

**ANÁLISE NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS DE
PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS ATRAVÉS DO MÉTODO
DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

GABRIELA REZENDE FERNANDES

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos,
da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos
para obtenção do Título de Doutor em Engenharia de
Estruturas.

ORIENTADOR: Prof. Tit. Wilson Sergio Venturini

São Carlos

2003

Com amor, aos meus pais,
meu esposo Julio
e minha filha Júlia.

AGRADECIMENTOS

Desejo expressar meus agradecimentos a todos que, de alguma forma, ajudaram na realização deste trabalho.

Agradeço a todos os professores e funcionários do Departamento de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos. Em especial, ao Professor Doutor Wilson Sergio Venturini pela amizade, a excelente orientação e pelo estímulo em todos os estágios deste trabalho. A FAPESP, que através da bolsa de estudo possibilitou o desenvolvimento desta tese. Agradeço também ao colega Faustino Sanches pela ajuda na análise dos exemplos numéricos.

De modo especial, agradeço aos meus pais e meu esposo Júlio, que através do seu amor, estímulo e apoio, sempre me ajudaram nos momentos difíceis.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	vii
LISTA DE TABELAS	xi
LISTA DE SÍMBOLOS	xii
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	xviii
RESUMO	xix
ABSTRACT	xx
1 APRESENTAÇÃO.....	1
1.1 Introdução.....	1
1.2 Revisão Bibliográfica.....	2
1.3 Conteúdo do Trabalho.....	5
2 ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL E PLACAS DELGADAS	7
2.1 Introdução.....	7
2.2 Placas Delgadas Sujeitas à Flexão Simples.....	7
2.3 Problema de Membrana.....	14
3 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS SUJEITAS À FLEXÃO SIMPLES PARA DOMÍNIOS COMPOSTOS	17
3.1 Introdução.....	17
3.2 Equação Integral de Deslocamento	18
3.3 Solução Fundamental de Placas	27
3.4 Equação Integral de Deslocamento para um Ponto do Contorno ou da Interface	32
3.4.1 Ponto Q no contorno externo ou do tipo c3	33
3.4.2 Ponto Q pertence à interface.....	36
3.4.3 Valor livre para Q do tipo c2	38
3.4.4 Q coincide com um canto do tipo c1	40
3.5 Equação Integral da Rotação	41
3.5.1 Equação Integral para Pontos do Domínio	42
3.5.2 Equação Integral para Pontos da Interface	43
3.5.3 Equação Integral de um Ponto sobre o Contorno Externo.....	50
3.6 Equação Integral do Deslocamento para um Ponto Externo	51
3.7 Transformação das Integrais de Domínio em Integrais de Contorno	51
4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO	54
4.1 Introdução.....	54
4.2 Discretização do Contorno e Interfaces.....	55
4.3 Aproximação das Variáveis do problema.....	56
4.4 Transformações das Equações Integrais em Equações Algébricas	58
4.5 Integração Numérica	61
4.6 Integração Analítica	64
4.7 Sistema de Equações	66

4.8	Propriedades da Matriz H.....	68
4.9	Deslocamentos e Esforços para Pontos Internos	71
4.10	Momentos (m_{ij}) nos Pontos do Contorno	75
4.11	Exemplos Numéricos	79
4.11.1	Placa Quadrada Enrijecida com Duas Vigas.	79
4.11.2	Placa Enrijecida com Quatro Vigas Externas e uma Viga Interna	83
4.11.3	Placa Enrijecida com Três Vigas.....	85
4.11.4	Placa Esconsa Enrijecida com Vigas no Contorno Externo e Vigas Internas	87
5 ANÁLISE LINEAR DO PAVIMENTO ENRIJECIDO: MODELO ALTERNATIVO.....		89
5.1	Introdução.....	89
5.2	Equações Integrais.....	90
5.3	Geração dos Elementos de Extremidades.....	95
5.4	Integração das Interfaces	97
5.5	Curvaturas em Pontos do Eixo de Vigas Externas	98
5.6	Sistema de Equações	103
5.7	Exemplos Numéricos	105
5.7.1	Placa Quadrada Enrijecida com Duas Vigas.	106
5.7.2	Placa Enrijecida com Quatro Vigas Externas e uma Viga Interna	111
5.7.3	Placa Enrijecida com Três Vigas.....	112
5.7.4	Placa Esconsa Enrijecida com Vigas no Contorno Externo e Vigas Internas	114
6 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS SUJEITAS À FLEXÃO COMPOSTA PARA DOMÍNIOS COMPOSTOS		116
6.1	Introdução.....	116
6.2	Relações Básicas	117
6.3	Equações Integrais dos Deslocamentos no Domínio.....	118
6.4	Solução Fundamental do Problema de Chapa	133
6.5	Cálculo da Rotação w,s	135
6.6	Equações Integrais dos Deslocamentos u_s e u_n para Pontos do Contorno ou Interface.....	135
6.7	Momentos em Pontos do Contorno	142
6.8	Modelo Alternativo para Análise Linear do Pavimento.....	143
6.8.1	Introdução.....	143
6.8.2	Equações Integrais.....	143
6.8.3	Cálculo dos Momentos nos Encontros de Vigas.	155
6.8.4	Integrais de Domínio do Carregamento no Plano da Placa.	156
6.8.5	Sistema de Equações.....	158
6.8.6	Propriedades da Matriz H.....	161
6.9	Exemplos Analíticos.....	165
6.9.1	Viga Sujeita à Carga Excêntrica	165
6.9.2	Viga Sujeita à Momentos Fletor.....	167
6.9.3	Viga Sujeita a Momentos Fletor e Carga Excentrica.....	168
6.9.4	Placa Enrijecida com uma Viga.....	169
6.10	Exemplos Numéricos.	170
6.10.1	Viga Sujeita à Carga Excêntrica.....	170
6.10.2	Viga Sujeita a Momento Fletor.....	172
6.10.3	Placa Enrijecida com uma Viga.....	173

6.10.4 Placa Enrijecida com Duas Vigas.e com Momento Aplicado	175
6.10.5 Placa Enrijecida com Duas Vigas externas com força Normal Aplicada	176
6.10.6 Placa Enrijecida com Duas Vigas com Momento e Força Normal Aplicados ..	177
6.10.7 Placa Quadrada Enrijecida com Duas Vigas com Carga Distribuída	179
6.10.8 Placa Enrijecida com Quatro Vigas Externas e uma Viga Interna	183
6.10.9 Placa Enrijecida com Três Vigas	185
6.10.10 Placa Esconsa Enrijecida com Vigas no Contorno Externo e Vigas Internas ..	187

7 FORMULAÇÃO DA PLACA ENRIJECIDA SUJEITA À FLEXÃO COMPOSTA E COM A PRESENÇA DE CAMPOS DE MOMENTOS E FORÇAS NORMAIS

INICIAIS

7.1 Introdução.....	190
7.2 Esforços.....	191
7.3 Equações Integrais para Deslocamentos.....	192
7.4 Equações Integrais para Esforços nos Pontos Internos	195
7.5 Cálculo das Forças de Superfície p_n e p_s nas Interfaces	200
7.6 Discretização do Domínio em Células	200
7.6.1 Introdução	201
7.6.2 Integração das Células Triangulares	202
7.6.3 Integração das Células Retangulares nas Vigas.....	211
7.6.4 Integração das Células Retangulares nos Encontros de Vigas.....	213
7.7 Equações Algébricas	214
7.7.1 Equações de Deslocamentos no Contorno Externo e Eixo de Vigas.....	214
7.7.2. Deslocamentos e Esforços no Domínio	215
7.8 Técnica de Solução.....	216
7.8.1 Cálculo das Incógnitas da Placa e Deslocamentos do Domínio	216
7.8.2 Cálculo dos Esforços	219
7.9 Verificação das Matrizes S_M e S_N	220

8 FORMULAÇÃO NÃO-LINEAR IMPLÍCITA UTILIZANDO O OPERADOR

TANGENTE CONSISTENTE.....

8.1 Introdução.....	225
8.2 Obtenção do Operador Tangente Consistente	226
8.3 Modelo Estratificado	236
8.4 Procedimento Incremental e Iterativo para Obtenção da Resposta não-linear	237
8.5 Modelo Elasto-Plástico Utilizado.....	240
8.5.1 Modelo Elasto-Plástico para um Caso Geral	240
8.5.2 Algoritmo Implícito com o Critério de Voin Mises	243
8.5.3 Tensor Elasto-plástico Algorítmico para o Critério de Von Mises	250
8.5.4 Critério nos Pontos de Viga.....	253
8.6 Critério de Convergência.....	255
8.7 Exemplos Numéricos	256
8.7.1 Viga Sujeita a Momento Fletor.....	256
8.7.2 Placa Enrijecida com Duas Vigas com Momento Aplicado	257
8.7.3 Placa Enrijecida com Duas Vigas com força Normal Aplicada	259
8.7.4 Placa Enrijecida com Duas Vigas com Momento e Força Normal Aplicados ...	260
8.7.5 Placa Enrijecida com Quatro Vigas Externas e uma Viga Interna com Carga Uniformemente Distribuída	261

CONCLUSÕES	264
BIBLIOGRAFIA	267

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 - Elemento Bidimensional de Placa	8
FIGURA 2.2 – Tensões em um Elemento de Placa	9
FIGURA 2.3 - Esforços em um Elemento de Placa.....	10
FIGURA 2.4 - Esforços no Elemento abc	12
FIGURA 2.5 - Momentos Volventes em um Canto i da Placa	13
FIGURA 3.1 - Placa de Dimensões Finitas, Contida em uma Placa Infinita.....	18
FIGURA 3.2 - Placa Subdividida em Três Sub-regiões	19
FIGURA 3.3 - Tipos de Cantos na Placa com Sub-regiões	26
FIGURA 3.4 - Momentos Volventes em um Canto Tipo 1.....	27
FIGURA 3.5 - Pontos de Carregamento q e de Deslocamento p e Sistemas de Coordenadas (m,l) e (n,s) no Domínio de uma Placa Infinita.....	27
FIGURA 3.6 - Contorno Circular Acrescido a um Ponto Q de um Canto da Placa	32
FIGURA 3.7 - Ponto de Colocação Situado na Interface de Duas Sub-regiões	37
FIGURA 3.8 - Ponto de Colocação Situado na Interface de Duas Sub-regiões	38
FIGURA 3.9 - Q Coincide com um Canto do Tipo c_2	39
FIGURA 3.10 - Q Coincide com um Canto do Tipo 2.....	39
FIGURA 3.11 - O Ponto Q Coincide com um Canto do Tipo 1.....	41
FIGURA 3.12 - Deslocamentos do Ponto do Domínio Q e do Ponto do Contorno Circular P47	
FIGURA 3.13 - Sistemas de Coordenadas no Ponto Q e no Contorno	48
FIGURA 3.14 - Integração ao Longo do Contorno da Região Carregada.....	52
FIGURA 4.1 - Geometria do Elemento	55
FIGURA 4.2 - Elementos Descontínuos.....	58
FIGURA 4.3 - Divisão de um Elemento em Sub-elementos	63
FIGURA 4.4 - Pontos de Colocação.....	66
FIGURA 4.5 - Movimento de Corpo Rígido - Translação	69
FIGURA 4.6 - Movimento de Corpo Rígido - Rotação.....	70
FIGURA 4.7 - Sistema Local de Coordenadas de um Elemento do Contorno	75
FIGURA 4.8 - Placa Enrijecida com Duas Vigas	79
FIGURA 4.9 - Discretização do Contorno Externo e Interfaces.....	80

FIGURA 4.10 - Deslocamentos na Linha Média da Placa	80
FIGURA 4.11 - Momentos na Linha Média da Placa.....	81
FIGURA 4.12 - Deslocamentos na Linha Média da Placa	81
FIGURA 4.13 - Deslocamentos na Linha Média da Placa	82
FIGURA 4.14 - Momentos na Linha Média da Placa.....	82
FIGURA 4.15 - Placa Enrijecida com Vigas Externas e uma Viga Interna.....	83
FIGURA 4.16 - Discretização.....	83
FIGURA 4.17 - Deslocamentos na Linha Média da Placa	84
FIGURA 4.18 - Momentos na Direção x na Linha Média da Placa	84
FIGURA 4.19 - Placa Enrijecida com Três Vigas.....	85
FIGURA 4.20 - Discretização da Placa	85
FIGURA 4.21 - Deslocamentos na Linha Média da Viga V_2	86
FIGURA 4.22 - Momentos na Direção x na Linha Média da Viga V_2	86
FIGURA 4.23 - Placa Esconsa Enrijecida por Vigas.....	87
FIGURA 4.24 - Discretização da Placa Esconsa	87
FIGURA 4.25 - Deslocamentos na Viga V_4	88
FIGURA 4.26 - Momentos na Direção x na Viga V_4	88
FIGURA 5.1 - Modelo de Pavimento que Representa a Viga pela sua Linha Média.....	90
FIGURA 5.2 - Modelo de Pavimento com as Vigas representadas pela Linha Média.....	96
FIGURA 5.3 - Elementos nas Interseções das Vigas.....	97
FIGURA 5.4 - Contorno Singular.....	100
FIGURA 5.5 - Direções no Contorno Singular.....	102
FIGURA 5.6 - Contorno Singular.....	103
FIGURA 5.7 - Discretização para o Modelo <i>mod2</i>	106
FIGURA 5.8 - Deslocamentos na Linha Média da Placa	107
FIGURA 5.9 - Deslocamentos na Linha Média da Placa	107
FIGURA 5.10 - Momentos na Direção y na Linha Média da Placa	108
FIGURA 5.11 - Momentos na Direção x na Linha Média da Placa	108
FIGURA 5.12 - Deslocamentos na Linha Média da Placa	109
FIGURA 5.13 - Momentos na Direção x na Linha Média da Placa	109
FIGURA 5.14 - Momentos na Direção y na Linha Média da Placa	110
FIGURA 5.15 - Deslocamentos na Viga.....	110
FIGURA 5.16 - Momentos na Viga na Direção x	110

FIGURA 5.17 - Discretização Através da Linha Média das Vigas (<i>mod2</i>).....	111
FIGURA 5.18 - Deslocamentos na Linha Média da Placa	112
FIGURA 5.19 - Momentos na Direção x na Viga Interna	112
FIGURA 5.20 - Discretização das Linhas Médias das Vigas (<i>mod2</i>).....	113
FIGURA 5.21 - Deslocamentos na Viga Interna	113
FIGURA 5.22 - Momentos na Direção x na Viga Interna	113
FIGURA 5.23 - Discretização da Placa Esconsa com Modelo <i>mod2</i>	114
FIGURA 5.24 - Deslocamentos na Viga V_4	115
FIGURA 5.25 - Momentos na Direção x na Viga V_4	115
FIGURA 6.1 - Placa Subdividida em Sub-regiões.....	117
FIGURA 6.2 - Sistema de Coordenadas no Contorno Circular Infinitesimal.....	136
FIGURA 6.3 - Decomposição de Forças nas Faces da Viga	148
FIGURA 6.4 - Encontro de uma Externa com uma Interna.....	155
FIGURA 6.5 - Rotação da Placa no Plano (X_1, X_2).....	163
FIGURA 6.6 - Viga Sujeita à Carga Excêntrica	165
FIGURA 6.7 - Viga Sujeita a Momento Fletor.....	167
FIGURA 6.8 - Placa Enrijecida com uma Viga.....	168
FIGURA 6.9 - Viga Sujeita à Carga Excêntrica	169
FIGURA 6.10 - Discretização da Viga	171
FIGURA 6.11 - Placa Enrijecida com uma Viga.....	173
FIGURA 6.12 - Deslocamentos na Viga Interna	174
FIGURA 6.13 - Placa Enrijecida com Duas Vigas e Sujeita à Flexão Simples.....	175
FIGURA 6.14 - Deslocamento ao Longo do Eixo da Viga	176
FIGURA 6.15 - Carregamento na Viga e Laje	176
FIGURA 6.16 - Deslocamento u_s ao Longo da Viga.....	177
FIGURA 6.17 - Placa Enrijecida com Duas Vigas e Sujeita à Flexão Composta	177
FIGURA 6.18 - Carregamento na Laje e nas Vigas.....	178
FIGURA 6.19 - Tensões ao Longo da Espessura da Laje e da Viga	178
FIGURA 6.20 - Deslocamento w ao Longo da Viga	179
FIGURA 6.21 - Deslocamentos ao Longo da Linha Média da Placa	180
FIGURA 6.22 - Momentos na Direção x na Linha Média da Placa	180
FIGURA 6.23 - Momentos na Direção y na Linha Média da Placa	180
FIGURA 6.24 - Deslocamentos ao Longo da Linha Média da Placa	181

FIGURA 6.25 - Momentos na Direção x ao Longo da Linha Média da Placa	182
FIGURA 6.26 - Momentos na Direção y ao Longo da Linha Média da Placa	182
FIGURA 6.27 - Deslocamentos no Eixo da Viga	183
FIGURA 6.28 - Momentos na Direção s no Eixo da Viga	183
FIGURA 6.29 - Deslocamentos no Eixo da Viga Interna.....	184
FIGURA 6.30 - Momentos na Direção x na Viga Interna	184
FIGURA 6.31 - Deslocamentos no Eixo da Viga Interna.....	185
FIGURA 6.32 - Deslocamentos no Eixo da Viga Interna.....	185
FIGURA 6.33 - Deslocamentos na Viga Interna	186
FIGURA 6.34 - Momentos na Direção x na Viga	186
FIGURA 6.35 - Momentos na Direção x na Viga	186
FIGURA 6.36 - Momentos na Direção x na Viga	187
FIGURA 6.37 - Deslocamentos ao Longo do Eixo da Viga V_4	188
FIGURA 6.38 - Momentos na Direção x ao Longo do Eixo da Viga V_4	188
FIGURA 6.39 - Deslocamentos ao Longo do Eixo Médio da Laje L_1	189
FIGURA 6.40 - Momentos na Direção x ao Longo do Eixo Médio da Laje L_1	189
FIGURA 7.1 - Domínios Ω_ε e Ω_c	198
FIGURA 7.2 - - Discretização do Domínio das Lajes e Vigas	201
FIGURA 7.3 - Célula Triangular com Sistema de Coordenadas Homogêneas	202
FIGURA 7.4 - Sistema de Coordenadas Cilíndricas.....	204
FIGURA 7.5 - Célula Cujos Nós Não São Coincidentes com seus Vértices.....	204
FIGURA 7.6 - Definição dos Nós e Pontos de Colocação na Célula Retangular	211
FIGURA 7.7 - Divisão da Célula Retangular em Células Triangulares	212
FIGURA 7.8 - Projeção no Eixo da Célula dos Pontos Sobre o Contorno da Mesma	212
FIGURA 7.9 - Viga com Momento Inicial Aplicado	220
FIGURA 7.10 - Viga com Força Normal Inicial Aplicada	221
FIGURA 7.11 - Placa Enrijecida com Duas Vigas	223
FIGURA 8.1 - Método de Newton Raphson Padrão	230
FIGURA 8.2 - Modelo Estratificado para o Concreto Armado	236
FIGURA 8.3 - Representação Geométrica do Critério de Von Mises no Caso Biaxial.....	250
FIGURA 8.4 - Discretização da Viga	257
FIGURA 8.5 - Curva Carga-deslocamento do Ponto Central.....	257
FIGURA 8.6 - Discretização da Placa	258

FIGURA 8.7 - Curva Carga-deslocamento do Ponto Central da Viga	258
FIGURA 8.8 - Deslocamentos na Viga para $\beta=2,78$	259
FIGURA 8.9 - Curva Carga-deslocamento do Ponto da Viga, Onde Aplica a Carga p_n	259
FIGURA 8.10 - Deslocamentos u_s ao longo da viga para $\beta=6,59$	260
FIGURA 8.11 - Curva Carga-deslocamento do Ponto Central da Viga	261
FIGURA 8.12 – Deslocamentos na Viga para $\beta=3,35$	262
FIGURA 8.13 - Placa Simplesmente Apoiada, Enrijecida com Vigas Externas e uma Interna	262
FIGURA 8.14 - Curva Carga-deslocamento do Ponto Central da Viga Interna	263
FIGURA 8.15 - Deslocamentos na Viga Interna no incremento 23 da análise de flexão composta com 96 células	263

LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1 - Valores de $K(Q)$	41
TABELA 5.1 - Valores de $K_w(Q)$ para a equação de w_m	95
TABELA 6.1 - Valores de $K_k(Q)$ para a equação de deslocamento da chapa	145
TABELA 6.2 - Resultados Numéricos nos Pontos Internos	171
TABELA 6.3 - Resultados Numéricos nos Pontos do Contorno	171
TABELA 6.4 - Resultados Numéricos nos Pontos do Contorno	172
TABELA 6.5 - Resultados Numéricos nos Pontos Internos	172
TABELA 6.6 - Resultados Numéricos nos Pontos so Contorno	173
TABELA 6.7 - Resultados Analíticos.....	174
TABELA 6.8 - Resultados Numéricos	175
TABELA 8.1 - Resultados obtidos para $\beta = 5,65$	257

LISTA DE SÍMBOLOS

∇^2	: operador diferencial escalar, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$
Γ	: coordenada que percorre o contorno externo da placa;
$\Gamma_{s/vigas}$: coordenada que percorre o contorno externo da placa sem vigas;
Γ_i	: coordenada que percorre o contorno externo ou interface da sub-região i ;
Γ_{ij}	: coordenada que percorre a interface do sub-domínio Ω_i com o sub-domínio Ω_j ;
Γ_∞	: contorno infinito;
Γ_g	: contorno do carregamento transversal;
Γ_b	: contorno do carregamento no plano da placa;
Ω	: coordenada de domínio;
Ω_g	: área do carregamento transversal distribuído;
Ω_b	: área do carregamento distribuído no plano da placa;
Ω_ε	: região do domínio;
Ω_{cel}	: domínio da célula;
Ω_∞	: domínio infinito;
$\tilde{\Psi}^T$: matriz que contém as funções de aproximação dos momentos iniciais;
$\{\Psi_M\}$: vetor dos resíduos de momentos;
$\{\Psi_N\}$: vetor dos resíduos de forças normais;
β_C	: ângulo no canto da placa;
β	: no capítulo 8 é o coeficiente de multiplicação de carga e nos outros capítulos é canto no canto da placa;
δ_{ij}	: delta de Kronecker;
$\delta(q, p)$: delta de Dirac;
$\{\delta\Delta(1/r)\}$: correção no incremento de curvaturas;
$\{\delta\Delta(\varepsilon^{2D})\}$: correção no incremento de deformações de chapa;

ε_{ij}^0	: campo de deformações iniciais;
ε_{ij}^e	: componentes elásticas de deformação devido ao carregamento;
ε_{ij}^p	: componentes plásticas do tensor de deformação;
$\bar{\varepsilon}^p$: deformação plástica efetiva ou equivalente ao estado uniaxial;
ε_{ij}	: representa as componentes de deformação no sistema global;
ε_{ij}^F	: tensor das deformações devido à flexão simples da placa;
ε_{ij}^{2D}	: tensor das deformações relativo ao problema bidimensional;
$\tilde{\phi}^T$: matriz que contém as funções de aproximação dos deslocamentos e esforços;
$\tilde{\phi}_g$: matriz que contém as funções de aproximação da geometria do elemento;
λ	: multiplicador plástico;
ν	: coeficiente de Poisson;
ν'	: $\nu' = \nu / (1 + \nu)$;
θ_{x_1} e θ_{x_2}	: rotações em torno dos eixos x_1 e x_2 ;
r, θ	: sistema de coordenadas polares;
σ_{ij}	: tensor das tensões devido ao carregamento;
σ_{ij}^F	: tensor das tensões devido à flexão simples da placa;
σ_{ij}^{2D}	: tensor das tensões relativo ao problema bidimensional;
σ_{ij}^e	: tensões devido às deformações totais;
σ_{ij}^p	: tensor de tensões plásticas;
σ_{ij}^0	: tensões devido ao campo de deformações iniciais;
σ_y	: tensão de escoamento inicial;
σ_{ij}^t	: tensão de tentativa;
$\bar{\sigma}$: tensão efetiva;
ξ	: coordenada adimensional do ponto onde se calcula a equação integral;
a_i	: comprimento do sub-elemento i ;
A	: área da seção transversal;

b_i	: carregamento no plano da placa, na direção \mathbf{i} ;
C_{ijkl}	: tensor de quarta ordem que contém as constantes elásticas;
c_s	: deslocamento da superfície média de Ω_s em relação à superfície de referência;
C_{ijkl}^{ep}	: tensor dos módulos elasto-plásticos tangentes;
$[C_m]$: tensor de rigidez elástico, que relaciona momentos com curvaturas;
$[C_N]$: tensor de rigidez elástico, que relaciona força normal com deformação;
D_s	: rigidez à flexão da sub-região s ;
D_{pa}	: rigidez à flexão da sub-região adjacente;
E	: módulo de elasticidade longitudinal do material;
\bar{E}	: $\bar{E}_s = E_s t_s$
\bar{E}_{pa}	: \bar{E} da sub-região adjacente;
f^t	: valor de tentativa do critério;
g	: carregamento transversal uniformemente distribuído;
g^*	: carregamento fundamental, geralmente é o delta de Dirac;
G	: módulo de elasticidade transversal;
\bar{G}	: $\bar{G}_s = G_s t_s$
I	: momento de inércia da viga;
K	: módulo plástico ou parâmetro de endurecimento;
$[K^{TC}]$: matriz tangente;
L_j	: comprimento do elemento j
M_i	: momento na direção \mathbf{i} , em uma superfície de normal \mathbf{n}_j ;
m_{ij}	: tensor dos momentos;
M_n	: momento de flexão, por unidade de comprimento, na direção normal ao contorno;
M_{ns}	: momento volvente por unidade de comprimento;
m_{ij}^0	: tensor dos momentos devido ao campo de tensões iniciais;
m_{ij}^e	: tensor dos momentos devido às tensões totais;
\tilde{M}^0	: vetor dos momentos iniciais em todos os nós do contorno e do domínio;
$\tilde{M}^{0(N)}$: vetor dos valores nodais dos momentos iniciais em uma célula;

n	: vetor unitário normal ao contorno ou interface no plano da placa;
n_i	: co-senos diretores da normal em relação ao eixo i ;
N_{ij}	: tensor das forças normais;
N_{ij}^0	: tensor das forças normais devido ao campo de tensões iniciais;
N_{ij}^e	: tensor das forças normais devido às tensões totais;
N_{\sim}^0	: vetor das forças normais iniciais em todos os nós do contorno e do domínio;
N_g	: número de pontos de Gauss;
N_K	: número de camadas em que a seção da placa é dividida;
N_{int}	: número de interfaces da placa em sub-regiões;
N_{sub}	: número de sub-elementos;
N_s	: número de sub-regiões da placa;
N_{ve}	: número de vigas externas;
N_{vi}	: número de vigas internas;
N_c	: número total de cantos da placa em sub-regiões;
N_{c_1}	: número total de cantos do tipo c_1 ;
N_{c_2}	: número total de cantos do tipo c_2 ;
N_{c_3}	: número total de cantos do tipo c_3 ;
N_{cel}	: número total de células;
N_e	: número total de elementos da placa em sub-regiões;
N_{noc}	: número total de nós do contorno externo (para a formulação do capítulo 5 são os nós do contorno externo sem vigas);
N_i	: número total de pontos internos;
N_{nint}	: o número total de nós nas interfaces;
N_{nove}	: o número de nós sobre os eixos de vigas externas;
N_{novi}	: o número de nós sobre os eixos de vigas internas;
N_{ocelr}	: número de pontos de colocação para momentos nas vigas;
N_{pm}	: número total de pontos de colocação para momentos;
N_s	: número de barras de aço;

- N_t : $N_t=N_{noc}+N_{nint}$ para a formulação do capítulo 3 ou $N_t=N_{noc}+N_{nove}+N_{novi}$ nos capítulos 5 e 6;
- N_{varf} : número de variáveis do problema de flexão ($N_{varf}=2N_t+N_c$);
- N_{varr} : número total de variáveis do problema de flexão composta ($N_{varr}=N_{varf}+2N_t+2(N_{nnovi}+N_{nnove})$);
- p : ponto onde se calculam os deslocamentos;
- p_i : força normal na direção \mathbf{i} , em uma superfície de normal \mathbf{n}_j ;
- p_n e p_s : forças de superfície nas direções \mathbf{n} e \mathbf{s} do contorno ou interface da placa;
- P_{ks}^*, P_{kn}^* : forças fundamentais no plano da placa, devido a uma carga fundamental aplicada na direção \mathbf{k} ;
- $\tilde{p}(\mathbf{P})$: vetor das forças generalizadas de um ponto \mathbf{P} do contorno ou interface;
- \tilde{P} : vetor das forças generalizadas em todos os nós da placa em sub-regiões;
- \tilde{P}_F : vetor das forças generalizadas, em todos os nós, do problema de flexão;
- \tilde{P}_{2D} : vetor das forças generalizadas, em todos os nós, do problema bidimensional;
- \tilde{P}^N : vetor das forças nodais generalizadas de um elemento;
- q : ponto onde se aplica a solução fundamental;
- q_i : força cortante, na direção \mathbf{i} , de um ponto interno;
- Q_i : força cortante de superfície na direção \mathbf{i} ;
- R_c : reação de canto;
- R_c^* : valor de R_c na solução fundamental;
- \tilde{R}_c : vetor das reações em todos os cantos da placa;
- R : raio de curvatura do contorno no ponto P ;
- r : distância de onde se aplicou o carregamento unitário ao ponto onde se deseja obter a força ou deslocamento na solução fundamental;
- s : vetor unitário tangente ao contorno no plano da placa;
- S_{ij} : parte anti-esférica do vetor de tensões;
- t_s : espessura da sub-região s ;
- T : tensor de tensão;
- u_1, u_2, u_3 : componentes de deslocamentos no sistema cartesiano x_1, x_2, x_3 ;

u_s, u_n	: deslocamentos no plano da placa, nas direções n e s do contorno ou interface;
$u_{s,n}$ e $u_{n,n}$: rotações relativas ao problema bidimensional;
u_{ks}^*, u_{kn}^*	: deslocamentos fundamentais no plano da placa, devido a uma carga fundamental aplicada na direção k ;
u_i^P	: deslocamento na direção i devido à carga P ;
u_i^M	: deslocamento na direção i devido ao momento M ;
$\underline{u}(P)$: vetor dos deslocamentos de um ponto P do contorno ou interface;
\underline{U}	: vetor dos deslocamentos em todos os nós;
\underline{U}^N	: vetor dos deslocamentos nodais de um elemento;
\underline{U}_{2D}	: vetor dos deslocamentos, em todos os nós, do problema bidimensional;
\underline{U}_F	: vetor dos deslocamentos, em todos os nós, do problema de flexão;
V_n	: força cortante equivalente por unidade de comprimento;
V_n^*	: valor de V_n na solução fundamental;
w	: deslocamento na direção do eixo x_3 ;
$w_{,ij}$: curvaturas;
	: deslocamento do canto da placa;
w_c^*	: deslocamento fundamental do canto i da placa;
$w_{,ij}^*$: valor de $w_{,ij}$ na solução fundamental;
w^*	: valor de w na solução fundamental;
$\partial w / \partial x_2$: rotação em torno do eixo x_1 ;
$\partial w / \partial x_1$: rotação em torno do eixo x_2 ;
$\partial w / \partial n$: rotação normal ao contorno;
$\partial w^* / \partial n$: valor de $\partial w / \partial n$ na solução fundamental;
$\partial w / \partial s$: rotação tangencial ao contorno;
\underline{w}_c	: vetor dos deslocamentos em todos os cantos da placa;
W_{ig}	: fator ponderador do ponto de gauss ig ;

$\tilde{\mathbf{X}}^N$: vetor de coordenadas nodais de um elemento;

X_i^N : coordenada cartesiana do ponto \mathbf{N} , na direção \mathbf{i} ;

x_1, x_2, x_3 : sistema de coordenadas cartesianas;

x_3^s : eixo na direção x_3 tendo como referência a superfície média da sub-região s .

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF - Método dos Elementos Finitos;

MEC - Método dos Elementos de Contorno;

BEM - Boundary Element Method

RESUMO

FERNANDES, G.R. (2003). *Análise não-linear de estruturas de pavimentos de edifícios através do método dos elementos de contorno*. São Carlos. 272p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Neste trabalho, a formulação linear do método dos elementos de contorno - MEC, baseada nas hipóteses de Kirchhoff, é adaptada à análise de estruturas de pavimentos de edifícios, considerando-se as interações entre elementos lineares e de superfície. Leva-se em conta, além da flexão, o comportamento dos elementos como membrana. A representação integral deduzida contempla todos os elementos estruturais envolvidos, portanto garantido a monoliticidade do conjunto sem a necessidade de impor compatibilizações de deslocamentos e equilíbrio das forças generalizadas de superfícies ao longo das interfaces. A formulação integral é deduzida a partir da primeira identidade de Betti, onde a placa é considerada com variação de espessura, quer seja contínua ou abrupta. Porém, nesse trabalho apenas o caso de placas e vigas com rigidez constante são tratados. A partir dessa formulação, a fim de reduzir o número de graus de liberdade do problema, apresenta-se um modelo alternativo, onde as vigas são representadas por seus eixos médios. Estende-se essa formulação à análise não-linear, através da inclusão de campos de esforços iniciais, onde as integrais de domínio são calculadas aproximando-se o campo de esforços iniciais em células internas. A solução não-linear é obtida a partir da formulação implícita, na qual as correções que devem ser dadas aos estados de curvatura e das deformações de chapa em uma determinada iteração, são obtidas através do operador tangente consistente, que é atualizado a cada iteração, e da correção dos esforços nos pontos da placa. O critério elasto-plástico utilizado é o de Von Mises e a distribuição das tensões é aproximada, em uma seção qualquer da placa, por pontos discretos, que seguindo um esquema gaussiano, permite a integração numérica para o cálculo dos esforços.

Palavras-chave: Flexão de Placas, Elementos de Contorno, Pavimentos de Edifício.

ABSTRACT

FERNANDES, G.R. (2003). *Análise não-linear de estruturas de pavimentos de edifícios através do método dos elementos de contorno*. São Carlos. 272p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

In this work, the plate bending linear formulation of the boundary element method - BEM, based on the Kirchhoff's hypothesis, is extended to incorporate beam elements. The final objective of the work is to obtain a numerical model to analyse building floor structures, in which stiffness is further increased by the presence of membrane effects. From the boundary integral representations of the bending and the stretching problems a particular integral equation to represent the equilibrium of the whole body is obtained. Using this integral equation, no approximation of the generalized forces along the interface is required. Moreover, compatibility and equilibrium conditions along the interface are automatically imposed by the integral equation. An alternative formulation where the number of degrees of freedom is further reduced is also investigated. In this case, the kinematics Navier-Bernoulli hypothesis is assumed to simplify the strain field for the thin sub-regions (beams). Then, the formulation is extended to perform non-linear analysis by incorporating initial effort fields. Then non-linear solution is obtained using the concept of the local consistent tangent operator. The domain integral required, to evaluate the initial effort influences, are performed by using the well-known cell sub-division. The non-linear behaviour is evaluated by the Von Mises criterion, that is verified at points along the plate thickness, appropriately placed to allow performing numerical integration to approach moments and normal forces using Gauss point schemes.

Key words: Plate bending, Boundary elements, Building floor structures

1 - APRESENTAÇÃO

1.1 INTRODUÇÃO

O surgimento do método dos elementos de contorno e a sua utilização como uma alternativa para a obtenção de soluções numéricas em quase todos os campos da engenharia representa um avanço significativo que ocorreu nessa área do conhecimento nos últimos anos. Em muitos problemas, comprovadamente, esse método é uma alternativa mais precisa e que permite a obtenção de respostas mais confiáveis quando comparadas com as dos métodos usuais. Em algumas aplicações as equações integrais são representações exatas do modelo matemático utilizado para representar o problema físico, o que, em geral, é traduzido como aumento de confiança nos resultados obtidos. Esse método vem despertando nos pesquisadores dos grandes centros de pesquisa um interesse crescente e que tem resultado em enorme progresso. Desse modo, o que se propõe a seguir, é mais um trabalho no qual utiliza-se como método numérico apenas o método dos elementos de contorno e onde se pretende desenvolver uma formulação não-linear para análises de pavimentos de edifícios. O pavimento será modelado por uma placa composta de sub-regiões de diferentes rigidezes, sendo cada sub-região a representação de uma viga ou laje. Inicialmente, será desenvolvida uma formulação para análise linear de placas sujeitas à flexão simples, onde as sub-regiões são representadas por suas superfícies médias. Em seguida, será introduzido nessa formulação o efeito de membrana, para que se possa fazer a análise fora das superfícies médias das sub-regiões. Por último, será obtida a formulação não-linear, através da inclusão de esforços iniciais na formulação linear.

O método dos elementos de contorno tem demonstrado ter um bom desempenho para a análise de placas. A precisão do método é ainda mais evidenciada em pontos de concentração de esforços. Assim, o método se apresenta com uma característica importante para a determinação de esforços em uma estrutura de pavimentos de edifícios, que usualmente apresentam diversos carregamentos em áreas de pequenas dimensões, como é o caso dos pilares, e também carregamentos em linha, representando a interação com as vigas ou enrijecedores de um modo geral.

Na determinação das matrizes necessárias à consideração da não-linearidade física, as integrações ao longo da espessura são obtidas utilizando-se quadratura de Gauss para melhorar a precisão. Esta é uma técnica consolidada, que utilizada juntamente com o MEC, vai garantir a precisão das soluções não-lineares obtidas, com um esforço computacional que se espera razoável. Nota-se que as representações integrais de momentos e forças cortantes são exatas; o erro introduzido é devido à aproximação dos valores de contorno e dos momentos plásticos internos que são aproximados em subdomínios ou células. A integração ao longo da espessura não acarreta grandes erros. A formulação proposta, utilizando-se o método dos elementos de contorno, garante boa representatividade ao modelo a ser desenvolvido, dando confiabilidade aos resultados calculados.

Deve-se ainda salientar, que o presente trabalho se insere no conjunto de trabalhos que vem sendo desenvolvidos pelo prof. Wilson Sergio Venturini nos últimos anos. Nesses trabalhos, é dada ênfase aos aspectos numéricos para o tratamento de vários problemas de engenharia, particularmente no desenvolvimento de formulações de modelos numéricos, ou adequação dos já existentes, para análise de diversos problemas de engenharia de estruturas.

1.2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A aplicação do método dos elementos de contorno à análise de placas teve como marco inicial o trabalho de JASWON (1967), ainda quando a técnica era conhecida como Método das Equações Integrais de Contorno. Neste trabalho, o autor propôs a solução de equação bi-harmônica por meio de equações integrais. Em 1976, é publicado um outro trabalho sobre placas: HANSEN (1976), propôs uma formulação para a análise de placas infinitas com buracos de contornos não carregados, utilizando duas equações integrais, as representações integrais dos descolamentos e de sua derivada. ALTIERO & SIKARSKIE (1978), analisaram apenas placas engastadas, considerando a placa real contida em uma outra de maiores dimensões para a qual era possível estabelecer a função de Green. Essa técnica foi mais tarde generalizada para quaisquer condições de contorno por WU &

ALTIERO (1979). A formulação direta para flexão de placas foi consolidada a partir de 1978. Os trabalhos mais relevantes desta época são os de BÉZINE (1978), TOTTENHAN (1979) e STERN (1979 e 1983). Nesses trabalhos é apresentada a formulação direta, utilizando-se como problema auxiliar uma solução fundamental que é a resposta de uma carga unitária em uma placa infinita. Além disso, são empregadas para a formulação do problema as representações integrais de deslocamento e de rotação.

A partir da proposição da formulação direta, foram desenvolvidos vários outros trabalhos que generalizaram o uso do MEC em placas para diversos tipos de análises: BÉZINE (1980) propôs uma formulação mista para análise de vibrações; KAMIYA (1982) aplicou o modelo a problemas sujeitos à variação de temperatura; VAN DER WEEËN (1982) desenvolveu a formulação para placas com três graus de liberdade por nó de contorno e três representações integrais - uma do deslocamento transversal e duas das rotações, considerando as hipóteses de Reissner; COSTA & BREBBIA (1985) e também BÉZINE (1985) estudaram placas sujeitas à instabilidade, utilizando células internas para integrar o termo de domínio; KATSIKADELIS & ARMENAKAS (1984) apresentaram formulações para analisar o problema de placas sobre fundação elástica.

Os primeiros trabalhos que trataram placas no contexto de estruturas de pisos de edifícios, embora não especificados no texto, foram os de BÉZINE (1981) e HARTMANN & ZOTEMANTEL (1986). No primeiro, o autor desenvolveu um algoritmo onde condições de domínio podem ser impostas, dando assim o primeiro passo para a simulação de apoios de lajes de edifícios (lajes contínuas). No segundo trabalho referenciado, os autores também possibilitaram a colocação de vínculos internos inclusive elásticos. É interessante mencionar, neste ponto, a tese de doutorado do Prof. João Batista de PAIVA (1987) que mostrou associações diversas com estruturas de barras, pilares e vigas. Com relação a trabalhos que visavam o estudo de pavimentos é ainda oportuno mencionar a tese apresentada à EESC-USP pelo Prof. Ney Amorin SILVA (1996) da UFMG que desenvolveu combinações do MEC e MEF para o estudo de pavimentos considerando-se as hipóteses de Reissner.

Pode-se ainda mencionar diversos outros trabalhos desenvolvidos na EESC-USP, baseados em formulações do MEC para placas. Além das teses do Prof. Paiva em, que foi o primeiro trabalho desenvolvido em nosso meio, e do Prof. Silva, destacam-se as dissertações de mestrado de SILVA (1988), que estudou placas sobre fundação elástica; TEJERINA (1991) que tratou do mesmo tema e introduziu aproximações alternativas para a integral de domínio, o trabalho de MANZOLI (1992), ainda sobre fundação elástica, que considerou uma solução fundamental própria e OLIVEIRA NETO (1991) que analisou procedimentos para a melhoria de valores de contorno. Duas teses de doutorado também foram finalizadas:

RIBEIRO (1992) desenvolveu formulação de placas com as hipóteses de Reissner considerando não-linearidade física; CHUEIRI (1994) implementou formulação elasto-plástica, com modelos particulares de concreto armado, considerando-se as hipóteses de Kirchhoff.; FERNANDES (1998), que também implementou a mesma formulação não-linear para placas, porém considerando outros modelos para o concreto; CHAVES (1997) que desenvolveu e implementou a formulação do MEC para placas de espessura variável.

Outro tema que merece destaque nesta introdução é relativo ao tratamento de integrais de domínio que surgirão durante o desenvolvimento do projeto proposto. Nesse contexto pode-se citar os trabalhos de BREBBIA (1986), NEVES & BREBBIA (1991) e NOWAK (1992). Nesses trabalhos, Brebbia, em co-autoria com outros pesquisadores, introduziram os conhecidos métodos da reciprocidade dual - MRD e o método da reciprocidade múltipla – MRM.

Nos parágrafos anteriores foram descritos trabalhos relativos ao desenvolvimento do método dos elementos de contorno, dando-se ênfase em sua aplicação à teoria de placas. O trabalho que se pretende desenvolver é relativo ao desenvolvimento de formulações não-lineares de placas, através do MEC, para análise de problemas de estruturas de pavimentos de edifícios. Não foi possível estender a análise para pavimentos de concreto armado, assim o único modelo constitutivo a ser utilizado será o de Von Mises, com algoritmo implícito, que pode ser encontrado em inúmeros trabalhos como as teses de doutorado de FUDOLI (1999) e CHUEIRI (1994).

Outro tópico de grande interesse no desenvolvimento do trabalho é referente às resoluções de sistemas não-lineares. Embora nessa introdução as referências sobre modelos não-lineares relativos ao MEC já contenham descrições sobre procedimentos possíveis para a obtenção da solução numérica, acrescentou-se à lista de referências alguns trabalhos clássicos, em sua maioria voltada aos elementos finitos, que apresentam propostas para análise de problemas não-lineares, assim como os decorrentes algoritmos numéricos que poderão ser utilizados na modelagem proposta neste trabalho.

É interessante ainda citar alguns trabalhos, não necessariamente de placas, que tratam de modelos que utilizam o método dos elementos de contorno e o operador tangente consistente. Nos trabalhos de BONNET (1995) e BONNET & MUKERJEE (1996) o operador tangente consistente é considerado numa formulação escrita em função de deformações iniciais. Esses autores apenas aplicaram a formulação proposta para casos bastante simples e sem concentrações de tensão. Têm-se ainda os trabalhos de FUDOLI (1999) e BOTTA (2003), feitos sob a orientação do professor Venturini, sendo que o segundo ainda está em andamento. No primeiro foi feito um aprimoramento da formulação

do MEC não-linear estendendo para o caso da plasticidade com gradiente. No segundo foram introduzidos vários modelos de dano, estudando-se com regularização e ainda abordando-se vários casos de solução não-linear, inclusive com o uso do modelo do comprimento de arco.

1.3 CONTEÚDO DO TRABALHO

No capítulo 2 apresenta-se o problema de placas delgadas governadas pelas hipóteses de KIRCHHOFF (1850) e faz-se ainda um breve estudo sobre a teoria da elasticidade particularizada para os casos do estado plano de tensão (problemas de chapas ou membrana).

No capítulo 3, obtém-se uma formulação para análise linear do pavimento de um edifício sujeito à flexão simples, que é obtida a partir do primeiro teorema de Betti e também do problema de placas apresentado no capítulo 2. Nesse modelo o pavimento é representado por uma placa composta por sub-regiões que poderão representar lajes ou vigas.

No capítulo 4 aplica-se o método dos elementos de contorno à formulação linear desenvolvida no capítulo 3 e apresentam-se alguns exemplos numéricos.

No capítulo 5 desenvolve-se uma nova formulação linear para o cálculo de pavimentos sujeitos à flexão simples, através do Método dos Elementos de Contorno, que é obtida a partir daquela do capítulo 3. A diferença entre esses dois modelos é que naquele do capítulo 5 as variáveis das vigas são definidas ao longo dos seus eixos e não sobre os seus contornos. Ao final do capítulo têm-se os mesmos exemplos numéricos apresentados no capítulo 4, onde se faz comparações entre as duas formulações.

No capítulo 6 é desenvolvido um outro modelo, através do MEC, para análise do pavimento de um edifício sujeito à flexão, considerando-se, porém, os esforços de membrana. Esse modelo é obtido através do primeiro teorema de Betti e também do acoplamento das teorias de chapa e placa delgada apresentadas no capítulo 2. Aqui o pavimento também é representado por uma placa composta de sub-regiões e nas vigas são feitas aproximações dos deslocamentos, como foi feito no capítulo 5, a fim de representá-las pelos seus eixos. Para verificar a formulação, comparam-se alguns exemplos numéricos mais simples com seus resultados analíticos e analisam-se ainda os mesmos exemplos dos capítulos 4 e 5, fazendo-se comparações entre os três modelos desenvolvidos até aqui.

No capítulo 7, a partir da formulação apresentada no capítulo 6, obtém-se uma outra em que a placa, além do carregamento, é sujeita também a campos de momentos e forças normais iniciais.

No capítulo 8 desenvolve-se a formulação não-linear, utilizando-se o operador tangente consistente. Essa formulação é obtida a partir daquela apresentada no capítulo 7, onde os esforços iniciais são os esforços de correção que devem ser aplicados ao longo do processo iterativo, para que a placa alcance o seu equilíbrio. Apresenta-se ainda o modelo elasto-plástico a ser utilizado na análise que é o Von Mises para algoritmo implícito. No fim do capítulo têm-se alguns exemplos numéricos.

Finalmente, no capítulo 9 têm-se as conclusões. Deve-se ressaltar que a originalidade do trabalho está no modelo alternativo apresentado no capítulo 5 e na formulação da placa sujeita à flexão composta proposta no capítulo 6. A obtenção da formulação não-linear através da introdução de esforços iniciais já havia sido mostrada em outros trabalhos, assim como a consideração da matriz tangente consistente. Porém, nesse caso também o trabalho tem sua parcela de originalidade, pois esses dois conceitos foram aplicados ao caso particular da formulação proposta no capítulo 6, ou seja, a matriz tangente deduzida nesse trabalho é aplicável apenas à formulação aqui desenvolvida.

2 ELASTICIDADE BIDIMENSIONAL E PLACAS DELGADAS

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo será feito um breve estudo sobre a teoria de elasticidade particularizada para os casos do estado plano de tensão (problemas de chapas ou membrana) e placas delgadas governadas pelas hipóteses de KIRCHHOFF (1850). O estado plano será considerado acoplado ao problema de flexão simples de placas, permitindo assim a obtenção da formulação de placas com flexão composta, que será apresentada no capítulo 6. Maiores detalhes sobre o assunto podem ser encontrados em TIMOSHENKO (1959), TIMOSHENKO (1980), FUNG (1965), SAVASSI (1996), assim como em inúmeros outros trabalhos. A seguir serão mostrados as relações de equilíbrio, as deformações, as tensões e os esforços relativos aos dois problemas.

2.2 PLACAS DELGADAS SUJEITAS À FLEXÃO SIMPLES

Placa é um elemento estrutural plano cuja espessura é muito pequena quando comparada às outras duas dimensões e cujo carregamento é perpendicular a esse plano. No caso da flexão simples a placa é representada por sua superfície média e sujeita apenas a carregamentos transversais a essa superfície. Na figura (2.1) tem-se o caso de uma placa retangular cuja superfície média é definida pelos eixos cartesianos x_1 x_2 .

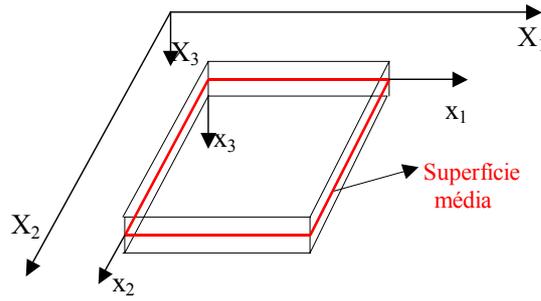


FIGURA 2.1 - Elemento Bidimensional de Placa

onde $-t/2 \leq x_3 \leq t/2$, sendo t a espessura da placa.

Nesse trabalho, será considerado o caso particular de uma placa sujeita a pequenos deslocamentos. O pavimento será representado por uma placa composta de sub-regiões, sendo cada sub-região a representação de uma laje ou viga. O modelo de placas será construído a partir das hipóteses de Kirchhoff, que representa bem o caso de placas delgadas, que é o caso das lajes. Apesar do modelo de Kirchhoff não ser o mais indicado para representar a viga, ele será utilizado também nesse caso, a fim de simplificar a formulação.

A consideração de hipóteses de Kirchhoff permite desprezar as deformações de cisalhamento transversal, ou seja, tem-se que $\gamma_{23} = \gamma_{13} = 0$. Levando-se em conta a lei de Hooke, desprezam-se também as componentes de tensão τ_{23} e τ_{13} . Ainda com base nas hipóteses de Kirchhoff, a componente de tensão σ_3 é considerada nula, caracterizando-se um estado plano de tensão na placa. O fato de se desprezar a tensão σ_3 leva à não consideração da deformação ϵ_3 , pois o produto $\sigma_3 \cdot \epsilon_3$, que aparece na equação (3.1), ao se fazer a integração sobre o volume do sólido, será sempre nulo. Considerando-se ainda que a placa esteja sujeita a pequenos deslocamentos e rotações, tem-se o seguinte tensor de deformação:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i,j=1,2 \quad (2.1)$$

Considerando-se a lei de Hooke para o caso de material isotrópico, o tensor de tensões para estado plano de tensão, na forma matricial, é dado por:

$$\sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-\nu}\epsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (i, j, k = 1,2) \quad (2.2)$$

onde $G = E/2(1 + \nu)$ é o módulo de elasticidade transversal do material da placa, ν seu coeficiente de Poisson e E seu módulo de elasticidade longitudinal.

Um ponto qualquer da placa tem as seguintes componentes de deslocamentos: os deslocamentos u_1, u_2, u_3 , respectivamente nas direções X_1, X_2, X_3 (ver figura 2.1) e as rotações θ_{x_1} e θ_{x_2} em relação às direções X_1 e X_2 , sendo o deslocamento transversal u_3 denominado de w . Tendo-se como base ainda as hipóteses de Kirchhoff, os deslocamentos u_1, u_2 e as rotações θ_{x_1} e θ_{x_2} podem ser escritos em função de w da seguinte maneira:

$$u_i = -x_3 w_{,i} \quad (i = 1,2) \quad (2.3)$$

$$\theta_{x_2} = -w_{,1} \quad (2.4)$$

$$\theta_{x_1} = w_{,2} \quad (2.5)$$

O eixo x_3 é definido a partir da superfície média (ver figura 2.1). Portanto, como se pode observar na equação (2.3), os pontos situados sobre a superfície média possuem apenas os deslocamentos w, θ_{x_1} e θ_{x_2} já que os deslocamentos u_1 e u_2 são nulos. Levando-se em conta a equação (2.3), os tensores de deformação (equação 2.1) e de tensão (equação 2.2) podem ser escritos em função das curvaturas $w_{,ij}$ na placa da seguinte forma:

$$\epsilon_{ij}^F = -x_3 w_{,ij} \quad (i, j = 1,2) \quad (2.6)$$

$$\sigma_{ij}^F = -\frac{E x_3}{(1 - \nu^2)} [\nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1 - \nu) w_{,ij}] \quad (i, j, k = 1,2) \quad (2.7)$$

onde o índice F é utilizado para indicar que são tensores relativos à flexão da placa.

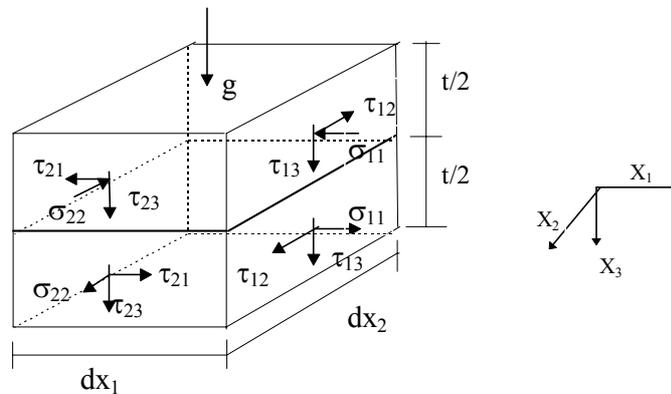


FIGURA 2.2 - Tensões em um Elemento de Placa

As tensões que agem em um elemento de placa de dimensões (dx_1, dx_2, dx_3) estão indicadas na figura (2.2). Admitindo-se uma distribuição linear das tensões ao longo da espessura da placa, essas podem ser representadas por suas resultantes, dadas pelos momentos e forças cortantes, na superfície média (ver figura 2.3).

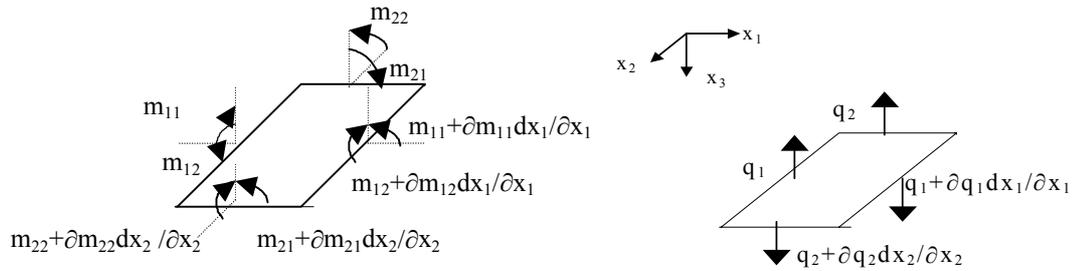


FIGURA 2.3 - Esforços em um Elemento de Placa

onde m_{11} e m_{22} , são momentos de flexão, e m_{12} e m_{21} , momentos volventes.

No caso da placa, é conveniente expressar os esforços por unidade de comprimento. A fim de exemplificar, considere o momento fletor m_{11} (ver figura 2.3). O valor do mesmo, por unidade de comprimento, é obtido fazendo-se a integração ao longo da espessura da placa, da força elementar $(\sigma_{11} \cdot l \cdot dx_3)$, correspondente a uma área elementar de largura unitária na direção x_2 , multiplicada pelo braço x_3 . Assim, a partir da equação (2.7), obtém-se:

$$m_{11} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{11} \cdot l \cdot x_3 dx_3 = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) \quad (2.8)$$

onde $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$, representa a rigidez à flexão da placa.

Analogamente, obtém-se m_{12} e m_{22} . Na forma indicial os momentos são dados por:

$$m_{ij} = -D [\nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij}] \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (2.9)$$

Invertendo-se a relação (2.9) obtém-se as curvaturas em função dos momentos:

$$\begin{Bmatrix} -w_{,11} \\ -w_{,22} \\ -2w_{,12} \end{Bmatrix} = \frac{12}{t^3 E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Os esforços cortantes, dados também por unidade de comprimento, são iguais a:

$$q_i = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{i3} \cdot 1 \cdot dx_3 \quad i=1,2 \quad (2.11)$$

Como já foi dito, as componentes de tensão τ_{23} e τ_{13} não são consideradas na formulação, pois as deformações γ_{23} e γ_{13} são desprezadas. No entanto, os esforços cortantes serão obtidos através das equações de equilíbrio do elemento, pois apesar dos esforços cortantes produzidos por uma carga transversal terem efeitos desprezíveis sobre a flexão de uma placa delgada, os mesmos não podem ser desprezados nas equações de equilíbrio do elemento. Considerando-se um carregamento distribuído g na placa e fazendo-se o equilíbrio das forças verticais e dos momentos em torno de x_1 e x_2 , obtêm-se as duas relações de equilíbrio dadas a seguir:

$$q_{i,i} + g = 0 \quad (i = 1,2) \quad (2.12)$$

$$m_{ij,i} - q_j = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad (2.13)$$

Derivando a equação (2.9) e substituindo-a em (2.13), obtêm-se os esforços cortantes em função das derivadas das curvaturas:

$$q_j = -Dw_{,kkj} \quad (i, j, k = 1,2) \quad (2.14)$$

Diferenciando-se a equação (2.13) em relação à x_j e considerando a equação (2.12), obtêm-se a equação diferencial de placas em função dos momentos:

$$m_{ij,ij} + g = 0 \quad (i, j = 1,2) \quad (2.15)$$

Derivando-se (2.14) e considerando-se (2.12), chega-se à equação diferencial de placas em função dos deslocamentos transversais:

$$w_{,kkll} = \frac{g}{D} \quad (k, l = 1,2) \quad (2.16)$$

Seja agora uma superfície qualquer da placa. As forças de superfície em um determinado ponto \mathbf{p} da mesma são dadas pelo esforço cortante \mathbf{Q}_n e os momentos, \mathbf{M}_1 e \mathbf{M}_2 nas direções \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 , dados a seguir:

$$Q_n(\mathbf{p}) = q_i(\mathbf{p})n_i \quad i=1,2 \quad (2.17)$$

$$M_i(\mathbf{p}) = m_{ij}(\mathbf{p})n_j \quad i, j=1,2 \quad (2.18)$$

sendo n_i ($i=1,2$), a direção da normal à superfície.

Entretanto, nos problemas de placas é usual escrever os momentos segundo as direções \mathbf{n} e \mathbf{s} , sendo \mathbf{n} a direção normal ao contorno e \mathbf{s} a direção tangencial ao mesmo. Assim, seja a figura (2.4), onde está representado o plano médio de um elemento de placa \mathbf{abc} , onde o sistema \mathbf{ns} é adotado na face inclinada do mesmo: Fazendo-se a rotação de eixos, obtém-se a componente de momento \mathbf{M}_n na direção \mathbf{n} e a componente de momento \mathbf{M}_{ns} na direção \mathbf{s} , a partir do vetor de momentos \mathbf{M}_i , dado pela equação (2.18), ou seja:

$$M_n = M_i n_i \quad (i = 1, 2) \quad (2.19)$$

$$M_{ns} = M_i s_i \quad (2.20)$$

onde s_i são os co-senos diretores da direção \mathbf{s} .

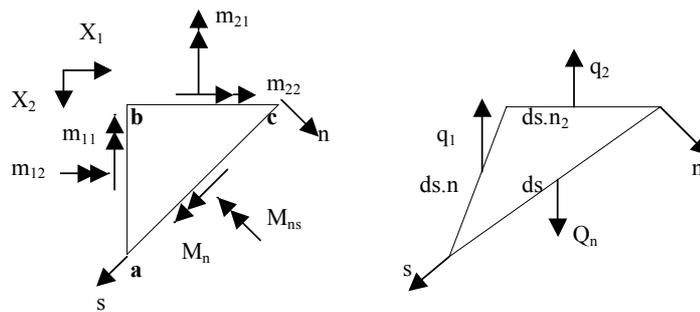


FIGURA 2.4 - Esforços no Elemento \mathbf{abc}

Portanto, no contorno têm-se três esforços: \mathbf{M}_n , \mathbf{M}_{ns} e \mathbf{Q}_n . Logo, pode-se definir três deslocamentos associados a esses esforços: o deslocamento transversal w e as rotações $\frac{\partial w}{\partial n}$ e $\frac{\partial w}{\partial s}$, respectivamente, nas direções normal e tangencial ao contorno. Como a equação diferencial (2.16) é de quarta ordem, um esforço e um deslocamento deverão ser eliminados, pois há dependência entre as variáveis, isto é, não são valores de contorno independentes. Usualmente, no processo de integração por partes mostrado no capítulo 3,

eliminam-se as variáveis $\partial w/\partial s$ e M_{ns} , porém surge na formulação a variável $\partial M_{ns}/\partial s$, restando assim, cinco variáveis. A fim de eliminar mais uma variável, KIRCHHOFF (1850) demonstrou que as variáveis $\partial M_{ns}/\partial s$ e Q_n podem ser agrupadas em uma única variável V_n , denominada força cortante equivalente. Com isso, o problema fica com apenas quatro variáveis: w , $\partial w/\partial n$, M_n e V_n . Note-se que se pode manter a independência das variáveis se considerar as deformações devidas ao esforço cortante, como é feito nas teorias desenvolvidas por REISSNER (1944) e MINDLIN (1951).

A fim de introduzir o conceito de força cortante equivalente substitui-se o momento resultante $M_{ns}ds$, existente em um elemento infinitesimal de comprimento ds , por um binário de forças de intensidade M_{ns} . Tomando-se dois elementos consecutivos, verifica-se que na junção dos elementos existe uma força resultante, por unidade de comprimento, dada por $\partial M_{ns}/\partial s$. Assim, define-se força cortante equivalente, por unidade de comprimento, como:

$$V_n = Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} \tag{2.21}$$

No modelo de placas utilizado nesse trabalho, são ainda definidas duas variáveis nos cantos: o deslocamento transversal w_c e a reação de canto R_c . Assim, considerando-se ainda o mesmo esquema estático utilizado para a definição da força cortante equivalente, seja um canto i qualquer da placa, como é mostrado na figura (2.5). Como se pode observar, uma resultante não nula devido às reações de apoio correspondentes a cada lado, aparece necessariamente no canto. Tal resultante, é denominada reação de canto e é dada por:

$$R_{ci} = M_{nsi}^+ - M_{nsi}^- \tag{2.22}$$

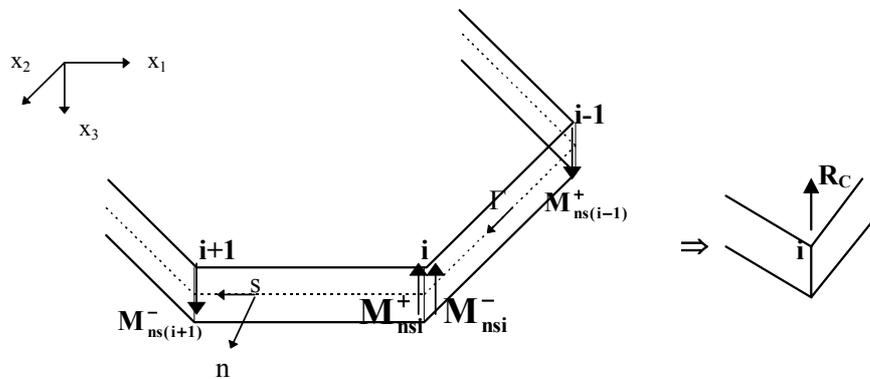


FIGURA 2.5 - Momentos Volventes em um Canto i da Placa

onde M_{nsi}^+ e M_{nsi}^- são, respectivamente, os momentos volventes posterior e anterior ao canto i .

2.3 PROBLEMA DE MEMBRANA

Assim como no caso da placa, a membrana também é um elemento estrutural plano cuja espessura, medida no sentido ortogonal à superfície média, é muito pequena quando comparada às outras duas dimensões. A membrana também é representada por sua superfície média (ver figura 2.1), porém ela é sujeita somente a carregamentos segundo as direções x_1 e x_2 , paralelas ao seu plano. Tais carregamentos atuam no contorno da mesma e devem ser uniformemente distribuídos ao longo da espessura. Nesse caso, pode-se admitir que as tensões σ_{33} , τ_{23} e τ_{13} sejam pequenas quando comparadas com as componentes σ_{11} , τ_{12} e σ_{22} e que essas últimas variem pouco segundo a direção x_3 . Com isso, adota-se que as tensões σ_{33} , τ_{23} e τ_{13} sejam nulas, caracterizando-se assim, um estado plano de tensão na chapa, e que as componentes σ_{11} , τ_{12} e σ_{22} sejam função apenas de x_1 e x_2 . Logo, pode-se dizer que:

$$u_1 = u_1(x_1, x_2) \quad (2.23)$$

$$u_2 = u_2(x_1, x_2) \quad (2.24)$$

Como as tensões τ_{23} e τ_{13} são nulas, utilizando-se a lei de Hooke, conclui-se que as deformações γ_{23} e γ_{13} também são nulas e o fato de se desprezar a tensão σ_{33} leva à não se considerar a deformação ϵ_{33} pelo mesmo motivo apresentado no caso da flexão pura da placa. Desse modo, o tensor de deformação é dado pela equação (2.1) e o de tensão pela equação (2.2), sendo aqui apresentados com o índice **2D** para indicar que são relativos ao problema de membrana:

$$\epsilon_{ij}^{2D} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.25)$$

$$\sigma_{ij}^{2D} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left[\nu \epsilon_{kk}^{2D} \delta_{ij} + (1-\nu) \epsilon_{ij}^{2D} \right] \quad i, j=1, 2 \quad (2.26)$$

Integrando-se as tensões ao longo da espessura, obtém-se os esforços normais resultantes na superfície média, por unidade de comprimento, que são dados por:

$$N_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{ij}^{2D} \cdot 1 \cdot dx_3 = \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \left[\nu \varepsilon_{kk}^{2D} \delta_{ij} + (1-\nu) \varepsilon_{ij}^{2D} \right] \quad i, j=1, 2 \quad (2.27)$$

sendo $\bar{E} = tE$.

As forças de superfície nas direções x_1 e x_2 em uma determinada superfície de normal n_j são definidas como:

$$p_i = N_{ij} n_j \quad i, j=1, 2 \quad (2.28)$$

Na formulação de placas sujeitas à flexão composta, que será desenvolvida no capítulo 6, é conveniente escreverem-se as variáveis nas direções normal (n) e tangencial (s) ao contorno. Com isso, as forças de superfície e os deslocamentos no contorno da chapa são:

$$p_n = p_i n_i \quad (2.29)$$

$$p_s = p_i s_i \quad (2.30)$$

$$u_n = u_i n_i \quad (2.31)$$

$$u_s = u_i s_i \quad (2.32)$$

Considere agora um sólido tridimensional elástico linear e um elemento infinitesimal qualquer do mesmo, representado aqui pelo ponto p . Impondo-se as condições de equilíbrio nesse elemento, obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$\sigma_{ij,j}(p) + f_i(p) = 0 \quad i, j=1, 3 \quad (2.33)$$

onde $f_i(p)$ é o vetor das forças volumétricas e $\sigma_{ij}(p)$ o tensor de tensões.

O tensor de tensões para o caso geral é dado por:

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad i, j, k=1, 3 \quad (2.34)$$

O estado plano de tensões (equação 2.2) pode ser obtido a partir da equação (2.34) substituindo-se em (2.34) ν por $\nu' = \nu/(1+\nu)$; note-se que o valor de G permanece

inalterado nos dois casos. Substituindo-se a equação (2.25) em (2.34), mas lembrando-se que para o caso geral os índices i e j variam de 1 a 3, obtêm-se as tensões expressas em função dos deslocamentos:

$$\sigma_{ij} = G[u_{i',j} + u_{j',i}] + \frac{2G\nu}{1-2\nu} u_{k',k} \delta_{ij} \quad (2.35)$$

Derivando-se a equação (2.35) em relação à j , e substituindo-a na equação (2.33), chega-se à equação diferencial do problema elástico em termos de deslocamentos, a conhecida equação de Navier:

$$u_{i',jj} + \frac{1}{1-2\nu} u_{j',ij} + \frac{f_i}{G} = 0 \quad i, j=1,3 \quad (2.36)$$

onde para o caso de estado plano de tensão substitui-se ν por $\nu' = \nu/(1+\nu)$.

A fim de se obter a relação de equilíbrio do elemento infinitesimal em função dos esforços normais N_{ij} , se integra a equação (2.33) ao longo da espessura, obtendo-se a seguinte relação de equilíbrio para o problema de chapa:

$$N_{ij,j}(p) + b_i(p) = 0 \quad i, j=1,2 \quad (2.37)$$

sendo b_i as forças externas resultantes no plano da chapa.

Substituindo-se a equação (2.25) em (2.27), chega-se à expressão das forças normais N_{ij} em função dos deslocamentos:

$$N_{ij} = \bar{G}[u_{i',j} + u_{j',i}] + \frac{2\bar{G}\nu'}{1-2\nu'} u_{k',k} \delta_{ij} \quad (2.38)$$

sendo $\bar{G} = Gt$ e $\nu' = \nu/(1+\nu)$ para o estado plano de tensão.

Derivando-se a equação (2.38) em relação à j e substituindo-a na expressão (2.37), obtém-se a seguinte equação diferencial:

$$u_{i',jj} + \frac{1}{1-2\nu'} u_{j',ij} + \frac{b_i}{\bar{G}} = 0 \quad (2.39)$$

3 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS SUJEITAS À FLEXÃO SIMPLES PARA DOMÍNIOS COMPOSTOS.

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo serão deduzidas as equações integrais para o problema de flexão de placas considerando-se domínios não homogêneos, isto é, compostos por regiões de diferentes espessuras ou rigidezes. A formulação destina-se à análise linear do pavimento de um edifício sujeito à flexão simples. Nesse modelo o pavimento será representado por uma placa composta por sub-regiões que poderão representar lajes ou vigas. O modelo de placas utilizado é aquele apresentado no capítulo 2, onde se consideram as hipóteses de Kirchhoff. Na formulação aqui desenvolvida englobam-se todos os elementos estruturais do pavimento, garantindo-se a monoliticidade do conjunto, sem a necessidade de se impor compatibilizações de deslocamentos e equilíbrio de forças generalizadas de superfícies ao longo das interfaces. Ao longo do contorno externo do pavimento e das interfaces entre duas sub-regiões serão considerados os seguintes graus de liberdade por nó: o deslocamento transversal (w) e a derivada do deslocamento transversal na direção normal ao contorno ($w_{,n}$) ou interface. São definidos quatro valores de contorno ($w, w_{,n}, V_n$ e M_n) sobre o contorno externo e apenas dois nas interfaces ($w, w_{,n}$).

As integrais podem ser obtidas a partir do teorema de reciprocidade de Betti ou através do método dos resíduos ponderados. Nesse trabalho optou-se pela primeira opção. A seguir serão deduzidas as equações integrais do deslocamento transversal w e da derivada de w em um ponto do contorno, do domínio ou sobre a interface do pavimento sujeito à flexão

simples. No capítulo 4, o MEC será aplicado às equações integrais, através da discretização do contorno externo e das interfaces em elementos, nos quais as variáveis do problema serão aproximadas. O problema de placas em sub-regiões pode ser encontrado nos trabalhos de VENTURINI & PAIVA (1988) e VENTURINI (1988).

3.2 EQUAÇÃO INTEGRAL DE DESLOCAMENTO

A solução do problema da placa com sub-regiões será obtida a partir do primeiro teorema de BETTI (1872), que envolve dois estados distintos de tensão e deformação possíveis num sólido de domínio finito. No caso a ser tratado aqui, será adotado um estado como sendo o problema real e o outro o problema fundamental (este embora definido no domínio infinito é válido para qualquer ponto no domínio considerado). O teorema é dado pela seguinte expressão:

$$\int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV = \int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV \quad i,j = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

sendo os termos em * relativos ao problema fundamental e os outros decorrentes do carregamento real da placa.

Substituindo-se a equação (2.7) em (3.1) e integrando-se ao longo da espessura, o teorema pode ser escrito da seguinte forma:

$$\int_{\Omega} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad i,j=1,2 \quad (3.2)$$

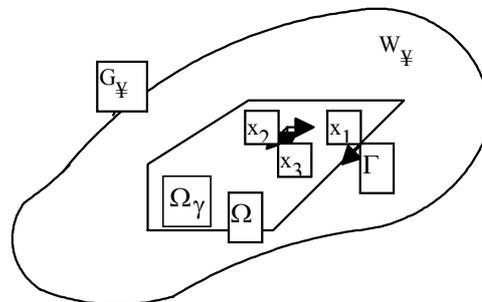


FIGURA 3.1 - Placa de Dimensões Finitas, Contida em uma Placa Infinita

A fim de exemplificar o problema, seja uma placa isótropa qualquer de contorno Γ e domínio Ω, a qual está contida em outra, de domínio infinito Ω_∞ e contorno Γ_∞ (ver figura

3.1). Os estados de tensão e deformação relativos ao problema fundamental são provocados por uma carga transversal unitária \mathbf{g}^* aplicada em um ponto qualquer \mathbf{q} do domínio infinito, denominado domínio fundamental. O ponto \mathbf{q} é denominado ponto de carregamento ou ponto fonte e o ponto \mathbf{p} , que é onde se calcula os deslocamentos e esforços provocados pelo carregamento, ponto de deslocamento ou ponto campo. A carga fundamental \mathbf{g}^* é definida através da distribuição delta de Dirac, denotada por $\delta(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, cujas propriedades são:

$$\mathbf{g}^* = \delta(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \begin{cases} 0 & \text{para } \mathbf{p} \neq \mathbf{q} \\ \infty & \text{para } \mathbf{p} \equiv \mathbf{q} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\int_{\Omega_\infty} \phi(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Omega_\infty = \phi(\mathbf{q}) \quad (3.4)$$

sendo Φ uma função contínua qualquer.

Observando-se as equações (3.3) e (3.4), pode-se dizer que:

$$\int_{\Omega_\infty} \delta(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Omega_\infty = 1 \quad (3.5)$$

Logo, conclui-se que a resultante do carregamento definido por $\delta(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sobre o domínio infinito é uma força unitária aplicada no ponto \mathbf{q} .

O problema real é aquele relativo a um carregamento \mathbf{g} qualquer distribuído em uma área de domínio Ω_g , contida no domínio Ω da placa finita (ver figura 3.1), que provocará em um ponto \mathbf{p} da placa um estado de tensão e deformação. Os deslocamentos e esforços relativos ao problema fundamental são funções do ponto fonte \mathbf{q} e do ponto campo \mathbf{p} , pois a posição do carregamento fundamental é variável. Já aqueles relativos ao problema real são funções apenas do ponto \mathbf{p} , pois a posição do carregamento é fixa.

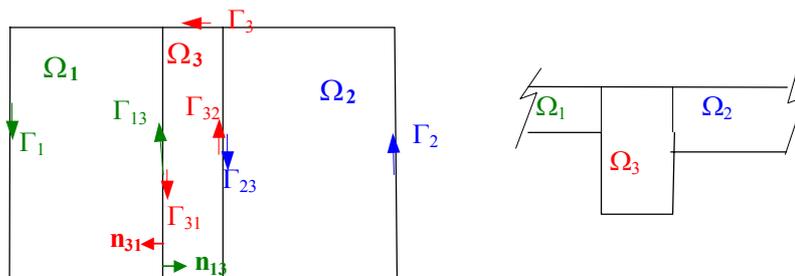


FIGURA 3.2 - Placa Subdividida em Três Sub-regiões

A fim de facilitar a dedução, será deduzida a equação integral de uma placa, figura (3.2), dividida em três sub-regiões Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 , de rigidezes D_1 , D_2 e D_3 , respectivamente. A equação assim obtida será generalizada para o caso em que se tenham N_s sub-regiões. Na figura (3.2) n_{31} e n_{13} são, respectivamente, as direções da normal às interfaces Γ_{31} e Γ_{13} , sendo o teorema de Betti (equação 3.2) válido para cada subdomínio da placa:

$$\int_{\Omega_1} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega_1 = \int_{\Omega_1} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega_1 \quad (3.6.a)$$

$$\int_{\Omega_2} w_{,ij}^{**} m_{ij} d\Omega_2 = \int_{\Omega_2} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega_2 \quad (3.6.b)$$

$$\int_{\Omega_3} w_{,ij}^{***} m_{ij} d\Omega_3 = \int_{\Omega_3} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega_3 \quad (3.6.c)$$

onde w_{ij}^* , w_{ij}^{**} e w_{ij}^{***} são escritas, respectivamente, em função de $1/D_1$, $1/D_2$ e $1/D_3$; a expressão de m_{ij}^* não é função de D , portanto ela não muda para os sub-domínios.

Pode-se ainda escrever que:

$$\int_{\Omega_1} m_{ij} w_{ij}^* d\Omega + \int_{\Omega_2} m_{ij} w_{ij}^{**} d\Omega + \int_{\Omega_3} m_{ij} w_{ij}^{***} d\Omega = \int_{\Omega_1} m_{ij}^* w_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_2} m_{ij}^* w_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_3} m_{ij}^* w_{ij} d\Omega \quad (3.7)$$

Como se verá mais adiante, após a integração por partes, as integrais de domínio se transformam em integrais ao longo do contorno externo e interfaces. Para que se possa fazer o equilíbrio dos esforços e deslocamentos nas interfaces, é conveniente escrever as equações (3.6) em função apenas de uma curvatura fundamental $w_{,ij}^*$, cuja expressão é função de $1/D$. Neste trabalho, $w_{,ij}^*$ será adotada como sendo aquela do subdomínio onde está o ponto de colocação. Admitindo-se, que esse esteja no subdomínio Ω_1 , têm-se as seguintes relações:

$$w_{,ij}^{**} = \frac{D_1}{D_2} w_{,ij}^* \quad (3.8.a)$$

$$w_{,ij}^{***} = \frac{D_1}{D_3} w_{,ij}^* \quad (3.8.b)$$

Substituindo-se as equações (3.8) em (3.6), considerando-se a equação (3.7) e levando-se em conta que $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$, obtém-se a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} m_{ij} w_{ij}^* d\Omega = \int_{\Omega_1} m_{ij}^* w_{ij} d\Omega + \frac{D_2}{D_1} \int_{\Omega_2} m_{ij}^* w_{ij} d\Omega + \frac{D_3}{D_1} \int_{\Omega_3} m_{ij}^* w_{ij} d\Omega \quad (3.9)$$

Pode-se também chegar à equação (3.9) de outra forma. Assim, admitindo-se que o ponto de colocação esteja situado no domínio Ω_I e que $\Omega = \Omega_I + \Omega_2 + \Omega_3$, pode-se dizer que:

$$\int_{\Omega} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_1} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega_2 + \int_{\Omega_3} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega_3 \quad (3.10)$$

onde m_{ij} é dado pela equação (2.9), sendo que no domínio Ω_I $D=D_1$, em Ω_2 $D=D_2$ e em Ω_3 $D=D_3$; a solução fundamental $w_{,ij}^*$ é função de I/D_I .

A parcela da equação (3.10) que envolve o domínio Ω_I é dada por:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega_1 &= \int_{\Omega_1} -D_1 w_{,ij}^* [v\delta_{ij} w_{,kk} + (1-v)w_{,ij}] d\Omega_1 = \\ &= -D_1 \int_{\Omega_1} [v\delta_{ij} w_{,kk} w_{,ij} + (1-v)w_{,ij} w_{,ij}] d\Omega_1 = \int_{\Omega_1} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega_1 \end{aligned} \quad (3.11)$$

que é o Teorema de Betti (equação 3.6.a).

Analisando-se agora a integral sobre o domínio Ω_2 tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega_2 &= \int_{\Omega_2} -D_2 w_{,ij}^* [v\delta_{ij} w_{,kk} + (1-v)w_{,ij}] d\Omega_2 = \\ &= \frac{D_2}{D_1} \int_{\Omega_2} w_{,ij} (-D_1) [v\delta_{ij} w_{,kk} + (1-v)w_{,ij}] d\Omega_2 = \frac{D_2}{D_1} \int_{\Omega_2} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega_2 \end{aligned} \quad (3.12)$$

De maneira análoga, obtém-se a integral sobre o domínio Ω_3 . Considerando-se as equações (3.11) e (3.12) a equação (3.10) resulta na equação (3.9). Deve-se observar que a expressão de m_{ij}^* , que é função de $w_{,ij}^*$ e é obtida a partir da equação (2.9), não depende da rigidez da placa, pois a constante D_I que aparece na equação (2.9) se cancela com o D_I da expressão de $w_{,ij}^*$. Para o caso em que se tenham N_s sub-regiões, pode-se dizer que:

$$\int_{\Omega} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega = \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Omega_s} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega_s \quad (3.13)$$

onde $w_{,ij}^*$ é função da rigidez D da placa onde se situa o ponto de colocação.

Deve-se então integrar a equação (3.13) por partes para se obter a equação integral de deslocamento em função de integrais ao longo do contorno externo da placa e das interfaces. Assim, denotando-se por U_I o segundo membro da equação (3.13) e considerando-se o caso representado na figura (3.2), tem-se que :

$$U_I = \frac{D_1}{D} \int_{\Omega_1} w_{,ij}(p) m_{ij}^*(q,p) d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} \frac{D_2}{D} w_{,ij}(p) m_{ij}^*(q,p) d\Omega_2 + \\ + \int_{\Omega_3} \frac{D_3}{D} w_{,ij}(p) m_{ij}^*(q,p) d\Omega_3 \quad (3.14)$$

Neste trabalho, será abordado o caso de rigidez constante por sub-região, porém sua extensão para o caso geral, com variação ao longo de cada sub-região é simples (ver CHAVES (1997)). Integrando-se por partes, em relação à x_j , a equação (3.14), resulta em:

$$U_I = \int_{\Gamma_1+\Gamma_{13}} \frac{D_1}{D} w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_2+\Gamma_{23}} \frac{D_2}{D} w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_3+\Gamma_{31}+\Gamma_{32}} \frac{D_3}{D} w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma + \\ - \int_{\Omega_1} \frac{D_1}{D} w_{,i} m_{ij,j}^* d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} \frac{D_2}{D} w_{,i} m_{ij,j}^* d\Omega_2 - \int_{\Omega_3} \frac{D_3}{D} w_{,i} m_{ij,j}^* d\Omega_3 \quad (3.15)$$

Observe que na interface que separa as sub-regiões Ω_1 e Ω_3 , tem-se que $\int_{\Gamma_{13}} d\Gamma = \int_{\Gamma_{31}} d\Gamma$, mas $\int_{\Gamma_{31}} w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma = - \int_{\Gamma_{13}} w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma$, pois a direção normal referente à interface Γ_{13} tem a mesma direção, porém sentido inverso daquela referente à interface Γ_{31} (ver figura 3.2). O mesmo ocorre com a interface que separa os sub-domínios Ω_2 e Ω_3 . Neste trabalho, a integração sobre a interface será feita considerando-se o sentido do sub-domínio da laje. No caso da figura (3.2), considerando-se que o subdomínio Ω_3 seja uma viga e os outros dois sub-domínios sejam duas lajes, a equação (3.15) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 U_1 = & \sum_{s=1}^3 \int_{\Gamma_s} \frac{D_s}{D} w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{23}} \left(\frac{D_2 - D_3}{D} \right) w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{13}} \left(\frac{D_1 - D_3}{D} \right) w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma + \\
 & - \int_{\Omega_1} \frac{D_1}{D} w_{,i} m_{ij,j}^* d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} \frac{D_2}{D} w_{,i} m_{ij,j}^* d\Omega_2 - \int_{\Omega_3} \frac{D_3}{D} w_{,i} m_{ij,j}^* d\Omega_3 \quad (3.16)
 \end{aligned}$$

Integrando-se a equação (3.16) novamente por partes, em relação à x_i , chega-se à:

$$\begin{aligned}
 U_1 = & \sum_{s=1}^3 \int_{\Gamma_s} \frac{D_s}{D} w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{23}} \left(\frac{D_2 - D_3}{D} \right) w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{13}} \left(\frac{D_1 - D_3}{D} \right) w_{,i} n_j m_{ij}^* d\Gamma + \\
 & - \int_{\Gamma_1 + \Gamma_{13}} \frac{D_1}{D} w n_{i,j} m_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Omega_1} \frac{D_1}{D} w m_{ij,j}^* d\Omega - \int_{\Gamma_2 + \Gamma_{23}} \frac{D_2}{D} w n_{i,j} m_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Omega_2} \frac{D_2}{D} w m_{ij,j}^* d\Omega + \\
 & - \int_{\Gamma_3 + \Gamma_{32} + \Gamma_{31}} \frac{D_3}{D} w n_{i,j} m_{ij}^* d\Gamma + \int_{\Omega_3} \frac{D_3}{D} w m_{ij,j}^* d\Omega \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Considerando-se as equações (2.15), (3.3) e (3.4) e admitindo-se que o ponto de colocação esteja no subdomínio Ω_1 , conclui-se que:

$$\int_{\Omega_1} \frac{D_1}{D} w m_{ij,j}^* d\Omega + \int_{\Omega_2} \frac{D_2}{D} w m_{ij,j}^* d\Omega + \int_{\Omega_3} \frac{D_3}{D} w m_{ij,j}^* d\Omega = \int_{\Omega_1} \frac{D_1}{D} w m_{ij,j}^* d\Omega_1 = -w(q) \quad (3.18)$$

Levando-se em conta as equações (2.13), (2.17), (2.18) e (3.18), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 U_1 = & \sum_{s=1}^3 \int_{\Gamma} \frac{D_s}{D} w_{,i} M_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{23}} \left(\frac{D_2 - D_3}{D} \right) w_{,i} M_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{13}} \left(\frac{D_1 - D_3}{D} \right) w_{,i} M_i^* d\Gamma + \\
 & - \sum_{s=1}^3 \int_{\Gamma} \frac{D_s}{D} w Q_n^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{23}} \frac{D_3 - D_2}{D} w Q_n^* d\Gamma + \int_{\Gamma_{13}} \frac{D_3 - D_1}{D} w Q_n^* d\Gamma - w(q) \quad (3.19)
 \end{aligned}$$

Escrevendo-se a rotação $w_{,i}$ em função de suas componentes nas direções normal e tangencial ao contorno, tem-se que:

$$w_{,i} = w_{,n} n_i + w_{,s} s_i \quad (3.20)$$

Substituindo-se a equação (3.20) em (3.19) e levando-se em conta as equações (2.19) e (2.20), pode-se escrever que:

$$U_1 = \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_j} \frac{D_j}{D} (w_{,n} M_n^* + w_{,s} M_{ns}^*) d\Gamma + \sum_{j=1}^2 \int_{\Gamma_i} \left(\frac{D_i - D_{pa}}{D} \right) (w_{,n} M_n^* + w_{,s} M_{ns}^*) d\Gamma - \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma_j} \frac{D_j}{D} w Q_n^* d\Gamma - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} \frac{D_i - D_{pa}}{D} w Q_n^* d\Gamma - w(q) \quad (3.21)$$

sendo D_i a rigidez do subdomínio que contém a interface Γ_i e D_{pa} a rigidez do subdomínio adjacente.

Na equação (3.21) têm-se seis variáveis: M_n , M_{ns} , Q_n , w , $\partial w / \partial n$ e $\partial w / \partial s$. Contudo, como já foi comentado no capítulo 2, pode-se ter apenas quatro variáveis, pois a equação diferencial (2.16) do problema de placas é de quarta ordem. Com isso, serão eliminadas as variáveis M_{ns} e $\partial w / \partial s$, através da integração por partes da parcela da equação (3.21) que envolve essas duas variáveis. Considerando-se apenas um trecho Γ_k , do contorno externo Γ ou de uma interface, no qual não haja descontinuidade de normal, pode-se dizer que:

$$\int_{\Gamma_k} \left(M_{ns}^* \frac{\partial w}{\partial s} \right) d\Gamma = \left[M_{ns}^* w \right]_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma_k} \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial s} w d\Gamma \quad (3.22)$$

onde Γ_1 e Γ_2 representam os limites do contorno Γ_k no qual se realiza a integração.

Se ao longo de todo o contorno Γ não existirem angulosidades, a representação paramétrica de M_{ns} e de sua respectiva derivada são contínuas e, portanto, a primeira parcela do segundo membro da equação (3.22) se anula. Porém, quando houver cantos esta parcela não se anula, dando origem à reação de canto R_{ci} (equação 2.22), ou seja:

$$\int_{\Gamma} \left(M_{ns}^* \frac{\partial w}{\partial s} \right) d\Gamma = - \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^* w_{ci} - \int_{\Gamma} \frac{\partial M_{ns}^*}{\partial s} w d\Gamma \quad (3.23)$$

sendo N_c o número de cantos na placa.

Substituindo-se em (3.21) a equação (3.23) e levando-se em conta a expressão (2.21) do esforço cortante equivalente V_n , a equação (3.21) pode ser expressa da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 U_1 = & \sum_{j=1}^3 \int_{\Gamma} \frac{D_j}{D} (w_{,n} M_n^* - w V_n^*) d\Gamma + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_i} \left(\frac{D_i - D_{pa}}{D} \right) (w_{,n} M_n^* - w V_n^*) d\Gamma + \\
 & - \sum_{j=1}^4 \frac{D_j}{D} w_{cj} R_{cj}^* - \sum_{j=1}^4 \frac{(D_j R_{cj}^* + D_{pa} R_{cpa}^*)}{D} w_{cj} - w(q) \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

onde o primeiro somatório envolvendo as variáveis nos cantos se refere aos quatro cantos extremos da placa e o outro somatório aos cantos internos formados entre duas sub-regiões.

Seja agora o primeiro membro da equação (3.13), que será denotado de U_2 . Integrando-se por partes em relação à x_j e considerando-se a definição de força de superfície, dada em (2.18), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 U_2 = & \int_{\Gamma_1 + \Gamma_{13}} w_{,i}^* M_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2 + \Gamma_{23}} w_{,i}^* M_i d\Gamma + \int_{\Gamma_3 + \Gamma_{31} + \Gamma_{32}} w_{,i}^* M_i d\Gamma + \\
 & - \int_{\Omega_1} w_{,i}^* m_{ij,j} d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} w_{,i}^* m_{ij,j} d\Omega_2 - \int_{\Omega_3} w_{,i}^* m_{ij,j} d\Omega_3 \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

A fim de se fazer o equilíbrio da forças de superfície nas interfaces, note-se que $M_{i(\Gamma_{13})} = -M_{i(\Gamma_{31})}$ e $M_{i(\Gamma_{23})} = -M_{i(\Gamma_{32})}$. Com isso, as integrais sobre as interfaces se anulam, pois $\int_{\Gamma_{13}} w_{,i}^* d\Gamma = \int_{\Gamma_{31}} w_{,i}^* d\Gamma$ e $\int_{\Gamma_{23}} w_{,i}^* d\Gamma = \int_{\Gamma_{32}} w_{,i}^* d\Gamma$. Seguindo um procedimento análogo ao que foi feito para obter-se a equação (3.24), chega-se à:

$$U_2 = \int_{\Gamma} \left(V_n w^* - M_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^8 R_{ci} w_{ci}^* + \int_{\Omega_g} (g w^*) d\Omega_g \quad (3.26)$$

Igualando-se as equações (3.24) e (3.26) e considerando-se um caso genérico em que se tenham N_s sub-regiões, obtém-se a seguinte equação de deslocamento transversal de um ponto q do domínio da placa enrijecida com vigas:

$$\begin{aligned}
 w(q) = & \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma} \frac{D_j}{D} (w_{,n}(P) M_n^*(q, P) - w(P) V_n^*(q, P)) d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) (w_{,n}(P) M_n^*(q, P) - w(P) V_n^*(q, P)) d\Gamma - \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{i=1}^{N_{c_2}+N_{c_1}} \left[\frac{D_j}{D} R_c^*(q, P)_{\Omega_j} + \frac{D_{pa}}{D} R_c^*(q, P)_{\Omega_{pa}} \right] w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) + \\
 & + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} (g(p) w^*(q, P)) d\Omega_g \quad (3.27)
 \end{aligned}$$

onde Γ é o contorno externo da placa, Ω_g é a região em que atua o carregamento transversal g ; Γ_j é a interface pertencente ao domínio Ω_j , que divide duas sub-regiões e que indica o sentido em que se faz a integração (ver figura 3.3); D_j é a rigidez referente ao domínio Ω_j ; D_{pa} a rigidez do domínio adjacente à Ω_j ; c_1 , c_2 e c_3 são os tipos de cantos definidos na figura (3.3) e o ponto P indica um ponto p posicionado sobre o contorno ou uma interface.

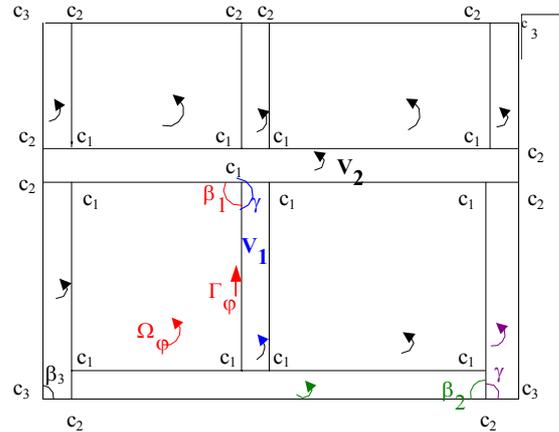


FIGURA 3.3 – Tipos de Cantos na Placa com Sub-regiões

O canto c_3 é um canto simples e envolve apenas um sub-domínio. O canto c_2 envolve dois sub-domínios e está definido no encontro de duas vigas de rigidezes diferentes ou no encontro de uma viga com uma laje; já o canto c_1 envolve três sub-domínios (caso do encontro de duas vigas com uma laje). No caso de c_1 a rigidez D_{pa} se refere à viga que é interrompida (na figura (3.3) para o canto formado por V_1 , V_2 e Ω_j , $D_{pa}=D_{v1}$). Na figura (3.4) tem-se um canto c_1 , onde se observa que: $M_{ns(j)}^- = M_{ns(pa)}^+$ e $M_{ns(j)}^+ = M_{ns(pa)}^-$. Logo: $R_{C(\Omega_j)} = -R_{C(\Omega_{pa})}$ e a parcela da equação (3.27) que envolve os cantos c_1 e c_2 , é dada por:

$$\sum_{i=1}^{N_{c_2}+N_{c_1}} \left[\frac{D_j}{D} R_c^*(q, P)_{\Omega_j} + \frac{D_{pa}}{D} R_c^*(q, P)_{\Omega_{pa}} \right] w_{ci}(P) = \sum_{i=1}^{N_{c_2}+N_{c_1}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} R_c^*(q, P)_{\Omega_j} w_{ci}(P) \quad (3.28)$$

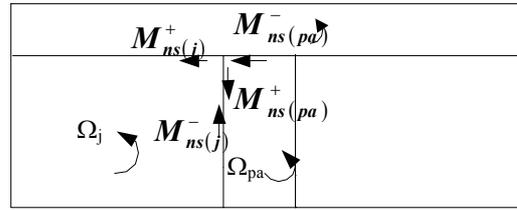


FIGURA 3.4 - Momentos Volventes em um Canto Tipo 1

3.3 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DE PLACAS

A formulação de placas desenvolvida no item anterior é obtida levando-se em conta a solução fundamental, que será apresentada a seguir. Será usado o sistema de coordenadas cilíndricas, pois é o mais conveniente para representar as respostas devido a cargas pontuais, como é o caso do carregamento fundamental. O centro do sistema de coordenadas cilíndricas coincide com o ponto fonte q , como é mostrado na figura (3.5). Assim, um ponto campo p de coordenadas (x_1, x_2) pode ser definido em função de r e θ , que são respectivamente, a distância deste ponto ao ponto q e o ângulo entre o segmento \overline{qp} e o eixo x_1 (ver figura 3.5).

