

**MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ANÁLISE  
DE CORPOS DANIFICADOS COM ÊNFASE NO FENÔMENO  
DA LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES**

Alexandre Sampaio Botta

Tese apresentada à Escola de Engenharia  
de São Carlos, da Universidade de São  
Paulo, como parte dos requisitos para a  
obtenção do título de Doutor em  
Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Tit. Wilson Sergio Venturini

São Carlos

2003

*Aos meus pais,  
com todo amor e gratidão*

## **AGRADECIMENTOS**

---

---

Ao Prof. Wilson Sergio Venturini, pela excelente orientação, pelo incentivo, pelos ensinamentos e pela amizade prestados ao longo do período de elaboração da tese.

Ao nosso colaborador Ahmed Benallal, que abriu as portas do LMT-Laboratoire de Mécanique et Technologie (ENS-Cachan/CNRS/Paris-VI) para realização de estágio, e que muito contribuiu para o delineamento dos temas abordados no trabalho.

Aos professores Sergio Persival Baroncini Proença e Paulo Sollero, pelas valiosas sugestões dadas na ocasião do exame de qualificação do presente trabalho.

Aos colegas do Departamento de Engenharia de Estruturas, pela agradável e proveitosa amizade proporcionada pela convivência diária. Em especial, aos amigos Faustino, Ângelo, Valério e Luciano.

Aos demais professores e funcionários do Departamento.

À FAPESP, pela concessão de bolsa e financiamento de estágio no exterior.

À Deus, por ter me dado saúde e paz, para o cumprimento do meu trabalho.

## SUMÁRIO

---

---

1. INTRODUÇÃO .....	1
1.1. Objetivos e delimitações .....	1
1.2. Referências bibliográficas .....	7
1.2.1. Localização de deformações .....	7
1.2.2. Modelos locais e não-locais .....	8
1.2.3. Teoria da mecânica do dano contínuo e modelos de dano para o concreto .....	9
1.2.4. Método dos elementos de contorno para análise não-linear .....	10
1.2.5 Acoplamentos MEC/MEF .....	11
1.3. Organização da tese .....	12
2. LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES E MODELOS DE DANO COM TEORIA LOCAL E NÃO-LOCAL .....	14
2.1. Introdução .....	14
2.2. Localização de deformações: conceituação .....	14
2.3. Equações constitutivas dos modelos de dano em teorias local e não-local .....	22
2.3.1. Generalidades sobre mecânica do dano nos meios contínuos .....	22
2.3.2. Modelo de dano simplificado .....	23
2.3.2.1. Formulação local .....	23
2.3.2.2. Formulação não-local .....	25
2.3.3. Modelo de dano para o concreto .....	27
2.3.3.1. Formulação local .....	27
2.3.3.2. Formulação não-local .....	31
3. REPRESENTAÇÕES INTEGRAIS E MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS COM CAMPOS INICIAIS .....	34
3.1. Introdução .....	34

3.2. Representações e equações integrais para a elastostática .....	34
3.3. Representações integrais com campos iniciais .....	38
3.4. Discretização espacial: aproximações das variáveis no contorno e no domínio .....	41
3.5. Equações algébricas do método dos elementos de contorno para o problema com campo de tensões iniciais .....	50
3.6. Utilização de equações hipersingulares para montagem do sistema algébrico .....	51
4. FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR FÍSICA BIDIMENSIONAL .....	53
4.1. Introdução .....	53
4.2. Formulação não-linear do método dos elementos de contorno .....	53
4.3. Procedimento incremental-iterativo de resolução do problema não-linear de valor de contorno .....	56
4.4. Matriz tangente consistente para os modelos de dano locais .....	58
4.5. Cálculo numérico das integrais dos valores ponderados .....	64
4.6. Matriz tangente consistente para os modelos não-locais .....	72
4.7. Algoritmos do problema não-linear de valor de contorno para a formulação implícita do MEC com modelos de dano .....	78
4.7.1. Algoritmo para o modelo de dano simplificado .....	78
4.7.2. Algoritmo para o modelo de dano do concreto .....	81
5. FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM COMPRIMENTO DE ARCO E COM EQUAÇÃO DE RESTRIÇÃO .....	84
5.1. Introdução .....	84
5.2. Discussões sobre os métodos do tipo comprimento de arco .....	84
5.3. Formulações não-lineares do método dos elementos de contorno com equação do comprimento de arco .....	89
5.3.1. Considerações gerais .....	89
5.3.2. Formulação com variável-guia controlando deslocamento .....	89
5.3.3. Formulação com variável-guia controlando força .....	96

5.3.4. Observações sobre as formulações com comprimento de arco .....	102
5.4. Formulação não-linear do método dos elementos de contorno com equação de restrição .....	102
5.5. Procedimento incremental-iterativo para resolução do problema não-linear com equação de restrição .....	106
5.5.1. Método com equação de restrição linearizada .....	106
5.5.2. Método com equação de restrição esférica .....	109
5.5.3. Observações gerais sobre os procedimentos descritos .....	114
5.6. Exemplos de aplicação .....	115
5.6.1. Exemplos com modelo de dano para o concreto .....	115
5.6.1.1. Exemplo 1 – Ruptura por tração por compressão diametral .....	115
5.6.1.2. Exemplo 2 – Fendilhamento de prisma .....	119
5.6.1.3. Exemplo 3 – Teste de tração simples .....	122
5.6.2. Exemplos com modelo de dano simplificado .....	127
5.6.2.1. Problema unidimensional com tamanho de defeito variável .....	127
5.6.2.2. Problema plano com região enfraquecida .....	131
6. ANÁLISE DE DOMÍNIOS REFORÇADOS COM FIBRAS VIA COMBINAÇÃO DOS MÉTODOS DOS ELEMENTOS DE CONTORNO E ELEMENTOS FINITOS CONSIDERANDO-SE PERDA DE ADERÊNCIA ENTRE OS MEIOS .....	137
6.1. Introdução .....	137
6.2. Equações do elemento finito de barra .....	137
6.3. Formulação do acoplamento das fibras com o domínio bidimensional via combinação MEC/MEF .....	140
6.3.1. Equações do acoplamento .....	140
6.3.2. Combinação das equações do MEC/MEF com regularização por mínimos quadrados .....	146
6.3.3. Exemplo de aplicação da formulação com o acoplamento .....	148
6.4. Formulação não-linear para escorregamento entre fibras e meio contínuo .....	150
6.4.1. Generalidades .....	150
6.4.2. Modelo não-linear de aderência para o concreto armado .....	150

6.4.3. Formulação não-linear do acoplamento MEC/MEF com modelo de escorregamento .....	152
6.4.4. Algoritmo implícito da formulação não-linear com modelo de escorregamento .....	158
6.4.5. Exemplos de aplicação da formulação com escorregamento .....	159
6.4.5.1. Arrancamento de barra embutida em domínio .....	159
6.4.5.2. Escorregamento de barra em material com dano .....	162
7. CONCLUSÕES .....	166

## RESUMO

---

---

Neste trabalho, desenvolve-se uma formulação não-linear com o método dos elementos de contorno para análise numérica de sólidos danificados, considerando-se o fenômeno da localização de deformações. São utilizados dois modelos de dano, sendo um deles para o concreto. A regularização dos modelos locais é introduzida utilizando-se o conceito de integral não-local, objetivando-se assim eliminar a dependência de malha da resposta obtida com o contínuo local. A formulação implícita proposta é escrita em termos das variáveis de deformação do domínio e utiliza matriz tangente consistente, que é derivada a partir das relações constitutivas dos modelos não-lineares. A formulação é estendida para considerar a equação do comprimento de arco acoplada às equações de equilíbrio do método, possibilitando a obtenção de respostas com “snap-back”. Introduce-se também uma equação de restrição na formulação, mais geral que a do arco. Considera-se o acoplamento da formulação do método dos elementos de contorno com o método dos elementos finitos para modelar o meio contínuo com fibras. No acoplamento, utiliza-se uma técnica com mínimos quadrados para reduzir o número de equações do problema, geradas a mais do que o número de incógnitas em função da adoção de diferentes aproximações polinomiais para aproximar deslocamentos e forças nas fibras. Considera-se um modelo não-linear para o escorregamento entre fibras e meio. A variável do deslocamento relativo é introduzida nas equações do acoplamento e a formulação resultante permite analisar meios com dano, enrijecidos com fibras, considerando-se perda de aderência entre os dois materiais.



## ABSTRACT

---

---

In this work, a non-linear formulation of the boundary element method has been developed to analyse numerically damaged solids, taking into account the strain localization phenomenon. Two damage models are used, being one of them particularly applied to concrete materials. The regularization of the local models is introduced by the concept of non-local integral, aiming the mesh dependency elimination that may appear if the local models are used. The proposed implicit formulation is written in terms of domain strain variables and is based on the consistent tangent operator- CTO, which is derived from the non-linear model constitutive relations. The formulation is extended to consider the arc-length scheme combined with the equilibrium equations of the boundary element method to make possible the analysis of solids exhibiting snap-back effects. A general constrained equation even more general than the arc-length one is also introduced. An improved version of the boundary element-finite element method combination is also discussed and implemented to analyse reinforced solids. The least square method is adopted to reduce the number of redundant equations obtained by adopting different approximation for displacements and interface forces. An appropriate non-linear bolting model is considered to control the interface force between matrix and fibers, introducing therefore the relative displacement variable in the coupling equations. The resulting formulation allow analysing damaged bodies reinforced by fibers and taking into account the bolting conditions between matrix and fibers.

## **1. INTRODUÇÃO**

### **1.1. Objetivos e Delimitações**

A busca por uma melhor compreensão e avaliação do comportamento mecânico não-linear e a proposição de ferramentas numéricas que permitam analisar elementos estruturais em concreto e em concreto armado constituem objetivos desta tese. Em particular, objetiva-se neste trabalho o estudo de modelos não-lineares para o concreto e também para a interface deste com a armadura. A proposição de uma nova formulação numérica, utilizando-se o acoplamento dos métodos dos elementos de contorno e elementos finitos é a principal contribuição deste trabalho para a melhoria das respostas numéricas em análise não-linear, em particular aplicada às estruturas em concreto armado.

A caracterização do comportamento mecânico do concreto armado tem sido objeto de intensa investigação por parte de estudiosos e pesquisadores há décadas, por ser este um material utilizado com frequência na engenharia estrutural. A natureza complexa do concreto enquanto material de constituição heterogênea, e o seu comportamento mecânico isolado, ou em contato com a armadura, leva à necessidade de aprofundamento dos estudos para a compreensão dos mecanismos físicos que governam aspectos ligados à sua deformação e ruptura. Mais importante ainda são os estudos dos modelos físico-matemáticos que irão representar o comportamento do material a nível macroscópico, tradução de fenômenos dissipativos de natureza e escala microscópicas.

Neste âmbito se insere parte importante desta tese. Enfoca-se principalmente o problema da localização de deformações. Sabe-se que o principal fenômeno que governa o comportamento não-linear do concreto é a formação e crescimento de micro-fissuração, somados à expansão de vazios internos na matriz

de argamassa. Dentre os modelos clássicos utilizados para previsão do comportamento mecânico de materiais estruturais no contexto da mecânica dos meios contínuos, os modelos fundamentados na teoria da mecânica do dano parecem representar bem o concreto. Os modelos de dano para o concreto prevêem a progressiva perda de resistência e rigidez do material quando solicitado. Apresentam trechos de comportamento onde se verifica decréscimo de resistência para aumento de deformação. A localização de deformações ocorre neste caso, e é matematicamente visualizada pela perda de elipticidade das equações diferenciais locais de equilíbrio, para caso estático.

Nesta tese abordar-se-á o problema da localização com modelos de dano. Sabe-se que o problema de valor de contorno utilizando-se modelos locais conduz à não-unicidade de solução. Na realidade, têm-se infinitas respostas com dissipação nula de energia, o que não corresponde ao processo energético do problema real. Esta afirmação leva a conclusão que, matematicamente, o modelo escrito em variáveis locais não é representativo dos fenômenos energéticos envolvidos no processo de deformação e ruptura dos meios sólidos contínuos. Para recuperar a consistência energética da resposta do modelo, recorre-se às chamadas técnicas de regularização. A filosofia destas técnicas é trabalhar, de alguma forma, com variáveis que representem medidas não mais locais, mas influenciadas pelas mesmas medidas nas vizinhanças de cada ponto. Neste caso, as equações de equilíbrio continuam sendo localmente definidas, porém suas variáveis são não-locais, e a solução do problema de valor de contorno volta a ser única, com dissipação de energia não-nula, em conformidade com as observações experimentais.

Neste trabalho, utilizam-se dois modelos de dano para o estudo da localização. Em um deles, dito simplificado, isotrópico, uma única variável escalar de dano é definida. Em outro modelo, proposto na literatura (Comi, 2001), próprio para o concreto, tem-se a mesma hipótese de isotropia e duas variáveis escalares de dano são definidas, caracterizando-o assim como um modelo bi-dissipativo. Para ambos, utiliza-se o conceito de integral não-local (Pijaudier-Cabot, G. & Bazant, P., 1987) na técnica de regularização. Nos modelos não-locais, recupera-se a objetividade da resposta do problema de valor de contorno com a introdução de um

comprimento característico que limita a um valor fixo o tamanho da região onde ocorre a localização.

Para a análise numérica de meios contínuos sólidos em regime não-linear, o método dos elementos de contorno vem sendo há algumas décadas utilizado como alternativo a outros métodos existentes. O método é construído com base nas equações integrais que representam o equilíbrio de pontos do sólido. Em análise não-linear, além das integrais de contorno com os deslocamentos e as forças de superfície, aparece em cada equação uma integral de domínio para um campo de tensões (ou deformações) iniciais aplicado sobre ele. Uma das técnicas para levar em consideração estas variáveis de domínio é a sua discretização em células. As variáveis do campo inicial são aproximadas sobre cada célula. Esta técnica será discutida no texto. No contorno também discretizado, são aproximadas sobre cada elemento as variáveis para os campos de deslocamentos e forças de superfície.

A formulação não-linear do método dos elementos de contorno é escrita, neste trabalho, em termos das variáveis do campo de deformações, relacionadas, pela lei constitutiva do modelo não-linear, com as variáveis do campo de tensões iniciais aproximadas no domínio do corpo. Esta equação de equilíbrio é obtida substituindo-se o vetor de incógnitas de contorno, deslocamentos e forças, da equação algébrica dos deslocamentos, na equação algébrica das tensões. A formulação escrita com campo de tensões iniciais é geral, podendo ser considerada para qualquer que seja a lei constitutiva não-linear.

Em problemas onde se presencia a localização de deformações, seja utilizando-se modelos locais ou não-locais, podem ocorrer respostas com presença de “snap-back”. Esta situação ocorre em caso estático, quando a simples prescrição monotônica de deslocamento, força ou de uma combinação deles, não garante que as equações de equilíbrio sejam verificadas a partir de pontos limite. Nos materiais com comportamento “softening”, este fenômeno ocorre nos casos em que se tem a região de localização com dimensões suficientemente menores que as do restante do corpo, ou ainda em função dos parâmetros adotados para o modelo não-linear, os quais têm relação com a forma da superfície de carregamento ou de danificação. Nestas situações, o equilíbrio estático somente pode ser encontrado além do ponto limite utilizando-se técnicas especiais. Neste trabalho, utiliza-se o conceito de comprimento

de arco para somar uma equação a mais, de natureza geométrica, às já existentes equações de equilíbrio.

A formulação não-linear do método dos elementos de contorno fica estendida para considerar respostas numéricas com “snap-back”, a partir do acoplamento da equação do comprimento de arco à formulação inicial. A equação do arco estabelece uma relação quadrática entre variáveis de deslocamentos e forças de contorno, reproduzindo num conveniente diagrama força resultante-deslocamento um arco geométrico. A solução deve estar sobre este arco, atendendo às equações gerais de equilíbrio. Uma outra maneira de formular o mesmo problema consiste em adicionar às equações de equilíbrio uma equação de restrição, que pode ser de natureza geométrica, como a já citada equação do comprimento de arco, ou de natureza qualquer, estabelecendo algum tipo de relação (linear, quadrática) entre as variáveis de deslocamentos, forças, deformações ou até mesmo variáveis internas dos modelos, como as de dano. Esta possibilidade também será abordada na tese. Assim, a equação do arco passa a ser uma equação de restrição particular.

Em análise numérica, deve-se utilizar algum tipo de procedimento para a resolução do sistema de equações não-lineares do problema de valor de contorno. Além da discretização espacial, necessária para aproximar as variáveis e gerar o sistema de equações algébricas do método numérico, o problema também requer uma discretização temporal, ou seja, a subdivisão do intervalo de análise em intervalos menores, ou passos de carga. As variáveis escritas em taxas transformam-se em variáveis incrementais, e o problema é resolvido iterativamente para cada incremento de carga. Utilizando-se um esquema de resolução como o de Newton-Raphson, têm-se as etapas de previsão e correção, com as sucessivas linearizações das equações de equilíbrio. Na etapa de correção, torna-se bastante viável utilizar a matriz tangente consistente algorítmica para a atualização das variáveis no processo iterativo. Para que se obter esta matriz, deve-se escrever a relação constitutiva do modelo não-linear em termos das variáveis incrementais. Na tese, serão apresentadas as matrizes tangentes para os modelos de dano utilizados. A resolução numérica torna-se bem mais eficiente com esta matriz.

Dois tipos de procedimentos de resolução serão considerados na tese para a formulação do método dos elementos de contorno considerando-se

acoplamento com a equação de restrição. Nesta formulação, uma nova variável escalar é introduzida no sistema. Ela atua sobre uma parte do vetor com as variáveis prescritas de contorno (forças e deslocamentos) cuja direção se conhece, mas não sua intensidade, que terá valor proporcional a esta variável escalar. Um dos procedimentos para resolução do problema consiste em linearizar as equações de equilíbrio, escrever as variáveis incrementais de deformação em função da variável escalar, e substituí-las na equação de restrição. Se esta for quadrática, duas raízes para a variável escalar deverão ser encontradas, e uma delas deve ser escolhida. Em outro procedimento, a equação de restrição também é linearizada como as equações de equilíbrio, e o sistema é resolvido diretamente.

Um outro tema desta tese é a extensão da formulação para considerar o meio contínuo enrijecido por barras, ou fibras, embutidas em seu interior. Neste caso, procura-se simular o comportamento do concreto armado. Os enrijecedores serão considerados elementos unidimensionais com um único grau de liberdade de deslocamento na direção longitudinal. A discretização dos enrijecedores será feita por elementos finitos. Para cada elemento, são aproximados os deslocamentos e as forças longitudinais. As barras modeladas em elementos finitos são então acopladas ao meio contínuo bidimensional modelado em elementos de contorno, impondo-se equações de compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de forças. Equações em elementos de contorno para os deslocamentos dos pontos internos do sólido são consideradas no acoplamento meio contínuo-enrijecedor. Tem-se, ao final, uma formulação com a combinação MEC/MEF para simular o comportamento de fibras internas perfeitamente aderentes ao meio contínuo.

Neste trabalho, apresentar-se-á uma técnica de acoplamento que permite a obtenção de soluções numéricas consistentes, principalmente em termos da resposta em força. A idéia desta técnica de acoplamento é a de que se pode escrever mais equações do que o número de incógnitas do problema. Para que ele seja resolvido, este número maior de equações deve ser reduzido a um número de equações igual ao de incógnitas por algum procedimento. Neste trabalho, será utilizada uma técnica de mínimos quadrados para reduzir o número de equações.

Sabe-se que o equilíbrio de uma barra unidimensional com grau de liberdade de deslocamento longitudinal é representado por uma equação diferencial

cuja força distribuída é proporcional à segunda derivada do deslocamento. Assim, uma conveniente aproximação para deslocamentos e forças, por elemento finito, deve ser uma que respeite a equação diferencial. Pode-se adotar como aproximação, por exemplo, um polinômio cúbico para os deslocamentos e outro linear para as forças longitudinais. Com estas aproximações de diferentes ordens, nota-se que o sistema de equações finais do acoplamento MEC/MEF terá um número de equações tão maior do que o número de incógnitas quanto é o número de variáveis de deslocamento maior do que o número de variáveis de força na barra. Aplica-se então a técnica dos mínimos quadrados para reduzir o número de equações do sistema. As respostas em termos de forças, utilizando-se a regularização por mínimos quadrados, têm comportamento não oscilatório, conforme esperado, admitindo-se uma boa discretização.

A regularização da resposta em força possibilita que possa ser levado em conta o efeito de perda de aderência entre meio contínuo e barra, ou seja, o escorregamento entre meio e fibra. Trata-se de um comportamento não-linear, onde se estabelece uma relação constitutiva local entre força de aderência e deslocamento relativo. A formulação da combinação MEC/MEF fica escrita em termos das variáveis de deformação do meio bidimensional e das variáveis de deslocamento relativo entre os meios. A equação de restrição ou a do comprimento de arco podem também ser levadas em conta na formulação do acoplamento.

Neste trabalho, utilizar-se-á para a perda de aderência entre meio e fibra o modelo que consta no código modelo CEB/FIP (1990), para escorregamento entre concreto e armadura. Em conjunto com o modelo de dano, estende-se a formulação para que possa ser analisado o comportamento não-linear de elementos estruturais em concreto armado considerando-se também o efeito da perda de aderência da armadura.

A principal contribuição da tese é o desenvolvimento de novas ferramentas numéricas em análise não linear com o método dos elementos de contorno e com o acoplamento MEC/MEF. As novas formulações propostas englobam diversas aplicações que acabam por confirmar o MEC como método que apresenta boa estabilidade e precisão. A justificativa desta afirmação é que a formulação foi aplicada a um problema que apresenta grandes gradientes dos campos

envolvidos, que é a localização, com muito sucesso. Este tipo de problema abordado, de análise numérica bem sensível, exige bom desempenho da formulação para que ela possa funcionar adequadamente. Um outro complicador e que torna ainda mais sensível o problema numérico são as respostas com “snap-back”, contempladas pela formulação proposta. Por último, a inclusão dos enrijecedores e a perda de aderência entre eles e o contínuo incluem maior grau de complexidade à análise com a formulação.

As estruturas em concreto armado são o foco principal de aplicação das formulações propostas. Na tese, diversos exemplos mostrarão suas aplicabilidades. O fenômeno da localização também será estudado com um modelo de dano simplificado, permitindo uma melhor compreensão conceitual do fenômeno. Alguns exemplos com este modelo também serão mostrados. Como parte do trabalho, desenvolveu-se um código computacional de cálculo, onde foram implementados os algoritmos com os modelos e as formulações propostas, e com o qual foram obtidos os resultados numéricos dos exemplos.

## **1.2. Referências bibliográficas**

Apresenta-se neste item os principais trabalhos científicos que constam na literatura técnica relacionados aos temas tratados na tese. Optou-se por organizar as referências por tema, visando facilitar a leitura.

### **1.2.1 Localização de deformações**

Na presença de amolecimento (softening) induzido pela danificação do material, o problema de valor de contorno torna-se mal posicionado, e infinitas soluções são admitidas para ele. Em análise numérica, tem-se a conhecida dependência de malha da resposta. Alguns trabalhos tratam do assunto, às vezes envolvendo aspectos matemáticos, outras vezes envolvendo aplicações numéricas.

Em Benallal et al. (1988), alguns aspectos do ponto de vista matemático sobre existência e unicidade de solução para problemas com “softening” induzido por dano são abordados. Discutem-se as condições necessárias e suficientes



para que exista solução fechada para o problema de valor de contorno. Comi et al. (1995) apresentam um estudo da localização de deformações para compressão pura em materiais de natureza frágil (concreto). Analisam-se as diferentes influências da formulação de um modelo de dano elasto-plástico (tipos de acoplamento, formas da função de plastificação e formas do potencial inelástico) na localização em compressão. Pijaudier-Cabot & Benallal (1993) descrevem as condições para a localização para um material seguindo uma relação constitutiva de dano não-local. Casos estático e dinâmico são considerados. Estabelece-se o critério de bifurcação para o modelo não-local utilizando-se o conhecido tensor acústico dos modelos locais. Um estudo de cunho teórico sobre localização e bifurcação encontra-se também em Benallal, Billardon & Geymonat (1992).

### **1.2.2 Modelos locais e não-locais**

Várias são as técnicas para a chamada regularização das soluções obtidas com modelos locais, as quais apresentam perda de estabilidade com infinitas soluções. As técnicas são baseadas na introdução de um comprimento característico que delimita a faixa de localização com dissipação não nula de energia.

Uma técnica de regularização é o contínuo de Cosserat, conforme de Borst (1991). Outra técnica é a introdução de gradientes das variáveis de estado nas relações constitutivas dos materiais com “softening”. Citando o mesmo autor, de Borst & Mühlhaus (1992) apresentam uma aplicação da teoria do gradiente em plasticidade convencional, introduzindo o Laplaciano do parâmetro de encruamento na função de plastificação. Peerlings et al. (1996) trabalham com o mesmo conceito para um modelo simplificado de dano. Neste caso, a evolução da variável escalar de dano é função de um parâmetro escalar que representa a mais severa deformação experimentada pelo material. Este parâmetro é proporcional a uma variável não-local de deformação equivalente que depende do Laplaciano de sua medida local. Modelo semelhante pode ser encontrado em Herres et al. (1996). Seguindo a mesma linha, Comi (1999) propõe um modelo isotrópico de dano para material frágil cujo Laplaciano da variável de dano aparece como um termo da função de carregamento.

Alguns trabalhos tratam aspectos mais conceituais sobre teoria de dano não-local. Bazant (1991) apresenta argumentos em micromecânica mostrando a natureza não-local da danificação causada por processo de fissuração interna. Defende a tese de que o dano é função da deformação ponderada nas vizinhanças de cada ponto. Pijaudier-Cabot & Bazant (1987) discutem num modelo simplificado de dano a influência de uma variável não-local calculada como integral sobre um volume representativo da mesma variável localmente definida. Os mesmos autores, em (1988), apresentam a mesma integral não-local, porém mostrando argumentos para que sejam ponderadas medidas não ligadas à deformação, como a medida do dano, por exemplo. Ainda os mesmos autores, em (1989), mostram ensaios experimentais para medir o valor do comprimento característico para o concreto, sabendo-se que esta variável pode ser quantificada para cada material.

### **1.2.3 Teoria da mecânica do dano contínuo e modelos de dano para o concreto**

Diversos trabalhos com a teoria da mecânica do dano contínuo têm sido publicados para modelar o comportamento do concreto, sabendo-se que os mecanismos envolvidos na dissipação de energia deste material são quase os mesmos que os admitidos pelas hipóteses da teoria do dano.

Deve-se a Kachanov (1958) o primeiro trabalho introduzindo o conceito de dano. Ele investigou um problema de fluência uniaxial para metais submetidos a altas temperaturas, e introduziu a variável de dano para descrever a capacidade de uma seção transversal transmitir carga. A mecânica do dano contínuo foi formalizada com base na termodinâmica dos processos irreversíveis por Lemaitre & Chaboche (1985) e Lemaitre (1992). A termodinâmica deu um significado físico para as variáveis que descrevem a danificação do material, associando-as sempre a um processo energético. Nestes trabalhos, abordam-se os conceitos de tensão e deformação efetivas, dano isotrópico e anisotrópico, acoplamento de dano com plasticidade, relações constitutivas para dano em materiais frágeis e dúcteis, para fluência ou fadiga.

Para o concreto, Mazars (1984) apresenta um modelo isotrópico definindo uma única variável escalar de dano. La Borderie (1991) apresenta outro modelo de dano e suas aplicações em análise de estruturas em concreto. Mais recentemente, Comi & Perego (2000) propõem um modelo isotrópico de dano para o concreto com dois mecanismos distintos de dissipação, permitindo considerar comportamento não-simétrico (efeito unilateral) em tração e compressão. O mesmo modelo, agora introduzindo a não-localidade, encontra-se descrito em Comi (2001). Este último modelo será utilizado nesta tese. Proença & Venturini (2000) analisam diversas aplicações de modelos de dano para análise de elementos estruturais em concreto armado, enfatizando questões relacionadas à análise numérica.

No Depto. de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos foram desenvolvidas algumas dissertações e teses onde se focalizou algumas aplicações de modelos de dano às estruturas em concreto armado. Podem ser citados: Álvares (1999), Botta (1998), Driemeier (1999) e Pituba (1998).

#### **1.2.4 Método dos elementos de contorno para análise não-linear**

Os primeiros trabalhos em análise elastostática com o método dos elementos de contorno são de Rizzo (1967) e Cruse (1969), ambos utilizando a formulação direta do MEC. A partir daí, diversos trabalhos surgiram e hoje o método dos elementos de contorno tem sua eficiência e utilidade comprovadas para a análise de diversos problemas nos diferentes campos da engenharia. A abordagem de problemas não-lineares com o MEC pode ser encontrada nos trabalhos de Brebbia et al. (1984), Venturini (1983) e Telles (1983). Nestes trabalhos, já estão introduzidos os conceitos de tensor de tensões e deformações iniciais, e empregava-se o esquema de resolução do problema incremental com matriz constante.

O conceito de operador tangente consistente, tal como introduzido por Simo (1985) para elementos finitos, foi incorporado nas formulações não-lineares do MEC recentemente por Bonnet & Mukherjee (1996) e Poon et al. (1998). O mesmo operador foi utilizado na formulação implícita do MEC proposta por Fudoli (1999) e Benallal et al. (2002) para problemas de localização de deformações com plasticidade com gradiente. A presença do gradiente evita a dependência de malha da

resposta e os resultados obtidos com a formulação do MEC mostram claramente a eficiência do operador tangente no algoritmo não-linear.

Na literatura, constam pouquíssimos trabalhos com aplicações do MEC em análise não-linear com modelos de dano (Herding & Kuhn, 1996, Garcia et al., 1999, e Botta et al., 2001). Os modelos de dano trazem um complicador a mais que os de plasticidade para a análise numérica. Com a evolução da danificação do material, este perde rigidez, não sendo mais constante o módulo de Young. Em situações de extrema deterioração do material, faz-se realmente necessário o uso do operador tangente ao invés do constante, caso contrário o problema pode apresentar excesso de iterações ou mesmo não convergir.

Um trabalho desenvolvido pelo autor da tese está em fase final de preparação para ser publicado. Nele (Benallal, Botta & Venturini, 2002), é apresentada a formulação implícita do MEC desenvolvida inicialmente para plasticidade, agora incorporando um modelo de dano não-local segundo o conceito de integral não-local (Pijaudier-Cabot & Bazant, 1987) para estudo da localização. A formulação é estendida para considerar problemas que exibem resposta numérica com “snap-back”. Postula-se a existência de uma equação de restrição acoplada às equações de equilíbrio do MEC que, como caso particular, pode vir a ser a equação do comprimento de arco (Crisfield, 1991). Em outro trabalho (Botta, Venturini & Benallal, 2002), são abordados aspectos mais fortemente ligados à análise numérica com a formulação implícita do BEM. As aplicações restringem-se ao modelo de dano local (Comi & Perego, 2000), ficando clara a dependência da resposta em relação à malha.

### **1.2.5 Acoplamentos MEC/MEF**

A idéia de acoplar os métodos dos elementos de contorno com o dos elementos finitos sempre foi atrativa para os pesquisadores. As equações gerais do acoplamento encontram-se, por exemplo, em Brebbia & Dominguez (1992). Algumas aplicações de acoplamentos MEC/MEF em problemas gerais de análise estrutural estão em Vallabhan & Sivakumar, 1986, Coda et al. (1999a,b) e Coda (2001). De particular importância no contexto da presente tese são os problemas de

domínios enrijecidos por barras em seu interior. Neste caso, as barras podem ser modeladas por elementos finitos, e o meio contínuo em elementos de contorno. No problema, devem ser previstas equações de compatibilidade de deslocamentos e equilíbrio de forças de contato entre meio contínuo e barra.

Porém, em diversas aplicações com o acoplamento, soluções em termos de forças apresentam oscilações espúrias, mas com valores médios corretos (olhar as condições de Dirichlet em Babuska & Aziz, 1972 e Bathe, 1996). Nesta tese, apresenta-se uma técnica que tenta superar este problema gerando mais equações de equilíbrio que o necessário, e aplicando-se posteriormente um procedimento de mínimos quadrados. Encontra-se em preparação para ser publicado um artigo do autor da tese com o referido acoplamento com mínimos quadrados (Botta & Venturini, 2002). A solução não espúria em força também é obtida modelando-se o meio e as fibras em elementos de contorno. Leite et al. (2002) propõem um procedimento em que as forças de interface são eliminadas, não sendo necessária nenhuma aproximação para elas no problema. Os resultados com as inclusões em meio contínuo mostram que a formulação é boa o suficiente para regularizar a resposta em termos de forças.

### **1.3. Organização da tese**

No capítulo 2, introduz-se o conceito de localização de deformações, exemplificando-a com um caso simples com resposta analítica, mostrando as bifurcações de solução. Apresentam-se dois modelos de dano, um simplificado, outro para o concreto. Introduz-se, nas equações dos modelos, a técnica de regularização com integral não-local.

No capítulo 3, são apresentadas as representações integrais para o problema elástico com campo de tensões iniciais aplicado ao domínio. Discute-se a questão da aproximação das tensões iniciais sobre as células, definindo-se nós internos. Derivam-se as equações algébricas do método dos elementos de contorno, com campo de tensões iniciais. Introduz-se a consideração de equações hipersingulares, em substituição às singulares, nas equações algébricas do método

No capítulo 4, apresenta-se a formulação não-linear do método dos elementos de contorno para problemas bidimensionais, escrita em deformações. Define-se a matriz tangente consistente do procedimento incremental. Suas expressões são derivadas para os dois modelos de dano locais. Apresenta-se o procedimento utilizado para o cálculo numérico das integrais com os valores ponderados das variáveis dos modelos regularizados. As matrizes tangentes são obtidas para os dois modelos não-locais. Ao final, apresenta-se o algoritmo da formulação implícita com os modelos de dano.

No capítulo 5, define-se o método do tipo comprimento de arco. Apresentam-se duas alternativas para a formulação não-linear com equação do comprimento de arco, para variável-guia controlando deslocamento ou força. Introduce-se a formulação com equação de restrição, cuja equação do arco vem a ser um caso particular. Definem-se os métodos e os algoritmos com equação de restrição linearizada e esférica. Apresenta-se uma série de exemplos numéricos com a formulação utilizando-se os modelos para o concreto e simplificado.

No capítulo 6, introduz-se a formulação do acoplamento dos métodos dos elementos de contorno e elementos finitos, para modelar, respectivamente, meio contínuo e fibras. Define-se o elemento finito de barra com aproximações polinomiais de ordens diferentes para deslocamentos e forças de superfície. Aplica-se uma regularização, utilizando-se mínimos quadrados, para reduzir o número de equações de deslocamentos internos do MEC, em excesso na formulação. Considera-se, ao final, a introdução da variável de deslocamento relativo entre meio e fibras na formulação, para considerar o problema não-linear do escorregamento. O algoritmo da formulação e alguns exemplos numéricos são apresentados ao final.

No capítulo 7, têm-se as conclusões finais da tese.

## **2. LOCALIZAÇÃO DE DEFORMAÇÕES E MODELOS DE DANO COM TEORIA LOCAL E NÃO-LOCAL**

### **2.1. Introdução**

Neste capítulo, conceitua-se a localização de deformações, ilustrando-a com um exemplo simples, onde as diversas soluções analíticas do problema são obtidas. Em seguida, discute-se a mecânica do dano nos meios contínuos. Apresentam-se as equações de um modelo de dano simplificado local. Conceitua-se a integral não-local, incorporando-a ao modelo simplificado. Ao final, apresenta-se um modelo de dano isotrópico para o concreto, primeiro local, e depois regularizado, com a incorporação da integral não-local.

### **2.2. Localização de deformações: conceituação**

Em mecânica, a localização de deformações ocorre para os materiais frágeis e quase frágeis, ou seja, materiais com presença de “softening” nas relações constitutivas. Nesta categoria exemplifica-se os concretos, as cerâmicas e as rochas. A localização pode ser causada pela presença de heterogeneidades no material (falhas de natureza microscópica em sua estrutura), pela geometria (forma do elemento estrutural), pelas condições de contorno ou pelo carregamento. A localização é caracterizada por grandes descontinuidades no campo de deformações. Pequenas regiões do corpo apresentam grandes deformações em comparação com as demais partes do sólido.

Do ponto de vista das teorias que modelam os materiais frágeis (incluindo-se a mecânica do dano contínuo), as formulações locais trazem sérios

problemas para o problema de valor de contorno. Para estudá-los, considere o seguinte problema: um corpo rígido com um único grau de liberdade de deslocamento está preso a duas barras flexíveis de tamanhos diferentes por uma de suas extremidades. A outra extremidade de cada barra encontra-se engastada. Cada uma das barras está subdividida em dois elementos, conforme ilustra a figura (2.1), onde  $E$ ,  $S$  e  $L$  são valores de referência para o módulo de elasticidade, a área e o comprimento dos elementos. Sendo  $u$  o deslocamento do bloco rígido e  $F$  a força resultante nele aplicado, as equações de compatibilidade e equilíbrio são escritas como:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \dot{\varepsilon}_1 \cdot (L) + \dot{\varepsilon}_2 \cdot (3L) \\ \dot{u} &= \dot{\varepsilon}_3 \cdot \left(\frac{L}{2}\right) + \dot{\varepsilon}_4 \cdot \left(\frac{3L}{2}\right)\end{aligned}\quad (2.1)$$

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_1 \cdot S_1 &= \dot{\sigma}_2 \cdot S_2 \\ \dot{\sigma}_3 \cdot S_3 &= \dot{\sigma}_4 \cdot S_4\end{aligned}\quad (2.2)$$

onde  $\varepsilon_i$  e  $\sigma_i$  são, respectivamente, a deformação e a tensão no elemento  $i$ . O ponto nas expressões (2.1) e (2.2) e nas demais que se seguirão indica taxa de cada variável. A taxa de  $F$  é dada por:

$$\dot{F} = \dot{\sigma}_1 \cdot S_1 + \dot{\sigma}_3 \cdot S_3 \quad (2.3)$$

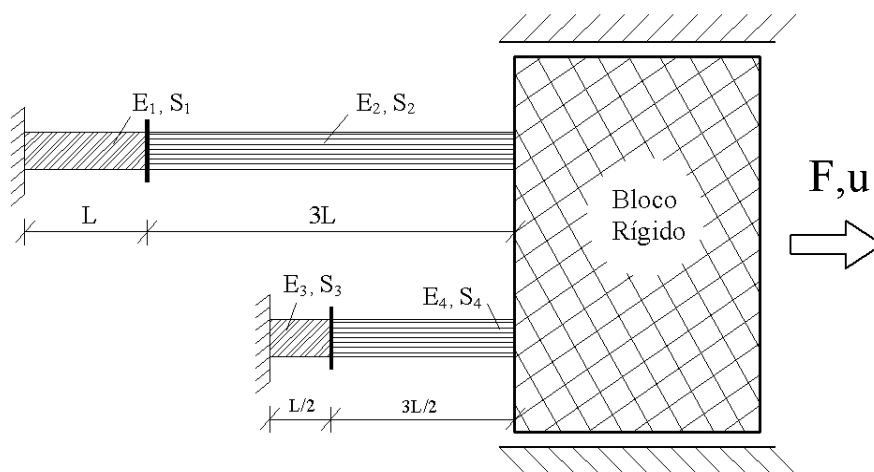


Figura 2.1. Bloco rígido preso a duas barras flexíveis.



Para ilustrar o problema da localização, utiliza-se um modelo de dano isotrópico, definido pelo conjunto de equações:

$$\Psi = \frac{1}{2}E(1-D)\varepsilon^2 \quad (2.4)$$

$$Y = -\frac{\partial\Psi}{\partial D} = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 \quad (2.5)$$

$$\sigma = \frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon} = (1-D)E\varepsilon \quad (2.6)$$

$$\dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial f(Y, D)}{\partial Y} \quad (2.7)$$

$$f(Y, D) = Y - Y_0 - MD \quad (2.8)$$

$$f \leq 0, \quad \dot{\lambda} \geq 0, \quad f\dot{\lambda} = 0 \quad (2.9)$$

onde  $\psi$  é a energia livre de Helmholtz,  $D$  é a única variável escalar de dano, cujo valor varia de zero (material íntegro) a um (material fraturado),  $Y$  é a tensão termodinâmica conjugada à  $D$ ,  $f$  é a função de carregamento, e o multiplicador  $\dot{\lambda}$  satisfaz as condições de Kuhn-Tucker expressas na (2.9). São parâmetros constantes do material  $M$  e  $Y_0$ . O módulo de Young, a tensão e a deformação são respectivamente  $E$ ,  $\sigma$  e  $\varepsilon$ . Todas as variáveis são escalares por ser o problema unidimensional. Da condição de consistência,  $\dot{f} = 0$ , escrevem-se as relações:

$$\dot{f}(Y, D) = \frac{\partial f}{\partial Y}\dot{Y} + \frac{\partial f}{\partial D}\dot{D} = 0 \quad (2.10)$$

$$\dot{D} = \frac{\dot{Y}}{M} = \frac{E\varepsilon}{M}\dot{\varepsilon} \quad (2.11)$$

A relação constitutiva é dada por:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = (1-D)E\dot{\varepsilon} & \text{na parte elástica} \\ \dot{\sigma} = (1-D)E\dot{\varepsilon} - \dot{D}E\varepsilon = \left[ (1-D)E - \frac{(E\varepsilon)^2}{M} \right] \dot{\varepsilon} & \text{na parte com } \dot{D} > 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

A figura 2.2 mostra a relação tensão-deformação do modelo uniaxial para o caso homogêneo.

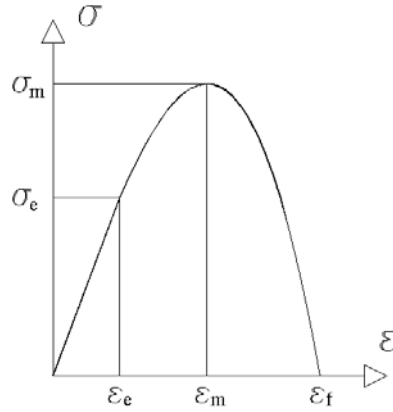


Figura 2.2. Relação tensão-deformação para o modelo de dano.

Na figura 2.2,  $\sigma_e$  é a tensão limite elástica e  $\varepsilon_e$  a deformação limite elástica. A tensão e a deformação máximas são, respectivamente,  $\sigma_m$  e  $\varepsilon_m$ . A deformação correspondente a  $D=1$  é dada por  $\varepsilon_f$ . Para o modelo de dano descrito pelas equações (2.4) a (2.9), os seguintes valores são obtidos:

$$\varepsilon_e = \sqrt{2} \sqrt{\frac{Y_0}{E}}, \quad \varepsilon_m = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{(M+Y_0)}{E}}, \quad \varepsilon_f = \sqrt{2} \sqrt{\frac{(M+Y_0)}{E}} \quad (2.13)$$

$$\sigma_e = E\varepsilon_e, \quad \sigma_m = (1 - D_m)E\varepsilon_m \quad (2.14)$$

onde, na (2.14)  $D_m$  é o valor da variável de dano para o pico da curva tensão-deformação e vale  $D_m = \frac{E\varepsilon_m^2 - 2Y_0}{2M}$ . O problema da figura 2.1, representado pelas equações (2.1) e (2.2), não apresenta solução única. O ponto onde as soluções se bifurcam é o correspondente ao par  $(\sigma_m, \varepsilon_m)$ . Estuda-se agora a solução para o problema proposto. Por simplicidade, adota-se o mesmo módulo de elasticidade e a mesma área da seção transversal para os quatro elementos de barra, ou seja,  $E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E$  e  $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S$ .

A menor das duas barras (elementos 3 e 4) deverá alcançar primeiro a deformação elástica  $\varepsilon_e$ . Antes deste ponto, o comportamento do conjunto de barras é elástico, e com as simplificações adotadas, valem as relações entre as taxas das deformações  $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_2$  e  $\dot{\varepsilon}_3 = \dot{\varepsilon}_4$ , e as relações constitutivas elásticas  $\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_2 = E\dot{\varepsilon}_1$  e  $\dot{\sigma}_3 = \dot{\sigma}_4 = E\dot{\varepsilon}_3$ . A equação (2.3) que relaciona as taxas de F e u, com as (2.1) e (2.2), fica dada por:

$$\dot{F} = \frac{3ES}{4L}\dot{u} \quad (2.15)$$

A resposta deixa de ser elástica quando a deformação da barra menor atinge  $\varepsilon_e$ . No trecho onde tem-se  $\varepsilon_e \leq \varepsilon_3 \leq \varepsilon_m$ , haverá evolução da variável de dano ( $\dot{D}_3 > 0$ ). A barra maior ainda continua elástica, até que atinja  $\varepsilon_e$ . As taxas das deformações  $\dot{\varepsilon}_3$  e  $\dot{\varepsilon}_4$  continuam iguais (assim como  $\dot{D}_3 = \dot{D}_4$ ) e, de acordo com a (2.12), têm-se:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma}_2 &= E\dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\sigma}_3 = \dot{\sigma}_4 &= \frac{E}{M} \left\{ \frac{2(M + Y_0) - 3E\varepsilon_3^2}{2} \right\} \dot{\varepsilon}_3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nota-se agora que o problema é não-linear em função da segunda equação em (2.16). Conseqüentemente, uma mesma relação como a (2.15) pode ser obtida, agora de natureza não-linear. Esta é dada por:

$$\dot{F} = \frac{ES}{4LM} [3M + 2Y_0 - 3E\varepsilon_3^2] \dot{u} \quad (2.17)$$

Ressalta-se que a (2.17) é válida somente se  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \leq \varepsilon_e$ . Caso estas deformações superem  $\varepsilon_e$  antes que  $\varepsilon_3$  atinja  $\varepsilon_m$ , a (2.17) é substituída por:

$$\dot{F} = \frac{ES}{8LM} [6(M + Y_0) - 3E(\varepsilon_1^2 + 2\varepsilon_3^2)] \dot{u} \quad (2.18)$$

A solução do problema é única e dada pelas equações (2.15), (2.17) e (2.18) para  $\varepsilon_3 \leq \varepsilon_m$ . A perda de unicidade da solução ocorre exatamente neste ponto. A partir daí, duas soluções são possíveis para o problema. Em uma delas,  $\dot{\varepsilon}_3 > 0$  com  $\dot{D}_3 > 0$  e  $\dot{\varepsilon}_4 < 0$  com  $D_4 = D_m$  e  $\dot{D}_4 = 0$ . Em outra  $\dot{\varepsilon}_4 > 0$  com  $\dot{D}_4 > 0$  e  $\dot{\varepsilon}_3 < 0$  com  $D_3 = D_m$  e  $\dot{D}_3 = 0$ . Obtêm-se, assim, duas relações para  $(\dot{F}, \dot{u})$ . São elas:

$$\dot{F} = \frac{ES}{L} \left[ \frac{A_1 + B_1}{C_1} \right] \dot{u} \quad (2.19)$$

$$A_1 = 72\hat{d}M^2 + (48 + 72\hat{d})MY_0 + 24(M^2 + Y_0^2)$$

$$B_1 = -(96\hat{d} + 36)ME\varepsilon_3^2 - 36EY_0(\varepsilon_3^2 + \varepsilon_1^2) - (36 + 12\hat{d})EM\varepsilon_1^2 + 54E^2\varepsilon_1^2\varepsilon_3^2$$

$$C_1 = 16M(6M + 6Y_0 + 2\hat{d}M - 9E\varepsilon_3^2)$$

$$\dot{F} = \frac{ES}{L} \left[ \frac{A_2 + B_2}{C_2} \right] \dot{u} \quad (2.20)$$

$$A_2 = 88\hat{d}M^2 + (16 + 88\hat{d})MY_0 + 8(M^2 + Y_0^2)$$

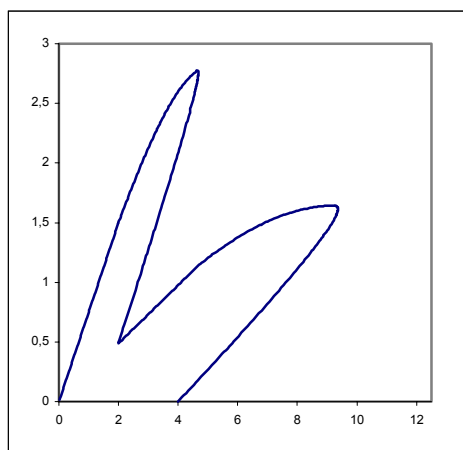
$$B_2 = -(96\hat{d} + 12)ME\varepsilon_4^2 - 12EY_0(\varepsilon_4^2 + \varepsilon_1^2) - (12 + 36\hat{d})EM\varepsilon_1^2 + 18E^2\varepsilon_1^2\varepsilon_4^2$$

$$C_2 = 16M(2M + 2Y_0 + 6\hat{d}M - 3E\varepsilon_4^2)$$

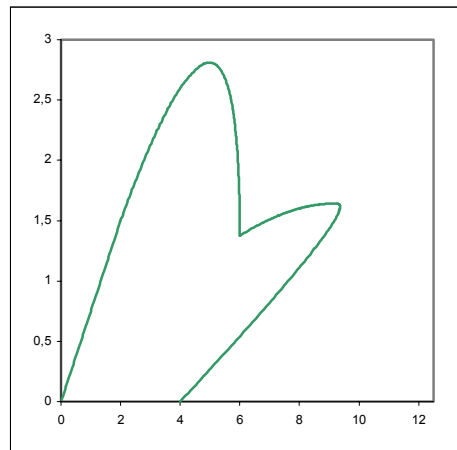
onde  $\hat{d} = (1 - D_m)$  nas (2.19) e (2.20). Seguindo com a evolução da variável de dano  $\dot{D}_3 > 0$  para a (2.19) e  $\dot{D}_4 > 0$  para a (2.20), cada uma destas soluções bifurcam em outras duas novas soluções quando a barra maior atinge a deformação  $\varepsilon_m$ . Então, o problema apresenta, na verdade, quatro soluções independentes. As relações  $(\dot{F}, \dot{u})$  para todas as quatro soluções tornam-se bastante complicadas de representar analiticamente. Em termos de evolução da variável de dano, cada uma das quatro soluções pode ser representada por etapas distintas, conforme a tabela (2.1).

	Solução 1	Solução 2	Solução 3	Solução 4
Etapa 1	$D_i = 0, \dot{D}_i = 0$ $i = 1,4$	$D_i = 0, \dot{D}_i = 0$ $i = 1,4$	$D_i = 0, \dot{D}_i = 0$ $i = 1,4$	$D_i = 0, \dot{D}_i = 0$ $i = 1,4$
Etapa 2	$\dot{D}_3 = \dot{D}_4 > 0$ $D_1 = D_2 = 0$	$\dot{D}_3 = \dot{D}_4 > 0$ $D_1 = D_2 = 0$	$\dot{D}_3 = \dot{D}_4 > 0$ $D_1 = D_2 = 0$	$\dot{D}_3 = \dot{D}_4 > 0$ $D_1 = D_2 = 0$
Etapa 3	$\dot{D}_3 > 0, \dot{D}_4 = 0$ $\dot{D}_1 = \dot{D}_2 > 0$ $D_4 = D_m$	$\dot{D}_4 > 0, \dot{D}_3 = 0$ $\dot{D}_1 = \dot{D}_2 > 0$ $D_3 = D_m$	$\dot{D}_3 > 0, \dot{D}_4 = 0$ $\dot{D}_1 = \dot{D}_2 > 0$ $D_4 = D_m$	$\dot{D}_4 > 0, \dot{D}_3 = 0$ $\dot{D}_1 = \dot{D}_2 > 0$ $D_3 = D_m$
Etapa 4	$\dot{D}_3 > 0, \dot{D}_1 > 0$ $\dot{D}_4 = \dot{D}_2 = 0$ $D_4 = D_2 = D_m$	$\dot{D}_4 > 0, \dot{D}_1 > 0$ $\dot{D}_3 = \dot{D}_2 = 0$ $D_3 = D_2 = D_m$	$\dot{D}_3 > 0, \dot{D}_2 > 0$ $\dot{D}_4 = \dot{D}_1 = 0$ $D_4 = D_1 = D_m$	$\dot{D}_4 > 0, \dot{D}_2 > 0$ $\dot{D}_3 = \dot{D}_1 = 0$ $D_3 = D_1 = D_m$

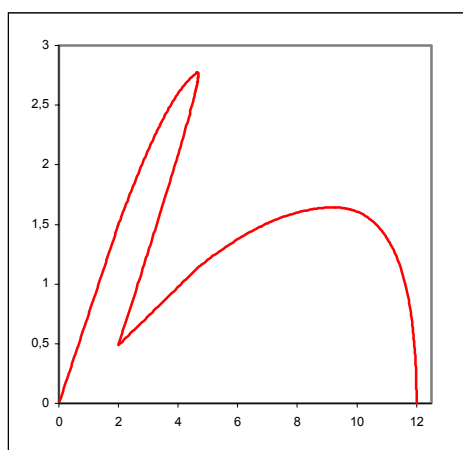
Tabela 2.1. Soluções para o problema da localização.



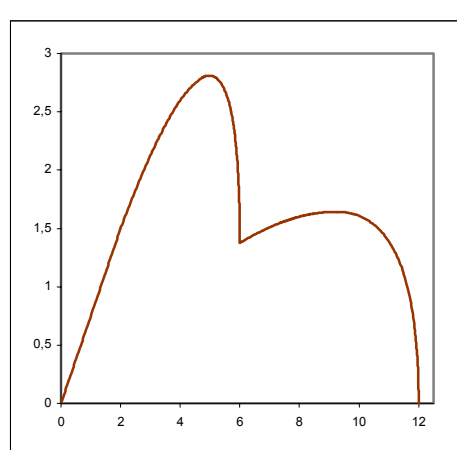
Solução 1.



Solução 2.



Solução 3.



Solução 4.

Figura 2.3. Soluções numéricas em termos do par força-deslocamento.

Admitindo-se alguns valores numéricos para as variáveis do problema definido na figura (2.1), pode-se obter as curvas força-deslocamento ( $F,u$ ) para as quatro soluções possíveis. Adotando-se  $E = S = L = 1$ , as curvas da figura (2.3) são as soluções do problema.

As quatro soluções da figura (2.3) comprovam que o problema não tem solução única para o modelo de dano. Além disso, as bifurcações de solução ocorrem quando a matriz do módulo tangente de rigidez de uma barra deixa de ser positiva-definida, o que ocorre quando  $\varepsilon = \varepsilon_m$  na figura (2.2).

No problema da figura (2.1), foram definidos dois elementos com deformação constante para cada uma das duas barras. Com estes poucos graus de liberdade, foi possível individualizar as soluções na figura (2.3). Se, para o mesmo problema, cada barra for discretizada em mais do que dois elementos, o número de soluções aumenta. Como regra geral, quanto mais elementos houver, maior o número de soluções independentes do problema discretizado.

Do ponto de vista analítico, o problema da localização tem infinitas soluções. Do ponto de vista numérico, levando-se o problema ao limite, ou seja, discretizando-se as barras em infinitos elementos, têm-se infinitas soluções. Nesta situação, o problema numérico converge ao analítico.

Nas leis constitutivas dos materiais, se houver trechos “softening”, os modelos do contínuo clássicos, ou locais, não são mais representativos do verdadeiro comportamento mecânico. Na realidade, as equações diferenciais do problema, que descrevem o processo de evolução das deformações, deixam de ser elípticas, ao se iniciar a localização. A resposta do problema de valor de contorno sempre tende a uma faixa de concentração com largura próxima a zero, ou seja, com dissipação de energia nula pelo processo de danificação.

A faixa localizada pode surgir em locais esperados, em função, por exemplo, de singularidades próprias da geometria do corpo, ou em locais não conhecidos a priori, surgidos das heterogeneidades que criam regiões mais fracas, ou menos resistentes, na massa do sólido.

Do ponto de vista numérico, ou seja, considerando-se o problema de valor de contorno discretizado, a solução não é única, sendo dependente do tamanho da malha. A faixa com as deformações localizadas tende ao tamanho do elemento

finito ou da célula da malha do método dos elementos de contorno. Quanto mais fina a malha, menor a largura da faixa de localização e menor a energia dissipada.

Para evitar a dependência de malha e recuperar a objetividade da resposta do problema, introduz-se nas relações constitutivas uma medida característica de cada material, denominada comprimento interno ou característico. Algumas teorias que utilizam este conceito e as respectivas referências encontram-se no item (1.2.2). No item (2.3), utilizar-se-á o conceito de integral não-local, conforme PIJAUDIER-CABOT & BAZANT [1987], para descrever dois modelos de dano isotrópicos não-locais, um dito simplificado, com uma variável de dano escalar, e outro proposto por COMI [2001], para o concreto, considerando-se distintos comportamentos à tração e à compressão.

### **2.3. Equações Constitutivas dos Modelos de Dano em Teorias Local e Não-Local**

#### **2.3.1. Generalidades sobre Mecânica do Dano nos Meios Contínuos**

Os modelos fundamentados na teoria da mecânica do dano, nos meios contínuos, lidam com a previsão do comportamento mecânico para sólidos com micro-defeitos (pequenas fissuras e vazios) em seu arranjo estrutural interno, sem grandes fissuras que caracterizariam o campo da mecânica da fratura. No item (1.2.3), apresenta-se uma revisão bibliográfica sobre teoria do dano.

