

Faustino Sanches Júnior

***DESENVOLVIMENTO DE MODELOS NUMÉRICOS PARA A
ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS***

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da EESC-USP da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Professor Titular Wilson Sérgio Venturini

São Carlos

2003

6.8.2-LAJES DE CONCRETO ARMADO	104
6.8.3-VIGAS DE CONCRETO ARMADO.....	109
7 - ANÁLISE NÃO-LINEAR COM CISALHAMENTO.....	111
7.1-ASPECTOS GERAIS.....	112
7.1.1-FATORES DE INFLUÊNCIA NA RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO	113
7.1.2. CISALHAMENTO E PUNÇÃO EM LAJES DE CONCRETO ARMADO	113
7.1.3-MODELOS PARA PUNÇÃO EM LAJES DE CONCRETO ARMADO	114
7.1.4-CISALHAMENTO EM VIGAS.....	115
7.2-MODELO IDEALIZADO PARA O CISALHAMENTO EM VIGAS... ..	118
7.2.1-HIPÓTESES	118
7.2.2-CONTRIBUIÇÃO DO CONCRETO.....	119
7.2.3-CONTRIBUIÇÃO DA ARMADURA TRANSVERSAL.....	123
7.3-MODELO IDEALIZADO PARA O CISALHAMENTO EM LAJES... ..	127
7.3.1 HIPÓTESES.....	128
7.3.2-CONTRIBUIÇÃO DO CONCRETO.....	129
7.3.3-CONTRIBUIÇÃO DA ARMADURA	132
8-EXEMPLOS	135
8.1-VIGA ENGASTADA – ANÁLISE NÃO-LINEAR COM CORTANTE. ..	136
8.2-COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS - VIGA ..	138
8.3-COMPARAÇÃO COM RES. EXPER. – LAJE.....	141
8.4-COMPARAÇÃO COM RES. EXP. – LAJE NERVURADA.....	143
8.5-CARGA DE RUPTURA POR CISALHAMENTO	145
8.6-PAVIMENTO DE EDIFÍCIO.....	147
9-CONCLUSÕES	157
BIBLIOGRAFIA.....	159

5 - MODELAGEM DE PAVIMENTOS – ELEMENTOS PLANOS -	
MEMBRANA	67
5.1-INTRODUÇÃO	67
5.2-PATCH-TEST.....	68
5.3-TESTE DO ELEMENTO INDIVIDUAL – BERGAN & HANSEN (1976)	69
5.4-ASPECTOS BÁSICOS DA FORMULAÇÃO LIVRE.....	71
5.5-ELEMENTO FINITO TRIANGULAR PROPOSTO POR BERGAN & FELIPPA (1985)	74
5.5.1-DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ RELATIVA AOS MODOS BÁSICO, K_b .	75
5.5.2-DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ RELATIVA AOS MODOS DE ALTA ORDEM, K_s .	77
5.5.3-DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES E DEFORMAÇÕES NO ELEMENTO DE MEMBRANA	81
5.6-EXEMPLO	82
6-MODELOS DE COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS	84
6.1-INTRODUÇÃO	84
6.2-FUNDAMENTOS BÁSICOS DA MECÂNICA DO DANO NO CONTÍNUO	85
6.3-CARACTERIZAÇÃO DO DANO	85
6.3-DANIFICAÇÃO DO CONCRETO.....	88
6.4-MODELO DE MAZARS PARA O DANO NO CONCRETO.....	89
6.5-MODELO DE COMI & PEREGO PARA O DANO NO CONCRETO	94
6.6-MODELO ELASTO-PLÁSTICO PARA AS ARMADURAS.....	98
6.7-APLICAÇÃO DOS MODELOS.....	100
6.8-APLICAÇÃO DOS MODELOS NO ESPAÇO DOS ESFORÇOS SOLICITANTES	101
6.8.1-ASPECTOS GERAIS	101

3.1.5 TRAVAMENTO OU BLOQUEIO DE SOLUÇÃO	23
3.2-MODELAGEM DA EXCENTRICIDADE DA VIGA.....	24
3.2.1-INTRODUÇÃO	24
3.2.2-CONS. DA EXCENTRICIDADE DA VIGA	26
3.3-EXEMPLOS	29
3.3.1-EXEMPLO 1.....	29
3.3.2-EXEMPLO 2.....	33
3.3.3-EXEMPLO 3.....	36
4-MODELAGEM DE PAVIMENTOS – ELEMENTOS PLANOS - FLEXÃO	38
4.1-INTRODUÇÃO	38
4.2-FLEXÃO DE PLACAS – TEORIA DE REISSNER-MINDLIN	39
4.2.1-INTRODUÇÃO	39
4.2.2-FORMULAÇÃO.....	39
4.2.3-ELEMENTOS FINITOS FUNDAMENTADOS NA TEORIA DE REISSNER-MINDLIN	43
4.2.4-BLOQUEIO DA SOLUÇÃO - TRAVAMENTO	45
4.3-FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DST	48
4.3.1-INTRODUÇÃO	48
4.3.2-GEOMETRIA DO ELEMENTO.....	49
4.3.3-HIPÓTESES DA FORMULAÇÃO.....	50
4.4-FORMULAÇÃO EXPLÍCITA DA MATRIZ DE RIGIDEZ.....	52
4.4.1-DETERMINAÇÃO DAS DISTORÇÕES.....	52
4.4.2-DETERMINAÇÃO DAS ROTAÇÕES	59
4.4.3-MATRIZ DE RIGIDEZ: PARCELA DA FLEXÃO	61
4.4.4-MATRIZ DE RIGIDEZ: PARCELA DO CISALHAMENTO	63
4.5-DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS SOLICITANTES	64
4.6-FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES.....	64
4.7-EXEMPLO	65

SUMÁRIO

RESUMO	i
ABSTRACT	ii
1-INTRODUÇÃO.....	1
1.1-GENERALIDADES.....	1
1.2-OBJETIVOS.....	3
1.3-METODOLOGIA.....	4
1.4-DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS.....	5
2-PAVIMENTOS DE ED. DE CONCRETO ARMADO	7
2.1-INTRODUÇÃO	7
2.2-CÁLCULO DE ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS EM PAVIMENTOS.....	8
2.3-REDISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS SOLICITANTES.....	11
2.4-PRÉ E PÓS-PROCESSAMENTO DE DADOS.....	12
2.5-POSICIONAMENTO DA VIGA.....	13
2.6-CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS DO TEMPO.....	14
3-MODELAGEM DE PAVIMENTOS – ELEMENTOS LINEARES....	16
3.1-ELEMENTO FINITO DE BARRA	16
3.1.1-INTRODUÇÃO	16
3.1.2-FLEXÃO DE BARRAS: TEORIA DE TIMOSHENKO.....	16
3.1.3-ELEMENTO DE BARRA	19
3.1.4-DEDUÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO	19

AGRADECIMENTOS

A Deus.

Ao prof. Wilson Sérgio Venturini, pelo paciente trabalho de orientação .

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP, pelo auxílio financeiro.

À Marisa, pelo incentivo e apoio durante os anos de doutorado.

Aos professores e funcionários do departamento de estruturas da EESC-USP.

Aos colegas do departamento, em especial aos amigos Alexandre Sampaio Botta e Ângelo Vieira Mendonça que contribuíram de maneira direta para a elaboração deste trabalho.

À minha esposa Marisa Silva de Morais Sanches, com amor.

ABSTRACT

SANCHES JR, F (2003). *Development of numerical algorithms to the building floors structures analysis*. São Carlos, SP. 167p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This work gives a contribution to the non-linear structural analysis of reinforced concrete buildings floors using the Finite Element Method. The shear strain components are taken into account by adopting the Timoshenko's beam theory together with and the Reissner-Mindlin's theory for plate bending. Bar and plate element position are independent and therefore can be defined at different planes. As several level are considered when defining the structure membrane effects are necessary considered.

In order to complete the mechanical model, physical non-linearities are also assumed to describe concrete and steel behaviours. The deterioration of the concrete material in shear is also taken account. For this purpose, a simplified model is adopted to compute approximately the damaged shear component in the steel direction.

Keywords: *physical nonlinearity, Reissner-Mindlin's plates, Timoshenko's beams, shear algorithm, reinforced concrete, building floors, finite elements.*

RESUMO

SANCHES JR, F (2003). *Desenvolvimento de modelos numéricos para a análise de estruturas de pavimentos de edifícios*. São Carlos, SP. 167p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Este trabalho fornece uma contribuição à análise estrutural não-linear de pavimentos de edifícios de concreto armado com o emprego do Método dos Elementos Finitos. A deformação por esforço cortante é considerada, portanto as teorias de Timoshenko e de Reissner-Mindlin são empregadas nas formulações dos elementos de barra e de placa, respectivamente. As posições dos elementos de barra e de placa são independentes e, portanto, podem ser definidas em diferentes planos. Em consequência do exposto, o efeito de membrana deve ser necessariamente considerado na modelagem do pavimento.

Para completar o modelo mecânico, as não-linearidades físicas descrevem o comportamento do concreto e do aço. A deterioração do concreto no cisalhamento é também considerada através de um modelo simplificado que é proposto para a modelagem do cisalhamento em condições de serviço.

Palavras-chave: *não-linearidade física, placas de Reissner-Mindlin, vigas de Timoshenko, modelo para o cisalhamento, concreto armado, pavimentos de edifícios, elementos finitos.*

trabalho, evidentemente tais modelos podem ser aprimorados por trabalhos futuros que possam efetuar ensaios em laboratório.

Os exemplos de aplicação de análise não-linear em vigas, lajes e pavimentos de edifícios são apresentados no oitavo capítulo. Alguns exemplos ilustrativos são oportunamente apresentando em capítulos anteriores ao oitavo.

Finalmente, as conclusões deste trabalho são apresentadas no nono capítulo, onde também são feitas sugestões para trabalhos futuros.

Foram desenvolvidos modelos próprios para o cisalhamento em vigas onde considera-se a contribuição da armadura transversal na resistência ao esforços cisalhantes, tanto em situação de serviço quanto naquelas próximas à ruína.

Ainda na mesma linha, desenvolveu-se modelos para o cisalhamento em lajes, onde considera-se a contribuição da armadura de punção quando houver, dessa forma e através de estudos de casos foi possível fornecer uma contribuição à modelagem numérica da punção.

Todas as implementações computacionais foram efetuadas no “software” FORTRAN.

1.4-DESCRIÇÃO DOS CAPÍTULOS

O segundo capítulo deste texto aborda assuntos gerais relativos aos pavimentos de edifícios de concreto armado, discute-se, de maneira sucinta, fatores que influenciam na deformabilidade tais como: a excentricidade da viga, os efeitos do tempo e a análise em regime não-linear.

A formulação dos elementos finitos lineares é apresentada no terceiro capítulo, onde também foi desenvolvida a matriz de rigidez da viga excêntrica. No quarto capítulo apresenta-se o elemento finito de flexão de placas, DST, utilizado nas implementações numéricas; embora esse elemento já seja conhecido no meio técnico, optou-se por desenvolvê-lo de maneira explícita com o objetivo de facilitar futuras implementações.

O elemento finito de membrana, desenvolvido a partir da formulação livre, está descrito no quinto capítulo.

Os modelos mecânicos para o comportamento dos materiais estão no sexto capítulo, onde se apresentam os modelos de dano de Mazars e de Comi & Perego, além do modelo elasto-plástico para as armaduras. A integração das tensões na altura do elemento estrutural, para que o modelo possa ser escrito no campo dos esforços solicitantes, também é apresentada naquele capítulo.

O problema da análise não-linear com o cisalhamento no concreto é discutido no sétimo capítulo onde são apresentados os modelos para o cisalhamento em vigas e lajes em condições de serviço. Esses modelos constituem-se na contribuição original deste

não será isotrópico. As armaduras serão tratadas individualmente com critérios próprios. Por essa razão e ainda por serem os elementos lineares fletidos definidos em planos independentes, os problemas de flexão e membrana serão necessariamente acoplados.

Com o emprego do código computacional implementado é possível fazer um série de estudos de casos que fornecem subsídios para os projetos estruturais de pavimentos de edifícios de concreto armado.

1.3-METODOLOGIA

Emprega-se na análise estrutural o método dos elementos finitos. O pavimento é modelado empregando-se elementos planos de placa e de membrana, e elementos lineares de viga. Os elementos de viga são considerados excêntricos em relação ao plano médio das placas.

O elemento de flexão de placas empregado foi o **DST** (“DISCRETE SHEAR TRIANGLE”) proposto por Batoz e Lardeur. Esse elemento contempla as hipóteses de Reissner-Mindlin e é bastante interessante para aplicação em problemas de engenharia pois é triangular com três graus de liberdade por nó sendo duas rotações e uma translação.

Emprega-se o elemento de membrana proposto por Bergan e Fellipa desenvolvido a partir da formulação livre, também triangular e com três graus de liberdade por nó sendo duas translações e uma rotação perpendicular ao plano. Esse grau de liberdade adicional, também chamado de “drilling” permite um melhor acoplamento com os elementos de flexão.

Emprega-se um elemento de viga fundamento nas hipóteses de Timoshenko, como as vigas são consideradas excêntricas foi necessário o emprego de um modelo próprio para a sua consideração.

Foram utilizados para a modelagem do comportamento mecânico do concreto os modelos de Mazars (1984) e de Comi & Perego (2000) ambos fundamentados na mecânica do dano no contínuo, para as armaduras emprega-se modelo elasto-plástico. As tensões efetivas resultantes são integradas na espessura das peças para que se trabalhe no campo dos momentos e curvaturas.

1.2-OBJETIVOS

O principal objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de modelos matemáticos para a análise estrutural de pavimentos de edifícios de concreto armado e sua implementação em código computacional.

Dentre os diversos sistemas estruturais para pavimentos de edifícios, podemos citar aqueles compostos por: vigas e lajes planas, lajes nervuradas, lajes planas sem vigas além de variações entre esses sistemas. Objetivando-se que o código computacional desenvolvido seja eficaz para a análise de qualquer um desses sistemas estruturais é necessário que ele contenha modelos numéricos que representem os comportamentos estruturais de elementos de placas e de vigas.

As tensões cisalhantes, tanto nas placas quanto nas vigas, serão consideradas na aplicação dos modelos de comportamento; portanto a ruína poderá ocorrer tanto por flexão quanto por cisalhamento. A análise numérica de pavimento de edifícios composto por sistemas de lajes sem vigas poderá ser efetuada de maneira bem mais aprofundada do que atualmente se faz, permitindo-se que a ruína por punção seja representada através de apropriado modelo para o cisalhamento em lajes.

Do mesmo modo, em se tratando de pavimentos compostos por lajes e vigas a análise não-linear é efetuada partindo-se sempre de um estado plano de tensões considerando-se o cisalhamento (quando se pensa na subdivisão da espessura dos elementos em camadas planas). Os eixos das vigas são considerados excêntricos em relação ao plano médio das lajes, hipótese bastante realista em se tratando de pavimentos de edifícios de concreto armado, dessa forma os efeitos de flexão e membrana dos elementos planos são acoplados.

Utilizam-se formulações de placas moderadamente espessas que contemplam as clássicas hipóteses de Reissner-Mindlin. Embora a escolha dessas hipóteses deixe a formulação mais complexa, permite sem dúvida a elaboração de modelos mais completos com a inclusão das tensões cisalhantes. Para a modelagem dos elementos lineares fletidos (enrijecedores) serão adotadas as hipóteses formuladas para vigas por Timoshenko, objetivando-se assim a consideração dos esforços cisalhantes também para esses elementos.

Para representar o concreto serão empregados modelos fundamentados na Mecânica do Dano efetuando-se a integração das tensões resultantes ao longo da altura da peça para pode-se escrevê-lo no espaço dos momentos. Portanto, o modelo resultante

nesse caso, a fissuração do concreto é representada de maneira difusa num elemento representativo de volume.

O concreto é um bom exemplo de material que se desvia das hipóteses elástico-lineares, quando submetido a tensões de tração, ainda que pequenas, apresentando elevada danificação. O concreto armado, largamente utilizado na engenharia civil, tem um comportamento bastante complexo devido ao trabalho em conjunto dos materiais que o constituem - concreto e armadura passiva - e, também, ao caráter não-linear de cada um desses constituintes. Para um elemento de concreto armado submetido à flexão simples, fissuras espaçadas entre si deverão ocorrer. O alongamento da armadura passiva é máximo na seção da fissura, diminuindo à medida que se caminha para o ponto médio entre fissuras sucessivas.

Desde o surgimento dos computadores pessoais, no final dos anos setentas, e sua impressionante evolução até os dias atuais, exigiu-se uma rápida transformação nas metodologias de análise estrutural até então empregadas em projetos de estruturas. Modelos de cálculo fundamentados em técnicas do meio contínuo foram substituídos por modelagens via análise matricial de estruturas e método dos elementos finitos. As hipóteses de linearidade entre tensão e deformação ainda são as mais empregadas em escritórios técnicos devido a sua simplicidade e ao seu baixo custo computacional. Esse custo tem se tornado menos significativo atualmente, permitindo que rotinas de análise não-linear sejam gradativamente incorporadas à análise via método dos elementos finitos.

Uma análise estrutural onde os modelos numéricos empregados representam, de maneira mais fiel possível, o comportamento mecânico dos materiais constituintes deverá fornecer um resultado mais representativo do comportamento real da estrutura. Evidentemente, o profissional que fizer uso dessa metodologia deverá ter um amplo domínio sobre a engenharia estrutural. Os resultados assim obtidos, embora mais confiáveis, não substituem as indicações de normas técnicas.

Não se deve pensar na completa substituição da análise linear de estruturas pela não-linear, essa primeira é, e sempre será, um importante indicativo do comportamento de uma estrutura, muito embora, num futuro próximo, rotinas de análise não-linear de estruturas deverão fazer parte do “dia-a-dia” dos escritórios técnicos. A análise não-linear deverá apresentar-se apenas como mais uma ferramenta, embora bem mais sofisticada, para o cálculo de estruturas.

1-INTRODUÇÃO

1.1-GENERALIDADES

A análise de esforços e deslocamentos em estruturas de concreto armado tem como objetivo principal a reprodução via modelagem numérica do comportamento mecânico desse material. Seu grau de sofisticação deve ser apropriado para satisfazer as necessidades daqueles que dela se utilizam. Hipóteses simplificadoras, como as fundamentadas na **Lei do Hooke**, onde é assumida a relação linear entre tensões e deformações, são de elevada importância para os especialistas em engenharia de estruturas. Os resultados assim obtidos fornecem uma “primeira indicação” do comportamento de uma determinada estrutura; evidentemente, essa “primeira indicação” pode se aproximar em muito do comportamento real da estrutura dependendo do caso.

O bom engenheiro estrutural, ao examinar os resultados após uma análise elástico-linear, se pergunta o quanto esses resultados se aproximam do comportamento real da estrutura, fazendo, muitas vezes, reavaliações em deslocamentos, redistribuições de esforços solicitantes etc...com base em indicações de normas técnicas

Existem, já há alguns anos, modelos mais sofisticados para a representação do comportamento mecânico dos diversos materiais estruturais. Modelos elasto-plásticos são bem representativos para os materiais metálicos e os parâmetros para estes modelos são facilmente obtidos por meio de ensaios de laboratório. O concreto, material frágil, pode ser representado por modelos fundamentados na mecânica do dano no contínuo,

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c(t_0) + \varepsilon_{cc}(t, t_0) \quad (2.1)$$

$$\varepsilon_c(t) = \varepsilon_c(t_0)(1 + \varphi(t, t_0)) \quad (2.2)$$

onde $\varepsilon_{cc}(t, t_0)$ é a fluência no concreto, $\varphi(t, t_0)$ é a relação entre a deformação por fluência e a deformação inicial.

Neste trabalho são avaliadas apenas as deformações que ocorrem no instante de aplicação do carregamento. Em Oliveira (2001) as deformações ao longo do tempo são consideradas para lajes e vigas, as vigas são admitidas concêntricas às lajes e emprega-se a teoria de Euler-Bernoulli. Em Sanches (1998) as deformações do concreto são escritas em termos de uma equação em função de tempo que é resolvida pelo método AAEM (“Age Adjusted Effective Modulus”). Naquele trabalho o pavimento é discretizado por elementos finitos de barra.

A NBR 6118 (2003) permite que as vigas não-invertidas sejam calculadas como seção “Tê”, onde a mesa é constituída por uma largura colaborante da laje que é definida em função das condições de vinculação das vigas e da geometria do pavimento. Os cálculos em ruína e em serviços deverão ser efetuados com a inércia da seção composta. Em relação à deformabilidade, em exemplos efetuados com a modelagem da viga excêntrica, observou-se que as indicações da norma foram favoráveis à segurança.

No cálculo do pavimento do edifício considerando-se a excentricidade da viga é possível avaliar os esforços normais nos elementos de barra e os esforços de membrana na laje oriundos dessa consideração, dessa forma a análise torna-se mais precisa do que aquela onde admite-se que o eixo da viga está contido no plano médio da laje. O dimensionamento da viga será efetuado considerando-se a flexão composta.

Para o caso de um tramo de viga totalmente invertida, obtém-se a flexo-tração; enquanto que, para outro tramo idêntico porém não invertido, obtém-se a flexão-compressão. Em ambos os casos, os deslocamentos em regime elástico são iguais. Em regime não-linear a flexo-tração é menos favorável devido à intensiva danificação do concreto. Por outro lado, a situação de flexo-compressão é ainda mais favorável quando considera-se a análise não-linear, devido a resistência do concreto à compressão, podendo-se concluir que para as vigas não invertidas a não consideração da excentricidade conduz a deslocamentos superestimados.

2.6-CONSIDERAÇÃO DOS EFEITOS DO TEMPO

As estruturas de concreto armado estão sujeitas a sofrerem uma série de modificações em seu estado de tensões e deformações desde o instante em que o carregamento é aplicado, t_0 , até um instante genérico de tempo, t . Esse assunto vem sendo estudado por diversos autores dentre os quais pode-se citar Neville (1983) e Bazant (1972).

A fluência e a retração do concreto assumem grande importância na deformabilidade de estruturas de concreto ao longo do tempo. Para avaliar as deformações causadas por esses fenômenos, torna-se necessário o emprego de funções de tempo apropriadas, resultando num modelo visco-elástico. A deformação de concreto no instante de tempo t pode ser determinada a partir da superposição da fluência ocorrida entre t_0 e t com a deformação inicial, $\varepsilon_c(t_0)$, assim:

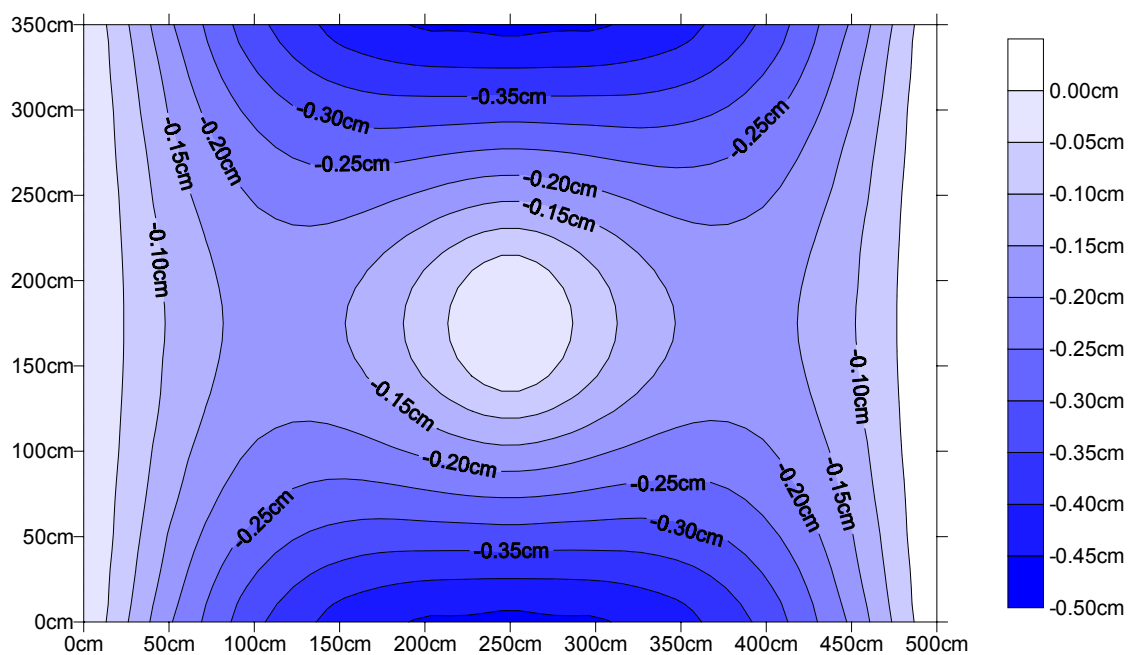


Figura 2.4: Pós-processamento de resultados.

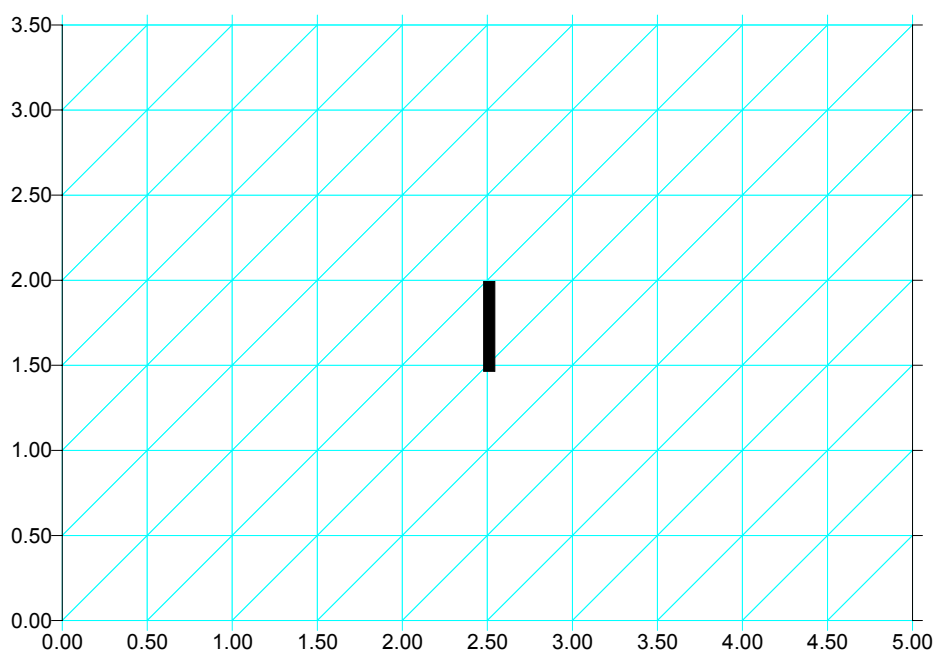


Figura 2.5: Malha de elementos finitos.

2.5-POSICIONAMENTO DA VIGA

O posicionamento do eixo das vigas em relação ao plano médio das lajes num pavimento de edifício exerce grande influência sobre a sua deformabilidade; a situação mais favorável é aquela onde a excentricidade seja a máxima possível e não ocorrem esforços normais de tração (em se tratando do concreto armado). Neste trabalho a excentricidade da viga é considerada nas formulações.

momentos fletores foi forçada em projeto através da diminuição da taxa de armadura de flexão nessas regiões.

2.4-PRÉ E PÓS-PROCESSAMENTO DE DADOS

A resolução de pavimentos de edifícios com o emprego do método dos elementos finitos apresenta algumas dificuldades em relação a entrada de dados e a análise de resultados obtidos. Geralmente é necessário subdividir o domínio do pavimento de edifício num grande número de elementos finitos, resultando num trabalho excessivo para a entrada de dados.

A maneira ideal para a entrada de dados seria através de programas em ambiente de CAD, desse modo os códigos computacionais necessitariam ser desenvolvido em conjunto com especialistas em computação gráfica, o que raramente é possível no meio acadêmico. Neste trabalho a entrada de dados é feita através de arquivo alfa numérico, a conferência desses dados é efetuada com o auxílio do “software” SURFER (1996).

Em se tratando da análise não-linear de estruturas, uma dificuldade adicional é que as taxas de armadura longitudinal e transversal devem ser incluídas nos arquivos de entrada.

Os resultados obtidos na análise de um pavimento são os seguintes: um deslocamento em cada uma das direções ox , oy e oz ; rotações em torno dos eixos x , y e z ; momentos m_x , m_y e m_{xy} ; esforços cortantes v_x e v_y ; esforços normais n_x , n_y e n_{xy} ; imaginando que a cada lugar geométrico contido no domínio do pavimento corresponda 6 deslocamentos e 8 esforços solicitantes fica praticamente impossível trabalhar esses resultados sem o auxílio de um pós-processador.

Neste trabalho optou-se por gerar, com o auxílio do “software” SURFER (1996), gráficos planos que contém curvas de iso-valores; em algumas dessas curvas é indicado o valor correspondente. A cada faixa de variação dos valores corresponde um nível de cor. Na figura 2.4 é ilustrado a distribuição de deslocamentos verticais para uma laje retangular de $3,5 \times 5,0 \text{ m}^2$. A laje é apoiada sobre 5 pilares, sendo um em cada canto e um pilar interno no centro geométrico da laje, o módulo de elasticidade longitudinal considerado foi $E_c = 28800 \text{ MPa}$ e a espessura da laje é 10cm. A malha de elementos finitos é ilustrada pela figura 2.5.

processos que levem em conta o seu caráter não-linear. Modelos de comportamento para os materiais são apresentados nos capítulos 6 e 7 deste trabalho.

A análise estrutural em regime elástico é uma forma segura de se efetuar o dimensionamento em ruína dos elementos estruturais, no entanto por ser demais simples, é apenas indicativa da deformabilidade do pavimento. Efeitos como a não-linearidade física e a deformabilidade ao longo do tempo não são considerados. Dessa forma é grande a dificuldade dos projetistas de estruturas em, a partir dos resultados da análise linear, avaliar as deformações reais do pavimento de edifício.

Neste trabalho é empregada a teoria de Timoshenko para vigas e a teoria de Reissner-Mindlin para as placas; essas teorias são mais amplas por considerarem em sua formulação a deformação por cisalhamento. Nos pavimentos convencionais, a deformação por cisalhamento é pequena, num primeiro momento pode-se acreditar que não é viável o emprego das teorias de Timoshenko e Reissner-Mindlin, no entanto estas são sempre mais precisas e mais amplas, não havendo vantagens em não empregá-las.

2.3-REDISTRIBUIÇÃO DE ESFORÇOS SOLICITANTES

A análise estrutural em regime não-linear pode conduzir a uma redistribuição de esforços solicitantes no pavimento, no entanto esse fato não deve provocar grandes preocupações aos projetistas de estruturas. Testes numéricos efetuados mostraram que, se o pavimento for adequadamente armado de acordo com os resultados obtidos por análise linear, não ocorrerão problemas relativos à ruína de elementos.

Pode-se concluir que é um procedimento seguro efetuar a armação da estrutura de acordo com os resultados da análise linear para a maioria dos pavimentos de edifícios, entretanto, conforme já citado, a análise linear não é suficiente para descrever, com precisão, a deformabilidade de um pavimento.

As lajes de concreto armado são elementos onde há uma presença bem acentuada da redistribuição de esforços solicitantes, esse fato pode ser explicado pelo seu caráter bidimensional e pelo fato de que, na armação desses elementos, a armadura de flexão necessária para resistir aos esforços máximos é estendida por toda a laje, gerando trechos superdimensionados. Geralmente os esforços máximos após a análise não-linear são menores do que aqueles obtidos em regime elástico.

Nas vigas de concreto armado não foram observadas significativas redistribuições de esforços, sua ocorrência se dá apenas quando a plastificação de

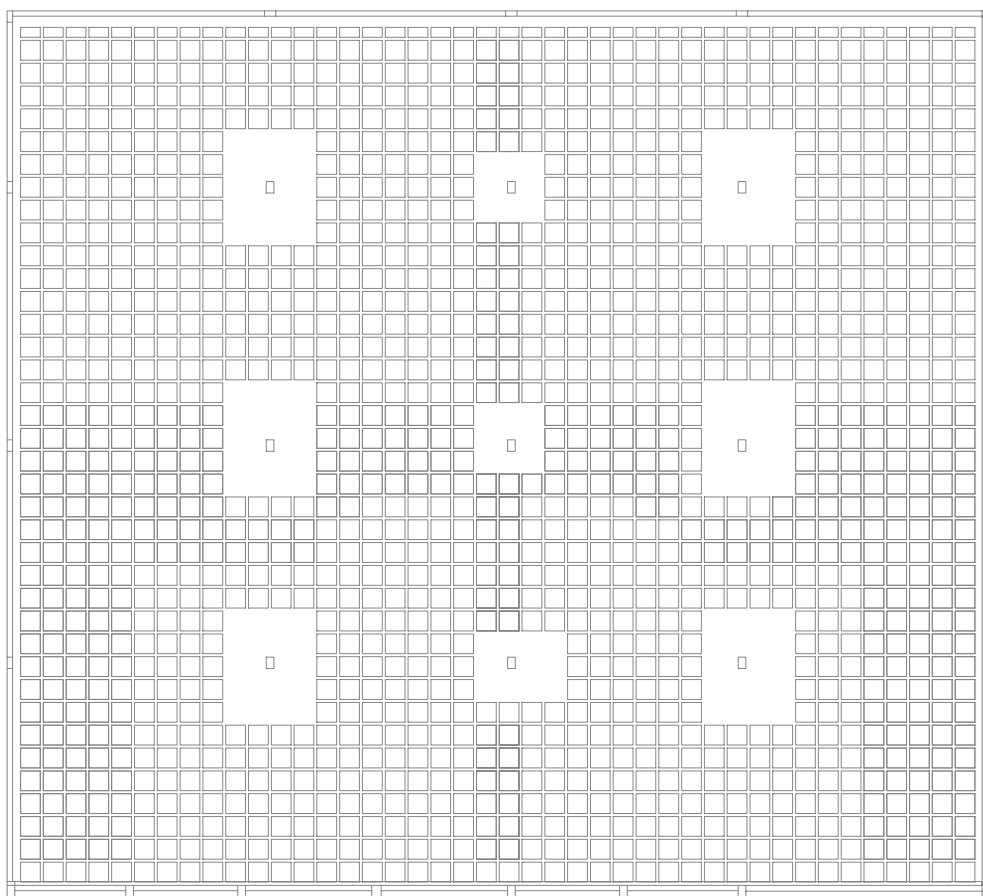


Figura 2.3: Pavimento: laje nervurada sem vigas - propriedade TECSOFT LTDA.

O cálculo de esforços e deslocamentos em pavimentos de concreto armado é efetuado no dias atuais, na grande maioria dos casos, através de métodos numéricos e de rotinas de análise matricial de estruturas, dessa forma a compatibilidade de deslocamentos entre as vigas (quando houverem) e as lajes fica assegurada devido ao acoplamento entre esses elementos.

O método numérico mais empregado é, seguramente, o Método dos Elementos Finitos que é também utilizado neste trabalho; o domínio do pavimento é discretizado por elementos de barra e de placa. No Método dos Elementos de Contorno, também empregado na modelagem de pavimentos, o que se discretiza é o contorno do pavimento, maiores detalhes sobre o emprego do MEC em pavimentos de edifícios podem ser encontrados em Bacarji (2001) e Fernandez (2003).

Admite-se, inicialmente, que na formulação dos métodos numéricos o material obedece ao regime elástico-linear, no entanto isso não ocorre para o material concreto armado. O comportamento estrutural desse material é melhor representado através de

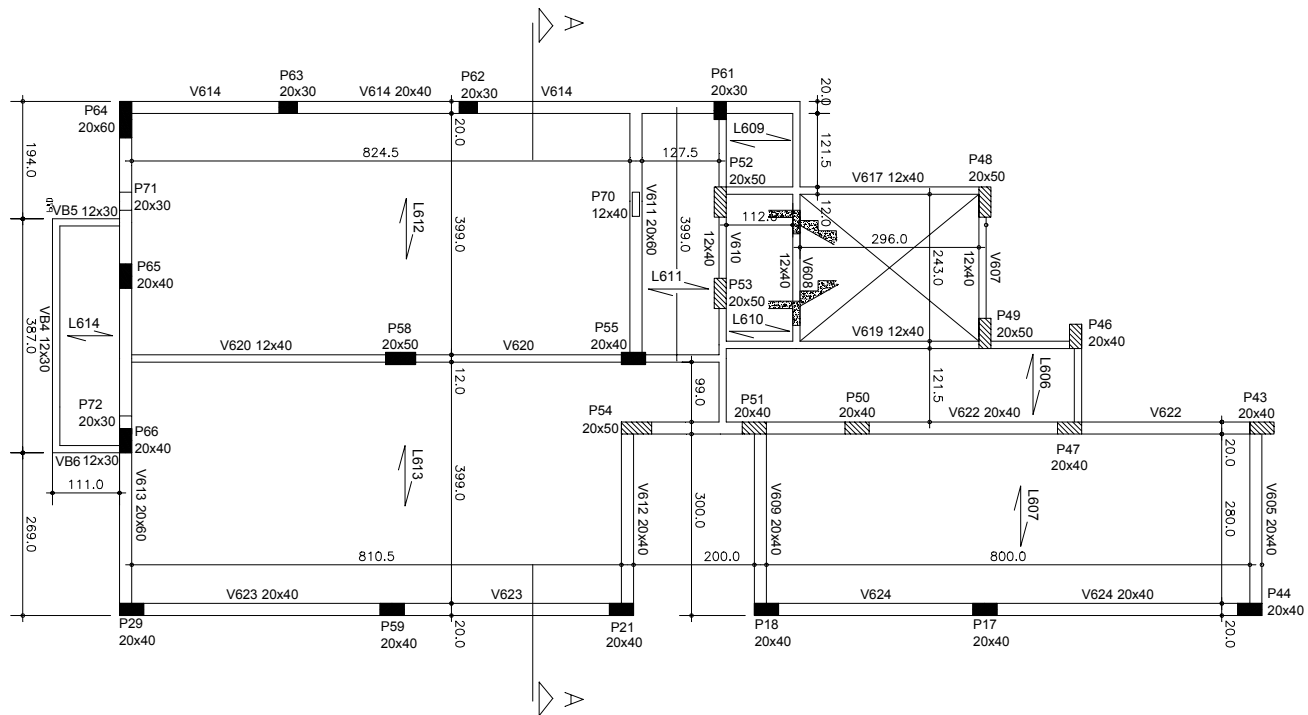


Figura 2.1: Pavimento convencional.

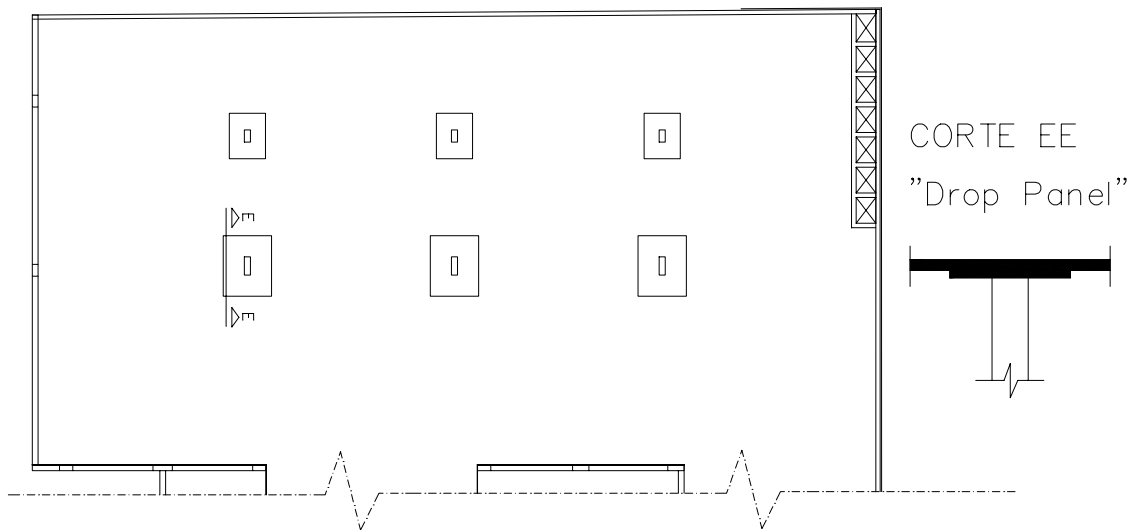


Figura 2.2: Laje com "drop panel"- vista parcial - propriedade TECOSOF LTDA.

obter um teto liso; naturalmente a espessura das lajes será constante, exigindo-se uma verificação apurada das tensões cisalhantes.

As lajes lisas apresentam grande deformabilidade, principalmente nas bordas livres, o que justifica o emprego de vigas no contorno do pavimento. Caso se empregue o sistema de lajes nervuradas, as vigas no bordo podem estar embutidas na própria espessura da laje, se esta for suficiente para tanto. Métodos numéricos são extremamente interessante para que o projeto dessas lajes seja viável tanto do ponto de vista das ações em serviço, quanto das ações de ruína.

Um sistema estrutural bastante interessante é aquele onde empregam-se lajes nervuradas sem vigas; o dimensionamento econômico dessas lajes conduz a uma espessura maior do que aquela que resultaria para o caso da laje lisa. Na região da ligação com os pilares, utiliza-se um trecho de laje maciça, mantendo-se a espessura constante.

Para o sistema convencional composto por lajes maciças ou nervuradas e vigas, o dimensionamento e a verificação das condições em serviço deve, preferencialmente, levar em conta o comportamento em conjunto dos elementos estruturais.

Alguns exemplos de pavimentos são ilustrados pelas figuras: 2.1 onde apresenta-se um pavimento convencional, com vigas e lajes maciças; 2.2: um pavimento composto por laje lisa onde há uma aumento da altura da laje na região dos pilares; 2.3 onde se tem um pavimento composto por laje nervurada sem vigas, observa-se que na região dos pilares existe um trecho de laje maciça, com espessura igual a altura total da laje nervurada, aumentando muito a resistência ao cisalhamento.

2.2-CÁLCULO DE ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS EM PAVIMENTOS

A facilidade de acesso aos microcomputadores permite que as antigas hipóteses de cálculo de elementos estruturais sejam substituídas por rotinas numéricas devidamente implementadas em códigos computacionais. As antigas rotinas de projeto estrutural de pavimento de edifícios utilizavam a hipótese de que as lajes fossem destacadas das vigas, calculadas à parte, e as vigas seriam calculadas com as reações de apoio das lajes; segundo esses processos, os apoios das lajes seriam supostos infinitamente rígidos. Esse modelo de cálculo é, em geral, a favor da segurança.

2-PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS DE CONCRETO ARMADO

2.1-INTRODUÇÃO

O objetivo deste capítulo é discutir alguns temas de interesse ao projeto estrutural de pavimentos de edifícios, dando maior ênfase às questões relativas à sua deformabilidade. Apresenta-se, a seguir, alguns sistemas estruturais possíveis de serem empregados em pavimentos; evidentemente, a viabilidade de cada sistema depende de um estudo detalhado.

A concepção estrutural dos pavimentos de edifícios de concreto armado tem evoluído significativamente nos dias atuais. O sistema estrutural composto por lajes e vigas, ainda muito empregado nas edificações, tem cedido gradativamente espaço a sistemas de lajes lisas, proporcionando uma grande liberdade aos projetos arquitetônicos, além de considerável economia em formas.

As tensões de cisalhamento em lajes lisas são, muitas vezes, o principal fator a ser levado em conta no dimensionamento. Denomina-se punção à ruína da ligação entre a laje e o pilar, como essa ruína é do tipo frágil, deve ser evitada; o projeto estrutural deverá garantir que, caso ocorra, a ruína se dê por flexão e não por cisalhamento.

Podem-se citar duas maneiras de aliviar as tensões de cisalhamento na ligação das lajes lisas com os pilares: a primeira delas está no uso de capitéis que podem ser entendidos como um aumento da seção transversal do pilar sob a laje; outra seria o emprego do “drop panel” que é o aumento da espessura da laje nessa região. Devido a semelhança entre os conjuntos constituídos por laje, pilar e capitel e os cogumelos surgiu a denominação laje-cogumelo, que também é largamente usada nos idiomas europeus. Deve-se ressaltar que atualmente os capitéis e o “drop panel” estão sendo cada vez menos utilizados devido a dificuldade de formas e a enorme vantagem de se

Tabela 3.1: deslocamento vertical no meio do vão.

VIGA BI-APOIADA					
H/L	Euller	Timoshenko	Elementos Planos	Relação Euller - Planos	Relação Timosh. - Planos
	(mm)	(mm)	(mm)	%	%
0.500	0.0035	0.0055	0.0052	-32.34	6.33
0.400	0.0085	0.0117	0.0112	-24.02	4.59
0.300	0.0267	0.0325	0.0316	-15.52	2.83
0.250	0.0556	0.0638	0.0624	-10.96	2.26
0.200	0.1354	0.1484	0.1459	-7.20	1.71
0.150	0.4280	0.4511	0.4452	-3.86	1.33
0.100	2.1666	2.2186	2.1961	-1.34	1.02
0.075	6.8475	6.9399	6.8790	-0.46	0.89
0.050	34.6660	34.8740	34.6170	0.14	0.74

Tabela 3.2: deslocamento vertical na extremidade da viga.

VIGA ENGASTADA					
H/L	Euller	Timoshenko	Elementos Planos	Relação Euller - Planos	Relação Timosh. - Planos
	(mm)	(mm)	(mm)	%	%
0.800	0.0271	0.0401	0.0382	-28.99	5.08
0.700	0.0404	0.0553	0.0528	-23.51	4.70
0.600	0.0642	0.0815	0.0791	-18.82	3.06
0.500	0.1109	0.1317	0.1288	-13.88	2.27
0.400	0.2167	0.2427	0.2387	-9.23	1.66
0.300	0.5135	0.5482	0.5419	-5.23	1.17
0.250	0.8875	0.9291	0.9198	-3.51	1.01
0.200	1.7333	1.7853	1.7695	-2.05	0.89
0.150	4.1087	4.1781	4.1444	-0.86	0.81
0.100	13.8667	13.9700	13.8670	0.00	0.74
0.075	32.8620	33.0070	32.7730	0.27	0.71
0.050	110.9300	111.1400	110.4500	0.43	0.62

3.3.3-EXEMPLO 3

Neste exemplo, estuda-se a influência da deformação por cortante numa viga bi-apoiada, ilustrada pela figura 3.18a, e numa viga engastada numa extremidade e livre na outra conforme a figura 3.18b. As características do material constituinte das vigas são as seguintes: módulo de elasticidade longitudinal = 28850 MPa; coeficiente de Poisson = 0,25. Os resultados obtidos são apresentados na tabelas 3.1 e 3.2.

Empregou-se o método dos elementos finitos para a análise de deslocamentos. Compara-se, para estudar o efeito da deformação por cortante, resultados obtidos com as teorias de Euler-Bernouili e Timoshenko e com o emprego de elementos planos. O objetivo dessa comparação é apenas ilustrar o trabalho desenvolvido, pois é evidente que a teoria de Timoshenko conduzirá sempre a melhores resultado em comparação com o emprego da teoria de Euler-Bernouili, devendo sempre que possível ser empregada nas análises estruturais independentemente da relação H/L . Para a viga engastada, $F=10\text{kN}$.

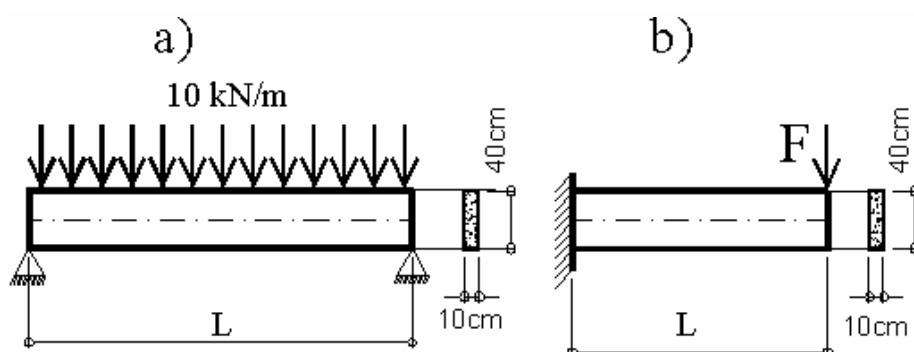


Figura 3.18: a) Viga bi-apoiada; b) Viga engastada.

Analisando-se os resultados obtidos percebe-se a boa performance do elemento de viga de Timoshenko. Pode-se concluir que a deformação por cortante, para vigas bi-apoiadas submetidas a um carregamento uniformemente distribuído, deve ser considerada para relações H/L maiores que 0,25. Para a viga engastada numa extremidade, as diferenças entre as teorias de Euler e de Timoshenko tornam-se grandes para relações H/L maiores que 0,50.

encurtamento do plano da laje pode ser observado nas figuras 3.16 e 3.17 onde são representados os deslocamentos horizontais segundo as direções x e y, respectivamente.

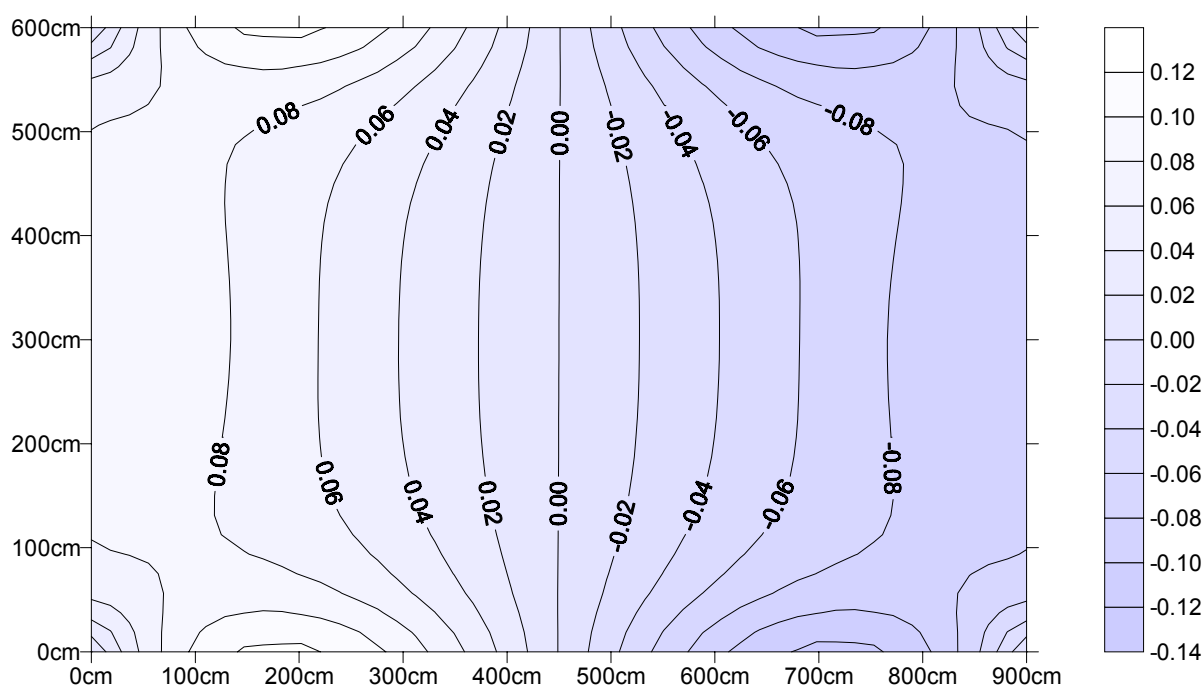


Figura 3.16: deslocamentos na direção x (mm).

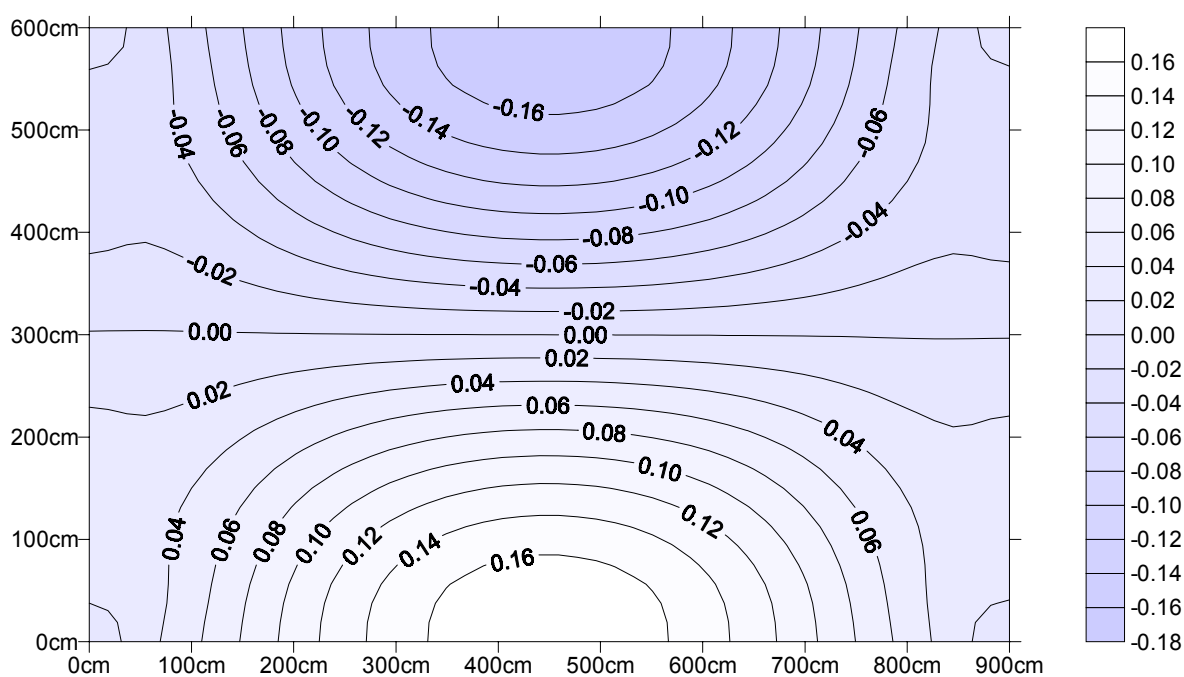


Figura 3.17: deslocamentos na direção y (mm).

