

Celso de Carvalho Noronha Neto

**INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DO
FILTRO DIGITAL DE BUTTERWORTH MEDIANTE
ALGORITMO DE QUADRATURA NUMÉRICA DE ORDEM
ELEVADA**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Tit. Dr. José Elias Laier

São Carlos
2003

Aos meus pais e à Joseana

Sumário

Lista de símbolos	i
Resumo	iii
Abstract	iv
Capítulo I – Introdução	1
Capítulo II – Sistema de um grau de liberdade	5
2.1. Introdução	5
2.2. Equação de movimento	6
2.3. Solução homogênea	7
2.4. Solução particular para carregamento senoidal	8
2.5. Solução particular para carregamento cossenoidal	10
2.6. Análise da solução geral	11
Capítulo III – Transformada de Fourier	14
3.1. Introdução	14
3.2. Série de Fourier	15
3.3. Transformada de Fourier	15
3.4. Propriedades da transformada de interesse na resolução de equações diferenciais	17
3.5. Transformada da função senoidal	18
3.6. Aplicação na equação de movimento	19
3.7. Aplicação da transformada em uma equação diferencial de ordem genérica	20
Capítulo IV – Equação de filtragem	22
4.1. Introdução	22
4.2. Conceituação de filtro	23
4.3. Tipos de filtro	24

4.4. Tipos de equação para $H(\omega)$	25
4.5. Função $H(\omega)$	26
4.6. Aplicação para uma entrada senoidal	26
4.7. Filtro de Butterworth e modelação de $ H(\omega) $	29
4.8. Escolha dos parâmetros	30
4.9. Estudo dos pólos	33
4.10. Filtros e equações diferenciais correspondentes	35

Capítulo V – Filtro digital com quadratura numérica de segunda ordem (trapezoidal) _____ 40

5.1. Introdução	40
5.2. Analogia com a equação de movimento	41
5.3. Método Newmark de passo duplo	42
5.4. Método Newmark de passo simples	44
5.5. Exemplos de aplicação	46
5.6. Formulação matricial reduzida da equação diferencial	48
5.7. Aplicação para filtro de dois pólos	50
5.8. Filtragem utilizando número de pólos mais elevado	52

Capítulo VI – Filtro digital com quadratura numérica de ordem superior (operador hermitiano) _____ 55

6.1. Introdução	55
6.2. Operador hermitiano com derivada de segunda ordem	56
6.3. Caso geral de operadores	58
6.4. Aplicação no algoritmo de dois pólos	59
6.5. Discretização da derivada do sinal de entrada	60
6.6. Aplicação para filtro de dois pólos	62
6.7. Algoritmo hermitiano para filtro de Butterworth de ordem genérica	64
6.8. Verificação da eficiência do filtro utilizando número de pólos mais elevados	65

Capítulo VII – Análise comparativa dos algoritmos	68
7.1. Introdução	68
7.2. 1º exemplo : Comparação de entrada composta por uma única senóide	69
7.3. 2º exemplo: Comparação do comportamento dos algoritmos para diferentes valores de Δt	70
7.4. 3º exemplo: Análise da entrada amortecida	72
7.5. 4º exemplo: Análise da entrada contendo parcela randômica	73
7.6. 5º exemplo: Análise da entrada randômica pura	76
Capítulo VIII – Algoritmo de filtragem proveniente da transformada Z	78
8.1. Introdução	78
8.2. Transformada de Laplace	79
8.3. Transformada Z	79
8.4. Transformação bilinear	81
8.5. Polinômio de Butterworth	82
8.6. Desenvolvimento de filtro digital de dois pólos	83
8.7. Comparação dos resultados	84
Capítulo IX – Observações finais e conclusões	86
Referências bibliográficas	88

Lista de símbolos

k = constante de rigidez elástica

c = amortecimento

m = massa

t = tempo

F_k = força de mola

F_c = força de amortecimento

$\rho(t)$ = movimento adimensional de resposta

x_e = deslocamento estático de referência

ω = frequência angular

ω_n = frequência angular natural

γ = coeficiente de amortecimento

$\rho_h(t)$ = solução homogênea adimensional do sistema

C_1, C_2 = constantes de integração

ω_1 = frequência natural amortecida

$\rho_p(t)$ = solução particular adimensional do sistema

C = fator de amplificação

φ = ângulo de defasagem

α = relação entre frequência de entrada e frequência de resposta

a_i, b_i = coeficientes

$A(\omega), B(\omega)$ = integrais de Fourier

$F(\omega)$ transformada de Fourier da função $f(t)$

$\delta(\omega)$ = delta de Dirac

$x(t)$ = sinal de entrada

$y(t)$ = sinal de saída

$X(\omega)$ = transformada de Fourier do sinal de entrada

$Y(\omega)$ = transformada de Fourier do sinal de saída

$H(\omega)$ = função de resposta em frequência

ω_c = frequência de corte

A = amplitude do sinal de entrada

N = número de pólos do filtro

$H_N(\omega)$ = função de resposta em frequência para um filtro de N pólos

$H_{\text{par}}(\omega)$ = função de resposta em frequência para um filtro com um número par de pólos

$H_{\text{impar}}(\omega)$ = função de resposta em frequência para um filtro com um número ímpar de pólos

$P(\omega)$ = transformada de Fourier da equação diferencial de filtragem

$P_N(\omega)$ = transformada de Fourier da equação diferencial de filtragem com N pólos

x_k = k -ésimo valor discretizado do sinal de entrada

y_k = k -ésimo valor discretizado do sinal de saída

Δt = diferença de tempo entre uma leitura e outra feita pelo aparelho de mensuração

θ = ângulo cujo valor é $\omega_c \Delta t$

$\{X\}_i$ = vetor de entrada do sistema matricial

$\{Y\}_i$ = vetor de resposta do sistema matricial

$[A]$ = matriz de redução

$[I]$ = matriz identidade

$O(\Delta t^j)$ = ordem de erro de grau j

T = período de oscilação

$\varepsilon(j)$ = parcela randômica que varia de $-j$ a $+j$

$F(s)$ = transformada de Laplace da função $f(t)$

$F[z]$ = transformada Z da função $f[n]$

$x[n]$, $y[n]$ = discretização das funções $x(t)$ e $y(t)$ respectivamente

$Y[z]$ = transformada Z da função de entrada

$X[z]$ = transformada Z da função de saída

Resumo

NORONHA Neto, Celso C. (2003). **Integração das equações diferenciais do filtro digital de Butterworth mediante algoritmo de quadratura numérica de ordem elevada.** São Carlos. 89p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Neste trabalho se apresenta o desenvolvimento de algoritmos hermitianos de integração das equações diferenciais do filtro digital de Butterworth mediante operadores de integração numérica de ordem elevada com passo único.

A teoria do filtro de Butterworth é apresentada mediante o emprego da transformada de Fourier. Exemplos de aplicação apresentados através destes algoritmos mostram que os resultados são, como esperado, mais precisos que os resultantes dos métodos usuais presentes na literatura especializada.

Palavras-chave: processamento de sinais, filtro digital, Butterworth, hermitiano, solução numérica de equações diferenciais.

Abstract

NORONHA Neto, Celso C. (2003). **Integration of the Butterworth digital filter's differential equations using numerical algorithm of high order integrator**. São Carlos. 89p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

In this work is presented the development of hermitian algorithm for integration of the Butterworth digital filter's differential equations by means of high order numerical one step operators.

The Butterworth filter's theory is presented based on the Fourier transform. Numerical examples show that the results of the developed hermitian algorithm are more accurate than the usual methods present in the specialized literature, as expected.

Keywords: signal processing, digital filter, Butterworth, hermitian, numerical solution of differential equations.

Capítulo I

INTRODUÇÃO

A análise dinâmica das estruturas, como sabido, envolve o estudo do movimento e do comportamento de um ou mais elementos da estrutura sob efeito de uma solicitação dinâmica, seja esta uma solicitação por impacto, com descrição eventualmente de grande complexidade, ou mesmo um carregamento bem mais simples, como o caso de carregamento harmônico. Um elemento estrutural ao oscilar pode apresentar, em termos previstos pela teoria, uma infinidade de modos de vibração, conforme ilustra a figura 1, sendo que a influência do primeiro modo, como sabido, é bem maior que a do segundo modo; o qual, por sua vez, é bem maior que a influência do terceiro modo, e assim por diante.

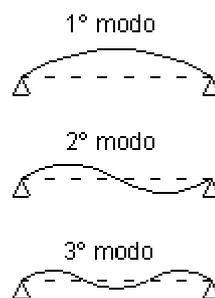


Fig. 1- Modos de vibração de uma barra

Em geral, para efeitos da prática, na grande maioria dos casos de interesse, a análise dinâmica pode ser realizada levando-se em conta apenas o primeiro modo de vibração, que recebe o nome de modo principal ou modo fundamental. Os demais modos de vibração, em geral, apresentam contribuição de menor significado, podendo ser até negligenciados nos estudos. Por essa razão, é conveniente promover uma eliminação de sinais correspondentes contidos no

movimento da estrutura, mediante uma filtragem apropriada. Essa tarefa é essencialmente uma das desempenhadas pelos chamados filtros de frequência, em particular o filtro de Butterworth, a merecer especial atenção.

Basicamente, conhecendo-se a frequência fundamental do elemento estrutural, pode-se apontar a solicitação a qual este está sujeito, conhecendo-se suas características físicas e geométricas, ou então verificar suas características físicas conhecendo-se a solicitação e as características geométricas. Em outras palavras, a estrutura nos revela muita coisa a partir de uma solicitação dinâmica, basta que sejam colhidas apenas informações de interesse.

Por outro lado, uma outra aplicação notável da filtragem de frequências é dada nos estudo da acústica, tendo-se em vista que a percepção da intensidade sonora é essencialmente um fenômeno dependente da frequência, uma vez que a sensibilidade do ouvido humano varia ao longo do espectro audível, exigindo-se uma média com ponderação para resultar numa medida que melhor reflita a audibilidade percebida na realidade. Assim sendo, nota-se que a filtragem de frequências está presente em muitos temas do cotidiano, sendo tema de grande interesse em vários ramos da engenharia.

Os filtros digitais, versão numérica dos filtros físicos, foram primeiramente um assunto de interesse maior na área da engenharia elétrica, sendo que os correspondentes operadores têm sido muito pouco divulgados no meio, por exemplo, da engenharia de estruturas. Mesmo porque, as aplicações na engenharia elétrica estão mais voltadas para a filtragem de várias frequências em uma faixa de frequência limitada, denominada banda; e nos estudos da dinâmica das estruturas os interesses estão mais voltados para a descrição do comportamento no decorrer do tempo de massas em movimento devido à ação de uma carga aplicada. Então, o objetivo deste trabalho é compreender em maior detalhe os procedimentos de cálculo envolvidos na filtragem digital de frequências, bem como especialmente o desenvolvimento dos operadores correspondentes.

Todavia, vale ressaltar que, dentro da área de conhecimento do processamento de sinais, são de grande interesse para a dinâmica das estruturas os procedimentos de análise de sinal, tais como os da transformada discreta de Fourier, conhecida pela sigla DFT (Discrete Fourier Transform), que proporciona uma versão discretizada da transformada de Fourier; o mais recente algoritmo de Wavelet, que consiste numa convolução apropriada na função que descreve um

signal; a chamada transformada Z, que promove uma discretização da transformada de Laplace; e tantos outros. Além disso, mais importante a observar é que, ao se desenvolver os algoritmos de filtragem digital de Butterworth, tem-se também em mente complementá-los.

Cumpra também assinalar que não é objeto deste trabalho a elaboração de estudos sobre a parte física dos filtros elétricos de frequência, presentes nos aparelhos de mensuração de grandezas da dinâmica das estruturas (acelerômetros, sismômetros e decibelímetros), inclusive os chamados anti-aliasing, e sim apenas focar os cálculos realizados na engenharia elétrica para a filtragem digital de frequências.

Para melhor visualização do fenômeno da filtragem em frequência, ilustra-se na figura 2 um sinal de entrada com componentes de várias frequências, e o resultado após o processo de filtragem, quando então as componentes de maior frequência já estão eliminadas do sinal.

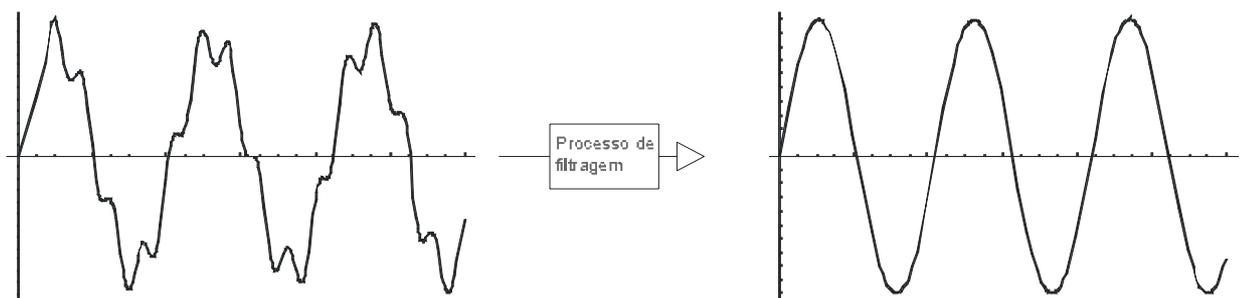


Fig. 2 – Exemplo de filtragem

Assim, o processo de filtragem inicia-se pela definição da frequência angular de corte ω_c desejada. No caso de um sinal típico da dinâmica das estruturas, a frequência de corte deve ser arbitrada de sorte a permitir a passagem de apenas o modo fundamental, por exemplo. Para tanto, o estudo inicia-se pela formulação do problema no domínio da frequência, o que se faz por meio do emprego da transformada de Fourier. Por meio da teoria da transformada de Fourier surge então uma relação algébrica entre a transformada do sinal de entrada e a transformada do sinal de saída, sendo que esta relação algébrica no domínio da frequência tem uma correspondente equação diferencial no domínio do tempo, cuja integração resulta no sinal filtrado.

Para ilustrar os procedimentos numéricos de resolução de uma genérica equação diferencial correspondente, escolhe-se de início a equação de movimento,

pois é esta a equação mais trabalhada na dinâmica das estruturas. Assim, no capítulo II é analisado um sistema de um grau de liberdade considerando-se carregamentos harmônicos senoidais e cossenoidais. Com isso, busca-se uma sugestiva analogia entre uma equação de filtragem digital e a correspondente equação de movimento, facilitando-se pois o entendimento mais direto do processo de filtragem. Conseqüentemente, cria-se neste capítulo um filtro mecânico, porém de difícil modelagem prática devido ao fato de se ter dificuldades para calibração do amortecimento. No capítulo III a transformada de Fourier é desenvolvida no sentido de aclarar a operação de maior interesse no domínio da frequência, bem como exibir com maiores detalhes as relações entre as operações de filtragem em frequência e as correspondentes equações diferenciais no domínio do tempo.

A generalização do processo de filtragem para uma equação diferencial de ordem qualquer é então elaborada no capítulo IV, sendo que a atenção é mais voltada agora para a técnica de escolha dos coeficientes da equação diferencial que proporciona melhor desempenho para filtragem. No capítulo V desenvolve-se, de maneira um tanto apropriada, o clássico algoritmo denominado algoritmo trapezoidal, que é o algoritmo numérico preconizado na literatura de engenharia elétrica. No capítulo VI encontra-se o desenvolvimento de um algoritmo provido de quadratura numérica de ordem elevada, que é o algoritmo proposto no presente trabalho; e cuja dedução, um tanto mais avantajada no montante de operações, apresenta um grau de convergência de maior ordem. Trata-se de um algoritmo da família dos chamados algoritmos hermitianos, por envolver combinações de valores da função e de suas derivadas. Estes algoritmos utilizam, pois, como incógnitas numéricas não só os valores da função mas também suas derivadas, diferentemente dos algoritmos dos filtros digitais baseados na transformada Z, que utilizam apenas valores da função sinal incógnita a processar numericamente.

No capítulo VII encontram-se análises comparativas entre os algoritmos elaborados no tocante aos seus erros locais, com diversos tipos de sinais, inclusive sinais com parcela randômica.

A título de anexo, o capítulo VIII apresenta o embasamento teórico para a formulação de filtros digitais de frequência de acordo com a literatura especializada. Trata-se da transformada Z, proveniente da transformada de Laplace. Finalizando, o capítulo IX é dedicado às considerações finais, concluindo a dissertação.

Capítulo II

SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE

2.1. INTRODUÇÃO

O estudo detalhado da equação de movimento de um sistema de um grau de liberdade, como ilustrado na figura 2.1, constitui-se em ponto de partida interessante para o estudo do processo de filtragem em frequência do tipo clássico de Butterworth[1], tendo-se em vista que há uma correspondência notável com o filtro de dois pólos, mediante ajuste adequado de parâmetros.

A figura 2.1 exhibe um sistema de um grau de liberdade, onde, conforme a notação clássica, k é a rigidez do sistema, c o amortecimento, m a inércia, $x(t)$ a resposta e $P.f(t)$ a solitação, sendo P uma carga de referência e $f(t)$ a função que descreve a variação da solitação no tempo[2].

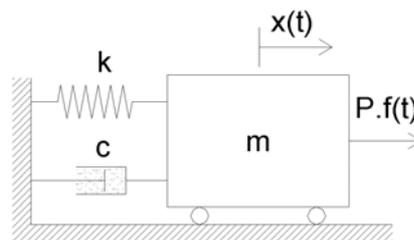


Fig. 2.1 – Sistema de um grau de liberdade

É oportuno assinalar que a solitação $P.f(t)$ pode ser entendida como um sinal de entrada e a resposta $x(t)$ o sinal de saída (depois de passado pelo filtro).

Apresenta-se em seguida a equação de equilíbrio dinâmico do sistema, bem como sua redação na forma adimensional clássica. A solução homogênea e também as particulares no caso senoidal e cossenoidal são

apresentadas na seqüência, finalizando com as soluções completas desses casos harmônicos.

2.2. EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

A figura 2.2 exibe a massa genérica do sistema e as ações nela atuantes, quais sejam, a força de mola $F_k(t)$, a força de amortecimento $F_c(t)$ e a força atuante $P.f(t)$.

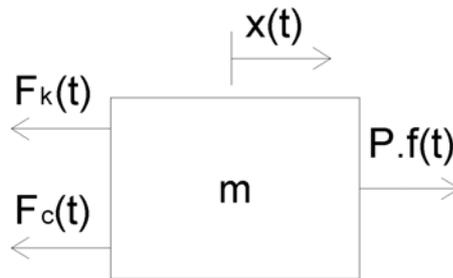


Fig. 2.2 – Forças atuantes

Tendo-se em vista a segunda lei de Newton, o equilíbrio dinâmico do sistema escreve-se:

$$F(t) - F_c(t) - F_k(t) = m.\ddot{x}(t) \quad (2.1)$$

onde se emprega a clássica notação por pontos superiores para indicar a derivação na variável tempo; ou ainda:

$$m.\ddot{x}(t) + c.\dot{x}(t) + k.x(t) = P.f(t) \quad (2.2)$$

sendo assumido, pois, a modelagem dita linear (massa, amortecimento e rigidez constantes, e relação linear para força de mola e de amortecimento).

A equação (2.2) ganha, na forma adimensional, a seguinte escrita:

$$\ddot{\rho}(t) + 2\gamma\omega_n\dot{\rho}(t) + \omega_n^2\rho(t) = \omega_n^2f(t) \quad (2.3)$$

onde:

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \frac{P}{k} \\ \rho(t) &= \frac{x(t)}{x_e(t)} \\ \omega_n &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \gamma &= \frac{c}{2m\omega_n} \end{aligned} \quad (2.4)$$

sendo x_e o deslocamento estático de referência, $\rho(t)$ o movimento adimensional, ω_n a frequência angular natural e γ o coeficiente de amortecimento.

Como se sabe, a solução geral da equação (2.3) pode ser separada em duas partes, sendo que a primeira corresponde ao caso do movimento sem carregamento aplicado e atendendo às condições iniciais do movimento (posição e velocidade). A segunda parte da solução geral, chamada de solução particular, depende apenas do carregamento aplicado.

2.3. SOLUÇÃO HOMOGÊNEA

A equação de movimento na ausência de carregamento, ou seja:

$$\ddot{\rho}_h(t) + 2\gamma\omega_n\dot{\rho}_h(t) + \omega_n^2\rho_h(t) = 0 \quad (2.5)$$

tem, como sabido, solução tipo exponencial:

$$\rho_h(t) = Ae^{\lambda t} \quad (2.6)$$

Substituindo o expresso em (2.6) na equação de movimento (2.5), obtém-se duas soluções para o parâmetro λ , quais sejam:

$$\lambda_1 = -\gamma\omega_n + \omega_n\sqrt{\gamma^2 - 1} \quad (2.7)$$

$$\lambda_2 = -\gamma\omega_n - \omega_n\sqrt{\gamma^2 - 1}$$

Assim sendo, a solução homogênea pode então ser expressa por:

$$\rho_h(t) = \left[A_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - 1}\omega_n t} + A_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - 1}\omega_n t} \right] e^{-\gamma\omega_n t} \quad (2.8)$$

onde A_1 e A_2 são as constantes de integração.

Examinando-se o expresso em (2.8), verifica-se que, no caso onde o coeficiente de amortecimento γ é menor que a unidade, que é o de interesse, as potências tornam-se complexas, e, segundo as fórmulas de Euler[2], a solução (2.8) adquire uma nova redação:

$$\rho_h(t) = [C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)] e^{-\gamma \omega_n t} \quad (2.9)$$

onde:

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1 + A_2 \\ C_2 &= i(A_1 - A_2) \\ \omega_1 &= \sqrt{1 - \gamma^2} \omega_n \end{aligned} \quad (2.10)$$

na nomenclatura da dinâmica estrutural, ω_1 é denominada frequência natural amortecida.

2.4. SOLUÇÃO PARTICULAR PARA CARREGAMENTO SENOIDAL

Para simplificar a exposição, admite-se que a solução particular da equação (2.3) no caso de variação senoidal de frequência angular ω , ou seja $f(t) = \sin(\omega t)$, pode ser expressa na forma:

$$\rho_p(t) = C \cdot \sin(\omega t - \varphi) \quad (2.11)$$

onde C é o fator de amplificação e φ o ângulo de defasagem.

Substituindo-se (2.11) em (2.3) tem-se:

$$(-C\omega^2 \sin(\omega t - \varphi)) + 2\gamma\omega_n(C\omega \cos(\omega t - \varphi)) + \omega_n^2(C \cdot \sin(\omega t - \varphi)) = \omega_n^2 \sin(\omega t) \quad (2.12)$$

ou ainda:

$$C[(\omega_n^2 - \omega^2) \sin(\omega t - \varphi) + 2\gamma\omega_n \omega \cos(\omega t - \varphi)] = \omega_n^2 \sin(\omega t) \quad (2.13)$$

cuja solução implica em:

$$C \left\{ \begin{aligned} &\sin(\omega t) [\cos(\varphi)(\omega_n^2 - \omega^2) + \sin(\varphi)2\gamma\omega_n \omega] + \dots \\ &+ \cos(\omega t) [\cos(\varphi)2\gamma\omega_n \omega - \sin(\varphi)(\omega_n^2 - \omega^2)] \end{aligned} \right\} = \omega_n^2 \sin(\omega t) \quad (2.14)$$

resultando:

$$C[\cos(\varphi)(\omega_n^2 - \omega^2) + \sin(\varphi)2\gamma\omega_n \omega] = \omega_n^2 \quad (2.15)$$

$$C[\cos(\varphi)2\gamma\omega_n \omega - \sin(\varphi)(\omega_n^2 - \omega^2)] = 0$$

A solução não trivial ($C \neq 0$) da primeira de (2.15) conduz a:

$$\cos(\varphi)2\gamma\omega_n\omega - \sin(\varphi)(\omega_n^2 - \omega^2) = 0 \quad (2.16)$$

o que implica em:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right) \quad (2.17)$$

ou ainda:

$$\sin(\varphi) = \frac{2\gamma\omega_n\omega}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega_n\omega)^2}} \quad (2.18)$$

$$\cos(\varphi) = \frac{\omega_n^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega_n\omega)^2}}$$

Finalmente, a substituição de (2.18) na primeira de (2.15) fornece o fator de amplificação:

$$C = \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + (2\gamma\alpha)^2}} \quad (2.19)$$

onde:

$$\alpha = \frac{\omega}{\omega_n} \quad (2.20)$$

A solução particular, nesse caso, passa a ser expressa por:

$$\rho_p(t) = \frac{\sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + (2\gamma\alpha)^2}} \quad (2.21)$$

onde:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\gamma\alpha}{1 - \alpha^2}\right) \quad (2.22)$$

estabelecendo-se então a solução particular de uma entrada senóide.