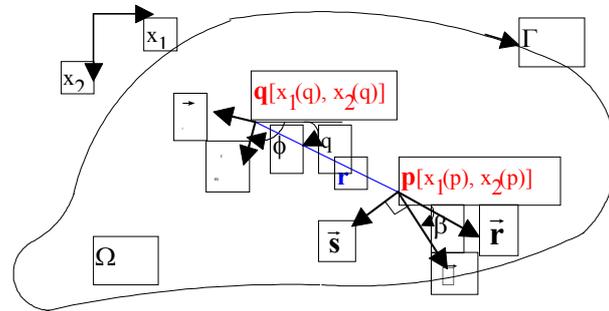


FIGURA 3.5 - Pontos de Carregamento q e de Deslocamento p e Sistemas de Coordenadas (m, l) e (n, s) no Domínio de uma Placa Infinita.

$$\text{onde } r = \sqrt{[x_1(p) - x_1(q)]^2 + [x_2(p) - x_2(q)]^2} \quad (3.29)$$

No problema fundamental de placas, tem-se simetria em relação à origem do sistema de coordenadas. Com isso, deslocamento w é função apenas de r , já que não varia com θ . No trabalho de FERNANDES (1998), assim como na tese de doutorado de CHUEIRI (1994), tem-se a dedução das expressões dadas a seguir em coordenadas cilíndricas. A equação diferencial de placas (equação 2.16) em coordenadas cilíndricas é dada por:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = \frac{g}{D} \quad (3.30)$$

Os esforços M_n , M_{ns} , e V_n (equações 2.19, 2.20 e 2.21) podem ser expressos em função de w utilizando-se as equações (2.9) e (2.14). Em coordenadas cilíndricas, são dados por:

$$M_{nn} = -D \left\{ \frac{d^2 w}{dr^2} [v + (1-v)(r_{,i} n_i)^2] + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} [v + (1-v)(r_{,i} s_i)^2] \right\} \quad (3.31)$$

$$M_{ns} = -D(1-v)(r_{,i} n_i)(r_{,j} s_j) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (3.32)$$

$$V_n = -D(1-v)(n_i r_{,i}) \left\{ \left[(s_j r_{,j})^2 + \frac{1}{1-v} \right] \left(\frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) + \frac{1-4(s_j r_{,j})^2}{r} \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \right\} + \frac{D(1-v)}{R} \left[1 - 2(s_i r_{,i})^2 \right] \left(\frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (3.33)$$

sendo R o raio da curvatura do contorno no ponto p .

A solução fundamental é obtida a partir da solução de uma placa circular de raio infinito e cujo centro é o ponto q no qual tem-se uma carga unitária aplicada. O deslocamento w^* de um ponto p , localizado nas vizinhanças de q , é obtido substituindo-se na equação (3.30) o carregamento g pela função delta de Dirac. Porém, observando-se a propriedade da distribuição delta de Dirac dada pela equação (3.3), conclui-se que nesse caso a equação diferencial é nula para todos os pontos do domínio fundamental, com exceção do ponto q . Assim, a expressão de w^* deve ser tal que satisfaça a seguinte relação de equilíbrio:

$$\frac{d^4 w^*}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w^*}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw^*}{dr} = 0 \quad (3.34)$$

Fazendo-se integrações sucessivas, obtém-se:

$$w^*(q, p) = \frac{C_1}{4} r^2 \ln r + (C_2 - C_1) \frac{r^2}{8} + C_3 \ln r + C_4 \quad (3.35)$$

Impondo-se a condição de simetria dada por $dw^*/dr = 0$, para $r = 0$, obtém-se $C_3 = 0$. Fazendo-se o equilíbrio das forças verticais atuantes na placa circular, obtém-se $C_1 = 1/2\pi D$. As constantes C_2 e C_4 são obtidas a partir das condições de contorno da placa,

mas como nesse caso o raio é infinito, estes valores poderiam ser correspondentes a quaisquer deslocamentos de corpo rígido. Nesse trabalho será adotada a sugestão de DANSON (1979), que também foi adotada por PAIVA (1987) e CHUEIRI (1994), que considera $C_2 = C_4 = 0$. Nos trabalhos de STERN (1979) e BÉZINE (1978) também se tem a dedução da expressão (3.35) da solução fundamental, porém eles adotam $C_2 = 1/2\pi D$ e $C_4 = 0$. Substituindo-se os valores das constantes em (3.35), chega-se à:

$$w^*(q, p) = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (3.36)$$

No entanto, para se obter a solução da equação (3.27), relativa ao deslocamento transversal do ponto q , deve-se ainda conhecer as expressões dos esforços fundamentais M_n^* , M_{ns}^* e V_n^* , e da derivada direcional do deslocamento transversal fundamental $w_{,n}^*$ para o ponto p . Assim, derivando-se a expressão (3.36) em relação à n , obtém-se:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n(p)} = \frac{dw^*}{dr} \frac{\partial r}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r (r_{,i} n_i) \quad (3.37)$$

sendo $r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i(p)} = \frac{x_i(p) - x_i(q)}{r}$.

Considerando-se as equações (3.31) a (3.33) e derivando-se (3.36) chega-se à:

$$M_n^*(q, p) = -\frac{1}{4\pi} \left[(1 + \nu) \ln r + (1 - \nu) (r_{,i} n_i)^2 + \nu \right] \quad (3.38)$$

$$M_{ns}^*(q, p) = -\frac{1}{4\pi} (1 - \nu) (r_{,i} n_i) (r_{,j} s_j) \quad (3.39)$$

$$V_n^*(q, p) = \frac{r_{,i} n_i}{4\pi r} \left[2(1 - \nu) (r_{,j} s_j)^2 - 3 + \nu \right] + \frac{1 - \nu}{4\pi R} \left[1 - 2(r_{,i} s_i)^2 \right] \quad (3.40)$$

Entretanto, como será mostrado no capítulo 4, o contorno externo da placa e as interfaces serão discretizados em elementos retos. Nesse caso, a curvatura R em qualquer ponto do contorno tende ao infinito e a expressão de V_n^* passa a ser dada por:

$$V_n^*(q, p) = \frac{r_{,i} n_i}{4\pi r} \left[2(1-\nu)(r_{,j} s_j)^2 - 3 + \nu \right] \quad (3.41)$$

Com isso, pode-se obter a solução da equação (3.27). No cálculo dos esforços M_{ij} e Q_i nos pontos internos, assim como do deslocamento w_m , como é mostrado a seguir, necessitam-se das derivadas primeiras, segundas e terceiras dos deslocamentos e esforços fundamentais. A partir das expressões fundamentais dadas anteriormente e da expressão

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i(p) \partial x_j(p)} = r_{,ij} = \frac{r_{,i} \cdot r_{,j} - \delta_{ij}}{r} \quad (3.42)$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker, obtêm-se as equações (3.43) a (3.62) dadas a seguir.

Deve-se observar que nas expressões fundamentais anteriores a derivada foi feita no ponto p e nas expressões seguintes faz-se a derivada no ponto q , utilizando as relações

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(q)} = -r_{,i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 r}{\partial x_i(q) \partial x_j(q)} = -r_{,ij}.$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial x_i(q)}(q, p) = -\frac{r \ln(r)}{4\pi D} r_{,i} \quad (3.43)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i(q) \partial x_j(q)}(q, p) = \frac{1}{4\pi D} (r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \ln(r)) \quad (3.44)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k(q) \partial x_k(q)}(q, p) = \frac{1}{4\pi D} (1 + 2 \ln(r)) \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i(q)} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k(q) \partial x_k(q)}(q, p) \right) = \frac{-r_{,i}}{2\pi D r} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i(q)} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n(p)}(q, p) \right) = \frac{-1}{4\pi D} [r_{,i} (r_{,k} n_k) + \ln(r) n_i] \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i(q) \partial x_j(q)} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n(p)}(q, p) \right) = \frac{1}{4\pi D r} [(\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j})(r_{,k} n_k) + r_{,i} n_j + r_{,j} n_i] \quad (3.48)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k(q) \partial x_k(q)} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n(p)}(q, p) \right) = \frac{r_{,k} n_k}{2\pi D r} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i(q)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k(q) \partial x_k(q)} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n(p)}(q, p) \right) \right) = \frac{1}{2\pi D r^2} [2r_{,i} (r_{,k} n_k) - n_i] \quad (3.50)$$

$$\frac{\partial M_{ns}^*}{\partial x_i(q)}(q, p) = \frac{(1-\nu)}{4\pi r} [n_i (r_{,\ell} s_\ell) + s_i (r_{,k} n_k) - 2r_{,i} (r_{,k} n_k)(r_{,\ell} s_\ell)] \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_i(q) \partial x_j(q)}(q, p) = & \frac{-(1-\nu)}{4\pi r^2} \left\{ [2(\delta_{ij} + 4r_{,i} r_{,j})(r_{,\ell} s_{,\ell}) - 2s_i r_{,j} - 2r_{,i} s_j](r_{,k} n_k) \right. \\ & \left. - 2(r_{,j} n_i + r_{,i} n_j)(r_{,\ell} s_{,\ell}) + n_i s_j + s_i n_j \right\} \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_k(q) \partial x_k(q)}(q, p) = \frac{(1-\nu)}{\pi r^2} \{(s_{,\ell} r_{,\ell})(r_{,k} n_k)\} \quad (3.53)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i(q)} \left(\frac{\partial^2 M_{ns}^*}{\partial x_k(q) \partial x_k(q)}(q, p) \right) = \frac{(1-\nu)}{\pi r^3} [4r_{,i} (r_{,k} s_k)(r_{,\ell} n_{,\ell}) - n_i (r_{,k} s_k) - s_i (r_{,\ell} n_{,\ell})] \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial x_i(q)}(q, p) = \frac{1}{4\pi r} \{(1+\nu)r_{,i} - 2(1-\nu)(r_{,k} n_k)[r_{,i} (r_{,k} n_k) - n_i]\} \quad (3.55)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_i(q) \partial x_j(q)}(q, p) = & -\frac{1}{4\pi r^2} \left\{ (1+\nu)(\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) + 2(1-\nu)[n_i n_j - 2r_{,j} n_i (r_{,k} n_k) + \right. \\ & \left. - (\delta_{ij} - 2r_{,j} r_{,k})(r_{,k} n_k)^2 - 2r_{,i} (r_{,k} n_k)[n_j - r_{,j} (r_{,k} n_k)] \right\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k(q) \partial x_k(q)}(q, p) = -\frac{1}{4\pi r^2} \{2(1-\nu)[1 - 2(r_{,k} n_k)^2]\} \quad (3.57)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i(q)} \left(\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k(q) \partial x_k(q)}(q, p) \right) = \frac{-(1-\nu)}{\pi r^3} \{r_{,i} + 2n_i (r_{,k} n_k) - 4r_{,i} (r_{,k} n_k)^2\} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^*}{\partial x_i(q)}(q, p) = & \frac{1}{4\pi r^2} \{2(1-\nu)(r_{,\ell} s_{,\ell})^2 [4r_{,i} (r_{,k} n_k) - n_i] + \\ & - 4(1-\nu)(r_{,\ell} s_{,\ell})(r_{,k} n_k) s_i + (3-\nu)[n_i - 2r_{,i} (r_{,k} n_k)] \} \end{aligned} \quad (3.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_i(q) \partial x_j(q)}(q, p) = & \frac{1}{4\pi r^3} \{2(1-\nu)(r_{,\ell} s_{,\ell})^2 [24r_{,i} r_{,j} (r_{,k} n_k) - 4[r_{,i} n_j + r_{,j} n_i + \delta_{ij} (r_{,k} n_k)]] + \\ & + 2(1-\nu)(r_{,\ell} s_{,\ell}) [2(n_i s_j + n_j s_i) - 8(r_{,k} n_k)(r_{,i} s_j + r_{,j} s_i)] + 4(1-\nu)(r_{,k} n_k)(s_i s_j) + \\ & + (3-\nu)[2\delta_{ij} (r_{,k} n_k) - 8r_{,i} r_{,j} (r_{,k} n_k) + 2(r_{,i} n_j + r_{,j} n_i)] \} \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k(q) \partial x_k(q)}(q, p) = -\frac{(1-\nu)}{4\pi r^3} (r_{,k} n_k) [4(r_{,\ell} s_{,\ell})^2 - 1] \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i(q)} \left(\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k(q) \partial x_k(q)}(q, p) \right) = & -\frac{(1-\nu)}{\pi r^4} \left\{ (r_{,\ell} s_{,\ell})^2 [24r_{,i} (r_{,k} n_k) - 4n_i] + \right. \\ & \left. - (r_{,k} n_k) [8s_i (r_{,\ell} s_{,\ell}) + 4r_{,i}] + n_i \right\}, \quad \text{com } i, j, k, l = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.62)$$

3.4 EQUAÇÃO INTEGRAL DO DESLOCAMENTO PARA UM PONTO DO CONTORNO OU DA INTERFACE

Se o ponto de colocação pertence ao contorno externo ou a uma interface, o ponto é designado por Q e para se obter sua equação de deslocamento acrescenta-se um contorno circular Γ_ξ de raio infinitesimal e centro em Q , a fim de se tornar o mesmo um ponto de domínio e então ser possível aplicar a equação (3.27). Retira-se ainda, o contorno $\bar{\Gamma}$, resultando no novo contorno dado por: $\Gamma - \bar{\Gamma} + \Gamma_\xi$, como está representado na figura (3.6) para o caso em que Q esteja sobre o contorno externo da placa e seja coincidente com um canto do tipo c_3 . Faz-se então os limites do raio ξ e do contorno $\bar{\Gamma}$ tenderem a zero, a fim de que o ponto Q possa ser considerado sobre o contorno. A seguir serão considerados os diversos casos que podem ocorrer em função da posição do ponto Q .

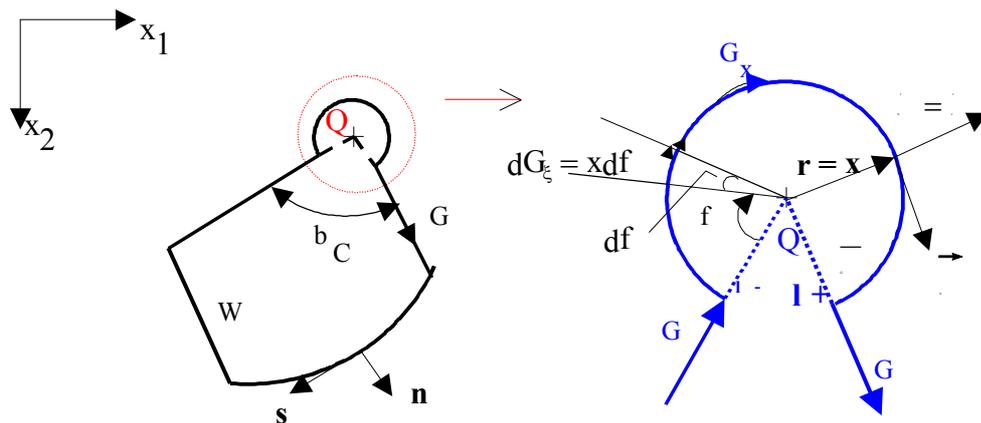


FIGURA 3.6 - Contorno Circular Acrescido a um ponto Q de um Canto da Placa

Da figura (3.6), onde o contorno é circular, as seguintes relações podem ser definidas:

$$r = \xi \quad (3.63)$$

$$r_{,i} n_i = 1 \quad (3.64)$$

$$r_{,i} s_i = 0 \quad (3.65)$$

$$d\Gamma_\xi(P) = \xi d\phi \quad (3.66)$$

Fazendo-se os limites do raio ξ e do contorno $\bar{\Gamma}$ tenderem a zero, a equação integral relativa a um ponto \mathbf{Q} situado sobre o contorno ou uma interface é dada por:

$$\begin{aligned}
 & K(\mathbf{Q})w(\mathbf{Q}) + \sum_{j=1}^{N_s} \frac{D_j}{D} \int_{\Gamma} \left(V_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P})w(\mathbf{P}) - M_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \left(V_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P})w(\mathbf{P}) - M_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P})w_{ci}(\mathbf{P}) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_{c2}+N_{c1}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} R_c^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P})_{\Omega_j} w_{ci}(\mathbf{P}) = \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(\mathbf{P})w_{ci}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \\
 & + \int_{\Gamma} \left(V_n(\mathbf{P})w^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) - M_{nn}(\mathbf{P}) \frac{\partial w^*}{\partial n}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} (g(\mathbf{p})w^*(\mathbf{Q}, \mathbf{p})) d\Omega_g \quad (3.67)
 \end{aligned}$$

onde a constante $K(\mathbf{Q})$ é função da posição do ponto de colocação \mathbf{Q} e será determinada nos itens a seguir.

No item (3.4.1) se fará um estudo detalhado sobre as integrais ao longo dos contornos $\Gamma - \bar{\Gamma}$ e Γ_ξ , assim como sobre os termos relacionados aos cantos λ^- e λ^+ . Entretanto, nos outros itens será analisada apenas a integral singular sobre o contorno Γ_ξ , que dá origem à constante $K(\mathbf{Q})$; os demais termos integrais podem ser analogamente obtidos, como está apresentado no item (3.4.1).

3.4.1 Ponto \mathbf{Q} no contorno externo ou do tipo c_3

O canto c_3 está representado na figura (3.6) e sua equação integral é dada por:

$$\begin{aligned}
 & w(\mathbf{Q}) + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left(V_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P})w(\mathbf{P}) - M_{nn}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma(\mathbf{P}) + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left(V_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P})w(\mathbf{P}) - M_{nn}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma_\xi(\mathbf{P}) + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{c\lambda^-}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P})w_{c\lambda^-}(\mathbf{P})] + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{c\lambda^+}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P})w_{c\lambda^+}(\mathbf{P})] + \sum_{j=1}^{N_s-1} \frac{D_j}{D} \int_{\Gamma} \left(V_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P})w(\mathbf{P}) - M_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \left(V_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P})w(\mathbf{P}) - M_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_{c3}-1} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P})w_{ci}(\mathbf{P})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{N_{c2}+N_{c1}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} R_c^*(Q, P)_{\Omega_j} w_{ci}(P) = \\
 & = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left(V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{c\lambda^+}(Q, P) w_{c\lambda^+}^*(P)] + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_{c1}-1} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{c\lambda^-}(Q, P) w_{c\lambda^-}^*(P)] + \\
 & + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left(V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma_\xi(P) + \int_{\Omega_g} (g(p) w^*(Q, p)) d\Omega_g(p) \quad (3.68)
 \end{aligned}$$

Os limites indicados nas integrais acima para $\bar{\Gamma} \rightarrow 0$ permitem a obtenção de valores finitos obtidos analiticamente. No presente caso, apenas o núcleo que tem singularidade do tipo $1/r$, caso do termo em V_n^* (equação 3.41), apresenta alguma dificuldade. Neste caso, as parcelas que individualmente teriam valor ilimitado se cancelam mutuamente (Valor principal de Cauchy). Nos demais casos, todas as parcelas são finitas. Assim, esses limites podem ser escritos simplificadaamente na seguinte forma.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_{nn}^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) = \\
 = \int_{\Gamma} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_{nn}^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) \quad (3.69)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left(V_n(P) w^*(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) = \\
 = \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) \quad (3.70)
 \end{aligned}$$

A integral sobre o trecho singular Γ_ξ que envolve os esforços fundamentais apresenta singularidade do tipo $1/r$ devido à expressão de V_n^* (equação 3.41) e do tipo lnr , relativa à expressão M_{nn}^* (equação 3.38). Porém, considerando-se a equação (3.66), conclui-se que a parcela que envolve o esforço fundamental M_{nn}^* se anula quando se faz o limite $\xi \rightarrow 0$. A fim de se calcular a parcela referente ao esforço fundamental V_n^* , soma-se e subtrai-se o deslocamento $w(Q)$, isto é, substitui-se $w(P)$ por $(w(P) - w(Q) + w(Q))$ não se alterando o

valor da integral. Considerando-se válida a continuidade, ou, utilizando-se a condição de Hölder (JASWON, MAITI & SYMM, 1967), que é dada por:

$$|w(\mathbf{P}) - w(\mathbf{Q})| \leq C_1 r^{\alpha_1(\mathbf{P}, \mathbf{Q})} \quad (3.71)$$

onde C_1 é uma constante e $0 < \alpha_i \leq 1$, com $i = 1, 2$, conclui-se que a parcela $(w(\mathbf{P}) - w(\mathbf{Q}))$ se anula. Levando-se em conta ainda que o valor de $w(\mathbf{Q})$ é um valor do domínio e portanto, não varia ao longo do contorno Γ_ξ , tem-se que:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left(V_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) w(\mathbf{P}) - M_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma_\xi(\mathbf{P}) = w(\mathbf{Q}) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} V_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) d\Gamma_\xi(\mathbf{P}) \quad (3.72)$$

Substituindo-se em (3.72) a expressão (3.41) de $V_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P})$ e considerando-se as equações (3.63) a (3.66), obtém-se o seguinte termo livre:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} (V_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) w(\mathbf{P})) d\Gamma_\xi(\mathbf{P}) = w(\mathbf{Q}) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi - \beta_c} -\frac{1}{2\pi\xi} \xi d\phi = -\frac{2\pi - \beta_c}{2\pi} w(\mathbf{Q}) \quad (3.73)$$

onde β_c é o ângulo interno do canto da placa, indicado na figura (3.6).

Fazendo-se um estudo análogo, conclui-se que a integral da equação (3.68) sobre o contorno Γ_ξ , envolvendo os deslocamentos fundamentais, é nula. A partir das equações (3.39) e (3.65), deduz-se que o esforço M_{ns}^* no contorno circular é também nulo. Logo:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{N_c-1} R_{ci}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) w_{ci}(\mathbf{P}) + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{c\lambda^-}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) w_{c\lambda^-}(\mathbf{P})] + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{c\lambda^+}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) w_{c\lambda^+}(\mathbf{P})] = \\ & = \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) w_{ci}(\mathbf{P}) \end{aligned} \quad (3.74)$$

Levando-se em conta, ainda, a equação (3.63), conclui-se que a expressão de w^* (equação 3.36) se anula ao se fazer $\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, a equação (3.68), que representa a equação integral de um ponto coincidente com um canto do tipo c_3 , resulta na equação (3.67) apresentada anteriormente, sendo a constante $K(\mathbf{Q})$ dada por:

$$K(Q) = \frac{\beta_c}{2\pi} \quad (3.75)$$

No caso do ponto Q não coincidir com um canto e estiver sobre o contorno externo da placa, tem-se que $\beta_c = \pi$ e, portanto, o termo livre fica:

$$K(Q) = \frac{1}{2} \quad (3.76)$$

3.4.2 Ponto Q pertence à interface

O ponto de colocação Q está agora definido sobre uma interface, porém não coincidente com um canto. Considere a figura (3.7), admitindo-se inicialmente que o ponto pertença ao subdomínio Ω_I , ou seja: $D(Q)=D=D_1$. Através de uma análise análoga àquela feita no item (3.4.1), a equação do deslocamento transversal de Q fica:

$$\begin{aligned} w(Q) &+ \lim_{\Gamma_{12} \rightarrow 0} \frac{D_1}{D} \int_{\Gamma_{12} - \bar{\Gamma}_{12}} \left(V_n^*(Q, P)w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ &\lim_{\bar{\Gamma}_{21} \rightarrow 0} \frac{D_2}{D} \int_{\Gamma_{21} - \bar{\Gamma}_{21}} \left(V_n^*(Q, P)w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma(P) + \\ &+ \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{D_1}{D} \int_{\Gamma_{1\xi}} \left(V_n^*(Q, P)w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi(P) + \\ &+ \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{D_2}{D} \int_{\Gamma_{2\xi}} \left(V_n^*(Q, P)w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi(P) + \\ &+ \sum_{j=1}^{N_s} \frac{D_j}{D} \int_{\Gamma} \left(V_n^*(Q, P)w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\ &+ \sum_{j=1}^{N_{int-1}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \left(V_n^*(Q, P)w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(Q, P)w_{ci}(P) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N_{c2}+N_{c1}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} R_{ci}^*(Q, P)_{\Omega_j} w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w^*(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma(P) + \\ &+ \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q, P) + \int_{\Omega_g} (g(p)w^*(Q, p)) d\Omega_g(p) \quad (3.77) \end{aligned}$$

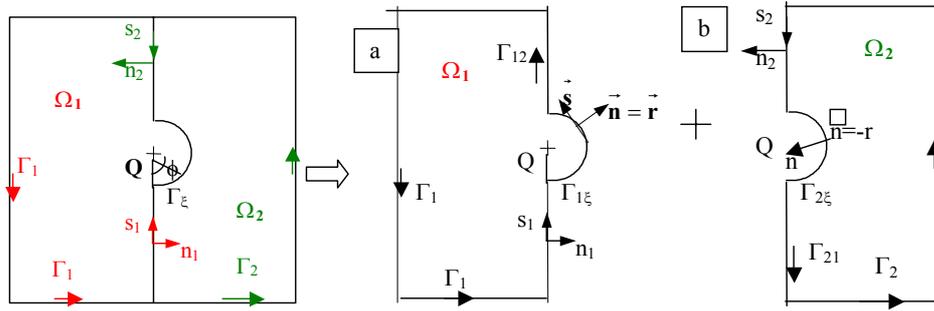


FIGURA 3.7 - Ponto de Colocação Situado na Interface de Duas Sub-regiões

Nos contornos circulares da figura (3.7) a direção da normal é dada pelo vetor \mathbf{n} e, ainda, são válidas as relações (3.63), (3.65) e (3.66). No caso da figura (3.7.a), tem-se que no contorno $\Gamma_{1\epsilon}$ $\vec{r} = \vec{n}$ e portanto $\partial r/\partial n = 1$. Contudo, na figura (3.7.b) $\vec{r} = -\vec{n}$, logo $\partial r/\partial n = -1$ ao longo do contorno $\Gamma_{2\epsilon}$. Calculando-se as integrais sobre os contornos circulares das figuras (3.7.a) e (3.7.b), utilizando-se um procedimento análogo àquele descrito no item (3.4.1), obtêm-se, respectivamente:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{D_1}{D} \int_{\Gamma_{1\epsilon}} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi &= \frac{D_1}{D} w(Q) \int_{\phi} \left(V_n^*(Q, P) \right) \epsilon d\phi = \\ &= \frac{D_1}{D} w(Q) \int_0^\pi -\frac{1}{2\pi} d\phi = -\frac{D_1}{2D} w(Q) = -\frac{1}{2} w(Q) \end{aligned} \quad (3.78)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{D_2}{D} \int_{\Gamma_{2\epsilon}} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi &= \frac{D_2}{D} w(Q) \int_{\phi} \left(V_n^*(Q, P) \right) \epsilon d\phi = \\ &= \frac{D_2}{D} w(Q) \int_0^\pi \frac{1}{2\pi} d\phi = \frac{D_2}{2D} w(Q) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Portanto, o termo livre $\mathbf{K}(\mathbf{Q})$ para esse caso fica:

$$\mathbf{K}(\mathbf{Q}) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{D_2}{2D} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{D_2}{D} \right) \quad (3.80)$$

Fazendo-se o limite de $\bar{\Gamma} \rightarrow \mathbf{0}$, encontram-se os valores principais das integrais sobre os contornos $(\Gamma_{12} - \bar{\Gamma}_{12})$ e $(\Gamma_{21} - \bar{\Gamma}_{21})$.

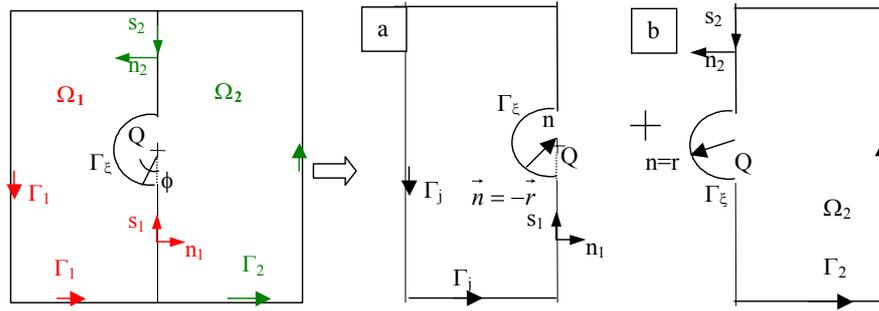


FIGURA 3.8 - Ponto de Colocação Situado na Interface de Duas Sub-regiões

A constante $K(Q)$ também pode ser obtida considerando-se $D=D_2$, após a determinação das integrais sobre os contornos circulares indicados na figura (3.8). Nos contornos circulares das figuras (3.8.a) e (3.8.b), tem-se, respectivamente: $\partial r/\partial n=-1$ e $\partial r/\partial n=1$, sendo portanto as integrais sobre esses contornos dadas por:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{D_1}{D} \int_{\Gamma_{1\varepsilon}} \left(V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi = \frac{D_1}{2D} w(Q) \quad (3.81)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{D_2}{D} \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} \left(V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi = -\frac{1}{2} w(Q) \quad (3.82)$$

Logo, a constante $K(Q)$ é igual a:

$$K(Q) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{D_1}{2D} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{D_1}{D} \right) \quad (3.83)$$

Observando-se as equações (3.83) e (3.80), pode-se dizer que:

$$K(Q) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{D_{pa}}{D} \right) \quad (3.84)$$

3.4.3 Valor livre para Q do tipo c_2

Considerando-se que $D=D_1$, tem-se que resolver as integrais sobre os contornos circulares que estão indicados nas figuras (3.9.a) e (3.9.b). Sendo β_2 o ângulo formado no subdomínio Ω_1 e γ o ângulo formado no subdomínio Ω_2 (ver figura 3.3), obtêm-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{D_1}{D} \int_{\Gamma_{1\varepsilon}} \left(V_n^*(Q, P)w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi = \int_0^{2\pi-\beta_2} -\frac{1}{2\pi} w(P) d\phi = \left(\frac{\beta_2}{2\pi} - 1 \right) w(Q) \quad (3.85)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{D_2}{D} \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} \left(V_n^*(Q, P)w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma = \frac{D_2}{D} \int_0^\gamma \frac{1}{2\pi} w(P) d\phi = \frac{D_2}{D} \left(\frac{\gamma}{2\pi} \right) w(Q) \quad (3.86)$$

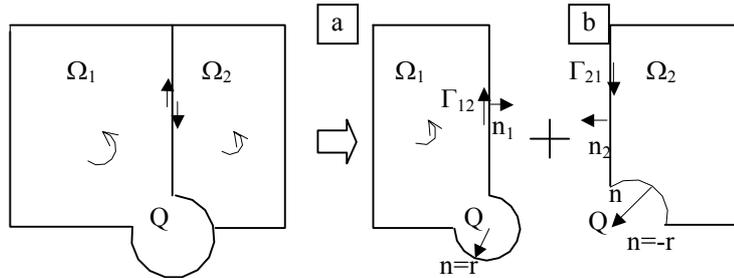


FIGURA 3.9 - Q Coincide com um Canto do Tipo c2

Considerando-se as equações (3.85) e (3.86), a constante $K(Q)$ resulta em:

$$K(Q) = 1 - 1 + \frac{\beta_2}{2\pi} + \frac{D_2}{D} \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{\beta_2}{2\pi} + \frac{D_2}{D} \frac{\gamma}{2\pi} \quad (3.87)$$

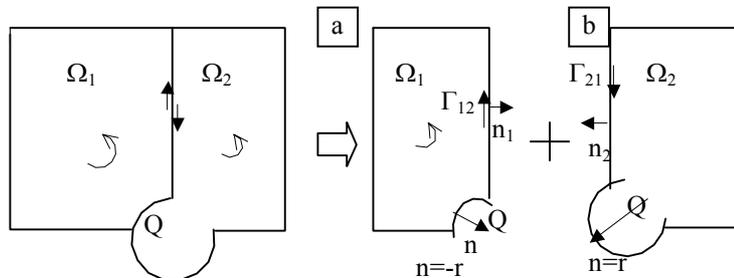


FIGURA 3.10 - Q Coincide com um Canto do Tipo 2

Admitindo-se agora que $D=D_2$, deve-se calcular as integrais sobre os contornos circulares indicados nas figuras (3.10.a) e (3.10.b), que resultam, respectivamente, em:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{D_1}{D} \int_{\Gamma_{1\varepsilon}} \left(V_n^*(Q, P)w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi = \frac{D_1}{D} \int_0^{\beta_2} \frac{1}{2\pi} w(P) d\phi = \frac{D_1}{D} \left(\frac{\beta_2}{2\pi} \right) w(Q) \quad (3.88)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{D_2}{D} \int_{\Gamma_{2\varepsilon}} \left(V_n^*(Q, P)w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi = \int_0^{2\pi-\gamma} -\frac{1}{2\pi} w(P) d\phi = \left(\frac{\gamma}{2\pi} - 1 \right) w(Q) \quad (3.89)$$

Com isso, obtém-se:

$$K(Q) = 1 - 1 + \frac{D_1}{D} \frac{\beta_2}{2\pi} + \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{D_1}{D} \frac{\beta_2}{2\pi} + \frac{\gamma}{2\pi} \quad (3.90)$$

A partir das equações (3.87) e (3.90) pode-se deduzir que:

$$K(Q) = \frac{D_{pa}}{D} \frac{\gamma}{2\pi} + \frac{\beta}{2\pi} \quad (3.91)$$

sendo β o ângulo formado no subdomínio de rigidez D e γ o ângulo formado no subdomínio

adjacente; no caso em que $\beta = \gamma = \frac{\pi}{2}$, tem-se que $K(Q) = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{D_{pa}}{D} \right)$.

3.4.4.Q coincide com um canto do tipo c_1

Adotando-se $D=D_I$, a constante $K(Q)$ é encontrada fazendo-se as integrais sobre os contornos circulares indicados na figura (3.11). Considerando-se β o ângulo formado no subdomínio Ω_1 e γ aquele formado no subdomínio Ω_3 (ver figuras 3.3 e 3.11), obtêm-se:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{D_1}{D} \int_{\Gamma_{1c}} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma = w(Q) \int_0^{2\pi-\beta} -\frac{1}{2\pi} d\phi = \left(-1 + \frac{\beta}{2\pi} \right) w(Q) \quad (3.92.a)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{D_2}{D} \int_{\Gamma_{2c}} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma = \frac{D_2}{D} w(Q) \int_0^{\pi} \frac{1}{2\pi} d\phi = \frac{D_2}{2D} w(Q) \quad (3.92.b)$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{D_3}{D} \int_{\Gamma_{3c}} \left(V_n^*(Q, P) w(P) - M_n^*(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma = \\ = \frac{D_3}{D} w(Q) \int_0^{\gamma} \frac{1}{2\pi} d\phi = \frac{D_3}{D} \left(\frac{\gamma}{2\pi} \right) w(Q) \end{aligned} \quad (3.92.c)$$

Logo:

$$K(Q) = \left(\frac{\beta}{2\pi} \right) + 0.5 \frac{D_2}{D} + \frac{D_3}{D} \left(\frac{\gamma}{2\pi} \right) \quad (3.93)$$

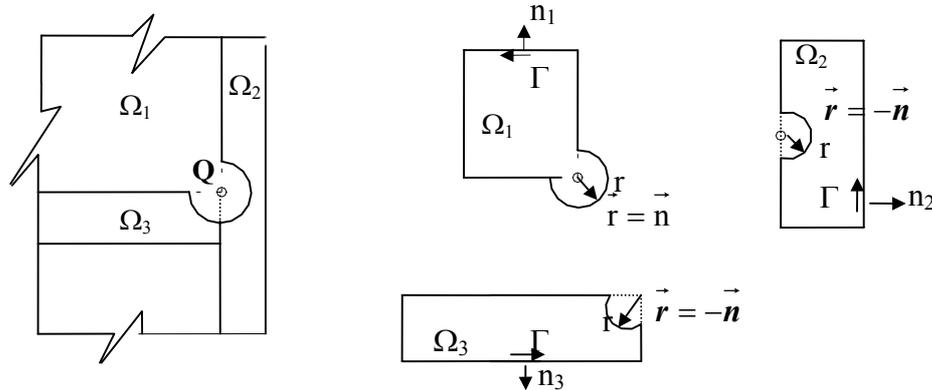


FIGURA 3.11 - O Ponto Q Coincide com um Canto do Tipo 1

Na tabela (3.1), apresentam-se os valores de $K(Q)$ para os diferentes casos.

Tabela 3.1 Valores de $K(Q)$

<i>VALOR DE $K(Q)$</i>	<i>POSIÇÃO DE Q</i>
$K(Q)=0.5$	Q no contorno externo
$K(Q) = 0.5(1 + D_{pa} / D_j)$	Q na interface; ponto em Γ_j da figura (3.3)
$K(Q) = \left(\frac{\beta}{2\pi}\right) + 0.5 \frac{D_2}{D} + \frac{D_3}{D} \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)$	Q do tipo c_1 (fig 3.3), para $D(Q)=D=D_{laje}$, β é definido na laje e γ na viga (interrompida) de rigidez D_3 .
$K(Q) = \frac{\beta}{2\pi} + \frac{D_{pa}}{D_j} \frac{\gamma}{2\pi}$	Q do tipo c_2 (fig 3.3), para $D(Q)=D_j$ (D_j e D_{pa} são, respectivamente, as rigidezes da placa onde se definem β e γ)
$K(Q) = \beta / 2\pi$	Q do tipo c_3 (fig.3.3).

3.5 EQUAÇÃO INTEGRAL DA ROTAÇÃO

A seguir será apresentada a equação de $w_{,m}(q)$, sendo m uma direção qualquer definida no ponto q do domínio da placa (ver figura 3.5). Essa equação também será deduzida para um ponto Q sobre uma interface, pois nesse trecho têm-se os deslocamentos w e $w_{,n}$ como incógnitas. Com isso, para se obter a solução do problema (ver item 4.7), deve-se escrever duas equações nesses pontos: uma de w e outra de $w_{,m}$, sendo m a direção da normal definida na interface à qual o ponto pertence. Note-se que a equação de $w_{,m}$ não será escrita nos cantos, portanto esse caso não será considerado adiante. No trabalho de PAIVA

(1987) tem-se a dedução para o caso em que \mathcal{Q} coincide com um canto c_3 (ver figura 3.3). Além disso, no modelo de placas apresentado no capítulo 5, a equação de $w_{,m}$ será escrita para alguns pontos sobre o contorno externo. Com isso, a seguir, serão apresentadas as equações de $w_{,m}$ para um ponto interno, sobre uma interface ou sobre o contorno externo.

3.5.1 Equação Integral para Pontos do Domínio

Segundo PAIVA (1987), derivando-se a equação (3.27), do deslocamento transversal w , pode-se obter a equação da derivada do deslocamento w em relação à direção m :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial w(q)}{\partial m} + \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma_s} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{im}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_{e3}} \frac{D_j}{D} \left(\frac{\partial M_{ns}^{*+}}{\partial m}(q, P) - \frac{\partial M_{ns}^{*-}}{\partial m}(q, P) \right) w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_{e2}+N_{ci}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} \left(\frac{\partial M_{ns}^{*+}}{\partial m}(q, P) + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial M_{ns}^{*-}}{\partial m}(q, P) \right) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left(V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) - M_{mn}(P) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \right) (q, P) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(q, P) + \int_{\Omega_g} \left(g(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(q, P) \right) d\Omega_g \quad (3.94)
 \end{aligned}$$

onde as expressões fundamentais, que são obtidas a partir das equações (3.43), (3.47), (3.51),

(3.55) e (3.59), considerando-se a relação $\frac{\partial r}{\partial m(q)} = -r_{,i} m_i$, são dados por:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = -\frac{r}{4\pi D} \ln r(r_{,i} m_i) \quad (3.95)$$

$$\frac{\partial w_{,n}^*}{\partial m} = -\frac{1}{4\pi D} [r_{,i} n_i r_{,j} m_j + m_i n_i \ln r] \quad (3.96)$$

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r} \left\{ (1+\nu)(r_{,i} m_i) + 2(1-\nu)(r_{,i} n_i) [(m_j n_j) - (r_{,j} m_j)(r_{,k} n_k)] \right\} \quad (3.97)$$

$$\frac{\partial M_{ns}^*}{\partial m} = \frac{1-\nu}{4\pi r} \left\{ (m_i n_i)(r_{,j} s_j) + (m_i s_i)(r_{,j} n_j) - 2(r_{,i} m_i)(r_{,j} n_j)(r_{,k} s_k) \right\} \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial V_n^*}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu)(r_i, s_i) \left[4(r_j, s_j)(r_k, m_k)(r_l, n_l) - 2(m_j, s_j)(r_k, n_k) + \right. \right. \\ \left. \left. - (m_j, n_j)(r_k, s_k) \right] + (3-\nu) \left[(m_i, n_i) - 2(r_i, m_i)(r_j, n_j) \right] \right\} \quad (3.99)$$

3.5.2 Equação Integral para pontos da Interface

Aqui será tratado o caso em que o ponto esteja sobre uma interface (ver figura 3.7), mas que não coincida com um canto da placa. Como a equação (3.97) é função de $1/r$ e a equação (3.99) de $1/r^2$, têm-se singularidades na integral sobre a interface Γ_j quando o ponto Q pertencer à mesma. A fim de se eliminarem tais singularidades, procede-se da mesma maneira que foi feito no item (3.4.2), chegando-se à seguinte equação:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial w(Q)}{\partial m} + \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma_s} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\ & + \left(\frac{D_1}{D} \right) \lim_{\Gamma_{12} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{12} - \bar{\Gamma}_{12}} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_j + \\ & + \left(\frac{D_2}{D} \right) \lim_{\Gamma_{21} \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{21} - \bar{\Gamma}_{21}} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_j + \\ & + \left(\frac{D_1}{D} \right) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{1\xi}} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi + \\ & + \left(\frac{D_2}{D} \right) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{2\xi}} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi + \sum_{i=1}^{N_{e3}} \frac{D_i}{D} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) w_{ci}(P) + \\ & + \sum_{j=1}^{N_{im}-1} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\ & + \sum_{i=1}^{N_{e2}+N_{ci}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} \left(\frac{\partial M_{ns}^{*+}}{\partial m}(Q, P) - \frac{\partial M_{ns}^{*-}}{\partial m}(Q, P) \right)_j w_{ci}(P) = \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) + \\ & + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} \left(g(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) \right) d\Omega_g \quad (3.100) \end{aligned}$$

As integrais sobre o contorno $\Gamma - \bar{\Gamma}$ são iguais aos seus valores principais. Quando a singularidade é do tipo $1/r^2$, como é o caso da expressão de $\partial V_n^* / \partial m$, diz-se que a

integral sobre o contorno $\Gamma - \bar{\Gamma}$ é igual ao valor principal de Radamard. A fim de se eliminar a singularidade do tipo $1/r^2$ que aparece na integral sobre Γ_ξ , aplica-se à placa um deslocamento de corpo rígido igual a $-w(Q)$. Assim, tem-se que $w(P) = -w(Q)$ e $\partial w / \partial m(P) = 0$ e nesse caso, a equação (3.100) é dada por:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma_s} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(Q) \right) d\Gamma - \left(\frac{D_1}{D} \right) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{1\xi}} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(Q) \right) d\Gamma_\xi + \\
 & - \left(\frac{D_2}{D} \right) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{2\xi}} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(Q) \right) d\Gamma_\xi + \\
 & - \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) w(Q) - \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(Q) \right) d\Gamma + \\
 & - \sum_{i=1}^{N_{c2} + N_{c1}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} \left(\frac{\partial M_{ns}^{*+}}{\partial m}(Q, P) - \frac{\partial M_{ns}^{*-}}{\partial m}(Q, P) \right)_j w(Q) = 0 \tag{3.101}
 \end{aligned}$$

Já que a equação (3.101) é nula, pode-se somá-la à equação (3.100), que não alterará o valor desta. Fazendo-se isso, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial w(Q)}{\partial m} + \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma_s} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) [w(P) - w(Q)] - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\
 & + \left(\frac{D_1}{D} \right) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{1\xi}} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) [w(P) - w(Q)] - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi + \\
 & + \left(\frac{D_2}{D} \right) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{2\xi}} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) [w(P) - w(Q)] - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma_\xi + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) [w_{ci}(P) - w(Q)] + \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) [w(P) - w(Q)] + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_{c2} + N_{c1}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} \left(\frac{\partial M_{ns}^{*+}}{\partial m}(Q, P) - \frac{\partial M_{ns}^{*-}}{\partial m}(Q, P) \right)_j [w_{ci}(P) - w(Q)] = \\
 & = \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right) d\Gamma + \\
 & + \int_{\Omega_g} \left(g(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) \right) d\Omega_g \tag{3.102}
 \end{aligned}$$

Nas integrais sobre o contorno Γ_ξ substituir-se-á o deslocamento $\partial w(\mathbf{P})/\partial n$ por $(\partial w(\mathbf{P})/\partial n - \partial w(\mathbf{Q})/\partial n + \partial w(\mathbf{Q})/\partial n)$. Utilizando-se a condição de Hölder (ver expressão 3.71), pode-se dizer que $\partial w(\mathbf{P})/\partial n - \partial w(\mathbf{Q})/\partial n = 0$. A fim de facilitar a análise, serão definidos os termos **A** e **B** como sendo:

$$A = -\left(\frac{D_1}{D}\right) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{1\xi}} \left(\frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right) d\Gamma_\xi - \left(\frac{D_2}{D}\right) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{2\xi}} \left(\frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right) d\Gamma_\xi \quad (3.103)$$

$$B = \left(\frac{D_1}{D}\right) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{1\xi}} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) [w(P) - w(Q)] \right) d\Gamma_\xi + \\ + \left(\frac{D_2}{D}\right) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{2\xi}} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) [w(P) - w(Q)] \right) d\Gamma_\xi \quad (3.104)$$

Nos contornos circulares $\Gamma_{1\xi}$ e $\Gamma_{2\xi}$ da figura (3.7), tem-se, respectivamente: $\partial r/\partial n = 1$ e $\partial r/\partial n = -1$. Pode-se ainda dizer que $\partial r/\partial s = 0$ nos mesmos e que $r = \xi$. Nesse caso, a expressão de $\partial M_n^*/\partial m$ (equação 3.97) ao longo de $\Gamma_{1\xi}$ e $\Gamma_{2\xi}$ é igual a:

$$\frac{\partial M_n^*}{\partial m}(q, p) = \frac{1}{4\pi\xi} [(1 + \nu)(r_i, m_i)] \quad (3.105)$$

A expressão (3.99) de $\partial V_n^*/\partial m$ nos contornos $\Gamma_{1\xi}$ e $\Gamma_{2\xi}$ é dada, respectivamente, por:

$$\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, p) = \frac{1}{4\pi\xi^2} [(v - 3)(m_i, r_i)] \quad (3.106.a)$$

$$\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(q, p) = -\frac{1}{4\pi\xi^2} [(v - 3)(m_i, r_i)] \quad (3.106.b)$$

Substituindo-se as equações (3.66) e (3.105) em (3.103) e considerando-se ainda a seguinte relação $w_{,n}(\Gamma_{2\xi}) = -w_{,n}(\Gamma_{1\xi})$, obtém-se:

$$A = -\left(\frac{D_1 - D_2}{D}\right) \frac{(1 + \nu)}{4\pi} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\phi} \left((r_i, m_i) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right) d\phi \quad (3.107)$$

Substituindo-se agora na equação (3.104), as expressões (3.66) e (3.106), chega-se à:

$$B = \left(\frac{D_1 - D_2}{D} \right) \frac{(v-3)}{4\pi} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\phi} \left(\frac{1}{\xi} r_{,i} m_i [w(P) - w(Q)] \right) d\phi \quad (3.108)$$

Note-se que na equação (3.107) a singularidade já foi eliminada, o que não aconteceu com a equação (3.108), onde ainda se tem uma singularidade do tipo $1/r$. A fim de se eliminar tal singularidade, se fará uso da série de Taylor, que é dada por:

$$w(P) = w(Q) + \frac{\partial w}{\partial x_k} \Delta x_k + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x_k \partial x_k} \Delta x_k \Delta x_k + \dots \quad k=1,2 \quad (3.109)$$

Desprezando-se o termo de segunda ordem da equação (3.109), tem-se que:

$$w(P) - w(Q) = \frac{\partial w}{\partial x_k} \Delta x_k \quad (3.110)$$

$$\text{onde } \Delta x_k = x_k(P) - x_k(Q) = r r_{,k} \quad (3.111)$$

Considerando-se, que no contorno circular Γ_{ξ_1} $\vec{r} = \vec{n}$, pode-se dizer que:

$$\frac{\partial w(Q)}{\partial r} = \frac{\partial w(Q)}{\partial x_k} r_{,k} = \frac{\partial w(Q)}{\partial n} \quad (3.112)$$

Com isso, obtém-se a seguinte relação:

$$w(P) - w(Q) = r \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \quad (3.113)$$

Substituindo-se (3.113) em (3.108) e considerando-se que $r = \xi$ no contorno circular, esta resulta em:

$$B = \left(\frac{D_1 - D_2}{D} \right) \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{(v-3)}{4\pi} \int_{\phi} \left(r_{,i} m_i \frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right) d\phi \quad (3.114)$$

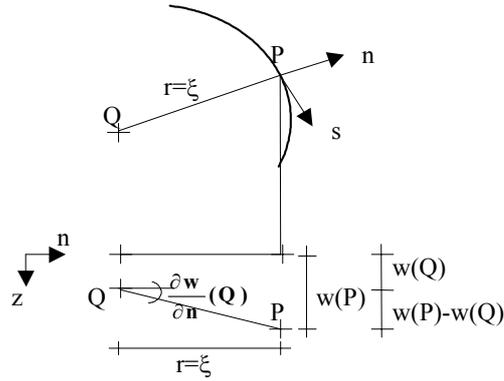


FIGURA 3.12 - Deslocamentos do Ponto do Domínio **Q** e do Ponto do Contorno Circular **P**

Para a obtenção de um outro procedimento que permita também a eliminação da singularidade da equação (3.108) considere-se a figura (3.12). Quando $\xi \rightarrow 0$ tem-se que $\partial w(Q)/\partial n \rightarrow 0$ e portanto, pode-se dizer que: $\partial w(Q)/\partial n = (w(P) - w(Q))/\xi$, ou seja:

$$w(P) - w(Q) = \xi \partial w(Q) / \partial n \quad (3.115)$$

que é equivalente à equação (3.113) para $r = \xi$.

Somando-se as equações (3.107) e (3.114), chega-se à:

$$A + B = -\left(\frac{D_1 - D_2}{D\pi}\right) \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\phi} \left(r_{,i} m_i \frac{\partial w}{\partial n}(Q)\right) d\phi \quad (3.116)$$

Note-se que $\partial w(Q)/\partial n$ é variável no contorno circular (ver figura 3.13). Desse modo, deve-se agora escrever a equação (3.116) em função dos deslocamentos $\partial w/\partial m$ e $\partial w/\partial l$ do ponto **Q**, que são constantes, e do ângulo ϕ , para que se possa fazer a integração. O deslocamento $\partial w/\partial n$ pode ser escrito em função de $\partial w/\partial m$ e $\partial w/\partial l$, da seguinte maneira:

$$\frac{\partial w}{\partial n}(Q) = \frac{\partial w}{\partial m}(Q) \frac{\partial m}{\partial n} + \frac{\partial w}{\partial l}(Q) \frac{\partial l}{\partial n} \quad (3.117)$$

A fim de se escreverem os co-senos diretores $\partial m/\partial n$ e $\partial l/\partial n$ e o valor de $(r_{,i} m_i)$ em função do ângulo ϕ , considere-se a figura (3.13), onde se deduz que $\beta = \phi - \gamma - \pi/2$ e portanto:

$$\vec{m} \cdot \vec{r} = m_i r_{,i} = \cos \beta = \cos(\phi - \gamma - \pi/2) = \text{sen}(\phi - \gamma) \quad (3.118)$$

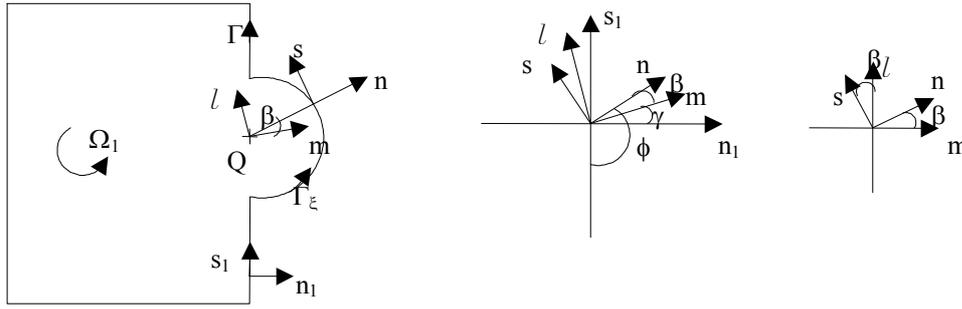


FIGURA 3.13 - Sistemas de Coordenadas no ponto Q e no Contorno

Note-se que no caso tratado aqui, como $\vec{m} = \vec{n}_1$, tem-se que $\gamma = 0$, logo $\vec{m} \cdot \vec{r} = \text{sen } \phi$. Entretanto, a seguir será considerado $\gamma \neq 0$ a fim de se considerar um caso geral. A transformação de coordenadas do sistema (n, s) para (m, l) (ver figura 3.13) é dada por:

$$\begin{Bmatrix} m \\ l \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\text{sen } \beta \\ \text{sen } \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen}(\phi - \gamma) & \cos(\phi - \gamma) \\ -\cos(\phi - \gamma) & \text{sen}(\phi - \gamma) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n \\ s \end{Bmatrix} \quad (3.119)$$

sendo: $\text{sen}(\beta) = \text{sen}(\phi - \gamma - \pi/2) = -\cos(\phi - \gamma)$

Da equação (3.119) pode-se dizer que:

$$\frac{\partial m}{\partial n} = \text{sen}(\phi - \gamma) \quad (3.120.a)$$

$$\frac{\partial l}{\partial n} = -\cos(\phi - \gamma) \quad (3.120.b)$$

Substituindo-se as equações (3.120) em (3.117), tem-se que:

$$\frac{\partial w}{\partial n}(Q) = \text{sen}(\phi - \gamma) \frac{\partial w}{\partial m}(Q) - \cos(\phi - \gamma) \frac{\partial w}{\partial l}(Q) \quad (3.121)$$

Substituindo-se as equações (3.121) e (3.118) em (3.116) e fazendo-se a integração em ϕ , esta resulta em:

$$\begin{aligned}
 A + B &= -\left(\frac{D_1 - D_2}{D}\right) \left[\frac{\partial w}{\partial m}(Q) \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(\phi - \gamma) d\phi - \frac{\partial w}{\partial l}(Q) \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin 2(\phi - \gamma) d\phi \right] = \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{D_1 - D_2}{D}\right) \left[\frac{\partial w}{\partial m}(Q) + \frac{\cos(2\gamma)}{\pi} \frac{\partial w}{\partial l}(Q) \right] \quad (3.122)
 \end{aligned}$$

Substituindo-se a equação (3.122) em (3.102), define-se K_w como sendo: $K_w = K_{w,m}(Q)w_{,m}(Q) + K_{w,l}(Q)w_{,l}(Q)$, sendo $K_{w,m}(Q)$ e $K_{w,l}(Q)$ duas constantes. Lembrando-se que foi adotado $D=D_I$ e ainda, que no caso tratado aqui tem-se que $\vec{m} = \vec{n}_1$ e $\dot{l} = \dot{s}_1$ (ver figura 3.13), ou seja, o ângulo γ é nulo, obtém-se o seguinte valor para K_w :

$$\begin{aligned}
 K_w &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{D_2}{D}\right) \left[\frac{\partial w}{\partial m}(Q) \right] - \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{D_2}{D}\right) \left[\cos(2\gamma) \frac{\partial w}{\partial l}(Q) \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{D_2}{D}\right) \left[\frac{\partial w}{\partial n_1}(Q) \right] - \frac{1}{2\pi} \left(1 - \frac{D_2}{D}\right) \left[\frac{\partial w}{\partial s_1}(Q) \right] \quad (3.123)
 \end{aligned}$$

Porém, como na formulação não se tem a variável $w_{,s}$, é conveniente escrever $\partial w / \partial s_I$ em função de $\partial w / \partial n_I$ e $\partial w / \partial n_{Ip}$, sendo n_I n_{Ip} , respectivamente, as direções da normal aos contornos anterior e posterior ao ponto Q (ver figura 3.13). Nesse caso particular, essas direções são iguais, mas num caso geral, não. Assim, pode-se escrever que:

$$\frac{\partial w}{\partial n_{Ip}}(Q) = \frac{\partial w}{\partial n_1} \frac{\partial n_1}{\partial n_{Ip}} + \frac{\partial w}{\partial s_1} \frac{\partial s_1}{\partial n_{Ip}} = \cos 0 \frac{\partial w}{\partial n_1} + \sin 0 \frac{\partial w}{\partial s_1} \quad (3.124)$$

Considerando-se a equação (3.124), pode-se concluir que o deslocamento $w_{,sI}$ é nulo nesse caso. Logo, a equação (3.123) resulta em:

$$K_w = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{D_2}{D}\right) \left[\frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right] \quad (3.125)$$

sendo $n=n_1=n_{1p}$.

Seja agora a equação (3.102). Pode-se demonstrar que as derivadas das soluções fundamentais são soluções fundamentais relativas a um momento unitário aplicado em Q .

Com isso, os termos $\partial V^*/\partial m$ e $\partial R_c^*/\partial m$ são a cortante equivalente e a reação de canto devido a esse momento. Assim, considerando-se a condição de equilíbrio vertical e tendo-se em vista que $w(Q)$ é constante, pois é relativo a um movimento de corpo rígido, tem-se que:

$$w(Q) \left[\int_{\Gamma} \frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) \right] = 0 \quad (3.126)$$

Considerando-se um caso genérico com N_s sub-regiões, e, ainda, as equações (3.125) e (3.126), a equação (3.102) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(1 + \frac{D_{pa}}{D} \right) \left[\frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right] + \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma_s} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\ & + \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) w_{ci}(P) + \\ & + \sum_{i=1}^{N_{c2}+N_{c1}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} \left(\frac{\partial M_{ns}^{*+}}{\partial m}(Q, P) - \frac{\partial M_{ns}^{*-}}{\partial m}(q, P) \right) w_{ci}(P) = \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) + \\ & + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} \left(g(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) \right) d\Omega_g \quad (3.127) \end{aligned}$$

3.5.3 Equação Integral de um Ponto sobre o Contorno Externo

Neste item será tratado o caso em que o ponto está sobre o contorno externo da placa, porém não coincide com nenhum canto. Nesse caso, segue-se o mesmo procedimento descrito no item (3.5.2), porém desconsiderando o subdomínio Ω_2 . Desse modo, fazendo-se $D_{pa}=0$ na equação (3.127), obtém-se a equação de Q sobre o contorno externo:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w}{\partial n}(Q) \right] + \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma_s} \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\ & + \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \left(\frac{\partial V_n^*}{\partial m}(Q, P) w(P) - \frac{\partial M_n^*}{\partial m}(Q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} \frac{\partial R_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) w_{ci}(P) + \\ & + \sum_{i=1}^{N_{c2}+N_{c1}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} \left(\frac{\partial M_{ns}^{*+}}{\partial m}(Q, P) - \frac{\partial M_{ns}^{*-}}{\partial m}(q, P) \right) w_{ci}(P) = \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) + \end{aligned}$$

$$+ \int_{\Gamma} \left(V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right] \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} \left(g(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) \right) d\Omega_g \quad (3.128)$$

3.6 EQUAÇÃO INTEGRAL DO DESLOCAMENTO PARA UM PONTO EXTERNO

Para os pontos sobre o contorno externo, deverão ser escritas duas equações (ver item 4.7). Neste trabalho, será escrita uma equação de w para o ponto sobre o contorno e outra para um ponto externo A . Ao escrever a equação (3.27) do deslocamento transversal para um ponto externo, o seu primeiro termo será nulo, devido à propriedade da função delta de Dirac, dada por (3.3), que implica em:

$$\int_{\Omega} \delta(A, P) w(P) d\Omega(P) = 0, \quad (3.129)$$

pois, sobre o domínio Ω da placa tem-se que $\delta(A, P) = 0$.

Assim, a equação integral do deslocamento para um ponto externo, é dada por:

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{j=1}^{N_s} \int_{\Gamma} \frac{D_j}{D} (w_{,n}(P) M_n^*(A, P) - w(P) V_n^*(A, P)) d\Gamma + \\ & + \sum_{i=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_i} \left(\frac{D_i - D_{pa}}{D} \right) (w_{,n}(P) M_n^*(A, P) - w(P) V_n^*(A, P)) d\Gamma - \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(A, P) w_{ci}(P) + \\ & - \sum_{i=1}^{N_{c2} + N_{c1}} \left[\frac{(D_j - D_{pa})}{D} R_c^*(A, P)_{\Omega_j} \right] w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(A, P) + \\ & + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(A, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(A, P) \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} (g(P) w^*(A, P)) d\Omega_g \quad (3.130) \end{aligned}$$

3.7 TRANSFORMAÇÃO DAS INTEGRAIS DE DOMÍNIO EM INTEGRAIS DE CONTORNO

Para a aplicação do Método dos Elementos de Contorno é conveniente transformar as integrais de domínio que aparecem nas equações (3.27), (3.67), (3.94), (3.127), (3.128) e (3.130) correspondentes às influências do carregamento distribuído na área Ω_g , em integrais

sobre o contorno Γ_g , onde o mesmo está distribuído. A fim de se obterem as relações para a transformação da integral sobre o domínio em integral de contorno, considere a figura (3.14), que representa o caso particular em que o carregamento esteja distribuído em uma região retangular Ω_g cujo contorno é definido por Γ_g .

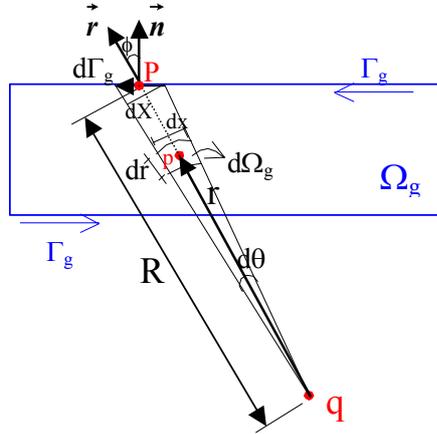


FIGURA 3.14: Integração ao Longo do Contorno da Região Carregada

onde p é um ponto qualquer do domínio Ω_g , P um ponto sobre o contorno Γ_g ; q o ponto de colocação, r a distância entre p e q e R a distância ente P e q .

Da figura (3.14) pode-se deduzir que:

$$d\Omega_g = drdx = r dr d\theta \quad (3.131.a)$$

$$d\theta = \frac{dX}{R} = \frac{\cos(\phi)d\Gamma_g}{R} = \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_g \quad (3.131.b)$$

ou seja:

$$d\Omega_g = r dr \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_g \quad (3.132)$$

Fazendo-se a mudança de coordenadas, dada por (3.132), tem-se que:

$$\int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p) = \int_{\Gamma_g} \left(\int_0^R g(p) w^*(q, p) r dr \right) \frac{r_i n_i}{R} d\Gamma_g \quad (3.133)$$

Admite-se que a carga $g(p)$ varie linearmente na região Ω_g . Com isso, a mesma é expressa por:

$$g(\mathbf{p}) = AX_1^p + BX_2^p + C \quad (3.134)$$

Porém, as coordenadas cartesianas do ponto \mathbf{p} (X_1^p e X_2^p) podem ser escritas em função de suas coordenadas cilíndricas relativas a um sistema cuja origem é o ponto \mathbf{q} (ver figura 3.5) da seguinte maneira:

$$X_i^p = X_i^q + rr_{,i} \quad i=1,2 \quad (3.135)$$

sendo $r_{,1} = \cos \theta$ e $r_{,2} = \sin \theta$.

Substituindo-se a equação (3.135) em (3.134), obtém-se a expressão de $g(\mathbf{p})$ em coordenadas cilíndricas:

$$g(\mathbf{p}) = A \cos \theta + B \sin \theta + g(\mathbf{q}) \quad (3.136)$$

onde $g(\mathbf{q}) = AX_1^q + BX_2^q + C$, é uma constante, correspondente ao valor de g no ponto \mathbf{q} .

Substituindo-se (3.136) e a expressão de $w^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, dada por (3.36), em (3.133) e fazendo-se a integração em relação à \mathbf{r} , obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} g(\mathbf{p}) w^*(\mathbf{Q}, \mathbf{p}) d\Omega_g(\mathbf{p}) &= \frac{g(\mathbf{q})}{32\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 \left(\ln R - \frac{3}{4} \right) r_{,i} n_i d\Gamma_g + \\ &+ \frac{1}{40\pi D} \int_{\Gamma_g} R^4 \left(\ln R - \frac{7}{10} \right) (A \cos \theta + B \sin \theta) r_{,i} n_i d\Gamma_g \end{aligned} \quad (3.137)$$

Seja agora a integral sobre a região carregada da equação da derivada de w . Considerando-se a expressão de $w^*_{,m}$ dada por (3.95), a expressão do carregamento (3.136), a transformação de coordenadas (equação 3.132) e fazendo-se a integração em \mathbf{r} , chega-se à:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} \left(g(\mathbf{P}) \frac{\partial w^*}{\partial m}(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \right) d\Omega_g &= -\frac{g(\mathbf{q})}{12\pi D} \int_{\Gamma_g} R^2 \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) (r_{,j} m_j) (r_{,i} n_i) d\Gamma_g + \\ &- \frac{1}{16\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 \left(\ln R - \frac{1}{4} \right) (A \cos \theta + B \sin \theta) (r_{,i} n_i) (r_{,j} m_j) d\Gamma_g \end{aligned} \quad (3.138)$$

4 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

4.1 INTRODUÇÃO

A solução exata de um problema, obtida através da solução analítica das equações integrais, está restrita a poucos casos, onde alguma simplificação é possível para se ter redução do número de graus de liberdade a um número finito. Com isso, a solução aproximada das equações integrais é obtida através de um procedimento numérico, que nesse trabalho será o Método dos Elementos de Contorno. Nesse caso, as integrais sobre o contorno e interfaces são transformadas em termos algébricos, dividindo-se o contorno externo da placa e as interfaces em segmentos, denominados elementos de contorno. As variáveis w , $\partial w/\partial n$, V_n e M_n são aproximadas nos elementos por funções interpoladoras, definidas em função de pontos previamente escolhidos em cada elemento, ditos nós ou pontos nodais. Assim, as equações integrais transformam-se em equações algébricas, que são escritas em função dos valores das variáveis nos nós do contorno e interfaces, denominados de valores nodais.

Ao longo do contorno externo da placa em sub-regiões, têm-se quatro variáveis (w , $\partial w/\partial n$, V_n e M_n), das quais duas são conhecidas, pois são dadas como condição de contorno. Logo, nesses pontos há duas incógnitas, devendo-se escrever duas equações para os mesmos. Nos cantos têm-se duas variáveis (w_c e R_c), sendo uma dada como condição de contorno. Ao longo das interfaces são definidas duas variáveis (w e $w_{,n}$), sendo que nesse caso, as duas são incógnitas. Com isso, para se obter a solução do problema, deve-se escrever duas equações para os pontos sobre o contorno externo ou sobre as interfaces e uma equação em cada canto.

Feito isso, obtém-se um sistema de equações lineares, cujas incógnitas são os deslocamentos e esforços nodais, definidos ao longo do contorno externo e interfaces, e também as incógnitas nos cantos. A solução do sistema é obtida após a imposição das condições de contorno. Conhecidos os valores das variáveis ao longo do contorno externo, das interfaces e nos cantos, pode-se obter os deslocamentos e esforços em um ponto q qualquer de domínio.

4.2 DISCRETIZAÇÃO DO CONTORNO E INTERFACES

As integrais sobre o contorno externo e interfaces são calculadas de maneira aproximada, através da discretização do contorno e interface em elementos, cuja geometria será aproximada por uma função linear, isto é, os elementos serão retos. São necessários, portanto, apenas dois nós para representar sua geometria. Porém, como se verá no item (4.3), as variáveis serão aproximadas por funções quadráticas, o que requer elementos com três nós. Assim, considere o elemento reto da figura (4.1) onde se definem três nós.

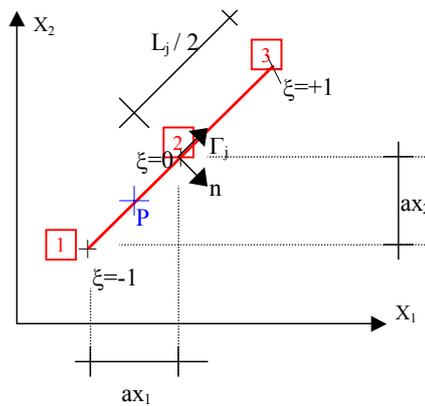


FIGURA 4.1 - Geometria do Elemento

onde ξ é a coordenada local adimensional; **1** é o nó inicial; **2** o nó do meio; **3** o nó final; L_j é o comprimento do elemento j ; $-1 \leq \xi \leq 1$; $-L_j/2 \leq \Gamma \leq L_j/2$.

Como as integrais são resolvidas numericamente, é conveniente expressar a variável Γ e as coordenadas de cada ponto P em função de coordenadas locais homogêneas ξ . Da figura (4.1), pode-se deduzir que:

$$\Gamma_j = \xi \frac{L_j}{2} \tag{4.1}$$

$$X_1^P = X_1^2 + \xi ax_1 \tag{4.2.a}$$

$$X_2^P = X_2^2 + \xi ax_2 \quad (4.2.b)$$

onde: X_i^N é a coordenada na direção i do ponto N ; $X_1^2 = (X_1^1 + X_1^3)/2$; $X_2^2 = (X_2^1 + X_2^3)/2$; $ax_2 = (X_2^3 - X_2^1)/2$; $ax_1 = (X_1^3 - X_1^1)/2$.

As equações (4.2) podem ser escritas numa só equação matricial da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} X_1^P \\ X_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{g1}(P) & \phi_{g2}(P) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{g1}(P) & \phi_{g2}(P) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1^1 \\ X_1^3 \\ X_2^1 \\ X_2^3 \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

onde $\tilde{X}^{(N)T} = \{X_1^1 \quad X_1^3 \quad X_2^1 \quad X_2^3\}$ é o vetor dos valores nodais das coordenadas e ϕ_{gi} são as funções interpoladoras lineares, que são dadas por:

$$\phi_{g1}(P) = 0.5(1 - \xi) \quad (4.4.a)$$

$$\phi_{g2}(p) = 0.5(1 + \xi) \quad (4.4.b)$$

A integral ao longo do contorno ou interface Γ , é calculada de forma aproximada, fazendo-se a discretização do trecho em N_e elementos, a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas homogêneas, que é obtida derivando-se a equação (4.1), e escrevendo-se a função a ser integrada em função de coordenadas homogêneas, ou seja:

$$\int_{\Gamma} F(\Gamma) d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{-L_j/2}^{L_j/2} F(\Gamma_j) d\Gamma_j = \sum_{j=1}^{N_e} \frac{L_j}{2} \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi \quad (4.5)$$

4.3 APROXIMAÇÃO DAS VARIÁVEIS DO PROBLEMA

Sendo as variáveis aproximadas por funções polinomiais quadráticas, são necessários três pontos nodais em cada elemento (ver figura 4.1). Maiores detalhes sobre esse assunto podem ser encontrados na dissertação de mestrado (FERNANDES 1998). Desse modo, pode-se expressar os vetores de deslocamentos $\{u\}$ e de esforços $\{p\}$ de um ponto P qualquer do elemento, da seguinte forma:

$$\tilde{u}(P) = \tilde{\phi}^T(P) \tilde{U}^N \quad (4.6)$$

$$\underset{\sim}{p}(\mathbf{P}) = \underset{\sim}{\phi}^T(\mathbf{P}) \underset{\sim}{P}^N \quad (4.7)$$

ou, explicitamente:

$$\underset{\sim}{u}(\mathbf{P}) = \begin{Bmatrix} U_1^P \\ U_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{P}) & 0 & \phi_2(\mathbf{P}) & 0 & \phi_3(\mathbf{P}) & 0 \\ 0 & \phi_1(\mathbf{P}) & 0 & \phi_2(\mathbf{P}) & 0 & \phi_3(\mathbf{P}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{ \begin{matrix} U_1^1 \\ U_2^1 \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} U_1^2 \\ U_2^2 \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} U_1^3 \\ U_2^3 \end{matrix} \right\} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

$$\underset{\sim}{P}(\mathbf{P}) = \begin{Bmatrix} P_1^P \\ P_2^P \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{P}) & 0 & \phi_2(\mathbf{P}) & 0 & \phi_3(\mathbf{P}) & 0 \\ 0 & \phi_1(\mathbf{P}) & 0 & \phi_2(\mathbf{P}) & 0 & \phi_3(\mathbf{P}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left\{ \begin{matrix} P_1^1 \\ P_2^1 \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} P_1^2 \\ P_2^2 \end{matrix} \right\} \\ \left\{ \begin{matrix} P_1^3 \\ P_2^3 \end{matrix} \right\} \end{Bmatrix} \quad (4.9)$$

onde U_i^N e P_i^N são os deslocamentos e esforços do nó N ; sendo $U_1=w$; $U_2=\partial w/\partial n$; $P_1=V_n$; $P_2=M_n$ e ϕ_i são as funções de forma quadráticas, que na forma geral, são dadas por:

$$\phi_1(\mathbf{P}) = \frac{\xi(\xi_3 - \xi)}{\xi_1(\xi_3 - \xi_1)} \quad (4.10.a)$$

$$\phi_2(\mathbf{P}) = 1 - \frac{\xi_3 + \xi_1}{\xi_1 \xi_3} \xi + \frac{1}{\xi_1 \xi_3} \xi^2 \quad (4.10.b)$$

$$\phi_3(\mathbf{P}) = \frac{\xi(\xi_1 - \xi)}{\xi_3(\xi_1 - \xi_3)} \quad (4.10.c)$$

Neste trabalho, os nós 1 e 3 serão adotados nos extremos do elemento (ver figura 4.1). Nesse caso, tem-se que $\xi_1 = -1$ e $\xi_3 = 1$ e as equações (4.10) resultam em:

$$\phi_1(\mathbf{P}) = -0.5\xi(1 - \xi) \quad (4.11.a)$$

$$\phi_2(\mathbf{P}) = 1 - \xi^2 \quad (4.11.b)$$

$$\phi_3(\mathbf{P}) = 0.5\xi(1 + \xi) \quad (4.11.c)$$

Para representar a descontinuidade das variáveis, que ocorre em situações onde há variação repentina das condições de contorno entre dois elementos consecutivos, como ocorre nos cantos, definem-se nós duplos (figura 4.2), que são dois nós definidos com as mesmas coordenadas, porém com valores nodais associados independentes. Para ser possível representar a descontinuidade, deve-se escrever duas equações independentes para o ponto descontínuo. Isso é feito, recalculando-se as coordenadas do nó duplo, de tal forma que ele se torne interno ao elemento e não mais coincidente com um nó extremo (ver figura 4.2). O elemento que possuir um nó duplo será um elemento descontínuo, isto é, não haverá continuidade das funções entre dois elementos consecutivos, como está representado na figura (4.2). O cálculo das coordenadas do nó duplo será feito a partir das equações (4.2), considerando-se $0,4 \leq |\xi| \leq 0,6$. Adotou-se esses limites para o valor de ξ , para que se tenha um afastamento conveniente entre os nós locais do elemento, a fim de evitar problemas de singularidades no sistema de equações. Como nesse caso, o ponto Q não coincide mais com um nó do elemento, deve-se escrever o deslocamento do mesmo em função dos deslocamentos nodais do elemento ao qual pertence, utilizando-se a equação (4.8).

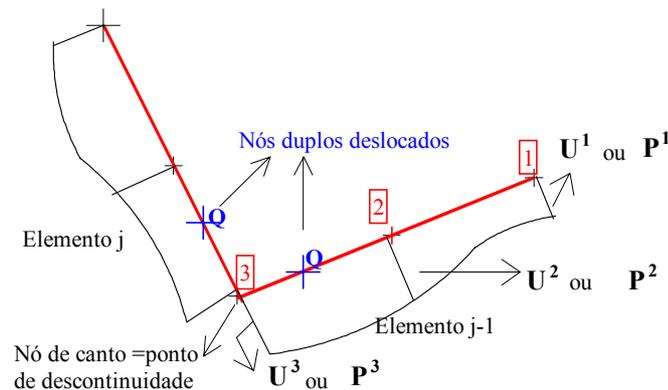


FIGURA 4.2 - Elementos Descontínuos

4.4 TRANSFORMAÇÕES DAS EQUAÇÕES INTEGRAIS EM EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

A equação integral (3.67) do deslocamento transversal w de um ponto Q do contorno ou interface, será transformada em equação algébrica, através da discretização do contorno externo e interfaces em elementos, nos quais as variáveis são aproximadas. A equação (3.67), pode ser escrita, ainda sem introduzir nenhuma aproximação, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 & K(Q)w(Q) + \sum_{j=1}^{N_s} \frac{D_j}{D} \int_{\tilde{\Gamma}} p^*(Q,P) u(P) d\Gamma(P) + \sum_{j=1}^{N_{int}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} \int_{\tilde{\Gamma}} p^*(Q,P) u(P) d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(Q,P) w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_{c1}+N_{c2}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} R_{ci}^*(Q,P) w_{ci}(P) = \int_{\tilde{\Gamma}} u^*(Q,P) p(P) d\Gamma(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega_g(p) \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

$$\text{onde: } \tilde{p}^*(Q,P) = \{V_n^*(Q,P) \quad -M_{nn}^*(Q,P)\} \quad (4.13)$$

$$\tilde{u}^*(Q,P) = \{w^*(Q,P) \quad -w_{,n}^*(Q,P)\} \quad (4.14)$$

$$\tilde{u}^T(P) = \{U_1^P \quad U_2^P\} = \{w(P) \quad w_{,n}(P)\} \quad (4.15)$$

$$\tilde{p}^T(P) = \{P_1^P \quad P_2^P\} = \{V_n(P) \quad M_n(P)\} \quad (4.16)$$

V_n^* , M_n^* , w^* e $\partial w^*/\partial n$ são dados por (3.41), (3.38), (3.36) e (3.37).

Fazendo-se a discretização do contorno externo e interfaces em N_e elementos, e substituindo-se as variáveis por suas aproximações em cada elemento, dadas por (4.6) e (4.7), a equação (4.12) é calculada de forma aproximada, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 & K(Q)w(Q) + \sum_{j=1}^{N_s} \frac{D_j}{D} \sum_{k=1}^{N_e} \left[\int_{\tilde{\Gamma}_k} p^*(Q,P) \phi^T(P) d\Gamma_k \right] U_k^N + \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(Q,P) w_{ci}(P) + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{int}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} \sum_{k=1}^{N_e} \left[\int_{\tilde{\Gamma}_k} p^*(Q,P) \phi^T(P) d\Gamma_k \right] U_k^N + \sum_{i=1}^{N_{c1}+N_{c2}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} R_{ci}^*(Q,P) w_{ci}(P) = \\
 & = \sum_{k=1}^{N_e} \left[\int_{\tilde{\Gamma}_k} u^*(Q,P) \phi^T(P) d\Gamma \right] P_k^N + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q,P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega_g(p) \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

Definindo-se:

$$\tilde{h}^k(Q) = \int_{\tilde{\Gamma}_k} p^*(Q,P) \phi^T(P) d\Gamma_k, \quad (4.18)$$

$$\tilde{g}^k(Q) = \int_{\tilde{\Gamma}_k} u^*(Q,P) \phi^T(P) d\Gamma_k \quad (4.19)$$

$$e \ t(Q) = \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q, p) d\Omega_g(p), \quad (4.20)$$

a equação (4.17) pode ser rescrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & K(Q)w(Q) + \sum_{j=1}^{N_s} \frac{D_j}{D} \sum_{k=1}^{N_c} h^k(Q) U_k^N + \sum_{j=1}^{N_{int}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} \sum_{k=1}^{N_c} h^k(Q) U_k^N + \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(Q, P) w_{ci}(P) \\ & + \sum_{i=1}^{N_{c1}+N_{c2}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} R_{cj}^*(Q, P) w_{ci}(P) = \sum_{k=1}^{N_e} g^k(Q) P_k^N + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + t(Q) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Calculando-se os vetores $\{h^k\}(Q)$ e $\{g^k\}(Q)$ de todos os elementos e agrupando-se os coeficientes referentes a um mesmo valor nodal, escreve-se a equação (4.21) matricialmente:

$$K(Q)w(Q) + \hat{H}_F(Q)U_F + \hat{H}_c(Q)w_c = G_F(Q)P_F + G_c(Q)R_c + T(Q) \quad (4.22)$$

Sendo N_{noc} o número de nós do contorno externo, N_{int} o número de nós nas interfaces, N_c o número de cantos, os vetores da equação (4.22) são dados por:

- $U_F^T = \{w^1 \quad w_{,n}^1 \quad \dots \quad w^i \quad w_{,n}^i \quad \dots \quad w^{(N_{noc}+N_{int})} \quad w_{,n}^{(N_{noc}+N_{int})}\}$ é o vetor dos valores nodais dos deslocamentos do contorno externo e das interfaces,
- $P_F^T = \{V_n^1 \quad M_n^1 \quad \dots \quad V_n^i \quad M_n^i \quad \dots \quad V_n^{N_{noc}} \quad M_n^{N_{noc}}\}$ é o vetor dos valores nodais dos esforços do contorno externo,
- $w_c^T = \{w_{c_1} \quad \dots \quad w_{c_i} \quad \dots \quad w_{c_{N_c}}\}$ é o vetor dos deslocamentos nos cantos,
- $R_c^T = \{R_{c_1} \quad \dots \quad R_{c_i} \quad \dots \quad R_{c_{N_c}}\}$ é o vetor das reações de canto,
- $\hat{H}_F(Q)$ é um vetor de dimensão $(1 \times 2*(N_{noc}+N_{int}))$, $G_F(Q)$ tem dimensão $(1 \times 2*N_{noc})$,
- $\hat{H}_c(Q)$ e $G_c(Q)$ são vetores de dimensão $(1 \times N_c)$.

Deve-se agora somar o valor da constante $K(Q)$, dado na tabela (3.1), à coluna referente ao deslocamento $w(Q)$ da matriz $\hat{H}_F(Q)$, se for um nó sobre o contorno externo ou uma interface, ou à coluna da matriz $\hat{H}_c(Q)$, se for um nó de canto. Observe, que no

caso de \mathcal{Q} ser um nó duplo, deve-se escrever $\mathbf{w}(\mathcal{Q})$ em função dos deslocamentos nodais do elemento ao qual pertence, através da equação (4.8). Nesse caso, soma-se a parcela $\mathbf{K}(\mathcal{Q})\phi_i$ ($i=1, 2, 3$) à coluna relativa ao deslocamento \mathbf{w} do nó i do elemento de \mathcal{Q} . Feito isso, pode-se escrever a equação (4.22) da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{H}_F(\mathcal{Q})\underset{\sim}{U}_F + \underset{\sim}{H}_c(\mathcal{Q})\underset{\sim}{w}_c = \underset{\sim}{G}_F(\mathcal{Q})\underset{\sim}{P}_F + \underset{\sim}{G}_c(\mathcal{Q})\underset{\sim}{R}_c + \underset{\sim}{T}(\mathcal{Q}) \quad (4.23)$$

4.5 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Esse tipo de integração é utilizado para os casos em que o ponto de carregamento ou ponto de colocação não pertence ao elemento a ser integrado. Como nos casos das equações referentes a um ponto interno \mathbf{q} ou a um ponto externo \mathbf{A} , o ponto de carregamento não pertence a nenhum elemento, as integrais poderão sempre ser feitas numericamente. O mesmo não ocorre com a equação do ponto \mathcal{Q} , sobre o contorno externo ou uma interface, onde a integração numérica somente poderá ser utilizada se o mesmo não pertencer ao elemento considerado. Adotando-se esquemas particulares de integração, as integrais poderiam ser calculadas numericamente, para o caso em que \mathcal{Q} pertença ao elemento que está sendo integrado, porém, isso não será feito nesse trabalho.

A fim de se fazer a integração numérica, é conveniente que a expressão a ser integrada seja escrita em coordenadas homogêneas. A fim de exemplificar, considere a integral (4.18). Fazendo-se a mudança de coordenadas, dada por (4.5), a integral (4.18) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{h}^k(\mathcal{Q}) = \frac{L_k}{2} \int_{-1}^1 \underset{\sim}{p}^*(\mathcal{Q}, \mathbf{P}) \underset{\sim}{\phi}^T(\mathbf{P}) d\xi \quad (4.24)$$

Note-se que a integração da expressão (4.24) resulta num vetor de dimensão (1x6), pois em cada elemento tem-se três nós e duas variáveis por nó. Considerando-se apenas um coeficiente da expressão (4.24), este é dado por:

$$\underset{\sim}{h}_j^{N(k)}(\mathcal{Q}) = \frac{L_k}{2} \int_{-1}^1 \underset{\sim}{p}_j^*(\mathcal{Q}, \mathbf{P}) \underset{\sim}{\phi}_N(\mathbf{P}) d\xi \quad (N = 1, 2, 3) \quad (j = 1, 2) \quad (4.25)$$

onde N é o nó local do elemento onde se mede a resposta da carga unitária e j indica a natureza da resposta medida em P ($p_1^* = V_n^*$, $p_2^* = M_n^*$).

A integração numérica é feita pela fórmula de quadratura de Gauss, que é dada por:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{ig=1}^{N_g} f(\xi_{ig}) W_{ig} \quad (4.26)$$

onde $f(\xi)$ é a função a ser integrada, escrita em relação à coordenada ξ ; N_g é o número de pontos de integração; ξ_{ig} é a coordenada adimensional do ponto ig de integração, definida em função do N_g , e W_{ig} é o fator ponderador, também definido em função de N_g .

A equação (4.25) é calculada, utilizando-se a fórmula (4.26), da seguinte forma:

$$h_j^{N(k)}(Q) = \frac{L_k}{2} \sum_{ig=1}^{N_g} p_j^*(Q, \xi_{ig}) \phi_N(\xi_{ig}) W_{ig} \quad (4.27)$$

O número N_g de pontos de integração deve ser escolhido em função da distância entre o ponto Q de carregamento e o elemento a ser integrado, o comprimento do elemento e a função a ser integrada (GIL RODRIGUEZ, 1986), considerando-se, ainda, a precisão que se pretende alcançar.

O procedimento descrito para se obter a equação (4.27) pode ser aplicado a qualquer outra integral sobre o contorno externo ou interface apresentada nesse trabalho, inclusive àquelas sobre o contorno da região carregada. Note-se que no caso da integral sobre a região carregada, os valores obtidos com a integração numérica podem ser exatos, já que não se faz nenhum tipo de aproximação nas integrais. No caso do contorno Γ_g do carregamento coincidir com o contorno da placa, em uma determinada região, pode ocorrer de se ter o ponto de carregamento Q pertencente ao segmento a ser integrado. Neste caso, porém, as integrais são nulas, uma vez que o produto escalar $r_i \cdot n_i$ é nulo, para qualquer ponto do segmento.

A fim de se aumentar a precisão do cálculo, será utilizada a técnica de sub-elementos, que está descrita com maiores detalhes no trabalho de FERNANDES (1998). Essa técnica consiste em dividir o elemento em sub-elementos, quando a distância entre o ponto de colocação e o ponto médio do elemento for menor que o seu comprimento. A subdivisão é feita de modo que essa situação nunca ocorra, como está mostrado na figura (4.3), onde rs é a distância de Q ao nó inicial do sub-elemento, a_i é o comprimento do sub-

elemento i , L_j é o comprimento do elemento j e φ é o ângulo entre rs e o elemento j . O comprimento do sub-elemento i é dado por $a_i = rs/2 \cos \varphi$ se $\varphi \leq 60^\circ$ ou por $a_i = rs$ se $\varphi > 60^\circ$ (ver figura 4.3). O número de pontos de Gauss usado na integração de cada sub-elemento será dado por: $N_g=8$ se $rs \leq 2a_i$; $N_g=4$ se $2a_i < rs \leq 12a_i$; $N_g=2$ se $rs > 12a_i$.

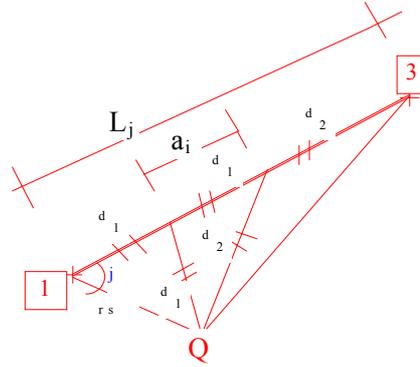


FIGURA 4.3 - Divisão de um Elemento em Sub-elementos

O sub-elemento terá um sistema de coordenadas homogêneas equivalente àquele utilizado para o elemento (ver figura 4.1), onde a coordenada adimensional será dada por η . Deve-se observar, que as funções de forma ϕ_N (equação 4.27) são expressas em função da coordenada adimensional ξ relativa ao elemento. Porém, a coordenada adimensional utilizada na integração η_{ig} é relativa ao sub-elemento. Assim, a fim de se obter a coordenada ξ_{ig} do ponto de Gauss, calculam-se as coordenadas cartesianas do mesmo, a partir das coordenadas cartesianas dos nós do sub-elemento e de η_{ig} , como indica a equação (4.2). Então, a partir das coordenadas cartesianas do ponto de Gauss, determina-se a coordenada ξ_{ig} através de uma das equações (4.2), porém considerando-se agora as coordenadas cartesianas dos nós do elemento. Com ξ_{ig} determina-se o valor das funções de forma ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 , dadas pelas equações (4.11) e finalmente faz-se o cálculo do integrando. Logo, a integração numérica, considerando-se a técnica de sub-elementos, é feita do seguinte modo:

$$\int_{-L_j/2}^{L_j/2} F d\Gamma_j = \frac{L_j}{2} \int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^{N_{sub}} \frac{a_i}{2} \int_{-1}^1 F(\xi) d\eta = \sum_{i=1}^{N_{sub}} \frac{a_i}{2} \sum_{ig=1}^{N_g} (F(\xi))_{ig} W_{ig} \quad (4.28)$$

sendo N_{sub} o número de sub-elementos.

Assim, a equação (4.27) é calculada da seguinte maneira:

$$h_j^{N(k)}(Q) = \sum_{i=1}^{N_{\text{sub}}} \frac{a_i}{2} \sum_{ig=1}^{N_g} p_j^*(Q, \xi_{ig}) \phi_N(\xi_{ig}) W_{ig} \quad (4.29)$$

4.6 INTEGRAÇÃO ANALÍTICA

Quando o ponto de colocação Q pertence ao elemento a ser integrado, as funções fundamentais envolvidas nas integrações apresentam singularidades. Nesses casos, como foi visto no item (3.4), faz-se o limite $\bar{\Gamma} \rightarrow 0$ e obtém-se as integrais sobre o contorno $\Gamma - \bar{\Gamma}$ analiticamente. No caso de singularidades do tipo $1/r$, as integrais são interpretadas no sentido do valor principal de Cauchy e para singularidades do tipo $1/r^2$ elas são interpretadas no sentido do valor principal de Radamard.

Considere as integrais (4.18) e (4.19) da equação do deslocamento transversal $w(Q)$. Os coeficientes relativos a um nó N local do elemento k ao qual Q pertence, são dados por:

$$h_1^{N(k)}(Q) = \frac{L_k}{2} \int_{-1}^1 V_n^*(Q, P) \phi_N(P) d\xi(P) \quad (N = 1, 2, 3) \quad (4.30.a)$$

$$h_2^{N(k)}(Q) = -\frac{L_k}{2} \int_{-1}^1 M_n^*(Q, P) \phi_N(P) d\xi(P) \quad (4.30.b)$$

$$g_1^{N(k)}(Q) = \frac{L_k}{2} \int_{-1}^1 w^*(Q, P) \phi_N(P) d\xi(P) \quad (4.31.a)$$

$$g_2^{N(k)}(Q) = -\frac{L_k}{2} \int_{-1}^1 \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \phi_N(P) d\xi(P) \quad (4.31.b)$$

Porém, no caso em que Q pertence ao elemento a ser integrado, tem-se que $r_{,i} n_i = \cos(90^\circ) = 0$, e portanto, conclui-se que as expressões de V_n^* e $\partial w^*/\partial n$, dadas respectivamente por (3.41) e (3.37), são nulas. As coordenadas do ponto singular Q são obtidas a partir das coordenadas dos nós extremos (1 e 3), utilizando-se as funções de forma ϕ_{g1} e ϕ_{g2} , como mostra a equação (4.3). Assim, substituem-se as expressões dos deslocamentos e esforços fundamentais dadas no item (3.3) e as funções aproximadoras das variáveis, dadas por (4.10), nas equações (4.30) e (4.31). Faz-se, então, a integração, considerando-se as funções ϕ_{g1} e ϕ_{g2} , dadas pelas equações (4.4), obtendo-se:

$$g_2^N(Q) = h_1^N(Q) = 0 \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}
 h_2^N(Q) = & \frac{L}{4\pi} \left\{ C_1^N (1 + \nu) [\phi_{g2s} \cdot \ln(L \cdot \phi_{g2s}) + \phi_{g1s} \cdot \ln(L \cdot \phi_{g1s}) - 1] + \right. \\
 & + C_2^N (1 + \nu) \left[(\phi_{g2s})^2 \ln(L \cdot \phi_{g2s}) - (\phi_{g1s})^2 \ln(L \cdot \phi_{g1s}) - \frac{\xi_s}{2} \right] + \\
 & + C_3^N (1 + \nu) \left[\frac{4}{3} (\phi_{g2s})^3 \ln(L \cdot \phi_{g2s}) + \frac{4}{3} (\phi_{g1s})^3 \ln(L \cdot \phi_{g1s}) - \frac{1}{9} (1 + 3\xi_s^2) \right] + \\
 & \left. + \nu \left[C_1^N + C_2^N \xi_s + \frac{C_3^N}{3} (1 + 3\xi_s^2) \right] \right\} \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g_1^N(Q) = & \frac{L^3}{8\pi D} \left\{ \frac{C_1^N}{3} \left[(\phi_{g2s})^2 \left(\ln(L \cdot \phi_{g2s}) - \frac{5}{6} \right) + (\phi_{g1s})^3 \left(\ln(L \cdot \phi_{g1s}) - \frac{5}{6} \right) \right] + \right. \\
 & + \frac{C_2^N}{2} \left[(\phi_{g2s})^4 \left(\ln(L \cdot \phi_{g2s}) - \frac{3}{4} \right) - (\phi_{g1s})^4 \left(\ln(L \cdot \phi_{g1s}) - \frac{3}{4} \right) \right] + \\
 & \left. + \frac{4 \cdot C_3^N}{5} \left[(\phi_{g2s})^5 \left(\ln(L \cdot \phi_{g2s}) - \frac{7}{10} \right) + (\phi_{g1s})^5 \left(\ln(L \cdot \phi_{g1s}) - \frac{7}{10} \right) \right] \right\} \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

onde ξ_s é a coordenada adimensional do ponto Q (ver figura 4.1), L é o comprimento do elemento, e ϕ_{g1s} e ϕ_{g2s} , são os valores das funções de forma ϕ_{g1} e ϕ_{g2} , dadas por (4.4.a) e (4.4.b), no ponto Q ; $a = L \cdot \phi_{g2s}$ é a distância entre o nó inicial e Q ; $b = L \cdot \phi_{g1s}$ é a distância entre o nó final e Q .

Nessas expressões, as constantes C_1^N, C_2^N, C_3^N são relativas aos nós locais e portanto, dependem das funções aproximadoras ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 . Estes valores podem ser escritos, genericamente, na forma:

$$C_1^N = \frac{-\xi_s^2 + (\xi_i + \xi_j)\xi_s - \xi_i \cdot \xi_j}{(\xi_i - \xi_n)(\xi_n - \xi_j)} \quad (4.35)$$

$$C_2^N = \frac{2 \cdot \xi_s - (\xi_i + \xi_j)}{(\xi_i - \xi_n)(\xi_n - \xi_j)} \quad (4.36)$$

$$C_3^N = \frac{-1}{(\xi_i - \xi_n)(\xi_n - \xi_j)} \quad (4.37)$$

onde $N, i, j = 1, 2, 3$ e $N \neq i \neq j$.

Neste trabalho, os nós 1 e 3 coincidem com as extremidades dos elementos e, portanto, têm-se $\xi_1 = -1$ e $\xi_3 = 1$. Assim, substituindo-se esses valores nas equações (4.35), (4.36) e (4.37) obtêm-se as expressões de C_1^N , C_2^N e C_3^N para esse caso particular.

4.7 SISTEMA DE EQUAÇÕES

Têm-se duas incógnitas nodais em cada ponto sobre o contorno externo ou sobre a interface. Logo, necessita-se escrever duas equações nesses pontos. Em cada canto deve-se escrever uma equação, pois há uma incógnita. Para os pontos sobre a interface será escrita uma equação do deslocamento transversal w (equação 3.67), onde a constante $K(Q)$ está definida na tabela (3.1), e outra da derivada direcional de w (equação 3.127). Para os pontos sobre o contorno externo poderia escrever também uma equação de w_m , porém optou-se por escreverem-se duas equações de w , uma para o ponto Q sobre o contorno e outra para um ponto A externo (equação 3.130), como está representado na figura (4.4). No caso dos pontos sobre o contorno externo, poderia ainda, escrever duas equações de w em dois pontos externos, como está descrito no trabalho de dissertação de mestrado da autora desse trabalho (FERNANDES (1998)), mas essa opção também não será considerada. Finalmente, nos cantos será escrita uma equação de w .