Algumas definições básicas, de acordo com LEMAITRE & CHABOCHE [1985], propiciaram o aperfeiçoamento de metodologias próprias para formular modelos de dano. No caso de modelos isotrópicos, são importantes as definições de elemento representativo de volume, de variável escalar de dano, definida a partir das áreas resistente e total de uma seção que passa pelo elemento de volume, de tensão efetiva, do princípio de equivalência em deformação e de como efetuar medidas indiretas do dano em laboratório. Além disto, o enquadramento das formulações matemáticas dos modelos no formalismo da termodinâmica dos processos irreversíveis, propicia sentido físico à representação do processo de danificação, respeitando os processos energéticos envolvidos.

O dano pode ser acoplado à elasticidade, como nos modelos descritos nesta tese, ou incluir ainda plasticidade e outros fenômenos. A evolução da variável de dano traduz as perdas de rigidez e resistência experimentadas pelo material com o incremento das ações mecânicas e/ou térmicas, do material íntegro ao completo fraturamento, com perda de coesão. Deste modo, os modelos de dano apresentam “softening”, e ocorre certamente localização de deformações no problema de valor de contorno. A introdução do comprimento característico nas leis dos modelos os torna não-locais, conforme será visto nos itens (2.3.2) e (2.3.3).

### **2.3.2. Modelo de Dano Simplificado**

#### **2.3.2.1. Formulação Local**

Este modelo isotrópico é a extensão das equações (2.4)-(2.9) ao caso geral, multiaxial, com os tensores completos. As equações constitutivas derivam da energia livre de Helmholtz  $\psi$  :

$$\rho\psi = \rho\psi(\varepsilon_{ij}, D) = \frac{1}{2}(1-D)E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \quad (2.21)$$

onde  $D$  é a variável escalar interna de dano, que mede o estado de deterioração do material, de zero (material íntegro) a um (decoesão completa),  $\rho$  é a densidade de massa,  $E_{ijkl}$  as componentes  $ijkl$  do tensor constitutivo elástico de quarta ordem do material íntegro e  $\varepsilon_{ij}$  as componentes  $ij$  do tensor de deformações. O tensor de tensões é dado pelas componentes:

$$\sigma_{ij} = \rho \frac{\partial \psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{2}(1-D)E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.22)$$

e a força termodinâmica  $Y$  associada à  $D$ , dada por:



$$Y = -\rho \frac{\partial \psi}{\partial D} = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (2.23)$$

Define-se a função de carregamento  $f(Y, D)$  pela expressão:

$$f(Y, D) = Y - k(D) \quad (2.24)$$

onde  $k(D)$  é o termo que mede o maior valor atingido até então por  $Y$ . Ou seja,  $k(D)$  é uma função crescente, não estritamente, pois cresce só se  $f(Y, D) = 0$ . Neste modelo,  $k(D)$  é linear com  $D$ , da forma:

$$k(D) = Y_0 + MD \quad (2.25)$$

com  $Y_0$  e  $M$  constantes do material. A iniciação do processo de danificação e sua evolução ocorrem de acordo com o critério de danificação, dado por:

$$\dot{D} = \dot{\lambda} \frac{\partial f(Y, D)}{\partial Y} \quad (2.26)$$

com o multiplicador  $\dot{\lambda}$  satisfazendo as condições de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \dot{\lambda} f = 0 \quad (2.27)$$

O multiplicador  $\dot{\lambda}$  é calculado da condição de consistência e, quando positivo, vem da:

$$\dot{f}(Y, D) = \frac{\partial f}{\partial Y} \dot{Y} + \frac{\partial f}{\partial D} \dot{D} = 0 \quad (2.28)$$

Com as (2.28), (2.24) e (2.25), tem-se:

$$\dot{\lambda} = \dot{D} = \left( \frac{\dot{Y}}{M} \right) \quad (2.29)$$

### **2.3.2.2. Formulação Não-Local**

A formulação não-local aqui apresentada deriva do conceito de integral não-local desenvolvido por PIAUDIER-CABOT & BAZANT [1987]. A idéia é trocar na função de carregamento (2.24) local, a variável  $Y$  por outra não-local  $\bar{Y}$ , definida através da ponderação de  $Y$  por uma função em todo o domínio ou em parte dele, no entorno do ponto de interesse. A função ponderadora depende da distância entre o ponto fonte e os demais que serão ponderados. Define-se, então:

$$\bar{Y}(x) = \frac{1}{V(x)} \int_{\Omega} \phi_p(\|x - s\|) Y(s) ds \quad (2.30)$$

onde  $x$  é o ponto fonte, para o qual se quer a variável não-local  $\bar{Y}(x)$ ,  $s$  representa os demais pontos do sólido,  $Y(s)$  a variável local, conforme a (2.23), em  $s$ ,  $\phi_p$  a função ponderadora que depende da distância  $\|x - s\|$  entre os pontos  $x$  e  $s$ ,  $\Omega$  é o domínio do corpo ou da parte dele sobre o qual se pondera  $\bar{Y}(x)$  e  $V(x)$  é definida como:

$$V(x) = \int_{\Omega} \phi_p(\|x - p\|) ds \quad (2.31)$$

A função  $\phi_p$  de (2.31) mais simples seria  $\phi_p = 1$ . Para este modelo, no entanto, ela é dada por:

$$\phi_p(\|x - s\|) = \exp\left(-\frac{\|x - s\|^2}{2l^2}\right) \quad (2.32)$$

onde  $\exp$  representa a função exponencial e  $l$  o comprimento interno ou característico do material. Se  $l \rightarrow 0$ , a função  $\phi_p$  tende à função delta de Dirac  $\delta(x - s)$  e o

modelo local é recuperado. A função da (2.32), para um valor de  $l$  finito não-nulo, é tanto maior quanto mais próximo  $s$  de  $x$  se encontrar, diminuindo e tendendo a zero para distâncias cada vez maiores entre os dois pontos. Com a definição da (2.30), a (2.24) fica:

$$\bar{f}(Y, D) = \bar{Y} - k(D) \quad (2.33)$$

com  $k(D)$  dada pela (2.25). A evolução da variável de dano fica condicionada a:

$$\dot{D} = \lambda \frac{\partial \bar{f}(\bar{Y}, D)}{\partial \bar{Y}} \quad (2.34)$$

com as condições de Kuhn-Tucker:

$$\lambda \geq 0, \quad \bar{f} \leq 0, \quad \lambda \bar{f} = 0 \quad (2.35)$$

e  $\dot{D}$ , quando positivo, obtido da condição de consistência:

$$\dot{\bar{f}}(Y, D) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial Y} \dot{\bar{Y}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial D} \dot{D} = 0 \quad (2.36)$$

$$\dot{D} = \lambda = \left( \frac{\dot{\bar{Y}}}{M} \right) \quad (2.37)$$

Observando a (2.37), nota-se que a evolução da variável de dano é controlada pela evolução da variável não-local  $\bar{Y}(Y(s))$ , ou seja, ela não depende só da medida local  $Y(x)$ , como na (2.29), mas das variáveis  $Y(s)$  em todo o domínio. É interessante notar que as tensões continuam sendo localmente determinadas, conforme a (2.22), com  $D$  não-local. No entanto, a mesma relação constitutiva é preservada. Neste modelo, o domínio  $\Omega$  da (2.30) coincide com o domínio do corpo.

Um outra maneira de introduzir a não-localidade no modelo é definindo a variável não-local de dano  $\bar{D}(x) = \frac{1}{V(x)} \int_{\Omega} \phi_p(\|x - s\|) D(s) ds$  ao invés de  $\bar{Y}(x)$  na (2.30). Esta opção, também exposta por PIJAUDIER-CABOT & BAZANT [1987], fica como sugestão para próximos trabalhos.

### **2.3.3. Modelo de Dano para o Concreto**

#### **2.3.3.1. Formulação Local**

O concreto, sendo um material quase frágil, de natureza heterogênea complexa, pode ser modelado, com relativo sucesso, pela mecânica do dano contínuo. No seu caso, a evolução das micro-fissuras é o principal fenômeno envolvido na dissipação energética. Além disto, sob tração ou compressão, os comportamentos são distintos, não-simétricos.

Neste item, apresenta-se o modelo local para o concreto proposto por COMI & PEREGO [2000]. Trata-se de um modelo isotrópico, com duas variáveis de dano  $D_t$  e  $D_c$ , variando de zero a um. A primeira mede a danificação para estados com predominância de tração, e a segunda compressão. Em vista da não-simetria do comportamento, definem-se duas funções de carregamento  $f_t$  e  $f_c$ , representadas no espaço das tensões por duas superfícies distintas, tal como devem ser as superfícies de ruptura do concreto, diferentes à tração e à compressão.

Para o modelo, a energia livre  $\psi$ , função das variáveis de estado, é definida como:

$$\psi(\varepsilon, D_t, D_c) = \frac{1}{2} \left\{ 2\mu_0(1 - D_t)(1 - D_c) e : e + K_0(1 - D_t)(\text{tr}^+ \varepsilon)^2 + K_0(1 - D_c)(\text{tr}^- \varepsilon)^2 \right\} \quad (2.38)$$

onde  $\varepsilon$  é o tensor de deformações totais,  $e$  é a parte desviadora do tensor de deformações e  $\mu_0$  e  $K_0$  são, respectivamente, o módulo de cisalhamento e o módulo de compressibilidade volumétrica (bulk elastic modulus). Nota-se que o primeiro termo da (2.38) corresponde à energia de deformação causada por  $e$ , afetada pelas

duas variáveis de dano  $D_t$  e  $D_c$ . Os outros dois termos correspondem à energia de deformação volumétrica, um deles dependente da parte positiva do traço do tensor de deformações,  $\text{tr}^+\varepsilon = \langle \text{tr}\varepsilon \rangle$ , afetado somente por  $D_t$ , o outro dependente da parte negativa do traço,  $\text{tr}^-\varepsilon = -\langle -\text{tr}\varepsilon \rangle$ , afetado somente por  $D_c$ . A função representada por  $\langle x \rangle$  tem valor unitário se o argumento  $x \geq 0$  e nulo se  $x < 0$ . Para as variáveis da (2.38), valem as relações:

$$\begin{aligned} e_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}(\text{tr}\varepsilon)\delta_{ij} \\ \text{tr}\varepsilon &= \varepsilon_{kk} \\ \text{tr}\varepsilon &= \text{tr}^+\varepsilon + \text{tr}^-\varepsilon \\ \mu_0 &= G \\ K_0 &= \frac{2G(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \end{aligned} \quad (2.39)$$

sendo  $G$  o módulo de elasticidade transversal e  $\nu$  o coeficiente de Poisson. O tensor de tensões  $\sigma$  é obtido através de:

$$\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon} = 2\mu e + (K_+ \text{tr}^+\varepsilon)I + (K_- \text{tr}^-\varepsilon)I \quad (2.40)$$

sendo  $\mu = \mu_0(1 - D_t)(1 - D_c)$  o módulo de cisalhamento secante do material com dano,  $K_+ = K_0(1 - D_t)$  o “bulk modulus” secante quando  $\text{tr}\varepsilon \geq 0$  e  $K_- = K_0(1 - D_c)$  quando  $\text{tr}\varepsilon < 0$ . O tensor identidade de segunda ordem é definido por  $I$ .

Definem-se duas funções de carregamento  $f_t$  e  $f_c$  como:

$$f_t = J_2 - a_t I_1^2 + b_t r_t(D_t) I_1 - k_t r_t^2(D_t)(1 - \alpha D_c) \quad (2.41)$$

$$f_c = J_2 + a_c I_1^2 + b_c r_c(D_c) I_1 - k_c r_c^2(D_c) \quad (2.42)$$

$$r_i(D_i) = \begin{cases} 1 - \frac{\left(\frac{\sigma_e}{\sigma_0}\right)_i (D_{0i} - D_i)^2}{D_{0i}^2} & \text{para } D_i < D_{0i} \\ \left[1 - \left(\frac{D_i - D_{0i}}{1 - D_{0i}}\right)^{c_i}\right]^{0.75} & \text{para } D_i \geq D_{0i} \end{cases} \quad (2.43)$$

As funções  $f_t$  e  $f_c$  nas (2.41) e (2.42) estão definidas no espaço das tensões.  $J_2 = \frac{1}{2} s : s$  é o segundo invariante do tensor  $s$  da parte desviadora do tensor de tensões,  $I_1 = \text{tr } \sigma$  é o primeiro invariante de  $\sigma$ ,  $a_t$ ,  $b_t$ ,  $k_t$ ,  $a_c$ ,  $b_c$ ,  $k_c$  e  $\alpha$  são parâmetros não-negativos do material,  $r_t(D_t)$  e  $r_c(D_c)$  são as funções definidas na (2.43), a primeira delas representando o trecho com endurecimento (hardening, superfície da figura (2.4) expandindo) e a segunda o trecho com amolecimento (softening, superfície retraído),  $D_{0t}$  e  $D_{0c}$  são os valores das variáveis de dano à tração e à compressão associados, respectivamente, aos valores  $\sigma_{0t}$  e  $\sigma_{0c}$  das tensões de pico, ou máximas, obtidos das curvas tensão-deformação em tração e compressão simples,  $\sigma_{et}$  e  $\sigma_{ec}$  são as tensões dos limites elásticos das mesmas curvas e  $c_t > 1$  e  $c_c > 1$  são parâmetros definindo as inclinações dos trechos com “softening”.

O termo  $(1 - \alpha D_c)$  na (2.41) permite considerar o decréscimo da capacidade de carga em tração pela existência anterior de dano à compressão. As funções  $f_t$  e  $f_c$  representam as superfícies mostradas na figura (2.4), no espaço das tensões.

Observa-se da figura (2.4) que a função  $f_t$  define um hiperbolóide (com seções circulares definidas nos planos desviadores e hipérboles ao longo dos meridianos). A função  $f_c$  define um elipsóide no mesmo espaço.

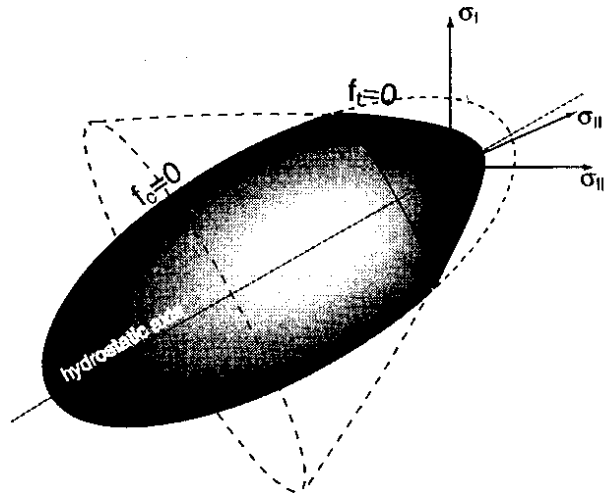


Figura 2.4. Funções  $f_t$  e  $f_c$  definidas no espaço das tensões (Haigh-Westergaard).

Figura retirada de COMI [2001].

O domínio elástico, definido como a região interna às superfícies da figura (2.4), inicialmente expande-se com a evolução do dano, na fase de endurecimento, depois retrai-se na fase de amolecimento. A maior superfície possível, que corresponde ao máximo limite elástico, é obtida fazendo-se nas (2.41) e (2.42)  $r_t(D_t)=1$  e  $r_c(D_c)=1$ , ou seja, a (2.43) para  $D_t = D_{0t}$  e  $D_c = D_{0c}$ . As condições de Kuhn-Tucker, com as (2.41) e (2.42), são dadas por:

$$\begin{aligned} f_t \leq 0, \quad \dot{D}_t \geq 0, \quad f_t \dot{D}_t &= 0 \\ f_c \leq 0, \quad \dot{D}_c \geq 0, \quad f_c \dot{D}_c &= 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

As funções de carregamento  $f_t$  e  $f_c$  podem, alternativamente, ser expressas em deformações. Assim, têm-se:

$$\begin{aligned} f_t = f_t(\varepsilon, D_t, D_c) = 4\mu^2 J_\varepsilon - a_t (K_+ \text{tr}^+ \varepsilon + K_- \text{tr}^- \varepsilon)^2 \\ + b_t r_t(D_t) (K_+ \text{tr}^+ \varepsilon + K_- \text{tr}^- \varepsilon) - k_t r_t^2(D_t) (1 - \alpha D_c) \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$\begin{aligned} f_c = f_c(\varepsilon, D_t, D_c) = 4\mu^2 J_\varepsilon + a_c (K_+ \text{tr}^+ \varepsilon + K_- \text{tr}^- \varepsilon)^2 \\ + b_c r_c(D_c) (K_+ \text{tr}^+ \varepsilon + K_- \text{tr}^- \varepsilon) - k_c r_c^2(D_c) \end{aligned} \quad (2.46)$$

nas quais  $J_\varepsilon = \frac{1}{2}e$ :  $e$  é o segundo invariante do tensor  $e$  da parte desviadora de  $\varepsilon$ .

### **2.3.3.2. Formulação Não-Local**

O modelo não-local descrito neste item foi proposto por COMI [2001]. A não-localidade é introduzida via integral não-local, a exemplo do modelo do item (2.3.2.2). Definem-se, para um ponto  $x$  de  $\Omega$ , as variáveis não-locais:

$$\langle J_\varepsilon(x) \rangle = \int_{\Omega} W(x-s) J_\varepsilon(s) ds \quad (2.47)$$

$$\langle \text{tr}^+ \varepsilon(x) \rangle = \int_{\Omega} W(x-s) \text{tr}^+ \varepsilon(s) ds \quad (2.48)$$

$$\langle \text{tr}^- \varepsilon(x) \rangle = \int_{\Omega} W(x-s) \text{tr}^- \varepsilon(s) ds \quad (2.49)$$

onde  $\langle J_\varepsilon(x) \rangle$ ,  $\langle \text{tr}^+ \varepsilon(x) \rangle$  e  $\langle \text{tr}^- \varepsilon(x) \rangle$  são variáveis com valores ponderados, respectivamente, de  $J_\varepsilon(s)$ ,  $\text{tr}^+ \varepsilon(s)$  e  $\text{tr}^- \varepsilon(s)$ , em todo o domínio  $\Omega$  do corpo. A função ponderadora  $W(x-s)$  é definida de modo a normalizar o cálculo da média. É a mesma função ponderadora definida no item (2.3.2.2), ou seja:

$$W(x-s) = \frac{1}{W_0(x)} \exp\left(-\frac{\|x-s\|^2}{2l^2}\right) \quad (2.50)$$

$$W_0(x) = \int_{\Omega} \exp\left(-\frac{\|x-s\|^2}{2l^2}\right) ds$$

com  $l$  sendo o comprimento interno, característico do material, diretamente relacionado com a largura da zona de localização. Sabe-se que, no concreto, a localização se manifesta distintamente em tração e compressão, ou seja, os comprimentos internos são diferentes para um e para outro caso. No modelo, propõem-se dois parâmetros de comprimento interno  $l_t$  e  $l_c$ , para predominância de estados de tração e compressão, respectivamente, levando-se em conta o



comportamento não-simétrico. Definem-se, então, da (2.50), duas funções ponderadoras da forma:

$$\begin{aligned} W_t(x-s) &= \frac{1}{W_{0t}(x)} \exp\left(-\frac{\|x-s\|^2}{2l_t^2}\right), & W_{0t}(x) &= \int_{\Omega} \exp\left(-\frac{\|x-s\|^2}{2l_t^2}\right) ds \\ W_c(x-s) &= \frac{1}{W_{0c}(x)} \exp\left(-\frac{\|x-s\|^2}{2l_c^2}\right), & W_{0c}(x) &= \int_{\Omega} \exp\left(-\frac{\|x-s\|^2}{2l_c^2}\right) ds \end{aligned} \quad (2.51)$$

Com a (2.51), as variáveis não-locais das (2.47)-(2.49) ficam:

$$\langle J_{\varepsilon}(x) \rangle_i = \int_{\Omega} W_i(x-s) J_{\varepsilon}(s) ds \quad (2.52)$$

$$\langle \text{tr}^+ \varepsilon(x) \rangle_i = \int_{\Omega} W_i(x-s) \text{tr}^+ \varepsilon(s) ds \quad (2.53)$$

$$\langle \text{tr}^- \varepsilon(x) \rangle_i = \int_{\Omega} W_i(x-s) \text{tr}^- \varepsilon(s) ds \quad (2.54)$$

para  $i=t$  (tração) ou  $i=c$  (compressão). Substituindo-se, nas funções de carregamento (2.45) e (2.46), as variáveis locais, com os invariantes de deformação, pelas correspondentes não-locais, têm-se as funções do modelo não-local  $F_t$  e  $F_c$  dadas pelas expressões:

$$\begin{aligned} F_t &= F_t(\varepsilon, D_t, D_c) = 4\mu^2 \langle J_{\varepsilon} \rangle_t - a_t \left( K_+ \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_t + K_- \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_t \right)^2 \\ &\quad + b_t r_t(D_t) \left( K_+ \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_t + K_- \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_t \right) - k_t r_t^2(D_t) (1 - \alpha D_c) \end{aligned} \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} F_c &= F_c(\varepsilon, D_t, D_c) = 4\mu^2 \langle J_{\varepsilon} \rangle_c + a_c \left( K_+ \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_c + K_- \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_c \right)^2 \\ &\quad + b_c r_c(D_c) \left( K_+ \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_c + K_- \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_c \right) - k_c r_c^2(D_c) \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde as variáveis não-locais de  $F_t$  são ponderadas com a função  $W_t$  e de  $F_c$  com  $W_c$ . Nas equações (2.55) e (2.56), a evolução das variáveis de dano, para um dado ponto, depende de todo o domínio, com maior dependência dos seus pontos vizinhos. Se num dado instante, o maior valor de dano de um corpo encontra-se no ponto  $x$ , e

sua taxa de crescimento é alta, é porque as deformações também crescem com alta taxa no mesmo ponto. No entanto, com o modelo não-local, a taxa do dano em  $x$ , que depende das deformações da vizinhança de  $x$ , fica sendo menor que a taxa local, pois as deformações desta vizinhança são menores que a deformação de  $x$ . Em contrapartida, nos pontos vizinhos, a taxa do dano não-local deve ser maior que a taxa local.

A forma exponencial das funções ponderadoras  $W_t$  e  $W_c$  assegura maior influência dos pontos vizinhos sobre os valores ponderados dos invariantes no ponto  $x$ . Os comprimentos característicos  $l_t$  e  $l_c$  definem o tamanho das regiões mais influentes das funções  $W_t$  e  $W_c$ . Contribuições das variáveis locais em  $s$ , para distâncias muito maiores do que  $l_t$  e  $l_c$ , entre os pontos  $x$  e  $s$ , são praticamente desprezíveis. As variáveis ponderadas podem ser calculadas para pontos no domínio ou no contorno do corpo, sem nenhuma restrição ao equacionamento.

O tratamento não-local do modelo é dado somente às leis de evolução da variável de dano, por terem sido de forma não-local definidas as funções de carregamento  $F_t$  e  $F_c$ . As demais relações permanecem locais, como a (2.40) das tensões. O descarregamento elástico é local, pois não depende de  $F_t$  e  $F_c$ .

### **3. REPRESENTAÇÕES INTEGRAIS E MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA PROBLEMAS COM CAMPOS INICIAIS**

#### **3.1. Introdução**

Neste capítulo, são apresentadas, primeiramente, as representações integrais, inicialmente para o problema elástico convencional, depois com a introdução de campos iniciais no domínio. Em seguida, discutem-se aspectos relacionados com a discretização espacial e as aproximações das variáveis no contorno e no domínio do corpo. Define-se a utilização de nós internos de célula. Das equações integrais, passa-se para as equações algébricas do método dos elementos de contorno com campo de tensões iniciais. Ao final, discute-se a possibilidade da utilização de equações hipersingulares na montagem das equações algébricas do método.

#### **3.2. Representações e Equações Integrais para a Elastostática**

Para um dado ponto “s” de um sólido elástico linear tridimensional com domínio  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$ , o equilíbrio de um elemento infinitesimal em torno deste ponto é representado pela equação diferencial:

$$\sigma_{ij,j}(s) + b_i(s) = 0 \quad (3.1)$$

onde  $\sigma_{ij}(s)$  é o tensor de tensões em “s” e  $b_i(s)$  o vetor de forças de massa. Para um ponto “S” de  $\Gamma$ , define-se o vetor de forças de superfície:

$$p_i(S) = \sigma_{ij}(S)\eta_j \quad (3.2)$$

onde  $\eta_j$  é o vetor normal ao contorno  $\Gamma$  em “S”. A relação entre o tensor de deformações  $\varepsilon_{ij}(s)$  e o vetor de deslocamentos  $u_i(s)$  é dada por:

$$\varepsilon_{ij}(s) = \frac{1}{2} [u_{i,j}(s) + u_{j,i}(s)] \quad (3.3)$$

A expressão (3.3) é válida em teoria de primeira ordem, ou seja, para pequenos deslocamentos e pequenas deformações. A relação constitutiva geral da teoria da elasticidade é escrita como:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(s) &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl}(s) \\ C_{ijkl} &= \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

onde  $C_{ijkl}$  representa o tensor constitutivo elástico de quarta ordem,  $G$  e  $\nu$  são, respectivamente, o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson do material e  $\delta$  a função delta de Kronecker. Da (3.4), observa-se que o tensor de tensões mantém simetria, ou seja,  $\sigma_{ij}(s) = \sigma_{ji}(s)$ . Das (3.2), (3.3) e (3.4), escrevem-se  $\sigma_{ij}(s)$  e  $p_i(S)$  em função do vetor de deslocamentos:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(s) &= \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}\delta_{ij}u_{mm}(s) + G[u_{i,j}(s) + u_{j,i}(s)] \\ p_i(S) &= \frac{2G\nu}{(1-2\nu)}u_{mm}(S)\eta_i + G[u_{j,i}(S)\eta_j + u_{i,\eta}(S)] \end{aligned} \quad (3.5)$$

Com a primeira das (3.5) substituída na (3.1), chega-se à equação de Navier em (3.6), ou equação diferencial do problema elástico em deslocamentos.

$$G \left[ u_{i,jj}(s) + \frac{1}{(1-2\nu)} u_{j,ij}(s) \right] + b_i(s) = 0 \quad (3.6)$$

As equações integrais do método dos elementos de contorno provêm do teorema da reciprocidade de Maxwell-Betti, cujo enunciado é consequência do teorema dos trabalhos virtuais. Este último expressa-se da forma:

$$\int_{\Omega} \sigma : \varepsilon(u') d\Omega - \int_{\Gamma} (\sigma \cdot \eta) \cdot u' d\Gamma - \int_{\Omega} \rho b \cdot u' d\Omega = 0 \quad (3.7)$$

para qualquer que sejam os campos de tensões  $\sigma$  em equilíbrio estático com  $b$  ( $\text{div}\sigma + b = 0$ ), e de deslocamentos virtuais  $u'$  continuamente diferenciável sobre  $\Omega$ . O teorema da reciprocidade é obtido aplicando-se a relação (3.7) à dois estados elásticos distintos  $(u^1, \sigma^1, b^1)$  e  $(u^2, \sigma^2, b^2)$ . Fazendo-se o estado 1 trabalhar sobre o deslocamento virtual do estado 2, e vice-versa, as relações obtidas da (3.7), reordenadas, resultam na (3.8).

$$\int_{\Omega} \left( [\sigma^1 : \varepsilon(u^2) - \sigma^2 : \varepsilon(u^1)] - \rho [b^1 \cdot u^2 - b^2 \cdot u^1] \right) d\Omega = \int_{\Gamma} [p(u^1) \cdot u^2 - p(u^2) \cdot u^1] d\Gamma \quad (3.8)$$

onde tem-se  $p = \sigma \eta$ . Das propriedades do tensor constitutivo elástico  $C$  de (3.4), tem-se que  $\sigma^1 : \varepsilon(u^2) = \sigma^2 : \varepsilon(u^1)$ . Resulta finalmente o teorema da reciprocidade:

$$\int_{\Gamma} [p^1 \cdot u^2 - p^2 \cdot u^1] d\Gamma = \int_{\Omega} \rho [b^1 \cdot u^2 - b^2 \cdot u^1] d\Omega \quad (3.9)$$

Para que se tenham as representações integrais do problema elástico, são considerados dois carregamentos para representar os distintos campos elásticos da expressão (3.9). Um deles é o carregamento do problema real. O outro é associado a uma carga pontual aplicada no ponto fixo "s" do domínio  $\Omega$ , definida como:

$$\rho b^i(s) = \delta(p-s) e_i \quad p \in \Omega \quad (3.10)$$

sendo  $e_i$  o vetor unitário associado à direção  $i$  e  $\delta(p-s)$  a função delta de Dirac definida como:

$$\delta(p-s) = \begin{cases} \infty & \text{se } p = s \\ 0 & \text{se } p \neq s \end{cases} \quad (3.11)$$

O problema associado ao carregamento (3.10) é dito fundamental. Existem diversas soluções fundamentais, que variam em função da escolha do domínio  $\Omega$  e das condições limites sobre  $\Gamma$ . A solução clássica é a de Kelvin, válida para um domínio infinito elástico isotrópico com valores tendentes a zero para distâncias infinitas da carga em “s”. As soluções fundamentais de Kelvin são:

$$u_{ij}^*(s,p) = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)r} [r_i r_j + (3-4\nu)\delta_{ij}] \quad (3.12)$$

$$\varepsilon_{ijk}^*(s,p) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)Gr} [(1-2\nu)(r_k \delta_{ij} + r_j \delta_{ik}) - r_i \delta_{jk} + 2r_i r_j r_k] \quad (3.13)$$

$$\sigma_{ijk}^*(s,p) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} [(1-2\nu)(r_k \delta_{ij} + r_j \delta_{ik} - r_i \delta_{jk}) + 2r_i r_j r_k] \quad (3.14)$$

$$p_{ij}^*(s,p) = \frac{-1}{4\pi(1-\nu)r} \left[ \frac{\partial r}{\partial \eta} [(1-2\nu)\delta_{ij} + 2r_i r_j] + (1-2\nu)(r_j \eta_i - r_i \eta_j) \right] \quad (3.15)$$

Aplica-se então o teorema da reciprocidade aos dois estados elásticos: o real desconhecido e o fundamental. Voltando à equação (3.9) e substituindo os estados referidos, tem-se:

$$\int_{\Gamma} [p_j(P).u_{ij}^*(s,P) - p_{ij}^*(s,P).u_j(P)]d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(p).u_{ij}^*(s,p)d\Omega = \int_{\Omega} \delta_{ij}\delta(p-s)u_j(s)d\Omega \quad (3.16)$$

Por definição, a integral do segundo membro da (3.16) escreve-se:

$$\int_{\Omega} \delta_{ij}\delta(p-s)u_j(s)d\Omega = C_{ij}(s)u_j(s) \quad (3.17)$$

sendo  $C_{ij}(s)$  a matriz identidade se  $(s \in \Omega)$  e a matriz nula se  $(s \notin \Omega)$ . Assim, a equação (3.16), conhecida como identidade de Somigliana, fica escrita como:

$$C_{ij}(s)u_j(s) = \int_{\Gamma} p_j(P).u_{ij}^*(s,P) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j(P).p_{ij}^*(s,P) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(p).u_{ij}^*(s,p) d\Omega \quad (3.18)$$

A expressão (3.18) estendida para pontos do contorno “S” é obtida aumentando-se o domínio em torno deste ponto e aplicando-se o limite para tender o domínio incorporado a zero. Resulta que a matriz  $C_{ij}(S)$  passa a ser dependente da geometria do contorno em “S”.

### **3.3. Representações Integrais com Campos Iniciais**

A presença de campos iniciais de deformação ou tensão aplicados ao domínio do corpo é notadamente importante em problemas onde variáveis de domínio assumem importância no problema mecânico. É o caso da temperatura na termoelasticidade ou dos efeitos da retração ou da fluência nas deformações ao longo do tempo. Em materiais cujo regime de comportamento é não-linear (plasticidade, dano, efeitos viscosos), a natureza incremental da resolução do problema utiliza-se de cálculos elásticos com deformações ou tensões iniciais. As componentes do tensor de deformações em “s” se decompõem em:

$$\varepsilon_{ij}(s) = \varepsilon_{ij}^e(s) + \varepsilon_{ij}^0(s) \quad (3.19)$$

onde  $\varepsilon^e$  é o tensor de deformações elásticas e  $\varepsilon^0$  o tensor de deformações iniciais. De forma equivalente, as componentes do tensor de tensões são decompostas em:

$$\sigma_{ij}(s) = \sigma_{ij}^e(s) - \sigma_{ij}^0(s) \quad (3.20)$$

tendo os índices superescritos o mesmo significado dos da equação (3.19). Os tensores com os campos iniciais preservam a relação constitutiva elástica, ou seja,  $\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl} \varepsilon_{ij}^0$ . A relação constitutiva elástica passa a ser:

$$\sigma_{ij}(s) = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \delta_{ij} [\varepsilon_{kk}(s) - \varepsilon_{ll}^0(s)] + 2G [\varepsilon_{ij}(s) - \varepsilon_{ij}^0(s)] \quad (3.21)$$

A equação de Navier e as forças de superfície aparecem com termos de deformação inicial. Ficam, respectivamente, escritas como:

$$\sigma_{ij}(s) = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} u_{i,l}(s) \delta_{ij} + G [u_{i,j}(s) + u_{j,i}(s)] - \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \varepsilon_{kk}^0(s) \delta_{ij} - 2G \varepsilon_{ij}^0(s) \quad (3.22)$$

$$p_i(S) = \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} u_{j,j}(S) \eta_i + G [u_{j,i}(S) \eta_j + u_{i,\eta}(S)] - \frac{2G\nu}{(1-2\nu)} \varepsilon_{mm}^0(S) \eta_i - 2G \varepsilon_{ij}^0(S) \eta_j \quad (3.23)$$

No que segue, considera-se o campo de tensões iniciais nas representações integrais. Na equação (3.8) dos trabalhos virtuais, o estado elástico que corresponde ao problema real é definido pelos tensores  $(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e - \sigma_{ij}^0)$  de (3.19) e (3.20). Com a mesma solução fundamental de Kelvin, a identidade de Somigliana em (3.18) fica acrescida da integral com os termos de tensão inicial, ou seja:

$$C_{ij}(s) u_j(s) = \int_{\Gamma} p_j(P) \cdot u_{ij}^*(s, P) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j(P) \cdot p_{ij}^*(s, P) d\Gamma + \int_{\Omega} b_j(p) \cdot u_{ij}^*(s, p) d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^*(s, p) \cdot \sigma_{jk}^0(p) d\Omega \quad (3.24)$$

onde  $\varepsilon_{ijk}^*(s, p)$  é dada pela (3.13). Derivando-se os núcleos das integrais na (3.24), e aplicando-se na primeira das (3.5), obtêm-se as representações integrais para as tensões:



$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(s) = & -\int_{\Gamma} S_{ijk}(s,p)u_k(p)d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s,p)p_k(p)d\Gamma + \int_{\Omega} D_{ijk}(s,p)b_k(p)d\Omega \\ & + \int_{\Omega} E_{ijkl}(s,p)\sigma_{kl}^0(p)d\Omega - \frac{1}{8(1-\nu)} [2\sigma_{ij}^0(s) + (1-4\nu)\sigma_{mm}^0(s)\delta_{ij}] \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde

$$\begin{aligned} S_{ijk}(s,p) = & \frac{2G}{4\pi(1-\nu)r^2} \{2r_{,i}[(1-2\nu)\delta_{ij}r_{,k} + \nu(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \\ & + 2\nu(\eta_i r_{,j} r_{,k} + \eta_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu)(2\eta_k r_{,i} r_{,j} + \eta_j \delta_{ik} + \eta_i \delta_{jk}) \\ & - (1-4\nu)\eta_k \delta_{ij}\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$D_{ijk}(s,p) = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \{(1-2\nu)[\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}] + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}\} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} E_{ijkl}(s,p) = & \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \{(1-2\nu)[\delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{jl}\delta_{ik} - \delta_{ij}\delta_{kl} + 2\delta_{ij}r_{,k}r_{,l}] \\ & + 2\nu[\delta_{ik}r_{,j}r_{,l} + \delta_{jl}r_{,i}r_{,k} + \delta_{il}r_{,j}r_{,k} + \delta_{jk}r_{,i}r_{,l}] + 2\delta_{kl}r_{,i}r_{,j} - 8r_{,i}r_{,j}r_{,k}r_{,l}\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

O último termo da (3.25) é o coeficiente de termo livre. Ele surge da derivação do núcleo da integral com o termo de tensão inicial da identidade de Somigliana. Nos casos planos, deve-se considerar o trabalho na terceira direção ( $\sigma_{33}^0$  no estado plano de deformações). A representação integral das tensões para pontos do contorno é também possível. Basta calcular os limites das integrais no domínio acrescido em torno do ponto “S” do contorno, fazendo-o tender a zero. A representação das tensões no contorno é demonstrada por GUIGGIANI [1994]. No entanto, a equação de tensões é aplicada somente aos pontos do contorno onde está garantida a continuidade das derivadas primeiras dos deslocamentos tomadas na direção do contorno. Nos nós onde as derivadas à esquerda e à direita não são iguais, a equação de tensões não é aplicável.

FUDOLI [1999] demonstra que o termo livre dependente das tensões iniciais da equação das tensões (3.25) também tem seu equivalente para pontos de contorno. Para contorno suave, sem angulosidade diferente de 180 graus, o termo livre é metade do que o seu valor para pontos de domínio.

Neste trabalho, um esquema alternativo é utilizado para se escrever as equações de tensões. Todas as equações são escritas para pontos pertencentes ao domínio. Para isso, os nós das células adjacentes ao contorno do corpo não coincidem com alguns de seus vértices, estes sim contidos no contorno. Os nós são puxados para o domínio da célula, passando a pertencer ao domínio do corpo. A representação integral (3.25) é única para todos os pontos. No item (3.4), as aproximações das tensões nas células são discutidas.

### **3.4. Discretização Espacial: Aproximações das Variáveis no Contorno e no Domínio**

A análise do problema não-linear de valor de contorno requer a discretização espacial do corpo, para que nele as variáveis possam ser aproximadas. A geração do sistema de equações algébricas do método dos elementos de contorno pressupõe que as integrais da identidade de Somigliana (3.24) sejam calculadas sobre contorno discretizado em elementos e domínio em células. Como ponto de partida, considere  $\Gamma$  discretizado em  $N_e$  elementos de contorno, tal que  $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{N_e} \Gamma_j$ . Nos problemas planos,  $\Gamma_j$  são curvas abertas ou retas. Sobre cada elemento de contorno são definidos nós, e os deslocamentos e forças são aproximados polinomialmente:

$$\begin{aligned} {}^j u_i(\mathbf{P}) &= \phi_k(\mathbf{P}) {}^j U_i^k \\ {}^j p_i(\mathbf{P}) &= \phi_k(\mathbf{P}) {}^j P_i^k \end{aligned} \quad (3.29)$$

onde o índice  $j$  representa o elemento  $\Gamma_j$ . O índice  $k$  representa os nós do elemento, que são tantos quanto os exigidos pela aproximação adotada.  ${}^j U_i^k$  e  ${}^j P_i^k$  são as variáveis nodais de deslocamento e força de superfície do elemento  $j$  para o nó  $k$  segundo a direção  $i$ . Neste trabalho, adotou-se elementos de contorno retos, com aproximação polinomial linear para deslocamentos e forças e dois nós de extremidade para cada elemento, descontínuos entre elementos vizinhos (figura 3.1).

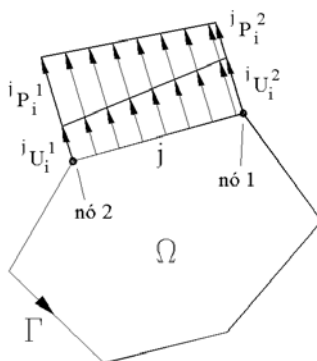


Figura 3.1. Discretização do contorno em elementos retos.

A consideração de campos iniciais para tratar os problemas não-lineares introduz as integrais de domínio nas equações integrais. A forma mais simples de calcular estas integrais é transformá-las em somatórias sobre unidades de domínio discretizadas, ou células. Alternativamente, pode-se utilizar procedimentos como a reciprocidade dual ou a múltipla. Neste trabalho, utilizam-se células triangulares. As variáveis de domínio da formulação proposta neste trabalho são as tensões iniciais. O domínio  $\Omega$  é discretizado em  $N_c$  células, tal que  $\Omega = \bigcup_{m=1}^{N_c} \Omega_m$ . Nos problemas bidimensionais,  $\Omega_m$  são superfícies planas, triangulares em particular. Em cada célula são definidos nós, e as componentes de deformação são aproximadas por funções polinomiais da forma:

$${}^m \sigma_{ij}^0(s) = \phi_k(s) {}^m \sigma_{ij}^{0k} \quad (3.30)$$

onde o índice  $m$  representa a célula  $\Omega_m$ . O índice  $k$  representa os nós da célula.  ${}^m \sigma_{ij}^{0k}$  representa a variável nodal da componente  $ij$  do tensor de tensões iniciais da célula  $m$  para o nó  $k$ . Neste trabalho, os polinômios  $\phi_k(s)$  são adotados lineares (figura 3.2).

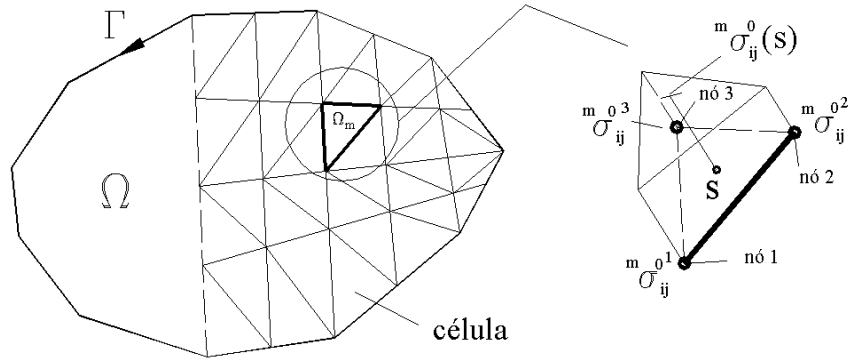


Figura 3.2. Discretização do domínio em células.

As integrais da identidade de Somigliana (3.24) são equivalentes às somatórias das mesmas integrais sobre as unidades discretizadas, ou seja:

$$\int_{\Gamma} p_{ik}^*(s, P) u_k(P) d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} p_{ik}^*(s, P) {}^j u_k(P) d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} p_{ik}^*(s, P) {}^j \phi_m(P) {}^j U_k^m d\Gamma \quad (3.31)$$

$$\int_{\Gamma} u_{ik}^*(s, P) p_k(P) d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} u_{ik}^*(s, P) {}^j p_k(P) d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} u_{ik}^*(s, P) {}^j \phi_m(P) {}^j P_k^m d\Gamma \quad (3.32)$$

$$\int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^*(s, p) \sigma_{jk}^0(p) d\Omega = \sum_{m=1}^{N_c} \int_{\Omega_m} \varepsilon_{ijk}^*(s, p) {}^m \sigma_{jk}^0(p) d\Omega = \sum_{m=1}^{N_c} \int_{\Omega_m} \varepsilon_{ijk}^*(s, p) {}^m \phi_l(p) {}^m \sigma_{jk}^0 d\Omega \quad (3.33)$$

As integrais nas (3.31), (3.32) e (3.33) são, neste trabalho, calculadas numericamente utilizando-se quadratura gaussiana. As integrais sobre os elementos de contorno são escritas como:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} p_{ik}^*(s, P) {}^j \phi_m(P) {}^j U_k^m d\Gamma &= \sum_{j=1}^{N_e} |J| \int_{\Gamma_j} p_{ik}^*(s, P) {}^j \phi_m(P) d\xi {}^j U_k^m = \\ &= \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{n=1}^{N_g} |J| \{ [p_{ik}^*(s, P) {}^j \phi_m(P)]_n w_n \} {}^j U_k^m \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_e} \int_{\Gamma_j} u_{ik}^*(s, P) {}^j \phi_m(P) {}^j P_k^m d\Gamma &= \sum_{j=1}^{N_e} |J| \int_{\Gamma_j} u_{ik}^*(s, P) {}^j \phi_m(P) d\xi {}^j P_k^m = \\ &= \sum_{j=1}^{N_e} \sum_{n=1}^{N_g} |J| \{ [u_{ik}^*(s, P) {}^j \phi_m(P)]_n w_n \} {}^j P_k^m \end{aligned} \quad (3.35)$$

onde  $\xi$  é a coordenada adimensional compreendida no intervalo  $[-1,1]$  e  $|J|$  o determinante do jacobiano da transformação de coordenadas (cartesianas para adimensional). O número de pontos de Gauss é  $N_g$  e o peso da aproximação gaussiana do ponto  $n$  é representado por  $w_n$ .

Para as integrais sobre as células, um esquema semi-analítico é utilizado. As integrais são escritas em coordenadas cilíndricas. Primeiramente, a integral na variável do raio é calculada analiticamente. Depois, na variável do ângulo, ela é avaliada numericamente. Duas integrais de domínio devem ser calculadas dentro da formulação proposta neste trabalho. A da equação dos deslocamentos (3.24) com núcleo  $\varepsilon_{ijk}^*$  e a da equação das tensões com núcleo  $E_{ijkl}$ . A primeira com singularidade  $(1/r)$  e a segunda  $(1/r^2)$ . Para a primeira integral, tem-se:

$$\int_{\Omega_m} \varepsilon_{ijk}^*(s,p) \phi_l(p) \sigma_{jk}^{0l} d\Omega = \int_0 \int_r \frac{\bar{\varepsilon}_{ijk}(s,p)}{r} \phi_l(r,\theta) \sigma_{jk}^{0l} r dr d\theta \quad (3.36)$$

onde  $\bar{\varepsilon}_{ijk}(s,p) = r\varepsilon_{ijk}^*(s,p)$ . As funções de forma  $\phi_i(r,\theta)$  são escritas em função das coordenadas cartesianas dos nós definidos para cada célula de acordo com a (3.37).

$$\phi_i(r,\theta) = \frac{a_i^0}{2A} + \omega_i[x(s) + r \cdot \cos(\theta)] + \eta_i[y(s) + r \cdot \sin(\theta)] \quad (3.37)$$

onde  $A$  é a área do triângulo cujos vértices coincidem com os nós de tensão,  $x(s)$  e  $y(s)$  são as coordenadas cartesianas do ponto fonte “s” em relação a um sistema  $(x,y)$  qualquer adotado. Os coeficientes da (3.37) são:

$$\begin{aligned} a_i^0 &= x_j y_k - x_k y_j \\ \omega_i &= y_j - y_k \\ \eta_i &= x_k - x_j \end{aligned} \quad (3.38)$$

para  $i, j$  e  $k$  variando ciclicamente de 1 a 3. O índice subscrito nas (3.38) representa os nós nas células com coordenadas  $(x_m, y_m)$ . Na figura (3.3), definem-se o raio  $r$  e o ângulo  $\theta$  da (3.37).

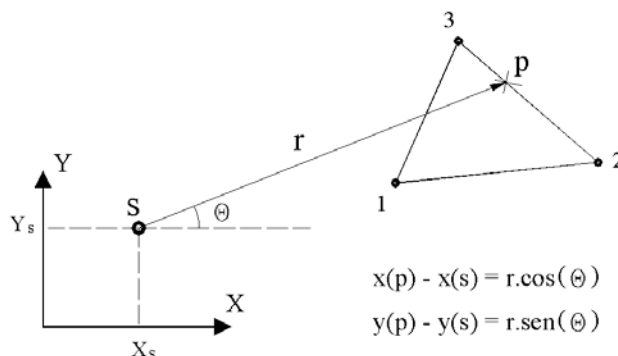


Figura 3.3. Coordenadas cilíndricas  $r$  e  $\theta$ .

Com a (3.37) substituída na (3.36), chega-se na integral:

$$\int_{\theta} \int_r \frac{\bar{\epsilon}_{ijk}(s,p)}{r} \left\{ \frac{a_m^0}{2A} + \omega_m [x(s) + r \cdot \cos(\theta)] + \eta_m [y(s) + r \cdot \text{sen}(\theta)] \right\} r dr d\theta \sigma_{jk}^{0m} \quad (3.39)$$

Integrando-se analiticamente na variável  $r$ , tem-se:

$$\int_{\theta} \left\{ \bar{\epsilon}_{ijk}(s,p) \left[ \left[ \frac{a_m^0}{2A} + (\omega_m x(s) + \eta_m y(s)) \right] R(\theta) + [\omega_m \cos(\theta) + \eta_m \text{sen}(\theta)] \frac{R(\theta)^2}{2} \right] \right\} d\theta \sigma_{jk}^{0m} \quad (3.40)$$

onde  $R(\theta) = R_2(\theta) - R_1(\theta)$ , conforme mostra a figura (3.4).

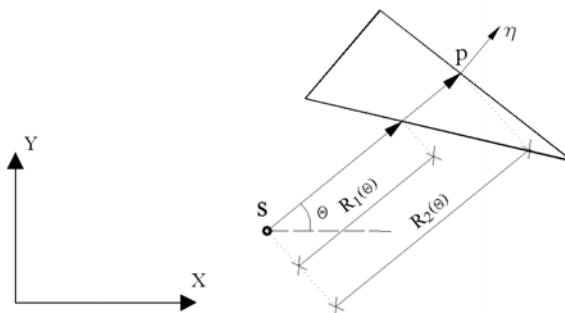


Figura 3.4. Integração analítica em  $r$ .

A (3.40) deve agora ser integrada numericamente por quadratura gaussiana. O esquema de integração implementado neste trabalho pressupõe a troca da variável de integração  $\theta$  por  $\Gamma_1$ , sendo este último o contorno da célula  $l$ . Este procedimento é mais simples em termos de implementação computacional. A integral da (3.40) com a mudança de variável fica escrita como:

$$\int_{\Gamma_1} \left\{ \bar{\epsilon}_{ijk}(s, p) \left[ \left[ \frac{a_m^0}{2A} + (\omega_m x(s) + \eta_m y(s)) \right] r + [\omega_m \cos(\theta) + \eta_m \sin(\theta)] \frac{r^2}{2} \right] \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\Gamma_1 \sigma_{jk}^{0m} \quad (3.41)$$

onde  $d\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\Gamma$ , sendo  $\frac{\partial r}{\partial \eta}$  a derivada do raio em relação ao vetor unitário normal ao contorno  $\eta$  no ponto campo “p” (figura 3.4), e a variável  $r$  é a distância entre os pontos fonte “s” e campo “p”. A integral na (3.41) equivale à somatória:

$$\sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{N_\xi} |J|_p \left\{ \bar{\epsilon}_{ijk}(s, p) \left[ \left[ \frac{a_m^0}{2A} + (\omega_m x(s) + \eta_m y(s)) \right] r + [\omega_m \cos(\theta) + \eta_m \sin(\theta)] \frac{r^2}{2} \right] \right\} \cdot w_n \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\xi_p \sigma_{jk}^{0m} \quad (3.42)$$

onde  $p$  varia de 1 a 3 e representa os três lados do contorno da célula  $l$ . O índice  $n$  representa os pontos de Gauss. A coordenada adimensional  $\xi$  varia de  $[-1, 1]$  para cada lado da célula e  $|J|_p$  é o determinante do jacobiano da transformação que, no caso plano, vale metade do comprimento do lado  $p$  da célula. A integração sobre o contorno da célula deve percorrer o sentido anti-horário. Este procedimento de mudança de variável evita o cálculo de  $R_1(\theta)$  e  $R_2(\theta)$ . Para a integral de domínio da equação das tensões (3.25), segue-se procedimento análogo. Para uma célula genérica  $m$ , tem-se:

$$\int_{\Omega_m} E_{ijkl}(s, p) \phi_p(p) \sigma_{kl}^{0p} d\Omega = \int_0 \int_r \frac{\bar{E}_{ijkl}(s, p)}{r^2} \phi_p(r, \theta) \sigma_{kl}^{0p} r dr d\theta \quad (3.43)$$

onde  $\bar{E}_{ijkl} = E_{ijkl} \cdot r^2$ . As funções de formas  $\phi_p(r, \theta)$  são as mesmas definidas nas (3.37) e (3.38). Substituindo-as na (3.43), tem-se:

$$\int_{\theta} \int_r \frac{\bar{E}_{ijkl}(s, p)}{r^2} \left\{ \frac{a_p^0}{2A} + \omega_p [x(s) + r \cdot \cos(\theta)] + \eta_p [y(s) + r \cdot \sin(\theta)] \right\} r dr d\theta \sigma_{kl}^{0, p} \quad (3.44)$$

A integral analítica em  $r$  da (3.44) resulta:

$$\int_{\theta} \left\{ \bar{E}_{ijkl}(s, p) \left[ \left[ \frac{a_p^0}{2A} + (\omega_p x(s) + \eta_p y(s)) \right] \ln(R(\theta)) + [\omega_p \cos(\theta) + \eta_p \sin(\theta)] R(\theta) \right] \right\} d\theta \sigma_{kl}^{0, p} \quad (3.45)$$

onde  $\ln(R(\theta)) = \ln(R_2(\theta)) - \ln(R_1(\theta))$ . Transformando a variável de integração  $\theta$  em  $\Gamma_m$ , a (3.45) equivale a:

$$\int_{\Gamma_m} \left\{ \bar{E}_{ijkl}(s, p) \left[ \left[ \frac{a_p^0}{2A} + (\omega_p x(s) + \eta_p y(s)) \right] \ln(r) + [\omega_p \cos(\theta) + \eta_p \sin(\theta)] r \right] \right\} \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\Gamma_m \sigma_{kl}^{0, p} \quad (3.46)$$

cuja somatória da quadratura da integração numérica fica representada por:

$$\sum_{q=1}^3 \sum_{n=1}^{N_q} |J|_q \left\{ \bar{E}_{ijkl}(s, p) \left[ \left[ \frac{a_p^0}{2A} + (\omega_p x(s) + \eta_p y(s)) \right] \ln(r) + [\omega_p \cos(\theta) + \eta_p \sin(\theta)] r \right] \right\} \cdot w_n \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\Gamma_q \sigma_{kl}^{0, p} \quad (3.47)$$

Neste trabalho, segue-se um critério particular para a escolha dos nós das células com as variáveis de tensão inicial. Os nós são escolhidos para pertencer ao domínio do corpo. Para uma célula interna ao domínio, cujos lados não coincidem com o contorno do corpo, os nós são adotados na posição dos vértices do triângulo. Quando um dos lados coincide com o contorno, os nós são adotados internos ao domínio da célula. Na figura (3.5), para um domínio bidimensional discretizado, mostra-se a posição dos nós em função da localização de cada célula.



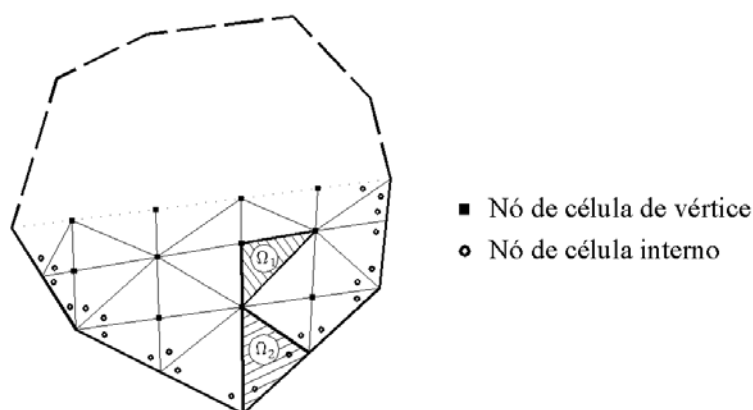


Figura 3.5. Definição dos nós internos de tensão inicial.

Na figura (3.5) observa-se que os três nós são definidos coincidentes com os vértices para a célula de domínio  $\Omega_1$ . Dois dos nós da célula de domínio  $\Omega_2$ , que tem um dos lados adjacente ao contorno do corpo, são definidos internamente, enquanto o terceiro é definido no vértice oposto àquele lado. Admite-se continuidade da variável nos nós de vértices, para as várias células concorrentes no mesmo nó. Entre duas células que têm nós internos ou entre uma célula com nós internos e outra sem, só há continuidade da variável de tensão nos vértices comuns.

A posição dos nós internos é geometricamente definida conforme mostra a figura 3.6. Define-se o valor da variável  $dist$  entre  $(0,1)$ . A posição do nó fica definida por  $\bar{r} = (r \cdot dist)$ , sendo  $\bar{r}$  a distância medida a partir do centróide do triângulo em direção a um de seus vértices e  $r$  a distância total do centróide ao vértice. Nos exemplos deste trabalho, referentes à implementação computacional da formulação não-linear do MEC, utilizou-se  $dist$  entre 0.35 e 0.45.

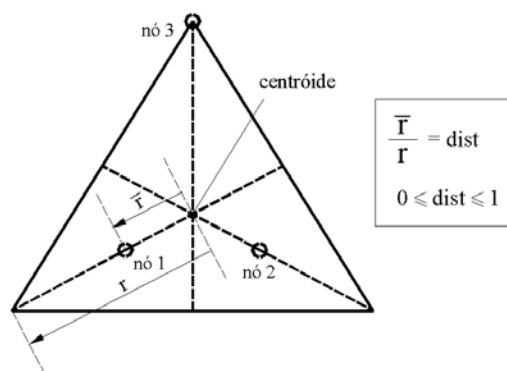


Figura 3.6. Posição dos nós de célula internos.

Adota-se um sistema local de coordenadas adimensionais  $\xi_i = \phi_i$ ,  $\phi_i$  sendo as funções de forma lineares definidas na (3.37), conforme a figura (3.7).

