

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**DETERMINAÇÃO DOS FATORES DE INTENSIDADE DE  
TENSÃO ESTÁTICOS E DINÂMICOS VIA MEC COM  
INTEGRAÇÃO ANALÍTICA EM COORDENADAS LOCAIS**

**Eng<sup>o</sup> Daniel Nelson Maciel**

**Dissertação apresentada ao  
Departamento de estruturas, Escola  
de Engenharia de São Carlos,  
Universidade de São Paulo, como  
parte dos requisitos para a obtenção  
do título de mestre em Engenharia de  
Estruturas.**

**ORIENTADOR: Prof Assoc. Humberto Breves Coda**

**São Carlos  
Março/2003**

“A arte da vida consiste em fazer  
da vida uma obra de arte”.

Mahatma Gandhi

*Dedico este trabalho aos meus  
queridos e amados pais, Marila e  
Elias.*

## **AGRADECIMENTOS**

A todos os meus familiares e amigos da minha querida terra Natal, pelo incentivo e amizade ao longo da minha vida.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de estudos a mim concedida.

Ao Meu Orientador, Professor Humberto Breves Coda, pela excelente orientação, grande conhecimento, comprometimento e pela amizade a mim dispensada.

Ao Professor Paulo Sollero (Unicamp), pelas críticas construtivas e preciosas sugestões no exame de qualificação referente a este trabalho.

Aos amigos do Grupo de Mecânica Computacional (GMEC): Marcelo, Arthur, Patrick, Rodrigo e Leandro pela amizade, conhecimento e por estarem sempre dispostos a me ajudar no que fosse necessário.

Ao amigo Wilson Wesley Wutzow por me ajudar na confecção de algumas malhas dos exemplos numéricos e pelas idéias discutidas.

Ao amigo e Professor da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) Roberto José de Medeiros por ter me ensinado com grande maestria Resistência dos Materiais e por sempre me incentivar antes e durante o curso de mestrado.

Às funcionárias da Biblioteca do SET, Nadir e Felícia, pela competente ajuda no que tange à revisão bibliográfica.

A Professora Dr<sup>a</sup> Ada Cristina Scudelari (UFRN) pelos meus primeiros passos na área de métodos numéricos.

Aos meus grandes amigos de turma: André, Sérgio, Júlio, Márcio, Alexandre (Buttler e Miná), Marcelo, Oscar, Regiane, Isabela, Gustavo e todos aqueles que não tiveram seus nomes aqui citados, pelo incentivo, companheirismo constante e por tornar o ambiente de trabalho o mais agradável possível.

Aos meus queridos irmãos, Sílvio e Reginaldo, pela saudável convivência, grande amizade apoio e estímulos dedicados a mim.

A Pauline pelo amor, respeito, compreensão e alegrias vivenciadas juntos durante este último ano de mestrado.

Finalmente, aos meus pais...Por tudo.

# SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	i
LISTA DE SÍMBOLOS.....	iii
RESUMO.....	v
ABSTRACT.....	vi
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Objetivos.....	1
1.2 Metodologia.....	1
1.3 Justificativa.....	2
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	4
3 ELASTICIDADE LINEAR ISOTRÓPICA: Equações Básicas.....	8
3.1 Estado de Tensões.....	8
3.2 Estado de Deformação.....	11
3.3 Lei de Hooke.....	12
3.4 Estados Planos de Tensão de Deformação.....	14
3.4.1 Estado plano de Tensão (EPT).....	14
3.4.2 Estado plano de Deformação (EPD).....	15
4 MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR: Conceitos básicos.....	16
4.1 Considerações Iniciais.....	16
4.2 Modos de Fratura.....	17
4.3 Hipóteses Básicas da Mecânica da Fratura Elástica Linear.....	17
4.4 Campo de Tensões próximo à ponta da trinca.....	19
4.5 Alguns Critérios de Resistência da Mecânica da Fratura.....	20
4.5.1 Fatores de Intensidade de Tensão Críticos $K_{IC}$ e $K_C$ .....	20
4.5.2 Critério de Griffith.....	21
4.5.3 Integral J de Rice 2D.....	22
4.6 Carga Súbita Para problema de Mecânica da Fratura em Modo I.....	24
5 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA O PROBLEMA ELÁSTICO LINEAR 2D.....	26
5.1 Solução Fundamental elastostática bidimensional.....	26
5.2 Equação Integral de Contorno.....	29
5.3 Discretização do problema.....	33
6 INTEGRAÇÃO ANALÍTICA DAS INTEGRAIS DE CONTORNO NO SISTEMA LOCAL E TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS.....	44
6.1 Procedimento de Integração Analítica das Matrizes.....	45
6.1.1 Caso 1: Integração com o Ponto “s” Desalinhado com o Elemento ( $a \neq 0$ ).....	45
6.1.2 Exemplo Ilustrativo do Caso 1.....	48
6.1.3 Caso 2: Integração com o Ponto “s” Alinhado com o Elemento ( $a=0$ ).....	49
6.2 Transformação de Coordenadas.....	51

7 FORMULAÇÃO PROPOSTA PARA O PROBLEMA DE MECÂNICA DA FRATURA VIA MEC.....	56
7.1 Considerações iniciais.....	56
7.2 Geometria do Problema.....	57
7.3 Equações Integrais Empregadas.....	57
7.4 Determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão (FIT) .....	57
8 EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	60
8.1 Exemplos Estáticos .....	60
8.1.1 Exemplo 1 – Formulação atual.....	60
8.1.2 Exemplo 1- Formulação anterior.....	62
8.1.3 Exemplo 2 .....	66
8.1.4 Exemplo 3 .....	67
8.1.5 Exemplo 4 .....	69
8.2 Exemplos Dinâmicos.....	72
8.2.1 Exemplo 5 .....	72
8.2.2 Exemplo 6 .....	75
8.2.3 Exemplo 7 .....	77
9 CONCLUSÕES E SUGESTÕES .....	79
ANEXO A: LISTA DE INTEGRAIS BÁSICAS .....	82
A.1 Lista das Integrais Básicas Para a Matriz $[h]$ .....	82
A.2 Lista das Integrais Básicas Para a Matriz $[g]$ .....	84
A.3 Lista das Integrais Básicas Para a Matriz $[h]'$ .....	86
A.4 Lista das Integrais Básicas Para a Matriz $[g]'$ .....	90
ANEXO B: LISTA DOS ELEMENTOS DAS MATRIZES $[h]$ , $[g]$ , $[h]'$ e $[g]'$ PARA ELEMENTO LINEAR ISOPARAMÉTRICO EM COORDENADAS LOCAIS.....	94
B.1 Elementos da Matriz $\overline{[h]}$ .....	94
B.2 Elementos da Matriz $\overline{[g]}$ .....	96
B.3 Elementos da Matriz $\overline{[h]}'$ .....	97
B.4 Elementos da Matriz $\overline{[g]}'$ .....	99
ANEXO C: LISTA DOS ELEMENTOS DAS MATRIZES $[h]$ , $[g]$ , $[h]'$ e $[g]'$ PARA ELEMENTO RETO COM VARIAÇÃO QUADRÁTICA EM COORDENADAS LOCAIS.....	102
C.1 Elementos da Matriz $\overline{[h]}$ .....	102
C.2 Elementos da Matriz $\overline{[g]}$ .....	104
C.3 Elementos da Matriz $\overline{[h]}'$ .....	106
C.4 Elementos da Matriz $\overline{[g]}'$ .....	110
C.5 Integrais das matrizes $[h]$ e $[g]$ para o ponto fonte no elemento.....	114
C.5.1 Ponto fonte no nó 1 ( $x_s = 0$ ).....	115
C.5.1 Ponto fonte no nó 2 ( $x_s = L/2$ ) .....	115
C.5.1 Ponto fonte no nó 3 ( $x_s = L$ ) .....	116
BIBLIOGRAFIA .....	117
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR .....	122
APÊNDICE I: ALGORITMO DE HOUBOLT .....	123
I.1 Algoritmo de Integração Temporal de Houbolt.....	123



## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 01 : Representação do Tensor de Tensões num Ponto Genérico do Corpo.....	9
FIGURA 02: Chapa tracionada, exemplo de EPT.....	14
FIGURA 03: Exemplo de problema elástico em EPD.....	15
FIGURA 04: Modos de Fratura .....	17
FIGURA 05: Caminho da Integral J de Rice.....	23
FIGURA 06: Representação do Domínio Infinito Bidimensional.....	28
FIGURA 07: Domínio de Validade do Problema Elástico 2D .....	30
FIGURA 08: Problema elástico discretizado em elementos de contorno e células de domínio.....	34
FIGURA 09: Elemento de contorno linear .....	35
FIGURA 10: Elemento de contorno linear com variação quadrática.....	36
FIGURA 11: Célula de domínio triangular com variação linear.....	36
FIGURA 12: Variação das funções de forma no elemento de contorno linear.....	37
FIGURA 13: Variação das funções de forma no elemento linear com variação quadrática.....	38
FIGURA 14: Variação das funções de forma da célula.....	39
FIGURA 15: Posicionamento dos eixos locais ( $\bar{x}_i$ ) em relação ao elemento.....	45
FIGURA 16: Disposição geométrica dos parâmetros do problema para o caso 2.....	50
FIGURA 17: Geometria da formulação proposta.....	57
FIGURA 18: Posicionamento dos pontos internos de extração em relação à trinca.....	59
FIGURA 19: Chapa tracionada com trinca central em Modo I.....	61
FIGURA 20: Campo de tensões em pontos próximo à ponta da trinca.....	63
FIGURA 21: Gráfico de tensões em escala logarítmica.....	64

FIGURA 22: Trecho escolhido no gráfico logarítmico para determinação do $K_I$ ....	65
FIGURA 23: Chapa com trinca inclinada no centro.....	68
FIGURA 24: Tabela da variação dos FIT's conforme mudança de malha na trinca.	68
FIGURA 25: Configuração deformada de chapa com trinca central inclinada. ....	69
FIGURA 26: Chapa tracionada com trinca de canto. ....	70
FIGURA 27: Tabela de resultados obtidos para os FIT's.....	71
FIGURA 28: Configuração deformada de chapa com trinca de canto. ....	71
FIGURA 29: Gráfico de $K_I$ Dinâmico para o exemplo 5.....	73
FIGURA 30: Gráfico comparativo entre o FIT pelo MEC e o FIT analítico. ....	74
FIGURA 31: Gráfico de deslocamentos das faces da trinca.....	75
FIGURA 32: Fator de Intensidade de Tensão normalizado para o Exemplo 6. Chapa Tracionada com Trinca no Centro.....	76
FIGURA 33: Fatores de Intensidade de Tensão Normalizados para o modo I. Exemplo de Trinca inclinada no centro da chapa. ....	77
FIGURA 34: Fatores de Intensidade de Tensão Normalizados para o modo II. Exemplo de Trinca inclinada no centro da chapa. ....	78
FIGURA 35: Posicionamento do ponto fonte no elemento. ....	114

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a$	Comprimento característico da trinca.
$a_c$	Valor crítico do comprimento característico da trinca.
$\Omega$	Domínio do problema.
$C_{ij}$	Tensor de termos livres.
$\Gamma$	Contorno do problema.
$\Gamma_N$	Contorno natural.
$\Gamma_E$	Contorno essencial.
$\sigma_{ij}$	Tensor de tensões.
$\sigma_c$	Tensão normal crítica de tração.
$\varepsilon_{ij}$	Tensor de deformações.
$\phi_m$	Vetor de funções de forma para elemento de contorno.
$\xi_m$	Vetor de funções de forma para célula de domínio.
${}^j U_k^m$	Vetor de deslocamentos nodais no elemento de contorno “j”.
${}^j P_k^m$	Vetor de forças nodais no contorno “j”.
${}^j \Psi_k^m$	Vetor de termos de domínio nodais para uma célula “j”.
$\rho$	Densidade do material do corpo.
$c$	Coefficiente de amortecimento do material do corpo.
$c_d$	Velocidade da onda elástica de dilatação
$\ddot{u}_i$	Vetor aceleração.
$\dot{u}_i$	Vetor velocidade.
$u_{ik}^*$ ( )	Vetor Deslocamento Fundamental.
$p_{ik}^*$ ( )	Vetor Força Fundamental.
$b_i$	Vetor de forças de corpo estáticas.

$\{\mathbf{b}\}_j$	Vetor de valores nodais de força de corpo.
$\{\ddot{\mathbf{U}}\}_j$	Vetor aceleração nodal para uma célula “j”.
$\{\dot{\mathbf{U}}\}_j$	Vetor velocidade nodal para uma célula “j”.
$\mathbf{p}_i$	Vetor de forças de superfície.
$\bar{\mathbf{p}}_i$	Vetor de forças de superfície prescritos ou conhecidos.
$\boldsymbol{\eta}_i$	Vetor unitário normal ao contorno $\Gamma$ .
$\mathbf{u}_i$	Vetor de deslocamentos.
$\bar{\mathbf{u}}_i$	Vetor de deslocamentos prescritos ou conhecidos.
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker.
$\delta( )$	Delta de Dirac.
$\lambda$	Constante de Lamé.
$\lambda_i$	Vetor de termos de domínio.
$E$	Módulo de elasticidade longitudinal do material do corpo.
$G$	Módulo de Elasticidade transversal do material do corpo.
$\nu$	Coefficiente de Poisson.
$J$	Integral J de Rice.
$C_{ijkl}$	Tensor de constantes elásticas.
$D_{ijkl}$	Tensor de flexibilidade.
$K$	Fator de Intensidade de Tensão.
$K_{I, II, III}$	Fator de Intensidade de Tensão para o Modo I, II, III respectivamente.
$K_C$	Fator de Intensidade de Tensão crítico para o EPD.
$K_{IC}$	Fator de Intensidade de Tensão crítico para o EPT.
$U_E$	Energia de deformação elástica.
$U_\Gamma$	Energia de superfície.
$G$	Energia dissipada no volume do corpo.
$\gamma$	Variação da energia superficial necessária para formar duas novas faces na extremidade da trinca.
$w$	Energia de deformação por unidade de volume do corpo.

## RESUMO

MACIEL, D. N. *Determinação dos fatores de intensidade de tensão estáticos e dinâmicos via MEC com integração analítica em coordenadas locais*. São Carlos, 2003. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Neste trabalho os problemas de determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão  $K_I$  e  $K_{II}$  estáticos e dinâmicos são tratados numericamente utilizando uma formulação alternativa do Método dos Elementos de Contorno (MEC) com solução fundamental de Kelvin e matriz de massa para os problemas dinâmicos. A trinca é suposta retangular inicialmente, com suas faces não-coincidentes. Tanto as faces da trinca, quanto o contorno externo são discretizados em elementos de contorno reto com variação de forças de deslocamentos quadráticas, não havendo, portanto distinção entre elementos de trinca e de contorno externo. Integrais analíticas também são obtidas para o elemento linear isoparamétrico. As células de domínio apresentam formato triangular e suas integrais são solucionadas semi-analiticamente. Quanto às integrais de contorno, essas são obtidas analiticamente segundo eixos de referência locais, procedendo-se em seguida a rotação pra eixos globais. O algoritmo de Houbolt é empregado como integrador temporal. Exemplos numéricos da determinação desses Fatores de Intensidade de Tensão são mostrados e comparados com resultados analíticos e resultados numéricos disponíveis na literatura.

Palavras-chave: Método dos Elementos de Contorno – integrais analíticas – fatores de intensidade de tensão.

## ABSTRACT

MACIEL, D. N. *Dynamic and static stress intensify factors obtainment by BEM with analytical integration in local co-ordinates axes*. São Carlos, 2003. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

In this work the stress intensify factors  $K_I$  and  $K_{II}$  for static and dynamic two-dimensional problem are obtained numerically by an alternative mass matrix boundary element formulation. The crack is considered a rectangular hole inside the domain and its faces are not coincident. Both crack faces and boundary are discretized by straight boundary elements with quadratic approximation. Domain cells are triangular with linear approximation and their integrals are developed semi-analytically. Boundary integrals are analytically performed, for linear and quadratic approximations. They are performed at local co-ordinate axes and transformed to global co-ordinate axes. The Houbolt algorithm is used to integrate the matrix time differential equation along time. Numerical examples are shown in order to compare the results obtained by the proposed formulation and the ones presents in literature.

Keywords: boundary element method – analytical integrals – stress intensify factors.

# 1 INTRODUÇÃO

São mostrados neste capítulo introdutório os objetivos do presente trabalho de mestrado, a metodologia empregada, como também sua justificativa.

## 1.1 Objetivos

Este trabalho tem como principal objetivo a elaboração de um programa computacional utilizando o Método dos Elementos de Contorno, que solucione o problema elástico linear estático e dinâmico, determine o Fator de Intensidade de Tensão estático e dinâmico para os modos I e II de fratura ( $K_I$  e  $K_{II}$  respectivamente) e faça uma análise de deslocamentos das faces da trinca, ou seja, averiguar se a trinca chega a se fechar em determinado instante quando há solicitação dinâmica.

## 1.2 Metodologia

O meio contínuo é tratado como sendo elástico linear isotrópico e homogêneo e está contido num plano. Utiliza-se como método numérico para a solução do problema o Método dos Elementos de Contorno com Matriz de Massa, também chamado de *MMBEM*, ou seja, “*Mass Matrix Boundary Element Method*”. Sendo assim, o corpo analisado apresenta o seu contorno subdividido em elementos de contorno e o seu domínio em células.

O elemento de contorno da discretização do problema é aproximado, segundo sua geometria, através de uma reta, sendo as variáveis (deslocamentos e forças de

superfície) que nele podem ser prescritas ou incógnitas, aproximadas segundo uma variação quadrática ao longo do referido elemento de contorno.

As integrações referentes aos elementos de contorno são feitas analiticamente para todas as situações de posicionamento do ponto fonte “s”. Calculam-se essas integrais, inicialmente, em relação a eixos cartesianos locais, procedendo-se posteriormente com a rotação de eixos para posicionamento global. Quanto às integrais das células de domínio, são obtidas segundo processo semi-analítico em coordenadas globais.

A trinca é considerada em regime elástico linear e tem formato retangular, sendo sua abertura inicial (distância entre as faces da trinca) muito menor em relação ao comprimento característico da trinca. Os elementos utilizados para discretização da trinca são os mesmos para o contorno externo do problema, vale dizer, elementos retos de aproximação quadrática das variáveis. É importante frisar que a consideração dos elementos utilizados na trinca sejam do mesmo tipo dos utilizados no contorno externo sem a necessidade de subdividir o domínio do problema (método das sub-regiões), só é possível porque as integrais de contorno são todas determinadas analiticamente.

Neste trabalho, é importante também ressaltar que os fatores de intensidade de tensão são determinados através das tensões calculadas em pontos internos próximos à ponta da trinca, isto graças ao procedimento de integração analítica.

Por fim, a integração temporal é feita utilizando-se o Algoritmo de Houbolt<sup>1</sup>.

### **1.3 Justificativa**

A solução de problemas da mecânica da fratura através do Método dos Elementos de Contorno apresenta algumas vantagens diante da utilização de outros métodos numéricos empregados para solução deste mesmo problema, dentre elas a menor discretização necessária para se obter bons resultados. Portanto, desenvolver técnicas baseadas no MEC para tratar de problemas de Mecânica da Fratura é uma tarefa de considerável importância científica.

---

<sup>1</sup> Detalhes sobre este algoritmo são descritos no Apêndice I.

No presente trabalho, são determinados os Fatores de Intensidade de Tensão estáticos e dinâmicos utilizando o MEC com solução fundamental elastostática de Kelvin (*MMBEM*), sob o âmbito inovador de utilizar todas as integrais na forma analítica para a solução deste problema, dispensando assim a já tão utilizada integração numérica presente na maior parte da bibliografia referente ao MEC para Mecânica da Fratura.

Com as integrais bem feitas, isto é, analíticas, não se faz necessário o uso da formulação padrão, dispensando, portanto, o uso do elemento de trinca e integrais hipersingulares. A aplicação de uma discretização usual (elementos lineares com variação quadrática) preserva a partição da unidade, possibilitando uma convergência mais segura quando da análise de problemas de Mecânica da Fratura em meios dúcteis (a ser tratado numa possível seqüência deste trabalho). A trinca é modelada como um furo de dimensões muito menores que o domínio do problema.

A integração em coordenadas locais apresenta três vantagens principais, quando comparadas com a integração feita diretamente em coordenadas globais. A primeira é a simplificação do entendimento quando se pretende ensinar o MEC, resultando em conceitos de matrizes globais e locais semelhante ao descrito na operacionalização do Método dos Elementos Finitos (MEF). A segunda vantagem é a possibilidade de tratamento de variáveis locais, facilitando possíveis aplicações como acoplamento fluido-estrutura e impacto. A terceira vantagem é a possibilidade de se desenvolver expressões analíticas com maior facilidade para elementos curvos. Além do descrito acima, o presente trabalho se justifica ao longo do Capítulo 6, referente ao método utilizado para se integrar os termos da equação integral, como também no Capítulo 9 de exemplos numéricos, onde bons resultados para os Fatores de Intensidade de Tensão estático e dinâmico para os Modo I e Modo Misto foram obtidos.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

No presente trabalho determinam-se (via Método dos Elementos de Contorno) os fatores de intensidade de tensão para os modos I e II de fratura, tanto para o problema elastostático, quanto para o elastodinâmico.

Dessa forma, aqui são referenciados alguns trabalhos importantes em ordem cronológica que tratam da solução do problema de mecânica da fratura utilizando o MEC.

No que tange ao problema de mecânica da fratura estática, podem-se citar vários trabalhos. CRUSE & VAN BUREN (1971), o pioneiro, que se tem notícia, a abordar o problema de mecânica da fratura via MEC, analisou o campo tensões próximos à trinca considerada plana no campo tridimensional elástico. CRUSE (1972) abordou problemas de Mecânica da Fratura nos campos bidimensionais e tridimensionais utilizando o MEC, aproximou o formato da trinca através de uma elipse, sendo sua ponta com formato curvo. Para se obter resultados razoáveis dentro dessa formulação (erros na ordem de 14%), do Fator de Intensidade de Tensão (FIT), faziam-se necessários muitos elementos para discretizar a ponta da trinca. A metodologia empregada em CRUSE (1972) apresenta-se similar à do presente trabalho de mestrado no que tange ao uso de elementos de trinca iguais aos dos elementos externos. Porém suas integrais não apresentavam boas respostas, isto é, eram calculadas numericamente. Portanto, com as integrais de contorno analíticas, são mostrados bons resultados de valores de FIT, sem a necessidade, em alguns casos, de muitos elementos ao longo da trinca<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> Para maiores detalhes, ver o Capítulo 8 referente aos exemplos numéricos.

SNYDER & CRUSE (1975) determinaram Fatores de Intensidade de Tensão utilizando uma solução fundamental, denominada de Função de Green, ao invés da solução de Kelvin para o problema elastostático. A Função de Green já contém a influência de uma trinca no domínio do problema, pois a mesma é obtida através da superposição da solução fundamental de Kelvin com a solução de uma chapa infinita com um carregamento qualquer contendo uma trinca livre de tensões nas suas faces. Dessa forma, para problemas de Mecânica da Fratura onde a trinca é livre de tensões nas faces, a discretização da mesma não é necessária, porém a sua utilização está restrita a problemas onde a trinca é reta no domínio bidimensional. Utilizando esse tipo de procedimento, pode-se citar por exemplo MEWS (1987) e TELLES & GUIMARÃES (2000).

BLANDFORD *et al.* (1981), utilizaram a técnica de sub-regiões do MEC, impondo que a linha que divide as sub-regiões passe pela trinca, separando assim as suas faces anteriormente conectadas. Foi empregado, também, o elemento de trinca singular com ponto a um quarto, denominado de *elemento de ponto a um quarto* (no inglês denomina-se de *quarter-point element*). Nesse tipo de elemento as variações  $\sqrt{r}$  e  $1/\sqrt{r}$  aparecem nas funções de forma para deslocamento e forças de superfície respectivamente, sendo o ponto intermediário do elemento localizado à distância de um quarto em relação à ponta da trinca. Dessa forma, representa-se com fidelidade a variação de deslocamento e tensões na ponta da trinca em problemas lineares. Para o cálculo do FIT para os modos I e II, foram utilizados deslocamentos calculados na ponta da trinca. Em muitos outros trabalhos o elemento de ponto a um quarto vem sendo empregado, conforme DOMÍNGUEZ & MARTINEZ (1984) e ALBUQUERQUE (2001). Sendo que esses dois últimos trabalhos se utilizaram dos valores de tensões calculadas no nó da ponta da trinca para se determinar os Fatores de Intensidade de Tensão. Cita-se também um outro tipo de elemento de trinca que leva em conta as variações  $\sqrt{r}$  e  $1/\sqrt{r}$  através do emprego de funções de forma especiais, denominado de elemento singular, sendo empregado no trabalho de CAÑAS & PARÍS (1997).

Dividir o domínio em sub-regiões apresenta desvantagem no sentido de ser necessário uma constante redefinição do contorno quando há extensão da trinca,

dificultando assim o processo de automação do procedimento. No que diz respeito à utilização do elemento de ponto a um quarto, as funções de forma, do ponto de vista conceitual, não apresentam coerência na representação da unidade ao longo do elemento para o caso em que seja necessária uma análise plástica.

Para contornar o problema de integração de campos singulares próximos à ponta da trinca, ALIABADI *et al.* (1987) introduziram a técnica de subtração de singularidade para problemas bidimensionais no campo da elasticidade. Porém, sendo apenas empregada para o caso de problema de Mecânica da Fratura Elástica Linear, pois se faz uso do princípio da superposição dos efeitos para deslocamentos e forças de superfície.

PORTELA *et al.* (1992) introduziram uma nova formulação denominada de Método dos Elementos de Contorno Dual para o problema de Mecânica da Fratura que consiste em se escrever equações de deslocamentos e de tensões independentes para pontos fontes coincidentes na trinca, evitando a singularidade no sistema algébrico sem a necessidade de sub-regiões. Ocorre também para este caso, o surgimento de integrações hiper-singulares nos elementos da trinca, devido a sua própria formulação. No Departamento de Estruturas da EESC, cita-se BARBIRATO (1999) que utiliza essa formulação para problemas dinâmicos no campo tridimensional. Empregando-se esta técnica no campo de Mecânica da fratura em meios anisotrópicos, cita-se ALBUQUERQUE (2001).

VENTURINI (1994) propôs uma nova forma de tratar o problema de Mecânica da Fratura, partindo do raciocínio de que a região da trinca num corpo poderia ser encarada como uma faixa estreita de tensões iniciais. Para tal, utilizou a equação integral que leva em conta as tensões iniciais numa região do corpo elástico. Embora esta forma apresente bons resultados, integrais singulares e hiper-singulares para deslocamentos e forças de superfície surgem nos elementos de trinca dessa formulação. Dentro dessa linha de raciocínio, cita-se também LOPES JR. (1996) do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC.

Para o problema de Mecânica da Fratura dinâmica existem poucos trabalhos face aos já publicados tratando do problema estático. NISHIMURA *et al.* (1987) empregaram solução fundamental no domínio do tempo via MEC (*Time Domain Boundary Element Method*) para o problema de Mecânica da Fratura dinâmica,

sendo que nesta formulação, integrais hipersingulares surgiam nas equações integrais do problema. Para os elementos de contorno, aproximações lineares de tempo e espaço foram utilizadas. DOMÍNGUEZ & GALLEGO (1992) tratou do problema de Mecânica da Fratura dinâmica utilizando também a formulação no domínio do tempo e elemento de ponto a um quarto na ponta da trinca, nesse trabalho também o método das sub-regiões foi aplicado para o caso de problemas de Mecânica da Fratura em modo misto. CHIRINO & DOMINGUEZ (1989) determinaram valores de  $K_I$  dinâmico solucionando o problema no domínio da frequência, como elementos singulares de ponto a um quarto. Empregando o MEC com reciprocidade dual, pode-se citar BARBIRATO (1999), FEDELINSKI *et al.* (1995) e ALBUQUERQUE (2001). Sendo este último tratando do problema de Mecânica da Fratura em meios elásticos anisotrópicos com matriz de massa determinada via reciprocidade dual.

Pode-se citar alguns outros trabalhos, tais como CHIRINO *et al.* (1994) que fez um estudo comparativo de três métodos (Reciprocidade Dual, TDBEM e solução no domínio da frequência) utilizados no problema de Mecânica da Fratura dinâmica: WEN *et al.* (1999), SAEZ & DOMÍNGUEZ (2001), GALLEGO & GRANADOS (2002) e ALBUQUERQUE *et al.* (2002).

Observa-se que nos problemas dinâmicos a forma de abordar o problema de Mecânica da Fratura no que tange a estratégia de obtenção dos Fatores de Intensidade de Tensão (Método dual, elemento de ponto a um quarto, etc.), não difere dos problemas estáticos.

### 3 ELASTICIDADE LINEAR ISOTRÓPICA: Equações Básicas

No presente item são apresentadas as equações básicas para a solução do problema elástico linear estático e dinâmico, com o objetivo de fundamentação dos itens subsequentes deste trabalho de qualificação. Preferiu-se mostrar essas equações utilizando notação indicial<sup>3</sup>, por motivos de compactação das mesmas, como também devido ao uso cada vez mais freqüente dessa notação nos trabalhos de caráter científico.

No desenvolvimento deste item, foram consultadas as seguintes obras: BREBBIA & DOMINGUEZ (1992), VILLAÇA & TABORDA (1996), CODA (2000) e TIMONSHENKO & GOODIER (1980).

#### 3.1 Estado de Tensões

Considere-se um corpo tridimensional isotrópico e homogêneo de domínio  $\Omega$  e delimitado por um contorno  $\Gamma$ , sendo o mesmo solicitado por cargas atuando no seu contorno  $\Gamma$  (forças de superfície), bem como no seu domínio  $\Omega$  (forças de corpo). Dessa forma, as tensões internas que surgem nos infinitos pontos do seu domínio devido a essas solicitações, podem ser representadas através do tensor de tensões (Figura 01), na forma:

$$\sigma_{ij} \quad \text{em } \Omega \quad i,j=1,2,3 \quad (3.1)$$

---

<sup>3</sup> Esta notação é devida ao Célebre Físico alemão Albert Einstein (1879 – 1955).

