

**NOVAS METODOLOGIAS E FORMULAÇÕES
PARA O TRATAMENTO DE PROBLEMAS
INELÁSTICOS COM ACOPLAMENTO MEC/MEF
PROGRESSIVO**

Arthur Dias Mesquita

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: Prof. Assoc. Humberto Breves Coda

São Carlos

2002

*Aos meus pais,
que tanto amo, Nivaldo e Solange*

*“Quem entre vós é sábio e entendido?
Mostre em mansidão de sabedoria, mediante
condigno proceder, as suas obras.*

*A sabedoria, porém, lá do alto, é
primeiramente pura; depois pacífica,
indulgente, tratável, plena de misericórdia e de
bons frutos, imparcial, sem fingimento.”*

Tg 3. 13,17

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Humberto Breves Coda, pelo cuidadoso trabalho de orientação, incentivo e especialmente pela amizade demonstrada durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Professor Paulo Lourenço da Universidade do Minho pelas valiosas discussões a respeito de modelos não-lineares e sobretudo pela amizade e agradável convivência em Portugal.

Ao Professor Wilson Sérgio Venturini, pela cooperação e apoio, demonstrando sempre disposição para ajudar e esclarecer dúvidas a cerca deste trabalho.

Aos meus pais Nivaldo e Solange, meus irmãos André e Alexandre e minha querida avó Ofélia. Família que Deus me presenteou e que sempre me apoiou em todos os momentos de minha vida.

À minha pequena Vinie, pelo seu grande amor, seu companherismo e por proporcionar-me uma agradável convivência, sempre incentivando-me na realização deste trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, pela bolsa de estudo concedida.

A todos os amigos do Departamento de Engenharia de Estruturas - EESC/USP pelo gratificante convívio e amizade.

Acima de tudo, a DEUS, companheiro fiel, presente em todos os momentos difíceis da minha vida.

SUMÁRIO

| | |
|---|-----|
| LISTA DE FIGURAS..... | i |
| LISTA DE TABELAS..... | vi |
| LISTA DE SÍMBOLOS..... | vii |
| RESUMO..... | x |
| <i>ABSTRACT</i> | xi |
| | |
| CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO | |
| 1.1 Generalidades..... | 1 |
| 1.2 Objetivo..... | 6 |
| 1.3 Organização do trabalho..... | 6 |
| 1.4 Observações finais..... | 8 |
| | |
| CAPÍTULO 2 – MODELOS REOLÓGICOS | |
| 2.1 Introdução..... | 11 |
| 2.2 Modelos básicos..... | 12 |
| 2.3 Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt..... | 13 |
| 2.4 Modelo viscoelástico de Boltzmann..... | 15 |
| 2.5 Modelo elastoplástico..... | 18 |
| 2.6 Modelo viscoplástico (sem comportamento instantâneo)..... | 19 |
| 2.7 Modelo viscoplástico (com comportamento instantâneo)..... | 21 |
| | |
| CAPÍTULO 3 – FORMULAÇÕES ELASTODINÂMICAS DO MEF E MEC | |
| 3.1 Introdução..... | 24 |
| 3.2 Método dos elementos finitos..... | 25 |
| 3.2.1 Tratamento algébrico para a representação integral..... | 27 |
| 3.3 Método dos elementos de contorno..... | 29 |
| 3.3.1 Representação integral para tensões em pontos internos..... | 32 |
| 3.3.2 Obtenção das tensões no contorno..... | 34 |
| 3.3.3 Tratamento algébrico para as representações integrais..... | 36 |

CAPÍTULO 4 – FORMULAÇÕES VISCOELÁSTICAS DO MEF

| | |
|---|----|
| 4.1 Introdução..... | 38 |
| 4.2 Formulação viscoelastodinâmica (Kelvin-Voigt)..... | 40 |
| 4.2.1 Tratamento algébrico para a representação integral..... | 40 |
| 4.2.2 Integração temporal numérica..... | 42 |
| 4.2.3 Exemplos numéricos..... | 43 |
| 4.2.3.1 Exemplo 01: Peça tracionada..... | 44 |
| 4.2.3.2 Exemplo 02: Placa circular engastada..... | 46 |
| 4.2.3.3 Exemplo 03: Casca cilíndrica sob pressão interna..... | 47 |
| 4.2.3.4 Exemplo 04: Cilindro com paredes rígidas..... | 49 |
| 4.3 Formulação viscoelástica (Boltzmann)..... | 50 |
| 4.3.1 Tratamento algébrico para a representação integral..... | 51 |
| 4.3.2 Integração temporal numérica..... | 53 |
| 4.3.3 Exemplos numéricos..... | 56 |
| 4.3.3.1 Exemplo 01: Peça tracionada..... | 56 |
| 4.3.3.2 Exemplo 02: Placa circular engastada..... | 59 |
| 4.3.3.3 Exemplo 03: Casca cilíndrica sob pressão interna..... | 60 |

CAPÍTULO 5 - FORMULAÇÕES VISCOELÁSTICAS DO MEC

| | |
|---|----|
| 5.1 Introdução..... | 62 |
| 5.2 Formulação viscoelastodinâmica - representação de domínio (Kelvin)..... | 63 |
| 5.2.1 Representação integral para tensões em pontos internos..... | 64 |
| 5.2.2 Tratamento algébrico para as representações integrais..... | 66 |
| 5.2.3 Integração temporal numérica..... | 68 |
| 5.2.4 Exemplos numéricos..... | 69 |
| 5.2.4.1 Exemplo 01: Peça tracionada..... | 69 |
| 5.2.4.2 Exemplo 02: Cilindro sob pressão interna..... | 72 |
| 5.3 Formulação viscoelástica - representação de domínio (Boltzmann)..... | 74 |
| 5.3.1 Representação integral para tensões em pontos internos..... | 76 |
| 5.3.2 Tratamento algébrico para as representações integrais..... | 78 |
| 5.3.3 Integração temporal numérica..... | 80 |
| 5.3.4 Exemplos numéricos..... | 82 |
| 5.3.4.1 Exemplo 01: Peça tracionada..... | 82 |
| 5.3.4.2 Exemplo 02: Cilindro sob pressão interna..... | 85 |
| 5.4 Formulação viscoelástica - representação no contorno (Kelvin)..... | 87 |

| | |
|---|-----|
| 5.4.1 Representação integral para tensões em pontos internos..... | 89 |
| 5.4.2 Obtenção das tensões totais no contorno..... | 91 |
| 5.4.3 Tratamento algébrico para as representações integrais..... | 93 |
| 5.4.4 Integração temporal numérica..... | 95 |
| 5.4.5 Exemplos numéricos..... | 96 |
| 5.4.5.1 Exemplo 01: Peça tracionada..... | 97 |
| 5.4.5.2 Exemplo 02: Cilindro sob pressão interna..... | 99 |
| 5.4.5.3 Exemplo 03: Peça tracionada 3D..... | 100 |
| 5.5 Formulação viscoelástica - representação no contorno (Boltzmann)..... | 102 |
| 5.5.1 Representação integral para tensões em pontos internos..... | 104 |
| 5.5.2 Obtenção das tensões totais no contorno..... | 105 |
| 5.5.3 Tratamento algébrico para as representações integrais..... | 107 |
| 5.5.4 Integração temporal numérica..... | 109 |
| 5.5.5 Exemplos numéricos..... | 111 |
| 5.5.5.1 Exemplo 01: Peça tracionada..... | 111 |
| 5.5.5.2 Exemplo 02: Cilindro sob pressão interna..... | 112 |
| 5.5.5.3 Exemplo 03: Túnel submetido a uma pressão interna..... | 113 |
| 5.5.5.4 Exemplo 04: Peça tracionada 3D..... | 114 |
| 5.5.5.5 Exemplo 05: Buraco esférico no meio infinito..... | 115 |

CAPÍTULO 6 – FORMULAÇÃO ELASTOPLÁSTICA DO MEC

| | |
|---|-----|
| 6.1 Introdução..... | 118 |
| 6.2 Formulação elastoplástica..... | 119 |
| 6.2.1 Representação integral para tensões em pontos internos..... | 121 |
| 6.2.2 Obtenção das tensões no contorno..... | 122 |
| 6.2.3 Tratamento algébrico para as representações integrais..... | 124 |
| 6.2.4 Procedimento não-linear..... | 125 |
| 6.2.5 Exemplos numéricos..... | 128 |
| 6.2.5.1 Exemplo 01: Peça tracionada 3D..... | 128 |
| 6.2.5.2 Exemplo 02: Cilindro 3D submetido à pressão interna. | 131 |

CAPÍTULO 7 – ALGORITMOS IMPLÍCITOS PARA ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES

| | |
|---|-----|
| 7.1 Introdução..... | 133 |
| 7.2 Relações constitutivas (plasticidade) | 134 |

| | |
|--|-----|
| 7.3 Aspectos do algoritmo..... | 136 |
| 7.4 Algoritmo 1: von Mises associativo..... | 138 |
| 7.5 Algoritmo 2: Drucker-Prager associativo..... | 146 |
| 7.6 Resultados numéricos..... | 156 |
| 7.7 Algoritmo 3: von Mises não-associativo..... | 158 |
| 7.8 Algoritmo 4: Drucker-Prager não-associativo..... | 166 |
| 7.9 Exemplos numéricos..... | 168 |
| 7.9.1 Exemplo 01: Peça tracionada 3D..... | 169 |
| 7.9.2 Exemplo 02: Bloco 3D confinado..... | 174 |
| 7.9.3 Exemplo 03: Cilindro 3D submetido à pressão interna..... | 176 |

CAPÍTULO 8 - FORMULAÇÕES VISCOPLÁSTICAS DO MEC

| | |
|---|-----|
| 8.1 Introdução..... | 178 |
| 8.2 Formulação viscoplástica (sem comportamento instantâneo)..... | 179 |
| 8.2.1 Representação integral para tensões em pontos internos..... | 181 |
| 8.2.2 Obtenção das tensões totais no contorno..... | 183 |
| 8.2.3 Tratamento algébrico para as representações integrais..... | 185 |
| 8.2.4 Integração temporal numérica..... | 186 |
| 8.2.5 Procedimento não-linear..... | 188 |
| 8.2.6 Exemplo numérico..... | 190 |
| 8.3 Formulação viscoplástica (com comportamento instantâneo)..... | 194 |
| 8.3.1 Representação integral para tensões em pontos internos..... | 196 |
| 8.3.2 Obtenção das tensões totais no contorno..... | 198 |
| 8.3.3 Tratamento algébrico para as representações integrais..... | 200 |
| 8.3.4 Integração temporal numérica..... | 201 |
| 8.3.5 Exemplo numérico..... | 203 |

CAPÍTULO 9 – ACOPLAMENTO MEC/MEF

| | |
|---|-----|
| 9.1 Introdução..... | 206 |
| 9.2 Técnicas de acoplamento..... | 207 |
| 9.3 Acoplamento para o reforço..... | 213 |
| 9.4 Procedimento com acoplamento progressivo..... | 215 |
| 9.5 Exemplos numéricos..... | 218 |
| 9.5.1 Exemplo 01: Peça tracionada 3D..... | 219 |
| 9.5.2 Exemplo 02: Tubo de concreto armado 2D..... | 220 |

| | |
|---|-----|
| 9.5.3 Exemplo 03: Túnel reforçado 2D..... | 221 |
| 9.5.4 Exemplo 04: Pórtico 2D sobre solos diferentes..... | 222 |
| 9.5.5 Exemplo 05: Painel sanduíche..... | 224 |
| 9.5.6 Exemplo 06: Ruptura dinâmica de uma peça tracionada 2D..... | 227 |
| 9.5.7 Exemplo 07: Ruptura de uma peça tracionada 3D..... | 229 |
| 9.5.8 Exemplo 08: Reforço progressivo de túnel 2D..... | 231 |
| 9.5.9 Exemplo 09: Reforço de uma viga..... | 232 |
| 9.5.10 Exemplo 10: Bloco 3D submetido ao peso próprio..... | 234 |
| 9.5.11 Exemplo 11: Reforço progressivo de um buraco esférico..... | 236 |
| 9.5.12 Exemplo 12: Bloco 3D elastoplástico submetido ao peso próprio..... | 238 |
| | |
| CAPÍTULO 10 - CONCLUSÕES..... | 241 |
| | |
| ANEXO A - INTEGRAIS DE CONTORNO DAS FORÇAS VOLUMÉTRICAS | |
| A.1 Introdução..... | 247 |
| A.2 Representação em deslocamento..... | 247 |
| A.3 Representação em deformação e tensão..... | 250 |
| | |
| ANEXO B - DERIVADAS DE INTEGRAIS DE DOMÍNIO SINGULARES | |
| B.1 Introdução..... | 253 |
| B.2 Estudo da diferenciação das integrais singulares..... | 254 |
| B.3 Desenvolvendo as integrais Iu | 257 |
| B.4 Desenvolvendo as integrais Ie | 259 |
| | |
| ANEXO C – DEDUÇÃO DA FÓRMULA DE “LEIBNITZ” | |
| C.1 Formula de “Leibnitz”..... | 264 |
| | |
| ANEXO D - TRATAMENTO DAS INTEGRAIS | |
| D.1 Introdução..... | 266 |
| D.2 Técnica para integrais quasi-singulares..... | 267 |
| D.3 Técnica para integrais com singularidade fraca..... | 272 |
| D.4 Técnica para integrais com singularidade forte..... | 274 |
| | |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 282 |

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-------------|---|----|
| FIGURA 2.1 | - Representação reológica uniaxial: (a) elástico; (b) viscoso; (c) plástico..... | 12 |
| FIGURA 2.2 | - Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt (representação uniaxial)..... | 13 |
| FIGURA 2.3 | - Modelo viscoelástico de Boltzmann (representação uniaxial)..... | 16 |
| FIGURA 2.4 | - Modelo elastoplástico (representação uniaxial)..... | 18 |
| FIGURA 2.5 | - Modelo viscoplástico (representação uniaxial)..... | 19 |
| FIGURA 2.6 | - Modelo viscoplástico (representação uniaxial)..... | 21 |
| FIGURA 3.1 | - Discretização do Problema..... | 27 |
| FIGURA 3.2 | - Sistema cartesiano local de coordenadas..... | 34 |
| FIGURA 3.3 | - Discretização do problema..... | 36 |
| FIGURA 4.1 | - Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura..... | 44 |
| FIGURA 4.2 | - Deslocamento longitudinal do ponto A..... | 44 |
| FIGURA 4.3 | - Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B..... | 45 |
| FIGURA 4.4 | - Deslocamento longitudinal do ponto A..... | 45 |
| FIGURA 4.5 | - Deslocamento longitudinal do ponto A..... | 46 |
| FIGURA 4.6 | - Discretização, deformada, geometria e propriedades físicas da estrutura..... | 46 |
| FIGURA 4.7 | - Deslocamento transversal do centro da placa..... | 47 |
| FIGURA 4.8 | - Discretização, geometria e propriedades físicas da estrutura..... | 48 |
| FIGURA 4.9 | - Deslocamento radial do ponto A..... | 48 |
| FIGURA 4.10 | - Discretização, deformada (ampliada), geometria e propriedades físicas..... | 49 |
| FIGURA 4.11 | - Deslocamento do ponto A..... | 49 |
| FIGURA 4.12 | - Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura..... | 57 |
| FIGURA 4.13 | - Deslocamento longitudinal do ponto A..... | 57 |

| | | |
|-------------|---|----|
| FIGURA 4.14 | - Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto <i>B</i> | 58 |
| FIGURA 4.15 | - Deslocamento longitudinal do ponto <i>A</i> | 58 |
| FIGURA 4.16 | - Deslocamento longitudinal do ponto <i>A</i> | 59 |
| FIGURA 4.17 | - Discretização, forma deformada, geometria e propriedades físicas da estrutura..... | 59 |
| FIGURA 4.18 | - Deslocamento transversal do centro da placa..... | 60 |
| FIGURA 4.19 | - Discretização, geometria e propriedades físicas da estrutura..... | 60 |
| FIGURA 4.20 | - Deslocamento radial do ponto <i>A</i> | 61 |
| FIGURA 5.1 | - Discretização da estrutura..... | 70 |
| FIGURA 5.2 | - Deslocamento longitudinal do ponto <i>A</i> | 70 |
| FIGURA 5.3 | - Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto <i>B</i> | 71 |
| FIGURA 5.4 | - Deslocamento vertical do ponto <i>A</i> para diversos Δt | 71 |
| FIGURA 5.5 | - Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura..... | 72 |
| FIGURA 5.6 | - Deslocamento radial da parede interna..... | 72 |
| FIGURA 5.7 | - Deslocamento radial da parede externa..... | 73 |
| FIGURA 5.8 | - Deslocamento radial da parede interna para diversos Δt | 73 |
| FIGURA 5.9 | - Deslocamento radial da parede externa para diversos Δt | 74 |
| FIGURA 5.10 | - Deslocamento longitudinal do ponto <i>A</i> | 82 |
| FIGURA 5.11 | - Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto <i>B</i> | 83 |
| FIGURA 5.12 | - Deslocamento do ponto <i>A</i> com variação da solicitação..... | 83 |
| FIGURA 5.13 | - Deslocamento longitudinal do ponto <i>A</i> | 84 |
| FIGURA 5.14 | - Deslocamento do ponto <i>A</i> para vários Δt | 84 |
| FIGURA 5.15 | - Deslocamento radial da parede interna..... | 85 |
| FIGURA 5.16 | - Deslocamento radial da parede externa..... | 86 |
| FIGURA 5.17 | - Deslocamento radial da parede interna para vários Δt | 86 |
| FIGURA 5.18 | - Deslocamento radial da parede externa para vários Δt | 87 |
| FIGURA 5.19 | - Discretização do problema..... | 93 |
| FIGURA 5.20 | - Geometria e discretização..... | 97 |
| FIGURA 5.21 | - Deslocamento longitudinal do ponto <i>A</i> | 97 |
| FIGURA 5.22 | - Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto <i>B</i> | 98 |
| FIGURA 5.23 | - Deslocamento longitudinal do ponto <i>A</i> para vários Δt | 98 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| FIGURA 5.24 | - Geometria e discretização da estrutura..... | 99 |
| FIGURA 5.25 | - Deslocamento radial da parede interna para diversos Δt | 99 |
| FIGURA 5.26 | - Deslocamento radial da parede externa para diversos Δt | 100 |
| FIGURA 5.27 | - Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura..... | 100 |
| FIGURA 5.28 | - Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada..... | 101 |
| FIGURA 5.29 | - Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do centróide do corpo | 101 |
| FIGURA 5.30 | - Deslocamento longitudinal do ponto A para vários Δt | 111 |
| FIGURA 5.31 | - Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B..... | 112 |
| FIGURA 5.32 | - Deslocamento longitudinal do ponto A para uma carga removida em $t=200$ dias..... | 112 |
| FIGURA 5.33 | - Deslocamento radial da parede interna para diversos Δt | 113 |
| FIGURA 5.34 | - Deslocamento radial da parede externa para diversos Δt | 113 |
| FIGURA 5.35 | - Geometria, discretização e propriedades físicas..... | 114 |
| FIGURA 5.36 | - Deslocamento radial do túnel..... | 114 |
| FIGURA 5.37 | - Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada..... | 115 |
| FIGURA 5.38 | - Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do centróide do corpo | 115 |
| FIGURA 5.39 | - Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura..... | 116 |
| FIGURA 5.40 | - Deslocamento radial para $t=30s$ | 116 |
| FIGURA 5.41 | - Tensão radial σ_r e tangencial σ_θ para $t=30s$ | 117 |
| FIGURA 6.1 | - Discretização do problema..... | 124 |
| FIGURA 6.2 | - Estratégia de solução incremental-iterativa (caso unidimensional).. | 128 |
| FIGURA 6.3 | - Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura..... | 129 |
| FIGURA 6.4 | - Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada..... | 129 |
| FIGURA 6.5 | - Tensão σ_{zz} do ponto localizado no centróide do corpo..... | 130 |
| FIGURA 6.6 | - Diagrama <i>reação x deslocamento</i> | 130 |
| FIGURA 6.7 | - Diagrama <i>reação x deslocamento</i> | 131 |
| FIGURA 6.8 | - Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura..... | 131 |
| FIGURA 6.9 | - Deslocamento radial da parede externa..... | 132 |