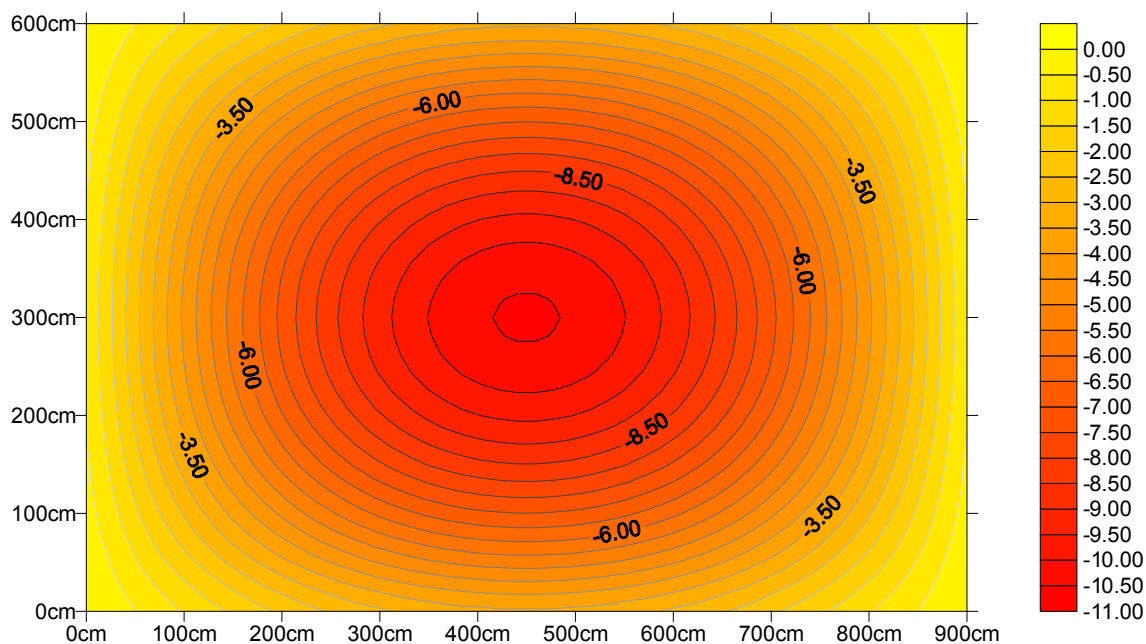


Figura 3.14: Deslocamentos verticais para viga excêntrica (mm).

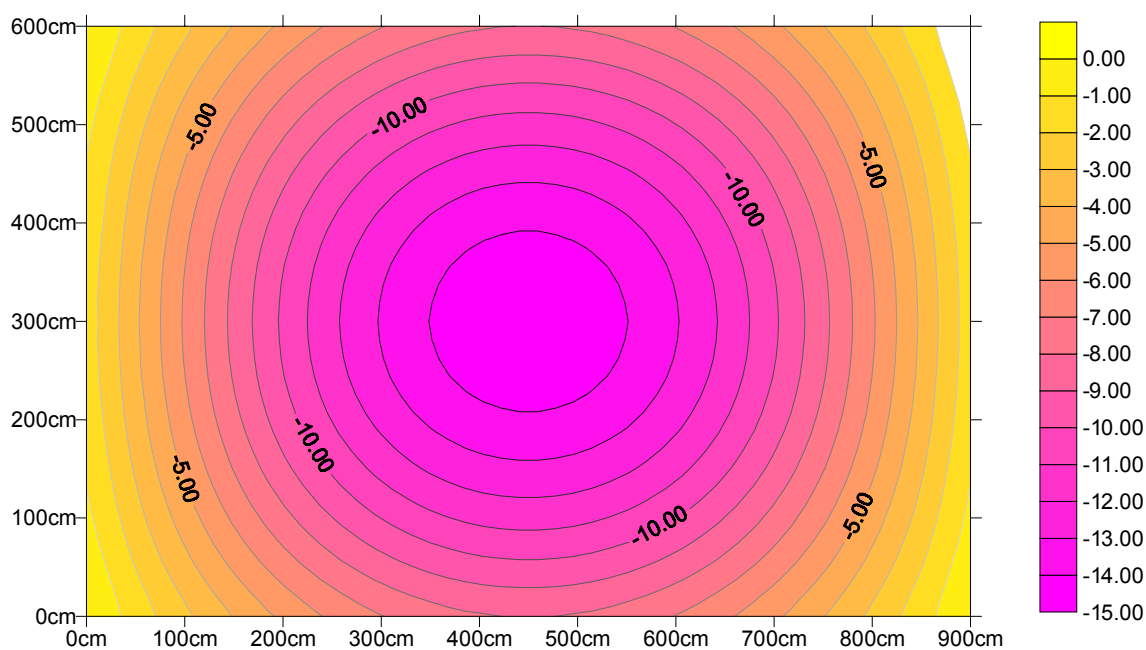


Figura 3.15: Deslocamentos verticais: seção “TÊ” (mm).

Os máximos deslocamentos verticais na laje foram: 10,5mm para viga excêntrica e 15mm para seção “TÊ”. Novamente observa-se que a consideração da hipótese de viga T da norma conduziu a valores 50% maiores do que aqueles obtidos considerando-se a excentricidade. De um modo geral, pode-se afirmar que a consideração da excentricidade da viga representa de maneira mais rigorosa o comportamento estrutural de pavimentos de edifícios e de cascas enrijecidas. O

3.3.2-EXEMPLO 2

Analisa-se neste exemplo uma laje nervurada de $6 \times 9 \text{m}^2$ em cada uma das seguintes situações: viga excêntrica e inércia da seção “TÊ” conforme a NBR 6118 (2003). A laje e as respectivas seções transversais são ilustrados pela figura 3.12. Considera-se $f_{ck}=20 \text{ MPa}$, despreza-se a rigidez à torção das barras. Para a modelagem estrutural via Método dos Elementos Finitos foi utilizada malha quadrada conforme a figura 3.13, para as nervuras e para as vigas do contorno foram empregados elementos de barra e para a capa elementos planos. Os deslocamentos verticais obtidos segundo cada uma das situações são ilustrados pelas figuras 3.14 e 3.15.

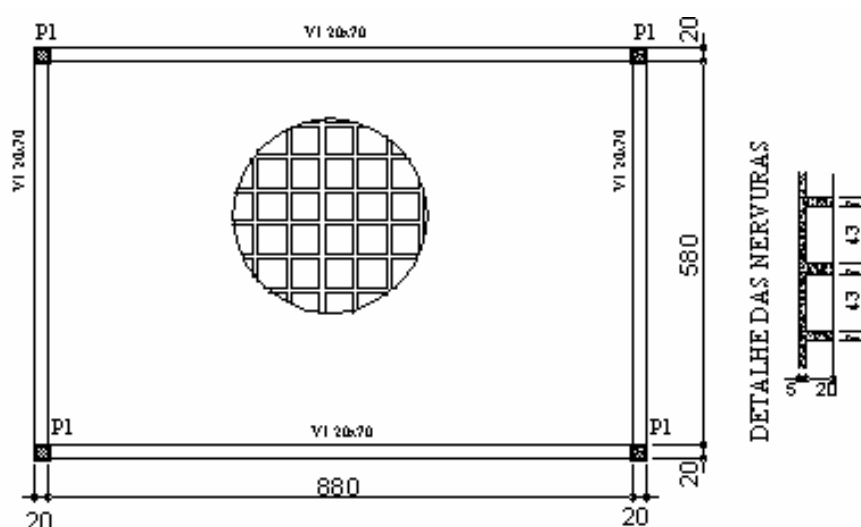


Figura 3.12: Laje Nervurada.

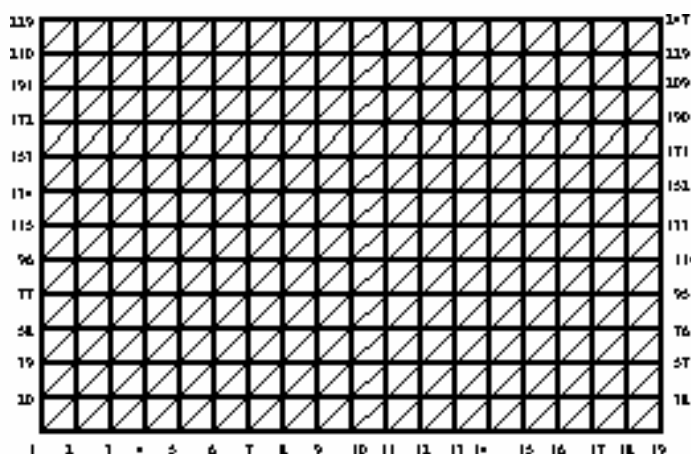


Figura 3.13: Malha de elementos finitos.

As figuras 3.10 e 3.11 ilustram, respectivamente, os deslocamentos verticais do pavimento para $e=31\text{cm}$ e $e=0\text{cm}$.

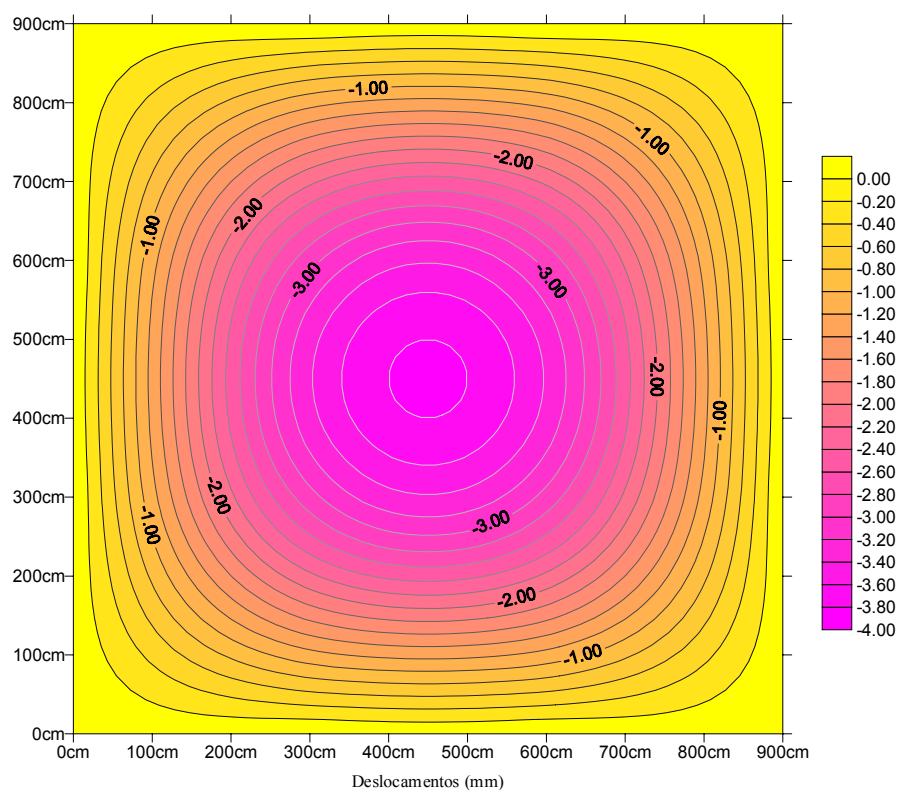


Figura 3.10: deslocamentos verticais para $e=31\text{cm}$ (mm).

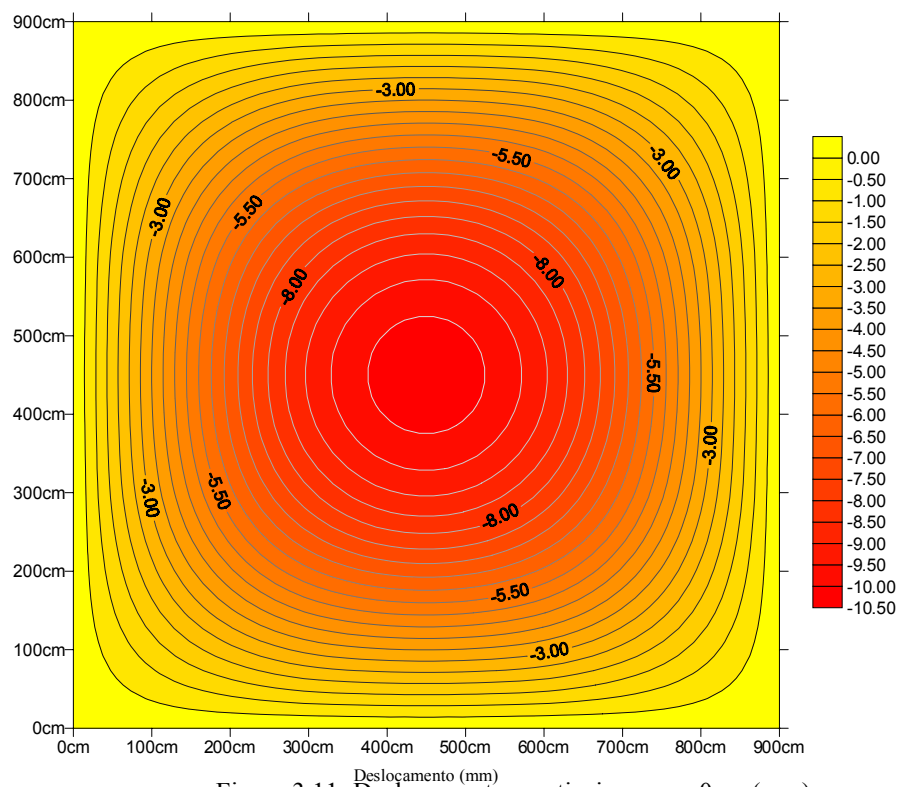


Figura 3.11: Deslocamentos verticais para $e=0\text{cm}$ (mm).

O gráfico da figura 3.9 ilustra os deslocamentos verticais, para a excentricidade e variando de 0 até 31cm, do nó localizado no centro do pavimento

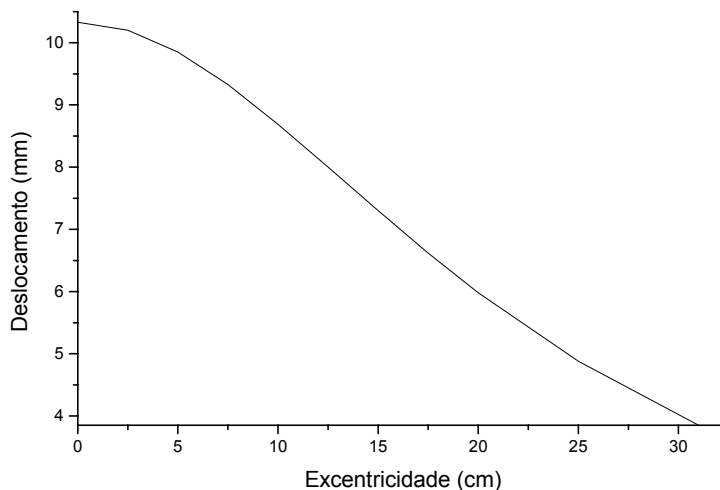


Figura 3.9: Gráfico deslocamento vertical do nó central.

Do gráfico da figura 3.9 pode-se concluir que o melhor posicionamento da viga será nas situações onde a elevação seja nula ou igual a 62cm configurando viga invertida. Os máximos deslocamentos verticais obtidos foram os seguintes: $w=3,85$ mm para $e=31$ cm; $w=10,33$ mm quando consideram-se vigas e lajes concêntricas e $w=5,81$ mm quando admite-se seção “TÊ” de acordo com a NB1. Observa-se que os deslocamentos considerando-se a seção “TÊ” resultaram 50% maiores do que aqueles obtidos quando da consideração da excentricidade da viga, pode-se concluir que para esse pavimento a consideração apenas da seção “TÊ” de acordo com a NB1 conduz a valores a favor da segurança na análise de deslocamentos e que a análise considerando-se viga e laje concêntricas conduz a valores irrealistas dos deslocamentos.

Para o elemento de barra localizado na região central do pavimento onde ocorreram os maiores esforços solicitantes obteve-se:

- para $e=0$, não considerando-se seção “TÊ”: momento fletor $M = 19342$ kNcm, esforço normal $N = 0$ kN;
- para $e=31$ cm: momento fletor $M_1 = 7182$ kNcm, esforço normal $N = 411$ kN (compressão), $M = M_1 + N \cdot e = 19923$ kNcm.

Caso seja levada em conta a excentricidade, a viga deverá ser dimensionada considerando-se os esforços: $M = 19923$ kNcm e $N = 411$ kN (compressão).

O pavimento e as respectivas seções transversais são ilustrados pela figura 3.7. Considera-se $f_{ck}=20$ MPa, despreza-se a rigidez à torção das barras. Para a modelagem estrutural via Método dos Elementos Finitos foi utilizada malha quadrada conforme a figura 3.8. A seguir, discute-se os resultados obtidos para cada uma das considerações.

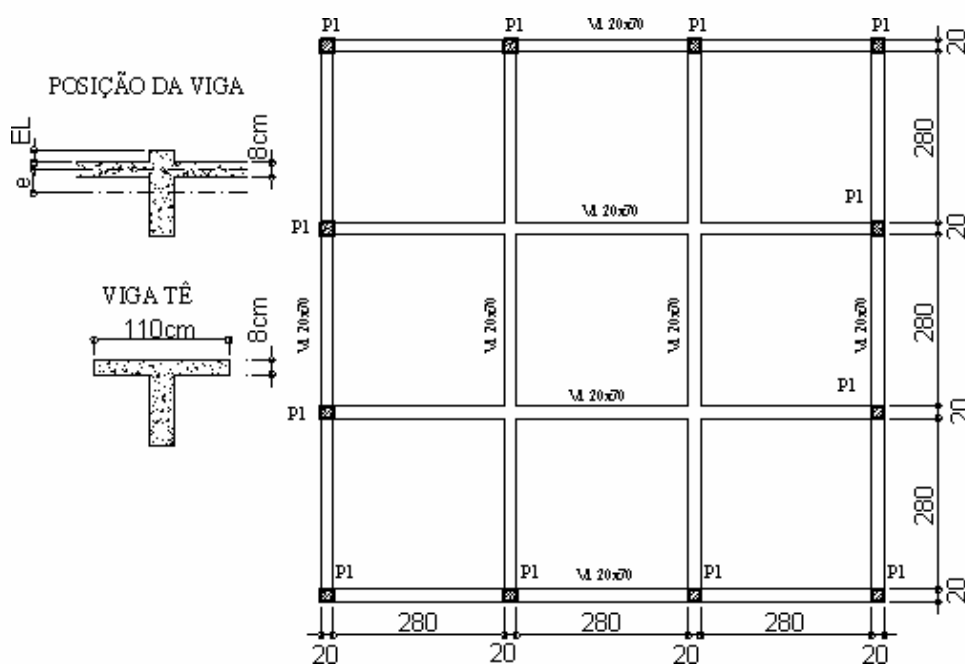


Figura 3.7: Pavimento de edifício e seções transversais.

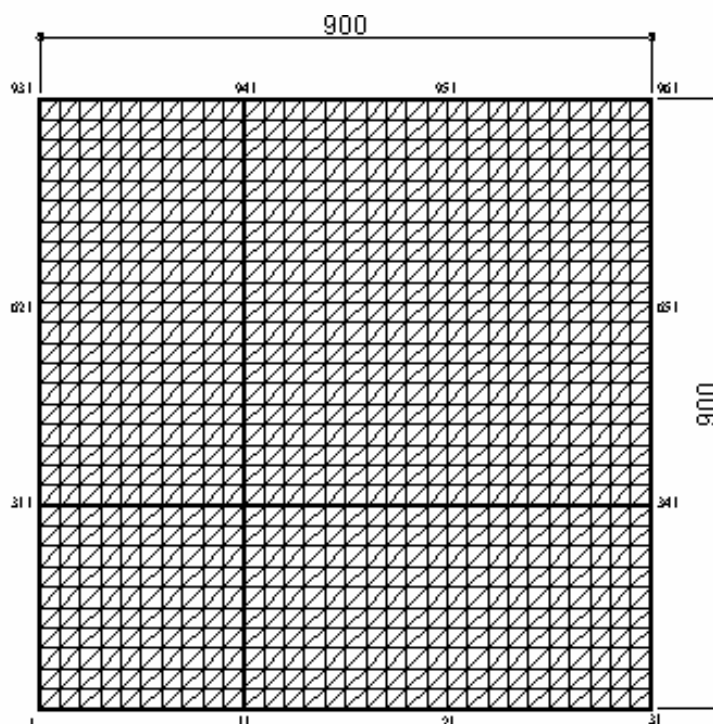


Figura 3.8: Malha de Elementos Finitos

campo de deslocamentos axiais da viga o que implicaria na adoção de um grau de liberdade adicional no elemento.

Outra forma de minimizar o erro, segundo Gupta & Ma (1977), seria aumentando-se o número de elementos finitos, pois assim a derivada dos deslocamentos verticais seria aproximadamente constante. Esses autores apresentam a eq.(3.26) para a avaliação do erro cometido, avaliando-se essa expressão percebe-se que quando n , que é o número de elementos finitos, tende para um valor bastante grande o erro, r , tende a zero.

$$r = \frac{C}{n^2} \quad (3.26)$$

onde:

$$C = \frac{A_v A_p e^2}{4(A_v + A_p)(I_v + I_p)} \quad (3.27)$$

3.3-EXEMPLOS

3.3.1-EXEMPLO 1

O objetivo exemplo é estudar a influência do posicionamento da viga em relação a laje num pavimento de edifício; para isso adota-se um pavimento de edifício com $9 \times 9 \text{m}^2$. Consideram-se diferentes condições de posicionamento da viga, inicialmente admite-se que a excentricidade “ e ” seja igual a zero, aumenta-se “ e ” gradativamente até seu limite superior ($e=31 \text{cm}$). Outra situação interessante é considerar a largura da mesa colaborante de acordo com a NBR 6118 (2003), nesse caso “ $e=0$ ” e a inércia da barra é calculada levando-se em conta a seção “ $\hat{TÊ}$ ”. Todas as análises são ainda efetuadas em regime elástico-linear.

Aplicando-se o princípio da mínima energia é obtida a matriz de rigidez do elemento, assim:

$$K_V = T^T \int_0^L \beta^T D \beta dx T = T^T K T \quad (3.23)$$

onde K é a matriz de rigidez idêntica a obtida sem a consideração da excentricidade.

Explicitando-se a matriz K_V , desconsiderando-se a parcela da rigidez à torção:

$$K_V = \frac{1}{1+2g} \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 2EI(2+g)+EAe^2 & \frac{6EI}{L^2} & 2EI(1-g)-EAe^2 & -\frac{EAe}{L} & \frac{EAe}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & 2EI(1-g)-EAe^2 & \frac{6EI}{L^2} & 2EI(2+g)+EAe^2 & \frac{EAe}{L} & -\frac{EAe}{L} \\ 0 & -\frac{EAe}{L} & 0 & \frac{EAe}{L} & \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ 0 & \frac{EAe}{L} & 0 & -\frac{EAe}{L} & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad \dots(3.24)$$

O vetor de esforços nodais na barra é determinado a partir dos deslocamentos da eq.(3.25). Serão obtidos no eixo da barra um momento fletor M_1 , e um esforço cortante V , o esforço normal N estará excêntrico em relação ao eixo da viga; a viga deverá ser dimensionada à flexão composta considerando-se $M = M_1 + N.e$ além do esforço normal N . As lajes deverão ser dimensionadas considerando-se os esforços normal e de flexão.

$$u_{VIGA} = T u_{PLACA} \quad (3.25)$$

O emprego de funções de forma lineares para aproximar os deslocamentos axiais da viga conduz à uma incompatibilidade em deslocamentos, pois as funções de forma empregados para os deslocamentos verticais da placa usualmente são cúbicas, portanto suas derivadas são quadráticas. Miller (1980), visando reduzir esse erro, apresenta uma formulação onde são utilizadas funções de forma quadráticas para o

Aplicando-se aos nós de elemento obtém-se:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_{VIGA} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -e & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}_{LAJE} \quad (3.19)$$

Ou, resumidamente:

$$\delta_{VIGA} = T \delta_{PLACA} \quad (3.20)$$

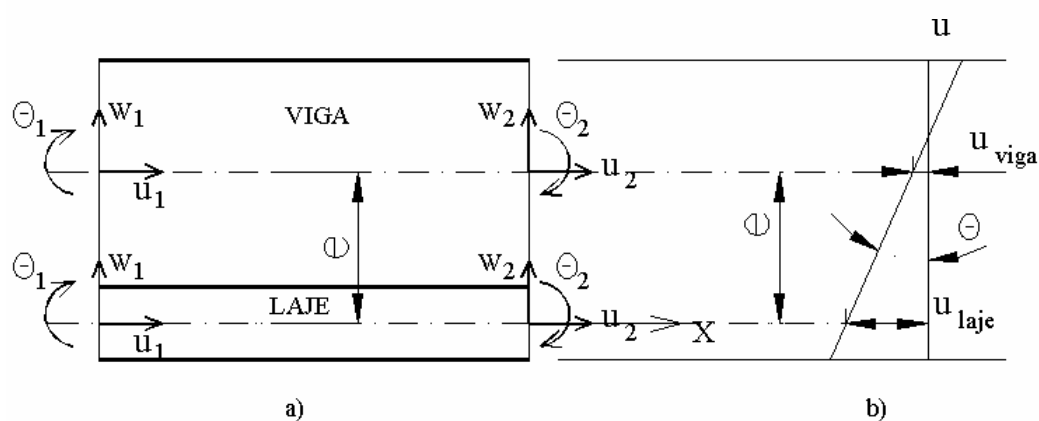


Figura 3.6: a) Elemento de viga excêntrica, b) Compatibilidade de deslocamentos.

A partir da formulação do método dos elementos finitos via energia potencial obtém-se que a energia de deformação para o elemento de viga é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \beta^T \delta_V^T D \beta \delta_V dx \quad (3.21)$$

onde D acopla as rigidez normal e a rigidez à flexão do elemento.

Substituindo-se a eq.(3.20) na eq.(3.21) obtém-se:

$$U = \frac{1}{2} T^T \int_0^L \beta^T \delta_P^T D \beta \delta_P dx T \quad (3.22)$$

A existência de deformações axiais na superfície média da laje pode ser ilustrada de maneira simples ao analisar-se a distribuição de deformações devidas a flexão ao longo da altura da viga. Pode-se claramente perceber que estando a viga excêntrica em relação a laje, as deformações na laje correspondem a um estado associado de membrana e de flexão. A figura 3.5 ilustra esse comportamento.

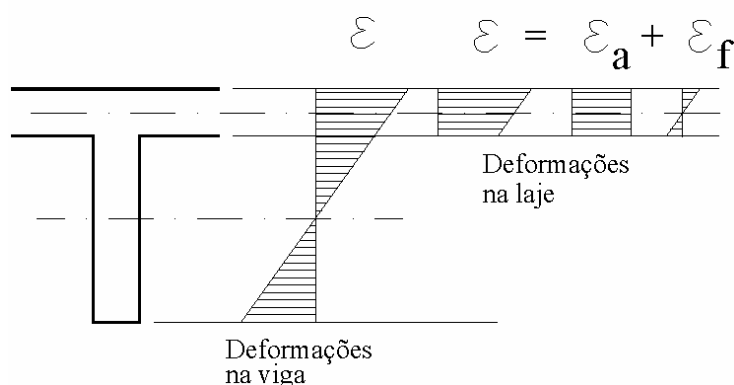


Figura 3.5: Deformações na viga e na laje.

3.2.2-CONSIDERAÇÃO DA EXCÊNTRICIDADE DA VIGA

Um caminho bastante simples para a formulação da matriz de rigidez da viga excêntrica consiste em escrever-se o campo de deslocamentos da viga como sendo uma transformação efetuada sobre o campo de deslocamentos da placa. A superfície média da placa será então o plano de referência para os deslocamentos. Diversos autores como Gupta & Ma (1977), Miller (1979), Balmer (1978) empregam esse mesmo procedimento.

Considere-se o elemento de viga excêntrico em relação ao plano médio da laje ilustrado pela figura 3.6a. O campo de deslocamentos verticais para a viga é aproximado por um polinômio cúbico (eq.(3.4a)) enquanto que utiliza-se uma função de forma linear para os deslocamentos axiais (eq.(3.4b)).

Os deslocamentos da viga podem ser relacionados com os deslocamentos da laje a partir da imposição das condições de compatibilidade em deslocamentos (figura 3.6), assim pode-se escrever, considerando-se pequenos deslocamentos:

$$\theta_{laje} = \theta_{viga} = \theta \quad (3.18a)$$

$$u_{laje} = u_{viga} + e \operatorname{tg}(\theta) \Rightarrow u_{laje} = u_{viga} + e \theta \quad (3.18b)$$

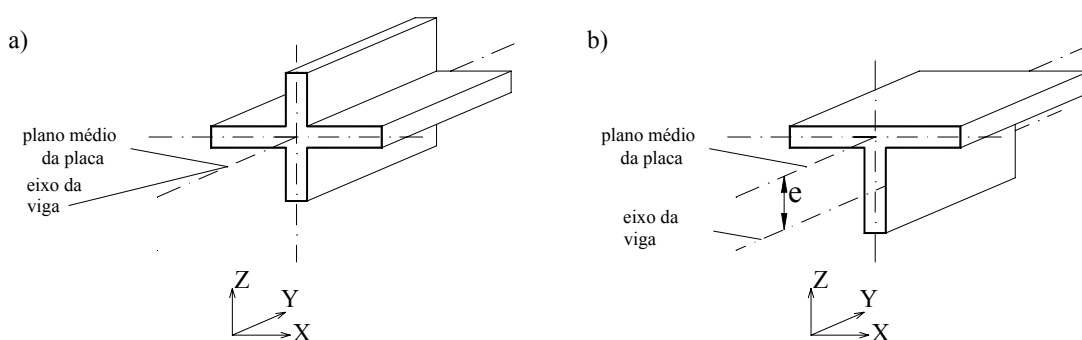


Figura 3.4: a) Viga concêntrica; b) Viga excêntrica.

Devido a consideração da excentricidade da barra, o elemento finito utilizado para modelar a placa deve, necessariamente, conter graus de liberdade representativos de deslocamentos no seu plano, ou seja, segundo as direções x e y ; supondo-se que o plano xy contenha o plano médio da placa. Além, obviamente de deslocamentos representativos de um estado de flexão na placa.

Para simular tais efeitos optou-se por empregar uma formulação de elementos finitos de casca obtidos pela superposição de um elemento de flexão de placas e um elemento de membrana. Essa é uma forma bastante simples e eficiente de tratar os problemas de cascas e, segundo diversos autores, não perde em eficiência em relação as demais abordagens quando analisa-se cascas planas.

A liberdade rotacional (“drilling”) é desejável na formulação de elementos finitos de casca (via superposição de efeitos de flexão e de membrana) para evitar problemas de singularidade na matriz de rigidez global em estruturas onde os elementos finitos são coplanares ou aproximadamente coplanares, como é o caso dos pavimentos de edifícios.

Bergan & Fellipa (1985) apresentam de forma explícita o desenvolvimento de um elemento finito de membrana triangular com grau de liberdade rotacional a partir da formulação livre de Bergan & Nygard (1984) Para simular os efeitos de flexão da placa emprega-se o elemento finito triangular **DST (Discrete Shear Triangle)** proposto por Batoz (1988); os elementos planos são abordados nos capítulos 4 e 5 deste trabalho.

formulação de elementos finitos de barra empregando-se a teoria de Timoshenko pode ser encontrada em Cheng et al. (1997).

3.2-MODELAGEM DA EXCENTRICIDADE DA VIGA

3.2.1-INTRODUÇÃO

A análise estrutural de pavimentos de edifícios via Método dos Elementos Finitos requer que elementos de placa e elementos de barra sejam empregados na sua modelagem ou, então, que se empregue elementos tridimensionais. Supondo-se o primeiro caso, é necessário que as equações de deslocamentos sejam escritas em relação a um plano de referência que, geralmente, é tomado como sendo o plano médio dos elementos de placa. O eixo das vigas pode não ser coincidente com o plano médio da placa, nesse caso é necessário que escrevam-se equações de compatibilidade entre deslocamentos da viga e da placa.

A maioria dos programas computacionais desenvolvidos para análise de placas ou cascas com a presença de enrijecedores considera a hipótese da excentricidade (distância entre o eixo da viga e o plano médio da laje) ser nula, portanto nesse caso a compatibilidade entre deslocamento da barra e da placa seria total. O emprego dessa hipótese acarreta, como tem-se mostrado em resultados obtidos, em consideráveis erros na avaliação dos deslocamentos.

O cálculo de esforços e deslocamentos em pavimentos de edifícios, que é o objetivo deste trabalho, é muito beneficiado quando emprega-se a hipótese da viga ser excêntrica. Na maioria absoluta dos casos, para esse tipo de estrutura, as vigas são excêntricas em relação às lajes. A figura 3.4a mostra a hipótese geralmente empregada para o posicionamento das vigas em pavimentos e a figura 3.4b mostra a hipótese requerida.

$$K_{x,t} = \begin{bmatrix} \frac{GJ_t}{L} & -\frac{GJ_t}{L} & 0 & 0 \\ -\frac{GJ_t}{L} & \frac{GJ_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Como pode ser observado, à medida que o valor da constante de Weaver (g) diminui, a parcela relativa à flexão da matriz de rigidez do elemento de barra se aproxima daquela obtida de acordo com as hipóteses de **Euler-Bernoulli**, sendo completamente iguais para a situação limite onde $g=0$. O vetor de carregamentos nodais, supõe-se um momento torsor (T) e um carregamento vertical (q) uniformemente distribuídos e esforços axiais N_1 e N_2 , pode ser escrito na forma:

$$F^T = \left[\frac{qL}{2} \quad -\frac{qL^2}{12} \quad \frac{qL}{2} \quad -\frac{qL^2}{12} \quad \frac{TL}{2} \quad \frac{TL}{2} \quad N_1 \quad N_2 \right] \quad (3.16)$$

3.1.5 TRAVAMENTO OU BLOQUEIO DE SOLUÇÃO

O elemento de flexão de vigas segundo a teoria de Timoshenko obtido da forma como mostrado, ou seja, através da imposição das condições de equilíbrio entre momentos e esforços cortantes é livre do fenômeno do bloqueio de solução, ou travamento.

O travamento consiste basicamente no excessivo enrijecimento da solução para relações pequenas entre a altura da viga e seu comprimento. Imaginando-se uma seção retangular de base b e altura h , a constante de Weaver pode ser rescrita por:

$$g = \frac{E}{2fG} \left(\frac{h}{L} \right)^2 \quad (3.17)$$

Percebe-se claramente que na situação limite onde $(h/L) \rightarrow 0$, $g \rightarrow 0$ e a matriz de rigidez expressa na equação (3.14) tende para a matriz de rigidez considerando-se as hipóteses de Euler, dessa forma o travamento está afastado. Maiores detalhes sobre a

A partir da formulação do método dos elementos finitos via energia potencial integrando-se as tensões na altura do elemento pode-se escrever a energia de deformação por:

$$U = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{1}{r}\right)^2 dx + \frac{fGA}{2} \int_0^L (\gamma)^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^L \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + \frac{GJ_t}{2} \int_0^L \left(\frac{d\beta_x}{dx}\right)^2 dx \quad (3.12)$$

onde J_t é o momento de inércia à torção.

Aplicando-se o princípio da mínima energia (eq. (3.13)) na expressão da energia de deformação e efetuando-se a integração ao longo do comprimento do elemento é obtida finalmente a matriz de rigidez para a viga de Timoshenko.

Apresenta-se na expressão (3.14), por simplicidade, apenas a parcela da matriz de rigidez relacionada com a deformação por flexão e cisalhamento, as parcelas relativas a deformação por torção e deformação axial, embora já bastante conhecidas e extremamente simples, são agrupadas na eq.(3.15) apenas para tornar o texto mais completo. Evidentemente, em se pretendendo a implementação numéricas dessas matrizes há de se fazer o adequado mapeamento dos graus de liberdade.

$$\frac{d\Pi}{dV_i} = 0 \quad (3.13)$$

onde $\Pi=U+W$; W é a energia potencial externa e V_i são os graus de liberdade nodais.

$$K_f = \frac{EI}{1+2g} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(2+g) & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(1-g) \\ -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(1-g) & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L}(2+g) \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

trabalho a obtenção das expressões da curvatura e da distorção ao longo do comprimento do elemento, explicita-se os valores das constantes nas eqs.(3.8).

$$a_1 = \frac{1}{L^3(1+2g)}(2w_1 - 2w_2 - L\beta_1 - L\beta_2) \quad (3.8a)$$

$$a_2 = \frac{1}{L^2(1+2g)}(-3w_1 + 3w_2 + L\beta_1 - L\beta_2) \quad (3.8b)$$

$$a_3 = \frac{1}{L(1+2g)}(-2w_1 + 2w_2 - L(1+g)\beta_1 + Lg\beta_2) \quad (3.8c)$$

$$a_4 = w_1 \quad (3.8d)$$

$$b_1 = \frac{u_2 - u_1}{L} \quad (3.8e)$$

$$b_2 = u_1 \quad (3.8f)$$

$$c_1 = \frac{\beta_{x2} - \beta_{x1}}{L} \quad (3.8g)$$

$$c_2 = \beta_{x1} \quad (3.8h)$$

A curvatura da seção pode então ser escrita diretamente em função dos parâmetros nodais conforme eq.(3.9), assim:

$$\frac{1}{r} = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{r} = -6\frac{(L-2x)}{(1+2g)L^3}w_1 + 2\frac{\left[2L\left(1+\frac{g}{2}\right)-3x\right]}{(1+2g)L^2}\beta_1 + 6\frac{(L-2x)}{(1+2g)L^3}w_2 + 2\frac{[L(1-g)-3x]}{(1+2g)L^2}\beta_2 \quad \dots(3.10)$$

Partindo-se da expressão (3.6) e utilizando-se a constante de Weaver, pode-se escrever a distorção da seguinte forma:

$$\gamma = g \frac{[2(w_2 - w_1) - L(\beta_1 + \beta_2)]}{[L(1+2g)]} \quad (3.11)$$

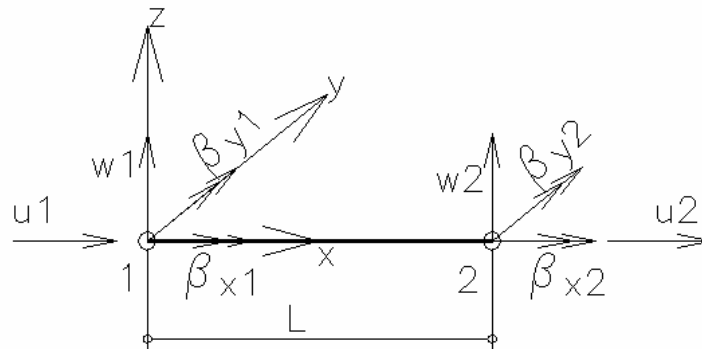


Figura 3.3: Elemento de barra.

Percebe-se que os deslocamentos verticais, os horizontais e as rotações β_x são independentes entre si. A equação de equilíbrio (3.2c) que expressa a relação entre o esforço cortante e os deslocamentos verticais w pode ser rescrita, empregando-se a eq.(3.3b), na seguinte forma:

$$-EI \frac{d^3 w}{dx^3} = f GA \gamma \quad (3.5)$$

Dessa forma torna-se possível escrever a relação entre a distorção γ e os deslocamentos verticais w , assim:

$$\gamma = -\frac{6EI}{fGA} a_1 \rightarrow \gamma = -gL^2 a_1 \quad (3.6)$$

onde $g = \frac{6EI}{fGAL^2}$ é a constante de Weaver.

As rotações β são escritas a partir da eq. (3.1c), assim:

$$\beta(x) = -3a_1 x^2 - 2a_2 x - a_3 - gL^2 a_1 \quad (3.7)$$

As constantes a_i , b_i e c_i dos polinômios devem ser determinadas a partir da imposição das condições de contorno nos nós do elemento. Por ser de interesse ao

3.1.3-ELEMENTO DE BARRA

A maneira mais simples de obter-se um elemento de barra formulado de acordo com as hipóteses de **Timoshenko** é aquela onde empregam-se funções aproximadoras lineares tanto para os deslocamentos verticais quanto para as rotações. Oñate (1992) apresenta um elemento finito obtido com aproximação linear para os campos de deslocamentos e rotações. Entretanto esse elemento apresenta o problema de travamento para vigas poucos deformáveis por esforço cortante.

Gere & Weaver (1981) apresentam uma dedução da matriz de rigidez para a viga de Timoshenko que não apresenta o fenômeno do travamento mediante o emprego do denominado método direto (aplicações de deslocamentos e rotações unitárias nas extremidades do elemento), o que nada mais é do que a solução exata da equação diferencial da flexão de vigas. Neste trabalho a matriz de rigidez do elemento será deduzida com as mesmas hipóteses apresentadas por Gere, porém será empregado o método da energia para obter-se as funções de curvatura e de distorção ao longo do comprimento do elemento.

3.1.4-DEDUÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO

Suponha-se o elemento de barra ilustrado pela figura 3.3 com os seguintes graus de liberdade: duas rotações e duas translações por nó. Os deslocamentos verticais, w , ao longo do elemento são descritos por um polinômio de terceiro grau conforme a eq.(3.4a), os deslocamentos horizontais e a rotação devida a torção são descritos por um polinômio linear. Admite-se que a distorção no elemento seja constante.

$$w = a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 \quad (3.4a)$$

$$u = b_1 x + b_2 \quad (3.4b)$$

$$\beta_x = c_1 x + c_2 \quad (3.4c)$$

onde w é o deslocamento vertical.

A partir da verificação das condições de equilíbrio de um elemento com comprimento infinitesimal, dx , conforme ilustrado pela figura 3.2 pode-se escrever as relações (3.2).

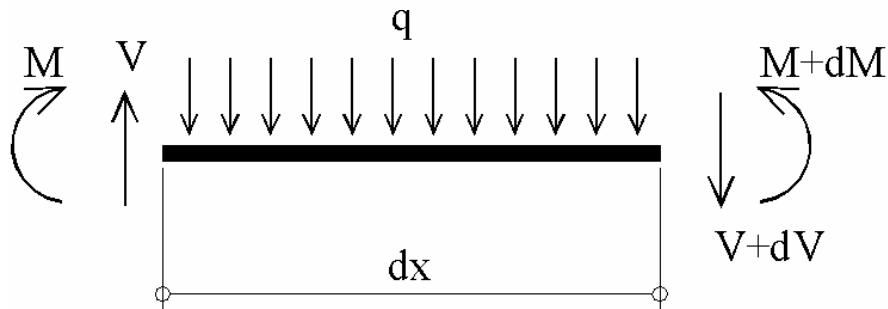


Figura 3.2: Equilíbrio de elemento de viga.

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad (3.2a)$$

$$\frac{dM}{dx} = V \quad (3.2b)$$

$$V = -EI \frac{d^3 w}{dx^3} \quad (3.2c)$$

São válidas as seguintes relações constitutivas, admitindo-se a hipótese de material com comportamento elástico-linear:

$$M = EI \frac{d\beta}{dx} \rightarrow M = EI \left(\frac{-d^2 w}{dx^2} + \frac{d\gamma}{dx} \right) \rightarrow \gamma = cte \rightarrow M = -EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.3a)$$

$$V = fGA\gamma = fGA \left(\frac{dw}{dx} + \beta \right) \quad (3.3b)$$

$$V = EI \frac{d^2 \beta}{dx^2} \quad (3.3c)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal; G é o módulo de elasticidade transversal, I é o momento de inércia à flexão da seção; A é área da seção transversal e f é um fator que leva em conta que γ é um valor médio da distorção da seção, para seções retangulares f assume o valor de $5/6$. Oñate (1992) apresenta a dedução de f .

eixo da barra, constituindo-se assim numa melhor aproximação do comportamento real das vigas, a distorção da seção ocorre devido a deformação por esforço cortante. Na realidade a deformação da seção seria melhor representada por uma superfície parabólica, empregando-se a teoria de **Timoshenko** admite-se que a seção deformada esteja contida num plano pela deformada real. O efeito da distorção é mais pronunciado em vigas onde a relação entre comprimento e altura é pequeno, à medida que essa relação aumenta a distorção diminui e as hipóteses da teoria de **Euler-Bernoulli** passam a ser bastante representativas do campo de deslocamentos reais da viga. A figura 3.1 ilustra a cinemática da viga. As demais hipóteses são as mesmas da teoria de **Euler-Bernoulli**, a saber:

- a deformação perpendicular ao eixo da viga é desprezível - $\varepsilon_z = 0$;
- as tensões normais ao eixo da barra são desprezíveis - $\sigma_z = 0$;
- os deslocamentos horizontais do eixo da barra são nulos.

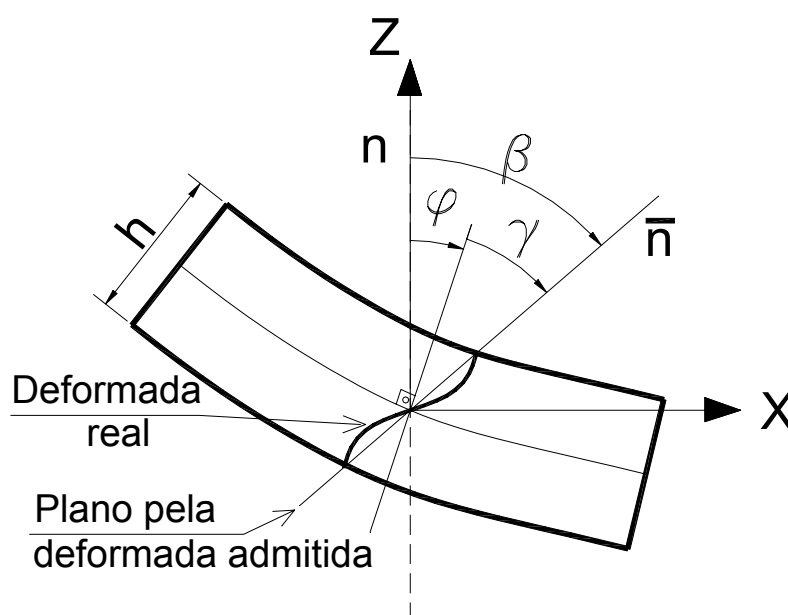


Figura 3.1: Cinemática da barra – teoria de Timoshenko.

Da cinemática da barra pode-se afirmar:

$$\beta = \varphi + \gamma \quad (3.1a)$$

$$\varphi = -\frac{dw}{dx} = -w_{,x} \quad (3.1b)$$

$$\beta = -w_{,x} + \gamma \quad (3.1c)$$

3-MODELAGEM DE PAVIMENTOS – ELEMENTOS LINEARES

3.1-MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO DE BARRA

3.1.1-INTRODUÇÃO

A matriz de rigidez do elemento de barra desenvolvida nessa seção é obtida a partir da solução exata da equação diferencial de flexão de barras, nesse caso não faz sentido falar-se em método dos elementos finitos para sua dedução, uma vez que a função empregada para descrever os deslocamentos da viga é a solução exata da referida equação. A matriz de rigidez será então obtida de acordo com a análise matricial de estruturas.

Neste trabalho emprega-se elemento de barra com 2 nós e 4 graus de liberdade por nó: 2 translações e duas rotações. Insere-se na formulação convencional de vigas o grau de liberdade relativo aos deslocamentos axiais. As vigas podem ser consideradas excêntricas em relação ao plano médio das lajes. A formulação é fundamentada na teoria de **Timoshenko**, tendo assim um campo de aplicação mais amplo do que aquelas desenvolvidas a partir das hipóteses de **Euler-Bernoulli**. No item 3.3 apresenta-se metodologia para a consideração da excentricidade da barra.

3.1.2-FLEXÃO DE BARRAS: TEORIA DE TIMOSHENKO

A hipótese fundamental da teoria de flexão de vigas de Timoshenko é que as seções planas permanecem planas após a deformação porém não mais ortogonais ao

Neste exemplo, o elemento mostrou boa performance apresentando erro de 1% para uma malha de 32 elementos, mostrou também convergência para a resposta exata a medida que se refina a malha.

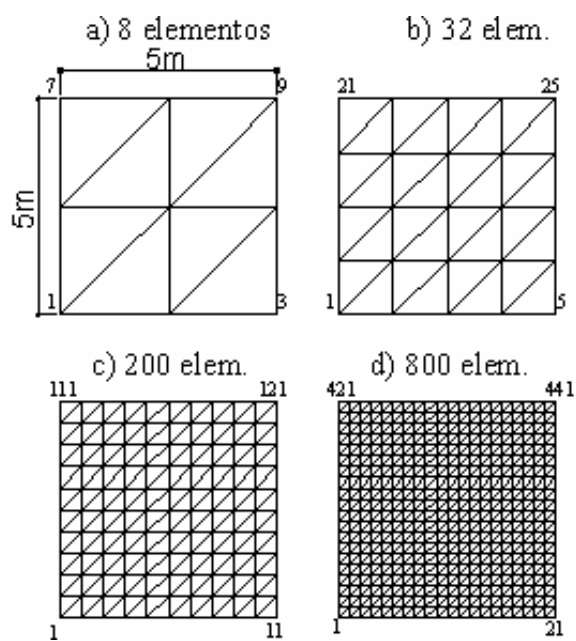


Figura 4.1: Malhas de elementos finitos.

vetor não é consistente com a formulação do elemento, porém testes que foram elaborados pelo próprio autor demonstram que esse vetor conduz a bons resultados. Assim:

$$F_e = \{Q \ 0 \ 0 \ Q \ 0 \ 0 \ Q \ 0 \ 0\}^T \quad (4.89)$$

onde $Q = q A/3$.

Sydenstricker et. Al. (1995) apresentam, em seu artigo, propostas para a obtenção de um vetor de forças nodais consistente com a formulação do elemento DST. Para o presente trabalho, o vetor de forças nodais equivalentes será o da eq. (4.89), o principal objetivo deste trabalho é a análise não-linear de pavimentos de edifícios, onde o vetor de esforços residuais será obtido de maneira consistente com a formulação.

4.7-EXEMPLO

Neste exemplo, calcula-se, empregando o elemento DST, os deslocamentos no centro de uma placa quadrada de $5 \times 5 \text{m}^2$ apoiada nos seus quatro lados submetida a um carregamento uniformemente distribuído de intensidade de 10kN/m^2 . As características do material são as seguintes: módulo de elasticidade longitudinal: 2885kN/cm^2 , coeficiente de Poisson: 0,30.

Pretendendo-se investigar a performance e a convergência do elemento empregado, a placa foi discretizada em 4 diferentes malhas de elementos triangulares, sendo a primeira com 8 elementos, a segunda com 32, a terceira com 200 elementos e a quarta malha com 800 elementos, conforme ilustrado pela figura 4.5. O valor exato do deslocamento no ponto central da placa é de $17,7607 \text{mm}$ (Timoshenko (1959) - teoria de Kirchhoff), os deslocamentos obtidos em cada uma das malhas, bem como os erros relativos são ilustrados pela tabela 4.1.

Tabela 4.1: Resultados obtidos.

Malha (elems.)	desl.(mm)	erro %
8	15.895	-15.28
32	18.571	-1.01
200	18.680	-0.43
800	18.787	0.14

A matriz de rigidez completa do elemento DST é obtida somando-se as parcelas relativas à flexão e ao cisalhamento.