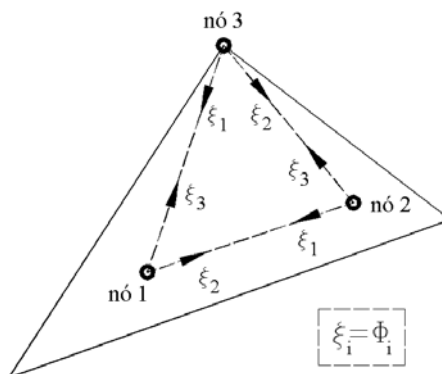


Figura 3.7. Sistema de coordenadas adimensionais  $\xi_i$ .

As integrais nas (3.42) e (3.47) são calculadas sobre o contorno da célula com as funções  $\phi_i$  definidas conforme a figura (3.7), sendo desnecessária a adoção de um sistema local semelhante a  $\xi_i$  associado aos vértices da célula.

A vantagem maior da utilização de nós internos é evitar escrever a equação das tensões para nós de contorno, mesmo estando já resolvida a equação integral para estes casos. Um único procedimento de integração numérica é necessário, tornando desnecessárias integrações analíticas de termos hipersingulares. Além disso, nos problemas de localização, parece ser a resposta mais estável quando um maior número de variáveis de tensão encontram-se próximas ao contorno do corpo. Para uma série de exemplos, encontram-se próximas ao contorno as regiões onde inicia-se o processo da localização.

Um esquema alternativo, não implementado neste trabalho, seria definir sempre três nós internos por célula, tornando todas as variáveis de tensão descontínuas entre células vizinhas. Aparentemente, isto aumentaria bastante o número de variáveis e o tempo de processamento. No entanto, poderia ser útil se a descontinuidade do campo de tensões fosse relevante para o exemplo analisado.

### **3.5. Equações Algébricas do Método dos Elementos de Contorno para o Problema com Campo de Tensões Iniciais.**

A equação integral dos deslocamentos (3.24), quando escrita na forma discretizada, equivale a uma equação algébrica, com coeficientes resultantes da integração numérica multiplicando variáveis nodais de contorno e de domínio, para cada ponto fonte “s”, segundo cada direção do sistema global de coordenadas cartesianas. Supondo todos os  $N_e$  elementos de contorno descontínuos, são necessárias  $4N_e$  equações, ou seja, duas equações para cada um dos  $2N_e$  pontos de colocação. As equações algébricas reunidas num único sistema tornam-se:

$$[H] \cdot \{U\} = [G] \cdot \{P\} + [Q] \cdot \{\sigma^0\} \quad (3.48)$$

onde  $[H]$ ,  $[G]$  e  $[Q]$  são matrizes com os coeficientes de integração;  $\{U\}$ ,  $\{P\}$  e  $\{\sigma^0\}$  são vetores com as variáveis nodais de deslocamento e força de superfície de contorno e tensão inicial de domínio. São desconsideradas as forças de massa na (3.48). Da mesma forma, a equação das tensões (3.25) em sua forma discretizada, escrita para cada nó interno, conduz ao sistema algébrico:

$$\{\sigma\} = -[H'] \cdot \{U\} + [G'] \cdot \{P\} + [Q'] \cdot \{\sigma^0\} \quad (3.49)$$

onde  $[H']$ ,  $[G']$  e  $[Q']$  são matrizes com coeficientes de integração e  $\{\sigma\}$  é o vetor com as variáveis nodais do campo de tensões reais. Para um campo de tensões iniciais  $\{\sigma^0\}$  conhecido, aplicado ao domínio, com a equação (3.48) obtém-se as variáveis de deslocamento e força de contorno e com a (3.49) as tensões reais. No capítulo 4, as equações com os campos iniciais serão utilizadas para simular material com comportamento não-linear físico.

### **3.6. Utilização de Equações Hipersingulares para Montagem do Sistema Algébrico.**

As matrizes da equação algébrica (3.48) têm coeficientes que se originam das integrais da identidade de Somigliana calculadas sobre contorno e domínio discretizados. Esta equação tem uma integral singular de contorno ( $1/r$ ), cujo núcleo é a solução fundamental  $p_{ij}^*(s,p)$ . Esta integral resulta nos termos da matriz  $[G]$ . No entanto, é possível construir a (3.48) com a equação das tensões (3.25). Sabendo-se que  $p_i = \sigma_{ij}\eta_j$ , a (3.25) escreve-se como:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ij}(s)p_j(s) = & -\eta_j \int_{\Gamma} S_{ijk}(s,p)u_k(p)d\Gamma + \eta_j \int_{\Gamma} D_{ijk}(s,p)p_k(p)d\Gamma \\ & + \eta_j \int_{\Omega} E_{ijkl}(s,p)\sigma_{kl}^0(p)d\Omega - \frac{\eta_j}{8(1-\nu)} \left[ 2\sigma_{ij}^0(s) + (1-4\nu)\sigma_{mm}^0(s)\delta_{ij} \right] \end{aligned} \quad (3.50)$$

Aplicando-se a equação das forças de superfície (3.50) para  $2N_e$  pontos de colocação, duas equação por ponto, monta-se o sistema algébrico equivalente ao (3.48):

$$[H''] \cdot \{U\} = [G''] \cdot \{P\} + [Q''] \cdot \{\sigma^0\} \quad (3.51)$$

onde agora as matrizes  $[H'']$ ,  $[G'']$  e  $[Q'']$  têm coeficientes da equação das forças (3.50). A integral com o núcleo  $S_{ijk}(s,p)$  da (3.50) é hipersingular ( $1/r^2$ ). Aumentar o grau de singularidade das integrais que geram o sistema algébrico do método, como feito com a (3.48) substituída pela (3.51), deve condicionar melhor o sistema algébrico, no sentido de torná-lo mais diagonalizado, ou seja, com coeficientes da diagonal principal das matrizes tendendo a ser cada vez maiores quando comparados aos demais.

De fato, isto acontece. A matriz  $[G'']$  de singularidade ( $1/r^2$ ) é mais diagonal que a matriz  $[G]$  de singularidade ( $1/r$ ), pois para aquela os pontos mais próximos ao ponto de colocação têm maior peso relativo na integração do que os

pontos mais distantes. O mesmo vale para a matriz  $[H'']$  em relação à  $[H]$  e para a  $[Q'']$  em relação à  $[Q]$ . No entanto, a influência da  $[G'']$  deve ser mais significativo por ser hipersingular.

Tanto para gerar a equação algébrica (3.48) quanto a (3.51), pode-se escolher pontos de colocação pertencentes ao contorno ou externos ao domínio. A vantagem do último caso é descartar as integrações analíticas. As matrizes  $C_{ij}(s)$  da (3.25) e  $\bar{C}_{ij}(s)$  da (3.50) são nulas neste caso, ou seja, as duas equações ficam:

$$\int_{\Gamma} p_j(P) \cdot u_{ij}^*(s, P) d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j(P) \cdot p_{ij}^*(s, P) d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^*(s, p) \cdot \sigma_{jk}^0(p) d\Omega = 0 \quad (3.52)$$

$$- \int_{\Gamma} S_{ijk}(s, p) u_k(p) d\Gamma + \int_{\Gamma} D_{ijk}(s, p) p_k(p) d\Gamma + \int_{\Omega} E_{ijkl}(s, p) \sigma_{kl}^0(p) d\Omega = 0 \quad (3.53)$$

Se o ponto de colocação pertencer ao contorno, as integrais analíticas sobre o contorno devem ser calculadas como valores principais de Cauchy ( $1/r$ ) e Hadamard ( $1/r^2$ ). As considerações expostas por GUIGGIANI [1994] para a representação integral de tensões no contorno devem ser levadas em conta na representação integral de forças no contorno já que, na verdade, uma é igual a outra a menos do vetor normal  $\eta$ .

## **4. FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR FÍSICA BIDIMENSIONAL**

### **4.1. Introdução**

Neste capítulo, apresenta-se a formulação não-linear do método dos elementos de contorno escrita em deformações, obtida mediante substituição do vetor com as variáveis de contorno na equação das tensões. Em seguida, define-se o problema incremental para a resolução do problema de valor de contorno. Define-se o operador tangente consistente da formulação. Em seguida, deriva-se a matriz tangente consistente para cada modelo de dano local, a partir de suas leis constitutivas. Apresentam-se os procedimentos para o cálculo numérico das integrais dos valores ponderados dos modelos não-locais, utilizando-se da discretização do domínio em células. Deriva-se a matriz consistente para cada modelo não-local. Para finalizar, apresenta-se o algoritmo da formulação implícita para cada modelo de dano.

### **4.2. Formulação Não-Linear do Método dos Elementos de Contorno**

A estratégia de considerar o campo de tensões iniciais aplicado ao domínio nas equações de equilíbrio, conforme discutido no capítulo 3, possibilita tratar problemas com material em regime não-linear físico, a partir das mesmas equações. A relação constitutiva de um modelo não-linear está certamente presente na definição de tensão inicial. Sendo esta definida como a diferença entre tensão

elástica e tensão verdadeira, esta última nada mais é do que a tensão proveniente da lei constitutiva não-linear.

Reescrevendo-se as equações dos deslocamentos e das tensões com o campo de tensões iniciais, têm-se:

$$[H] \cdot \{U\} = [G] \cdot \{P\} + [Q] \cdot \{\sigma^0\} \quad (4.1)$$

$$\{\sigma\} = -[H'] \cdot \{U\} + [G'] \cdot \{P\} + [Q'] \cdot \{\sigma^0\} \quad (4.2)$$

Separando-se as forças e deslocamentos prescritos dos incógnitos, a (4.1) fica:

$$[A] \cdot \{X\} = [B] \cdot \{Y\} + [Q] \cdot \{\sigma^0\} \quad (4.3)$$

onde  $[A]$  tem as colunas da  $[H]$  e da  $[G]$  que multiplicam as variáveis incógnitas de contorno em  $\{X\}$ . A matriz  $[B]$  guarda as influências sobre os valores prescritos de contorno  $\{Y\}$ . A (4.3) equivale a:

$$[A] \cdot \{X\} = \{F\} + [Q] \cdot \{\sigma^0\} \quad (4.4)$$

onde  $\{F\} = [B] \cdot \{Y\}$ . A (4.2) resulta na:

$$\{\sigma\} = -[A'] \cdot \{X\} + \{F'\} + [Q'] \cdot \{\sigma^0\} \quad (4.5)$$

onde  $[A']$  e  $\{F'\}$  têm os mesmos significados de  $[A]$  e  $\{F\}$ , respectivamente. Da (4.4), invertendo-se a matriz  $[A]$ , tem-se:

$$\{X\} = \{M\} + [R] \cdot \{\sigma^0\} \quad (4.6)$$

Substituindo-se a (4.6) na (4.5), chega-se a:

$$\{\sigma\} = \{N\} + [S] \cdot \{\sigma^0\} \quad (4.7)$$

sendo que os vetores com as soluções elásticas das (4.6) e (4.7) são dados por:

$$\begin{aligned} \{M\} &= [A]^{-1} \cdot \{F\} \\ \{N\} &= -[A'] \cdot [A]^{-1} \cdot \{F\} + \{F'\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

e as matrizes com as contribuições do campo inicial determinadas por:

$$\begin{aligned} [R] &= [A]^{-1} \cdot [Q] \\ [S] &= -[A'] \cdot [A]^{-1} \cdot [Q] + [Q'] \end{aligned} \quad (4.9)$$

Adicionando-se  $\{\sigma^0\}$  aos dois membros da (4.7), tem-se:

$$\{\sigma^e\} = \{N\} + [\bar{S}] \cdot \{\sigma^0\} \quad (4.10)$$

onde  $[\bar{S}] = [S] + [I]$ , sendo  $[I]$  a matriz identidade, e lembrando que, por definição,  $\{\sigma^e\} = \{\sigma\} + \{\sigma^0\}$ . O vetor  $\{\sigma^e\}$  das tensões elásticas relaciona-se com o vetor das deformações elásticas totais pela lei constitutiva elástica linear. A equação de equilíbrio (4.10) pode então ser escrita em termos de deformações, ou seja:

$$\{Y(\varepsilon)\} = -[E] \cdot \{\varepsilon\} + \{N\} + [\bar{S}] \cdot \{[E] \cdot \{\varepsilon\} - \{\sigma(\varepsilon)\}\} = 0 \quad (4.11)$$

onde  $[E]$  é a matriz com os módulos elásticos de rigidez e  $\{\sigma(\varepsilon)\}$  é o vetor com as relações constitutivas do modelo não-linear. A equação de equilíbrio não-linear  $\{Y(\varepsilon)\} = 0$  é geral para qualquer que seja a lei constitutiva não-linear, local ou não-local. Isto torna a formulação única e aplicável a uma vasta categoria de modelos não-lineares. No item (4.3) será discutido o procedimento incremental-iterativo para a resolução do sistema não-linear da (4.11), para considerar os modelos de dano locais e não-locais descritos no capítulo 2.



### **4.3. Procedimento Incremental-Iterativo de Resolução do Problema Não-Linear de Valor de Contorno**

Neste item, discutir-se-á o problema em passo finito para a resolução da equação de equilíbrio não-linear em deformações do método dos elementos de contorno. A resolução do problema de valor de contorno impõe dois tipos de discretização: a temporal e a espacial. A primeira, resulta na discretização em intervalos de tempo  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ , ou passos de carga, sendo  $t_n$  e  $t_{n+1}$  dois instantes consecutivos de tempo. No intervalo  $\Delta t$ , ou seja, para um dado passo de carga, o problema é não-linear e deve ser resolvido iterativamente.

O problema em passo finito pode ser assim colocado: considere-se um corpo de volume  $\Omega$  e contorno  $\Gamma$  sujeito à forças de massa  $b(t)$ , forças de superfície  $p(t)$  na parte  $\Gamma_a$  livre do contorno e deslocamentos impostos  $U(t)$  na parte  $\Gamma_b$  restrita do contorno, tal que  $\Gamma = \Gamma_a + \Gamma_b$ . Conhecendo-se todas as variáveis no instante  $t_n$ , o problema consiste em determinar as variáveis em  $t_{n+1}$ , garantindo equilíbrio e compatibilidade através das equações:

$$\text{div } \sigma_{n+1} + b_{n+1} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.12)$$

$$\frac{1}{2} [\text{grad } u_{n+1} + \text{grad}^T u_{n+1}] = \varepsilon_{n+1} \quad \text{em } \Omega \quad (4.13)$$

$$m \cdot \sigma_{n+1} = p_{n+1} \quad \text{em } \Gamma_a \quad (4.14)$$

$$u_{n+1} = U_{n+1} \quad \text{em } \Gamma_b \quad (4.15)$$

para os incrementos, ou passos de carga,  $\Delta b_n = b_{n+1} - b_n$ ,  $\Delta p_n = p_{n+1} - p_n$  e  $\Delta U_n = U_{n+1} - U_n$  conhecidos. Nas (4.12)-(4.15),  $\sigma_{n+1}$  e  $u_{n+1}$  são o tensor de tensões e o vetor de deslocamentos, respectivamente. Às equações de equilíbrio e compatibilidade, somam-se as equações da lei constitutiva do modelo não-linear, considerando-se as condições de Kuhn-Tucker. Por exemplo, para o modelo de dano não-local do item (2.3.3), têm-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} = 2\mu_0(1 - D_{t_{n+1}})(1 - D_{c_{n+1}})e_{n+1} + K_0(1 - D_{t_{n+1}})\text{tr}^+\varepsilon_{n+1}I + \\ K_0(1 - D_{c_{n+1}})\text{tr}^-\varepsilon_{n+1}I \quad \text{em } \Omega \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$F_{t_{n+1}} = F_t(\varepsilon_{n+1}, D_{t_{n+1}}, D_{c_{n+1}}) \leq 0; \quad \Delta D_{t_n} \geq 0; \quad (F_{t_{n+1}} \cdot \Delta D_{t_n}) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.17)$$

$$F_{c_{n+1}} = F_c(\varepsilon_{n+1}, D_{t_{n+1}}, D_{c_{n+1}}) \leq 0; \quad \Delta D_{c_n} \geq 0; \quad (F_{c_{n+1}} \cdot \Delta D_{c_n}) = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (4.18)$$

onde nas (4.17)-(4.18),  $\Delta$  representa o incremento da variável no passo de carga.

A discretização espacial é efetuada via aproximação das variáveis de contorno e de domínio, e resulta no sistema algébrico do método dos elementos de contorno. Conforme demonstrado no item (4.2), a equação de equilíbrio em deformações, para o incremento  $n$ , é dada por:

$$\{Y(\Delta\varepsilon_n)\} = -[E] \cdot \{\Delta\varepsilon_n\} + \{\Delta N_n\} + [\bar{S}] \cdot \{[E] \cdot \{\Delta\varepsilon_n\} - \{\Delta\sigma_n(\Delta\varepsilon_n)\}\} = 0 \quad (4.19)$$

A (4.19) é a tradução das (4.12)-(4.15) para uma estrutura discretizada, equacionada pelo método dos elementos de contorno, escrita em variáveis incrementais. Para resolver a (4.19), não-linear em  $\Delta\varepsilon_n$ , utiliza-se um esquema iterativo, adotando-se um procedimento do tipo Newton-Raphson, com as fases de previsão e correção. Na solução iterativa, utiliza-se:

$$\{\Delta\varepsilon_n^{i+1}\} = \{\Delta\varepsilon_n^i\} + \{\delta\Delta\varepsilon_n^i\} \quad (4.20)$$

onde  $i$  indica iteração. A determinação de  $\{\delta\Delta\varepsilon_n^i\}$  na iteração  $i$  resulta da expansão da série de Taylor em torno de  $\{Y(\{\Delta\varepsilon_n^i\})\}$  na (4.19), ou seja:

$$\{Y(\{\Delta\varepsilon_n^i\})\} + \frac{\partial\{Y(\{\Delta\varepsilon_n^i\})\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} \cdot \{\delta\Delta\varepsilon_n^i\} + \dots = 0 \quad (4.21)$$

Utilizando-se apenas a primeira variação de  $\{Y(\{\Delta\varepsilon_n^i\})\}$  na (4.21), e derivando a (4.19), tem-se:

$$\{Y(\{\Delta\varepsilon_n^i\})\} = [[E] - [\bar{S}] \cdot [[E] - [\partial\Delta\sigma_n^i / \partial\Delta\varepsilon_n^i]]] \cdot \{\delta\Delta\varepsilon_n^i\} \quad (4.22)$$

onde a matriz que multiplica  $\{\delta\Delta\varepsilon_n^i\}$  é o operador tangente consistente algorítmico. Este operador difere do operador tangente contínuo pela variável em relação à qual se calcula a derivada da equação de equilíbrio. Sendo as equações resolvidas por incrementos, nada mais natural que tomar as derivadas em relação às variáveis incrementais, daí o operador tangente ser consistente com o algoritmo do problema incremental. O operador consistente tende ao operador contínuo quando  $\Delta\varepsilon$  tende a zero, ou seja:

$$\begin{aligned} C^t &= \frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon} \\ C^{tc} &= \frac{\partial\Delta\sigma}{\partial\Delta\varepsilon} \\ C^{tc} &= C^t \quad \text{para } \Delta\varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

onde  $C^t$  e  $C^{tc}$  são, respectivamente, os operadores tangente contínuo e consistente. O algoritmo detalhado para a resolução da equação não-linear de equilíbrio, discutindo as fases de previsão e correção, será apresentado no item (4.7).

#### **4.4. Matriz Tangente Consistente para os Modelos de Dano Locais**

Na equação (4.22), do operador tangente consistente, surge a derivada do incremento do tensor de tensões em relação ao incremento do tensor de deformações  $\partial\Delta\sigma/\partial\Delta\varepsilon$ . Naturalmente, para cada lei constitutiva não-linear, esta derivada precisa ser explicitada. Neste item, deriva-se a expressão do operador consistente para os dois modelos de dano locais e não-locais descritos no capítulo 2.

Considerando-se, primeiro, o modelo de dano simplificado local do item (2.3.2.1), escreve-se, em taxas, o tensor de tensões como:

$$\dot{\sigma} = (1 - D)E\dot{\varepsilon} - E\varepsilon\dot{D} \quad (4.24)$$

onde  $E$  é o tensor constitutivo elástico de quarta ordem,  $\dot{\sigma}$ ,  $\dot{\varepsilon}$  e  $\dot{D}$  são as taxas dos tensores de tensões, de deformações e da variável de dano escalar, respectivamente. Em variáveis incrementais, a (4.24) fica:

$$\Delta\sigma_n = (1 - D_n - \Delta D_n)E : \Delta\varepsilon_n - \Delta D_n E : \varepsilon_n \quad (4.25)$$

onde o símbolo “:” representa a operação de contração entre os dois tensores. A matriz tangente consistente é dada pela derivada:

$$\frac{\partial\Delta\sigma_n}{\partial\Delta\varepsilon_n} = (1 - D_n - \Delta D_n)E - [E : (\varepsilon_n + \Delta\varepsilon_n)] \otimes \left[ \frac{\partial\Delta D_n}{\partial\Delta\varepsilon_n} \right] \quad (4.26)$$

sendo  $D_n$  e  $\varepsilon_n$  conhecidos em  $t_n$  e  $\Delta D_n$  e  $\Delta\varepsilon_n$  as variáveis incrementais. Da condição de consistência do modelo,  $\dot{f}\dot{D} = 0$ , para que haja evolução da variável de dano, ou seja,  $\dot{D} > 0$ , deve-se impor  $\dot{f} = 0$ . Assim, têm-se:

$$\begin{aligned} f &= Y - Y_0 - MD \\ \Delta f_n &= \Delta Y_n - M\Delta D_n \\ \dot{f} &= \frac{\partial f}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial D} \cdot \dot{D} = 0 \\ \Delta f_n &= \frac{\partial\Delta f_n}{\partial\Delta Y_n} \cdot \frac{\partial\Delta Y_n}{\partial\Delta\varepsilon_n} \cdot \Delta\varepsilon_n + \frac{\partial\Delta f_n}{\partial\Delta D_n} \cdot \Delta D_n = 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Da última das (4.27), conclui-se:

$$\Delta D_n = - \frac{\left[ \frac{\partial\Delta f_n}{\partial\Delta Y_n} \cdot \frac{\partial\Delta Y_n}{\partial\Delta\varepsilon_n} \right]}{\frac{\partial\Delta f_n}{\partial\Delta D_n}} \cdot \Delta\varepsilon_n = \frac{\left[ 1 \cdot \frac{\partial\Delta Y_n}{\partial\Delta\varepsilon_n} \right]}{M} \cdot \Delta\varepsilon_n \quad (4.28)$$

Por definição, têm-se:

$$\begin{aligned}
Y &= \frac{1}{2} \varepsilon : E : \varepsilon \\
\Delta Y_n &= \varepsilon_n : E : \Delta \varepsilon_n + \frac{1}{2} \Delta \varepsilon_n : E : \Delta \varepsilon_n \\
\frac{\partial \Delta Y_n}{\partial \Delta \varepsilon_n} &= E : (\varepsilon_n + \Delta \varepsilon_n)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Com a (4.29) substituída na (4.28), a derivada no segundo membro da (4.26) fica determinada como:

$$\frac{\partial \Delta D_n}{\partial \Delta \varepsilon_n} = \frac{1}{M} E : (\varepsilon_n + 2\Delta \varepsilon_n) \tag{4.30}$$

Voltando com a (4.30) na (4.26), o operador tangente consistente fica dado pela expressão:

$$\frac{\partial \Delta \sigma_n}{\partial \Delta \varepsilon_n} = (1 - D_n - \Delta D_n) E - \frac{1}{M} [E : (\varepsilon_n + \Delta \varepsilon_n)] \otimes [E : (\varepsilon_n + 2\Delta \varepsilon_n)] \tag{4.31}$$

sendo o produto tensorial representado por “ $\otimes$ ”. No limite, para  $\Delta \varepsilon_n$  tendendo a zero, a (4.31) transforma-se no operador tangente contínuo:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = (1 - D) E - \frac{1}{M} [E : (\varepsilon)] \otimes [E : (\varepsilon)] \tag{4.32}$$

Para derivar o mesmo operador consistente do modelo de dano para o concreto do item (2.3.3.1), local, recorre-se ao mesmo procedimento. O incremento do tensor de tensões, neste caso, fica:

$$\Delta \sigma_n = \tilde{E} : \Delta \varepsilon_n - A \Delta D_{tn} - B \Delta D_{cn} \tag{4.33}$$

sendo

$$\tilde{\mathbb{E}} = 2\mu \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} + \left[ K_+ H(\text{tr}\varepsilon) + K_- H(-\text{tr}\varepsilon) - \frac{2\mu}{3} \right] \mathbb{I} \otimes \mathbb{I} \quad (4.34)$$

$$A = 2\mu_0(1 - D_c)\mathbf{e} + K_0 \text{tr}^+ \varepsilon \mathbb{I} \quad (4.35)$$

$$B = 2\mu_0(1 - D_t)\mathbf{e} + K_0 \text{tr}^- \varepsilon \mathbb{I} \quad (4.36)$$

onde  $\tilde{\mathbb{E}}$  é o tensor elástico constitutivo do material com dano,  $\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$  é o tensor identidade simétrico de quarta ordem com componentes  $ijkl$  dadas por  $\frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})$ ,  $\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$  o tensor com componentes  $\delta_{ij}\delta_{kl}$ ,  $H(x)$  é a função de Heavyside que assume valor unitário para  $x \geq 0$  e zero para  $x < 0$ .

Com a (4.33), a derivada do operador é escrita como:

$$\frac{\partial \Delta \sigma_n}{\partial \Delta \varepsilon_n} = \tilde{\mathbb{E}} - \left[ A \otimes \frac{\partial \Delta D_{tn}}{\partial \Delta \varepsilon_n} \right] - \left[ B \otimes \frac{\partial \Delta D_{cn}}{\partial \Delta \varepsilon_n} \right] \quad (4.37)$$

A evolução das variáveis de dano do modelo,  $\Delta D_{tn} > 0$  e/ou  $\Delta D_{cn} > 0$ , está condicionada às equações:

$$\begin{aligned} \dot{f}_t &= \frac{\partial f_t}{\partial \varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{\partial f_t}{\partial D_t} \cdot \dot{D}_t + \frac{\partial f_t}{\partial D_c} \cdot \dot{D}_c = 0 \\ \dot{f}_c &= \frac{\partial f_c}{\partial \varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{\partial f_c}{\partial D_t} \cdot \dot{D}_t + \frac{\partial f_c}{\partial D_c} \cdot \dot{D}_c = 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \Delta f_{tn} &= \frac{\partial \Delta f_{tn}}{\partial \Delta \varepsilon_n} \cdot \Delta \varepsilon_n + \frac{\partial \Delta f_{tn}}{\partial \Delta D_{tn}} \cdot \Delta D_{tn} + \frac{\partial \Delta f_{tn}}{\partial \Delta D_{cn}} \cdot \Delta D_{cn} = 0 \\ \Delta f_{cn} &= \frac{\partial \Delta f_{cn}}{\partial \Delta \varepsilon_n} \cdot \Delta \varepsilon_n + \frac{\partial \Delta f_{cn}}{\partial \Delta D_{tn}} \cdot \Delta D_{tn} + \frac{\partial \Delta f_{cn}}{\partial \Delta D_{cn}} \cdot \Delta D_{cn} = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

As derivadas nas (4.38) são iguais às suas correspondentes nas (4.39), ou seja:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_t}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial \Delta f_{t_n}}{\partial \Delta \varepsilon_n}, & \frac{\partial f_t}{\partial D_t} &= \frac{\partial \Delta f_{t_n}}{\partial \Delta D_{t_n}}, & \frac{\partial f_t}{\partial D_c} &= \frac{\partial \Delta f_{t_n}}{\partial \Delta D_{c_n}} \\ \frac{\partial f_c}{\partial \varepsilon} &= \frac{\partial \Delta f_{c_n}}{\partial \Delta \varepsilon_n}, & \frac{\partial f_c}{\partial D_t} &= \frac{\partial \Delta f_{c_n}}{\partial \Delta D_{t_n}}, & \frac{\partial f_c}{\partial D_c} &= \frac{\partial \Delta f_{c_n}}{\partial \Delta D_{c_n}} \end{aligned} \quad (4.40)$$

já que, por definição, para a iteração  $i$ :

$$\begin{aligned} \Delta f_{t_n}^i &= f_{t_{n+1}}^i - f_{t_n}, & \Delta f_{c_n}^i &= f_{c_{n+1}}^i - f_{c_n} \\ \Delta \varepsilon_n^i &= \varepsilon_{n+1}^i - \varepsilon_n, & \Delta D_{t_n}^i &= D_{t_{n+1}}^i - D_{t_n}, & \Delta D_{c_n}^i &= D_{c_{n+1}}^i - D_{c_n} \end{aligned} \quad (4.41)$$

ou seja, sendo conhecidas todas as variáveis no instante  $n$ , a derivada em relação à uma variável incremental é igual à derivada em relação à variável total equivalente, pois, conforme a (4.41), uma é igual a outra, a menos de uma constante.

As duas equações na (4.39) formam um sistema linear nas variáveis  $\Delta D_{t_n}$  e  $\Delta D_{c_n}$ . Resolvendo-se o sistema, obtêm-se elas em função de  $\Delta \varepsilon_n$ :

$$\Delta D_{t_n} = \frac{\left( \frac{\partial \Delta f_{t_n}}{\partial \Delta D_{c_n}} \cdot \frac{\partial \Delta f_{c_n}}{\partial \Delta \varepsilon_n} : \Delta \varepsilon_n - \frac{\partial \Delta f_{c_n}}{\partial \Delta D_{c_n}} \cdot \frac{\partial \Delta f_{t_n}}{\partial \Delta \varepsilon_n} : \Delta \varepsilon_n \right)}{h} \quad (4.42)$$

$$\Delta D_{c_n} = \frac{\left( \frac{\partial \Delta f_{c_n}}{\partial \Delta D_{t_n}} \cdot \frac{\partial \Delta f_{t_n}}{\partial \Delta \varepsilon_n} : \Delta \varepsilon_n - \frac{\partial \Delta f_{t_n}}{\partial \Delta D_{t_n}} \cdot \frac{\partial \Delta f_{c_n}}{\partial \Delta \varepsilon_n} : \Delta \varepsilon_n \right)}{h} \quad (4.43)$$

sendo  $h$  escalar dado por:

$$h = \frac{\partial \Delta f_{t_n}}{\partial \Delta D_{t_n}} \cdot \frac{\partial \Delta f_{c_n}}{\partial \Delta D_{c_n}} - \frac{\partial \Delta f_{t_n}}{\partial \Delta D_{c_n}} \cdot \frac{\partial \Delta f_{c_n}}{\partial \Delta D_{t_n}} \quad (4.44)$$

As derivadas das (4.42) e (4.43) em relação ao tensor de deformações, resulta, respectivamente, nas:

$$\frac{\partial \Delta D_{tn}}{\partial \Delta \varepsilon_n} = \left[ \frac{\partial \Delta f_{tn}}{\partial \Delta D_{cn}} \left( \frac{\partial^2 \Delta f_{cn}}{\partial \Delta \varepsilon_n^2} : \Delta \varepsilon_n + \frac{\partial \Delta f_{cn}}{\partial \Delta \varepsilon_n} \right) - \frac{\partial \Delta f_{cn}}{\partial \Delta D_{cn}} \left( \frac{\partial^2 \Delta f_{tn}}{\partial \Delta \varepsilon_n^2} : \Delta \varepsilon_n + \frac{\partial \Delta f_{tn}}{\partial \Delta \varepsilon_n} \right) \right] \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \Delta D_{cn}}{\partial \Delta \varepsilon_n} = \left[ \frac{\partial \Delta f_{cn}}{\partial \Delta D_{tn}} \left( \frac{\partial^2 \Delta f_{tn}}{\partial \Delta \varepsilon_n^2} : \Delta \varepsilon_n + \frac{\partial \Delta f_{tn}}{\partial \Delta \varepsilon_n} \right) - \frac{\partial \Delta f_{tn}}{\partial \Delta D_{tn}} \left( \frac{\partial^2 \Delta f_{cn}}{\partial \Delta \varepsilon_n^2} : \Delta \varepsilon_n + \frac{\partial \Delta f_{cn}}{\partial \Delta \varepsilon_n} \right) \right] \quad (4.46)$$

Substituindo-se as (4.45) e (4.46) na (4.37), chega-se ao operador tangente consistente do modelo de dano para o concreto:

$$\frac{\partial \Delta \sigma_n}{\partial \Delta \varepsilon_n} = \tilde{\mathbf{E}} - \frac{\left\{ \mathbf{A} \otimes \left[ \frac{\partial \Delta f_{tn}}{\partial \Delta D_{cn}} \left( \frac{\partial^2 \Delta f_{cn}}{\partial \Delta \varepsilon_n^2} : \Delta \varepsilon_n + \frac{\partial \Delta f_{cn}}{\partial \Delta \varepsilon_n} \right) - \frac{\partial \Delta f_{cn}}{\partial \Delta D_{cn}} \left( \frac{\partial^2 \Delta f_{tn}}{\partial \Delta \varepsilon_n^2} : \Delta \varepsilon_n + \frac{\partial \Delta f_{tn}}{\partial \Delta \varepsilon_n} \right) \right] \right\}}{h} \quad (4.47)$$

$$- \frac{\left\{ \mathbf{B} \otimes \left[ \frac{\partial \Delta f_{cn}}{\partial \Delta D_{tn}} \left( \frac{\partial^2 \Delta f_{tn}}{\partial \Delta \varepsilon_n^2} : \Delta \varepsilon_n + \frac{\partial \Delta f_{tn}}{\partial \Delta \varepsilon_n} \right) - \frac{\partial \Delta f_{tn}}{\partial \Delta D_{tn}} \left( \frac{\partial^2 \Delta f_{cn}}{\partial \Delta \varepsilon_n^2} : \Delta \varepsilon_n + \frac{\partial \Delta f_{cn}}{\partial \Delta \varepsilon_n} \right) \right] \right\}}{h}$$

As operações de produto tensorial na (4.47) resultam em tensores de quarta ordem, conforme esperado, pois  $A$ ,  $B$  e os tensores entre colchetes são todos de segunda ordem. Para  $\Delta \varepsilon_n$  tendendo a zero na (4.47), recai-se no operador tangente contínuo do modelo, conforme a (4.48)

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = \tilde{\mathbf{E}} - \frac{\left\{ \mathbf{A} \otimes \left[ \frac{\partial f_t}{\partial D_c} \left( \frac{\partial f_c}{\partial \varepsilon} \right) - \frac{\partial f_c}{\partial D_c} \left( \frac{\partial f_t}{\partial \varepsilon} \right) \right] \right\} + \left\{ \mathbf{B} \otimes \left[ \frac{\partial f_c}{\partial D_t} \left( \frac{\partial f_t}{\partial \varepsilon} \right) - \frac{\partial f_t}{\partial D_t} \left( \frac{\partial f_c}{\partial \varepsilon} \right) \right] \right\}}{h} \quad (4.48)$$

Com a (4.31), para o modelo simplificado, ou a (4.47), para o modelo do concreto, volta-se ao operador tangente consistente da equação de equilíbrio em deformações da formulação não-linear, onde um de seus termos é  $\partial \Delta \sigma_n / \partial \Delta \varepsilon_n$ .



#### **4.5. Cálculo Numérico das Integrais dos Valores Ponderados**

Considerando-se os modelos de dano não-locais descritos no capítulo 2, a obtenção da matriz tangente consistente segue rigorosamente os mesmos procedimentos demonstrados no item (4.4). No entanto, as variáveis das funções de carregamento são valores ponderados em todo o domínio do corpo de medidas de deformação, tais como  $Y$  para o modelo simplificado e  $J_\varepsilon$ ,  $\text{tr}^+\varepsilon$  e  $\text{tr}^-\varepsilon$  para o modelo do concreto.

Sabendo-se que as medidas não-locais de deformação, conforme conceito de integral não-local, num dado ponto, dependem de todos os pontos de  $\Omega$ , as funções de carregamento  $f$ ,  $F_t$  e  $F_c$ , escritas nas variáveis não-locais, para o mesmo ponto, são também funções de todo  $\Omega$ .

Aproveitando-se da discretização geométrica da estrutura, com a aproximação das variáveis de domínio, pode-se escrever através de uma matriz a relação entre as variáveis não-locais dos modelos com as locais, para cada nó de célula. Voltando ao modelo simplificado do capítulo 2, definiu-se:

$$\begin{aligned}
 Y(x) &= \frac{1}{2} \varepsilon(x) : E : \varepsilon(x) \\
 \bar{Y}(x) &= \frac{\int_{\Omega} e^{\left(-\frac{\|x-s\|^2}{2l^2}\right)} Y(s) d\Omega}{\int_{\Omega} e^{\left(-\frac{\|x-s\|^2}{2l^2}\right)} d\Omega}
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

sendo  $Y(x)$  localmente definida (ponto  $x$ ) e  $\bar{Y}(x)$  a correspondente variável não-local, função de todo  $s \in \Omega$ . A integral na (4.49), definida sobre todo  $\Omega$ , pode ser transformada em somatória sobre as células, de acordo com:

$$\bar{Y}(x) = \frac{\int_{\Omega} e^{\left(\frac{\|x-s\|^2}{2l^2}\right)} Y(s) d\Omega}{\int_{\Omega} e^{\left(\frac{\|x-s\|^2}{2l^2}\right)} d\Omega} = \frac{\sum_{m=1}^{nc} \int_{\Omega_m} e^{\left(\frac{\|x-s\|^2}{2l^2}\right)} Y(s) d\Omega_m}{\sum_{m=1}^{nc} \int_{\Omega_m} e^{\left(\frac{\|x-s\|^2}{2l^2}\right)} d\Omega_m} \quad (4.50)$$

para  $nc$  o número total de células de  $\Omega$ . De acordo com o item (3.4), para cada célula definem-se nós e as variáveis de domínio são aproximadas sobre ela. Como consequência,  $\bar{Y}(x)$  pode ser escrita como:

$$\bar{Y}(x) = f_y[\varepsilon(1), \varepsilon(2), \dots, \varepsilon(ni)] \quad (4.51)$$

ou seja,  $\bar{Y}(x)$  é função de todos os  $\varepsilon$  locais, de cada um dos  $ni$  nós do domínio, já que  $Y(s)$  é função de  $\varepsilon$ . A função  $f_y$  da (4.51) é encontrada com as integrais da somatória da (4.50). Admite-se que as componentes do tensor de deformações  $\varepsilon$  são lineares sobre cada célula, hipótese bastante razoável no âmbito da formulação proposta (tensões iniciais lineares). Com as mesmas funções de forma  $\phi_k(s)$  da (3.37), as componentes  $ij$  do tensor de deformações para um ponto “s” qualquer da célula  $m$ , são dadas por:

$${}^m \varepsilon_{ij}(s) = \phi_k(s) {}^m \varepsilon_{ij}^k \quad (4.52)$$

onde  ${}^m \varepsilon_{ij}^k$  é a deformação nodal  $ij$  do nó  $k$  da célula  $m$ . A variável  $Y(s)$  é definida, com a aproximação da (4.52), e omitindo-se o índice  $m$ , como:

$$Y(s) = \frac{1}{2} (\phi_k(s) \varepsilon_{ij}^k) : E : (\phi_l(s) \varepsilon_{ij}^l) = \frac{1}{2} \phi_k(s) \phi_l(s) (\varepsilon_{ij}^k : E : \varepsilon_{ij}^l) \quad (4.53)$$

para  $k$  e  $l$  variando de 1 a 3 nós. Com a (4.53) na (4.50), a variável não-local fica:

$$\bar{Y}(x) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{m=1}^{nc} \int_{\Omega_m} \exp\left(-\frac{\|x-s\|^2}{2l^2}\right) \phi_k(s) \phi_l(s) (\varepsilon_{ij}^k : E : \varepsilon_{ij}^l) d\Omega_m}{\sum_{m=1}^{nc} \int_{\Omega_m} \exp\left(-\frac{\|x-s\|^2}{2l^2}\right) d\Omega_m} \quad (4.54)$$

Em vista das (3.37) e (3.38), as funções  $\phi_k(s)$  são dadas por:

$$\begin{aligned} \phi_k(s) &= \bar{C}^k r + \bar{D}^k \\ \bar{C}_k &= \frac{a_k^0}{2A} + \omega_k x(x) + \eta_k y(x) \\ \bar{D}_k &= \omega_k \cos(\theta) + \eta_k \sin(\theta) \end{aligned} \quad (4.55)$$

ou seja, são lineares com o raio  $r = \|x-s\|$ . Com a (4.55) substituída na (4.54), chega-se a:

$$\bar{Y}(x) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{m=1}^{nc} \int_{\Omega_m} \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) (\bar{C}_k r + \bar{D}_k) (\bar{C}_l r + \bar{D}_l) (\varepsilon_{ij}^k : E : \varepsilon_{ij}^l) d\Omega_m}{\sum_{m=1}^{nc} \int_{\Omega_m} \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) d\Omega_m} \quad (4.56)$$

Escrevendo-se as integrais da (4.56) em coordenadas cilíndricas  $r$  e  $\theta$ , tem-se:

$$\bar{Y}(x) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{m=1}^{nc} \int_{\theta} \int_r \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) (\bar{C}_k r + \bar{D}_k) (\bar{C}_l r + \bar{D}_l) r dr d\theta}{\sum_{m=1}^{nc} \int_{\theta} \int_r \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) r dr d\theta} (\varepsilon_{ij}^k : E : \varepsilon_{ij}^l) \quad (4.57)$$

As integrais em  $r$  são calculadas sem grandes dificuldades analiticamente. São, a menos das constantes, integrais do tipo:

$$\int_0^{Ra} \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) \cdot r \, dr, \quad \int_0^{Ra} \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) \cdot r^2 \, dr, \quad \int_0^{Ra} \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) \cdot r^3 \, dr \quad (4.58)$$

De maneira semelhante à (3.41), ou seja, fazendo  $d\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\Gamma$ , a

(4.57) fica:

$$\bar{Y}(x) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{m=1}^{nc} \int_{\theta} F^{kl} [Ra(\theta), \theta] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\Gamma_m}{\sum_{m=1}^{nc} \int_{\theta} \hat{k} [Ra(\theta), \theta] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} d\Gamma_m} (\varepsilon_{ij}^k : E : \varepsilon_{ij}^l) \quad (4.59)$$

onde  $F^{kl}$  (com nove componentes) armazenam as contribuições, para  $k$  e  $l$  variando de 1 a 3, das integrais analíticas em  $r$ . No denominador,  $\hat{k}$  (uma só componente), tem o mesmo significado.  $Ra(\theta)$  é a distância entre os pontos fonte e o de integração. As integrais da (4.59) são calculadas numericamente, por quadratura gaussiana, sobre o contorno  $\Gamma_m$  da célula  $m$ , a exemplo da (3.42). Assim, tem-se:

$$\bar{Y}(x) = \frac{1}{2} \frac{\sum_{m=1}^{nc} \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J|_p F^{kl} [Ra(\theta), \theta] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} w_n d\xi_p}{\sum_{m=1}^{nc} \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J|_p \hat{k} [Ra(\theta), \theta] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} w_n d\xi_p} (\varepsilon_{ij}^k : E : \varepsilon_{ij}^l) \quad (4.60)$$

para  $p$ , variando de 1 a 3, representando os lados da célula  $m$  triangular,  $|J|_p$  o jacobiano da transformação de coordenadas cartesianas para adimensionais  $\xi_p$ ,  $n$  os pontos de Gauss, de 1 ao número de pontos  $N_g$  e  $w_n$  o peso de Gauss do ponto  $n$ .

Observando-se a (4.60), para cada ponto  $x$  coincidente com os nós de célula,  $\bar{Y}(x)$  pode ser escrito matricialmente como:

$$\begin{Bmatrix} \bar{Y}(1) \\ \bar{Y}(2) \\ \vdots \\ \bar{Y}(ni) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & \cdots & \bar{M}_{1ni} & \bar{M}_{1(ni+1)} & \bar{M}_{1(ni+2)} & \bar{M}_{1(ni+3)} & \cdots & \bar{M}_{1(ni+3nc)} \\ \bar{M}_{21} & \cdots & \bar{M}_{2ni} & \bar{M}_{2(ni+1)} & \bar{M}_{2(ni+2)} & \bar{M}_{2(ni+3)} & \cdots & \bar{M}_{2(ni+3nc)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{M}_{ni1} & \cdots & \bar{M}_{nini} & \bar{M}_{ni(ni+1)} & \bar{M}_{ni(ni+2)} & \bar{M}_{ni(ni+3)} & \cdots & \bar{M}_{ni(ni+3nc)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} Y(1) \\ \vdots \\ Y(ni) \\ (\varepsilon^1 : E : \varepsilon^2)^l \\ (\varepsilon^1 : E : \varepsilon^3)^l \\ (\varepsilon^2 : E : \varepsilon^3)^l \\ \vdots \\ (\varepsilon^2 : E : \varepsilon^3)^{nc} \end{Bmatrix} \quad (4.61)$$

onde  $\bar{M}_{ik}$  é o resultado das influências das integrações da medida local  $k$  para o cálculo da variável não-local  $\bar{Y}(i)$  no nó  $i$ . As medidas locais de deformação, observando a (4.60), são:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^k : E : \varepsilon_{ij}^l &= Y(k) \quad \text{se } k = l \\ \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^k : E : \varepsilon_{ij}^l &= \frac{1}{2} (\varepsilon^k : E : \varepsilon^l) \quad \text{se } k \neq l \end{aligned} \quad (4.62)$$

ou seja, se  $k = l$ , recupera-se o valor da variável  $Y(k)$  local, calculada no nó  $k$  da célula. Se  $k \neq l$ , resulta no produto da segunda expressão da (4.62), entre tensores de deformação de diferentes nós da mesma célula, tomados dois a dois (nó 1 com 2, nó 1 com 3, nó 2 com 3). Daí o vetor do segundo membro da (4.61), com as medidas locais de deformação, ser constituído dos valores de  $Y(i)$ , para  $i$  de 1 até  $ni$  pontos internos, e dos valores de  $(\varepsilon^k : E : \varepsilon^l)^m$  para  $k \neq l$  ( $k = 1, l = 2$  ou  $k = 1, l = 3$  ou  $k = 2, l = 3$ ) da célula  $m$ , para  $m$  de 1 até o número de células  $nc$ . Resumindo-se, tem-se a relação:

$$\{\bar{Y}\} = [\bar{M}] \cdot \{Y\} \quad (4.63)$$

que estabelece que as variáveis não-locais são escritas em função das variáveis locais, a partir da aproximação das componentes de deformação por célula.

O procedimento para o cálculo das integrais das medidas ponderadas de deformação para o modelo de dano para o concreto é descrito a seguir, seguindo

os passos anteriores. Conforme o item (2.3.3.2), as variáveis locais do modelo são definidas como:

$$\mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{e}(\mathbf{x}) : \mathbf{e}(\mathbf{x}), \quad \text{tr}^+ \varepsilon = \langle \varepsilon_{kk}(\mathbf{x}) \rangle, \quad \text{tr}^- \varepsilon = -\langle -\varepsilon_{kk}(\mathbf{x}) \rangle \quad (4.64)$$

cujas componentes  $ij$  da parte desviadora do tensor de deformações são dadas por

$e_{ij}(\mathbf{x}) = \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) - \frac{1}{3} [\varepsilon_{kk}(\mathbf{x})]$ . As variáveis não-locais foram definidas como:

$$\langle \mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{x}) \rangle_i = \frac{\int_{\Omega} \text{Ep}_i(\mathbf{x}-\mathbf{s}) \mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{s}) d\Omega}{\int_{\Omega} \text{Ep}_i(\mathbf{x}-\mathbf{s}) d\Omega} = \frac{\sum_{m=1}^{nc} \int_{\Omega_m} \text{Ep}_i(\mathbf{x}-\mathbf{s}) \mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{s}) d\Omega_m}{\sum_{m=1}^{nc} \int_{\Omega_m} \text{Ep}_i(\mathbf{x}-\mathbf{s}) d\Omega_m} \quad (4.65)$$

$$\langle \text{tr}^+ \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle_i = \frac{\int_{\Omega} \text{Ep}_i(\mathbf{x}-\mathbf{s}) \text{tr}^+ \varepsilon(\mathbf{s}) d\Omega}{\int_{\Omega} \text{Ep}_i(\mathbf{x}-\mathbf{s}) d\Omega} = \frac{\sum_{m=1}^{nc} \int_{\Omega_m} \text{Ep}_i(\mathbf{x}-\mathbf{s}) \text{tr}^+ \varepsilon(\mathbf{s}) d\Omega_m}{\sum_{m=1}^{nc} \int_{\Omega_m} \text{Ep}_i(\mathbf{x}-\mathbf{s}) d\Omega_m} \quad (4.66)$$

$$\langle \text{tr}^- \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle_i = \frac{\int_{\Omega} \text{Ep}_i(\mathbf{x}-\mathbf{s}) \text{tr}^- \varepsilon(\mathbf{s}) d\Omega}{\int_{\Omega} \text{Ep}_i(\mathbf{x}-\mathbf{s}) d\Omega} = \frac{\sum_{m=1}^{nc} \int_{\Omega_m} \text{Ep}_i(\mathbf{x}-\mathbf{s}) \text{tr}^- \varepsilon(\mathbf{s}) d\Omega_m}{\sum_{m=1}^{nc} \int_{\Omega_m} \text{Ep}_i(\mathbf{x}-\mathbf{s}) d\Omega_m} \quad (4.67)$$

já escritas como somatórias de integrais sobre as células, onde

$\text{Ep}_i(\mathbf{x}-\mathbf{s}) = \exp\left(-\frac{\|\mathbf{x}-\mathbf{s}\|^2}{2l_i^2}\right)$  para  $i = t, c$ . Logo, as variáveis ponderadas em  $x$  são

funções dos valores locais:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}_\varepsilon(\mathbf{x}) \rangle_i &= f_i[\mathbf{e}(1), \mathbf{e}(2), \dots, \mathbf{e}(n_i)] \\ \langle \text{tr}^+ \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle_i &= g_i[\text{tr}^+ \varepsilon(1), \text{tr}^+ \varepsilon(2), \dots, \text{tr}^+ \varepsilon(n_i)] \\ \langle \text{tr}^- \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle_i &= h_i[\text{tr}^- \varepsilon(1), \text{tr}^- \varepsilon(2), \dots, \text{tr}^- \varepsilon(n_i)] \end{aligned} \quad (4.68)$$

onde  $e(j)$ ,  $\text{tr}^+\varepsilon(j)$  e  $\text{tr}^-\varepsilon(j)$  são as variáveis tensor da parte desviadora de  $\varepsilon$ , traço positivo e traço negativo de  $\varepsilon$ , respectivamente, para o nó de célula  $j$ . Admitindo-se a mesma aproximação linear para as componentes de deformação da (4.52), têm-se:

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(s) &= \frac{1}{2} (\phi_k(s) e_{ij}^k) : (\phi_l(s) e_{ij}^l) = \frac{1}{2} \phi_k(s) \phi_l(s) (e_{ij}^k : e_{ij}^l) \\ \text{tr}^+\varepsilon(s) &= \phi_k(s) \text{tr}^+\varepsilon^k \\ \text{tr}^-\varepsilon(s) &= \phi_k(s) \text{tr}^-\varepsilon^k \end{aligned} \quad (4.69)$$

onde  $e_{ij}^k$ ,  $\text{tr}^+\varepsilon^k$  e  $\text{tr}^-\varepsilon^k$  são as variáveis do nó  $k$ . Com a (4.55), as (4.65)-(4.67) ficam escritas como:

$$\langle J_\varepsilon(\mathbf{x}) \rangle_i = \frac{1}{2} \frac{\sum_{m=1}^{nc} \int_0^r \int_r \text{Ep}_i(\mathbf{x}-s) (\bar{C}_k r + \bar{D}_k) (\bar{C}_l r + \bar{D}_l) r dr d\theta}{\sum_{m=1}^{nc} \int_0^r \int_r \text{Ep}_i(\mathbf{x}-s) r dr d\theta} (e_{qr}^k : e_{qr}^l) \quad (4.70)$$

$$\langle \text{tr}^+\varepsilon(\mathbf{x}) \rangle_i = \frac{\sum_{m=1}^{nc} \int_0^r \int_r \text{Ep}_i(\mathbf{x}-s) (\bar{C}_k r + \bar{D}_k) r dr d\theta}{\sum_{m=1}^{nc} \int_0^r \int_r \text{Ep}_i(\mathbf{x}-s) r dr d\theta} (\text{tr}^+\varepsilon^k) \quad (4.71)$$

$$\langle \text{tr}^-\varepsilon(\mathbf{x}) \rangle_i = \frac{\sum_{m=1}^{nc} \int_0^r \int_r \text{Ep}_i(\mathbf{x}-s) (\bar{C}_k r + \bar{D}_k) r dr d\theta}{\sum_{m=1}^{nc} \int_0^r \int_r \text{Ep}_i(\mathbf{x}-s) r dr d\theta} (\text{tr}^-\varepsilon^k) \quad (4.72)$$

As integrais analíticas em  $r$ , nas (4.70)-(4.72), são as mesmas da (4.58). Resolvendo-as, sobram as expressões com as integrais numéricas sobre o contorno das células, dadas pelas:

$$\langle J_\varepsilon(\mathbf{x}) \rangle_i = \frac{1}{2} \frac{\sum_{m=1}^{nc} \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J|_p F_i^{kl} [\text{Ra}(\theta), \theta] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} w_n d\xi_p}{\sum_{m=1}^{nc} \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J|_p \hat{k}_i [\text{Ra}(\theta), \theta] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} w_n d\xi_p} (e_{qr}^k : e_{qr}^l) \quad (4.73)$$

$$\langle \text{tr}^+ \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle_i = \frac{\sum_{m=1}^{nc} \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J|_p G_i^k [\text{Ra}(\theta), \theta] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} w_n d\xi_p}{\sum_{m=1}^{nc} \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J|_p \hat{k}_i [\text{Ra}(\theta), \theta] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} w_n d\xi_p} (\text{tr}^+ \varepsilon^k) \quad (4.74)$$

$$\langle \text{tr}^- \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle_i = \frac{\sum_{m=1}^{nc} \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J|_p G_i^k [\text{Ra}(\theta), \theta] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} w_n d\xi_p}{\sum_{m=1}^{nc} \sum_{p=1}^3 \sum_{n=1}^{N_g} |J|_p \hat{k}_i [\text{Ra}(\theta), \theta] \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \eta} w_n d\xi_p} (\text{tr}^- \varepsilon^k) \quad (4.75)$$

onde as variáveis nas (4.73)-(4.75) são as mesmas definidas na (4.59), observando-se o índice  $i$  na  $F_i^{kl}$  para tração ou compressão, e definindo-se  $G_i^k$  (três componentes) como as contribuições das integrais analíticas para as expressões dos traços positivo e negativo. Como na (4.61), é possível escrever com matrizes as relações entre as variáveis não-locais e as locais. Para  $\langle J_\varepsilon(\mathbf{x}) \rangle_i$ , tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \langle J_\varepsilon(1) \rangle_i \\ \langle J_\varepsilon(2) \rangle_i \\ \vdots \\ \langle J_\varepsilon(ni) \rangle_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1ni} & M_{1(ni+1)} & M_{1(ni+2)} & M_{1(ni+3)} & \cdots & M_{1(ni+3nc)} \\ M_{21} & \cdots & M_{2ni} & M_{2(ni+1)} & M_{2(ni+2)} & M_{2(ni+3)} & \cdots & M_{2(ni+3nc)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_{ni1} & \cdots & M_{nini} & M_{ni(ni+1)} & M_{ni(ni+2)} & M_{ni(ni+3)} & \cdots & M_{ni(ni+3nc)} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{Bmatrix} J_\varepsilon(1) \\ \vdots \\ J_\varepsilon(ni) \\ (e^1 : e^2)^l \\ (e^1 : e^3)^l \\ (e^2 : e^3)^l \\ \vdots \\ (e^2 : e^3)^{nc} \end{Bmatrix} \quad (4.76)$$

onde  $M_{ik}$  tem o mesmo significado que  $\bar{M}_{ik}$  da (4.61), junto com as demais variáveis. Para os traços positivo ou negativo, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \langle \text{tr}^{+/-} \varepsilon(1) \rangle_i \\ \langle \text{tr}^{+/-} \varepsilon(2) \rangle_i \\ \vdots \\ \langle \text{tr}^{+/-} \varepsilon(ni) \rangle_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \cdots & T_{1ni} \\ T_{21} & T_{22} & \cdots & T_{2ni} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{ni1} & T_{ni2} & \cdots & T_{nini} \end{bmatrix}_i \cdot \begin{Bmatrix} \text{tr}^{+/-} \varepsilon^1 \\ \text{tr}^{+/-} \varepsilon^2 \\ \vdots \\ \text{tr}^{+/-} \varepsilon^{ni} \end{Bmatrix} \quad (4.77)$$



tendo  $T_{ik}$  originado das (4.74) e (4.75). A expressão (4.77) vale para  $\langle \text{tr}^+ \varepsilon(x) \rangle_i$  ou  $\langle \text{tr}^- \varepsilon(x) \rangle_i$ . Resumindo, têm-se as relações entre as variáveis não-locais e locais:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{J}_\varepsilon \rangle_i &= [\mathbf{M}]_i \cdot \{ \mathbf{J}_\varepsilon \} \\ \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_i &= [\mathbf{T}]_i \cdot \{ \text{tr}^+ \varepsilon \} \\ \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_i &= [\mathbf{T}]_i \cdot \{ \text{tr}^- \varepsilon \} \end{aligned} \quad (4.78)$$

#### **4.6. Matriz Tangente Consistente para os Modelos Não-Locais**

Com modelos de dano não-locais, a derivada  $\partial \Delta \sigma_n / \partial \Delta \varepsilon_n$  não é mais local, ou seja, o tensor de quarta ordem resultante não é mais diagonal, e sim, não-nulo em toda sua extensão. Isto significa dizer que o incremento das tensões num ponto depende das deformações de todos os nós do domínio do corpo. Este é o conceito de não-localidade. Apresentam-se, neste item, as matrizes tangentes consistentes não-locais dos modelos de dano discutidos nesta tese.

