

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Estruturas

**Otimização de Seções Transversais de
Concreto Armado: Aplicação a Pórticos**

Eng^o Luis Claudio Coelho Vianna
Orientadora: Prof^a Dr^a Ana Lúcia H. de Cresce El Debs

São Carlos

2003

Universidade de São Paulo
Escola de Engenharia de São Carlos
Departamento de Estruturas

Otimização de Seções Transversais de Concreto Armado: Aplicação a Pórticos

Eng^o Luis Claudio Coelho Vianna

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientadora: Prof^a Dr^a Ana Lúcia H. de Cresce El Debs

São Carlos

2003

Vianna, Luis Cláudio Coelho

C672o Otimização de seções transversais de concreto armado : aplicação a pórticos / Luis Claudio Coelho Vianna. -- São Carlos, 2003.

Dissertação (Mestrado) -- Escola de Engenharia de São Carlos-Universidade de São Paulo, 2003.

Área: Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof^a. Dr^a. Ana Lúcia H. C. El Debis.

1. Otimização estrutural. 2. Concreto armado.
3. Pórticos planos. I. Título.

*Aos meus pais Antônio Luiz e Avany
e minhas irmãs Luciana e Mariana*

Agradecimentos

À Professora Dra. Ana Lucia H. C. El Debs, pela orientação, apoio e confiança no meu trabalho;

À CAPES, pela bolsa de estudo concedida, sem a qual não seria possível a realização deste trabalho;

Aos meus pais e irmãs, pelo apoio, incentivo e paciência nos momentos difíceis;

Aos professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas, pelo conhecimento e apoio transmitidos;

Às professoras e amigas Mônica e Tatiana, pelo apoio e incentivo na fase inicial dos trabalhos;

Aos meus familiares e amigos que sempre confiaram e me incentivaram;

Ao professor, colega e amigo Ademir Santos pelo incentivo e cobrança que me levaram à conclusão desta dissertação;

A todos os amigos que deixei em São Carlos, em especial a Ricardo, Robson, Valério, Andréa e Luciano que conviveram comigo nos dois anos de minha permanência na cidade;

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Sumário

Lista de Figuras	i
Lista de tabelas	ii
Lista de gráficos	iv
Resumo	vi
Abstract.....	vii
1. Introdução	1
2. Objetivo.....	4
3. Justificativa	5
4. A Otimização Estrutural	6
4.1. Definições.....	6
4.2. Técnicas de Otimização	7
4.3. Aplicações práticas da otimização estrutural	8
4.4. A otimização em estruturas	9
4.5. A otimização dos custos em estruturas de concreto armado	10
5. Metodologia	17
6. Resolução de Problemas Não-Lineares	19
6.1. Problemas sem restrições	20
6.1.1. Definições	20
6.1.1.1. Pontos de mínimo	20
6.1.1.2. Matriz Hessiana.....	20
6.1.2. Condições necessárias para garantir a solução	21
6.1.3. Condições suficientes para garantir a solução	22
6.2. Problemas com restrições de desigualdades.....	23

6.2.1.	Definições	23
6.2.1.1.	Restrições ativas e inativas	23
6.2.1.2.	Ponto regular	24
6.2.1.3.	Cone de direções viáveis.....	24
6.2.2.	Condições necessárias para garantir a solução	24
6.2.2.1.	As condições de mínimo de Fritz John.....	26
6.2.2.2.	As condições de Kuhn-Tucker	27
6.3.	Problemas com restrições de igualdade e de desigualdade	29
6.3.1.	Condições suficientes para garantir a solução	30
6.4.	Condições de mínimo global para o problema de programação não-linear	31
6.4.1.	Definições	31
6.4.1.1.	Conjunto convexo.....	31
6.4.1.2.	Função convexa.....	32
6.4.2.	Programação convexa.....	33
7.	Formulação matemática para minimização da seção transversal de uma viga	35
7.1.	Variáveis a serem otimizadas	35
7.2.	Sistema de unidades	36
7.3.	Função Objetivo.....	36
7.4.	Restrições de Equilíbrio	37
7.5.	Restrição de compatibilidade.....	38
7.6.	Restrições Laterais	39
7.7.	Resolução do Problema.....	41
7.8.	Verificações dos Resultados Obtidos.....	45
7.9.	Verificação da consistência dos resultados	50
8.	Formulação matemática para minimização da seção transversal de um pilar	52
8.1.	Variáveis a serem otimizadas	52
8.2.	Função Objetivo:.....	54
8.3.	Restrições de Equilíbrio	55
8.4.	Restrição de compatibilidade.....	56
8.5.	Restrição para garantir o domínio 5.....	59
8.6.	Restrições Laterais	59
8.7.	Resolução do problema	59

8.7.1.	Hipótese A: x_2 fixo, x_1 e x_3 livres	67
8.7.2.	Hipótese B: x_1 e x_2 fixos, x_3 livre.....	69
8.7.3.	Hipótese C: x_2 e ρ fixos, x_1 livre.....	73
8.7.4.	Hipótese D: x_1 , x_2 e x_3 fixos	76
8.8.	Exemplos numéricos	77
8.9.	Verificação numérica da consistência dos resultados.....	81
8.10.	Verificação da variação do custo com a mudança de arranjo das armaduras 82	
9.	Solução aplicada às seções transversais de pórticos planos.....	84
9.1.	Procedimentos para a solução do problema	85
9.1.1.	Determinação dos dados de entrada e demais dados necessários aos procedimentos a serem executados:.....	85
9.1.2.	Determinação dos esforços atuantes na estrutura:	85
9.1.3.	Determinação das seções ótimas das vigas:.....	86
9.1.4.	Determinação das seções ótimas dos pilares:	86
9.1.5.	Realimentação dos dados e retorno do processo:.....	86
9.1.6.	Cálculo final da estrutura.....	87
9.2.	Processos de cálculo utilizados no programa	87
9.2.1.	Definição do momento crítico de fissuração da viga	87
9.2.2.	Cálculo do Momento de inércia à flexão das vigas.....	88
9.2.3.	Determinação da flecha das vigas	89
9.2.4.	Consideração da fluência:.....	91
10.	Experimentação numérica	92
10.1.	Exemplo 01	93
10.2.	Exemplo 02	96
10.3.	Exemplo 03	99
10.4.	Exemplo 04	102
10.5.	Exemplo 05	106
10.6.	Exemplo 06.....	109
10.7.	Exemplo 07	112
11.	Conclusões	115
11.1.	Conclusões do trabalho.....	116

11.2.	Propostas para pesquisas futuras.....	119
12.	Bibliografia Consultada	120

Lista de Figuras

Figura 1.1 - Processo tradicional x Processo otimizado	2
Figura 6.1 - Exemplos de pontos de mínimo	21
Figura 6.2 - Exemplo de restrições ativas e inativas	23
Figura 7.1 – Diagrama de tensões para uma seção transversal de viga.....	37
Figura 7.2 – Diagrama de deformações para uma seção transversal de viga	38
Figura 8.1 - Denominação das dimensões da seção transversal	53
Figura 8.2 - Arranjos de armadura utilizados	53
Figura 8.3 - Diagrama de deformação para o domínio 5.....	57
Figura 8.4 - Diagrama Tensão x Deformação para o aço CA-50A.....	57
Figura 8.5 - Fluxograma de resolução para o valor de x_2 definido	66
Figura 10.1 – Pórtico composto de uma viga sobre dois pilares.....	93
Figura 10.2 – Pórtico composto de doze pavimentos e quatro pilares	96
Figura 10.3 – Pórtico composto de doze pavimentos e três pilares	103
Figura 10.4 – Pórtico composto de doze pavimentos e seis pilares	109

Lista de tabelas

Tabela 7.1 – Resultados encontrados para a otimização da seção transversal de uma viga	47
Tabela 7.2 – Menores custos obtidos com a variação da altura das vigas para os momentos fletores aplicados	51
Tabela 8.1 - Resultados obtidos para excentricidade de 1 cm	78
Tabela 8.2 - Resultados obtidos para excentricidade de 2 cm	79
Tabela 8.3 - Resultados obtidos para excentricidade de 3 cm	80
Tabela 8.4 - Resultados obtidos variando-se os valores das variáveis de projeto da seção ótima	82
Tabela 8.5 - Resultados obtidos para os diferentes arranjos de armadura.....	83
Tabela 10.1 – Resultados encontrados para a viga em cada passo de iteração.....	94
Tabela 10.2 – Resultados encontrados para os pilares em cada passo de iteração	95
Tabela 10.3 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas	97
Tabela 10.4 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares	98
Tabela 10.5 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas	100
Tabela 10.6 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares	101
Tabela 10.7 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas	104

Tabela 10.8 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares.....	105
Tabela 10.9 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas.....	107
Tabela 10.10 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares.....	107
Tabela 10.11 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas.....	110
Tabela 10.12 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares.....	110
Tabela 10.13 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas.....	113
Tabela 10.14 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares.....	114

Lista de gráficos

Gráfico 7.1 – Percentual do custo dos serviços necessários no custo total da estrutura	47
Gráfico 7.2 – Valores das variáveis sujeitas a restrição lateral.....	48
Gráfico 7.3 – Área ótima de armadura para a seção transversal de uma viga	48
Gráfico 7.4 – Altura e custo ótimos para a seção transversal de uma viga	49
Gráfico 7.5 – Custo total da seção para os momentos aplicados	50
Gráfico 8.1 - Resultados obtidos para excentricidade de 1 cm.....	78
Gráfico 8.2 - Resultados obtidos para excentricidade de 2 cm.....	79
Gráfico 8.3 - Resultados obtidos para excentricidade de 3 cm.....	80
Gráfico 10.1 – Resultados encontrados para a viga em cada passo de iteração	94
Gráfico 10.2 – Resultados encontrados para os pilares em cada passo de iteração	95
Gráfico 10.3 – Custo por metro das vigas em cada passo de Iteração	97
Gráfico 10.4 – Custo por metro dos pilares em cada passo de iteração	98
Gráfico 10.5 – Custo total das vigas e dos pilares e custo geral da estrutura em cada passo de iteração.....	99
Gráfico 10.6 – Custo por metro das vigas em cada passo de Iteração	100
Gráfico 10.7 – Custo por metro dos pilares em cada passo de iteração	101
Gráfico 10.8 – Custo total das vigas e dos pilares e custo geral da estrutura em cada passo de iteração.....	102
Gráfico 10.9 – Custo por metro das vigas em cada passo de Iteração	103
Gráfico 10.10 – Custo por metro dos pilares em cada passo de iteração	104
Gráfico 10.11 – Custo total das vigas e dos pilares e custo geral da estrutura em cada passo de iteração.....	105
Gráfico 10.12 – Custo por metro das vigas em cada passo de Iteração	106

Gráfico 10.13 – Custo por metro dos pilares em cada passo de iteração	108
Gráfico 10.14 – Custo total das vigas e dos pilares e custo geral da estrutura em cada passo de iteração.....	108
Gráfico 10.15 – Custo por metro das vigas em cada passo de Iteração	110
Gráfico 10.16 – Custo por metro dos pilares em cada passo de iteração	111
Gráfico 10.17 – Custo total das vigas e dos pilares e custo geral da estrutura em cada passo de iteração.....	111
Gráfico 10.18 – Custo por metro das vigas em cada passo de Iteração	112
Gráfico 10.19 – Custo por metro dos pilares em cada passo de iteração	113
Gráfico 10.20 – Custo total das vigas e dos pilares e custo geral da estrutura em cada passo de iteração.....	114

Resumo

VIANNA, L. C. C. **Otimização de seções transversais de concreto armado: aplicação a pórticos**. 2003. 127p. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

É cada vez mais curto o tempo que um engenheiro tem para desenvolver adequadamente os projetos. Com prazos cada vez menores para a concepção, o pré-dimensionamento das estruturas é, geralmente, definido com base em projetos desenvolvidos anteriormente e, essa estrutura assim concebida, é processada de modo a verificar o atendimento aos requisitos de segurança. Dessa forma, uma vez atendidos esses requisitos, dificilmente o grau de economia encontrado é verificado, uma vez que o projeto precisa ser entregue no prazo acordado. Os procedimentos automatizados de otimização de estruturas se inserem neste contexto para possibilitar uma agilidade no processo de se encontrar, entre as soluções possíveis, aquela que vai levar a uma estrutura mais econômica. Além de auxiliar na definição das dimensões dos elementos estruturais, o processo de otimização pode indicar ao projetista partes da estrutura que necessitam de uma maior atenção, de forma a se obter a economia desejada. Neste trabalho é apresentado um procedimento para otimizar o pré-dimensionamento de edifícios em concreto armado, tratados simplificadaamente como pórticos planos. A partir do posicionamento dos elementos e dos valores limites para as variáveis envolvidas, utilizando um método de aproximações combinadas, é aplicada uma função de mínimo custo para a seção transversal das vigas e dos pilares, obtendo-se uma solução de mínimo custo para a estrutura estudada.

Palavras-chave: otimização estrutural; concreto armado; pórtico plano.

Abstract

VIANNA, L. C. C. **Reinforced concrete cross-section optimization: a plane frame application**. 2003. 127p. Dissertação de Mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Engineers have nowadays considerably less time to adequately develop their projects than in the past. Because of increasingly shorter deadlines for project conception, the first draft design of the structures is usually defined based on previously developed projects, aiming evidently to assure all safety requisites. While the focus is on meeting the agreed deadlines and the aforementioned safety requisites, it is rare that we effectively address the issue of economic savings. In this context, we hereby present automated procedures for structures optimization in which the main goal is to yield to the least-cost-solutions from a economical perspective, meeting short deadlines and all safety requisites. Besides helping in the definition of the dimensions of the structural elements, the optimization process allows the designer to have a clear vision of the critical structural parts, in order to obtain the desired economical savings / gains. We hereby present a procedure to optimize the first draft design of reinforced concrete buildings, approximated by plane frames. Based on the elements positioning and the set values for the involved variables, and by utilizing a method of combined approximations, it is applied a function for least cost beams and columns cross-section, obtaining the least cost solution for the structure under analysis.

Key-words: structural optimization; reinforced concrete; plane frames.

1. Introdução

Hoje em dia é inconcebível imaginar um escritório de engenharia sem a presença de computadores. Por menor que seja o escritório, a sua presença é essencial para auxiliar o projetista no dimensionamento das estruturas. A qualidade de softwares voltados para este mercado também está bastante avançada, com excelentes pacotes que, uma vez feito o pré-dimensionamento dos elementos, fazem toda a parte de cálculo e detalhamento das peças, deixando para o engenheiro somente o trabalho de acompanhamento do processo e realização de pequenos ajustes que se façam necessários para a adequação da solução final.

Porém, como já foi mencionado, esses pacotes trabalham sempre com uma estrutura já pré-dimensionada. O trabalho de pré-dimensionamento, ainda hoje, é feito, quase que na sua totalidade, baseado na experiência e intuição dos projetistas, por processos de tentativa e erro. Apesar da qualidade dos profissionais ligados a esta área, e do fato de que pequenos erros cometidos nesta fase serão ajustados na fase de dimensionamento, este processo geralmente não conduz à estrutura mais econômica, uma vez que existem várias soluções que igualmente levam a uma estrutura de qualidade do ponto de vista da segurança, e o tempo que o projetista dispõe para escolher a que lhe parece ser a mais econômica é geralmente curto.

Para auxiliar o engenheiro neste processo de encontrar a estrutura mais econômica, atendendo às condições arquitetônicas, de segurança, e construtivas é que existem as técnicas de otimização de estruturas. Uma comparação entre o processo tradicional e o processo otimizado foi apresentada por ARORA (1997) através do fluxograma mostrado na figura 1.1, que apresenta os passos básicos dos dois

processos. Apesar de muitos passos serem comuns, eles diferem entre si pelos motivos abaixo:

- O processo otimizado tem um passo adicional 0, onde são definidos os parâmetros necessários para a otimização;
- O critério para decidir o fim do processo, no passo quatro, é, no processo otimizado, baseado no fato de se ter encontrado o melhor projeto, enquanto que no processo convencional, qualquer projeto viável pode determinar a parada do procedimento;
- No passo cinco, o processo otimizado utiliza técnicas matemáticas para fazer os ajustes necessários ao projeto, enquanto o método tradicional se baseia apenas na experiência do projetista.

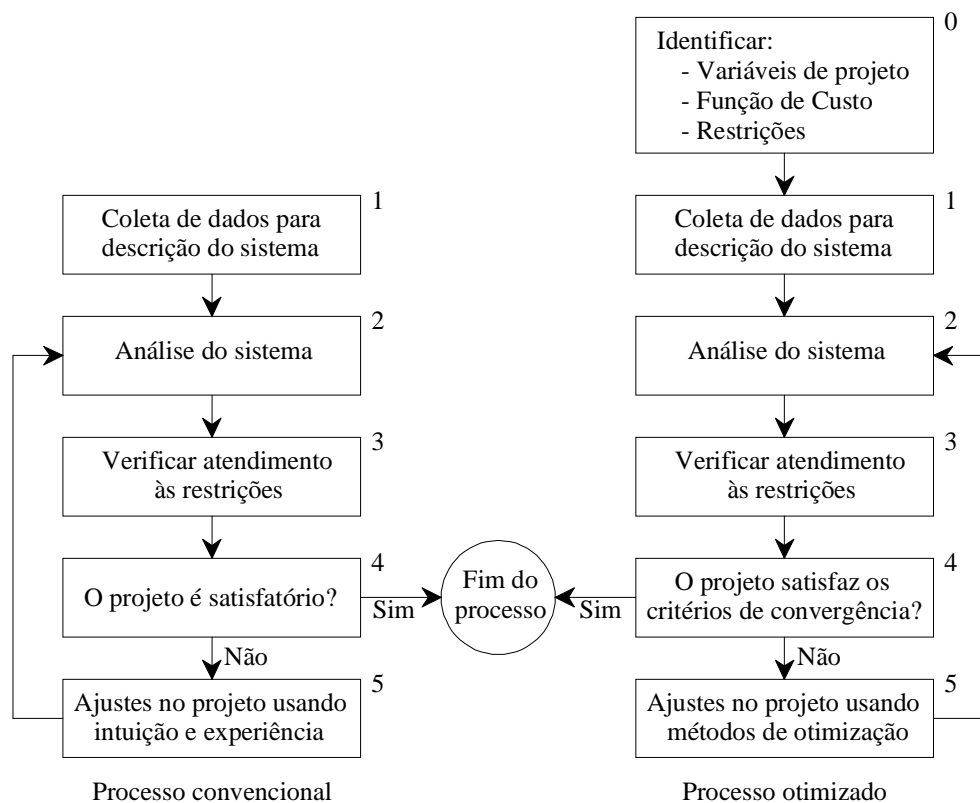


Figura 1.1 - Processo tradicional x Processo otimizado

Apesar dos estudos nesta área terem se iniciado no início da década de 60, ou seja, já contarem com quatro décadas de aprimoramento, e de muito já se ter

evoluído, essas técnicas ainda não chegaram ao dia-a-dia dos escritórios de engenharia de estruturas. Algumas hipóteses foram formuladas para justificar essa distância entre a teoria e a prática no que diz respeito à otimização estrutural, como será visto no decorrer deste texto. Com o intuito de contribuir para a redução desta distância, é que se insere o presente trabalho, que tratará da otimização no pré-dimensionamento de pórticos planos, em um processo de continuação do trabalho anteriormente realizado por SOARES (1997), de otimização de vigas de pavimento de edifícios.

Espera-se que, com a aproximação dos estudos sobre otimização estrutural dos anseios dos projetistas da área a este respeito, os processos desenvolvidos deixem, finalmente, os centros de pesquisa e passem a funcionar como uma ferramenta útil no auxílio do processo de dimensionamento, fazendo com que o tempo do engenheiro se volte, principalmente, para a etapa inicial do trabalho, de concepção estrutural, onde sua criatividade é necessária para definir o material, quais elementos serão utilizados e qual a sua disposição para formar a estrutura. Pelo fato desta etapa possuir inúmeras variáveis, muitas delas de caráter subjetivo, esta se constitui na parte mais nobre e importante do projeto de estruturas e, desta forma, dificilmente será realizada por máquinas, dependendo integralmente da habilidade do profissional.

2. Objetivo

O objetivo do presente trabalho é contribuir para a automatização do cálculo de pré-dimensionamento dos edifícios em concreto armado, simplificados como pórticos, mediante a minimização matemática dos custos da seção transversal de pilares e vigas, aí computados custos de concreto, aço e fôrmas, com suas respectivas mãos-de-obra.

3. Justificativa

O projeto de uma estrutura deve objetivar a garantia das condições de segurança ao colapso da estrutura, e a manutenção das suas condições de funcionalidade em serviço. Para garantir estas condições, o projetista deve escolher, entre as possibilidades existentes, a opção de projeto que melhor atenda às características da obra. Entretanto, existem vários projetos diferentes que podem atender às condições exigidas para a estrutura, com diferentes custos e qualidades.

Tradicionalmente, cabe à experiência e intuição do projetista, a escolha do projeto que melhor se adapte às condições exigidas. Apesar deste processo se mostrar eficaz, pela existência de inúmeras estruturas muito bem planejadas, ele não garante uma boa alternativa para o projeto. Muitas vezes este trabalho se torna exaustivo, e a limitação de custos e, principalmente, de tempo, faz com que a alternativa escolhida nem sempre seja a mais econômica para aquela situação.

É para auxiliar os projetistas neste processo que se encaixam os métodos de otimização matemática. Ao contrário dos processos de tentativa e erro, desenvolvidos com base na experiência do projetista, este tipo de processo utiliza técnicas matemáticas de avaliação das variáveis e restrições incluídas no projeto, de forma a se conseguir um projeto otimizado.

A utilização de computadores faz com que esta tarefa de busca do projeto otimizado se torne bastante atraente, de forma que os projetistas possam passar mais tempo se dedicando à parte de concepção do projeto que, esta sim, como depende muito da criatividade, não poderá ser substituída por cálculos matemáticos.

4. A Otimização Estrutural

4.1. Definições

“A otimização ou programação matemática pode ser definida como a técnica de se encontrar a melhor solução para problemas matematicamente definidos, que são freqüentemente a modelagem de um problema físico” (Medrano 1994).

Um problema de otimização começa com a determinação de variáveis e parâmetros que definem um problema físico, e das restrições a que estão sujeitas essas variáveis. Em função destas variáveis, é definida a função objetivo que, matematicamente, deverá ser maximizada ou minimizada como, por exemplo, a minimização do peso de uma estrutura. Uma visão geral do problema de otimização foi dada por BALLING e YAO (1997) como segue:

1. Dados: Parâmetros constantes
2. Encontrar: Variáveis de projeto
3. Minimizar: Função objetivo
4. Satisfazer: Restrições de projeto

O objetivo principal do projeto estrutural é encontrar o ponto de equilíbrio entre a maximização da segurança e a minimização dos custos. Como os dois conceitos mencionados são contraditórios entre si, na prática se busca uma minimização dos custos para uma estrutura que satisfaça a princípios básicos de segurança, como o respeito aos estados limites de ruptura e de utilização, e as imposições de normas técnicas. Sucintamente, podemos definir a otimização de um projeto estrutural como sendo a definição de uma série de variáveis de projeto que,

juntas, vão extremar uma função objetivo definida. No caso do presente trabalho, a otimização consiste na minimização de uma função de custo da estrutura.

4.2. Técnicas de Otimização

Segundo CAMP et al. (1998) em geral, as técnicas de otimização podem ser divididas em três categorias: programação matemática, método dos critérios de otimização e os métodos de buscas heurísticas ou métodos genéticos.

A programação matemática pode ser dividida em programação linear e não-linear. Na programação linear, a função objetivo e as restrições são funções lineares das variáveis de projeto. A programação não-linear foi desenvolvida para problemas de otimização onde as restrições são funções não-lineares nas variáveis de projeto, e as condições necessárias para alcançar a solução ótima são providas pelas condições de Kuhn-Tucker (Kuhn e Tucker 1951).

Como a aplicação direta das condições de Kuhn-Tucker é extremamente difícil para a maioria dos problemas, o método dos critérios de otimização foi criado, com contribuições de BARNETT (1961), PRAGER (1968) e VENKAYYA et al. (1968), entre outros, para sua aplicação indireta, combinadas com os multiplicadores de Lagrange, nos problemas de programação não-linear. Este método vem sendo usado na maioria dos problemas de engenharia de estruturas, principalmente para grandes estruturas, como em RIZZI (1976), ARORA (1980), MOHARRAMI e GRIERSON (1993) e SOARES (1997).

O algoritmo genético é uma técnica que modela o problema baseado nos princípios genéticos de sobrevivência de uma população através de adequações e adaptações. Este método não necessita de uma relação explícita entre as variáveis. Ele trabalha com uma população de variáveis de projeto e cada variável que define uma solução potencial é chamada de string. O método consiste basicamente de três partes: codificar e decodificar variáveis como strings; fazer a adequação de cada string para a solução e aplicar os operadores genéticos para criar a nova geração de strings. O método dos algoritmos genéticos tem sido empregado com sucesso na

otimização estrutural, como em GOLDBERG e SAMTANI (1986) e JENKINS (1992).

4.3. Aplicações práticas da otimização estrutural

Nas últimas quatro décadas, desde o trabalho pioneiro de SCHMIT (1960), ocorreram sensíveis avanços na teoria da otimização estrutural, fato que pode ser observado através das centenas de artigos publicados em revistas internacionais. Assim, a técnica para a criação de ferramentas que venham a auxiliar na otimização de projetos de estruturas já está bem aperfeiçoada. Apesar de todo esse avanço, e de vários encontros realizados com o intuito de divulgar os trabalhos realizados nesta área, todos os esforços na tentativa de inserir a otimização estrutural no dia-a-dia dos escritórios de engenharia falharam, e a sua utilização ainda é quase nula, estando este trabalho restrito a especialistas no assunto.

Esta lacuna entre os avanços teóricos e a prática preocupa os pesquisadores desde o início dos estudos a este respeito, como mostram GOBLE e MOSES (1975), TEMPLEMAN (1983) e COHN e DINOVITZER (1994), entre outros. Na década de 70 imaginava-se que as principais dificuldades para a implementação da otimização eram o custo necessário para aquisição de computadores e o treinamento de pessoal para operá-los. Hoje, porém, com os computadores presentes em todos os escritórios de engenharia e com a familiaridade com o seu uso sendo condição quase que fundamental para a formação de um profissional, esta teoria perde completamente o sentido.

Segundo TEMPLEMAN (1983) a principal justificativa para o reduzido uso prático dos inúmeros trabalhos publicados a respeito da otimização de estruturas é que uma pequena parcela dos casos estudados satisfaz aos casos específicos dos usuários potenciais da otimização. Desta forma, ele lista alguns requisitos que um sistema de otimização deve apresentar: ele deve solucionar os problemas práticos do dia-a-dia do escritório, apresentando soluções que não sejam meramente teóricas; deve ser fácil de usar e contribuir para uma maior velocidade no processo de cálculo estrutural; e, o mais importante, como é o engenheiro que assina o projeto e tem total

responsabilidade sobre o mesmo, o programa de otimização deve auxiliá-lo, e não substituí-lo, nesta tarefa. Para tanto, o engenheiro deve ter total controle sobre os passos do projeto, definindo o que deve ser otimizado e podendo analisar os resultados apresentados, interferindo onde julgar necessário. Desta forma, o computador deverá ficar com o trabalho matemático da solução, porém a decisão final caberá, exclusivamente, ao projetista.

Baseados em um extenso catálogo de artigos publicados sobre otimização, CONH e DINOVITZER (1994) sugerem que uma das principais razões para a distância que existe entre a teoria e a prática da otimização estrutural é a preocupação principal com os aspectos matemáticos do processo, em detrimento do aspecto estrutural, ficando este último restrito a exemplos triviais que têm o único interesse de comprovar a eficiência dos algoritmos apresentados. Somente com a substituição desta visão acadêmica da otimização para uma visão de interesse dos engenheiros do ramo, é que a otimização vai deixar de ser um exótico exercício acadêmico para se tornar uma ferramenta útil no desenvolvimento de projetos de estruturas.

SOARES (1997) mostra que a otimização pode se tornar muito mais atraente e de fácil implementação para os engenheiros quando os conceitos físicos das variáveis envolvidas são associados às técnicas matemáticas, fazendo com que os problemas práticos da engenharia limitem as variáveis, de forma a se alcançar uma convergência mais rápida aos extremos da função objetivo. Assim, através da definição física do problema, gera-se um algoritmo para extremar a função e analisam-se fisicamente os resultados obtidos, buscando-se o mais adequado para o problema específico.

4.4. A otimização em estruturas

As técnicas de otimização são aplicadas às estruturas, de uma forma geral, em dois modelos: a otimização do layout da estrutura, com a variação no posicionamento e forma dos elementos estruturais ou a otimização da seção transversal destes elementos já pré-definidos. Estes dois modelos podem estar também acoplados em um modelo único, como em YANG e SOH (2002), que mostram, através da

utilização de programação genética, a otimização do layout e da seção transversal dos elementos de uma treliça plana em aço. Este tipo de procedimento pode ser aplicado devido a pouca restrição a que está imposto o problema.

A maioria dos estudos de otimização em estruturas se refere à seção transversal dos elementos, uma vez que, devido às restrições impostas principalmente pela arquitetura, a otimização de layout se torna um procedimento bastante limitado.

Quanto ao material usado no processo de otimização, o aço é, de longe, o material mais utilizado, ocupando 92% dos artigos publicados a esse respeito, segundo CONH e DINOVTZER (1994), enquanto o concreto e as estruturas mistas representam apenas 4% do total. Isso se deve, principalmente, ao fato das facilidades geradas pelo uso de um material isótropo e homogêneo.

A função objetivo tratada nos trabalhos de otimização também sofre influência das facilidades a serem geradas na programação, de modo que a grande maioria trata de função do peso da estrutura. Apesar de esta função se mostrar eficiente para os casos de estruturas em aço, uma vez que este material é comprado por unidade de peso, ela perde o sentido quando se trata de concreto armado, visto que este envolve, no mínimo, três materiais diferentes: o concreto, o aço e a fôrma.

4.5. A otimização dos custos em estruturas de concreto armado

Apresentar-se-á a seguir uma visão geral de alguns dos artigos publicados a respeito da otimização de custos em estruturas de concreto armado e pretendido. No que diz respeito a edificações, a grande maioria dos artigos publicados é sobre vigas. Poucos trabalhos apresentam a otimização de pilares ou pórticos e, como mencionam SARMA e ADELI (1998), quando a otimização é feita para pórticos ela é, em quase que sua totalidade, para pórticos planos. Eles registram em toda a sua pesquisa, que abrange as últimas quatro décadas, apenas dois artigos que tratavam de estruturas em pórtico espacial de concreto armado.

FRIEL (1974) encontrou uma solução fechada para otimizar a taxa de armadura, de modo a minimizar o custo de vigas bi-apoiadas retangulares de concreto armado, utilizando as restrições em momento indicadas pelo ACI. Aquele autor chegou à conclusão que os custos da fôrma e do aumento do peso da estrutura provocado pela otimização não influenciam significativamente os custos finais. O peso provocado pelo custo da fôrma no custo final da estrutura varia de acordo com a época e o local onde foi realizado o estudo. CHAKRABARTY (1992a) indica que, na Índia, onde o custo da mão de obra é baixo, o custo do concreto e do aço é aproximadamente o mesmo, e o custo da fôrma é por volta de 25% do custo do concreto. Um pouco antes, KANAGASUNDARAM e KARIHALOO (1990) haviam reportado justamente o contrário, para países industrializados como a Austrália e os Estados Unidos.

NAAMAN (1976) compara a otimização pelo critério de mínimo custo com a de mínimo peso para vigas bi-apoiadas protendidas de seção retangular, e lajes armadas em uma direção. Ele conclui que os dois critérios fornecem soluções similares apenas quando a razão entre o custo do concreto por metro cúbico e o custo da armadura para protensão, por quilograma, é maior que 100. Para razão menor que 100, caso em que se encaixa a maioria das estruturas produzidas nos Estados Unidos, o critério de mínimo custo traz soluções mais econômicas.

HUANCHUN e ZHENG (1985) apresentaram um projeto de otimização de pórticos planos, baseado na norma chinesa, realizado em duas etapas: na primeira etapa se buscava a estrutura mais flexível que satisfizesse às restrições aplicadas utilizando o método de programação linear seqüencial e, na segunda etapa, o custo do pórtico era minimizado através da consideração das restrições locais para cada elemento, utilizando um método de busca discreta. A função de custos do problema levava em consideração apenas os custos dos materiais para a confecção dos pilares e vigas.

SPIRES e ARORA (1990) discutem a otimização de estruturas altas tubulares em concreto armado com dupla simetria no plano baseada no ACI, utilizando um procedimento de programação seqüencial quadrática. No processo eles reduzem a dupla simetria da estrutura para um pórtico plano equivalente. A função de custo

considera o custo do concreto, do aço e da fôrma. São consideradas ainda restrições na frequência da estrutura, para limitar problemas provocados pelo vento ou por terremotos.

KANAGASUNDARAM e KARIHALOO (1991) apresentaram um procedimento para otimização de vigas bi-apoiadas ou contínuas e pilares que utilizava como variáveis de projeto, além das dimensões da seção transversal e da área de armadura, a resistência à compressão do concreto. Apesar da não-linearidade das restrições utilizadas no problema, o mesmo foi resolvido por uma técnica matemática de programação linear, através da linearização das funções. Após a análise de exemplos, concluiu-se que a inclusão da resistência à compressão do concreto como variável de projeto faz com que a seção otimizada seja mais esbelta; além disso, com uma maior resistência à compressão do concreto, também resultam em menores custos futuros de manutenção, uma vez que a utilização desses concretos traz também uma melhora na durabilidade da estrutura.

CHAKRABARTY (1992b) apresenta um modelo para otimização de vigas de concreto armado de seção retangular e com armadura simples, utilizando critérios de mínimo custo. É apresentado o modelo de formulação, e indicado que o modelo pode ser resolvido através da utilização de qualquer algoritmo de programação não-linear conhecido, o que é ilustrado através da solução de um exemplo utilizando o algoritmo de EVERARD et al. (1987). Aquele autor observa que, na maioria dos casos, a seção ótima é mais alta e com uma menor taxa de armadura, o que indica que a restrição ativa na otimização é a flecha máxima.

HOROWITZ (1993) mostra um método de otimização para maximização do momento oblíquo de primeira ordem de pilares de concreto delgados. É utilizado o método dos critérios de otimização, através de um algoritmo de programação seqüencial quadrática. Algumas equações de equilíbrio são utilizadas para redução do tamanho da função, dividindo o problema em subproblemas de programação quadrática. É apresentado um exemplo de um pilar retangular para mostrar a solução encontrada pelo algoritmo.

MOHARRAMI e GRIERSON (1993) apresentam um método computacional para otimização de pórticos planos em concreto armado pelo critério de mínimo custo, utilizando o método de critérios de otimização. Os pilares possuem seção transversal retangular e as vigas podem ter seção retangular, T ou L. São utilizados como variáveis para minimização os custos de concreto, aço e fôrma. O arranjo das barras não é levado em conta, sendo só utilizada como variável de projeto a área de armadura, considerando que ela estará concentrada na borda tracionada da viga e distribuída nos quatro cantos dos pilares retangulares. São descritos a formulação matemática, os procedimentos utilizados na criação do algoritmo, e são apresentados dois exemplos de pórticos planos otimizados utilizando o método descrito.

SOUZA JR e VAZ (1993) apresentam uma formulação para otimização do dimensionamento de um pilar padrão, com base engastada e topo livre, com seção transversal retangular em concreto armado, sujeito a flexão composta oblíqua. São utilizadas como variáveis de projeto as dimensões da seção transversal e a área total da armadura, sendo fixa a sua distribuição ao longo das faces do pilar. Como restrições, são consideradas as de segurança das estruturas, atendendo ao estado limite último da seção, e os valores mínimos e máximos para as variáveis de controle. Três exemplos são apresentados para mostrar a eficiência do algoritmo formulado.