4.5-DETERMINAÇÃO DOS ESFORÇOS SOLICITANTES

Os esforços solicitante são determinado de maneira direta em qualquer ponto pertencente ao domínio do elemento, utilizando-se os vetores B_b e B_s . Os momentos fletores são determinados com o auxílio da equação (4.85) e os esforços cisalhantes são determinados pela eq. (4.86).

$$\begin{Bmatrix} M_x(\zeta, \eta) \\ M_y(\zeta, \eta) \\ M_{xy}(\zeta, \eta) \end{Bmatrix} = D_b B_b(\zeta, \eta) u \quad (4.85)$$

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \end{Bmatrix} = D_s B_s u \quad (4.86)$$

Conforme pode-se notar, os esforços cisalhantes são constantes no elemento o que é perfeitamente consistente, pois são a primeira derivada dos momentos fletores que possuem uma variação linear. Os esforços solicitantes nos nós do elemento podem ser determinados pelas equações acima ou pelas seguintes equações:

$$\begin{Bmatrix} M_{xi} \\ M_{yi} \\ M_{xyi} \end{Bmatrix} = K_b \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad i=1,3 \quad (4.87)$$

$$\begin{Bmatrix} T_{xi} \\ T_{yi} \end{Bmatrix} = K_s \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{Bmatrix} \quad i=1,3 \quad (4.88)$$

4.6-FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES

Segundo Batoz (1989) o vetor de esforços nodais do elemento DST é melhor representado por três cargas verticais aplicadas em cada um dos nós do elemento. Esse

Finalmente, a matriz de rigidez à flexão do elemento DST é fornecida pela expressão (4.80).

$$K_b = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} [\mathbf{B}_{b1}^T \zeta + \mathbf{B}_{b2}^T \eta + \mathbf{B}_{b2}^T] D_b [\mathbf{B}_{b1} \zeta + \mathbf{B}_{b2} \eta + \mathbf{B}_{b2}] d\zeta d\eta \quad (4.80)$$

4.4.4-MATRIZ DE RIGIDEZ: PARCELA DO CISALHAMENTO

A energia de deformação por cisalhamento de um elemento finito de placa é escrito pela eq. (4.26b), aqui repetida por comodidade:

$$U_s^e = \frac{1}{2} \int_A F^T [D_s] F dA \quad (4.81)$$

onde F é o vetor de distorções (FX e FY) e D_s é a matriz constitutiva do material integrada ao longo da espessura da placa conforme eq. (4.82).

$$[D]_s = \frac{E h c}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

com $c = 5/6$.

O vetor de distorções é escrito em função dos deslocamentos nodais conforme as expressões (4.62). Efetuando-se a transformação de coordenadas, substituindo-se F na equação (4.81) e minimizando-se o funcional de energia obtém-se a matriz de rigidez ao cisalhamento do elemento, assim:

$$K_s = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} [HF X^T \quad HF Y^T] D_s [HF X \quad HF Y] d\zeta d\eta \quad (4.83)$$

Efetuando-se a equação integral, a matriz de rigidez ao cisalhamento do elemento finito DST é finalmente fornecida por:

$$K_s = A [HF X^T \quad HF Y^T] D_s [HF X \quad HF Y] \quad (4.84)$$

$$Hx_{i,\zeta} = p_{xi1}\zeta + p_{xi2}\eta + p_{xi3} \quad (4.75a)$$

$$Hx_{i,\eta} = p_{yi1}\zeta + p_{yi2}\eta + p_{yi3} \quad (4.75b)$$

$$Hy_{i,\zeta} = q_{xi1}\zeta + q_{xi2}\eta + q_{xi3} \quad (4.75c)$$

$$Hy_{i,\eta} = q_{yi1}\zeta + q_{yi2}\eta + q_{yi3} \quad i=1,9 \quad (4.75d)$$

onde os termos p e q são constantes determinadas após a derivação das funções de forma.

A matriz B_b , que relaciona as curvaturas com o vetor de deslocamentos nodais, pode ser rescrita da seguinte forma:

$$B_b(\zeta, \eta) = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \langle p_{i1}\zeta + p_{i2}\eta + p_{i3} \rangle \\ \langle q_{i1}\zeta + q_{i2}\eta + q_{i3} \rangle \\ \langle pq_{i1}\zeta + pq_{i2}\eta + pq_{i3} \rangle \end{bmatrix} \quad i=1,9 \quad (4.76)$$

onde:

$$p_{ij} = y_{31}p_{xij} + y_{12}p_{yij}$$

$$q_{ij} = -x_{31}q_{xij} - x_{12}q_{yij} \quad (4.77a,b,c)$$

$$pq_{ij} = -x_{31}p_{xij} - x_{12}p_{yij} + y_{31}q_{xij} + y_{12}q_{yij} \quad (i=1,9; j=1,3)$$

Efetuada-se a transformação de coordenadas, substituindo-se χ na eq. (4.71) e minimizando o funcional de energia obtém-se a matriz de rigidez à flexão do elemento que é fornecida pela seguinte expressão:

$$K_b = 2A \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{B}_b^T D_b B_b d\zeta d\eta \quad (4.78)$$

A matriz B_b pode ser escrita na forma da eq. (4.79) para facilitar as operações algébricas, assim:

$$B_b = B_{b1}\zeta + B_{b2}\eta + B_{b3} \quad (4.79)$$

$$\begin{aligned}
Hy_7 &= \sum_{K=4}^6 N_k C_k H_s(k,7) \\
Hy_8 &= \frac{1}{2} N_4 C_4 S_4 + \frac{1}{2} N_5 C_5 S_5 + \sum_{K=4}^6 N_k C_k H_s(k,8) \\
Hy_9 &= N_3 + \frac{1}{2} N_4 S_4^2 + \frac{1}{2} N_5 S_5^2 + \sum_{K=4}^6 N_k C_k H_s(k,9)
\end{aligned} \tag{4.70a à 4.70o}$$

4.4.3-MATRIZ DE RIGIDEZ: PARCELA DA FLEXÃO

A energia de deformação por flexão de um elemento finito de placa é escrito pela expressão (4.26a), aqui repetida por comodidade:

$$U_b^e = \frac{1}{2} \int_A \chi^t [D_b] \chi dA \tag{4.71}$$

onde χ é o vetor de curvaturas já definido pelas eqs (4.26) e D_b é a matriz constitutiva do material integrada ao longo da espessura da placa conforme eq. (4.72).

$$[D]_b = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{4.72}$$

O vetor de curvaturas pode ser escrito em função dos deslocamentos nodais por:

$$\chi = B_b(\zeta, \eta) u \tag{4.73}$$

com:

$$B_b(\zeta, \eta) = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} y_{31} Hx_{i,\zeta} + y_{12} Hx_{i,\eta} \\ -x_{31} Hy_{i,\zeta} - x_{12} Hy_{i,\eta} \\ -x_{31} Hx_{i,\zeta} - x_{12} Hx_{i,\eta} + y_{31} Hy_{i,\zeta} + y_{12} Hy_{i,\eta} \end{bmatrix}_{i=1,9} \tag{4.74}$$

As derivadas das funções de forma ($Hx_{i,\zeta}$, $Hx_{i,\eta}$, $Hx_{i,\eta}$, $Hx_{i,\zeta}$) podem ser descritas convenientemente por um polinômio de primeiro grau conforme eqs (4.75).

$$\beta_y = \sum_{i=1}^3 N_i \beta_{yi} + \frac{1}{2} \sum_{k=4}^6 N_k S_k (C_k \beta_{xi} + S_k \beta_{yi} + C_k \beta_{xj} + S_k \beta_{yj}) + \sum_{k=4}^6 N_k S_k H_s(k) u \quad (4.68b)$$

Que podem ser escritas na forma simplificada:

$$\beta_x = Hx_i(\zeta, \eta) u_i \quad ; \quad \beta_y = Hy_i(\zeta, \eta) u_i \quad i=1, \dots, 9 \quad (4.69a,b)$$

onde:

$$Hx_1 = - \sum_{K=4}^6 N_k S_k H_s(k,1)$$

$$Hx_2 = N_1 + \frac{1}{2} N_5 C_5^2 + \frac{1}{2} N_6 C_6^2 - \sum_{K=4}^6 N_k S_k H_s(k,2)$$

$$Hx_3 = \frac{1}{2} N_5 C_5 S_5 + \frac{1}{2} N_6 C_6 S_6 - \sum_{K=4}^6 N_k S_k H_s(k,3)$$

$$Hx_4 = - \sum_{K=4}^6 N_k S_k H_s(k,4)$$

$$Hx_5 = N_2 + \frac{1}{2} N_6 C_6^2 + \frac{1}{2} N_4 C_4^2 - \sum_{K=4}^6 N_k S_k H_s(k,5)$$

$$Hx_6 = \frac{1}{2} N_6 C_6 S_6 + \frac{1}{2} N_4 C_4 S_4 - \sum_{K=4}^6 N_k S_k H_s(k,6)$$

$$Hx_7 = - \sum_{K=4}^6 N_k S_k H_s(k,7)$$

$$Hx_8 = N_3 + \frac{1}{2} N_4 C_4^2 + \frac{1}{2} N_5 C_5^2 - \sum_{K=4}^6 N_k S_k H_s(k,8)$$

$$Hx_9 = \frac{1}{2} N_4 C_4 S_4 + \frac{1}{2} N_5 C_5 S_5 - \sum_{K=4}^6 N_k S_k H_s(k,9)$$

$$Hy_1 = \sum_{K=4}^6 N_k C_k H_s(k,1)$$

$$Hy_2 = \frac{1}{2} N_5 C_5 S_5 + \frac{1}{2} N_6 C_6 S_6 + \sum_{K=4}^6 N_k C_k H_s(k,2)$$

$$Hy_3 = N_1 + \frac{1}{2} N_5 S_5^2 + \frac{1}{2} N_6 S_6^2 + \sum_{K=4}^6 N_k C_k H_s(k,3)$$

4.4.2-DETERMINAÇÃO DAS ROTAÇÕES

As rotações da seção normal da placa segundo as direções x e y são aproximadas empregando-se um polinômio de segundo grau, o que naturalmente requer seis parâmetros nodais para cada uma das equações. Após a imposição das condições de equilíbrio de momentos e de compatibilidade de deslocamentos, os graus de liberdade adicionais foram eliminados conforme descrito no item 4.4.1.

Para a montagem da matriz de rigidez à flexão do elemento faz-se necessário escrever as rotações β_x e β_y em funções dos graus de liberdade do elemento na sua configuração final. Assim, as rotações são escritas na forma:

$$\beta_x = \sum_{i=1}^3 N_i \beta_{xi} + \sum_{k=4}^6 N_k \beta_{xk} \quad (4.64a)$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^3 N_i \beta_{yi} + \sum_{k=4}^6 N_k \beta_{yk} \quad (4.64b)$$

São válidas as seguintes expressões:

$$\beta_{xk} = C_k \beta_{nk} - S_k \beta_{sk} \quad (4.65a)$$

$$\beta_{yk} = S_k \beta_{nk} + C_k \beta_{sk} \quad (4.65b)$$

$$\beta_{nk} = \frac{1}{2} (c_k \beta_{xi} + s_k \beta_{yi} + c_k \beta_{xj} + s_k \beta_{yj}) \quad (4.66)$$

$$\beta_{sk} = H_s(k, i) u \quad (4.67)$$

Substituindo-se as expressões (4.65), (4.66) e (4.67) nas eqs. (4.64) obtém-se, finalmente, as expressões das rotações β_x e β_y em função dos graus de liberdade do elemento (equações 4.68).

$$\beta_x = \sum_{i=1}^3 N_i \beta_{xi} + \frac{1}{2} \sum_{k=4}^6 N_k C_k (C_k \beta_{xi} + S_k \beta_{yi} + C_k \beta_{xj} + S_k \beta_{yj}) - \sum_{k=4}^6 N_k S_k H_s(k, i) u \quad (4.68a)$$

Os termos X_k que estão em função dos nove graus de liberdade, são escritos por:

$$X_k = \frac{3}{2l_{ij}}(w_i - w_j) - \frac{3}{2}S_k \left(\sum_{i=1}^3 ax'(i) \beta_{xi} + \sum_{i=1}^3 ay'(i) \beta_{yi} \right) + \frac{3}{2}C_k \left(\sum_{i=1}^3 bx'(i) \beta_{xi} + \sum_{i=1}^3 by'(i) \beta_{yi} \right) + \frac{1}{4}S_k \beta_{xi} - \frac{1}{4}C_k \beta_{yi} + \frac{1}{4}S_k \beta_{xj} - \frac{1}{4}C_k \beta_{yj} \quad (4.59)$$

A eq. (4.59) pode ser escrita na forma matricial por:

$$X = \lambda u \quad (4.60)$$

onde: u é o vetor que contém os deslocamentos correspondentes aos graus de liberdade nodais do elemento e λ é uma matriz de coeficientes com dimensão 3×9 .

Considerando-se $H=A^{-1}\beta_s$, será escrito na forma matricial, em função dos graus de liberdade nodais, por:

$$\beta_s = H \lambda u \Leftrightarrow \beta_s = H_s(k, i) u \quad (4.61)$$

onde H_s é uma matriz de dimensão 3×9 que relaciona β_{s4} , β_{s5} , e β_{s6} com o vetor u . Para evitar possíveis complicação ao relacionar-se os termos da matriz H_s com os respectivos termos β_s , impõe-se $k=4,5,6$ e $i=1, \dots, 9$.

Substituindo-se a eq. (4.61) nas eqs (4.59), as distorções FX e FY ficam completamente determinadas (eqs (4.62)) em função dos graus de liberdade do elemento em sua configuração final.

$$FX = HFX u \quad (4.62a)$$

$$FY = HFY u \quad (4.62b)$$

onde:

$$HFX^T = \begin{bmatrix} \sum_{k=4}^6 Hs(k,1) as'(k) \\ ax'(1) + \sum_{k=4}^6 Hs(k,2) as'(k) \\ ay'(1) + \sum_{k=4}^6 Hs(k,3) as'(k) \\ \sum_{k=4}^6 Hs(k,4) as'(k) \\ ax'(2) + \sum_{k=4}^6 Hs(k,5) as'(k) \\ ay'(2) + \sum_{k=4}^6 Hs(k,6) as'(k) \\ \sum_{k=4}^6 Hs(k,7) as'(k) \\ ax'(3) + \sum_{k=4}^6 Hs(k,8) as'(k) \\ ay'(3) + \sum_{k=4}^6 Hs(k,9) as'(k) \end{bmatrix} \quad HFY^T = \begin{bmatrix} \sum_{k=4}^6 Hs(k,1) bs'(k) \\ bx'(1) + \sum_{k=4}^6 Hs(k,2) bs'(k) \\ by'(1) + \sum_{k=4}^6 Hs(k,3) bs'(k) \\ \sum_{k=4}^6 Hs(k,4) bs'(k) \\ bx'(2) + \sum_{k=4}^6 Hs(k,5) bs'(k) \\ by'(2) + \sum_{k=4}^6 Hs(k,6) bs'(k) \\ \sum_{k=4}^6 Hs(k,7) bs'(k) \\ bx'(3) + \sum_{k=4}^6 Hs(k,8) bs'(k) \\ by'(3) + \sum_{k=4}^6 Hs(k,9) bs'(k) \end{bmatrix} \quad (4.63a,b)$$

Aplicando-se a eq. (4.53) para os nós i, j e substituindo-se na eq. (4.38) (aqui repetida por comodidade – eq. (4.54)) obtém-se a eq. (4.55) que é válida para cada lado k do elemento.

$$(w_{,s})_k = -\frac{3}{2l_{ij}}(w_i - w_j) - \frac{1}{4}(w_{,s})_i - \frac{1}{4}(w_{,s})_j \quad (4.54)$$

$$(w_{,s})_k = -\frac{3}{2l_{ij}}(w_i - w_j) - \frac{1}{4}C_k FY + \frac{1}{4}C_k y_i + \frac{1}{4}S_k FX - \frac{1}{4}S_k x_i + \\ -\frac{1}{4}C_k FY + \frac{1}{4}C_k y_j + \frac{1}{4}S_k FX - \frac{1}{4}S_k x_j \quad (4.55)$$

Substituindo-se a eq. (4.55) na (4.37) obtém-se, para cada lado “ k ” do elemento:

$$(\beta_s)_k - \frac{3}{2l_{ij}}(w_i - w_j) + \frac{3}{2}S_k FX - \frac{3}{2}C_k FY + \frac{1}{4}C_k \beta_{y_i} - \frac{1}{4}S_k \beta_{x_i} - \frac{1}{4}S_k \beta_{x_j} + \frac{1}{4}C_k \beta_{y_i} = 0 \\ \dots(4.56)$$

A introdução dos valores de FX e FY (eqs (4.49)) na equação acima conduz a um sistema de três equações (eqs. (4.57)) em termos de β_{s4}, β_{s5} e β_{s6} .

$$\begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ A_{54} & A_{55} & A_{56} \\ A_{64} & A_{65} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{s4} \\ \beta_{s5} \\ \beta_{s6} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{Bmatrix} \quad (4.57)$$

Os coeficientes A_{ij} dependem da geometria do elementos e das propriedades do material e são determinados por:

$$A_{kk} = 1 + \frac{3}{2}S_k as'(k) - \frac{3}{2}C_k bs'(k) \quad (4.58a)$$

$$A_{kk'} = \frac{3}{2}S_k as'(k') - \frac{3}{2}C_k bs'(k') \quad (4.58b)$$

para $k=4, k'=5$ ou 6 etc...

$$bx' = \left\{ \begin{array}{l} \left[bx_1 + \frac{bx_5 c_5^2}{2} + \frac{by_5 c_5 s_5}{2} + \frac{bx_6 c_6^2}{2} + \frac{by_6 c_6 s_6}{2} \right] \\ \left[bx_2 + \frac{bx_4 c_4^2}{2} + \frac{by_6 c_6 s_6}{2} + \frac{bx_6 c_6^2}{2} + \frac{by_4 c_4 s_4}{2} \right] \\ \left[bx_3 + \frac{bx_5 c_5^2}{2} + \frac{by_5 c_5 s_5}{2} + \frac{bx_4 c_4^2}{2} + \frac{by_4 c_4 s_4}{2} \right] \end{array} \right\}^T \quad (4.50d)$$

$$by' = \left\{ \begin{array}{l} \left[by_1 + \frac{bx_6 c_6 s_6}{2} + \frac{by_5 s_5^2}{2} + \frac{by_6 s_6^2}{2} + \frac{bx_5 c_5 s_5}{2} \right] \\ \left[by_2 + \frac{bx_4 c_4 s_4}{2} + \frac{bx_6 c_6 s_6}{2} + \frac{by_6 s_6^2}{2} + \frac{by_4 s_4^2}{2} \right] \\ \left[by_3 + \frac{by_5 s_5^2}{2} + \frac{bx_4 c_4 s_4}{2} + \frac{bx_5 c_5 s_5}{2} + \frac{by_4 s_4^2}{2} \right] \end{array} \right\}^T \quad (4.50e)$$

$$bs' = \left\{ \begin{array}{l} [by_4 c_4 - bx_4 s_4] \\ [-bx_5 s_5 + by_5 c_5] \\ [-bx_6 s_6 + by_6 c_6] \end{array} \right\}^T \quad (4.50f)$$

Os termos relativos as rotações tangenciais, β_s , são eliminados impondo-se a equação de compatibilidade expressa por (4.38), seguindo o roteiro descrito a seguir.

Inicialmente, escreve-se:

$$\left. \begin{array}{l} w_{,x} + \beta_x = FX \\ w_{,y} + \beta_y = FY \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} w_{,x} = FX - \beta_x \\ w_{,y} = FY - \beta_y \end{array} \quad (4.51a,b)$$

A partir da matriz de rotação de coordenadas (eq. (4.39)), pode-se escrever:

$$w_{,s} = C_k w_{,y} - S_k w_{,x} \quad (4.52)$$

Substituindo-se as eqs (4.51) na equação acima obtém-se a expressão (4.53), que é válida para qualquer ponto pertencente ao lado “ij” do elemento.

$$w_{,s} = C_k FY - C_k \beta_y - S_k FX + S_k \beta_x \quad (4.53)$$

$$\beta_{n5} = \frac{(C_5 \beta x_1 + S_5 \beta y_1 + C_5 \beta x_3 + S_5 \beta y_3)}{2} \quad (4.48b)$$

$$\beta_{n6} = \frac{(C_6 \beta x_1 + S_6 \beta y_1 + C_6 \beta x_2 + S_6 \beta y_2)}{2} \quad (4.48c)$$

Substituindo-se as eqs (4.48) nas eqs (4.47) obtém-se:

$$FX = \sum_{i=1}^3 ax'(i) \beta x_i + \sum_{i=1}^3 ay'(i) \beta y_i + \sum_{k=4}^6 as'(k) \beta_{sk} \quad (4.49a)$$

$$FY = \sum_{i=1}^3 bx'(i) \beta x_i + \sum_{i=1}^3 by'(i) \beta y_i + \sum_{k=4}^6 bs'(k) \beta_{sk} \quad (4.49b)$$

onde:

$$ax' = \left\{ \begin{array}{l} \left[ax_1 + \frac{ax_6 c_6^2}{2} + \frac{ay_5 c_5 s_5}{2} + \frac{ax_5 c_5^2}{2} + \frac{ay_6 c_6 s_6}{2} \right] \\ \left[ax_2 + \frac{ax_4 c_4^2}{2} + \frac{ay_6 c_6 s_6}{2} + \frac{ax_6 c_6^2}{2} + \frac{ay_4 c_4 s_4}{2} \right] \\ \left[ax_3 + \frac{ax_5 c_5^2}{2} + \frac{ay_5 c_5 s_5}{2} + \frac{ax_4 c_4^2}{2} + \frac{ay_4 c_4 s_4}{2} \right] \end{array} \right\}^T \quad (4.50a)$$

$$ay' = \left\{ \begin{array}{l} \left[ay_1 + \frac{ax_6 c_6 s_6}{2} + \frac{ay_5 s_5^2}{2} + \frac{ay_6 s_6^2}{2} + \frac{ax_5 c_5 s_5}{2} \right] \\ \left[ay_2 + \frac{ax_4 c_4 s_4}{2} + \frac{ax_6 c_6 s_6}{2} + \frac{ay_6 s_6^2}{2} + \frac{ay_4 s_4^2}{2} \right] \\ \left[ay_3 + \frac{ay_5 s_5^2}{2} + \frac{ax_4 c_4 s_4}{2} + \frac{ax_5 c_5 s_5}{2} + \frac{ay_4 s_4^2}{2} \right] \end{array} \right\}^T \quad (4.50b)$$

$$as' = \left\{ \begin{array}{l} [ay_4 c_4 - ax_4 s_4] \\ [-ax_5 s_5 + ay_4 c_5] \\ [-ax_6 s_6 + ay_6 c_6] \end{array} \right\}^T \quad (4.50c)$$

onde :

$$ax(i) = \frac{D_f}{D_c} \left(f_{xxi} + \frac{1-\nu}{2} f_{yyi} \right) \quad (4.45a)$$

$$ay(i) = \frac{D_f}{D_c} \frac{1+\nu}{2} f_{xyi} \quad (4.45b)$$

$$bx(i) = \frac{D_f}{D_c} \frac{1+\nu}{2} f_{xyi} \quad (4.45c)$$

$$by(i) = \frac{D_f}{D_c} \left(f_{yyi} + \frac{1-\nu}{2} f_{xxi} \right) \quad (4.45d)$$

Através da relação (4.39), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \beta_{x_k} &= C_k \beta_{n_k} - S_k \beta_{s_k} \\ \beta_{y_k} &= S_k \beta_{n_k} + C_k \beta_{s_k} \end{aligned} \quad (4.46a,b)$$

onde: k se refere aos nós 4,5 e 6 do elemento.

Substituindo-se as eqs. (4.46) nas eqs (4.44) é possível escrever-se:

$$\begin{aligned} FX &= \sum_{i=1}^3 ax(i) \beta_{xi} + \sum_{i=1}^3 ay(i) \beta_{yi} + \sum_{k=4}^6 ax(k) (C_k \beta_{nk} - S_k \beta_{sk}) + \sum_{k=4}^6 ay(k) (S_k \beta_{nk} + C_k \beta_{sk}) \\ FY &= \sum_{i=1}^3 bx(i) \beta_{xi} + \sum_{i=1}^3 by(i) \beta_{yi} + \sum_{k=4}^6 bx(k) (C_k \beta_{nk} - S_k \beta_{sk}) + \sum_{k=4}^6 by(k) (S_k \beta_{nk} + C_k \beta_{sk}) \end{aligned} \quad \dots (4.47a,b)$$

Observe-se que as equações acima estão escritas em função das rotações dos nós localizados nos cantos do elemento além das rotações normal e tangencial do ponto médio de cada lado. Pretende-se eliminar as rotações β_n e β_s , para tanto a condição de compatibilidade de rotações expressa pela eq. (4.35), pode ser escrita explicitamente para os nós 4,5 e 6, assim:

$$\beta_{n4} = \frac{(C_4 \beta_{x_2} + S_4 \beta_{y_2} + C_4 \beta_{x_3} + S_4 \beta_{y_3})}{2} \quad (4.48a)$$

$$\beta_{x,xx} = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} 4y_{31}^2 + 8y_{31}y_{12} + 4y_{12}^2 \\ 4y_{31}^2 \\ 8y_{31}y_{12} \\ 8y_{31}y_{12} \\ -8y_{31}y_{12} - 8y_{12}^2 \\ -8y_{31}^2 - 8y_{31}y_{12} \end{bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \beta_{x1} \\ \beta_{x2} \\ \beta_{x3} \\ \beta_{x4} \\ \beta_{x5} \\ \beta_{x6} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \beta_{x,xx} = f_{xxi} \beta_{xi} \quad (4.42a)$$

$$\beta_{x,xy} = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} -4y_{31}x_{31} + 4(-y_{31}x_{12} - y_{12}x_{31}) - 4y_{12}x_{12} \\ -4y_{31}x_{31} \\ -4y_{12}x_{12} \\ 4(-y_{31}x_{12} - y_{12}x_{31}) \\ -4(-y_{31}x_{12} - y_{12}x_{31}) + 8y_{12}x_{12} \\ -4(-y_{31}x_{12} - y_{12}x_{31}) \end{bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \beta_{x1} \\ \beta_{x2} \\ \beta_{x3} \\ \beta_{x4} \\ \beta_{x5} \\ \beta_{x6} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \beta_{x,xy} = f_{xyi} \beta_{xi} \quad (4.42b)$$

$$\beta_{x,yy} = \frac{1}{4A^2} \begin{bmatrix} 4x_{31}^2 + 8x_{31}x_{12} + 4x_{12}^2 \\ 4x_{31}^2 \\ 8x_{31}x_{12} \\ 8x_{31}x_{12} \\ -8x_{31}x_{12} - 8x_{12}^2 \\ -8x_{31}^2 - 8x_{31}x_{12} \end{bmatrix}^t \begin{Bmatrix} \beta_{x1} \\ \beta_{x2} \\ \beta_{x3} \\ \beta_{x4} \\ \beta_{x5} \\ \beta_{x6} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \beta_{x,yy} = f_{yyi} \beta_{xi} \quad (4.42c)$$

Os coeficientes f_{xx} , f_{xy} , f_{yy} obtidos ao derivar-se β_y são os mesmos mostrados acima. Portanto pode-se escrever:

$$\beta_{y,xx} = f_{xxi} \beta_{yi} \quad (4.43a)$$

$$\beta_{y,xy} = f_{xyi} \beta_{yi} \quad (4.43b)$$

$$\beta_{y,yy} = f_{yyi} \beta_{yi} \quad (4.43c)$$

Os termos f_{xx} , f_{xy} , f_{yy} das eqs (4.41) são função apenas de características geométricas do elemento. Agrupando-se as características mecânicas do material e as características geométricas, as eqs (4.41) podem ser rescritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} FX &= \sum_{i=1}^6 ax(i) \beta_{xi} + \sum_{i=1}^6 ay(i) \beta_{yi} \\ FY &= \sum_{i=1}^6 bx(i) \beta_{xi} + \sum_{i=1}^6 by(i) \beta_{yi} \end{aligned} \quad (4.44a,b)$$

$$(w_{,s})_k = -\frac{3}{2l_{ij}}(w_i - w_j) - \frac{1}{4}(w_{,s})_i - \frac{1}{4}(w_{,s})_j \quad (4.38)$$

Para cada lado, as rotações segundo as direções normal e tangencial são dadas pela seguinte transformação de coordenadas:

$$\begin{Bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_k & S_k \\ -S_k & C_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} \quad (4.39)$$

Com o emprego das equações (3.35) à (3.39), os graus de liberdade referentes as rotações dos nós 4, 5 e 6 serão eliminados e toda a formulação deverá ficar em função do vetor de deslocamentos nodais u .

$$u^t = [w_1 \quad \beta_{x1} \quad \beta_{y1} \quad w_2 \quad \beta_{x2} \quad \beta_{y2} \quad w_3 \quad \beta_{x3} \quad \beta_{y3}] \quad (4.40)$$

4.4-FORMULAÇÃO EXPLÍCITA DA MATRIZ DE RIGIDEZ

4.4.1-DETERMINAÇÃO DAS DISTORÇÕES

As equações (4.22) que relacionam as distorções FX e FY com as derivadas segundas das rotações, podem ser rescritas conforme as eqs (4.41), empregando-se as eqs (4.42).

$$FX = \frac{D_f}{D_c} \left[\left(f_{xxi} + \frac{1-\nu}{2} f_{yyi} \right) \beta_{xi} + \frac{1+\nu}{2} f_{xyi} \beta_{yi} \right] \quad i=1,6 \quad (4.41a)$$

$$FY = \frac{D_f}{D_c} \left[\frac{1+\nu}{2} f_{xyi} \beta_{xi} + \left(f_{yyi} + \frac{1-\nu}{2} f_{xxi} \right) \beta_{yi} \right] \quad i=1, 6 \quad (4.41b)$$

onde o índice subscrito i indica somatória. Os termos f_{xx} , f_{xy} , f_{yy} são coeficientes que relacionam as rotações com suas derivadas segundas (eqs (4.42)).

$$\begin{aligned}
N_1 &= 2(1 - \zeta - \eta) \left(\frac{1}{2} - \zeta - \eta \right) \\
N_2 &= \zeta(2\zeta - 1) \\
N_3 &= \eta(2\eta - 1) \\
N_4 &= 4\zeta\eta \\
N_5 &= 4(1 - \zeta - \eta) \\
N_6 &= 4\zeta(1 - \zeta - \eta)
\end{aligned} \tag{4.34 a,b,c,d,e,f}$$

Considerando-se a configuração inicial do elemento, o que se obtém é um sistema de 12 equações (eqs 4.33) com 21 incógnitas (2 rotações por nó mais três deslocamentos verticais), sendo necessário escrever-se nove novas equações de compatibilidade entre os graus de liberdade, conforme descrito pelas hipóteses subsequentes.

Admite-se que a rotação segundo uma direção normal ao lado ij varie linearmente, assim:

$$(\beta_n)_k = \frac{1}{2}(\beta_n)_i + \frac{1}{2}(\beta_n)_j \quad k=4,5,6 \tag{4.35}$$

As condições de equilíbrio de momento, representadas pelas eqs (4.20) e válidas para todo o domínio do elemento, são impostas de maneira discreta nos nós 1, 2 e 3, assim:

$$w_{,x} + \beta_x = FX(\beta_x, \beta_y) \tag{4.36a}$$

$$w_{,y} + \beta_y = FX(\beta_x, \beta_y) \tag{4.36b}$$

O equilíbrio de momentos também é imposto discretamente no nós localizados no ponto médio de cada lado do elemento, dessa forma pode-se escrever:

$$(w_{,s})_k + (\beta_s)_k = -S_k FX + C_k FY \quad k = 4,5,6 \tag{4.37}$$

Assumindo-se que o deslocamento vertical w varie segundo o polinômio cúbico sobre os lados do elemento, pode-se demonstrar que $w_{,s}$ é escrito pela eq. (4.38).

As coordenadas adimensionais η e ζ são definidas por:

$$\eta = \frac{y_{12}x - x_{12}y - x_1y_2 - x_2y_1}{2A} \quad (4.32a)$$

$$\zeta = \frac{y_{31}x - x_{31}y - x_1y_3 + x_3y_1}{2A} \quad (4.32b)$$

onde x e y são as coordenadas geométricas de um ponto pertencente ao elemento e A é a área do elemento.

4.3.3-HIPÓTESES DA FORMULAÇÃO

A formulação do elemento de flexão de placas DST contempla as hipóteses da teoria de flexão de placas grossas de Reissner-Mindlin. Dessa forma, uma reta normal ao plano médio da placa permanece reta porém não mais normal ao plano médio após a deformação. O campo de deslocamentos do elemento é definido conforme as eqs (4.1), (4.2) e (4.3). Os vetores das rotações da normal segundo os eixos OX e OY são denominadas, respectivamente, β_y e β_x , conforme as eqs (4.10a,b).

As equações de equilíbrio de esforços em relação ao plano médio da seção (equações 4.20a, b, c) são supostas válidas para todo o domínio do elemento. Para a formulação do elemento é mais conveniente utilizar-se as equações 4.20b e 4.20c em termos das rotações β_x e β_y , empregando-se assim das eqs (4.22).

O funcional de energia de deformação interna do elemento é composto por duas parcelas, sendo a primeira relativa a deformação por flexão e a segunda relativa a deformação por cisalhamento, conforme as eqs. (4.25) e (4.26a,b).

Lembrando-se que o elemento DST em sua configuração inicial possui seis nós, as rotações β_x e β_y são descritas por funções quadráticas (continuidade C^0) de interpolação, assim:

$$\beta_x = \sum_{i=1}^6 N_i(\zeta, \eta) \beta_{xi} \quad (4.33a)$$

$$\beta_y = \sum_{i=1}^6 N_i(\zeta, \eta) \beta_{yi} \quad (4.33b)$$

onde:

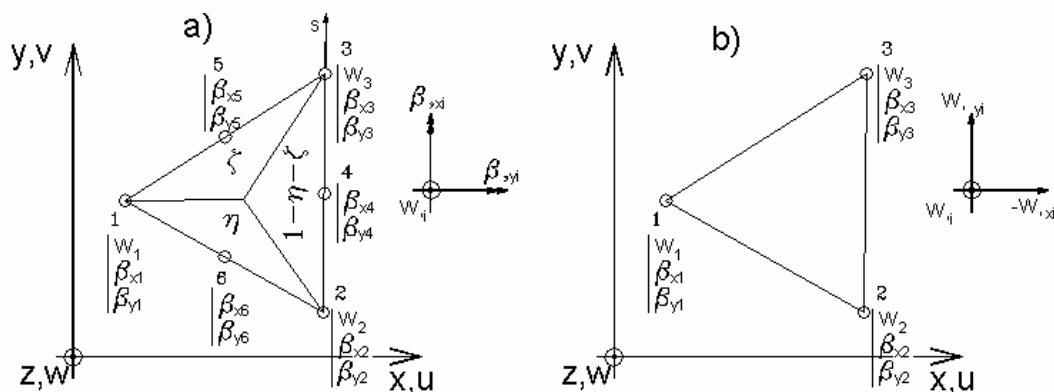


Figura 4.3: a) Elemento inicial; b) configuração final.

4.3.2-GEOMETRIA DO ELEMENTO

Tendo-se em vista o desenvolvimento da matriz de rigidez do elemento, define-se parâmetros que levam em conta as características geométricas conforme equações 4.31 (ver figura 4.4a). A orientação dos eixos “s” (coincidente com os lados do elemento), onde são escritas as funções dos deslocamentos verticais do elemento, é mostrada pela figura 4.4b.

$$l_{ij} = \sqrt{(x_{ij}^2 + y_{ij}^2)} \quad x_{ij} = x_i - x_j \quad y_{ij} = y_i - y_j \quad (4.31a, b, c)$$

$$\gamma_{ij} = (x, n_{ij}) \quad (4.31d)$$

$$C_k = \cos(\gamma_{ij}) = -y_{ij}/l_{ij} \quad S_k = \sin(\gamma_{ij}) = +x_{ij}/l_{ij} \quad ; k=4,5,6 \quad (4.31e, f)$$

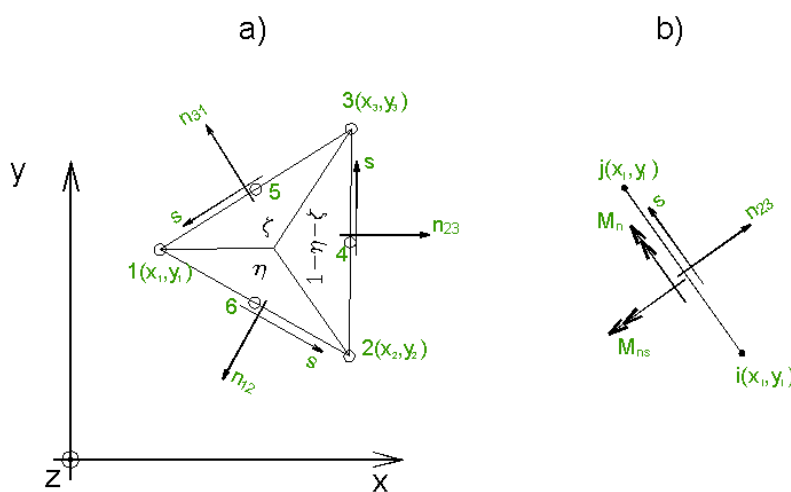


Figura 4.4: a) geometria do elemento; b) lado ij.

4.3-FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DST

4.3.1-INTRODUÇÃO

O elemento de flexão de placas DST (Discrete Shear Triangle), proposto por Batoz & Lardeur (1989), mostra-se bastante interessante para a aplicação nos problemas de engenharia. Sua geometria é triangular, o que facilita a discretização de qualquer tipo de domínio. O elemento possui nove graus de liberdade sendo duas rotações e uma translação por nó. Em razão de ser formulado a partir da hipótese de Reissner-Mindlin para placas espessas, emprega-se na sua formulação funções de forma com continuidade C^0 , o que as simplifica bastante. A figura 4.2 ilustra o elemento, nota-se que as rotações θ_x e θ_y estão relacionadas com β_x e β_y conforme as eqs. (4.10).

O elemento DST é bastante propício a não ocorrência do problema de travamento, uma vez que a condição de equilíbrio entre momentos e esforços cortantes é imposta para todo o domínio do elemento; o que significa que se a deformação por esforço cortante não for importante o elemento converge para a solução de placas delgadas.

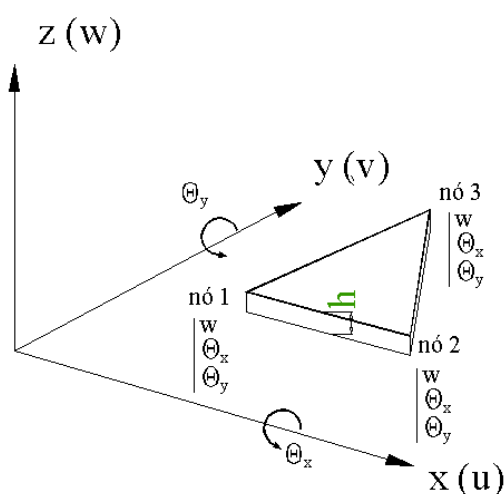


Figura 4.2: Elemento DST

É importante ressaltar que embora o elemento apresente apenas três nós em sua configuração final, considera-se inicialmente, para o emprego de funções de forma quadráticas, que existam três nós adicionais, cada um no ponto médio de cada lado do elemento (figura 4.3). Estes nós são posteriormente eliminados conduzindo ao elemento conforme mostrado pela figura 4.2. A numeração dos nós deve ser efetuada no sentido anti-horário e o nó 4 deve estar localizado no lado 2-3.

Para um material isótopo a equação (4.26b) pode ser escrita em termos da constante adimensional ϕ , dessa forma:

$$U_s^e = \frac{1}{2} \frac{1}{\phi} \frac{D_f}{L^2} \int_{A^e} ((w_{,x} + \beta_x)^2 + (w_{,y} + \beta_y)^2) dA \quad (4.27)$$

A expressão acima depende do valor ϕ^{-1} , conseqüentemente o fenômeno do travamento pode ocorrer se os campos de deslocamento vertical, w , e de rotações β , independentes entre si, não garantirem que:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} = w_{,x} + \beta_x &\rightarrow 0 \\ \gamma_{yz} = w_{,y} + \beta_y &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.28a,b)$$

quando: $\phi \lll 1$.

As equações de equilíbrio são satisfeitas explicitamente sobre o elemento por imposição da formulação. Os deslocamentos e as rotações são relacionados através das eqs (4.21c) e (4.21d) e pode-se definir a energia de deformação por cisalhamento da seguinte forma:

$$U_s^e = \frac{1}{2} \int_{A^e} D_c ((w_{,x} + \beta_x)^2 + (w_{,y} + \beta_y)^2) dA \quad (4.29)$$

ou, ainda:

$$U_s^e = \frac{1}{2} \int_{A^e} D_c (FX^2 + FY^2) dA = \frac{1}{2} \phi \frac{D_f}{L^2} \int_{A^e} D_c (\overline{FX}^2 + \overline{FY}^2) dA \quad (4.30)$$

A expressão acima depende do fator ϕ e tende a zero quando $\phi \ll 1$, diminuindo assim as possibilidades de ocorrência do travamento.

Finalmente as distorções são escritas em função das rotações β_x e β_y , a partir da equação 4.18, assim temos:

$$FX = \frac{D_f}{D_c} (\beta_{x,xx} + \nu \beta_{y,yy} + \frac{1-\nu}{2} (\beta_{x,yy} + \beta_{y,xy})) \quad (4.22a)$$

$$FY = \frac{D_f}{D_c} (\beta_{y,yy} + \nu \beta_{x,xy} + \frac{1-\nu}{2} (\beta_{x,xy} + \beta_{y,xx})) \quad (4.22b)$$

Define-se o fator de influência do cisalhamento, ϕ , pela expressão 4.23, assim:

$$\phi = \frac{D_f}{L^2 D_c} = \frac{E}{k G} \left(\frac{t}{L^2} \right) \quad (4.23)$$

As eqs (4.22) podem ser ligeiramente modificadas de modo a explicitar o termo ϕ . Dessa forma obtém-se:

$$FX = \phi \overline{FX} (\beta_x, \beta_y) \quad (4.24a)$$

$$FY = \phi \overline{FY} (\beta_x, \beta_y) \quad (4.24b)$$

A energia de deformação para um elemento de área A^e é dada por duas parcelas (eq. 4.25); sendo que a primeira dessas parcelas se refere a deformação por flexão e a segunda à deformação por cisalhamento. Assim:

$$U^e = U_b^e + U_s^e \quad (4.25)$$

com:

$$U_b^e = \frac{1}{2} \int_{A^e} \chi^T D_b \chi dA \quad (4.26a)$$

$$U_s^e = \frac{1}{2} \int_{A^e} \gamma^T D_s \gamma dA \quad (4.26b)$$

sucintamente apresentada neste texto. Acredita-se que com a implementação do elemento e com os bons resultados obtidos, o elemento DST poderá ser implementado nos trabalhos em desenvolvimento.

4.2.4-BLOQUEIO DA SOLUÇÃO - TRAVAMENTO

O fenômeno de travamento, ou bloqueio da solução, ocorre para as placas pouco espessas devido a problemas numéricos; nesse caso a parcela de energia relativa à deformação por esforço cortante tende a preponderar sobre a parcela de flexão. Em termos operacionais, diz-se que um elemento finito de placa apresenta travamento quando a matriz de rigidez correspondente ao cisalhamento assume um valor extremamente alto resultando em respostas demasiadamente rígidas.

Formas de tratar esse problema são apresentadas por diversos autores, dentre estas podemos citar: integração reduzida para obtenção da matriz de rigidez (parcela do cisalhamento), integração reduzida seletiva, deformação por cortante imposta, formulação com variacionais mistos. Batoz & Katili (1989) desenvolveram um elemento finito de placa onde o travamento é eliminado através da imposição das equações de equilíbrio (eqs. 4.20) sobre todo o domínio e contorno do elemento. Evgenij et al. (1996) apresentam uma ampla discussão sobre as técnicas atuais de supressão do travamento.

Substituindo-se a eq. (4.19) nas equações de equilíbrio (4.20) podemos escrever as distorções, supondo-se material isótropo, em função dos momentos fletores, resultando nas seguintes expressões:

$$\gamma_{xz} = \frac{T_x}{D_c} = \frac{1}{D_c} (M_{x,x} + M_{xy,y}) \quad (4.21a)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{T_y}{D_c} = \frac{1}{D_c} (M_{xy,x} + M_{y,y}) \quad (4.21b)$$

ou:

$$w_{,x} + \beta_x = FX(\beta_x, \beta_y) \quad (4.21c)$$

$$w_{,y} + \beta_y = FY(\beta_x, \beta_y) \quad (4.21d)$$

que o excessivo enrijecimento da matriz de rigidez da estrutura devidos a problemas numéricos. O fenômeno do travamento será melhor discutido no decorrer deste texto. Nos dias atuais o problema de travamento não é mais um limitante à formulação de elementos de flexão de placas, haja visto o grande número de técnicas de supressão do travamento existentes. Entretanto deve-se averiguar cuidadosamente através de testes numéricos a confiabilidade de um elemento finito.

O elemento triangular de flexão de placas mais simples que pode ser desenvolvido é obtido admitindo-se funções de forma lineares para as rotações e para os deslocamentos, esse elemento é sucintamente detalhado por Oñate (1992) porém o elemento é altamente suscetível ao problema do bloqueio de solução. Encontra-se em Yang et al. (1999) um elemento aplicável a problemas não-lineares.

Papadopoulos & Taylor (1990) apresentaram um elemento triangular desenvolvido a partir da formulação variacional mista que não apresenta bloqueio de travamento. Bucalem & Nóbrega (2000) descrevem o emprego da formulação mista na elaboração de elementos de casca a partir da degeneração de sólidos tridimensionais. Também em Lovadina (1997) encontra-se maiores detalhes sobre a formulação mista do método dos elementos finitos.

Batoz & Lardeur (1989) apresentam o elemento finito DST (Discrete Shear Triangle) que é completamente livre de travamento. Esse elemento é fundamento no equilíbrio entre momentos e cortantes e é semelhante ao elemento DKT (Batoz (1984)) que foi, durante muito tempo, largamente implementado tanto em “softwares” acadêmicos quanto em comerciais.

Batoz, em seu artigo, dizia acreditar que o DST viria a substituir completamente o emprego do DKT, porém 10 anos após sua publicação percebe-se um uso ainda tímido desse elemento; acredita-se que tal fato deva apenas à dificuldade na obtenção da matriz de rigidez de tal elemento e da ausência da publicação da formulação explícita da mesma.

Ainda na mesma linha, Batoz & Katili (1992) apresentam uma nova versão do DST desenvolvida a partir da formulação livre, porém em termos finais não há diferenças consideráveis entre uma e outra versão do DST conforme pode-se observar no trabalho de Sydenstricker & Landau (2000).

Na elaboração deste trabalho foi implementado a primeira versão do elemento DST (1989); foi efetuada a obtenção explícita da matriz de rigidez do elemento que será

As equações de equilíbrio de esforços sobre a superfície média da placa são escritas da seguinte forma:

$$V_{x,x} + V_{y,y} = -p(x, y) \quad (4.20a)$$

$$M_{x,x} + M_{xy,y} - V_x = 0 \quad (4.20b)$$

$$M_{xy,x} + M_{y,y} - V_y = 0 \quad (4.20c)$$

onde $p(x, y)$ é o carregamento uniformemente distribuído sobre o plano médio da placa.

4.2.3-ELEMENTOS FINITOS FUNDAMENTADOS NA TEORIA DE REISSNER-MINDLIN

A utilização das hipóteses contempladas pela teoria de flexão de placas de **Reissner-Mindlin** na elaboração de elementos finitos apresenta diversas vantagens em relação a teoria de **Kirchhoff**. Uma vantagem bem considerável é que emprega-se, na elaboração de tais elementos, funções de forma com continuidade C^0 (basta que a primeira derivada da função seja contínua), ao passo que elementos formulados a partir da teoria de placas delgadas requerem continuidade C^1 (a primeira e a segunda derivadas da função deverão ser contínuas). A energia de deformação por cisalhamento é levada em conta na formulação dos elementos.

As aplicações de elementos finitos voltadas a problemas de engenharia de estruturas exige que sejam tomados como graus de liberdade nodais as rotações segundo as direções x e y , além do deslocamento vertical. É interessante também que os elementos tenham uma geometria que permita uma geração de malha capaz de representar satisfatoriamente os mais variados tipos de contornos.

O requerimento de continuidade C^0 conduz, naturalmente, a funções de forma mais simples, exigindo um menor número de parâmetros nodais. Elementos finitos triangulares com três graus de liberdade por nó são excelentes para aplicação em problemas de engenharia. Oñate (1992) apresenta uma ampla série de elementos finitos de placa, destacando-se alguns elementos triangulares, outra estudo de alguns elementos pode ser encontrado em Sydentricker & Landau (2000).

O principal problema que advém da formulação de elementos de flexão de placas a partir das hipóteses de **Reissner-Mindlin** é o chamado “travamento” ou “bloqueio de solução” que ocorre para placas demasiadamente delgadas e nada mais é

$$[D]_f = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$[D]_c = \frac{E k}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

onde k é um fator de correção para o cisalhamento (usualmente tomado igual a $5/6$).

Os esforços solicitantes são obtidos integrando-se as tensões ao longo da espessura. O campo de esforços solicitantes fica sendo composto pelos momentos fletores M_x , M_y e M_{xy} e pelos esforços cortantes V_x e V_y . Assim:

$$M = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (4.16)$$

$$V = \begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (4.17)$$

Reescrevendo-se no campo de momentos e curvaturas:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} + \nu \beta_{y,y} \\ \nu \beta_{x,x} + \beta_{y,y} \\ \left(\frac{1-\nu}{2}\right) (\beta_{x,y} + \beta_{y,x}) \end{Bmatrix} \quad (4.18)$$

Do mesmo modo, pode-se escrever para o esforço cortante V :

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = k G t \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.19)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u}{\partial y} = z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \quad (4.5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (4.6)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \quad (4.7)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \varphi_x \quad (4.8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \varphi_y \quad (4.9)$$

onde γ_{xz} e γ_{yz} são as distorções da seção.

Todas as deduções serão efetuadas empregando-se as rotações β_x e β_y , no entanto para a implementação computacional é necessário que as rotações da seção sejam expressas de maneira compatível com a notação vetorial, facilitando o mapeamento da matriz de rigidez da estrutura; dessa forma, ao término das deduções, efetua-se a transformação de coordenadas expressa pelas eqs. (4.10a, 4.10b).

$$\theta_x = -\beta_y ; \theta_y = \beta_x \quad (4.10a, b)$$

Desse modo, o vetor de curvaturas é dado por:

$$\langle \chi \rangle = \langle \beta_{x,x} \quad \beta_{y,y} \quad \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \rangle \quad (4.11)$$

O vetor de distorções será:

$$\langle \gamma \rangle = \langle \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz} \rangle = \langle w_{,x} + \beta_x \quad w_{,y} + \beta_y \rangle \quad (4.12)$$

O estado de tensões associado a cada ponto pode ser obtido a partir da Lei de Hooke, assim:

$$\begin{Bmatrix} \{\sigma\}_f \\ \{\sigma\}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D]_f & [0] \\ [0] & [D]_c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\varepsilon\}_f \\ \{\varepsilon\}_c \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

onde $[D]_f$ é o tensor constitutivo elástico linear para o caso de flexão, obtido conforme equação (4.14) e $[D]_c$ é o tensor constitutivo para o cisalhamento obtido conforme a equação (4.15).

3. as tensões normais ao plano médio são desprezíveis.

Pode-se dizer ainda que todos os pontos contidos numa normal ao plano médio possuem o mesmo deslocamento vertical, o que equivale a dizer que a deformação nessa direção é nula.

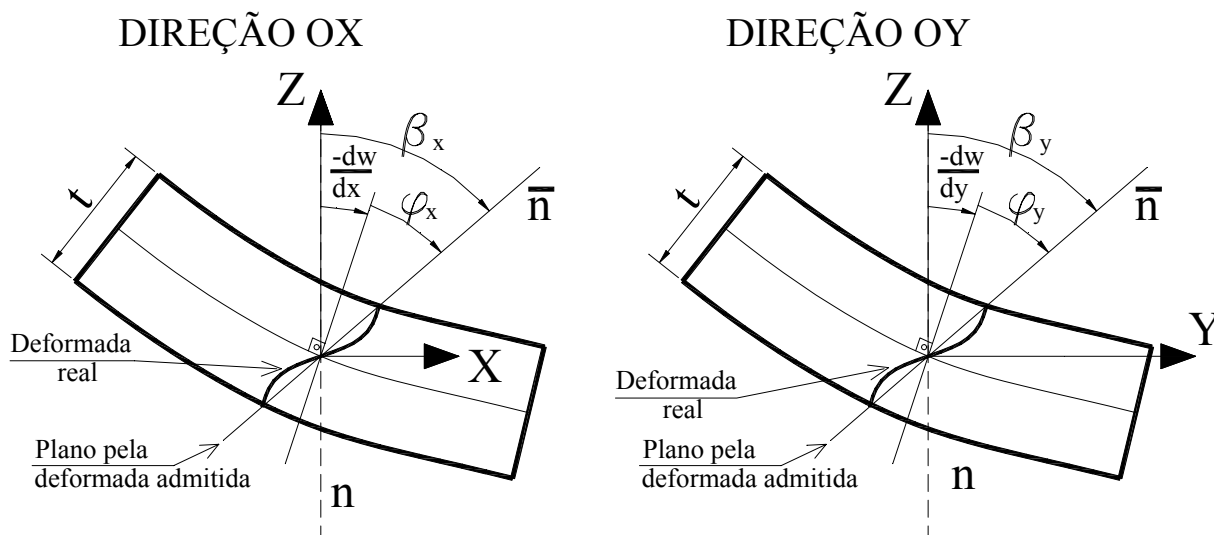


Figura 4.1: Cinemática da placa.