Recuperando-se a (4.27) têm-se, da definição do modelo não-local:

$$\begin{aligned} F &= \bar{Y} - Y_0 - MD \\ \Delta F_n &= \Delta \bar{Y}_n - M \Delta D_n \\ \dot{F} &= \frac{\partial F}{\partial \bar{Y}} \cdot \frac{\partial \bar{Y}}{\partial \varepsilon} \cdot \dot{\varepsilon} + \frac{\partial F}{\partial D} \cdot \dot{D} = 0 \\ \Delta F_n &= \frac{\partial \Delta F_n}{\partial \Delta \bar{Y}_n} \cdot \frac{\partial \Delta \bar{Y}_n}{\partial \Delta \varepsilon_n} \cdot \Delta \varepsilon_n + \frac{\partial \Delta F_n}{\partial \Delta D_n} \cdot \Delta D_n = 0 \end{aligned} \quad (4.79)$$

onde agora  $\Delta \bar{Y}_n$  é a variável incremental não-local. Com a última da (4.79), tem-se:

$$\Delta D_n = - \frac{\left[ \frac{\partial \Delta F_n}{\partial \Delta \bar{Y}_n} \cdot \frac{\partial \Delta \bar{Y}_n}{\partial \Delta \varepsilon_n} \right]}{\frac{\partial \Delta F_n}{\partial \Delta D_n}} \cdot \Delta \varepsilon_n = \frac{\left[ 1 \cdot \frac{\partial \Delta \bar{Y}_n}{\partial \Delta \varepsilon_n} \right]}{M} \cdot \Delta \varepsilon_n \quad (4.80)$$



Nas primeiras  $ni$  linhas da (4.84), a derivada é sempre local. Nas linhas restantes, a derivada tem sempre dois termos não-nulos, em razão dos produtos cruzados das deformações dos três nós por célula, como na célula  $i$  da (4.84). Tendo em vista a (4.82), a derivada do incremento de dano em relação aos incrementos de deformação fica:

$$\frac{\partial \Delta D_n^k}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}} = \frac{1}{M} \{\overline{M}_k\}^T \cdot \left\{ \left[ \frac{\partial \{\Delta Y_n\}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}} \right] + \left[ \frac{\partial^2 \{\Delta Y_n\}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}^2} \right] \{\Delta \varepsilon_n\} \right\} \quad (4.85)$$

e a matriz tangente consistente, conforme a (4.26), para o modelo não-local, fica:

$$\frac{\partial \Delta \sigma_n^k}{\partial \Delta \varepsilon_n} = (1 - D_n^k - \Delta D_n^k) E - \frac{1}{M} [E : (\varepsilon_n^k + \Delta \varepsilon_n^k)] \otimes \left[ \{\overline{M}_k\}^T \cdot \left\{ \left[ \frac{\partial \{\Delta Y_n\}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}} \right] + \left[ \frac{\partial^2 \{\Delta Y_n\}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}^2} \right] \{\Delta \varepsilon_n\} \right\} \right] \quad (4.86)$$

para o nó  $k$ .

Em relação ao modelo de dano para o concreto, o volume de operações para derivar a matriz tangente consistente é um pouco maior. Em incrementos, as variáveis não-locais da (4.78) ficam dadas por:

$$\begin{aligned} \{\Delta \langle J_\varepsilon \rangle_i\} &= [M]_i \cdot \{\Delta J_\varepsilon\} \\ \{\Delta \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_i\} &= [T]_i \cdot \{\Delta \text{tr}^+ \varepsilon\} \\ \{\Delta \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_i\} &= [T]_i \cdot \{\Delta \text{tr}^- \varepsilon\} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Por definição, conforme o item (2.3.3.2), as funções de carregamento  $\Delta F_i$ ,  $i = t, c$  são definidas em função dos invariantes de deformação não-locais, ou seja:

$$\Delta F_i = \Delta F_i \left( \{\Delta \langle J_\varepsilon \rangle_i\}, \{\Delta \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_i\}, \{\Delta \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_i\}, \Delta D_{tn}, \Delta D_{cn} \right) \quad (4.88)$$

Como as variáveis dos invariantes da (4.87) são funções das deformações nos  $ni$  nós de domínio, pode-se escrever:

$$\Delta F_i = \Delta F_i(\{\Delta \varepsilon_n\}, \Delta D_{tn}, \Delta D_{cn}) \quad (4.89)$$

O sistema linear de equações em  $\Delta D_{tn}$  e  $\Delta D_{cn}$  também pode ser montado para as funções de carregamento não-locais, substituindo, na (4.39),  $\Delta f_i$  por  $\Delta F_i$ . Assim, as variáveis de dano do modelo, ao invés das (4.42) e (4.43), ficam:

$$\Delta D_{tn} = \frac{\left( \frac{\partial \Delta F_{tn}}{\partial \Delta D_{cn}} \cdot \frac{\partial \Delta F_{cn}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}} : \{\Delta \varepsilon_n\} - \frac{\partial \Delta F_{cn}}{\partial \Delta D_{cn}} \cdot \frac{\partial \Delta F_{tn}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}} : \{\Delta \varepsilon_n\} \right)}{h} \quad (4.90)$$

$$\Delta D_{cn} = \frac{\left( \frac{\partial \Delta F_{cn}}{\partial \Delta D_{tn}} \cdot \frac{\partial \Delta F_{tn}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}} : \{\Delta \varepsilon_n\} - \frac{\partial \Delta F_{tn}}{\partial \Delta D_{tn}} \cdot \frac{\partial \Delta F_{cn}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}} : \{\Delta \varepsilon_n\} \right)}{h} \quad (4.91)$$

com  $h = \frac{\partial \Delta F_{tn}}{\partial \Delta D_{tn}} \cdot \frac{\partial \Delta F_{cn}}{\partial \Delta D_{cn}} - \frac{\partial \Delta F_{tn}}{\partial \Delta D_{cn}} \cdot \frac{\partial \Delta F_{cn}}{\partial \Delta D_{tn}}$ . Seguindo-se os mesmos passos que

levaram à (4.47), tem-se a matriz tangente consistente do modelo:

$$\frac{\partial \Delta \sigma_n}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}} = \tilde{\mathbf{E}} - \frac{\left\{ \mathbf{A} \otimes \left[ \frac{\partial \Delta F_{tn}}{\partial \Delta D_{cn}} \left( \frac{\partial^2 \Delta F_{cn}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}^2} : \{\Delta \varepsilon_n\} + \frac{\partial \Delta F_{cn}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}} \right) - \frac{\partial \Delta F_{cn}}{\partial \Delta D_{cn}} \left( \frac{\partial^2 \Delta F_{tn}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}^2} : \{\Delta \varepsilon_n\} + \frac{\partial \Delta F_{tn}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}} \right) \right] \right\}}{h} \quad (4.92)$$

$$- \frac{\left\{ \mathbf{B} \otimes \left[ \frac{\partial \Delta F_{cn}}{\partial \Delta D_{tn}} \left( \frac{\partial^2 \Delta F_{tn}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}^2} : \{\Delta \varepsilon_n\} + \frac{\partial \Delta F_{tn}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}} \right) - \frac{\partial \Delta F_{tn}}{\partial \Delta D_{tn}} \left( \frac{\partial^2 \Delta F_{cn}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}^2} : \{\Delta \varepsilon_n\} + \frac{\partial \Delta F_{cn}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n\}} \right) \right] \right\}}{h}$$

A maior dificuldade operacional de se obter a matriz da (4.92) diz respeito ao cálculo das derivadas parciais. Derivando as expressões (2.55) e (2.56) de  $F_t$  e  $F_c$  em relação às variáveis incrementais, omitindo-se o índice  $n$ , obtêm-se:

$$\frac{\partial \Delta F_t}{\partial \Delta D_t} = -8\mu\mu_0(1 - D_c)\Delta \langle J_\varepsilon \rangle_t + K_0\Delta \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_t \left[ 2a_t \left( K_+ \Delta \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_t + K_- \Delta \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_t \right) - b_{t,r_t}(D_t) \right] \quad (4.93)$$

$$+ b_t \frac{dr_t}{d\Delta D_t} \left( K_+ \Delta \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_t + K_- \Delta \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_t \right) - 2k_{t,r_t}(D_t) \frac{dr_t}{d\Delta D_t} (1 - \alpha D_c)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta F_t}{\partial \Delta D_c} &= -8\mu\mu_0(1-D_t)\Delta\langle J_\varepsilon \rangle_t + K_0\Delta\langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_t \left[ 2a_t \left( K_+ \Delta\langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_t + K_- \Delta\langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_t \right) - b_{tr}(D_t) \right] \\ &\quad + \alpha k_t r_t^2(D_t) \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\frac{\partial \Delta F_c}{\partial \Delta D_t} = -8\mu\mu_0(1-D_c)\Delta\langle J_\varepsilon \rangle_c - K_0\Delta\langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_c \left[ 2a_c \left( K_+ \Delta\langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_c + K_- \Delta\langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_c \right) - b_{tr}(D_c) \right] \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta F_c}{\partial \Delta D_c} &= -8\mu\mu_0(1-D_t)\Delta\langle J_\varepsilon \rangle_c + K_0\Delta\langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_c \left[ 2a_c \left( K_+ \Delta\langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_c + K_- \Delta\langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_c \right) - b_{tr}(D_c) \right] \\ &\quad + b_c \frac{dr_c}{d\Delta D_c} \left( K_+ \Delta\langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_c + K_- \Delta\langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_c \right) - 2k_{tr}(D_c) \frac{dr_c}{d\Delta D_c} \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\frac{\partial \Delta F_t}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} = 4\mu^2 \frac{\partial \Delta \langle J_\varepsilon \rangle_t}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} - \left[ 2a_t \left( K_+ \Delta\langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_t + K_- \Delta\langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_t \right) - b_{tr}(D_t) \right] \left[ K_+ \frac{\partial \Delta \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_t}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} + K_- \frac{\partial \Delta \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_t}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} \right] \quad (4.97)$$

$$\frac{\partial \Delta F_c}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} = 4\mu^2 \frac{\partial \Delta \langle J_\varepsilon \rangle_c}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} - \left[ 2a_c \left( K_+ \Delta\langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_c + K_- \Delta\langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_c \right) - b_{tr}(D_c) \right] \left[ K_+ \frac{\partial \Delta \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_c}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} + K_- \frac{\partial \Delta \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_c}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} \right] \quad (4.98)$$

Aplicando-se a regra da cadeia para as derivadas que aparecem nas (4.97) e (4.98), têm-se, para  $i = t, c$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \langle J_\varepsilon \rangle_i}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} &= \frac{\partial \Delta \langle J_\varepsilon \rangle_i}{\partial \{\Delta J_\varepsilon\}} \cdot \frac{\partial \{\Delta J_\varepsilon\}}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} \\ \frac{\partial \Delta \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_i}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} &= \frac{\partial \Delta \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_i}{\partial \{\Delta \text{tr}^+ \varepsilon\}} \cdot \frac{\partial \{\Delta \text{tr}^+ \varepsilon\}}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} \\ \frac{\partial \Delta \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_i}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} &= \frac{\partial \Delta \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_i}{\partial \{\Delta \text{tr}^- \varepsilon\}} \cdot \frac{\partial \{\Delta \text{tr}^- \varepsilon\}}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} \end{aligned} \quad (4.99)$$

Para um nó  $k$  qualquer, com a (4.87), têm-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Delta \langle J_\varepsilon \rangle_i^k}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} &= \{M_k\}_i^T \cdot \frac{\partial \{\Delta J_\varepsilon\}}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} \\
\frac{\partial \Delta \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_i^k}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} &= \{T_k\}_i^T \cdot \frac{\partial \{\Delta \text{tr}^+ \varepsilon\}}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} \\
\frac{\partial \Delta \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_i^k}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} &= \{T_k\}_i^T \cdot \frac{\partial \{\Delta \text{tr}^- \varepsilon\}}{\partial \{\Delta \varepsilon\}}
\end{aligned} \tag{4.100}$$

sendo  $\{M_k\}_i^T$  e  $\{T_k\}_i^T$  os transpostos dos vetores com as linhas  $k$  de  $[M]_i$  e  $[T]_i$ , respectivamente. A partir das (4.76) e (4.77), definem-se:

$$\frac{\partial \{\Delta J_\varepsilon\}}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} = \begin{bmatrix} (e^1 + \Delta e^1) & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & (e^{ni} + \Delta e^{ni}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdots & \cdots & (e^2 + \Delta e^2)^i & (e^1 + \Delta e^1)^i & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & (e^3 + \Delta e^3)^i & 0 & (e^1 + \Delta e^1)^i & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & 0 & (e^3 + \Delta e^3)^i & (e^2 + \Delta e^2)^i & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \left[ \overline{I} \otimes I - \frac{1}{3} I \otimes I \right] \tag{4.101}$$

$$\frac{\partial \{\Delta \text{tr}^- \varepsilon\}}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} = \begin{bmatrix} H[\text{tr}(\varepsilon^1 + \Delta \varepsilon^1)]I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H[\text{tr}(\varepsilon^2 + \Delta \varepsilon^2)]I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H[\text{tr}(\varepsilon^{ni} + \Delta \varepsilon^{ni})]I \end{bmatrix} \tag{4.102}$$

$$\frac{\partial \{\Delta \text{tr}^+ \varepsilon\}}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} = \begin{bmatrix} H[-\text{tr}(\varepsilon^1 + \Delta \varepsilon^1)]I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & H[-\text{tr}(\varepsilon^2 + \Delta \varepsilon^2)]I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & H[-\text{tr}(\varepsilon^{ni} + \Delta \varepsilon^{ni})]I \end{bmatrix} \tag{4.103}$$

onde, na (4.101),  $\frac{\partial \Delta e}{\partial \Delta \varepsilon} = \overline{I} \otimes I - \frac{1}{3} I \otimes I$  localmente, nas (4.102) e (4.103),  $H[x]$  é a função de Heavyside já definida anteriormente e  $I$  o tensor identidade. Derivando mais uma vez as (4.97) e (4.98), obtêm-se:

$$\frac{\partial^2 \Delta F_t}{\partial \{\Delta \varepsilon\}^2} = 4\mu^2 \frac{\partial^2 \Delta \langle J_\varepsilon \rangle_t}{\partial \{\Delta \varepsilon\}^2} - 2a_t \left\{ \left[ K_+ \frac{\partial \Delta \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_t}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} + K_- \frac{\partial \Delta \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_t}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} \right]^2 \right\} \tag{4.104}$$

$$\frac{\partial^2 \Delta F_c}{\partial \{\Delta \varepsilon\}^2} = 4\mu^2 \frac{\partial^2 \Delta \langle J_\varepsilon \rangle_c}{\partial \{\Delta \varepsilon\}^2} - 2a_c \left\{ \left[ K_+ \frac{\partial \Delta \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_c}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} + K_- \frac{\partial \Delta \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_c}{\partial \{\Delta \varepsilon\}} \right]^2 \right\} \quad (4.105)$$

onde define-se, para o nó  $k$ :

$$\frac{\partial^2 \Delta \langle J_\varepsilon \rangle_i^k}{\partial \{\Delta \varepsilon\}^2} = \{M_k\}_i^T \cdot \frac{\partial^2 \{\Delta J_\varepsilon\}}{\partial \{\Delta \varepsilon\}^2} \quad (4.106)$$

#### **4.7. Algoritmos do Problema Não-Linear de Valor de Contorno para a Formulação Implícita do MEC com Modelos de Dano**

Para a completa análise numérica do problema não-linear de valor de contorno, deve-se discretizá-lo no espaço e no tempo, conforme comentado no item (4.3). A discretização temporal define o problema em passo finito. A espacial resulta na equação de equilíbrio não-linear do método dos elementos de contorno.

Apresenta-se, neste item, o algoritmo computacional do problema não-linear com os modelos de dano para o intervalo de tempo  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ . O procedimento de resolução é iterativo no incremento  $\Delta t_n$ , do tipo Newton-Raphson, ou seja, com as etapas de previsão e correção. O algoritmo da formulação é implícito com matriz tangente consistente algorítmica. Para os modelos não-locais, acrescenta-se uma fase intermediária no algoritmo, para a determinação dos valores ponderados das variáveis não-locais.

##### **4.7.1. Algoritmo para o modelo de dano simplificado**

Conhecendo-se, em  $t_n$ , as variáveis do problema, ou seja, tensões  $\sigma_n$ , deformações  $\varepsilon_n$ , variáveis de dano  $D_n$  e variáveis de contorno, para todos os nós da estrutura, o problema é determinar as mesmas variáveis em  $t_{n+1} = t_n + \Delta t_n$ .

\* Etapa de Previsão:

O carregamento, conforme a (4.19), é  $\{\Delta N_n\}$ , que corresponde ao carregamento elástico. Fixando-se  $D = D_n$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_n$  e  $\sigma = \sigma_n$ , calcula-se a matriz tangente contínua da equação de equilíbrio, ou:

$$[C^t] = [[E] - [\bar{S}] \cdot [[E] - [\partial\sigma_n/\partial\varepsilon_n]]] \quad (p1)$$

com  $\partial\sigma_n/\partial\varepsilon_n$  dada pela (4.32) ou pela correspondente não-local. Para a iteração  $i = 1$ , resolve-se o sistema linearizado em  $\{\delta\Delta\varepsilon_n^i\}$ , ou:

$$[C^t] \cdot \{\delta\Delta\varepsilon_n^1\} = \{\Delta N_n\} \quad (p2)$$

Atualiza-se a variável com os incrementos de deformação:

$$\{\Delta\varepsilon_n^1\} = \{\delta\Delta\varepsilon_n^1\} \quad (p3)$$

$$\{\varepsilon_{n+1}^1\} = \{\varepsilon_n\} + \{\Delta\varepsilon_n^1\} \quad (p4)$$

Calcula-se, conforme a (4.61):

$$\{\Delta Y_n^1\} = f(\{\Delta\varepsilon_n^1\}) \quad (p5)$$

Para o modelo não-local calcula-se, conforme a (4.63), o vetor com as variáveis não-locais:

$$\{\bar{Y}_{n+1}^1\} = [\bar{M}] \cdot \{Y_n + \Delta Y_n^1\} \quad (p6)$$

\* Etapa de Correção:

Para cada nó interno, procede-se da forma: da (4.27) para o modelo local ou da (4.79) para o não-local, calcula-se a função de carregamento com a variável  $\{Y_{n+1}^1\}$  ou  $\{\bar{Y}_{n+1}^1\}$ , com  $D = D_n$ , ou seja:

Para o modelo local:

$$f_{n+1}^1 = \Delta f_n^1 + f_n = Y_{n+1}^1 - Y_0 - MD_n \quad (c1a)$$

Para o modelo não-local:

$$F_{n+1}^1 = \Delta F_n^1 + F_n = \bar{Y}_{n+1}^1 - Y_0 - MD_n \quad (c1b)$$

Se  $f_{n+1}^1/F_{n+1}^1 \leq 0$ , ocorre descarregamento elástico, sem evolução da variável de dano, ou seja,  $\Delta D_n^1 = 0$  e  $D_{n+1}^1 = D_n$ . Se  $f_{n+1}^1/F_{n+1}^1 > 0$ , ocorre evolução da variável de dano, e  $\Delta D_n^1$  é determinada fazendo  $f_{n+1}^1/F_{n+1}^1$  na (c1) igual a zero, resultando:



$$\Delta D_n^1 = \frac{Y_{n+1}^1 - Y_0 - MD_n}{M} \quad (c2a)$$

$$\Delta D_n^1 = \frac{\bar{Y}_{n+1}^1 - Y_0 - MD_n}{M} \quad (c2b)$$

Com  $\Delta D_n^1$ , calcula-se o tensor de tensões reais da (4.25):

$$\Delta \sigma_n^1 = (1 - D_n - \Delta D_n^1) E : \Delta \varepsilon_n^1 - \Delta D_n^1 E : \varepsilon_n \quad (c3)$$

Com as variáveis  $\{\Delta \varepsilon_n^1\}$  e  $\{\Delta \sigma_n^1\}$ , volta-se à equação de equilíbrio:

$$\{Y(\Delta \varepsilon_n^1)\} = -[E] \cdot \{\Delta \varepsilon_n^1\} + \{\Delta N_n\} + [\bar{S}] \cdot \{[E] \cdot \{\Delta \varepsilon_n^1\} - \{\Delta \sigma_n^1\}\} \quad (c4)$$

Checa-se a convergência: calcula-se a norma euclidiana do vetor  $\{Y(\Delta \varepsilon_n^1)\}$ :

$$\|\{Y(\Delta \varepsilon_n^1)\}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{ni} (Y(\Delta \varepsilon_n^1)_i)^2} \quad (c5)$$

Se  $i = 1$ , faz-se o teste:

$$\text{Se } \|\{Y(\Delta \varepsilon_n^1)\}\| < \text{tol}, \text{ para } \text{tol} \text{ um valor de tolerância fixo, o}$$

processo termina e atualizam-se as variáveis para  $t_{n+1}$ . Retorna-se à etapa de previsão para  $\Delta t_{n+1} = t_{n+2} - t_{n+1}$ .

$$\text{Se } \|\{Y(\Delta \varepsilon_n^1)\}\| > \text{tol}, \text{ computa-se a variável } \text{tol}_1 = \|\{Y(\Delta \varepsilon_n^1)\}\|.$$

Prossegue na (c6).

Fim (se  $i = 1$ )

Se  $i > 1$ , faz-se o teste:

$$\text{Se } \|\{Y(\Delta \varepsilon_n^1)\}\| < k_{\text{tol}} \cdot \text{tol}_1, \text{ sendo } k_{\text{tol}} \text{ um valor fixo que define}$$

uma porcentagem (por exemplo, 1% ou 0.1%) de  $\text{tol}_1$ , este definido na primeira iteração  $i = 1$ , o processo termina e atualizam-se as variáveis para  $t_{n+1}$ . Retorna-se à etapa de previsão para  $\Delta t_{n+1} = t_{n+2} - t_{n+1}$ .

$$\text{Se } \|\{Y(\Delta \varepsilon_n^1)\}\| > k_{\text{tol}} \cdot \text{tol}_1, \text{ prossegue na (c6).}$$

Fim (se  $i > 1$ )

Calcula-se a matriz tangente consistente da equação de equilíbrio, como na (4.22), considerando-se a (4.31) para o modelo local ou a (4.86) para o modelo não-local.

$$[C^{\text{C}}] = [[E] - [\bar{S}] \cdot [[E] - [\partial \Delta \sigma_n^1 / \partial \Delta \varepsilon_n^1]]] \quad (c6)$$

Resolve-se o sistema linear:

$$[C^{tc}] \cdot \{\delta \Delta \varepsilon_n^{i+1}\} = \{Y(\Delta \varepsilon_n^i)\} \quad (c7)$$

Atualizam-se as variáveis:

$$\{\Delta \varepsilon_n^{i+1}\} = \{\Delta \varepsilon_n^i\} + \{\delta \Delta \varepsilon_n^{i+1}\} \quad (c8)$$

$$\{\varepsilon_{n+1}^{i+1}\} = \{\varepsilon_n\} + \{\Delta \varepsilon_n^{i+1}\} \quad (c9)$$

$$\{\Delta Y_n^{i+1}\} = f(\{\Delta \varepsilon_n^{i+1}\}) \quad (c10)$$

$$\{\bar{Y}_{n+1}^{i+1}\} = [\bar{M}] \cdot \{Y_n + \Delta Y_n^{i+1}\} \quad (c11)$$

Faz-se  $i = i + 1$  e retorna-se à (c1).

#### **4.7.2. Algoritmo para o modelo de dano do concreto**

Conhecendo-se as variáveis em  $t_n$ , ou seja,  $\sigma_n$ ,  $\varepsilon_n$ ,  $D_{tn}$  e  $D_{cn}$ , para o incremento  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ , têm-se:

\* Etapa de Previsão:

Fixando-se  $D_t = D_{tn}$ ,  $D_c = D_{cn}$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_n$  e  $\sigma = \sigma_n$ , calcula-se a matriz tangente contínua da equação de equilíbrio, com  $\partial \sigma_n / \partial \varepsilon_n$  dada pela (4.48) ou pela correspondente não-local.

$$[C^t] = [[E] - [\bar{S}] \cdot [[E] - [\partial \sigma_n / \partial \varepsilon_n]]] \quad (p1)$$

Com o carregamento  $\{\Delta N_n\}$ , resolve-se o sistema:

$$[C^t] \cdot \{\delta \Delta \varepsilon_n^1\} = \{\Delta N_n\} \quad (p2)$$

Atualizam-se as variáveis com as deformações:

$$\{\Delta \varepsilon_n^1\} = \{\delta \Delta \varepsilon_n^1\} \quad (p3)$$

$$\{\varepsilon_{n+1}^1\} = \{\varepsilon_n\} + \{\Delta \varepsilon_n^1\} \quad (p4)$$

Por definição, em função de  $\{\Delta \varepsilon_n^1\}$ , calculam-se as variáveis locais:

$$\{\Delta J_{\varepsilon_n}^1\} = f(\{\Delta \varepsilon_n^1\}) \quad (p5)$$

$$\{\Delta \text{tr}^+ \varepsilon_n^1\} = g(\{\Delta \varepsilon_n^1\}) \quad (p6)$$

$$\{\Delta \text{tr}^- \varepsilon_n^1\} = h(\{\Delta \varepsilon_n^1\}) \quad (p7)$$

E, da (4.78), as variáveis não-locais:

$$\left\{ \langle \mathbf{J}_\varepsilon \rangle_{(t/c)_{n+1}}^1 \right\} = [\mathbf{M}]_{(t/c)} \cdot \left\{ \mathbf{J}_{\varepsilon_n} + \Delta \mathbf{J}_{\varepsilon_n}^1 \right\} \quad (\text{p8})$$

$$\left\{ \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_{(t/c)_{n+1}}^1 \right\} = [\mathbf{T}]_{(t/c)} \cdot \left\{ \text{tr}^+ \varepsilon_n + \Delta \text{tr}^+ \varepsilon_n^1 \right\} \quad (\text{p9})$$

$$\left\{ \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_{(t/c)_{n+1}}^1 \right\} = [\mathbf{T}]_{(t/c)} \cdot \left\{ \text{tr}^- \varepsilon_n + \Delta \text{tr}^- \varepsilon_n^1 \right\} \quad (\text{p10})$$

\* Etapa de Correção:

Com as variáveis das (p8)-(p10) calculam-se as funções de carregamento:

Para o modelo local:

$$\mathbf{f}_{t_{n+1}}^1 \left( \mathbf{J}_{\varepsilon_{n+1}}^1, \text{tr}^+ \varepsilon_{n+1}^1, \text{tr}^- \varepsilon_{n+1}^1, \mathbf{D}_{t_n}, \mathbf{D}_{c_n} \right) = \left( \Delta \mathbf{f}_{t_n}^1 + \mathbf{f}_{t_n} \right) \quad (\text{c1a})$$

$$\mathbf{f}_{c_{n+1}}^1 \left( \mathbf{J}_{\varepsilon_{n+1}}^1, \text{tr}^+ \varepsilon_{n+1}^1, \text{tr}^- \varepsilon_{n+1}^1, \mathbf{D}_{t_n}, \mathbf{D}_{c_n} \right) = \left( \Delta \mathbf{f}_{c_n}^1 + \mathbf{f}_{c_n} \right) \quad (\text{c2a})$$

Para o modelo não-local:

$$\mathbf{F}_{t_{n+1}}^1 \left( \langle \mathbf{J}_\varepsilon \rangle_{t_{n+1}}^1, \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_{t_{n+1}}^1, \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_{t_{n+1}}^1, \mathbf{D}_{t_n}, \mathbf{D}_{c_n} \right) = \left( \Delta \mathbf{F}_{t_n}^1 + \mathbf{F}_{t_n} \right) \quad (\text{c2a})$$

$$\mathbf{F}_{c_{n+1}}^1 \left( \langle \mathbf{J}_\varepsilon \rangle_{c_{n+1}}^1, \langle \text{tr}^+ \varepsilon \rangle_{c_{n+1}}^1, \langle \text{tr}^- \varepsilon \rangle_{c_{n+1}}^1, \mathbf{D}_{t_n}, \mathbf{D}_{c_n} \right) = \left( \Delta \mathbf{F}_{c_n}^1 + \mathbf{F}_{c_n} \right) \quad (\text{c2b})$$

Se  $\mathbf{f}_{t_{n+1}}^1 / \mathbf{F}_{t_{n+1}}^1 \leq 0$  e  $\mathbf{f}_{c_{n+1}}^1 / \mathbf{F}_{c_{n+1}}^1 \leq 0$ , ocorre descarregamento elástico, sem evolução das variáveis de dano, ou seja,  $\Delta \mathbf{D}_{t_n}^1 = 0$  com  $\mathbf{D}_{t_{n+1}}^1 = \mathbf{D}_{t_n}$  e  $\Delta \mathbf{D}_{c_n}^1 = 0$  com  $\mathbf{D}_{c_{n+1}}^1 = \mathbf{D}_{c_n}$ .

Se  $\mathbf{f}_{t_{n+1}}^1 / \mathbf{F}_{t_{n+1}}^1 > 0$  e/ou  $\mathbf{f}_{c_{n+1}}^1 / \mathbf{F}_{c_{n+1}}^1 > 0$ , ocorre evolução de uma ou das duas variáveis de dano. Considera-se um dos casos:

Se  $\mathbf{f}_{t_{n+1}}^1 / \mathbf{F}_{t_{n+1}}^1 > 0$  e  $\mathbf{f}_{c_{n+1}}^1 / \mathbf{F}_{c_{n+1}}^1 \leq 0$ , têm-se  $\Delta \mathbf{D}_{t_n}^1 > 0$  com  $\mathbf{D}_{t_{n+1}}^1 = \Delta \mathbf{D}_{t_n}^1 + \mathbf{D}_{t_n}$  e  $\Delta \mathbf{D}_{c_n}^1 = 0$  com  $\mathbf{D}_{c_{n+1}}^1 = \mathbf{D}_{c_n}$ , determinados fazendo-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{t_{n+1}}^1 / \mathbf{F}_{t_{n+1}}^1 \left( \left\{ \varepsilon_{n+1}^1 \right\}, \mathbf{D}_{t_n} + \Delta \mathbf{D}_{t_n}^1, \mathbf{D}_{c_n} \right) &= 0 \quad \text{e} \\ \mathbf{f}_{c_{n+1}}^1 / \mathbf{F}_{c_{n+1}}^1 \left( \left\{ \varepsilon_{n+1}^1 \right\}, \mathbf{D}_{t_n} + \Delta \mathbf{D}_{t_n}^1, \mathbf{D}_{c_n} \right) &< 0 \end{aligned} \quad (\text{c3})$$

Se  $\mathbf{f}_{t_{n+1}}^1 / \mathbf{F}_{t_{n+1}}^1 \leq 0$  e  $\mathbf{f}_{c_{n+1}}^1 / \mathbf{F}_{c_{n+1}}^1 > 0$ , têm-se  $\Delta \mathbf{D}_{t_n}^1 = 0$  com  $\mathbf{D}_{t_{n+1}}^1 = \mathbf{D}_{t_n}$  e  $\Delta \mathbf{D}_{c_n}^1 > 0$  com  $\mathbf{D}_{c_{n+1}}^1 = \Delta \mathbf{D}_{c_n}^1 + \mathbf{D}_{c_n}$ , determinados fazendo-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{t_{n+1}}^1 / \mathbf{F}_{t_{n+1}}^1 \left( \left\{ \varepsilon_{n+1}^1 \right\}, \mathbf{D}_{t_n}, \mathbf{D}_{c_n} + \Delta \mathbf{D}_{c_n}^1 \right) &< 0 \quad \text{e} \\ \mathbf{f}_{c_{n+1}}^1 / \mathbf{F}_{c_{n+1}}^1 \left( \left\{ \varepsilon_{n+1}^1 \right\}, \mathbf{D}_{t_n}, \mathbf{D}_{c_n} + \Delta \mathbf{D}_{c_n}^1 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{c4})$$

Se  $\mathbf{f}_{t_{n+1}}^1 / \mathbf{F}_{t_{n+1}}^1 > 0$  e  $\mathbf{f}_{c_{n+1}}^1 / \mathbf{F}_{c_{n+1}}^1 > 0$ , têm-se  $\Delta \mathbf{D}_{t_n}^1 > 0$  com  $\mathbf{D}_{t_{n+1}}^1 = \Delta \mathbf{D}_{t_n}^1 + \mathbf{D}_{t_n}$  e  $\Delta \mathbf{D}_{c_n}^1 > 0$  com  $\mathbf{D}_{c_{n+1}}^1 = \Delta \mathbf{D}_{c_n}^1 + \mathbf{D}_{c_n}$ , determinados fazendo-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{t_{n+1}}^1 / \mathbf{F}_{t_{n+1}}^1 \left( \{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^1\}, \mathbf{D}_{t_n} + \Delta \mathbf{D}_{t_n}^1, \mathbf{D}_{c_n} + \Delta \mathbf{D}_{c_n}^1 \right) &= 0 \quad \text{e} \\ \mathbf{f}_{c_{n+1}}^1 / \mathbf{F}_{c_{n+1}}^1 \left( \{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^1\}, \mathbf{D}_{t_n} + \Delta \mathbf{D}_{t_n}^1, \mathbf{D}_{c_n} + \Delta \mathbf{D}_{c_n}^1 \right) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{c5})$$

Calcula-se o tensor de tensões reais do modelo com as variáveis atualizadas:

$$\Delta \boldsymbol{\sigma}_n^1 = \Delta \boldsymbol{\sigma}_n^1 \left( \{\boldsymbol{\varepsilon}_n\} + \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^1\}, \mathbf{D}_{t_n} + \Delta \mathbf{D}_{t_n}^1, \mathbf{D}_{c_n} + \Delta \mathbf{D}_{c_n}^1 \right) \quad (\text{c6})$$

Volta-se à equação de equilíbrio com  $\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^1\}$  e  $\{\Delta \boldsymbol{\sigma}_n^1\}$ :

$$\{Y(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^1)\} = -[E] \cdot \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^1\} + \{\Delta \mathbf{N}_n\} + [\bar{S}] \cdot \{[E] \cdot \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^1\} - \{\Delta \boldsymbol{\sigma}_n^1\}\} \quad (\text{c7})$$

Checa-se a convergência, seguindo os mesmos passos do algoritmo do item (4.7.1).

Calcula-se a matriz tangente consistente da (c7), considerando-se a (4.47) para o modelo local ou a (4.92) para o modelo não-local.

$$[C^{tC}] = \left[ [E] - [\bar{S}] \cdot \left[ [E] - \left[ \frac{\partial \Delta \boldsymbol{\sigma}_n^1}{\partial \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^1} \right] \right] \right] \quad (\text{c8})$$

Resolve-se o sistema linear:

$$[C^{tC}] \cdot \{\delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^{i+1}\} = \{Y(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^i)\} \quad (\text{c9})$$

Atualizam-se as variáveis:

$$\{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^{i+1}\} = \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^i\} + \{\delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^{i+1}\} \quad (\text{c10})$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{i+1}\} = \{\boldsymbol{\varepsilon}_n\} + \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^{i+1}\} \quad (\text{c11})$$

$$\{\Delta \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n}^{i+1}\} = \mathbf{f} \left( \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^{i+1}\} \right) \quad (\text{c12})$$

$$\{\Delta \text{tr}^+ \boldsymbol{\varepsilon}_n^{i+1}\} = \mathbf{g} \left( \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^{i+1}\} \right) \quad (\text{c13})$$

$$\{\Delta \text{tr}^- \boldsymbol{\varepsilon}_n^{i+1}\} = \mathbf{h} \left( \{\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^{i+1}\} \right) \quad (\text{c14})$$

$$\left\langle \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \right\rangle_{(t/c)_{n+1}}^{i+1} = [\mathbf{M}]_{(t/c)} \cdot \left\{ \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n} + \Delta \mathbf{J}_{\boldsymbol{\varepsilon}_n}^{i+1} \right\} \quad (\text{c15})$$

$$\left\langle \text{tr}^+ \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle_{(t/c)_{n+1}}^{i+1} = [\mathbf{T}]_{(t/c)} \cdot \left\{ \text{tr}^+ \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \text{tr}^+ \boldsymbol{\varepsilon}_n^{i+1} \right\} \quad (\text{c16})$$

$$\left\langle \text{tr}^- \boldsymbol{\varepsilon} \right\rangle_{(t/c)_{n+1}}^{i+1} = [\mathbf{T}]_{(t/c)} \cdot \left\{ \text{tr}^- \boldsymbol{\varepsilon}_n + \Delta \text{tr}^- \boldsymbol{\varepsilon}_n^{i+1} \right\} \quad (\text{c17})$$

Faz-se  $i = i + 1$  e retorna-se à (c1).

## **5. FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO COM COMPRIMENTO DE ARCO E COM EQUAÇÃO DE RESTRIÇÃO**

### **5.1. Introdução**

Neste capítulo, introduz-se o conceito de comprimento de arco e define-se o fenômeno do “snap-back”. São apresentadas duas formulações não-lineares do método dos elementos de contorno com equação do comprimento de arco. Uma com variável-guia controlando deslocamento, outra controlando força. Em seguida, introduz-se a equação de restrição na formulação, mais geral que a do arco. Apresenta-se o procedimento incremental para a resolução do problema de valor de contorno, com a definição dos métodos com equação de restrição linearizada e esférica. Ao final, exemplos de aplicação utilizando-se a formulação são apresentados, com os dois modelos de dano tratados no trabalho.

### **5.2. Discussões sobre os Métodos do Tipo Comprimento de Arco**

Para alguns casos, em análise estrutural, a prescrição direta de carregamentos (deslocamentos e/ou forças) monotonicamente crescentes, limitam a possibilidade de análise a certos intervalos, pois o equilíbrio deixa de existir, a partir de um ponto limite, para o carregamento imposto. Esta situação é observada em termos da curva da resposta em termos de um conveniente par força-deslocamento.

Pode-se citar um caso simples de existência de ponto limite. Para uma barra simples uniaxial, longitudinalmente tracionada, com material trabalhando em regime elasto-plástico perfeito, a imposição de força como carregamento fica

limitada a um valor máximo que corresponde à tensão limite elástica na barra. A partir deste ponto limite, qualquer incremento a mais de força não resulta em resposta equilibrada, pois esta não existe.

Nos problemas mais gerais, como na localização de deformações, a situação é mais complexa. Nem sempre se consegue enxergar quais são os limites para a imposição dos carregamentos, ou se estes limites mesmo existem. Na localização, por exemplo, em função do tamanho da região com deformação localizada, comparado com o tamanho das demais regiões do corpo, o fenômeno do “snap-back”, ilustrado na figura (5.1), pode ocorrer.

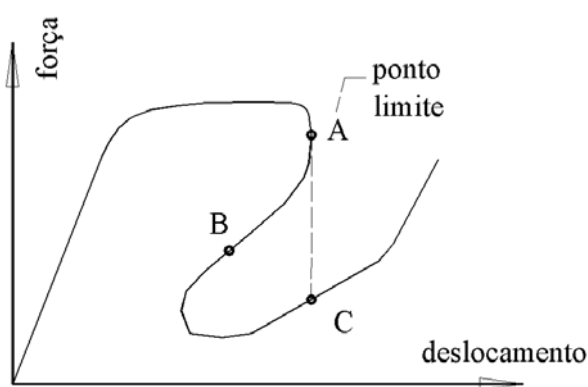


Figura 5.1. Snap-back na curva força-deslocamento.

Na figura (5.1) está representada a curva genérica força resultante-deslocamento de um ponto arbitrário qualquer de uma estrutura ou elemento estrutural. Quando atingido o ponto limite  $A$ , caso se tenha um incremento positivo de deslocamento, ocorre um salto de  $A$  para  $C$ , com descontinuidade de força. No entanto, nos casos estáticos, o caminho de  $A$  até  $C$  passaria por  $B$ . Ou seja, após  $A$ , ocorreriam decréscimos simultâneos da força e do deslocamento, para então ser atingido o ponto  $C$ . Na localização, quanto menor a relação entre o comprimento da zona localizada e do restante do corpo, maiores as chances de ocorrer “snap-back”.

Com controle de deslocamento, o salto do ponto  $A$  ao ponto  $C$  seria talvez possível de ser obtido numericamente com formulações dinâmicas não-lineares. Para o caso estático, entretanto, este salto seria tremendamente custoso do ponto de vista do processo iterativo, podendo a análise falhar e não convergir neste ponto. O mesmo ocorre para o fenômeno do “snap-through”, em que se observa um

salto do deslocamento para um pequeno incremento de carga, a partir de um certo ponto limite. Este salto, no caso estático, poderia não ser captado numericamente, sendo talvez possível obtê-lo com algoritmos dinâmicos.

Os métodos do tipo comprimento de arco são utilizados para que a solução estática seja obtida sem instabilidades numéricas (diga-se, sem saltos de deslocamento ou força). Isto significa percorrer o caminho *ABC* da figura (5.1). Obviamente, não é mais possível falar em deslocamento e/ou força prescritos. Como se verá, o que será prescrito agora é um comprimento de arco.

Os fenômenos do “snap-back” e “snap-through” podem ocorrer numa série de situações envolvendo não-linearidades física e geométrica. Por exemplo, nas estruturas de cascas abatidas, nas estruturas espaciais compostas por lâminas planas e, no caso que interessa neste trabalho, nas estruturas de concreto armado com modelos de dano, onde a localização é o fenômeno principal.

Para explicar a estratégia do comprimento de arco, recorre-se a um exemplo simples. Considere-se um sistema geral de equações de equilíbrio de uma estrutura discretizada, escrito em variáveis incrementais, dado pela expressão:

$$\psi(\Delta u, \Delta P) = g(\Delta u) - \Delta P = 0 \quad (5.1)$$

onde  $g(\Delta u)$  representa a derivada da energia interna, não-linear de acordo com a lei constitutiva do modelo,  $\Delta u$  é o vetor incremento de deslocamento e  $\Delta P$  o vetor incremento de força aplicada no contorno. Por simplicidade, admite-se que o vetor  $\Delta P$  tenha uma única componente não-nula, ou seja, supõe-se que o carregamento da estrutura é composto de uma única força concentrada atuante no ponto “p” do contorno. Na (5.1), a vetor de força aplicada  $\Delta P$  pode ser substituído por:

$$\Delta P = \Delta \lambda \cdot \bar{P} \quad (5.2)$$

onde  $\bar{P}$  representa o vetor de força atuante real do incremento anterior. A nova variável escalar  $\Delta \lambda$  de (5.2) tem o papel de determinar o tamanho de  $\Delta P$ , sem contudo fixá-lo, ou seja, o carregamento não é mais  $\Delta P$ . Substituindo-se a (5.2) na (5.1), tem-se a equação de equilíbrio com a nova variável  $\Delta \lambda$ :

$$\psi(\Delta u, \Delta \lambda) = g(\Delta u) - \Delta \lambda \cdot \bar{P} = 0 \quad (5.3)$$

Com a introdução da nova variável  $\Delta \lambda$  na (5.3), fica faltando uma equação para completar o problema. Define-se então o comprimento de arco  $c$  como:

$$c = \int dc \quad (5.4)$$

onde

$$dc = \sqrt{(\alpha \cdot dP)^2 + (du_p)^2} = \sqrt{(\alpha \cdot d\lambda \cdot \bar{P})^2 + (du_p)^2} \quad (5.5)$$

sendo  $\alpha$  um parâmetro escalar adotado para ajustar as escalas de valor numérico entre forças e deslocamentos. O deslocamento  $du_p$  é o deslocamento do ponto “p” de aplicação da carga concentrada. Pode-se definir o incremento  $\Delta c$  do comprimento de arco, ou seja:

$$\Delta c = \sqrt{(\alpha \cdot \Delta P)^2 + (\Delta u_p)^2} = \sqrt{(\alpha \cdot \Delta \lambda \cdot \bar{P})^2 + (\Delta u_p)^2} \quad (5.6)$$

Na figura (5.2) encontra-se a definição geométrica de  $\Delta c$ .

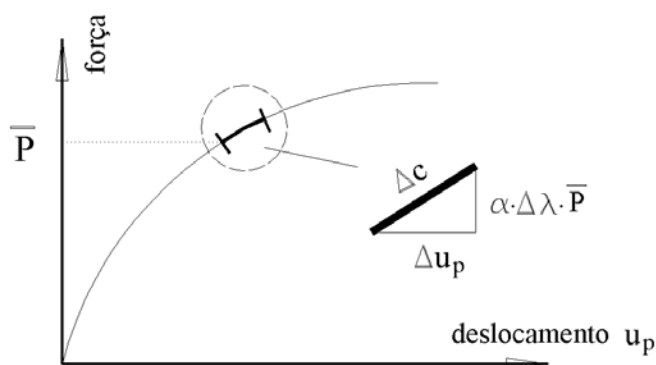


Figura 5.2. Definição geométrica do incremento do comprimento de arco.

A equação (5.6) pode ser colocada na forma:



$$a(\Delta u, \Delta \lambda) = (\alpha \cdot \Delta \lambda \cdot \bar{P})^2 + (\Delta u_p)^2 - \Delta c^2 = 0 \quad (5.7)$$

As equações (5.3) e (5.7), ou seja, o conjunto das equações de equilíbrio mais a equação do arco, definem o problema não-linear nas variáveis incrementais  $\Delta u$  e  $\Delta \lambda$ . Nota-se que o único valor prescrito é o comprimento de arco  $\Delta c$ . A resolução do problema não-linear se faz iterativamente dentro de cada incremento de carga. A linearização das (5.3) e (5.7) resulta no sistema:

$$\begin{aligned} \psi(\Delta u_i, \Delta \lambda_i) + \frac{\partial \psi(\Delta u_i, \Delta \lambda_i)}{\partial \Delta u_i} \cdot \delta \Delta u_i + \frac{\partial \psi(\Delta u_i, \Delta \lambda_i)}{\partial \Delta \lambda_i} \cdot \delta \Delta \lambda_i &= 0 \\ a(\Delta u_i, \Delta \lambda_i) + \frac{\partial a(\Delta u_i, \Delta \lambda_i)}{\partial \Delta u_i} \cdot \delta \Delta u_i + \frac{\partial a(\Delta u_i, \Delta \lambda_i)}{\partial \Delta \lambda_i} \cdot \delta \Delta \lambda_i &= 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

e a cada iteração as variáveis são atualizadas como:

$$\begin{aligned} \Delta u_{i+1} &= \Delta u_i + \delta \Delta u_i \\ \Delta \lambda_{i+1} &= \Delta \lambda_i + \delta \Delta \lambda_i \end{aligned} \quad (5.9)$$

até que um critério de convergência estabeleça a parada. Uma outra alternativa para o equacionamento do problema seria definir a variável  $\Delta \lambda$  da forma:

$$\Delta u_p = \Delta \lambda \cdot \bar{u}_p \quad (5.10)$$

ou seja, como variável-guia do deslocamento atualizado do ponto “p”  $\bar{u}_p$ . A (5.7), neste caso, fica escrita como:

$$a(\Delta \lambda, \Delta P_p) = (\alpha \cdot \Delta P_p)^2 + (\Delta \lambda \cdot \bar{u}_p)^2 - \Delta c^2 = 0 \quad (5.11)$$

e as variáveis do problema passam a ser  $\Delta \lambda$ , a força concentrada no ponto “p”  $\Delta P_p$  e todos os deslocamentos de  $\Delta u$ , excetuando-se o do ponto “p”. O parâmetro  $\alpha$  e o “carregamento”  $\Delta c$  devem ser criteriosamente adotados para cada exemplo, pois

seus valores afetam diretamente a velocidade de convergência e a estabilidade do processo numérico de resolução.

### **5.3. Formulações Não-Lineares do Método dos Elementos de Contorno com Equação do Comprimento de Arco**

#### **5.3.1. Considerações Gerais**

Apresentam-se, neste item, duas formulações não-lineares do método dos elementos de contorno considerando-se a equação do comprimento de arco acoplada às equações de equilíbrio do método. A idéia das formulações é introduzir nos sistemas algébricos a variável-guia  $\Delta\lambda$  tal como definida no item (5.2). Ao conjunto de equações de equilíbrio do sistema algébrico não-linear, acrescenta-se a equação do comprimento de arco, relacionando medidas de força e deslocamento.

A diferença entre as duas formulações está relacionada à natureza do controle feito pela variável-guia. Este pode ser sobre deslocamento ou força. O tipo de exemplo condiciona a utilização de uma ou outra formulação. As formulações são extensões daquela descrita no capítulo 4. Para facilitar a compreensão, toda ela será descrita em variáveis incrementais.

#### **5.3.2. Formulação com variável-guia controlando deslocamento**

Retomando do capítulo 3 a equação algébrica dos deslocamentos, em variáveis incrementais, tem-se:

$$[H] \cdot \{\Delta u\} = [G] \cdot \{\Delta p\} + [Q] \cdot \{\Delta \sigma^0\} \quad (5.12)$$

Rearranjando-se os vetores dos deslocamentos  $\{\Delta u\}$  e das forças  $\{\Delta p\}$ , a equação (5.12) reescreve-se como:

$$\begin{bmatrix} H_{\Delta u} & H_{\Delta u_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta u_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\Delta p} & G_{\Delta p_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta p \\ \Delta p_c \end{Bmatrix} + [Q] \cdot \{\Delta \sigma^0\} \quad (5.13)$$

onde as componentes  $\{\Delta u_c\}$  e  $\{\Delta p_c\}$  reúnem as variáveis de contorno de  $\{\Delta u\}$  e  $\{\Delta p\}$  que deverão ser controladas. Os vetores  $\{\Delta u_c\}$  e  $\{\Delta p_c\}$  têm tamanhos idênticos, sempre associados aos nós dos elementos sobre controle. Para melhor definir as variáveis do problema, recorre-se à figura (5.3), onde o contorno  $\Gamma$  do corpo é subdividido em três, ou seja,  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_c$ .

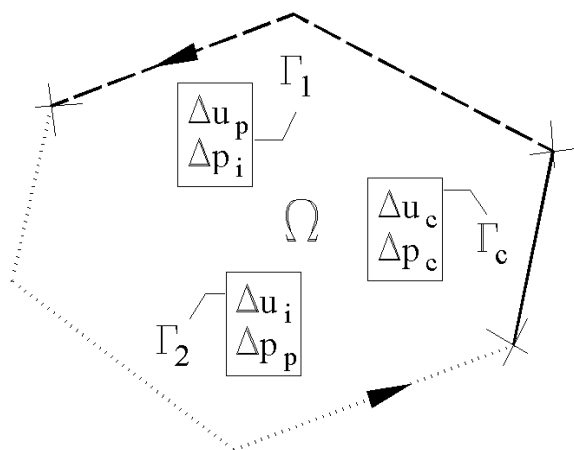


Figura 5.3. Subdivisão do contorno  $\Gamma$ .

No contorno  $\Gamma_1$  tem-se um conjunto de variáveis de deslocamento prescritas em  $\{\Delta u_p\}$  e de forças incógnitas em  $\{\Delta p_i\}$ . Em  $\Gamma_2$ , tem-se forças prescritas em  $\{\Delta p_p\}$  e deslocamentos incógnitos em  $\{\Delta u_i\}$ . Em  $\Gamma_c$ , têm-se os deslocamentos e as forças controladas  $\{\Delta u_c\}$  e  $\{\Delta p_c\}$ , respectivamente. Com estas novas definições, a (5.13) fica:

$$\begin{bmatrix} H_{\Delta u_i} & H_{\Delta u_p} & H_{\Delta u_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_p \\ \Delta u_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\Delta p_i} & G_{\Delta p_p} & G_{\Delta p_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta p_i \\ \Delta p_p \\ \Delta p_c \end{Bmatrix} + [Q] \cdot \{\Delta \sigma^0\} \quad (5.14)$$

Assim como na (5.10), define-se:

$$\{\Delta u_c\} = \Delta\lambda \cdot \{\beta\} \cdot \bar{u}_c \quad (5.15)$$

onde  $\bar{u}_c$  é aqui chamado de valor de referência do deslocamento controlado,  $\{\beta\}$  é o vetor cujas componentes relacionam os deslocamentos de  $\{\Delta u_c\}$  com o valor de referência e  $\Delta\lambda$  é a variável-guia escalar. As definições de  $\{\beta\}$  e do deslocamento controlado  $\bar{u}_c$  ficam claras com a figura (5.4).

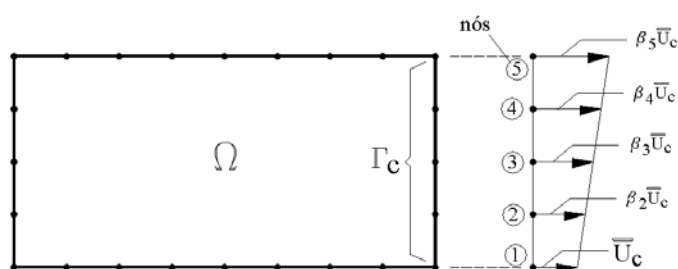


Figura 5.4. Definição do valor de referência do deslocamento controlado.

Em todo o contorno  $\Gamma_c$  da figura (5.4), estabelece-se uma relação entre os deslocamentos e deles com o deslocamento controlado  $\bar{u}_c$ . Na figura (5.4), por exemplo, tem-se uma distribuição linear dos deslocamentos em  $\Gamma_c$ . Referindo-se como  $\bar{u}_c$  ao deslocamento do primeiro nó, todos os demais deslocamentos de  $\Gamma_c$  são múltiplos de  $\bar{u}_c$ , conforme a relação linear estabelecida. Assim, em vista da (5.15), para o exemplo da figura (5.4), tem-se:

$$\{\Delta u_c\} = \begin{Bmatrix} \Delta u_{c_1} \\ \Delta u_{c_2} \\ \Delta u_{c_3} \\ \Delta u_{c_4} \\ \Delta u_{c_5} \end{Bmatrix} = \Delta\lambda \cdot \{\beta\} \cdot \bar{u}_c = \Delta\lambda \cdot \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{Bmatrix} \cdot \bar{u}_c \quad (5.16)$$

lembrando que  $\beta_1 = 1$ . A relação entre os deslocamentos de  $\Gamma_c$  está condicionada ao exemplo de aplicação. Na verdade, os deslocamentos não são prescritos, mas sua forma sobre  $\Gamma_c$ , ou a relação de todos eles com  $\bar{u}_c$ , é conhecida pelo vetor  $\{\beta\}$ , este sim prescrito. Considerando-se a (5.15) na (5.14), tem-se:

$$\begin{bmatrix} H_{\Delta u_i} & H_{\Delta u_p} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_p \end{Bmatrix} + \{H_c\} \cdot \Delta \lambda \cdot \bar{u}_c = \begin{bmatrix} G_{\Delta p_p} & G_{\Delta p_i} & G_{\Delta p_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta p_p \\ \Delta p_i \\ \Delta p_c \end{Bmatrix} + [Q] \cdot \{\Delta \sigma^0\} \quad (5.17)$$

onde  $\{H_c\} = [H_{\Delta u_c}] \cdot \{\beta\}$ . O sistema (5.17) pode ser arrumado na forma:

$$\begin{bmatrix} H_{\Delta u_i} & -G_{\Delta p_i} & -G_{\Delta p_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta p_i \\ \Delta p_c \end{Bmatrix} + \{H_c\} \cdot \Delta \lambda \cdot \bar{u}_c = \begin{bmatrix} G_{\Delta p_p} & -H_{\Delta u_p} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta p_p \\ \Delta u_p \end{Bmatrix} + [Q] \cdot \{\Delta \sigma^0\} \quad (5.18)$$

onde agora todas as incógnitas ficam reunidas no membro esquerdo da equação. Simplificando-se, a (5.18) fica:

$$[A] \cdot \{\Delta X\} + \{H_c\} \cdot \Delta \lambda \cdot \bar{u}_c = [B] \cdot \{\Delta Y\} + [Q] \cdot \{\Delta \sigma^0\} \quad (5.19)$$

onde  $\{\Delta X\}$  reúne as variáveis incógnitas de contorno e  $\{\Delta Y\}$  as prescritas em  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Sabendo-se que  $\{\Delta F\} = [B] \cdot \{\Delta Y\}$ , isolando-se  $\{\Delta X\}$  da (5.19), chega-se a:

$$\{\Delta X\} = [A]^{-1} \cdot \left\{ -\{H_c\} \cdot \Delta \lambda \cdot \bar{u}_c + \{\Delta F\} + [Q] \cdot \{\Delta \sigma^0\} \right\} \quad (5.20)$$

A equação das tensões é escrita de maneira semelhante, em termos da variável-guia  $\Delta \lambda$ . Do capítulo 3, tem-se:

$$\{\Delta \sigma\} = -[H'] \cdot \{\Delta u\} + [G'] \cdot \{\Delta p\} + [Q'] \cdot \{\Delta \sigma^0\} \quad (5.21)$$

Em termos das variáveis de contorno, fica escrita como:

$$\{\Delta\sigma\} = -\begin{bmatrix} H'_{\Delta u_i} & H'_{\Delta u_p} & H'_{\Delta u_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_p \\ \Delta u_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G'_{\Delta p_p} & G'_{\Delta p_i} & G'_{\Delta p_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta p_p \\ \Delta p_i \\ \Delta p_c \end{Bmatrix} + [Q'] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \quad (5.22)$$

Considerando-se a (5.15) na (5.22), tem-se:

$$\{\Delta\sigma\} = -\begin{bmatrix} H'_{\Delta u_i} & H'_{\Delta u_p} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_p \end{Bmatrix} - \{H'_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{u}_c + \begin{bmatrix} G'_{\Delta p_p} & G'_{\Delta p_i} & G'_{\Delta p_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta p_p \\ \Delta p_i \\ \Delta p_c \end{Bmatrix} + [Q'] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \quad (5.23)$$

sendo  $\{H'_c\} = [H'_{\Delta u_c}] \cdot \{\beta\}$ . Trocando as colunas da  $[H']$  e  $[G']$ , tem-se:

$$\{\Delta\sigma\} = -\begin{bmatrix} H'_{\Delta u_i} & -G'_{\Delta p_i} & -G'_{\Delta p_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta p_i \\ \Delta p_c \end{Bmatrix} - \{H'_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{u}_c + \begin{bmatrix} G'_{\Delta p_p} & -H'_{\Delta u_p} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta p_p \\ \Delta u_p \end{Bmatrix} + [Q'] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \quad (5.24)$$

ou, resumidamente:

$$\{\Delta\sigma\} = -[A'] \cdot \{\Delta X\} - \{H'_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{u}_c + \{\Delta F'\} + [Q'] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \quad (5.25)$$

onde  $\{\Delta F'\}$  reúne a influência dos valores de contorno prescritos fora de  $\Gamma_c$ .

Substituindo-se a (5.20) na (5.25), chega-se a:

$$\{\Delta\sigma\} = -[A'] \cdot \left\{ [A]^{-1} \cdot \left\{ -\{H_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{u}_c + \{\Delta F\} + [Q] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \right\} \right\} - \{H'_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{u}_c + \{\Delta F'\} + [Q'] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \quad (5.26)$$

ou

$$\{\Delta\sigma\} = \left\{ [A'] \cdot [A]^{-1} \cdot \{H_c\} - \{H'_c\} \right\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{u}_c - \left\{ [A'] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\Delta F\} - \{\Delta F'\} \right\} - \left[ [A'] \cdot [A]^{-1} \cdot [Q] - [Q'] \right] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \quad (5.27)$$

Simplificando-se, têm-se:

$$\{\Delta\sigma\} = \{\Delta N\} + \{N_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{u}_c + [S] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \quad (5.28)$$

$$\{\Delta N\} = \{-[A'] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\Delta F\} + \{\Delta F'\}\} \quad (5.29)$$

$$\{N_c\} = \{[A'] \cdot [A]^{-1} \cdot \{H_c\} - \{H'_c\}\} \quad (5.30)$$

$$[S] = [-[A'] \cdot [A]^{-1} \cdot [Q] + [Q']] \quad (5.31)$$

A equação (5.20) com as incógnitas de contorno  $\{\Delta X\}$  pode ser mais concisamente escrita como:

$$\{\Delta X\} = \{\Delta M\} + \{M_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{u}_c + [R] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \quad (5.32)$$

$$\{\Delta M\} = [A]^{-1} \cdot \{\Delta F\} \quad (5.33)$$

$$\{M_c\} = -[A]^{-1} \cdot \{H_c\} \quad (5.34)$$

$$[R] = [A]^{-1} \cdot [Q] \quad (5.35)$$

Conforme procedimento já mostrado no capítulo 4, somando-se  $\{\Delta\sigma^0\}$  a cada membro da (5.28), e aplicando-se posteriormente a lei de Hooke, chega-se à equação de equilíbrio em termos das deformações:

$$[E] \cdot \{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta N\} + \{N_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{u}_c + [\bar{S}] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \quad (5.36)$$

ou

$$\{Y(\Delta\varepsilon, \Delta\lambda)\} = -[E] \cdot \{\Delta\varepsilon\} + \{\Delta N\} + \{N_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{u}_c + [\bar{S}] \cdot \{[E] \cdot \{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\sigma(\Delta\varepsilon)\}\} = 0 \quad (5.37)$$

lembrando que  $[\bar{S}] = [S] + [I]$ . Para completar a formulação, resta considerar a equação do comprimento de arco, tal como definida na (5.11) para controle de

deslocamento. Em termos de variáveis incrementais, e adaptada para a notação utilizada neste item, a equação do arco é escrita como:

$$Z(\Delta\lambda, \Delta P_c) = (\alpha \cdot \Delta P_c)^2 + (\Delta\lambda \cdot \bar{u}_c)^2 - \Delta c^2 = 0 \quad (5.38)$$

Na (5.38),  $\Delta P_c$  é a força resultante que atua em  $\Gamma_c$ , na mesma direção de  $\bar{u}_c$ . A força resultante é uma somatória de contribuições das forças de superfície  $\{\Delta p_c\}$ . Na realidade, é a integral da distribuição das forças em  $\Gamma_c$ , ou seja, das funções de forma que multiplicam os valores nodais de força. Por exemplo, para a aproximação linear de forças nos elementos de contorno, a resultante  $\Delta P_c$  é calculada através de:

$$\Delta P_c = \sum_{j=1}^{N_{ec}} \left[ (\Delta p_1^j + \Delta p_2^j) \cdot \frac{L_j}{2} \right] \quad (5.39)$$

onde  $N_{ec}$  é o número de elementos de contorno em  $\Gamma_c$ ,  $\Delta p_1^j$  e  $\Delta p_2^j$ , componentes do vetor  $\{\Delta p_c\}$ , são as forças nos nós inicial e final do elemento  $j$ , e  $L_j$  é o seu comprimento. Admite-se que os nós coincidem com as extremidades dos elementos. O comprimento  $L_j$  dividido por dois, na (5.39), vem da integral da função de forma linear que aproxima  $\Delta p$  por elemento. Assim,  $\Delta P_c$  pode ser escrita da forma:

$$\Delta P_c = \{v\}^T \cdot \{\Delta p_c\} \quad (5.40)$$

onde  $\{v\}^T$  é o transposto do vetor  $\{v\}$  com as influências de cada força de  $\{\Delta p_c\}$  no cômputo de  $\Delta P_c$ . Das equações (5.18) e (5.19), constata-se que  $\{\Delta p_c\}$  é um sub-vetor de  $\{\Delta X\}$ . Observando-se a (5.20), pode-se escrever:

$$\{\Delta p_c\} = [A_c]^{-1} \cdot \left\{ -\{H_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{u}_c + \{\Delta F\} + [Q] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \right\} \quad (5.41)$$



em que  $[A_c]^{-1}$  é uma sub-matriz de  $[A]^{-1}$ . Ela é montada com as linhas da matriz de origem que fazem coincidir  $\{\Delta X\}$  com  $\{\Delta p_c\}$ . Com a (5.41) substituída na (5.40), a resultante  $\Delta P_c$  fica dada por:

$$\Delta P_c = \{\Delta M_c\} + \{M_c\} \cdot \Delta \lambda \cdot \bar{u}_c + [R_c] \cdot \{\Delta \sigma^0\} \quad (5.42)$$

$$\{\Delta M_c\} = \{v\}^T \cdot [A_c]^{-1} \cdot \{\Delta F_c\} \quad (5.43)$$

$$\{M_c\} = -\{v\}^T \cdot [A_c]^{-1} \cdot \{H_{cc}\} \quad (5.44)$$

$$[R_c] = \{v\}^T \cdot [A_c]^{-1} \cdot [Q_c] \quad (5.45)$$

A equação (5.42) da força resultante, a exemplo da (5.36), pode ser escrita em termos das deformações, ou seja:

$$\Delta P_c = \{\Delta M_c\} + \{M_c\} \cdot \Delta \lambda \cdot \bar{u}_c + [R_c] \cdot \{[E] \cdot \{\Delta \varepsilon\} - \{\Delta \sigma(\Delta \varepsilon)\}\} \quad (5.46)$$

Voltando à equação do arco (5.38), e levando-se em consideração a (5.46), tem-se:

$$Z(\Delta \varepsilon, \Delta \lambda) = (\alpha \cdot \Delta P_c(\Delta \varepsilon, \Delta \lambda))^2 + (\Delta \lambda \cdot \bar{u}_c)^2 - \Delta c^2 = 0 \quad (5.47)$$

ou seja,  $Z(\Delta \varepsilon, \Delta \lambda)$  é a equação escalar do arco nas variáveis  $\Delta \varepsilon$  e  $\Delta \lambda$ . O sistema não-linear, formado pelas equações de equilíbrio na (5.37) e pela equação do arco (5.47), define o problema em termos da variável-guia e das deformações dos nós de célula. No item (5.5), apresentar-se-á o procedimento incremental-iterativo de resolução das equações não-lineares da formulação com comprimento de arco.

### **5.3.3. Formulação com variável-guia controlando força**

Apresenta-se, neste item, uma formulação semelhante à do item (5.3.2), no entanto, com a variável-guia  $\Delta \lambda$  atuando sobre a força. Seguindo a idéia da (5.2), define-se:

$$\{\Delta p_c\} = \Delta\lambda \cdot \{\gamma\} \cdot \bar{p}_c \quad (5.48)$$

onde  $\bar{p}_c$  é o valor de referência da força controlada e  $\{\gamma\}$  é o vetor cujas componentes relacionam as forças de  $\{\Delta p_c\}$  com  $\bar{p}_c$ . O vetor  $\{\gamma\}$  é definido analogamente ao  $\{\beta\}$  da equação (5.15). A figura (5.5) ajuda a explicar seu significado.

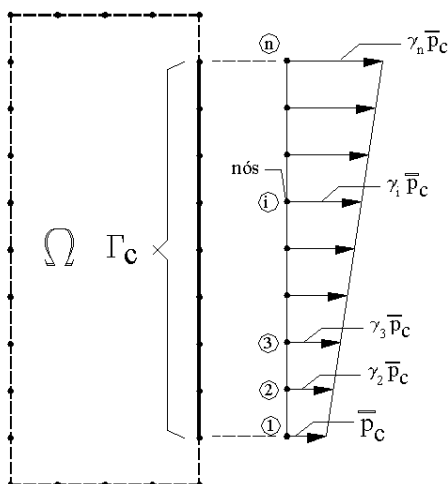


Figura 5.5. Definição do valor de referência da força controlada.

Todas as variáveis nodais de força de superfície de  $\{\Delta p_c\}$ , do contorno  $\Gamma_c$ , guardam alguma relação com o valor da força controlada  $\bar{p}_c$ . Escolhendo-se, por exemplo,  $\bar{p}_c$  como a força do primeiro nó de  $\Gamma_c$ , conforme mostra a figura (5.5), todas as componentes de  $\{\Delta p_c\}$  são valores múltiplos de  $\bar{p}_c$ , ou seja:

$$\{\Delta p_c\} = \begin{Bmatrix} \Delta p_{c_1} \\ \Delta p_{c_2} \\ \vdots \\ \Delta p_{c_i} \\ \vdots \\ \Delta p_{c_n} \end{Bmatrix} = \Delta\lambda \cdot \{\gamma\} \cdot \bar{p}_c = \Delta\lambda \cdot \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_i \\ \vdots \\ \gamma_n \end{Bmatrix} \cdot \bar{p}_c \quad (5.49)$$

para  $\gamma_1 = 1$  e  $n$  o número de variáveis de força de superfície em  $\Gamma_c$ . O vetor  $\{\gamma\}$  deve ser prescrito, pois ele determina a forma das forças sobre  $\Gamma_c$  (linear, por exemplo, na figura (5.5)). Considerando-se a (5.48) na equação dos deslocamentos (5.14), tem-se:

$$\begin{bmatrix} H_{\Delta u_i} & H_{\Delta u_p} & H_{\Delta u_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_p \\ \Delta u_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\Delta p_p} & G_{\Delta p_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta p_p \\ \Delta p_i \end{Bmatrix} + \{G_c\} \cdot \Delta \lambda \cdot \bar{p}_c + [Q] \cdot \{\Delta \sigma^0\} \quad (5.50)$$

onde  $\{G_c\} = [G_{\Delta p_c}] \cdot \{\gamma\}$ . Arrumando-se o sistema (5.50), tem-se:

$$\begin{bmatrix} H_{\Delta u_i} & -G_{\Delta u_p} & H_{\Delta u_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta p_i \\ \Delta u_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{\Delta p_p} & -H_{\Delta u_p} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta p_p \\ \Delta u_p \end{Bmatrix} + \{G_c\} \cdot \Delta \lambda \cdot \bar{p}_c + [Q] \cdot \{\Delta \sigma^0\} \quad (5.51)$$

ou, resumidamente:

$$[A] \cdot \{\Delta X\} = [B] \cdot \{\Delta Y\} + \{G_c\} \cdot \Delta \lambda \cdot \bar{p}_c + [Q] \cdot \{\Delta \sigma^0\} \quad (5.52)$$

onde  $\{\Delta X\}$  é o vetor das incógnitas e  $\{\Delta Y\}$  das variáveis prescritas. A diferença entre o vetor  $\{\Delta X\}$  da (5.19) e da (5.52) é que este último guarda entre suas componentes  $\{\Delta u_c\}$ , enquanto o da primeira equação guarda os valores de  $\{\Delta p_c\}$ . Isolando-se  $\{\Delta X\}$  da (5.52), chega-se a:

$$\{\Delta X\} = [A]^{-1} \cdot \left\{ \{G_c\} \cdot \Delta \lambda \cdot \bar{p}_c + \{\Delta F\} + [Q] \cdot \{\Delta \sigma^0\} \right\} \quad (5.53)$$

Considerando-se a (5.48) na equação das tensões (5.22), obtém-se:

$$\{\Delta \sigma\} = - \begin{bmatrix} H'_{\Delta u_i} & H'_{\Delta u_{pi}} & H'_{\Delta u_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta u_p \\ \Delta u_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G'_{\Delta p_p} & G'_{\Delta p_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta p_p \\ \Delta p_i \end{Bmatrix} + \{G'_c\} \cdot \Delta \lambda \cdot \bar{p}_c + [Q'] \cdot \{\Delta \sigma^0\} \quad (5.54)$$

sendo  $\{G'_c\} = [G'_{\Delta p_c}] \cdot \{\gamma\}$ . Reunindo-se as incógnitas de contorno num vetor, tem-se:

$$\{\Delta\sigma\} = -\begin{bmatrix} H'_{\Delta u_i} & -G'_{\Delta u_{pi}} & H'_{\Delta u_c} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta u_i \\ \Delta p_i \\ \Delta u_c \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G'_{\Delta p_p} & -H'_{\Delta u_p} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Delta p_p \\ \Delta u_p \end{Bmatrix} + \{G'_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{p}_c + [Q'] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \quad (5.55)$$

ou

$$\{\Delta\sigma\} = -[A'] \cdot \{\Delta X\} + \{G'_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{p}_c + \{\Delta F'\} + [Q'] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \quad (5.56)$$

com  $\{\Delta F'\}$  obtido com os valores prescritos em  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ . Com  $\{\Delta X\}$  da (5.53) na (5.56), obtém-se:

$$\{\Delta\sigma\} = -[A'] \cdot \left\{ [A]^{-1} \cdot \left\{ \{G'_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{p}_c + \{\Delta F\} + [Q] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \right\} \right\} + \{G'_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{p}_c + \{\Delta F'\} + [Q'] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \quad (5.57)$$

ou

$$\{\Delta\sigma\} = -\left\{ [A'] \cdot [A]^{-1} \cdot \{G'_c\} - \{G'_c\} \right\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{p}_c - \left\{ [A'] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\Delta F\} - \{\Delta F'\} \right\} - \left\{ [A'] \cdot [A]^{-1} \cdot [Q] - [Q'] \right\} \cdot \{\Delta\sigma^0\} \quad (5.58)$$

Simplificando-se, têm-se:

$$\{\Delta\sigma\} = \{\Delta N\} + \{N_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{p}_c + [S] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \quad (5.59)$$

$$\{N_c\} = \left\{ -[A'] \cdot [A]^{-1} \cdot \{G'_c\} + \{G'_c\} \right\} \quad (5.60)$$

e  $\{\Delta N\}$  e  $[S]$  dados, respectivamente, pelas (5.29) e (5.31). Da (5.53), têm-se:

$$\{\Delta X\} = \{\Delta M\} + \{M_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{p}_c + [R] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \quad (5.61)$$

$$\{M_c\} = [A]^{-1} \cdot \{G_c\} \quad (5.62)$$

com  $\{\Delta M\}$  e  $[R]$  dados, respectivamente, pelas (5.33) e (5.35). Analogamente às (5.36) e (5.37), têm-se:

$$[E] \cdot \{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta N\} + \{N_c\} \cdot \Delta \lambda \cdot \bar{p}_c + [\bar{S}] \cdot \{\Delta \sigma^0\} \quad (5.63)$$

$$\{Y(\Delta \varepsilon, \Delta \lambda)\} = -[E] \cdot \{\Delta \varepsilon\} + \{\Delta N\} + \{N_c\} \cdot \Delta \lambda \cdot \bar{p}_c + [\bar{S}] \cdot \{[E] \cdot \{\Delta \varepsilon\} - \{\Delta \sigma(\Delta \varepsilon)\}\} = 0 \quad (5.64)$$

A equação do comprimento de arco, com a variável-guia controlando força, difere da (5.38) no que diz respeito às suas variáveis. Na (5.38), as variáveis eram  $\Delta \lambda$  e  $\{\Delta p_c\}$ . Para a presente formulação, a equação do arco fica escrita como:

$$Z(\Delta \lambda, \Delta U_c) = (\alpha \cdot \Delta P_c(\Delta \lambda))^2 + (\Delta U_c)^2 - \Delta c^2 = 0 \quad (5.65)$$

sendo  $\Delta P_c$  a força resultante que atua em  $\Gamma_c$ , proveniente das contribuições das forças de  $\{\Delta p_c\}$  que, de acordo com a (5.49), dependem de  $\Delta \lambda$ . O deslocamento  $\Delta U_c$  deve ser escolhido como uma das componentes de  $\{\Delta u_c\}$ , que está no vetor das incógnitas  $\{\Delta X\}$ . Escolhido  $\Delta U_c$ , a equação (5.65) define o arco sobre a curva força-deslocamento ( $\Delta P_c$  x  $\Delta U_c$ ). A resultante  $\Delta P_c$  depende da aproximação das forças no contorno. Admitindo-se aproximação linear, a exemplo da (5.39), e considerando a (5.49), define-se:

$$\Delta P_c = \sum_{j=1}^{N_{es}} \left\{ \left[ \Delta p_1^j(\Delta \lambda) + \Delta p_2^j(\Delta \lambda) \right] \cdot \frac{L_j}{2} \right\} \quad (5.66)$$

As forças dos nós inicial  $\Delta p_1^j$  e final  $\Delta p_2^j$ , do elemento de contorno  $j$ , conforme a (5.49), são:

$$\begin{aligned}\Delta p_1^j(\Delta\lambda) &= \Delta\lambda \cdot \gamma_1^j \cdot \bar{p}_c \\ \Delta p_2^j(\Delta\lambda) &= \Delta\lambda \cdot \gamma_2^j \cdot \bar{p}_c\end{aligned}\quad (5.67)$$

com  $\gamma_1^j$  e  $\gamma_2^j$  as componentes de  $\{\gamma\}$  relacionadas ao cálculo de  $\Delta p_1^j$  e  $\Delta p_2^j$ , respectivamente. Com a (5.67), a força resultante da (5.66) fica:

$$\Delta P_c = V_c \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{p}_c \quad (5.68)$$

com  $V_c$  o resultado escalar da somatória das influências de  $\{\Delta p_c\}$  na (5.66). O deslocamento  $\Delta U_c$  da (5.65) é uma das componentes de  $\{\Delta X\}$  da (5.53), ou seja:

$$\Delta U_c = \{A_c\}^T \cdot \left\{ \{G_c\} \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{p}_c + \{\Delta F\} + [Q] \cdot \{\Delta\sigma^0\} \right\} \quad (5.69)$$

com  $\{A_c\}^T$  o vetor com a linha da  $[A]^{-1}$  correspondente à posição que faz coincidir  $\{\Delta X\}$  com  $\Delta U_c$ . Resumindo a (5.69), obtém-se:

$$\Delta U_c = \Delta M_c + M_c \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{p}_c + \{R_c\}^T \cdot \{\Delta\sigma^0\} \quad (5.70)$$

$$\Delta M_c = \{A_c\}^T \cdot \{\Delta F\} \quad (5.71)$$

$$M_c = \{A_c\}^T \cdot \{G_c\} \quad (5.72)$$

$$\{R_c\}^T = \{A_c\}^T \cdot [Q] \quad (5.73)$$

Escrevendo-se a equação (5.70) em termos das deformações, tem-se:

$$\Delta U_c(\Delta\lambda, \Delta\varepsilon) = \Delta M_c + M_c \cdot \Delta\lambda \cdot \bar{p}_c + \{R_c\}^T \cdot \left\{ [E] \cdot \{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\sigma(\Delta\varepsilon)\} \right\} \quad (5.74)$$

Considerando-se as (5.68) e (5.74), obtém-se a equação do arco (5.65) em termos das deformações:

$$Z(\Delta\lambda, \Delta\varepsilon) = (\alpha \cdot V_c \cdot \bar{p}_c)^2 \cdot (\Delta\lambda)^2 + (\Delta U_c(\Delta\lambda, \Delta\varepsilon))^2 - \Delta c^2 = 0 \quad (5.75)$$

As equações (5.64) e (5.75) definem o problema não-linear nas variáveis  $\Delta\lambda$  e  $\Delta\varepsilon$ .

#### **5.3.4. Observações sobre as formulações com comprimento de arco**

A introdução do conceito de comprimento de arco na formulação não-linear do método dos elementos de contorno, descrita no capítulo 4, foi uma idéia surgida durante o andamento deste trabalho. Constatou-se, pelos resultados numéricos obtidos com a formulação não-linear, sem comprimento de arco, que certas limitações, naturais nos problemas com prescrição direta de força ou deslocamento, poderiam comprometer as análises numéricas que se pretendia fazer do problema da localização de deformações.

Observando que o conceito de comprimento de arco já vinha sendo incorporado há algum tempo ao método dos elementos finitos, decidiu-se incorporá-lo à formulação não-linear do método dos elementos de contorno, campo ainda praticamente inexplorado. O resultado foi que a implementação da equação do arco capacitou o programa desenvolvido para analisar problemas que exibem “snap-backs”, muito usuais na localização.

#### **5.4. Formulação Não-Linear do Método dos Elementos de Contorno com Equação de Restrição**

Neste item, introduz-se a equação de restrição na formulação não-linear do MEC, em substituição às equações do comprimento de arco dos itens (5.3.2) e (5.3.3). Será demonstrado que a equação do comprimento de arco é uma equação de restrição particular, tornando a formulação com esta última mais geral que com a primeira.

A idéia é bem semelhante à do comprimento de arco. Considera-se que o carregamento (forças e deslocamentos de contorno) subdivide-se aditivamente em duas partes. Uma parte conhecida e outra desconhecida, exceto sua direção. A primeira é o carregamento prescrito e a segunda o carregamento piloto. A intensidade

do carregamento piloto é dada pela variável de pilotagem  $\eta$ , incógnita do problema. Destas definições, têm-se:

$$\begin{aligned}\{\mathbf{p}\} &= \{\mathbf{p}\}^{\text{pr}} + \eta \cdot \{\mathbf{p}\}^{\text{pilo}} \\ \{\mathbf{u}\} &= \{\mathbf{u}\}^{\text{pr}} + \eta \cdot \{\mathbf{u}\}^{\text{pilo}}\end{aligned}\quad (5.76)$$

sendo  $\{\mathbf{p}\}^{\text{pr}}$  e  $\{\mathbf{u}\}^{\text{pr}}$  os vetores com as forças e os deslocamentos de contorno prescritos, respectivamente, e  $\{\mathbf{p}\}^{\text{pilo}}$  e  $\{\mathbf{u}\}^{\text{pilo}}$  os mesmos vetores com os carregamentos piloto. Em termos de variáveis incrementais, têm-se:

$$\begin{aligned}\{\Delta\mathbf{p}\} &= \{\Delta\mathbf{p}\}^{\text{pr}} + \Delta\eta \cdot \{\mathbf{p}\}^{\text{pilo}} \\ \{\Delta\mathbf{u}\} &= \{\Delta\mathbf{u}\}^{\text{pr}} + \Delta\eta \cdot \{\mathbf{u}\}^{\text{pilo}}\end{aligned}\quad (5.77)$$

sendo  $\{\Delta\mathbf{p}\}^{\text{pilo}} = \Delta\eta \cdot \{\mathbf{p}\}^{\text{pilo}}$  e  $\{\Delta\mathbf{u}\}^{\text{pilo}} = \Delta\eta \cdot \{\mathbf{u}\}^{\text{pilo}}$ . As duas variáveis da (5.77) num mesmo vetor fica:

$$\{\Delta\mathbf{F}\} = \{\Delta\mathbf{F}\}^{\text{pr}} + \Delta\eta \cdot \{\mathbf{F}\}^{\text{pilo}} \quad (5.78)$$

sendo  $\{\Delta\mathbf{F}\}$  o vetor com as variáveis do carregamento. O vetor das incógnitas  $\{\Delta\mathbf{X}\}$  da equação dos deslocamentos do MEC, com a (5.78), fica:

$$\{\Delta\mathbf{X}\} = [\mathbf{A}]^{-1} \cdot \left\{ \{\Delta\mathbf{F}\}^{\text{pr}} + \Delta\eta \cdot \{\mathbf{F}\}^{\text{pilo}} + [\mathbf{Q}] \cdot \{\Delta\boldsymbol{\sigma}^0\} \right\} \quad (5.79)$$

e a equação das tensões dada por:

$$\begin{aligned}\{\Delta\boldsymbol{\sigma}\} &= -[\mathbf{A}'] \cdot \{\Delta\mathbf{X}\} + \left\{ \{\Delta\mathbf{F}'\}^{\text{pr}} + \Delta\eta \cdot \{\mathbf{F}'\}^{\text{pilo}} \right\} + [\mathbf{Q}'] \cdot \{\Delta\boldsymbol{\sigma}^0\} \\ \{\Delta\boldsymbol{\sigma}\} &= \{\Delta\mathbf{N}\}^{\text{pr}} + \{\mathbf{N}\}^{\text{pilo}} \cdot \Delta\eta + [\mathbf{S}] \cdot \{\Delta\boldsymbol{\sigma}^0\}\end{aligned}\quad (5.80)$$

com



$$\{\Delta N\}^{pr} = -[A'] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\Delta F\}^{pr} + \{\Delta F'\}^{pr} \quad (5.81)$$

$$\{N\}^{pilo} = -[A'] \cdot [A]^{-1} \cdot \{F\}^{pilo} + \{F'\}^{pilo} \quad (5.82)$$

e [S] dada na (4.9).

Para resolver o problema, associa-se ao sistema uma equação de restrição, da forma:

$$Z^R(\{\Delta X\}, \{\Delta \varepsilon\}, \Delta \eta) = \{\Delta X\}^T \cdot [L_x] \cdot \{\Delta X\} + \{\Delta \varepsilon\}^T \cdot [L_\varepsilon] \cdot \{\Delta \varepsilon\} + \Delta \eta \cdot l_\eta \cdot \Delta \eta - (\Delta c^R)^2 = 0 \quad (5.83)$$

sendo  $\Delta c^R$  um valor constante, relacionado à restrição do problema,  $\{\Delta X\}$ ,  $\{\Delta \varepsilon\}$  e  $\Delta \eta$  os incrementos das incógnitas do contorno, das deformações e da variável de pilotagem, respectivamente,  $[L_x]$  e  $[L_\varepsilon]$  as matrizes com as influências das componentes de  $\{\Delta X\}$  e  $\{\Delta \varepsilon\}$  na equação de restrição e  $l_\eta$  a constante com a influência de  $\Delta \eta$ .

A equação (5.83), em sua forma geral, possibilita que, em função das escolhas de  $[L_x]$ ,  $[L_\varepsilon]$  e  $l_\eta$ , diversas restrições possam ser levadas em consideração, inclusive à da equação do comprimento de arco. Para mostrar que esta é um caso particular de equação de restrição, considera-se a (5.38) adaptada à notação deste item, ou seja:

$$Z^R(\Delta \eta, \Delta P_c(\{\Delta X\})) = (\alpha \cdot \Delta P_c)^2 + (\Delta \eta \cdot u_c^{pilo})^2 - (\Delta c)^2 = 0 \quad (5.84)$$

para  $u_c^{pilo}$  a componente de  $\{u\}^{pilo}$  (também componente de  $\{F\}^{pilo}$ ) do deslocamento controlado, que é a mesma componente de deslocamento representada por  $\bar{u}_c$  na (5.38). Por definição, da (5.40),  $\Delta P_c = \{v\}^T \cdot \{\Delta X_c\}$ , sendo  $\{\Delta X_c\} = \{\Delta p_c\}$  o vetor com as componentes de  $\{\Delta p_c\}$  tiradas de  $\{\Delta X\}$ . Desta forma, a (5.84) fica:

$$\left[ \alpha \cdot \left( \{v\}^T \cdot \{\Delta X_c\} \right) \right]^2 + (\Delta \eta \cdot u_c^{pilo})^2 - (\Delta c)^2 = 0 \quad (5.85)$$

Observando-se as (5.85) e (5.83), constata-se que elas são iguais se, na (5.83), for feito:

$$\begin{aligned}
 L_x(i, j) &= 0 && \text{se } i \notin \{k_c\} \text{ ou } j \notin \{k_c\} \\
 L_x(i, j) &= \alpha^2 \cdot v_i \cdot v_j && \text{se } i \in \{k_c\} \text{ e } j \in \{k_c\} \\
 [L_\varepsilon] &= 0 \\
 l_\eta &= (u_c^{\text{pilo}})^2 \\
 \Delta c^R &= \Delta c
 \end{aligned} \tag{5.86}$$

para  $i$  e  $j$  a linha e coluna da matriz  $[L_x]$ ,  $\{k_c\}$  o vetor com as posições das linhas de  $\{\Delta X_c\}$  em  $\{\Delta X\}$  e  $v_i$  a componente  $i$  do vetor  $\{v\}$  da (5.40).

As variáveis  $\Delta \lambda$  da (5.38) e  $\Delta \eta$  da (5.85), apesar de terem o mesmo significado, ou seja, de controlar a intensidade do passo das variáveis sobre as quais atuam, possuem uma pequena diferença. A variável-guia  $\Delta \lambda$  atua sobre o valor atualizado, do incremento anterior, do deslocamento  $\bar{u}_c$  ou da força  $\bar{p}_c$  controlados. Na (5.85), a variável de pilotagem  $\Delta \eta$  atua sobre o valor fixo  $u_c^{\text{pilo}}$ , que é prescrito, assim como  $\{u\}^{\text{pilo}}$  e  $\{p\}^{\text{pilo}}$ , como se fosse um carregamento normal, de um problema sem equação de restrição. Com a separação das variáveis, conforme a (5.76), o incremento do carregamento piloto torna-se função da variável de pilotagem  $\Delta \eta$ , ou seja,  $\{\Delta u\}^{\text{pilo}} = \Delta \eta \cdot \{u\}^{\text{pilo}}$  e  $\{\Delta p\}^{\text{pilo}} = \Delta \eta \cdot \{p\}^{\text{pilo}}$ . Resumindo,  $\Delta \eta$  atua sobre os mesmos valores prescritos,  $\{u\}^{\text{pilo}}$  e  $\{p\}^{\text{pilo}}$ , do primeiro ao último incremento.

Da (5.79), observa-se que  $\{\Delta X\} = \{\Delta X(\{\Delta \varepsilon\}, \Delta \eta)\}$ , ou seja, as incógnitas de contorno dependem das deformações  $\{\Delta \varepsilon\}$  e de  $\Delta \eta$ . Assim, a exemplo das (5.47) e (5.75), a equação de restrição (5.83) fica:

$$\begin{aligned}
 Z^R(\{\Delta X(\{\Delta \varepsilon\}, \Delta \eta)\}, \{\Delta \varepsilon\}, \Delta \eta) &= Z^R(\{\Delta \varepsilon\}, \Delta \eta) = \{\Delta X(\{\Delta \varepsilon\}, \Delta \eta)\}^T \cdot [L_x] \cdot \{\Delta X(\{\Delta \varepsilon\}, \Delta \eta)\} \\
 &+ \{\Delta \varepsilon\}^T \cdot [L_\varepsilon] \cdot \{\Delta \varepsilon\} + \Delta \eta \cdot l_\eta \cdot \Delta \eta - (\Delta c^R)^2 = 0
 \end{aligned} \tag{5.87}$$

Da (5.80), tem-se:

$$\{Y(\{\Delta\varepsilon, \Delta\eta\})\} = -[E] \cdot \{\Delta\varepsilon\} + \{\Delta N\}^{pr} + \Delta\eta \cdot \{N\}^{pilo} + [\bar{S}] \cdot \{[E] \cdot \{\Delta\varepsilon\} - \{\Delta\sigma\{\Delta\varepsilon\}\}\} = 0 \quad (5.88)$$

O sistema não-linear com as equações de equilíbrio na (5.88) e a equação de restrição (5.87) definem a formulação nas variáveis  $\{\Delta\varepsilon\}$  e  $\Delta\eta$ .

A equação de restrição (5.83) é quadrática em suas variáveis. No entanto, ela poderia ser linear, cúbica, ou assumir qualquer outra forma. A forma quadrática da (5.83) permite recuperar a equação do comprimento de arco, como na (5.85), e será utilizada neste trabalho. A equação de restrição deve ser escolhida da maneira mais conveniente para cada exemplo de aplicação. Por exemplo, pode-se escolher duas variáveis nodais de  $\{\Delta X\}$ , uma de deslocamento, outra de força, e estabelecer a restrição levando-se em conta uma relação quadrática entre estas duas componentes. Um outro exemplo consiste em impor como restrição um valor constante para o incremento de deformação num dado ponto, escrevendo-se a equação em função apenas de uma componente de  $\{\Delta\varepsilon\}$ .

### **5.5. Procedimento incremental-iterativo para resolução do problema não-linear com equação de restrição**

Neste item serão apresentados dois tipos de procedimento iterativo implícito para a resolução do problema nas variáveis incrementais com as equações (5.87) e (5.88). Um será denominado de método com equação de restrição linearizada, o outro com equação de restrição esférica. Os mesmos métodos podem ser aplicados às formulações com as equações de comprimento de arco (5.47) e (5.75).

#### **5.5.1. Método com equação de restrição linearizada**

O método linearizado é obtido com a linearização da equação de restrição em conjunto com as equações de equilíbrio, a cada iteração. A expansão em Taylor, truncada no termo linear, das (5.88) e (5.87), resulta, respectivamente, nas:

$$\{Y(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)\} + \frac{\partial\{Y(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} \cdot \{\delta\Delta\varepsilon_n^i\} + \frac{\partial\{Y(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)\}}{\partial\Delta\eta_n^i} \cdot \{\delta\Delta\eta_n^i\} = 0 \quad (5.89)$$

$$Z^R(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i) + \frac{\partial Z^R(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} \cdot \{\delta\Delta\varepsilon_n^i\} + \frac{\partial Z^R(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)}{\partial\Delta\eta_n^i} \cdot \{\delta\Delta\eta_n^i\} = 0 \quad (5.90)$$

e as variáveis são atualizadas de acordo com as:

$$\begin{aligned} \{\Delta\varepsilon_n^{i+1}\} &= \{\Delta\varepsilon_n^i\} + \{\delta\Delta\varepsilon_n^i\} \\ \Delta\eta_n^{i+1} &= \Delta\eta_n^i + \delta\Delta\eta_n^i \end{aligned} \quad (5.91)$$

A primeira derivada da (5.89) envolve a matriz tangente consistente do modelo de dano, discutida no capítulo 4. As derivadas da (5.90) ficam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z^R(\{\Delta X_n^i(\{\Delta\varepsilon_n^i\}), \{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} &= \frac{\partial Z^R(\{\Delta X_n^i(\{\Delta\varepsilon_n^i\}), \{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)}{\partial\{\Delta X_n^i\}} \cdot \frac{\partial\{\Delta X_n^i\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} + \frac{\partial Z^R(\{\Delta X_n^i(\{\Delta\varepsilon_n^i\}), \{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} \\ \frac{\partial Z^R(\{\Delta X_n^i(\{\Delta\varepsilon_n^i\}), \{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)}{\partial\Delta\eta_n^i} &= \frac{\partial Z^R(\{\Delta X_n^i(\{\Delta\varepsilon_n^i\}), \{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)}{\partial\{\Delta X_n^i\}} \cdot \frac{\partial\{\Delta X_n^i\}}{\partial\Delta\eta_n^i} + \frac{\partial Z^R(\{\Delta X_n^i(\{\Delta\varepsilon_n^i\}), \{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)}{\partial\Delta\eta_n^i} \end{aligned} \quad (5.92)$$

Com as (5.83) e (5.79), têm-se:

$$\frac{\partial Z^R(\{\Delta X_n^i(\{\Delta\varepsilon_n^i\}), \{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} = 2 \cdot [\bar{L}_x] \cdot [A]^{-1} \cdot [Q] \cdot \left[ [E] - \frac{\partial\{\Delta\sigma_n^i\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} \right] \cdot \{\Delta X_n^i\} + 2 \cdot [L_\varepsilon] \cdot \{\Delta\varepsilon_n^i\} \quad (5.93)$$

$$\frac{\partial Z^R(\{\Delta X_n^i(\{\Delta\varepsilon_n^i\}), \{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)}{\partial\Delta\eta_n^i} = 2 \cdot \{\Delta X_n^i\}^T \cdot \left[ [\bar{L}_x]^T \cdot [A]^{-1} \right] \cdot \{F\}^{\text{pilo}} + 2 \cdot 1_n \cdot \Delta\eta_n^i \quad (5.94)$$

sendo  $[\bar{L}_x]$ , nas (5.93) e (5.94), a matriz formada pelas componentes:

$$\begin{aligned} \bar{L}_x(i, i) &= 2 \cdot L_x(i, i) \\ \bar{L}_x(i, j) &= L_x(i, j) + L_x(j, i) \quad \text{para } i \neq j \end{aligned} \quad (5.95)$$

O sistema com as (5.89) e (5.90) deve ser resolvido para cada nova iteração, até que ambas equações verifiquem algum critério de convergência.

O algoritmo simplificado para este procedimento é dado no que segue.

\*\*\*\*\*

\* Inicialização:  $i = 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_n$ ,  $\sigma = \sigma_n$ , variáveis de dano iguais à do passo  $n$ .

\* Etapa de Previsão: do sistema linear com as (5.89) e (5.90), com as derivadas tomadas em relação às variáveis contínuas, calculam-se  $\{\Delta\varepsilon_n^0\}$  e  $\Delta\eta_n^0$ , para os carregamentos  $\{Y(\{\Delta\varepsilon\}, \Delta\eta)\} = \{\Delta N\}^{lpf}$  e  $Z^R(\{\Delta\varepsilon\}, \Delta\eta) = -(\Delta c^R)^2$

\* Etapa de Correção: checa-se a função de carregamento do modelo de dano para cada nó, e determinam-se os incrementos das variáveis de dano.

\* Determina-se, com o modelo constitutivo, o incremento das tensões reais  $\{\Delta\sigma_n^i\}$ .

\* Calculam-se  $\{Y(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)\}$  e  $Z^R(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)$

- Se  $i = 0$ , calculam-se:

$$n_1^0 \Rightarrow \text{norma euclidiana de } \{Y(\{\Delta\varepsilon_n^0\}, \Delta\eta_n^0)\}$$

$$n_2^0 \Rightarrow \frac{\|Z^R(\{\Delta\varepsilon_n^0\}, \Delta\eta_n^0)\|}{(\Delta c^R)^2}$$

\* Verifica-se a convergência:

- Se  $i = 0$ , faz-se:

- Se  $n_1^0 < tol_1$  e  $n_2^0 < 0,01$ , convergência alcançada.

- Se não, segue-se para o próximo item.

- Se  $i \geq 1$ , calculam-se, e faz-se:

$$n_1^i \Rightarrow \text{norma euclidiana de } \{Y(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)\}$$

$$n_2^i \Rightarrow \frac{\|Z^R(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)\|}{(\Delta c^R)^2}$$

- Se  $n_1^i < 0,01 \cdot n_1^0$  e  $n_2^i < 0,01$ , convergência alcançada.

- Se não, segue-se para o próximo item.

\* Resolve-se o sistema com as (5.89) e (5.90), com as derivadas tomadas em relação às variáveis incrementais, obtendo-se  $\{\delta\Delta\varepsilon_n^i\}$  e  $\delta\Delta\eta_n^i$ .

$$* \{\Delta \varepsilon_n^{i+1}\} = \{\Delta \varepsilon_n^i\} + \{\delta \Delta \varepsilon_n^i\}, \quad \Delta \eta_n^{i+1} = \Delta \eta_n^i + \delta \Delta \eta_n^i.$$

\*  $i = i + 1$ , volta-se ao item “Etapa de Correção”.

### 5.5.2. Método com equação de restrição esférica

Neste método, apenas a equação de equilíbrio  $\{Y(\{\Delta \varepsilon_n^i\}, \Delta \eta_n^i)\} = 0$  é linearizada nas variáveis incrementais. Reescrevendo-se a (5.89), tem-se:

$$\{\delta \Delta \varepsilon_n^i\} = \left[ \frac{\partial \{Y(\{\Delta \varepsilon_n^i\}, \Delta \eta_n^i)\}}{\partial \{\Delta \varepsilon_n^i\}} \right]^{-1} \cdot \left\{ - \frac{\partial \{Y(\{\Delta \varepsilon_n^i\}, \Delta \eta_n^i)\}}{\partial \Delta \eta_n^i} \cdot \delta \Delta \eta_n^i - \{Y(\{\Delta \varepsilon_n^i\}, \Delta \eta_n^i)\} \right\} \quad (5.96)$$

ou

$$\{\delta \Delta \varepsilon_n^i\} = \{a^0\}_n^i \cdot \delta \Delta \eta_n^i + \{b^0\}_n^i \quad (5.97)$$

Na (5.97), a variável com a atualização das deformações  $\{\delta \Delta \varepsilon_n^i\}$ , na iteração  $i$ , é escrita em função da variável de pilotagem  $\delta \Delta \eta_n^i$ . Por definição, têm-se:

$$\begin{aligned} \{\Delta X_n^{i+1}\} &= \{\Delta X_n^i\} + \{\delta \Delta X_n^i\} \\ \{\Delta \varepsilon_n^{i+1}\} &= \{\Delta \varepsilon_n^i\} + \{\delta \Delta \varepsilon_n^i\} \\ \Delta \eta_n^{i+1} &= \Delta \eta_n^i + \delta \Delta \eta_n^i \end{aligned} \quad (5.98)$$

Da (5.79), obtêm-se:

$$\{\Delta X_n^i\} = [A]^{-1} \cdot \left\{ \{\Delta F\}^{pr} + \Delta \eta_n^i \cdot \{F\}^{pilo} + [Q] \cdot \left\{ [E] \cdot \{\Delta \varepsilon_n^i\} - \{\Delta \sigma_n^i(\{\Delta \varepsilon_n^i\}) \right\} \right\} \quad (5.99)$$

A variação  $\{\delta \Delta X_n^i\}$  é dada por:

$$\begin{aligned}
\{\delta\Delta X_n^i\} &= \frac{\partial\{\Delta X_n^i\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} \cdot \{\delta\Delta\varepsilon_n^i\} + \frac{\partial\{\Delta X_n^i\}}{\partial\Delta\eta_n^i} \cdot \delta\Delta\eta_n^i = \\
&= \left[ [A]^{-1} \cdot [Q] \cdot \left[ [E] - \frac{\partial\{\Delta\sigma_n^i\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} \right] \right] \cdot \{\delta\Delta\varepsilon_n^i\} + \{[A]^{-1} \cdot \{F\}^{\text{pilo}}\} \cdot \delta\Delta\eta_n^i
\end{aligned} \tag{5.100}$$

Com a (5.97) na (5.100), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\{\delta\Delta X_n^i\} &= \left[ [A]^{-1} \cdot [Q] \cdot \left[ [E] - \frac{\partial\{\Delta\sigma_n^i\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} \right] \right] \cdot \left\{ \{a^0\}_n^i \cdot \delta\Delta\eta_n^i + \{b^0\}_n^i \right\} + \{[A]^{-1} \cdot \{F\}^{\text{pilo}}\} \cdot \delta\Delta\eta_n^i = \\
&= \{a^x\}_n^i \cdot \delta\Delta\eta_n^i + \{b^x\}_n^i
\end{aligned} \tag{5.101}$$

A primeira equação da (5.98), com a (5.101), fica:

$$\{\Delta X_n^i\} = \{a^x\}_n^i \cdot \delta\Delta\eta_n^i + \left[ \{\Delta X_n^{i-1}\} + \{b^x\}_n^i \right] \tag{5.102}$$

Por analogia, a segunda das (5.98) fica:

$$\{\Delta\varepsilon_n^i\} = \{a^0\}_n^i \cdot \delta\Delta\eta_n^i + \left[ \{\Delta\varepsilon_n^{i-1}\} + \{b^0\}_n^i \right] \tag{5.103}$$

No método com equação de restrição esférica, resolve-se a equação exatamente para as variáveis da iteração  $i+1$  na (5.98). A equação (5.83) fica:

$$Z^R(\{\Delta X_n^i\}, \{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i) = \{\Delta X_n^i\}^T \cdot [L_x] \cdot \{\Delta X_n^i\} + \{\Delta\varepsilon_n^i\}^T \cdot [L_\varepsilon] \cdot \{\Delta\varepsilon_n^i\} + \Delta\eta_n^i \cdot l_\eta \cdot \Delta\eta_n^i - (\Delta c^R)^2 = 0 \tag{5.104}$$

Com as (5.102) e (5.103) substituídas na (5.104), chega-se a:

$$\begin{aligned}
Z^R(\delta\Delta\eta_n^i) &= \left\{ \{a^x\}_n^i \cdot \delta\Delta\eta_n^i + \left[ \{\Delta X_n^{i-1}\} + \{b^x\}_n^i \right] \right\}^T \cdot [L_x] \cdot \left\{ \{a^x\}_n^i \cdot \delta\Delta\eta_n^i + \left[ \{\Delta X_n^{i-1}\} + \{b^x\}_n^i \right] \right\} \\
&+ \left\{ \{a^0\}_n^i \cdot \delta\Delta\eta_n^i + \left[ \{\Delta\varepsilon_n^{i-1}\} + \{b^0\}_n^i \right] \right\}^T \cdot [L_\varepsilon] \cdot \left\{ \{a^0\}_n^i \cdot \delta\Delta\eta_n^i + \left[ \{\Delta\varepsilon_n^{i-1}\} + \{b^0\}_n^i \right] \right\} \\
&+ (\Delta\eta_n^{i-1} + \delta\Delta\eta_n^i) \cdot l_\eta \cdot (\Delta\eta_n^{i-1} + \delta\Delta\eta_n^i) - (\Delta c^R)^2 = 0
\end{aligned} \tag{5.105}$$

Agrupando-se os termos, tem-se:

$$\begin{aligned}
Z^R(\delta\Delta\eta_n^i) &= \left( \{a^x\}_n^i{}^T \cdot [L_x] \cdot \{a^x\}_n^i + \{a^0\}_n^i{}^T \cdot [L_\varepsilon] \cdot \{a^0\}_n^i + 1_{\eta} \right) \cdot (\delta\Delta\eta_n^i)^2 \\
&+ \left( \{a^x\}_n^i{}^T \cdot [L_x] \cdot \left[ \{\Delta X_n^{i-1}\} + \{b^x\}_n^i \right] + \left[ \{\Delta X_n^{i-1}\} + \{b^x\}_n^i \right]^T \cdot [L_x] \cdot \{a^x\}_n^i + 2 \cdot 1_{\eta} \cdot \Delta\eta_n^{i-1} \right) \cdot \delta\Delta\eta_n^i \\
&+ \left( \{a^0\}_n^i{}^T \cdot [L_\varepsilon] \cdot \left[ \{\Delta\varepsilon_n^{i-1}\} + \{b^0\}_n^i \right] + \left[ \{\Delta\varepsilon_n^{i-1}\} + \{b^0\}_n^i \right]^T \cdot [L_\varepsilon] \cdot \{a^0\}_n^i \right) \cdot \delta\Delta\eta_n^i \\
&+ \left( \left[ \{\Delta X_n^{i-1}\} + \{b^x\}_n^i \right]^T \cdot [L_x] \cdot \left[ \{\Delta X_n^{i-1}\} + \{b^x\}_n^i \right] + \left[ \{\Delta\varepsilon_n^{i-1}\} + \{b^0\}_n^i \right]^T \cdot [L_\varepsilon] \cdot \left[ \{\Delta\varepsilon_n^{i-1}\} + \{b^0\}_n^i \right] \right) \\
&+ \Delta\eta_n^{i-1} \cdot 1_{\eta} \cdot \Delta\eta_n^{i-1} = 0
\end{aligned} \tag{5.106}$$

ou

$$Z^R(\delta\Delta\eta_n^i) = a^R \cdot (\delta\Delta\eta_n^i)^2 + b^R \cdot (\delta\Delta\eta_n^i) + c^R = 0 \tag{5.107}$$

A equação (5.107) tem duas raízes para  $\delta\Delta\eta_n^i$ . Voltando com cada uma das raízes nas (5.102) e (5.103), obtêm-se duas soluções para  $\{\Delta X_n^{i+1}\}$  e  $\{\Delta\varepsilon_n^{i+1}\}$ , e também para  $\Delta\eta_n^{i+1}$ , na (5.98). Uma das duas raízes deverá ser descartada segundo algum critério que estabeleça convergência para a solução no incremento. Neste trabalho, utiliza-se o critério da observância do valor da norma euclidiana do vetor  $\{Y(\{\Delta\varepsilon_n^{i+1}\}, \Delta\eta_n^{i+1})\}$  com as equações de equilíbrio, para cada conjunto de soluções. A solução com o maior valor da norma, entre as duas obtidas, será desconsiderada, admitindo-se correta a solução com o menor valor da norma. O processo é iterativo até que se verifique a convergência seguindo algum critério pré-estabelecido.

O algoritmo simplificado para o método com equação esférica é dado no que segue.

\*\*\*\*\*

\* Inicialização:  $i = 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_n$ ,  $\sigma = \sigma_n$ , variáveis de dano iguais à do passo  $n$ .

\* Etapa de Previsão: com a (5.96), calcula-se, com as derivadas tomadas em relação às variáveis contínuas,  $\{\Delta\varepsilon_n^0\} = \{a^0\}_n^0 \cdot \Delta\eta_n^0 + \{b^0\}_n^0$ , para o carregamento  $\{Y(\{\Delta\varepsilon\}, \Delta\eta)\} = \{\Delta N\}^{\text{pr}}$ .

\* Com a (5.107), obtêm-se duas raízes:  $\Delta\eta_{n1}^0$  e  $\Delta\eta_{n2}^0$ .



\* Calculam-se:

- Para  $\Delta\eta_{n1}^0$ :

$$\{\Delta\varepsilon_{n1}^0\} = \{a^0\}_n^0 \cdot \Delta\eta_{n1}^0 + \{b^0\}_n^0$$

- Para  $\Delta\eta_{n2}^0$ :

$$\{\Delta\varepsilon_{n2}^0\} = \{a^0\}_n^0 \cdot \Delta\eta_{n2}^0 + \{b^0\}_n^0$$

\* Para cada raiz, têm-se:

-  $m_1^0 \Rightarrow$  norma euclidiana de  $\{Y(\{\Delta\varepsilon_{n1}^0\}, \Delta\eta_{n1}^0)\}$

-  $m_2^0 \Rightarrow$  norma euclidiana de  $\{Y(\{\Delta\varepsilon_{n2}^0\}, \Delta\eta_{n2}^0)\}$

\* Adotam-se  $\{\Delta\varepsilon_{nk}^0\}$  e  $\Delta\eta_{nk}^0$  para  $k$  correspondente ao menor dos valores entre as normas  $m_k^0$ .

\* Calculam-se as variáveis:

$$\{\Delta\varepsilon_n^0\} = \{a^0\}_n^0 \cdot \Delta\eta_{nk}^0 + \{b^0\}_n^0,$$

$$\{\Delta X_n^0\} = \{a^x\}_n^0 \cdot \Delta\eta_{nk}^0 + \{b^x\}_n^0,$$

$$\Delta\eta_n^0 = \Delta\eta_{nk}^0$$

\* Etapa de Correção: checa-se a função de carregamento do modelo de dano para cada nó, e determinam-se os incrementos das variáveis de dano.

\* Determina-se, com o modelo constitutivo, o incremento das tensões reais  $\{\Delta\sigma_n^i\}$ .

\* Calculam-se  $\{Y(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)\}$  e  $Z^R(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)$

- Se  $i = 0$ , calculam-se:

$$n_1^0 \Rightarrow \text{norma euclidiana de } \{Y(\{\Delta\varepsilon_n^0\}, \Delta\eta_n^0)\}$$

$$n_2^0 \Rightarrow \frac{\|Z^R(\{\Delta\varepsilon_n^0\}, \Delta\eta_n^0)\|}{(\Delta c^R)^2}$$

\* Verifica-se a convergência:

- Se  $i = 0$ , faz-se:

- Se  $n_1^0 < \text{tol}_1$  e  $n_2^0 < 0,01$ , convergência alcançada.

- Se não, segue-se para o próximo item.

- Se  $i \geq 1$ , calculam-se, e faz-se:

$$n_1^i \Rightarrow \text{norma euclidiana de } \{Y(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)\}$$

$$n_2^i \Rightarrow \frac{\|Z^R(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \Delta\eta_n^i)\|}{(\Delta c^R)^2}$$

- Se  $n_1^i < 0,01 \cdot n_1^0$  e  $n_2^i < 0,01$ , convergência alcançada.

- Se não, segue-se para o próximo item.

\* Com a (5.96), calcula-se, com as derivadas tomadas em relação às variáveis incrementais,  $\{\delta\Delta\varepsilon_n^i\} = \{a^0\}_n^i \cdot \delta\Delta\eta_n^i + \{b^0\}_n^i$ .

\* Com a (5.107), obtêm-se duas raízes:  $\delta\Delta\eta_{n1}^i$  e  $\delta\Delta\eta_{n2}^i$ .

\* Calculam-se:

- Para  $\delta\Delta\eta_{n1}^i$ :

$$\{\delta\Delta\varepsilon_{n1}^i\} = \{a^0\}_n^i \cdot \delta\Delta\eta_{n1}^i + \{b^0\}_n^i$$

$$\{\Delta\varepsilon_{n1}^i\} = \{\Delta\varepsilon_n^{i-1}\} + \{\delta\Delta\varepsilon_{n1}^i\}$$

$$\Delta\eta_{n1}^i = \Delta\eta_n^{i-1} + \delta\Delta\eta_{n1}^i$$

- Para  $\delta\Delta\eta_{n2}^i$ :

$$\{\delta\Delta\varepsilon_{n2}^i\} = \{a^0\}_n^i \cdot \delta\Delta\eta_{n2}^i + \{b^0\}_n^i$$

$$\{\Delta\varepsilon_{n2}^i\} = \{\Delta\varepsilon_n^{i-1}\} + \{\delta\Delta\varepsilon_{n2}^i\}$$

$$\Delta\eta_{n2}^i = \Delta\eta_n^{i-1} + \delta\Delta\eta_{n2}^i$$

\* Para cada raiz, têm-se:

$$- m_1^i \Rightarrow \text{norma euclidiana de } \{Y(\{\Delta\varepsilon_{n1}^i\}, \Delta\eta_{n1}^i)\}$$

$$- m_2^i \Rightarrow \text{norma euclidiana de } \{Y(\{\Delta\varepsilon_{n2}^i\}, \Delta\eta_{n2}^i)\}$$

\* Adotam-se  $\{\Delta\varepsilon_{nk}^i\}$  e  $\Delta\eta_{nk}^i$  para  $k$  correspondente ao menor dos valores entre as normas  $m_k^i$ .

\* Calculam-se as variáveis:

$$\{\Delta\varepsilon_n^i\} = \{a^0\}_n^i \cdot \delta\Delta\eta_{nk}^i + \left[ \{\Delta\varepsilon_n^{i-1}\} + \{b^0\}_n^i \right]$$

$$\{\Delta X_n^i\} = \{a^X\}_n^i \cdot \delta\Delta\eta_{nk}^i + \left[ \{\Delta X_n^{i-1}\} + \{b^X\}_n^i \right]$$

$$\Delta\eta_n^i = \Delta\eta_n^{i-1} + \delta\Delta\eta_{nk}^i$$

\*  $i = i + 1$ , volta-se ao item “Etapa de Correção”.

### 5.5.3. Observações gerais sobre os procedimentos descritos

Alguns aspectos que dizem respeito aos dois métodos descritos nos itens (5.5.1) e (5.5.2) devem ser observados. O método com equação linearizada apresenta a vantagem de seguir a idéia do procedimento de Newton-Raphson, somando às equações de equilíbrio naturalmente linearizadas, a equação de restrição também linearizada. Todo o conjunto pode ser colocado num mesmo sistema e resolvido. A solução é única para cada iteração.

Em contrapartida, para o método com equação esférica, são duas raízes obtidas, e deve-se acrescentar algum procedimento para eliminar uma das raízes, o que pode acarretar custo computacional mais elevado. No entanto, este método tem sempre solução “exata” para a equação de restrição, em cada iteração. O termo entre aspas é proposital, para lembrar que a solução é exata partindo-se do pressuposto que as equações de equilíbrio são introduzidas linearizadas na equação de restrição, antes que esta seja resolvida, para cada iteração.

A comparação entre os dois métodos mereceria mais estudos para melhor avaliar as potencialidades de cada um. Neste trabalho, os dois métodos foram implementados e, aparentemente, nos exemplos testados, a convergência do método esférico pareceu ser um pouco melhor que a do método linearizado. No entanto, ressalta-se aqui a necessidade de melhor avaliação do tema.

A equação de restrição, de uma maneira geral, pode ser entendida como uma condição imposta ao problema, à qual deve se ajustar o equilíbrio. A equação do comprimento de arco, que é uma equação de restrição particular, representa um arco geométrico numa curva força-deslocamento conveniente ao exemplo. Neste sentido, ela não representa uma equação de equilíbrio ou de compatibilidade, e sim uma equação puramente de natureza geométrica. O equilíbrio é então obtido satisfazendo-se a restrição imposta.

Dentro do processo iterativo de busca de solução, é interessante notar que o sistema de equações não-lineares mistura equações de equilíbrio com equação geométrica. Desta forma, falar em procedimento de Newton-Raphson implica trabalhar com as linearizações em espaços diferentes, ou seja, nas curvas tensão-deformação e força-deslocamento. Torna-se, portanto, bastante complicado entender

o caminho percorrido, dentro das iterações, entre dois pontos equilibrados, do início e do fim de um incremento, utilizando-se um ou outro método.

Não é raro, em certos exemplos ou situações, onde é bem pronunciado o efeito da localização, ser o procedimento de Newton-Raphson incapaz de convergir, ou apresentar convergência bastante lenta, pela presença de grandes gradientes na resposta do problema, tornando a linearização um procedimento barato, sem garantias de boa estabilidade e convergência.

## **5.6. Exemplos de aplicação**

Neste item, são apresentados vários exemplos com o código implementado testando a formulação do presente capítulo. No item (5.6.1), são mostrados exemplos com o modelo de dano para o concreto. No item (5.6.2), apresentam-se exemplos com o modelo de dano simplificado. Análises com os modelos locais e não-locais são comparadas. Em vários casos, a resposta numérica captura o “snap-back”, validando a utilização das equações do comprimento de arco e de restrição na formulação proposta.

### **5.6.1. Exemplos com modelo de dano para o concreto**

#### **5.6.1.1. Exemplo 1 – Ruptura por tração por compressão diametral**

Neste exemplo, simula-se a ruptura por tração de um cilindro de concreto por compressão diametral (figura 5.6). Despreza-se, no modelo do concreto, a danificação por compressão, admitindo-se apenas evolução da variável de dano à tração  $D_t$ . Neste caso, interessam somente os parâmetros da superfície de carregamento  $f_t$ . Duas simulações, para estado plano de deformação, são apresentadas: uma com o modelo local, outra com o não-local.

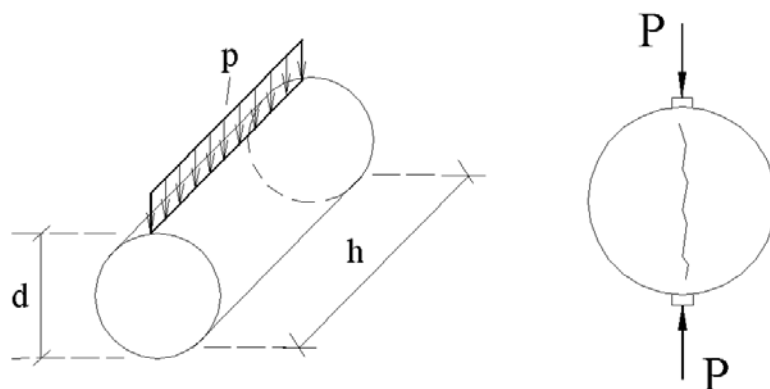


Figura 5.6. Compressão diametral em cilindro de concreto.

Os parâmetros físicos e geométricos são:  $E = 31000 \text{ MPa}$ ,  $\nu = 0.1$ ,  $h = 300 \text{ mm}$  e  $d = 150 \text{ mm}$ . Os parâmetros do modelo de dano para o exemplo são:  $a_t = 0.333$ ,  $b_t = 4 \text{ MPa}$ ,  $k_t = 20 \text{ MPa}^2$ ,  $c_t = 5$ ,  $D_{0t} = 0.1$ ,  $(\sigma_e / \sigma_0)_t = 0.8$  e  $l_t = 1 \text{ mm}$  (para a simulação não-local).

O problema é analisado discretizando-se apenas um quarto do círculo da seção transversal do corpo cilíndrico. A malha adotada é mostrada na figura (5.7). Restringem-se os deslocamentos em  $x$  ao longo da face vertical e em  $y$  ao longo da face horizontal.

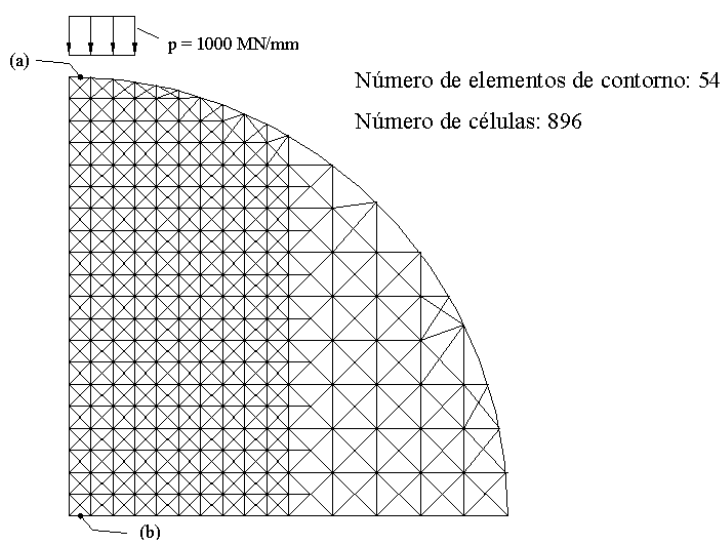


Figura 5.7. Malha de células adotada.

Neste exemplo, utilizar-se-á a formulação com equação de restrição, conforme exposto no item (5.4). O carregamento-piloto está mostrado na figura (5.7), dado por forças de superfície verticais, de cima para baixo, atuantes nos três elementos de contorno indicados na figura. A equação de restrição, para este exemplo, é dada pela expressão:

$$Z^R(\{\Delta X\}) = (\Delta X_a)^2 + 0.000000175 \cdot (\Delta X_b)^2 - (\Delta c^R)^2 = 0$$

onde, observando-se a figura (5.7),  $\Delta X_a$  é o deslocamento vertical do segundo nó do elemento de contorno (a) e  $\Delta X_b$  a força de superfície vertical do primeiro nó do elemento (b). Os dois valores são incógnitas de  $\{\Delta X\}$ . Neste exemplo, adota-se  $\Delta c^R = 0.0001$ .

O resultado em termos de força resultante contra deslocamento vertical do topo do cilindro encontra-se na figura (5.8), para os modelos local e não-local.

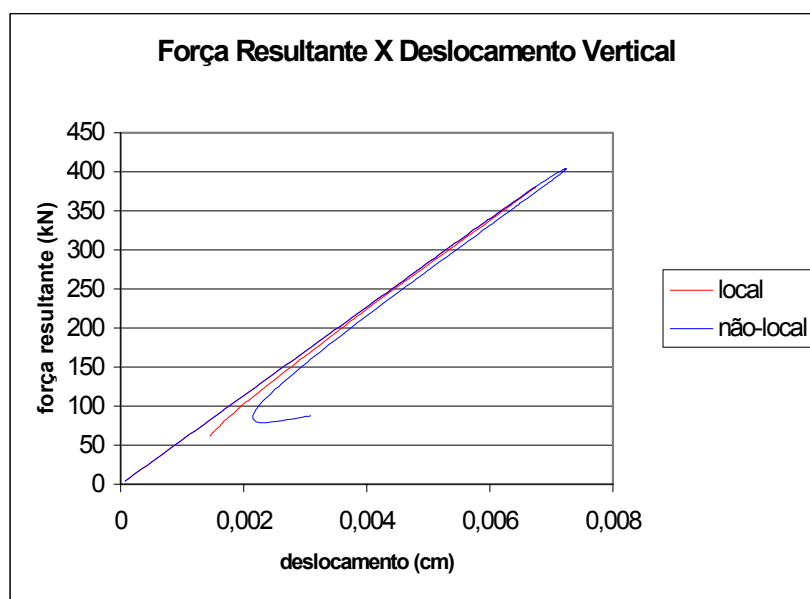


Figura 5.8. Diagramas força-deslocamento.

As tensões horizontais (direção x) e verticais (direção y), ao longo do diâmetro do cilindro, sob a carga aplicada, são apresentadas na figura (5.9).

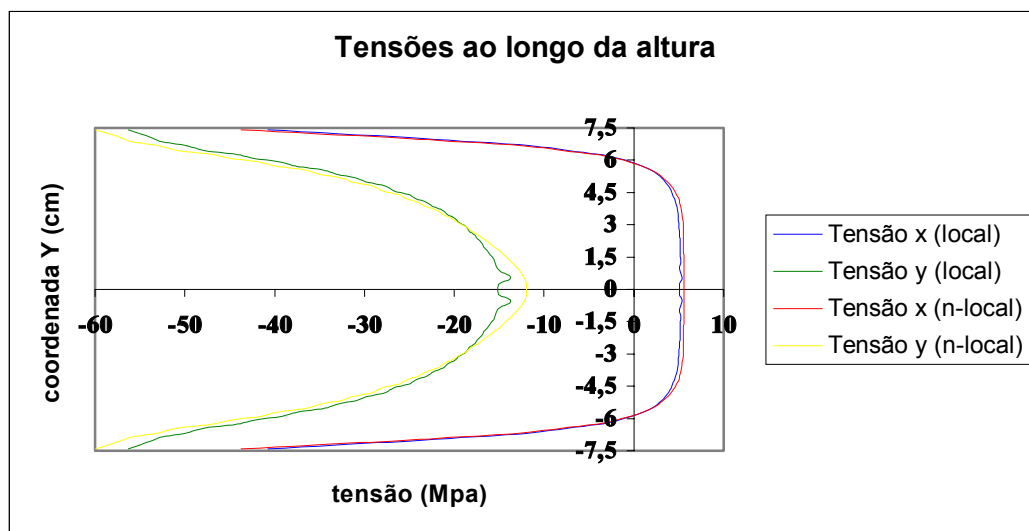


Figura 5.9. Tensões nas direções  $x$  e  $y$  ao longo da altura do cilindro.

As distribuições do dano à tração, para a tensão de pico (a) e para o final da análise (b) encontram-se, para o modelo local, na figura (5.10), e para o modelo não-local, na figura (5.11).

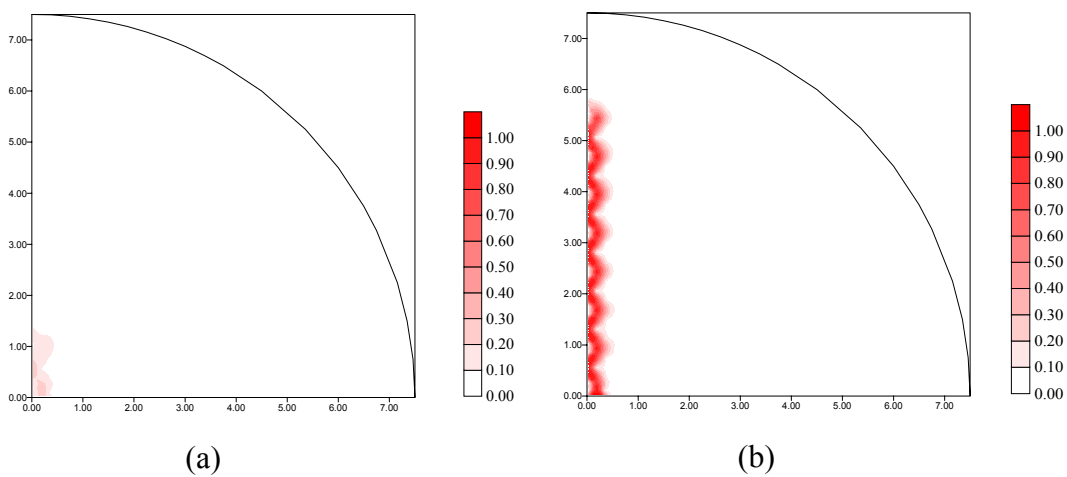


Figura 5.10. Distribuições do dano para o modelo local.

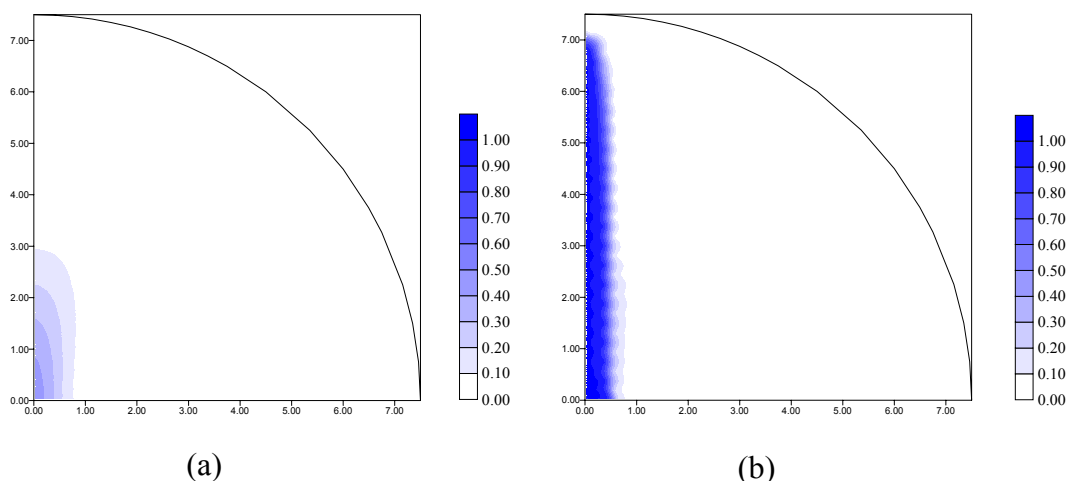


Figura 5.11. Distribuições do dano para o modelo não-local.

### 5.6.1.2. Exemplo 2 – Fendilhamento de prisma

Neste exemplo, apresentado por Comi [2001], simula-se o fendilhamento do prisma de concreto da figura (5.12). Admite-se estado plano de deformação. Neste exemplo, os dois mecanismos de dano, à tração e à compressão, são considerados. Os parâmetros físicos são:  $E = 31000 \text{ MPa}$  e  $\nu = 0.1$ . Os parâmetros do modelo são os mesmos de Comi (2001), dados por:  $a_t = 0.333$ ,  $b_t = 4 \text{ MPa}$ ,  $k_t = 8 \text{ MPa}^2$ ,  $c_t = 5$ ,  $D_{0t} = 0.1$ ,  $(\sigma_e / \sigma_0)_t = 0.8$  e  $l_t = 1.2 \text{ mm}$ , da função  $f_t$ , e  $a_c = 0.0025$ ,  $b_c = 3 \text{ MPa}$ ,  $k_c = 370 \text{ MPa}^2$ ,  $c_c = 5$ ,  $D_{0c} = 0.3$ ,  $(\sigma_e / \sigma_0)_c = 0.7$ ,  $\alpha = 1.0$  e  $l_c = 1.2 \text{ mm}$ , da função  $f_c$ .

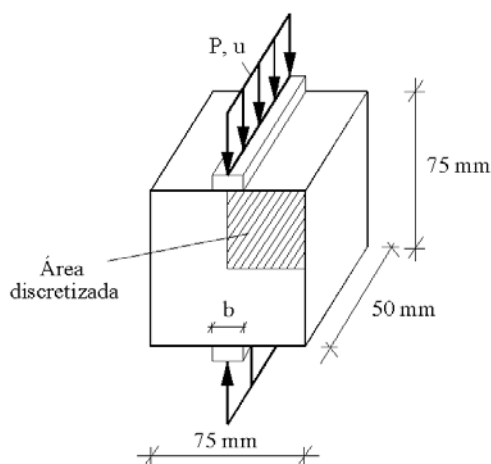


Figura 5.12. Geometria do prisma.



Três situações são consideradas, para três valores diferentes da largura  $b$  de aplicação da carga. Analisa-se somente a resposta do modelo não-local. A análise é feita admitindo-se um quarto da seção, em função da simetria do problema. A malha de células é mostrada na figura (5.13). Utiliza-se a formulação com equação de restrição. Como carregamento piloto, tem-se o deslocamento vertical uniforme imposto nos elementos da largura  $b$ . As equações de restrição são dadas pelas:

$$Z^R(\{\Delta X\}) = (\Delta u_c)^2 + 0.000000675 \cdot (\Delta p_c)^2 - (\Delta c^R)^2 = 0 \quad \text{para o caso (a), } b = 11.25 \text{ mm.}$$

$$Z^R(\{\Delta X\}) = (\Delta u_c)^2 + 0.000001 (\Delta p_c)^2 - (\Delta c^R)^2 = 0 \quad \text{para o caso (b), } b = 15 \text{ mm.}$$

$$Z^R(\{\Delta X\}) = (\Delta u_c)^2 + 0.0000015 (\Delta p_c)^2 - (\Delta c^R)^2 = 0 \quad \text{para o caso (c), } b = 22.5 \text{ mm.}$$

sendo  $\Delta u_c$  e  $\Delta p_c$ , respectivamente, as incógnitas do deslocamento vertical e da força vertical dos nós mostrados na figura (5.13). Adota-se  $\Delta c^R = 0.00015$ .

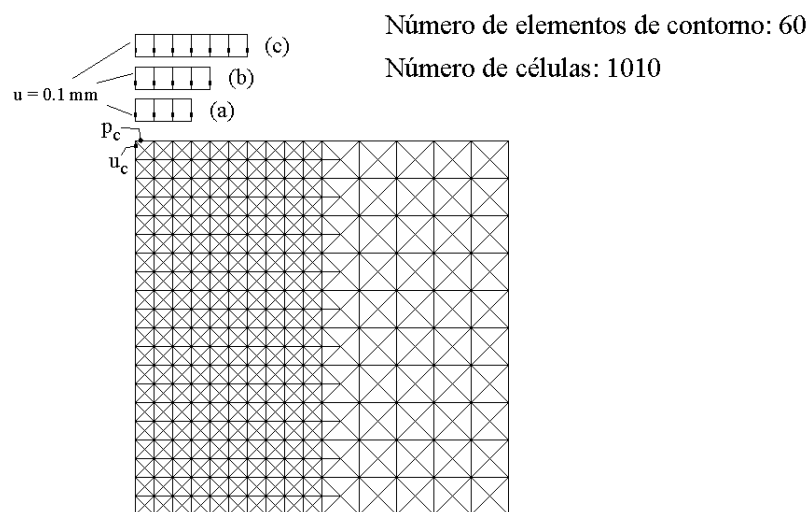


Figura 5.13. Malha de células do quarto de seção.

Os resultados em termos da força resultante contra o deslocamento vertical do ponto de aplicação do carregamento encontram-se na figura (5.14) para os três valores da largura  $b$ .

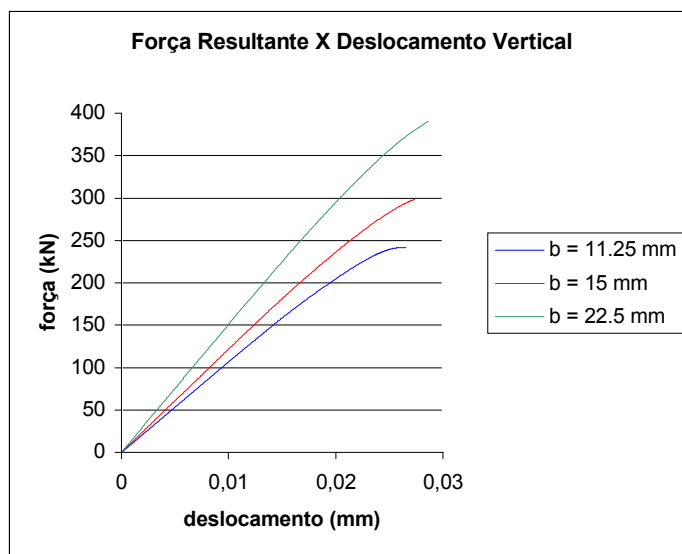


Figura 5.14. Diagramas força-deslocamento para diferentes larguras  $b$ .

As configurações finais das variáveis de dano à tração  $D_t$  e à compressão  $D_c$ , para os três casos analisados, encontram-se nas figuras (5.15), (5.16) e (5.17).

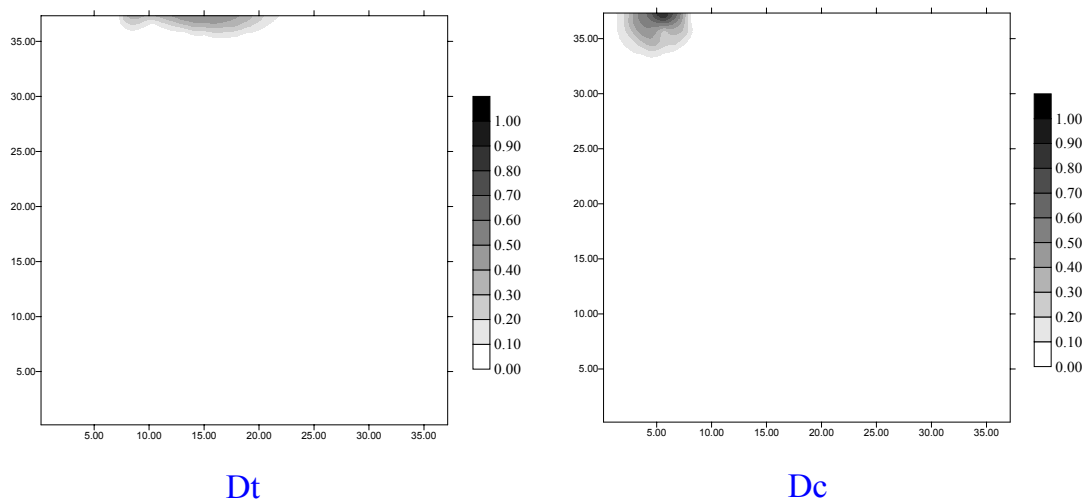


Figura 5.15. Configurações das variáveis de dano para  $b = 11.25$  mm.

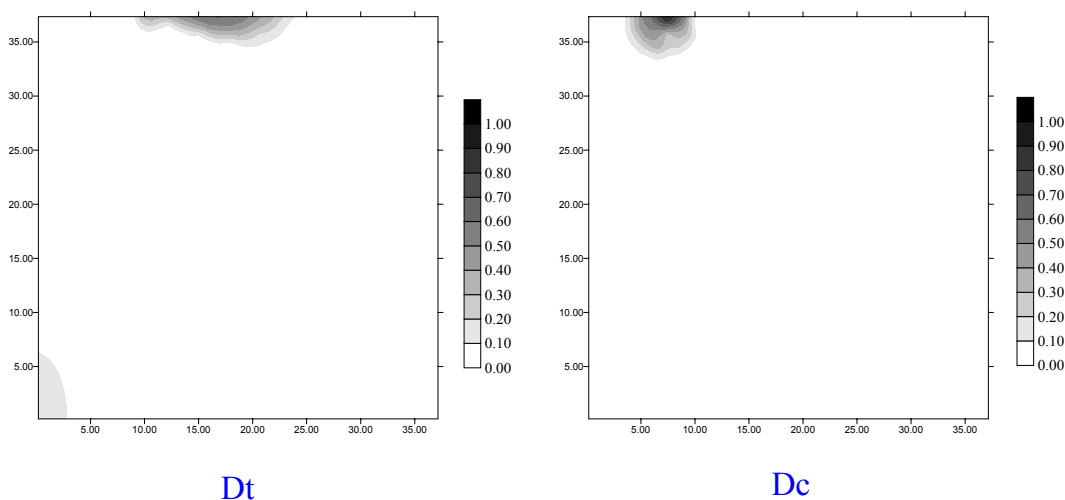


Figura 5.16. Configurações das variáveis de dano para  $b = 15$  mm.

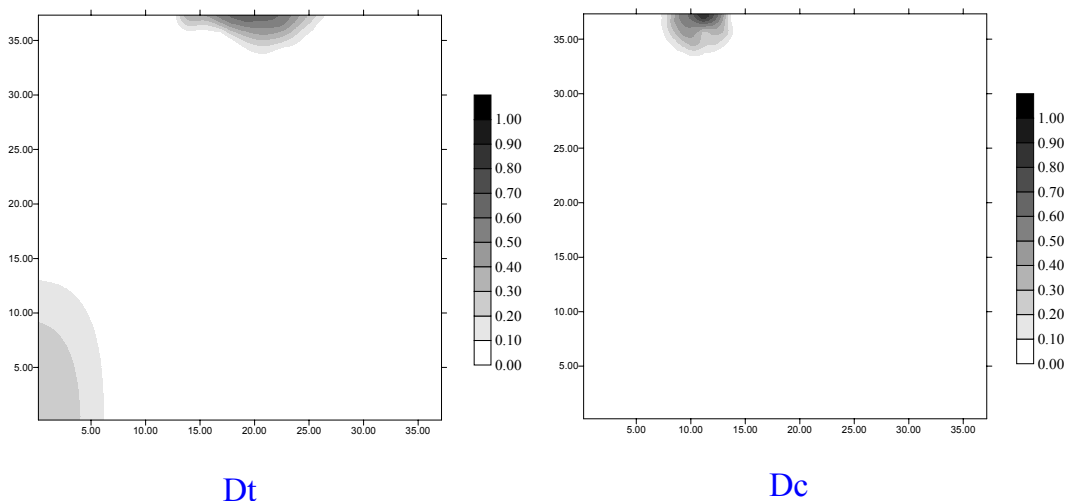


Figura 5.17. Configurações das variáveis de dano para  $b = 22.5$  mm.

Nota-se, neste exemplo, a forte influência da largura de aplicação do carregamento na resposta em termos da danificação do material. A convergência do processo numérico tornou-se bem lenta, para este exemplo, próximo às tensões de pico, em razão do alto valor do dano à compressão sob a carga, e o processo iterativo foi encerrado.

### 5.6.1.3. Exemplo 3 – Teste de tração simples

Neste exemplo, também apresentado por Comi (2001), considera-se o espécime de concreto da figura (5.18). Nele, aplica-se um deslocamento vertical

uniforme em cada uma das duas faces horizontais, de mesmo valor e com sentidos opostos, tracionando a peça. Mesmo sendo o comportamento tridimensional, a análise é feita para estado plano de deformação. Consideram-se duas malhas de células, conforme mostrado na figura (5.19). A malha (a) possui 56 elementos de contorno e 466 células. A malha (b), mais refinada, possui 56 elementos de contorno e 576 células.

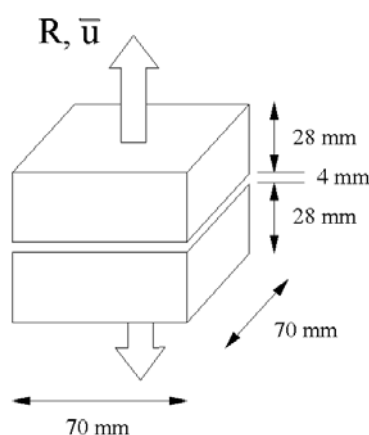


Figura 5.18. Geometria do corpo.

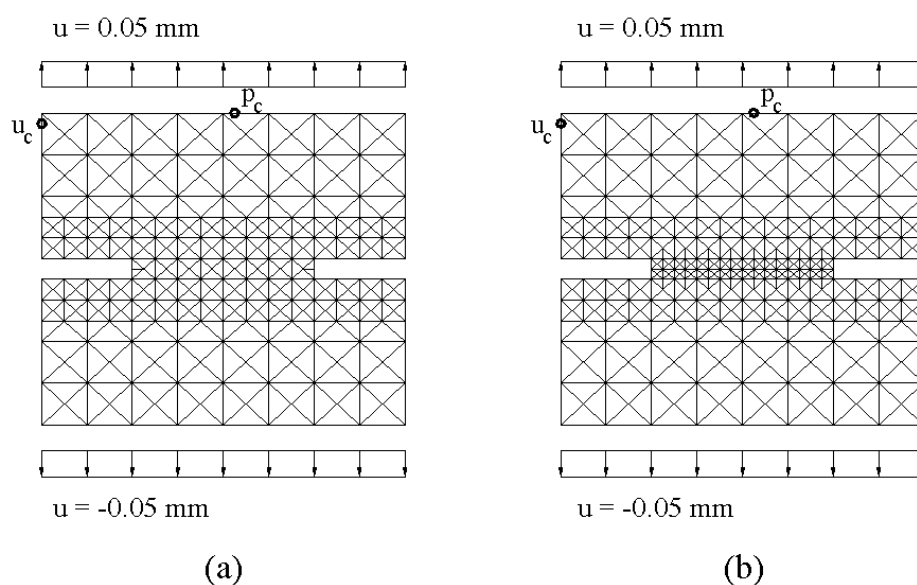


Figura 5.19. Malhas de célula e carregamentos piloto.

Os parâmetros do modelo são os sugeridos por Comi (2001), dados por:  $a_t = 0.31$ ,  $b_t = 4.4 \text{ MPa}$ ,  $k_t = 15.1 \text{ MPa}^2$ ,  $c_t = 35$ ,  $D_{0t} = 0.1$ ,  $(\sigma_e / \sigma_0)_t = 0.8$  e

$l_t = 1 \text{ mm}$ . O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson são dados por:  $E = 36000 \text{ MPa}$  e  $\nu = 0.15$ . Para se levar em conta a natureza tridimensional da resposta, a força de reação é calculada seguindo o esquema proposto na figura (5.20). Conhecidas as forças incógnitas do problema plano, admite-se que elas estão distribuídas na face do sólido seguindo uma distribuição radial, conforme mostrado na figura (5.20). A integral das forças de superfície na área da face resulta na reação total.

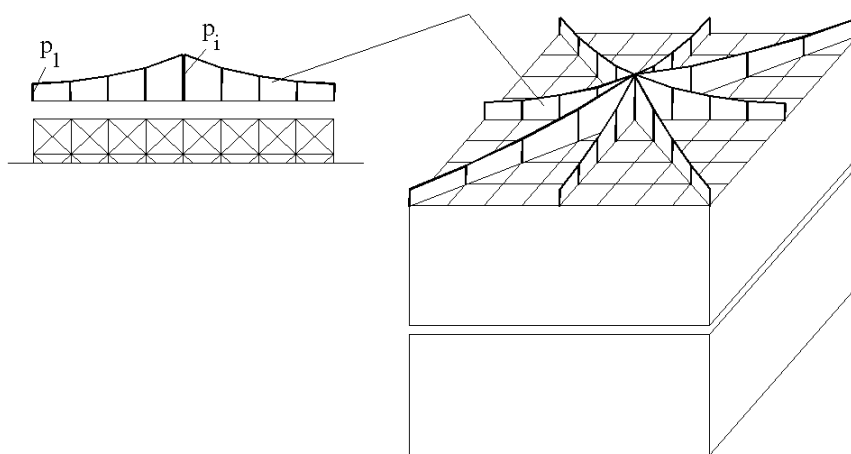


Figura 5.20. Esquema para cálculo da força de reação.

A equação de restrição utilizada neste exemplo é escrita em função de duas das variáveis de  $\{\Delta X\}$ ,  $\Delta u_c$  e  $\Delta p_c$ , respectivamente de deslocamento e de força, dos nós de contorno indicados na figura (5.19). A equação utilizada é:

$$Z^R(\{\Delta X\}) = (\Delta u_c)^2 + 0.00000065 \cdot (\Delta p_c)^2 - (\Delta c^R)^2 = 0$$

para  $\Delta c^R = 0.00004$ .

Como primeiro resultado, analisam-se as duas malhas com o modelo local. O diagrama força de reação contra deslocamento vertical encontra-se na figura (5.21).

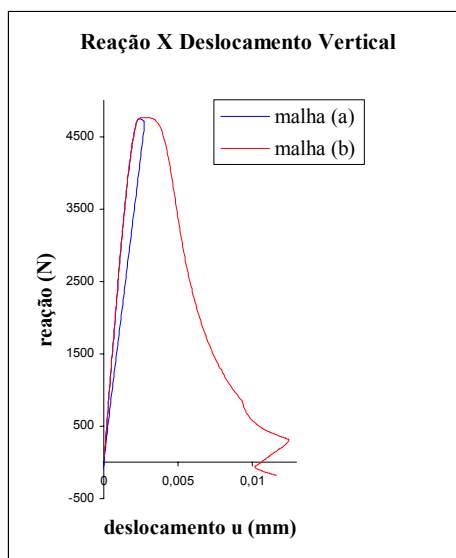


Figura 5.21. Diagrama força-deslocamento para modelo local.

Na figura (5.21), observa-se claramente a não objetividade da resposta numérica com o modelo local, conforme esperado. As soluções são estáveis até o pico de tensão. Após este ponto, com a localização, teoricamente as soluções são infinitas. Numericamente, o algoritmo busca uma solução qualquer, sem sentido físico, reproduzindo alguma curva força-deslocamento. Na figura (5.21), observa-se que a solução com a malha menos refinada chega mesmo a apresentar “snap-back” pronunciado, enquanto que a solução com a malha mais densa não apresenta o fenômeno. Reforçando a idéia de não unicidade da solução numérica, constatou-se que modificando, por exemplo, o parâmetro  $\Delta c^R$  da equação de restrição, outras curvas diferentes das da figura (5.21) são obtidas, ou seja, o algoritmo é sensível às mudanças de parâmetros que governam o tamanho dos incrementos.

Utilizando-se o modelo não-local, a resposta volta a apresentar sentido e convergir para uma mesma solução com as duas malhas. O diagrama força-deslocamento é dado pela figura (5.22).

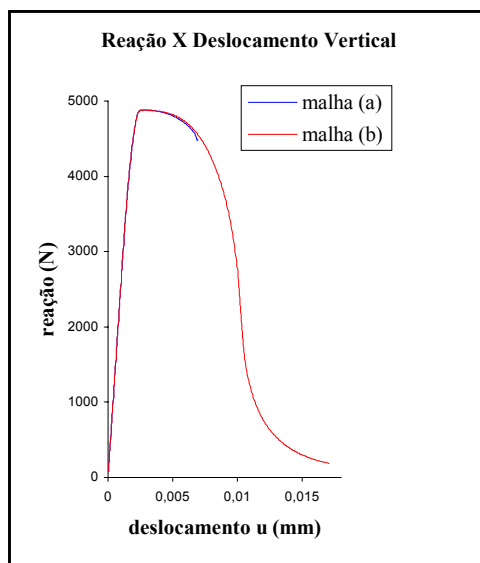


Figura 5.22. Diagrama força-deslocamento para modelo não-local.

A evolução da variável de dano à tração  $D_t$ , com o modelo não-local, para as duas malhas, está mostrada nas figuras (5.23), (5.24), (5.25).

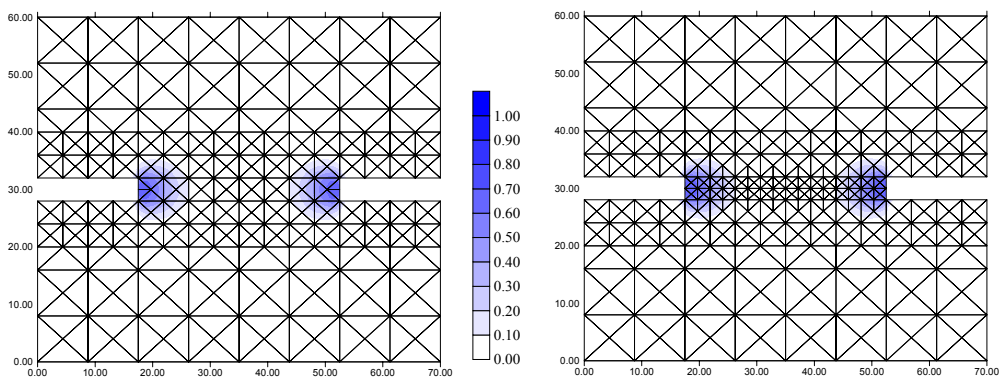


Figura 5.23. Variável  $D_t$  para  $u = 0.002$  mm.

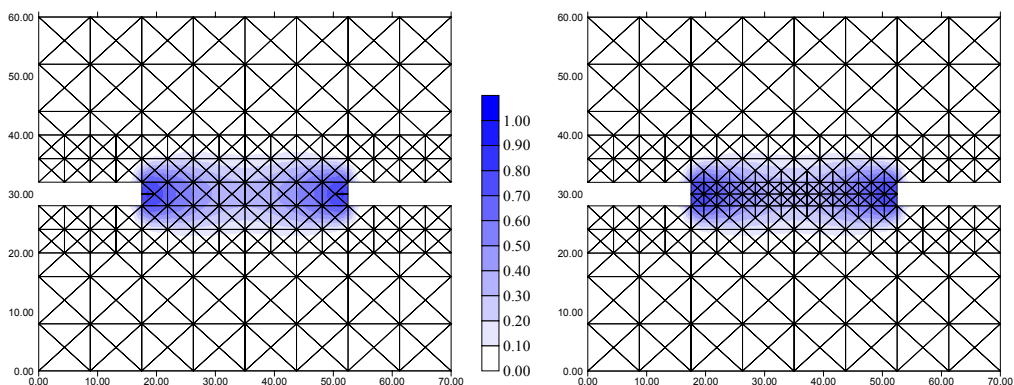
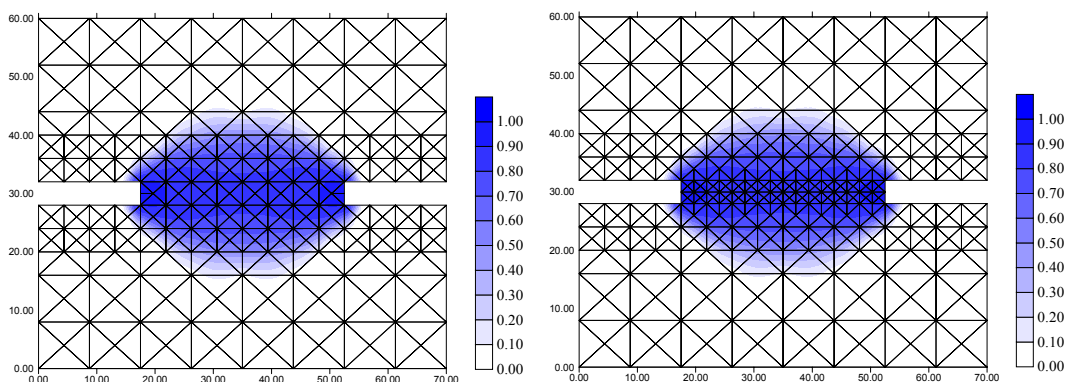


Figura 5.24. Variável  $D_t$  para  $u = 0.0025$  mm.Figura 5.25. Variável  $D_t$  para  $u = 0.005$  mm.

### **5.6.2. Exemplos com modelo de dano simplificado**

#### **5.6.2.1. Problema unidimensional com tamanho de defeito variável**

Considera-se, neste exemplo, a barra da figura (5.26), submetida à tração simples, por imposição de deslocamento horizontal em suas extremidades. No centro da barra, considera-se uma região enfraquecida de largura  $a$ , cujos parâmetros do modelo, para ela, diferem dos parâmetros das demais regiões da barra, conforme mostrado na figura (5.26).

Mesmo discretizado no plano, o problema pode ser considerado unidimensional, em vista da descontinuidade do campo de deformações entre as células vizinhas da interface da região defeituosa com a região sem defeito. Esta descontinuidade é claramente vista a partir da definição dos nós internos na figura (5.26), de acordo com o exposto no capítulo 3. Para coeficiente de Poisson nulo, o caso unidimensional é recuperado integralmente, enquanto que para valores não-nulos, o problema volta a ser bidimensional. Para o exemplo considera-se:  $E = 30000$  MPa e  $\nu = 0$ . Analisa-se com estado plano de deformação.



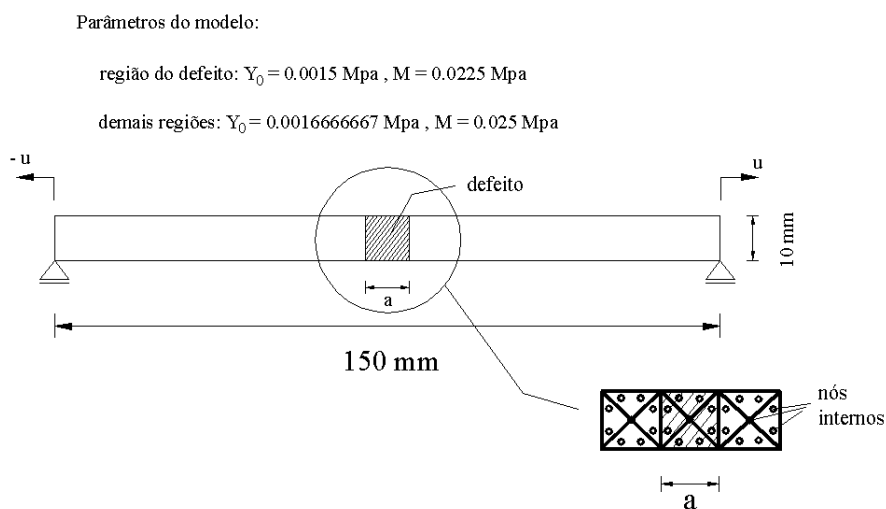


Figura 5.26. Geometria e parâmetros do modelo simplificado.

Consideram-se três malhas distintas, conforme definido na figura (5.27), com três valores para a largura  $a$  da zona enfraquecida.

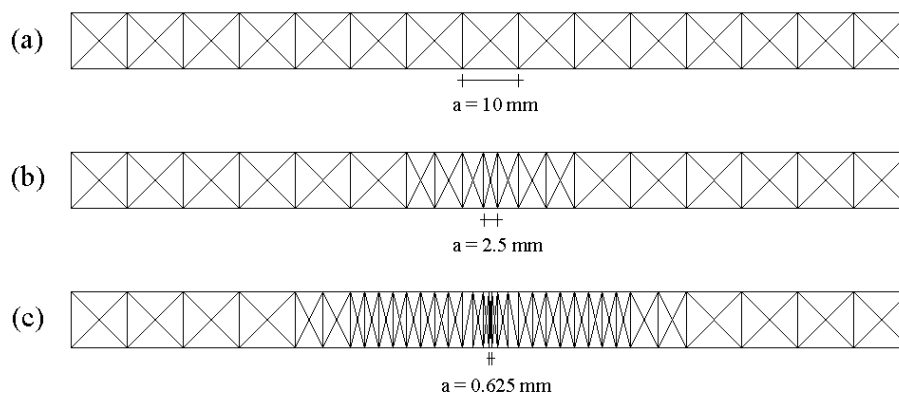


Figura 5.27. Malhas com diferentes valores da largura  $a$ .

Para que se tenha uma idéia da influência dos parâmetros do modelo adotados, apresenta-se na figura (5.28) os diagramas de força contra deslocamento, considerando-se a barra do exemplo com comportamento homogêneo, ou seja, sem defeito, para os parâmetros dados na figura (5.26).

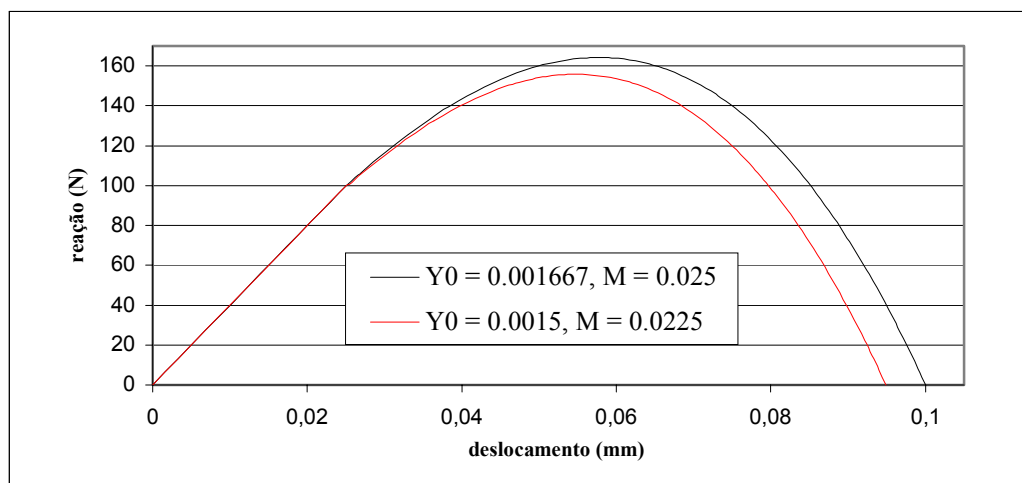


Figura 5.28. Diagramas força resultante x deslocamento para caso homogêneo.

Neste exemplo, foi utilizada como equação de restrição a equação do comprimento de arco para o par força-deslocamento da extremidade da barra. O resultado para as três malhas encontra-se na figura (5.29).

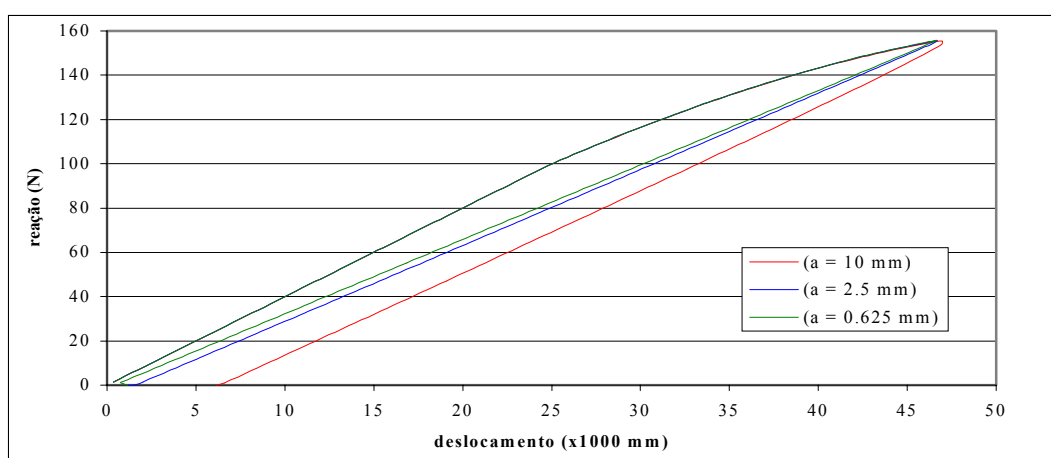


Figura 5.29. Diagramas força-deslocamento para diferentes larguras  $a$ .

Em primeiro lugar, cabe ressaltar a eficiência da formulação não-linear do MEC, com matriz tangente consistente e equação de restrição, na obtenção de respostas com “snap-back”, conforme mostra a figura (5.29). Observa-se ainda que, quanto menor a largura da zona enfraquecida, mais pronunciado é o efeito do “snap-back”, conforme esperado. As deformações localizam-se na região enfraquecida de largura  $a$ , após a reação de pico. A danificação continua a crescer

nesta região, enquanto no restante da barra ocorre descarregamento elástico. Ao final da análise, quando ocorre perda total de resistência da barra, tem-se um deslocamento residual diferente para cada malha.

No modelo simplificado, conforme se constata na figura (5.28), a variável de dano atinge o valor unitário para um dado valor de deformação finita. A partir deste ponto, teoricamente, o ponto apresenta rigidez nula, e as tensões são nulas para qualquer estado de deformação. No modelo para o concreto, ao contrário, a variável de dano tende ao valor unitário assintoticamente com o aumento da deformação.

Para ilustrar melhor o caso unidimensional, aplica-se o modelo do concreto à análise das malhas da figura (5.27). Para este caso, utilizam-se os mesmos parâmetros à tração do exemplo (5.6.1.2), modificando-se apenas o parâmetro  $k_t$  para a região enfraquecida, que passa a valer  $k_t = 7 \text{ MPa}^2$ . Assumem-se  $E = 30000 \text{ MPa}$  e  $\nu = 0$ . Na figura (5.30), têm-se os diagramas força-deslocamento para as três malhas.

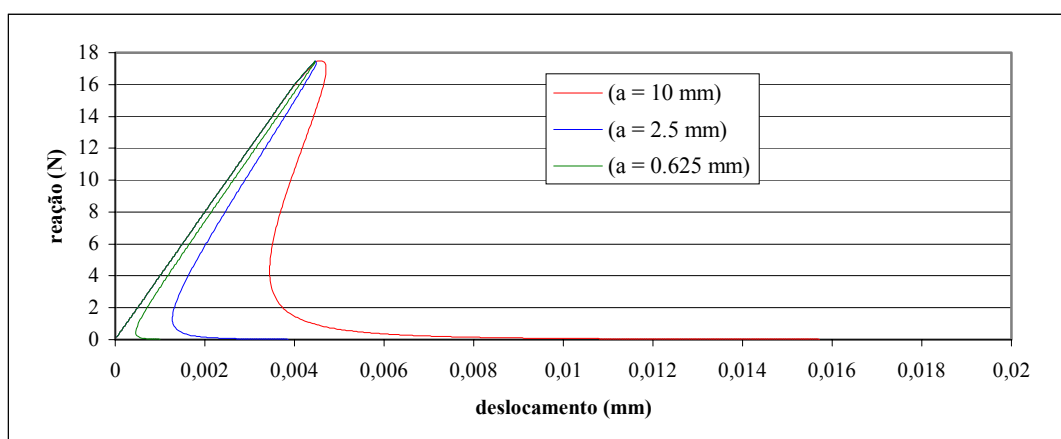


Figura 5.30. Diagramas força-deslocamento do modelo para o concreto.

A reação, na figura (5.30), tende assintoticamente a zero com o aumento do deslocamento. As distribuições da variável de dano e da deformação longitudinal, ao longo do eixo da barra do exemplo, são representadas, respectivamente, nas figuras (5.31) e (5.32), para os três valores da largura  $a$ , para o deslocamento de 0.02 mm.

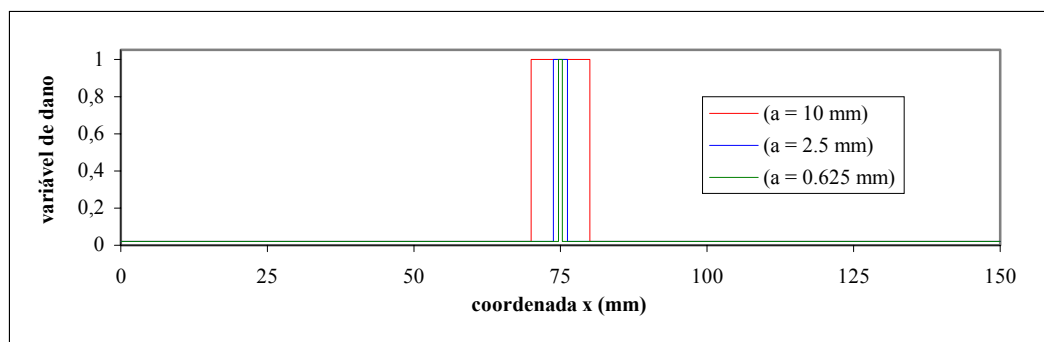


Figura 5.31. Distribuição da variável de dano em  $x$ .

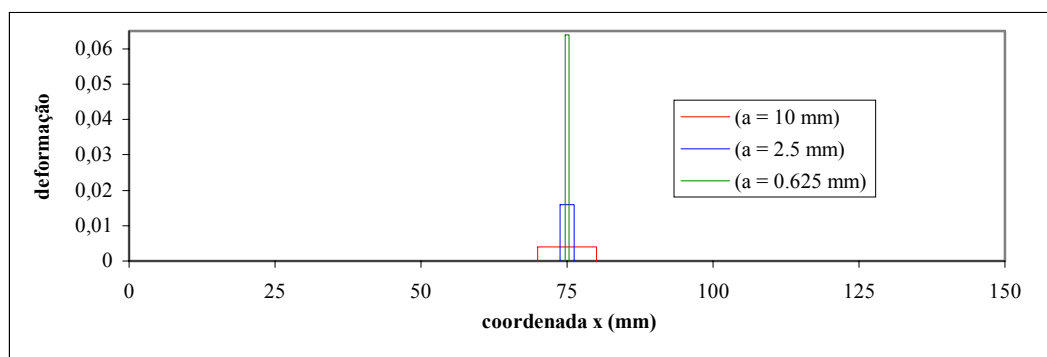


Figura 5.32. Distribuição da deformação longitudinal em  $x$ .

Neste exemplo, analisou-se o efeito da variação do tamanho da região fraca na resposta unidimensional. Para caracterizar a dependência de malha da resposta local e a regularização proporcionada pela introdução da não-localidade, deve-se analisar o elemento estrutural com diferentes malhas, mantendo o mesmo defeito. Este caso é analisado no exemplo (5.6.2.2).

### **5.6.2.2. Problema plano com região enfraquecida**

Neste exemplo, analisa-se o problema bidimensional de uma chapa retangular submetida à tração simples, por imposição de deslocamento longitudinal em suas extremidades, considerando-se estado plano de deformação. A geometria da chapa é mostrada na figura (5.33). No seu centro, admite-se uma região quadrada enfraquecida. Os parâmetros do modelo utilizados para este exemplo são os mesmos do exemplo (5.6.2.1), dados por:  $Y_0 = 0.0015 \text{ Mpa}$  e  $M = 0.0225 \text{ Mpa}$ , para os

pontos da região fraca, e  $Y_0 = 0.0016666667$  Mpa e  $M = 0.025$  Mpa, para os demais pontos da chapa. Adotam-se  $E = 30000$  MPa e  $\nu = 0.15$ .

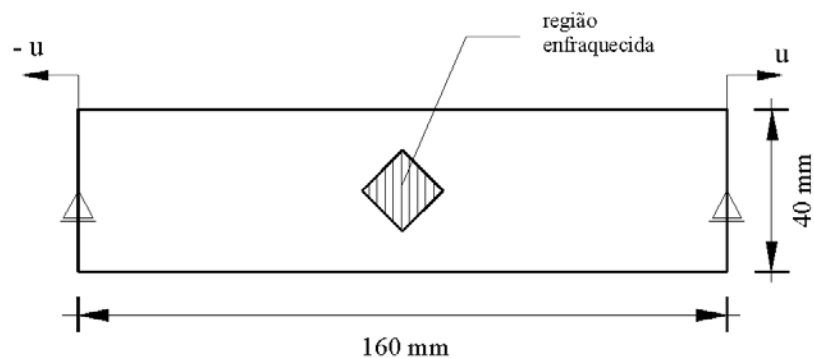


Figura 5.33. Geometria da chapa.

Para a análise, consideram-se três malhas distintas, mostradas na figura (5.34). Na malha (a), têm-se 40 elementos de contorno e 256 células. Na malha (b), têm-se 48 elementos de contorno e 456 células. Na malha (c), têm-se 68 elementos de contorno e 1336 células. Na figura (5.34), destacam-se os pontos internos de cada malha correspondentes à região enfraquecida.

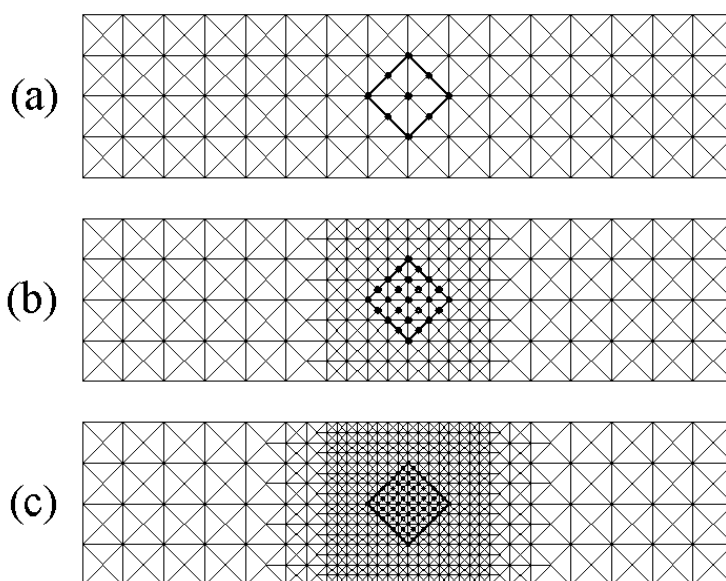


Figura 5.34. Malhas de células da chapa.

Neste exemplo, utilizou-se a equação de restrição escrita em termos de duas variáveis incógnitas de contorno, uma de deslocamento,  $\Delta u_c$ , do nó do elemento da extremidade direita da face inferior da chapa, outra de força,  $\Delta p_c$ , do nó do elemento no centro da face vertical direita. A equação é dada por:

$$Z^R(\{\Delta X\}) = (\Delta u_c)^2 + 0.000007 (\Delta p_c)^2 - (\Delta c^R)^2 = 0, \text{ com } \Delta c^R = 0.0005.$$

Como primeiro resultado, considera-se o modelo local. Na figura (5.35), têm-se as curvas força-deslocamento para as três malhas.

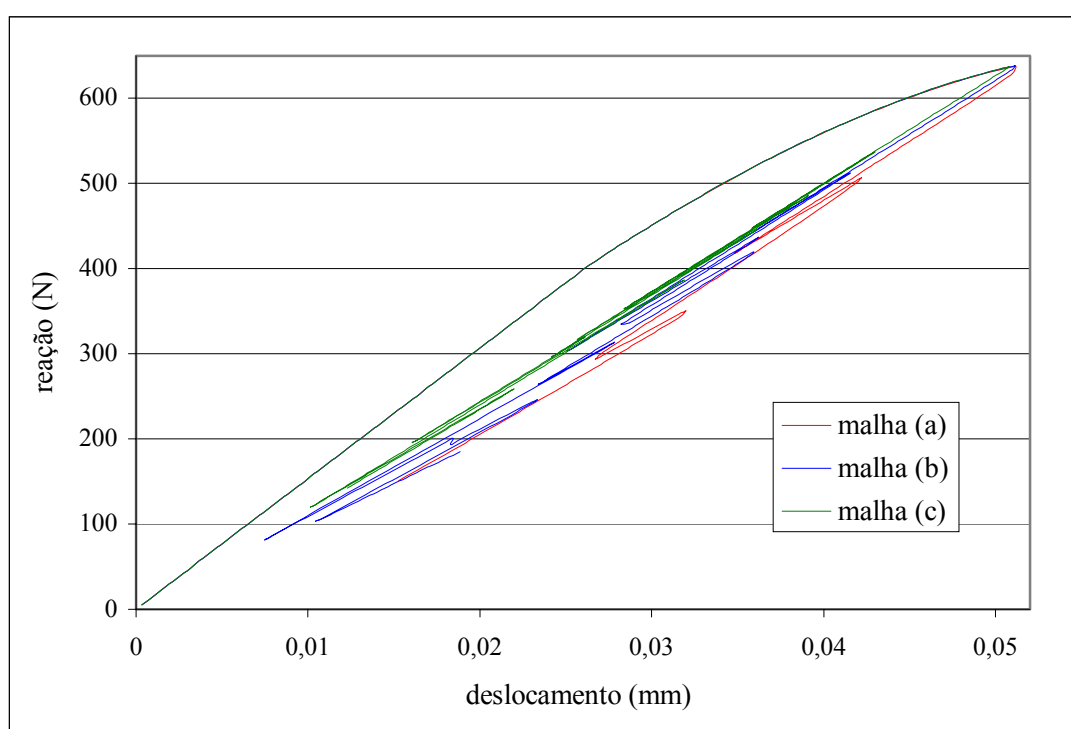


Figura 5.35. Diagramas força-deslocamento com modelo local.

A resposta do modelo local é dependente da malha, conforme se observa na figura (5.35). Para o modelo simplificado de dano, em particular, a resposta local alterna trechos elásticos, com sucessivas perdas de rigidez, com trechos onde ocorre evolução do dano. De acordo com o modelo, o ponto com dano máximo apresenta rigidez nula e pode ter qualquer deformação. Os trechos elásticos têm início quando um ponto, que vinha danificando sozinho, atinge o valor máximo unitário. A partir de então, ocorre um recarregamento de todos os demais pontos, com ou sem danos acumulados anteriormente, que estavam em regime elástico, até

que um novo ponto atinja a superfície de danificação, e a resposta volta a ser com o novo ponto danificando e os demais descarregando elasticamente.

Para ilustrar a dependência de malha, apresenta-se nas figuras (5.36), (5.37) e (5.38), as configurações do dano e da deformação longitudinal, ao final da análise, para as três malhas.

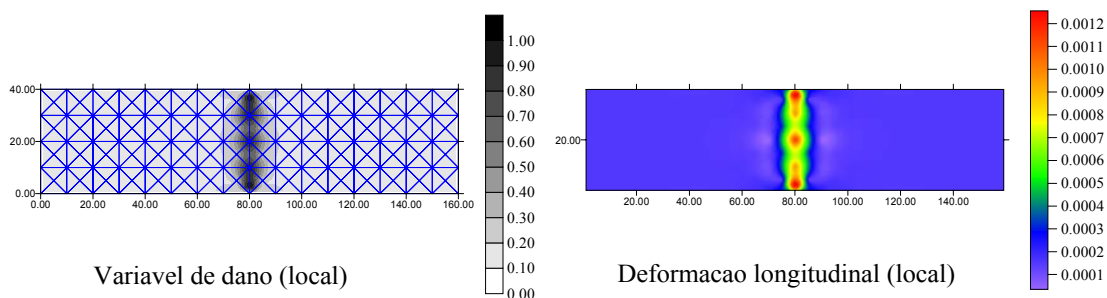


Figura 5.36. Configurações do dano e da deformação para a malha (a).

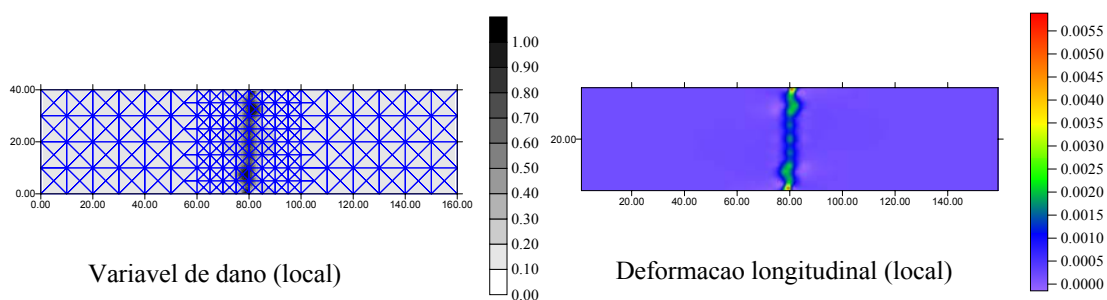


Figura 5.37. Configurações do dano e da deformação para a malha (b).

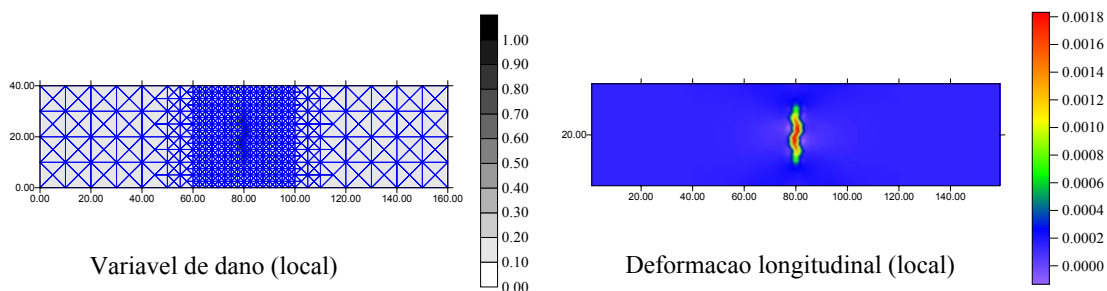


Figura 5.38. Configurações do dano e da deformação para a malha (c).

Nas figuras (5.36)-(5.38), a configuração final de cada variável no plano da chapa é a informação relevante. Os valores atingidos por cada variável dependem do ponto onde foi interrompida a análise numérica, não guardando correlação entre si para as diferentes malhas.

A resposta com o modelo simplificado não-local, adotando-se comprimento característico  $l = 5 \text{ mm}$ , é dada na figura (5.39), para as três diferentes malhas. Nela, pode-se observar a convergência dos três diagramas para uma resposta única, proporcionada pela análise não-local.

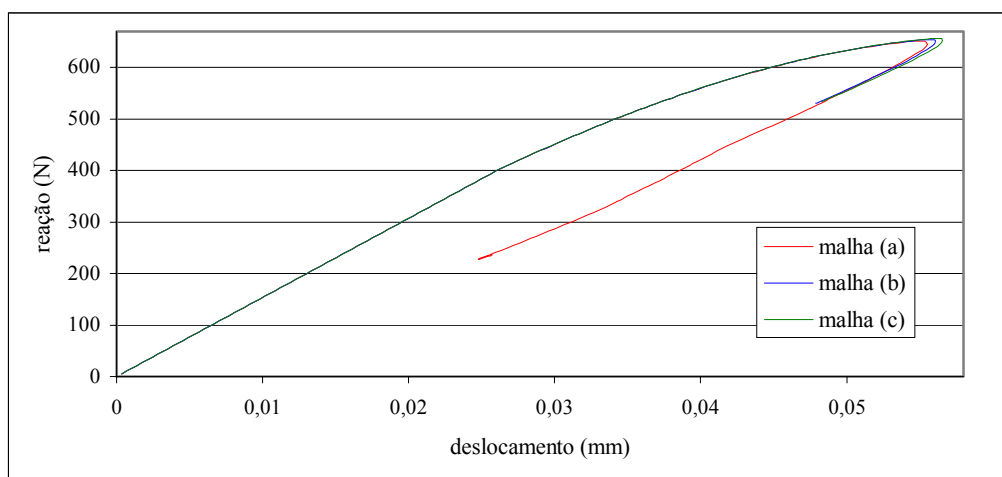


Figura 5.39. Diagramas força-deslocamento com modelo não-local.

A não-dependência de malha da resposta não-local é ainda visualizada nas figuras (5.40)-(5.42), com as distribuições da variável de dano e da deformação longitudinal correspondentes às reações de pico da figura (5.39), para as três malhas.

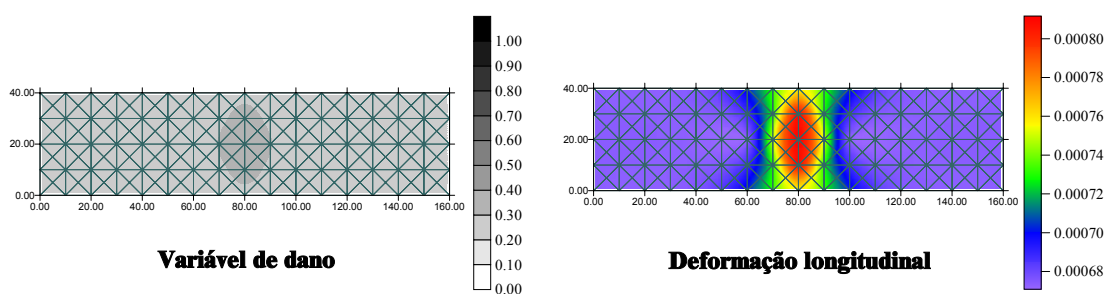


Figura 5.40. Distribuições da variável de dano e da deformação para a malha (a).



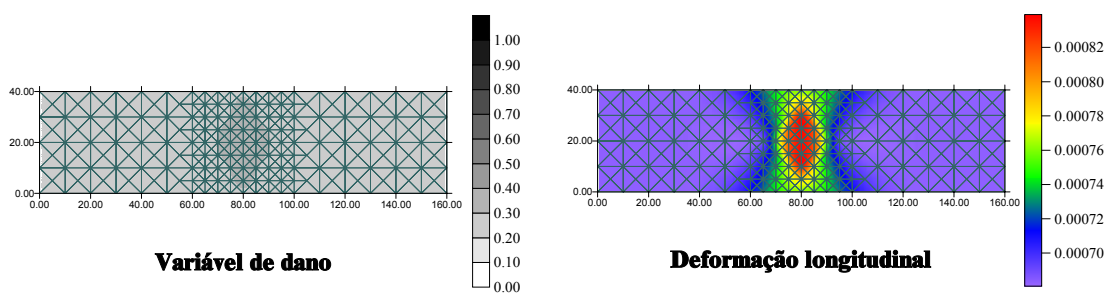


Figura 5.41. Distribuições da variável de dano e da deformação para a malha (b).

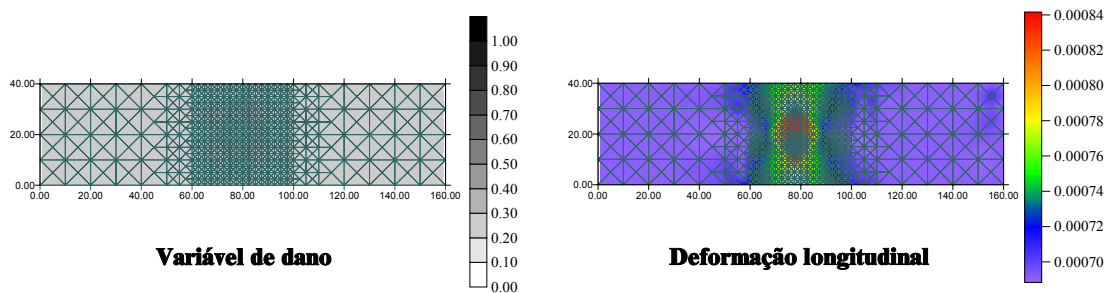


Figura 5.42. Distribuições da variável de dano e da deformação para a malha (c).

## **6. ANÁLISE DE DOMÍNIOS REFORÇADOS COM FIBRAS VIA COMBINAÇÃO DOS MÉTODOS DOS ELEMENTOS DE CONTORNO E ELEMENTOS FINITOS CONSIDERANDO-SE PERDA DE ADERÊNCIA ENTRE OS MEIOS**

### **6.1. Introdução**

Este capítulo trata da formulação proposta do acoplamento dos métodos dos elementos de contorno e elementos finitos, para considerar fibras enrijecendo o domínio. Começa-se por definir o elemento finito de barra, com aproximações diferentes para as forças e os deslocamentos. Em seguida-se, apresentam-se as equações do acoplamento. Introduce-se, na combinação das equações, uma técnica de regularização por mínimos quadrados. Apresenta-se um exemplo com a formulação considerando-se aderência perfeita. Apresenta-se um modelo não-linear para perda de aderência. Estende-se a formulação para considerar o escorregamento relativo entre meio e fibras. Apresenta-se o algoritmo da formulação e ao final, exemplos de aplicação.

### **6.2. Equações do elemento finito de barra**

Neste trabalho, serão consideradas fibras retilíneas, mergulhadas em qualquer direção dentro do domínio bidimensional. As extremidades das fibras podem chegar ao contorno, e valores de força ou deslocamento podem ser prescritos diretamente no elemento da fibra. As fibras serão modeladas com elementos finitos de barra lineares, com um único grau de liberdade de deslocamento, paralelo ao eixo da barra.

Para uma força  $f^1$ , aplicada longitudinalmente, distribuída ao longo da fibra, a equação diferencial de equilíbrio para um ponto  $x$  qualquer do domínio da barra é:

$$\frac{d^2(u^1(x))}{dx^2} + \frac{1}{2G \cdot S \cdot (1 + \nu)} f^1(x) = 0 \quad (6.1)$$

sendo  $u^1(x)$  o deslocamento longitudinal do ponto  $x$ ,  $G$  o módulo de elasticidade transversal do material da fibra,  $\nu$  o seu coeficiente de Poisson e  $S$  a área da seção transversal da barra.

Parece bastante razoável a adoção de polinômios com diferentes graus para as aproximações dos deslocamentos  $u^1$  e das forças  $f^1$  por elemento finito. Para o elemento de barra da fibra, adota-se polinômio cúbico para aproximar os deslocamentos longitudinais e linear para as forças. Assim, a derivada segunda do deslocamento aproximado tem o mesmo grau polinomial que a força aproximada, conforme a equação diferencial de equilíbrio (6.1).

Definem-se, por elemento finito, quatro variáveis nodais de deslocamento e duas de força, conforme a figura (6.1).

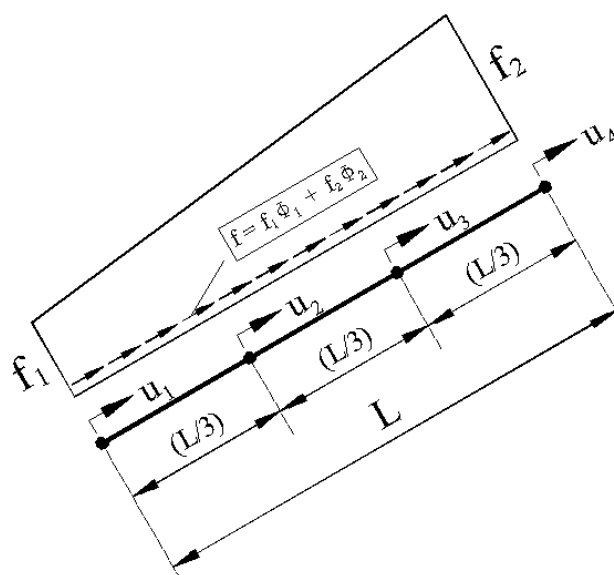


Figura 6.1. Definição das variáveis nodais do elemento finito de barra.

Conforme a figura (6.1), os quatro nós com as variáveis de deslocamento estão definidos nas duas extremidades do elemento e nos dois terços de vão. Os nós com as variáveis de força são os dois de extremidade. As equações algébricas de equilíbrio do elemento da figura (6.1) são obtidas utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais, expresso pela equação:

$$\int_{\Omega_f} [\sigma(u^f) \cdot \delta \varepsilon(\delta u^f)] d\Omega_f - \int_{\Omega_f} (f^f \cdot \delta u^f) d\Omega_f - F^i \cdot \delta u^{f_i} = 0 \quad (6.2)$$

onde  $\sigma(u^f)$  é a tensão normal na fibra,  $\varepsilon(u^f)$  é a sua deformação longitudinal,  $u^f$  e  $f^f$  são, respectivamente, os deslocamentos e as forças aproximados,  $F^i$  é a força concentrada no nó  $i$ ,  $\Omega_f$  é o domínio do elemento finito, e  $\delta$  representa variação. Da (6.2), resulta o sistema algébrico:

$$[K^f] \cdot \{u^f\} = [G^f] \cdot \{f^f\} + \{P^f\} \quad (6.3)$$

sendo  $[K^f]$  a matriz de rigidez do elemento,  $[G^f]$  a “lumping matrix”, função das características geométricas do elemento, dada pelo produto das funções polinomiais linear e cúbica, da segunda integral da (6.2),  $\{u^f\}$  e  $\{f^f\}$  os vetores com os deslocamentos e as forças nodais, respectivamente, e  $\{P^f\}$  o vetor com as forças concentradas nos nós. Para os nós localizados tal como na figura (6.1), tem-se:

$$\frac{E \cdot S}{L} \begin{bmatrix} 3.7 & -4.725 & 1.35 & -0.325 \\ -4.725 & 10.8 & -7.425 & 1.35 \\ 1.35 & -7.425 & 10.8 & -4.725 \\ -0.325 & 1.35 & -4.725 & 3.7 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_1^f \\ u_2^f \\ u_3^f \\ u_4^f \end{Bmatrix} = L \begin{bmatrix} 13/120 & 1/60 \\ 3/10 & 3/40 \\ 3/40 & 3/10 \\ 1/60 & 13/120 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} f_1^f \\ f_2^f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} P_1^f \\ P_2^f \\ P_3^f \\ P_4^f \end{Bmatrix} \quad (6.4)$$

onde  $L$  é o comprimento do elemento,  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal do material e lembrando que  $S$  é a área da seção transversal da barra.

### **6.3. Formulação do acoplamento das fibras com o domínio bidimensional via combinação MEC/MEF**

#### **6.3.1. Equações do acoplamento**

Para considerar o domínio bidimensional enrijecido com fibras, estas modeladas com elementos finitos e o primeiro com elementos de contorno, propõe-se uma formulação combinando-se as equações dos dois métodos, considerando-se aderência perfeita entre os dois meios. O acoplamento entre os materiais é garantido via imposição das equações de equilíbrio de forças e compatibilidade de deslocamentos, ou seja:

$$\begin{aligned} f^c + f^f &= 0 \\ u^c - u^f &= 0 \end{aligned} \tag{6.5}$$

sendo  $f^c$  e  $u^c$ , respectivamente, as forças e os deslocamentos do domínio do corpo, variáveis presentes nas equações do método dos elementos de contorno. A  $f^c$  da (6.5) corresponde à força distribuída que a fibra aplica ao corpo, igual e de sinal oposto à força que atua na própria fibra, por equilíbrio. Os deslocamentos dos pontos das fibras e do meio bidimensional, ao longo da interface, são iguais por compatibilidade. Para o problema discretizado, a (6.5) equivale a:

$$\begin{aligned} \{f^c\} &= -\{f^f\} = \{f\} \\ \{u^c\} &= \{u^f\} = \{u\} \end{aligned} \tag{6.6}$$

ou seja, o equilíbrio e a compatibilidade são por nó de interface. Para o problema tratado, ou seja, domínio plano com fibras retilíneas, a reação das fibras sobre a matriz equivale a uma linha de carga aplicada ao domínio do corpo. Esta linha de carga, por equilíbrio com a força admitida linear no elemento finito do item (6.2), tem a forma de uma seqüência de trechos lineares ligando nós consecutivos, conforme mostra a figura (6.2).

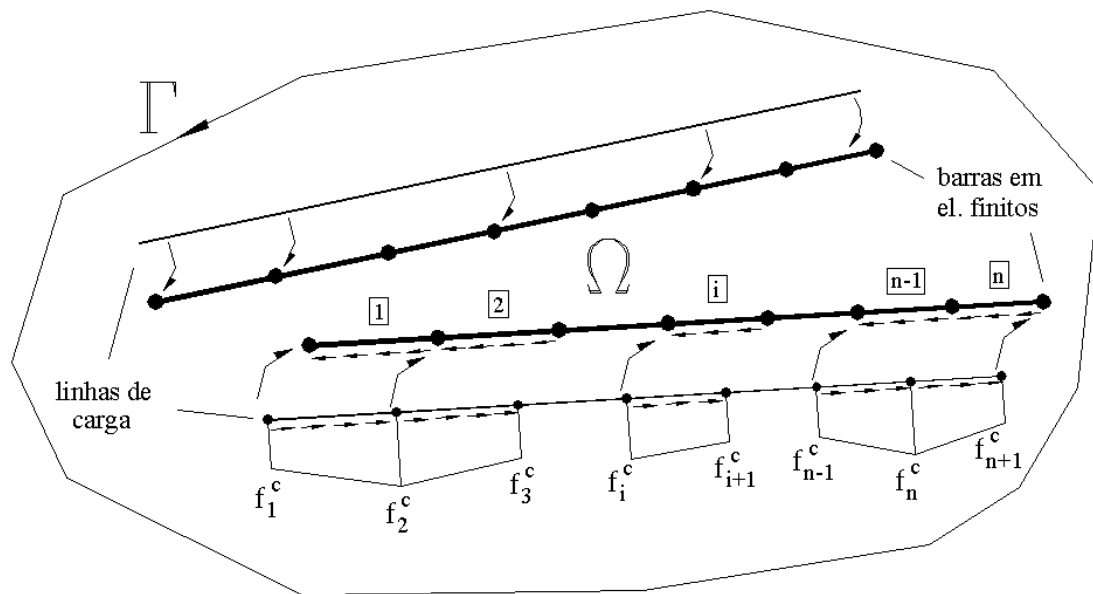


Figura 6.2. Linhas de carga aplicadas ao domínio.

Na figura (6.2), os elementos são contínuos, ou seja, para  $n$  elementos finitos de uma barra, tem-se  $(n+1)$  nós e variáveis de força. A força incógnita  $f^c$  aplicada ao domínio, como uma linha de carga, precisa ser levada em conta nas equações do método dos elementos de contorno. A linha de carga aparece nas equações como se fosse uma força de massa aplicada numa área que tende a zero, ou a uma reta, nos casos planos. Por exemplo, da identidade de Somigliana, na (3.18), a última integral fica:

$$\int_{\Omega} b_j(p) \cdot u_{ij}^*(s, p) d\Omega = \int_{\Omega_f} f_j^c(p) \cdot u_{ij}^*(s, p) d\Omega_f \quad (6.7)$$

com  $f_j^c$  a componente de  $f^c$  segundo a direção  $j$  do sistema cartesiano. A equação (6.7) fica melhor escrita se, ao invés de  $f^c$ , for decomposta a solução  $u_{ij}^*(s, p)$ . Assim, tem-se:

$$\int_{\Omega_f} f_j^c(p) \cdot u_{ij}^*(s, p) d\Omega_f = \int_{\Omega_f} f^c(p) \cdot u_i^{*c}(s, p) d\Omega_f = \int_{\Omega_f} f^c(p) \cdot u_{ij}^*(s, p) \cdot \eta_j^* d\Omega_f \quad (6.8)$$

onde  $u_i^{*c}(s,p) = u_{ij}^*(s,p) \cdot \eta_j^*$  é a solução fundamental para  $p \in \Omega_f$  na direção da linha de carga, para a força unitária na direção  $i$  no ponto fonte “s”. Os cossenos diretores da linha de carga (eixo longitudinal da barra), em relação ao sistema de coordenadas cartesianas são dados por  $\eta_j^*$ . A última integral da (6.8) pode ser transformada na somatória:

$$\sum_{f=1}^{nb} \int_{\Omega_f} f^c(p) \cdot u_{ij}^*(s,p) \cdot \eta_j^* d\Omega_f = \sum_{f=1}^{nb} \sum_{k=1}^{nef} \int_{\Omega_{fk}} f^c(p) \cdot u_{ij}^*(s,p) \cdot \eta_j^* d\Omega_{fk} \quad (6.9)$$

para  $f$  variando de 1 ao número total de fibras do domínio  $nb$  e  $k$  variando de 1 ao número  $nef$  de elementos finitos da barra  $f$ . Sendo  $f^c$  aproximado linearmente sobre as linhas de carga, tem-se:

$$\sum_{f=1}^{nb} \sum_{k=1}^{nef} \int_{\Omega_{fk}} f^c(p) \cdot u_{ij}^*(s,p) \cdot \eta_j^* d\Omega_{fk} = \sum_{f=1}^{nb} \sum_{k=1}^{nef} \int_{\Omega_{fk}} (\phi_m(p) \cdot u_{ij}^*(s,p) \cdot \eta_j^*) f^{cm} d\Omega_{fk} \quad (6.10)$$

sendo  $\phi_m(p)$  as funções de forma lineares e  $f^{cm}$  os valores nodais de  $f^c$ . As integrais podem ser calculadas numericamente por quadratura gaussiana, a exemplo das integrais apresentadas no capítulo 3. Caso o ponto fonte pertença à linha de carga, pode-se calcular, sem nenhuma dificuldade, a integral analítica sobre o elemento que contém o ponto. Para a equação integral das tensões (3.25), a exemplo da identidade de Somigliana, as forças de domínio são levadas em conta através da integral:

$$\int_{\Omega} b_j(p) \cdot D_{ijk}(s,p) d\Omega = \int_{\Omega_f} f_j^c(p) \cdot D_{ijk}(s,p) d\Omega_f \quad (6.11)$$

e, a exemplo da (6.10), fica:

$$\sum_{f=1}^{nb} \sum_{l=1}^{nef} \int_{\Omega_{fl}} f^c(p) \cdot D_{ijk}(s,p) \cdot \eta_k^* d\Omega_{fl} = \sum_{f=1}^{nb} \sum_{l=1}^{nef} \int_{\Omega_{fl}} (\phi_m(p) \cdot D_{ijk}(s,p) \cdot \eta_k^*) f^{cm} d\Omega_{fl} \quad (6.12)$$

As equações dos deslocamentos e das tensões do método dos elementos de contorno, considerando as linhas de carga, ficam:

$$[H] \cdot \{U\} = [G] \cdot \{P\} + [Q] \cdot \{\sigma^0\} + [S_f] \cdot \{f\} \quad (6.13)$$

$$\{\sigma\} = -[H'] \cdot \{U\} + [G'] \cdot \{P\} + [Q'] \cdot \{\sigma^0\} + [S'_f] \cdot \{f\} \quad (6.14)$$

onde  $[S_f]$  e  $[S'_f]$  são matrizes com os coeficientes de integração, respectivamente, das (6.10) e (6.12), e  $\{f\} = \{f^c\}$  é o vetor com os variáveis nodais de força distribuída interna. Para completar as equações necessárias ao acoplamento, falta montar as equações algébricas dos deslocamentos dos pontos internos. Deve-se escrever uma equação para cada deslocamento do meio contínuo, nos pontos coincidentes com os nós de deslocamento dos elementos finitos, para que a segunda das (6.6) seja obedecida. Da identidade de Somigliana, tem-se:

$$u^c(s) = u_i(s)\eta_i^* = \int_{\Gamma} p_j(P) \cdot u_{ij}^*(s, P)\eta_i^* d\Gamma - \int_{\Gamma} u_j(P) \cdot p_{ij}^*(s, P)\eta_i^* d\Gamma + \int_{\Omega_f} f^c(p) \cdot u_{ij}^*(s, p)\eta_j^* \eta_i^* d\Omega_f + \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk}^*(s, p) \cdot \sigma_{jk}^0(p)\eta_i^* d\Omega \quad (6.15)$$

ou seja, a (6.15) é a equação integral dos deslocamentos dos pontos internos do sólido, na direção do eixo da fibra, que é a direção do único grau de liberdade em deslocamento do elemento de barra (figura (6.1)). A (6.15) vale somente para pontos “s” internos, pois admite-se  $C_{ij}(s)$  da (3.24) igual à matriz identidade. A equação algébrica que resulta da (6.15), aplicada a todos os nós internos, fica:

$$\{u^c\} = -[\bar{H}] \cdot \{U\} + [\bar{G}] \cdot \{P\} + [\bar{Q}] \cdot \{\sigma^0\} + [\bar{S}_f] \cdot \{f\} \quad (6.16)$$

onde  $[\bar{H}]$ ,  $[\bar{G}]$ ,  $[\bar{Q}]$  e  $[\bar{S}_f]$  são matrizes de influência das integrações e  $\{u^c\} = \{u^f\} = \{u\}$  é o vetor com as variáveis nodais dos deslocamentos internos.

Na figura (6.3), tem-se a representação de uma barra, discretizada em  $n$  elementos finitos, e da linha de carga de domínio, superposta à barra. Os nós de deslocamento, definidos geometricamente para cada elemento finito segundo a figura



(6.1), estão representados por quadrados na (6.3). As cruces representam os pontos fontes “s” da equação (6.15) dos deslocamentos internos. Observa-se que, nas extremidades da fibra, para os primeiro e último nós, as equações do MEC não são escritas na posição dos nós, mas para posições deslocadas, internas à linha de carga. Para os demais nós, internos à linha de carga, os pontos fonte da equação do MEC coincidem com os nós de deslocamento dos elementos finitos.

O esquema da figura (6.3) estende-se, nesta formulação, para todas as fibras do domínio. Este esquema facilita a integração analítica sobre o primeiro e último elementos da linha de carga da integral da (6.10), para a equação dos pontos deslocados de extremidade. Outra vantagem é permitir que as extremidades das fibras possam chegar ao contorno do corpo, sem que a equação do MEC necessite ser escrita para pontos do contorno, evitando complicações.

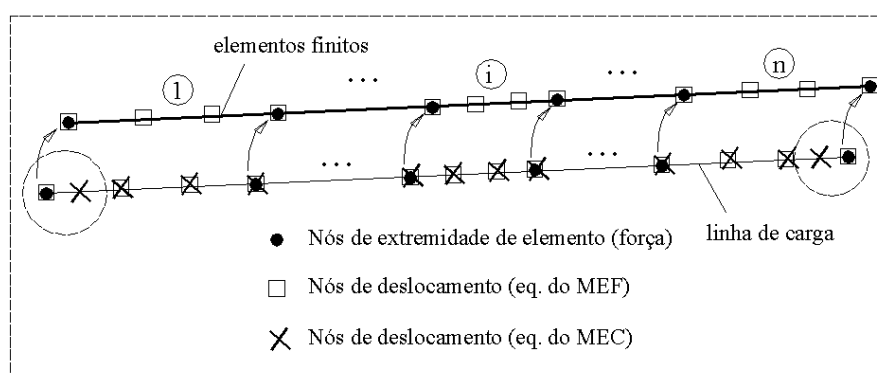


Figura 6.3. Nós internos para a equação dos deslocamentos do MEC.

Com as posições dos nós definidas na figura (6.3), a equação de compatibilidade de deslocamentos fica:

$$\{u^c\} = [T^u] \cdot \{u^f\} = [T^u] \cdot \{u\} \quad (6.17)$$

sendo  $[T^u]$  a matriz que relaciona a posição dos nós de  $\{u^c\}$  com os nós de  $\{u^f\}$ . Por exemplo, da figura (6.3), para os dois pontos fonte deslocados das extremidades da

fibra, supondo-os distantes  $(L/6)$  de cada extremidade, para  $L$  o comprimento do primeiro ou do último elemento, que contém os pontos fonte, tem-se:

$$[T^u] = \begin{bmatrix} 0.3125 & 0.9375 & -0.3125 & 0.0625 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0.0625 & -0.3125 & 0.9375 & 0.3125 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

ou seja, com exceção da primeira e da última linha, a matriz é igual à identidade.

O sistema final de equações do acoplamento é formado pelas equações algébricas do MEC, com as linhas de cargas internas, e a equação de equilíbrio do MEF para as fibras. Desprezando-se, por ora, o campo de tensões iniciais, são elas:

$$[A] \cdot \{X\} = \{F\} + [S_f] \cdot \{f\} \quad (6.19)$$

$$[T^u]_i \cdot \{u\}_i = [-\bar{A}]_i \cdot \{X\} + \{\bar{F}\}_i + [\bar{S}_f]_{ij} \cdot \{f\}_j \quad (6.20)$$

$$[K^{fb}]_i \cdot \{u\}_i = -[G^{fb}]_i \cdot \{f\}_i + \{P^{fb}\}_i \quad (6.21)$$

$$\{\sigma\} = -[A'] \cdot \{X\} + \{F'\} + [S'_f] \cdot \{f\} \quad (6.22)$$

Nas (6.20) e (6.21), o índice  $i$  subscrito representa a equação para a fibra  $i$ . O vetor  $\{f\}_j$  com as variáveis nodais de força distribuída na fibra  $j$  é um subvetor de  $\{f\}$ , que reúne as variáveis de força de todas as fibras. As matriz de rigidez  $[K^{fb}]_i$ , a “lumping matrix”  $[G^{fb}]_i$ , e o vetor das forças concentradas  $\{P^{fb}\}_i$ , da barra  $i$ , são montadas, respectivamente, a partir das  $[K^f]$ ,  $[G^f]$  e  $\{P^f\}$  locais da (6.4).

**6.3.2. Combinação das equações do MEC/MEF com regularização por mínimos quadrados**

Observando-se os vetores com as variáveis nodais de deslocamento  $\{u\}$  e força interna  $\{f\}$ , e das definições para as aproximações dos campos sobre os elementos finitos, constata-se que existem em  $\{u\}$  mais variáveis que em  $\{f\}$ . O número de variáveis de cada vetor é:

$$\begin{aligned} \{u\} &\Rightarrow \sum_{i=1}^{nbar} [(nef_i + 1) + (2 * nef_i)] \\ \{f\} &\Rightarrow \sum_{i=1}^{nbar} [(nef_i + 1)] \end{aligned} \quad (6.23)$$

para  $nef_i$  o número de elementos finitos da fibra  $i$  e  $nbar$  o número total de fibras. Observando-se as (6.19)-(6.21), as variáveis do problema são  $\{X\}$ ,  $\{u\}_i$  e  $\{f\}_i$ . No entanto, o conjunto citado tem mais equações que o número de incógnitas dos três vetores. A causa é simples, vem da adoção de diferentes graus para os polinômios aproximadores das forças e dos deslocamentos internos.

Para que o problema tenha solução, utiliza-se um procedimento simples baseado na técnica dos mínimos quadrados. Como o número de equações é maior que o de incógnitas, é necessário reduzi-lo ao número conveniente. A técnica dos mínimos quadrados consiste em reduzir o número de equações, tornando o sistema linear resolvível, minimizando o erro da resposta quando levada ao sistema original. Observando a (6.20), com as equações algébricas dos deslocamentos internos, pode-se aplicar a técnica dos mínimos quadrados multiplicando-a pela matriz transposta da  $[\bar{S}_f]_{ii}$ , ou seja:

$$[\bar{S}_f]_{ii}^T \cdot [T^u]_i \cdot \{u\}_i = \left[ -[\bar{S}_f]_{ii}^T \cdot [\bar{A}]_i \cdot \{X\} + [\bar{S}_f]_{ii}^T \cdot \{F\}_i + [\bar{S}_f]_{ii}^T \cdot [\bar{S}_f]_{ij} \cdot \{f\}_j \right] \quad (6.24)$$

reduzindo o número de equações de  $[(nef_i + 1) + (2 * nef_i)]$  na (6.20) para  $[(nef_i + 1)]$  na (6.24), para cada fibra  $i$ . A equação, tal como escrita na (6.24), é a

aplicação da regularização por mínimos quadrados para cada conjunto de equações de cada barra. Daí a razão da matriz  $[\bar{S}_f]_{ij}$  ter os dois índices, com as influências das forças da barra  $j$  nos deslocamentos da barra  $i$ , e a matriz transposta na (6.24) ser a da  $[\bar{S}_f]_{ii}$ , com as influências das forças de  $i$  nos deslocamentos de  $i$ . Uma outra opção seria multiplicar a equação algébrica de um sistema único, reunindo os deslocamentos de todas as fibras, pela transposta da  $[\bar{S}_{fg}]$  global, ou seja:

$$[\bar{S}_{fg}]^T \cdot \{u\} = [T^u]^{-1} \cdot \left[ -[\bar{S}_{fg}]^T \cdot [A] \cdot \{X\} + [\bar{S}_{fg}]^T \cdot \{F\} + [\bar{S}_{fg}]^T \cdot [\bar{S}_{fg}] \cdot \{f\} \right] \quad (6.25)$$

sendo que as matrizes e as variáveis da (6.25) são globais, reunindo as influências e as variáveis de todas as fibras  $i$ . A equação regularizada (6.24), com as (6.19) e (6.21), constituem o sistema nas incógnitas  $\{u\}$ ,  $\{f\}$  e  $\{X\}$ . Reunindo-as, tem-se:

$$\begin{bmatrix} [T^u]_1 \cdot [\bar{S}_f]_{11}^T & \dots & 0 & -[\bar{S}_f]_{11}^T \cdot [\bar{S}_f]_{11} & \dots & -[\bar{S}_f]_{11}^T \cdot [\bar{S}_f]_{mn} & [\bar{S}_f]_{11}^T \cdot [A]_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & [T^u]_n \cdot [\bar{S}_f]_{11}^T & -[\bar{S}_f]_{nn}^T \cdot [\bar{S}_f]_{11} & \dots & -[\bar{S}_f]_{nn}^T \cdot [\bar{S}_f]_{11} & [\bar{S}_f]_{nn}^T \cdot [A]_n \\ [K^{fb}]_1 & \dots & 0 & [G^{fb}]_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & [K^{fb}]_n & 0 & \dots & [G^{fb}]_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -[S_f]_1 & \dots & -[S_f]_n & [A] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{u\}_1 \\ \vdots \\ \{u\}_n \\ \{f\}_1 \\ \vdots \\ \{f\}_n \\ \{X\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\bar{S}_f]_{11}^T \cdot \{F\}_1 \\ \vdots \\ [\bar{S}_f]_{nn}^T \cdot \{F\}_n \\ \{P^{fb}\}_1 \\ \vdots \\ \{P^{fb}\}_n \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (6.26)$$

para  $n$  fibras. Utilizando-se uma notação simplificada para a (6.26), que será utilizada em outros itens, tem-se:

$$\begin{bmatrix} [T_u] \cdot [\bar{S}_f]^T & -[\bar{S}_f]^T \cdot [\bar{S}_f] & -[\bar{S}_f]^T \cdot [A] \\ [K^{fb}] & [G^{fb}] & 0 \\ 0 & -[S_f] & [A] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{f\} \\ \{X\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [\bar{S}_f]^T \cdot \{F\} \\ \{P^f\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (6.27)$$

Com as variáveis obtidas da resolução do sistema (6.26), calculam-se as tensões na (6.22). Com a (6.25) no lugar na (6.24), é possível montar um sistema semelhante ao (6.26), modificado nas três primeiras linhas. Caso sejam consideradas

as tensões iniciais nas equações (6.19)-(6.22), o problema resulta não-linear. Esta consideração será levada em conta no item (6.4), em conjunto com as equações não-lineares do escorregamento.

### **6.3.3. Exemplo de aplicação da formulação com o acoplamento**

Como exemplo de aplicação da formulação do acoplamento com regularização por mínimos quadrados, considera-se o domínio bidimensional da figura (6.4), enrijecido longitudinalmente com quatro fibras independentes. Para a matriz, adotam-se  $E = 2.000 \text{ kN/cm}^2$  e  $\nu = 0$ . Para todas as fibra, adota-se  $A_i E_i = 1000 \text{ kN}$ , sendo  $A_i$  a área da seção transversal e  $E_i$  o módulo de elasticidade longitudinal, respectivamente, da fibra  $i$ .

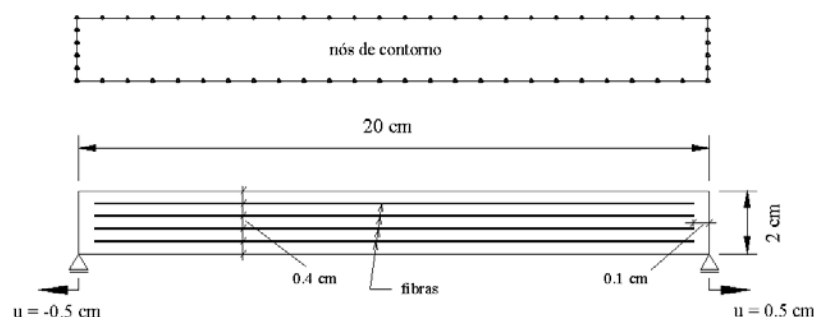


Figura 6.4. Geometria do domínio enrijecido com fibras.

Aplica-se um deslocamento de 0,5 cm em cada uma das extremidades do domínio, tracionando a peça. O contorno do sólido é discretizado em 60 elementos. São analisados quatro casos, variando o número de elementos finitos por fibra (25, 50, 100 e 200). Na figura (6.5), são apresentadas as forças de superfície nas fibras do centro, para as diferentes discretizações.

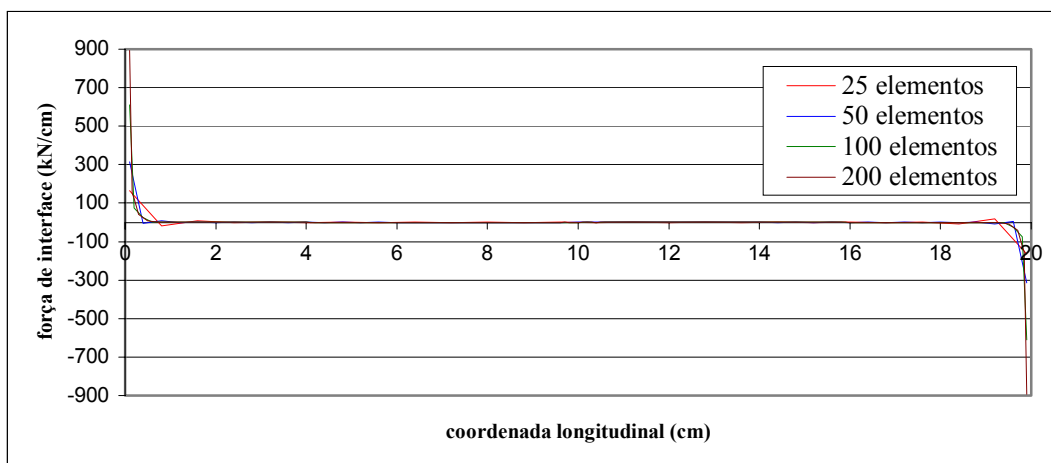


Figura 6.5. Forças de superfície nas fibras centrais.

Os deslocamentos longitudinais dos pontos das fibras são dados na figura (6.6).

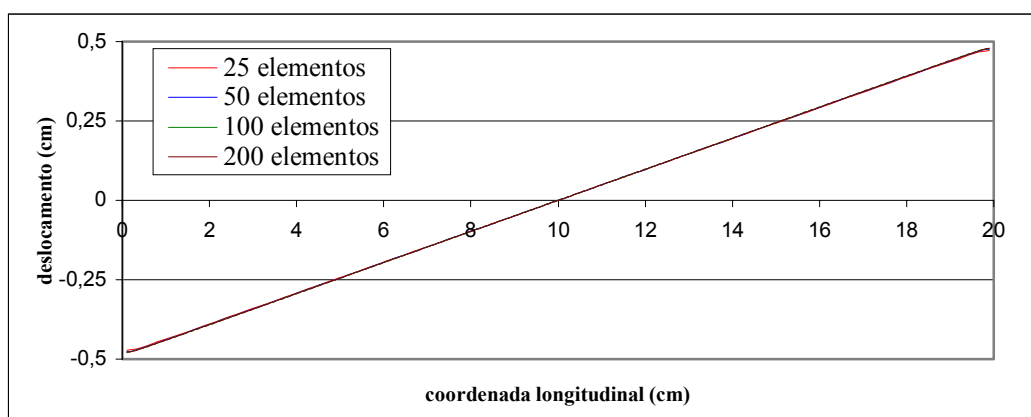


Figura 6.6. Deslocamentos nas fibras centrais.

Conforme se observa nas figuras (6.5) e (6.6), a regularização proposta na formulação do acoplamento é um procedimento bastante eficiente na obtenção de respostas suavizadas em termos de forças nas fibras. Entretanto, para que isto ocorra, a fibra deve ser bem discretizada. Caso contrário, com poucos elementos finitos, a resposta pode apresentar pequenas oscilações. No caso da resposta em deslocamento, para este exemplo, a influência da discretização das fibras é bem pequena.

## **6.4. Formulação não-linear para escorregamento entre fibras e meio contínuo**

### **6.4.1. Generalidades**

Neste item, será apresentada a formulação do acoplamento MEC/MEF considerando comportamento não-linear físico para o escorregamento relativo entre as fibras e o meio contínuo, decorrente da perda de aderência entre os dois materiais. Visando a aplicação numérica da formulação, será descrito um modelo simplificado de aderência para o concreto armado, ou seja, para o escorregamento relativo entre armadura (fibra) e concreto (matriz). O modelo para a aderência está proposto no código modelo CEB-FIP (1990).

A resolução das equações de equilíbrio não-lineares do acoplamento deve ser incremental-iterativa. Apresenta-se, para esta finalidade, um procedimento implícito semelhante ao descrito no capítulo 4 e o seu correspondente algoritmo. A formulação deste item preserva a não-linearidade do modelo de dano para o concreto, representada nas equações pelas variáveis de tensão inicial, e acrescenta as novas relações constitutivas não-lineares para a aderência, acoplando os dois efeitos. Para tornar mais geral a formulação, considera-se a variável de pilotagem  $\eta$ , conforme definida no item (5.4), para que se possa associar ao problema, se for o caso, uma equação de restrição.

Ao final, exemplos numéricos são apresentados para elementos estruturais em concreto armado, avaliando o efeito do escorregamento da armadura na resposta estrutural e a eficiência da formulação não-linear do acoplamento MEC/MEF.

### **6.4.2. Modelo não-linear de aderência para o concreto armado**

O modelo descrito neste item encontra-se no código CEB-FIP (1990), e é voltado para aplicações em concreto armado. O problema da perda de aderência entre armadura e concreto é bastante complexo. A natureza física do fenômeno é de difícil compreensão e são muitas as variáveis envolvidas na sua descrição. Além

disto, é grande a variabilidade dos resultados experimentais. No entanto, do ponto de vista das formulações matemáticas para previsão do comportamento mecânico, interessa a lei constitutiva que, no caso, estabelece a relação não-linear entre tensão de aderência e escorregamento.

A curva da figura (6.7) representa o modelo não-linear que relaciona força de aderência  $f$  com escorregamento relativo  $s$ . O modelo tem os seguintes parâmetros: tensão de aderência máxima  $f_{\text{máx}}$ , tensão de aderência residual  $f_f$ , valores característicos do escorregamento  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$ , constante  $\alpha$  da curva referente ao intervalo  $[0, s_1]$  e ângulo de inclinação do descarregamento  $S_d$ . No código modelo os parâmetros são identificados em função do tipo de armadura, das condições de aderência e da resistência característica do concreto à compressão.

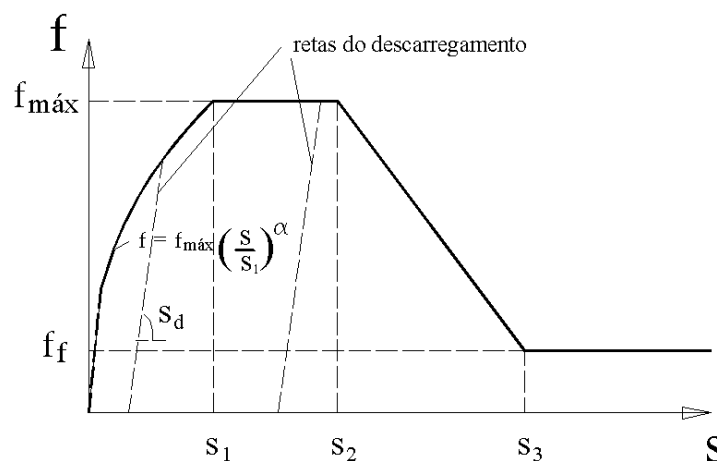


Figura 6.7. Relação tensão de aderência-escorregamento do CEB-FIP (1990).

Na figura (6.7) têm-se as diferentes relações entre força  $f$  e escorregamento  $s$ , para cada trecho, dadas por:

$$\begin{aligned}
 f &= f_{\text{máx}} \left( \frac{s}{s_1} \right)^\alpha && \text{para } [0, s_1] \\
 f &= f_{\text{máx}} && \text{para } [s_1, s_2] \\
 f &= \frac{f_{\text{máx}} \cdot s_3 - f_f \cdot s_2 + (f_f - f_{\text{máx}}) \cdot s}{(s_3 - s_2)} && \text{para } [s_2, s_3] \\
 f &= f_f && \text{para } s > s_3
 \end{aligned} \tag{6.28}$$



### 6.4.3. Formulação não-linear do acoplamento MEC/MEF com modelo de escorregamento

O problema do escorregamento introduz uma nova variável nas equações, a variável  $s$  do escorregamento relativo entre os meios, definida na figura (6.4). O equilíbrio de forças, conforme a primeira das (6.5), continua valendo, mas a compatibilidade dos deslocamentos é agora expressa pela equação:

$$\begin{aligned} u^c &= u \\ u^f &= u^c + s = u + s \end{aligned} \quad (6.29)$$

ou seja, o deslocamento relativo  $s$  deve ser aproximado por elemento finito e introduzido nas equações de equilíbrio do MEF. Os campos com os deslocamentos  $u$  e  $s$  da (6.29) são independentes entre si, e podem ser aproximados por polinômios diferentes sobre cada elemento de barra. O deslocamento  $u$  é aproximado pelo mesmo polinômio cúbico definido no item (6.2). O deslocamento relativo  $s$  será nesta formulação aproximado linearmente. A razão desta escolha é por ser o mesmo polinômio que aproxima  $f$  no elemento. Neste caso, devem coincidir os nós das aproximações de  $f$  e  $s$ , em vista da utilização do modelo não-linear local da figura (6.4). A figura (6.5) mostra as aproximações das variáveis sobre o elemento.

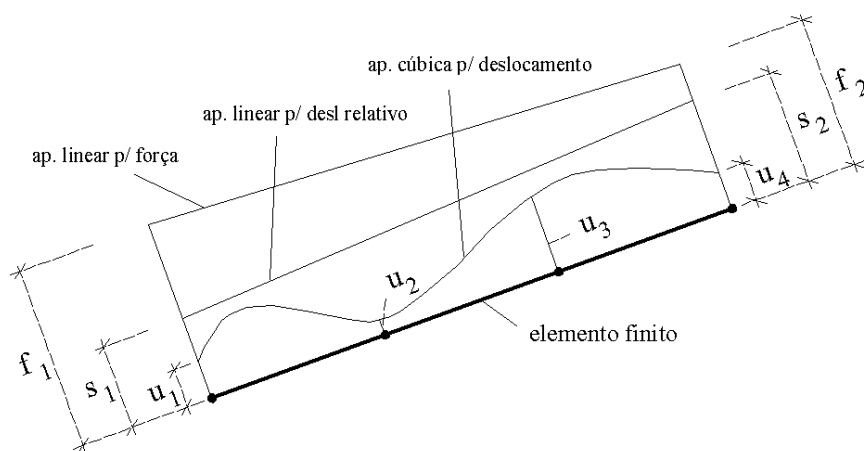


Figura 6.8. Aproximações para as variáveis por elemento finito.

Com a introdução do escorregamento relativo  $s$  na (6.29), a equação de equilíbrio (6.3) do elemento de barra fica:

$$[\mathbf{K}^f] \cdot \{u^f\} + [\mathbf{K}_s^f] \cdot \{s^f\} = [\mathbf{G}^f] \cdot \{f^f\} + \{P^f\} \quad (6.30)$$

onde  $[\mathbf{K}_s^f]$  é a matriz de rigidez que multiplica o vetor com os deslocamentos nodais  $\{s_f\}$ . A  $[\mathbf{K}_s^f]$  é facilmente obtida da  $[\mathbf{K}^f]$  na (6.4), como:

$$[\mathbf{K}_s^f] = \frac{E \cdot S}{L} \begin{bmatrix} 3.7 & -4.725 & 1.35 & -0.325 \\ -4.725 & 10.8 & -7.425 & 1.35 \\ 1.35 & -7.425 & 10.8 & -4.725 \\ -0.325 & 1.35 & -4.725 & 3.7 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} s_1^f \\ \frac{2s_1^f + s_2^f}{3} \\ \frac{s_1^f + 2s_2^f}{3} \\ s_2^f \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot S}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} s_1^f \\ s_2^f \end{Bmatrix} \quad (6.31)$$

sabendo-se que  $\left[ \frac{2s_1^f}{3} + \frac{s_2^f}{3} \right]$  e  $\left[ \frac{s_1^f}{3} + \frac{2s_2^f}{3} \right]$  são os valores de  $s$  nos terços do comprimento do elemento.