2.5. SOLUÇÃO PARTICULAR PARA CARREGAMENTO COSSENOIDAL

Analogamente ao procedimento anterior, a realização da solução de uma solicitação agora cossenoidal é feita reescrevendo-se (2.15) da seguinte forma:

$$C[\cos(\varphi)(\omega_n^2 - \omega^2) + \text{sen}(\varphi)2\gamma\omega_n\omega] = 0 \quad (2.23)$$

$$C[\cos(\varphi)2\gamma\omega_n\omega - \text{sen}(\varphi)(\omega_n^2 - \omega^2)] = \omega_n^2$$

resultando, pois:

$$\cos(\varphi)(\omega_n^2 - \omega^2) + \text{sen}(\varphi)2\gamma\omega_n\omega = 0 \quad (2.24)$$

com:

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{1 - \alpha^2}{2\gamma\alpha}\right) \quad (2.25)$$

sendo oportuno notar que o ângulo φ dado por (2.25) é defasado de $\pm\pi/2$ em relação ao ângulo dado por (2.22). Assim sendo, a solução pode ser expressa por:

$$\rho_p(t) = \frac{\text{sen}(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + (2\gamma\alpha)^2}} \quad (2.26)$$

com:

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{1 - \alpha^2}{2\gamma\alpha}\right) \quad (2.27)$$

ou, como mais apresentado na literatura:

$$\rho_p(t) = \frac{\cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + (2\gamma\alpha)^2}} \quad (2.28)$$

com

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\gamma\alpha}{1 - \alpha^2}\right) \quad (2.29)$$

encerrando-se a formulação nos aspectos de interesse.

2.6. ANÁLISE DA SOLUÇÃO GERAL

A combinação da solução homogênea com a solução particular resulta na solução geral da equação de movimento. No caso de carregamento senoidal, por exemplo, tem-se:

$$\rho(t) = [C_1 \cos(\omega_1 t) + C_2 \sin(\omega_1 t)]e^{-\gamma\omega_n t} + \frac{\sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + (2\gamma\alpha)^2}} \quad (2.30)$$

sendo que a solução homogênea é responsável pela parte transitória do movimento, porquanto afetada por um exponencial negativo crescente com o tempo, e a solução particular a parte permanente da solução, visto que não é afetada por termos com exponencial negativo no domínio do tempo.

No processo de filtragem, as condições iniciais do sinal são consideradas nulas, como no caso de vibração forçada, de sorte a não se ter em conta o efeito de eventuais carregamentos externos. A nulidade das condições iniciais implica em:

$$[C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)]e^0 + \frac{\sin(-\varphi)}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + (2\gamma\alpha)^2}} = 0 \quad (2.31)$$

$$[-C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0)]\omega_1 e^0 - \gamma\omega_n [C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0)]e^0 + \frac{\cos(-\varphi)}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + (2\gamma\alpha)^2}} = 0$$

cuja solução em C_1 e C_2 , levada em (2.30), permite redigir a solução geral:

$$\rho(t) = \frac{\omega_1 \sin(\omega t - \varphi) + [\sin(\omega_1 t)(\gamma\omega_n \sin(\varphi) - \omega \cos(\varphi)) + \omega_1 \cos(\omega_1 t) \sin(\varphi)]e^{-\gamma\omega_n t}}{\omega_1 \sqrt{(\alpha^2 - 1)^2 + (2\gamma\alpha)^2}} \quad (2.32)$$

indicando-se que a parte permanente da solução é dada por:

$$\rho(t) = \frac{\sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{(\alpha^2 - 1)^2 + (2\gamma\alpha)^2}} \quad (2.33)$$

Nos problemas correntes da dinâmica estrutural, os valores do amortecimento γ são baixos, algo como 0,01 a 0,02 grosso modo. Todavia, no processo de filtragem de Butterworth o valor de γ é arbitrado como $\sqrt{2}/2$, ganhando a equação (2.33) a escrita:

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha^4}} \text{sen}(\omega t - \varphi) \quad (2.34)$$

A figura 2.3 ilustra a variação da amplitude da resposta adimensional segundo equação (2.34), mostrando-se que, para α menor que a unidade, ou seja $\omega < \omega_n$, a resposta é próxima da unidade, e, para $\omega > \omega_n$ ($\alpha > 1$) a resposta fica bastante reduzida, podendo ser entendida a frequência $\omega = \omega_n$ como sendo a frequência de corte do filtro, dito passa-baixa nesse caso.

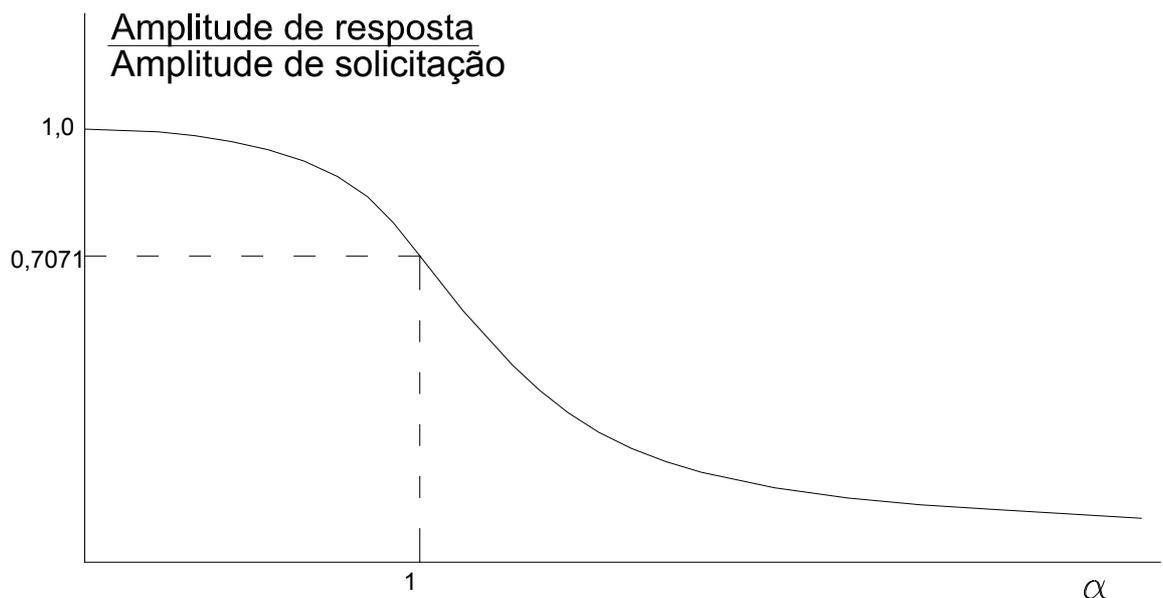


Fig. 2.3 – Fator de ampliação da amplitude

Na visão de um engenheiro de estruturas, a figura 2.3 mostra que, para uma frequência de carregamento menor que a natural, a resposta tem seu movimento com amplitude muito próxima da amplitude da solicitação, enquanto que, se o carregamento tiver frequência maior que a natural do sistema, a amplitude é reduzida drasticamente. Já na visão de um engenheiro elétrico, o gráfico lembra um filtro que retém sinais de frequência elevada, deixando passar apenas o de baixa frequência, ou seja, trata-se de um filtro do tipo passa-baixa.

Vale registrar que o valor particular do coeficiente de amortecimento dado por:

$$\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2.35)$$

implica na eliminação do termo α^2 pertencente à expansão polinomial do denominador da equação (2.2), resultando numa forma notável que consiste exatamente no objetivo do filtro de Butterworth. Em verdade o filtro de Butterworth é uma escolha adequada dos coeficientes de uma equação diferencial para que sejam conservadas as amplitudes para certos valores da frequência e anuladas outras.

Capítulo III

TRANSFORMADA DE FOURIER

3.1. INTRODUÇÃO

A transformada de Fourier[3] é uma ferramenta matemática de grande utilidade no estudo das equações diferenciais, especialmente no caso das envolvidas no problema da filtragem de freqüências, tendo-se em vista que, no domínio transformado, uma equação diferencial na variável tempo converte-se numa equação algébrica no domínio da freqüência, de manipulação mais imediata.

No sentido de facilitar a exposição e o entendimento, inicia-se pela abordagem da série de Fourier, cujo desenvolvimento permite explicitar a formulação da transformada de Fourier, bem como sua formulação inversa. Na seqüência a propriedade da transformada de derivadas é estudada em maior detalhe, visando facilitar a análise das equações diferenciais, uma vez que para a transformada de Fourier vale o princípio da linearidade. A aplicação na equação de movimento, mostrada em seguida, exhibe as etapas operacionais de maior interesse.

3.2. SÉRIE DE FOURIER

Como sabido[3], uma função periódica $f(t)$ de período T , ou seja, $f(t)=f(t+T)$, pode ser desenvolvida segundo a série de Fourier:

$$f(t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \text{sen}(k\omega t) + b_k \text{cos}(k\omega t)) \quad (3.1)$$

onde:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$a_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f(t) \text{sen}(k\omega t) dt$$

$$b_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f(t) \text{cos}(k\omega t) dt \quad (3.2)$$

$$b_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^T f(t) dt$$

3.3. TRANSFORMADA DE FOURIER

A transformada da Fourier decorre da série de Fourier com a passagem ao limite do o período tendendo para infinito. Assim, ω como expresso na primeira de (3.2), tende para um diferencial $d\omega$. O termo fora do somatório em (3.1) tende para zero, e o somatório tende para a integral:

$$f(t) = \int_0^{\infty} (A(\omega) \text{sen}(\omega t) + B(\omega) \text{cos}(\omega t)) d\omega \quad (3.3)$$

onde:

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\tau) \text{sen}(\omega \tau) d\tau$$

(3.4)

$$B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\tau) \text{cos}(\omega \tau) d\tau$$

são conhecidas como integrais de Fourier.

A expressão (3.3) pode assumir a forma:

$$f(t) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\tau) (\sin(\omega\tau)\sin(\omega t) + \cos(\omega\tau)\cos(\omega t)) d\tau \right) d\omega \quad (3.5)$$

ou ainda, tendo-se em vista a propriedade trigonométrica da soma de ângulos:

$$f(t) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\omega}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega(t - \tau)) d\omega \right) d\tau \quad (3.6)$$

Por outro lado, sendo o cosseno uma função par e o seno uma função ímpar, pode-se escrever:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cos(\omega(t - \tau)) d\omega = 2 \int_0^{\infty} f(\tau) \cos(\omega(t - \tau)) d\omega \quad (3.7)$$

$$i \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \sin(\omega(t - \tau)) d\omega = 0$$

onde a multiplicação da segunda equação de (3.7) pela unidade complexa não altera, naturalmente, o resultado.

Somando-se membro a membro as equações (3.7) tem-se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{i\omega(t-\tau)} d\omega = 2 \int_0^{\infty} f(\tau) \cos(\omega(t - \tau)) d\omega \quad (3.8)$$

o que permite reescrever (3.6) na forma:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \right) e^{i\omega t} d\omega \quad (3.9)$$

verificando-se, pois, de imediato que:

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3.10)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

onde a primeira de (3.10) define a transformada de Fourier, e a segunda de (3.10) a sua correspondente inversa.

3.4. PROPRIEDADE DA TRANSFORMADA DE INTERESSE NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Inicialmente, demonstra-se o princípio da linearidade, fundamental para a aplicação da transformada em equações diferenciais. Assim, no caso de uma função $f(t)$ composta, por exemplo, por uma combinação linear entre duas funções $a(t)$ e $b(t)$, ou seja:

$$f(t) = c_1 a(t) + c_2 b(t) \quad (3.11)$$

onde c_1 e c_2 são constantes. Nesse caso, devido a transformação ser da forma de uma integração, onde a integral da soma é a soma das integrais, a transformada de $f(t)$ relaciona-se linearmente com as transformadas de $a(t)$ e de $b(t)$, como facilmente verifica-se nas passagens a seguir:

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt = \int_0^{\infty} (c_1 a(t) + c_2 b(t))e^{-i\omega t} dt \quad (3.12)$$

$$F(\omega) = c_1 \int_0^{\infty} a(t)e^{-i\omega t} dt + c_2 \int_0^{\infty} b(t)e^{-i\omega t} dt$$

resultando:

$$F(\omega) = c_1 A(\omega) + c_2 B(\omega) \quad (3.13)$$

Dentre as propriedades da transformada de Fourier, apresenta interesse mais direto no estudo da filtragem de frequência a propriedade dita de derivação, a merecer um tratamento mais detalhado no que se segue. Seja transformada da derivada de função representada como sendo $\dot{F}(\omega)$, ou seja:

$$\dot{F}(\omega) = \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-i\omega t} dt \quad (3.14)$$

onde o ponto superior na transformada apenas simboliza tratar-se da transformada da derivada. Por outro lado, a integração por partes de (3.14) permite explicitar:

$$\int_0^{\infty} \frac{df}{dt}(t) e^{-i\omega t} dt = -\int_0^{\infty} f(t) \frac{\partial e^{-i\omega t}}{\partial t} dt + \left(f(t) e^{-i\omega t} \right) \Big|_{t=0}^{t=\infty} \quad (3.15)$$

Admitindo-se atendidas as condições de Dirichlet, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, tem-se finalmente que:

$$\dot{F}(\omega) = i\omega F(\omega) - f(0) \quad (3.16)$$

A transformada da segunda derivada, por conseguinte, pode ser redigida como:

$$\ddot{F}(\omega) = (i\omega)^2 F(\omega) - i\omega f(0) - \left. \frac{df(t)}{dt} \right|_{t=0} \quad (3.17)$$

uma vez que, por recorrência, a derivada segunda é, em verdade, a derivada da derivada primeira.

Como regra geral, pode-se provar que:

$$\int_0^{\infty} \frac{d^N f(t)}{dt^N} e^{-i\omega t} dt = (i\omega)^N F(\omega) - \sum_{j=0}^{N-1} (i\omega)^j \left. \frac{d^{(N-j)} f(t)}{dt^{(N-j)}} \right|_{t=0} \quad (3.18)$$

Nota-se que esta propriedade permite deixar as transformadas das derivadas de uma função $f(t)$ dependentes apenas de sua transformada $F(\omega)$ e das condições iniciais. Esta característica da Transformada de Fourier permite estudar equações diferenciais, se conhecidas suas condições iniciais.

3.5. TRANSFORMADA DA FUNÇÃO SENOIDAL

No sentido de estudar a transformada da função senoidal, ou seja:

$$f(t) = \text{sen}(\omega_0 t) \quad (3.19)$$

ou ainda em notação complexa:

$$f(t) = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} \quad (3.20)$$

torna-se necessário, por conveniência, formular a questão no sentido inverso, ou seja:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-i\omega_0 t}}{2i} \quad (3.21)$$

resultando:

$$F(\omega) = \frac{\pi}{i} (\delta(\omega_0) - \delta(-\omega_0)) \quad (3.22)$$

onde se emprega a clássica função delta de Dirac nas posições $-\omega_0$ e $+\omega_0$, porquanto, verifica-se facilmente que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\pi}{i} (\delta(\omega_0) - \delta(-\omega_0)) \right] e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2i} e^{i\omega_0 t} - \frac{1}{2i} e^{-i\omega_0 t} \quad (3.23)$$

A figura 3.1a mostra esquematicamente a transformada de Fourier da função senoidal e a figura 3.1b a transformada da função cossenoidal obtida de maneira similar.

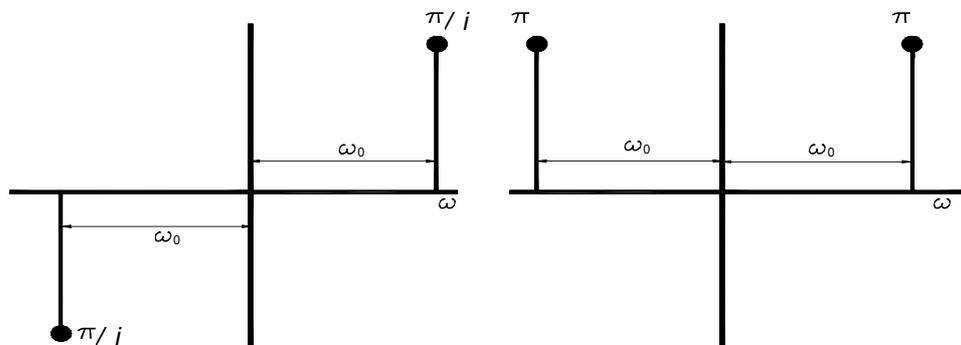


Fig. 3.1 – Transformada de Fourier de seno e cosseno respectivamente

3.6. APLICAÇÃO NA EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

No sentido de mostrar a aplicação da transformada de Fourier na solução de equações diferenciais lineares, retome-se o caso da equação de movimento considerando-se carregamento senoidal, ou seja:

$$\ddot{\rho}(t) + 2\gamma\omega_n\dot{\rho}(t) + \omega_n^2\rho(t) = \omega_n^2 \text{sen}(\omega_0 t) \quad (3.24)$$

Tomando-se a transformada de Fourier em ambos os membros de (3.24), tem-se:

$$(i\omega)^2 \rho(\omega) + 2\gamma\omega_n (i\omega)\rho(\omega) + \omega_n^2 \rho(\omega) = \omega_n^2 [i\pi(\delta(-\omega_0) - \delta(\omega_0))] \quad (3.25)$$

o que permite explicitar a solução no domínio da frequência como:

$$\rho(\omega) = \frac{i\pi(\delta(-\omega_0) - \delta(\omega_0))}{1 - \alpha^2 + i2\gamma\alpha} \quad (3.26)$$

Por outro lado, procedendo-se a transformação inversa tem-se:

$$\rho(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\pi(\delta(-\omega_0) - \delta(\omega_0))}{1 - \alpha^2 + i2\gamma\alpha} e^{i\omega t} d\omega \quad (3.27)$$

que resulta em:

$$\rho(t) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{i\pi}{1 - \alpha^2 + i2\gamma\alpha} e^{-i\omega_0 t} - \frac{i\pi}{1 - \alpha^2 + i2\gamma\alpha} e^{i\omega_0 t} \right] \quad (3.28)$$

ou ainda, transpondo (3.28) para a forma trigonométrica:

$$\rho(t) = \frac{A}{\sqrt{(1 - \alpha^2)^2 + (2\gamma\alpha_0)^2}} \text{sen}(\omega_0 t - \varphi) \quad (3.29)$$

onde operações no domínio complexo de alguma monta foram necessárias, sendo que:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{2\gamma\alpha}{1 - \alpha^2}\right) \quad (3.30)$$

encerrando-se assim a aplicação da transformada na equação de movimento.

3.7. APLICAÇÃO DA TRANSFORMADA EM UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE ORDEM GENÉRICA

Uma equação diferencial ordinária pode ser generalizada como sendo uma igualdade entre uma função de entrada $x(t)$ no segundo membro e um somatório

de N termos no primeiro membro envolvendo derivadas de uma função de saída $y(t)$, ou incógnita, ou seja:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = x(t) \quad (3.31)$$

onde os termos a_k são constantes e o expoente k nas derivadas indica o grau de derivação.

Tomando-se a transformada de Fourier em ambos os membros de (3.31) tem-se:

$$\sum_{k=0}^N a_k \left[(i\omega)^k Y(\omega) - \sum_{j=0}^{k-1} (i\omega)^j \frac{d^{(k-j-1)} y(t)}{dt^{(k-j-1)}} \Big|_{t=0} \right] = X(\omega) \quad (3.32)$$

Onde por outro lado, sendo as condições iniciais nulas, a igualdade (3.32) torna-se:

$$Y(\omega) \sum_{k=0}^N a_k (i\omega)^k = X(\omega) \quad (3.33)$$

e, nesse caso, a relação existente entre $Y(\omega)$ e $X(\omega)$ escreve-se:

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (3.34)$$

onde $H(\omega)$ é a denominada função de resposta em frequência, e expressa por:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sum_{k=0}^N a_k (i\omega)^k} \quad (3.35)$$

encerrando-se dessa forma o procedimento necessário para transformar uma equação diferencial no domínio do tempo para uma equação algébrica no domínio da frequência.

Capítulo IV

EQUAÇÃO DE FILTRAGEM

4.1. INTRODUÇÃO

O procedimento analítico envolvido na filtragem de freqüências segundo o modelo de Butterworth é o objeto do presente capítulo. Inicia-se apresentando as idéias básicas da filtragem de freqüências, discutindo-se os filtros do tipo passa-baixa, e os filtros dele derivados, como o passa-alta, o passa-banda, e o rejeita-banda.

Como já mostrado no capítulo III, a integração de equações diferenciais lineares a coeficientes constantes no domínio da freqüência resume-se numa operação algébrica de multiplicação da transformada de Fourier do sinal de entrada (carregamento no caso da equação de movimento) pela função de resposta em freqüência, que depende dos coeficientes da equação diferencial. Assim sendo, o problema da filtragem de freqüência, como se pode perceber, é governado basicamente pela função de resposta em freqüência $H(\omega)$.

O modelo de filtragem de Butterworth consiste essencialmente em se buscar uma forma adequada para o módulo da função de resposta em freqüência, e conseqüente escolha apropriada dos parâmetros da equação diferencial correspondente, e com ordens variáveis, de modo a conferir um grau de eficiência crescente ao processo de filtragem. A literatura especializada nesse tema, via de

regra, apresenta o assunto por meio da transformada de Laplace, e não pela transformada de Fourier aqui considerada. Todavia, tal escolha se deve ao fato de que, em dinâmica estrutural, assunto de maior domínio para os engenheiros civis, a transformada de Fourier é, sem dúvida, bem mais empregada e trabalhada.

4.2 CONCEITUAÇÃO DE FILTRO

A idéia básica do filtro de freqüências está associada naturalmente a um dispositivo que retém algo indesejado, como no caso mais conhecido de uma peneira, deixando-se passar algo que se deseja. Assim sendo, no caso de um sinal genérico contendo componentes de diversas freqüências, o que pode ser entendido como uma sobreposição de sinais harmônicos, sua filtragem no domínio da freqüência mediante filtro passa-baixa, por exemplo, consiste na eliminação das componentes de freqüência acima de uma especificada, normalmente referida como freqüência de corte.

No domínio da freqüência, como já referido no capítulo anterior, denomina-se $X(\omega)$ a transformada de Fourier do sinal de entrada e $Y(\omega)$ a transformada de Fourier do sinal de saída, ou seja, do sinal filtrado. Para se proceder ao exame do processo de filtragem, retome-se a função de resposta em freqüência $H(\omega)$, que consiste na relação entre $Y(\omega)/X(\omega)$, como visto na equação (3.34). Colocando-se então a relação (3.34) na forma:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (4.1)$$

Notando-se em primeira vista que, numa situação ideal, quando se tem $H(\omega)=1$ conserva-se integralmente na resposta o correspondente sinal de entrada (o filtro não retém nada), e que quando $H(\omega)=0$ anula-se o sinal de resposta (o filtro não deixa passar nada). Todavia, essa forma ideal para $H(\omega)$ não dispõe de uma equação diferencial correspondente no domínio do tempo ou freqüência.

Por outro lado, nos casos práticos, tem-se, em geral, uma relação entre o sinal de entrada e o de saída no domínio do tempo dada por uma equação diferencial, cuja transformada de Fourier implica numa função $H(\omega)$ complexa como expressa na forma (3.35). Assim, considerando-se que $H(\omega)$ e $X(\omega)$ sejam complexos, em notação polar a equação (4.1) permite escrever:

$$|Y(\omega)| = |H(\omega)||X(\omega)|$$

$$\arg[Y(\omega)] = \arg[H(\omega)] + \arg[X(\omega)]$$
(4.2)

onde o módulo da resposta resulta do produto do módulo do sinal de entrada pelo módulo da função de resposta em frequência, e o argumento da resposta (ângulo no plano de Gauss) resulta na soma dos argumentos (emprega-se em (4.2) a notação clássica de módulo entre barras verticais).

Uma vez que se procura na filtragem conservar a amplitude do sinal desejado, isso implica naturalmente em se ter o módulo $|H(\omega)|$ próximo da unidade para a faixa de valores desejados de frequência, e também que o módulo $|H(\omega)|$ seja nulo em caso contrário.

4.3. TIPOS DE FILTRO

A figura 4.1 exibe em situação ideal os quatro tipos de filtro de maior interesse. O filtro passa-baixa é aquele em que somente as componentes com frequências abaixo de um certo valor da frequência de corte são coletadas (Fig.4.1.1). De maneira similar, o filtro passa-alta retém as componentes com frequências abaixo da frequência de corte e conserva as com frequências acima (Fig.4.1.2). O filtro passa-banda coleta apenas as componentes com frequências dentro de uma faixa (Fig.4.1.3). O último tipo de filtro é o denominado elimina-banda, que exclui apenas as componentes com frequências numa determinada faixa (Fig.4.1.4).

É fácil verificar que os filtros passa-alta, passa-banda e elimina-banda podem ser obtidos em função do filtro passa-baixa. Por exemplo, o filtro passa-alta opera como se o sinal de entrada fosse subtraído do sinal de saída do filtro passa-baixa, o passa-banda resulta da aplicação de um filtro passa-alta com $\omega = \omega_p$, e sobre o resultado aplicando-se um filtro passa-baixa com $\omega = \omega_c$, o rejeita-banda opera como se subtraísse do sinal de entrada o resultado de um filtro passa-banda.