A deformação por cisalhamento deve, sempre que possível, ser considerada para placas de quaisquer espessuras, não podendo ser dispensada nas placas mais espessas, pois nesses casos a distorção da seção é bastante acentuada e desprezá-la constitui-se numa hipótese bastante grosseira. As componentes de deslocamentos, segundo os eixos \overline{OX} e \overline{OY} , em cada ponto da placa são escritas em função do deslocamento vertical e da distorção devido à torção desse ponto, assim:

$$w = w(x, y) \quad (4.1)$$

$$u = z\beta_x(x, y) = z\left(\varphi_x - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad (4.2)$$

$$v = z\beta_y(x, y) = z\left(\varphi_y - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \quad (4.3)$$

As deformações são escritas segundo a teoria da elasticidade em função do campo de deslocamentos, assim:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \quad (4.4)$$

4.2-FLEXÃO DE PLACAS – TEORIA DE REISSNER-MINDLIN

4.2.1-INTRODUÇÃO

As placas são elementos estruturais laminares planos, simétricos em relação a um plano médio, normalmente ao qual as ações externas são aplicadas; sua espessura pode ser constante ou variável, porém pequena em relação as suas demais dimensões. As lajes são um caso particular de placa, onde o material constituinte é litóide e o plano médio é horizontal.

Em relação à sua esbeltez, as placas podem ser definidas em três tipos:

- 1) placas muito delgadas: são aquelas onde a relação entre a espessura e a largura for menor que $1/150$;
- 2) placas delgadas: a relação entre a espessura e a largura está compreendida entre $1/150$ e $1/10$.
- 3) placas espessas: são aquelas em que a relação entre a espessura e a largura excede o valor de $1/10$.

Com relação às propriedades do material constituinte, as placas se classificam em: anisótropa (quando as propriedades são diferentes em qualquer direção, ortótropa (quando as propriedades são diferentes em direções ortogonais) e isotropas (quando as propriedades são iguais em todas as direções). Neste trabalho considera-se a propriedade da isotropia em todas as formulações.

4.2.2-FORMULAÇÃO

A teoria de flexão de placas de Kirchhoff prevê que as deformações sejam devidas exclusivamente aos esforços de flexão. Na teoria de Reissner-Mindlin considera-se também a deformação por esforço cortante; desse modo as hipóteses passam a ser as seguintes (Timoshenko1959):

1. os deslocamentos horizontais do plano médio da placa são nulos;
2. pontos da placa que inicialmente estavam contidos numa reta normal ao plano médio permanecem, após a deformação, contidos numa reta; porém existe um ângulo de distorção entre essa reta e a normal ao plano médio. Essa distorção corresponde à deformação por cisalhamento (figura 4.1);

4-MODELAGEM DE PAVIMENTOS – ELEMENTOS PLANOS - FLEXÃO

4.1-INTRODUÇÃO

A análise estrutural via método dos elementos finitos de lajes de pavimentos de edifícios pode ser efetuada de maneira bastante eficiente empregando-se elementos planos. Algumas características são desejáveis para que esses elementos possam ser empregados com relativa facilidade, dentre elas pode-se citar: a forma triangular permitindo a discretização dos mais variáveis contornos, graus de liberdade compatíveis com os elementos lineares além de características de precisão e de confiabilidade.

A resolução numérica de placas torna-se mais vantajosa quando são empregados elementos fundamentados na teoria de Reissner-Mindlin, obtendo-se assim resultados mais precisos. Os esforços cortantes são obtidos de maneira direta. O emprego dessa teoria não é apenas mais vantajoso quando a deformação por cortante é considerável, na realidade sempre conduzirá a resultados mais precisos, independentemente da espessura da laje, por ser uma teoria mais completa.

Descrevem-se, neste capítulo, as hipóteses de **Reissner-Mindlin** para a flexão de placas e o elemento finito triangular com três graus de liberdade por nó proposto por Batoz & Lardeur (1989)

Neste trabalho considera-se os esforços de membrana nas lajes, sendo necessário que os elementos finitos de membrana sejam também triangulares, estes serão descritos no capítulo 5.

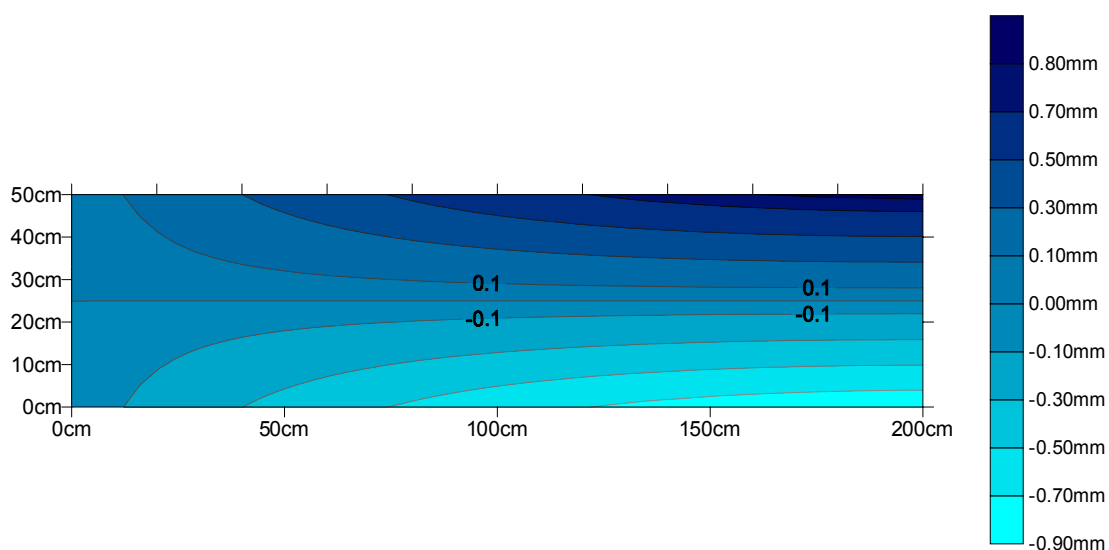


Figura 5.5: Deslocamentos horizontais (mm).

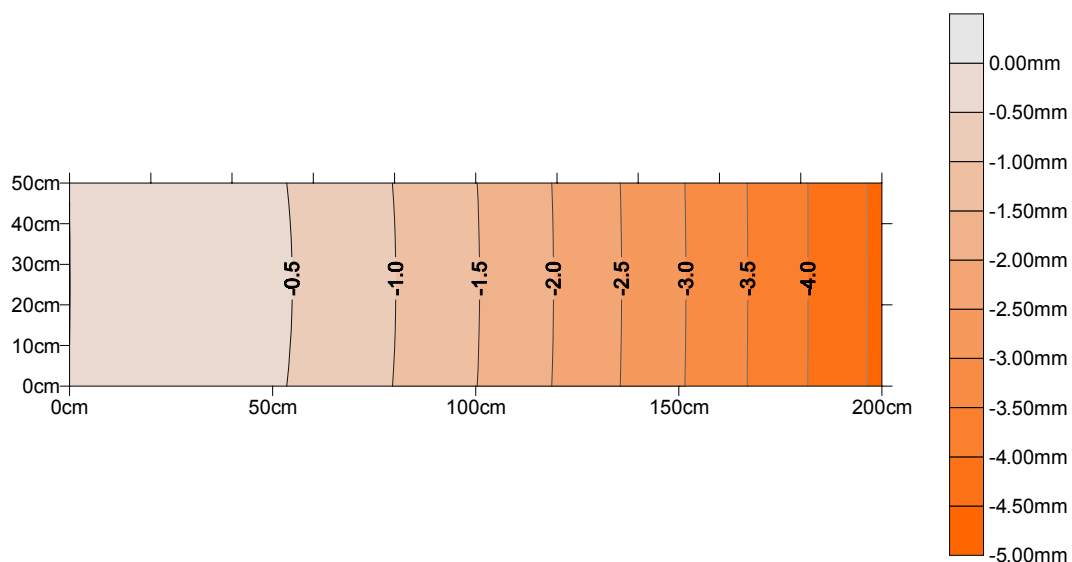


Figura 5.6: Deslocamentos verticais.

Conforme pode-se observar neste exemplo, o elemento implementado mostrou boa performance, apresentando erro de 3% para uma malha de 32 elementos, mostrou também convergência para a resposta exata a medida que se refina a malha. A figura 5.5 mostra a variação de u_x ao longo da altura e do comprimento da viga, observa-se que a distribuição desses valores é coerente, sendo nula na linha neutra de deformações.

5.6-EXEMPLO

Considere-se uma viga engastada numa extremidade e livre na outra submetida a um carregamento vertical de 100 kN aplicado na sua extremidade livre. A carga de 100 kN foi aplicada em quinhões iguais em função do número de nós da extremidade livre. As características do material são as seguintes: módulo de elasticidade longitudinal: 2885 kN/cm^2 , coeficiente de Poisson: 0,30 e a largura da viga é 20cm. Os parâmetros β e α são, respectivamente 0,5 e 1,5.

Pretendendo-se investigar a precisão e a confiabilidade do elemento empregado, a viga foi discretizada em 4 diferentes malhas de elementos triangulares, sendo a primeira com 32 elementos, a segunda com 128, a terceira com 200 elementos e a quarta malha com 800 elementos, conforme ilustrado pela figura 5.4. O valor exato do deslocamento vertical da extremidade da viga é de 4,605mm, os deslocamentos obtidos em cada uma das malhas, bem como os erros relativos são ilustrados pela tabela 5.1. Na figura 5.5 são mostrados os deslocamentos horizontais e na figura 5.6 os deslocamentos verticais.

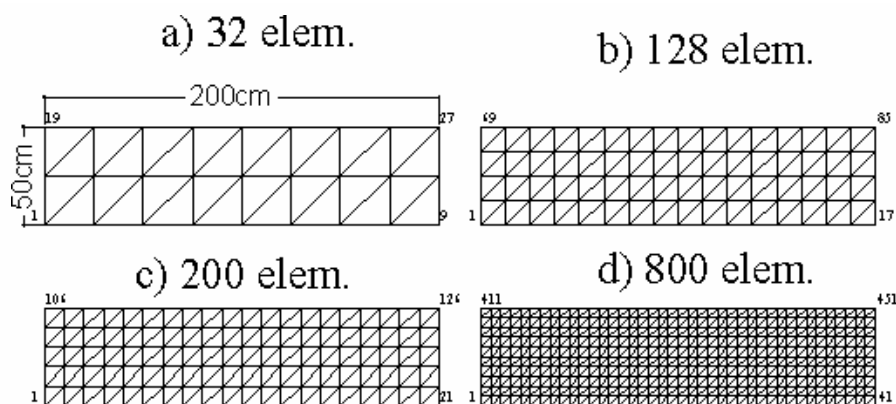


Figura 5.4: Malhas de elementos finitos.

Tabela 5.1: deslocamentos na extremidade da viga.

Rede (elems.)	desl.(mm)	erro %
32	4.454	-3.27
128	4.562	-0.94
200	4.581	-0.51
800	4.612	0.14

$$K_{qs}(i, j) = J_{\xi\xi} B_{\xi i}^T D_m B_{\xi j} + J_{\xi\eta} (B_{\xi i}^T D_m B_{\eta j} + B_{\eta i}^T D_m B_{\xi j}) + J_{\eta\eta} B_{\eta i}^T D_m B_{\eta j} \quad (5.63)$$

$$B_{si} = \xi B_{\xi i} + \eta B_{\eta i} \quad (5.64)$$

g) Determinação da matriz de rigidez K_s

De posse das matrizes H_s e K_{qs} a determinação da matriz de rigidez de alta ordem pode ser obtida pela simples multiplicação de matrizes.

$$K_s = H_s^T K_{qs} H_s \quad (5.65)$$

5.5.3-DETERMINAÇÃO DAS TENSÕES E DEFORMAÇÕES NO ELEMENTO DE MEMBRANA

As deformações no elemento finito de membrana são obtidos com auxílio da eq. (5.66).

$$\varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_s = (B_{rc} H_{rc} + \sqrt{\beta} B_s H_s) V \quad (5.66)$$

onde: ε_c apresenta as deformações de ordem básica e ε_s apresenta as deformações de alta ordem.

Vale salientar que a parte de corpo rígido de B_{rc} é nula. Da mesma forma, ε_s desaparece no centróide do elemento quando $\xi = \eta = 0$. As deformações básicas podem ser escrita assim:

$$\varepsilon_c = \frac{1}{A} L^T V \quad (5.67)$$

As deformações de alta ordem variam linearmente ao longo do elemento e seus valores nos vértices podem ser obtidos através da substituição das coordenadas nodais em B_s . As tensões correspondentes podem ser obtidas através da matriz constitutiva elástico-linear para o estado plano de tensões, C .

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = C \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \lambda_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \lambda_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

A matriz G fica assim definida:

$$G_{rc} = \begin{bmatrix} G_{rc,i} \\ G_{rc,j} \\ G_{rc,k} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$$G_{rc,i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\eta_i & \xi_i & 0 & \eta_i \\ 0 & 1 & \xi_i & 0 & \eta_i & \xi_i \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

$$G_s = \begin{bmatrix} G_{s11} & G_{s12} & G_{s13} \\ G_{s21} & G_{s22} & G_{s23} \\ G_{s31} & G_{s32} & G_{s33} \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

$$G_{sij} = \begin{bmatrix} a_{1j} \xi_i^2 + a_{2j} \xi_i \eta_i + a_{3j} \eta_i^2 \\ b_{1j} \xi_i^2 + b_{2j} \xi_i \eta_i + b_{3j} \eta_i^2 \\ -\lambda (c_j \xi_i + s_j \eta_i) \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

d) Determinação das matrizes B_s e B_{rc}:

$$B_s = \lambda \begin{bmatrix} 2a_{11}\xi + a_{21}\eta & 2a_{12}\xi + a_{22}\eta & 2a_{13}\xi + a_{23}\eta \\ b_{21}\xi + 2b_{31}\eta & b_{22}\xi + 2b_{32}\eta & b_{23}\xi + 2b_{33}\eta \\ -4b_{31}\xi - 4a_{11}\eta & -4b_{32}\xi - 4a_{12}\eta & -4b_{33}\xi - 4a_{13}\eta \end{bmatrix} \quad (5.58)$$

$$B_{rc} = \lambda \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

e) Determinação da matriz H_s referente aos modos de alta ordem

$$R = G_{22} - G_{21} G_{11}^{-1} G_{12} \quad (5.60)$$

$$H_s = R^{-1} G_{21} G_{11}^{-1} R^{-1} \quad (5.61)$$

f) Determinação da matriz K_{qs}

$$K_{qs} = \int_A B_s^T \cdot D_m \cdot B_s \cdot dA \quad (5.62)$$

$$N_{si} = \begin{Bmatrix} u_{si} \\ v_{si} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{2i} & a_{3i} \\ b_{1i} & b_{2i} & b_{3i} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi^2 \\ \xi\eta \\ \eta^2 \end{Bmatrix} \text{ com } i = 1,2,3 \quad (5.49)$$

e:

$$\begin{aligned} a_{1i} &= -0,5(s_i c_i^2) & a_{2i} &= c_i^3 & a_{3i} &= 0,5s_i^3 + s_i c_i^2 \\ b_{1i} &= -s_i^2 c_i - & b_{2i} &= -s_i^3 & b_{3i} &= 0,5s_i^2 c_i \\ s_i &= \text{sen } \varphi = -\frac{3\eta_i}{2\mu_i} & c_i &= \text{cos } \varphi = -\frac{3\xi_i}{2\mu_i} & \mu_i &= \frac{3}{2}\sqrt{\xi_i^2 + \eta_i^2} \end{aligned}$$

b) Os momentos de inércia $J_{\xi\xi}$, $J_{\xi\eta}$ e $J_{\eta\eta}$ são dados pelas eqs (5.50).

$$J_{\xi\xi} = \int_A \xi^2 dA = -\frac{A}{6} (\xi_i \xi_j + \xi_j \xi_k + \xi_k \xi_i) \quad (5.50a)$$

$$J_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta \cdot dA = \frac{A}{12} (\xi_i \eta_i + \xi_j \eta_j + \xi_k \eta_k) \quad (5.50b)$$

$$J_{\eta\eta} = \int_A \eta^2 dA = -\frac{A}{6} (\eta_i \eta_j + \eta_j \eta_k + \eta_k \eta_i) \quad (5.50c)$$

c) Determinação da matriz G

A matriz G relaciona os deslocamentos nodais com os parâmetros generalizados. G_{rc} é a sub-matriz 9x6 correspondente aos modos básicos e de deformação constante e G é uma sub-matriz 9x3 correspondente aos modos de alta ordem:

$$V = v_{rc} + v_s = G_{rc} q_{rc} + G_s q_s = G q \quad (5.51)$$

Os deslocamentos nodais são dados por:

$$V^T = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad \theta_3] \quad (5.52)$$

Os parâmetros associados, q, podem ser escritos por:

$$q = \begin{Bmatrix} q_r \\ q_c \\ q_s \end{Bmatrix} \quad (5.53)$$

$$\bar{u} = \bar{\xi} \bar{\eta} \quad (5.43a)$$

$$\bar{v} = -\frac{1}{2} \bar{\xi}^2 \quad (5.43b)$$

Considerando-se φ o ângulo entre os sistemas de coordenadas adimensionais, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\xi} \\ \bar{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (5.44)$$

A relação entre os deslocamentos no sistema auxiliar e as coordenadas adimensionais é dada por:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi \cdot \cos \varphi & \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi & \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ -0,5 \cdot \cos^2 \varphi & -\sin \varphi \cdot \cos \varphi & -0,5 \cdot \sin^2 \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi^2 \\ \xi \eta \\ \eta^2 \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

A transformação dos deslocamentos locais para os deslocamentos no sistema auxiliar pode ser obtida pela eq. (5.46).

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} \quad (5.46)$$

A equação final que rege o campo de deslocamentos em função das coordenadas adimensionais é dada por:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,5 \cdot \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi & \cos^3 \varphi & 0,5 \cdot \sin^3 \varphi + \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi \\ -\sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi - 0,5 \cdot \cos^3 \varphi & -\sin^3 \varphi & 0,5 \cdot \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi^2 \\ \xi \eta \\ \eta^2 \end{Bmatrix} \quad (5.47)$$

Os modos de alta ordem podem ser expressos por:

$$U_s = N_s q_s = N_{s1} q_7 + N_{s2} q_8 + N_{s3} q_9 \quad (5.48)$$

onde:

d) Determinação da matriz K_b

A matriz de rigidez relativa aos modos básico, K_b fica completamente determinada a partir do conhecimento da matriz L , assim:

$$K_b = \frac{1}{V} L C L^T \quad (5.40)$$

Para o elemento plano, pode-se substituir a eq. (5.40) por:

$$K_b = \frac{1}{A} L D_m L^T \quad (5.41)$$

onde D_m é a matriz constitutiva integrada ao longo da espessura do elemento – expressão (5.42).

$$D_m = \frac{E t}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}(1-\nu) \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

5.5.2-DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ RELATIVA AOS MODOS DE ALTA ORDEM, K_s .

Para a determinação da matriz de rigidez segue-se o roteiro:

a) Determinação do campo de deslocamentos U_s

Um elemento com nove graus de liberdade precisa de três modos de alta ordem que, para este caso, serão expressos por polinômios quadráticos em termos de x e y que produzirão uma variação linear de tensões. Bergan & Felippa (1985) sugerem os modos de flexão pura (eqs (5.43)) como uma maneira eficaz de conseguir bons resultados. A Figura (5.3) mostra um sistema de eixos auxiliar rotacionado $\bar{x}\bar{y}$ com origem no centróide do elemento.

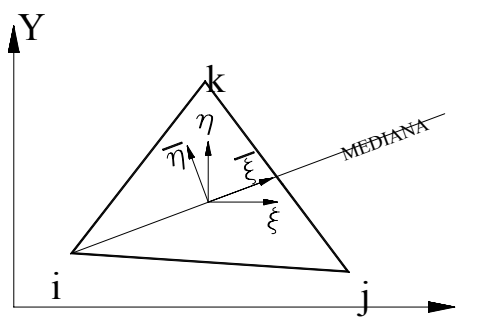


Figura 5.3: Sistema de coordenadas auxiliares.

São válidas as seguintes relações:

$$\sum \xi_i = 0 \quad i=1,2,3 \quad (5.34)$$

$$\sum \eta_i = 0 \quad i=1,2,3 \quad (5.35)$$

b) Campo de deslocamentos U_b – modos básicos:

Os modos básicos podem ser escritos em função de ξ e η da forma abaixo e representam duas translações rígidas nas direções x e y , uma rotação rígida em torno do eixo z e as três deformações constantes ε_x , ε_y e γ_{xy} .

$$U_b = N_r q_r + N_c q_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\eta \\ 0 & 1 & \xi \end{bmatrix} q_r + \begin{bmatrix} \xi & 0 & \eta \\ 0 & \eta & \xi \end{bmatrix} q_c \quad (5.36)$$

c) Determinação da matriz de “amontoamento”, L :

A matriz L é chamada matriz de “amontoamento” porque transfere o campo de tensões constantes para as forças nodais. O fator α introduzido nas funções de forma relaciona os deslocamentos normais do contorno do elemento com as rotações. Segundo Bergan & Felippa (1985), o valor ótimo de α estaria entre 1 e 2, sendo que 1,5 é o mais recomendado para os casos gerais. A determinação das forças concentradas nos nós pode ser feita mediante a aplicação do P.T.V, assim:

$$t_c = L p_c \quad (5.37)$$

onde:

$$L = \begin{Bmatrix} L_i \\ L_j \\ L_k \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

e:

$$L_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y_{ki} & 0 & x_{ik} \\ 0 & x_{ik} & y_{ik} \\ \frac{\alpha}{6}(y_{ji}^2 - y_{kj}^2) & \frac{\alpha}{6}(x_{ij}^2 - x_{jk}^2) & \frac{\alpha}{3}(x_{ij}y_{ji} - x_{jk}y_{kj}) \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

A matriz de rigidez K pode ser determinada a partir de subrotinas separadas de cálculo das matrizes básica e de alta ordem e da conseqüente soma das duas matrizes. O campo de deslocamentos totais, u , é decomposto em dois conjuntos, a saber: u_s associado aos modos de alta ordem e u_b associado aos modos básicos.

5.5.1-DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ RELATIVA AOS MODOS BÁSICO, K_b .

a) Cálculo das coordenadas adimensionais (ξ e η) e da área do elemento:

Considere-se o elemento triangular ilustrado pela figura (5.2). Na formulação desse elemento é interessante trabalhar-se com coordenadas adimensionais.

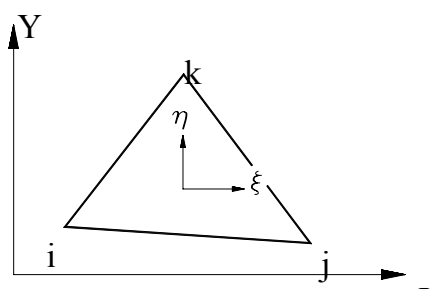


Figura 5.2: Elemento triangular.

Considerando x_c e y_c como as coordenadas do centróide do elemento, são definidas duas coordenadas adimensionais dadas por:

$$\xi_i = \lambda(x_i - x_c) \quad (5.29)$$

$$\eta_i = \lambda(y_i - y_c) \quad (5.30)$$

onde:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{A}} \quad (5.31)$$

$$x_c = \frac{1}{3}(x_i + x_j + x_k) \quad (5.32a)$$

$$y_c = \frac{1}{3}(y_i + y_j + y_k) \quad (5.32b)$$

$$A = \frac{1}{2}[(y_j - y_i)(x_i - x_k) + (x_j - x_i)(y_i - y_k)] \quad (5.33)$$

acoplamento dos modos superiores com os modos básicos foram substituídas . A matriz de rigidez do elemento correspondente será dada pela equação por:

$$K = H^T K_q H \quad (5.23)$$

$$K = H_{rc}^T K_{qrc} H_{rc} + H_{rc}^T P_{rc}^T G_s H_s + H_s^T G_s^T P_{rc} H_{rc} + H_s^T K_{qs} H_s \quad (5.24)$$

Testando-se a convergência dessa matriz, de acordo com a equação (5.21) obtém-se:

$$K G_{rc} = H_{rc}^T K_{qrc} + 0 + H_s^T G_s^T P_{rc} + 0 \quad (5.25)$$

e

$$K G_{rc} = (H_{rc}^T G_{rc}^T + H_s^T G_s^T) P_{rc} = P_{rc} \quad (5.26)$$

As tensões podem ser determinadas diretamente por:

$$\sigma = C \varepsilon = C B_q q = C B_q H v \quad (5.27)$$

5.5-ELEMENTO FINITO TRIANGULAR PROPOSTO POR BERGAN & FELIPPA (1985)

Bergan & Fellipa (1984) propuseram um elemento finito triangular fundamentado na formulação livre para a análise de membranas. O grau de liberdade rotacional (“drilling”) é considerado na sua formulação. A matriz de rigidez do elemento é formada pela superposição da matriz de modos básicos com a matriz de alta ordem, conforme mostra a eq. (5.28).

$$K = K_b + \beta K_s \quad (5.28)$$

onde: K_b = matriz de rigidez referente aos modos básicos, K_s = matriz de rigidez referente aos modos de alta ordem. O parâmetro β é optativo e sua função é ajustar a matriz de rigidez total K para otimizar a convergência. Bergan & Felippa (1985) apresentam um comentário sobre a escolha do valor de β , segundo esses autores um valor adequado seria 0,5.

onde P_{rc} são as forças produzidas pelos parâmetros generalizados relacionados com os modos rígidos e de deformação constante. Assim:

$$P_{rc} = L C B_{rc} \quad (5.19)$$

onde C é a matriz constitutiva e L é a matriz de “amontoamento”, já definidas anteriormente.

Uma vez obtida a matriz de rigidez K , as forças nodais F_{rc} , quando considera-se um estado de deformação constante serão:

$$F_{rc} = K v_{rc} = K G_{rc} q_{rc} \quad (5.20)$$

De acordo com o teste do elemento individual, as forças F_{rc} devem ser iguais as forças t_{rc} para qualquer valor de q_{rc} . Dessa forma:

$$K G_{rc} = P_{rc} \quad (5.21)$$

A eq. (5.21) representa a restrição fundamental para que a matriz de rigidez K satisfaça o teste do elemento individual.

O ponto mais importante para se conseguir que as condições de convergência sejam atendidas para um determinado elemento está na forma como se faz o acoplamento entre os modos básicos e os modos superiores na montagem da matriz de rigidez. A simetria e a convergência podem ser obtidas pela imposição da ortogonalidade em força e em energia. A matriz de rigidez generalizada, K_q , pode ser expressa como:

$$K_q = \begin{bmatrix} K_{qrc} & P_{rc}^T G_s \\ G_s^T P_{rc} & K_{qs} \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

As sub-matrizes referentes aos modos básicos e superiores são determinadas da mesma forma que na formulação tradicional, enquanto que as sub-matrizes que fazem o

Os parâmetros generalizados q_{rc} e q_s estão relacionados aos modos básicos e aos modos de alta ordem, respectivamente. O número total de parâmetros é o número de graus de liberdade do elemento, n .

Com base no campo de deslocamentos expresso pela equação (5.11) as deformações no elemento podem ser determinadas por:

$$\varepsilon = \nabla u = \nabla N_{rc} q_{rc} + \nabla N_s q_s \quad (5.12)$$

Define-se:

$$B_{rc} = \nabla N_{rc} \quad (5.13a)$$

$$B_s = \nabla N_s \quad (5.13b)$$

onde ∇ é um operador diferencial para o cálculo das deformações.

Pode-se obter a relação entre os parâmetros generalizados e os deslocamentos nodais, v , substituindo-se os valores das coordenadas nodais nos polinômios N_{rc} e N_s , efetuando-se a derivação dos mesmos quando os parâmetros nodais incluem derivadas do campo de deslocamentos. Dessa forma, obtém-se:

$$v = v_{rc} + v_s = G_{rc} q_{rc} + G_s q_s = G q \quad (5.14)$$

Adotando-se:

$$H = G^{-1} \quad (5.15)$$

O campo de deslocamentos no elemento pode ser reescrito em função dos deslocamentos nodais de acordo com a equação seguinte:

$$u = N_{rc} H_{rc} v + N_s H_s v = (N_{rc} H_{rc} + N_s H_s) v \quad (5.16)$$

Ou, simplesmente:

$$u = N v \quad (5.17)$$

Devido à aplicação do teste do elemento individual as forças nodais t_{rc} precisam satisfazer a seguinte equação:

$$t_{rc} = P_{rc} q_{rc} \quad (5.18)$$

$$t_c = L \sigma_c \quad (5.8)$$

onde σ_c é um vetor de componentes de tensões constantes e L é a chamada matriz “lumped” (amontoamento) que tem a função de transferir o campo de tensões constantes para as forças nodais. Essa matriz tem importância fundamental para a formulação livre.

Assumindo-se que as propriedades do material não variem ao longo do elemento, esse estado de tensão pode ser calculado a partir da matriz constitutiva C e da matriz dos modos de deformação B_c que é constante ao longo do elemento, assim:

$$\sigma_c = C B_c q_c \quad (5.9)$$

Substituindo-se (5.9) em (5.8) e igualando-se com (5.5) obtém-se:

$$P_c = L C B_c \quad (5.10)$$

5.4-ASPECTOS BÁSICOS DA FORMULAÇÃO LIVRE

Nesta seção mostra-se o equacionamento da formulação livre, maiores detalhes podem ser encontrados em Peleteiro (1996) e Mesquita (1998). De acordo com Bergan & Nygard (1984) a matriz de rigidez do elemento obtida via formulação livre satisfaz implicitamente as equações do teste do elemento individual. Dessa forma, as condições de convergência do elemento são asseguradas mesmo para funções de deslocamentos não-conformes.

O campo de deslocamentos do elemento é expresso por um conjunto de modos básicos de movimento de corpo rígido e deformação constante, r_c , e um conjunto de modos de alta ordem, s , assim:

$$u = N_{r_c} q_{r_c} + N_s q_s \quad (5.11)$$

onde N_{r_c} é um polinômio completo, cujo grau corresponde a totalidade de modos de corpo rígido e de deformação constante do problema; N_s é um conjunto de funções de forma de alta ordem (modos superiores).

Por outro lado, o estado de deformação constante, quando imposto, implica no aparecimento de tensões no contorno do elemento que podem ser transferidas para os pontos nodais através da matriz “lumping”, L . Dessa forma, ter-se-ia então as forças nodais t_c . As tensões são iguais e contrárias para dois elementos vizinhos (figura 5.1), o que faz com que o vetor de forças nodais se anule ao longo das faces do elemento satisfazendo-se assim o “patch-test”. Essa condição pode ser imposta através da equação (5.5).

$$K G_c q_c = t_c = P_c q_c \quad (5.5)$$

onde P_c são as forças generalizadas correspondentes a q_c . Essa equação deve ser satisfeita para qualquer valor de q_c , assim:

$$K G_c = P_c \quad (5.6)$$

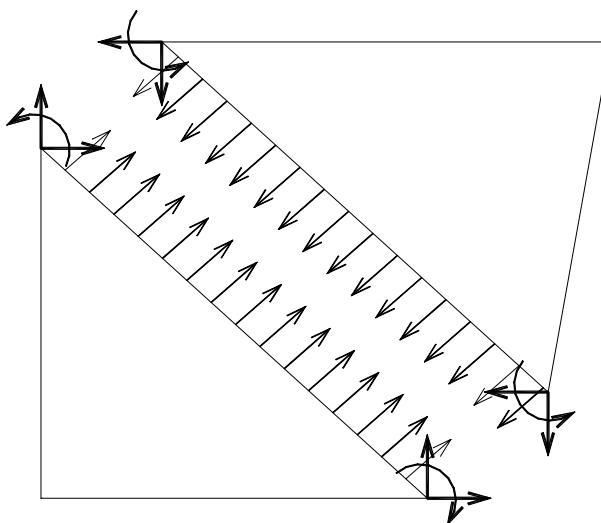


Figura 5.1: Esforços nos lados de elementos vizinhos.

O teste do elemento individual é representado pelas equações (5.6) e (5.4), podendo também ser escrito por:

$$K G_{rc} = P_{rc} \quad (5.7)$$

As forças nodais no elemento, t_c , produzidas pelos modos de deformação constante podem ser expressas por:

5.3-TESTE DO ELEMENTO INDIVIDUAL – BERGAN & HANSEN (1976)

O conceito básico do teste é que o elemento, quando interagindo com seus vizinhos seja capaz de reproduzir identicamente um estado arbitrário de **corpo rígido e deformação constante**. Essa exigência é uma consequência da condição limite de convergência, quando os elementos se tornam infinitesimais, a deformação de cada elemento torna-se próxima de um valor constante. Nesse estado, as forças inter-elementares transferidas para os nós devem se cancelar aos pares, dessa forma o “Patch-Test” estará automaticamente garantido. A seguir são apresentadas as equações do teste do elemento individual, estas foram extraídas de Bergan & Felippa (1985).

Para aplicar-se o teste é necessário expandir o campo de deslocamentos do elemento conforme a equação (5.1).

$$u = N_r q_r + N_c q_c \quad (5.1)$$

onde N_r e N_c representam um conjunto completo de modos de corpo rígido e deformação constante, respectivamente e q_r e q_c são os correspondentes parâmetros generalizados. A relação entre esses coeficientes e os graus de liberdade nodais, v , do elemento é fornecida pela seguinte transformação:

$$v = G_{rc} q_{rc} = G_r q_r + G_c q_c \quad (5.2)$$

onde G_{rc} é a matriz obtida dos através da equação (5.1) substituindo-se as coordenadas nodais.

A primeira parte do teste requer que a matriz de rigidez do elemento, K , não produza forças nodais num estado de movimento de corpo rígido, assim:

$$K G_r q_r = P_r q_r = 0 \quad (5.3)$$

onde P_r são as forças generalizadas associadas a q_r . Sabendo-se que o valor de q_r pode ser qualquer conclui-se que:

$$K G_r = P_r = 0 \quad (5.4)$$

1. Precisão, que é propriedade de apresentar resultados bastante próximos dos analíticos, mesmo utilizando-se malhas pouco refinadas.
2. Confiabilidade, que é definida como a propriedade de um método numérico apresentar respostas cada vez mais próximas da solução analítica, quanto mais refinada for a malha.

As exigências para a garantia de convergência de um elemento finito podem ser verificadas através do “Patch-Test”, que é um procedimento para verificar se o elemento, incluindo seus contornos, não produz ou perde energia durante um estado de deformação constante. Emprega-se também o “Teste do elemento individual”, que é uma versão melhorada do “Patch-Test”.

Pretende-se, a seguir, apresentar os fundamentos da formulação livre, extraídos dos autores oportunamente citados.

5.2-PATCH-TEST

Conforme apresentado no artigo de Bergan & Felippa (1985), o “Patch-Test”, proposto por Irons et al. (1972), é a maneira natural de se testar se um elemento não-conforme satisfaz os requisitos de convergência. Esse teste verifica se um malha de elementos pode reproduzir corretamente as condições limites de movimento de corpo rígido e deformação constante.

Uma aplicação prática do teste requer vários elementos em conjunto, em diferentes arranjos, exigindo-se sempre que os nós internos satisfaçam o equilíbrio quando são aplicadas à malha deslocamentos correspondentes a um campo arbitrário que inclui movimento de corpo rígido e deformação constante. A aplicação do “Patch-Test” é bastante trabalhosa, dificultando a sua utilização para testar-se os requerimentos de convergência de um elemento finito.

Bergan & Hansen (1976) propuseram o “Teste do Elemento Individual” cuja aplicação é mais simples para testar-se a convergência do elemento. Esse teste é aplicado a um único elemento, consistindo num conjunto de equações algébrica lineares que representam as condições impostas de movimento de corpo rígido e deformação constante.

5 - MODELAGEM DE PAVIMENTOS – ELEMENTOS PLANOS - MEMBRANA

5.1-INTRODUÇÃO

A consideração da excentricidade do eixo das vigas em relação ao plano médio das lajes do pavimento é um dos objetivos deste trabalho. A admissão dessa hipótese exige que a modelagem das lajes seja efetuada de modo a considerar os seguintes graus de liberdade: translação segundo o eixo OZ e rotação em relação aos eixos OX e OY para simular a flexão, além de translações em relação aos eixos OX e OY e rotação em relação a OZ (liberdade rotacional) para simular o efeito de membrana.

Para modelar os deslocamentos acima descritos, optou-se por empregar uma formulação de elementos finitos de casca obtidos pela superposição de um elemento de flexão de placas e um elemento de membrana. Essa é uma forma bastante simples e eficiente de tratar os problemas de cascas poliédricas e, segundo diversos autores, não perde em eficiência em relação as demais abordagens.

A liberdade rotacional (“drilling”) é desejável na formulação de elementos finitos de casca (via superposição de efeitos de flexão e de membrana) para evitar problemas de singularidade na matriz de rigidez global em estruturas onde os elementos finitos são coplanares ou aproximadamente coplanares. Bergan & Felippa (1985) desenvolveram um elemento finito de membrana de forma triangular com graus de liberdade rotacional a partir da formulação livre de Bergan & Nygard (1984).

Um elemento finito deve apresentar principalmente as seguintes características:

integração numérica via quadratura de Gauss-Legendre conforme as eqs (6.54). Empregam-se, neste trabalho, 12 pontos-amostra ao longo da altura da viga. As tensões nas armaduras são determinadas através do modelo elasto-plástico definido no item 6.7. Para a atualização da matriz de rigidez a cada iteração, o módulo de resistência secante poderá ser tomado diretamente pela razão entre o esforço efetivo e a correspondente deformação.

$$N_{ef} = \int_h \sigma_{ef} dz + \sum_i \sigma_{si} A_{si} \quad (6.54a)$$

$$M_{ef} = \int_h \sigma_{ef} z dz + \sum_i \sigma_{si} A_{si} z_i \quad (6.54b)$$

$$V_{ef} = \int_h \tau_{xz,ef} dz \quad (6.54c)$$

montagem do elemento DST. Porém, resultados numéricos mostram que essa aproximação não conduz a erros significados na análise não-linear de placas de concreto armado.

6.8.3-VIGAS DE CONCRETO ARMADO

A determinação dos esforços solicitantes efetivos em vigas de concreto armado é semelhante ao efetuado para as lajes, sendo tomadas as devidas simplificações. São definidos pontos-amostra para a integração numérica localizados no eixo do elemento de viga, segundo as coordenadas adimensionais ζ , o número de pontos adotado neste trabalho é igual a cinco, conforme ilustrado pela figura 6.12. Após determinado o vetor de deslocamentos nodais totais para um iteração i , a curvatura, a distorção e a deformação axial são determinadas em cada ponto-amostra de acordo com as eqs. (6.53).

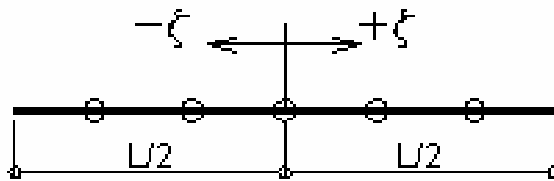


Figura 6.12: Pontos-amostra em elemento de viga.

$$\frac{1}{r} = -6 \frac{(L-2x)}{(1+2g)L^3} w_1 + 2 \frac{\left[2L \left(1 + \frac{g}{2}\right) - 3x \right]}{(1+2g)L^2} \beta_1 + 6 \frac{(L-2x)}{(1+2g)L^3} w_2 + 2 \frac{[L(1-g) - 3x]}{(1+2g)L^2} \beta_2 \quad \dots(6.53a)$$

$$\gamma = g \frac{[2(w_2 - w_1) - L(\beta_1 + \beta_2)]}{[L(1+2g)]} \quad (6.53b)$$

$$\varepsilon_x = \frac{du_x}{d_x} \quad (6.53c)$$

onde: $x = L/2 (1 + \zeta)$; as demais variáveis já foram definidas no capítulo 3.

Para a aplicação dos modelos de dano é necessário que, em pontos específicos ao longo da altura da viga, sejam determinados os valores locais da deformação axial e da distorção. A obtenção dos esforços solicitantes efetivos é efetuada através da

$$\psi_{e,b} = \int_A \mathbf{B}_b^T M_{ef} dA \quad (6.47)$$

Analogamente, para os esforços cortantes efetivos obtém-se:

$$\psi_{e,c} = \int_A \mathbf{B}_s^T V_{ef} dA \quad (6.48)$$

A matriz de rigidez à flexão do elemento é então determinada a partir da equação (6.49), onde o módulo de deformação por flexão é função do estado de danificação do elemento. Dessa forma:

$$\mathbf{K}_b = 2A \int_0^1 \int_0^1 [\mathbf{B}_{b1}^T \zeta + \mathbf{B}_{b2}^T \eta + \mathbf{B}_{b2}^T] \mathbf{D}_b^*(\zeta, \eta) [\mathbf{B}_{b1} \zeta + \mathbf{B}_{b2} \eta + \mathbf{B}_{b2}] d\zeta d\eta \quad (6.49)$$

onde:

$$\mathbf{D}_b^*(\zeta, \eta) = \frac{d_b(\zeta, \eta)}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

De maneira análoga, a matriz de rigidez ao cisalhamento será determinada por:

$$\mathbf{K}_s = 2A \int_0^1 \int_0^1 [\mathbf{HFX}^T \quad \mathbf{HFY}^T] \mathbf{D}_s^* [\mathbf{HFX} \quad \mathbf{HFY}] d\zeta d\eta \quad (6.51)$$

onde:

$$\mathbf{D}_s^*(\zeta, \eta) = \frac{d_s(\zeta, \eta)}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.52)$$

A matriz de rigidez completa do elemento é obtida somando-se as eqs (6.51) e (6.52). As integrações são efetuadas numericamente empregando-se quadratura de Gauss. O cálculo da matriz de rigidez levando em conta a danificação do material está sendo efetuado neste trabalho de maneira simplificada, uma vez que seria necessário levar em conta os termos d_b e d_s na formulação das equações de equilíbrio necessárias a

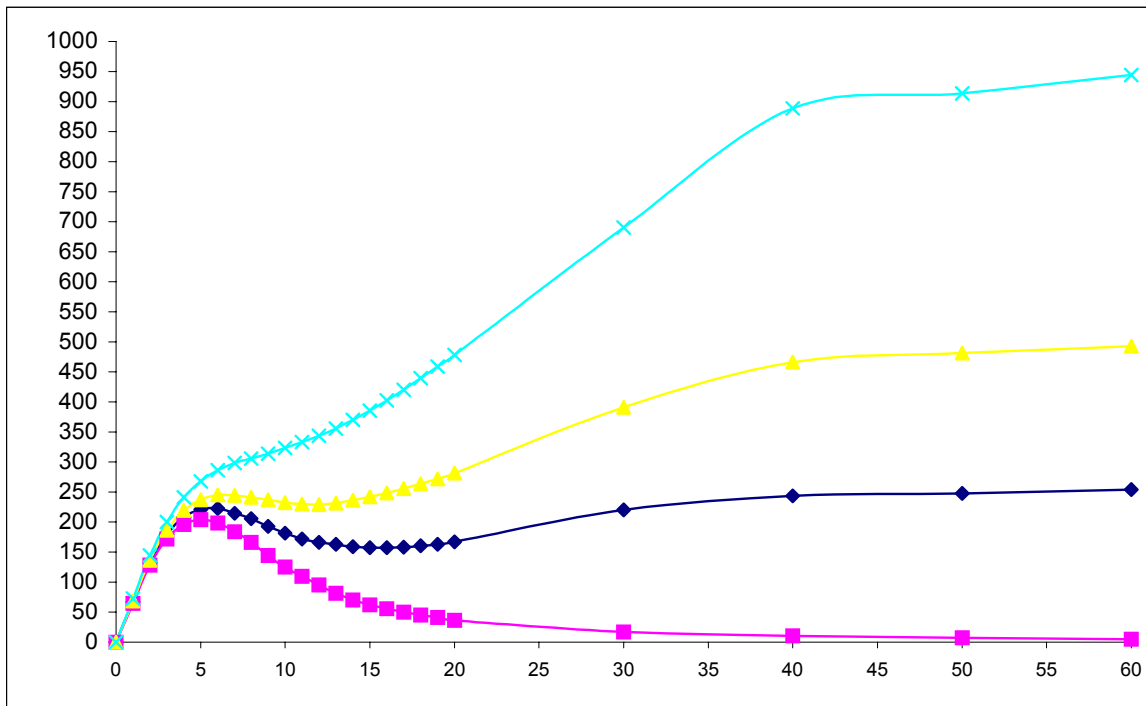


Figura 6.12: Diagrama típico momento x curvatura para lajes.

Tendo-se em vista a atualização da matriz de rigidez é necessário determinar-se para cada ponto de coordenada ζ , η contido no domínio do elemento os módulos (por unidade de comprimento) de deformação à flexão, ao cisalhamento e o módulo de deformação axial definidos pelas eqs (6.46).

$$d_b = \int_h z^2 E (1-D) dz \quad (6.46a)$$

$$d_s = \frac{c}{2(1-\nu)} \int_h b E (1-D) dz \quad (6.46b)$$

$$d_a = \int_h b E (1-D) dz \quad (6.46c)$$

Os esforços efetivos devem agora ser adequadamente transferidos para os nós do elemento, de acordo com Owen and Hinton (1980) o vetor de esforços solicitantes efetivos é fornecido pela equação integral (6.47) que leva em conta a contribuição de cada ponto-amostra.

$$M_{y,ef} = \int_h \sigma_{y,ef} z_y dz + \sum_i \sigma_{si} A_{si} z_{yi} \quad (6.45d)$$

$$N_{xy,ef} = \int_h \tau_{xy,ef} z_{xy} dz + \sum_i \tau_{si} A_{si} \quad (6.45e)$$

$$M_{xy,ef} = \int_h \tau_{xy,ef} z_{xy} dz + \sum_i \tau_{si} A_{si} z_{xyi} \quad (6.45f)$$

$$V_{x,ef} = \int_h \tau_{xz,ef} dz \quad (6.45g)$$

$$V_{y,ef} = \int_h \tau_{yz,ef} dz \quad (6.45h)$$

As tensões nas barras de aço são determinadas a partir do emprego do modelo elasto-plástico unidimensional descrito no item 6.7 deste trabalho, considera-se a área de armadura presente numa faixa unitária da laje. Os esforços cortantes serão tratados de maneira mais apropriada no capítulo 7.

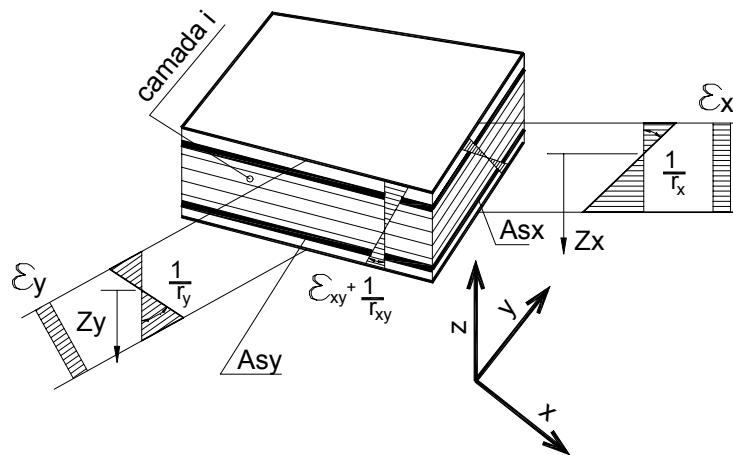


Figura 6.11: Deformações na laje de concreto armado.

Na figura 6.12, ilustra-se um típico diagrama momento fletor x curvatura para uma laje com taxas de armadura variando de zero até o seu valor limite. Observa-se que para baixas taxas de armadura existe um trecho de softening, à medida em que se aumenta a armadura passa a existir softening inicialmente e, após determinados níveis de deformação, apresenta-se o trecho de hardening. Para altas taxas de armadura apenas ocorre o “hardening”

$$\gamma_{yz} = \text{HFY}_i u_i \quad i=1,9 \quad (6.42b)$$

O modelo constitutivo de comportamento do material é fundamentado na mecânica do dano no contínuo e escrito no campo das tensões e deformações. É necessário, portanto, que a espessura da placa seja subdividida em camadas (figura 6.11), onde cada camada contém um ponto-amostra para a integração numérica. As componentes de deformação são determinadas em cada camada, assim o tensor de deformações para um ponto-amostra será:

$$\varepsilon^T = [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad 0 \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}] \quad (6.43)$$

A partir do tensor de deformações acima e das características mecânicas do material determina-se para cada camada a variável escalar representativa do estado de danificação local. As tensões efetivas associadas ao estado de deformação acima são obtidas diretamente pelas eqs (6.44) quando é empregado o modelo de Mazars ou conforme a eq. (6.27) para o modelo de Comi & Perego:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_{ef} = (1-D) \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.44a)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_{ef} = (1-D) \frac{E k}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (6.44b)$$

Os esforços solicitantes são obtidos efetuando-se a integração numéricas das respectivas tensões efetivas ao longo da espessura da placa, adotando-se o plano médio como sendo o plano de referência. Assim:

$$N_{x,ef} = \int_h \sigma_{x,ef} dz + \sum_i \sigma_{si} A_{si} \quad (6.45a)$$

$$M_{x,ef} = \int_h \sigma_{x,ef} z_x dz + \sum_i \sigma_{si} A_{si} z_{xi} \quad (6.45b)$$

$$N_{y,ef} = \int_t \sigma_{y,ef} dz + \sum_i \sigma_{si} A_{si} \quad (6.45c)$$

6.8.2-LAJES DE CONCRETO ARMADO

Sejam os elementos finitos planos descritos nos capítulos 4 e 5 deste trabalho. Após um passo de carga genérico “i” determina-se o vetor de deslocamento nodais totais por $u=u_{i-1}+u_i$. Definem-se pontos-amostra como sendo aqueles localizados em coordenadas previamente determinadas para a integração numérica via quadratura de Gauss-Legendre, neste trabalho são utilizados cinco pontos-amostra. As curvaturas e as deformações axiais são calculadas de acordo com as eqs (6.41) em cada um desses pontos, assim, assumindo que o ponto esteja no par de coordenadas adimensionais ζ, η :

$$\frac{1}{r_x}(\zeta, \eta) = (p_{i1}\zeta + p_{i2}\eta + p_{i3})u_i \quad (6.41a)$$

$$\frac{1}{r_y}(\zeta, \eta) = (q_{i1}\zeta + q_{i2}\eta + q_{i3})u_i \quad i=1,9 \quad (6.41b)$$

$$\frac{1}{r_{xy}}(\zeta, \eta) = (pq_{i1}\zeta + pq_{i2}\eta + pq_{i3})u_i \quad (6.41c)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_c + \varepsilon_s = (B_{rc} H_{rc} + \sqrt{\beta} B_s H_s)u_i \quad (6.41d)$$

onde as variáveis já estão definidas nos capítulos específicos.

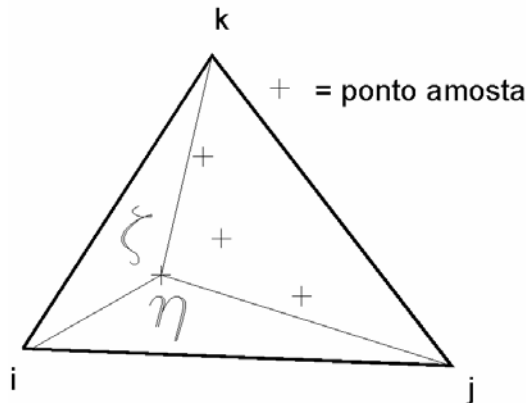


Figura 6.10: Pontos-amostra no domínio do elemento plano.

As distorções da seção, constantes no elemento, são determinadas pela eqs (6.42), já deduzidas no item 4 deste texto.

$$\gamma_{xz} = HF X_i u_i \quad (6.42a)$$

Outra estratégia seria a determinação da linha neutra de deformações, para os casos onde não é considerada a excentricidade da viga, esta estratégia se torna interessante pois permite uma convergência mais rápida do processo de análise não-linear. Apresenta-se, na seqüência, um roteiro para a determinação simultânea das linhas neutras de deformação aplicável às lajes, para as vigas devem ser efetuadas as devidas simplificações.

1. Seja t_x , t_y e t_{xy} a distância entre as linhas neutras e a fibra superior da seção, determina-se M_x , M_y , M_{xy} , N_x , N_y , N_{xy} ;
2. Se N_x , N_y e N_{xy} são bem próximos de zero, admitindo-se uma tolerância, considera-se que já ocorreu a convergência do processo, se não parte-se para o passo 3;
3. Determina-se as deformações ε_x , ε_y e ε_{xy} por:

$$\varepsilon_x = (-N_x + \nu N_y) / (h E_c) \quad (6.40a)$$

$$\varepsilon_y = (-N_y + \nu N_x) / (h E_c) \quad (6.40b)$$

$$\varepsilon_{xy} = -N_{xy} / (h G) \quad (6.40c)$$
4. Com as deformações axiais resultantes das eqs. (6.40) e as curvaturas determina-se as novas posições das linhas neutras;
5. Retorna-se ao passo 1.

Os esforços cortantes serão tratados num capítulo apartado, pois o mecanismo de resistência ao cisalhamento é mais complexo, devendo ser levado em conta os efeitos de engrenamento que ocorrem nas fissuras diagonais além do efeito de pino da armadura longitudinal. A tensão normal na armadura transversal assume valores significativos após o início da fissuração, antes da ocorrência desse evento, a armadura transversal pode ser desprezada no cálculo da resistência ao cisalhamento de uma seção de concreto armado.