As equações de equilíbrio do acoplamento MEC/MEF, considerando-se as variáveis internas de força distribuída e de deslocamento, as variáveis de tensão inicial e a variável de pilotagem, nas suas formas incrementais, são:

$$[\mathbf{A}] \cdot \{\Delta X\} = \{\Delta F\}^{pr} + \Delta \eta \cdot \{F\}^{pilo} + [\mathbf{Q}] \cdot \{\Delta \sigma^0\} + [\mathbf{S}_f] \cdot \{\Delta f\} \quad (6.32)$$

$$[\mathbf{T}^u] \cdot [\bar{\mathbf{S}}_f]^T \cdot \{\Delta u\} = [\bar{\mathbf{S}}_f]^T \cdot \left[ -[\bar{\mathbf{A}}] \cdot \{\Delta X\} + \{\Delta \bar{F}\}^{pr} + \Delta \eta \cdot \{\bar{F}\}^{pilo} + [\bar{\mathbf{Q}}] \cdot \{\Delta \sigma^0\} + [\bar{\mathbf{S}}_f] \cdot \{\Delta f\} \right] \quad (6.33)$$

$$[\mathbf{K}^{fb}] \cdot \{\Delta u\} + [\mathbf{K}_s^{fb}] \cdot \{\Delta s\} = -[\mathbf{G}^{fb}] \cdot \{\Delta f\} + \{\Delta P^{fb}\} \quad (6.34)$$

$$\{\Delta \sigma\} = -[\mathbf{A}'] \cdot \{\Delta X\} + \{\Delta F'\}^{pr} + \Delta \eta \cdot \{F'\}^{pilo} + [\mathbf{Q}'] \cdot \{\Delta \sigma^0\} + [\mathbf{S}'_f] \cdot \{\Delta f\} \quad (6.35)$$

As equações (6.33) e (6.34), reunidas num único sistema, fica:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} [\mathbf{T}^u] \cdot [\bar{\mathbf{S}}_f]^T & -[\bar{\mathbf{S}}_f]^T \cdot [\bar{\mathbf{S}}_f] \\ [\mathbf{K}^{fb}] & [\mathbf{G}^{fb}] \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{\Delta \mathbf{u}\} \\ \{\Delta \mathbf{f}\} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} -[\bar{\mathbf{S}}_f]^T \cdot [\mathbf{A}] \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \{\Delta \mathbf{X}\} + \begin{Bmatrix} -[\bar{\mathbf{S}}_f]^T \cdot \{\Delta \bar{\mathbf{F}}\}^{pr} \\ 0 \end{Bmatrix} \\
+ \begin{Bmatrix} -[\bar{\mathbf{S}}_f]^T \cdot \{\bar{\mathbf{F}}\}^{pilo} \\ 0 \end{Bmatrix} \cdot \Delta \eta + \begin{bmatrix} -[\bar{\mathbf{S}}_f]^T \cdot [\bar{\mathbf{Q}}] \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \{\Delta \sigma^0\} + \begin{bmatrix} 0 \\ -[\mathbf{K}_s^{fb}] \end{bmatrix} \cdot \{\Delta \mathbf{s}\} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \{\Delta \mathbf{P}^{fb}\} \end{Bmatrix} & \quad (6.36)
\end{aligned}$$

Invertendo-se a matriz do primeiro membro da (6.36) e multiplicando-a pelos termos do segundo membro, têm-se os deslocamentos e as forças dados por:

$$\{\Delta \mathbf{u}\} = [\mathbf{A}_u] \cdot \{\Delta \mathbf{X}\} + \{\Delta \mathbf{F}_u\}^{pr} + \{\mathbf{F}_u\}^{pilo} \cdot \Delta \eta + [\mathbf{Q}_u] \cdot \{\Delta \sigma^0\} + [\mathbf{D}_u] \cdot \{\Delta \mathbf{s}\} + \{\mathbf{P}_u\} \quad (6.37)$$

$$\{\Delta \mathbf{f}\} = [\mathbf{A}_f] \cdot \{\Delta \mathbf{X}\} + \{\Delta \mathbf{F}_f\}^{pr} + \{\mathbf{F}_f\}^{pilo} \cdot \Delta \eta + [\mathbf{Q}_f] \cdot \{\Delta \sigma^0\} + [\mathbf{D}_f] \cdot \{\Delta \mathbf{s}\} + \{\mathbf{P}_f\} \quad (6.38)$$

Da (6.32), isolando-se  $\{\Delta \mathbf{X}\}$ , obtém-se:

$$\{\Delta \mathbf{X}\} = [\mathbf{A}]^{-1} \cdot \left[ \{\Delta \mathbf{F}\}^{pr} + \{\mathbf{F}\}^{pilo} \cdot \Delta \eta + [\mathbf{Q}] \cdot \{\Delta \sigma^0\} + [\mathbf{S}_f] \cdot \{\Delta \mathbf{f}\} \right] \quad (6.39)$$

Substituindo-se  $\{\Delta \mathbf{X}\}$  da (6.39) na equação (6.37) dos deslocamentos internos, chega-se a:

$$\{\Delta \mathbf{u}\} = \left\{ \Delta \hat{\mathbf{F}}_u \right\}^{pr} + \left\{ \hat{\mathbf{F}}_u \right\}^{pilo} \cdot \Delta \eta + \left[ \hat{\mathbf{Q}}_u \right] \cdot \{\Delta \sigma^0\} + \left[ \hat{\mathbf{S}}_{fu} \right] \cdot \{\Delta \mathbf{f}\} + [\mathbf{D}_u] \cdot \{\Delta \mathbf{s}\} \quad (6.40)$$

com

$$\left\{ \Delta \hat{\mathbf{F}}_u \right\}^{pr} = \left\{ [\mathbf{A}_u] \cdot [\mathbf{A}]^{-1} \cdot \{\Delta \mathbf{F}\}^{pr} + \{\Delta \mathbf{F}_u\}^{pr} + \{\mathbf{P}_u\} \right\} \quad (6.41)$$

$$\left\{ \hat{\mathbf{F}}_u \right\}^{pilo} = \left\{ [\mathbf{A}_u] \cdot [\mathbf{A}]^{-1} \cdot \{\mathbf{F}\}^{pilo} + \{\mathbf{F}_u\}^{pilo} \right\} \quad (6.42)$$

$$\left[ \hat{\mathbf{Q}}_u \right] = \left[ [\mathbf{A}_u] \cdot [\mathbf{A}]^{-1} \cdot [\mathbf{Q}] + [\mathbf{Q}_u] \right] \quad (6.43)$$

$$\left[ \hat{\mathbf{S}}_{fu} \right] = \left[ [\mathbf{A}_u] \cdot [\mathbf{A}]^{-1} \cdot [\mathbf{S}_f] \right] \quad (6.44)$$

Substituindo-se  $\{\Delta \mathbf{X}\}$  da (6.39) na equação das forças (6.38), têm-se:

$$\{\Delta \hat{F}_f\}^{pr} + \{\hat{F}_f\}^{pilo} \cdot \Delta \eta + [\hat{Q}_f] \cdot \{\Delta \sigma^0\} + [\hat{S}_{ff}] \cdot \{\Delta f\} + [D_f] \cdot \{\Delta s\} = 0 \quad (6.45)$$

com

$$\{\Delta \hat{F}_f\}^{pr} = \{[A_f] \cdot [A]^{-1} \cdot \{\Delta F\}^{pr} + \{\Delta F_f\}^{pr} + \{P_f\}\} \quad (6.46)$$

$$\{\hat{F}_f\}^{pilo} = \{[A_f] \cdot [A]^{-1} \cdot \{F\}^{pilo} + \{F_f\}^{pilo}\} \quad (6.47)$$

$$[\hat{Q}_f] = \{[A_f] \cdot [A]^{-1} \cdot [Q] + [Q_f]\} \quad (6.48)$$

$$[\hat{S}_{ff}] = \{[A_f] \cdot [A]^{-1} \cdot [S_f] - [I]\} \quad (6.49)$$

sendo  $[I]$  na (6.49) a matriz identidade. A equação das tensões (6.35) fica:

$$\{\Delta \sigma\} = \{\Delta N\}^{pr} + \{N\}^{pilo} \cdot \Delta \eta + [S] \cdot \{\Delta \sigma^0\} + [E_f] \cdot \{\Delta f\} \quad (6.50)$$

sendo que as expressões para  $\{\Delta N\}$ ,  $\{N\}^{pilo}$  e  $[S]$  foram definidas no capítulo 5 e

$$[E_f] = \{-[A'] \cdot [A]^{-1} \cdot [S_f] + [S'_f]\} \quad (6.51)$$

As equações (6.45) e (6.50) podem ser reescritas, respectivamente, como:

$$\{Y_f(\{\Delta \varepsilon\}, \{\Delta s\}, \Delta \eta)\} = \{\Delta \hat{F}_f\}^{pr} + \{\hat{F}_f\}^{pilo} \cdot \Delta \eta + [\hat{Q}_f] \cdot \{[E] \cdot \{\Delta \varepsilon\} - \{\Delta \sigma(\{\Delta \varepsilon\})\}\} + [\hat{S}_{ff}] \cdot \{\Delta f(\Delta s)\} + [D_f] \cdot \{\Delta s\} = 0 \quad (6.52)$$

$$\{Y(\{\Delta \varepsilon\}, \{\Delta s\}, \Delta \eta)\} = -[E] \cdot \{\Delta \varepsilon\} + \{\Delta N\}^{pr} + \{N\}^{pilo} \cdot \Delta \eta + [\bar{S}] \cdot \{[E] \cdot \{\Delta \varepsilon\} - \{\Delta \sigma(\{\Delta \varepsilon\})\}\} + [E_f] \cdot \{\Delta f(\Delta s)\} = 0 \quad (6.53)$$

lembrando que  $[\bar{S}]$  foi definida no capítulo 4. As relações não-lineares  $\Delta \sigma(\{\Delta \varepsilon\})$  e  $\Delta f(\Delta s)$  são estabelecidas, respectivamente, através dos modelos de dano e de escorregamento. O problema não-linear fica determinado considerando a equação de restrição em conjunto com as (6.52) e (6.53), conforme definida no item (5.4).

O problema nas variáveis incrementais  $\{\Delta\varepsilon\}$ ,  $\{\Delta s\}$  e  $\Delta\eta$  é resolvido iterativamente, via sucessivas linearizações, utilizando-se o procedimento de Newton-Raphson. As (6.52) e (6.53), linearizadas, resultam, respectivamente, nas:

$$\{Y_f(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \{\Delta s_n^i\}, \Delta\eta_n^i)\} + \frac{\partial\{Y_f\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} \cdot \delta\{\Delta\varepsilon_n^i\} + \frac{\partial\{Y_f\}}{\partial\{s_n^i\}} \cdot \delta\{\Delta s_n^i\} + \frac{\partial\{Y_f\}}{\partial\Delta\eta_n^i} \cdot \delta\Delta\eta_n^i = 0 \quad (6.54)$$

$$\{Y(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \{\Delta s_n^i\}, \Delta\eta_n^i)\} + \frac{\partial\{Y\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} \cdot \delta\{\Delta\varepsilon_n^i\} + \frac{\partial\{Y\}}{\partial\{s_n^i\}} \cdot \delta\{\Delta s_n^i\} + \frac{\partial\{Y\}}{\partial\Delta\eta_n^i} \cdot \delta\Delta\eta_n^i = 0 \quad (6.55)$$

para  $n$  indicando incremento,  $i$  iteração e as derivadas parciais calculadas com as variáveis da iteração atual, de acordo com o procedimento implícito. As atualizações das variáveis são dadas pelas:

$$\begin{aligned} \{\Delta\varepsilon_n^{i+1}\} &= \{\Delta\varepsilon_n^i\} + \{\delta\Delta\varepsilon_n^i\} \\ \{\Delta s_n^{i+1}\} &= \{\Delta s_n^i\} + \{\delta\Delta s_n^i\} \\ \Delta\eta_n^{i+1} &= \Delta\eta_n^i + \delta\Delta\eta_n^i \end{aligned} \quad (6.56)$$

As derivadas nas (6.54) e (6.55) são dadas por:

$$\frac{\partial\{Y_f\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} = [\hat{Q}_f] \cdot \left[ [E] - \frac{\partial\{\Delta\sigma_n^i\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} \right], \quad \frac{\partial\{Y_f\}}{\partial\{s_n^i\}} = [\hat{S}_{ff}] \cdot \frac{\partial\{\Delta f_n^i\}}{\partial\{s_n^i\}} + [D_f], \quad \frac{\partial\{Y_f\}}{\partial\Delta\eta_n^i} = \{\hat{F}_f\}^{\text{pilo}} \quad (6.57)$$

$$\frac{\partial\{Y\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} = \left[ -[E] + [\hat{S}] \cdot \left[ [E] - \frac{\partial\{\Delta\sigma_n^i\}}{\partial\{\Delta\varepsilon_n^i\}} \right] \right], \quad \frac{\partial\{Y\}}{\partial\{s_n^i\}} = [E_f] \cdot \frac{\partial\{\Delta f_n^i\}}{\partial\{s_n^i\}}, \quad \frac{\partial\{Y\}}{\partial\Delta\eta_n^i} = \{N\}^{\text{pilo}} \quad (6.58)$$

A derivada  $(\partial\Delta\sigma_n^i/\partial\Delta\varepsilon_n^i)$ , nas (6.57) e (6.58), é a matriz tangente consistente, deduzida para os modelos de dano nos itens (4.4) e (4.6). A derivada tangente local  $(\partial\Delta f_n^i/\partial s_n^i)$ , não consistente, é obtida da (6.28) como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \{\Delta f_n^i\}}{\partial s_n^i} &= \frac{\alpha \cdot f_{\max}}{s_1^\alpha} \cdot s^{(\alpha-1)} \quad \text{para } [0, s_1] \\
\frac{\partial \{\Delta f_n^i\}}{\partial s_n^i} &= 0 \quad \text{para } [s_1, s_2] \text{ e } s > s_3 \\
\frac{\partial \{\Delta f_n^i\}}{\partial s_n^i} &= \frac{(f_f - f_{\max})}{(s_3 - s_2)} \quad \text{para } [s_2, s_3]
\end{aligned} \tag{6.59}$$

A equação de restrição, tal como definida na (5.83), pode ser escrita acrescentando-se um termo com as variáveis do escorregamento em  $\{\Delta s\}$ , ou seja:

$$\begin{aligned}
Z^R(\{\Delta X\{\Delta \varepsilon\}\}, \{\Delta \varepsilon\}, \{\Delta s\}, \Delta \eta) &= Z^R(\{\Delta \varepsilon\}, \{\Delta s\}, \Delta \eta) = \{\Delta X\{\Delta \varepsilon\}\}^T \cdot [L_x] \cdot \{\Delta X\{\Delta \varepsilon\}\} \\
&+ \{\Delta \varepsilon\}^T \cdot [L_\varepsilon] \cdot \{\Delta \varepsilon\} + \{\Delta s\}^T \cdot [L_s] \cdot \{\Delta s\} + \Delta \eta \cdot 1_n \cdot \Delta \eta - (\Delta c^R)^2 = 0
\end{aligned} \tag{6.60}$$

sendo  $[L_s]$  a matriz com as influências das componentes de  $\{\Delta s\}$  na equação  $Z^R$ . A equação (6.60), linearizada, fica:

$$\begin{aligned}
Z^R(\{\Delta \varepsilon_n^i\}, \{\Delta s_n^i\}, \Delta \eta_n^i) &+ \frac{\partial Z^R(\{\Delta \varepsilon_n^i\}, \{\Delta s_n^i\}, \Delta \eta_n^i)}{\partial \{\Delta \varepsilon_n^i\}} \cdot \{\delta \Delta \varepsilon_n^i\} + \frac{\partial Z^R(\{\Delta \varepsilon_n^i\}, \{\Delta s_n^i\}, \Delta \eta_n^i)}{\partial \{\Delta s_n^i\}} \cdot \{\delta \Delta s_n^i\} \\
&+ \frac{\partial Z^R(\{\Delta \varepsilon_n^i\}, \{\Delta s_n^i\}, \Delta \eta_n^i)}{\partial \Delta \eta_n^i} \cdot \{\delta \Delta \eta_n^i\} = 0
\end{aligned} \tag{6.61}$$

As incógnitas de contorno em  $\{\Delta X\}$  e os deslocamentos nos pontos das fibras em  $\{\Delta u\}$  ficam, respectivamente, escritas nas variáveis do problema como:

$$\{\Delta X_n^i\} = [A]^{-1} \cdot \left[ \{\Delta F\}_n^{\text{pr}} + \{\hat{F}\}_n^{\text{pilo}} \cdot \Delta \eta_n^i + [Q] \cdot \left\{ [E] \cdot \{\Delta \varepsilon_n^i\} - \{\Delta \sigma_n^i\} \{\Delta \varepsilon_n^i\} \right\} + [S_f] \cdot \{\Delta f_n^i\} \{\Delta s_n^i\} \right] \tag{6.62}$$

$$\begin{aligned}
\{\Delta u_n^i\} &= \left\{ \hat{\Delta F}_u \right\}_n^{\text{pr}} + \left\{ \hat{F}_u \right\}_n^{\text{pilo}} \cdot \Delta \eta_n^i + \left[ \hat{Q}_u \right] \cdot \left\{ [E] \cdot \{\Delta \varepsilon_n^i\} - \{\Delta \sigma_n^i\} \{\Delta \varepsilon_n^i\} \right\} \\
&+ \left[ \hat{S}_{fu} \right] \cdot \{\Delta f_n^i\} \{\Delta s_n^i\} + [D_u] \cdot \{\Delta s_n^i\}
\end{aligned} \tag{6.63}$$

**6.4.4. Algoritmo implícito da formulação não-linear com modelo de escorregamento**

O esquema geral do algoritmo implícito, para resolver o problema não-linear de valor de contorno, considerando-se meio contínuo com dano e o efeito de escorregamento entre meio e fibras, é semelhante, a menos da equação (6.52) introduzida no item (6.4.3), ao descrito no item (4.7), ou no item (5.5), levando-se em conta a equação de restrição. Apresenta-se, resumidamente, no que segue, o algoritmo do acoplamento MEC/MEF, com os efeitos não-lineares e considerando-se a equação de restrição linearizada.

\*\*\*\*\*

\* Inicialização:  $i = 0$ ,  $\varepsilon = \varepsilon_n$ ,  $\sigma = \sigma_n$ ,  $s = s_n$ , variáveis de dano iguais à do passo  $n$ .

\* Etapa de Previsão: do sistema linear com as (6.54), (6.55) e (6.61), com as derivadas tomadas em relação às variáveis contínuas, calculam-se  $\{\Delta\varepsilon_n^0\}$ ,  $\{\Delta s_n^0\}$  e  $\Delta\eta_n^0$ , para os carregamentos  $\{Y_f\} = \{\Delta\hat{F}_f\}_n^{pr}$ ,  $\{Y\} = \{\Delta N\}_n^{pr}$  e  $Z^R = -(\Delta c^R)^2$

\* Etapa de Correção: checa-se a função de carregamento do modelo de dano para cada nó, e determinam-se os incrementos das variáveis de dano.

\* Determina-se, com o modelo constitutivo, o incremento das tensões reais  $\{\Delta\sigma_n^i\}$ .

\* Calculam-se, com as (6.52), (6.53) e (6.60):

$$\{Y_f(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \{\Delta s_n^i\}, \Delta\eta_n^i)\}$$

$$\{Y(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \{\Delta s_n^i\}, \Delta\eta_n^i)\}$$

$$Z^R(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \{\Delta s_n^i\}, \Delta\eta_n^i)$$

- Se  $i = 0$ , calculam-se:

$$n_1^0 \Rightarrow \text{norma euclidiana de } \{Y_f(\{\Delta\varepsilon_n^0\}, \{\Delta s_n^0\}, \Delta\eta_n^0)\}$$

$$n_2^0 \Rightarrow \text{norma euclidiana de } \{Y(\{\Delta\varepsilon_n^0\}, \{\Delta s_n^0\}, \Delta\eta_n^0)\}$$

$$n_3^0 \Rightarrow \frac{\|Z^R(\{\Delta\varepsilon_n^0\}, \{\Delta s_n^0\}, \Delta\eta_n^0)\|}{(\Delta c^R)^2}$$

\* Verifica-se a convergência:

- Se  $i = 0$ , faz-se:

- Se  $n_1^0 < \text{tol}_1$  e  $n_2^0 < \text{tol}_2$  e  $n_3^0 < 0,01$ , convergência alcançada.

- Se não, segue-se para o próximo item.

- Se  $i \geq 1$ , calculam-se, e faz-se:

$n_1^i \Rightarrow$  norma euclidiana de  $\{Y_f(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \{\Delta s_n^i\}, \Delta\eta_n^i)\}$

$n_2^i \Rightarrow$  norma euclidiana de  $\{Y(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \{\Delta s_n^i\}, \Delta\eta_n^i)\}$

$n_3^i \Rightarrow \frac{\|Z^R(\{\Delta\varepsilon_n^i\}, \{\Delta s_n^i\}, \Delta\eta_n^i)\|}{(\Delta c^R)^2}$

- Se  $n_1^i < 0,01 \cdot n_1^0$  e  $n_2^i < 0,01 \cdot n_2^0$  e  $n_3^i < 0,01$ , convergência alcançada.

- Se não, segue-se para o próximo item.

\* Resolve-se o sistema com as (6.54), (6.55) e (6.61), obtendo-se  $\{\delta\Delta\varepsilon_n^i\}$ ,  $\{\delta\Delta s_n^i\}$  e  $\delta\Delta\eta_n^i$ .

\*  $\{\Delta\varepsilon_n^{i+1}\} = \{\Delta\varepsilon_n^i\} + \{\delta\Delta\varepsilon_n^i\}$ ,  $\{\Delta s_n^{i+1}\} = \{\Delta s_n^i\} + \{\delta\Delta s_n^i\}$ ,  $\Delta\eta_n^{i+1} = \Delta\eta_n^i + \delta\Delta\eta_n^i$ .

\* Com as (6.62) e (6.63), calculam-se  $\{\Delta X_n^i\}$  e  $\{\Delta u_n^i\}$ .

\*  $i = i + 1$ , volta-se ao item “Etapa de Correção”.

#### **6.4.5. Exemplos de aplicação da formulação com escorregamento**

##### **6.4.5.1. Arrancamento de barra embutida em domínio**

Neste exemplo, considera-se o arrancamento de uma barra embutida num domínio plano por uma de suas extremidades, mediante prescrição de deslocamento em seu nó de extremidade. Os dados geométricos do problema encontram-se na figura (6.9). Será considerado o efeito do escorregamento entre a barra e o meio, sendo que este último comporta-se elasticamente.



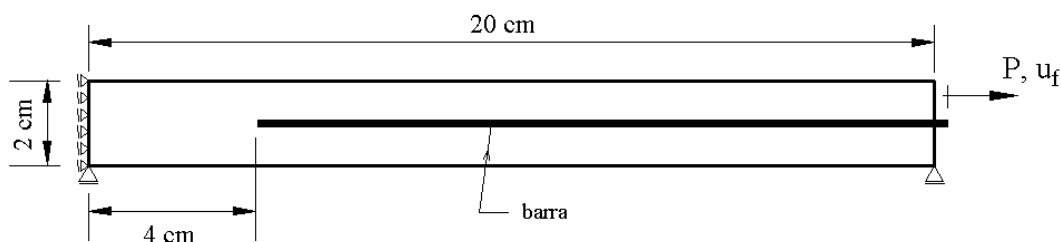


Figura 6.9. Barra embutida em domínio plano.

Os dados do problema são:  $E = 30000 \text{ MPa}$  e  $\nu = 0$  para o meio, e  $E \cdot A = 21000 \text{ kN}$  para a barra. Os parâmetros do modelo do escorregamento da figura (6.7) para o exemplo são:  $\alpha = 0.8$ ,  $s_1 = 0.06 \text{ cm}$ ,  $s_2 = 0.065 \text{ cm}$ ,  $s_3 = 0.1 \text{ cm}$ ,  $f_{\text{máx}} = 10.95 \text{ MPa}$  e  $f_f = 1.65 \text{ MPa}$ . A variável prescrita é o deslocamento  $u_f$ , da equação (6.29), do nó de extremidade da barra. O contorno do corpo é discretizado em 60 elementos e a barra em 160 elementos finitos de mesmo comprimento.

A resposta em termos da força de ponta na barra contra o deslocamento prescrito  $u_f$  é dado na figura (6.10).

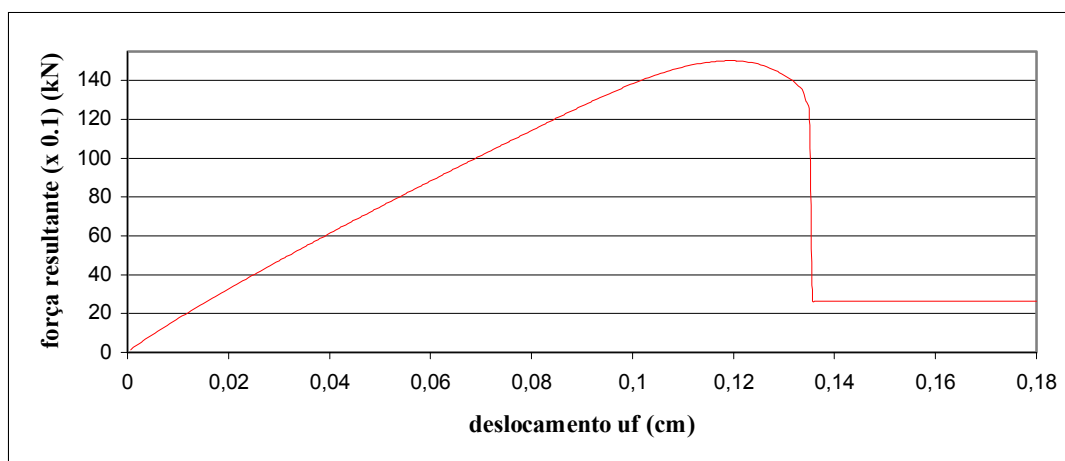


Figura 6.10. Diagrama força-deslocamento da extremidade da barra.

Na figura (6.11), encontram-se os diagramas com as forças de superfície, ao longo do comprimento da barra, para cinco valores diferentes do deslocamento  $u_f$ , mostrando a evolução da reação ao arrancamento mobilizada pela barra em instantes diferentes.

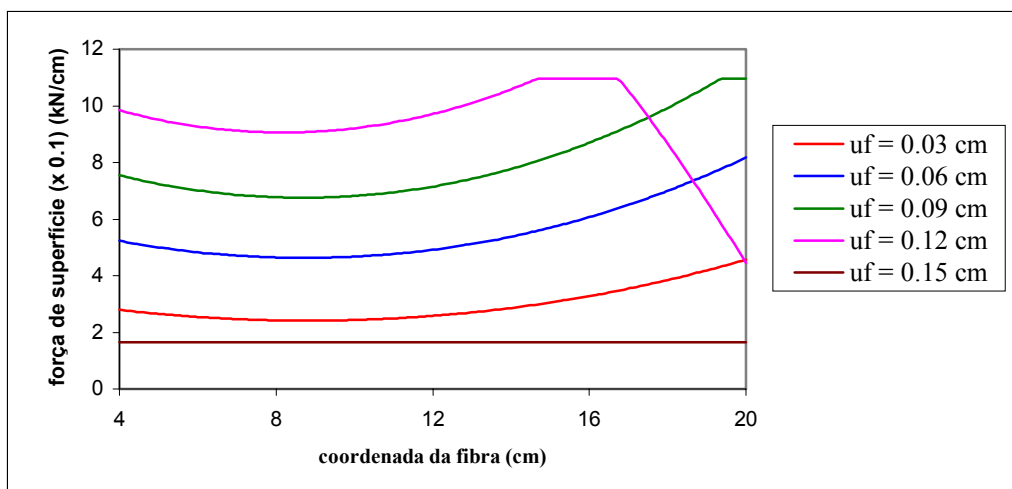


Figura 6.11. Diagramas das forças de superfície ao longo da barra.

Na figura (6.12), encontram-se os diagramas com os deslocamentos  $u_c$  dos pontos do meio contínuo, na altura da interface com a barra e ao longo de seu comprimento, para os vários valores de  $u_f$ .

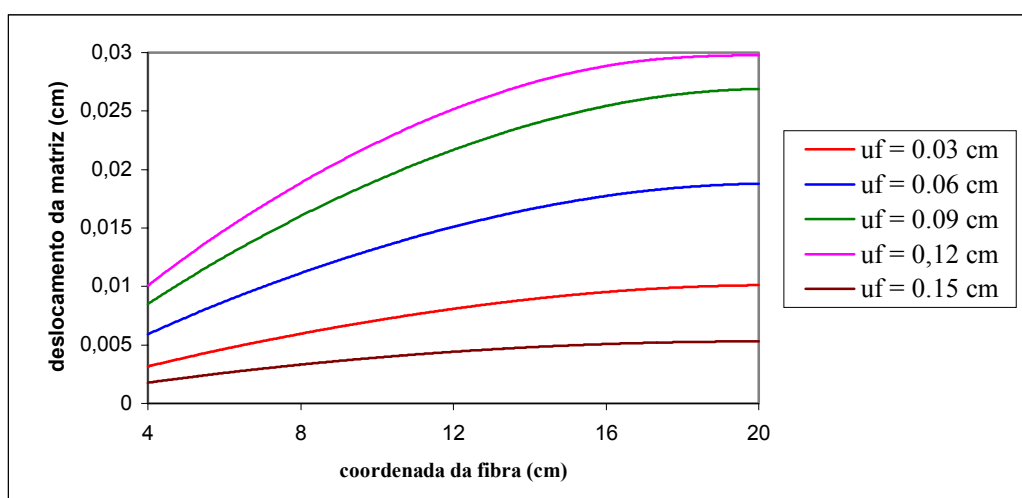


Figura 6.12. Diagramas dos deslocamentos do meio (matriz) ao longo da interface.

Por último, na figura (6.13), têm-se os diagramas com os deslocamentos relativos do escorregamento entre meio e barra.

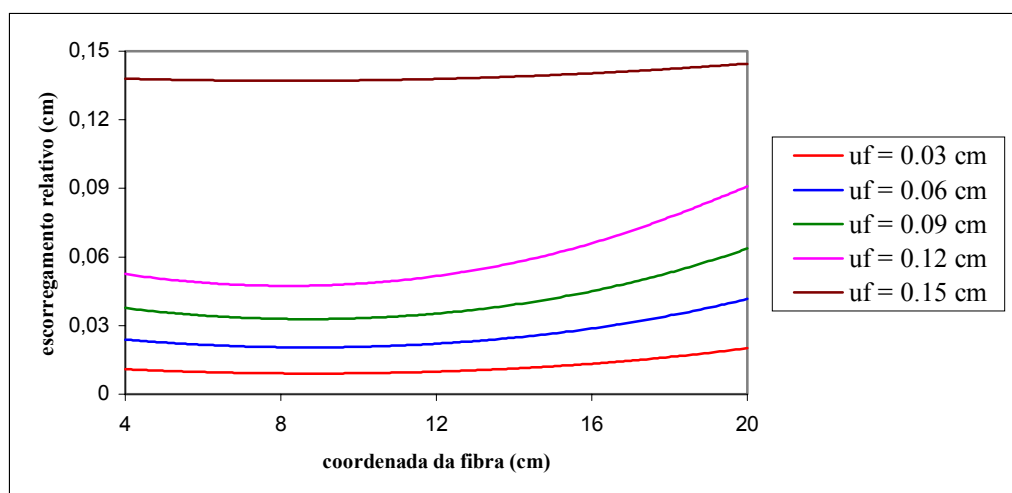


Figura 6.13. Diagramas dos deslocamentos relativos entre meio e barra.

Por definição, a soma dos diagramas das figuras (6.12) e (6.13) deve resultar nos diagramas com os deslocamentos dos pontos da barra  $u_f$ .

#### **6.4.5.2. Escorregamento de barra em material com dano**

Neste exemplo, considera-se o domínio plano da figura (6.14), enrijecido por uma barra que o atravessa. Pretende-se analisar o efeito do escorregamento na danificação do material do meio e vice-versa. O material do meio segue o modelo de dano não-local do concreto, com os parâmetros da função de carregamento dados por:  $a_t = 0.31$ ,  $b_t = 4.4$  MPa,  $k_t = 15.1$  MPa<sup>2</sup>,  $c_t = 10$ ,  $D_{0t} = 0.1$ ,  $(\sigma_e / \sigma_0)_t = 0.8$  e  $l_t = 1.5$  mm. Para o escorregamento, consideram-se os parâmetros do modelo da figura (6.7) dados por:  $\alpha = 1$ ,  $s_1 = 0.06$  cm,  $s_2 = 0.08$  cm,  $s_3 = 0.1$  cm,  $f_{m\acute{a}x} = 10.95$  MPa e  $f_f = 1.65$  MPa. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do concreto são dados por:  $E = 36000$  MPa e  $\nu = 0.15$ . Para a barra,  $E = 200000$  MPa e a área da seção transversal  $A = 3$  cm<sup>2</sup>.

A barra é discretizada em 240 elementos finitos. A malha de células do domínio está mostrada na figura (6.14). Na mesma figura, no centro da barra, cinco nós internos são marcados. Para estes nós, o parâmetro  $k_t$  assume o valor  $k_t = 8.1$  MPa<sup>2</sup>, para que o processo de danificação comece a ocorrer no centro do

domínio. O carregamento piloto é formado pelos deslocamentos  $u_f$  dos nós de extremidade da barra, de 0.50 cm para a extremidade direita e  $-0.50$  cm para a esquerda. A equação de restrição deste exemplo estabelece uma relação quadrática entre a força  $P$  na extremidade da barra e o deslocamento  $u_c$  do concreto no mesmo ponto de extremidade.

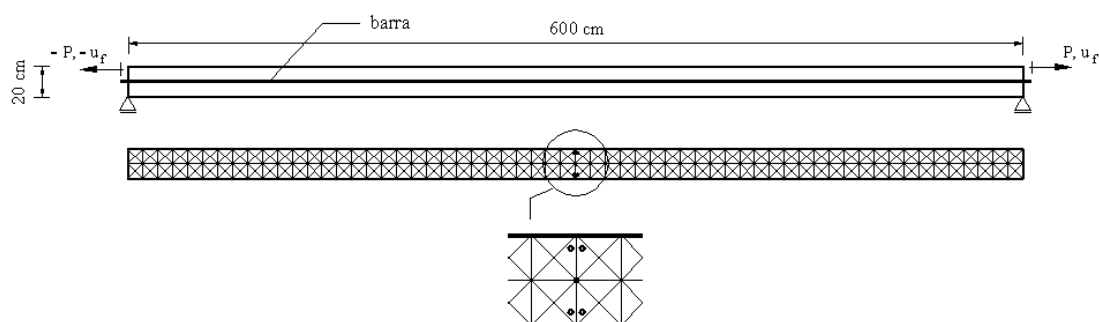


Figura 6.14. Domínio plano enrijecido por barra.

Na figura (6.15), são mostrados os diagramas em termos da força concentrada aplicada na barra contra os deslocamentos de extremidade da barra  $u_f$  e do concreto  $u_c$ . Para uma mesma força, a diferença entre os dois deslocamentos vem a ser o escorregamento da ponta.

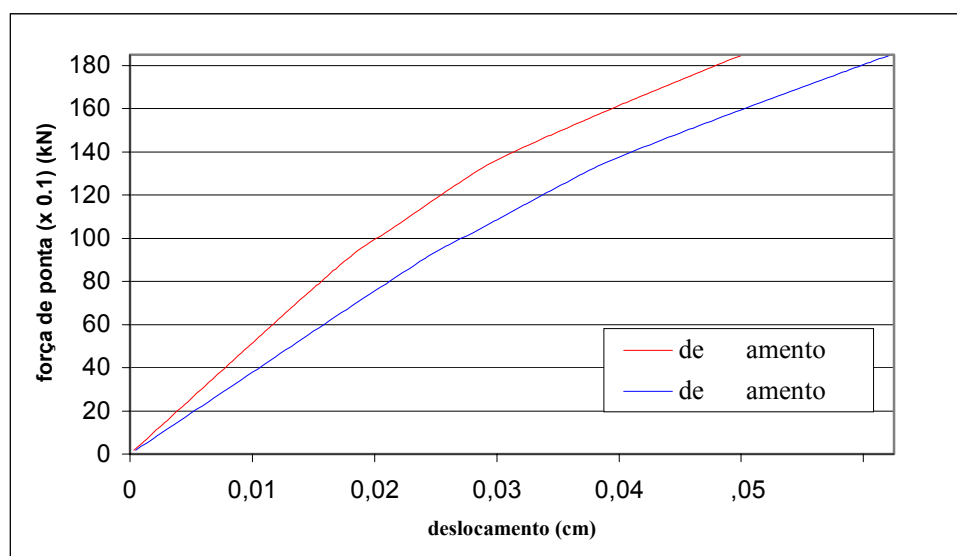


Figura 6.15. Diagramas força-deslocamento do ponto de aplicação da carga.

A distribuição da variável de dano do modelo, no domínio, ao final da análise, é dada na figura (6.16). Nota-se que no centro da barra, a região completamente danificada simularia uma fratura.

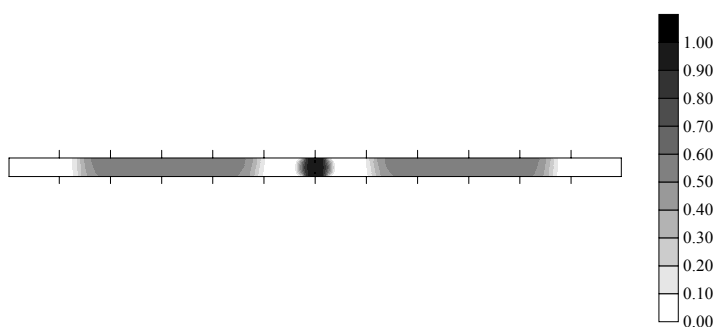


Figura 6.16. Distribuição do dano no domínio.

Na figura (6.17), tem-se o diagrama com a força resultante na barra, obtida integrando-se as forças de superfície ao longo do seu comprimento.

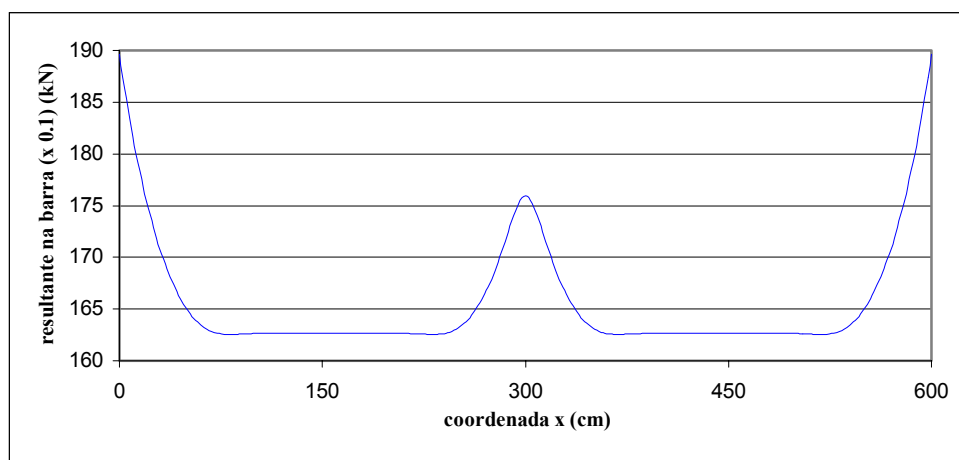


Figura 6.17. Resultante na barra ao longo do seu eixo.

Conforme esperado, a resultante na barra é maior na região central, onde o concreto, com elevado valor de dano, apresenta resistência quase nula. O efeito do escorregamento dificulta a transmissão dos esforços para que uma segunda região danificada (fratura) possa ser formada a uma certa distância do centro. Possivelmente, admitindo-se aderência perfeita, a segunda fratura seria formada mais

facilmente. Na figura (6.18), tem-se o diagrama do escorregamento relativo entre concreto e barra, exibindo o comportamento esperado.

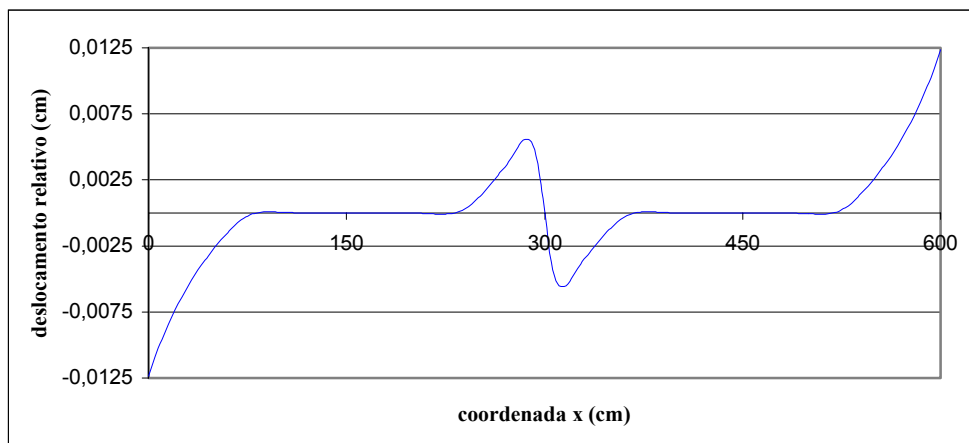


Figura 6.18. Diagrama dos deslocamentos relativos ao longo da interface.

## **7. CONCLUSÕES**

A proposta inicial da pesquisa previa o estudo do problema da localização de deformações e a sua análise através de uma formulação não-linear do método dos elementos de contorno. O problema da localização sempre despertou interesse dentro da comunidade científica. No entanto, a sua abordagem numérica ainda desperta dúvidas e constitui potencial campo de pesquisa em aberto. Especialmente, em se tratando do método dos elementos de contorno, são poucos trabalhos que tratam do assunto.

Ainda como projeto de pesquisa, previa-se a utilização de modelos da mecânica do dano para tratar a localização. Esta escolha visava estender as aplicações para outra categoria de modelo que não a plasticidade, mais largamente utilizada neste contexto. Outro motivo é que se pretendia aplicar as análises às estruturas em concreto, e o comportamento deste material é melhor modelado pela mecânica do dano. No projeto, estava contemplado o estudo e a implementação de técnicas de regularização do modelo de dano, para avaliar as suas implicações na questão da eliminação da dependência de malha da resposta numérica.

Com as diretrizes da pesquisa determinadas, partiu-se para a escolha dos modelos da literatura que pudessem servir ao trabalho. Optou-se então pelo modelo isotrópico de dano não-local para o concreto proposto por Comi (2001), que parecia ser atual, de fácil implementação e que correspondia muito bem aos objetivos pretendidos. Posteriormente, procurando enriquecer o trabalho e as análises, estudou-se e implementou-se também o modelo simplificado, conforme apresentado no capítulo 2. No modelo para o concreto, a técnica de regularização proposta utilizava o conceito de integral não-local. A mesma técnica foi então estendida ao modelo de dano simplificado.

De posse dos modelos locais e não-locais, pensou-se então na obtenção da formulação não-linear do método dos elementos de contorno. Conforme o tratamento clássico do problema, considerou-se o equacionamento com campos iniciais aplicados ao domínio. Considerou-se também a utilização de células internas para aproximar as variáveis de domínio. Na questão relativa às aproximações, surgiu a idéia de escrever somente equações de tensões para pontos internos, evitando que fosse necessário escrevê-las para pontos do contorno. Como consequência, alguns nós foram definidos no próprio domínio da célula. Este esquema funcionou muito bem, uniformizando o cálculo das integrais numéricas e simplificando sua implementação. Além disso, tem-se uma maior densidade de nós próximo ao contorno, o que melhora a aproximação nestas regiões que, em muitos exemplos, são críticas para o início da localização.

Visando obter um algoritmo robusto da formulação, que conseguisse analisar problemas com localização, considerou-se um procedimento implícito para a resolução do problema incremental, com matriz tangente consistente algorítmica. Esta escolha, que resultou num grande período de tempo que teve que ser dedicado para o seu estudo, equacionamento e implementação, ao final, resultou decisiva para o sucesso do trabalho.

De fato, o procedimento implícito com matriz tangente consistente leva a um número bem pequeno de iterações para cada incremento de carga. Além disso, no problema da localização, têm-se algumas regiões comportando-se elasticamente e outras com processo de danificação em evolução. A matriz tangente atualizada leva em conta as derivadas das relações constitutivas para estas duas situações. Utilizando-se matriz secante, opção não testada neste trabalho, sabe-se que a convergência do processo iterativo resultaria bem mais lenta. No entanto, a utilização da matriz tangente tem um inconveniente que é a necessidade de sua atualização a cada nova iteração. Este processo envolve operações de multiplicação de matrizes, que tem alto custo computacional.

As primeiras aplicações do código computacional implementado com a formulação implícita apresentaram resultados satisfatórios. No entanto, como as aplicações limitavam-se ao caso estático, seriam bastante comuns casos onde respostas com “snap-back” deveriam aparecer. Nesta etapa da pesquisa, surgiu a



idéia de incorporar o conceito de comprimento de arco à formulação implícita. Com o método dos elementos finitos, a técnica já era conhecida, apresentando resultados satisfatórios. No entanto, com elementos de contorno, não tinha sido encontrado nenhum trabalho que tratasse do tema.

Formulou-se então o problema não-linear com equação do comprimento de arco, inicialmente com variável-guia controlando deslocamento. Logo, vieram os primeiros resultados numéricos com “snap-back” para os problemas com localização. Estudou-se então os algoritmos para a resolução do problema considerando-se comprimento de arco linearizado e esférico. Aparentemente, os dois procedimentos pareciam ser eficientes, na maior parte dos casos. Porém, em alguns exemplos com localização mais brusca, o comprimento de arco linearizado não convergia no início do “snap-back”, mostrando-se menos eficiente do que o comprimento de arco esférico. Sugere-se como pesquisa futura uma melhor avaliação dos dois procedimentos.

Aplica-se a formulação com variável-guia controlando deslocamento aos casos em que é imposta, de partida, a forma do deslocamento na região controlada do contorno. Para alguns exemplos, esta não é a situação real. Pensou-se então na variável-guia controlando força, que possibilitaria incluir nas aplicações da formulação um outro conjunto de exemplos. Ao final, observando-se que a equação do arco era um tipo particular de restrição, e que esta poderia ser de qualquer natureza, surgiu a formulação com equação de restrição geral. Sendo a equação do arco um caso particular desta, esta formulação passou a ser utilizada para todos os exemplos.

A inclusão das fibras enrijecendo o domínio fazia parte do projeto de pesquisa planejado inicialmente. O acoplamento das fibras modeladas com elementos finitos com o meio modelado com elementos de contorno era conhecido da literatura. Pensou-se então num tipo de acoplamento em que fosse possível escolher uma aproximação polinomial mais rica para as forças de superfície do que para os deslocamentos, por elemento finito. O desequilíbrio resultante entre o número de equações e de variáveis seria corrigido mediante redução do número de equações através de um procedimento de regularização, utilizando-se a técnica dos mínimos quadrados. O acoplamento, assim feito, resultou em bons resultados, com

respostas coerentes em forças, o que deveria ser importante para tratar o problema do escorregamento.

A incorporação do modelo não-linear para o escorregamento foi feita na etapa final do trabalho. A formulação não teve grandes dificuldades para ser elaborada. Basicamente, incluiu-se nas equações do acoplamento a nova variável do escorregamento relativo e a relação constitutiva não-linear entre força e escorregamento. A formulação ficou completa considerando-se, além do escorregamento, o comportamento não-linear do meio e a equação de restrição nas equações do acoplamento MEC/MEF.

A consideração do escorregamento sozinho, como único efeito não-linear, apresentou ótimos resultados, com boa estabilidade numérica. Acoplando-se o escorregamento com o dano no sólido, a resposta também é satisfatória, porém o campo de aplicações fica restrito a problemas mais simples. Observou-se que a maior parte das aplicações do problema, como, por exemplo, a simulação do processo de fraturamento através da localização com dano e a influência do escorregamento da barra na transmissão dos esforços na região localizada, requer malhas bem densas, quando se deseja analisar com boa precisão o fenômeno, tornando a análise inviável ainda diante dos recursos computacionais disponíveis.

Os méritos do trabalho foram o estudo da localização, dos modelos dos materiais, a elaboração das formulações numéricas e a implementação delas. O estudo do fenômeno da localização e das técnicas de regularização, no campo teórico, já vem sendo feito há bastante tempo. Do ponto de vista numérico, constatou-se, através da literatura, certas limitações quanto ao campo de aplicabilidade do problema da localização em análise estrutural. Em geral, poucos trabalhos trazem análises para problemas planos ou tridimensionais. Muitas vezes, valida-se uma formulação não-local com exemplos unidimensionais, mais estáveis numericamente. A localização é um problema típico de instabilidade. As técnicas de regularização procuram eliminar este problema. Tratar estes aspectos no âmbito das formulações e das análises numéricas, especialmente com o método dos elementos de contorno, constitui vasta área de pesquisa ainda a ser explorada.

Acredita-se que os resultados deste trabalho foram bem satisfatórios para começar a abordar o problema da localização com formulações do método dos

elementos de contorno. Espera-se que o assunto tenha continuidade com outros trabalhos a vir. Sugere-se como pontos para o prosseguimento da pesquisa a introdução de novos modelos de dano, com outras técnicas de regularização, a otimização das operações computacionais, visando diminuir o tempo de processamento das análises e a incorporação nos algoritmos de procedimentos alternativos ao de Newton-Raphson, como, por exemplo, o procedimento de quasi-Newton, visando melhorar a convergência do problema incremental.

Sugere-se também melhorar a precisão do cálculo das integrais do método dos elementos de contorno, de preferência determinando-as analiticamente, aperfeiçoar os algoritmos para a formulação com equação de restrição, aprimorar e avaliar melhor as potencialidades da técnica de regularização do acoplamento, seja enriquecendo mais as aproximações dos campos, seja gerando mais equações de deslocamentos internos para ser aplicado mínimos quadrados, ou até outra técnica mais eficiente, aumentar os graus de liberdade do elemento finito de barra, introduzindo rotações e deslocamentos transversais, introduzir outros modelos físicos para o escorregamento e incluir modelos que permitam transformar a região localizada em fratura discreta, com a formulação numérica adaptada para a transição da análise em meio contínuo para a análise com fratura.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

- ALVARES, M.S. (1999). *Contribuição ao estudo e emprego de modelos simplificados de dano e plasticidade para a análise de estruturas de barras em concreto armado*. São Carlos. 123 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BATHE, K.J. (1996). *Finite element procedures*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs.
- BAZANT, Z.P. (1991). Why continuum damage is nonlocal: micromechanics arguments. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 117, nº 5, p. 1070-1087.
- BAZANT, Z.P., PIJAUDIER-CABOT, G. (1988). Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence. *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, p. 287-293.
- BAZANT, Z.P., PIJAUDIER-CABOT, G. (1989). Measurement of characteristic length of nonlocal continuum. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 115, nº 4, p. 755-767.
- BENALLAL, A., BILLARDON, R., DOGHRI, I. (1988). An integration algorithm and the corresponding consistent tangent operator for fully coupled elastoplastic and damage equations. *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 4, p. 731-740.
- BENALLAL, A.; BILLARDON, R.; GEYMONAT, G. (1991). Some mathematical aspects of the damage softening rate problem. In *Cracking and Damage* (Edited by J. Mazars and Z. P. Bazant), p. 247-258. Elsevier, Amsterdam.
- BENALLAL, A.; BILLARDON, R.; GEYMONAT, G. (1992). Bifurcation and localization in rate-independent materials. Some general considerations. *Rapport Interne nº 136*. Laboratoire de Mécanique et Technologie (E.N.S. Cachan / C.N.R.S. / Université Paris 6).

- BENALLAL, A., FUDOLI, C.A., VENTURINI, W.S. (2002). An implicit BEM formulation for gradient plasticity and localization phenomena. *Int. J. for Num. Meth. in Eng.*, 53, p. 1853-1869.
- BENALLAL, A., BOTTA, A.S., VENTURINI, W.S. (2002). A BEM implicit formulation applied damage mechanics models. A ser submetido.
- BENVENUTI, E. (2000). Enhanced computational nonlocal models for damaging materials. Dr. of Science thesis. University of Trento.
- BONNET, M. (1995). *Équations intégrales et éléments de frontière*. CNRS Éditions / Éditions EYROLLES, Paris.
- BONNET, M., MUKHERJEE, S. (1996). Implicit BEM formulation for usual and sensitivity problems in elasto-plasticity using the consistent tangent operator concept. *International Journal of Solids and Structures*, 33, p. 4461-4480.
- BONNET, M., POON, H., MUKHERJEE, S. (1998). Hypersingular formulation for boundary strain evaluation in the context of a CTO-based implicit BEM scheme for small strain elasto-plasticity. *International Journal of Plasticity*, Vol. 14, 10-11, p. 1033-1058.
- BOTTA, A.S. (1998). *Cálculo de esforços e deslocamentos em estruturas reticuladas considerando-se a mecânica do dano para a modelagem do concreto armado*. São Carlos. 98 p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BOTTA, A.S., VENTURINI, W.S., BENALLAL, A. (2001). Uma formulação implícita do método dos elementos de contorno para dano com localização de deformações. In: *22<sup>nd</sup> Iberian latin-american congress on computational methods in engineering*, Campinas, Brazil.
- BOTTA, A.S., VENTURINI, W.S., BENALLAL, A. (2002). A BEM implicit formulation applied to damage mechanics models. Twenty-fourth International Conference on the Boundary Element Method.
- BOTTA, A.S., VENTURINI, W.S. (2002). Reinforced 2D domain analysis using BEM and regularized BEM/FEM combination. A ser submetido.
- BREBBIA, C.A., TELLES, J.C.F., WROBEL, L.C. (1984). *Boundary element techniques. Theory and applications in engineering*. Springer-Verlag: Berlin and New York.

- BREBBIA, C.A., DOMINGUEZ, J. (1992). *Boundary elements: an introductory course*. Comp. Mech. Publ., Southampton.
- CODA, H.B., VENTURINI, W.S. (1999a). On the coupling of 3D BEM and FEM frame model applied to elastodynamic analysis. *Int. J. Sol. Struct.*, 36, n.31-32, p. 4789-4804.
- CODA, H.B., VENTURINI, W.S., ALIABADI, M.H. (1999b). A general 3D BEM/FEM coupling applied to elastodynamic continua/frame structures interaction analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46, n° 5, p. 695-712.
- CODA, H.B. (2001). Dynamic and static non-linear analysis of reinforced media: a BEM/FEM coupling approach. *Computers & Structures*, 79, p. 2751-2765.
- COMI, C. (1999). Computational modelling of gradient-enhanced damage in quasi-brittle materials. *Mech. Cohes-Frict. Mater.*, 4, p. 17-36.
- COMI, C. (2001). A non-local model with tension and compression damage mechanisms. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Vol. 20, p. 1-22.
- COMI, C.; BERTHAUD, Y., BILLARDON, R. (1995). On localization in ductile-brittle materials under compressive loadings. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Vol. 14, n° 1, p. 19-43.
- COMI, C., PEREGO, U. (2000). A bi-dissipative damage model for concrete with applications to dam engineering. In: *Proc. ECCOMAS 2000*, 11-14 September, Barcelona, Spain.
- COMI, C., RIZZI, E. (2000). On bifurcation in local and nonlocal materials with tension and compression damage. In: *Proc. ECCOMAS 2000*, 11-14 September, Barcelona, Spain.
- Comité Euro-International du Béton CEB/FIP (1999). *Structural Concrete. Textbook on Behaviour, Design and Performance*. Vol. 1.
- CRISFIELD, M. A. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. Vol. 1. Wiley: Chichester, New York.
- CRUSE, T.A. (1969). Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. *Int. J. Solids Structures*, 5, p. 1259-1274.
- DE BORST, R. (1991). Simulation of strain localisation: A reappraisal of the Cosserat continuum. *Eng. Comput.*, 8, p. 317-332.

- DE BORST, R., MÜHLHAUS, H.B. (1992). Gradient-dependent plasticity: formulation and algorithmic aspects. *Int J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 35, p. 521-539.
- DRIEMEIER, L. (1999). *Contribuição ao estudo da localização de deformações com modelos constitutivos de dano e plasticidade*. São Carlos. 101 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- FERRO, N.C.P. (1999). *Uma combinação MEC/MEF para análise de interação solo-estrutura*. São Carlos. 181 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- FUDOLI, C. A. (1999). *Formulação do método dos elementos de contorno e plasticidade com gradiente*. São Carlos, 151 p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- GARCIA, R., FLOREZ-LOPEZ, J., CERROLAZA, M. (1999). A boundary element formulation for a class of non-local damage models. *Int. J. Sol. Struct.*, 36, p. 3617-3638.
- GUIGGIANI, M. (1994). Hypersingular formulation for boundary stress evaluation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 13, p. 169-179.
- HEERES, O., DE BORST, R., BENALLAL, A. (1996). A gradient enhanced damage model and its numerical implementation. *Rapport Interne n° 174*. Laboratoire de Mécanique et Technologie (E.N.S. Cachan / C.N.R.S. / Université Paris 6).
- HERDING, U., KUHN, G. (1996). A field boundary element formulation for damage mechanics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 18, p. 137-147.
- KACHANOV, L.M. (1958). Time of rupture process under creep conditions. *Izvestia Akademii Nauk, USSR* (em russo), n° 8, p. 26-31.
- LA BORDERIE, C. (1991). *Phénomènes unilatéraux dans un matériau endommageable: modélisation et application à l'analyse de structures en béton*. Dr. of Science thesis. University of Paris 6.
- LEITE, L.G.S., CODA, H.B., VENTURINI, W.S. (2002). Two-dimensional solids stiffened by thin bars using the boundary element method. In: *WCCM V, Fifth World Congress on Computational Mechanics*. July 7-12, Vienna, Austria.
- LEMAITRE, J. (1992). *A course on damage mechanics*. Springer-Verlag, Berlin.

- LEMAITRE, J., CHABOCHE, J.L. (1985). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris.
- LIEBE, T., STEINMANN, P., BENALLAL, A. (2001). Theoretical and computational aspects of a thermodynamically consistent framework for geometrically linear gradient damage. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 190, p. 6555-6576.
- MAZARS, J. (1984). Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. Dr. Of Science thesis. University of Paris 6.
- PEERLINGS, R.H.J., DE BORST, R., BREKELMANS, W.A.M., DE VREE, J.H.P. (1996). Gradient-enhanced damage for quasi-brittle materials. *Int J. for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 39, p. 3391-3403.
- PIJAUDIER-CABOT, G., BAZANT, Z.P. (1987). Nonlocal damage theory. *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 113, n° 10, p. 1512-1533.
- PIJAUDIER-CABOT, G., BENALLAL, A. (1993). Strain localization and bifurcation in a nonlocal continuum. *Int. J. Solids Structures*, Vol. 30, n° 13, p. 1761-1775.
- PITUBA, J.J.C. (1998). *Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo*. São Carlos. 130 p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- POON, H., MUKHERJEE, S., BONNET, M. (1998). Numerical implementation of a CTO-based implicit approach for the BEM solution of usual and sensitivity problems in elasto-plasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 22, p. 257-269.
- PROENÇA, S.P.B., VENTURINI, W.S. (2000). Applications of damage mechanics to reinforced concrete structures. In: *Continuous Damage and Fracture* (Edited by A. Benallal), p. 233-242. Elsevier, Paris.
- RIZZO, P.J. (1967). An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quart. Appl. Math.*, 25, p. 83-95.
- SCHELLEKENS, J.C.J. (1992). Computational strategies for composite structures. Dr. of Science thesis. Delft University of Technology.



- SIMO, J.C., TAYLOR, R.L. (1985). Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 48, p. 101-118.
- TELLES, J.C.F. (1983). *The boundary element method applied to inelastic problems*. Springer: Berlin.
- VALLABHAN, C.V.G., SIVAKUMAR, J. (1986). Coupling of BEM and FEM for 3D problems in geotechnical engineering. In: *Proc. of the 2<sup>nd</sup> Boundary Element Technology Conference*, MIT, Massachusetts, USA.
- VENTURINI, W.S. (1983). *Boundary element method in geomechanics*. Lecture Notes in Engineering, Springer-Verlag.