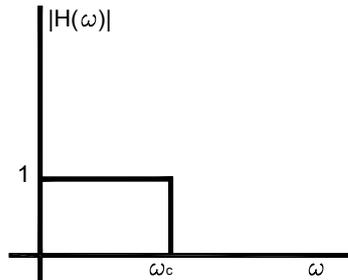


Fig. 4.1.1. - Passa-baixa

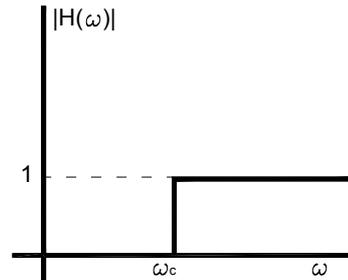


Fig. 4.1.2. - Passa-alta

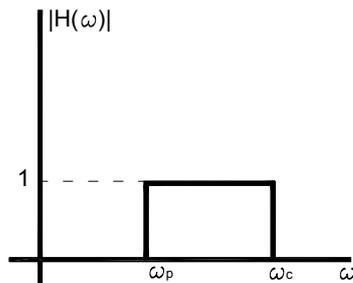


Fig. 4.1.3. - Passa-banda

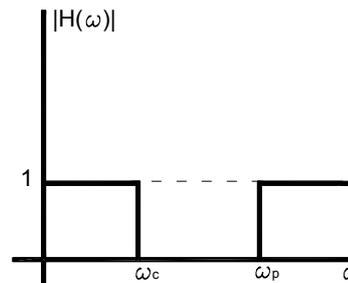


Fig. 4.1.4. -

Fig. 4.1 – Tipos básicos de filtros

4.4. TIPOS DE EQUAÇÕES PARA $H(\omega)$

Um filtro passa-baixa ideal seria aquele onde $|H(\omega)|=1$ para frequências abaixo da frequência de corte ($\omega < \omega_c$) e $|H(\omega)|=0$ para as demais frequências, ou seja ($\omega > \omega_c$). Todavia, vale registrar que um primeiro inconveniente dessa situação ideal seria o fato de que tais condições não seriam realizáveis do ponto de vista analítico, dada a descontinuidade no ponto $\omega = \omega_c$. A literatura oferece três tipos de equações práticas para $H(\omega)$. O

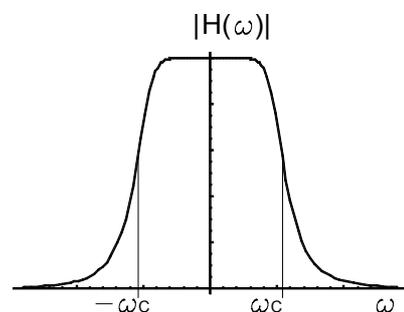


Fig. 4.2.1. - Filtro de Butterworth

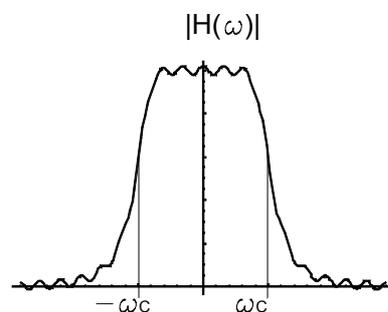


Fig. 4.2.2. - Filtro de Chebyshev

primeiro, mais conhecido, é o chamado filtro de Butterworth (Fig.4.2.1), que será examinado neste trabalho, e que é uma aproximação polinomial com apenas um ponto de inflexão em ω_c . Os outros dois tipos são o Chebyshev e o

Elíptico, chamados filtros com flutuação (Fig.4.2.2), que apresentam formas parecidas onde uma pequena oscilação está presente ao longo de $|H(\omega)|$. A vantagem destes dois últimos tipos é que o corte apresenta zona de transição mais abrupta no ponto ω_c , aproximando-se, nesse sentido, mais do filtro ideal.

Na literatura o filtro de Butterworth é tratado por meio da transformada de Laplace, que é bastante similar à transformada de Fourier, exceto pelo fato de lidar com exponenciação com valores reais, e não complexos.

4.5. FUNÇÃO $H(\omega)$

Retomando-se o resultado exposto no final do estudo das equações diferenciais levado a efeito no capítulo III, tem-se a seguinte redação para a função de resposta em frequência $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{1}{\sum_{k=0}^N a_k (i\omega)^k} \quad (4.3)$$

sendo N o grau da equação diferencial correspondente, que também é chamado de número de pólos do filtro, como adiante esclarecido.

4.6. APLICAÇÃO PARA UMA ENTRADA SENOIDAL

Considerando-se que o sinal de entrada é uma senóide (sinal harmônico simples), ou seja:

$$x(t) = A \cdot \text{sen}(\omega_0 t) \quad (4.4)$$

tem-se, como mostrado no capítulo precedente, que sua transformada de Fourier assim se expressa:

$$X(\omega) = -iA\pi(\delta(\omega_0) - \delta(-\omega_0)) \quad (4.5)$$

e, nesse caso, o expresso em (4.1) fica:

$$Y(\omega) = H(\omega)[-iA\pi(\delta(\omega_0) - \delta(-\omega_0))] \quad (4.6)$$

ou ainda, na forma inversa:

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) [-iA\pi(\delta(\omega_0) - \delta(-\omega_0))] e^{i\omega t} d\omega \quad (4.7)$$

Por outro lado, tendo-se em vista que a função delta de Dirac faz com que a integral se reduza ao $d\omega$ do ponto ω_0 , tem-se:

$$y(t) = \frac{A}{2i} (H(\omega_0)e^{i\omega_0 t} - H(-\omega_0)e^{-i\omega_0 t}) \quad (4.8)$$

onde, dispondo na forma trigonométrica os exponenciais e providenciando-se conveniente fatoração chega-se à:

$$y(t) = \frac{A}{2i} [\cos(\omega_0 t)(H(\omega_0) - H(-\omega_0)) + i \operatorname{sen}(\omega_0 t)(H(\omega_0) + H(-\omega_0))] \quad (4.9)$$

onde:

$$H(\omega_0) = \frac{1}{\sum_{k=0}^N a_k (i\omega_0)^k} \quad (4.10)$$

$$H(-\omega_0) = \frac{1}{\sum_{k=0}^N a_k (-i\omega_0)^k}$$

que, em princípio, têm forma complexa. Pode-se notar que o somatório no denominador tem valores reais e imaginários. A parte real das duas formas é sempre igual para valores pares do fator k , e a parte imaginária terá sinal oposto nos casos de k ser ímpar. Dispondo de uma forma mais confortável, $H(\omega_0)$ e $H(-\omega_0)$ podem ser escritos como:

$$H(\omega_0) = \frac{1}{\operatorname{Re} + i \operatorname{Im}} = \frac{\operatorname{Re} - i \operatorname{Im}}{\operatorname{Re}^2 + \operatorname{Im}^2} \quad (4.11)$$

$$H(-\omega_0) = \frac{1}{\operatorname{Re} - i \operatorname{Im}} = \frac{\operatorname{Re} + i \operatorname{Im}}{\operatorname{Re}^2 + \operatorname{Im}^2}$$

onde o argumento de $H(\omega_0)$ se expressa:

$$\arg[H(\omega_0)] = \arctan\left(-\frac{\operatorname{Im}}{\operatorname{Re}}\right) \quad (4.12)$$

sendo o módulo dado por:

$$|H(\pm\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}} \quad (4.13)$$

verificando-se assim uma identidade esperada.

Assim sendo, fazendo-se as operações indicadas em (4.9) para $H(\omega)$, que consiste na soma e subtração dos valores em (4.11), tem-se:

$$\begin{aligned} H(\omega_0) + H(-\omega_0) &= \frac{2 \text{Re}}{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} \\ H(\omega_0) - H(-\omega_0) &= \frac{-2i \text{Im}}{\text{Re}^2 + \text{Im}^2} \end{aligned} \quad (4.14)$$

e, denominando-se θ o argumento de $H(\omega_0)$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \text{sen}(\theta) &= -\frac{\text{Im}}{\sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}} \\ \text{cos}(\theta) &= \frac{\text{Re}}{\sqrt{\text{Re}^2 + \text{Im}^2}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Com isso, uma nova redação pode ser alcançada:

$$\begin{aligned} H(\omega_0) + H(-\omega_0) &= 2|H(\omega_0)| \text{cos}(\theta) \\ H(\omega_0) - H(-\omega_0) &= 2i|H(\omega_0)| \text{sen}(\theta) \end{aligned} \quad (4.16)$$

deixando-se evidente que a soma resulta real e a subtração resulta complexo puro.

Finalmente, substituindo os valores (4.16) em (4.9) chega-se à forma:

$$y(t) = A|H(\omega_0)| [\text{sen}(\omega_0 t) \text{cos}(\theta) + \text{cos}(\omega_0 t) \text{sen}(\theta)] \quad (4.17)$$

e, reescrevendo a igualdade 4.17 de uma forma mais conveniente, ou seja, empregando-se a notação senoidal, tem-se:

$$y(t) = A|H(\omega_0)| \text{sen}(\omega_0 t + \arg[H(\omega_0)]) \quad (4.18)$$

encerrando-se a formulação de interesse, mostrando-se que a resposta tem amplitude dada pelo produto da amplitude da entrada pelo módulo da função

de resposta em frequência, e também que há uma defasagem dada pelo argumento da função de resposta em frequência.

4.7. FILTRO DE BUTTERWORTH E MODELAÇÃO DE $|H(\omega)|$

Conforme se constata de (4.18), a eficiência da filtragem em frequência decorre de uma adequada escolha para o módulo $|H(\omega)|$. No modelo de Butterworth tal escolha é do tipo:

$$|H_N(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N}}} \quad (4.19)$$

onde N é o número de pólos correspondente, como mais adiante explicado. A figura 4.3 exibe, a título de visualização, o comportamento numérico do módulo

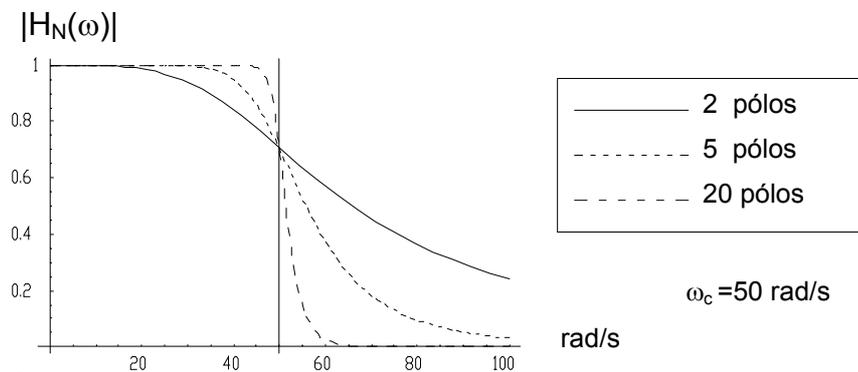


Fig. 4.3 – Comportamento de (4.19) para N assumindo valores de 2, 5 e 20

da função de resposta em frequência como expresso em (4.19) para os casos de 2, 5 e 20 pólos, mostrando o andamento assintótico para o comportamento do chamado filtro ideal. Deve-se ressaltar que o módulo da função de resposta em frequência assume o valor $\sqrt{2}/2$ para $\omega = \omega_c$, ou seja, na frequência de corte.

A questão básica que se coloca consiste em se determinar a equação diferencial cuja função de resposta em frequência proporciona a expressão (4.19) para $|H(\omega)|$. Nesse sentido, vale reproduzir a igualdade 4.3, separando-se a parte real da imaginária de $H(\omega)$, que no caso de N par resulta:

$$H_{\text{par}}(\omega) = \frac{1}{\underbrace{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} a_{2k} (i\omega)^{2k}}_{\text{Real}} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} a_{2k+1} (i\omega)^{2k+1}}_{\text{Imaginário}}} \quad (4.20)$$

e cujo módulo vale

$$|H_{\text{par}}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} a_{2k} (-1)^k \omega^{2k} \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{\frac{N}{2}} a_{2k-1} \omega^{2k-1} (-1)^{k-1} \right]^2}} \quad (4.21)$$

sendo que no radical a maior potência de ω é dada por $2N$. No caso de N ímpar tem-se:

$$|H_{\text{ímpar}}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left[\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} a_{2k} (-1)^k \omega^{2k} \right]^2 + \left[\sum_{k=0}^{\frac{N-1}{2}} a_{2k+1} \omega^{2k+1} (-1)^k \right]^2}} \quad (4.22)$$

novamente concluindo-se que $2N$ é o maior grau do polinômio dentro da raiz quadrada.

Assim sendo, a questão agora é encontrar apropriados parâmetros a_k em (4.21) e (4.22) de modo a resultar a forma desejada (4.19). Essa é a tarefa tratada no que se segue.

4.8. ESCOLHA DOS PARÂMETROS

A escolha adequada dos parâmetros a_k em (4.3) de modo a resultar em (4.19) é bastante facilitada tendo-se em vista que é possível encontrar uma forma fatorada para o termo na raiz quadrada em (4.19), bastando para tanto encontrar, como bem conhecido da teoria das equações algébricas, as raízes de:

$$1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N} = 0 \quad (4.23)$$

ou seja:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N} = -1 \quad (4.24)$$

que consiste em se buscar as $2N$ raízes da unidade negativa.

No sentido de abreviar a exposição, chamando-se:

$$z = \frac{\omega}{\omega_c} \quad (4.25)$$

é fácil verificar, como ilustrado no plano de Gauss exibido na figura 4.4, que as raízes equação algébrica (4.24) são dadas por:

$$z^{2N} = -1 \quad (4.26)$$

ou ainda em forma polar, admitindo que o número complexo tem módulo unitário:

$$(e^{i\phi})^{2N} = \cos(2N\phi) + i\text{sen}(2N\phi) = -1 \quad (4.27)$$

cujas raízes são dadas então por:

$$\begin{aligned} \cos(2N\phi) &= -1 \\ \text{sen}(2N\phi) &= 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

ou seja:

$$\phi_k = \frac{\pi + 2k\pi}{2N} \quad (4.29)$$

com $k=0,1,\dots,2N-1$, e cuja ilustração gráfica das $2N$ raízes em questão, ou também referidas como pólos na literatura clássica, indica-se na Fig. 4.4.

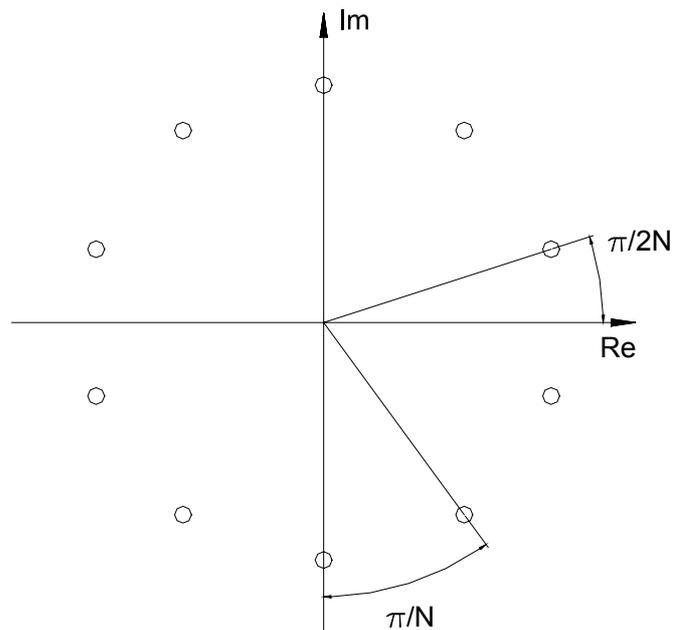


Fig. 4.4 – Raízes da equação 4.23

É oportuno assinalar que o fato de se considerar no desenvolvimento apresentado a transformada de Fourier, e não a transformada de Laplace, como mais trabalhada na literatura especializada, facilitou bastante o estudo das raízes, pois não se dependeu do fato de o parâmetro N ser par ou ímpar.

Para finalizar, cumpre, por oportuno, registrar pois a igualdade:

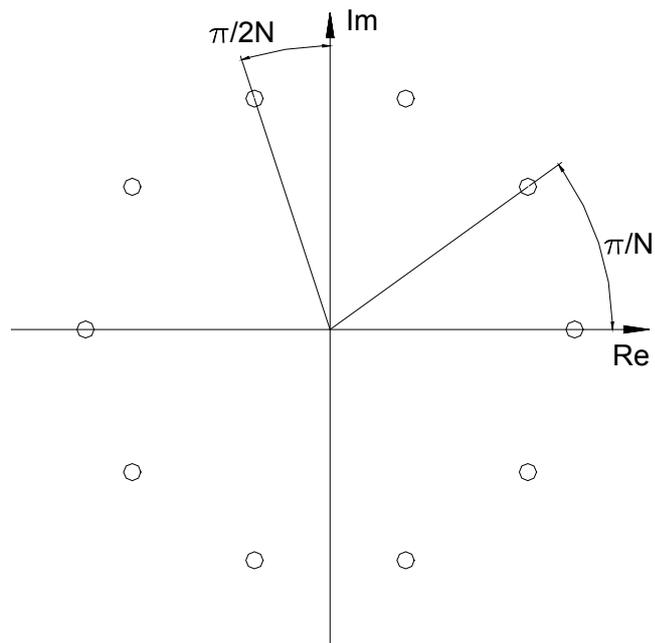
$$1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N} = \prod_{k=1}^{2N} \left(\frac{\omega}{\omega_c} - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)_k \right) \quad (4.30)$$

onde:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)_k = e^{i \frac{\pi + 2k\pi}{2N}} \quad (4.31)$$

como sabido da teoria das equações algébricas.

Novamente lembra-se que neste trabalho procura-se evitar a utilização da Transformada de Laplace por esta ser incomum para os engenheiros de estruturas. Porém, a título de ilustração, observa-se que os pólos do polinômio de Butterworth em s ($B_N(s)$) devem possuir parte real negativa e ainda não nula.

Fig. 4.5 – Raízes de $|B_N(s)|^2$

4.9. ESTUDO DOS PÓLOS

No sentido de facilitar a exposição, é conveniente verificar que o polinômio no denominador de (4.3), doravante denominado $P_N(\omega)$, ou seja:

$$P_N(\omega) = \sum_{k=0}^N a_k (i\omega)^k \quad (4.32)$$

e sua forma conjugada:

$$P_N(-\omega) = \sum_{k=0}^N a_k (-i\omega)^k \quad (4.33)$$

permitem explicitar a seguinte relação:

$$P_N(\omega)P_N(-\omega) = |P_N(\omega)|^2 = 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{2N} \quad (4.34)$$

o que indica ser necessário para a definição dos coeficientes de $P_N(\omega)$, ou seja, os coeficientes da equação diferencial correspondente, apenas N raízes de (4.23). A escolha apropriada das N raízes a serem consideradas é objeto do que se segue.

Em primeiro lugar, a equação diferencial correspondente deve, para que a filtragem seja eficiente, apresentar solução homogênea transitória, ou seja, deve contemplar apenas termos afetados por expoentes negativos, a exemplo de (2.30), de sorte a abreviar o resultado da filtragem. No caso instável, com expoentes positivos, a solução homogênea não permite a realização de filtragem, naturalmente. Para melhor explicar essa questão, inicia-se considerando a forma homogênea da equação diferencial (3.31), ou seja:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = 0 \quad (4.35)$$

e sua solução homogênea que é do tipo:

$$y(t) = Ae^{\lambda t} \quad (4.36)$$

resultando, pois:

$$\sum_{k=0}^N a_k \lambda^k = 0 \quad (4.37)$$

o que leva às mesmas raízes do polinômio $P_N(\omega)$. Assim sendo, para haver solução homogênea estável é necessário que o auto valor λ não tenha parte real positiva, pois:

$$e^{\lambda t} = e^{(a+ib)t} = e^{at} e^{ibt} \quad (4.38)$$

completando-se desse modo a explicação, uma vez que o fator com exponencial complexo é retratado apenas por funções harmônicas.

Como o polinômio $P_N(\omega)$ contempla apenas N raízes complexas $(\omega/\omega_c)_k$, tem-se, da teoria das equações algébricas, que:

$$P_N(\omega) = \prod_{\text{Arranjo}} \left(i \frac{\omega}{\omega_c} - e^{i\left(\frac{\pi}{2N} + k\frac{\pi}{N} + \frac{\pi}{2}\right)} \right) \quad (4.39)$$

acarretando que a parcela $e^{i\left(\frac{\pi}{2N} + k\frac{\pi}{N} + \frac{\pi}{2}\right)}$ de (4.39) é que deve, naturalmente, ter parte real negativa, implicando-se, pois:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2N} + k\frac{\pi}{N} + \frac{\pi}{2}\right) < 0 \quad (4.40)$$

o que conduz à inequação:

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2N} + k\frac{\pi}{N} + \frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} \quad (4.41)$$

cujas soluções resultam:

$$-\frac{1}{2} < k < N - \frac{1}{2} \longrightarrow 0 < k < N - 1 \quad (4.42)$$

podendo-se dizer então que as raízes do polinômio que contemplam a estabilidade, devem ser aquelas do lado superior do eixo das abscissas no plano de Gauss. Cumpre nesse ponto esclarecer que os pólos ditos de Butterworth são aqueles pertencentes ao lado esquerdo do eixo de ordenadas no plano de Gauss (parte real negativa), uma vez que ao se trabalhar com a transformada de Laplace tem-se uma substituição do tipo $s = i\omega$, sendo s a variável da transformação no caso. Então, os pólos em s aparecem com uma defasagem de $+90^\circ$ em relação aos pólos dispostos no presente estudo no domínio da frequência ω . Chamando-se os pólos do hemisfério superior de p_{hs} , o expresso em (4.39) pode então ser escrito como:

$$P_N(\omega) = \prod \left(\frac{i\omega}{\omega_c} - i.p_{hs} \right) \quad (4.43)$$

encerrando-se assim esse estudo; cabendo-se ainda ressaltar que, como já comentado, a vantagem de se analisar estas raízes segundo a transformada de Fourier reside no fato de que os pólos assumem uma função fixa, não dependendo do fato de ser par ou ímpar o número de pólos.

4.10. FILTROS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS CORRESPONDENTES

Considerando-se o caso mais simples, ou seja, o caso $N=1$, que consiste no filtro de um pólo, tem-se:

$$P_1(\omega) = \prod_{k=0}^{l-1} \left(\frac{i\omega}{\omega_c} - e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{1} + \frac{\pi}{2}\right)} \right) = \frac{i\omega}{\omega_c} - e^{i\pi} = \frac{i\omega}{\omega_c} + 1 = a_1 i\omega + a_0 \quad (4.44)$$

resultando pois:

$$a_0 = 1 \quad ; \quad a_1 = \frac{1}{\omega_c} \quad (4.45)$$

correspondendo-se à função de resposta em frequência:

$$H_1(\omega) = \frac{1}{\frac{\omega}{\omega_c} i + 1} \quad (4.46)$$

cujo módulo resulta:

$$|H_1(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \quad (4.47)$$

exibindo-se a filtragem mais elementar.

A equação diferencial correspondente fica então com a seguinte escrita:

$$\frac{1}{\omega_c} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (4.48)$$

encerrando-se assim, no que interessa, o algoritmo de filtragem de um pólo.

Considerando-se agora o caso de dois pólos, tem-se:

$$P_2(\omega) = \left(\frac{i\omega}{\omega_c} - e^{i\frac{3\pi}{4}} \right) \left(\frac{i\omega}{\omega_c} - e^{i\frac{5\pi}{4}} \right) \quad (4.49)$$

ou ainda:

$$P_2(\omega) = -\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 - \frac{i\omega}{\omega_c} \left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right) + 1 \quad (4.50)$$

resultando-se finalmente:

$$P_2(\omega) = -\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + i\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_c} + 1 \quad (4.51)$$

cuja função de resposta em frequência se expressa:

$$H_2(\omega) = \frac{1}{P_2(\omega)} = \frac{1}{-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + i\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_c} + 1} \quad (4.52)$$

cujo módulo vale:

$$|H_2(\omega)| = \frac{1}{|P_2(\omega)|} = \frac{1}{\sqrt{\left(-\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + 1\right)^2 + \left(\sqrt{2}\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \quad (4.53)$$

resultando-se, pois:

$$|H_2(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4}} \quad (4.54)$$

como já esperado (vide eq. (2.34)).

Assim, de acordo com o expresso em (4.52), os coeficientes da correspondente equação diferencial ficam:

$$a_2 = \left(\frac{1}{\omega_c}\right)^2 \quad ; \quad a_1 = \frac{\sqrt{2}}{\omega_c} \quad ; \quad a_0 = 1 \quad (4.55)$$

e, com isso, a equação diferencial apresenta a seguinte redação:

$$\left(\frac{1}{\omega_c}\right)^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{\sqrt{2}}{\omega_c} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (4.56)$$

como já discutido no Capítulo II.

No caso de três pólos, o polinômio $P_3(\omega)$ é então redigido:

$$P_3(\omega) = \left(\frac{i\omega}{\omega_c} - e^{i\frac{4\pi}{6}}\right) \left(\frac{i\omega}{\omega_c} - e^{i\frac{6\pi}{6}}\right) \left(\frac{i\omega}{\omega_c} - e^{i\frac{8\pi}{6}}\right) \quad (4.57)$$

que, uma vez expandido, fornece:

$$P_3(\omega) = -i\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^3 - 2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + 2i\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) + 1 \quad (4.58)$$

A correspondente função de resposta em frequência é dada pois na forma:

$$H_3(\omega) = \frac{1}{P_3(\omega)} = \frac{1}{a_3(i\omega)^3 + a_2(i\omega)^2 + a_1(i\omega) + a_0} \quad (4.59)$$

com os seguintes coeficientes:

$$a_0 = 1 \quad ; \quad a_1 = \frac{2}{\omega_c} \quad ; \quad a_2 = \frac{2}{\omega_c^2} \quad ; \quad a_3 = \frac{1}{\omega_c^3} \quad (4.60)$$

e cuja equação diferencial correspondente se escreve:

$$\frac{1}{\omega_c^3} \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + \frac{2}{\omega_c^2} \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{2}{\omega_c} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0 \quad (4.61)$$

encerrando-se assim esse caso.