AL-SALLOUM e SIDDIQI (1994) apresentam um procedimento de otimização para vigas retangulares de concreto armado, considerando o custo de concreto, aço e fôrma, utilizando as restrições do ACI. As variáveis de otimização utilizadas são as dimensões das vigas e a taxa geométrica de armadura. É apresentado o fluxograma do algoritmo, e cinco exemplos são resolvidos com a sua utilização. O processo apresentado é fechado e direto, não utilizando iterações para se chegar à solução ótima, através da utilização do gradiente da função Lagrangeana aumentada e do método dos multiplicadores de Lagrange.

ADAMU e KARIHALOO (1994a) utilizaram um método de critérios otimizados tipo discretizado para minimizar os custos de uma viga de concreto armado com variação de seção transversal, usando a altura ou a altura e a taxa de armadura como variáveis de projeto. ADAMU e KARIHALOO (1994b) discutem

sobre a minimização dos custos de vigas em concreto armado com seção transversal uniforme e variação da taxa de armadura em cada vão. Utilizando o mesmo método, ADAMU e KARIHALOO (1995a) projetaram pórticos planos baseados nas normas australianas e no CEB, com pilares submetidos à flexão composta normal. A função de custo incluía os custos de concreto, aço e fôrma, e as variáveis de projeto eram as dimensões da seção transversal e a taxa de armadura. Por razões práticas eles assumiram que as dimensões das seções transversais permaneciam constantes para todos os trechos das vigas e dos pilares, porém variando a taxa de armadura. Em outro trabalho, ADAMU e KARIHALOO (1995b) utilizaram os pilares trabalhando à flexão composta oblíqua, porém ainda utilizando o pórtico plano.

ZIELINSKI et al. (1995) apresentam um procedimento para otimizar um pilar curto de concreto armado. O procedimento inclui duas etapas de iteração: na primeira etapa é encontrada a capacidade resistente de uma coluna com dimensões dadas e na segunda é realizado o processo de otimização. As variáveis de projeto são as dimensões da seção transversal, a área de aço e o número de barras de armadura. As restrições estão baseadas nos códigos canadenses. A otimização é feita utilizando a técnica de penalização interna da função, que consiste basicamente em transformar um problema com restrição em outro sem restrição mediante a adição de um termo de “punição” à função objetivo. Para a determinação da posição da linha neutra da seção no caso de flexão composta oblíqua foi utilizado o método de Newton-Raphson. Vários exemplos são otimizados utilizando o programa criado com este procedimento.

KOCER e ARORA (1996) compararam diversas técnicas de otimização para minimização de custos de uma torre de transmissão em concreto protendido, e concluíram que o método dos algoritmos genéticos foi o mais eficiente na otimização.

FADAEE e GRIERSON (1996) apresentaram um processo de otimização com minimização de custos para pórticos espaciais em concreto armado, com elementos submetidos a momento fletor e esforço cortante biaxiais, utilizando o método dos critérios de otimização, e restrições baseadas no ACI Code. O foco principal do trabalho era a formulação das restrições apropriadas para a combinação

entre esforços normais, momentos fletores biaxiais e esforços cortantes biaxiais. Os autores concluíram que o esforço cortante biaxial é uma consideração importante para o projeto de pilares e que sua inclusão aumenta significativamente os custos da estrutura.

BALLING e YAO (1997) apresentam um procedimento para otimização de pórticos espaciais retangulares de concreto armado, utilizando vigas e pilares com seções retangulares. Inicialmente é utilizado um método em que o número, diâmetro e arranjo das barras longitudinais de aço são levados em conta na otimização de vigas e pilares. Fazendo uma comparação entre este método e o método tradicional de se usar apenas como variável a área de aço da armadura, mantendo-se fixa a sua distribuição, provou-se que estes dados não influenciam na definição do custo ótimo da estrutura, de modo que podem ser retirados do processo de otimização sem prejuízo dos resultados. Baseado nestes dados, é apresentado um método simplificado, que elimina a área de aço das variáveis de projeto, deixando-a apenas como função do esforço atuante, reduzindo o tempo de processamento em relação ao método tradicional, com a mesma qualidade na otimização.

SOARES (1997) apresenta um programa para fazer um predimensionamento ótimo do vigamento de um pavimento através de um método de aproximações combinadas, no qual é feita a otimização, utilizando o método dos critérios de otimização, das seções transversais mais solicitadas de cada viga. Parte-se do princípio de que o somatório dos mínimos locais interagidos representa o mínimo global da estrutura. As variáveis envolvidas no processo de otimização são a altura da viga e a área de aço, considerando que a largura da viga é um dado definido pela arquitetura. Através de exemplos e de comparações com estruturas reais, ele comprova a eficiência do programa apresentado.

HASSANAIN e LOOV (1999) utilizam técnicas de minimização de custos para provar as vantagens da utilização do concreto de alto desempenho para a fabricação de vigas pré-moldadas I em pontes de tabuleiro sobre vigas. Foi utilizado um software pré-desenvolvido para fazer comparações através da variação do número de vigas utilizado, da altura da viga, dentre os padrões utilizados pelo código canadense, e do f_{ck} do concreto utilizado.

RATH et al. (1999) utilizam um método para variação da forma de elementos isolados de concreto armado submetidos à flexão. A partir de uma seção inicial retangular e única ao longo do comprimento, a viga passa, após a otimização, a apresentar seção I, com altura variável ao longo do comprimento. Para a otimização são utilizadas diferentes técnicas, como programação quadrática para a variação de forma e algoritmo genético para determinação do número e diâmetro das barras. A otimização da peça é feita levando-se em conta a redução no volume de concreto, assumindo-se que o custo da fôrma é proporcional a este. Desta forma, este tipo de otimização traz vantagens basicamente para peças pré-moldadas que serão produzidas em larga escala ou grandes vigas de ponte, onde a redução do volume proporcione uma redução maior que os custos provocados pelo aumento dos cortes na fôrma.

5. Metodologia

A forma como se pretendem alcançar os objetivos propostos envolve o equacionamento do problema de minimização de custos da seção transversal dos pilares, e o desenvolvimento de rotina correspondente. Esta rotina será aplicada a um programa de cálculo de esforços para pórticos planos, juntamente com a rotina para otimização de seções transversais de vigas desenvolvida por SOARES (1997), em trabalho de mestrado. Analogamente ao que foi feito para as vigas, será montada uma função de custo, sujeita a restrições de equilíbrio e laterais, oriundas de limitações de ordem prática, resultando num problema de análise não-linear, cuja solução irá fornecer as seções transversais adequadas de pilares e respectivas armaduras. A solução exata do problema será alcançada através da resolução analítica do sistema de equações não-lineares gerado, a partir da aplicação do método dos multiplicadores de Lagrange para extremização de funções não-lineares sujeitas às condições de Kuhn-Tucker.

As variáveis a serem otimizadas são as dimensões da seção transversal dos pilares (comprimento e largura), e a área de armadura longitudinal. A seção transversal a ser estudada será retangular com armadura simetricamente distribuída em duas faces da seção. A escolha desta configuração se deve ao fato de esta ser a forma de seção transversal mais comumente utilizada na prática.

A maioria dos trabalhos em otimização de seções transversais de pilares utiliza um arranjo único de armadura longitudinal, considerando as armaduras localizadas nos quatro extremos da seção. BALLING e YAO (1997) fizeram um estudo de otimização em pórtico plano com variação no número, diâmetro e

posicionamento das armaduras longitudinais de pilares e vigas e chegaram a conclusão que estes parâmetros não influenciam nas dimensões ótimas da seção transversal. Neste trabalho serão utilizados quatro arranjos diferentes, variando o número de barras por face de duas a cinco, a depender do comprimento da seção. Os arranjos adotados servirão também para confirmar a afirmação anterior, de forma a que possamos utilizar um arranjo único, ou indicar a necessidade da manutenção de arranjos variados na tentativa de buscar um projeto otimizado.

A função de custo a ser implementada levará em conta os custos com material e mão de obra para a fabricação do pilar, incluindo nestes custos o concreto, a armadura longitudinal e a fôrma utilizada.

Como condições de equilíbrio considerou-se simplificarmente, por se tratar de pórticos planos, que os pilares estarão trabalhando à flexão normal composta, utilizando as condições de equilíbrio em força e momento para esta situação. Para as restrições laterais serão utilizados limites mínimos e máximos para as dimensões da seção transversal e para a taxa de armadura do pilar.

6. Resolução de Problemas Não-Lineares

A programação matemática trata da análise e resolução de problemas do tipo:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{Sujeito a} & h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m \\ & g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & x \in \Omega \subset R^n \end{array}$$

onde f , h_i e g_i são funções definidas em R^n , Ω é um subconjunto de R^n e x é um vetor de n componentes x_1, x_2, \dots, x_n . O problema deve então ser resolvido para os valores das variáveis x_1, x_2, \dots, x_n que satisfazem às restrições e minimizam a função f .

A função $f(x)$ é denominada função objetivo, h_i são as restrições de igualdade e g_i são as restrições de desigualdades. Um vetor $x \in \Omega$ que satisfaz todas as restrições é chamado de Ponto Viável ou Solução viável para o problema. O conjunto de todos os pontos viáveis do problema é chamado de região viável Γ . O problema de programação não-linear consiste, então, em se encontrar um ponto viável x^* no qual $f(x) \geq f(x^*)$ para qualquer outro ponto viável x . Desta forma, o ponto x^* encontrado é denominado solução ótima, ou simplesmente solução do problema.

O problema em questão terá solução se a região viável Γ for limitada e fechada. Se a região viável for ilimitada, o problema pode ser ilimitado, ou seja, $f(x) \rightarrow \infty$. Caso a região viável seja vazia, ou seja, não exista $x \in \Omega$ que satisfaça as restrições, o problema não terá solução, e diz-se que as restrições são inconsistentes. Na sequência deste capítulo será sempre suposto que a região Γ é limitada e fechada.

Ainda no decorrer deste capítulo, verificaremos as condições necessárias para definir a solução para um problema de programação não-linear. Para uma seqüência mais didática de explicação, começaremos com problemas sem restrições, passaremos para problemas com restrições de desigualdade e fecharemos o assunto generalizando os resultados para problemas com restrições de igualdade e desigualdade.

6.1. Problemas sem restrições

Problemas sem restrições são difíceis de ocorrerem na prática, mas o seu estudo é importante por serem mais simples e por ser o problema com restrições uma seqüência natural destes. Desta forma, compreendendo o problema sem restrições, torna-se mais fácil a compreensão dos demais.

6.1.1. Definições

6.1.1.1. Pontos de mínimo

Diz-se que um ponto $x^* \in \Gamma$ é um ponto de mínimo local ou ponto de mínimo relativo de $f(x)$ se numa vizinhança aberta de x^* , $B_a(x^*, r)$, $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in B_a(x^*, r)$. Se $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in B_a(x^*, r)$ e $x \neq x^*$, diz-se que x^* é um ponto de mínimo local estrito de $f(x)$.

Diz-se que um ponto $x^* \in \Gamma$ é um ponto de mínimo global de $f(x)$ se $f(x) \geq f(x^*)$ para todo $x \in \Gamma$. Se $f(x) > f(x^*)$ para todo $x \in \Gamma$, $x \neq x^*$, diz-se que x^* é um ponto de mínimo global estrito de $f(x)$.

A figura 6.1 ilustra, para uma função de uma variável, os pontos de mínimo local e global.

6.1.1.2. Matriz Hessiana

Seja uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se $f(x)$ possuir derivadas parciais segundas contínuas então a matriz Hessiana é definida como

$$H(x) = \nabla^2 f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

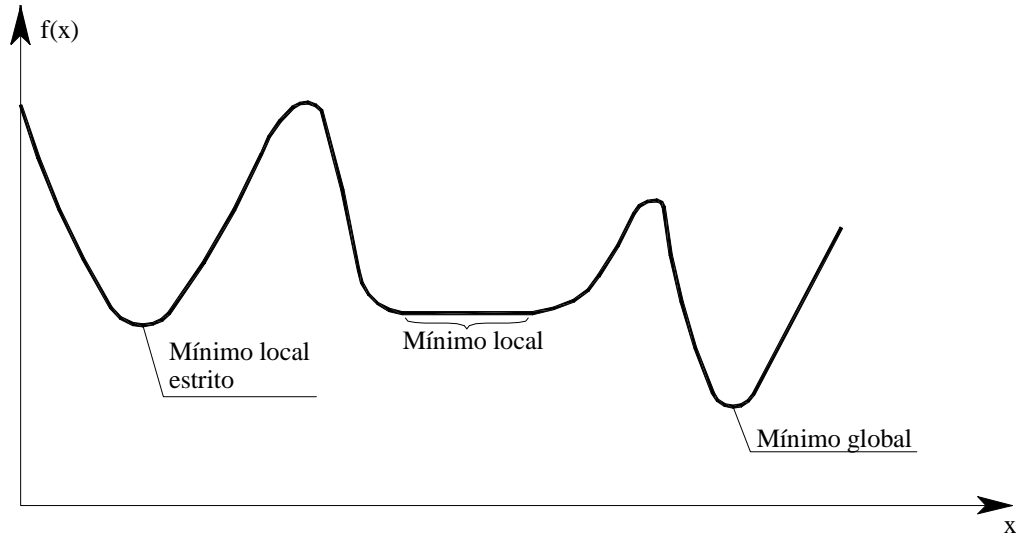


Figura 6.1 - Exemplos de pontos de mínimo

6.1.2. Condições necessárias para garantir a solução

Dado um ponto $x \in \Omega$, precisamos definir se este ponto é um ponto de mínimo local ou global para a função f . Sendo assim, precisamos caracterizar o ponto de mínimo. Essa caracterização pode ser feita através do comportamento das derivadas da função no ponto x . O corolário 01 apresenta uma condição necessária de primeira ordem para x^* ser um ponto de mínimo local. A condição é dita de primeira ordem, pois ela utiliza derivada de primeira ordem da função. Já o teorema 02, que utiliza derivadas segundas da função, apresenta condições necessárias de segunda ordem, através da utilização da matriz hessiana. As demonstrações para os teoremas e corolários apresentados neste capítulo podem ser encontradas em BAZARAA e SHETTY (1979).

Teorema 01:

Seja uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em x^* . Se existe um vetor d , tal que

$$\nabla f(x^*)^t d < 0$$

então existe um $\delta > 0$ de forma que

$$f(x^* + \lambda d) < f(x^*)$$

para cada $\lambda \in (0, \delta)$, então d é uma direção descendente de f em x^* .

Corolário 01:

Seja uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável em x^* . Se x^* é um ponto de mínimo local, então

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Teorema 02:

Seja uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em x^* . Se x^* é um ponto de mínimo local, então $H(x^*)$ é semidefinida positiva.

Assim, podemos assumir como condições necessárias para que um ponto x^* seja um ponto de mínimo local, que este satisfaça as seguintes condições:

$$\nabla f(x^*) = 0;$$

$H(x^*)$ é semidefinida positiva.

6.1.3. Condições suficientes para garantir a solução

Teorema 03:

Seja uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em x^* . Se $\nabla f(x^*) = 0$ e $H(x^*)$ é semidefinida positiva, então x^* é um ponto de mínimo local.

O teorema 03 indica, então, que as condições definidas não só são necessárias, mas são também suficientes para garantir que o ponto x^* é um ponto de mínimo local.

6.2. Problemas com restrições de desigualdades

Vamos estudar agora os problemas da forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{Sujeito a} && g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \\ &&& x \in \Omega \subset R^n \end{aligned}$$

6.2.1. Definições

6.2.1.1. Restrições ativas e inativas

Um conceito fundamental para a compreensão da seqüência deste estudo é o conceito de restrição ativa. Dizemos que uma restrição de desigualdade $g_j(x) \leq 0$ é ativa em um ponto x , se $g_j(x) = 0$, e dizemos que ela é inativa se $g_j(x) < 0$. Considera-se, por convenção, que qualquer restrição de igualdade $h_i(x) = 0$ é ativa em qualquer ponto viável. As restrições ativas em um ponto viável x reduzem o domínio de viabilidade na sua vizinhança, enquanto que as restrições inativas não exercem influência sobre essa vizinhança. Desta forma, no estudo das propriedades de um ponto de mínimo local, fica claro que as atenções podem ser restritas às restrições ativas, verificando-se, após encontrada a solução ótima, se esta satisfaz a todas as restrições. Este fato pode ser ilustrado pela figura 6.2, onde as propriedades locais satisfeitas por x^* obviamente independem das restrições inativas g_2 e g_3 .

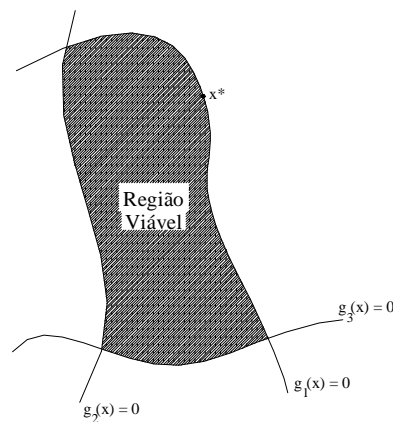


Figura 6.2 - Exemplo de restrições ativas e inativas

6.2.1.2. Ponto regular

Seja um ponto x^* que satisfaça às restrições ativas $g_j(x^*) = 0$ para $j = 1, 2, \dots, p$. O ponto x^* é denominado ponto regular das restrições se os vetores gradientes $\nabla g_1(x^*), \nabla g_2(x^*), \dots, \nabla g_p(x^*)$ são linearmente independentes.

6.2.1.3. Cone de direções viáveis

Seja S um conjunto não vazio em \mathbb{R}^n , e seja $x^* \in S$. O cone de direções viáveis de S em x^* , denominado D , é dado por

$$D = \{d : d \neq 0 \text{ e } x^* + \lambda d \in S, \text{ para todo } \lambda \in (0, \delta) \text{ sendo } \delta > 0\}.$$

Cada vetor $d \in D$ e $d \neq 0$ é chamado de direção viável.

6.2.2. Condições necessárias para garantir a solução

Teorema 04:

Seja o problema de minimizar uma função $f(x)$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, sujeita a $x \in S$, onde S é um conjunto não vazio em \mathbb{R}^n . Seja f diferenciável em um ponto $x^* \in S$. Se x^* é um ponto de mínimo local, então

$$F_0 \cap D = \emptyset$$

onde

$$F_0 = \{d : \nabla f(x^*)^t d < 0\} \quad \text{e}$$

D é o cone de direções viáveis de S em x^* .

Pela definição de cone de direções viáveis fica claro que um pequeno movimento de x^* sobre o vetor $d \in D$ leva a pontos viáveis. Além disso, pelo teorema 01, temos que, se $\nabla f(x^*)^t d < 0$, então d é uma direção descendente, ou seja, fazendo um pequeno deslocamento a partir de x^* , ao longo de d , será provocada uma redução no valor de f . Já o teorema 04 mostra que se x^* é um ponto de mínimo

local e $\nabla f(x^*)^t d < 0$, então $d \notin D$. Resumindo, uma condição geométrica necessária para um ponto x^* ser um ponto de mínimo local é que qualquer direção descendente a partir daquele ponto não pode ser uma direção viável.

O teorema 04 utiliza os conjuntos F_0 e D para criar uma condição necessária para se considerar um ponto x^* como um ponto de mínimo local, onde F_0 é um semi-espaço aberto definido em função do vetor gradiente $\nabla f(x^*)$, e D é o cone de direções viáveis, que não é, necessariamente, definido como gradiente das funções envolvidas. Torna-se necessária então, a conversão da condição de mínimo geométrica usada anteriormente em uma outra que envolva as equações do problema. Para isso será necessária a introdução de outro conjunto, mostrado pelo teorema 05.

Teorema 05:

Seja $g_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para $j = 1, 2, \dots, p$, e seja o problema P da forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{Sujeito a} && g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \\ &&& x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Seja x^* um ponto viável e $J = \{j : g_j(x^*) = 0\}$. Sejam ainda f e g_j , para $j \in J$, diferenciáveis em x^* e g_j , para $j \notin J$, continua em x^* . Se x^* é um ponto de mínimo local, então

$$F_0 \cap G_0 = \phi$$

onde

$$F_0 = \{d : \nabla f(x^*)^t d < 0\} \quad \text{e}$$

$$G_0 = \{d : \nabla g_j(x^*)^t d < 0, \forall j \in J\}.$$

Como o teorema 05 indica, podemos definir um cone aberto G_0 em função dos gradientes das restrições de desigualdade ativas em x^* , de forma que $G_0 \subset D$. Uma vez que $F_0 \cap D = \phi$ precisa ocorrer em x^* e $G_0 \subset D$, então $F_0 \cap G_0 = \phi$ é

também uma condição de mínimo necessária para o problema P. Como tanto F_0 como G_0 são definidas em termos dos vetores gradientes, fica mais fácil utiliza-las como condições de mínimo necessárias ao problema.

Existem vários casos em que as condições expostas pelo teorema 05 são satisfeitas trivialmente para pontos que não conduzem a um mínimo local. Tomemos por exemplo um caso onde x^* é um ponto possível e $\nabla f(x^*) = 0$. Claramente $F_0 = \{d : \nabla f(x^*)^t d < 0\} = \emptyset$, logo $F_0 \cap G_0 = \emptyset$. Desta forma, qualquer ponto x^* com $\nabla f(x^*) = 0$ satisfaz as condições de mínimo necessárias.

6.2.2.1. As condições de mínimo de Fritz John

Reduziremos agora as condições geométricas necessárias de $F_0 \cap G_0 = \emptyset$ para um sistema em função dos gradientes da função objetivo e das restrições ativas. As condições de mínimo resultantes são creditadas a Fritz John e dadas pelo teorema 06 que segue.

Teorema 06:

Sejam as funções $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, para $j = 1, 2, \dots, p$, e seja o problema P da forma:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{Sujeito a} && g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \\ &&& x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Seja x^* um ponto viável e $J = \{j : g_j(x^*) = 0\}$. Sejam ainda f e g_j , para $j \in J$, diferenciáveis em x^* e g_j , para $j \notin J$, continua em x^* . Se x^* é uma solução local para o problema P, então existem os escalares μ_0 e μ_j para $j \in J$, de forma que

$$\begin{aligned} \mu_0 \nabla f(x^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \mu_0, \mu_j &\geq 0, \quad \text{para } j \in J \\ (\mu_0, \mu_j) &\neq (0, 0) \end{aligned}$$

onde μ_J é o vetor cujas componentes são μ_j , para $j \in J$. Seja ainda g_j , para $j \notin J$, diferenciável em x^* , as condições de Fritz John podem ser escritas na forma equivalente:

$$\begin{aligned} \mu_0 \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \mu_j g_j(x^*) &= 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, p \\ \mu_0, \mu_j &\geq 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, p \\ (\mu_0, \mu) &\neq (0, 0) \end{aligned}$$

onde μ é o vetor cujas componentes são μ_j , para $j = 1, 2, \dots, p$.

Os escalares μ_0 e μ_j introduzidos nas condições de Fritz John são chamados de multiplicadores de Lagrange. A função $l(x, \mu) = \mu_0 f(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j g_j(x^*)$ é denominada de Lagrangeano associado ao problema. A condição $\mu_j g_j(x^*) = 0$ é chamada de condição de complementaridade. Esta condição estabelece que, quando a restrição de desigualdade for ativa, ou seja, $g_j(x^*) = 0$, o multiplicador de Lagrange μ_j pode ou não ser nulo, mas quando a restrição for inativa, ou seja, $g_j(x^*) < 0$, μ_j será sempre nulo.

Assim como no caso do teorema 05, existem pontos que satisfazem as condições de Fritz John trivialmente. Se um ponto x^* satisfaz as condições $\nabla f(x^*) = 0$ ou $\nabla g_j(x^*) = 0$ para qualquer $j \in J$, então podemos claramente fazer o correspondente multiplicador de Lagrange ser um número positivo, fazer todos os demais multiplicadores iguais a zero e satisfazer as condições do teorema 06.

6.2.2.2. As condições de Kuhn-Tucker

Se o multiplicador de Lagrange μ_0 for igual a zero, as condições de Fritz John não fazem uso de nenhuma informação referente ao gradiente da função objetivo. Sendo assim, elas não tem valores práticos para localizar um ponto ótimo quando $\mu_0 = 0$, tendo maior interesse prático apenas nos casos onde $\mu_0 > 0$. Várias condições podem ser impostas às restrições de forma a garantir a existência de $\mu_0 > 0$. Estas condições são usualmente chamadas de qualificação das restrições.

KUHN e TUCKER (1951) desenvolveram condições de mínimo necessárias, que são precisamente as condições de Fritz John, com a qualificação da restrição que impõe que os vetores gradientes das restrições ativas sejam linearmente independentes. Esta qualificação está indicada através do teorema 07.

Teorema 07:

Sejam as funções $f: R^n \rightarrow R$ e $g_j: R^n \rightarrow R$ para $j = 1, 2, \dots, p$, e seja o problema P da forma:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) \\ \text{Sujeito a} \quad & g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \\ & x \in \Omega \subset R^n \end{aligned}$$

Seja x^* um ponto regular das restrições ativas e $J = \{j : g_j(x^*) = 0\}$. Sejam f e g_j , para $j \in J$, diferenciáveis em x^* e g_j , para $j \notin J$, continua em x^* . Se x^* é uma solução local para o problema P, então existem os escalares μ_j para $j \in J$, de forma que

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \mu_j &\geq 0, \quad \text{para } j \in J \end{aligned}$$

adicionalmente às condições acima, se g_j for diferenciável em x^* , para $j \notin J$, as condições de Kuhn-Tucker podem ser escritas na forma equivalente:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \mu_j g_j(x^*) &= 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, p \\ \mu_j &\geq 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

Assim como nas condições de Fritz John, os escalares μ_j são chamados de multiplicadores de Lagrange e a condição $\mu_j g_j(x^*) = 0$ é chamada de condição de complementaridade.

6.3. Problemas com restrições de igualdade e de desigualdade

As condições de mínimo discutidas na seção anterior podem ser estendidas para problemas com restrições de igualdade e desigualdade. Seja então o problema de programação não-linear P da forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{Sujeito a} & h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m \\ & g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & x \in \Omega \subset R^n \end{array}$$

As condições de Kuhn-Tucker podem ser retiradas da mesma forma que na seção anterior, através da imposição nas condições de Fritz John da qualificação de restrições para garantir que $\mu_0 > 0$. Isto se faz por meio da imposição de que os vetores gradientes das restrições de igualdade e das restrições ativas de desigualdade sejam linearmente independentes, como apresentado no teorema 08.

Teorema 08:

Sejam as funções $f: R^n \rightarrow R$, $h_i: R^n \rightarrow R$, para $i = 1, 2, \dots, m$, e $g_j: R^n \rightarrow R$, para $j = 1, 2, \dots, p$, e seja o problema P da forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{Sujeito a} & h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m \\ & g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & x \in \Omega \subset R^n \end{array}$$

Seja x^* um ponto regular das restrições ativas e $J = \{j : g_j(x^*) = 0\}$. Sejam f e g_j , para $j \in J$, diferenciáveis em x^* , g_j , para $j \notin J$, continua em x^* e h_i continuamente derivável em x^* , para $i = 1, 2, \dots, m$. Se x^* é uma solução local para o problema P, então existem os escalares λ_i , para $i = 1, 2, \dots, m$, e μ_j , para $j \in J$, de forma que:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j \in J} \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

$$\mu_j \geq 0, \quad \text{para } j \in J$$

adicionalmente às condições acima, se g_j for diferenciável em x^* para $j \notin J$, as condições de Kuhn-Tucker podem ser escritas na forma equivalente:

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla g_j(x^*) = 0$$

$$\mu_j g_j(x^*) = 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, p$$

$$\mu_j \geq 0, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, p$$

6.3.1. Condições suficientes para garantir a solução

Assim como foi feito para os problemas sem restrição, com a introdução da matriz hessiana para o problema com restrições podemos, a partir do teorema 09, apresentar as condições suficientes para definir um ponto de mínimo local, como segue.

Teorema 09:

Sejam as funções $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \dots, m$, e $g_j: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ para $j = 1, 2, \dots, p$, e seja o problema P da forma

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{Sujeito a} && h_i(x) = 0, i = 1, 2, \dots, m \\ &&& g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \\ &&& x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Seja x^* um ponto regular das restrições, e sejam f , h_i e g_j duas vezes diferenciáveis em x^* . As condições suficientes para que um ponto x^* seja uma solução local para o problema P são que existam os escalares λ_i para $i = 1, 2, \dots, m$ e μ_j para $j = 1, 2, \dots, p$, de forma que:

$$\begin{aligned} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla g_j(x^*) &= 0 \\ \mu_j g_j(x^*) &= 0, & \text{para } j = 1, 2, \dots, p \\ \mu_j &\geq 0, & \text{para } j = 1, 2, \dots, p \end{aligned}$$

e a matriz hessiana

$$L(x^*) = F(x^*) + \lambda^t H(x^*) + \mu^t G(x^*)$$

seja definida positiva no sub-espço

$$M = \{d : \nabla h_i(x^*)d = 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } \nabla g_j(x^*)d = 0 \text{ para todo } j \in J\},$$

onde

$$J = \{j : g_j(x^*) = 0, \mu_j > 0\}$$

6.4. Condições de mínimo global para o problema de programação não-linear

As condições necessárias e suficientes para que um ponto x^* seja um ponto de mínimo local para um problema de programação matemática foram estabelecidas nos itens anteriores. Caso o problema em questão possua algumas características de convexidade, como serão vistas a seguir, a partir de conceitos retirados de LUENBERGER (1989) e MEDRANO (1994), a solução encontrada será também um ponto de mínimo global.

6.4.1. Definições

6.4.1.1. Conjunto convexo

Um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é dito convexo se, para todo $x_1, x_2 \in \Omega$ e todo número real $\alpha, 0 < \alpha < 1$, o ponto

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in \Omega$$

Geometricamente, podemos dizer que um conjunto Ω é convexo se, dados dois pontos quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a Ω , todos os pontos pertencentes ao segmento de reta que une estes dois pontos pertencerem a Ω .

6.4.1.2. Função convexa

Uma função f , definida em um conjunto convexo Ω é dita convexa se, para todo $x_1, x_2 \in \Omega$ e todo número real α , $0 \leq \alpha \leq 1$, seja satisfeita a seguinte relação:

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

Proposição 01

Seja f uma função convexa definida em um conjunto convexo Ω . O conjunto

$$\Gamma_c = \{x : x \in \Omega, f(x) \leq c\}$$

é convexo para todo número real c .

Note-se que, uma vez que a intersecção de conjuntos convexos é também convexa, o conjunto de pontos que satisfazem simultaneamente

$$f_1(x) \leq c_1, f_2(x) \leq c_2, \dots, f_m(x) \leq c_m,$$

onde cada f_i é uma função convexa, definem um conjunto convexo.

Proposição 02

Seja uma função $f \in C^2$. f é uma função convexa em um conjunto convexo não vazio Ω , se e somente se, a matriz hessiana F da função f for semidefinida positiva em Ω .

6.4.2. Programação convexa

Considere-se o problema P da forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & f(x) \\ \text{Sujeito a} & g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p \\ & x \in \Omega \subset R^n \end{array}$$

Admite-se que as funções $g_j(x)$ são convexas no conjunto convexo Ω . Como foi mostrado anteriormente, o conjunto delimitado por cada uma das restrições $g_j(x) \leq 0$ é um conjunto convexo, assim como a intersecção de vários conjuntos convexas é também um conjunto convexo. Conclui-se, então, que a região viável Γ delimitada pelas restrições $g_j(x)$ é convexa. Se ainda a função $f(x)$ for convexa, como mostrado na proposição 02, diz-se que o problema P é um problema de programação convexa.

Relativamente à programação convexa, valem os seguintes resultados:

Teorema 10:

Toda solução x^* de um problema de programação convexa é uma solução global, e o conjunto das soluções globais S é um conjunto convexo.

Corolário 02:

Se no problema de programação convexa a função objetivo for estritamente convexa em Ω , então toda solução global é única.

Teorema 11:

Se num problema de programação convexa, as funções $f(x)$ e $g_j(x)$, para $j = 1, 2, \dots, p$, são contínuas com derivadas parciais contínuas até primeira ordem, e se as condições de Kuhn-Tucker estão satisfeitas em x^* , então o ponto x^* é uma solução global do problema de programação convexa.

Como visto pelos teoremas acima, em se tratando de um problema de programação convexa, as soluções locais encontradas nos itens anteriores são também soluções globais para o problema de programação não-linear.

7. Formulação matemática para minimização da seção transversal de uma viga

Neste capítulo serão apresentadas, de forma simplificada, as formulações da função objetivo e das restrições, para o problema de minimização da seção transversal de uma viga. Para uma visão mais detalhada sobre a formulação, ver SOARES (1997).

7.1. Variáveis a serem otimizadas

As variáveis a serem otimizadas no problema de minimização da seção transversal de uma viga serão a altura da seção transversal e as áreas de armadura de tração e de compressão na seção. De modo a simplificar os cálculos dos esforços, trabalharemos com a altura útil da seção no lugar da altura total. Todas as variáveis serão denominadas de x_i , de forma a facilitar o procedimento matemático, como segue:

x_1 = Altura útil da seção transversal da viga;

x_2 = Área de armadura tracionada na seção transversal da viga;

x_3 = Área de armadura comprimida na seção transversal da viga.

Para facilitar o processo de otimização, a largura da seção transversal da viga não fará parte do processo, sendo seu valor determinado como dado de entrada do programa. Essa fixação não trará prejuízo ao processo, uma vez que essa dimensão é,

em geral, fixa para quase todas as vigas nos projetos de edifício, em função das dimensões das paredes ou outras prerrogativas arquitetônicas.

Apesar da altura da linha neutra não fazer parte do processo de otimização das vigas, como variável a ser otimizada, ela será incluída como variável de projeto pelo fato de seu valor ser necessário para a determinação do equilíbrio da seção. Desta forma, ela será definida na formulação matemática com o valor x_4 .

7.2. Sistema de unidades

Serão utilizados como unidades de medidas neste trabalho:

Unidade de comprimento: cm

Unidade de força: kN

7.3. Função Objetivo

A função de custo a ser implementada será a de menor custo por comprimento unitário de viga, levando em conta os custos com material e mão de obra para a fabricação do mesmo, incluindo nestes custos o concreto, a armadura longitudinal e a fôrma utilizada, ficando com a forma:

$$F = (b_w \cdot h) \cdot C_C + (A_{ST} + A_{SC}) \cdot \rho_S \cdot C_S + (b_w + 2h) \cdot C_F \quad (7.1)$$

onde:

F \Rightarrow Função de custo para a viga, por unidade de comprimento;

C_C \Rightarrow Custo do concreto, por unidade de volume;

C_S \Rightarrow Custo da armadura, por unidade de massa;

C_F \Rightarrow Custo da fôrma, por unidade de área;

b_w \Rightarrow Largura da viga;

h \Rightarrow Altura da viga;

ρ_S \Rightarrow Massa específica do aço;

A_{ST} \Rightarrow Área de aço tracionado da armadura longitudinal;

A_{SC} \Rightarrow Área de aço comprimido da armadura longitudinal.

Colocando a função objetivo em função de x , ficamos com a seguinte forma:

$$F(x) = b_w \cdot (x_1 + d') \cdot C_c + (x_2 + x_3) \cdot \rho_s \cdot C_s + (b_w + 2(x_1 + d')) \cdot C_F \quad (7.2)$$

7.4. Restrições de Equilíbrio

Para o caso das vigas, considerou-se que as mesmas estarão trabalhando à flexão simples, utilizando-se as condições de equilíbrio em força e momento para esta situação, como mostrado a seguir.