A matriz de rigidez da estrutura poderá ser atualizada a cada iteração, levando-se em conta a danificação. Nesse caso seria tomada uma rigidez secante à curva esforço x deformação. Outra hipótese seria manter inalterada a rigidez inicial da estrutura, testes executados mostram que não há grandes ganhos no tempo de convergência quando atualiza-se a matriz de rigidez pela secante à curva, sendo mais simples mantê-la inalterada.

no campo dos esforços solicitantes, a menos nos casos onde são empregados elementos tridimensionais.

As deformações axiais e as distorções podem ser facilmente determinadas em qualquer ponto da seção transversal do elemento a partir do vetor de deslocamentos nodais, utilizando-se as derivações das funções de forma que são empregadas na formulação dos elementos finitos. Os critérios de danificação para o concreto são aplicados em pontos previamente determinados, obtendo-se, assim, um vetor de esforços efetivos compatível com o estado de deterioração local.

Considera-se, por hipótese, que a aderência entre as armaduras e o concreto é perfeita, desprezando-se o escorregamento. A deformação nas armaduras de flexão poderá então ser determinada e, após a aplicação do critério elasto-plástico, são conhecidas as tensões nessas armaduras.

Os esforços solicitantes na seção transversal são obtidos através da integração numérica dos valores locais de tensão; emprega-se a quadratura de Gauss-Legendre com 12 pontos-amostra ao longo da altura da seção. Os esforços obtidos serão momentos fletores e esforço normal, assim:

$$M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i b z d_z = J \int_{-1}^1 g(\xi) b d\xi = J \sum_{j=1}^n w_j g(\xi) b \quad (6.39a)$$

$$N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_i b d_z = J \int_{-1}^1 g'(\xi) b d\xi = J \sum_{j=1}^n w_j g'(\xi) b \quad (6.39b)$$

onde: M_i é o momento fletor; N_i é o esforço normal; i assume os valores x , y ou xy ; n é a ordem do polinômio; ξ é a coordenada do ponto j e w_j é o peso associado a essa coordenada; b é a largura da seção, admitida constante. Deve-se somar os esforços nas armaduras às parcelas de M_i e N_i , assim:

$$M_i = M_i + R_{st} (d_i - h/2) \quad (6.39c)$$

$$N_i = N_i + R_{st} \quad (6.39d)$$

onde R_{st} é o esforço na armadura e d_i se refere a posição da armadura.

Observa-se que para o cálculo das deformações em pontos da seção transversal é necessário que seja utilizado um plano de referência, neste trabalho admite-se que esse plano contenha o centro geométrico da seção bruta, ou seja, a maior distância vertical das fibras localizadas na seção até esse plano será $h/2$.

o concreto fissurado sem resistência à tração. As curvas tensão X deformação, segundo a NBR 6118, para a compressão e para a tração são apresentadas nas figuras 6.9a e 6.9b, respectivamente.

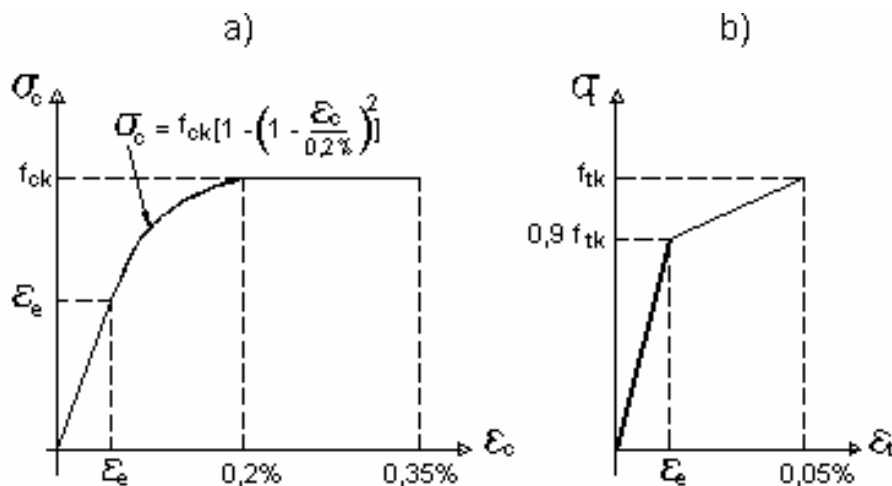


Figura 6.9: Diagramas tensão x deformação: a) compressão; b) tração – extraída da NBR6118.

A obtenção dos parâmetros necessários para os modelos de dano pode ser feita através da análise dos diagramas apresentados, resultando, assim, numa forma simplificada para a utilização desses modelos. A título de exemplo, para o modelo de Mazars, podemos dizer que a deformação ε_{d0} seria igual a 0,0005 e para o modelo de Comi & Perego a relação σ_e/σ_0 seria igual a 0,5 para a compressão e 0,9 para a tração. Os trechos de “softening” e de “hardening” devem ser também analisados. O ajuste dos parâmetros através dos diagramas teóricos é um trabalho bastante delicado, as curvas tensão X deformação obtida dessa forma deverá ser comparada com a apresentada pelos diagramas.

6.8- APLICAÇÃO DOS MODELOS NO ESPAÇO DOS ESFORÇOS SOLICITANTES

6.8.1- ASPECTOS GERAIS

Os modelos apresentados neste capítulo são escritos no espaço das tensões e deformações, entretanto, para a aplicação aos problemas de análise de pavimentos de edifícios via método dos elementos finitos é interessante que eles sejam representados

6.7-APLICAÇÃO DOS MODELOS

Os modelos de dano apresentados neste capítulo são bastante eficientes para a modelagem do comportamento mecânico do concreto; quando as tensões efetivas são integradas na espessura ou na altura do elemento estrutural e leva-se em conta a presença de armadura, o que se obtém é um modelo aplicável ao material concreto armado.

Uma dificuldade adicional para a aplicação desses modelos aos casos correntes de estruturas de concreto armado está no grande número de parâmetros envolvidos, a saber: A_t , B_t e ϵ_{d0} para o modelo de Mazars além de a_t , b_t , k_t , a_c , b_c , k_c , σ_0 , σ_e , ϵ_0 , ϵ_e e α para o modelo de Comi & Perego. Esses parâmetros são obtidos através de ensaios à tração e à compressão de vários corpos de prova para concretos com as mais diversas resistências; o objetivo da parametrização dos modelos é representar da maneira satisfatória as curvas tensão X deformação.

A aplicação prática dos modelos de dano requer que os diagramas tensão X deformação em função da resistência característica do concreto seja previamente conhecida. Na maioria dos casos, torna-se complicado o acesso a dados experimentais, uma vez que tais diagramas dependem de diversos fatores e não apenas da resistência do concreto.

Uma maneira simplificada de resolver esse problema estaria na utilização dos diagramas apresentados nas normas técnicas, dessa forma os parâmetros seriam extraídos diretamente desses diagramas; evidentemente os resultados assim obtidos seriam aproximados e menos precisos do que aqueles onde houvessem ensaios em laboratório.

Segundo o texto de revisão da NBR 6118 (2003) a relação entre as tensões de compressão no concreto e o corresponde encurtamento obedece o regime elástico-linear para tensões inferiores a 50 % da sua resistência característica à compressão; a partir desse valor, a relação entre tensões e deformação é parabólica até o encurtamento limite de 0,2%; de 0,2% até 0,35% as tensões não se alteram com o aumento das deformações.

Para o concreto não fissurado, solicitado à tração, a NBR 6118 (2003) permite considerar uma relação linear entre tensões de tração e os respectivos alongamentos até o limite de 90% da resistência característica do concreto à tração, f_{tk} ; a partir desse valor, até o limite onde o alongamento é de 0,05% e a tensão se iguala a f_{tk} , admite-se um trecho linear; alongamento a partir desse limite não são admitidos, considerando-se

$$f = \sigma - S(\varepsilon) \leq 0 \quad (6.36)$$

$$f \leq 0 \quad ; \quad \dot{f} \varepsilon_p = 0 \quad (6.37)$$

onde a função $S(\varepsilon)$ é definida pelas eqs. (6.38), não se considerando o caso de descarregamento.

$$S(\varepsilon) = E_s \varepsilon \quad p/ \varepsilon < \varepsilon_y \quad (6.38a)$$

$$S(\varepsilon) = E_s \varepsilon_y + bE_s (\varepsilon - \varepsilon_y) \quad p/ \varepsilon_y \leq \varepsilon < \varepsilon_u \quad (6.38b)$$

$$S(\varepsilon) = E_s \varepsilon_y + bE_s (\varepsilon_u - \varepsilon_y) \quad p/ \varepsilon_u \leq \varepsilon \quad (6.38c)$$

onde ε_y é o valor da deformação a partir da qual inicia-se o escoamento - $\varepsilon_y = 0,207\%$; $\varepsilon_u = 1\%$ é o valor da deformação a partir da qual não há aumento na tensão quando ocorre aumento na deformação; b é um valor que minora E_s , toma-se $b=0,10$ para barras de bitola menor que 5mm e $b=0$ para bitolas maiores que 5mm.

Observa-se que deverá haver evolução da plastificação quando $f=0$ e $\partial f/\partial t = 0$. Na figura 6.8 ilustra-se o modelo constitutivo empregado.

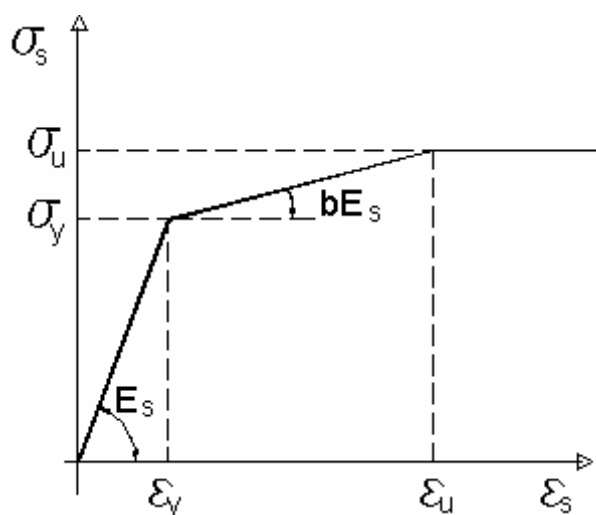


Figura 6.8: Modelo elasto-plástico.

6.6-MODELO ELASTO-PLÁSTICO PARA AS ARMADURAS

Descreve-se neste item, um modelo fundamentado na teoria da plasticidade para descrever o comportamento das barras de aço. O modelo empregado é extremamente simples e uniaxial; maiores detalhes sobre a formulação de modelos elasto-plásticos podem ser encontrados em Owen (1980).

O aço empregado nas armaduras constitui-se num material essencialmente dúctil, apresenta um patamar de escoamento bem definido e comporta-se de maneira equivalente para solicitações de tração e de compressão. Um modelo elasto-plástico é indicado para a modelagem de seu comportamento mecânico. As armaduras longitudinais e transversais empregadas em elementos de concreto armado são dispostas em barras, dessa maneira as solicitações são essencialmente uniaxiais, sugerindo assim o emprego de um modelo elasto-plástico uniaxial – obs.: desconsiderando-se o efeito de pino que pode ocorrer nas armaduras de flexão como parcela adicional de resistência ao cisalhamento.

A NBR-6118 apresenta uma relação elasto-plástica perfeita que deve ser utilizada para a maioria das bitolas existente no Brasil. O modelo elasto-plástico empregado neste trabalho admite que um trecho de encruamento isótropo positivo, admitindo assim que o limite elástico se expande até um determinado valor; tornando-se mais geral do que o proposto pela NB1. Caso se pretenda o comportamento elasto-plástico perfeito, basta ajustar os parâmetros do modelo.

A hipótese básica de um modelo constitutivo elasto-plástico uniaxial é que a deformação total de uma barra deve ser decomposta em duas partes, uma elástica que é reversível se houver descarregamento e outra plástica, ou seja, permanece mesmo após o descarregamento, assim a deformação e a respectiva tensão axial são dadas pelas eqs. (6.34) e (6.35), respectivamente.

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (6.34)$$

$$\sigma = E_s \varepsilon^e = E_s (\varepsilon^e - \varepsilon^p) \quad (6.35)$$

onde E_s é o módulo de elasticidade longitudinal do aço, ε^e é a deformação elástica e ε^p é a deformação plástica.

Define-se a função de plastificação, f , conforme a inequação (6.36). O domínio elástico é definido pelos pontos onde $f \leq 0$; pontos onde $f > 0$ constituem estados de tensão inadmissíveis. As condições de Kuhn-Trucker (eq. (6.37)) deverão ser atendidas.

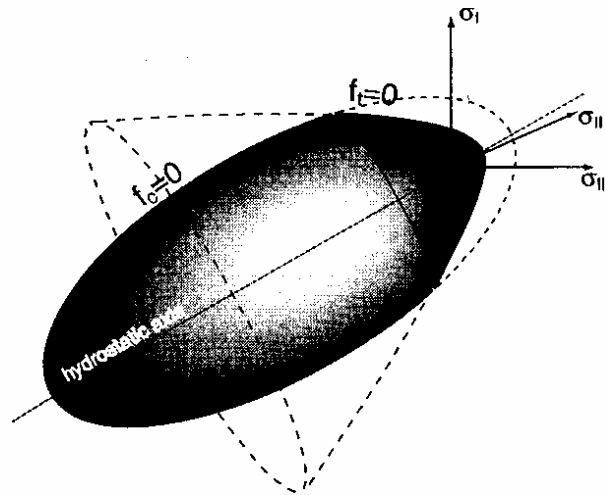


Figura 6.7: Domínio elástico – extraída de Botta (2003).

A respeito do domínio elástico, podem ser feitas as seguintes observações:

$$D_i = 0 \Rightarrow r_i(D_i) = \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)_i \leq 1 \quad (6.31a)$$

$$0 \leq D_i < D_{0i} \Leftrightarrow \left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0} \right)_i \leq r_i(D_i) < 1 \quad (6.31b)$$

$$D_i \geq D_{0i} \Leftrightarrow 0 \leq r_i(D_i) \leq 1 \quad (6.31c)$$

Analisando-se as eqs. (6.31) podemos observar que o domínio elástico inicia-se em $D_i = 0$, expande-se até o valor unitário e depois diminui até o valor zero. As funções f_t e f_c podem também ser expressas no campo das deformações, assim:

$$f_t = f_t(\varepsilon, D_t, D_c) = 4\mu^2 J_\varepsilon - a_t (K_+ tr^+ \varepsilon + K_- tr^- \varepsilon)^2 + b_t r_t(D_t) (K_+ tr^+ \varepsilon + K_- tr^- \varepsilon) - k_t r_t^2(D_t) (1 - \alpha D_c) \quad (6.32a)$$

$$f_c = f_c(\varepsilon, D_t, D_c) = 4\mu^2 J_\varepsilon + a_c (K_+ tr^+ \varepsilon + K_- tr^- \varepsilon)^2 + b_c r_c(D_c) (K_+ tr^+ \varepsilon + K_- tr^- \varepsilon) - k_c r_c^2(D_c) \quad (6.32b)$$

Após determinadas as variáveis de dano, o vetor de tensões efetivas será determinado por:

$$\sigma = (1 - D_c)(1 - D_t) D_0 \varepsilon \quad (6.33)$$

$$r_i(D_i) = \begin{cases} 1 - \frac{\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)_i (D_{0i} - D_i)^2}{D_{0i}^2} & \text{para } D_i < D_{0i} \\ \left[1 - \left(\frac{D_i - D_{0i}}{1 - D_{0i}}\right)^{c_i}\right]^{0.75} & \text{para } D_i \geq D_{0i} \end{cases} \quad \text{com } i = t \text{ ou } c \quad (6.31)$$

onde σ_{ei} corresponde à tensão limite de proporcionalidade, a partir da qual inicia-se o trecho de endurecimento; σ_{0i} é a tensão correspondente ao início do trecho com amolecimento; D_{0i} é o valor da variável de dano escalar associado com σ_{0i} ; $c_t > 1$ e $c_c > 1$ são parâmetros que definem a inclinação do trecho de amolecimento; figura 6.6 ilustra esses valores.

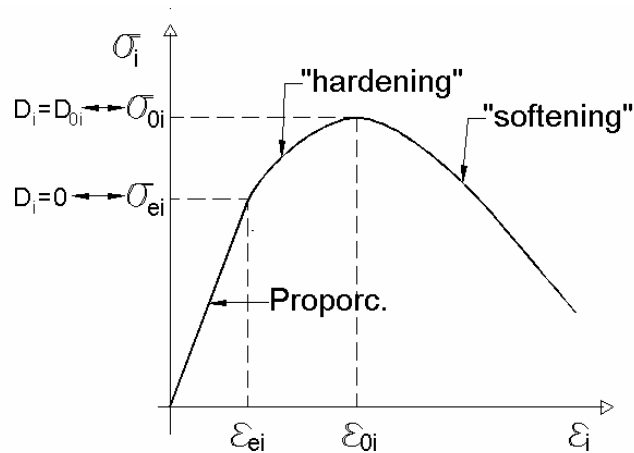


Figura 6.6: Curva tensão x deformação.

As funções f_t e f_c definem uma superfície no espaço, conforme ilustrado pela figura 6.7. O domínio elástico, que é a região interna à superfície, expande-se até um valor máximo quando $r_t(D_t)=1$ e $r_c(D_c)=1$, correspondente ao trecho de endurecimento. Para $D_t > D_{0t}$ e $D_c > D_{0c}$, ou seja, no trecho com amolecimento, o domínio elástico se contrai.

$$e = \varepsilon - \text{tr} \varepsilon I \quad (6.26)$$

onde I é o tensor identidade de segunda ordem e $\text{tr} \varepsilon = \text{tr}^+ \varepsilon + \text{tr}^- \varepsilon$.

As tensões são obtidas derivando-se a energia livre em relação às deformações, assim:

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon} = 2\mu e + (K_+ \text{tr}^+ \varepsilon) I + (K_- \text{tr}^- \varepsilon) I \quad (6.27)$$

onde μ é o módulo transversal secante, K_+ e K_- são os módulos de deformação volumétrica secante associados, respectivamente, com $\text{tr}^+ \varepsilon$ e $\text{tr}^- \varepsilon$.

$$\mu = \mu_0 (1 - D_t)(1 - D_c) \quad (6.28a)$$

$$K_+ = K_0 (1 - D_t) \quad (6.28b)$$

$$K_- = K_0 (1 - D_c) \quad (6.28c)$$

São definidas duas funções de carregamento, f_t e f_c (eqs (6.29a,b)), que são representadas por duas superfícies distintas no espaço das tensões. A ativação e a evolução do dano são governadas pelas condições de carregamento - descarregamento de Kuhn-Trucker conforme as eqs. (6.30a,b).

$$f_t = J_2 - a_t I_1^2 + b_t r_t(D_t) I_1 - k_t r_t^2(D_t) (1 - \alpha D_c) \quad (6.29a)$$

$$f_c = J_2 + a_c I_1^2 + b_c r_c(D_c) I_1 - k_c r_c^2(D_c) \quad (6.29b)$$

$$f_t \leq 0, \quad \dot{D}_t \geq 0, \quad f_t \dot{D}_t = 0 \quad (6.30a)$$

$$f_c \leq 0, \quad \dot{D}_c \geq 0, \quad f_c \dot{D}_c = 0 \quad (6.30b)$$

onde J_2 é o segundo invariante da parte desviatória do tensor de tensões, s , I_1 é o primeiro invariante do tensor de tensões completo, σ , a_t , b_t , k_t , a_c , b_c , k_c e α são parâmetros não-negativos do material; o termo $(1 - \alpha D_c)$ permite considerar a decréscimo da capacidade de carga na tração devido pelo dano a compressão pré-existente; $r_t(D_t)$ e $r_c(D_c)$ são as funções que levam em conta os trechos de endurecimento (“hardening”) e amolecimento (“softening”) do material, assim:

O modelo de Mazars constitui-se numa ferramenta bastante eficaz para a modelagem do comportamento do concreto, apesar de ter uma formulação relativamente simples. Este modelo pode ser aplicado tanto para elementos de barra quanto para elementos de placa. Maiores detalhes podem ser encontrados em Driemeier (1995), Botta (1998) e Álvares (1993) onde é apresentada uma importante discussão a respeito dos parâmetros envolvidos no modelo.

6.5-MODELO DE COMI & PEREGO PARA O DANO NO CONCRETO

Comi & Perego (2000) propuseram um modelo de dano isótopo para o concreto onde o estado de danificação é caracterizado por duas variáveis escalares, D_t e D_c , que podem assumir valores entre 0 e 1, medindo o estado de danificação devido, respectivamente, às componentes de tração e de compressão do tensor de tensões. Neste modelo, a energia livre ψ é determinada pela eq. (6.24) em função das variáveis de estado ε , D_t e D_c .

$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ 2\mu_0(1-D_t)(1-D_c)e : e + K_0(1-D_t)(tr^+\varepsilon)^2 + K_0(1-D_c)(tr^-\varepsilon)^2 \right\} \quad (6.24)$$

com:

$$tr^+\varepsilon = \frac{tr\varepsilon + |tr\varepsilon|}{2} \quad (6.25a)$$

$$tr^-\varepsilon = \frac{tr\varepsilon - |tr\varepsilon|}{2} \quad (6.25b)$$

onde ε é o tensor de deformações, e é a parte desviatória do tensor de deformações, μ_0 é o módulo transversal ($\mu_0=E/[2(1+\nu)]$) e K_0 é o módulo de compressibilidade volumétrica ($k_0=E/[3(1-2\nu)]$).

O primeiro termo da eq. (6.24) corresponde à energia de deformação desviatória e é afetada por ambas variáveis de dano, o segundo e o terceiro termos correspondem à energia de deformação volumétrica sendo afetados, respectivamente, pelo estado de danificação à tração e à compressão. A parte desviatória do tensor de deformações deverá ser determinada por:

Os coeficientes α_T e α_C são calculados pelas eqs. (6.15) e (6.16), respectivamente.

$$\alpha_T = \frac{\sum_i \langle \varepsilon_{T_i} \rangle_+}{\varepsilon_V^+} \quad (6.15)$$

$$\alpha_C = \frac{\sum_i \langle \varepsilon_{C_i} \rangle_+}{\varepsilon_V^+} \quad (6.16)$$

onde as componentes de deformação ε_{T_i} e ε_{C_i} são determinadas a partir do tensor de tensões principais, $\underline{\sigma}$, e do tensor das propriedades elásticas do material íntegro, \underline{D}_0 , conforme as eqs (5.17), (5.18) e (5.19). Nota-se que nas eqs (5.15) e (5.16) são tomadas apenas as componentes positivas dos tensores $\underline{\varepsilon}_T$ e $\underline{\varepsilon}_C$.

$$\underline{\sigma}^* = \underline{D}_0 \underline{\varepsilon} \quad (6.17)$$

$$\underline{\varepsilon}_T = \frac{1+\nu}{E} \langle \underline{\sigma} \rangle_+ - \frac{\nu}{E} \sum_i \langle \sigma_i \rangle_+ \underline{I} \quad (6.18)$$

$$\underline{\varepsilon}_C = \frac{1+\nu}{E} \langle \underline{\sigma} \rangle_- - \frac{\nu}{E} \sum_i \langle \sigma_i \rangle_- \underline{I} \quad (6.19)$$

onde E é o módulo de elasticidade longitudinal do material íntegro; os tensores $\langle \underline{\sigma} \rangle_+$ e $\langle \underline{\sigma} \rangle_-$ têm suas componentes determinadas, respectivamente, pelas seguintes expressões:

$$\langle \sigma_i \rangle_+ = \frac{1}{2} (\sigma_i^* + |\sigma_i^*|) \quad (6.20)$$

$$\langle \sigma_i \rangle_- = \frac{1}{2} (\sigma_i^* - |\sigma_i^*|) \quad (6.21)$$

O termo $\langle \varepsilon_V^+ \rangle$ é uma variável representativa do estado local de extensão, determinada por:

$$\varepsilon_V^+ = \sum_i \langle \varepsilon_{T_i} \rangle_+ + \sum_i \langle \varepsilon_{C_i} \rangle_+ \quad (6.22)$$

O tensor de tensões efetivas, ou seja, correspondente ao material danificado é obtido por:

$$\tilde{\underline{\sigma}} = (1 - D) \underline{D}_0 \underline{\varepsilon} \quad (6.23)$$

A partir da interpretação das curvas tensão-deformação do concreto, obtidas através de experimentos, Mazars propõe, em seu modelo, expressões para o cálculo das variáveis de dano relativas à tração e à compressão (eqs. (6.11) e (6.12), respectivamente). A figura 6.3 mostra a semelhança entre os diagramas tensão-deformação obtidos experimentalmente e os diagramas teóricos obtidos com o uso do modelo de Mazars, pode-se observar que, no modelo teórico, as deformações permanentes são desprezadas.

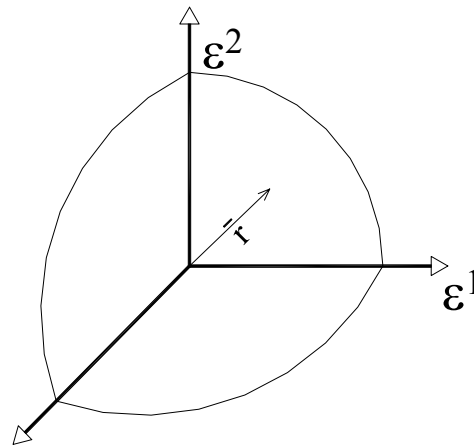


Figura 6.5: Superfície envoltória onde $D=0$.

$$D_T(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_T)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_T}{\exp[B_T(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \quad (6.12)$$

$$D_C(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_C)}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_C}{\exp[B_C(\tilde{\varepsilon} - \varepsilon_{d0})]} \quad (6.13)$$

Os parâmetros A_T e B_T , A_C e B_C são determinados em função de ensaios de tração uniaxial e compressão uniaxial, respectivamente; ε_{d0} é a deformação elástica limite. Segundo Mazars, esses parâmetros estão definidos pelos seguintes intervalos de variação:

$$\begin{aligned} 0,7 \leq A_T \leq 1 \quad 1,0 \leq A_C \leq 1,5 \\ 10^4 \leq B_T \leq 10^5 \quad 10^3 \leq B_C \leq 2.10^3 \\ 10^{-5} \leq \varepsilon_{d0} \leq 10^{-4} \end{aligned} \quad (6.14)$$

A variável $\tilde{\varepsilon}$ é denominada “*deformação por alongamento equivalente*”. O dano se inicia quando o alongamento equivalente atingir um determinado valor ε_{d0} que está associado à máxima tensão obtida em ensaios de tração uniaxial. Pode ser escrito um critério para a evolução do dano em função da deformação equivalente, assim:

$$f(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - S(D) \leq 0 \quad (6.8)$$

onde $S(D)$ é o valor da deformação equivalente associada a um determinado nível de dano, assim $S(D=0) = \varepsilon_{d0}$.

Impondo-se a condição de $f = 0$, é possível definir uma superfície de um quarto de esfera, com raio $r = S(D)$, no espaço das deformações principais dentro da qual não existe dano (figura 6.5). Mazars propõe um modelo termodinamicamente admissível para a taxa de crescimento da variável do dano que pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{D} &= F(\tilde{\varepsilon}) \langle \tilde{\varepsilon} \rangle_+ \text{ se } f = 0 \text{ e } \dot{f} = 0 \\ \dot{D} &= 0 \text{ se } f < 0 \text{ ou } f = 0 \text{ e } \dot{f} < 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

A variável escalar D será composta por uma interpolação entre as parcelas de dano à tração e à compressão, visando considerar a resposta assimétrica da curva tensão-deformação do concreto. Dessa forma, a variável de dano proposta por Mazars é expressa por:

$$D = \alpha_T D_T + \alpha_C D_C \quad (6.10)$$

onde:

$$\alpha_T + \alpha_C = 1 \quad (6.11)$$

- as deformações permanentes são desprezadas, portanto o modelo seria mais adequado para um carregamento monotônico e crescente;
- considera-se que a danificação de um elemento representativo de volume ocorra independentemente da orientação de uma normal \underline{n} . Dessa forma o dano é considerado isotrópico e a variável D pode ser representada por uma grandeza escalar;
- supõe-se que o dano seja causado somente pela existência de extensões (alongamentos). Assim sendo, o tensor das deformações principais deve conter pelo menos uma componente positiva para que possa ocorrer danificação;
- a ruptura local se desenvolve segundo o modo I ou segundo uma associação entre os modos básicos I e II de fratura. O modo I de solitação de uma fissura corresponde a um esforço de tração unidirecional, o modo II é caracterizado por um escorregamento entre as faces das fissuras; existe ainda o modo III que também corresponde a um deslizamento entre as faces da fissura que, nesse modo, se dá devido a um esforço de cisalhamento perpendicular ao sentido da trinca. Os modos de solitação de uma fissura são ilustrados pela figura 6.4.

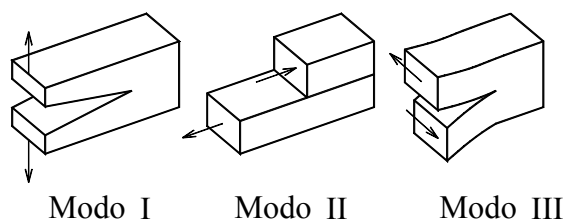


Figura 6.4: Modos básicos de solitação de uma trinca.

Define-se uma expressão para a variável representativa do estado de extensão local em função das componentes do tensor de deformações principais. Assim:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (6.6)$$

onde:

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \frac{1}{2}(\varepsilon_i + |\varepsilon_i|) \quad (6.7)$$

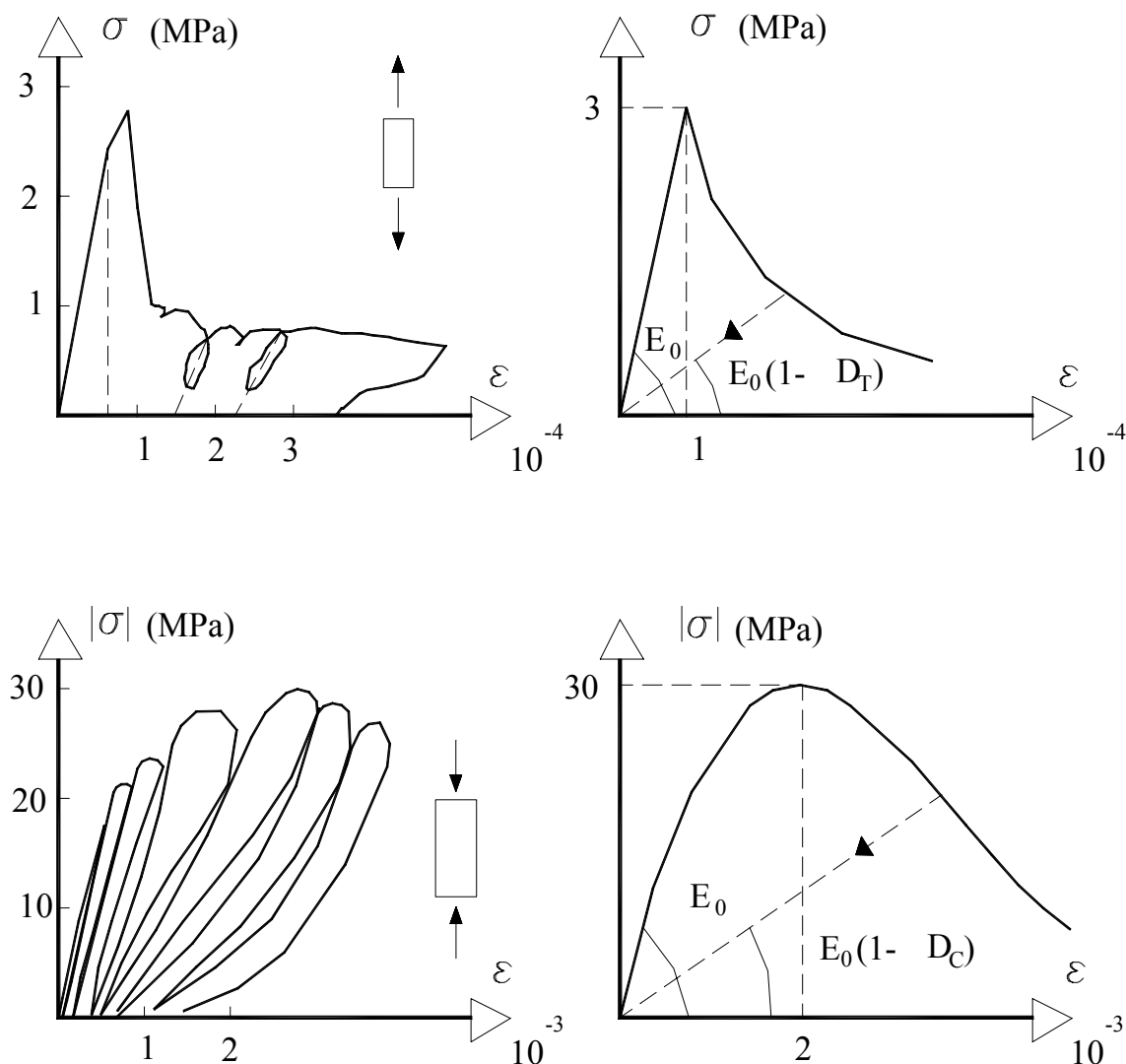


Figura 6.3: Diagramas tensão-deformação experimental e teórico.

6.4-MODELO DE MAZARS PARA O DANO NO CONCRETO

Mazars (1984) propôs um modelo constitutivo para o concreto, fundamentado na teoria do dano, que permite uma apropriada representação de evidências observadas experimentalmente neste material.

O modelo utiliza uma variável escalar D para representar o estado local de danificação do material. Dentre as hipóteses assumidas, pode-se citar as seguintes:

6.3-DANIFICAÇÃO DO CONCRETO

A teoria do dano foi inicialmente desenvolvida para a descrição do comportamento de metais, no entanto a sua aplicabilidade em elementos de concreto é perfeitamente viável. A estrutura interna do concreto apresenta microdefeitos continuamente distribuídos em seu volume. Estes são constituídos por poros, microfissuras e vazios que se devem à retração e ao processo de cura, ocorrendo, portanto, mesmo antes do início do carregamento.

O desenvolvimento do dano pode ser considerado contínuo e inicia-se a partir de baixas tensões. Imagine-se um corpo de prova solicitado à compressão axial por um carregamento monotônico e crescente; as fissuras iniciais tendem a crescer continuamente a partir de tensões superiores a 30% da resistência última à compressão. Esse crescimento dá-se na região da interface entre a matriz de argamassa e o agregado. Para tensões acima de 70% a 80% do valor último, as fissuras atingem a argamassa que sofre intensa degradação e conseqüente ruptura (ver figura 6.3).

A curva tensão-deformação do concreto solicitado à tração apresenta um trecho aproximadamente linear até cerca de 80% da tensão última, sofrendo uma queda abrupta a partir desse valor.

A modelagem do comportamento mecânico do concreto é bastante complexa devido a diversos fatores, dentre os quais pode-se citar a heterogeneidade do material, a sua resposta assimétrica à tração e à compressão, o comportamento distinto para cada grupo de solicitações, além do fenômenos dependentes do tempo (retração e fluência). Dentre os diversos modelos fundamentados na teoria do dano para o concreto pode-se citar os propostos por Mazars (1984) e por Comi & Perego (2000) que se constituem numa ferramenta simples e eficaz para a análise do dano no concreto.

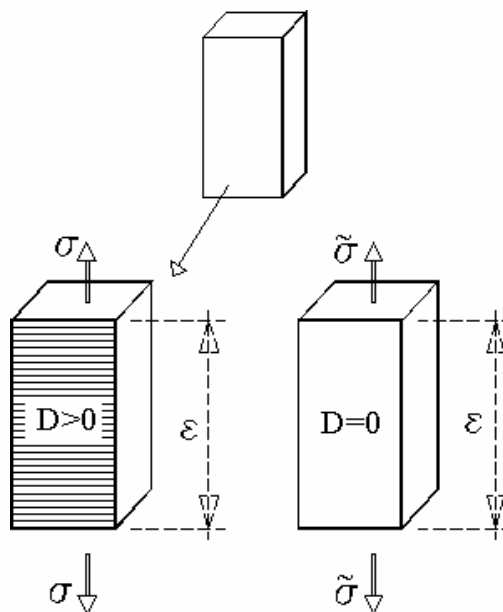


Figura 6.2 : Equivalência de deformações

A partir da hipótese de deformação equivalente, pode-se obter a relação entre o módulo de elasticidade do material intacto e o módulo de elasticidade equivalente ao material danificado. Empregando-se as clássicas hipóteses da lei de Hooke, pode-se escrever as deformações em cada um dos prismas da figura 6.2 em função das tensões atuantes, assim:

- as deformações para o material íntegro e para o material danificado são determinadas, respectivamente por:

$$\varepsilon_i = \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{E}} = \frac{N}{S\tilde{E}} \quad (6.3)$$

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{(1-D)SE} \quad (6.4)$$

- impondo-se a hipótese da deformação equivalente $\varepsilon_i = \varepsilon_{ii}$, obtém-se a eq. (6.5) que, na realidade, representa uma medida indireta do dano através da mudança de uma propriedade mecânica do material. Assim:

$$\tilde{E} = (1-D)E \quad (6.5)$$

$$S = \tilde{S} + S_0 \quad (6.1)$$

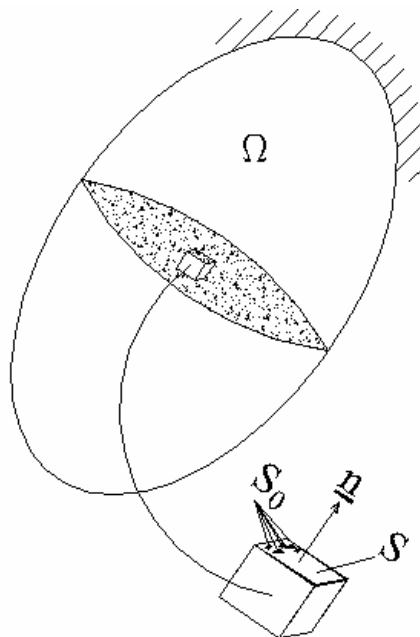


Figura 6.1: Representação de um elemento de volume de um corpo danificado.

O dano local pode ser interpretado, supondo-se a hipótese de continuidade, como sendo o limite da relação entre a área dos defeitos e a área S , quando S tende a zero. Assim:

$$D = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{S_0}{S} \quad (6.2)$$

A variável D é uma medida escalar que pode assumir valores compreendidos entre 0 e 1, considerando-se a hipótese dos microdefeitos apresentarem uma distribuição uniforme, independente da orientação da normal \underline{n} .

Tendo em vista a formulação de relações constitutivas para um material danificado, tratado como um contínuo equivalente Lemaitre & Caboche (1990) estabeleceram a hipótese de equivalência de deformação que pode ser definida como por: “O mesmo estado de deformações de um material com dano pode ser derivado do material íntegro onde a tensão usual é substituída por outra efetiva.” (Lemaitre & Caboche (1990) apud Álvares (1993)). (ver figura 6.2).

6.2-FUNDAMENTOS BÁSICOS DA MECÂNICA DO DANO NO CONTÍNUO

O conceito de dano foi introduzido no trabalho pioneiro de Kachanov (1958) para modelar o efeito da fissuração distribuída na ruptura frágil que ocorria em metais após um período de deformação lenta. Kachanov propôs a adoção de uma variável escalar, ψ , denominada continuidade, para representar o estado de deterioração do material; dessa forma se $\psi=1$ pode-se dizer que o material está livre de defeitos, por outro lado, se $\psi=0$, considera-se que o material está completamente deteriorado. A variável do dano, D , ficou então definida por $D = 1 - \psi$.

Estudos posteriores ao de Kachanov indicaram que o dano seria melhor representado, para alguns casos, não mais por uma variável escalar, mas sim como sendo uma grandeza tensorial. Dessa forma, pode-se dizer que, de modo geral, a variável do dano por ser de natureza escalar (dano isótropo) ou de natureza tensorial (dano anisótropo).

O termo ‘Continuum Damage Mechanics’ (em português ‘Mecânica do Dano NO Contínuo’) foi sugerido por Janson & Hult (1977) para designar os modelos que consideram o processo de danificação escritos segundo as hipóteses da Mecânica do Contínuo. Rabotnov (1969) propôs incluir a perda de rigidez do material como consequência da fissuração. A teoria do dano foi formalizada por Lemaitre & Caboche (1990) com base na Termodinâmica dos Processos Irreversíveis.

6.3-CARACTERIZAÇÃO DO DANO

Imagine-se o corpo ilustrado pela figura 6.1 de onde é extraído um elemento de volume representativo. Esse elemento será pequeno para que possa ser considerado como um ponto material do contínuo, porém será suficientemente grande para que possa conter as imperfeições do meio. Seja S a área de uma seção desse elemento, definida segundo o versor normal \underline{n} . A área S contém microfissuras e microdefeitos aleatoriamente distribuídos contribuindo assim para o dano. Dessa forma pode-se escrever:

6-MODELOS DE COMPORTAMENTO DOS MATERIAIS

6.1-INTRODUÇÃO

A modelagem do comportamento em serviço do concreto armado, utilizando-se o método dos elementos finitos com a incorporação da não-linearidade física, pode ser feita através de maneiras distintas, a saber: no espaço das tensões e deformações ou diretamente no espaço dos esforços solicitantes. Os modelos formulados no campo das tensões são geralmente mais amplos do que aqueles formulados no campo dos esforços solicitantes e o seu emprego não impede a aplicação a problemas no espaço uni ou bidimensional, já que é possível efetuar-se a integração numérica das tensões efetivas.

A mecânica do dano, embora inicialmente pensada para modelar o efeito da fissuração distribuída na ruptura frágil de metais, é largamente aplicada ao concreto. A teoria da plasticidade representa de maneira bastante satisfatória o comportamento dos metais, sendo empregada para o aço das armaduras. O material concreto armado pode ser modelado aplicando-se a mecânica do dano para o concreto e a teoria da plasticidade para a armadura, após a integração numérica das tensões, o modelo resultante é escrito no espaço dos esforços.

Neste capítulo, apresentam-se os modelos de dano empregados para o concreto e o modelo elasto-plástico empregado para a armadura.

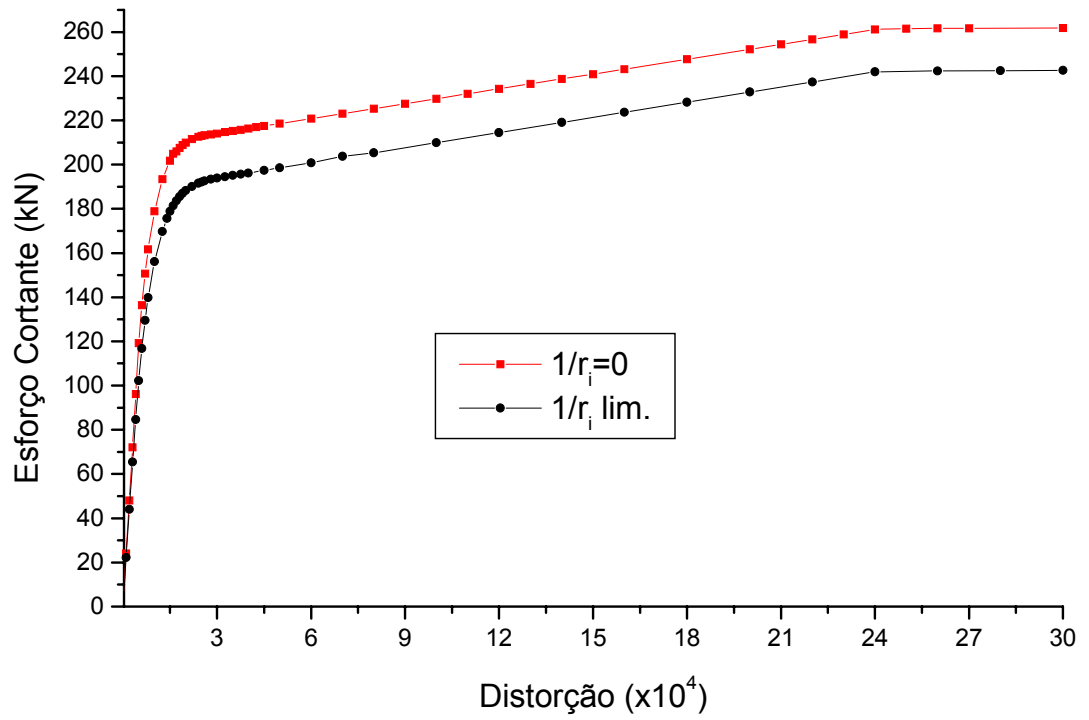


Figura 7.16: Esforço cortante X distorção – armadura de cisalhamento: $0,5\text{cm}^2/\text{m}$.

Admite-se que, para as lajes, acréscimos de distorção além do limite γ_1 mobilizem apenas a parcela de resistência ao cisalhamento relativo à armadura transversal, V_s , sendo considerado o cisalhamento puro para esses acréscimos, o que significa dizer que a deformação principal ε_1 será, em cada ponto da seção, igual a deformação por distorção relativa a tais acréscimos. A deformação da armadura transversal será determinada pela eq. (7.23) e a tensão será de acordo com o modelo elasto-plástico.

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{s1} + (\gamma - \gamma_1) \cos(45^\circ) \quad (7.23)$$

onde ε_{s1} é o alongamento da armadura transversal associado a γ_1 ; γ é conforme a eq.(7.16a). O esforço cortante resistido pela seção será então a soma das parcelas V_c e V_s , segundo as direções x e y.

Para ilustrar o modelo idealizado apresentam-se os diagramas esforço cortante X distorção para uma laje de 25cm de espessura, com taxa de armadura longitudinal de tração de 0,3% nas direções x e y, $f_{ck}=20\text{MPa}$; são admitidas duas hipóteses: cisalhamento puro e cisalhamento e flexão. Considera-se a laje sem armadura transversal (figura 7.15) ou com uma taxa de $0,5 \text{ cm}^2/\text{m}$ (figura 7.16). A contribuição do concreto, V_c , de acordo com a NBR 6118 é igual a 158 kN.

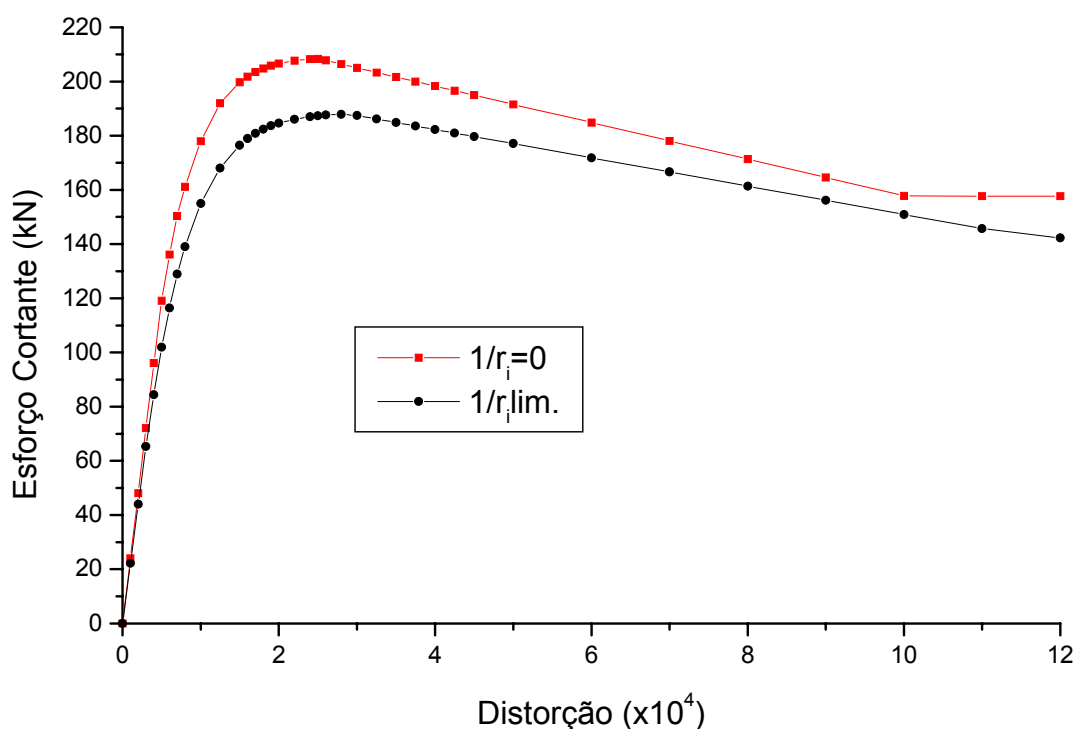


Figura 7.15: Esforço cortante X distorção – laje sem armadura de cisalhamento.

7.3.3-CONTRIBUIÇÃO DA ARMADURA

Admite-se que a armadura transversal contribua na resistência ao cisalhamento apenas a partir do início do processo de fissuração diagonal, conforme foi idealizado para as vigas; o tensor de deformações principais será composto de duas parcelas, sendo que a primeira delas, ε_e , está associada ao limite do regime elástico, enquanto que a parcela ε_D será o produto das deformações totais pela variável de dano local.

Considerando-se o estado triaxial, obtém-se três deformações principais, ε_1 , ε_2 e ε_3 ; a primeira delas assumirá um valor positivo (alongamento) ou nulo, a terceira sumirá assumirá valores negativos (encurtamento) para os casos gerais de flexão, já a deformação ε_2 poderá assumir tanto valores positivos quanto negativos. Admite-se que os alongamento que excedam ao limite elástico são passíveis de causar abertura de fissuras no concreto, assim consideram-se as deformações:

$$\varepsilon_{1D} = D \varepsilon_1 \quad (7.21a)$$

$$\varepsilon_{2D} = \frac{\varepsilon_2 + |\varepsilon_2|}{2} D \quad (7.21b)$$

$$\varepsilon_{3D} = 0 \quad (7.21c)$$

O alongamento da armadura transversal será então determinado conforme a eq.(7.22a), para distorções menores que γ_1 , a tensão e o esforço nessa armadura conforme as eqs (7.22b) e (7.22c)

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{1D} \cos(\alpha_1) + \varepsilon_{2D} \cos(\alpha_2) \quad (7.22a)$$

$$\sigma_{st} = f(\varepsilon_s, E_s) \quad (7.22b)$$

$$V_s = \sigma_{st} \rho_{st} d^2 \quad (7.22c)$$

onde ρ_{st} é a taxa de armadura transversal; d é a média das alturas úteis segundo as direções x e y .

O esforço V_s será variável ao longo do comprimento da armadura transversal, considera-se para o cálculo da contribuição dessa armadura o maior valor de V_s , as componentes V_{sx} e V_{sy} serão conforme as eqs (7.16c,d).

O fator 1,7 considerada a situação onde o ângulo α é igual a zero, ou seja, o esforço V_1 obtido pelo modelo numérico se iguala ao valor limite especificado pela norma para lajes sem armadura de punção. A distorção γ_2 somente poderá ser obtida de maneira precisa através de ensaios de laboratório. Adota-se γ_2 como sendo a distorção onde a variável de dano local assume o valor unitário. A justificativa para esta hipótese está no fato de que se o dano for 1 no cisalhamento, a abertura da fissura diagonal será grande, reduzindo o engrenamento, por outro lado se o dano for total na flexão, a armadura deverá estar próxima do seu limite de escoamento, admite-se que sua ocorrência se dará na situação de maior abertura de fissuras, que está associada a um alto nível de danificação.

O esforço cortante efetivo na direção da distorção γ (eq.(7.16a)) será então determinado de acordo com as eqs (7.20), para valores de distorção maiores que γ_2 admite-se que o esforço efetivo será igual a V_2 se houver armadura transversal, caso não haja essa armadura, admite-se a ruptura. Os termos V_{cx} e V_{cy} serão conforme as eqs (7.16b,c). A representação gráfica da contribuição do concreto é ilustrada pela figura 7.14.

$$V_c = f(D, \gamma, \varepsilon_x) \quad p / \gamma \leq \gamma_1 \quad (7.20a)$$

$$V_c = V_1 - (\gamma - \gamma_1) \frac{(V_1 - V_2)}{(\gamma_2 - \gamma_1)} \quad p / \gamma_2 \geq \gamma > \gamma_1 \quad (7.20b)$$

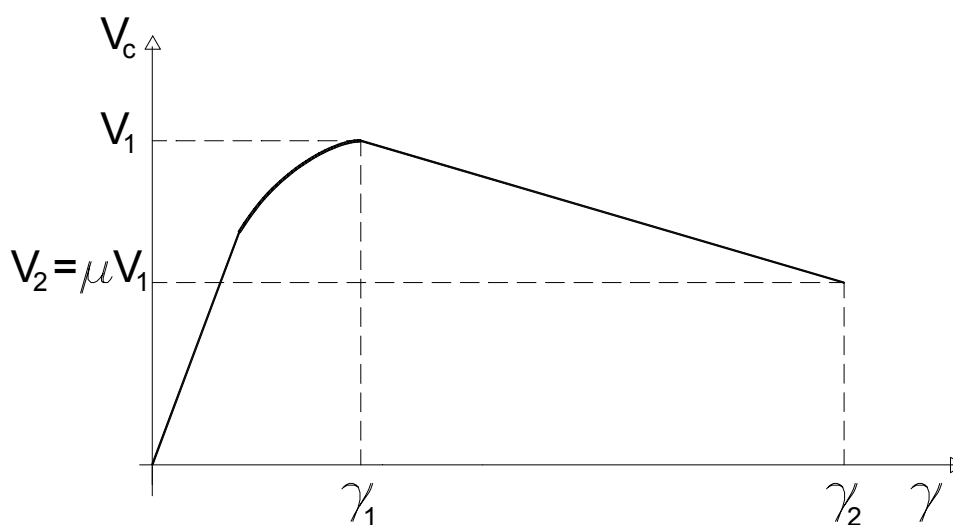


Figura 7.14: Esforço cortante X distorção - contribuição do concreto.

resultados assim obtidos são corrigidos para levar em conta a distribuição parabólica dessas deformações ao longo da espessura da laje, assim:

$$\gamma_{xz} = -\frac{6\gamma_{xz}}{h^2} z^2 + \frac{6\gamma_{xz}}{h} z \quad (7.17a)$$

$$\gamma_{yz} = -\frac{6\gamma_{yz}}{h^2} z^2 + \frac{6\gamma_{yz}}{h} z \quad (7.17b)$$

Com o campo de deformações ao longo da seção, a parcela de esforço cortante resistida pelo concreto, na direção corresponde a γ , é determinada pela integração numérica das tensões cisalhantes efetivas conforme a eq.(7.18) onde considera-se o módulo de elasticidade longitudinal penalizado, G^* .

$$V_c = f \int_{-h/2}^{h/2} G^* \gamma dz \quad (7.18)$$

A distorção γ_1 que admite-se delimitar o limite de validade do modelo mecânico de dano é, da mesma forma que para as vigas, determinada no ponto onde a derivada da curva esforço cortante X distorção obtida pelo modelo de dano é nula. A essa distorção estão associados um esforço cortante V_1 e um nível de dano no cisalhamento D_1 .