No caso de quatro pólos o polinômio correspondente $P_4(\omega)$ assume a forma:

$$P_4(\omega) = \left(\frac{i\omega}{\omega_c} - e^{i\frac{5\pi}{8}}\right) \left(\frac{i\omega}{\omega_c} - e^{i\frac{7\pi}{8}}\right) \left(\frac{i\omega}{\omega_c} - e^{i\frac{9\pi}{8}}\right) \left(\frac{i\omega}{\omega_c} - e^{i\frac{11\pi}{8}}\right) \quad (4.62)$$

sendo que sua expansão fornece:

$$P_4(\omega) = \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4 - 2,61313i\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^3 - 3,41421\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 + 2,61313i\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) + 1 \quad (4.63)$$

o que corresponde à função de resposta em frequência:

$$H_4(\omega) = \frac{1}{P_4(\omega)} = \frac{1}{a_4\omega^4 - ia_3\omega^3 - a_2\omega^2 + ia_1\omega + a_0} \quad (4.64)$$

com os seguintes coeficientes:

$$\begin{aligned}
 a_0 = 1 & \quad ; \quad a_1 = 2,61313 \left(\frac{1}{\omega_c} \right) & ; \quad a_2 = 3,41421 \left(\frac{1}{\omega_c} \right)^2 \\
 a_3 = 2,61313 \left(\frac{1}{\omega_c} \right)^3 & \quad ; \quad a_4 = \left(\frac{1}{\omega_c} \right)^4 & \quad (4.65)
 \end{aligned}$$

Concluindo-se, é oportuno apresentar em forma de tabela os coeficientes para os filtros de Butterworth com até 8 pólos, ressaltando-se que, embora o polinômio $P(\omega)$ seja formalmente igual ao polinômio de Butterworth com mudança de variável, no caso $B(s=i\omega/\omega_c)$, sua obtenção se deu de forma paralela, a partir da transformada de Fourier.

Número de pólos	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆	a ₇	a ₈	a ₉
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1,414	1	0	0	0	0	0	0
3	1	2	2	1	0	0	0	0	0
4	1	2,613	3,414	2,613	1	0	0	0	0
5	1	3,236	5,236	3,236	3,236	1	0	0	0
6	1	3,864	7,464	9,141	7,464	3,864	1	0	0
7	1	4,494	10,103	14,606	14,606	10,103	4,494	1	0
8	1	5,126	13,138	21,848	25,691	21,848	13,138	5,126	1

Tabela 4.1 – Coeficientes de Butterworth para até 8 pólos

Capítulo V

FILTRO DIGITAL COM QUADRATURA NUMÉRICA DE SEGUNDA ORDEM (TRAPEZOIDAL)

5.1. INTRODUÇÃO

Uma vez mostrado no capítulo precedente que o processo de filtragem em frequência segundo o modelo de Butterworth corresponde a uma integração de equação diferencial correspondente, cabe agora no presente capítulo desenvolver o clássico algoritmo de integração de segunda ordem de convergência, denominado algoritmo trapezoidal. Em outras palavras, o objetivo deste capítulo é o desenvolvimento de uma resolução numérica da equação diferencial de filtragem com uma entrada e um corte definido como ω_c . Nesse sentido são discutidas duas formulações, quais sejam, a do clássico método de Newmark[2] e uma outra mais conveniente que decorre do chamado método da redução matricial [5].

Na filtragem digital, os dados de entrada são, em geral, os captados pelo aparelho de mensuração, armazenando-se os valores da grandeza de interesse a cada intervalo de tempo especificado Δt . Assim, o vetor de entrada é do tipo $x_k = x(k\Delta t)$, ou seja, sendo x_k o k -ésimo valor captado. A equação diferencial deve então ser representada por um algoritmo numérico equivalente, cuja integração resulta num vetor de resposta $y_k = y(k\Delta t)$.

A integração usual adotada nos textos clássicos da engenharia elétrica é, como já mencionado, a trapezoidal; e efetuada pela via da chamada transformação

bilinear. Esta integração tem um erro de segunda ordem, ou seja, erro proporcional a Δt^2 (quadrado do intervalo de tempo de captação).

Procura-se, de modo conveniente, desenvolver a forma geral do algoritmo para um número fixo de pólos, tendo-se em vista que o objetivo principal é a análise e a comparação de diferentes maneiras de resolução do problema. Por ser a equação mais trabalhada na engenharia de estruturas, será escolhida primeiramente a equação diferencial de segunda ordem. De início, faz-se uma analogia simples da equação de filtragem de dois pólos com a equação de movimento de um grau de liberdade.

5.2. ANALOGIA COM A EQUAÇÃO DE MOVIMENTO

Discutida anteriormente, a equação utilizada na dinâmica estrutural tem a conhecida forma:

$$\ddot{\rho}(t) + 2\gamma\omega_n\dot{\rho}(t) + \omega_n^2\rho(t) = \omega_n^2f(t) \quad (5.1)$$

e o filtro de dois pólos tem como equação diferencial:

$$\ddot{\rho}(t) + \sqrt{2}\omega_c\dot{\rho}(t) + \omega_c^2\rho(t) = \omega_c^2f(t) \quad (5.2)$$

Assim, igualando-se os coeficientes de (5.1) e (5.2), chega-se a:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \omega_c \\ \gamma &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned} \quad (5.3)$$

implicando-se que o filtro de Butterworth de dois pólos corresponde ao caso de uma equação de movimento com frequência de corte igual à frequência natural e com amortecimento valendo $\sqrt{2}/2$.

À título de registro, na engenharia elétrica, a equação diferencial de segunda ordem utilizada na resolução dos chamados circuitos LRC tem a forma análoga:

$$L\ddot{q}(t) + R\dot{q}(t) + Cq(t) = U(t) \quad (5.4)$$

onde L é a indutância o circuito, R a resistência elétrica e C a capacitância. Valendo ainda registrar nesse ponto que os filtros de N pólos podem ser formados pela associação de vários filtros de dois pólos. Tal fato tem como fundamento a técnica conhecida como frações parciais, que reduz uma função (no caso $H_n(s)$) de denominador com grau polinomial maior, em várias parcelas de menor grau polinomial. Todavia tal propriedade é impraticável no caso estrutural, pois não é possível, por exemplo, calibrar o amortecimento do sistema, enquanto que a calibragem da resistência elétrica em um circuito é algo bastante simples.

5.3. MÉTODO NEWMARK DE PASSO DUPLO

Este método é muito comum na análise dinâmica em estruturas no caso de abordagem no domínio do tempo. Basicamente, o método Newmark provém de uma aproximação da derivada de uma função $\rho(t)$, dita trapezoidal, tendo-se como variáveis dependentes incógnitas com valores da função resposta ρ_i e sua derivada ρ_i' . Tais incógnitas são bastante apropriadas, pois trabalhar com grandezas em um único ponto no domínio do tempo é mais conveniente, dispensando-se a discretização da derivada, e tornando-a uma incógnita de iteração.

Na aproximação adotada no método Newmark assume-se que a aceleração é constante no intervalo entre dois pontos no domínio do tempo, fazendo com que a aceleração em um ponto ξ pertencente ao intervalo Δt seja considerada constante e avaliada como:

$$\ddot{\rho}_\xi = \frac{1}{2}(\ddot{\rho}_i + \ddot{\rho}_{i+1}) \quad (5.5)$$

ou seja, a semi-soma dos valores da aceleração nas extremidades do intervalo.

Integrando uma primeira vez (5.5) no tempo, variando-se de t_i a t_{i+1} , que consistem, respectivamente, no início e no fim do intervalo Δt , tem-se:

$$\dot{\rho}_{i+1} = \dot{\rho}_i + \Delta t \frac{1}{2}(\ddot{\rho}_i + \ddot{\rho}_{i+1}) \quad (5.6)$$

e, integrando pela segunda vez, resulta:

$$\rho_{i+1} = \rho_i + \Delta t \dot{\rho}_i + \Delta t^2 \frac{1}{4} (\ddot{\rho}_i + \ddot{\rho}_{i+1}) \quad (5.7)$$

ou ainda, isolando-se as parcelas contendo derivada segunda em (5.7) nos pontos i e $i+1$:

$$\Delta t^2 \frac{1}{4} (\ddot{\rho}_i + \ddot{\rho}_{i+1}) = \rho_{i+1} - \rho_i - \Delta t \dot{\rho}_i \quad (5.8)$$

$$\Delta t^2 \frac{1}{4} (\ddot{\rho}_{i-1} + \ddot{\rho}_i) = \rho_i - \rho_{i-1} - \Delta t \dot{\rho}_{i-1}$$

Substituindo-se agora (5.8) em (5.6) tem-se finalmente:

$$\Delta t \frac{1}{2} (\dot{\rho}_{i+1} + \dot{\rho}_i) = \rho_{i+1} - \rho_i \quad (5.9)$$

$$\Delta t \frac{1}{2} (\dot{\rho}_i + \dot{\rho}_{i-1}) = \rho_i - \rho_{i-1}$$

relações estas que vão ser usadas mais adiante.

As equações diferenciais para um filtro de dois pólos nos pontos $i+1$, i e $i-1$ são:

$$\ddot{\rho}_{i+1} + \sqrt{2} \dot{\rho}_{i+1} + \rho_{i+1} = f_{i+1}$$

$$\ddot{\rho}_i + \sqrt{2} \dot{\rho}_i + \rho_i = f_i \quad (5.10)$$

$$\ddot{\rho}_{i-1} + \sqrt{2} \dot{\rho}_{i-1} + \rho_{i-1} = f_{i-1}$$

Por outro lado, multiplicando-se a primeira e a terceira de (5.10) por $\Delta t^2/4$ e a segunda de (5.10) por $\Delta t^2/2$, e somando-se as três igualdades, tem-se:

$$\Delta t^2 \left(\frac{\ddot{\rho}_{i+1} + \ddot{\rho}_i}{4} + \frac{\ddot{\rho}_{i-1} + \ddot{\rho}_i}{4} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \sqrt{2} \left(\frac{\dot{\rho}_{i+1} + \dot{\rho}_i}{2} + \frac{\dot{\rho}_i + \dot{\rho}_{i-1}}{2} \right) + \frac{\Delta t^2}{4} (\rho_{i+1} + 2\rho_i + \rho_{i-1}) = \Delta t^2 \left(\frac{f_{i+1} + f_{i-1}}{4} + \frac{f_i}{2} \right) \quad (5.11)$$

cuja substituição de (5.8) e (5.9) na equação acima implica em:

$$[\rho_{i+1} - \rho_{i-1} - 2\rho_i] + \frac{\Delta t}{2}\sqrt{2}[\rho_{i+1} - \rho_{i-1}] + \frac{\Delta t^2}{4}(\rho_{i+1} + 2\rho_i + \rho_{i-1}) = \Delta t^2\left(\frac{f_{i+1} + f_{i-1}}{4} + \frac{f_i}{2}\right) \quad (5.12)$$

Isolando-se o termo ρ_{i+1} , chega-se finalmente em:

$$\left(1 + \frac{\Delta t}{2}\sqrt{2} + \frac{\Delta t^2}{4}\right)\rho_{i+1} = \left(2 - \frac{\Delta t^2}{2}\right)\rho_i - \left(1 - \frac{\Delta t}{2}\sqrt{2} + \frac{\Delta t^2}{4}\right)\rho_{i-1} + \Delta t^2\left(\frac{f_{i+1} + f_{i-1}}{4} + \frac{f_i}{2}\right) \quad (5.13)$$

que corresponde à conhecida forma direta do método Newmark. Salienta-se que tal expressão coincide com a obtida através da transformada Z, utilizada pelos engenheiros elétricos.

5.4. MÉTODO DE NEWMARK DE PASSO SIMPLES

Retomando-se a clássica equação de movimento na sua forma adimensional (filtragem de Butterworth de dois pólos), ou seja:

$$\ddot{\rho}(t) + 2\gamma\omega_n\dot{\rho}(t) + \omega_n^2\rho(t) = \omega_n^2f(t) \quad (5.14)$$

o procedimento para o emprego do método Newmark na sua formulação de passo simples decorre da integração trapezoidal, sendo admitido:

$$\dot{\rho}_{i+1} = \dot{\rho}_i + \frac{\Delta t}{2}(\ddot{\rho}_i + \ddot{\rho}_{i+1}) \quad (5.15)$$

$$\rho_{i+1} = \rho_i + \Delta t\dot{\rho}_i + \frac{\Delta t^2}{4}(\ddot{\rho}_i + \ddot{\rho}_{i+1})$$

como exposto em (5.6) e em (5.7). Aplicando-se agora a equação (5.14) nos pontos i e $i+1$ e somando-se membro a membro os termos, ou seja:

$$\begin{aligned} &\ddot{\rho}_{i+1} + 2\gamma\omega_n\dot{\rho}_{i+1} + \omega_n^2\rho_{i+1} = \omega_n^2f_{i+1} \\ &\quad + \\ &\ddot{\rho}_i + 2\gamma\omega_n\dot{\rho}_i + \omega_n^2\rho_i = \omega_n^2f_i \\ &\quad = \\ &(\ddot{\rho}_{i+1} + \ddot{\rho}_i) + 2\gamma\omega_n(\dot{\rho}_{i+1} + \dot{\rho}_i) + \omega_n^2(\rho_{i+1} + \rho_i) = \omega_n^2(f_{i+1} + f_i) \end{aligned} \quad (5.16)$$

verifica-se que a substituição da primeira de (5.15) na última de (5.16) resulta:

$$\frac{1}{\Delta t}(\dot{\rho}_{i+1} - \dot{\rho}_i) + \gamma\omega_n(\dot{\rho}_{i+1} + \dot{\rho}_i) + \frac{\omega_n^2}{2}(\rho_{i+1} + \rho_i) = \frac{\omega_n^2}{2}(f_{i+1} + f_i) \quad (5.17)$$

ou ainda, multiplicando ambos os membros de (5.17) por Δt^2 :

$$\Delta t(\dot{\rho}_{i+1} - \dot{\rho}_i) + \gamma\omega_n \Delta t(\dot{\rho}_{i+1} + \dot{\rho}_i)\Delta t + \frac{\omega_n^2 \Delta t^2}{2}(\rho_{i+1} + \rho_i) = \frac{\omega_n^2 \Delta t^2}{2}(f_{i+1} + f_i) \quad (5.18)$$

Sendo mais cômoda a notação:

$$\Delta t(\dot{\rho}_{i+1} - \dot{\rho}_i) + \gamma\theta(\dot{\rho}_{i+1} + \dot{\rho}_i)\Delta t + \frac{\theta^2}{2}(\rho_{i+1} + \rho_i) = \frac{\theta^2}{2}(f_{i+1} + f_i) \quad (5.19)$$

onde

$$\theta = \omega_n \Delta t \quad (5.20)$$

ou ainda, em notação vetorial:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\theta^2}{2} & 1 + \gamma\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_{i+1} \\ \Delta t \dot{\rho}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\theta^2}{2} & 1 - \gamma\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_i \\ \Delta t \dot{\rho}_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\theta^2}{2} & \frac{\theta^2}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

correspondendo à primeira equação do sistema. A segunda equação provém da substituição da segunda de (5.15) na última de (5.16), ou seja:

$$\frac{4}{\Delta t^2}(\rho_{i+1} - \rho_i - \Delta t \dot{\rho}_i) + 2\gamma\omega_n(\dot{\rho}_{i+1} + \dot{\rho}_i) + \omega_n^2(\rho_{i+1} + \rho_i) = \omega_n^2(f_{i+1} + f_i) \quad (5.22)$$

onde multiplicando ambos os lados de (5.22) por $\Delta t^2/4$ e aplicando o expresso em (5.20), tem-se:

$$(\rho_{i+1} - \rho_i - \Delta t \dot{\rho}_i) + \frac{\gamma\theta}{2}(\dot{\rho}_{i+1} + \dot{\rho}_i)\Delta t + \frac{\theta^2}{4}(\rho_{i+1} + \rho_i) = \frac{\theta^2}{4}(f_{i+1} + f_i) \quad (5.23)$$

que em forma vetorial se redige:

$$\begin{Bmatrix} 1 + \frac{\theta^2}{4} & \frac{\gamma\theta}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_{i+1} \\ \Delta t \dot{\rho}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{4} & 1 - \frac{\gamma\theta}{2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_i \\ \Delta t \dot{\rho}_i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\theta^2}{4} & \frac{\theta^2}{4} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

representando-se a segunda equação referida. Assim sendo, reunindo-se em notação matricial o expresso em (5.21) e (5.24) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\theta^2}{2} & 1 + \gamma\theta \\ 1 + \frac{\theta^2}{4} & \frac{\gamma\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_{i+1} \\ \Delta t \dot{\rho}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\theta^2}{2} & 1 - \gamma\theta \\ 1 - \frac{\theta^2}{4} & 1 - \frac{\gamma\theta}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_i \\ \Delta t \dot{\rho}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\theta^2}{2} & \frac{\theta^2}{2} \\ \frac{\theta^2}{4} & \frac{\theta^2}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

que, no caso do filtro de pólo duplo, substituindo-se o valor de γ por $\sqrt{2}/2$ tem-se:

$$\begin{bmatrix} \frac{\theta^2}{2} & 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\theta \\ 1 + \frac{\theta^2}{4} & \frac{\sqrt{2}\theta}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{i+1} \\ \Delta t \dot{y}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\theta^2}{2} & 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\theta \\ 1 - \frac{\theta^2}{4} & 1 - \frac{\sqrt{2}\theta}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ \Delta t \dot{y}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\theta^2}{2} & \frac{\theta^2}{2} \\ \frac{\theta^2}{4} & \frac{\theta^2}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

encerrando-se assim a formulação da versão digital do filtro em questão na forma iterativa (integração direta), ou passo a passo.

5.5. EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

No sentido de exemplificar a aplicação e aferir a eficiência do algoritmo apresentado, considere-se o caso da filtragem de três diferentes sinais de entrada. O filtro terá nestes casos uma frequência de corte $\omega_c=50\text{rad/s}$, e com um passo $\Delta t=0,05\text{s}$. A entrada analisada inicialmente é uma senóide simples do tipo $x(t)=\text{sen}(20t)$. Nesse caso, tem-se:

$$\theta = \omega_c \Delta t = 50 \times 0,05 = 2,5\text{rad} \quad (5.27)$$

conduzindo a um algoritmo do tipo:

$$\begin{bmatrix} 3,125 & 2,268 \\ 2,563 & 0,884 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_{i+1} \\ \Delta t \dot{y}_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,125 & -0,768 \\ -0,563 & 0,116 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ \Delta t \dot{y}_i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3,125 & 3,125 \\ 1,563 & 1,563 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

O sinal y_i está mostrado em forma de gráfico na figura 5.1. Percebe-se que a amplitude da resposta é praticamente a do sinal de entrada com uma mínima redução. Isto ocorre porque, para este valor adotado de frequência de corte, tem-se que $|H_2(20)|=0,987$.

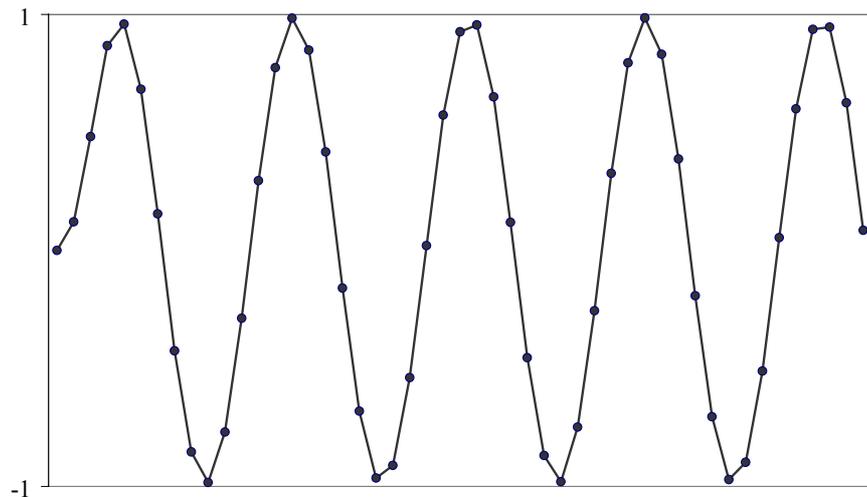


Fig. 5.1 – Saída do algoritmo de Newmark para baixa frequência

Verificando a eficiência para uma entrada de frequência maior, por exemplo, $x(t)=\text{sen}(70t)$, com $\Delta t=0,02s$, nota-se no resultado lançado na figura 5.2, que a resposta em amplitude já é menor.

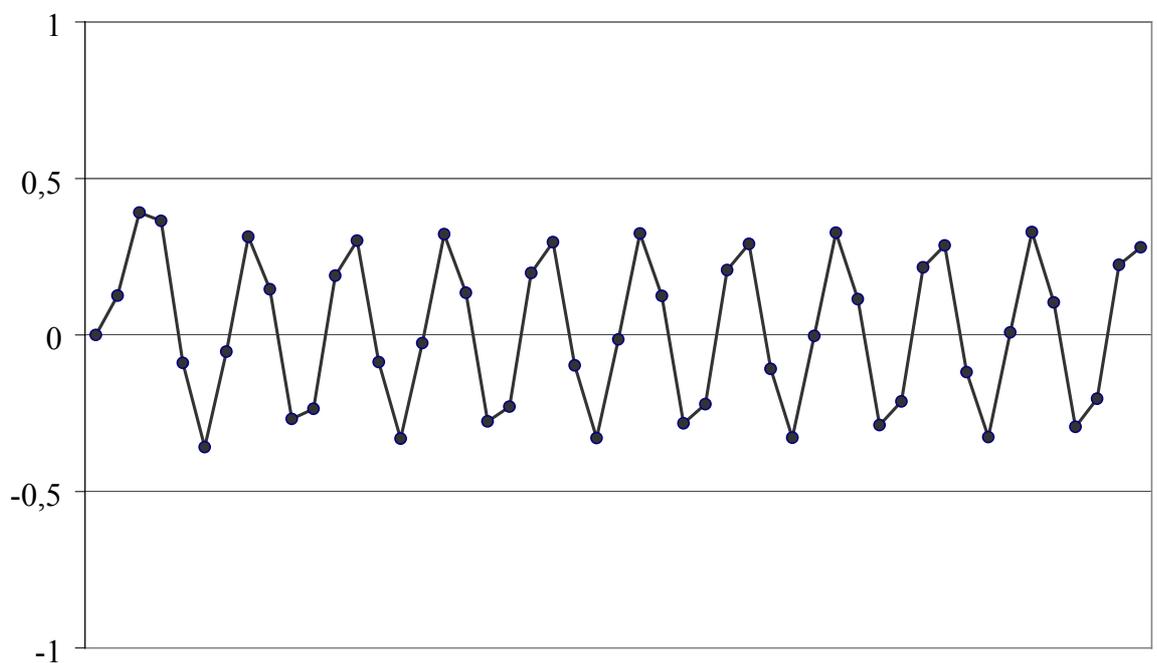


Fig. 5.2 – Saída do algoritmo de Newmark para alta frequência

Finalmente, considerando uma função de entrada na forma $x(t)=\text{sen}(20t)+0,2\text{sen}(100t)$, com $\Delta t=0,02s$, pode-se perceber qual é a eficiência real da filtragem. A figura 5.3 mostra o sinal de saída obtido pelo método.

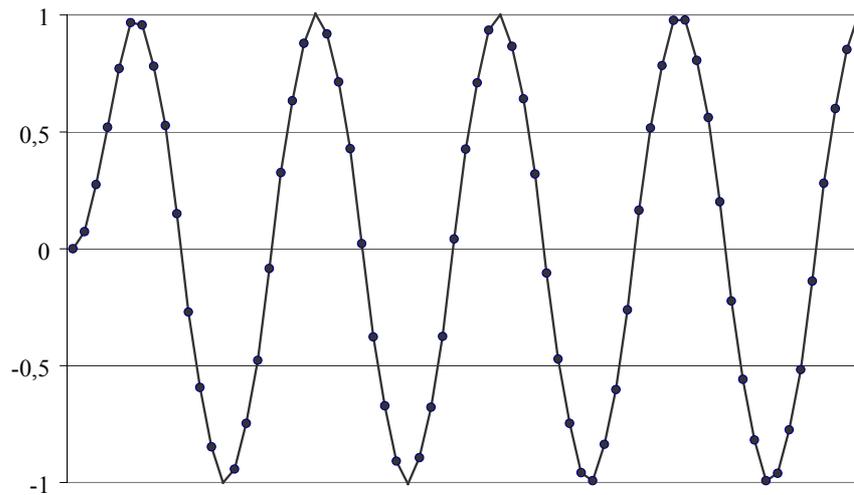


Fig. 5.3 – Saída do algoritmo de Newmark para entrada contendo alta e baixa frequência

Vale assinalar que outros exemplos vão ser objeto de estudo mais detalhado no capítulo especialmente dedicado ao tema.

5.6. FORMULAÇÃO MATRICIAL REDUZIDA DA EQUAÇÃO DIFERENCIAL

No sentido de facilitar a geração dos algoritmos de filtragem para um número genérico de pólos, é conveniente o recurso à uma formulação de fácil entendimento, uniformizando o procedimento via redução direta da ordem da equação diferencial para uma de primeira ordem. Assim, o emprego do operador de primeira ordem pode ser estendido para a solução da filtragem com número genérico de pólos.

Para tanto, considere-se uma equação diferencial genérica de ordem N como mostrado no que se segue:

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + a_{N-1} \frac{d^{N-1} y(t)}{dt^{N-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 x(t) \quad (5.29)$$

É fácil verificar que a seguinte forma matricial pode ser redigida:

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{y} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^{(N-3)}y}{dt^{(N-3)}} \\ \frac{d^{(N-2)}y}{dt^{(N-2)}} \\ \frac{d^{(N-1)}y}{dt^{(N-1)}} \end{array} \right\}_i = \left[\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_N} & -\frac{a_1}{a_N} & -\frac{a_2}{a_N} & \dots & -\frac{a_{N-3}}{a_N} & -\frac{a_{N-2}}{a_N} & -\frac{a_{N-1}}{a_N} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^{(N-3)}y}{dt^{(N-3)}} \\ \frac{d^{(N-2)}y}{dt^{(N-2)}} \\ \frac{d^{(N-1)}y}{dt^{(N-1)}} \end{array} \right\}_i + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b_0}{a_N} x \end{array} \right\}_i \quad (5.30)$$

onde se tem nas N-1 primeiras linhas identidades elementares e na última a própria equação diferencial em questão. A equação matricial (5.30) representa em verdade um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, ou seja:

$$\dot{\{Y\}}_i = [A]\{Y\}_i + \{X\}_i \quad (5.31)$$

e com isso facultando-se a aplicação de operadores mais elementares na sua integração.

A integração trapezoidal aplicada na equação (5.31) inicia-se com a relação vetorial equivalente à primeira das (5.9), ou seja:

$$\{Y\}_{i+1} = \{Y\}_i + \frac{\Delta t}{2} \left(\dot{\{Y\}}_i + \dot{\{Y\}}_{i+1} \right) \quad (5.32)$$

Multiplicando-se agora a igualdade (5.31) por $\Delta t/2$ nos pontos i e $i+1$, e somando-se membro a membro, ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta t}{2} \left[\dot{\{Y\}}_i = \{X\}_i + [A]\{Y\}_i \right] \\ + \\ \frac{\Delta t}{2} \left[\dot{\{Y\}}_{i+1} = \{X\}_{i+1} + [A]\{Y\}_{i+1} \right] \end{aligned} \quad (5.33)$$

e tendo-se em conta (5.32), a equação matricial de recorrência torna-se então:

$$\left([I] - \frac{\Delta t}{2} [A] \right) \{Y\}_{i+1} = \frac{\Delta t}{2} [\{X\}_i + \{X\}_{i+1}] + \left([I] + \frac{\Delta t}{2} [A] \right) \{Y\}_i \quad (5.34)$$

ou ainda, denominando-se:

$$[G] = [I] - \frac{\Delta t}{2}[A]$$

$$[G^*] = [I] + \frac{\Delta t}{2}[A] \quad (5.35)$$

$$\{F\}_i = \frac{\Delta t}{2}[\{X\}_i + \{X\}_{i+1}]$$

pode-se de maneira genérica explicitar a equação (5.34) na forma:

$$[G]\{Y\}_{i+1} = [G^*]\{Y\}_i + \{F\}_i \quad (5.36)$$

tendo-se com isso, um algoritmo de solução do problema, uma vez que, como as condições iniciais no problema da filtragem são nulas (são nulas a função e suas derivadas até ordem N-1, no instante inicial).

5.7. APLICAÇÃO PARA FILTRO DE DOIS PÓLOS

No caso particular de dois pólos, os coeficientes da equação diferencial fazem com que as matrizes [A], [G] e [G*] adquiram as formas:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_c^2 & -\omega_c\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{2} \\ \frac{\Delta t}{2}\omega_c^2 & 1 + \frac{\Delta t}{2}\omega_c\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

$$[G^*] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\Delta t}{2} \\ -\frac{\Delta t}{2}\omega_c^2 & 1 - \frac{\Delta t}{2}\omega_c\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

implicando-se que a iteração matricial a ser executada venha a ser:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta t}{2} \\ \frac{\Delta t}{2}\omega_c^2 & 1 + \frac{\Delta t}{2}\omega_c\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \end{Bmatrix}_{i+1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\Delta t}{2} \\ -\frac{\Delta t}{2}\omega_c^2 & 1 - \frac{\Delta t}{2}\omega_c\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \dot{y} \end{Bmatrix}_i + \frac{\Delta t}{2} \left(\begin{Bmatrix} 0 \\ x \end{Bmatrix}_i + \begin{Bmatrix} 0 \\ x \end{Bmatrix}_{i+1} \right) \quad (5.38)$$

A título de exemplo, retomando-se aquele caso de filtragem com frequência de corte $\omega_c=50\text{rad/s}$, passo $\Delta t=0,03\text{s}$ e entrada $x(t)=\text{sen}(20t)$, a operação indicada em (5.38) fornece o resultado lançado no gráfico da figura 5.4; e no caso de uma entrada $x(t)=\text{sen}(70t)$, com $\Delta t=0,02\text{s}$, o resultado encontra-se lançado no gráfico da figura 5.5.

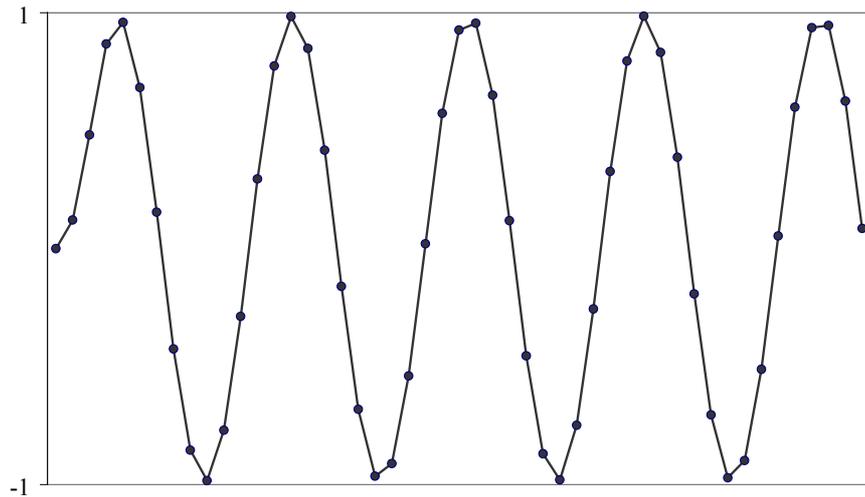


Fig. 5.4 – Saída do algoritmo trapezoidal para baixa frequência

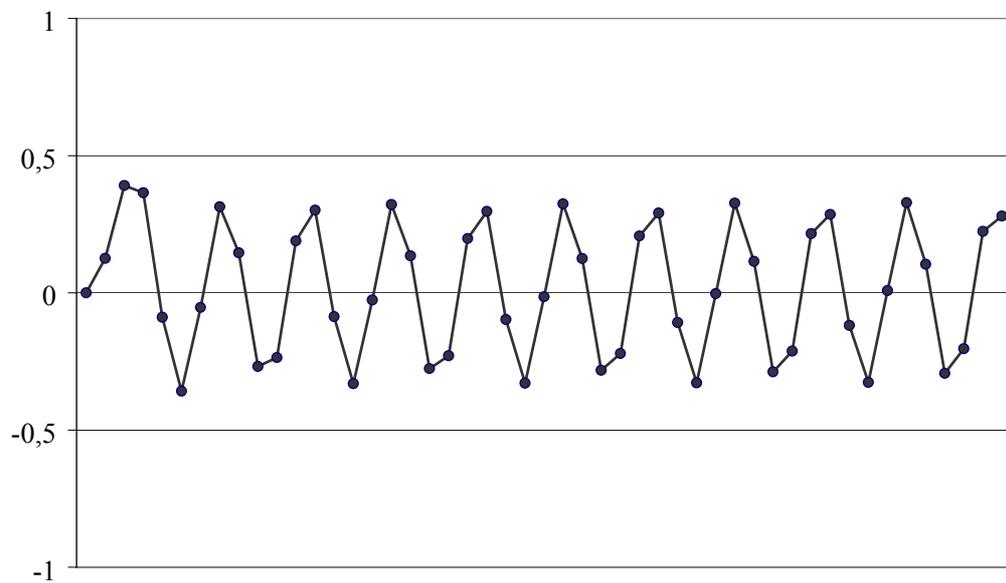


Fig. 5.5 – Saída do algoritmo trapezoidal para alta frequência

5.8. FILTRAGEM UTILIZANDO NÚMERO DE PÓLOS MAIS ELEVADO

A facilidade de implementação do algoritmo de integração trapezoidal através da forma matricial reduzida permite desenvolver os correspondentes filtros com maior número de pólos. Em FORTRAN, desenvolveu-se um programa que contém algoritmos de filtragem de até quinze pólos. Isso permite realizar uma filtragem mais eficiente do ponto de vista da conservação do sinal desejado e eliminação do sinal indesejado.

As figuras 5.6, 5.7 e 5.8 exibem os resultados da filtragem de um sinal de entrada contendo duas senóides superpostas, ou seja:

$$x(t)=\text{sen}(30t)+0,3\text{sen}(70t) \quad (5.39)$$

com a utilização de um algoritmo trapezoidal contemplando cinco, dez e quinze pólos respectivamente, e sendo considerada uma frequência de corte $\omega_c=50\text{rad/s}$, e discretização com passo $\Delta t=0,01\text{s}$. Em linha pontilhada encontra-se o sinal de entrada e em linha contínua o sinal de saída. Notando-se que, conforme aumenta-se o número de pólos, melhora-se o resultado desejado, que deve resultar na componente de menor frequência em (5.39). Por outro lado, o aumento do número de pólos acarreta um atraso na estabilização harmônica do sinal de saída, como esperado. Assim sendo, dependendo da duração do sinal, utiliza-se um filtro com número de pólos que permita atingir a estabilidade harmônica em tempo desejado. De forma simplificada, este atraso na resposta do sistema pode ser explicado devido ao fato de que todas as condições iniciais são nulas, tornando-se a equação diferencial de ordem N com valores nulos no instante zero da função e de suas derivadas até a ordem N-1. A forma matemática de se explicar este atraso consiste no fato de $P(\omega)$ ser formado por um produto de números complexos, sendo que o módulo de $P(\omega)$ resulta do produto dos módulos de cada complexo, e o argumento de $P(\omega)$ é a soma dos argumentos desses mesmos números complexos.

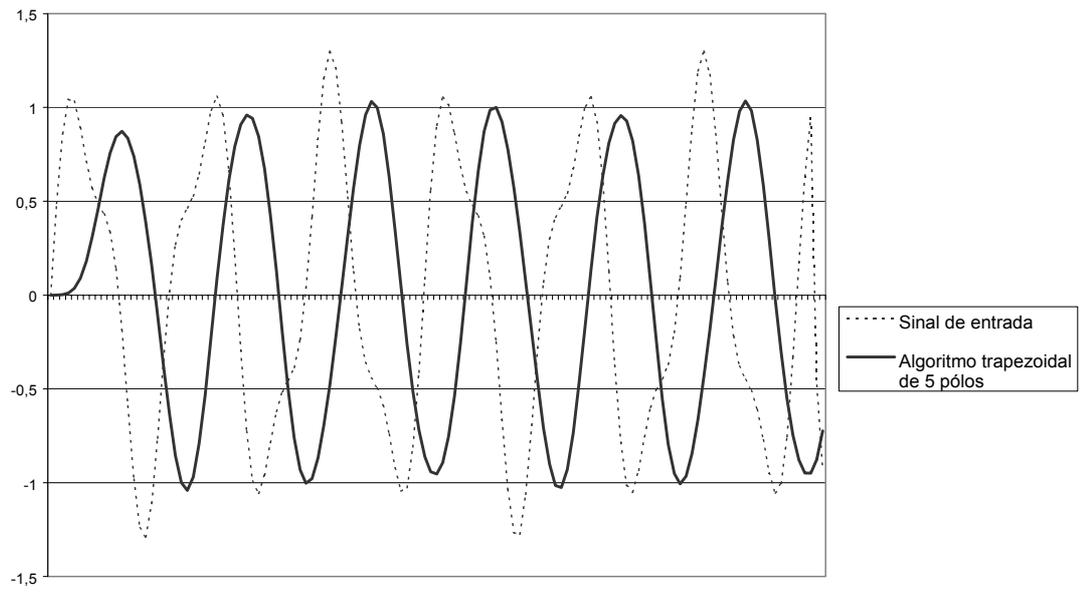


Figura 5.6 - Análise do filtro trapezoidal de cinco pólos

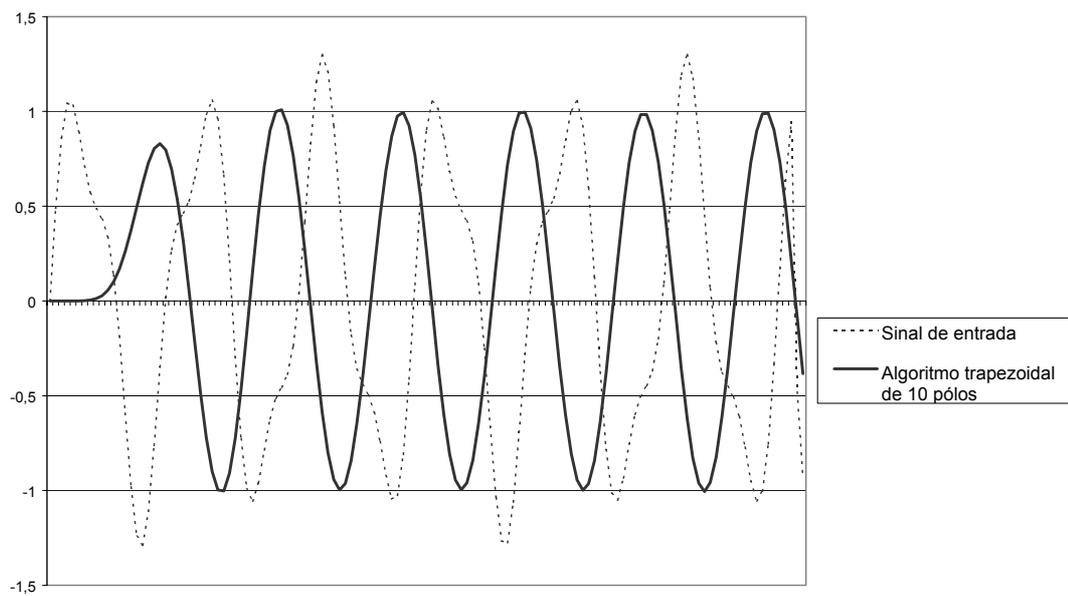


Figura 5.7 - Análise do filtro trapezoidal de dez pólos

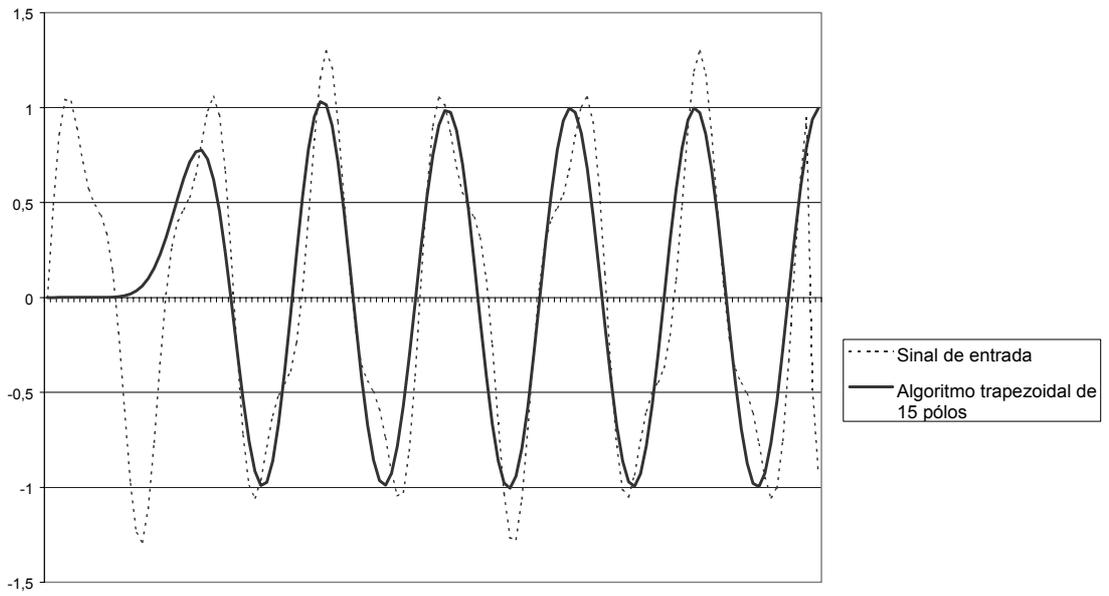


Figura 5.8 - Análise do filtro trapezoidal de quinze pólos

De maneira geral, o resultado obtido no operador trapezoidal é satisfatório, mostrando-se estável e de fácil programação em FORTRAN.

Capítulo VI

FILTRO DIGITAL COM QUADRATURA NUMÉRICA DE ORDEM SUPERIOR (OPERADOR HERMITIANO)

6.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo é estudado um operador Hermitiano [6] que permite formular um algoritmo de integração direta de equações diferenciais com ordem de erro local do quinto grau. Tal operador provém de uma operação de quadratura numérica na qual se considera também a segunda derivada da função sendo integrada. Trata-se de um algoritmo que expande uma combinação da função e derivadas em dois pontos sucessivos i e $i+1$ (algoritmo de passo único), de sorte a anular as parcelas de ordem de erro mais baixo, mediante a consideração das séries de Taylor correspondentes.

É oportuno assinalar que o integrador trapezoidal descrito no capítulo precedente (dado pela equação (5.32)) é, em verdade, um operador hermitiano que combina valores da função e sua primeira derivada nos pontos i e $i+1$, anulando-se as parcelas de primeira e segunda ordem.

A exemplo do realizado no capítulo precedente, o foco inicial é a equação diferencial de segunda ordem (equação de movimento), para a qual se consegue formular um algoritmo de integração passo a passo, seguido de exemplos de aplicação tendo por finalidade examinar o seu funcionamento. Porém, visto que o algoritmo passa a exigir a consideração da primeira derivada da função de entrada, torna-se necessário também providenciar um operador que para expressar tal derivada com a ordem de erro compatível.

Integradores com maior grau de precisão podem ser obtidos mediante a consideração de uma combinação hermitiana contendo maior grau de derivação, conforme extensão apresentada também neste capítulo.

A formulação geral para o caso com qualquer número de pólos é alcançada com base numa extensão da formulação matricial (5.31), já bem discutida anteriormente. Essa formulação geral, embora seja de maior complexidade, pode ser obtida percorrendo-se os mesmos caminhos traçados pelo capítulo V, sendo que a única mudança de monta decorre do surgimento de um grau a mais na derivada do vetor de resposta.

6.2. OPERADOR HERMITIANO COM DERIVADA DE SEGUNDA ORDEM

O chamado operador hermitiano consiste numa combinação de valores da função de interesse e de suas derivadas nos pontos sucessivos i e $i+1$ da variável independente, de tal sorte que sejam anuladas as parcelas com ordem de erro mais baixo na combinação. Exemplificando-se, seja considerada então a seguinte combinação:

$$c_1 y_i + c_2 y_{i+1} + c_3 \Delta t \dot{y}_i + c_4 \Delta t \dot{y}_{i+1} + c_5 \Delta t^2 \ddot{y}_i + c_6 \Delta t^2 \ddot{y}_{i+1} \quad (6.1)$$

para a qual se procura um certo grau de precisão. Nesse sentido, examinando-se a expansão da função y e de suas derivadas, a avaliação de y_{i+1} e suas derivadas nesse ponto seguinte por meio das respectivas séries de Taylor podem assim se expressar:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \left. \frac{dy}{dt} \right|_i + \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_i + \frac{\Delta t^3}{6} \left. \frac{d^3 y}{dt^3} \right|_i + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \left. \frac{d^k y}{dt^k} \right|_i$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{i+1} = \left. \frac{dy}{dt} \right|_i + \Delta t \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_i + \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{d^3 y}{dt^3} \right|_i + \frac{\Delta t^3}{6} \left. \frac{d^4 y}{dt^4} \right|_i + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \left. \frac{d^{(k+1)} y}{dt^{(k+1)}} \right|_i \quad (6.2)$$

$$\left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_{i+1} = \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_i + \Delta t \left. \frac{d^3 y}{dt^3} \right|_i + \frac{\Delta t^2}{2} \left. \frac{d^4 y}{dt^4} \right|_i + \frac{\Delta t^3}{6} \left. \frac{d^5 y}{dt^5} \right|_i + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \left. \frac{d^{(k+2)} y}{dt^{(k+2)}} \right|_i$$

Tendo-se em conta agora as igualdades (6.2), o expresso em (6.1) ganha a seguinte redação:

$$c_1 y_i + c_2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \left. \frac{d^k y}{dt^k} \right|_i + c_3 \Delta t \left. \frac{dy}{dt} \right|_i + c_4 \Delta t \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \left. \frac{d^{(k+1)} y}{dt^{(k+1)}} \right|_i + c_5 \Delta t^2 \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_i + c_6 \Delta t^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta t^k}{k!} \left. \frac{d^{(k+2)} y}{dt^{(k+2)}} \right|_i \quad (6.3)$$

ou ainda, fatorando-se as derivadas de y_i :

$$\begin{aligned} & (c_1 + c_2) y_i + (c_2 + c_3 + c_4) \Delta t \left. \frac{dy}{dt} \right|_i + \left(\frac{c_2}{2} + c_4 + c_5 + c_6 \right) \Delta t^2 \left. \frac{d^2 y}{dt^2} \right|_i + \left(\frac{c_2}{6} + \frac{c_4}{2} + c_6 \right) \Delta t^3 \left. \frac{d^3 y}{dt^3} \right|_i + \dots \\ & \dots + \left(\frac{c_2}{24} + \frac{c_4}{6} + \frac{c_6}{2} \right) \Delta t^4 \left. \frac{d^4 y}{dt^4} \right|_i + \left(\frac{c_2}{120} + \frac{c_4}{24} + \frac{c_6}{6} \right) \Delta t^5 \left. \frac{d^5 y}{dt^5} \right|_i + \left(\frac{c_2}{720} + \frac{c_4}{120} + \frac{c_6}{24} \right) \Delta t^6 \left. \frac{d^6 y}{dt^6} \right|_i + \dots \end{aligned} \quad (6.4)$$

cuja anulação, por exemplo, das parcelas com ordem de erro até quarta ordem, já na forma matricial implica em:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{24} & 0 & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.5)$$

ou de forma abreviada:

$$[\beta]\{c\} = \{f\} \quad (6.6)$$

sendo que a primeira equação apenas assume valor unitário para a constante c_1 . A solução do sistema de equações (6.5) resulta:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= -1 \\ c_3 &= \frac{1}{2} \\ c_4 &= \frac{1}{2} \\ c_5 &= \frac{1}{12} \\ c_6 &= -\frac{1}{12} \end{aligned} \quad (6.7)$$

Procurando-se trabalhar apenas com valores inteiros, convém multiplicar-se os coeficientes expressos em (6.7) por 12. Assim, o operador hermitiano em questão representa-se pela combinação:

$$12y_i - 12y_{i+1} + 6\Delta t \dot{y}_i + 6\Delta t \dot{y}_{i+1} + \Delta t^2 \ddot{y}_i - \Delta t^2 \ddot{y}_{i+1} = 0 + O(\Delta t^5) \quad (6.8)$$

cuja derivação e multiplicação por Δt permite escrever-se:

$$12\Delta t \dot{y}_i - 12\Delta t \dot{y}_{i+1} + 6\Delta t^2 \ddot{y}_i + 6\Delta t^2 \ddot{y}_{i+1} + \Delta t^3 \dddot{y}_i - \Delta t^3 \dddot{y}_{i+1} = 0 + O(\Delta t^6) \quad (6.9)$$

sendo o expresso por (6.8) e (6.9) conhecidos como operadores hermitianos de ordem 5 e 6, respectivamente.

6.3. CASO GERAL DE OPERADORES

No sentido de se generalizar o tratamento dos operadores hermitianos para v ; Arias ordens, seja considerada uma combinação da função y com derivada até uma dada ordem M . Tem-se assim $M+1$ incógnitas no ponto i e $M+1$ incógnitas no ponto $i+1$, totalizando-se $2M+2$ incógnitas. Dessa forma a matriz $[\beta]$, conforme expressa em (6.6), passa a ter dimensão $(2M+2) \times (2M+2)$.

Admitindo-se que para as $2M+2$ equações em questão uma das incógnitas pode ser arbitrada, reserva-se a primeira linha de $[\beta]$ para esta escolha. É interessante notar que os últimos coeficientes apresentam magnitudes cada vez menores em valor, e, além disso, dois a dois os coeficientes ora são de mesmo sinal, ora de sinais contrários. Então, pela comodidade de se trabalhar com valores inteiros positivos, fixa-se o valor do penúltimo coeficiente como sendo unitário.

Contando agora com as $2M+1$ equações restantes, a k -ésima delas ocupa a linha $k+1$, e tem a contribuição de coeficientes pares como sendo:

$$a_{k+1,2j} = \frac{1}{(k-j)!} \quad \text{para o domínio } k \geq j \quad (6.10)$$

Por outro lado, os colunas ímpares de $[\beta]$ tem termos unitários de forma escalonada a cada duas colunas e nas primeiras linhas somente, começando-se da segunda linha em diante. Pode-se então generalizar a matriz $[\beta]$ na forma:

$$[\beta] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{(1-1)!} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(2-1)!} & 1 & \frac{1}{(1-1)!} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(3-1)!} & 0 & \frac{1}{(2-1)!} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{1}{(2M-3)!} & 0 & \frac{1}{(2M-4)!} & \cdots & 0 & \frac{1}{(M-2)!} & 0 & \frac{1}{(M-3)!} \\ 0 & \frac{1}{(2M-2)!} & 0 & \frac{1}{(2M-3)!} & \cdots & 0 & \frac{1}{(M-1)!} & 0 & \frac{1}{(M-2)!} \\ 0 & \frac{1}{(2M-1)!} & 0 & \frac{1}{(2M-2)!} & \cdots & 0 & \frac{1}{M!} & 0 & \frac{1}{(M-1)!} \\ 0 & \frac{1}{(2M)!} & 0 & \frac{1}{(2M-1)!} & \cdots & 0 & \frac{1}{(M+1)!} & 0 & \frac{1}{M!} \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Esta matriz, como facilmente se verifica, é de fácil programação em linguagem FORTRAN. Nota-se que para $M=2$, o resultado confere com (6.5).

6.4. APLICAÇÃO NO ALGORITMO DE DOIS PÓLOS

Seja retomada a equação diferencial de um filtro de Butterworth de dois pólos, ou seja:

$$\ddot{y}(t) = \omega_c^2 x(t) - \omega_c \sqrt{2} \dot{y}(t) - \omega_c^2 y(t) \quad (6.12)$$

Multiplicando-se (6.12) por Δt^2 , e chamando-se $\theta = \omega_c \Delta t$, de maneira similar ao já feito em no desenvolvimento do método de Newmark, tem-se:

$$\Delta t^2 \ddot{y}(t) = \theta^2 x(t) - \Delta t \theta \sqrt{2} \dot{y}(t) - \theta^2 y(t) \quad (6.13)$$

Derivando-se e multiplicando-se ambos os membros de (6.13) por Δt resulta:

$$\Delta t^3 \ddot{\dot{y}}(t) = \Delta t \theta^2 \dot{x}(t) - \Delta t^2 \theta \sqrt{2} \ddot{y}(t) - \Delta t \theta^2 \dot{y}(t) \quad (6.14)$$

resultado esse que, face ao redigido em (6.13) e em (6.14), permite agora redigir:

$$\Delta t^3 \ddot{\dot{y}}(t) = \Delta t \theta^2 \dot{x}(t) - \theta^3 \sqrt{2} x(t) + \Delta t \theta^2 \dot{y}(t) + \theta^3 \sqrt{2} y(t) \quad (6.15)$$

Tendo-se em conta (6.13) e (6.15), a equação (6.8) e (6.9), agrupadas em notação matricial fornece:

$$\begin{pmatrix} 6 + \theta\sqrt{2} & \theta^2 - 12 \\ -\theta^2 - 6\theta\sqrt{2} - 12 & -\sqrt{2}\theta^3 - 6\theta^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta t \cdot \dot{y}_{i+1} \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \theta\sqrt{2} - 6 & \theta^2 - 12 \\ -\theta^2 + 6\theta\sqrt{2} - 12 & 6\theta^2 - \sqrt{2}\theta^3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta t \cdot \dot{y}_i \\ y_i \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\theta^2 \\ -\theta^2 & \sqrt{2}\theta^3 - 6\theta^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta t \cdot \dot{x}_i \\ x_i \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \theta^2 \\ \theta^2 & -\sqrt{2}\theta^3 - 6\theta^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta t \cdot \dot{x}_{i+1} \\ x_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (6.16)$$

cabendo notar haver agora o aparecimento dos termos de derivadas do sinal de entrada. Todavia, isso apenas implica na necessidade de se elaborar os algoritmos correspondentes para o sinal de entrada x na forma discretizada e com uma ordem de erro compatível com a dos operadores envolvidos. Para tanto, deve-se recorrer novamente ao correspondente desenvolvimento da série de Taylor com truncamento resultando uma ordem de erro compatível.

6.5. DISCRETIZAÇÃO DA DERIVADA DO SINAL DE ENTRADA

A combinação hermitiana a ser considerada deve apenas envolver os valores da função de entrada x_k , via de regra, os dados coletados pelo aparelho. A quantidade de valores necessários para conferir ordem sexta de erro local (Δt^6), que é a ordem de erro da equação (6.9), é calculada fazendo com que o número de parcelas a serem anuladas na combinação hermitiana contemple até parcelas multiplicadas por $\Delta t^5 d^5 x(t)/dt^5$. Isto resulta em seis parcelas necessárias, implicando então no operador hermitiano:

$$\Delta t \cdot \dot{x}_i = d_0 x_i + d_1 x_{i+1} + d_2 x_{i+2} + d_3 x_{i+3} + d_4 x_{i+4} + d_5 x_{i+5} \quad (6.17)$$

sendo que as primeiras expansões de Taylor correspondentes são as seguintes:

$$\begin{aligned} x_i &= x_i \\ x_{i+1} &= x_i + \Delta t \frac{dx}{dt} \Big|_i + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{d^2 x}{dt^2} \Big|_i + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{d^3 x}{dt^3} \Big|_i + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{d^4 x}{dt^4} \Big|_i + \frac{\Delta t^5}{120} \frac{d^5 x}{dt^5} \Big|_i \\ x_{i+2} &= x_i + 2\Delta t \frac{dx}{dt} \Big|_i + \frac{(2\Delta t)^2}{2} \frac{d^2 x}{dt^2} \Big|_i + \frac{(2\Delta t)^3}{6} \frac{d^3 x}{dt^3} \Big|_i + \frac{(2\Delta t)^4}{24} \frac{d^4 x}{dt^4} \Big|_i + \frac{(2\Delta t)^5}{120} \frac{d^5 x}{dt^5} \Big|_i \\ x_{i+3} &= x_i + 3\Delta t \frac{dx}{dt} \Big|_i + \frac{(3\Delta t)^2}{2} \frac{d^2 x}{dt^2} \Big|_i + \frac{(3\Delta t)^3}{6} \frac{d^3 x}{dt^3} \Big|_i + \frac{(3\Delta t)^4}{24} \frac{d^4 x}{dt^4} \Big|_i + \frac{(3\Delta t)^5}{120} \frac{d^5 x}{dt^5} \Big|_i \end{aligned} \quad (6.18)$$

Assim, efetuando-se as necessárias substituições de (6.18) em (6.17) leva a:

$$\begin{aligned} \Delta t \frac{dx}{dt} \Big|_i &= (d_0 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + d_5) x_i + (d_1 + 2d_2 + 3d_3 + 4d_4 + 5d_5) \Delta t \frac{dx}{dt} \Big|_i + \\ &+ \left(\frac{d_1 + 2^2 d_2 + 3^2 d_3 + 4^2 d_4 + 5^2 d_5}{2} \right) \Delta t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} \Big|_i + \left(\frac{d_1 + 2^3 d_2 + 3^3 d_3 + 4^3 d_4 + 5^3 d_5}{6} \right) \Delta t^3 \frac{d^3 x}{dt^3} \Big|_i + \quad (6.19) \\ &+ \left(\frac{d_1 + 2^4 d_2 + 3^4 d_3 + 4^4 d_4 + 5^4 d_5}{24} \right) \Delta t^4 \frac{d^4 x}{dt^4} \Big|_i + \left(\frac{d_1 + 2^5 d_2 + 3^5 d_3 + 4^5 d_4 + 5^5 d_5}{120} \right) \Delta t^5 \frac{d^5 x}{dt^5} \Big|_i \end{aligned}$$

valendo-se ressaltar que, aparentemente, a generalização para um caso genérico de grau N na ordem de erro da primeira derivada, pode ser assim redigido:

$$\Delta t \frac{dx}{dt} \Big|_i = d_0 x_i + \left(\sum_{k=0}^N \left(\sum_{m=1}^N \frac{d_m m^k}{k!} \right) \Delta t^k \frac{d^k x}{dt^k} \Big|_i \right) \quad (6.20)$$

ou mesmo para um grau J da derivada, necessário para integradores com maior precisão, de modo análogo:

$$\Delta t^J \frac{d^J x}{dt^J} \Big|_i = d_0 x_i + \left(\sum_{k=0}^N \left(\sum_{m=1}^N \frac{d_m m^k}{k!} \right) \Delta t^k \frac{d^k x}{dt^k} \Big|_i \right) \quad (6.21)$$

A anulação das parcelas presentes em (6.19) expressa em forma matricial assim se redige:

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2!} & \frac{2^2}{2!} & \frac{3^2}{2!} & \frac{4^2}{2!} & \frac{5^2}{2!} \\ 0 & \frac{1}{3!} & \frac{2^3}{3!} & \frac{3^3}{3!} & \frac{4^3}{3!} & \frac{5^3}{3!} \\ 0 & \frac{1}{4!} & \frac{2^4}{4!} & \frac{3^4}{4!} & \frac{4^4}{4!} & \frac{5^4}{4!} \\ 0 & \frac{1}{5!} & \frac{2^5}{5!} & \frac{3^5}{5!} & \frac{4^5}{5!} & \frac{5^5}{5!} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} x_i \\ \Delta t \frac{dx}{dt} \Big|_i \\ \Delta t^2 \frac{d^2 x}{dt^2} \Big|_i \\ \Delta t^3 \frac{d^3 x}{dt^3} \Big|_i \\ \Delta t^4 \frac{d^4 x}{dt^4} \Big|_i \\ \Delta t^5 \frac{d^5 x}{dt^5} \Big|_i \end{bmatrix}^T = 0 \quad (6.22)$$

cuja solução não trivial implica em:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1/2! & 2^2/2! & 3^2/2! & 4^2/2! & 5^2/2! \\ 0 & 1/3! & 2^3/3! & 3^3/3! & 4^3/3! & 5^3/3! \\ 0 & 1/4! & 2^4/4! & 3^4/4! & 4^4/4! & 5^4/4! \\ 0 & 1/5! & 2^5/5! & 3^5/5! & 4^5/5! & 5^5/5! \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

resultando pois:

$$\begin{aligned} d_0 &= -137/60 \\ d_1 &= 5 \\ d_2 &= -5 \\ d_3 &= 10/3 \\ d_4 &= -5/4 \\ d_5 &= 1/5 \end{aligned} \quad (6.24)$$

implicando, finalmente, no seguinte operador de discretização:

$$\Delta t \cdot \dot{x}_i = -\frac{137}{60} x_i + 5x_{i+1} - 5x_{i+2} + \frac{10}{3} x_{i+3} - \frac{5}{4} x_{i+4} + \frac{1}{5} x_{i+5} \quad (6.25)$$

Apresenta-se no que se segue um exemplo de aplicação típico, como aqueles já mostrados nos capítulos precedentes.

6.6. APLICAÇÃO PARA FILTRO DE DOIS PÓLOS

Com esse algoritmo desenvolvido com quadratura numérica de ordem mais elevada foi processado o sinal $\mathbf{x(t)=sen(20t)}$ considerando-se frequência de corte $\omega_c=50\text{rad/s}$, e passo $\Delta t=0,005\text{s}$. O resultado de saída (filtrado) gerado pelo algoritmo encontra-se na forma de gráfico conforme ilustrado na figura 6.1:

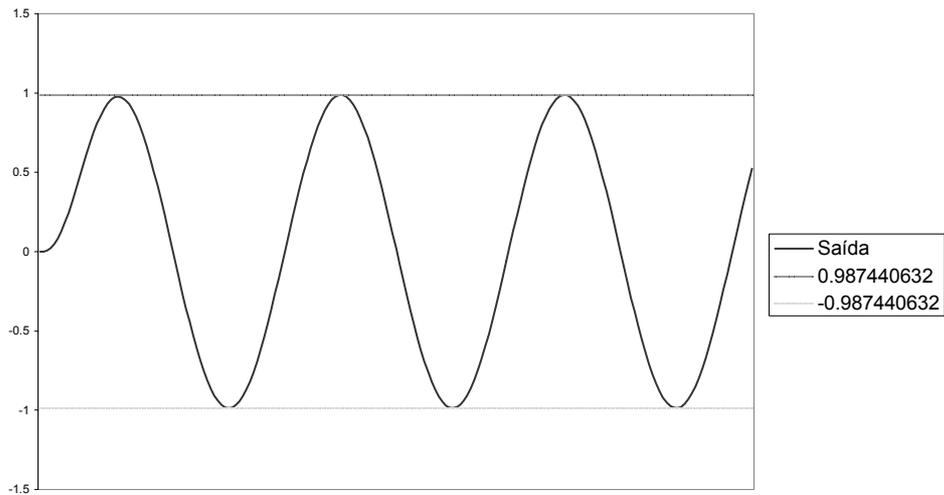


Fig. 6.1 - Saída do algoritmo hermitiano para baixa frequência

Adotando-se agora uma entrada $x(t)=\text{sen}(70t)$, o algoritmo fornece:

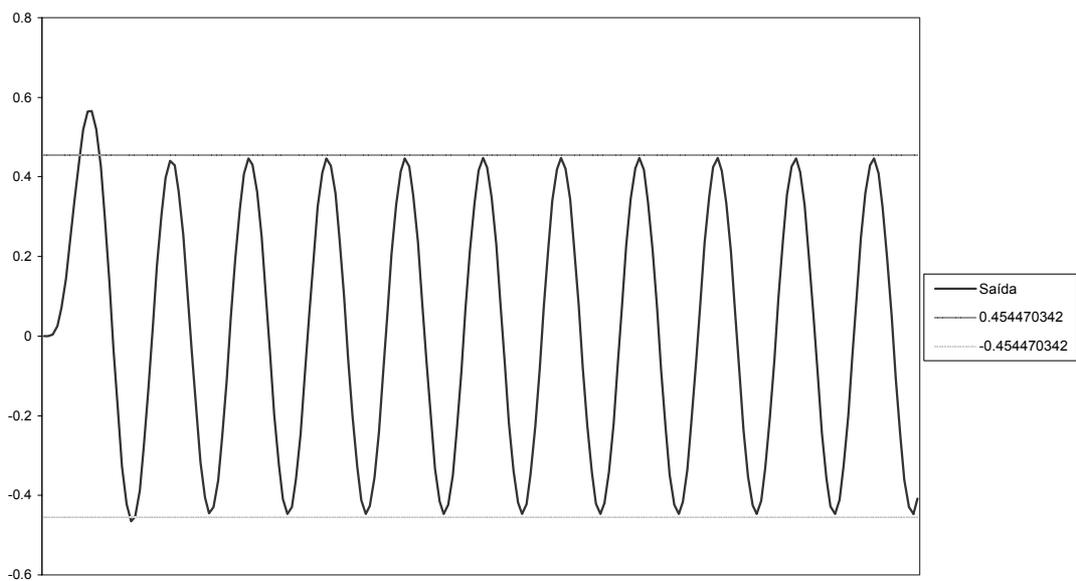


Fig. 6.2 - Saída do algoritmo hermitiano para alta frequência

finalizando-se dessa forma o estudo do operador hermitiano de quadratura numérica mais elevada para filtro de Butterworth de dois pólos.

6.7. ALGORITMO HERMITIANO PARA FILTRO DE BUTTERWOTH DE ORDEM GENÉRICA

Visando utilizar o integrador hermitiano para a resolução das demais equações diferenciais de filtragem, é necessário inicialmente recorrer-se à igualdade matricial disposta em (5.31), ou seja:

$$\{\dot{Y}\}_i = [A]\{Y\}_i + \{X\}_i \quad (6.26)$$

onde a matriz $[A]$ e os vetores apresentam a seguinte redação:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{\mathbf{a}_0}{\mathbf{a}_N} & -\frac{\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_N} & -\frac{\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_N} & \dots & -\frac{\mathbf{a}_{N-3}}{\mathbf{a}_N} & -\frac{\mathbf{a}_{N-2}}{\mathbf{a}_N} & -\frac{\mathbf{a}_{N-1}}{\mathbf{a}_N} \end{bmatrix}$$

$$\{Y\}_i = \left\{ \begin{array}{c} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \vdots \\ \frac{d^{(N-3)}y}{dt^{(N-3)}} \\ \frac{d^{(N-2)}y}{dt^{(N-2)}} \\ \frac{d^{(N-1)}y}{dt^{(N-1)}} \end{array} \right\}_i \quad (6.27)$$

$$\{X\}_i = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b_0}{\mathbf{a}_N} X \end{array} \right\}_i$$

Por outro lado, a derivação de (6.26) implica em:

$$\{\ddot{Y}\}_i = [A]\{\dot{Y}\}_i + \{\dot{X}\}_i \quad (6.28)$$

ou ainda, tendo-se em vista novamente (6.26):

$$\{\ddot{Y}\}_i = [A]^2\{Y\}_i + [A]\{X\}_i + \{\dot{X}\}_i \quad (6.29)$$

sendo que em termos genéricos a redação fica:

$$\left. \frac{d^N \{Y\}}{dt^N} \right|_i = [A]^N \{Y\}_i + \sum_{k=0}^{N-1} [A]^{N-1-k} \left. \frac{d^k \{X\}}{dt^k} \right|_i \quad (6.30)$$

A substituição de (6.28) e (6.29) em (6.8) e (6.9) já convertidos para notação vetorial, conduz finalmente a:

$$\begin{aligned} (12[I] - 6\Delta t[A] + \Delta t^2[A]^2)\{Y\}_{i+1} &= (12[I] + 6\Delta t[A] + \Delta t^2[A]^2)\{Y\}_i + \\ (6\Delta t + \Delta t^2[A])\{X\}_i &+ (6\Delta t - \Delta t^2[A])\{X\}_{i+1} + \Delta t^2\{\dot{X}\}_i - \Delta t^2\{\dot{X}\}_{i+1} \end{aligned} \quad (6.31)$$

que pode ser disposta na sua forma resumida:

$$[G]\{Y\}_{i+1} = [G^*]\{Y\}_i + \{F\}_i \quad (6.32)$$

onde:

$$\begin{aligned} [G] &= 12[I] - 6\Delta t[A] + \Delta t^2[A]^2 \\ [G^*] &= 12[I] + 6\Delta t[A] + \Delta t^2[A]^2 \end{aligned} \quad (6.33)$$

$$\{F\}_i = (6\Delta t + \Delta t^2[A])\{X\}_i + (6\Delta t - \Delta t^2[A])\{X\}_{i+1} + \Delta t^2\{\dot{X}\}_i - \Delta t^2\{\dot{X}\}_{i+1}$$

generalizando-se assim o operador hermitiano para um filtro de Butterworth com qualquer número de pólos, e com convergência de qualquer ordem.

6.8. VERIFICAÇÃO DA EFICIÊNCIA DO FILTRO UTILIZANDO NÚMERO DE PÓLOS MAIS ELEVADOS

De maneira similar ao já exposto no capítulo anterior, a exemplificação do algoritmo agora desenvolvido toma por base o filtro de Butterworth com frequência de corte $\omega_c=50\text{rad/s}$ e discretização $\Delta t=0,01\text{s}$, sendo considerado o

senal de entrada $x(t)=\text{sen}(30t)+0,3\text{sen}(70t)$. Os resultados estão lançados nos gráficos das figuras que se seguem.

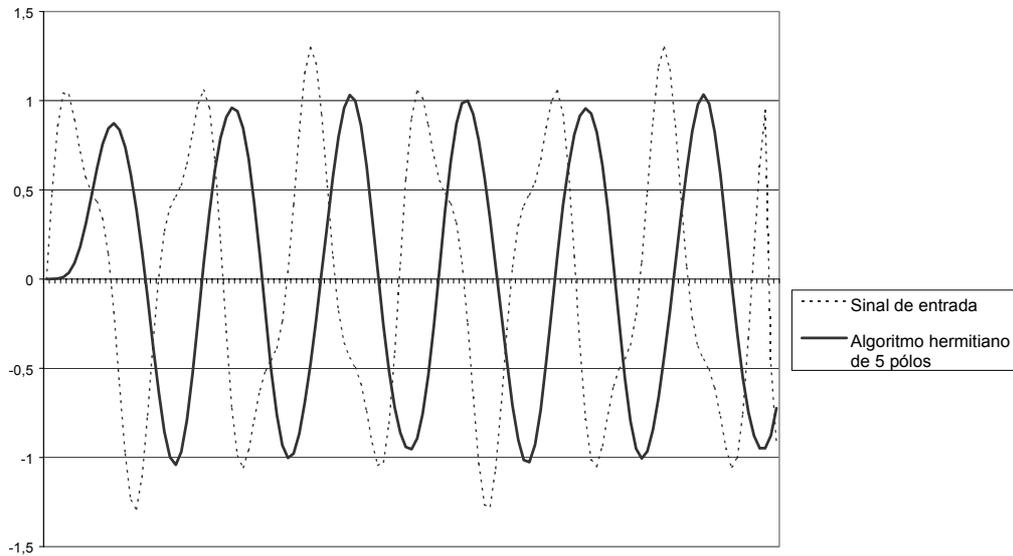


Figura 6.3 - Análise do filtro hermitiano de cinco pólos

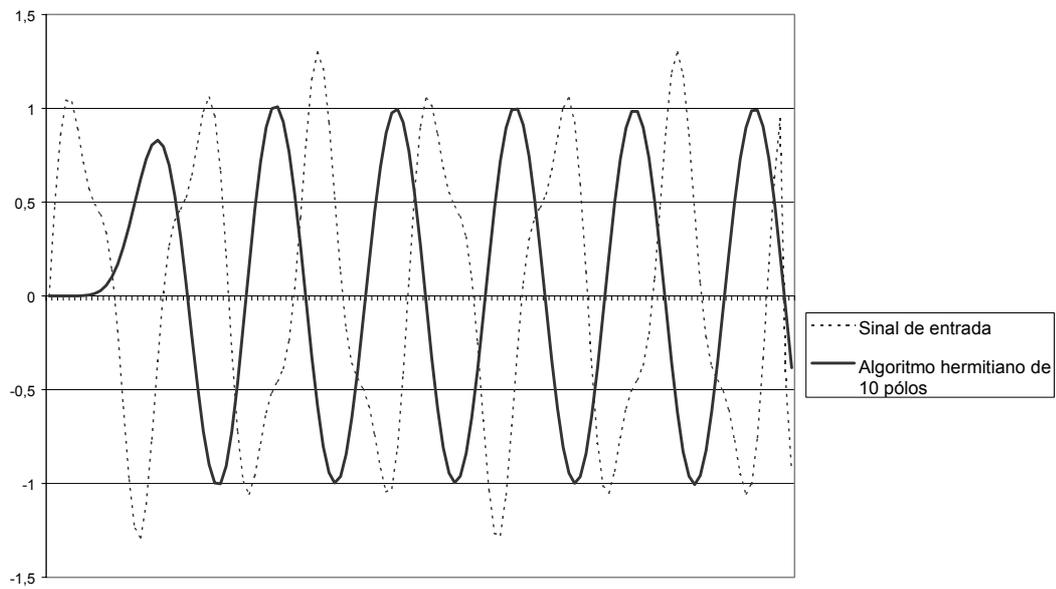


Figura 6.4 - Análise do filtro hermitiano de dez pólos

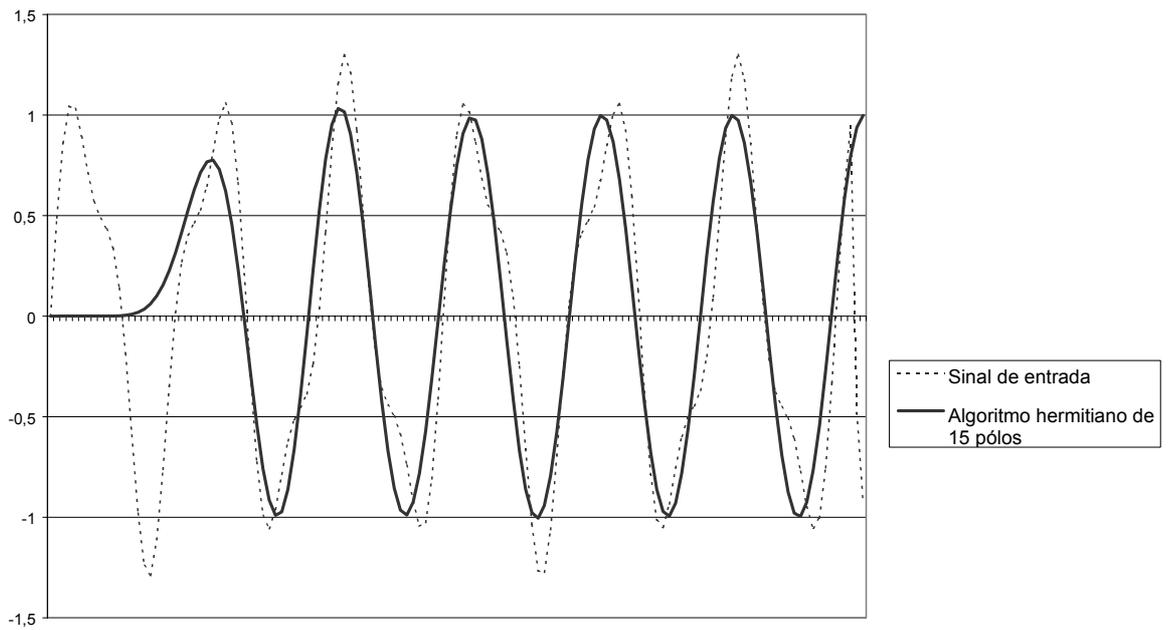


Figura 6.5 - Análise do filtro hermitiano de quinze pólos

Cumprе assinalar que a resposta é, para as discretizações consideradas, idêntica à resultante da aplicação do algoritmo trapezoidal na escala aqui empregada. Todavia, no próximo capítulo a questão da precisão só pode ser melhor avaliada confrontando-se resultados numéricos.

Capítulo VII

ANÁLISE COMPARATIVA DOS ALGORITMOS

7.1. INTRODUÇÃO

Este capítulo destina-se a comparar os resultados obtidos com cada um dos algoritmos estudados, considerando diversos sinais de entrada, diversos números de pólos, sendo estudando o erro relativo nos diversos ensaios numéricos.

Como muito bem evidenciado, o erro encontrado com o operador hermitiano é realmente sensivelmente menor que o verificado com o algoritmo clássico trapezoidal. Vale registrar que os algoritmos aqui utilizados foram desenvolvidos e implementados em linguagem FORTRAN.

O comportamento do filtro digital para um sinal de entrada afetado por amortecido muito comum na experimentação estrutural (vibração livre), assunto que os engenheiros elétricos geralmente não abordam, é também colocado em destaque.

Mais uma vez, é importante registrar que o fator principal para uma boa filtragem não é só a precisão do algoritmo, mas sim também a consideração de um número elevado de pólos no filtro digital, inclusive considerando o erro de leitura do aparelho de mensuração através de um acréscimo randômico.

7.2. PRIMEIRO EXEMPLO: COMPARAÇÃO DE ENTRADA COMPOSTA POR UMA ÚNICA SENÓIDE

A entrada considerada no primeiro estudo é o caso de uma única senóide, ou seja, $x(t)=\text{sen}(\omega_0 t)$. Neste exemplo, estipula-se uma frequência de corte $\omega_c=50\text{rad/s}$, com ω_0 adquirindo valores de 30 e 70rad/s. O estudo em questão leva em conta apenas a saída para uma discretização com passo $\Delta t=0,01\text{s}$, sendo o filtro tomado com dois pólos. Procurando-se eliminar do estudo a parcela transitória do sistema, a comparação se dá para valores já com um certo tempo decorrido.

Os resultados de interesse nesse caso acham-se arrolados na tabela 7.1.

$t(s)$	i	Trapezoidal		Operador hermitiano		Resultado teórico	
		$\omega_0 = 30 \text{ rad/s}$	$\omega_0 = 70 \text{ rad/s}$	$\omega_0 = 30 \text{ rad/s}$	$\omega_0 = 70 \text{ rad/s}$	$\omega_0 = 30 \text{ rad/s}$	$\omega_0 = 70 \text{ rad/s}$
0,50	50	0,936973	0,423925	0,939050	0,453721	0,939094	0,454452
0,51	51	0,914395	0,340356	0,914268	0,349738	0,914310	0,350217
0,52	52	0,810137	0,096713	0,807813	0,081249	0,807852	0,081269
0,53	53	0,633511	-0,192416	0,629196	-0,225471	0,629232	-0,225901
0,54	54	0,400296	-0,391049	0,394370	-0,426168	0,394404	-0,426826
0,55	55	0,131324	-0,405765	0,124314	-0,426450	0,124346	-0,427008
0,56	56	-0,149379	-0,229643	-0,156851	-0,226185	-0,156820	-0,226362
0,57	57	-0,416738	0,054483	-0,424009	0,080440	-0,423978	0,080746
0,58	58	-0,646872	0,312985	-0,653294	0,349213	-0,653263	0,349878
0,59	59	-0,819222	0,424285	-0,824226	0,453728	-0,824194	0,454456
0,60	60	-0,918394	0,336038	-0,921537	0,344828	-0,921502	0,345297

Tabela 7.1 – Valores de y_i dos diferentes algoritmos para $\Delta t=0,01\text{s}$

Tabelando-se então o erro, que é a diferença entre o valor teórico da saída e o valor obtido pelo algoritmo, tem-se os resultados como lançados na tabela 7.2:

$t(s)$	i	Trapezoidal		Operador hermitiano	
		$\omega_0 = 30 \text{ rad/s}$	$\omega_0 = 70 \text{ rad/s}$	$\omega_0 = 30 \text{ rad/s}$	$\omega_0 = 70 \text{ rad/s}$
0,50	50	0,002121	0,030527	0,000005	0,000691
0,51	51	-0,000085	0,009861	0,000002	0,000438
0,52	52	-0,002284	-0,015444	-0,000001	-0,000020
0,53	53	-0,004279	-0,033485	-0,000004	-0,000470
0,54	54	-0,005892	-0,035777	-0,000006	-0,000698
0,55	55	-0,006978	-0,021243	-0,000008	-0,000598
0,56	56	-0,007441	0,003282	-0,000009	-0,000217
0,57	57	-0,007240	0,026263	-0,000009	0,000266
0,58	58	-0,006391	0,036893	-0,000009	0,000624
0,59	59	-0,004972	0,030171	-0,000008	0,000689
0,60	60	-0,003109	0,009259	-0,000006	0,000429

Tabela 7.2 – Erros locais dos algoritmos para $\Delta t=0,01\text{s}$

Nota-se aqui claramente, que o erro local do algoritmo trapezoidal é bem maior que o erro local do algoritmo hermitiano, como deveria de ser esperado. Percebe-se ainda que quanto maior a frequência do sinal de entrada, maior o erro verificado no sinal filtrado. Por se tratar de matrizes pequenas, o esforço computacional é mínimo, onde o resultado final é fornecido instantaneamente.

7.3. SEGUNDO EXEMPLO: COMPARAÇÃO DO COMPORTAMENTO DOS ALGORITMOS PARA DIFERENTES VALORES DE Δt

Tendo-se em vista estudar agora a influência do passo de tempo Δt na integração com os dois tipos de algoritmo, exemplifica-se aqui o caso de um sinal composto por duas senóides, sendo que o de baixa frequência será considerado como sinal desejado (que deve passar) e o de alta frequência será considerado como sinal indesejado (que deve ser retido). O sinal em questão é:

$$x(t) = \text{sen}(30t) + 0,3\text{sen}(70t) \quad (7.1)$$

sendo considerada a frequência de corte $\omega_c = 50 \text{ rad/s}$. As tabelas 7.3, 7.4 e 7.5 mostram os resultados obtidos com os algoritmos trapezoidal e hermitiano, para um filtro de dois pólos com discretizações no tempo com passos de $\Delta t = 0,005 \text{ s}$, $\Delta t = 0,01 \text{ s}$ e $\Delta t = 0,02 \text{ s}$, respectivamente. A comparação com o resultado teórico e seus respectivos erros locais é também aí indicada.

t (s)	i	Algoritmo Trapezoidal	Algoritmo Hermitiano	Resultado Teórico	Erro Local Trapezoidal	Erro Local Hermitiano
2,000	400	0,5088771	0,5086904	0,5086911	-0,0001860	0,0000007
2,005	401	0,4346363	0,4350738	0,4350764	0,0004400	0,0000025
2,010	402	0,3495061	0,3503734	0,3503774	0,0008713	0,0000040
2,015	403	0,2509394	0,2519742	0,2519792	0,0010397	0,0000050
2,020	404	0,1373685	0,1382760	0,1382813	0,0009128	0,0000052
2,025	405	0,0086985	0,0091910	0,0091958	0,0004974	0,0000048
2,030	406	-0,1333696	-0,1335339	-0,1335302	-0,0001606	0,0000037
2,035	407	-0,2852329	-0,2862166	-0,2862145	-0,0009816	0,0000021
2,040	408	-0,4415178	-0,4433803	-0,4433801	-0,0018623	0,0000002
2,045	409	-0,5954384	-0,5981248	-0,5981266	-0,0026882	-0,0000018
2,050	410	-0,7393462	-0,7426902	-0,7426938	-0,0033476	-0,0000036

Tabela 7.3 – Erros locais dos algoritmos para $\Delta t = 0,005 \text{ s}$

t (s)	i	Algoritmo Trapezoidal	Algoritmo Hermitiano	Resultado Teórico	Erro Local Trapezoidal	Erro Local Hermitiano
2,000	200	0,5097683	0,5087050	0,5086911	-0,0010772	-0,0000138
2,010	201	0,3470891	0,3502552	0,3503774	0,0032882	0,0001222
2,020	202	0,1346076	0,1380831	0,1382813	0,0036736	0,0001982
2,030	203	-0,1331039	-0,1337079	-0,1335302	-0,0004263	0,0001777
2,040	204	-0,4362191	-0,4434502	-0,4433801	-0,0071610	0,0000701
2,050	205	-0,7295064	-0,7426198	-0,7426938	-0,0131875	-0,0000741
2,060	206	-0,9549078	-0,9699793	-0,9701660	-0,0152582	-0,0001867
2,070	207	-1,0617093	-1,0732806	-1,0734948	-0,0117854	-0,0002142
2,080	208	-1,0254530	-1,0289530	-1,0290959	-0,0036428	-0,0001428
2,090	209	-0,8571378	-0,8509550	-0,8509601	0,0061777	-0,0000051
2,100	210	-0,5985870	-0,5848240	-0,5846888	0,0138982	0,0001352

Tabela 7.4 – Erros locais dos algoritmos para $\Delta t=0,01s$

t (s)	i	Algoritmo Trapezoidal	Algoritmo Hermitiano	Resultado Teórico	Erro Local Trapezoidal	Erro Local Hermitiano
2,000	100	0,5186370	0,4976238	0,5086911	-0,0099459	0,0110674
2,020	101	0,1242062	0,1310142	0,1382813	0,0140750	0,0072670
2,040	102	-0,4193104	-0,4346896	-0,4433801	-0,0240697	-0,0086905
2,060	103	-0,9100579	-0,9596002	-0,9701660	-0,0601081	-0,0105657
2,080	104	-1,0090537	-1,0337195	-1,0290959	-0,0200422	0,0046236
2,100	105	-0,6367483	-0,5963864	-0,5846888	0,0520595	0,0116976
2,120	106	-0,0754633	-0,0151865	-0,0160847	0,0593785	-0,0008982
2,140	107	0,3820011	0,3990591	0,3870819	0,0050808	-0,0119772
2,160	108	0,6952230	0,6798132	0,6769332	-0,0182897	-0,0028799
2,180	109	0,8920949	0,8973578	0,9088145	0,0167197	0,0114567
2,200	110	0,8311364	0,8547581	0,8619961	0,0308598	0,0072380

Tabela 7.5 – Erros locais dos algoritmos para $\Delta t=0,02s$

Percebe-se nesse exemplo que o algoritmo hermitiano, embora seja derivado de uma quadratura numérica superior, apresenta aqui a mesma instabilidade observada para o algoritmo trapezoidal, conforme o passo de tempo se aproxima do período do sinal. Este fenômeno, conhecido por aliasing, gera, como sabido, uma máscara para o sinal de entrada, tornando-se assim inviável qualquer algoritmo de filtragem, pois é uma questão ligada a insuficiência da discretização do sinal de entrada. Para solucionar este problema, é necessário processar-se inicialmente o sinal de entrada mediante um filtro do tipo anti-aliasing. Por exemplo, se for adotado no caso em estudo uma discretização com passo $\Delta t=0,04s$, os resultados já são os mostrados na tabela 6 exibida no que se segue:

t (s)	i	Algoritmo Trapezoidal	Algoritmo Hermitiano	Resultado Teórico	Erro Local Trapezoidal	Erro Local Hermitiano
2,000	50	0,6148278	0,8186145	0,5086911	-0,1061366	-0,3099233
2,040	51	-0,3782514	-0,6609445	-0,4433801	-0,0651287	0,2175643
2,080	52	-0,9121021	-0,8383014	-1,0290959	-0,1169937	-0,1907945
2,120	53	-0,2601429	-0,1289265	-0,0160847	0,2440582	0,1128418
2,160	54	0,7040956	0,6291680	0,6769332	-0,0271624	0,0477653
2,200	55	0,7844948	0,9852624	0,8619961	0,0775013	-0,1232663
2,240	56	-0,1426216	-0,5539063	-0,3813203	-0,2386987	0,1725859
2,280	57	-0,8886307	-0,5833222	-0,8735222	0,0151085	-0,2902000
2,320	58	-0,4928593	-0,7439595	-0,4216894	0,0711699	0,3222700
2,360	59	0,5161616	0,8899196	0,6233648	0,1072032	-0,2665547
2,400	60	0,8872123	0,6702400	0,9389185	0,0517062	0,2686785

Tabela 7.6 – Erros locais dos algoritmos para $\Delta t=0,04s$

Percebe-se, pois, que nesse caso os erros locais do algoritmo hermitiano se mostram geralmente maiores que os resultantes com o algoritmo trapezoidal. Todavia, é necessário ter-se em vista que o período do sinal de maior frequência é dado por:

$$T = 2\pi/70 = 0,0898s \quad (7.2)$$

podendo-se afirmar que um passo de tempo igual a 0,04s é quase a metade, pois, do seu período (discretização bastante pobre), implicando assim na ineficiência observada do filtro.

7.4. TERCEIRO EXEMPLO: ANÁLISE DE ENTRADA AMORTECIDA

No estudo da dinâmica das estruturas, o movimento livre apresenta componentes que descrevem movimento oscilatório amortecido. Esse caso, evidentemente, é bastante essencial para o estudo da filtragem dos sinais (deslocamentos, velocidade e aceleração) que descrevem os movimentos de uma estrutura. Considere-se então o caso de um sinal de entrada do tipo:

$$x(t)=\text{sen}(30t)e^{-2t} \quad (7.3)$$

com $\omega_c=50\text{rad/s}$ e $\Delta t=0,01s$. A figura 7.1 contempla a comparação entre o sinal de entrada (7.3) e o sinal de saída (filtrado), empregando-se, por exemplo, um filtro trapezoidal de dez pólos. No início do movimento, nota-se que a correspondência

em amplitude não é obedecida devido ao tempo de resposta do sistema. Por outro lado, a partir do segundo ciclo em diante, observa-se que há sim uma correspondência na amplitude do sinal de entrada e do sinal de saída, denotando-se uma certa defasagem.

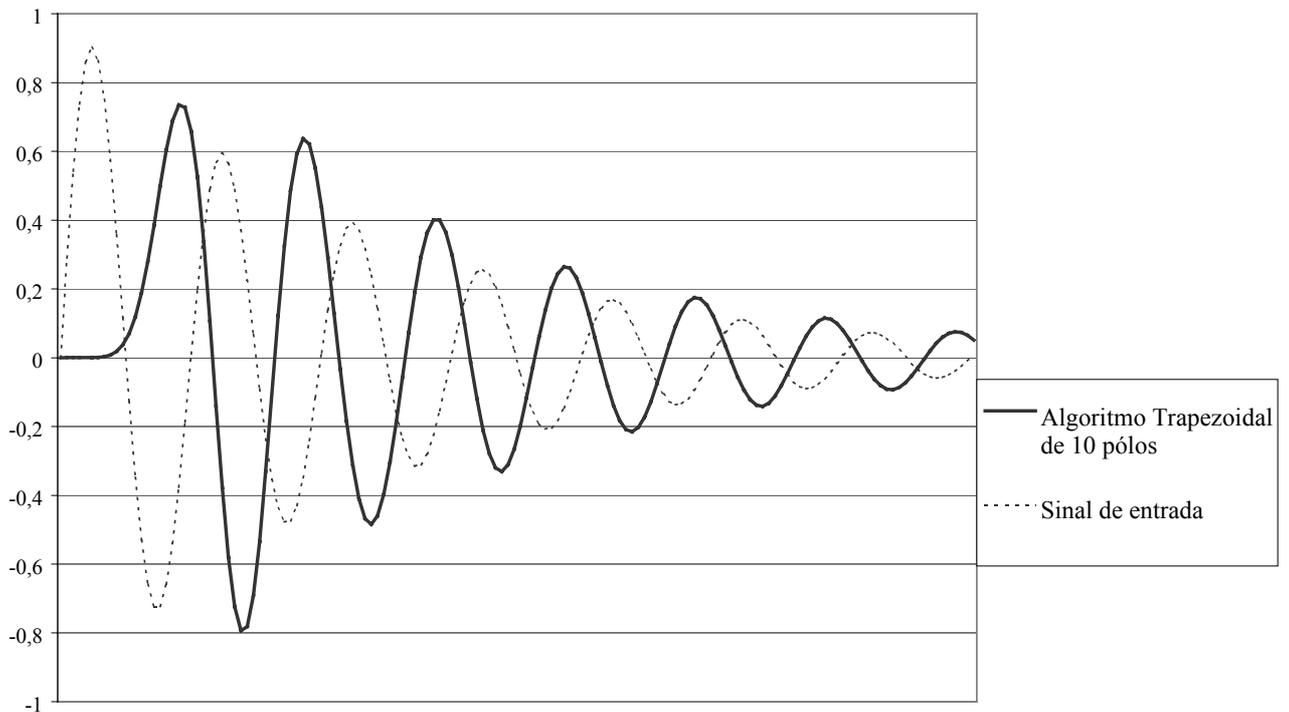


Fig. 7.1 – Análise de entrada exponencial no algoritmo trapezoidal de dez pólos

Contudo, pode-se afirmar que o filtro digital apresenta bom desempenho em casos de sinais contendo amortecimento, como o estudado. Isso ocorre porque a equação de filtragem tem como parâmetro principal de escala a frequência do sinal de entrada.

7.5. QUARTO EXEMPLO: ANÁLISE DE ENTRADA CONTENDO PARCELA RANDÔMICA

Devido ao fato da coleta dos dados de entrada ser proveniente de uma mensuração, é interessante verificar o comportamento do algoritmo perante a presença de uma parcela aleatória no sinal de entrada, que procura simular toda a gama de erros gerados na mensuração. Admitindo então uma entrada do tipo:

$$x(t)=\text{sen}(30t) + \varepsilon(0,1) \quad (7.4)$$

onde ε representa uma parcela aleatória de valor máximo 0,1, para um filtro de dois pólos com corte $\omega_c=50\text{rad/s}$ e $\Delta t=0,02\text{s}$, a tabela 7.7 compara o resultado do algoritmo trapezoidal, o resultado do algoritmo hermitiano e o resultado teórico, com os respectivos erros locais dos algoritmos.

i	Yi do algoritmo:		Resultado Teórico	Erro local	
	Hermitiano	Trapezoidal		Hermitiano	Trapezoidal
200	-0,282586027	-0,3099134	-0,2826348	-0,0000488	0,0272786
201	0,273296109	0,20050626	0,2734604	0,0001643	0,0729542
202	0,733712846	0,685483872	0,7340281	0,0003152	0,0485442
203	0,937827373	0,94646643	0,9381786	0,0003512	-0,0082878
204	0,814336612	0,844372323	0,8145964	0,0002597	-0,0297760
205	0,40637944	0,418575098	0,4064522	0,0000727	-0,0121229
206	-0,143532967	-0,14096523	-0,1436775	-0,0001445	-0,0027122
207	-0,643300384	-0,61347719	-0,6436164	-0,0003160	-0,0301392
208	-0,918339673	-0,87580235	-0,9187216	-0,0003820	-0,0429193
209	-0,872571698	-0,85718783	-0,8728910	-0,0003193	-0,0157031
210	-0,52198453	-0,52254391	-0,5221344	-0,0001498	0,0004095

Tabela 7.7 – Análise de entrada randômica com envoltória de 10% do valor da amplitude do sinal de entrada

Percebe-se que o algoritmo hermitiano se comporta de forma excepcional perante um erro aleatório de 10% da amplitude. Supondo então o mesmo exemplo porém com um erro de 20% da amplitude, ou seja $\varepsilon(0,2)$, a tabela 7.8 compara os valores obtidos nos dois algoritmos:

i	Yi do algoritmo:		Resultado Teórico	Erro local	
	Hermitiano	Trapezoidal		Hermitiano	Trapezoidal
200	-0,282632861	-0,3222592	-0,2826348	-0,0000020	0,0396244
201	0,273249275	0,272187367	0,2734604	0,0002111	0,0012730
202	0,733666012	0,789203516	0,7340281	0,0003621	-0,0551754
203	0,937780539	1,025659272	0,9381786	0,0003981	-0,0874807
204	0,814289778	0,935141511	0,8145964	0,0003066	-0,1205452
205	0,406332606	0,543742334	0,4064522	0,0001196	-0,1372902
206	-0,143579801	-0,02683348	-0,1436775	-0,0000977	-0,1168440
207	-0,643347218	-0,5491421	-0,6436164	-0,0002692	-0,0944743
208	-0,918386507	-0,84030032	-0,9187216	-0,0003351	-0,0784213
209	-0,872618532	-0,82839273	-0,8728910	-0,0002724	-0,0444982
210	-0,522031364	-0,50873409	-0,5221344	-0,0001030	-0,0134003

Tabela 7.8 – Análise de entrada randômica com envoltória de 20% do valor da amplitude do sinal de entrada

Nota-se novamente o bom desempenho do algoritmo hermitiano. Na busca do valor limite de eficiência de filtragem do algoritmo hermitiano, a tabela 7.9 admite para o mesmo exemplo um erro de até 30% na leitura do aparelho:

i	Yi do algoritmo:		Resultado Teórico	Erro local	
	Hermitiano	Trapezoidal		Hermitiano	Trapezoidal
200	-0,282656478	-0,3339654	-0,2826348	0,0000216	0,0513306
201	0,273225916	0,202841142	0,2734604	0,0002345	0,0706193
202	0,733642489	0,75592873	0,7340281	0,0003856	-0,0219007
203	0,93775683	1,032592538	0,9381786	0,0004218	-0,0944139
204	0,81426597	0,959561831	0,8145964	0,0003304	-0,1449655
205	0,406308769	0,617420176	0,4064522	0,0001434	-0,2109680
206	-0,143603636	0,078786053	-0,1436775	-0,0000738	-0,2224635
207	-0,643371044	-0,51893862	-0,6436164	-0,0002454	-0,1246778
208	-0,918410327	-0,88306626	-0,9187216	-0,0003113	-0,0356554
209	-0,87264235	-0,85700615	-0,8728910	-0,0002486	-0,0158848
210	-0,522055181	-0,54887377	-0,5221344	-0,0000792	0,0267394

Tabela 7.9 – Análise de entrada randômica com envoltória de 30% do valor da amplitude do sinal de entrada

Admitindo 40% de erro, tem-se a tabela 7.10:

i	Yi do algoritmo:		Resultado Teórico	Erro local	
	Hermitiano	Trapezoidal		Hermitiano	Trapezoidal
200	-0,282574597	-0,32214583	-0,2826348	-0,0000602	0,0395110
201	0,273224884	0,214650607	0,2734604	0,0002355	0,0588098
202	0,733702487	0,668141946	0,7340281	0,0003256	0,0658861
203	0,937821689	0,917186603	0,9381786	0,0003569	0,0209920
204	0,814322976	0,814105118	0,8145964	0,0002734	0,0004912
205	0,406421949	0,326318149	0,4064522	0,0000302	0,0801340
206	-0,143521113	-0,26315563	-0,1436775	-0,0001563	0,1194782
207	-0,643240608	-0,70210221	-0,6436164	-0,0003758	0,0584858
208	-0,918316072	-0,90743172	-0,9187216	-0,0004056	-0,0112899
209	-0,872602371	-0,81484461	-0,8728910	-0,0002886	-0,0580463
210	-0,521984957	-0,48570343	-0,5221344	-0,0001494	-0,0364309

Tabela 7.10 – Análise de entrada randômica com envoltória de 40% do valor da amplitude do sinal de entrada

7.6. QUINTO EXEMPLO: ANÁLISE DE ENTRADA RANDÔMICA PURA

Para melhor verificar o comportamento do algoritmo de filtragem, será analisada uma entrada contendo somente valores randômicos. Para melhor visualização, a análise se dá em forma de gráfico. Os valores randômicos utilizados variam de $-0,4$ a $+0,4$.

Inicialmente o filtro utilizado é o hermitiano de dois pólos, com corte $\omega_c=50\text{rad/s}$ e $\Delta t=0,02\text{s}$. A figura 7.2 demonstra um arranjo aleatório com sua respectiva saída filtrada. Nota-se que os valores de resposta são praticamente zero.

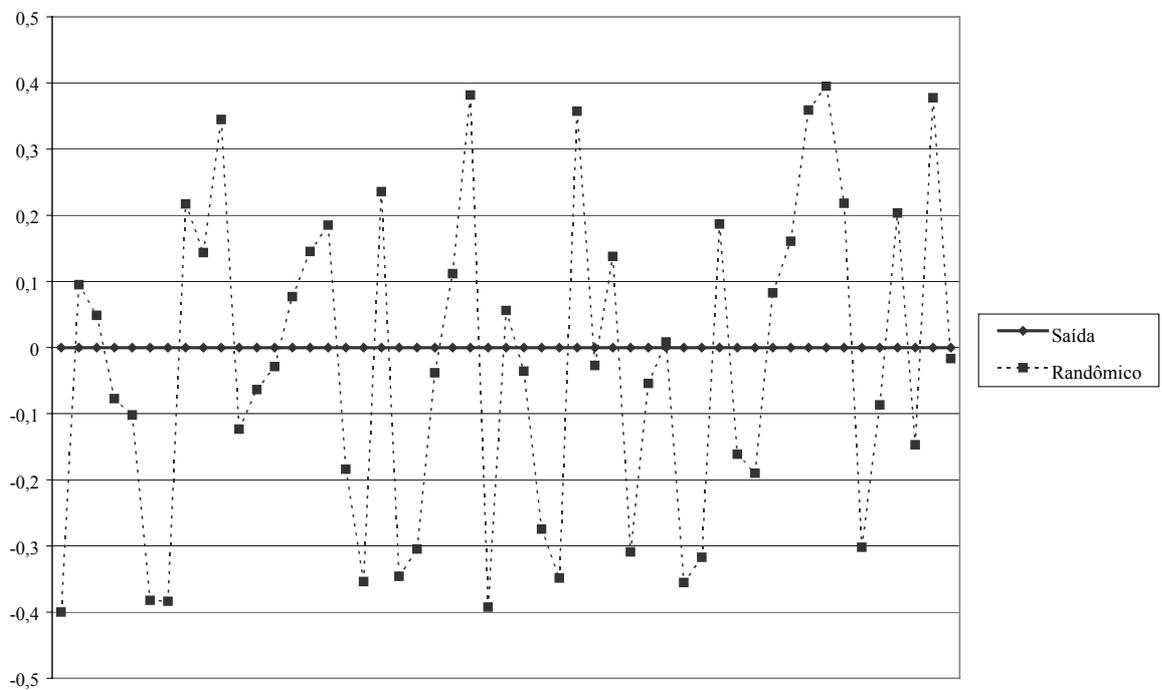


Fig. 7.2 – Filtragem de sinal puramente randômico com filtro de dois pólos

A figura 7.3 utiliza o mesmo exemplo anterior, porém com um filtro de dez pólos:

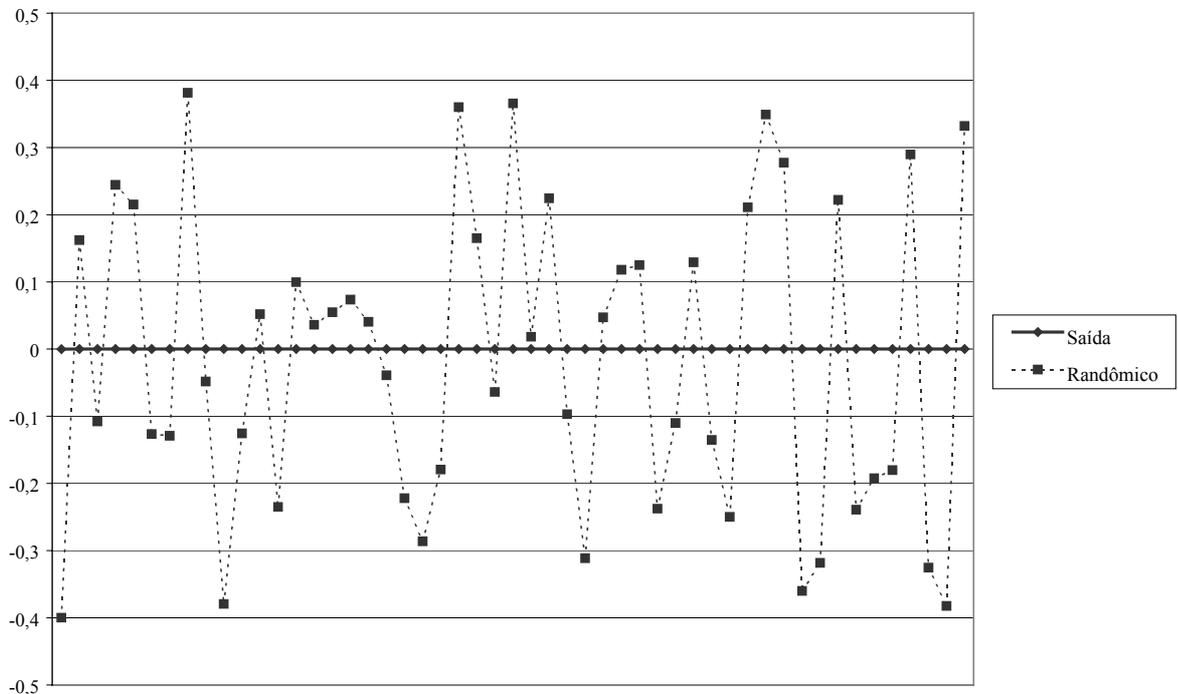


Fig. 7.3 – Filtragem de sinal puramente randômico com filtro de dez pólos

A figura 7.4 utiliza o mesmo exemplo com um filtro de quinze pólos:

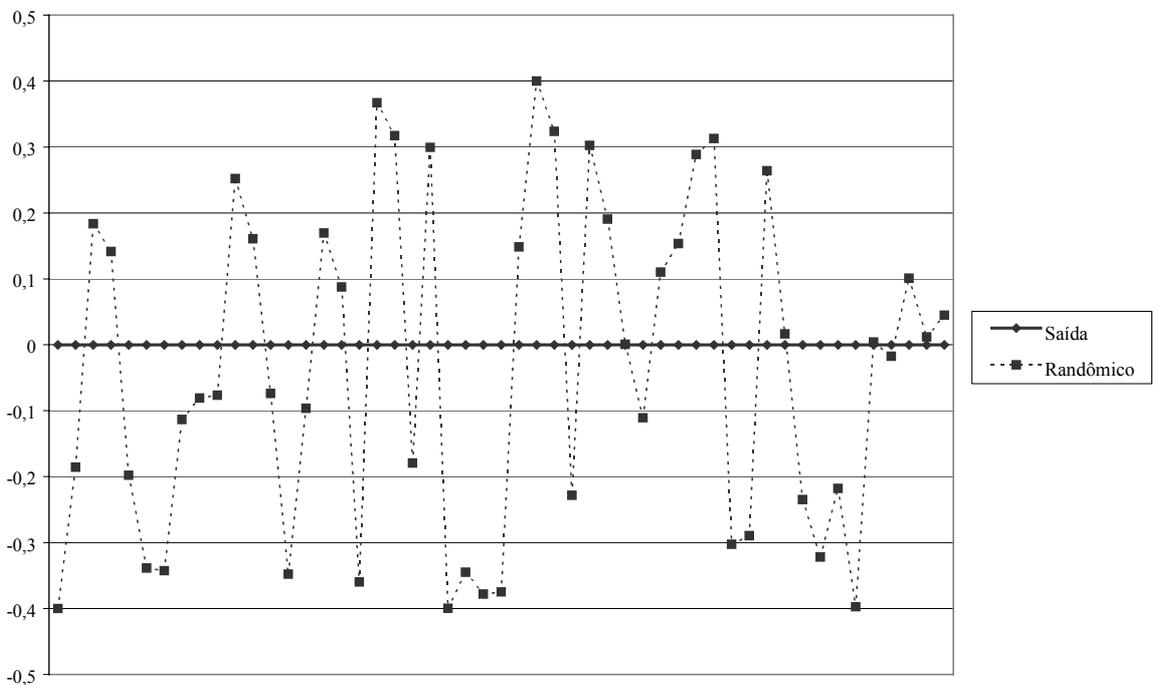


Fig. 7.4 – Filtragem de sinal puramente randômico com filtro de quinze pólos

Percebe-se que a combinação aleatória não influi no resultado.

Capítulo VIII

ALGORITMO DE FILTRAGEM PROVENIENTE DA TRANSFORMADA Z

8.1. INTRODUÇÃO

Diante da existência dos métodos de resolução numérica do processo de filtragem já elaborados pelos engenheiros elétricos, torna-se necessária a comparação dos algoritmos de filtragem obtidos neste estudo com o mais comum destes métodos.

No campo da engenharia elétrica, mais precisamente na área de processamento de sinais, a literatura [1;4] indica um tratamento numérico do processo de filtragem de sinal através da discretização da transformada de Laplace, doravante denominada transformada Z.

Comenta-se sobre as principais propriedades destas transformadas, seguido de aplicação no processo de filtragem de sinal, com conseqüente exemplificação numérica para filtro de dois pólos juntamente com a comparação destes resultados com os obtidos pelos algoritmos propostos por este estudo.

8.2. TRANSFORMADA DE LAPLACE

O tratamento dado pelos engenheiros elétricos na resolução de uma equação diferencial é a transformada de Laplace, cuja obtenção é similar à transformada de Fourier. Para uma função $f(t)$ (usualmente designada pela forma minúscula) a transformada de Laplace $F(s)$ (usualmente designada pela forma maiúscula) de $f(t)$ é dada como:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (8.1)$$

onde s é um número complexo resumido na nomenclatura:

$$s = \sigma + i\omega \quad (8.2)$$

A transformada de Fourier provém do caso particular onde $\sigma = 0$, ou seja, trata-se da análise apenas no eixo imaginário do plano de Gauss.

O princípio da linearidade e a propriedade das derivadas também estão presentes. A transformada de Laplace da derivada de ordem N de uma função $f(t)$ com condições iniciais nulas é dada como:

$$\int_0^{\infty} \frac{d^N f(t)}{dt^N} e^{-st} dt = s^N F(s) \quad (8.3)$$

cuja demonstração é análoga ao caso da transformada de Fourier.

Porém, uma particularidade da transformada de Laplace é o fato de sua inversa ser composta por uma integral curvilínea em s , com diferencial ds .

8.3. TRANSFORMADA Z

A forma discreta da integração da transformada de Laplace é um somatório denominado transformada Z. No caso da transformada de Fourier, a discretização se dá através da DFT (Discrete Fourier Transform). Na transformada Z, a função $f(t)$ tem discretização com um passo de tempo Δt e simbolizada com colchetes na forma $f[n]$, onde:

$$f[n] = f(n \cdot \Delta t) \quad (8.4)$$

A integral (8.1) torna-se assim um somatório expresso por:

$$F[z] = \sum_{n=0}^{\infty} f[n]z^{-n} \quad (8.5)$$

onde z é um número complexo e $F[z]$ representa a transformada Z de $f[n]$. Vale assinalar que este somatório tem restrições em z para que haja convergência.

Admitindo-se que $f(t)$ é uma função causal, ou seja, não se tenham valores de $f(t)$ para $t < 0$, demonstra-se a propriedade principal da transformada Z no processo de filtragem. Seja então aplicada a transformada Z em $f[n-m]$, onde $n > m$, ou seja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f[n-m]z^{-n} \quad (8.6)$$

e efetuando uma mudança de variáveis na forma:

$$k = n - m \quad (8.7)$$

a expressão (8.6) se torna:

$$\sum_{k+m=0}^{\infty} f[k]z^{-k-m} = z^{-m} \sum_{k=-m}^{\infty} f[k]z^{-k} \quad (8.8)$$

onde o somatório no segundo membro da igualdade (8.8), devido ao fato de $f[k]=0$ para $k < 0$, iguala-se à transformada Z da função $f(t)$ discretizada, permitindo reescrever (8.8) como sendo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f[n-m]z^{-n} = z^{-m}F[z] \quad (8.9)$$

implicando que a inversa Z de $z^{-m}F[z]$ é $f[n-m]$.

8.4. TRANSFORMAÇÃO BILINEAR

A transformação bilinear relaciona a variável z e a variável s de Laplace. Tendo-se em vista não sobrecarregar o assunto, será efetuada a aplicação para uma equação diferencial de primeira ordem, adiantando que a relação é válida para uma equação diferencial de maior ordem. Uma equação diferencial de primeira ordem pode ser generalizada como sendo:

$$a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = b_0 x(t) \quad (8.10)$$

Seja $y[n]$ a forma discreta de $y(t)$ e disposto na forma:

$$y[n] = y[n-1] + \int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} y(t) dt \quad (8.11)$$

e utilizando um integrador trapezoidal:

$$\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} y(t) dt = \frac{\Delta t}{2} \left(\dot{y}(t) \Big|_{t=n\Delta t} + \dot{y}(t - \Delta t) \Big|_{t=n\Delta t} \right) \quad (8.12)$$

com a substituição de (8.10) em (8.12), tem-se:

$$\int_{(n-1)\Delta t}^{n\Delta t} y(t) dt = \frac{\Delta t}{2a_1} \left(b_0 x(t) \Big|_{t=n\Delta t} - a_0 y(t) \Big|_{t=n\Delta t} + b_0 x(t - \Delta t) \Big|_{t=n\Delta t} - a_0 y(t - \Delta t) \Big|_{t=n\Delta t} \right) \quad (8.13)$$

onde a substituição de (8.13), na forma já discretizada, em (8.11) conduz a:

$$a_1 y[n] = a_1 y[n-1] + \frac{\Delta t}{2} (b_0 x[n] - a_0 y[n] + b_0 x[n-1] - a_0 y[n-1]) \quad (8.14)$$

A transformação bilinear conduz a uma relação entre a variável da transformada Z e a variável da transformada de Laplace para uma equação diferencial. Por se tratar de uma relação entre entrada ($x(t)$) e saída ($y(t)$), denota-se $H(s)$ a relação $Y(s)/X(s)$ e $H[z]$ a relação $Y[z]/X[z]$. Assim sendo, tomando-se a transformada inversa Z de (8.14):

$$a_1 Y[z] - a_1 z^{-1} Y[z] + a_0 \frac{\Delta t}{2} (Y[z] + z^{-1} Y[z]) = b_0 \frac{\Delta t}{2} (X[z] + z^{-1} X[z]) \quad (8.15)$$

e reorganizando os termos, tem-se:

$$\frac{Y[z]}{X[z]} = H[z] = \frac{b_0}{a_1 \frac{2}{\Delta t} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + a_0} \quad (8.16)$$

A relação $H(s)$ é facilmente obtida conseguindo-se a transformada de Laplace da equação (8.10), que conduz a:

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{b_0}{a_1 s + a_0} \quad (8.17)$$

e a partir da igualdade entre (8.16) e (8.17) tem-se:

$$s \rightarrow \frac{2}{\Delta t} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \quad (8.18)$$

representando assim a transformação bilinear. Para a relação $H(s)$ de uma equação de filtragem de maior número de pólos, a expressão (8.18) também é válida.

8.5. POLINÔMIO DE BUTTERWORTH

A equação de filtragem pode ser obtida através da transformada de Laplace de forma similar à transformada de Fourier. O processo se baseia em modelar $|H(s)|$ para que se consiga:

$$|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^{2N}}{\omega_c^{2N}}}} \quad (8.19)$$

com conseqüente atribuição na forma:

$$s \rightarrow \frac{i\omega}{\omega_c} \quad (8.20)$$

onde ω_c é a freqüência de corte.

A variável complexa s de Laplace, de acordo com (8.2), possui uma parte real σ responsável pela parte transitória da solução da equação diferencial e uma parte imaginária ω correspondente à solução permanente do sistema. Demonstrando de maneira simplificada, obtém-se as raízes ω_k de:

$$1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^{2N} = 0 \quad (8.21)$$

e multiplica-se pela unidade complexa para se encontrar as raízes s_k , escolhendo os pólos do lado esquerdo do plano de Gauss, por possuírem a parte real negativa, para compor o polinômio de Butterworth $B(s)$, análogo ao polinômio $P(\omega)$ proveniente da transformada de Fourier. Com isso, $H(s)$ é do tipo:

$$H(s) = \frac{1}{B(s)} \quad (8.22)$$

Para o caso de dois pólos, $B(s)$ é:

$$B(s) = s^2 + \sqrt{2}s + 1 \quad (8.23)$$

onde pode-se notar que fazendo $s = i\omega/\omega_c$, obtém-se $P(\omega)$ para dois pólos.

8.6. DESENVOLVIMENTO DE FILTRO DIGITAL DE DOIS PÓLOS

Uma vez demonstrado brevemente o embasamento teórico da equação de filtragem segundo a transformada de Laplace juntamente com sua forma discretizada, parte-se para a obtenção do algoritmo de filtragem.

A função $H(s)$ para dois pólos é:

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \sqrt{2}s + 1} \quad (8.24)$$

que para a mudança de escala segundo (8.20), $H(s)$ adquire a forma:

$$H(s) = \frac{1}{\frac{1}{\omega_c^2} s^2 + \frac{1}{\omega_c} \sqrt{2}s + 1} \quad (8.25)$$

Aplicando agora a transformação bilinear em (8.25), tem-se:

$$H(s) \Big|_{s \rightarrow \frac{2(1-z^{-1})}{\Delta t(1+z^{-1})}} = H[z] = \frac{1}{\frac{1}{\omega_c^2} \left(\frac{2(1-z^{-1})}{\Delta t(1+z^{-1})} \right)^2 + \frac{1}{\omega_c} \sqrt{2} \left(\frac{2(1-z^{-1})}{\Delta t(1+z^{-1})} \right) + 1} \quad (8.26)$$

e simplificando:

$$H[z] = \frac{\theta^2 + 2\theta^2 z^{-1} + \theta^2 z^{-2}}{(4 + 2\theta\sqrt{2} + \theta^2) + (2\theta^2 - 8)z^{-1} + (4 - 2\theta\sqrt{2} + \theta^2)z^{-2}} = \frac{Y[z]}{X[z]} \quad (8.27)$$

onde novamente θ vale $\omega_c \Delta t$. Vale observar neste ponto do desenvolvimento que, de acordo com a primeira parcela do denominador do último membro de (8.26), a maior potência negativa de z é igual ao número de pólos do filtro. Rearranjando (8.27) na forma:

$$[(4 + 2\theta\sqrt{2} + \theta^2) + (2\theta^2 - 8)z^{-1} + (4 - 2\theta\sqrt{2} + \theta^2)z^{-2}]Y[z] = [\theta^2 + 2\theta^2 z^{-1} + \theta^2 z^{-2}]X[z] \quad (8.28)$$

e tomando-se a inversa da transformada Z em ambos os membros:

$$(4 + 2\theta\sqrt{2} + \theta^2)y[n] + (2\theta^2 - 8)y[n-1] + (4 - 2\theta\sqrt{2} + \theta^2)y[n-2] = \theta^2 x[n] + 2\theta^2 x[n-1] + \theta^2 x[n-2] \quad (8.29)$$

o que representa um algoritmo do tipo:

$$y[n] = \frac{\theta^2}{(4 + 2\theta\sqrt{2} + \theta^2)} x[n] + \frac{2\theta^2}{(4 + 2\theta\sqrt{2} + \theta^2)} x[n-1] + \frac{\theta^2}{(4 + 2\theta\sqrt{2} + \theta^2)} x[n-2] - \frac{(2\theta^2 - 8)}{(4 + 2\theta\sqrt{2} + \theta^2)} y[n-1] - \frac{(4 - 2\theta\sqrt{2} + \theta^2)}{(4 + 2\theta\sqrt{2} + \theta^2)} y[n-2] \quad (8.30)$$

Para o caso de um número N de pólos, o algoritmo utiliza N+1 valores de entrada e N valores de saída. Nota-se, portanto, que (8.30) representa um algoritmo expresso por uma relação algébrica simples e de múltiplo passo, diferentemente do algoritmo proposto por este estudo que utiliza um algoritmo expresso por uma relação matricial de único passo.

8.7. COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS

Aplicando na expressão (8.30) uma frequência de corte $\omega_c=50\text{rad/s}$ e uma discretização com $\Delta t=0,03\text{s}$ do sinal de entrada do tipo:

$$x(t)=\text{sen}(30t) \quad (8.31)$$

e comparando o resultado com o obtido através dos algoritmos propostos no trabalho, tem-se tabela 8.1:

i	Resultados dos algoritmos			Resultado teórico	Erro local dos algoritmos		
	Transformada Z	Trapezoidal	Hermitiano		Transformada Z	Trapezoidal	Hermitiano
200	0.065099	0.065099	-0.001770	-0.0043621	-0.069461	-0.069461	-0.002592
201	-0.681276	-0.681276	-0.734281	-0.7397261	-0.058450	-0.058450	-0.005445
202	-0.912075	-0.912075	-0.911133	-0.9152800	-0.003205	-0.003205	-0.004147
203	-0.452634	-0.452634	-0.398488	-0.3981683	0.054466	0.054466	0.000320
204	0.349352	0.349352	0.415694	0.4202692	0.070918	0.070918	0.004575
205	0.886955	0.886955	0.915258	0.9206554	0.033700	0.033700	0.005398
206	0.753329	0.753329	0.722142	0.7243079	-0.029021	-0.029021	0.002166
207	0.049598	0.049598	-0.017507	-0.0201813	-0.069779	-0.069779	-0.002675
208	-0.691667	-0.691667	-0.743937	-0.7493978	-0.057730	-0.057730	-0.005461
209	-0.909493	-0.909493	-0.907401	-0.9114849	-0.001992	-0.001992	-0.004084
210	-0.439032	-0.439032	-0.384192	-0.3837784	0.055254	0.055254	0.000413

Tabela 8.1 – Comparação dos algoritmos para $\Delta t=0.03s$

Nota-se claramente que, devido ao fato da quadratura numérica da transformada Z ser a mesma que a do algoritmo trapezoidal deste estudo, os resultados destes dois algoritmos são iguais.

Capítulo IX

OBSERVAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

Em primeiro lugar, cabe assinalar que foram duas as principais contribuições do presente trabalho para a análise dinâmica de estruturas. A primeira delas, a mais importante, foi uma apropriada leitura processo de filtragem de frequência, traduzindo-se a redação de tal processo, por assim se dizer, para uma linguagem mais facilmente inteligível para a engenharia de estruturas. A segunda contribuição, de cunho mais inédito, foi o desenvolvimento de algoritmos incondicionalmente estáveis e com alta precisão para a filtragem digital de frequências segundo o clássico modelo de Butterworth.

O emprego de operadores hermitianos de ordem elevada [6] na elaboração de algoritmos de integração das equações diferenciais correspondentes aos filtros de Butterworth se mostrou bastante sugestivo. Os operadores hermitianos em questão foram elaborados procurando-se, como mostrado, aumentar a ordem de precisão do integrador, sem deixar de se utilizar a importante característica de se tratar e um algoritmo matricial de passo único, no qual, para a consideração das condições iniciais, diferentemente do que ocorre com os algoritmos de múltiplos passos, bastante usuais na engenharia elétrica, não é necessário ter-se em conta a elaboração

de algoritmos especiais. É interessante também ser observado que a forma mais simples deste operador consiste no clássico integrador trapezoidal, muito empregado na engenharia de estruturas. Todavia, tal operador é empregado na dinâmica das estruturas gerando-se algoritmos de integração de passo único, e não como preconizado pela via da chamada transformada Z, conduzindo-se a um algoritmo de integração de passo duplo. Neste trabalho, foi elaborado um algoritmo com erro local de integração de quinta ordem, e indicados os procedimentos para a obtenção de algoritmos com ordem maior de precisão. Os resultados obtidos são, naturalmente, de maior precisão, mas é necessário ressaltar que, conforme a combinação de operadores hermitianos envolve mais valores de derivadas de maior ordem, torna-se necessário contar também com uma maior discretização do sinal de entrada, que deve ter ordem de erro compatível com a do integrador sendo considerado.

Verificou-se em alguns exemplos de aplicação que o algoritmo hermitiano mostrou-se capaz de filtrar um sinal, mesmo quando considerada uma componente aleatória no sinal de entrada (um eventual erro aleatório de leitura do aparelho de mensuração, por exemplo). Pode-se justificar tal comportamento pelo fato de que uma eventual regularidade na frequência do sinal aleatório não dispor de duração suficiente para mobilizar valores na resposta em regime permanente (tempo de resposta do filtro), como sucede com a componente harmônica presente.

Vale ressaltar que a redução da equação diferencial de filtragem a um sistema de equações diferenciais de primeira ordem considerada neste trabalho pode ser aplicada não só para o caso do filtro de Butterworth, mas também para o do filtro de Chebyshev, do filtro elíptico e outros, dado que também possuem suas respectivas equações diferenciais no domínio do tempo, resultando-se, naturalmente, em diferentes algoritmos de filtragem de frequência. Aliás, tal redução apresentada pode ser aplicada para formular a integração de qualquer equação diferencial.

Finalizando-se, acredita-se ter sido dada uma contribuição para um melhor entendimento do tema por parte da engenharia de estruturas, e também contribuído positivamente propondo-se uma formulação mais precisa de integração das equações diferenciais de filtragem.

Referências bibliográficas

- 1- LUDEMAN, Lonnie C. – *Fundamentals of Digital Signal Processing*, New Mexico State University, 1987
- 2- WARBURTON, Geoffrey B. – *The Dynamical Behavior of Structures*, Oxford, Pergamon Press, 1976
- 3- SPIEGEL, Murray R. – *Análise de Fourier (Coleção Schaum)*, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1976
- 4- CARLSON, Gordon E. – *Signal and Linear System Analysis*, University of Missouri, 1998
- 5- ASCHER, Uri M., Robert M. M., Robert D. Russel – *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equation*, Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995
- 6- LAIER, José Elias – *High Order Hermitian Algorithm of Integration in Time*, 15th ASCE Engineering Mechanics Conference, Columbia University, New York, NY, 2002