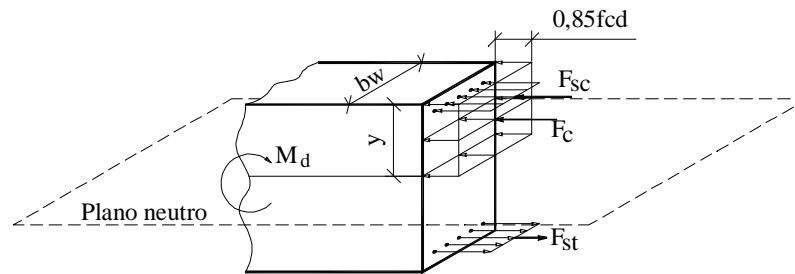


Figura 7.1 – Diagrama de tensões para uma seção transversal de viga

Com base na figura 7.1, temos as condições de equilíbrio em força e momento fletor, para a seção transversal da viga, como segue:

$$\begin{aligned} F_c + F_{sc} &= F_{st} \\ F_{sc} \cdot (d - d') + F_c \cdot \left(d - \frac{y}{2} \right) &= M_d \end{aligned} \quad (7.3)$$

onde,

$$y = 0,8 \cdot x_4;$$

d' = distância do centro da armadura até a face da seção;

F_c = Força de compressão no concreto;

$$F_c = y \cdot b_w \cdot 0,85 \cdot f_{cd}$$

F_s = Força na armadura (compressão/tração)

$$F_s = \sigma_s \cdot A_s$$

Colocando as restrições de equilíbrio em função das tensões nas armaduras, e trabalhando com as variáveis x_i , ficamos com:

$$\begin{aligned}
 0,80 \cdot x_4 \cdot b_w \cdot 0,85 \cdot f_{cd} + \sigma_{sc} \cdot x_3 - \sigma_{st} \cdot x_2 &= 0 \\
 \sigma_{sc} \cdot x_3 \cdot (x_1 - d') + 0,80 \cdot x_4 \cdot b_w \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left(x_1 - \frac{0,8 \cdot x_4}{2} \right) - M_d &= 0
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

7.5. Restrição de compatibilidade

De forma a reduzir o número de expressões de igualdade, a restrição de compatibilidade será utilizada para definir a tensão atuante as barras de armadura e este valor será substituído nas restrições de equilíbrio.

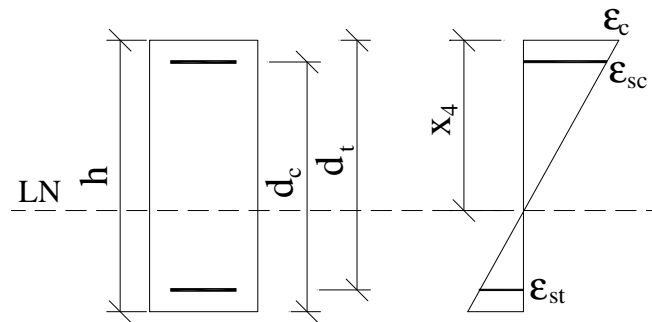


Figura 7.2 – Diagrama de deformações para uma seção transversal de viga

A altura da linha neutra pode ser geometricamente retirada a partir da figura 7.2, sendo dada pela expressão:

$$\begin{aligned}
 \frac{\varepsilon_c}{x_4} &= \frac{\varepsilon_{st}}{d_t - x_4} \\
 x_4 &= \frac{\varepsilon_c \cdot d}{\varepsilon_c + \varepsilon_{st}}
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

O dimensionamento à flexão deve ser feito sempre de forma que a ruptura se efetive nos domínios de deformação 2 ou 3, de forma que no momento da ruptura o aço se encontre em escoamento, caracterizando uma ruptura dúctil. Dentro destes domínios, a forma que leva a uma seção mais econômica é quando a ruptura ocorre com a seção normalmente armada, como o domínio de deformação situado na reta limite entre os domínios 3 e 4. Nesta situação ambos os materiais – concreto e aço – estão trabalhando próximos aos seus limites e a ruptura ocorre de forma dúctil.

Diante do exposto, trabalharemos no programa com o dimensionamento para esta situação. Desta forma teremos as armaduras de tração e compressão trabalhando com a tensão de escoamento f_{yd} , e a altura da linha neutra fixada em função dos limites de deformação do aço e do concreto que são dados de entrada do programa.

Para facilitar a compreensão da formulação no decorrer deste capítulo, substituiremos algumas expressões constantes por K_i , e expressões que dependem exclusivamente da altura útil da seção transversal por F_i , evitando, desta forma que as expressões se tornem demasiadamente grandes.

Fazendo, então:

$$K_1 = 0,8 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s + \varepsilon_c} \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b_w$$

$$K_2 = 1 - 0,4 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_s + \varepsilon_c}$$
(7.6)

Ficamos com as restrições de equilíbrio e compatibilidade na forma:

$$K_1 \cdot x_1 + f_{yd} \cdot x_3 - f_{yd} \cdot x_2 = 0$$

$$f_{yd} \cdot x_3 \cdot (x_1 - d') + K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2 - M_d = 0$$
(7.7)

7.6. Restrições Laterais

As restrições laterais são as que definem limites mínimos e máximos para as variáveis de projeto, em função da arquitetura da edificação, de procedimentos construtivos ou ainda para atender às especificações de normas técnicas. No problema de minimização da seção transversal de uma viga trabalharemos com as seguintes restrições:

Restrição que limita o excesso de armadura, para evitar uma fissuração inaceitável no concreto:

$$x_3 + x_2 - P_{AC} \cdot b_w \cdot (x_1 + d') \leq 0,$$
(7.8)

Sendo:

$P_{AC} \Rightarrow$ Relação entre área de armadura e área de concreto na seção. Esta relação será um dado de entrada do programa.

Restrição que limita a percentagem de armadura trabalhando à compressão em 50% da armadura de tração:

$$x_3 - 0,5 \cdot x_2 \leq 0 \quad (7.9)$$

Restrição que limita o deslocamento máximo da viga

$$\delta \leq \delta_{lim} \quad (7.10)$$

Para facilitar a solução analítica da formulação matemática da otimização da seção transversal da viga e como esse procedimento não implica em mudança nos resultados, a restrição que limita o deslocamento máximo foi imposta após ter sido encontrada a solução ótima. Dessa forma, uma vez determinada a altura ótima para cada viga, de modo a atender as restrições de equilíbrio, de compatibilidade e as demais restrições laterais, são verificadas as respectivas flechas. Caso as flechas encontradas ultrapassem os valores limites determinados, as alturas são corrigidas utilizando o método dos intervalos encaixantes, seguido do método da bisseção, de forma que a flecha limite seja respeitada, satisfazendo um erro absoluto de 0,5% pré-determinado pelo programa.

As flechas das vigas foram calculadas de duas formas distintas no decorrer do programa. Antes da otimização o cálculo foi feito pelo deslocamento relativo dos nós e, após encontrada a solução ótima, as flechas foram determinadas por analogia de Mohr.

Para a determinação da inércia na seção quando a viga se encontra no estágio II foi utilizado um modelo onde foi considerada uma inércia diferente para cada elemento finito. Para o cálculo dessa inércia foi considerada a área de concreto comprimida, as áreas de aço e a contribuição do concreto entre as fissuras, sendo essas variáveis explicitadas utilizando a fórmula empírica de BRANSON, adotada pela NBR 6118 / 2003.

7.7. Resolução do Problema

Aplicando a função objetivo e as restrições de equilíbrio, de compatibilidade e laterais, temos o problema de otimização na forma que segue:

Minimizar:

$$F(x) = b_w \cdot (x_1 + d') \cdot C_C + (x_2 + x_3) \cdot \rho_s \cdot C_S + (b_w + 2(x_1 + d')) \cdot C_F$$

Sujeito a:

$$\begin{aligned} K_1 \cdot x_1 + f_{yd} \cdot x_3 - f_{yd} \cdot x_2 &= 0 \\ f_{yd} \cdot x_3 \cdot (x_1 - d') + K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2 - M_d &= 0 \\ x_3 + x_2 - P_{AC} \cdot b_w \cdot (x_1 + d') &\leq 0 \\ x_3 - 0,5 \cdot x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Para diminuir o número de restrições de igualdade, a variável x_3 será explicitada em função das demais.

$$x_3 = \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} \quad (7.11)$$

Aplicando-se o Lagrangeano e substituindo x_3 , fica-se com:

$$\begin{aligned} F_{(x,\lambda,\mu)} &= b_w \cdot (x_1 + d') \cdot C_C + \left(x_2 + \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} \right) \cdot \rho_s \cdot C_S + \\ &+ (b_w + 2 \cdot (x_1 + d')) \cdot C_F + \\ &+ \lambda_1 \cdot \left[K_1 \cdot x_1 + f_{yd} \cdot \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} - f_{yd} \cdot x_2 \right] + \\ &+ \mu_1 \cdot \left[\frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} + x_2 - P_{AC} \cdot b_w \cdot (x_1 + d') \right] + \\ &+ \mu_2 \cdot \left[\frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} - 0,5 \cdot x_2 \right] \end{aligned} \quad (7.12)$$

Igualando-se o gradiente do lagrangeano a zero e aplicando as condições de complementaridade, encontramos o sistemas de equações que, uma vez resolvido e

verificado se as soluções satisfazem as restrições inativas e laterais, tem-se os pontos de mínimo local do problema de otimização.

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_1} F_{(x,\lambda,\mu)} = & b_w \cdot C_C + \left(-2 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot \frac{x_1}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} - \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')^2} \right) \cdot \rho_s \cdot C_s + \\
 & + 2 \cdot C_F + \lambda_1 \cdot \left[K_1 + f_{yd} \cdot \left(-2 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot \frac{x_1}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} - \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')^2} \right) \right] + \\
 & + \mu_1 \cdot \left[-2 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot \frac{x_1}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} - \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')^2} - P_{AC} \cdot b_w \right] + \\
 & + \mu_2 \cdot \left[-2 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot \frac{x_1}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} - \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')^2} \right] = 0 \quad (7.13)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} F_{(x,\lambda,\mu)} = \rho_s \cdot C_s - \lambda_1 \cdot f_{yd} + \mu_1 - 0,5 \cdot \mu_2 = 0 \quad (7.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} F_{(x,\lambda,\mu)} = K_1 \cdot x_1 + f_{yd} \cdot \frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} - f_{yd} \cdot x_2 \quad (7.15)$$

$$\mu_1 \cdot \left[\frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} + x_2 - P_{AC} \cdot b_w \cdot (x_1 + d') \right] = 0 \quad (7.16)$$

$$\mu_2 \cdot \left[\frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} - 0,5 \cdot x_2 \right] = 0 \quad (7.17)$$

Soluções Possíveis:

$$\begin{aligned}
 \text{Hipótese 01: } & \mu_1 = 0; \quad \mu_2 \neq 0 \\
 \text{Hipótese 02: } & \mu_1 \neq 0; \quad \mu_2 = 0 \\
 \text{Hipótese 03: } & \mu_1 = 0; \quad \mu_2 = 0
 \end{aligned} \quad (7.18)$$

Quando uma restrição é tornada inativa é necessária uma verificação para se comprovar que os resultados satisfazem a esta restrição. Dessa forma, as seguintes relações devem ser verdadeiras:

$$\text{Hipótese 01: } \left[\frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} + x_2 - P_{AC} \cdot b_w \cdot (x_1 + d') \right] < 0 \quad (7.19)$$

$$\mu_2 > 0$$

$$\text{Hipótese 02: } \left[\frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} - 0,5 \cdot x_2 \right] < 0 \quad (7.20)$$

$$\mu_1 > 0$$

$$\text{Hipótese 03: } \left[\frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} + x_2 - P_{AC} \cdot b_w \cdot (x_1 + d') \right] < 0 \quad (7.21)$$

$$\left[\frac{M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} - 0,5 \cdot x_2 \right] < 0$$

Substituindo algumas expressões constantes por K_i , e as expressões que dependem exclusivamente da altura da seção transversal por F_i , temos:

$$\begin{aligned} K_3 &= -K_1 \cdot K_2 - K_1 \\ K_4 &= K_1 \cdot d' \\ K_5 &= b_w \cdot C_C + 2 \cdot C_F \\ K_6 &= K_1 - P_{AC} \cdot b_w \cdot f_{yd} \\ K_7 &= K_6 - 2 \cdot K_1 \cdot K_2 \\ K_8 &= -K_4 \\ K_9 &= 2 \cdot M_d + P_{AC} \cdot b_w \cdot f_{yd} \cdot d'^2 \\ K_{10} &= -K_5 \cdot f_{yd} \cdot d' - \rho_s \cdot C_S \cdot K_1 \cdot d' \\ K_{11} &= K_5 \cdot f_{yd} - 4 \cdot \rho_s \cdot C_S \cdot K_1 \cdot K_2 + \rho_s \cdot C_S \cdot K_1 \\ K_{12} &= -K_{10} \cdot d' - 2 \cdot \rho_s \cdot C_S \cdot M_d \\ K_{13} &= K_{10} - K_{11} \cdot d' \\ K_{14} &= K_{11} + 2 \cdot \rho_s \cdot C_S \cdot K_1 \cdot K_2 \\ F_1 &= \frac{1}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')} \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned}
 F_2 &= \frac{1}{f_{yd} \cdot (x_1 - d')^2} \\
 F_3 &= M_d - K_1 \cdot K_2 \cdot x_1^2 \\
 F_4 &= -2 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot x_1 \cdot F_1 - F_3 \cdot F_2 \\
 F_5 &= K_1 + f_{yd} \cdot F_4 \\
 F_6 &= F_4 - P_{AC} \cdot b_w
 \end{aligned}$$

Resolvendo analiticamente o sistema de equações encontrado e substituindo as constantes e variáveis descritas anteriormente nos resultados, encontramos as soluções para cada hipótese considerada. Após determinados os valores numéricos para as variáveis, torna-se necessária a verificação da consistência dos resultados, verificando se os mesmos satisfazem às restrições inativas.

Solução para a hipótese 01:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{-K_4 \pm \sqrt{K_4^2 - 4 \cdot K_3 \cdot M_d}}{2 \cdot K_3} \\
 x_2 &= \frac{K_1 \cdot x_1}{f_{yd}} + F_3 \cdot F_1 \\
 x_3 &= F_3 \cdot F_1 \\
 \lambda_1 &= \frac{-K_5 - 3 \cdot \rho_s \cdot C_s \cdot F_4}{F_5 - 2 \cdot f_{yd} \cdot F_4} \\
 \mu_1 &= 0 \\
 \mu_2 &= 2 \cdot (\rho_s \cdot C_s - \lambda_1 \cdot f_{yd}) > 0
 \end{aligned} \tag{7.23}$$

Solução para a hipótese 02:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{-K_8 \pm \sqrt{K_8^2 - 4 \cdot K_7 \cdot K_9}}{2 \cdot K_7} \\
 x_2 &= \frac{K_1 \cdot x_1}{f_{yd}} + F_3 \cdot F_1 \\
 x_3 &= F_3 \cdot F_1
 \end{aligned} \tag{7.24}$$

$$\lambda_1 = \frac{-K_5 - \rho_s \cdot C_s \cdot F_4 + \rho_s \cdot C_s \cdot F_6}{F_5 + f_{yd} \cdot F_6}$$

$$\mu_1 = \lambda_1 \cdot f_{yd} - \rho_s \cdot C_s > 0$$

$$\mu_2 = 0$$

Solução para a hipótese 03:

$$x_1 = \frac{-K_{13} \pm \sqrt{K_{13}^2 - 4 \cdot K_{14} \cdot K_{12}}}{2 \cdot K_{14}}$$

$$x_2 = \frac{K_1 \cdot x_1}{f_{yd}} + F_3 \cdot F_1$$

$$x_3 = F_3 \cdot F_1 \tag{7.25}$$

$$\lambda_1 = \frac{\rho_s \cdot C_s}{f_{yd}}$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = 0$$

7.8. Verificações dos Resultados Obtidos

Para exemplificar a rotina de otimização da seção de vigas, consideremos uma seção transversal com as seguintes características:

$$b_w = 15\text{cm};$$

$$d' = 3\text{cm}.$$

Os materiais utilizados no exemplo possuem as seguintes características

$$\text{Concreto: C20} \Rightarrow E_c = 21.300 \text{ MPa};$$

$$\text{Aço: CA-50} \Rightarrow E_s = 210.000 \text{ MPa};$$

O custo dos serviços adotados para a execução, incluindo o material e a mão de obra necessários para a execução, foi retirado da revista Construção e Mercado, da editora Pini, edição de número 20, ano 56, de março de 2003, e estão indicados a seguir:

Custo do concreto: R\$ 228,39 / m³;

Custo do aço: R\$ 2,73 / kg;

Custo da forma: R\$ 31,58 / m².

Outros dados necessários para a execução da rotina:

Peso específico do aço: $7,85 \times 10^{-5}$ kN/cm³;

Deformação limite do concreto: 3,5‰;

Taxa máxima de armadura: 4,0 %;

Essa seção foi submetida a momentos fletores com variação de 10.000 kN.cm a 60.000 kN.cm, com incremento de 500 kN.cm e, para cada momento atuante foi aplicada a rotina de otimização, encontrando a altura e a área de aço necessárias para combater da forma mais econômica o esforço atuante.

Neste exemplo não foi considerada a restrição de flecha máxima para a viga. Como a verificação da flecha é feita numa etapa posterior a otimização, de forma a se aumentar a altura ótima encontrada para que esta atenda às recomendações normativas, a seção encontrada não mais será a seção ótima para os esforços atuantes que é o que está sendo verificado com esta rotina. As demais restrições laterais e restrições de equilíbrio e compatibilidade da seção foram mantidas. Alguns dos resultados ótimos obtidos com a aplicação da rotina encontram-se apresentados na tabela 7.1 e os resultados para todas as análises efetuadas estão mostrados nos gráficos 7.1 a 7.4.

Analisando os dados da tabela 7.1 em conjunto com o gráfico 7.1, vemos que o maior custo para a estrutura é da forma. A medida que a sollicitação na estrutura aumenta, o custo percentual de forma tende a ter uma redução, enquanto o custo percentual de armadura sobe na mesma proporção. O custo percentual de concreto se mantém praticamente inalterado ao longo de todo o processo. Essa redução no custo percentual da forma com conseqüente aumento do custo de armadura pode ser explicado pelo aumento na taxa de armadura comprimida, que pode ser observado no gráfico 7.2. Por esse gráfico podemos observar que a taxa total de armadura tende a variar pouco ao longo do processo enquanto a taxa de armadura de compressão em

relação à armadura de tração aumenta de forma bem mais acentuada variando entre 2% e 8% no intermalo de solicitações considerado.

Mk (kN.cm)	h (cm)	Ast (cm ²)	Asc (cm ²)	Pac (%)	Asc/Ast (%)	Cc (R\$/m)	Cs (R\$/m)	Cf (R\$/m)	Ct (R\$/m)
10,000.0	47.57	9.60	0.21	1.38	2.22	16.30	20.09	34.78	71.17
12,000.0	51.55	10.55	0.32	1.41	3.07	17.66	22.26	37.30	77.22
14,000.0	55.22	11.42	0.43	1.43	3.73	18.92	24.26	39.61	82.79
16,000.0	58.62	12.24	0.52	1.45	4.26	20.08	26.12	41.76	87.96
18,000.0	61.82	13.00	0.61	1.47	4.70	21.18	27.86	43.79	92.83
20,000.0	64.85	13.72	0.70	1.48	5.07	22.22	29.51	45.70	97.43
22,000.0	67.73	14.41	0.78	1.49	5.38	23.20	31.08	47.52	101.80
24,000.0	70.48	15.06	0.85	1.51	5.66	24.15	32.58	49.25	105.98
26,000.0	73.12	15.69	0.93	1.52	5.90	25.05	34.02	50.92	109.99
28,000.0	75.66	16.30	1.00	1.52	6.11	25.92	35.41	52.52	113.85
30,000.0	78.10	16.88	1.06	1.53	6.30	26.76	36.74	54.07	117.57
32,000.0	80.47	17.45	1.13	1.54	6.48	27.57	38.03	55.56	121.16
34,000.0	82.77	17.99	1.19	1.55	6.64	28.36	39.28	57.01	124.65
36,000.0	85.00	18.52	1.26	1.55	6.79	29.12	40.50	58.42	128.04
38,000.0	87.16	19.04	1.32	1.56	6.92	29.86	41.68	59.79	131.33
40,000.0	89.27	19.54	1.38	1.56	7.04	30.58	42.83	61.12	134.54
42,000.0	91.33	20.03	1.43	1.57	7.15	31.29	43.96	62.42	137.67
44,000.0	93.34	20.51	1.49	1.57	7.26	31.98	45.05	63.69	140.72
46,000.0	95.31	20.98	1.54	1.58	7.36	32.65	46.12	64.93	143.71
48,000.0	97.23	21.44	1.60	1.58	7.45	33.31	47.17	66.15	146.63
50,000.0	99.11	21.89	1.65	1.58	7.54	33.96	48.20	67.34	149.49
52,000.0	100.96	22.33	1.70	1.59	7.62	34.59	49.21	68.50	152.29
54,000.0	102.77	22.76	1.75	1.59	7.70	35.21	50.19	69.65	155.05
56,000.0	104.55	23.19	1.80	1.59	7.77	35.82	51.16	70.77	157.75
58,000.0	106.29	23.60	1.85	1.60	7.84	36.41	52.11	71.87	160.40
60,000.0	108.01	24.01	1.90	1.60	7.90	37.00	53.05	72.96	163.01

Tabela 7.1 – Resultados encontrados para a otimização da seção transversal de uma viga

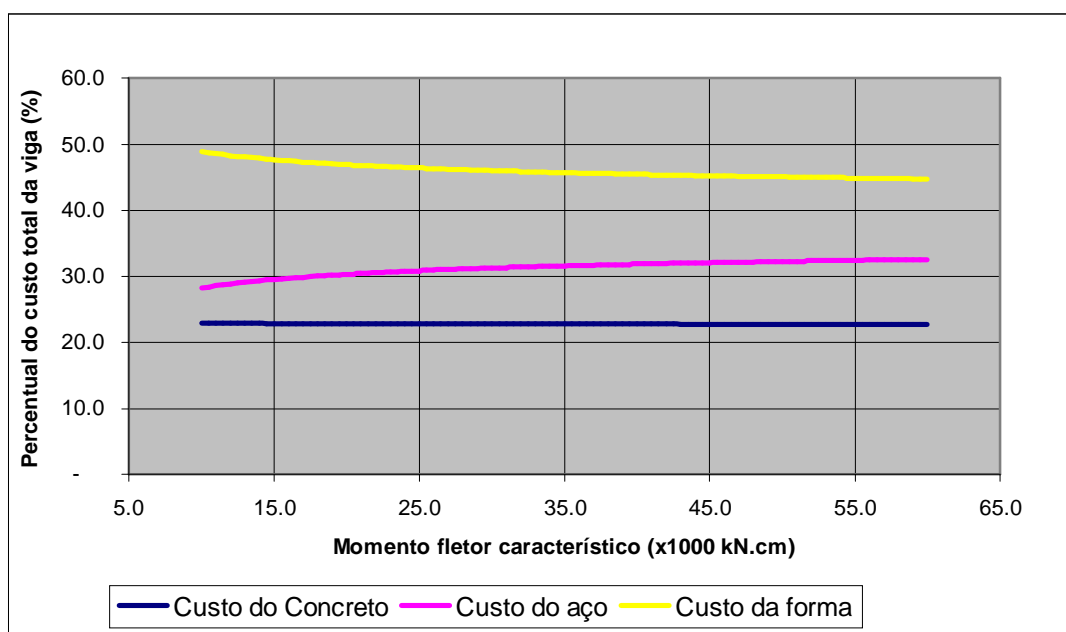


Gráfico 7.1 – Percentual do custo dos serviços necessários no custo total da estrutura

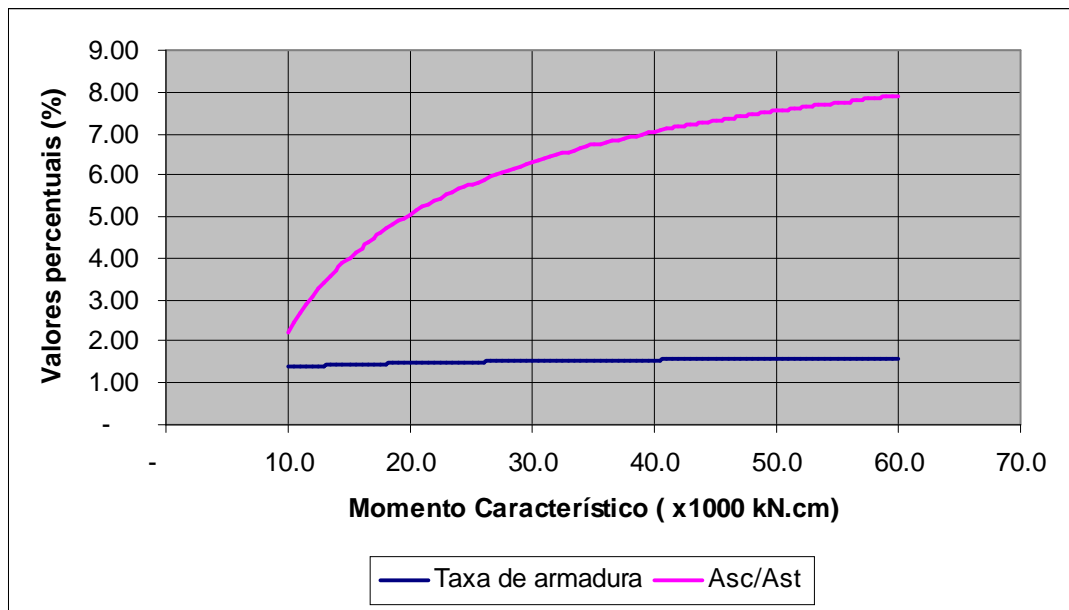


Gráfico 7.2 – Valores das variáveis sujeitas a restrição lateral

Esse aumento da taxa de armadura de compressão ocorre principalmente em função do custo de forma que torna bastante caro o aumento da altura da seção. Desta forma, embora a utilização do concreto seja mais eficiente no combate à compressão, torna-se mais econômico a utilização da armadura dupla de forma a reduzir o custo com a forma da estrutura.

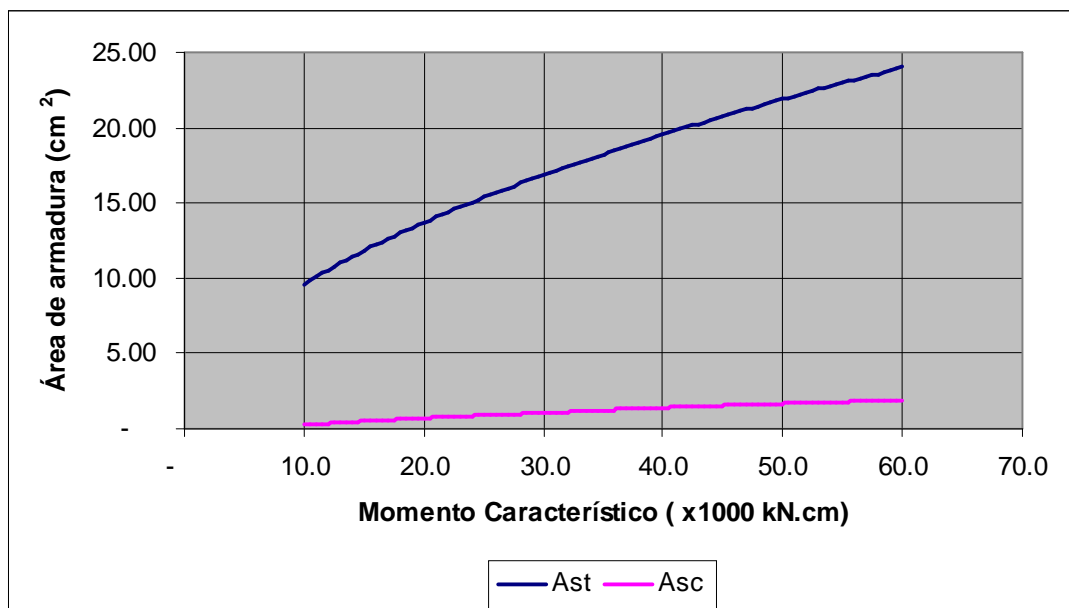


Gráfico 7.3 – Área ótima de armadura para a seção transversal de uma viga

Convém lembrar que uma redução no custo da forma pode ser conseguida caso se faça uma reutilização do material das mesmas. Para se poder garantir uma reutilização destes materiais, se torna necessária a utilização de material com melhor qualidade, além de materiais adicionais, como desmoldantes, de forma a garantir a manutenção do material. Essa reutilização também provoca um aumento no custo de mão-de-obra, que é o item mais caro no serviço de forma. Sendo assim, como esses itens não foram computados, optou-se neste trabalho por não considerar essa reutilização.

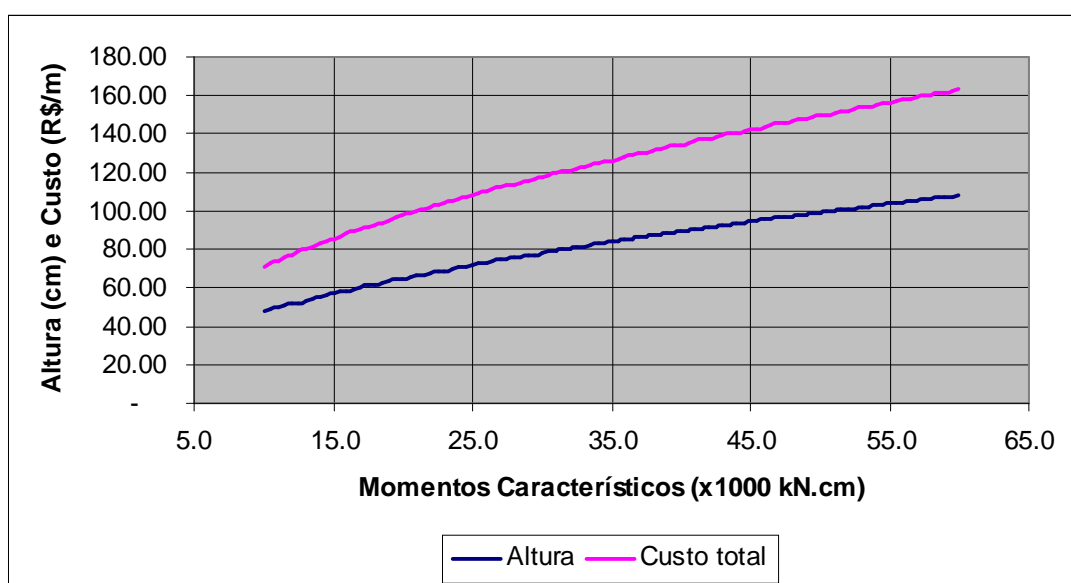


Gráfico 7.4 – Altura e custo ótimos para a seção transversal de uma viga

Os gráficos 7.3 e 7.4 mostram o comportamento das variáveis do processo de otimização, com o aumento das solicitações. Através deles podemos comprovar o que foi dito anteriormente. Podemos observar, claramente, que as curvas de custo, altura e armadura de tração possuem formas bastante parecidas, com relação entre seus valores finais e iniciais da ordem de 2,40. Já a curva da armadura de compressão possui um crescimento relativo bem mais acentuado, com uma variação da ordem de 9 vezes o valor inicial, mostrando que é realmente este tipo de armadura o mais indicado para garantir a segurança da peça da forma mais econômica.

7.9. Verificação da consistência dos resultados

A verificação da consistência dos resultados obtidos com a rotina de otimização foi feita de forma prática. Para se determinar se o resultado obtido é realmente o de mínimo custo para as seções estudadas, optou-se por fazer variar a altura da seção em incrementos de 1,0 cm, de 20 a 140 cm, e fazer o dimensionamento destas seções transversais definidas, quando submetidas a momentos fletores que variam de 10.000 kN.cm a 60.000 kN.cm, com incremento de 10.000 kN.cm. Com as dimensões e a área de aço definidas, calculou-se o custo para as seções e se verificou para cada momento atuante qual das seções chegou a um menor custo, atendendo às mesmas restrições que foram impostas na rotina de otimização. Os custos encontrados para todas as seções definidas foram plotados no gráfico 7.5, e os resultados das seções que levaram a um menor custo para cada momento fletor aplicado encontram-se apresentadas na tabela 7.2.

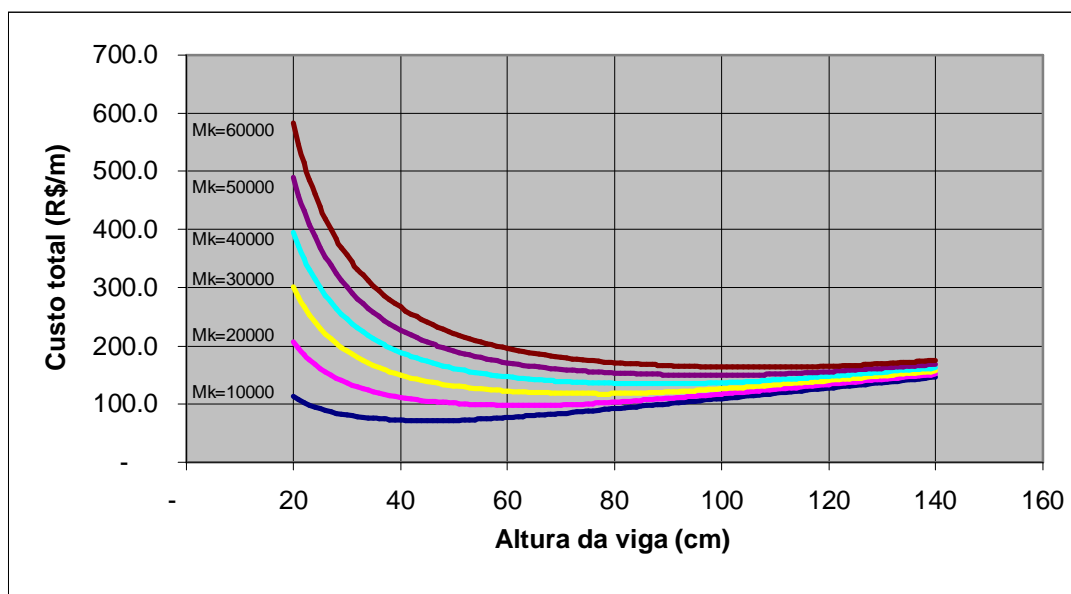


Gráfico 7.5 – Custo total da seção para os momentos aplicados

O gráfico 7.5 mostra claramente a existência de um único ponto de mínimo custo para cada momento aplicado e, pela tabela 7.2, podemos ver que este ponto está atendendo às restrições laterais impostas na otimização. Pode-se verificar também que, apesar de pequenas diferenças geradas pelo fato de se estar trabalhando com intervalos de 1,0 cm entre as seções em estudo, as alturas e os custos totais para

as seções de menor custo são praticamente iguais, o que valida os resultados encontrados pela rotina apresentada.

Mk (kN.cm)	h (cm)	Ast (cm ²)	Asc (cm ²)	Pac (%)	Asc/Ast (%)	Cc (R\$/m)	Cs (R\$/m)	Cf (R\$/m)	Ct (R\$/m)
10,000.00	47.00	9.68	0.41	1.43	4.23	16.10	20.65	34.42	71.17
20,000.00	65.00	13.70	0.64	1.47	4.70	22.27	29.37	45.79	97.43
30,000.00	78.00	16.89	1.10	1.54	6.51	26.72	36.84	54.00	117.57
40,000.00	89.00	19.58	1.47	1.58	7.51	30.49	43.10	60.95	134.54
50,000.00	99.00	21.91	1.69	1.59	7.71	33.92	48.31	67.27	149.49
60,000.00	108.00	24.01	1.90	1.60	7.92	37.00	53.06	72.95	163.01

Tabela 7.2 – Menores custos obtidos com a variação da altura das vigas para os momentos fletores aplicados

8. Formulação matemática para minimização da seção transversal de um pilar

8.1. Variáveis a serem otimizadas

As variáveis a serem otimizadas são as dimensões da seção transversal do pilar e a área de armadura longitudinal da seção. Denominando as variáveis de x_i , para facilitar o procedimento matemático, têm-se as seguintes variáveis no problema:

x_1 = Largura da seção transversal do pilar

x_2 = Altura da seção transversal do pilar

x_3 = Área de aço da seção transversal do pilar

x_4 = Profundidade da linha neutra na seção transversal do pilar

Para facilitar a visualização, considerar-se-á, independentemente das dimensões, como sendo a largura da seção a dimensão perpendicular ao eixo do pórtico, e a altura da seção como a dimensão paralela ao mesmo, como mostrado na figura 8.1.

Apesar da variável a ser otimizada ser apenas a área de aço longitudinal total da seção, serão consideradas quatro situações diferentes para a disposição das armaduras na seção transversal, conforme ilustrado na figura 8.2. Estas disposições serão usadas para garantir o atendimento à NBR 6118, que exige um espaçamento máximo entre as barras de armadura de 40 cm. Assim, as situações indicadas serão utilizadas em função da altura do pilar, como segue:

- $x_2 \leq 40cm \Rightarrow$ Situação 01
- $40 < x_2 \leq 80cm \Rightarrow$ Situação 02
- $80 < x_2 \leq 120cm \Rightarrow$ Situação 03
- $x_2 > 120cm \Rightarrow$ Situação 04

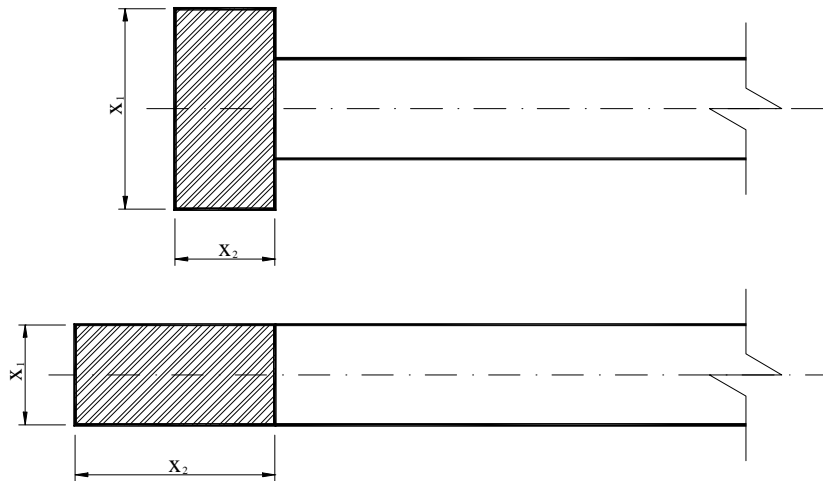


Figura 8.1 - Denominação das dimensões da seção transversal

Para facilitar os cálculos e por ser um recurso comumente utilizado na prática, todas as barras de armadura serão consideradas com mesmo diâmetro.

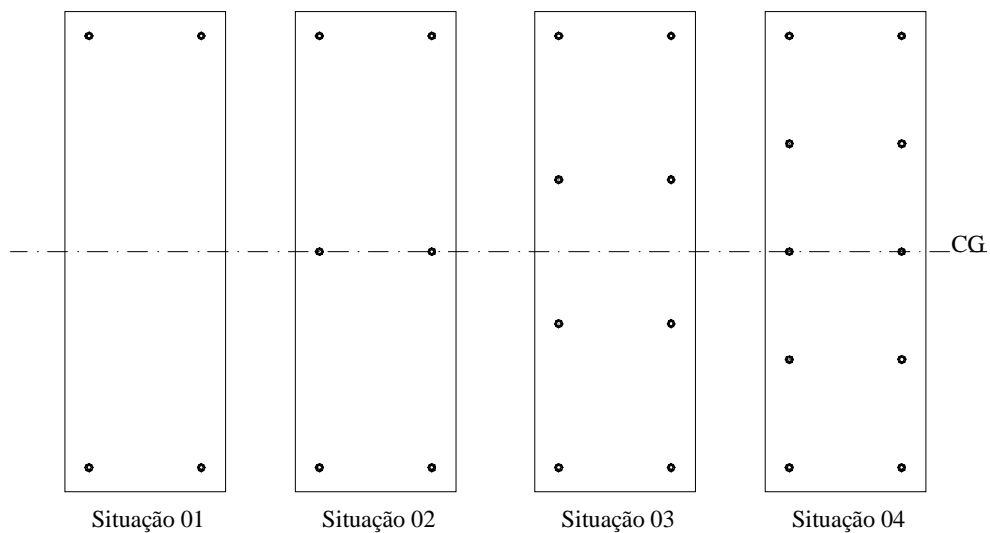


Figura 8.2 - Arranjos de armadura utilizados

Apesar da profundidade da linha neutra não estar relacionada diretamente na função objetivo como variável a ser otimizada, ela será necessária para o equilíbrio da

seção, sendo por isso incluída como variável de projeto. O valor de x_4 será definido como a distância entre a fibra mais comprimida da seção e a linha neutra da mesma.

8.2. Função Objetivo:

A função de custo a ser implementada será a de menor custo por unidade de comprimento de pilar, levando em conta os custos com material e mão de obra para a fabricação do mesmo, incluindo nestes custos o concreto, a armadura longitudinal e a fôrma utilizada, ficando com a forma:

$$F = (b \cdot h) \cdot C_C + A_S \cdot \rho_S \cdot C_S + (2b + 2h) \cdot C_F \quad (8.1)$$

onde:

F \Rightarrow Função de custo para o pilar, por unidade de comprimento;

C_C \Rightarrow Custo do concreto, por unidade de volume;

C_S \Rightarrow Custo da armadura, por unidade de massa;

C_F \Rightarrow Custo da fôrma, por unidade de área;

b \Rightarrow Largura do pilar;

h \Rightarrow Comprimento do pilar;

ρ_S \Rightarrow Massa específica do aço;

A_S \Rightarrow Área de aço da armadura longitudinal.

Colocando a função objetivo em função de x , fica:

$$F(x) = (x_1 \cdot x_2) \cdot C_C + x_3 \cdot \rho_S \cdot C_S + (2x_1 + 2x_2) \cdot C_F \quad (8.2)$$

Adotando, para simplificar os cálculos, as constantes:

$$\begin{aligned} c_1 &= C_C \\ c_2 &= \rho_S \cdot C_S \\ c_3 &= 2 \cdot C_F \end{aligned} \quad (8.3)$$

Fica-se com a função objetivo na forma:

$$F(x) = c_1 \cdot (x_1 \cdot x_2) + c_2 \cdot x_3 + c_3 \cdot (x_1 + x_2) \quad (8.4)$$

8.3. Restrições de Equilíbrio

Por se tratarem de pórticos planos, considerou-se simplificadaamente que os pilares estarão trabalhando à flexão normal composta, utilizando as condições de equilíbrio em força e momento para esta situação. Por ser comum na prática o uso de pilares com seção constante ao longo do edifício, seção esta dimensionada para resistir aos esforços na base, optou-se por considerar inicialmente esta situação e, como nesta situação o esforço normal é preponderante sobre o momento fletor, considerou-se a seção do pilar trabalhando no domínio 5, com toda a seção trabalhando sob compressão. Assim, as restrições de equilíbrio ficam definidas, para as quatro configurações da seção, e trabalhando em função de x , como segue.

Situação 01

$$0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{2} (\sigma_{s1} + \sigma_{s2}) - N_d = 0$$

$$\frac{x_3}{4} (x_2 - 2 \cdot d') \cdot (\sigma_{s2} - \sigma_{s1}) - M_d = 0 \quad (8.5)$$

onde:

d' \Rightarrow distancia do centro da armadura até a face da seção.

σ_{si} \Rightarrow Tensão atuante na armadura da camada i , sendo que as camadas são numeradas no sentido da face menos comprimida para a mais comprimida da seção.

Situação 02

$$0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{3} (\sigma_{s1} + \sigma_{s2} + \sigma_{s3}) - N_d = 0$$

$$\frac{x_3}{6} (x_2 - 2 \cdot d') \cdot (\sigma_{s3} - \sigma_{s1}) - M_d = 0 \quad (8.6)$$

Situação 03

$$0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{4} (\sigma_{s1} + \sigma_{s2} + \sigma_{s3} + \sigma_{s4}) - N_d = 0$$

$$\frac{x_3}{24} (x_2 - 2d') \cdot (3\sigma_{s4} - 3\sigma_{s1} + \sigma_{s3} - \sigma_{s2}) - M_d = 0$$
(8.7)

Situação 04

$$0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{5} (\sigma_{s1} + \sigma_{s2} + \sigma_{s3} + \sigma_{s4} + \sigma_{s5}) - N_d = 0$$

$$\frac{x_3}{20} (x_2 - 2d') \cdot (2\sigma_{s5} - 2\sigma_{s1} + \sigma_{s4} - \sigma_{s2}) - M_d = 0$$
(8.8)

8.4. Restrição de compatibilidade

De forma a reduzir o numero de restrições de igualdade na otimização, a restrição de compatibilidade será utilizada para definir a tensão atuante nas barras de armadura, sendo este valor substituído nas restrições de equilíbrio.

Para o domínio 5, a equação de compatibilidade pode ser deduzida a partir da figura 8.3, considerando o ponto de deformação fixa igual a 2 ‰, na faixa que dista $3x_2/7$ da face mais comprimida da seção transversal, ficando então:

$$\frac{2‰}{x_4 - \frac{3}{7}x_2} = \frac{\varepsilon_{si}}{h_{si}} \Rightarrow \varepsilon_{si} (‰) = \frac{14 \cdot h_{si}}{7x_4 - 3x_2}$$
(8.9)

Conforme mostrado pelo diagrama tensão x deformação apresentado na figura 8.4, a relação tensão x deformação para o aço CA-50 A, que será utilizado neste trabalho por ser o aço mais comumente usado nas estruturas, considerando o módulo de deformação do aço $E_s = 21.000 \text{ kN/cm}^2$, pode ser dada por:

$$\text{para } \varepsilon_{si} < 2,07‰ \Rightarrow \sigma_{si} = 21.000 \cdot \varepsilon_{si}$$

$$\sigma_{si} = 294 \frac{h_{si}}{7x_4 - 3x_2}$$
(8.10)

$$\text{para } \varepsilon_{si} \geq 2,07‰ \Rightarrow \sigma_{si} = f_{yd}$$

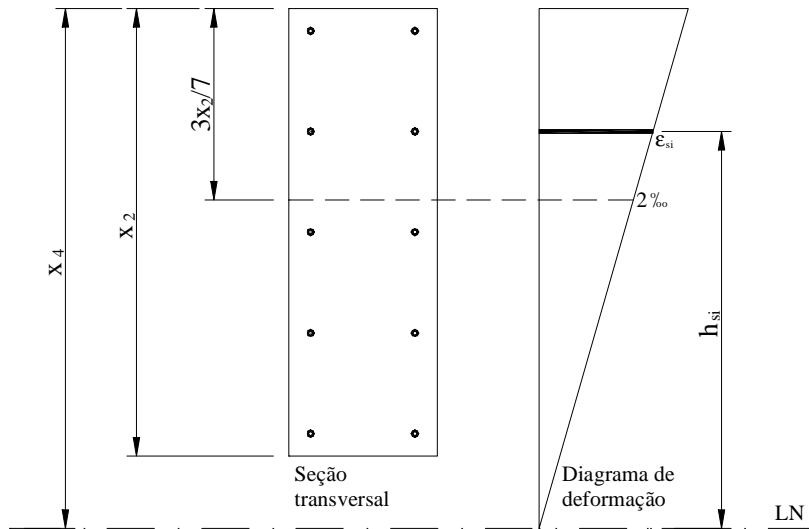


Figura 8.3 - Diagrama de deformação para o domínio 5

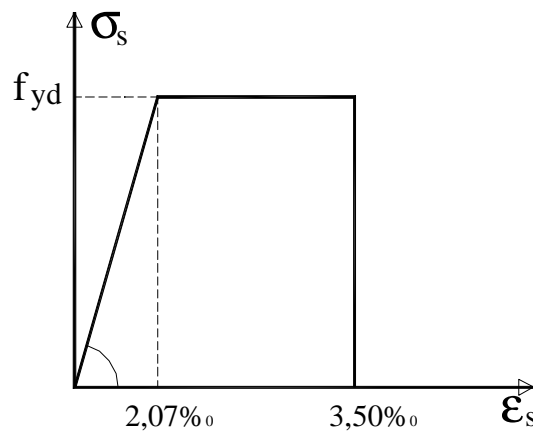


Figura 8.4 - Diagrama Tensão x Deformação para o aço CA-50A

Como pode ser visto na figura 8.4, a descontinuidade do diagrama está situada no ponto de deformação igual a $2,07‰$. Como a posição da linha neutra é uma variável a ser otimizada, não dispomos deste valor no início do processo, será admitido inicialmente que as barras situadas na metade da seção situada entre o centro de gravidade (CG) e a face menos comprimida, incluindo as situadas no CG, terão deformação abaixo de $2,07‰$, e as barras situadas acima do CG terão deformação acima deste valor. Esta hipótese foi admitida tomando por base que, uma vez que o ponto de deformação igual a $2‰$ está situado na faixa que dista $3x_2/7$ da face mais comprimida, ou seja, pouco acima do CG, fica claro que todas as barras situadas abaixo

deste terão deformação inferior a 2 ‰, e as barras superiores só terão valor inferior a este para valores de x_4 muito acima do valor de x_2 . Assim, após encontrada a seção ótima, será feita uma verificação dos valores das deformações das barras e, caso ocorram diferenças entre os valores admitidos e os valores encontrados, estes serão ajustados e o cálculo será refeito com os novos valores.

Calculando-se então as tensões σ_{si} nas barras, admitindo-se a hipótese acima, e substituindo-se os valores nas restrições de equilíbrio, estas ficam, após feitos os cálculos e simplificações possíveis, com a forma final como segue:

Situação 01

$$\begin{aligned}
 0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{2} \left(294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} + f_{yd} \right) - N_d &= 0 \\
 \frac{x_3}{4} (x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right) - M_d &= 0
 \end{aligned} \tag{8.11}$$

Situação 02

$$\begin{aligned}
 0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{3} \left(147 \frac{4x_4 - 3x_2 + 2d'}{7x_4 - 3x_2} + f_{yd} \right) - N_d &= 0 \\
 \frac{x_3}{6} (x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right) - M_d &= 0
 \end{aligned} \tag{8.12}$$

Situação 03

$$\begin{aligned}
 0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{4} \left(98 \frac{6x_4 - 5x_2 + 4d'}{7x_4 - 3x_2} + 2f_{yd} \right) - N_d &= 0 \\
 \frac{x_3}{24} (x_2 - 2d') \cdot \left(4f_{yd} - 98 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right) - M_d &= 0
 \end{aligned} \tag{8.13}$$

Situação 04

$$\begin{aligned}
 0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{5} \left(73.5 \frac{12x_4 - 9x_2 + 6d'}{7x_4 - 3x_2} + 2f_{yd} \right) - N_d &= 0 \\
 \frac{x_3}{20} (x_2 - 2d') \cdot \left(3f_{yd} - 73.5 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right) - M_d &= 0
 \end{aligned} \tag{8.14}$$

8.5. Restrição para garantir o domínio 5

Para garantir que a seção estudada esteja no domínio 5 e com toda a seção de concreto comprimida, devemos garantir que, utilizando o diagrama de deformações simplificado retangular, a altura da seção seja menor que oitenta por cento da profundidade da linha neutra, ou seja:

$$1.25x_2 - x_4 \leq 0 \quad (8.15)$$

8.6. Restrições Laterais

No problema de minimização da seção transversal de um pilar serão utilizados limites mínimos e máximos para as dimensões da seção transversal e para a taxa de armadura do pilar, resultando nas seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} b_{\min} &\leq b \leq b_{\max} \\ h_{\min} &\leq h \leq h_{\max} \\ \rho_{\min} &\leq \rho \leq \rho_{\max} \end{aligned} \quad (8.16)$$

onde:

$\rho \Rightarrow$ Taxa geométrica de armadura no concreto. Razão entre a área da armadura longitudinal e a área da seção transversal do pilar.

Por serem apenas limitantes de variáveis específicas, não interferindo na relação entre as variáveis, as restrições laterais não serão consideradas explicitamente no processo de otimização. Elas serão verificadas após cada cálculo efetuado e, no momento em que for atingido algum valor limite, a variável que atingiu este valor é retirada do processo de otimização, utilizando para a mesma o valor fixo correspondente ao limite atingido, reiniciando-se o processo de otimização.

8.7. Resolução do problema

Aplicando então a função objetivo e as restrições de equilíbrio e para garantia do domínio de deformação 5, ficamos com o problema na forma:

Minimizar: $F(x) = c_1 \cdot (x_1 \cdot x_2) + c_2 \cdot x_3 + c_3 \cdot (x_1 + x_2)$

Sujeito a:

$$0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{2} \left(294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} + f_{yd} \right) - N_d = 0$$

Situação 01: $\frac{x_3}{4} (x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right) - M_d = 0$

$$1.25x_2 - x_4 \leq 0$$

$$0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{3} \left(147 \frac{4x_4 - 3x_2 + 2d'}{7x_4 - 3x_2} + f_{yd} \right) - N_d = 0$$

Situação 02: $\frac{x_3}{6} (x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right) - M_d = 0$

$$1.25x_2 - x_4 \leq 0$$

$$0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{4} \left(98 \frac{6x_4 - 5x_2 + 4d'}{7x_4 - 3x_2} + 2f_{yd} \right) - N_d = 0$$

Situação 03: $\frac{x_3}{24} (x_2 - 2d') \cdot \left(4f_{yd} - 98 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right) - M_d = 0$

$$1.25x_2 - x_4 \leq 0$$

$$0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{5} \left(73.5 \frac{12x_4 - 9x_2 + 6d'}{7x_4 - 3x_2} + 2f_{yd} \right) - N_d = 0$$

Situação 04: $\frac{x_3}{20} (x_2 - 2d') \cdot \left(3f_{yd} - 73.5 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right) - M_d = 0$

$$1.25x_2 - x_4 \leq 0$$

Aplicando-se o Lagrangeano, fica-se com:

Situação 01:

$$\begin{aligned}
 F(x, \lambda, \mu) &= c_1 \cdot (x_1 \cdot x_2) + c_2 \cdot x_3 + c_3 \cdot (x_1 + x_2) \\
 &+ \lambda_1 \cdot \left[0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{2} \left(294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} + f_{yd} \right) - N_d \right] \\
 &+ \lambda_2 \cdot \left[\frac{x_3}{4} (x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right) - M_d \right] + \mu_1 \cdot (1.25x_2 - x_4)
 \end{aligned} \tag{8.17}$$

Situação 02:

$$\begin{aligned}
 F(x, \lambda, \mu) &= c_1 \cdot (x_1 \cdot x_2) + c_2 \cdot x_3 + c_3 \cdot (x_1 + x_2) \\
 &+ \lambda_1 \cdot \left[0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{3} \left(147 \frac{4x_4 - 3x_2 + 2d'}{7x_4 - 3x_2} + f_{yd} \right) - N_d \right] \\
 &+ \lambda_2 \cdot \left[\frac{x_3}{6} (x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right) - M_d \right] + \mu_1 \cdot (1.25x_2 - x_4)
 \end{aligned} \tag{8.18}$$

Situação 03:

$$\begin{aligned}
 F(x, \lambda, \mu) &= c_1 \cdot (x_1 \cdot x_2) + c_2 \cdot x_3 + c_3 \cdot (x_1 + x_2) \\
 &+ \lambda_1 \cdot \left[0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{4} \left(98 \frac{6x_4 - 5x_2 + 4d'}{7x_4 - 3x_2} + 2f_{yd} \right) - N_d \right] \\
 &+ \lambda_2 \cdot \left[\frac{x_3}{24} (x_2 - 2d') \cdot \left(4f_{yd} - 98 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right) - M_d \right] + \mu_1 \cdot (1.25x_2 - x_4)
 \end{aligned} \tag{8.19}$$

Situação 04:

$$\begin{aligned}
 F(x, \lambda, \mu) &= c_1 \cdot (x_1 \cdot x_2) + c_2 \cdot x_3 + c_3 \cdot (x_1 + x_2) \\
 &+ \lambda_1 \cdot \left[0.85 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{5} \left(73.5 \frac{12x_4 - 9x_2 + 6d'}{7x_4 - 3x_2} + 2f_{yd} \right) - N_d \right] \\
 &+ \lambda_2 \cdot \left[\frac{x_3}{20} (x_2 - 2d') \cdot \left(3f_{yd} - 73.5 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right) - M_d \right] + \mu_1 \cdot (1.25x_2 - x_4)
 \end{aligned} \tag{8.20}$$

Igualando-se o gradiente do Lagrangeano a zero e aplicando a condição de complementaridade encontramos os sistemas de equações apresentados a seguir que,

após serem resolvidos e então verificado se as soluções satisfazem a restrição inativa e as restrições laterais, fornecem os pontos de mínimo local do problema de otimização.

Situação 01:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} F &= c_1 \cdot x_2 + c_3 + c_4 \cdot \lambda_1 \cdot x_2 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} F &= c_1 \cdot x_1 + c_3 + \lambda_1 \cdot \left[c_4 \cdot x_1 + 0.5 \cdot x_3 \cdot \left(\frac{-294}{7x_4 - 3x_2} + 882 \frac{x_4 - x_2 + d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \right] \\ &\quad + 0.25\lambda_2 \cdot x_3 \cdot \left[\left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right) + (x_2 - 2d') \cdot \left(\frac{294}{7x_4 - 3x_2} - 882 \frac{x_4 - x_2 + d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \right] \\ &\quad + 1.25\mu_1 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} F &= c_2 + 0.5\lambda_1 \cdot \left(f_{yd} + 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right) + 0.25\lambda_2 \cdot (x_2 - 2d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_4} F &= 0.5\lambda_1 \cdot x_3 \cdot \left(\frac{294}{7x_4 - 3x_2} - 2058 \frac{x_4 - x_2 + d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \\ &\quad + 0.25\lambda_2 \cdot (x_2 - 2d') \cdot x_3 \cdot \left(\frac{-294}{7x_4 - 3x_2} + 2058 \frac{x_4 - x_2 + d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) - \mu_1 = 0 \tag{8.21} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_1} F &= c_4 \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{2} \left(294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} + f_{yd} \right) - N_d = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \lambda_2} F &= \frac{x_3}{4} (x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right) - M_d = 0 \\ \mu_1 \cdot (1.25x_2 - x_4) &= 0 \end{aligned}$$

onde $c_4 = 0.85 \cdot f_{cd}$

Situação 02:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} F = c_1 \cdot x_2 + c_3 + c_4 \cdot \lambda_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_2} F &= c_1 \cdot x_1 + c_3 + \lambda_1 \cdot \left[c_4 \cdot x_1 + \frac{x_3}{3} \cdot \left(\frac{-441}{7x_4 - 3x_2} + 441 \frac{4x_4 - 3x_2 + 2d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{6} \lambda_2 \cdot x_3 \cdot \left[\left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right) + (x_2 - 2d') \cdot \left(\frac{294}{7x_4 - 3x_2} - 882 \frac{x_4 - x_2 + d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \right] \\
 &+ 1.25\mu_1 = 0 \\
 \frac{\partial}{\partial x_3} F &= c_2 + \frac{1}{3} \lambda_1 \cdot \left(f_{yd} + 147 \frac{4x_4 - 3x_2 + 2d'}{7x_4 - 3x_2} \right) + \frac{1}{6} \lambda_2 \cdot (x_2 - 2d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right) = 0 \\
 \frac{\partial}{\partial x_4} F &= \frac{1}{3} \lambda_1 \cdot x_3 \cdot \left(\frac{588}{7x_4 - 3x_2} - 1029 \frac{4x_4 - 3x_2 + 2d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \\
 &+ \frac{1}{6} \lambda_2 \cdot (x_2 - 2d') \cdot x_3 \cdot \left(\frac{-294}{7x_4 - 3x_2} + 2058 \frac{x_4 - x_2 + d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) - \mu_1 = 0 \tag{8.22} \\
 \frac{\partial}{\partial \lambda_1} F &= c_4 \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{3} \left(147 \frac{4x_4 - 3x_2 + 2d'}{7x_4 - 3x_2} + f_{yd} \right) - N_d = 0 \\
 \frac{\partial}{\partial \lambda_2} F &= \frac{x_3}{6} (x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right) - M_d = 0 \\
 \mu_1 \cdot (1.25x_2 - x_4) &= 0
 \end{aligned}$$

Situação 03:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_1} F &= c_1 \cdot x_2 + c_3 + c_4 \cdot \lambda_1 \cdot x_2 = 0 \\
 \frac{\partial}{\partial x_2} F &= c_1 \cdot x_1 + c_3 + \lambda_1 \cdot \left[c_4 \cdot x_1 + \frac{x_3}{2} \cdot \left(\frac{-245}{7x_4 - 3x_2} + 147 \frac{6x_4 - 5x_2 + 4d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \right] \\
 &+ \frac{1}{12} \lambda_2 \cdot x_3 \cdot \left[\left(2f_{yd} - 49 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right) \right. \\
 &\left. + (x_2 - 2d') \cdot \left(\frac{539}{7x_4 - 3x_2} - 147 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \right] + 1.25\mu_1 = 0 \\
 \frac{\partial}{\partial x_3} F &= c_2 + \frac{1}{2} \lambda_1 \cdot \left(f_{yd} + 49 \frac{6x_4 - 5x_2 + 4d'}{7x_4 - 3x_2} \right) \\
 &+ \frac{1}{12} \lambda_2 \cdot (x_2 - 2d') \cdot \left(2f_{yd} - 49 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right) = 0 \tag{8.23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_4} F &= \frac{1}{2} \lambda_1 \cdot x_3 \cdot \left(\frac{294}{7x_4 - 3x_2} - 343 \frac{6x_4 - 5x_2 + 4d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \\ &+ \frac{1}{12} \lambda_2 \cdot (x_2 - 2d') \cdot x_3 \left(\frac{-588}{7x_4 - 3x_2} + 343 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) - \mu_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} F = c_4 \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{4} \left(98 \frac{6x_4 - 5x_2 + 4d'}{7x_4 - 3x_2} + 2f_{yd} \right) - N_d = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} F = \frac{x_3}{24} (x_2 - 2d') \cdot \left(4f_{yd} - 98 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right) - M_d = 0$$

$$\mu_1 \cdot (1.25x_2 - x_4) = 0$$

Situação 04:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} F = c_1 \cdot x_2 + c_3 + c_4 \cdot \lambda_1 \cdot x_2 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} F &= c_1 \cdot x_1 + c_3 + \lambda_1 \cdot \left[c_4 \cdot x_1 + \frac{x_3}{5} \cdot \left(\frac{-661.5}{7x_4 - 3x_2} + 220.5 \frac{12x_4 - 9x_2 + 6d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{20} \lambda_2 \cdot x_3 \cdot \left[\left(3f_{yd} - 73.5 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right) \right. \\ &\left. + (x_2 - 2d') \cdot \left(\frac{808.5}{7x_4 - 3x_2} - 220.5 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \right] + 1.25\mu_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_3} F &= c_2 + \frac{1}{5} \lambda_1 \cdot \left(2f_{yd} + 73.5 \frac{12x_4 - 9x_2 + 6d'}{7x_4 - 3x_2} \right) \\ &+ \frac{1}{20} \lambda_2 \cdot (x_2 - 2d') \cdot \left(3f_{yd} - 73.5 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_4} F &= \frac{1}{5} \lambda_1 \cdot x_3 \cdot \left(\frac{882}{7x_4 - 3x_2} - 514.5 \frac{12x_4 - 9x_2 + 6d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \\ &+ \frac{1}{20} \lambda_2 \cdot (x_2 - 2d') \cdot x_3 \left(\frac{-882}{7x_4 - 3x_2} + 514.5 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) - \mu_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} F = c_4 \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{x_3}{5} \left(73.5 \frac{12x_4 - 9x_2 + 6d'}{7x_4 - 3x_2} + 2f_{yd} \right) - N_d = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2} F = \frac{x_3}{20} (x_2 - 2d') \cdot \left(3f_{yd} - 73.5 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right) - M_d = 0$$

$$\mu_1 \cdot (1.25x_2 - x_4) = 0$$

A resolução analítica dos sistemas de equações da forma como ele esta apresentada se torna inexequível, uma vez que existem vários valores de x_2 que servem como solução do sistema. Pelo fato de uma solução iterativa gerar um esforço computacional muito grande e também pelo fato da variável x_2 variar, na prática, em um número reduzido de valores discretos, optou-se por trabalhar com valores fixos de x_2 e encontrar a solução analítica do sistema de equações encontrado após a retirada do termo derivado em função de x_2 . O processo para resolução ficou então, já incluindo a verificação das restrições laterais, da seguinte forma:

1. Faz-se x_2 variar entre os valores limites, com intervalo de variação definido pelo usuário;
2. Com x_2 fixo, encontram-se as demais variáveis de projeto;
3. Verificam-se se as variáveis estão dentro dos limites estabelecidos e, caso os mesmos sejam ultrapassados, fixa-se o valor limite retirando a variável da otimização e retornando ao passo 2;
4. Caso todas as variáveis estejam minimizadas e dentro dos limites, calcula-se o custo da seção minimizada e compara-se com o custo encontrado para a seção com o valor mínimo encontrado até o momento.
5. Se o custo da seção for menor, esta passa a ser a seção ótima;
6. Dá-se um novo incremento em x_2 e reinicia o processo.

O fluxograma do processo de otimização descrito acima, para um valor de x_2 fixo encontra-se descrito na figura 8.5.

Para a resolução, conforme mencionado no fluxograma da figura 8.5, são utilizadas quatro hipóteses, cujas soluções serão apresentadas a seguir.

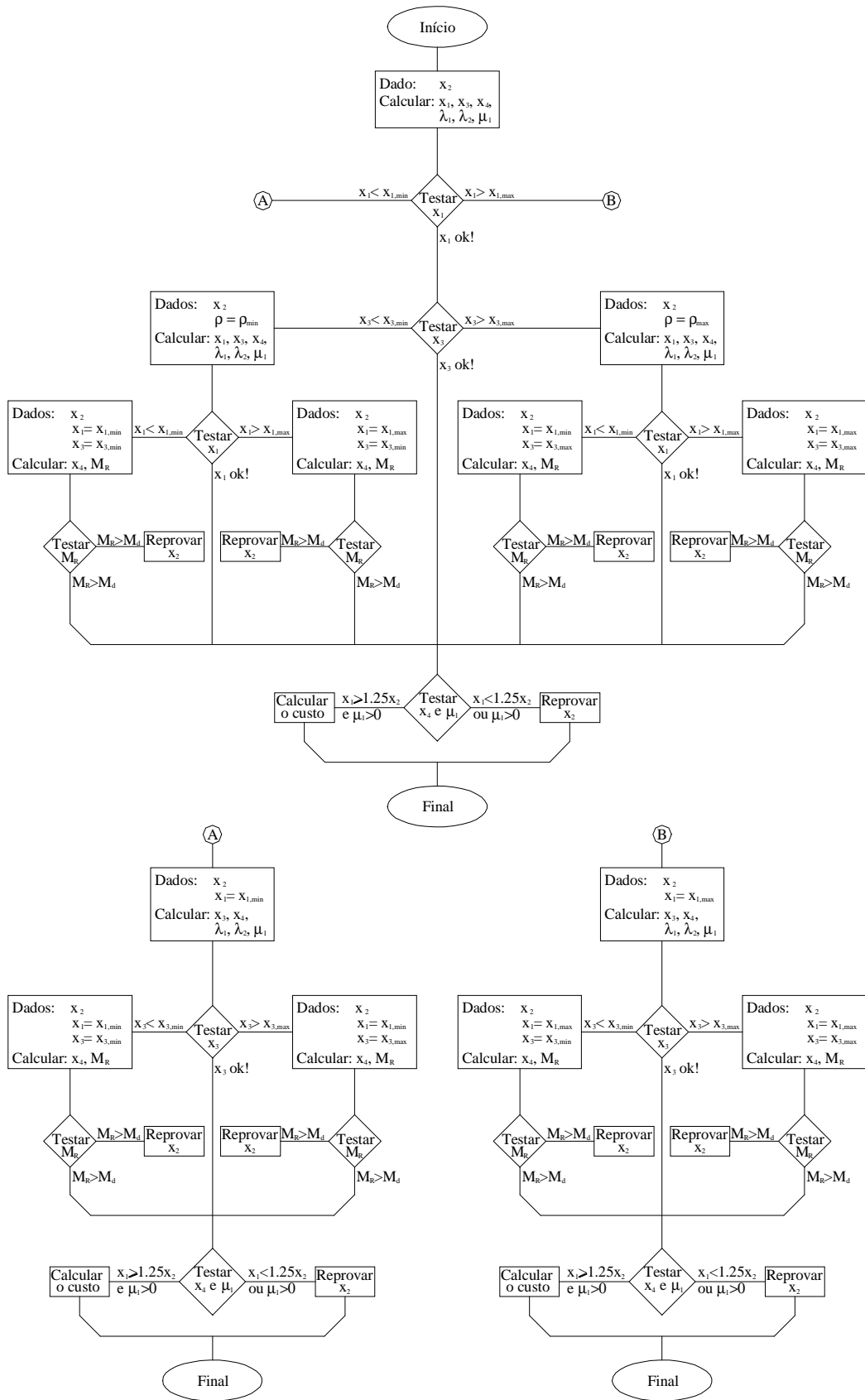


Figura 8.5 - Fluxograma de resolução para o valor de x_2 definido

8.7.1. Hipótese A: x_2 fixo, x_1 e x_3 livres

Para esta hipótese, é utilizado o sistema formado pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial x_3} = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial x_4} = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial \lambda_1} = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial \lambda_2} = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial \mu_1} = 0 \therefore \mu_1(1.25x_2 - x_4) = 0$$

A solução para esta hipótese fica, então

Situação 01:

$$x_4 = 1.25x_2$$

$$x_3 = \frac{4 \cdot M_d}{(x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right)}$$

$$x_1 = \frac{N_d - \frac{x_3}{2} \left(294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} + f_{yd} \right)}{c_4 \cdot x_2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-(c_1 \cdot x_2 + c_3)}{c_4 \cdot x_2} \tag{8.25}$$

$$\lambda_2 = -4 \cdot \frac{\left[c_2 + 0.5\lambda_1 \cdot \left(f_{yd} + 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right) \right]}{(x_2 - 2d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right)}$$

$$\mu_1 = 0.25 \cdot x_3 \cdot \left(\frac{294}{7x_4 - 3x_2} - 2058 \frac{x_4 - x_2 + d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \cdot [\lambda_2 \cdot (x_2 - 2d') - 2\lambda_1]$$

Situação 02:

$$x_4 = 1.25x_2$$

$$x_3 = \frac{6 \cdot M_d}{(x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right)}$$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \frac{N_d - \frac{x_3}{3} \left(147 \frac{4x_4 - 3x_2 + 2d'}{7x_4 - 3x_2} + f_{yd} \right)}{c_4 \cdot x_2} \\
 \lambda_1 &= \frac{-(c_1 \cdot x_2 + c_3)}{c_4 \cdot x_2} \\
 \lambda_2 &= -6 \cdot \frac{\left[c_2 + \frac{\lambda_1}{3} \cdot \left(f_{yd} + 147 \frac{4x_4 - 3x_2 + 2d'}{7x_4 - 3x_2} \right) \right]}{(x_2 - 2d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right)} \\
 \mu_1 &= \frac{x_3}{6} \cdot \left[2 \cdot \lambda_1 \cdot \left(\frac{588}{7x_4 - 3x_2} - 1029 \frac{4x_4 - 3x_2 + 2d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_2 \cdot (x_2 - 2d') \cdot \left(\frac{-294}{7x_4 - 3x_2} + 2058 \frac{x_4 - x_2 + d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{8.26}$$

Situação 03:

$$\begin{aligned}
 x_4 &= 1.25x_2 \\
 x_3 &= \frac{12 \cdot M_d}{(x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(2f_{yd} - 49 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right)} \\
 x_1 &= \frac{N_d - \frac{x_3}{2} \left(49 \frac{6x_4 - 5x_2 + 4d'}{7x_4 - 3x_2} + f_{yd} \right)}{c_4 \cdot x_2} \\
 \lambda_1 &= \frac{-(c_1 \cdot x_2 + c_3)}{c_4 \cdot x_2} \\
 \lambda_2 &= -12 \cdot \frac{\left[c_2 + \frac{\lambda_1}{2} \cdot \left(f_{yd} + 49 \frac{6x_4 - 5x_2 + 4d'}{7x_4 - 3x_2} \right) \right]}{(x_2 - 2d') \cdot \left(2f_{yd} - 49 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right)}
 \end{aligned} \tag{8.27}$$

$$\mu_1 = \frac{x_3}{12} \cdot \left[6 \cdot \lambda_1 \cdot \left(\frac{294}{7x_4 - 3x_2} - 343 \frac{6x_4 - 5x_2 + 4d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) + \lambda_2 \cdot (x_2 - 2d') \cdot \left(\frac{-588}{7x_4 - 3x_2} + 343 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \right]$$

Situação 04:

$$x_4 = 1.25x_2$$

$$x_3 = \frac{20 \cdot M_d}{(x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(3f_{yd} - 73.5 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right)}$$

$$x_1 = \frac{N_d - \frac{x_3}{5} \left(73.5 \frac{12x_4 - 9x_2 + 6d'}{7x_4 - 3x_2} + 2f_{yd} \right)}{c_4 \cdot x_2}$$

$$\lambda_1 = \frac{-(c_1 \cdot x_2 + c_3)}{c_4 \cdot x_2} \quad (8.28)$$

$$\lambda_2 = -20 \cdot \frac{\left[c_2 + \frac{\lambda_1}{5} \cdot \left(2f_{yd} + 73.5 \frac{12x_4 - 9x_2 + 6d'}{7x_4 - 3x_2} \right) \right]}{(x_2 - 2d') \cdot \left(3f_{yd} - 73.5 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right)}$$

$$\mu_1 = \frac{x_3}{20} \cdot \left[4 \cdot \lambda_1 \cdot \left(\frac{882}{7x_4 - 3x_2} - 514.5 \frac{12x_4 - 9x_2 + 6d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) + \lambda_2 \cdot (x_2 - 2d') \cdot \left(\frac{-882}{7x_4 - 3x_2} + 514.5 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{(7x_4 - 3x_2)^2} \right) \right]$$

8.7.2. Hipótese B: x_1 e x_2 fixos, x_3 livre

Para esta hipótese, é utilizado o sistema formado pelas seguintes equações:

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial x_4} = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial \lambda_1} = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial \lambda_2} = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial \mu_1} = 0 \therefore \mu_1 (1.25x_2 - x_4) = 0$$

A solução para esta hipótese fica, então

Situação 01:

$$x_4 = \frac{F_{b1} + F_{b2} + F_{b3}}{F_{b4} + F_{b5} + F_{b6}},$$

onde:

$$F_{b1} = c_4 \cdot x_1 \cdot (3 \cdot f_{yd} \cdot x_2^3 - 6 \cdot f_{yd} \cdot d' \cdot x_2^2 - 294 \cdot x_2^3 + 882 \cdot x_2^2 \cdot d' - 588 \cdot x_2 \cdot d'^2)$$

$$F_{b2} = N_d \cdot (294 \cdot x_2^2 - 882 \cdot x_2 \cdot d' + 588 \cdot d'^2 - 3 \cdot f_{yd} \cdot x_2^2 + 6 \cdot f_{yd} \cdot d' \cdot x_2)$$

$$F_{b3} = M_d \cdot (588 \cdot x_2 - 588 \cdot d' + 6 \cdot f_{yd} \cdot x_2)$$

$$F_{b4} = c_4 \cdot x_1 \cdot (7 \cdot f_{yd} \cdot x_2^2 - 14 \cdot f_{yd} \cdot d' \cdot x_2 - 294 \cdot x_2^2 + 588 \cdot x_2 \cdot d')$$

$$F_{b5} = N_d \cdot (294 \cdot x_2 - 588 \cdot d' - 7 \cdot f_{yd} \cdot x_2 + 14 \cdot f_{yd} \cdot d')$$

$$F_{b6} = M_d \cdot (588 + 14 \cdot f_{yd})$$

$$x_3 = \frac{4 \cdot M_d}{(x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right)} \quad (8.29)$$

$$\lambda_1 = -\frac{c_2}{f_{yd}}$$

$$\lambda_2 = -4 \cdot \frac{\left[c_2 + 0.5\lambda_1 \cdot \left(f_{yd} + 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right) \right]}{(x_2 - 2d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right)}$$

$$\mu_1 = 0$$

Situação 02:

$$x_4 = \frac{3}{7} \cdot \frac{F_{b1} + F_{b2} + F_{b3}}{F_{b4} + F_{b5} + F_{b6}},$$

onde:

$$F_{b1} = c_4 \cdot x_1 \cdot (f_{yd} \cdot x_2^3 - 2 \cdot f_{yd} \cdot d' \cdot x_2^2 - 98 \cdot x_2^3 + 294 \cdot x_2^2 \cdot d' - 196 \cdot x_2 \cdot d'^2)$$

$$\begin{aligned}
 F_{b2} &= N_d \cdot (98 \cdot x_2^2 - 294 \cdot x_2 \cdot d' + 196 \cdot d'^2 - f_{yd} \cdot x_2^2 + 2 \cdot f_{yd} \cdot d' \cdot x_2) \\
 F_{b3} &= M_d \cdot (294 \cdot x_2 - 196 \cdot d' + 2 \cdot f_{yd} \cdot x_2) \\
 F_{b4} &= c_4 \cdot x_1 \cdot (f_{yd} \cdot x_2^2 - 2 \cdot f_{yd} \cdot d' \cdot x_2 - 42 \cdot x_2^2 + 84 \cdot x_2 \cdot d') \\
 F_{b5} &= N_d \cdot (42 \cdot x_2 - 84 \cdot d' - f_{yd} \cdot x_2 + 2 \cdot f_{yd} \cdot d') \\
 F_{b6} &= M_d \cdot (168 + 2 \cdot f_{yd}) \\
 x_3 &= \frac{6 \cdot M_d}{(x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right)} \quad (8.30) \\
 \lambda_1 &= 6 \cdot c_2 \frac{4x_2 - 7d'}{28 \cdot f_{yd} \cdot d' + 588 \cdot d' - 294 \cdot x_2 - 17 \cdot f_{yd} \cdot x_2} \\
 \lambda_2 &= -6 \cdot \frac{\left[c_2 + \frac{\lambda_1}{3} \cdot \left(f_{yd} + 147 \frac{4x_4 - 3x_2 + 2d'}{7x_4 - 3x_2} \right) \right]}{(x_2 - 2d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right)}
 \end{aligned}$$

$$\mu_1 = 0$$

Situação 03:

$$x_4 = \frac{1}{14} \cdot \frac{F_{b1} + F_{b2} + F_{b3}}{F_{b4} + F_{b5} + F_{b6}},$$

onde:

$$\begin{aligned}
 F_{b1} &= c_4 \cdot x_1 \cdot (6 \cdot f_{yd} \cdot x_2^3 - 12 \cdot f_{yd} \cdot d' \cdot x_2^2 - 539 \cdot x_2^3 + 1568 \cdot x_2^2 \cdot d' - 980 \cdot x_2 \cdot d'^2) \\
 F_{b2} &= N_d \cdot (539 \cdot x_2^2 - 1568 \cdot x_2 \cdot d' + 980 \cdot d'^2 - 6 \cdot f_{yd} \cdot x_2^2 + 12 \cdot f_{yd} \cdot d' \cdot x_2) \\
 F_{b3} &= M_d \cdot (1470 \cdot x_2 - 1176 \cdot d' + 18 \cdot f_{yd} \cdot x_2) \\
 F_{b4} &= c_4 \cdot x_1 \cdot (f_{yd} \cdot x_2^2 - 2 \cdot f_{yd} \cdot d' \cdot x_2 - 42 \cdot x_2^2 + 84 \cdot x_2 \cdot d') \\
 F_{b5} &= N_d \cdot (42 \cdot x_2 - 84 \cdot d' - f_{yd} \cdot x_2 + 2 \cdot f_{yd} \cdot d') \\
 F_{b6} &= M_d \cdot (126 + 3 \cdot f_{yd})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_3 &= \frac{12 \cdot M_d}{(x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(2f_{yd} - 49 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right)} & (8.31) \\
 \lambda_1 &= \frac{2}{3} \cdot c_2 \frac{41x_2 - 70d'}{42 \cdot f_{yd} \cdot d' + 196 \cdot d' - 98 \cdot x_2 - 25 \cdot f_{yd} \cdot x_2} \\
 \lambda_2 &= -12 \cdot \frac{\left[c_2 + \frac{\lambda_1}{2} \cdot \left(f_{yd} + 49 \frac{6x_4 - 5x_2 + 4d'}{7x_4 - 3x_2} \right) \right]}{(x_2 - 2d') \cdot \left(2f_{yd} - 49 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right)} \\
 \mu_1 &= 0
 \end{aligned}$$

Situação 04:

$$x_4 = \frac{F_{b1} + F_{b2} + F_{b3}}{F_{b4} + F_{b5} + F_{b6}},$$

onde:

$$\begin{aligned}
 F_{b1} &= c_4 \cdot x_1 \cdot (18 \cdot f_{yd} \cdot x_2^3 - 36 \cdot f_{yd} \cdot d' \cdot x_2^2 - 1617 \cdot x_2^3 + 4704 \cdot x_2^2 \cdot d' - 2940 \cdot x_2 \cdot d'^2) \\
 F_{b2} &= N_d \cdot (1617 \cdot x_2^2 - 4704 \cdot x_2 \cdot d' + 2940 \cdot d'^2 - 18 \cdot f_{yd} \cdot x_2^2 + 36 \cdot f_{yd} \cdot d' \cdot x_2) \\
 F_{b3} &= M_d \cdot (5292 \cdot x_2 - 3528 \cdot d' + 48 \cdot f_{yd} \cdot x_2) \\
 F_{b4} &= c_4 \cdot x_1 \cdot (42 \cdot f_{yd} \cdot x_2^2 - 84 \cdot f_{yd} \cdot d' \cdot x_2 - 1764 \cdot x_2^2 + 3528 \cdot x_2 \cdot d') \\
 F_{b5} &= N_d \cdot (1764 \cdot x_2 - 3528 \cdot d' - 42 \cdot f_{yd} \cdot x_2 + 84 \cdot f_{yd} \cdot d') \\
 F_{b6} &= M_d \cdot (7056 + 112 \cdot f_{yd})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_3 &= \frac{20 \cdot M_d}{(x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(3f_{yd} - 73.5 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right)} & (8.32) \\
 \lambda_1 &= 5 \cdot c_2 \frac{41x_2 - 70d'}{266 \cdot f_{yd} \cdot d' + 3528 \cdot d' - 1764 \cdot x_2 - 163 \cdot f_{yd} \cdot x_2} \\
 \lambda_2 &= -20 \cdot \frac{\left[c_2 + \frac{\lambda_1}{5} \cdot \left(2f_{yd} + 73.5 \frac{12x_4 - 9x_2 + 6d'}{7x_4 - 3x_2} \right) \right]}{(x_2 - 2d') \cdot \left(3f_{yd} - 73.5 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right)}
 \end{aligned}$$

$$\mu_1 = 0$$

8.7.3. Hipótese C: x_2 e ρ fixos, x_1 livre

Nesta hipótese seria utilizada a fixação da área de armadura. Porém, como esta área é função das variáveis x_1 e x_2 , e como a variável x_1 está livre, não podemos fixá-la, sendo então necessária a fixação da taxa geométrica de armadura ρ , e da inclusão no sistema de equações da relação entre estes. Assim, o sistema de equações fica com a forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial x_4} = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial \lambda_1} = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial \lambda_2} = 0 \therefore \frac{\partial}{\partial \mu_1} = 0 \therefore \mu_1 (1.25x_2 - x_4) = 0 \therefore x_3 - x_1 \cdot x_2 \cdot \rho = 0$$

A solução para esta hipótese fica, então

Situação 01:

$$x_4 = \frac{3}{7} \cdot \frac{F_{c1} + F_{c2}}{F_{c3} + F_{c4}},$$

onde:

$$F_{c1} = N_d \cdot \rho \cdot (98 \cdot x_2^2 - 294 \cdot x_2 \cdot d' + 196 \cdot d'^2 - f_{yd} \cdot x_2^2 + 2f_{yd} \cdot d' \cdot x_2)$$

$$F_{c2} = M_d \cdot (2 \cdot \rho \cdot f_{yd} \cdot x_2 - 196 \cdot \rho \cdot d' + 196 \cdot \rho \cdot x_2 + 4 \cdot c_4 \cdot x_2)$$

$$F_{c3} = N_d \cdot \rho \cdot (42 \cdot x_2 - 84 \cdot d' - f_{yd} \cdot x_2 + 2f_{yd} \cdot d')$$

$$F_{c4} = M_d \cdot (2 \cdot \rho \cdot f_{yd} + 84 \cdot \rho + 4 \cdot c_4)$$

$$x_1 = \frac{4 \cdot M_d}{\rho \cdot x_2 \cdot (x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right)} \quad (8.33)$$

$$x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot \rho$$

$$\lambda_1 = \frac{-(c_1 \cdot x_2 + c_3)}{c_4 \cdot x_2}$$

$$\lambda_2 = -4 \cdot \frac{\left[c_2 + 0.5\lambda_1 \cdot \left(f_{yd} + 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right) \right]}{(x_2 - 2d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right)}$$

$$\mu_1 = 0$$

Situação 02:

$$x_4 = \frac{3}{7} \cdot \frac{F_{c1} + F_{c2}}{F_{c3} + F_{c4}},$$

onde:

$$F_{c1} = N_d \cdot \rho \cdot (98 \cdot x_2^2 - 294 \cdot x_2 \cdot d' + 196 \cdot d'^2 - f_{yd} \cdot x_2^2 + 2f_{yd} \cdot d' \cdot x_2)$$

$$F_{c2} = M_d \cdot (2 \cdot \rho \cdot f_{yd} \cdot x_2 - 196 \cdot \rho \cdot d' + 294 \cdot \rho \cdot x_2 + 6 \cdot c_4 \cdot x_2)$$

$$F_{c3} = N_d \cdot \rho \cdot (42 \cdot x_2 - 84 \cdot d' - f_{yd} \cdot x_2 + 2f_{yd} \cdot d')$$

$$F_{c4} = M_d \cdot (2 \cdot \rho \cdot f_{yd} + 168 \cdot \rho + 6 \cdot c_4)$$

$$x_1 = \frac{6 \cdot M_d}{\rho \cdot x_2 \cdot (x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right)} \quad (8.34)$$

$$x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot \rho$$

$$\lambda_1 = \frac{-(c_1 \cdot x_2 + c_3)}{c_4 \cdot x_2}$$

$$\lambda_2 = -6 \cdot \frac{\left[c_2 + \frac{\lambda_1}{3} \cdot \left(f_{yd} + 147 \frac{4x_4 - 3x_2 + 2d'}{7x_4 - 3x_2} \right) \right]}{(x_2 - 2d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right)}$$

$$\mu_1 = 0$$

Situação 03:

$$x_4 = \frac{1}{14} \cdot \frac{F_{c1} + F_{c2}}{F_{c3} + F_{c4}},$$

onde:

$$\begin{aligned}
 F_{c1} &= N_d \cdot \rho \cdot (539 \cdot x_2^2 - 1568 \cdot x_2 \cdot d' + 980 \cdot d'^2 - 6 \cdot f_{yd} \cdot x_2^2 + 12 f_{yd} \cdot d' \cdot x_2) \\
 F_{c2} &= M_d \cdot (18 \cdot \rho \cdot f_{yd} \cdot x_2 - 1176 \cdot \rho \cdot d' + 1470 \cdot \rho \cdot x_2 + 36 \cdot c_4 \cdot x_2) \\
 F_{c3} &= N_d \cdot \rho \cdot (42 \cdot x_2 - 84 \cdot d' - f_{yd} \cdot x_2 + 2 f_{yd} \cdot d') \\
 F_{c4} &= M_d \cdot (3 \cdot \rho \cdot f_{yd} + 126 \cdot \rho + 6 \cdot c_4) \\
 x_1 &= \frac{12 \cdot M_d}{\rho \cdot x_2 \cdot (x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(2 f_{yd} - 49 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right)} \quad (8.35)
 \end{aligned}$$

$$x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot \rho$$

$$\lambda_1 = \frac{-(c_1 \cdot x_2 + c_3)}{c_4 \cdot x_2}$$

$$\lambda_2 = -12 \cdot \frac{\left[c_2 + \frac{\lambda_1}{2} \cdot \left(f_{yd} + 49 \frac{6x_4 - 5x_2 + 4d'}{7x_4 - 3x_2} \right) \right]}{(x_2 - 2d') \cdot \left(2 f_{yd} - 49 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right)}$$

$$\mu_1 = 0$$

Situação 04:

$$x_4 = \frac{3}{14} \cdot \frac{F_{c1} + F_{c2}}{F_{c3} + F_{c4}},$$

onde:

$$\begin{aligned}
 F_{c1} &= N_d \cdot \rho \cdot (539 \cdot x_2^2 - 1568 \cdot x_2 \cdot d' + 980 \cdot d'^2 - 6 \cdot f_{yd} \cdot x_2^2 + 12 f_{yd} \cdot d' \cdot x_2) \\
 F_{c2} &= M_d \cdot (16 \cdot \rho \cdot f_{yd} \cdot x_2 - 1176 \cdot \rho \cdot d' + 1764 \cdot \rho \cdot x_2 + 40 \cdot c_4 \cdot x_2) \\
 F_{c3} &= N_d \cdot \rho \cdot (126 \cdot x_2 - 252 \cdot d' - 3 \cdot f_{yd} \cdot x_2 + 6 f_{yd} \cdot d') \\
 F_{c4} &= M_d \cdot (8 \cdot \rho \cdot f_{yd} + 504 \cdot \rho + 20 \cdot c_4) \\
 x_1 &= \frac{20 \cdot M_d}{\rho \cdot x_2 \cdot (x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(3 f_{yd} - 73.5 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right)} \quad (8.36)
 \end{aligned}$$

$$x_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot \rho$$

$$\lambda_1 = \frac{-(c_1 \cdot x_2 + c_3)}{c_4 \cdot x_2}$$

$$\lambda_2 = -20 \cdot \frac{\left[c_2 + \frac{\lambda_1}{5} \cdot \left(2f_{yd} + 73.5 \frac{12x_4 - 9x_2 + 6d'}{7x_4 - 3x_2} \right) \right]}{(x_2 - 2d') \cdot \left(3f_{yd} - 73.5 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right)}$$

$$\mu_1 = 0$$

8.7.4. Hipótese D: x_1 , x_2 e x_3 fixos

Nesta hipótese, como três das quatro variáveis estão fixas, e como a variável x_4 é função dessas três, não existe otimização. Apenas a verificação se a seção e área de aço adotadas resiste aos esforços solicitantes. Desta forma, utilizando a restrição de equilíbrio em esforço normal, retira-se o valor da variável x_4 . Este valor é então utilizado para calcular o momento resistente M_R , e este é comparado com o momento solicitante M_d . Caso M_R seja maior ou igual a M_d significa que a seção encontrada é viável.

A solução para esta hipótese fica, então

Situação 01:

$$x_4 = \frac{51 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2^2 + 2940 \cdot x_2 \cdot x_3 - 2940 \cdot x_3 \cdot d' + 30 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f_{yd} - 60 \cdot N_d \cdot x_2}{119 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + 2940 \cdot x_3 + 70 \cdot x_3 \cdot f_{yd} - 140 \cdot N_d} \quad (8.37)$$

$$M_R = \frac{x_3}{4} (x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right)$$

Situação 02:

$$x_4 = \frac{51 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2^2 + 2940 \cdot x_2 \cdot x_3 - 1960 \cdot x_3 \cdot d' + 20 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f_{yd} - 60 \cdot N_d \cdot x_2}{119 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + 3920 \cdot x_3 + 46.6 \cdot x_3 \cdot f_{yd} - 140 \cdot N_d} \quad (8.38)$$

$$M_R = \frac{x_3}{6} (x_2 - 2 \cdot d') \cdot \left(f_{yd} - 294 \frac{x_4 - x_2 + d'}{7x_4 - 3x_2} \right)$$

Situação 03:

$$x_4 = \frac{51 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2^2 + 2450 \cdot x_2 \cdot x_3 - 1960 \cdot x_3 \cdot d' + 30 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f_{yd} - 60 \cdot N_d \cdot x_2}{119 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + 2940 \cdot x_3 + 70 \cdot x_3 \cdot f_{yd} - 140 \cdot N_d} \quad (8.39)$$

$$M_R = \frac{x_3}{24} (x_2 - 2d') \cdot \left(4f_{yd} - 98 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right)$$

Situação 04:

$$x_4 = \frac{51 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2^2 + 2646 \cdot x_2 \cdot x_3 - 1764 \cdot x_3 \cdot d' + 24 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot f_{yd} - 60 \cdot N_d \cdot x_2}{119 \cdot f_{cd} \cdot x_1 \cdot x_2 + 3528 \cdot x_3 + 56 \cdot x_3 \cdot f_{yd} - 140 \cdot N_d} \quad (8.40)$$

$$M_R = \frac{x_3}{20} (x_2 - 2d') \cdot \left(3f_{yd} - 73.5 \frac{12x_4 - 11x_2 + 10d'}{7x_4 - 3x_2} \right)$$

8.8. Exemplos numéricos

Para exemplificar o processo de otimização e verificar o comportamento da função de custo e das variáveis, foram executadas três séries de otimização, considerando excentricidades atuando na direção de h, de respectivamente 1, 2 e 3 cm. Para todas elas utilizou-se os seguintes dados:

Resistências características dos materiais:

$$f_{ck} = 20 \text{ MPa} \Rightarrow f_{cd} = 1,428 \text{ kN/cm}^2$$

$$f_{yk} = 500 \text{ MPa} \Rightarrow f_{yd} = 43,48 \text{ kN/cm}^2$$

Custos dos materiais (Revista Construção e Mercado, março de 2003):

Custo do concreto: R\$ 228,39 / m³;

Custo do aço: R\$ 2,73 / kg;

Custo da forma: R\$ 31,58 / m².

Valores limites das variáveis:

$$20\text{cm} \leq x_1 \leq 40\text{cm}$$

$$20\text{cm} \leq x_2 \leq 160\text{cm}$$

$$0.004 \leq \rho \leq 0.04$$

Incremento de h: 1cm

Utilizou-se como limites da força normal os valores de 2.000 kN e 10.000 kN, e incrementos de 200 kN. Alguns dos resultados obtidos encontram-se nas tabelas 8.1 a 8.3, e os resultados completos das séries encontram-se plotados nos gráfico 8.1 a 8.3.

Seção	Nd (kN)	Md (kN.cm)	b (cm)	h (cm)	As (cm ²)	X (cm)	Custo (R\$/m)
1	2,000	2,000.00	35.00	40.00	9.77	50.00	99.36
2	3,000	3,000.00	34.57	62.00	12.17	77.50	134.87
3	4,000	4,000.00	39.81	74.00	13.02	92.50	165.83
4	5,000	5,000.00	39.44	94.00	14.83	121.35	199.33
5	6,000	6,000.00	40.00	111.00	17.76	152.32	233.14
6	7,000	7,000.00	40.00	129.00	20.64	197.05	266.85
7	8,000	8,000.00	40.00	147.00	23.52	252.22	300.56
8	9,000	9,000.00	40.00	160.00	32.08	358.61	338.15
9	10,000	10,000.00	40.00	160.00	55.64	558.89	386.42

Tabela 8.1 - Resultados obtidos para excentricidade de 1 cm

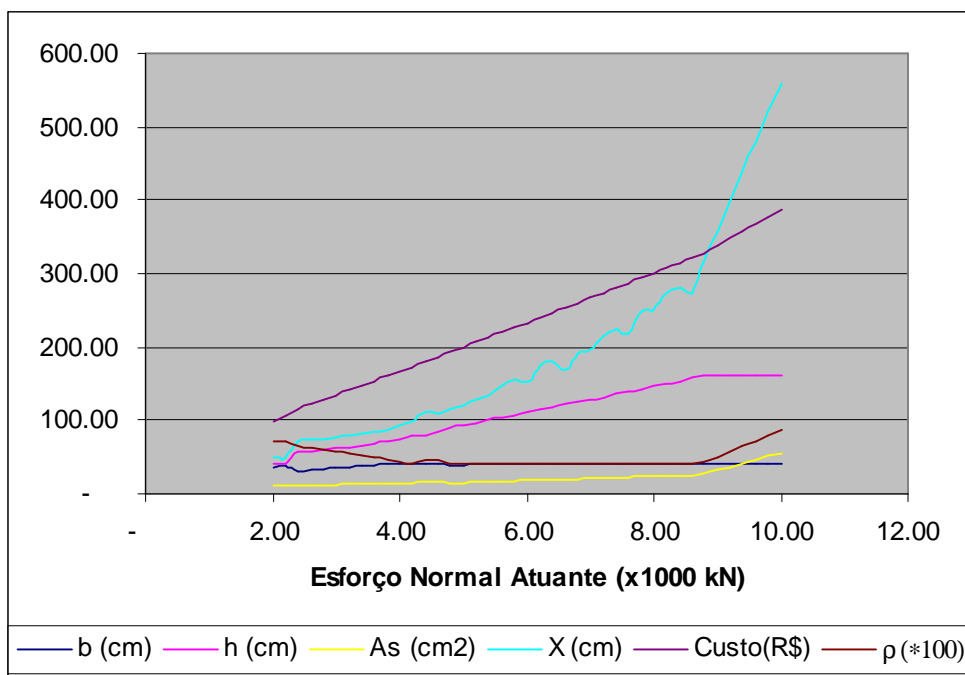


Gráfico 8.1 - Resultados obtidos para excentricidade de 1 cm

Seção	Nd (kN)	Md (kN.cm)	b (cm)	h (cm)	As (cm ²)	X (cm)	Custo (R\$/m)
1	2,000	4,000.00	28.83	40.00	19.55	50.00	109.83
2	3,000	6,000.00	26.57	73.00	19.86	91.25	147.84
3	4,000	8,000.00	33.28	80.00	23.69	100.00	180.86
4	5,000	10,000.00	40.00	80.00	33.22	108.50	216.89
5	6,000	12,000.00	40.00	102.00	31.47	129.04	247.30
6	7,000	14,000.00	39.92	122.00	32.70	152.50	280.44
7	8,000	16,000.00	39.86	144.00	31.06	180.00	310.82
8	9,000	18,000.00	40.00	160.00	35.71	220.77	345.60
9	10,000	20,000.00	40.00	160.00	59.67	306.06	394.67

Tabela 8.2 - Resultados obtidos para excentricidade de 2 cm

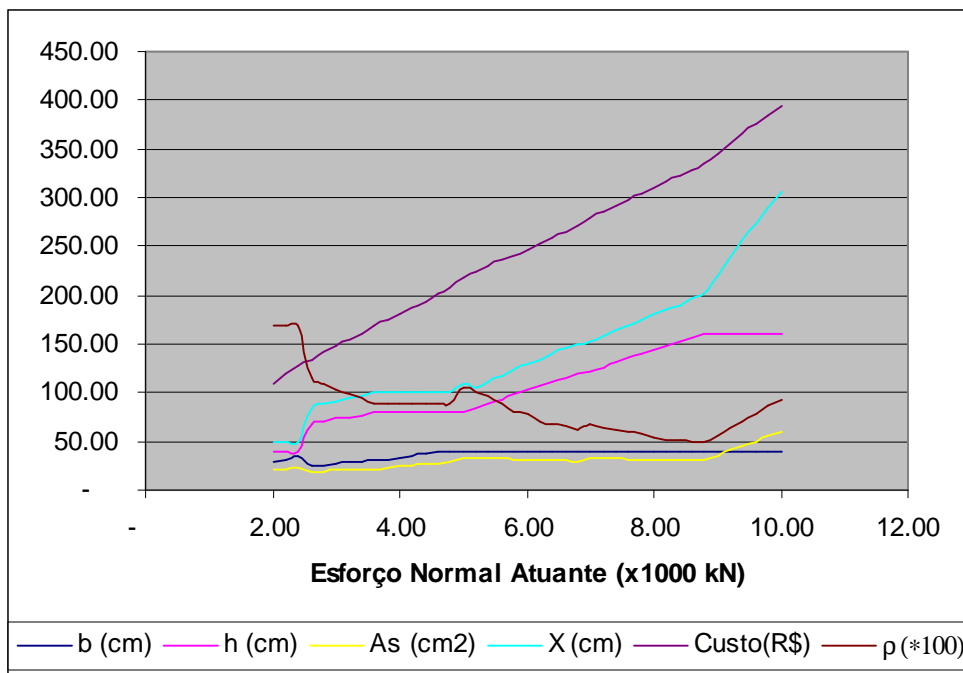


Gráfico 8.2 - Resultados obtidos para excentricidade de 2 cm

Através da observação dos resultados das tabelas, podemos notar que a restrição de desigualdade para garantir a seção totalmente comprimida ($x = 1,25h$) está ativa para os valores de esforço normal mais baixos. Isso comprova a nossa hipótese que este domínio é mais indicado para valores de carregamentos mais altos, sendo válido para a nossa situação, onde esta se estudando a seção na base do pilar do edifício. Podemos ver também a influência do aumento da excentricidade comparando as três tabelas. Nas tabelas 8.1 e 8.2 a restrição se manteve ativa até o valor de esforço normal de 4.000,00 kN. Já na tabela 8.3, ela se manteve ativa para quase todos os valores estudados,

comprovando que este domínio não é o mais adequado quando trabalhamos com excentricidades mais elevadas.

Seção	Nd (kN)	Md (kN.cm)	b (cm)	h (cm)	As (cm ²)	X (cm)	Custo (R\$/m)
1	2,000	6,000.00	22.65	40.00	29.32	50.00	120.30
2	3,000	9,000.00	22.00	80.00	26.65	100.00	159.18
3	4,000	12,000.00	29.33	80.00	35.54	100.00	195.40
4	5,000	15,000.00	36.66	80.00	44.42	100.00	231.62
5	6,000	18,000.00	30.74	124.00	41.28	155.00	269.31
6	7,000	21,000.00	40.00	110.00	50.07	138.33	297.74
7	8,000	24,000.00	37.11	143.00	46.95	178.75	331.07
8	9,000	27,000.00	39.90	152.00	49.38	190.00	360.81
9	10,000	30,000.00	40.00	160.00	63.70	232.31	402.92

Tabela 8.3 - Resultados obtidos para excentricidade de 3 cm

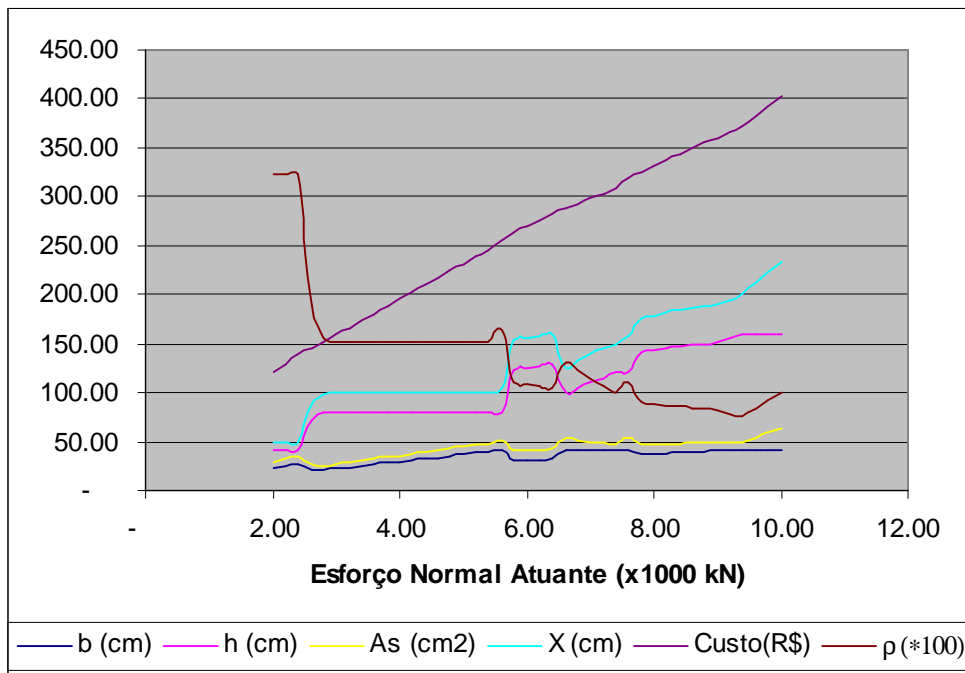


Gráfico 8.3 - Resultados obtidos para excentricidade de 3 cm

Pode-se verificar nas três séries de exemplos que a taxa de armadura tende a se manter em um valor mínimo possível enquanto não é atingido o limite máximo das dimensões da seção de concreto, sendo este mínimo limitado pelas restrições ativas. Nos casos em que não existe nenhuma restrição de desigualdade ou lateral ativa, a taxa de armadura que leva a uma seção ótima é a taxa mínima, como pode ser verificado no

exemplo 01, no trecho que possui apenas a restrição de uma das dimensões máxima ativa. Este fato pode ser explicado considerando que, para o domínio 05, considerado no presente trabalho, e pelos arranjos simétricos utilizados para a armadura, é grande a quantidade de armadura colocada em posição em que ela é sub-utilizada. Assim, à medida que se aumenta a área de aço utilizada, aumenta-se também a quantidade de material que não está com uma utilização otimizada, não podendo desta forma levar a uma seção econômica. Esta perda de economia pode ser bem verificada nos gráficos 8.1 e 8.2, pelo sensível aumento da inclinação da curva da função de custo no momento em que as dimensões da seção atingem seus valores máximos e o aumento dos esforços passa a ser resistido apenas com um aumento da taxa de armadura.

8.9. Verificação numérica da consistência dos resultados

Por definição, a seção otimizada é aquela que apresenta o menor valor para a função objetivo, no caso o menor custo por metro linear de pilar, atendendo às restrições impostas no problema. Assim, para verificar a consistência dos resultados obtidos, foram tirados três seções otimizadas pelo programa e feita uma pequena variação para baixo e para cima nos valores das variáveis de projeto, a fim de verificar o que acontece com as restrições e o custo da seção. Esta variação adotada foi a de um nível de incremento para a altura da seção e de 1% para a largura e a área de armadura. Nestes exemplos, o momento fletor foi considerado atuando na direção de h . Os resultados encontrados podem ser verificados na tabela 8.4.

Pode-se verificar pelos dados da tabela 8.4 que, sempre que os valores das variáveis de projeto ficam abaixo do valor ótimo obtido, o esforço normal resistente da seção é menor que o esforço atuante, logo não conduz a uma seção viável. Por outro lado, sempre que o valor da variável é aumentado, o custo fica acima do custo ótimo. Desta forma, podemos provar numericamente que o ponto solução encontrado é um ponto de mínimo custo para a seção.

Seção	Descrição	b (cm)	h (cm)	As (cm ²)	Nr (kN)	Mr (kN.cm)	Custo (R\$/m)
1 Nd=3000 Md=5000	Resultado ótimo	28.92	69.00	17.74	3,000.00	5,000.00	143.74
	h < h ótimo	28.92	68.00	17.74	2,968.95	4,808.45	142.44
	h > h ótimo	28.92	70.00	17.74	3,030.88	5,196.69	145.03
	b < b ótimo	28.63	69.00	17.74	2,975.56	4,999.88	143.09
	b > b ótimo	29.20	69.00	17.74	3,023.32	4,999.88	144.35
	As < As ótimo	28.92	69.00	17.56	2,994.29	4,950.82	143.37
	As > As ótimo	28.92	69.00	17.92	3,005.67	5,049.50	144.09
2 Nd=5000 Md=3000	Resultado ótimo	40.00	91.00	15.46	5,000.00	3,000.00	197.36
	h < h ótimo	40.00	90.00	15.46	4,952.62	2,924.13	195.98
	h > h ótimo	40.00	92.00	15.46	5,047.35	3,076.93	199.07
	b < b ótimo	39.60	91.00	15.46	4,995.85	3,000.30	196.44
	b > b ótimo	40.40	91.00	15.46	5,044.26	3,000.30	198.61
	As < As ótimo	40.00	91.00	15.30	4,994.05	2,969.25	197.20
	As > As ótimo	40.00	91.00	15.61	5,005.68	3,029.42	197.83
3 Nd=8000 Md=8000	Resultado ótimo	40.00	147.00	23.52	8,000.00	8,172.11	300.56
	h < h ótimo	40.00	146.00	23.52	7,952.75	8,043.98	299.01
	h > h ótimo	40.00	148.00	23.52	8,047.24	8,301.56	302.11
	b < b ótimo	36.60	147.00	23.52	7,928.60	8,172.11	298.96
	b > b ótimo	40.40	147.00	23.52	8,071.40	8,172.11	302.15
	As < As ótimo	40.00	147.00	23.28	7,991.23	8,088.72	300.07
	As > As ótimo	40.00	147.00	23.75	8,008.41	8,252.03	301.03

Tabela 8.4 - Resultados obtidos variando-se os valores das variáveis de projeto da seção ótima

8.10. Verificação da variação do custo com a mudança de arranjo das armaduras

Para verificar o que acontece com o custo do pilar com a mudança do arranjo da armadura, foram feitas otimizações para três seções com a mesma solicitação, utilizando as quatro configurações adotadas neste trabalho, denominadas situações 01 a 04. Os resultados encontrados estão apresentados na tabela 8.5.

Seção	Nd (kN)	Md (kN.cm)	Situação	b (cm)	h (cm)	As (cm ²)	X (cm)	Custo (R\$/m)
1	3,000.00	5,000.00	1	33.22	65.00	12.74	81.25	137.42
			2	28.92	69.00	17.73	86.25	143.74
			3	27.13	71.00	19.81	88.75	146.55
			4	25.79	73.00	21.28	91.25	148.95
2	5,000.00	3,000.00	1	40.00	91.00	15.00	286.10	196.59
			2	40.00	91.00	15.38	198.70	197.36
			3	40.00	91.00	15.46	176.48	197.53
			4	40.00	92.00	14.72	146.51	197.56
3	8,000.00	8,000.00	1	40.00	146.00	23.56	461.50	299.11
			2	40.00	146.00	24.15	320.71	300.31
			3	40.00	147.00	23.52	256.30	300.56
			4	40.00	147.00	23.52	252.22	300.56

Tabela 8.5 - Resultados obtidos para os diferentes arranjos de armadura

Os resultados apresentados na tabela 8.5 indicam que à medida que se aumenta o número de camadas de armadura, a seção fica mais cara. Esse fato era de se esperar, uma vez que, quanto maior o número de camadas, maior a percentagem de área de armadura trabalhando com níveis de solicitação mais baixo, gerando, portanto, um subaproveitamento da armadura da seção, o que, conseqüentemente, produzirá um custo maior, pela necessidade do aumento da área da seção ou aumento da quantidade de armadura utilizada. Embora isso tenha ocorrido, a utilização destes arranjos diferentes é necessária para garantir o atendimento à NBR 6118 que exige um espaçamento máximo entre barras longitudinais de 40 cm.

9. Solução aplicada às seções transversais de pórticos planos

A otimização de uma estrutura pode ser dividida, segundo KIRSCH (1993), em três classes de aproximação: a aproximação global, onde a estrutura é analisada como um todo, sendo a função objetivo formulada para todos os pontos da estrutura e, dessa forma, seus resultados são válidos em todos os pontos espaciais; a aproximação local, onde as funções objetivo e as restrições são definidas para trechos isolados da estrutura, garantindo um resultado bastante eficiente para os trechos estudados podendo, porém, não gerar resultados satisfatórios para a estrutura global; e a aproximação combinada, que vem para preencher essa dificuldade da aproximação local, transpondo os resultados encontrados com as aproximações locais para toda a estrutura de forma a garantir um resultado com qualidades globais, utilizando aproximações locais.

A utilização de combinações globais tende a gerar um esforço computacional muito maior, especialmente em casos como o do presente trabalho onde, pelo material heterogêneo utilizado, e pela utilização de dois elementos com comportamentos estruturais diferentes, o número de variáveis envolvidas no processo se torna muito elevado. Dessa forma, optou-se em utilizar, neste trabalho, uma aproximação combinada, onde a otimização da estrutura se processa localmente através da otimização de seções transversais de cada elemento estrutural. A qualidade global dos resultados será buscada através de um processo iterativo onde, após a definição das dimensões ótimas para os pilares e as vigas, a estrutura é reprocessada, e novamente otimizada. Esse processo é repetido até que não haja mais uma redistribuição significativa dos

esforços na estrutura. Com este procedimento aproximado, espera-se que seja atingida uma qualidade de otimização próxima a que seria atingida caso fosse utilizado um procedimento de otimização global.

9.1. Procedimentos para a solução do problema

Neste subitem será descrito o procedimento geral utilizado pelo programa para se atingir a otimização do pórtico plano.

9.1.1. Determinação dos dados de entrada e demais dados necessários aos procedimentos a serem executados:

Nessa etapa serão informados ao programa todos os dados necessários ao seu processamento, como: forma da estrutura, carregamentos atuantes, valores limites para dimensões dos elementos, deformações, erros, número de iterações, etc. Deverão ser indicados também nesta etapa, os elementos que ficarão de fora do processo de otimização, com suas dimensões já definidas e um valor inicial para os elementos a serem otimizados. Este valor inicial será utilizado para a determinação das características dos elementos e do peso próprio da estrutura no primeiro passo de determinação da dimensão ótima. Essas características serão atualizadas após cada iteração, realimentando o processo com as novas características geométricas e com o novo carregamento da estrutura para a determinação do passo seguinte.

9.1.2. Determinação dos esforços atuantes na estrutura:

Nesta etapa serão definidos os deslocamentos na estrutura através da solução do sistema de equações linear $\{F\} = [K] \{u\}$.

A matriz de rigidez da estrutura $[K]$ é obtida através da contribuição das matrizes de rigidez dos elementos de barra. Cada valor da matriz de rigidez de cada elemento, correspondente a uma coordenada deste elemento, é alocado na posição relativa àquela coordenada na matriz de rigidez da estrutura.

O vetor de cargas nodais $\{F\}$ é obtido de maneira semelhante à matriz de rigidez global, alocando-se os valores obtidos nos nós dos elemento de barra na posição global correspondente. Além disso são somadas às forças vindas dos elementos, as forças aplicadas aos nós da estrutura.

Obtida a matriz de rigidez do sistema $[K]$ e o vetor de forças $\{F\}$, aplicam-se as condições de contorno correspondentes ao grau de liberdade restrito.

Resolvendo o sistema descrito obtêm-se os deslocamentos dos nós da estrutura $\{u\}$ e, a partir destes, são determinados os deslocamentos nos nós dos elementos em coordenadas locais e os esforços correspondentes.

9.1.3. Determinação das seções ótimas das vigas:

Será aplicada a rotina de otimização das seções transversais das vigas. Esta rotina será aplicada em três seções da viga: na seção de máximo momento positivo, na seção de máximo momento negativo e na seção de máximo deslocamento. Dos resultados obtidos para estas seções, será assumida como altura ótima para toda a viga a maior entre as alturas obtidas, uma vez que a mesma, obrigatoriamente, satisfará as demais situações.

9.1.4. Determinação das seções ótimas dos pilares:

Nesta fase será aplicada a rotina de otimização dos pilares. Por se tratar de um procedimento comum na prática do dimensionamento das estruturas, essa otimização será aplicada na seção mais carregada da estrutura, situada na base da mesma e será considerado que as dimensões da seção transversal se manterão constantes ao longo da altura da estrutura, podendo ocorrer uma redução na armadura em andares superiores.

9.1.5. Realimentação dos dados e retorno do processo:

Uma vez definidas as seções ótimas para vigas e pilares, a estrutura será novamente analisada, alterando os dados relativos à geometria e ao peso próprio com os novos dados das seções otimizadas, retornando então ao item 9.1.2. Este processo será

executado quantas vezes forem necessárias, até que seja satisfeito um erro definido ou até que se atinja um número de iterações pré-estabelecido pelo usuário.

9.1.6. Cálculo final da estrutura

Uma vez definidas as seções transversais de todos os elementos previstos para serem otimizados, o programa será realimentado com as características geométricas e os carregamentos finais da estrutura e será então feito o cálculo dos deslocamentos em todos os nós da estrutura, assim como os esforços finais existentes em todos os elementos e as reações nos apoios. Todos estes dados serão apresentados no arquivo de saída de resultados, para a análise do engenheiro projetista.

Uma vez determinado o resultado da estrutura, o engenheiro pode fazer as padronizações que julgar necessárias, realimentando o arquivo de entrada de dados com as seções padronizadas e retirando estes elementos do processo de otimização. Desta forma ele pode recomeçar o processo fazendo a otimização dos demais elementos para a nova configuração da estrutura. Esse procedimento pode ser repetido quantas vezes se julgar necessário, até que se obtenha a estrutura que melhor se adapte às concepções do projetista.

9.2. Processos de cálculo utilizados no programa

Serão apresentados a seguir alguns procedimentos utilizados na elaboração do programa de otimização.

9.2.1. Definição do momento crítico de fissuração da viga

O momento crítico de fissuração define a separação entre os estádios I e II, e será necessário para a determinação do momento de inércia à flexão da viga. Este momento é definido pela NBR-6118 / 2003, para seções retangulares, através da seguinte expressão:

$$Mr = \frac{b_w \cdot h^2}{4} \cdot f_{ct}, \quad (9.1)$$

onde f_{ct} é a resistência direta à tração para o concreto, definida para seções submetidas à flexão simples como sendo:

$$f_{ct} = 0,21 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^2}, \quad (9.2)$$

onde f_{ct} e f_{ck} são expressos em MPa.

9.2.2. Cálculo do Momento de inércia à flexão das vigas

Uma vez que a flecha nas vigas é uma das restrições impostas no problema de otimização do pórtico, será necessária a utilização da inércia da seção no estado limite de utilização para que esta possa ser determinada. Para este estado limite, a seção encontra-se trabalhando no estágio I ou no estágio II, a depender do momento atuante, conforme definido no item anterior.

A Inércia no estágio I, antes da mesma atingir o momento de fissuração é facilmente definida considerando a seção total do concreto como segue:

$$I_0 = \frac{b_w \cdot h^3}{12} \quad (9.3)$$

Para o estágio II puro, onde a peça encontra-se totalmente fissurada, a inércia pode ser calculada tomando-se uma seção homogeneizada de concreto, desprezando-se a contribuição do concreto tracionado, que se encontra fissurado. A determinação do momento de inércia para esta situação fica portanto, com a forma a seguir:

$$I_2 = \frac{b_w \cdot X^3}{3} + n \cdot A_{st} \cdot (d - X)^2 + n \cdot A_{sc} \cdot (X - d')^2, \quad (9.4)$$

onde:

$n \Leftrightarrow$ Relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto;

$X \Leftrightarrow$ Distância da linha neutra à fibra mais comprimida do concreto.

Para a situação prática dos estados limites de utilização das estruturas, estas se encontram parcialmente fissuradas e a consideração da peça trabalhando no estágio II puro se torna anti-econômica, uma vez que esta situação despreza a colaboração do concreto entre as fissuras, levando as peças a possuir alturas exageradas.

A NBR-6118/2003 permite que as flechas em vigas sejam determinadas utilizando a rigidez equivalente determinada pela seguinte expressão, que será utilizada neste trabalho quando o momento atuante (M_k) for maior que o momento crítico de fissuração:

$$(EI)_{eq} = E_{cs} \cdot \left\{ \left(\frac{M_r}{M_k} \right)^3 \cdot I_0 + \left[1 - \left(\frac{M_r}{M_k} \right)^3 \right] \cdot I_2 \right\} \leq E_{cs} \cdot I_0 \quad (9.5)$$

9.2.3. Determinação da flecha das vigas

A determinação da flecha é feita de duas maneiras distintas pelo programa de otimização: pelo deslocamento relativo dos nós e por analogia de Mohr.

A flecha pelos deslocamentos relativos entre os nós é utilizada para a determinação dos esforços atuantes na estrutura e como flecha inicial para a otimização da seção transversal das vigas. Esta flecha é retirada do vetor de deslocamentos da estrutura obtido pela resolução do sistema linear de equação apresentado no item 9.1.2, em função das condições de contorno do vão que contem a seção em estudo, através das seguintes expressões:

Para vãos com apoios nas duas extremidades:

$$F = -\frac{L_1}{L} \cdot |d_2 - d_1| + d_3 - d_1 \quad (9.6)$$

Para vão em balanço do lado esquerdo:

$$F = d_3 - d_2 \quad (9.7)$$

Para vão em balanço do lado esquerdo:

$$F = d_3 - d_1 \quad (9.8)$$

onde:

L \Rightarrow Comprimento do vão que contém a seção em estudo;

L_1 \Rightarrow Distância da extremidade esquerda do vão até a seção em estudo;

d_1 \Rightarrow Deslocamento do nó da extremidade esquerda do vão;

d_2 \Rightarrow Deslocamento do nó da extremidade direita do vão;

d_3 \Rightarrow Deslocamento do nó da seção em estudo;

A flecha determinada por analogia de Mohr foi utilizada para a imposição do deslocamento máximo admitido nas vigas quando estas estão trabalhando no estágio II. Este procedimento foi utilizado por ser de fácil aplicação para vigas com inércia variável.

Segundo Mohr, uma viga qualquer dada pode ser transformada numa viga conjugada cujo carregamento distribuído é igual a relação entre o momento fletor atuante na viga dada e a rigidez da mesma, como segue:

$$q = \frac{M}{EI} \quad (9.9)$$

Com esta viga conjugada, podemos determinar o momento fletor e o esforço cortante para cada seção, que serão respectivamente o deslocamento vertical e a rotação da tangente à elástica da viga dada. Sendo assim, para determinar a flecha do vão que contém a seção que está sendo otimizada, basta determinar o momento fletor da viga conjugada. Uma vez que o momento e a inércia da viga trabalhando no estágio II são dados variáveis, a carga atuante na viga conjugada vai variar em cada seção da mesma. Para determinar o momento fletor atuando nesta viga conjugada com carregamento variável foi realizada uma aproximação por seções utilizando método dos trapézios. Para garantir um resultado com um bom grau de aproximação os elementos finitos são subdivididos internamente, sendo este número de subdivisões um dado de entrada do programa.

Diante do exposto, a flecha nas vigas pela analogia de Mohr será dada pelas seguintes expressões:

Para vãos apoiados nas extremidades:

$$F = \int_0^L \frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}} \cdot \frac{x}{L} \cdot dx - \int_0^{L_1} \frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}} \cdot (L_1 - x) \cdot dx \quad (9.10)$$

Para vãos em balanço:

$$F = V_{bal} \cdot (L - L_1) - \int_{L_1}^L \frac{M_{(x)}}{EI_{(x)}} \cdot (x - L_1) \cdot dx, \quad (9.11)$$

onde V_{bal} é o cortante atuando na ponta do balanço, que pode ser determinado pela rotação da tangente da elástica no ponto, calculada pelo programa.

9.2.4. Consideração da fluência:

Para a consideração da fluência foi considerado o seguinte coeficiente simplificado, conforme NBR 6118/80, a ser multiplicado pela flecha na seção:

$$\beta = \frac{\varepsilon_c^f + \varepsilon_s^f}{\varepsilon_c^i + \varepsilon_s^i} \quad \therefore \quad \begin{aligned} \varepsilon_s^f &= \varepsilon_s^i \\ \varepsilon_c^f &= m \cdot \varepsilon_c^i \end{aligned} \quad (9.12)$$

onde:

ε_s \Rightarrow deformação do aço;

ε_c \Rightarrow deformação do concreto;

m \Rightarrow Coeficiente de entrada do programa. Deve ser igual a 2 quando a estrutura for carregada após o sexto mês de concretagem e igual a 3, em caso contrário.

10. Experimentação numérica

Neste capítulo será mostrada a utilização do programa desenvolvido através de exemplos numéricos. Serão verificados os resultados finais obtidos e os valores encontrados em cada passo até a convergência do programa.

Para todos os exemplos apresentados neste capítulo serão utilizados como dados de entrada do programa:

Resistências características dos materiais:

Concreto: C20 $\Rightarrow E_c = 21.300 \text{ MPa}$;

Aço: CA-50 $\Rightarrow E_s = 210.000 \text{ MPa}$;

Custos dos materiais (Revista Construção e Mercado, março de 2003):

Custo do concreto: R\$ 228,39 / m³;

Custo do aço: R\$ 2,73 / kg;

Custo da forma: R\$ 31,58 / m².

Valores limites das variáveis dos pilares:

$$20\text{cm} \leq x_1 \leq 40\text{cm}$$

$$20\text{cm} \leq x_2 \leq 160\text{cm}$$

$$0.004 \leq \rho \leq 0.04$$

Incremento de x_2 : 1cm

Dados das vigas:

$$b_w = 15\text{cm};$$

$$d' = 3\text{cm}.$$

Outros dados necessários para a execução da rotina:

$$\text{Peso específico do aço: } 7,85 \times 10^{-5} \text{ kN/cm}^3;$$

$$\text{Deformação limite do concreto: } 3,5\text{‰};$$

$$\text{Taxa máxima de armadura: } 4,0\text{ \%};$$

Coefficientes para o dimensionamento:

$$\gamma_f = 1,4$$

$$\gamma_c = 1,4$$

$$\gamma_s = 1,15$$

Limites de flecha:

Para vãos apoiados nos extremos: $L/300$

Para vãos em balanço: $L/150$

10.1. Exemplo 01

Este exemplo é composto de um pórtico simples, simétrico, formado por dois pilares com altura de 3,0m e uma viga com um vão interno de 8,0m e dois balanços, de 2,0m, conforme representado pela figura 10.1.

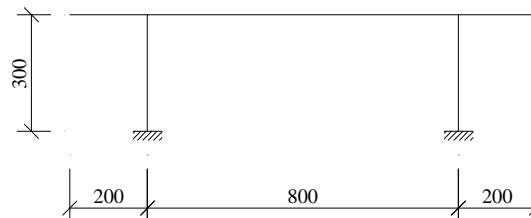


Figura 10.1 – Pórtico composto de uma viga sobre dois pilares

Este pórtico foi submetido a uma carga vertical ao longo da viga de 40 kN/m e uma carga pontual de 3.000 kN sobre os pilares, simulando a repetição dos pavimentos.

Os resultados obtidos para cada iteração encontram-se nas tabelas 10.1 e 10.2 e nos gráficos 10.1 e 10.2.

Iteração	Altura (cm)	As tração (cm ²)	As comp. (cm ²)	Custo (R\$/m)
1	67.985	7.136	-	86.259
2	70.150	14.302	0.162	104.074
3	69.344	14.119	0.148	102.866
4	69.459	14.145	0.150	103.037
5	69.444	14.141	0.150	103.015

Tabela 10.1 – Resultados encontrados para a viga em cada passo de iteração

Podemos verificar, pela análise do resultado final da tabela 10.1, que a seção ótima da viga encontra-se bastante próxima da seção normalmente armada, trabalhando com uma taxa de armadura comprimida muito pequena, comprovando que esta vem a ser a seção mais econômica para se trabalhar, uma vez que, nesta situação, ambos os materiais encontram-se totalmente aproveitados. Além disso, podemos verificar que a altura ótima para a viga equivale a 8,6% do maior vão, valor que se aproxima bastante dos valores de pré-dimensionamento adotado na prática pelos projetistas, que varia geralmente entre 8,0% e 10,0% do vão.

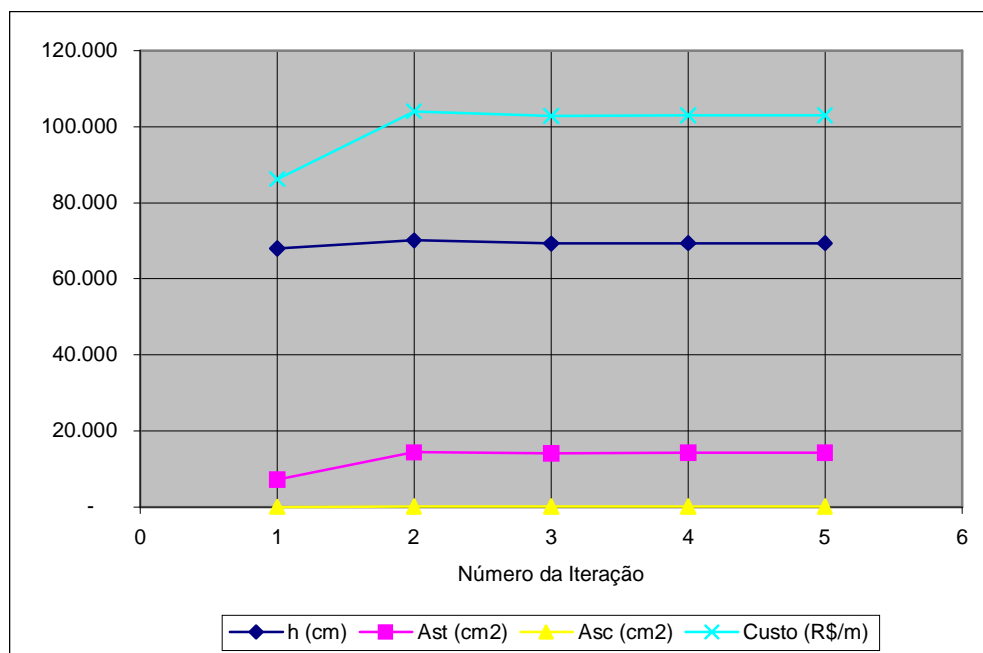


Gráfico 10.1 – Resultados encontrados para a viga em cada passo de iteração

Iteração	Base (cm)	Altura (cm)	As (cm ²)	Custo (R\$/m)
1	30.000	55.000	49.484	197.416
2	28.946	80.000	54.789	239.113
3	29.776	80.000	52.522	236.296
4	29.669	80.000	52.857	236.751
5	29.683	80.000	52.814	236.693

Tabela 10.2 – Resultados encontrados para os pilares em cada passo de iteração

No pré-dimensionamento dos pilares é comum se tomar uma área de concreto resultante da divisão do esforço normal atuante no mesmo pela resistência do concreto ($0,85 \times f_{cd}$). Para este exemplo, essa relação resultaria num pilar com área de aproximadamente 2670 cm². O resultado apresentado pelo programa possui uma área de, aproximadamente, 2375 cm², apresentando uma redução aproximada de 10%.

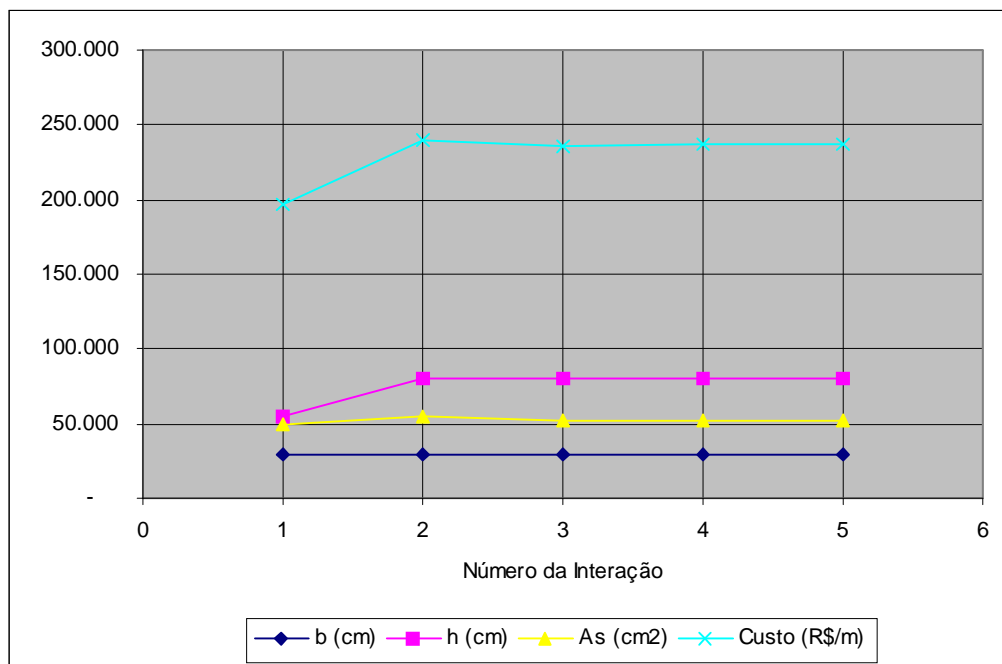


Gráfico 10.2 – Resultados encontrados para os pilares em cada passo de iteração

Podemos notar, analisando os gráficos 10.1 e 10.2, que existe uma variação significativa nas dimensões das seções da primeira para a segunda iteração e que, a partir da segunda elas convergem rapidamente para os resultados ótimos. Este fato é normal devido à perturbação provocada pela definição aleatória das dimensões iniciais das peças definidas pelo usuário. Depois de cessada essa perturbação, as variações

tendem a se reduzir e a função se aproxima do seu valor ótimo. A definição dos dados de entrada não tem influência sobre os resultados, podendo afetar apenas a velocidade da convergência dos resultados, sendo porém um dado necessário para garantir as características geométricas utilizadas no cálculo dos deslocamentos da estrutura na primeira iteração.

10.2. Exemplo 02

Este exemplo consiste de um pórtico de 12 pavimentos, simétrico, formado por vigas de 3 vãos apoiados sobre quatro pilares, sendo os vãos extremos de 5,0 m e o vão intermediário de 4,0 m. Cada pavimento tem a altura de 3,0 m. O pórtico encontra-se esquematizado pela figura 10.2.

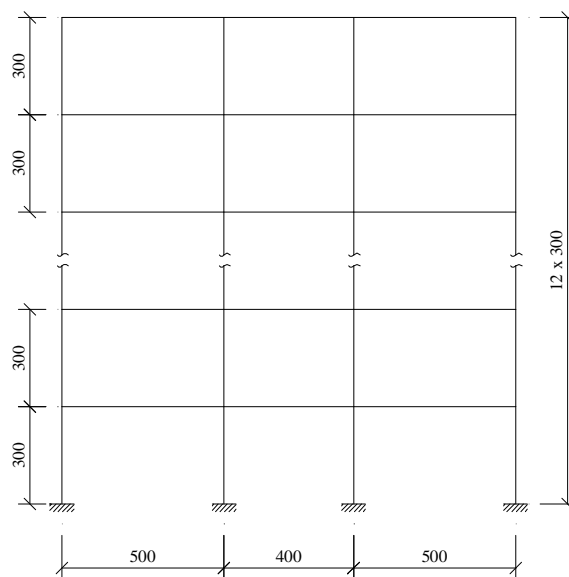


Figura 10.2 – Pórtico composto de doze pavimentos e quatro pilares

Foi aplicado a este pórtico um carregamento vertical nas vigas de 40 kN/m, em todos os pavimentos, além do peso próprio dos elementos estruturais que é determinado automaticamente pelo programa. Os resultados finais para as vigas e os pilares encontram-se apresentados respectivamente nas tabelas 10.3 e 10.4. Os gráficos 10.3 a 10.5 apresentam respectivamente, para cada passo de iteração, o custo por metro das vigas, o custo por metro dos pilares, e os custos totais.

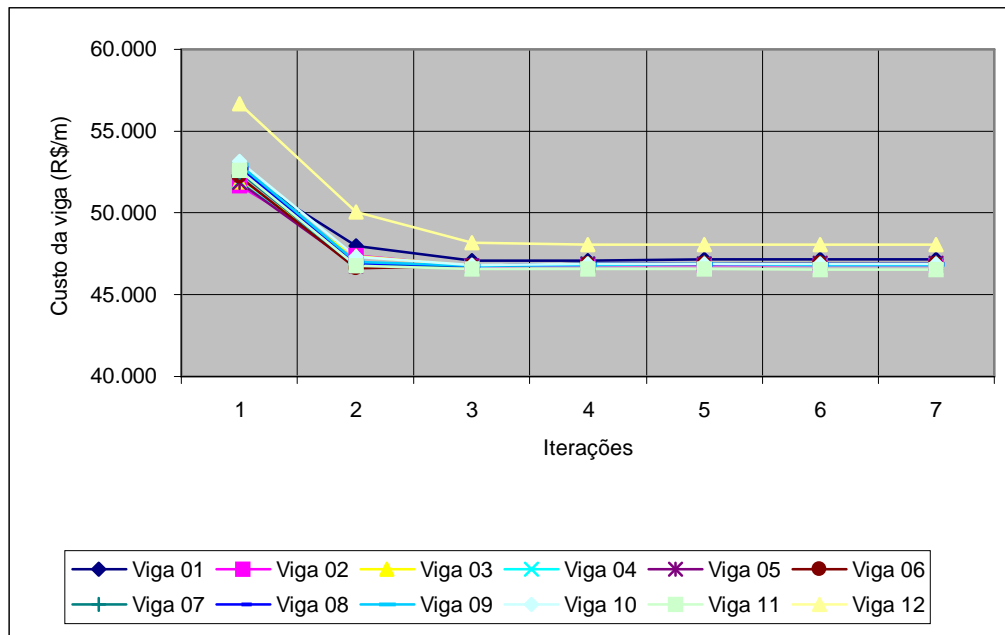


Gráfico 10.3 – Custo por metro das vigas em cada passo de Iteração

Iteração	Altura (cm)	As tração (cm ²)	As comp. (cm ²)	Custo (R\$/m)
1	35.285	3.756	-	47.161
2	34.974	3.740	-	46.823
3	35.060	3.738	-	46.903
4	35.036	3.735	-	46.873
5	35.049	3.737	-	46.889
6	35.047	3.737	-	46.887
7	35.040	3.735	-	46.878
8	35.026	3.733	-	46.860
9	35.006	3.731	-	46.835
10	35.037	3.735	-	46.874
11	34.732	3.719	-	46.544
12	36.102	3.801	-	48.054

Tabela 10.3 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas

Neste exemplo todas as vigas encontram-se sub-armadas. Este fato ocorreu devido a limitação da flecha, que provocou um aumento na altura otimizada das mesmas, fazendo com que, conseqüentemente, as armaduras fossem reduzidas. Nota-se uma pequena variação entre as alturas ótimas das vigas para cada pavimento, estando as mesmas com mesmos valores de ordem prática. A relação entre a altura das vigas e o maior vão se situa entre 7,0 e 7,2%, valor ligeiramente inferior ao adotado na prática.

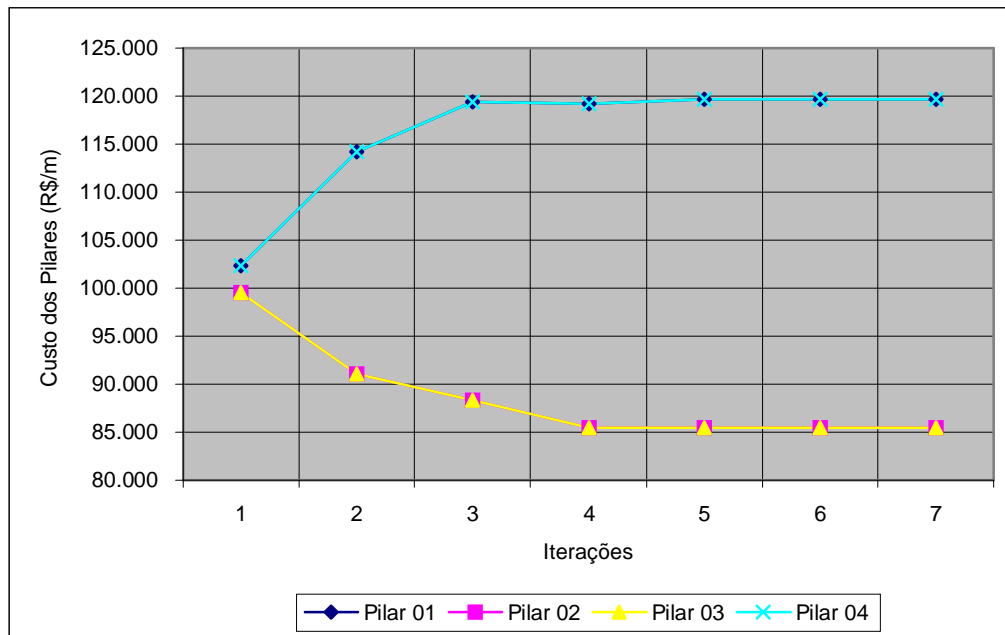


Gráfico 10.4 – Custo por metro dos pilares em cada passo de iteração

Podemos verificar pelo gráfico 10.4 que os pilares, definidos inicialmente com a mesma seção, vão, ao longo das iterações, se modificando de forma a se adaptarem aos esforços que estão aplicados em cada um, ficando no resultado final com a forma apresentada pela tabela 10.4. Nesta tabela podemos perceber que os pilares externos, que se encontram submetidos a maiores momentos, possuem seção mais alongada, com maior dimensão na direção de atuação do momento, enquanto os pilares intermediários, onde o momento atuante não é significativo, possuem forma se aproximando do quadrado. Este fato vem comprovar que os valores de entrada das variáveis têm pouca interferência no resultado final da estrutura, gerando perturbações apenas nos primeiros passos de iteração, até que a redistribuição de esforços provocada pela grande variação nas rigidezes dos elementos se dissipe e estes caminhem em direção às dimensões ótimas.

Iteração	Base (cm)	Altura (cm)	As (cm ²)	Custo (R\$/m)
1	20.000	40.000	29.621	119.645
2	20.000	26.000	20.800	85.505
3	20.000	26.000	20.800	85.505
4	20.000	40.000	29.621	119.645

Tabela 10.4 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares

Pode-se notar pelos gráficos 10.3 a 10.5 que os custos por metro das vigas convergiram para valores de ordem prática na terceira iteração e os dos pilares atingiram esta convergência na quarta iteração. A convergência final da estrutura se deu na sétima iteração com custo global para a mesma de R\$ 22.661,00.

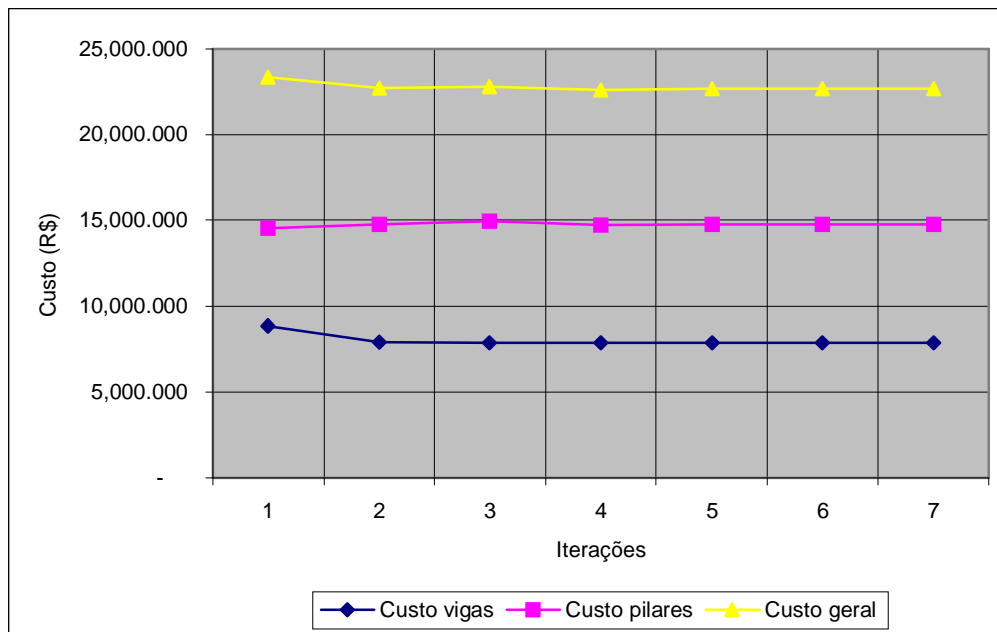


Gráfico 10.5 – Custo total das vigas e dos pilares e custo geral da estrutura em cada passo de iteração

10.3. Exemplo 03

Neste exemplo será utilizado o mesmo pórtico apresentado no exemplo anterior, representado pela figura 10.2. Será aplicado neste pórtico, além do carregamento vertical aplicado no exemplo 02, uma ação horizontal de 5kN/m no pilar da esquerda, simulando a ação do vento. Esta ação será aplicada para que se possam analisar as implicações provocadas pela ação do vento atuando nos edifícios. Os resultados finais para as vigas e os pilares encontram-se apresentados respectivamente nas tabelas 10.5 e 10.6. Os gráficos 10.6 a 10.8 apresentam respectivamente, para cada passo de iteração, o custo por metro das vigas, o custo por metro dos pilares, e os custos totais.

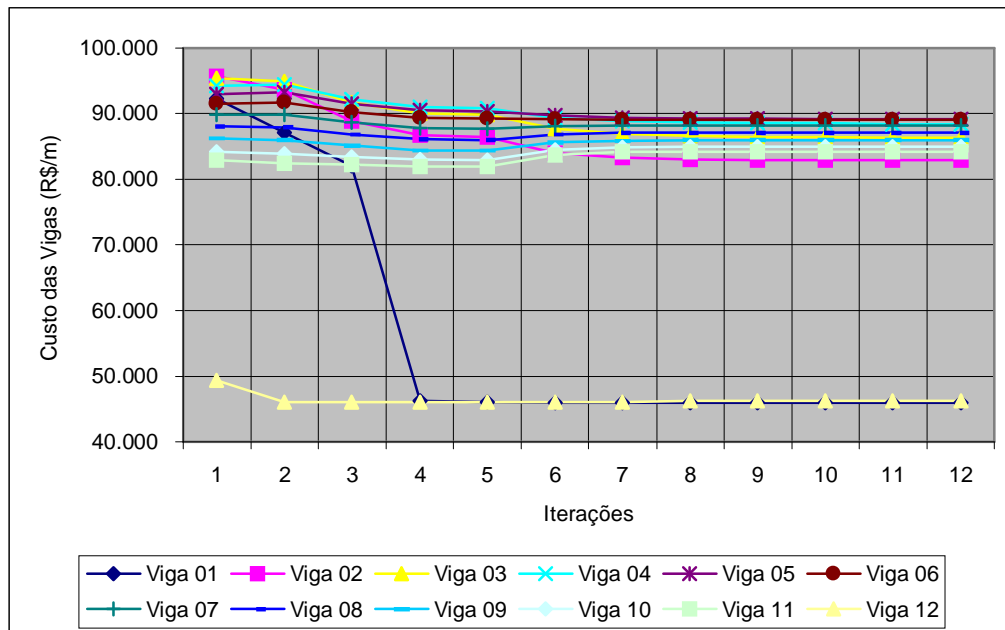


Gráfico 10.6 – Custo por metro das vigas em cada passo de Iteração

Podemos verificar em relação ao exemplo anterior que a altura das vigas sofreu pouca variação com a aplicação da ação horizontal. A viga de maior altura permaneceu ainda com valores abaixo dos valores comumente utilizados na prática, atingindo 7,6 % do comprimento do maior vão.

Iteração	Altura (cm)	As tração (cm ²)	As comp. (cm ²)	Custo (R\$/m)
1	34.215	3.701	-	46.001
2	35.318	13.611	6.806	82.897
3	36.819	14.243	7.121	86.390
4	37.710	14.618	7.309	88.464
5	38.025	14.751	7.376	89.199
6	37.930	14.711	7.355	88.977
7	37.580	14.563	7.282	88.162
8	37.115	14.368	7.184	87.080
9	36.636	14.166	7.083	85.964
10	36.202	13.983	6.992	84.954
11	35.860	13.839	6.920	84.159
12	34.422	3.703	-	46.206

Tabela 10.5 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas

Notadamente o aumento dos esforços provocados pela ação horizontal foi absorvido pelas armaduras. Em quase todas as vigas a armadura de compressão atingiu o limite máximo imposto de 50% da armadura de tração.

Já nos pilares pode ser notada uma variação substancial nas dimensões. Com o aumento do momento eles se tornaram bem mais alongados na direção de atuação da força horizontal para melhor combater estes esforços. Novamente podemos perceber a reduzida influência dos valores de entrada no resultado final. A redistribuição de esforços ocorrida em cada iteração leva o programa a adaptar as dimensões dos pilares, indicando quais serão mais eficientes no combate aos esforços horizontais, levando o projetista a dimensionar melhor os elementos para contraventamento.

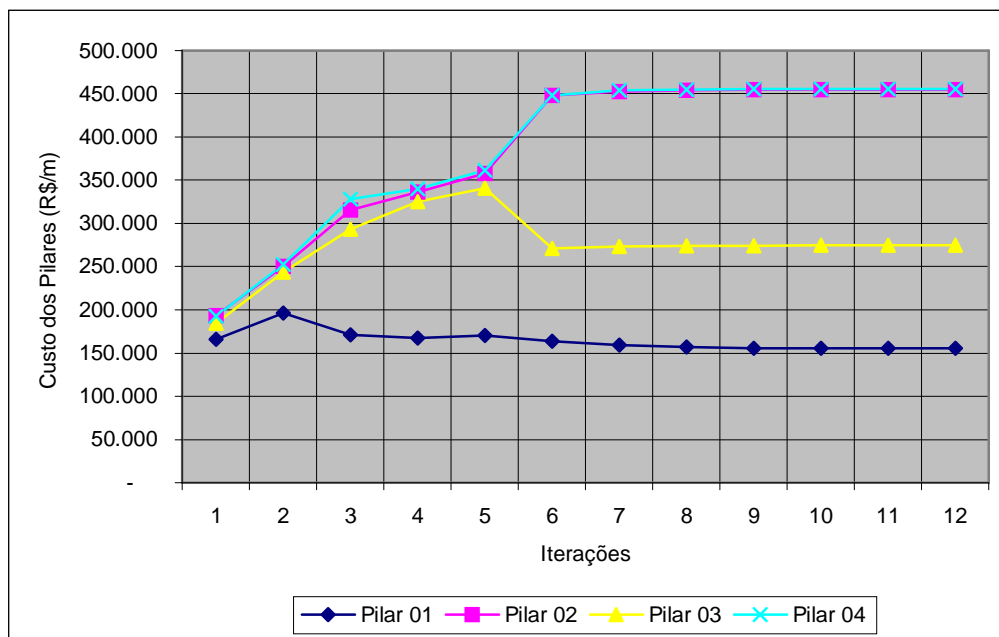


Gráfico 10.7 – Custo por metro dos pilares em cada passo de iteração

Iteração	Base (cm)	Altura (cm)	As (cm ²)	Custo (R\$/m)
1	20.000	71.000	30.830	155.976
2	20.000	160.000	125.173	455.025
3	20.000	120.000	61.304	274.615
4	20.000	160.000	125.572	455.880

Tabela 10.6 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares

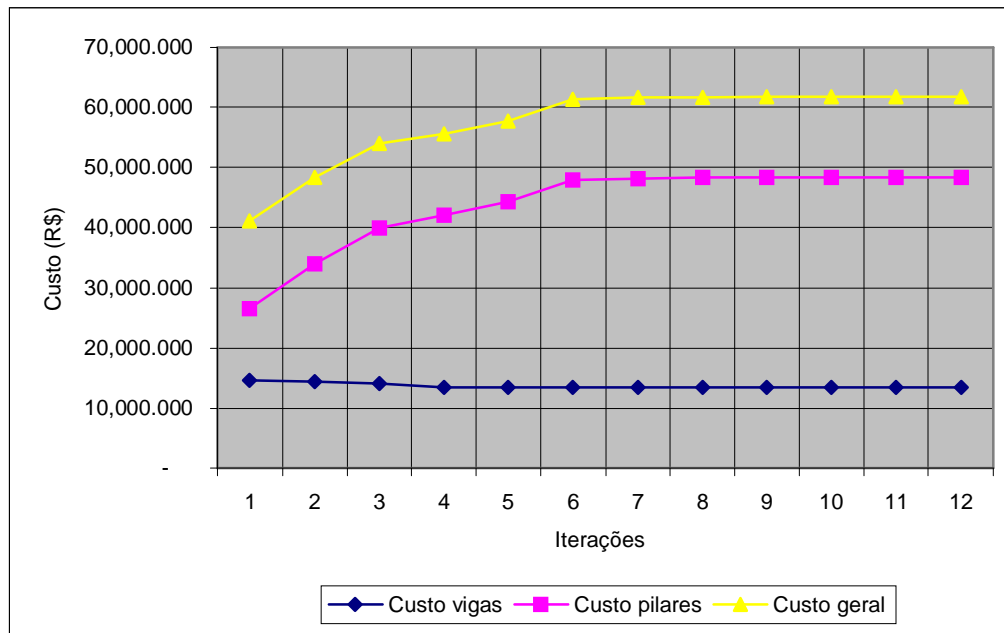


Gráfico 10.8 – Custo total das vigas e dos pilares e custo geral da estrutura em cada passo de iteração

Neste exemplo, tanto as vigas quanto os pilares convergiram para valores de ordem prática na sétima iteração, chegando a estrutura a uma convergência final na décima segunda iteração, com um custo global de R\$ 61.712,00. O custo final atingido sofreu um acréscimo de 172% em relação à estrutura sem a aplicação da ação lateral, sendo que as vigas sofreram um acréscimo de custo de 70% e os pilares de 226%.

10.4. Exemplo 04

Este exemplo consiste de um pórtico de 12 pavimentos, assimétrico, formado por vigas de 2 vãos, de 7,0 m e 4,0 m, apoiados sobre três pilares, e um balanço extremo de 2,0m. Cada pavimento tem a altura de 3,0 m. O pórtico encontra-se esquematizado pela figura 10.3.

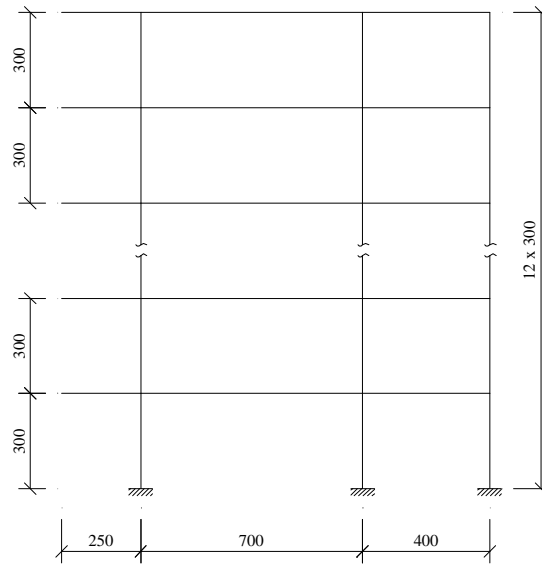


Figura 10.3 – Pórtico composto de doze pavimentos e três pilares

Este pórtico foi carregado verticalmente, além do peso próprio, com uma força de 40 kN/m, distribuída em toda a viga, em todos os pavimentos. Os resultados finais para as vigas e os pilares encontram-se apresentados respectivamente nas tabelas 10.7 e 10.8. Os gráficos 10.9 a 10.11 apresentam respectivamente, para cada passo de iteração, o custo por metro das vigas, o custo por metro dos pilares, e os custos totais.

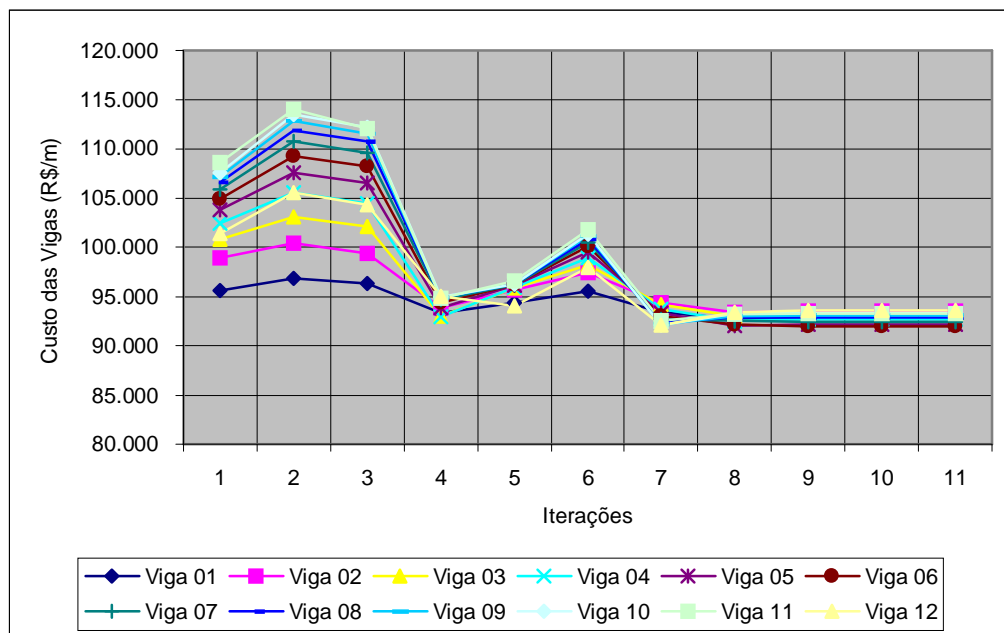


Gráfico 10.9 – Custo por metro das vigas em cada passo de iteração

Iteração	Altura (cm)	As tração (cm ²)	As comp. (cm ²)	Custo (R\$/m)
1	62.622	12.587	0.032	92.785
2	63.103	12.697	0.040	93.508
3	62.855	12.640	0.036	93.134
4	62.541	12.569	0.031	92.665
5	62.227	12.497	0.025	92.193
6	62.086	12.465	0.023	91.983
7	62.384	12.533	0.028	92.429
8	62.645	12.592	0.032	92.820
9	62.848	12.639	0.036	93.125
10	62.987	12.670	0.038	93.334
11	62.928	12.657	0.037	93.244
12	63.132	12.703	0.041	93.550

Tabela 10.7 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas

Novamente neste exemplo tem-se todas as vigas com seção próxima à seção normalmente armada, confirmando que para situações práticas, com carregamento vertical e quando a limitação das deformações não é fator preponderante, esta se torna a situação mais econômica. As alturas das vigas otimizadas ficaram da ordem de 9% do comprimento do maior vão, situadas dentro dos valores comumente utilizados.

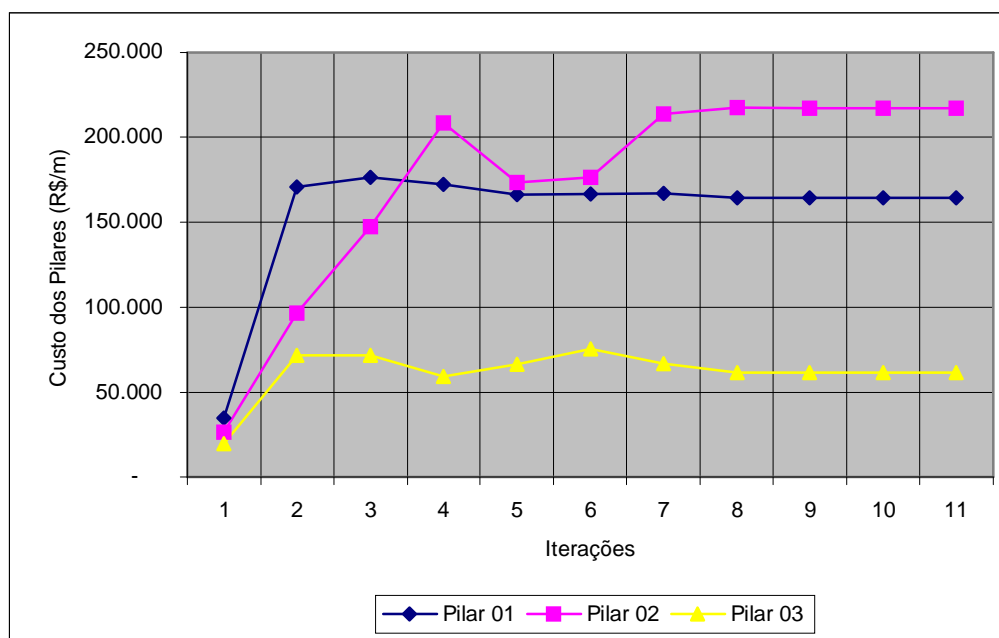


Gráfico 10.10 – Custo por metro dos pilares em cada passo de iteração

Podemos notar pelo gráfico 10.10 a grande variação que sofre o pilar até que os efeitos provocados pela redistribuição dos esforços se dissipem e estes tenham

dimensões compatíveis com os esforços aplicados. Pela tabela 10.8, com os resultados finais dos pilares pode-se perceber a tendência à seção quadrada quando os esforços de momento não são significativos, como no pilar 1, que tem os momentos do vão equilibrados pelos momentos provocados pelo balanço, e a tendência ao alongamento, vista principalmente no pilar dois que se encontra entre dois vãos notadamente desequilibrados. Esta situação serve para mostrar a necessidade de se trabalhar com vãos equilibrados na busca da estrutura mais econômica.

Fazendo uma analogia com os valores de área de seção transversal utilizada na prática, verificamos que a soma das áreas dos três pilares deste exemplo possuem um valor aproximado de 5320 cm², praticamente equivalente à área que seria adotada utilizando processos práticos de pré-dimensionamento, com a vantagem de já ser indicada ao projetista, além da área, a melhor geometria para cada um dos pilares do pórtico.

Iteração	Base (cm)	Altura (cm)	As (cm ²)	Custo (R\$/m)
1	40.000	41.000	35.409	164.499
2	39.024	80.000	33.023	217.246
3	20.000	28.000	8.700	61.751

Tabela 10.8 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares

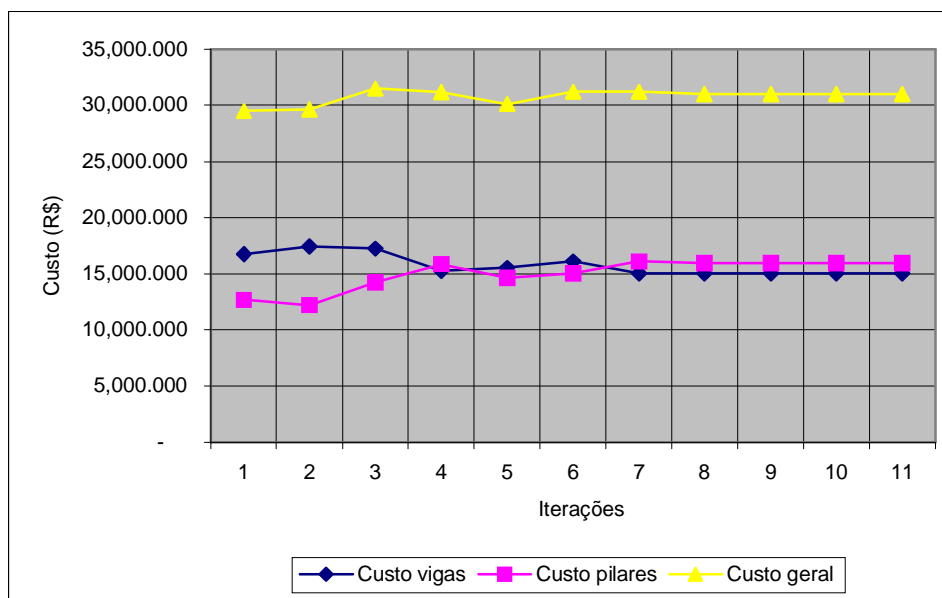


Gráfico 10.11 – Custo total das vigas e dos pilares e custo geral da estrutura em cada passo de iteração

Verifica-se pelos gráficos 10.9 a 10.11 que os custos por metro das vigas dos pilares convergiram para valores de ordem prática no oitavo passo de iteração. A convergência final da estrutura se deu na décima primeira iteração, com custo global para a mesma de R\$ 31.015,00.

10.5. Exemplo 05

Assim como foi feito no exemplo 03, neste exemplo será utilizado o mesmo pórtico apresentado no exemplo anterior, representado pela figura 10.3, com a aplicação de uma ação horizontal, simulando a ação do vento. Os resultados finais para as vigas e os pilares encontram-se apresentados respectivamente nas tabelas 10.9 e 10.10. Os gráficos 10.12 a 10.14 apresentam respectivamente, para cada passo de iteração, o custo por metro das vigas, o custo por metro dos pilares, e os custos totais.

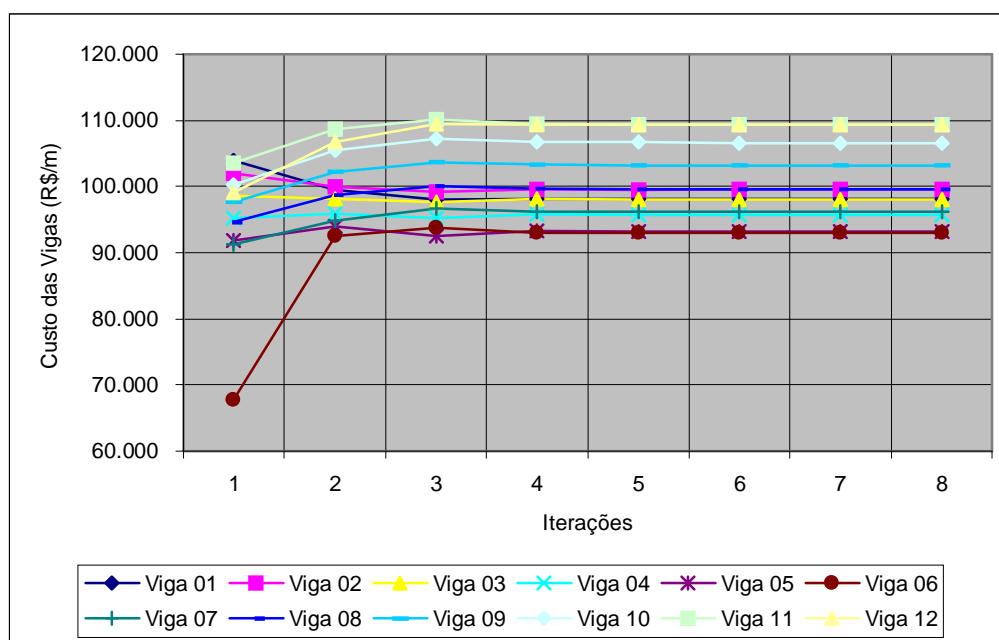


Gráfico 10.12 – Custo por metro das vigas em cada passo de Iteração

Verifica-se para este exemplo, através da tabela 10.9, que a seção ótima para as vigas continua sendo muito próxima da seção normalmente armada. Diferentemente do que ocorreu no exemplo 03, o aumento dos esforços provocado pela atuação das ações horizontais foi absorvido pela estrutura com um aumento na altura das mesmas. Essa

situação fez com que as vigas ficassem com valores diferentes em cada pavimento, em função dos esforços existentes nos mesmos. Na prática, geralmente as vigas possuem a mesma altura em todos os pavimentos, padronizadas para se poder garantir o reaproveitamento das formas. Embora os resultados do programa tenham variado, levando a valores de relação entre vãos da ordem de 9% a 10,5%, verificamos que estes valores continuam se encaixando dentro daqueles valores usualmente utilizados no pré-dimensionamento da estrutura. O programa pode ainda ser utilizado para auxiliar o projetista na padronização da estrutura, com a fixação de algumas alturas e o reprocessamento da estrutura para verificar o comportamento das vigas nos demais pavimentos, até que se atinja o grau de padronização desejado.

Iteração	Altura (cm)	As tração (cm ²)	As comp. (cm ²)	Custo (R\$/m)
1	66.192	13.400	0.094	98.139
2	67.098	13.607	0.109	99.497
3	66.096	13.379	0.092	97.994
4	64.552	13.027	0.065	95.680
5	62.894	12.649	0.037	93.194
6	62.790	12.625	0.035	93.037
7	64.864	13.098	0.071	96.147
8	67.168	13.623	0.111	99.603
9	69.560	14.168	0.152	103.189
10	71.852	14.690	0.191	106.626
11	73.650	15.100	0.222	109.322
12	73.680	15.107	0.223	109.366

Tabela 10.9 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas

Iteração	Base (cm)	Altura (cm)	As (cm ²)	Custo (R\$/m)
1	20.000	120.000	71.533	296.537
2	20.000	80.000	48.542	203.731
3	20.000	80.000	41.827	189.340

Tabela 10.10 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares

Verificamos novamente, pela tabela 10.10, a tendência ao alongamento do pilar na direção do esforço transversal no sentido de melhor combater os momentos provocados. Além disso, verificamos também a distribuição, independente dos valores iniciais, indicando os pilares mais eficientes no contraventamento da estrutura. Pode-se notar nesta estrutura uma melhor distribuição dos esforços horizontais, com um

acréscimo bem menor nos custos dos pilares, que foi da ordem de 55% em relação ao exemplo anterior, sem a ação horizontal.

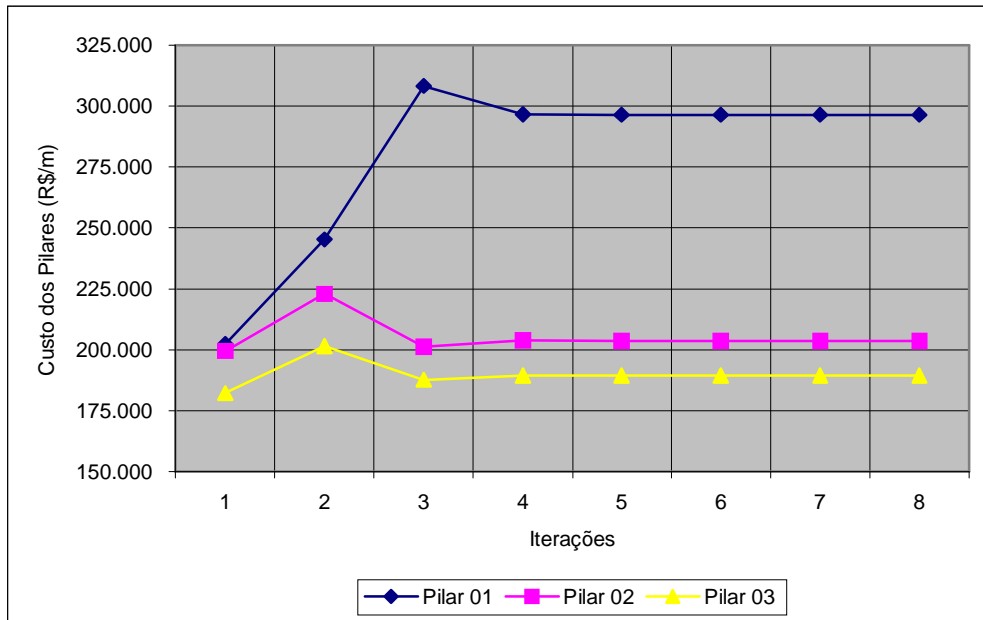


Gráfico 10.13 – Custo por metro dos pilares em cada passo de iteração

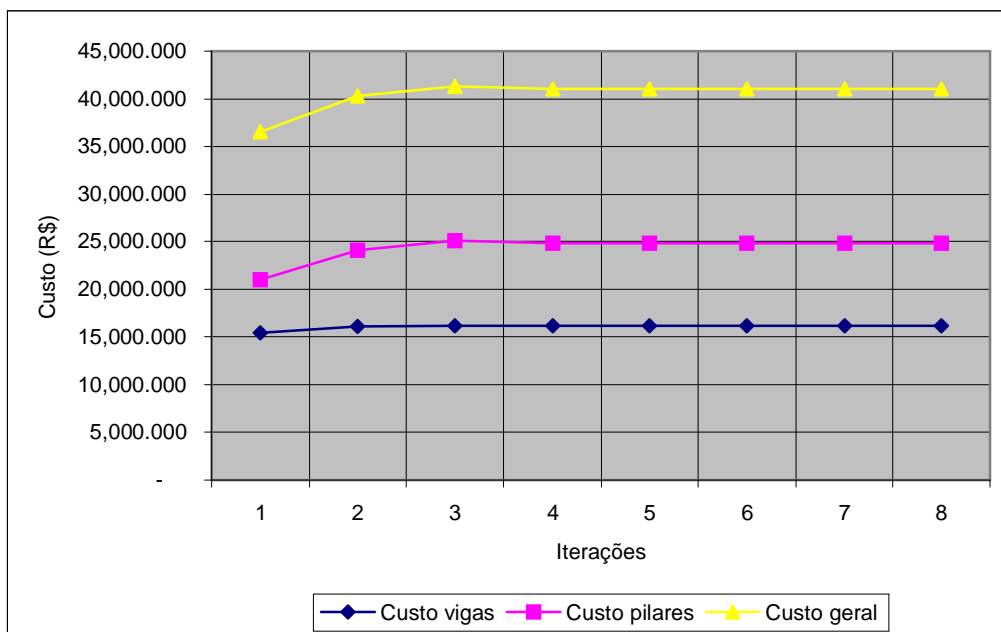


Gráfico 10.14 – Custo total das vigas e dos pilares e custo geral da estrutura em cada passo de iteração

A convergência para valores de ordem prática ocorreu, neste exemplo, na terceira iteração para as vigas e na quarta para os pilares. A convergência final da estrutura se deu na oitava iteração, com um custo final de R\$ 41.050,00, ocorrendo um acréscimo de 33% sobre o valor da estrutura sem a consideração das ações horizontais.

10.6. Exemplo 06

Para este exemplo foi utilizado um pórtico de 12 pavimentos, assimétrico, formado por vigas de 5 vãos, apoiados sobre seis pilares, conforme figura 10.4.

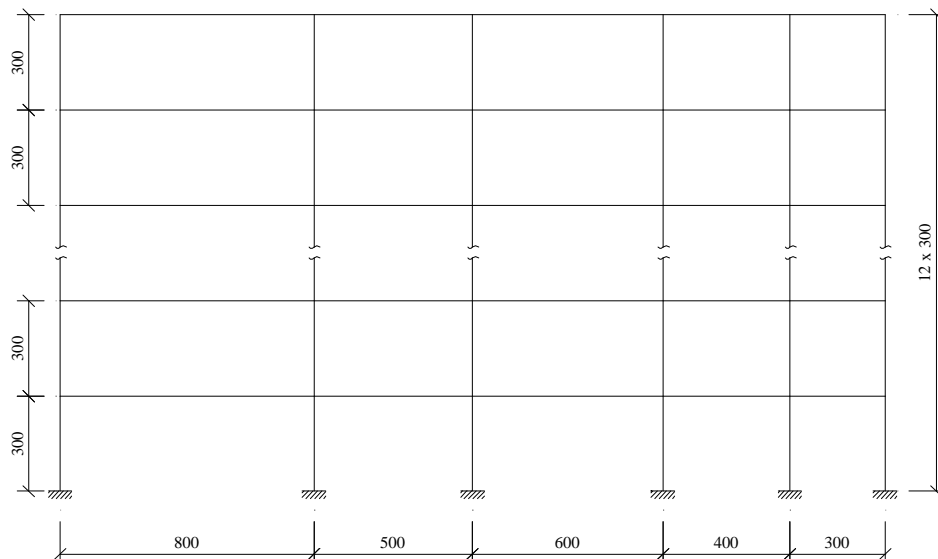


Figura 10.4 – Pórtico composto de doze pavimentos e seis pilares

As vigas deste exemplo tiveram uma variação de altura entre os pavimentos, com relação com o maior vão variando entre valores de 7,75% e 8,9% e seções próximas da normalmente armada. O custo total das vigas para este exemplo foi de R\$ 30.223,00.

Podemos notar, pela tabela 10.12, que este exemplo foi o que teve a relação entre vãos mais equilibrada, levando todos os pilares a seções próximas das seções quadradas. O custo dos pilares para esta estrutura foi de R\$ 26.388,00.

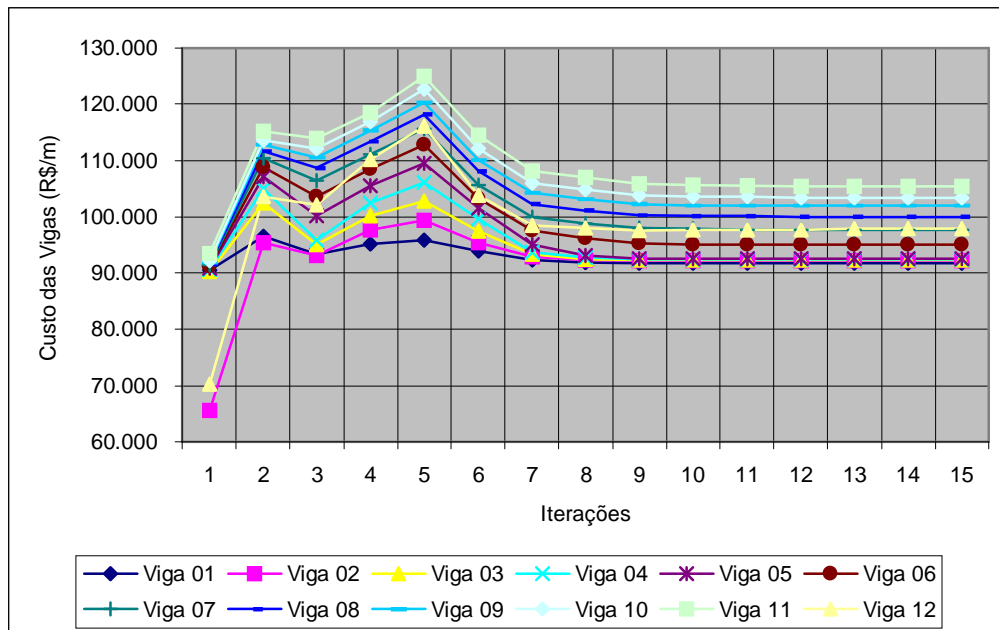


Gráfico 10.15 – Custo por metro das vigas em cada passo de Iteração

Iteração	Altura (cm)	As tração (cm ²)	As comp. (cm ²)	Custo (R\$/m)
1	61.957	12.436	0.021	91.789
2	62.167	12.483	0.024	92.104
3	62.268	12.507	0.026	92.256
4	62.374	12.530	0.028	92.413
5	62.481	12.555	0.030	92.574
6	64.065	12.916	0.057	94.950
7	65.925	13.340	0.089	97.739
8	67.460	13.689	0.116	100.040
9	68.725	13.978	0.137	101.937
10	69.709	14.202	0.154	103.412
11	71.044	14.506	0.177	105.415
12	65.982	13.353	0.090	97.824

Tabela 10.11 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas

Iteração	Base (cm)	Altura (cm)	As (cm ²)	Custo (R\$/m)
1	20.000	21.000	16.800	71.491
2	40.000	45.000	38.120	176.488
3	40.000	44.000	37.536	173.692
4	40.000	44.000	37.660	173.957
5	20.000	20.000	16.000	68.688
6	20.000	20.000	16.000	68.688

Tabela 10.12 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares

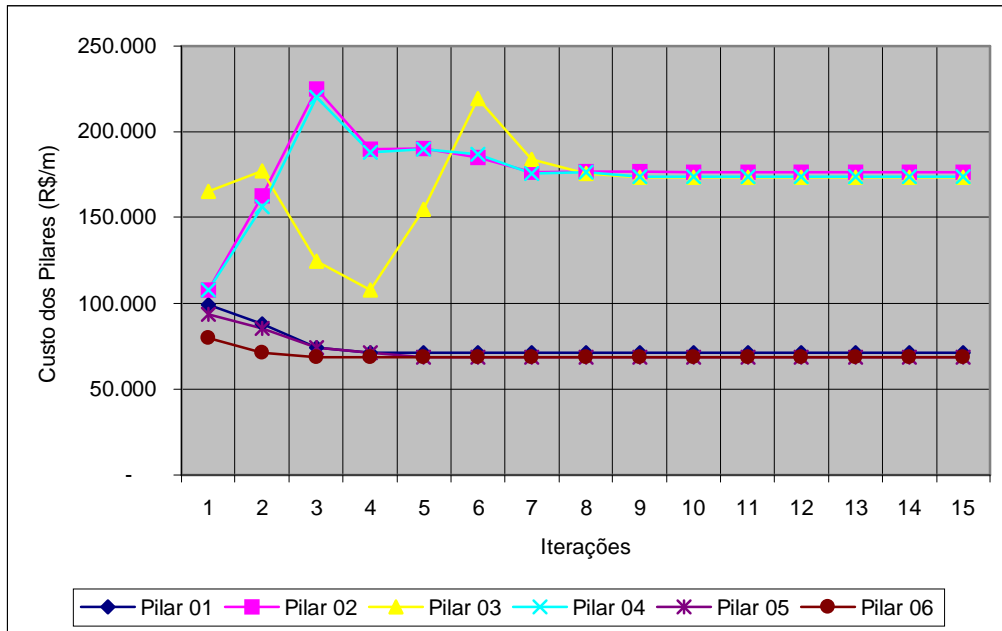


Gráfico 10.16 – Custo por metro dos pilares em cada passo de iteração

As vigas e os pilares deste exemplo convergiram para valores práticos na décima iteração e a convergência final se deu na décima quinta iteração, com custo total da estrutura de R\$ 56.612,00.

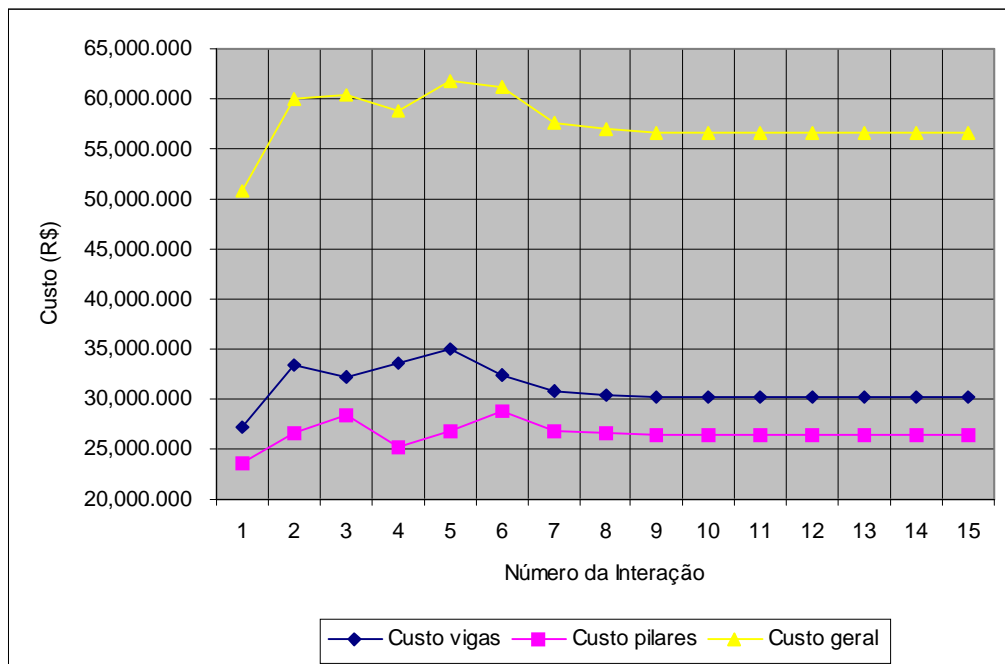


Gráfico 10.17 – Custo total das vigas e dos pilares e custo geral da estrutura em cada passo de iteração

10.7. Exemplo 07

Neste exemplo foi utilizado o mesmo pórtico apresentado na figura 10.4, com o acréscimo da ação horizontal de 5 kN/m ao longo do pilar da esquerda. Os resultados finais para as vigas e os pilares encontram-se apresentados, respectivamente, nas tabelas 10.13 e 10.14. Os gráficos 10.18 a 10.20 apresentam, respectivamente, para cada passo de iteração, o custo por metro das vigas, o custo por metro dos pilares, e os custos totais.

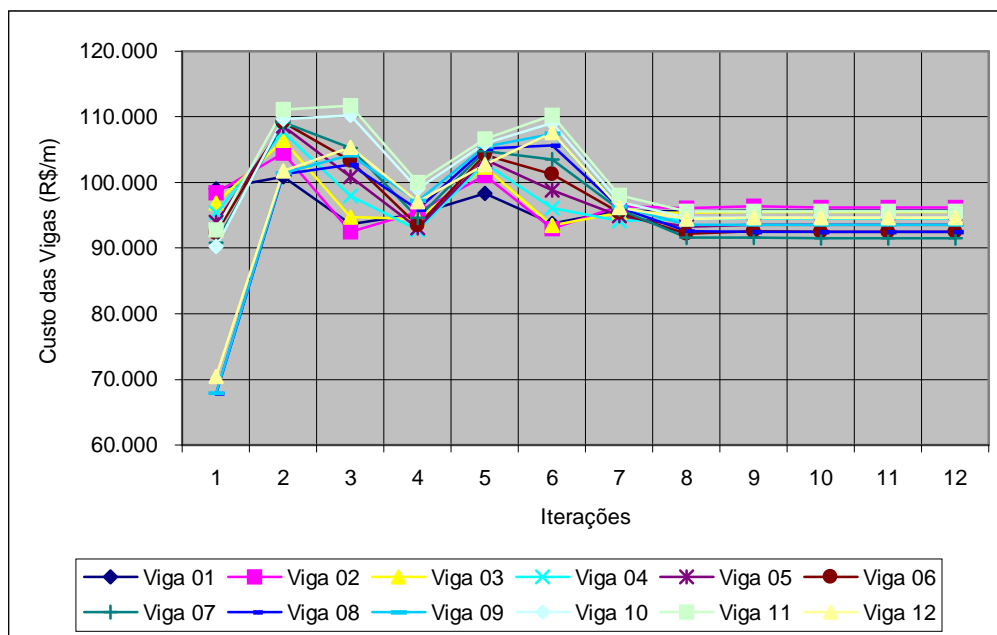


Gráfico 10.18 – Custo por metro das vigas em cada passo de Iteração

Pode-se verificar pelo resultado final apresentado na tabela 10.13 que, para este exemplo, a aplicação da ação horizontal levou a um acréscimo de altura em algumas das vigas e uma redução em outras, deixando as alturas nos diferentes pavimentos mais próximas entre si. Este fato fez com que a relação entre a altura da viga mais alta e o maior vão reduzisse de 8,9% para 8,1%. Esta redução ocorreu porque, para esta configuração, o aumento dos momentos negativos provocada pela maior rigidez dos pilares para o combate às ações horizontais e pelos momentos provocados pelas próprias ações acabou ocasionando, nas vigas da parte superior da estrutura, uma redução no momento máximo positivo, que havia sido o item decisivo na determinação da altura para o exemplo onde não havia sido computada a ação horizontal.

Iteração	Altura (cm)	As tração (cm ²)	As comp. (cm ²)	Custo (R\$/m)
1	64.606	13.039	0.066	95.761
2	64.944	13.116	0.072	96.267
3	64.432	12.999	0.063	95.500
4	63.778	12.850	0.052	94.519
5	63.091	12.694	0.040	93.489
6	62.415	12.540	0.028	92.475
7	61.759	12.390	0.017	91.491
8	62.403	12.537	0.028	92.458
9	63.127	12.702	0.041	93.543
10	63.818	12.860	0.053	94.579
11	64.468	13.008	0.064	95.554
12	63.858	12.869	0.053	94.638

Tabela 10.13 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal das vigas

A análise da tabela 10.14 mostra, claramente, os pilares 4 e 5 como os mais eficientes para formar o núcleo rígido central, de combate aos esforços horizontais, tendo eles se alongado bastante em relação à configuração original, sem a atuação das ações horizontais, enquanto que os pilares de 1 a 3 praticamente não sofreram alterações significativas em suas seções originais.

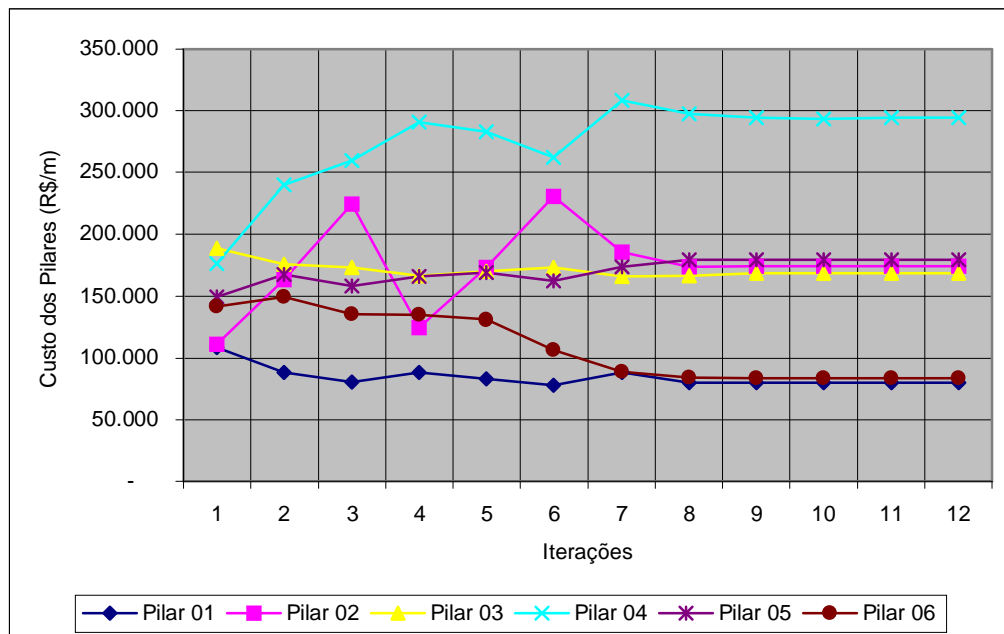


Gráfico 10.19 – Custo por metro dos pilares em cada passo de iteração

Iteração	Base (cm)	Altura (cm)	As (cm ²)	Custo (R\$/m)
1	20.000	24.000	19.200	79.900
2	40.000	44.000	37.869	174.407
3	40.000	42.000	36.660	168.725
4	20.000	120.000	70.331	293.961
5	20.000	80.000	37.359	179.765
6	20.000	40.000	12.735	83.460

Tabela 10.14 – Resultados finais encontrados para a otimização da seção transversal dos pilares

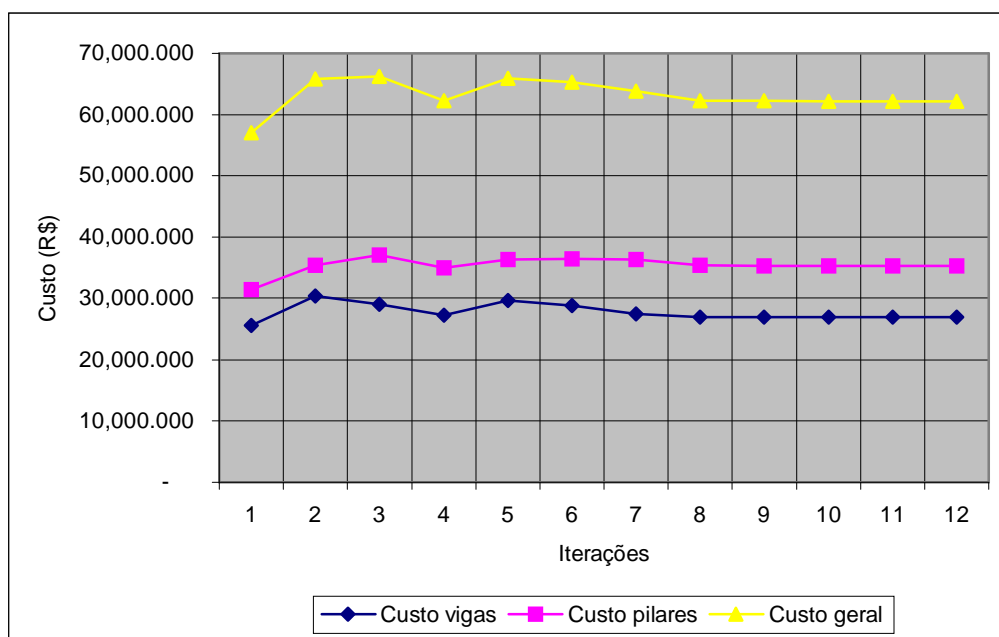


Gráfico 10.20 – Custo total das vigas e dos pilares e custo geral da estrutura em cada passo de iteração

As vigas e os pilares deste exemplo convergiram para valores de ordem prática na oitava iteração e a convergência final da estrutura ocorreu na décima segunda iteração com um custo de R\$ 62.214,00, com um acréscimo de aproximadamente 10% em relação à estrutura sem a aplicação dos esforços horizontais. Conforme já foi explicado antes, o custo total das vigas sofreu uma redução de 11%. O custo total dos pilares sofreu um acréscimo de 34% em relação ao exemplo 06.

11. Conclusões

É cada vez mais curto o tempo que um engenheiro tem para desenvolver adequadamente os projetos. Quando um projeto chega a um escritório de engenharia de estruturas, o construtor já está querendo saber do projetista quando ele poderá cravar a primeira estaca. Desta forma, sobra pouco tempo para que o engenheiro possa se dedicar à concepção de um projeto mais econômico e, em muitos casos, ele faz o pré-dimensionamento da estrutura baseado em projetos desenvolvidos anteriormente, com características parecidas, e utiliza estes valores nos programas de cálculo dos esforços e dimensionamento para ver se os mesmos atingem o grau de segurança e economia desejado.

Embora a prática mostre que este processo, de um modo geral, leva a estruturas que atendem aos requisitos de segurança, dificilmente o grau de economia encontrado com a solução adotada é verificado. Existem várias soluções igualmente eficientes do ponto de vista da segurança, mas que levam a um custo da estrutura totalmente diferentes. Tal fato pode ser verificado entregando-se o mesmo projeto a dois engenheiros diferentes. Embora muito provavelmente ambos os projetos sairão com um nível de segurança satisfatório, é praticamente impossível que os dois, tendo realizado os projetos isoladamente, definam estruturas idênticas. O custo de cada um dos projetos vai depender da experiência dos projetistas em obras semelhantes, do tempo de dedicação ao projeto e, em muitos casos, de sorte mesmo em conseguir imaginar a melhor estrutura do ponto de vista econômico.

De modo a reduzir os fatores abstratos e dar um caráter mais científico à busca de uma estrutura mais econômica, reduzindo principalmente o tempo gasto neste procedimento, é que se inserem a otimização de estrutura. Partindo de configurações definidas pelo projetista e utilizando técnicas computacionais, podemos chegar a estruturas mais econômicas que as que seriam geradas pela experiência do projetista sem contar com estas ferramentas. Além de ajudar a definir as melhores dimensões para os elementos estruturais, o processo de otimização pode indicar ao projetista alguns pontos críticos na estrutura, que devam merecer um tratamento mais aprofundado de modo a se gerar uma maior economia global do projeto.

11.1. Conclusões do trabalho

Neste trabalho foi desenvolvido um programa para a otimização do pré-dimensionamento de estruturas de edifícios, simplificada como pórticos planos, fazendo a otimização das seções transversais dos elementos – pilares e vigas – e repetindo este processo até que não houvesse mais redistribuição significativa dos esforços. Uma vez atingida esta situação, considerou-se que a estrutura como um todo se encontrava otimizada. É possível que a otimização global da estrutura traga resultados mais favoráveis, mas a dificuldade de implementação e o custo computacional para se definir uma estrutura ótima, utilizando um processo global e trabalhando com elementos de comportamento distintos e um material heterogêneo como o concreto, faz com que este tipo de otimização, por aproximação combinada, se torne de mais atraente implementação. No procedimento utilizado, considerou-se ainda, separadamente, a otimização das vigas e dos pilares, por se tratarem de estruturas de comportamento distinto. A função objetivo para as duas situações foi a mesma: uma função de menor custo por unidade de comprimento do elemento. Para as duas situações também foram consideradas restrições de forma a garantir o equilíbrio e a compatibilidade das seções, além de restrições laterais, que trazem limitações de ordem prática ou normativas para as estruturas.

Para as vigas, as restrições laterais foram colocadas de forma a limitar a taxa de armadura, a quantidade de armadura comprimida na seção e a flecha nas vigas. A

verificação da flecha foi retirada do processo de otimização, sendo feita após a determinação da altura ótima da viga, de forma a facilitar o procedimento, uma vez que essa restrição terá como implicação apenas o aumento da altura das vigas, caso a mesma não atenda aos requisitos exigidos em normas técnicas.

Para os pilares, as restrições laterais adotadas foram a de garantir a seção totalmente comprimida, pois foi prevista a otimização da seção mais solicitada da edificação que, geralmente, se encontra nesta situação, e as limitações de ordem prática das dimensões da seção transversal e da taxa de armadura. Estas limitações de ordem práticas também foram feitas em separado do processo de otimização em si, pois se tratavam apenas de limitações em variáveis isoladas, não afetando a relação entre as variáveis.

Foi verificado, através de exemplos estudados que, para a relação de custos dos materiais existente à época da realização deste trabalho, as seções mais econômicas para as vigas com carregamentos usuais de edifícios e sem a presença de restrições ativas se encontram próximas a seção normalmente armada, com uma taxa de armadura comprimida próxima de zero. Porém, à medida que o carregamento aumenta, tende a ser mais vantajoso combater este acréscimo de esforço com o aumento da armadura de compressão, uma vez que com o aumento da seção de concreto se aumenta o consumo de concreto numa região tracionada, onde este material não tem eficiência, além de aumentar também o consumo de forma, que é parte importante no custo de uma estrutura de concreto.

No estudo das seções dos pilares, consideradas isoladamente, foi constatado que, quando não estão atuando restrições sobre o processo de otimização, as seções ótimas encontradas tendem a se manter com uma taxa de armadura próxima da taxa mínima permitida. Este fato se explica pela configuração das seções adotadas na prática e pelo domínio em que estas seções estão trabalhando. O fato de se trabalhar com a seção de concreto totalmente comprimida, onde este material é mais eficiente e com disposição de armaduras simétricas, que levam a se trabalhar com armaduras em posições onde elas estão sub-utilizadas, faz com que os esforços sejam melhor combatidos com a utilização de maior área de concreto por ser o material melhor empregado nesta situação. Ao

comparar as diferentes configurações de distribuição de armadura definidas neste estudo para atender às prescrições das normas técnicas, verifica-se que quanto mais camadas de armadura são colocadas na seção, mas elevado será o custo ótimo da mesma. Este fato já era esperado por causa do aumento do percentual de armadura trabalhando de forma sub-utilizada que este aumento no número de camadas representa.

Nos exemplos de pórticos calculados pudemos verificar que as seções ótimas encontradas pelo programa encontram-se com valores próximos das seções usualmente adotadas pela prática dos projetistas para o pré-dimensionamento das estruturas. Porém, além de determinar a área das seções, podemos perceber que o programa também é eficiente para definir a melhor forma da seção transversal dos pilares de forma a combater os esforços atuantes, fazendo com que eles se aproximem da forma quadrada quando estão submetidos, basicamente, a esforços verticais e tenham uma forma mais alongada na direção do momento atuante quando os mesmos estão submetidos a maiores excentricidades.

Os valores das variáveis adotados como dados de entrada da estrutura, para os pórticos com dimensões usuais, têm pouco significado na seção ótima dos elementos estruturais. O fato de se aplicar um valor inicial muito diferente da realidade pode ser prejudicial apenas na velocidade de convergência do programa, pois irão ocorrer grandes variações ao longo das primeiras iterações, de forma a provocar uma grande redistribuição dos esforços, fazendo com que sejam necessárias mais iterações a fim de se chegar a seção otimizada. Uma vez que as perturbações provocadas pelas grandes variações das dimensões se dissipe, a estrutura tende a convergir rapidamente para os valores ótimos. Devido a estas variações, é recomendável que se defina um número máximo de iterações compatível com as incertezas quanto à proximidade dos dados de entrada em relação aos valores ótimos da estrutura. Quanto mais incerto se estiver da distância entre os valores adotados e os valores ótimos, maior deve ser o número máximo de iterações, não sendo recomendado um número de iterações máximo menor que vinte.

Embora diferente do que costuma acontecer na prática, pode acontecer em algumas das estruturas uma variação significativa na altura das vigas para pavimentos

diferentes. Como é comum se utilizar a mesma altura de viga para todos os pavimentos a fim de se reaproveitar as formas, o projetista pode fixar os valores de algumas delas e verificar o que acontece com as demais. Recomenda-se fixar as alturas das vigas que atingiram maiores alturas em valores abaixo daqueles encontrados e verificar se estes esforços conseguem ser absorvidos pelo restante da estrutura, mantendo as condições de segurança da mesma. Este processo pode ser repetido até que todas as vigas encontrem-se com dimensões próximas umas das outras, de forma que se possa adotar uma dimensão única para as mesmas.

11.2. Propostas para pesquisas futuras

Algumas sugestões para a continuidade da pesquisa podem ser feitas em função das observações dos resultados da análise numérica efetuada:

- Adotar as seções trabalhando em todos os domínios de cálculo de forma a deixar livre a variação de seções dos pilares, fazendo com que eles possam ser aplicados em diferentes tipos de construção, e submetidas a variados casos de carga;
- Otimizar seções de pilares trabalhando a flexão oblíqua, deixando sua variação mais ampla;
- Utilizar o pilar trabalhando a flexão oblíqua em um programa para otimização de pórtico espacial, realizando desta forma a otimização da estrutura de um edifício como um todo;
- Incluir as lajes dos pavimentos no processo de otimização da estrutura.

12. Bibliografia Consultada

- ADAMU, A.; KARIHALOO B. L. (1994a). Minimum cost design of RC beams using DCOC, Part I: Beams with freely-varying cross-section. *Structural Optimization*, v. 7, n.4, p.237-251. Jun.
- ADAMU, A.; KARIHALOO B. L. (1994b). Minimum cost design of RC beams using DCOC, Part II: Beams with uniform cross-section. *Structural Optimization*, v. 7, n.4, p.252-259. Jun.
- ADAMU, A.; KARIHALOO B. L. (1995b). Minimum cost design of RC frames using the DCOC method, Part I: Coluns under uniaxial bending actions. *Structural Optimization*, v. 10, n.1, p.16-32. Ago.
- ADAMU, A.; KARIHALOO B. L. (1995a). Minimum cost design of RC frames using the DCOC method, Part II: Coluns under biaxial bending actions. *Structural Optimization*, v. 10, n.1, p.33-39. Ago.
- AL-SALLOUM, Y. A.; SIDDIQI, G. H. (1994). Cost-optimum design of reinforced concrete beams. *ACI Structural Journal*, v.91, n.6, p.647-655. Nov/Dez.
- AMIR, H.M.; HASEGAWA, T. (1989). Nonlinear mixed-discrete structural optimization. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.115, n.3, p.626-646. Mar.

- ARORA, J.S. (1980). Analysis of optimality criteria and gradient projection methods for optimal structural design. *Computer Methods In Applied Mechanics and Engineering*, v.23, p.185-213
- ARORA, J.S; ed. (1997). Guide to structural optimization. ASCE, New York, N. Y.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. *NBR 6118: projeto de estruturas de concreto – procedimento*. Rio de Janeiro, 2003.
- BALLING, R.J.; YAO, X. (1997). Optimization of reinforced concrete frames. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.123, n.2, p.193-202. Fev.
- BARNETT R.L. (1961). Minimum weight design of beams for deflection. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.87, n.1, p.75-109, Jan.
- BAZARAA, S.M.; SHETTY, C.M. (1979). *Nonlinear programming: theory and algorithms*. New York, John Wiley.
- BORKOWSKI, A.; JENDO, S. (1990). Structural optimization. *Mathematical programming*, v.2, Plenum, New York, N.Y.
- CAMP, C.; PEZESHK, S.; CAO, G. (1998). Optimized design of two-dimensional structures using a genetic algorithm. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.124, n.5, p.551-559, Mai.
- CHAKRABARTY, B.K. (1992a). Models for optimal design of reinforced concrete beams. *Computer & Structures*, v.42, n.3, p.447-451, Fev.
- CHAKRABARTY, B.K. (1992b). A model for optimal design of reinforced concrete beam. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.118, n.11, p.3238-3242, Nov.
- CHAN, C.M.; GRIERSON, D.E.; SHERBOURNE, A.N. (1995). Automatic optimal design of tall steel building frameworks. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.121, n.5, p.838-847, Mai.

- COHN, W. (1993). Theory and practice of structural optimization. Proc. NATO-AV *Optimization of Large-Scale Structural Systems*, GIN. Rozvany, ed, Kluwer Academic Publishers, Dordrechí, The Netherlands, v.2, p.843-862.
- COHN, M.L.; DINOVIETZER, A.S. (1994). Application of structural optimization. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.120, n.2, p.617-650, Fev.
- COOY, R.D. (1995). *Finite element modeling for stress analysis*. Madison, John Wiley & Sons, Inc.
- COSTA, J.B. (1990). Automação do dimensionamento do vigamento de pavimentos tipo de edifícios de concreto armado. Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- EVERARD, N. J.; Tanner, J. L. III. (1987). *Theory and problems of reinforced concrete design*. McGraw Hill Book Co., Inc., New York, NY.
- FADAEI, M.J.; GRIERSON, D.E. (1996). Design optimization of 3D reinforced concrete structures. *Structural Optimization*, v.12, n.2/3, p.127-134. Out.
- FRANGOPOL, D.M.; KLISINSKI, M. (1989). Material behavior and optimum design of structural systems. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.115, n.5, p.1054-1075, Mai.
- FRIEL L.L. (1974). Optimum singly reinforced concrete sections, *ACI Journal*, v.71, n.11, p. 556-558, Nov.
- GOBLE, G.G.; MOSES, F. (1975). Practical applications of structural optimization. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.101, n.4, p.635-649, Abr.
- GOLDBERG, D.E.; SAMTAMI, M.P. (1986). Engineering optimization via genetic algorithm. *Proceedings of 9th conf. Electronic Computation*, ASCE, p.471-482.
- GOLDBERG, D.E. (1989). *Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning*. U.S.A., Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

- GRAZIANO, F.P.; FRANÇA, R.L.S. (1993). Solicitações Normais. Alguns tópicos. III *Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto*. São Paulo - SP. p. 197 - 207.
- HAQUE, M.I. (1996). Optimal frame design with discrete members using the complex method. *Computer & Structures*, v.59, n.5, p.847-858.
- HASSANAIN, M.A.; LOOV, R.E. (1999). Design of prestressed girder bridges using high performance concrete – An optimization approach. *PCI Journal*, v.44, n.2, p. 40-53, Mar/Abr.
- HASEGAWA, A.; SAKAMOTO, T.; SATO, N. (1989). Elastic and plastic designs for maximum load. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.115, n.6, p.1342-1356, Jun.
- HÖRNLEIN, H. (1987). Take-off in optimum structural design. *Computer-Aided optimal Design*, C.A. Mota Soares, ed., Springer-Verlag, Berlin, Germany, p.901-927.
- HOROWITZ, B. (1993). Strength of slender concrete columns subjected to biaxial bending. *In the World Congress on Optimal Design of Structural Systems*, Rio de Janeiro, 1993. Anais. Rio de Janeiro COPPE/Federal University of Rio de Janeiro. v.1, p.395-402.
- HUANCHUN, S.; ZHENG, C. (1985). Two-level optimum design of reinforced concrete frames with integer variables. *Engineering Optimization*, v.9, n.3, p.219-232, Mar.
- JENKINS, W.M. (1992). Plane frame optimum design environment based on genetic algorithm. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.118, n.11, p.3103-3112, Nov.
- KANAGASUNDARAM, S.; KARIHALOO, B.L. (1990). Minimum-cost design of reinforced concrete structures. *Structural Optimization*, v.2, n.3, p.173-184, Set.

- KANAGASUNDARAM, S.; KARIHALOO, B.L. (1991). Minimum-cost reinforced concrete beams and columns. *Computers & Structures*, v.41, n.3, p.509-518, Mar.
- KIRSCH, U. (1993). Effective approximations for topological optimization. *The World Congress on Optimal Design of Structural Systems*, Rio de Janeiro, 1993. Anais. Rio de Janeiro COPPE/Federal University of Rio de Janeiro. v.1, p. 3-10.
- KIRSCH, U.; TOPPING, B.H.V. (1992). Minimum weight design of structural topologies. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.118, n.7, p. 1770-1785, Jul.
- KOCER, F.Y.; ARORA, J.S. (1996). Design of prestressed concrete transmission poles: optimization approach. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.122, n.7, p. 804-814, Jul.
- KUHN, H.W.; TUCKER, A.W. (1951). Nonlinear programming. *Proceedings of 2nd Berkeley Symp. on Mathematics, Statistics and Probability*, University of California Press, Berkeley, Calif. P.481-492
- LASSEN, T. (1993). Optimum design of three-dimensional framework structures. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.119, n.3, p.713-727, Mar.
- LEV, O.E.; ed. (1981). *Structural optimization*. ASCE, New York, N. Y.
- LEVY, R.; LEV, O.E. (1987). Recent developments in structural optimization. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.113, n.9, p.1939-1962, Set.
- LUENBERGER, D.L. (1989). *Programación lineal y no lineal*. Wilmington, Delaware, E.U.A., Addison-Wesley Iberoamericana.
- MACHADO, C.P. (1989). *Tensões, deformações e deslocamentos em estruturas de concreto armado e protendido*. 3v. Dissertação (mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- MAU, S.; SEXSMITH, R.G. (1972). Minimum expected cost optimization. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.98, n.9, p.2043-2058, Set.

- MEDRANO, M.S. (1994). *Aplicações de programação matemática em análise estrutural*. Dissertação (mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- MOHARRAMI, H.; GRIERSON, D.E. (1993). Computer-automated design of reinforced concrete frameworks. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.119, n.7, p.2036-2058, Jul.
- NAAMAN A.E. (1976). Minimum Cost versus minimum weight of prestressed slabs. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.102, n.7, p.1493-1505, Jul.
- PEZESHK, S.; HJELMSTAD, K.D. (1991). Optimal design of planar frames based on stability criterion. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.117, n.3, p.896-913, Mar.
- PRAGER, W. (1968). Optimality in structural design. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, University of California (San Diego), v.61, n.3, p.794-796.
- PRAKASH, A.; AGARWALA, S.K.; SINGH, K.K. (1988). Optimum design of reinforced concrete sections. *Computers & Structures*, v.30, n.4, p.1009-1011, Abr.
- RAMOS, A.L.T.; STANGE, P. (1993). A system for optimal design of reinforced concrete structures. *The World Congress on Optimal Design of Structural Systems*, Rio de Janeiro, 1993. Anais. Rio de Janeiro COPPE/Federal University of Rio de Janeiro. V.1, p.415-421.
- RATH, D.P.; AHLAWAT, A.S.; RAMASWAMY, A. (1999). Shape optimization of RC flexural members. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.125, n.12, p.1439-1446, Dez.
- RIZZI, P. (1976). Optimization of multi-constrained structures based on optimality criteria. *Proceedings of AIAA/ASME/SAE 17th Struct. Dyn. And Mat. Conference*, King of Prussia, Pa.

- SALAJEGHEH, E. (1997). Structural optimization using response approximation and optimality criteria methods. *Engineering Structures*, v.19, n.7, p.527-532.
- SALGADO, N.K. (1987). *Técnicas de otimização matemática no projeto de pórticos planos retangulares*. Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SARMA, K.C.; ADELI, H. (1998). Cost optimization of concrete structures. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.124, n.5, p.570-578, Mai.
- SAVE, M.; PRAGER, W. (1985). Structural optimization. *Optimality Criteria*, vA, Plenum, New York, N.Y.
- SCHMIT, L.A. (1960). Structural design by systematic synthesis. *Proceedings, ASCE, 2nd Conference on Electronic Computation*, Pittsburgh, Pa, p.105-132
- SOARES R. C. (1997). Otimização de seções transversais de vigas de concreto armado sujeitas à flexão: aplicação à pavimentos. *Dissertação (mestrado)*, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SOBIESKI, J. et alii (1987). Panel discussion: Trends in computer-aided optimal design. *Computer-Aided optimal Design*, C.A. Mota Soares, ed., Springer-Verlag, Berlin, Germany, p.1018 -1029.
- SOUSA Jr, J.B.M.; VAZ, L.E. (1993). Otimização do dimensionamento de pilar padrão de concreto armado com seção retangular. *III Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto*. São Paulo - SP. p.393-405.
- SPIRES, D.; ARORA, J.S. (1990). Optimal design of tall RC-framed tube buildings. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.116, n.4, p.877-897, Abr.
- SÜSSEKIND, J.C. (1974). *Curso de análise estrutural - deformações em estruturas, método das forças*. São Paulo, Brasil. Globo.
- SUN, B.J.; LU, Z.T. (1992). Design aides for reinforced concrete columns. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.118, n.11, p.2986-2995, Nov.

- TEMPLEMAN, A.B. (1983). Optimization methods in structural design practice. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.109, n.10, p.2420-2433, Out.
- THANEDAR, P.B.; VANDERPLAATS, G.N. (1995). Survey of discrete variable optimization for structural design. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.121, n.2, p.301-306, Fev.
- TSENG, C.H.; WANG, L.W.; LING, S.F. (1995). Enhancing branch-and-bound method for structural optimization. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.121, n.5, p.831-837, Mai.
- VANDERPLAATS, G.N. (1984). *Numerical optimization techniques for engineering design*. New York, Mc.Graw - Hill.
- VANDERPLAATS, G.N.; MOSES, F. (1972). Automated design of trusses for optimum geometry. *Journal of Structural Division*, ASCE, v.98, n.6, p.671-690.
- VENKAYYA, V.B.; KHOT, N.S.; REDDY, V.S. (1968). *Energy distribution in an optimum design*. AFFDL-TR-68-156, Flight Dynamics Laboratory, Wright Patterson AFB, Ohio.
- WEI, Z.; YE, S. (1990). Optimal sectional design of frame structures using geometric programming. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.116, n.8, p.2292-2298, Ago.
- YANG, Y.; SOH, C. K. (2002). Automated optimum design of structures using genetic programming. *Computers & Structures*. v.80, n.7, p.1537-1546, Jul.
- ZIELINSKI, Z.A.; LONG, W.; TROITSKY, M.S. (1995). Designing reinforced concrete short-tied columns using the optimization technique. *ACI Structural Journal*, v.92, n.5, p.619-626, Set/Out.