Os efeitos de pino e engrenamento são considerados no modelo de maneira simplificada, admitindo-se que o ângulo α_1 defina um trecho linear de softening ou hardening entre os pontos V_1, γ_1 e V_2, γ_2 . Na ausência de dados experimentais, sugere-se como uma aproximação que a inclinação do trecho seja definida empregando-se a expressão da NBR 6118 (2003) para o cálculo da tensão limite para lajes sem armadura de punção. O fundamento para o emprego dessa equação está no fato de que o modelo mecânico deve levar a resultados de carga limites próximos daqueles previsto pela norma, assim considera-se o fator μ que leva em conta dos efeitos de pino e engrenamento conforme a eq.(7.19).

$$\mu = \frac{(1 + \sqrt{20/d})(\rho)^{1/3}}{1,7} \quad (7.19a)$$

com:

$$V_2 = \mu V_1 \quad (7.19b)$$

onde d é a altura útil da laje tomada como a média entre d_x e d_y ; $\rho^2 = (\rho_x \rho_y)$, com ρ_x e ρ_y sendo as taxas de armadura longitudinal de tração segundo as direções x e y , respectivamente.

$$V_{cy} = V_c \sin(\phi) = V_c \gamma_{yz} / \gamma \quad (7.16c)$$

$$V_{sx} = V_s \cos(\phi) = V_s \gamma_{xz} / \gamma \quad (7.16d)$$

$$V_{sy} = V_s \sin(\phi) = V_s \gamma_{yz} / \gamma \quad (7.16e)$$

$$V_x = V_{cx} + V_{sx} \quad (7.16f)$$

$$V_y = V_{cy} + V_{sy} \quad (7.16g)$$

A curva esforço cortante X distorção será então desenvolvida considerando-se a direção equivalente definida pelas eqs (7.16), sendo semelhante à viga. A quinta hipótese adotada no item 7.2.1 deve ser adaptada assumindo-se que o eixo das barras da armadura transversal forma um ângulo de 90° com o plano médio das lajes.

O efeito de pino da armadura longitudinal de tração é mais importante nas lajes do que nas vigas devido ao “efeito de escala”, dessa forma os erros cometidos em não considerá-los seriam maiores. A avaliação precisa desse efeito apenas pode ser efetuada através de resultados experimentais, no entanto existe a possibilidade de calibrar-se o modelo para que as cargas limite de punção sejam idênticas às prescritas pela NBR 6118 (2003) para lajes sem armadura transversal, conforme será discutido no próximo item.

7.3.2-CONTRIBUIÇÃO DO CONCRETO

A determinação da contribuição do concreto na resistência ao cisalhamento será efetuada empregando-se um dos modelos para o dano no concreto (capítulo 6), as deformações normais devidas à flexão composta na placa serão consideradas no cálculo da variável de dano juntamente com as distorções. Assim, para um ponto-amostra no interior da laje serão calculados os esforços efetivos: M_x , M_y , M_{xy} , N_x , N_y , N_{xy} e V_c ; este último termo será função da distorção equivalente γ conforme as eqs (7.16a), as componentes V_{cx} e V_{cy} serão conforme as eqs (7.16b, c). Para a determinação direta das distorções, empregando-se o método dos elementos finitos, é necessário que as formulações sejam desenvolvidas considerando-se a teoria de flexão de placas de Reissner-Mindlin.

As distorções obtidas pelo MEF são função dos deslocamentos nodais no elemento e podem ser conhecidas através da derivação da função de forma, os

escorregamento. Maiores detalhes sobre a armadura de punção podem ser encontrados em Fusco (1995) e Melges (2001).

O comportamento das lajes no cisalhamento é bem mais complexo que o comportamento das vigas, por isso a utilização prática do modelo proposto carece de calibragem dos parâmetros envolvidos através de resultados experimentais onde sejam mensuradas o esforço em função das distorções, no entanto a realização de experimentos não faz parte do trabalho proposto. Uma maneira para se avaliar o esforço de pino seria através da modelagem tridimensional associada à mecânica da fratura.

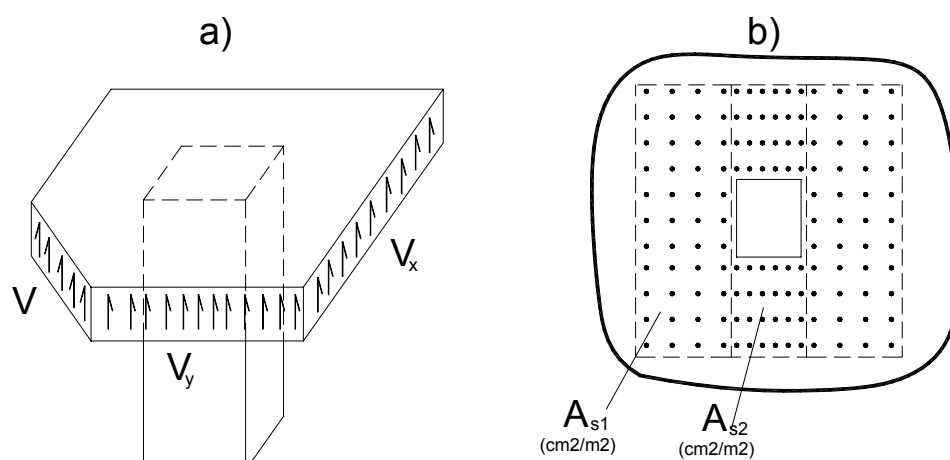


Figura 7.13: a) Direções do esforço cortante; b) Armadura de cisalhamento assumida.

7.3.1 HIPÓTESES

As hipóteses do modelo para o cisalhamento em lajes permanecem idênticas às formuladas para vigas. Para simplificar o caráter bidimensional da resistência ao cisalhamento das lajes, propõe-se a adoção de uma distorção equivalente segundo uma direção oblíqua ao plano cartesiano na qual serão determinadas as parcelas de contribuição do concreto, V_c , e da armadura, V_s , na resistência ao cisalhamento. A danificação do concreto será calculada em função das distorções, das curvaturas em cada uma das direções e das deformações axiais devidas ao efeito de membrana. Assim, define-se a direção ϕ para o cálculo de V_c e V_s :

$$\gamma^2 = \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2 \quad (7.16a)$$

$$V_{cx} = V_c \cos(\phi) = V_c \gamma_{xz} / \gamma \quad (7.16b)$$

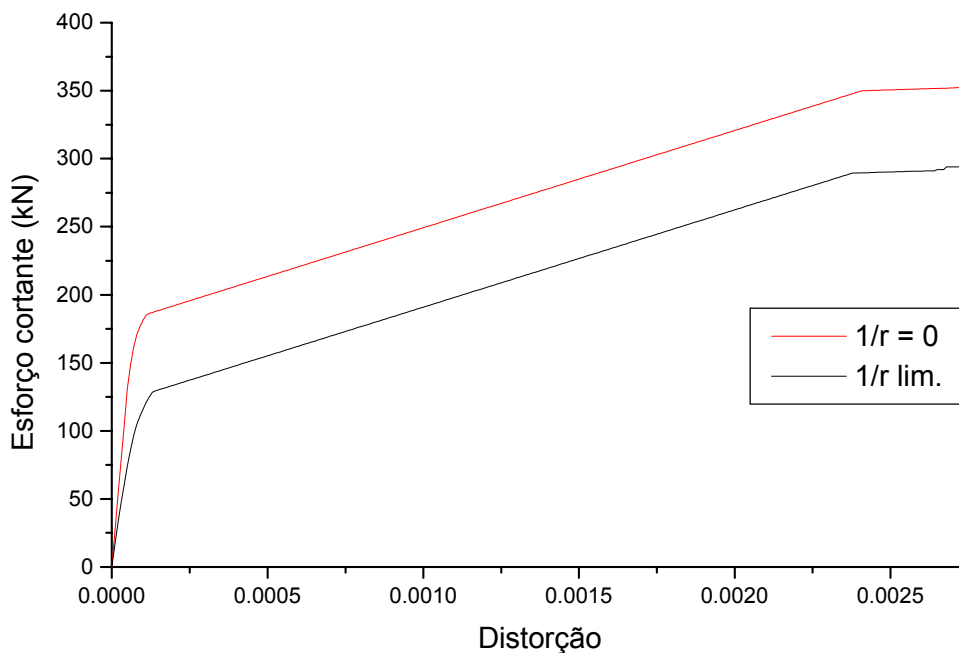


Figura 7.12: Diagrama cortante X distorção armadura transversal mínima.

7.3-MODELO IDEALIZADO PARA O CISALHAMENTO EM LAJES

Neste item apresenta-se um modelo simplificado idealizado para o cisalhamento em lajes de concreto armado que se constitui numa generalização do proposto para vigas. As tensões tangenciais nas placas se desenvolvem segundo duas direções ortogonais entre si, assim, em cada ponto da laje haverá um esforço cortante V_x associado a uma distorção γ_{xz} e um esforço V_y com a correspondente distorção γ_{yz} . Para a idealização de um modelo é interessante que seja definido um esforço V e uma distorção γ representativos do carácter bidimensional das placas, conforme ilustrado pela figura 7.13a.

A armadura de punção será considerada como uma malha retangular distribuída numa superfície unitária da placa para toda uma região no entorno de um pilar, conforme a figura 7.13b. Para a modelagem em serviço, admite-se que não há problemas de ancoragem da armadura de cisalhamento. Em se pretendendo o detalhamento de lajes sujeitas à punção, é necessário um cuidado quanto ao emprego dessas armaduras. Em geral, são empregados conectores tipo pino com chapas soldadas nas suas extremidades ou estribos, nesse caso, cuidados adicionais devem ser previstos, pois os estribos são menos eficientes em lajes delgadas devido ao problema do

O esforço cortante resistido pela seção será então a soma das parcelas V_c e V_s , e será obtido em função da distorção na seção, da taxa de armadura transversal além dos esforços de flexão atuando em conjunto com o cisalhamento. O diagrama esforço cortante X distorção poderá então ser obtido determinando-se V para diversas distorções γ .

Considere-se uma viga com seção transversal de $20 \times 110 \text{ cm}^2$ com as seguintes taxas de armadura transversal: $17 \text{ cm}^2/\text{m}$ e $3 \text{ cm}^2/\text{m}$, a primeira taxa se refere ao maior esforço cortante admissível para a peça, enquanto que a segunda taxa diz respeito à armadura mínima de cisalhamento.

São ilustrados pelas figura 7.11 e 7.12 o diagramas esforço cortante X distorção, considerando-se o cisalhamento puro e o estado de cisalhamento e máxima flexão permitida (taxa de armadura longitudinal igual a 1,15%). Considerando-se $f_{ck} = 20 \text{ MPa}$, a contribuição do concreto, de acordo com a NBR 6118 (1978) seria aproximadamente 148 kN , observa-se pelos gráfico que os valores obtidos para a contribuição do concreto são próximos ao fornecido pela norma.

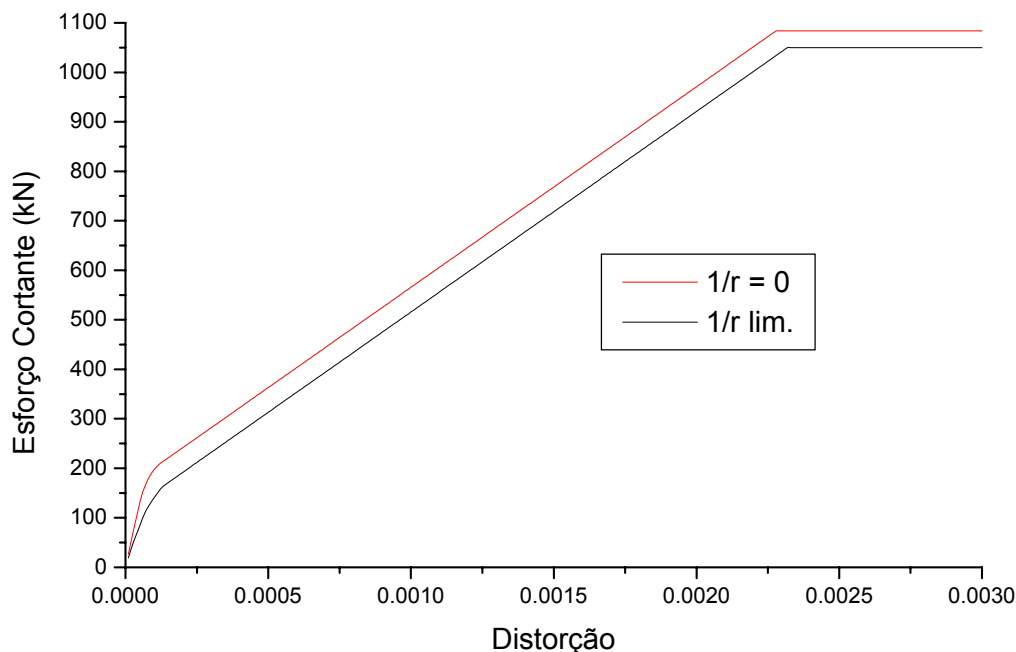


Figura 7.11: Diagrama cortante X distorção para alta taxa de armadura transversal.

Da figura 7.9 pode-se observar que as deformações nos estribos são devidas principalmente às tensões cisalhantes, sendo que nas fibras inferiores o ângulo α é de 90° , conseqüentemente o esforço correspondente será absorvido pela armadura longitudinal; nas fibras superiores, à medida que se afasta do centro da seção, ε_1 tende a zero. Dessa forma, pode-se concluir que a tensão na armadura transversal é variável ao longo da altura da viga, conforme ilustrado pela figura 7.10, onde observa-se que σ_s varia parabolicamente, o que está de acordo com as deformações por cisalhamento.

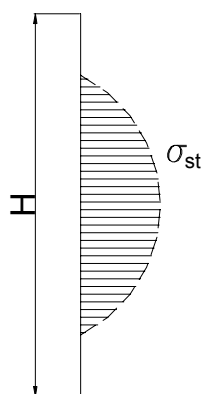


Figura 7.10: tensões na armadura transversal.

Para o cálculo de V_s deve ser empregado o maior valor da tensão σ_{st} na altura da viga. A deformação da armadura transversal é determinada de acordo com a eq. (7.12) até o valor limite em que a distorção da seção é igual a γ_1 , assim define-se a deformação ε_{s1} como sendo aquela correspondente à distorção γ_1 .

Admite-se que acréscimos de distorção além do limite γ_1 mobilizem apenas a parcela de resistência ao cisalhamento relativa à armadura transversal, V_s , dessa forma será considerado o cisalhamento puro para esses acréscimos de distorções, o que significa dizer que a deformação principal ε_1 será, em cada ponto da seção, igual a deformação por distorção relativa a tais acréscimos. Assim a deformação dessa armadura será determinada pela eq. (7.15), enquanto a respectiva tensão pela eq. (7.13a) e V_s conforme (7.13b).

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{s1} + (\gamma_{xz} - \gamma_1) \cos(45^\circ) \quad (7.15)$$

onde γ_{xz} e γ_1 deverão estar de acordo com a eq. (7.8) para $z = h/2$.

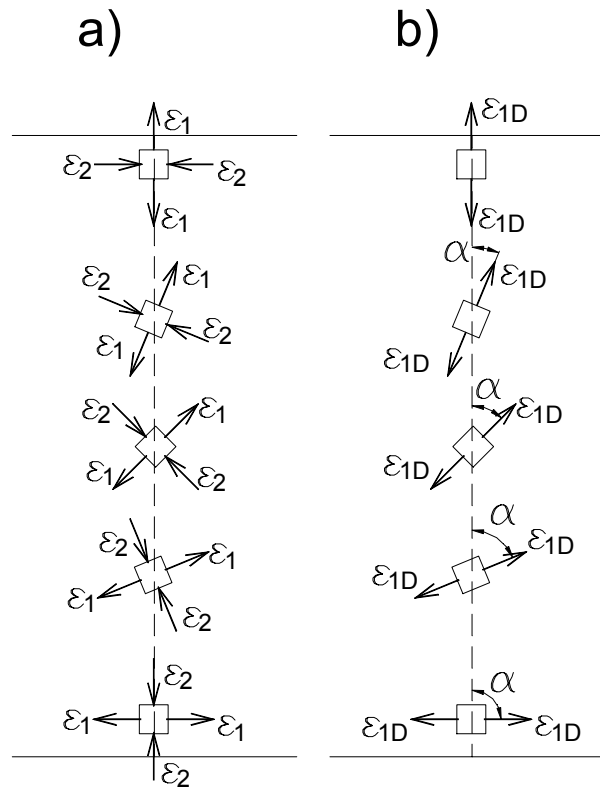


Figura 7.9: a) deformações principais; b) parcela excedente ao regime elástico.

A deformação na armadura transversal, para distorções menores que γ_1 , será então determinada pela eq. (7.12) e as tensões nessa armadura são calculadas de acordo como o modelo elasto-plástico apresentado no capítulo 6. O esforço correspondente à contribuição da armadura é obtido pela eq. (7.13b) onde considera-se, empregando-se uma das hipóteses da analogia de treliça, todas as barras contidas num comprimento igual a altura útil da viga, d .

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{1D} \cos(\alpha) \quad (7.12)$$

$$\sigma_{st} = f(\varepsilon_s, E_s) \quad (7.13a)$$

$$V_s = \sigma_{st} \rho_{st} d \quad (7.13b)$$

onde ρ_{st} é a taxa de armadura transversal.

Para o caso de cisalhamento puro, obtém-se:

$$\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = |\gamma_{xz}| \quad (7.14)$$

7.2.3-CONTRIBUIÇÃO DA ARMADURA TRANSVERSAL

Admite-se que a armadura transversal sofra alongamentos apenas a partir do momento em que ocorre abertura de fissuras na viga, hipótese que é verificada em resultados experimentais; a figura 7.8 ilustra as deformações nos estribos numa viga ensaiada no laboratório de estruturas da EESC, pode-se observar que essa deformação assume valores expressivos apenas após o valor de 20 kN, o que condiz com o proposto por este modelo.

Para o cálculo da deformação da armadura transversal, admite-se que o tensor das deformações principais, ϵ , seja composto por duas parcelas, a primeira delas, ϵ_e , está associada ao limite do regime elástico, enquanto que a segunda parcela, ϵ_D , corresponde às deformações excedentes ao regime elástico, passíveis de causar danificação.

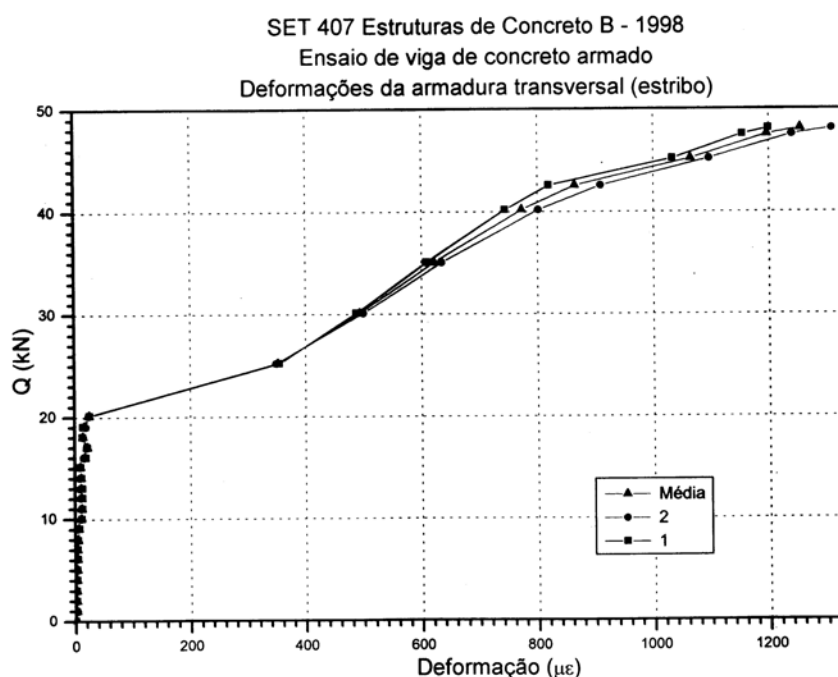


Figura 7.8: Deformações na armadura transversal.

Para o concreto, a abertura de fissuras está associada à deformação principal ϵ_1 , assim admite-se que ϵ_{1D} é a variável representativa da fissuração da peça. Para distorções inferiores à γ_1 , a determinação do alongamento da armadura transversal é efetuada através da rotação da deformação ϵ_{1D} para a direção dessa armadura. Na figura 7.9a ilustra-se as deformações principais ao longo da altura de uma viga com esforço cortante e momento fletor, na figura 7.9b ilustra-se as deformações ϵ_{1D} com as suas respectivas direções em relação a um plano horizontal.

Admitindo-se que exista um esforço de flexão na seção, a distorção γ_1 assumirá um valor maior do que aquele determinado para o cisalhamento puro, enquanto que o esforço cortante V_1 assumirá um valor inferior aquele referente ao cisalhamento puro. A possibilidade de se levar em conta a influência do esforço de flexão constitui-se numa vantagem do emprego deste modelo, uma vez que as normas para dimensionamento em ruína admitem uma tensão única para a consideração da contribuição do concreto na resistência ao cisalhamento. A figura 7.7 ilustra a variação das variáveis V_1 e γ_1 em função da curvatura da seção.

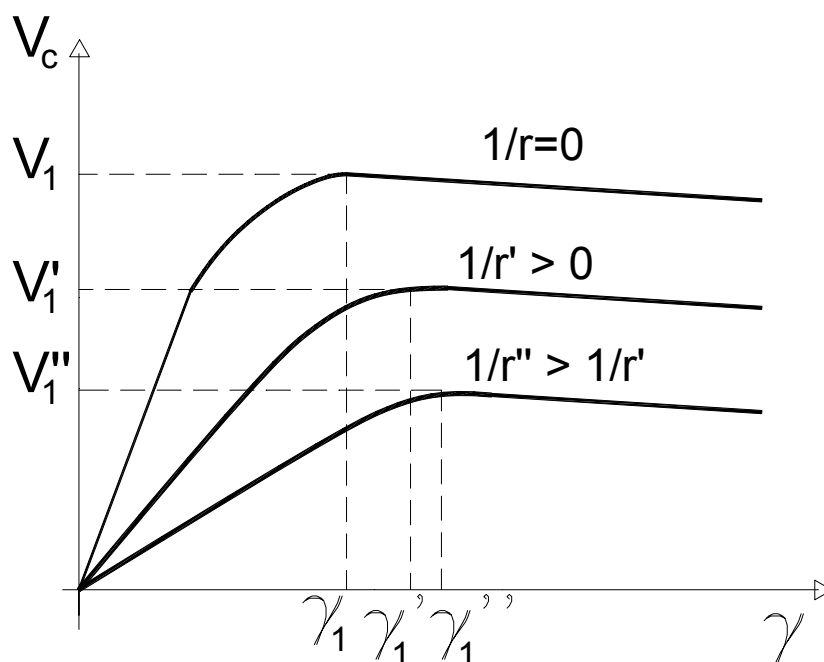


Figura 7.7: Curva cortante X distorção em função da curvatura.

O ângulo α_1 pode ser determinado de maneira precisa através de ensaios de laboratório levando-se em conta a taxa de armadura longitudinal, no entanto a execução de ensaios não faz parte dos objetivos deste trabalho. A proposta de utilização do ângulo α_1 é respaldada pela comparação dos resultados numéricos obtidos com ensaios onde são medidas as distorções e os respectivos esforços cortantes. Para efeito das modelagens numéricas deste trabalho admite-se $\alpha_1 = 0$.

armadura transversal; se houve um aumento na abertura de fissuras deverá ocorrer uma diminuição do efeito de engrenamento, admite-se que essa diminuição se dê de maneira linear. Há de se lembrar que, para a flexo-tração, os efeitos de pino e engrenamento não devem ser considerados.

Ao nível de danificação D_1 estarão associados um esforço cortante V_1 e uma distorção γ_1 . Esse nível será adotado como sendo o ponto de inflexão da curva esforço cortante efetivo X distorção, ou seja, onde inicia-se o trecho de “softening”. A justificativa para a adoção desse ponto está no fato de que, a partir desse nível, o processo de danificação torna-se mais intensivo e, conseqüentemente, a abertura de fissuras inicia-se, conforme ensaios experimentais de elementos tracionados.

Considera-se que para distorções menores que γ_1 o comportamento do concreto será bem representado pela mecânica do dano. Assim, para a determinação de V_1 e γ_1 , deve ser satisfeita a condição:

$$\frac{dV}{d\gamma} = 0 \quad (7.10)$$

Para valores da distorção da seção maiores que γ_1 , admite-se que o mecanismo resistente ao cisalhamento se dê apenas pelos efeitos de pino e de engrenamento. O esforço cortante efetivo será então determinado pelas eqs. (7.11). A parcela resistida pelo concreto é ilustrada pela figura 7.6, o trecho de softening apenas existirá para o caso da flexo-tração.

$$V_c = f(D, \gamma, \varepsilon_x) \quad p / \gamma \leq \gamma_1 \quad (7.11a)$$

$$V_c = V_1 - (\gamma - \gamma_1) \tan(\alpha_1) \quad p / \gamma > \gamma_1 \quad (7.11b)$$

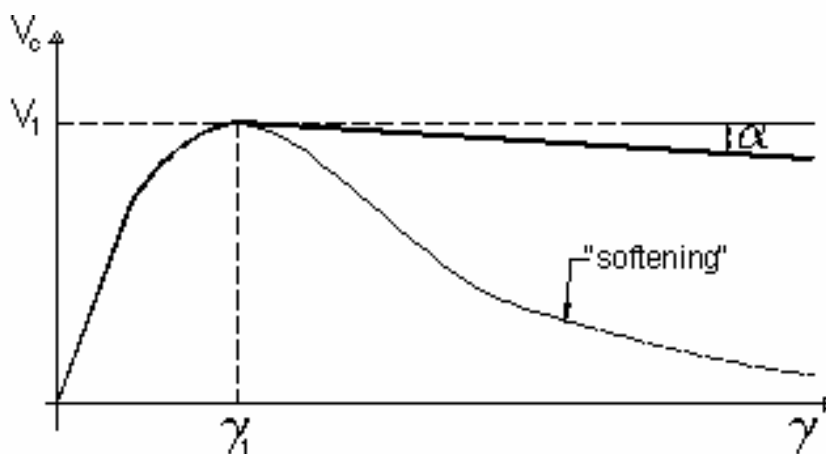


Figura 7.6: Contribuição do concreto.

A partir do conhecimento do campo de deformações ao longo da seção, a parcela de esforço cortante resistido pelo concreto é determinada pela integração numérica do campo de tensões cisalhantes efetivas conforme a eq. (7.9). A determinação dessas tensões é efetuada utilizando-se de um dos modelos de dano apresentados no capítulo 6. Observa-se que a consideração dos esforços de flexão tem influência direta na determinação da resistência do concreto ao cisalhamento.

$$V_c = f \int_{-h/2}^{h/2} G^* \gamma_z dz \quad (7.9)$$

onde G^* é o módulo transversal penalizado pelo danificação do concreto, f é o parâmetro para considerara a forma da seção, para seção retangular $f=5/6$.

À medida que a danificação do concreto evolui, ocorre uma plastificação das tensões cisalhantes efetivas. Se o processo de danificação não é impedido, as tensões cisalhantes tendem a zero, conforme é ilustrado pela figura 7.5. Entretanto, para as sollicitações tangenciais, ocorre a abertura de fissuras diagonais que, associadas ao efeito de pino, se constituem num mecanismo adicional de resistência ao cisalhamento por terem a capacidade de transmitir tensões devido à rugosidade de suas superfícies.

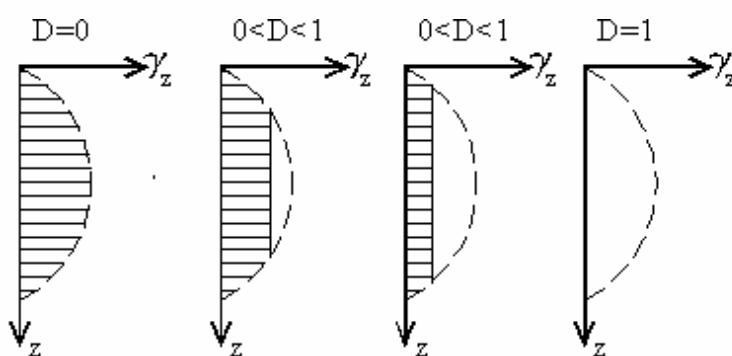


Figura 7.5: Evolução da danificação no cisalhamento.

Admite-se que as parcelas de esforço cortante resistidas pelos efeitos de pino e engrenamento não provoquem acréscimo no estado de danificação por cisalhamento no concreto, dessa forma haverá um nível de danificação, D_1 , a partir do qual o processo de deterioração do concreto se estabiliza, a partir desse nível, um acréscimo de distorção na seção aumentaria a abertura das fissuras e, conseqüentemente, a sollicitação da

10. A parcela de esforço cortante resistido pelo concreto, V_c , é determinada levando-se em conta a iteração como os momentos fletores e esforços normais atuantes na seção. Essa iteração pode provocar uma maior danificação no concreto e, conseqüentemente, uma diminuição em V_c .
11. Para a flexo-tração, os efeitos de pino e de engrenamento são desprezados.
12. A compressão no concreto é verificada impondo-se a condição da deformação principal: $\varepsilon_3 \leq 0,2\%$.

7.2.2-CONTRIBUIÇÃO DO CONCRETO

Para o emprego do modelo proposto é necessário que as deformações normais à seção, ε_x , e a distorção, γ_{xy} , sejam conhecidas. Empregando-se o método dos elementos finitos, por exemplo, essas deformações são determinadas em função das curvaturas que por sua vez são obtidas a partir dos deslocamentos nodais de um elemento. Para que a distorção também seja obtida em função dos deslocamentos deve ser empregada a teoria de vigas de Timoshenko. As equações para a curvatura e para a distorção foram apresentadas no capítulo 3 deste trabalho.

Sabe-se da Resistência dos Materiais que, para uma seção retangular, as deformações tangenciais variam parabolicamente ao longo da altura da seção. Se as distorções obtidas pelo método dos elementos finitos fossem empregadas diretamente estar-se-ia admitindo que as deformações tangenciais são constantes. Propõe-se empregar um diagrama de deformações parabólico obtido a partir do valor de γ , assim o valor dessa deformação em cada ponto da altura da seção será dado pela eq. (7.8). A figura (7.4) ilustra o sistema de coordenadas adotado e o campo de deformações.

$$\gamma_z = -\frac{6\gamma}{h^2}z^2 + \frac{6\gamma}{h}z \quad (7.8)$$

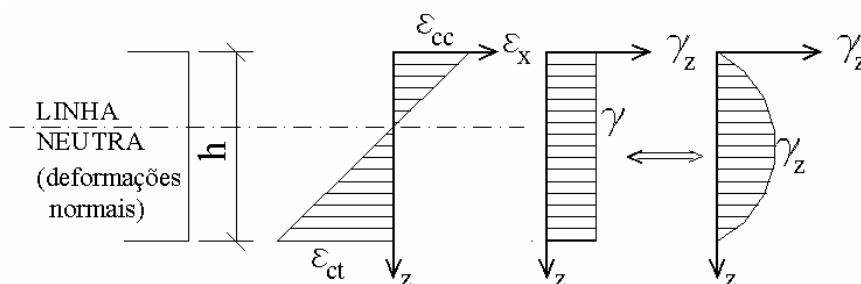


Figura 7.4: Deformações na seção transversal de viga.

7.2-MODELO IDEALIZADO PARA O CISALHAMENTO EM VIGAS

Apresenta-se neste item uma proposta de modelo para o cisalhamento em vigas de concreto armado aplicável às condições de serviço. O modelo é fundamentado em hipóteses da teoria da elasticidade, da mecânica do dano e da analogia de treliça, os efeitos de pino e de engrenamento são considerados de maneira simplificada. O objetivo do modelo é obter o diagrama cortante x distorção para vigas de concreto armado em função da taxa de armadura transversal e dos momentos fletores atuantes.

7.2.1-HIPÓTESES

1. A hipótese fundamental do modelo é que um esforço cortante, V , é composto por duas parcelas, sendo a primeira delas relativa à contribuição do concreto e a segunda se refere à contribuição da armadura transversal, assim:

$$V = V_c + V_s \quad (7.7)$$

2. A relação entre tensões e deformações do concreto é determinada pelos modelos de dano de Mazars ou de Comi & Perego.
3. A armadura transversal apenas sofre alongamentos quando se inicia a fissuração diagonal da peça, dessa forma, na ausência da formação de fissuras $V_s = 0$.
4. O processo de fissuração diagonal inicia-se quando a variável escalar representativa do dano à tração, D_t , for maior que zero.
5. O eixo das barras da armadura transversal forma um ângulo de 90° com o eixo da viga.
6. Condira-se, para o cálculo de V_s , todas a barras da armadura longitudinal contidas numa faixa de largura igual a altura útil do elemento, d . Essa hipótese advém do modelo de treliça.
7. As tensões na armadura transversal são determinadas através do modelo elasto-plástico descrito neste capítulo.
8. Os efeitos de pino e de engrenamento ocorrem a partir do instante em que a derivada da curva esforço cortante no concreto X distorção é zero.
9. O trecho de “softening” da curva de esforço cortante no concreto é suavizado, para que se possa levar em conta o efeito de engrenamento.

Após determinados os esforços, procede-se ao cálculo das tensões nos elementos da treliça, assim tem-se que a tensão na armadura longitudinal, de acordo com a analogia de treliça, pode ser expressa por:

$$\sigma_s = \frac{V_D}{A_{SM}} = \frac{V_D}{\rho_{SW} b_w Z} = \frac{\tau_0}{\rho_{SW}} \quad (7.4)$$

onde A_{sm} é a área dos montantes tracionados; ρ_{sm} é a taxa de armadura transversal e τ_0 é a chamada tensão tangencial de referência.

A tensão nas bielas de compressão é determinada por:

$$\sigma_{BC} = \frac{R_{C45}}{A_{BC}} = -2 \tau_0 \quad (7.5)$$

onde A_{BC} é a área da biela comprimida, determinada pela eq. (7.6).

$$A_{BC} = \frac{b_w}{\cos 45^\circ} \frac{Z}{2} = \frac{b_w Z}{\sqrt{2}} \quad (7.6)$$

Observe-se que se armadura transversal for dimensionada a partir da eq. (7.4) será admitido que o concreto não contribui para a resistência aos esforços cisalhantes, conforme foi discutido, existem os efeitos de pino e engrenamento que conferem ao concreto uma capacidade de resistir ao cisalhamento mesmo após a formação de fissuras diagonais.

Sobre os mecanismos de pino e de engrenamento, pode-se dizer que estes são mecanismos complementares à treliça, evidentemente, caso fossem desprezados o que obter-se-ia seria a clássica treliça de Ritter-Morsch. A NBR 6118 (2003) simplifica esses mecanismos definindo uma parcela de contribuição do concreto, V_c , ao esforço obtido pela analogia de treliça, R_{tt} , deve ser descontada a parcela de contribuição do concreto.

Pode-se interpretar o valor de V_c como sendo o máximo esforço de cisalhamento ao qual a seção transversal pode resistir sem necessidade de solicitar a armadura transversal, após atingido esse valor, inicia-se um processo mais intensivo de danificação do elemento estrutural. Admite-se que a solicitação da armadura transversal apenas ocorra após o valor de V_c ser atingido.

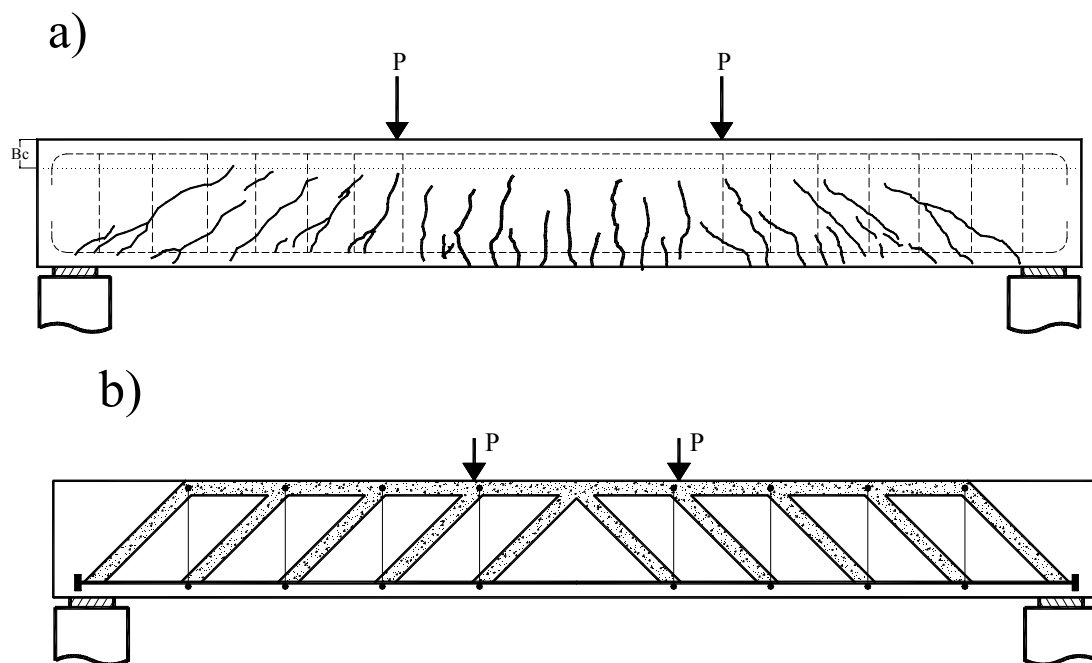


Figura 7.3: a) Viga de concreto armado fissurada; b) Analogia de treliça - de Fusco (1977)

As hipóteses básicas da analogia de treliça são as seguintes:

- A treliça é isostática de banzos paralelos, inclinando-se na região dos apoios;
- Não existe engastamento nas ligações entre os banzos com as diagonais;
- As bielas de compressão estão inclinadas a 45° em relação ao eixo longitudinal da peça;
- A armadura transversal pode ter inclinação entre 45° e 90° em relação ao eixo.

Os esforços na treliça são determinados a partir das hipóteses acima citadas. Ressalta-se que para calcular-se os esforços nos banzos deve-se efetuar uma translação do diagrama de momentos fletores. O valor dessa translação, a_L , pode ser determinado pela eq. (7.1).

$$a_L = \frac{z}{2} + \frac{s_t}{2} \quad (7.1)$$

onde z é a altura da treliça e s_t é o espaçamento entre as barras da armadura transversal.

Os esforços na biela comprimida e no montantes tracionados são determinados pelas eqs (7.2) e (7.3), respectivamente.

$$R_{C45} = -V_D \sqrt{2} \quad (7.2)$$

$$R_{TT} = V_D \quad (7.3)$$

onde V_d é o esforço cortante na seção.

carga de ruína é determinada através do equilíbrio entre esforços internos e esforços externos. Com base no modelo de Kinnunen & Nylander, Shehata (1985) propôs um modelo mecânico, ou racional, para a punção.

Shehata (1990) apresenta uma simplificação em seu modelo, admitindo bielas comprimidas e tirantes radiais; nesse modelo são desprezadas as forças de pino da armadura de tração, pois, segundo o autor, as tensões na armadura longitudinal atingem o patamar de escoamento no momento da ruptura por punção, impedindo a atuação do esforço de pino. Gomes (1991) elaborou um modelo para lajes com armadura de punção submetidas a carregamento centrado.

7.1.4-CISALHAMENTO EM VIGAS

O estudo de modelos de resistência ao cisalhamento tem grande importância para a melhor representação do comportamento estrutural de elementos fletidos de concreto armado. Uma hipótese bastante fecunda é a clássica treliça de Ritter-Morsch que tem sido, desde a sua concepção até os dias atuais, a base para o dimensionamento da armadura transversal de vigas.

Essa hipótese é melhor empregada para vigas solicitadas a carregamentos capazes de levar o elemento próximo à ruína – Fusco (1977), sendo obviamente melhor empregada no dimensionamento do que na análise em serviço, porém os conceitos básicos são de interesse para a elaboração de um modelo para o cisalhamento em vigas e lajes. Apresenta-se, a seguir, uma rápida descrição da analogia de treliça, maiores detalhes podem ser encontrados em Fusco (1977) e Süssekind (1991).

Segundo a clássica analogia de treliça, uma viga de concreto armado, depois de fissurada, terá comportamento estrutural idêntico ao de uma treliça. Assim sendo, os esforços nas armaduras longitudinal e transversal e nas bielas podem ser determinados através das equações de equilíbrio da treliça.

A figura 7.3a ilustra uma viga fissurada (carga de 70% da carga de ruptura), enquanto a figura 7.3b ilustra a analogia entre essa mesma viga e uma treliça isostática.

A punção está associada aos esforços de cisalhamento que são relativamente altos no entorno de pilares, provocando uma separação completa entre a laje e o pilar. Essa ruína é do tipo frágil, as diretrizes de projetos devem garantir que, caso ocorra, a ruína da laje se dê por esforços de flexão. Para aumentar a ductilidade da ligação pode ser empregada armadura de cisalhamento.

Para as lajes apoiadas em vigas rígidas, o cisalhamento não é razão de grande preocupação, geralmente a ruína por flexão dessas lajes ocorre muito antes das tensões cisalhantes atingirem um nível suficiente para exceder o limite elástico. Em relação às lajes lisas, a modelagem da punção nada mais será do que a modelagem do cisalhamento, considerando as duas direções de atuação das tensões cisalhantes.

7.1.3-MODELOS PARA PUNÇÃO EM LAJES DE CONCRETO ARMADO

Apresenta-se, neste item, uma breve apresentação de alguns modelos para a punção em lajes de concreto armado. Esses modelos são apropriados para a determinação da carga de ruptura, o objetivo deste trabalho é a modelagem de lajes em condições de serviço, no entanto é interessante o estudo de alguns conceitos empregados na formulação de modelos de ruína que são comuns à análise em serviço. Na tese de doutoramento de Holanda (2002) é apresentada uma explanação sobre alguns modelos para punção, entre eles os modelos de Kinnunen & Nylander (1960), Shehata (1985) e Gomes (1991), maiores detalhes também podem ser encontrados em Melges (2001).

Data do início do século passado as primeiras investigações sobre a punção, Talbot (1913) apud Melges (2001) ensaiou 197 sapatas sem armadura de cisalhamento, observando a ruína por punção em 20 delas. Graf (1933) realizou novos ensaios e comparou a resistência do concreto com a resistência à punção.

Richart (1948) observou que a taxa de armadura longitudinal tinha influência na resistência à punção. A primeira tentativa de quantificar a influência da resistência à flexão na resistência ao esforço cortante foi de Hognestad (1956). Elstner & Hognestad (1956) apresentam uma proposta pioneira para o cálculo da contribuição da armadura de punção.

Kinnunen & Nylander (1960) realizam ensaios em diversas lajes circulares com carregamento aplicado no centro. Com base nesses ensaios, propuseram o primeiro modelo mecânico cujo cálculo considera a flexão e a força cortante em conjunto, a

7.1.1-FATORES DE INFLUÊNCIA NA RESISTÊNCIA AO CISALHAMENTO

Neste item, descreve-se alguns fatores que são importantes para a formulação de um modelo constitutivo para o cisalhamento, a saber:

- Resistência do concreto: a resistência ao cisalhamento está relacionada com a resistência do concreto à tração. Para o caso de lajes lisas, o aumento da resistência do concreto aumentará a carga de ruptura por punção, porém não melhorará a ductilidade da ligação.
- Relação momento fletor / esforço cortante: elevados valores do momento fletor provocam uma maior danificação do concreto, diminuindo, assim, a resistência ao cisalhamento. O emprego de um modelo de dano isótropo, como é o caso deste trabalho, penaliza o módulo de deformação transversal do concreto na mesma razão em que o módulo longitudinal é penalizado.
- Taxa de armadura de flexão: tem influência direta sobre o efeito de pino da armadura longitudinal de tração e, conseqüentemente, sobre a manutenção do engrenamento.
- Tipo de agregado graúdo: os agregados graúdos têm influência direta sobre o engrenamento.
- Efeito de escala (“Size Effect”): a espessura dos elementos condiciona o engrenamento dos agregados, dessa forma para as lajes delgadas são mais resistentes ao cisalhamento do que as lajes espessas. Para a modelagem numérica, esse efeito é de difícil avaliação, carecendo de resultados experimentais para a calibragem dos modelos.
- Para lajes, pode-se citar os demais efeitos: presença de armadura de cisalhamento, tipo de carregamento, relação entre os lados do pilar (para punção). Maiores detalhes podem ser encontrados em Holanda (2002) .

7.1.2. CISALHAMENTO E PUNÇÃO EM LAJES DE CONCRETO ARMADO

A punção é um tipo de ruína que pode ocorrer em lajes de concreto armado quando nelas são aplicadas cargas concentradas ou distribuídas em pequenas áreas, causando a sua “perfuração” ou “puncionamento”. Nos sistemas estruturais compostos por lajes lisas a punção pode ocorrer na ligação entre a laje e o pilar.

se um esforço cisalhante V , sua aplicação causa um deslocamento horizontal d e, devido a irregularidade da superfície, tende a provocar uma separação das superfícies da fissura, identificada por w , conforme ilustrado pela figura 7.1. A principal variável que afeta a ação de engrenamento dos agregados é a abertura inicial da fissura, w_0 ; grandes aberturas iniciais implicam em menores ações de engrenamento, e, conseqüentemente, em menores rigidez e resistência ao cisalhamento.

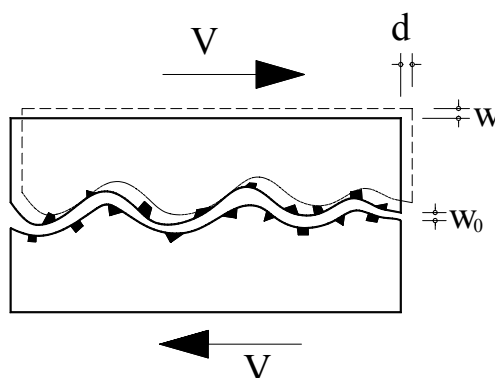


Figura 7.1: Mecanismo de engrenamento - conforme Figueiras (1983).

O efeito de pino (figura 7.2) das barras da armadura longitudinal de tração consiste na flexão localizada destas barras devido a transmissão de tensões tangenciais pelas faces das fissuras diagonais, permitindo assim uma resistência adicional ao cisalhamento. Esse efeito contribui para a manutenção do engrenamento e depende da rigidez à flexão dessas barras, além da taxa de armadura longitudinal. Se o esforço de pino for grande, poderá ocorrer o fendilhamento do cobrimento do concreto abaixo da armadura de tração. Fusco (1984) realizou ensaios de lajes de concreto armado e observou que taxas acima de 2% não aumentaram a resistência ao cisalhamento dessas lajes.

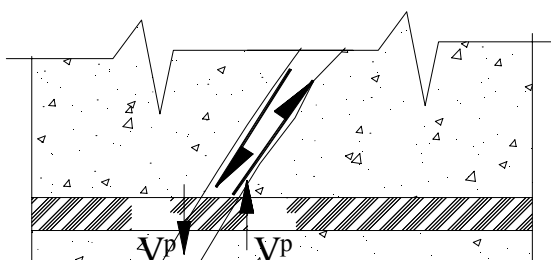


Figura 7.2: Efeito de pino da armadura de tração.

7 - ANÁLISE NÃO-LINEAR COM CISALHAMENTO

7.1-ASPECTOS GERAIS

A grande maioria das pesquisas relativas à análise não-linear de estruturas de concreto armado se concentra na modelagem do comportamento à flexão, sendo escassos os trabalhos que visam a modelagem do cisalhamento em condições de serviço. Entre as propostas para se levar em conta a perda de rigidez ao cisalhamento podem-se citar o trabalho de Hand, Pecknold & Schonobrich (1973) apud Pituba (2003) que modelaram o módulo de elasticidade transversal como um valor constante menor que o valor inicial. Figueras (1983) apud Pituba (2003) considera que o valor do módulo de elasticidade longitudinal decresce linearmente com a evolução da deformação normal ao plano fissurado.

A presença de fissuração torna o concreto um material com comportamento bastante particular no cisalhamento, as clássicas hipóteses da teoria da resistência dos materiais são válidas apenas para baixos níveis de tensões tangenciais. Uma dificuldade adicional na modelagem do cisalhamento é a presença de armadura transversal, a solicitação dessa armadura torna-se significativa apenas a partir do início da fissuração.

Figueras (1983) realizou investigações experimentais que mostraram ser importante a contribuição do concreto fissurado na resistência ao cisalhamento; essa contribuição se dá devido a ação de dois mecanismos, a saber: a ação de pino da armadura de tração e o engrenamento dos agregados.

As superfícies das fissuras são rugosas, irregulares e, geralmente, contornam os grãos dos agregados graúdos do concreto; essas superfícies são capazes de transferir tensões de cisalhamento devido a fricção e ao engrenamento dos agregados. Considere-

curvas de iso-valores que passam por esta faixa é que deve ser levada em conta no cálculo das reações de apoio em regime não-linear.

A análise não-linear da estrutura foi efetuada considerando-se a resposta não-linear à flexão e ao cisalhamento, na figura 8.28 ilustram-se os deslocamentos verticais admitindo-se não-linearidade apenas à flexão. O mínimo deslocamento vertical obtido foi de -35mm e o máximo foi de -19mm , ocorrendo uma diferença de menos de 10% em relação à análise não-linear com cortante; essa diferença não foi grande por que não houveram esforços cortantes muito superiores à resistência do concreto ao cisalhamento.

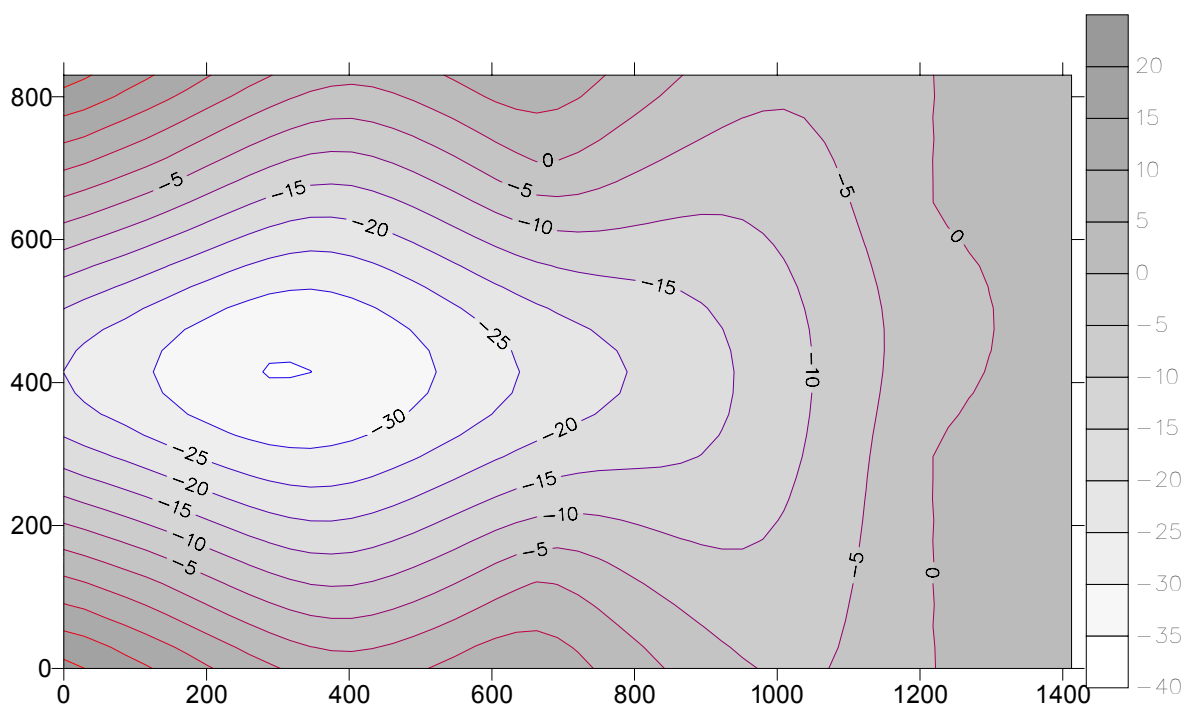


Figura 8.28: Deslocamentos verticais (mm) – Não-linear sem cisalhamento.

