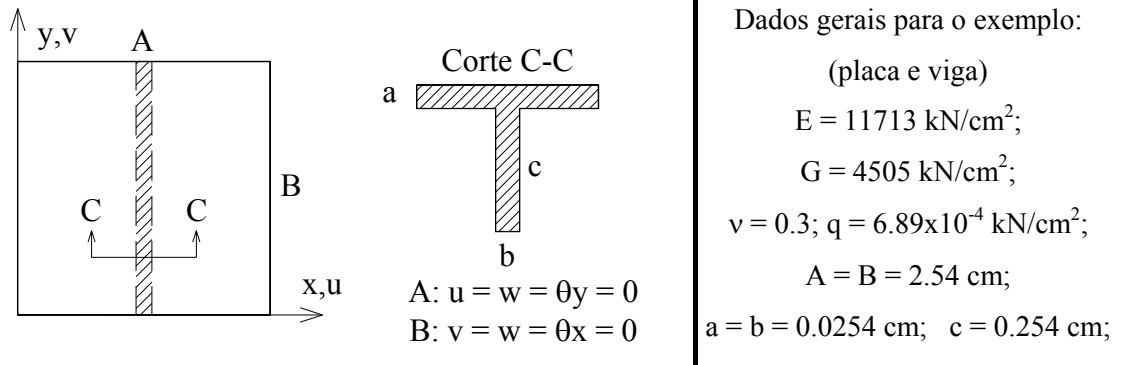


Figura 10.25 – Placa isotrópica enrijecida.

Os resultados de deslocamento vertical medidos no centro da placa são apresentados na Tabela 10.6, comparando-se os valores obtidos com KOLLI & CHANDRASHEKHARA (1996) onde utiliza-se também a cinemática de laminados na formulação e com ROSSOW & IBRAHIMKHAIL (1978) - apud KOLLI & CHANDRASHEKHARA (1996), onde utilizou-se o Método da Restrição para obtenção dos resultados.

Tabela 10.6 – Deslocamento vertical no centro da placa ($\times 10^{-4} \text{ cm}$).

Carga	Ref.[*]	Ref.[**]	Ref.[***]	Presente Trabalho
w_{centro}	3.472	3.441	3.357	3.538

[*] - ROSSOW & IBRAHIMKHAIL (1978) - apud KOLLI & CHANDRASHEKHARA (1996)

[**] - KOLLI & CHANDRASHEKHARA (1996)

[***] - ANSYS® - DIAS *et al.* (2001)

A Figura 10.26 apresenta a configuração deformada da placa enrijecida, evidenciando um menor deslocamento no centro da placa em função da contribuição do enrijecedor. Os resultados apresentados na Tabela 10.6 estão totalmente de acordo com aqueles apresentados pelos referidos autores, usando também da teoria de laminados e do Método da Restrição.

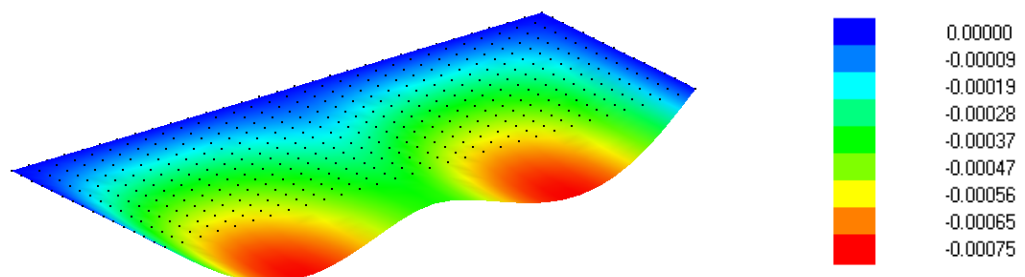


Figura 10.26 – Configuração deformada da placa enrijecida.

10.13 EXEMPLO 12

Este exemplo, também obtido em KOLLI & CHANDRASHEKHARA (1996), simula o comportamento de uma placa retangular e isotrópica, submetida a dois casos de carregamento: uniformemente distribuído e concentrado no centro da placa. A placa é ortogonalmente enrijecida por duas nervuras centrais. Novamente, a referência adotada para ambos os elementos, placa e viga, foi a camada central da placa. As características gerais para o problema estão apresentadas na Figura 10.27.

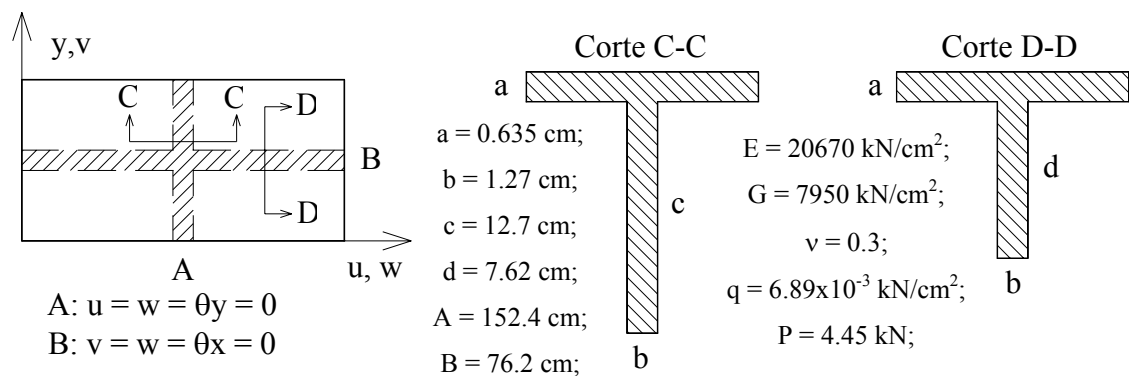


Figura 10.27 – Placa retangular ortogonalmente enrijecida.

Analogamente ao exemplo anterior, foram utilizadas 14 x 14 divisões de elementos finitos triangulares para modelagem da placa inteira, sendo que, da mesma forma, a discretização dos elementos de barra acompanha a divisão da malha triangular.

São apresentados na Tabela 10.7 os deslocamentos verticais no centro da placa, comparados aos resultados apresentados em KOLLI & CHANDRASHEKHARA (1996).

Tabela 10.7 – Deslocamento vertical no centro da placa ($\times 10^{-4}$ cm).

Carga	Solução em Série - Ref.[*]	Ref.[**]	Ref.[***]	Ref.[****]	Presente Trabalho
distribuída	224.790	224.510	221.031	212.000	221.248
concentrada	32.260	32.180	31.500	29.870	32.520

[*] - CHANG (1973) - apud KOLLI & CHANDRASHEKHARA (1996)

[**] - ROSSOW & IBRAHIMKHAIL (1978) - apud KOLLI & CHANDRASHEKHARA (1996)

[***] - KOLLI & CHANDRASHEKHARA (1996)

[****] - ANSYS® - DIAS *et al.* (2001)

Na Figura 10.28 encontra-se o mapa de deslocamento vertical para este exemplo caracterizando, da mesma forma que para o exemplo anterior, a contribuição dos enrijecedores para o comportamento global da estrutura simulada.

Acredita-se que estes três últimos exemplos, com base nos bons resultados obtidos, validam as implementações realizadas para o acoplamento entre o elemento finito de placa e pórtico.

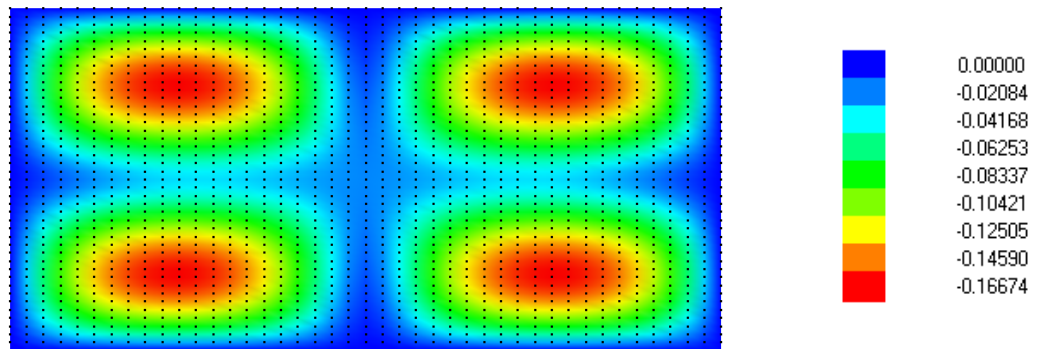


Figura 10.28 – Mapa de deslocamento para a placa retangular enrijecida.

10.14 EXEMPLO 13

A placa simplesmente apoiada e submetida a um carregamento uniformemente distribuído apresentada no exemplo 09, é aqui analisada considerando-se um comportamento viscoso, para avaliar a influência do tamanho do intervalo de tempo adotado para a modelagem. A discretização adotada é a mesma utilizada no exemplo 09 para $\frac{1}{4}$ da placa.

As análises foram realizadas para diferentes números de passos de tempo e conseqüentemente para diferentes intervalos de tempo (Δt) para a totalização dos 100 dias. Os parâmetros de viscosidade foram escolhidos de tal forma a se obter 95% da resposta elástica ao final dos 100 dias, sendo a resposta analítica apresentada na Figura 10.29 juntamente com as respostas numéricas. O gráfico da referida figura mostra a dependência das respostas em função do tamanho dos passos de tempo adotados, ou seja, para Δt 's menores a respostas foram mais próximas da analítica do que para valores maiores de passos de tempo, como era de se esperar. Acredita-se portanto, que a formulação aqui apresentada retrata perfeitamente o comportamento viscoso da estrutura modelada.