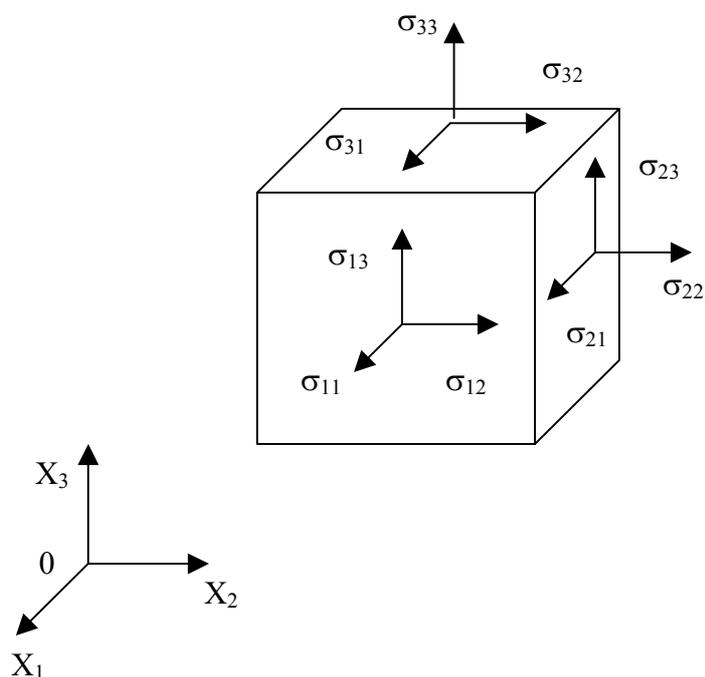


FIGURA 01: Representação do Tensor de Tensões num Ponto Genérico do Corpo.

Considerando-se o corpo acelerado em relação ao referencial inercial da Figura 01, a equação resultante do equilíbrio dinâmico do ponto genérico, segundo o princípio de D'Alembert<sup>4</sup>, é escrita na forma:

$$\sigma_{j,i,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i + c \dot{u}_i \quad \text{em } \Omega \quad i,j=1,2,3 \quad (3.2)$$

Sendo:

- $\rho$  → Densidade do material do corpo;
- $c$  → Coeficiente de amortecimento do corpo;
- $\rho \ddot{u}_i$  → Força de inércia na direção  $i$ ;
- $c \dot{u}_i$  → Força de Amortecimento na direção  $i$ ;
- $b_i$  → Força de corpo estática.

<sup>4</sup> O princípio de D'Alembert transforma um sistema dinâmico num sistema estático fictício, considerando a força de inércia (produto da massa pela aceleração do corpo) como uma força atuando na mesma direção, porém em sentido oposto ao movimento.

Admitindo-se o corpo em equilíbrio estático, ou seja,  $\ddot{u}$  e  $\dot{u}$  nulos. A equação de equilíbrio fica:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad i,j=1,2,3 \quad (3.3)$$

No equilíbrio de momentos (Teorema de Cauchy), tanto para o caso dinâmico quanto para o caso estático, obtém-se:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (3.4)$$

Para pontos situados no contorno do corpo, o equilíbrio desses pontos resulta na fórmula de Cauchy, escrita na forma:

$$p_i = \sigma_{ij}\eta_j \quad \text{em } \Gamma \quad i,j=1,2,3 \quad (3.5)$$

Onde:

$p_i \rightarrow$  Força de superfície;

$\eta_i \rightarrow$  Cosseno diretor na direção  $i$  do vetor normal ao contorno  $\Gamma$ .

Se  $p_i$  for um valor de contorno prescrito no problema elástico, faz-se:

$$p_i = \bar{p}_i \quad \text{em } \Gamma_N \quad (3.6)$$

Onde a eq.(3.6) é denominada de condição de contorno natural.

Dessa forma, a eq.(3.5), fica:

$$\bar{p}_i = \sigma_{ij}\eta_j \quad \text{em } \Gamma_N \quad (3.7)$$

### 3.2 Estado de Deformação

Considerando o corpo tridimensional citado no item anterior, devido às cargas que nele atuam, o mesmo se deforma e conseqüentemente os seus pontos internos e de contorno natural se deslocam. Considerando, também, que essas deformações e deslocamentos são considerados pequenos (não linearidade geométrica desprezada), a relação deformação-deslocamento é expressa por:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i, j=1,2,3 \quad (3.8)$$

Onde:

$u_i \rightarrow$  Componente de deslocamento do ponto genérico na direção  $i$ ;

$\varepsilon_{ij} \rightarrow$  Tensor de deformação do ponto genérico.

Para os pontos de contorno onde os deslocamentos são prescritos no problema o vetor deslocamento, fica:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_E \quad (3.9)$$

Onde a eq.(3.9) é denominada condição de contorno essencial. Sendo, então,  $\Gamma = \Gamma_N + \Gamma_E$ .

As equações que asseguram um campo de deslocamento cinematicamente possível no problema elástico são denominadas de equações de compatibilidade de deformações ou equação de compatibilidade geométrica. São escritas na seguinte forma:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik} \quad (3.10)$$

### 3.3 Lei de Hooke

As relações entre tensões e deformações de um corpo isotrópico elástico linear, também chamadas de relações constitutivas, são governadas pela lei de Hooke e são escritas nas seguintes formas:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2G \varepsilon_{ij} \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2G(3\lambda + 2G)} \sigma_{kk} + \frac{\sigma_{ij}}{2G} \quad (3.12)$$

Onde:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

Sendo:

$E \rightarrow$  Módulo de Elasticidade Longitudinal do Material do Corpo ou Módulo de Young;

$\nu \rightarrow$  Coeficiente de Poisson;

$G \rightarrow$  Módulo de Elasticidade Transversal do Material do Corpo ou Módulo de Cisalhamento;

$\lambda \rightarrow$  Constante de Lamé;

$\delta_{ij} \rightarrow$  Delta de Kronecker ( 0 se  $i \neq j$ , 1 se  $i = j$ ).

É válido observar que substituindo-se a eq.(3.8) na eq.(3.11), obtém-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{2\nu G}{(1 - 2\nu)} \delta_{ij} u_{k,k} + G(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.13)$$

Sendo a eq.(3.13) o tensor de tensões expresso em função dos gradientes de deslocamento.

Na forma tensorial, as Eqs. (3.11) e (3.12) podem ser escritas na forma:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.14)$$

$$\varepsilon_{ij} = D_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (3.15)$$

Sendo os tensores  $C_{ijkl}$  e  $D_{ijkl}$  simétricos, pode-se, então, escrever:

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{ijlk} \quad (3.16)$$

$$D_{ijkl} = D_{jikl} = D_{ijlk} = D_{ijlk} \quad (3.17)$$

Diante das equações anteriormente explicitadas, o problema elástico tridimensional fica formulado através de 15 equações:

- 3 equações de equilíbrio, eq.(3.2) ou eq.(3.3);
- 6 Relações deformação-deslocamento, eq.(3.8);
- 6 relações tensão-deformação, eq.(3.11) ou eq.(3.12).

Envolvendo, também, um total de 15 incógnitas, a saber:

- 6 componentes de tensão;
- 6 componentes de deformação;
- 3 componentes de deslocamento.

Além disso, as condições de contorno naturais (forças prescritas) e de contorno essenciais (deslocamentos prescritos) devem ser satisfeitas.

### 3.4 Estados Planos de Tensão de Deformação

Os estados planos de tensão e deformação, denominados abreviadamente de EPT e EPD respectivamente, se enquadram nos problemas bidimensionais da elasticidade e são, portanto, casos particulares de um problema originalmente tridimensional. Esses estados planos ocorrem, geralmente, quando em algumas situações de carregamento, forma do corpo e condições de contorno, um efeito elástico (deformação ou tensão) deixa de existir numa terceira dimensão ou então esse mesmo efeito elástico se torna desprezível.

#### 3.4.1 Estado plano de Tensão (EPT)

O EPT é geralmente aplicado para problemas de chapas delgadas, onde a espessura é muito pequena em relação às outras duas dimensões (largura e comprimento), sendo o carregamento aplicado no plano médio formado pelas duas maiores dimensões (Figura 02). Admite-se, como aproximação, que as tensões na direção da espessura são nulas e que as tensões não nulas não variam ao longo da espessura da chapa.

Devido a essas aproximações, observa-se que quanto menor é a espessura da chapa face às maiores dimensões, menor será o erro cometido por essas aproximações.

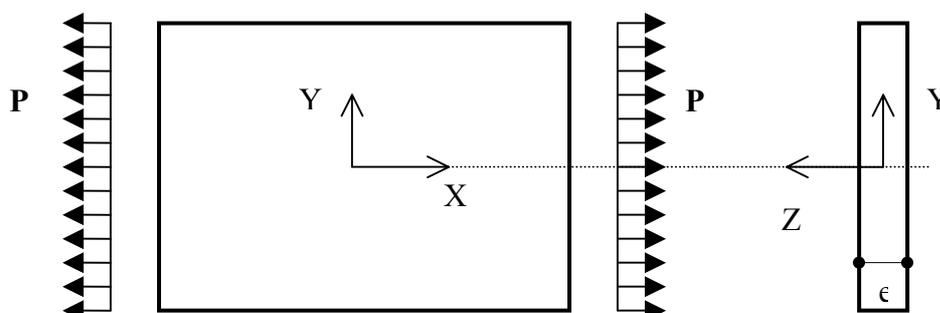


FIGURA 02: Chapa tracionada, exemplo de EPT.

As eq.(3.11) e (3.12) da elasticidade tridimensional, podem ser utilizadas para o EPT, desde que o seu Coeficiente de Poisson  $\nu$ , sofra a seguinte alteração no momento da utilização dessas equações:

$$\bar{\nu} = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (3.18)$$

### 3.4.2 Estado plano de Deformação (EPD)

O EPD ocorre quando o corpo apresenta uma dimensão bem maior do que as outras duas e o carregamento é aplicado no plano formado por essas dimensões menores (Figura 03). Portanto, a deformação na direção da maior dimensão pode ser considerada nula.

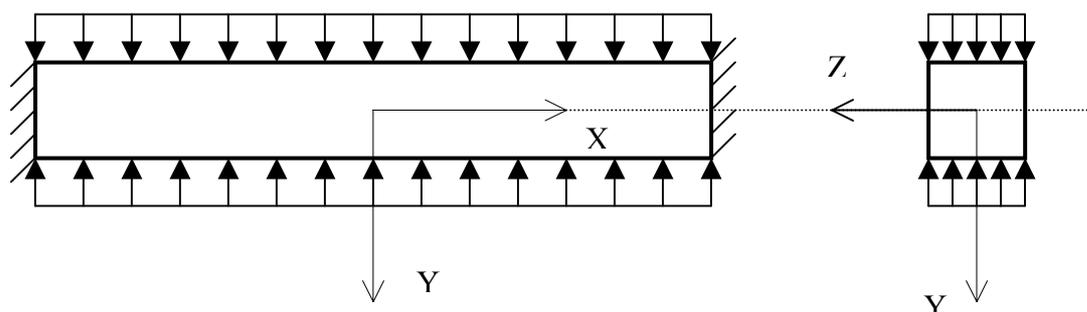


FIGURA 03: Exemplo de problema elástico em EPD

Para este caso, o EPD, todas as equações da elasticidade tridimensional podem ser usadas sem as necessidades de quaisquer mudanças nos parâmetros das mesmas.

## **4 MECÂNICA DA FRATURA ELÁSTICA LINEAR: Conceitos básicos**

Neste capítulo são apresentados os conceitos básicos da mecânica da fratura no âmbito macroscópico, dando maior ênfase à mecânica da fratura elástica linear (MFEL) em duas dimensões, teoria na qual o presente trabalho de mestrado se baseia. Utilizou-se neste capítulo como alicerce teórico MEYERS & CHAWLA (1999), GDOUTOS (1993) e ALIABADI & ROOKE (1992).

### **4.1 Considerações Iniciais**

Trincas são consideradas imperfeições, ou seja, descontinuidades dentro de um sólido considerado, teoricamente, contínuo e segundo GDOUTOS (1993) essas imperfeições surgem em peças estruturais devido basicamente a três fatores:

- Durante o processo de fabricação das peças;
- Devido à própria composição dos materiais que constituem as peças;
- Devido ao processo de fadiga que o uso dessas peças impõe.

Dessa forma, a Mecânica da Fratura (MF) objetiva estudar o comportamento mecânico dessas peças estruturais na presença dessas descontinuidades denominadas de trincas. Portanto, assume-se que a trinca já existe inicialmente no material para que essa teoria (MF) seja válida.

## 4.2 Modos de Fratura

Uma trinca se comporta cinematicamente através de três formas chamadas modos de fratura (Figura 04):

- Modo I: Modo de Abertura;
- Modo II: Modo de Escorregamento;
- Modo III: Modo de Rasgamento.

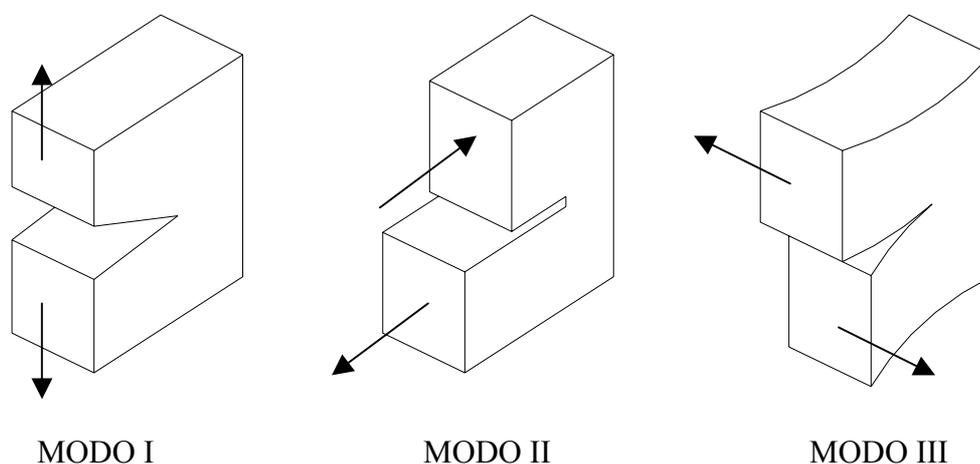


FIGURA 04: Modos de Fratura

## 4.3 Hipóteses Básicas da Mecânica da Fratura Elástica Linear

A MFEL se adequa a materiais de comportamento frágil, onde quase não há deformação plástica antes e durante o processo de surgimento das trincas. Portanto, para se considerar o problema no âmbito da Mecânica da Fratura Elástica Linear, as seguintes hipóteses devem ser satisfeitas:

- Trincas sempre existem no material das peças;

- A distribuição de tensões próxima à ponta da trinca (desde que suas faces estejam livres de tensões iniciais como também as forças de corpo nulas) é dada por:

$$\sigma_{r\theta} = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f(\theta)$$

$K \rightarrow$  Constante denominada de Fator de Intensidade de Tensão (FIT), que depende das características geométricas tanto da peça quanto da trinca e do carregamento que a peça é solicitada;

$f(\theta) \rightarrow$  Função trigonométrica em  $\theta$ ;

- O crescimento da trinca depende do comportamento do campo de tensões próximo à ponta da fratura, logo este crescimento depende também do valor do Fator de Intensidade de Tensão  $K$ ;
- A zona de plastificação na ponta da trinca é considerada muito pequena em relação à zona elástica, portanto essa zona plástica é desprezada.

O fator  $K$  é constante e calculado por:

$$K = Y\sigma\sqrt{\pi a} \quad (4.1)$$

Onde:

$\sigma \rightarrow$  Tensão normal de tração longe da trinca;

$Y \rightarrow$  Função que depende da geometria do corpo, lugar da fratura e carregamento;

$a \rightarrow$  Comprimento característico da trinca, sendo metade do comprimento da trinca, se a trinca estiver totalmente no interior do corpo. Igual ao comprimento da trinca, se a trinca for de borda.

#### 4.4 Campo de Tensões próximo à ponta da trinca

As expressões do campo de tensões próximo à ponta da trinca para o caso isotrópico, devidas a WESTERGAARD (1939), para os modos I, II e III de fratura, são mostradas a seguir:

- Modo I

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] \quad (4.2)$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

- Modo II

$$\sigma_{11} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) \quad (4.3)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$$

- Modo III

$$\sigma_{13} = -\frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_{23} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
(4.4)

Para problemas de modo misto envolvendo os modos I e II, WILLIAMS (1957) mostra as seguintes expressões para o campo de tensões próximo à ponta da trinca:

$$\sigma_{11} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 2 + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

$$\sigma_{22} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\sigma_{12} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ 1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{3\theta}{2}\right) \right]$$
(4.5)

#### 4.5 Alguns Critérios de Resistência da Mecânica da Fratura

São mostrados neste item alguns critérios de resistência mais comumente utilizados na análise do problema de mecânica da fratura.

##### 4.5.1 Fatores de Intensidade de Tensão Críticos $K_{IC}$ e $K_C$

$K_{IC}$  e  $K_C$ , Fatores de Intensidade de Tensão Críticos ou também denominados de Tenacidade à Fratura são parâmetros de resistência à propagação de trincas de um corpo em EPD e EPT respectivamente, sendo os mesmos calculados a partir do modo I de fratura. São dados por:

$$\begin{aligned}
 K_{IC} &= Y\sigma_c\sqrt{\pi a_c} \\
 K_C &= Y\sigma_c\sqrt{\pi a_c}
 \end{aligned}
 \tag{4.6}$$

Onde:

$\sigma_c$  → Tensão normal Crítica de tração (no EPD ou no EPT) longe da trinca;

$Y$  → Função que depende da geometria do corpo, lugar da trinca e carregamento;

$a_c$  → Valor crítico do comprimento característico da trinca.

Quando valor de  $K$  das eq.(4.2) e eq.(4.3), atingem o valor de  $K_{IC}$  e  $K_C$  respectivamente, a fratura cresce de maneira instável, ou seja:

$$K \geq K_{IC} \quad (\text{EPD})$$

$$K \geq K_C \quad (\text{EPT})$$

Observa-se, pela eq.(4.6), que a tensão crítica é diretamente proporcional à Tenacidade à Fratura ( $K_{IC}$  ou  $K_C$ ) e inversamente proporcional ao comprimento característico da trinca.

#### 4.5.2 Critério de Griffith

GRIFFITH (1921) aponta que o critério fundamental para a trinca se propagar é que a tensão na ponta da mesma exceda a “resistência coesiva” teórica do material. Porém não é possível medir essa coesão na ponta da trinca. Dessa forma, GRIFFITH (1921) sugere o critério de resistência baseado no balanço de energia termodinâmica, onde enfatiza que no momento da propagação da trinca, há dissipação de energia elástica no volume do corpo ao mesmo tempo em que surgem duas novas faces de uma trinca. Portanto, em termos de energia, a condição necessária para uma trinca se propagar deve acontecer quando:

$$\left( \begin{array}{l} \text{Energia de deformação} \\ \text{dissipada no volume do} \\ \text{corpo.} \end{array} \right) \geq \left( \begin{array}{l} \text{Energia superficial} \\ \text{criada para formar} \\ \text{duas novas faces da} \\ \text{fratura.} \end{array} \right)$$

Na forma matemática, fica:

$$-\frac{\partial U_E}{\partial a} \geq \frac{\partial U_\Gamma}{\partial a}$$

Ou então:

$$G \geq 2\gamma$$

Onde:

$U_E \rightarrow$  Energia de deformação elástica;

$U_\Gamma \rightarrow$  Energia de superfície;

$G \rightarrow$  Energia dissipada no volume do corpo;

$2\gamma \rightarrow$  Variação da energia superficial necessária para formar duas novas faces na extremidade da trinca.

### 4.5.3 Integral J de Rice 2D

A integral J, devido a RICE (1968), deriva dos princípios de conservação de energia em corpos elastostáticos e é uma integral de linha independente do caminho de integração. Para o caso plano do problema elástico, é dada por:

$$J = \int_{\Gamma} (w dx_2 - p_k u_{k,1} ds) \quad (k=1,2) \quad (4.7)$$

Onde:

$w \rightarrow$  Energia de deformação por unidade de volume do corpo;

$p \rightarrow$  Força de superfície do contorno  $\Gamma$  da integral (Figura 05)

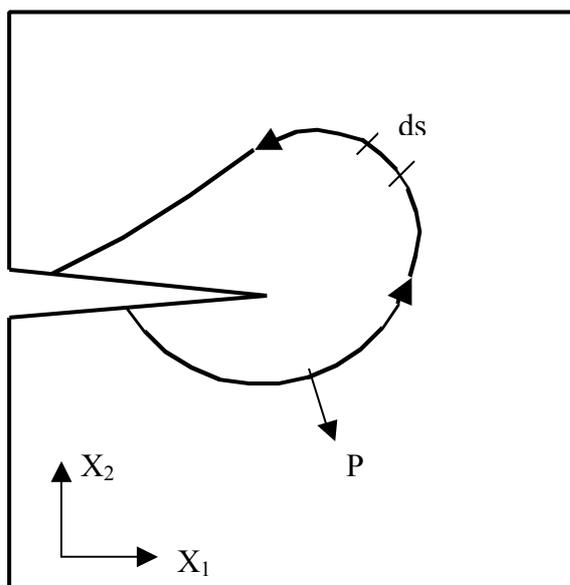


FIGURA 05: Caminho da Integral J de Rice.

Pode-se mostrar que, para um material elástico linear, a seguinte relação é válida:

$$J = G = -\frac{\partial U_E}{\partial a}$$

Ou seja, a integral J é igual a taxa de variação da energia de deformação em relação ao aumento da abertura da trinca.

Sendo  $J_C$  e  $J_{IC}$ , valores críticos da integral J para o EPT e EPD, para que a trinca não abra, deve-se ter:

$$J \geq J_{IC} \quad (\text{EPD})$$

$$J \geq J_C \quad (\text{EPT})$$

$J_{IC}$  pode se relacionar com o  $K_{IC}$ , através da seguinte fórmula:

$$J_{IC} = \frac{1-\nu^2}{E} K_{IC}^2 \quad (4.8)$$

GDOUTOS (1993), aponta que a integral  $J$  é uma poderosa ferramenta como critério de resistência em materiais dúcteis, pois além de ser facilmente determinada experimentalmente, pode-se relacionar com a abertura da ponta da trinca através da seguinte equação:

$$J = M\sigma_Y\delta \quad (4.9)$$

Onde:

$\sigma_Y \rightarrow$  Tensão de escoamento do material da peça;

$\delta \rightarrow$  Deslocamento na ponta da trinca;

$M \rightarrow$  Constante dependente do modelo utilizado.

#### 4.6 Carga Súbita Para problema de Mecânica da Fratura em Modo I

Segundo FREUND (1990), considera-se o estudo da Mecânica da Fratura Dinâmica em corpos onde há trincas, quando os efeitos inerciais influenciam no comportamento dessas trincas.

Os efeitos inerciais são basicamente devido à propagação das trincas e/ou a cargas rapidamente aplicadas. Sendo a influência dessas cargas transmitidas às faces da trinca através de ondas de tensão elástica que se desenvolvem ao longo do corpo.

Para o caso em que a carga é subitamente aplicada na direção perpendicular à direção do comprimento numa chapa infinita sob EPD, o Fator de Intensidade de Tensão Dinâmico é dado por:

$$K_I(t) = 2\sigma^0 \frac{\sqrt{(1-2\nu)}}{(1-\nu)} \sqrt{\frac{c_d t}{\pi}}, \quad 0 < t < \frac{2a}{c_d} \quad (4.10)$$

Onde:

$\sigma^0 \rightarrow$  Tensão normal de tração para  $t=0$ , aplicada longe da trinca;

$c_d \rightarrow$  Velocidade da onda elástica de dilatação;

$2a \rightarrow$  Comprimento da trinca.

É importante ressaltar que a solução dada pela eq.(4.10) não inclui termos adicionais que levem em conta as reflexões de onda nas extremidades da trinca finita, portanto é apenas válida para o intervalo mostrado na mesma eq.(4.10). Na realidade, a solução apresentada na eq.(4.10) é a mesma para uma trinca de comprimento infinito imersa em um corpo infinito sujeita à passagem de uma onda de dilatação. Dessa forma, nem mesmo o efeito da onda distorcional que, conforme o ângulo de incidência pode causar variações no  $K_I$ , está sendo considerado.

Nesse ponto, a formulação aqui apresentada possui importância fundamental, pois inexistência de soluções analíticas para problemas de Mecânica da Fratura Dinâmica mais gerais revela a necessidade de técnicas computacionais confiáveis para a determinação das variáveis de importância para cada tipo de análise.

## 5 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA O PROBLEMA ELÁSTICO LINEAR 2D

Neste capítulo é mostrado o equacionamento do problema elástico 2D isotrópico para o caso estático e dinâmico, sendo para este último utiliza-se matriz de massa (MMBEM). Para tanto, tomou-se como referências principais os trabalhos de BREBBIA & DOMINGUEZ (1992), VENTURINI (1988) e CODA (2000).

### 5.1 Solução Fundamental elastostática bidimensional

A solução fundamental (força e deslocamento) para um ponto “q” no corpo de domínio infinito  $\Omega^*$  devido a carregamentos fundamentais unitários aplicados num ponto “s” (Figura 06), é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
 u_{ik}^*(s, q) &= -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ik} - r_{,i} r_{,k}] \\
 p_{ik}^*(s, q) &= -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{[(1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)(r_{,i} \eta_k - r_{,k} \eta_i)\}
 \end{aligned}
 \tag{5.1}$$

Onde:

$u_{ik}^*(s, q) \rightarrow$  Deslocamento fundamental no ponto “q” na direção “i” devido à aplicação da carga unitária em “s” na direção “k”;

$p_{ik}^*(s, q) \rightarrow$  Força fundamental no ponto “q” na direção “i” devido à aplicação da carga unitária em “s” na direção “k”;

$s \rightarrow$  Ponto fonte ou ponto de colocação;

$q \rightarrow$  Ponto de campo;

$r(s, q) \rightarrow$  Distância entre os pontos “s” e “q”, medido de “s” a “q”;

$\delta_{ik} \rightarrow$  Delta de Kronecker (0 se  $i \neq k$ , 1 se  $i = k$ );

$G \rightarrow$  Módulo de Elasticidade Transversal do Material do Corpo;

$\nu \rightarrow$  Coeficiente de Poisson.

Derivando-se as eq.(5.1) no ponto “q” nas direções dos eixos cartesianos, isto é, fazendo:

$$\frac{\partial u_{ik}^*(s, q)}{\partial x_j(q)} = u_{ik,j}^*$$

$$\frac{\partial p_{ik}^*(s, q)}{\partial x_j(q)} = p_{ik,j}^*$$

Obtém-se:

$$u_{ik,j}^*(s, q) = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu)r} \left[ (3-4\nu)r_j \delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} - (\delta_{ij}r_{,k} + \delta_{kj}r_{,i}) \right] \quad (5.2)$$

$$p_{ik,j}^*(s, q) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \left[ 2(1-2\nu)\delta_{ik}r_{,j} + 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} - 2(\delta_{ij}r_{,k} + \delta_{jk}r_{,i}) \right] \frac{\partial r}{\partial n} + (1-2\nu)(2\eta_{i,r_k} r_{,j} - 2\eta_{k,r_j} r_{,i} - \delta_{ik}\eta_j + \delta_{ij}\eta_k - \delta_{jk}\eta_i) - 2r_{,i} r_{,k} \eta_j \right\} \quad (5.3)$$

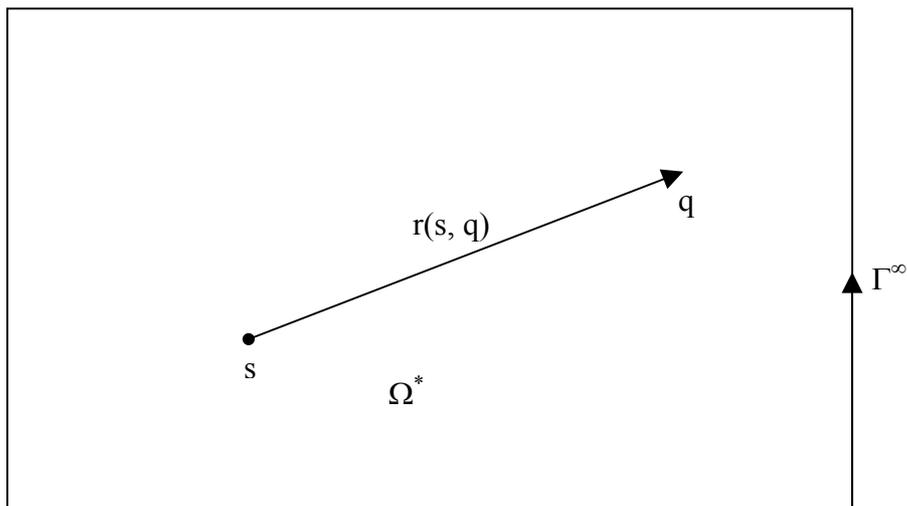


FIGURA 06: Representação do Domínio Infinito Bidimensional

A solução fundamental estática, eq.(5.1), é obtida integrando-se a eq.(3.3) para uma força de corpo concentrada no ponto “q” representada pela distribuição Delta de Dirac. Portanto, tem-se:

$$\sigma_{kij,j}^* + \delta(s,q)\delta_{ki} = 0 \quad \text{em } \Omega^* \quad (5.4)$$

Ou então:

$$\sigma_{kij,j}^* = -\delta(s,q)\delta_{ki} \quad \text{em } \Omega^* \quad (5.5)$$

Sendo:

$$\begin{cases} \delta(s,q) = 0 & \text{se } q \neq s \\ \delta(s,q) = 1 & \text{se } q = s \end{cases} \quad (5.6)$$

$$\int_{\Omega} u(q)\delta(s,q)d\Omega(q) = u(s)$$

## 5.2 Equação Integral de Contorno

A equação integral de contorno do problema elástico é aqui demonstrada para o problema elástico dinâmico bidimensional, sendo o caso estático um caso particular do dinâmico. O domínio de validade do problema é mostrado na Figura 07.