- Deslocamento vertical: mínimo:-38mm; máximo: +20mm.
- M_x : mínimo: -25kNm/m; máximo: +25kNm/m.
- M_y : mínimo: -30kNm/m; máximo: +17kNm/m.
- M_{xy} : mínimo: -25kNm/m; máximo: +20kNm/m.
- Q_x : mínimo: -110kN/m; máximo: +90kN/m.
- Q_y : mínimo: -90kN/m, máximo: +100kN/m.

A armadura empregada na análise não-linear, propositalmente diferente da dimensionada em regime linear, provocou uma redistribuição de esforços solicitantes na estrutura, todavia em alguns pontos, como as regiões do entorno dos pilares internos, houve uma intensiva danificação do concreto e conseqüente diminuição da capacidade resistente por estar a armadura negativa subdimensionada.

Em relação ao deslocamentos verticais na laje pode-se observar que os obtidos em regime não-linear foram cerca de 3x maiores do que os deslocamentos lineares, evidentemente caso fosse empregada a taxa de armadura relativa ao dimensionamento estes seriam menores. A verificação dos estados limites de utilização devem ser efetuadas considerando-se as apropriadas combinações de carregamento. Caso fosse pretendido a redução nos deslocamentos, um bom caminho seria a mudança na taxa de armadura longitudinal.

Houve uma tendência de uniformização em relação aos momentos fletores m_x positivos e negativos; já os momentos m_y positivos mantiveram-se constantes enquanto que os momentos m_y negativos tiveram seus valores reduzidos; este fato se explica pelo fato de que a malha negativa necessária seria de $7,65\text{cm}^2/\text{m}$ numa e $9,1\text{cm}^2/\text{m}$ noutra direção, porém empregou-se malha quadrada de $7\text{cm}^2/\text{m}$, devido ao caráter bidimensional das lajes, a danificação afeta as duas direções. Em relação aos momentos volventes os resultados na análise não-linear resultaram maiores, isso se deve à redistribuição dos momentos.

Os esforços cortantes Q_x foram muito próximos aos da análise linear, enquanto que o mínimo esforço Q_y foi reduzido em 25%. Em relação aos esforços cortantes, o que acaba acontecendo é um “espalhamento” dos mesmos por uma superfície maior do que a original, no entanto a resultante por unidade métrica, tomando-se a média das

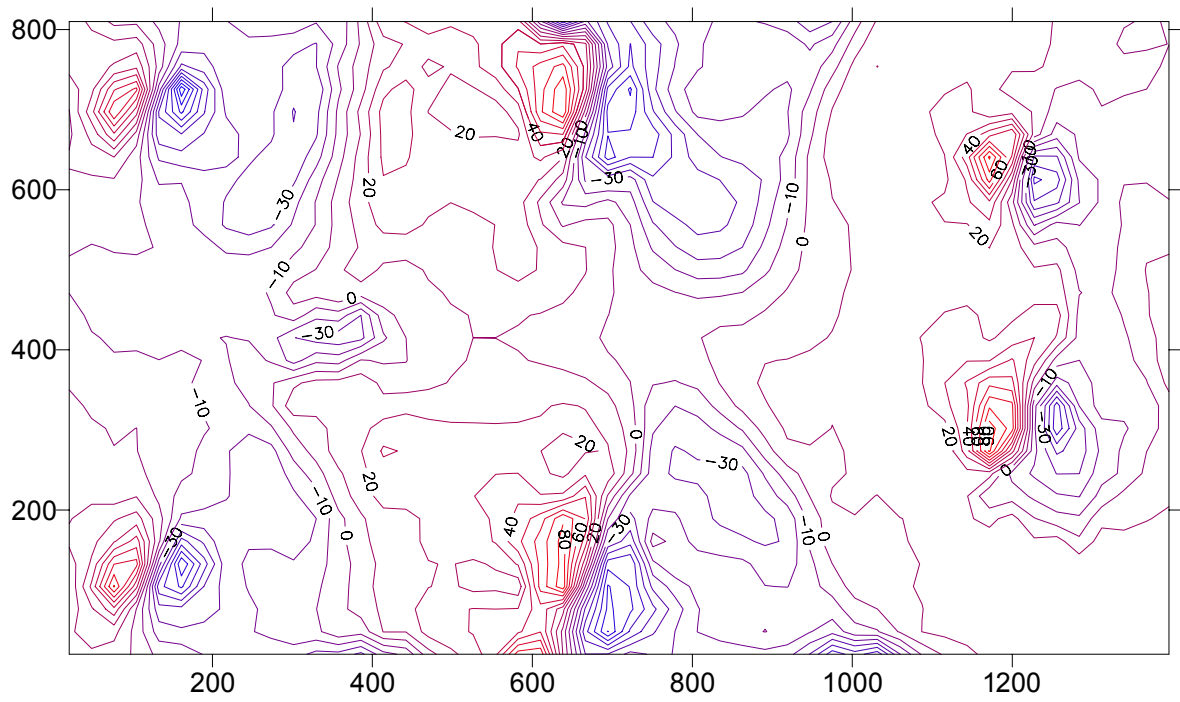


Figura 8.26: Q_x kN/m – Não-linear

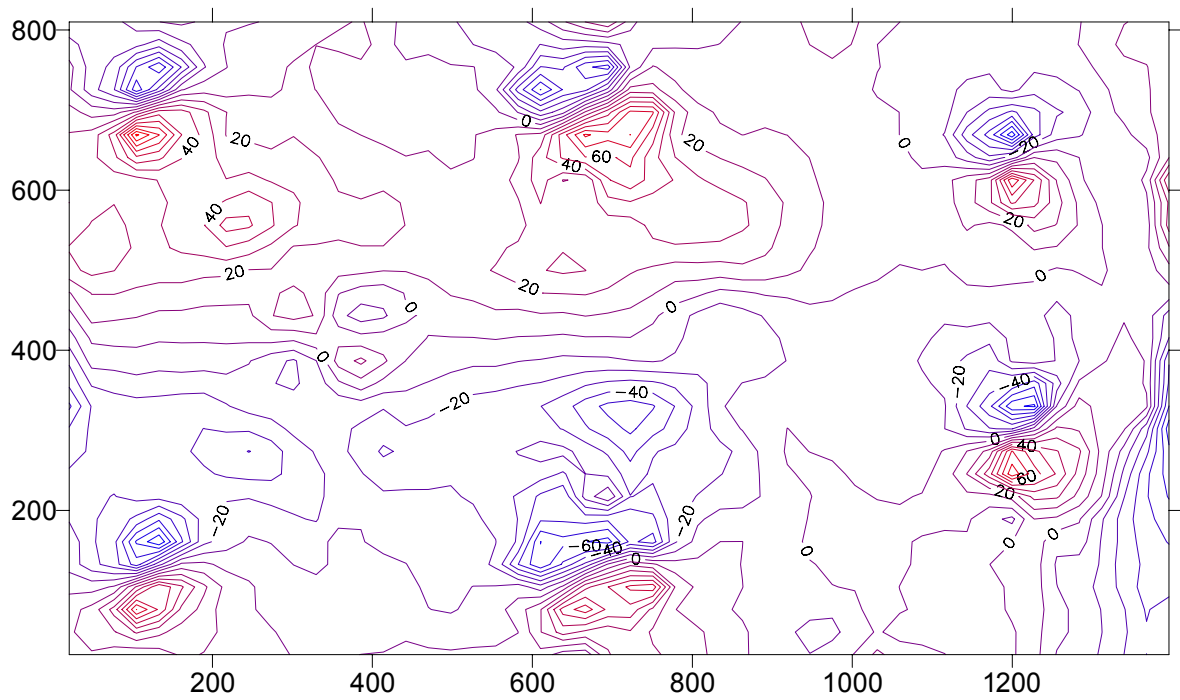
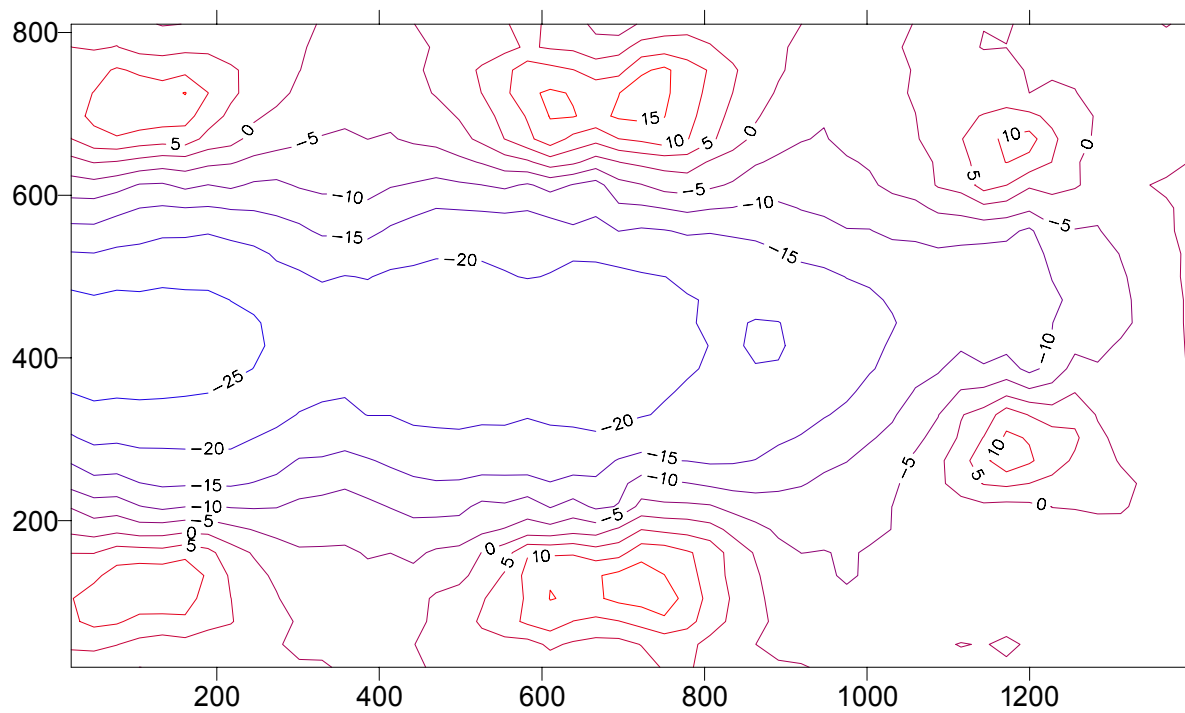
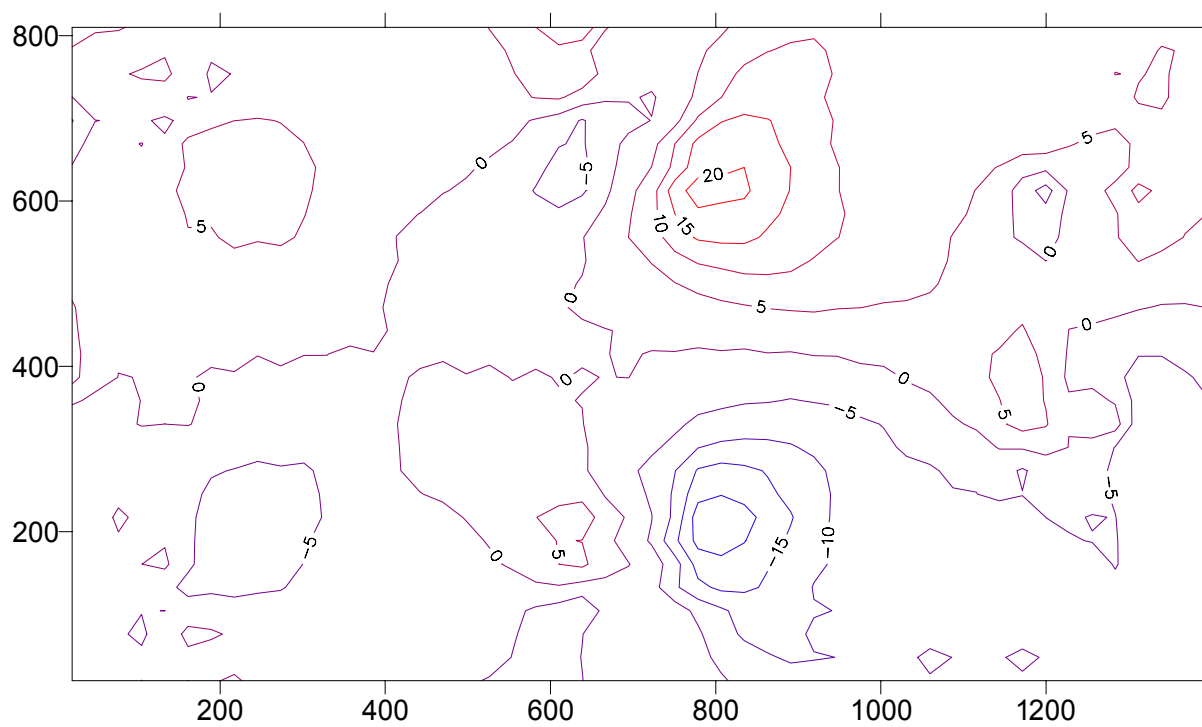


Figura 8.27: Q_y kN/m – Não-linear

Os máximos e mínimos valores obtidos na análise em regime não-linear foram os seguintes:

Figura 8.24: M_y kNm/m – Não-LinearFigura 8.25: M_{xy} kNm/m – Não-Linear

de 10% cada. Os resultados obtidos são mostrados nas figuras 8.22 à 8.27, exigindo-se precisão de 1%.

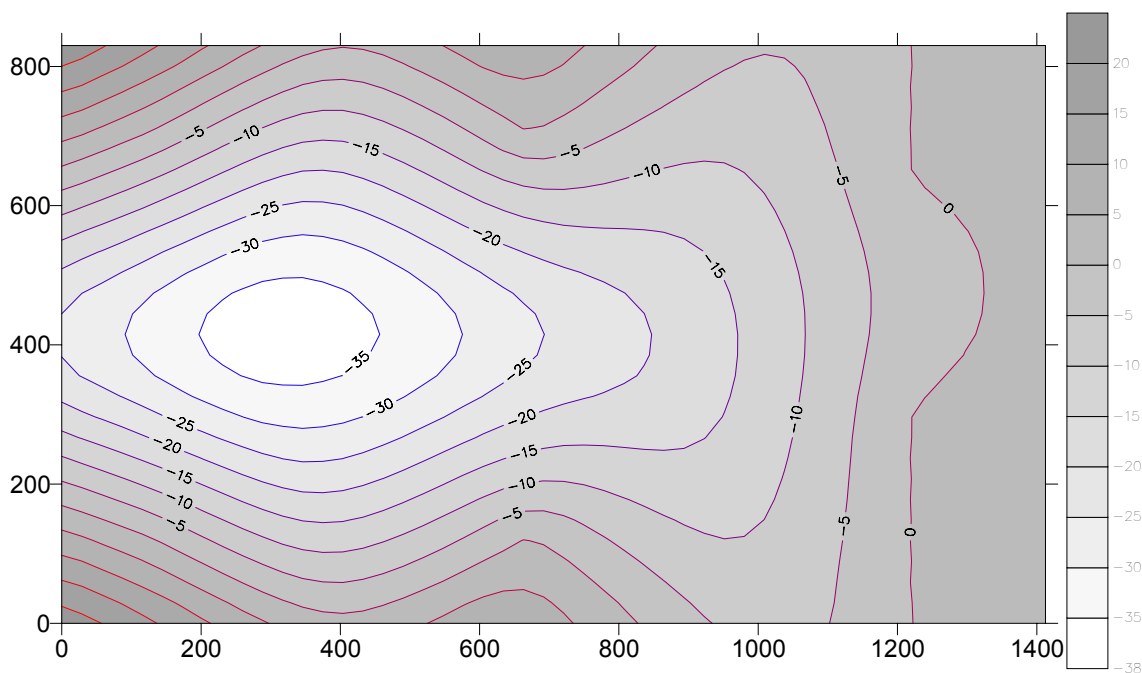


Figura 8.22: Deslocamentos verticais (mm) – Não-linear.

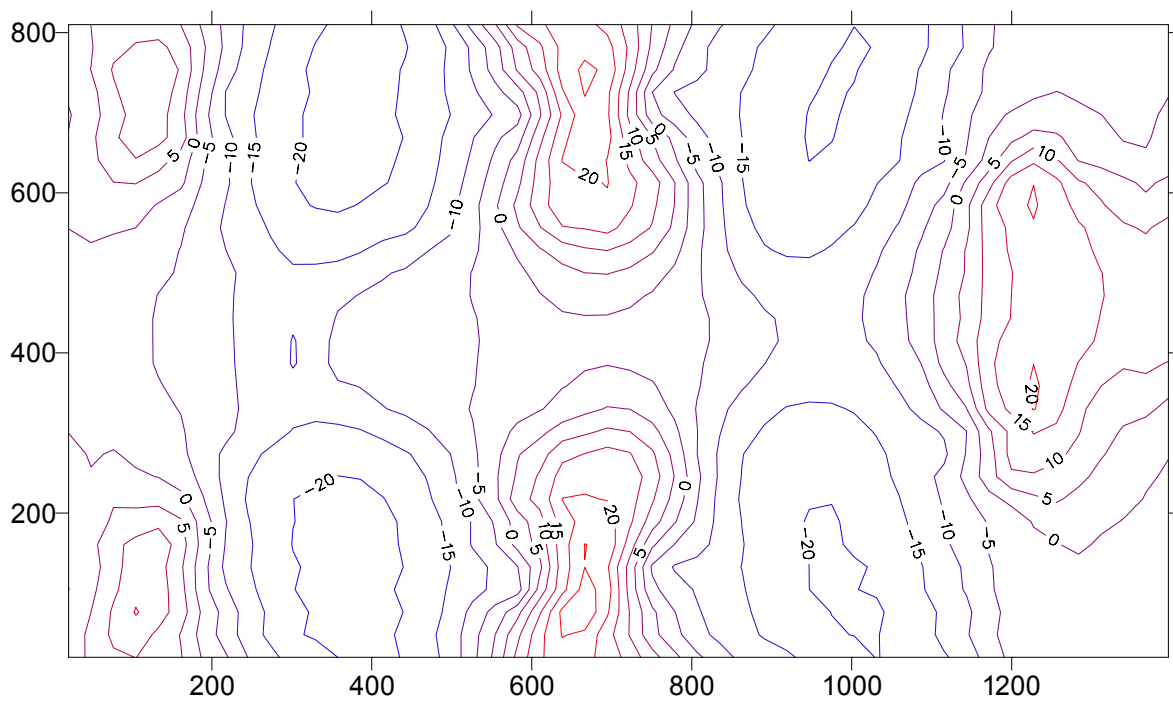


Figura 8.23: M_x kNm/m – Não-Linear

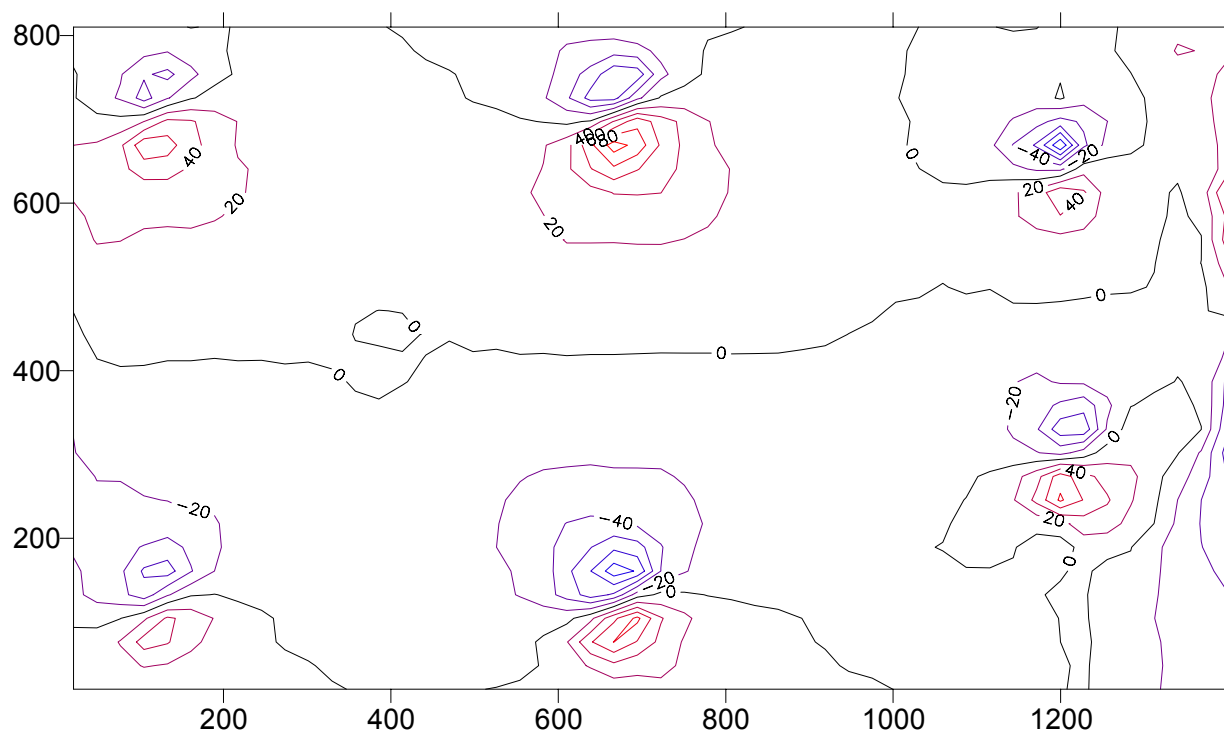


Figura 8.21: Q_y kN/m – Linear

Os máximos e mínimos valores obtidos na análise em regime elástico-linear foram os seguintes:

- Deslocamento vertical: mínimo: 12,3mm; máximo: +7mm.
- M_x : mínimo: -20kNm/m; máximo: +35kNm/m.
- M_y : mínimo: -30kNm/m; máximo: +25kNm/m.
- M_{xy} : mínimo: -12kNm/m; máximo: +10kNm/m.
- Q_x : mínimo: -120kN/m; máximo: +100kN/m.
- Q_y : mínimo: -120kN/m, máximo: +100kN/m.

Em relação aos esforços cortantes, não será necessário o emprego de armadura de cisalhamento. As armaduras longitudinais necessárias, considerando-se altura útil de 14cm, seriam as seguintes: para $m = 20$ kNm/m, $a_s = 4,91\text{cm}^2/\text{m}$; para $m = 25$ kNm/m, $a_s = 6,25\text{cm}^2/\text{m}$; para $m = 30$ kNm/m, $a_s = 7,65\text{cm}^2/\text{m}$ e para $m = 35$ kNm/m, $a_s = 9,1\text{cm}^2/\text{m}$. Para as vigas empregou-se taxa de armadura de 0,15%. Para a análise não-linear utilizou-se, propositalmente malha positiva de $7\text{cm}^2/\text{m}$ nas duas direções e idêntica malha negativa onde houverem momentos que tracionam as fibras superiores. A análise não-linear foi efetuada em 1 passo de 50% do carregamento e outros 5 passos

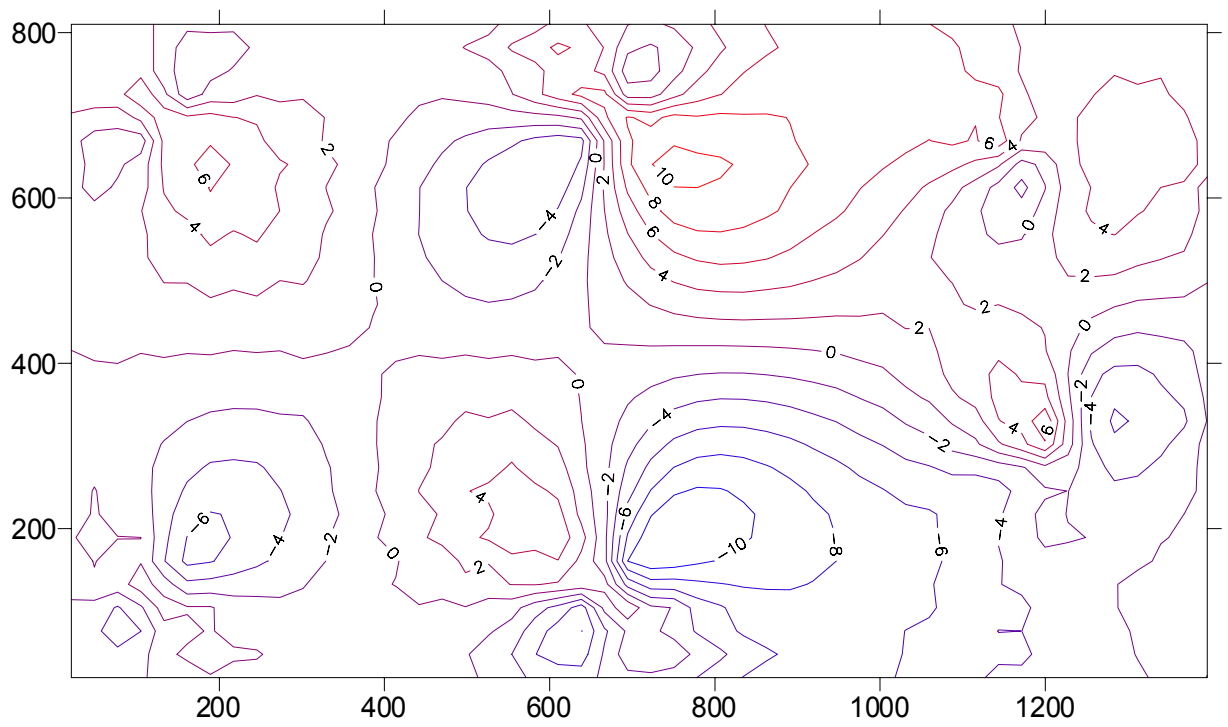


Figura 8.19: M_{xy} kNm/m – Linear

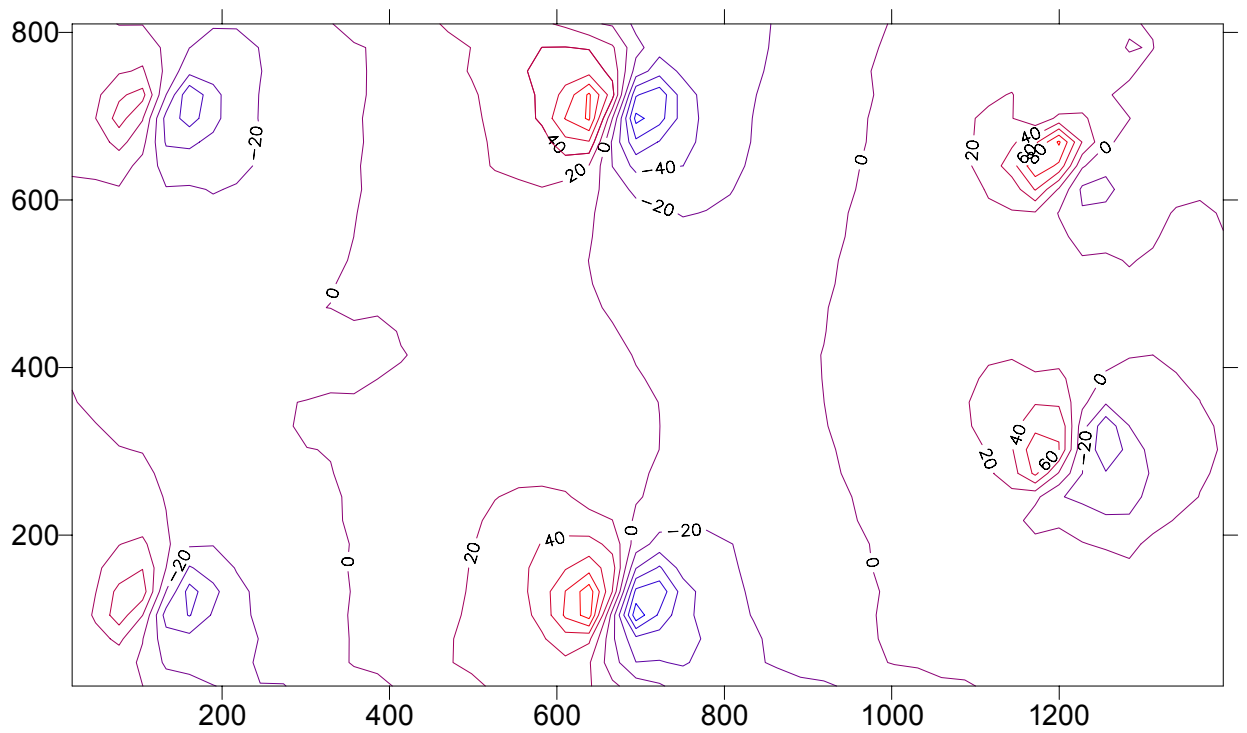


Figura 8.20: Q_x kN/m – Linear

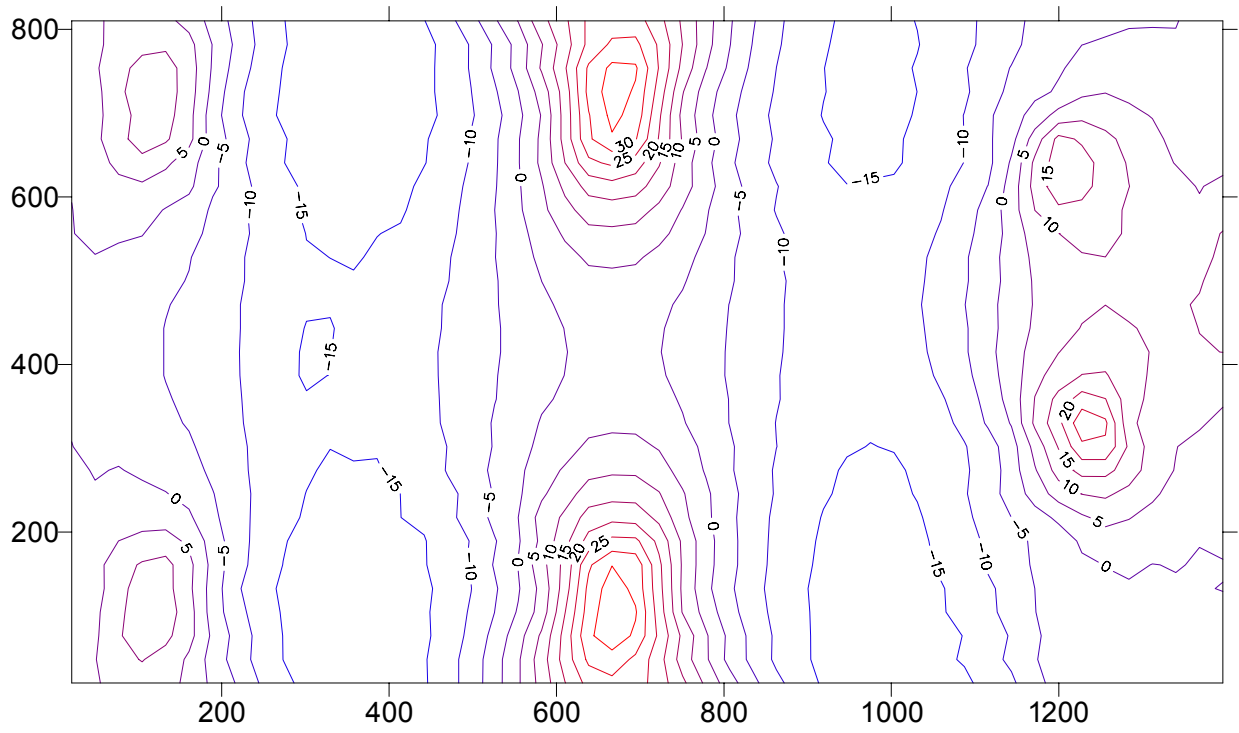


Figura 8.17: M_x kNm/m – Linear

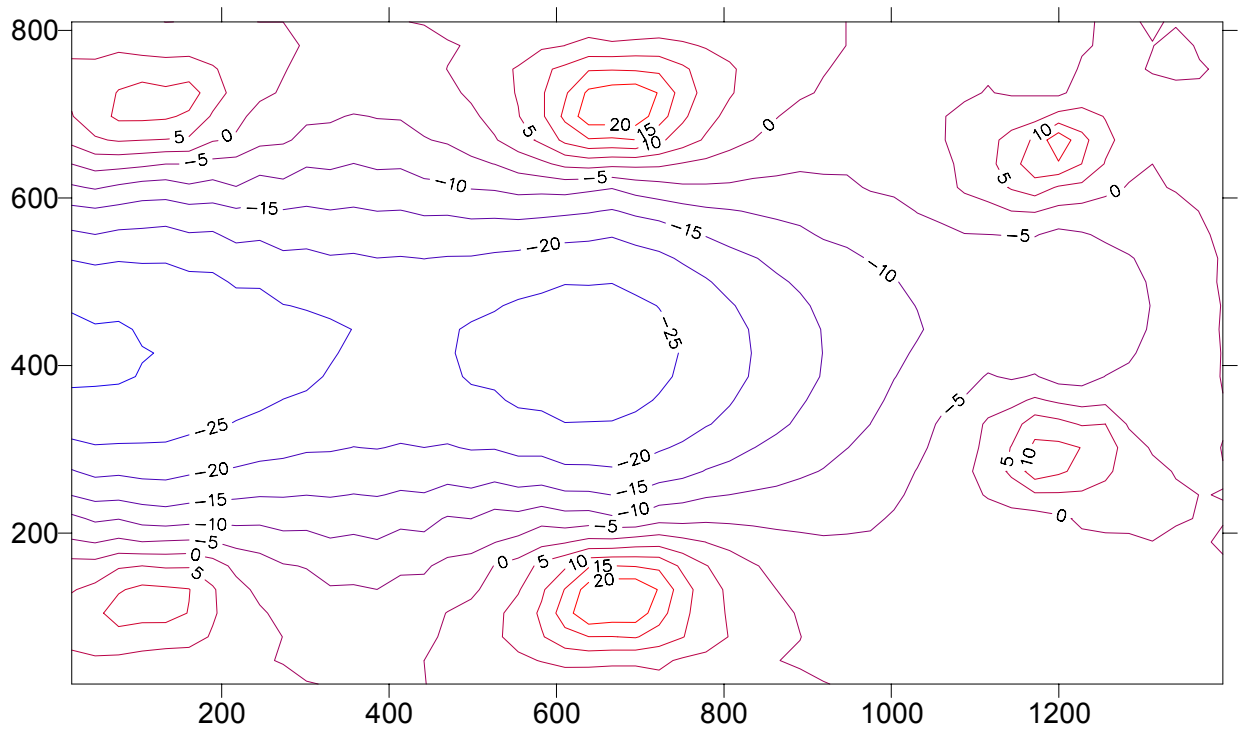


Figura 8.18: M_y kNm/m – Linear

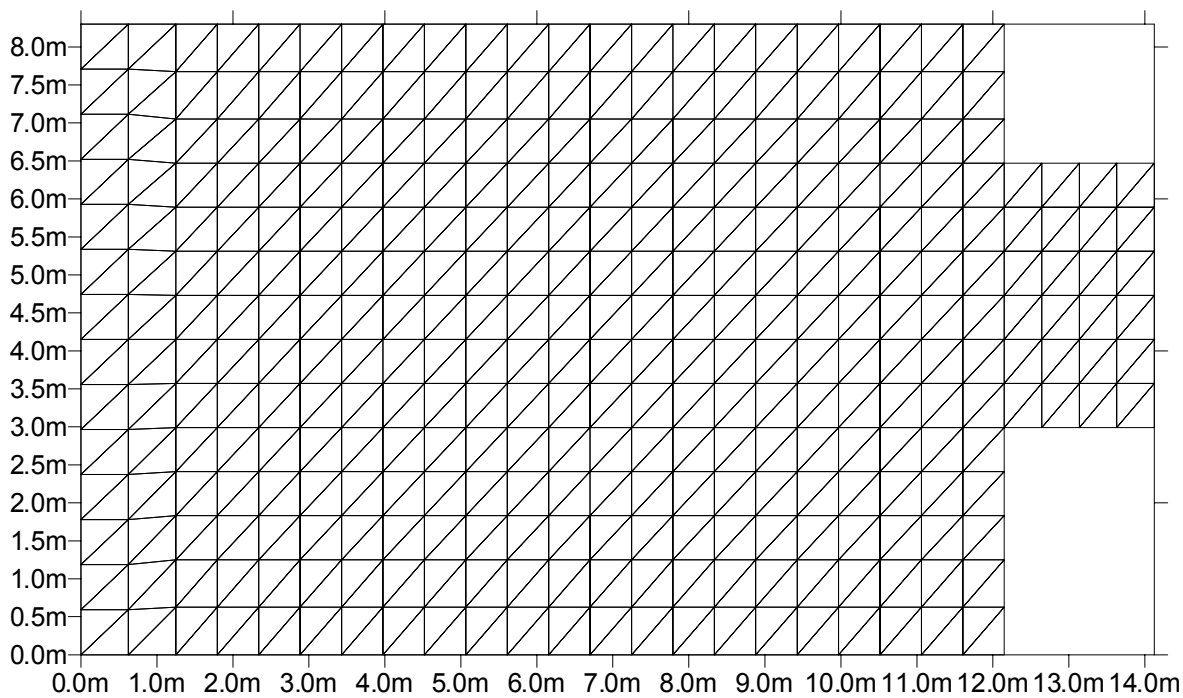


Figura 8.15: Malha de elementos finitos.

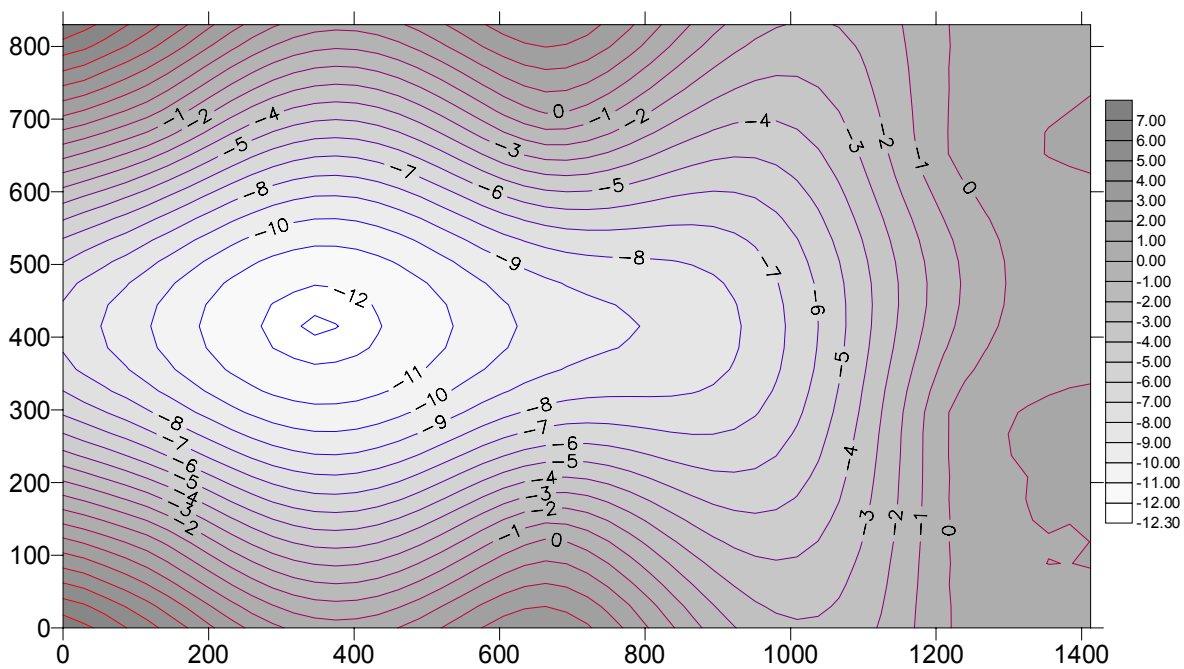


Figura 8.16: Deslocamentos verticais (mm) – Linear.

8.6-PAVIMENTO DE EDIFÍCIO

Este exemplo tem como objetivo mostrar a aplicação do programa desenvolvido a um caso prático. Analisa-se um pavimento de edifício de escritórios estudado por Corrêa (1991) e Oliveira (2001) que é composto por laje lisa com espessura de 16cm, existindo vigas apenas nas caixas de escada e elevadores. O concreto utilizado tem resistência característica à compressão de 20 MPa. O pavimento é ilustrado pela figura 8.14, considerando-se a simetria do mesmo, e a malha de elementos finitos pela figura 8.15 onde são empregados 664 elementos de placa, 8 elementos de barra e 373 nós. Inicialmente, procede-se a análise linear da estrutura; admite-se um carregamento total de 9kN/m^2 considerando-se a soma das ações acidentais e permanentes.

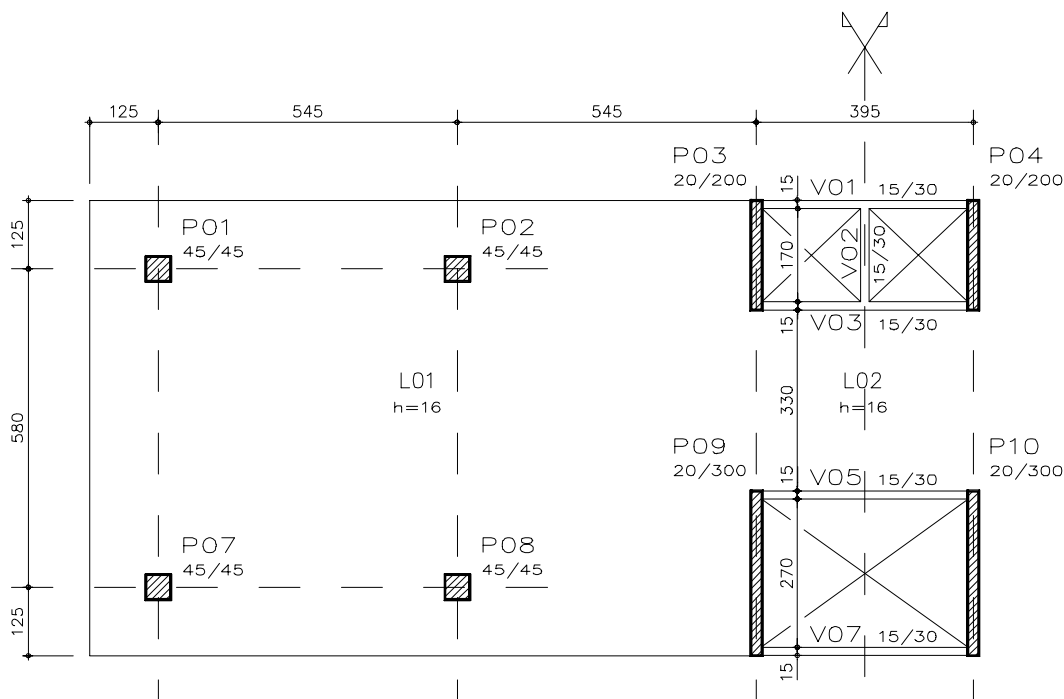


Figura 8.14: Pavimento estudado – extraída de Oliveira (1997)

Os resultados obtidos na análise em regime elástico-linear são os seguintes: deslocamentos verticais, momentos fletores m_x , m_y e m_{xy} e esforços cortantes q_x e q_y . As curvas de iso-valores para esses resultados são apresentadas pelas figuras 8.16 a 8.21, respectivamente. Essas curvas foram obtidas com o auxílio do software SURFER^R, por ser uma malha com reentrâncias, o software plota iso-valores nos vazios existentes, no entanto, estes devem ser descartados não havendo prejuízos no pós-processamento dos resultados.

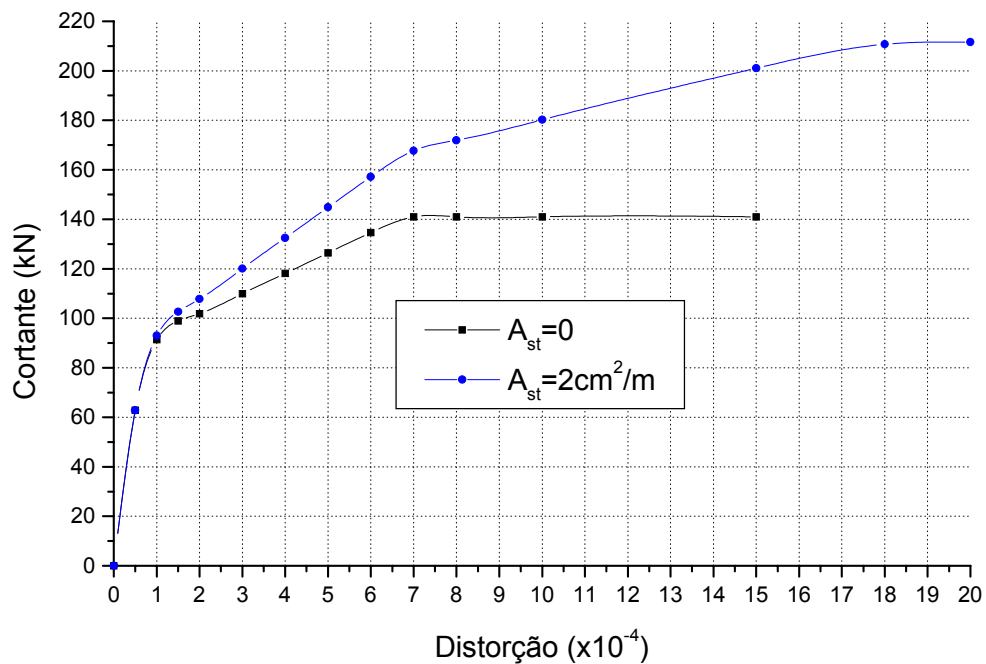


Figura 8.13: Esforço cortante X distorção, $M=0$.

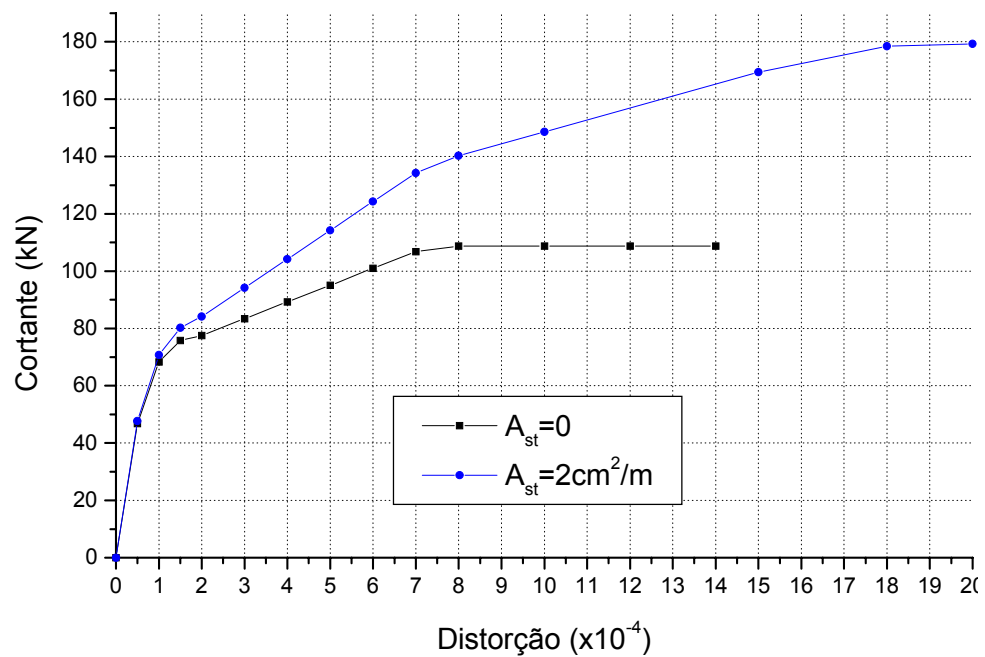


Figura 8.13: Esforço cortante X distorção, $M=20\text{ kNm/m}$.

Os resultados obtidos foram bastante próximos ao especificado pela NBR 6118, o que é natural pois, na ausência de dados experimentais, considerou-se os efeitos de pino e engrenamento de forma que o valor obtido fosse idêntico ao especificado pela norma. Quando considera-se a interação entre momentos e esforços cortantes, os esforços foram cerca de 20% menores devido a danificação por flexão.

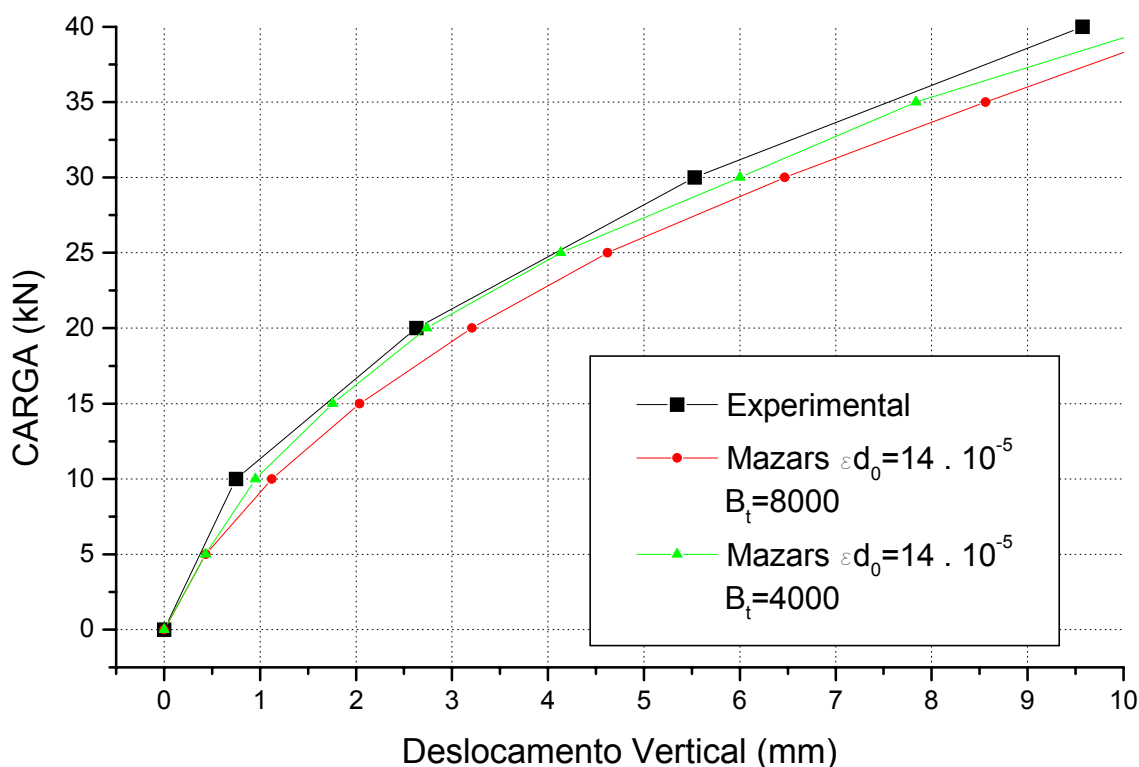


Figura 8.12: Deslocamento vertical do centro da laje.

8.5-CARGA DE RUPTURA POR CISALHAMENTO

Neste exemplo, procura-se determinar o máximo esforço cortante a que uma seção transversal de laje possa resistir; a carga de ruptura por cisalhamento será determinada a partir desse esforço. Considere-se uma laje com 12cm de espessura e taxa de armadura de 1% segundo as duas direções ortogonais referida a uma altura útil de 2cm; em relação à armadura transversal são consideradas duas situações: $A_{st} = 0$ e $A_{st} = 2,0 \text{ cm}^2/\text{m}$.

Considera-se inicialmente que o momentos fletores na seção são nulos; numa segunda simulação admite-se um momento fletor de 20 kNm/m, para esse caso, a curva esforço cortante X distorção é tomada considerando-se a curvatura correspondente à análise não-linear na flexão.

Os resultados obtidos são mostrados no gráficos das figuras 8.13 e 8.14; o esforço cortante determinado pela NBR 6118, para laje sem armadura de punção, é de 140 kN, não se considerando os coeficientes de majoração de esforço e minoração de resistência.

altura útil $d=5,30\text{cm}$. Nas análises numéricas foi considerada a excentricidade das barras em relação ao plano médio das lajes; empregou-se o modelo de Mazars para o concreto, foram efetuadas duas análises visando calibrar os parâmetros do modelo, assim considerou-se:

- Caso 1: $\epsilon_{d0} = 14 \times 10^{-5}$; $B_t = 8000$;
- Caso 2: $\epsilon_{d0} = 14 \times 10^{-5}$; $B_t = 4000$.