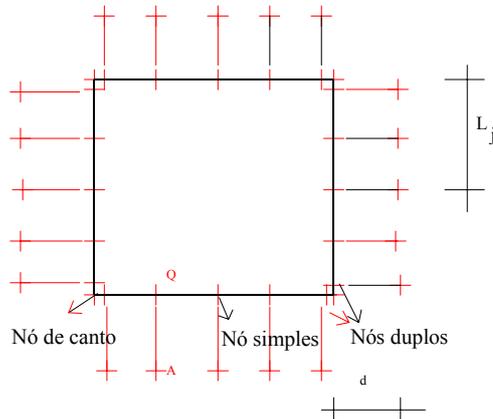


FIGURA 4.4 - Pontos de Colocação

Na figura (4.4) L_j o comprimento do elemento j ; d a distância do ponto externo A ao ponto Q sobre o contorno, que é dada por:

$$d_i = a_i L_m \tag{4.38}$$

onde L_m é a média dos comprimentos dos elementos concorrentes no nó, ou, se o nó for interno ao elemento, é igual ao comprimento do mesmo; $0.0001 \leq a_i \leq 1.5$; valores de a_i menores que o limite inferior, podem acarretar problemas de singularidades e valores maiores que o limite superior, geram resultados com baixa precisão.

No caso dos nós sobre o contorno externo, tem-se dois pontos de colocação, e para cada nó de canto ou interface, tem-se apenas um. Note-se que em cada canto são definidos três pontos nodais (2 nós duplos e um nó de canto), o que resulta em 5 pontos de colocação, como está indicado na figura (4.4).

A equação (4.23), referente ao deslocamento transversal w de um ponto Q , pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} H_F(Q) & H_c(Q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_F \\ w_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_F(Q) & G_c(Q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_F \\ R_c \end{Bmatrix} + T(Q) \quad (4.39)$$

Escrevendo-se todas as equações necessárias para a solução do problema, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} H_F & H_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_F \\ w_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_F & G_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_F \\ R_c \end{Bmatrix} + T \quad (4.40)$$

onde as dimensões das matrizes $[H_F]$ e $[G_F]$ são, respectivamente: $(2*(N_{noc}+N_{nint})+N_c \times 2*(N_{noc}+N_{nint}))$ e $(2*(N_{noc}+N_{nint})+N_c \times 2*N_{noc})$ e as matrizes $[H_c]$ e $[G_c]$ têm dimensão $(2*(N_{noc}+N_{nint})+N_c \times N_c)$; $\{T\}$ é um vetor de dimensão $(2*(N_{noc}+N_{nint})+N_c \times 1)$.

Escrevendo-se a equação (4.40) de uma maneira simplificada, pode-se dizer que:

$$H U = G P + T \quad (4.41)$$

onde as dimensões das matrizes $[H]$ e $[G]$ são, respectivamente: $(2*(N_{noc}+N_{nint})+N_c \times 2*(N_{noc}+N_{nint})+N_c)$ e $(2*(N_{noc}+N_{nint})+N_c \times 2*N_{noc}+N_c)$; os vetores $\{U\}$ e $\{P\}$, têm, respectivamente, dimensões $(2*(N_{noc}+N_{nint})+N_c \times 1)$ e $(2*N_{noc}+N_c \times 1)$.

Após a imposição das condições de contorno, o sistema (4.41) pode ser resolvido. Proceda-se da seguinte maneira: isolam-se todas as incógnitas no vetor U , trocando-se as respectivas colunas das matrizes H e G . Com isso, essas últimas se transformam,

respectivamente, em A e \bar{G} , e os vetores U e P se tornam, respectivamente, X e \bar{P} , sendo X o vetor que contém as incógnitas do problema e \bar{P} aquele que traz os valores prescritos. Então, faz-se a multiplicação da matriz \bar{G} com o vetor \bar{P} e soma-se a esse último o vetor T . Assim, obtém-se um sistema da forma:

$$\underset{\sim}{A} \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{B} \tag{4.42}$$

onde: X é o vetor solução, composto pelos deslocamentos e esforços incógnitos nos nós do contorno externo, interfaces e cantos da placa e $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{\bar{G}} \underset{\sim}{\bar{P}} + \underset{\sim}{T}$.

4.8 PROPRIEDADES DA MATRIZ H

Através de configurações particulares de equilíbrio de uma placa, que são obtidas aplicando-se movimentos de corpo rígido às equações de flexão (3.67, 3.127 e 3.130), chega-se a propriedades da matriz H (equação 4.41), que são utilizadas para verificação da mesma. A fim de se estabelecer tais propriedades, admitir-se-á para todas as configurações de equilíbrio obtidas a seguir, que o carregamento em quaisquer direções seja nulo. Portanto, os vetores dos esforços nodais P , assim como aquele relativo ao carregamento T , que aparecem na equação (4.41) são nulos, podendo-se escrever, então, que:

$$[H]\{U\} = \{0\} \tag{4.43}$$

onde $\{0\}$ é um vetor nulo.

Aplicar-se-á inicialmente à equação (4.43) um deslocamento transversal w_0 de corpo rígido (ver figura 4.5). Nesse caso, os vetores de deslocamento $\{U\}_F$ e $\{U\}_C$, definidos na equação (4.40), resultam em:

$$\{U\}_F^T = \{w_0 \quad 0 \quad w_0 \quad 0 \quad \dots \quad \dots \quad w_0 \quad 0\} \tag{4.44}$$

$$\{w\}_C^T = \left\{ w_0 \quad w_0 \quad w_0 \quad \dots \quad w_0 \right\} \tag{4.45}$$

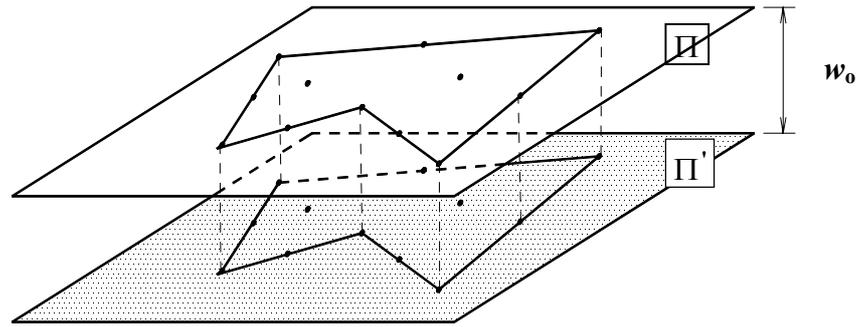


FIGURA 4.5 – Movimento de Corpo Rígido – Translação

Substituindo-se (4.44) e (4.45) em (4.43), obtém-se para uma determinada linha i do sistema de equações:

$$\sum_{j=1}^{N_t} h_{i,2j-1} w_0 + \sum_{j=2*N_t+1}^{2*N_t+N_c} h_{i,j} w_0 = 0 \quad 1 \leq i \leq 2N_t + N_c \quad (4.46)$$

sendo $N_t = N_{noc} + N_{nint}$.

Porém, como w_0 é uma constante, a equação (4.46) pode ser escrita como:

$$\sum_{j=1}^{N_t} h_{i,2j-1} + \sum_{j=2*N_t+1}^{2*N_t+N_c} h_{i,j} = 0 \quad 1 \leq i \leq 2N_t + N_c \quad (4.47)$$

A equação (4.47) representa a propriedade da matriz H , relativa ao movimento de corpo rígido na direção do deslocamento transversal w . Note-se que também se pode obter uma propriedade para o vetor $H(q)$ da equação (3.27) de deslocamento transversal de um ponto interno q . Fazendo-se $w(q)=w_0$ chega-se à:

$$\sum_{j=1}^{N_t} h_{q,2j-1} + \sum_{j=2*N_t+1}^{2*N_t+N_c} h_{q,j} = -1 \quad (4.48)$$

Para a equação (3.94) da rotação no ponto q , considerando-se que $w_{,m}(q)=0$, tem-se:

$$\sum_{j=1}^{N_t} h_{q,2j-1} + \sum_{j=2*N_t+1}^{2*N_t+N_c} h_{q,j} = 0 \quad (4.49)$$

Seja agora uma rotação de corpo rígido ϕ (ver figura 4.6), no sentido indicado pelo eixo arbitrário \vec{e} . Nesse caso, tem-se que o deslocamento w de um ponto j é dado por:

$$w_j = \text{sen}(\phi)R_j \quad (4.50)$$

sendo R_j a distância entre o nó j e o eixo de rotação (ver figura 4.6).

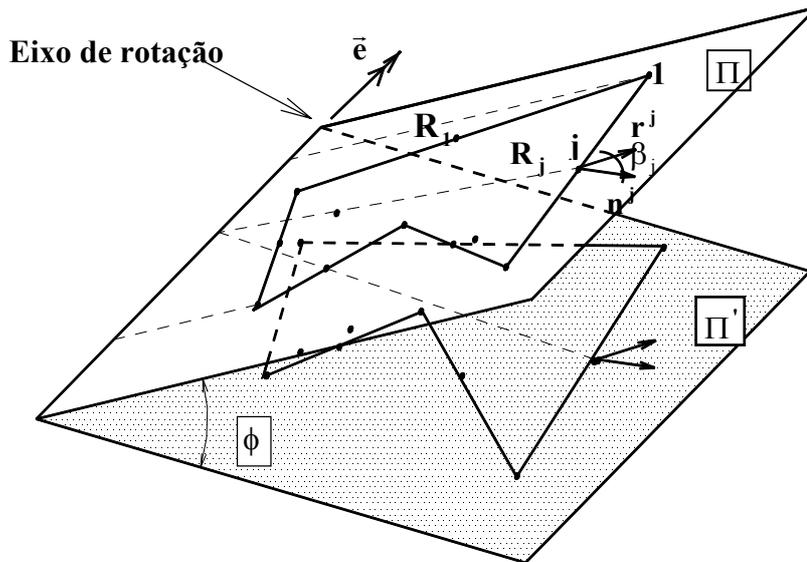


FIGURA 4.6 – Movimento de Corpo Rígido – Rotação.

Na figura (4.6) n^i e r^i indicam, respectivamente, as direções da normal ao contorno e de r no nó j .

Derivando-se a equação (4.50), tem-se que a rotação $\partial w / \partial n$ de um ponto j é igual a:

$$(\partial w / \partial n)_j = \text{sen} \phi (\partial r / \partial n)_j \quad (4.51)$$

onde $(\partial r / \partial n)_j = (r_i n_i)_j = \cos \beta_j$, sendo β_j indicado na figura (4.6) e $i=1,2$.

Nesse caso, os vetores de deslocamentos $\{U\}_F$ e $\{U\}_C$ resultam em:

$$\{U\}_F^T = \text{sen} \phi \{R_1 \cos \beta_1 \dots R_j \cos \beta_j \dots R_{N_t} \cos \beta_{N_t}\} \quad (4.52)$$

$$\{w\}_C^T = \text{sen} \phi \left\{ R_{c1} \quad R_{c2} \quad R_{c3} \quad \dots \quad R_{cN_c} \right\} \quad (4.53)$$

Substituindo-se (4.53) e (4.54) em (4.43), chega-se a outra propriedade, referente a uma rotação de corpo rígido em torno do eixo \vec{e} :

$$\text{sen } \alpha \left[\sum_{j=1}^{N_t} (h_{i,2j-1} R_j + h_{i,2j} \cos \beta_j) + \sum_{j=1}^{N_c} h_{i,2N_t+j} R_j \right] = 0 \quad 1 \leq i \leq 2N_t + N_c \quad (4.54)$$

ou ainda:

$$\left[\sum_{j=1}^{N_t} (h_{i,2j-1} R_j + h_{i,2j} \cos \beta_j) + \sum_{j=1}^{N_c} h_{i,2N_t+j} R_j \right] = 0 \quad 1 \leq i \leq 2N_t + N_c \quad (4.55)$$

No caso da equação do deslocamento transversal de um ponto interno q , chega-se à:

$$\left[\sum_{j=1}^{N_t} (h_{q,2j-1} R_j + h_{q,2j} \cos \beta_j) + \sum_{j=1}^{N_c} h_{q,2N_t+j} R_j \right] = -R_q \quad (4.56)$$

Para a equação de $w_m(q)$, obtém-se:

$$\left[\sum_{j=1}^{N_t} (h_{q,2j-1} R_j + h_{q,2j} \cos \beta_j) + \sum_{j=1}^{N_c} h_{q,2N_t+j} R_j \right] = -(r_i \ m_i)_q \quad (4.57)$$

4.9 DESLOCAMENTOS E ESFORÇOS PARA PONTOS INTERNOS

Após a determinação dos deslocamentos e forças de superfície ao longo do contorno externo da placa e das interfaces, pode-se calcular deslocamentos e esforços para os pontos do seu interior. O deslocamento transversal $w(q)$ de um ponto interno é dado pela equação (3.27) e a derivada direcional de w pela equação (3.94). Essas duas equações podem ser transformadas em equações algébricas, da mesma forma que foi feito para se obter a equação (4.23). Escrevendo-se as equações (3.27) e (3.94) para N_i pontos internos, obtém-se a seguinte equação matricial:

$$\underset{\sim}{U}(q) + \underset{\sim}{H}_F(q) \underset{\sim}{U}_F + \underset{\sim}{H}_c(q) \underset{\sim}{w}_c = \underset{\sim}{G}_F(q) \underset{\sim}{P}_F + \underset{\sim}{G}_c(q) \underset{\sim}{R}_c + \underset{\sim}{T}(q) \quad (4.58)$$

onde o vetor $\{U\}(q)$ contém os valores dos deslocamentos w , $w_{,1}$ e $w_{,2}$ dos pontos internos e tem dimensão $(3*N_i \times 1)$; os vetores $\{U\}_F$, $\{w_{,j}\}$, $\{P\}_F$ e $\{R_{,j}\}$ são os vetores de deslocamentos e esforços dos nós do contorno externo, interfaces e cantos, já calculados; a matriz $[H_F](q)$ tem dimensão $(3*N_i \times 2N_t)$; a matriz $[G_F](q)$ dimensão $(3*N_i \times 2N_{noc})$; as matrizes $[H_C](q)$ e $[G_C](q)$, têm dimensões $(3*N_i \times N_c)$; o vetor $\{T\}(q)$ tem dimensão $(3*N_i \times 1)$.

O cálculo dos momentos m_{ij} para um ponto interno é feito a partir da equação (2.9), na qual as curvaturas $w_{,ij}$ são obtidas derivando-se o deslocamento $w(q)$, equação (3.27), em relação às direções x_1 e x_2 . Assim, a equação integral das curvaturas, na forma matricial e ainda sem introduzir nenhuma aproximação, é dada por:

$$\begin{aligned} w_{,ij} \sim(q) + \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma_s} p^*(q, P) u(P) d\Gamma(P) + \sum_{s=1}^{N_{int}} \frac{(D_s - D_{pa})}{D} \int_{\Gamma_s} p^*(q, P) u(P) d\Gamma(P) + \\ + \sum_{k=1}^{N_{c1}+N_{c2}} \frac{(D_k - D_{pa})}{D} p_{ck}^*(q, P) w_{ck}(P) + \sum_{k=1}^{N_{c2}} \frac{D_k}{D} p_{ck}^*(q, P) w_{ck}(P) = \\ = \int_{\Gamma} u^*(q, P) p(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) u_{ci}^*(q, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w_g^*(q, p) d\Omega_g(p) \quad i,j=1,2 \quad (4.59) \end{aligned}$$

$$\text{onde: } w_{,ij} \sim^T(q) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 w(q)}{\partial x_2 \partial x_2} \end{array} \right\} \quad (4.60)$$

$$p^*(q, P) \sim = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) & - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) \\ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, P) & - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, P) \\ \frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_2 \partial x_2}(q, P) & - \frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_2 \partial x_2}(q, P) \end{array} \right] \quad (4.61)$$

$$p_{ck}^* \sim^T(q, P) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 R_{ck}^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) & \frac{\partial^2 R_{ck}^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, P) & \frac{\partial^2 R_{ck}^*}{\partial x_2 \partial x_2}(q, P) \end{array} \right\} \quad (4.62)$$

$$u^*(q, P) \sim = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) & - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial n} (q, P) \right) \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2}(q, P) & - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial n} (q, P) \right) \\ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2 \partial x_2}(q, P) & - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial n} (q, P) \right) \end{array} \right] \quad (4.63)$$

$$\underset{\sim}{u}_{ck}^{*\Gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \left\{ \frac{\partial^2 w_{ck}^*}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \quad \frac{\partial^2 w_{ck}^*}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \quad \frac{\partial^2 w_{ck}^*}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \right\} \quad (4.64)$$

$$\underset{\sim}{w}_g^{*\Gamma}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \left\{ \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \quad \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \quad \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2 \partial x_2}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \right\} \quad (4.65)$$

e as derivadas dos deslocamentos e esforços fundamentais estão indicadas no item (3.3).

Após a discretização do contorno e a aproximação das variáveis, as curvaturas em N_i pontos internos são calculadas, de forma aproximada, através da equação matricial:

$$\underset{\sim}{w}_{,ij}(\mathbf{q}) + \left[\underset{\sim}{H}'_F(\mathbf{q}) \quad \underset{\sim}{H}'_c(\mathbf{q}) \right] \left\{ \begin{matrix} \underset{\sim}{U}_F \\ \underset{\sim}{w}_c \end{matrix} \right\} = \left[\underset{\sim}{G}'_F(\mathbf{q}) \quad \underset{\sim}{G}'_c(\mathbf{q}) \right] \left\{ \begin{matrix} \underset{\sim}{P}_F \\ \underset{\sim}{R}_c \end{matrix} \right\} + \underset{\sim}{T}'(\mathbf{q}) \quad (4.66)$$

onde $\{\underset{\sim}{w}_{,ij}(\mathbf{q})\}$ é o vetor que contém as curvaturas nos pontos internos, de dimensão $(3 \cdot N_i \times 1)$; as matrizes $[\underset{\sim}{H}'_F]$ e $[\underset{\sim}{G}'_F]$ têm, respectivamente, dimensões $(3N_i \times 2N_i)$ e $(3N_i \times 2N_{noc})$ e $[\underset{\sim}{H}'_c]$ e $[\underset{\sim}{G}'_c]$ têm dimensões $(3N_i \times N_c)$.

Os momentos elásticos, nos pontos internos, são obtidos, substituindo-se os valores de $\{\underset{\sim}{w}_{,ij}(\mathbf{q})\}$, dados por (4.66), na equação (2.9). Assim, pode-se escrever a equação dos momentos elásticos, em N_i pontos internos, da seguinte maneira:

$$\underset{\sim}{m}_{ij}^e = - \left[\underset{\sim}{H}''_F \quad \underset{\sim}{H}''_c \right] \left\{ \begin{matrix} \underset{\sim}{U}_F \\ \underset{\sim}{w}_c \end{matrix} \right\} + \left[\underset{\sim}{G}''_F \quad \underset{\sim}{G}''_c \right] \left\{ \begin{matrix} \underset{\sim}{P}_F \\ \underset{\sim}{R}_c \end{matrix} \right\} + \underset{\sim}{T}'' \quad (4.67)$$

Ou de uma forma mais simplificada:

$$\{\underset{\sim}{m}^e\} = -[\underset{\sim}{H}'']\{\underset{\sim}{U}\} + [\underset{\sim}{G}'']\{\underset{\sim}{P}\} + \{\underset{\sim}{T}''\} \quad (4.68)$$

onde $[\underset{\sim}{H}'']$ e $[\underset{\sim}{G}'']$ têm, respectivamente, dimensão $3N_i \times (2N_i + N_c)$ e $3N_i \times (2N_{noc} + N_c)$.

Considerando-se a equação (2.9), os coeficientes de $[\underset{\sim}{H}'']$ de um ponto interno I são calculados do seguinte modo:

$$H''(3I - 2, k) = -D[v(H'(3I - 2, k) + H'(3I, k)) + (1 - v)H'(3I - 2, k)]$$

$$H''(3I - 1, k) = -D[(1 - v)H'(3I - 1, k)]$$

$$H''(3I, k) = -D[v(H'(3I - 2, k) + H'(3I, k)) + (1 - v)H'(3I, k)]$$

sendo os coeficientes de $[H^j]$ dados pela equação (4.66) e k é uma coluna qualquer de $[H^j]$; os coeficientes de $[G^j]$ são obtidos de maneira análoga.

A força cortante q_j é calculada a partir da equação (2.14), onde o valor de $w_{,kkj}$, é obtido derivando-se a equação (3.27) que representa o deslocamento transversal $w(q)$. Com isso, sua representação integral, ainda sem nenhuma aproximação, é dada por:

$$\begin{aligned} w_{,kkj}(\underline{q}) + \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma_s} p^*(\underline{q}, P) u(P) d\Gamma(P) + \sum_{s=1}^{N_{int}} \frac{(D_s - D_{pa})}{D} \int_{\Gamma_s} p^*(\underline{q}, P) u(P) d\Gamma(P) + \\ + \sum_{i=1}^{N_{e2}+N_{c1}} \frac{(D_i - D_{pa})}{D} p_{ci}^*(\underline{q}, P) w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_e} \frac{D_i}{D} p_{ci}^*(\underline{q}, P) w_{ci}(P) = \\ = \int_{\Gamma} u^*(\underline{q}, P) p(P) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_e} R_{ci}(P) u_{ci}^*(\underline{q}, P) + \int_{\Omega_g} g(p) w_g^*(\underline{q}, p) d\Omega_g(p) \quad k, j=1,2 \quad (4.69) \end{aligned}$$

onde:
$$w_{,kkj}^T(\underline{q}) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 w(\underline{q})}{\partial x_k \partial x_k} \right) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 w(\underline{q})}{\partial x_k \partial x_k} \right) \right\} \quad (4.70)$$

$$p^*(\underline{q}, P) = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(\underline{q}, P) \right) \quad - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(\underline{q}, P) \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 V_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(\underline{q}, P) \right) \quad - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 M_n^*}{\partial x_k \partial x_k}(\underline{q}, P) \right) \end{array} \right] \quad (4.71)$$

$$p_{ci}^{*T}(\underline{q}, P) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 R_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_k}(\underline{q}, P) \right) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 R_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_k}(\underline{q}, P) \right) \right\} \quad (4.72)$$

$$u_{ci}^{*T}(\underline{q}, P) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 w_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_k}(\underline{q}, P) \right) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 w_{ci}^*}{\partial x_k \partial x_k}(\underline{q}, P) \right) \right\} \quad (4.73)$$

$$u_g^*(\underline{q}, P) = \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_k}(\underline{q}, P) \right) \quad - \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial n}(\underline{q}, P) \right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_k}(\underline{q}, P) \right) \quad - \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial n}(\underline{q}, P) \right) \right) \end{array} \right] \quad (4.74)$$

$$w_g^{*T}(\underline{q}, P) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_k}(\underline{q}, P) \right) \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_k \partial x_k}(\underline{q}, P) \right) \right\} \quad (4.75)$$

e as derivadas dos deslocamentos e esforços fundamentais estão definidas no item (3.3).

Discretizando-se o contorno externo e interfaces e aproximando-se as variáveis, os valores de $w_{,kkj}$ em N_i pontos internos são obtidos, de forma aproximada, a partir de:

$$\underset{\sim}{w}_{,kkj}(\mathbf{q}) + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{H}}'_F(\mathbf{q}) & \overline{\mathbf{H}}'_c(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{U}_F \\ \underset{\sim}{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{G}}'_F(\mathbf{q}) & \overline{\mathbf{G}}'_c(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underset{\sim}{P}_F \\ \underset{\sim}{R}_c \end{Bmatrix} + \overline{\mathbf{T}}'(\mathbf{q}) \quad (4.76)$$

onde as matrizes $\overline{\mathbf{H}}'_F$ e $\overline{\mathbf{G}}'_F$ têm, respectivamente, dimensões $(2N_i \times 2N_t)$ e $(2N_i \times 2N_{noc})$ e $\overline{\mathbf{H}}'_c$ e $\overline{\mathbf{G}}'_c$ têm dimensões $(2N_i \times N_c)$.

4.10 MOMENTOS (m_{ij}) NOS PONTOS DO CONTORNO

Os momentos em um ponto do contorno \mathbf{Q} serão calculados a partir dos valores de contorno já determinados utilizando-se derivadas numéricas dos deslocamentos. Portanto são escritos em função dos valores nodais de deslocamentos e forças de superfície do elemento ao qual pertence. As equações integrais de momentos e forças cortantes, que são hipersingulares, poderiam ser deduzidas como se pode ver em FRANGI (1999). A escolha da diferenciação numérica é para facilitar a solução e não restringir o cálculo a nós que preservam continuidades de valores de contorno.

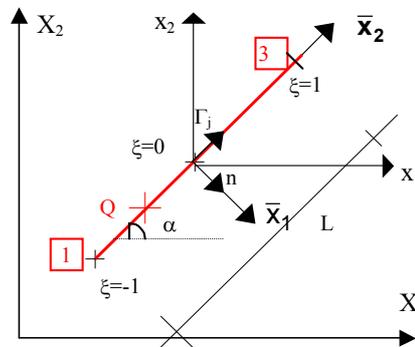


FIGURA 4.7 - Sistema Local de Coordenadas de um Elemento do Contorno

Seja o sistema local de coordenadas (\bar{x}_1, \bar{x}_2) de um elemento qualquer do contorno, dado pela figura (4.7). Deve-se determinar as componentes locais dos momentos $\overline{\mathbf{M}}_{11}(\mathbf{Q})$, $\overline{\mathbf{M}}_{12}(\mathbf{Q})$ e $\overline{\mathbf{M}}_{22}(\mathbf{Q})$ em função dos deslocamentos e forças de superfície nodais do elemento ao qual \mathbf{Q} pertence, e então, através de uma transformação do sistema de coordenadas, obterem-se os momentos no sistema global (X_1, X_2) . Os valores nodais de $\mathbf{M}_n = \overline{\mathbf{M}}_{11}$ já foram calculados através da solução do sistema de equações (4.41). A partir da equação (2.9), obtém-se $\overline{\mathbf{M}}_{12}$ em função da curvatura $\overline{w}_{,12}$:

$$\bar{M}_{12} = -D(1-\nu)\bar{w}_{,12} \quad (4.77)$$

Deve-se, então, obter a expressão de $\partial^2 \mathbf{w} / \partial \bar{\mathbf{x}}_1 \partial \bar{\mathbf{x}}_2$ em função dos deslocamentos nodais do elemento ao qual \mathbf{Q} pertence. Sabe-se que a rotação na direção normal $\partial \mathbf{w} / \partial \mathbf{n}$ é aproximada por uma função quadrática sobre o elemento T_j (ver equação 4.8), ou seja:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \bar{\mathbf{x}}_1}(\mathbf{Q}) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{Q}) = \{\phi_1(\mathbf{Q}) \quad \phi_2(\mathbf{Q}) \quad \phi_3(\mathbf{Q})\} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{,n}^1 \\ \mathbf{w}_{,n}^2 \\ \mathbf{w}_{,n}^3 \end{Bmatrix} \quad (4.78)$$

Derivando-se a equação (4.78) em relação à $\bar{\mathbf{x}}_2$ e considerando-se a transformação de coordenadas, obtida derivando-se a equação (4.1), tem-se que:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial \bar{\mathbf{x}}_1 \partial \bar{\mathbf{x}}_2}(\mathbf{Q}) = \frac{2}{L} \left\{ \frac{\partial \phi_1(\mathbf{Q})}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \phi_2(\mathbf{Q})}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \phi_3(\mathbf{Q})}{\partial \xi} \right\} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{,n}^1 \\ \mathbf{w}_{,n}^2 \\ \mathbf{w}_{,n}^3 \end{Bmatrix} \quad (4.79)$$

Calculando-se as derivadas das funções aproximadoras dadas em (4.10) substituindo-as em (4.79) e considerando-se a equação (4.77), chega-se à expressão :

$$\bar{M}_{12} = -\frac{2D(1-\nu)}{L} \left[\frac{(\xi_3 - 2\xi)}{\xi_1(\xi_3 - \xi_1)} \frac{\partial \mathbf{w}^1}{\partial \mathbf{n}} + \frac{(2\xi - \xi_1 - \xi_3)}{\xi_1 \xi_3} \frac{\partial \mathbf{w}^2}{\partial \mathbf{n}} + \frac{(\xi_1 - 2\xi)}{\xi_3(\xi_1 - \xi_3)} \frac{\partial \mathbf{w}^3}{\partial \mathbf{n}} \right] \quad (4.80)$$

onde: ξ_1 e ξ_3 são as coordenadas homogêneas dos nós 1 e 3, respectivamente (ver figura 4.7), sendo que nesse trabalho, adota-se $\xi_1 = -1$ e $\xi_3 = 1$; ξ é a coordenada adimensional do ponto \mathbf{Q} .

Seja agora a expressão de \bar{M}_{22} obtida também a partir de (2.9):

$$\bar{M}_{22} = -D(\nu \bar{w}_{,11} + \bar{w}_{,22}) \quad (4.81)$$

onde a curvatura $\partial^2 \mathbf{w} / \partial \bar{\mathbf{x}}_1^2$, pode ser escrita em função de \mathbf{M}_n e de $\partial^2 \mathbf{w} / \partial \bar{\mathbf{x}}_2^2$, utilizando-se a seguinte expressão (também obtida a partir da equação 2.9):

$$\bar{M}_{11} = M_n = -D(\bar{w}_{,11} + \nu \bar{w}_{,22}) \quad (4.82)$$

A partir da equação (4.82), chega-se à:

$$\bar{w}_{,11} = -M_n / D - \nu \bar{w}_{,22} \quad (4.83)$$

Substituindo-se (4.83) em (4.81), essa resulta em:

$$\bar{M}_{22} = -D(1 - \nu^2) \bar{w}_{,22} + \nu M_n \quad (4.84)$$

Deve-se agora determinar a expressão de $\bar{w}_{,22}$ em função dos deslocamentos nodais. Como foi visto no item (4.3), o deslocamento w é aproximado por uma função quadrática sobre o elemento F_j . Derivando-se duas vezes a expressão de w , em relação à \bar{x}_2 e fazendo-se a transformação de coordenadas, obtida derivando-se a equação (4.1), tem-se:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{x}_2^2}(\mathbf{Q}) = \frac{4}{L^2} \left(\frac{\partial^2 \phi_1(\mathbf{Q})}{\partial \xi^2} w^1 + \frac{\partial^2 \phi_2(\mathbf{Q})}{\partial \xi^2} w^2 + \frac{\partial^2 \phi_3(\mathbf{Q})}{\partial \xi^2} w^3 \right) \quad (4.85)$$

Calculando-se as derivadas das funções aproximadoras, obtém-se a expressão final de $\partial^2 w / \partial \bar{x}_2^2$, chegando-se à equação:

$$\bar{M}_{22} = \frac{D(1 - \nu^2)}{L^2} \left[\frac{8}{\xi_1(\xi_3 - \xi_1)} w^1 - \frac{8}{\xi_1 \xi_3} w^2 + \frac{8}{\xi_3(\xi_1 - \xi_3)} w^3 \right] + \nu M_n \quad (4.86)$$

A transformação de coordenadas do sistema local (\bar{x}_1, \bar{x}_2) (ver figura 4.7) para o sistema local (x_1, x_2) , associado aos eixos de referência do sistema global (X_1, X_2) , e, vice-versa, são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen } \alpha & \text{cos } \alpha \\ -\text{cos } \alpha & \text{sen } \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{Bmatrix} \quad (4.87)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{sen } \alpha & -\text{cos } \alpha \\ \text{cos } \alpha & \text{sen } \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (4.88)$$

Considerando-se as equações (4.87) e (4.88), obtém-se a transformação do vetor de momentos no sistema local (\bar{x}_1, \bar{x}_2) para o sistema global (X_1, X_2) , que é dada por:

$$\begin{Bmatrix} M_{11} \\ M_{12} \\ M_{22} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin^2 \alpha & 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos^2 \alpha & -2 \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{M}_{11} \\ \bar{M}_{12} \\ \bar{M}_{22} \end{Bmatrix} \quad (4.89)$$

Fazendo-se $\mathbf{M}_n = \bar{\mathbf{M}}_{11}$ e substituindo-se os valores de $\bar{\mathbf{M}}_{12}$ e $\bar{\mathbf{M}}_{22}$, dados por (4.80) e (4.86), respectivamente, na equação (4.89) obtêm-se os momentos no ponto \mathbf{Q} em função dos deslocamentos e esforços nodais do elemento \mathbf{j} ao qual pertence, ou seja:

$$\{\mathbf{M}\}_{\mathbf{Q}} = [\mathbf{h}]_{\mathbf{j}} \{\mathbf{U}\}_{\mathbf{j}} + [\mathbf{g}]_{\mathbf{j}} \{\mathbf{P}\}_{\mathbf{j}} \quad (4.90)$$

onde as matrizes \mathbf{h} e \mathbf{g} têm dimensões (3×6) e \mathbf{U} e \mathbf{P} são vetores de dimensão (6×1) , que trazem os valores nodais dos deslocamentos e forças de superfície do elemento \mathbf{j} em questão.

Após acoplar todos os elementos que compõe o contorno, chega-se à equação matricial de momentos para N_{noc} pontos do contorno, que é dada por:

$$\tilde{\mathbf{M}} + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_F''(\mathbf{q}) & \mathbf{H}_c''(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_F \\ \tilde{\mathbf{w}}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_F''(\mathbf{q}) & \mathbf{G}_c''(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_F \\ \tilde{\mathbf{R}}_c \end{Bmatrix} + \tilde{\mathbf{T}}''(\mathbf{q}) \quad (4.91)$$

onde as matrizes $[\mathbf{H}_F'']$ e $[\mathbf{G}_F'']$ têm, respectivamente, dimensões $(3N_{noc} \times 2N_t)$ e $(3N_{noc} \times 2N_{noc})$; $[\mathbf{H}_c'']$ e $[\mathbf{G}_c'']$, têm dimensões $(3N_{noc} \times N_c)$, mas são matrizes nulas.

Na montagem destas matrizes para os nós comuns a dois elementos distintos, adota-se a média entre os coeficientes relativos a cada um dos elementos.

4.11 EXEMPLOS NUMÉRICOS

A seguir serão apresentados quatro exemplos numéricos, sendo que dois deles serão comparados com resultados obtidos através de outros dois modelos numéricos (PAIVA (1987) e SANCHES (2003)). Nos outros dois exemplos se fará um estudo de convergência dos resultados.

No modelo de PAIVA (1987), a análise do pavimento é feita através de um acoplamento do MEC com o MEF e no modelo de SANCHES (2003) o pavimento é analisado utilizando-se apenas o MEF. Esperam-se diferenças entre os resultados obtidos com esses modelos e aqueles resultantes da formulação desenvolvida aqui, devido a alguns fatores. No modelo apresentado aqui não se pode definir diferentes coeficientes de Poisson para as lajes e vigas, as condições de contorno são impostas na face externa da viga e não na lateral da placa, como é o caso dos outros dois modelos e além disso, nesses últimos a viga não tem dimensões. No modelo de Paiva a viga é considerada como uma soma de rigidez à placa e no método dos elementos finitos ela é representada por uma barra o que faz com que o vão da laje seja maior, pois ele é computado de eixo a eixo das vigas. No trabalho tratado aqui, consideram-se as verdadeiras dimensões dos elementos; não se desprezam as dimensões da viga na geometria de cada elemento estrutural.

A fim de comparar os resultados calculam-se as diferenças dos valores em relação à malha mais refinada.

4.11.1 Placa Quadrada Enrijecida com Duas Vigas

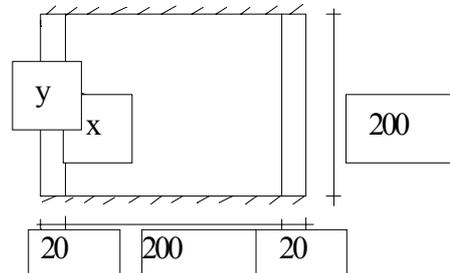


FIGURA 4.8: Placa Enrijecida com Duas Vigas

Nesse exemplo tem-se uma placa, enrijecida com duas vigas, sendo os dois lados externos longitudinais das vigas livres e os outros dois apoiados. A definição das dimensões utilizada, em cm, está indicada na figura (4.8). O carregamento prescrito para a análise dessa placa é dado por $q=100N/cm^2$ uniformemente distribuído em todo domínio. Foi adotado um coeficiente de Poisson $\nu=0,3$ para a placa e as vigas. O módulo de elasticidade admitido para essa análise foi de $E=3000kN/cm^2$. Escolheu-se ainda a espessura t_L da laje igual a $6cm$, enquanto diferentes alturas foram utilizadas para a viga, a fim de se fazer uma análise do comportamento do conjunto.

No trabalho de PAIVA (1987), tem-se o exemplo apresentado aqui, onde as vigas têm momento de inércia $I_v = 6a(D_L / E_v)$, sendo D_L a rigidez da placa, E_v módulo de

elasticidade da viga e $a=200\text{cm}$ no caso do exemplo da figura (4.8). Porém, no caso da formulação apresentada aqui, não se podem definir diferentes coeficientes de Poisson ou módulos de elasticidade para as vigas e lajes, essas podem ter apenas espessuras diferentes. Assim, a fim de comparar os resultados apresentados por PAIVA (1987) com aqueles obtidos através da formulação desenvolvida no capítulo 3, adotou-se t_v (altura da viga) de tal modo que $b_v D_v = 6a D_L$, sendo b_v a largura da viga. Considerando-se que no caso da figura (4.8) $b_v = 20\text{cm}$, obteve-se $t_v = 23,5\text{cm}$. O contorno externo da placa foi discretizado em 36 elementos com 80 nós e as interfaces com as vigas em 16 elementos com 34 nós, resultando em 114 nós e 52 elementos (ver figura 4.9). Deve-se notar, que no trabalho de PAIVA (1987), é apresentada a solução exata do problema, obtida a partir da solução de uma série. Contudo, devido às diferenças entre os modelos, citadas na introdução, essa solução em série representa a solução exata para o modelo desenvolvido por Paiva, mas não para a formulação desenvolvida nesse trabalho.

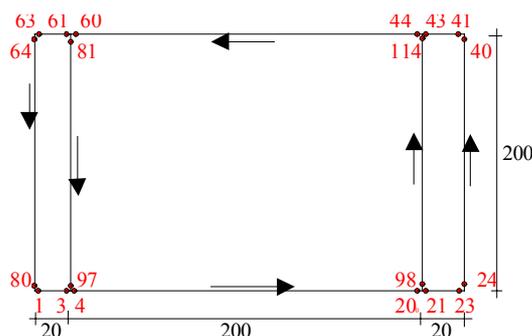


FIGURA 4.9 - Discretização do Contorno Externo e Interfaces

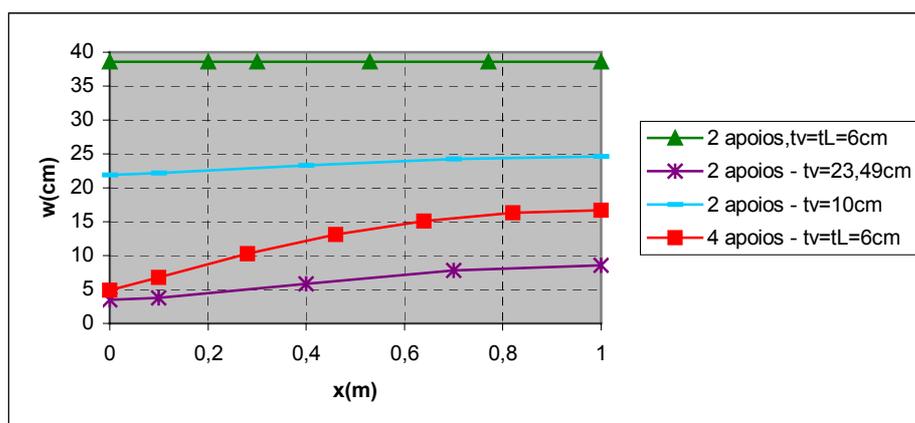


FIGURA 4.10 - Deslocamentos na Linha Média da Placa

Foram feitas várias análises variando-se a rigidez das vigas laterais para observar-se o comportamento do conjunto e do esquema numérico proposto. Na figura (4.10) são

apresentados os resultados obtidos para os deslocamentos na linha média da placa, ao longo do eixo x da figura (4.8), para os diversos valores da rigidez das vigas. São apresentados desde resultados obtidos com valores de rigidez igual à da placa, para representar o caso sem viga, até o caso de uma viga muito rígida ($t_v=23,5cm$) para simular um engaste. Nesse gráfico têm-se ainda os resultados obtidos considerando-se os quatro lados da placa enrijecida apoiados. Os resultados apresentados em termos de deslocamentos confirmam a precisão esperada para o modelo mecânico. Deve-se observar que os resultados apresentados considerando-se t constante foram obtidos adotando-se $\nu=0$ para a placa e vigas.

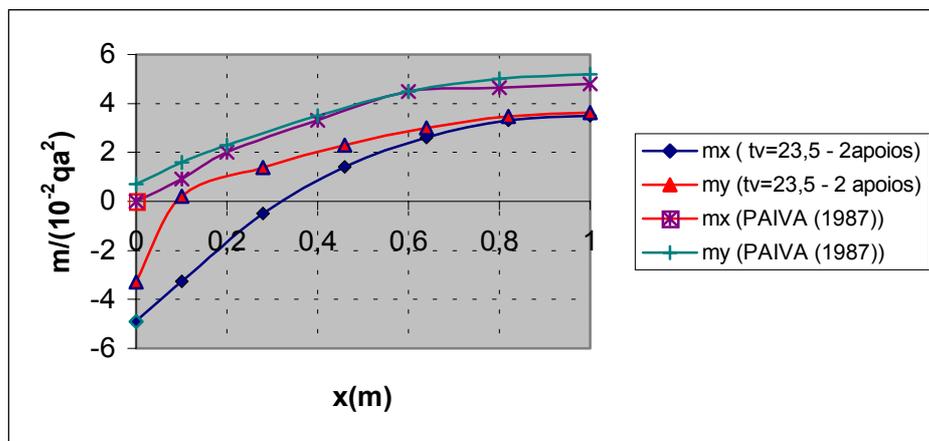


FIGURA 4.11 -Momentos na Linha Média da Placa.

Nas figuras (4.11) e (4.12), apresentam-se os resultados obtidos ao longo do eixo x (ver figura 4.8), para o caso das vigas com altura igual a $t=23,50cm$. Na figura (4.11) têm-se os valores dos momentos e na figura (4.12) os de deslocamentos, onde se faz uma comparação com os resultados obtidos por PAIVA (1987).

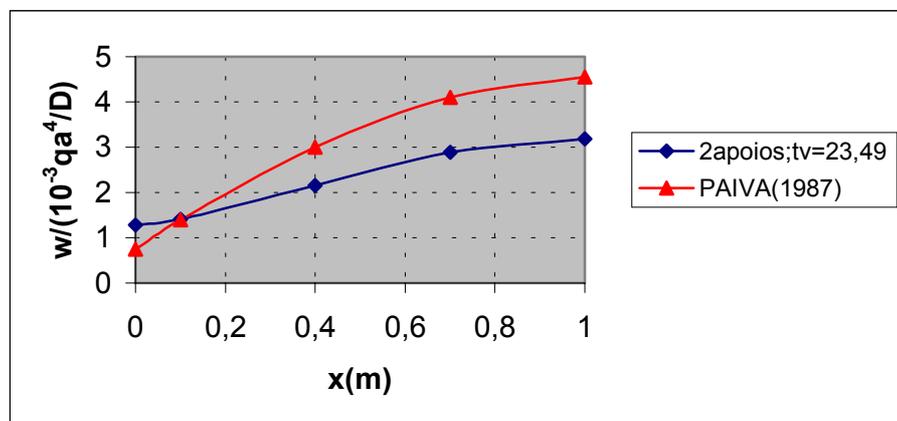


FIGURA 4.12 – Deslocamentos na Linha Média da Placa

Como se pode observar, houve diferenças significativas nos resultados obtidos com a formulação apresentada aqui com aqueles apresentados por PAIVA (1987). Porém, essas diferenças já eram esperadas, devido aos fatores já citados na introdução.

A placa também é analisada para o caso de se terem dois lados paralelos engastados e os outros dois enrijecidos pelas vigas. Todos os dados da primeira análise se repetem. Novamente são dados os resultados de deslocamentos na figura (4.13) e de momentos para $t_v=23,49\text{cm}$ na figura (4.14) para pontos ao longo da linha média da placa. Deve-se notar que na figura (4.13) foi considerado também o caso em que os quatro lados da placa enrijecida são engastados. O comportamento do conjunto estrutural também é o esperado, permitindo-se a reprodução da placa sem o enrijecimento lateral e com vigas muito rígidas para simular o engaste.

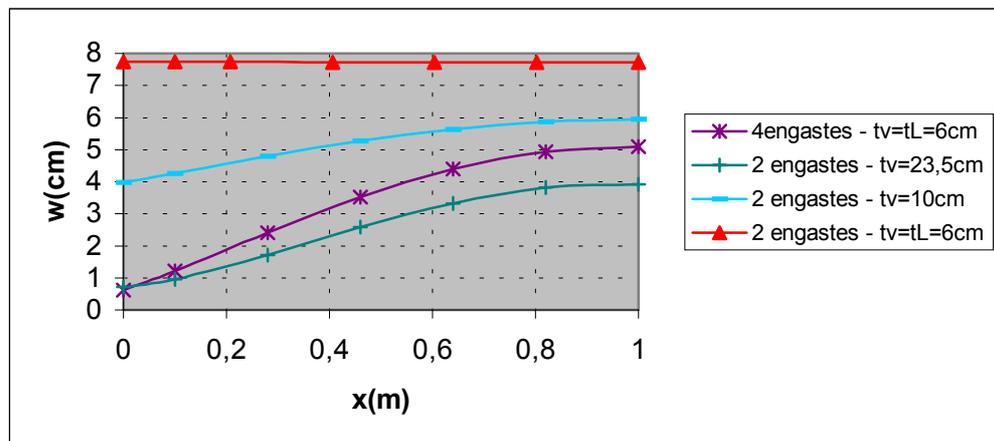


FIGURA 4.13 - Deslocamentos na Linha Média da Placa

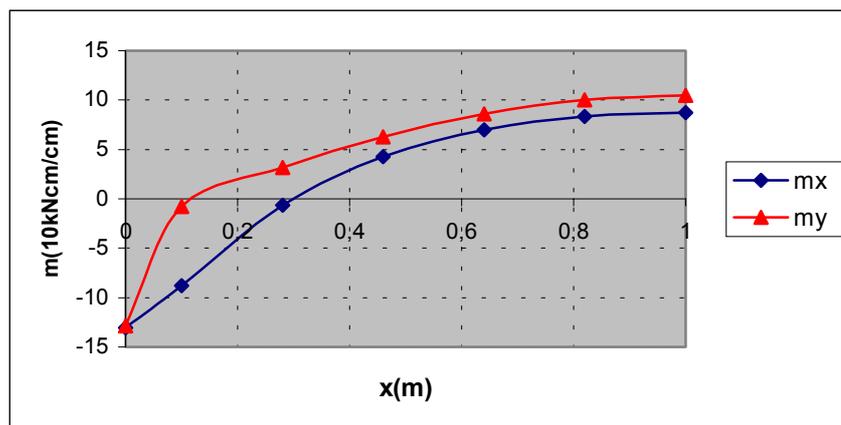


FIGURA 4.14: Momentos na Linha Média da Placa

4.11.2 Placa enrijecida com quatro vigas externas e uma viga interna

Nesse exemplo analisa-se o caso de um pavimento simples, contendo uma viga interna e vigas de contorno (ver figura 4.15) e cujas dimensões estão dadas em *m*. Foram considerados dois lados livres e os outros dois apoiados. Para as lajes foram adotados: espessura $t_L=8\text{cm}$, módulo de elasticidade $E=25000000\text{kN/m}^2$, coeficiente de Poisson $\nu=0,25$. Para as vigas, adotaram-se o mesmo módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson, porém espessura $t_V=30\text{cm}$. Foram prescritos momentos iguais a $M_x=1000\text{kNxm/m}$, mas com sinais contrários, ao longo dos lados apoiados.

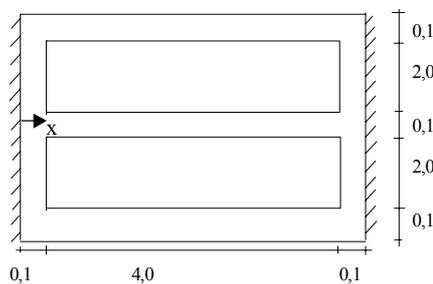


FIGURA 4.15 - Placa Enrijecida com Vigas Externas e uma Viga Interna

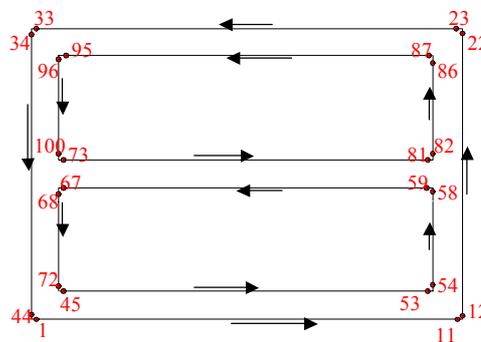


FIGURA 4.16 – Discretização

A análise foi realizada considerando-se duas discretizações e além disso, compararam-se esses resultados com aqueles obtidos através de um programa em elementos finitos desenvolvido por SANCHES (2003), cuja tese de doutorado está em andamento. Nesse programa empregam-se elementos de viga de Timoshenko (com consideração da deformação por esforço cortante) e elementos de placa DST, sendo o cálculo também feito considerando-se flexão simples. A discretização em que se leva em conta menos elementos é aquela apresentada na figura (4.16), onde foram adotados 44 nós e 20 elementos ao longo do contorno externo da placa e 56 nós com 24 elementos nas interfaces, resultando em um total de 44 elementos e 100 nós. A outra discretização foi obtida a partir dessa última,

aumentando-se quatro elementos em cada lado do contorno externo e das interfaces de maior comprimento e dois elementos nas interfaces menores, resultando em uma malha de 84 elementos.

Os deslocamentos na linha média da placa (eixo x da figura 4.15), estão na figura (4.17) e os momentos na direção x na figura (4.18). A diferença nos valores dos deslocamentos obtidos com as malhas de 44 e 84 elementos não foi grande, com uma diferença relativa de 2,2 % nos valores dos deslocamentos maiores. No centro da placa o deslocamento é nulo, como era esperado. Conforme pode ser observado, a diferença nos deslocamentos obtidos com o método dos elementos finitos não foi muito grande.

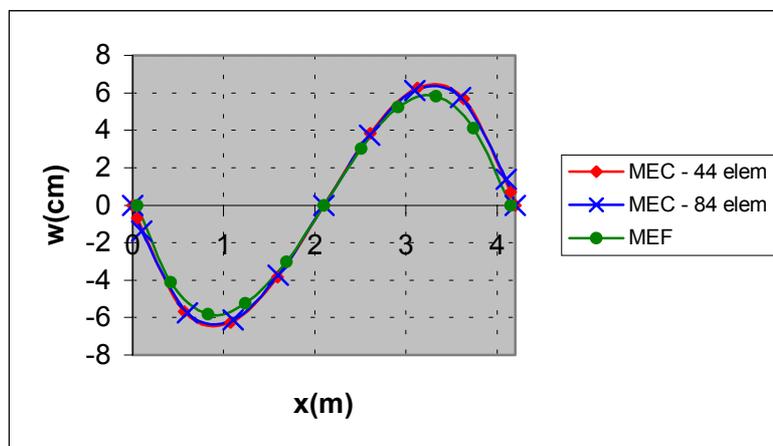


FIGURA 4.17 - Deslocamentos na Linha Média da Placa

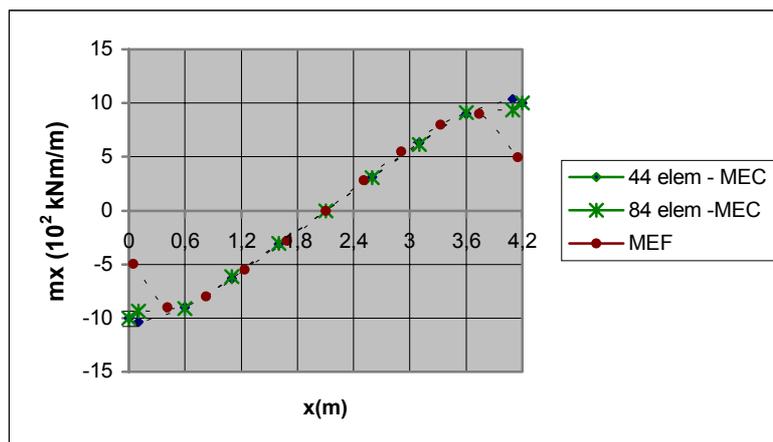


FIGURA 4.18: Momentos na Direção x na Linha Média da Placa

Os momentos na direção x obtidos com as malhas de 44 e 84 elementos e também aqueles obtidos com método dos elementos finitos foram muito próximos, tendo apenas diferença nos 50 cm iniciais e finais da viga. Para $x=10\text{cm}$ a diferença relativa entre as malhas de 44 e 84 elementos foi de 11,4%.

4.11.3 Placa enrijecida com três vigas

A alturas das lajes e vigas da figura (4.19) são dadas, respectivamente, por: $t_L = 8\text{cm}$; $t_V = 25\text{cm}$. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson, são dados por: $E=3000000\text{kN/m}^2$ e $\nu=0,16$. Os lados correspondentes às vigas V_1 e V_3 são livres e os outros dois apoiados. Como carregamento, têm-se momentos $M_x = 10\text{kNm/m}$, de mesmo sinal, aplicados ao longo dos lados apoiados.

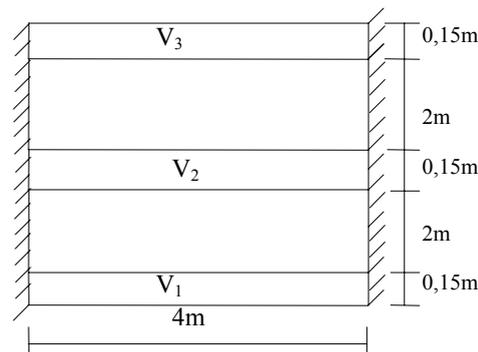


FIGURA 4.19 – Placa Enrijecida com três Vigas

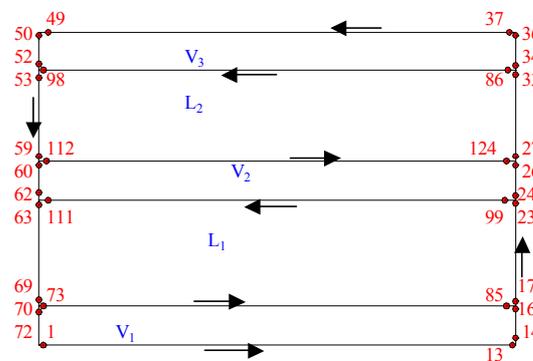


FIGURA 4.20 – Discretização da Placa

Nesse exemplo será feito um estudo da convergência dos resultados em função da discretização. Na figura (4.20) tem-se uma das discretizações utilizadas para a análise, onde se têm 124 nós e 54 elementos. A partir dessa discretização, foram analisadas mais duas, que são obtidas acrescentando-se, a cada refinamento da malha, quatro elementos nos lados de 4m e dois nos lados de 2m (ver figura 4.19), resultando em malhas de 86 e 118 elementos.

Nas figuras (4.21) e (4.22) têm-se, respectivamente, os deslocamentos e momentos na direção x obtidos para a linha média da viga V_2 com as diferentes discretizações. Devido à simetria dos resultados serão apresentados os valores apenas até o meio da viga. Os

deslocamentos referentes à malha mais refinada foram praticamente iguais àqueles da discretização de 86 elementos, com uma diferença relativa de 0,44% entre os deslocamentos máximos. Essa diferença foi de 4,6% para os valores obtidos com as malhas de 54 e 118 elementos.

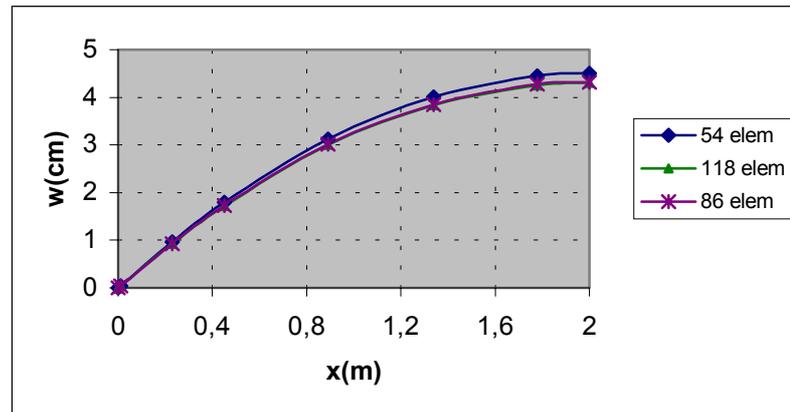


FIGURA 4.21 - Deslocamentos na Linha Média da Viga V_2

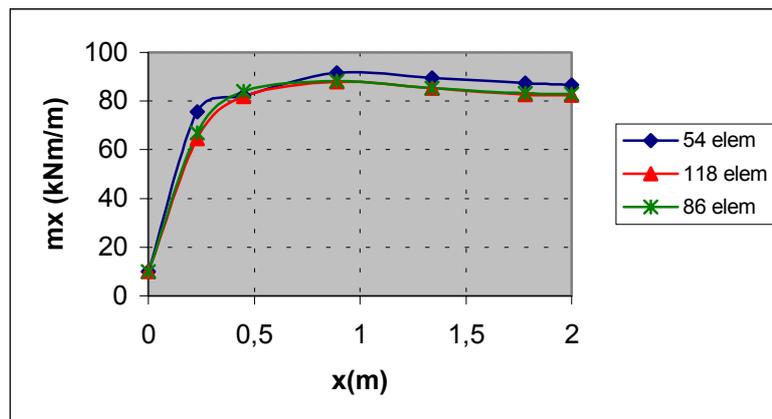


FIGURA 4.22 - Momentos na Direção x na Linha Média da Viga V_2

Como se pode observar nas figuras (4.21) e (4.22), tem-se convergência dos resultados, à medida que se refina a malha. No centro da viga ($x=2m$) a diferença relativa no valor de m_x foi de 5,2% entre as malhas de 54 e 118 elementos e de apenas 0,57% entre as malhas de 86 e 118 elementos.

4.11.4 Placa esconsa enrijecida com vigas no contorno externo e vigas internas

Nesse exemplo analisa-se um pavimento mais complexo, com a presença de vigas de diferentes rigidezes. Além disso, os lados da placa não são perpendiculares, como está

representado na figura (4.23) onde as dimensões são dadas em metro. Como condição de contorno, tem-se todo o contorno externo da placa apoiado. As alturas das lajes são todas iguais a 8 cm e as das vigas são as seguintes: $t(V_1)=t(V_2)=18\text{cm}$; $t(V_3)=t(V_8)=t(V_9)=t(V_{10})=t(V_5)=t(V_7)=25\text{cm}$; $t(V_4)=t(V_6)=30\text{cm}$. Na figura (4.24) tem-se uma das discretizações da placa que resultou em uma malha de 275 nós e 116 elementos. Deve-se observar que as vigas V_9 e V_{10} têm a mesma largura, assim como as vigas V_7 e V_8 e V_3 e V_5 . O módulo de elasticidade e o Coeficiente de Poisson utilizados nesse exemplo são dados por: $E=3000000\text{kN/m}^2$ e $\nu=0,16$. O carregamento é dado por uma carga uniformemente distribuída de 5kN/m^2 .

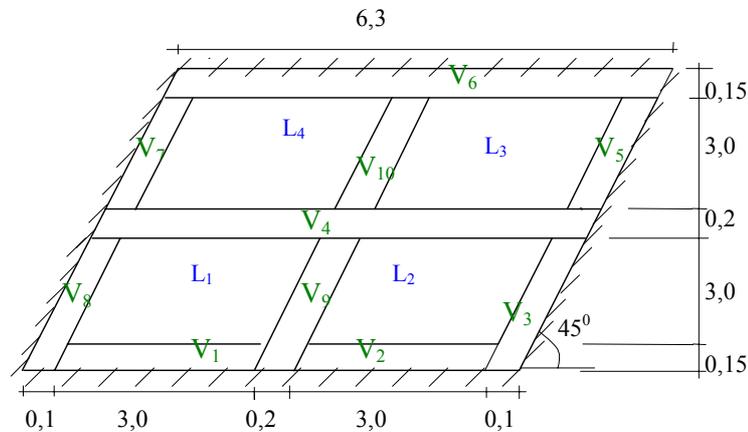


FIGURA 4.23 – Placa Esbelta Enrijecida por Vigas

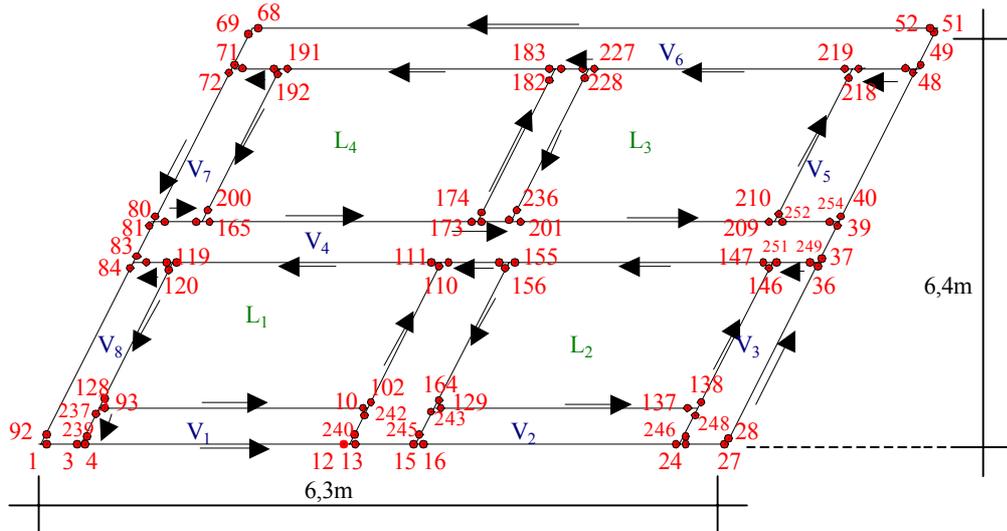


FIGURA 4.24: Discretização da Placa Esbelta

A partir da discretização apresentada na figura (4.24), se obtêm mais duas, aumentando-se, a cada refinamento, dois elementos em cada contorno externo ou interface de comprimento 3m e 4 elementos no lado maior do contorno externo de comprimento igual a 6,3m. Na figura (4.25) têm-se os deslocamentos e na figura (4.26) os momentos na direção x obtidos para a viga V_4 , onde se pode observar que as três discretizações geram resultados bem próximos.

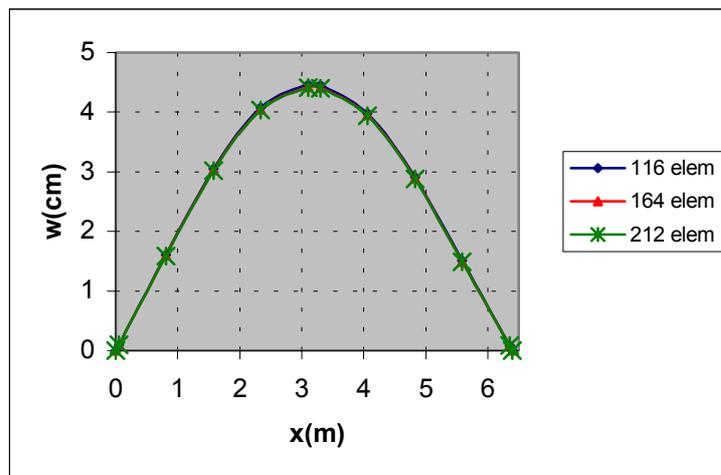


FIGURA 4.25 – Deslocamentos na Viga V_4

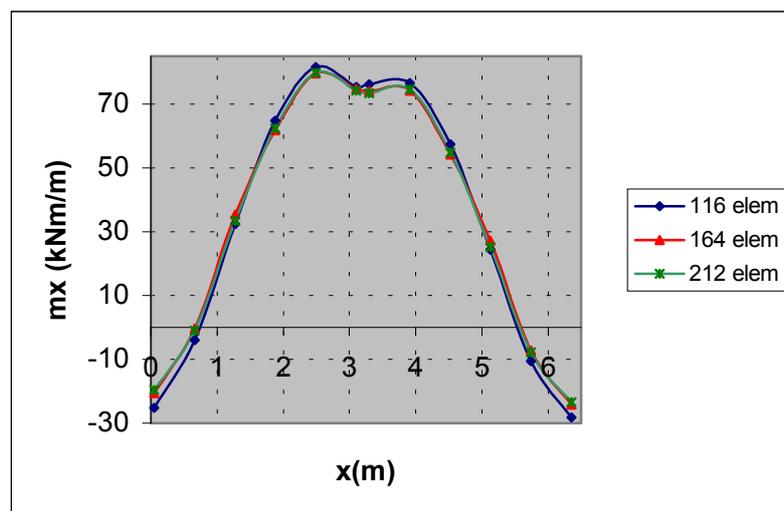


FIGURA 4.26 – Momentos na Direção x na Viga V_4

5 ANÁLISE LINEAR DO PAVIMENTO ENRIJECIDO: MODELO ALTERNATIVO

5.1 – INTRODUÇÃO

Nesse capítulo será apresentada uma outra formulação linear para o cálculo de pavimentos sujeitos à flexão simples, através do Método dos Elementos de Contorno. Tal formulação é obtida a partir daquela apresentada no capítulo 3, onde ao invés de se considerar variáveis ao longo de todo o contorno das vigas, considera-se apenas nas linhas médias das mesmas. Desse modo, comparando-a com o modelo apresentado no capítulo 3, tem-se uma redução bastante significativa do número de graus de liberdade do problema, o que aumenta consideravelmente a velocidade de cálculo, além de facilitar muito a entrada de dados. Além disso, eliminam-se possíveis casos de singularidades que poderiam surgir quando a largura da viga fosse muito pequena.

Deve-se observar que para se chegar ao modelo alternativo para análise de placas com sub-regiões descrito nesse capítulo, foram testados vários outros modelos em que as vigas eram representadas pelo seu contorno externo, outros em que as mesmas eram definidas pelo contorno interno e ainda tentou-se diminuir o número de graus de liberdade nas interseções das vigas, mas verificou-se que tal redução enrijecia consideravelmente o modelo.

As aproximações da geometria dos elementos e das variáveis são as mesmas apresentadas no capítulo 4. A obtenção das equações algébricas a partir das equações integrais, assim como as integrações numérica ou analítica sobre os elementos, também seguem o mesmo esquema detalhado no capítulo 4.

5.2 EQUAÇÕES INTEGRAIS

Seja a placa representada na figura (5.1), composta de uma viga externa e outra interna.

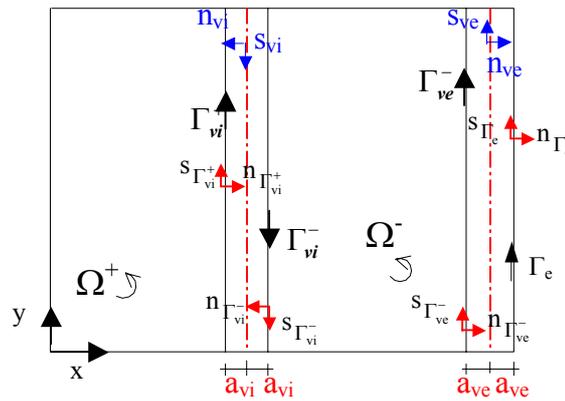


FIGURA 5.1 - Modelo de Pavimento que Representa a Viga pela sua Linha Média

onde a largura da viga interna é dada por $2a_{vi}$ e a da viga externa por $2a_{ve}$, sendo que essas larguras devem ser definidas sempre na direção da normal da viga.

Os vetores indicados nos eixos das vigas (linhas tracejadas) representam os sentidos da normal das vigas interna e externa (n_{vi} e n_{ve}), assim como os sentidos (s_{vi} e s_{ve}) em que os elementos devem ser declarados. Nas linhas contínuas estão indicados os sentidos de integração dos contornos das vigas, que acompanham sempre a orientação do contorno da laje. Note-se que no caso das vigas internas, se a mesma for definida na direção de y os elementos devem ser declarados no sentido inverso ao do eixo y e no caso dela ser definida na direção de x , esses devem seguir o sentido de x . Entretanto, para as vigas externas os elementos são declarados seguindo a orientação do contorno externo da placa. Portanto, no caso da viga externa as integrais sobre os contornos da viga são feitas no mesmo sentido da sua linha média, logo segundo as mesmas direções da normal e do contorno, isto é, $n_{ve} = n_{\Gamma_e} = n_{\Gamma_{ve}^-}$ e $s_{ve} = s_{\Gamma_e} = s_{\Gamma_{ve}^-}$. Porém, para a viga interna, a integral referente ao domínio Ω^+ é feita no sentido contrário da linha média, ou seja, $n_{vi} = -n_{\Gamma_{vi}^+} = n_{\Gamma_{vi}^-}$ e $s_{vi} = -s_{\Gamma_{vi}^+} = s_{\Gamma_{vi}^-}$.

Reescreve-se então a equação integral de deslocamento (3.27) do modelo de sub-regiões, no qual têm-se variáveis ao longo de todo o contorno da viga, à placa da figura (5.1).

A parcela da equação (3.27) relativa às integrais que envolvem os deslocamentos reais (w e $\partial w/\partial n$) é dada por:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=1}^4 \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma-\Gamma_e} \left(V_n^*(q, P)w(P) - M_n^*(q, P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_{vi}^+} \left(\frac{D^+ - D_{vi}}{D} \right) \left(V_n^*(q, P)w(P) - M_n^*(q, P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_{vi}^-} \left(\frac{D^- - D_{vi}}{D} \right) \left(V_n^*(q, P)w(P) - M_n^*(q, P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_e} \left(\frac{D_{ve}}{D} \right) \left(V_n^*(q, P)w(P) - M_n^*(q, P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_{ve}^-} \left(\frac{D^- - D_{ve}}{D} \right) \left(V_n^*(q, P)w(P) - M_n^*(q, P)\frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

sendo $D^- = D(\Omega^-)$ e $D^+ = D(\Omega^+)$, respectivamente, a rigidez à esquerda e à direita da viga (orientando-se no sentido de declaração dos elementos).

A fim de se escrever a equação anterior em função dos deslocamentos da linha média da viga, faz-se as seguintes aproximações para os deslocamentos transversais e suas rotações direcionais:

$$w_{(\Gamma_e)} = w_{(eixo)} + (w_{,n_{ve}})_{(eixo)} a_{ve} \tag{5.2.a}$$

$$w_{(\Gamma_{ve}^-)} = w_{(eixo)} - (w_{,n_{ve}})_{(eixo)} a_{ve} \tag{5.2.b}$$

$$w_{(\Gamma_{vi}^+)} = w_{(eixo)} + (w_{,n_{vi}})_{(eixo)} a_{vi} \tag{5.2.c}$$

$$w_{(\Gamma_{vi}^-)} = w_{(eixo)} - (w_{,n_{vi}})_{(eixo)} a_{vi} \tag{5.2.d}$$

$$(w_{,n_{ve}})_{eixo} = w_{,n_{\Gamma_e}} = w_{,n_{\Gamma_{ve}^-}} \tag{5.3.a}$$

$$(w_{,n_{vi}})_{eixo} = -w_{,n_{\Gamma_{vi}^+}} = w_{,n_{\Gamma_{vi}^-}} \tag{5.3.b}$$

Substituindo-se essas aproximações na equação (5.1), obtêm-se as integrais abaixo escritas em função apenas das variáveis das linhas médias das vigas:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=1}^4 \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma - \Gamma_e} \left(V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_{vi}^+} \left(\frac{D^+ - D_{vi}}{D} \right) \left(V_n^*(q, P) w_{eixo} + (V_n^*(q, P) a_{vi} + M_n^*(q, P)) \left(\frac{\partial w}{\partial n_{vi}} \right)_{eixo} \right) d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_{vi}^-} \left(\frac{D^- - D_{vi}}{D} \right) \left(V_n^*(q, P) w_{eixo} - (V_n^*(q, P) a_{vi} + M_n^*(q, P)) \left(\frac{\partial w}{\partial n_{vi}} \right)_{eixo} \right) d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_{ve}^-} \left(\frac{D^- - D_{ve}}{D} \right) \left(V_n^*(q, P) w_{eixo} - (V_n^*(q, P) a_{ve} + M_n^*(q, P)) \left(\frac{\partial w}{\partial n_{ve}} \right)_{eixo} \right) d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma_e} \left(\frac{D_{ve}}{D} \right) \left(V_n^*(q, P) w_{eixo} - (-V_n^*(q, P) a_{ve} + M_n^*(q, P)) \left(\frac{\partial w}{\partial n_{ve}} \right)_{eixo} \right) d\Gamma \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

Considerando-se o caso geral em que se tenham N_s sub-regiões, N_{ve} vigas externas e N_{vi} vigas internas, pode-se escrever a equação (5.4) na seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma_s / \text{viga}} \left(V_n^*(q, P) w(P) - M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left[\int_{\Gamma_j^+} \left(\frac{D^+ - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(q, P) w_j + (V_n^*(q, P) a_j + M_n^*(q, P)) \frac{\partial w_j}{\partial n} \right) d\Gamma + \right. \\
 & + \left. \int_{\Gamma_j^-} \left(\frac{D^- - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(q, P) w_j - (V_n^*(q, P) a_j + M_n^*(q, P)) \frac{\partial w_j}{\partial n} \right) d\Gamma \right] + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} \left(\frac{D^- - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(q, P) w_j - (V_n^*(q, P) a_j + M_n^*(q, P)) \frac{\partial w_j}{\partial n} \right) d\Gamma + \right. \\
 & + \left. \int_{\Gamma_e} \left(\frac{D_j}{D} \right) \left(V_n^*(q, P) w_j - (-V_n^*(q, P) a_j + M_n^*(q, P)) \frac{\partial w_j}{\partial n} \right) d\Gamma \right] \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

sendo w_j e $\partial w_j / \partial n$ os deslocamentos nas linhas médias das vigas.

Assim, considerando-se as equações (5.5) e (3.27), obtém-se a equação integral de deslocamento para um ponto do domínio da placa:

$$\begin{aligned}
 & w(\mathbf{q}) + \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma_s / \text{viga}} \left(V_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P}) w(\mathbf{P}) - M_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left[\int_{\Gamma_j^+} \left(\frac{D^+ - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P}) w_j + (V_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P}) a_j + M_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P})) \frac{\partial w_j}{\partial n} \right) d\Gamma + \right. \\
 & + \left. \int_{\Gamma_j^-} \left(\frac{D^- - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P}) w_j - (V_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P}) a_j + M_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P})) \frac{\partial w_j}{\partial n} \right) d\Gamma \right] + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} \left(\frac{D^- - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P}) w_j - (V_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P}) a_j + M_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P})) \frac{\partial w_j}{\partial n} \right) d\Gamma + \right. \\
 & + \left. \int_{\Gamma_c} \left(\frac{D_j}{D} \right) \left(V_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P}) w_j - (-V_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P}) a_j + M_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P})) \frac{\partial w_j}{\partial n} \right) d\Gamma \right] + \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} (M_{ns}^{*+}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) + \\
 & - M_{ns}^{*-}(\mathbf{q}, \mathbf{P}))_i w_{ci}(\mathbf{P}) + \sum_{i=1}^{N_{c2} + N_{c1}} \left[\frac{(D_j - D_{pa})}{D} (M_{ns}^{*+}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) - M_{ns}^{*-}(\mathbf{q}, \mathbf{P}))_{\Omega_j} \right] w_{ci}(\mathbf{P}) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left(V_n(\mathbf{P}) w^*(\mathbf{q}, \mathbf{P}) - M_n(\mathbf{P}) \frac{\partial w^*}{\partial n}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(\mathbf{P}) w_{ci}^*(\mathbf{q}, \mathbf{P}) + \int_{\Omega_g} \mathbf{g}(\mathbf{p}) w^*(\mathbf{Q}, \mathbf{p}) d\Omega \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

onde as expressões fundamentais são dadas por (3.36), (3.37), (3.38), (3.39) e (3.41); o contorno Γ onde se integram os deslocamentos fundamentais corresponde ao contorno externo sem vigas mais os eixos de vigas externas.

Note-se, que na equação (5.6) a integração dos esforços fundamentais é feita ao longo das interfaces e do contorno externo da placa, porém o ponto de colocação e os valores nodais estão definidos nos eixos de vigas e no contorno externo sem vigas.

A equação de deslocamento w para pontos sobre o contorno externo ou eixos de vigas é dada por:

$$\begin{aligned}
 & K(\mathbf{Q}) w(\mathbf{Q}) + \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Gamma_s / \text{viga}} \left(V_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) w(\mathbf{P}) - M_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left[\int_{\Gamma_j^+} \left(\frac{D^+ - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) w_j + (V_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) a_j + M_n^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P})) \frac{\partial w_j}{\partial n} \right) d\Gamma + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Gamma_j^-} \left(\frac{D^- - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(Q, P) w_j - (V_n^*(Q, P) a_j + M_n^*(Q, P)) \frac{\partial w_j}{\partial n} \right) d\Gamma \Bigg] + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} \left(\frac{D^- - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(Q, P) w_j - (V_n^*(Q, P) a_j + M_n^*(Q, P)) \frac{\partial w_j}{\partial n} \right) d\Gamma + \right. \\
 & + \left. \int_{\Gamma_c} \left(\frac{D_j}{D} \right) \left(V_n^*(Q, P) w_j - (-V_n^*(Q, P) a_j + M_n^*(Q, P)) \frac{\partial w_j}{\partial n} \right) d\Gamma \right] + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_{e3}} \frac{D_j}{D} (M_{ns}^{*+}(Q, P) - M_{ns}^{*-}(Q, P))_j w_{ci}(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_{e2} + N_{c1}} \left[\frac{(D_j - D_{pa})}{D} (M_{ns}^{*+}(Q, P) - M_{ns}^{*-}(Q, P))_{\Omega_j} \right] w_{ci}(P) = \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(Q, P) + \\
 & + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(Q, P) - M_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} (g(p) w^*(Q, P)) d\Omega_g \quad (5.7)
 \end{aligned}$$

Para um ponto do contorno externo sem vigas ou nos cantos da placa, a constante $K(Q)$ assume os valores indicados na tabela (3.1). Para os pontos dos eixos das vigas, como são pontos internos, tem-se $K(Q)=I$ e para um ponto externo A $K(A)=0$ (ver item 3.6).

Derivando-se a equação (5.7), em relação à direção m , definida no ponto Q (ver figura 3.5), obtém-se a equação da derivada do deslocamento transversal w :

$$\begin{aligned}
 & K_w(Q) \frac{\partial w(Q)}{\partial m} + \sum_{i=1}^{N_{sub}} \frac{D_i}{D} \int_{\Gamma_s / viga} \left(\frac{\partial V_n^*(Q, P)}{\partial m} w(P) - \frac{\partial M_n^*(Q, P)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left[\int_{\Gamma_j^+} \left(\frac{D^+ - D_j}{D} \right) \left(\frac{\partial V_n^*(Q, P)}{\partial m} w_j(P) + \left(\frac{\partial V_n^*(Q, P)}{\partial m} a_j + \frac{\partial M_n^*(Q, P)}{\partial m} \right) \frac{\partial w_j}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \right. \\
 & + \left. \int_{\Gamma_j^-} \left(\frac{D^- - D_j}{D} \right) \left(\frac{\partial V_n^*(Q, P)}{\partial m} w_j(P) - \left(\frac{\partial V_n^*(Q, P)}{\partial m} a_j + \frac{\partial M_n^*(Q, P)}{\partial m}(Q, P) \right) \frac{\partial w_j}{\partial n}(P) \right) d\Gamma \right] + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} \left(\frac{D^- - D_j}{D} \right) \left(\frac{\partial V_n^*(Q, P)}{\partial m} w_j(P) - \left(\frac{\partial V_n^*(Q, P)}{\partial m} a_j + \frac{\partial M_n^*(Q, P)}{\partial m} \right) \frac{\partial w_j}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \right. \\
 & + \left. \int_{\Gamma_c} \left(\frac{D_j}{D} \right) \left(\frac{\partial V_n^*(Q, P)}{\partial m} w_j(P) - \left(-\frac{\partial V_n^*(Q, P)}{\partial m} a_j + \frac{\partial V_n^*(Q, P)}{\partial m} \right) \frac{\partial w_j}{\partial n}(P) \right) d\Gamma \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} \left(\frac{\partial M_{ns}^{*+}(Q, P)}{\partial m} - \frac{\partial M_{ns}^{*-}(Q, P)}{\partial m} \right) w_{ci}(P) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_{c2}+N_{c1}} \left[\frac{(D_j - D_{pa})}{D} \left(\frac{\partial M_{ns}^{*+}(Q, P)}{\partial m} - \frac{\partial M_{ns}^{*-}(Q, P)}{\partial m} \right) \right] w_{ci}(P) = \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m}(Q, P) + \\
 & + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} \left(g(p) \frac{\partial w^*}{\partial m}(Q, p) \right) d\Omega_g \quad (5.8)
 \end{aligned}$$

onde as expressões fundamentais são dadas pelas equações (3.95) a (3.99) e m é a direção da normal ao contorno externo ou eixo de viga onde está definido o ponto Q .

Tabela 5.1 Valores de $K_w(Q)$ para a equação de w, m

$K_w(Q)=1$	se Q é um ponto de eixo de viga, pois é um ponto interno
$K_w(Q)=0.5$	se Q está sobre o contorno externo da placa (ver item 3.5.3).

A equação integral (5.8) será escrita para os pontos dos eixos das vigas e para aqueles gerados nos encontros de duas vigas ou nas extremidades de uma viga externa (ver item 5.3). Nesses casos, a constante $K_w(Q)$ é dada pela tabela (5.1). Como a integral que envolve os deslocamentos fundamentais é calculada sobre o eixo da viga externa, têm-se singularidades na mesma quando se escreve a equação de w ou w, m para um ponto do eixo da viga externa. Porém, nesse caso o termo livre é nulo.

Os esforços nos pontos internos ou sobre eixos de vigas são calculados a partir das curvaturas, cuja equação é obtida derivando-se a equação do deslocamento transversal (5.6), de maneira análoga ao que foi apresentado no item (4.9). Quando se escreve a equação das curvaturas para os pontos sobre eixos de vigas externas, têm-se singularidades nas integrais que envolvem os deslocamentos fundamentais, pois esses são calculados no eixo da viga e não ao longo de seu contorno. Tais singularidades serão estudadas no item (5.5). O cálculo dos momentos nos pontos sobre o contorno externo sem vigas está detalhado no item (4.10).

5.3 GERAÇÃO DOS ELEMENTOS DE EXTREMIDADE

Para exemplificar, considere a figura (5.2), onde o contorno tracejado se refere às interfaces onde se faz a integração e o contínuo à discretização da placa, onde se calculam as variáveis do problema e se definem os pontos de colocação. Nas interseções das vigas, é necessário declarar os elementos em apenas uma das direções. Quando se tem interseção de

uma viga externa com uma interna, o elemento é declarado na direção da viga externa (ver figura 5.2). Quando a interseção é entre duas vigas internas, esse é declarado na direção da viga que segue a direção de y (ver figuras 5.1 e 5.2). Os outros elementos de interseção são gerados automaticamente, se houver necessidade. Os elementos nos extremos das vigas externas (em vermelho) são gerados automaticamente e aqueles em azul (contorno mais fraco) são gerados somente se as rigidezes dos subdomínios aos quais a interface pontilhada é comum forem diferentes.

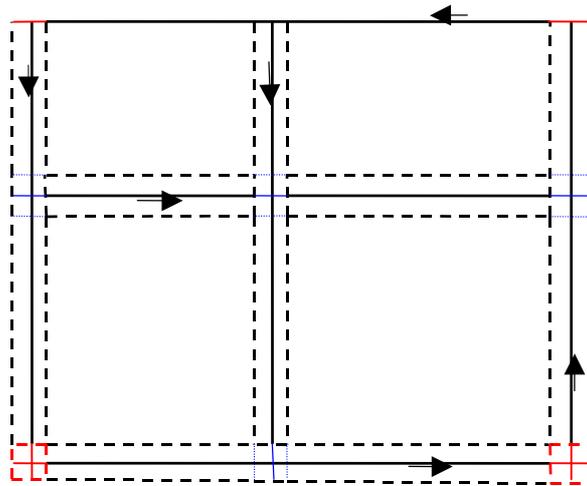


FIGURA 5.2 – Modelo de Pavimento com as vigas representadas pela linha média

Os contornos que são gerados pelo programa podem ser divididos em um ou dois elementos. Em alguns casos, a consideração de dois elementos melhora significativamente os resultados. Cada elemento gerado também tem três nós e são escritas equações para todos os pontos. Tentou-se diminuir o número de graus de liberdade na interseção das vigas, porém constatou-se que no caso de interseções de vigas externas em que as condições de contorno das duas vigas eram diferentes, essa diminuição de graus de liberdade prejudicava os resultados. Por outro lado, houve problemas de singularidade no caso de interseções de vigas externas, com condições de contorno iguais para as duas vigas, ou de vigas internas muito estreitas. A solução, nesses dois casos, seria não considerarem dois pontos de colocação para o ponto central, mas apenas um. No entanto, quando as condições de contorno das duas vigas externas fossem diferentes, mantinham-se os dois pontos de colocação, não prejudicando, com isso, os resultados.

5.4 INTEGRAÇÃO DAS INTERFACES

A integração das interfaces que separam as vigas das lajes, se dá primeiro no contorno Γ^- da figura (5.3), definido no sentido contrário à normal n_2 do eixo médio da viga. Posteriormente se faz a integração sobre o contorno Γ^+ . Deve-se observar que os contornos Γ^- e Γ^+ obedecem, respectivamente, à orientação dos contornos dos domínios Ω^- e Ω^+ . Na figura (5.3) está representado um caso de interseção de vigas em que as direções dos respectivos contornos não são perpendiculares e as larguras das vigas que interceptam a viga de direção s_2 são diferentes. Os nós 1, 2 e 3 definidos sobre o eixo da viga (contorno contínuo em preto), representam os nós inicial, do meio e final do primeiro e do último elementos de comprimento L , definidos ao longo do eixo médio da viga V_2 . Os nós 1^* , 2^* e 3^* (em vermelho) sobre as interfaces representam o elemento a ser integrado sobre os contornos Γ^- e Γ^+ . Note-se que não sendo as vigas perpendiculares, o trecho do elemento a ser integrado é diferente do seu comprimento L . O trecho de integração poderá ser menor que L , caso representado na figura (5.3) do contorno Γ^- , onde se integra apenas os trechos (1^*3^* e $1^*3'$) de linha contínua (em vermelho) ou poderá ser maior que L , como se pode ver sobre o contorno Γ^+ , onde os trechos de integração correspondem aos trechos (1^*3^* e $1^*3'$) indicados de linha contínua (trecho azul mais o vermelho). Assim, nesses casos, deve-se recalcular o início (nó $1'$) ou o final (nó $3'$) do trecho de integração, dependendo do caso, pois esses não coincidirão mais com os nós iniciais e finais do elemento.

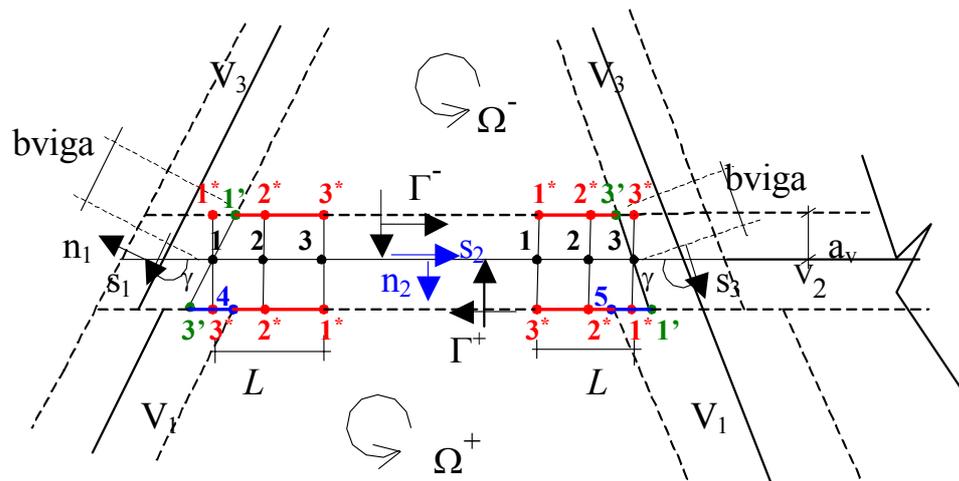


FIGURA 5.3 – Elementos nas Interseções das Vigas

Como as larguras das vigas V_1 e V_3 são diferentes, deve-se fazer a integração dos elementos sobre o contorno Γ^+ em mais de uma etapa, pois a relação de rigidez relativa ao

contorno Γ^+ , dada por $(D^+ - D_{V_2})/D$, muda ao longo do trecho. No trecho em azul (segmentos $3'-4$ e $5-1'$), tem-se que $(D^+ - D_{V_2})/D = (D_{V_1} - D_{V_2})/D$ e no trecho em vermelho (segmentos $4-1^*$ e $5-3^*$), $(D^+ - D_{V_2})/D = (D_{\Omega^+} - D_{V_2})/D$. No caso das vigas externas a integração das interfaces se dá no mesmo sentido.

5.5 CURVATURAS EM PONTOS DO EIXO DE VIGAS EXTERNAS

Derivando-se duas vezes a equação (5.7) do deslocamento transversal w , primeiro em relação à x_i e depois em relação à x_j , obtém-se a equação das curvaturas para um ponto Q sobre o eixo de uma viga externa:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 w(Q)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{D_k}{D} \int_{\Gamma_s/viga} \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} w(P) - \frac{\partial^2 M_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{k=1}^{N_{vi}} \left[\int_{\Gamma_k^+} \left(\frac{D^+ - D_k}{D} \right) \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} w_k(P) + \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} a_k + \frac{\partial^2 M_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial w_k}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \right. \\
 & + \left. \int_{\Gamma_k^-} \left(\frac{D^- - D_k}{D} \right) \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} w_k(P) - \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} a_k + \frac{\partial^2 M_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial w_k}{\partial n}(P) \right) d\Gamma \right] + \\
 & + \sum_{k=1}^{N_{ve}} \left[\int_{\Gamma_k^-} \left(\frac{D^- - D_k}{D} \right) \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} w_k(P) - \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} a_k + \frac{\partial^2 M_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial w_k}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \right. \\
 & + \left. \int_{\Gamma_k^+} \left(\frac{D_k}{D} \right) \left(\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} w_k(P) - \left(-\frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} a_k + \frac{\partial^2 V_n^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \frac{\partial w_k}{\partial n}(P) \right) d\Gamma \right] + \\
 & + \sum_{k=1}^{N_{c3}} \frac{D_k}{D} \left(\frac{\partial^2 M_{ns}^{*+}(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 M_{ns}^{*-}(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right) w_{ck}(P) + \\
 & + \sum_{k=1}^{N_{c2} + N_{c1}} \left[\frac{(D_k - D_{pa})}{D} \left(\frac{\partial^2 M_{ns}^{*+}(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 M_{ns}^{*-}(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right]_{\Omega_k} w_{ck}(P) = \sum_{k=1}^{N_c} R_{ck}(P) \frac{\partial^2 w_{ck}^*}{\partial x_i \partial x_j}(Q, P) + \\
 & + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) \frac{\partial^2 w^*(Q, P)}{\partial x_i \partial x_j} - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q, P) \right) \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(Q, p) d\Omega_g \quad (5.9)
 \end{aligned}$$

Como o ponto de colocação Q é interno à viga, não se têm singularidades nas integrais que envolvem os esforços fundamentais, pois são calculadas ao longo do contorno da viga. No entanto, a integral sobre o contorno Γ , envolvendo os deslocamentos

fundamentais, é calculada ao longo do eixo da viga e, nesse caso, a mesma apresenta singularidades quando se integra o elemento ao qual o ponto Q pertence. A fim de se eliminar tais singularidades, retira-se do contorno Γ , o contorno singular $\bar{\Gamma}$, e resolve-se analiticamente a integral sobre o contorno $\Gamma-\bar{\Gamma}$, fazendo-se $\bar{\Gamma} \rightarrow 0$. Tal integral resulta no seu valor principal, isto é, os termos em infinito se cancelam, restando apenas os termos finitos. A integral sobre o contorno singular $\bar{\Gamma}$ é calculada, considerando-se que o ponto Q esteja a uma distância λ do contorno $\bar{\Gamma}$ (ver figura 5.4), fazendo-se o limite de $\lambda \rightarrow 0$. Desse modo, o ponto Q pode ser considerado interno, e então se pode aplicar a equação (5.9). Com isso, a integral sobre o contorno Γ , onde está a singularidade, é dada por:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left(V_n(P) \frac{\partial^2 w^*(Q,P)}{\partial x_i \partial x_j} - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) \right) d\Gamma = \\ & \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left(V_n(P) \frac{\partial^2 w^*(Q,P)}{\partial x_i \partial x_j} - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) \right) d\Gamma + \\ & + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}} \left(V_n(P) \frac{\partial^2 w^*(Q,P)}{\partial x_i \partial x_j} - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) \right) d\Gamma = \\ & = \int_{\Gamma} \left(V_n(P) \frac{\partial^2 w^*(Q,P)}{\partial x_i \partial x_j} - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) \right) d\Gamma + \\ & \quad + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \int_{\bar{\Gamma}} \left(V_n(P) \frac{\partial^2 w^*(Q,P)}{\partial x_i \partial x_j} - M_n(P) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) \right) d\Gamma \quad (5.10) \end{aligned}$$

A seguir será calculada a integral sobre o contorno singular $\bar{\Gamma}$. Como os valores dos esforços são descontínuos, isto é, seus valores não são iguais para um ponto imediatamente antes da linha de carga e outro imediatamente após a mesma, será calculada a integral para esses dois casos e, então se fará a média dos valores para se obter o valor da constante que multiplicará o esforço.

Considere inicialmente um ponto à esquerda do contorno $\bar{\Gamma}$, como está representado na figura (5.4). As expressões fundamentais indicadas na integral sobre o contorno $\bar{\Gamma}$ são função de r , \vec{r} e $\partial r/\partial n$, sendo que esses valores variam segundo o ângulo γ (ver figura 5.4). Logo, para que se possa resolver a integral, deve-se escrever r , \vec{r} , $\partial r/\partial n$ e $d\Gamma$ em função de γ .

Da figura (5.4), pode-se deduzir que:

$$\cos \phi = \partial r / \partial n = dX / d\Gamma \quad (5.11)$$

$$\text{sen}(d\gamma) \cong d\gamma = dX / r \quad (5.12)$$

$$\cos \phi = \lambda / r \quad (5.13)$$

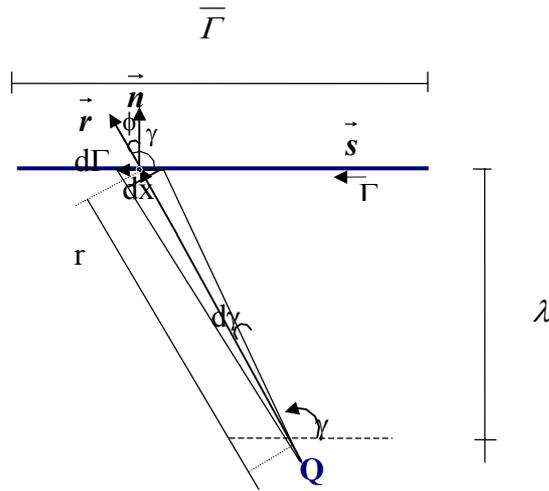


FIGURA 5.4 – Contorno Singular

onde $0 \leq \gamma \leq \pi$; $\phi = \gamma - 90^\circ$; \vec{s} e \vec{n} são as direções tangencial e normal no eixo da viga.

Das equações (5.11), (5.12) e (5.13), pode-se concluir que:

$$d\Gamma = \frac{\lambda d\gamma}{\cos^2 \phi} \quad (5.14)$$

Tem-se ainda, que $\cos \phi = \cos(\gamma - 90^\circ) = \text{sen} \gamma$. Logo, a equação (5.14) resulta em:

$$d\Gamma = \frac{\lambda d\gamma}{\text{sen}^2 \gamma} \quad (5.15)$$

Da relação (5.13), tem-se que r é dado por:

$$r = \lambda / \text{sen} \gamma \quad (5.16)$$

Considerando-se a equação (5.11) deduz-se que:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \text{sen } \gamma \quad (5.17)$$

Substituindo-se as relações (5.16) e (5.17) nas expressões (3.44) e (3.48) dos deslocamentos fundamentais, essas resultam em:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{w}^*}{\partial x_i(q) \partial x_j(q)}(q, p) = \frac{1}{4\pi D} \left(r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \ln\left(\frac{\lambda}{\text{sen } \gamma}\right) \right) \quad (5.18)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i(q) \partial x_j(q)} \left(\frac{\partial \mathbf{w}^*}{\partial n(p)}(q, p) \right) = \frac{\text{sen } \gamma}{4\pi D \lambda} \left[(\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) \text{sen } \gamma + r_{,i} n_j + r_{,j} n_i \right] \quad (5.19)$$

Substituindo-se as expressões (5.15), (5.18) e (5.19) na integral sobre o contorno $\bar{\Gamma}$, esta resulta em:

$$I_{ij}^e = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi D} \int_{\gamma} \left[\left(r_{,i} r_{,j} + \delta_{ij} \ln\left(\frac{\lambda}{\text{sen } \gamma}\right) \right) V_n(P) + \right. \\ \left. - \frac{\text{sen } \gamma}{\lambda} \left((\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) \text{sen } \gamma + r_{,i} n_j + r_{,j} n_i \right) M_n(P) \right] \frac{\lambda d\gamma}{\text{sen}^2 \gamma} \quad (5.20)$$

Observando-se a equação (5.20), pode-se concluir que o termo que multiplica o esforço V_n se anula. Substituindo-se $M_n(P)$ por $M_n(P)+M_n(Q)-M_n(Q)$ e considerando-se a condição de Hölder, pode-se dizer que $M_n(P)-M_n(Q) = 0$ (ver expressão 3.71). Portanto, a expressão (5.20) pode ser escrita como:

$$I_{ij}^e = -\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi D} M_n(Q) \int_0^{\pi} \left((\delta_{ij} - 2r_{,i} r_{,j}) + \frac{1}{\text{sen } \gamma} (r_{,i} n_j + r_{,j} n_i) \right) d\gamma \quad i,j=1,2 \quad (5.21)$$

Deve-se agora expressar os cossenos diretores de \vec{r} em função do ângulo γ para que se possa fazer a integração. Para isso, considere a figura (5.5), onde \mathbf{n} e \mathbf{s} são as direções normal e tangencial definidas no eixo da viga e através da qual pode-se deduzir que os cossenos diretores de \vec{r} em relação ao sistema (X_1, X_2) são dados por:

$$\vec{r} = \begin{Bmatrix} \cos(180^\circ - \gamma - \alpha) \\ -\text{sen}(180^\circ - \gamma - \alpha) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\cos(\gamma + \alpha) \\ -\text{sen}(\gamma + \alpha) \end{Bmatrix} \quad (5.22)$$

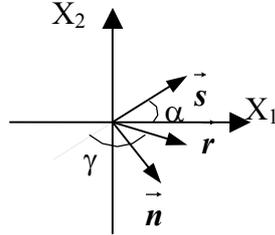


FIGURA 5.5- Direções no Contorno Singular

onde $s_1 = \cos\alpha$; $s_2 = \sin\alpha$, $n_1 = \sin\alpha$, $n_2 = -\cos\alpha$.

Assim, considerando-se $i=j=1$, $i=j=2$ e por último $i=1$ e $j=2$, a integral (5.21) resulta, respectivamente, em:

$$I_{11}^e = -\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi D} M_n(Q) \int_0^\pi \left((1 - 2\cos^2(\gamma + \alpha)) - \frac{2\cos(\gamma + \alpha)\sin\alpha}{\sin\gamma} \right) d\gamma \quad (5.23)$$

$$I_{22}^e = -\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi D} M_n(Q) \int_0^\pi \left((1 - 2\sin^2(\gamma + \alpha)) + \frac{2\sin(\gamma + \alpha)\cos\alpha}{\sin\gamma} \right) d\gamma \quad (5.24)$$

$$I_{12}^e = -\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi D} M_n(Q) \int_0^\pi \left[-2\cos(\gamma + \alpha)\sin(\gamma + \alpha) + \frac{(\cos(\gamma + \alpha)\cos\alpha - \sin(\gamma + \alpha)\sin\alpha)}{\sin\gamma} \right] d\gamma \quad (5.25)$$

Fazendo-se a integração em γ , obtém-se:

$$I_{11}^e = -\frac{\sin^2\alpha}{2D} M_n(Q) \quad (5.26)$$

$$I_{22}^e = -\frac{\cos^2\alpha}{2D} M_n(Q) \quad (5.27)$$

$$I_{12}^e = \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{2D} M_n(Q) \quad (5.28)$$

Considere agora o ponto de colocação Q imediatamente à direita do eixo da viga (ver figura 5.6). Nesse caso, tem-se que $\partial r / \partial n = \cos(270^\circ - \gamma) = -\sin\gamma$, sendo a direção de \vec{r}

em relação ao sistema (X_1, X_2) dada por: $\vec{r} = \begin{Bmatrix} \cos(180^\circ + \alpha - \gamma) \\ \sin(180^\circ + \alpha - \gamma) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\cos(\gamma - \alpha) \\ \sin(\gamma - \alpha) \end{Bmatrix}$.

Considerando-se as equações (5.15) e (5.16) e seguindo um procedimento análogo àquele mostrado para o ponto imediatamente à esquerda, obtêm-se para $i=j=1$, $i=j=2$ e $i=1, j=2$:

$$I_{11}^d = \frac{\text{sen}^2 \alpha}{2D} M_n(Q) \tag{5.29}$$

$$I_{22}^d = \frac{\text{cos}^2 \alpha}{2D} M_n(Q) \tag{5.30}$$

$$I_{12}^d = -\frac{\text{cos} \alpha \text{sen} \alpha}{2D} M_n(Q) \tag{5.31}$$

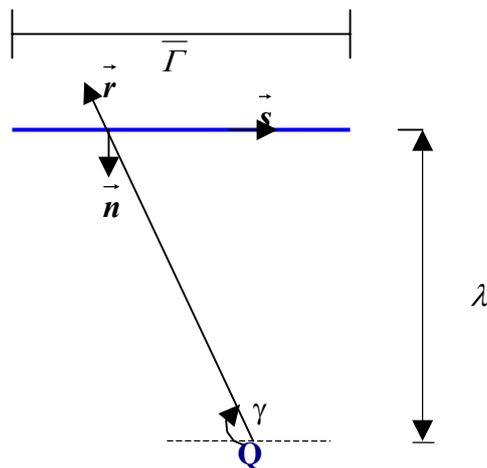


FIGURA 5.6 – Contorno Singular

Na figura (5.6) $0 \leq \gamma \leq \pi$; \vec{s} e \vec{n} são as direções tangencial e normal no eixo da viga; $n_1 = \text{sen} \alpha$, $n_2 = -\text{cos} \alpha$; α é o mesmo ângulo definido na figura (5.5).

Observe que ao fazerem-se as médias das constantes obtidas para os pontos à esquerda e à direita do contorno do eixo da viga, obtêm-se valores nulos para as mesmas.

5.6 SISTEMA DE EQUAÇÕES

Nos pontos sobre o contorno externo sem vigas ou sobre os eixos das vigas, necessita-se escrever duas equações, pois há duas incógnitas por ponto. Em cada canto será escrita uma equação de w , pois há apenas uma incógnita. Para os pontos sobre os eixos das

vigas e para aqueles gerados pelo programa, será escrita uma equação do deslocamento transversal w (equação 5.7) e outra da derivada direcional de w (equação 5.8). Para os pontos sobre o contorno externo serão escritas duas equações de w , uma para o ponto Q sobre o contorno e outra para um ponto A externo (ver figura 4.4).

Utilizando-se o mesmo procedimento descrito para a obtenção da equação (4.23), a equação (5.7), referente ao deslocamento transversal w de um ponto Q ou a equação (5.8) da derivada direcional de w , podem ser escritas, de maneira aproximada, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} H_F(Q) & H_c(Q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_F \\ \tilde{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_F(Q) & G_c(Q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_F \\ \tilde{R}_c \end{Bmatrix} + T(Q) \quad (5.32)$$

Definindo-se como N_{noc} o número de nós sobre o contorno externo sem vigas, N_{nove} o número de nós sobre os eixos de vigas externas, N_{novi} o número de nós sobre os eixos de vigas internas e N_c o número de cantos, os vetores da equação (5.32) são dados por:

- $U_F^T = \{w^1 \quad w_{,n}^1 \quad \dots \quad w^i \quad w_{,n}^i \quad \dots \quad w^{(N_{noc}+N_{novi}+N_{nove})} \quad w_{,n}^{(N_{noc}+N_{novi}+N_{nove})}\}$ contém os valores nodais dos deslocamentos do contorno externo sem vigas e dos eixos das vigas,
- $P_F^T = \{V_n^1 \quad M_n^1 \quad \dots \quad V_n^i \quad M_n^i \quad \dots \quad V_n^{N_{noc}+N_{nove}} \quad M_n^{N_{noc}+N_{nove}}\}$ é o vetor dos valores nodais dos esforços no contorno externo sem vigas e nos eixos das vigas externas,
- $w_c^T = \{w_{c_1} \quad \dots \quad w_{c_i} \quad \dots \quad w_{c_{N_c}}\}$ é o vetor dos deslocamentos nos cantos,
- $R_c^T = \{R_{c_1} \quad \dots \quad R_{c_i} \quad \dots \quad R_{c_{N_c}}\}$ é o vetor das reações de canto,
- $H_F(Q)$ tem dimensão $(1 \times 2*(N_{noc}+N_{nove}+N_{novi}))$ e é resultante da integração dos esforços fundamentais (V_n^* e M_n^* ou suas derivadas) ao longo do contorno externo e interfaces;
- $G_F(Q)$ com dimensão $(1 \times 2*(N_{noc}+N_{nove}))$ é obtido a partir da integração das funções w^* e $w_{,n}^*$, ou suas derivadas, ao longo do contorno externo ou eixos de vigas externas;
- $H_c(Q)$ e $G_c(Q)$ são vetores de dimensão $(1 \times N_c)$, sendo o primeiro o vetor que traz os termos relativos aos esforços fundamentais (R_c^* ou sua derivada) nos cantos e o segundo contém os termos referentes ao cálculo de w^* ou sua derivada nos cantos.

Escrevendo-se todas as equações necessárias para a solução do problema, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_F & \tilde{H}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_F \\ \tilde{w}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_F & \tilde{G}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{P}_F \\ \tilde{R}_c \end{Bmatrix} + \tilde{T} \quad (5.33)$$

onde \tilde{H}_F é uma matriz de dimensão $(2*(N_{noc}+N_{nove}+N_{novi})+N_c \times 2*(N_{noc}+N_{nove}+N_{novi}))$, \tilde{G}_F tem dimensão $(2*(N_{noc}+N_{nove}+N_{novi})+N_c \times 2*(N_{noc}+N_{nove}))$, \tilde{H}_c e \tilde{G}_c são matrizes de dimensão $(2*(N_{noc}+N_{nove}+N_{novi})+N_c \times N_c)$, \tilde{T} é um vetor de dimensão $(2*(N_{noc}+N_{nove}+N_{novi})+N_c \times 1)$,

ou, ainda, escrevendo a equação (5.33) de uma maneira simplificada:

$$\tilde{H} \tilde{U} = \tilde{G} \tilde{P} + \tilde{T} \quad (5.34)$$

onde: \tilde{H} é uma matriz de dimensão $(2*(N_{noc}+N_{nove}+N_{novi})+N_c \times 2*(N_{noc}+N_{nove}+N_{novi})+N_c)$; \tilde{G} tem dimensão $(2*(N_{noc}+N_{nove}+N_{novi})+N_c \times 2*(N_{noc}+N_{nove})+N_c)$; \tilde{U} é um vetor de dimensão $(2*(N_{noc}+N_{nove}+N_{novi})+N_c \times 1)$; \tilde{P} é um vetor de dimensão $(2*(N_{noc}+N_{nove})+N_c \times 1)$.

Após a imposição das condições de contorno, o sistema (5.34) pode ser resolvido, da mesma maneira descrita para a obtenção das incógnitas do sistema (4.41). Nesse caso, porém, o vetor \tilde{X} , que é o vetor solução, contém os deslocamentos e esforços incógnitos nos nós do contorno externo sem vigas, nos eixos das vigas externas e internas e nos cantos.

Note-se que para a verificação da matriz \tilde{H} podem ser consideradas as mesmas propriedades descritas no item (4.8), considerando-se, nesse caso $N_t = N_{noc} + N_{nove} + N_{novi}$.

5.7 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste item serão analisados os mesmos exemplos apresentados no capítulo 4, a fim de se comparar os resultados obtidos com a formulação desenvolvida no capítulo 3, designada de *mod1*, em que as variáveis são definidas ao longo do contorno externo e interfaces, com aqueles obtidos a partir da formulação desenvolvida nesse capítulo e designada de *mod2*, na qual as variáveis são definidas ao longo do contorno externo sem vigas e nos eixos das vigas.

Deve-se observar, que não é possível representar o mesmo problema com os dois modelos, devido às diferentes posições de aplicação das condições de contorno. No modelo *mod1* essas são aplicadas ao longo do contorno externo da placa, isto é, na face externa da viga; já no modelo *mod2* elas são prescritas no eixo da viga externa. Desse modo, são

esperadas diferenças entre os resultados. Além disso, o modelo *mod2* é mais rígido que o *mod1*, devido às aproximações feitas nos deslocamentos das vigas.

Deve-se notar ainda, que nos exemplos a seguir, a discretização obtida com o modelo *mod1*, requer um número muito maior de nós e elementos que a discretização equivalente para a análise com o modelo *mod2*, onde o contorno contínuo em vermelho indica a discretização e o tracejado indica as interfaces e o contorno externo da placa, onde se calculam as integrais.

São feitas análises adotando-se um e dois elementos nas laterais das vigas, a fim de verificar se a consideração de dois elementos nesses trechos diminuiria o erro introduzido na formulação pelas aproximações dos deslocamentos nas vigas. Para melhor avaliar a diferença entre os resultados obtidos com os diferentes modelos, ou entre aqueles obtidos com o modelo *mod2* considerando-se várias discretizações, calculam-se as diferenças relativas ente os valores sempre em relação à malha mais refinada adotada para o *mod2*.

5.7.1 Placa Quadrada Enrijecida com Duas Vigas

A placa a ser analisada está representada na figura (4.8). Quando se emprega o modelo que se baseia apenas na discretização da linha média das vigas utilizam-se 32 elementos e 68 nós, como está mostrado na figura (5.7).

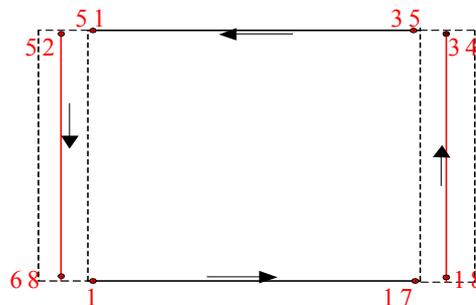


FIGURA 5.7: Discretização para o Modelo *mod2*

Os deslocamentos ao longo da linha média da placa (eixo x da figura 4.8) estão apresentados na figura (5.8). Os resultados obtidos com o modelo *mod2* são menores que aqueles referentes ao modelo *mod1*, quando se consideram 4 apoios e $t_v=t_L=6\text{cm}$ ou 2 apoios e $t_v=10\text{cm}$. Isso já era esperado devido à diferença na aplicação das condições de contorno e do enrijecimento do modelo *mod2* por causa das aproximações dos deslocamentos feitas nas vigas. Porém, no caso em que se têm 2 apoios e $t_v=23,5\text{cm}$ se observa o contrário.

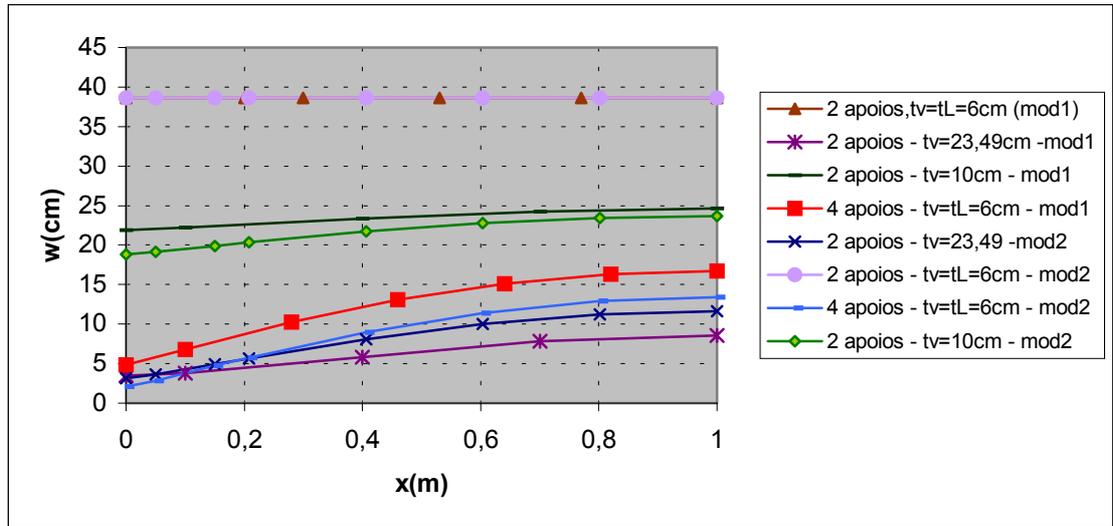


FIGURA 5.8 Deslocamentos na Linha Média da Placa

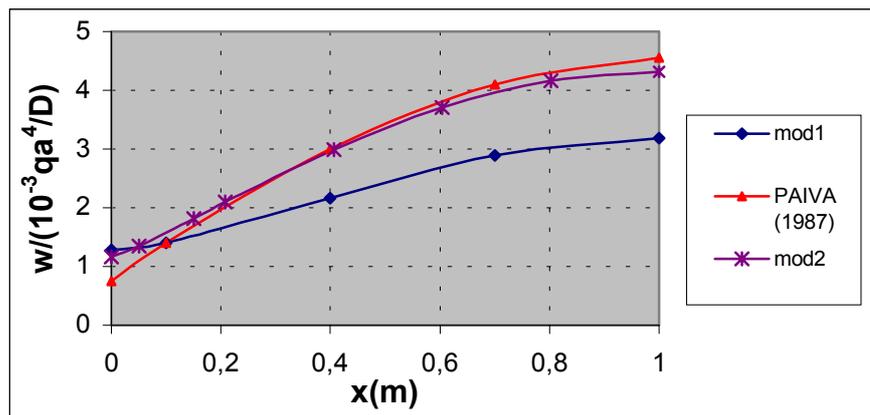


FIGURA 5.9 – Deslocamentos na Linha Média da Placa

Nas figuras (5.9) (5.10) e (5.11), comparam-se os resultados obtidos para $t_v=23,5\text{cm}$ com aqueles apresentados por PAIVA (1987). Na figura (5.9) pode-se notar que os deslocamentos obtidos com o modelo **mod2** foram muito próximos daqueles apresentados por Paiva com uma diferença relativa de 5,27% no valor do deslocamento máximo. Essa diferença foi de 30% para o modelo **mod1**. Com relação aos momentos apresentados por paiva, com o **mod2** obteve-se uma diferença relativa no centro da placa de 8,3% para m_x e de 5,8% para m_y . Essas diferenças foram de 27% e 30,2% considerando-se o modelo **mod1**. Os resultados obtidos com **mod2** se aproximam mais daqueles apresentados por Paiva devido ao fato de que naquele modelo as condições de contorno são impostas no eixo da viga e não na sua face externa como é o caso de **mod1**. Esperavam-se diferenças entre os resultados obtidos com **mod2** e o modelo do Paiva, pois além das diferentes considerações das

condições de contorno, nesse último as dimensões da viga não têm nenhuma influência na análise.

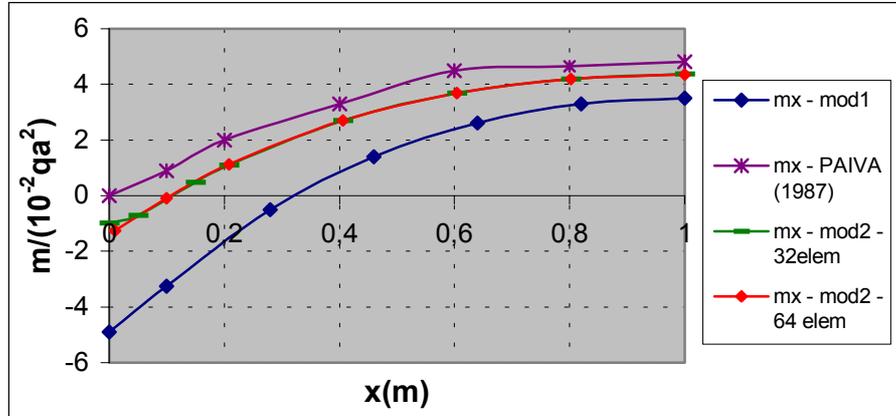


Figura 5.10 – Momentos na Direção x na Linha Média da Placa

Nas figuras (5.10) e (5.11) têm-se ainda os valores obtidos considerando-se uma discretização de 64 elementos, onde se observam diferenças apenas nos momentos dos pontos próximos à viga. Não houve diferença entre os valores dos deslocamentos das malhas de 32 e 64 elementos. Fez-se ainda mais um cálculo acrescentando-se à malha de 64 elementos mais um elemento em cada lateral de viga, mas não houve diferença nos resultados, comprovando-se que a discretização considerada já é suficientemente refinada uma vez que as diferenças nos valores obtidos foram mínimas.

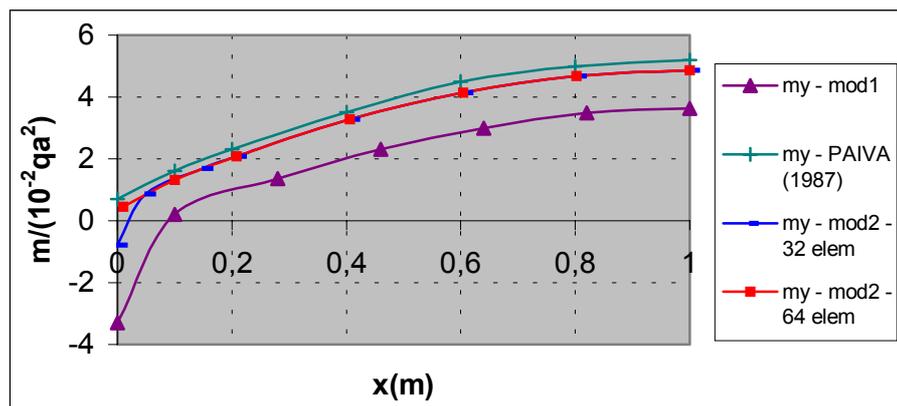


Figura 5.11 – Momentos na Direção y na Linha Média da Placa

Esse exemplo também foi analisado considerando-se dois lados engastados e os outros dois livres. Os deslocamentos ao longo da linha média da placa estão na figura (5.12), onde se pode observar que nesse caso também os resultados obtidos com o modelo *mod2* são

menores que aqueles relativos à *mod1* em dois casos: quando se consideram 4 engastes e $t_v=t_L=6\text{cm}$ ou 2 engastes e $t_v=10\text{cm}$, mas são maiores quando se adota $t_v=23,5\text{cm}$.

Para esse segundo caso, fez-se ainda um estudo da convergência dos resultados com o refinamento da malha. Foram consideradas mais três discretizações, obtidas a partir daquela apresentada na figura (5.7), aumentando-se 4 elementos em cada lado da placa a cada refinamento. Não houve diferença nos valores dos deslocamentos na placa obtidos com as malhas de 32 e 80 elementos. Os momentos na linha média da placa estão nas figuras (5.13) e (5.14), onde se observam diferenças nos valores obtidos com as diferentes discretizações apenas nos pontos próximos à viga. Fez-se ainda mais uma análise com as malhas de 32 e 80 elementos, mas considerando-se dois elementos nas laterais das vigas ao invés de um, mas não houve diferenças significativas. A diferença entre os momentos obtidos com *mod2* e *mod1* foi bastante significativa, sendo maior para os pontos próximos à viga. No ponto central a diferença relativa foi de 3,4% para m_x e de 11,4% para m_y .

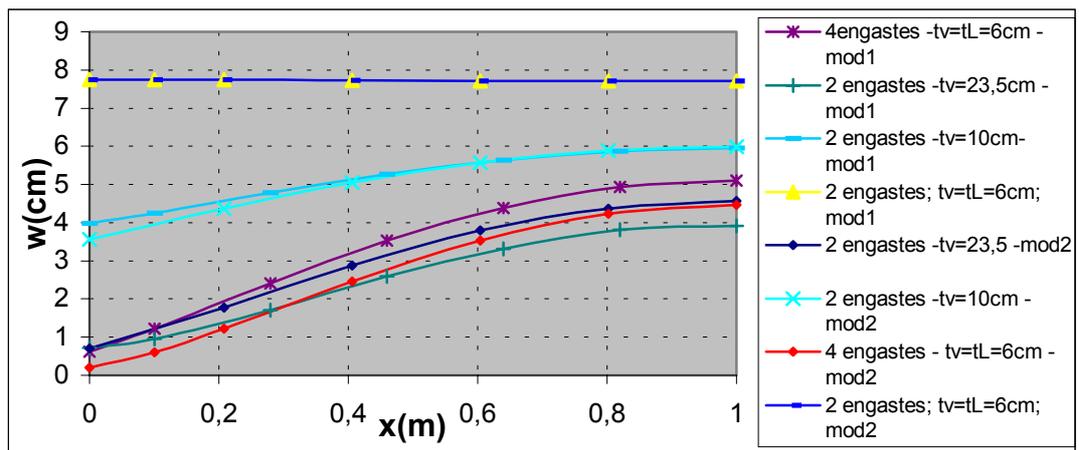


FIGURA 5.12 – Deslocamentos na Linha Média da Placa

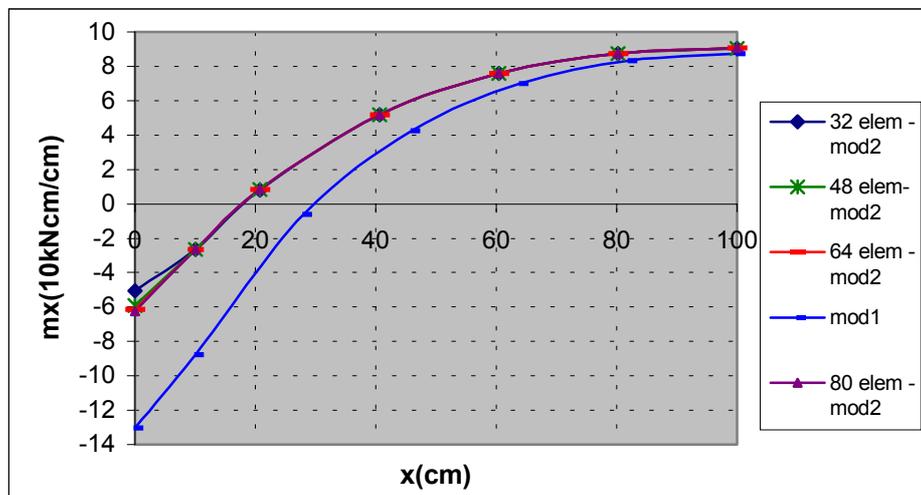


Figura 5.13 – Momentos na Direção x na Linha Média da Placa

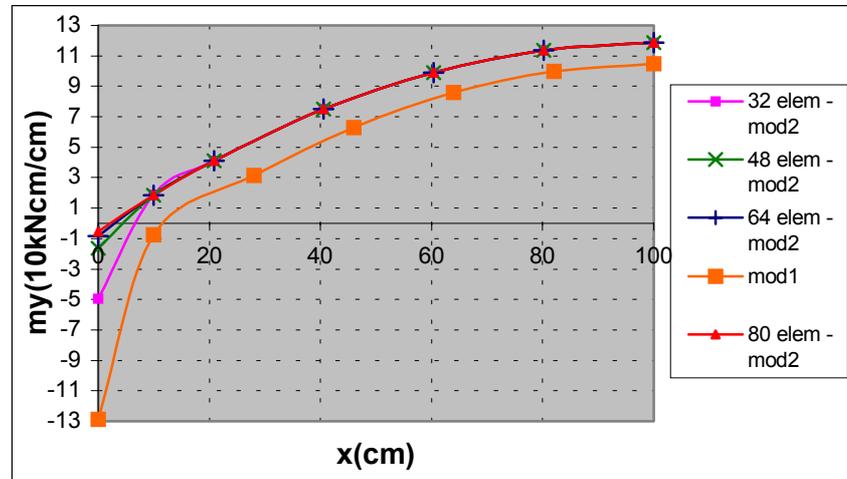


FIGURA 5.14 – Momentos na Direção y na Linha Média da Placa

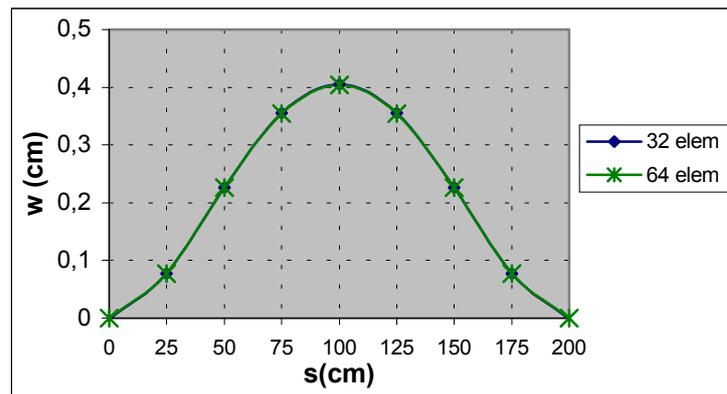


Figura 5.15 – Deslocamentos na Viga

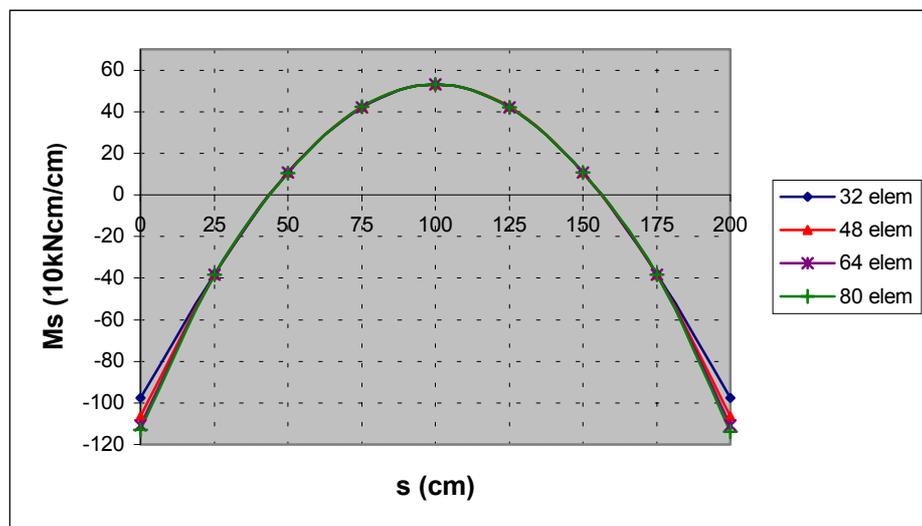


FIGURA 5.16 – Momentos na Viga na Direção s

Na figura (5.15) estão os deslocamentos na viga, onde se pode observar que não houve diferenças significativas entre os resultados obtidos com as malhas de 32 e 64 elementos. Os momentos, na direção x , na viga estão na figura (5.16), onde se nota diferenças nos valores apenas no início e fim da viga.

5.7.2 Placa Enrijecida com Quatro Vigas Externas e uma Viga Interna

Em uma das discretizações utilizadas para a análise da placa representada na figura (4.15), foram considerados 44 nós ao longo das vigas externas e 9 nós para representar a viga interna, num total de 22 elementos como está mostrado na figura (5.17). A partir dessa discretização se obtém mais uma, aumentando-se quatro elementos nos lados maiores e dois nos lados menores.

Os deslocamentos no eixo da viga interna (eixo x da figura 4.15) estão na figura (5.18), onde se comparam os resultados obtidos com os modelos *mod1* e *mod2* e o programa em elementos finitos. Não foram apresentados os deslocamentos obtidos com a discretização mais refinada, pois não houve diferenças significativas entre os valores, sendo a diferença relativa que se obteve para os deslocamentos máximos de apenas 0,32%. O deslocamento máximo calculado com o modelo *mod1* teve uma diferença relativa de 19,4% em relação àquele obtido com o modelo *mod2*. Os deslocamentos obtidos com o programa em elementos finitos foram bem menores que aqueles relativos ao modelo *mod2*, ocorrendo o inverso no caso dos momentos (ver figura 5.19).

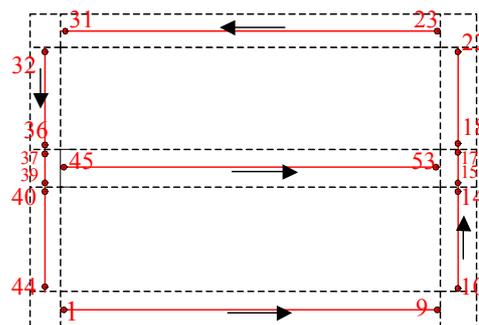


FIGURA 5.17 – Discretização Através da Linha Média das Vigas (*mod2*)

Na figura (5.19) pode-se observar que há diferenças nos valores dos momentos, na direção x , obtidos com as malhas de 22 e 42 elementos, apenas no início e fim da viga. Analisou-se ainda a placa com essas duas discretizações, mas levando-se em conta dois elementos nas laterais das vigas externas e internas, porém não houve diferença significativa nos resultados.

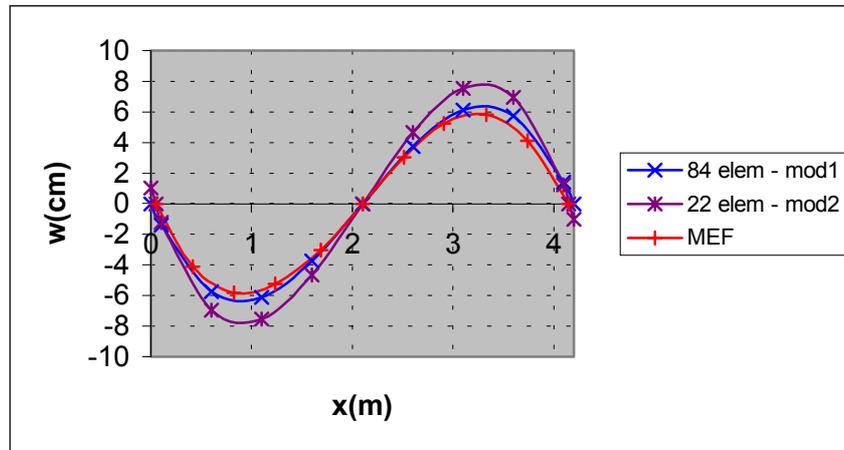


FIGURA 5.18 - Deslocamentos na Linha Média da Placa

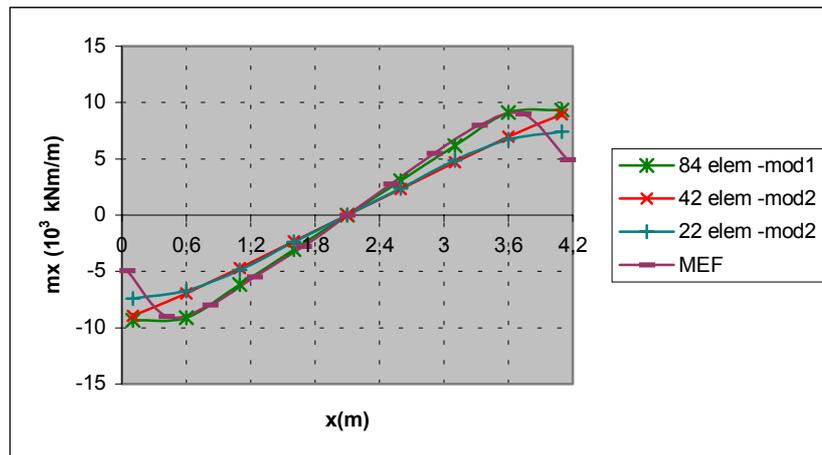


FIGURA 5.19 – Momentos, na Direção x, na Viga Interna

5.7.3 Placa Enrijecida com Três Vigas

O exemplo a ser analisado nesse item é aquele apresentado na figura (4.19). Uma das discretizações a ser usada na análise com o modelo *mod2* resultou em 53 nós e 22 elementos, como é mostrado na figura (5.20). São analisadas ainda mais duas discretizações, que são obtidas a partir daquela da figura (5.20), aumentando-se a cada refinamento quatro elementos nos lados maiores e dois nos lados menores.

Os deslocamentos estão na figura (5.21) e os momentos, na direção x, na figura (5.22), onde se pode observar diferenças significativas nos valores dos deslocamentos e momentos obtidos com as três discretizações, principalmente nos valores obtidos com a malha de 22 elementos. Os resultados obtidos com as malhas de 42 e 62 elementos foram bem próximos e aqueles calculados com o modelo *mod1* foram um pouco maiores que

aqueles referentes ao modelo *mod2*. A diferença relativa do deslocamento no ponto central obtido com o modelo *mod1* em relação àquele calculado considerando-se o modelo *mod2* e 62 elementos foi de 8,3%. Para o valor do momento m_x essa diferença foi de 5,63%.

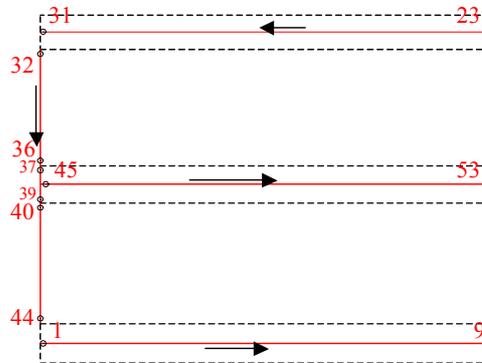


FIGURA 5.20 – Discretização das Linhas Médias das Vigas (*mod2*)

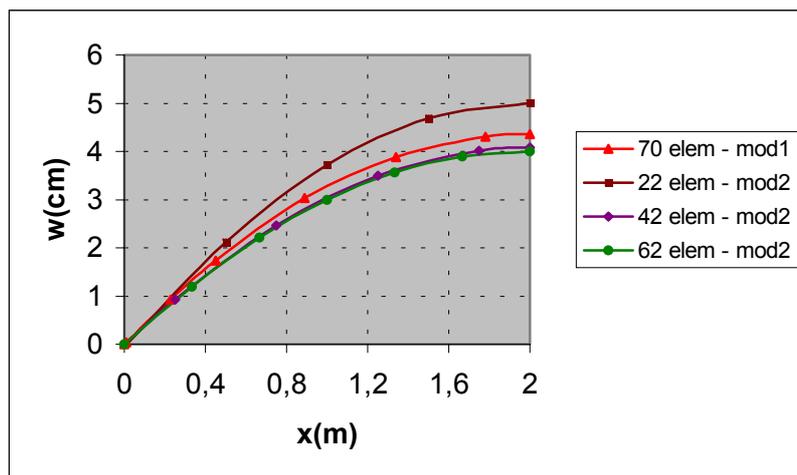


FIGURA 5.21 - Deslocamentos na Viga Interna

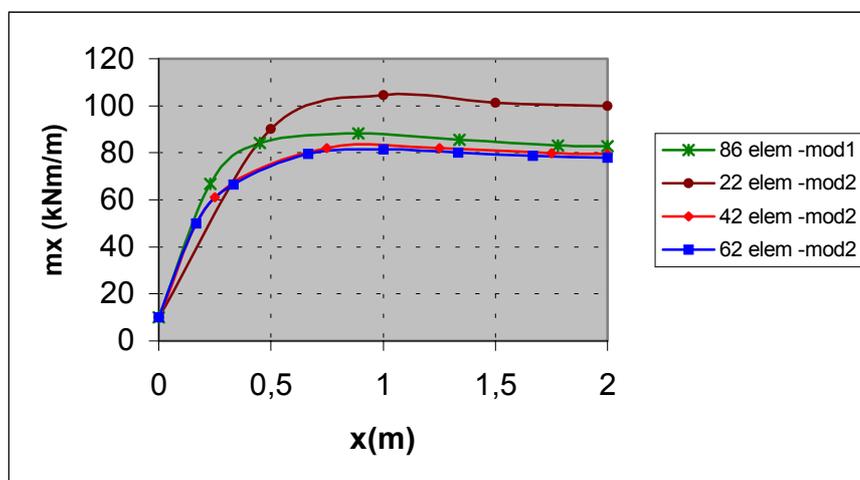


FIGURA 5.22 – Momentos , na Direção x, na Viga Interna

Fez-se ainda uma última análise, considerando-se as discretizações de 22 e 62 elementos, porém definindo-se dois elementos nas laterais das vigas externas e internas. Para a malha de 62 elementos, a diferença nos resultados não foi muito significativa, obteve-se uma diferença relativa de 1% no valor do deslocamento do ponto central e de 1,15% no valor do m_x . No entanto, para a malha de 22 elementos o resultado piorou ao invés de melhorar.

5.7.4 Placa Esconsa Enrijecida com Vigas no Contorno Externo e Vigas Internas

Esse exemplo é aquele representado na figura (4.23). Na figura (5.23) tem-se a discretização mais refinada utilizada na análise da placa, que resultou em uma malha de 387 nós e 185 elementos. Foram analisadas ainda mais duas discretizações, aumentando-se, a cada refinamento, quatro elementos em cada lado da placa paralelo à direção x e seis naqueles paralelos à direção y (ver figura 5.23).

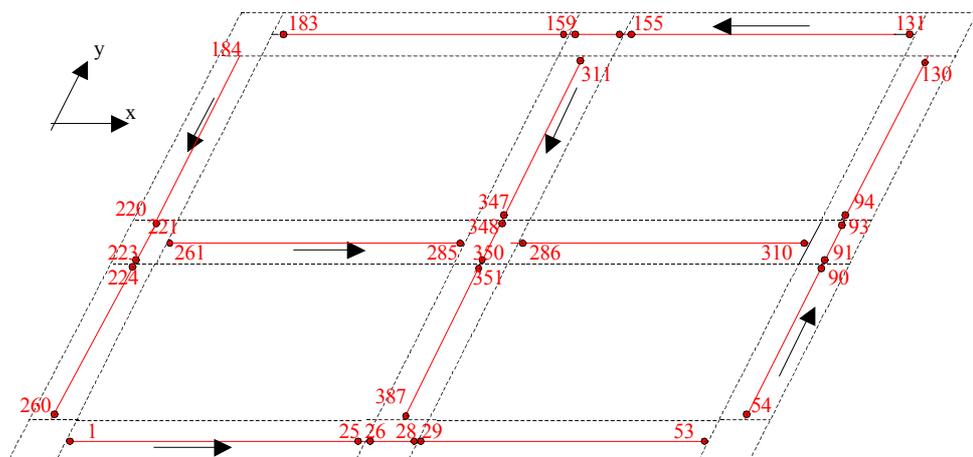


FIGURA 5.23 – Discretização da Placa Esconsa com o Modelo *mod2*

Os deslocamentos ao longo da viga V_4 (ver figura 4.23) estão na figura (5.24), onde se pode notar que as três discretizações resultaram em deslocamentos muito próximos e os valores obtidos com o modelo *mod2* foram bem menores que aqueles do modelo *mod1*, com uma diferença relativa de 15,7% para o ponto central. Entre as malhas de 65 e 185 elementos essa diferença foi igual a 1,4%.

Na figura (5.25), têm-se os momentos na direção x ao longo da viga V_4 . Nesse caso também, obteve-se resultados muito próximos com as três discretizações. Houve diferenças significativas entre os momentos relativos aos modelos *mod2* e *mod1*, com uma diferença

relativa de 10% no ponto central. A diferença da malha de 65 elementos em relação àquela de 185 elementos no ponto central foi de 1,8%.

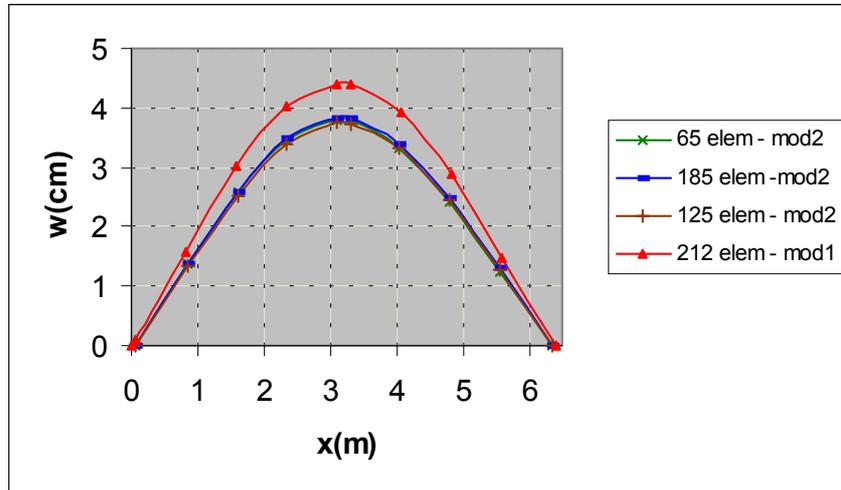


FIGURA 5.24 – Deslocamentos na Viga V_4

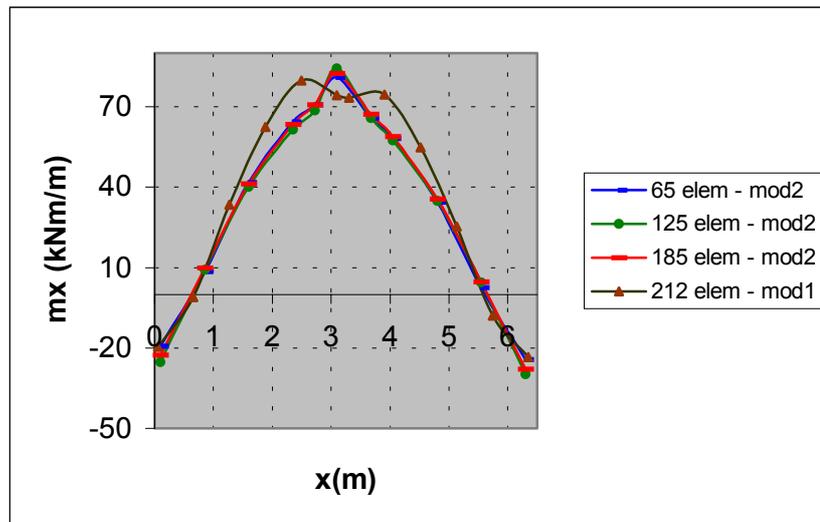


FIGURA 5.25 - Momentos, na direção x, na viga V_4

6 EQUAÇÕES INTEGRAIS DE PLACAS SUJEITAS À FLEXÃO COMPOSTA PARA DOMÍNIOS COMPOSTOS.

6.1 INTRODUÇÃO

Nesse capítulo será apresentada a formulação linear do MEC para flexão de placas compostas de sub-regiões de diferentes rigidez e definidas em diferentes planos. Pretende-se com essa formulação representar o pavimento de um edifício sujeito à flexão, considerando-se a presença de esforços de membrana. A formulação é obtida através de um acoplamento das teorias de chapa e placa delgada sujeita à flexão simples apresentadas no capítulo 2. A análise do pavimento será feita representando-se cada laje ou viga por uma sub-região, como foi feito para desenvolver a formulação da placa em sub-regiões mostrada no capítulo 3.

Inicialmente, será desenvolvida a formulação definindo-se as variáveis sobre o contorno externo e interfaces da placa, como foi feita no capítulo 3 para flexão simples. Nesse modelo, ao longo do contorno externo do pavimento e das interfaces entre duas sub-regiões serão considerados os seguintes graus de liberdade por nó: o deslocamento transversal (w), a derivada do deslocamento transversal na direção normal ao contorno, rotação ($w_{,n}$) e os deslocamentos u_s , u_n no plano da placa, sendo s a direção tangencial ao contorno. Nas interfaces, ainda serão definidas as forças p_s e p_n .

Em seguida, será considerado o modelo alternativo apresentado no capítulo 5, onde as variáveis são definidas nos eixos das vigas. Nesse modelo, serão definidas nos eixos das vigas as mesmas seis variáveis que existiam nas interfaces do modelo anterior e ainda as rotações u_{sn} e u_{nn} .

Inicialmente são apresentados os deslocamentos, deformações, tensões e esforços que atuam na placa sujeita à flexão composta e em seguida são deduzidas as equações integrais dos deslocamentos. As equações integrais são calculadas, de forma aproximada, através do Método dos Elementos de Contorno, considerando-se as aproximações da geometria dos elementos e das variáveis apresentadas no capítulo 4. Seguem também o mesmo esquema detalhado no capítulo 4 para a obtenção das equações algébricas a partir das equações integrais, assim como as integrações numérica ou analítica sobre os elementos.

6.2 RELAÇÕES BÁSICAS

No caso do problema de flexão, considerando-se o efeito de membrana, cada sub-região é representada pela superfície de referência e não mais por sua superfície média como era no caso da flexão simples. A superfície de referência é aquela em relação à qual se definem os valores das variáveis no contorno e interfaces. Considere-se a placa representada na figura (3.2), onde se admite como superfície de referência, a superfície média do subdomínio Ω_1 (ver figura 6.1).

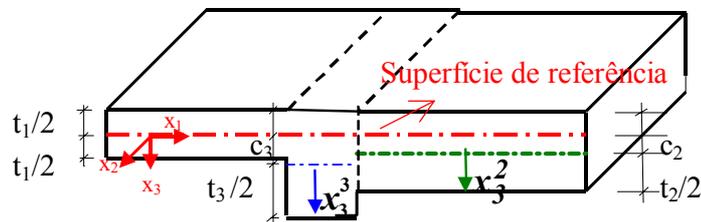


FIGURA 6.1 - Placa Subdividida em Sub-regiões

onde t_1 , t_2 e t_3 são, respectivamente, as espessuras das sub-regiões Ω_1 , Ω_2 e Ω_3 ; c_2 e c_3 representam o deslocamento da superfície média em questão em relação à superfície de referência, ou seja, nesse caso: $c_2 = t_2/2 - t_1/2$ e $c_3 = t_3/2 - t_1/2$; x_3^2 e x_3^3 são os eixos na direção x_3 tendo como referência as superfícies médias das sub-regiões Ω_2 e Ω_3 e são dados por: $x_3^2 = x_3 - c_2$; $x_3^3 = x_3 - c_3$.

Para se obterem os tensores de deformação e de tensão na placa, sujeita à flexão composta, somam-se os problemas de chapa e placa apresentados no capítulo 2. Com isso, no campo de deslocamentos, além da componente transversal w na direção x_3 , também há as componentes u_1 e u_2 nas direções x_1 e x_2 do plano da placa (ver figura 6.1). Note-se que os deslocamentos u_1 e u_2 terão uma parcela referente ao problema de placa, dada pela equação

(2.3), e outra relativa ao problema de chapa (equações 2.23 e 2.24). Desse modo, o tensor de deformações é dado pela expressão:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{2D} + \varepsilon_{ij}^F \quad i,j=1,2 \quad (6.1)$$

onde as parcelas do problema de chapa ε_{ij}^{2D} e aquela do problema de flexão ε_{ij}^F estão definidas, respectivamente, em (2.25) e (2.6)

Lembrando-se que se trata de um estado plano de tensão, com o tensor de tensão dado por:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{2D} + \sigma_{ij}^F \quad i,j=1,2 \quad (6.2)$$

sendo σ_{ij}^{2D} e σ_{ij}^F dados, respectivamente, por (2.26) e (2.7).

Integrando-se as tensões ao longo da espessura da sub-região, obtêm-se os esforços resultantes na superfície média da mesma. Assim, o esforço normal N_{ij} e os momentos m_{ij} em uma sub-região s , definidos em sua superfície média, são dados respectivamente, pelas equações (2.27) e (2.9).

6.3 EQUAÇÕES INTEGRAIS DOS DESLOCAMENTOS NO DOMÍNIO

Para o caso de pontos de colocação definidos no interior da placa, as equações integrais também podem ser obtidas a partir do primeiro teorema de BETTI (1872), dado pela equação (3.1). Inicialmente, será deduzida a equação para a placa da figura (6.1) e então a equação será generalizada para representar um caso qualquer. O teorema de Betti é válido para cada subdomínio da figura (6.1), ou seja:

$$\int_{V_1} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV = \int_{V_1} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV \quad i,j = 1, 2, 3 \quad (6.3.a)$$

$$\int_{V_2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{**} dV = \int_{V_2} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV \quad i,j = 1, 2, 3 \quad (6.3.b)$$

$$\int_{V_3} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{***} dV = \int_{V_3} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV \quad i,j = 1, 2, 3 \quad (6.3.c)$$

ou ainda:

$$\int_{V_1} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dV + \int_{V_2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{**} dV + \int_{V_3} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{***} dV = \int_{V_1} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV + \int_{V_2} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV + \int_{V_3} \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dV \quad (6.4)$$

sendo que ε_{ij}^* , ε_{ij}^{**} e ε_{ij}^{***} são escritas, respectivamente, em função de E_1 , E_2 e E_3 . A expressão de σ_{ij}^* não é função de E , portanto ela não muda para os subdomínios.

Admitindo-se que o ponto de colocação esteja em Ω_l , desenvolver-se-á o segundo termo do primeiro membro da expressão (6.4), referente ao subdomínio Ω_2 , através da integração ao longo da espessura do mesmo, obtendo-se:

$$\begin{aligned} \int_{V_2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{**} dV &= \int_{\Omega_2} \int_{x_3^2} \sigma_{ij} (\varepsilon_{kij}^{**2D} - x_3^2 w_{,ij}^{**}) dx_3^2 d\Omega = \\ &= \int_{\Omega_2} \int_{x_3^2} \sigma_{ij} \varepsilon_{kij}^{**2D} dx_3^2 d\Omega - \int_{\Omega_2} \int_{x_3^2} \sigma_{ij} x_3^2 w_{,ij}^{**} dx_3^2 d\Omega \quad k, i, j=1,2 \end{aligned} \quad (6.5)$$

sendo k a direção da carga fundamental relativa ao problema de chapa.

Na expressão (6.5) tem-se uma parcela referente ao problema de chapa e outra relativa ao problema de flexão, as quais podem ser tratadas separadamente. Substituindo-se em (6.5) a equação (6.2) e desenvolvendo-se a parcela do problema de chapa, tem-se que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \int_{x_3^2} \sigma_{ij} \varepsilon_{kij}^{**2D} dx_3^2 d\Omega &= \int_{\Omega_2} \varepsilon_{kij}^{**2D} \left(\int_{-t_2/2}^{t_2/2} \sigma_{ij}^{2D} dx_3^2 \right) d\Omega + \\ &- \int_{\Omega_2} \varepsilon_{kij}^{**2D} \frac{E_2}{(1-\nu^2)} [v w_{,kk} \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij}] \left(\int_{-t_2/2}^{t_2/2} x_3^2 dx_3^2 \right) d\Omega = \int_{\Omega_2} \varepsilon_{kij}^{**2D} N_{ij} d\Omega \end{aligned} \quad (6.6)$$

Desenvolvendo-se agora a parcela relativa à flexão, chega-se à:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \int_{x_3^2} \sigma_{ij} x_3^2 w_{,ij}^{**} dx_3^2 d\Omega &= \int_{\Omega_2} \int_{x_3^2} (\sigma_{ij}^{2D} + \sigma_{ij}^F) x_3^2 w_{,ij}^{**} dx_3^2 d\Omega = \int_{\Omega_2} w_{,ij}^{**} \left(\int_{-t_2/2}^{t_2/2} x_3^2 \sigma_{ij}^{2D} dx_3^2 \right) d\Omega + \\ &- \int_{\Omega_2} w_{,ij}^{**} \frac{E}{(1-\nu^2)} [v w_{,kk} \delta_{ij} + (1-\nu) w_{,ij}] \left(\int_{-t_2/2}^{t_2/2} (x_3^2)^2 dx_3^2 \right) d\Omega = \int_{\Omega_2} w_{,ij}^{**} m_{ij} d\Omega \end{aligned} \quad (6.7)$$

Desenvolvendo-se, de maneira análoga, o segundo termo do segundo membro da equação (6.4), obtêm-se, respectivamente, para os problemas de chapa e flexão:

$$\int_{\Omega_2 \times \mathbb{R}_3^2} \sigma_{kij}^{*2D} \varepsilon_{ij} dx_3^2 d\Omega = \int_{\Omega_2} \varepsilon_{ij}^{2D} N_{kij}^* d\Omega \quad (6.8)$$

$$\int_{\Omega_2 \times \mathbb{R}_3^2} \sigma_{ij}^{*F} \varepsilon_{ij} dx_3^2 d\Omega = \int_{\Omega_2} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad (6.9)$$

Combinando-se as expressões (6.6) e (6.8), assim como (6.7) e (6.9), os problemas de chapa e de flexão resultam em:

$$\int_{\Omega_2} \varepsilon_{kij}^{**2D} N_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_2} \varepsilon_{ij}^{2D} N_{kij}^* d\Omega \quad (6.10)$$

$$\int_{\Omega_2} w_{,ij}^{**} m_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_2} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad (6.11)$$

sendo a expressão fundamental ε_{kij}^{**2D} função de I/\bar{E}_2 (o problema fundamental de chapa será apresentado mais adiante no item 6.4) e $w_{,ij}^{**}$ função de I/D_2 ; os esforços N_{kij}^* e m_{ij}^* não são função de \bar{E}_2 e D_2 , portanto não mudam nos subdomínios.

As expressões (6.10) e (6.11) se referem aos problemas de chapa e de flexão no caso em que os deslocamentos e forças de membrana são calculados na superfície média de Ω_2 . Porém, como tais deslocamentos e forças devem ser relativos à superfície de referência, pois é onde se faz a compatibilização de deslocamentos e equilíbrio de forças, escrevem-se os valores relativos ao subdomínio Ω_2 , em função daqueles da superfície de referência. Assim, dá-se um acréscimo de deformações ao problema bidimensional e um acréscimo de momentos ao problema de flexão, resultante da transferência de ponto de aplicação da carga N_{ij} . Ao longo da espessura, o esforço normal, assim como a curvatura, não muda de valor. Desse modo, as deformações e momentos relativos à superfície média de Ω_2 , são dados por:

$$\varepsilon_{ij(\Omega_2)}^{2D} = \varepsilon_{ij(\Omega_1)}^{2D} - c_2 w_{,ij} \quad (6.12)$$

$$m_{ij(\Omega_2)} = m_{ij(\Omega_1)} - c_2 N_{ij} \quad (6.13)$$

Substituindo-se (6.12) em (6.10) e (6.13) em (6.11) e designando-se $m_{ij} = m_{ij(\Omega_1)}$ e $\varepsilon_{ij(\Omega_1)}^{2D} = \varepsilon_{ij}^{2D}$, as equações de chapa e flexão resultam em:

$$\int_{\Omega_2} \varepsilon_{kij}^{**2D} N_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_2} \varepsilon_{ij}^{2D} N_{kij}^* d\Omega - \int_{\Omega_2} c_2 w_{,ij} N_{kij}^* d\Omega \quad (6.14)$$

$$\int_{\Omega_2} w_{,ij}^{**} m_{ij} d\Omega - \int_{\Omega_2} c_2 w_{,ij}^{**} N_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_2} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad (6.15)$$

De forma análoga, pode-se obter as expressões de chapa e flexão para os subdomínios Ω_1 e Ω_3 , as quais são dadas por:

$$\int_{\Omega_1} \varepsilon_{kij}^{*2D} N_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_1} \varepsilon_{ij}^{2D} N_{kij}^* d\Omega \quad (6.16)$$

$$\int_{\Omega_1} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_1} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad (6.17)$$

$$\int_{\Omega_3} \varepsilon_{kij}^{***2D} N_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_3} \varepsilon_{ij}^{2D} N_{kij}^* d\Omega - \int_{\Omega_3} c_3 w_{,ij} N_{kij}^* d\Omega \quad (6.18)$$

$$\int_{\Omega_3} w_{,ij}^{***} m_{ij} d\Omega - \int_{\Omega_3} c_3 w_{,ij}^{***} N_{ij} d\Omega = \int_{\Omega_3} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad (6.19)$$

No entanto, para que se possa fazer o equilíbrio dos esforços e deslocamentos nas interfaces, após a integração por partes, é conveniente escrever as equações (6.14), (6.15), (6.18) e (6.19) em função das curvaturas ($w_{,ij}^*$) e deformações (ε_{kij}^{*2D}) fundamentais do sub-domínio Ω_1 , onde está o ponto de colocação. Assim, considerando-se as equações (3.8) e (3.8.b), e ainda, as seguintes relações:

$$\varepsilon_{kij}^{**2D} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}_2} \varepsilon_{kij}^{*2D} \quad (6.20.a)$$

$$\varepsilon_{kij}^{***2D} = \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}_3} \varepsilon_{kij}^{*2D} \quad (6.20.b)$$

as equações (6.14), (6.15), (6.18) e (6.19) resultam em:

$$\int_{\Omega_2} \varepsilon_{kij}^{*2D} N_{ij} d\Omega = \frac{\bar{E}_2}{\bar{E}_1} \left[\int_{\Omega_2} N_{kij}^* \varepsilon_{ij}^{2D} d\Omega - \int_{\Omega_2} c_2 N_{kij}^* w_{,ij} d\Omega \right] \quad (6.21)$$

$$- \int_{\Omega_2} c_2 w_{,ij}^* N_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_2} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega = \frac{D_2}{D_1} \int_{\Omega_2} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad (6.22)$$

$$\int_{\Omega_3} \varepsilon_{kij}^{*2D} N_{ij} d\Omega = \frac{\bar{E}_3}{\bar{E}_1} \left[\int_{\Omega_3} N_{kij}^* \varepsilon_{ij}^{2D} d\Omega - \int_{\Omega_3} c_3 N_{kij}^* w_{,ij} d\Omega \right] \quad (6.23)$$

$$- \int_{\Omega_3} c_3 w_{,ij}^* N_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_3} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega = \frac{D_3}{D_1} \int_{\Omega_3} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad (6.24)$$

Observe que nas expressões anteriores, as relações de rigidez e de \bar{E} multiplicam as integrais que envolvem os deslocamentos reais, pois ao fazer-se a integração por partes, pretende-se eliminar as forças de superfície nas interfaces, tendo-se apenas deslocamentos ao longo das mesmas.

Agora se deve somar as expressões (6.21), (6.16) e (6.23) para se obter a expressão do problema de chapa relativo à placa inteira, assim como as equações (6.22), (6.17) e (6.24) para se obter a expressão do problema de flexão. Desse modo, considerando-se um caso genérico de uma placa composta de N_s sub-regiões tais expressões resultam em:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^{*2D} N_{ij} d\Omega = \sum_{s=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_s}{\bar{E}} \left[\int_{\Omega_s} N_{kij}^* \varepsilon_{ij}^{2D} d\Omega - \int_{\Omega_s} c_s N_{kij}^* w_{,ij} d\Omega \right] \quad i, k, j = 1, 2 \quad (6.25.a)$$

$$- \sum_{s=1}^{N_s} \int_{\Omega_s} c_s w_{,ij}^* N_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} w_{,ij}^* m_{ij} d\Omega = \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Omega_s} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad (6.25.b)$$

sendo c_s calculado em relação à sub-região de referência e D , \bar{E} , $w_{,ij}^*$, ε_{kij}^{*2D} referentes à sub-região onde está o ponto de colocação.

Deve-se então fazer a integração por partes das equações (6.25), a fim de escrevê-las em função de integrais ao longo do contorno externo da placa e das interfaces, para que, desse modo, seja possível a aplicação do método dos elementos de contorno. Considerando-se inicialmente a equação (6.25.a) e aplicando-se a mesma à placa da figura (6.1), designa-se por U_I o primeiro termo do seu segundo membro:

$$U_I = \frac{\bar{E}_1}{\bar{E}} \int_{\Omega_1} \varepsilon_{ij}^{2D} N_{kij}^* d\Omega + \frac{\bar{E}_2}{\bar{E}} \int_{\Omega_2} \varepsilon_{ij}^{2D} N_{kij}^* d\Omega + \frac{\bar{E}_3}{\bar{E}} \int_{\Omega_3} \varepsilon_{ij}^{2D} N_{kij}^* d\Omega \quad k, i, j = 1, 2 \quad (6.26)$$

Integrando-se a equação (6.26) por partes em relação à x_j , obtém-se:

$$\begin{aligned}
 U_1 = & \frac{\bar{E}_1}{E} \int_{\Gamma_1+\Gamma_{13}} u_i N_{kij}^* n_j d\Gamma + \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Gamma_2+\Gamma_{23}} u_i N_{kij}^* n_j d\Gamma + \frac{\bar{E}_3}{E} \int_{\Gamma_3+\Gamma_{31}+\Gamma_{32}} u_i N_{kij}^* n_j d\Gamma + \\
 & - \frac{\bar{E}_1}{E} \int_{\Omega_1} u_i N_{kij,j}^* d\Omega - \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Omega_2} u_i N_{kij,j}^* d\Omega - \frac{\bar{E}_3}{E} \int_{\Omega_3} u_i N_{kij,j}^* d\Omega \quad (6.27)
 \end{aligned}$$

Considerando-se a definição de força de superfície p_i , dada em (2.28), tem-se a seguinte relação na interface entre as sub-regiões Ω_1 e Ω_3 : $p_{ki(\Gamma_{13})}^* = -p_{ki(\Gamma_{31})}^*$, pois o valor do co-seno diretor n_j muda de sinal. Pode-se ainda dizer que $\int_{\Gamma_{13}} d\Gamma = \int_{\Gamma_{31}} d\Gamma$ e $u_{i(\Gamma_{13})} = u_{i(\Gamma_{31})}$.

Logo: $\int_{\Gamma_{31}} u_i N_{kij}^* n_j d\Gamma = - \int_{\Gamma_{13}} u_i N_{kij}^* n_j d\Gamma$ (o mesmo se aplica à interface que separa Ω_2 e Ω_3).

Assim, a equação (6.27) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 U_1 = & \frac{\bar{E}_1}{E} \int_{\Gamma_1+\Gamma_{13}} u_i p_{ki}^* d\Gamma + \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Gamma_2+\Gamma_{23}} u_i p_{ki}^* d\Gamma - \frac{\bar{E}_3}{E} \int_{-\Gamma_3+\Gamma_{13}+\Gamma_{23}} u_i p_{ki}^* d\Gamma + \\
 & - \frac{\bar{E}_1}{E} \int_{\Omega_1} u_i N_{kij,j}^* d\Omega - \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Omega_2} u_i N_{kij,j}^* d\Omega - \frac{\bar{E}_3}{E} \int_{\Omega_3} u_i N_{kij,j}^* d\Omega \quad (6.28)
 \end{aligned}$$

No problema de placas tratado nesse trabalho, as incógnitas são calculadas segundo as direções n e s que são, respectivamente, as direções normal e tangencial ao contorno ou interface. Com isso, a fim de se escrever a equação (6.28) em função das variáveis no sistema (n,s) , considere a seguinte transformação de coordenadas:

$$u_i = u_n n_i + u_s s_i \quad i=1, 2 \quad (6.29)$$

Por outro lado, a solução fundamental do problema de chapa é obtida a partir da equação de equilíbrio (2.37), substituindo-se $b_i(p)$ pela função Delta de Dirac, ou seja:

$$N_{kij,j}^* + \delta(q,p) \delta_{ki} = 0 \quad i, j, k=1, 2 \quad (6.30)$$

Substituindo-se (6.30) e (6.29) em (6.28), esta resulta em:

$$\begin{aligned}
 U_1 = & \frac{\bar{E}_1}{E} \int_{\Gamma_1+\Gamma_{13}} (u_n p_{ki}^* n_i + u_s p_{ki}^* s_i) d\Gamma + \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Gamma_2+\Gamma_{23}} (u_n p_{ki}^* n_i + u_s p_{ki}^* s_i) d\Gamma \\
 & - \frac{\bar{E}_3}{E} \int_{-\Gamma_3+\Gamma_{13}+\Gamma_{23}} (u_n p_{ki}^* n_i + u_s p_{ki}^* s_i) d\Gamma + \frac{\bar{E}_1}{E} \int_{\Omega_1} (u_n \delta(q, p) \delta_{ki} n_i + u_s \delta(q, p) \delta_{ki} s_i) d\Omega + \\
 & + \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Omega_2} (u_n \delta(q, p) \delta_{ki} n_i + u_s \delta(q, p) \delta_{ki} s_i) d\Omega + \\
 & + \frac{\bar{E}_3}{E} \int_{\Omega_3} (u_n \delta(q, p) \delta_{ki} n_i + u_s \delta(q, p) \delta_{ki} s_i) d\Omega \quad i, k=m, l \quad (6.31)
 \end{aligned}$$

sendo m e l os vetores que indicam as direções das cargas fundamentais, que no caso desse trabalho, são, respectivamente, as direções n e s , referentes ao contorno ou interface do ponto q , onde se aplica a solução fundamental.

Considerando-se as equações das forças p_n e p_s , dadas por (2.29) e (2.30), obtém-se:

$$\begin{aligned}
 U_1 = & \frac{\bar{E}_1}{E} \int_{\Gamma_1+\Gamma_{13}} (u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*) d\Gamma + \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Gamma_2+\Gamma_{23}} (u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*) d\Gamma + \\
 & - \frac{\bar{E}_3}{E} \int_{-\Gamma_3+\Gamma_{13}+\Gamma_{23}} (u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*) d\Gamma + \frac{\bar{E}_1}{E} \int_{\Omega_1} (u_n \delta(q, p) \delta_{kn} + u_s \delta(q, p) \delta_{ks}) d\Omega + \\
 & + \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Omega_2} (u_n \delta(q, p) \delta_{kn} + u_s \delta(q, p) \delta_{ks}) d\Omega + \frac{\bar{E}_3}{E} \int_{\Omega_3} (u_n \delta(q, p) \delta_{kn} + u_s \delta(q, p) \delta_{ks}) d\Omega \quad (6.32)
 \end{aligned}$$

Entretanto, a função delta de Dirac tem a seguinte propriedade:

$$\int_{\Omega_\infty} \phi(p)_i \delta(q, p) \delta_{ki} d\Omega_\infty = \begin{cases} 0 & \text{se } p \neq q \\ \phi(q)_k & \text{se } p \equiv q \end{cases} \quad (6.33)$$

Portanto, a equação (6.32) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 U_1 = & u_k(q) + \sum_{i=1}^3 \frac{\bar{E}_i}{E} \int_{\Gamma} (u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*) d\Gamma + \frac{(\bar{E}_2 - \bar{E}_3)}{E} \int_{\Gamma_{23}} (u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*) d\Gamma + \\
 & + \frac{(\bar{E}_1 - \bar{E}_3)}{E} \int_{\Gamma_{13}} (u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*) d\Gamma \quad k=m, l \quad (6.34)
 \end{aligned}$$

De uma forma geral, considerando-se N_s sub-regiões e N_{int} interfaces, tem-se que:

$$U_1 = u_k(q) + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma} (u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*) d\Gamma + \sum_{j=1}^{N_{int}} \frac{(\bar{E}_j - \bar{E}_{pa})}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j} (u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*) d\Gamma \quad (6.35)$$

onde: \bar{E}_j se refere ao \bar{E} da sub-região Ω_j que contém a interface Γ_j no sentido da qual se faz a integração (ver figura 3.3); \bar{E}_{pa} corresponde ao \bar{E} da sub-região adjacente à Ω_j ; Γ é o contorno externo da placa.

Seja agora o primeiro membro da equação (6.25.a). Integrando-o por partes e considerando-se a definição de força de superfície, dada em (2.28), obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega &= \int_{\Omega_1} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_2} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_3} \varepsilon_{kij}^* N_{ij} d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma_1+\Gamma_{13}} u_{ki}^* p_i d\Gamma + \int_{\Gamma_3+\Gamma_{31}+\Gamma_{32}} u_{ki}^* p_i d\Gamma + \int_{\Gamma_2+\Gamma_{23}} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega_1} u_{ki}^* N_{ij,j} d\Omega + \\ &\quad - \int_{\Omega_2} u_{ki}^* N_{ij,j} d\Omega - \int_{\Omega_3} u_{ki}^* N_{ij,j} d\Omega \quad i, j, k = m, l \quad (6.36) \end{aligned}$$

Considerando-se que $\int_{\Gamma_{13}} u_{ki}^* d\Gamma = \int_{\Gamma_{31}} u_{ki}^* d\Gamma$, $\int_{\Gamma_{23}} u_{ki}^* d\Gamma = \int_{\Gamma_{32}} u_{ki}^* d\Gamma$, $p_{i(\Gamma_{13})} = -p_{i(\Gamma_{31})}$ e

$p_{i(\Gamma_{23})} = -p_{i(\Gamma_{32})}$, as integrais sobre as interfaces se anulam, ao se fazer o equilíbrio das forças de superfície. Com isso, considerando-se as equações (2.37) e (6.29), a equação (6.36) resulta em:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^{*2D} N_{ij} d\Omega &= \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* N_{ij,j} d\Omega = \\ &= \int_{\Gamma} (u_{kn}^* p_i n_i + u_{ks}^* p_i s_i) d\Gamma + \int_{\Omega_b} (u_{kn}^* n_i + u_{ks}^* s_i) b_i d\Omega_b \quad (6.37) \end{aligned}$$

Substituindo-se (2.29) e (2.30) em (6.37), tem-se que:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^{*2D} N_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} (u_{kn}^* p_n + u_{ks}^* p_s) d\Gamma + \int_{\Omega_b} (u_{kn}^* b_n + u_{ks}^* b_s) d\Omega_b \quad (6.38)$$

Seja agora o segundo termo do segundo membro da equação (6.25.a). A fim de facilitar a dedução, considerar-se-á um caso particular de uma placa composta apenas de duas sub-regiões. Assim, integrando-se por partes em relação à x_j , designando-se tal termo por U_2 e considerando-se a equação (2.28), chega-se à:

$$U_2 = \sum_{s=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_s c_s}{\bar{E}} \int_{\Omega_s} N_{kij}^* w_{,ij} d\Omega = \frac{\bar{E}_1 c_1}{\bar{E}} \left[\int_{\Gamma_1} p_{ki}^* w_{,i} d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_{12}} p_{ki}^* w_{,i} d\Gamma_{12} - \int_{\Omega_1} N_{kij}^* w_{,i} d\Omega_1 \right] + \frac{\bar{E}_2 c_2}{\bar{E}} \left[\int_{\Gamma_2} p_{ki}^* w_{,i} d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_{21}} p_{ki}^* w_{,i} d\Gamma_{21} - \int_{\Omega_2} N_{kij}^* w_{,i} d\Omega_2 \right] \quad i, j, k=m, l \quad (6.39)$$

Levando-se em conta a equação de equilíbrio (6.30) e a propriedade da função delta de Dirac, dada em (6.33), pode-se dizer que:

$$- \int_{\Omega_s} c_s(p) w_{,i}(p) N_{kij}^*(q, p) d\Omega = \begin{cases} 0 & \text{se } q \neq p \\ c(q) w_{,k}(q) & \text{se } q \equiv p \end{cases} \quad (6.40)$$

Na interface, têm-se as seguintes relações entre os esforços fundamentais e deslocamentos reais: $w_{,i(\Gamma_{12})} = w_{,i(\Gamma_{21})}$, $p_{ki(\Gamma_{12})} = -p_{ki(\Gamma_{21})}$. Além disso, tem-se que a rotação $w_{,i}$ pode ser escrita em função das rotações em relação aos eixos n e s , como está definido em (3.20). Desse modo, considerando-se as equações (2.29), (2.30), (3.20) e (6.40) a equação (6.39) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$U_2 = c(q) w_{,k}(q) + \sum_{i=1}^2 \frac{\bar{E}_i c_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma_i} (p_{kn}^* w_{,n} + p_{ks}^* w_{,s}) d\Gamma + \frac{(\bar{E}_1 c_1 - \bar{E}_2 c_2)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_{12}} (p_{kn}^* w_{,n} + p_{ks}^* w_{,s}) d\Gamma \quad (6.41)$$

De forma genérica, pode-se escrever que:

$$U_2 = c(q) w_{,k}(q) + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i c_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma} (p_{kn}^* w_{,n} + p_{ks}^* w_{,s}) d\Gamma +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_{int}} \frac{(\bar{E}_j c_j - \bar{E}_{pa} c_{pa})}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j} (p_{kn}^* w_{,n} + p_{ks}^* w_{,s}) d\Gamma_j \quad k=m, l \quad (6.42)$$

Logo, substituindo-se (6.42), (6.38) e (6.35) em (6.25.a), chega-se à expressão para o problema bidimensional de uma placa sujeita à flexão composta:

$$\begin{aligned} [-c(q)w_{,k}(q) + u_k(q)] &= - \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma} (u_n(P)p_{kn}^*(q,P) + u_s(P)p_{ks}^*(q,P)) d\Gamma + \\ &- \sum_{j=1}^{N_{int}} \frac{(\bar{E}_j - \bar{E}_{pa})}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j} (u_n(P)p_{kn}^*(q,P) + u_s(P)p_{ks}^*(q,P)) d\Gamma_j + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma} c_i [p_{kn}^*(q,P)w_{,n}(P) + \\ &+ p_{ks}^*(q,P)w_{,s}(P)] d\Gamma + \sum_{j=1}^{N_{int}} \frac{(\bar{E}_j c_j - \bar{E}_{pa} c_{pa})}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j} (p_{kn}^*(q,P)w_{,n}(P) + p_{ks}^*(q,P)w_{,s}(P)) d\Gamma_j + \\ &+ \int_{\Gamma} (u_{kn}^*(q,P)p_n(P) + u_{ks}^*(q,P)p_s(P)) d\Gamma + \int_{\Omega_b} (u_{kn}^*(q,p)b_n(p) + u_{ks}^*(q,p)b_s(p)) d\Omega \quad (6.43) \end{aligned}$$

Seja agora a equação (6.25.b) relativa ao problema de flexão. As parcelas que envolvem os momentos real e fundamental já foram desenvolvidas para o caso de flexão simples e apresentadas no capítulo 3 (equações 3.24 e 2.26). Assim, integrando-se tais parcelas por partes duas vezes, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} m_{ij}(p)w_{,ij}^*(q,p) d\Omega &= - \int_{\Gamma} (V_n(p)w^*(q,p) - M_n(p)w_{,n}^*(q,p)) d\Gamma(p) + \\ &- \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(p)w_{ci}^*(q,p) - \int_{\Omega_g} (g(p)w^*(q,p)) d\Omega_g(p) \quad (6.44) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Omega_s} m_{ij}^*(q,p)w_{,ij}(p) d\Omega &= -w(q) - \sum_{i=1}^{N_{c3}} \frac{D_i}{D} R_{ci}^*(q,p)w_{ci}(p) + \\ &+ \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \sum_{i=1}^{N_{c1} + N_{c2}} R_{cj}^* w_{ci} + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{D_i}{D} \int_{\Gamma} \left(M_n^*(q,p) \frac{\partial w}{\partial n}(p) - V_n^*(q,p)w(p) \right) d\Gamma(p) + \\ &+ \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \left(M_n^*(q,p) \frac{\partial w}{\partial n}(p) - V_n^*(q,p)w(p) \right) d\Gamma_j(p) \quad (6.45) \end{aligned}$$

onde os tipos de cantos estão definidos na figura (3.3).

Por fim, seja U o primeiro termo do primeiro membro da equação (6.25.b) do problema de flexão, função do esforço normal N_{ij} . Aplicando-se tal expressão a uma placa composta de duas sub-regiões, para facilitar a dedução, e integrando-se por partes em relação à \mathbf{x}_j , tem-se:

$$U = \left[\int_{\Gamma_1} c_1 N_{ij} n_j w_{,i}^* d\Gamma_1 + \int_{\Gamma_{12}} c_1 N_{ij} n_j w_{,i}^* d\Gamma_{12} - \int_{\Omega_1} c_1 N_{ij,j} w_{,i}^* d\Omega_1 \right] +$$

$$+ \left[\int_{\Gamma_2} c_2 N_{ij} n_j w_{,i}^* d\Gamma_2 + \int_{\Gamma_{21}} c_2 N_{ij} n_j w_{,i}^* d\Gamma_{21} - \int_{\Omega_2} c_2 N_{ij,j} w_{,i}^* d\Omega_2 \right] \quad i, j, = 1, 2 \quad (6.46)$$

Na interface, tem-se que $w_{,i(\Gamma_{12})}^* = w_{,i(\Gamma_{21})}^*$, $p_{i(\Gamma_{12})} = -p_{i(\Gamma_{21})}$. Assim, escrevendo-se (6.46) em função dos esforços e deslocamentos no sistema \mathbf{n} e \mathbf{s} , considerando-se a equação de equilíbrio (2.37) e generalizando para um caso de N_s sub-regiões, chega-se à:

$$U = \sum_{i=1}^{N_s} c_i \int_{\Gamma_i} [p_n w_{,n}^* + p_s w_{,s}^*] d\Gamma_i + \sum_{i=1}^{N_{int}} (c_i - c_{pa}) \int_{\Gamma_i} [p_n w_{,n}^* + p_s w_{,s}^*] d\Gamma_i +$$

$$- \sum_{i=1}^{N_s} \int_{\Omega_i} c_i [b_n w_{,n}^* + b_s w_{,s}^*] d\Omega_i \quad (6.47)$$

Somando-se as equações (6.44), (6.45) e (6.47), a equação de flexão é dada por:

$$w(q) = \sum_{i=1}^{N_s} \frac{D_i}{D} \int_{\Gamma} \left(M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) - V_n^*(q, P) w(P) \right) d\Gamma(P) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_j} \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \left(M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) - V_n^*(q, P) w(P) \right) d\Gamma_j(P) +$$

$$- \sum_{i=1}^{N_{e3}} \frac{D^{(i)}}{D} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) - \left(\frac{D_j - D_{pa}}{D} \right) \sum_{i=1}^{N_{e1} + N_{e2}} R_{ci}^*(q, P) w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) w_{ci}^*(q, P) +$$

$$+ \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{i=1}^{N_s} c_i \int_{\Gamma_i} [p_n(P) w_{,n}^*(q, P) +$$

$$+ p_s(P) w_{,s}^*(q, P)] d\Gamma_i + \sum_{j=1}^{N_{int}} (c_j - c_{pa}) \int_{\Gamma_j} [p_n(P) w_{,n}^*(q, P) + p_s(P) w_{,s}^*(q, P)] d\Gamma_j +$$

$$+ \int_{\Omega_g} (g(p)w^*(q,p))d\Omega_g(p) - \sum_{i=1}^{N_s} c_i \int_{\Omega_i} [b_n(p)w_{,n}^*(q,p) + b_s(p)w_{,s}^*(q,p)]d\Omega_i \quad (6.48)$$

As equações (6.43) e (6.48) referentes, respectivamente, ao problema bidimensional e de flexão da placa sujeita à flexão composta, podem também ser obtidas da seguinte maneira: a partir do primeiro teorema de Betti deduz-se a equação integral do problema da placa em sub-regiões sujeita à flexão simples e também a equação do problema bidimensional, onde cada sub-região é representada por sua superfície média. Em seguida, faz-se o equilíbrio de forças e deslocamentos na superfície de referência, a fim de obterem-se as equações da placa sujeita à flexão composta. A fim de simplificar a dedução, as equações integrais serão deduzidas para uma placa com duas sub-regiões e depois elas serão generalizadas para um caso qualquer.

A equação do problema bidimensional pode ser obtida a partir da expressão (6.25.a), fazendo-se $c_s=0$. Admitindo-se que o ponto de colocação esteja em Ω_I e fazendo-se a integração por partes, de forma semelhante ao que foi feito para obter-se a equação (6.43), pode-se dizer que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} u(p)_i \delta(q,p) \delta_{ki} d\Omega_1 = & - \int_{\Gamma_1+\Gamma_{12}} (u_n^1(P)p_{kn}^*(q,P) + u_s^1(P)p_{ks}^*(q,P))d\Gamma + \\ & - \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Gamma_2+\Gamma_{21}} (u_n^2(P)p_{kn}^*(q,P) + u_s^2(P)p_{ks}^*(q,P))d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u_{kn}^*(q,P)p_n^1(P) + u_{ks}^*(q,P)p_s^1(P))d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_2} (u_{kn}^*(q,P)p_n^2(P) + u_{ks}^*(q,P)p_s^2(P))d\Gamma + \int_{\Omega_b} (u_{kn}^*(q,p)b_n(p) + u_{ks}^*(q,p)b_s(p))d\Omega \quad (6.49) \end{aligned}$$

onde u_k^s p_k^s são, respectivamente, o deslocamento e força de superfície, na direção k , da superfície média da sub-região s .

Adota-se como superfície de referência uma superfície qualquer, não coincidente com as superfícies médias de Ω_I e Ω_2 . Para que se possa fazer o equilíbrio na superfície de referência, deve-se escrever os deslocamentos reais da superfície média u_i^s de uma sub-região s em função daqueles da superfície de referência u_i^r . Como foi visto no capítulo 2, quando se representa a placa pela sua superfície média, a parcela do deslocamento u_i^s devido à flexão, dado pela equação (2.3) é nulo, pois nesse caso $x_3=0$. Na superfície de referência essa parcela é igual a: $\Delta u_i^F = c_s w_{,i}$, pois $x_3=-c_s$ e portanto, o deslocamento é

dados por $u_i^r = u_i^s + c_s w_{,i}$. Com isso, o deslocamento da superfície média é escrito em função daquele da superfície de referência do seguinte modo:

$$u_i^s = u_i^r - c_s w_{,i} \quad (6.50)$$

Substituindo-se a equação (6.50) em (6.49) e designando-se $u_i^r = u_i$, chega-se à:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} [u(p)_i - c_s(p)w_{,i}(p)]\delta(q,p)\delta_{ki}d\Omega_1 = & - \int_{\Gamma_1+\Gamma_{12}} [(u_n(P) - c_1 w_{,n}(P))p_{kn}^*(q,P) + \\ & + (u_s(P) - c_1 w_{,s}(P))p_{ks}^*(q,P)]d\Gamma - \frac{\bar{E}_2}{E} \int_{\Gamma_2+\Gamma_{21}} [(u_n(P) - c_2 w_{,n}(P))p_{kn}^*(q,P) + \\ & + (u_s(P) - c_2 w_{,s}(P))p_{ks}^*(q,P)]d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (u_{kn}^*(q,P)p_n^1(P) + u_{ks}^*(q,P)p_s^1(P))d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_2} (u_{kn}^*(q,P)p_n^2(P) + u_{ks}^*(q,P)p_s^2(P))d\Gamma + \int_{\Omega_1} (u_{kn}^*(q,p)b_n(p) + u_{ks}^*(q,p)b_s(p))d\Omega \quad (6.51) \end{aligned}$$

Considere a propriedade da função delta de Dirac, dada em (6.33) e que o esforço p_i não muda ao longo da espessura, ou seja, $p_i^s = p_i^r$. Considere, ainda, que $\int_{\Gamma_{12}} d\Gamma = \int_{\Gamma_{21}} d\Gamma$ e as

seguintes relações entre as forças fundamentais e os deslocamentos reais na interface:

$$\begin{aligned} p_{kn(\Gamma_{12})}^* = p_{kn(\Gamma_{21})}^*, \quad p_{ks(\Gamma_{12})}^* = p_{ks(\Gamma_{21})}^*, \quad u_{n(\Gamma_{12})} = -u_{n(\Gamma_{21})}, \quad u_{s(\Gamma_{12})} = -u_{s(\Gamma_{21})}, \\ w_{,n(\Gamma_{12})} = -w_{,n(\Gamma_{21})} \text{ e } w_{,s(\Gamma_{12})} = -w_{,s(\Gamma_{21})}. \end{aligned}$$

Desse modo, a equação (6.51) resulta em:

$$\begin{aligned} [-c(q)w_{,k}(q) + u_k(q)] = & - \sum_{i=1}^2 \frac{\bar{E}_i}{E} \int_{\Gamma} (u_n(P)p_{kn}^*(q,P) + u_s(P)p_{ks}^*(q,P))d\Gamma + \\ & - \frac{(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)}{E} \int_{\Gamma_{12}} (u_n(P)p_{kn}^*(q,P) + u_s(P)p_{ks}^*(q,P))d\Gamma + \sum_{i=1}^2 \frac{\bar{E}_i}{E} \int_{\Gamma} c_i [p_{kn}^*(q,P)w_{,n}(P) + \\ & + p_{ks}^*(q,P)w_{,s}(P)]d\Gamma + \frac{(\bar{E}_1 c_1 - \bar{E}_2 c_2)}{E} \int_{\Gamma_{12}} (p_{kn}^*(q,P)w_{,n}(P) + p_{ks}^*(q,P)w_{,s}(P))d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma} (u_{kn}^*(q,P)p_n(P) + u_{ks}^*(q,P)p_s(P))d\Gamma + \int_{\Omega_1} (u_{kn}^*(q,p)b_n(p) + u_{ks}^*(q,p)b_s(p))d\Omega \quad (6.52) \end{aligned}$$

Generalizando-se a equação (6.52) para um caso em que se tenham N_s sub-regiões, obtém-se a equação (6.43).

Seja agora a equação da placa sujeita à flexão simples, que pode ser obtida fazendo-se $c_s=0$ na equação (6.25.b). Integrando-se por partes, como foi feito para obter-se a equação (3.27), a mesma pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 w(q) = & \sum_{i=1}^2 \frac{D_i}{D} \int_{\Gamma} \left(M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) + M_{ns}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial s}(P) - Q_n^*(q, P) w(P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & \int_{\Gamma_{12}} \left(\frac{D_1 - D_2}{D} \right) \left[M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) + M_{ns}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial s}(P) - Q_n^*(q, P) w(P) \right] d\Gamma \\
 & + \int_{\Gamma_2} \left(Q_n(P) w^*(q, P) - M_n^2(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) - M_{ns}^2(P) \frac{\partial w^*}{\partial s}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & + \int_{\Gamma_{21}} \left(Q_n(P) w^*(q, P) - M_n^2(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) - M_{ns}^2(P) \frac{\partial w^*}{\partial s}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & + \int_{\Gamma_1} \left(Q_n(P) w^*(q, P) - M_n^1(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) - M_{ns}^1(P) \frac{\partial w^*}{\partial s}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \int_{\Gamma_{12}} \left[Q_n(P) w^*(q, P) + \right. \\
 & \left. - M_n^1(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) - M_{ns}^1(P) \frac{\partial w^*}{\partial s}(q, P) \right] d\Gamma(P) + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g \quad (6.53)
 \end{aligned}$$

onde os esforços são referentes à superfície média de cada sub-região.

Note-se que os deslocamentos w , w_s e w_n e o esforço Q_n não mudam ao longo da espessura, porém os momentos em relação à superfície de referência, devem ser acrescidos de um ΔM_k , resultante da transferência de ponto de aplicação da carga p_k . Com isso, na superfície de referência, os momentos são dados por:

$$M_n^r = M_n^i + p_n c_i \quad (6.54.a)$$

$$M_{ns}^r = M_{ns}^i + p_s c_i \quad (6.54.b)$$

onde M_n^r é o momento na superfície de referência e M_n^i aquele na superfície média da sub-região i .

Logo, os momentos na superfície média são escritos em função daqueles na superfície de referência, do seguinte modo:

$$M_n^i = M_n^r - p_n c_i \quad (6.55.a)$$

$$M_{ns}^i = M_{ns}^r - p_s c_i \quad (6.55.b)$$

Substituindo-se as equações (6.55) em (6.53) e denominando-se $M_n^r = M_n$ e $M_{ns}^r = M_{ns}$, chega-se à:

$$\begin{aligned} w(q) = & \sum_{i=1}^2 \frac{D_i}{D} \int_{\Gamma} \left(M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) + M_{ns}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial s}(P) - Q_n^*(q, P) w(P) \right) d\Gamma(P) + \\ & + \int_{\Gamma_{12}} \left(\frac{D_1 - D_2}{D} \right) \left[M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) + M_{ns}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial s}(P) - Q_n^*(q, P) w(P) \right] d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma_2} \left(Q_n(P) w^*(q, P) - (M_n(P) - c_2 p_n(P)) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) - (M_{ns}(P) - c_2 p_s(P)) \frac{\partial w^*}{\partial s}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \\ & + \int_{\Gamma_{21}} \left(Q_n(P) w^*(q, P) - (M_n(P) - c_2 p_n(P)) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) - (M_{ns}(P) - c_2 p_s(P)) \frac{\partial w^*}{\partial s}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \\ & + \int_{\Gamma_1} \left(Q_n(P) w^*(q, P) - (M_n(P) - c_1 p_n(P)) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) - (M_{ns}(P) - c_1 p_s(P)) \frac{\partial w^*}{\partial s}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \\ & + \int_{\Gamma_{12}} \left(Q_n(P) w^*(q, P) - (M_n(P) - c_1 p_n(P)) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) - (M_{ns}(P) - c_1 p_s(P)) \frac{\partial w^*}{\partial s}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \\ & + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(q, p) d\Omega_g(p) \end{aligned} \quad (6.56)$$

Na interface, têm-se as seguintes relações para as forças reais e deslocamentos fundamentais: $w_{(\Gamma_{12})}^* = w_{(\Gamma_{21})}^*$, $w_{,n(\Gamma_{12})}^* = -w_{,n(\Gamma_{21})}^*$, $w_{,s(\Gamma_{12})}^* = -w_{,s(\Gamma_{21})}^*$, $Q_{n(\Gamma_{12})} = -Q_{n(\Gamma_{21})}$, $M_{ns(\Gamma_{12})} = M_{ns(\Gamma_{21})}$, $M_{n(\Gamma_{12})} = M_{n(\Gamma_{21})}$, $p_{n(\Gamma_{12})} = p_{n(\Gamma_{21})}$ e $p_{s(\Gamma_{12})} = p_{s(\Gamma_{21})}$. Com isso, ao se fazer o equilíbrio das forças na interface, os termos que envolvem os esforços Q_n , M_n e M_{ns} se cancelam, restando apenas os termos de p_n e p_s , ou seja:

$$\begin{aligned} w(q) = & \sum_{i=1}^2 \frac{D_i}{D} \int_{\Gamma} \left(M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) + M_{ns}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial s}(P) - Q_n^*(q, P) w(P) \right) d\Gamma(P) + \\ & + \int_{\Gamma_{12}} \left(\frac{D_1 - D_2}{D} \right) \left[M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) + M_{ns}^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial s}(P) - Q_n^*(q, P) w(P) \right] d\Gamma + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Gamma_2} \left(Q_n(P)w^*(q,P) - (M_n(P) - c_2 p_n(P)) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) - (M_{ns}(P) - c_2 p_s(P)) \frac{\partial w^*}{\partial s}(q,P) \right) d\Gamma(P) + \\
 & + (c_1 - c_2) \int_{\Gamma_{12}} \left(p_n(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) + p_s(P) \frac{\partial w^*}{\partial s}(q,P) \right) d\Gamma(P) + \int_{\Gamma_1} \left[Q_n(P)w^*(q,P) - (M_n(P) + \right. \\
 & \left. - c_1 p_n(P)) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q,P) - (M_{ns}(P) - c_1 p_s(P)) \frac{\partial w^*}{\partial s}(q,P) \right] d\Gamma + \int_{\Omega_g} g(p)w^*(q,p) d\Omega_g(p) \quad (6.57)
 \end{aligned}$$

Introduzindo-se, então, as variáveis força cortante equivalente e reação de canto, como foi feito para obter-se a equação (3.27), se chega à equação (6.48).

6.4 SOLUÇÃO FUNDAMENTAL DO PROBLEMA DE CHAPA

Para ter-se a solução das equações integrais, deve-se conhecer as expressões fundamentais do problema de chapa, pois aquelas referentes ao problema de placa já foram apresentadas no item (3.3), onde foi visto que será usado o sistema de coordenadas cilíndricas (ver figura 3.5). A solução fundamental adotada nesse trabalho foi desenvolvida por Lord Kelvin (ver LOVE (1944)) e representa o efeito de uma carga concentrada unitária aplicada na direção k em um ponto q de um domínio infinito. Para o problema tridimensional, a solução fundamental $u_{ki}^*(q, p)$ é obtida de tal forma que satisfaça a equação diferencial de equilíbrio, dada em (2.36), onde substitui-se a força f_i pela função delta de Dirac, ou seja:

$$u_{i,jj}^* + \frac{u_{j,ij}^*}{1-2\nu} + \frac{\delta(q,p)\delta_{ki}}{G} = 0 \quad (6.58)$$

Através da solução da equação (6.58), obtém-se a seguinte expressão do deslocamento fundamental para o caso tridimensional:

$$u_{ki}^*(q, p) = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,i} r_{,k} \right] \quad k,i=1,2,3 \quad (6.59)$$

A solução fundamental para o caso bidimensional pode ser obtida integrando-se a expressão (6.59) ao longo de x_3 , no intervalo de $-\infty$ a $+\infty$. Desse modo, desprezando-se um movimento de corpo rígido igual a infinito, obtém-se:

$$u_{ki}^*(q, p) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} [-(3-4\nu)\ln r \delta_{ki} + r_{,i} r_{,k}] \quad k, i=1,2 \quad (6.60)$$

Para estado plano de tensão, que é o caso tratado aqui, deve-se substituir em (6.60), assim como em todas as expressões apresentadas a seguir nesse item, ν por $\nu' = \nu/(1+\nu)$.

No entanto, no caso tratado nesse trabalho a solução fundamental deve ser tal que satisfaça a equação de equilíbrio (2.39), ou seja:

$$u_{i,jj}^* + \frac{u_{j,ij}^*}{1-2\nu} + \frac{\delta(q, p)\delta_{ki}}{G} = 0 \quad (6.61)$$

Nesse caso, a solução fundamental resulta em:

$$u_{ki}^*(q, p) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} [-(3-4\nu)\ln r \delta_{ki} + r_{,i} r_{,k}] \quad (6.62)$$

A força de superfície fundamental, é obtida a partir de $p_{ki}^* = N_{kij}^* n_j$, sendo que N_{kij}^* pode ser escrito em função das derivadas dos deslocamentos, como está definido na equação (2.38). Com isso, derivando-se a expressão (6.62), chega-se à $p_{ki}^*(q, p)$:

$$p_{ki}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ [(1-2\nu)\delta_{ik} + 2r_{,i} r_{,k}] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)[n_i r_{,k} - n_k r_{,i}] \right\} \quad k, i=1,2 \quad (6.63)$$

Considerando-se as expressões (2.29) a (2.32), obtêm-se:

$$p_{kn}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \left[2(1-2\nu)n_k + 2r_{,k} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \frac{\partial r}{\partial n} - (1-2\nu)r_{,k} \right\} \quad (6.64)$$

$$p_{ks}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ [(1-2\nu)s_k + 2r_{,i} s_i r_{,k}] \frac{\partial r}{\partial n} + (1-2\nu)n_k r_{,i} s_i \right\} \quad (6.65)$$

$$u_{kn}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[-(3-4\nu)\ln r n_k + \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} \right] \quad (6.66)$$

$$u_{ks}^* = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} [-(3-4\nu)\ln r s_k + r_{,i} s_i r_{,k}] \quad (6.67)$$

sendo que no caso desse trabalho, $k=l,m$.

A deformação fundamental é obtida a partir da expressão (2.25) e é dada por:

$$\varepsilon_{kij}^{*2D} = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)\bar{G}r} \left[(1-2\nu)(r_{,j} \delta_{ki} + r_{,i} \delta_{kj}) - r_{,k} \delta_{ij} + 2r_{,k} r_{,i} r_{,j} \right] \quad k,i,j=1,2 \quad (6.68)$$

6.5 CÁLCULO DA ROTAÇÃO w_s

A equação (6.43) do problema bidimensional está escrita em função dos deslocamentos u_n , u_s , w_n e w_s , sendo u_n , u_s relativos ao problema de membrana e w_n e w_s relativos ao problema de flexão. Porém, a equação (6.48) de flexão exhibe somente os deslocamentos w e w_n , assim é conveniente eliminar a variável w_s escrevendo-a em função dos deslocamentos w dos nós do elemento ao qual o ponto q pertence. Após a discretização do contorno e das interfaces em elementos, o deslocamento w é aproximado através das funções quadráticas dadas nas equações (4.11). Derivando-se essas funções em relação à direção s e considerando-se a equação (4.1), obtém-se o deslocamento w_s em função dos deslocamentos w^1 , w^2 e w^3 :

$$\frac{\partial w}{\partial s}(Q) = \frac{2}{L} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_1(Q)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_2(Q)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \phi_3(Q)}{\partial \xi} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{array} \right\} \quad (6.69)$$

onde $\frac{\partial \phi_1}{\partial \xi} = -\frac{1}{2}(1-2\xi)$; $\frac{\partial \phi_2}{\partial \xi} = -2\xi$; $\frac{\partial \phi_3}{\partial \xi} = \frac{1}{2}(1+2\xi)$.

Portanto, para obter-se a solução do problema de placas em sub-regiões e sujeita à flexão composta, nos pontos sobre o contorno externo, deve-se escrever uma equação (6.43) de u_k ($k=l,m$) e duas equações (6.48) do deslocamento w . Nos pontos sobre as interfaces, devem ser escritas: uma equação de w , uma de w_m , uma de u_k ($k=l,m$) e outra de p_k . E, ainda, nos cantos, deve-se escrever uma equação de w .

6.6 EQUAÇÕES INTEGRAIS DOS DESLOCAMENTOS (u_s , u_n) PARA PONTOS DO CONTORNO OU INTERFACE

Para obterem-se as incógnitas do problema da placa com sub-regiões, deve-se escrever a equação de u_k ($k=l,m$), relativa ao problema bidimensional, para cada ponto do

contorno e das interfaces. Contudo, na equação (6.43), têm-se singularidades do tipo $(1/r)$, nas integrações dos núcleos p_{ks}^* e p_{kn}^* ao longo do elemento ao qual o ponto Q pertence. A fim de eliminarem-se tais singularidades, procede-se da mesma maneira descrita no item (3.4) para as equações do problema de flexão simples. A equação, nesse caso, é dada por:

$$\begin{aligned}
 K_k(Q)u_k(Q) + K_{wk}(Q)w_{,k}(Q) = & - \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{E} \int_{\Gamma} (u_n(P)p_{kn}^*(Q,P) + u_s(P)p_{ks}^*(Q,P))d\Gamma + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{int}} \frac{(\bar{E}_j - \bar{E}_{pa})}{E} \int_{\Gamma_j} (u_n(P)p_{kn}^*(Q,P) + u_s(P)p_{ks}^*(Q,P))d\Gamma_j + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{E} \int_{\Gamma} c_i (p_{kn}^*(Q,P)w_{,n}(P) + p_{ks}^*(Q,P)w_{,s}(P))d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma} (u_{kn}^*(Q,P)p_n(P) + u_{ks}^*(Q,P)p_s(P))d\Gamma + \int_{\Omega} (u_{kn}^*(Q,p)b_n(p) + u_{ks}^*(Q,p)b_s(p))d\Omega + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{int}} \frac{(\bar{E}_j c_j - \bar{E}_{pa} c_{pa})}{E} \int_{\Gamma_j} (p_{kn}^*(Q,P)w_{,n}(P) + p_{ks}^*(Q,P)w_{,s}(P))d\Gamma_j \quad k=m, l \quad (6.70)
 \end{aligned}$$

A seguir serão determinadas as constantes $K_k(Q)$ e $K_{wk}(Q)$ referentes a dois casos: ponto singular Q no contorno externo ou ao longo de uma interface, porém não coincidente com canto. Deve-se observar que as constantes $K(Q)$, no caso de se escrever a equação (6.48) de flexão para um ponto sobre o contorno, interface ou coincidente com um canto, são as mesmas deduzidas no item (3.4).

Considere inicialmente o caso em que Q esteja sobre uma interface (ver figura 3.7), admitindo-se $\bar{E}_1 = \bar{E}$, $\vec{m} = \vec{n}_1$ e $\vec{l} = \vec{s}_1$.

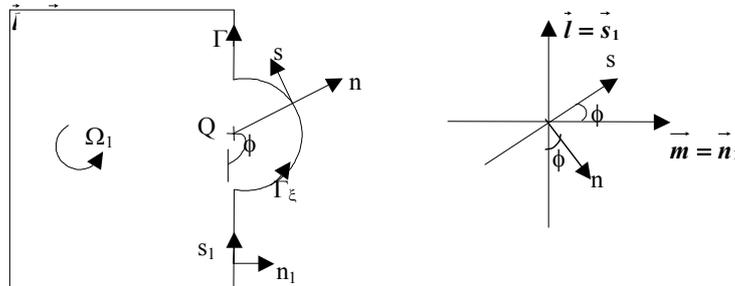


FIGURA 6.2 – Sistema de Coordenadas no Contorno Circular Infinitesimal

No contorno circular do subdomínio Ω_l da figura (3.7) tem-se: $\vec{r} = \vec{n}$, logo $\partial r / \partial n = 1$ e as direções dos vetores n e s em relação ao sistema (n_1, s_1) , são dadas por:

$\vec{s} = \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{Bmatrix}$ e $\vec{n} = \begin{Bmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \end{Bmatrix}$ (ver figura 6.2). No entanto, ao longo do contorno circular do

subdomínio Ω_2 , tem-se $\partial r / \partial n = -1$, pois $\vec{r} = -\vec{n}$ e as direções de \mathbf{n} e \mathbf{s} em relação ao sistema (n_1, s_1) são as seguintes: $\vec{n} = \begin{Bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{Bmatrix}$ e $\vec{s} = \begin{Bmatrix} -\cos(\phi) \\ -\sin(\phi) \end{Bmatrix}$. No contorno circular do

subdomínio Ω_1 da figura (3.7) tem-se: $\vec{r} = \vec{n}$, logo $\partial r / \partial n = 1$ e as direções dos vetores \mathbf{n} e \mathbf{s} em relação ao sistema (n_1, s_1) , são dadas por: $\vec{s} = \begin{Bmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{Bmatrix}$ e $\vec{n} = \begin{Bmatrix} \sin \phi \\ -\cos \phi \end{Bmatrix}$ (ver figura 6.2).

No entanto, ao longo do contorno circular do subdomínio Ω_2 , tem-se $\partial r / \partial n = -1$, pois $\vec{r} = -\vec{n}$ e as direções de \mathbf{n} e \mathbf{s} em relação ao sistema (n_1, s_1) são as seguintes: $\vec{n} = \begin{Bmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{Bmatrix}$

e $\vec{s} = \begin{Bmatrix} -\cos(\phi) \\ -\sin(\phi) \end{Bmatrix}$. As expressões (6.64) e (6.65), dos esforços \mathbf{p}_{ks}^* e \mathbf{p}_{kn}^* , nos subdomínios

Ω_1 e Ω_2 , são, respectivamente, iguais a:

$$\mathbf{p}_{kn(\Omega_1)}^* = -\frac{(3-2\nu)\mathbf{n}_k}{4\pi(1-\nu)\xi} \quad (6.71)$$

$$\mathbf{p}_{ks(\Omega_1)}^* = -\frac{(1-2\nu)\mathbf{s}_k}{4\pi(1-\nu)\xi} \quad (6.72)$$

$$\mathbf{p}_{kn(\Omega_2)}^* = \frac{(3-2\nu)\mathbf{n}_k}{4\pi(1-\nu)\xi} \quad (6.73)$$

$$\mathbf{p}_{ks(\Omega_2)}^* = \frac{(1-2\nu)\mathbf{s}_k}{4\pi(1-\nu)\xi} \quad (6.74)$$

Considere que a direção da carga fundamental \mathbf{k} seja igual a \mathbf{m} . Nesse caso, as expressões dos esforços \mathbf{p}_{ks}^* e \mathbf{p}_{kn}^* são iguais para os subdomínios Ω_1 e Ω_2 e resultam em:

$$\mathbf{p}_{kn}^* = -\frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \sin \phi \quad (6.75)$$

$$\mathbf{p}_{ks}^* = -\frac{(1-2\nu)\mathbf{s}_k}{4\pi(1-\nu)\xi} \cos \phi \quad (6.76)$$

Com isso, as integrais sobre os contornos circulares de Ω_1 e Ω_2 são dadas por:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\bar{E}_1}{E} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi_1}} \left[(c_1 w_{,n}(P) - u_n(P)) p_{kn}^*(Q, P) + (c_1 w_{,s}(P) - u_s(P)) p_{ks}^*(Q, P) \right] d\Gamma_{\xi} = \\ &= -\frac{\bar{E}_1}{E} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi_1}} \left[(c_1 w_{,n}(P) - u_n(P)) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \sin \phi + (c_1 w_{,s}(P) - u_s(P)) \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \cos \phi \right] d\Gamma_{\xi} \\ \\ B &= \frac{\bar{E}_2}{E} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi_2}} \left[(c_2 w_{,n}(P) - u_n(P)) p_{kn}^*(Q, P) + (c_2 w_{,s}(P) - u_s(P)) p_{ks}^*(Q, P) \right] d\Gamma_{\xi} = \\ &= -\frac{\bar{E}_1}{E} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi_2}} \left[(c_2 w_{,n}(P) - u_n(P)) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \sin \phi + (c_2 w_{,s}(P) - u_s(P)) \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \cos \phi \right] d\Gamma_{\xi} \end{aligned}$$

Substituindo-se nas expressões anteriores $w_{,n}(P)$ por $(w_{,n}(P) + w_{,n}(Q) - w_{,n}(Q))$; $w_{,s}(P)$ por $(w_{,s}(P) + w_{,s}(Q) - w_{,s}(Q))$; $u_n(P)$ por $(u_n(P) + u_n(Q) - u_n(Q))$; $u_s(P)$ por $(u_s(P) + u_s(Q) - u_s(Q))$ e considerando-se válida a continuidade dos deslocamentos, as expressões A e B podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{\bar{E}_1}{E} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi_1}} \left[(c_1 w_{,n}(Q) - u_n(Q)) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \sin \phi + (c_1 w_{,s}(Q) - u_s(Q)) \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \cos \phi \right] d\Gamma_{\xi} \\ B &= -\frac{\bar{E}_1}{E} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi_2}} \left[(c_2 w_{,n}(Q) - u_n(Q)) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \sin \phi + (c_2 w_{,s}(Q) - u_s(Q)) \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \cos \phi \right] d\Gamma_{\xi} \end{aligned}$$

Note-se que os deslocamentos u_n , u_s , $w_{,n}$ e $w_{,s}$ são variáveis ao longo do contorno circular, portanto mantidos no integrando. A fim de se escrever a parcela B em função de uma integral sobre o contorno Γ_{ξ_1} , considere as seguintes relações entre os deslocamentos dos subdomínios Ω_1 e Ω_2 :

$$u_n(\Gamma_{\xi_1}) = -u_n(\Gamma_{\xi_2}) \quad (6.77.a)$$

$$u_s(\Gamma_{\xi_1}) = -u_s(\Gamma_{\xi_2}) \quad (6.77.b)$$

$$w_{,n}(\Gamma_{\xi_1}) = -w_{,n}(\Gamma_{\xi_2}) \quad (6.78.a)$$

$$w_{,s}(\Gamma_{\xi_1}) = -w_{,s}(\Gamma_{\xi_2}) \quad (6.78.b)$$

Substituindo-se as relações (6.77) e (6.78) na integral **B** e somando-a à integral **A**, obtém-se:

$$A + B = -\frac{(\bar{E}_1 c_1 - \bar{E}_2 c_2)}{\bar{E}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{1\xi}} \left[w_{,n}(Q) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \text{sen } \phi + w_{,s}(Q) \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \text{cos } \phi \right] d\Gamma_{1\xi} + \frac{(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)}{\bar{E}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{1\xi}} \left[u_n(Q) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \text{sen } \phi + u_s(Q) \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \text{cos } \phi \right] d\Gamma_{1\xi} \quad (6.79)$$

Escrevendo-se as variáveis u_m , u_s , w_n e w_s em função de suas componentes no sistema (m,l) e do ângulo ϕ (ver figura 6.2) as seguintes relações são obtidas:

$$w_{,s} = s_m w_{,m} + s_l w_{,l} = \text{cos}(\phi) w_{,m} + \text{sen}(\phi) w_{,l} \quad (6.80)$$

$$w_{,n} = n_m w_{,m} + n_l w_{,l} = \text{sen}(\phi) w_{,m} - \text{cos}(\phi) w_{,l} \quad (6.81)$$

$$u_s = s_m u_m + s_l u_l = \text{cos}(\phi) u_m + \text{sen}(\phi) u_l \quad (6.82)$$

$$u_n = n_m u_m + n_l u_l = \text{sen}(\phi) u_m - \text{cos}(\phi) u_l \quad (6.83)$$

Substituindo-se as relações (6.80) a (6.83) em (6.79) e considerando-se que $d\Gamma = \xi d\phi$ no contorno circular, chega-se à:

$$A + B = -\frac{(\bar{E}_1 c_1 - \bar{E}_2 c_2)}{\bar{E} 4\pi(1-\nu)} \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ (3-2\nu) w_{,m}(Q) \int_0^\pi \text{sen}^2 \phi d\phi - (3-2\nu) w_{,l}(Q) \int_0^\pi \text{sen } \phi \text{cos } \phi d\phi + (1-2\nu) w_{,m}(Q) \int_0^\pi \text{cos}^2 \phi d\phi + (1-2\nu) w_{,l}(Q) \int_0^\pi \text{sen } \phi \text{cos } \phi d\phi \right\} + \frac{(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)}{\bar{E} 4\pi(1-\nu)} \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ (3-2\nu) u_m(Q) \int_0^\pi \text{sen}^2 \phi d\phi - (3-2\nu) u_l(Q) \int_0^\pi \text{sen } \phi \text{cos } \phi d\phi + (1-2\nu) u_m(Q) \int_0^\pi \text{cos}^2 \phi d\phi + (1-2\nu) u_l(Q) \int_0^\pi \text{sen } \phi \text{cos } \phi d\phi \right\} \quad (6.84)$$

Fazendo-se a integração em ϕ , obtém-se:

$$A + B = -\frac{(\bar{E}_1 c_1 - \bar{E}_2 c_2)}{2\bar{E}} w_{,m}(Q) + \frac{(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)}{2\bar{E}} u_m(Q) \quad (6.85)$$

Considerando-se que $\bar{E} = \bar{E}_1$, as constantes $K_m(Q)$ e $K_{wm}(Q)$ são dadas por:

$$K_m(Q) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\bar{E}_2}{\bar{E}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\bar{E}_2}{\bar{E}} \right) \quad (6.86)$$

$$K_{wm}(Q) = -\frac{1}{2} \left[c(Q) + \frac{\bar{E}_2 c_2}{\bar{E}} \right] \quad (6.87)$$

Admitindo-se a direção da carga fundamental k igual a l , as expressões das forças de superfície p_{ks}^* e p_{kn}^* , dadas por (6.71) a (6.74), ficam iguais para os subdomínios Ω_1 e Ω_2 e resultam em:

$$p_{kn}^* = \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \cos \phi \quad (6.88)$$

$$p_{ks}^* = -\frac{(1-2\nu)s_k}{4\pi(1-\nu)\xi} \sin \phi \quad (6.89)$$

Levando-se em conta as expressões (6.88) e (6.89), as integrais sobre os contornos circulares dos subdomínios Ω_1 e Ω_2 podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\bar{E}_1}{E} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi_1}} \left[(c_1 w_{,n}(P) - u_n(P)) p_{kn}^*(Q, P) + (c_1 w_{,s}(P) - u_s(P)) p_{ks}^*(Q, P) \right] d\Gamma_{\xi} = \\ &= \frac{\bar{E}_1}{E} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi_1}} \left[(c_1 w_{,n}(Q) - u_n(Q)) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \cos \phi - (c_1 w_{,s}(Q) - u_s(Q)) \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \sin \phi \right] d\Gamma_{\xi} \\ B &= \frac{\bar{E}_2}{E} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi_2}} \left[(c_2 w_{,n}(P) - u_n(P)) p_{kn}^*(Q, P) + (c_2 w_{,s}(P) - u_s(P)) p_{ks}^*(Q, P) \right] d\Gamma_{\xi} = \\ &= \frac{\bar{E}_1}{E} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\xi_2}} \left[(c_2 w_{,n}(Q) - u_n(Q)) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \cos \phi - (c_2 w_{,s}(Q) - u_s(Q)) \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)\xi} \sin \phi \right] d\Gamma_{\xi} \end{aligned}$$

Considerando-se as relações (6.77) e (6.78) e fazendo $d\Gamma = \varepsilon d\phi$, obtém-se:

$$A + B = \frac{(\bar{E}_1 c_1 - \bar{E}_2 c_2)}{\bar{E}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\phi} \left[w_{,n}(Q) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \cos \phi - w_{,s}(Q) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \sin \phi \right] d\phi +$$

$$+ \frac{(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)}{\bar{E}} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\phi} \left[-u_n(Q) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \cos \phi + u_s(Q) \frac{(3-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \sin \phi \right] d\phi \quad (6.90)$$

Substituindo-se as relações (6.80) a (6.83) em (6.90), essa resulta em:

$$\begin{aligned} A + B = & \frac{(\bar{E}_1 c_1 - \bar{E}_2 c_2)}{\bar{E} 4\pi(1-\nu)} \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ (3-2\nu) w_{,m}(Q) \int_0^{\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi - (3-2\nu) w_{,l}(Q) \int_0^{\pi} \cos^2 \phi d\phi + \right. \\ & \left. - (1-2\nu) w_{,m}(Q) \int_0^{\pi} \cos \phi \sin \phi d\phi + (1-2\nu) w_{,l}(Q) \int_0^{\pi} \sin^2 \phi d\phi \right\} + \\ & + \frac{(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)}{\bar{E} 4\pi(1-\nu)} \lim_{\xi \rightarrow 0} \left\{ - (3-2\nu) u_m(Q) \int_0^{\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi + (3-2\nu) u_l(Q) \int_0^{\pi} \cos^2 \phi d\phi + \right. \\ & \left. + (1-2\nu) u_m(Q) \int_0^{\pi} \cos \phi \sin \phi d\phi + (1-2\nu) u_l(Q) \int_0^{\pi} \sin^2 \phi d\phi \right\} \quad (6.91) \end{aligned}$$

Integrando-se em ϕ chega-se à:

$$A + B = - \frac{(\bar{E}_1 c_1 - \bar{E}_2 c_2)}{2\bar{E}} w_{,l}(Q) + \frac{(\bar{E}_1 - \bar{E}_2)}{2\bar{E}} u_l(Q) \quad (6.92)$$

obtendo-se:

$$K_l(Q) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\bar{E}_2}{\bar{E}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\bar{E}_2}{\bar{E}} \right) \quad (6.93)$$

$$K_{wl}(Q) = -\frac{1}{2} \left[c(Q) + \frac{\bar{E}_2 c_2}{\bar{E}} \right] \quad (6.94)$$

Seja agora o caso do ponto singular Q no contorno externo. As constantes são obtidas da mesma forma mostrada para o ponto Q sobre a interface, considerando-se porém que o subdomínio Ω_2 não existe. Logo, elas são obtidas a partir das equações (6.86) e (6.87), para $k=m$, fazendo-se $\bar{E}_2 = 0$, ou das equações (6.93) e (6.94), se $k=l$, obtendo-se:

$$K_m(Q) = K_l(Q) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (6.95)$$

$$K_{wm}(Q) = K_{wl}(Q) = -c(Q) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -c(Q) \frac{1}{2} \quad (6.96)$$

6.7 MOMENTOS EM PONTOS DO CONTORNO

Nos pontos internos, os momentos são calculados a partir dos valores das curvaturas, cujas equações são obtidas derivando-se duas vezes a equação (6.48), representação integral dos deslocamentos transversais w . Nos pontos do contorno, as componentes dos momentos M_{11} , M_{22} e M_{12} são obtidas por diferenças finitas, ou seja, através dos valores de deslocamentos e forças de superfície do elemento ao qual o ponto pertence, como foi feito para a flexão simples no item (4.10). Como foi visto no item (6.3), o momento resultante na superfície média de uma sub-região Ω_s é dado por:

$$m_{ij(\Omega_s)} = m_{ij} - N_{ij}c_s \quad (6.97)$$

onde: m_{ij} é dado pela equação (2.9), N_{ij} pela equação (2.27) e o c_s foi definido na figura (6.1).

Seja a figura (4.7). Inicialmente, serão obtidos os momentos \bar{M}_{ij} em relação ao sistema local de coordenadas (\bar{x}_1, \bar{x}_2) do elemento, e então através da matriz de transformação de coordenadas, obtêm-se os momentos M_{ij} no sistema global (X_1, X_2) . A parcela obtida no item (4.10), que é função da curvatura (equação 2.9), é dada por:

$$\bar{M}_{11} = M_n \quad (6.98)$$

$$\bar{M}_{12} = -\frac{2D(1-\nu)}{L} \left[\left(-\frac{1}{2} + \xi \right) \frac{\partial w^1}{\partial n} - 2\xi \frac{\partial w^2}{\partial n} + \left(\frac{1}{2} + \xi \right) \frac{\partial w^3}{\partial n} \right] \quad (6.99)$$

$$\bar{M}_{22} = \frac{D(1-\nu^2)}{L^2} [-4w^1 + 8w^2 - 4w^3] + \nu M_n \quad (6.100)$$

A segunda parcela é devido às forças de superfície de membrana. Os esforços $\bar{N}_{11} = p_n$ e $\bar{N}_{12} = p_s$ foram determinados com a resolução do sistema. O esforço \bar{M}_{22} , sendo interno, não é modificado pela parcela do esforço normal. Logo, os momentos resultantes são dados por:

$$\bar{M}_{11} = M_n - p_n c_s \quad (6.101)$$

$$\bar{M}_{22} = \frac{D(1-\nu^2)}{L^2} [-4w^1 + 8w^2 - 4w^3] + \nu M_n \quad (6.102)$$

$$\bar{M}_{12} = -\frac{2D(1-\nu)}{L} \left[\left(-\frac{1}{2} + \xi \right) \frac{\partial w^1}{\partial n} - 2\xi \frac{\partial w^2}{\partial n} + \left(\frac{1}{2} + \xi \right) \frac{\partial w^3}{\partial n} \right] - p_s c_s \quad (6.103)$$

Finalmente, através da matriz de transformação do sistema local para o sistema global de coordenadas, dada pela equação (4.89), obtêm-se os momentos \tilde{M}_{ij} .

6.8 MODELO ALTERNATIVO PARA ANÁLISE LINEAR DO PAVIMENTO

6.8.1 Introdução

Nesse item será desenvolvida a formulação da placa sujeita à flexão composta, onde as vigas são representadas por seus eixos médios. Esse modelo é obtido a partir daquele no qual as variáveis são definidas ao longo do contorno externo e interfaces, apresentado no item (6.3) e será análogo àquele apresentado no capítulo 5, para a placa sujeita à flexão simples. A seguir serão apresentadas as equações integrais, a obtenção do sistema de equações algébricas que permitem a obtenção das incógnitas no contorno externo e eixos de vigas, as propriedades da matriz \mathbf{H} e exemplos numéricos.

6.8.2 Equações Integrais

A fim de se escreverem as variáveis das interfaces em função daquelas do eixo da viga, deve-se fazer aproximações para os deslocamentos de membrana de maneira análoga ao que foi feito para os deslocamentos de flexão (equações 5.2 e 5.3). Com isso, considere a figura (5.1), onde se adotam as seguintes aproximações para os deslocamentos de membrana:

$$\mathbf{u}_{i(\Gamma_e)} = \mathbf{u}_{i(\text{eixo})} + \left(\mathbf{u}_{i,n_{ve}} \right)_{(\text{eixo})} \mathbf{a}_{ve} \quad i = n, s \quad (6.104.a)$$

$$\mathbf{u}_{i(\Gamma_{ve}^-)} = \mathbf{u}_{i(\text{eixo})} - \left(\mathbf{u}_{i,n_{ve}} \right)_{(\text{eixo})} \mathbf{a}_{ve} \quad i = n, s \quad (6.104.b)$$

$$\mathbf{u}_{i(\Gamma_{vi}^+)} = - \left[\mathbf{u}_{i(\text{eixo})} + \left(\mathbf{u}_{i,n_{vi}} \right)_{(\text{eixo})} \mathbf{a}_{vi} \right] \quad i = n, s \quad (6.104.c)$$

$$\mathbf{u}_{i(\Gamma_{vi}^-)} = \mathbf{u}_{i(\text{eixo})} - \left(\mathbf{u}_{i,n_{vi}} \right)_{(\text{eixo})} \mathbf{a}_{vi} \quad i = n, s \quad (6.104.d)$$

$$\left(\mathbf{u}_{i,k} \right)_{vi} = \left(\mathbf{u}_{i,k} \right)_{\Gamma_{vi}^+} = \left(\mathbf{u}_{i,k} \right)_{\Gamma_{vi}^-} \quad i, k = n, s \quad (6.105.a)$$

$$\left(\mathbf{u}_{i,k} \right)_{ve} = \left(\mathbf{u}_{i,k} \right)_{\Gamma_e} = \left(\mathbf{u}_{i,k} \right)_{\Gamma_{ve}^-} \quad i, k = n, s \quad (6.105.b)$$

Substituindo-se as equações (6.104), na equação (6.43) para a placa da figura (5.1) obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 u_k(q) - c(q)w_{,k}(q) = & -\sum_{i=1}^4 \frac{\bar{E}_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma - \Gamma_e} (u_n p_{kn}^* + u_s p_{ks}^*) d\Gamma + \\
 & + \frac{(\bar{E}^+ - \bar{E}_{vi})}{\bar{E}} \int_{\Gamma_{vi}^+} \left[\left(u_{n(eixo)} + \frac{\partial u_{n(eixo)}}{\partial n_{vi}} a_{vi} \right) p_{kn}^* + \left(u_{s(eixo)} + \frac{\partial u_{s(eixo)}}{\partial n_{vi}} a_{vi} \right) p_{ks}^* \right] d\Gamma + \\
 & - \frac{(\bar{E}^- - \bar{E}_{vi})}{\bar{E}} \int_{\Gamma_{vi}^-} \left[\left(u_{n(eixo)} - \frac{\partial u_{n(eixo)}}{\partial n_{vi}} a_{vi} \right) p_{kn}^* + \left(u_{s(eixo)} - \frac{\partial u_{s(eixo)}}{\partial n_{vi}} a_{vi} \right) p_{ks}^* \right] d\Gamma + \\
 & - \frac{(\bar{E}^- - \bar{E}_{ve})}{\bar{E}} \int_{\Gamma_{ve}^-} \left[\left(u_{n(eixo)} - \frac{\partial u_{n(eixo)}}{\partial n_{ve}} a_{ve} \right) p_{kn}^* + \left(u_{s(eixo)} - \frac{\partial u_{s(eixo)}}{\partial n_{ve}} a_{ve} \right) p_{ks}^* \right] d\Gamma + \\
 & - \frac{(\bar{E}_{ve})}{\bar{E}} \int_{\Gamma_e} \left[\left(u_{n(eixo)} + \frac{\partial u_{n(eixo)}}{\partial n_{ve}} a_{ve} \right) p_{kn}^* + \left(u_{s(eixo)} + \frac{\partial u_{s(eixo)}}{\partial n_{ve}} a_{ve} \right) p_{ks}^* \right] d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma} (u_{kn}^* p_n + u_{ks}^* p_s) d\Gamma + \int_{\Omega} (u_{kn}^* b_n + u_{ks}^* b_s) d\Omega + \sum_{i=1}^4 \frac{\bar{E}_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma - \Gamma_e} c_i (p_{kn}^* w_{,n} + p_{ks}^* w_{,s}) d\Gamma + \\
 & + \frac{(\bar{E}^+ c^+ - \bar{E}_{vi} c_{vi})}{\bar{E}} \int_{\Gamma_{vi}^+} (-p_{kn}^* w_{,n_{vi}} + p_{ks}^* w_{,s_{vi}^+}) d\Gamma + \frac{(\bar{E}^- c^- - \bar{E}_{vi} c_{vi})}{\bar{E}} \int_{\Gamma_{vi}^-} (p_{kn}^* w_{,n_{vi}} + p_{ks}^* w_{,s_{vi}^-}) d\Gamma \\
 & + \frac{(\bar{E}^- c^- - \bar{E}_{ve} c_{ve})}{\bar{E}} \int_{\Gamma_{ve}^-} (p_{kn}^* w_{,n_{ve}} + p_{ks}^* w_{,s_{ve}^-}) d\Gamma + \frac{\bar{E}_{ve} c_{ve}}{\bar{E}} \int_{\Gamma_e} (p_{kn}^* w_{,n_{ve}} + p_{ks}^* w_{,s_{ve}}) d\Gamma \quad (6.106)
 \end{aligned}$$

onde $\bar{E}^- = \bar{E}(\Omega^-)$ e $\bar{E}^+ = \bar{E}(\Omega^+)$ são, respectivamente, o valor de \bar{E} à esquerda e à direita da viga (orientando-se no sentido de declaração dos elementos); ao longo de um contorno ou interface genéricos Γ_i , a variável $w_{,s}$ é dada pela equação (6.69), o contorno Γ , onde se definem os pontos de colocação, corresponde ao contorno externo sem vigas mais os eixos de vigas externas.

Generalizado-se para o caso em que se tenham N_{ve} vigas externas e N_{vi} vigas internas, obtêm-se:

$$K_k(Q)u_k(Q) + K_{wk}(Q)w_{,k}(Q) = -\sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma_s / \text{vigas}} (u_n(P)p_{kn}^*(Q,P) + u_s(P)p_{ks}^*(Q,P)) d\Gamma +$$

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left[- \frac{(\bar{E}_j^+ - \bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^+} \left[\left(\mathbf{u}_{n(j)}(\mathbf{p}) + \frac{\partial \mathbf{u}_{n(j)}}{\partial \mathbf{n}_j}(\mathbf{p}) \mathbf{a}_j \right) \mathbf{p}_{kn}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \left(\mathbf{u}_{s(j)}(\mathbf{p}) + \frac{\partial \mathbf{u}_{s(j)}}{\partial \mathbf{n}_j}(\mathbf{p}) \mathbf{a}_j \right) \mathbf{p}_{ks}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \right] d\Gamma + \right. \\
 & + \left. \frac{(\bar{E}_j^- - \bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^-} \left[\left(\mathbf{u}_{n(j)}(\mathbf{p}) - \frac{\partial \mathbf{u}_{n(j)}}{\partial \mathbf{n}_j}(\mathbf{p}) \mathbf{a}_j \right) \mathbf{p}_{kn}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \left(\mathbf{u}_{s(j)}(\mathbf{p}) - \frac{\partial \mathbf{u}_{s(j)}}{\partial \mathbf{n}_j}(\mathbf{p}) \mathbf{a}_j \right) \mathbf{p}_{ks}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \right] d\Gamma \right] + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left[\frac{(\bar{E}_j^- - \bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^-} \left[\left(\mathbf{u}_{n(j)}(\mathbf{p}) - \frac{\partial \mathbf{u}_{n(j)}}{\partial \mathbf{n}_j}(\mathbf{p}) \mathbf{a}_j \right) \mathbf{p}_{kn}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \left(\mathbf{u}_{s(j)}(\mathbf{p}) - \frac{\partial \mathbf{u}_{s(j)}}{\partial \mathbf{n}_j}(\mathbf{p}) \mathbf{a}_j \right) \mathbf{p}_{ks}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \right] d\Gamma + \right. \\
 & + \left. \frac{(\bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_e} \left[\left(\mathbf{u}_{n(j)}(\mathbf{p}) + \frac{\partial \mathbf{u}_{n(j)}}{\partial \mathbf{n}_j}(\mathbf{p}) \mathbf{a}_j \right) \mathbf{p}_{kn}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) + \left(\mathbf{u}_{s(j)}(\mathbf{p}) + \frac{\partial \mathbf{u}_{s(j)}}{\partial \mathbf{n}_j}(\mathbf{p}) \mathbf{a}_j \right) \mathbf{p}_{ks}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \right] d\Gamma \right] + \\
 & + \int_{\Gamma} \left(\mathbf{u}_{kn}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \mathbf{p}_n(\mathbf{P}) + \mathbf{u}_{ks}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \mathbf{p}_s(\mathbf{P}) \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \left(\mathbf{u}_{kn}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{p}) \mathbf{b}_n(\mathbf{p}) + \mathbf{u}_{ks}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{p}) \mathbf{b}_s(\mathbf{p}) \right) d\Omega \\
 & + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i \mathbf{c}_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma_{s/vigas}} \left(\mathbf{p}_{kn}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \mathbf{w}_{,n}(\mathbf{P}) + \mathbf{p}_{ks}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \mathbf{w}_{,s}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left[\frac{\bar{E}_j \mathbf{c}_j}{\bar{E}} \int_{\Gamma_e} \left(\mathbf{p}_{kn}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \mathbf{w}_{,n(j)}(\mathbf{p}) + \mathbf{p}_{ks}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \mathbf{w}_{,s(\Gamma_e)}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(\bar{E}_j^- \mathbf{c}_j^- - \bar{E}_j \mathbf{c}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^-} \left(\mathbf{p}_{kn}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \mathbf{w}_{,n(j)}(\mathbf{p}) + \mathbf{p}_{ks}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \mathbf{w}_{,s(\Gamma_j^-)}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma \right] + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left[\frac{(\bar{E}_j^+ \mathbf{c}_j^+ - \bar{E}_j \mathbf{c}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^+} \left(\mathbf{p}_{kn}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \mathbf{w}_{,n(j)}(\mathbf{p}) - \mathbf{p}_{ks}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \mathbf{w}_{,s(\Gamma_j^+)}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma + \right. \\
 & \quad \left. - \frac{(\bar{E}_j^- \mathbf{c}_j^- - \bar{E}_j \mathbf{c}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^-} \left(\mathbf{p}_{kn}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \mathbf{w}_{,n(j)}(\mathbf{p}) + \mathbf{p}_{ks}^*(\mathbf{Q}, \mathbf{P}) \mathbf{w}_{,s(\Gamma_j^-)}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma \right] \quad k=l, m \quad (6.107)
 \end{aligned}$$

onde $\mathbf{u}_{n(j)}$, $\mathbf{u}_{s(j)}$, $\mathbf{u}_{n(j)}$, $\mathbf{u}_{s(j)}$ e $\mathbf{w}_{,n(j)}$ são deslocamentos referentes ao eixo da viga j ; ao longo de um contorno ou interface genéricos Γ_i , as constantes $\mathbf{K}_k(\mathbf{Q})$, $\mathbf{K}_{wk}(\mathbf{Q})$ são dadas na tabela (6.1) e o contorno $\Gamma_{s/vigas}$ se refere ao contorno externo da placa sem vigas.

Tabela 6.1 Valores de $\mathbf{K}_k(\mathbf{Q})$ para a equação de deslocamento da chapa

$\mathbf{K}_k(\mathbf{Q})=1, \mathbf{K}_{wk}(\mathbf{Q})=-c(q)$	Para ponto interno ou sobre um eixo de viga ($k=m$ ou $k=l$)
$\mathbf{K}_k(\mathbf{Q})=0.5, \mathbf{K}_{wk}(\mathbf{Q})=-0.5c(q)$	Se \mathbf{Q} pertence ao contorno externo da placa.

Nesse modelo, não serão mais escritas equações sobre as interfaces, apenas sobre os eixos das vigas e nesse caso, \mathbf{Q} é um ponto interno. Note-se que na equação (6.107) surgiram as variáveis $\mathbf{u}_{n(j)}$ e $\mathbf{u}_{s(j)}$, para o problema de membrana. Assim, para obterem-se as

incógnitas do problema de chapa, sem considerar flexão, terá que se escrever uma equação (6.107) para cada ponto do contorno da placa sem vigas e quatro equações nos pontos referentes aos eixos das vigas: duas de deslocamentos, que são referentes à equação (6.107), e mais duas da derivada dos deslocamentos \mathbf{u}_n e \mathbf{u}_s .

Derivando-se a equação (6.107) em relação a uma coordenada genérica \mathbf{m} , obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial u_k}{\partial m}(\mathbf{q}) - \mathbf{c}(\mathbf{q}) \frac{\partial w_{,k}}{\partial m}(\mathbf{q}) = - \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma_s/vigas} \left(\mathbf{u}_n(\mathbf{P}) \frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) + \mathbf{u}_s(\mathbf{P}) \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \right) d\Gamma + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left[- \frac{(\bar{E}^+ - \bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^+} \left[\left(\mathbf{u}_{n(j)}(\mathbf{P}) + \frac{\partial \mathbf{u}_{n(j)}}{\partial n_j}(\mathbf{P}) \right) \frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) + \left(\mathbf{u}_{s(j)}(\mathbf{P}) + \frac{\partial \mathbf{u}_{s(j)}}{\partial n_j}(\mathbf{P}) \right) \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \right] d\Gamma + \right. \\
 & + \frac{(\bar{E}^- - \bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^-} \left[\left(\mathbf{u}_{n(j)}(\mathbf{P}) - \frac{\partial \mathbf{u}_{n(j)}}{\partial n_j}(\mathbf{P}) \right) \frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) + \left(\mathbf{u}_{s(j)}(\mathbf{P}) - \frac{\partial \mathbf{u}_{s(j)}}{\partial n_j}(\mathbf{P}) \right) \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \right] d\Gamma \left. + \right. \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left[\frac{(\bar{E}^- - \bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^-} \left[\left(\mathbf{u}_{n(j)}(\mathbf{P}) - \frac{\partial \mathbf{u}_{n(j)}}{\partial n_j}(\mathbf{P}) \right) \frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) + \left(\mathbf{u}_{s(j)}(\mathbf{P}) - \frac{\partial \mathbf{u}_{s(j)}}{\partial n_j}(\mathbf{P}) \right) \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \right] d\Gamma + \right. \\
 & + \frac{(\bar{E}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_e} \left[\left(\mathbf{u}_{n(j)}(\mathbf{P}) + \frac{\partial \mathbf{u}_{n(j)}}{\partial n_j}(\mathbf{P}) \right) \frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) + \left(\mathbf{u}_{s(j)}(\mathbf{P}) + \frac{\partial \mathbf{u}_{s(j)}}{\partial n_j}(\mathbf{P}) \right) \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \right] d\Gamma \left. + \right. \\
 & + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_{kn}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) p_n(\mathbf{P}) + \frac{\partial u_{ks}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) p_s(\mathbf{P}) \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_{kn}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) b_n(\mathbf{p}) + \frac{\partial u_{ks}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) b_s(\mathbf{p}) \right) d\Omega + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_i \mathbf{c}_i}{\bar{E}} \int_{\Gamma_s/vigas} \left(\frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) w_{,n}(\mathbf{P}) + \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) w_{,s}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left[\frac{\bar{E}_j \mathbf{c}_j}{\bar{E}} \int_{\Gamma_e} \left(\frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) w_{,n(j)}(\mathbf{P}) + \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) w_{,s(\Gamma_e)}(\mathbf{p}) \right) d\Gamma + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{(\bar{E}^- \mathbf{c}^- - \bar{E}_j \mathbf{c}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^-} \left(\frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) w_{,n(j)}(\mathbf{P}) + \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) w_{,s(\Gamma_j^-)}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma \right] + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left[\frac{(\bar{E}^+ \mathbf{c}^+ - \bar{E}_j \mathbf{c}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^+} \left(\frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) w_{,n(j)}(\mathbf{P}) - \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) w_{,s(\Gamma_j^+)}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma + \right. \\
 & \left. - \frac{(\bar{E}^- \mathbf{c}^- - \bar{E}_j \mathbf{c}_j)}{\bar{E}} \int_{\Gamma_j^-} \left(\frac{\partial p_{kn}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) w_{,n(j)}(\mathbf{p}) + \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) w_{,s(\Gamma_j^-)}(\mathbf{P}) \right) d\Gamma \right] \quad k=m,1 \quad (6.108)
 \end{aligned}$$

sendo que, \mathbf{m} (no esqueleto) é igual à direção da normal \mathbf{n}_j (no contorno) da viga \mathbf{j} ao qual o ponto pertence.

As expressões fundamentais da equação (6.108) são obtidas derivando-se as expressões (6.64) a (6.67) em relação à \mathbf{m} e são dadas por:

$$\frac{\partial u_{ks}^*}{\partial \mathbf{m}} = \frac{1}{8\pi\overline{G}(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)r_{,j} m_j s_k - r_{,k} (m_i s_i - 2r_{,i} s_i r_{,j} m_j) - m_k r_{,i} s_i \right] \quad (6.109)$$

$$\frac{\partial u_{kn}^*}{\partial \mathbf{m}} = \frac{1}{8\pi\overline{G}(1-\nu)r} \left[(3-4\nu)r_{,j} m_j n_k - r_{,k} (m_i n_i - 2r_{,i} n_i r_{,j} m_j) - m_k r_{,i} n_i \right] \quad (6.110)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{kn}^*}{\partial \mathbf{m}} = & -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ (r_{,i} n_i)^2 [8r_{,k} r_{,j} m_j - 2m_k] - 4r_{,k} r_{,i} n_i m_j n_j + \right. \\ & \left. + 2(1-2\nu)r_{,j} m_j [2r_{,i} n_i n_k - r_{,k}] + (1-2\nu)[-2m_i n_i n_k + m_k] \right\} \quad (6.111) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial \mathbf{m}} = & -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ 2r_{,k} r_{,i} s_i \left[4r_{,j} m_j \frac{\partial r}{\partial n} - m_i n_i \right] + 2(1-2\nu)r_{,j} m_j \left[r_{,i} s_i n_k + \frac{\partial r}{\partial n} s_k \right] + \right. \\ & \left. - 2 \frac{\partial r}{\partial n} [r_{,k} m_i s_i - m_k r_{,i} s_i] - (1-2\nu)[m_i n_i s_k + m_i s_i n_k] \right\} \quad (6.112) \end{aligned}$$

Observe que na equação (6.108), quando $\mathbf{k}=\mathbf{m}$, tem-se $\mathbf{w}_{,mm}(\mathbf{q})=0$, devido à aproximação constante que foi feita para o deslocamento $\mathbf{w}_{,n}$ na viga (ver equação 5.3). Porém, para $\mathbf{k}=\mathbf{l}$ a curvatura $\mathbf{w}_{,lm}(\mathbf{q}) = \mathbf{w}_{,ml}(\mathbf{q})$ não pode ser considerada nula, sendo a mesma escrita em função dos deslocamentos $\mathbf{w}_{,n}$ do elemento ao qual o ponto \mathbf{q} pertence, através das mesmas funções dadas na equação (6.69). Escrevendo-se a equação (6.108) para um ponto \mathbf{Q} do eixo, não haverá problemas de singularidades na integração dos esforços fundamentais, pois \mathbf{Q} é um ponto interno nesse caso. Porém, se fizer a integração dos deslocamentos fundamentais sobre o eixo das vigas externas, ter-se-ão singularidades do tipo $1/r$ nas integrais que envolvem as expressões (6.109) e (6.110). A determinação do termo livre é feita usando-se o mesmo procedimento descrito no item (5.5) para o caso da equação das curvaturas. Ao calcular tais termos para um ponto imediatamente antes do eixo e outro após o eixo, constata-se que há um salto no valor do deslocamento $\mathbf{u}_{k,m}$ ($k=l,m$), como ocorreu para a equação das curvaturas. Porém, devido às aproximações feitas nas vigas considerou-se tal deslocamento constante. Assim, para que essa aproximação constante fique compatível com a aplicação da carga, em cada contorno da viga, definido no sentido longitudinal da mesma, será aplicada metade da carga, ou seja:

$$\int_{\Gamma_{\text{eixo}}} \left(\frac{\partial u_{kn}^*}{\partial \mathbf{m}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) p_n(\mathbf{P}) + \frac{\partial u_{ks}^*}{\partial \mathbf{m}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) p_s(\mathbf{P}) \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_{\text{ve}}} \left(\frac{\partial u_{kn}^*}{\partial \mathbf{m}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \frac{p_n(\mathbf{P})}{2} + \frac{\partial u_{ks}^*}{\partial \mathbf{m}}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \frac{p_s(\mathbf{P})}{2} \right) d\Gamma +$$

$$+ \int_{\Gamma_e} \left(\frac{\partial u_{kn}^*}{\partial m}(q, P) \frac{p_n(P)}{2} + \frac{\partial u_{ks}^*}{\partial m}(q, P) \frac{p_s(P)}{2} \right) d\Gamma \quad (6.113)$$

Elimina-se, portanto, a singularidade que aparecia quando se considerava a carga aplicada sobre o eixo da viga externa. Essa modificação, admitindo-se uma aproximação para as cargas, foi feita também para a equação (6.107) do deslocamento u_k .

Deve-se agora obter as equações dos deslocamentos w (equação 6.48) e sua derivada $w_{,m}$, relativas ao problema de flexão, considerando-se o efeito de membrana. Para se reduzir adequadamente o número de graus de liberdade do problema, além das aproximações feitas para os deslocamentos (equações 5.2 e 5.3), as forças de superfície p_n e p_s ao longo das interfaces serão escritas em função das forças no eixo da viga. Considerando-se inicialmente que as forças estejam no sistema global (x_1, x_2) , como está representado na figura (6.3), as forças p_1 e p_2 das interfaces e que atuam na viga, são decompostas em duas parcelas:

$$p_i(\Gamma_e) = \frac{1}{2} p_i - \Delta p_i \quad i=1,2 \quad (6.114)$$

$$p_i(\Gamma_d) = \frac{1}{2} p_i + \Delta p_i \quad (6.115)$$

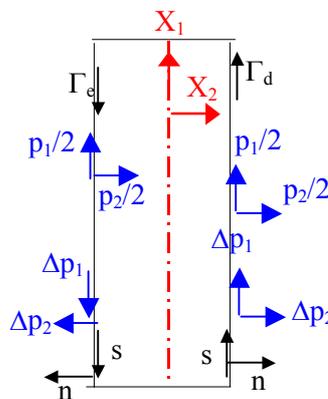


Figura 6.3 – Decomposição de Forças nas Faces da Viga

Nas equações (6.114) e (6.115) a soma das parcelas $p_i/2$ gera a resultante p_i no eixo, que corresponde ao carregamento atuante na viga. Essa parcela produz tensões negativas ao longo do contorno Γ_e e tensões positivas ao longo de Γ_d . A soma das parcelas Δp_i , não dá resultante no centro e produz tensão constante na viga.

Na equação do deslocamento transversal w tem-se, em uma interface qualquer da placa, a seguinte integral envolvendo as forças p_i :

$$(c_{\text{viga}} - c_{\text{laje}}) \int_{\Gamma} [p_{1(\text{viga})} w_{,1}^* + p_{2(\text{viga})} w_{,2}^*] d\Gamma \quad (6.116)$$

Considerando-se as equações (6.114) e (6.115), as integrais ao longo dos contornos Γ_e e Γ_d de uma viga qualquer da placa são dadas por:

$$(c_{\text{viga}} - c_{\text{laje}}) \int_{\Gamma_e} \left[\left(\frac{p_1}{2} - \Delta p_1 \right) w_{,1}^* + \left(\frac{p_2}{2} - \Delta p_2 \right) w_{,2}^* \right] d\Gamma \quad (6.117)$$

$$(c_{\text{viga}} - c_{\text{laje}}) \int_{\Gamma_d} \left[\left(\frac{p_1}{2} + \Delta p_1 \right) w_{,1}^* + \left(\frac{p_2}{2} + \Delta p_2 \right) w_{,2}^* \right] d\Gamma \quad (6.118)$$

Entretanto, as equações integrais são escritas utilizando-se o sistema local (n,s) das interfaces. Deve-se portanto, obter as equações (6.117) e (6.118) para as vigas externas e internas, já que os sistemas locais adotados nos dois casos são diferentes (ver figura 5.1). Em qualquer interface entre viga e laje, a integral é calculada segundo o sistema local da laje, ou seja segundo as direções n^+ , s^+ , n^- e s^- indicadas na figura (5.1). No caso da viga externa, os sistemas locais adotados no eixo e faces da viga são todos coincidentes. Portanto, nesse caso faz-se as seguintes decomposições de forças:

$$p_i(\Gamma_e) = \frac{1}{2} p_i + \Delta p_i \quad i = n_{ve}, s_{ve} \quad (6.119)$$

$$p_i(\Gamma_{ve}^-) = \frac{1}{2} p_i - \Delta p_i \quad (6.120)$$

No entanto, as integrais ao longo do eixo da viga externa, envolvendo as forças de superfície p_s e p_n , que são valores de contorno, serão calculadas ao longo dos contornos longitudinais da viga, da mesma forma que foi feito para as equações de chapa (ver equação 6.113), do seguinte modo:

$$I_1 = c_{\text{viga}} \int_{\Gamma_{\text{eixo}}} (w_{,n}^* p_n + w_{,s}^* p_s) d\Gamma = c_{\text{viga}} \int_{\Gamma_{ve}^-} \left(w_{,n(\text{laje})}^* \frac{f_n}{2} + w_{,s(\text{laje})}^* \frac{f_s}{2} \right) d\Gamma_{\text{laje}} + \\ + c_{\text{viga}} \int_{\Gamma_e} \left(w_{,n}^* \frac{f_n}{2} + w_{,s}^* \frac{f_s}{2} \right) d\Gamma \quad (6.121)$$

sendo f_n e f_s os valores de contorno.

Porém, considerando-se a equação (6.119) pode-se dizer que:

$$\frac{1}{2} f_i = \frac{1}{2} p_i + \Delta p_i \quad i=n_{ve}, s_{ve} \quad (6.122)$$

A fim de manter a mesma distribuição de tensões idealizada para a viga representada na figura (6.3), deve-se subtrair, no contorno Γ_{ve}^- , a parcela do carregamento indicada na equação (6.122), que já foi considerada na matriz \mathbf{G} . Com isso, as forças p_i na interface Γ_{ve}^- e que atuam na viga, são dadas por:

$$p_i(\Gamma_{ve}^-) = -2\Delta p_i \quad i=n_{ve}, s_{ve} \quad (6.123)$$

Considerando-se o caso particular em que $c_{laje}=0$, que corresponde ao caso de todos os exemplos apresentados nessa tese, chega-se a seguinte integral ao longo de Γ_{ve}^- :

$$-(c_{viga}) \int_{\Gamma_{ve}^-} [2\Delta p_n w_{,n}^* + 2\Delta p_s w_{,s}^*] d\Gamma \quad (6.124)$$

No caso de se ter c_{laje} não nulo, surge mais um termo na interface Γ_{ve}^- , dado por:

$$c_{laje} \int_{\Gamma_{ve}^-} \left(w_{,n}^*(laje) \left(\frac{1}{2} p_n - \Delta p_n \right) + w_{,s}^*(laje) \left(\frac{1}{2} p_s - \Delta p_s \right) \right) d\Gamma_{laje} \quad (6.125)$$

onde p_s e p_n são incógnitas no eixo da viga.

Seja agora a viga interna. Os sistemas locais adotados no eixo e na interface Γ_{vi}^- são coincidentes, porém o sistema local adotado na interface Γ_{ve}^+ tem sentido contrário daquele do eixo (ver figura 5.1). Portanto, nesse caso faz-se as seguintes decomposições de forças:

$$p_i(\Gamma_{vi}^+) = -\left(\frac{1}{2} p_i + \Delta p_i \right) \quad i= n_{\Gamma_{vi}^+}, s_{\Gamma_{vi}^+} \quad (6.126)$$

$$p_i(\Gamma_{vi}^-) = \frac{1}{2} p_i - \Delta p_i \quad i= n_{\Gamma_{vi}^-}, s_{\Gamma_{vi}^-} \quad (6.127)$$

Logo, as integrais nesse caso são dadas por:

$$(c_{\text{viga}} - c_{\text{laje}}) \int_{\Gamma_{\text{vi}}^-} \left[\left(\frac{p_{n^-}}{2} - \Delta p_{n^-} \right) w_{,n}^* + \left(\frac{p_{s^-}}{2} - \Delta p_{s^-} \right) w_{,s}^* \right] d\Gamma \quad (6.128)$$

$$- (c_{\text{viga}} - c_{\text{laje}}) \int_{\Gamma_{\text{vi}}^+} \left[\left(\frac{p_{n^+}}{2} + \Delta p_{n^+} \right) w_{,n}^* + \left(\frac{p_{s^+}}{2} + \Delta p_{s^+} \right) w_{,s}^* \right] d\Gamma \quad (6.129)$$

Nas equações (6.128) e (6.129), deve-se ainda escrever as variáveis dadas nos sistemas locais em função daquelas referentes ao eixo. Para isso, deve-se lembrar que o sistema (n^-, s^-) coincide com sistema $(n_{\text{vi}}, s_{\text{vi}})$, porém o sistema (n^+, s^+) é contrário a esse último (ver figura 5.1).

Nas equações (6.124), (6.128) e (6.129) as forças Δp_s e Δp_n são substituídas pela lei de Hooke. A partir das equações (2.25), (2.27) e (2.28), pode-se obter a lei de Hooke para a força de superfície p_i dada no sistema (x_1, x_2) :

$$p_i = \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \left[\nu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} n_i + \frac{(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \right) \right] \quad k, i, j=1,2 \quad (6.130)$$

Das equações (6.130), (2.29) e (2.30) pode-se obter a lei de Hooke para p_n e p_s :

$$p_n = p_i n_i = \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial u_n}{\partial n} + \nu \frac{\partial u_s}{\partial s} \right] \quad (6.131)$$

$$p_s = p_i s_i = \frac{\bar{E}}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial u_s}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial s} \right] \quad (6.132)$$

onde os deslocamentos $u_{n,n}$ e $u_{s,n}$ já são incógnitas existentes no eixo e os deslocamentos $u_{n,s}$ e $u_{s,s}$ são escritos, respectivamente, em função dos deslocamentos u_n e u_s , utilizando-se as mesmas funções lineares dadas na equação (6.69):

$$\frac{\partial u_i}{\partial s}(Q) = \frac{2}{L} \left\{ \frac{\partial \phi_1(Q)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \phi_2(Q)}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \phi_3(Q)}{\partial \xi} \right\} \left\{ \begin{matrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ u_i^3 \end{matrix} \right\} \quad i = n, s \quad (6.133)$$

Considerando-se as equações (5.2), (5.3), (6.105), (6.124), (6.128), (6.129), (6.131) e (6.132), a equação de w para a flexão composta é escrita em função das variáveis dos eixos das vigas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & K(Q)w(Q) + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{D_i}{D} \int_{\Gamma_s/\text{viga}} \left(V_n^*(Q,P)w(P) - M_n^*(Q,P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left[\int_{\Gamma_j^+} \left(\frac{D^+ - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(Q,P)w_j(P) + (V_n^*(Q,P)a_j + M_n^*(Q,P)) \frac{\partial w_j}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \right. \\
 & + \left. \int_{\Gamma_j^-} \left(\frac{D^- - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(Q,P)w_j(P) - (V_n^*(Q,P)a_j + M_n^*(Q,P)) \frac{\partial w_j}{\partial n}(P) \right) d\Gamma \right] + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} \left(\frac{D^- - D_j}{D} \right) \left(V_n^*(Q,P)w_j(P) - (V_n^*(Q,P)a_j + M_n^*(Q,P)) \frac{\partial w_j}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \right. \\
 & + \left. \int_{\Gamma_e} \left(\frac{D_j}{D} \right) \left(V_n^*(Q,P)w_j(P) - (-V_n^*(Q,P)a_j + M_n^*(Q,P)) \frac{\partial w_j}{\partial n}(P) \right) d\Gamma \right] + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_{e3}} \frac{D_i}{D} (M_{ns}^{*+}(Q,P) - M_{ns}^{*-}(Q,P))_i w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_{c2}+N_{c1}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} [M_{ns}^{*+}(Q,P) + \\
 & - M_{ns}^{*-}(Q,P)]_{\Omega_j} w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left(V_n(P)w^*(Q,P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(Q,P) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P)w_{ci}^*(Q,P) + \sum_{i=1}^{N_s} c_i \int_{\Gamma_s/\text{vigas}} [p_n(P)w_{,n}^*(Q,P) + p_s(P)w_{,s}^*(Q,P)] d\Gamma_i + \\
 & - \sum_{i=1}^{N_s} \int_{\Omega_i} c_i [b_n(P)w_{,n}^*(Q,P) + b_s(P)w_{,s}^*(Q,P)] d\Omega_i + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left\{ \left(c^+ \bar{E}^+ - c_j \bar{E}_j \right) \left[\int_{\Gamma_j^+} [p_{n(j)}(P)w_{,n}^*(Q,P) + p_{s(j)}(P)w_{,s}^*(Q,P)] d\Gamma \right] + \right. \\
 & + \left. \left(c^- \bar{E}^- - c_j \bar{E}_j \right) \left[\int_{\Gamma_j^-} [p_{n(j)}(P)w_{,n}^*(Q,P) + p_{s(j)}(P)w_{,s}^*(Q,P)] d\Gamma \right] \right\} + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left\{ \left(c^+ \bar{E}^+ - c_j \bar{E}_j \right) \left[\int_{\Gamma_j^+} \left[\frac{1}{(1-\nu^2)} (u_{n,n(j)}(P) + \nu u_{s,s(\Gamma_j^+)}(P)) w_{,n}^*(Q,P) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{1}{2(1+\nu)} (u_{s,n(j)}(P) + u_{n,s(\Gamma_j^+)}(P)) w_{,s}^*(Q,P) \right] d\Gamma \right] \right\} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(c^- \bar{E}^- - c_j \bar{E}_j \right) \left[\int_{\Gamma_j^-} \left[\frac{1}{(1-\nu^2)} (u_{n,n(j)}(P) + \nu u_{s,s(j)}(P)) w_{,n}^*(Q,P) + \right. \right. \\
 & \qquad \qquad \qquad \left. \left. + \frac{1}{2(1+\nu)} (u_{s,n(j)}(P) + u_{n,s(j)}(P)) w_{,s}^*(Q,P) \right] d\Gamma \right] + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left\{ \left(c^- \bar{E}^- - 2c_j \bar{E}_j \right) \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} \left[\frac{1}{(1-\nu^2)} (u_{n,n(j)}(P) + \nu u_{s,s(j)}(P)) w_{,n}^*(Q,P) + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2(1+\nu)} (u_{s,n(j)}(P) + u_{n,s(j)}(P)) w_{,s}^*(Q,P) \right] d\Gamma \right] + \\
 & - \left(c^- \bar{E}^- \right) \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} \left[p_{n(j)}(P) w_{,n}^*(Q,P) + p_{s(j)}(P) w_{,s}^*(Q,P) \right] d\Gamma \right] \\
 & + \left(c_j \bar{E}_j \right) \left[\int_{\Gamma_{eixo}} \left[p_n(P) w_{,n}^*(Q,P) + p_s(P) w_{,s}^*(Q,P) \right] d\Gamma \right] + \int_{\Omega_g} g(p) w^*(Q,p) d\Omega \quad (6.134)
 \end{aligned}$$

onde os deslocamentos $u_{i,s}$ da interface, são escritos em função dos deslocamentos u_i , utilizando-se diferenças finitas (ver equação 6.133); a integral sobre o eixo das vigas externas envolvendo as forças p_s e p_n é calculada segundo a expressão (6.121); as expressões fundamentais estão indicadas no item (3.3) a menos de $w_{,s}^*$, que é dada por:

$$w_{,s}^* = \frac{r \ln r}{4\pi D} \Gamma_{,i} S_i \quad (6.135)$$

Derivando-se a equação (6.134) em relação à m , obtém-se a equação integral da derivada do deslocamento w :

$$\begin{aligned}
 & K_w(Q) \frac{\partial w(Q)}{\partial m} + \sum_{i=1}^{N_s} \frac{D_i}{D} \int_{\Gamma_s / \text{viga}} \left(\frac{\partial V_n^*(Q,P)}{\partial m} w(P) - \frac{\partial M_n^*(Q,P)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left[\int_{\Gamma_j^+} \left(\frac{D^+ - D_j}{D} \right) \left(\frac{\partial V_n^*(Q,P)}{\partial m} w_j(P) + \left(\frac{\partial V_n^*(Q,P)}{\partial m} a_j + \frac{\partial M_n^*(Q,P)}{\partial m} \right) \frac{\partial w_j}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \right. \\
 & \left. + \int_{\Gamma_j^-} \left(\frac{D^- - D_j}{D} \right) \left(\frac{\partial V_n^*(Q,P)}{\partial m} w_j(P) - \left(\frac{\partial V_n^*(Q,P)}{\partial m} a_j + \frac{\partial M_n^*(Q,P)}{\partial m} \right) \frac{\partial w_j}{\partial n}(P) \right) d\Gamma \right] + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} \left(\frac{D^- - D_j}{D} \right) \left(\frac{\partial V_n^*(Q,P)}{\partial m} w_j(P) - \left(\frac{\partial V_n^*(Q,P)}{\partial m} a_j + \frac{\partial M_n^*(Q,P)}{\partial m} \right) \frac{\partial w_j}{\partial n}(P) \right) d\Gamma + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_{\Gamma_e} \left(\frac{D_j}{D} \right) \left(\frac{\partial V_n^*(Q, P)}{\partial m} w_j(P) - \left(-\frac{\partial V_n^*(Q, P)}{\partial m} a_j + \frac{\partial V_n^*(Q, P)}{\partial m} \right) \frac{\partial w_j(P)}{\partial n} \right) d\Gamma \Bigg] \\
 & + \sum_{i=1}^{N_{e3}} \frac{D_i}{D} \left(\frac{\partial M_{ns}^{*+}(Q, P)}{\partial m} - \frac{\partial M_{ns}^{*-}(Q, P)}{\partial m} \right) w_{ci}(P) + \sum_{i=1}^{N_{c2}+N_{c1}} \frac{(D_j - D_{pa})}{D} \left(\frac{\partial M_{ns}^{*+}(Q, P)}{\partial m} + \right. \\
 & \left. - \frac{\partial M_{ns}^{*-}(Q, P)}{\partial m} \right) w_{ci}(P) = \int_{\Gamma} \left(V_n(P) \frac{\partial w^*(Q, P)}{\partial m} - M_{nn}(P) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*(Q, P)}{\partial n} \right) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(P) \frac{\partial w_{ci}^*(Q, P)}{\partial m} + \sum_{i=1}^{N_s} c_i \int_{\Gamma_{s/vigas}} \left[p_n(P) \frac{\partial w_{,n}^*(Q, P)}{\partial m} + p_s(P) \frac{\partial w_{,s}^*(Q, P)}{\partial m} \right] d\Gamma_i \\
 & - \sum_{i=1}^{N_s} \int_{\Omega_{bi}} c_i \left[b_n(p) \frac{\partial w_{,n}^*(Q, p)}{\partial m} + b_s(p) \frac{\partial w_{,s}^*(Q, p)}{\partial m} \right] d\Omega_i + \\
 & - \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left\{ \left(c^+ \bar{E}^+ - c_j \bar{E}_j \right) \left[\int_{\Gamma_j^+} \left[p_{n(j)}(P) \frac{\partial w_{,n}^*(Q, P)}{\partial m} + p_{s(j)}(P) \frac{\partial w_{,s}^*(Q, P)}{\partial m} \right] d\Gamma \right] + \right. \\
 & \left. + \left(c^- \bar{E}^- - c_j \bar{E}_j \right) \left[\int_{\Gamma_j^-} \left[p_{n(j)}(P) \frac{\partial w_{,n}^*(Q, P)}{\partial m} + p_{s(j)}(P) \frac{\partial w_{,s}^*(Q, P)}{\partial m} \right] d\Gamma \right] \right\} + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{vi}} \left\{ \left(c^+ \bar{E}^+ - c_j \bar{E}_j \right) \left[\int_{\Gamma_j^+} \left[\frac{1}{(1-v^2)} \left(u_{n,n(j)}(P) + v u_{s,s(\Gamma_j^+)}(P) \right) \frac{\partial w_{,n}^*(Q, P)}{\partial m} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2(1+v)} \left(u_{s,n(j)}(P) + u_{n,s(\Gamma_j^+)}(P) \right) \frac{\partial w_{,s}^*(Q, P)}{\partial m} \right] d\Gamma \right] + \right. \\
 & \left. + \left(c^- \bar{E}^- - c_j \bar{E}_j \right) \left[\int_{\Gamma_j^-} \left[\frac{1}{(1-v^2)} \left(u_{n,n(j)}(P) + v u_{s,s(\Gamma_j^-)}(P) \right) \frac{\partial w_{,n}^*(Q, P)}{\partial m} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2(1+v)} \left(u_{s,n(j)}(P) + u_{n,s(\Gamma_j^-)}(P) \right) \frac{\partial w_{,s}^*(Q, P)}{\partial m} \right] d\Gamma \right] \right\} + \\
 & + \sum_{j=1}^{N_{ve}} \left\{ \left(c^- \bar{E}^- - 2c_j \bar{E}_j \right) \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} \left[\frac{1}{(1-v^2)} \left(u_{n,n(j)}(P) + v u_{s,s(\Gamma_{ve}^-)}(P) \right) \frac{\partial w_{,n}^*(Q, P)}{\partial m} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2(1+v)} \left(u_{s,n(j)}(P) + u_{n,s(\Gamma_{ve}^-)}(P) \right) \frac{\partial w_{,s}^*(Q, P)}{\partial m} \right] d\Gamma \right] - \left(c^- \bar{E}^- \right) \left[\int_{\Gamma_{ve}^-} \left[p_{n(j)}(P) \frac{\partial w_{,n}^*(Q, P)}{\partial m} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. + p_{s(j)}(P) \frac{\partial w_{,s}^*(Q, P)}{\partial m} \right] d\Gamma \right] \right\} + \left(c_j \bar{E}_j \right) \left[\int_{\Gamma_{exo}} \left[p_n(P) \frac{\partial w_{,n}^*(Q, P)}{\partial m} + p_s(P) \frac{\partial w_{,s}^*(Q, P)}{\partial m} \right] d\Gamma \right] \Bigg\} \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial w^*(Q, P)}{\partial m} d\Omega_g \tag{6.136}
 \end{aligned}$$

onde $w_{,sm}^*$ é dada por:

$$\frac{\partial w_{,s}^*}{\partial m} = -\frac{1}{4\pi D} [r_{,i} s_{,i} r_{,j} m_j + m_i s_{,i} \ln r] \quad (6.137)$$

Para a equação (6.134) de w os valores da constante $K(Q)$ são dados na tabela (3.1), enquanto que para um ponto externo A , tem-se $K(Q)=0$ (ver item 3.6). Para um ponto interno ou sobre o eixo de uma viga $K(Q)=1$. No caso da equação (6.136) de $w_{,m}$, como ela é escrita apenas para pontos sobre eixos de vigas ou pontos internos, $K_w(Q)=1$. Deve-se observar porém, que haverá singularidades nas equações (6.134) e (6.136) quando forem escritas para pontos de eixos de vigas externas, devido às expressões dos deslocamentos fundamentais cujas integrações se fazem sobre os eixos de vigas externas e não sobre as interfaces, porém nesse caso, os termos livres são nulos.

Os esforços nos pontos internos ou sobre os eixos de vigas são obtidos a partir das curvaturas de maneira análoga àquela descrita no item (4.9). Entretanto, como foi visto no item (5.5), termos livres estão presentes quando se escreve a equação das curvaturas para os pontos sobre os eixos de vigas externas. Para os pontos sobre o contorno externo sem vigas, os momentos são calculados da maneira descrita no item (6.7).

6.8.3 Cálculo dos Momentos nos Encontros de Vigas

No encontro de vigas será adotada uma distribuição constante para os momentos. Assim, esses são calculados apenas para o ponto central, como está indicado na figura (6.4) e são iguais à média dos momentos nos pontos de viga situados sobre a interface.

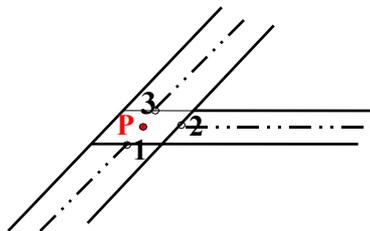


Figura 6.4: Encontro de uma externa com uma interna

Os momentos elásticos em tal caso não podem ser calculados a partir da integração numérica das curvaturas, como é feito para os outros pontos, porque devido às aproximações lineares feitas para o deslocamento resultaria em curvatura nula. O momento do ponto P indicado na figura (6.4), é dado por:

$$M_{ij}^p = \frac{\sum_{k=1}^{N_p} M_{ij}^k}{N_p} \quad (6.138)$$

sendo N_p o número de pontos de colocação de momentos situados sobre as interfaces do encontro de vigas (no caso da figura 6.3, $N_p=3$).

6.8.4 Integrais de Domínio do Carregamento no Plano da Placa

As integrais de domínio que aparecem nas equações (6.107) e (6.108) relativas ao problema de membrana e nas equações (6.134) e (6.136) do problema de flexão, que envolvem o carregamento no plano da placa, são transformadas em integrais no contorno Γ_b da região carregada, da mesma maneira que foi feito no item (3.7) para as equações da placa sujeita à flexão simples. Assim, fazendo-se a mudança de coordenadas, dada por (3.132), a integral sobre a região carregada da equação (6.107), pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega_b} (b_n(p)u_{kn}^*(Q,p) + b_s(p)u_{ks}^*(Q,p))d\Omega_b(p) = \int_{\Gamma_b} \left(\int_0^R b_n(p)u_{kn}^*(Q,p)rdr \right) \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_b +$$

$$+ \int_{\Gamma_b} \left(\int_0^R b_s(p)u_{ks}^*(Q,p)rdr \right) \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_b \quad k=m, l \quad (6.139)$$

Admitindo-se que as cargas $b_n(p)$ e $b_s(p)$ variem linearmente na região Ω_b e considerando-se as relações entre os sistemas de coordenadas cartesianas e polares, com origem em q , dadas pela equação (3.135), pode-se escrever $b_n(p)$ e $b_s(p)$ da seguinte maneira:

$$b_n(p) = A_n r \cos \theta + B_n r \sin \theta + b_n(q) \quad (6.140)$$

$$b_s(p) = A_s r \cos \theta + B_s r \sin \theta + b_s(q) \quad (6.141)$$

onde $b_n(q) = A_n x_1(q) + B_n x_2(q) + C$ e $b_s(q) = A_s x_1(q) + B_s x_2(q) + C$ são constantes e correspondentes ao valor de b_n e b_s no ponto q .

Substituindo-se (6.140), (6.141) e as expressões de $u_{kn}^*(q,p)$ e $u_{ks}^*(q,p)$ dadas por (6.66) e (6.67), em (6.139) e fazendo-se a integração em relação à r , chega-se à:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega_b} (b_n(p)u_{kn}^*(Q,p) + b_s(p)u_{ks}^*(Q,p))d\Omega_b(p) = \\
 & = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \int_{\Gamma_b} \left\{ (A_n \cos \theta + B_n \sin \theta) \frac{R^2}{3} \left[-(3-4\nu)n_k \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) + \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + (A_s \cos \theta + B_s \sin \theta) \frac{R^2}{3} \left[-(3-4\nu)s_k \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) + r_{,i} s_i r_{,k} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + b_n(q) \frac{R}{2} \left[-(3-4\nu)n_k \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) + r_{,i} n_i r_{,k} \right] + \right. \\
 & \quad \left. + b_s(q) \frac{R}{2} \left[-(3-4\nu)s_k \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) + r_{,i} s_i r_{,k} \right] \right\} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \quad k=m, l \quad (6.142)
 \end{aligned}$$

Procedendo-se de maneira análoga e considerando-se as expressões fundamentais, dadas em (6.109) e (6.110), obtém-se para a integral de domínio do carregamento que aparece na equação (6.108):

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_{kn}^*}{\partial m} b_n + \frac{\partial u_{ks}^*}{\partial m} b_s \right) d\Omega = \int_{\Gamma} \left\{ C_s \left[(A_s \cos \theta + B_s \sin \theta) \frac{R}{2} + b_s(q) \right] + \right. \\
 & \quad \left. + C_n \left[(A_n \cos \theta + B_n \sin \theta) \frac{R}{2} + b_n(q) \right] \right\} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \quad k=m, l \quad (6.143)
 \end{aligned}$$

sendo:

$$C_s = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu)r_{,j} m_j s_k - r_{,k} (m_i s_i - 2r_{,i} s_i r_{,j} m_j) - m_k r_{,i} s_i \right]$$

$$C_n = \frac{1}{8\pi G(1-\nu)} \left[(3-4\nu)r_{,j} m_j n_k - r_{,k} (m_i n_i - 2r_{,i} n_i r_{,j} m_j) - m_k r_{,i} n_i \right]$$

No caso das equações (6.134) e (6.136) do problema de flexão, considerando-se as expressões fundamentais, dadas por (3.37), (6.135), (3.95) e (3.96), as integrais que envolvem o carregamento no plano da placa são calculadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 I = & \int_{\Omega_b} [b_n w_{,n}^* + b_s w_{,s}^*] d\Omega_b = -\frac{1}{4\pi D} \left\{ \int_{\Gamma_b} \left[(A_n \cos \theta + B_n \sin \theta) \frac{R^3}{4} \left(\ln R - \frac{1}{4} \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + b_n(q) \frac{R^2}{3} \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) \right] \left(\frac{\partial r}{\partial n} \right)^2 + \left[(A_s \cos \theta + B_s \sin \theta) \frac{R^3}{4} \left(\ln R - \frac{1}{4} \right) + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$+ b_s(q) \frac{R^2}{3} \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) \left[\frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial r}{\partial s} \right] d\Gamma \quad (6.144)$$

$$\int_{\Omega_b} \left[b_n \frac{\partial w_{,n}^*}{\partial m} + b_s \frac{\partial w_{,s}^*}{\partial m} \right] d\Omega_b = \frac{1}{4\pi D} \int_{\Gamma_b} \left\{ (A_n \cos \theta + B_n \sin \theta) \frac{R^2}{3} \left[\left(\ln R - \frac{1}{3} \right) m_i n_i + r_{,i} n_i r_{,j} m_j \right] + b_n(q) \frac{R}{2} \left[\left(\ln R - \frac{1}{2} \right) m_i n_i + r_{,j} m_j r_{,i} n_i \right] + (A_s \cos \theta + B_s \sin \theta) \frac{R^2}{3} \left[\left(\ln R - \frac{1}{3} \right) m_i s_i + r_{,j} m_j r_{,i} s_i \right] + b_s(q) \frac{R}{2} \left[\left(\ln R - \frac{1}{2} \right) m_i s_i + r_{,j} m_j r_{,i} s_i \right] \right\} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_b \quad (6.145)$$

6.8.5 Sistema de Equações

Nos pontos do contorno externo sem vigas, têm-se oito variáveis ($u_n, u_s, p_n, p_s, w, w_{,n}, V_n$ e M_n), das quais quatro variáveis são dadas como condição de contorno, logo é necessário escrever quatro equações nesses pontos. No caso de se ter $c_{lqj} = 0$, que será o caso tratado a seguir, têm-se dez variáveis nos pontos de vigas externas ($u_n, u_s, p_n, p_s, w, w_{,n}, V_n, M_n, u_{nn}$ e u_{sn}), sendo quatro delas conhecidas, pois são impostas nas condições de contorno. Nas vigas internas são definidas oito variáveis ($u_n, u_s, p_n, p_s, w, w_{,n}, u_{nn}$ e u_{sn}), sendo que nesse caso todas as variáveis são incógnitas do problema. Nos cantos têm-se ainda duas variáveis (w e R_c), sendo uma delas prescrita como condição de contorno. Com isso, para se obter a solução do problema de flexão composta de placas, para cada ponto situado sobre o contorno externo sem vigas escreve-se duas equações (6.134) do deslocamento transversal w (uma para o ponto sobre o contorno e outra para um ponto externo, como está descrito no item 4.7) e uma equação (6.107) relativa aos deslocamentos u_n e u_s . Contudo, se o ponto pertencer ao eixo de uma viga, escreve-se uma equação (6.134) do deslocamento transversal w , uma equação (6.136) da derivada de w , uma equação (6.107) relativa aos deslocamentos u_n e u_s e, ainda, as equações das rotações u_{nn} e u_{sn} (equação 6.108). Deve-se escrever ainda as equações das rotações u_{ns} e u_{ss} , somente para os pontos de viga interna. Além disso, deve ser escrita uma equação de w para cada canto.

A aplicação do método dos elementos de contorno às equações integrais é feita, através da transformação das mesmas em equações algébricas de maneira análoga àquela descrita no item (4.4) para a obtenção da equação (4.23). Desse modo, as equações (6.134) e

(6.136) referentes ao deslocamento transversal w de um ponto Q e sua derivada, podem ser escritas, de maneira aproximada, da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_F(Q) & \tilde{H}_C(Q) & \tilde{H}_{2D}(Q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_F \\ \tilde{w}_C \\ \tilde{U}_{2D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{G}_F(Q) & \tilde{G}_C(Q) & \tilde{G}_{2D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{P}_F \\ \tilde{R}_C \\ \tilde{P}_{2D} \end{Bmatrix} + T_F(Q) \quad (6.146)$$

onde $T_F(Q)$ corresponde ao carregamento na placa, os vetores U_F , P_F , w_C , R_C , $H_F(Q)$, $G_F(Q)$, $H_C(Q)$ e $G_C(Q)$ são os mesmos definidos na equação (5.32) de flexão simples e aqueles referentes ao problema de chapa são dados por:

- ❖ $U_{2D}^T = \{ \dots, u_s^i, u_n^i, u_{s,n}^i, u_{n,n}^i, \dots \}$, é o vetor dos deslocamentos do problema de membrana nos pontos sobre o contorno externo sem vigas e eixos de vigas (note-se que os deslocamentos $u_{s,n}$ e $u_{n,n}$ são definidos apenas nos pontos sobre os eixos das vigas);
- ❖ $P_{2D}^T = \{ p_s^1, p_n^1, \dots, p_s^i, p_n^i, \dots, p_s^{N_{noc}+N_{nove}+N_{novi}}, p_n^{N_{noc}+N_{nove}+N_{novi}} \}$ é o vetor das forças de superfície do problema de membrana, dos pontos sobre o contorno externo sem vigas, eixos de vigas externas e internas;
- ❖ $[\tilde{H}]_{2D}(Q)$ é uma das matrizes que representa a influência do problema de membrana no de flexão e cujos termos são obtidos da integração dos deslocamentos fundamentais $w_{,n}^*$ e $w_{,s}^*$ (ou suas derivadas) ao longo das interfaces.
- ❖ $[\tilde{G}]_{2D}(Q)$ é outra matriz que representa a influência do problema de membrana no de flexão e cujos termos são obtidos da integração dos deslocamentos fundamentais $w_{,n}^*$ e $w_{,s}^*$ (ou suas derivadas) ao longo do contorno externo sem vigas e dos contornos longitudinais das vigas externas e internas.

Do mesmo modo, a equação (6.107), referente aos deslocamentos u_n e u_s , e a equação (6.108) das rotações $u_{n,n}$ e $u_{s,n}$ podem ser escritas da seguinte maneira aproximada:

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_F(Q) & 0 & \tilde{H}_{2D}(Q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{U}_F \\ \tilde{w}_C \\ \tilde{U}_{2D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{G}_{2D}(Q) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{P}_F \\ \tilde{R}_C \\ \tilde{P}_{2D} \end{Bmatrix} + T_{2D}(Q) \quad (6.147)$$

onde:

- ❖ $\{0\}$ é um vetor onde todos os termos são iguais a zero;
- ❖ $H_{2D}(Q)$, é o vetor do problema bidimensional de dimensão $(1 \times 2*N_{noc}+4*(N_{nove}+N_{novi}))$, cujos termos são obtidos pela integração das funções p_{kn}^* e p_{ks}^* , ou suas derivadas, ao longo do contorno externo e interfaces;
- ❖ $[\bar{H}]_F(Q)$ representa a influência do problema de flexão no problema de membrana sendo obtida pela integração das funções p_{kn}^* e p_{ks}^* , ou suas derivadas, ao longo do contorno externo e interfaces (tem dimensão $(1 \times 2*(N_{noc}+N_{nove}+N_{novi}))$);
- ❖ $G_{2D}(Q)$ é o vetor do problema de membrana de dimensão $(1 \times 2*(N_{noc}+N_{nove}))$, cujos termos são relativos à integração das funções u_{kn}^* e u_{ks}^* , ou suas derivadas, ao longo do contorno externo sem vigas ou no caso das vigas externas, seus termos são dados pela média daqueles obtidos com a integração das funções ao longo dos dois contornos longitudinais da viga;
- ❖ $T_{2D}(Q)$ é o termo correspondente ao carregamento no plano da placa.

Escrevendo-se todas as equações necessárias para a resolução do problema, chega-se ao seguinte sistema de equações, do qual após a imposição das condições de contorno, obtêm-se as incógnitas nos eixos das vigas, nos cantos e no contorno da placa sem vigas.

$$\begin{bmatrix} [H]_F & [H]_C & [\bar{H}]_{2D} \\ \hline [\bar{H}]_F & [0] & [H]_{2D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_F \\ \{w\}_C \\ \{U\}_{2D} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [G]_F & [G]_C & [\bar{G}]_{2D} \\ \hline [0] & [0] & [G]_{2D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_F \\ \{R\}_C \\ \{P\}_{2D} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{T\}_F \\ \hline \{T\}_{2D} \end{Bmatrix} \quad (6.148)$$

onde:

- $[\bar{H}]_{2D}$ é uma matriz de dimensão $(2*(N_{noc}+N_{nove}+N_{novi})+N_c) \times (2*N_{noc}+4*(N_{nove}+N_{novi}))$
- $[\bar{G}]_{2D}$ é uma matriz de dimensão $(2*(N_{noc}+N_{nove}+N_{novi})+N_c) \times (2*(N_{noc}+N_{nove}+N_{novi}))$
- $[\bar{H}]_F$ tem dimensão $(2*N_{noc}+4*N_{nove}+6*N_{novi}) \times (2*(N_{noc}+N_{nove}+N_{novi}))$
- $[H]_{2D}$ tem dimensão $(2*N_{noc}+4*N_{nove}+6*N_{novi}) \times (2*N_{noc}+4*(N_{nove}+N_{novi}))$
- $[G]_{2D}$ é uma matriz de dimensão $(2*N_{noc}+4*N_{nove}+6*N_{novi}) \times (2*(N_{noc}+N_{nove}))$
- as dimensões das outras matrizes estão definidas na equação (5.33).

ou de uma maneira simplificada:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{T\} \quad (6.149)$$

onde as dimensões dos vetores e matrizes são dadas por:

- $[H]$ tem dimensão $(4*N_{noc}+6*N_{nove}+8*N_{novi}+N_c) \times (4*N_{noc}+6*(N_{nove}+N_{novi})+N_c)$,
- $[G]$ tem dimensão $(4*N_{noc}+6*N_{nove}+8*N_{novi}+N_c) \times (4*(N_{noc}+N_{nove})+2*N_{novi}+N_c)$,
- $\{U\}$ é um vetor de dimensão $(4*N_{noc}+6*(N_{nove}+N_{novi})+N_c) \times 1$,
- $\{P\}$ é um vetor de dimensão $(4*(N_{noc}+N_{nove})+2*N_{novi}+N_c) \times 1$.

Na equação (6.148), a parte superior das matrizes $[H]$ e $[G]$ se referem ao problema de flexão e a parte inferior ao problema de membrana. A técnica para obtenção da solução do sistema (6.149) é a mesma que foi utilizada para o sistema (4.41) (ver item 4.7).

6.8.6 Propriedades da Matriz H

Como já foi comentado no item (4.8), pode-se estabelecer algumas propriedades para a matriz H (equação 6.149), a fim de se fazer a verificação da mesma. Aplicando-se movimentos de corpo rígido às equações de flexão (6.134 e 6.136) e de chapa (6.107 e 108) e admitindo-se que o carregamento em quaisquer direções seja nulo, chega-se às propriedades desejadas. Como não se têm carregamento nem forças de superfície na placa, a equação (6.149) resulta na expressão (4.43).

Aplicando-se um deslocamento de corpo rígido transversal w_θ tem-se que o vetor de deslocamentos $\{U\}_{2D}$ é nulo. Com isso, chega-se à mesma propriedade dada por (4.47) para as linhas do sistema relativas ao problema de flexão, considerando-se porém, nesse caso, que $N_t = N_{noc} + N_{nove} + N_{novi}$. Seja agora a parte do sistema de equações (6.149) relativa às equações de chapa. Obtém-se para uma linha genérica i do mesmo:

$$\sum_{j=1}^{N_t} h_{i,2j-1} = 0 \quad N_{varf} + 1 \leq i \leq N_{varr} \quad (6.150)$$

sendo N_{varf} o número de variáveis do problema de flexão e é dado por: $N_{varf} = 2N_t + N_c$ e N_{varr} o número total de variáveis, dado por: $N_{varr} = N_{varf} + 2N_t + 4N_{nnovi} + 2N_{nnove}$.

Assim, as equações (4.47) e (6.150) representam as propriedades da matriz H relativas ao movimento de corpo rígido na direção do deslocamento transversal w .

Seja agora, um deslocamento u_{xI} de corpo rígido na direção X_I (ver figura 4.7). Utilizando-se a transformação de coordenadas do sistema (x_1, x_2) para o sistema (\bar{x}_1, \bar{x}_2) ,

dada pela expressão (4.88), os deslocamentos nas direções normal (\mathbf{n}) e tangencial (\mathbf{s}) ao contorno externo ou eixo de uma viga de um determinado nó \mathbf{j} , são dados por:

$$\mathbf{u}_{nj} = \mathbf{u}_{x_1} \text{sen } \alpha_j \quad (6.151)$$

$$\mathbf{u}_{sj} = \mathbf{u}_{x_1} \text{cos } \alpha_j \quad (6.152)$$

Nesse caso, os deslocamentos $\{\mathbf{U}\}_F$ e $\{\mathbf{w}\}_C$ são nulos, enquanto que $\{\mathbf{U}\}_{2D}$ é dado por:

$$\{\mathbf{U}\}_{2D}^T = \mathbf{u}_{x_1} \left\{ \text{cos } \alpha_1 \quad \text{sen } \alpha_1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \text{cos } \alpha_{N_t} \quad \text{sen } \alpha_{N_t} \quad 0 \quad 0 \right\} \quad (6.153)$$

Substituindo-se (6.153) em (6.149), obtêm-se as propriedades da matriz \mathbf{H} relativa a um deslocamento de corpo rígido \mathbf{u}_{x1} :

$$\sum_{j=1}^{N_t} h_{i,(N_{varf}+4*j-3)} \text{cos } \alpha + \sum_{j=1}^{N_t} h_{i,(N_{varf}+4*j-2)} \text{sen } \alpha = 0 \quad 1 \leq i \leq N_{varr} \quad (6.154)$$

Aplicando-se à placa o deslocamento de corpo rígido \mathbf{u}_{x2} , na direção \mathbf{X}_2 (ver figura 4.7), de acordo com a equação (4.88), o vetor de deslocamento $\{\mathbf{U}\}_{2D}$, resulta em:

$$\{\mathbf{U}\}_{2D}^T = \mathbf{u}_{x_2} \left\{ \text{sen } \alpha_1 \quad -\text{cos } \alpha_1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad \text{sen } \alpha_{N_t} \quad -\text{cos } \alpha_{N_t} \quad 0 \quad 0 \right\} \quad (6.155)$$

Portanto, as propriedades da matriz \mathbf{H} devido a um deslocamento \mathbf{u}_{x2} são dadas por:

$$\sum_{j=1}^{N_t} h_{i,(N_{varf}+4*j-3)} \text{sen } \alpha - \sum_{j=1}^{N_t} h_{i,(N_{varf}+4*j-2)} \text{cos } \alpha = 0 \quad 1 \leq i \leq N_{varr} \quad (6.156)$$

Considere agora uma rotação de corpo rígido ϕ (ver figura 4.6), no sentido indicado pelo eixo arbitrário $\vec{\mathbf{e}}$. Como a formulação apresentada nesse trabalho é baseada na teoria de pequenos deslocamentos, a rotação em torno de um eixo arbitrário $\vec{\mathbf{e}}$ situado no plano (\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2) não provocará deslocamentos nas direções \mathbf{X}_1 e \mathbf{X}_2 . Desse modo, para as linhas do sistema relativas ao problema de flexão, chega-se à mesma propriedade definida em (4.55) e para o problema de chapa tem-se que:

$$\left[\sum_{j=1}^{N_t} (h_{i,2j-1} R_j + h_{i,2j} \cos \beta_j) \right] = 0 \quad N_{\text{varf}} + 1 \leq i \leq N_{\text{varr}} \quad (6.157)$$

Considere agora uma rotação de corpo rígido ϕ da placa no plano (X_1, X_2) em torno do eixo X_3 , perpendicular ao plano da mesma, como está indicado na figura (6.5).

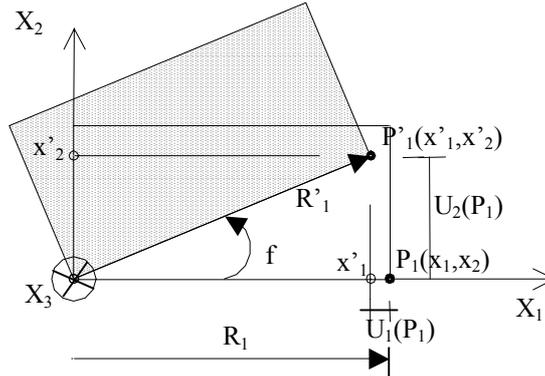


FIGURA 6.5 – Rotação da Placa no Plano (X_1, X_2)

onde (x_1, x_2) e (x'_1, x'_2) , são respectivamente, as coordenadas iniciais e finais de um ponto P qualquer da placa e R a distância do ponto ao eixo de rotação X_3 . No caso particular em que X_3 coincide com o ponto $(0,0)$, como está representado na figura (6.5), R é dado por $R = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, sendo $R' = R$.

Nesse caso, os deslocamentos nas direções X_1 (u_1) e X_2 (u_2) são dados por:

$$u_1 = x'_1 - x_1 = R \cos(\phi + \gamma) - x_1 \quad (6.158.a)$$

$$u_2 = x'_2 - x_2 = R \sin(\phi + \gamma) - x_2 \quad (6.158.b)$$

onde γ é o ângulo formado entre R e o eixo X_1 e portanto $x_1 = R \cos \gamma$ e $x_2 = R \sin \gamma$; no caso da figura (6.5), $\gamma = 0^\circ$ para o ponto P_1 .

Com isso, os deslocamentos u_1 e u_2 podem também ser escritos como:

$$u_1 = (\cos \phi - 1)x_1 - \sin \phi x_2 \quad (6.159)$$

$$u_2 = (\cos \phi - 1)x_2 + \sin \phi x_1 \quad (6.160)$$

Contudo, como a formulação estudada nesse trabalho é baseada na teoria de pequenos deslocamentos, as propriedades da matriz \mathbf{H} só são válidas para um giro ϕ muito pequeno, e portanto, nesse caso, pode-se dizer que $\cos\phi=1$ e $\sin\phi=\phi$. Desse modo, os deslocamentos \mathbf{u}_1 e \mathbf{u}_2 resultam em:

$$\mathbf{u}_1 = -\phi \mathbf{x}_2 \quad (6.161)$$

$$\mathbf{u}_2 = \phi \mathbf{x}_1 \quad (6.162)$$

Os deslocamentos nas direções \mathbf{n} e \mathbf{s} , considerando-se as equações (6.161), (6.162) e (4.88), ficam expressos por:

$$\mathbf{u}_s = \phi(-x_2 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha) \quad (6.163)$$

$$\mathbf{u}_n = -\phi(x_2 \sin \alpha + x_1 \cos \alpha) \quad (6.164)$$

Os deslocamentos $\mathbf{u}_{s,n}$ e $\mathbf{u}_{n,n}$ são determinados a partir das seguintes expressões:

$$\mathbf{u}_{s,n} = \mathbf{u}_{1,n} s_1 + \mathbf{u}_{2,n} s_2 \quad (6.165.a)$$

$$\mathbf{u}_{n,n} = \mathbf{u}_{1,n} n_1 + \mathbf{u}_{2,n} n_2 \quad (6.165.b)$$

Derivando-se as expressões (6.161) e (6.162), obtêm-se:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{n}} = -\phi \left(\frac{\partial x_2}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x_2} n_2 \right) = \phi \cos \alpha \quad (6.166.a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \mathbf{n}} = \phi \left(\frac{\partial x_1}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial x_1}{\partial x_2} n_2 \right) = \phi \sin \alpha \quad (6.166.b)$$

Substituindo-se as equações (6.166) em (6.165), chega-se à:

$$\mathbf{u}_{n,n} = 0 \quad (6.167)$$

$$\mathbf{u}_{s,n} = \phi \quad (6.168)$$

Considerando-se as equações (6.163), (6.164), (6.167) e (6.168), obtém-se a seguinte propriedade da matriz H:

$$\sum_{j=1}^{N_i} h_{i,(N_{\text{var } r} + 4*j-3)} [-x_2 \cos \alpha + x_1 \sin \alpha] - \sum_{j=1}^{N_i} h_{i,(N_{\text{var } r} + 4*j-2)} [x_2 \sin \alpha + x_1 \cos \alpha] + \sum_{j=1}^{N_i} h_{i,(N_{\text{var } r} + 4*j-1)} = 0 \quad 1 \leq i \leq N_{\text{var } r} \quad (6.169)$$

6.9 EXEMPLOS ANALÍTICOS

Nesse item apresentam-se soluções analíticas de vigas com as quais serão verificados seis dos dez exemplos numéricos analisados no item (6.10). Será resolvida analiticamente uma viga sujeita a dois carregamentos distintos: num caso a viga é sujeita a apenas um esforço normal aplicado em uma superfície deslocada de c_s da superfície média da viga e no outro a um momento de flexão. Por fim, faz-se uma combinação dos dois carregamentos. No último exemplo, tem-se uma placa enrijecida com uma viga.

6.9.1 Viga Sujeita à Carga Excêntrica

Seja a viga apresentada na figura (6.6) sujeita à carga excêntrica P . Como condição de contorno tem-se que o deslocamento na direção x_2 (u_2) é nulo, sendo livre o deslocamento na direção x_1 (u_1). Os lados maiores são livres ($M_n = V_n = 0$) e os lados menores apoiados ($M_n = w = 0$). Ao longo dos lados menores é aplicada a carga P . O problema da carga excêntrica é equivalente ao problema da carga aplicada na superfície média acrescido do momento fletor $M_I = -Pc_s$, como está indicado na figura (6.6).

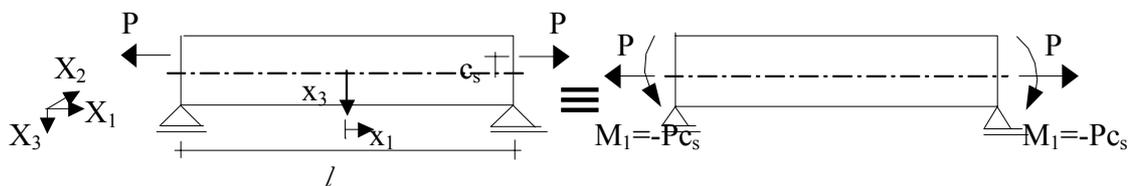


Figura 6.6 – Viga Sujeita à Carga Excêntrica

O momento fletor M_I de uma viga qualquer é dado por:

$$M_1 = -EI \frac{d^2 w}{dx_1^2} \quad (6.170)$$

sendo $I = bt^3 / 12$ o momento de inércia da viga, onde b e t são, respectivamente, a largura e a altura da mesma, porém nesse trabalho b será considerado igual à unidade de comprimento.

A partir da equação (6.170), considerando-se que $M_1 = -Pc_s$ e levando-se em conta ainda as seguintes condições de contorno: $w=0$ para $x_1 = -l/2$ e $x_1 = l/2$, chega-se à seguinte expressão para o deslocamento transversal w :

$$w = \frac{Pc_s}{2EI} \left(x_1^2 - \frac{l^2}{4} \right) \quad (6.171)$$

A deformação na direção x_1 devido ao momento fletor M_1 , usando-se a equação (6.170), é dada por:

$$\varepsilon_1^M = \frac{du_1^M}{dx_1} = -x_3 \frac{d^2 w}{dx_1^2} = x_3 \frac{M_1}{EI} \quad (6.172)$$

Da equação (6.172), considerando-se que $u_1^M = 0$ para $x_1 = 0$, pode-se determinar o deslocamento na direção x_1 devido ao momento (u_1^M), que resulta em:

$$u_1^M = \frac{M_1}{EI} x_3 x_1 = -\frac{Pc_s}{EI} x_3 x_1 \quad (6.173)$$

Por outro lado, definindo como u_1^P o deslocamento devido à força P , essa produz a seguinte deformação na direção x_1 :

$$\varepsilon_1^P = \frac{du_1^P}{dx_1} = \frac{P}{AE} \quad (6.174)$$

sendo $A = bt$.

A partir da equação (6.174), impondo-se a seguinte condição de contorno: $u_1^P = 0$ para $x_1 = 0$, obtém-se:

$$u_1^p = \frac{P}{AE} x_1 \quad (6.175)$$

Somando-se as equações (6.173) e (6.175), chega-se ao deslocamento total na direção x_1 :

$$u_1 = \frac{Px_1}{E} \left(-\frac{c_s}{I} x_3 + \frac{1}{A} \right) \quad (6.176)$$

Para um ponto situado na superfície de aplicação da carga P ($x_3 = -c_s$), tem-se:

$$u_1 = \frac{Px_1}{E} \left(\frac{(c_s)^2}{I} + \frac{1}{A} \right) \quad (6.177)$$

Da equação (6.171) pode-se determinar a rotação, que resulta em:

$$\theta_1 = \frac{dw}{dx_1} = \frac{Pc_s}{EI} x_1 \quad (6.178)$$

6.9.2 Viga Sujeita a Momento Fletor

Seja a viga representada na figura (6.7). A partir da equação (6.170) e utilizando-se as mesmas condições de contorno da viga anterior, tem-se que:

$$w = -\frac{M}{2EI} x_1^2 + \frac{M}{8EI} l^2 = \frac{M}{2EI} \left(\frac{l^2}{4} - x_1^2 \right) \quad (6.179)$$

$$\theta_1 = \frac{dw}{dx_1} = -\frac{M}{EI} x_1 \quad (6.180)$$

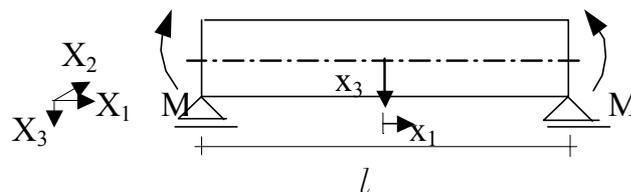


Figura 6.7 - Viga Sujeita a Momento Fletor

O deslocamento na direção x_1 , como foi mostrado no item anterior é dado por:

$$u_1^M = \frac{M_1}{EI} x_3 x_1 \quad (6.181)$$

Para $x_3 = -c_s$ o mesmo resulta em:

$$u_1^M = -\frac{M_1}{EI} c_s x_1 \quad (6.182)$$

6.9.3 Viga Sujeita a Momento Fletor e Carga Excêntrica:

Nesse caso, o deslocamento resultante na direção x_1 , para $x_3 = -c_s$, é dado pela soma das equações (6.177) e (6.182):

$$u_1 = \frac{P x_1}{E} \left(\frac{(c_s)^2}{I} + \frac{1}{A} \right) - \frac{M_1}{EI} c_s x_1 \quad (6.183)$$

A flecha total é determinada somando-se as equações (6.171) e (6.179):

$$w = \frac{1}{2EI} (M - P c_s) \left(\frac{l^2}{4} - x_1^2 \right) \quad (6.184)$$

A rotação é obtida somando-se (6.178) e (6.180):

$$\theta_1 = \frac{1}{EI} (P c_s - M) x_1 \quad (6.185)$$

O momento resultante na superfície média é dado por:

$$M_T = M - P c_s \quad (6.186)$$

Deseja-se agora determinar qual seria a força excêntrica P necessária a ser aplicada a uma viga sujeita a um momento fletor M_T para que o deslocamento na direção x_1 (u_1)

resultante na superfície de aplicação da carga \mathbf{P} ($x_3 = -c_s$) seja nulo. Nesse caso, igualando-se a equação (6.183) a zero, chega-se à:

$$P = \frac{MAc_s}{A(c_s)^2 + I} \quad (6.187)$$

6.9.4 Placa Enrijecida com Uma Viga

Nesse exemplo (ver figura 6.8), tem-se uma placa enrijecida com uma viga no seu interior, sendo que a mesma é fixa em um dos seus lados menores ($\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$) e sujeita a uma carga \mathbf{P} no lado oposto, onde as condições de contorno são dadas por: $w = M_n = p_s = 0$ e $p_n = P$. Os outros dois lados maiores são livres ($V_n = M_n = p_s = p_n = 0$). Será adotado coeficiente de Poisson ν nulo nas três sub-regiões.

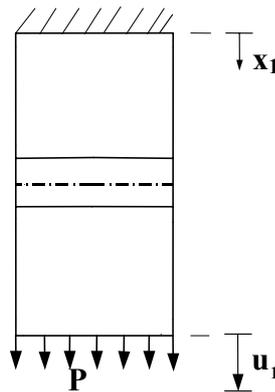


Figura 6.8 – Placa enrijecida com uma viga

Inicialmente, serão obtidas as expressões analíticas para os deslocamentos devido à carga \mathbf{P} ($\Delta \mathbf{u}^P$) e ao momento $\mathbf{P}c_s$ ($\Delta \mathbf{u}^M$). O deslocamento total \mathbf{u} é obtido somando-se os deslocamentos parciais das três sub-regiões, que podem ser tratadas separadamente. Cada sub-região pode ser representada esquematicamente como sendo uma viga da seguinte maneira:

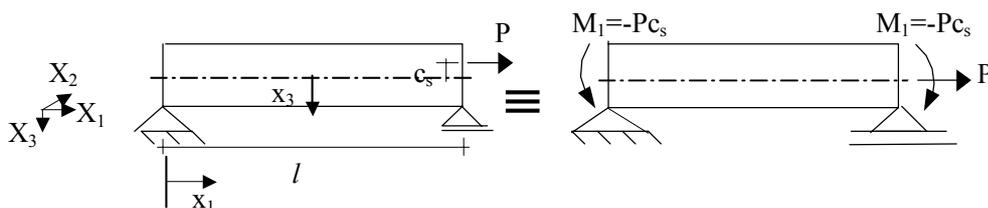


FIGURA 6.9 - Viga Sujeita à Carga Excêntrica

O momento fletor M_I da viga é dado pela expressão (6.170). Considerando-se que $M_I = -Pc_s$ e ainda as seguintes condições de contorno: $w=0$ para $x_I=0$ e $x_I=l$, obtém-se:

$$w = \frac{Pc_s}{2EI} x_1 (x_1 - l) \quad (6.188)$$

Nesse caso também os deslocamentos na direção x_I devido ao momento e à força P , são dados, respectivamente, pelas equações (6.173) e (6.175), chegando-se ao mesmo deslocamento total na direção x_I definido na equação (6.176). Para um ponto situado na superfície de aplicação da carga P ($x_3 = -c_s$), o deslocamento é dado pela equação (6.177).

6.10 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Os exemplos apresentados a seguir são referentes à formulação desenvolvida no item (6.8). Os seis primeiros exemplos podem ser resolvidos analiticamente. Assim, seus resultados numéricos serão verificados utilizando-se as soluções analíticas apresentadas no item (6.9). Os outros quatro exemplos são os mesmos apresentados nos capítulos 4 e 5. Nesses últimos, comparam-se os resultados obtidos levando-se em conta a formulação da placa sujeita à flexão composta, onde as variáveis nas vigas são definidas nos seus eixos com aqueles da placa sujeita à flexão simples, considerando-se *mod1* e *mod2* (ver item 5.7). Em dois exemplos, têm-se ainda os resultados calculados a partir de outros programas, onde se utiliza o MEF (ver item 4.11). As discretizações utilizadas nas análises desses exemplos são as mesmas indicadas no capítulo 5.

Em alguns dos exemplos será verificada a influência de se considerar 1 ou 2 elementos nas laterais das vigas. No primeiro caso, o modelo será designado de *mod2(1)* e no segundo caso de *mod2(2)*. Devido às aproximações feitas na viga acredita-se obter melhores resultados com *mod2(2)*, pois esse diminuiria o erro introduzido pelas aproximações.

A fim de melhor avaliar os resultados, nos últimos quatro exemplos será calculada a diferença nos valores em relação à malha mais refinada adotada para a análise da placa sujeita à flexão composta.

6.10.1 Viga Sujeita à Carga Excêntrica

Seja uma viga com as mesmas condições de contorno daquela apresentada na figura (6.6) e sujeita a uma carga, $p_n = 1000 \text{ kN/m}$ aplicada ao longo dos lados menores (nós 8, 9,

10, 18, 19, 20 da figura 6.10). Os dados da viga são os seguintes: $t=0,2m$; $b=0,5m$ (porém, no cálculo de A e I considerar-se-á $b=1m$), $E = 3000000kN/m^2$, $\nu=0$, $l=2m$. Os valores dos deslocamentos e forças no contorno são referentes à superfície superior da viga, ou seja, $c_s=0,1m$. A malha é composta de 8 elementos, sendo 3 em cada lado maior e 1 no lado menor, resultando em 20 nós (ver figura 6.10). Substituindo-se esses valores nas equações (6.171), (6.177) e (6.178), os deslocamentos no contorno devem ser iguais a: $w = 0,025(x_1^2 - 1)m$; $\theta_1=0,05x_1$; $u_1=6,667x_1 \cdot 10^{-3}m$ e o momento na superfície média resulta em $M_1 = -Pc_s = -100kNm/m$.

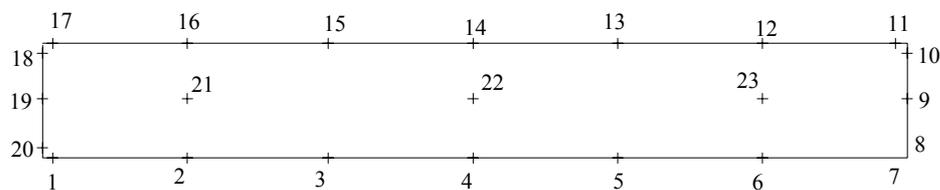


Figura 6.10: Discretização da Viga

TABELA 6.2 - Resultados Numéricos nos Pontos Internos

Ponto	$x_1(m)$	$w(cm)$	$w_{,1}$	$w_{,2}$	$u_1(cm)$	$u_2(cm)$
21	-0,6667	-1,389	-3,334	0	-0,4445	0
22	0	-2,5	0	0	0	0
23	0,6667	-1,389	3,333	0	0,4444	0

Na tabela (6.2) têm-se os resultados nos pontos internos. Os resultados numéricos obtidos nos pontos do contorno estão nas tabelas (6.3) e (6.4), referentes às direções normal e tangencial do contorno.

TABELA 6.3: Resultados Numéricos nos Pontos do Contorno

Pontos	$u_s(cm)$
1, 11	-0,6667
2 e 12	-0,4444
3 e 13	-0,2222
4, 7, 8, 9, 14, 18, 19 e 20	0
5 e 15	0,2222
6 e 16	0,4444
7 e 17	0,6667

TABELA 6.4 - Resultados Numéricos nos Pontos do Contorno

<i>Ponto</i>	$x_1(m)$	$w(cm)$	$w_{,n}$	$u_n(cm)$
<i>1 e 17</i>	-1	0	0	0
<i>2 e 16</i>	-0,6667	-1,389	0	0
<i>3 e 15</i>	-0,3333	-2,222	0	0
<i>4 e 14</i>	0	-2,5	0	0
<i>5 e 13</i>	0,3333	-2,222	0	0
<i>6 e 12</i>	0,6667	-1,389	0	0
<i>7 e 11</i>	1	0	0	0
<i>8, 9 e 10</i>	1	0	5	0,6667
<i>18, 19 e 20</i>	-1	0	5	0,6667

Em todos os pontos do contorno, assim como nos pontos internos, obteve-se um momento na direção x_1 , relativo à superfície média da placa, igual a $M_1=-100\text{KNm/m}$. Como se pode observar, os resultados numéricos são iguais aos analíticos.

6.10.2 Viga Sujeita a Momento Fletor

Seja a viga representada na figura (6.7), considerando-se porém, apoios fixos, ao invés de móveis. Nos lados maiores, têm-se as seguintes condições de contorno: $V_n=M_n=p_s=u_n=0$ e nos lados menores: $w=0$, $M_n=1000\text{kNm/m}$, $u_s=u_n=0$. Nesse caso, também, $c_s=0,1\text{m}$. Os outros dados são os mesmos do exemplo anterior. A partir das equações (6.183), (6.184), (6.185), (6.186) e (6.187) obtêm-se os resultados analíticos, que são dados por: $P=7500\text{kN/m}$; $u_1=0$; $M_1=250\text{kNm/m}$; $w = 6,25(1 - x_1^2)\text{cm}$ e $\theta_1 = -0,125x_1$.

Os resultados numéricos estão na tabela (6.5) e (6.6). O momento M_1 resultante na superfície média da viga, em todos pontos, foi igual a $M_1=250\text{kNm/m}$. Como se pode verificar, nesse exemplo também os resultados numéricos foram idênticos aos analíticos.

TABELA 6.5: Resultados Numéricos nos Pontos Internos

<i>Ponto</i>	$x_1(m)$	$w(cm)$	$w_{,1}$	$w_{,2}$	$u_1(cm)$	$u_2(cm)$
<i>21</i>	-0,6667	3,472	8,334	0	0	0
<i>22</i>	0	6,25	0	0	0	0
<i>23</i>	0,6667	3,472	-8,334	0	0	0

TABELA 6.6 – Resultados Numéricos nos Pontos do Contorno

Pontos	$x_1(m)$	$w(cm)$	w_n	$u_s(cm)$	$p_n(kN/m)$
1 e 17	-1	0	0	0	0
2 e 16	-0,6667	3,472	0	0	0
3 e 15	-0,3334	5,556	0	0	0
4 e 14	0	6,25	0	0	0
5 e 13	0,3334	5,556	0	0	0
6 e 12	0,6667	3,472	0	0	0
7 e 11	1	0	0	0	0
8, 9 e 10	1	0	-12,5	0	7500
18, 19 e 20	-1	0	-12,5	0	7500

6.10.3 Placa Enrijecida com uma Viga

Esse exemplo é aquele representado na figura (6.8). No lado que é fixo, as condições de contorno para o ponto do meio são dadas por: $w=M_n=u_s=u_n=0$ e para os demais pontos desse lado têm-se: $w=M_n=p_s=u_n=0$. A força aplicada no extremo da placa é dada por $p_n=10000kN/m$. As sub-regiões extremas, cujas superfícies médias serão adotadas como a superfície de referência, têm espessuras t iguais a $10cm$ e naquela do meio $t=20cm$. Adota-se ainda $E=3000000kN/m^2$. Foi utilizada uma discretização com 41 nós e 16 elementos (ver figura 6.11). Foram analisadas ainda discretizações mais refinadas, porém não se constatou diferenças significativas nos resultados. A partir das equações (6.173), (6.175) e (6.177) obtêm-se os resultados analíticos indicados na tabela (6.7) para pontos situados na superfície de aplicação da carga $P(x_3^s = -c_s)$. Note-se que na viga tem-se $c_s=5cm$ e nas lajes $c_s=0$.

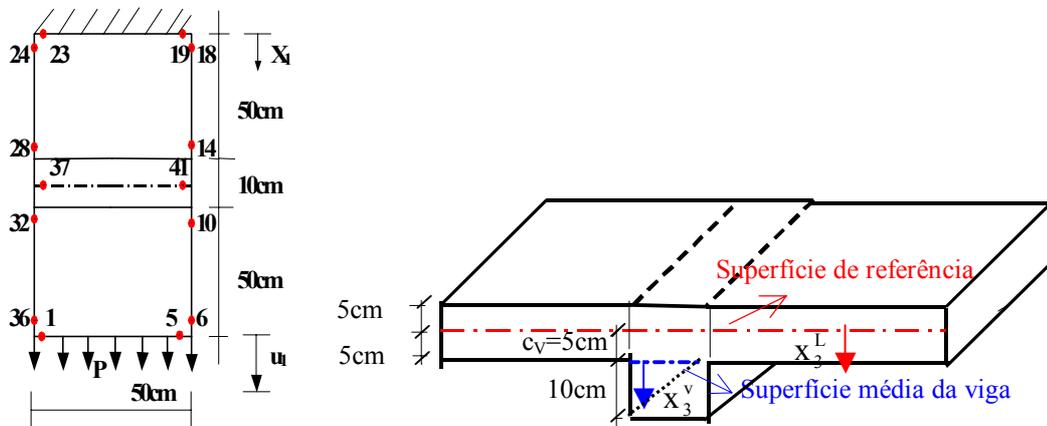


Figura 6.11 – Placa enrijecida com uma viga

TABELA 6.7 – Resultados Analíticos

$x_I(\text{cm})$	$\Delta u^P (\text{cm})$	$\Delta u^M (\text{cm})$	$u_1 (\text{cm})$	$u_1 - \Delta u^M (\text{cm})$
50	1,6667	0	1,6667	1,6667
60	0,16667	0,125	1,9583	1,83334
110	1,6667	0	0,3625	3,5

Como foi mostrado no item (6.8.2), ao escreverem-se os deslocamentos sobre o contorno da viga em função daqueles sobre o eixo médio da mesma, fez-se uma aproximação constante para a variável $w_{,n}$, que é a derivada do deslocamento transversal w em relação à direção n , da normal definida no eixo da viga. Com isso, no sentido transversal da viga, tem-se uma aproximação linear do deslocamento w . No entanto, ao longo do contorno externo da placa todas as variáveis são aproximadas através de funções quadráticas. Portanto, para que não houvesse descontinuidade no valor do deslocamento w nos pontos do contorno externo que são coincidentes com a lateral de uma viga (nós 11, 13, 29 e 31 da figura 6.11), dever-se-ia aproximar as variáveis w e $w_{,s}$ desses pontos de maneira que fosse compatível com a aproximação feita na viga. Essa modificação chegou a ser implementada no programa, porém ao se fazer os testes para verificação da formulação não-linear, constatou-se que se considerasse o deslocamento w linear para tais pontos, a curvatura nesse caso seria nula, prejudicando, com isso, os valores dos momentos. Devido às aproximações dos deslocamentos na viga, o programa não será capaz de computar a parcela Δu^M para $x_I=110\text{cm}$ e, além disso, tal aproximação acarretará descontinuidade nos deslocamentos para $x_I=50\text{cm}$ e $x_I=60\text{cm}$, como pode-se ver na tabela (6.8) para $x_I=60\text{cm}$. Na figura (6.12) têm-se os deslocamentos ao longo da viga.

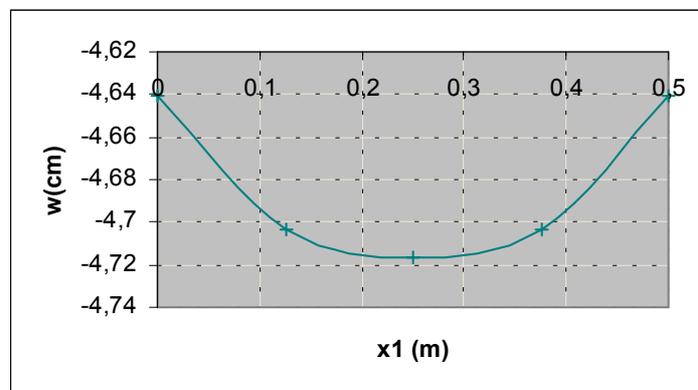


FIGURA 6.12 - Deslocamentos na Viga Interna

O erro relativo dos valores numéricos em relação aos analíticos sem considerar a parcela Δu^M foi de 0,4% para $x_1=50\text{cm}$, 0,42% para $x_1=60\text{cm}$ e de 0,03% para $x_1=110\text{cm}$.

TABELA 6.8 – Resultados Numéricos

<i>Malha (elementos)</i>	u_1 (cm) <i>$x_1=50\text{cm}$ (placa)</i>	u_1 (cm) <i>$x_1=60\text{cm}$ (viga)</i>	u_1 (cm) <i>$x_1=60\text{cm}$ (placa)</i>	u_1 (cm) <i>$x_1=110\text{cm}$</i>
16	1,66	1,911	1,841	3,501

6.10.4 Placa Enrijecida com Duas Vigas e com Momento Aplicado

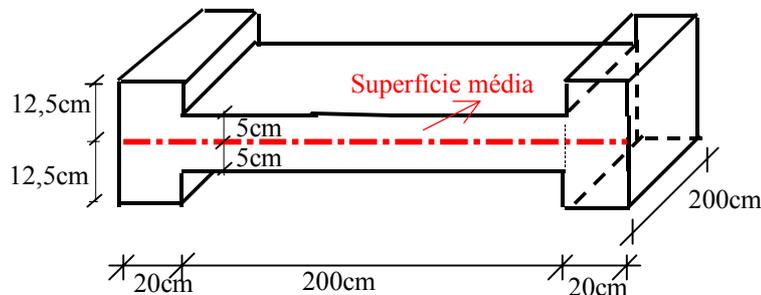


FIGURA 6.13 – Placa Enrijecida com Duas Vigas e Sujeita à Flexão Simples

Utilizando-se a placa representada na figura (4.8), será feito mais um exemplo, a fim de verificar a formulação da placa enrijecida sujeita à flexão simples. Nesse caso, cada sub-região é representada pela superfície média, como está representado na figura (6.13). Como condição de contorno, os dois lados correspondentes às vigas são livres e os outros dois apoiados. As espessuras da laje e das vigas são dadas por: $t_v=25\text{ cm}$ e $t_L=10\text{ cm}$. Adota-se ainda coeficiente de Poisson nulo e módulo de elasticidade $E=27000\text{kN/cm}^2$. A malha utilizada no cálculo será aquela com 48 elementos citada no exemplo (5.7.1). Ao longo dos dois lados apoiados são aplicados momentos na laje e nas laterais das vigas de tal modo que a curvatura na placa enrijecida seja constante. Com isso, como condição de contorno nos pontos da laje aplica-se $M_{n(L)}=150\text{kNcm/cm}$ e nos pontos das vigas aplica-se um momento igual à $M_{n(v)}=(D_v/D_L)M_{n(L)}=2343,75\text{kNcm/cm}$, sendo D_v e D_L , respectivamente, as rigidezes da viga e da laje. Nesse caso, a laje e as vigas devem se comportar de modo independente, como se fossem vigas bi-apoiadas e com momento aplicados nas extremidades. Como resultado, esperam-se deslocamentos iguais na laje e nas vigas para pontos situados a uma mesma coordenada y (ver figura 4.8). Os valores do deslocamento w ao longo da viga ou da laje e o da rotação no apoio, podem ser obtidos analiticamente, através das equações (6.179)

e (6.180). Além disso, em todos os pontos da laje e das vigas deve-se obter momento apenas na direção y , devendo esse ser igual, respectivamente, à $M_{y(L)}=150kNcm/cm$ e $M_{y(V)}=2343,75kNcm/cm$. Deve-se ainda obter $V_n=0$ e $w_n=cte$ ao longo dos dois apoios e $w_n=0$ ao longo dos dois lados livres.

Como resposta, se obtiveram todos os resultados esperados, sendo os deslocamentos transversais ao longo das vigas representados na figura (6.14). O valor obtido para a rotação w_n no apoio foi de $-0,006667$, que é igual ao analítico.

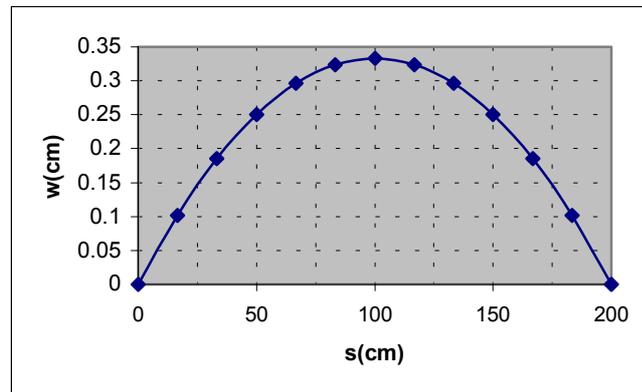


FIGURA 6.14 - Deslocamento ao Longo do Eixo da Viga

6.10.5 Placa Enrijecida com Duas Vigas com Força Normal Aplicada

A placa utilizada nesse exemplo é a mesma do exemplo anterior. A finalidade desse exemplo é verificar a formulação da placa enrijecida considerando apenas o problema de chapa, sem flexão. Nesse caso também as sub-regiões são representadas por suas superfícies médias (ver figura 6.13). As condições de contorno são dadas por: ao longo de um dos lados apoiados tem-se $u_n=p_s=0$ para todos os pontos a menos do ponto do meio, onde se adota $u_n=u_s=0$; no outro lado apoiado têm-se $p_s=0$ e aplica-se p_n . Tal força é aplicada de tal forma que as vigas e a laje fiquem com a mesma deformação. Assim, nos pontos da laje será aplicado $p_{n(L)}=200kN/cm$ (ver figura 6.15.a) e nos pontos das vigas $p_{n(V)}=(t_V/t_L)p_{n(L)}=500kN/cm$ (ver figura 6.15.b).

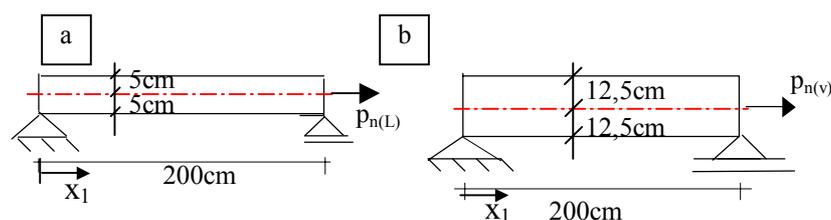


Figura 6.15 – Carregamento na Viga e Laje

Nesse caso, a laje e as vigas devem se comportar como se fossem vigas independentes, sujeitas a uma força normal aplicada em uma das suas extremidades e na sua superfície média (ver figura 6.15). Espera-se obter deslocamentos u_l iguais na laje e nas vigas para pontos com a mesma coordenada x_l (ver figura 6.15), sendo o valor analítico do deslocamento u_l ao longo da viga ou da laje dado pela equação (6.175). Em todos os pontos da laje e das vigas deve-se obter força normal apenas na direção x_l , devendo essa ser igual, respectivamente, à $N_{l(L)}=200kN/cm$ e $N_{l(V)}=500kN/cm$. Deve-se ainda obter $p_s=0$ e $u_s=0$ ao longo dos dois apoios e $u_{s,n}=u_{m,n}=0$ ao longo dos eixos das vigas.

Foram obtidos todos os resultados numéricos esperados. Os deslocamentos u_s ao longo do eixo da viga, cuja direção s coincide com a direção da força aplicada p_n são dados na figura (6.16). O deslocamento máximo obtido foi de $u_s=0,148148cm$ que é igual à solução analítica.

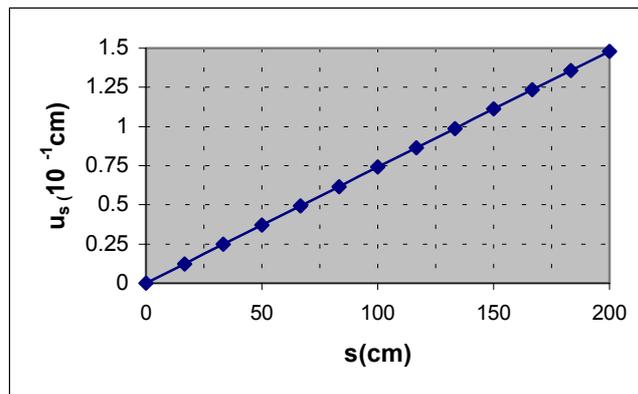


FIGURA 6.16 – Deslocamentos u_s ao Longo da Viga

6.10.6 Placa Enrijecida com Duas Vigas com Momento e Força Normal Aplicados

Nesse exemplo também será utilizada a placa da figura (4.8). Sua finalidade é verificar a formulação da placa enrijecida sujeita à flexão composta (ver figura 6.17).

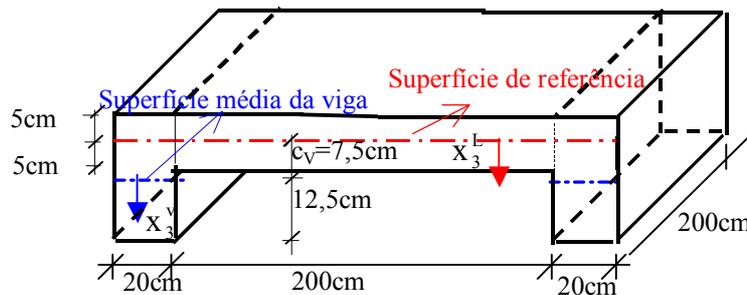


FIGURA 6.17 - Placa Enrijecida com Duas Vigas e Sujeita à Flexão Composta

Nesse caso, as sub-regiões serão representadas pela superfície de referência, que coincide com a superfície média da laje (ver figura 6.17). As condições de contorno do problema de flexão são as mesmas do exemplo (6.10.4), modificando-se porém os valores prescritos diferentes de zero. Para o problema de chapa, nos lados livres e ao longo dos lados apoiados da laje, prescreve-se $p_n=p_s=0$, a menos de dois pontos, um em cada extremidade de um dos lados da laje, onde se impõe $u_n=u_s=0$ para um e $u_n=p_s=0$ para o outro. No contorno apoiado, correspondente às laterais das vigas, prescrevem-se $p_s=0$ e $p_n=p_n(v)$. Na laje (ver figura 6.18 a) será prescrito apenas o momento $M_{n(L)}$ e nas laterais das vigas serão prescritos $M_{n(v)}$ e $p_n(v)$ (ver figura 6.18 b) de tal forma que a laje e as vigas tenham a mesma curvatura e a deformação na viga para $x_3^v = -t_v/2$ (ver figura 6.19.b) seja igual à da laje para $x_3^l = -t_l/2$ (ver figura 6.19.a). Todos os outros dados são os mesmos do exemplo (6.10.4). Nesse caso também, as vigas e a laje deverão se comportar de modo independente, devendo a laje representar o caso de uma viga bi-apoiada com momentos aplicados nas extremidades e as vigas o caso da viga bi-apoiada com momento e força normal aplicados fora de sua superfície média (ver figura 6.18).

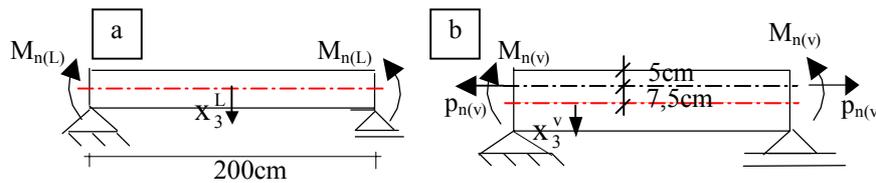


FIGURA 6.18 - Carregamento na Laje e nas Vigas

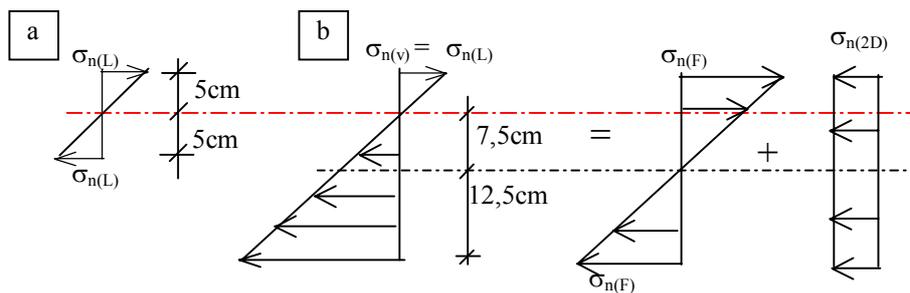


FIGURA 6.19 – Tensões ao Longo da Espessura da Laje e da Viga

Adotando-se $M_{n(L)}=166666,7Ncm/cm$, obtém-se uma curvatura $w_{,n}=-7,40740910^{-6}$. Com esse valor de curvatura, calcula-se o momento na superfície média da viga, que resulta em $M_n=2604166,7Ncm/cm$. Na viga, para $x_3^v = -c_s$, deve-se ter $\epsilon_n = \epsilon_n^{2D} + c_s w_{,n} = 0$, resultando numa deformação de chapa $\epsilon_n^{2D} = 5,555610^{-5}$ e obtendo-se, com isso, a força

normal $p_{n(v)}=375000N/cm$. Logo, na superfície de referência o momento é dado por: $M_{n(v)}=M_n+p_n c_s=5416666,7Ncm/cm$.

Devem ser obtidos esforços apenas na direção y , que é a direção com forças de superfície prescritas, sendo que nos pontos da laje deve-se ter forças normais nulas em todas as direções e momentos $M_{y(L)}=M_{n(L)}$. Nos pontos de viga, deve-se obter força normal $N_y=p_{n(v)}$ e momentos $M_{y(v)}=M_{n(v)}-p_{n(v)}c_s$, pois esses são calculados na superfície média da viga. Além disso, nos apoios deve-se ter $V_n=R_c=0$ e em toda a placa, deve-se obter $u_n=u_s=u_{,sn}=u_{,nn}=0$. Para uma mesma coordenada y , deve-se obter o mesmo deslocamento w na laje e vigas. A solução analítica do deslocamento w é dada pela equação (6.184) e $w_{,n}$ pela equação (6.185), onde M e P são as forças de superfície impostas como condição de contorno. Na figura (6.20), tem-se o deslocamento w ao longo do eixo da viga, sendo o valor máximo obtido igual a $w=0,3704cm$. No apoio obteve-se uma rotação $w_{,n}=-0,007407$. Esses valores numéricos conferem com os resultados analíticos.

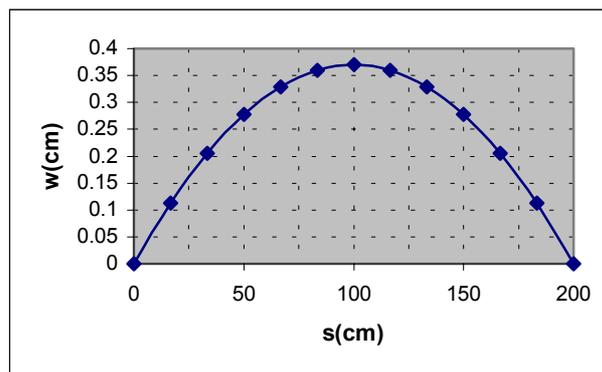


FIGURA 6.20 - Deslocamento w ao Longo da Viga

6.10.7 Placa Quadrada Enrijecida com Duas Vigas com Carga Distribuída

Esse exemplo está representado na figura (4.8). As condições de contorno são as mesmas do exemplo (6.10.6), porém todos os valores prescritos são nulos. Os resultados ao longo da linha média da placa (eixo x da figura 4.8) para $t_v=23,5cm$ estão nas figuras (6.21) a (6.23), onde se pode notar uma grande diferença entre os resultados obtidos com a formulação da placa sujeita à flexão simples e aqueles referentes à flexão composta, sendo esses últimos bem menores que aqueles, como era esperado. No ponto central, a diferença relativa foi de 114% para o deslocamento transversal, 32,5% para m_x e 93,8% para m_y . Pode-se ainda notar que a diferença entre os deslocamentos e momentos obtidos com as malhas de 32 e 64 elementos não foi expressiva.

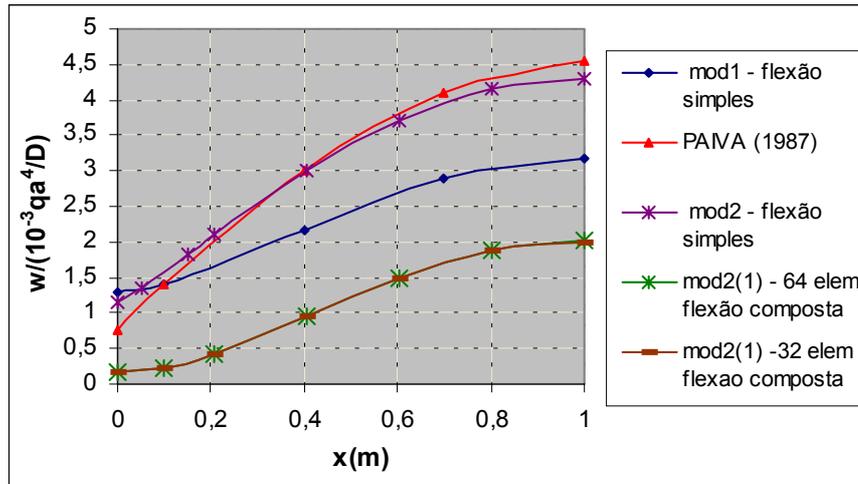


FIGURA 6.21 - Deslocamentos ao Longo da Linha Média da Placa

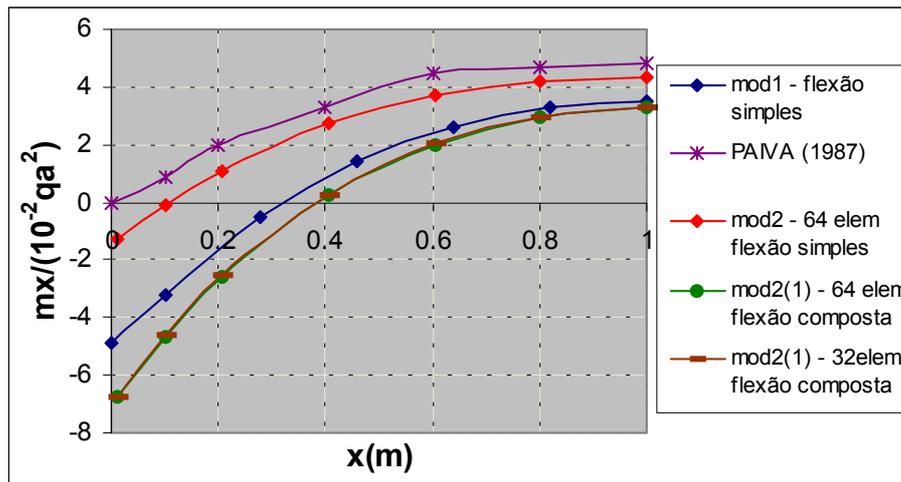


FIGURA 6.22 – Momentos, na Direção x, na Linha Média da Placa

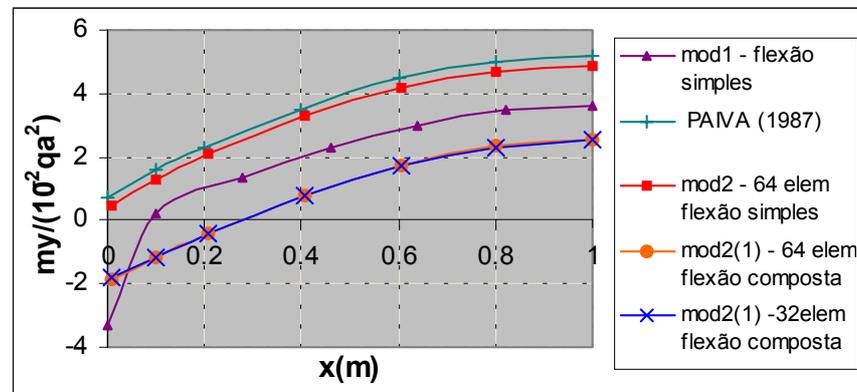


FIGURA 6.23 – Momentos, na Direção y, na Linha Média da Placa

Fizeram-se ainda análises considerando-se dois elementos nas laterais das vigas, porém, não se obteve diferenças significativas nos resultados.

Esse exemplo também foi analisado considerando-se dois lados engastados e os outros dois livres. As condições de contorno relativas ao problema de chapa são as mesmas do problema anterior. Os resultados para $t_v=23,5\text{cm}$ estão nas figuras (6.24) a (6.28), onde se comparam os valores obtidos com as diferentes discretizações e com a formulação da placa sujeita à flexão simples. As diferenças entre os resultados obtidos na placa com *mod2(1)* e *mod2(2)* não foi significativa. Como se pode ver na figura (6.24) os deslocamentos da placa sujeita à flexão composta obtidos com a malha de 32 foram praticamente iguais àqueles da malha de 64 elementos. Como se esperava, os valores obtidos com a flexão composta foram menores que aqueles da flexão simples, com uma diferença relativa de 29,6% no deslocamento do ponto central.

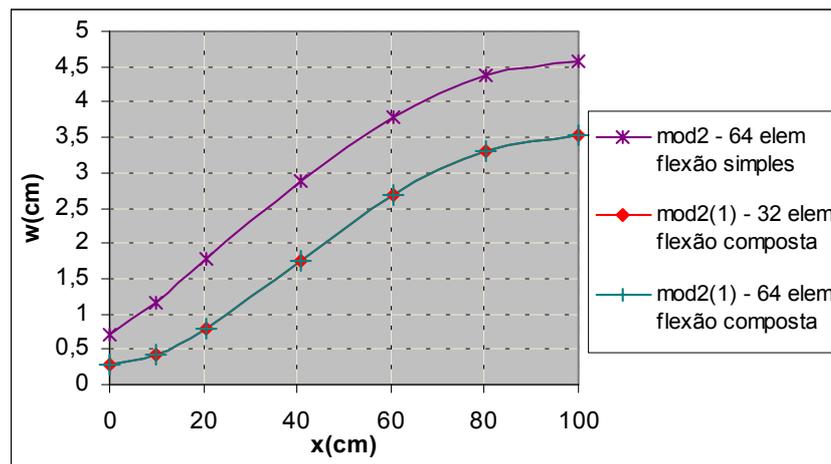


FIGURA 6.24 – Deslocamentos ao Longo da Linha Média da Placa

Os momentos na linha média da placa estão mostrados nas figuras (6.25) e (6.26), onde se pode notar que para m_x o valor obtido no ponto imediatamente após a viga, considerando-se flexão composta foi 3,17 maior que aquele relativo à flexão simples. No entanto, essa diferença foi de apenas 1,14% no ponto central. Os momentos na direção x obtidos com as discretizações de 32, 64 e 96 elementos foram praticamente iguais .

Na figura (6.26), pode-se notar diferenças significativas nos valores dos momentos na direção y considerando-se flexão composta em relação àqueles da placa sujeita à flexão simples, com diferenças relativas de 84,75% e 24,9%, respectivamente, para o ponto imediatamente após a viga e o ponto central. Entre as malhas de 32 e 96 elementos, observaram-se diferenças apenas nos pontos próximos à viga, sendo a diferença máxima de 8,2%. Com a malha de 64 elementos essa diferença não foi significativa

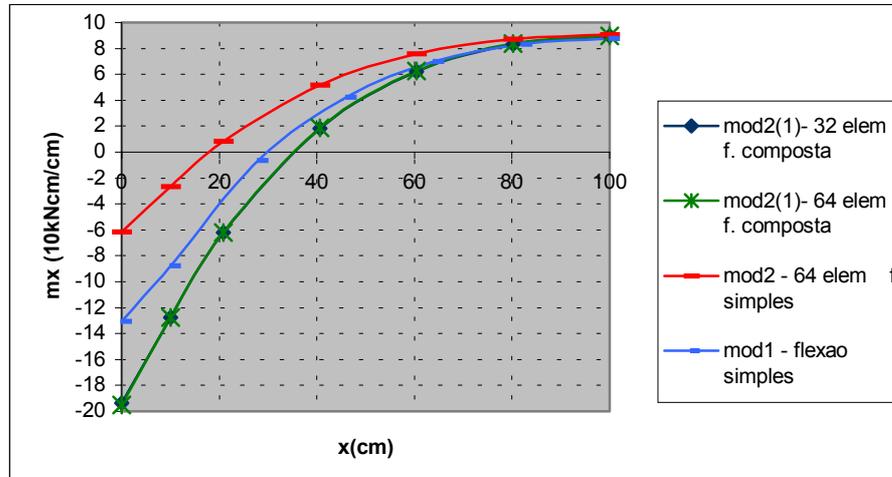


FIGURA 6.25 – Momentos, na Direção x, ao Longo da Linha Média da Placa

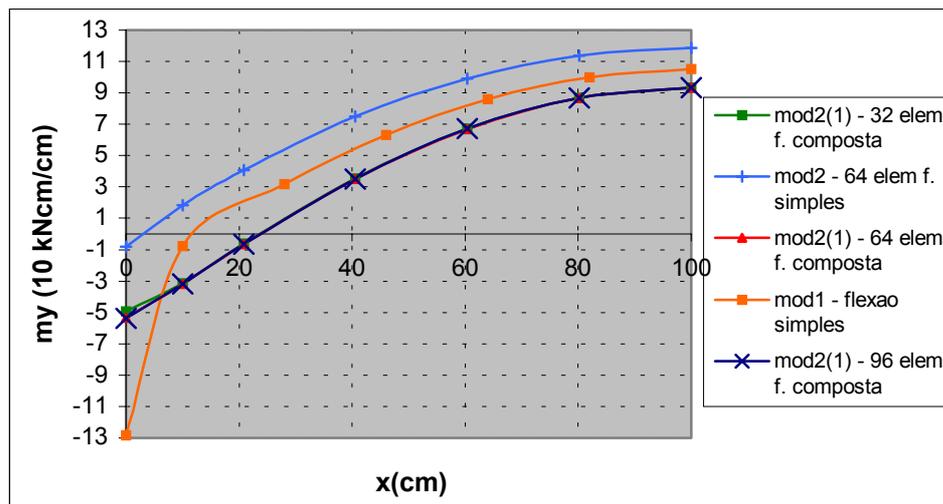


FIGURA 6.26 – Momentos, na Direção y, ao Longo da Linha Média da Placa

Nas figuras (6.27) e (6.28) têm-se, respectivamente, os deslocamentos e momentos na direção s do eixo da viga. Os deslocamentos obtidos com 96 elementos foram iguais àqueles da discretização com 64 elementos e os deslocamentos referentes à malha de 32 elementos foram muito próximos desses últimos. Os deslocamentos relativos à flexão simples foram 1,24 vezes maior que aqueles da flexão composta. Na figura (6.28) pode-se ver que os momentos obtidos com a malha de 64 elementos foram muito próximos daqueles referentes ao cálculo com 96 elementos. Houve uma pequena diferença nos valores apenas para os pontos próximos às extremidades da viga. Em relação à malha de 32 elementos foi observada uma diferença bem maior nesses pontos. No ponto central, o momento obtido considerando-se flexão simples foi 1,7 vezes maior que aquele onde se leva em conta a

flexão composta. Foram ainda feitos cálculo com dois elementos nas laterais das vigas, porém não foi observada melhora significativa nos resultados.

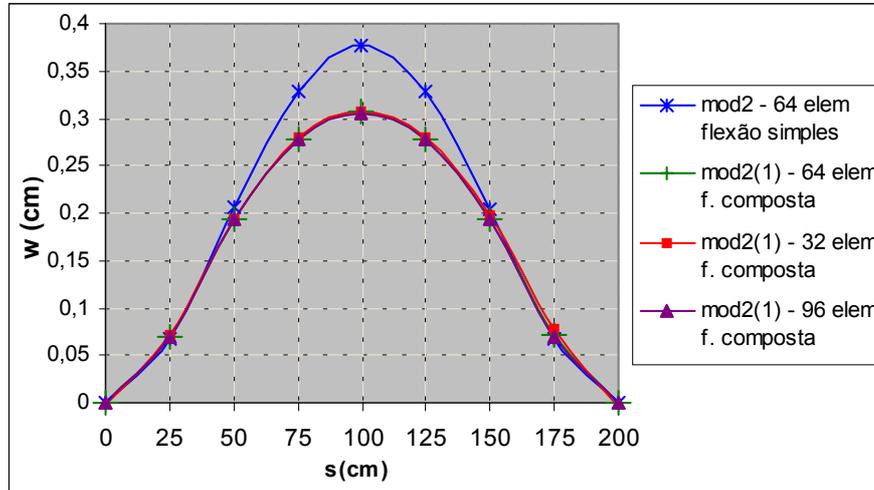


FIGURA 6.27 – Deslocamentos no Eixo da Viga

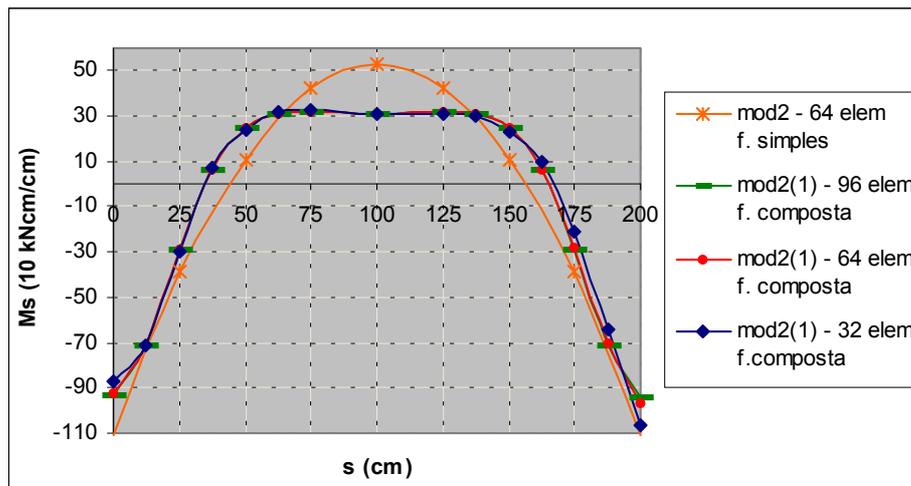


FIGURA 6.28 – Momentos, na Direção s , no Eixo da Viga

6.10.8 Placa Enrijecida com Quatro Vigas Externas e Uma Interna

Neste exemplo, representado na figura (4.15), serão consideradas as mesmas duas discretizações apresentadas no item (5.7.2), que resultaram em 22 e 42 elementos e ainda uma terceira com 122 elementos. Ao longo dos dois lados apoiados prescreve-se $ps=u_n=0$ para todos os pontos, a menos de um ponto em uma das extremidades de um dos lados onde se impõe $us=u_n=0$. Nos lados livres tem-se: $ps=p_n=0$.

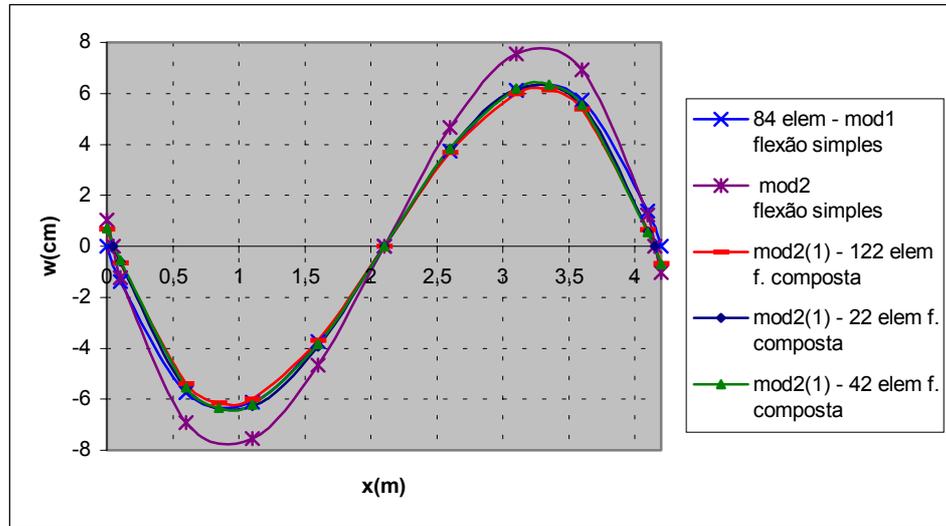


FIGURA 6.29 – Deslocamentos no Eixo da Viga Interna

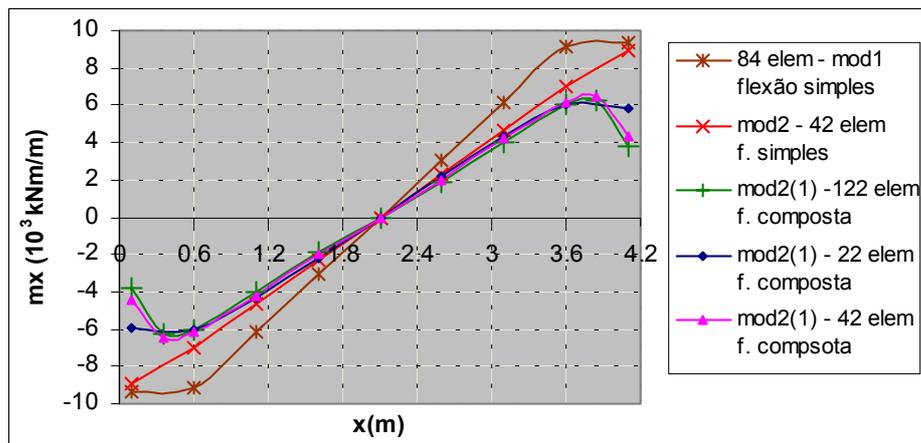


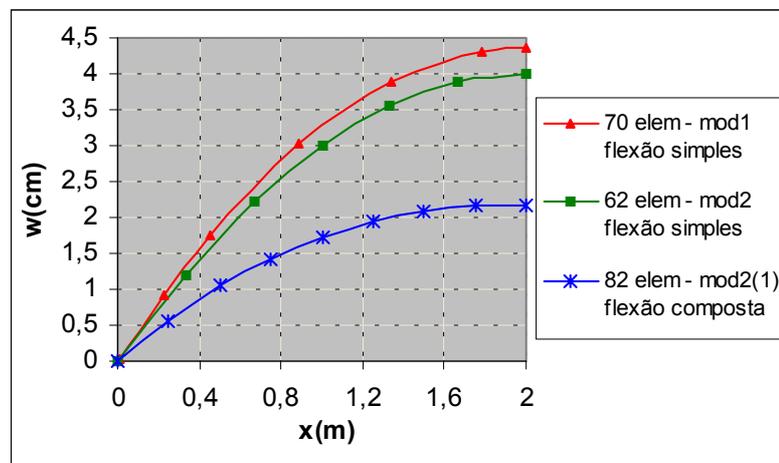
FIGURA 6.30 Momentos, na Direção x, na Viga Interna

Nas figuras (6.29) e (6.30) apresentam-se os resultados obtidos no eixo da viga interna (eixo x da figura 4.15), onde se pode observar, que os valores obtidos com a formulação da placa sujeita à flexão composta são menores que aqueles da placa sujeita à flexão simples, sendo a diferença relativa no ponto do maior deslocamento de 26%. No valor do maior momento essa diferença foi de 135 %. Nas figuras (6.29) e (6.30) têm-se ainda os resultados relativos às malhas de 22 e 42 elementos, que são muito próximos daqueles obtidos com 122 elementos.

6.10.9 Placa Enrijecida com Três Vigas

Este exemplo está representado na figura (4.19). Prescreve-se ainda $ps=p_n=0$ nos quatro lados, a menos de dois pontos, um em cada extremidade de um dos lados apoiados, onde se impõe: $us=u_n=0$ para um e $ps=p_n=0$ para o outro. Será feita uma análise levando-se em conta as mesmas discretizações citadas no item (5.7.3) e ainda uma malha mais refinada de 82 elementos. Será ainda estudada a influência de se considerar 1 ou 2 elementos nas laterais das vigas (*mod2(1)* e *mod2(2)*).

FIGURA 6.31 – Deslocamentos no Eixo da Viga Interna



Nas figuras (6.31) e (6.34) têm-se os deslocamentos e momentos no eixo da viga interna, onde se pode ver, novamente, que os valores obtidos com a flexão composta são menores que aqueles da flexão simples. A diferença relativa no valor do deslocamento do ponto central foi de 83,7%. No valor do momento essa diferença foi de 129,5%.

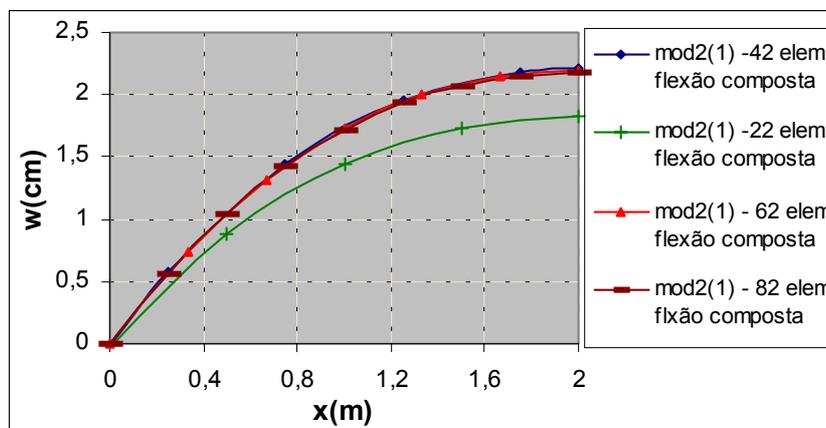


FIGURA 6.32 – Deslocamentos no eixo da viga interna

Nas figuras (6.32) e (6.35) apresentam-se os deslocamentos e momentos obtidos com as diferentes discretizações, considerando-se *mod2(1)*, onde se pode notar uma boa convergência dos resultados.

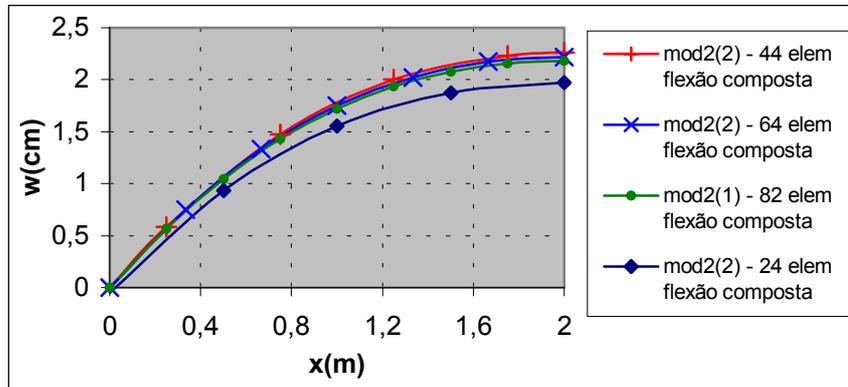


FIGURA 6.33 – Deslocamentos na Viga Interna

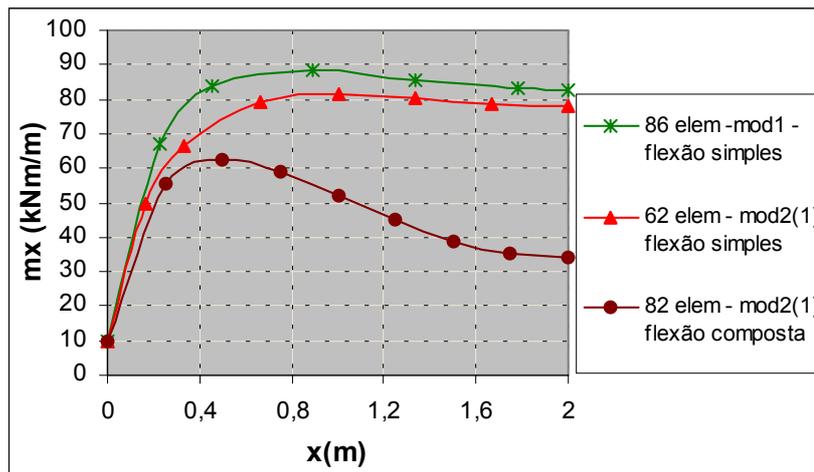


Figura 6.34 – Momentos na direção x na viga

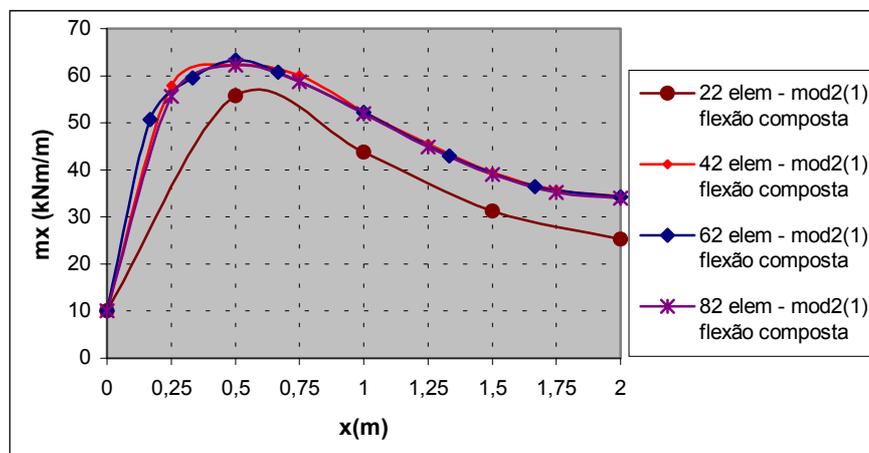


FIGURA 6.35 – Momentos na Direção x na Viga

Os deslocamentos e momentos considerando-se *mod2(2)* estão nas figuras (6.33) e (6.36). Os resultados referentes à malha de 24 elementos foram melhores que aqueles obtidos considerando-se 22 elementos e *mod2(1)*. Por outro lado, os resultados referentes à malha de 44 elementos foram um pouco piores que aqueles da malha de 42 elementos.

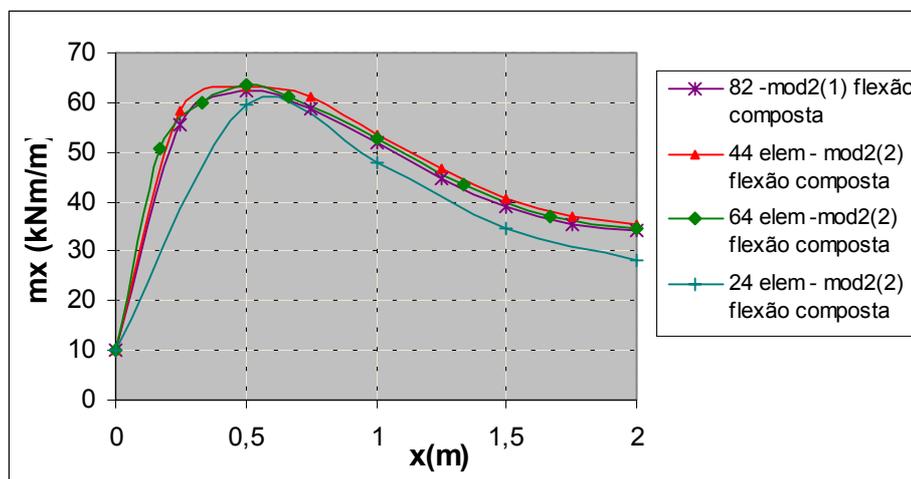


FIGURA 6.36 – Momentos na Direção x na Viga

6.10.10 Placa Esconsa Enrijecida com Vigas no Contorno Externo e Vigas Internas

Nesse item será analisado o exemplo da figura (4.23) e serão consideradas as mesmas discretizações citadas no item (5.7.4). As condições de contorno para o problema de chapa foram as seguintes: $u_s = u_n = 0$ para o ponto médio do lado que contém a viga V_6 e $p_s = u_n = 0$ para os outros pontos desse lado. Para o lado que contém as vigas V_1 e V_2 foi adotado $p_s = u_n = 0$ para todos os pontos. Ao longo das vigas V_3, V_5, V_7 e V_8 , adotaram-se $p_s = p_n = 0$.

Neste exemplo os resultados obtidos com a formulação da placa sujeita à flexão composta (ver figura 6.37 e 6.38) são maiores que aqueles referentes à placa sujeita à flexão simples. No ponto central, tem-se uma diferença relativa de 36% para o deslocamento e de 28% para momento. No ponto central a diferença entre as malhas de 65 e 125 elementos foi de 4,2% para o deslocamento e de 2,8% para o momento. Porém, ao longo da viga os momentos obtidos com 65 elementos foram muito diferentes daqueles da malha de 125 elementos.

Nas figuras (6.39) e (6.40) têm-se os resultados obtidos no eixo médio da laje L_1 (ver figura 4.23) definido na direção x. Nesse caso também, os resultados da flexão composta são

maiores que aqueles da flexão simples e observa-se uma grande diferença entre os resultados das malhas de 65 e 125 elementos.

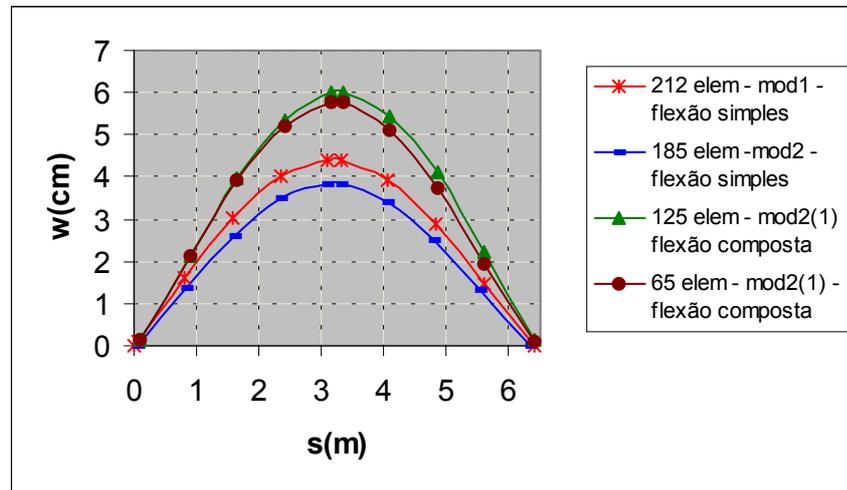


FIGURA 6.37 – Deslocamentos ao Longo do Eixo da Viga V_4

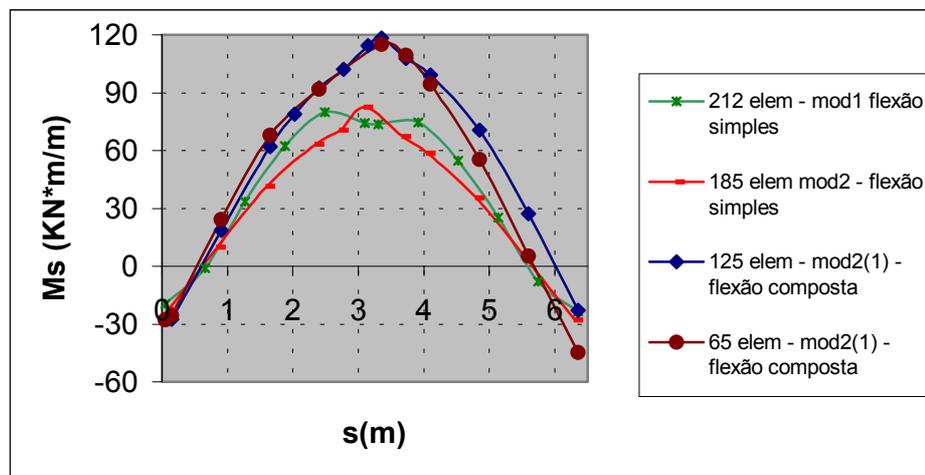


FIGURA 6.39 – Momentos, na Direção s , ao Longo do Eixo da Viga V_4

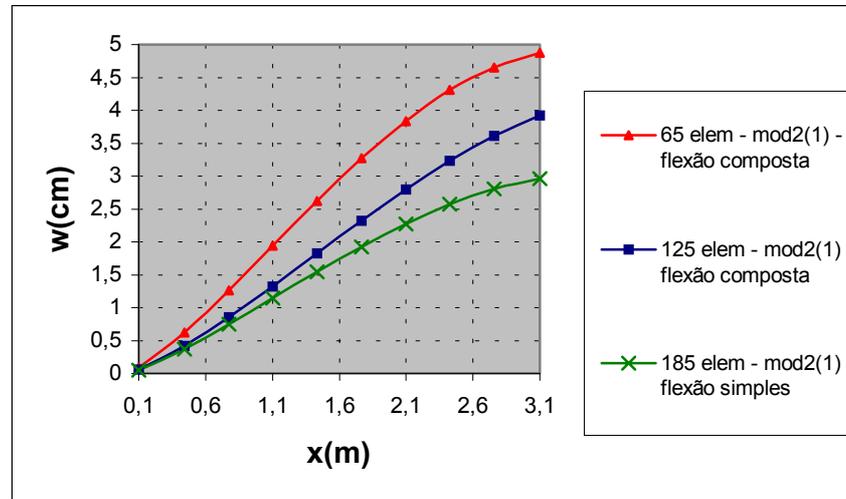


FIGURA 6.38 –Deslocamentos ao Longo do Eixo Médio da laje L_1

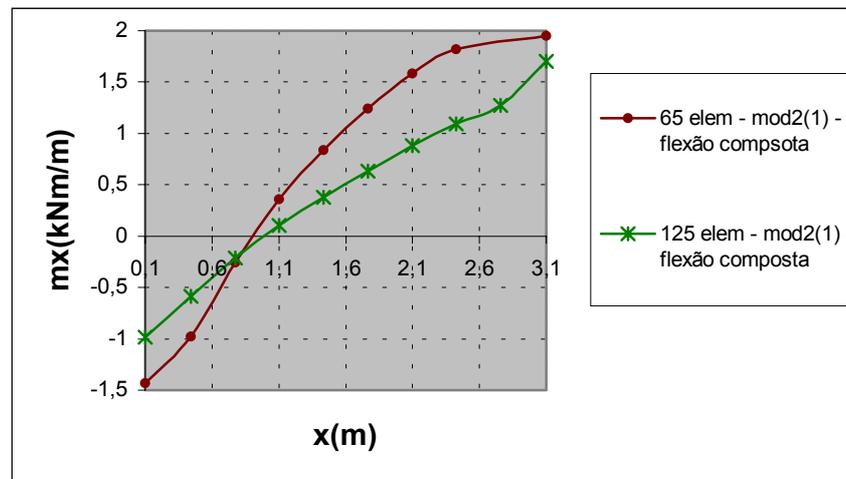


FIGURA 6.40 – Momentos, na direção x , ao Longo Médio da laje L_1

7 FORMULAÇÃO DA PLACA ENRIJECIDA SUJEITA À FLEXÃO COMPOSTA E COM A PRESENÇA DE CAMPOS DE MOMENTOS E FORÇAS NORMAIS INICIAIS

7.1 INTRODUÇÃO

A formulação apresentada nesse capítulo será usada para se obter a resposta não-linear do pavimento sujeito à flexão composta, sendo a mesma obtida a partir da formulação linear apresentada no capítulo 6, considerando-se que a placa é sujeita a campos de momentos e forças normais iniciais. Essa formulação também poderia ser usada para se fazer uma análise linear, onde os esforços iniciais seriam originários de gradientes de temperatura, por exemplo. Contudo, no processo iterativo da análise não-linear, que será visto no capítulo 8, tais esforços iniciais são considerados como sendo os campos de momentos e forças normais de correção que devem ser aplicados à placa, a fim de que ela alcance o seu equilíbrio. A análise não-linear da placa sujeita à flexão simples pode ser encontrada nos trabalhos de CHUEIRI (1994) e (FERNANDES (1998)).

A seguir serão deduzidas as equações integrais dos deslocamentos transversais e no plano da placa, de suas derivadas e das curvaturas de uma placa composta de sub-regiões e sujeita a campos de momentos e forças normais iniciais. Será mostrado também, como se obtêm os esforços na placa. Serão apresentados ainda os modelos de discretização a serem adotados para as lajes e vigas, a fim de se calcular numericamente as integrais de domínio, envolvendo os esforços iniciais que aparece nessa nova formulação. Então, as equações integrais serão transformadas em equações algébricas a fim de se obter o sistema de equações lineares do qual, após a imposição das condições de contorno ao mesmo, se obtêm

as incógnitas no contorno da placa sem vigas, eixos de vigas e cantos.

7.2 ESFORÇOS

Nesse caso, além das deformações resultantes dos carregamentos no sentido transversal e no plano da placa, deve-se também considerar o campo de deformações iniciais. Logo, o tensor de deformações resulta em:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^0 \quad i,j=1,2 \quad (7.1)$$

onde: ε_{ij} é o campo de deformação total, ε_{ij}^e é a componente elástica devido ao carregamento, ε_{ij}^0 é o campo de deformações iniciais.

Deve-se ainda lembrar, que no problema de flexão composta, as deformações são a soma da parcela de chapa com aquela de flexão simples, logo:

$$\varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^{(2D)e} - x_3 w_{,ij}^e \quad (7.2)$$

$$\varepsilon_{ij}^0 = \varepsilon_{ij}^{(2D)0} - x_3 w_{,ij}^0 \quad (7.3)$$

Considerando-se a lei de Hooke, as tensões elásticas (σ_{ij}^e) resultante das deformações totais são dadas por:

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}^0 \quad (7.4)$$

onde:

$$\sigma_{ij}^e = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{2G\nu}{1-\nu} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (7.5)$$

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}^e + \frac{2G\nu}{1-\nu} \varepsilon_{kk}^e \delta_{ij} \quad (7.6)$$

$$\sigma_{ij}^0 = 2G\varepsilon_{ij}^0 + \frac{2G\nu}{1-\nu} \varepsilon_{kk}^0 \delta_{ij} \quad (7.7)$$

sendo σ_{ij} as tensões devido ao carregamento e σ_{ij}^0 as tensões resultantes das deformações iniciais.

Fazendo-se então, a integração destas tensões ao longo da espessura de uma determinada sub-região de domínio Ω_s da placa, obtêm-se os campos de momentos e de forças normais que atuam na superfície média da mesma:

$$\mathbf{m}_{ij}^e = \mathbf{m}_{ij} + \mathbf{m}_{ij}^0 \quad (7.8)$$

$$N_{ij}^e = N_{ij} + N_{ij}^0 \quad (7.9)$$

onde \mathbf{m}_{ij}^e N_{ij}^e são os esforços elásticos devido às tensões totais; \mathbf{m}_{ij} e N_{ij} são aqueles resultantes do carregamento; \mathbf{m}_{ij}^0 e N_{ij}^0 são os esforços devido às tensões iniciais.

As componentes elásticas são dadas por:

$$\mathbf{m}_{ij}^e = -D \left[\nu w_{,kk} \delta_{ij} + (1 - \nu) w_{,ij} \right] \quad (7.10)$$

$$N_{ij}^e = \frac{\bar{E}}{(1 - \nu^2)} \left[\nu \varepsilon_{kk}^{2D} \delta_{ij} + (1 - \nu) \varepsilon_{ij}^{2D} \right] \quad (7.11)$$

7.3 EQUAÇÕES INTEGRAIS DOS DESLOCAMENTOS

As equações integrais dos deslocamentos podem ser obtidas a partir do teorema de reciprocidade de BETTI (1872) (equação 3.1), de forma análoga ao que se fez no item (6.3) para se obter a formulação linear, sendo que nesse caso, considera-se que a placa é sujeita também a campos de momentos e forças normais iniciais. Assim, em uma determinada sub-região Ω_s os problemas de chapa e flexão (ver equações 6.10 e 6.11) são dados por:

$$\int_{\Omega_s} \varepsilon_{kij}^{*2D(s)} N_{ij}^e d\Omega = \int_{\Omega_s} \varepsilon_{ij}^{2D} N_{kij}^* d\Omega \quad i,j=1,2 \quad k=1,m \quad (7.12)$$

$$\int_{\Omega_s} w_{,ij}^{*(s)} m_{ij}^e d\Omega = \int_{\Omega_s} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad (7.13)$$

Considerando-se as equações (7.8) e (7.9), essas últimas resultam em:

$$\int_{\Omega_s} \varepsilon_{kij}^{*2D(s)} (N_{ij} + N_{ij}^0) d\Omega = \int_{\Omega_s} \varepsilon_{ij}^{2D} N_{kij}^* d\Omega \quad (7.14)$$

$$\int_{\Omega_s} (\mathbf{m}_{ij}^* w_{,ij}) d\Omega_s = \int_{\Omega_s} (\mathbf{m}_{ij} + \mathbf{m}_{ij}^0) w_{,ij}^{*(s)} d\Omega_s \quad (7.15)$$

Escrevendo-se as deformações fundamentais da sub-região Ω_s em função daquelas referentes à sub-região onde está o ponto de colocação (ver equações 3.8 e 6.20), escrevendo-se ainda as deformações e esforços da superfície média em questão em função dos seus valores na superfície de referência (ver equações 6.12 e 6.13) e por fim, considerando-se o caso de uma placa composta de N_s sub-regiões, os problemas de chapa e placa são dados por:

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^{*2D} (N_{ij} + N_{ij}^0) d\Omega = \sum_{s=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_s}{E} \left[\int_{\Omega_s} N_{kij}^* \varepsilon_{ij}^{2D} d\Omega - \int_{\Omega_s} c_s N_{kij}^* w_{,ij} d\Omega \right] \quad (7.16)$$

$$- \sum_{s=1}^{N_s} \int_{\Omega_s} c_s w_{,ij}^* (N_{ij} + N_{ij}^0) d\Omega + \int_{\Omega} w_{,ij}^* (\mathbf{m}_{ij} + \mathbf{m}_{ij}^0) d\Omega = \sum_{s=1}^{N_s} \frac{D_s}{D} \int_{\Omega_s} w_{,ij} m_{ij}^* d\Omega \quad (7.17)$$

Desenvolvendo-se essas equações, através de integração por partes, semelhante ao que foi feito no item (6.3) para a formulação linear, obtêm-se as equações integrais dos deslocamentos de um ponto q do domínio da placa:

$$\begin{aligned} w(q) = & \sum_{k=1}^{N_s} \frac{D_k}{D} \int_{\Gamma} \left(M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) - V_n^*(q, P) w(P) \right) d\Gamma(P) + \\ & + \sum_{k=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_k} \left(\frac{D_k - D_{pa}}{D} \right) \left(M_n^*(q, P) \frac{\partial w}{\partial n}(P) - V_n^*(q, P) w(P) \right) d\Gamma_k(P) + \\ & - \sum_{k=1}^{N_{e3}} \frac{D_k}{D} R_{ck}^*(q, P) w_{ck}(P) - \left(\frac{D_k - D_{pa}}{D} \right) \sum_{k=1}^{N_{e1} + N_{e2}} R_{ck}^*(q, P) w_{ck}(P) + \sum_{ik=1}^{N_c} R_{ck}(P) w_{ck}^*(q, P) + \\ & + \int_{\Gamma} \left(V_n(P) w^*(q, P) - M_{nn}(P) \frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) d\Gamma(P) + \sum_{k=1}^{N_s} c_k \int_{\Gamma_k} [p_n(P) w_{,n}^*(q, P) + \\ & + p_s(P) w_{,s}^*(q, P)] d\Gamma_k + \sum_{k=1}^{N_{int}} (c_k - c_{pa}) \int_{\Gamma_k} [p_n(P) w_{,n}^*(q, P) + p_s(P) w_{,s}^*(q, P)] d\Gamma_k + \\ & + \int_{\Omega_g} (g(p) w^*(q, p)) d\Omega_g(p) - \sum_{k=1}^{N_s} c_k \int_{\Omega_i} [b_n(p) w_{,n}^*(q, p) + b_s(p) w_{,s}^*(q, p)] d\Omega_b + \end{aligned}$$

$$-\int_{\Omega} (m_{ij}^0(p) w_{,ij}^*(q,p)) d\Omega(p) + \sum_{k=1}^{N_s} c_k \int_{\Omega} (N_{ij}^0(p) w_{,ij}^*(q,p)) d\Omega(p) \quad i,j=1,2 \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} [-c(q) w_{,k}(q) + u_k(q)] &= -\sum_{N=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_N}{\bar{E}} \int_{\Gamma} (u_n(P) p_{kn}^*(q,P) + u_s(P) p_{ks}^*(q,P)) d\Gamma + \\ &- \sum_{N=1}^{N_{int}} \left(\frac{\bar{E}_N - \bar{E}_{pa}}{\bar{E}} \right) \int_{\Gamma_N} (u_n(P) p_{kn}^*(q,P) + u_s(P) p_{ks}^*(q,P)) d\Gamma_N + \sum_{N=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_N c_N}{\bar{E}} \int_{\Gamma} [p_{kn}^*(q,P) w_{,n}(P) + \\ &+ p_{ks}^*(q,P) w_{,s}(P)] d\Gamma + \sum_{N=1}^{N_{int}} \left(\frac{\bar{E}_N c_N - \bar{E}_{pa} c_{pa}}{\bar{E}} \right) \int_{\Gamma_N} (p_{kn}^*(q,P) w_{,n}(P) + p_{ks}^*(q,P) w_{,s}(P)) d\Gamma_N + \\ &+ \int_{\Gamma} (u_{kn}^*(q,P) p_n(P) + u_{ks}^*(q,P) p_s(P)) d\Gamma + \int_{\Omega_b} (u_{kn}^*(q,p) b_n(p) + u_{ks}^*(q,p) b_s(p)) d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} (N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kij}^{(2D)*}(q,p)) d\Omega(p) \quad k=l,m \quad i,j=1,2 \quad (7.19) \end{aligned}$$

Note-se que as equações (7.18) e (7.19) são dadas pela formulação linear considerando-se a placa sujeita a carregamentos nas direções (x_1 , x_2 e x_3) (ver equações 6.43 e 6.48), acrescentando-se ao segundo membro das mesmas as integrais sobre o domínio da placa envolvendo os momentos ou forças normais iniciais. Derivando-se a equação (7.18) em relação à \mathbf{m} , obtém a equação integral da derivada de \mathbf{w} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{m}}(q) &= \sum_{N=1}^{N_s} \frac{D_N}{D} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial M_n^*(q,P)}{\partial \mathbf{m}} \frac{\partial w}{\partial n}(P) - \frac{\partial V_n^*(q,P)}{\partial \mathbf{m}} w(P) \right) d\Gamma(P) \\ &+ \sum_{N=1}^{N_{int}} \int_{\Gamma_N} \left(\frac{D_N - D_{pa}}{D} \right) \left(\frac{\partial^2 M_n^*(q,P)}{\partial \mathbf{m}} \frac{\partial w}{\partial n}(P) - \frac{\partial^2 V_n^*(q,P)}{\partial \mathbf{m}} w(P) \right) d\Gamma_N(P) + \\ &- \sum_{N=1}^{N_{e3}} \frac{D_i}{D} \frac{\partial R_{cN}^*(q,P)}{\partial \mathbf{m}} w_{cN}(P) - \left(\frac{D_N - D_{pa}}{D} \right) \sum_{N=1}^{N_{c1}+N_{c2}} \frac{\partial R_{cN}^*(q,P)}{\partial \mathbf{m}} w_{cN}(P) + \\ &+ \int_{\Gamma} \left(V_n(P) \frac{\partial w^*(q,P)}{\partial \mathbf{m}} - M_n(P) \frac{\partial}{\partial \mathbf{m}} \left(\frac{\partial w^*(q,P)}{\partial n} \right) \right) d\Gamma(P) + \sum_{N=1}^{N_c} R_{cN}(P) \frac{\partial w_{cN}^*(q,P)}{\partial \mathbf{m}} + \\ &+ \sum_{N=1}^{N_s} c_N \int_{\Gamma_N} \left[p_n(P) \frac{\partial w_{,n}^*(q,P)}{\partial \mathbf{m}} + p_s(P) \frac{\partial w_{,s}^*(q,P)}{\partial \mathbf{m}} \right] d\Gamma_N + \int_{\Omega_g} \left(g(p) \frac{\partial w^*(q,p)}{\partial \mathbf{m}} \right) d\Omega_g(p) + \\ &- \sum_{N=1}^{N_s} c_N \int_{\Omega_b} \left[b_n(p) \frac{\partial w_{,n}^*(q,p)}{\partial \mathbf{m}} + b_s(p) \frac{\partial w_{,s}^*(q,p)}{\partial \mathbf{m}} \right] d\Omega_b + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{N=1}^{N_{\text{int}}} (c_N - c_{\text{pa}}) \int_{\Gamma_N} \left[p_n(\mathbf{P}) \frac{\partial w_{,n}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) + p_s(\mathbf{P}) \frac{\partial w_{,s}^*}{\partial m}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \right] d\Gamma_N + \\
 & + \sum_{s=1}^{N_s} c_s \frac{\partial}{\partial m} \int_{\Omega} (N_{kl}^0(\mathbf{p}) w_{,kl}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})) d\Omega(\mathbf{p}) - \frac{\partial}{\partial m} \int_{\Omega} (m_{kl}^0(\mathbf{p}) w_{,kl}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})) d\Omega(\mathbf{p}) \quad k, l = 1, 2 \quad (7.20)
 \end{aligned}$$

As integrais de domínio da equação (7.20), que envolvem os esforços iniciais, têm singularidades ao se integrar a região onde está o ponto \mathbf{q} . Porém, como tais singularidades não são fortes, pode-se fazer a derivada do integrando de forma normal, ou seja:

$$\sum_{s=1}^{N_s} c_s \frac{\partial}{\partial m} \int_{\Omega} (N_{kl}^0(\mathbf{p}) w_{,kl}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})) d\Omega(\mathbf{p}) = \sum_{s=1}^{N_s} c_s \int_{\Omega} (N_{kl}^0(\mathbf{p}) w_{,klm}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})) d\Omega(\mathbf{p}) \quad (7.21)$$

$$\frac{\partial}{\partial m} \int_{\Omega} (m_{kl}^0(\mathbf{p}) w_{,kl}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})) d\Omega(\mathbf{p}) = \int_{\Omega} (m_{kl}^0(\mathbf{p}) w_{,klm}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p})) d\Omega(\mathbf{p}) \quad (7.22)$$

$$\text{onde } w_{,klm}^* = -\frac{1}{4\pi D r} [r_{,1} m_k + r_{,k} m_1 + \delta_{kl} r_{,i} m_i - 2r_{,k} r_{,1} r_{,i} m_i] \quad k, l = 1, 2 \quad (7.23)$$

7.4 EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA ESFORÇOS NOS PONTOS INTERNOS

O cálculo dos momentos elásticos m_{ij}^e para um ponto interno é feito a partir da equação (7.10), onde as curvaturas $w_{,ij}$ são obtidas derivando-se a equação (7.18) do deslocamento $w(\mathbf{q})$ em relação às direções x_1 e x_2 , da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{q}) & = \sum_{N=1}^{N_s} \frac{D_N}{D} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial^2 M_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P})}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{P}) - \frac{\partial^2 V_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P})}{\partial x_i \partial x_j} w(\mathbf{P}) \right) d\Gamma(\mathbf{P}) \\
 & - \sum_{N=1}^{N_{e3}} \frac{D_i}{D} \frac{\partial^2 R_{cN}^*(\mathbf{q}, \mathbf{P})}{\partial x_i \partial x_j} w_{cN}(\mathbf{P}) - \left(\frac{D_N - D_{\text{pa}}}{D} \right) \sum_{N=1}^{N_{e1} + N_{e2}} \frac{\partial^2 R_{cN}^*(\mathbf{q}, \mathbf{P})}{\partial x_i \partial x_j} w_{cN}(\mathbf{P}) + \\
 & + \sum_{N=1}^{N_{\text{int}}} \int_{\Gamma_N} \left(\frac{D_N - D_{\text{pa}}}{D} \right) \left(\frac{\partial^2 M_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P})}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{P}) - \frac{\partial^2 V_n^*(\mathbf{q}, \mathbf{P})}{\partial x_i \partial x_j} w(\mathbf{P}) \right) d\Gamma_N(\mathbf{P}) + \\
 & + \int_{\Gamma} \left(V_n(\mathbf{P}) \frac{\partial^2 w^*(\mathbf{q}, \mathbf{P})}{\partial x_i \partial x_j} - M_{nn}(\mathbf{P}) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \right) \right) d\Gamma(\mathbf{P}) + \sum_{N=1}^{N_c} R_{cN}(\mathbf{P}) \frac{\partial^2 w_{cN}^*}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{N=1}^{N_s} c_N \int_{\Gamma_i} \left[p_n(P) \frac{\partial^2 w_{,n}^*}{\partial X_i \partial X_j}(q, P) + p_s(P) \frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial X_i \partial X_j}(q, P) \right] d\Gamma - \sum_{N=1}^{N_s} \int_{\Omega_b} c_N \left[b_n(p) \frac{\partial^2 w_{,n}^*}{\partial X_i \partial X_j}(q, p) + \right. \\
 & \left. + b_s(p) \frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial X_i \partial X_j}(q, p) \right] d\Omega + \sum_{N=1}^{N_{int}} (c_N - c_{pa}) \int_{\Gamma_N} \left[p_n(P) \frac{\partial^2 w_{,n}^*}{\partial X_i \partial X_j}(q, P) + p_s(P) \frac{\partial^2 w_{,s}^*}{\partial X_i \partial X_j}(q, P) \right] d\Gamma \\
 & + \int_{\Omega_g} g(p) \frac{\partial^2 w^*(q, p)}{\partial X_i \partial X_j} d\Omega + \sum_{s=1}^{N_s} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} \int_{\Omega} c_s (N_{kl}^0(p) w_{,kl}^*(q, p)) d\Omega(p) + \\
 & - \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} \int_{\Omega} (m_{kl}^0(p) w_{,kl}^*(q, p)) d\Omega(p) \quad k, l, i, j=1, 2 \quad (7.24)
 \end{aligned}$$

As forças normais elásticas N_{ij}^e ($i, j=1, 2$) são obtidas a partir da equação (7.11), onde as deformações ε_{ij}^{2D} são função de $u_{i,j}$ e $u_{j,i}$ (ver equação 2.25), sendo esses últimos calculados na superfície média. O deslocamento $u_{k,l}^s(q)$ na superfície média é obtido derivando-se a equação (7.19) e considerando-se $c(q)=0$. Com isso, sua equação resulta em:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u_k^s(q)}{\partial X_l} & = - \sum_{N=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_N}{\bar{E}} \int_{\Gamma} \left(u_n(P) \frac{\partial p_{kn}^*}{\partial X_l}(q, P) + u_s(P) \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial X_l}(q, P) \right) d\Gamma + \\
 & + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_{kn}^*}{\partial X_l}(q, P) p_n(P) + \frac{\partial u_{ks}^*}{\partial X_l}(q, P) p_s(P) \right) d\Gamma + \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u_{kn}^*}{\partial X_l}(q, p) b_n(p) + \frac{\partial u_{ks}^*}{\partial X_l}(q, p) b_s(p) \right) d\Omega + \\
 & - \sum_{N=1}^{N_{int}} \frac{(\bar{E}_N - \bar{E}_{pa})}{\bar{E}} \int_{\Gamma_N} \left(u_n(P) \frac{\partial p_{kn}^*}{\partial X_l}(q, P) + u_s(P) \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial X_l}(q, P) \right) d\Gamma_N + \\
 & + \sum_{N=1}^{N_s} \frac{\bar{E}_N c_N}{\bar{E}} \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial p_{kn}^*}{\partial X_l}(q, P) w_{,n}(P) + \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial X_l}(q, P) w_{,s}(P) \right) d\Gamma + \\
 & + \sum_{N=1}^{N_{int}} \frac{(\bar{E}_N c_N - \bar{E}_{pa} c_{pa})}{\bar{E}} \int_{\Gamma_N} \left(\frac{\partial p_{kn}^*}{\partial X_l}(q, P) w_{,n}(P) + \frac{\partial p_{ks}^*}{\partial X_l}(q, P) w_{,s}(P) \right) d\Gamma_N + \\
 & + \frac{\partial}{\partial X_l} \int_{\Omega} (N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kij}^{(2D)*}(q, p)) d\Omega(p) \quad k, l, i, j=1, 2 \quad (7.25)
 \end{aligned}$$

As integrais de domínio envolvendo os esforços iniciais que aparecem nas equações (7.24) e (7.25) apresentam singularidades quando se integra o domínio onde está o ponto q . Para que se possa obter a derivada de tais integrais, deve-se antes eliminar tais singularidades, o que será feito através de um procedimento apresentado por MIKHLIN

(1962), o qual também foi adotado por BUI (1978), TELLES & BREBBIA (1979), RIBEIRO (1992) e CHUEIRI (1994). O estudo da integral de domínio envolvendo momentos iniciais da equação (7.24) já foi feito na dissertação de mestrado (FERNANDES (1998)) da autora deste trabalho e, portanto, somente será apresentado aqui o resultado final. Assim, nesse caso tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} \int_{\Omega} (m_{kl}^0(p) w_{,kl}^*(q,p)) d\Omega(p) &= \int_{\Omega} (m_{kl}^0(p) w_{,klj}^*(q,p)) d\Omega(p) + \\ &+ m_{kl}^0(q) \frac{1}{8D} (\delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{li} \delta_{kj} + \delta_{kl} \delta_{ij}) \end{aligned} \quad (7.26)$$

$$\begin{aligned} \text{onde } w_{,klj}^* &= -\frac{1}{4\pi D r^2} [8r_{,l} r_{,i} r_{,j} r_{,k} - 2(\delta_{ik} r_{,l} r_{,j} + \delta_{li} r_{,k} r_{,j} + \delta_{kl} r_{,i} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,l} r_{,i} + \\ &+ \delta_{ij} r_{,k} r_{,l} + \delta_{ij} r_{,k} r_{,l}) + \delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{kl} \delta_{ij}] \quad i,j,k,l=1,2 \end{aligned} \quad (7.27)$$

De forma análoga, chega-se à:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial X_i \partial X_j} \int_{\Omega_s} (N_{kl}^0(p) w_{,kl}^*(q,p)) d\Omega(p) &= c_s \int_{\Omega} (N_{kl}^0(p) w_{,klj}^*(q,p)) d\Omega(p) + \\ &+ N_{kl}^0(q) \frac{c_s}{8D} (\delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{li} \delta_{kj} + \delta_{kl} \delta_{ij}) \end{aligned} \quad (7.28)$$

Seja agora a integral de domínio que envolve as forças normais iniciais, que será designada de I :

$$I = \frac{\partial}{\partial X_l} \int_{\Omega} (N_{ij}^0(p) \varepsilon_{kij}^{(2D)*}(q,p)) d\Omega(p) \quad (7.29)$$

onde a deformação fundamental é dada pela equação (6.68).

Como se pode observar na equação (6.68), a integral de domínio da equação (7.29) apresenta singularidade do tipo $(1/r)$. Para eliminar tal singularidade, retira-se do domínio Ω um domínio circular Ω_ε , onde está a singularidade, de pequeno raio ε e com origem no ponto q , obtendo-se o domínio Ω_ε , que é dado por: $\Omega_\varepsilon = \Omega - \Omega_\varepsilon$ (ver figura 7.1). Portanto, a integral sobre o domínio não singular Ω_ε é dada por:

$$\int_{\Omega_\varepsilon} N_{ij}^0(\mathbf{p}) \varepsilon_{kij}^{(2D)*}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Omega_\varepsilon = \int_{\Omega} N_{ij}^0(\mathbf{p}) \varepsilon_{kij}^{(2D)*}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Omega - \int_{\Omega_c} N_{ij}^0(\mathbf{p}) \varepsilon_{kij}^{(2D)*}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Omega_c \quad (7.30)$$

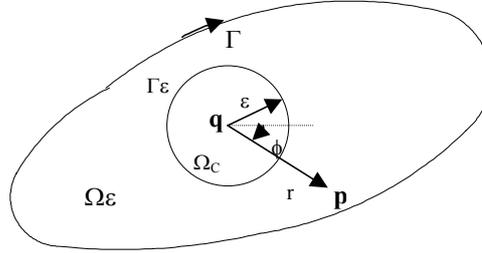


FIGURA 7.1 - Domínios Ω_ε e Ω_c

Do domínio circular da figura (7.1), pode-se tirar as seguintes relações:

$$d\Omega_c = r dr d\phi \quad (7.31)$$

$$d\Gamma_\varepsilon = \varepsilon d\phi \quad (7.32)$$

Assume-se que a função $N_{ij}^0(\mathbf{p})$ e suas primeiras e segundas derivadas são contínuas na vizinhança do ponto \mathbf{q} . Assim, expandindo-se a mesma, em torno do ponto \mathbf{q} , através da série de Taylor, tem-se que:

$$N_{ij}^0(\mathbf{p}) = N_{ij}^0(\mathbf{q}) + [x_m(\mathbf{p}) - x_m(\mathbf{q})] N_{ij,m}^0(\mathbf{q}) + \dots \quad (k, l, m = 1, 2) \quad (7.33)$$

onde $x_m(\mathbf{p}) - x_m(\mathbf{q}) = r r_{,m}$.

Considerando-se a equação (7.33), a integral sobre o domínio singular Ω_c pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_c} (N_{ij}^0(\mathbf{p}) \varepsilon_{kij}^{(2D)*}(\mathbf{q}, \mathbf{p})) d\Omega_c(\mathbf{p}) &= N_{ij}^0(\mathbf{q}) \int_{\Omega_c} \varepsilon_{kij}^{(2D)*}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Omega_c(\mathbf{p}) + \\ &+ N_{ij,m}^0(\mathbf{q}) \int_{\Omega_c} [x_m(\mathbf{p}) - x_m(\mathbf{q})] \varepsilon_{kij}^{(2D)*}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Omega_c(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (7.34)$$

Substituindo-se em (7.34) as equações (6.68) e (7.31) e considerando-se, que nesse caso, $r = \varepsilon$ com $\varepsilon \rightarrow 0$, conclui-se que a expressão (7.34) tende à zero, podendo-se então desprezá-la. Portanto, pode-se dizer que:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} (N_{ij}^0(\mathbf{p}) \varepsilon_{kij}^{(2D)*}(\mathbf{q}, \mathbf{p})) d\Omega_\varepsilon(\mathbf{p}) = \int_{\Omega} (N_{ij}^0(\mathbf{p}) \varepsilon_{kij}^{(2D)*}(\mathbf{q}, \mathbf{p})) d\Omega(\mathbf{p}) \quad (7.35)$$

ou ainda:

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial X_1} \int_{\Omega_\varepsilon} (N_{ij}^0(\mathbf{p}) \varepsilon_{kij}^{(2D)*}(\mathbf{q}, \mathbf{p})) d\Omega_\varepsilon(\mathbf{p}) \quad (7.36)$$

Aplicando-se na expressão (7.36) a regra de Leibnitz para diferenciação de integrais, a mesma resulta em:

$$I = \int_{\Omega} \left(N_{ij}^0(\mathbf{p}) \frac{\partial \varepsilon_{kij}^{(2D)*}}{\partial X_1}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right) d\Omega(\mathbf{p}) - N_{ij}^0(\mathbf{q}) \int_{\Gamma_\varepsilon} \varepsilon_{kij}^{(2D)*}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) r_{,1} d\Gamma_\varepsilon \quad (7.37)$$

$$\text{onde } \varepsilon_{kij}^{2D*} = \frac{1}{r^2} f(\theta) \quad (7.38)$$

$$\text{sendo } f(\theta) = \frac{1}{8\pi G(1-\nu')} \left\{ (1-2\nu') [\delta_{jl} \delta_{ki} + \delta_{il} \delta_{kj} - 2\delta_{ki} r_{,j} r_{,l} - 2\delta_{kj} r_{,i} r_{,l}] + \right. \\ \left. + \delta_{ij} (2r_{,k} r_{,l} - \delta_{kl}) + 2\delta_{kl} r_{,i} r_{,j} + 2\delta_{il} r_{,k} r_{,j} + 2\delta_{jl} r_{,i} r_{,k} - 8r_{,i} r_{,j} r_{,k} r_{,l} \right\} \quad (7.39)$$

com $\nu' = \nu / (1 + \nu)$ no caso de estado plano de tensão.

Seja o segundo termo da expressão (7.37). Considerando-se as equações (6.68) e (7.32) e fazendo-se $\mathbf{r} = \varepsilon$, o mesmo pode ser escrito como:

$$U_2 = -N_{ij}^0(\mathbf{q}) \int_{\Gamma_\varepsilon} \varepsilon_{kij}^{(2D)*}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) r_{,1} d\Gamma_\varepsilon = \\ = -\frac{N_{ij}^0(\mathbf{q})}{8\pi(1-\nu')G} \int_0^{2\pi} [(1-2\nu')(r_{,k} \delta_{ij} + r_{,j} \delta_{ik}) - r_{,i} \delta_{jk} + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k}] r_{,1} d\phi \quad (7.40)$$

Considerando-se que $r_{,1}^2 = \cos^2 \phi = (\mathbf{1} + \cos 2\phi) / 2$, $r_{,2}^2 = \sin^2 \phi = (\mathbf{1} - \cos 2\phi) / 2$ e $r_{,1} r_{,2} = \cos \phi \sin \phi = (\sin 2\phi) / 2$, faz-se a integração em relação a ϕ , obtendo-se:

$$U_2 = -\frac{1}{16G(1-\nu')} [(6-8\nu')N_{kl}^0(\mathbf{q}) + N_{mm}^0(\mathbf{q})\delta_{kl}] \quad k,l,m=1,2 \quad (7.41)$$

Logo, considerando-se a equação (7.41) e (7.37), a integral de domínio da equação da derivada direcional de \mathbf{u}_k , definida em (7.29), pode ser escrita como:

$$I = \int_{\Omega} N_{ij}^0(\mathbf{p}) \varepsilon_{kijl}^{(2D)*}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d\Omega - \frac{1}{16G(1-\nu')} \left[(6-8\nu') N_{kl}^0(\mathbf{q}) + N_{mm}^0(\mathbf{q}) \delta_{kl} \right] \quad k,l,m,i,j=1,2 \quad (7.42)$$

7.5 – CÁLCULO DAS FORÇAS DE SUPERFÍCIE \mathbf{p}_n E \mathbf{p}_s NAS INTERFACES

Como foi visto no item (6.5), as forças de superfície \mathbf{p}_n e \mathbf{p}_s ao longo das interfaces que aparecem nas equações de flexão (equações (7.18), (7.20) e (7.24)), são escritas em função das derivadas dos deslocamentos \mathbf{u}_n e \mathbf{u}_s , utilizando-se a lei de Hooke (ver equações (6.131) e (6.132)). Porém, levando-se em conta a equação (7.9), no caso da formulação com esforços iniciais, as forças de superfície são dadas por:

$$\mathbf{p}_n = \frac{\bar{E}}{(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial n} + \nu \frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial s} \right] - \mathbf{p}_n^0 \quad (7.43)$$

$$\mathbf{p}_s = \frac{\bar{E}}{2(1+\nu)} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_s}{\partial n} + \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial s} \right] - \mathbf{p}_s^0 \quad (7.44)$$

Com isso, surgem novas integrais envolvendo os esforços iniciais N_{ij}^0 . A fim de exemplificar, considere a equação (7.18) do deslocamento \mathbf{w} . Levando-se em conta as equações (2.28), (2.29) e (2.30), o termo I ao longo das interfaces, que envolve os esforços N_{ij}^0 é dado por:

$$I = \sum_{k=1}^{N_{int}} (c_k - c_{pa}) \int_{\Gamma_k} N_{ij}^0(\mathbf{P}) \left[n_i n_j w_{,n}^*(\mathbf{q}, \mathbf{P}) + s_i n_j w_{,s}^*(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \right] d\Gamma_k \quad (7.45)$$

7.6 DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO EM CÉLULAS

7.6.1 Introdução

A fim de se calcular as integrais de domínio das equações (7.42), (7.26), (7.28), (7.18), (7.19), (7.21) e (7.22), que envolvem os esforços iniciais na placa, deve-se discretizar os domínios das vigas e lajes em células, nas quais os momentos e forças normais iniciais de um ponto \mathbf{p} da placa serão aproximados por funções interpoladoras. Porém, não se adotará

o mesmo tipo de discretização para as vigas e lajes. Para as vigas serão consideradas células retangulares e para as lajes, células triangulares, como está mostrado na figura (7.2), onde as vigas estão discretizadas em uma célula retangular e a laje em 4 células triangulares. Nas células triangulares das lajes, serão utilizadas funções aproximadoras lineares (ver item 7.6.2). Nas vigas, os esforços iniciais serão considerados constantes ao longo da largura, mas variáveis ao longo do comprimento (ver item 7.6.3). Cada célula retangular terá três nós, que são coincidentes com os nós do elemento e, será dividida em quatro células triangulares onde os esforços iniciais terão aproximação linear. No encontro de vigas tem-se uma célula retangular com apenas um nó, logo os esforços terão aproximação constante.

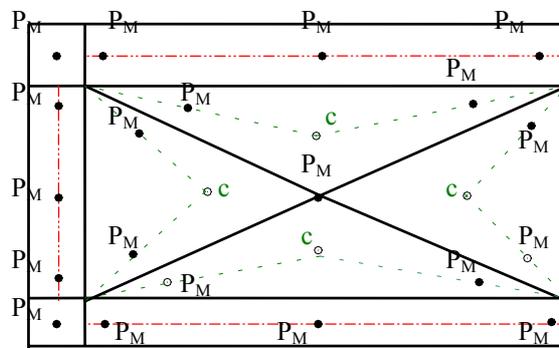


FIGURA 7.2 - Discretização do Domínio das Lajes e Vigas

Na figura (7.2) c representa o centróide da célula triangular, P_M os pontos de colocação para momentos e o contorno contínuo é o contorno das células, onde se faz a integração das funções.

As integrais sobre o domínio das células serão transformadas em integrais de linha sobre o contorno das mesmas. É interessante essa transformação, pois além de simplificar a integração numérica, ela facilita a implementação da técnica de sub-elementos, podendo, com isso, aumentar a precisão do cálculo. A técnica de sub-elementos é descrita mais detalhadamente no item (4.5)

No caso das células triangulares, os nós da célula coincidem com os pontos P_M , que são os pontos onde se calculam os momentos. Para a definição dos mesmos podem ser considerados dois modelos, no caso em que um dos lados da célula está sobre o contorno da placa ou uma interface: em um modelo os nós são definidos sobre o contorno ou interface e no outro tais nós são definidos dentro da célula (pontos P_M indicados na figura 7.2). O primeiro modelo não é muito conveniente porque os esforços elásticos deveriam ser calculados considerando-se diferenças finitas, isto é, eles seriam obtidos a partir dos valores

nodais de deslocamentos e forças de superfície do elemento ao qual pertence. No segundo modelo, os momentos elásticos dos pontos \mathbf{P}_M são obtidos a partir da integração numérica das curvaturas, o que resulta em uma maior precisão nos seus valores. Nesse trabalho será considerado apenas o segundo modelo.

Nas células retangulares definidas nas vigas, os nós extremos da célula estão sempre sobre o contorno da mesma (ver figura 7.6), porém como está indicado na figura (7.2), o ponto de colocação para o cálculo dos momentos pode não coincidir com o nó da célula, sendo deslocado para dentro da viga.

7.6.2 Integração das Células Triangulares

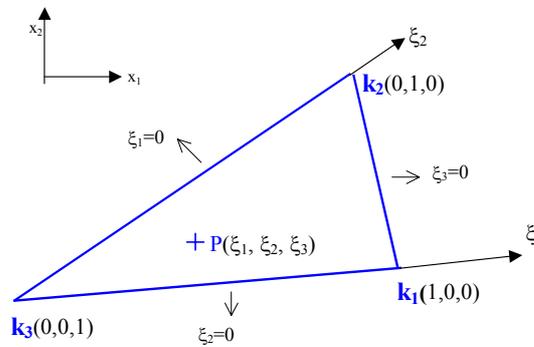


FIGURA 7.3 - Célula Triangular com Sistema de Coordenadas Homogêneas

Como já foi dito anteriormente, as lajes serão discretizadas através de células triangulares, utilizando-se funções interpoladoras lineares. Assim, considere a célula representada na figura (7.3), cujos nós \mathbf{K}_1 , \mathbf{K}_2 e \mathbf{K}_3 são coincidentes com seus vértices e na qual está representado o sistema de coordenadas homogêneas. Nesse trabalho, esse tipo de célula é adotado, quando os três vértices da mesma correspondem a pontos internos. Nesse caso, os momentos iniciais de um ponto \mathbf{p} qualquer da célula são obtidos, de maneira aproximada, a partir dos momentos iniciais dos nós da mesma, do seguinte modo:

$$\tilde{\mathbf{M}}_{ij}^0(\mathbf{p}) = \tilde{\Psi}^T(\mathbf{p}) \tilde{\mathbf{M}}^{0(N)} \quad (7.46)$$

onde $\tilde{\Psi}$ é a função interpoladora e $\tilde{\mathbf{M}}^{0(N)}$ o vetor dos momentos iniciais nodais, dados por:

$$\tilde{\Psi}^T = \begin{bmatrix} \xi_1^p & 0 & 0 & \xi_2^p & 0 & 0 & \xi_3^p & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1^p & 0 & 0 & \xi_2^p & 0 & 0 & \xi_3^p & 0 \\ 0 & 0 & \xi_1^p & 0 & 0 & \xi_2^p & 0 & 0 & \xi_3^p \end{bmatrix} \quad (7.47)$$

$$\underline{\underline{M}}^{o(N)T} = \left\{ \underline{\underline{m}}^{0(k1)} \quad \underline{\underline{m}}^{0(k2)} \quad \underline{\underline{m}}^{0(k3)} \right\} \quad (7.48)$$

Na equação (7.47), as coordenadas homogêneas (ξ_α^p) referentes a um ponto p da célula, são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1^p \\ \xi_2^p \\ \xi_3^p \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_0^1 & b^1 & a^1 \\ 2A_0^2 & b^2 & a^2 \\ 2A_0^3 & b^3 & a^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ X_1^p \\ X_2^p \end{Bmatrix} \quad (7.49)$$

onde:

$$a^\alpha = X_1^k - X_1^j \quad \alpha = 1, 2, 3; \quad j = 2, 3, 1; \quad k = 3, 1, 2 \quad (7.50)$$

$$b^\alpha = X_2^k - X_2^j \quad (7.51)$$

$$2A_0^\alpha = X_1^j X_2^k - X_1^k X_2^j \quad (7.52)$$

A é a área do triângulo, que é dada por:

$$A = 0.5(b^1 a^2 - b^2 a^1) \quad (7.53)$$

A integração sobre cada célula pode ser feita através da fórmula de quadratura de Gauss para domínio triangular, utilizando-se as coordenadas homogêneas. Porém, devido à natureza das funções envolvidas, há necessidade de se utilizar um grande número de pontos de integração, para se obter uma precisão aceitável, dependendo da posição do ponto de carregamento em relação à célula. Por esta razão, adota-se, neste trabalho, um esquema semi-analítico de integração, utilizado por TELLES & BREBBIA (1979) e VENTURINI (1982), o qual apresenta melhores resultados. Para a implementação desse esquema, adota-se um sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ), centrado no ponto de carregamento q , conforme a figura (7.4), que torna possível calcular analiticamente a integral sobre a coordenada r . As relações entre os sistemas de coordenadas cartesianas (X_1^p, X_2^p) e polares (r, θ) do ponto p , considerando a origem do sistema em q , são dadas pela equação (3.135). Substituindo-se a equação (3.135) em (7.49), obtém-se:

$$\xi_\alpha^p = \xi_\alpha^q + \frac{r}{2A} (b^\alpha \cos \theta + a^\alpha \sin \theta) \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (7.54)$$

sendo ξ_α^q as coordenadas homogêneas relativas ao ponto q e que são dadas por:

$$\xi_\alpha^q = \frac{1}{2A} (2A_0^\alpha + b^\alpha X_1^q + a^\alpha X_2^q) \quad (7.55)$$

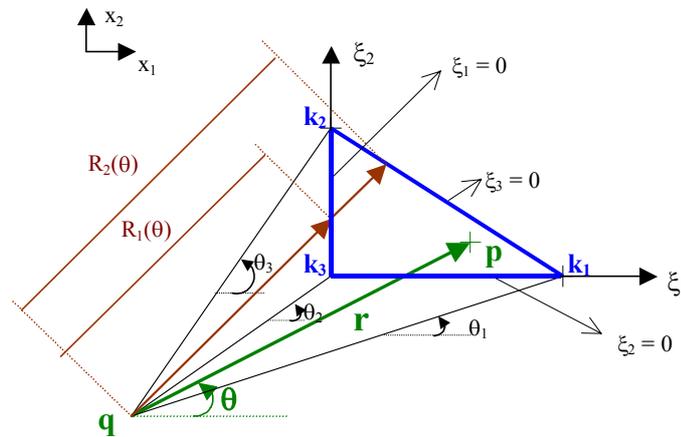


FIGURA 7.4 - Sistema de Coordenadas Cilíndricas

Porém, no caso em que um dos lados da célula estiver sobre o contorno externo da placa sem vigas ou sobre uma interface de uma viga com uma laje, os nós correspondentes a tal lado, não serão coincidentes com os vértices da mesma, mas serão definidos no seu interior (ver figura 7.1), como é o caso da célula representada na figura (7.5)

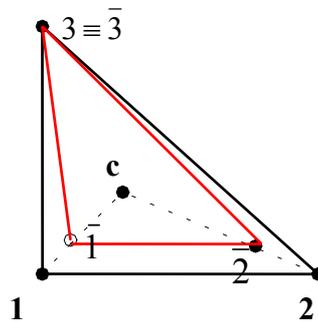


FIGURA 7.5 - Célula Cujos Nós Não São Coincidentes com seus Vértices

onde os pontos 1 , 2 , 3 correspondem aos vértices da célula onde se faz a integração das funções e os pontos $\bar{1}$, $\bar{2}$ e $\bar{3}$ são os nós das células, que nesse caso são coincidentes com os pontos de colocação para cálculo de momentos; o ponto 3 é um ponto interno à laje e os pontos 1 e 2 estão sobre uma interface ou contorno externo da placa.

Se o vértice da célula é definido por um ponto interno, a coordenada do ponto de cálculo de momentos é a mesma que aquela para cálculo de deslocamento e o nó da célula coincide com o vértice da mesma. No entanto, se o ponto está sobre uma interface ou sobre o contorno externo da placa, deve-se recalculer as coordenadas para o cálculo de momentos, da seguinte maneira: calcula-se o centróide c da célula triangular (ver figura 7.5) e, então, determina-se uma reta ligando o centróide e o vértice da célula que se quer deslocar para o

cálculo de momento (ver figura 7.5). O ponto de cálculo de momento P_M é definido sobre essa reta de acordo com a sua coordenada adimensional ξ . Nesse trabalho foi adotado $\xi=0,4$ (o centróide tem $\xi=1$).

No caso da figura (7.5) os momentos iniciais no ponto p $\{M_{ij}^0(p)\}$ são dados por:

$$\underset{\sim}{M}_{ij}^0(p) = \underset{\sim}{\Psi}^T(p) \underset{\sim}{M}_{ij}^{0(\bar{N})} \quad (7.56)$$

onde $\{M_{ij}^{0(\bar{N})}\}$ são os momentos iniciais dos nós $\bar{1}$, $\bar{2}$ e $\bar{3}$ e $\underset{\sim}{\Psi}^T$ a função interpoladora referente ao triângulo de vértices $\bar{1}$, $\bar{2}$ e $\bar{3}$, que é dada por:

$$\underset{\sim}{\Psi}^T = \begin{bmatrix} \bar{\xi}_1^p & 0 & 0 & \bar{\xi}_2^p & 0 & 0 & \bar{\xi}_3^p & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\xi}_1^p & 0 & 0 & \bar{\xi}_2^p & 0 & 0 & \bar{\xi}_3^p & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\xi}_1^p & 0 & 0 & \bar{\xi}_2^p & 0 & 0 & \bar{\xi}_3^p \end{bmatrix} \quad (7.57)$$

$$\text{sendo } \bar{\xi}_\alpha^p = \bar{\xi}_\alpha^q + \frac{r}{2A} \left(\bar{b}^\alpha \cos \theta + \bar{a}^\alpha \sin \theta \right) \quad \alpha = \bar{1}, \bar{2}, \bar{3} \quad (7.58)$$

onde \bar{A} é a área do triângulo menor, definido pelos nós $\bar{1}$, $\bar{2}$ e $\bar{3}$.

A fim de simplificar o algoritmo, será considerado que os momentos são aproximados pela equação (7.56), onde as coordenadas homogêneas são calculadas considerando-se as características do triângulo formado pelos nós da célula. Com isso, o caso representado na figura (7.3) seria um caso particular daquele apresentado na figura (7.5) em que os nós da célula coincidem com os vértices da mesma. As forças normais iniciais são aproximadas através da mesma função aproximadora utilizada para os momentos iniciais. A expressão (7.58), pode ser escrita da seguinte forma:

$$\bar{\xi}_\alpha^p = \bar{\xi}_\alpha^q + \bar{\xi}_\alpha^r \quad (7.59)$$

onde:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\xi}_1^q \\ \bar{\xi}_2^q \\ \bar{\xi}_3^q \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2\bar{A}_0^{-1} & \bar{b}^{-1} & \bar{a}^{-1} \\ 2\bar{A}_0^{-2} & \bar{b}^{-2} & \bar{a}^{-2} \\ 2\bar{A}_0^{-3} & \bar{b}^{-3} & \bar{a}^{-3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ X_1^q \\ X_2^q \end{Bmatrix} \quad (7.60)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & \bar{b}^{-1} & \bar{a}^{-1} \\ 0 & \bar{b}^{-2} & \bar{a}^{-2} \\ 0 & \bar{b}^{-3} & \bar{a}^{-3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (7.61)$$

Definida a função de aproximação dos esforços, será mostrado agora como é feito o cálculo das integrais de domínio, que envolvem os esforços iniciais, das equações (7.42), (7.26), (7.28), (7.18), (7.19), (7.21) e (7.22). Considere inicialmente a equação (7.18) do deslocamento transversal w . Discretizando-se o domínio da laje em N_{ce} células e aproximando-se os momentos iniciais nas mesmas, através da equação (7.56), pode-se escrever a integral sobre o domínio da laje da seguinte forma:

$$-\int_{\Omega} (m_{kl}^0(p) w_{,kl}^*(q,p)) d\Omega(p) = -\sum_{cel=1}^{N_{ce}} \left[\int_{\Omega_{cel}} \underline{k}^*(q,p) \bar{\Psi}^T(p) d\Omega_{cel}(p) \right] M_{cel}^{0(\bar{N})} \quad (7.62)$$

onde $\underline{k}^*(q,p) = \{w_{,11}^*(q,p) \quad 2w_{,12}^*(q,p) \quad w_{,22}^*(q,p)\}$; $\bar{\Psi}$ é a função de interpolação linear dada pela equação (7.57).

Denominando-se de $\{e^{cel}\}(q)$ a integral sobre cada célula genérica Ω_{cel} , que aparece na equação (7.62), determina-se a partir de $\{e^{cel}\}(q)$ nove coeficientes, pois têm-se três componentes de momento inicial (m_{11}^0 , m_{12}^0 e m_{22}^0) para cada um dos três nós da célula. Assim, considerando-se um determinado coeficiente relativo a um nó α e à componente de momento inicial na direção kl , este é dado por:

$$e_{kl}^{cel}(q) = -\int_{\Omega_{cel}} w_{,kl}^*(q,p) \bar{\xi}_{\alpha}^p(p) d\Omega_{cel}(p) \quad (k, l= 1, 2; \alpha = 1, 2, 3) \quad (7.63)$$

Substituindo-se em (7.63) a expressão de $w_{,kl}^*$, dada por (3.44), de $\bar{\xi}_{\alpha}^p$ (equação 7.59), e considerando-se que $r_{,k}$ e $r_{,l}$, que aparecem na expressão de $w_{,kl}^*$, são funções apenas do ângulo θ , indicado na figura (7.4), pode-se escrever $d\Omega_{cel}$ como: $d\Omega_{cel} = r dr d\theta$ (ver equação 3.131.a), chegando-se à integral:

$$e_{kl}^{cel}(q) = -\frac{1}{4\pi D} \int_{\theta} \int_r (r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \ln r) \left[\bar{\xi}_{\alpha}^q + \frac{r}{2A} (\bar{b}^{\alpha} \cos \theta + \bar{a}^{\alpha} \sin \theta) \right] r dr d\theta \quad (7.64)$$

onde r_i são os co-senos diretores de r (ver figura 7.4): $r_{,1} = \cos\theta$ e $r_{,2} = \sin\theta$ e δ_{kl} é o delta de Kronecker.

Fazendo-se a integração em relação à r , tem-se que:

$$e_{kl}^{cel}(q) = -\frac{1}{4\pi D} \int_{\theta} \left\{ \bar{\xi}_{\alpha}^q \frac{R^2}{2} \left[r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) \right] + \frac{1}{2A} \left(\bar{b}^{\alpha} \cos\theta + \bar{a}^{\alpha} \sin\theta \right) \frac{R^3}{3} \left[r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} d\theta \quad (7.65)$$

A integração numérica poderia ser feita em relação à θ , porém a fim de facilitar o cálculo da integral e também o emprego da técnica de sub-elementos, a integral (7.65) será transformada em integral ao longo do contorno da célula. Com isso, substituindo-se em (7.65) a relação (3.131.b), chega-se à:

$$e_{kl}^{cel}(q) = -\frac{1}{4\pi D} \int_{\Gamma} \left\{ \bar{\xi}_{\alpha}^q \frac{R}{2} \left[r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) \right] + \bar{\xi}_{\alpha}^R \frac{R}{3} \left[r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \quad (7.66)$$

onde $\bar{\xi}_{\alpha}^R$ é dado pela expressão (7.61), fazendo-se $r = R$.

Considerando-se que a célula tem três lados, calcula-se a integral (7.66) ao longo do contorno de cada lado. Portanto, a integral sobre a célula é dada por:

$$e_{kl}^{cel}(q) = -\frac{1}{4\pi D} \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_{\Gamma_i} \left\{ \bar{\xi}_{\alpha}^q \frac{R}{2} \left[r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) \right] + \bar{\xi}_{\alpha}^R \frac{R}{3} \left[r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_i \right\} \quad (7.67)$$

Deve-se então integrar numericamente a expressão (7.67). Para isso, deve-se fazer a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas homogêneas, que é obtida derivando-se a equação (4.1). A integração numérica é feita através da fórmula de quadratura de Gauss,

dada pela expressão (4.26), empregando-se a técnica de sub-elementos (equação 4.28). Assim, a integral (7.67) é calculada numericamente da seguinte forma:

$$e_{kl}^{cel}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{ks=1}^{N_{sub}} \sum_{ig=1}^{N_g} -\frac{\mathbf{a}_{ks}}{8\pi D} \left\{ \bar{\xi}_{\alpha}^q \frac{R}{2} \left[r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) \right] + \bar{\xi}_{\alpha}^R \frac{R}{3} \left[r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \left(\ln R - \frac{1}{3} \right) \right] \right\} (\mathbf{r}_{,i} \mathbf{n}_i) W_{ig}. \quad (7.68)$$

As coordenadas adimensionais $\bar{\xi}_{\alpha}^R$ e $\bar{\xi}_{\alpha}^q$ da expressão (7.68) são calculadas da seguinte maneira: obtêm-se as coordenadas cartesianas do ponto \mathbf{p} de integração a partir da coordenada adimensional $\boldsymbol{\eta}_{ig}$ (ver equação 4.28) do ponto de Gauss e das coordenadas cartesianas dos nós do sub-elemento, utilizando-se a expressão (4.2). Então, a partir das coordenadas cartesianas de \mathbf{p} , calculam-se suas coordenadas adimensionais através das equações (7.60) e (7.61).

Seja agora a integral de domínio da equação (7.26) referente a uma parcela da equação das curvaturas de um ponto interno \mathbf{q} . Considerando-se a equação (7.56), e designando-se tal integral de \mathbf{I} , ela é calculada de maneira aproximada, da seguinte forma:

$$\mathbf{I} = - \sum_{cel=1}^{N_{ce}} \left[\int_{\Omega_{cel}} \bar{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \bar{\Psi}_{\sim}^T(\mathbf{p}) d\Omega_{cel}(\mathbf{p}) \right] \mathbf{M}_{\sim}^{0(\bar{N})} \quad (7.69)$$

$$\text{sendo: } \bar{\mathbf{k}}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 w_{,11}^*}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) & 2 \frac{\partial^2 w_{,12}^*}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) & \frac{\partial^2 w_{,22}^*}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{array} \right\} \quad i, j=1, 2$$

Os coeficientes de $\bar{\mathbf{e}}_{ij}^{cel}$ relativos à integração de uma determinada célula Ω_{cel} , são obtidos usando-se o mesmo procedimento descrito para se obter a equação (7.68). Pode-se, então, expressar cada coeficiente genérico referente a um nó α e à componente de momento inicial na direção \mathbf{kl} , como:

$$\bar{\mathbf{e}}_{kl ij}^{cel}(\mathbf{q}) = - \int_{\Omega_{cel}} w_{,kl ij}^*(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \bar{\xi}_{\alpha}^P(\mathbf{P}) d\Omega_{cel}(\mathbf{p}) \quad (i, j, k, l = 1, 2; \alpha = 1, 2, 3) \quad (7.70)$$

onde a expressão de $w_{,klj}^*$ é dada em (7.27).

Em uma determinada célula, são calculados nove coeficientes para cada componente de curvatura $w_{,ij}$. Como são três componentes de curvatura, tem-se um total de 27 coeficientes para cada célula. Fazendo-se a integração em r e transformando-se a integral em relação à θ em integral ao longo do contorno da célula, a equação (7.70) é calculada da seguinte maneira:

$$\bar{e}_{klj}^{cel}(q) = \frac{1}{4\pi D} \sum_{s=1}^3 \int_{\Gamma_s} f_{klj}(\theta) \frac{1}{R} \left[\bar{\xi}_\alpha^q \ln R + \bar{\xi}_\alpha^R \right] \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_s \quad k,l,i,j=1,2 \quad (7.71)$$

$$\text{onde } f_{klj}(\theta) = - \left[8r_{,1} r_{,i} r_{,j} r_{,k} - 2(\delta_{ik} r_{,1} r_{,j} + \delta_{li} r_{,k} r_{,j} + \delta_{kl} r_{,i} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,1} r_{,i} + \delta_{lj} r_{,k} r_{,i} + \delta_{ij} r_{,k} r_{,1}) + \delta_{ik} \delta_{lj} + \delta_{li} \delta_{jk} + \delta_{kl} \delta_{ij} \right] \quad (7.72)$$

Integrando-se numericamente através da fórmula de quadratura de Gauss e utilizando-se a técnica de sub-elementos (ver equação 4.28), obtém-se:

$$\bar{e}_{klj}^{cel}(q) = \sum_{s=1}^3 \sum_{ks=1}^{N_{sub}} \sum_{ig=1}^{N_g} \frac{a_{ks}}{8\pi D} f_{klj}(\theta) \frac{1}{R} \left[\bar{\xi}_\alpha^q \ln R + \bar{\xi}_\alpha^R \right] \frac{\partial r}{\partial n} W_{ig} \quad (7.73)$$

Seja agora a integral (7.22) sobre o domínio da placa referente à equação de $w_{,m}$. Considerando-se a equação (7.56), a mesma é calculada de forma aproximada, pela expressão:

$$I = - \sum_{cel=1}^{N_{ce}} \left[\int_{\Omega_{cel}} \tilde{k}'^*(q,p) \bar{\Psi}^T(p) d\Omega_{cel}(p) \right] M_{cel}^{0(\bar{N})} \quad (7.74)$$

$$\text{sendo: } \tilde{k}'^*(q,p) = \left\{ w_{,11m}^*(q,p) \quad 2w_{,12m}^*(q,p) \quad w_{,22m}^*(q,p) \right\}$$

Considerando-se um determinado nó α da célula, a função aproximadora $\bar{\Psi}^T$ indicada na equação (7.57) e ainda a expressão fundamental (7.23), após se fazer a transformação da integral de domínio em integrais ao longo do contorno da célula e a integração em r , como já foi demonstrado para se obter a expressão (7.68), o coeficiente referente a uma componente de momento inicial na direção kl é calculado da seguinte forma:

$$e_{klm}^{cel}(\mathbf{q}) = \frac{1}{4\pi D} \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_{\Gamma_i} f_{klm}(\theta) \left[\xi_{\alpha}^q + \frac{1}{2} \xi_{\alpha}^R \right] \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \right\} \quad \alpha=1, 2, 3 \quad k,l=1,2 \quad (7.75)$$

sendo $f_{klm}(\theta)$ dada por:

$$f_{klm}(\theta) = [r_{,1} m_k + r_{,2} m_l + \delta_{kl} r_{,i} m_i - 2r_{,k} r_{,1} r_{,i} m_i] \quad k,l,i=1,2 \quad (7.76)$$

Seja agora a integral de domínio que aparece na equação (7.19) do deslocamento de chapa \mathbf{u}_k . Discretizando-se o domínio em N_{ce} células, a mesma é calculada, de forma aproximada, através da seguinte expressão:

$$I = \sum_{cel=1}^{N_{ce}} \left[\int_{\Omega_{cel}} \tilde{k}^{**}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \tilde{\Psi}^T(\mathbf{p}) d\Omega_{cel}(\mathbf{p}) \right] \tilde{N}_{cel}^{0(\bar{N})} \quad (7.77)$$

sendo: $\tilde{k}^{**}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \left\{ \varepsilon_{k11}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad 2\varepsilon_{k12}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad \varepsilon_{k22}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \right\}$ ($k=1, m$); $\tilde{N}_{cel}^{0(N)}$ são as forças normais iniciais nodais da célula.

A expressão de ε_{kij}^{*2D} é dada pela equação (6.68), onde $k,i,j=1,2$. Porém, no caso da equação do deslocamento \mathbf{u}_k a carga fundamental é aplicada nas direções l e m . Assim, a solução fundamental é dada por:

$$\varepsilon_{kij}^{*2D} = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu')} \overline{Gr} \left[(1-2\nu')(r_{,j} k_i + r_{,i} k_j) - r_{,p} k_p \delta_{ij} + 2r_{,p} k_p r_{,i} r_{,j} \right] \quad (7.78)$$

sendo $k = 1, m$ e $i, j, p = 1, 2$.

Em cada célula, são calculados 18 coeficientes, pois para cada equação de \mathbf{u}_k têm-se nove coeficientes. Após a transformação da integral (7.77) sobre o domínio Ω_{cel} de uma determinada célula em integral ao longo do contorno da mesma e considerando-se um determinado nó α da célula, o coeficiente relativo à componente $N_{ij}^{0(\alpha)}$ é dado por:

$$e_{kij}^{cel}(\mathbf{q}) = -\frac{1}{8\pi G(1-\nu')} \sum_{s=1}^3 \left\{ \int_{\Gamma_s} f_{kij}(\theta) \left[\xi_{\alpha}^q + \frac{1}{2} \xi_{\alpha}^R \right] \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \right\} \quad \alpha=1,2,3 \quad k=1,m \quad i,j=1,2 \quad (7.79)$$

$$\text{onde } f_{kij}(\theta) = [(1-2\nu')(r_{,j} k_i + r_{,i} k_j) - r_{,p} k_p \delta_{ij} + 2r_{,p} k_p r_{,i} r_{,j}] \quad (7.80)$$

Considere finalmente a integral sobre o domínio das células da equação da derivada do deslocamento de chapa $u_{k,l}$ definida na equação (7.42). Após a discretização do domínio da laje em células, a mesma é dada por:

$$I = \sum_{\text{cel}=1}^{N_{\text{ce}}} \left[\int_{\Omega_{\text{cel}}} \bar{k}^{**}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \bar{\Psi}^T(\mathbf{p}) d\Omega_{\text{cel}}(\mathbf{p}) \right] N_{\text{cel}}^{0(\bar{N})} \quad (7.81)$$

sendo: $\bar{k}^{**}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \{ \varepsilon_{k11l}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad 2\varepsilon_{k12l}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad \varepsilon_{k22l}^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \}$ ($k, l=1, 2$) e a expressão fundamental ε_{kijl}^{2D*} é dada pela equação (7.38).

Em uma célula, calculam-se 36 coeficientes, pois são 9 coeficientes para cada equação de $u_{k,l}$. Procedendo-se de forma análoga, o coeficiente da equação (7.81) relativo à componente $N_{ij}^{0(\alpha)}$ de um nó α , pertencente a uma célula qualquer, pode ser escrito como:

$$\bar{e}_{kijl}^{\text{cel}}(\mathbf{q}) = \frac{1}{8\pi\bar{G}(1-\nu')} \sum_{s=1}^3 \left\{ \int_{\Gamma_s} \frac{f_{kijl}(\theta)}{R} \left[\ln R \bar{\xi}_{\alpha}^q + \bar{\xi}_{\alpha}^R \right] \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_s \right\} \quad \alpha=1, 2, 3 \quad k, l, i, j=1, 2 \quad (7.82)$$

sendo $f_{kijl}(\theta)$ indicada na equação (7.39).

7.6.3 Integração das Células Retangulares nas Vigas

O domínio das vigas será discretizado através de células retangulares (ver figura 7.6), cujos eixos são dados pelos elementos.

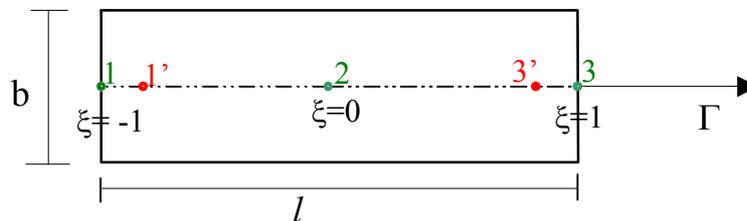


FIGURA 7.6 – Definição dos Nós e Pontos de Colocação na Célula Retangular

onde 1, 2 e 3 são os nós das células e 1', 2 e 3' os pontos de colocação para esforços.

Os esforços serão considerados constantes ao longo da largura b , mas variáveis ao longo do comprimento l . Deve-se observar que os pontos de colocação para momentos 1' e

$3'$, definidos na figura (7.6), podem ou não ser coincidentes com os nós 1 e 3 , que são definidos sempre sobre o contorno da lateral da viga como está mostrado na figura (7.6). O ponto de colocação para esforços não coincide com o nó da célula quando na construção do sistema de equações para obtenção das incógnitas do contorno tal ponto é deslocado para obtenção das coordenadas do ponto de colocação de deslocamento. Caso contrário, o ponto de colocação coincide com o nó da célula.

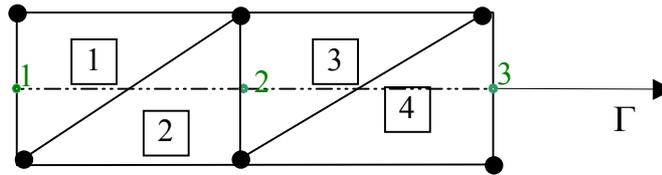


FIGURA 7.7 – Divisão da Célula Retangular em Células Triangulares

A integral de domínio envolvendo os esforços iniciais é calculada dividindo a célula retangular em quatro células triangulares (ver figura 7.7), nas quais será adotada a mesma aproximação das células triangulares nas lajes. Escrevem-se, então, as componentes de momentos ou força normal inicial do nó da célula triangular sobre o contorno da viga em função das componentes de um ponto correspondente sobre o eixo da mesma. Isso é feito do seguinte modo: segundo a direção n , da normal no eixo da viga, projeta-se o ponto P_e do contorno sobre o eixo, a fim de identificar o ponto P_e sobre o eixo da viga (ver figura 7.8). Então, adota-se $m_{ij(P_e)}^0 = m_{ij(P_c)}^0$ e $N_{ij(P_e)}^0 = N_{ij(P_c)}^0$, ou seja, que os momentos e forças normais iniciais são constantes ao longo da espessura da viga.

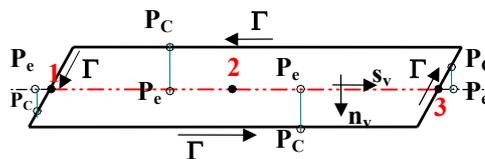


FIGURA 7.8 - Projeção no Eixo da Célula dos Pontos Sobre o Contorno da Mesma

Deve-se notar, que não há necessidade de se calcular as integrais sobre os lados das células triangulares, indicadas na figura (7.7), que são definidos no domínio da viga, pois essas integrais se anulariam ao se considerar as duas células às quais tal lado é comum. Assim, é necessário calcular apenas as integrais sobre os lados das células triangulares definidos sobre o contorno da viga.

7.6.4. Integração das Células Retangulares nos Encontros de Vigas

Nos encontros de vigas, os momentos são considerados constantes e, portanto, a célula possui apenas um nó. Logo, nesse caso, a função aproximadora é dada por:

$$\tilde{\Psi}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.83)$$

Considere inicialmente a equação do deslocamento transversal w . A integral de domínio envolvendo momentos iniciais é calculada de forma aproximada através da equação (7.62), utilizando-se porém, a função de interpolação indicada na equação (7.83). A fim de transformar tal integral em integral de contorno, considere a transformação de coordenadas, dada pela expressão (3.132). Substituindo-se as equações (3.132) e (3.44), relativa à expressão de $w_{,kl}^*$, em (7.62), a integral referente a um nó α de uma célula qualquer, é calculada fazendo-se a integração ao longo dos quatro lados da célula, do seguinte modo:

$$e_{kl}^m(q) = -\frac{1}{4\pi D} \sum_{i=1}^4 \left\{ \int_{\Gamma_i} \int_0^R (r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \ln R) \phi_{\alpha} r dr \right\} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{1}{R} d\Gamma_i \quad k,l=1,2 \quad (7.84)$$

onde $\phi_{\alpha}=1$.

Fazendo-se a integração em r , o coeficiente relativo à componente $m_{kl}^{0(\alpha)}$ do nó α de uma célula qualquer é dado por:

$$e_{kl}^m(q) = -\frac{1}{4\pi D} \sum_{i=1}^4 \left\{ \int_{\Gamma_i} \frac{R}{2} \left[r_{,k} r_{,l} + \delta_{kl} \left(\ln R - \frac{1}{2} \right) \right] \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_i \right\} \quad k,l=1,2 \quad (7.85)$$

As integrais de domínio envolvendo esforços iniciais da equação das curvaturas, da derivada do deslocamento transversal, do deslocamento de chapa u_k e da derivada do deslocamento u_k são calculadas, respectivamente, através das equações (7.69), (7.74), (7.77) e (7.81), considerando-se, no entanto, a função de interpolação definida na equação (7.83). Procedendo-se de forma análoga àquela descrita para se obter a equação (7.85), chega-se às seguintes equações, referentes, respectivamente, às equações de $w_{,ij}$; $w_{,m}$; u_k e $u_{k,l}$:

$$e_{klj}^{*cel}(q) = \frac{1}{4\pi D} \sum_{s=1}^4 \left\{ \int_{\Gamma_s} f_{klj}(\theta) \frac{\ln R}{R} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \right\} \quad k,l,i,j=1,2 \quad (7.86)$$

$$e_{klm}'^{cel}(q) = \frac{1}{4\pi D} \sum_{i=1}^4 \left\{ \int_{\Gamma_i} f_{klm}(\theta) \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma_i \right\} \quad k,l=1,2 \quad (7.87)$$

$$e_{kij}''^{cel}(q) = -\frac{1}{8\pi \overline{G}(1-\nu')} \sum_{s=1}^4 \left\{ \int_{\Gamma_s} f_{kij}(\theta) \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \right\} \quad k=l,m \quad i,j=1,2 \quad (7.88)$$

$$e_{kijl}^{-m}(q) = \frac{1}{8\pi \overline{G}(1-\nu')} \sum_{s=1}^4 \left\{ \int_{\Gamma_s} f_{kijl}(\theta) \frac{\ln R}{R} \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma \right\} \quad k,l,i,j=1,2 \quad (7.89)$$

sendo $f_{klj}(\theta)$, $f_{klm}(\theta)$, $f_{kij}(\theta)$ e $f_{kijl}(\theta)$ dados pelas equações (7.72), (7.76), (7.80) e (7.39).

7.7 EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Pode-se transformar as equações integrais obtidas nos itens (7.3) e (7.4) em equações algébricas, através da discretização do contorno e interfaces em elementos (ver capítulo 4), nos quais são aproximadas as variáveis definidas ao longo do contorno externo da placa e interfaces, e do domínio em células (ver item 7.6), nas quais serão aproximados os campos de momentos e forças normais iniciais.

As equações integrais referentes ao modelo no qual as vigas são representadas por seus eixos médios são dadas no item (6.8), devendo-se acrescentar ao segundo membro das mesmas as integrais de domínio, envolvendo os esforços iniciais, que foram definidas nos itens (7.3) e (7.4). A seguir, serão apresentadas as equações algébricas referentes a esse modelo, pois o modelo em que as variáveis da viga são definidas ao longo do contorno da mesma, apresentado nos itens (7.3) e (7.4), não foi implementado em microcomputador.

7.7.1 Equações de Deslocamentos no Contorno Externo e Eixos de Viga

Após a integração numérica ao longo de todos os elementos do contorno externo sem vigas, eixos de vigas e de todas as células, as equações de deslocamentos referentes aos problemas de placa (equação de w ou $w_{,m}$) e chapa (equação de u_k ou $u_{k,l}$) de um ponto sobre o contorno externo ou um eixo de viga, podem ser escritas, respectivamente, em suas formas matriciais, da seguinte maneira:

$$\tilde{H}_F U_F + \tilde{H}_c U_c + \tilde{H}_{2D} U_{2D} = \tilde{G}_F P_F + \tilde{G}_c P_c + T_F + \tilde{G}_{2D} P_{2D} + \tilde{E}_F M^0 + \tilde{E}_{2D} N^0 \quad (7.90)$$

$$\tilde{H}_F U_F + \tilde{H}_{2D} U_{2D} = \tilde{G}_{2D} P_{2D} + T_{2D} + \tilde{E}_{2D} N^0 \quad (7.91)$$

onde todos os termos das equações (7.90) e (7.91), a menos daqueles que envolvem os esforços iniciais, são os mesmos definidos em (6.146) e (6.147); $[E_F]$, $[E_{2D}]$ e $[E_{2D}]$ são resultantes da integração numérica nas células e representam a influência dos campos de esforços iniciais nos valores dos deslocamentos; $\{M^0\}$ e $\{N^0\}$ são, respectivamente, os vetores de momentos e forças normais iniciais dos nós das células.

7.7.2 Deslocamentos e esforços no domínio

Após a obtenção das incógnitas do contorno externo, eixos de vigas e cantos, pode-se obter os deslocamentos de placa e chapa para qualquer ponto interno (ver item 4.9), através das seguintes equações matriciais:

$$w(q) + \tilde{H}_F(q) U_F + \tilde{H}_c(q) U_c + \tilde{H}_{2D}(q) U_{2D} = \tilde{G}_F(q) P_F + \tilde{G}_c(q) P_c + T(q) + \tilde{G}_{2D} P_{2D} + \tilde{E}_F(q) M^0 + \tilde{E}_{2D}(q) N^0 \quad (7.92)$$

$$w_{,m}(q) + \tilde{H}'_F(q) U_F + \tilde{H}'_c(q) U_c + \tilde{H}'_{2D}(q) U_{2D} = \tilde{G}'_F(q) P_F + \tilde{G}'_c(q) P_c + \tilde{G}'_{2D}(q) P_{2D} + T'(q) + \tilde{E}'_F(q) M^0 + \tilde{E}'_{2D}(q) N^0 \quad (7.93)$$

$$u_k(q) - w_{,k}(q) c(q) + \tilde{H}_F(q) U_F + \tilde{H}_{2D}(q) U_{2D} = \tilde{G}_{2D}(q) P_{2D} + T''(q) + \tilde{E}_{2D}(q) N^0 \quad k=l,m \quad (7.94)$$

Derivando-se duas vezes a equação integral de w , obtém-se a equação integral das curvaturas $w_{,ij}$ para um ponto interno, que na sua forma aproximada, é dada por:

$$w_{,ij}(q) + \tilde{H}''_F(q) U_F + \tilde{H}''_c(q) U_c + \tilde{H}''_{2D}(q) U_{2D} = \tilde{G}''_F(q) P_F +$$

$$+ \bar{G}'_{2D} P_{2D} + G'_c(q) P_c + T'''(q) + E''_F(q) M^0 + \bar{E}'_{2D}(q) N^0 \quad i,j=1,2 \quad (7.95)$$

A equação dos momentos elásticos em um ponto interno é obtida a partir da equação (7.10), sendo as curvaturas calculadas através da equação (7.95). A equação aproximada dos momentos elásticos em todos os pontos nodais das células, na forma matricial, é dada por:

$$\begin{aligned} \{M^e\} + \begin{bmatrix} [H^*]_F & [H^*]_C & [\bar{H}^*]_{2D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_F \\ \{U\}_C \\ \{U\}_{2D} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [G^*]_F & [G^*]_C & [\bar{G}^*]_{2D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_F \\ \{P\}_C \\ \{P\}_{2D} \end{Bmatrix} + \\ &+ \{T^*\}_F + [E^*]_F \{M^0\} + [\bar{E}^*]_{2D} \{N^0\} \end{aligned} \quad (7.96)$$

A equação matricial da derivada do deslocamento $u_i(q)$, na superfície média de uma sub-região s , é a seguinte:

$$u_{i,j}^s(q) + \bar{H}'_F(q) U_F + H'_{2D}(q) U_{2D} = G'_{2D}(q) P_{2D} + T^{**}(q) + E'_{2D}(q) N^0 \quad (7.97)$$

Considerando-se as equações (7.11) e (7.97), obtém-se a equação matricial relativa à força normal elástica de um ponto q . Escrevendo-se essa equação em todos os pontos nodais das células, chega-se à:

$$\begin{aligned} \{N^e\} + \begin{bmatrix} [\bar{H}^*]_F & [0] & [H^*]_{2D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U\}_F \\ \{U\}_C \\ \{U\}_{2D} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} [0] & [0] & [G^*]_{2D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{P\}_F \\ \{P\}_C \\ \{P\}_{2D} \end{Bmatrix} + \\ &+ \{T^*\} + [E^*]_{2D} \{N^0\} \end{aligned} \quad (7.98)$$

7.8 TÉCNICA DE SOLUÇÃO

7.8.1 Cálculo das Incógnitas da Placa e dos Deslocamentos do Domínio

Escrevendo-se as equações de placa e chapa necessárias para a obtenção das incógnitas do contorno externo, eixos de vigas e cantos (ver item 6.8.5), obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc} [H]_F & [H]_C & [\bar{H}]_{2D} \\ \hline [\bar{H}]_F & [0] & [H]_{2D} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{U\}_F \\ \{U\}_C \\ \{U\}_{2D} \end{array} \right\} &= \left[\begin{array}{ccc} [G]_F & [G]_C & [\bar{G}]_{2D} \\ \hline [0] & [0] & [G]_{2D} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \{P\}_F \\ \{P\}_C \\ \{P\}_{2D} \end{array} \right\} + \\ &+ \left\{ \begin{array}{c} \{T\}_F \\ \hline \{T\}_{2D} \end{array} \right\} + \left[\begin{array}{c} [E]_F \\ \hline [0] \end{array} \right] \{M^0\} + \left[\begin{array}{c} [\bar{E}]_{2D} \\ \hline [E]_{2D} \end{array} \right] \{N^0\} \end{aligned} \quad (7.99)$$

O sistema (7.99) e as equações matriciais dos deslocamentos nos pontos internos são montados em uma mesma equação matricial, porém resolve-se primeiro o sistema de equações, para depois, com os valores das variáveis no contorno externo, eixos de vigas e cantos, se obterem os deslocamentos nos pontos internos. De uma forma simplificada, o sistema (7.99) pode ser escrito da seguinte maneira:

$$[H]\{U\} = [G]\{P\} + \{T\} + [E_M]\{M^0\} + [E_N]\{N^0\} \quad (7.100)$$

Para obter-se um procedimento numérico mais conveniente para a análise não linear, são feitas operações matriciais sobre a equação (7.100), visando-se deixar os termos referentes aos esforços iniciais isolados. Assim, armazenam-se todas as incógnitas do contorno externo, eixos de vigas e cantos num vetor $\{X\}$, trocando-se as respectivas colunas entre as matrizes $[H]$ e $[G]$. Então, somam-se em $\{B\}$ os efeitos dos deslocamentos ou esforços prescritos no contorno externo e cantos, ao efeito do carregamento que atua na placa (ver item 4.7), obtendo-se:

$$\tilde{A} X = \tilde{B} + \tilde{E}_M M^0 + \tilde{E}_N N^0 \quad (7.101)$$

Multiplicando-se os dois lados dessa equação por $[A]^{-1}$, obtêm-se as incógnitas do problema:

$$\tilde{X} = \tilde{L} + \tilde{R}_M M^0 + \tilde{R}_N N^0 \quad (7.102)$$

onde:

$$\tilde{L} = \tilde{A}^{-1} \tilde{B} \quad (7.103)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_M = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_M \quad (7.104)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_N = \tilde{\mathbf{A}}^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_N \quad (7.105)$$

Na equação (7.102) $[\mathbf{R}_M]$ e $[\mathbf{R}_N]$ representam, respectivamente, a influência dos momentos e forças normais iniciais nos valores dos deslocamentos do contorno externo, eixos de vigas e cantos e $\{\mathbf{L}\}$ representa a resposta elástica, sem considerar os esforços iniciais. Na resolução do sistema (7.101), inicialmente não se leva em conta a parcela relativa aos esforços iniciais ($[\mathbf{E}_M]\{\mathbf{M}^0\} + [\mathbf{E}_N]\{\mathbf{N}^0\}$), obtendo-se dessa forma o vetor \mathbf{L} , que contém os valores incógnitos resultantes apenas do carregamento na placa. No caso da análise linear onde a placa é sujeita também a campos de esforços iniciais, os deslocamentos e esforços finais são obtidos somando-se aos valores das incógnitas do problema a parcela devido aos esforços iniciais. No caso da análise não linear, os resultados finais são obtidos após se fazer o processo incremental-iterativo descrito a seguir no capítulo 8 onde, no final de um incremento, o vetor dos esforços iniciais corresponde aos valores acumulados dos resíduos de esforços ao longo das iterações.

Da mesma forma se faz para os pontos internos, onde inicialmente, utilizando-se o vetor $\{\mathbf{L}\}$, calcula-se o deslocamento elástico devido ao carregamento. Então, acrescenta-se ao valor desse, a parcela referente aos esforços iniciais, como está descrito a seguir:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}(q) &= -\tilde{\mathbf{H}}(q)\tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{G}}(q)\tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{T}}(q) + \tilde{\mathbf{E}}_M(q)\tilde{\mathbf{M}}^0 + \tilde{\mathbf{E}}_N(q)\tilde{\mathbf{N}}^0 = \\ &= -\tilde{\mathbf{A}}(q)\tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}(q) + \tilde{\mathbf{E}}_M(q)\tilde{\mathbf{M}}^0 + \tilde{\mathbf{E}}_N(q)\tilde{\mathbf{N}}^0 \end{aligned} \quad (7.106)$$

Considerando-se a equação (7.102), obtém-se:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{U}}(q) &= -\tilde{\mathbf{A}}(q)\left(\tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{R}}_M\tilde{\mathbf{M}}^0 + \tilde{\mathbf{R}}_N\tilde{\mathbf{N}}^0\right) + \tilde{\mathbf{B}}(q) + \tilde{\mathbf{E}}_M(q)\tilde{\mathbf{M}}^0 + \tilde{\mathbf{E}}_N(q)\tilde{\mathbf{N}}^0 = \\ &= \tilde{\mathbf{L}}(q) + \tilde{\mathbf{R}}_M(q)\tilde{\mathbf{M}}^0 + \tilde{\mathbf{R}}_N(q)\tilde{\mathbf{N}}^0 \end{aligned} \quad (7.107)$$

onde:

$$\tilde{\mathbf{R}}_M(q) = -\tilde{\mathbf{A}}(q)\tilde{\mathbf{R}}_M + \tilde{\mathbf{E}}_M(q) \quad (7.108)$$

$$\tilde{\mathbf{R}}_N(q) = -\tilde{\mathbf{A}}(q)\tilde{\mathbf{R}}_N + \tilde{\mathbf{E}}_N(q) \quad (7.109)$$

$$\tilde{\mathbf{L}}(q) = -\tilde{\mathbf{A}}(q)\tilde{\mathbf{L}} + \tilde{\mathbf{B}}(q) \quad (7.110)$$

7.8.2 Cálculo dos esforços

As equações (7.96) e (7.98) podem ser expressas da seguinte forma simplificada:

$$\tilde{M}^e = -\tilde{H}^* \tilde{U} + \tilde{G}^* \tilde{P} + \tilde{T}^* + \tilde{E}_M^* \tilde{M}^0 + \tilde{E}_N^* \tilde{N}^0 \quad (7.111)$$

$$\tilde{N}^e = -\tilde{H}^{*'} \tilde{U} + \tilde{G}^{*'} \tilde{P} + \tilde{T}^{*'} + \tilde{E}^{*'} \tilde{N}^0 \quad (7.112)$$

Analogamente ao que se fez para se obter a solução da equação (7.102), a equação (7.111) resulta em:

$$\tilde{M}^e = \tilde{B}^* - \tilde{A}^* \tilde{X} + \tilde{E}_M^* \tilde{M}^0 + \tilde{E}_N^* \tilde{N}^0 = \tilde{K} + \tilde{S}_M \tilde{M}^0 + \tilde{S}_N \tilde{N}^0 \quad (7.113)$$

onde:

$$\tilde{K} = \tilde{B}^* - \tilde{A}^* \tilde{L} \quad (7.114)$$

$$\tilde{S}_M = \tilde{E}_M^* - \tilde{A}^* \tilde{R}_M \quad (7.115)$$

$$\tilde{S}_N = \tilde{E}_N^* - \tilde{A}^* \tilde{R}_N \quad (7.116)$$

Na equação (7.113) $[\tilde{S}_M]$ e $[\tilde{S}_N]$ representam, respectivamente, a influência dos momentos e forças normais iniciais nos valores dos momentos elásticos dos pontos nodais das células e $\{\tilde{K}\}$ contém a resposta elástica, sem considerar os esforços iniciais.

Por sua vez, a equação (7.112) resulta em:

$$\tilde{N}^e = \tilde{B}^{*'} - \tilde{A}^{*'} \tilde{X} + \tilde{E}_N^{*'} \tilde{N}^0 = \tilde{K}' + \tilde{S}_N' \tilde{N}^0 + \tilde{S}_M' \tilde{M}^0 \quad (7.117)$$

onde

$$\tilde{K}' = \tilde{B}^{*'} - \tilde{A}^{*'} \tilde{L} \quad (7.118)$$

$$\tilde{S}_N' = \tilde{E}_N^{*'} - \tilde{A}^{*'} \tilde{R}_N \quad (7.119)$$

$$\tilde{S}_M' = -\tilde{A}^{*'} \tilde{R}_M \quad (7.120)$$

Na equação (7.117) $[\tilde{S}_M']$ e $[\tilde{S}_N']$ representam, respectivamente, a influência dos momentos e forças normais iniciais nos valores das forças normais elásticas dos pontos nodais das células e $\{\tilde{K}'\}$ contém a resposta elástica, sem considerar os esforços iniciais.

7.9 VERIFICAÇÃO DAS MATRIZES $[S_M]$ e $[S_N]$

Considerando-se configurações particulares de equilíbrio de uma placa, podem ser definidas propriedades para as matrizes $[R_M]$ (equação 7.108), $[R_N]$ (equação 7.109), $[S_M]$ (equação 7.115) e $[S'_N]$ (equação 7.119). Todas as propriedades deduzidas a seguir se referem ao problema de flexão simples ou ao problema de chapa sem considerar a flexão.

Considere inicialmente uma placa sem enrijecedores e coeficiente de Poisson nulo, a fim de representar o caso de uma viga. Como condição de contorno, ao longo dos contornos definidos no sentido longitudinal da viga adota-se $M_n=V_n=0$ e nos outros dois lados menores, aplica-se um momento inicial M_n^0 e considera-se $w=0$ (ver figura 7.9).

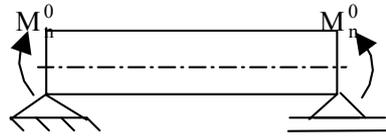


FIGURA 7.9 - Viga com Momento Inicial Aplicado

No caso de se ter $M_n^0 = M_{11}^0$, deve-se verificar os três somatórios da matriz $[S_M]$:

$$\sum_{j=1}^{N_{pm}} S_{M(3*i-2, 3*j-2)} = 1 \quad 1 \leq i \leq N_{pm} \quad (7.121)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{pm}} S_{M(3*i-1, 3*j-2)} = 0 \quad (7.122)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{PM}} S_{M(3*i, 3*j-2)} = 0 \quad (7.123)$$

sendo N_{pm} o número de pontos onde se calculam os momentos; i se refere ao ponto onde se calcula o momento elástico, j o ponto onde está aplicado o momento inicial e o vetor de momentos para um determinado ponto i ou j é o seguinte: $\{M\}^T = \{M_{11} \quad M_{12} \quad M_{22}\}$.

Se $M_n^0 = M_{22}^0$ deve-se verificar os três somatórios da matriz $[S_M]$:

$$\sum_{j=1}^{N_{PM}} S_{M(3*i-2, 3*j)} = 0 \quad (7.124)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{PM}} S_{M(3*i-1, 3*j)} = 0 \quad (7.125)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{PM}} S_{M(3^*i, 3^*j)} = 1 \quad (7.126)$$

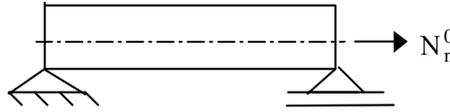


FIGURA 7.10 – Viga com Força Normal Inicial Aplicada

Para verificar a matriz $[S'_N]$, considere a mesma viga anterior, com as seguintes condições de contorno: ao longo de um dos lados apoiados, tem-se $u_n=p_s=0$ para todos os pontos a menos do ponto do meio, onde se adota $u_n=u_s=0$; no outro lado apoiado têm-se $p_s=0$ e aplica-se N_n^0 . Para $N_n^0 = N_{11}^0$, chega-se às mesmas propriedades definidas nas equações (7.121) a (7.123) para a matriz $[S_M]$ e no caso de $N_n^0 = N_{22}^0$ chega-se às equações (7.124) a (7.126), considerando-se, no entanto, a matriz $[S'_N]$ ao invés de $[S_M]$.

Todas as propriedades definidas a seguir se referem à placa enrijecida com duas vigas externas, representada na figura (4.8), onde os dois lados correspondentes às vigas são livres e os outros dois apoiados.

Considere inicialmente o problema de flexão simples. Ao longo dos dois lados apoiados são aplicados momentos iniciais na laje e nas laterais das vigas de tal modo que a curvatura na placa enrijecida seja constante. Com isso, nos pontos da laje aplica-se M_n^0 e nos pontos das vigas aplica-se um momento inicial igual a $(D_v/D_L) M_n^0$, sendo D_v e D_L , respectivamente, as rigidezes da viga e da laje. Nesse caso, como $M_n^0 = M_{22}^0$ as propriedades da matriz $[S_M]$ são as seguintes:

$$\sum_{j=1}^{N_{oclr}} S_{M(3^*i-2, 3^*j)} \frac{D_v}{D_L} + \sum_{j=N_{oclr}+1}^{N_{pm}} S_{M(3^*i-2, 3^*j)} = 0 \quad 1 \leq i \leq N_{pm} \quad (7.127)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{oclr}} S_{M(3^*i-1, 3^*j)} \frac{D_v}{D_L} + \sum_{j=N_{oclr}+1}^{N_{pm}} S_{M(3^*i-1, 3^*j)} = 0 \quad 1 \leq i \leq N_{pm} \quad (7.128)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{oclr}} S_{M(3^*i, 3^*j)} \frac{D_v}{D_L} + \sum_{j=N_{oclr}+1}^{N_{pm}} S_{M(3^*i, 3^*j)} = 1 \quad N_{oclr} + 1 \leq i \leq N_{pm} \quad (7.129)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{oclr}} S_{M(3^*i, 3^*j)} \frac{D_v}{D_L} + \sum_{j=N_{oclr}+1}^{N_{pm}} S_{M(3^*i, 3^*j)} = \frac{D_v}{D_L} \quad 1 \leq i \leq N_{oclr} \quad (7.130)$$

onde N_{ocelr} é o número de pontos de cálculo de momentos nas vigas e $(N_{pm} - N_{ocelr})$ o número de pontos de colocação para cálculo de momentos na laje.

Com esse exemplo pode-se ainda verificar a matriz $[R_M]$. Designando de I o seguinte somatório:

$$I = \sum_{j=1}^{N_{ocelr}} R_{M(i \rightarrow 3*j)} \frac{D_V}{D_L} + \sum_{j=N_{ocelr}+1}^{N_{pm}} R_{M(i \rightarrow 3*j)} \quad 1 \leq i \leq N_{varf} \quad (7.131)$$

onde N_{varf} está definido na equação (6.150).

Utilizando-se a equação (7.131) devem ser verificadas as seguintes propriedades:

- ❖ Nos pontos k ao longo dos lados apoiados, deve-se ter $I=0$ para as linhas $i=2*k-1$, que se referem ao esforço V_n e $I=cte$ para as linhas $i=2*k$, relativas ao deslocamento w_n .
- ❖ Nas linhas i , referentes aos cantos, deve-se ter $I=0$, pois são relativas ao esforço R_c .
- ❖ Nos pontos k ao longo dos lados livres, deve-se ter $I=0$ para as linhas $i=2*k$, relativas ao deslocamento w_n .

Seja agora o problema de chapa. Ao longo dos lados apoiados, considere as mesmas condições de contorno da viga representada na figura (7.10). A força inicial N_n^0 é aplicada de tal forma que as vigas e a laje fiquem com a mesma deformação. Assim, se nos pontos da laje aplica-se N_n^0 , nos pontos das vigas deve-se ser aplicado $(t_V/t_L) N_n^0$, sendo t_V e t_L , respectivamente, as espessuras das vigas e da laje. No caso de $N_n^0 = N_{22}^0$, chega-se às seguintes propriedades:

$$\sum_{j=1}^{N_{ocelr}} S'_{N(3*i-2 \rightarrow 3*j)} \frac{t_V}{t_L} + \sum_{j=N_{ocelr}+1}^{N_{pm}} S'_{N(3*i-2 \rightarrow 3*j)} = 0 \quad 1 \leq i \leq N_{pm} \quad (7.132)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{ocelr}} S'_{N(3*i-1 \rightarrow 3*j)} \frac{t_V}{t_L} + \sum_{j=N_{ocelr}+1}^{N_{pm}} S'_{N(3*i-1 \rightarrow 3*j)} = 0 \quad 1 \leq i \leq N_{pm} \quad (7.133)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{ocelr}} S'_{N(3*i \rightarrow 3*j)} \frac{t_V}{t_L} + \sum_{j=N_{ocelr}+1}^{N_{pm}} S'_{N(3*i \rightarrow 3*j)} = 1 \quad N_{ocelr} + 1 \leq i \leq N_{pm} \quad (7.134)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{ocelr}} S'_{N(3*i \rightarrow 3*j)} \frac{t_V}{t_L} + \sum_{j=N_{ocelr}+1}^{N_{pm}} S'_{N(3*i \rightarrow 3*j)} = \frac{t_V}{t_L} \quad 1 \leq i \leq N_{ocelr} \quad (7.135)$$

As propriedades mostradas anteriormente servem para verificar as matrizes no caso de uma distribuição constante de esforço inicial. Porém, as matrizes também devem ser

verificadas para uma distribuição linear desse esforço. Seja ainda esse último problema de chapa (ver figura 7.11). Considerando-se que haja somente força normal na direção x_2 e que essa tenha a seguinte distribuição linear na laje $N_{22}^0 = x_2 / l$ e que nas vigas a força normal inicial seja igual a $N_{22}^0 = (t_v / t_L)(x_2 / l)$, as seguintes propriedades devem ser verificadas:

$$\sum_{j=1}^{N_{ocelr}} S'_{N(3^*i,3^*j)} \frac{x_{2(j)} t_v}{l t_L} + \sum_{j=N_{ocelr}+1}^{N_{pm}} S'_{N(3^*i,3^*j)} \frac{x_{2(j)}}{l} = \frac{t_v}{t_L} \frac{x_{2(i)}}{l} \quad 1 \leq i \leq N_{ocelr} \quad (7.136)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{ocelr}} S'_{N(3^*i,3^*j)} \frac{x_{2(j)} t_v}{l t_L} + \sum_{j=N_{ocelr}+1}^{N_{pm}} S'_{N(3^*i,3^*j)} \frac{x_{2(j)}}{l} = \frac{x_{2(i)}}{l} \quad N_{ocelr} + 1 \leq i \leq N_{pm} \quad (7.137)$$

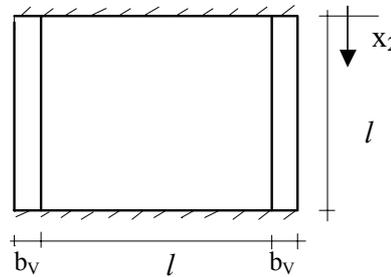


FIGURA 7.11 – Placa Enrijecida com Duas Vigas

Com esse mesmo exemplo, pode-se deduzir uma propriedade para verificar a matriz $[R_N]$. Para isso, deve-se determinar a expressão para o deslocamento u_{x_2} . A deformação na direção de x_2 é dada por:

$$\varepsilon_{x_2} = \frac{du_{x_2}}{dx_2} = \frac{N_{22}^0}{E} = \frac{x_2}{lE} \quad (7.138)$$

Integrando-se a expressão (7.138) em relação à x_2 , obtém-se:

$$u_{x_2} = \frac{x_2^2}{2El} \quad (7.139)$$

Através da expressão (7.139), pode-se estabelecer as seguintes propriedades:

$$\sum_{j=1}^{N_{ocelr}} R_{N(N_{varf}+6*i-5,3*j)} \frac{x_2(j)}{l} \frac{t_V}{t_L} + \sum_{j=N_{ocelr}+1}^{N_{pm}} R_{N(N_{varf}+6*i-5,3*j)} \frac{x_2(j)}{l} = \frac{x_2(i)}{2*l*\overline{E}_V} \frac{t_V}{t_L} \quad (7.140)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{ocelr}} R_{N(N_{varf}+6*i-4,3*j)} \frac{x_2(j)}{l} \frac{t_V}{t_L} + \sum_{j=N_{ocelr}+1}^{N_{pm}} R_{N(N_{varf}+6*i-4,3*j)} \frac{x_2(j)}{l} = \frac{1}{2*\overline{E}_L} \quad (7.141)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{ocelr}} R_{N(N_{varf}+6*i-4,3*j)} \frac{x_2(j)}{l} \frac{t_V}{t_L} + \sum_{j=N_{ocelr}+1}^{N_{pm}} R_{N(N_{varf}+6*i-4,3*j)} \frac{x_2(j)}{l} = 0 \quad (7.142)$$

$$\sum_{j=1}^{N_{ocelr}} R_{N(N_{varf}+6*i-5,3*j)} \frac{x_2(j)}{l} \frac{t_V}{t_L} + \sum_{j=N_{ocelr}+1}^{N_{pm}} R_{N(N_{varf}+6*i-5,3*j)} \frac{x_2(j)}{l} = 0 \quad (7.143)$$

onde a linha $N_{varf}+6*i-5$ se refere ao deslocamento u_s do ponto i e a linha $N_{varf}+6*i-4$ ao deslocamento u_n do mesmo ponto.

As propriedades (7.140) e (7.142) devem ser verificadas para o ponto i sobre o eixo da viga, a equação (7.141) é relativa ao ponto i da laje onde $x_2=l$. Por fim, a propriedade (7.143) deve ser verificada nos pontos sobre o contorno da laje. Deve-se notar que o resultado dos somatórios das equações (7.140) e (7.141), está em módulo, devendo-se ainda levar em conta se o deslocamento u_s ou u_n em questão tem ou não o mesmo sentido de x_2 .

8 FORMULAÇÃO NÃO-LINEAR IMPLÍCITA UTILIZANDO O OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE

8.1 INTRODUÇÃO

O procedimento para se obter a solução não-linear de um problema de flexão de placas é descrito a seguir. A partir da formulação linear apresentada no capítulo 7, para o caso de placas definidas por sub-regiões e sujeitas a campos de esforços iniciais, calculam-se os momentos e forças normais elásticos em todos os pontos da placa, os quais satisfazem as condições de equilíbrio estático da estrutura. Verifica-se então, se esses esforços estaticamente admissíveis satisfazem também o modelo constitutivo adotado. Caso eles não satisfaçam, aplica-se uma correção de momentos e forças normais à placa, isto é, campos de esforços iniciais da formulação apresentada no capítulo 7, e novamente verifica-se o modelo constitutivo. Esse processo de correção continua até que os esforços em todos os pontos da placa satisfaçam ao mesmo tempo as condições de equilíbrio da estrutura e o modelo constitutivo. Assim, chega-se à solução não-linear através de um procedimento incremental-iterativo, no qual a carga total é subdividida em incrementos de carga. Em cada incremento, o equilíbrio da estrutura é verificado através do processo iterativo de correção de esforços.

A solução não-linear é obtida a partir da formulação implícita, na qual as correções que devem ser dadas aos estados de curvatura e das deformações de chapa em uma determinada iteração, são obtidas através do operador tangente consistente, que é atualizado a cada iteração, e da correção dos esforços nos pontos da placa. O operador tangente consistente é determinado a partir da formulação com campo de esforços iniciais apresentada no capítulo 7 e também, considerando-se o modelo constitutivo adotado.

8.2 OBTENÇÃO DO OPERADOR TANGENTE CONSISTENTE

Na mecânica do contínuo, a evolução da tensão para o modelo não-linear pode ser definida a partir de um estado de tensão inicial σ^0 , ou seja:

$$\sigma = \sigma^0 + \int C^{ep} d\varepsilon = \sigma^0 + \int \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} d\varepsilon \quad (8.1)$$

sendo C^{ep} o tensor dos módulos tangentes ou operador tangente contínuo e ε a deformação.

Entretanto, a solução de um problema não-linear é obtida através de um processo incremental, onde através de incrementos elásticos de carga, obtém-se os incrementos de deformação. Desse modo, nesse caso a integração da deformação é feita de forma incremental, ou seja:

$$\sigma = \sigma^0 + \int C^{ep} d\varepsilon = \sigma^0 + \sum_{n=1}^{N_{\text{incrementos}}} \frac{\partial \sigma}{\partial \Delta \varepsilon_n} \Delta \varepsilon_n = \sigma^0 + \sum_{n=1}^{N_{\text{incrementos}}} C_n^{epC} \Delta \varepsilon_n \quad (8.2)$$

onde C^{epC} , que é dado por $C^{epC} = \frac{\partial \sigma}{\partial \Delta \varepsilon}$, é o operador tangente consistente algorítmico.

O tensor C^{epC} deve ser determinado de tal forma que seja consistente com o algoritmo do incremento, isto é, ele é obtido a partir da relação algorítmica existente entre o incremento de tensão e o de deformação. Além disso, no cálculo do operador de rigidez tangente global (C^{epC}), deve ser considerado o operador de rigidez tangente local, que é dado em função do modelo constitutivo utilizado.

BONNET (1995) considerou o operador tangente consistente (algorítmico) numa formulação de elementos de contorno escrita em função das deformações iniciais. Nesse trabalho, o operador tangente será implementado numa formulação que é função de momentos e forças normais iniciais. Logo, nesse caso, a evolução dos momentos e forças normais ao longo do processo incremental é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \tilde{M} \\ \tilde{N} \\ \tilde{\sim} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{M}^0 \\ \tilde{N}^0 \\ \tilde{\sim} \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{N_{\text{incrementos}}} \left[\tilde{K}_n^{TC} \right] \begin{Bmatrix} \Delta(1/\Gamma) \\ \Delta \tilde{\varepsilon}^{2D} \\ \tilde{\sim} \end{Bmatrix}_n \quad (8.3)$$

onde $[K^{TC}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial M}{\partial \Delta(1/r)} & \frac{\partial M}{\partial \Delta \epsilon^{2D}} \\ \frac{\partial N}{\partial \Delta(1/r)} & \frac{\partial N}{\partial \Delta \epsilon^{2D}} \end{bmatrix}$ é o operador tangente consistente algorítmico que será

determinado a seguir.

Na solução não-linear, os momentos e forças normais na placa são dados por (ver equações 7.8 e 7.9):

$$\{M\} = \{M^e\} - \{M^0\} \quad i, j = 1, 2 \quad (8.4)$$

$$\{N\} = \{N^e\} - \{N^0\} \quad (8.5)$$

onde $\{N^0\}$ e $\{M^0\}$ são, respectivamente, os resíduos de forças normais e de momentos.

Substituindo-se a equação (7.113) em (8.4) e (7.117) em (8.5), obtêm-se:

$$\{M\} = \{K\} + [\bar{S}_M] \{M^0\} + [S_N] \{N^0\} \quad (8.6)$$

$$\{N\} = \{K'\} + [\bar{S}'_N] \{N^0\} + [S'_M] \{M^0\} \quad (8.7)$$

onde $[\bar{S}'_N] = [S'_N] - [I]$ e $[\bar{S}_M] = [S_M] - [I]$.

Somando-se e subtraindo-se o vetor $\{N^0\}$ na equação (8.7) e fazendo-se o mesmo com o vetor $\{M^0\}$ na equação (8.6), essas resultam em:

$$\{M\} = \{K\} + [S_M] \{M^0\} - \{M^0\} + [S_N] \{N^0\} \quad (8.8)$$

$$\{N\} = \{K'\} + [S'_N] \{N^0\} - \{N^0\} + [S'_M] \{M^0\} \quad (8.9)$$

Por outro lado, pode-se dizer que:

$$\{N\} + \{N^0\} = \{N^e\} = [C_N] \{\epsilon^{2D}\} \quad (8.10)$$

$$\{M\} + \{M^0\} = \{M^e\} = [C_m] \{(1/r)\} \quad (8.11)$$

sendo $[C_N]$ e $[C_m]$ os tensores de rigidez elásticos obtidos a partir da lei de Hooke.

Substituindo-se (8.10) em (8.9) e (8.11) em (8.8), tem-se que:

$$\{\mathbf{K}\} + [\mathbf{S}_M]\{\mathbf{M}^0\} - [\mathbf{C}_M]\{(1/r)\} + [\mathbf{S}_N]\{\mathbf{N}^0\} = 0 \quad (8.12)$$

$$\{\mathbf{K}'\} + [\mathbf{S}'_N]\{\mathbf{N}^0\} - [\mathbf{C}_N]\{\boldsymbol{\varepsilon}^{2D}\} + [\mathbf{S}'_M]\{\mathbf{M}^0\} = 0 \quad (8.13)$$

Considerando-se ainda que:

$$\{\mathbf{M}^0\} = \{\mathbf{M}^e\} - \{\mathbf{M}\} = [\mathbf{C}_m]\{(1/r)\} - \{\mathbf{M}\} \quad (8.14)$$

$$\{\mathbf{N}^0\} = \{\mathbf{N}^e\} - \{\mathbf{N}\} = [\mathbf{C}_N]\{\boldsymbol{\varepsilon}^{2D}\} - \{\mathbf{N}\} \quad (8.15)$$

chega-se às seguintes equações de equilíbrio:

$$\{\mathbf{K}\} + [\mathbf{S}_M]([\mathbf{C}_m]\{(1/r)\} - \{\mathbf{M}\}) - [\mathbf{I}][\mathbf{C}_m]\{(1/r)\} + [\mathbf{S}_N]([\mathbf{C}_N]\{\boldsymbol{\varepsilon}^{2D}\} - \{\mathbf{N}\}) = 0 \quad (8.16)$$

$$\{\mathbf{K}'\} + [\mathbf{S}'_N]([\mathbf{C}_N]\{\boldsymbol{\varepsilon}^{2D}\} - \{\mathbf{N}\}) - [\mathbf{I}][\mathbf{C}_N]\{\boldsymbol{\varepsilon}^{2D}\} + [\mathbf{S}'_M]([\mathbf{C}_m]\{(1/r)\} - \{\mathbf{M}\}) = 0 \quad (8.17)$$

Com isso, ao aplicar-se uma determinada carga à estrutura, se esta estiver equilibrada, as equações (8.16) e (8.17) devem ser satisfeitas. Caso isso não ocorra, deve-se dividir a carga total em incrementos de carga, sendo que em um determinado incremento n , o equilíbrio é verificado através das seguintes equações:

$$\begin{aligned} \{\Delta\mathbf{K}\}_n + [\mathbf{S}_M]([\mathbf{C}_m]\{\Delta(1/r)\}_n - \{\Delta\mathbf{M}\}_n) - [\mathbf{I}][\mathbf{C}_m]\{\Delta(1/r)\}_n + \\ + [\mathbf{S}_N]([\mathbf{C}_N]\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{2D}\}_n - \{\Delta\mathbf{N}\}_n) = 0 \end{aligned} \quad (8.18)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta\mathbf{K}'\}_n + [\mathbf{S}'_N]([\mathbf{C}_N]\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{2D}\}_n - \{\Delta\mathbf{N}\}_n) - [\mathbf{I}][\mathbf{C}_N]\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{2D}\}_n + \\ + [\mathbf{S}'_M]([\mathbf{C}_m]\{\Delta(1/r)\}_n - \{\Delta\mathbf{M}\}_n) = 0 \end{aligned} \quad (8.19)$$

As equações (8.18) e (8.19), podem ser escritas, respectivamente, como:

$$\{\Delta\mathbf{M}^{\text{ext}}\}_n - \{\Delta\mathbf{M}^{\text{int}}\}_n = 0 \quad (8.20)$$

$$\{\Delta\mathbf{N}^{\text{ext}}\}_n - \{\Delta\mathbf{N}^{\text{int}}\}_n = 0 \quad (8.21)$$

onde:

$$\{\Delta\mathbf{M}^{\text{ext}}\}_n = \{\Delta\mathbf{K}\}_n \quad (8.22)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta \mathbf{M}^{int}\}_n &= [\mathbf{S}_M] \left(\{\Delta \mathbf{M}\}_n - [\mathbf{C}_m] \{\Delta(1/r)\}_n \right) + [\mathbf{I}] [\mathbf{C}_m] \{\Delta(1/r)\}_n + \\ &\quad + [\mathbf{S}_N] \left(\{\Delta \mathbf{N}\}_n - [\mathbf{C}_N] \{\Delta \varepsilon^{2D}\}_n \right) \end{aligned} \quad (8.23)$$

$$\{\Delta \mathbf{N}^{ext}\}_n = \{\Delta \mathbf{K}'\}_n \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta \mathbf{N}^{int}\}_n &= [\mathbf{S}'_N] \left(\{\Delta \mathbf{N}\}_n - [\mathbf{C}_N] \{\Delta \varepsilon^{2D}\}_n \right) + [\mathbf{I}] [\mathbf{C}_N] \{\Delta \varepsilon^{2D}\}_n + \\ &\quad + [\mathbf{S}'_M] \left(\{\Delta \mathbf{M}\}_n - [\mathbf{C}_M] \{\Delta(1/r)\}_n \right) \end{aligned} \quad (8.25)$$

ou seja, os incrementos de momentos $\{\Delta \mathbf{M}^{ext}\}_n$ e forças normais $\{\Delta \mathbf{N}^{ext}\}_n$ elásticos que satisfazem as condições de equilíbrio estático da estrutura devem ser iguais, respectivamente, aos incrementos de momentos $\{\Delta \mathbf{M}^{int}\}_n$ e forças normais $\{\Delta \mathbf{N}^{int}\}_n$ que satisfazem o modelo constitutivo adotado.

Se as relações de equilíbrio (8.20) e (8.21) não forem verificadas, deve-se encontrar o valor de $\{\Delta \varepsilon^t\}_n^T = \left\{ \Delta(1/r) \quad \Delta \varepsilon^{2D} \right\}_n$, que satisfaça as mesmas, isto é, deve-se encontrar os valores dos incrementos de curvaturas e de deformação de chapa que satisfazem tanto as equações de equilíbrio estático da estrutura quanto o modelo constitutivo. Para se obter $\{\Delta \varepsilon^t\}_n$ necessita-se de um procedimento iterativo (Newton), no qual o valor final dessa variável é obtido somando-se as sucessivas correções $\{\delta \Delta(\varepsilon^t)\}_n^i$ que devem ser aplicadas ao sistemas de equações não-lineares (equações 8.18 e 8.19) ao longo do processo iterativo do incremento n . Em uma iteração i , essa correção é dada por: $\{\delta \Delta(\varepsilon^t)\}_n^i = \{\Delta(\varepsilon^t)\}_n^{i+1} - \{\Delta(\varepsilon^t)\}_n^i$ (ver figura 8.1). O processo iterativo termina quando as relações (8.18) e (8.19) forem verificadas dentro de uma margem de erro pré-estabelecida, que é traduzido pelo critério de convergência utilizado.

Em uma iteração $i+1$, deve-se satisfazer as seguintes relações de equilíbrio:

$$\{\mathbf{M}^{ext}\}_{n+1} - \{\mathbf{M}^{int}\}_n^{i+1} - \{\Delta \mathbf{M}^{int}\}_n^{i+1} = 0 \quad (8.26)$$

$$\{\mathbf{N}^{ext}\}_{n+1} - \{\mathbf{N}^{int}\}_n^{i+1} - \{\Delta \mathbf{N}^{int}\}_n^{i+1} = 0 \quad (8.27)$$

Utilizando-se o método de Newton Raphson as equações (8.26) e (8.27) resultam em:

$$\{M^{ext}\}_{n+1} - \{M^{int}\}_n^{i+1} - \frac{\partial \{\Delta M^{int}\}_n^i}{\partial \{\Delta(\varepsilon^t)\}_n^i} \{\delta\Delta(\varepsilon^t)\}_n^i = 0 \quad (8.28)$$

$$\{N^{ext}\}_{n+1} - \{N^{int}\}_n^{i+1} - \frac{\partial \{\Delta N^{int}\}_n^i}{\partial \{\Delta(\varepsilon^t)\}_n^i} \{\delta\Delta(\varepsilon^t)\}_n^i = 0 \quad (8.29)$$

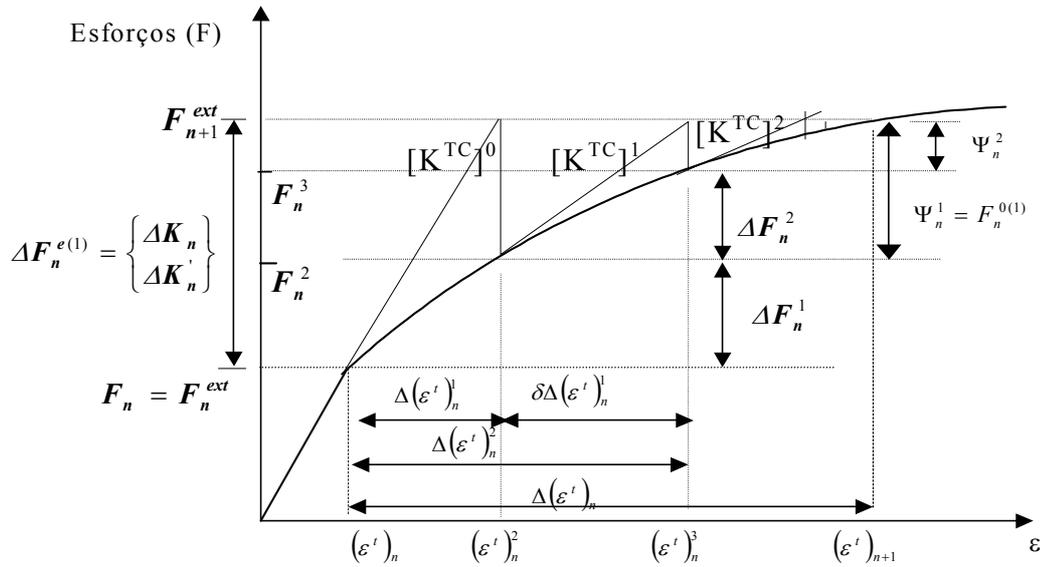


FIGURA 8.1- Método de Newton Raphson Padrão

Na figura (8.1) $F^T = \{M \quad N\}$ é o vetor dos esforços na placa; $[K^{TC}]^i$ é a matriz tangente, que relaciona o incremento de esforços internos ou verdadeiros e o incremento de deformações, na iteração i , $(\varepsilon^t)_n^i$ é o vetor de deformações da iteração i , Ψ_n^i é o vetor de resíduo da iteração i , F_{n+1}^{ext} é o vetor de momentos e forças normais externos do incremento $n+1$, $\Delta F_n^{e(i)}$ é o incremento de momentos e forças normais elásticos da iteração i , F_n^i é o vetor dos esforços internos verdadeiros da iteração i , do incremento n e $(\varepsilon^t)_n$ é o vetor de deformações do incremento n .

Porém, considerando-se que os incrementos de momentos e forças normais elásticos na iteração $i+1$ são dados por $\{\Delta M^e\}_n^{i+1} = \{M^{ext}\}_{n+1} - \{M^{int}\}_n^{i+1}$ e $\{\Delta N^e\}_n^{i+1} = \{N^{ext}\}_{n+1} - \{N^{int}\}_n^{i+1}$, as equações (8.28) e (8.29) podem ser escritas como:

$$\{\Delta M^e\}_n^{i+1} - \frac{\partial \{\Delta M^{int}\}_n^i}{\partial \{\Delta(\varepsilon^t)\}_n^i} \{\delta\Delta(\varepsilon^t)\}_n^i = 0 \quad (8.30)$$

$$\{\Delta N^e\}_n^{i+1} - \frac{\partial \{\Delta N^{int}\}_n^i}{\partial \{\Delta(\varepsilon^t)\}_n^i} \{\delta \Delta(\varepsilon^t)\}_n^i = 0 \quad (8.31)$$

ou ainda:

$$\{\Delta M^e\}_n^{i+1} - \frac{\partial \{\Delta M^{int}\}_n^i}{\partial \{\Delta(1/r)\}_n^i} \{\delta \Delta(1/r)\}_n^i - \frac{\partial \{\Delta M^{int}\}_n^i}{\partial \{\Delta(\varepsilon^{2D})\}_n^i} \{\delta \Delta(\varepsilon^{2D})\}_n^i = 0 \quad (8.32)$$

$$\{\Delta N^e\}_n^{i+1} - \frac{\partial \{\Delta N^{int}\}_n^i}{\partial \{\Delta(1/r)\}_n^i} \{\delta \Delta(1/r)\}_n^i - \frac{\partial \{\Delta N^{int}\}_n^i}{\partial \{\Delta(\varepsilon^{2D})\}_n^i} \{\delta \Delta(\varepsilon^{2D})\}_n^i = 0 \quad (8.33)$$

As equações (8.32) e (8.33) podem ser escritas em uma mesma equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} \{\Delta M^e\}_n^{i+1} \\ \{\Delta N^e\}_n^{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}_M]_n^i & [\overline{\mathbf{K}}_{2D}]_n^i \\ [\overline{\mathbf{K}}_M]_n^i & [\mathbf{K}_{2D}]_n^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \{\Delta(1/r)\}_n^i \\ \delta \{\Delta \varepsilon^{2D}\}_n^i \end{Bmatrix} \quad (8.34)$$

onde:

$$[\mathbf{K}_M]_n^i = \frac{\partial \{\Delta M^{int}\}_n^i}{\partial \{\Delta(1/r)\}_n^i} \quad (8.35)$$

$$[\overline{\mathbf{K}}_{2D}]_n^i = \frac{\partial \{\Delta M^{int}\}_n^i}{\partial \{\Delta(\varepsilon^{2D})\}_n^i} \quad (8.36)$$

$$[\overline{\mathbf{K}}_M]_n^i = \frac{\partial \{\Delta N^{int}\}_n^i}{\partial \{\Delta(1/r)\}_n^i} \quad (8.37)$$

$$[\mathbf{K}_{2D}]_n^i = \frac{\partial \{\Delta N^{int}\}_n^i}{\partial \{\Delta \varepsilon^{2D}\}_n^i} \quad (8.38)$$

A fim de determinarem-se as expressões (8.35) a (8.38), considere as equações (8.23) e (8.25) e ainda as seguintes relações:

$$\{\Delta M\}_n^i = \{\mathbf{M}\}_n^{i+1} - \{\mathbf{M}\}_n^i \quad (8.39)$$

$$\{\Delta N\}_n^i = \{\mathbf{N}\}_n^{i+1} - \{\mathbf{N}\}_n^i \quad (8.40)$$

Com isso, pode-se dizer que em uma determinada iteração, tem-se que:

$$\begin{aligned} \{\Delta M^{int}\}_n^i = & [S_M] \left(\{M\}_n^{i+1} - \{M\}_n^i - [C_m] \{\Delta(1/r)\}_n^i \right) + [I][C_m] \{\Delta(1/r)\}_n^i + \\ & + [S_N] \left(\{N\}_n^{i+1} - \{N\}_n^i - [C_N] \{\Delta \varepsilon^{2D}\}_n^i \right) \end{aligned} \quad (8.41)$$

$$\begin{aligned} \{\Delta N^{int}\}_n^i = & [S'_N] \left(\{N\}_n^{i+1} - \{N\}_n^i - [C_N] \{\Delta \varepsilon^{2D}\}_n^i \right) + [I][C_N] \{\Delta \varepsilon^{2D}\}_n^i + \\ & + [S'_M] \left(\{M\}_n^{i+1} - \{M\}_n^i - [C_M] \{\Delta(1/r)\}_n^i \right) \end{aligned} \quad (8.42)$$

Derivando-se as equações (8.41) e (8.42), obtêm-se as sub-matrizes definidas em (8.35) a (8.38), que resultam em:

$$[K_M]_n^i = [S_M] \left([C_m^{ep}]_n^i - [C_m] \right) + [I][C_m] \quad (8.43)$$

$$[\overline{K}_{2D}]_n^i = [S_N] \left([C_N^{ep}]_n^i - [C_N] \right) \quad (8.44)$$

$$[K_{2D}]_n^i = [S'_N] \left([C_N^{ep}]_n^i - [C_N] \right) + [I][C_N] \quad (8.45)$$

$$[\overline{K}_M]_n^i = [S'_M] \left([C_m^{ep}]_n^i - [C_m] \right) \quad (8.46)$$

sendo:

$$[C_N^{ep}]_n^i = \frac{\partial N_n^{(i+1)}}{\partial \Delta(\varepsilon^{2D})_n^i} = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{\partial(\sigma)_n^{(i+1)}}{\partial \Delta(\varepsilon)_n^i} dx_3 = \int_{-t/2}^{t/2} [C^{ep}]_n^i dx_3 \quad (8.47)$$

$$\begin{aligned} [C_m^{ep}]_n^i &= \frac{\partial M_n^{(i+1)}}{\partial \Delta(1/r)_n^i} = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{\partial(\sigma_n^{(i+1)} x_3)}{\partial \sigma_n^{i+1}} \frac{\partial(\sigma_n^{(i+1)})}{\partial \Delta(\varepsilon)_n^i} \frac{\partial \Delta(\varepsilon)_n^i}{\partial \Delta(1/r)_n^i} dx_3 = \\ &= \int_{-t/2}^{t/2} (x_3)^2 \frac{\partial(\sigma_n^{(i+1)})}{\partial \Delta \varepsilon_n^i} dx_3 = \int_{-t/2}^{t/2} (x_3)^2 [C^{ep}]_n^i dx_3 \end{aligned} \quad (8.48)$$

onde $[C^{ep}]_n^i$, que é obtido a partir do modelo constitutivo adotado, é a matriz tangente que relaciona a tensão real com o incremento de deformação (sua expressão será deduzida no item (8.5.3) para o critério de Von Mises).

As equações (8.47) e (8.48) são calculadas considerando-se o modelo estratificado (ver item 8.3). Assim, fazendo-se a mudança de coordenadas cartesianas para coordenadas

homogêneas (equação 8.62) e integrando-se numericamente ao longo da espessura, através da fórmula de quadratura de Gauss., obtêm-se:

$$[C_N^{ep}]_n^i = \frac{t}{2} \sum_{ig=1}^{Ng} [C^{ep}]_{n(ig)}^i W_{ig} \quad (8.49)$$

$$[C_m^{ep}]_n^i = \frac{t^3}{8} \sum_{ig=1}^{Ng} [C^{ep}]_{n(ig)}^i (\xi_{ig})^2 W_{ig} \quad (8.50)$$

A equação (8.34) pode ser escrita de forma simplificada como:

$$\{\Delta F^e\}_n^{i+1} = [K_{(n)}^{TC(i)}] \delta\{\Delta \varepsilon^t\}_n^i \quad (8.51)$$

onde $[K_{(n)}^{TC(i)}]$, que é o operador tangente consistente, é dado por:

$$[K_{(n)}^{TC(i)}] = \begin{bmatrix} [K_M]_n^i & [\bar{K}_{2D}]_n^i \\ [\bar{K}_M]_n^i & [K_{2D}]_n^i \end{bmatrix} \quad (8.52)$$

Da equação (8.34) obtêm-se as correções de curvatura e deformações de chapa que devem ser dadas à estrutura:

$$\begin{Bmatrix} \delta\{\Delta(1/\Gamma)\}_n^i \\ \delta\{\Delta \varepsilon^{2D}\}_n^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_M]_n^i & [\bar{K}_{2D}]_n^i \\ [\bar{K}_M]_n^i & [K_{2D}]_n^i \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \{\Delta M^e\}_n^{i+1} \\ \{\Delta N^e\}_n^{i+1} \end{Bmatrix} \quad (8.53)$$

onde:

$$\{\Delta M^e\}_n^{i+1} = \beta_n \{K\} \quad \text{se } \mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad (8.54.a)$$

$$\{\Delta M^e\}_n^{i+1} = \{\Delta M^e\}_n^i - \{\Delta M\}_n^i = \{\Psi_M\}_n^i \quad \text{se } \mathbf{i} \geq \mathbf{1} \quad (8.54.b)$$

$$\{\Delta N^e\}_n^{i+1} = \beta_n \{K'\} \quad \text{se } \mathbf{i} = \mathbf{0} \quad (8.55.a)$$

$$\{\Delta N^e\}_n^{i+1} = \{\Delta N^e\}_n^i - \{\Delta N\}_n^i = \{\Psi_N\}_n^i \quad \text{se } \mathbf{i} \geq \mathbf{1} \quad (8.55.b)$$

onde β_n é coeficiente de multiplicação da carga, no incremento n ; $\{\Psi_M\}_n^i$ e $\{\Psi_N\}_n^i$ são, respectivamente, os resíduos de momentos e forças normais da iteração i .

A fim de se reduzir o esforço computacional, a equação (8.53) será decomposta em duas partes. A parte superior do sistema será referente aos pontos plásticos e a parte inferior aos pontos elásticos, chegando-se ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{[K_M]}_{pp} & \overline{[K_{2D}]}_{pp} \\ \overline{[K_M]}_{pp} & \overline{[K_{2D}]}_{pp} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [K_M]_{pe} & \overline{[K_{2D}]}_{pe} \\ \overline{[K_M]}_{pe} & \overline{[K_{2D}]}_{pe} \end{bmatrix} \\ \text{---} & \text{---} \\ \begin{bmatrix} [K_M]_{ep} & \overline{[K_{2D}]}_{ep} \\ \overline{[K_M]}_{ep} & \overline{[K_{2D}]}_{ep} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [K_M]_{ee} & \overline{[K_{2D}]}_{ee} \\ \overline{[K_M]}_{ee} & \overline{[K_{2D}]}_{ee} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\{\Delta(1/\Gamma)\}_p \\ \delta\{\Delta\varepsilon^{2D}\}_p \\ \delta\{\Delta(1/\Gamma)\}_e \\ \delta\{\Delta\varepsilon^{2D}\}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\Delta M^e\}_p \\ \{\Delta N^e\}_p \\ \{\Delta M^e\}_e \\ \{\Delta N^e\}_e \end{Bmatrix} \quad (8.56)$$

onde os vetores com índice p se referem aos pontos plásticos e aqueles com índice e aos pontos elásticos; as sub-matrizes com índice pp e pe são relativas às linhas dos pontos plásticos e aquelas com índices ep e ee se referem às linhas dos pontos elásticos; o segundo índice das sub-matrizes indica se elas englobam as colunas do sistema que multiplicam os vetores plásticos (índice p) ou as colunas que multiplicam os vetores elásticos (índice e).

No sistema (8.56), considerando-se que para os pontos elásticos tem-se que $[C_m^{ep}] = [C_m]$ e $[C_N^{ep}] = [C_N]$, pode-se concluir que as sub-matrizes $[\overline{K_{2D}}]_{ee}$, $[\overline{K_M}]_{ee}$ e aquelas com índice pe são nulas, e ainda que: $[K_M]_{ep} = [[S_M]([C_m^{ep}] - [C_m])]$, $[K_{2D}]_{ep} = [S'_N]([C_N^{ep}] - [C_N])$; $[\overline{K_{2D}}]_{ep}$ e $[\overline{K_M}]_{ep}$ são as mesmas definidas em (8.44) e (8.46); $[K_M]_{ee} = [I][C_m]$ e $[K_{2D}]_{ee} = [I][C_N]$.

Assim, o sistema (8.56) pode ser expresso da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [K_M]_{pp} & \overline{[K_{2D}]}_{pp} \\ \overline{[K_M]}_{pp} & \overline{[K_{2D}]}_{pp} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [0] \end{bmatrix} \\ \text{---} & \text{---} \\ \begin{bmatrix} [[S_M]([C_m^{ep}] - [C_m])]_{ep} & \overline{[K_{2D}]}_{ep} \\ \overline{[K_M]}_{ep} & [[S'_N]([C_N^{ep}] - [C_N])]_{ep} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} [C_m]_{ee} & [0] \\ [0] & [C_N]_{ee} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\{\Delta(1/\Gamma)\}_p \\ \delta\{\Delta\varepsilon^{2D}\}_p \\ \delta\{\Delta(1/\Gamma)\}_e \\ \delta\{\Delta\varepsilon^{2D}\}_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\Delta M^e\}_p \\ \{\Delta N^e\}_p \\ \{\Delta M^e\}_e \\ \{\Delta N^e\}_e \end{Bmatrix} \quad (8.57)$$

onde $[C_m]_{ee}$ é uma matriz quadrada, cuja diagonal é composta pelas matrizes elásticas, e os outros termos são nulos, isto é:

$$[C_m]_{ee} = \begin{bmatrix} [C_m]_1 & [0] & \dots & \dots & [0] \\ [0] & \dots & \dots & \dots & [0] \\ \dots & \dots & [C_m]_i & \dots & [0] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & [0] \\ [0] & [0] & [0] & [0] & [C_m]_{N_e} \end{bmatrix} \quad (8.58)$$

sendo N_e o número de pontos elásticos.

Como se pode observar, a parte superior do sistema (8.57) pode ser resolvida separadamente. Desse modo, o incremento de deformação referente aos pontos plásticos é dado por:

$$\begin{Bmatrix} \delta \{\Delta(1/r)\}_n^i \\ \delta \{\Delta \varepsilon^{2D}\}_n^i \end{Bmatrix}_p = \begin{bmatrix} [K_M]_n^i & [\bar{K}_{2D}]_n^i \\ [\bar{K}_M]_n^i & [K_{2D}]_n^i \end{bmatrix}_{pp}^{-1} \begin{Bmatrix} \{\Delta M^e\}_n^{i+1} \\ \{\Delta N^e\}_n^{i+1} \end{Bmatrix}_p \quad (8.59)$$

Após o cálculo de $\{\Delta(1/r)\}_p$ e $\{\Delta \varepsilon^{2D}\}_p$ dos pontos plásticos, obtêm-se os incrementos de curvatura e de deformação de chapa, referentes a um ponto elástico i , através das expressões:

$$\begin{aligned} \{\Delta(1/r)\}_i = [C_m]^{-1} \{ \Delta M^e \}_i - [S_M] \{ [C_m^{ep}] - [C_m] \}_i \{ \Delta(1/r) \}_p + \\ - [\bar{K}_{2D}]_{ep(i)} \{ \Delta \varepsilon^{2D} \}_p \end{aligned} \quad (8.60)$$

$$\begin{aligned} \{ \Delta \varepsilon^{2D} \}_i = [C_N]^{-1} \{ \Delta N^e \}_i - [\bar{K}_M]_{ep(i)} \{ \Delta(1/r) \}_p + \\ - [S_N] \{ [C_N^{ep}] - [C_N] \}_i \{ \Delta \varepsilon^{2D} \}_p \end{aligned} \quad (8.61)$$

onde as sub-matrizes com índice i se referem às três linhas da sub-matriz em consideração relativas ao ponto i .

Com isso, se reduz consideravelmente o esforço computacional, no caso de haver poucos pontos plásticos, pois ao invés de inverter a matriz tangente completa, indicada em (8.53), inverte-se apenas a parcela da matriz referente aos pontos plásticos, dada por (8.59).

8.3 MODELO ESTRATIFICADO

Admite-se que a placa é dividida em camadas, as quais podem ter espessuras e propriedades diferentes, considerando-se, porém, constantes as propriedades sobre cada camada, como é mostrado no trabalho de FIGUEIRAS (1983). O cálculo em camadas é importante numa análise não-linear, pois permite representar a distribuição não-linear das tensões ao longo da espessura e é essencial na análise de placas compostas de materiais diferentes, como é o caso da placa em concreto armado. Esse material não será considerado nesse trabalho, mas será interessante utilizá-lo numa provável continuação dessa tese. No modelo estratificado, material e modelos constitutivos distintos podem ser admitidos para cada camada.

Para cada camada, atribui-se um valor de tensão associado a sua superfície média e considera-se que as componentes de tensão são constantes ao longo da espessura t_n da camada (ver figura 8.2). Assim, a distribuição das tensões ao longo da espessura poderia ser representada por retângulos, como está mostrado na figura (8.2) para o caso de uma placa de concreto armado. Nesse trabalho, porém, a distribuição será representada por polinômios. Não há necessidade de se definir a forma da distribuição das tensões nas camadas ou na espessura da placa, pois como a integração das tensões ao longo da espessura da placa de concreto, é feita através da fórmula de quadratura de Gauss, as propriedades do material e o valor das tensões precisam ser especificados apenas nos pontos de Gauss.

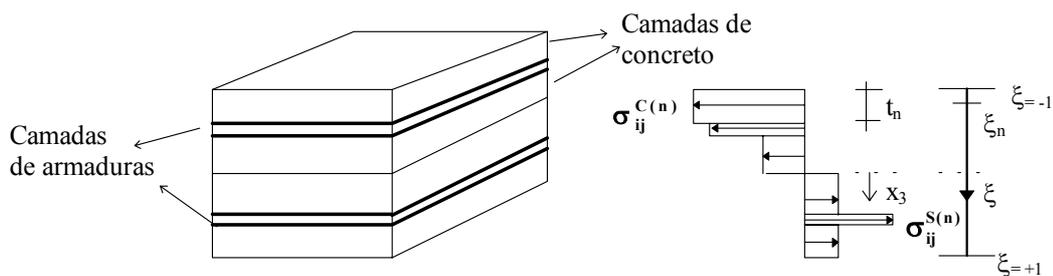


FIGURA 8.2 - Modelo Estratificado para o Concreto Armado

Na figura (8.2) tem-se que $-t/2 \leq x_3 \leq t/2$, sendo t a espessura da placa. Pode-se ainda dizer que:

$$x_3 = \xi(t/2) \tag{8.62.a}$$

$$dx_3 = (t/2)d\xi \tag{8.62.b}$$

No caso da placa de concreto armado, os pontos de Gauss, definidos ao longo da espessura em função da coordenada homogênea ξ , representarão as camadas de concreto, como é mostrado na figura (8.2), e as armaduras serão distribuídas em pontos adicionais, cujas posições são previamente estabelecidas. Para a placa de aço, que será o caso a ser tratado aqui, os pontos de Gauss representam camadas de aço.

Os momentos e forças normais internos ou verdadeiros, no caso da placa de concreto armado, são calculados a partir das equações:

$$M_{ij} = \frac{t^2}{4} \sum_{ig=1}^{Ng} \sigma_{ij}^{(ig)} \xi_{ig} W_{ig} + \sum_{k=1}^{Ns} \sigma_{ij}^{S(k)} \delta_{ij} A_{S(k)} x_{3S}^k \quad (8.63.a)$$

$$N_{ij} = \frac{t}{2} \sum_{ig=1}^{Ng} \sigma_{ij}^{(ig)} W_{ig} + \sum_{k=1}^{Ns} \sigma_{ij}^{S(k)} \delta_{ij} A_{S(k)} \quad (8.63.b)$$

onde N_s é o número de armaduras, A_s a área da seção transversal da armadura e x_{3s} sua posição.

Para a placa de aço, nas equações (8.63) existe apenas o primeiro somatório referente aos pontos de Gauss.

8.4 PROCEDIMENTO INCREMENTAL E ITERATIVO PARA A OBTENÇÃO DA RESPOSTA NÃO-LINEAR

O algoritmo é o seguinte: para uma iteração $i+1$ de um incremento n , segue-se os seguintes passos:

- 1) Calculam-se os incrementos de momentos $\{\Delta M^e\}_n^{i+1}$ e forças normais $\{\Delta N^e\}_n^{i+1}$ elásticos, referentes a todos os pontos nodais das células, a partir das equações (8.54) e (8.55).
- 2) Se $i=0$ calculam-se os incrementos de curvaturas $\{\Delta(I/r)\}_n^{i+1}$ e de deformações de chapa $\{\Delta \epsilon^{2D}\}_n^{i+1}$ através da lei de Hooke (equação 2.10 e a inversa da equação 2.27).
- 3) Se $i \geq 1$, atualiza-se a matriz tangente global $[K_{(n)}^{TC(i)}]$ (equação 8.52) e calculam-se as correções que devem ser dadas ao incremento de curvaturas $\{\delta \Delta(I/r)\}_n^i$ e ao incremento das deformações de chapa $\{\delta \Delta \epsilon^{2D}\}_n^i$ (equação 8.53), obtendo-se o novo

estado de curvaturas e deformações de chapa na placa:

$$\{\Delta(1/r)\}_n^{i+1} = \{\Delta(1/r)\}_n^i + \{\delta\Delta(1/r)\}_n^i \text{ e } \{\Delta\varepsilon^{2D}\}_n^{i+1} = \{\Delta\varepsilon^{2D}\}_n^i + \{\delta\Delta\varepsilon^{2D}\}_n^i;$$

4) Para cada ponto nodal das células, procede-se da seguinte maneira:

4.1 Verifica-se o modelo constitutivo para cada ponto de Gauss **ig** definido ao longo da espessura da placa, seguindo os seguintes passos:

a) Se $i \geq 1$, calcula-se a correção no incremento de deformações

$$\{\delta\Delta\varepsilon\}_n^i = \{\delta\Delta\varepsilon^{2D}\}_n^i - (x_3)_{ig} \{\delta\Delta(1/r)\}_n^i, \text{ o incremento de deformações}$$

$$\{\Delta\varepsilon\}_n^{i+1} = \{\Delta\varepsilon\}_n^i + \{\delta\Delta\varepsilon\}_n^i \text{ e as deformações totais: } \{\varepsilon\}_n^{i+2} = \{\varepsilon\}_n^{i+1} + \{\Delta\varepsilon\}_n^{i+1}. \text{ Se}$$

$$i = 0, \text{ tem-se que } \{\Delta\varepsilon\}_n^1 = \{\Delta\varepsilon^{2D}\}_n^1 - (x_3)_{ig} \{\Delta(1/r)\}_n^1.$$

b) Obtém-se o incremento de tensões elásticas, ou de tentativa, $\{\Delta\sigma^e\}_n^{i+1}$ através da

$$\text{equação } \{\Delta\sigma^e\}_n^{i+1} = [C]_n^i \{\delta\Delta(\varepsilon)\}_n^i \text{ se } i \geq 1 \text{ ou a partir da equação}$$

$$\{\Delta\sigma^e\}_n^{i+1} = [C] \{\Delta(\varepsilon)\}_n^{i+1} \text{ (sendo } [C] \text{ o tensor elástico dado pela lei de Hooke) se}$$

$i = 0$. Soma-se esse último ao estado de tensão verdadeiro da iteração anterior,

$$\text{obtendo-se as tensões totais } \{\sigma^e\}_n^{i+2} = \{\sigma\}_n^{i+1} + \{\Delta\sigma^e\}_n^{i+1}.$$

c) Com as tensões totais verifica-se o modelo constitutivo (ver item 8.5), obtendo-se o

$$\text{vetor de tensão verdadeiro } \{\sigma\}_n^{i+2}, \text{ dado por } \{\sigma\}_n^{i+2} = \{\sigma\}_n^{i+1} + \{\Delta\sigma^e\}_n^{i+1} - \{\Delta\sigma^p\}_n^{i+1},$$

e o incremento de tensão verdadeiro $\{\Delta\sigma\}_n^{i+1}$ para o ponto em questão. Se a iteração

não for elástica, deve-se atualizar também a relação constitutiva elasto-plástica $[C^{ep}]$.

Procedendo-se, da mesma forma, para todos os pontos de Gauss, obtém-se uma nova distribuição de tensão ao longo da espessura.

4.2 Calculam-se os momentos e forças normais internos ou verdadeiros $\{M\}_n^{i+2}$ e

$$\{N\}_n^{i+2}, \text{ e o vetor dos incrementos de momentos e forças normais internos ou}$$

$$\text{verdadeiros } \{\Delta M\}_n^{i+1} \text{ e } \{\Delta N\}_n^{i+1}, \text{ que são calculados a partir das equações (8.63).}$$

Calculam-se, então, os vetores de momentos e forças normais residuais nos pontos plásticos:

$$\{\Delta M^0\}_n^{i+1} = \{\Psi_M\}_n^{i+1} = \{\Delta M^e\}_n^{i+1} - \{\Delta M\}_n^{i+1} \quad (8.64)$$

$$\{\Delta N^0\}_n^{i+1} = \{\Psi_N\}_n^{i+1} = \{\Delta N^e\}_n^{i+1} - \{\Delta N\}_n^{i+1} \quad (8.65)$$

4.3 Para todos os pontos ao longo da espessura, verifica-se o critério de convergência (ver item 8.6).

- 5 Segue-se o mesmo procedimento para todos os pontos nodais das células. Se o critério de convergência não for verificado, para algum ponto, quer dizer que o estado de tensão na estrutura é tal que verifica o modelo constitutivo em todos os pontos, mas não é mais estaticamente admissível. Assim, aplicam-se $\{\Psi_M\}_n^{i+1}$ e $\{\Psi_N\}_n^{i+1}$ ao sistema como campos de esforços iniciais e passa-se à iteração $i+2$ (passo 1). Caso o critério de convergência seja verificado, passa-se ao incremento $(n+1)$ seguinte (passo 1, $i=0$).

Ao final de um incremento, têm-se:

$$\tilde{X} = \tilde{L} + \tilde{R}_M \tilde{M}^0 + \tilde{R}_N \tilde{N}^0 \quad (8.66)$$

onde $\{M^0\}$ e $\{N^0\}$ são os vetores dos resíduos de momentos e forças normais acumulados, que são obtidos somando-se a cada iteração os incrementos das forças residuais.

No algoritmo apresentado anteriormente, são feitas modificações no que diz respeito à verificação do critério para os pontos pertencentes às vigas ou para aqueles que representam o encontro de vigas.

Considere inicialmente, os pontos definidos ao longo de uma viga. Para esses pontos será corrigido apenas o incremento de tensão $\Delta\sigma_{s_v s_v}^e$ na direção s_v do contorno no eixo da viga. Assim, os incrementos de tensão $\Delta\sigma_{s_v n_v}^e$ e $\Delta\sigma_{n_v n_v}^e$, sendo n_v a direção da normal no eixo da viga, serão considerados sempre elásticos. Os incrementos de tensões nas direções X_1 e X_2 relativas ao sistema global da placa podem ser obtidos a partir dos incrementos de tensão do sistema local da viga (s_v, n_v) (ver figura 4.7), através da expressão (4.87).

Com isso, considerando-se uma iteração $i+1$ de um incremento n , procede-se da seguinte forma para os pontos de viga:

- ❖ Obtém-se o vetor das tensões totais de tentativa ($\{\sigma^e\}_n^{i+2}$) no sistema (X_1, X_2) da mesma maneira apresentada anteriormente.

- ❖ Calcula-se a tensão total $\sigma_{s_v s_v}^e$ na direção s_v da viga, através da equação:

$$\sigma_{s_v s_v}^e = \cos^2 \alpha \sigma_{x_1 x_1}^e + 2 \cos \alpha \sin \alpha \sigma_{x_1 x_2}^e + \sin^2 \alpha \sigma_{x_2 x_2}^e \quad (8.67)$$

sendo α o ângulo que a direção s_v da viga faz com o eixo X_1 (ver figura 4.7).

- ❖ Com $\sigma_{s_v s_v}^e$ verifica o critério, obtendo-se $\{\Delta\sigma_{s_v s_v}^p\}_n^{i+1}$.

❖ Calcula-se o incremento de tensões plásticas $\{\Delta\sigma^{p(s)}\}_n^{i+1}$ no sistema (X_1, X_2) relativas apenas ao incremento de tensão $\{\Delta\sigma_{s_v, s_v}^p\}_n^{i+1}$, utilizando-se a equação (4.87), ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_{11}^{p(s)} \\ \Delta\sigma_{22}^{p(s)} \\ \Delta\sigma_{12}^{p(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha \\ \cos \alpha \sin \alpha \end{Bmatrix} \Delta\sigma_{s_v, s_v}^p \quad (8.68)$$

❖ Obtêm-se as tensões verdadeiras: $\{\sigma\}_n^{i+2} = \{\sigma\}_n^{i+1} + \{\Delta\sigma^e\}_n^{i+1} - \{\Delta\sigma^{p(s)}\}_n^{i+1}$ (8.69)

No caso de um ponto que representa o encontro de duas vigas, segue-se o mesmo algoritmo do ponto pertencente a uma viga, porém nesse caso o critério deve ser verificado, separadamente, em cada uma das direções s_{v1} e s_{v2} , que são as direções do eixo das vigas que chegam no ponto.

8.5 MODELO ELASTO-PLÁSTICO UTILIZADO

A seguir, obtém-se a expressão do critério de Von Mises, para o estado plano de tensão, considerando-se um algoritmo implícito, a lei de normalidade e encruamento isótropo, pois esse será o modelo elasto-plástico utilizado nesse trabalho. O algoritmo implícito é aquele em que a correção do estado de tensões é feita segundo a normal à superfície de plastificação na posição atual. No trabalho de OWEN & HILTON (1980), tem-se uma boa abordagem sobre a teoria da plasticidade.

8.5.1 Modelo Elasto-plástico para um Caso Geral

Para um caso geral, o critério de plastificação, ou de escoamento, no caso bidimensional ou tridimensional, é definido por uma função f tal que:

$$f(T, p) \leq 0 \quad (8.70)$$

onde:

- $p = -\lambda h(T, p)$ (8.71)

é a variável relacionada ao encruamento, sendo que h define o tipo de encruamento e λ é o multiplicador plástico.

- T é o tensor de tensão.

A deformação total $\boldsymbol{\varepsilon}$, no regime plástico, é composta por uma parcela elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, e outra plástica $\boldsymbol{\varepsilon}^p$:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad (8.72)$$

Admitindo-se que $\boldsymbol{\varepsilon}$, \mathbf{T} e $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ são funções de tempo, define-se, em particular, $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \frac{d\boldsymbol{\varepsilon}^p}{dt}$ e diz-se que as deformações irreversíveis aparecem quando $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \neq 0$. A

deformação plástica acumulada num certo intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ é dada por: $\boldsymbol{\varepsilon}^p = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p dt$.

O significado de tempo, nesse caso, não é o físico, mas a representação da ‘história’ do carregamento, isto é, cada instante representa um incremento de carga.

Considerando-se, que num instante $t+\Delta t$, não se admite $f(\mathbf{T}, \mathbf{p})_{t+\Delta t} > 0$ e que no caso em que $f(\mathbf{T}, \mathbf{p})_{t+\Delta t} < 0$, tem-se um descarregamento, pode-se dizer que:

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \text{se} \quad f(\mathbf{T}, \mathbf{p})_{t+\Delta t} < 0 \quad (8.73)$$

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad \text{se} \quad f(\mathbf{T}, \mathbf{p})_{t+\Delta t} = 0 \quad (8.74)$$

Observando-se as condições anteriores, pode-se concluir que:

$$\dot{\lambda} f(\mathbf{T}, \mathbf{p}) = 0 \quad (8.75)$$

que é denominada condição de complementariedade.

Tem-se ainda que:

$$\dot{\lambda} = 0 \quad \text{se} \quad f \leq 0 \quad \text{e} \quad \dot{f} < 0 \quad (\text{ caso de descarregamento }) \quad (8.76)$$

$$\dot{\lambda} > 0 \quad \text{se} \quad f = 0 \quad \text{e} \quad \dot{f} = 0 \quad (\text{ caso de carregamento }) \quad (8.77)$$

Logo, conclui-se que:

$$\dot{\lambda} \dot{f} = 0, \quad (8.78)$$

que é denominada de condição de consistência.

Em termos de taxas pode-se escrever:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (8.79)$$

A lei de plastificação, ou regra de fluxo, é expressa por :

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} r(T, p) \quad (8.80)$$

onde r , que é dado por:

$$r = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (8.81)$$

representa o gradiente de tensão do potencial plástico Q e estabelece a ‘direção’ do fluxo plástico.

Na fase elástica a lei incremental é dada por:

$$\Delta \sigma_{ij} = C_{ijkl} \Delta \varepsilon_{kl}^e \quad (8.82)$$

onde C_{ijkl} é o tensor de constantes elásticas para materiais isotrópicos, que é dado por:

$$C = \lambda(\mathbf{I} \otimes \mathbf{I}) + 2\mu \mathbf{II} \quad (8.83)$$

sendo \mathbf{II} o tensor identidade de 4ª ordem e μ e λ as constantes de Lamé, que são dadas por:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ e } \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

no caso geral ou de estado plano de deformação. No caso

de estado plano de tensão, que será o caso tratado nesse trabalho, a constante λ deve ser substituída por $\lambda' = \frac{2\mu\nu}{(1-\nu)}$.

Na fase plástica, a relação elasto-plástica entre tensão e deformação é dada por:

$$\Delta \sigma_{ij} = C_{ijkl} (\Delta \varepsilon_{kl} - \Delta \varepsilon_{kl}^p) = C_{ijkl}^{ep} \Delta \varepsilon_{kl} \quad (8.84)$$

onde C^{ep} é o tensor dos módulos elasto-plásticos tangentes, determinado no item (8.5.3).

Uma expressão para $\dot{\mathbf{f}}$ pode ser obtida, considerando-se as equações (8.71), (8.80) e (8.84), da seguinte maneira:

$$\dot{f} = f_T \cdot \dot{T} + f_p \cdot \dot{p} = f_T \cdot C \dot{\epsilon} - \dot{\lambda} (f_T \cdot Cr + f_p \cdot h) \quad (8.85)$$

sendo $f_T = \frac{\partial f}{\partial T}$, $f_p = \frac{\partial f}{\partial p}$, $\dot{T} = \frac{\partial T}{\partial t}$, $\dot{p} = \frac{\partial p}{\partial t}$.

Considerando-se a lei de consistência, $\dot{\lambda} > 0$ só é possível se $\dot{f} = 0$. Logo, igualando a equação (8.85) a zero, obtém-se:

$$\dot{\lambda} = \frac{f_T \cdot C \dot{\epsilon}}{f_T \cdot Cr + f_p \cdot h} \quad (8.86)$$

Substituindo-se as equações (8.86) e (8.80) em (8.84), obtém-se C^{ep} :

$$C^{ep} = \begin{cases} C & \text{se } \dot{\lambda} = 0 \\ C - \frac{(Cr \otimes Cf_T)}{f_T \cdot Cr + f_p \cdot h} & \text{se } \dot{\lambda} > 0 \end{cases} \quad (8.87)$$

Para um r arbitrário C^{ep} é, em geral, não-simétrico. A simetria é recuperada quando faz-se $r = f_T$ ou seja, o potencial plástico Q coincide com a função de escoamento f . Nesse caso, a lei de fluxo é dita associativa. Essa situação implica na chamada regra da normalidade, pois o tensor taxa de deformação plástica passa a ter a direção de f_T , cuja direção é da normal à superfície de plastificação, ou seja:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} f_T \quad (8.88)$$

8.5.2 Algoritmo Implícito com o Critério de Von Mises

O critério de Von Mises é dado por:

$$f = \|S\| - \sqrt{2/3} (\sigma_y + K \bar{\epsilon}^p) \leq 0 \quad (8.89)$$

onde: σ_y é o limite elástico inicial quando o ponto não apresenta deformação plástica; K é denominado módulo plástico ou parâmetro de endurecimento; $(\sigma_y + K \bar{\epsilon}^p)$ representa o limite elástico após o encruamento; $\bar{\epsilon}^p$ a deformação plástica equivalente e $\|S\|$ é dada por:

$$\|S\| = \sqrt{2J_2} \quad (8.90)$$

A expressão de J_2 para o caso tridimensional é dada por:

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij} = \frac{\|T\|^2}{2} - \frac{1}{6} (\text{tr}T)^2 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (8.91)$$

onde S_{ij} é a parte anti-esférica do vetor de tensões, que é igual à:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m = T - \frac{1}{3} (\text{tr}T) I \quad (8.92)$$

$$\text{sendo } \sigma_m = \frac{\sigma_{ii}}{3} \quad (8.93)$$

Deve-se notar, que no caso do estado plano de tensão, tem-se $\sigma_{13} = \sigma_{23} = 0$ e a tensão σ_{33} não é levada em conta na formulação. No entanto, a tensão σ_{33} deve ser considerada no cálculo de S_{ij} .

A equação (8.89) do critério de Von Mises, pode ser escrita da seguinte forma:

$$f = \sqrt{\frac{2}{3}} \left[\bar{\sigma} - (\sigma_y + K \bar{\epsilon}^p) \right] \leq 0 \quad (8.94)$$

onde $\bar{\sigma}$ que é denominada de tensão efetiva ou equivalente, representa a tensão equivalente ao estado uniaxial e é dada por:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3J_2} \quad (8.95)$$

Considerando-se a equação (8.94) o critério pode ainda ser representado na sua forma equivalente ao estado uniaxial:

$$f = \bar{\sigma} - (\sigma_y + K \bar{\epsilon}^p) \leq 0 \quad (8.96)$$

sendo essa a expressão do critério utilizada nesse trabalho.

Derivando-se f (equação 8.96), chega-se à:

$$\begin{aligned} f_T &= \frac{3}{2\sqrt{3J_2}} \frac{\partial J_2}{\partial T} = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \left[\|T\| \frac{d\|T\|}{dT} - \frac{1}{3} \text{tr}T \frac{d(\text{tr}T)}{dT} \right] = \\ &= \frac{3}{2\bar{\sigma}} \left[\|T\| \frac{T}{\|T\|} - \frac{1}{3} (\text{tr}T) I \right] = \frac{3}{2\bar{\sigma}} \left[T - \frac{1}{3} (\text{tr}T) I \right] \end{aligned}$$

$$\therefore f_T = \frac{3}{2\sigma} S = \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{S}{\|S\|} \quad (8.97)$$

$$\text{sendo } \|f_T\| = \frac{3}{2\sigma} \|S\| = \frac{\sqrt{6}}{2} \quad (8.98)$$

A deformação plástica efetiva $\bar{\epsilon}^p$ pode ser definida de modo que seja preservada a taxa de trabalho plástico, ou seja: $\dot{W}^p = T\dot{\epsilon}^p = \bar{\sigma}\dot{\bar{\epsilon}}^p$. Considerando-se, porém, a equação (8.88) pode-se dizer que $\bar{\sigma}\dot{\bar{\epsilon}}^p = \dot{\lambda}f_T.T$, de onde pode-se escrever $\dot{\lambda}$ em função de $\dot{\bar{\epsilon}}^p$:

$$\dot{\lambda} = \frac{\bar{\sigma}\dot{\bar{\epsilon}}^p}{f_T.T} \quad (8.99)$$

onde, considerando-se a equação (8.97), obtém-se:

$$f_T.T = \frac{3}{2\sigma} S.T = \frac{3}{2\sigma} S.S = \frac{3}{2\sigma} 2J_2 = \bar{\sigma} \quad (8.100)$$

Portanto, substituindo-se (8.100) em (8.99), essa resulta em:

$$\dot{\lambda} = \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad (8.101)$$

A fim de determinar o produto $f_p.h$ que aparece nas equações (8.86) e (8.87), considere a expressão $\dot{f} = f_T.\dot{T} + f_p.\dot{p} = f_T.\dot{T} - \dot{\lambda}f_p.h$. Levando-se em conta que $\dot{\lambda} > 0$ somente se $\dot{f} = 0$, chega-se à:

$$f_p.h = \frac{f_T.\dot{T}}{\dot{\lambda}} \quad (8.102)$$

Porém, no caso do critério de Von Mises com encruamento isotrópico (equação 8.96), tem-se que $f_T.\dot{T} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} = \dot{\bar{\sigma}}$. Logo, considerando-se a equação (8.101), tem-se:

$$f_p.h = \frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\dot{\bar{\epsilon}}^p} = K \quad (8.103)$$

Na expressão (8.86), levando-se em conta a equação (8.83), a parcela $f_T.Cf_T$ é dada por:

$$f_T.Cf_T = f_T.[\lambda'(I \otimes I) + 2\mu \Pi]f_T = f_T.[\lambda'(f_T.I)I + 2\mu f_T] = f_T.[\lambda'(\text{tr}f_T)I + 2\mu f_T] \quad (8.104)$$

onde, considerando-se a equação (8.97), tem-se que:

$$\text{tr}f_T = \frac{3}{2\sqrt{3J_2}} \text{tr} \left[T - \frac{1}{3}(\text{tr}T)I \right] = \frac{3}{2\sqrt{3J_2}} \left[\text{tr}T - \frac{1}{3}(\text{tr}T)\text{tr}I \right] = 0$$

Logo, a equação (8.104) resulta em:

$$f_T.Cf_T = 2\mu f_T.f_T = 2\mu \|f_t\|^2 \quad (8.105)$$

Considerando-se porém, a equação (8.98), chega-se à:

$$f_T.Cf_T = 3\mu \quad (8.106)$$

Por outro lado, a parcela $f_T.C\dot{\epsilon}$ da equação (8.86) é dada por:

$$f_T.C\dot{\epsilon} = f_T.\dot{T}^t = \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T^t}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} = \frac{\dot{\sigma}^t}{\sigma} = f^t \quad (8.107)$$

sendo \dot{T}^t o incremento de tensão, de tentativa, suposto totalmente elástico, $\frac{\dot{\sigma}^t}{\sigma}$ o incremento de tentativa da tensão efetiva $\bar{\sigma}$ e f^t o valor de tentativa do critério, isto é, o valor do critério antes de se fazer a correção no estado de tensão, se este tiver excedido o limite elástico. Logo, substituindo-se (8.107), (8.106) e (8.103) em (8.86), obtém-se:

$$\dot{\lambda} = \Delta\lambda = \frac{f^t}{3\mu + K} \quad (8.108)$$

Considerando-se as equações (8.88) e (8.97), tem-se que:

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{\sqrt{6}}{2} \frac{S}{\|S\|} \dot{\lambda} \quad (8.109)$$

Assim, em uma iteração $i+1$, sendo conhecidos ε_{i+1} , ε_i^p , $\bar{\varepsilon}_i^p$ e $\Delta\varepsilon_i$, tem-se inicialmente uma etapa de previsão, onde os estados de tentativa de tensão e de deformação plástica são determinados segundo um procedimento explícito, ou seja:

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_i \quad (8.110)$$

$$\sigma_{i+1}^t = \sigma_i + \Delta\sigma_i^t = C(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^p) \quad (8.111)$$

$$f_{i+1}^t = f(\sigma_{i+1}^t, \alpha_i) = \sqrt{3J_2} - (\sigma_y + K\bar{\varepsilon}_i^p) \quad (8.112)$$

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p \quad (8.113)$$

Se o critério ($f_{i+1}^t \leq 0$) não for obedecido, passa-se então à etapa de correção dos tensores de tensão e de deformação plástica, segundo um procedimento implícito. O tensor de deformação total não muda. Desse modo, considerando-se a equação (8.109), em uma iteração $i+1$, a tensão verdadeira, a deformação plástica, a direção da normal n_{i+1} à superfície de plastificação e o critério são dados pelas seguintes relações:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta\sigma_i = C(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^p) \quad (8.114)$$

$$f_{i+1} = f(\sigma_{i+1}, \alpha_{i+1}) = \sqrt{3J_2} - (\sigma_y + K\bar{\varepsilon}_{i+1}^p) \quad (8.115)$$

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\varepsilon_i^p = \varepsilon_i^p + \frac{\sqrt{6}}{2} \Delta\lambda n_{i+1} \quad (8.116)$$

$$n_{i+1} = \frac{S_{i+1}}{\|S\|_{i+1}} \quad (8.117)$$

$$\text{sendo } \|S\|_{n+1} = S_{i+1} \cdot n_{i+1} \quad (8.118)$$

Considerando-se a equação (8.92), na etapa de previsão, ou de tentativa, têm-se:

$$S_{i+1}^t = \sigma_{i+1}^t - \frac{1}{3} (\text{tr}\sigma_{i+1}^t) \mathbb{I} \quad (8.119)$$

onde, levando-se em conta as equações (8.83) e (8.111) tem-se que:

- $\sigma_{i+1}^t = \lambda' (\text{tr}\varepsilon_{i+1}) \mathbb{I} - 2\mu\varepsilon_i^p + 2\mu\varepsilon_{i+1}$
- $\text{tr}(\sigma_{i+1}^t) = 3\lambda' \text{tr}\varepsilon_{i+1} + 2\mu \text{tr}\varepsilon_{i+1}$

Portanto:

$$\mathbf{S}_{i+1}^t = 2\mu(\mathbf{e}_{i+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_i^p) \quad (8.120)$$

$$\text{onde } \mathbf{e}_{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} - \frac{1}{3}(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1})\mathbf{I} \quad (8.121)$$

Na etapa de correção, considerando-se as equações (8.116) e (8.120), tem-se:

$$\mathbf{S}_{i+1} = 2\mu(\mathbf{e}_{i+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^p) = 2\mu\left(\mathbf{e}_{i+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_i^p - \frac{\sqrt{6}}{2}\mathbf{n}_{i+1}\Delta\lambda\right) = \mathbf{S}_{i+1}^t - \sqrt{6}\mu\mathbf{n}_{i+1}\Delta\lambda \quad (8.122)$$

Mas como $\mathbf{S}_{i+1} = \|\mathbf{S}_{i+1}\|\mathbf{n}_{i+1}$, a equação (8.122) pode ser escrita como:

$$\mathbf{S}_{i+1}^t = (\|\mathbf{S}_{i+1}\| + \sqrt{6}\mu\Delta\lambda)\mathbf{n}_{i+1} \quad (8.123)$$

Da equação (8.123), pode-se deduzir as seguintes equações:

$$\|\mathbf{S}_{i+1}^t\| = \|\mathbf{S}_{i+1}\| + \sqrt{6}\mu\Delta\lambda \quad (8.124)$$

$$\|\mathbf{S}_{i+1}^t\| = \mathbf{S}_{i+1}^t \cdot \mathbf{n}_{i+1} \quad (8.125)$$

ou seja, \mathbf{n}_{i+1} e \mathbf{S}_{i+1}^t estão alinhados.

Substituindo-se (8.124) em (8.123), conclui-se que:

$$\mathbf{n}_{i+1} = \frac{\mathbf{S}_{i+1}^t}{\|\mathbf{S}_{i+1}^t\|} \quad (8.126)$$

e portanto, deduz-se que no caso do critério de Von Mises, o algoritmo explícito coincide

com o implícito, pois: $\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{S}_{i+1}^t}{\|\mathbf{S}_{i+1}^t\|} = \mathbf{n}_{i+1} = \frac{\mathbf{S}_{i+1}}{\|\mathbf{S}_{i+1}\|}$.

Se $\mathbf{f}_{i+1}^t > \mathbf{0}$, deve-se fazer $\mathbf{f}_{i+1} = \mathbf{0}$. Portanto, considerando-se as equações (8.115) e (8.101), pode-se escrever que:

$$f_{i+1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \|S_{i+1}\| - (\sigma_y + K\bar{\epsilon}_i^p + K\Delta\lambda_{i+1}) = 0 \quad (8.127)$$

Da equação (8.127), considerando-se as equações (8.118), (8.122) e (8.125), chega-se à expressão para o cálculo de $\Delta\lambda_{i+1}$, definida em (8.108). O incremento verdadeiro de tensão é dado por:

$$\Delta\sigma_{ij} = \Delta\sigma_{ij}^t - \Delta\sigma_{ij}^p \quad (8.128)$$

onde, levando-se em conta as equações (8.84), (8.87) (8.101) e (8.104), tem-se que:

$$\bullet \Delta\sigma_{ij}^t = C_{ijkl} \Delta\epsilon_{kl} \quad (8.129)$$

$$\bullet \Delta\sigma^p = \frac{(Cf_T \otimes Cf_T)}{f_T \cdot Cf_T + f_p \cdot h} \Delta\epsilon = Cf_T \frac{f_T \cdot C\dot{\epsilon}}{3\mu + K} \quad (8.130)$$

Considerando-se ainda as equações (8.97), (8.105), (8.107), (8.108) e (8.117), a equação (8.130) resulta em:

$$\Delta\sigma_{ij}^p = n_{ij} \sqrt{6\mu} \Delta\lambda \quad (8.131)$$

Assim, a tensão verdadeira, expressa em (8.128), é dada por:

$$\sigma_{ij(i+1)} = \sigma_{ij(i)} + \Delta\sigma_{ij(i)} = \sigma_{ij(i)} + \Delta\sigma_{ij(i)}^t - n_{ij(i+1)} \sqrt{6\mu} \Delta\lambda_{(i+1)} \quad (8.132)$$

Desse modo, em uma iteração $i+1$, encontra-se o estado de tensão verdadeiro da seguinte maneira:

- Calcula-se o limite elástico $(\sigma_y + K\bar{\epsilon}^p)$ utilizando-se o valor da deformação plástica efetiva da iteração anterior $(\bar{\epsilon}_i^p)$.
- Calcula-se a tensão equivalente $\bar{\sigma}$ (equação 8.95), utilizando-se a tensão de tentativa σ_{i+1}^t (equação 8.111) e verifica-se o critério (equação 8.112). Se $f^t \leq 0$, a iteração é elástica, não há necessidade de correção das tensões.
- Se $f^t > 0$ faz-se a correção:

⇒ Calcula-se o tensor \mathbf{S}'_{i+1} (equação 8.119), $\|\mathbf{S}'_{i+1}\|$ (equação 8.90), \mathbf{n}_{i+1} (equação 8.126), $\Delta\lambda$ (equação 8.108) e finalmente $\boldsymbol{\sigma}_{i+1}$ (equação 8.132). Então, atualiza-se o valor da deformação plástica efetiva (equação 8.101).

Assim, considerando-se um algoritmo implícito no cálculo das tensões, o critério de plastificação de Von-Mises, a lei da normalidade, e o encruamento isótropo positivo, pode-se dar uma interpretação geométrica ao problema no sistema principal, que é mostrada na figura (8.3). No caso de um algoritmo implícito, a correção do estado de tensões é feita segundo a normal à superfície na posição atual ($i+1$) e num algoritmo explícito, a mesma é feita segundo a normal à superfície da iteração anterior (i). Entretanto, como foi mostrado anteriormente, no caso do critério e Von Mises o algoritmo explícito coincide com o implícito, isto é, o carregamento e descarregamento se dão sempre na mesma direção radial. Deve-se notar, que o critério no caso tridimensional, é uma esfera e não uma elipse.

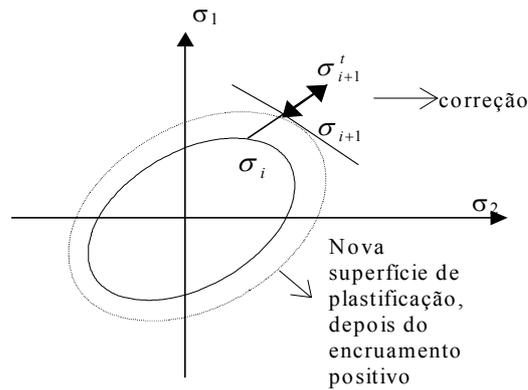


FIGURA 8.3 - Representação Geométrica do Critério de Von Mises no Caso Biaxial

8.5.3 Tensor Elasto-plástico Algorítmico (C^{ep}) para o Critério de Von Mises

O tensor elasto-plástico algorítmico, em uma iteração i de um incremento n , é dado por: $C_n^{ep(i)} = \frac{\partial(\boldsymbol{\sigma}_n^{(i+1)})}{\partial\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n^i}$, onde o estado de tensão verdadeiro $\boldsymbol{\sigma}_n^{(i+1)}$, dado na equação (8.114),

considerando-se as equações (8.83) e (8.116), é expresso por:

$$\boldsymbol{\sigma}_{i+1} = \lambda'(\text{tr}\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1})\mathbf{I} + 2\mu\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_i^p - \frac{\sqrt{6}}{2}\Delta\lambda\mathbf{n}_{i+1}\right) = C\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} - 2\mu\left(\boldsymbol{\varepsilon}_i^p + \frac{\sqrt{6}}{2}\Delta\lambda\mathbf{n}_{i+1}\right) \quad (8.133)$$

Portanto, levando-se em conta a equação (8.110), obtém-se:

$$\frac{\partial \sigma_{i+1}}{\partial \Delta \varepsilon_i} = C - \sqrt{6}\mu \left(\frac{\partial (\Delta \lambda \mathbf{n}_{i+1})}{\partial \Delta \varepsilon_i} \right) \quad (8.134)$$

Considerando-se que $\nabla(\alpha \mathbf{n}) = \alpha \nabla \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \nabla \alpha$, a equação (8.134) resulta em:

$$\frac{\partial \sigma_{i+1}}{\partial \Delta \varepsilon_i} = C - \sqrt{6}\mu \left(\Delta \lambda \frac{\partial (\mathbf{n}_{i+1})}{\partial \Delta \varepsilon_i} + \mathbf{n}_{i+1} \otimes \frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \Delta \varepsilon_i} \right) \quad (8.135)$$

Levando-se em conta a equação (8.108), de $\Delta \lambda$, a equação (8.96) relativa ao critério de Von Mises, equação (8.97) de f_T , a equação (8.126) de \mathbf{n}_{i+1} e a equação (8.83) de C , pode-se escrever que:

$$\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \Delta \varepsilon_i} = \frac{1}{K + 3\mu} \frac{\partial \|f_{i+1}^t\|}{\partial \Delta \varepsilon_i} = \frac{1}{K + 3\mu} \frac{\partial \|\sigma_{i+1}^{-t}\|}{\partial \Delta \varepsilon_i} \quad (8.136)$$

$$\text{onde } \frac{\partial \|\sigma_{i+1}^{-t}\|}{\partial \Delta \varepsilon_i} = \frac{\partial \|\sigma_{i+1}^{-t}\|}{\partial \sigma_{i+1}^t} \frac{\partial \sigma_{i+1}^t}{\partial \Delta \varepsilon_i} = f_T C = \frac{\sqrt{6}}{2} [\lambda'(\text{trn}_{i+1}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{n}_{i+1}] = \sqrt{6}\mu \mathbf{n}_{i+1} \quad (8.137)$$

Substituindo-se (8.137) em (8.136), tem-se:

$$\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \Delta \varepsilon_i} = \frac{\sqrt{6}\mu}{K + 3\mu} \mathbf{n}_{i+1} \quad (8.138)$$

A outra parcela da equação (8.135) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{i+1}}{\partial \Delta \varepsilon_i} = \frac{\partial}{\partial \Delta \varepsilon_i} \left(\frac{\mathbf{S}_{i+1}^t}{\|\mathbf{S}_{i+1}^t\|} \right) = \frac{1}{\|\mathbf{S}_{i+1}^t\|} \frac{\partial \mathbf{S}_{i+1}^t}{\partial \Delta \varepsilon_i} - \frac{1}{\|\mathbf{S}_{i+1}^t\|^2} \mathbf{S}_{i+1}^t \otimes \frac{\partial \|\mathbf{S}_{i+1}^t\|}{\partial \Delta \varepsilon_i} \quad (8.139)$$

$$\text{onde } \frac{\partial \|\mathbf{S}_{i+1}^t\|}{\partial \Delta \varepsilon_i} = \frac{\partial \|\mathbf{S}_{i+1}^t\|}{\partial \sigma_{i+1}^t} \frac{\partial \sigma_{i+1}^t}{\partial \Delta \varepsilon_i} = \frac{\mathbf{S}_{i+1}^t}{\|\mathbf{S}_{i+1}^t\|} C = 2\mu \mathbf{n}_{i+1} \quad (8.140)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{\partial S}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial \Delta \varepsilon} = \frac{\partial S}{\partial T} C \quad (8.141)$$

Considerando-se a equação (8.92), pode-se dizer que:

$$\frac{\partial S}{\partial T} = I - \frac{1}{3} \frac{d(\text{tr}T)}{dT} I = I - \frac{1}{3} I \otimes I \quad (8.142)$$

Substituindo-se (8.142) em (8.141) e considerando-se a equação (8.83), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \Delta \varepsilon} &= \lambda'(I \otimes I) - \frac{\lambda'}{3} (I \otimes I)(I \otimes I) + 2\mu \left[\Pi - \frac{1}{3} (I \otimes I) \right] = \\ &= \lambda'(I \otimes I) - \frac{\lambda'}{3} (\text{tr}I)(I \otimes I) + 2\mu \left[\Pi - \frac{1}{3} (I \otimes I) \right] = 2\mu \left[\Pi - \frac{1}{3} (I \otimes I) \right] \end{aligned} \quad (8.143)$$

Portanto, substituindo-se (8.143) e (8.140) em (8.139) e considerando-se a equação (8.126), chega-se à:

$$\frac{\partial \mathbf{n}_{i+1}}{\partial \Delta \varepsilon_i} = \frac{1}{\|\mathbf{S}_{i+1}^t\|} 2\mu \left[\Pi - \frac{1}{3} (I \otimes I) \right] - \frac{2\mu}{\|\mathbf{S}_{i+1}^t\|} \mathbf{n}_{i+1} \otimes \mathbf{n}_{i+1} \quad (8.144)$$

Substituindo-se (8.144) e (8.138) em (8.135), esta pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} C^{\text{ep}(i)} = \frac{\partial \sigma_{i+1}}{\partial \Delta \varepsilon_i} &= C - \sqrt{6}\mu \left\{ \frac{\Delta \lambda 2\mu}{\|\mathbf{S}_{i+1}^t\|} \left[\Pi - \frac{1}{3} (I \otimes I) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\sqrt{6}\mu}{K + 3\mu} - \frac{\Delta \lambda 2\mu}{\|\mathbf{S}_{i+1}^t\|} \right] (\mathbf{n}_{i+1} \otimes \mathbf{n}_{i+1}) \right\} \end{aligned} \quad (8.145)$$

onde:

$$\left[\Pi - \frac{1}{3} (I \otimes I) \right] = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.146)$$

$$[\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}] = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{11}^2 + \mathbf{n}_{12}^2 & \mathbf{n}_{12}(\mathbf{n}_{22} + \mathbf{n}_{11}) & 0 \\ \mathbf{n}_{12}(\mathbf{n}_{22} + \mathbf{n}_{11}) & \mathbf{n}_{12}^2 + \mathbf{n}_{22}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{n}_{33}^2 \end{bmatrix} \quad (8.147)$$

$$\text{pois } \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_{11} & \mathbf{n}_{12} & 0 \\ \mathbf{n}_{21} & \mathbf{n}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{n}_{33} \end{bmatrix}.$$

Em termos de componentes, \mathbf{C}^{ep} pode ser expresso da seguinte forma:

$$\mathbf{C}_{ijkl}^{ep} = \mathbf{C}_{ijkl} - \sqrt{6}\mu \left[\frac{\Delta\lambda 2\mu}{\|\mathbf{S}^t\|} \left(\delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \right) + \left(\frac{\sqrt{6}\mu}{\mathbf{K} + 3\mu} - \frac{2\mu\Delta\lambda}{\|\mathbf{S}^t\|} \right) \mathbf{n}_{ij}\mathbf{n}_{kl} \right] \quad i,j,k,l=1,2 \quad (8.148)$$

8.5.4 Critério nos Pontos de Viga

O critério a ser utilizado para os pontos de viga será o Von Mises particularizado para o caso uniaxial. Com as tensões no sistema (x_1, x_2) , calcula-se a tensão na direção tangencial da viga, direção s_v , e então apenas com essa última verifica-se o critério. Com isso, considera-se que o vetor de tensão seja dado por: $\mathbf{T}^T = \{\sigma_{s_v s_v} \quad 0 \quad 0\}$. A partir das equações (8.91), (8.92), (8.95), (8.97) chega-se aos seguintes resultados:

$$\mathbf{J}_2 = \sigma_{s_v s_v}^2 / 3 \quad (8.149)$$

$$\bar{\sigma} = |\sigma_{s_v s_v}| \quad (8.150)$$

$$\mathbf{S} = \begin{Bmatrix} 2\sigma_{s_v s_v} / 3 \\ -\sigma_{s_v s_v} / 3 \\ -\sigma_{s_v s_v} / 3 \end{Bmatrix} \quad (8.151)$$

$$\mathbf{f}_T = \begin{Bmatrix} \text{sign}\sigma_{s_v s_v} \\ -0,5\text{sign}\sigma_{s_v s_v} \\ -0,5\text{sign}\sigma_{s_v s_v} \end{Bmatrix} \quad (8.152)$$

onde $\text{sign}\sigma$ corresponde ao sinal da tensão.

Nesse caso particular, na fase elástica a lei incremental é dada por:

$$\Delta\sigma_{s_v s_v} = E' \Delta\varepsilon_{s_v s_v}^e \quad (8.153)$$

onde $E' = E / (1 - \nu^2)$, pois no caso da formulação proposta nesse trabalho o coeficiente de Poisson ν da viga não é considerado nulo (para se ter $\nu=0$ nas vigas e $\nu \neq 0$ nas lajes teria que deduzir mais um termo na formulação em elementos de contorno proposta aqui).

Levando-se em conta as equações (8.153) e (8.152), chega-se à:

$$f_T \cdot Cf_T = \frac{3}{2} E' \quad (8.154)$$

Substituindo-se (8.107), (8.154) e (8.103) em (8.86), obtém-se:

$$\dot{\lambda} = \Delta\lambda = \frac{f^t}{\frac{3}{2} E' + K} \quad (8.155)$$

Considerando-se ainda as equações (8.97), (8.107), (8.152), (8.153) e (8.155), o incremento de tensão plástica (ver equação 8.130), na direção s_v , resulta em:

$$\Delta\sigma_{s_v s_v}^p = E' \Delta\lambda \text{sign}\sigma_{s_v s_v} \quad (8.156)$$

O tensor elasto-plástico C^{ep} será calculado também apenas na direção s_v . Para isso, seja o estado de tensão verdadeiro $\sigma_{s_v s_v}^{(i+1)}$, dado na equação (8.114) e obtido considerando-se as equações (8.153) e (8.156):

$$\sigma_{s_v s_v}^{i+1} = E' \epsilon_{s_v s_v}^{i+1} - E' (\epsilon_{s_v s_v}^{p(i)} + \Delta\lambda \text{sign}\sigma_{s_v s_v}) \quad (8.157)$$

Derivando-se a equação (8.157), chega-se à:

$$\frac{\partial \sigma_{s_v s_v}^{i+1}}{\partial \Delta \epsilon_{s_v s_v}^i} = E' - E' \text{sign}\sigma_{s_v s_v} \left(\frac{\partial (\Delta\lambda)}{\partial \Delta \epsilon_{s_v s_v}^i} \right) \quad (8.158)$$

Levando-se em conta a equação (8.155), de $\Delta\lambda$, a equação (8.96) relativa ao critério de Von Mises, equação (8.152) de f_T , e a equação (8.153), pode-se escrever que:

$$\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \Delta \varepsilon_i} = \frac{1}{\frac{3}{2}E' + K} \frac{\partial \|f_{i+1}^t\|}{\partial \Delta \varepsilon_i} = \frac{1}{K + \frac{3}{2}E'} \frac{\partial \|\bar{\sigma}_{i+1}^t\|}{\partial \Delta \varepsilon_i} \quad (8.159)$$

$$\text{onde } \frac{\partial \|\bar{\sigma}_{i+1}^t\|}{\partial \Delta \varepsilon_i} = \frac{\partial \|\bar{\sigma}_{i+1}^t\|}{\partial \sigma_{i+1}^t} \frac{\partial \sigma_{i+1}^t}{\partial \Delta \varepsilon_i} = f_T E' = E' \text{sign} \sigma_{s_v s_v} \quad (8.160)$$

Substituindo-se (8.160) em (8.159), tem-se:

$$\frac{\partial \Delta \lambda}{\partial \Delta \varepsilon_i} = \frac{E' \text{sign} \sigma_{s_v s_v}}{K + \frac{3}{2}E'} \quad (8.161)$$

Portanto, substituindo (8.161) em (8.158), chega-se à:

$$\frac{\partial \sigma_{s_v s_v}^{i+1}}{\partial \Delta \varepsilon_{s_v s_v}^i} = C_{s_v s_v}^{ep} = E' - \frac{E'^2}{\frac{3}{2}E' + K} \quad (8.162)$$

No entanto, como a matriz tangente é construída no sistema (x_1, x_2) , deve-se fazer a transformação de coordenadas para obter-se o tensor C^{ep} no sistema (x_1, x_2) . Considerando-se

que $\sigma_{s_v s_v} = \left\{ \begin{matrix} s_1^2 & s_2^2 & 2s_1 s_2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{matrix} \right\}$, o tensor C^{ep} no sistema (x_1, x_2) é dado por:

$$C^{ep} = C_{s_v s_v}^{ep} \begin{bmatrix} s_1^4 & s_1^2 s_2^2 & 2s_1^3 s_2 \\ s_1^2 s_2^2 & s_2^4 & 2s_1 s_2^3 \\ 2s_1^3 s_2 & 2s_1 s_2^3 & 4s_1^2 s_2^2 \end{bmatrix} \quad (8.163)$$

8.6 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

Para os pontos plásticos o critério de convergência do processo iterativo é dado pela relação entre o incremento de tensão efetiva $\Delta \bar{\sigma}^{t(i+1)}$ (equação 8.95) de tentativa e a tensão

de escoamento $\bar{\sigma}_y^{-i+1}$ da iteração $i+1$. Se a tensão efetiva não exceder o limite elástico, o erro é nulo. Logo, em todos os pontos de Gauss, referentes a uma seção da placa, deve-se ter:

$$\frac{\bar{\sigma}_y^{i(i+1)} - \bar{\sigma}_y^{-i}}{\bar{\sigma}_y^{-i+1}} \leq \text{tolerância} \quad (8.164)$$

A tolerância no critério de convergência, deve ser tal que dê resultados coerentes, sem a necessidade de realizar muitas iterações. Assim, tolerâncias muito ‘frouxas’, produzem resultados não muito confiáveis, pois refletem falsos estados de equilíbrio; e tolerâncias muito ‘apertadas’ elevam o esforço computacional, fazendo iterações desnecessárias. No caso de soluções divergentes, deve-se reduzir os tamanhos dos incrementos e investigar a possibilidade de colapso da estrutura. Para convergência lenta, deve-se reduzir o tamanho dos incrementos ou aumentar a tolerância de convergência.

8.7 EXEMPLOS NUMÉRICOS

A seguir são apresentados cinco exemplos. A análise linear dos quatro primeiros foi apresentada no capítulo 6. A tolerância adotada para a definição da convergência foi de 0,1% e para a integração das tensões consideraram-se oito pontos de Gauss ao longo da espessura da placa nos três primeiros exemplos e 12 pontos nos outros dois.

8.7.1 Viga Sujeita a Momento Fletor

Esse exemplo é aquele analisado no item (6.10.2), mudando-se apenas alguns dados. Ao longo dos dois lados livres as condições de contorno referentes ao problema de chapa são dadas por $p_s=p_n=0$ e nos lados apoiados tem-se $u_s=u_n=0$ para o ponto do meio e $p_s=u_n=0$ para os demais. Adota-se $E = 30000kN/cm^2$, módulo de encruamento $K=15000kN/cm^2$, tensão de escoamento inicial $\sigma_y=30kN/cm^2$ e ao longo dos lados apoiados aplica-se $M_n=500000kNcm/cm$. A discretização da viga foi feita com 24 células (ver figura 8.4).

A carga foi aplicada em 27 incrementos, sendo o primeiro definido para $\beta=0,8$. No segundo incremento, onde o coeficiente de multiplicação do carregamento β era igual a 1,4, observou-se plastificação em todos os pontos e a deformação plástica efetiva de 0,01, que é a máxima permitida, foi alcançada com $\beta=5,7$. Os esforços, na direção x_1 , na superfície média e os deslocamentos transversais dos pontos internos obtidos para $\beta=5,65$ estão na tabela (8.1). Como se pode observar, os resultados numéricos dos esforços conferem com os

resultados analíticos ($M_1=7062,5\text{kNxm}$ e $N_1=211875\text{kN}$), considerando-se o erro de 0,1%, que podem ser calculados da mesma forma apresentada no item (6.10.2). Nas outras direções os valores dos esforços nas vigas não foram significativos. A figura (8.5) mostra o deslocamento transversal do ponto central **23**, ao longo do processo incremental.

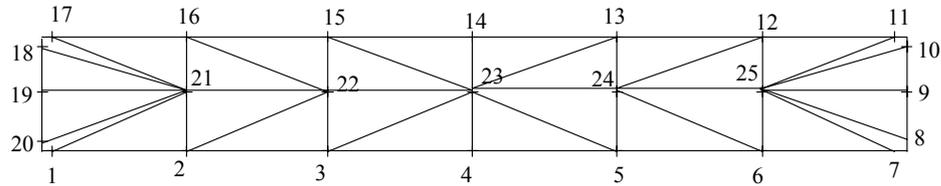


FIGURA 8.4 - Discretização da Viga

TABELA 8.1 - Resultados obtidos para $\beta = 5,65$

Nó	M_{X1} (kN.m)	N_{X1} (kN)	w(cm)
21	7055,9	211680	0,133
22	7055,5	211680	0,213
23	7055,4	211680	0,239
24	7055,5	211680	0,213
25	7055,9	211680	0,133

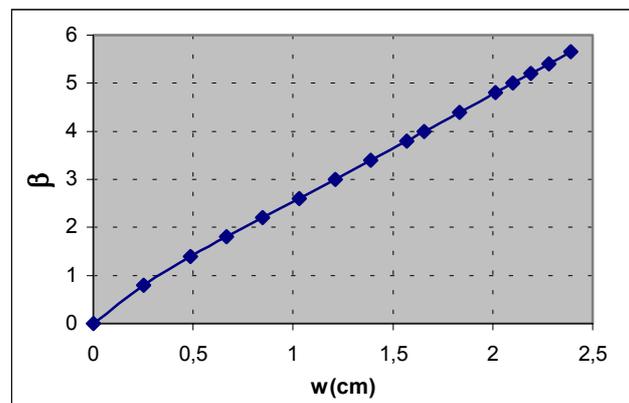


FIGURA 8.5 - Curva Carga-deslocamento do Ponto Central

8.7.2 Placa Enrijecida com Duas Vigas e com Momento Aplicado

Nesse item analisa-se uma placa enrijecida sujeita à flexão simples. É o mesmo exemplo apresentado no item (6.10.4). Adotou-se módulo de encruamento $K=2700\text{kN/cm}^2$, tensão de escoamento inicial $\sigma_y=24\text{kN/cm}^2$ e o domínio da placa foi discretizado com 32 células como está representado na figura (8.6).

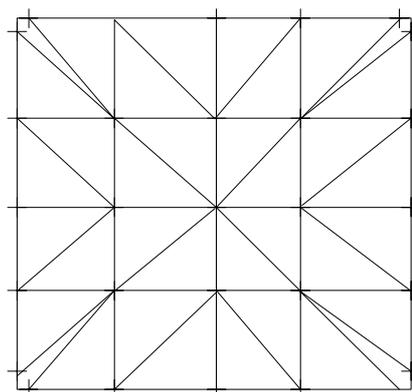


FIGURA 8.6 - Discretização da Placa

No primeiro incremento adotou-se $\beta=1$. A plastificação ocorreu nos pontos das vigas, no segundo incremento, onde $\beta=1,2$. A carga limite foi alcançada no incremento 21 para $\beta=2,8$, que foi quando os pontos das vigas alcançaram a deformação plástica efetiva máxima de 0,01. Os pontos da laje plastificaram com $\beta=1,8$. O deslocamento transversal no ponto central da viga, ao longo do processo incremental está na figura (8.7).

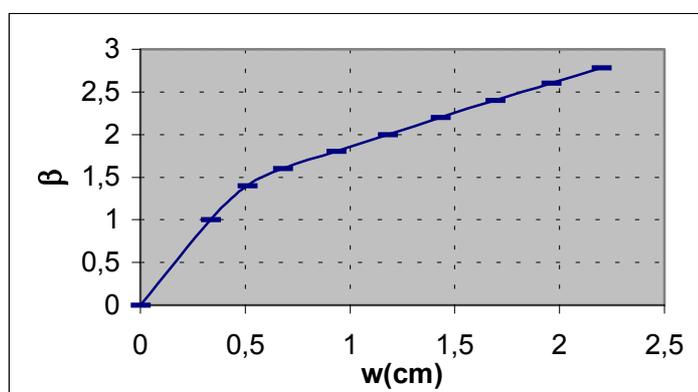


FIGURA 8.7 - Curva Carga-deslocamento do Ponto Central da Viga

No último incremento ($\beta=2,78$), em todos os pontos das vigas obteve-se um momento na direção y por volta de $M_y=6515,63\text{kNcm}$ como era esperado e nas outras direções os momentos não foram significativos. Os deslocamentos ao longo da viga para $\beta=2,78$ estão na figura (8.8). Fez-se ainda uma análise com 96 elementos e 72 células, onde se obtiveram exatamente os mesmos resultados. A discretização com 72 células foi obtida, dividindo-se o domínio da placa, nas duas direções, em seis partes iguais, ao invés de quatro partes como está representado na figura (8.6).

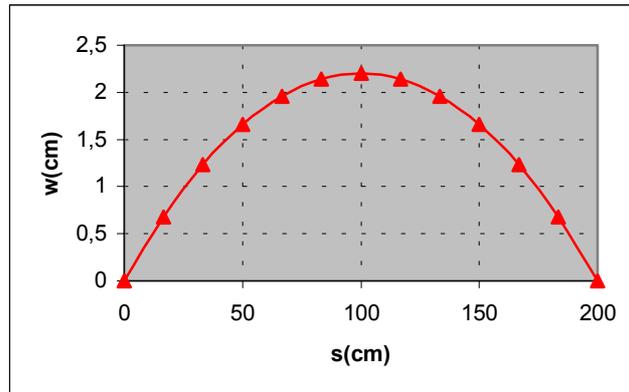


Figura 8.8 – Deslocamentos na Viga para $\beta=2,78$

8.7.3 Placa Enrijecida com Duas Vigas com Força Normal Aplicada

Esse exemplo está representado no item (6.10.5). Foi adotado $K=10800kN/cm^2$, $\sigma_y=24kN/cm^2$ e a mesma discretização do exemplo anterior. A análise será feita considerando-se apenas o problema de chapa, sem flexão.

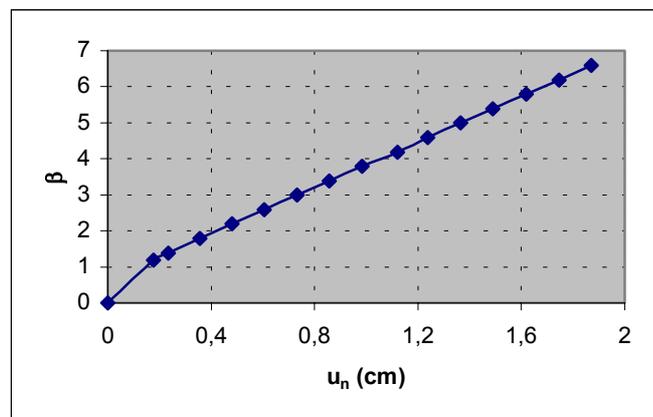


FIGURA 8.9 - Curva Carga-deslocamento do Ponto da Viga Onde se Aplica a Carga p_n

Foi adotado $\beta=1,19$ para o primeiro incremento e para o segundo, quando todos os pontos plastificaram, adotou-se $\beta=1,49$. Atingiu-se a carga limite no incremento 27 para $\beta=6,64$, quando todos os pontos das vigas alcançaram a deformação plástica efetiva máxima de 0,01. Na figura (8.9) tem-se o deslocamento u_n , ao longo do processo incremental, no ponto da extremidade da viga, onde se aplica a força p_n .

No último incremento ($\beta=6,59$), em todos os pontos da laje obteve-se uma força normal na direção y por volta de $N_y=1318kN$ e nos pontos das vigas essa força foi de aproximadamente $N_y=3295kN$, como era esperado. Nas outras direções não se obtiveram

valores significativos de forças normais. Na figura (8.10) apresentam-se os deslocamentos u_s , para $\beta=6,59$, ao longo do eixo da viga de direção s , sendo essa direção coincidente com a direção da força aplicada p_n . Fez-se ainda uma análise com 96 elementos e 72 células, porém não houve diferenças nos resultados.

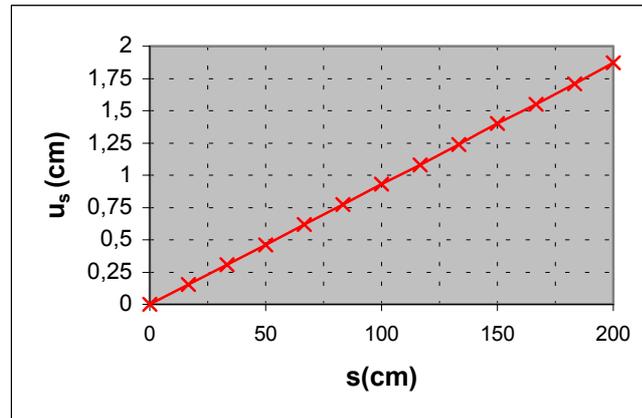


Figura 8.10 – Deslocamentos u_s ao longo da viga para $\beta=6,59$

8.7.4 Placa Enrijecida com Momento e Força Normal Aplicados

Esse exemplo é aquele apresentado no item (6.10.6), onde se analisa a placa sujeita à flexão composta. A discretização do domínio da placa está representada na figura (8.6) e adotam-se os mesmos K e σ_y do exemplo (8.7.3).

Para o primeiro e segundo incrementos adotou-se, respectivamente, $\beta=1,19$ e $\beta=1,29$. Os pontos das vigas plastificaram no segundo incremento. No incremento 17, onde o incremento no valor do coeficiente β era de 0,01, o cálculo não convergiu mais. No incremento 16, quando $\beta=2,43$, a deformação plástica efetiva nos pontos de viga foi de 0,0049 e o valor do momento e da força normal na direção s da viga foram, respectivamente, por volta de $M_s=6328,125\text{kNcm}$ e $N_s=911,25\text{kN}$, como era esperado. Nas outras direções os valores dos momentos e forças normais nas vigas não foram significativos. O deslocamento transversal no ponto central da viga, ao longo do processo incremental, está na figura (8.11).

Esse exemplo também foi analisado, considerando-se 96 elementos e 72 células. A partir de $\beta=2,4$, a análise também apresentou problemas de convergência, como ocorreu com a menor discretização. No entanto, prosseguiu com os incrementos de carga. Nesses últimos incrementos, inicialmente o cálculo divergia para depois convergir. Como o processo de convergência estava muito lento, decidiu-se abortar o cálculo antes que a carga limite fosse encontrada. Como se pode ver na figura (8.11), os valores obtidos com as duas discretizações

foram idênticos. Na figura (8.12) têm-se os deslocamentos transversais ao longo da viga, obtidos com a discretização de 72 células, para $\beta=3,35$, que foi o último incremento da análise. Nesse incremento, a deformação plástica efetiva nos pontos de viga era de 0,008 e obtiveram-se ainda nesses pontos, momentos e forças normais iguais, aproximadamente, a $M_y=8723,96\text{kNm}$ e $N_y=1256,25\text{kN}$, como era esperado.

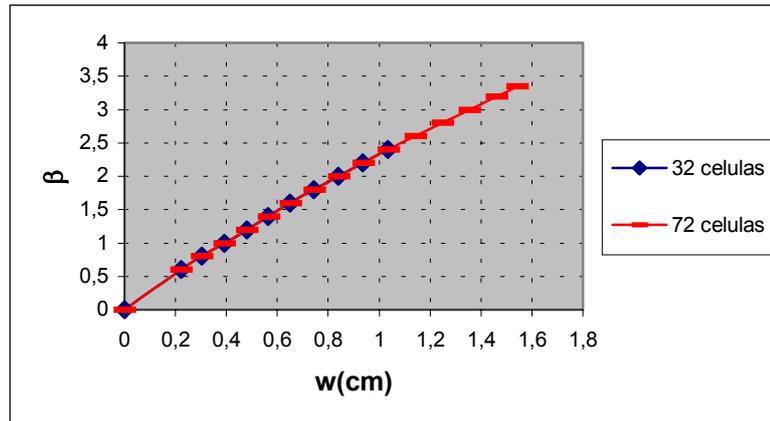


FIGURA 8.11 - Curva Carga-deslocamento do Ponto Central da Viga

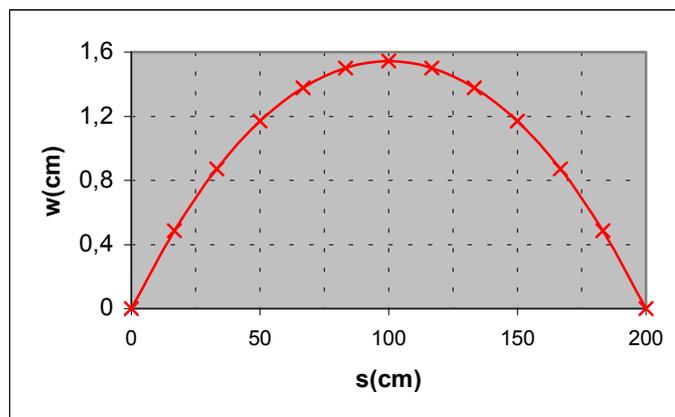


Figura 8.12 – Deslocamentos na Viga para $\beta=3,35$

8.7.5 Placa Enrijecida com Vigas Externas e Uma Viga Interna com Carga Uniformemente Distribuída

A placa analisada nesse exemplo está na figura (8.13), onde as unidades são dadas em metro. A placa é simplesmente apoiada com carga uniformemente distribuída. Adotou-se $E=25000\text{KN/cm}^2$, $K=2500\text{KN/cm}^2$, $\sigma_y=24\text{kN/cm}^2$, $\nu=0,25$, $t_v=25\text{cm}$, $t_L=8\text{cm}$ e carga distribuída $q=20\text{N/cm}^2$.

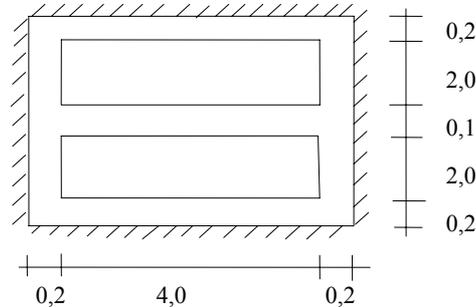


FIGURA 8.13 - Placa Simplesmente Apoiada, Enrijecida com Vigas Externas e uma Interna

Foram consideradas duas discretizações. Na primeira, a placa foi discretizada em 42 elementos (ver exemplo 5.7.2) e cada laje em 16 células. A discretização do domínio das lajes segue o mesmo modelo daquela indicada na figura (8.4), porém consideraram-se apenas três pontos internos ao invés de cinco. Na segunda discretização, consideraram-se 122 elementos e 48 células em cada laje. Nesse caso, a discretização do domínio das lajes foi feita seguindo o mesmo modelo daquela indicada na figura (8.6), dividindo-se porém, o lado maior em seis partes iguais, ao invés de quatro. A placa foi analisada considerando-se flexão simples e flexão composta. Para o problema de chapa, foram consideradas as seguintes condições de contorno: $p_s=p_n=0$ para os dois lados externos perpendiculares à viga interna e também para um dos lados externos no mesmo sentido dessa viga. No outro lado, considerou-se: $u_s=u_n=0$ em um ponto localizado em uma das extremidades do lado e $p_s=u_n=0$ para um ponto da outra extremidade desse lado.

Os deslocamentos do ponto central da viga interna ao longo do processo incremental estão representados na figura (8.14). No cálculo com a flexão simples, a plastificação se deu no segundo incremento, onde $\beta=2,2$, na região central da viga interna. Com a malha menos refinada, no incremento 23 onde se tinha $\beta=3,7$, o cálculo não convergiu mais. Com a outra discretização o cálculo foi dividido em 44 incrementos e a carga limite obtida foi de $q=91,2N/cm^2$ quando o ponto central da viga interna alcançou o valor máximo da deformação plástica efetiva.

Na análise com flexão composta a plastificação se deu para $\beta=1$ e a carga limite de $q=52N/cm^2$ foi atingida no incremento 9. Os deslocamentos transversais nesse incremento, para a malha mais refinada, estão na figura (8.15). Nesse caso, os deslocamentos obtidos

com a malha de 122 elementos e 96 células foram muito menores que aqueles da malha de 42 elementos e 32 células.

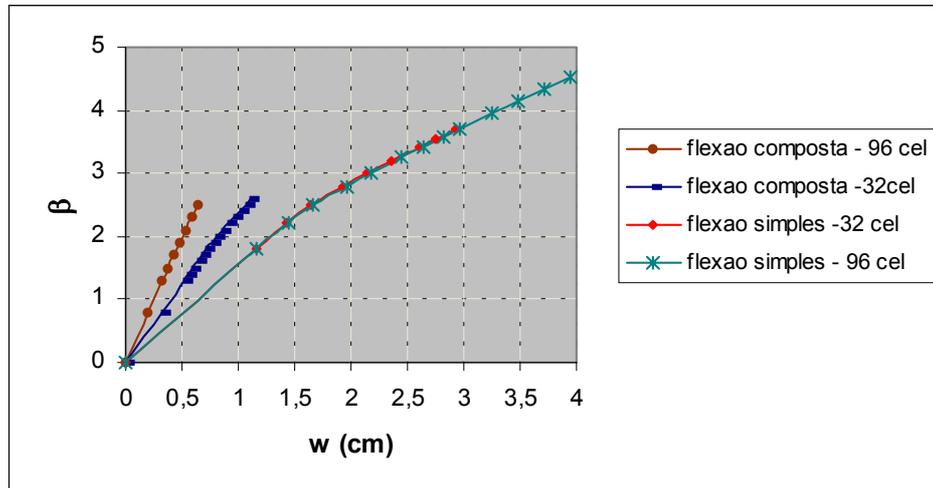


FIGURA 8.14 – Curva Carga-deslocamento do Ponto Central da Viga Interna

Pode-se ver na figura (8.14) que a carga limite obtida com a flexão simples foi quase o dobro daquela considerando-se flexão composta e os deslocamentos obtidos com a flexão composta foram muito menores que aqueles da flexão simples.

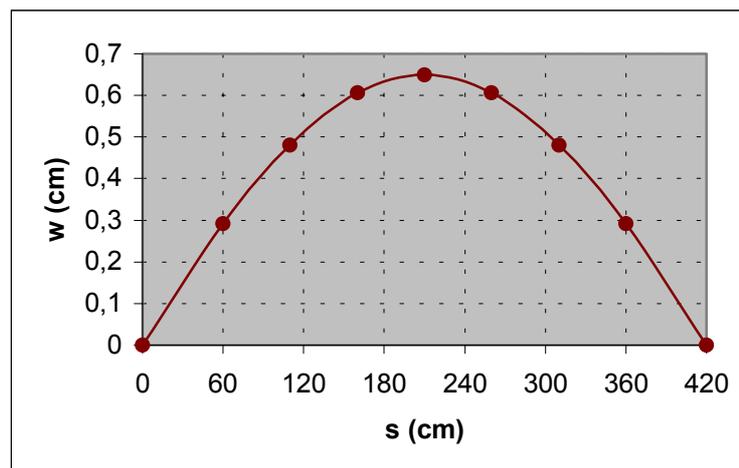


FIGURA 8.15 – Deslocamentos na Viga Interna no incremento 8 da análise de flexão composta com 96 células

CONCLUSÕES

O trabalho mostra que a análise de estruturas planas enrijecidas pode ser feita através de uma formulação que envolva apenas elementos de contorno, dispensando-se portanto a combinação com o MEF tradicionalmente utilizada. O pavimento é considerado como sendo uma placa subdividida em sub-regiões, sendo cada sub-região a representação de uma viga ou laje. Com isso, não é necessário definir elementos de placa e viga. A formulação usando-se apenas MEC leva a um número menor de graus de liberdade, reduzindo também as aproximações. O equilíbrio de forças ao longo das interfaces é automaticamente satisfeito. A aplicação em estruturas de edifício é um objetivo interessante; vai permitir uma grande redução das dimensões do problema e melhorar a precisão da solução.

Os dois modelos desenvolvidos para análise da flexão simples de placas enrijecidas com vigas mostraram-se ser bastante eficientes. Porém, no modelo em que discretiza-se todo o contorno das vigas, necessita-se de um número muito elevado de nós na discretização, o que eleva muito o custo computacional, além de dificultar consideravelmente a entrada de dados. O modelo alternativo, em que discretizam-se apenas as linhas médias das vigas mostrou-se ser mais interessante, devido à redução do número de graus de liberdade do problema. As diferenças obtidas nos resultados dos dois modelos não foram significativas, quando se mantêm as mesmas distâncias entre as linhas onde se prescrevem as condições de contorno. Caso contrário, se as dimensões das lajes e vigas forem exatamente iguais, nas duas análises, que é o caso dos exemplos apresentados aqui, em quase todos os exemplos, o modelo alternativo mostrou-se ser mais rígido, devido às aproximações feitas nos deslocamentos e rotações das vigas.

Com relação à análise linear do pavimento considerando-se o efeito de membrana, em todos os exemplos, a menos da placa esconsa, os deslocamentos foram menores que aqueles obtidos com a formulação de flexão simples, como era de se esperar. O exemplo da placa esconsa é muito complexo, sendo difícil justificar porque os resultados seriam maiores na flexão composta, porém uma justificativa possível seria o efeito da torção nas vigas provocada pela excentricidade. Nos exemplos numéricos, cujas respostas podiam ser verificadas analiticamente, o modelo apresentou ótimos resultados.

Em todos os modelos, considerando-se flexão simples ou composta, os resultados apresentaram boa convergência com o refinamento da malha, gerando respostas com boa precisão mesmo com malhas não muito refinadas.

A inclusão de campos de esforços iniciais na formulação obtida considerando-se carregamentos transversais e no plano da placa, possibilita a análise de placas sujeitas a efeitos de temperatura e retração, bem como a análise não-linear. Na análise não-linear utilizou-se um algoritmo incremental-iterativo, baseado no Método de Newton-Raphson, computando-se a correção a partir do procedimento de aplicação de campos de tensões iniciais, onde as matrizes envolvidas são atualizadas a cada iteração. A utilização do operador tangente consistente, associada à formulação implícita de elementos de contorno, mostrou-se ser bem eficiente. Nos exemplos, cujos valores dos esforços podiam ser verificados analiticamente, os resultados foram muito bons. O modelo não-linear mostrou-se ser estável, pois foi capaz de encontrar a carga limite e apresentou boa convergência dos resultados com o refinamento da malha. O procedimento para obtenção da correção no estado de curvaturas e de deformações de chapa, a ser aplicada em uma dada iteração, em que os pontos plásticos são separados dos elásticos, diminuiu consideravelmente o esforço computacional, pois ao invés de inverter a matriz tangente relativa a todos os pontos da estrutura, se invertia apenas a parcela relativa aos pontos plásticos.

Na análise não-linear, o cálculo dos esforços internos na placa foi feito considerando-se um modelo estratificado, onde a placa é dividida em camadas, nas quais verificam-se os modelos constitutivos adotados para cada camada. Nesse trabalho, foi considerado apenas o caso em que a placa é composta de apenas um material, cujo comportamento não-linear possa ser bem representado pelo critério de Von Mises, como é o caso do aço. No entanto, o modelo pode ser facilmente estendido para o caso de placas compostas de diferentes materiais, como é o caso do concreto armado. O tensor de momentos e forças normais internos é obtido, integrando-se numericamente as tensões ao longo da espessura da placa.

A análise não-linear de pavimentos em concreto armado é uma proposta interessante para a continuação do trabalho. Nessa análise poderia ser desenvolvido um modelo para a localização da zona de dissipação, verificando-se a possível utilização da teoria baseada no gradiente do multiplicador plástico, para se obter a faixa de dissipação localizada. Poderia ser considerado ainda, um modelo para charneiras com a inclusão de dano e rotações irreversíveis ao longo das linhas de ruptura.

Outro aspecto importante a ser levado em conta, para melhorar a formulação proposta aqui, seria considerar a existência de pontos do domínio com carregamentos ou deslocamentos prescritos, a fim de analisar placas com condições de vinculação em seu domínio, como é o caso de lajes contínuas. Isso possibilitaria também considerar os pilares do edifício.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALTIERO, N. J. & SIKARSKIE, L.D. (1978). A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. *Computers & Structures*, v.9, p.163-168.
- BATHE, K. J. *Finite element procedures in engineering analysis*. Prentice Hall, 1996.
- BENALLAL, A., BILLARDON, R. & DOGHRI, I. (1988). An integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elastoplastic and damage equations. *Comm. App. Num. Meth.*, v.4.
- BETTI, E. (1872). Teoria dell elasticita. *Il Nuovo Cimento*, p.7-10.
- BÉZINE, G. & GAMBY, D. A. (1978). New integral equation formulation for plate bending problems, In: BREBBIA, C. A., ed. *Recent advances in boundary element methods*. Pentech Press.
- BÉZINE, G. (1980). A mixed boundary-integral: finite element approach to plate vibration problems. *Mech. Res. Comm.*, v.7, n.3, p.141-150.
- _____. (1981). A boundary integral equation method for plate flexure with conditions inside the domain. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.17, p.1647-1657.
- _____. (1978). Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. *Mech. Res. Comm.*, v.5, n.4, p.197-206.
- BÉZINE, G. A, CIMETIERRE, A. & GELBERT, J.P. (1985). Unilateral bucking on thin plates by the boundary integral equation method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.21, p.2189-2199.
- BONNET, M. and MUKHERJEE, S. (1996) Implicit BEM formulations for usual and sensivity problems in elasto-plasticity using the consistent tangent operator concept. *Int. J. Solids Structures* Vol 33, No. 30, pp 4461-4480.
- BONNET, M. (1995). *Équations Intégrales et éléments de frontière*. Paris, CNRS Éditions/Eyrolles.
- BOTTA, A.S. (2003). *Uma formulação do método dos elementos de contorno para o estudo do comportamento de peças de concreto armado com ênfase nos fenômenos de perda de rigidez e localização*. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos.
- BREBBIA, C. A. (1978). *The boundary element method for engineers*. London, Pentech Press.
- BREBBIA, C. A. & NARDINI, D. (1986). Solution of parabolic and hyperbolic time dependent problems using boundary elements. *Comp. & Math. with Appls.*, v.12B, p.1061-1072.

- BUI, H.D. (1978). Some remarks about the formulation of three-dimensional thermoelastic problems by integral equations. *Int. J. Solids Structures*, v.14, p.935-939.
- CARMO, R.M.S. (2001). *Análise de estruturas de edifícios através do método dos elementos de contorno*. Tese (Doutorado) -Escola de Engenharia de São Carlos - USP.
- CARVALHO, R. C. (1994). *Análise não-linear de pavimentos de edifícios de concreto armado através da analogia de grelha*. Tese (Doutorado) - EESC-USP.
- CHAVES, E.W.V. (1997). *Análise de placas com variação de espessura através do método dos elementos de contorno*. São Carlos. 171p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CHEN, W. F. & LUI, E. M. (1988). *Plasticity for structural engineers*. New York, McGraw-Hill.
- CHUEIRI, L.H.M. (1994). *Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas*. São Carlos. 219p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CORRÊA, M.R.S. (1991). *Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios*. São Carlos. 331p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- COSTA JR., J. A. & BREBBIA, C. A. (1985). Elastic buckling of plates using the boundary element method. In: BREBBIA, C. A. & MAIER, G., eds. *Boundary element VII*. Berlin, Springer-Verlag.
- DANSON, D.J. (1979). *Analysis of plate bending problems by direct boundary element method*. Southampton, University of Southampton. (M.Sc.Dissertation).
- FERNANDES, G.R. (1998). *O método dos elementos de contorno aplicado à análise não linear de placas*. São Carlos. 178p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- FIGUEIREDO FILHO, J. R. (1989). *Sistemas estruturais de lajes sem vigas: subsídios para o projeto e execução*. Tese (Doutorado) - EESC-USP.
- FIGUEIRAS, J.A. (1983). *Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells*. Swansea. Tese (Doutorado) - University College of Swansea.
- FRANGI, A. & GUIGGIANI M. (1999). Boundary Element Analysis of Kirchhoff Plates with Direct Evaluation of Hypersingular Integrals. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 46, 1845-1863.
- FUDOLI, C.A. (1999). *Formulação do método dos elementos de contorno e plasticidade com gradiente*. Tese (Doutorado) Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos.
- FUNG, Y. C.(1965). *Foundations of solid mechanics*. New Jersey, Prentice-Hall, Inc.

- GIL RODRIGUEZ, J.C. (1986). *Sobre o emprego do método dos elementos de contorno em problemas elásticos bidimensionais*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- HAND, F. R. et al. (1973). Non-linear analysis of RC of plates and shells. *J. Struct. Div.*, ASCE, v.99, n.ST10, p.2109-2122.
- HANSEN, E. B. (1976). Numerical solution of integro-differential and singular equations for plate bending problems. *J. of Elasticity*, v.6, n.1, p.39-56.
- HARTMANN, F. & ZOTEMANTEL, R. (1986). The direct boundary element method in plate bending. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.23, p.2049-2069.
- HINTON, H., OWEN, D. R. J. & TAYLOR, C. (1982). *Recent advances in non-linear computational mechanics*. Swansea, U.K, Pineridge Press.
- JASWON M.A.; MAITI, M.; SYMM, G.J. (1967). Numerical biharmonic analysis and some applications. *Int. J. Solids Structures*, n.3, p.309-332.
- KAMYIA, N. & SAWARY, Y. (1982) An integral equation approach to finite deflection of elastic plates. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, v.17, n.3, p.187-194.
- KAMYIA, N. et al. (1982). An approximate finite deflection analysis of a heated elastic plate by the boundary element method. *App. Math. Modelling*, v.6, n.1, p.23-27.
- KATSIKADELIS, J. T. & ARMENAKAS, A. E. (1984). Analysis of clamped plates on elastic foundation by the boundary integral method. *J. of Applied Mechanics*, ASCE, v.110, n.7, p.1085-1104.
- KIRCHHOFF, G. (1850). Uber das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scleibe. *J. Math.*, n.40, p.51-58.
- LEMAITRE, J. & CHABOCHE, J-L. (1994). *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press.
- LEMAITRE, J. & MARQUIS, D. (1990). *Modelling elasto-plasticity, damage and coupled behaviors in engineering materials*. Cachan, Laboratoire de Mécanique et Technologie.
- LOVE, A.E.H. (1944) *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Dover.
- MAIER, G. (1971). Incremental plasticity analysis in the presence of large displacements and physical instabilizing effects. *Int. J. Solids and Structures*, v.7, p.345-372.
- MANZOLI, O.L. (1992). *Formulação do método dos elementos de contorno para placas sobre fundação elástica*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos -USP.
- MIKHLIN, S.G. (1962). Singular integral equation. *American Math. Soc. Trans. Series 1*, n.10, p.84-197.
- MINDLIN, R.D. (1951). Influence of rotary inertia and shear on flexural motion of isotropic plates. *J. Appl. Mech.*, 18: 31-35.

- NEVES, A. C. & BREBBIA, C. A. (1991). The multiple reciprocity method applied to thermoelastic problems with concentrated and distributed heat sources. In: BREBBIA, C.A., ed. *Boundary elements technology VI*. Comp. Meth. Pub. / Elsevier Applied Science, p.201-214
- NOWAK, A. J. (1992). The multiple reciprocity method for non-linear problems. In: BREBBIA, C. A. & DOMINGUEZ, J., eds. *Boundary element methods XIV*. Elsevier.
- OLIVEIRA NETO, L. (1991) *Análise de placas de borda curva pelo método dos elementos de contorno*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos -USP.
- ORTIZ, M. & SIMO, J. C. (1986). An analysis of a new class of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int. J. Numer. Meths. Eng.*, v.23, p.353-366.
- OWEN, D.R.J.; HINTON, E. (1980). *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Swansea, U. K.: Pineridge Press Limited.
- PAIVA, J. B. & VENTURINI, W. S (1993). Alternative boundary element approach to compute efforts along zoned domain interfaces. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.12, n.2, p.143-148.
- _____. (1987). Analysis of buildings structures considering plate-beam-column interactions. In: BREBBIA, C.A. & VENTURINI, W.S., eds. *Boundary element techniques: applications in stress analysis and heat transfer*. Southampton, Computational Mechanics Publications. p.209-219.
- PAIVA, J.B. (1987). *Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estrutura*. São Carlos. 195p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PARTRIDGE, P.W., BREBBIA, C. A. & WROBEL, L. C. (1992) *The dual reciprocity boundary element method*. Computational Mechanics Publication /Elsevier Applied Science.
- POON, H., MUKHERJEE, S. and BONNET, M., (1998). Numerical implementation of a CTO-based implicit approach for the BEM solution of usual and sensitivity problems in elasto-plasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **22**, 257-269.
- PROENÇA, S.PB.. (1988). *Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RASHEED, H. A. S. & DINO, K. S. (1994). An efficient non-linear analysis of RC sections. *Computers & Structures*, v.53, n.3, p.613-623.
- REISSNER, E. (1944). *On the theory of bending of elastic plates*. Journal of Mathematics and Physics, 23: 184-191.
- _____. (1945). The effect of transverse shear deformation on bending of elastic plates. *J. Appl. Mech*, n.12.

- _____. (1986). On small deflections of shear deformable elastic plates. *Meth. Appl. Mech. Engrg.*, n.59, p.227-233.
- _____. (1991). On the asymptotic expansions for the sixth-order linear theory problem of transverse bending of orthotropic elastic plates. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, v.85, n.1, p.75-88.
- RIBEIRO, G. O. (1992). *Sobre a formulação do método dos elementos de contorno de placas usando as hipóteses de Reissner*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos -USP.
- RUNESSON, K. (1987). Implicit integration of elastoplastic relations with reference to soils. *Int. J. Numeric. Anal. Meths. Geomech.*, p.11, p.315-321.
- SAVASSI, W. (1996). *Introdução ao método dos elementos finitos em análise linear de estruturas*. São Carlos - EESC-USP.
- SANCHES J. F. (2003). *Desenvolvimento de modelos numérico para a análise de pavimentos de edifícios de concreto armado*. Tese (Doutorado, em andamento) Escola de Engenharia de São Carlos-USP, São Carlos
- SILVA, N. A. (1988). *Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de placas sobre fundações elásticas*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos -USP.
- SILVA, N.A. (1996). *Aplicação do método dos elementos de contorno às placas com enrijecedores utilizando a teoria de Reissner*. São Carlos. Tese (Doutorado) - EESC-USP.
- SIMO, J. C. & HUGHES T. J. R. (1988). *Elastoplastic and viscoplastic : computational aspects*.
- SIMO, J. C. & TAYLOR R. L. (1985). Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Comp. Meth. And App. Mech. And Eng.* ,48.
- SIMO, J. C., KENNEDY, J. G., GOVINGJEE, S. & HGHES, T. R. J. (1987). Unconditionally convergent algorithm for non-smooth multisurface plasticity amenable to exact linearization. *Advances in Inelastic analysis*, AMD, v.88, p.87-96.
- STERN, M. (1979). A general boundary integral formulation for the numerical solution of plate bending problems. *Int. J. Sol. Struct*, v.15, p.761-782.
- STERN, M. (1983). Boundary integral equations for bending of thin plates. In: BREBBIA, C.A. ed. *Progress in boundary element methods*. London, Pentech Press, v.l. 2
- TEJERINA CALDERÓN, E. (1991). *Uma formulação alternativa para o estudo de placas sobre fundação elástica pelo método dos elementos de contorno*. São Carlos, São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos -USP.
- TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A. (1979). On the application of the boundary element method to plasticity. *Appl. Math. Modelling*, n.3, p.466-470.

- TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1959). *Theory of plates and shells*. New York: McGraw-Hill.
- TIMOSHENKO, S.P. & GOODIER, J.N. (1980). *Teoria da elasticidade*. Rio de Janeiro, Ed. Guanabara Dois S.A..
- TOTTENHAN, H. (1979). The boundary element method for plates and shells. In: BANERJEE, P. K. & BUTTERFIELD, R., eds. *Boundary element methods*. London, App. Sc. Publ..
- VAN DER WEEËN, F. (1982). Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model. In: BREBBIA, C. A. ed. *Boundary element methods in engineering*. Berlin, Springer-Verlag.
- VENTURINI, W.S. (1982). *Application of the boundary element formulation to solve geomechanical problems*. Southampton. Thesis (Ph.D.) - University of Southampton.
- VENTURINI W. S. (1988). *Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia*. Tese (Livre-Docência) - Escola de Engenharia de São Carlos - USP.
- VENTURINI, W. S. & PAIVA, J. B. (1993). Boundary element for plate bending analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.11, n.1, p.1-8.
- VENTURINI, W.S. & PAIVA, J.B. (1988). Plate analysis by the boundary element method considering zoned thickness domain. *Software for Engineering Workstations.*, v.4, n.4, p.183-185, oct. 1988.
- WU, B. C. & ALTIERO, N. J. (1979). A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. *Computers & Structures*, v.10, p.107-117.
- ZIENKIEWICZ, O. C. & TAYLOR, R. L. (1991). *The finite element method: solid and fluid mechanics dynamics and non-linearity*. 4.ed. New York, McGraw-Hill.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; VALLIAPAN, S.; KING, I.P. (1969). Elasto-plastic solutions of engineering problems - initial stress, finite element approach. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, n.1, p.5-100.