Seja a equação de equilíbrio dinâmico, eq.(3.2), dada por:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i + c \dot{u}_i$$

Podendo-se escrevê-la, na forma:

$$\sigma_{ij,j} + \lambda_i = 0 \quad (5.7)$$

Onde:

$$\lambda_i = b_i - (\rho \ddot{u}_i + c \dot{u}_i) \quad (5.8)$$

Multiplicando-se a eq.(5.7) pela solução fundamental, a igualdade não deve se alterar. Portanto, fica:

$$u_{ki}^*(s, q) (\sigma_{ij,j}(q) + \lambda_i(q)) = 0 \quad (5.9)$$

Integrando-se ambos os lados da eq.(5.9) ao longo do domínio  $\Omega$  do problema, tem-se:

$$\int_{\Omega} u_{ki}^*(s, q) (\sigma_{ij,j}(q) + \lambda_i(q)) d\Omega(q) = 0 \quad (5.10)$$

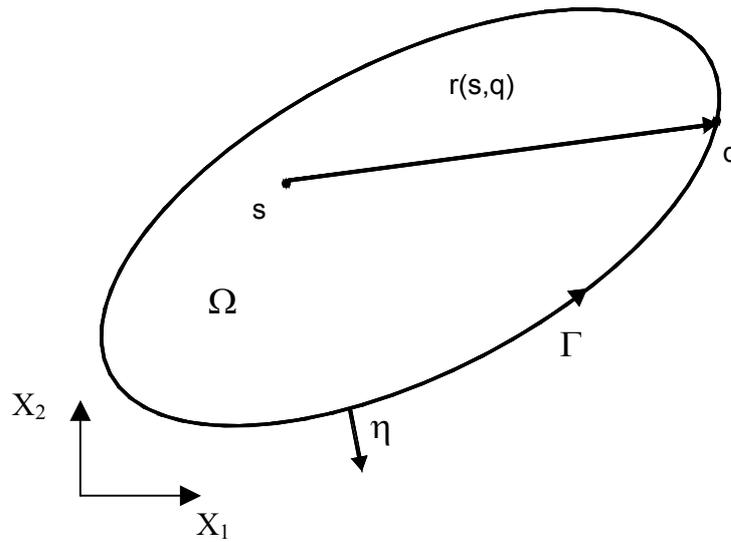


FIGURA 07: Domínio de Validade do Problema Elástico 2D

Integrando-se a eq.(5.10) por partes, tem-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^*(s, q) \sigma_{ij}(q) \eta_j d\Gamma(q) - \int_{\Omega} u_{ki,j}^*(s, q) \sigma_{ij}(q) d\Omega(q) + \int_{\Omega} u_{ki}^*(s, q) \lambda_i(q) d\Omega(q) = 0 \quad (5.11)$$

Pode-se observar que na primeira integral da eq.(5.11), aparece a fórmula de Cauchy, dada pela eq.(3.5). Dessa forma, substituindo a eq.(3.5) em (5.11), fica:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^*(s, q) p_i(q) d\Gamma(q) - \int_{\Omega} u_{ki,j}^*(s, q) \sigma_{ij}(q) d\Omega(q) + \int_{\Omega} u_{ki}^*(s, q) \lambda_i(q) d\Omega(q) = 0 \quad (5.12)$$

Sabe-se que:

$$\sigma_{ij} = C_{ijlm} \varepsilon_{ml} = C_{ijlm} u_{m,l} \quad (5.13)$$

Substituindo-se a eq.(5.13) na eq.(5.12), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^*(s, q) p_i(q) d\Gamma(q) - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^*(s, q) u_{i,j} d\Omega(q) + \int_{\Omega} u_{ki}^*(s, q) \lambda_i(q) d\Omega(q) = 0 \quad (5.14)$$

Integrando-se por partes a eq.(5.14), tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} u_{ki}^*(s, q) p_i(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^*(s, q) u_i(q) \eta_j d\Gamma(q) + \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^*(s, q) u_i(q) d\Omega(q) + \\ & + \int_{\Omega} u_{ki}^*(s, q) \lambda_i(q) d\Omega(q) = 0 \end{aligned} \quad (5.15)$$

Substituindo-se a eq.(5.5) na eq.(5.15), fica-se com:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} u_{ki}^*(s, q) p_i(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^*(s, q) u_i(q) \eta_j d\Gamma(q) - \delta_{ik} \int_{\Omega} \delta(s, q) u_i(q) d\Omega(q) + \\ & + \int_{\Omega} u_{ki}^*(s, q) \lambda_i(q) d\Omega(q) = 0 \end{aligned} \quad (5.16)$$

Pelas propriedades do Delta de Dirac, ver eq.(5.6), pode-se escrever:

$$\delta_{ik} \int_{\Omega} \delta(s, q) u_i(q) d\Omega(q) = C_{ik} u_i(s)$$

Logo, a eq.(5.16), fica:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} u_{ki}^*(s, q) p_i(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^*(s, q) u_i(q) \eta_j d\Gamma(q) - C_{ik} u_i(s) + \\ & + \int_{\Omega} u_{ki}^*(s, q) \lambda_i(q) d\Omega(q) = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Na segunda integral da eq.(5.17), aparece a fórmula de Cauchy novamente, portanto a eq.(5.17), fica:

$$\begin{aligned} C_{ik} u_i(s) &= - \int_{\Gamma} p_{ki}^*(s, q) u_i(q) d\Gamma(q) + \int_{\Gamma} u_{ki}^*(s, q) p_i(q) d\Gamma(q) + \\ & + \int_{\Omega} u_{ki}^*(s, q) \lambda_i(q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Onde:

$$C_{ik} = 0 \quad , \quad \text{para } s \notin \Omega$$

$$C_{ik} = \delta_{ik} / 2 \quad , \quad \text{para } s \in \Gamma \quad (\text{contorno suave})$$

$$C_{ik} = \delta_{ik} \quad , \quad \text{para } s \in \Omega$$

Sendo a eq.(5.18), a equação integral para o problema elástico dinâmico 2D.

Para o caso estático, basta fazer:  $\lambda_i = b_i$ , isto é,  $\dot{u}_i = \ddot{u}_i = 0$  na eq.(5.8).

Dessa forma, para o problema estático, tem-se:

$$\begin{aligned} C_{ik} u_i(s) = & - \int_{\Gamma} p_{ki}^*(s, q) u_i(q) d\Gamma(q) + \int_{\Gamma} u_{ki}^*(s, q) p_i(q) d\Gamma(q) + \\ & + \int_{\Omega} u_{ki}^*(s, q) b_i(q) d\Omega(q) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Derivando-se a eq.(5.18) segundo variação do ponto “s” segundo as duas direções dos eixos cartesianos globais e admitindo também o ponto “s” pertencente ao domínio  $\Omega$  ( $C_{ik} = \delta_{ik}$ ), ou seja, fazendo:

$$\frac{\partial u_k(s)}{\partial x_j(s)} = \frac{\partial}{\partial x_j(s)} \left[ - \int_{\Gamma} p_{ki}^*(s, q) u_i(q) d\Gamma(q) + \int_{\Gamma} u_{ki}^*(s, q) p_i(q) d\Gamma(q) + \int_{\Omega} u_{ki}^*(s, q) \lambda_i(q) d\Omega(q) \right]$$

Sendo que:

$$\frac{\partial u_{ik}^*(s, q)}{\partial x_j(s)} = - \frac{\partial u_{ik}^*(s, q)}{\partial x_j(q)} = -u_{ik,j}^*(s, q)$$

$$\frac{\partial p_{ik}^*(s, q)}{\partial x_j(s)} = - \frac{\partial p_{ik}^*(s, q)}{\partial x_j(q)} = -p_{ik,j}^*(s, q)$$

Tem-se, portanto:

$$\begin{aligned}
 u_{k,j}(s) = & \int_{\Gamma} p_{ki,j}^*(s,q) u_i(q) d\Gamma(q) - \int_{\Gamma} u_{ki,j}^*(s,q) p_i(q) d\Gamma(q) + \\
 & - \int_{\Omega} u_{ki,j}^*(s,q) \lambda_i(q) d\Omega(q)
 \end{aligned} \tag{5.20}$$

Sendo a eq.(5.20) a representação integral das derivadas dos deslocamentos nas direções dos eixos cartesianos para os pontos internos.

Para se determinar as tensões nos pontos internos, basta substituir os valores da eq.(5.20) na eq.(3.8), determinando assim o tensor de deformações no ponto. Com o tensor de deformações calculado, basta substituir os valores de deformação na eq.(3.11), encontrando assim as tensões nos pontos internos. Ou então substituindo os valores de gradientes de deslocamento calculados diretamente na eq.(3.13), que é a equação constitutiva para tensões em função apenas do gradiente de deslocamento.

Deve-se observar que as equações integrais eqs.(5.19) e (5.20), foram demonstradas de maneira exata. As aproximações de contorno serão aplicadas no próximo item.

### 5.3 Discretização do problema

Admitindo-se que o contorno  $\Gamma$  possa ser subdividido em “ne” elementos de contorno, ou seja,  $\Gamma = \sum_{j=1}^{ne} \Gamma_j$ , e o domínio  $\Omega$  subdividido em “ncel” células de domínio (Figura 08), as eq.(5.18) e (5.20), podem ser escritas respectivamente na forma:

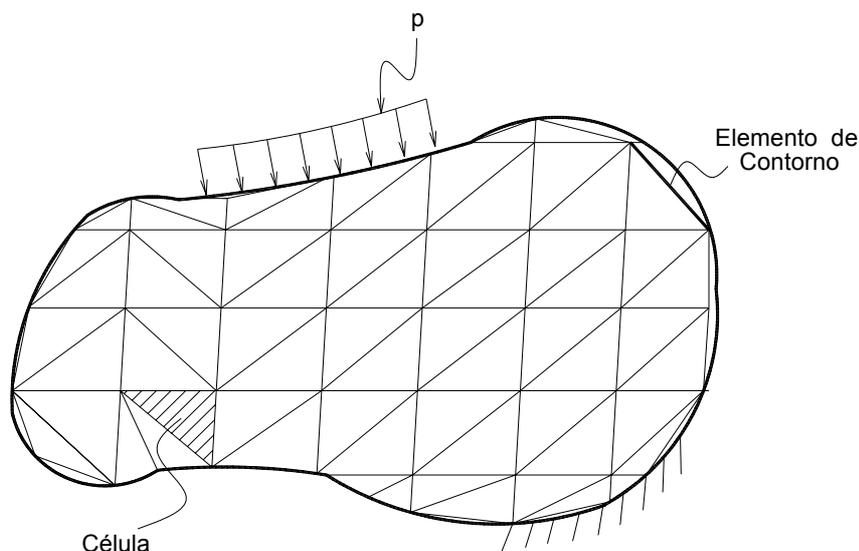


FIGURA 08: Problema elástico discretizado em elementos de contorno e células de domínio.

$$C_{ik} u_i(s) = - \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} p_{ki}^*(s, q) u_k^j(q) d\Gamma(q) + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} u_{ki}^*(s, q) p_k^j(q) d\Gamma(q) + \sum_{j=1}^{ncel} \int_{\Omega} u_{ki}^*(s, q) \lambda_k^j(q) d\Omega(q) \quad (5.21)$$

$$u_{k,j}(s) = \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} p_{ki,m}^*(s, q) u_k^j(q) d\Gamma(q) - \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} u_{ki,m}^*(s, q) p_k^j(q) d\Gamma(q) + \sum_{j=1}^{ncel} \int_{\Omega} u_{ki,m}^*(s, q) \lambda_k^j(q) d\Omega(q) \quad (5.22)$$

Nas eq.(5.21) e (5.22), fez-se a subdivisão do contorno em elementos de contorno e o domínio em células; agora é preciso arbitrar uma forma geométrica aproximada a esses elementos e células, como também aproximar o comportamento das forças e dos deslocamentos de superfície ao longo dos mesmos.

O elemento de contorno escolhido para aproximação é o reto com distribuição linear ou quadrática de forças e deslocamentos. Sendo esse elemento denominado simplesmente de *elemento linear isoparamétrico* quando a variação das forças e

deslocamentos ao longo do mesmo forem lineares (Figura 09). Caso contrário, isto é, quando essas variações forem admitidas com comportamento quadrático (Figura 10), o elemento de contorno é chamado de *elemento linear com variação quadrática*. Quanto às células de domínio, estas são arbitradas com formato triangular e aproximação linear (Figura 10) de suas variáveis (forças de corpo).

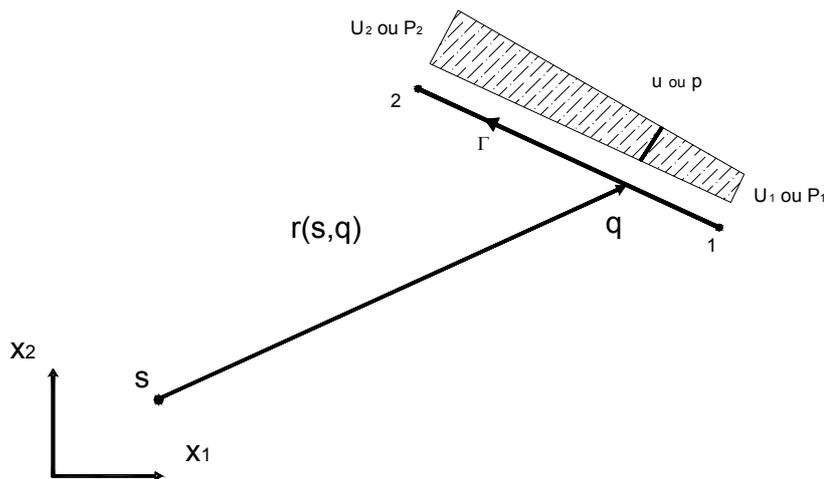


FIGURA 09: Elemento de contorno linear

As variáveis no contorno (Ver Figura 09), são aproximadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 u_k^j(q) &= \phi_m^j U_k^m \\
 p_k^j(q) &= \phi_m^j P_k^m
 \end{aligned}
 \tag{5.23}$$

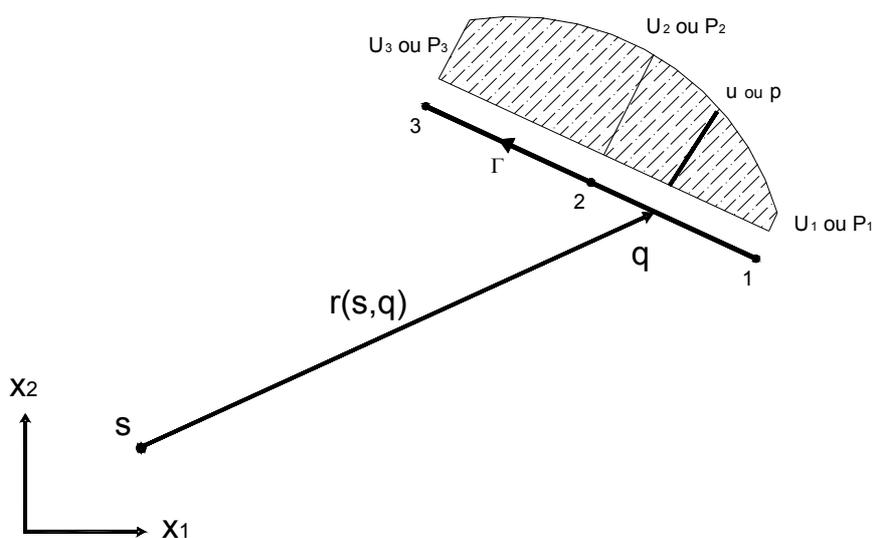


FIGURA 10: Elemento de contorno linear com variação quadrática.

Da mesma forma, as variáveis ao longo do domínio da célula (Figura 11), são escritas na forma:

$$\lambda_k^j(q) = \xi_m^j \Psi_k^m \quad (5.24)$$

Sendo  $\phi_m$  e  $\xi_m$  as funções de forma das variáveis do contorno (Figura 12 para o caso de elemento isoparamétrico, Figura 13 para o caso de elemento linear com variação quadrática) e das variáveis da célula (Figura 14) respectivamente.

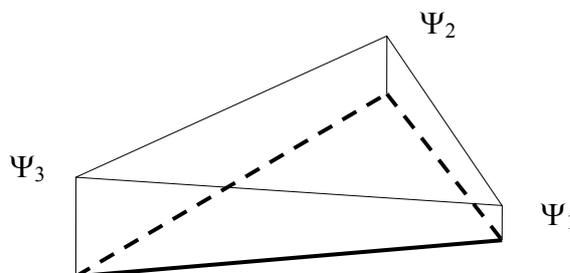


FIGURA 11: Célula de domínio triangular com variação linear

Substituindo-se as eq.(5.23) e (5.24) na equação integral para deslocamentos, ou seja, eq.(5.21), tem-se:

$$C_{ik} u_i(s) = - \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} p_{ik}^*(s, q) \phi_m^j U_k^m d\Gamma + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} u_{ik}^*(s, q) \phi_m^j P_k^m d\Gamma + \sum_{j=1}^{ncel} \int_{\Omega} u_{ik}^*(s, q) \xi_m^j \Psi_k^m d\Omega \quad (5.25)$$

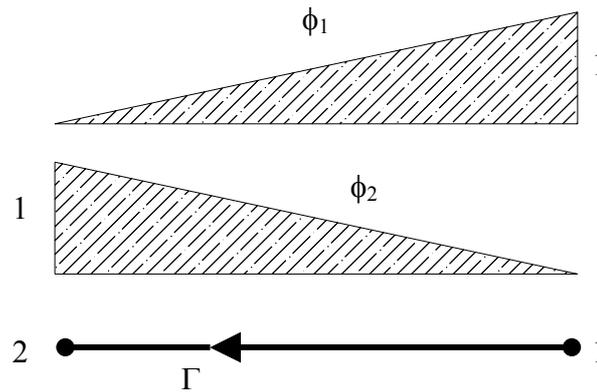


FIGURA 12: Variação das funções de forma no elemento de contorno linear.

Observando-se que  ${}^j U_k^m$ ,  ${}^j P_k^m$  e  ${}^j \Psi_k^m$  são constantes ao longo da integração, pois são valores nodais, a eq.(50) fica:

$$C_{ik} u_i(s) = - \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} p_{ik}^*(s, q) \phi_m^j d\Gamma {}^j U_k^m + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} u_{ik}^*(s, q) \phi_m^j d\Gamma {}^j P_k^m + \sum_{j=1}^{ncel} \int_{\Omega} u_{ik}^*(s, q) \xi_m^j d\Omega {}^j \Psi_k^m \quad (5.26)$$

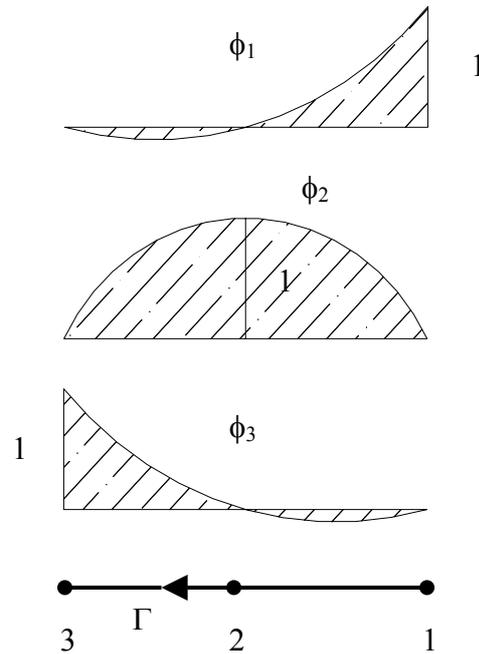


FIGURA 13: Variação das funções de forma no elemento linear com variação quadrática.

Outra forma de se escrever a eq.(5.26) para o elemento isoparamétrico, melhorando o seu entendimento, é:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}_{(s)} &= - \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} p_{11}^* & p_{12}^* \\ p_{21}^* & p_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} d\Gamma \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \end{Bmatrix} + \\
 + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & \phi_2 \end{bmatrix} d\Gamma \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_1^2 \\ P_2^2 \end{Bmatrix} + \\
 + \sum_{j=1}^{ncl} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} u_{11}^* & u_{12}^* \\ u_{21}^* & u_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{bmatrix} d\Omega \begin{Bmatrix} \Psi_1^1 \\ \Psi_2^1 \\ \Psi_1^2 \\ \Psi_2^2 \\ \Psi_1^3 \\ \Psi_2^3 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

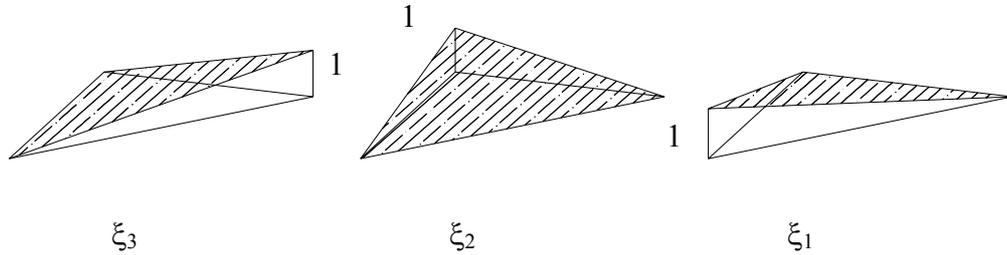


FIGURA 14: Variação das funções de forma da célula.

Efetuada-se os produtos das matrizes do lado direito da eq.(5.27), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}_{(s)} &= - \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} p_{11}^* \phi_1 & p_{12}^* \phi_1 & p_{11}^* \phi_2 & p_{12}^* \phi_2 \\ p_{21}^* \phi_1 & p_{22}^* \phi_1 & p_{21}^* \phi_2 & p_{22}^* \phi_2 \end{bmatrix} d\Gamma \begin{Bmatrix} U_1^1 \\ U_2^1 \\ U_1^2 \\ U_2^2 \end{Bmatrix}_j + \\
 + \sum_{j=1}^{ne} \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} u_{11}^* \phi_1 & u_{12}^* \phi_1 & u_{11}^* \phi_2 & u_{12}^* \phi_2 \\ u_{21}^* \phi_1 & u_{22}^* \phi_1 & u_{21}^* \phi_2 & u_{22}^* \phi_2 \end{bmatrix} d\Gamma \begin{Bmatrix} P_1^1 \\ P_2^1 \\ P_1^2 \\ P_2^2 \end{Bmatrix}_j + & \quad (5.28) \\
 + \sum_{j=1}^{ncl} \int_{\Omega} \begin{bmatrix} u_{11}^* \xi_1 & u_{12}^* \xi_1 & u_{11}^* \xi_2 & u_{12}^* \xi_2 & u_{11}^* \xi_3 & u_{12}^* \xi_3 \\ u_{21}^* \xi_1 & u_{22}^* \xi_1 & u_{21}^* \xi_2 & u_{22}^* \xi_2 & u_{21}^* \xi_3 & u_{22}^* \xi_3 \end{bmatrix} d\Omega \begin{Bmatrix} \Psi_1^1 \\ \Psi_2^1 \\ \Psi_1^2 \\ \Psi_2^2 \\ \Psi_1^3 \\ \Psi_2^3 \end{Bmatrix}_j
 \end{aligned}$$

Na forma matricial compacta, a eq.(5.28) fica:

$$[\mathbf{C}]_s \{\mathbf{U}\}_s + [\mathbf{h}]_{sj} \{\mathbf{U}\}_j = [\mathbf{g}]_{sj} \{\mathbf{P}\}_j + [\mathbf{b}]_{sj} \{\Psi\}_j \quad (5.29)$$

Onde:

$$[g]_{sj} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} u_{11}^* \varphi_1 & u_{12}^* \varphi_1 & u_{11}^* \varphi_2 & u_{12}^* \varphi_2 \\ u_{21}^* \varphi_1 & u_{22}^* \varphi_1 & u_{21}^* \varphi_2 & u_{22}^* \varphi_2 \end{bmatrix} d\Gamma \quad (5.30)$$

$$[h]_{sj} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} p_{11}^* \varphi_1 & p_{12}^* \varphi_1 & p_{11}^* \varphi_2 & p_{12}^* \varphi_2 \\ p_{21}^* \varphi_1 & p_{22}^* \varphi_1 & p_{21}^* \varphi_2 & p_{22}^* \varphi_2 \end{bmatrix} d\Gamma$$

$$[b]_{sj} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} u_{11}^* \xi_1 & u_{12}^* \xi_1 & u_{11}^* \xi_2 & u_{12}^* \xi_2 & u_{11}^* \xi_3 & u_{12}^* \xi_3 \\ u_{21}^* \xi_1 & u_{22}^* \xi_1 & u_{21}^* \xi_2 & u_{22}^* \xi_2 & u_{21}^* \xi_3 & u_{22}^* \xi_3 \end{bmatrix} d\Omega \quad (5.31)$$

Deve-se observar que a eq.(5.29) representa apenas duas equações algébricas referentes a um ponto “s” qualquer. Sendo assim, escolhendo-se um número de pontos fonte “s” igual ao número de pontos nodais, chegam-se às seguintes equações algébricas na forma matricial para todo o contorno  $\Gamma$  :

$$HU = GP + B\Psi \quad (5.32)$$

Seguindo-se o mesmo procedimento feito para a eq.(5.21) de deslocamentos, a eq.(5.22) de derivadas dos deslocamentos, fica:

$$\{U\}_{s,k}(s) = [h]_{sj,k} \{U\}_j - [g]_{sj,k} \{P\}_j - [b]_{sj,k} \{\Psi\}_j \quad (5.33)$$

Onde:

$$[g]_{sj,k} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} u_{11,1}^* \varphi_1 & u_{12,1}^* \varphi_1 & u_{11,1}^* \varphi_2 & u_{12,1}^* \varphi_2 \\ u_{21,1}^* \varphi_1 & u_{22,1}^* \varphi_1 & u_{21,1}^* \varphi_2 & u_{22,1}^* \varphi_2 \\ u_{11,2}^* \varphi_1 & u_{12,2}^* \varphi_1 & u_{11,2}^* \varphi_2 & u_{12,2}^* \varphi_2 \\ u_{21,2}^* \varphi_1 & u_{22,2}^* \varphi_1 & u_{21,2}^* \varphi_2 & u_{22,2}^* \varphi_2 \end{bmatrix} d\Gamma \quad (5.34)$$

$$[h]_{sj,k} = \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} p_{11,1}^* \varphi_1 & p_{12,1}^* \varphi_1 & p_{11,1}^* \varphi_2 & p_{12,1}^* \varphi_2 \\ p_{21,1}^* \varphi_1 & p_{22,1}^* \varphi_1 & p_{21,1}^* \varphi_2 & p_{22,1}^* \varphi_2 \\ p_{11,2}^* \varphi_1 & p_{12,2}^* \varphi_1 & p_{11,2}^* \varphi_2 & p_{12,2}^* \varphi_2 \\ p_{21,2}^* \varphi_1 & p_{22,2}^* \varphi_1 & p_{21,2}^* \varphi_2 & p_{22,2}^* \varphi_2 \end{bmatrix} d\Gamma$$

$$[b]_{sj,k} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} u_{11,1}^* \xi_1 & u_{12,1}^* \xi_1 & u_{11,1}^* \xi_2 & u_{12,1}^* \xi_2 & u_{11,1}^* \xi_3 & u_{12,1}^* \xi_3 \\ u_{21,1}^* \xi_1 & u_{22,1}^* \xi_1 & u_{21,1}^* \xi_2 & u_{22,1}^* \xi_2 & u_{21,1}^* \xi_3 & u_{22,1}^* \xi_3 \\ u_{11,2}^* \xi_1 & u_{12,2}^* \xi_1 & u_{11,2}^* \xi_2 & u_{12,2}^* \xi_2 & u_{11,2}^* \xi_3 & u_{12,2}^* \xi_3 \\ u_{21,2}^* \xi_1 & u_{22,2}^* \xi_1 & u_{21,2}^* \xi_2 & u_{22,2}^* \xi_2 & u_{21,2}^* \xi_3 & u_{22,2}^* \xi_3 \end{bmatrix} d\Omega \quad (5.35)$$

Portanto, escrevendo-se a eq.(5.33) para o número de pontos internos do problema, chega-se a:

$$U' = H' U - G' P - B' \Psi \quad (5.36)$$

É válido lembrar que considerando o elemento linear com variação quadrática deve-se adicionar mais duas colunas nas eqs.(5.30) e (5.34) referentes à terceira função de forma. Da mesma forma, adiciona-se aos vetores de forças e deslocamentos nodais mais duas linhas devido aos valores nodais no terceiro nó do elemento.

O termo de valores nodais das células de domínio  $\{\Psi\}_j$  para problemas dinâmicos pode ser dado por:

$$\{\Psi\}_j = \{b\}_j - (\rho \{\ddot{U}\}_j + c \{\dot{U}\}_j) \quad (5.37)$$

Onde:

$\rho \rightarrow$  Densidade do material do corpo, considerada constante ao longo do tempo e do domínio;

$c \rightarrow$  Coeficiente de amortecimento do corpo, considerado constante ao longo do tempo e do domínio;

$\{b\}_j \rightarrow$  Vetor de valores nodais de forças de corpo;

$\rho\{\ddot{U}\}_j \rightarrow$  Vetor de valores nodais de força de inércia;

$c\{\dot{U}\}_j \rightarrow$  Vetor de valores nodais de força de amortecimento.

Substituindo-se a eq.(5.37) na eq.(5.29), obtém-se:

$$[C]_s \{U\}(s) + [h]_{sj} \{U\}_j = [g]_{sj} \{P\}_j + [b]_{sj} \{b\}_j - \rho [b]_{sj} \{\ddot{U}\}_j - c [b]_{sj} \{\dot{U}\}_j \quad (5.38)$$

Para todos os pontos fontes “s” do problema chega-se a:

$$HU(t) + C\dot{U}(t) + M\ddot{U}(t) = GP(t) + Bb(t) \quad (5.39)$$

Onde:

$M = \rho B \rightarrow$  Matriz de massa do problema;

$C = cB \rightarrow$  Matriz de amortecimento do problema.

Procedendo-se da mesma forma para a eq.(5.33), chega-se a:

$$\{U\}_{,k}(s) = [h]_{sj,k} \{U\}_j - [g]_{sj,k} \{P\}_j - [b]_{sj,k} \{b\}_j + \rho [b]_{sj,k} \{\ddot{U}\}_j + c [b]_{sj,k} \{\dot{U}\}_j \quad (5.40)$$

Logo, para todos os pontos fontes “s” internos, tem-se:

$$U'(t) = H'U(t) - G'P(t) - M'\ddot{U}(t) - C'\dot{U}(t) + B'b \quad (5.41)$$

Onde:

$$M' = \rho B'$$

$$C' = cB'$$

## **6 INTEGRAÇÃO ANALÍTICA DAS INTEGRAIS DE CONTORNO NO SISTEMA LOCAL E TRANSFORMAÇÃO DE COORDENADAS**

Conforme apresentado no capítulo anterior, para a determinação algébrica das matrizes utilizadas no MEC é necessário desenvolver integrais sobre os elementos de contorno e células de domínio.

Os programas atuais baseados no MEC desenvolvem geralmente essas integrais analiticamente apenas quando os pontos fontes pertencem aos elementos a serem integrados, caso contrário as integrais são desenvolvidas numericamente.

Recentemente, FOLTRAN (1998) desenvolveu para o elemento reto com aproximação linear (elemento linear isoparamétrico), integrais analíticas para os pontos fontes não pertencentes ao elemento integrado, as quais foram obtidas diretamente segundo as coordenadas globais do problema em estudo. No presente trabalho, as referidas integrais são solucionadas segundo um procedimento de posicionamento local, ou seja, segundo eixos do elemento, sendo feita posteriormente a rotação de eixos para posicionamento global. A possibilidade da aplicação da rotação é descrita com detalhes, mostrando-se que é possível aplicar essa técnica para outros tipos de elementos e células internas. Além disso, considera-se também a aproximação quadrática para as variáveis (elementos retos com aproximação quadrática). Já as integrais referentes às células de domínio são obtidas segundo procedimento semi-analítico descrito em SOUZA (2001), sendo que nesse trabalho a resolução semi-analítica é aplicada para elementos de contorno triangulares para problemas elásticos tridimensionais.

Neste capítulo, explicitam-se as etapas e a resolução analítica das integrais de contorno para o problema elástico linear bidimensional para um elemento de

contorno reto com aproximação linear ou quadrática, cujo ponto fonte não pertence ao elemento a ser integrado, como também o processo de rotação de eixos locais para o sistema global de referência. Graças a esse processo de integração, os resultados tornam-se mais precisos, ao passo que o erro devido à integração numérica deixa de existir.

## 6.1 Procedimento de Integração Analítica das Matrizes

A etapa de integração das matrizes  $[h]$ ,  $[g]$ ,  $[h]'$  e  $[g]'$  (eq.(5.30) e eq.(5.34)) para o caso em que o ponto fonte pertence ao elemento integrado é geralmente feita analiticamente. Porém quando o referido ponto de colocação não pertence ao elemento (Figura 9 e Figura 15), comumente se utiliza o método da quadratura de Gauss para se determinar os valores dessas integrais. É mostrado nos subitens a seguir como essas integrais são solucionadas analiticamente, tomando-se eixos locais conforme ilustrado na Figura 15.

### 6.1.1 Caso 1: Integração com o Ponto “s” Desalinhado com o Elemento ( $a \neq 0$ )

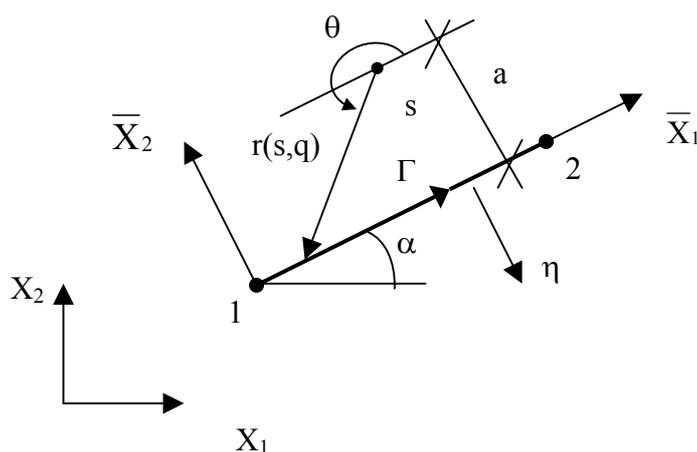


FIGURA 15: Posicionamento dos eixos locais ( $\bar{x}_i$ ) em relação ao elemento.

As integrais das matrizes  $[h]$ ,  $[g]$ ,  $[h]'$  e  $[g]'$  estão na forma:

$$\int_{\Gamma} f(r, \theta, \alpha) d\Gamma \quad (6.1)$$

Neste ponto deve-se observar que a solução fundamental está originalmente escrita para carregamentos fundamentais aplicados nas direções  $X_1$  e  $X_2$  globais. É de interesse se escrever uma solução fundamental onde os referidos carregamentos fundamentais estejam aplicados nas direções  $\bar{X}_1$  e  $\bar{X}_2$  locais, transformando a expressão (6.1) para:

$$\int_{\Gamma} f(r, \theta) d\Gamma \quad (6.2)$$

Dessa forma, elimina-se o ângulo  $\alpha$  que o elemento faz o com a horizontal global.

Pode-se observar que:

$$d\Gamma = d\bar{X}$$

Deve-se efetuar, com fins de facilitação da resolução, a seguinte mudança da variável:

$$\int_{\Gamma} f(r, \theta) d\Gamma \rightarrow \int_{\theta} g(\theta) d\theta$$

Sendo que:

$$a = r \operatorname{sen} \theta \Rightarrow r = \frac{a}{\operatorname{sen} \theta}$$

E que:

$$\bar{X} - \bar{X}(s) = r \cos \theta \Rightarrow \bar{X} = r \cos \theta + \bar{X}(s)$$

Chega-se a:

$$\bar{X} = \bar{X}(s) + a \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \quad (6.3)$$

Derivando-se a eq.(6.3) em relação à  $\theta$ , obtém-se:

$$\frac{d\bar{X}}{d\theta} = -\frac{a}{\sin^2 \theta} \quad (6.4)$$

Dessa forma, a eq.(6.2), pode ser escrita na forma:

$$\int_{\Gamma} f(r, \theta) d\Gamma = \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(\theta) \left( -\frac{a}{\sin^2 \theta} \right) d\theta \quad (6.5)$$

As funções de forma, anteriormente ilustradas na Figura 12 para o elemento isoparamétrico, tem suas expressões segundo os eixos locais, na forma:

$$\begin{aligned} \phi_1(\bar{X}) &= 1 - \frac{\bar{X}}{L} \\ \phi_2(\bar{X}) &= \frac{\bar{X}}{L} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Da mesma forma, para o elemento linear com variação quadrática, tem-se:

$$\begin{aligned} \phi_1(\bar{X}) &= \frac{2}{L^2} \bar{X}^2 - \frac{3}{L} \bar{X} + 1 \\ \phi_2(\bar{X}) &= \frac{4}{L} \left( \bar{X} - \frac{\bar{X}^2}{L} \right) \\ \phi_3(\bar{X}) &= \frac{1}{L} \left( \frac{2\bar{X}^2}{L} - \bar{X} \right) \end{aligned} \quad (6.7)$$

Onde:

$L \rightarrow$  Comprimento do elemento.

Substituindo-se a eq.(6.3) na eq.(6.6), fica-se com:

$$\begin{aligned}\phi_1(\theta) &= 1 - \frac{1}{L} \left( \bar{X}(s) + a \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} \right) \\ \phi_2(\theta) &= \frac{1}{L} \left( \bar{X}(s) + a \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} \right)\end{aligned}\tag{6.8}$$

Substituindo novamente a eq.(6.3), agora na eq.(6.7), obtém-se:

$$\begin{aligned}\phi_1(\theta) &= \frac{2}{L^2} \left( \bar{X}(s) + a \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} \right)^2 - \frac{3}{L} \left( \bar{X}(s) + a \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} \right) + 1 \\ \phi_2(\theta) &= \frac{4}{L} \left[ \bar{X}(s) + a \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} - \frac{1}{L} \left( \bar{X}(s) + a \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} \right)^2 \right] \\ \phi_3(\theta) &= \frac{1}{L} \left[ \frac{2}{L} \left( \bar{X}(s) + a \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} \right)^2 - \left( \bar{X}(s) + a \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} \right) \right]\end{aligned}\tag{6.9}$$

Salienta-se que a lista das integrais analíticas de contorno se encontram no Anexo A deste trabalho.

### 6.1.2 Exemplo Ilustrativo do Caso 1

Para melhor sedimentar o raciocínio exposto anteriormente, mostra-se aqui um exemplo de integração de um elemento da matriz  $[g]$ , sendo  $g_{12}$  o elemento escolhido a ser integrado.

O elemento  $g_{12}$  é dado por:

$$g_{12} = \int_{\Gamma} u_{12}^* \phi_1 d\Gamma \quad (a)$$

Da eq.(5.1), escrita em coordenadas locais, tem-se:

$$u_{12}^* = -\frac{K_1 \text{sen } 2\theta}{2} \quad (b)$$

Onde:

$$K_1 = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} \quad (c)$$

Substituindo-se na eq.(a), as eqs.(b), (c) e (6.8), obtém-se:

$$g_{12} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{K_1 \text{sen } 2\theta}{2} \left[ 1 - \frac{1}{L} \left( \bar{X}(s) + a \frac{\cos \theta}{\text{sen } \theta} \right) \right] \left( -\frac{a}{\text{sen}^2 \theta} \right) d\theta \quad (d)$$

A eq.(d) é simples de se resolver, pois só há integrais que envolvem funções seno e co-seno.

### 6.1.3 Caso 2: Integração com o Ponto “s” Alinhado com o Elemento (a=0)

As transformações de variáveis do item anterior só se justificam para o caso em que  $a \neq 0$ , ou seja, caso em que o ponto “s” não se encontra alinhado com o elemento. Agora é mostrada a forma de proceder a integração quando  $a=0$  e o ponto de colocação está fora do elemento, isto é,  $\bar{X}(s) < \bar{X}(\text{nó } 1)$  ou  $\bar{X}(s) > \bar{X}(\text{nó } 2)$ . A Figura 16 ilustra da disposição dos parâmetros para o caso 2.

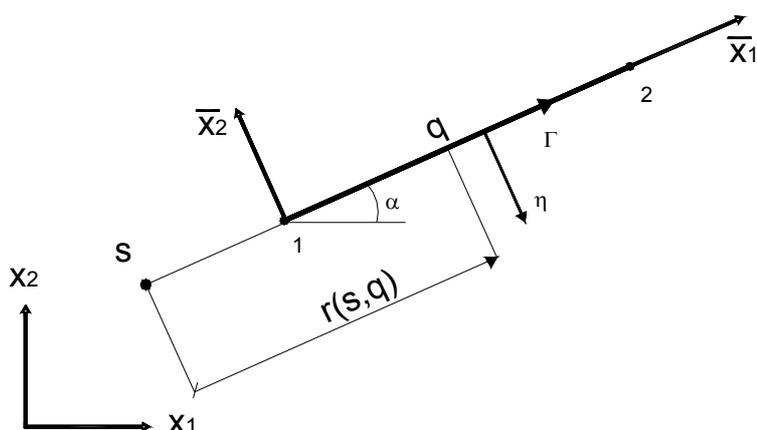


FIGURA 16: Disposição geométrica dos parâmetros do problema para o caso 2.

Novamente se trata da solução fundamental escrita para carregamentos fundamentais nas coordenadas locais.

Sendo:

$$r = \bar{X}(q) - \bar{X}(s) \Rightarrow \frac{dr}{d\bar{X}(q)} = 1$$

$$\Gamma = \bar{X} \Rightarrow \frac{d\Gamma}{d\bar{X}} = 1$$

Portanto:

$$d\Gamma = dr = d\bar{X} \tag{6.9}$$

Pela eq.(6.9), conclui-se que o jacobiano, para esse posicionamento de eixos locais (ver Figura 16), é sempre igual a um.

Em face dessas considerações, a integral a ser resolvida pode ser escrita na forma:

$$\int_{\Gamma} f(r) d\Gamma = \int_L f(r) dr = \int_0^L f(\bar{X}) d\bar{X} \tag{6.10}$$

## 6.2 Transformação de Coordenadas

Os elementos das matrizes  $[h]$ ,  $[g]$ ,  $[h]'$  e  $[g]'$  foram integrados, conforme expressões dos itens anteriores, segundo uma orientação de eixos cartesianos locais. Para que se determinem as matrizes  $H$ ,  $G$ ,  $H'$  e  $G'$  para todo o problema elástico, faz-se necessária a transformação das matrizes  $[h]$ ,  $[g]$ ,  $[h]'$  e  $[g]'$  locais em matrizes globais. Para tanto, é válida a relação:

$$[m] = [R][\bar{m}][R]^T \quad (6.11)$$

Onde:

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Sendo:

$\alpha \rightarrow$  Ângulo de inclinação entre o eixo global e eixo local;

$[\bar{m}] \rightarrow$  Matriz referente ao eixo local.

Pode-se mostrar a validade da eq.(6.11) a partir da transformação de vetores, escrita na forma:

$$[x] = [R][\bar{x}] \quad (6.13)$$

A equação algébrica de contorno, eq.(5.29), segundo os eixos locais pode ser escrita na forma:

$$[\bar{C}]_s \{\bar{U}\}_s + [\bar{h}]_{sj} \{\bar{U}\}_j = [\bar{g}]_{sj} \{\bar{P}\}_j + [\bar{b}]_{sj} \{\bar{\Psi}\}_j \quad (6.14)$$

Da mesma forma para equação de gradientes de deslocamentos internos, eq.(5.33), tem-se:

$$\{\bar{\mathbf{U}}\}_{,k}(\mathbf{s}) = [\bar{\mathbf{h}}]_{sj,k} \{\bar{\mathbf{U}}\}_j - [\bar{\mathbf{g}}]_{sj,k} \{\bar{\mathbf{P}}\}_j - [\bar{\mathbf{b}}]_{sj,k} \{\bar{\Psi}\}_j \quad (6.15)$$

Sendo:

$$\begin{aligned} \{\bar{\mathbf{U}}\} &= [\mathbf{R}]^T \{\mathbf{U}\} \\ \{\bar{\mathbf{P}}\} &= [\mathbf{R}]^T \{\mathbf{P}\} \\ \{\bar{\Psi}\} &= [\mathbf{R}]^T \{\Psi\} \\ \{\bar{\mathbf{U}}\}_{,k} &= [\mathbf{R}]^T \{\mathbf{U}\}_{,k} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Substituindo as eq.(6.16) na eq.(6.14) e na eq.(6.15) e multiplicando-se ambos os lados dessas equações por  $[\mathbf{R}]$ , fica-se com:

$$[\mathbf{R}][\bar{\mathbf{C}}]_s [\mathbf{R}]^T \{\mathbf{U}\}(\mathbf{s}) + [\mathbf{R}][\bar{\mathbf{h}}]_{sj} [\mathbf{R}]^T \{\mathbf{U}\}_j = [\mathbf{R}][\bar{\mathbf{g}}]_{sj} [\mathbf{R}]^T \{\mathbf{P}\}_j + [\mathbf{R}][\bar{\mathbf{b}}]_{sj} [\mathbf{R}]^T \{\Psi\}_j \quad (6.17)$$

$$[\mathbf{R}](\{\mathbf{R}\}^T \{\mathbf{U}\})_{,k} = [\mathbf{R}][\bar{\mathbf{h}}]_{sj,k} [\mathbf{R}]^T \{\mathbf{U}\}_j - [\mathbf{R}][\bar{\mathbf{g}}]_{sj,k} [\mathbf{R}]^T \{\mathbf{P}\}_j - [\mathbf{R}][\bar{\mathbf{b}}]_{sj,k} [\mathbf{R}]^T \{\Psi\}_j \quad (6.18)$$

Observando-se que:

$$[\mathbf{R}][\bar{\mathbf{C}}][\mathbf{R}]^T = [\mathbf{C}]$$

$$[\mathbf{R}][\bar{\mathbf{h}}][\mathbf{R}]^T = [\mathbf{h}]$$

$$[\mathbf{R}][\bar{\mathbf{g}}][\mathbf{R}]^T = [\mathbf{g}]$$

$$[\mathbf{R}][\bar{\mathbf{h}}]_{,k} [\mathbf{R}]^T = [\mathbf{h}]_{,k}$$

$$[\mathbf{R}][\bar{\mathbf{g}}]_{,k} [\mathbf{R}]^T = [\mathbf{g}]_{,k}$$

$$[\mathbf{R}][\bar{\mathbf{b}}][\mathbf{R}]^T = [\mathbf{b}]$$

$$[\mathbf{R}][\bar{\mathbf{b}}]_{,k} [\mathbf{R}]^T = [\mathbf{b}]_{,k}$$

$$([\mathbf{R}]^T \{\mathbf{U}\})_{,k} = [\mathbf{R}]^T \{\mathbf{U}\}_{,k}$$

As eqs.(6.17) e (6.18), ficam na forma:

$$[C]_s \{U\}(s) + [h]_{sj} \{U\}_j = [g]_{sj} \{P\}_j + [b]_{sj} \{\Psi\}_j \quad (6.19)$$

$$\{U\}_{,k}(s) = [h]_{sj,k} \{U\}_j - [g]_{sj,k} \{P\}_j - [b]_{sj,k} \{\Psi\}_j \quad (6.20)$$

A eq.(6.19) está agora inteiramente referenciada em relação aos eixos cartesianos globais, porém para eq.(6.20) é necessário aplicar a transformação de derivadas. Pelo cálculo diferencial a regra da cadeia é dada por:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial F}{\partial \bar{x}_k} \frac{\partial \bar{x}_k}{\partial x_j} = F_{,k} x_{k,j} \quad (6.21)$$

Onde:

$F \rightarrow$  Função contínua no ponto de derivação.

Aplicando a propriedade expressa pela eq.(6.21) na eq.(6.20), tem-se:

$$\{U\}_{,k}(s) = [\bar{R}] \left\{ [h]_{sj,k} \{U\}_j - [g]_{sj,k} \{P\}_j - [b]_{sj,k} \{\Psi\}_j \right\} \quad (6.22)$$

Onde:

$$[\bar{R}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\text{sen } \alpha & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & -\text{sen } \alpha \\ \text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & \text{sen } \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (6.23)$$

Efetuando-se os produtos matriciais da eq.(6.22), chega-se a:

$$\{U\}_{,k}(s) = [h]_{sj,k} \{U\}_j - [g]_{sj,k} \{P\}_j - [b]_{sj,k} \{\Psi\}_j \quad (6.24)$$

Sendo a equação para derivadas de deslocamento, eq.(6.24), escrita agora em coordenadas globais.

Vale ressaltar, que é feita uma operação de rotação para cada nó nas matrizes, tomando-se submatrizes de dimensão 2x2 das mesmas que representam a influência de um nó apenas, ou seja, para as matrizes [h] e [g] a influência dos nós é destacada na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 [h]_{ij} &= \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} \text{Nó 1} & \text{Nó 2} \\ p_{11}^* \phi_1 & p_{12}^* \phi_1 \vdots p_{11}^* \phi_2 & p_{12}^* \phi_2 \\ p_{21}^* \phi_1 & p_{22}^* \phi_1 \vdots p_{21}^* \phi_2 & p_{22}^* \phi_2 \end{bmatrix} d\Gamma \\
 [g]_{ij} &= \int_{\Gamma_j} \begin{bmatrix} u_{11}^* \phi_1 & u_{12}^* \phi_1 \vdots u_{11}^* \phi_2 & u_{12}^* \phi_2 \\ u_{21}^* \phi_1 & u_{22}^* \phi_1 \vdots u_{21}^* \phi_2 & u_{22}^* \phi_2 \end{bmatrix} d\Gamma
 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Dessa forma, observa-se pela eq.(6.25) que são necessárias duas operações de rotação para cada matriz. Ressalta-se também, que nas matrizes [h]' e [g]', além da rotação de eixos, deve-se fazer a transformação de derivadas conforme exposto anteriormente.

De posse dos valores globais das matrizes [h], [g], [h]' e [g]', os mesmos são adicionados aos sistemas algébricos das eq.(5.32) e (5.36) na seguinte forma mostrada, por exemplo, para a matriz [H]:

$$\begin{array}{l}
 \text{linha } 2i-1 \\
 \text{linha } 2i
 \end{array}
 \begin{bmatrix}
 2j_1-1 & & 2j_1 & & 2j_2-1 & & 2j_2 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 h_{2i-1,2j_1-1} & \cdots & h_{2i-1,2j_1} & \cdots & h_{2i-1,2j_2-1} & \cdots & h_{2i-1,2j_2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 h_{2i,2j_1-1} & & h_{2i,2j_1} & & h_{2i,2j_2-1} & & h_{2i,2j_2} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots
 \end{bmatrix}$$

Onde:

$j_1 \rightarrow$  Número do nó inicial do elemento;

$j_2 \rightarrow$  Número do nó final do elemento;

$i \rightarrow$  Número do nó do ponto fonte “s”.

Conclui-se, portanto, que a determinação dos termos das matrizes  $[h]$ ,  $[g]$ ,  $[h]'$  e  $[g]'$  tomando-se eixos locais e procedendo em seguida a transformação para a orientação de eixo global é factível, facilitando assim a integração dos termos dessas matrizes.

É importante também ressaltar que este procedimento pode ser interrompido em qualquer estágio e, portanto pode-se ter equações algébricas para as quais as variáveis de contorno estarão escritas em coordenadas locais. Assim, segue-se a consideração imediata de forças de superfície normais e tangenciais ao elemento de contorno o que possibilita o estudo de acoplamentos entre meios contínuos de natureza diferente (ex.: solo-estrutura, fluido-estrutura).

## 7 FORMULAÇÃO PROPOSTA PARA O PROBLEMA DE MECÂNICA DA FRATURA VIA MEC

Neste capítulo, explicita-se a formulação utilizada neste trabalho, bem como o método de extração dos fatores de intensidade de tensão para o problema bidimensional, ou seja, a determinação de  $K_I$  e  $K_{II}$  tanto para o modo I apenas quanto para o modo misto (modos I e II atuando simultaneamente).

### 7.1 Considerações iniciais

Como já comentado, existem várias vertentes para se calcular os Fatores de Intensidade de Tensão pelo MEC, considerando-se a trinca com suas faces conectadas, vê-se o método das sub-regiões, o método da reciprocidade dual, o método que considera a trinca como uma faixa estreita de tensões iniciais (ver VENTURINI (1994)), etc.

Na formulação proposta neste trabalho, considera-se a trinca como um furo de formato retangular, cujas faces estão muito próximas umas das outras e os elementos de trinca, do contrário da forma usual, são considerados lineares com variação quadrática de forças e deslocamentos ao longo do mesmo. Modelar as faces da trinca dessa forma só é possível, sem que haja a subdivisão do domínio (método das sub-regiões), graças às soluções totalmente analíticas das integrais de contorno para todos os casos de posicionamento do ponto fonte, conforme já descrito no Capítulo 6.

## 7.2 Geometria do Problema

A trinca modelada na forma de um retângulo tem suas faces opostas separadas entre si de uma distância muito menor que o comprimento característico da trinca “ $a$ ”, conforme Figura 17.

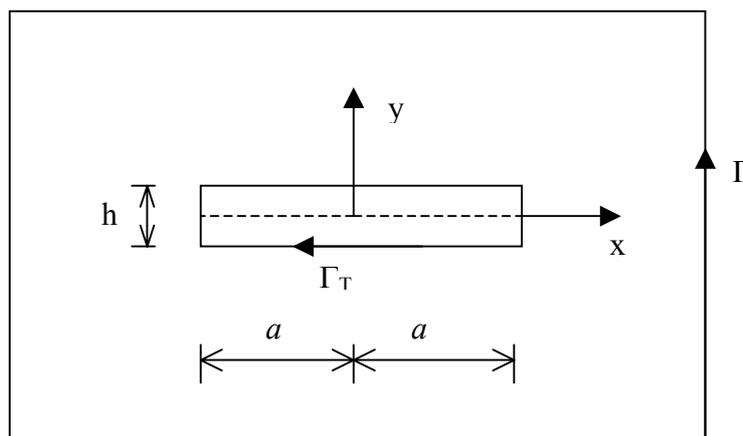


FIGURA 17: Geometria da formulação proposta.

## 7.3 Equações Integrais Empregadas

As equações integrais utilizadas são as eqs.(5.18) e (5.20) para cálculo de deslocamentos e gradientes de deslocamentos (apenas para pontos internos) respectivamente. Sendo as tensões nesses pontos internos determinadas através da Lei de Hooke (ver eq.(3.13)).

## 7.4 Determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão (FIT)

Os fatores de intensidade de tensão são determinados a partir das eq.(4.5) para caso em que  $\theta = 0$ , ou seja:

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \\ \sigma_{22} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \\ \sigma_{12} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}}\end{aligned}\tag{7.1}$$

As tensões são calculadas em três pontos internos distantes da extremidade da trinca de  $\frac{1}{8}a$ ,  $\frac{1}{7}a$  e  $\frac{1}{6}a$ , denominados aqui de *pontos de extração*. Conforme ilustra Figura 18.

Resolvendo as eqs.(7.1) para os FIT's, fica-se com:

$$\begin{aligned}K_I &= \sigma_{22} \sqrt{2\pi r} \\ K_{II} &= \sigma_{12} \sqrt{2\pi r}\end{aligned}\tag{7.2}$$

Calculadas essas tensões, determina-se os FIT's dados pelas eqs.(7.2). Sendo, portanto, o FIT final determinado a partir da média aritmética dos três valores calculados nos pontos destacados, ou seja:

$$\begin{aligned}(K_I)_{\text{FINAL}} &= \frac{(K_I)_{\frac{1}{8}a} + (K_I)_{\frac{1}{7}a} + (K_I)_{\frac{1}{6}a}}{3} \\ (K_{II})_{\text{FINAL}} &= \frac{(K_{II})_{\frac{1}{8}a} + (K_{II})_{\frac{1}{7}a} + (K_{II})_{\frac{1}{6}a}}{3}\end{aligned}\tag{7.2}$$

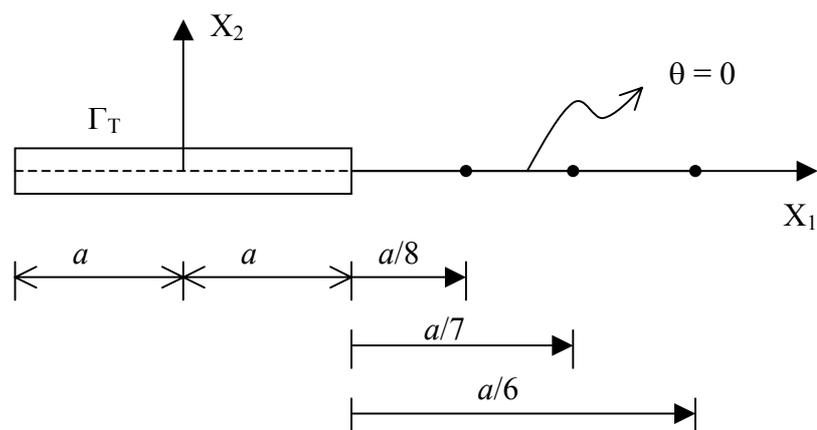


FIGURA 18: Posicionamento dos pontos internos de extração em relação à trinca.

É importante ressaltar que anteriormente no texto referente ao exame de qualificação do presente trabalho foi utilizado um método de extração proposto por CAÑAS & PARÍS (1997), onde nesse processo de extração se exige gerar curvas logarítmicas de tensões em pontos internos próximos à ponta da trinca. Dessa forma, para se obter resultados de valores do FIT, foram necessários muitos pontos internos para geração das curvas. Necessitou-se também a separação dos trechos adequados nas curvas para a determinação do mesmo FIT<sup>5</sup>.

Quanto ao método de extração proposto neste trabalho, apenas três pontos internos são necessários (pontos de extração) e a escolha desses pontos foi devido primeiramente à padronização do método de extração e também devido à facilidade de convergência para os valores do FIT na região em que esses pontos se situam, conforme será visto no próximo capítulo de exemplos numéricos.

<sup>5</sup> Para maiores detalhes sobre esse processo de extração ver o trabalho de CAÑAS & PARÍS (1997) ou então o Capítulo 8 de exemplos numéricos do presente trabalho.

## 8 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são mostrados exemplos numéricos da determinação do Fator de Intensidade de Tensão estático e dinâmico para o modo I e modo misto (Modo I e II atuando simultaneamente). É feita também uma breve análise do comportamento de deslocamentos das faces da trinca para problemas dinâmicos.

Procura-se aqui tanto analisar exemplos simples, onde existam as soluções analíticas, quanto exemplos mais complexos onde apenas respostas numéricas foram obtidas até hoje na literatura especializada.

### 8.1 Exemplos Estáticos

#### 8.1.1 Exemplo 1 – Formulação atual

O exemplo 1 trata de uma chapa tracionada (EPT) com uma trinca considerada pequena no seu centro (Figura 19). O modo de fratura que atua no problema é o Modo de Abertura, ou Modo I. São dados do problema:

$$\sigma = 1000 \text{ kgf/cm}^2$$

$$E = 2,1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\nu = 0,25$$

$$a = 1,0 \text{ cm}$$

$$W = 20 \text{ cm}$$

$$L = 40 \text{ cm}$$

$h = 2 \times 10^{-3} a$  (abertura inicial entre as faces da trinca)

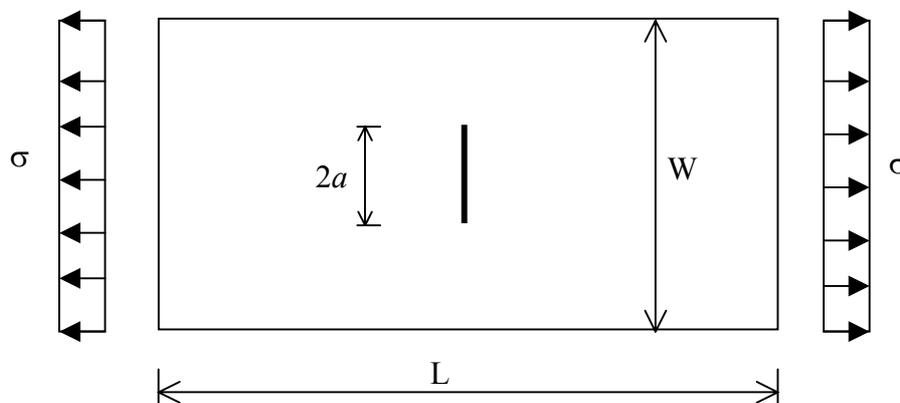


FIGURA 19: Chapa tracionada com trinca central em Modo I.

Sabe-se que o  $K_I$ , para este exemplo, pode ser calculado analiticamente, por:

$$K_I = Y\sigma\sqrt{\pi a}$$

Onde:

$$Y = 1 + 0,256(a/W) - 1,152(a/W)^2 + 12,200(a/W)^3$$

O que, para o exemplo 1, tem-se:

$$(K_I)_{\text{Analítico}} = 1792,74 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-3/2}$$

Utilizando-se como discretização do problema 60 elementos quadráticos no contorno externo e 10 elementos de contorno quadráticos ao longo das faces da trinca, tem-se os seguintes resultados para os pontos de cálculo do FIT para o modo I:

$$(K_I)_8^a = 1775,17 \text{ kgf} \cdot \text{cm}^{-3/2}$$

$$(K_I)_7^a = 1816,58 \text{ kgf} \cdot \text{cm}^{-3/2}$$

$$(K_I)_6^a = 1823,14 \text{ kgf} \cdot \text{cm}^{-3/2}$$

Substituindo os valores do FIT's calculados nos três pontos de extração na eq.(8.2), tem-se o valor final do FIT calculado pelo MEC:

$$(K_I)^{\text{MEC}} = 1819,14 \text{ kgf} \cdot \text{cm}^{-3/2}$$

Onde o erro de aproximação em relação ao valor analítico é de 1,47%.

Desde já, é importante lembrar que não se espera exatidão na resposta numérica em relação à analítica, pois os problemas abordados são ligeiramente diferentes, isto é, enquanto que na formulação analítica como também nas formulações numéricas usualmente empregadas se consideram as faces da trinca coincidentes (trinca fechada), a proposta deste trabalho considera a trinca com uma pequena abertura, ou seja, faces não-coincidentes.

### 8.1.2 Exemplo 1- Formulação anterior

Dentro da proposta inicial do presente trabalho, as integrais analíticas foram determinadas para o elemento linear isoparamétrico. Utilizou-se esse tipo de elemento tanto para o contorno externo quanto para os elementos de trinca. O método de extração dos Fatores de Intensidade de Tensão para os problemas estáticos é mesmo utilizado por CAÑAS & PARÍS (1997). Dessa forma, no exemplo ilustrado na Figura 19 é mostrada a determinação do FIT para o modo I segundo metodologia anterior, como forma de justificar a atual metodologia, isto é, integrais analíticas para o elemento reto com variação quadrática e determinação dos FIT's segundo pontos internos previamente arbitrados.

Para a determinação do FIT utilizando elementos de contorno lineares, a curva de tensão nos internos próximos à ponta da trinca foi determinada e comparada com a solução analítica desse campo de tensões, conforme ilustrado na Figura 20.

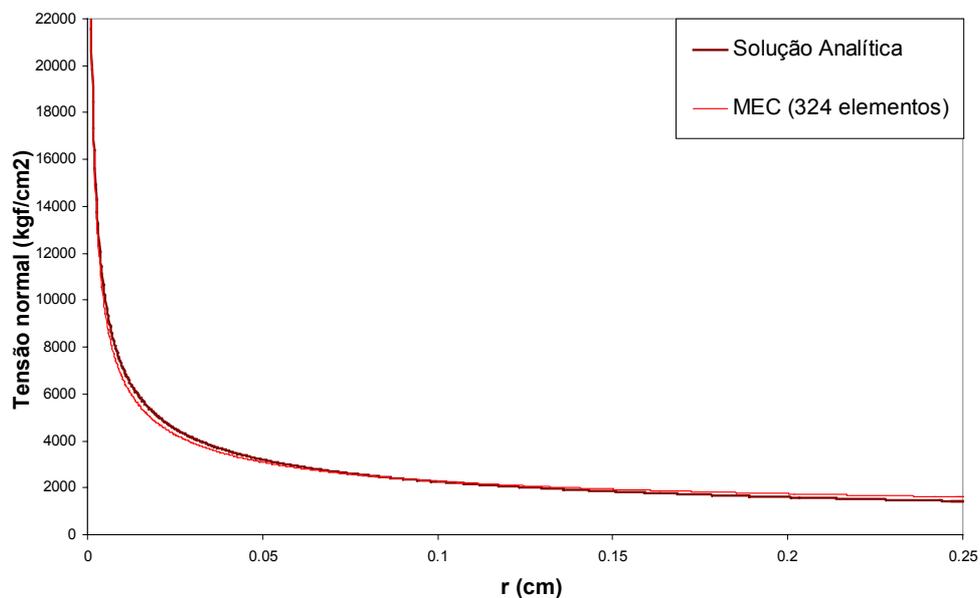


FIGURA 20: Campo de tensões em pontos próximos à ponta da trinca.

A discretização em 324 elementos isoparamétricos na trinca apresentou boa resposta em face da resposta analítica do problema. É válido ressaltar que a malha de elementos de contorno na trinca era mais refinada nas suas extremidades para essa discretização.

Utilizando a eq.(4.2), para o caso em que  $\theta = 0$ , pode-se escrever:

$$K_I = \sigma_{11} \sqrt{2\pi r} \quad (8.1)$$

Tomando-se o logaritmo de ambos os lados da eq.(8.1) e resolvendo-a para  $\ln(\sigma_{11})$ , fica-se com:

$$\ln(\sigma_{11}) = \ln\left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}\right) - 0.5 \ln(r) \quad (8.2)$$

A eq.(8.2) é a equação da reta, podendo ser escrita na forma:

$$\ln(\sigma_{11}) = c + b \ln(r) \quad (8.3)$$

Onde:

$$c = \ln\left(\frac{K_I}{\sqrt{2\pi}}\right)$$

$$b = -0.5$$

A partir da eq.(8.2), pode se escrever a distribuição de tensões na escala logarítmica, conforme Fig 21.

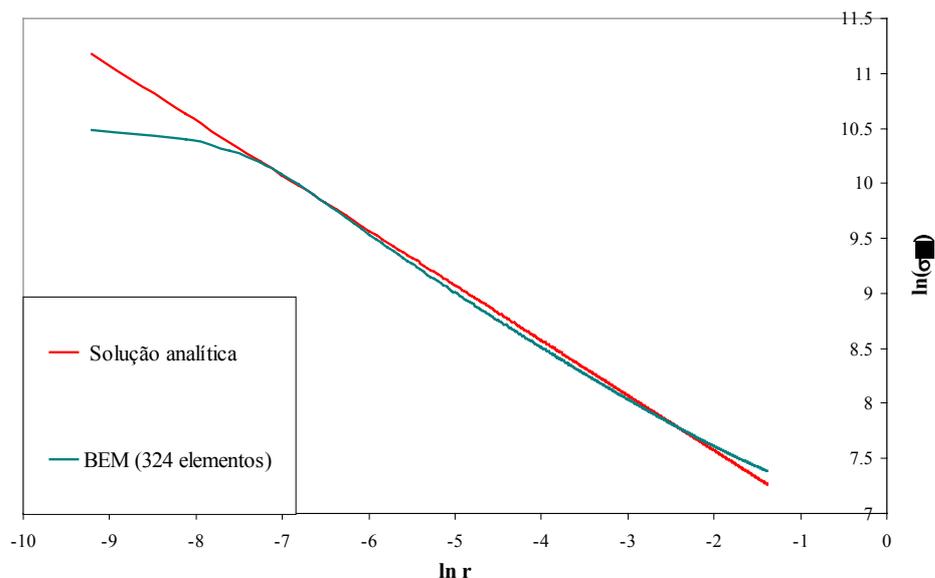


FIGURA 21: Gráfico de tensões em escala logarítmica.

Para o cálculo do  $K_I$  numérico, deve-se destacar o trecho do gráfico onde os valores são aproximados por uma reta, conforme o problema analítico. Dessa forma é possível determinar as constantes da reta, ou seja, os valores de “b” e “c” da eq.(8.3).

Para o caso deste exemplo, com discretização de 324 elementos, o trecho do gráfico que mais se aproxima da reta analítica (ver Figura 21) é mostrado na Figura 22.

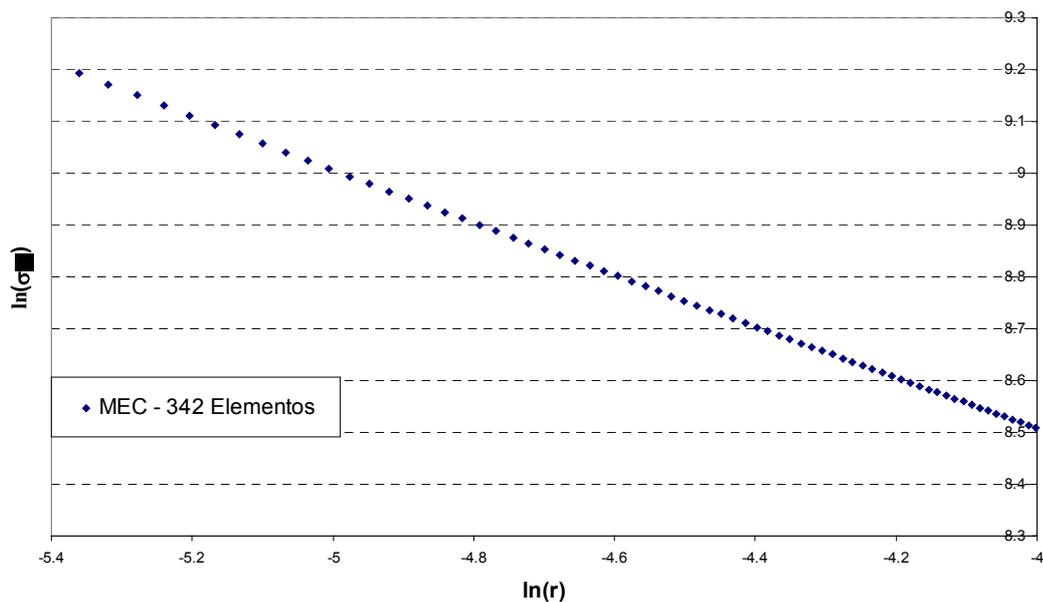


FIGURA 22: Trecho escolhido no gráfico logarítmico para determinação do  $K_I$ .

A partir do gráfico da Figura 22, tem-se:

$$b = -0,504$$

$$c = 6,4927$$

Dessa forma,  $K_I^{\text{MEC}}$  é dado por:

$$\ln\left(\frac{K_I^{\text{MEC}}}{\sqrt{2\pi}}\right) = 6,4927 \Rightarrow K_I^{\text{MEC}} = 1655,16 \text{ kg} \cdot \text{cm}^{-3/2}$$

O erro de aproximação fica em 7,67%. Percebe-se, portanto, que para se obter valores razoáveis do FIT eram necessários muitos elementos lineares ao longo da trinca, bem como muitos pontos internos para a geração das curvas de tensões em escala logarítmica. Dessa forma a substituição de metodologia no que tange à mudança do tipo de aproximação das variáveis de contorno e método de extração do FIT é plenamente justificável face à comparação de resultados entre as duas metodologias.

### 8.1.3 Exemplo 2

O segundo exemplo apresenta o mesmo formato geométrico do exemplo anterior (ver Figura 19), porém com suas dimensões e características físicas diferentes. Trata-se, portanto, novamente de um problema que envolve apenas o Modo I de abertura, todavia em Estado Plano de Deformação (EPD). São dados do problema:

$$\sigma = 1,0 \text{ MPa}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$a = 2,4 \text{ mm}$$

$$W = 20 \text{ mm}$$

$$L = 40 \text{ mm}$$

$$h = 2 \times 10^{-3} a \quad (\text{abertura inicial entre as faces da trinca})$$

Discretizando-se o problema em 60 elementos quadráticos no contorno externo e 10 elementos quadráticos ao longo das faces da trinca, obtêm-se os seguintes resultados para o FIT calculado nos pontos internos de extração:

$$(K_I)_{\frac{a}{8}} = 88167,90 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-3/2}$$

$$(K_I)_{\frac{a}{7}} = 90054,40 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-3/2}$$

$$(K_I)_{\frac{a}{6}} = 92296,35 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-3/2}$$

Substituindo os valores do FIT's calculados nos três pontos de extração na eq.(8.2), tem-se o valor final do FIT calculado pelo MEC:

$$(K_I)^{\text{MEC}} = 90172,90 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-3/2}$$

A solução analítica do Exemplo 2, dada por:

$$(K_I)^{\text{Analítico}} = 89848,07 \text{ Pa} \cdot \text{m}^{-3/2}$$

Portanto o erro de aproximação fica em 0,36%.

### 8.1.4 Exemplo 3

O Exemplo 3 é um problema de modo misto (Modos I e II atuando conjuntamente), pois a trinca está inclinada em relação à direção da carga externa aplicada, conforme Figura 23. São dados do problema:

$$\sigma = 1,0 \text{ MPa}$$

$$E = 200 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0,3$$

$$a = 7,07 \text{ mm}$$

$$W = 30 \text{ mm}$$

$$L = 60 \text{ mm}$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$h = 2 \times 10^{-3} a \quad (\text{abertura inicial entre as faces da trinca})$$

Estado Plano: EPD

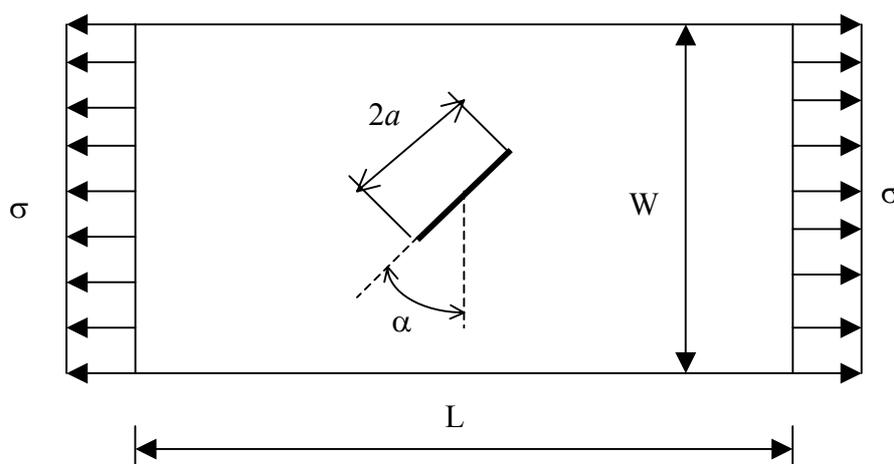


FIGURA 23: Chapa com trinca inclinada no centro.

Devido à abundância de exemplos, neste especificamente não se preocupou em fazer comparações.

Foram gerados dois resultados com diferentes discretizações. A primeira com 60 elementos de contorno externo e 100 elementos de contorno na trinca, ambos com variação quadrática. A segunda discretização se fez com os mesmos 60 elementos de contorno externo, porém com apenas 20 elementos de contorno ao longo da trinca. Os resultados são mostrados em tabela, conforme Figura 24.

Discretização na trinca	$K_I$	$K_{II}$
100 elementos	2697438,33	-2773745,66
20 elementos	2639614,33	-2657217,00
<b>Varição em %</b>	<b>2,14</b>	<b>4,20</b>

FIGURA 24: Tabela da variação dos FIT's conforme mudança de malha na trinca.

Pela Figura 24, percebe-se que há uma grande variação de densidade de malha na trinca de uma discretização para outra, porém a variação de resultados é pequena. Portanto, pode-se concluir que houve uma boa convergência para o exemplo em questão, ficando esses resultados à disposição para futuras comparações com outros trabalhos. Na Figura 25, mostra-se a deformada para este exemplo.

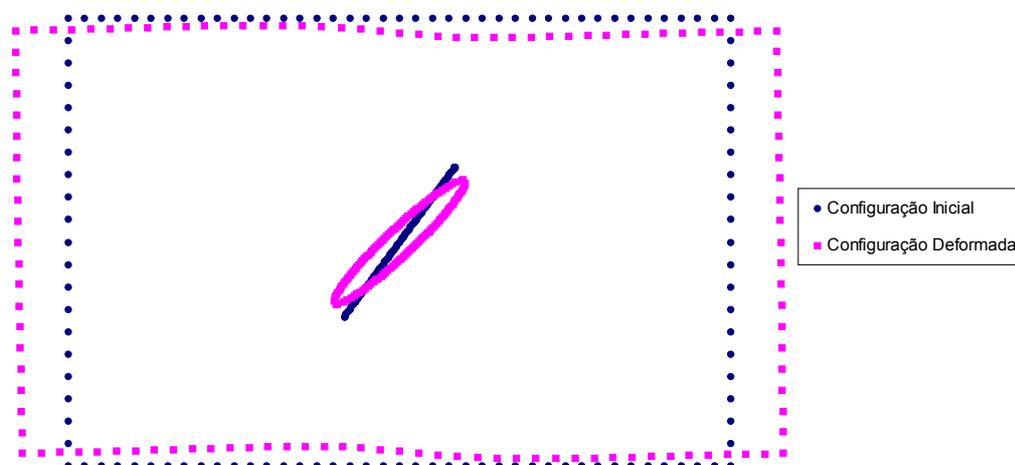


FIGURA 25: Configuração deformada de chapa com trinca central inclinada.

É válido salientar que os valores dos FIT's foram calculados segundo procedimento utilizado para os exemplos anteriores.

#### 8.1.5 Exemplo 4

O Exemplo 4 trata também de um problema envolvendo modo misto, porém a trinca está no canto da chapa, conforme Figura 26. São dados do problema (em valores adimensionais):

$$\sigma = 1,0$$

$$E = 1,0$$

$$\nu = 0,3$$

$$a = W/2$$

$$W = 1,0$$

$$h = 2 \times 10^{-3} a \quad (\text{distância inicial entre as faces da trinca})$$

$$\alpha = 45^\circ$$

Estado Plano: EPT

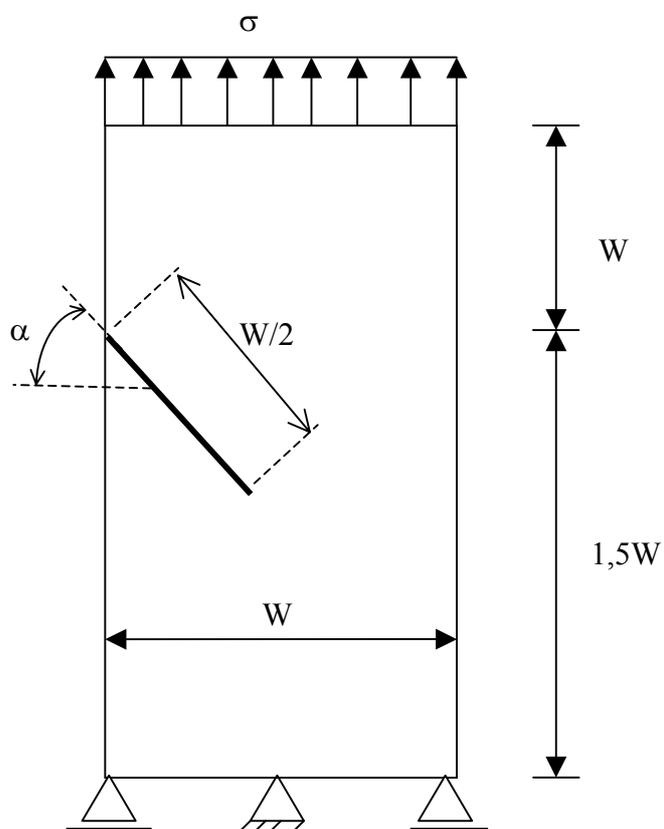


FIGURA 26: Chapa tracionada com trinca de canto.

Para resolução numérica deste exemplo, foram utilizados ao todo 81 elementos de contorno quadráticos, sendo 9 deles situados ao longo do contorno da trinca. A tabela da Figura 27 mostra resultados obtidos para esta discretização, como também faz comparação com resultados obtidos em ODEN & DUARTE (1997) que utiliza o Método das Nuvens (*hp-cloud method*).

RESULTADOS	$K_I$	$K_{II}$
MEC (9 Elementos) - $K^{MEC}$	1.5092330	-0.763500
ODEN & DUARTE (1997)- $K^{Ref}$	1.5008284	-0.729706
$K^{MEC} / K^{Ref}$	<b>0.9944</b>	<b>0.9557</b>

FIGURA 27: Tabela de resultados obtidos para os FIT's.

Os resultados obtidos pelo MEC analítico (Ver figura 27) estão de acordo com relação aos obtidos por ODEN & DUARTE (1997) conforme mostra a razão entre os FIT's ( $K^{MEC}/K^{Ref}$ ) obtidos pelos dois métodos. Como também, uma deformada coerente com tipo de geometria e carregamento do problema, como pode ser visto na Figura 28.

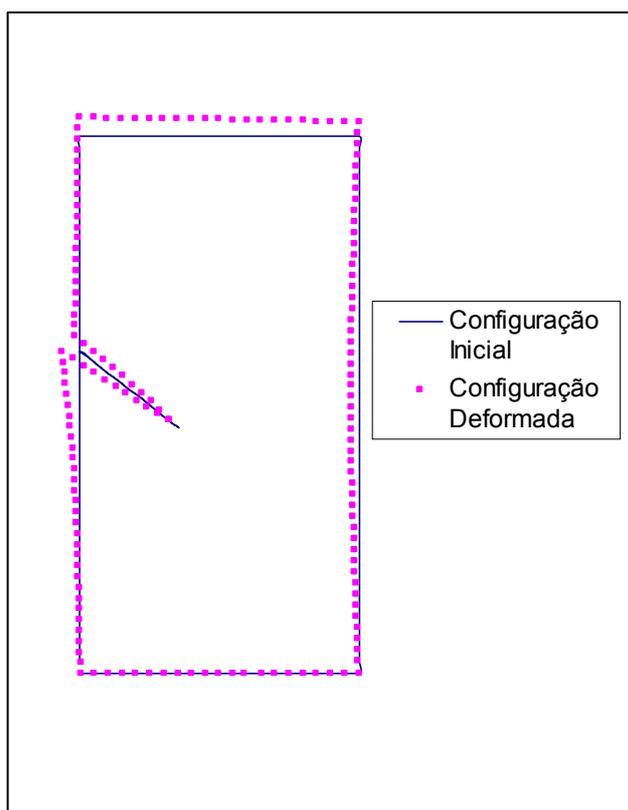


FIGURA 28: Configuração deformada de chapa com trinca de canto.

## 8.2 Exemplos Dinâmicos

Para o cálculo dos FIT's dinâmicos, o mesmo método de extração para o caso estático é utilizado. Sendo os gráficos desses FIT's calculados, plotados em termos de FIT's normalizados, ou seja:

$$K^N(t) = \frac{K^{MEC}(t)}{K_0} \quad (8.1)$$

Onde  $K_0$  é um valor estático, dado por:

$$K_0 = \sigma_0 \sqrt{\pi a}$$

### 8.2.1 Exemplo 5

Neste exemplo, que é a determinação do FIT dinâmico para o Modo I, os dados físicos e geométricos são idênticos ao do Exemplo 1 (Ver Figura 19), porém a carga de tração é subitamente aplicada no instante inicial da análise ( $t=0$ ), a densidade do material é  $\rho = 0,002 \text{ Kg/cm}^3$  e o estado plano é o EPD.

Quanto à discretização do problema, procurou-se refinar bastante a malha com o objetivo de obter o melhor comportamento cinemático das faces da trinca, como também a análise do FIT dinâmico. Na discretização das células, a descontinuidade de massa foi respeitada ao longo da trinca (consideração do orifício da trinca na matriz de massa).

Com 260 elementos de contorno, sendo 200 desses situados ao longo da trinca e aproximadamente 2050 células de domínio, obteve-se o seguinte resultado para o FIT dinâmico conforme Figura 29.

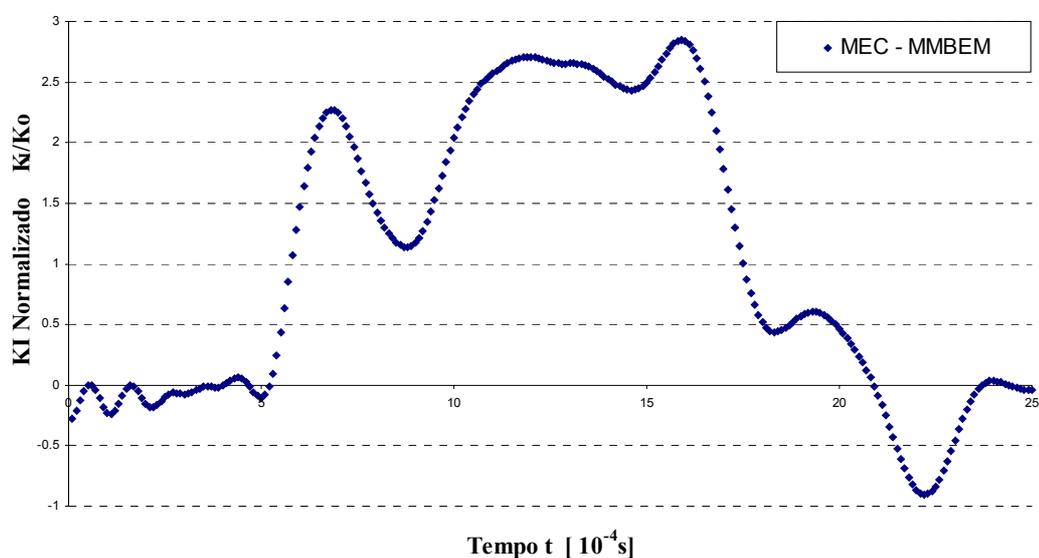


FIGURA 29: Gráfico de  $K_I$  Dinâmico para o exemplo 5.

O gráfico da Figura 29 foi obtido com intervalo de tempo  $\Delta t = 0,1 \times 10^{-4}$  s. As grandes oscilações ocorrem devido à alta sensibilidade da matriz de massa, pois, como dito anteriormente, além de haver descontinuidade da massa ao longo da trinca, próxima a ela a malha da matriz de massa é bastante refinada.

Com relação à solução analítica, como exposto no Item 4.6, é válida apenas para o intervalo em que não há reflexões de onda ao longo da trinca e após a chegada da onda de distorção na mesma. Para o exemplo 5, este intervalo é dado por:

$$5,2 \times 10^{-4} \text{ s} < t < 5,7 \times 10^{-4} \text{ s}$$

Para este intervalo na Figura 30 é mostrada a comparação dos valores do FIT dinâmico calculado pelo MEC, bem como valores analíticos calculados pela eq.(4.10).

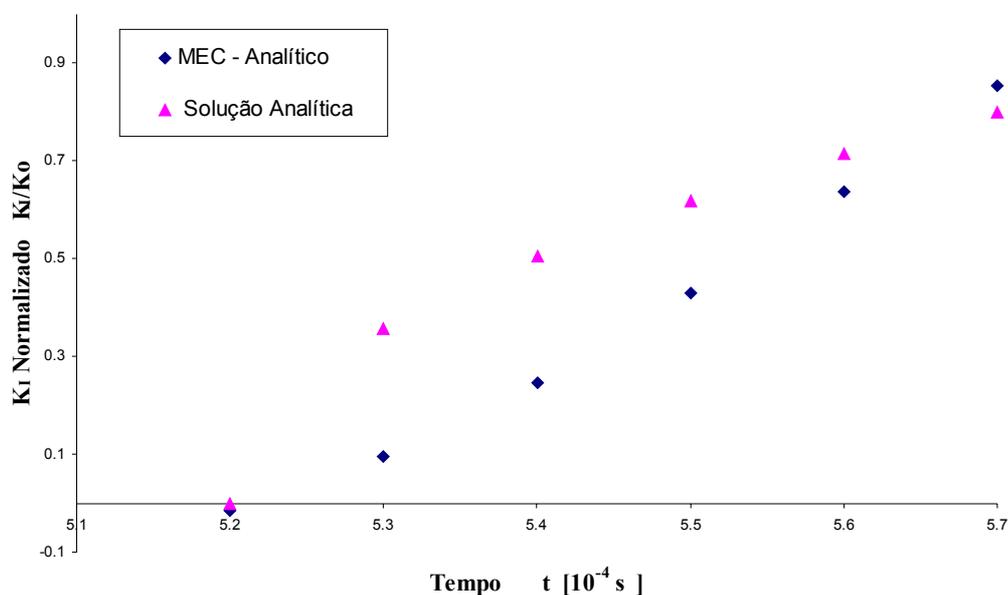


FIGURA 30: Gráfico comparativo entre o FIT pelo MEC e o FIT analítico.

Observa-se que os valores iniciais e finais do FIT pelo MEC são os que mais se aproximam dos valores analíticos. Sendo também tempo  $t = 5,2 \times 10^{-4}$  s o momento em que a onda elástica se aproxima da trinca. Deve-se também observar que este exemplo é um grande motivador para o desenvolvimento de formulações dinâmicas similares baseadas no *TDBEM*, tendo em vista a dificuldade do *MMBEM* em reproduzir os comportamentos onde as altas frequências estão presentes.

Dá-se também importância neste exemplo ao comportamento cinemático das faces da trinca no momento da passagem da onda elástica de dilatação. Para tal, na Figura 31 são mostrados deslocamentos em pontos na trinca para cada 25 passos de tempo.

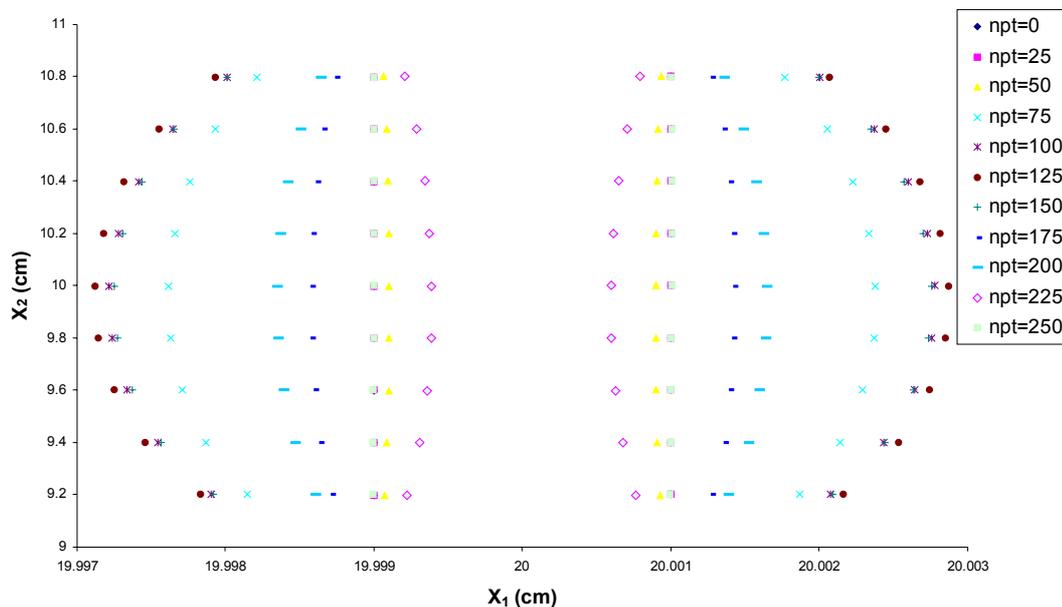


FIGURA 31: Gráfico de deslocamentos das faces da trinca.

Observa-se, portanto, que não há contato entre as faces da trinca para a distância entre faces proposta por este trabalho. Porém, o contato haveria se as faces da trinca fossem conectadas ou mesmo se a distância fosse menor, pois no passo de tempo  $npt = 225$  a separação entre as faces é menor do que a separação entre elas no tempo inicial da análise, ou seja, quando  $npt = 0$ .

### 8.2.2 Exemplo 6

Neste exemplo, mais um caso de determinação do  $K_I$  Dinâmico é analisado, porém é considerada uma discretização menos refinada do que a do exemplo anterior. Quanto à matriz de massa, para este caso é negligenciada a descontinuidade de massa causada pelo orifício da trinca, isto é, a influência do desse orifício está apenas nas matrizes referentes aos elementos de contorno do problema.

Os dados físicos e geométricos são idênticos ao do Exemplo 2, sendo a densidade do material do corpo  $\rho = 5000 \text{ Kg/m}^3$ . A chapa está sujeita a uma tensão subitamente aplicada no instante inicial ( $t = 0$ ) de valor  $\sigma = 1,0 \text{ Mpa}$ . São mostrados na Figura 32 os gráficos do  $K_I$  Dinâmico normalizado.

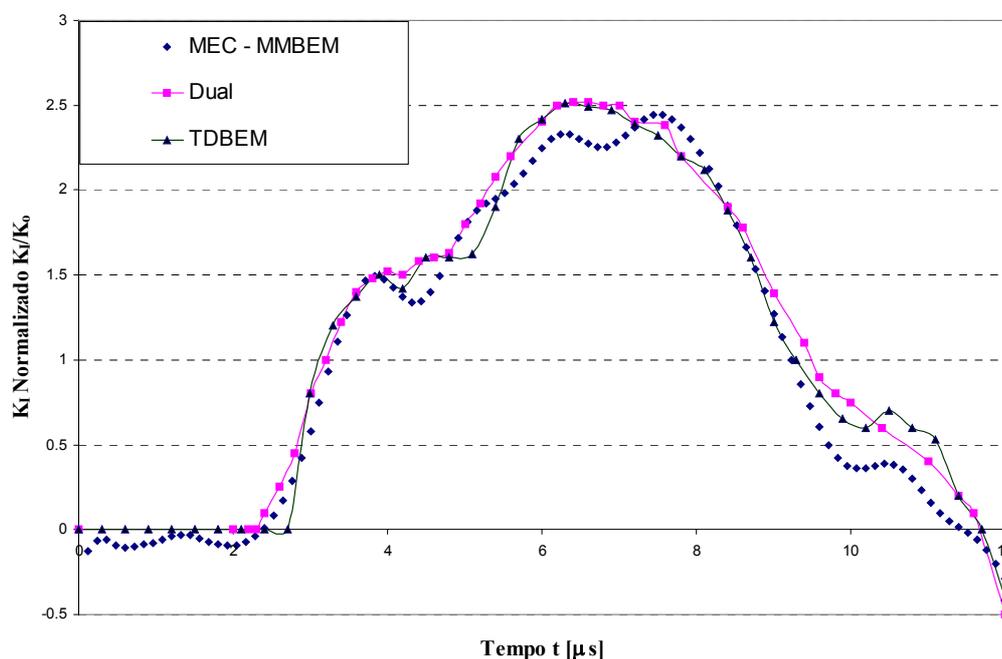


FIGURA 32: Fator de Intensidade de Tensão normalizado para o Exemplo 6. Chapa Tractionada com Trinca no Centro.

O gráfico normalizado utilizando o MEC semi-analítico com matriz de massa (MEC – *MMBEM*) é comparado com os resultados obtidos em FEDELINSKI *et al.* (1995).

A discretização referente ao MEC semi-analítico é composta de 80 elementos na trinca e 350 células de domínio para um intervalo de tempo  $\Delta t = 0,12 \mu s$ . Já para o resultado obtido através do Método da Reciprocidade Dual, foram necessários 32 elementos de contorno e 52 pontos de domínio para o mesmo intervalo de tempo.

Observa-se uma boa concordância com os resultados obtidos em FEDELINSKI *et al.* (1995), porém percebe-se que o pico máximo está um tanto “atrasado” em relação a esses resultados. Uma provável explicação para este comportamento repousaria no método de extração do FIT dinâmico, pois o aqui utilizado neste trabalho difere do empregado para o *TDBEM* e para o Método da Reciprocidade Dual. Também são vistas menores oscilações em relação ao exemplo anterior, pois a influência do orifício não entra nos termos da matriz de massa, deixando-a menos sensível aos deslocamentos da face da trinca.

Face à melhor concordância com os resultados obtidos na literatura, nos exemplos subsequentes será utilizado este mesmo tipo de abordagem, ou seja, matriz de massa sem a influência da trinca (sem descontinuidade de massa).

### 8.2.3 Exemplo 7

Determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão dinâmicos para chapa com trinca inclinada é analisado neste exemplo. A geometria do problema é mostrada na Figura 23. Sendo os dados físicos e geométricos deste problema idênticos ao do Exemplo 3, com densidade do material do corpo  $\rho = 5000 \text{ Kg/m}^3$ . A chapa é sujeita a uma tensão subitamente aplicada no instante inicial ( $t = 0$ ) de valor  $\sigma = 1,0 \text{ Mpa}$ . Na Figura 33, os Gráficos dos Fatores de Intensidade de Tensão normalizados para o modo I ( $K_I$ ) são mostrados.

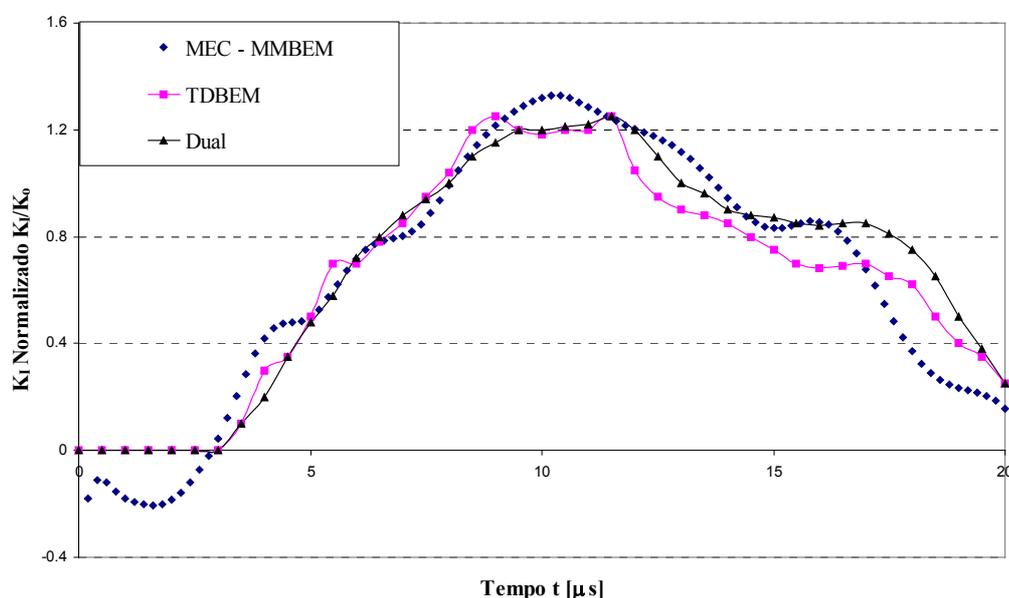


FIGURA 33: Fatores de Intensidade de Tensão Normalizados para o modo I.  
Exemplo de Trinca inclinada no centro da chapa.

São utilizados 20 elementos de contorno na trinca e 620 células de domínio para o MEC - *MMBEM* e intervalo de tempo  $\Delta t = 0,2 \mu s$ .

Os resultados do MEC com matriz de massa são comparados com os obtidos pelo Método da Reciprocidade Dual em FEDELINSKI *et. al.* (1995) e com DOMINGUEZ & GALLEGO (1992) que utiliza solução fundamental no tempo (*TDBEM*) e sub-região.

Para o Dual, 20 elementos de contorno e 20 pontos de domínio foram necessários, com intervalo de tempo  $\Delta t = 0,2 \mu s$ .

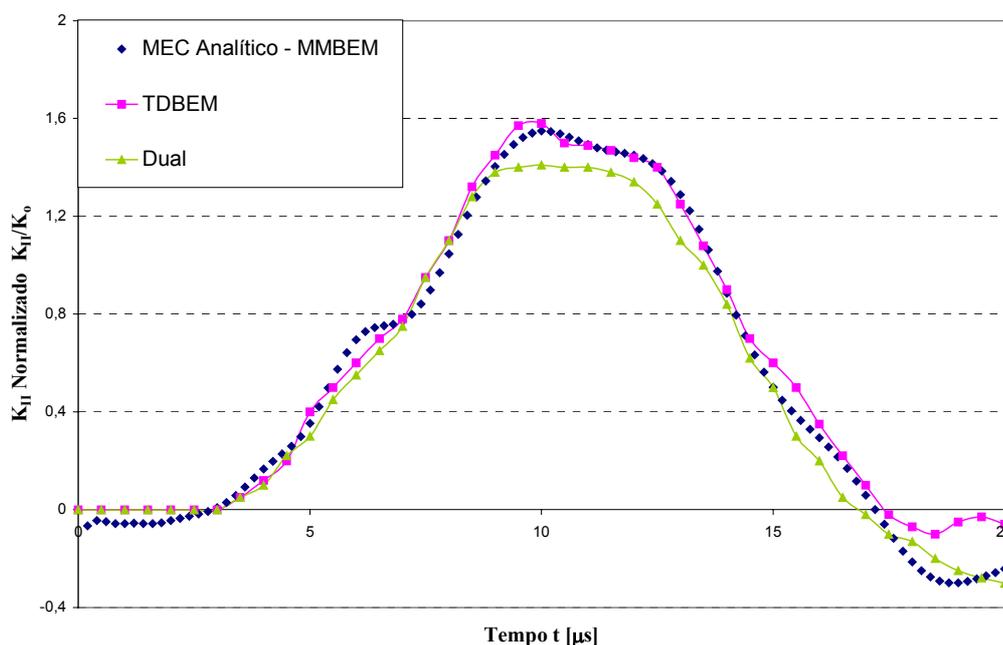


FIGURA 34: Fatores de Intensidade de Tensão Normalizados para o modo II. Exemplo de Trinca inclinada no centro da chapa.

Dos resultados obtidos para os dois modos, o FIT dinâmico para o modo II (Ver Figura 34) é o que mostra maior congruência com os resultados das referências, sendo esta congruência maior com relação ao *TDBEM*. Porém, para o  $K_I$  (Ver Figura 33), o MEC - *MMBEM* mostrou maior pico em relação aos dois gráficos de referência.

Conclusões deste trabalho, bem com sugestões para trabalhos futuros, são dissertados no capítulo seguinte.

## 9 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Neste trabalho abordou-se o problema de determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão estáticos e dinâmicos no campo bidimensional elástico linear isotrópico. Para tal, utilizou-se o Método dos Elementos de Contorno com Matriz de Massa (*MMBEM*).

Na formulação proposta do MEC, todas as matrizes referentes aos elementos de contorno ( $H$ ,  $G$ ,  $H'$  e  $G'$ ) foram determinadas analiticamente, dispensando o uso de processos numéricos de integração (ex.: Quadratura de Gauss). Dessa forma, eliminou-se o erro de integração numérica, decorrente desses processos.

Podem-se destacar três aspectos inovadores deste trabalho. O primeiro repousa no fato de se obter as referidas integrais analíticas de contorno segundo eixos cartesianos locais, procedendo-se em seguida através da álgebra de rotação de coordenadas, a obtenção dos valores dessas integrais segundo eixos cartesianos globais. O segundo aspecto inovador está no fato de se utilizar elementos de contorno linear com variação quadrática com suas integrais determinadas analiticamente como elementos de trinca, não havendo, portanto distinção na aproximação para elementos de contorno externo e de trinca. O terceiro aspecto reside no fato de se ter discretizado a trinca como um orifício (não com formulação de trinca “fechada” inicialmente) de forma retangular com faces muito próximas utilizando-se de elementos de contorno ordinários. Dentro dessa abordagem, foi necessário arbitrar um método de extração desses fatores tomando-se tensões nos pontos internos próximos à ponta da trinca, sendo também as integrais de contorno que envolvem as tensões calculadas analiticamente. Os motivos pelos quais os três pontos internos foram escolhidos (Ver Item 7.4) repousa no fato de apresentar mais

rápida convergência dos valores dos Fatores de Intensidade de Tensão na região onde esses pontos se encontram.

Diante da consideração da trinca como sendo um orifício, para os problemas dinâmicos duas formas de encarar o problema no que tange à matriz de massa foram abordadas. Primeiramente, fez-se a discretização das células levando-se em conta a descontinuidade de massa provocada pelo orifício, ou seja, a trinca. A segunda forma tal como as demais formulações consideram a trinca imersa na massa, ou seja, não leva em conta a descontinuidade de massa do problema, deixando, portanto a influência dos deslocamentos das faces da trinca apenas nas matrizes referentes aos elementos de contorno.

A utilização de massa contínua leva a resultados muito próximos das referências que tradicionalmente adotam este procedimento. Isto leva a se desprezar os modos de vibração locais da trinca, suavizando o comportamento da resposta em tensão, porém não prejudicando a sua magnitude.

A discretização baseada na presença do vazio considera a descontinuidade da massa e inclui os graus de liberdade das faces da trinca de forma efetiva na avaliação dos campos de deslocamentos, acelerações e tensões envolvidos. Entende-se que os resultados das técnicas de massa contínua são aceitáveis no sentido de se calcular os Fatores de Intensidade de Tensão, tendo em vista o reduzido esforço computacional.

A não utilização de elementos especiais na extremidade da trinca apresentou uma melhora significativa ao se passar de aproximação linear para aproximação quadrática de forças e deslocamentos ao longo do contorno da trinca. Principalmente para os casos de determinação dos Fatores de Intensidade de Tensão Estáticos. Para os casos de problemas dinâmicos, os resultados foram satisfatórios, porém a utilização de matriz de massa com aproximação linear requer muitas células de domínio para a obtenção de boas respostas.

A respeito ainda da matriz de massa, a consideração do orifício da trinca nessa matriz (massa descontínua) representa com maior fidelidade os campos de tensão e deslocamentos do problema. Porém, como dito anteriormente, um alto custo computacional é detectado. Para contornar esse problema e criar uma metodologia mais fiel para problemas dinâmicos lineares, recomenda-se a aplicação do *TDBEM* (*Time Domain Boundary Element Method*) segundo metodologia de integração

analítica e consideração do orifício da trinca, como também o emprego de elementos de contorno quadráticos ou de ordem superior ao longo da trinca e elemento especial de trinca (ex.: elemento de ponto a um quarto) para representar melhor os campos de deslocamentos próximos à ponta da trinca. Recomenda-se o emprego do COD (*Crack Opening Displacement*) como método de extração dos Fatores de Intensidade de Tensão, evitando problemas de atraso ou adiantamento durante a avaliação do FIT dinâmico. Também se recomenda o estudo sobre técnicas de enriquecimento de aproximações que possibilitem a criação de um elemento especial de trinca que contemple o campo de deslocamentos na extremidade da trinca sem ferir a partição da unidade para problemas de Mecânica da Fratura não linear (plastificação).

Acredita-se que a formulação desenvolvida é bastante eficiente, tendo em vista que não se utilizou elemento especial na extremidade da trinca. Os valores espúrios obtidos devido à utilização do *MMBEM* (via células) eram esperados devido ao caráter não ondulatório da solução fundamental de Kelvin e a geração, por parte desta, de matrizes de massa, H e G cheias, o que naturalmente fere o princípio da causalidade.

Como conclusão prática das aplicações, verificou-se que na passagem de uma onda de dilatação a fratura oscila, mas não chega a se fechar para o caso da abertura inicial proposta pelos exemplos. Porém, leva-se a crer que esse fechamento ocorreria dentro da formulação de trinca com faces conectadas, pois se registrou nos exemplos utilizando a formulação proposta que a distância entre as faces para um determinado passo de tempo chega a ser menor do que a distância imposta no início da análise. Deve-se comentar ainda que a formulação aqui proposta pode ser usada facilmente para avaliação de Fatores de Intensidade de Tensão de trincas hidráulicas, às quais se aplicam pressões internas.

Finalmente, ressalta-se que a análise de problemas de Mecânica da Fratura utilizando esta formulação do MEC fortalece o Método dos Elementos de Contorno, no sentido de ser possível o tratamento de problemas de campos elásticos singulares não apenas através de formulações específicas (ex.: Dual) ou do emprego de elementos que descrevem o comportamento singular dos campos envolvidos, mas também através do Método dos Elementos de Contorno em sua versão original.

## ANEXO A: LISTA DE INTEGRAIS BÁSICAS

As integrais básicas são aquelas que combinadas algebricamente, dão origem aos elementos das matrizes  $[h]$ ,  $[g]$ ,  $[h]'$  e  $[g]'$  em coordenadas locais. São, portanto, listadas a seguir.

### A.1 Lista das Integrais Básicas Para a Matriz $[h]$

- Para  $a \neq 0$

$$\text{➤ } A1 = -\int_{\theta} (1-2\nu) d\theta = -(1-2\nu)\theta \Big|_{01}^{02}$$

$$\text{➤ } A2 = -\frac{(1-2\nu)}{L} \int_{\theta} \left( x_s + a \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) d\theta = -\frac{(1-2\nu)}{L} [x_s \theta + a \ln(\sin \theta)] \Big|_{01}^{02}$$

$$\text{➤ } A3 = -2 \int_{\theta} \cos^2 \theta d\theta = -(\theta + \sin \theta \cos \theta) \Big|_{01}^{02}$$

$$\begin{aligned} \text{➤ } A4 &= -\frac{2}{L} \int_{\theta} \cos^2 \theta \left( x_s + a \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) d\theta = \\ &= -\frac{1}{L} \left\{ x_s (\sin \theta \cos \theta + \theta) + a [2 \ln(\sin \theta) - \sin^2 \theta] \right\} \Big|_{01}^{02} \end{aligned}$$

$$\text{➤ } A5 = -(1-2\nu) \int_{\theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} d\theta = -(1-2\nu) \ln(\sin \theta) \Big|_{01}^{02}$$

$$\begin{aligned}
& A6 = -\frac{(1-2\nu)}{L} \int_{\theta} \cot \theta (x_s + a \cot \theta) d\theta = \\
& \quad = -\frac{(1-2\nu)}{L} [x_s \ln(\sin \theta) - a(\cot \theta + \theta)]_{\theta_1}^{\theta_2} \\
& \quad A7 = -2 \int_{\theta} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{\cos 2\theta}{2} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \\
& \quad A8 = -\frac{2}{L} \int_{\theta} \cos \theta \sin \theta (x_s + a \cot \theta) d\theta = -\frac{1}{L} \left[ a(\sin \theta \cos \theta + \theta) - x_s \frac{\cos 2\theta}{2} \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \\
& \quad A9 = -2 \int_{\theta} \sin^2 \theta d\theta = (\sin \theta \cos \theta - \theta) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \\
& \quad A10 = -\frac{2}{L} \int_{\theta} \sin^2 \theta (x_s + a \cot \theta) d\theta = -\frac{1}{L} \left[ x_s (\theta - \sin \theta \cos \theta) - a \frac{\cos 2\theta}{2} \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \\
& \quad A11 = -\frac{(1-2\nu)}{L^2} \int_{\theta} (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = -\frac{(1-2\nu)}{L^2} \left[ x_s^2 \theta + \right. \\
& \quad \left. + 2ax_s \ln(\sin \theta) - a^2 (\theta + \cot \theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \\
& \quad A12 = -\frac{2}{L^2} \int_{\theta} \sin^2 \theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = -\frac{2}{L^2} \left[ \frac{x_s^2}{2} \left( \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + \right. \\
& \quad \left. - ax_s \frac{\cos 2\theta}{2} + \frac{a^2}{2} \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \\
& \quad A13 = -\frac{(1-2\nu)}{L^2} \int_{\theta} \cot \theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = -\frac{(1-2\nu)}{L^2} \left[ x_s^2 \theta \ln(\sin \theta) + \right. \\
& \quad \left. - 2ax_s (\theta + \cot \theta) - a^2 \left( \frac{1}{2\sin^2 \theta} + \ln(\sin \theta) \right) \right]_{\theta_1}^{\theta_2} \\
& \quad A14 = -\frac{1}{L^2} \int_{\theta} \sin 2\theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = -\frac{2}{L^2} \left[ x_s^2 \frac{\cos 2\theta}{4} + \right. \\
& \quad \left. + ax_s \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + a^2 \left( \ln(\sin \theta) + \frac{\cos 2\theta}{4} \right) \right]_{\theta_1}^{\theta_2}
\end{aligned}$$

$$A15 = -\frac{2}{L^2} \int_0^{\theta} \cos^2 \theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = -\frac{2}{L^2} \left\{ \frac{x_s^2}{2} \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + \right.$$

$$\left. + ax_s \left[ 2 \ln(\sin \theta) - \sin^2 \theta \right] - a^2 \left[ \cot \theta + \frac{1}{2} \left( 3\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right] \right\}_{01}^{\theta 2}$$

- Para  $a=0$

$$\text{➤ } B1 = \int_L \frac{1}{x - x_s} dx = \ln(x - x_s) \Big|_0^L$$

$$\text{➤ } B2 = \frac{1}{L} \int_L \frac{x}{x - x_s} dx = \frac{1}{L} \left[ x + x_s \ln(x - x_s) \right]_0^L$$

$$\text{➤ } B3 = \frac{1}{L^2} \int_L \frac{x^2}{x - x_s} dx = \frac{1}{L^2} \left[ x_s x + \frac{x^2}{2} + x_s^2 \ln(x - x_s) \right]_0^L$$

## A.2 Lista das Integrais Básicas Para a Matriz [g]

- Para  $a \neq 0$

$$\text{➤ } C1 = -a(3-4\nu) \int_0^{\theta} \frac{\ln(a/\sin \theta)}{\sin^2 \theta} d\theta = -a(3-4\nu) \left[ \cot \theta (1 - \ln r) + \theta \right]_{01}^{\theta 2}$$

$$C2 = -\frac{a(3-4\nu)}{L} \int_0^{\theta} \frac{\ln(a/\sin \theta)}{\sin^2 \theta} (x_s + a \cot \theta) d\theta =$$

$$\text{➤ } = -\frac{a(3-4\nu)}{L} \left\{ x_s \left[ \cot \theta (1 - \ln r) + \theta \right] - \frac{a}{2} \left[ \cot^2 \theta \left( \ln r - \frac{1}{2} \right) - \ln(\sin \theta) \right] \right\}_{01}^{\theta 2}$$

$$\text{➤ } C3 = -a \int_0^{\theta} \cot^2 \theta d\theta = a(\cot \theta + \theta) \Big|_{01}^{\theta 2}$$

$$\text{➤ } C4 = -\frac{a}{L} \int_0^{\theta} \cot^2 \theta (x_s + a \cot \theta) d\theta = \frac{a}{L} \left[ a \left( \frac{\cot^2 \theta}{2} + \ln(\sin \theta) \right) + x_s (\cot \theta + \theta) \right]_{01}^{\theta 2}$$

$$\text{➤ } C5 = -2a \int_{\theta} \cot \theta d\theta = -2a \ln(\text{sen } \theta) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\text{➤ } C6 = -\frac{a}{L} \int_{\theta} \text{sen } 2\theta (x_s + a \cot \theta) d\theta = \frac{2a}{L} [a(\cot \theta + \theta) - x_s \ln(\text{sen } \theta)] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\text{➤ } C7 = -a \int_{\theta} d\theta = -a\theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\text{➤ } C8 = -\frac{a}{L} \int_{\theta} (x_s + a \cot \theta) d\theta = -\frac{a}{L} [x_s \theta + a \ln(\text{sen } \theta)] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\begin{aligned} C9 &= -\frac{(3-4\nu)a}{L^2} \int_{\theta} \frac{\ln(a/\text{sen } \theta)}{\text{sen}^2 \theta} (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\ \text{➤ } &= -\frac{(3-4\nu)a}{L^2} \left\{ x_s^2 [\cot \theta (1 - \ln(a/\text{sen } \theta)) + \theta] - ax_s \left[ \cot^2 \theta \left( \ln(a/\text{sen } \theta) - \frac{1}{2} \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \ln(\text{sen } \theta) \right] - \frac{a^3}{3} \left[ \cot^3 \theta \ln(a/\text{sen } \theta) + \left( \theta + \cot \theta - \frac{\cot^3 \theta}{3} \right) \right] \right\} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C10 &= -\frac{a}{L^2} \int_{\theta} \cot^2 \theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\ \text{➤ } &= -\frac{a}{L^2} \left\{ -x_s^2 (\cot \theta + \theta) - 2ax_s \left[ \frac{\cot^2 \theta}{2} + \ln(\text{sen } \theta) \right] + a^2 \left( \theta + \cot \theta - \frac{\cot^3 \theta}{3} \right) \right\} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C11 &= -\frac{a}{L^2} \int_{\theta} (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\ \text{➤ } &= -\frac{a}{L^2} \left\{ -x_s^2 \theta + 2ax_s \ln(\text{sen } \theta) - a^2 (\theta + \cot \theta) \right\} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C12 &= -\frac{2a}{L^2} \int_{\theta} \cot \theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\ \text{➤ } &= -\frac{2a}{L^2} \left\{ x_s^2 \ln(\text{sen } \theta) - 2ax_s (\theta + \cot \theta) - a^2 \left[ \ln(\text{sen } \theta) + \frac{\cot^2 \theta}{2} \right] \right\} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \end{aligned}$$

- Para  $a=0$

$$\triangleright D1 = (3-4v) \int_L \ln(x-x_s) dx = (3-4v)(x-x_s) [\ln(x-x_s) - 1] \Big|_0^L$$

$$D2 = \frac{(3-4v)}{L} \int_L x \ln(x-x_s) dx =$$

$$\triangleright = \frac{(3-4v)}{2L} \left\{ [\ln(x-x_s) - 1](x-x_s)(x+x_s) + x \left( \frac{x}{2} - x_s \right) \right\} \Big|_0^L$$

$$\triangleright D3 = \int_L dx = x \Big|_0^L$$

$$\triangleright D4 = \int_L \frac{x}{L} dx = \frac{x^2}{2L} \Big|_0^L$$

$$D5 = \frac{(3-4v)}{L^2} \int_L x^2 \ln(x-x_s) dx =$$

$$\triangleright = \frac{(3-4v)}{L} \left\{ \frac{(x-x_s)^3}{3} \ln(x-x_s) - \frac{x^3}{9} - x_s \frac{x^2}{6} - x_s^2 \frac{x}{3} + x_s x^2 \ln(x-x_s) + \right. \\ \left. - x_s^2 x \ln(x-x_s) \right\} \Big|_0^L$$

$$\triangleright D6 = \int_L \frac{x^3}{L^2} dx = \frac{x^3}{3L^2} \Big|_0^L$$

### A.3 Lista das Integrais Básicas Para a Matriz [h]'

- Para  $a \neq 0$

$$\triangleright E1 = -\frac{1}{a} \int_{\theta} \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta = \frac{\cos^4 \theta}{4a} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$E2 = \int_{\theta} \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta (x_s + a \cot \theta) d\theta =$$

$$\triangleright = \frac{1}{4aL} \left\{ x_s \cos^4 \theta - a \left[ \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta + \frac{3}{2} \left( \theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right) \right] \right\} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\triangleright E3 = -\frac{1}{a} \int_{\theta} \cos \theta \operatorname{sen} \theta d\theta = -\frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{2a} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\triangleright E4 = -\frac{1}{aL} \int_{\theta} \operatorname{sen} \theta \cos \theta (x_s + a \cot \theta) d\theta = -\frac{1}{2aL} \left[ x_s \operatorname{sen}^2 \theta + a \left( \theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right) \right] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\triangleright E5 = -\frac{1}{a} \int_{\theta} \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{8a} \left[ \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4} - \theta \right] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\triangleright E6 = -\frac{1}{aL} \int_{\theta} \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta (x_s + a \cot \theta) d\theta = \frac{1}{4aL} \left[ a \cos^4 \theta + x_s \left( \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4} - \theta \right) \right] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\triangleright E7 = -\frac{1}{a} \int_{\theta} \operatorname{sen}^2 \theta d\theta = \frac{1}{2a} \left( \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} - \theta \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\triangleright E8 = -\frac{1}{aL} \int_{\theta} \operatorname{sen}^2 \theta (x_s + a \cot \theta) d\theta = -\frac{1}{aL} \left[ \frac{x_s}{2} \left( \theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right) + a \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{2} \right] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\triangleright E9 = -\frac{1}{a} \int_{\theta} d\theta = -\frac{\theta}{a} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\triangleright E10 = -\frac{1}{aL} \int_{\theta} (x_s + a \cot \theta) d\theta = -\frac{1}{aL} \left[ x_s \theta + a \ln(\operatorname{sen} \theta) \right] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\triangleright E11 = -\frac{1}{a} \int_{\theta} \cos^2 \theta d\theta = -\frac{1}{2a} \left( \theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$E12 = -\frac{1}{aL} \int_{\theta} \cos^2 \theta (x_s + a \cot \theta) d\theta =$$

$$\triangleright = -\frac{1}{aL} \left\{ \frac{x_s}{2} \left( \theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right) + a \left[ \ln(\operatorname{sen} \theta) - \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{2} \right] \right\} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\triangleright E13 = -\frac{1}{a} \int_{\theta} \text{sen}^3 \theta \cos \theta d\theta = -\frac{\text{sen}^4 \theta}{4a} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\begin{aligned} \triangleright E14 &= -\frac{1}{aL} \left\{ x_s \frac{\text{sen}^4 \theta}{4} + a \int_{\theta} \text{sen}^2 \theta \cos^2 \theta d\theta \right\} = \\ &= -\frac{1}{4aL} \left[ x_s \text{sen}^4 \theta + \frac{a}{2} \left( \theta - \frac{\text{sen} 4\theta}{4} \right) \right] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \end{aligned}$$

$$\triangleright E15 = -\frac{1}{a} \int_{\theta} \text{sen}^4 \theta d\theta = \frac{1}{4a} \left[ \text{sen}^3 \theta \cos \theta + \frac{3}{2} \left( \frac{\text{sen} 2\theta}{2} - \theta \right) \right] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\begin{aligned} \triangleright E16 &= -\frac{1}{aL} \left\{ -\frac{x_s}{4} \left[ \text{sen}^3 \theta \cos \theta - \frac{3}{2} \left( \theta - \frac{\text{sen} 2\theta}{2} \right) \right] + a \int_{\theta} \text{sen}^3 \theta \cos \theta d\theta \right\} = \\ &= \frac{1}{4aL} \left\{ x_s \left[ \text{sen}^3 \theta \cos \theta + \frac{3}{2} \left( \frac{\text{sen} 2\theta}{2} - \theta \right) \right] - a \text{sen}^4 \theta \right\} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E17 &= -\frac{1}{aL^2} \int_{\theta} \cos^3 \theta \text{sen} \theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\ \triangleright &= -\frac{1}{aL^2} \left\{ -\frac{x_s^2 \cos^4 \theta}{4} + \frac{ax_s}{2} \left[ \cos^3 \theta \text{sen} \theta + \frac{3}{2} \left( \theta + \frac{\text{sen} 2\theta}{2} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + a^2 \left[ \ln(\text{sen} \theta) + \frac{1}{2} \left( \cos 2\theta + \frac{\text{sen}^4 \theta}{2} \right) \right] \right\} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E18 &= -\frac{1}{aL^2} \int_{\theta} \cos \theta \text{sen} \theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\ \triangleright &= -\frac{1}{aL^2} \left\{ -\frac{x_s^2 \cos 2\theta}{4} + ax_s \left( \theta + \frac{\text{sen} 2\theta}{2} \right) + a^2 \left[ \ln(\text{sen} \theta) + \frac{\cos 2\theta}{4} \right] \right\} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E19 &= -\frac{1}{aL^2} \int_0^{\theta} \cos^2 \theta \operatorname{sen}^2 \theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\
 &\rightarrow = -\frac{1}{2aL^2} \left\{ \frac{x_s^2}{4} \left( \theta - \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4} \right) - ax_s \cos^4 \theta + \frac{a^2}{2} \left[ \cos^3 \theta \operatorname{sen} \theta + \frac{3}{2} \left( \theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right) \right] \right\}_{01}^{02}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E20 &= -\frac{1}{aL^2} \int_0^{\theta} \operatorname{sen}^2 \theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\
 &\rightarrow = -\frac{1}{2aL^2} \left[ x_s^2 \left( \theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right) - ax_s \cos 2\theta + a^2 \left( \theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right) \right]_{01}^{02}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E21 &= -\frac{1}{aL^2} \int_0^{\theta} (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\
 &\rightarrow = -\frac{1}{aL^2} \left[ x_s^2 \theta + 2ax_s \ln(\operatorname{sen} \theta) - a^2 (\theta + \cot \theta) \right]_{01}^{02}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E22 &= -\frac{1}{aL^2} \int_0^{\theta} \cos^2 \theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\
 &\rightarrow = -\frac{1}{aL^2} \left\{ \frac{x_s^2}{2} \left( \theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right) + 2ax_s \left[ \ln(\operatorname{sen} \theta) + \frac{\cos 2\theta}{4} \right] + \right. \\
 &\quad \left. - a^2 \left[ \cot \theta + \frac{1}{2} \left( 3\theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right) \right] \right\}_{01}^{02}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E23 &= -\frac{1}{aL^2} \int_0^{\theta} \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\
 &\rightarrow = -\frac{1}{4aL^2} \left[ x_s^2 \operatorname{sen}^4 \theta + ax_s \left( \theta - \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4} \right) - a^2 \cos^4 \theta \right]_{01}^{02}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E24 &= -\frac{1}{aL^2} \int_0^{\theta} \operatorname{sen}^4 \theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\
 &\rightarrow = -\frac{1}{4aL^2} \left\{ x_s^2 \left[ \frac{3}{2} \left( \theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right) - \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta \right] + 2ax_s \operatorname{sen}^4 \theta + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{a^2}{2} \left( \theta - \frac{\operatorname{sen} 4\theta}{4} \right) \right\}_{01}^{02}
 \end{aligned}$$

- Para  $a=0$

$$\text{➤ } F1 = (1-2\nu) \int_L \frac{1}{(x-x_s)^2} dx = -\frac{1-2\nu}{x-x_s} \Big|_0^L$$

$$\text{➤ } F2 = \frac{(1-2\nu)}{L} \int_L \left( \frac{1}{x-x_s} + \frac{x_s}{(x-x_s)^2} \right) dx = \frac{(1-2\nu)}{L} \left[ \ln(x-x_s) - \frac{x_s}{x-x_s} \right]_0^L$$

$$\text{➤ } F3 = 2 \int_L \frac{1}{(x-x_s)^2} dx = -\frac{2}{x-x_s} \Big|_0^L$$

$$\text{➤ } F4 = \frac{2}{L} \int_L \left( \frac{1}{x-x_s} + \frac{x_s}{(x-x_s)^2} \right) dx = \frac{2}{L} \left[ \ln(x-x_s) - \frac{x_s}{x-x_s} \right]_0^L$$

$$\text{➤ } F5 = \int_L \frac{(1-2\nu)x^2}{L^2(x-x_s)^2} dx = \frac{(1-2\nu)}{L^2} \left\{ x_s \left[ 2 \ln(x-x_s) - \frac{x_s}{x-x_s} \right] + x \right\}_0^L$$

$$\text{➤ } F6 = 2 \int_L \frac{x^2}{L^2(x-x_s)^2} dx = \frac{2}{L^2} \left\{ x_s \left[ 2 \ln(x-x_s) - \frac{x_s}{x-x_s} \right] + x \right\}_0^L$$

#### A.4 Lista das Integrais Básicas Para a Matriz [g]'

- Para  $a \neq 0$

$$\text{➤ } I1 = -\int_{\theta} \cot \theta d\theta = -\ln(\sin \theta) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\text{➤ } I2 = -\frac{1}{L} \int_{\theta} \cot \theta (x_s + a \cot \theta) d\theta = \frac{1}{L} [a(\theta + \cot \theta) - x_s \ln(\sin \theta)] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\text{➤ } I3 = -\int_{\theta} \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta} d\theta = \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} - \ln(\sin \theta) \right] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}$$

$$\begin{aligned}
 I4 &= -\frac{1}{L} \left\{ x_s \int_{\theta} \frac{\cos^3 \theta}{\text{sen } \theta} d\theta + a \int_{\theta} \frac{\cos^4 \theta}{\text{sen}^2 \theta} d\theta \right\} = \\
 &\rightarrow = \frac{1}{L} \left\{ a \left[ \frac{\text{sen } 2\theta}{4} + \cot \theta + \frac{3\theta}{2} \right] - x_s \left[ \ln(\text{sen } \theta) - \frac{\text{sen}^2 \theta}{2} \right] \right\} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \\
 I5 &= -\int_{\theta} \cos^2 \theta d\theta = -\frac{1}{2} \left( \theta + \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \\
 I6 &= -\frac{1}{L} \left\{ x_s \left[ \frac{1}{2} \left( \theta + \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \right) \right] + a \int_{\theta} \frac{\cos^3 \theta}{\text{sen } \theta} d\theta \right\} = \\
 &\rightarrow = -\frac{1}{L} \left\{ \frac{x_s}{2} \left( \theta + \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \right) + a \left[ \ln(\text{sen } \theta) - \frac{\text{sen}^2 \theta}{2} \right] \right\} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \\
 I7 &= -\int_{\theta} d\theta = -\theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \\
 I8 &= -\frac{1}{L} \int_{\theta} (x_s + a \cot \theta) d\theta = -\frac{1}{L} [x_s \theta + a \ln(\text{sen } \theta)] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \\
 I9 &= -\int_{\theta} \text{sen } \theta \cos \theta d\theta = -\frac{\text{sen}^2 \theta}{2} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \\
 I10 &= -\frac{1}{L} \int_{\theta} \cos \theta \text{sen } \theta (x_s + a \cot \theta) d\theta = -\frac{1}{2L} \left[ x_s \text{sen}^2 \theta + a \left( \theta + \frac{\text{sen } 2\theta}{2} \right) \right] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \\
 I11 &= -\int_{\theta} \text{sen}^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{\text{sen } 2\theta}{2} - \theta \right) \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \\
 I12 &= -\frac{1}{L} \int_{\theta} \text{sen}^2 \theta (x_s + a \cot \theta) d\theta = -\frac{1}{2L} \left\{ x_s \left( \theta - \frac{\text{sen } 2\theta}{2} + a \text{sen}^2 \theta \right) \right\} \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} \\
 I13 &= -\frac{1}{L^2} \int_{\theta} \cot \theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\
 &\rightarrow = -\frac{1}{L^2} \left[ x_s^2 \ln(\text{sen } \theta) - 2ax_s (\theta + \cot \theta) - a^2 \left( \frac{\cot^2 \theta}{2} + \ln(\text{sen } \theta) \right) \right] \Big|_{\theta_1}^{\theta_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II4} &= -\frac{1}{L^2} \int_{\theta} \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta} (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\
 \blacktriangleright &= -\frac{1}{L^2} \left\{ \frac{x_s^2}{2} [2 \ln(\sin \theta) - \sin^2 \theta] - 2ax_s \left[ \cot \theta + \frac{1}{2} \left( 3\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. - a^2 \left[ \frac{1}{2 \sin^2 \theta} + 2 \ln(\sin \theta) + \frac{\cos 2\theta}{4} \right] \right\}_{\theta_1}^{\theta_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II5} &= -\frac{1}{L^2} \int_{\theta} \cos^2 \theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\
 \blacktriangleright &= -\frac{1}{L^2} \left\{ \frac{x_s^2}{2} \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + 2ax_s \left[ \ln(\sin \theta) - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right] + \right. \\
 &\quad \left. - a^2 \left[ \cot \theta + \frac{1}{2} \left( 3\theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right] \right\}_{\theta_1}^{\theta_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II6} &= -\frac{1}{L^2} \int_{\theta} (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\
 \blacktriangleright &= -\frac{1}{L^2} \left[ x_s^2 \theta - 2ax_s \ln(\sin \theta) - a^2 (\theta + \cot \theta) \right]_{\theta_1}^{\theta_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II7} &= -\frac{1}{L^2} \int_{\theta} \cos \theta \sin \theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\
 \blacktriangleright &= -\frac{1}{L^2} \left\{ -\frac{x_s^2 \cos 2\theta}{4} + ax_s \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + a^2 \left[ \ln(\sin \theta) - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right] \right\}_{\theta_1}^{\theta_2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{II8} &= -\frac{1}{L^2} \int_{\theta} \sin^2 \theta (x_s^2 + 2ax_s \cot \theta + a^2 \cot^2 \theta) d\theta = \\
 \blacktriangleright &= -\frac{1}{2L^2} \left\{ x_s^2 \left( \theta - \frac{\sin 2\theta}{2} \right) - ax_s \cos 2\theta + a^2 \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) \right\}_{\theta_1}^{\theta_2}
 \end{aligned}$$

- Para  $a=0$

$$\blacktriangleright \text{J1} = \int_L \frac{1}{x - x_s} dx = \ln(x - x_s) \Big|_0^L$$

$$\triangleright J_2 = \frac{1}{L} \int_L \left( 1 + \frac{x_s}{x - x_s} \right) dx = \frac{1}{L} [x + x_s \ln(x - x_s)]_0^L$$

$$\triangleright J_3 = \frac{1}{L^2} \int_L \frac{x^2}{x - x_s} dx = \frac{1}{L^2} \left[ \frac{x^2}{2} + x_s x + x_s^2 \ln(x - x_s) \right]_0^L$$

## ANEXO B: LISTA DOS ELEMENTOS DAS MATRIZES [h], [g], [h]' e [g]' PARA ELEMENTO LINEAR ISOPARAMÉTRICO EM COORDENADAS LOCAIS

Utilizando as integrais básicas explicitadas no Anexo A, determinam-se os elementos das matrizes [h], [g], [h]' e [g]' para o elemento linear isoparamétrico em coordenadas locais, conforme visto a seguir.

### B.1 Elementos da Matriz $\overline{[h]}$

- Para  $a \neq 0$

$$h_{11} = \int_{\Gamma} p_{11}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 (A1 - A2 + A3 - A4)$$

$$h_{12} = \int_{\Gamma} p_{12}^* \phi_1 d\Gamma = \psi_1 (A5 - A6 - A7 + A8)$$

$$h_{22} = \int_{\Gamma} p_{22}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 (A1 - A2 + A9 - A10)$$

$$h_{21} = \int_{\Gamma} p_{21}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 (A7 - A8 + A5 - A6)$$

$$h_{13} = \int_{\Gamma} p_{11}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 (A2 + A4)$$

$$h_{14} = \int_{\Gamma} p_{12}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 (A6 - A8)$$

$$h_{23} = \int_{\Gamma} p_{21}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 (A6 + A8)$$

$$h_{24} = \int_{\Gamma} p_{22}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 (A2 + A10)$$

- Para  $a=0$

$$h_{11} = \int_{\Gamma} p_{11}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$h_{12} = \int_{\Gamma} p_{12}^* \phi_1 d\Gamma = (1 - 2\nu)\psi_1 (B1 - B2)$$

$$h_{22} = \int_{\Gamma} p_{22}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$h_{21} = \int_{\Gamma} p_{21}^* \phi_1 d\Gamma = -h_{12}$$

$$h_{13} = \int_{\Gamma} p_{11}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$h_{14} = \int_{\Gamma} p_{12}^* \phi_2 d\Gamma = (1 - 2\nu)\psi_1 B2$$

$$h_{23} = \int_{\Gamma} p_{21}^* \phi_2 d\Gamma = -h_{14}$$

$$h_{24} = \int_{\Gamma} p_{22}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

Onde:

$$\psi_1 = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)}$$

## B.2 Elementos da Matriz $\overline{[g]}$

- Para  $a \neq 0$

$$g_{11} = \int_{\Gamma} u_{11}^* \phi_1 d\Gamma = \psi_2 (C1 - C2 - C3 + C4)$$

$$g_{12} = \int_{\Gamma} u_{12}^* \phi_1 d\Gamma = -\frac{1}{2} \psi_2 (C5 - C6)$$

$$g_{22} = \int_{\Gamma} u_{22}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_2 (C1 - C2 + C7 - C8)$$

$$g_{21} = \int_{\Gamma} u_{21}^* \phi_1 d\Gamma = g_{12}$$

$$g_{13} = \int_{\Gamma} u_{11}^* \phi_2 d\Gamma = \psi_2 (C2 - C4)$$

$$g_{14} = \int_{\Gamma} u_{12}^* \phi_2 d\Gamma = -\frac{1}{2} \psi_2 C6$$

$$g_{23} = \int_{\Gamma} u_{21}^* \phi_2 d\Gamma = g_{14}$$

$$g_{24} = \int_{\Gamma} u_{22}^* \phi_2 d\Gamma = \psi_2 (C2 - C8)$$

- Para  $a=0$

$$g_{11} = \int_{\Gamma} u_{11}^* \phi_1 d\Gamma = \psi_2 (D1 - D2 - D3 + D4)$$

$$g_{12} = \int_{\Gamma} u_{12}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$g_{22} = \int_{\Gamma} u_{22}^* \phi_1 d\Gamma = \psi_2 (D1 - D2)$$

$$g_{21} = \int_{\Gamma} u_{21}^* \phi_1 d\Gamma = g_{12}$$

$$g_{13} = \int_{\Gamma} u_{11}^* \phi_2 d\Gamma = \psi_2 (D2 - D4)$$

$$g_{14} = \int_{\Gamma} u_{12}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$g_{23} = \int_{\Gamma} u_{21}^* \phi_2 d\Gamma = g_{14}$$

$$g_{24} = \int_{\Gamma} u_{22}^* \phi_2 d\Gamma = \psi_2 D2$$

Onde:

$$\psi_2 = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G}$$

### B.3 Elementos da Matriz $[\bar{h}]'$

- Para  $a \neq 0$

$$h'_{11} = \int_{\Gamma} p_{11,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 [8(E1 - E2) - 4(E3 - E4) + 2(1 - 2\nu)(E3 - E4)]$$

$$h'_{12} = \int_{\Gamma} p_{12,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 \{8(E5 - E6) - 2(E7 - E8) + (1 - 2\nu)[E9 - E10 - 2(E11 - E12)]\}$$

$$h'_{21} = \int_{\Gamma} p_{21,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 \{8(E5 - E6) - 2(E7 - E8) + (1 - 2\nu)[2(E11 - E12) - E9 + E10]\}$$

$$h'_{22} = \int_{\Gamma} p_{22,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 [8(E13 - E14) + 2(1 - 2\nu)(E3 - E4)]$$

$$h'_{13} = \int_{\Gamma} p_{11,1}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 [8E2 - 4E4 + 2(1 - 2\nu)E4]$$

$$h'_{14} = \int_{\Gamma} p_{12,1}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 \{8E6 - 2E8 + (1 - 2\nu)[E10 - 2E12]\}$$

$$h'_{23} = \int_{\Gamma} p_{21,1}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 \{8E6 - 2E8 + (1 - 2\nu)[2E12 - E10]\}$$

$$h'_{24} = \int_{\Gamma} p_{22,1}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 [8E14 + 2(1 - 2\nu)E4]$$

$$h'_{31} = \int_{\Gamma} p_{11,2}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 \{8(E5 - E6) - 2(E11 - E12) + (1 - 2\nu)[2(E7 - E8) - E9 + E10]\}$$

$$h'_{32} = \int_{\Gamma} p_{12,2}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 [8(E13 - E14) - 2(3 - 2\nu)(E3 - E4)]$$

$$h'_{41} = \int_{\Gamma} p_{21,2}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 [8(E13 - E14) - 2(1 + 2\nu)(E3 - E4)]$$

$$h'_{42} = \int_{\Gamma} p_{22,2}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 \{8(E15 - E16) - 6(E7 - E8) + (1 - 2\nu)[2(E7 - E8) - E9 + E10]\}$$

$$h'_{33} = \int_{\Gamma} p_{11,2}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 \{8E6 - 2E12 + (1 - 2\nu)[2E8 - E10]\}$$

$$h'_{34} = \int_{\Gamma} p_{12,2}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 [8E14 - 2(3 - 2\nu)E4]$$

$$h'_{43} = \int_{\Gamma} p_{21,2}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 [8E14 - 2(1 + 2\nu)E4]$$

$$h'_{44} = \int_{\Gamma} p_{22,2}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 \{8E16 - 6E8 + (1 - 2\nu)[2E8 - E10]\}$$

- Para  $a=0$

$$h'_{11} = \int_{\Gamma} p_{11,1}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$h'_{12} = \int_{\Gamma} p_{12,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 (F2 - F1)$$

$$h'_{21} = \int_{\Gamma} p_{21,1}^* \phi_1 d\Gamma = -h'_{12}$$

$$h'_{22} = \int_{\Gamma} p_{22,1}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$h'_{13} = \int_{\Gamma} p_{11,1}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$h'_{14} = \int_{\Gamma} p_{12,1}^* \phi_2 d\Gamma = \psi_1 F2$$

$$h'_{23} = \int_{\Gamma} p_{21,1}^* \phi_2 d\Gamma = -h'_{14}$$

$$h'_{24} = \int_{\Gamma} p_{22,1}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$h'_{31} = \int_{\Gamma} p_{11,2}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 (F2 - F1 - F3 + F4)$$

$$h'_{32} = \int_{\Gamma} p_{12,2}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$h'_{41} = \int_{\Gamma} p_{21,2}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$h'_{42} = \int_{\Gamma} p_{22,2}^* \phi_1 d\Gamma = h'_{12}$$

$$h'_{33} = \int_{\Gamma} p_{11,2}^* \phi_2 d\Gamma = \psi_1 (F2 + F4)$$

$$h'_{34} = \int_{\Gamma} p_{12,2}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$h'_{43} = \int_{\Gamma} p_{21,2}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$h'_{44} = \int_{\Gamma} p_{22,2}^* \phi_2 d\Gamma = \psi_1 F2$$

#### B.4 Elementos da Matriz $[\bar{g}]'$

- Para  $a \neq 0$

$$g'_{11} = \int_{\Gamma} u_{11,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_2 [(3 - 4\nu)(I1 - I2) - 2(I1 - I2) + 2(I3 - I4)]$$

$$g'_{12} = \int_{\Gamma} u_{12,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_2 [2(I5 - I6) - I7 + I8]$$

$$g'_{21} = \int_{\Gamma} u_{21,1}^* \phi_1 d\Gamma = g'_{12}$$

$$g'_{22} = \int_{\Gamma} u_{22,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_2 [(3 - 4\nu)(I1 - I2) + 2(I9 - I10)]$$

$$g'_{13} = \int_{\Gamma} u_{11,1}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_2 [(3 - 4\nu)I2 + 2(I4 - I2)]$$

$$g'_{14} = \int_{\Gamma} u_{12,1}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_2 [2I6 - I8]$$

$$g'_{23} = \int_{\Gamma} u_{21,1}^* \phi_2 d\Gamma = g'_{14}$$

$$g'_{24} = \int_{\Gamma} u_{22,1}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_2 [(3 - 4\nu)I2 + 2I10]$$

$$g'_{31} = \int_{\Gamma} u_{11,2}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_2 [(3 - 4\nu)(I7 - I8) + 2(I5 - I6)]$$

$$g'_{32} = \int_{\Gamma} u_{12,2}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_2 [2(I9 - I10) - I1 + I2]$$

$$g'_{41} = \int_{\Gamma} u_{21,2}^* \phi_1 d\Gamma = g'_{32}$$

$$\mathbf{g}'_{42} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,2}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_2 [(3-4\nu)(I7-I8) - 2(I7-I8) + 2(II1-II2)]$$

$$\mathbf{g}'_{33} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,2}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_2 [(3-4\nu)I8 + 2I6]$$

$$\mathbf{g}'_{34} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,2}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_2 [II0 - I2]$$

$$\mathbf{g}'_{43} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,2}^* \phi_2 d\Gamma = \mathbf{g}'_{34}$$

$$\mathbf{g}'_{44} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,2}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_2 [(3-4\nu)I8 - 2I8 + 2II2]$$

- Para  $a=0$

$$\mathbf{g}'_{11} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_2 (3-4\nu)(J1 - J2)$$

$$\mathbf{g}'_{12} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,1}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{21} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,1}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{22} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,1}^* \phi_1 d\Gamma = \mathbf{g}'_{11}$$

$$\mathbf{g}'_{13} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,1}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_2 (3-4\nu)J2$$

$$\mathbf{g}'_{14} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,1}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{23} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,1}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{24} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,1}^* \phi_2 d\Gamma = \mathbf{g}'_{13}$$

$$\mathbf{g}'_{31} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,2}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{32} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,2}^* \phi_1 d\Gamma = \psi_2 (J1 - J2)$$

$$\mathbf{g}'_{41} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,2}^* \phi_1 d\Gamma = \mathbf{g}'_{32}$$

$$\mathbf{g}'_{42} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,2}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{33} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,2}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{34} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,2}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{43} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,2}^* \phi_2 d\Gamma = \mathbf{g}'_{34}$$

$$\mathbf{g}'_{44} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,2}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

## ANEXO C: LISTA DOS ELEMENTOS DAS MATRIZES [h], [g], [h]' e [g]' PARA ELEMENTO RETO COM VARIÇÃO QUADRÁTICA EM COORDENADAS LOCAIS

Utilizando as integrais básicas explicitadas no Anexo A, determinam-se os elementos das matrizes [h], [g], [h]' e [g]' do o elemento reto com variação quadrática em coordenadas locais para o caso em que o ponto fonte “s” não pertence ao elemento integrado, conforme visto a seguir.

### C.1 Elementos da Matriz $\overline{[h]}$

- Para  $a \neq 0$

$$h_{11} = \int_{\Gamma} p_{11}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 (2A11 - 3A2 + A1 + 2A15 - 3A4 + A3)$$

$$h_{12} = \int_{\Gamma} p_{12}^* \phi_1 d\Gamma = \psi_1 (2A13 - 3A6 + A5 - 2A14 + 3A8 - A7)$$

$$h_{22} = \int_{\Gamma} p_{22}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 (2A11 - 3A2 + 2A12 - 3A10 + A9)$$

$$h_{21} = \int_{\Gamma} p_{21}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 (2A14 - 3A8 + A7 + 2A13 - 3A6 + A5)$$

$$h_{13} = \int_{\Gamma} p_{11}^* \phi_2 d\Gamma = -4\psi_1 (A2 - A11 + A4 - A13)$$

$$h_{14} = \int_{\Gamma} p_{12}^* \phi_2 d\Gamma = 4\psi_1(A6 - A13 - A8 + A14)$$

$$h_{23} = \int_{\Gamma} p_{21}^* \phi_2 d\Gamma = -4\psi_1(A8 - A14 + A6 - A13)$$

$$h_{24} = \int_{\Gamma} p_{22}^* \phi_2 d\Gamma = -4\psi_1(A2 + A10 - A11 + A12)$$

$$h_{15} = \int_{\Gamma} p_{11}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_1(2A11 - A2 + 2A15 - A4)$$

$$h_{16} = \int_{\Gamma} p_{12}^* \phi_3 d\Gamma = \psi_1(2A13 - A6 - 2A14 + A8)$$

$$h_{25} = \int_{\Gamma} p_{21}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_1(2A14 - A8 + 2A13 - A6)$$

$$h_{26} = \int_{\Gamma} p_{22}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_1(2A11 - A2 + 2A12 - A10)$$

- Para  $a=0$

$$h_{11} = \int_{\Gamma} p_{11}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$h_{12} = \int_{\Gamma} p_{12}^* \phi_1 d\Gamma = (1 - 2\nu)\psi_1(2B3 - 3B2 + B1)$$

$$h_{22} = \int_{\Gamma} p_{22}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$h_{21} = \int_{\Gamma} p_{21}^* \phi_1 d\Gamma = -h_{12}$$

$$h_{13} = \int_{\Gamma} p_{11}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$h_{14} = \int_{\Gamma} p_{12}^* \phi_2 d\Gamma = (1 - 2\nu)\psi_1(B2 - B3)$$

$$h_{23} = \int_{\Gamma} p_{21}^* \phi_2 d\Gamma = -h_{14}$$

$$h_{24} = \int_{\Gamma} p_{22}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$h_{15} = \int_{\Gamma} p_{11}^* \phi_3 d\Gamma = 0$$

$$h_{16} = \int_{\Gamma} p_{12}^* \phi_3 d\Gamma = (1 - 2\nu)\psi_1(2B3 - B2)$$

$$h_{25} = \int_{\Gamma} p_{21}^* \phi_3 d\Gamma = -h_{16}$$

$$h_{26} = \int_{\Gamma} p_{22}^* \phi_3 d\Gamma = 0$$

Onde:

$$\psi_1 = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)}$$

## C.2 Elementos da Matriz $\overline{[g]}$

- Para  $a \neq 0$

$$g_{11} = \int_{\Gamma} u_{11}^* \phi_1 d\Gamma = \psi_2 (2C9 - 3C2 + C1 - 2C10 + 3C4 - C3)$$

$$g_{12} = \int_{\Gamma} u_{12}^* \phi_1 d\Gamma = -\frac{1}{2} \psi_2 (2C12 - 3C6 + C5)$$

$$g_{22} = \int_{\Gamma} u_{22}^* \phi_1 d\Gamma = \psi_2 (2C9 - 3C2 + C1 - 2C11 + 3C8 - C7)$$

$$g_{21} = \int_{\Gamma} u_{21}^* \phi_1 d\Gamma = g_{12}$$

$$g_{13} = \int_{\Gamma} u_{11}^* \phi_2 d\Gamma = 4\psi_2 (C2 - C9 - C4 + C10)$$

$$g_{14} = \int_{\Gamma} u_{12}^* \phi_2 d\Gamma = -2\psi_2 (C6 - C12)$$

$$g_{23} = \int_{\Gamma} u_{21}^* \phi_2 d\Gamma = g_{14}$$

$$g_{24} = \int_{\Gamma} u_{22}^* \phi_2 d\Gamma = 4\psi_2 (C2 - C8 - C9 + C11)$$

$$g_{15} = \int_{\Gamma} u_{11}^* \phi_3 d\Gamma = \psi_2 (2C9 - C2 - 2C10 + C11)$$

$$\mathfrak{g}_{16} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12}^* \phi_3 d\Gamma = -\frac{\psi_2}{2} (2C12 - C6)$$

$$\mathfrak{g}_{25} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21}^* \phi_3 d\Gamma = \mathfrak{g}_{16}$$

$$\mathfrak{g}_{26} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22}^* \phi_3 d\Gamma = \psi_2 (2C9 - C2 - 2C11 + C8)$$

- Para  $a=0$

$$\mathfrak{g}_{11} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11}^* \phi_1 d\Gamma = \psi_2 (2D5 - 3D2 + D1 - 2D6 + 3D4 - D3)$$

$$\mathfrak{g}_{12} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$\mathfrak{g}_{22} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22}^* \phi_1 d\Gamma = \psi_2 (2D5 - 3D2 + D1)$$

$$\mathfrak{g}_{21} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21}^* \phi_1 d\Gamma = \mathfrak{g}_{12}$$

$$\mathfrak{g}_{13} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11}^* \phi_2 d\Gamma = 4\psi_2 (D2 - D4 - D5 + D6)$$

$$\mathfrak{g}_{14} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$\mathfrak{g}_{23} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21}^* \phi_2 d\Gamma = \mathfrak{g}_{14}$$

$$\mathfrak{g}_{24} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22}^* \phi_2 d\Gamma = 4\psi_2 (D2 - D5)$$

$$\mathfrak{g}_{15} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11}^* \phi_3 d\Gamma = \psi_2 (2D5 - D2 + D4 - 2D6)$$

$$\mathfrak{g}_{16} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12}^* \phi_3 d\Gamma = 0$$

$$\mathfrak{g}_{25} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21}^* \phi_3 d\Gamma = \mathfrak{g}_{16}$$

$$\mathfrak{g}_{26} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22}^* \phi_3 d\Gamma = \psi_2 (2D5 - D2)$$

Onde:

$$\Psi_2 = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G}$$

### C.3 Elementos da Matriz $[\bar{\mathbf{h}}]$

- Para  $a \neq 0$

Sendo:

$$a_1 = 2E17 - 3E2 + E1$$

$$a_2 = 2E18 - 3E4 + E3$$

$$a_3 = 2E19 - 3E6 + E5$$

$$a_4 = 2E20 - 3E8 + E7$$

$$a_5 = 2E21 - 3E10 + E9$$

$$a_6 = 2E22 - 3E12 + E11$$

$$a_7 = 2E23 - 3E14 + E13$$

$$a_8 = 2E24 - 3E16 + E15$$

Tem-se:

$$h'_{11} = \int_{\Gamma} p_{11,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\Psi_1 [8a_1 - 4a_2 + 2(1-2\nu)a_2]$$

$$h'_{12} = \int_{\Gamma} p_{12,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\Psi_1 \{8a_3 - 2a_4 + (1-2\nu)[a_5 - 2a_6]\}$$

$$h'_{21} = \int_{\Gamma} p_{21,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\Psi_1 \{8a_3 - 2a_4 + (1-2\nu)[2a_6 - a_5]\}$$

$$h'_{22} = \int_{\Gamma} p_{22,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\Psi_1 [8a_7 + 2(1-2\nu)a_2]$$

$$h'_{31} = \int_{\Gamma} p_{11,2}^* \phi_1 d\Gamma = -\Psi_1 \{8a_3 - 2a_6 + (1-2\nu)[2a_4 - a_5]\}$$

$$h'_{32} = \int_{\Gamma} p_{12,2}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 [8a_7 - 2(3 - 2\nu)a_2]$$

$$h'_{41} = \int_{\Gamma} p_{21,2}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 [8a_7 - 2(1 + 2\nu)a_2]$$

$$h'_{42} = \int_{\Gamma} p_{22,2}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 \{8a_8 - 6a_4 + (1 - 2\nu)[2a_4 - a_5]\}$$

Sendo:

$$b_1 = 4(E2 - E17)$$

$$b_2 = 4(E4 - E18)$$

$$b_3 = 4(E6 - E19)$$

$$b_4 = 4(E8 - E20)$$

$$b_5 = 4(E10 - E21)$$

$$b_6 = 4(E12 - E22)$$

$$b_7 = 4(E14 - E23)$$

$$b_8 = 4(E16 - E24)$$

Tem-se:

$$h'_{13} = \int_{\Gamma} p_{11,1}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 [8b_1 - 4b_2 + 2(1 - 2\nu)b_2]$$

$$h'_{14} = \int_{\Gamma} p_{12,1}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 \{8b_3 - 2b_4 + (1 - 2\nu)[b_5 - 2b_6]\}$$

$$h'_{23} = \int_{\Gamma} p_{21,1}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 \{8b_3 - 2b_4 + (1 - 2\nu)[2b_6 - b_5]\}$$

$$h'_{24} = \int_{\Gamma} p_{22,1}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 [8b_7 + 2(1 - 2\nu)b_2]$$

$$h'_{33} = \int_{\Gamma} p_{11,2}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 \{8b_3 - 2b_6 + (1 - 2\nu)[2b_4 - b_5]\}$$

$$h'_{34} = \int_{\Gamma} p_{12,2}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 [8b_7 - 2(3 - 2\nu)b_2]$$

$$h'_{43} = \int_{\Gamma} p_{21,2}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 [8b_7 - 2(1+2\nu)b_2]$$

$$h'_{44} = \int_{\Gamma} p_{22,2}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 \{8b_8 - 6b_4 + (1-2\nu)[2b_4 - b_5]\}$$

Sendo:

$$c_1 = 2E17 - E2$$

$$c_2 = 2E18 - E4$$

$$c_3 = 2E19 - E6$$

$$c_4 = 2E20 - E8$$

$$c_5 = 2E21 - E10$$

$$c_6 = 2E22 - E12$$

$$c_7 = 2E23 - E14$$

$$c_8 = 2E24 - E16$$

Tem-se:

$$h'_{15} = \int_{\Gamma} p_{11,1}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_1 [8c_1 - 4c_2 + 2(1-2\nu)c_2]$$

$$h'_{16} = \int_{\Gamma} p_{12,1}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_1 \{8c_3 - 2c_4 + (1-2\nu)[c_5 - 2c_6]\}$$

$$h'_{25} = \int_{\Gamma} p_{21,1}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_1 \{8c_3 - 2c_4 + (1-2\nu)[2c_6 - c_5]\}$$

$$h'_{26} = \int_{\Gamma} p_{22,1}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_1 [8c_7 + 2(1-2\nu)c_2]$$

$$h'_{35} = \int_{\Gamma} p_{11,2}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_1 \{8c_3 - 2c_6 + (1-2\nu)[2c_4 - c_5]\}$$

$$h'_{36} = \int_{\Gamma} p_{12,2}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_1 [8c_7 - 2(3-2\nu)c_2]$$

$$h'_{45} = \int_{\Gamma} p_{21,2}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_1 [8c_7 - 2(1+2\nu)c_2]$$

$$h'_{46} = \int_{\Gamma} p_{22,2}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_1 \{8c_8 - 6c_4 + (1-2\nu)[2c_4 - c_5]\}$$

- Para  $a=0$

$$h'_{11} = \int_{\Gamma} p_{11,1}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$h'_{12} = \int_{\Gamma} p_{12,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 (2F5 - 3F2 + F1)$$

$$h'_{21} = \int_{\Gamma} p_{21,1}^* \phi_1 d\Gamma = -h'_{12}$$

$$h'_{22} = \int_{\Gamma} p_{22,1}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$h'_{13} = \int_{\Gamma} p_{11,1}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$h'_{14} = \int_{\Gamma} p_{12,1}^* \phi_2 d\Gamma = 4\psi_1 (F2 - F5)$$

$$h'_{23} = \int_{\Gamma} p_{21,1}^* \phi_2 d\Gamma = -h'_{14}$$

$$h'_{24} = \int_{\Gamma} p_{22,1}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$h'_{31} = \int_{\Gamma} p_{11,2}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_1 [2(F5 + F6) - 3(F2 + F4) + F1 + F3]$$

$$h'_{32} = \int_{\Gamma} p_{12,2}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$h'_{41} = \int_{\Gamma} p_{21,2}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$h'_{42} = \int_{\Gamma} p_{22,2}^* \phi_1 d\Gamma = h'_{12}$$

$$h'_{33} = \int_{\Gamma} p_{11,2}^* \phi_2 d\Gamma = -4\psi_1 (F2 + F4 - F5 - F6)$$

$$h'_{34} = \int_{\Gamma} p_{12,2}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$h'_{43} = \int_{\Gamma} p_{21,2}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$h'_{44} = \int_{\Gamma} p_{22,2}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_1 (F5 + F2)$$

$$h'_{15} = \int_{\Gamma} p_{11,1}^* \phi_3 d\Gamma = 0$$

$$h'_{16} = \int_{\Gamma} p_{12,1}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_1 (2F5 - F2)$$

$$h'_{25} = \int_{\Gamma} p_{21,1}^* \phi_3 d\Gamma = -h'_{16}$$

$$h'_{26} = \int_{\Gamma} p_{22,1}^* \phi_3 d\Gamma = 0$$

$$h'_{35} = \int_{\Gamma} p_{11,2}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_1 [2(F5 + F6) - F2 - F4]$$

$$h'_{36} = \int_{\Gamma} p_{12,2}^* \phi_3 d\Gamma = 0$$

$$h'_{45} = \int_{\Gamma} p_{21,2}^* \phi_3 d\Gamma = 0$$

$$h'_{46} = \int_{\Gamma} p_{22,2}^* \phi_3 d\Gamma = h'_{16}$$

#### C.4 Elementos da Matriz $[\bar{g}]'$

- Para  $a \neq 0$

Sendo:

$$d_1 = 2I13 - 3I2 + I1$$

$$d_2 = 2I14 - 3I4 + I3$$

$$d_3 = 2I15 - 3I6 + I5$$

$$d_4 = 2I16 - 3I8 + I7$$

$$d_5 = 2I17 - 3I10 + I9$$

$$d_6 = 2I18 - 3I12 + I11$$

Tem-se:

$$\mathbf{g}'_{11} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_2 [(3-4\nu)d_1 - 2d_1 + 2d_2]$$

$$\mathbf{g}'_{12} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_2 (2d_3 - d_4)$$

$$\mathbf{g}'_{21} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,1}^* \phi_1 d\Gamma = \mathbf{g}'_{12}$$

$$\mathbf{g}'_{22} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_2 [(3-4\nu)d_1 + 2d_5]$$

$$\mathbf{g}'_{31} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,2}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_2 [(3-4\nu)d_4 + 2d_3]$$

$$\mathbf{g}'_{32} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,2}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_2 (2d_5 - d_1)$$

$$\mathbf{g}'_{41} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,2}^* \phi_1 d\Gamma = \mathbf{g}'_{32}$$

$$\mathbf{g}'_{42} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,2}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_2 [(3-4\nu)d_4 - 2d_4 + 2d_6]$$

Sendo:

$$\mathbf{e}_1 = 4(\text{II3} - 3\text{I2})$$

$$\mathbf{e}_2 = 4(\text{II4} - \text{I4})$$

$$\mathbf{e}_3 = 4(\text{II5} - \text{I6})$$

$$\mathbf{e}_4 = 4(\text{II6} - \text{I8})$$

$$\mathbf{e}_5 = 4(\text{II7} - \text{II0})$$

$$\mathbf{e}_6 = 4(\text{II8} - \text{II2})$$

Tem-se:

$$\mathbf{g}'_{13} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,1}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_2 [(3-4\nu)\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2]$$

$$\mathbf{g}'_{14} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,1}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_2 (2\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)$$

$$\mathbf{g}'_{23} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,1}^* \phi_2 d\Gamma = \mathbf{g}'_{14}$$

$$\mathbf{g}'_{24} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,1}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_2 [(3-4\nu)\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_5]$$

$$\mathbf{g}'_{33} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,2}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_2 [(3-4\nu)\mathbf{e}_4 + 2\mathbf{e}_3]$$

$$\mathbf{g}'_{34} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,2}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_2 (2\mathbf{e}_5 - \mathbf{e}_1)$$

$$\mathbf{g}'_{43} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,2}^* \phi_2 d\Gamma = \mathbf{g}'_{34}$$

$$\mathbf{g}'_{44} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,2}^* \phi_2 d\Gamma = -\psi_2 [(3-4\nu)\mathbf{e}_4 - 2\mathbf{e}_4 + 2\mathbf{e}_6]$$

Sendo:

$$f_1 = 2I13 - I2$$

$$f_2 = 2I14 - I4$$

$$f_3 = 2I15 - I6$$

$$f_4 = 2I16 - I8$$

$$f_5 = 2I17 - I10$$

$$f_6 = 2I18 - I12$$

Tem-se:

$$\mathbf{g}'_{15} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,1}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_2 [(3-4\nu)f_1 - 2f_1 + 2f_2]$$

$$\mathbf{g}'_{16} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,1}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_2 (2f_3 - f_4)$$

$$\mathbf{g}'_{25} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,1}^* \phi_3 d\Gamma = \mathbf{g}'_{16}$$

$$\mathbf{g}'_{26} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,1}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_2 [(3-4\nu)f_1 + 2f_5]$$

$$\mathbf{g}'_{35} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,2}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_2 [(3-4\nu)f_4 + 2f_3]$$

$$\mathbf{g}'_{36} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,2}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_2 (2f_5 - f_1)$$

$$\mathbf{g}'_{45} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,2}^* \phi_3 d\Gamma = \mathbf{g}'_{36}$$

$$\mathbf{g}'_{46} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,2}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_2 [(3-4\nu)f_4 - 2f_4 + 2f_6]$$

- Para  $a=0$

$$\mathbf{g}'_{11} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,1}^* \phi_1 d\Gamma = -\psi_2 (3-4\nu)(3J_3 + J_1 - 2J_2)$$

$$\mathbf{g}'_{12} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,1}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{21} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,1}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{22} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,1}^* \phi_1 d\Gamma = \mathbf{g}'_{11}$$

$$\mathbf{g}'_{13} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,1}^* \phi_2 d\Gamma = -4\psi_2 (3-4\nu)(J_3 - J_2)$$

$$\mathbf{g}'_{14} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,1}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{23} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,1}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{24} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,1}^* \phi_2 d\Gamma = \mathbf{g}'_{13}$$

$$\mathbf{g}'_{31} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,2}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{32} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,2}^* \phi_1 d\Gamma = \psi_2 (3J_3 + J_1 - 2J_2)$$

$$\mathbf{g}'_{41} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,2}^* \phi_1 d\Gamma = \mathbf{g}'_{32}$$

$$\mathbf{g}'_{42} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,2}^* \phi_1 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{33} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,2}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{34} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,2}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{43} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,2}^* \phi_2 d\Gamma = \mathbf{g}'_{34}$$

$$\mathbf{g}'_{44} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,2}^* \phi_2 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{15} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,1}^* \phi_3 d\Gamma = -\psi_2 (3 - 4\nu)(2J3 - J2)$$

$$\mathbf{g}'_{16} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,1}^* \phi_3 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{25} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,1}^* \phi_3 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{26} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,1}^* \phi_3 d\Gamma = \mathbf{g}'_{15}$$

$$\mathbf{g}'_{35} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{11,2}^* \phi_3 d\Gamma = 0$$

$$\mathbf{g}'_{36} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{12,2}^* \phi_3 d\Gamma = \psi_2 (2J3 - J2)$$

$$\mathbf{g}'_{45} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{21,2}^* \phi_3 d\Gamma = \mathbf{g}'_{36}$$

$$\mathbf{g}'_{46} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_{22,2}^* \phi_3 d\Gamma = 0$$

### C.5 Integrais das matrizes [h] e [g] para o ponto fonte no elemento

Neste item mostram-se os elementos das matrizes [h] e [g] em coordenadas locais para o caso em que o ponto fonte está no elemento integrado. O posicionamento dos eixos, bem como numeração dos nós é mostrada na Figura 35.

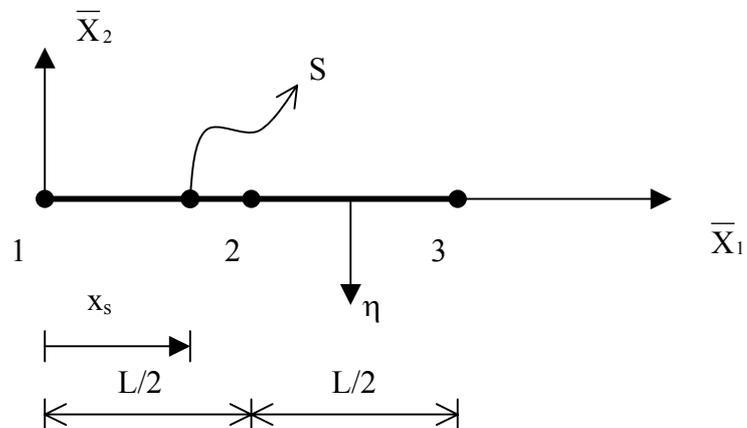


FIGURA 35: Posicionamento do ponto fonte no elemento.

### C.5.1 Ponto fonte no nó 1 ( $x_s = 0$ )

$$\bar{h}_{ijk} = \Delta_{ij} \left[ \Omega_{1k} \frac{L^2}{2} + \Omega_{2k} L + \Omega_{3k} \ln(L) \right]$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ijk} = & \Omega_{1k} \frac{L^3}{3} \left[ (3-4\nu) \delta_{ij} \left( \ln(L) - \frac{1}{3} \right) - r_{,i} r_{,j} \right] + \Omega_{2k} \frac{L^2}{2} \left[ (3-4\nu) \delta_{ij} \left( \ln(L) - \frac{1}{2} \right) - r_{,i} r_{,j} \right] + \\ & + \Omega_{3k} L \left[ (3-4\nu) \delta_{ij} (\ln(L) - 1) - r_{,i} r_{,j} \right] \end{aligned}$$

Sendo:

$$\Delta_{ij} = \psi_1 (1-2\nu) (r_{,i} \eta_j - r_{,j} \eta_i)$$

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} \frac{2}{L^2} & -\frac{4}{L^2} & \frac{2}{L^2} \\ -\frac{3}{L} & \frac{4}{L} & -\frac{1}{L} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

### C.5.1 Ponto fonte no nó 2 ( $x_s = L/2$ )

$$\bar{h}_{ijk} = \Delta_{ij} (\Omega_{1k} L^2 + \Omega_{2k} L)$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ijk} = & \Omega_{1k} \frac{L^3}{3} \left[ (3-4\nu) \delta_{ij} \frac{1}{2} \left( \frac{7}{2} \ln(L/2) - \frac{1}{3} \right) - r_{,i} r_{,j} \right] + \\ & + \Omega_{1k} \frac{L^2}{2} \left[ (3-4\nu) \delta_{ij} (\ln(L/2) - 1) - r_{,i} r_{,j} \right] + \Omega_{2k} L \left[ (3-4\nu) \delta_{ij} (\ln(L/2) - 1) - r_{,i} r_{,j} \right] \end{aligned}$$

### C.5.1 Ponto fonte no nó 3 ( $x_s = L$ )

$$\bar{h}_{ijk} = \Delta_{ij} \left[ \Omega_{1k} L^2 \left( \frac{3}{2} - \ln(L) \right) + \Omega_{2k} L (1 - \ln(L)) - \Omega_{3k} \ln(L) \right]$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ijk} = & \Omega_{1k} \frac{L^3}{3} \left[ (3 - 4\nu) \delta_{ij} \left( \ln(L) - \frac{11}{6} \right) - r_{,i} r_{,j} \right] + \\ & + \Omega_{1k} \frac{L^2}{2} \left[ (3 - 4\nu) \delta_{ij} (3 \ln(L) - 3) - r_{,i} r_{,j} \right] + \Omega_{1k} L \left[ (3 - 4\nu) \delta_{ij} (\ln(L) - 1) - r_{,i} r_{,j} \right] \end{aligned}$$

## BIBLIOGRAFIA

ALBUQUERQUE, E. D. (2001). *Análise de problemas dinâmicos em materiais anisotrópicos usando o Método dos Elementos de Contorno*. Campinas. 146 p. Tese (Doutorado). Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.

ALBUQUERQUE, E. L.; SOLLERO, P., ALIABADI, M. H. (2002). The boundary element method applied to time dependent problems in anisotropic materials. *Int. J. Sol. Struc.*, v.39, n.5, p.1405-1422

ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. (1992). *Numerical Fracture Mechanics*. The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

BARBIRATO, J. C. C. (1999). *Método dos elementos de contorno com a reciprocidade dual para a análise transiente tridimensional da mecânica do fraturamento*. São Carlos. Tese (Doutorado)- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

BLANDFORD, G. E.; INGRAFFEA, A. R.; LIGGET, J. A. (1981). Two-dimensional Stress Intensify Factor computations using the Boundary Element Method. *Int. J. Num. Meth. Engn.*, v.17, p.387-404.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. (1992). *Boundary Elements an Introductory Course*. 2 ed. Southampton, Computational Mechanics Publications.

- CHIRINO, F.; GALLEGO, R.; SAEZ, A.; DOMÍNGUEZ, J. (1994). A comparative-study of 3 boundary-element approaches to transient dynamic crack problems. *Engn. Anal. Bound. Elem.*, v.33, n.3, p.635-647.
- CODA, H. B. (2000). *Contribuição à análise dinâmica transiente de meios contínuos pelo Método dos Elementos de Contorno*. São Carlos. 381p. Tese (Livro Docência)- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CODA, H. B. (2001). Dynamic and static non-linear analysis of reinforced media: a BEM/FEM coupling approach. *Comp. Struc.*, v.79, p. 2751-2765.
- CRUSE, T. A. (1972). Numerical evaluation of elastic stress intensify factor by the boundary-integral equation method. In: Swedlon, JL, ed. *The Surface Crack: Physical Problems and Computational Solutions*. New York.
- CRUSE, T. A.; VAN BUREN, W. (1971). Dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. *Int. J. Num. Mech.*, v.7, p.1-16.
- DOMÍNGUEZ, J.; GALLEGO, R. (1992). Time boundary element method for dynamic stress intensify factor computations. *Int. J. Num. Meth. Engn.*, v.33, n.3, p.635-647.
- DOMÍNGUEZ, J.; MARTÍNEZ, J. (1984). Short communication on the use of quarter-point boundary elements for Stress Intensify Factor computations. *Int. J. Num. Meth. Engn.*, v.20, p.1941-1950.
- FEDELINSKI, P; ALIABADI, M. H. ; ROOKE, D. P. (1995). Boundary element formulation for the dynamic analysis of cracked structures. In: ALIABADI, M. H. (Ed.); *Dynamic Fracture Mechanics*. Computational Mechanics Publications.
- FOLTRAN, C. E. (1998). . *Análise de problemas planos em regime elasto-plástico pelo Método dos Elementos de Contorno*. Campinas. 146p. Dissertação

(Mestrado). Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas.

FREUND, L. B. (1990). *Dynamic Fracture Mechanics*. 1 ed. Cambridge, Cambridge University Press.

GALLEGO, R.; GRANADOS, J. J. (2002). Transient crack propagation using boundary elements. *15<sup>th</sup> ASCE Eng. Mech. Conference*. New York, Columbia University.

GDOUTOS, E. E. (1993). *Fracture Mechanics an Introduction*. The Netherlands, Kluwer Academic Publishers.

GRIFFITH, A. A. (1921). The phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans.*, n.221, p. 163-198.

LOPES JR., M. C. (1996). *Modelagem numérica do crescimento de fraturas através do Método dos Elementos de Contorno*. São Carlos. 231p. Dissertação (Mestrado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

MEWS, H. (1987). Calculation of stress intensify factors for various crack problems with the Boundary Element Method. In: BREBBIA, C.A. (Ed.); Wendland, WL; Kuhn, G, eds. *Boundary Elements IX*.

MEYERS, M. A.; CHAWLA, K. K. (1999). *Mechanical Behavior of Materials*. New Jersey, Prentice Hall.

NISHIMURA, N.; GUO, Q. C.; KOBAYASHI, S. (1987). Boundary integral equation methods in elastodynamic crack problems. In: BREBBIA, C.A. (Ed.); Wendland, WL; Kuhn, G, eds. *Boundary Elements IX*, v. 2. 279-291.

- ODEN J. T. ; DUARTE, C. A. (1997). Clouds Cracks and fem's. In: REDDY, B. D. (Ed.); *Recent Developments in Computational and Applied Mechanics*.
- PARÍS, F.; CAÑAS, J. (1997). *Boundary Element Method fundamentals and applications*. Oxford, Oxford University Press.
- PORTELA , A.; ALIABADI, M. H.; ROOKE, D. P. (1992). Dual boundary element method: Efficient implementation for cracked problems. *Int. J. Num. Meth. Engn.*, v.33, p.1269-1287.
- RICE, J. R. (1968). A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks. *J. Appl. Mech*, n. 35, p. 379-386.
- SAEZ, A.; DOMÍNGUEZ, J. (2001). Dynamic problems in three-dimensional transversely isotropic solids. *Eng. Anal. Bound. Elem.*,v.25, n.3, p.203-210.
- SNYDER, M. D.; CRUSE, T. A. (1975). Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates. *Int. J. Fracture.*, n. 11, p. 315-328.
- SOUZA, V. J. B. *Algoritmos de integração eficientes para o método dos elementos de contorno tridimensional*. São Carlos, 2001. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- TELLES, J. C. F.; GUIMARAES, S. (2000). Green's function: A numerical generation for fracture mechanics problems via Boundary Elements. *Comput. Meth. Appl. Mech.*, v.188, n.4, p.847-858.
- TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. (1980). *Teoria da Elasticidade*. 3 ed. Rio de Janeiro, Editora Guanabara Dois S.A.

- VENTURINI, W. S. (1988). *Um estudo sobre o Método dos Elementos de Contorno e suas aplicações em problemas de engenharia*. São Carlos. 347p. Tese (Livre Docência)- Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- VENTURINI, W. S. (1994). A new boundary element formulation for crack analysis. In: Brebbia, CA; ed. *Boundary Element Method XVI*.
- VILLAÇA, S. F.; GARCIA, L. F. T. (1996). *Introdução à Teoria da Elasticidade*. Rio de Janeiro, COPPE.
- WESTERGAARD, H. M. (1939). Bearing pressures and cracks. *J. Appl. Mech.*, n. 6, p. 49-53.
- WEN, P. H.; ALIABADI, M. H.; YOUNG, A. (1999). Dual boundary element methods for three-dimensional dynamic crack problems. *J. Strain. Anal. Engn. Design*. v.34, n.6, 373-394.
- WILLIAMS, M. L. (1957). On the stress distribution at the base of a stationary crack. *J. Appl. Mech.* n.24, 109-114.

## BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

ASSAN, A. E. (1999). *Método dos Elementos Finitos: Primeiros passos*. Campinas, Editora da Unicamp.

CODA, H. B. (1990). *Análise da vibração livre de meios elásticos bidimensionais pelo Método dos Elementos de Contorno*. Dissertação (Mestrado). São Carlos. 130p. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

GERE, J. M.;WEAVER JR., W. (1965). *Matrix Algebra for Engineers*. Van Nostrand Reinhold company.

SAVASSI, W. (1996). *Introdução ao Método dos Elementos Finitos: Em análise linear de estruturas*. São Carlos, Serviço Gráfico-EESC.

PISCOUNOV, N. (1997). *Cálculo diferencial de integral*. Porto, Ed. Lopes da Silva. 11<sup>a</sup> ed., v.2.

## APÊNDICE I: ALGORITMO DE HOUBOLT

Quando a análise de um problema numérico leva também em consideração o tempo como variável, faz-se necessário o uso de um método que se integre a equação diferencial ao longo dessa variável, para tanto existem os mais variados tipos de integrador com essa finalidade.

O integrador mais utilizado para problemas dinâmicos envolvendo o MEC com matriz de massa é o Método de Houbolt, sendo este descrito neste apêndice com base em CODA (2001).

### I.1 Algoritmo de Integração Temporal de Houbolt

O esquema de integração de Houbolt está enquadrado entre os métodos de múltiplos passos, pois o mesmo não se utiliza apenas dos valores do passo anterior para determinar os valores atuais e sim de três outros passos do passado. Dessa forma, os vetores de velocidade e de aceleração são aproximados da seguinte forma:

$$\dot{U}_{s+1} = (11U_{s+1} - 18U_s + 9U_{s-1} - 2U_{s-2}) / (6\Delta t) \quad (I.1)$$

$$\ddot{U}_{s+1} = (2U_{s+1} - 5U_s + 4U_{s-1} - U_{s-2}) / \Delta t^2 \quad (I.2)$$

Onde:

$s + 1 \rightarrow$  Passo de tempo atual;

$s \rightarrow$  Passo de tempo imediatamente anterior ao passo atual “s+1”;

$s - 1 \rightarrow$  Passo de tempo imediatamente anterior ao passo “s”;

$s - 2 \rightarrow$  Passo de tempo imediatamente anterior ao passo “s-1”;

$\Delta t \rightarrow$  Intervalo de tempo entre passos consecutivos de tempo.

As equações algébricas de contorno para o problema dinâmico, eq.(5.39) e eq.(5.41), escritas para o passo atual “s+1”, ficam:

$$HU_{s+1} + C\dot{U}_{s+1} + M\ddot{U}_{s+1} = GP_{s+1} + Bb_{s+1} \quad (I.3)$$

$$U'_{s+1} = H'U_{s+1} - G'P_{s+1} + M'\ddot{U}_{s+1} + C'\dot{U}_{s+1} - B'b_{s+1} \quad (I.4)$$

Substituindo-se as aproximações de velocidade e aceleração para o passo atual, ou seja, eq.(I.1) e (I.2) nas eq.(I.3) e (I.4) e procedendo com algumas manipulações algébricas, obtém-se:

$$\bar{H}U_{s+1} = \bar{G}P_{s+1} + F_s \quad (I.5)$$

$$U'_{s+1} = \bar{H}'U_{s+1} - G'P_{s+1} + K_{s+1} \quad (I.6)$$

Onde:

$$\bar{H} = 2M + \frac{11}{6}\Delta tC + \Delta t^2H \quad (I.7)$$

$$\bar{G} = \Delta t^2G \quad (I.8)$$

$$F_s = (5M + 3\Delta tC)U_s - \left(4M + \frac{3\Delta t}{2}C\right)U_{s-1} + \left(M + \frac{\Delta t}{3}C\right)U_{s-2} + \Delta t^2Bb_{s+1} \quad (I.9)$$

$$\bar{H}' = H' + \frac{2}{\Delta t^2}M' + \frac{11}{6\Delta t}C' \quad (I.10)$$

$$K_{s+1} = M'a_s + C'v_s - B'b_{s+1} \quad (I.11)$$

$$a_s = (-5U_s + 4U_{s-1} - U_{s-2})/\Delta t^2 \quad (I.12)$$

$$v_s = (-18U_s + 9U_{s-1} - 2U_{s-2})/(6\Delta t) \quad (I.13)$$

Sendo as condições de contorno do problema impostas através das troca de colunas entre as matrizes  $\bar{H}$  e  $\bar{G}$  da eq.(I.5), resultando em:

$$AX_{s+1} = F_{s+1} \quad (I.14)$$

Onde a matriz A é originada devido a troca de colunas entre matrizes  $\bar{H}$  e  $\bar{G}$ , sendo os vetores  $X_{s+1}$  e  $F_{s+1}$  referentes às incógnitas e dos valores conhecidos respectivamente.

Após a determinação dos valores incógnitos  $X_{s+1}$ , faz-se distribuição desses valores nos vetores  $U_{s+1}$  e  $P_{s+1}$  segundo as condições de contorno previamente determinadas. Com esses valores calculados para o passo atual “s+1”, determina-se em seguida o vetor de gradientes de deslocamento  $U'_{s+1}$  para o passo atual utilizando a eq.(I.6). Dessa forma, as deformações e tensões para “s+1”, são calculadas utilizando as eqs.(I.8) e (I.11) respectivamente.