Empregou-se malha com 200 elementos planos para modelar as lajes e 180 elementos de barra para simular as nervuras, conforme ilustra a figura 8.11b. A análise não-linear foi efetuada em 8 passos de carga, sendo que em cada passo considerava-se uma carga adicional de 5kN concentrada no centro da laje. Os resultados obtidos são apresentados no gráfico da figura 8.12.

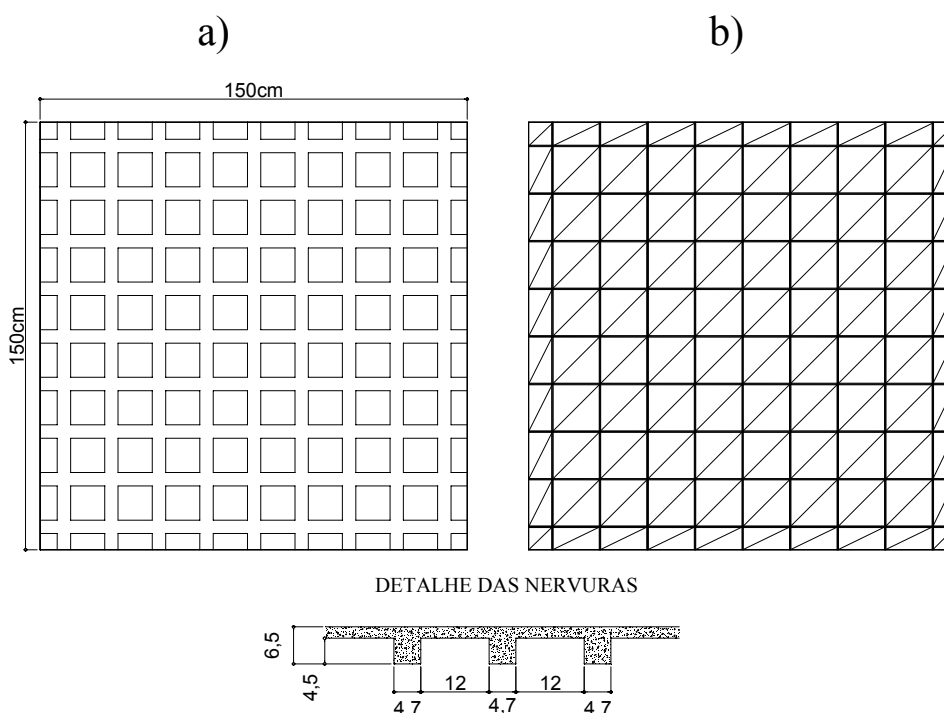


Figura 8.11: a) Laje nervurada; b) Malha de elementos finitos.

Os resultados obtidos numericamente foram muito próximos dos resultados experimentais, conforme pode-se observar no gráfico da figura 8.12 onde também fica evidenciado que os modelos de dano podem ser calibrados a partir de resultados experimentais. Observou-se que a performance do modelo melhorou muito quando os parâmetros foram ajustados para considerar um concreto com resistência característica à compressão distinto daquele mais empregado neste trabalho.

A carga de ruptura obtida na análise experimental foi de aproximadamente 330 kN enquanto que os resultados numéricos mostraram um patamar de escoamento para uma carga de 315 kN, a previsão da carga de ruína pode ser considerada satisfatória para os modelos numéricos.

Os deslocamentos obtidos com o modelo proposto para a consideração da não-linearidade ao cisalhamento foram extremamente próximos dos resultados experimentais para carregamentos até 70% da carga de ruína. Objetivando-se a análise de estruturas em serviço pode-se observar que o modelo foi muito preciso para essa laje. Para carregamentos próximos da carga de ruína, houve uma maior divergência entre os resultados numérico e experimental, no entanto o modelo proposto mostrou-se a favor da segurança.

É importante observar que a não consideração da não linearidade ao cisalhamento conduzir a valores subestimados dos deslocamentos para cargas inferiores a 70 % da carga de ruína, evidenciando a importância da incorporação do modelo proposto para o cisalhamento às rotinas de análise não-linear de estruturas.

Desejando-se uma maior proximidade entre as curvas numérica e experimental é possível o ajuste dos parâmetros envolvidos nos modelos de dano, esse fato mostra que é interessante utilizar-se um modelo parametrizável pois, em havendo resultados experimentais, é sempre possível o ajuste dos parâmetros.

Em relação aos modelos de Mazars e de Comi & Perego, este último resultou menos rígido que o primeiro, esse fato é explicável pela consideração da danificação à compressão no modelo de Comi & Perego, enquanto que no modelo de Mazars apenas é considerado o dano à tração.

8.4-COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS – LAJE NERVURADA

Neste exemplo, os resultados numéricos obtidos são comparados com os resultados experimentais de uma laje nervurada com 150x150cm² (figura 8.11a) ensaiada por Wahab & Khalil apud Araújo (2003). A laje foi submetida a uma carga vertical aplicada no seu centro geométrico e os deslocamentos do ponto central foram medidos para diversos passos de carga até que ocorresse a ruína.

O concreto utilizado para a confecção da laje possui resistência característica à compressão $f_{ck} = 30$ MPa; a armadura de flexão é de 0,50cm²/nervura referida a uma

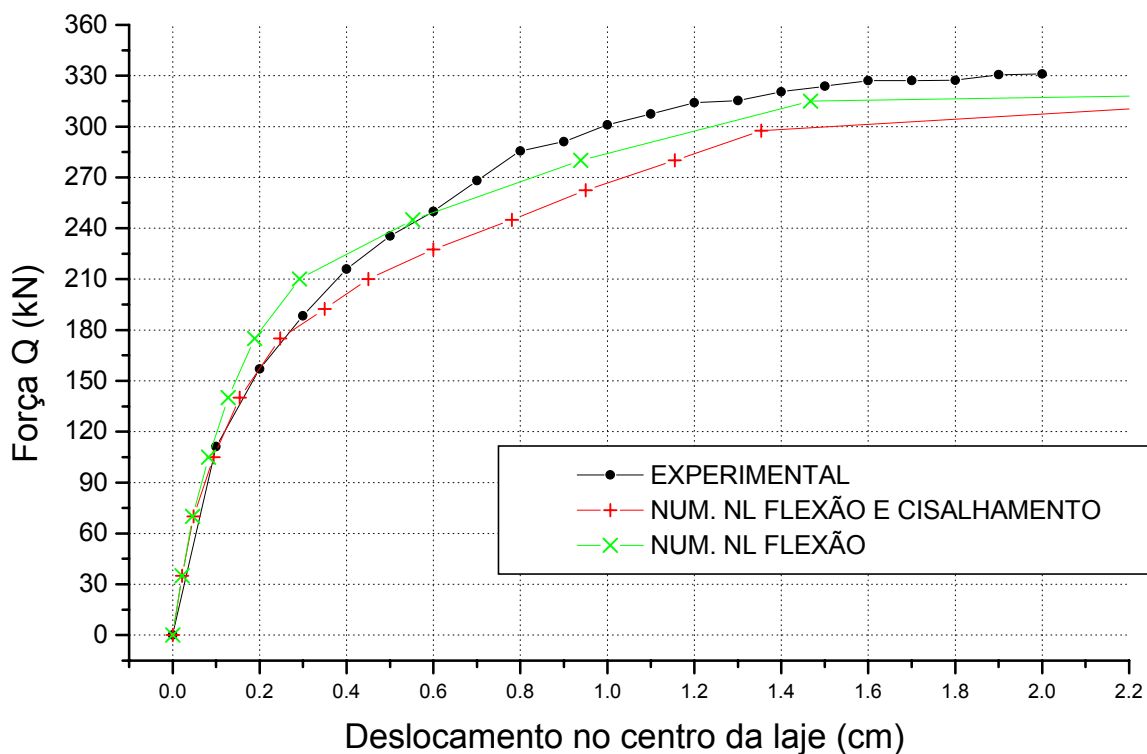


Figura 8.9: Resultados obtidos com modelo de Mazars.

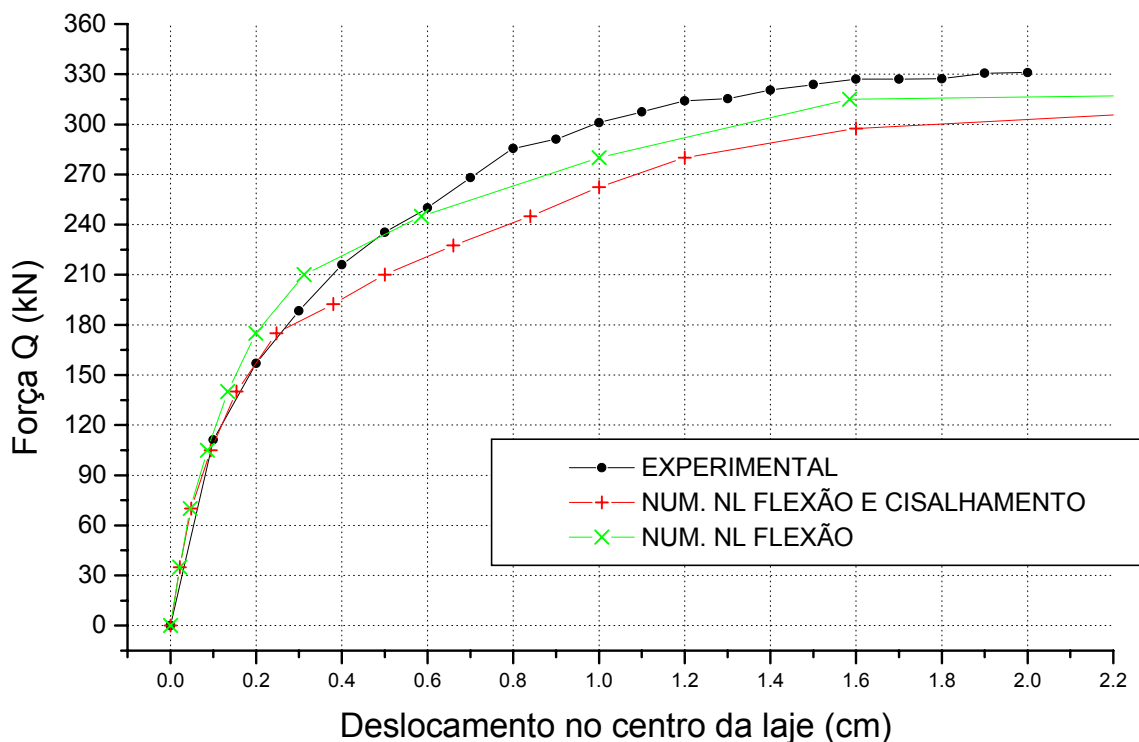


Figura 8.10: Resultados obtidos com o modelo de Comi & Perego.

8.3-COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS – LAJE

Neste exemplo, os resultados numéricos obtidos com os modelos para lajes são comparados com os resultados experimentais obtidos por Dottrepe et al. (1973) apud Oliveira (2001) para uma laje quadrada de $182,9 \times 182,9 \text{ cm}^2$ com taxa de armadura de 0,99% em relação a sua altura útil, conforme ilustrada pela figura 8.8a. A laje é apoiada continuamente sobre os seus lados e submetida a um carregamento distribuído numa pequena área em torno do centro da laje, resultando numa carga de 356kN.

Empregou-se, nas análises numéricas, os modelos de Mazars e de Comi e Perego; para cada um desses modelos foram feitas duas análises, uma delas considerando a não-linearidade ao cisalhamento e a outra não a considerando, objetivando-se o estudo da importância da não-linearidade ao cisalhamento. Os dados dos materiais são os seguintes:

- Aço: $E_s = 206850 \text{ MPa}$;
- Concreto: $E_c = 27580 \text{ MPa}$; coeficiente de Poisson: $\nu = 0,15$.

As análises foram efetuadas considerando-se 6 incrementos de 10% e 7 incrementos de 5% do carregamento total, exigiu-se, em cada passo de carga, uma precisão de 0,5%. Foram utilizados 200 elementos planos, a malha de elementos finitos é ilustrada pela figura 8.8b, considerou-se uma carga de 275 kN concentrada no centro da laje e 75 kN distribuídos numa pequena área de $36 \times 36 \text{ cm}^2$. O deslocamento no centro da laje é mostrado nos gráficos das figuras 8.9 e 8.10.

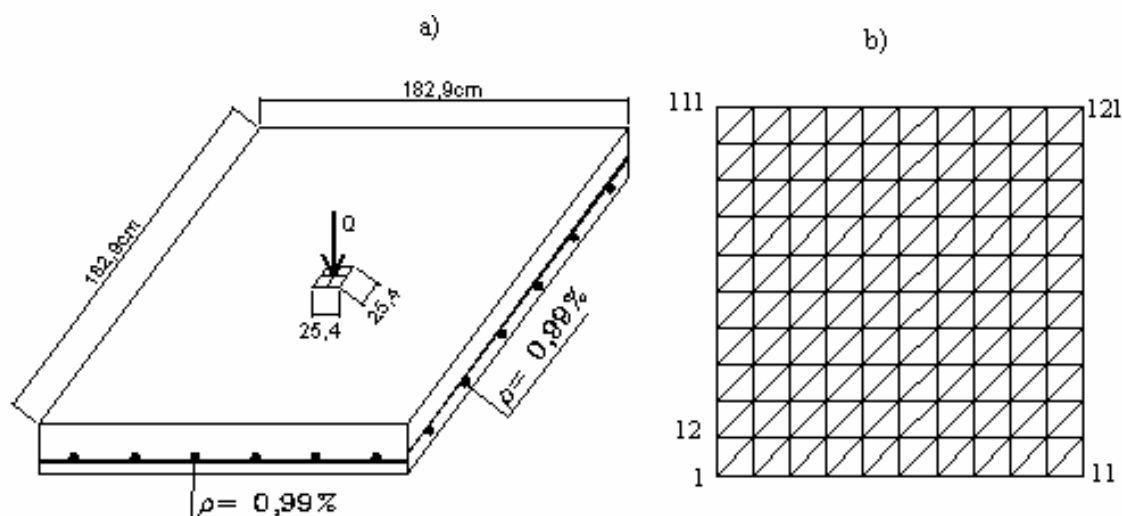


Figura 8.8: a) Laje do exemplo; b) malha de elementos finitos.

Outra observação oportuna é que a elaboração de um modelo que leve em conta a resposta ao cisalhamento e à flexão simultaneamente é de grande importância, pois há casos, como ficou demonstrado no exemplo anterior, em que a ruína pode ser apressada devido ao esgotamento da capacidade da peça resistir à esforços cisalhantes.

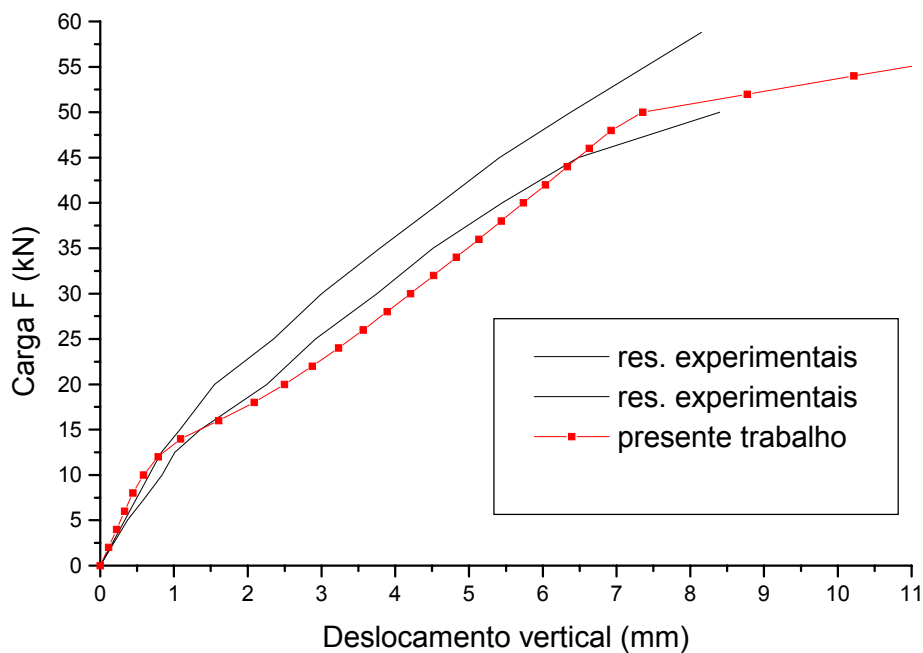


Figura 8.6: Resultados para viga com moderada taxa de armadura longitudinal.

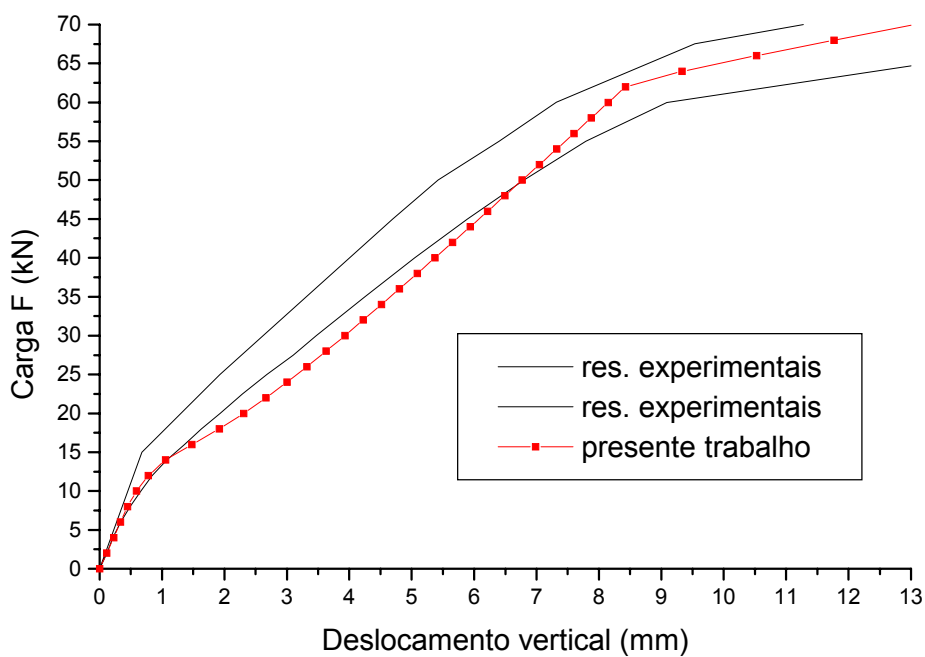


Figura 8.7: Resultados para viga com alta taxa de armadura longitudinal.

O objetivo deste exemplo é estudar a aplicabilidade do modelo proposto aos casos de análise não-linear de vigas esbeltas.

Tabela 8.1 : Armaduras da viga.

Cas	As (cm ²)	D(cm)	A's (cm ²)	d'(cm)	
1	2,4	27,5	0,2	2,0	Pouco arm.
2	4,0	27,0	0,2	2,0	Normal.arm.
3	5,6	26,0	0,2	2,0	Muito arm.

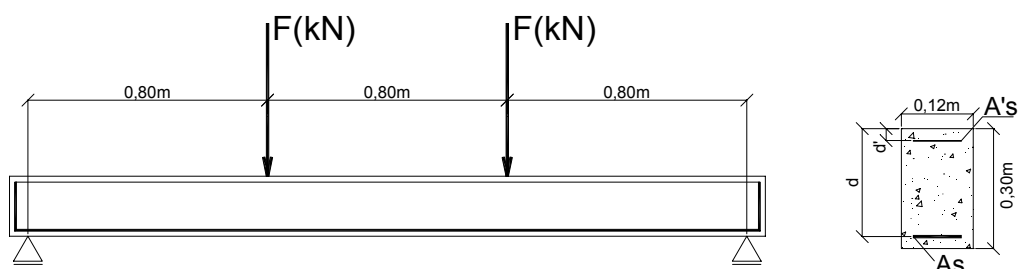


Figura 8.4: Características geométricas da viga ensaiada.

Analisando-se os gráficos das figuras 8.5, 8.6 e 8.7, demonstra-se que as respostas numéricas obtidas são bastante próximas dos valores experimentais. Pode-se concluir que a incorporação do modelo de absorção dos esforços cisalhantes não traz prejuízo algum quando a ruína do elemento estrutural se deve às solicitações de flexão.

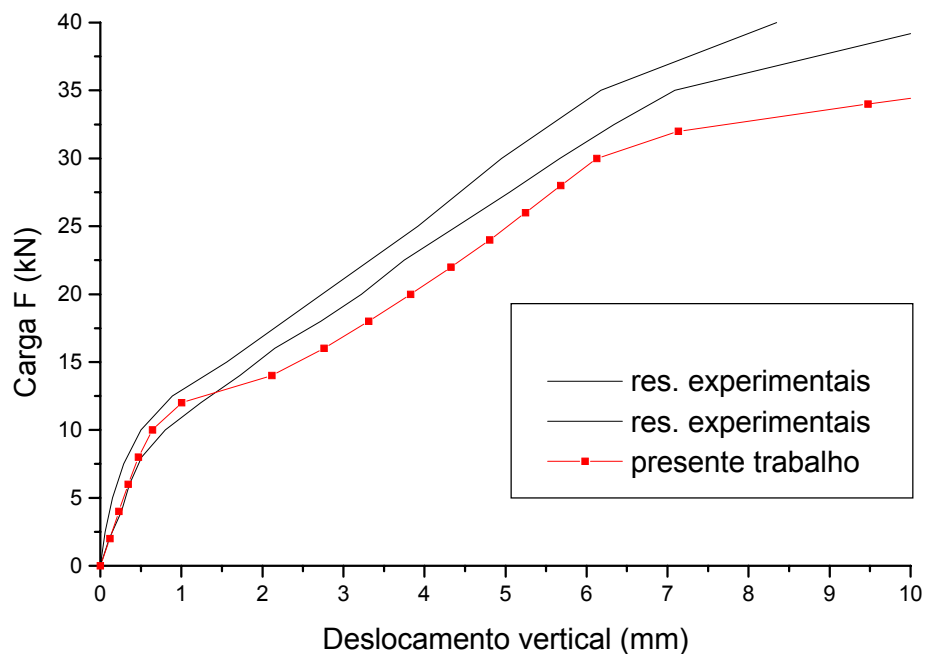


Figura 8.5: Resultados para viga com baixa taxa de armadura longitudinal.

Os resultados obtidos mostram que o escoamento da armadura de cisalhamento pode ser o responsável pelo modo de ruptura das vigas subarmadas transversalmente. Para a viga do exemplo, desprezando-se o cisalhamento e considerando-se a teoria de Timoshenko, a ruptura da viga se daria para uma carga de 150 kN; os resultados obtidos considerando-se a não-linearidade no cisalhamento mostram que a ruptura acontece bem antes desse valor, evidenciando a importância de uma modelagem adequada do comportamento de elementos fletidos que leve em consideração simultaneamente as respostas ao cisalhamento e à flexão.

Os modelo de Mazars e de Comi & Perego conduziram a resultados bastante muito próximos no cisalhamento, esse fato se justifica por que o modelo de cisalhamento proposto prevê que após atingir-se o esforço cortante V_1 apenas a armadura transversal contribua na resistência ao cisalhamento.

Para a análise não-linear apenas na flexão, o modelo de Comi & Perego atingiu a ruína antes do modelo de Mazars, o que é justificado pela consideração do dano à compressão no primeiro modelo.

8.2-COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS - VIGA

Álvares (1993) propôs um conjunto de três vigas que foram ensaiadas no Laboratório de Engenharia de Estruturas da EESC-USP. Segundo Álvares, a resposta experimental de cada viga foi colhida de uma prova realizada com controle de carga, sendo as leituras tomadas em relógios comparadores posicionados nos apoios e no trecho central, além de extensômetros elétricos nas faces superior, inferior e na armadura tracionada. Os dados relativos às seções transversais das vigas são apresentados na tabela (8.1); as demais características são ilustradas pela figura 8.4; taxa de armadura transversal é de $1,5 \text{ cm}^2/\text{m}$. A carga “F” foi aplicada no ensaio até provocar a ruptura das vigas.

Empregou-se a teoria de vigas de Timoshenko e considerou-se a não-linearidade em relação aos esforços cisalhantes. A viga foi discretizada em 30 elementos de igual comprimento. Empregou-se um procedimento incremental-iterativo para resolver a estrutura. Em cada incremento de carga aplicou-se 2 kN e foi exigida um tolerância de 0,1 % para a resposta. Os resultados obtidos são apresentados em forma de gráfico pelas figuras 8.5, 8.6 e 8.7 e se referem ao deslocamento vertical do ponto médio do vão.

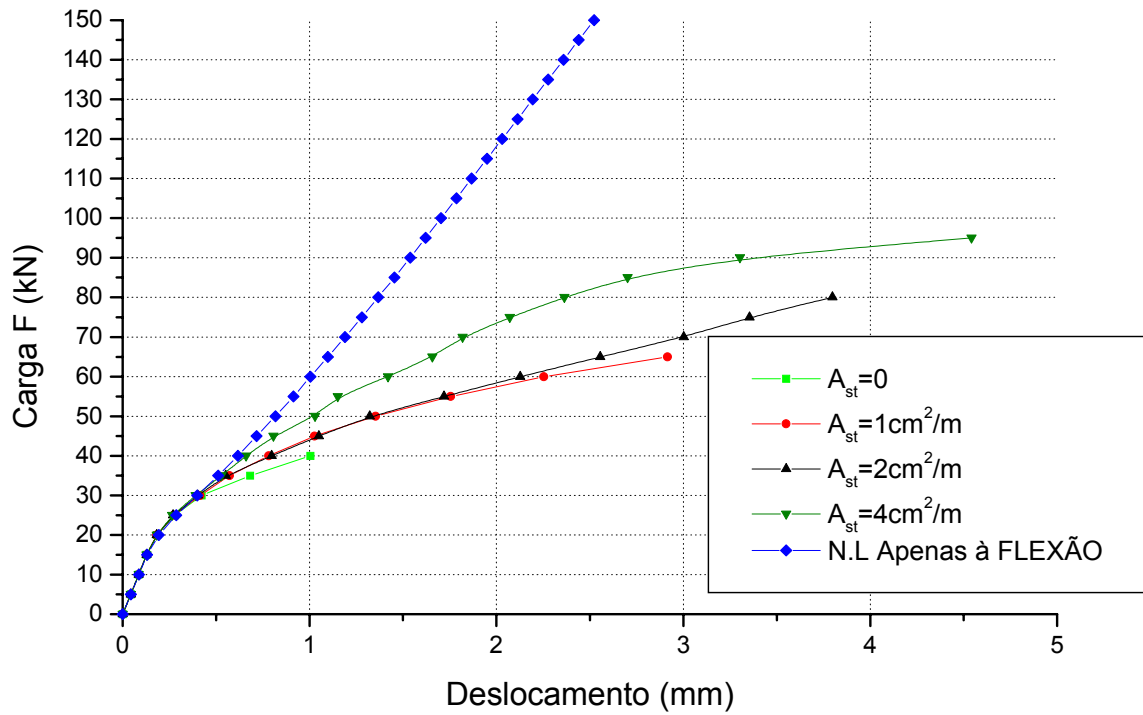


Figura 8.2: Deslocamento da extremidade livre em função da carga e da arm. Transv. - Mazars.

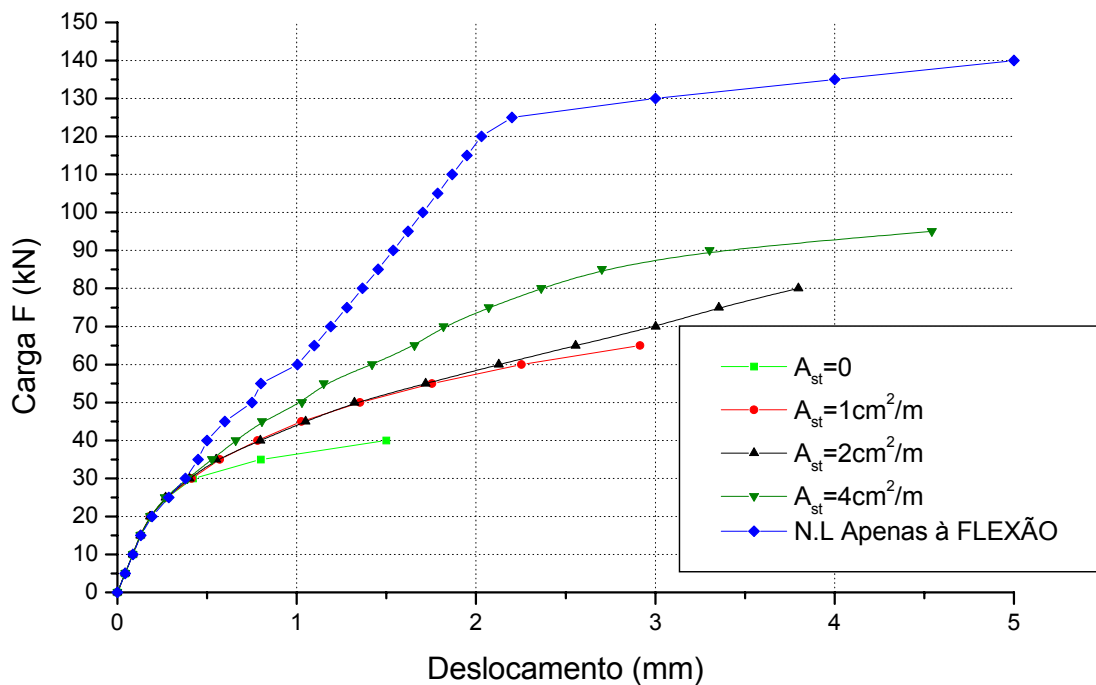


Figura 8.3: Deslocamento da extremidade livre em função da carga e da arm. Transv. - Comi.

&I-VIGA ENGASTADA – ANÁLISE NÃO-LINEAR COM CORTANTE

Neste exemplo é empregado o modelo proposto para simular o comportamento de elementos de concreto armado solicitados a esforços de flexão e cisalhamento mostrado; investiga-se o comportamento de uma viga curta (conforme ilustrada pela figura 8.1 submetida a um carregamento na sua extremidade livre. Emprega-se, para o concreto, os modelos de dano de Mazars e de Comi & Perego.

Analisa-se, num primeiro instante, a curva carga-deslocamento da extremidade da viga considerando-se apenas a resposta não linear à flexão, ou seja, não se considera a danificação por cisalhamento. Posteriormente, procede-se a análise do seu comportamento considerando-se a resposta não-linear aos esforços de cisalhamento e de flexão combinados. As características da viga são as seguintes:

- Concreto com $f_{ck} = 21$ MPa, coeficiente de Poisson=0,25;
- Módulo de elasticidade longitudinal do aço: 196000 MPa;
- $A_{st} = 5,0$ cm², $A_{sc} = 2,0$ cm²;
- As taxas de armadura transversal, A_{sv} , são as seguintes: caso 1: 0 cm²/m, caso 2: 1,0 cm²/m, caso 3: 2 cm²/m, caso 3: 4 cm²/m .

A viga foi discretizada em 20 elementos de barra com igual comprimento. Empregou-se um procedimento incremental-iterativo para resolver a estrutura. Em cada incremento de carga aplicou-se 5 kN e foi exigida um tolerância de 0,5 % para a resposta. Os resultados obtidos são apresentados em forma de gráfico pela figura 8.2 para o modelo de Mazars e pela figura 8.3 para o modelo de Comi & Perego.

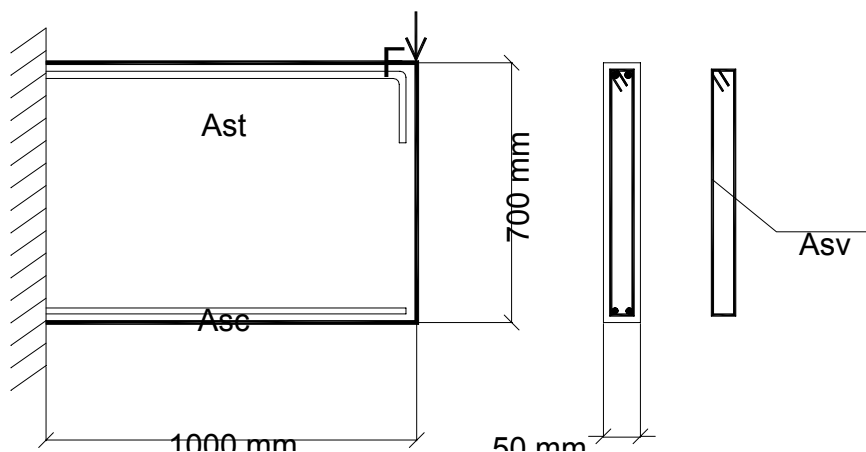


Figura 8.1: Características geométricas da viga.

8-EXEMPLOS

Neste capítulo são apresentados exemplos de aplicação do software computacional desenvolvido além da comparação dos resultados numéricos obtidos com resultados experimentais presentes na literatura. Serão empregados os modelos de Mazars e de Comi para o comportamento do concreto e o modelo elasto-plástico para as armaduras, para simplificar os dados de cada exemplo, os parâmetros para cada modelo quando não mencionados num exemplo específico serão os seguintes:

- Modelo de Mazars: $\varepsilon_{d0} = 0,00007$; $AT = 0,995$; $BT = 8.000$; $AC = 0,850$; $BC = 1.620$.
- Modelo de Comi & Perego: $a_t = 0,333$; $b_t = 4 \text{ MPa}$; $k_t = 8 \text{ MPa}^2$; $a_c = 0,0025$; $b_c = 3 \text{ MPa}$; $k_c = 370 \text{ MPa}^2$, $(\sigma_0/\sigma_e)_t = 0,8$; $(\sigma_0/\sigma_e)_c = 0,7$; $\alpha = 1$.
- Modelo elasto-plástico para o aço: $E_s = 20500 \text{ kN/cm}^2$; $\varepsilon_y = 0,187\%$; $\varepsilon_y = 1\%$.
- Concreto $f_{ck} = 21 \text{ MPa}$

Devido a escassez de dados experimentais para os parâmetros envolvidos nos modelos de dano, o modelo de Comi & Perego foi calibrado numericamente como o modelo de Mazars.

Outra dificuldade para a modelagem do cisalhamento é o mecanismo de sollicitação das armaduras transversais. Neste trabalho foi idealizado um modelo numérico para a consideração dos efeitos de pino e engrenamento e, também, para a determinação da contribuição das armaduras transversais na resistência ao cisalhamento.

Os resultados obtidos com o modelo idealizado foram bastante satisfatórios quando comparados com alguns resultados experimentais presentes na literatura; mostrou-se, por meio de exemplos, que a resposta numérica obtida empregando-se o modelo proposto foi melhor do que aquela onde considera-se apenas a resposta não-linear à flexão, chegando, em alguns casos, a se confundir com a resposta experimental.

Evidentemente, o modelo pode ser melhorado em muito quando calibrado com ensaios de laboratório que tornarão mais precisas as considerações de efeitos de pino e engrenamento além de validar as hipóteses para a contribuição da armadura transversal. Sugere-se que, em trabalhos futuros, o modelo proposto seja calibrado através de dados obtidos com ensaios em laboratório.

Outro ponto de interesse deste trabalho foi a consideração da excentricidade da viga. Essa hipótese conduz, evidentemente, a resultados melhores do que quando admite-se eixos de barras e plano médio das placas concêntricas; no entanto, em se tratando da análise não-linear os resultados são ainda melhores pois, para as vigas não invertidas, a existência da componente de compressão diminui a danificação do concreto.

Pode-se concluir que a modelagem de pavimentos de edifícios é uma ciência em constante evolução bem como toda a modelagem de estruturas. Neste trabalho foi possível contribuir para a melhoria da modelagem numérica dessas estruturas, particularmente no que tange à análise não-linear com cisalhamento, evidentemente, trata-se de proposta que deverá ser aprimorada em trabalhos futuros.

9-CONCLUSÕES

O principal objetivo deste trabalho foi contribuir para a modelagem numérica de estruturas de pavimentos de edifícios de concreto armado utilizando-se o método dos elementos finitos e efetuando-se a análise com a consideração da resposta não-linear em relação às solicitações de flexão e de cisalhamento. Observa-se que a grande maioria dos modelos existentes na literatura técnica para a simulação numérica de pavimentos de concreto armado se restringe à análise não-linear na flexão.

Em consequência do exposto, a deformação devida às tensões cisalhantes foi considerada, dessa forma os elementos de barra e de placa que foram escolhidos dentre os presentes na literatura técnica deveriam contemplar as hipóteses de Timoshenko e de Reissner-Mindlin, respectivamente.

Os eixos dos elementos de barra foram considerados excêntricos em relação ao plano médio da placa, assim o efeito de membrana foi necessariamente incorporado à formulação.

A modelagem do comportamento mecânico do concreto foi efetuada empregando-se modelos fundamentados na mecânica do dano enquanto que as armaduras foram representadas por um modelo elasto-plástico. Os modelos foram escritos no campo dos esforços e deslocamentos integrando-se as tensões efetivas ao longo da espessura dos elementos.

Observou-se que o emprego da mecânica do dano para o concreto associada à plasticidade para a armadura, que é bastante eficiente para a modelagem do comportamento à flexão, não se mostrou adequada, quando utilizada isoladamente, para a modelagem da não-linearidade ao cisalhamento. Isso ocorre devido aos mecanismos de pino e de engrenamento que conferem uma resistência adicional ao cisalhamento.

- SHEHATA, I.A.E.M. (1985). Theory of punching in concrete slabs. London. PhD Thesis. The Polytechnics of Central London.
- SHEHATA, I.A.E.M. (1989). Compressive strenght of concrete elements with variable dimensions. *Materials and Structures*, v. 22, p. 264-268.
- SHEHATA, I.A.E.M. (1990). Rational Method for designing RC slabs to resist punching. *ASCE Journal of Structural Engineering*, v. 116, n. 7, p. 2055-2060.
- Software SURFER^R (1996). Surface Mapping System. Golden Software Incorporation. Colorado. EUA.
- SÜSSEKIND, J. C. (1991). *Curso de Concreto*. Porto Alegre. Globo.
- SYDENSTRICKER, R.M. and LANDAU, L. (1999). A study of triangular Reissner-Mindlin plate and shell elements. *Computers and Structures*. V. 78, p. 21-33.
- SYDENSTRICKER, R.M.; LANDAU, L.; MARQUES, O.A.; COUTINHO, A.L.G.A.(1995). Pseudoconsistent load vector and mass matrix for the discrete Kirchhoff triangle and discrete shear triangle elements. *Commun. Num. Meth. Engng.* V.11, p. 317-330.
- TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1959). *Theory of Plates and Shells*. McGraw-Hill, Inc..
- YUAN, F. and MILLER, R.E. (1989). A cubic triangular finite element for flat plates with shear. *Int. J. Num. Meth. Eng.* V28. P.109-126.
- ZIENKIEWICS, O. C.; VALLIAPAN, S.; KING, I.P. (1969). Elasto-plastic solutions on engineering problems – ‘initial stress’, finite element aproach. *Int. Journal of Num. Methods in Engineering*, V.1, p.75-100.

- PINHEIRO, L. M. (1994). *Concreto armado: resistência de elementos submetidos a esforço cortante*. São Carlos. EESC-USP.
- PITUBA, J. J. C. (2003). *Sobre a formulação de um modelo de dano para o concreto*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP. 2003.
- PROENÇA, S. P. B. (1986). *Noções Básicas de Reologia*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - Publicações. Publicação 045/86.
- PROENÇA, S. P. B. (1996). *Notas de Aula da Disciplina Análise Não-linear de Estruturas*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas.
- RABOTNOV, Y. N. (1969). *Creep Problems in Structural Members*. Amsterdam, North-Holland
- REZENDE, M. N. (1990). *Análise de Pavimentos de Edifícios pelo Método dos Elementos Finitos em Microcomputador*. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, São Carlos, SP. 1990.
- REISSNER, E. (1946). The effects of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, n. 12, p. 69-77.
- RICHART, F. E. (1948). Reinforced concrete wall and column footings. *ACI Journal*, v.45, n. 2, p. 237-260.
- SAVASSI, W. (1996). *Introdução ao Método dos Elementos Finitos em Análise Linear de Estruturas*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - Publicações. 1ª. edição.
- SANCHES JR., F. (1998). *Cálculo de Esforços e Deslocamentos em Pavimentos de Edifícios de Considerando-se Modelos Próprios para o Concreto Armado*. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, São Carlos, SP. 1998.

- NEVES, R. A. (2000). *Cálculo de esforço e deslocamentos em pisos de edifícios considerando-se as tensões cisalhantes*. Dissertação (Mestrado). EESC-USP, São Carlos, SP. 2000.
- NEVES, R. A.; SANCHES Jr, F.; WENTURINI, W. S. (2000). *Análise de deslocamentos em vigas curtas de concreto armado*. In: Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Strucutral. Punta del Este. Uruguay.
- NÓBREGA, S. H. S. (1997). *Sobre o desenvolvimento de elementos finitos de casca. Uma classe de formulações mistas*. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP. 1997.
- OLIVEIRA, R. S. (1997). *Análise de pavimentos de concreto armado com a consideração da não-linearidade física*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP. 1997.
- OLIVEIRA, R. S. (2001). *Análise de pavimentos de concreto armado com a consideração da não-linearidade física – modelagem e metodologia de aplicação a projetos*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP. 2001.
- OÑATE, E. (1992). *Calculo de estructuras por el metodo dos elementos finitos: análisis elástico-lineal*. Barcelona, Centro Internacional de Métodos Numéricos em Ingeniería.
- OWEN, D. R. J. and HINTON, H. (1980). *Finite Element in Plasticity : Theory and Practice*. Swansea, Pineridge Press Ltd.
- PAPADOPOULOS, P. and TAYLOR, R.L. (1990). A triangular element based on Reissner-Mindlin plate theory. *Int. J. Num. Meth. Eng.* v5. P.1029-1051.
- PELETEIRO, S. C. (1996). *Utilização da formulação livre para desenvolvimento de um elemento finito de membrana com liberdades rotacionais*. 101p. Dissertação (Mestrado) - EESC, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP. 1996.

- MACHADO, C. P. (1989). *Tensões, deformações e deslocamentos em estruturas de concreto armado e protendido*. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP. 1989.
- MATTAR NETO, MIGUEL (1989). *Elementos finitos simples de placas*. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP. 1989.
- MAZARS, J. , *Application de la Mécanique de L'endommagement au Comportement non Lineaire et à la Rupture du béton de Structure*, Thèse de Dotoract d'Etat, Université Paris 6, Paris, 1984.
- MELGES, J.L.P. (1995). *Punção em lajes: exemplos de cálculo e análise teórico-experimental*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP. 1995.
- MELGES, J.L.P. (2001). *Análise experimental da punção em lajes de concreto armado e protendido*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP. 2001.
- MESQUITA, A. D. (1998). *Uma formulação do método dos elementos finitos aplicada à análise elástoplástica de cascas*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP. 1998.
- MILLER, R. E. (1980). Reduction of the error in eccentric beam modelling. *Int. J. Num. Meth. Eng.* v15. P.575-582
- MINDLIN, R. D. (1951). Influence of rotatory inertia on flexural motions of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics*, n. 37, p. 1031-1036.
- MUNAIAR NETO, J. (1994). *Modelos de comportamento viscoelástico e viscoplástico na análise de estruturas planas*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP. 1994.
- NEVILE, A. M. (1983). *Creep of Plain and Structural Concrete*. New York. London Construction Press.

- LEMAITRE, J.; CABOCHE, J.L. (1990). *Mechanic of solid materials*. Cambridge University Press.
- LEONHARDT, F. MÖNING, E. (1977). *Construções de concreto*. Rio de Janeiro. Interciência. 6v.
- KACHANOV, L. M., On the Time to Failure under Creep Conditions, T. V. Z. Akad, Nauk, SSR Otd, Tekhn, N° 8, p. 26-31, 1958.
- KATORI, H. and NISHIMURA, T. Non-conforming triangular finite element based on Mindlin plate theory. *Computer Methods in applied mechanics and engineering*. V. 104. p. 173-186.
- KINNUNEN, S.; NYLANDER, H. (1960). *Punching of concrete slabs without shear reinforcement*. Stockholm, Transactions of the Royal Institute of Technology. Report n° 158.
- HRH, K. (1992). A shear locking free isoparametric 3-node triangular finite element for moderately-thick and thin plates. *Int. J. Num. Meth. Eng.* V35. P.503-519.
- JEYACHANDRABOSE, C. ; KIRKHOPE, J. ; BABU, C. R. (1985). An alternative explicit formulation for the DKT plate-bending element. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v. 21, p. 1289-1293.
- LEMAITRE, J. and CABOCHE, J.L., *Mecanique des Materiaux Solids*, Dunod, Paris, 1985.
- LOVADINA, C. (1997). A new class of mixed finite element methods for Reissner-Mindlin plates. *SIAM, J. Numer. Anal.* 33(6). P. 2457-2467.
- LOVADINA, C. (1998). Analysis of a mixed finite element method for the Reissner-Mindlin plates problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 163, p. 71-85.

- GERE, J. M. ; WEAVER Jr, W. (1981). *Análise de estruturas reticuladas*. Guanabara. Rio de Janeiro, RJ, Brasil.
- GHALI, A. and FAVRE, R. (1986). *Concrete structures: stress and deformations*. Chapman and Hall, 1^a. edição.
- GOMES, R.B. (1991). *Punching resistance of reinforced concrete flat slabs with shear reinforcement*. PhD Thesis. The Polytechnic of Central London.
- GRIFFITH, A. A. (1920). The phenomena of rupture and flow in solids. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, series A221, p. 163-198. Apud. Oliveira (2001).
- GUPTA, A. K.; MA, P. S. (1977). Error in eccentric beam formulation. *Int. J. for Num. Meth. Eng.* v11. P.1473-1483.
- HOGNESTAD, E. (1953). Shearing strenght of reinforced concrete column footings. *ACI Journal*, v.50, n.3, p. 189-208.
- HOLANDA, K. M. A. (2002). Análise dos mecanismos resistentes e das similaridades de efeitos da adição de fibras de aço na resistência e na ductilidade à punção de lajes-cogumelo e ao cisalhamento de vigas de concreto. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP. 2002.
- HUGHES, T.J.R. et al (1978). Mixed Finite Elements - Reduced and selective integration techniques: a unification of concepts. *Int. J. for Num. Meth. Eng.* v15. P.63-81.
- HULT, J. A. H., Introduction and General Overview, in: D. Krajcinovic and J. Lemaitre, eds, *Continuum Damage Mechanics Theory and Applications*, Springer, Wien, 1977.
- IRONS, B.M.; RAZZAQUE, A. (1972). Experiences with the patch test for convergence of finite elements. In: Aziz, K. *Mathematical foundations of the finite element method with application to partial defferential equations*. New York, Academic Press, p. 557-558.

- COMI, C. (2000). A Nonlocal damage model with *permanent strains for quasi-brittle materials*. *Continuous Damage and Fracture*. P. 221-231. Elsevier . Paris. 2000
- COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON (1990). CEB-FIP Model Code 1990.
- COOK, R.D. (1974). Improved two-dimensional finite element. *Journal Structural Div. ASCE*, v. 9, p. 1851-1863.
- COOK, R.D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. (1989). *Concepts and applications of finite element analysis*. 3. ed., Madison, Jhon Wiley and Sons.
- CORREA, M. R. S. (1990). *Aperfeiçoamento dos modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP. 1990.
- DEBERNARDI, P. G. (1983). La Deformazione Differita in C. A. Sogette a Fessurazione: Considerazioni sui Metodi Approssimati di Calcolo. *L'Industria Italiana del Cemento*. Roma. V. 7/8, pg. 499-510 .
- DRIEMEIER, L. (1995). *Considerações Sobre a Fadiga em Metais e o Comportamento do Concreto sob Solicitação Cíclica*. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, São Carlos, SP.
- ELSTNER, R.C., HOGNESTAD, E. (1956). Shearing strenght of reinforced concrete slabs. *ACI Journal*, v.28, n.1, p. 29-57.
- FERNADES, G. R. (2003). *Análise não-linear de estruturas de pavimentos de edifícios através do método dos elementos de contorno*. Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, São Carlos, SP.
- FIGUEIRAS, J. A. (1983). *Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells*. PhD thesis. University of Wales. Department of civil engineering.
- FUSCO, P. B. (1981). *Estruturas de Concreto: solicações tangenciais*. São Paulo. EPUSP.
- FUSCO, P. B. (1995). *Técnica de armar as estruturas de concreto*. 1ª ed. São Paulo. Pini.

- BRESLER, B. ; SCORDELIS, A.C. (1963). Shear strenghtof reinforced concrete beams. *Proc. of the American Concrete Institute*, v. 60 n° 1 p.51-74.
- BOTTA, A. S. (1998). *Cálculo de Esforços e Deslocamentos em Estruturas Reticuladas Considerando-se a Mecânica do Dano para a Modelagem do Concreto Armado*. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, São Carlos, SP. 1998.
- BOTTA, A. S. (2003). *Método dos elementos de contorno para análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformações*. Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC, USP, São Carlos, SP. 2003.
- CAMARA, J. M. M. N. (1988). *Comportamento em serviço das estruturas de betão armado e pré-esforçado*. Tese (Doutorado). Departamento de Engenharia Civil, Universidade Técnica de Lisboa, Lisboa, PT. 1998.
- BUCALEM, M.L.; NÓBREGA, S.H.S. (2000). A mixed formulation for general triangular isoparametric shell elements based on the degenerated solid approach. *Computer & Structures*, n. 78, p. 35-44.
- CEB; Manual on cracking and deformations; Bulletin n° 158; 1985
- CHEN, W. F. (1982). *Plasticity in reinforced concrete*. New York. MacGraw-Hill.
- CHEN, W. F. and ZHANG, H. (1990). *Structural plasticity : Theory, problems and CAE Software*. Indiana, Springer-Verlag.
- CHENG, X.; HAN, W.; HUANG, H. (1997). Finite element methods for Timoshenko beam, circular arch and Reissner-Mindlin plate problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, n. 79, p. 215-234.
- CILONI, A. D. (1993). *Sobre o comportamento em serviço Estruturas Planas de Concreto Armado*. Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP, São Carlos, SP. 1993

- BATHE, K. J. and CIMENTO, A. P. (1980). Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. V. 22, n. 1, 59-85, April 1980.
- BATOZ, J.L.; AYAD, R. And DHATT, G. (1998). A new hybrid-mixed variational approach for Reissner-Mindlin plates. The MiSP model. *Int. J. Num. Meth. Eng.* V42. p.1149-1179
- BATOZ, J. L.; BATHE, K. J.; HO, L. W. (1980). A study of three-node triangular plate-bending elements. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v.15, p. 1771-1812
- BATOZ, J.L. and LARDEUR, P.A. (1989) A discrete shear triangular nine dof element for the analysis of thick to very thin plates. *Int. J. Num. Meth. Eng.* V.28. p. 533-560.
- BATOZ, J.L. and KATILI, I. (1992) On a simple triangular Reissner-Mindlin plate element based on incompatible modes and discrete constraints. *Int. J. Num. Meth. Eng.* V35. P.1603-1632.
- BAZANT, Z. P. (1982). *Creep and Shrinkage in Concrete Structures*. Chichester, John Willey & Sons. 2^a. edição.
- BERGAN, P. G.; HANSEN, L. (1976). A new approach for deriving 'good' element stiffness matrices. In: WHITEMAN, J. R. *The mathematics of finite elements and applications II*. London, Academic Press, p. 83-96.
- BERGAN, P.G.; FELIPPA, C.A. (1985). A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Comp. Meths. In Applied Mech. Eng.* v.50, p.25-69.
- BERGAN, P.G.; NYGARD, M. K. (1984). Finite elements with increased freedom in choosing shape functions. *Int. Journal Num. Methods in Eng.* v.20, p. 643-663.
- BLETZINGER, K.U. et al (2000). A unified approach for shear-locking free triangular and rectangular shell finite elements. *Computers & Structures*. V.75, p. 321-334.

BIBLIOGRAFIA

ÁLVARES, M. S. (1993). *Estudo de um modelo para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação do método dos elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP, São Carlos, SP. 1993.

AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS (1982). *State-of-the-art report on finite element analysis of reinforced concrete*. New York. ASCE.

ARAÚJO, J. M. (2003). Um modelo para análise não-linear de lajes nervuradas de concreto armado. *Revista Engenharia Ciência e Tecnologia*. V6 nº 2. P.4-13.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1978). *NB-1 – Projeto e execução de obras de concreto armado*. Rio de Janeiro.

____ (2003). *NBR 6118 – Projeto e execução de obras de concreto armado*. Rio de Janeiro.

____ (1984). *NBR 8681 – Ações e segurança nas estruturas*. Rio de Janeiro.

AURICCHIO, F. and TAYLOR, R.L. (1995). A triangular tick plate finite element with an exact thin limit. *Finite Elements in Analysis and Design*. V.19. p. 57-68.

BACARJI, E. (2001). *Aplicação do método dos elementos de contorno à análise de pavimentos de edifícios*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, São Carlos, SP. 2001.

BALMER, H. A. (1978). Short Communications: Another aspect of the error in eccentric beam formulation. *Int. J. Num. Meth. In Eng.* v12. P. 1761-1771.

BATHE, K. J. (1982). *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall.