

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS  
LABORATÓRIO DE MADEIRAS E DE ESTRUTURAS DE MADEIRA**

**ANÁLISE DE VIGAS DE MADEIRA PREGADAS  
COM SEÇÃO COMPOSTA I**

**Jorge Luís Nunes de Góes**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Antônio Alves Dias

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Engenharia de Estruturas

*São Carlos*

*2002*

*Aos meus pais.*

## **AGRADECIMENTOS**

Meus agradecimentos são dirigidos aos amigos e familiares que prestaram os melhores incentivos para a concretização deste trabalho.

Em especial, ao Professor Dr. Antonio Alves Dias pela excelente orientação e amizade.

À FAPESP – “Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo”, pela concessão da bolsa de estudos e suporte financeiro para o desenvolvimento da pesquisa.

À todos os colegas, professores e funcionários do Laboratório de Madeiras e Estruturas de Madeiras, que direta ou indiretamente, participaram na elaboração deste trabalho.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	vi
<b>LISTA DE TABELAS</b> .....	x
<b>LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS</b> .....	xii
<b>LISTA DE SÍMBOLOS</b> .....	xiii
<b>RESUMO</b> .....	xvii
<b>ABSTRACT</b> .....	xviii
<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	1
1.1. OBJETIVOS .....	3
<b>2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....	4
2.1. VIGAS COMPOSTAS DE MADEIRA .....	4
2.2. MÉTODOS DE ANÁLISE DE VIGAS COMPOSTAS .....	7
2.2.1. Métodos de Análise de Vigas Compostas .....	7
2.2.2. Métodos dos Coeficientes .....	9
2.2.3. Métodos de Analítico de Cálculo .....	13
2.3. MODELO TEÓRICO BASEADO NAS EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO .....	18
2.3.1. Modelo Exato (CHUI & BARCLAY – 1998) .....	19
2.3.2. Modelo Aproximado (KREUZINGER – 1995) .....	24
2.4. RIGIDEZ DAS LIGAÇÕES .....	28
2.4.1. Conceitos Básicos .....	30
2.4.2. Modelo do Escoamento (Yield Model) .....	31
2.4.3. Modelos de Viga sob Fundação .....	35
2.5. REVISÃO DE NORMAS TÉCNICAS .....	42
2.5.1. NBR 7190 (1997) .....	43
2.5.2. DIN 1052 (1988) .....	43
2.5.3. EUROCODE 5 (1993) .....	47

---

2.6. CONCLUSÕES DA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	50
<b>3. MATERIAIS E MÉTODOS .....</b>	<b>53</b>
3.1. DESCRIÇÃO DOS MATERIAIS UTILIZADOS .....	54
3.2. PROCEDIMENTOS DE EXPERIMENTAÇÃO .....	55
3.3. ENSAIOS DE FLEXÃO ESTÁTICA PARA CARACTERIZAÇÃO.....	56
3.4. MONTAGEM DAS VIGAS COMPOSTAS .....	60
3.5. ENSAIOS DAS VIGAS COMPOSTAS .....	62
3.6. ENSAIOS DE CARACTERIZAÇÃO DA MADEIRA .....	64
3.7. ENSAIOS DE LIGAÇÕES .....	64
3.8. ENSAIOS DOS PREGOS .....	69
<b>4. RESULTADOS EXPERIMENTAIS .....</b>	<b>70</b>
4.1. ENSAIOS DE FLEXÃO ESTÁTICA PARA CARACTERIZAÇÃO.....	70
4.2. ENSAIOS DAS VIGAS COMPOSTAS .....	71
4.3. ENSAIOS DE CARACTERIZAÇÃO DE MADEIRA .....	80
4.4. ENSAIOS DE LIGAÇÕES .....	83
4.5. ENSAIOS DOS PREGOS .....	85
<b>5. ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>86</b>
5.1. RIGIDEZ EFETIVA .....	86
5.2. DEFORMAÇÕES E TENSÕES .....	91
5.3. DESLIZAMENTO ENTRE AS PEÇAS .....	105
5.4. FORÇA DE RUPTURA .....	106
5.5. ENSAIOS DE LIGAÇÕES .....	109
5.6. COMPARAÇÃO ENTRE OS CRITÉRIOS DE DIMENSIONAMENTO .....	111
<b>6. CONCLUSÕES FINAIS .....</b>	<b>118</b>
<b>7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>120</b>
<b>ANEXO A</b>	

## LISTA DE FIGURAS

<b>Figura 1 -</b>	Tipos de vigas compostas. (a) viga composta de madeira maciça; (b) viga laminada colada; (c) viga com alma esbelta; (d) viga em treliça. Fonte: GEHRI (1988). .....	5
<b>Figura 2 -</b>	Exemplos de configuração de seções transversais compostas solidarizadas continuamente. ....	5
<b>Figura 3 -</b>	Deformação de uma barra fletida. (a) seção maciça; (b) barras sobrepostas; (c) seção composta interligada por pinos metálicos; (d) esforços solicitantes. Fonte: ALVIM (2002). ....	7
<b>Figura 4 -</b>	Comportamento interposto das peças compostas. (a) seção maciça equivalente; (b) seção composta interligada por união deformável; (c) seção com dois elementos sobrepostos. Fonte: GEHRI (1988). ....	9
<b>Figura 5 -</b>	Influência do tipo de carregamento no coeficiente $\beta$ . Fonte: GEHRI (1988). ....	11
<b>Figura 6 -</b>	Eficiência $\beta$ em função da rigidez da ligação para vigas compostas com 2 e 3 elementos. Fonte: STÜSSI (1947). ....	11
<b>Figura 7 -</b>	Valores dos coeficientes de redução em função do vão. Fonte: GEHRI (1988). ....	12
<b>Figura 8 -</b>	Viga composta de três elementos com seção transversal genérica, distribuição de deformações e esforços internos para um elemento diferencial. ....	20
<b>Figura 9 -</b>	Deslocamento e força cisalhante entre os elementos individuais. Fonte: KREUZINGER (1995). ....	24
<b>Figura 10 -</b>	Detalhes de uma viga composta e a configuração de equilíbrio de um elemento dx. Fonte: KREUZINGER (1995). ....	25
<b>Figura 11 -</b>	Deformações. Fonte: KREUZINGER (1995). ....	25
<b>Figura 12 -</b>	Distribuição de tensões. Fonte: KREUZINGER (1995). ....	26
<b>Figura 13 -</b>	Típica curva carga-deslocamento. Fonte: VAN DYER (1992). ....	29
<b>Figura 14 -</b>	Esquema da distribuição de tensões sobre o prego ao longo de seu comprimento em uma ligação tracionada. Fonte: SANTANA (1997). ....	30
<b>Figura 15 -</b>	(a) Esquema real de distribuição de tensões na parede do furo. (b) Esquema aproximado de distribuição de tensões na parede do furo. Fonte: SANTANA (1997). ....	31

<b>Figura 16 -</b>	Módulo de Deslizamento secante. ....	33
<b>Figura 17 -</b>	Analogia de viga de fundação elástica. Fonte: ALVIM (2002). ....	37
<b>Figura 18 -</b>	Ligação com duas peças. Fonte: ALVIM (2002). ....	37
<b>Figura 19 -</b>	Curva típica de carga-deslocamento de uma ligação pregada. Fonte: MALHORTA & VAN DYER (1977) <i>apud</i> ALVIM (2002). ....	39
<b>Figura 20 -</b>	Ligação com duas peças. Fonte: KUENZI (1955) <i>apud</i> ALVIM (2002). ....	39
<b>Figura 21 -</b>	Diagramas experimentais de carga-deslocamento. Fonte: FOSCHI (1974) <i>apud</i> ALVIM (2002). ....	42
<b>Figura 22 -</b>	Distância $e'_{1,3}$ conforme arranjo dos conectores para mais de uma linha de pregação. ....	45
<b>Figura 23 -</b>	Seções transversais e distribuição de tensões da DIN 1052. ....	47
<b>Figura 24 -</b>	Seções transversais e distribuição de tensões do EUROCODE 5. ....	49
<b>Figura 25 -</b>	Montagem do ensaio de flexão estática para caracterização das peças. ....	56
<b>Figura 26 -</b>	Diagrama carga x flecha na flexão. Fonte NBR 7190 (1997). ....	57
<b>Figura 27 -</b>	Diagrama de carregamento para a determinação da rigidez à flexão. Fonte NBR 7190 (1997). ....	57
<b>Figura 28 -</b>	Ensaio de flexão em peça de mesa (esquerda) e peça de alma (direita). ....	58
<b>Figura 29 -</b>	Sistema de aplicação de carga e relógio comparador (esquerda); Sistema de aquisição de dados KYOWA (direita). ....	58
<b>Figura 30 -</b>	Diagrama força x flecha do ensaio de flexão em uma peça (alma). ....	60
<b>Figura 31 -</b>	Diagrama força x deformação específica (extensômetros superior e inferior) do ensaio de flexão em uma peça (alma). ....	60
<b>Figura 32 -</b>	Fixação das peças de madeira. ....	61
<b>Figura 33 -</b>	Pré-furação e cravação dos pregos. ....	61
<b>Figura 34 -</b>	Viga após o término da montagem. ....	61
<b>Figura 35 -</b>	Montagem do ensaio em vigas compostas. ....	62
<b>Figura 36 -</b>	Viga composta posicionada para ensaio. ....	63
<b>Figura 37 -</b>	Detalhe de instrumentação das vigas. ....	63

---

<b>Figura 38</b> -	Comportamento de duas vigas compostas próximo à ruptura. ....	64
<b>Figura 39</b> -	Dimensões dos corpos-de-prova de ligação tipo 1. ....	65
<b>Figura 40</b> -	Dimensão dos corpos-de-prova de ligação tipo 2. ....	65
<b>Figura 41</b> -	Configuração do ensaio de ligação para corpo-de-prova tipo 1 e 2. ....	66
<b>Figura 42</b> -	Diagrama força x deslocamento do ensaio de ligação – CP3 viga P2.	66
<b>Figura 43</b> -	Diagrama de carregamento para ensaios em corpos-de-prova de ligação das vigas P3, C1, C2 e C3. Adaptado da NBR 7190 (1997). ..	67
<b>Figura 44</b> -	Diagrama força x deslocamento do ensaio de ligação – CP3 viga C3.	67
<b>Figura 45</b> -	Diagrama de carregamento para ensaios em corpos-de-prova de ligação das vigas P1, A1, A2 e A3. Adaptado da NBR 7190 (1997). ..	68
<b>Figura 46</b> -	Diagrama força x deslocamento do ensaio de ligação – CP3 viga A2.	68
<b>Figura 47</b> -	Diagrama força x deformação específica do ensaio de ligação. Fonte: NBR 7190 (1997). ....	69
<b>Figura 48</b> -	Diagramas força x flecha dos ensaios de flexão das vigas de Angelim. ....	87
<b>Figura 49</b> -	Diagramas força x flecha dos ensaios de flexão das vigas de Cedrilho. ....	88
<b>Figura 50</b> -	Diagramas força x flecha dos ensaios de flexão das vigas de Pinus. ..	89
<b>Figura 51</b> -	Diagrama de deformação para uma seção I genérica. ....	91
<b>Figura 52</b> -	Diagramas força x deformação do ensaio de flexão da viga A1. ....	92
<b>Figura 53</b> -	Diagramas força x deformação do ensaio de flexão da viga A2. ....	93
<b>Figura 54</b> -	Diagramas força x deformação do ensaio de flexão da viga C1. ....	94
<b>Figura 55</b> -	Diagramas força x deformação do ensaio de flexão da viga C2. ....	95
<b>Figura 56</b> -	Diagramas força x deformação do ensaio de flexão da viga P1. ....	96
<b>Figura 57</b> -	Diagramas força x deformação do ensaio de flexão da viga P2. ....	97
<b>Figura 58</b> -	Diagrama de deformações e tensões da viga A1. ....	99
<b>Figura 59</b> -	Diagrama de deformações e tensões da viga A2. ....	100
<b>Figura 60</b> -	Diagrama de deformações e tensões da viga C1. ....	101
<b>Figura 61</b> -	Diagrama de deformações e tensões da viga C2. ....	102



---

<b>Figura 62 -</b>	Diagrama de deformações e tensões da viga P1. ....	103
<b>Figura 63 -</b>	Diagrama de deformações e tensões da viga P2. ....	104
<b>Figura 64 -</b>	Diagrama de deslizamento entre a mesa e a alma das vigas de Angelim. ....	105
<b>Figura 65 -</b>	Diagrama de deslizamento entre a mesa e a alma das vigas de Cedrilho. ....	106
<b>Figura 66 -</b>	Diagrama de deslizamento entre a mesa e a alma das vigas de Pinus. ....	101
<b>Figura 67 -</b>	Modo de ruptura das vigas compostas. ....	107
<b>Figura 68 -</b>	Diagrama de força de ruptura das vigas de Angelim. ....	108
<b>Figura 69 -</b>	Diagrama de força de ruptura das vigas de Cedrilho. ....	108
<b>Figura 70 -</b>	Diagrama de força de ruptura das vigas de Pinus. ....	109
<b>Figura 71 -</b>	Coeficiente de eficiência x espaçamento entre pregos – Viga Tipo 1. ....	113
<b>Figura 72 -</b>	Coeficiente de eficiência x densidade de pregos – Viga Tipo 1. ....	113
<b>Figura 73 -</b>	Coeficiente de eficiência x espaçamento entre pregos – Viga Tipo 2. ....	114
<b>Figura 74 -</b>	Coeficiente de eficiência x densidade de pregos – Viga Tipo 2. ....	114
<b>Figura 75 -</b>	Valor máximo de carregamento permanente distribuído em função da taxa de conectores – Viga Tipo 1. ....	115
<b>Figura 76 -</b>	Valor máximo de carregamento permanente distribuído em função da taxa de conectores – Viga Tipo 2. ....	116

## LISTA DE TABELAS

<b>Tabela 1 -</b>	Valores dos coeficientes de eficiência da Norma Brasileira e Suíça. ..	12
<b>Tabela 2 -</b>	Módulo de deslizamento "K" em N/mm, para as seções transversais de vigas. ....	44
<b>Tabela 3 -</b>	Dados de projeto das vigas compostas. ....	54
<b>Tabela 4 -</b>	Módulo de elasticidade das peças individuais das vigas compostas. ..	70
<b>Tabela 5 -</b>	Resultados do ensaio de flexão da viga A1. ....	72
<b>Tabela 6 -</b>	Resultados do ensaio de flexão da viga A2. ....	73
<b>Tabela 7 -</b>	Resultados do ensaio de flexão da viga A3. ....	74
<b>Tabela 8 -</b>	Resultados do ensaio de flexão da viga C1. ....	75
<b>Tabela 9 -</b>	Resultados do ensaio de flexão da viga C2. ....	76
<b>Tabela 10 -</b>	Resultados do ensaio de flexão da viga C3. ....	77
<b>Tabela 11 -</b>	Resultados do ensaio de flexão da viga P1. ....	78
<b>Tabela 12 -</b>	Resultados do ensaio de flexão da viga P2. ....	79
<b>Tabela 13 -</b>	Resultados do ensaio de flexão da viga P3. ....	80
<b>Tabela 14 -</b>	Médias e coeficiente de variação (%) - Angelim Pedra Verdadeiro. ...	81
<b>Tabela 15 -</b>	Médias e coeficiente de variação (%) - Cedrilho. ....	82
<b>Tabela 16 -</b>	Médias e coeficiente de variação (%) - Pinus Hondurensis. ....	83
<b>Tabela 17 -</b>	Resultados dos ensaios de ligação de Angelim Pedra Verdadeiro. ....	84
<b>Tabela 18 -</b>	Resultados dos ensaios de ligação de Cedrilho. ....	84
<b>Tabela 19 -</b>	Resultados dos ensaios de ligação de Pinus Hondurensis. ....	85
<b>Tabela 20 -</b>	Resultados dos ensaios de tração dos pregos. ....	85
<b>Tabela 21 -</b>	Rigidez à flexão e coeficiente de eficiência das vigas compostas. ....	91
<b>Tabela 22 -</b>	Comparação dos resultados de tensões e deformações teórico e experimental viga A1. ....	99
<b>Tabela 23 -</b>	Comparação dos resultados de tensões e deformações teórico e experimental Viga A2. ....	100

---

<b>Tabela 24</b> -	Comparação dos resultados de tensões e deformações teórico e experimental Viga C1. ....	101
<b>Tabela 25</b> -	Comparação dos resultados de tensões e deformações teórico e experimental Viga C2. ....	102
<b>Tabela 26</b> -	Comparação dos resultados de tensões e deformações teórico e experimental Viga P1. ....	103
<b>Tabela 27</b> -	Comparação dos resultados de tensões e deformações teórico e experimental Viga P2. ....	104
<b>Tabela 28</b> -	Comparação da força de ruptura teórica e experimental. ....	107
<b>Tabela 29</b> -	Resultados dos ensaios de ligações. ....	110
<b>Tabela 30</b> -	Dados de projeto das vigas compostas. ....	112

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

- CDE ..... - Chapa de Dentes Estampados
- EESC ..... - Escola de Engenharia de São Carlos
- ELE ..... - Engineeing Laboratory Equipment Limited
- LaMEM ..... - Laboratório de Madeiras e Estruturas de Madeira
- LVL ..... - Laminated Veneer Lumber
- MLC ..... - Madeira Laminada Colada
- NBR ..... - Norma Brasileira Registrada
- OSB ..... - Oriented Strand Board
- SET ..... - Departamento de Engenharia de Estruturas
- USP ..... - Universidade de São Paulo

## LISTA DE SÍMBOLOS

### Letras romanas maiúsculas:

- A ..... Área da seção transversal;
- $A_i$  ..... Área da seção transversal do elemento individual  $i$ ;
- C ..... Rigidez da ligação, constante de deslizamento;
- $D_e$  ..... Profundidade efetiva da fundação;
- $E_{co}$  ..... Módulo de elasticidade à compressão paralela às fibras da madeira;
- $E_{co,k}$  ..... Módulo de elasticidade característico à compressão paralela às fibras da madeira;
- $E_{c90}$  ..... Módulo de elasticidade à compressão normal às fibras da madeira;
- $(EI)_{EC5}$  .... Rigidez da viga composta à flexão calculado pelo EUROCODE 5;
- $(EI)_{ef}$  ..... Rigidez efetiva da viga composta à flexão;
- $(EI)_{exp}$  ..... Rigidez experimental da viga composta à flexão;
- $(EI)_{rig}$  ..... Rigidez efetiva da viga composta à flexão considerando ligação rígida;
- $(EI)_{th}$  ..... Rigidez teórica da viga composta à flexão;
- $E_{M,flecha}$  .... Módulo de elasticidade à flexão experimental;
- $E_{to}$  ..... Módulo de elasticidade à tração paralela às fibras da madeira;
- F ..... Força concentrada aplicada, força no conector;
- $F_{max}$  ..... Força máxima da ligação;
- $F_s$  ..... Força atuante no conector;
- I ..... Momento de inércia;
- $I_{ef}$  ..... Momento de inércia efetivo;
- $I_{th}$  ..... Momento de inércia teórico;
- $I_p$  ..... Momento de inércia do pino metálico;
- J ..... Parâmetro;
- K ..... Módulo de deslizamento da ligação;
- $K_{kuenzi}$  ..... Módulo de deslizamento pelo modelo de KUENZI;

---

$K_{ser}$ .....	Módulo de deslizamento para o estado limite de utilização;
$K_{ser,inst}$ .....	Módulo de deslizamento instantâneo para o estado limite de utilização;
$K_u$ .....	Módulo de deslizamento para o estado limite último;
$L$ .....	Parâmetro, vão;
$L_0$ .....	Base de medida para corpos-de-prova de ligação;
$M$ .....	Momento fletor;
$M_y$ .....	Momento de escoamento do pino;
$N$ .....	Esforço normal;
$P_c$ .....	Carga de ruptura da viga composta;
$P_s$ .....	Carga de ruptura da viga maciça;
$R$ .....	Capacidade máxima da ligação;
$R_{2\%}$ .....	Resistência convencional da ligação;
$R_u$ .....	Resistência máxima da ligação;
$S$ .....	Momento estático de área;
$U$ .....	Teor de umidade da madeira;
$V$ .....	Esforço cisalhante;
$W$ .....	Módulo de resistência;
Zul N .....	Força permissível no conector segundo DIN 1052.

**Letras romanas minúsculas:**

- a ..... Distância do c.g. de um elemento até o c.g. da seção composta;
- b ..... Largura da peça de madeira;
- d ..... Diâmetro do pino;
- e' ..... Distância média entre conectores;
- f<sub>c</sub> ..... Flecha verificada na seção central da peça composta;
- f<sub>c0,d</sub> ..... Resistência de cálculo à compressão paralela às fibras da madeira;
- f<sub>c0,k</sub> ..... Resistência característica à compressão paralela às fibras da madeira;
- f<sub>e</sub> ..... Resistência da madeira ao embutimento;
- f<sub>s</sub> ..... Flecha verificada na seção central da peça maciça;
- f<sub>t0,d</sub> ..... Resistência de cálculo à tração paralela às fibras da madeira;
- f<sub>t0,k</sub> ..... Resistência característica à tração paralela às fibras da madeira;
- f<sub>u</sub> ..... Resistência máxima do aço à tração;
- f<sub>v,d</sub> ..... Resistência de cálculo ao cisalhamento da madeira;
- f<sub>v,k</sub> ..... Resistência característica ao cisalhamento da madeira;
- f<sub>y</sub> ..... Resistência ao escoamento do aço;
- g<sub>c</sub> ..... Peso próprio da viga composta;
- g<sub>s</sub> ..... Peso próprio da viga maciça;
- h ..... Altura da peça de madeira;
- $\bar{k}$  ..... Módulo de deformação elástico da fundação;
- n<sub>i</sub> ..... Relação entre os módulos para a seção transformada;
- p ..... Carga uniformemente distribuída;
- p<sub>x</sub> ..... Carregamento distribuído;
- q<sub>1</sub> ..... Fluxo de cisalhamento ao longo da viga entre as peças 1 e 2;
- q<sub>2</sub> ..... Fluxo de cisalhamento ao longo da viga entre as peças 2 e 3;
- s ..... Espaçamento entre conectores;

- $s_{ef}$  ..... Espaçamento efetivo entre pregos;  
 $s_{max}$  ..... Espaçamento máximo entre pregos;  
 $s_{min}$  ..... Espaçamento mínimo entre pregos;  
 $u$  ..... Deslocamento da ligação;  
 $u_{inst}$  ..... Deslocamento instantâneo;  
 $y$  ..... Coeficiente, flecha.



**Letras gregas:**

- $\alpha$  ..... Coeficiente de redução do momento de inércia;
- $\alpha_{EC5}$  ..... Coeficiente de redução de inércia calculado pelo EUROCODE 5;
- $\alpha_{exp}$  ..... Coeficiente de redução de inércia experimental;
- $\beta$  ..... Coeficiente de redução do módulo de resistência, relação entre a resistência ao embutimento das peças ligadas;
- $\delta$  ..... Deslocamento, flecha;
- $\Delta F$  ..... Variação da força;
- $\Delta \delta$  ..... Variação da flecha;
- $\Delta \epsilon$  ..... Variação da deformação específica;
- $\epsilon$  ..... Deformação específica;
- $\epsilon_c$  ..... Deformação específica de compressão;
- $\epsilon_t$  ..... Deformação específica de tração;
- $\gamma$  ..... Fator de redução, coeficiente de redução de inércia do conjunto;
- $\lambda$  ..... Parâmetro;
- $\rho_{ap(12\%)}$  .... Densidade aparente da madeira à 12% de umidade;
- $\rho_{ap, verde}$  .... Densidade aparente da madeira fora das condições padrão de umidade;
- $\rho_k$  ..... Densidade aparente característica da madeira;
- $\sigma_{mi}$  ..... Tensão normal na extremidade do elemento “i” devido ao momento;
- $\sigma$  ..... Tensão normal;
- $\sigma_i$  ..... Tensão normal no centróide do elemento “i” devido à força normal;
- $\tau_{max}$  ..... Tensão máxima de cisalhamento;
- $v$  ..... Fluxo de cisalhamento atuante na superfície de contato entre os elementos.

## RESUMO

GÓES, J. L. N. (2002). *Análise de vigas de madeira pregadas com seção composta I*. São Carlos, 2002. 123p. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

As vigas compostas pregadas possuem vasta aplicação como material estrutural, desde vigas para instalações residenciais e industriais até longarinas de pontes de pequenos vãos, apresentando como principais vantagens o baixo custo e a facilidade de execução, não exigindo mão-de-obra qualificada. Este trabalho tem como objetivo o estudo teórico e experimental de vigas de madeira com seção composta I formadas por peças de madeira serrada e solidarizadas por pregos. São apresentados os critérios das normas EUROCODE 5, DIN1052 e NBR 7190, bem como a teoria a respeito do assunto. É avaliado o procedimento de cálculo da NBR 7190, em comparação com o EUROCODE 5, sendo realizada verificação experimental dos critérios destas normas, por meio de ensaios de flexão em protótipos de vigas compostas em escala natural. Os resultados obtidos demonstram que o modelo do EUROCODE 5 é o mais indicado para estimar a rigidez efetiva, tensões normais e de cisalhamento como também a força nos conectores.

Palavras-chave: peças compostas; rigidez de ligações; vigas de madeira.

## ABSTRACT

GÓES, J. L. N. (2002). *Analysis of nailed timber built-up I beams*. São Carlos, 2002. 123p. Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

The built-up I beams are widely employed as structural elements, from residential and industrial facilities, to girders for bridges of small span. The fact that they do not demand skilled workmanship, the low cost and easiness of construction are their main advantages. This research aims at the theoretical and experimental analysis of built-up I beams, made of sawn elements nailed jointed. The EUROCODE 5, DIN 1052 and NBR 7190 criteria as well as the basic theory are presented. The design procedure adopted by NBR 7190 is compared to the EUROCODE 5 one. Experimental evaluation of these criteria is made subjecting built-up beam prototype to bending tests. The results should that the EUROCODE criteria is the most recommended for estimate the effective rigidity, normal and shear stresses as well as the load on a fastener.

Keywords: built-up system; fasteners rigidity; wooden beams.

## 1. INTRODUÇÃO

A madeira tem apresentado ao longo do tempo um importante papel na construção civil, por ser um material renovável e que combina, de maneira harmoniosa, soluções estruturais e arquitetônicas com conforto térmico e beleza.

Para que a madeira possa ser empregada com sucesso, é necessário o uso de técnicas adequadas, desde seu processo de produção até sua aplicação nas construções.

Nos países da América do Norte e Europa, juntamente com o desenvolvimento de novos materiais, foram conduzidas extensas pesquisas no uso da madeira ao longo dos anos. Atualmente estes países possuem um alto grau de desenvolvimento tecnológico nesta área, permitindo o melhor aproveitamento do material.

No Brasil, o setor de estruturas de madeira não proliferou como nesses países. Entretanto, nos últimos anos avanços significativos estão ocorrendo, resultado do crescente volume e boa qualidade dos trabalhos científicos realizados pelas universidades brasileiras. Nesses centros de pesquisas são desenvolvidas novas tecnologias que permitem a utilização racional da madeira, tanto nativa quanto de reflorestamento, tornando esse nobre material uma ótima solução para o emprego em estruturas, sejam elas de pequeno ou grande porte.

Como decorrência desse desenvolvimento, em 1997 entrou em vigência uma nova Norma de Projeto de Estruturas de Madeira NBR 7190/97, elaborada a partir do trabalho realizado por um grupo de pesquisa formado por docentes da Escola Politécnica e da Escola de Engenharia de São Carlos, ambas da Universidade de São Paulo.

Com relação à versão anterior de 1982, o texto vigente traz profundas alterações nos conceitos relativos ao projeto de estruturas de madeira. Uma das principais mudanças foi a especificação de novos critérios de segurança, passando do método determinista das tensões admissíveis para o método semi-probabilista dos estados limites, caminho já trilhado pelas normas brasileiras de estruturas de aço e concreto.

As alterações no texto da norma brasileira, somadas à disseminação de novas técnicas, possibilitaram melhora da confiabilidade das estruturas de madeira, podendo ser um fator de incremento de interesse por esse tipo de estrutura.

O emprego das peças compostas de madeira, formadas pela união de peças de menores dimensões, tem importância no setor de estruturas de madeira do país, principalmente por possibilitar a obtenção de maiores seções transversais a partir de peças com dimensões comerciais.

As peças compostas de madeira serrada possuem vasta aplicação como material estrutural, desde vigas para instalações residenciais e industriais até longarinas de pontes de grandes vãos.

Existem inúmeras formas de composição das peças. Podem ser citadas a Madeira Laminada Colada, as peças compostas com alma em compensado, além das peças compostas por madeira maciça ligadas por conectores metálicos. Neste caso, são mais comuns as peças múltiplas, ligadas por elementos interpostos, e as peças justapostas com seção T, I ou Caixão. O objeto de estudo deste trabalho são as peças compostas com seção I.

Os elementos de ligação mais utilizados para a solidarização das peças de madeira são os adesivos e os pinos metálicos. Apesar da indiscutível eficiência dos adesivos, existem maiores dificuldades na sua aplicação, o que torna os pinos metálicos os elementos de ligação mais utilizados no Brasil. Especialmente os pregos, devido à facilidade de aplicação e baixo custo.

As ligações por pinos metálicos permitem deslizamento entre as peças unidas. Esse deslizamento, que é função da rigidez da ligação, causa redução nas propriedades de resistência e rigidez da peça composta.

Fica caracterizada, assim, a importância da quantificação da rigidez das ligações para as peças compostas. Sabe-se que a rigidez é influenciada por vários fatores, dentre eles: o tipo, espaçamento e quantidade dos elementos de ligação, além das características físicas, de resistência e elasticidade da espécie da madeira utilizada.

O claro entendimento do comportamento das ligações é essencial para a implantação de métodos mais racionais de cálculos estruturais.

Em contradição ao exposto, a norma brasileira NBR 7190/97 apresenta uma metodologia simplificada de cálculo para o dimensionamento de peças com seção transversal composta, recomendando a redução da inércia da peça, por meio de coeficientes que consideram a não solidarização total das peças que compõem a seção transversal. Esses coeficientes são apresentados conforme o arranjo da seção transversal, não levando em conta a rigidez da ligação.

## **1.1. Objetivos**

O objetivo deste trabalho é fazer a verificação teórica e experimental do modelo de cálculo para as peças justapostas de seção I da norma NBR 7190/97. Também é analisado processo de dimensionamento analítico, como os utilizados pelas normas EUROCODE 5 (1993) e DIN 1052 (1988), permitindo um melhor conhecimento do comportamento e resistência de peças compostas, tornando as estruturas de madeira cada vez mais competitivas, divulgadas e aceitas pelos projetistas.

## 2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

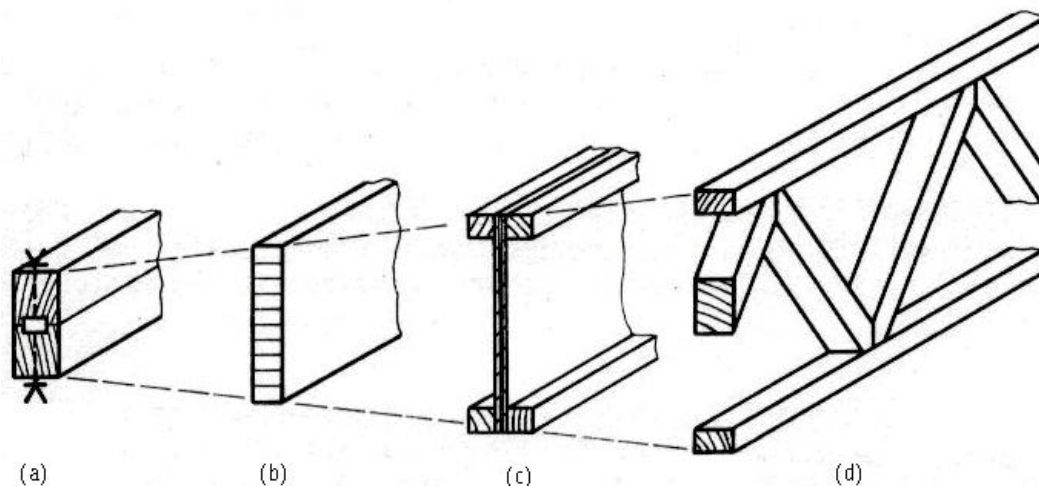
### 2.1. Vigas de madeira compostas

As vigas compostas são elementos estruturais sujeitos basicamente a solicitação de flexão, formados pela união de duas ou mais peças justapostas. As peças compostas apresentam várias características, que fazem com que sejam largamente empregados nos mais variados tipos de construções. Entre as mais importantes é possível citar:

- Possibilidade de alcance de grandes vãos com o emprego de peças com dimensões reduzidas.
- Maior aproveitamento da tora.
- Melhor adaptação às condições de variação climática, com menos problemas de secagem quando comparadas às peças maciças.
- Redução da possibilidade de presença de defeitos.
- Adequação para utilização em estruturas de cobertura e outros tipos de estruturas onde o menor peso e a mais fácil montagem do sistema sejam aspectos de interesse prioritário.

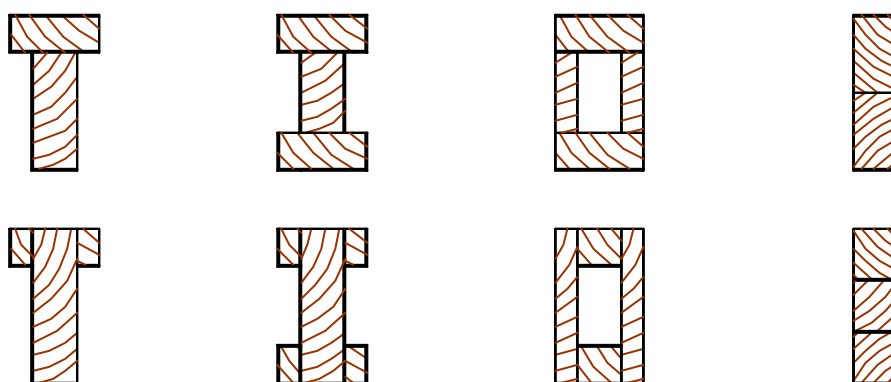
As seções transversais podem ser compostas por peças de madeira serrada ou de outros materiais, como os derivados de madeira (compensado, OSB – Oriented Strand Board, LVL – Laminated Veneer Lumber) ou até mesmo o concreto (utilização comum em tabuleiro de pontes). Da mesma forma, existem vários tipos de ligação que podem ser empregados para a união das peças. Pode-se dividi-las em dois grandes grupos: uniões mecânicas e uniões adesivas. As uniões adesivas são consideradas na bibliografia como “uniões rígidas”, ou seja, não proporcionam deslizamentos significantes entre as partes unidas. Já as uniões mecânicas são naturalmente deformáveis, e suas deformações devem ser computadas no cálculo estrutural.

Assim, ficam evidentes os inúmeros tipos de seções transversais que podem ser construídos. As vigas compostas podem ser classificadas pela forma da composição como indicado na figura 1.



**Figura 1** – Tipos de vigas compostas. (a) viga composta de madeira maciça; (b) viga laminada colada; (c) viga com alma esbelta; (d) viga em treliça. Fonte: GEHRI (1988)

O primeiro tipo de viga composta, apresentado na figura 1, é justamente o estudado neste trabalho. Essas vigas podem ter várias formas como por exemplo as seções T, I, Caixão, ou retangular solidarizadas continuamente, (vide figura 2). As três primeiras formas de seção transversal são usualmente unidas por pinos metálicos, em especial os pregos. Já as peças de seção retangular utilizam os mais variados tipos de conectores, dentre eles os mais utilizados são os anéis metálicos, os tarugos metálicos e os tarugos de madeira.



**Figura 2** – Exemplos de configuração de seções transversais compostas solidarizadas continuamente.

Essa forma de composição não possibilita emendas longitudinais, tornando seu comprimento restrito ao tamanho usual das peças de madeira. A facilidade e o baixo custo de produção,



---

fazem com que essas vigas compostas sejam extensamente utilizadas como vigas de uso doméstico, para 4 a 6 metros de vão, como também para longarinas de pequenas pontes até 12 metros de vão.

O segundo tipo (figura 1-(b)) é a chamada Madeira Laminada Colada (MLC). Esse tipo de composição possibilita o emprego de várias formas e dimensões, favorecendo sua utilização para os mais variados fins. Extensamente utilizadas em vários países do mundo, são pré-fabricadas, agregando ao produto final maior confiabilidade, em consequência do rigoroso controle de qualidade. No Brasil, existem estudos sobre este tipo de composição, mas pouco se encontra no mercado, devido principalmente ao alto custo dos adesivos.

As vigas compostas com alma esbelta (do tipo *c*) são ótimas soluções para coberturas em geral. Como características principais, esse tipo apresenta leveza e facilidade de construção. As mesas geralmente são fabricadas de madeira serrada, podendo ser de Madeira Laminada Colada, quando usadas em grandes dimensões. Já a alma é encontrada dos mais variados materiais, desde tábuas inclinadas até os materiais derivados de madeira, compensado e OSB. Nos EUA, é comum o uso dessas vigas como barroteamento para pisos de residências, são chamadas de "I-Joists". No Brasil, existe a previsão de fabricação de OSB a partir do começo do próximo ano, e o compensado é um material com grande potencial para o uso.\*

As vigas compostas em treliça (figura 1-(d)) são geralmente usadas em grandes vãos. Seus elementos podem ser fabricados de madeira serrada ou Madeira Laminada Colada e suas ligações podem ser adesivas ou mecânicas. O desenvolvimento dos conectores tipo chapa com dentes estampados (CDE) possibilitou maior agilidade na fabricação desse tipo de peça composta, impulsionando o seu emprego principalmente em coberturas.

Em todos os casos de peças compostas unidas por ligações mecânicas deformáveis, os deslizamentos devem ser considerados. Esses deslizamentos devem ser definidos para cada tipo de seção composta a fim de apresentar um critério de dimensionamento que reproduza a realidade, com simplicidade e precisão.

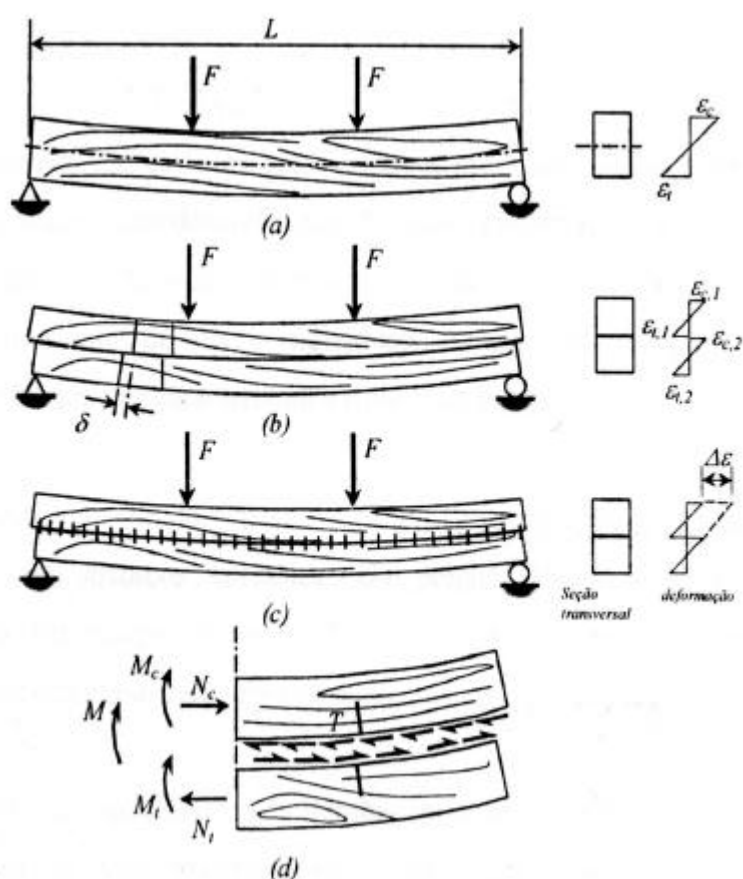
---

\* Comunicação pessoal: Andrés Armstrong Wurth – Diretor de Marketing Masisa do Brasil Ltda.

## 2.2. Métodos de Análise de Vigas Compostas

### 2.2.1. Conceitos Básicos

Segundo a hipótese de Navier, uma viga apresenta, numa seção transversal qualquer, distribuição contínua de deformações longitudinais ao longo de sua altura, figura 3-(a). Por outro lado, numa peça de elementos sobrepostos independentes, isto é, sem nenhum tipo de conector interligando-os, a distribuição das deformações é contínua somente ao longo da altura de cada elemento. Nas superfícies de separação são observadas descontinuidades decorrentes do comportamento individualizado. Verificam-se, nessas interfaces, alongamentos e encurtamentos das superfícies externas dos elementos adjacentes da viga, figura 3-(b).



**Figura 3** – Deformação de uma barra fletida. (a) seção maciça; (b) barras sobrepostas; (c) seção composta interligada por pinos metálicos; (d) esforços solicitantes. Fonte: ALVIM (2002)

Quando os elementos constituintes de uma viga composta estiverem interligados, os conectores restringem parte dos deslizamentos relativos que ocorrem entre as peças

---

independentes, produzindo uma interação entre eles. A distribuição das deformações nessa viga, ainda apresenta as descontinuidades nas interfaces; entretanto, são inferiores às verificadas na peça de elementos independentes, figura 3-(c).

Diante do exposto, fica evidenciada a principal característica das vigas compostas: o comportamento mecânico interposto ao das vigas maciças e ao das peças de elementos independentes.

O comportamento intermediário é influenciado diretamente pela rigidez dos elementos de ligação utilizados para a sua solidarização. Considerando o emprego de uma ligação “perfeitamente rígida”, não surgem deslocamentos relativos entre os pontos da borda que delimitam a zona de contato entre as peças.

Na teoria, tais peças podem ser consideradas como de seção homogênea, supondo uma seção transversal equivalente à soma de todas as outras seções transversais individuais, aplicando-se a teoria clássica da flexão para vigas. Contudo, os dispositivos de união usados nos casos correntes de projeto são deformáveis. Com isto, tem-se uma “ligação elástica” onde, após a deformação da peça por flexão, ocorrem escorregamentos das porções interligadas, ocasionados pela deformabilidade dos conectores.

O aparecimento de tais deslocamentos relativos produzem uma distribuição de esforços internos que difere consideravelmente daqueles correspondentes às ligações rígidas. Portanto, o momento de inércia e o módulo de resistência das peças compostas, unidas por conectores deformáveis, passam a ser uma fração daqueles das peças consideradas maciças. A magnitude dessa fração dependerá de parâmetros geométricos da viga, bem como de uma série de fatores que caracterizam a rigidez da ligação.

O efeito da composição dessas peças é garantido pela transmissão dos esforços cortantes por meio da ligação. Os conectores devem suportar as tensões de cisalhamento distribuídas na região de contato entre as peças, figura 3-(d). Desse modo, é estabelecido um certo grau de monolitismo entre as peças justapostas.

Então, fica evidente a necessidade de utilização de critérios especiais para o correto dimensionamento dos elementos estruturais formados de peças compostas.

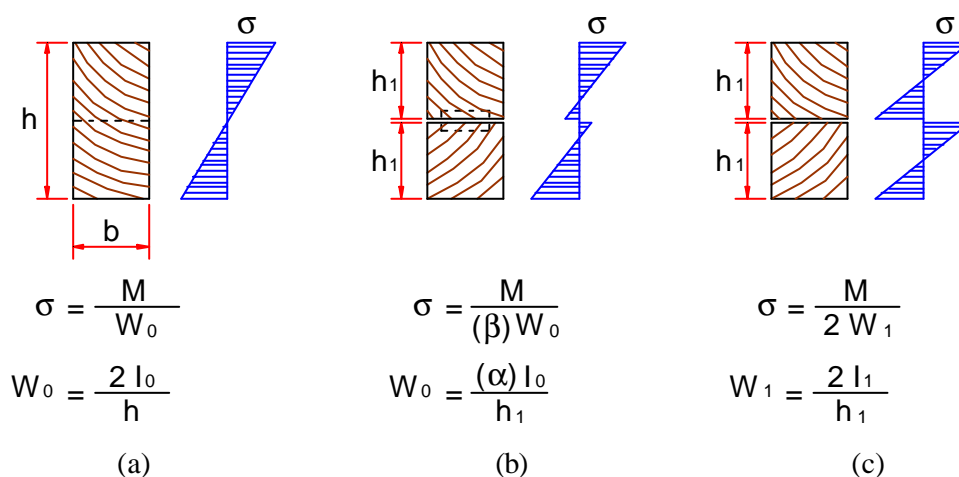
Atualmente são utilizados basicamente dois métodos distintos, adotados pelos principais documentos normativos do mundo, para o dimensionamento de peças compostas: o método dos coeficientes de minoração e o método analítico.

O primeiro é adotado por alguns documentos normativos, como por exemplo, a norma suíça SIA 164 (1981) e a recente norma brasileira NBR 7190 (1997). Esse método consiste no emprego de coeficientes de minoração os quais são aplicados ao módulo de resistência e ao momento de inércia da área transversal total da viga composta. Os coeficientes de minoração, também chamados de coeficientes de eficiência, podem ser determinados em função dos resultados de experimentação de pares de vigas semelhantes, uma composta e outra maciça.

A outra forma de se projetar vigas compostas é sobre a ótica do desenvolvimento analítico do problema, em que as deformações dos conectores são consideradas com algumas hipóteses simplificadoras. As normas EUROCODE 5 (1993) e DIN 1052 (1988) apresentam critérios de dimensionamento fundamentados neste método. A seguir são apresentados os dois métodos e os principais trabalhos de autores nacionais e internacionais sobre o tema, desenvolvidos no decorrer de todo o século XX.

### 2.2.2. Método dos Coeficientes de Minoração

Esse método consiste na aplicação de coeficientes redutores sobre as propriedades geométricas das peças compostas. Os coeficientes de minoração ou de eficiência têm a função de estabelecer a correspondência entre peças compostas e maciças. Para isso, são necessários dados experimentais adequados para estabelecer essa correspondência.



**Figura 4** – Comportamento interposto das peças compostas. (a) seção maciça equivalente; (b) seção composta interligada por união deformável; (c) seção com dois elementos sobrepostos. Fonte: GEHRI (1988)

A figura 4 ilustra o comportamento interposto das peças compostas e o uso dos coeficientes de minoração.

Esse processo ganhou aceitação no meio técnico após a publicação do trabalho de KIDWELL (1897). O autor estudou alguns tipos de vigas compostas utilizadas no final do século XIX, realizando vários ensaios de flexão com carregamento concentrado no centro do vão.

O coeficiente de redução do módulo de resistência ( $\beta$ ) foi estimado pela relação entre os valores das cargas de ruptura da viga composta e da viga maciça, adicionados os respectivos pesos próprios de cada viga (vide eq. 1).

$$\beta = \frac{P_c + g_c}{P_s + g_s} \quad (1)$$

Onde:

$P_c$  = carga de ruptura da viga composta;

$P_s$  = carga de ruptura da viga maciça;

$g_c$  = peso próprio da viga composta;

$g_s$  = peso próprio da viga maciça.

O coeficiente de redução do momento de inércia ( $\alpha$ ) foi estimado pelo quociente das flechas centrais, verificadas na viga maciça e na viga composta, quando estas são solicitadas por um mesmo carregamento (vide equação 2).

$$\alpha = \frac{f_s}{f_c} \quad (2)$$

Onde:

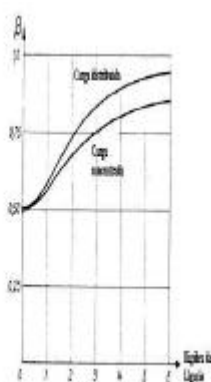
$f_s$  = flecha verificada na seção central da peça maciça;

$f_c$  = flecha verificada na seção central da peça composta.

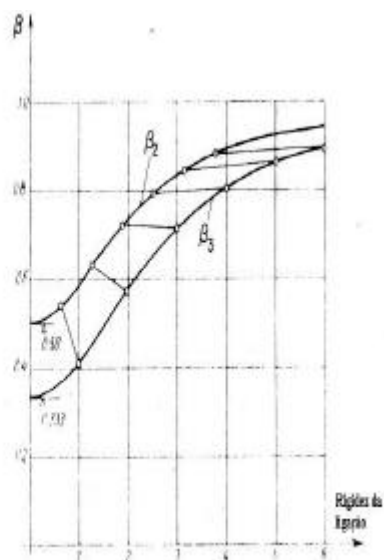
Na determinação dos valores dos coeficientes, a influência do espaçamento dos conectores, suas dimensões, a relação vão/altura da viga composta foram consideradas de maneira global através de média aritmética dos resultados obtidos nos diversos ensaios realizados. KIDWELL destaca que os valores de eficiência revelam-se como sendo um parâmetro altamente variável, principalmente quando não é feita nenhuma particularização envolvendo qualquer um dos parâmetros relacionados acima. Apesar da grande variabilidade, foram

lançadas as bases para os documentos normativos vigentes na época, adotando o método dos coeficientes, considerando os propostos por KIDWELL.

A partir da década de quarenta, começaram a surgir novos trabalhos avaliando alguns fatores que influenciam nos valores dos coeficientes. STÜSSI (1943), *apud* GEHRI (1988), estudou a influência do tipo de carregamento e, em 1947, segundo GEHRI (1988), a influência do número de elementos das vigas compostas (vide figuras 5 e 6). Em seguida MÖHLER (1956), *apud* GEHRI (1988), sugeriu um processo aproximado, considerando também a influência do comprimento do vão (vide figura 7).

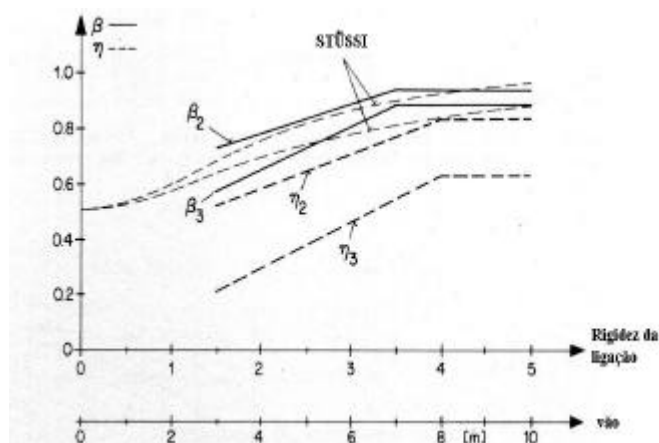


**Figura 5** – Influência do tipo de carregamento no coeficiente **b**. Fonte: GEHRI (1988)



**Figura 6** – Eficiência **b** em função da rigidez da ligação para vigas compostas com 2 e 3 elementos. Fonte: STÜSSI (1947)

Outros autores como PEARSON et al. (1967), *apud* RODRIGUES (1984), apresentam alguns coeficientes de minoração, aplicáveis à forma de vigas compostas mais modernas.



**Figura 7** – Valores dos coeficientes de redução em função do vão. Fonte: GEHRI (1988)

Como dito anteriormente, esse método ainda é adotado por alguns documentos normativos, como a norma suíça SIA 164/81 (atualmente em estágio de revisão) e a norma brasileira NBR 7190/97. A tabela 1 apresenta os valores propostos pelos dois documentos normativos.

**Tabela 1:** Valores dos coeficientes de eficiência da Norma Brasileira e Suíça.

Normas	Viga de seção T		Viga de seção I		Viga de seção retangular			
					Duas peças		Três peças	
	a	b	a	b	a	b	a	b
<b>NBR 7190/97</b> <sup>†</sup>	0,95	-	0,85	-	0,85	-	0,70	-
<b>SIA 164/81</b> <sup>‡</sup>	-	-	-	-	0,65	0,85	0,33	0,60

As verificações das tensões normais e dos deslocamentos máximos são feitas considerando a redução do módulo de resistência e do momento de inércia. Já a verificação das tensões cisalhantes, bem como da força atuante nos conectores, é feita como se a viga fosse de seção maciça.

Apesar de proporcionar agilidade no cálculo, tal método apresenta grande variabilidade e por este motivo alguns documentos normativos que anteriormente adotavam-no, após revisão optaram pelo método analítico.

<sup>†</sup> A norma brasileira não faz referência ao coeficiente de redução do módulo de resistência ( $\beta$ ), mas pode ser considerado com o mesmo valor do coeficiente ( $\alpha$ ).

<sup>‡</sup> A norma suíça apresenta coeficientes distintos para elementos compostos de duas ou três peças, mas não faz distinção entre a forma da seção transversal, seja ela T, I ou retangular.

### 2.2.3. Método Analítico de Cálculo

Foi NEWMARK, em 1943, o primeiro autor a apresentar uma formulação analítica e geral para as vigas compostas, envolvendo o grau de interação dos elementos proporcionado pelos conectores empregados na composição. No trabalho publicado por NEWMARK *et al.* (1951), além do método experimental mais conveniente para a caracterização dos conectores, são apresentadas observações experimentais em vigas compostas de aço e concreto, comprovando o tratamento analítico de sua autoria. A teoria de sua análise é baseada nas equações de equilíbrio e na compatibilidade de deslocamentos, fundamentada nas hipóteses da Resistência dos Materiais. Cabe ainda ressaltar o fato dos estudos posteriores, desenvolvidos por outros autores, seguirem os princípios estabelecidos por NEWMARK.

Na mesma época, GRANHOLM (1949), *apud* GOODMAM (1968), relatou na Suíça, suas investigações sobre vigas e colunas compostas de madeira, baseadas nos princípios de NEWMARK.

Em seguida, PLESKOV (1952), *apud* SMITH (1980), publicou na União Soviética um estudo teórico-experimental sobre o comportamento de pilares de madeira construídos de elementos interligados deformáveis. O autor deduziu as equações diferenciais de comportamento e apresentou as soluções em séries trigonométricas.

MÖHLER (1956) desenvolveu o método de análise baseado nas equações de equilíbrio, e seu trabalho serviu de base para a norma alemã DIN 1052, no que se refere ao cálculo de vigas compostas.

As vigas compostas de três elementos foram estudadas por GOODMAN & POPOV (1968), tendo sido desenvolvido um equacionamento fundamentado nas hipóteses de NEWMARK. Novas contribuições ao estudo das vigas compostas foram apresentadas com análise teórica e experimentação da influência no comportamento dessas peças produzidas, quando a interligação das extremidades dos elementos das vigas é feita ou utilizando-se uniões rígidas (adesivo), ou utilizando-se uniões deformáveis.

KUENZI & WILKINSON (1971) aplicaram a teoria de vigas sandwich, desenvolvida por NORRIS *et al.* (1952) para a análise de vigas simplesmente apoiadas com duas cargas concentradas simetricamente no meio do vão. Em seguida, os autores estenderam a teoria para vigas simplesmente apoiadas com carregamento uniformemente distribuído.



Uma aplicação do método dos elementos finitos no estudo das vigas compostas, usadas em pisos residenciais, foi desenvolvida por THOMPSON *et al.* (1975). O funcional de energia potencial considera: força normal e momento fletor nos elementos, tensões cisalhantes nos conectores e as ações exteriores. Os deslocamentos verticais e horizontais da viga foram aproximados por funções cúbicas e por funções lineares, respectivamente, as quais são expressas por variável única, a do posicionamento dos pontos nodais dos elementos finitos. As variações de forma geométrica e de propriedades mecânicas dos componentes da viga composta e os diferentes valores do módulo de deslizamento das conexões, podem ser considerados no cálculo das flechas e dos deslocamentos horizontais.

O grau de precisão dos deslocamentos, os quais foram calculados num programa de computador especialmente desenvolvido, foi avaliado pela comparação dos resultados calculados com os verificados em experimentação de dezesseis vigas. Tendo em vista a diferença observada, os autores concluíram pela validade do método de análise, viabilizando, então, o estudo de problemas mais complexos por simulação em computador evitando, com isso, alguns trabalhos experimentais dispendiosos.

ITANI & BRITO (1978) estudaram as vigas compostas unidas com adesivos flexíveis, comprovando experimentalmente a validade dos modelos desenvolvidos pelos autores citados anteriormente, para este tipo de composição.

SMITH (1980) apresentou um estudo geral das peças compostas de dois e três elementos, biapoiadas e submetidas a oito formas de carregamento. O autor empregou as Séries de Fourier para a solução das equações diferenciais e seus resultados teóricos foram comparados com os experimentais obtidos por KUENZI. A respeito da utilização das séries trigonométricas, não foi possível fixar o número de termos da série necessário para se obter a solução mais próxima da exata, pois é função da forma de carregamento.

Nos trabalhos anteriores, a análise de vigas compostas utiliza o conceito de módulo de deslizamento constante. Com esse conceito, as equações diferenciais podem ser obtidas e resolvidas. Todavia, KAMIYA (1985) afirma que, como os deslocamentos verticais das vigas calculados por estas teorias são proporcionais ao carregamento externo aplicado, a teoria só é válida, quando o deslizamento nos conectores é muito pequeno.

O comportamento não-linear das ligações por pregos pode ser admitido com a adoção do módulo de deslizamento variável, em função do nível de carregamento da ligação. GOODMAN (1969), *apud* KAMIYA (1985), considera esta não-linearidade variando o valor

do coeficiente de deslizamento a cada novo incremento de carga, tomando por base a força máxima atuante no conector do extremo da viga.

Outro efeito físico muito importante destacado por KAMIYA (1987) é que a força atuante nas ligações não varia somente com o nível de carregamento externo, mas também ao longo do comprimento da viga. Então, em uma análise mais rigorosa, o módulo de deslizamento do conector deve variar não somente com a força atuante sobre o mesmo, mas também de acordo com seu posicionamento ao longo da viga.

BESSETTE & HOYLE (1985) apresentam um estudo experimental de vigas compostas unidas por adesivo flexível, fazendo comparação com programas computacionais e o método proposto por KUENZI, obtendo bons resultados.

Vigas compostas de seção T e I com alma em madeira maciça e mesas em derivados de madeira, como o Compensado e OSB (analogia ao sistema de piso muito utilizado nos EUA) são investigadas por MCCUTCHEON (1986). O autor apresenta uma metodologia simplificada para o cálculo desse tipo de composição, baseada na teoria de KUENZI e adotando o método da seção transformada.

BOHNHOFF (1992) apresenta uma nova análise não-linear pelo método dos elementos finitos, para as peças compostas com várias lâminas. O autor utiliza um novo modelo de abordagem para o efeito do deslizamento da ligação por pregos. Realiza vários ensaios em vigas compostas de peças maciças, com espaçamento entre pregos constante ou variável, obtendo resultados próximos dos calculados pelo seu programa.

GIRHAMMAR & GOPU (1993) apresentaram a análise teórica exata de primeira e segunda ordem para vigas e colunas compostas com interação parcial. O método foi aplicado em exemplos numéricos para o caso de vigas simplesmente apoiadas de seção T com mesa em concreto. Foram desenvolvidas expressões explícitas para os deslocamentos e para as ações internas dessas vigas. Os resultados ilustram claramente a magnitude das ações e deformações devido ao efeito de segunda ordem.

WHEAT e CALIXTO (1994) fazem outra abordagem para a análise de vigas compostas, baseada nos princípios da energia, com a utilização do cálculo variacional, incluindo a relação não-linear para a ligação.

KREUZINGER (1995) apresenta uma solução analítica para vigas e colunas compostas com uniões deformáveis, baseado no emprego das equações diferenciais, desenvolvidas por

MÖHLER. O autor afirma que, embora a derivação seja baseada em uma distribuição senoidal de carregamento, a solução é aplicável para as mais variadas distribuições de carregamento. No desenvolvimento não são considerados o módulo de fundação elástica da madeira e a teoria de segunda ordem.

No Brasil, foram realizadas algumas pesquisas sobre o efeito da composição não rígida de peças compostas e a seguir estão relatados alguns dos principais trabalhos.

RODRIGUES (1984) desenvolveu um estudo de vigas compostas de quatro elementos de madeira roliça, interligadas por anéis metálicos.

ALMEIDA (1990) apresentou extenso trabalho sobre peças de madeira composta com especial atenção para vigas com alma treliçada. Como resultado de seu trabalho, foi construída, em 1990, uma ponte de 28 metros de vão sobre o rio Piracicaba, no Estado de São Paulo, com longarinas e transversinas compostas com alma treliçada.

SANTANA (1997) apresentou pesquisa teórica e experimental a respeito das vigas de seção I e Caixão com alma em compensado. Em seu trabalho, foi feito um estudo teórico, investigando o comportamento da viga composta, tendo sido incluídos os efeitos que influenciam em sua rigidez, particularmente a deformação das ligações. A partir da revisão de códigos normativos e outras pesquisas sobre o assunto, SANTANA (1997) observou que o efeito da composição parcial da seção é amplamente considerada, justificando a sua inclusão na análise da viga.

A partir da análise teórica, SANTANA (1997) observou que a influência da composição parcial pode chegar até a 20% em relação aos deslocamentos da viga, sendo que os parâmetros influentes, além da rigidez da ligação, são a área da mesa, o seu distanciamento do eixo da seção e o comprimento do vão.

Outra importante conclusão de seu trabalho é a afirmação de que, apesar de os deslocamentos destas vigas serem altamente influenciados pela composição parcial, a influência nas tensões é praticamente desprezível.

FERREIRA (1999), em sua tese sobre pontes pré-fabricadas de madeira, realizou um estudo do comportamento de peças com seção transversal composta tipo I simétrica de madeira maciça, para aplicação em pontes de pequenos vãos. A autora comparou os métodos utilizados pela norma brasileira e pelo EUROCODE 5 com os seu resultados experimentais, por meio do coeficiente de rendimento  $\alpha$  (razão entre o momento de inércia efetivo e o

---

momento de inércia da seção maciça). Verificou que o valor indicado na norma brasileira ( $\alpha_r = 0,85$ , para seção I) é muito superior àqueles determinados experimentalmente e pelo EUROCODE 5, e que o método do EUROCODE 5 conduziu a valores próximos dos valores de  $\alpha$  determinados experimentalmente.

TACITANO (1999) desenvolveu uma análise teórica e experimental sobre vigas de seção T em madeira-concreto com ligação semi-rígida, as quais têm sido utilizadas com sucesso em estruturas de ponte. TACITANO & DEMARZO (2000) realizaram uma análise comparativa entre o método exato e o método aproximado, concluindo que o método aproximado é ideal para o uso em engenharia, pois os procedimentos de cálculo são mais simples e resultam em boa precisão.

ALVIM (2002) propôs um modelo de rigidez efetiva, baseado na teoria de PLESHKOV para o estudo de pilares de madeira composta. Em sua investigação experimental física, realizada com o método de carregamento incremental, obtém resultados satisfatórios, quando comparados com o modelo teórico proposto.

SORIANO & MASCIA (2000) desenvolveram trabalho sobre vigas mistas de concreto-madeira com seção T. Foi apresentada uma análise experimental de vigas T em concreto-madeira, submetidas à carga concentrada, verificando a eficiência do sistema de ligação por pregos. Os autores concluíram que o sistema de conexão por pregos apresenta eficiência de pouca relevância. A utilização de um sistema de conexão de baixa eficiência acarreta, para baixos níveis de carregamento, o surgimento de duas linhas neutras sobre a seção do elemento estrutural. Com isso, as fibras inferiores da mesa em concreto passam a grandes solicitações de tração, exigindo, assim, altas taxas de armadura. Para estruturas submetidas a elevados carregamentos, deve-se buscar outros elementos metálicos que possibilitem maior eficiência da ligação.

STAMATO (2000) apresentou um estudo teórico de códigos normativos referentes ao dimensionamento de peças compostas por chapas de madeira compensada. O efeito da composição parcial e a grande deformação por cisalhamento influenciaram no dimensionamento desses elementos.

SANTANA & MASCIA (2000) apresentaram uma abordagem numérica de vigas compostas de madeira com alma em chapa de compensado, fornecendo meios para a solução desse tipo de viga composta, incluindo a consideração do comportamento não linear para as ligações.

Foi apresentada uma abordagem teórica baseada na minimização da energia potencial total e o método de solução numérica por meio do método das diferenças finitas.

A seguir são apresentados os desenvolvimentos teóricos do modelo analítico, baseado nas equações de equilíbrio, com a finalidade de proporcionar maior compreensão sobre essa teoria.

### **2.3. Modelo Teórico Baseado nas Equações de Equilíbrio**

Todo o desenvolvimento dessa teoria é baseado em hipóteses, nas quais a linearidade entre causa e efeito é sempre observada. Admite-se a validade das seguintes hipóteses:

- As ligações entre os elementos são contínuas, distribuídas uniformemente e apresentam as mesmas propriedades mecânicas em todo o comprimento da viga.
- O deslocamento relativo da região correspondente à superfície de contato dos elementos é diretamente proporcional ao esforço atuante na conexão.
- Os deslocamentos verticais dos elementos da viga composta, tomadas em qualquer posição ao longo do comprimento, são sempre as mesmas para todos os elementos.
- A distribuição das deformações ao longo da altura dos elementos da viga composta é linear.
- Os elementos constituintes da viga composta seguem a lei de Hooke.
- Os deslocamentos verticais.
- São desprezadas as deformações produzidas pelo esforço cortante, no cálculo dos deslocamentos das seções transversais.

A adoção da primeira hipótese significa o estudo de um caso particular de vigas compostas. O fato de se considerar a superfície fictícia de interligação com propriedades mecânicas invariantes, implica em se ter os conectores aplicados em arranjos regulares por todo o plano de separação dos elementos.

Com a segunda hipótese fica assumido um comportamento linear para o conector isolado. Tal fato, entretanto, por vezes não é confirmado experimentalmente em ensaios dos

conectores isolados, porém a determinação da característica de rigidez com base na inclinação de reta secante à curva experimental do conector isolado, e o seu posterior emprego nas expressões teóricas, conduzem a resultados coerentes com os de experimentação de vigas.

A integridade da viga composta é admitida na terceira hipótese. As demais se enquadram no grupo de hipóteses da modelagem de Bernoulli-Navier para a flexão de vigas ordinárias.

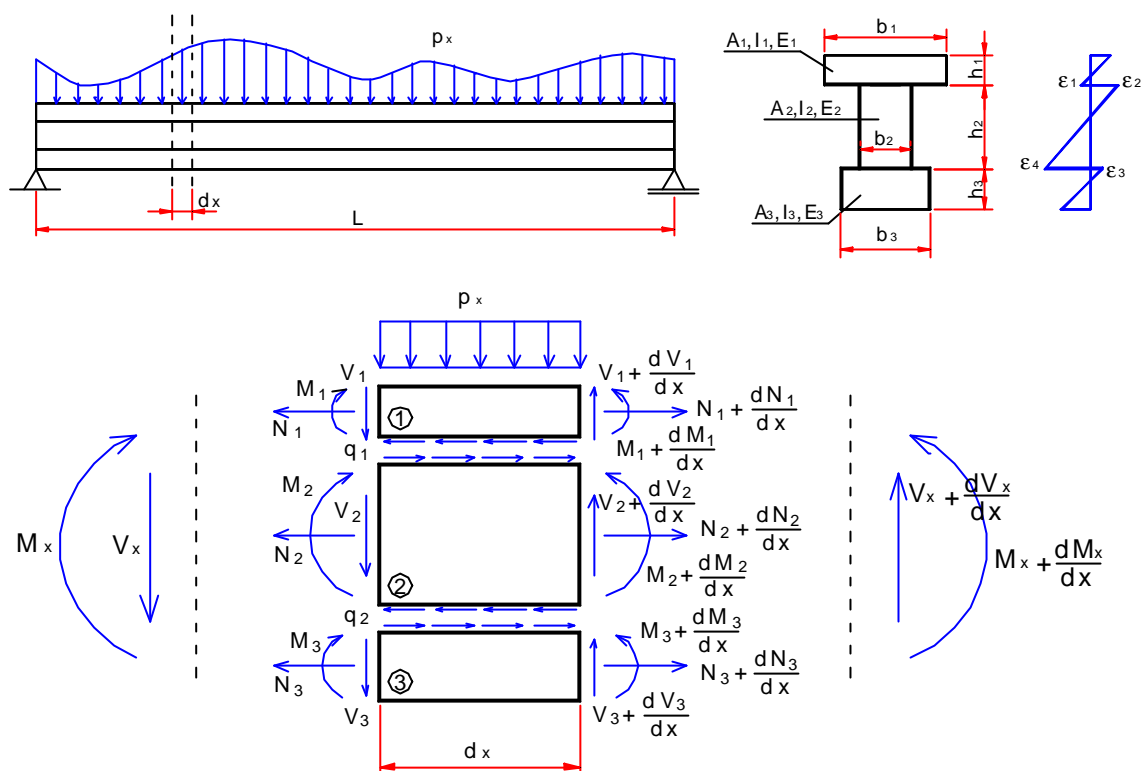
Sendo assim, inicia-se a apresentação do método com a subdivisão do modelo exato e do modelo aproximado. Para a análise do modelo exato optou-se por utilizar uma configuração de seção genérica com três elementos de propriedades e dimensões quaisquer, apresentada por CHUI & BARCLAY (1998). Já para o modelo aproximado é considerada uma seção tipo T apresentada por KREUZINGER (1995). O autor afirma que este desenvolvimento é o mesmo considerado pelo EUROCODE 5.

### **2.3.1. Modelo Exato (CHUI & BARCLAY - 1998)**

O princípio do estudo de vigas compostas, segundo este método, consiste na análise da viga como sendo formada por elementos em equilíbrio, solidarizados por uma equação de compatibilidade de deslocamentos. A figura 8 ilustra o típico sistema considerado com seção transversal genérica de três elementos.

Tomando uma viga biapoiada composta solicitada por um carregamento transversal qualquer, surgem os esforços internos  $M(x)$  e  $V(x)$ . Estes esforços internos podem ser decompostos para cada elemento componente da seção transversal, atuando sobre eles forças normais e cisalhantes, além dos momentos. Esses esforços são equilibrados pelo fluxo de cisalhamento atuante na interface entre as mesas e a alma. O equilíbrio de um elemento diferencial de comprimento  $dx$  é ilustrado na figura 8.

A partir da distribuição de esforços descrita, é apresentada a configuração do diagrama de deformações normais, devido aos momentos e as forças normais. As deformações devido aos esforços cisalhantes não são consideradas.



**Figura 8** –Viga composta de três elementos com seção transversal genérica, distribuição de deformações e esforços internos para um elemento diferencial.

Se o fluxo de cisalhamento ao longo do comprimento da viga entre as camadas 1 e 2 é \$q\_1\$ e entre as camadas 2 e 3 é \$q\_2\$, fazendo o equilíbrio para o elemento 1,

$$\frac{dN_1}{dx} = -q_1 \quad (3)$$

para o elemento 2,

$$\frac{dN_2}{dx} = q_1 - q_2 \quad (4)$$

para o elemento 3,

$$\frac{dN_3}{dx} = q_2 \quad (5)$$

A deformação em cada camada é causada por uma combinação de momento fletor e força axial:

$$\epsilon_1 = \frac{M_1}{E_1 I_1} \frac{h_1}{2} + \frac{N_1}{E_1 A_1} \quad (6)$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{M_2}{E_2 I_2} \frac{h_2}{2} + \frac{N_2}{E_2 A_2} \quad (7)$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{M_3}{E_3 I_3} \frac{h_3}{2} + \frac{N_3}{E_3 A_3} \quad (8)$$

$$\varepsilon_4 = \frac{M_2}{E_2 I_2} \frac{h_2}{2} + \frac{N_2}{E_2 A_2} \quad (9)$$

A deformação devido ao deslizamento entre os elementos 1 e 2 é

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \quad (10)$$

e a deformação correspondente entre os elementos 2 e 3 é

$$\varepsilon_{23} = \varepsilon_3 - \varepsilon_4 \quad (11)$$

A deformação devido ao deslizamento pode ser rescrita em função do módulo de deslizamento da ligação ( $K_1$  e  $K_2$ ) e do fluxo de cisalhamento entre as camadas ( $q_1$  e  $q_2$ ), como mostrado em (12) e (13).

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{K_1} \frac{dq_1}{dx} \quad (12)$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{K_2} \frac{dq_2}{dx} \quad (13)$$

Substituindo as equações (3), (6), (7) e (10) em (12) obtém-se a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$\frac{d^2 N_1}{dx^2} = K_1 \left( \frac{M_1}{E_1 I_1} \frac{d_1}{2} + \frac{M_2}{E_2 I_2} \frac{h_2}{2} + \frac{N_1}{E_1 A_1} - \frac{N_2}{E_2 A_2} \right) \quad (14)$$

Combinando as equações (4) e de (6) a (13), outra equação diferencial de segunda ordem é obtida:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_2}{dx^2} = K_1 \left( -\frac{M_1}{E_1 I_1} \frac{h_1}{2} - \frac{M_2}{E_2 I_2} \frac{h_2}{2} - \frac{N_1}{E_1 A_1} + \frac{N_2}{E_2 A_2} \right) \\ + K_2 \left( \frac{M_2}{E_2 I_2} \frac{h_2}{2} + \frac{M_3}{E_3 I_3} \frac{h_3}{2} + \frac{N_2}{E_2 A_2} - \frac{N_3}{E_3 A_3} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

A terceira equação diferencial de segunda ordem é obtida considerando (5), (8), (9), e (11):

$$\frac{d^2 N_3}{dx^2} = K_2 \left( -\frac{M_2}{E_2 I_2} \frac{h_2}{2} - \frac{M_3}{E_3 I_3} \frac{h_3}{2} - \frac{N_2}{E_2 A_2} + \frac{N_3}{E_3 A_3} \right) \quad (16)$$



Pode ser demonstrado que as seguintes equações de equilíbrio também se aplicam a seção transversal sujeita ao momento interno  $M$ :

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 + N_3 &= 0 \\ M &= M_1 + M_2 + M_3 + N_2 z_1 + N_3 z_2 \end{aligned} \quad (17)$$

onde  $z_1 = (h_1 + h_2)/2$  e  $z_2 = h_1/2 + h_2 + h_3/2$ .

Admitindo que os três elementos tenham a mesma curvatura, então

$$-\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M_1}{E_1 I_1} = \frac{M_2}{E_2 I_2} = \frac{M_3}{E_3 I_3} \quad (18)$$

Substituindo as equações (17) em (18):

$$\frac{M - N_2 z_1 - N_3 z_2}{\Sigma EI} = \frac{M_1}{E_1 I_1} = \frac{M_2}{E_2 I_2} = \frac{M_3}{E_3 I_3} \quad (19)$$

onde  $\Sigma EI = E_1 I_1 + E_2 I_2 + E_3 I_3$ .

Substituindo (19) em (14), (15) e (16), obtém-se o seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 N_1}{dx^2} &= a_{11} N_1 + a_{12} N_2 + a_{13} N_3 + a_{14} M \\ \frac{d^2 N_2}{dx^2} &= a_{21} N_1 + a_{22} N_2 + a_{23} N_3 + a_{24} M \\ \frac{d^2 N_3}{dx^2} &= a_{31} N_1 + a_{32} N_2 + a_{33} N_3 + a_{34} M \end{aligned} \quad (20)$$

onde:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{K_1}{E_1} A_1 & a_{12} &= -K_1 \left( \frac{z_1^2}{\Sigma EI} + \frac{1}{E_2 A_2} \right) \\ a_{13} &= -\frac{K_1 z_1 z_2}{\Sigma EI} & a_{14} &= \frac{K_1 z_1}{\Sigma EI} \\ a_{21} &= -\frac{K_1}{E_1 A_1} & a_{22} &= \frac{K_1 z_1^2 - K_2 z_1 z_2}{\Sigma EI} + \frac{K_1 + K_2}{E_2 A_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{23} &= \frac{K_1 z_1 z_2 - K_2 z_2 z_4}{\Sigma EI} - \frac{K_2}{E_3 A_3} & a_{24} &= \frac{-K_1 z_1 + K_2 z_4}{\Sigma EI} \\
a_{31} &= 0 & a_{32} &= K_2 \left( \frac{z_1 z_4}{\Sigma EI} - \frac{1}{E_2 A_2} \right) \\
a_{33} &= K_2 \left( \frac{z_2 z_4}{\Sigma EI} + \frac{1}{E_3 A_3} \right) & a_{34} &= -\frac{z_2 z_4}{\Sigma EI} \\
z_4 &= \frac{h_2 + h_3}{2}
\end{aligned}$$

Para a determinação das funções de forças axiais  $N_1$ ,  $N_2$ , e  $N_3$ , devem ser aplicadas as condições de contorno para do problema. A solução desse sistema de equações diferenciais de segunda ordem (20), recai em um problema de autovalores. No Anexo A encontra-se a resolução do problema de uma viga simplesmente apoiada sob duas formas de carregamento comuns: carga uniformemente distribuída e carga concentrada.

Uma vez conhecidas, as forças axiais são substituídas na (18) para calcular o deslocamento da viga. Nos cálculos de projeto de engenharia, o deslocamento no centro do vão é usualmente requerido. Então, para facilitar o uso deste método pelos projetistas, uma solução explícita para o deslocamento do centro do vão é apresentada em (21) e (22).

- Carga uniformemente distribuída:

$$\begin{aligned}
y_{L/2} = \frac{p}{\text{OEI}} & \left[ \frac{5L^4}{384} (1 + y_1 + y_2) - \frac{L^2}{8} \left( \frac{y_1}{\ddot{e}_1} + \frac{y_2}{\ddot{e}_2} \right) + \frac{y_1}{\ddot{e}_1^2} + \frac{y_2}{\ddot{e}_2^2} \right. \\
& \left. - \left( \frac{y_1}{I_1^2} \operatorname{sech} \frac{\sqrt{I_1} \cdot L}{2} + \frac{y_2}{I_2^2} \operatorname{sech} \frac{\sqrt{I_2} \cdot L}{2} \right) \right] \quad (21)
\end{aligned}$$

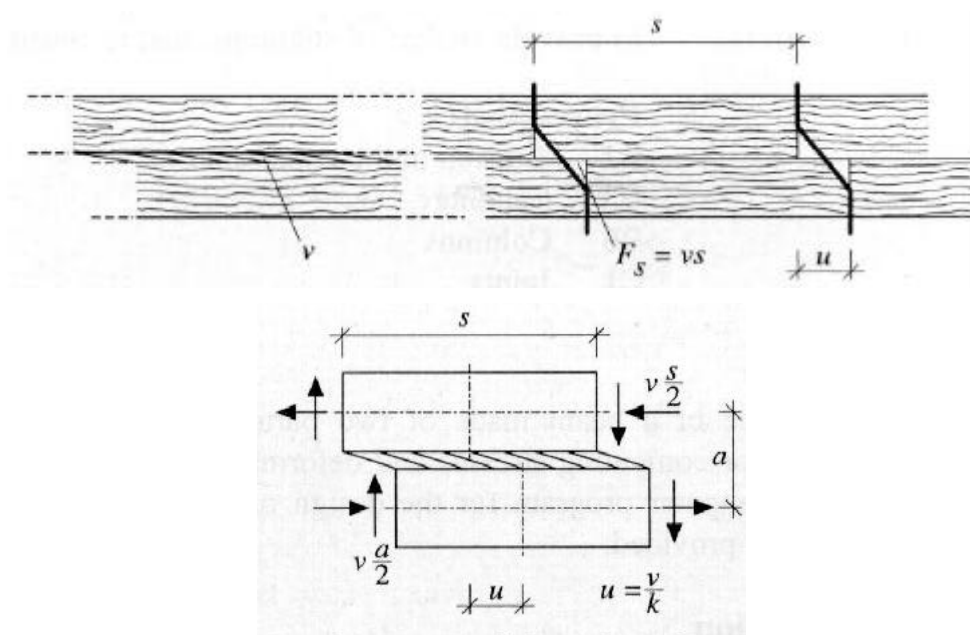
- Carga concentrada:

$$\begin{aligned}
y_{L/2} = \frac{P}{\text{OEI}} & \left[ \frac{L^3}{48} (1 + y_1 + y_2) - \frac{L}{4} \left( \frac{y_1}{\ddot{e}_1} + \frac{y_2}{\ddot{e}_2} \right) \right. \\
& \left. + \frac{y_1}{2\ddot{e}_1^{1.5}} \tanh \frac{\sqrt{\ddot{e}_1} \cdot L}{2} + \frac{y_2}{2\ddot{e}_2^{1.5}} \tanh \frac{\sqrt{\ddot{e}_2} \cdot L}{2} \right] \quad (22)
\end{aligned}$$

Os símbolos exibidos nas equações (21) e (22) são definidos no Anexo A. Expressões para outras formas de carregamento podem ser obtidas de maneira similar.

### 2.3.2. Modelo Aproximado (KREUZINGER – 1995)

Inicia-se a apresentação do modelo com referência à rigidez da união. Cada conector é solicitado por forças de cisalhamento, causando um deslocamento. A relação entre a força atuante e o deslocamento  $u$  entre os elementos individuais que compõem a seção transversal composta é definido pelo módulo de deslizamento  $K$ . A figura 9 ilustra a configuração padrão da união, apresentando o deslocamento  $u$  e o fluxo de cisalhamento  $v$ .



**Figura 9** – Deslocamento e força cisalhante entre os elementos individuais. Fonte: KREUZINGER (1995)

O efeito da distribuição contínua de ligações como apresentado na figura 9 pode ser expressa da seguinte forma:

$$i = \frac{F_s}{s}; \quad C = \frac{K}{s}; \quad i = C \cdot u \quad (23)$$

onde:

$v$  = fluxo de cisalhamento atuante na superfície de contato entre os elementos (N/mm);

$F_s$  = força atuante no conector (N);

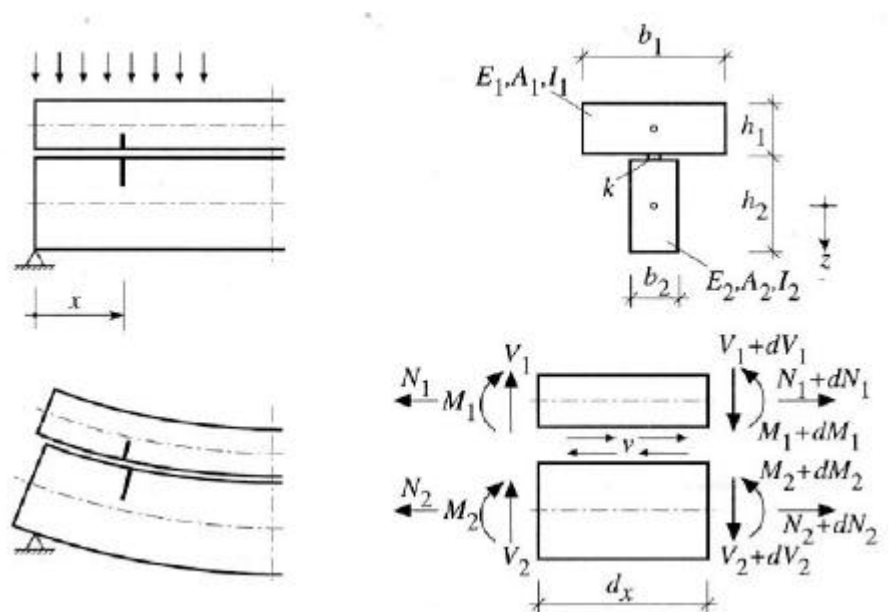
$u$  = deslocamento da ligação (mm);

$s$  = espaçamento entre conectores (mm);

$K$  = módulo de deslizamento (N/mm);

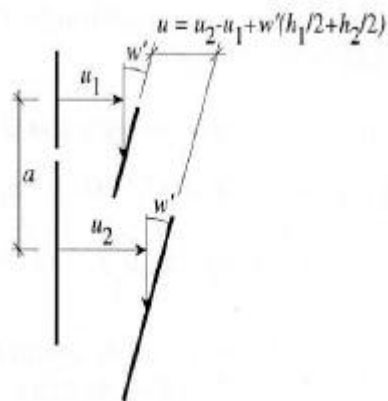
$C$  = rigidez da ligação (N/mm<sup>2</sup>).

Considerando uma peça composta de seção transversal tipo T, são ilustradas na figura 10 o sistema de carregamento, a configuração da seção transversal, a deformação e o elemento  $dx$  com as respectivas forças de equilíbrio.



**Figura 10** – Detalhes de uma viga composta e a configuração de equilíbrio de um elemento  $dx$ . Fonte: KREUZINGER (1995)

O deslocamento relativo entre as partes unidas é demonstrado na figura 11.



**Figura 11** – Deformações. Fonte: KREUZINGER (1995)

Onde,  $u_1$  e  $u_2$  são os deslocamentos longitudinais dos eixos 1 e 2 da seção transversal,  $w'$  é a rotação causada pelo momento fletor e  $u$  é o deslocamento relativo entre as partes individuais no local da ligação. Essa análise de deslocamento apresentada é válida somente quando as deformações devido ao cisalhamento são desprezadas.

$$u = u_2 - u_1 + w' \cdot \left( \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} \right) = u_2 - u_1 + w' \cdot a \quad (24)$$

Observando a equação (24) pode ser verificado que a dimensão crítica é a distância entre os eixos das peças; quanto maior for este valor, maior será a deformação relativa.

Adicionando os princípios da elasticidade à teoria de flexão simples, tem-se:

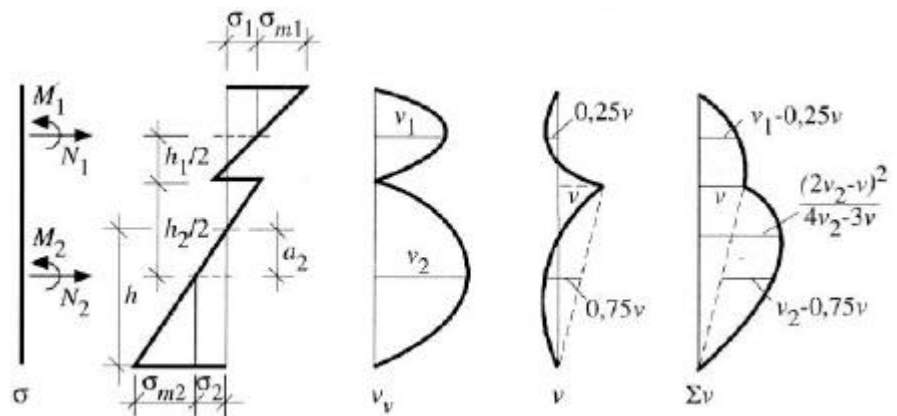
$$N_1 = E_1 \cdot A_1 \cdot u_1' \quad \text{e} \quad N_2 = E_2 \cdot A_2 \cdot u_2' \quad (25)$$

$$M_1 = -E_1 \cdot I_1 \cdot w'' \quad \text{e} \quad M_2 = -E_2 \cdot I_2 \cdot w'' \quad (26)$$

$$V_1 = -E_1 \cdot I_1 \cdot w''' \quad \text{e} \quad V_2 = -E_2 \cdot I_2 \cdot w''' \quad (27)$$

$$\dot{u} = C \cdot u = C \cdot (u_2 - u_1 + w' \cdot a) \quad (28)$$

A figura 12 apresenta os diagramas de tensões normais e cisalhantes para a seção composta.



**Figura 12 – Distribuição de tensões. Fonte: KREUZINGER (1995)**

Equilibrando os dois elementos na direção x e z:  $[p_x = 0, (N_1 + N_2)' = 0]$

$$N_1' + \dot{u} = 0 \quad (29)$$

$$N_2' + \dot{u} = 0 \quad (30)$$

$$M_1' = V_1 - \dot{u} \cdot \frac{h_1}{2} \quad (31a)$$

$$M_2' = V_2 - \dot{u} \cdot \frac{h_2}{2} \quad (31b)$$

$$V_1' + V_2' = -p = V' \quad (31c)$$

Somando os momentos e diferenciando em relação a x:

$$M_1'' + M_2'' + i' \cdot a + p = 0 \quad (32)$$

Desta forma, existem três equações de equilíbrio (29), (31) e (32) e três deformações incógnitas  $u_1$ ,  $u_2$  e  $w$ . Substituindo os princípios da elasticidade nestas equações de equilíbrio:

$$E_1 \cdot A_1 \cdot u_1'' + C \cdot (u_2 - u_1 + w' \cdot a) = 0 \quad (33)$$

$$E_2 \cdot A_2 \cdot u_2'' - C \cdot (u_2 - u_1 + w' \cdot a) = 0 \quad (34)$$

$$(E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2) \cdot w''' - C \cdot a \cdot (u_2' - u_1' + w'' \cdot a) = p \quad (35)$$

Para a resolução das equações de equilíbrio são adotados carregamento e deformações senoidais. Além de facilitar a derivação, o autor afirma que esta consideração ainda proporciona soluções aplicáveis para as mais diferentes distribuições de carregamento.

$$p = p_0 \cdot \text{sen} \cdot \left( \frac{\delta}{L} \cdot x \right) \quad (36)$$

$$u_1 = u_{10} \cdot \cos \cdot \left( \frac{\delta}{L} \cdot x \right); u_2 = u_{20} \cdot \cos \cdot \left( \frac{\delta}{L} \cdot x \right); w = w_0 \cdot \text{sen} \cdot \left( \frac{\delta}{L} \cdot x \right) \quad (37a,b,c)$$

Substituindo esses termos nas equações de equilíbrio (24), (25) e (26), resulta o sistema de equações apresentado abaixo.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{10} \cdot \left[ -\frac{\pi^2}{L^2} \cdot E_1 \cdot A_1 - C \right] + u_{20} \cdot [C] + w_0 \cdot \left[ C \cdot \frac{\pi}{L} \cdot a \right] = 0 \\ u_{10} \cdot [C] + u_{20} \cdot \left[ -\frac{\pi^2}{L^2} \cdot E_1 \cdot A_1 - C \right] + w_0 \cdot \left[ -C \cdot \frac{\pi}{L} \cdot a \right] = 0 \\ u_{10} \cdot \left[ -C \cdot \frac{\pi}{L} \cdot a \right] + u_{20} \cdot \left[ C \cdot \frac{\pi}{L} \cdot a \right] + w_0 \cdot \left[ \frac{\pi^4}{L^4} \cdot (E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2) + C \cdot \frac{\pi^2}{L^2} \cdot a^2 \right] = p_0 \end{array} \right.$$

A solução do sistema é apresentada a seguir.

$$w_0 = p_0 \cdot \frac{L^4}{\pi^4} \cdot \frac{1}{E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2 + \frac{E_1 \cdot A_1 \cdot \gamma_1 \cdot a^2}{1 + \gamma_1 \cdot \frac{E_1 \cdot A_1}{E_2 \cdot A_2}}} = p_0 \cdot \frac{L^4}{\pi^4} \cdot \frac{1}{(EI)_{ef}} \quad (38a)$$

$$u_{10} = w_0 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot \frac{a \cdot \gamma_1 \cdot E_2 \cdot A_2}{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2}; \quad (38b)$$

$$u_{20} = -w_0 \cdot \frac{\pi}{L} \cdot \frac{a \cdot \gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1}{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2} \quad (38c)$$

$$k_1 = \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \frac{E_1 \cdot A_1}{k}; \quad \gamma_1 = \frac{1}{(1 + k_1)} \quad (39a,b)$$

As tensões podem ser obtidas aplicando os princípios da elasticidade a estas deformações. Conforme figura 12, a tensão no eixo do elemento 1 da seção transversal é:

$$\sigma_1 = E_1 \cdot u'_1(x = \frac{L}{2}) = -E_1 \cdot u_{10} \frac{\pi}{L} \quad (40)$$

Usando os seguintes termos

$$w_0 = p_0 \cdot \frac{L^4}{\pi^4} \cdot \frac{1}{(EI)_{ef}} \quad (41)$$

$$M_0 = p_0 \cdot \frac{L^2}{\pi^2} \quad (42)$$

$$a_2 = \frac{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot a}{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2} \quad (43)$$

$$a_1 = a - a_2 \quad (44)$$

a tensão é:

$$\sigma_1 = \frac{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot a_1 \cdot M_0}{(EI)_{ef}} \quad (45)$$

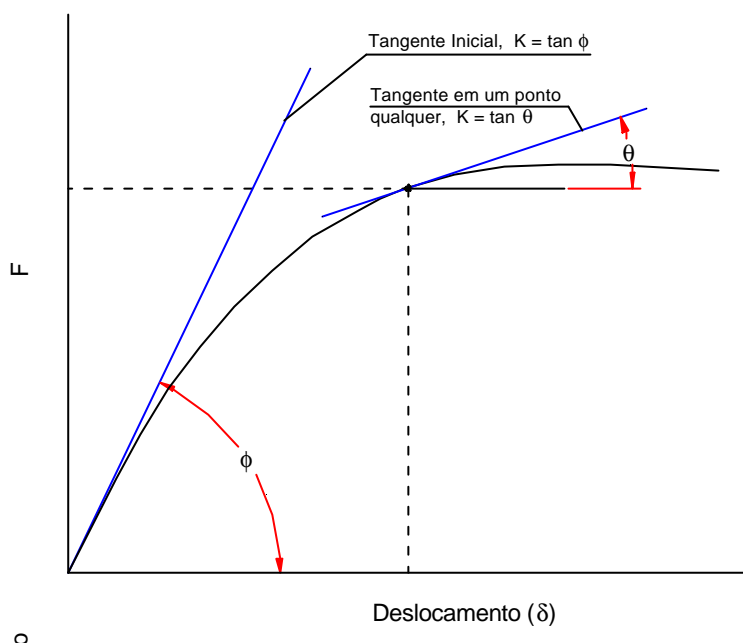
Nota-se que a equação obtida é semelhante à equação de uma viga simples. No anexo B do EUROCODE 5 são apresentadas as equações de rigidez efetiva, tensões normais, tensão máxima cisalhante e carga atuante nos conectores para uma seção genérica composta com dois ou três elementos.

## 2.4. Rigidez das Ligações

O fenômeno característico das ligações por conectores metálicos em vigas compostas é o deslizamento entre os elementos adjacentes. No instante em que a viga é solicitada, forças de

cisalhamento são induzidas e transferidas à interface dos elementos adjacentes, por meio de forças laterais desenvolvidas sobre os conectores. O comportamento entre o conector e a madeira da viga é similar ao que ocorre em uma ligação de madeira solicitada ao corte fabricada com madeira e conectores iguais aos dessas vigas. O comportamento da ligação (madeira e conector) pode ser descrito por um parâmetro de referência chamado Módulo de Deslizamento (Slip Modulus).

Uma típica curva carga-deslocamento para ligações com pinos metálicos quando solicitadas ao corte é ilustrada na figura 13. A inclinação da reta tangente desenhada para qualquer ponto sobre a curva descreve o Módulo de Deslizamento para a ligação em um dado valor de carga.



**Figura 13** – Típica curva carga-deslocamento. Fonte: VAN DYER (1992)

Como se pode observar, o conhecimento da rigidez das ligações é um dos aspectos de fundamental importância na investigação do comportamento das peças compostas. Sendo assim, é apresentado neste item um estudo sucinto sobre o comportamento das ligações por pinos metálicos, sendo pesquisados alguns modelos de comportamento, além de métodos de dimensionamento.

O comportamento das ligações por pinos metálicos em madeira, já vem sendo estudado mundialmente desde meados do século XX. Durante esse período, muitos trabalhos foram desenvolvidos e vários modelos de comportamento foram propostos para as ligações.



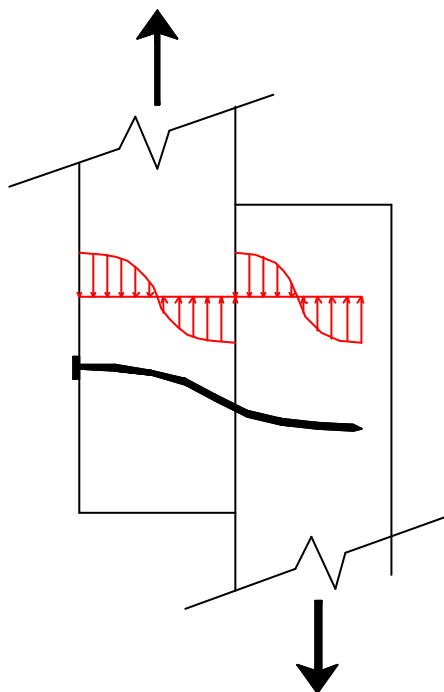
A seguir são apresentados os conceitos básicos do comportamento das ligações, bem como alguns dos modelos analíticos mais importantes.

### 2.4.1. Conceitos Básicos

Quando duas peças de madeira solicitadas por uma força longitudinal, são ligadas uma à outra, ocorre uma transmissão de esforços entre elas, de forma que a ligação sofre um deslocamento devido à deformação do prego e da madeira na região em torno do furo.

Considere-se a ligação tracionada mostrada na figura 14. Em cada peça a força de cisalhamento é transmitida à madeira gerando uma distribuição de tensões de compressão sobre a parede do furo. A mesma distribuição atua sobre o prego. Devido à transmissão da força de cisalhamento, a madeira sofre um esmagamento na parede do furo na região comprimida e o prego sofre uma deflexão.

No estudo das ligações pregadas considera-se apenas um prego individualmente, admitindo que o comportamento seja o mesmo para todos os pregos.

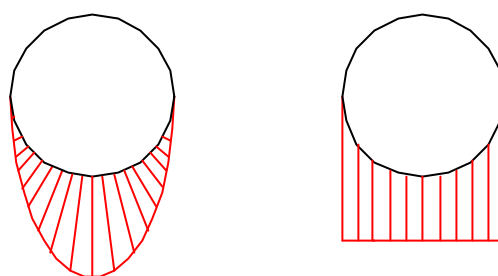


**Figura 14** – Esquema da distribuição de tensões sobre o prego ao longo de seu comprimento em uma ligação tracionada. Fonte: SANTANA (1997)

Em geral, o desenvolvimento dos modelos é baseado nas seguintes hipóteses básicas:

- O efeito do atrito entre as peças no comportamento da ligação pode ser desprezado.

- As componentes de tração que surgem no prego na direção de seu eixo devido à sua configuração deformada podem ser desprezadas.
- A distribuição da carga de cisalhamento entre os pregos é uniforme, hipótese adotada que torna possível estudar apenas um prego individualmente.
- A distribuição de tensões na parede do furo pode ser aproximada por uma distribuição de tensões no plano da ligação. Essa distribuição de tensões é considerada uniforme na projeção da largura do furo, conforme mostra a figura 15.



**Figura 15** – (a) Esquema real de distribuição de tensões na parede do furo. (b) Esquema aproximado de distribuição de tensões na parede do furo. Fonte: SANTANA (1997)

A grande maioria dos trabalhos sobre ligações é direcionada para a determinação da força máxima suportada pela ligação ou capacidade de carga da ligação. Poucos são os trabalhos desenvolvidos especificamente para investigar o comportamento da curva carga-deslocamento da ligação.

Uma extensa revisão bibliográfica sobre o estudo das ligações por pinos metálicos foi realizada por PATTON-MALLORY *et al.* (1997). Os autores indicam que os modelos de investigação das ligações por pinos metálicos podem ser divididos basicamente em dois grupos; o modelo do escoamento (Yield Model) e os modelos de viga sob fundação.

#### **2.4.2. Modelo do Escoamento (Yield Model)**

O modelo do escoamento foi inicialmente desenvolvido por JOHANSEN (1949) e assume o comportamento perfeitamente plástico tanto para madeira quanto para o pino. Segundo o autor, a resistência das ligações por pinos, depende da resistência da madeira ao embutimento do pino ( $f_c$ ) e da resistência do pino à flexão ( $f_y$ ). De fato, tanto o embutimento quanto a flexão do pino são fenômenos plásticos perto da ruptura, e portanto a capacidade de carga de um pino metálico pode ser formulada com base nesse comportamento.

Uma série de modos de ruptura foram postulados para ligação de duas ou três partes. O autor utilizou o princípio de equilíbrio para desenvolver as formulações para cada modo de ruptura.

O texto original assume iguais propriedades para todos os membros da ligação além de indicar os espaçamentos mínimos para evitar a ruptura por fendilhamento.

LARSEN (1973) *apud* PATTON-MALLORY *et al.* (1997) expandiu o modelo perfeitamente plástico para descrever a capacidade de carga quando as partes de madeira tem diferentes propriedades. O resultado foi uma determinada carga de escoamento para cada possível modo de ruptura.

O modo de ruptura com a menor capacidade de carga é selecionado como o limite de carga da ligação. Esse modelo é frequentemente chamado de modelo do escoamento (Yield Model) e tem sido utilizado como base para métodos de dimensionamento de ligações de muitos códigos normativos atuais, inclusive do EUROCODE 5 (1993).

Esse modelo possui razoável precisão na determinação da capacidade de carga das ligações, mas não possibilita prescrever a rigidez da ligação e nem o deslocamento na ruptura, dois importantes fatores para o dimensionamento das ligações.

Os códigos normativos que adotam o modelo do escoamento para dimensionamento de ligações, apresentam equações empíricas para a determinação tanto da rigidez da ligação quanto do deslocamento.

EHLBECK & LARSEN (1991), abordam em seu trabalho os conceitos estabelecidos pelo EUROCODE 5 com referência às ligações de elementos estruturais de madeira. Os autores indicam que o EUROCODE 5 (1993) utiliza dois valores de Módulo de Deslizamento, um para o dimensionamento nos Estados Limites Últimos ( $K_u$ ) e outro para os Estados Limites de Utilização ( $K_{ser}$ ). De fato, como pode ser observado na figura 13, o Módulo de Deslizamento normalmente decresce com o aumento da carga.

O Módulo de Deslizamento instantâneo para os Estados Limites de Utilização – denotado  $K_{ser}$  – é assumido como o módulo secante da curva carga-deslocamento ao nível de carga de aproximadamente 40% da carga máxima da ligação (figura 16). Nesse baixo nível de carregamento, de 0 a  $0,4 F_{max}$ , a relação linear entre carga e deslocamento é assumida como aceitável para os propósitos de dimensionamento.



para ligações com pinos metálicos (pregos e parafusos) com pré-furação, e

$$f_{e,k} = 0,082 \cdot \rho_k \cdot d^{-0,3} \quad (48)$$

para pregos sem pré-furação.

A capacidade de carga para ligação pregada pode então ser calculada como:

$$R = \sqrt{0,3 \cdot (100 - d) \cdot d^{3,6} \cdot \rho_k} \quad (49)$$

Para ligações por pinos com pré-furação, e

$$R = \sqrt{30 \cdot d^{3,3} \cdot \rho_k} \quad (50)$$

para ligações sem pré-furação.

EHLBECK & LARSEN (1991) indicam que o deslocamento instantâneo em aproximadamente 40% da capacidade de carga, estimada por muitos testes em vários laboratórios é:

$$u_{inst} = \frac{40 \cdot d^{0,8}}{\rho_k} \quad (51)$$

Com pré-furação, e

$$u_{inst} = \frac{60 \cdot d^{0,8}}{\rho_k} \quad (52)$$

sem pré-furação.

O Módulo de Deslizamento instantâneo para os Estados Limites de Utilização pode ser considerado como:

$$K_{ser,inst} = \frac{0,4 \cdot R}{u_{inst}} \quad (53)$$

Para ligações pregadas com pré-furação, isso conduz a

$$K_{ser,inst} = \frac{0,55}{100} \cdot \sqrt{100 - d} \cdot \rho_k^{1,5} \cdot d \quad (54)$$

E com o diâmetro do prego variando entre 2 e 8 mm isso pode ser simplificado para:

$$K_{ser,inst} = \frac{\rho_k^{1,5} \cdot d}{20} \quad (55)$$

Para ligações pregadas sem pré-furação:

$$K_{\text{ser,inst}} = \frac{\rho_k^{1,5} \cdot d^{0,8}}{27,4} \approx \frac{\rho_k^{1,5} \cdot d^{0,8}}{25} \quad (56)$$

Se a densidade característica dos membros da ligação são diferentes, então a densidade para o cálculo do módulo pode ser dado por:

$$\rho_k = \sqrt{\rho_{k,1} \cdot \rho_{k,2}} \quad (57)$$

### 2.4.3. Modelos de Viga sob Fundação

A outra forma de se abordar o problema das ligações é utilizando os modelos de viga sob fundação. Estes modelos possibilitam a determinação da resistência e rigidez das ligações. O comportamento dos materiais (madeira e pino) podem ser considerados elásticos, perfeitamente plásticos, ou elasto-plásticos.

Um desses modelos, também conhecido como Modelo de KUENZI, faz analogia uma analogia do prego na ligação com uma viga em fundação elástica. Esse conceito foi inicialmente proposto por WINKLER (1867) *apud* KUENZI (1955).

Na década de 40, HETENYI (1946), *apud* KUENZI (1955), formulou várias soluções para vigas de comprimento finito sob diferentes condições de carregamento. As considerações básicas assumidas por HETENYI foram:

- Os materiais são elásticos e obedecem a Lei de Hooke.
- A força de reação em um ponto qualquer da viga é proporcional a deflexão desta.
- As forças de reação são verticais em todas as seções transversais.
- Fundação não transmite esforços de cisalhamento.

Essas considerações, levam a uma equação diferencial que permite determinar a curva de deflexão da viga de fundação elástica, dada por:

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = -\bar{k} \cdot y \quad (58)$$

onde

$EI$  = a rigidez da viga de fundação elástica;

$E$  = o módulo de elasticidade do material da viga;

$I$  = o momento de inércia da viga;

$y$  = a deflexão no ponto  $x$ ;

$\bar{k}$  = o módulo de deformação da fundação.

A solução da equação (38) resulta em uma outra expressão que envolve um parâmetro de caracterização  $\lambda$ , dado por:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{\bar{k}}{4 \cdot EI}} \quad (59)$$

As equações para flechas, momentos fletores e cortantes na viga são obtidas em função do valor deste parâmetro de caracterização.

Em seu trabalho, KUENZI (1955) aplicou este conceito de analogia de uma viga de fundação elástica, figura 17, e desenvolveu uma teoria para estimar a resistência e a rigidez de ligações pregadas e parafusadas. Foram adicionadas ao conceito inicial outras considerações:

- O atrito entre os elementos de madeira deve ser desprezado.
- A profundidade efetiva da fundação é igual a uma polegada.

O módulo elástico da fundação é definido por KUENZI como igual a:

$$\bar{k} = \frac{d \cdot E_{c0}}{D_e} \quad \text{ou} \quad \bar{k} = \frac{d \cdot E_{c90}}{D_e} \quad (60)$$

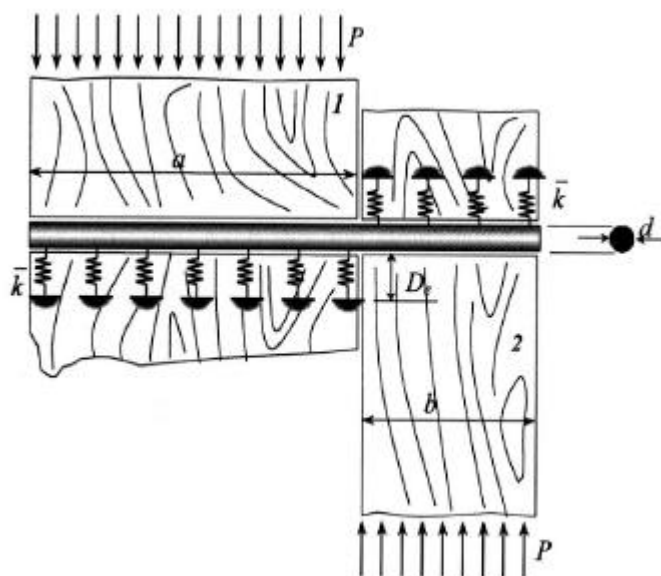
onde

$\bar{k}$  = o módulo elástico da fundação em  $N/mm^2$ ;

$E_{c0}$  ou  $E_{c90}$  = o módulo de elasticidade da madeira paralelo ou perpendicular às fibras em  $N/mm^2$ ;

$d$  = o diâmetro dos pregos ou parafusos em mm;

$D_e$  = a profundidade efetiva da fundação com valor convencional igual a 1 polegada.

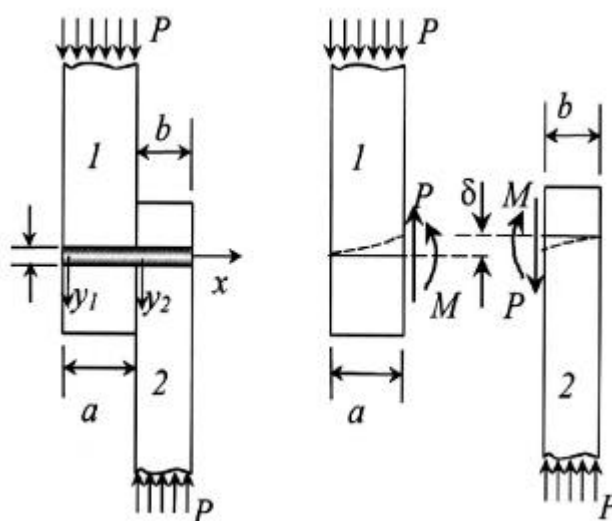


**Figura 17** – Analogia de viga de fundação elástica. Fonte: ALVIM (2002).

Conforme o modelo de KUENZI, para vigas de madeira de seção composta, que apresentem deslizamento entre as peças, a relação entre a carga e o deslocamento relativo  $\delta$ , para uma ligação a corte simples de um único prego e duas peças interligadas, figura 18, pode ser dada por:

$$\delta = P \left[ 2(L_1 + L_2) - \frac{(J_1 - J_2)^2}{(K_1 + K_2)} \right] \quad (61)$$

onde  $\delta$  é o deslizamento da ligação e  $P$  é o carregamento aplicado.



**Figura 18** – Ligação com duas peças. Fonte: ALVIM (2002).



Os fatores  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $K_1$  e  $K_2$  são combinações de funções hiperbólicas e trigonométricas e são dadas por:

$$L_1 = \frac{\lambda_1}{k_1} \left( \frac{\sinh \lambda_1 a \cdot \cosh \lambda_1 a - \sin \lambda_1 a \cdot \cos \lambda_1 a}{\sinh^2 \lambda_1 a \cdot \sin^2 \lambda_1 a} \right) \quad (62)$$

$$L_2 = \frac{\lambda_2}{k_2} \left( \frac{\sinh \lambda_2 b \cdot \cosh \lambda_2 b - \sin \lambda_2 b \cdot \cos \lambda_2 b}{\sinh^2 \lambda_2 b \cdot \sin^2 \lambda_2 b} \right) \quad (63)$$

$$J_1 = \frac{\lambda_1^2}{k_1^2} \left( \frac{\sinh^2 \lambda_1 a + \sin^2 \lambda_1 a}{\sinh^2 \lambda_1 a - \sin^2 \lambda_1 a} \right) \quad (64)$$

$$J_2 = \frac{\lambda_2^2}{k_2^2} \left( \frac{\sinh^2 \lambda_2 b + \sin^2 \lambda_2 b}{\sinh^2 \lambda_2 b - \sin^2 \lambda_2 b} \right) \quad (65)$$

$$K_1 = \frac{\lambda_1^3}{k_1} \left( \frac{\sinh \lambda_1 a \cdot \cosh \lambda_1 a + \sin \lambda_1 a \cdot \cos \lambda_1 a}{\sinh^2 \lambda_1 a - \sin^2 \lambda_1 a} \right) \quad (66)$$

$$K_2 = \frac{\lambda_2^3}{k_2} \left( \frac{\sinh \lambda_2 b \cdot \cosh \lambda_2 b + \sin \lambda_2 b \cdot \cos \lambda_2 b}{\sinh^2 \lambda_2 b - \sin^2 \lambda_2 b} \right) \quad (67)$$

onde os subscritos referem-se aos elementos 1 e 2 que compõem a ligação e  $a$  e  $b$  são as profundidades de penetração dos pregos ou parafusos na ligação, figura 17.

Por sua vez, o valor do parâmetro de caracterização  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  é dado em função das características individuais das peças interligadas, ou seja:

$$\lambda_{1,2} = \sqrt[4]{\frac{\bar{k}_{1,2}}{4 \cdot E_s \cdot I_p}} \quad (68)$$

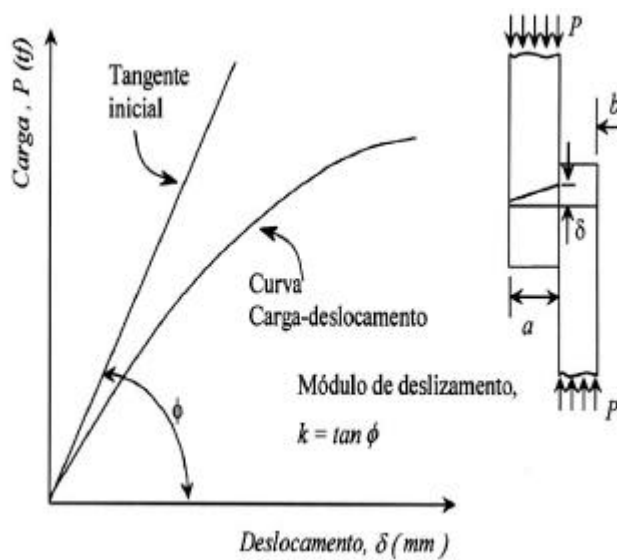
onde  $E_s$  é o módulo de deformação do pino metálico ( $N/mm^2$ ),  $\bar{k}_{1,2}$  é o módulo elástico da fundação de suporte dos pinos em cada uma das peças ( $N/mm^2$ ) e  $I_p$  é o momento de inércia do pino metálico, cujo valor é dado por:

$$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \quad (69)$$

Reorganizando os termos da expressão (61), obtém-se o módulo de deslizamento  $k$ , que é dado por:

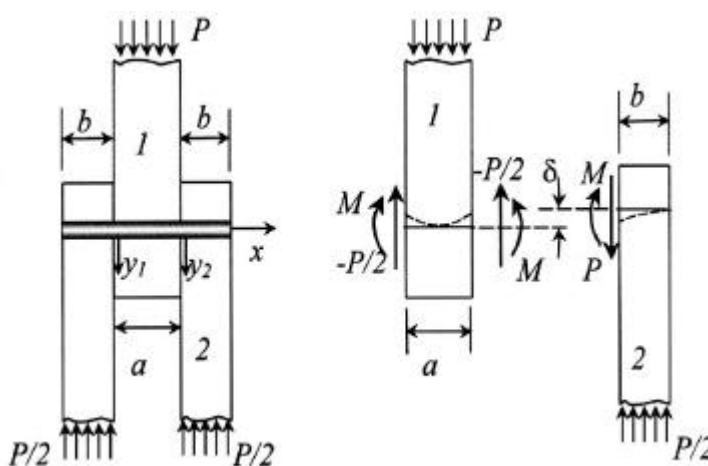
$$k_{\text{Kuenzi}} = \frac{P}{\delta} = \frac{(K_1 + K_2)}{2(L_1 + L_2) \cdot (K_1 + K_2) - (J_1 - J_2)^2} \quad (70)$$

A figura 19 ilustra uma curva típica de carga-deslocamento para uma ligação pregada. A inclinação da tangente inicial define o módulo de deslizamento, para este caso particular de ligação.



**Figura 19** – Curva típica de carga-deslocamento de uma ligação pregada. Fonte: MALHORTA & VAN DYER (1977) apud ALVIM (2002).

A expressão (60) tem a forma da reta tangente inicial, isto devido as considerações de comportamento elástico assumidas.



**Figura 20** – Ligação com duas peças. Fonte: KUENZI (1955) apud ALVIM (2002).

Para as peças submetidas a corte duplo, considere-se a ligação com três elementos da figura 20. Nesses casos, segundo a teoria de KUENZI (1955), a expressão para a determinação do módulo de deslizamento da ligação passa a valer:

$$k_{\text{Kuenzi}} = \frac{P}{\delta} = \frac{2 \cdot (K_1 + K_2)}{2(L_1 + L_2) \cdot (K_1 + K_2) - (J_1 - J_2)^2} \quad (71)$$

Os fatores  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $K_1$  e  $K_2$ , que comparecem na expressão (71), são também combinações de funções hiperbólicas e trigonométricas, mas com valor igual a:

$$L_1 = \frac{\lambda_1}{k_1} \left( \frac{\cosh \lambda_1 a + \cos \lambda_1 a}{\sinh \lambda_1 a + \sin \lambda_1 a} \right) \quad (72)$$

$$L_2 = \frac{\lambda_2}{k_2} \left( \frac{\sinh \lambda_2 b \cdot \cosh \lambda_2 b - \sin \lambda_2 b \cdot \cos \lambda_2 b}{\sinh^2 \lambda_2 b \cdot \sin^2 \lambda_2 b} \right) \quad (73)$$

$$J_1 = \frac{\lambda_1^2}{k_1} \left( \frac{\sinh \lambda_1 a - \sin \lambda_1 a}{\sinh \lambda_1 a + \sin \lambda_1 a} \right) \quad (74)$$

$$J_2 = \frac{\lambda_2^2}{k_2} \left( \frac{\sinh \lambda_2 b + \sin^2 \lambda_2 b}{\sinh^2 \lambda_2 b - \sin^2 \lambda_2 b} \right) \quad (75)$$

$$K_1 = \frac{\lambda_1^3}{k_1} \left( \frac{\cosh \lambda_1 a - \cos \lambda_1 a}{\sinh^2 \lambda_1 a + \sin^2 \lambda_1 a} \right) \quad (76)$$

$$K_2 = \frac{\lambda_2^3}{k_2} \left( \frac{\sinh \lambda_2 b \cdot \cosh \lambda_2 b + \sin \lambda_2 b \cdot \cos \lambda_2 b}{\sinh^2 \lambda_2 b - \sin^2 \lambda_2 b} \right) \quad (77)$$

WILKINSON (1971) *apud* ALVIM (2002), baseou-se no trabalho de KUENZI para desenvolver relações aproximadas entre o carregamento aplicado e o deslizamento de uma ligação a corte simples.

Para o caso das ligações onde os termos  $\lambda_1 a$  ou  $\lambda_2 b$  são ambos maiores que 2 (parafusos ou pregos muito longos) e as duas peças são de um mesmo tipo de madeira, então, é possível considerar:

$$\bar{k}_1 = \bar{k}_2 = \bar{k} \quad (78)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \quad (79)$$

Portanto,

$$L_1 = L_2 = \frac{\lambda}{k} \quad (80)$$

$$J_1 = J_2 = \frac{\lambda^2}{k} \quad (81)$$

$$K_1 = K_2 = \frac{\lambda^3}{k} \quad (82)$$

Substituindo (80), (81) e (82) em (70), tem-se:

$$\delta = 4 \cdot P \cdot L \quad (83)$$

Como  $L = \frac{\lambda}{k}$ , então:

$$\delta = \frac{4 \cdot P \cdot \lambda}{k} \quad (84)$$

E também:

$$\lambda = \frac{P}{\delta} = \frac{\bar{k}}{4 \cdot \lambda} \quad (85)$$

Portanto, substituindo  $\lambda$  em (64), tem-se:

$$k = \frac{\bar{k}}{4 \cdot \frac{\bar{k}}{4 \cdot \lambda}} = 0,25 \cdot \bar{k}^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{4 \cdot EI} \quad (86)$$

Outro estudo, foi desenvolvido por FOSCHI (1974) *apud* ALVIM (2002). Com base em aproximações pelo método dos elementos finitos, foi proposto um método teórico para determinar o comportamento de pinos metálicos sob carregamento lateral. Os resultados do modelo teórico proposto por FOSCHI, foram verificados por meio de ensaios físicos.

FOSCHI descreveu o comportamento das ligações, no âmbito não-linear, com base em modelos elasto-plásticos para a madeira e o aço. A rigidez da ligação é descrita por uma expressão que relaciona a força transmitida ao pino metálico,  $F$ , com o deslizamento  $\delta$  entre as peças de madeira conectadas, isto é:

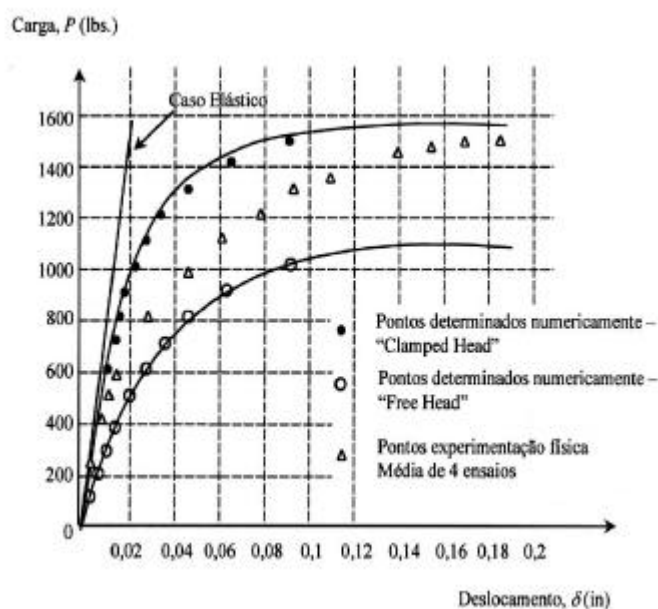
$$F = \bar{a} \left( 1 - e^{-\bar{b} \cdot \delta} \right) \quad (87)$$

onde  $\bar{a}$  e  $\bar{b}$  são parâmetros que dependem do tipo de ligação.

Desse modo, verifica-se a intenção de representar o comportamento da ligação por meio de funções exponenciais, isto devido a forma das curvas de força-deslocamento obtidas nos ensaios.

Alguns dos resultados obtidos nos ensaios experimentais físicos e numéricos são apresentados na figura 21.

Suas principais conclusões foram que apesar das aproximações lineares baseadas na teoria de vigas em fundação elásticas não serem exatas o suficiente para estimar as cargas limites, elas são no entanto válidas para estimar o comportamento inicial de ligações pregadas em peças de madeira, conforme a curva do caso elástico da figura 21.



**Figura 21** – Diagramas experimentais de carga-deslocamento. Fonte: FOSCHI (1974) apud ALVIM (2002).

Nos trabalhos anteriormente descritos, verifica-se a consistência da formulação proposta por KUENZI. Mesmo com técnicas modernas de investigação, a teoria baseada na analogia de viga de fundação elástica apresenta resultados satisfatórios para o domínio linear.

## 2.5. Revisão de Normas Técnicas

Neste item são apresentados métodos de dimensionamento e verificação de vigas de madeira com seção composta unidas continuamente por conectores metálicos deformáveis que podem ser encontrados na literatura, incluindo o método da norma brasileira de projeto de estruturas

de madeira e métodos normalizados utilizados em outros países. O objetivo dessa revisão de literatura é obter uma visão geral dos métodos para cálculo das tensões máximas atuantes e deslocamentos máximos. Não estão sendo considerados os métodos para cálculo das tensões e deslocamentos máximos permitidos, pois dependem dos critérios de segurança de cada norma. Além das normas citadas neste item também foram estudadas normas de outros países com grande tradição no setor de estruturas de madeira, como Estados Unidos, Canadá e Austrália. Nestes documentos normativos não foram encontradas indicações com respeito a metodologia de cálculo para este tipo específico de viga composta.

### 2.5.1. NBR 7190 (1997)

A norma brasileira não faz menção específica ao detalhamento das ligações em estruturas compostas. No entanto, apresenta critério que considera a redução da inércia das peças compostas utilizando coeficientes em função do tipo de arranjo da seção transversal para considerar o efeito de composição parcial.

No item 7.7.2 desta norma é recomendado que as peças compostas por peças serradas formando seção T, I ou Caixão, solidarizadas permanentemente por ligações rígidas por pregos podem ser dimensionadas como se a viga fosse de seção maciça, com área igual à soma das áreas das seções dos elementos componentes, admitindo um momento de inércia efetivo dado por:

$$I_{ef} = \alpha_r \cdot I_{th} \quad (88)$$

Onde  $I_{th}$  é o momento de inércia da seção total da peça como se ela fosse maciça, sendo

- para seções T:  $\alpha_r = 0,95$
- para seções I ou Caixão:  $\alpha_r = 0,85$

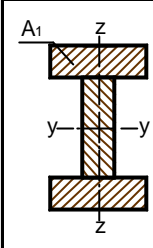
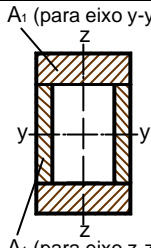
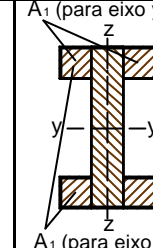
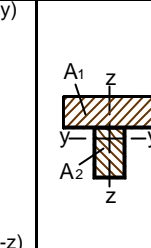
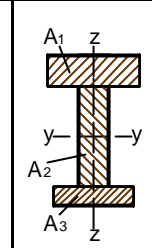
Como pode-se observar, essa consideração independe de fatores como o diâmetro e o espaçamento entre conectores.

### 2.5.2. DIN 1052 (1988)

Esta norma estabelece o conceito de inércia efetiva para as seções compostas em função da rigidez da ligação. Cada tipo de união é caracterizada por um módulo de deslizamento, que expressa a carga necessária para produzir um deslocamento relativo entre as peças individuais da seção composta.

No item 8.3.1, a norma alemã apresenta o valor do módulo de deslizamento tabelado em função do tipo de configuração da seção transversal (ver tabela 2).

**Tabela 2** - Módulo de deslizamento "K" em N/mm, para as seções transversais de vigas.

Eixo	Conector	Tipo 1	Tipo 2	Tipo 3	Tipo 4	Tipo 5
						
y - y	Pregos (um plano de corte)	600	600	900	600	600
	Pregos (dois planos de corte)	700 por ligação	700 por ligação	900 por ligação	-	700
z - z	Pregos (um plano de corte)	-	900	600	-	-
	Pregos (dois planos de corte)	-	900 por ligação	700 por ligação	-	-

A partir do módulo de deslizamento dado pela tabela 2 calcula-se a constante de deslizamento (C).

$$C_{1,3} = \frac{\pi^2 \cdot E_{1,3} \cdot A_{1,3} \cdot e'_{1,3}}{K_{1,3} \cdot L^2} \quad (89)$$

onde:

$E_1$  e  $E_3$  são os módulos de elasticidade das partes 1 e 3 que formam a seção transversal;

$A_1$  e  $A_3$  são as áreas das partes 1 e 3 que formam a seção transversal;

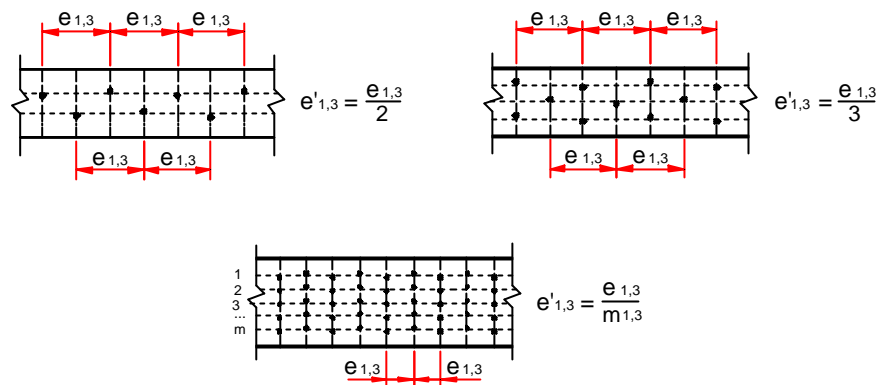
$e'_1$  e  $e'_3$  são as distâncias médias entre os conectores (em relação a uma mesma linha (ver figura 22));

$K_1$  e  $K_3$  são os módulos de deslizamento dos conectores obtidos da tabela 2;

$L$  é o vão efetivo da viga.

A partir da constante de deslizamento é calculado o coeficiente de redução de inércia do conjunto ( $\gamma$ ):

$$\gamma_{1,3} = \frac{1}{1 + C_{1,3}} \quad \text{e} \quad \gamma_2 = 1 \quad (90)$$



**Figura 22** - Distância  $e'_{1,3}$  conforme arranjo dos conectores para mais de uma linha de pregação.

A distância entre os centros de gravidade da seção até a linha neutra da peça (ver figura 5) é dado como segue:

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma_1 \cdot n_1 \cdot A_1 \cdot (h_1 + h_2) - \gamma_3 \cdot n_3 \cdot A_3 \cdot (h_2 + h_3)}{\sum_{i=1}^3 \gamma_i \cdot n_i \cdot A_i} \quad (91)$$

$$a_1 = \left( \frac{h_1 + h_2}{2} \right) - a_2 \quad \text{e} \quad a_3 = \left( \frac{h_2 + h_3}{2} \right) + a_2 \quad (92)$$

onde:

$a_i$  é a distância do centróide da área de cada elemento que compõe a seção transversal até a linha neutra y-y, desde que  $a_2$  não seja menor que zero e não maior que  $h_2/2$ ;

$h_i$  é a altura de cada parte dos elementos componentes da seção transversal;

$b_i$  é a largura de cada parte dos elementos componentes da seção transversal;

$n_i$  é a razão  $E_i/E_v$ , onde  $E_v$  é o módulo de elasticidade comparativo de qualquer uma das peças da seção.

Assim é possível o cálculo da inércia efetiva levando em consideração a rigidez da ligação.

$$I_{ef} = \sum_{i=1}^3 \left( n_i \cdot I_i + \gamma_i \cdot n_i \cdot A_i \cdot a_i^2 \right) \quad (93)$$

Onde:

$I_i$  é o momento de inércia de cada elemento componente da seção transversal ( $I_i = b_i \cdot h_i^3 / 12$ ).



Os cálculos dos deslocamentos verticais e das tensões máximas atuantes devem ser baseados no momento de inércia efetivo ( $I_{ef}$ ). A seguir, são apresentadas as equações para o cálculo das tensões normais.

$$\sigma_{si} = \pm \frac{M}{I_{ef}} \cdot \gamma_i \cdot a_i \cdot \frac{A_i}{A_{in}} \cdot n_i \quad (94)$$

$$\sigma_{ri} = \pm \frac{M}{I_{ef}} \cdot \left( \gamma_i \cdot a_i \cdot \frac{A_i}{A_{in}} + \frac{h_i}{2} \cdot \frac{I_i}{I_{in}} \right) \cdot n_i \quad (95)$$

Onde:

$\sigma_{si}$  é a tensão normal no centróide da peça “i” devido a parcela de força normal;

$\sigma_{ri}$  é a tensão normal na extremidade da peça “i” devido as parcelas de força normal e momento; os sinais apropriados são mostrados na figura 23;

M é o momento fletor, com sinal positivo na presença de tensões de compressão na borda superior, e tensões de tração na fibra mais baixa da viga;

$A_{in}$  é a área de cada elemento componente da seção transversal descontando os furos dos pregos;

$I_{in}$  é o momento de inércia de cada elemento componente da seção transversal descontando os furos dos pregos.

A força máxima atuante no conector é dada por:

$$F_{1,3} = \frac{V_{max}}{I_{ef}} \cdot \gamma_{1,3} \cdot n_{1,3} \cdot S_{1,3} \quad (96)$$

E o espaçamento entre os conectores pode ser estimado por:

$$e'_{1,3} = \frac{zulN_{1,3}}{F_{1,3}} \quad (97)$$

Se o espaçamento dos conectores variar em função do esforço cortante e o máximo espaçamento  $e'_{1,3max}$  não for maior que  $4e'_{1,3min}$ , então o espaçamento efetivo correspondente pode ser tomado como:

$$e'_{1,3} = 0,75 \cdot e'_{1,3min} + 0,25 \cdot e'_{1,3max} \quad (98)$$

A tensão máxima cisalhante ocorre na alma e é dada pela seguinte expressão:

$$\tau_{max} = \frac{V_{max}}{b_2 \cdot I_{ef}} \cdot \sum_{i=1}^2 \gamma_i \cdot n_i \cdot S_i \quad (99)$$

Onde:

$V_{\max}$  é a cortante máxima atuante na viga;

$S_1$  e  $S_3$  são os momentos estáticos de cada mesa ( $S_{1,3} = b_{1,3} \cdot h_{1,3} \cdot a_{1,3}$ );

$S_2$  é o momento estático da parte da alma acima da linha neutra ( $S_2 = b_2 \cdot (h_2/2 - a_2)^2 / 2$ );

$Z_{ul N_1}$  e  $N_3$  são as cargas permissíveis dos conectores.

A figura 23 ilustra alguns tipos de seções compostas com seus correspondentes diagramas de tensões normais.

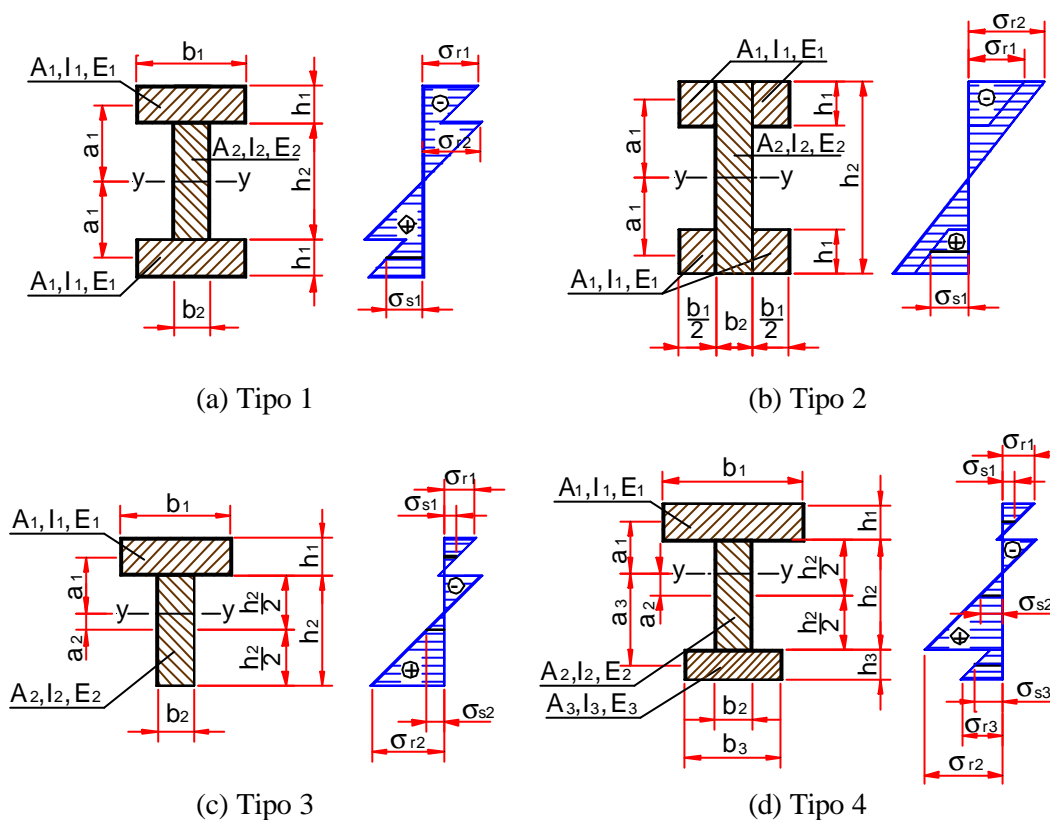


Figura 23 – Seções transversais e distribuição de tensões da DIN 1052.

### 2.5.3. EUROCODE 5 (1993)

No anexo B desta norma europeia é apresentado o critério de dimensionamento para vigas compostas unidas por conectores metálicos (uniões flexíveis). Recomenda que o efeito da deformabilidade da ligação seja levada em consideração, assumindo-se uma relação linear entre a carga de cisalhamento e o deslocamento longitudinal relativo entre os elementos da ligação.

O módulo de deslizamento é determinado em função da densidade da madeira e do diâmetro do pino utilizado. No caso de ligações com pré-furação os valores de K são dados por:

$$K_u = \frac{2}{3} \cdot K_{ser} \quad (100)$$

$$K_{ser} = \frac{\rho_k^{1,5} \cdot d}{20} \quad (101)$$

onde:

$K = K_u$  para os estados limites últimos (N/mm);

$K = K_{ser}$  para os estados limites de utilização (N/mm);

$d$  é o diâmetro do prego em mm;

$\rho_k$  é a densidade da madeira em  $\text{kg/m}^3$ . Se as peças forem de madeiras diferentes deve-se utilizar uma densidade equivalente  $\rho_k = \sqrt{\rho_{k1} \cdot \rho_{k2}}$ .

A partir deste módulo de deslizamento, é definido o fator de redução da inércia do conjunto, levando em consideração além do tipo de união, a disposição e espaçamento dos elementos de ligação, o tipo de madeira, a forma de montagem e proporção das peças individuais e o vão entre apoios da viga composta.

$$\gamma_2 = 1 \quad \text{e} \quad \gamma_i = \left[ 1 + \frac{\pi^2 \cdot E_i \cdot A_i \cdot s_i}{K_i \cdot L^2} \right]^{-1} \quad \text{para } i = 1 \text{ e } 3 \quad (102)$$

onde:

$E_i$  = módulo de elasticidade de cada elemento da seção transversal;

$A_i$  = área de cada parte da seção transversal;

$s_i$  = espaçamento dos pregos na interface do elemento  $i$  com o elemento 2;

$K_i$  = módulo de deslizamento da ligação do elemento  $i$  com o elemento 2;

$L$  = vão efetivo da viga ( $L$  = vão, para vigas biapoiadas), ( $L = 0,8 \cdot \text{vão}$ , para vigas contínuas) e ( $L = 2 \cdot \text{vão}$ , para vigas em balanço).

O espaçamento dos pregos pode ser uniforme ou variar conforme a força de cisalhamento, entre um valor mínimo  $s_{\min}$  e  $s_{\max}$ , sendo  $s_{\max} \leq 4 \cdot s_{\min}$ . Nesse último caso um valor efetivo de espaçamento pode ser usado, dado por:

$$s_{ef} = 0,75 \cdot s_{\min} + 0,25 \cdot s_{\max} \quad (103)$$

A distância entre os centros de gravidade da seção até a linha neutra da peça (ver figura 24) é dado por:

$$a_2 = \frac{\gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot (h_1 + h_2) - \gamma_3 \cdot E_3 \cdot A_3 \cdot (h_2 + h_3)}{2 \cdot \sum_{i=1}^3 \gamma_i \cdot E_i \cdot A_i} \quad (104)$$

$$a_1 = \left( \frac{h_1 + h_2}{2} \right) - a_2 \quad \text{e} \quad a_3 = \left( \frac{h_2 + h_3}{2} \right) + a_2 \quad (105)$$

onde:

$a_i$  = distância do centróide da área de cada elemento que compõe a seção transversal até a linha neutra y-y, desde que  $a_2$  não seja menor que zero e não maior que  $h_2/2$ ;

$h_i$  = altura de cada parte dos elementos componentes da seção transversal com  $h_3$  nulo para seção T;

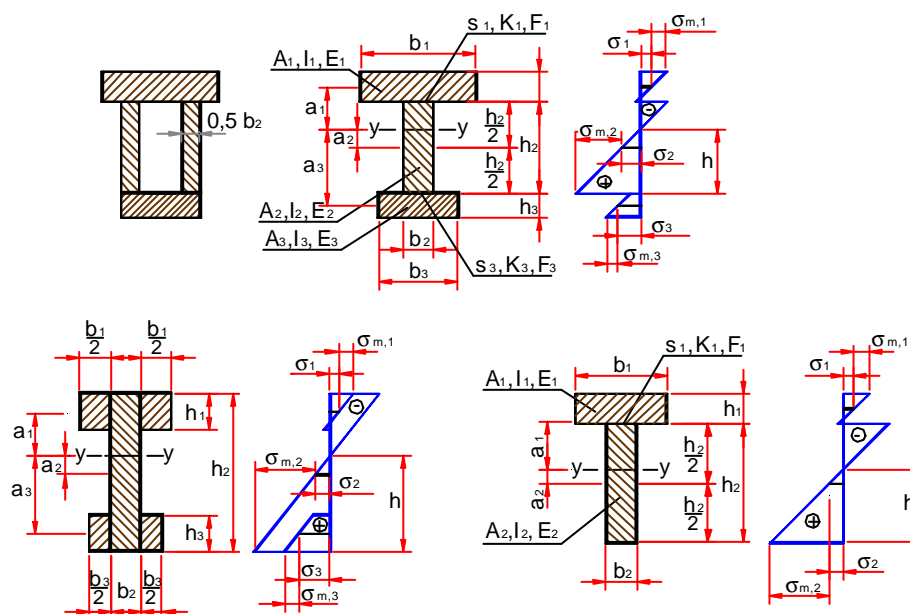
$b_i$  = largura de cada parte dos elementos componentes da seção transversal;

Assim é possível o cálculo da rigidez efetiva levando em consideração a rigidez da ligação.

$$(EI)_{ef} = \sum_{i=1}^3 (E_i \cdot I_i + \gamma_i \cdot E_i \cdot A_i \cdot a_i^2) \quad (106)$$

onde:

$I_i$  = momento de inércia de cada elemento componente da seção transversal ( $I_i = b_i \cdot h_i^3 / 12$ ).



**Figura 24** – Seções transversais e distribuição de tensões do EUROCODE 5.

Da mesma forma, são equacionadas as tensões normais e cisalhantes atuantes nas peças, bem como a força aplicada nos elementos de ligação ocasionada pelo deslizamento entre as peças.

Para vigas com geometria de seção transversal conforme as da figura 24, as tensões normais devem ser calculadas conforme mostrado a seguir:

$$\sigma_i = \gamma_i \cdot E_i \cdot a_i \cdot \frac{M}{(EI)_{ef}} \quad (107)$$

$$\sigma_{m,i} = 0,5 \cdot E_i \cdot h_i \cdot \frac{M}{(EI)_{ef}} \quad (108)$$

onde:

M = momento fletor;

$\sigma_i$  = tensão normal no centróide do elemento “i” devido a força normal;

$\sigma_{m,i}$  = tensão normal na extremidade do elemento “i” devido ao momento.

A máxima tensão cisalhante ocorre onde a tensão normal é nula. A tensão máxima de cisalhamento na alma da viga pode ser obtida como:

$$\tau_{2,max} = \left( \gamma_3 \cdot E_3 \cdot A_3 \cdot a_3 + 0,5 \cdot E_2 \cdot b_2 \cdot h^2 \right) \cdot \frac{V}{b_2 \cdot (EI)_{ef}} \quad (109)$$

onde:

V = força máxima de cisalhamento.

E por fim apresenta-se a equação para o cálculo da carga aplicada no conector.

$$F_i = \gamma_i \cdot E_i \cdot A_i \cdot a_i \cdot s_i \cdot \frac{V}{(EI)_{ef}} \quad \text{para } i = 1 \text{ e } 3 \quad (110)$$

## 2.6. Conclusões da Revisão Bibliográfica

Do estudo sobre peças compostas realizado na bibliografia, pode-se concluir que as vigas compostas de madeira serrada, ligadas por pregos, apresentam grande facilidade e baixo custo de produção, e podem ser largamente empregadas nas construções de madeira principalmente quando é requerido um acréscimo de inércia sem a disponibilidade de peças de seção maciça.

O comportamento das peças compostas unidas por conectores mecânicos é fortemente influenciado pela rigidez da ligação, portanto são necessários critérios especiais para o correto dimensionamento desses elementos estruturais.

Atualmente são utilizados basicamente dois métodos distintos de análise de peças compostas: o método dos coeficientes de minoração e o método analítico. Apesar de proporcionar agilidade no cálculo, o método dos coeficientes apresenta grande variabilidade por não considerar a rigidez da ligação e, por este motivo, alguns documentos normativos, que anteriormente o adotavam, após revisão optaram pelo método analítico. Já o método analítico proporciona maior precisão no cálculo de peças compostas, considerando a influência do deslizamento relativo entre as peças que compõem a seção em função das propriedades de rigidez de cada elemento, da geometria da seção, do vão, do módulo de deslizamento da ligação e do espaçamento entre conectores.

O método analítico baseado nas equações de equilíbrio pode ser apresentado de maneira exata ou aproximada. A diferença entre os dois modelos é a consideração do carregamento. O modelo exato apresenta uma equação final para cada forma de carregamento aplicado. Já o modelo aproximado considera um carregamento fictício senoidal o que proporciona uma equação final mais simples.

Os modelos de estudo de peças compostas descritos neste trabalho também se mostram adequados para o dimensionamento de vigas compostas T de madeira e concreto, e para vigas com alma em compensado, guardadas as particularidades de cada sistema.

O conhecimento da rigidez das ligações é um dos aspectos de fundamental importância na investigação do comportamento das peças compostas. A grande maioria dos trabalhos sobre ligações é direcionada para a determinação da capacidade de carga da ligação e poucos são os trabalhos desenvolvidos especificamente para investigar a rigidez das ligações.

Os modelos de investigação das ligações por pinos metálicos podem ser divididos em dois grupos; o modelo do escoamento (Yield Model) e os modelos de viga sob fundação. O modelo do escoamento assume o comportamento perfeitamente plástico tanto para madeira quanto para o pino. Esse modelo possui razoável precisão na determinação da capacidade de carga das ligações, mas não possibilita prescrever a rigidez da ligação e nem o deslocamento na ruptura, dois importantes fatores para o dimensionamento das ligações. Já os modelos de viga sob fundação possibilitam a determinação da resistência e rigidez das ligações. O

comportamento dos materiais (madeira e pino) podem ser considerados elásticos, perfeitamente plásticos, ou elasto-plásticos.

Os códigos normativos que adotam o modelo do escoamento para dimensionamento de ligações, apresentam equações empíricas para a determinação tanto da rigidez da ligação quanto do deslocamento.

O modelo de viga sob fundação elástica, também conhecido como Modelo de KUENZI, apresenta consistência na formulação. Mesmo com técnicas modernas de investigação, a teoria de KUENZI apresenta resultados satisfatórios para o domínio linear e indica ser conveniente para a determinação da rigidez da ligação para as peças compostas.

A norma brasileira apresenta uma metodologia simples de cálculo para o dimensionamento de peças com seção transversal composta, recomendando a redução da inércia da peça, por meio de coeficientes, para levar em conta a não solidarização total das peças que compõem a seção transversal. Estes coeficientes são apresentados conforme o arranjo da seção transversal, independente da rigidez da ligação.

As normas DIN 1052 e EUROCODE 5 apresentam metodologia muito semelhante derivada do método analítico das equações de equilíbrio – modelo simplificado. A diferença é que o EUROCODE 5 define a rigidez efetiva  $(EI)_{ef}$  e a outra o momento de inércia efetivo  $I_{ef}$ . Entretanto, a maneira de calcular o módulo de deslizamento é diferente. Enquanto a norma européia define o valor do módulo de deslizamento por uma equação empírica que considera a densidade da madeira e o diâmetro do pino, a norma alemã propõe valores tabelados em função da configuração da seção transversal. Os valores de módulo de elasticidade indicados pela norma alemã são muito inferiores aos que normalmente resultam do cálculo pela fórmula do EUROCODE 5.

### **3. MATERIAIS E MÉTODOS**

Para o estudo do comportamento mecânico de vigas compostas e suas ligações se faz necessária, além da análise teórica, a realização de ensaios de laboratório para aferir os modelos matemáticos e obter parâmetros para serem usados em tais modelos.

Para aferir os modelos teóricos de comportamento das vigas compostas foram realizados ensaios de flexão em protótipos de elementos compostos, em escala natural, a partir de peças de madeira de dimensões comerciais, solidarizadas continuamente por pregos. Esta verificação foi feita utilizando madeira de diversas classes de resistência, de modo a constatar a validade dos modelos em estudo para as espécies nacionais.

Realizaram-se ainda testes de caracterização das ligações por pregos em corpos-de-prova de ligação para determinar a rigidez da ligação de forma a comparar com os valores obtidos da formulação teórica.

Os ensaios inerentes à caracterização das espécies de madeira empregadas na pesquisa foram conduzidos conforme o Anexo B da NBR 7190 (1997) “Projeto de estruturas de madeira”. Os valores da tensão de escoamento e tensão de ruptura do aço dos pregos foram determinados por ensaios de tração simples segundo as normas NBR 6207 (1982) “Arame de aço – Ensaio de tração – Método de ensaio” e NBR 6152 (1992) “Materiais metálicos – Determinação das propriedades mecânicas à tração – Método de ensaio”.

O programa de ensaios foi desenvolvido no Laboratório de Madeiras e de Estruturas de Madeira (LaMEM) do Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos (SET/EESC/USP).

A seguir estão apresentados detalhadamente os materiais e os procedimentos adotados no programa experimental de ensaios.



### 3.1. Descrição dos Materiais Utilizados

Foram utilizadas três espécies de madeira, duas nativas e uma de reflorestamento. As duas espécies nativas utilizadas foram o Angelim Pedra Verdadeiro – *Dinizia excelsa* (alta densidade) e o Cedrilho – *Erismia spp* (média densidade). A espécie de reflorestamento utilizada foi o Pinus Hondurensis – *Pinus caribea var. hondurensis* (baixa densidade).

Foram construídos três protótipos de vigas compostas, com diferentes dimensões, para cada espécie de madeira, perfazendo um total de 9 vigas.

Tabela 3: Dados de projeto das vigas compostas.

Espécie de Madeira	Viga	Geometria da Seção	Ligação	Comp. (cm)	Vão ensaio (cm)	Instrumentação
Pinus Hondurensis	P1		22 x 42 C/5,0 cm	310	300	Relógios comparadores e extensômetros elétricos
	P2		22 x 48 C/5,0 cm	400	390	
	P3		22 x 48 C/2,4 cm	400	390	

Espécie de Madeira	Viga	Geometria da Seção	Ligação	Comp. (cm)	Vão ensaio (cm)	Instrumentação
Cedrilho	C1		22 x 48 C/5,0 cm	400	390	Relógios comparadores e extensômetros elétricos
	C2					Relógios comparadores
	C3					Relógios comparadores
Angelim Pedra Verdadeiro	A1		18 x 30 C/2,5 cm	380	370	Relógios comparadores e extensômetros elétricos
	A2					Relógios comparadores
	A3					Relógios comparadores

Os elementos conectores utilizados foram os pregos do fabricante GERDAU nas bitolas comerciais de 22 x 48 (5,4 x 110 mm), 22 x 42 (5,4 x 96 mm) e 18 x 30 (3,4 x 69 mm).

Em todas as vigas os pregos foram dispostos em duas linhas longitudinais em forma de zig-zag. A tabela 3 apresenta a geometria da seção transversal, o comprimento, vão para o ensaio, tipo de ligação e espécie de madeira utilizada para cada uma das 9 vigas compostas ensaiadas.

### 3.2. Procedimentos de Experimentação

Para auxiliar a análise precisa dos resultados, todas as peças de madeira que compõem a seção transversal composta foram previamente testadas por meio de ensaios não destrutivos

de flexão estática. Destes ensaios são obtidos o módulo de elasticidade à flexão de cada peça que está sendo empregada na viga, garantindo maior precisão da análise dos resultados.

Na seqüência, foram montadas as vigas compostas, conforme procedimentos apresentados no item 3.4.

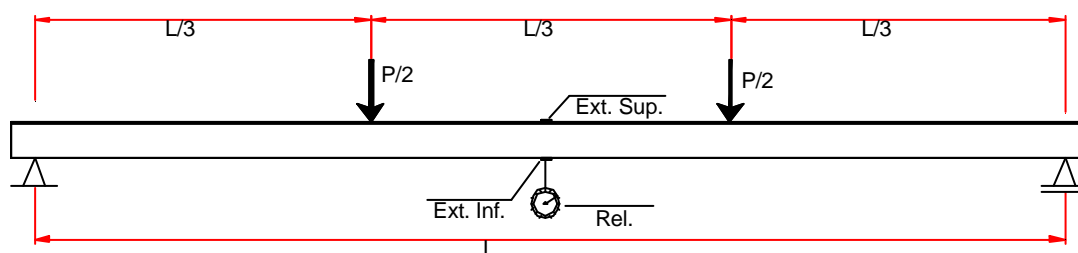
Após a montagem, as vigas compostas foram testadas por ensaio de flexão com carregamento nos terços, leitura de flechas e deslizamento entre as peças, por meio de relógios comparadores e leitura de deformações por meio de extensômetros elétricos de resistência. Após os ciclos de carregamento para avaliação da rigidez das peças compostas, as mesmas foram conduzidas à ruptura.

Da porção de material que se conservou íntegra após a ruptura das vigas, foram extraídos os corpos de prova para os ensaios de caracterização de cada peça. Este recurso foi utilizado com o objetivo de minimizar as imprecisões que poderiam resultar de uma caracterização do lote. Todos os ensaios de caracterização da madeira para cada peça foram conduzidos conforme as indicações do Anexo B da NBR 7190/97. Também foram extraídos corpos-de-prova de ligação para avaliação da rigidez das ligações.

Finalizando o programa experimental foram conduzidos os ensaios de tração simples em pregos para a determinação das propriedades do aço empregado segundo as normas NBR 6207/82 e NBR 6152/92.

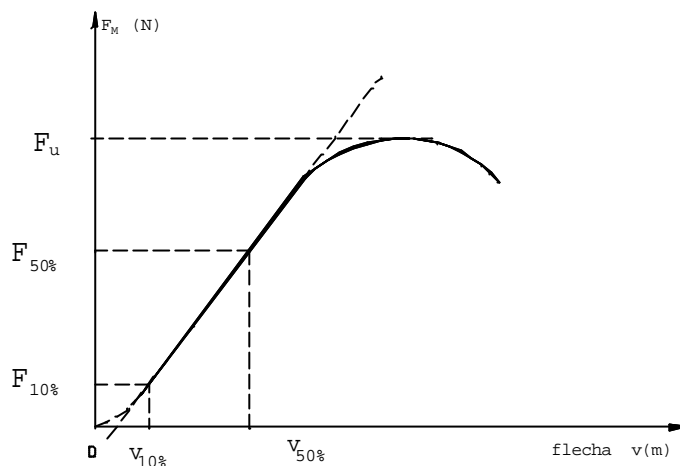
### 3.3. Ensaios de Flexão Estática para Caracterização

Cada peça (mesa superior, alma e mesa inferior) das vigas foi caracterizada por ensaio não destrutivo de flexão estática para a aquisição do valor do módulo de elasticidade a flexão. Esses consistem em aplicar um carregamento concentrado nos terços do vão sobre a peça bi-poiada, medindo a flecha no meio do vão a cada novo incremento de carregamento, conforme ilustra a figura 25.



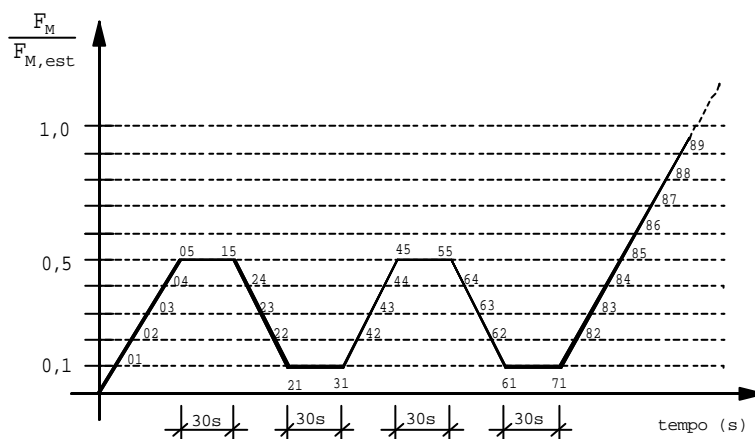
**Figura 25** – Montagem do ensaio de flexão estática para caracterização das peças.

A norma brasileira NBR 7190/97, em seu Anexo B, indica que o valor do módulo de elasticidade à flexão deve ser determinado no trecho linear do diagrama carga x deslocamento, indicado na figura 26.



**Figura 26** – Diagrama carga x flecha na flexão. Fonte NBR 7190 (1997).

Para esta finalidade, o módulo de elasticidade deve ser determinado pela inclinação da reta secante à curva carga x deslocamento no meio do vão, no último ciclo de carregamento (figura 27), definida pelos pontos correspondentes a 10% e 50% da carga máxima de ensaio estimada por meio de um corpo de prova gêmeo.



**Figura 27** – Diagrama de carregamento para a determinação da rigidez à flexão. Fonte NBR 7190 (1997).

Em função da impossibilidade de realização do ensaio de ruptura do corpo de prova gêmeo para cada peça ensaiada, optou-se por conduzir o carregamento até o limite de  $L/200$  para as peças utilizadas para compor as almas das vigas compostas, de forma a não exceder o regime elástico do material. O vão adotado para estes ensaios foi o mesmo utilizado para os ensaios

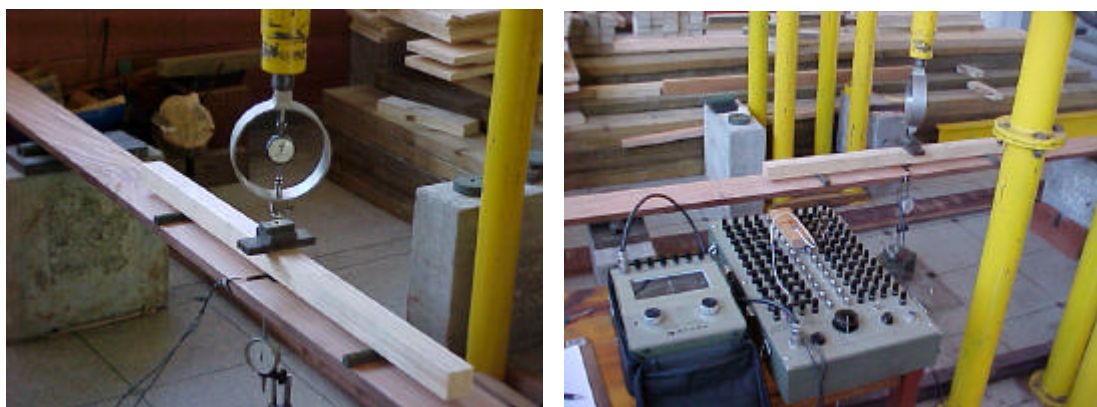
das vigas compostas. Em alguns casos de peças utilizadas para compor as mesas das vigas compostas, o carregamento fora conduzido até o limite de flecha de  $L/100$  e o vão teve de ser reduzido em razão da pequena espessura dos elementos.

A figura 28 ilustra a configuração dos ensaios de caracterização para uma peça utilizada para compor a mesa e outra peça utilizada para compor a alma de uma peça composta.



**Figura 28** – Ensaio de flexão em peça de mesa (esquerda) e peça de alma (direita).

O carregamento foi aplicado por meio de cilindro hidráulico fixado em pórtico de reação, montado sobre a laje de reação. O controle de aplicação de carga foi realizado por anel dinamométrico (E.L.E. – Engineering Laboratory Equipment Limited). A medida dos deslocamentos transversais no meio do vão (flecha) foi feita com transdutor mecânico de deslocamento (relógio comparador) com sensibilidade de 0,01 mm da marca MITUTOYO posicionado na face inferior da peça.



**Figura 29** – Sistema de aplicação de carga e relógio comparador (esquerda); Sistema de aquisição de dados KYOWA (direita).

Algumas peças foram instrumentadas com extensômetros elétricos de resistência da marca KYOWA do tipo KFG-10-120-C1-11. Os extensômetros foram colados um na face superior e outro na face inferior das peças, localizados no centro do vão. As leituras das deformações específicas foram feitas por intermédio de um indicador de deformações modelo KYOWA SM-60B acoplado a uma caixa comutadora para 24 pontos modelo KYOWA SS24R (figura 29).

De posse dos valores de pares de força aplicada e o correspondente deslocamento transversal no meio do vão, foram determinados os módulos de elasticidade a flexão ( $E_{M, flecha}$ ) de vigas bi-apoiadas com cargas concentradas nos terços do vão, de acordo com a seguinte equação:

$$E_{M, flecha} = \frac{23 \cdot L^3 \cdot \Delta F}{1296 \cdot I \cdot \Delta \delta} \quad (111)$$

Onde:

L – vão

$\Delta F$  – variação da força

I – momento de inércia da peça

$\Delta \delta$  – variação da flecha

Para a determinação do módulo de elasticidade à flexão obtidos pelos extensômetros, foi utilizada a seguinte equação:

$$E_{M, ext. x} = \frac{h \cdot L \cdot \Delta F}{12 \cdot I \cdot \Delta \epsilon} \quad (112)$$

Onde:

h – altura da peça

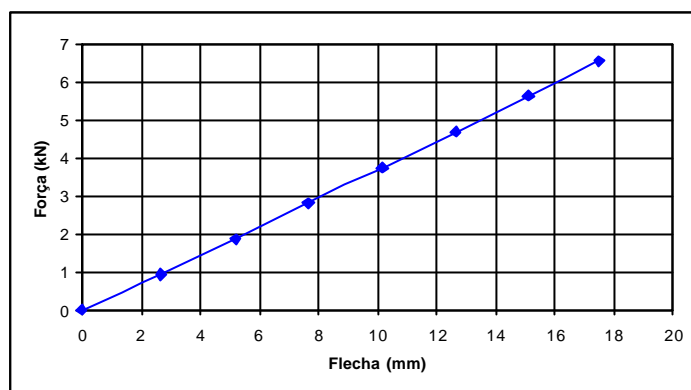
L – vão do ensaio

$\Delta F$  – variação da força

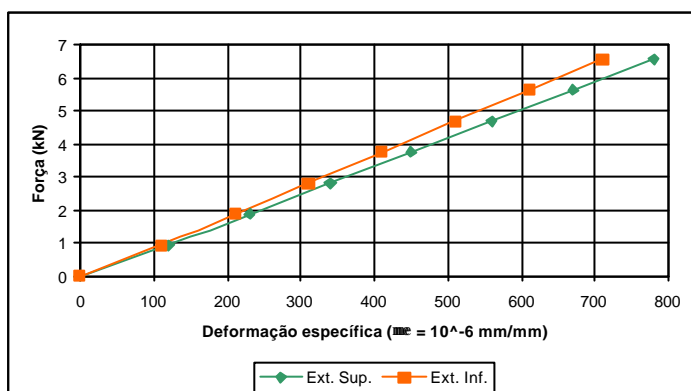
I – momento de inércia da peça

$\Delta \epsilon$  – variação da deformação específica

A seguir são apresentados os diagramas de força x flecha e força x deformação específica de uma das peças testadas, com o propósito de ilustrar o comportamento.



*Figura 30 – Diagrama força x flecha do ensaio de flexão em uma peça (alma).*



*Figura 31 – Diagrama força x deformação específica (extensômetros superior e inferior) do ensaio de flexão em uma peça (alma).*

Os valores dos módulos de elasticidade obtidos destes ensaios são apresentados no item 4.1 do capítulo de resultados.

### 3.4. Montagem das Vigas Compostas

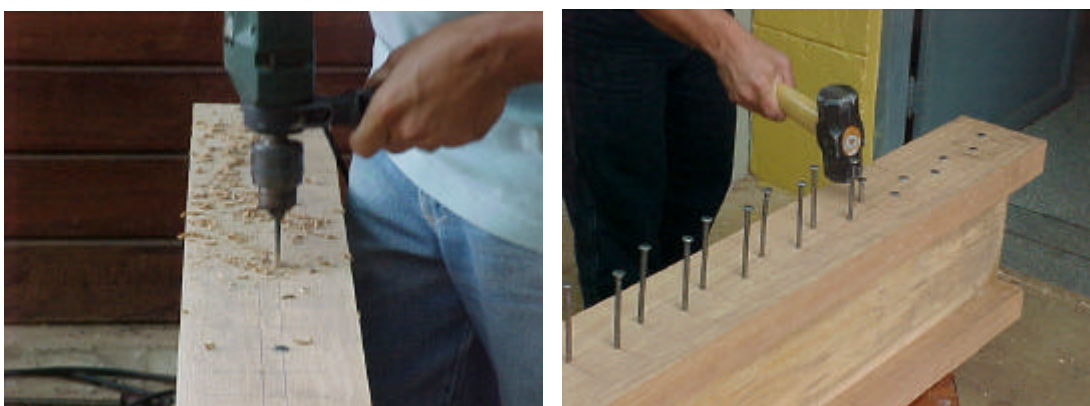
Após os ensaios preliminares de flexão, as peças de madeira (mesa superior, alma e mesa inferior) foram posicionadas, conforme projeto, de modo a constituir as vigas compostas. As peças justapostas foram fixadas provisoriamente por grampos, enquanto ocorria a pré-furação e pregação de alguns pinos para o correto posicionamento e alinhamento das peças (figura 32).



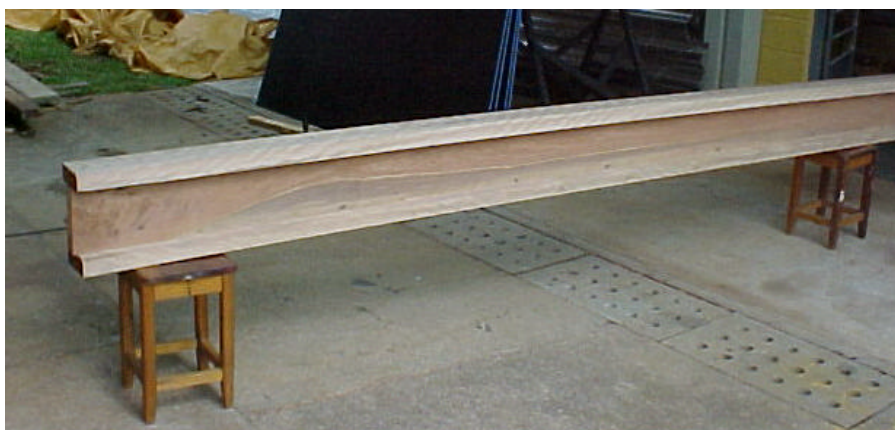


*Figura 32 – Fixação das peças de madeira.*

Após a retirada dos grampos, foi realizada a montagem efetiva destes elementos estruturais, mediante pré-furação e instalação de todos os conectores ao longo das vigas (figura 33). A figura 34 ilustra uma das vigas compostas após o término da montagem.



*Figura 33 – Pré-furação e cravação dos pregos.*



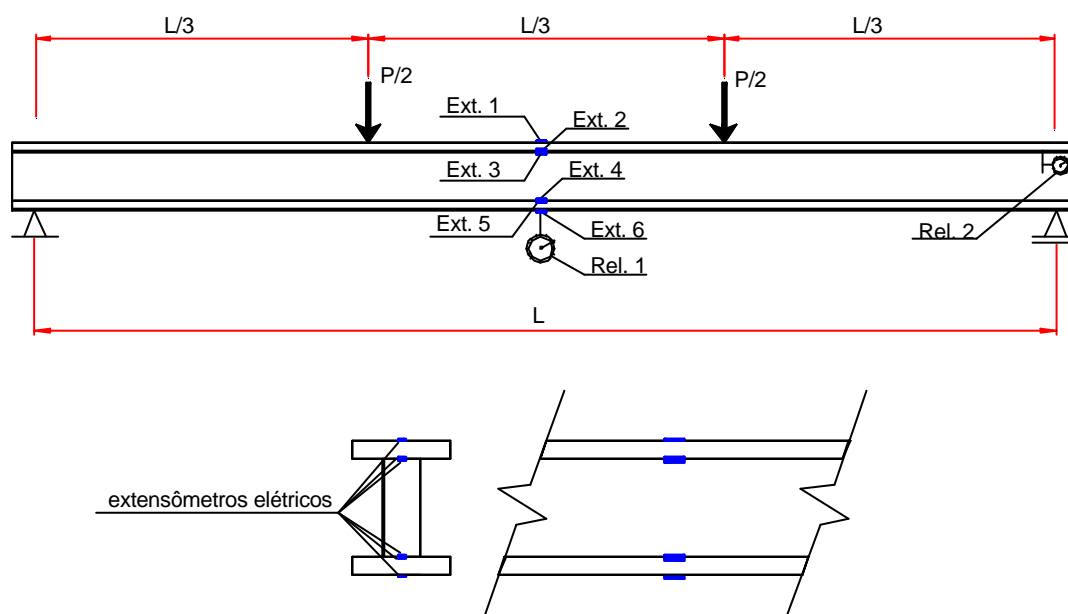
*Figura 34 – Viga após o término da montagem.*



Os espaçamentos e diâmetro dos pregos para cada viga são indicados na tabela 3. Para pré-furação foram utilizadas brocas com diâmetro de 5,0 mm para pregos com bitola 22 x 48 e 22 x 42, e de 3,0 mm para os pregos 18 x 30. Estes diâmetros correspondem a 0,85 do diâmetro efetivo dos pregos utilizados, aproximadamente.

### 3.5. Ensaio das Vigas Compostas

Os ensaios de flexão em vigas compostas de seção I simétrica, formadas por peças de seções comerciais, solidarizadas continuamente por pregos, foram conduzidos com esquema estático de viga simplesmente apoiada, com aplicação de forças concentradas e iguais, localizadas a mesma distância de suas reações, igual a  $L/3$  do vão, conforme ilustra a figura 35.



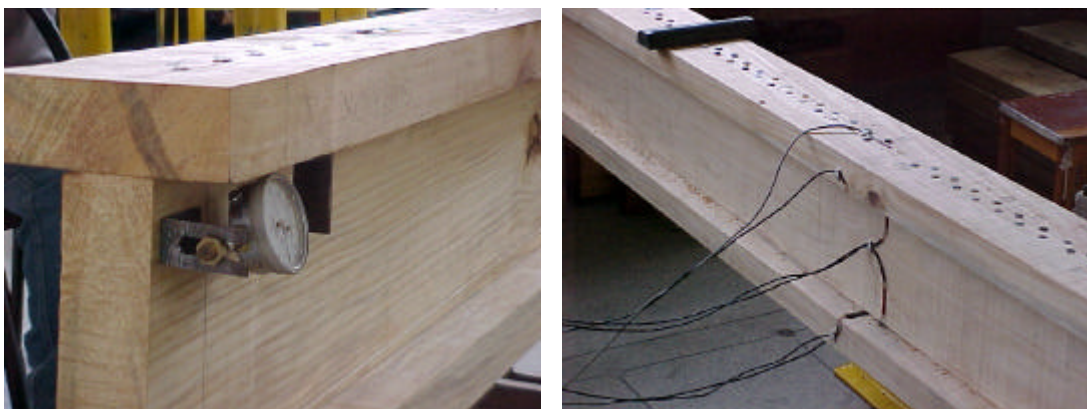
**Figura 35** – Montagem do ensaio em vigas compostas.

De maneira geral, os ensaios consistem no carregamento monotônico da viga e na medida do deslocamento transversal no meio do vão. As medições dos deslocamentos foram feitas por dois relógios comparadores com precisão de 0,01 mm. Um deles foi colocado no centro do vão para as medidas de flecha das vigas. O outro foi ajustado entre a mesa superior e a alma no extremo da viga (apoio), para registrar os escorregamentos máximos entre a mesa e a alma (figura 35).



*Figura 36 – Viga composta posicionada para ensaio.*

Sete vigas foram instrumentadas com extensômetros elétricos, distribuídos nas faces superior e inferior de cada peça, como ilustrado na figura 37, perfazendo um total de seis extensômetros para cada viga. Os resultados obtidos com essa instrumentação são utilizados na avaliação da distribuição de deformações e tensões na viga, que são comparados com os valores obtidos da modelação teórica.



*Figura 37 – Detalhe de instrumentação das vigas.*

Para avaliação da rigidez à flexão foram realizados três ciclos de carregamento, tendo sido registrados os valores observados no último ciclo. Estes carregamentos foram conduzidos até o limite de flecha  $L/200$  para todas as vigas, de forma a não exceder o regime elástico do material. Ao final do terceiro ciclo, após a retirada dos relógios comparadores, as vigas foram conduzidas à ruptura (figura 38).



*Figura 38 – Comportamento de duas vigas compostas próximo à ruptura.*

Os resultados dos ensaios em vigas compostas estão apresentados no item 4.2 do capítulo de resultados.

### **3.6. Ensaio de Caracterização da Madeira**

Os ensaios de caracterização das propriedades físicas e mecânicas de cada peça de madeira foram realizados de acordo com as especificações do Anexo B da norma NBR 7190/97 para caracterização simplificada. Os corpos-de-prova foram extraídos da parte íntegra das vigas compostas após a ruptura.

Os ensaios considerados relevantes para análise foram:

- Umidade e densidade;
- Compressão paralela às fibras;
- Tração paralela às fibras;
- Cisalhamento.

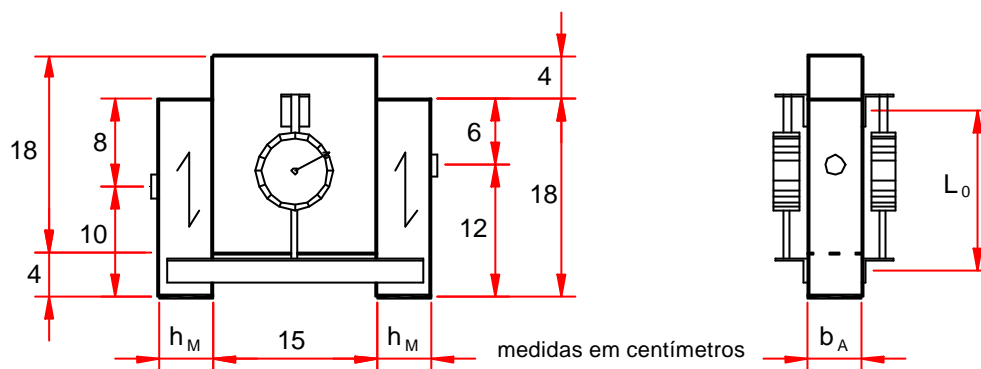
As médias e os respectivos coeficientes de variação dos resultados obtidos nos ensaios de seis corpos-de-prova são apresentadas no item 4.3 do capítulo de resultados.

### **3.7. Ensaio de Ligações**

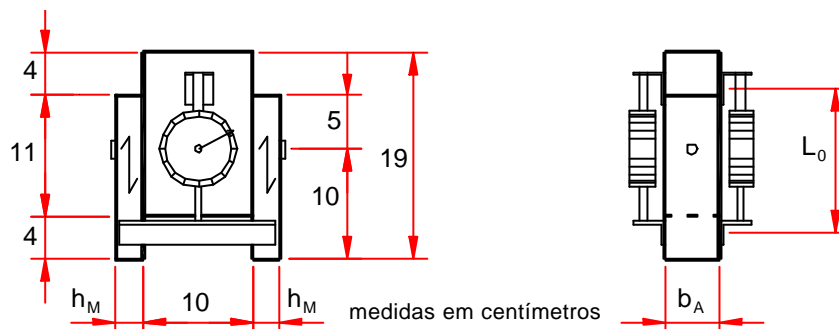
Estes ensaios têm por objetivo avaliar o módulo de deslizamento K (slip moduli), por meio ensaios de ligações, para efeito de comparação com os resultados utilizados na análise

teórica. As dimensões dos corpos-de-prova foram estabelecidas de modo a representar a configuração alma/mesa/diâmetro do pino utilizada em cada viga.

Desta forma, foram utilizadas duas configurações de corpos-de-prova. O corpo-de-prova tipo 1 ilustrado na figura 39, foi utilizado na determinação do módulo de deslizamentos para as vidas P2, P3, C1, C2 e C3. Já para as vigas A1, A2, A3 e P1, foi utilizado o corpo-de-prova tipo 2 da figura 40.



**Figura 39** – Dimensões dos corpos-de-prova de ligação tipo 1.



**Figura 40** – Dimensão dos corpos-de-prova de ligação tipo 2.

A dimensão  $h_M$  (altura da mesa) varia, tendo dimensão nominal de 5 cm para os corpos-de-prova tipo 1, e de 2,5 cm para os corpos-de-prova tipo 2. A largura da alma ( $b_A$ ) têm dimensão nominal igual a 5 cm, para os dois tipos de corpos-de-prova. Optou-se pela configuração com dois pinos metálicos, com um plano de corte em cada um, como mostrado nas figuras 39 e 40.

Para esta configuração, o valor da base de medida  $L_0$  é 14d, segundo a recomendação da NBR 7190/97.

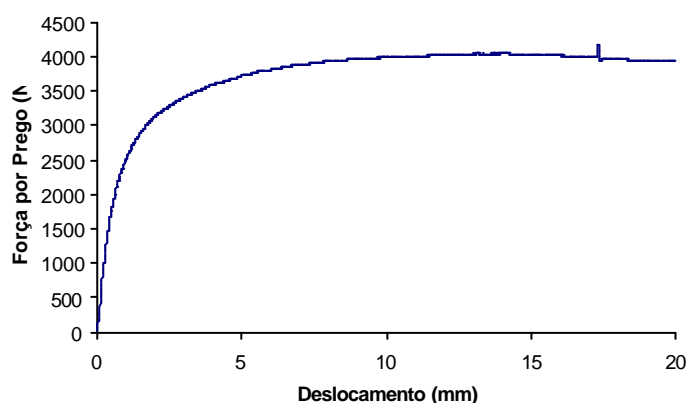
Os corpos-de-prova são instrumentados seguindo as recomendações do Anexo C da NBR 7190/97. Essa instrumentação consiste em dois relógios comparadores, posicionados e lados opostos do corpo-de-prova, onde uma extremidade do relógio comparador está fixada na peça central (alma) e a outra nas peças laterais (mesas). Para o cálculo do módulo de deslizamento  $K$  foi utilizado a média entre os dois valores.



**Figura 41** – Configuração do ensaio de ligação para corpo-de-prova tipo 1 e 2.

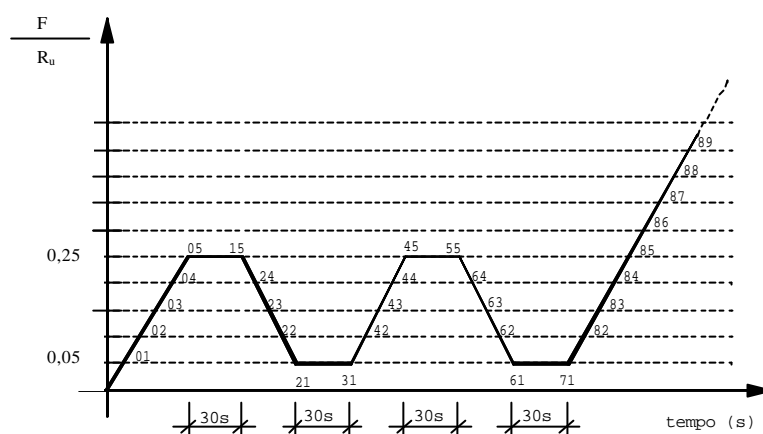
Os ensaios para a determinação do valor do módulo de deslizamento ( $K$ ) das ligações foram conduzidos de três formas distintas.

Os corpos-de-prova da viga P2 foram ensaiados com carregamento monotônico crescente sem ciclo. Para estes corpos-de-prova o valor do “slip moduli” foi determinado pela inclinação da reta secante à curva força x deslocamento, definida pelos pontos ( $F_{10\%}$ ;  $\delta_{10\%}$ ) e ( $F_{50\%}$ ;  $\delta_{50\%}$ ) correspondentes respectivamente a 10% e 50% da resistência convencional da ligação ( $R_{2\%}$ ). A figura 42 ilustra o comportamento típico do ensaio em um corpo-de-prova utilizando este procedimento.

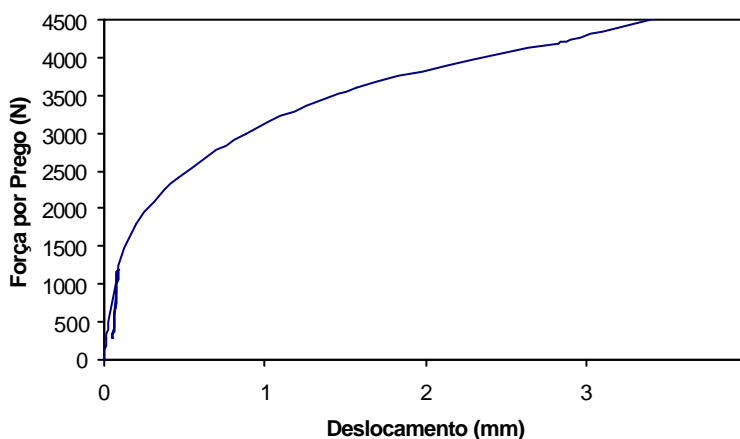


**Figura 42** – Diagrama força x deslocamento do ensaio de ligação – CP3 viga P2.

Os corpos-de-prova das vigas P3, C1, C2 e C3 foram ensaiados com carregamento aplicado com dois ciclos de carga e descarga conforme figura 43. Para estes corpos-de-prova o valor do “slip modulus” foi determinado pela inclinação da reta secante à curva força x deslocamento, definida pelos pontos  $(F_{10\%}; \delta_{10\%})$  e  $(F_{50\%}; \delta_{50\%})$  correspondentes respectivamente a 10% e 50% da resistência convencional da ligação ( $R_{2\%}$ ) no último ciclo de carregamento. A figura 44 ilustra o comportamento típico do ensaio em um corpo-de-prova utilizando este procedimento.



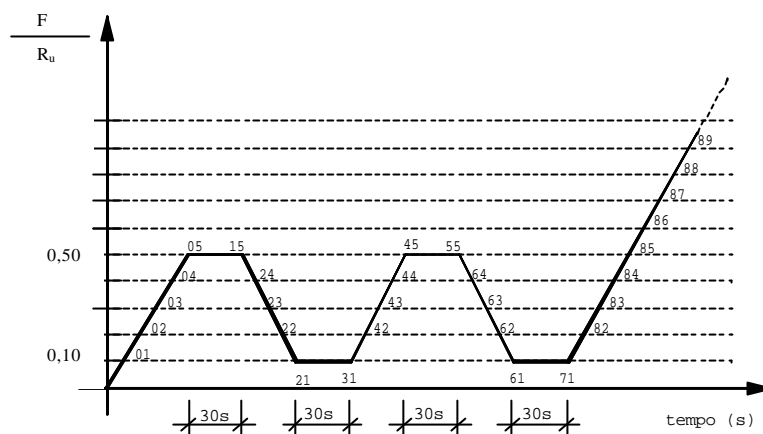
**Figura 43** – Diagrama de carregamento para ensaios em corpos-de-prova de ligação das vigas P3, C1, C2 e C3. Adaptado da NBR 7190 (1997).



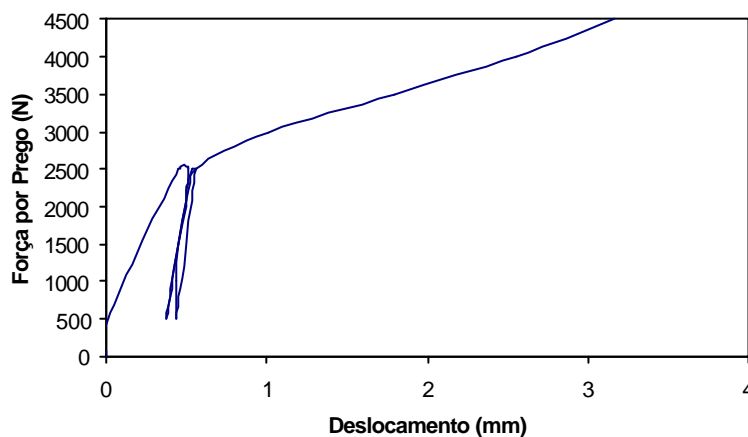
**Figura 44** – Diagrama força x deslocamento do ensaio de ligação – CP3 viga C3.

Os corpos-de-prova das vigas P1, A1, A2 e A3 foram ensaiados com carregamento aplicado com dois ciclos de carga e descarga conforme figura 45. Para estes corpos-de-prova o valor do “slip modulus” foi determinado pela inclinação da reta secante à curva força x deslocamento, definida pelos pontos  $(F_{10\%}; \delta_{10\%})$  e  $(F_{50\%}; \delta_{50\%})$  correspondentes

respectivamente a 10% e 50% da resistência máxima da ligação ( $R_u$ ) no último ciclo de carregamento. A figura 46 ilustra o comportamento típico do ensaio em um corpo-de-prova utilizando este procedimento.



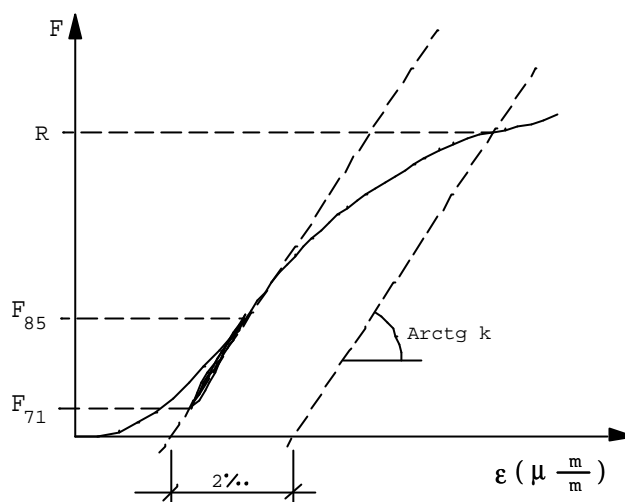
**Figura 45** – Diagrama de carregamento para ensaios em corpos-de-prova de ligação das vigas P1, A1, A2 e A3. Adaptado da NBR 7190 (1997).



**Figura 46** – Diagrama força x deslocamento do ensaio de ligação – CP3 viga A2.

O valor da resistência convencional da ligação ( $R_{2\%}$ ) é determinado a partir do diagrama força x deformação específica da ligação definido como a força aplicada ao corpo-de-prova para uma deformação específica residual de 2‰, medida sob a base de referência  $L_0$  (figura 47).

Os valores de módulo de deslizamento ( $K$ ), resistência convencional ( $R_{2\%}$ ) e resistência máxima da ligação ( $R_u$ ) são apresentados no item 4.4 do capítulo de resultados.



**Figura 47** – Diagrama força x deformação específica do ensaio de ligação. Fonte: NBR 7190 (1997).

### 3.8. Ensaio dos Pregos

Os valores da tensão de escoamento e da resistência máxima à tração do aço dos pregos foram determinados por ensaios de tração simples, e realizados na Máquina Universal de Ensaio DARTEC, com capacidade de 100 kN, do Laboratório de Madeiras e de Estruturas de Madeiras.

O ensaio foi conduzido com carregamento monotônico crescente com taxa de incremento não superior a 10 MPa/s segundo recomendações da NBR 6152/92.

Como o material não apresenta patamar de escoamento no diagrama de tensão x deformação específica, o valor da tensão de escoamento ( $f_y$ ) foi determinada como a tensão que produz uma deformação residual (não elástica) de 2‰, e o valor da resistência máxima à tração ( $f_u$ ) foi determinada pelo valor da máxima tensão suportada pelo corpo-de-prova até a ruptura, conforme recomendações da NBR 6207/82.



## 4. RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos do programa experimental realizado nesta pesquisa. Os respectivos procedimentos de ensaios foram descritos no capítulo 3 - Materiais e Métodos. Os resultados estão apresentados em forma de tabelas onde se encontram os valores mais relevantes para futura análise no capítulo 5.

### 4.1. Ensaios Preliminares de Flexão Estática

Na tabela 4 estão indicados os resultados dos ensaios preliminares realizados para cada peça individual utilizada para compor as vigas compostas. Foram obtidos três valores de módulo de elasticidade à flexão para cada peça. O resultados indicados na coluna  $E_{M, flecha}$  foram obtidos com os pares de força aplicada e o correspondente deslocamento transversal no meio do vão. As colunas  $E_{M, ext. sup.}$  e  $E_{M, ext. inf.}$  indicam os resultados obtidos de pares de força aplicada e a correspondente deformação específica dos extensômetros superior e inferior respectivamente. Estes resultados de módulo de elasticidade são utilizados para a análise de comportamento das vigas compostas.

*Tabela 4: Módulo de elasticidade das peças individuais das vigas compostas.*

Viga	Peça	Dimensões (b x h) (cm)	Comp. (cm)	Vão do ensaio (cm)	$E_{M, flecha}$	$E_{M, ext. sup.}$	$E_{M, ext. inf.}$
A1	Mesa Sup.	15,50 x 2,50	380	220	14981	12826	14575
	Alma	5,60 x 15,10		370	21246	24726	27198
	Mesa Inf.	15,50 x 2,50		220	14731	13942	14252
A2	Mesa Sup.	15,50 x 2,50	380	220	15627	17333	17333
	Alma	5,60 x 15,10		370	18247	18377	19427
	Mesa Inf.	15,50 x 2,50		220	15127	14575	18323
A3	Mesa Sup.	15,50 x 2,50	380	220	15881	-----	-----
	Alma	5,60 x 15,10		370	21700	-----	-----
	Mesa Inf.	15,50 x 2,50		220	16895	-----	-----

Viga	Peça	Dimensões (b x h) (cm)	Comp. (cm)	Vão do ensaio (cm)	$E_{M, flecha}$	$E_{M, ext. sup.}$	$E_{M, ext. inf.}$
C1	Mesa Sup.	13,50 x 5,10			10234	10891	10693
	Alma	5,00 x 18,40	400	390	8957	10297	9010
	Mesa Inf.	13,50 x 5,10			8933	8554	9602
C2	Mesa Sup.	13,50 x 5,10			8920	10693	10228
	Alma	5,00 x 18,40	400	390	12143	12910	13515
	Mesa Inf.	13,50 x 5,10			10665	10228	10693
C3	Mesa Sup.	13,50 x 5,10			7546	-----	-----
	Alma	5,00 x 18,40	400	390	9717	-----	-----
	Mesa Inf.	13,50 x 5,10			8316	-----	-----
P1	Mesa Sup.	16,00 x 2,55		150	7750	9787	8775
	Alma	5,80 x 15,80	310	300	12903	13891	13260
	Mesa Inf.	16,00 x 2,55		150	7507	8209	8209
P2	Mesa Sup.	15,50 x 5,30			11050	11160	10739
	Alma	5,65 x 18,90	400	390	8831	7955	9966
	Mesa Inf.	15,50 x 5,30			9785	10163	11160
P3	Mesa Sup.	15,00 x 5,05			7081	7657	5016
	Alma	5,65 x 19,65	400	390	8208	8177	9744
	Mesa Inf.	15,00 x 5,05			7794	11767	11335

## 4.2. Ensaio das Vigas Compostas

A seguir são apresentados os resultados dos ensaios das nove vigas compostas, em forma de tabelas. Os valores de força aplicada são indicados na primeira coluna. As respectivas leituras de deformações específicas dos extensômetros são indicadas nas colunas (Ext.1,2,3,4,5 e 6). Os valores com sinal (-) indicam compressão. O deslizamento máximo entre as peças é indicado na coluna (Rel.1), e a flecha na coluna (Rel. 2). A partir de certo valor da força aplicada, com o intuito de evitar danos, os relógios comparadores foram retirados e as leituras de flecha foram registradas por meio de régua posicionada na lateral da viga no centro do vão. Ao final de cada tabela encontra-se o valor de ruptura das vigas.





**Tabela 7: Resultados do ensaio de flexão da viga A3.**

<b>Viga A3 – Angelim Pedra Verdadeiro</b>			
Força (kN)	Rel. 1 (mm/100)	Rel. 2 (mm/100)	Régua (mm)
0	0	0	0
2,16	1	190	-----
4,33	2	360	-----
6,49	4	515	-----
8,66	5	675	-----
10,82	6	840	-----
12,99	8	1010	-----
15,15	10	1180	-----
17,32	12	1350	-----
19,48	15	1530	-----
21,65	19	1720	-----
23,81	25	1925	-----
25,98	31	2130	-----
28,14	37	2350	-----
30,30	-----	-----	25
32,47	-----	-----	28
34,63	-----	-----	30
36,80	-----	-----	32
38,96	-----	-----	34
41,13	-----	-----	36
43,29	-----	-----	40
45,46	-----	-----	43
47,62	-----	-----	45
49,79	-----	-----	48
51,95	-----	-----	53
54,12	-----	-----	56
56,28	-----	-----	60
58,44	-----	-----	63
60,61	-----	-----	68
62,77	-----	-----	72
64,94	-----	-----	78
67,10	-----	-----	82
69,27	-----	-----	88
73,60		Ruptura	

**Tabela 8: Resultados do ensaio de flexão da viga C1.**

<b>Viga C1 - Cedrilho</b>										
Força (kN)	Ext. 1 ( $\mu\epsilon$ )	Ext. 2 ( $\mu\epsilon$ )	Ext. 3 ( $\mu\epsilon$ )	Ext. 4 ( $\mu\epsilon$ )	Ext. 5 ( $\mu\epsilon$ )	Ext. 6 ( $\mu\epsilon$ )	Rel. 1 (mm/100)	Rel. 2 (mm/100)	Régua (mm)	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4,33	-160	-100	-110	130	130	180	3	280	-----	
8,66	-310	-190	-200	250	240	350	8	595	-----	
12,99	-460	-290	-300	380	350	510	18	940	-----	
17,32	-620	-380	-410	520	460	690	29	1395	-----	
21,65	-780	-490	-520	660	580	850	43	1670	-----	
25,98	-930	-590	-650	810	690	1010	60	2090	-----	
30,30	-1110	-680	-780	970	780	1150	94	2525	-----	
34,63	-1250	-780	-950	1180	860	1340	-----	-----	32	
38,96	-1410	-830	-1160	1410	960	1500	-----	-----	38	
43,29	-1590	-880	-1430	1710	1000	1700	-----	-----	50	
47,62	-1750	-880	-1750	2000	1030	1870	-----	-----	60	
51,95	-1910	-850	-2100	2350	1030	2050	-----	-----	67	
56,28	-2100	-850	-2280	2730	990	2220	-----	-----	83	
60,61	-2280	-820	-3050	3060	870	2350	-----	-----	93	
70,89					Ruptura					

**Tabela 9:** Resultados do ensaio de flexão da viga C2.

<b>Viga C2 – Cedrilho</b>										
Força (kN)	Ext. 1 ( $\mu\epsilon$ )	Ext. 2 ( $\mu\epsilon$ )	Ext. 3 ( $\mu\epsilon$ )	Ext. 4 ( $\mu\epsilon$ )	Ext. 5 ( $\mu\epsilon$ )	Ext. 6 ( $\mu\epsilon$ )	Rel. 1 (mm/100)	Rel. 2 (mm/100)	Régua (mm)	
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
4,33	-200	-100	-100	130	130	180	2	300	-----	
8,66	-350	-200	-200	250	250	330	6	613	-----	
12,99	-500	-330	-330	380	380	480	14	945	-----	
17,32	-630	-430	-430	500	450	630	23	1290	-----	
21,65	-800	-500	-550	650	550	750	36	1658	-----	
25,98	-980	-630	-700	800	650	900	54	2055	-----	
30,30	-1130	-750	-850	930	750	1050	88	2600	-----	
34,63	-1330	-880	-1000	1080	880	1180	-----	-----	34	
38,96	-1500	-930	-1150	1230	980	1380	-----	-----	41	
43,29	-1650	-1000	-1330	1400	1050	1500	-----	-----	47	
47,62	-1850	-1100	-1550	1600	1130	1650	-----	-----	59	
51,95	-2000	-1180	-1850	1880	1230	1800	-----	-----	69	
56,28	-2230	-1230	-2100	2100	1300	2000	-----	-----	80	
60,61	-2400	-1250	-2400	2350	1380	2130	-----	-----	-----	
63,86					Ruptura					

**Tabela 10: Resultados do ensaio de flexão da viga C3.**

<b>Viga C3 - Cedrilho</b>			
Força (kN)	Rel. 1 (mm/100)	Rel. 2 (mm/100)	Régua (mm)
0	0	0	0
4,33	2	330	-----
8,66	5	665	-----
12,99	13	1030	-----
17,32	22	1400	-----
21,65	32	1800	-----
25,98	43	2200	-----
30,30	65	2720	-----
34,63	-----	-----	34
38,96	-----	-----	38
43,29	-----	-----	46
47,62	-----	-----	54
51,95	-----	-----	63
54,12	-----	-----	70
58,44	-----	-----	76
62,77	-----	-----	80
63,31		Ruptura	



*Tabela 11: Resultados do ensaio de flexão da viga P1.*

<b>Viga P1 – Pinus Hondurensis</b>								
Força (kN)	Ext. 1 (μ€)	Ext. 2 (μ€)	Ext. 3 (μ€)	Ext. 4 (μ€)	Ext. 5 (μ€)	Ext. 6 (μ€)	Rel. 1 (mm/100)	Rel. 2 (mm/100)
0	0	0	0	0	0	0	0	0
2,16	-120	-120	-120	140	140	170	0	170
4,33	-240	-190	-220	240	240	310	2	350
6,49	-360	-310	-340	360	340	430	5	530
8,66	-460	-380	-460	500	460	550	9	730
10,82	-600	-530	-580	620	580	700	12	900
12,99	-720	-650	-670	740	670	820	15	1065
15,15	-820	-740	-820	860	770	940	20	1250
17,32	-960	-860	-960	1030	910	1080	22	1440
19,48	-1080	-980	-1080	1180	1000	1200	30	1660
21,65	-1200	-1080	-1200	1320	1100	1340	40	1900
25,98	-1420	-1300	-1510	1680	1320	1610	65	2405
30,30	-1680	-1540	-1870	2040	1540	1870	94	2970
34,63	-1880	-1680	-2280	2450	1680	2110	135	3641
38,96	-2110	-1900	-2740	2880	Ruptura		190	4474



*Tabela 13: Resultados do ensaio de flexão da viga P3.*

<b>Viga P3 – Pinus Hondurensis</b>									
Força (kN)	Ext. 1 (µε)	Ext. 2 (µε)	Ext. 3 (µε)	Ext. 4 (µε)	Ext. 5 (µε)	Ext. 6 (µε)	Rel. 1 (mm/100)	Rel. 2 (mm/100)	Régua (mm)
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2,16	-110	-110	-80	40	40	70	0	145	-----
4,33	-210	-200	-140	80	80	130	0	272	-----
6,49	-300	-290	-210	120	120	190	1	400	-----
8,66	-390	-370	-280	150	160	250	2	530	-----
10,82	-480	-460	-340	190	200	310	3	660	-----
12,99	-580	-560	-410	230	240	370	5	795	-----
15,15	-670	-650	-480	270	270	430	8	935	-----
17,32	-770	-740	-550	310	310	490	11	1075	-----
19,48	-850	-830	-620	340	350	550	13	1215	-----
21,65	-950	-940	-690	380	380	610	17	1350	-----
23,81	-1020	-1050	-770	430	420	670	24	1530	-----
25,98	-1100	-1180	-840	470	460	730	30	1700	-----
28,14	-1190	-1300	-920	510	500	790	36	1875	-----
30,30	-1290	-1410	-980	560	530	850	43	2040	-----
32,47	-1390	-1530	-1060	600	570	910	50	2220	-----
34,63	-1490	-1640	-1130	650	610	980	58	-----	24
36,80	-1600	-1770	-1210	690	650	1040	-----	-----	26
38,96	-1700	-1870	-1280	730	680	1100	-----	-----	28
41,13	-1800	-1980	-1360	780	720	1160	-----	-----	29
55,74									Ruptura

### 4.3. Ensaio de Caracterização da Madeira

Neste item são apresentados os resultados obtidos nos ensaios de caracterização das peças de madeira. Após a realização dos ensaios de flexão das vigas compostas foram extraídos os corpos-de-prova para a caracterização de cada peça. As tabelas indicam os valores médios e os respectivos coeficientes de variação obtidos em uma série de seis ensaios. Os valores de rigidez e resistência não foram corrigidos para a umidade padrão de 12%, para efeito de comparação na análise das vigas.

**Tabela 14: Médias e coeficiente de variação (%) - Angelim Pedra Verdadeiro.**

Prop.	Vigas de Angelim Pedra Verdadeiro					
	A1		A2		A3	
	Alma	Mesas	Alma	Mesas	Alma	Mesas
U (%)	14,6 (2,5%)	16,3 (2,6%)	14,2 (3,2%)	13,0 (4,3%)	13,9 (3,2%)	14,0 (2,3%)
$\rho_{\text{ap, verde}}$ (kg/m <sup>3</sup> )	1070 (2,0%)	985 (1,2%)	1157 (1,2%)	1068 (0,7%)	1110 (1,6%)	1073 (0,8%)
$\rho_{\text{ap (12%)}}$ (kg/m <sup>3</sup> )	1070 (2,0%)	983 (1,2%)	1157 (1,2%)	1068 (0,7%)	1110 (1,6%)	1073 (0,8%)
$f_{c0}$ (MPa)	87,1 (4,6%)	66,9 (4,2%)	76,9 (7,8%)	68,3 (3,2%)	73,3 (1,8%)	72,1 (10,4%)
$f_{t0}$ (MPa)	77,9 (10,4%)	80,3 (18,9%)	86,1 (17,9%)	99,1 (10,5%)	79,1 (16,7%)	72,6 (16,6%)
$f_v$ (MPa)	15,5 (9,3%)	-----	21,2 (13,5%)	-----	19,1 (7,5%)	-----
$E_{c0}$ (MPa)	26496 (9,0%)	16951 (5,8%)	20626 (12,9%)	18413 (10,4%)	21307 (12,7%)	23273 (10,9%)
$E_{t0}$ (MPa)	19309 (7,4%)	16180 (18,4%)	16631 (15,7%)	18968 (7,7%)	17334 (12,1%)	18358 (11,1%)

*Tabela15: Médias e coeficiente de variação (%) - Cedrilho.*

Prop.	Vigas de Cedrilho								
	C1			C2			C3		
	Mesa Sup.	Alma	Mesa Inf.	Mesa Sup.	Alma	Mesa Inf.	Mesa Sup.	Alma	Mesa Inf.
U (%)	26,8 (3,2%)	24,9 (8,8%)	46,7 (2,2%)	39,1 (3,0%)	20,2 (5,7%)	23,8 (1,7%)	17,3 (6,4%)	18,0 (3,9%)	16,7 (9,5%)
$\rho_{ap, verde}$ (kg/m <sup>3</sup> )	720 (1,0%)	680 (2,9%)	770 (0,7%)	725 (0,8%)	558 (1,3%)	677 (1,8%)	577 (2,6%)	660 (2,5%)	572 (3,7%)
$\rho_{ap (12\%)}$ (kg/m <sup>3</sup> )	670 (0,9%)	640 (1,2%)	655 (1,6%)	715 (0,7%)	533 (1,5%)	657 (1,8%)	562 (2,1%)	645 (1,9%)	557 (4,0%)
$f_{c0}$ (MPa)	39,0 (7,7%)	29,4 (6,4%)	36,7 (10,5%)	31,2 (7,7%)	25,6 (0,9%)	33,3 (3,3%)	31,5 (2,7%)	30,4 (9,8%)	33,6 (5,9%)
$f_{i0}$ (MPa)	67,7 (14,5%)	50,3 (17,3%)	66,3 (16,5%)	75,5 (9,4%)	54,8 (1,7%)	96,1 (4,7%)	40,3 (17,0%)	65,1 (7,2%)	46,0 (10,1%)
$f_v$ (MPa)	-----	8,3 (12,9%)	-----	-----	6,3 (15,9%)	-----	-----	8,3 (9,7%)	-----
$E_{c0}$ (MPa)	10820 (7,8%)	9130 (11,8%)	9594 (15,5%)	10446 (13,8%)	12323 (4,6%)	11664 (8,0%)	9517 (10,6%)	9109 (14,1%)	9917 (15,2%)
$E_{i0}$ (MPa)	10513 (7,3%)	8721 (15,1%)	9202 (12,9%)	9801 (7,9%)	11680 (3,2%)	11686 (5,8%)	7570 (10,4%)	11832 (11,6%)	8536 (8,7%)

**Tabela 16: Médias e coeficiente de variação (%) - Pinus Hondurensis.**

Prop.	Vigas de Pinus Hondurensis							
	P1		P2			P3		
	Alma	Mesas	Mesa Sup.	Alma	Mesa Inf.	Mesa Sup.	Alma	Mesa Inf.
U (%)	21,5 (2,1%)	17,1 (1,4%)	15,7 (1,6%)	14,4 (3,8%)	14,3 (0,6%)	13,8 (1,9%)	14,4 (3,0%)	14,2 (5,0%)
$\rho_{\text{ap, verde}}$ (kg/m <sup>3</sup> )	522 (3,0%)	525 (2,6%)	551 (1,5%)	481 (1,2%)	457 (0,8%)	493 (1,4%)	511 (0,9%)	506 (0,5%)
$\rho_{\text{ap}}(12\%)$ (kg/m <sup>3</sup> )	500 (0,6%)	510 (1,2%)	530 (1,4%)	456 (0,8%)	448 (1,9%)	493 (2,6%)	511 (1,6%)	506 (2,7%)
$f_{c0}$ (MPa)	35,0 (5,3%)	39,9 (1,4%)	40,4 (10,2%)	32,0 (5,4%)	36,0 (4,0%)	34,3 (2,7%)	33,9 (4,2%)	33,9 (11,2%)
$f_{t0}$ (MPa)	48,5 (13,4%)	60,3 (3,0%)	75,1 (2,8%)	68,7 (14,1%)	52,5 (9,8%)	83,5 (11,4%)	58,3 (16,7%)	74,3 (15,8%)
$f_v$ (MPa)	8,7 (10,8%)	-----	-----	9,3 (7,2%)	-----	-----	10,3 (15,6%)	-----
$E_{c0}$ (MPa)	10930 (4,0%)	12518 (3,2%)	13280 (7,1%)	12160 (5,2%)	10738 (12,1%)	11323 (10,6%)	9526 (11,5%)	9852 (16,9%)
$E_{t0}$ (MPa)	10433 (12,8%)	13146 (8,0%)	15457 (9,6%)	9727 (3,8%)	9064 (15,1%)	12036 (6,8%)	9479 (18,6%)	13674 (5,4%)

#### 4.4. Ensaios de Ligações

Nas tabelas 17, 18 e 19 são apresentados os valores de módulo de deslizamento (K), resistência máxima ( $R_u$ ) e resistência convencional ( $R_{2\%}$ ) dos corpos-de-prova de ligação.

Os ensaios de ligação para as vigas A1, A2 e A3 foram conduzidos em corpos-de-prova tipo 2 e carregamento aplicado com dois ciclos de carga e descarga, definido pelos níveis de 10% e 50% da resistência máxima. Os ensaios para as vigas C1, C2 e C3 foram conduzidos em corpos-de-prova tipo 1 e carregamento aplicado com dois ciclos de carga e descarga, definido pelos níveis de 5% e 25% da resistência máxima.

Os ensaios para a viga P2 foram conduzidos em corpos-de-prova tipo 2 e carregamento aplicado sem ciclo. Já para as vigas P1 e P3 foram utilizados corpos-de-prova tipo 1 e carregamento aplicado com dois ciclos de carga e descarga, sendo definido pelos níveis de 10% e 50% da resistência máxima para viga P1 e 5% e 25% para a viga P3.

*Tabela 17: Resultados dos ensaios de ligação de Angelim Pedra Verdadeiro.*

Viga	Angelim Pedra Verdadeiro			
	CP	K (N/mm)	R <sub>u</sub> (N)	R <sub>2%</sub> (N)
A1	1	10526	5000	2500
	2	10000	4930	2600
	3	11111	5500	2500
	4	11765	5000	2600
	Média	10850	5110	2550
A2	1	9524	6550	2550
	2	8000	6350	2600
	3	15385	5300	2560
	Média	10970	6070	2570
A3	1	15385	5920	2500
	2	17391	6150	2650
	3	8889	5500	2500
	4	11765	6250	2600
	Média	13358	6000	2560

*Tabela 18: Resultados dos ensaios de ligação de Cedrilho.*

Viga	Cedrilho			
	CP	K (N/mm)	R <sub>u</sub> (N)	R <sub>2%</sub> (N)
C1	1	36000	6830	2350
	2	36000	7350	2750
	3	22500	6500	2350
	4	20000	6120	2250
	Média	28625	6700	2420
C2	1	25714	6750	2350
	2	36000	6620	2250
	3	12857	6500	2500
	4	18000	6380	2150
	Média	23143	6560	2310
C3	1	11250	7100	2700
	2	25714	6430	2400
	3	22500	6220	2250
	Média	19820	6580	2450

**Tabela 19:** Resultados dos ensaios de ligação de *Pinus Hondurensis*.

Viga	Pinus Hondurensis			
	CP	K (N/mm)	R <sub>u</sub> (N)	R <sub>2%</sub> (N)
P1	1	6061	3000	1750
	2	4762	2500	1600
	3	5000	2500	1550
	Média	5274	2670	1630
P2	1	1633	4050	2400
	2	2319	3700	2000
	3	3137	4020	2200
	Média	2363	3920	2200
P3	1	11250	3370	1750
	2	11250	4700	1800
	3	7105	3350	1750
	4	12000	3450	1800
	Média	10401	3710	1780

## 4.5. Ensaio dos Pregos

Na tabela 20 estão indicados os resultados de tensão de escoamento ( $f_y$ ) e resistência máxima ( $f_u$ ) do aço dos pregos determinados por ensaio de tração simples seguindo os procedimentos descritos no item 3.8 do capítulo Materiais e Métodos.

**Tabela 20:** Resultados dos ensaios de tração dos pregos.

CP	$f_y$ (MPa)	$f_u$ (MPa)
1	780	920
2	680	889
3	745	902
Média	735	903



## 5. ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste item são realizadas as avaliações da rigidez efetiva, deformações, tensões e força de ruptura das vigas compostas testadas. Também são feitas comparações entre os métodos de dimensionamento da normas NBR 7190 e EUROCODE 5 para alguns casos comuns de vigas compostas.

### 5.1 – Rigidez Efetiva

A apresentação dos resultados experimentais dos ensaios das vigas em forma de diagramas força x flecha, permite uma visualização clara do desempenho estrutural. Os gráficos assim apresentados, possibilitam uma comparação do comportamento da rigidez de cada viga. Nestes diagramas, para cada viga são indicadas quatro curvas teóricas (Rígida, Livre, NBR e EC5) além dos valores experimentais obtidos dos ensaios.

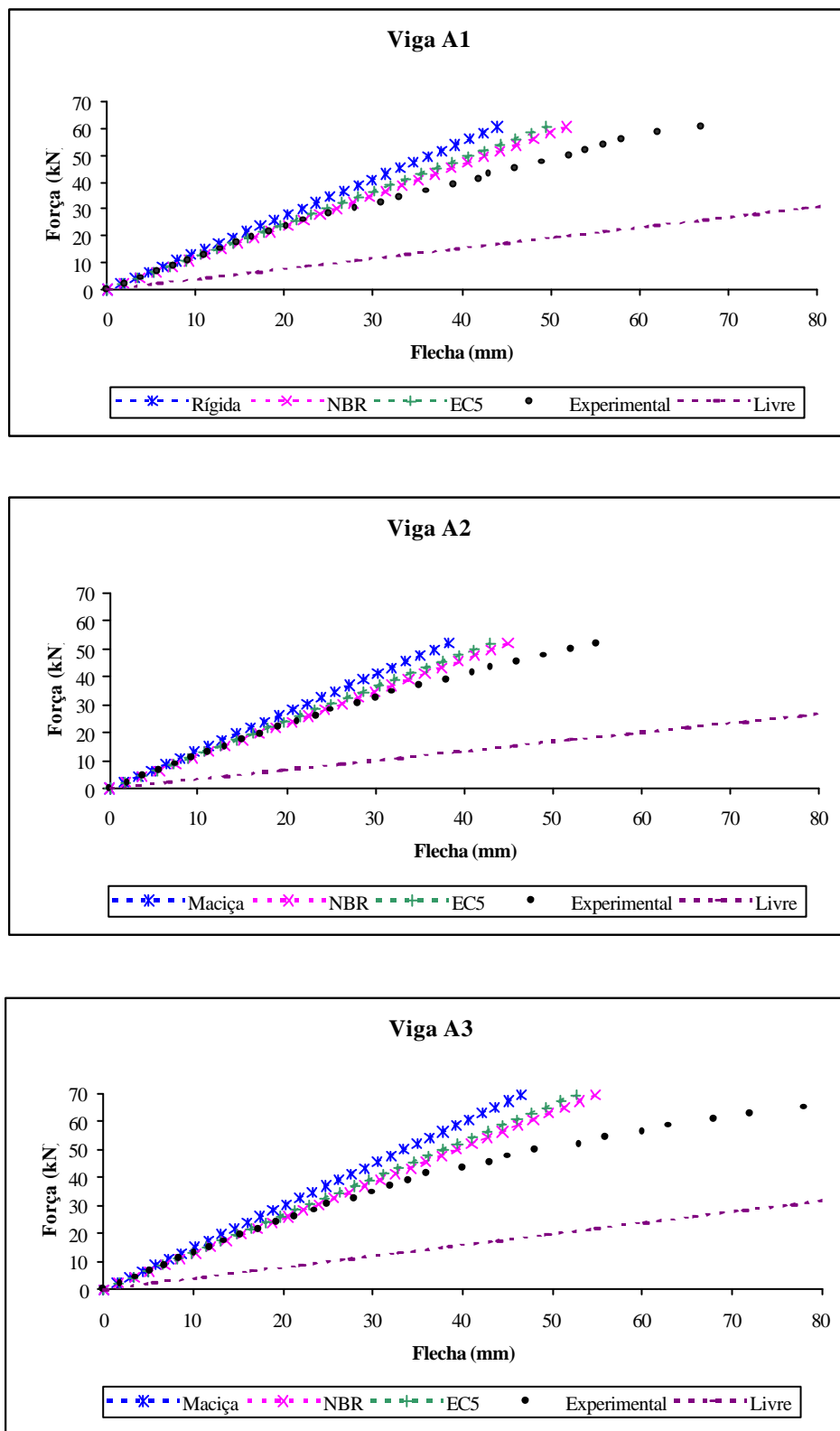
A curva "Rígida" mostra o comportamento da viga composta sob a ótica da teoria clássica da resistência dos materiais, considerando-se uma seção transformada onde a ligação é perfeitamente rígida, adotando para os módulos de elasticidade os valores obtidos dos ensaios de flexão estática preliminares de cada peça ( $E_{M, flecha}$ ).

O comportamento teórico da viga, supondo não haver ligação entre as mesas e a alma, é representado pela curva "Livre". Novamente é considerada a teoria clássica de flexão de vigas adotando os valores  $E_{M, flecha}$  para o módulo de elasticidade à flexão.

Também são apresentados, nas curvas "NBR" e "EC5", os comportamentos da viga de acordo com os procedimentos de cálculo indicados pelas normas NBR 7190/97 e EUROCODE 5/93, respectivamente.

A curva "NBR" foi obtida com a redução da rigidez da viga composta considerando ligação rígida  $(EI)_{Rig}$ , calculado pela multiplicação do coeficiente de eficiência ( $\alpha_r = 0,85$ ). A curva "EC5" foi calculada pelo método de dimensionamento do EUROCODE 5 apresentado no

item 2.5.3 do capítulo Revisão Bibliográfica. O valor do módulo de deslizamento (K) foi obtido com a equação do  $K_{ser}$  do método do EUROCODE 5.



**Figura 48** – Diagramas força x flecha dos ensaios de flexão das vigas de Angelim.

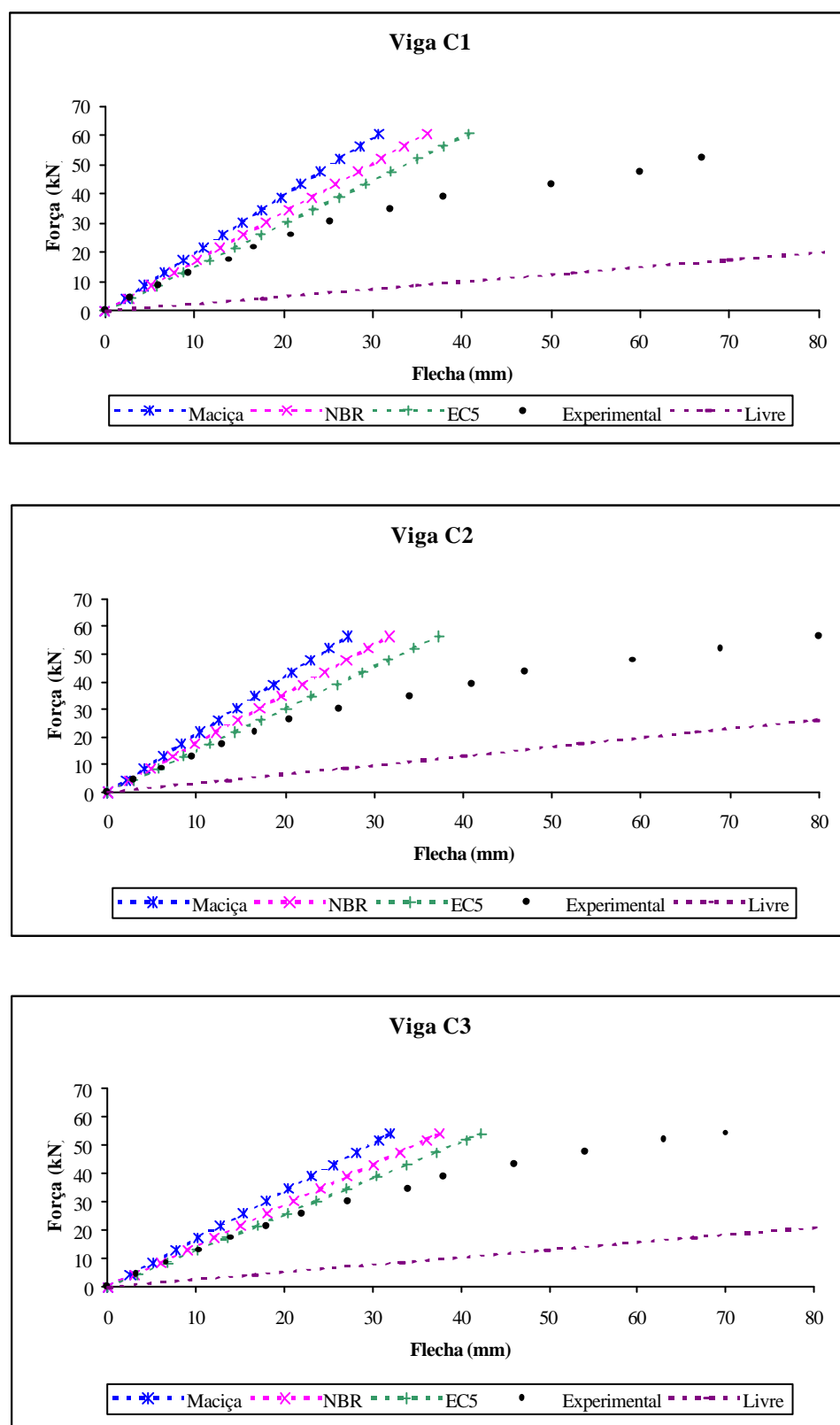


Figura 49 – Diagramas força x flecha dos ensaios de flexão das vigas de Cedrilho.

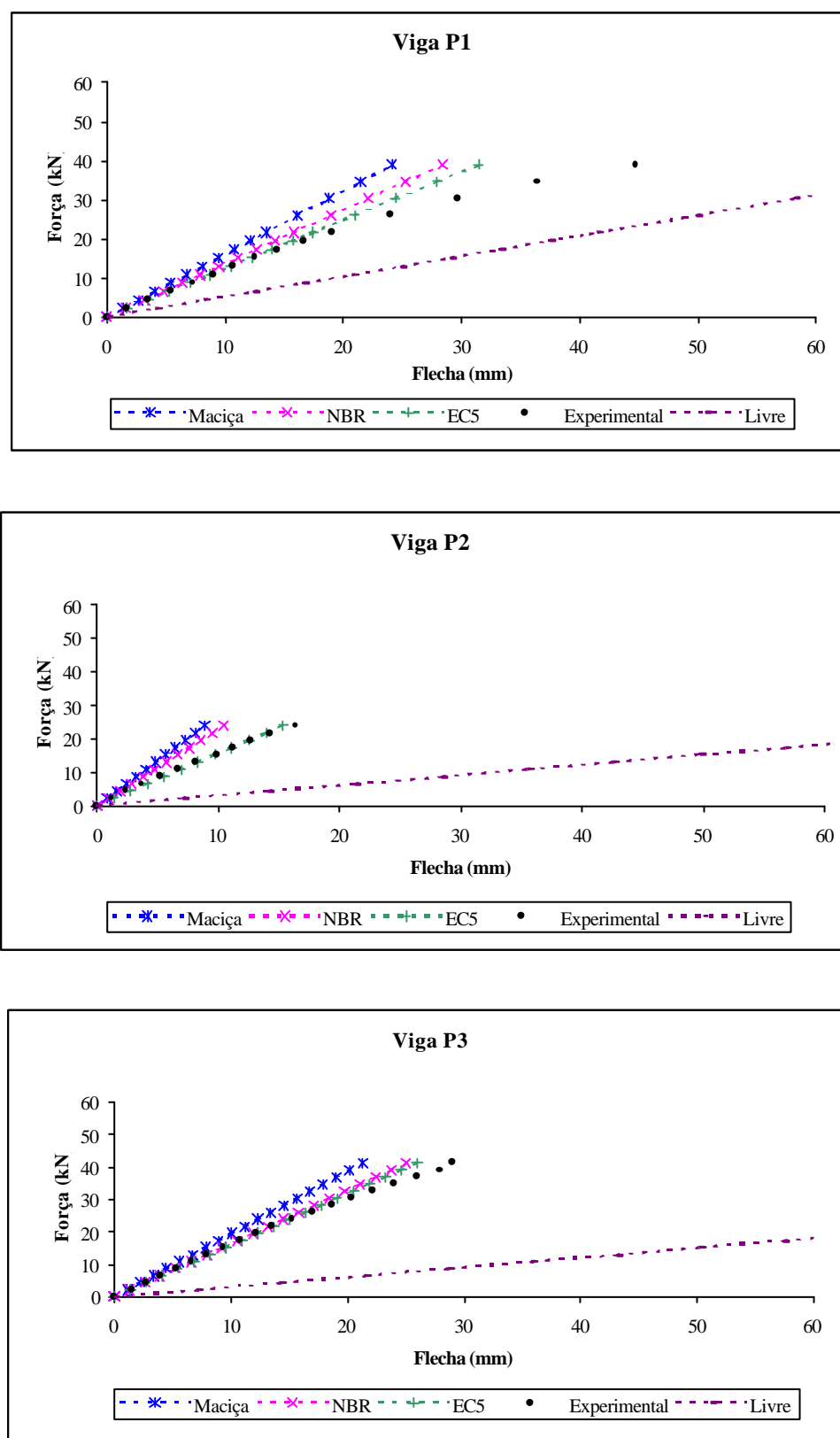


Figura 50 – Diagramas força x flecha dos ensaios de flexão das vigas de Pinus.

Observando os diagramas das figuras 48, 49 e 50, pode-se notar uma melhor aproximação dos valores teóricos do EUROCODE 5 com os valores obtidos nos ensaios, principalmente nos instantes iniciais (até a flecha de  $L/200$ ), em comparação aos valores teóricos fornecidos pela NBR 7190/97. Nota-se também que, a partir de certo momento, o sistema composto perde eficiência gradativamente. Neste valor de força aplicada, a não linearidade do comportamento dos conectores começa a influenciar o comportamento do conjunto, ou seja, desse ponto em diante a teoria linear do EUROCODE 5 e da NBR7190/97 torna-se inadequada para prever os deslocamentos e os esforços atuantes.

Na tabela 21 encontram-se os valores de rigidez à flexão e os respectivos valores dos coeficientes de eficiência ( $\alpha$ ) para cada uma das vigas compostas. A coluna ( $\alpha_{EC5}$ ) indica os valores do coeficiente de eficiência calculado pela equação 111, segundo a metodologia proposta pelo EUROCODE 5. A coluna ( $\alpha_{exp}$ ) indica os valores do coeficiente de eficiência calculado pela equação 112.

$$\alpha_{EC5} = \frac{(EI)_{EC5}}{(EI)_{rig}} \quad (111)$$

$$\alpha_{exp} = \frac{(EI)_{exp}}{(EI)_{rig}} \quad (112)$$

Para o cálculo da rigidez à flexão experimental foi utilizada a regressão linear dos valores de força x flecha obtidos nos ensaios, até a flecha limite de  $L/200$  (eq. 113).

$$(EI)_{exp} = \frac{\Delta F}{\Delta d} \cdot \frac{23 \cdot L^3}{1296} \quad (113)$$

Também é apresentado o valor do erro entre a estimativa do EUROCODE 5 e os resultados experimentais (vide equação 114). O sinal (-) indica que o valor de rigidez à flexão, obtido experimentalmente, foi menor que o estimado teoricamente pelo método do EUROCODE 5.

$$\frac{(EI)_{exp} - (EI)_{EC5}}{(EI)_{EC5}} \cdot 100 \quad (114)$$

Observando os valores dos erros, na tabela 21, verifica-se que os resultados experimentais apresentaram boa concordância em relação a rigidez à flexão teórica. Apenas nas vigas C1 e C2 são observadas diferenças significativas entre os valores teóricos e experimentais, com valores de rigidez aquém dos experimentais, significando que os resultados teóricos estão um pouco contra a segurança.

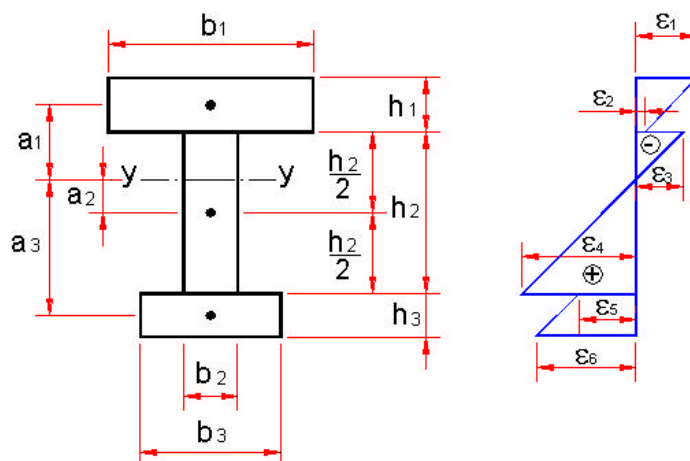
De modo geral, o método do EUROCODE 5 demonstra ser satisfatório para a estimar o valor da rigidez efetiva à flexão, para qualquer situação de ligação entre os elementos.

**Tabela 21:** Rigidez à flexão e coeficiente de eficiência das vigas compostas.

Viga	$(EI)_{\text{rig.}}$ (kN.cm <sup>2</sup> )	$(EI)_{\text{EC5}}$ (kN.cm <sup>2</sup> )	$(EI)_{\text{exp.}}$ (kN.cm <sup>2</sup> )	$\alpha_{\text{EC5}}$	$\alpha_{\text{exp.}}$	Erro (%)
A1	12389321	10993965	10660463	0,89	0,86	-3,0
A2	12221476	10877689	10355724	0,89	0,85	-4,8
A3	13384421	11837396	11445233	0,88	0,86	-3,3
C1	20779163	15630796	13454931	0,75	0,65	-13,9
C2	21980521	15881122	13743379	0,72	0,66	-13,5
C3	17817781	13465536	12731707	0,76	0,72	-5,5
P1	7733260	5943941	5789292	0,77	0,75	-2,6
P2	28208205	16389020	16527848	0,58	0,59	0,8
P3	20336034	16663170	17017367	0,82	0,84	2,1

## 5.2. Deformações e Tensões

A seguir são apresentados os resultados obtidos de leituras de deformação dos extensômetros elétricos posicionados na região central das vigas. Algumas vigas foram instrumentadas com seis extensômetros que registravam os valores  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4, \epsilon_5$  e  $\epsilon_6$  a cada novo incremento de força (ver figura 51).



**Figura 51** – Diagrama de deformação para uma seção I genérica.

Os resultados são apresentados em forma de diagramas força x deformação para cada extensômetro. Para efeito de comparação, os valores teóricos obtidos da formulação do EUROCODE 5 também são indicados em cada diagrama até a força limite correspondente a flecha de  $L/200$ .

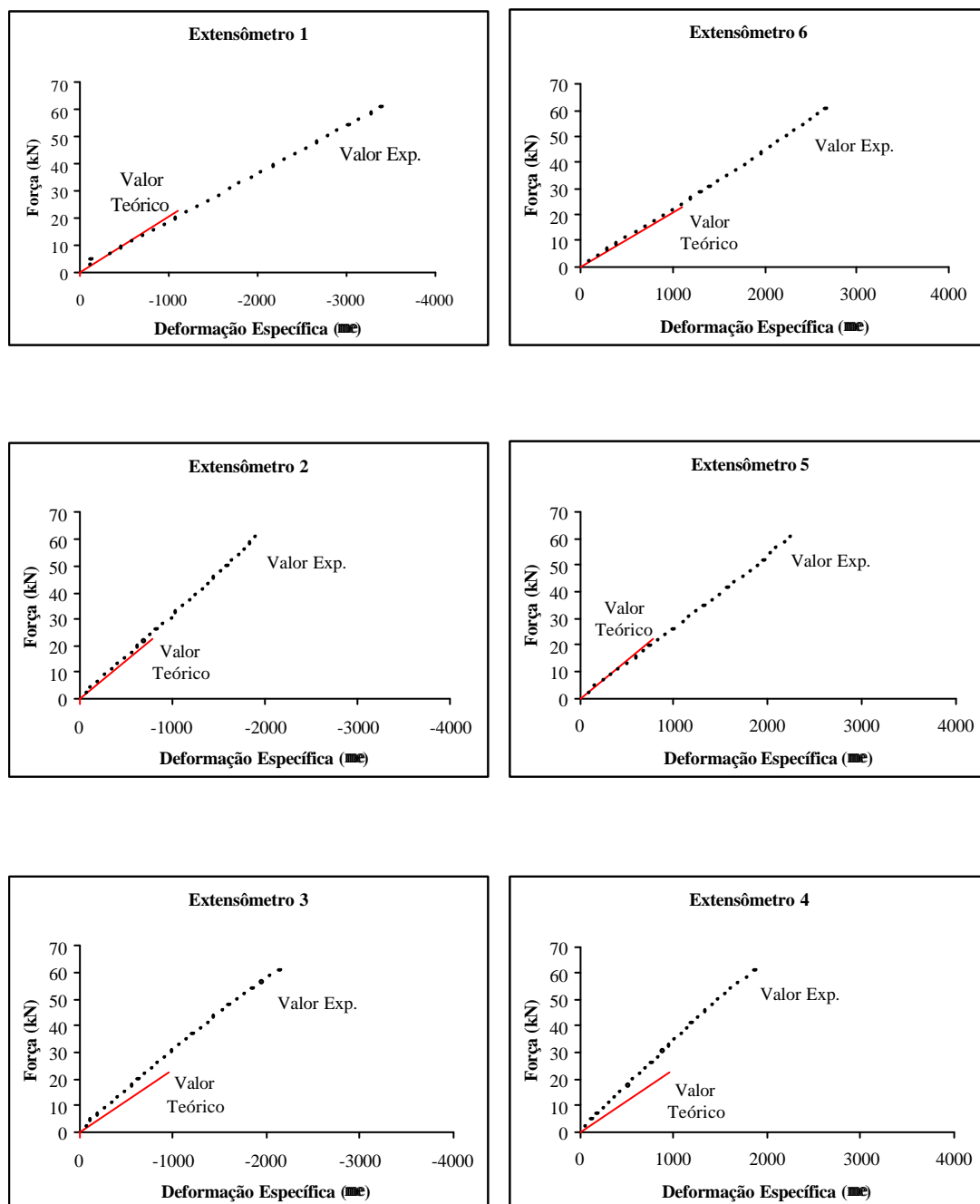
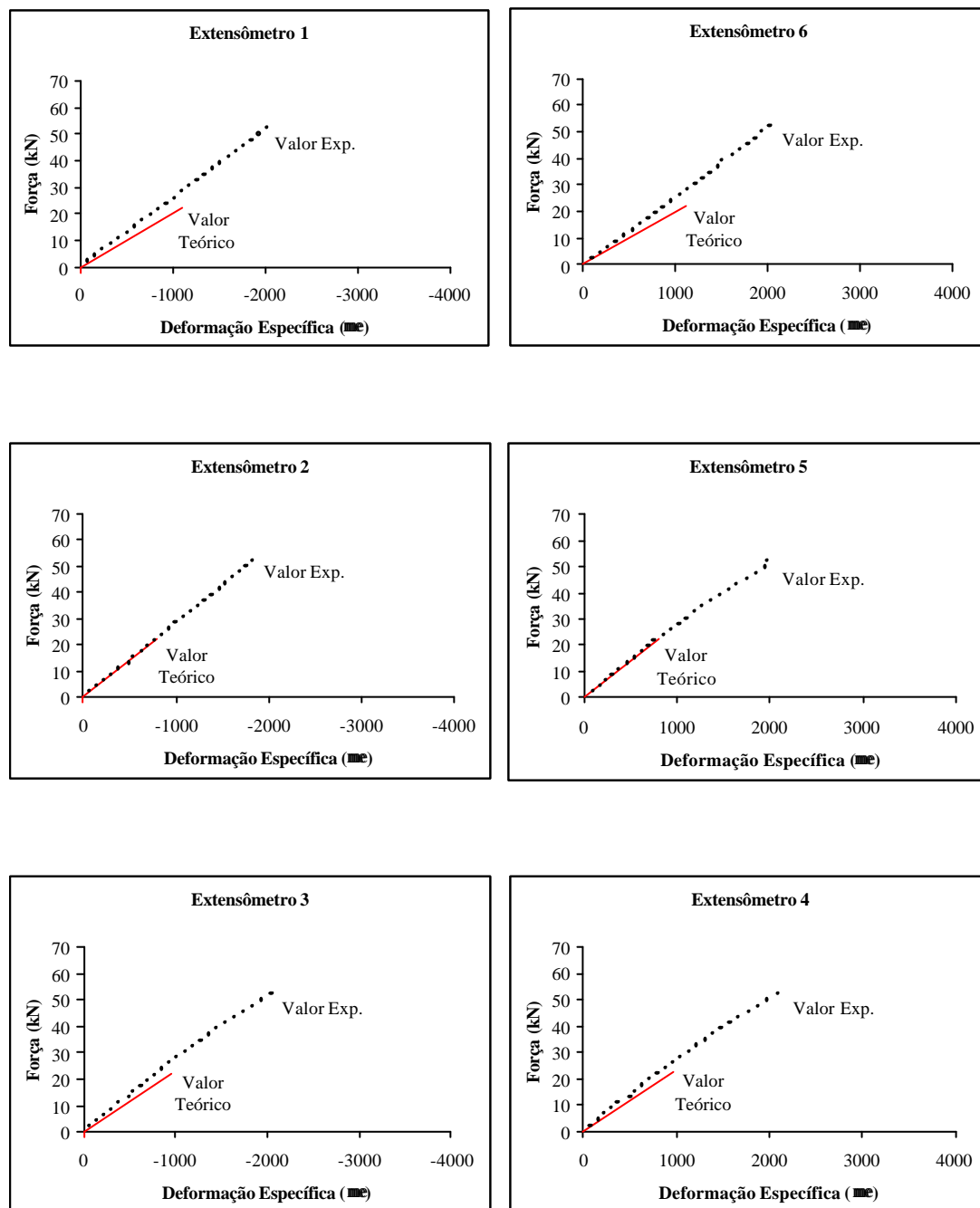


Figura 52 – Diagramas força x deformação do ensaio de flexão da viga A1.



*Figura 53 – Diagramas força x deformação do ensaio de flexão da viga A2.*



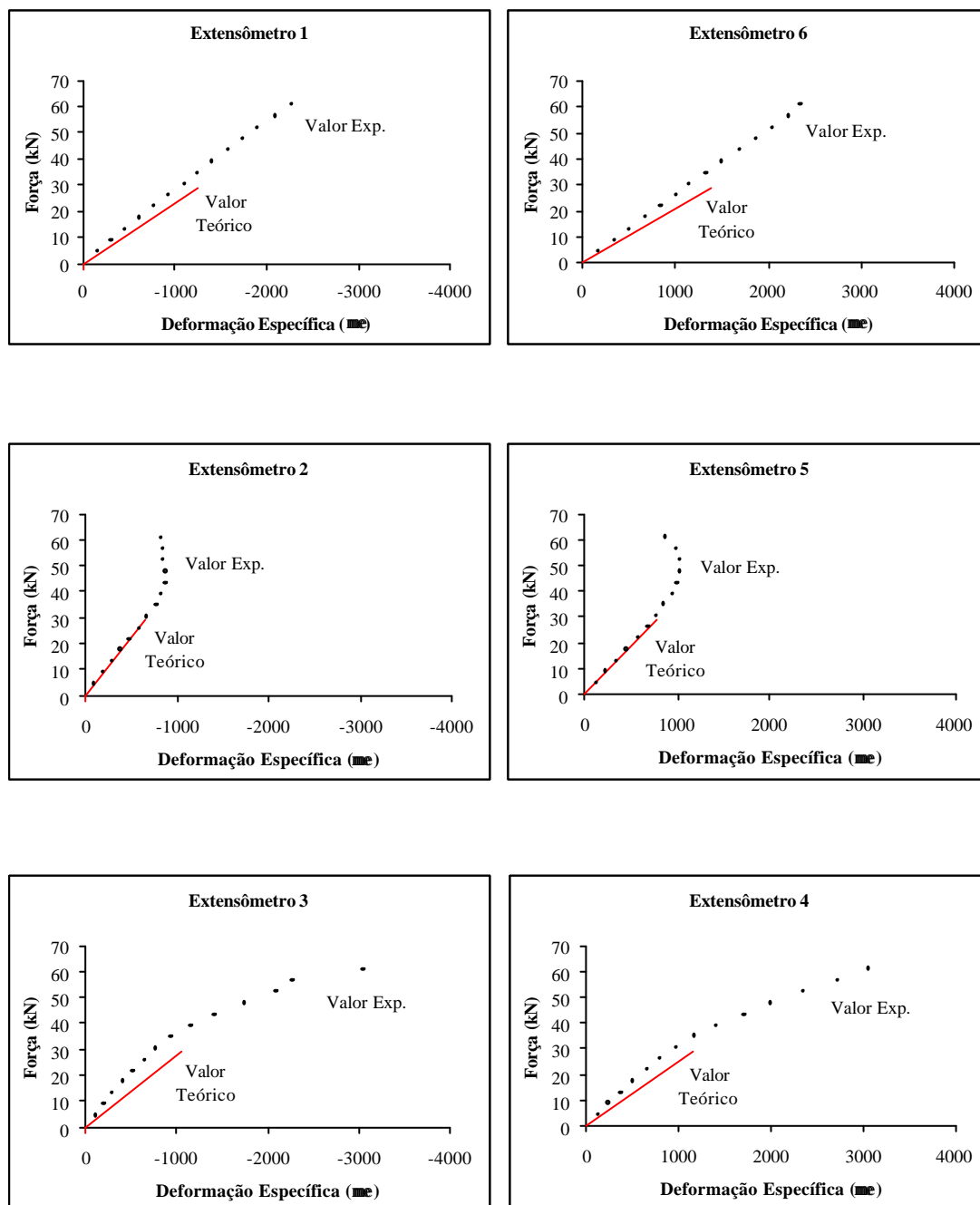


Figura 54 – Diagramas força x deformação do ensaio de flexão da viga C1.

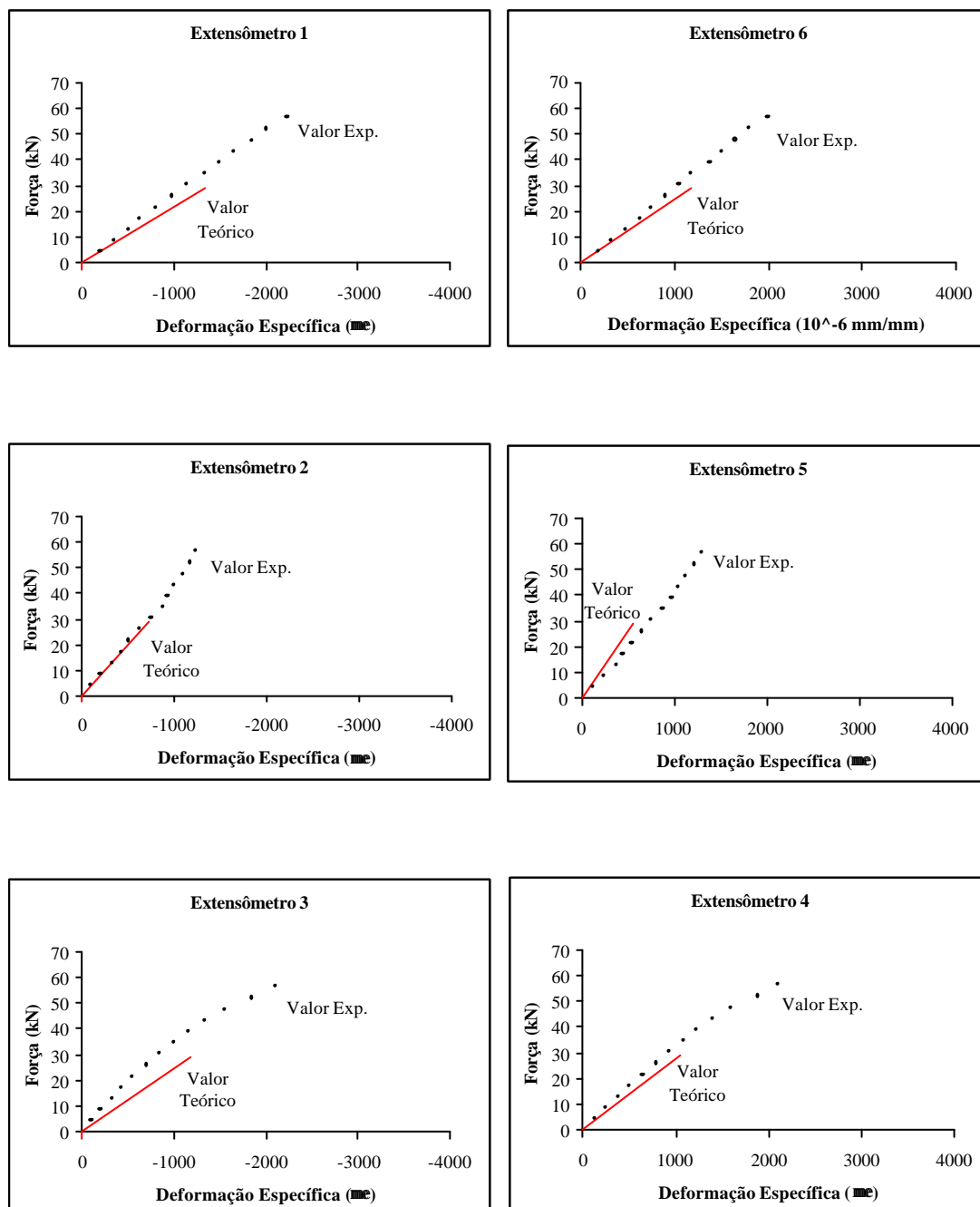


Figura 55 – Diagramas força x deformação do ensaio de flexão da viga C2.

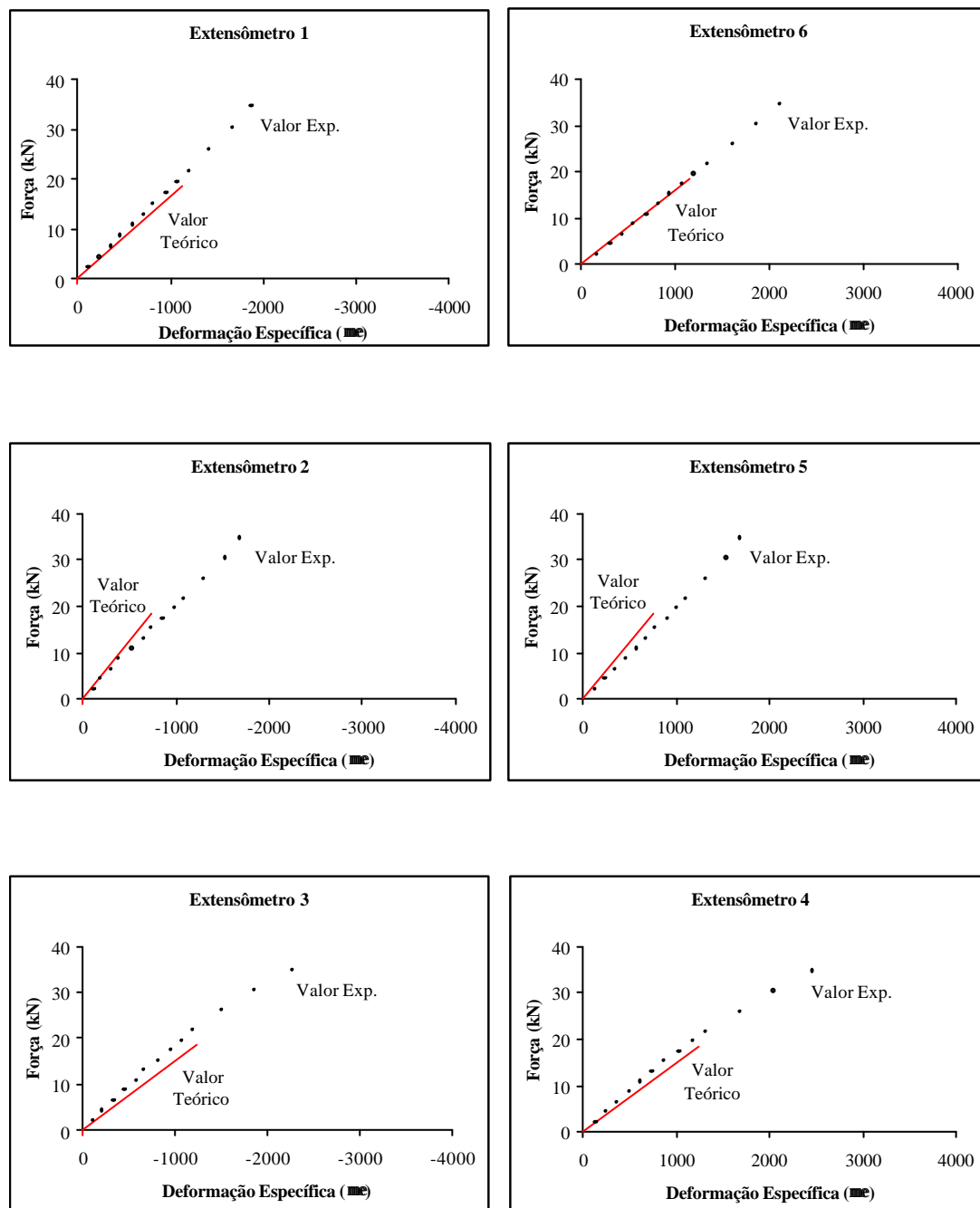


Figura 56 – Diagramas força x deformação do ensaio de flexão da viga P1.

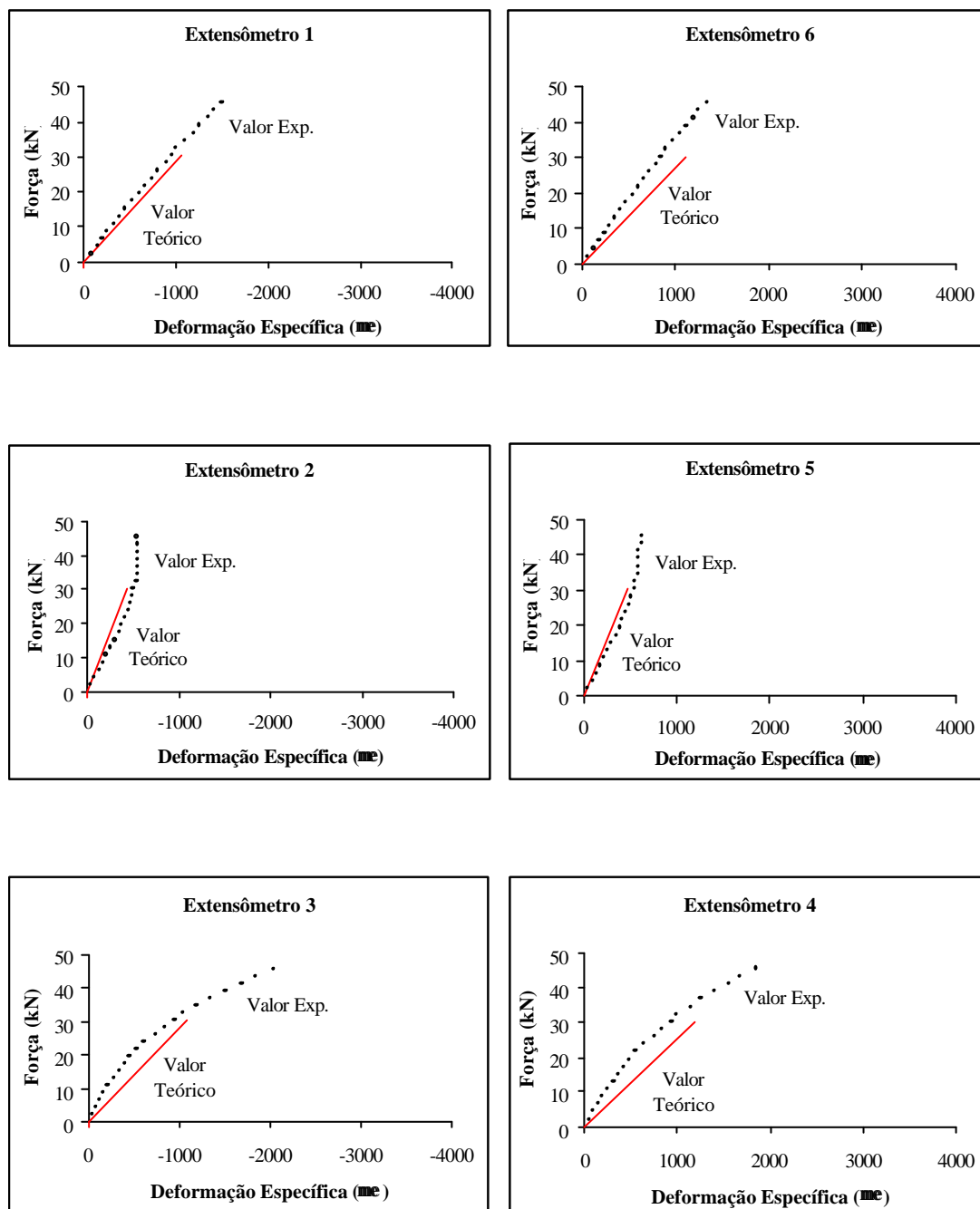


Figura 57 – Diagramas força x deformação do ensaio de flexão da viga P2.

Observando os diagramas de deformações das vigas de Angelim Pedra Verdadeiro (A1 e A2), Cedrilho (C1 e C2) e Pinus Hondurensis (P1 e P2), nota-se uma excelente convergência dos resultados experimentais e teóricos, principalmente para os extensômetros posicionados nas mesas ( $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_5$  e  $\epsilon_6$ ). Já os extensômetros posicionados nas almas ( $\epsilon_3$  e  $\epsilon_4$ ) indicam, em todos os casos, valores de deformações menores que os teóricos considerando um mesmo valor de força aplicada.

Fica também evidenciado, para todos os casos, o fenômeno de perda gradativa de eficiência. A figura 54 ilustra muito bem o comportamento de uma viga composta pregada após o regime linear.

Verifica-se que as curvas teóricas se aproximaram das experimentais, principalmente para valores de flechas inferiores ao limite de  $L/200$ , estabelecido pela NBR 7190/97 para os carregamentos usuais das construções correntes. A partir desse limite, verifica-se que as vigas apresentam uma redução da rigidez, devido ao comportamento não linear da ligação, comportamento este que não é representado pela curva teórica considerada, a qual tem comportamento exclusivamente elástico.

A partir de certo valor da força, o módulo de deslizamento ( $K$ ) da ligação diminui, influenciando na rigidez global  $(EI)_{ef}$  da viga. Nota-se uma diminuição no incremento de tensões nas mesmas, sobrecarregando a alma. Este fenômeno fica mais evidente nos casos em que há menor taxa de ligação entre os elementos. Nas vigas de Angelim, que apresentaram coeficiente de eficiência experimental ( $\alpha_{exp}$ ) de 0,86 e 0,85, e na viga de Pinus P1, com 0,75, o fenômeno é pouco notado. Já para as vigas de Cedrilho, com coeficientes 0,65 e 0,66, e para viga de Pinus P2, com 0,59, o fenômeno é mais acentuado.

A seguir são apresentados os diagramas de tensões e deformações para cada viga, indicando os resultados experimentais e comparando-os com os obtidos da formulação do EUROCODE 5. As tensões e deformações apresentadas nas figuras 58, 59, 60, 61, 62 e 63 referem-se aos valores obtidos através de extensômetros elétricos posicionados na seção transversal central, para o nível de força aplicada que produzia uma flecha teórica de  $L/200$  considerando regime elástico.

Os valores de tensões tanto experimentais quanto teóricos foram obtidos utilizando os valores de módulo de elasticidade à flexão obtidos de experimentação preliminar indicados na tabela 4 do capítulo de resultados (colunas  $E_{M, ext. sup.}$  e  $E_{M, ext. inf.}$ ).









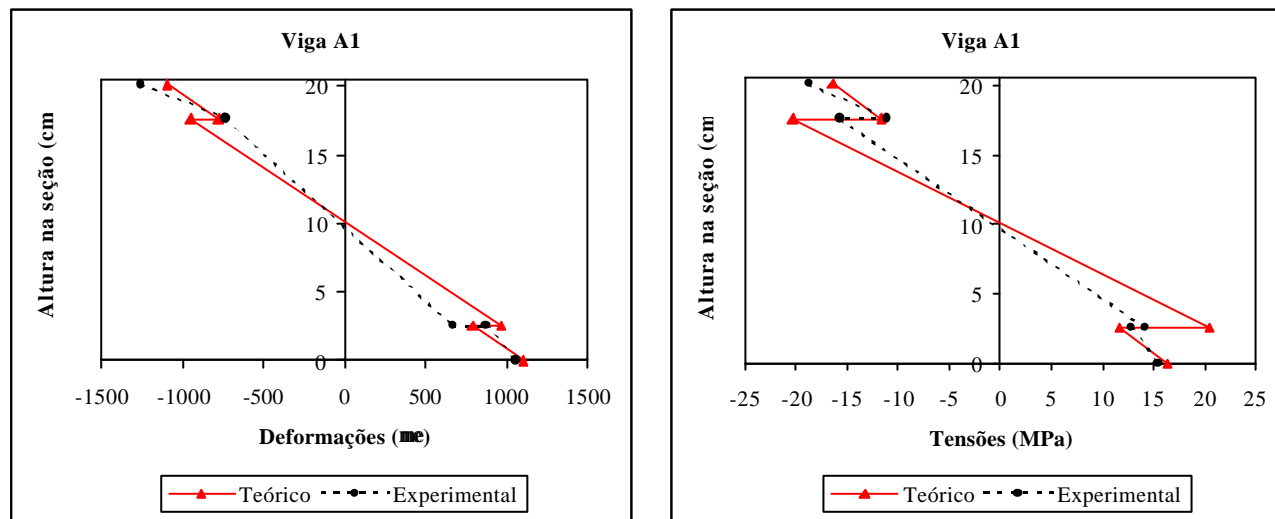






**Tabela 22** – Comparação dos resultados de tensões e deformações teórico e experimental viga A1

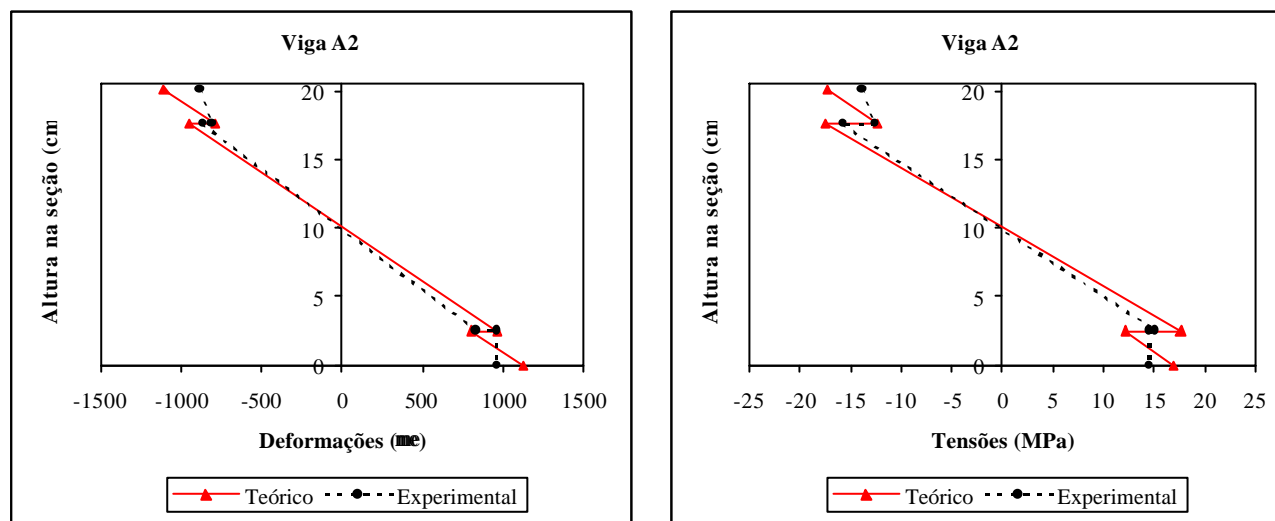
Dados	EC5	Exp.
P (kN)	22,63	22,63
$\delta$ (mm)	18,5	19,1
$\epsilon_1$ ( $\mu\epsilon$ )	-1097	-1254
$\epsilon_2$ ( $\mu\epsilon$ )	-780	-732
$\epsilon_3$ ( $\mu\epsilon$ )	-955	-736
$\epsilon_4$ ( $\mu\epsilon$ )	961	667
$\epsilon_5$ ( $\mu\epsilon$ )	787	876
$\epsilon_6$ ( $\mu\epsilon$ )	1104	1055
$\sigma_1$ (MPa)	-16,4	-18,7
$\sigma_2$ (MPa)	-11,7	-11,0
$\sigma_3$ (MPa)	-20,3	-15,6
$\sigma_4$ (MPa)	20,4	14,2
$\sigma_5$ (MPa)	11,6	12,9
$\sigma_6$ (MPa)	16,3	15,5



**Figura 58** – Diagrama de deformações e tensões da viga A1.

**Tabela 23** – Comparação dos resultados de tensões e deformações teórico e experimental Viga A2.

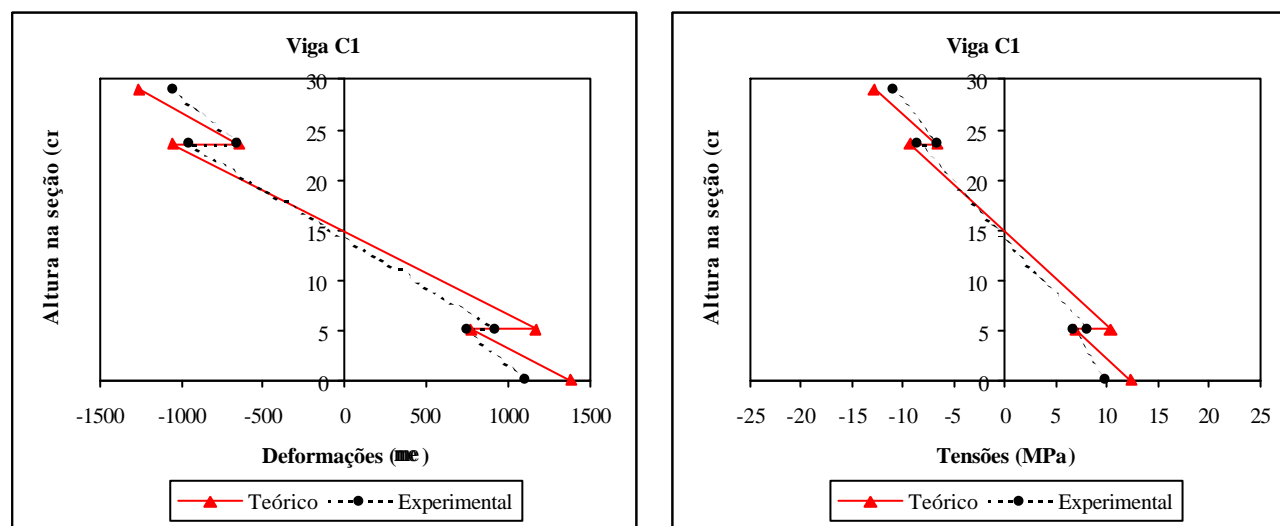
Dados	EC5	Exp.
P (kN)	22,39	22,39
$\delta$ (mm)	18,5	19,8
$\epsilon_1$ ( $\mu\epsilon$ )	-1105	-880
$\epsilon_2$ ( $\mu\epsilon$ )	-788	-804
$\epsilon_3$ ( $\mu\epsilon$ )	-952	-860
$\epsilon_4$ ( $\mu\epsilon$ )	964	830
$\epsilon_5$ ( $\mu\epsilon$ )	803	960
$\epsilon_6$ ( $\mu\epsilon$ )	1120	960
$\sigma_1$ (MPa)	-17,3	-13,8
$\sigma_2$ (MPa)	-12,3	-12,6
$\sigma_3$ (MPa)	-17,4	-15,7
$\sigma_4$ (MPa)	17,6	15,1
$\sigma_5$ (MPa)	12,1	14,5
$\sigma_6$ (MPa)	16,9	14,5



**Figura 59** – Diagrama de deformações e tensões da viga A2.

**Tabela 24** – Comparação dos resultados de tensões e deformações teórico e experimental Viga C1.

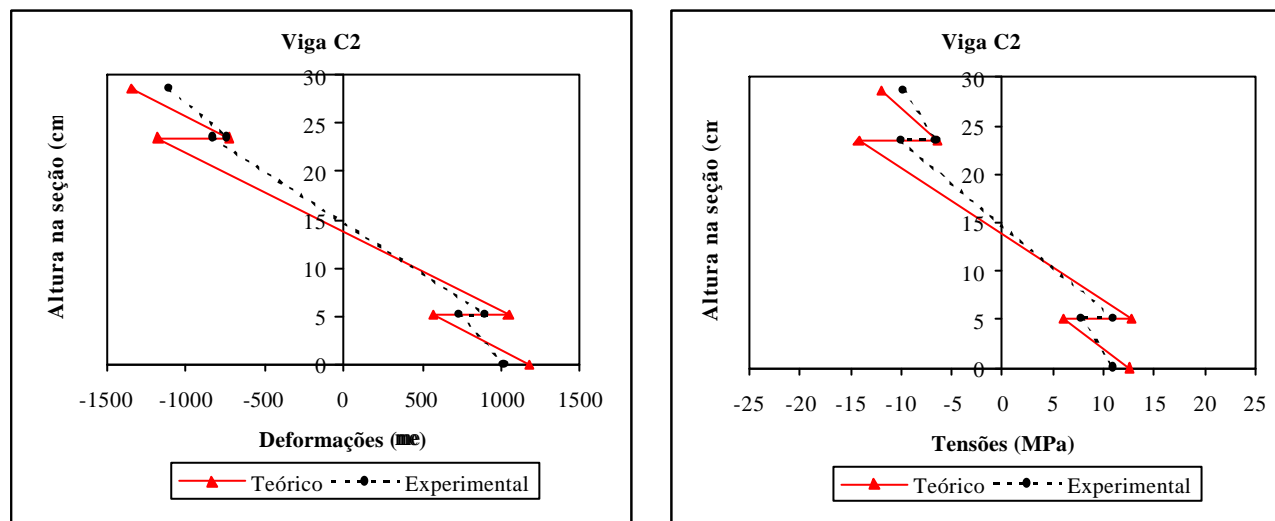
Dados	EC5	Exp.
P (kN)	28,95	28,95
$\delta$ (mm)	19,5	23,9
$\epsilon_1$ ( $\mu\epsilon$ )	-1257	-1054
$\epsilon_2$ ( $\mu\epsilon$ )	-643	-652
$\epsilon_3$ ( $\mu\epsilon$ )	-1054	-945
$\epsilon_4$ ( $\mu\epsilon$ )	1161	920
$\epsilon_5$ ( $\mu\epsilon$ )	773	752
$\epsilon_6$ ( $\mu\epsilon$ )	1387	1106
$\sigma_1$ (MPa)	-12,9	-10,8
$\sigma_2$ (MPa)	-6,6	-6,7
$\sigma_3$ (MPa)	-9,4	-8,5
$\sigma_4$ (MPa)	10,4	8,2
$\sigma_5$ (MPa)	6,9	6,7
$\sigma_6$ (MPa)	12,4	9,9



**Figura 60** – Diagrama de deformações e tensões da viga C1.

**Tabela 25** – Comparação dos resultados de tensões e deformações teórico e experimental Viga C2.

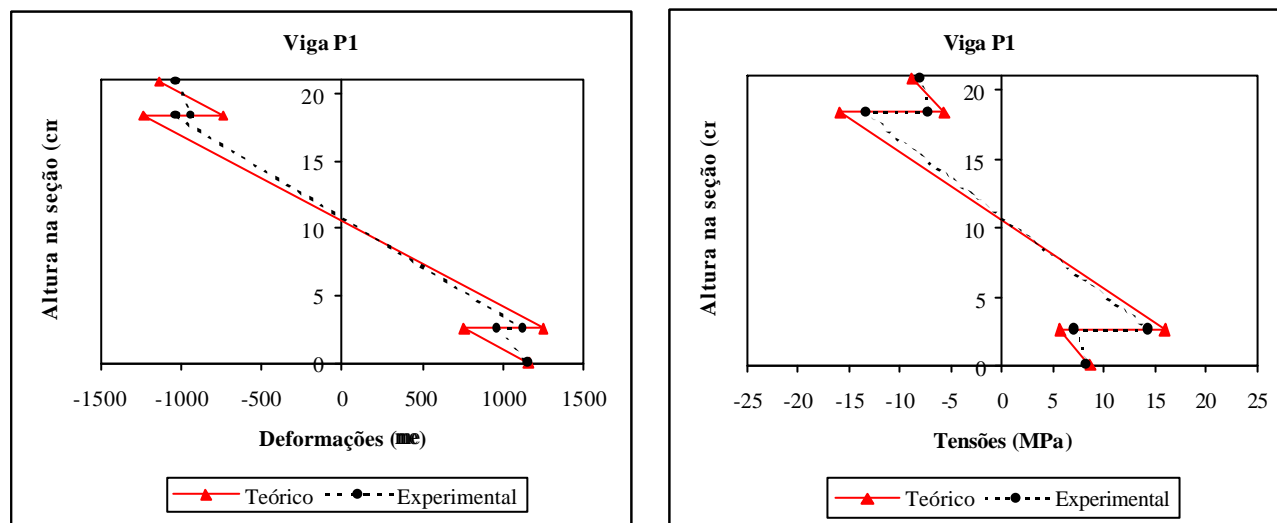
Dados	EC5	Exp.
P (kN)	29,42	29,42
$\delta$ (mm)	19,5	24,9
$\epsilon_1$ ( $\mu\epsilon$ )	-1337	-1100
$\epsilon_2$ ( $\mu\epsilon$ )	-723	-730
$\epsilon_3$ ( $\mu\epsilon$ )	-1171	-820
$\epsilon_4$ ( $\mu\epsilon$ )	1044	900
$\epsilon_5$ ( $\mu\epsilon$ )	565	730
$\epsilon_6$ ( $\mu\epsilon$ )	1180	1020
$\sigma_1$ (MPa)	-11,9	-9,8
$\sigma_2$ (MPa)	-6,4	-6,5
$\sigma_3$ (MPa)	-14,2	-10,0
$\sigma_4$ (MPa)	12,7	10,9
$\sigma_5$ (MPa)	6,0	7,8
$\sigma_6$ (MPa)	12,6	10,9



**Figura 61** – Diagrama de deformações e tensões da viga C2.

**Tabela 26** – Comparação dos resultados de tensões e deformações teórico e experimental Viga P1.

Dados	EC5	Exp.
P (kN)	18,61	18,61
$\delta$ (mm)	15,0	15,7
$\epsilon_1$ ( $\mu\epsilon$ )	-1136	-1032
$\epsilon_2$ ( $\mu\epsilon$ )	-737	-932
$\epsilon_3$ ( $\mu\epsilon$ )	-1230	-1032
$\epsilon_4$ ( $\mu\epsilon$ )	-1243	1120
$\epsilon_5$ ( $\mu\epsilon$ )	756	964
$\epsilon_6$ ( $\mu\epsilon$ )	1155	1152
$\sigma_1$ (MPa)	-8,8	-8,0
$\sigma_2$ (MPa)	-5,7	-7,2
$\sigma_3$ (MPa)	-15,9	-13,3
$\sigma_4$ (MPa)	16,0	14,4
$\sigma_5$ (MPa)	5,7	7,2
$\sigma_6$ (MPa)	8,7	8,4

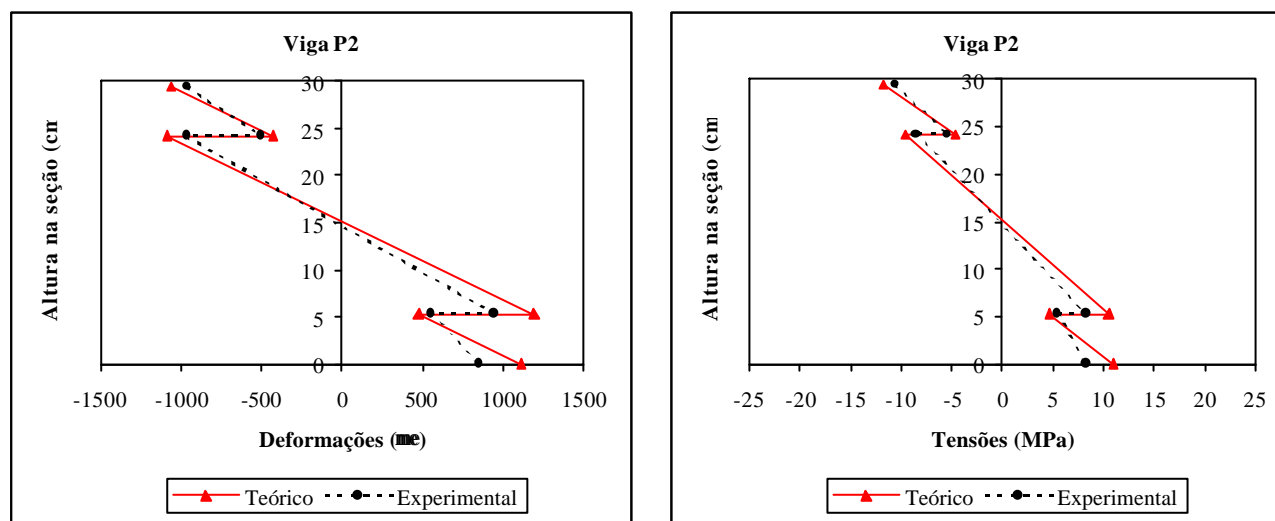


**Figura 62** – Diagrama de deformações e tensões da viga P1.



**Tabela 27** – Comparação dos resultados de tensões e deformações teórico e experimental Viga P2.

Dados	EC5	Exp.
P (kN)	30,36	30,36
$\delta$ (mm)	19,5	-----
$\epsilon_1$ ( $\mu\epsilon$ )	-1063	-961
$\epsilon_2$ ( $\mu\epsilon$ )	-425	-501
$\epsilon_3$ ( $\mu\epsilon$ )	-1086	-962
$\epsilon_4$ ( $\mu\epsilon$ )	1190	942
$\epsilon_5$ ( $\mu\epsilon$ )	472	550
$\epsilon_6$ ( $\mu\epsilon$ )	1110	851
$\sigma_1$ (MPa)	-11,7	-10,6
$\sigma_2$ (MPa)	-4,7	-5,5
$\sigma_3$ (MPa)	-9,6	-8,5
$\sigma_4$ (MPa)	10,5	8,3
$\sigma_5$ (MPa)	4,6	5,4
$\sigma_6$ (MPa)	10,9	8,3



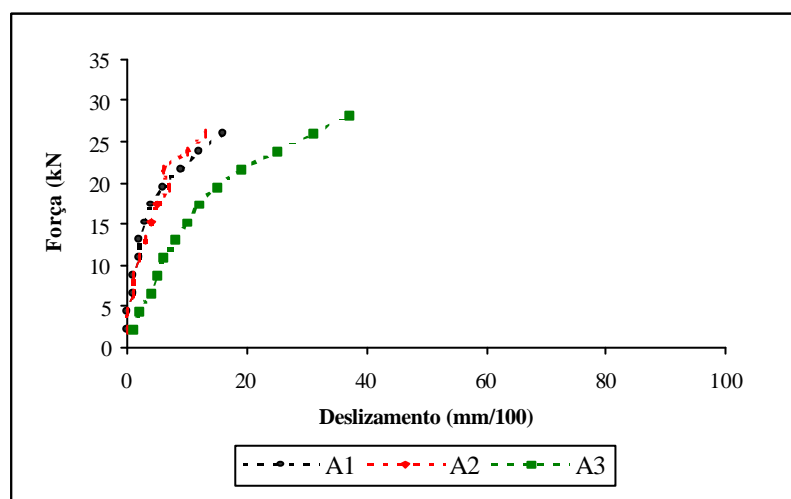
**Figura 63** – Diagrama de deformações e tensões da viga P2.

Pode-se observar boa aproximação entre os resultados experimentais e teóricos dos diagramas de deformações e tensões.

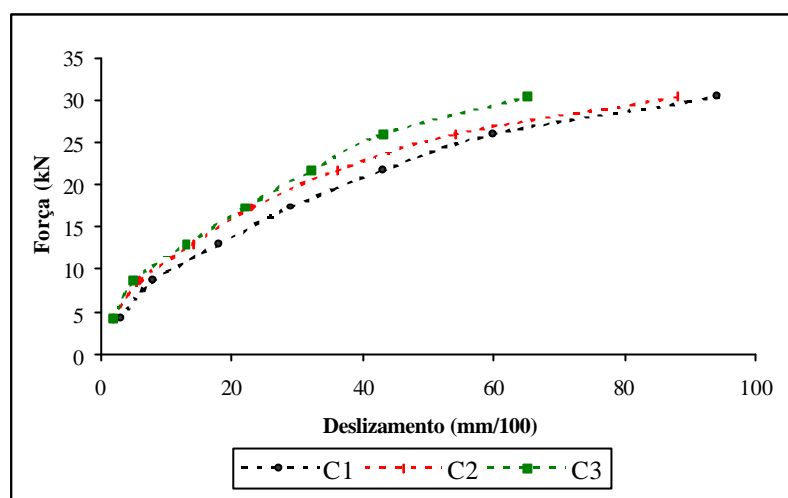
O deslizamento na superfície de contato é confirmado ao avaliar os resultados das deformações registradas mediante os extensômetros elétricos. Até mesmo para os primeiros estágios de carregamento, foi constatada a descontinuidade no diagrama de tensões.

### 5.3 Deslizamento entre as Peças

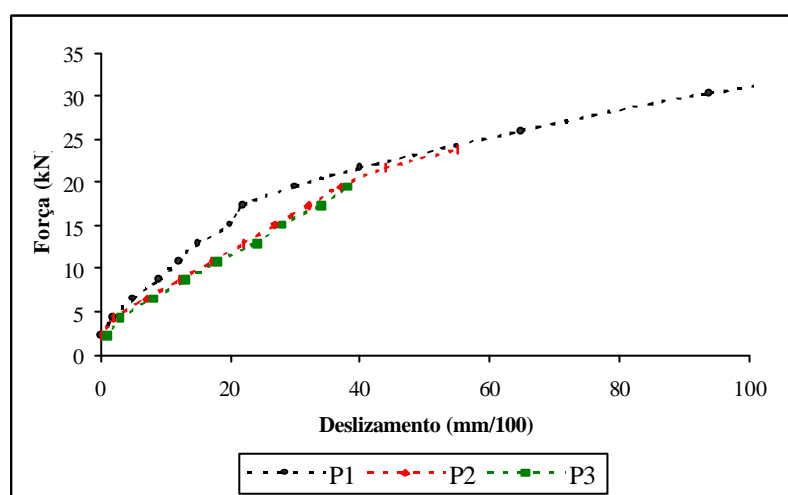
As figuras 64, 65 e 66 ilustram os valores experimentais de deslizamento máximo entre as mesas e almas em função do nível de força aplicado. Estes resultados experimentais foram obtidos por meio de medições do relógio comparador posicionado na extremidade das vigas.



**Figura 64** – Diagrama de deslizamento entre a mesa e a alma das vigas de Angelim.



**Figura 65** – Diagrama de deslizamento entre a mesa e a alma das vigas de Cedrilho.



**Figura 66** – Diagrama de deslizamento entre a mesa e a alma das vigas de Pinus.

## 5.4 Força de Ruptura

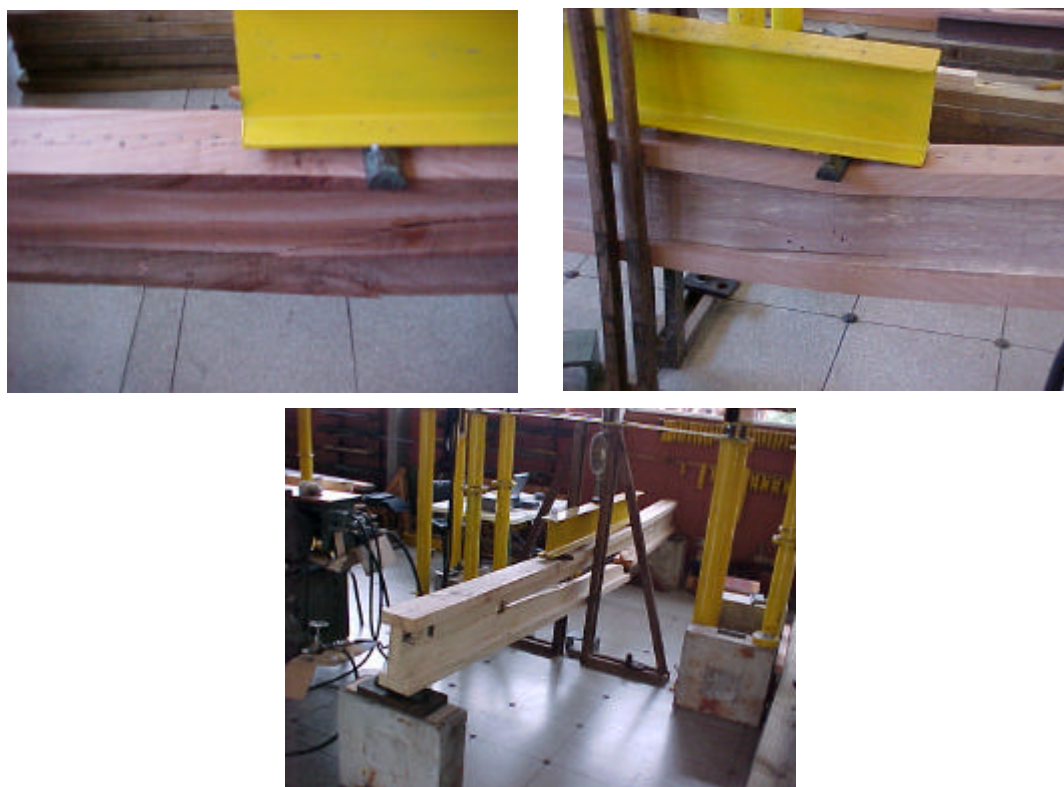
Em relação aos estados limites últimos, foram comparados os valores de força máxima calculados teoricamente pelo método do EUROCODE 5 e NBR 7190/97, e comparados com os resultados experimentais obtidos.

Tanto para o método do EUROCODE 5 quanto para o método da NBR 7190/97, todas as vigas ensaiadas apresentaram a ligação como ponto crítico.

A tabela 28 e os diagramas das figuras 67, 68 e 69 ilustram os valores teóricos da forças obtidas. Também apresenta o valor experimental, correspondente à ruptura da peça, bem como o modo de ruptura observado.

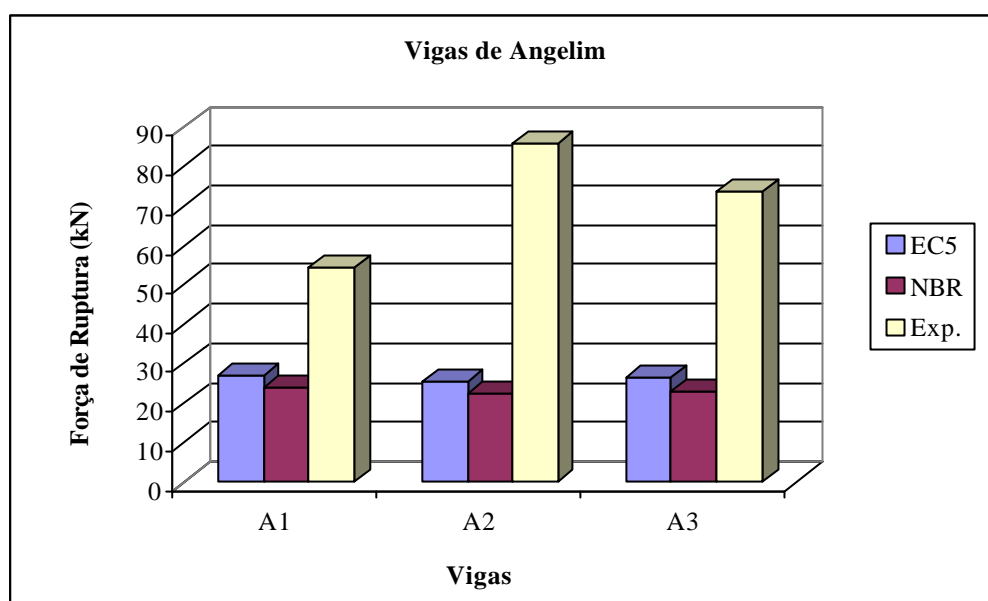
**Tabela 28** – *Comparação da força de ruptura teórica e experimental.*

Vigas	Força de Ruptura (kN)			Modo de Ruptura
	EC5	NBR	Exp.	
A1	26,97	23,80	54,49	Tração mesa inferior
A2	25,31	22,60	86,04	Tração inferior alma
A3	26,74	23,00	73,60	Tração inferior alma
C1	29,74	23,60	70,89	Tração inferior alma
C2	31,53	24,10	63,86	Tração inferior alma
C3	30,72	20,50	63,31	Tração inferior alma
P1	31,11	22,60	38,96	Tração inferior alma
P2	33,99	25,00	61,69	Tração mesa inferior
P3	67,11	55,90	55,74	Tração inferior alma

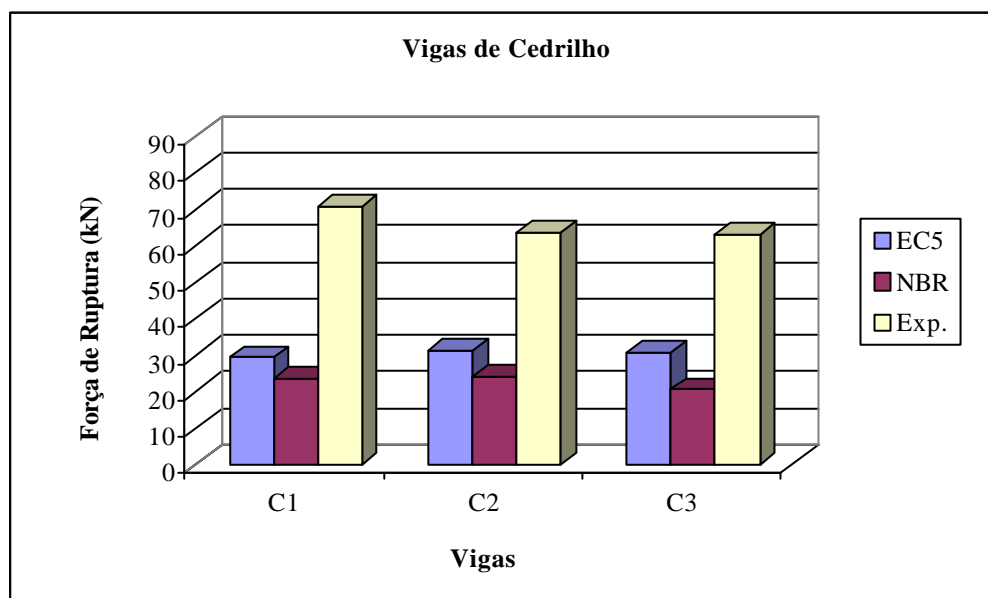


**Figura 67** – *Modo de ruptura das vigas compostas.*

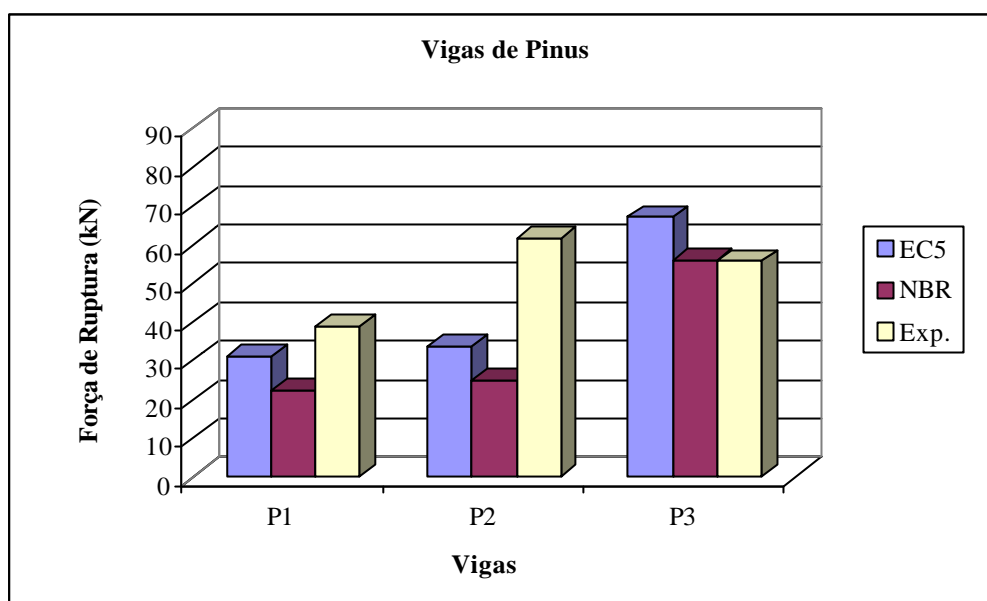
A figura 67 ilustra o modo de ruptura típico das vigas compostas ensaiadas.



**Figura 68** – Diagrama de força de ruptura das vigas de Angelim.



**Figura 69** – Diagrama de força de ruptura das vigas de Cedrilho.



**Figura 70** – Diagrama de força de ruptura das vigas de Pinus.

Observando os diagramas das figuras 68, 69, e 70 nota-se que os resultados experimentais de força de ruptura obtidos são muito superiores aos teóricos, para a maioria dos casos. Isto indica uma reserva de capacidade das vigas, em função da redistribuição de esforços entre os elementos de ligação, devido à flexibilidade dos mesmos.

Os valores de ruptura experimentais das vigas de Angelim são 102%, 240% e 175%, respectivamente vigas A1, A2 e A3, quando comparados com os teóricos obtidos do cálculo do EUROCODE 5. As grandes diferenças têm fundamento na consideração do estado de ruptura da viga. Tanto o método do EUROCODE 5 quanto o método da NBR consideram, para estes exemplos particulares de vigas, que, quando a ligação mais solicitada (extremo da viga) atinge sua capacidade máxima, a viga atingiu o estado limite último. Entretanto, pode ser observado que, após este ponto, ocorre uma redistribuição de esforços, devido a alta flexibilidade dos conectores, garantindo maior capacidade resistente para o elemento estrutural. Por fim, a ruptura das vigas foi caracterizada por de tração na mesa inferior ou tração na alma, por flexão.

Apenas na viga P3 o valor teórico foi superior ao experimental. Para esta viga foram colocados muitos pregos (prego 22 x 48 cada 2,4 cm). O fato de ser utilizado pouco espaçamento entre os pregos introduz uma região crítica na parte inferior da alma, induzindo à falha por tração. Isto indica que deve ser tomado um cuidado especial quando se projetam vigas com alta taxa de conexão.

Comparando os valores teóricos da capacidade resistente obtidos pela norma EUROCODE 5 e NBR7190/97, nota-se que esta conduz a valores inferiores. Isto é devido ao fato da norma brasileira considerar o fluxo de cisalhamento como se a viga fosse maciça. Já a norma europeia admite uma redução no valor do fluxo de cisalhamento, em função da eficiência da conexão. No caso da viga C3, a diferença na resistência chegou a 50%.

## 5.5 Ensaio de Ligações

A tabela 29 apresenta os resultados dos ensaios de ligações comparados com os valores teóricos do EUROCODE 5 e NBR 7190/97. Pode ser observado que os valores de módulo de deslizamento obtidos experimentalmente foram muito superiores aos estimados pelo EUROCODE 5.

Os corpos-de-prova das vigas P1, A1, A2 e A3 foram ensaiados com carregamento aplicado com dois ciclos de carga e descarga. Para estes corpos-de-prova, o valor do módulo de deslizamento foi determinado pela inclinação da reta secante à curva força x deslocamento, definida pelos pontos  $(F_{10\%}; \delta_{10\%})$  e  $(F_{50\%}; \delta_{50\%})$  correspondentes respectivamente a 10% e 50% da resistência máxima da ligação ( $R_u$ ) no último ciclo de carregamento. Os valores de módulo de deslizamento experimental obtidos para as vigas A1, A2 e A3 são em média 100% superiores aos indicados pelo EUROCODE 5. A viga P1 apresenta módulo de deslizamento experimental 60% superior ao teórico.

**Tabela 29:** Resultados dos ensaios de ligação.

Viga	Rigidez		Resistência		
	Teórico (EC5)	Experimental	Teórico (NBR)	Experimental	
	$K_{ser}$ (N/mm)	K (N/mm)	$R_k$ (N)	$R_{2\%}$ (N)	$R_u$ (N)
<b>A1</b>	5592	10850	1220	2550	5110
<b>A2</b>	6301	10970	1220	2570	6070
<b>A3</b>	6129	13358	1220	2560	6000
<b>C1</b>	5411	28625	2260	2420	6700
<b>C2</b>	4458	18000	2260	2310	6560
<b>C3</b>	4355	19820	2260	2450	6580
<b>P1</b>	3291	5274	2110	2400	4050
<b>P2</b>	3095	2363	2350	2200	3920
<b>P3</b>	3220	10401	2350	1780	3710

Os corpos-de-prova das vigas P3, C1, C2 e C3 foram ensaiados com carregamento aplicado com dois ciclos de carga e descarga. Para estes corpos-de-prova, o valor do módulo de deslizamento foi determinado pela inclinação da reta secante à curva força x deslocamento, definida pelos pontos  $(F_{5\%}; \delta_{5\%})$  e  $(F_{25\%}; \delta_{25\%})$  correspondentes respectivamente a 10% e 50% da resistência máxima convencional ( $R_{2\%}$ ) no último ciclo de carregamento. Os resultados obtidos indicam diferenças na força de ruptura na ordem de 250%.

Os corpos-de-prova da viga P2 foram ensaiados com carregamento monotônico crescente sem ciclo. Para estes corpos-de-prova o valor do módulo de deslizamento foi determinado pela inclinação da reta secante à curva força x deslocamento, definida pelos pontos  $(F_{5\%}; \delta_{5\%})$  e  $(F_{25\%}; \delta_{25\%})$  correspondentes respectivamente a 10% e 50% da resistência máxima convencional ( $R_{2\%}$ ). O valor registrado experimentalmente indica melhor concordância com o teórico, 23% para P2.

Quanto à força de ruptura das ligações, observou-se uma boa concordância entre os valores experimentais  $R_{2\%}$  e os valores teóricos indicados pela NBR 7190/97, a menos dos casos da espécie de Angelim, nos quais o valor máximo da força aplicada durante o ciclo foi muito alto, interferindo no método da NBR para estimar a resistência.

## 5.6 Comparação entre os Critérios de Dimensionamento

Os resultados obtidos na experimentação realizada permitem concluir que o critério do EC5 se mostra adequado. Com o intuito de comparar o critério da NBR7190/97, que é método simplificado, com o do EC5, são feitos dois exemplos de dimensionamento de peças de seção composta com seções comerciais.

Os dados de projetos das vigas compostas, incluindo geometria da seção, vão, tipo de conector e classe de resistência da madeira, são indicados na tabela 30.

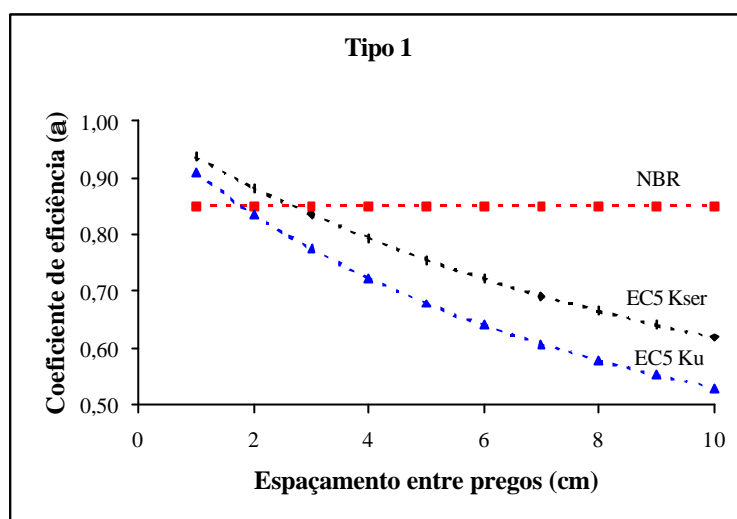


Tabela 30: Dados de projeto das vigas compostas.

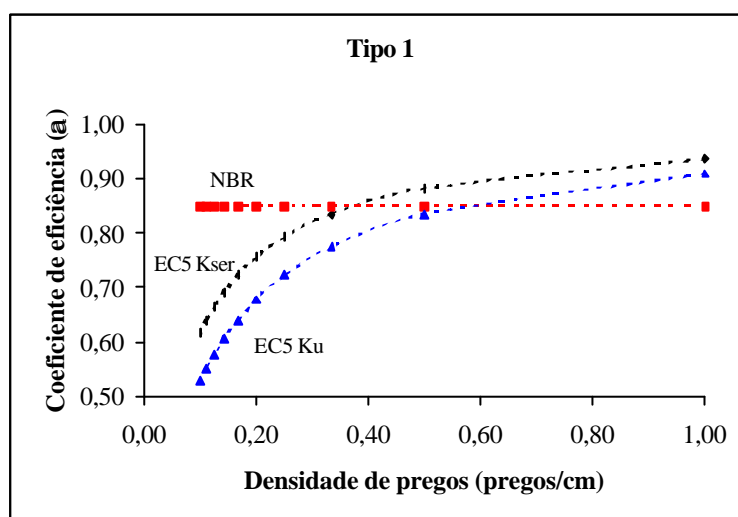
Dados	Tipo 1	Tipo 2
Geometria		
Vão	500 cm	
Madeira	Dicotiledônea Classe C40 $f_{c0,k} = 40 \text{ MPa}$ ..... $f_{c0,d} = 16 \text{ MPa}$ $f_{v,k} = 6 \text{ MPa}$ ..... $f_{v,d} = 1,87 \text{ MPa}$ $E_{c0,m} = 19500 \text{ MPa}$ ..... $E_{c0,d} = 10920 \text{ MPa}$ $E_M = 17550 \text{ MPa}$ ..... $E_{M,d} = 9828 \text{ MPa}$ $\rho_{ap 12\%} = 950 \text{ kg/m}^3$	
Pregos	22 x 48	18 x 30
Espaçamento entre pregos	Variável	

O espaçamento entre pregos varia do espaçamento mínimo admitido pela NBR 7190 até o espaçamento de 10 cm.

Nas figuras 71, 72, 73 e 74 é mostrada a variação do valor do coeficiente de eficiência para as vigas Tipo 1 e 2, em função da quantidade de pregos. Para cada tipo de viga são construídos dois gráficos. O primeiro apresenta na abcissa o espaçamento entre os pregos, e o segundo, a densidade de pregos por centímetro de comprimento.

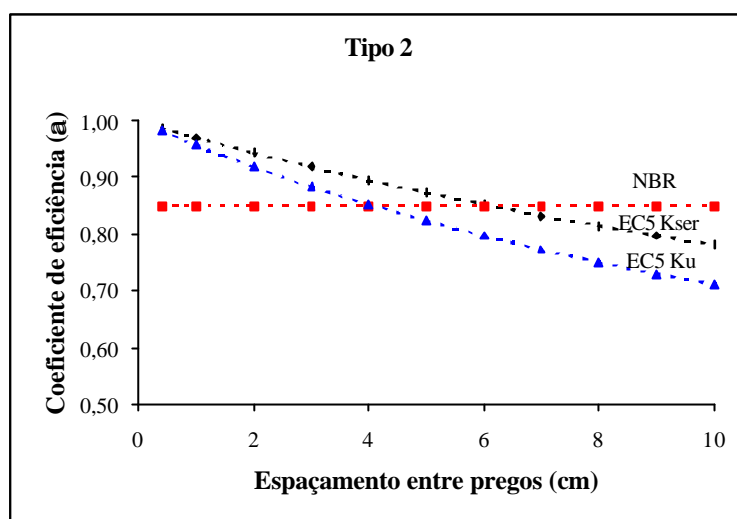


**Figura 71** – Coeficiente de eficiência x espaçamento entre pregos – Viga Tipo 1.

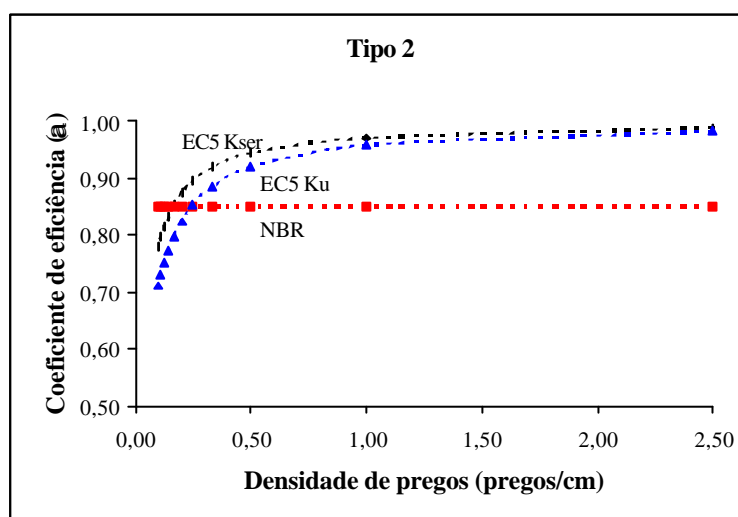


**Figura 72** – Coeficiente de eficiência x densidade de pregos – Viga Tipo 1

Estes gráficos ilustram uma das principais diferenças entre os critérios de dimensionamento da norma brasileira e europeia. A norma brasileira admite um coeficiente de eficiência constante independente do tipo e quantidade de conectores, já o critério da norma europeia considera esta variação.



**Figura 73** – Coeficiente de eficiência x espaçamento entre pregos – Viga Tipo 2



**Figura 74** – Coeficiente de eficiência x densidade de pregos – Viga Tipo 2

A seguir são apresentados os diagramas de carga permanente distribuída em função do espaçamento entre pregos e densidade de pregos. São apresentadas curvas para cada um dos estados limites. As verificações foram efetuadas para o estado limite de utilização (flecha – curva  $\delta$ ) e para os estados limites últimos (tensão normal, tensão de cisalhamento e força no conector –  $\sigma$ ,  $\tau$  e  $F$ , respectivamente).





Pode ser notado que, para densidades menores de pregos, a ligação entre os elementos é o ponto crítico do dimensionamento, tanto para a NBR 7190 quanto para o EUROCODE 5. Para o caso da viga tipo 1, a ligação deixa de se o ponto crítico somente quando utiliza-se uma elevada taxa de conectores (aproximadamente, 1 prego a cada 2 cm). Lembrando que o espaçamento mínimo entre pregos, segundo a NBR é de  $6d$  (3,24 cm para o prego 22 x 48), seria necessário o emprego de duas linhas de pregação (2 pregos a cada 4 cm). O mesmo ocorre com a viga do tipo 2. Neste caso, é necessário 1 prego a cada 1,2 cm, aproximadamente. Se o espaçamento mínimo é  $6d$  (2,04 cm para o prego 18 x 30), seria também necessário o emprego de duas linhas de pregação (2 pregos a cada 2,2 cm).

Para os casos usuais de espaçamento utilizados neste tipo de vigas compostas (de 5 a 10 cm para viga tipo 1 e 2,5 a 5 cm para a viga 2), nota-se que a capacidade de carga da viga sempre será determinada pela verificação dos conectores. Para a verificação dos conectores a norma brasileira recomenda que a verificação seja feita considerando todo o fluxo de cisalhamento sem redução, como se a viga fosse de seção maciça. O EUROCODE 5 considera que a verificação seja feita utilizando um fluxo de cisalhamento reduzido em função da rigidez da ligação. Logo, pode-se concluir que para os casos usuais de estruturas compostas formadas por vigas de madeira pregadas, o modelo de dimensionamento da norma brasileira é um pouco conservador quando comparado ao da norma européia.

Situação análoga ocorre para o caso das tensões normais, para o qual o critério da NBR 7190 fornece valores de tensões atuantes superiores aos do EUROCODE 5, diminuindo a capacidade resistente da viga.

Quanto às tensões de cisalhamento, o critério da NBR 7190 apresenta valores de tensões atuantes inferiores aos do EUROCODE 5, aumentando a capacidade resistente da viga. Entretanto, dificilmente as tensões de cisalhamento na madeira serão o ponto crítico do dimensionamento, no caso de densidade de prego usualmente empregada, considerando as restrições quanto à diminuição da espessura ou aumento da altura da alma, ou do aumento da seção das mesas.

Quando aos deslocamentos verticais, a NBR 7190 fornece valores superiores de deslocamento quando se tem maior densidade de pregos, e valores inferiores quando se tem menor densidade, em comparação ao EUROCODE 5. Em situações onde o controle de deslocamentos seja mais rigoroso, sugere-se que a avaliação da rigidez deva ser feita pelo método do EUROCODE 5, que apresenta maior precisão.

## 6. CONCLUSÕES FINAIS

Do estudo sobre peças compostas realizado na bibliografia, pode-se concluir que as vigas compostas de madeira serrada, ligadas por pregos, apresentam grande facilidade e baixo custo de produção, podendo ser largamente empregadas nas construções de madeira principalmente quando é requerido um acréscimo de inércia sem a disponibilidade de peças de seção maciça.

Segundo a bibliografia consultada, o método dos coeficientes para dimensionamento de peças compostas, apesar de proporcionar agilidade no cálculo, apresenta grande variabilidade por não considerar a rigidez da ligação e, por este motivo, alguns documentos normativos, que anteriormente o adotavam, após revisão optaram pelo método analítico

Já o método analítico proporciona maior precisão no cálculo de peças compostas, considerando a influência do deslizamento relativo entre as peças que compõem a seção em função das propriedades de rigidez de cada elemento, da geometria da seção, do vão, do módulo de deslizamento da ligação e do espaçamento entre conectores.

As normas DIN 1052 e EUROCODE 5 apresentam método de dimensionamento semelhantes derivado do método analítico das equações de equilíbrio – modelo simplificado. A principal diferença é o valor do módulo de deslizamento que, na norma européia, é obtido por uma equação empírica que considera a densidade da madeira e o diâmetro do pino, enquanto que a norma alemã propõe valores tabelados em função da configuração da seção transversal. Os valores de módulo de deslizamento indicados pela norma alemã são muito inferiores aos que normalmente resultam do cálculo pela fórmula do EUROCODE 5.

Os ensaios de ligações conduzidos com dois ciclos de carga e descarga, apresentaram valores de módulo e deslizamento muito acima dos estimados pela equação do EUROCODE 5. As melhores aproximações experimentais aos valores do EUROCODE 5 foram obtidas quando os corpos-de-prova foram ensaiados com carregamento monotônico crescente sem ciclos.

Conclui-se que a formulação empírica do EUROCODE 5 conduz à boas aproximações para o cálculo de vigas compostas. Entretanto, são necessárias mais investigações sobre rigidez de ligações.

O método do EUROCODE 5 demonstrou ser satisfatório para estimar o valor da rigidez efetiva à flexão, bem como das deformações e tensões normais, até o limite de flecha de  $L/200$ . A partir deste limite, verificou-se que as vigas apresentaram redução da rigidez, devido ao comportamento não linear das ligações, comportamento este que não é representado pelo método do EUROCODE 5.

Quanto à capacidade das vigas, tanto o modelo do EUROCODE 5 quanto o da NBR 7190 indicam forças de ruptura muito abaixo das observadas nos ensaios. Isto indica uma reserva de capacidade das vigas, em função da redistribuição de esforços entre os elementos de ligação, devido à flexibilidade dos mesmos.

Em termos de verificação da segurança da peça, o critério de dimensionamento da NBR 7190 não conduz, na maioria dos casos usuais, a resultados muito discrepantes dos obtidos pelo EUROCODE 5, pois o fator restritivo é a ligação entre os elementos. Entretanto, situações nas quais seja necessário um controle mais rigoroso dos deslocamentos, ou o aumento da capacidade de carga dos elementos das ligações, podem levar a resultados distinto entre os dois documentos normativos.

Assim sugere-se a adoção do critério do EUROCODE 5 para o dimensionamento de vigas I de seção composta, considerando que o mesmo conduz a resultados mais precisos. Também possibilita ao projetista a adoção de soluções com menores densidades de pregos, trabalhando-se com valores da inércia efetiva inferiores a 85% da inércia teórica.

O ensaio em viga composta com elevada taxa de pregos, viga P3 (1 prego 22 x 48 a cada 2,4 cm), apresentou ruptura precoce induzida pelo enfraquecimento da região inferior da alma e mesa. Logo, não se recomenda a utilização de elevadas taxas de pregos, pois isto conduz ao enfraquecimento da região tracionada.



## 7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALMEIDA, P. A. O. (1987). *Uniões Pregadas de Madeira*. São Paulo. 141p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- \_\_\_\_\_. (1990). *Estruturas de Grande Porte de Madeira Composta*. São Paulo. 277p. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- ALVIM, R. C. (2002). *A Resistência dos Pilares de Madeira Composta*. São Paulo. 206p. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1982). *NBR 6207 – Arame de aço – Ensaio de tração – Método de ensaio*. Rio de Janeiro.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1992). *NBR 6152 – Materiais metálicos – Determinação das propriedades mecânicas à tração – Método de ensaio*. Rio de Janeiro.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1997). *NBR 7190 - Projeto de Estruturas de Madeira*. Rio de Janeiro.
- BESSETTE, A. E.; HOYLE R. J. (1985). Test Evaluation of Beam Design Method. *Journal of Structural Engineering*. v.111, n.1, p.123-141. Jan.
- BOHNHOFF, D. R. (1992). Modeling Horizontally Nail-Laminated Beams. *Journal of Structural Engineering*. v.118, n.5, p.1393-1406. May.
- CHUI, Y. H.; BARCLAY, D. W. (1998). Analysis of Three-Layer Beams With Non-Identical Layers And Semi-Rigid Connections. *Canadian Journal of Civil Engineering*. v.25, n.2, p.271-276.
- COMITÉ EUROPÉEN DE NORMALISATION (1993). *EUROCODE 5 - Design of Timber Structures*. Brussels.

- DEUSTCHES INSTITUT FÜR NURMING (1988). *DIN 1052 - Structural Use of Timber - Design and construction*. Berlin.
- EHLBECK, J.; LARSEN, H. J. (1991). *Eurocode 5 - Design of Timber Structures: Joints*. p.9-23.
- FERREIRA, C. A. T. (1999). *Pontes Pré-fabricadas de Madeira*. São Paulo. 104p. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- GEHRI, E. (1988). Zusammengesetzte Träger. In: *Autographie Einführung in die Norm 164 (1981)*. Cap.10, p.285-298.
- GIRHAMMAR, U. A.; GOPU, V. K. A. (1993). Composite Beam-Columns with Interlayer Slip – Exact Analysis. *Journal of Structural Engineering*. v.119, n.4, p.1265-1282. Apr.
- GOODMAM, J. R.; POPOV, E. P. (1968). Layered Beam Systems With Interlayer Slip. *Journal of the Structural Division. ASCE*. v.94, n.11, p.2535-2547. Nov.
- ITANI, R. Y.; BRITO, F. A. (1978). Elastomeric Bonded Wood Beams with Transverse Gaps. *Journal of Structural Division. ASCE*. v.104, n.10, p.1595-1609. Oct.
- JOHANSEN, K. W. (1949). Theory of timber connections. *Internatinal association for Bridge and Structural Engeneering*. Zurick. Vol. 9. P.249-262.
- KAMIYA, F. (1985). Analytical Studies on the Nonlinear Bending Behavior of Nailed Layered Components: Part 1. Nailed Layered Beams. *Wood and Fiber Science*. v.17, n.1, p.117-131.
- KIDWELL, E. (1897). The efficiency of built-up wooden beams. *American Institute of Mining Engineers*. v.27, p.732-818.
- KREUZINGER, H. (1995). *Mechanically jointed beams e columns*. Timber Engineering STEP 1, Lecture B11, Centrum Hout, The Netherlands.
- KUENZI, E. W. (1955). *Theoretical Design of a Nailed or Bolted Joint Under Lateral Load*. USDA-FS-FPL, Madison, Wis. Research Paper, FPL D1951.
- KUENZI, E. W.; WILKINSON, T. L. (1971). *Composite Beams – Effect of Adhesive or Fastener Rigidity*. USDA-FS-FPL, Madison, Wis. Research Paper, FPL 152.

- MCCUTCHEON, W. J. (1986). Stiffness of Framing Members with Partial Composite Action. *Journal of Structural Engineering*. v.112, n.7, p.1623-1637. July.
- MÖHLER, K. (1956). *Über das Tragverhalten von Biegetägern und Druckstäben mit zusammengesetzten Querschnitten und nachgiebigen Verbindungsmitteln*. Habilitation, Technische Universität Karlsruhe, Germany.
- NEWMARW, N. M.; SIESS, C. P.; VIEST, I. M. (1951). Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction. *Proceedings of Society for Experimental Stress Analysis*. v.9, n.1, p.75-92.
- PATTON-MALLORY, M.; PELLICANE, P. J.; SMITH, F. W. (1997). Modeling Bolted Connections in Wood: Review. *Journal of Structural Engineering*. v.123, n.8, p.1054-1062. Aug.
- RODRIGUES JR, M. S. (1984). *Vigas Compostas de Quatro Elementos de Madeira Interligados por Anéis Metálicos*. São Carlos. 97p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SALARI, M. R.; SCAPONE, E.; SHING, P. B.; FRANGOPOL, F. (1998). Nonlinear Analysis of Composite Beams with Deformable Shear Connectors. *Journal of Structural Engineering*. v.124, n.10, p.1148-1158. Oct.
- SANTANA, C. L. O. (1997). *Vigas de Madeira de Seção Composta com Alma em Chapa de Compensado*. Campinas. 203p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas.
- SANTANA, C. L. O.; MASCIA, N. T. (2000). Abordagem Numérica de Vigas de Madeira de Seção Composta com Alma em Chapa de Compensado. (CD ROM) In: VII ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRA, São Carlos, 19 à 21 de Julho de 2000. *Anais*. São Carlos – EESC.
- SMITH, I. (1980). Series Type Solutions for Built-up Timber Beams With Semi-Rigid Connections. *Proceedings of Institute of Civil Engineers*. v.69, n.2, p.707-719. Sep.
- SOCIÉTÉ SUISSE DES INGÉNIEURS ET DES ARCHITECTES (1981). *SIA 164 – Constructions en bois*. Zurich.

- SORIANO, J.; MASCIA, N. T. (2000). Comportamento Mecânico de Ligações Flexíveis em Vigas Mistas de Concreto-Madeira. (CD ROM) In: VII ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRA, São Carlos, 19 à 21 de Julho de 2000. *Anais*. São Carlos – EESC.
- STAMATO, G. C. (2000). *Ligações em Estruturas de Madeira Compostas por Chapas de Madeira Compensada*. São Carlos. 93p. Monografia apresentada para Exame de Qualificação de Doutorado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- STAMATO, G. C.; CALIL, C. (2000). Dimensionamento de Estruturas de Madeira Compostas por Chapas de Madeira Compensada. (CD ROM) In: VII ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRAS E EM ESTRUTURAS DE MADEIRA, São Carlos, 19 à 21 de Julho de 2000. *Anais*. São Carlos - EESC.
- STÜSSI, F. (1947). Zusammengesetzte Vollwandträger. *International Association for Bridge and Structural Engineering*. IABSE. v.3, p.249-269.
- TACITANO, M. (2000). *Análise de Vigas de Seção T em Madeira-Concreto com Ligação Semi-Rígida*. Campinas. 193p. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas.
- TACITANO, M.; DEMARZO, M. A.. (2000). Comportamento Semi-Rígido em Estruturas Mistas Concreto-Madeira. (CD ROM) In: XXIX JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERIA ESTRUCTURAL, Punta del Este, 15 à 17 de Novembro de 2000. *Anais*. Punta del Este.
- THOMPSON, E. G.; GOODMAM, J. R; VANDERBILT, M. D. (1975). Finite Element Analysis of Layered Wood Systems. *Journal of the Structural Division*. ASCE. v.101, n.12, p.2659-2672. Dec.
- VAN DYER, D. B. (1992). Slip Modulus in Bolted Timber Joints. *Canadian Journal of Civil Engineering*. v.19, n.6, p.960-964. Dec.
- WHEAT, D. L.; CALIXTO, J. M. (1994). Nonlinear Analysis of Two-Layered Wood Members with Interlayer Slip. *Journal of Structural Engineering*. ASCE. v.120, n.6, p.1909-1929. Jun.

## ANEXO A

### Resolução do sistema de equações diferenciais de segunda ordem do modelo exato (CHUI & BARCLAY – 1998).

Para determinar a solução do sistema de equações diferenciais (20) é necessário aplicar as devidas condições e contorno do problema. Para uma viga simplesmente apoiada, o presente problema pode ser escrito como

$$\frac{d^2 N}{dx^2} = A \cdot N + V \cdot M(x), \quad 0 \leq x \leq L \quad (A1)$$
$$N(0) = 0, \quad N(L) = 0$$

Onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -a_{11} & -a_{12} - a_{32} & -a_{13} - a_{33} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{34} \end{bmatrix} \quad (A2)$$

$M(x)$  é o momento fletor. Para vigas simplesmente apoiadas sobre um carregamento distribuído  $w$ ,  $M(x)$  é dado por

$$M(x) = \frac{w}{2}(L-x)x \quad (A3)$$

Para vigas simplesmente apoiadas com carga concentrada  $P$  a uma distância  $a = \alpha L$  da origem,  $M(x)$  pode ser expresso como

$$M(x) = P[(1-\alpha)x - (x-a)U_a(x)] \quad (A4)$$

Onde  $U_a$  é a função passo na qual  $U_a = 1$  para  $a < x < L$ , e  $U_a = 0$  para  $x \leq a$ .

Pode-se provar que o determinante de  $A$  é nulo e que o autovalor  $\lambda_0 = 0$ . Os outros dois autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  podem ser encontrados em A5.

$$\lambda_1 = \frac{-b - (b^2 - 4c)^{\frac{1}{2}}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-b + (b^2 - 4c)^{\frac{1}{2}}}{2} \quad (A5)$$

Onde

$$b = a_{12} + a_{32} - a_{11} - a_{33}$$

e

$$c = a_{33}(a_{11} - a_{12}) + a_{32}(a_{13} - a_{11})$$

As soluções para as forças normais e deslocamentos são

$$N_1(x) = -N_2(x) - N_3(x) \quad (\text{A6})$$

$$N_2(x) = -q_1 p_1 r_1(x) - q_2 p_2 r_2(x) \quad (\text{A7})$$

$$N_3(x) = p_1 r_1(x) + p_2 r_2(x) \quad (\text{A8})$$

$$y(x) = \frac{1}{\Sigma EI} [-r_0(x)(1 + y_1 + y_2) + y_1 r_1(x) + y_2 r_2(x)] \quad (\text{A9})$$

Na qual os parâmetros  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $y_1$ , e  $y_2$  são funções das dimensões e propriedades dos elementos da viga composta, e  $r_0(x)$ ,  $r_1(x)$ , e  $r_2(x)$  são funções da configuração do carregamento e das condições de contorno. Os parâmetros  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $y_1$ , e  $y_2$  são apresentados em (A10)-(A12).

$$p_1 = \frac{1}{2} \left( \frac{da_{34} + 2a_{32}a_{14}}{(b^2 - 4c)^{\frac{1}{2}}} + a_{34} \right) \quad (\text{A10})$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \left( -\frac{da_{34} + 2a_{32}a_{14}}{(b^2 - 4c)^{\frac{1}{2}}} + a_{34} \right)$$

Onde  $d = a_{11} + a_{32} - a_{33} - a_{12}$ .

$$q_1 = \frac{a_{33} - \lambda_1}{a_{32}}, \quad q_2 = \frac{a_{33} - \lambda_2}{a_{32}} \quad (\text{A11})$$

$$y_1 = \frac{p_1}{\lambda_1} (h_2 - h_1 q_1), \quad y_2 = \frac{p_2}{\lambda_2} (h_2 - h_1 q_2) \quad (\text{A12})$$

Onde  $h_1 = (d_1 + d_2)/2$  e  $h_2 = d_1/2 + d_2 + d_3/2$ .

As funções  $r_0(x)$ ,  $r_1(x)$ , e  $r_2(x)$  para carregamento distribuído uniformemente e para carga concentrada são apresentadas em (A13) e (A14).

- Carga uniformemente distribuída:

$$r_i(x) = -\frac{w}{\lambda_i} \left[ \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_i} x) + \sinh(\sqrt{\lambda_i} (L-x))}{\lambda_i \sinh(\sqrt{\lambda_i} L)} + \frac{x(L-x)}{2} - \frac{1}{\lambda_i} \right], \quad i = 1,2 \quad (\text{A13})$$

$$r_i(x) = \frac{w}{24} x(L-x)(x^2 - xL - L^2), \quad i = 0$$

- Carga concentrada:

$$r_i(x) = \frac{P}{\lambda_i} \left\{ \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_i} (L-a)) \sinh(\sqrt{\lambda_i} x)}{\sqrt{\lambda_i} \sinh(\sqrt{\lambda_i} L)} + (\alpha - 1)x - \left[ \frac{\sinh(\sqrt{\lambda_i} (x-a))}{\sqrt{\lambda_i}} - (x-a) \right] U_a(x) \right\}, \quad i = 1,2 \quad (\text{A14})$$

$$r_i(x) = \frac{P}{6} \left[ (1 - \alpha)(x^2 - L^2)x + \frac{x}{L}(L-a)^3 - (x-a)^3 U_a(x) \right], \quad i = 0$$