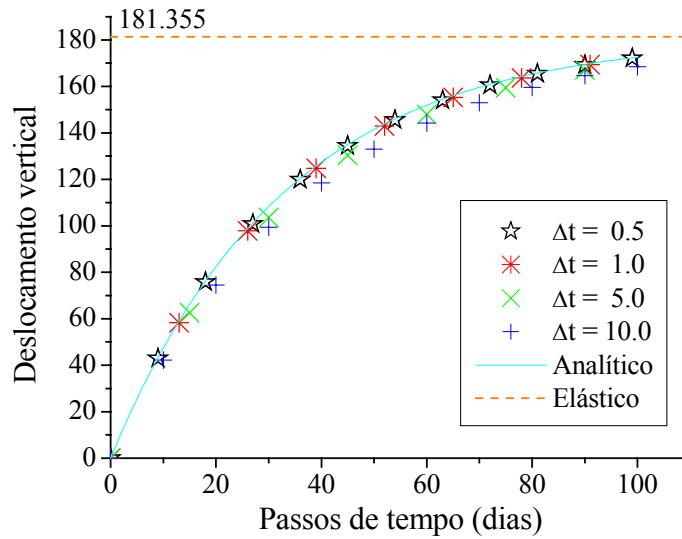
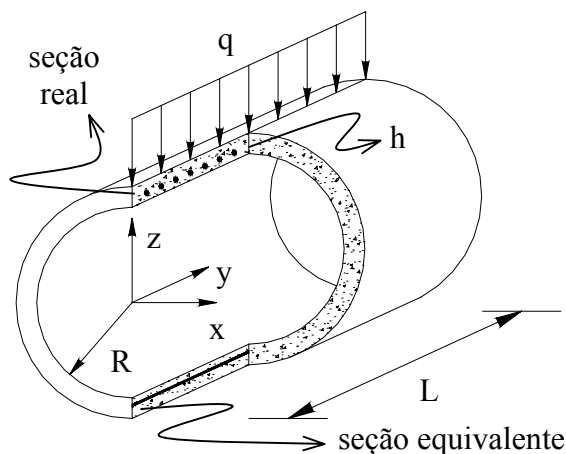


Figura 10.29 – Deslocamento vertical no centro da placa.

10.15 EXEMPLO 14

Este exemplo apresenta a simulação do comportamento de um tubo vazado de concreto armado, submetido a um carregamento uniformemente distribuído ao longo da direção do eixo do tubo e do raio. Utiliza-se o elemento de pórtico laminado na modelagem deste exemplo, pois este permite que seja adotado diagrama multilinear para a relação entre tensão e deformação, representando o concreto de forma mais adequada.

Os resultados são comparados com a resposta do ensaio experimental obtida em CHAMA NETO (2002). A curva tensão x deformação adotada para o exemplo, Figura 10.31 e Figura 10.32, também foi obtida em CHAMA NETO (2002), juntamente com as demais características para o problema. A Figura 10.30 fornece a configuração de geometria para o exemplo.



Dados gerais para o exemplo: (kN e cm)

$$E_{\text{conc}} = 2970.00 \text{ e } G_{\text{conc}} = 1485.00;$$

$$E_{\text{aço}} = 21000.00 \text{ e } G_{\text{aço}} = 10500.00;$$

$$L = 100; R = 44.5; h = 9.5;$$

Recalque de 1.50 na direção da carga q;

Área de aço na seção transversal: 3.32;

Figura 10.30 – Tubo vazado.

A seção transversal do tubo possui uma armadura de área igual 3.32 cm^2 , posicionada a uma distância de 3.50 cm da face interna do tubo. Para a modelagem, adotou-se uma faixa de aço ao longo da seção transversal, com espessura equivalente para se manter a mesma área de aço do experimento.

A parcela referente ao concreto foi subdividida em 50 camadas para melhor representação da plasticidade, enquanto que a de aço manteve-se inalterada. Foram utilizados 20 elementos de barra de aproximação cúbica na discretização de $\frac{1}{2}$ do tubo.

As condições de contorno nas duas extremidades da parte modelada são de engastamento, sendo que na extremidade do carregamento, a exemplo do ensaio laboratorial, aplicou-se um deslocamento de 1.50 cm na direção deste.

Para o diagrama tensão x deformação do concreto, foram adotados 4 trechos para a tração e 9 para a compressão, buscando representar o diagrama obtido em laboratório, Figura 10.31 e Figura 10.32.

A tensão de plastificação adotada para o concreto é de 0.9823 kN/cm^2 para a compressão e 0.2210 kN/cm^2 para a tração, sendo que para o aço assumiu-se o valor de 78.65 kN/cm^2 para ambas.

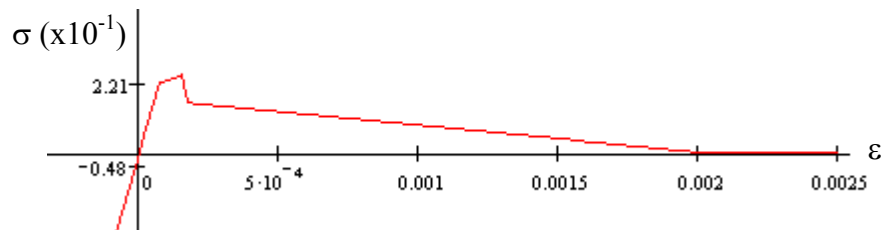


Figura 10.31 – Curva tensão x deformação para a tração (kN e cm).

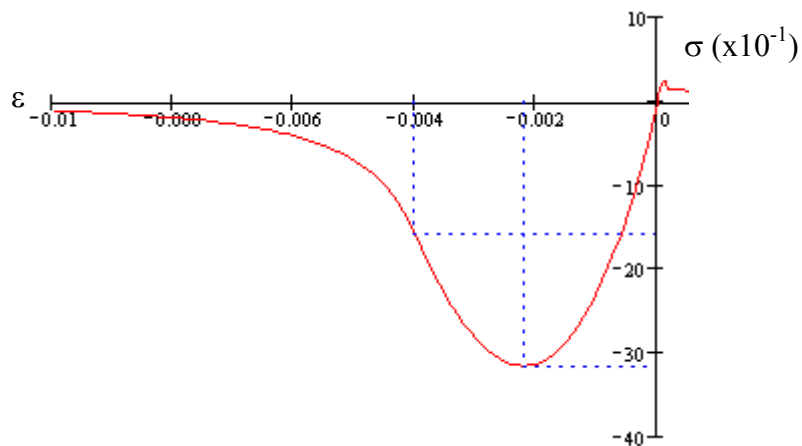


Figura 10.32 – Curva tensão x deformação para a compressão (kN e cm).

A Figura 10.33 apresenta os resultados experimentais encontrados em CHAMA NETO (2002), sendo que a curva em maior destaque é a média das respostas experimentais obtidas.

Os resultados apresentados na Figura 10.34, comparados com o ensaio de laboratório, média dos valores experimentais da Figura 10.33, mostram uma boa concordância entre as curvas obtidas. O aspecto dentado na curva da resposta numérica se dá devido à característica discreta do posicionamento dos pontos de Gauss na consideração da contribuição do material.

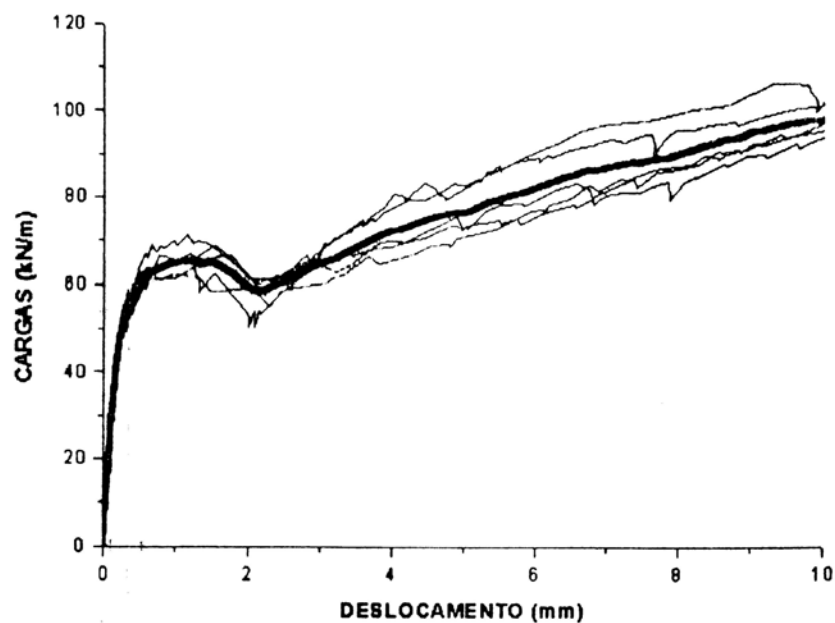


Figura 10.33 – Deslocamento vertical x carga – resultado experimental.

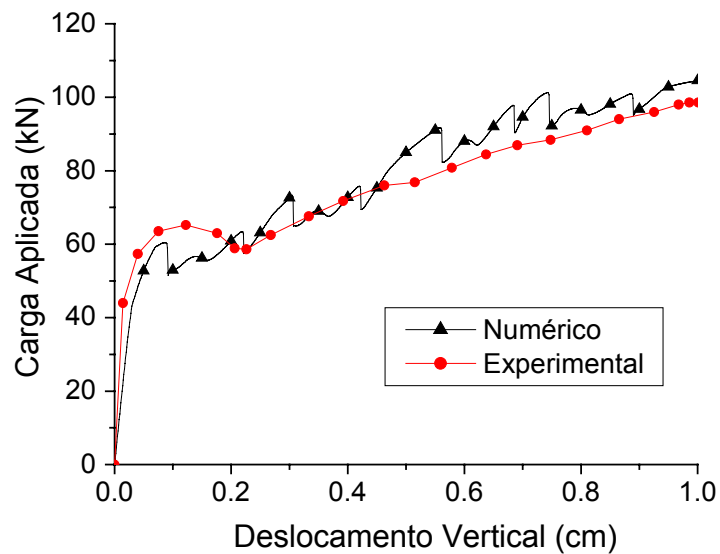


Figura 10.34 – Deslocamento vertical x carga aplicada.

Os valores adotados na análise numérica foram obtidos diretamente da referência e utilizados na modelagem sem nenhuma calibração. Portanto, acredita-se que os resultados apresentados são totalmente satisfatórios do ponto de vista de engenharia.

10.16 EXEMPLO 15

Este exemplo serve para verificar o acoplamento entre elementos finitos de casca e elementos de contorno 3D no que diz respeito à transmissão de forças. Um sólido engastado discretizado com elementos de contorno triangulares com aproximação linear de variáveis é acoplado a uma placa rígida modelada em elementos finitos de casca com aproximação cúbica. A esta placa aplica-se um carregamento distribuído “q” perpendicular ao seu plano, onde se analisa o comportamento viscoso deste sólido devido à aplicação desta carga. A geometria do problema, bem como as características físicas e discretização estão apresentadas na Figura 10.35. Foi utilizada solução fundamental de Kelvin para a modelagem deste problema.

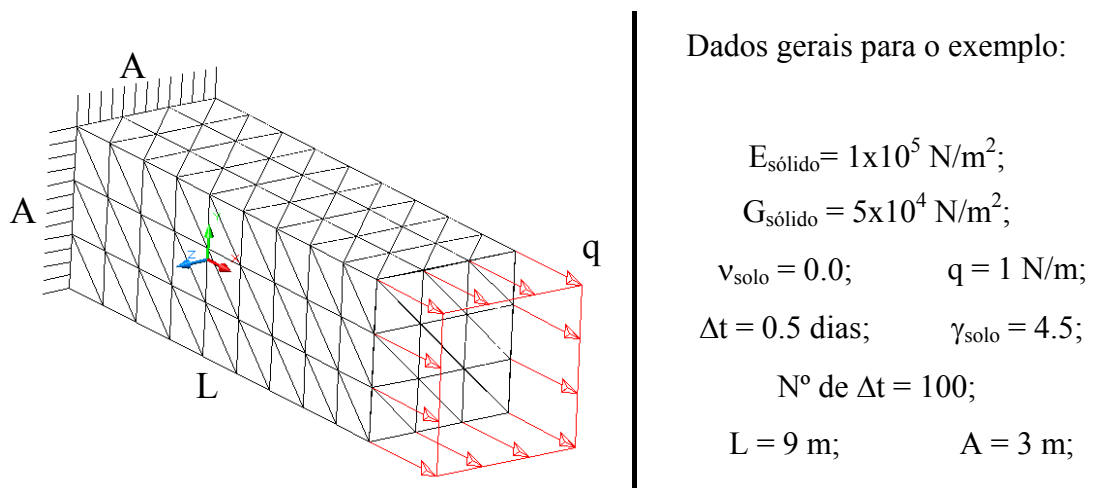


Figura 10.35 – Sólido tracionado – MEC x MEF.

Os resultados obtidos estão apresentados na Figura 10.36, onde são plotados os valores de deslocamento na extremidade livre do sólido em função do tempo. Como era de se esperar, os valores encontrados ao final da análise viscoelástica são idênticos à resposta analítica do problema.

Este exemplo, apesar de simples, serve tanto para validar o funcionamento do acoplamento, como também o comportamento da formulação viscoelástica aplicada aos elementos de contorno.

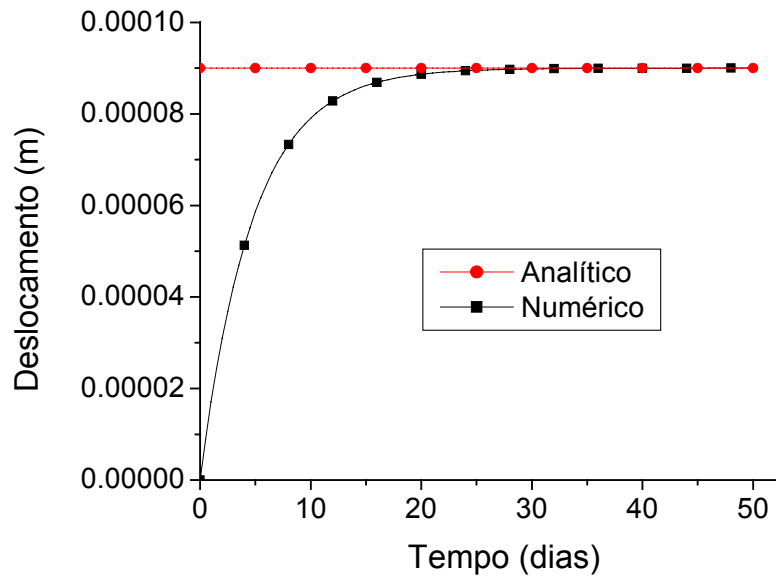


Figura 10.36 – Deslocamento da extremidade livre ao longo do tempo.

10.17 EXEMPLO 16

Apesar de simples, este exemplo também serve para verificar o acoplamento entre elementos finitos de casca e elementos de contorno 3D no que diz respeito a transmissão de forças. Neste caso, um sólido engastado e discretizado com elementos de contorno (MEC - Figura 10.37) é acoplado a um conjunto composto por uma placa e uma chapa (MEF - Figura 10.37) rígidas. Na extremidade livre da chapa de elementos finitos aplica-se um carregamento distribuído “q”. A geometria para o problema, bem como as características físicas dos materiais são apresentadas na Figura 10.37. Novamente, por se tratar de um domínio fechado, utilizou-se solução fundamental de Kelvin na modelagem do contorno.

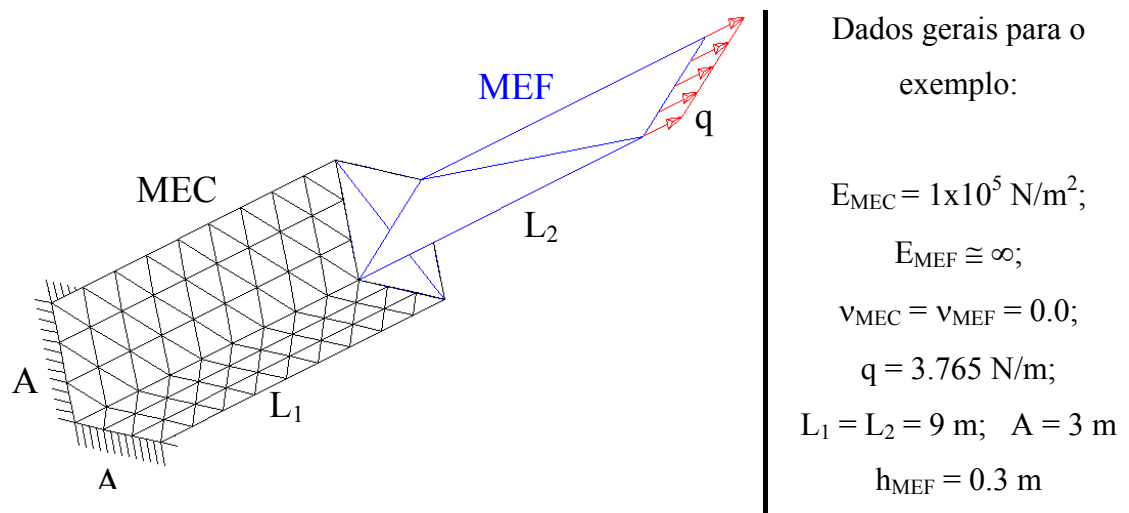


Figura 10.37 – Sólido tracionado – MEC x MEF.

A Tabela 10.8 apresenta o resultado de deslocamento na interface do acoplamento entre a região do MEC e do MEF, mostrando a total concordância entre a resposta analítica obtida de forma simples para este exemplo e a resposta numérica.

Tabela 10.8 – Deslocamento na interface do acoplamento.

Deslocamento (m)	
Analítico	0.00016
Numérico	0.00016

10.18 EXEMPLO 17

Um painel sanduíche do tipo ISOTHERM SC 80 é analisado neste exemplo, comparando-se as respostas obtidas com resultados experimentais de RAPP *et al.* (1999) e numéricos de MESQUITA (2002) para o caso de um carregamento uniformemente distribuído. O painel é composto de duas chapas delgadas de aço separadas por uma espuma de uretano. As características geométricas e condições de contorno do problema estão apresentadas na Figura 10.38.

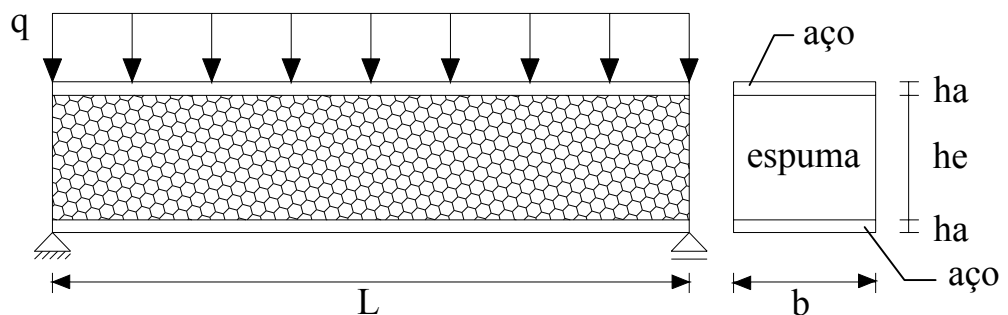


Figura 10.38 – Painel sanduíche.

Em RAPP *et al.* (1999), os módulos de elasticidade cisalhantes para uma análise viscosa (instantâneo G_e e viscoso G_{ve}) para a espuma de uretano foram obtidos de uma teoria simples de flexão dada por ALLEN (1969) – apud MESQUITA (2002). O coeficiente de Poisson foi escolhido como sendo 0.4 em MESQUITA (2002), usualmente aplicado para polímeros de baixa densidade segundo MERAGHNI *et al.* (1999) – apud MESQUITA (2002). Os resultados fornecidos em MESQUITA (2002)

foram obtidos utilizando-se técnica de acoplamento entre o MEC bidimensional (modelagem da espuma de uretano) e o MEF (modelagem das lâminas de aço).

No presente trabalho obtém-se apenas a resposta elástica para o exemplo por não se ter implementado comportamento instantâneo para o modelo viscoso. Portanto, os valores adotados para os módulos de elasticidade longitudinal e cisalhante são valores equivalentes aos obtidos no trabalho de RAPP *et al.* (1999) e determinados pela relação:

$$\frac{G_e G_{ve}}{G_e + G_{ve}}$$

As propriedades físicas dos materiais empregados na análise, bem como as características geométricas e o carregamento utilizados são apresentados na Tabela 10.9.

Tabela 10.9 – Dados gerais para o exemplo.

Aço	Espuma	Gerais
$E = 2.1 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$	$E = 6.7 \text{ N/mm}^2$	$L = 4000 \text{ mm}$
$\nu = 0.00$	$\nu = 0.40$	$b = 1100 \text{ mm}$
$h_a = 0.51 \text{ mm}$	$h_e = 80 \text{ mm}$	$q = 0.9196 \text{ N/mm}$

Inicialmente optou-se por simular o exemplo utilizando elementos finitos de casca laminada e considerando os valores das propriedades físicas dos materiais tal como apresentados na Tabela 10.9, apenas dividindo-se o carregamento distribuído no comprimento da viga pela dimensão “b” para se obter o carregamento distribuído na área da placa. Porém, em virtude da consideração de hipótese de seção plana na formulação de casca, os resultados foram pouco satisfatórios, uma vez que não se pode adotar tal simplificação para este problema, ou seja, dizer que a seção permanece plana após a deformação, em função da grande diferença de rigidez existente entre as camadas de diferentes materiais. Neste caso, a rigidez predominante ao cisalhamento é dada pela espuma, portanto, na tentativa de representar o problema de forma aproximada, assumiu-se para o módulo de elasticidade transversal do aço valores iguais aos da espuma. Esta estratégia tornou o problema mais flexível com relação ao cisalhamento

porém continuando com seção plana como imposto na formulação. O resultado obtido é bem próximo daqueles fornecidos por RAPP *et al.* (1999) e MESQUITA (2002).

Buscando uma melhor representação para o problema, partiu-se para a simulação do comportamento do conjunto utilizando-se o acoplamento entre elementos finitos de casca, para modelagem das lâminas de aço, e elementos de contorno tridimensional, para modelagem da espuma de uretano. Essa abordagem permite que a seção transversal da placa possa deformar-se mais livremente, não se impondo a condição de seção plana na parcela referente à espuma de uretano.

Numa primeira tentativa, até mesmo para verificar o comportamento da formulação, foram adotadas apenas 2 divisões de elementos de contorno triangulares ao longo da espessura da espuma. Como era esperado, devido a pouca flexibilidade de deformação permitida por estes dois elementos, o deslocamento ficou muito próximo do obtido para a primeira simulação do MEF, evidenciando a necessidade de um maior número de elementos para melhor representação da deformação da seção transversal.

Outras discretizações com maior número de elementos na espessura da espuma foram utilizadas, melhorando-se também a discretização das placas de aço e conseqüentemente do acoplamento entre os elementos finitos e de contorno. Esses resultados são apresentados na Tabela 10.10 a seguir, com as respectivas descrições de número de elementos utilizados na interface do acoplamento e na espessura da espuma.

A nomenclatura “(a,b,c)” utilizada na Tabela 10.10 para descrição dos casos de acoplamento, significa o número de divisões de elementos de contorno adotadas nas direções “L”, “b” e “he” respectivamente, para ¼ da placa em função da simetria do problema.

Tabela 10.10 – Deslocamento vertical para o centro da placa (mm).

RAPP <i>et al.</i> (1999)	16.876
MESQUITA (2002)	16.833
MEF – casca	8.039
MEF – casca – $G_{\text{aço}} = G_{\text{espuma}}$	18.369
MEF / MEC (9,3,2)	8.789
MEF / MEC (9,3,6)	12.881
MEF / MEC (18,6,6)	14.381
MEF / MEC (18,6,12)	14.893

Alguns comentários podem ser tecidos analisando-se os resultados apresentados na Tabela 10.10. Acredita-se que à medida que a malha na espessura da espuma for refinada, resultados mais próximos dos encontrados nas referências citadas serão obtidos. Deve-se comentar que os módulos de elasticidade equivalentes obtidos por RAPP *et al.* (1999) e MESQUITA (2002) são diferentes, ou seja, 6.7 N / mm^2 e 6.5 N / mm^2 , respectivamente. Os resultados apresentados indicam que nem a formulação simplificada nem a formulação 2D são adequadas para a determinação dos parâmetros do material. Com certeza o módulo de elasticidade da espuma é inferior a 6.5 N / mm^2 , porém para se determinar com precisão este valor seria necessária uma discretização que garantisse a convergência numérica do exemplo.

CAPÍTULO 11

O PROGRAMA COMPUTACIONAL

11.1 INTRODUÇÃO

O presente capítulo faz-se necessário no intuito de descrever as principais características do programa computacional implementado com a formulação apresentada nos capítulos anteriores. Neste sentido, são descritas de forma resumida, as particularidades do programa, como entrada de dados, rotinas e linguagem de programação, bem como a estrutura geral do programa na forma de fluxograma.

11.2 CARACTERÍSTICAS GERAIS

Basicamente, são 3 as rotinas que compõem o programa geral obtido do desenvolvimento deste trabalho:

1. Programa base, desenvolvido em Linguagem de Programação Pascal, que contem a parte de entrada e tratamento dos dados a serem utilizados nesta e nas outras duas rotinas. Esta rotina contém as implementações referentes aos elementos finitos laminados de pórtico e casca, bem como as implementações referentes aos critérios de plastificação, aplicação das condições de contorno, acoplamento final e consideração da viscosidade na formulação.
2. A rotina referente à parcela da contribuição do solo (MEC), foi desenvolvida por SOUZA (2001) para solução fundamental de Kelvin, como comentado anteriormente, e adaptada neste trabalho para solução fundamental de Mindlin. Os desenvolvimentos e as adaptações, que foram realizados em

Linguagem de Programação Fortran, são relacionados com o programa base através da utilização de DLL, sendo as variáveis transportadas de um código para outro com a utilização de ponteiros no intuito de tornar mais rápida esta ponte entre as rotinas. Nesta segunda parte do código, são calculadas as matrizes de contorno e realizadas as manipulações matemáticas apresentadas no capítulo 9, obtendo-se assim a matriz de rigidez equivalente para o acoplamento com a matriz obtida pelo MEF.

3. Finalmente, a rotina de solução de sistema linear utilizando-se métodos diretos sobre matrizes esparsas, apresentada pelos autores DUFF & REID (1982) e DEMMEL (1993) para sistemas simétricos e DUFF (1997) para não-simétricos, constitui a terceira parte do programa. Esta rotina também foi desenvolvida em Linguagem de Programação Fortran e é utilizada neste trabalho da maneira como foi fornecida pelos autores, sem qualquer modificação ou adaptação. Novamente, a ligação entre a rotina e o programa base, é feita com a utilização de DLL. A possibilidade de se gerar uma matriz esparsa, onde os coeficientes nulos aparecem em maior número que os não-nulos, como resultado do acoplamento entre o solo (MEC) e a estrutura (MEF) é muito grande. Isto se dá pelo fato de poder existir algumas regiões que não são comuns entre os métodos, resultando em blocos de valores nulos na matriz. Sabe-se também que a matriz final resultante do acoplamento é não simétrica, havendo portanto a necessidade de utilização desses métodos que otimizem a resolução do sistema levando em conta as particularidades que tal matriz apresenta. Neste sentido, os métodos implementados obtiveram bons resultados no que diz respeito ao tempo de processamento necessário para resolução do sistema, a princípio deixando de ser um ponto de morosidade no processo global.

Essas 2 últimas rotinas na verdade são subprogramas do programa principal, que é a rotina 1, sendo que este controla todas as etapas envolvidas nos cálculos a serem realizados durante a análise de um problema qualquer. Tanto o programa principal, quanto os dois subprogramas são divididos em procedimentos, que são pequenas rotinas de cálculo, possibilitando uma melhor organização das implementações realizadas.

Com relação aos elementos utilizados, foram introduzidos na formulação os elementos finitos laminados de pórtico e casca, com possibilidade de aproximação de

variáveis quadrática e cúbica. A matriz de rigidez dos elementos foi obtida com a utilização de integração numérica ao longo dos elementos e das camadas. Para o elemento de pórtico, utilizou quadratura de Gauss tanto na integração ao longo do elemento como na espessura das camadas, fazendo-se o mesmo na espessura do elemento de casca, porém utilizando-se integração numérica com pontos e pesos de Hammer ao longo da área do elemento, por se tratar de um elemento triangular. Para estes elementos finitos, permite-se a consideração de diferentes materiais na composição das camadas constituintes, como descrito nas respectivas formulações apresentadas nos capítulos anteriores referentes a estes.

Com relação aos elementos de contorno, como dito anteriormente, utilizou-se o programa desenvolvido por SOUZA (2001) com aproximação linear de variáveis, as integrações numéricas sobre os elementos foram realizadas como apresentado no capítulo referente ao método dos elementos de contorno.

Para a entrada de dados, buscou-se facilitar a criação dos arquivos com os dados, bem como tornar possível a geração de geometrias mais complexas. Para tanto, optou-se por trabalhar com o padrão de seqüência de dados dos arquivos criados pelo programa comercial ANSYS[®], quando da listagem das características de geometria e condições de contorno pelo comando “list”, interno ao programa. Optou-se por este pacote comercial por ser o programa comercial mais difundido entre os pesquisadores do departamento no qual esta pesquisa se insere, buscando assim, tornar o programa do presente trabalho uma ferramenta amigável para utilização de outras pessoas da mesma área. Vale salientar, que para problemas mais simples onde não se faz necessária a utilização do gerador do programa ANSYS[®], basta seguir o padrão dos arquivos de entrada de dados e pode-se gerar estes manualmente.

Portanto, são criados arquivos distintos para a geração dos nós, elementos, condições de contorno, características dos materiais, seção transversal dos elementos, entre outros. Para alguns desses arquivos, podem ser criadas bibliotecas de dados, procedendo apenas com a inserção de novos dados manualmente, como é o caso dos arquivos de entrada de materiais, parâmetros plásticos e viscosos e seção transversal dos elementos, por exemplo.

No caso de problemas acoplados, é necessária a geração dos dados de geometria e condições de contorno para os dois problemas separadamente, ou seja, primeiramente são gerados os dados referentes ao MEF e posteriormente os dados

referentes aos nós, elementos e condições de contorno referentes a malha de elementos de contorno.

Os arquivos de entrada são divididos em:

→ Para o primeiro problema – dados acoplados e MEF não acoplado:

- Geração dos nós;
- Geração dos elementos;
- Prescrição de deslocamentos nodais;
- Prescrição de deslocamentos em linhas de nós;
- Prescrição de carregamentos nodais;
- Prescrição de carregamentos distribuídos;
- Geração de pontos auxiliares;
- Geração de linhas auxiliares;
- Propriedades dos materiais – biblioteca;
- Propriedades dos critérios de plastificação – biblioteca;
- Parâmetros da análise viscosa – biblioteca;
- Seção transversal para o elemento de pórtico – biblioteca;
- Seção transversal para o elemento de casca – biblioteca;

→ Para o segundo problema – MEC não acoplado:

- Geração dos nós, inclusive nós duplos;
- Geração dos elementos de contorno;
- Prescrição de deslocamentos nodais;
- Prescrição de carregamentos nodais;

Com relação aos tipos de elementos utilizados no programa ANSYS® para geração dos elementos finitos e de contorno, bem como da nomenclatura que deve ser adotada para a interpretação pelo programa desenvolvido, apresentam-se as seguintes informações da Tabela 11.1.

Esses tipos de elementos fornecidos para o programa gerado servem para identificação do elemento a ser utilizado na formulação, bem como da existência e tipo de acoplamento que este elemento permite realizar.

Tabela 11.1 – Relação entre os tipos de elementos.

	Elemento	ANSYS®	Programa
MEF	Pórtico	Beam 2D Elastic 3	01
	Casca		02
MEC	Solo – Todas direções acopladas	Shell 4 Node 63 (triangular)	03
	Solo – Direção 1 acoplada		10
	Solo – Direção 2 acoplada		20
	Solo – Direção 3 acoplada		30
	Solo – Direções 1 e 2 acoplada		12
	Solo – Direções 1 e 3 acoplada		13
	Solo – Direções 2 e 3 acoplada		23
	Solo – Todas direções não acoplada		4

11.3 FLUXOGRAMA

O fluxograma a seguir ilustra a ligação entre as 3 principais rotinas constituintes do programa geral do presente trabalho. Naturalmente, essas 3 rotinas são divididas em outras tantas quanto se fizeram necessária para realização dos procedimentos descritos no item 11.2. Portanto, tem-se um esquema geral do programa completo dado pela Figura 11.1.

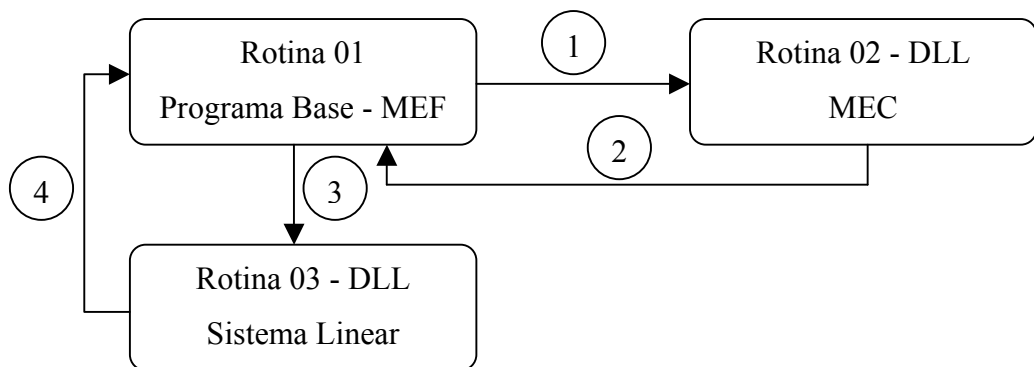


Figura 11.1 – Esquema geral do programa.

CAPÍTULO 12

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

12.1 CONCLUSÕES E CONSIDERAÇÕES FINAIS

Retomando as informações apresentadas no decorrer do texto do presente trabalho, algumas conclusões e considerações podem ser citadas. Partindo-se do pressuposto que o principal objetivo desta pesquisa foi o desenvolvimento e implementação de uma formulação de cascas laminadas anisotrópicas enrijecidas ou não, considerando-se não-linearidade física com lei de fluxo não-associativa e acoplamento com sólidos viscoelásticos, pode-se concluir que, dos resultados dos exemplos gerais formulados para verificação e validação da formulação, verificou-se a eficiência das implementações e considerações adotadas para se obter a formulação aqui desenvolvida. Alguns dos comentários citados a seguir certamente já foram apresentados nos exemplos de final de capítulo ou nos exemplos gerais do capítulo 10 e até mesmo no decorrer do texto e são aqui condensados.

Optou-se pela utilização de elementos finitos planos na modelagem das cascas em função da simplicidade que esta geometria proporciona para a formulação, em comparação com os desenvolvimentos necessários para o elemento curvo. De forma geral, a aproximação adotada satisfaz totalmente as exigências para modelagem da maior parte dos problemas da prática, quando se utiliza malha adequadamente refinada para a representação geométrica e de variáveis. Justifica-se ainda a utilização de elementos planos pelo fato do acoplamento com os enrijecedores ser facilitado.

A aproximação cúbica para as variáveis nodais fez-se necessária em função de observações dos resultados obtidos em outros trabalhos do autor e do grupo de pesquisa, onde a utilização de aproximação quadrática deixou a desejar no tocante ao cálculo de

tensões em pontos distintos dos de integração para o elemento, tensões estas de suma importância na realização de uma análise cuja não-linearidade física se faz presente. Em virtude do acoplamento, a aproximação adotada para os elementos de barra foi a mesma, ou seja, cúbica para as variáveis de deslocamento.

A utilização da cinemática de laminados ou Reissner geral na modelagem dos elementos finitos, proporcionou um enriquecimento do programa obtido, uma vez que é possível a consideração de diferentes materiais e critérios de plastificação para cada camada constituinte do compósito. Este enriquecimento pode ser estendido às informações encontradas na literatura no que diz respeito ao fenômeno matemático conhecido como travamento, seja ele por cortante ou efeito de membrana. Verificou-se que a presente formulação, novamente frisando que não se realizou estudo matemático do fenômeno mas apenas a análise dos resultados obtidos nos exemplos, quando utilizada em problemas cuja aproximação e refinamento da malha adotada permitem uma boa representação da geometria e pontos de singularidade do problema, não apresentou sensibilidade a este fenômeno. Novamente, retomando o que foi dito no capítulo 10, acredita-se que os estudos relacionados ao efeito de travamento encontrado em grande número de trabalhos da literatura, objetivam a obtenção de elementos finitos de casca (ou placa) que permitam análises da prática, utilizando-se de malhas consideradas pobres. Técnicas como integração reduzida e penalização energética são empregadas para se obter tais elementos, poucas informações sobre a qualidade dos resultados em tensão são encontradas na literatura, sendo este o principal aspecto das implementações não-lineares do trabalho desenvolvido.

O critério de Tsai-Wu para modelagem do comportamento plástico da casca, composta por laminados ortotrópicos, foi escolhido em função da característica de anisotropia geral do critério. Além disso, o critério pode ser particularizado para se obter uma representação dos critérios de von Mises e Drucker Prager, modificando-se os parâmetros de resistência envolvidos na expressão que fornece a superfície do critério.

A obtenção da expressão fechada para obtenção do multiplicador plástico para este critério foi de grande valia, uma vez que se evita necessidade de cálculos iterativos para a determinação do mesmo, diminuindo a possibilidade de acúmulo de erros numéricos e tempo de processamento provenientes destas iterações. A consideração de lei de fluxo não-associativa permite que se quantifique a compressibilidade do material na fase plástica, possibilitando maior flexibilidade para o modelo.

Para as barras, apesar de se ter desprezado a contribuição do cisalhamento na plastificação, os resultados apresentados mostram que o critério utilizado proporcionou uma boa representação do comportamento do modelo quando comparado a resultados experimentais. A consideração da multilinearidade do diagrama tensão x deformação possibilita melhores representações para o comportamento de materiais quaisquer (tanto matriz como reforço) obtidas em ensaios de laboratório, sendo que permite-se ainda a utilização de diferentes tensões de escoamento para tração e compressão como visto em alguns dos exemplos, fornecendo bons resultados.

Com relação às soluções fundamentais para o Método dos Elementos de Contorno, optou-se por implementar tanto a de Kelvin quanto a de Mindlin para se possibilitar a aplicação de cada uma delas nos problemas a que mais se adequam, sendo portanto a de Kelvin para domínios fechados e a de Mindlin para problemas onde a influência do semi-infinito é considerada, ou seja, domínio aberto, como no caso de placas ou cascas apoiadas sobre o solo. Salienta-se que a formulação é aplicável a meios tridimensionais, podendo ser utilizada para modelagem de sólidos e portanto para o solo.

O comportamento viscoelástico, de acordo com a formulação cuja abordagem é diferencial no tempo, foi implementado de forma original para a solução fundamental de Mindlin.

A técnica utilizada para o acoplamento entre os métodos mostrou-se eficiente, como pode se ver nos resultados obtidos nos exemplos apresentados. A transformação do sistema de equações do MEC em um equivalente ao MEF, resultando em uma matriz de rigidez equivalente que é posteriormente somada às matrizes do MEF, proporcionou a realização do acoplamento de forma direta e fácil, inclusive permitindo que graus de liberdade de um mesmo nó possam ser adotados como acoplados ou não independentemente dos demais. Esta forma de acoplamento é diferente da técnica de sub-regiões geralmente utilizada no SET.

Um comentário pertinente sobre o programa obtido é que as formulações apresentadas na tese estão contidas em um único programa, ou seja, a medida que as formulações se desenvolveram, estas foram incluída no programa geral resultado desta pesquisa. Por não se tratar de um dos objetivos estabelecidos para esta pesquisa, os desenvolvimentos relativos à armazenagem e tratamento dos dados foram realizados sem uma preocupação com a otimização. No entanto, o limitante para o tamanho dos exemplos que podem ser simulados é estabelecido pela configuração de memória do

computador que se está utilizando. Técnicas de armazenagem da matriz de rigidez em banda são comumente utilizadas para se obter melhores resultados com relação à armazenagem de dados, sendo que, com relação ao tempo de processamento, pode-se citar a utilização de técnicas de processamento paralelo.

Para o momento, acredita-se que as rotinas de resolução de sistema usando métodos diretos sobre matrizes esparsas, descritas no capítulo 11, são suficientes para os problemas aqui abordados e para os problemas práticos em geral.

Acredita-se portanto que o desenvolvimento da formulação proposta foi alcançada de forma integral, tendo em vista as implementações realizadas durante a pesquisa. Os resultados dos exemplos apresentados levam a crer que os programas obtidos são totalmente confiáveis. Além das contribuições específicas desta pesquisa, como: implementação e desenvolvimento da viscoplasticidade diferencial não-associativa em meios anisotrópicos (casca composta por lâminas ortotrópicas) e da implementação da viscoelasticidade diferencial em meios contínuos 3D modelados pelo MEC utilizando-se solução fundamental de Mindlin; deve-se verificar a contribuição global do trabalho, tendo em vista a ferramenta resultante do acoplamento entre o MEC e o MEF. Deve-se considerar a gama de problemas que podem ser tratados com o acoplamento entre estruturas em regime viscoplástico e sólidos em comportamento viscoelástico. Além disso, o acoplamento entre os elementos finitos de superfície e os elementos finitos de barra, permite a modelagem de pavimentos compostos com vigas e pilares. Outra contribuição interessante é a utilização do elemento finito de pórtico laminado em problemas homogêneos para consideração de excentricidade e seções transversais de forma quaisquer, reforçadas ou não.

12.2 PROPOSTAS DE DESENVOLVIMENTO

Diversas sugestões para continuação desta pesquisa, visando uma maior abrangência dos problemas com possibilidade de serem abordados, podem ser citadas, destacando-se neste item as mais significativas segundo a visão do autor.

→ Encontrar as expressões fechadas para o caso de plasticidade associativa para o critério de Tsai-Wu, que se dará de forma fácil em função da existência da formulação para o caso de não-associatividade, e também com base nos

desenvolvimento realizados por MESQUITA (2002) para os critérios de von Mises e Druker Prager;

→ Inclusão de outros critérios anisotrópicos similares ao de Tsai-Wu para possibilitar uma maior variabilidade das análises disponíveis no programa e uma comparação entre os resultados obtidos, podendo-se assim optar pelo critério que melhor representar o problema que se deseja tratar;

→ Consideração do cisalhamento na plastificação para os elementos de barra, embora tenha se verificado que tal influência não foi determinante nos casos analisados e apresentados neste trabalho;

→ Inclusão de diagrama multilinearidade para relação tensão x deformação para os materiais aplicados aos elementos de placa e casca, a exemplo do que foi implementado para o elemento de pórtico, generalizando o caso trilinear desenvolvido;

→ Comportamento viscoso instantâneo, implementando-se o modelo viscoso de Boltzmann na formulação existente;

→ Inclusão de fibras aleatórias possibilitando a modelagem de estruturas reforçadas com fibras, VANALLI (2004);

→ Análise quase-estática para modelagem de escavações de túneis, possibilitando a análise de retirada de material e colocação de reforço em tempo de processamento, seguindo procedimento apresentado em MESQUITA (2002);

→ Introduzir na formulação comportamento viscoplástico para o solo que poderá ser realizado com base no trabalho de ALMEIDA (2003a), bem como possibilidade de consideração de diversas sub-regiões para representação do meio heterogêneo tal como em ALMEIDA (2003b);

→ Implementação de elemento finito isoparamétrico com aproximação quadrática de geometria;

→ Teoria de deformação cisalhante de alta ordem, para melhor representação da distribuição do cisalhamento na espessura dos elementos finitos, evitando-se assim a necessidade de inclusão de fatores de correção da distribuição do cisalhamento na espessura das camadas dos elementos;

→ Consideração dos efeitos de não-linearidade geométrica, de grande importância para modelagem do comportamento de cascas;

→ Além das modificações conceituais acima citadas, sugere-se ainda a possibilidade de tornar a entrada e saída de dados dos programas obtidos mais amigáveis aos usuários em geral, ou seja, descentralizando a utilização destas ferramentas geradas em caráter científico e tornando-as úteis no dia-a-dia dos pesquisadores desta e de outras áreas afins com a criação de pré e pós-processadores para estes programas.

Acredita-se que com estas modificações, naturalmente a serem desenvolvidas gradativamente, aumentar-se-á de forma considerável a aplicabilidade da formulação e simplificará desenvolvimentos posteriores do programa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALFANO, G., ROSATI, L., VALOROSO, N., 1996, A step-consistent algorithm in finite-step elastoplasticity, In. Joint Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering, Padova, Italy, Proceedings, AIMETA/AMC, 305-308.
- ALLMAN, D.J., 1984, A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis, Computers & Structures, vol. 19, n. 1-2, pp. 1-8.
- ALMEIDA, F.P.A., 2003, Aplicação do acoplamento entre o MEC e o MEF para o estudo da interação dinâmica elastoplástica entre o solo e estruturas, Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- ALMEIDA, V.S., 2003, Análise da interação solo não-homogêneo/estrutura via acoplamento MEC/MEF, Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- ALVARES, M.S., 1993, Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP, Brasil.
- ASSAN, A.E., 1999, Método dos elementos finitos: primeiros passos. 1a ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 1999. 298 p.

- BARBIRATO, J.C.C., 1991, Formulação do método dos elementos de contorno para sólidos elásticos tridimensionais, baseada na solução fundamental de Mindlin, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP, Brasil.
- BARBIRATO, J.C.C., 1999, Método dos Elementos de Contorno com a reciprocidade dual para a análise transiente tridimensional da mecânica do fraturamento, Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- BARUCH, M., 1975, Comment on “Inclusion of transverse shear deformation in finite element displacement formulations”, AIAA Journal, vol. 13, nº. 9, September.
- BATHE, K.J., 1996, Finite Element Procedures, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- BATHE, K.J., IOSILEVICH A., CHAPELLE, D., 2000, An evaluation of MITC shell elements, Computers and Structures, vol. 75, 1-30.
- BATHE, K.J., WILSON, E.L., 1976, Numerical Methods in Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey.
- BATOZ, J.L., HAMMADI, F., ZHENG, C., ZHONG, W., 2000, On the linear analysis of plates and shells using a new-16 degrees of freedom flat shell element, Computers and Structures, vol. 78, 11-20.
- BELYTSCHKO, T., CHANG, H.S., LU, Y.Y., 1989, A variationally coupled finite element-boundary element method. *Computers & Structures*, v.33, n.1, p.17-20.
- BISWAL, K.C., GHOSH, A.K., 1994, Finite element analysis for stiffened laminated plates using higher order shear deformation theory, Computers & Structures, vol. 53, n. 1, pp. 161-171.
- BREBBIA, C.A., 1978, The boundary element method for engineering, London, Pentech Press.
- BREBBIA, C.A., DOMINGUEZ, J., 1992, Boundary elements: an introductory course. 2.ed. McGraw-Hill Book Company, Great Britain.
- BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F. , WROBEL, L.C., 1984, Boundary element techniques: Theory and applications in engineering. Springer-Verlag, Berlin.
- BRÜNIG, M., 1995, Nonlinear analysis and elastic-plastic behavior of anisotropic structures, Finite Elements Analysis and Design, nº. 20, 155-177.

- BUCALEM, M.L., NÓBREGA, S.H.S., 2000, A mixed formulation for general triangular isoparametric Shell elements based on the degenerated solid approach, *Computers and Structures*, vol. 78, 35-44.
- CHAMA NETO, P.J., 2002, Avaliação de desempenho de tubos de concreto reforçados com fibras de aço, Dissertação (Mestrado), Escola Politécnica da universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Construção Civil, São Paulo, SP, Brasil.
- CHAPELLE, D., BATHE, K.J., 1998, Fundamental considerations for the finite element analysis of shell structures, *Computers and Structures*, vol. 66, Nº 1, 19-36.
- CHEN, H.C., 1992, Evaluation of ALLMAN triangular membrane element used in general shell analyses, *Computers & Structures*, vol. 43, n. 5, pp. 881-887.
- CHEN, W.F. , HAN, D.J., 1988, *Plasticity for Structural Engineers*. Spring Verlag New York Inc., N.Y.
- CHINOSI, C., LOVADINA, C., 1999, Remarks on partial selective reduced integration method for Reissner-Mindlin plate problem, *Computers and Structures*, vol. 73, 73-78.
- CHOI, C.-K., LEE, T.-Y., 2003, Efficient remedy for membrane locking of 4-node flat shell elements by non-conforming modes, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, 1961-1971.
- CLOUSTON P.L., LAM F., 2001, Computational modeling of strand-based wood composites. *Journal of Engineering Mechanics*, vol.127, n.8, pg.844 – 851.
- CODA, H.B., 1990, Análise da vibração livre de meios elásticos bidimensionais pelo método dos elementos de contorno, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP, Brasil.
- CODA, H.B, 1993, Análise tridimensional de estruturas pela combinação entre o MEC e o MEF, Tese de Doutorado
- CODA, H.B., 2000, Uma contribuição à análise dinâmica de meios contínuos pelo Método dos Elementos de Contorno, *Livre Docência*.
- CODA, H.B., VENTURINI, W.S., 1995, Three-dimensional transient BEM analysis, *Computers & Structures*, vol. 56, p. 751-68.
- CODA, H.B., VENTURINI, W.S., 1999, On the coupling of 3D BEM and FEM frame model applied to elastodynamic analysis. *International Journal of Solids and Structures*, v.36, n.31-32, p.4789-4804, November.

- CODA, H.B., VENTURINI, W.S., ALIABADI, M.H., 1999, A general 3D BEM/FEM coupling applied to elastodynamic continua/frame structures interaction analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.46, n.5, p.695-712, Oct. 2.
- COOK, R.D., MALKUS, D.S., PLESHA, M.E., 1989, Concepts and applications of Finite Element Analysis, John Wiley and Sons, Inc, 3d. edition.
- CRUSE, T.A., 1969, Numerical solutions in three dimensional elastostatics, *Int. J. Solids & Structures*, vol. 5, 1259-1274
- DEB, A., BOOTON, M., 1988, Finite element models for stiffened plates under transverse loading, *Computers & Structures*, vol. 28, n. 3, pp. 361-372.
- DEB, A., DEB, M.K., 1991, Analysis of orthotropically modeled stiffened plates, *Int. J. Solids Structures*, vol. 27, n. 5, pp. 647-664.
- DEMMELE, J.W., 1993, Berkeley lecture notes on numerical linear algebra. Mathematics Department and Computer Science Division, University of California.
- DEVLOO P.R.B., MENEZES, F.A., BRAVO, C.M.A.A., 1999, Formulação e implementação de cálculo de placas de material composto, COBEM99 – Congresso de Engenharia Mecânica, in CDROM, Águas de Lindóia, SP, Brasil.
- DIAS, R.H., PAIVA, J.B. de, GIONGO, J.S., 2001, Análise numérica de lajes enrijecidas considerando a excentricidade entre nervuras e placa, XXII CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, in CDROM, Campinas (SP), Brasil.
- DUFF, I.S., 1977, MA28 - A set of FORTRAN subroutines for sparse unsymmetric linear equations, London, AERE Report R.8730, HMSO.
- DUFF, I.S., ERISMAN, A.M., REID, J.K., 1990, Direct methods for sparse matrices, Oxford, Clarendon Press.
- DUFF, I.S., REID, J.K., 1982, A set of FORTRAN subroutines for solving sparse unsymmetric linear equations, Report R10533, AERE Harwell.
- FEENSTRA, P.H., BORST, R., 1996, A composite plasticity model for concrete. *Int. J. Solids Structures*, v.33, pp. 707-703.
- FERREIRA, A.J.M., 2003, A formulation of the multiquadric radial basis function method for the analysis of laminated composite plates, *Composite Structures*, vol. 59, pp. 385-392.

- FERREIRA, A.J.M., BARBOSA, J.T., MARQUES, A.T., DE SÁ, J.C., 2000, Non-linear analysis of sandwich shells: the effect of core plasticity, *Computers & Structures*, vol. 76, pp. 337-346.
- FERREIRA, A.J.M., CAMANHO, P.P., MARQUES, A.T., FERNANDES, A.A., 2001, Modelling of concrete beams reinforced with FRP re-bars, *Composite Structures*, vol. 53, pp. 107-116.
- FERREIRA, A.J.M., ROQUE, C.M.C., MARTINS, P.A.L.S., 2003, Analysis of composite plates using higher-order shear deformation theory and a finite point formulation based on the multiquadric radial basis function method, *Composites: Part B*, vol. 34, pp. 627-636.
- FERREIRA, A.J.M., ROQUE, C.M.C., MARTINS, P.A.L.S., 2004, Radial basis functions and higher-order shear deformation theories in the analysis of laminates composite beams and plates, *Composite Structures*, article in press.
- FERRO, N.C.P., 1999, *Uma combinação MEC/MEF para análise de interação solo-estrutura*, Tese (Doutorado).
- FIGUEIRAS, J.A., 1983, Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells. Swansea, Thesis (Ph. D) – Department of Civil Engineering, University College of Swansea.
- HAMMER, P.C., MARLOWE, O.J., STROUD, A.H., 1956, Numerical Integration over Simplexes and Cones, *Mathematics Tables and other Aids in Computation*, Vol. 10, 130-137.
- HINTON, E., OWEN, D.R.J., 1984, *Finite elements software for plates and shells*, Pineridge Press Ltd., Swansea.
- HUYBRECHTS, S., MAJI, A.K., LAO, J., WEGNER, P., MEINK, T., 2002, "Validation of the Quadratic Composite Failure Criteria with Out-of-Plane Shear Terms", *Journal of Composite Materials*, vol. 36, no. 15, 1879-1888.
- HYER, M.W., 1998, *Stress Analysis of fiber-reinforced Composite Materials*. McGraw-Hill Publ., New York, 1997, 627 p.
- JETTEUR, P., 1986, Implicit integration algorithm for elastoplasticity in plane stress analysis, *Eng. Comput.*, vol. 3, 251-253.
- KANT, T., SWAMINATHAN, K., 2002, Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory, *Composite Structures*, vol. 56, 329-344.

- KLINKEL, S., GRUTTMANN, F., WAGNER, W., 1999, A continuum based three-dimensional shell element for laminated structures, *Computers & Structures*, vol. 71, pp. 43-62.
- KOLAKOWSKI Z., 2003, On some aspects of the modified TSAI-WU criterion in thin-walled composite structures, *Thin-Walled Structures*, vol. 41, pp. 357-374.
- KOLLI, M., CHANDRASHEKHARA, K., 1996, Finite Element analysis of stiffened laminated plates under transverse loading near static and dynamic analysis of stiffened laminated plates, *Composite Science and Technology*, vol. 56, 1355-1361.
- KOLLI, M., CHANDRASHEKHARA, K., 1997, Non-Linear static and dynamic analysis of stiffened laminated plates, *International Journal Non-Linear Mechanics*, vol. 32, nº 1, 89-101.
- KOMATSU, J.S., 1995, Estudo de problemas de escavação através de combinação de elementos de contorno e elementos finitos, Tese (Doutorado).
- KOSMATKA, J.B., 1994, An Accurate Shear-Deformable Six-Node Triangular Plate Element for Laminated Composite Structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 37, 431-455.
- LAETHEM, M.V., BACKX, E., WYNENDAELE, H., CAESTECKER, F., DHONDT, G., 1984, The use of boundary elements to represent the far field in soil-structure interaction. *Nuclear Engineering and Design*, v.78, p.313-27.
- LANCZOS, C., 1970, *The variational principles of mechanics*, Dover, New York, fourth edition.
- LARDEUR, P., BATOZ, J.L., 1989, Composite plate analysis using a new discrete shear triangular finite element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 27, 343-359.
- LEKHNITSKII S.G., 1963, *Theory of elasticity of an anisotropic elastic body*, San Francisco: Holden-Day.
- LEKHNITSKII, S.G., TSAI, S.W., CHERONT, T., 1968, *Anisotropic Plates*, 1ª ed. New York: Gordon and Breach Science Publishers, 534p.
- LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.L., 1990, *Mechanics of Solids*, Cambridge University Press.
- LUCENA NETO, E., KATAOKA FILHO, M., 2001, Um elemento triangular eficiente para placas laminadas, XXII CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, in CDROM, Campinas (SP), Brasil.

- MAGAGNIN FILHO, N., 1996, Placas laminadas em materiais compostos de fibras longas: propriedades termoelásticas dos materiais constituintes; propriedades equivalentes das lâminas; critérios de ruptura e análise pelo método dos elementos finitos. São Carlos, Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- Manual do Programa ADINA[®], 2002, Manual de Verificação, ADINA R & C Inc., USA.
- Manual do Programa ANSYS[®], 1998, Manual de utilização da Versão 5.5, Swanson Analysis Systems, Inc. Canonsburg.
- MATOS FILHO, R.F., 1999, *Análise da interação estaca-solo via uma combinação do MEF com o MEC*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MENDONÇA, A.V., 1997, *Análise da interação placa-estaca-solo via combinação do método dos elementos finitos com o método dos elementos de contorno*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MENDONÇA, A.V., 2002, *Estudo de estruturas compostas por lâminas planas de espessuras constantes: uma abordagem pelo método dos elementos de contorno*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MENDONÇA, A.V., PAIVA, J.B., 2000 A boundary element method for the static analysis of raft foundations on piles. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, n.24, p.237-47.
- MENEZES, F.A., DEVLOO P.R.B., 2000, Análise comparativa entre duas formulações para placas laminadas multi-camadas, XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, in CDROM, Punta del Este, Uruguay.
- MENEZES, F.A., PACCOLA, R.R., DEVLOO, P.R.B., 2001, Placas multi-camadas apoiadas sobre base elástica, XXII CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, in CDROM, Campinas (SP), Brasil.
- MESQUITA, A.D., 1998, Uma formulação do método dos elementos finitos aplicada à análise elastoplástica de cascas, Dissertação (Mestrado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- MESQUITA, A.D., 2002, Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento MEC/MEF progressivo, Tese de

- Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- MESQUITA, A.D., CODA, H.B., 2002, Alternative Kelvin viscoelastic Model for Finite Elements, *Applied Mathematical Modelling*, vol.26, pp. 501-516.
- MESQUITA, A.D., CODA, H.B., 2003, A simple Kelvin and Boltzmann viscoelastic analysis of three-dimensional solids by the boundary element method, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 27, pp. 885-895.
- MUNAIAR NETO, J., 1998, Um estudo da formulação de modelos constitutivos viscoelásticos e elasto-viscoplásticos e do emprego de algoritmos implícitos para a sua integração numérica. São Carlos, 214p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- NAKAGUMA, R.K., 1979, Three dimensional elastostatics using the boundary element method, Southampton, Ph. D. Thesis, University of Southampton.
- NARAYANASWAMI, R., ADELMAN, H.M. 1974, Inclusion of transverse shear deformation in finite element displacement formulations, *AIAA Journal*, vol. 12, November.
- NEVES, R.A., 2000, Cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas de pisos de edifícios, considerando-se a influência das tensões cisalhantes, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP, Brasil.
- ODEN, J.T., BECKER, E.B., CAREY, G.F., 1981, *FINITE ELEMENTS - An Introduction*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 2d. edition, Vol. 1, ISBN 0-07-112799-2, Singapore.
- OMRI, A.E.I., FENNAN, A., SIDOROFF, F., HIHI, A., 2000, Elastic-plastic homogenization for layered composites, *Eur. J. Mech. A/Solids*, nº. 19, 585-601.
- OWEN, D.R.J., FIGUEIRAS, J.A., 1983a, Elasto-plastic analysis of anisotropic plates and shells by the semiloof element, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, pp. 521-539.
- OWEN, D.R.J., FIGUEIRAS, J.A., 1983b, Anisotropic elasto-plastic finite element analysis of thick and thin plates and shells, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 19, pp. 541-566.
- OWEN, D.R.J., HINTON E., 1980, *Finite elements in Plasticity*, Pineridge Press Ltd., Swansea.

- PACCOLA, R.R., 2001, Estudo de formulações de placas laminadas apoiadas sobre base elástica, Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Civil, Departamento de Estruturas, UNICAMP, Campinas, SP, Brasil.
- PAIVA, J.B., BUTTERFIELD, R., 1997, Boundary element analysis of plate-soil interaction, *Computers & Structures*, vol. 64, n 1-4, pp. 319-328.
- PAN, G., OKADA, H., ATLURI, S.N., 1994, Nonlinear transient dynamic analysis of soil-pavement interaction under moving load: a coupled BEM-FEM approach. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.14, p.99-112.
- PAPADOPOULOS, P., LU, J., 2001, On the formulation and numerical solution of problems in anisotropic finite plasticity, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* n.º. 190, 4889-4910.
- PAVLATOS, G.D., BESKOS, D.E., 1994, Dynamic elastoplastic analysis by BEM/FEM. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.14, n.1, p.51-63.
- PROENÇA, S.P.B., 1988, Sobre modelos matemáticos do comportamento não linear do concreto: análise crítica e contribuições, Tese (Doutorado)
- RAMALHO, M.A., 1990, Sistema para análise de estruturas considerando interação com meio elástico, Tese (Doutorado).
- RASTGAAR AAGAAH, M., MAHINFALAH, M., MAKHAIE JAZAR, G., 2003, Linear static analysis and finite element modelling for laminated composite plates using third order shear deformation theory, *Composite Structures*, vol. 62, pp. 27-39.
- REDDY, J.N., 1989, On refined computational models of composite laminates, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 27, 361-382.
- REDDY, J.N., 1993, *An Introduction do the Finite Element Method*, McGraw-Hill International Editions, McGraw-Hill series in Mechanics Engineering, 2d. edition, ISBN 0-07-112799-2, Singapore.
- REISSNER, E., STAVSKY, Y., 1961, Bending and stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic elastic plates, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 28, Series E, n.º. 3, September.
- SADEK, E.A., TAWFIK, S.A., 2000, A finite element model for the analysis of stiffened laminated plates, *Computers and Structures*, vol. 75, 369-383.
- SHIH C. F., LEE D., 1978, Further developments in anisotropic plasticity. *Journal of Engineering Materials and Technology*, vol.100, pg.294 – 302.
- SIMO, J.C., HUGHES, T.J.R., 1998, *Computational inelasticity*, New York, Springer.

- SIMO, J.C., TAYLOR, R.L., 1985, Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, n.48, p.101-118.
- SIMO, J.C., TAYLOR, R.L., 1986, A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 22, 649-670
- SOUZA, V.J.B., 2001, Algoritmos de integração eficientes para o método dos elementos de contorno tridimensional, Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- STAVSKY, Y., 1961, Bending and stretching of laminated aeolotropic plates, *Journal of Engineering Mechanics Division*, vol. 87, nº. EM6, December.
- SYDENSTRICKER, R.M., LANDAU L., 2000, A study of some triangular discrete Reissner-Mindlin plate and shell elements, *Computers and Structures*, vol. 78, 21-33.
- TAKEYA, T., 1972a, 1º Relatório de Iniciação Científica II, FAPESP.
- TAKEYA, T., 1972b, 2º Relatório de Iniciação Científica II, FAPESP.
- TAYLOR, M.W., VASILIEV, V.V., DILLARD, 1997, One the problem of shear-locking in finite elements based on shear deformable plate theory, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 34, nº 7, 859-875.
- TEJERINA CALDERON, E., 1996, Sobre o uso do método dos elementos de contorno - MEC para o estudo de interação de placas com o meio contínuo, Tese de doutorado, Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, São Carlos, SP, Brasil.
- TELLES, J.C.F., BREBBIA, C.A., 1982 Elastic/viscoplastic problems using boundary elements. *Int. J. Mech. Sci.*, v.4, n.10, p.605-618.
- TIMOSHENKO, S.P., GOODIER, J.N., 1982, Teoria da Elasticidade, 3d. ed., Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- TIMOSHENKO, S.P., WOINOWSKY-KRIEGER, S., 1959, Theory of Plates and Shells, 2d. edition, McGraw-Hill, New York.
- TSAI, S.W., 1968, Strength theories of filamentary structures. In: R. T. Schwartz and H. S. Schwartz (eds.), *Fundamental Aspects of Fiber Reinforced Plastic Composites*, 3-11, Chap 1, Wiley Interscience, New York.
- TSAI, S.W., WU, E.M., 1971, A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, vol.5, pg.58 – 80.
- VANALLI, L., 2004, O MEC e o MEF aplicados à análise de problemas viscoplásticos em meios anisotrópicos e compostos, Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.

- VENTURINI, W.S., 1988, Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia, Tese de Livre-Docencia
- VON ESTORFF, O., 1991, Dynamic response of elastic blocks by time domain BEM and FEM. *Computers & Structures*, v.38, n.3, p.289-300.
- VON ESTORFF, O., KAUSEL, E., 1989, Coupling of boundary and finite elements for soil-structure interaction problems. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.18, p.1065-75.
- WEARING, J.L., BURSTOW, M.C., 1994, Elasto-plastic analysis using a coupled boundary element finite element technique. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.14, n.1, p.39-49.
- WHITNEY, J.M., PAGANO, N.J., 1970, Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 37, nº. 4, December.
- WOO, K.S., HONG, C.H., BASU, P.K., 2003, Materially and geometrically nonlinear analysis of laminated anisotropic plates by p-version of FEM, *Computers & Structures*, vol. 81, pp. 1653-1662.
- YANG, P.C., NORRIS, C.H., STAVSKY, Y., 1966, Elastic wave propagation in heterogeneous plates, *Int. J. Solids Structures*, vol. 2, nº. 4.
- YU, G., MANSUR, W.J., CARRER, J.A.M., LIE, S.T., 2001, A more stable scheme for BEM/FEM coupling applied to two-dimensional elastodynamics. *Computers & Structures*, v.79, n.8, p.811-23.
- ZIENKIEWICZ, O.C., 1985, *The Finite Element Method*, Third Edition, McGraw-Hill, London, England.
- ZIENKIEWICZ, O.C., KELLY, D.W., BETTESS, P., 1977, The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.11, p.355-75.
- ZIENKIEWICZ, O.C., TAYLOR, R.L., 2000, *The Finite Element Method*, Vol. 2, *Solid Mechanics*, Fifth Edition, Butterworth Heinemann.

APÊNDICE A

ALGORITMO DE GERAÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA

Apresenta-se neste apêndice o algoritmo desenvolvido para geração automática das funções de forma do elemento triangular plano com aproximação qualquer, bem como de suas derivadas, baseando-se nas expressões gerais encontradas em REDDY (1993) e ZIENKIEWICZ (1985) e com a utilização de um software de manipulação simbólica.

Grau de aproximação para as funções de forma:

ndv

Número de nós para o elemento triangular:

$nne = (ndv + 1) * (ndv + 2) / 2;$

Inicialização de variáveis:

acumula = 0;

posição = Matriz [nne,3]; armazenar as coordenadas dos nós

Posicionamento e cálculo das coordenadas dos nós para o elemento triangular:

For [i = 0, i < (ndv + 1), i++,

{

 For[j = 0, j < (ndv + 1 - i), j++,

 {

```

        acumula = acumula + 1;
        posicao[acumula,1] = (ndv - j - i);
        posicao[acumula,2] = (j);
        posicao[acumula,3] = (i);
    }];
}];

Inicialização de variáveis e funções:
vecxi = {L1, L2, L3} – vetor de 3 posições;
s[a] = a / ndv – função dependente do parâmetro “a”;
LL[l,j,xi] = (xi - s[j]) / (s[l] - s[j]); - função dependente dos parâmetros l, j e xi;

Cálculo das funções de forma e suas derivadas:
For[kk = 1, kk < (nne + 1), kk++,
{
    acumulado = 1;
    For[ij = 1, ij < (nne + 1), ij++,
    {
        l = posicao[kk,ij];
        xi = vecxi[ij];
        For[j = 0, j < (ndv + 1), j++,
        {
            If [j < l, acumulado = acumulado * LL[l,j,xi]]
        }];
    }];
Print[acumulado]; - imprime a função de forma do nó kk.
For[k = 1, k < 3, k++,
{
    dxi = k;
    If [dxi = 1, dxii = 2, dxii = 1];
    acumulado1 = 0;
    mt = 1;
    For[ij = 1, ij < 4, ij++,

```

```
{
  If [ij = 3, mt = -1, mt = 1];
  If [ij < dxii,
    {
      l = posicao[kk,ij];
      xi = vecxi[ij];
      For [j = 0, j < (ndv + 1), j++,
        {
          If [j < l, acumulado1 = acumulado1 + mt * acumulado / (xi
            - j / ndv)];
        }];
    }];
  Print[acumulado1]; - imprime a derivada da função de forma do nó kk em
    relação a k.
};
};
```