| | | |
|--------------|--|-----|
| FIGURA 6.10 | - Tensões σ_r , σ_θ e σ_z ao longo da espessura..... | 132 |
| FIGURA 7.1 | - Lei de encruamento..... | 140 |
| FIGURA 7.2 | - Algoritmo de integração implícito para o critério de von Mises 3D | 145 |
| FIGURA 7.3 | - Algoritmo de integração implícito para o critério de Drucker-Prager 3D..... | 155 |
| FIGURA 7.4 | - Estado de deformação devido a um estado de tensão uniaxial..... | 160 |
| FIGURA 7.5 | - Correção do estado de tentativa..... | 162 |
| FIGURA 7.6a | - Algoritmo de integração implícito para o critério de von Mises 3D | 164 |
| FIGURA 7.6b | - Algoritmo generalizado não-associativo para o critério de von Mises 3D..... | 165 |
| FIGURA 7.7 | - Correção do estado de tentativa..... | 166 |
| FIGURA 7.8 | - Algoritmo de integração implícito para o critério de von Mises 3D | 168 |
| FIGURA 7.9 | - Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada..... | 169 |
| FIGURA 7.10 | - Tensão σ_{zz} do ponto localizado no centróide do corpo (critério de von Mises)..... | 170 |
| FIGURA 7.10a | - <i>Reação x deslocamento</i> com encruamento nulo (critério de von Mises)..... | 170 |
| FIGURA 7.10b | - <i>Reação x deslocamento</i> com encruamento negativo (critério de von Mises)..... | 171 |
| FIGURA 7.11 | - Tensão σ_{zz} do ponto localizado no centróide do corpo (critério de Drucker-Prager)..... | 171 |
| FIGURA 7.12 | - Variação volumétrica plástica ε_v^p | 172 |
| FIGURA 7.13 | - Elemento tracionado..... | 173 |
| FIGURA 7.14 | - Compressão de um bloco confinado..... | 174 |
| FIGURA 7.15 | - Deslocamento do ponto central da extremidade solicitada..... | 174 |
| FIGURA 7.16 | - Deslocamento do ponto central da extremidade solicitada..... | 175 |
| FIGURA 7.17 | - Deslocamento radial da parede externa (von Mises)..... | 176 |
| FIGURA 7.18 | - Tensões σ_r , σ_θ e σ_z ao longo da espessura (von Mises)..... | 177 |
| FIGURA 8.1 | - Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura..... | 190 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| FIGURA 8.2 | - Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada..... | 191 |
| FIGURA 8.3 | - Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada..... | 191 |
| FIGURA 8.4 | - Tensão elástica σ_{zz}^e , viscosa σ_{zz}^v e total σ_{zz} no centróide..... | 192 |
| FIGURA 8.5 | - Tensão elástica σ_{xx}^e , viscosa σ_{xx}^v e total σ_{xx} no centróide..... | 192 |
| FIGURA 8.6 | - Tensão elástica σ_{zz}^e , viscosa σ_{zz}^v e total σ_{zz} no centróide..... | 193 |
| FIGURA 8.7 | - Tensão elástica σ_{xx}^e , viscosa σ_{xx}^v e total σ_{xx} no centróide..... | 193 |
| FIGURA 8.8 | - Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada..... | 204 |
| FIGURA 8.9 | - Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada..... | 204 |
| FIGURA 9.1 | - Corpo discretizado com elementos de contorno e finitos..... | 211 |
| FIGURA 9.2 | - Etapas de um reforço estrutural..... | 213 |
| FIGURA 9.3 | - Geometria, discretização e propriedades físicas..... | 219 |
| FIGURA 9.4 | - Geometria, discretização e propriedades físicas..... | 220 |
| FIGURA 9.5 | - Deslocamento radial da parede interna do tubo..... | 220 |
| FIGURA 9.6 | - Deslocamento radial da parede externa do tubo..... | 221 |
| FIGURA 9.7 | - Geometria, discretização e propriedades físicas..... | 221 |
| FIGURA 9.8 | - Deslocamento radial do túnel..... | 222 |
| FIGURA 9.9 | - Geometria e discretização..... | 223 |
| FIGURA 9.10 | - Recalque das sapatas..... | 223 |
| FIGURA 9.11 | - Momento no ponto A..... | 224 |
| FIGURA 9.12 | - Painel Sanduíche..... | 225 |
| FIGURA 9.13 | - Deslocamento total do meio do vão..... | 226 |
| FIGURA 9.14 | - Deslocamento do trecho viscoso no meio do vão..... | 227 |
| FIGURA 9.15 | - Etapas e dados do problema..... | 228 |
| FIGURA 9.16 | - Deslocamento do ponto 'A'..... | 228 |
| FIGURA 9.17 | - Geometria, discretização e propriedades físicas..... | 229 |
| FIGURA 9.18 | - Deslocamento do nó central da interface de contato na região do MEC..... | 230 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| FIGURA 9.19 | - Tensões no centróide da região do MEC..... | 230 |
| FIGURA 9.20 | - Reforço de uma cavidade cilíndrica..... | 231 |
| FIGURA 9.21 | - Deslocamento radial do túnel..... | 231 |
| FIGURA 9.22 | - Dados do problema e etapas do reforço..... | 232 |
| FIGURA 9.23 | - Deslocamento transversal do ponto <i>A</i> | 233 |
| FIGURA 9.24 | - Tensão σ_x no ponto <i>B</i> | 233 |
| FIGURA 9.25 | - Dados do problema..... | 234 |
| FIGURA 9.26 | - Deslocamento axial do nó central da face livre do bloco..... | 235 |
| FIGURA 9.27 | - Força de contato na interface de contato do bloco..... | 235 |
| FIGURA 9.28 | - Tensões no centróide do bloco..... | 236 |
| FIGURA 9.29 | - Dados do problema de reforço..... | 236 |
| FIGURA 9.30 | - Deslocamento radial da cavidade esférica..... | 237 |
| FIGURA 9.31 | - Tensões σ_r (total, elástica e viscosa)..... | 237 |
| FIGURA 9.32 | - Deslocamento axial do nó central da face livre do bloco..... | 238 |
| FIGURA 9.33 | - Força de contato na interface de contato do bloco..... | 239 |
| FIGURA 9.34 | - Tensões no centróide do bloco (von Mises)..... | 239 |
| FIGURA 9.35 | - Tensões no centróide do bloco (Drucker-Prager)..... | 240 |
| FIGURA A.1 | - Coordenadas polares nos casos 2D e 3D..... | 248 |
| FIGURA B.1 | - Domínio Ω decrescido de uma sub-região Ω_ϵ | 254 |
| FIGURA D.1 | - Sistemas de coordenadas..... | 268 |
| FIGURA D.2 | - Sub-elementos nas coordenadas polares..... | 269 |
| FIGURA D.3 | - Limite inicial e final da integração em ρ | 272 |
| FIGURA D.4 | - Ponto singular caracterizado no domínio real e adimensional..... | 274 |
| FIGURA D.5 | - Representação do integrando original e aproximado..... | 279 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|------------|--|-----|
| TABELA 7.1 | - Parâmetros da análise..... | 156 |
| TABELA 7.2 | - Multiplicador plástico para o critério von Mises..... | 156 |
| TABELA 7.3 | - Multiplicador plástico para o critério von Mises..... | 156 |
| TABELA 7.4 | - Multiplicador plástico para o critério Drucker-Prager..... | 157 |
| TABELA 7.5 | - Multiplicador plástico para o critério Drucker-Prager..... | 157 |
| TABELA 7.6 | - Retorno ao ápice do critério de Drucker-Prager..... | 158 |
| TABELA 9.1 | - Resultados do problema de acoplamento..... | 219 |
| TABELA 9.2 | - Propriedades físicas e geométricas..... | 222 |
| TABELA B.1 | - Relação entre $r_{,i}$ e os ângulos..... | 260 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | | |
|--|---|---|
| σ_{ij} | - | Componentes do tensor das tensões totais |
| $\sigma_{ij}^e, \sigma_{ij}^{el}$ | - | Tensões elásticas |
| σ_{ij}^v | - | Componente do tensor das tensões viscosas |
| σ_{ij}^{ve} | - | Componente do tensor das tensões viscoelásticas |
| $\dot{\sigma}_{ij}$ | - | Taxa de tensão total |
| $\dot{\sigma}_{ij}^p$ | - | Taxa de tensão inicial |
| $\Delta\sigma, \Delta\sigma^p$ | - | Incremento de tensão e tensão inicial |
| $\sigma_{ij}^p, \sigma_{ij}^{vp}$ | - | Tensões iniciais |
| σ_{ij}^{ep} | - | Tensões elastoplásticas |
| σ_{i+1}^{ten} | - | Tensões de tentativa |
| σ_o | - | Limite de plastificação inicial |
| $\varepsilon_{lm}, \delta\varepsilon_{lm}$ | - | Deformações reais e virtuais totais |
| ε_{ij}^e | - | Componente do tensor das deformações elásticas |
| ε_{ij}^v | - | Componente do tensor das deformações viscosas |
| ε_{lm}^{ve} | - | Componente do tensor das deformações viscoelásticas |
| $\dot{\varepsilon}_{lm}$ | - | Taxa de deformação total |
| $\dot{\varepsilon}_{lm}^e$ | - | Taxa de deformação elástica |
| $\dot{\varepsilon}_{lm}^{ve}$ | - | Taxa de deformação viscoelástica |
| $\dot{\varepsilon}_{lm}^p$ | - | Taxa de deformação plástica |
| ε_{ij}^p | - | Deformação plástica |
| ε_{ij}^{vp} | - | Deformações viscoplásticas |
| $\varepsilon^{eq}, \Delta\varepsilon^{eq}$ | - | Deformação plástica equivalente e seu respectivo incremento |

| | | |
|---|---|--|
| ε_{i+1}^{ten} | - | Deformação de tentativa |
| $\Delta\varepsilon, \Delta\varepsilon^p$ | - | Incremento de deformação total e plástica |
| $C_{ij}^{lm}, \tilde{C}_{ij}^{lm}, \hat{C}_{ij}^{lm}$ | - | Matrizes constitutivas elásticas dependentes de E , E_e e E_{ve} respectivamente |
| η_{ij}^{lm} | - | Matriz constitutiva viscosa |
| $\theta_\lambda, \theta_\mu, \gamma$ | - | Parâmetros representativos da viscosidade do material |
| λ, μ | - | Constantes de Lamé |
| $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ | - | Constantes de Lamé adimensionalizadas |
| E, G | - | Módulo de elasticidade longitudinal e transversal |
| E_e | - | Módulo de elasticidade do trecho instantâneo |
| E_{ve} | - | Módulo de elasticidade do trecho viscoelástico |
| ν | - | Coefficiente de Poisson |
| b_i, \dot{b}_i | - | Componente das forças volumétricas e sua respectiva velocidade |
| $b_i^\alpha, \dot{b}_i^\alpha$ | - | Vetor nodal das forças volumétricas e de sua respectiva velocidade |
| $u_i, \delta u_i$ | - | Componente de deslocamento real e virtual |
| $U_i^\alpha, \delta U_i^\alpha$ | - | Vetor dos deslocamentos reais e virtuais nodais |
| \dot{u}_i, \ddot{u}_i | - | Velocidade e aceleração |
| $\dot{U}_i^\alpha, \ddot{U}_i^\alpha$ | - | Vetor das velocidades e acelerações nodais |
| U_o^i | - | Vetor de deslocamento da interface em t_o |
| U_{est}^i, U_{ref}^i | - | Vetor de deslocamento da estrutura e do reforço na interface |
| p_i, \dot{p}_i | - | Componente das forças de superfície e sua respectiva velocidade |
| $P_i^\alpha, \dot{P}_i^\alpha$ | - | Vetor das forças de superfícies nodais e sua respectiva velocidade |
| P_{est}^i, P_{ref}^i | - | Vetor das forças de superfície da estrutura e do reforço na interface |
| $\Delta U, \Delta P, \Delta b$ | - | Incremento de deslocamento, força de superfície e volumétrica |
| ρ | - | Densidade mássica |
| n_i | - | Componente do versor normal ao contorno |
| n_{ij} | - | Componente do tensor unitário |
| Γ, Ω | - | Variáveis que definem o contorno e o domínio |
| $\phi^\alpha, \hat{\phi}^\alpha, \tilde{\phi}^\alpha$ | - | Funções de forma |
| $\phi_{,i}^\alpha, \tilde{\phi}_{,i}^\alpha$ | - | Derivada da função de forma segundo a direção i |

| | | |
|--|---|---|
| M, K, V, L, F | - | Matriz de rigidez, massa, viscosa, lumping e vetor de forças nodais |
| H, G, B | - | Matriz H, G e das forças volumétricas |
| u_{ij}^*, p_{ij}^* | - | Solução fundamental em deslocamento e força de superfície |
| $\varepsilon_{ijk}^*, \sigma_{ijk}^*$ | - | Solução fundamental em deformação e tensão |
| $B_{ij}^*, \bar{B}_{ijk}^*$ | - | Soluções fundamentais referentes às forças volumétricas |
| $\hat{\varepsilon}_{ijk}^*, \hat{p}_{ijk}^*, \bar{\sigma}_{ijk}^*,$ $\bar{p}_{ijk}^*, \hat{t}_{ijk}^*, \bar{t}_{ijk}^*$ | - | Outras soluções fundamentais |
| $g_{ijkl}, \hat{g}_{ijkl}, \bar{g}_{ijkl}$ | - | Termos livres |
| $r(p, s), R(p, s)$ | - | Distância entre os pontos p (fonte) e s |
| ρ | - | Raio adimensionalizado |
| $r_{,i}, R_{,i}$ | - | Derivada do raio em relação a direção i |
| $\delta(p, s)$ | - | Delta de Dirac |
| δ_{ij} | - | Delta de Kronecker |
| \bar{C}_{ij} | - | Termo da representação integral do MEC |
| t e Δt | - | Tempo e incremento de tempo |
| $\lambda, \Delta \lambda$ | - | Multiplicador plástico |
| f, g | - | Critério de plastificação e potencial plástico |
| W^p | - | Trabalho plástico por unidade de volume |
| κ | - | Parâmetro de encruamento |
| $\dot{\kappa}, \Delta \kappa$ | - | Taxa e incremento do parâmetro de encruamento |
| κ_{i+1}^{ten} | - | Parâmetro de encruamento de tentativa |
| c, ϕ | - | Coesão e ângulo de atrito do material |
| θ, φ | - | Ângulos referentes às coordenadas polares |
| α, β | - | Ângulos referentes às coordenadas polares adimensionalizadas |
| I_u, I_ε | - | Integrais singulares |
| ξ_1, ξ_2, ξ_3 | - | Coordenadas adimensionais |
| $w_\rho^h, w_\alpha^l, w_\beta^m$ | - | Pesos ponderadores da integração numérica |
| J | - | Determinante da matriz jacobiana |

RESUMO

MESQUITA, A.D. (2002). *Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento progressivo MEC/MEF*. São Carlos. 291p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Novas formulações, técnicas e procedimentos são propostos para o tratamento de problemas inelásticos considerando-se acoplamento progressivo. O procedimento apresenta-se bastante adequado para a consideração de problemas de interação bi e tridimensionais que envolvam modificações na geometria e variações das condições de contorno ao longo do tempo. Este permite a inclusão e retirada de sub-regiões e a consideração de hipóteses especiais para o reforço, de maneira que o mesmo contribua adequadamente para o enrijecimento da estrutura. As formulações viscoelásticas e viscoplásticas são baseadas em uma nova metodologia e proporcionam com simplicidade e elegância resultados estáveis e bastante precisos. As representações viscosas para elementos de contorno são obtidas de duas formas, com o termo viscoso obtido através de integrais de domínio e de contorno. Esta última permite a análise viscoelástica de sólidos discretizando-se apenas o contorno do corpo, apresentando-se mais adequada para o tratamento de meios infinitos ou semi-infinitos. O comportamento plástico é levado em consideração através de algoritmos implícitos associativos e não-associativos, cujas expressões são obtidas de forma fechada, resultando em uma considerável economia computacional e uma melhor precisão na resposta não-linear.

Palavras-chave: acoplamento, elemento finito, elemento de contorno, viscoelástico, viscoplástico, elastoplástico, implícito.

ABSTRACT

MESQUITA, A.D. (2002). *New methodologies and formulations for the treatment of inelastic problems with BEM/FEM progressive coupling*. São Carlos. 291p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

New formulations, techniques and procedures are proposed for the treatment of inelastic problems considering progressive coupling. The procedure is quite adequate for the consideration two and three-dimensional interaction problems which involve modifications in geometry and variations of the boundary conditions along the time. This allows the inclusion and retreat of sub-regions and the consideration of special hypothesis for the reinforcement, contributing appropriately for the stiffness of the structure. The viscoelastic and viscoplastic formulations are based in a new methodology and provide with simplicity and elegance quite stable and precise results. The viscous representations for boundary elements are obtained by two ways, with viscous term obtained through domain and boundary integral. The last one permits viscoelastic analysis of solids discretizing only the body's boundary, showing to be more appropriate for the treatment of the infinite or semi-infinite regions. The plastic behaviour is taken into account through associative e non-associative implicit algorithms, whose expressions are obtained in closed way, resulting in a considerable computational economy and a better precision in the non-linear answer.

Key words: coupling, finite element, boundary element, viscoelastic, viscoplastic, elastoplastic, implicit.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

Todo problema de engenharia é resolvido através da adoção de modelos teóricos com os quais se pretende representar as características e comportamentos presentes. Essa representação tem evoluído muito e cada vez mais, os modelos tendem a representar melhor os problemas reais. Na prática, estes modelos se expressam na forma de equações diferenciais ou integrais, mais ou menos complexas, conforme o problema tratado e as simplificações adotadas.

O desenvolvimento de métodos analíticos, que proporcionem soluções exatas para as equações diferenciais e integrais representativas dos problemas físicos, foi e ainda é de interesse de muitos pesquisadores que trabalham nos diversos campos da ciência. Veja, por exemplo, os trabalhos de LOVE(1944), TIMOSHENKO & GOODIER(1970) e ERINGEN & SUHUBI(1974) que obtêm soluções analíticas para diversos problemas da elasticidade estática e dinâmica. Porém, em geral, as soluções encontradas são sempre limitadas pelas condições de contorno, geometria e hipóteses simplificadoras.

Na tentativa de contornar estas limitações e estabelecer ferramentas mais gerais, que permitissem resolver problemas mais complexos de forma aproximada, surgiram os métodos aproximados e com eles os métodos numéricos. O uso de métodos numéricos para a resolução de problemas de engenharia é atualmente imprescindível. Cada vez mais a análise dos problemas de engenharia passa a ser feita através de processos aproximados cujo emprego necessita do computador para permitir a obtenção de respostas confiáveis. Como em qualquer atividade, hoje a computação aparece como a grande responsável pelo desenvolvimento das técnicas numéricas, pelo seu uso e aprimoramento.

O avanço das técnicas numéricas torna possível uma análise cada vez mais próxima da realidade para problemas físicos relacionados à engenharia, permitindo uma modelagem bastante precisa. Desta forma, a segurança envolvida nos mais variados projetos tende a aumentar, sem mencionar, é claro, o próprio fato da automação reduzir em muito os erros humanos e possibilitar a consideração de parâmetros até então desprezados VENTURINI(1988).

Os primeiros métodos numéricos de relevância e fundamentados em bases matemáticas foram o Método das Diferenças Finitas (MDF), SOUTHWELL(1946) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) com TURNER *et al.*(1956), ARGYRIS & KELSET(1960) e CLOUGH(1960), que é, sem sombra de dúvidas o mais difundido. Estes são caracterizados como técnicas de domínio, por fazerem uso de aproximações em todo o domínio do corpo para solucionar as equações diferenciais (ou integrais) do problema. As equações do primeiro método (MDF) são obtidas através da aplicação de operadores, definidos por diferenças finitas, sobre pontos distribuídos em todo o domínio do corpo. Já no segundo método (MEF), o contínuo é subdividido em pequenos subdomínios, denominados elementos finitos, sobre os quais se aproximam os campos incógnitos associados ao problema que se pretende analisar. Estes métodos foram sempre os mais utilizados como ferramentas básicas na elaboração dos sistemas computacionais destinados à análise de problemas de engenharia, em particular, aos relacionados à engenharia estrutural.

O Método dos Elementos Finitos surgiu no contexto da engenharia estrutural ao mesmo tempo em que os avanços da tecnologia davam origem aos computadores. Com esta facilidade e aliado à simplicidade, elegância e versatilidade de sua formulação o método teve um crescimento extremamente rápido, abrangendo praticamente todos os ramos da engenharia. Pode-se dizer que este é um dos métodos mais empregados na análise de diversos problemas da engenharia. Entretanto, devido à necessidade de se discretizar todo o domínio do corpo, este apresenta algumas limitações na modelagem de meios infinitos e semi-infinitos. Para tratar tais problemas pelo MEF, é necessário a criação de um contorno fictício, definindo limites que podem acarretar na distorção da resposta final, principalmente em análises dinâmicas, onde o truncamento do meio provoca o aparecimento das indesejáveis reflexões de ondas.

Uma forma de evitar tais complicações e reduzir consideravelmente o número de variáveis envolvidas no problema são as chamadas Técnicas de Contorno. Estas são baseadas na técnica de discretização limite FREDHOLM(1903) empregada na teoria matemática para solucionar equações diferenciais através da transformação destas em equações integrais. As

técnicas de contorno se diferenciam daquelas de domínio pela necessidade de se discretizar apenas o contorno do corpo em consideração, quando se abordam problemas lineares.

O surgimento do Método dos Elementos de Contorno, como uma alternativa para a resolução dos problemas da engenharia é, sem dúvida, o principal avanço científico nessa área do conhecimento dos últimos anos. Uma das principais vantagens deste método, quando comparado com os métodos de domínio usuais, é a redução do número de variáveis do problema, pois, enquanto nos métodos usuais o domínio a ser tratado precisa ser dividido em vários subdomínios, no Método dos Elementos de Contorno apenas o contorno do mesmo precisa ser discretizado. Além disso, para muitos problemas, já é comprovado que o Método dos Elementos de Contorno apresenta respostas mais precisas e confiáveis do que os métodos tradicionalmente empregados para análises similares.

Fundamentado em representações integrais de contorno, o MEC se apresenta mais apropriado para a análise de domínios infinitos ou semi-infinitos, proporcionando uma considerável redução do número de equações e volume de dados. Além disso, devido à natureza das funções ponderadoras, este é mais indicado para modelar regiões com concentração de tensão ou fluxo. Contudo, elementos de contorno não apresentam características vantajosas com relação à análise de estruturas em cascas e reticuladas, ao contrário do MEF. Assim, uma consequência natural para a análise de estruturas interagindo com meios infinitos ou semi-infinitos, tais como aqueles encontrados em problemas de interação solo-estrutura e fluido-estrutura, seria o acoplamento entre o MEC e o MEF.

O acoplamento entre o MEC e o MEF já era discutido por ZIENKIEWICZ *et al.*(1977) e ATLURI & GRANNELL(1978) que refletiam a cerca destas considerações. As vantagens da utilização deste acoplamento são bem definidas, principalmente no tratamento de problemas de interação, onde o MEC é mais adequado para representar domínios infinitos e regiões de concentração de tensões (ou fluxo) e o MEF é mais apropriados para modelar estruturas envolvendo materiais compósito, anisotrópicos ou não-lineares. Uma boa revisão sobre o assunto pode ser encontrada nos trabalhos de BEER & WATSON(1992) e de STAMOS & BESKOS(1995). Algumas contribuições referentes ao acoplamento MEC/MEF tri e bidimensionais para problemas elastodinâmicos, podem ser encontrados em CODA(1993), CODA & VENTURINI(1995) e CODA(2000).

No que diz respeito ao acoplamento bidimensional entre o MEF e o MEC para modelar os problemas de escavações reforçadas, algumas referências podem ser citadas, entre elas encontram-se os trabalhos de SWOBODA *et al.*(1987) e SINGH *et al.*(1988). Nestes trabalhos as sub-regiões de elementos de contorno são tratadas como regiões equivalentes de

elementos finitos e para não perder a simetria do problema estes impõem a simetria da “matriz de rigidez equivalente” referente à sub-região de elementos de contorno. Este procedimento, segundo BREBBIA & DOMINGUEZ(1992), não é muito recomendado, conduzindo a resultados imprecisos em muitas situações práticas.

Um fator importante, que não é levado em conta nas formulações numéricas com acoplamento propostas para tratar problemas de reforço, seria a necessidade de uma correção que deve ser imposta no sistema devido à inclusão da sub-região de reforço. Isto pode ser melhor compreendido considerando-se um caso simples, por exemplo, uma viga solicitada inicialmente intacta, onde em um instante posterior uma certa região do corpo é retirada. Na tentativa de simular numericamente o reforço estrutural, introduz-se uma nova sub-região no local danificado com as mesmas propriedades físicas e geométricas da sub-região extraída, ocorrerá que a estrutura recuperará totalmente a sua rigidez inicial quando a compatibilidade geométrica usual for empregada, o que é incoerente. Assim, é necessário fazer uma correção no sistema de equações de maneira que o reforço contribua de forma adequada para o enrijecimento da estrutura reforçada. Esta correção é proposta por MESQUITA *et al.*(1999), os quais apresentam técnica baseada no acoplamento MEC/MEF bidimensional para o tratamento de problemas que envolvem retiradas de partes de um sólido solicitado e colocação de reforços. A técnica foi desenvolvida com base na equação de equilíbrio dinâmico de corpos elásticos, considerando amortecimento viscoso. Esta equação é o ponto de partida para o desenvolvimento de uma nova metodologia para o tratamento do comportamento viscoso para ambos MEC e MEF como pode ser visto nos trabalhos de MESQUITA *et al.*(2001), MESQUITA & CODA(2002a), MESQUITA & CODA(2001a) e MESQUITA & CODA(2001b). Esta nova proposta apresenta-se mais estável e computacionalmente mais vantajosa que as formulações viscosas clássicas. Além disso, esta permite a obtenção de representações integrais viscosas para o MEC com integrais apenas no contorno, MESQUITA & CODA(2002c), tornando possível modelar um problema viscoelástico com discretização apenas no contorno do corpo, preservando assim todas as vantagens inerentes ao MEC, principalmente em problemas envolvendo meios infinitos ou semi-infinitos como o solo.

Outros avanços foram conquistados na área do comportamento dos materiais. Baseado nas formulações viscosas descritas anteriormente, foi possível desenvolver novas formulações viscoplásticas. A maioria dos trabalhos desenvolvidos nesta área são baseados em funções de relaxação OWEN & DAMJANIC(1982), TELLES & BREBBIA(1982) e MUNAIAR(1998). As características viscosas são incorporadas na relação tensão-deformação efetiva por meio de funções de relaxação, caindo em um problema incremental onde a análise é executada

aplicando-se sucessivamente incrementos de força. Estas abordagens são baseadas em procedimentos incrementais quase-estáticos onde o comportamento temporal da solução é recuperado por uma função de decaimento de tensão, de maneira que a imposição de cargas externas com dependência temporal arbitrária apresenta algumas dificuldades.

A formulação proposta assume uma relação cinemática para a velocidade de deformação, isto é, relaciona velocidade de deformação com velocidade material. Desta relação encontra-se um sistema equações diferencial temporal global que deve ser solucionado com a adoção de procedimentos para a atualização das tensões e um adequado algoritmo de integração temporal. Uma outra diferença é que na formulação proposta as solicitações são aplicadas integralmente e os incrementos são agora definidos como incrementos de tempo e não mais como incrementos de força, proporcionando um significado bem mais definido para o tempo nas análises viscoplásticas. Além disso, para o caso específico do MEC, as integrais referentes ao comportamento viscoso podem ser transformadas em integrais de contorno, de maneira que para tratar o problema viscoplástico pelo MEC basta apenas discretizar o contorno do corpo e as regiões internas onde ocorreram plastificação, resultando em menor quantidade de dados de entrada e um menor custo computacional.

Os modelos elastoplásticos usuais podem ser implementados nas formulações viscoplásticas propostas de forma direta sem muitas alterações, ou seja, não é necessário formular novos modelos viscoplásticos que em geral são bastante complexos, basta apenas introduzir os modelos elastoplásticos já existentes nas formulações viscosas. Atualmente os procedimentos elastoplásticos são desenvolvidos baseados nos princípios de algoritmos do tipo "closest point projection" SIMO & TAYLOR(1986), SIMO *et al.*(1988), PRAMONO & WILLAM(1989), FEENSTRA & BORST(1996), LOURENÇO(1996) e MESQUITA(1998). Estes, além de possibilitar uma eficiente atualização das tensões, permitem a obtenção da matriz constitutiva elastoplástica consistente com o algoritmo de retorno, preservando assim a taxa de convergência quadrática do método de Newton-Raphson SIMO & TAYLOR(1985). Nas análises numéricas utilizando-se este tipo de algoritmo, observa-se que o custo computacional maior está na geração da matriz de rigidez global da estrutura (quando o método requer atualização) e no processo de atualização das tensões. O alto custo na atualização das tensões, principalmente quando o nível de plastificação é elevado, é devido ao procedimento iterativo utilizado para resolver a equação de consistência e obter o multiplicador plástico. Entretanto é possível demonstrar em alguns casos que o multiplicador plástico pode ser obtido através de simples expressões fechadas encontradas através de uma adequada manipulação das relações constitutivas do modelo proposto MESQUITA &

CODA(2002b). Assim, pode-se evitar os erros de precisão no cálculo do multiplicador plástico e o alto custo computacional necessário para obtê-lo. Outros algoritmos foram propostos seguindo os mesmos princípios só que adotando-se uma lei de fluxo não associativa. Esta nova abordagem, definida a partir de observações do fluxo na mecânica dos fluidos, simplifica demasiadamente as expressões de atualização e sua forma mais geral possibilita quantificar o grau de compressibilidade do material na fase plástica.

Com a adoção das formulações descritas anteriormente juntamente com as técnicas de acoplamento MEC/MEF que permitem a extração e a inserção de regiões do corpo (com ou sem as hipóteses do reforço) é possível analisar casos bastante complexos, tais como problemas de reforço estrutural, escavações reforçadas, interação solo-estrutura, interação fluido-estrutura e até mesmo aqueles aonde as condições de contorno (forças e deslocamentos) variam com o tempo.

1.2 OBJETIVO

A princípio este trabalho deveria ser desenvolvido para tratar problemas de escavações reforçadas fazendo uso de formulações e técnicas já consagradas no meio científico. Com o decorrer do tempo, desenvolveram-se novas abordagens e os objetivos se tornaram mais amplos. Em resumo pode-se definir o seguinte objetivo para o trabalho: desenvolvimento de formulações viscoelásticas e viscoplásticas eficientes e estáveis que permitam realizar de forma simples o acoplamento entre o MEC e o MEF, possibilitando a retirada gradativa de porções do corpo, inserção de reforços e variações das condições de contorno (força e deslocamento) com o tempo. Como parte desse objetivo considera-se também o desenvolvimento de algoritmos do tipo implícito com expressões fechadas do multiplicador plástico com leis associativas e não-associativas, adequados para serem implementados nas formulações viscoplásticas.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Neste item apresenta-se sucintamente o conteúdo referente a cada capítulo. Os capítulos estão organizados, o quanto possível, de forma clara e sequencial, objetivando-se facilitar a compreensão dos conceitos abordados. A apresentação do trabalho está dividida em 10 capítulos no qual o primeiro deles é a introdução.

No capítulo 2 apresenta-se uma rápida revisão sobre modelos reológicos e suas respectivas relações básicas. Para cada modelo deduz-se as relações constitutivas extremamente importantes no desenvolvimento das formulações que serão apresentadas nos capítulos seguintes.

Uma visão inicial do problema elastodinâmico pelo MEF e MEC (utilizando-se solução fundamental estática) é apresentada no capítulo 3. As formulações levam em consideração apenas o termo referente à aceleração. O termo que corresponde ao amortecimento viscoso não é considerado nas representações integrais. O amortecimento será levado em consideração nos capítulos 4 e 5 fazendo-se uso de modelos viscosos que proporcionam um significado reológico bem mais definido.

Formulações viscoelásticas (com uma abordagem dinâmica inicial) específicas para os modelos de Kelvin e Boltzmann são desenvolvidas para o método dos elementos finitos no capítulo 4. As formulações são baseadas nos modelos físicos da reologia dos materiais e não apresentam restrições para impor variações nas cargas ao longo do tempo. Resultados das implementações computacionais em elementos de barra, chapa, placa e cascas são também apresentados no final de cada formulação.

Semelhantemente ao que foi desenvolvido com MEF no capítulo 4, faz-se ao MEC no capítulo 5. Formulações viscoelásticas (com uma abordagem dinâmica inicial) específicas para o Método dos elementos de Contorno são descritas neste capítulo. Inicialmente, apresentam-se formulações que levam em consideração o comportamento viscoso através de integrais de domínio que devem ser solucionadas com o uso de células internas. Posteriormente, obtém-se as representações viscoelásticas com integrais apenas no contorno permitindo análises viscosas com discretizações apenas do contorno do corpo. Resultados numéricos são apresentados no final da exposição de cada formulação com o propósito de validá-las e demonstrar a estabilidade e eficiência do método.

Uma forma alternativa para abordar o problema elastoplástico pelo MEC é apresentada no capítulo 6. As representações integrais são basicamente as mesmas, porém a forma de tratar o problema de correção do resíduo plástico é alterada. A nova técnica propõe que a correção seja feita em nível de deslocamento, ao contrário das abordagens clássicas onde a correção é feita em nível de tensão. O procedimento apresentado é mais adequado para tratar o acoplamento não-linear entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos. Alguns resultados são apresentados para demonstrar a eficácia da técnica

No capítulo 7 faz-se uma rápida introdução à teoria da plasticidade, apresentando-se uma abordagem numérica do problema elastoplástico e definindo-se os algoritmos para a

solução do problema não-linear. Os algoritmos desenvolvidos são do tipo implícito com leis de fluxo associativas e não-associativas. Os procedimentos são obtidos para o caso tridimensional com fórmulas fechadas, sem necessidade de processos iterativos para a obtenção do multiplicador plástico. Algumas discussões sobre as leis de fluxos e comparações entre o modelo associativo e não-associativo são apresentadas no final deste capítulo.

No capítulo 8 apresentam-se formulações viscoplásticas do método dos elementos de contorno. A representação integral de contorno do problema viscoplástico é obtida através da imposição das equações do modelo reológico diretamente na equação integral de movimento. Esta aproximação evita o uso de funções de relaxação e permite, de forma simples, mudanças nas condições de contorno ao longo do tempo. As equações integrais de domínio responsáveis pelo comportamento viscoso são transformadas para o contorno, evitando assim a necessidade de técnicas especiais de integração numéricas para solucioná-las e o alto custo computacional na discretização de todo o domínio. Uma rápida discussão sobre a associatividade e não associatividade dos modelos viscoplásticos é feita, levando-se em consideração a existência ou não de hardening.

A técnica de acoplamento progressivo é apresentada no capítulo 9. O acoplamento entre o MEC e o MEF é realizado segundo a técnica de sub-regiões usualmente encontradas nas bibliografias de elementos de contorno. As hipóteses cinemáticas do reforço são formuladas e introduzidas através de uma correção no sistema de equações. Exemplos são mostrados no final do capítulo para ilustrar a potencialidade da técnica.

No capítulo 10 apresentam-se as conclusões e considerações finais dos estudos desenvolvidos e propõe sugestões para o prosseguimento dos trabalhos nessa mesma linha de pesquisa.

1.4 OBSERVAÇÕES FINAIS

Deve-se ressaltar que durante o desenvolvimento desta tese muitos trabalhos foram publicados, frutos do programa de doutorado desenvolvido pelo candidato. A maioria destas referências são citadas ao longo dos textos contidos no presente trabalho. Porém, não se deseja, com as citações, retirar a originalidade das idéias desenvolvidas e sim esclarecer que estas já foram tornadas públicas. Como resultado do esforço despendido pelo candidato na elaboração desta tese, podem ser citados os seguintes artigos:

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. Modelo viscoso transiente para análise de retirada de material e inclusão de reforço via MEC/MEF [CD-ROM]. In: PIMENTA, P.M.; BRASIL, R.M.L.R.F.; ALMEIDA NETO, E.S., eds. *Computational methods in engineering'99* (IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 20. / BRAZILIAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, 1., São Paulo, 3-5 Nov. 1999). São Paulo, EPUSP, 1999. 11p.(ISBN: 85-901027-1-8)

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. Análise viscoelástica da interação solo-estrutura, representação bidimensional [CD-ROM]. In: SIMPÓSIO INTERAÇÃO ESTRUTURA-SOLO EM EDIFÍCIOS, São Carlos, 27-28 nov. 2000. *Artigos completos*. São Carlos, Programas de Pós-Graduação em Geotécnica e Engenharia de Estruturas da EESC-USP, 2000. 17p.

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. Análise viscoelastodinâmica alternativa de placas e cascas via MEF, considerando o modelo de Kelvin [CD-ROM]. In: VAZ, L.E., ed. *Computational methods in engineering'2000* (21st IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (CILAMCE 2000), Rio de Janeiro, December 6-8, 2000. Rio de Janeiro, PUC-Rio, 2000. 16p. (ISBN: 85-901717-1-X)

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. O acoplamento entre o MEC e o MEF aplicado à análise viscoelástica de materiais compostos [CD-ROM]. In: VAZ, L.E., ed. *Computational methods in engineering'2000* (21st IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (CILAMCE 2000), Rio de Janeiro, December 6-8, 2000. Rio de Janeiro, PUC-Rio, 2000. 18p.(ISBN: 85-901717-1-X)

MESQUITA, A.D; CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. Alternative time marching process for BEM and FEM viscoelastic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.51, n.10, p.1157-1173, Aug. 2001. (ISSN: 0029-5981)

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. An alternative time integration procedure for Boltzmann viscoelasticity: a BEM approach. *Computers & Structures*, v.79, n.16, p.1487-1496, June, 2001. (ISSN: 0045-7949)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. Alternative Kelvin viscoelastic procedure for finite elements. *Applied Mathematical Modeling*, v.26, n.4, p.501-516, 2002.

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. Boundary integral equations for general viscoelastic analysis. *International Journal of Solids and Structures*, v.39, n.9, p.2643-2664, 2002. (ISSN: 0020-7683)

CODA, H. B.; MESQUITA, A. D.; PAIVA, J. B. Viscoelastic analysis of soil-structure interaction [CD-ROM]. In: AIMETA CONGRESS OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS, 15., Taormina, Italia, 26-29 set. 2001. Taormina, AIMETA, 2001. 9p. (ISSN: 1592-8950)

MESQUITA, A.D. & CODA, H.B. Análise viscoelástica da interação solo-estrutura, estrutura-estrutura: representação bidimensional [CD-ROM]. In: PALERMO, L.; MESQUITA, E., eds. (IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 22. / BRAZILIAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, 2., Campinas, 7-9 Nov. 2001). Campinas, UNICAMP, 2001. 16p. (ISBN: 85-902253-1-3)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. A FEM viscoelastic analysis of plates and shells: A new methodology and the Boltzmann model. *Computers & Structures*, 2001. (Submitted)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. New methodology for the treatment of two dimensional viscoelastic coupling problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001. (Accepted)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. A two dimensional BEM/FEM coupling applied to viscoelastic analysis of composite domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001. (Accepted)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. A boundary element methodology for viscoelastic analysis: Part I with cells. *Computational Mechanics*, 2001. (Submitted)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. A boundary element methodology for viscoelastic analysis: Part II without cells. *Computational Mechanics*, 2001. (Submitted)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. Alternative non-associative return mapping methodology with BEM applications. *International Journal of Solids and Structures*, 2002. (Submitted)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. An alternative numerical viscoplastic formulation based on differential constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002. (Submitted)

Capítulo 2

MODELOS REOLÓGICOS

2.1 INTRODUÇÃO

Devido à complexidade do comportamento real dos materiais e da necessidade de se obter uma melhor representação destes, diversos estudos dão bastante ênfase ao problema da modelagem das relações constitutivas (relação tensão-deformação). Entretanto, caracterizar e equacionar o comportamento dos materiais de forma exata é uma meta extremamente difícil de se alcançar. Dessa forma, torna-se indispensável a adoção de modelos simplificados que proporcionem soluções suficientemente próximas do comportamento real da estrutura estudada.

A análise teórica dos corpos se depara então no problema essencial da modelagem do comportamento do material constituinte. Em geral, o comportamento físico dos materiais é influenciado por vários parâmetros, tais como: tempo, temperatura, condições ambientais, condições de carregamento, etc.. Além do mais, não se pode desenvolver uma única lei constitutiva a qual possa ser aplicada para qualquer material. Na prática o que se faz é tentar formular modelos específicos para cada tipo de material e aqueles mais complexos são, em geral, combinações de modelos básicos.

Neste capítulo apresenta-se de forma sucinta uma descrição dos modelos reológicos utilizados no desenvolvimento das formulações que serão posteriormente apresentadas. As relações básicas dos modelos juntamente com as suas respectivas relações constitutivas são apresentadas. Esta última é extremamente importante nos desenvolvimentos posteriores que serão expostos nos próximos capítulos.

2.2 MODELOS BÁSICOS

Os modelos básicos, em geral, são definidos através de relações matemáticas simples. A junção destes dá origem a modelos mais refinados que procuram caracterizar de forma mais realista materiais com comportamento mais complexo, fatalmente não-lineares. Assim, para que se possa compreender melhor os modelos combinados e seu campo de aplicação é necessário um estudo inicial do comportamento dos modelos básicos. Na figura 2.1 apresentam-se as representações reológicas uniaxiais dos modelos básicos: elástico, viscoso e plástico.

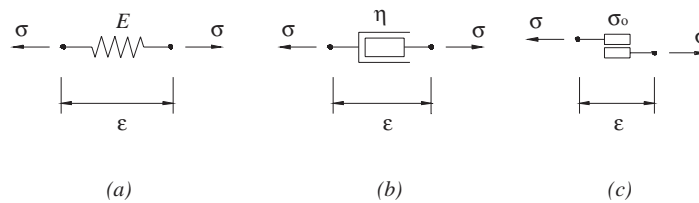


FIGURA 2.1 Representação reológica uniaxial: (a) elástico; (b) viscoso; (c) plástico.

O modelo elástico é representado por uma mola (fig. 2.1a). Este caracteriza-se pelo aparecimento de deformações elásticas instantâneas simultaneamente a aplicação de uma solicitação estática. O modelo se aplica a materiais cujo comportamento é invariável com relação ao tempo e que em uma situação de descarregamento não apresenta deformações residuais, ao contrário do modelo plástico. No caso da elasticidade linear a relação constitutiva fica expressa através da lei de Hooke.

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \epsilon_{lm} \quad (2.1)$$

onde σ_{ij} e ϵ_{lm} são as tensões e deformações respectivamente e C_{ij}^{lm} é a matriz constitutiva elástica. A relação linear entre tensões e deformações não é pré-requisito para caracterizar o comportamento elástico, pois existem materiais elásticos que apresentam relações não-lineares. Este trabalho se limitará a tratar o modelo elástico básico como linear.

Já o modelo viscoso, cuja representação reológica uniaxial é caracterizada por um amortecedor (fig. 2.1b), apresenta um comportamento dependente do tempo, ao contrário do modelo elástico. Assim, mesmo que as tensões aplicadas permaneçam constantes, haverá

variação das deformações ao longo do tempo. Este comportamento pode ser facilmente observado nos fluidos, porém nos sólidos ele também se manifesta e sua relação fundamental é escrita como:

$$\sigma_{ij} = \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} \quad (2.2)$$

onde η_{ij}^{lm} é a matriz viscosa escrita em função de parâmetros representativos da viscosidade do material que podem ser determinados experimentalmente. Note que as tensões são proporcionais a velocidade de deformação. Esta característica permite o aparecimento de deformações que se desenvolvem ao longo do tempo, ao contrário do modelo elástico onde as deformações são imediatas.

O modelo plástico caracteriza-se pelo aparecimento de deformações irreversíveis e imediatas que aparecem e se desenvolvem quando um determinado nível de tensão é alcançado. Este pode ser descrito, através de uma interpretação reológica uniaxial, por um sólido (fig. 2.1c) que desliza a partir do instante em que a tensão aplicada ultrapassar o valor σ_o (tensão de plastificação).

2.3 MODELO VISCOELÁSTICO DE KELVIN-VOIGT

O primeiro modelo reológico combinado adotado para o desenvolvimento das representações integrais é o modelo de Kelvin-Voigt (fig. 2.2). Este modelo é representado pelo arranjo em paralelo de um amortecedor e de uma mola.

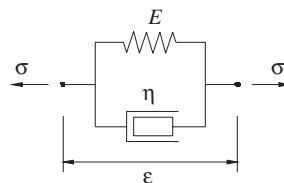


FIGURA 2.2 – Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt (representação uniaxial)

Além do mais, este fica caracterizado pela igualdade de deformações nos dois elementos.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^v \quad (2.3)$$

onde ε_{ij} , ε_{ij}^e e ε_{ij}^v são, respectivamente, as deformações totais, elásticas e viscosas. Já as tensões são definidas pela soma das tensões viscosas (no amortecedor) e das tensões elásticas (na mola), como:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^v \quad (2.4)$$

Semelhantemente as deformações σ_{ij} , σ_{ij}^e e σ_{ij}^v são, respectivamente, as tensões totais, elásticas e viscosas. Estas duas últimas podem ser definidas da seguinte forma:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} \quad (2.5a)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \quad (2.5b)$$

Note que as tensões viscosas são proporcionais a velocidade de deformação, sendo C_{ij}^{lm} a matriz constitutiva elástica e η_{ij}^{lm} a matriz viscosa, definidas em uma forma indicial pelas seguintes expressões:

$$C_{ij}^{lm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \quad (2.6a)$$

$$\eta_{ij}^{lm} = \theta_\lambda \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \theta_\mu \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \quad (2.6b)$$

Para o caso de estado plano de tensão a matriz viscosa fica escrita matricialmente como:

$$\eta = \frac{2\theta_\mu \mu}{\theta_\lambda \lambda + 2\theta_\mu \mu} \begin{bmatrix} 2(\theta_\lambda \lambda + \theta_\mu \mu) & \theta_\lambda \lambda & 0 \\ \theta_\lambda \lambda & 2(\theta_\lambda \lambda + \theta_\mu \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \theta_\lambda \lambda + 2\theta_\mu \mu \end{bmatrix} \quad (2.6c)$$

onde θ_λ e θ_μ são coeficientes representativos da viscosidade do material. Estes podem ser determinados através de resultados de testes de tração uniaxial e testes de cisalhamento, veja

por exemplo LEMAITRE & CHABOCHE(1990) e MUNAIAR(1998). Os termos λ e μ são as conhecidas constantes de Lamé, expressas por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.7)$$

Os termos E , G e ν são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal, o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson. Na grande maioria dos materiais a matriz viscosa pode ser apresentada em uma forma mais simples, dependendo apenas de um único parâmetro viscoso. Neste caso tem-se que $\gamma = \theta_\lambda = \theta_\mu$ e conseqüentemente a equação (2.6b) fica escrita como:

$$\eta_{ij}^{lm} = \gamma [\lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl})] = \gamma C_{ij}^{lm} \quad (2.8)$$

A expressão (2.8) será útil no desenvolvimento das formulações com representações integrais apenas no contorno do corpo. O parâmetro γ pode ser determinado de forma similar aos parâmetros θ_λ e θ_μ . A relação para o modelo de Kelvin pode ser obtida substituindo-se as equações (2.5) na expressão (2.4), obtendo-se:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} + \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \quad (\text{para } \forall \theta_\lambda \text{ e } \theta_\mu) \quad (2.9a)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} + \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \quad (\text{para } \theta_\lambda = \theta_\mu = \gamma) \quad (2.9b)$$

Uma das relações (2.9) deve ser imposta no desenvolvimento da equação integral do método numérico para se obter a formulação viscoelástica específica para o modelo de Kelvin-Voigt.

2.4 MODELO VISCOELÁSTICO DE BOLTZMANN

O modelo de Boltzmann (fig. 2.3) é representado pelo arranjo em série do modelo de Kelvin-Voigt com uma mola.

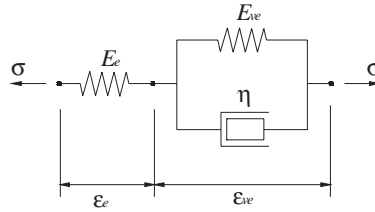


FIGURA 2.3 – Modelo viscoelástico de Boltzmann (representação uniaxial)

Este modelo se diferencia do modelo de Kelvin pela capacidade de simular deformações elásticas instantâneas. Além do mais, este fica caracterizado pela igualdade das tensões nos dois trechos: elástico e viscoelástico.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^{ve} \quad (2.10)$$

onde σ_{ij} , σ_{ij}^e e σ_{ij}^{ve} são, respectivamente, as tensões totais, elásticas e viscoelásticas. Já as deformações totais são definidas pela soma das deformações elásticas da primeira mola e das deformações viscoelásticas referente ao conjunto mola-amortecedor.

$$\varepsilon_{lm} = \varepsilon_{lm}^e + \varepsilon_{lm}^{ve} \quad (2.11)$$

Semelhantemente, as deformações ε_{lm} , ε_{lm}^e e ε_{lm}^{ve} são, respectivamente, as deformações totais, elásticas e viscoelásticas. Para se obter as equações integrais é necessário adotar como hipótese a igualdade dos coeficientes de Poisson de ambos os trechos. Esta simplificação é bastante razoável, pois na prática o coeficiente de Poisson referente ao trecho viscoelástico pouco varia em relação ao do trecho elástico. Além do mais, aliado a isto, pode-se ressaltar o número limitado de trabalhos científicos que tratam do assunto e a dificuldade em se obter resultados experimentais razoavelmente precisos. Assim, levando em consideração esta simplificação, pode-se definir as tensões elásticas e viscosas através das seguintes relações:

$$\sigma_{ij}^e = \tilde{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = E_e C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e \quad (2.12a)$$

$$\sigma_{ij}^{el} = \hat{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} \quad (2.12b)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} = \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} \quad (2.12c)$$

onde σ_{ij}^{el} são as tensões elásticas referente a mola em paralelo com o amortecedor. Note que as tensões viscosas são proporcionais a velocidade de deformação, sendo E_e e E_{ve} , respectivamente, o módulo de elasticidade referente aos trechos elástico e viscoelástico. O coeficiente γ é o parâmetro representativo da viscosidade do material. Este pode ser determinado como descrito anteriormente para o modelo de Kelvin. O termo η_{ij}^{lm} representa a matriz viscosa definida pela equação (2.8). As matrizes \tilde{C}_{ij}^{lm} e \hat{C}_{ij}^{lm} são matrizes constitutivas escritas em função dos módulos de elasticidade E_e e E_{ve} , respectivamente. Observe que, diferentemente do modelo de Kelvin, C_{ij}^{lm} agora é definida como a matriz constitutiva ausente do módulo de elasticidade, ou seja:

$$C_{ij}^{lm} = \bar{\lambda} \delta_{ij} \delta_{lm} + \bar{\mu} (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \quad (2.13)$$

onde $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$ são as constantes de Lamé ausentes do módulo de elasticidade:

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \bar{\mu} = \frac{1}{2(1+\nu)} \quad (2.14)$$

Com relação ao trecho viscoelástico é possível escrever

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{ve} = \sigma_{ij}^{el} + \sigma_{ij}^v = E_{ve} C_{ij}^{lm} \epsilon_{lm}^{ve} + \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}^{ve} \quad (2.15)$$

A partir da (2.11), pode-se escrever uma relação entre as velocidades de deformação¹ de ambos os trechos do modelo de Boltzmann.

$$\dot{\epsilon}_{lm} = \dot{\epsilon}_{lm}^e + \dot{\epsilon}_{lm}^{ve} \quad (2.16)$$

onde $\dot{\epsilon}_{lm}$, $\dot{\epsilon}_{lm}^e$ e $\dot{\epsilon}_{lm}^{ve}$ são as velocidades das deformações totais, elásticas e viscoelásticas, respectivamente. Explicitando-se as deformações elásticas na equação (2.12a) e as deformações viscoelásticas na expressão (2.15), fazendo-se uso da relação (2.16), obtém-se:

¹ Denominou-se a taxa de deformação com relação ao tempo como velocidade de deformação

$$\varepsilon_{lm}^e = \frac{1}{E_e} C_{lm}^{ij-1} \sigma_{ij} \quad (2.17a)$$

$$\varepsilon_{lm}^{ve} = \frac{1}{E_{ve}} C_{lm}^{ij-1} \sigma_{ij} - \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} = \frac{1}{E_{ve}} C_{lm}^{ij-1} \sigma_{ij} - \gamma (\dot{\varepsilon}_{lm} - \dot{\varepsilon}_{lm}^e) \quad (2.17b)$$

Substituindo-se as expressões das deformações elásticas ε_{lm}^e e viscoelásticas ε_{lm}^{ve} apresentadas nas equações (2.17a) e (2.17b), respectivamente, na definição das deformações totais ε_{lm} em (2.11), obtém-se a relação reológica para este modelo.

$$\sigma_{ij} = \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} + \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (2.18)$$

sendo $\dot{\sigma}_{ij}$ a taxa de variação da tensão total com o tempo ou velocidade de tensão total. Esta é a relação que deve ser imposta no desenvolvimento da equação integral para se obter a formulação viscoelástica específica para o modelo de Boltzmann.

2.5 MODELO ELASTOPLÁSTICO

Este modelo é representado pelo arranjo em serie de uma mola com um arranjo bloco-mola que permite o aparecimento de deformações residuais (fig. 2.4). Além do mais, este fica caracterizado pela igualdade das tensões nos dois trechos: elástico e plástico.

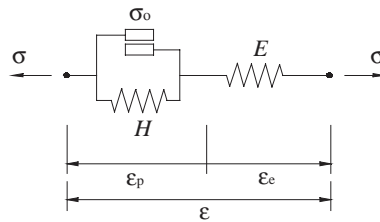


FIGURA 2.4 – Modelo elastoplástico (representação uniaxial)

onde H (fig. 2.4) representa o módulo plástico do material e σ_0 a tensão de escoamento (ou plastificação). Já as deformações totais são definidas pela soma das deformações elásticas da primeira mola e das deformações plásticas referente ao conjunto bloco-mola.

$$\dot{\epsilon}_{lm} = \dot{\epsilon}_{lm}^e + \dot{\epsilon}_{lm}^p \tag{2.19}$$

Os incrementos de deformações, $\dot{\epsilon}_{lm}$, $\dot{\epsilon}_{lm}^e$ e $\dot{\epsilon}_{lm}^p$ são, respectivamente, deformações totais, elásticas e plásticas. Note que, na equação acima, o ponto representa incrementos infinitesimais de deformação e não velocidade de deformação. É importante perceber a diferença para evitar maiores confusões com velocidades reais dos problemas viscoelásticos e viscoplásticos. Pode-se definir o incremento das tensões fazendo-se uso da relação (2.19) como:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}^e = C_{ij}^{lm} (\dot{\epsilon}_{lm} - \dot{\epsilon}_{lm}^p) = C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} - \dot{\sigma}_{ij}^p \tag{2.20}$$

sendo $\dot{\sigma}_{ij}^p$ o incremento de tensão inicial ou “plástica” definido por $\dot{\sigma}_{ij}^p = C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}^p$ e C_{ij}^{lm} a matriz constitutiva elástica definida em uma forma indicial pela expressão (2.6a). Semelhantemente aos modelos descritos anteriormente, a relação (2.20) deve ser imposta no desenvolvimento da equação integral para se obter a formulação elastoplástica.

2.6 MODELO VISCOPLÁSTICO (sem comportamento instantâneo)

O modelo reológico aqui descrito é baseado no modelo de Kelvin-Voigt (fig. 2.5). Este modelo é representado pelo arranjo em série de um conjunto em paralelo bloco/mola com a respectiva mola do modelo viscoelástico de Kelvin.

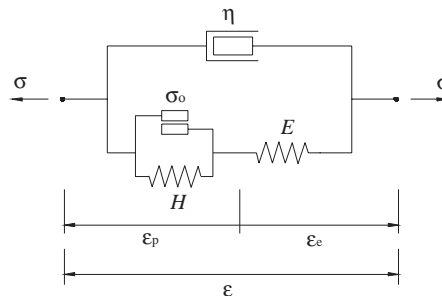


FIGURA 2.5 – Modelo viscoplástico (representação uniaxial)

Para o modelo viscoplástico apresentado na figura 2.5 as deformações são relacionadas através da seguinte expressão:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p \quad (2.21)$$

onde ε_{ij} , ε_{ij}^e , ε_{ij}^v e ε_{ij}^p são, respectivamente, as deformações totais, elásticas, viscosas e plásticas. Já as tensões totais são definidas pela soma das tensões viscosas (no amortecedor) e das tensões elastoplásticas (no trecho elastoplástico), como:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^v + \sigma_{ij}^{ep} \quad (2.22)$$

Semelhantemente as deformações, σ_{ij} , σ_{ij}^{ep} e σ_{ij}^v são, respectivamente, as tensões totais, elastoplásticas e viscosas. Estas duas últimas podem ser definidas da seguinte forma:

$$\sigma_{ij}^{ep} = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e \quad (2.23a)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^v = \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \quad (2.23b)$$

As matrizes C_{ij}^{lm} e η_{ij}^{lm} são as mesmas apresentadas nas equações (2.6a) e (2.6b ou 2.8), respectivamente. A relação para este modelo pode ser obtida substituindo-se as equações (2.23) na expressão (2.22), obtendo-se:

$$\sigma_{ij} = \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} + C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} + C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} - \varepsilon_{lm}^p) = C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} + \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}) - \sigma_{ij}^p \quad (2.24)$$

Esta é a relação que deve ser imposta no desenvolvimento da representação integral para se obter a formulação viscoplástica. O termo σ_{ij}^p é oriundo dos problemas de tensão inicial, sendo expresso por:

$$\sigma_{ij}^p = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^p \quad (2.25)$$

Note que, neste modelo viscoplástico, as expressões constitutivas serão consideradas em sua forma total e não na forma incremental como usualmente é feito nas formulações elastoplásticas. Sendo assim, todos os termos que aparecem com um ponto como sobrescrito

referem-se literalmente a respectiva derivada no tempo (ou seja: $\dot{x} = \partial x / \partial t$) e não significam incrementos infinitesimais como usualmente encontrado nas literaturas que tratam da teoria da plasticidade.

2.7 MODELO VISCOPLÁSTICO (com comportamento instantâneo)

O modelo viscoplástico apresentado neste item (fig. 2.6) é baseado no modelo de Boltzmann descrito anteriormente. Este se diferencia do modelo viscoplástico apresentado no item anterior pela capacidade de simular deformações elásticas instantâneas. O modelo é representado pelo arranjo em série de um conjunto em paralelo bloco/mola com a mola do trecho viscoelástico do modelo de Boltzmann.

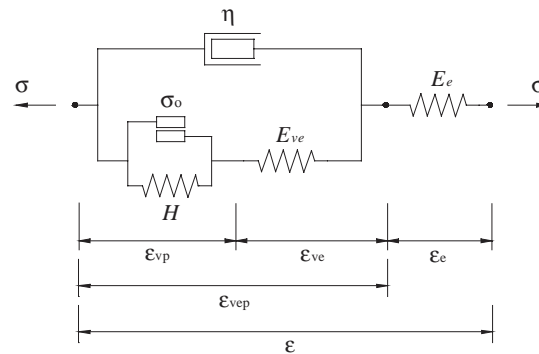


FIGURA 2.6 – Modelo viscoplástico (representação uniaxial)

Para o modelo viscoplástico apresentado na figura 2.6 as deformações são relacionadas através da seguinte expressão:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^{ve} + \epsilon_{ij}^{vp} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{ij}^{ve} = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^e - \epsilon_{ij}^{vp} \quad (2.26)$$

onde ϵ_{ij} , ϵ_{ij}^e , ϵ_{ij}^{ve} e ϵ_{ij}^{vp} são, respectivamente, as deformações totais, elásticas (comportamento instantâneo), viscoelásticas e viscoplásticas. Já as tensões totais são definidas pela soma das tensões viscosas (no amortecedor) e das tensões elastoplásticas (no trecho elastoplástico), como:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^v + \sigma_{ij}^{ep} \quad (2.27)$$

Semelhantemente as deformações, σ_{ij} , σ_{ij}^{ep} e σ_{ij}^v são, respectivamente, as tensões totais, elasto-plásticas e viscosas. Utilizando-se a mesma justificativa adotada no desenvolvimento do modelo de Boltzmann, considera-se a hipótese da igualdade dos coeficientes de Poisson de ambos os trechos, instantâneo e viscoplástico. Assim, levando em consideração esta simplificação, pode-se definir as tensões através das seguintes relações:

$$\sigma_{ij}^{ep} = \tilde{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} \quad (2.28a)$$

$$\sigma_{ij}^e = \hat{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = E_e C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e \quad (2.28b)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} = \gamma \tilde{C}_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} = \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} \quad (2.28c)$$

onde σ_{ij}^e são as tensões elásticas referentes a mola em série com o amortecedor. Note que as tensões viscosas são proporcionais a velocidade de deformação $\dot{\varepsilon}_{lm}^{vep}$, sendo H o módulo plástico, E_e e E_{ve} , respectivamente, os módulos de elasticidade referentes aos trechos instantâneo e viscoplástico. O coeficiente γ é o mesmo parâmetro representativo da viscosidade do material apresentado anteriormente. Semelhantemente, as matrizes C_{ij}^{lm} e η_{ij}^{lm} são as mesmas apresentadas nas equações (2.6a) e (2.8), respectivamente. Com relação ao trecho viscoplástico é possível escrever

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{ep} + \sigma_{ij}^v = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} + \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} \quad (2.29)$$

Pode-se escrever uma relação entre as velocidades de deformação de ambos os trechos do modelo proposto, de forma similar à expressão (2.26).

$$\dot{\varepsilon}_{lm} = \dot{\varepsilon}_{lm}^e + \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} + \dot{\varepsilon}_{lm}^{vp} = \dot{\varepsilon}_{lm}^e + \dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} \quad (2.30)$$

onde, semelhantemente ao item 2.6, o ponto sobre os termos presentes na expressão (2.30) indica a respectiva derivada com relação ao tempo, ou seja, velocidade de deformação. Explicitando-se as deformações elásticas ε_{lm}^e na equação (2.28b) e as deformações viscoelásticas na expressão (2.29), fazendo-se uso da relação (2.30), obtém-se:

$$\varepsilon_{lm}^e = \frac{1}{E_e} C_{lm}^{ij-1} \sigma_{ij} \quad (2.31a)$$

$$\varepsilon_{lm}^{ve} = \frac{1}{E_{ve}} C_{lm}^{ij-1} \sigma_{ij} - \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} = \frac{1}{E_{ve}} C_{lm}^{ij-1} \sigma_{ij} - \gamma (\dot{\varepsilon}_{lm} - \dot{\varepsilon}_{lm}^e) \quad (2.31b)$$

Substituindo-se as expressões das deformações elásticas ε_{lm}^e e viscoelásticas ε_{lm}^{ve} apresentadas nas equações (2.31a) e (2.31b), respectivamente, na definição das deformações totais ε_{lm} em (2.26), obtém-se a relação reológica para este modelo.

$$\sigma_{ij} = \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} + \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \sigma_{ij}^{vp} \quad (2.32)$$

sendo $\dot{\sigma}_{ij}$ a taxa de variação da tensão total com o tempo. Esta é a relação que deve ser imposta no desenvolvimento da equação integral para se obter a formulação específica para o modelo aqui proposto. O termo σ_{ij}^{vp} é oriundo dos problemas de tensão inicial, sendo aqui expresso por:

$$\sigma_{ij}^{vp} = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{vp} \quad (2.33)$$

As expressões constitutivas, semelhantemente ao item 2.6, serão consideradas em sua forma total e não na forma incremental como usualmente é feito nas formulações elastoplásticas. Sendo assim, todos os termos que aparecem com um ponto como sobrescrito referem-se literalmente a respectiva derivada no tempo (ou seja: $\dot{x} = \partial x / \partial t$) e não significam incrementos infinitesimais como usualmente encontrado nas literaturas que tratam da teoria da plasticidade.

Vários outros modelos constitutivos viscoelástico ou viscoplásticos podem ser elaborados a partir dos elementos reológicos básicos. Suas relações constitutivas podem ser obtidas seguindo-se os mesmos passos aqui apresentados. Porém, como os objetivos de implementação numérica deste trabalho são muito extensos, os modelos reológicos serão limitados aos descritos neste capítulo.

Capítulo 3

FORMULAÇÕES ELASTODINÂMICAS DO MEF E MEC

3.1 INTRODUÇÃO

A grande dificuldade na determinação das soluções analíticas da maioria dos problemas na engenharia é devido a complexidade matemática dos modelos adotados. As soluções exatas, obtidas para casos específicos, são limitadas pela geometria do problema e por hipóteses bastante simplificadoras. Graças ao surgimento dos computadores, tais procedimentos simplificados vêm sendo substituídos por métodos numéricos, que representam o comportamento do problema abordado de maneira precisa e eficiente.

O desenvolvimento dos recursos computacionais tem proporcionado um grande crescimento na aplicação dos métodos numéricos, contribuindo para o aparecimento de novas formulações que proporcionam modelagens cada vez mais detalhadas, levando em consideração comportamentos que em outras épocas seria praticamente impossível. O campo de aplicação dos métodos numéricos tem evoluído tanto que hoje em dia é possível encontrar aplicações dos métodos até mesmo na medicina na área da biomecânica. Percebe-se que o grande número de pesquisa envolvendo métodos numéricos resultou em ferramentas bastante confiáveis, baseadas em formulações conceitualmente muito bem estabelecidas.

Neste capítulo apresentam-se as equações integrais elastodinâmicas referentes às formulações do método dos elementos finitos e do método dos elementos de contorno. O termo referente ao amortecimento viscoso, usualmente encontrado nas análises dinâmicas, não será considerado. O amortecimento será introduzido nos próximos capítulos com a consideração da viscosidade reológica dos materiais, tendo em vista os objetivos do trabalho. As representações integrais e algébricas apresentadas para os métodos, são ambas equacionadas a partir da equação de equilíbrio dinâmico baseadas na técnica dos resíduos ponderados. Esta

técnica é o ponto de partida para o desenvolvimento de todas as formulações que serão apresentadas nos próximos capítulos.

3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Um dos métodos numéricos mais difundido e aplicado em toda a engenharia é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Neste método, o contínuo é subdividido em pequenos subdomínios, denominados elementos finitos, sobre os quais se aproximam as grandezas físicas associadas ao problema que se pretende analisar. O mesmo envolve procedimentos extensivos, que devido a natureza repetitiva, torna-se ideal para a implementação em microcomputadores. Este tem se consagrado como uma ferramenta em potencial para a mecânica aplicada, sendo mais indicado para tratar problemas como estruturas reticuladas, cascas, materiais compósitos, anisotrópicos e não-lineares. A representação integral dinâmica de um corpo em equilíbrio via MEF, pode ser obtida a partir da equação de equilíbrio dinâmico de uma porção infinitesimal do sólido.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.1)$$

onde b_i e \ddot{u}_i representam, respectivamente, as componentes das forças de volume e aceleração referentes a direção i e ρ é a densidade mássica. Pode-se ponderar o erro produzido pela equação de equilíbrio (3.1), quando a solução exata é substituída por uma aproximada, utilizando-se como função ponderadora a função de deslocamento virtual δu_i . Sendo assim, a equação de ponderação sobre todo o domínio Ω pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \delta u_i (\sigma_{ij,j} + b_i - \rho \ddot{u}_i) d\Omega = 0 \quad (3.2)$$

Integrando-se por partes o primeiro termo da equação (3.2), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.3)$$

sendo Γ a variável que define o contorno do corpo e n_j a componente j do versor normal a superfície. Sabendo-se que $\sigma_{ij}n_j = p_i$ e que $\delta u_{i,j}\sigma_{ij} = \delta \varepsilon_{ij}\sigma_{ij}$, onde $\delta \varepsilon_{ij}$ são as componentes de deformação virtual, a equação (3.3) fica,

$$\int_{\Gamma} \delta u_i p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.4a)$$

A expressão (3.4a) é o tão conhecido princípio dos trabalhos virtuais específico para o problema dinâmico. A primeira e a terceira integrais representam, respectivamente, o trabalho das forças de superfície e volumétricas. A segunda integral refere-se ao trabalho das forças internas e dá origem a matriz de rigidez. Já a quarta integral corresponde ao trabalho das forças inerciais de onde se obtém a matriz de massa. Note que o trabalho das forças concentradas está representado pela primeira integral em (3.4a). Assim, para a situação de uma carga concentrada atuando em um ponto s da superfície Γ , a primeira integral resulta:

$$\int_{\Gamma} \delta u_i p_i d\Gamma = \delta u_i(s) p_i(s) \quad (3.4b)$$

Porém, por simplicidade a expressão do trabalho das cargas concentradas será omitida e considerada de forma implícita, representada na integral das forças de superfície. A equação (3.4a) é o ponto de partida para a obtenção da representação integral viscoelástica dinâmica do MEF. Nela se impõe a relação reológica, tal como aquelas apresentadas no capítulo 2, específica para o problema que se deseja tratar pelo MEF. Assim, para encontrar a formulação elastodinâmica, basta apenas substituir a relação constitutiva do modelo reológico elástico eq.(2.1) na equação (3.4a).

$$\int_{\Gamma} \delta u_i p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.5)$$

A expressão (3.5) é a representação integral elastodinâmica. Note que a única diferença desta representação para a representação usual elástica é a presença da quarta integral responsável pelo comportamento dinâmico. Assim, resolvida a equação (3.5), obtendo-se os deslocamentos, parte-se para a obtenção das tensões. As tensões são determinadas pelo MEF de maneira relativamente simples quando comparado ao MEC. Para o caso elástico elas ficam

expressas, fazendo-se uso da aproximação para as deformações apresentadas na equação (3.7), como:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^{\alpha} U_l^{\alpha} \quad (3.6)$$

3.2.1 Tratamento algébrico para a representação integral

A equação integral definida anteriormente pode ser transformada em equação algébrica através do método dos elementos finitos. Assim, o domínio do corpo Ω é discretizado com n_e elementos finitos Ω_e (fig. 3.1), de tal sorte que as densidades do domínio sejam representadas adequadamente.

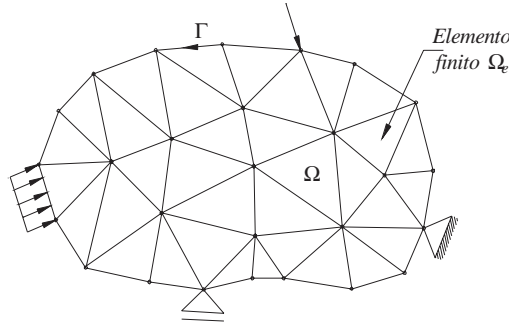


FIGURA 3.1 – Discretização do Problema

Dessa forma, as variáveis do problema podem ser aproximadas, parametrizando-as com relação aos seus valores nodais, fazendo-se uso de funções interpoladoras apropriadas.

$$\begin{aligned} u_i &= \phi^{\alpha} U_i^{\alpha} & \Rightarrow & & \varepsilon_{ij} &= \phi_{,j}^{\alpha} U_i^{\alpha} \\ \delta u_i &= \phi^{\alpha} \delta U_i^{\alpha} & \Rightarrow & & \delta \varepsilon_{ij} &= \phi_{,j}^{\alpha} \delta U_i^{\alpha} \\ \ddot{u}_i &= \phi^{\alpha} \ddot{U}_i^{\alpha}; & b_i &= \tilde{\phi}^{\alpha} b_i^{\alpha}; & p_i &= \hat{\phi}^{\alpha} P_i^{\alpha} \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $\hat{\phi}$ e $\tilde{\phi}$ são as funções de forma adotadas para interpolar as forças de superfície e as forças volumétricas respectivamente, ϕ são as funções de formas adotadas para interpolar o restante das variáveis e o subscrito α refere-se aos nós do elemento finito. Note que para a aproximação no contorno α corresponde ao número de nós pertencente a superfície onde p_i é aproximado. Os termos U_i^{α} , \ddot{U}_i^{α} , δU_i^{α} , P_i^{α} e b_i^{α} são valores nodais de deslocamento,

aceleração, deslocamento virtual, forças de superfície e forças volumétricas, respectivamente. Substituindo-se as expressões (3.7) na representação integral (3.5) encontra-se:

$$\delta U_i^\alpha \left[\sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \hat{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e U_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Omega_e b_i^\beta - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \rho \phi^\beta d\Omega_e \ddot{U}_i^\beta \right] = 0 \quad (3.8)$$

onde n_s é o número de superfícies solicitadas. Note que os deslocamentos virtuais δU_i^α presentes na expressão (3.8) podem ser quaisquer, logo, para que a igualdade em (3.8) seja verificada tem-se:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e U_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \rho \phi^\beta d\Omega_e \ddot{U}_i^\beta = \sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \hat{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Omega_e b_i^\beta \quad (3.9)$$

A expressão (3.9) pode ser escrita em uma forma matricial como:

$$KU(t) + M\ddot{U}(t) = F(t) \quad (3.10)$$

sendo t o tempo, K a matriz de rigidez da estrutura, M a matriz de massa e F as forças nodais, ambas definidas como:

$$K = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e \quad (3.11a)$$

$$M = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \rho \phi^\beta d\Omega_e \quad (3.11b)$$

$$F = \sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \hat{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Omega_e b_i^\beta \quad (3.11c)$$

Para se resolver o sistema expresso pela equação (3.10) é necessário executar a integração temporal. Em geral, nas análises dinâmicas com o método dos elementos finitos a equação (3.10) é integrada com o método de Newmark ou outra técnica similar.

3.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O método dos elementos de contorno-MEC apresenta-se como uma alternativa para solução de diversos problemas físicos regidos por equações integrais de contorno. A principal diferença desse método, com relação aos métodos usuais de domínio, tais como o método dos elementos finitos-MEF e o método das diferenças finitas-MDF, é a facilidade em modelar certos problemas discretizando-se apenas o contorno do corpo, reduzindo assim, o número de variáveis envolvida no problema. Além disso, O MEC é mais indicado para tratar problemas com domínios infinitos ou semi-infinitos e problemas onde ocorram concentrações de tensão ou fluxo. As representações integrais do MEC podem ser obtidas, semelhantemente ao MEF, a partir da equação de equilíbrio (3.1), fazendo-se uso da técnica dos resíduos ponderados. A grande diferença é que a função ponderadora utilizada é a solução fundamental e não mais a função de deslocamento virtual. Esta alteração impõe algumas singularidades nas representações integrais que devem ser resolvidas com técnicas especiais de integração. Neste trabalho apenas a solução fundamental estática (Kelvin) será empregada como função ponderadora, resultando no método dos elementos de contorno com matriz de massa MMBEM (Matrix Mass BEM). Em formulações mais elegantes como o TDBEM (Time Domain BEM), soluções fundamentais de problemas dinâmicos (ondulatórias) tais como as soluções fundamentais de Stokes e de Lamb são utilizadas. Nestes casos a necessidade de matriz de massa é abolida e os problemas dinâmicos são tratados apenas com discretizações no contorno. Maiores detalhes desta formulação podem ser vistos em CODA(2000).

Porém, como o objetivo deste trabalho não é abordar as forças inerciais, mas apenas o comportamento viscoso quase-estático dos meios contínuos, a descrição da formulação dinâmica simplificada do MEC (MMBEM), apresenta-se bastante adequada para os propósitos do trabalho, proporcionando um maior entendimento das formulações viscosas que serão apresentadas nos próximos capítulos. A formulação dinâmica do MEC com matriz de massa pode ser obtida a partir da técnica dos resíduos ponderados empregada sobre a equação de equilíbrio do problema em consideração, ou seja:

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* (\sigma_{ij,j} + b_i - \rho \ddot{u}_i) d\Omega = 0 \quad (3.12)$$

onde u_{ki}^* é denominado solução fundamental e representa fisicamente o efeito de uma carga concentrada unitária estática atuando em um ponto de um domínio infinito elástico e homogêneo, sendo definida para o problema de Kelvin por:

$$\text{Para 2D} \quad u_{ki}^*(p, s) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i}] \quad (3.13a)$$

$$\text{Para 3D} \quad u_{ki}^*(p, s) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} [(3-4\nu) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i}] \quad (3.13b)$$

onde o primeiro índice correspondente a direção da carga aplicada em p e o segundo referente ao deslocamento gerado em s . O termo $r = r(p, s)$ é a distância entre os pontos p e s . Deve-se observar que $r_{,i} = \partial r / \partial x_i$. Note que a solução fundamental para o caso bidimensional refere-se à situação de estado plano de deformação. Para se obter a solução para estado plano de tensão basta substituir o coeficiente de Poisson por $\nu/(1+\nu)$ sem alterar o módulo de elasticidade transversal G . Integrando-se por partes o primeiro termo da equação (3.12), tem-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.14)$$

sendo Γ a variável que define o contorno do corpo e n_j a componente do vetor normal a superfície. Sabendo-se que $\sigma_{ij} n_j = p_i$ e que $u_{ki,j}^* \sigma_{ij} = \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}$, onde ε_{kij}^* é a solução fundamental em deformações, a equação (3.14) fica:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.15)$$

Semelhantemente a equação (3.4a) para o MEF, a equação (3.15) é o ponto de partida para a obtenção das representações integrais pelo MEC. Nela se impõe uma relação reológica, como aquelas definidas no capítulo 2, para que se possa obter a formulação com o modelo reológico desejado. Para o caso elástico eq.(2.1) a expressão (3.15) fica:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.16)$$

Sabendo-se que

$$\varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j} \quad (3.17)$$

a equação (3.16) torna-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.18)$$

Aplicando-se integração por partes na segunda integral da equação (3.18), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.19)$$

A equação integral (3.19) pode ser reescrita fazendo uso da equação de equilíbrio fundamental, definida por:

$$\sigma_{kij,j}^* = -\delta(p,s) \delta_{ki} \quad (3.20)$$

onde $\delta(p,s)$ é o conhecido delta de Dirac, s refere-se a uma posição do domínio do sólido e p representa a posição do ponto fonte. Aplicando a equação (3.20) em (3.19), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac, as técnicas apropriadas para desenvolver integrais singulares e que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$, encontra-se:

$$\overline{C}_{ki} u_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \quad (3.21)$$

O termo \overline{C}_{ki} é o mesmo obtido nas formulações elastostáticas e sua expressão pode ser facilmente encontrada nas bibliografias usuais do método dos elementos de contorno, veja

BREBBIA *et al.*(1984) e BREBBIA & DOMINGUEZ(1992). Já o termo p_{ki}^* é a solução fundamental para forças de superfície.

$$p_{ki}^*(p, s) = -\frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ki} + \beta r_{,k} r_{,i}] - (1-2\nu)(r_{,k} n_i - r_{,i} n_k) \right\} \quad (3.22)$$

onde $(\alpha, \beta) = (1,2)$ para o caso 2D (estado plano de deformações) e $(\alpha, \beta) = (2,3)$ para o problema tridimensional. A equação (3.21) é a representação integral da formulação elastodinâmica do MEC aqui adotada. Note que a única diferença desta para a representação elastostática usual é a presença do último termo do lado direito responsável pelo comportamento dinâmico. Note também que as integrais apresentam singularidades. Uma forma de evitar estas singularidades seria através da utilização de ponto fonte exterior ao domínio do problema analisado, ou dependendo do caso, podem ser solucionadas analiticamente ou semi-analiticamente fazendo-se uso de técnica similares àquelas apresentadas no Anexo D.

3.3.1 Representação integral para tensões em pontos internos

Resolvido o problema de contorno parte-se agora para a determinação das tensões. Para pontos internos o termo $\bar{C}_{ki} = \delta_{ki}$ e conseqüentemente a equação integral (3.21) fica escrita como:

$$u_k(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \quad (3.23)$$

A representação integral para as deformações em pontos internos (considerando a hipótese de pequenas deformações) é obtida através da seguinte relação:

$$\varepsilon_{ke} = \frac{1}{2}(u_{k,e} + u_{e,k}) \quad (3.24)$$

As deformações são obtidas de maneira análoga ao problema elastostático BREBBIA *et al.*(1984). Assim, diferenciando-se a equação (3.23) e aplicando esta na definição das deformações em (3.24), encontra-se:

$$\varepsilon_{ke}(p) = \int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kei}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kei}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \quad (3.25)$$

Note que como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte, apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. As tensões elásticas são obtidas de forma trivial, aplicando-se a relação constitutiva elástica apresentada na equação (2.1) sobre a definição das deformações (3.25), de maneira que:

$$\sigma_{\rho q}(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \quad (3.26)$$

Note que como o ponto fonte se encontra no interior do corpo as integrais de contorno presentes na equação (3.26) apresentam-se em sua forma não-singular e apenas as integrais de domínio necessitam de cuidados especiais para serem determinadas. Estas podem ser calculadas através da técnica de transformação de coordenadas exposta no Anexo D. Os termos $\bar{\sigma}_{\rho qi}^*$ e $\bar{p}_{\rho qi}^*$ são definidos como:

$$\bar{\sigma}_{\rho qi}^* = \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left[(1-2\nu)(\delta_{\rho q} r_{,i} + \delta_{iq} r_{,\rho} - \delta_{\rho i} r_{,q}) + \beta r_{,\rho} r_{,i} r_{,q} \right] \quad (3.27a)$$

$$\bar{p}_{\rho qi}^* = \frac{G}{2\alpha\pi(1-\nu)r^\beta} \left[\beta \frac{\partial r}{\partial n} \{ (1-2\nu)\delta_{\rho q} r_{,i} + \nu(\delta_{\rho i} r_{,q} + \delta_{qi} r_{,\rho}) - \varpi r_{,\rho} r_{,q} r_{,i} \} + \beta\nu(n_{\rho} r_{,q} r_{,i} + n_q r_{,\rho} r_{,i}) + (1-2\nu)(\beta n_i r_{,\rho} r_{,q} + n_q \delta_{\rho i} + n_{\rho} \delta_{qi}) - (1-4\nu)n_i \delta_{\rho q} \right] \quad (3.27b)$$

sendo $(\alpha, \beta, \varpi) = (1, 2, 4)$ para o caso 2D (estado plano de deformações) e $(\alpha, \beta, \varpi) = (2, 3, 5)$ para o problema tridimensional. Assim, fazendo-se uso da expressão (3.26) é possível calcular as tensões em pontos internos. Para pontos no contorno a representação integral apresenta forte singularidade que ainda não foram totalmente solucionadas. Muitas contribuições têm sido propostas na literatura com relação a este tema, veja por exemplo, GIUGGIANNI *et al.*(1992), GIUGGIANNI(1994) e RICHARDSON(1998). Porém, neste trabalho as singularidades serão evitadas utilizando-se um simples procedimento que será apresentado no próximo item. Esta abordagem é largamente difundida nas formulações do MEC para a obtenção de tensões no contorno em problemas lineares e não-lineares apresentando-se bastante adequada como pode ser visto nos trabalhos de TELLES & BREBBIA(1982), TELLES & CARER(1994), POON *et al.*(1997) e CISILINO(1997).

3.3.2 Obtenção das tensões no contorno

Uma forma de obter as tensões em pontos do contorno seria através da aplicação da equação (3.26) no contorno. Entretanto, devido aos termos singulares presentes nos integrandos desta representação, este procedimento produziria singularidades de alta ordem. Este problema pode ser contornado e resolvida de uma forma simples, através da obtenção das tensões em função dos deslocamentos e forças de superfície do contorno, que já foram determinados na solução do problema de contorno. Considere por exemplo a figura 3.2, um sistema cartesiano local de coordenadas localizado em um ponto do contorno onde se deseja obter as componentes de tensão.

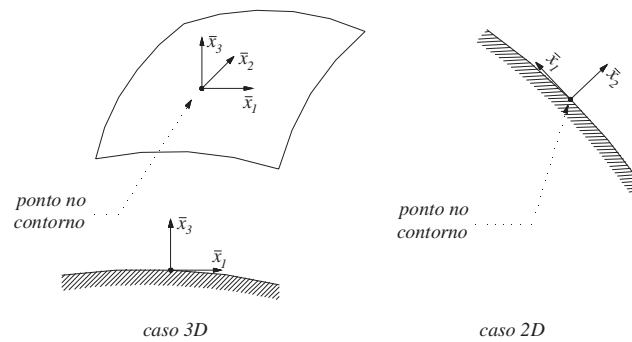


FIGURA 3.2 – Sistema cartesiano local de coordenadas

Definidas as funções de forma para os deslocamentos e forças de superfície do contorno e obtidos os seus valores nodais, é possível definir as forças de superfície em qualquer ponto do contorno. Consequentemente, pode-se escrever para o caso 3D que:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{13} &= \bar{\sigma}_{31} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{23} &= \bar{\sigma}_{32} = \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{33} &= \bar{p}_3 \end{aligned} \tag{3.28}$$

onde o sobrescrito indica que os valores são referentes ao sistema local de coordenadas. As outras componentes de tensão podem ser obtidas através da relação constitutiva. Assim, em um dado elemento, o campo de deslocamento sobre ele pode ser escrito em função dos valores dos deslocamentos nodais nas coordenadas locais, da seguinte forma:

$$\bar{u}_i(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \phi^\alpha(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \bar{u}_i^\alpha \tag{3.29}$$

sendo \bar{u}_i o campo de deslocamento em coordenadas locais, ϕ^α são funções de forma definidas para o elemento de contorno e \bar{u}_i^α o deslocamento nodal segundo a direção “ i ” no nó “ α ” definido no sistema de coordenadas local. Note que, quando se resolve o problema de contorno, obtém-se as forças de superfície e os deslocamentos nodais no sistema global, porém, para encontrar as tensões no contorno é necessário transformá-los para o sistema local fazendo uso da matriz de transformação entre os dois sistemas. Definido o campo de deslocamento sobre o elemento de contorno, o campo de deformações é obtido pela diferenciação do campo de deslocamento, ou seja:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{u}_j(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}{\partial \bar{x}_i} \right) \quad i, j = 1, 2 \quad (3.30)$$

Note que não é necessário determinar todas as componentes de deformação, basta apenas obter aquelas que serão importantes na determinação das componentes de tensão restantes. Logo, as outras componentes do tensor de tensão são encontradas fazendo-se uso da relação constitutiva elástica eq.(2.1), que pode ser escrita, fazendo-se uso da terceira equação em (3.28), como:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = 2\mu\bar{\epsilon}_{12} \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu} [\nu\bar{p}_3 + 2\mu(\bar{\epsilon}_{11} + \nu\bar{\epsilon}_{22})] \\ \bar{\sigma}_{22} &= \frac{1}{1-\nu} [\nu\bar{p}_3 + 2\mu(\bar{\epsilon}_{22} + \nu\bar{\epsilon}_{11})] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Utilizando as expressões (3.28) e (3.31) é possível encontrar as tensões no contorno, pois as deformações presentes em (3.31) são obtidas em função dos deslocamentos e forças de superfície do contorno. Na situação onde elementos de contorno constantes são utilizados, as derivadas dos deslocamentos presentes na definição das deformações, podem ser obtidas aplicando-se as técnicas de diferenças finitas entre elementos de contorno adjacentes. Após a obtenção das tensões, pode-se obtê-las no sistema global utilizando-se a matriz de transformação. As expressões foram obtidas para o caso tridimensional, para o bidimensional o procedimento é similar e mais simples necessitando apenas de uma componente de deformação.

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \bar{x}_1} \quad (3.32)$$

Conseqüentemente, para o caso de estado plano de deformação, as manipulações com as expressões resultam,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{22} &= \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{12} &= \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu} [\nu \bar{p}_2 + 2\mu \bar{\varepsilon}_{11}] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Note que, no caso 2D \bar{x}_1 (fig. 3.2) é a direção tangencial no ponto onde se deseja extrair as tensões e \bar{x}_2 é a direção normal. Para estado plano de tensão as expressões (3.33) são as mesmas, apenas o coeficiente de Poisson deve ser $\nu/(1+\nu)$ sem alterar a constante de Lamé μ .

3.3.3 Tratamento algébrico para as representações integrais

Similarmente ao MEF, as equações integrais definidas anteriormente podem ser transformadas em equações algébricas através do método dos elementos de contorno. Assim, o contorno do corpo Γ é discretizado com n_e elementos de contorno Γ_e e seu domínio Ω modelado com n_c células internas Ω_c (fig. 3.3), de tal sorte que as densidades do contorno e do domínio sejam representadas adequadamente. Dessa forma, as variáveis do problema podem ser aproximadas, parametrizando-as com relação aos seus valores nodais, fazendo-se uso de funções interpoladoras apropriadas.

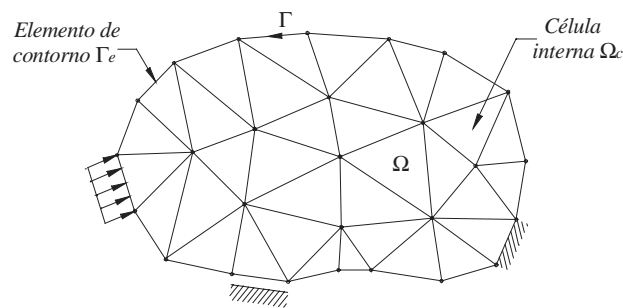


FIGURA 3.3 – Discretização do problema

$$\begin{aligned}
 p_i &= \phi^\alpha P_i^\alpha \\
 u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha \\
 b_i &= \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} b_i^{\tilde{\alpha}} \\
 \ddot{u}_i &= \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} \ddot{U}_i^{\tilde{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

onde ϕ e $\tilde{\phi}$ são respectivamente as funções de forma adotadas para interpolar os elementos de contorno e as células e os subscritos α e $\tilde{\alpha}$ referem-se ao nó do elemento de contorno e da célula. Os termos P_i^α , U_i^α , $\dot{U}_i^{\tilde{\alpha}}$ e $b_i^{\tilde{\alpha}}$ são valores nodais de forças de superfície, deslocamentos, aceleração e forças volumétricas, respectivamente. Consequentemente, as representações integrais de deslocamento e tensão podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_{ki} U_i(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha + \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} u_{ki}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c b_i^{\tilde{\alpha}} - \\
 &\sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} u_{ki}^* \rho \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \ddot{U}_i^{\tilde{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{3.26a}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho i}(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho i}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho i}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha + \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\sigma}_{\rho i}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c b_i^{\tilde{\alpha}} - \\
 &\sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\sigma}_{\rho i}^* \rho \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \ddot{U}_i^{\tilde{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{3.26c}$$

Depois de executar todas as integrais e escolher pontos fonte em igual número aos nós do problema, pode-se escrever os seguintes sistemas de equações diferenciais temporais:

$$HU(t) + M\ddot{U}(t) = GP(t) + Bb(t) \tag{3.27a}$$

$$\sigma(t) = \tilde{G}P(t) - \tilde{H}U(t) + \tilde{B}b(t) - \tilde{M}\ddot{U}(t) \tag{3.27b}$$

onde t representa o tempo. Ressalta-se que a matriz H é obtida através da associação do termo \bar{C}_{ki} com a matriz referente a integral de contorno cuja o núcleo é p_{ki}^* , como usualmente é feito no método dos elementos de contorno. Para se resolver os sistemas de equações (3.27) deve-se adotar um algoritmo de integração temporal tal como: Houbolt, Wilson θ ou Newmark. Porém, o procedimento mais indicado é o de Houbolt, pois este tem demonstrado ser mais apropriado para análises dinâmicas com elementos de contorno KONTONI & BESKOS(1993), TELLES & CARRER(1994), CODA & VENTURINI(1998) e CODA(2000).

Capítulo 4

FORMULAÇÕES VISCOELÁSTICAS DO MEF

4.1 INTRODUÇÃO

Muitos materiais como aços (submetidos a altas temperaturas), polímeros, madeira, solo e o concreto apresentam um comportamento viscoso. Em muitas situações práticas este comportamento pode ser negligenciado devido à introdução de simplificações sobre as condições reais, tais como: características dos materiais, estratégias de construção e sazonalidades específicas do local da obra. Entretanto, existem situações onde o comportamento ao longo do tempo é indispensável e precisa ser levado em consideração de forma bastante realista. Um exemplo claro pode ser visto em problemas de escavações de túneis, onde todo o processo dura dias e o material apresenta um comportamento destacadamente dependente do tempo (viscoso).

O estudo do comportamento dos materiais ao longo do tempo tem sido alvo de muitos pesquisadores, encontrando-se inúmeros trabalhos na bibliografia especializada, entre eles destacam-se os trabalhos de TELLES & BREBBIA(1982), VENTURINI(1982), LEMAITRE & CHABOCHE(1984), SOBOTKA(1984), SIMO & HUGHES(1988), CHEN *et al.*(1993) e MUNAIAR(1998). Usualmente, a viscosidade do material é considerada fazendo-se uso de funções de fluência ou relaxação e um adequado processo incremental onde as solicitações, consideradas constantes no intervalo, são aplicadas incrementalmente. Este tipo de abordagem conduz, geralmente, a uma formulação matemática complexa e de certa forma computacionalmente dispendiosa. Este é baseado em procedimentos incrementais quase-estáticos e apresenta algumas dificuldades na imposição de deslocamentos e cargas externas com dependência temporal arbitrária. Além do mais, na maioria dos modelos, a resposta final é bastante sensível ao tamanho do incremento de tempo adotado.

Uma outra forma de abordar o problema, não baseado em funções de fluência ou relaxação, faz uso da transformação de Laplace-Carson, transformando o problema viscoelástico em um problema elástico equivalente. Após resolver o problema transformado, uma inversão numérica é feita para que se possa recuperar o comportamento no domínio do tempo. Esta técnica é mais apropriada para resolver problemas onde a natureza das condições de contorno não se alteram ao longo do tempo.

Por outro lado, no campo de métodos numéricos aplicados na resolução de problemas dinâmicos, considerando corpos elásticos e inelásticos, nenhuma menção é feita às propriedades reológicas do material na definição das matrizes de amortecimento viscoso WARBURTON(1976), CLOUGH & PENZIEN(1975) e MLEJNEK & ARGYRIS(1991), negligenciando a importante relação entre a velocidade de deformação e a velocidade relativa de pontos vizinhos dentro do corpo. Nos procedimentos usuais, a decomposição modal e o decaimento da resposta dinâmica são utilizados para definir os parâmetros de amortecimento da estrutura sem levar em consideração as características reológicas do material que a constitui. Porém, a consideração das propriedades reológicas do material na equação de equilíbrio do corpo pode ser facilmente estabelecida, como pode ser visto nos trabalhos de CODA(2000), MESQUITA *et al.*(2001), MESQUITA & CODA(2002a), MESQUITA & CODA(2001a), MESQUITA & CODA(2001b) e MESQUITA & CODA(2002c). A técnica envolvida é muito simples e tem como ponto de partida a imposição do modelo reológico sobre a equação de equilíbrio, resultando em uma equação de movimento semelhante àquelas encontradas em formulações dinâmicas usuais, apresentando porém, uma matriz viscosa com um significado reológico bem definido. Em problemas quase-estáticos, onde os efeitos da massa são negligenciados, desprezando-se o termo referente à aceleração, esta formulação representa adequadamente problemas viscoelásticos.

Neste capítulo apresentam-se formulações viscoelásticas (com uma abordagem inicial a análises dinâmicas) específicas para o método dos elementos finitos MESQUITA *et al.*(2001), MESQUITA & CODA(2002a) e MESQUITA & CODA(2001b). A equação integral é obtida pela imposição do modelo reológico sobre a equação de movimento e deve ser solucionada fazendo-se uso de algoritmos de integração temporal, tal como aqueles usualmente empregados nas análises dinâmicas. Esta formulação não apresenta dificuldades na imposição de solicitações e condições de contorno que variam ao longo do tempo. A formulação proposta se apresenta mais estável e computacionalmente mais econômica que aquelas citadas anteriormente, veja por exemplo MUNAIAR(1998), LEMAITRE & CHABOCHE(1984),

etc.. No final da apresentação de cada formulação são apresentados exemplos numéricos que servem para validar as formulações e demonstrar a sua precisão e estabilidade.

4.2 FORMULAÇÃO VISCOELASTODINÂMICA (Kelvin-Voight)

A equação (3.4), obtida através da técnica dos resíduos ponderados aplicada sobre a equação de equilíbrio dinâmico (3.1), é o ponto de partida para a obtenção da representação integral viscoelástica dinâmica do MEF. Nela se impõe a relação reológica definida para o modelo de Kelvin-Voight pela equação (2.9a), de maneira que:

$$\int_{\Gamma} \delta u_i p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (4.1)$$

A expressão (4.1) é a representação integral viscoelástica dinâmica que leva em consideração o modelo reológico de Kelvin. Note que a única diferença desta representação para a representação usual elastodinâmica é a presença da terceira integral responsável pelo comportamento viscoso.

4.2.1 Tratamento algébrico para a representação integral

Como usualmente é feito para o método dos elementos finitos, o corpo Ω é dividido em n_e pequenos sub-elementos denominados elementos finitos (fig. 3.1). Sobre estes elementos as variáveis do problema são aproximadas e parametrizadas com relação aos seus valores nodais, fazendo-se uso de funções de forma.

$$\begin{aligned} u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha & \Rightarrow & \quad \varepsilon_{ij} = \phi_{,j}^\alpha U_i^\alpha \\ \delta u_i &= \phi^\alpha \delta U_i^\alpha & \Rightarrow & \quad \delta \varepsilon_{ij} = \phi_{,j}^\alpha \delta U_i^\alpha \\ \dot{u}_i &= \phi^\alpha \dot{U}_i^\alpha & \Rightarrow & \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \phi_{,j}^\alpha \dot{U}_i^\alpha \\ \ddot{u}_i &= \phi^\alpha \ddot{U}_i^\alpha; & b_i &= \phi^\alpha b_i^\alpha; & p_i &= \tilde{\phi}^\alpha P_i^\alpha \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $\tilde{\phi}$ é a função de forma adotada para interpolar as forças de superfície e ϕ são as funções de forma adotadas para interpolar o restante das variáveis e o subscripto α refere-se aos nós do elemento finito. Note que para a aproximação no contorno α corresponde ao número de

nós pertencente a superfície onde p_i é aproximado. Os termos U_i^α , \dot{U}_i^α , \ddot{U}_i^α , δU_i^α , P_i^α e b_i^α são valores nodais de deslocamento, velocidade, aceleração, deslocamento virtual, forças de superfície e forças volumétricas, respectivamente. Substituindo-se as expressões (4.2) na representação integral (4.1) encontra-se:

$$\begin{aligned} \delta U_i^\alpha \left[\sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e U_l^\beta - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha \eta_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e \dot{U}_l^\beta + \right. \\ \left. \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e b_i^\beta - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \rho \phi^\beta d\Omega_e \ddot{U}_i^\beta \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde n_s é o número de superfícies solicitadas. Note que os deslocamentos virtuais δU_i^α presentes na expressão (4.3) podem ser quaisquer, logo, para que a igualdade em (4.3) seja verificada tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e U_l^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha \eta_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e \dot{U}_l^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \rho \phi^\beta d\Omega_e \ddot{U}_i^\beta = \\ \sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e b_i^\beta \end{aligned} \quad (4.4)$$

A expressão (4.4) pode ser escrita em uma forma matricial como:

$$KU + V\dot{U} + M\ddot{U} = F \quad (4.5)$$

sendo K a matriz de rigidez da estrutura, V a matriz referente ao comportamento viscoso, M a matriz de massa e F as forças nodais equivalentes, ambas definidas como:

$$K = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e \quad (4.6a)$$

$$V = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha \eta_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e \quad (4.6b)$$

$$M = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \rho \phi^\beta d\Omega_e \quad (4.6c)$$

$$F = \sum_{s=1}^{n_e} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e b_i^\beta \quad (4.6d)$$

Observe que se for assumido $\theta_\lambda = \theta_\mu = \gamma$, a matriz referente ao comportamento viscoso do elemento finito se degenera na matriz de amortecimento viscoso proporcional à rigidez usualmente empregada nas análises dinâmicas.

$$V = \gamma K \quad (4.7)$$

Em geral, nas análises dinâmicas com o método dos elementos finitos a equação (4.5) é integrada com o método de Newmark β ou outra técnica similar.

4.2.2 Integração temporal numérica

Para se resolver o problema viscoso, deve-se integrar no tempo o sistema de equações apresentado em (4.5). Para isto, pode-se fazer uso de técnicas de integração temporal, tais como Newmark β WARBURTON(1976), Houbolt CODA & VENTURINI(1998) ou Wilson θ BATHE(1996), que são usualmente empregadas em análises dinâmicas. Nesta formulação adotou-se o método de Newmark, que é o mais empregado em análises dinâmicas pelo MEF. Suas aproximações para a aceleração e velocidade são definidas como:

$$\ddot{U}_{s+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left[U_{s+1} - U_s - \Delta t \dot{U}_s - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{U}_s \right] \quad (4.8a)$$

$$\dot{U}_{s+1} = \dot{U}_s + \frac{1}{2} \Delta t (\ddot{U}_{s+1} + \ddot{U}_s) \quad (4.8b)$$

onde $s+1$ refere-se ao instante atual. Manipulando as expressões (4.5), (4.8a) e (4.8b), veja, por exemplo, WARBURTON(1976), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\bar{K} U_{s+1} = \bar{F}_{s+1} \quad (4.9)$$

onde

$$\bar{K} = \left[M + \frac{1}{2} \Delta t V + \beta \Delta t^2 K \right] \quad (4.10a)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{s+1} = \Delta t^2 [\beta F_{s+1} + (1-2\beta)F_s + \beta F_{s-1}] + [2M - \Delta t^2(1-2\beta)K] U_s - \\ \left[M - \frac{1}{2} \Delta t V + \beta \Delta t^2 K \right] U_{s-1} \end{aligned} \quad (4.10b)$$

Impondo-se as condições de contorno, como usualmente é feito no método dos elementos finitos, pode-se resolver o sistema linear apresentado em (4.9), obtendo assim os deslocamentos para o passo de tempo atual. Com as incógnitas do problema de contorno conhecidas no passo atual, parte-se para a determinação das tensões. Assim, obtidos os deslocamentos no instante $s+1$, determina-se a aceleração \ddot{U}_{s+1} e a velocidade \dot{U}_{s+1} através das expressões (4.8). Obtidas essas variáveis, calculam-se as tensões elásticas e viscosas fazendo-se uso das respectivas equações (2.5a) e (2.5b), que podem ser escritas como:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^{\alpha} U_l^{\alpha} \quad (4.11a)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} = \eta_{ij}^{lm} \phi_{,m}^{\alpha} \dot{U}_l^{\alpha} \quad (4.11b)$$

Obtidas as tensões elásticas e viscosas, a tensão total, definida como a soma das duas primeiras, é facilmente encontrada através da expressão (2.4). Resolvido o problema naquele passo, repete-se o procedimento descrito nos próximos passos de tempo, resolvendo-se assim todo o problema viscoelástico dinâmico.

4.2.3 Exemplos numéricos

A formulação descrita anteriormente foi implementada no elemento finito de casca proposto inicialmente para análises lineares por MESQUITA(1998). O elemento apresenta geometria triangular e é o resultado do acoplamento entre o elemento de flexão de placas DKT BATOZ *et al.*(1980) e um elemento de tensão plana com graus de liberdade rotacionais desenvolvido através da formulação livre BERGAN & FELIPPA(1985). Nos exemplos, os parâmetros α e β , específicos do elemento de membrana, foram assumidos como 1,5 e 0,5, respectivamente. Por conveniência, o elemento de casca aqui apresentado é denominado FFDKT (Free Formulation Discrete Kirchoff Triangle).

4.2.3.1 EXEMPLO 01: Peça tracionada

Este é um exemplo clássico, muito utilizado para aferir modelos viscoelásticos. A sua solução analítica é muito simples e facilmente obtida. Uma peça submetida a um carregamento distribuído de tração aplicado em sua face livre é analisada. A estrutura de seção transversal quadrada é modelada e devido à sua simetria discretiza-se apenas a metade da mesma. A Resposta obtida com o elemento FFDKT é confrontada com a resposta obtida com elementos finitos de barra (MEF), elementos de contorno (MEC) ambos extraídos de MESQUITA *et al.*(2001), e com a resposta analítica. A geometria da estrutura juntamente com sua discretização e propriedades físicas são apresentadas na figura 4.1.

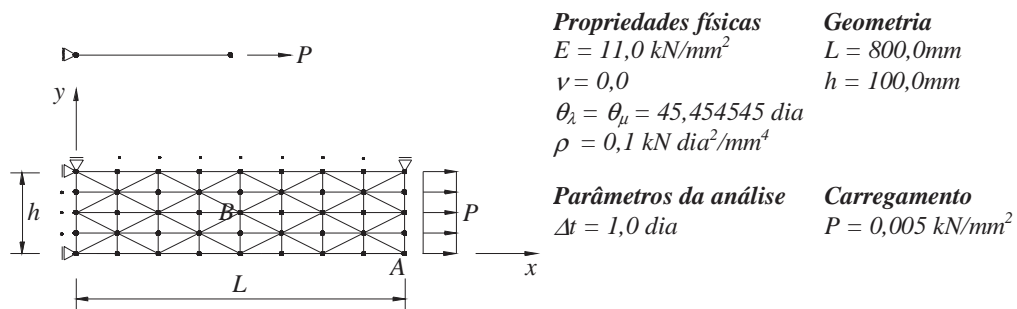


FIGURA 4.1 – Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura.

A resposta do deslocamento longitudinal do ponto A é apresentada na figura 4.2 para $\rho = 0,0$ e $\rho = 0,1 \text{ kN dia}^2 / \text{mm}^4$ confrontada com a resposta teórica obtida para um modelo uniaxial. Para simular o modelo uniaxial adotou-se um coeficiente de Poisson nulo.

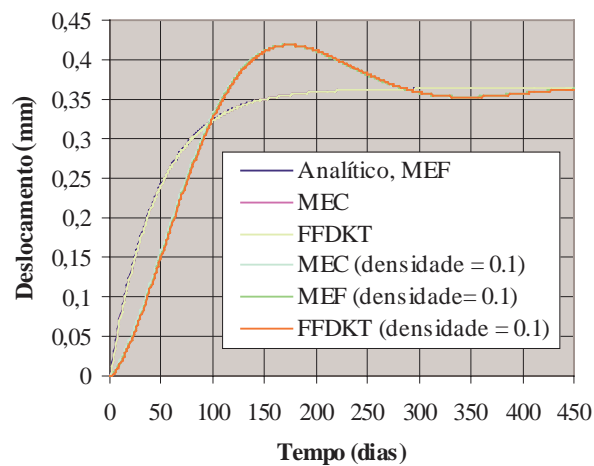


FIGURA 4.2 – Deslocamento longitudinal do ponto A.

Nota-se uma perfeita concordância entre os resultados obtidos pelo presente modelo e a resposta teórica, demonstrando a consistência do modelo em poder recuperar o caso uniaxial.

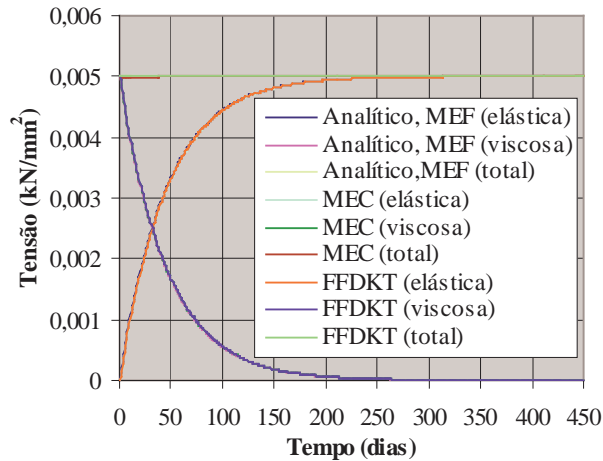


FIGURA 4.3 – Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B.

Semelhantemente a figura 4.2, a resposta da tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} calculadas no ponto B são apresentadas na figura 4.3 juntamente com suas respectivas respostas analíticas. As mesmas observações feitas para a resposta em deslocamentos podem ser estendidas para as tensões. Note que as respostas em tensão são praticamente as mesmas que aquelas apresentadas pelas respostas analíticas. Na figura 4.4 pode-se observar o resultado do deslocamento longitudinal do ponto A para vários passos de tempo considerando $\rho = 0,0$.

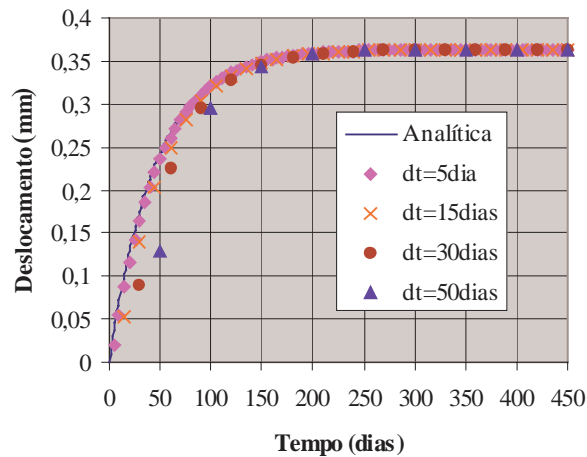


FIGURA 4.4 – Deslocamento longitudinal do ponto A.

Como pode ser observado, os resultados são muito estáveis e precisos até mesmo para grandes passos de tempo. A solução elastostática final é sempre alcançada para qualquer passo de tempo. A figura 4.5 apresenta o resultado do deslocamento longitudinal do ponto A para uma situação de carregamento mais geral com $\rho = 0,0$. Durante os primeiros 199 passos de tempo a carga é mantida até que no instante $t=200$ dias ela é retirada.

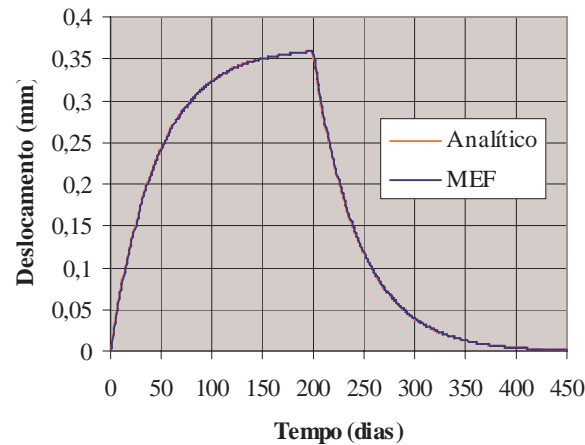


FIGURA 4.5 – Deslocamento longitudinal do ponto A.

O comportamento da solução numérica está perfeitamente de acordo com aquele apresentado pela solução analítica.

4.2.3.2 EXEMPLO 02: Placa circular engastada

A placa circular apresentada na figura 4.6 possui vínculos de engastamento em toda a sua borda e é solicitada por um carregamento distribuído Q em toda a sua superfície. Devido à sua simetria discretiza-se apenas $1/4$ da mesma.

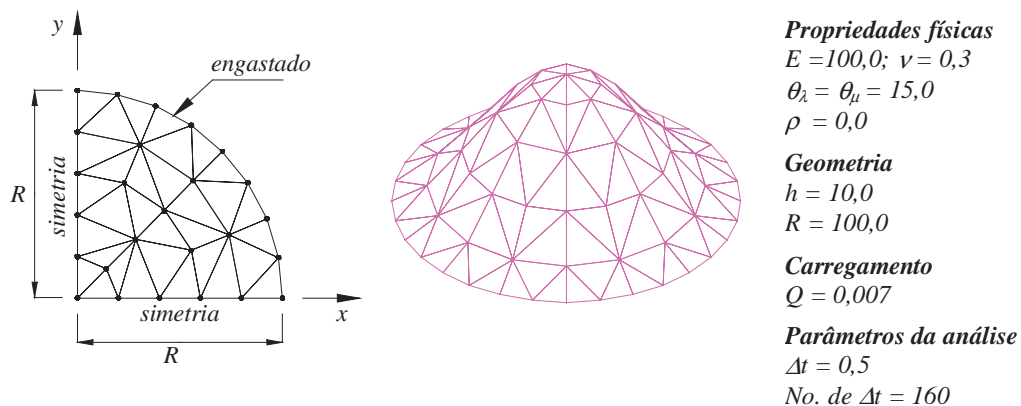


FIGURA 4.6 – Discretização, deformada, geometria e propriedades físicas da estrutura.

Os resultados do deslocamento transversal do centro da placa para $\rho = 0,0$ são apresentados na figura 4.7 utilizando-se uma malha com 32 elementos finitos confrontados com a resposta analítica do problema, expressa por:

$$w(r,t) = \frac{3Q(1-\nu^2)}{16Eh^3} (R^2 - r^2)^2 (1 - e^{-t/\gamma})$$

onde R é o raio da placa, r é a distância da origem de onde se deseja calcular o deslocamento, h é a espessura da placa e $\gamma = \theta_\lambda = \theta_\mu$ é o parâmetro representativo da viscosidade.

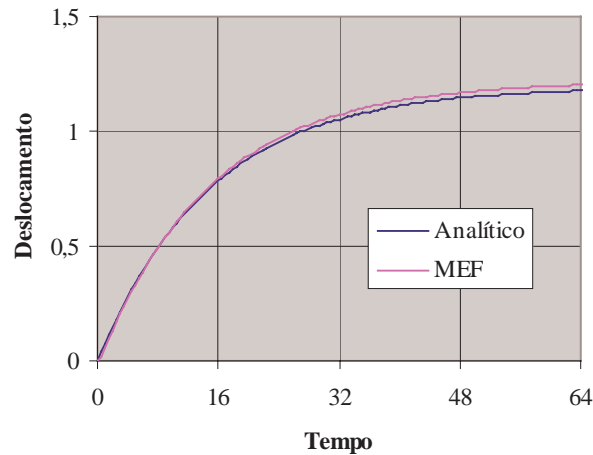


FIGURA 4.7 – Deslocamento transversal do centro da placa.

Nota-se uma boa concordância entre o resultado obtido pelo elemento finito e a resposta analítica. Ressalta-se que a pequena diferença no final da resposta poderia ser menor se fossem utilizadas malhas mais refinadas, melhorando o desempenho do elemento de flexão de placa DKT.

4.2.3.3 EXEMPLO 03: Casca cilíndrica sob pressão interna

Um cilindro com as extremidades livres é solicitado por uma pressão interna uniforme, figura 4.8. Fazendo-se uso da simetria do problema discretiza-se apenas $\frac{1}{8}$ do mesmo. A geometria do problema, discretização e as propriedades físicas são apresentadas na figura 4.8.

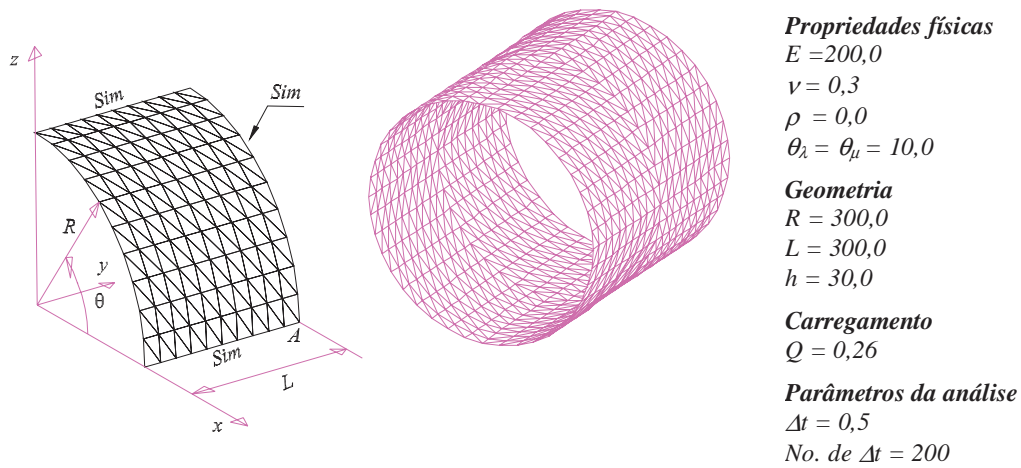


FIGURA 4.8 – Discretização, geometria e propriedades físicas da estrutura.

Os resultados para o deslocamento radial do ponto A são apresentados na figura 4.9 considerando-se $\rho = 0,0$. Semelhantemente ao segundo exemplo, a resposta do presente formulação é confrontada com a resposta analítica do problema, expressa por:

$$u(t) = \frac{PR^2}{Eh} (1 - e^{-t/\gamma})$$

onde P , R e h são respectivamente a pressão aplicada, o raio e a espessura do cilindro. O tempo $\gamma = \theta_\lambda = \theta_\mu$ é o parâmetro representativo da viscosidade. Na análise com o elemento finito FFDKT utilizou-se uma malha com $10 \times 10 \times 2$ elementos.

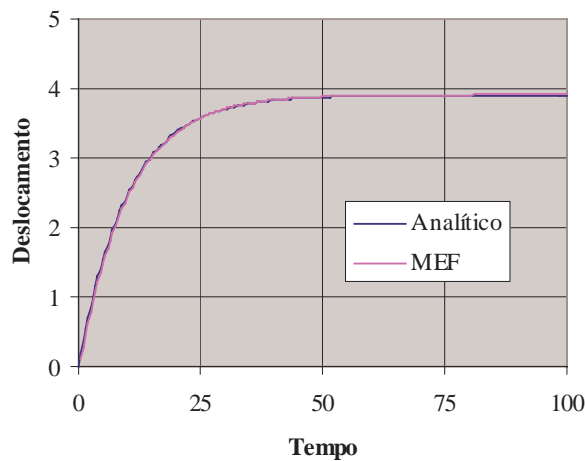


FIGURA 4.9 – Deslocamento radial do ponto A.

Observando-se a figura 4.9 nota-se a boa concordância entre os resultados numérico e analítico.

4.2.3.4 EXEMPLO 04: Cilindro com paredes rígidas

Um cilindro com paredes rígidas em suas extremidades é solicitado por uma carga concentrada (fig. 4.10). Devido à simetria do problema, apenas um $\frac{1}{8}$ deste é discretizado. A deformada da estrutura para $t=20$ juntamente com a geometria, discretização e propriedades físicas são apresentadas na figura 4.10.

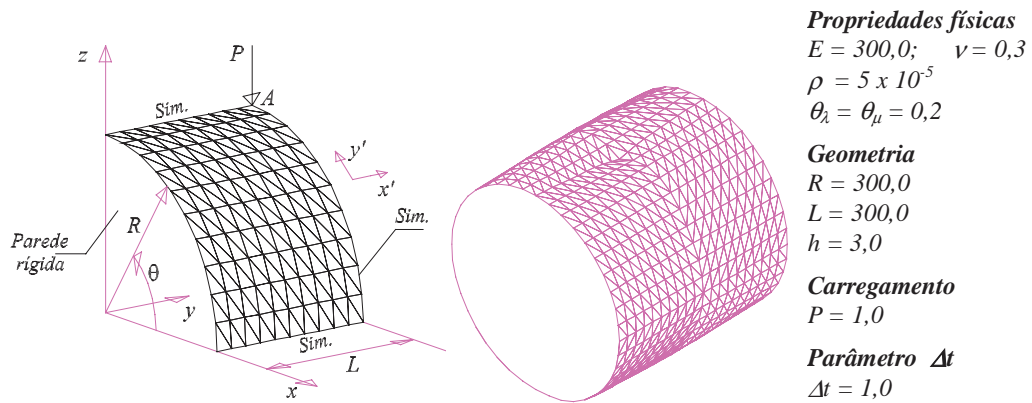


FIGURA 4.10 – Discretização, deformada (ampliada), geometria e propriedades físicas.

O resultado da presente formulação (FFDKT viscoso) é comparado com os resultados obtidos utilizando o software ANSYS. Uma análise com amortecimento dinâmico foi considerada, levando em consideração a conclusão dada pela expressão (4.7), ou seja, quando $\theta_\lambda = \theta_\mu$ é considerado, a matriz de amortecimento proporcional a rigidez é equivalente a matriz viscoelástica para o modelo de Kelvin. Os resultados para o deslocamento vertical no ponto A (ponto da carga) é apresentado na figura 4.11.

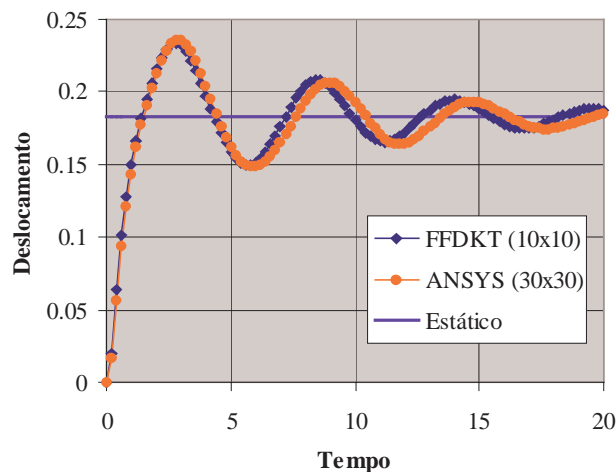


FIGURA 4.11 – Deslocamento do ponto A.

A resposta do presente modelo é confrontada com a resposta do elemento de casca Shell63 do sistema ANSYS que utiliza uma malha mais refinada com 30x30x2 elementos, enquanto o elemento FDKT utiliza uma malha com 10x10x2 elementos. Está bastante claro que uma análise viscosa simples (quase-estática ou dinâmica) pode ser feita por qualquer programa que apresente pacotes para análises dinâmicas.

4.3 FORMULAÇÃO VISCOELÁSTICA (Boltzmann)

Tendo em vista que nos objetivos propostos para o trabalho as forças inerciais não são consideradas, o termo referente à aceleração, por simplicidade, não será incluído na formulação viscoelástica específica para o modelo de Boltzmann. O desenvolvimento desta, segue os mesmos princípios adotados para a formulação viscoelastodinâmica com o modelo de Kelvin descrito anteriormente. Assim, a representação viscoelástica (particularizada para o modelo de Boltzmann) de um corpo em equilíbrio via MEF, pode ser obtida a partir da imposição da relação constitutiva viscosa (2.18) sobre a representação integral (3.4), ou seja,

$$\int_{\Gamma} \delta u_i p_i d\Gamma - \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \frac{\gamma E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

A quarta integral pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \dot{\sigma}_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_{i,j} \dot{\sigma}_{ij} d\Omega \quad (4.13)$$

Integrando-se por partes a equação (4.13) encontra-se:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \dot{\sigma}_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta u_i \dot{\sigma}_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \delta u_i \dot{\sigma}_{ij,j} d\Omega \quad (4.14)$$

Sabendo-se que $\dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{p}_i$ e $\dot{\sigma}_{ij,j} = -\dot{b}_i$ (derivada da equação de equilíbrio estática em relação ao tempo) a expressão (4.14) torna-se:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \dot{\sigma}_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta u_i \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i \dot{b}_i d\Omega \quad (4.15)$$

Substituindo a expressão (4.15) na equação integral (4.12) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \delta u_i p_i d\Gamma - \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \frac{\gamma E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \\ & \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \delta u_i \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i \dot{b}_i d\Omega \right] + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

A expressão (4.16) é a representação integral viscoelástica que leva em consideração o modelo reológico de Boltzmann. Note que a 1ª, 2ª e 3ª integrais são as mesmas apresentadas na formulação elastostática e podem ser solucionadas seguindo o mesmo princípio. A terceira integral é responsável pelo comportamento viscoso. Já a quarta e a quinta integrais são responsáveis pelo comportamento instantâneo, podendo contribuir também para o comportamento viscoso caso ocorram variações das solicitações com o tempo. Em geral, como o peso próprio não varia com o tempo e já existia antes da aplicação das cargas, pode-se considerar nestas situações $\dot{b}_i = 0$ e conseqüentemente a quinta integral se anula.

4.3.1 Tratamento algébrico para a representação integral

Elementos finitos são empregados para discretizar o sólido, transformando a expressão (4.16) em uma equação algébrica. Assim, o domínio do corpo Ω é discretizado com n_e elementos finitos Ω_e (fig. 3.1). Parametrizando-se as variáveis em relação aos seus valores nodais, utilizando-se adequadas funções interpoladoras, tem-se:

$$\begin{aligned} u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha & \Rightarrow & \quad \varepsilon_{ij} = \phi_{,j}^\alpha U_i^\alpha \\ \delta u_i &= \phi^\alpha \delta U_i^\alpha & \Rightarrow & \quad \delta \varepsilon_{ij} = \phi_{,j}^\alpha \delta U_i^\alpha \\ \dot{u}_i &= \phi^\alpha \dot{U}_i^\alpha & \Rightarrow & \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \phi_{,j}^\alpha \dot{U}_i^\alpha \\ b_i &= \phi^\alpha b_i^\alpha & \Rightarrow & \quad \dot{b}_i = \phi^\alpha \dot{b}_i^\alpha \\ p_i &= \tilde{\phi}^\alpha P_i^\alpha & \Rightarrow & \quad \dot{p}_i = \tilde{\phi}^\alpha \dot{P}_i^\alpha \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde $\tilde{\phi}$ é a função de forma adotada para interpolar as forças de superfície, ϕ são as funções de forma adotadas para interpolar o restante das variáveis e o subscrito α refere-se aos nós do elemento finito. Note que para a aproximação no contorno α corresponde ao número de

nós pertencente a superfície onde p_i e \dot{p}_i são aproximados. Os termos U_i^α , \dot{U}_i^α , δU_i^α , P_i^α , \dot{P}_i^α , b_i^α e \dot{b}_i^α são valores nodais de deslocamento, velocidade, deslocamento virtual, forças de superfície, velocidade de força de superfície, forças volumétricas e velocidade de forças volumétricas, respectivamente. Substituindo-se as expressões em (4.17) na representação integral em (4.16) encontra-se:

$$\begin{aligned} \delta U_i^\alpha & \left[\sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta - \sum_{e=1}^{n_e} \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e U_l^\beta - \right. \\ & \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\mathcal{E}_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e \dot{U}_l^\beta + \sum_{s=1}^{n_s} \frac{\mathcal{E}_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s \dot{P}_i^\beta + \\ & \left. \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\mathcal{E}_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e \dot{b}_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e b_i^\beta \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde n_s é o número de superfícies solicitadas. Note que os deslocamentos virtuais δU_i^α presentes na expressão (4.18) podem ser quaisquer, logo, para que a igualdade seja verificada tem-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta - \sum_{e=1}^{n_e} \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e U_l^\beta - \\ & \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\mathcal{E}_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e \dot{U}_l^\beta + \sum_{s=1}^{n_s} \frac{\mathcal{E}_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s \dot{P}_i^\beta + \\ & \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\mathcal{E}_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e \dot{b}_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e b_i^\beta = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Rearranjando a equação (4.19), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_e} \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e U_l^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\mathcal{E}_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e \dot{U}_l^\beta = \\ & \sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e b_i^\beta + \sum_{s=1}^{n_s} \frac{\mathcal{E}_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s \dot{P}_i^\beta + \\ & \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\mathcal{E}_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e \dot{b}_i^\beta \end{aligned} \quad (4.20)$$

Note que a primeira e a segunda integrais são iguais e correspondem, a não ser pela ausência do módulo de elasticidade, à matriz de rigidez usualmente empregada no MEF. A expressão (4.20) pode ser escrita em uma forma matricial como:

$$KU(t) + V\dot{U}(t) = LP(t) + Bb(t) + \bar{L}\dot{P}(t) + \bar{B}\dot{b}(t) \quad (4.21)$$

onde t representa o tempo, K é a nova matriz de rigidez da estrutura, V a matriz referente ao comportamento viscoso, L e \bar{L} são as matrizes “Lumping” referente respectivamente a forças de superfície e sua velocidade. Os termos B e \bar{B} são matrizes referente as forças volumétricas e a sua respectiva velocidade. Estas matrizes ficam definidas como:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{e=1}^{n_e} \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^{\alpha} C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^{\beta} d\Omega_e \\ V &= \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\gamma E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^{\alpha} C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^{\beta} d\Omega_e \\ L &= \sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^{\alpha} \tilde{\phi}^{\beta} d\Gamma_s \\ B &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^{\alpha} \phi^{\beta} d\Omega_e b_i^{\beta} \\ \bar{L} &= \sum_{s=1}^{n_s} \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma_s} \phi^{\alpha} \tilde{\phi}^{\beta} d\Gamma_s \\ \bar{B} &= \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi^{\alpha} \phi^{\beta} d\Omega_e \end{aligned} \quad (4.22)$$

Para resolver a equação temporal (4.22) utiliza-se um adequado procedimento de integração no tempo, como será visto no próximo item.

4.3.2 Integração temporal numérica

Como a equação diferencial a ser integrada é linear, pois o termo referente à aceleração não foi considerado, esta será integrada utilizando-se um simples algoritmo de integração temporal com aproximação linear. Assim, as velocidades presentes na representação algébrica ficam escritas como:

$$\dot{U}_{s+1} = \frac{(U_{s+1} - U_s)}{\Delta t} \quad (4.23a)$$

$$\dot{P}_{s+1} = \frac{(P_{s+1} - P_s)}{\Delta t} \quad (4.23b)$$

$$\dot{b}_{s+1} = \frac{(b_{s+1} - b_s)}{\Delta t} \quad (4.23c)$$

onde $s+1$ refere-se ao instante atual e Δt o incremento de tempo adotado. Aplicando-se as expressões das velocidades definidas em (4.23) na expressão (4.21), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\bar{K}U_{s+1} = \bar{F}_{s+1} \quad (4.24)$$

sendo

$$\bar{K} = [\Delta t K + V] \quad (4.25a)$$

$$\bar{F}_{s+1} = [\Delta t L + \bar{L}]P_{s+1} + [\Delta t B + \bar{B}]b_{s+1} + VU_s - L\bar{P}_s - \bar{B}b_s \quad (4.25b)$$

Impondo-se as condições de contorno, como usualmente é feito no método dos elementos finitos, pode-se resolver o sistema linear apresentado em (4.24), obtendo assim os deslocamentos para o passo de tempo atual. Encontrado os deslocamentos no instante $s+1$, determina-se a velocidade \dot{U}_{s+1} através das expressões (4.23a). Com todas as incógnitas do problema de contorno determinadas no passo atual, parte-se para encontrar as tensões totais. Estas podem ser obtidas a partir da equação (2.18), rescrita como:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^{\alpha} (U_l^{\alpha} + \gamma \dot{U}_l^{\alpha}) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (4.26)$$

Para determinar as tensões totais é necessário adotar-se ainda uma aproximação para a taxa $\dot{\sigma}_{ij}$, semelhantemente as aproximações (4.23).

$$\dot{\sigma}_{s+1} = \frac{\sigma_{s+1} - \sigma_s}{\Delta t} \quad (4.27)$$

Substituindo-se a expressão (4.27) na equação (4.26), encontra-se:

$$\sigma_{s+1} = \left[\frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \hat{B}(U_{s+1} + \gamma \dot{U}_{s+1}) + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \frac{\sigma_s}{\Delta t} \right] \left/ \left[1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \right] \right. \quad (4.28)$$

onde \hat{B} é definido como o produto da matriz constitutiva (trecho instantâneo) pela matriz de deformação usualmente empregada na formulação do MEF. Deve-se notar a dificuldade em se obter as tensões elásticas e viscosas. Uma forma de resolver este problema seria escrever um novo sistema de equações, de maneira que fosse possível obter os deslocamentos instantâneos. Assim poderia separar o campo de deslocamento, tornando possível determinar as deformações instantâneas, viscoelásticas e conseqüentemente as tensões elásticas e viscosas do trecho de Kelvin. Porém, esta abordagem é computacionalmente dispendiosa. Felizmente, pode-se contornar esta dificuldade através de um procedimento simples e eficiente proposto em MESQUITA & CODA(2001a), onde as tensões elásticas são obtidas pela solução de uma equação diferencial. Esta equação diferencial é encontrada escrevendo-se a equação (2.12b) em forma de taxa, da seguinte maneira:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{el} = E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}^{ve} = \frac{1}{\gamma} \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}^{ve} = \frac{1}{\gamma} \sigma_{ij}^v \Rightarrow \sigma_{ij}^v = \gamma \dot{\sigma}_{ij}^{el} \quad (4.29)$$

A equação (4.29) expressa uma relação entre a taxa de tensão elástica e as tensões viscosas. Substituindo a equação (4.29) na relação (2.15) é possível encontrar o seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\gamma \dot{\sigma}_{ij}^{el} + \sigma_{ij}^{el} - \sigma_{ij} = 0 \quad (4.30)$$

A expressão (4.30) é um conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Para o caso particular de σ_{ij} constante com condições de contorno $\sigma_{ij}^{el}(t=0) = 0$ e $\sigma_{ij}^{el}(t=\infty) = \sigma_{ij}$ as equações diferenciais (4.30) apresentam a seguinte solução:

$$\sigma_{ij}^{el} = \sigma_{ij} (1 - e^{-t/\gamma}) \quad (4.31)$$

Porém, neste trabalho as tensões elásticas serão obtidas pela resolução das equações diferenciais (4.30) numericamente, tornando assim o processo genérico, possibilitando a imposição de solicitações e condições de contorno variando com relação ao tempo. Para isto adotaremos a seguinte aproximação para a taxa $\dot{\sigma}_{ij}^{el}$:

$$\dot{\sigma}_{s+1}^{el} = \frac{\sigma_{s+1}^{el} - \sigma_s^{el}}{\Delta t} \quad (4.32)$$

Substituindo a expressão (4.32) na equação diferencial (4.30) obtém-se a expressão para as tensões elásticas.

$$\sigma_{s+1}^{el} = \left(\sigma_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma_s^{el} \right) / \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (4.33)$$

Note que na expressão (4.33) necessita-se do valor das tensões totais que são calculadas através da equação (4.28). Assim, calculadas as tensões totais e as tensões elásticas, pode-se obter as tensões viscosas de uma forma simples e direta aplicando-se a relação (2.15). Resolvido o problema naquele passo, repete-se o procedimento descrito anteriormente para os próximos passos de tempo resolvendo-se assim todo o problema viscoso.

4.3.3 Exemplos numéricos

Os exemplos apresentados são iguais aos três primeiros exemplos propostos no item 4.2. Porém, por uma questão didática, as descrições dos problemas serão novamente enunciadas. Semelhantemente ao que foi feito no tem 4.2, a formulação descrita foi implementada no elemento finito de cascas FFDKT (Free Formulation Discrete Kirchoff Triangle) proposto inicialmente para análises lineares por MESQUITA(1998). Os parâmetros α e β do elemento de cascas mantêm-se os mesmos do item 4.2.

4.3.3.1 EXEMPLO 01: Peça tracionada

Uma peça submetida a um carregamento distribuído de tração aplicado em sua face livre é analisada. A estrutura de seção transversal quadrada é modelada e devido à sua simetria discretiza-se apenas a metade da mesma. A resposta obtida com o elemento FFDKT é confrontada com a resposta obtida com elementos de contorno (MEC) MESQUITA &

CODA(2001a) e com a resposta analítica. A geometria da estrutura juntamente com sua discretização e propriedades físicas são apresentadas na figura 4.12.

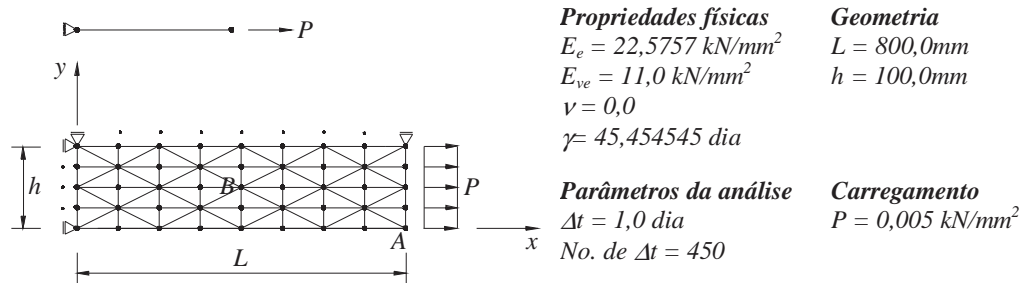


FIGURA 4.12 – Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura.

A resposta do deslocamento longitudinal do ponto A é apresentada na figura 4.13 confrontada com a resposta teórica obtida para um modelo uniaxial e pelo MEC. Na tentativa de simular o modelo uniaxial adotou-se coeficiente de Poisson nulo.

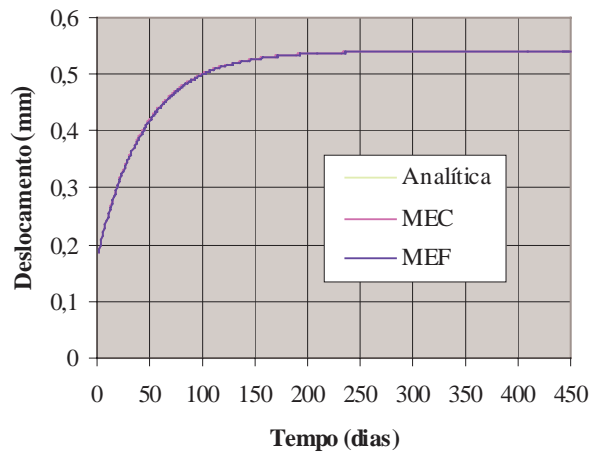


FIGURA 4.13 – Deslocamento longitudinal do ponto A.

Nota-se uma perfeita concordância entre os resultados obtidos pelo presente modelo e a resposta teórica, demonstrando a consistência do modelo em poder recuperar o caso uniaxial. Semelhantemente a figura 4.13, a resposta da tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} calculadas no ponto B são apresentadas na figura 4.14 juntamente com a resposta analítica e aquela obtida pelo MEC.

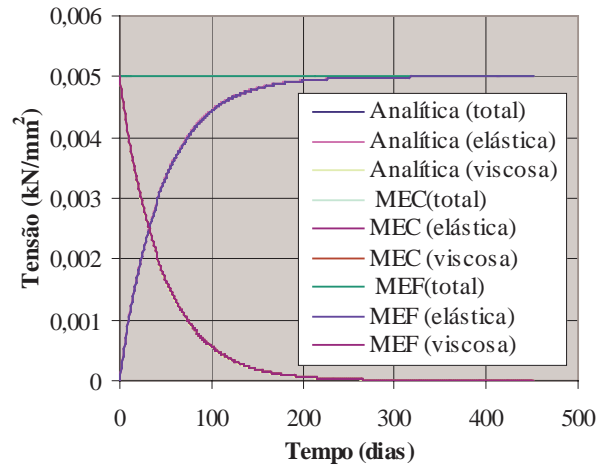


FIGURA 4.14 – Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B.

As mesmas observações feitas para a resposta em deslocamentos podem ser estendidas para as tensões. Na figura 4.15 pode-se observar o resultado do deslocamento longitudinal do ponto A para vários passos de tempo.

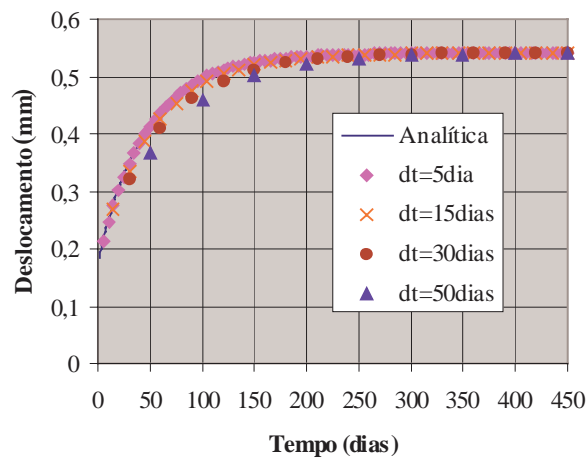


FIGURA 4.15 – Deslocamento longitudinal do ponto A.

Como pode ser observado, os resultados são estáveis e precisos até mesmo para grandes passos de tempo. A solução elastostática final é sempre alcançada para qualquer passo de tempo. A figura 4.16 apresenta o resultado do deslocamento longitudinal do ponto A para uma situação de carregamento mais geral. Durante os primeiro 199 passos de tempo a carga é mantida até que no instante $t=200dias$ ela é retirada.

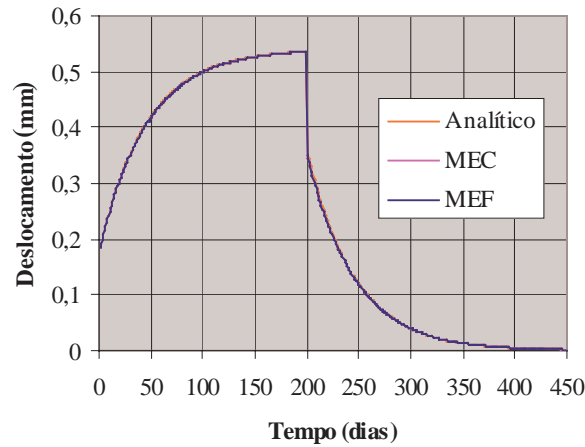


FIGURA 4.16 – Deslocamento longitudinal do ponto A.

O comportamento da solução numérica está de acordo com aquele apresentado pela solução analítica. É importante observar que o comportamento instantâneo é obtido diretamente do processo numérico.

4.3.3.2 EXEMPLO 02: Placa circular engastada

A placa circular apresentada na figura 4.17 possui vínculos de engastamento em toda a sua borda e é solicitada por um carregamento distribuído Q em toda a sua superfície. Devido à sua simetria discretiza-se apenas $1/4$ da mesma.

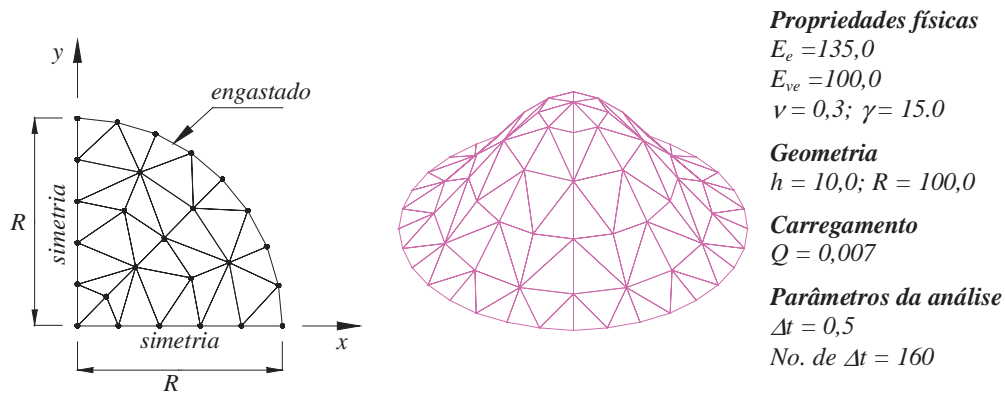


FIGURA 4.17 – Discretização, forma deformada, geometria e propriedades físicas da estrutura.

Os resultados do deslocamento transversal do centro da placa são apresentados na figura 4.18, utilizando-se uma malha com 32 elementos finitos, confrontados com a resposta analítica, que para o modelo de Boltzmann é escrita com:

$$w(r,t) = \frac{3Q(1-\nu^2)}{16h^3} (R^2 - r^2)^2 \left[\frac{1}{E_e} + \frac{1}{E_{ve}} (1 - e^{-t/\gamma}) \right]$$

onde os termos presentes na equação acima são os mesmos definidos na figura 4.17.

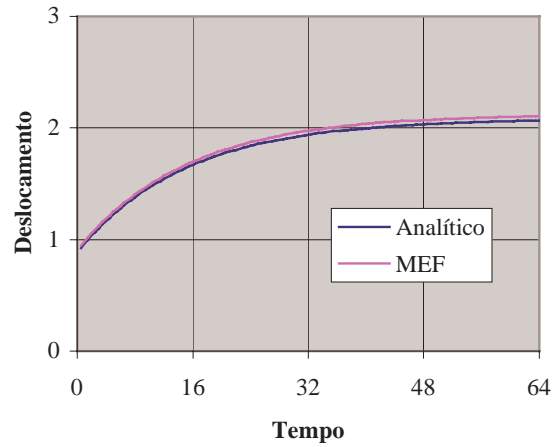


FIGURA 4.18– Deslocamento transversal do centro da placa.

Nota-se uma boa concordância entre o resultado obtido por elementos finitos e a resposta analítica. A pequena diferença na resposta é devido à aproximação da geometria. Mesmo assim, o comportamento no tempo é muito bom.

4.3.3.3 EXEMPLO 03: Casca cilíndrica sob pressão interna

Um cilindro com as extremidades livres é solicitado por uma pressão interna uniforme, figura 4.19. Fazendo-se uso da simetria do problema discretiza-se apenas 1/8 do mesmo. A geometria da estrutura, discretização e propriedades físicas são apresentadas na figura 4.19

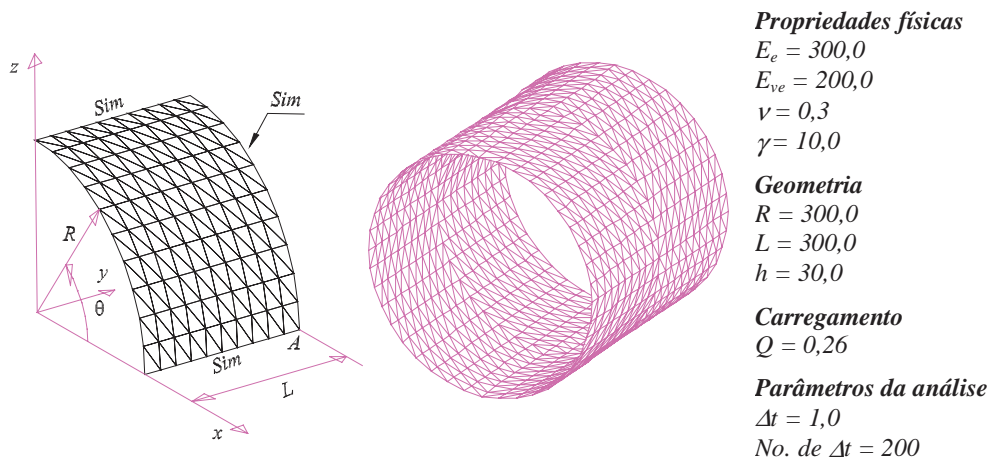


FIGURA 4.19 - Discretização, geometria e propriedades físicas da estrutura.

Os resultados para o deslocamento radial do ponto A são apresentados na figura 4.20. Semelhantemente ao segundo exemplo, a resposta da presente formulação é confrontada com a resposta analítica do problema.

$$u(t) = \frac{PR^2}{h} \left[\frac{1}{E_e} + \frac{1}{E_{ve}} (1 - e^{-t/\gamma}) \right]$$

Na análise com o elemento finito FFDKT utilizou-se uma malha com 10x10x2 elementos.

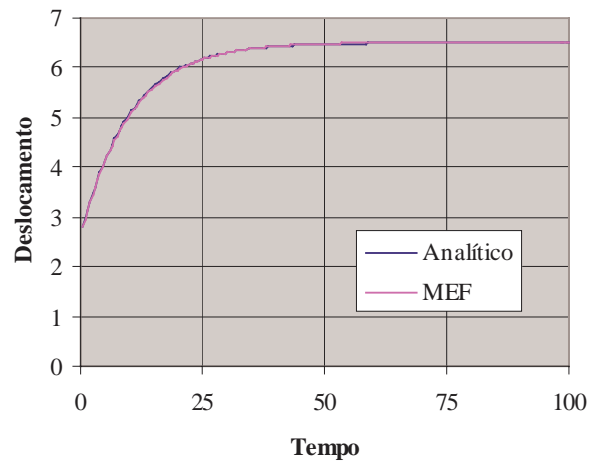


FIGURA 4.20 – Deslocamento radial do ponto A.

Observando-se a figura 4.20 nota-se novamente uma perfeita concordância entre os resultados numérico e analítico.

Capítulo 5

FORMULAÇÕES VISCOELÁSTICAS DO MEC

5.1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores foram propostos novos procedimentos para ambos os métodos dos elementos finitos e elementos de contorno para a solução de problemas viscoelásticos (quase-estáticos e dinâmicos), que já foram publicados em recentes trabalhos (veja MESQUITA *et al.*(2001), MESQUITA & CODA(2002a), MESQUITA & CODA(2001a), MESQUITA & CODA(2001b) e MESQUITA & CODA(2002c)). Estas formulações são baseadas em relações constitutivas diferenciais viscoelásticas, que aplicadas na equação de movimento dão origem a sistemas de equações diferenciais que devem ser resolvidos com a adoção de adequados algoritmos de integração temporal. Esta nova forma de tratar o problema, permite, de maneira simples, aplicar cargas e condições de contorno que variam ao longo do tempo, além de se apresentarem mais estáveis, mais precisas e computacionalmente mais vantajosas que as abordagens clássicas.

O procedimento tem como ponto de partida a técnica dos resíduos ponderados aplicada sobre a equação de equilíbrio. Este já foi totalmente exposto para o MEF no capítulo 4. Semelhantemente, pretende-se neste capítulo apresentar as formulações viscoelásticas (com uma abordagem inicial a análises dinâmicas) específicas para o método dos elementos de contorno. Inicialmente são apresentadas as formulações onde o termo viscoso é definido por integrais de domínio. Estas integrais de domínio apresentam singularidades que devem ser solucionadas com células internas e técnicas especiais de integração tal como as encontradas nos trabalhos de ALIABADI *et al.*(1985), GUIGGIANI *et al.*(1991), MI & ALIABADI(1992) e LEITÃO *et al.*(1995). Posteriormente, apresentam-se formulações viscoelásticas com representações integrais apenas no contorno, evitando o uso de células

internas. Esta abordagem permite executar análises viscoelásticas discretizando-se apenas o contorno do corpo analisado, além de evitar as indesejáveis integrais de domínio que apresentam singularidades e cujo tratamento requer um alto custo computacional. Este aperfeiçoamento é muito importante porque reduz a quantidade de variáveis a serem computadas e torna exequível o tratamento de corpos viscoelásticos infinitos e semi-infinitos submetido a carregamentos e/ou sujeito à extração de materiais, tal como aqueles encontrados nos problemas de escavações reforçadas. Além disso, todas as boas características (tais como: estabilidade e precisão) das formulações com termo viscoso de domínio foram preservadas, tornando o MEC viscoelástico uma ferramenta mais elegante. No final da apresentação de cada formulação são apresentados exemplos numéricos que servem para validar as formulações e demonstrar a sua eficiência.

5.2 FORMULAÇÃO VISCOELASTODINÂMICA: *Representação de domínio (Kelvin)*

Para se encontrar a equação integral apropriada para o problema em consideração e as correspondentes relações algébricas para a formulação de elementos de contorno, deve-se aplicar a relação constitutiva, específica para o modelo reológico que se queira considerar, sobre a representação integral (3.15). O modelo que será levado em consideração é o de Kelvin-Voigt e sua relação constitutiva é expressa pela equação (2.9a). Cosequentemente, substituindo-se a expressão reológica do modelo na representação integral (3.15), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (5.1)$$

onde ε_{kij}^* é a solução fundamental em deformações expressa por:

$$\varepsilon_{kij}^* = \frac{-1}{8\alpha\pi(1-\nu)Gr^\alpha} \left[(1-2\nu)(r_{,j} \delta_{ki} + r_{,i} \delta_{kj}) - r_{,k} \delta_{ij} + \beta r_{,k} r_{,i} r_{,j} \right] \quad (5.2)$$

sendo $(\alpha, \beta) = (1, 2)$ para o caso 2D (estado plano de deformações) e $(\alpha, \beta) = (2, 3)$ para o problema tridimensional. Sabendo-se que $\varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j}$, logo a equação (5.1) torna-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (5.3)$$

Aplicando-se integração por partes na segunda integral da equação (5.3), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (5.4)$$

A terceira integral pode ser reescrita fazendo-se uso da equação de equilíbrio fundamental, definida em (3.20). Aplicando-se a equação (3.20) em (5.4), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac e as técnicas de integração singular, sabendo-se que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$, encontra-se:

$$\overline{C}_{ki} u_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \quad (5.5)$$

O termo \overline{C}_{ki} é o mesmo presente na formulação elastodinâmica expressa pela equação (3.21). A equação (5.5) é a representação integral da formulação viscoelastodinâmica do MEC, via matriz de massa, que leva em consideração o modelo reológico de Kelvin-Voigt. Note que a única diferença desta representação para a representação elastodinâmica é a presença da terceira integral, responsável pelo comportamento viscoso. Esta integral apresenta singularidade do tipo $1/r$ para o caso bidimensional e $1/r^2$ para o caso tridimensional e neste trabalho será tratada utilizando-se células e uma eficiente técnica de transformação de coordenadas apresentada no Anexo D.

5.2.1 Representação integral para tensões em pontos internos

Resolvido o problema de contorno parte-se agora para a determinação das tensões. Para pontos internos o termo $\overline{C}_{ki} = \delta_{ki}$ e consequentemente a equação integral (5.5) fica escrita como:

$$u_k(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \quad (5.6)$$

A representação integral para as deformações em pontos internos é obtida levando-se em consideração a hipótese de pequenas deformações, equação (3.24). As deformações são

obtidas de maneira análoga ao problema elastostático, entretanto cuidados especiais devem ser tomados na integral que tem como núcleo ε_{kij}^* . Esta deve ser diferenciada utilizando-se os conceitos de integrais singulares MIKHLIN(1962), BUI(1978), TELLES & BREBBIA(1982) e BREBBIA *et al.*(1984). Assim, diferenciando a equação (5.6) e aplicado esta na definição das deformações em (3.24), encontra-se:

$$\varepsilon_{ke}(p) = \int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \hat{t}_{keij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega - \hat{g}_{keij} \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}(p) + \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kei}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kei}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \quad (5.7)$$

Note que como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. Observe que a diferenciação da integral responsável pelo comportamento viscoso resultou em um termo adicional conhecido como termo livre. Este é melhor esclarecido no Anexo B que trata da derivação de integrais com domínios singulares. As tensões elásticas são obtidas de forma trivial, aplicando-se a relação constitutiva elástica apresentada na equação (2.5a) sobre a definição das deformações expressa em (5.7), de maneira que:

$$\sigma_{\rho q}^e(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma d\Omega - \int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega - g_{\rho qij} \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}(p) + \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \quad (5.8)$$

Ressalta-se que a terceira integral em (5.8) apresenta singularidade do tipo $1/r^2$ para o caso bidimensional e $1/r^3$ para o caso tridimensional e deve ser computada no sentido de valor principal de Cauchy. O procedimento utilizado aqui para determiná-la é a técnica de subtração de singularidade exposta no Anexo D. O termo $\bar{t}_{\rho qij}^*$ é definido como:

$$\bar{t}_{\rho qij}^* = \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\beta} \left[(1-2\nu) \{ \delta_{\rho i} \delta_{qj} + \delta_{qi} \delta_{\rho j} - \delta_{\rho q} \delta_{ji} + \beta \delta_{\rho q} r_{,j} r_{,i} \} + \beta \nu \{ \delta_{\rho j} r_{,q} r_{,i} + \delta_{qi} r_{,\rho} r_{,j} + \delta_{\rho i} r_{,q} r_{,j} + \delta_{qj} r_{,\rho} r_{,i} \} + \beta \delta_{ji} r_{,\rho} r_{,q} - \beta \varpi r_{,\rho} r_{,i} r_{,j} r_{,q} \right] \quad (5.9a)$$

onde $(\alpha, \beta, \varpi) = (1, 2, 4)$ para o caso bidimensional e $(\alpha, \beta, \varpi) = (2, 3, 5)$ para o tridimensional. Já o termo livre fica expresso como:

$$\text{Para 2D} \quad g_{\rho qij} = \frac{-1}{8(1-\nu)} \left[(8\nu-6)\delta_{\rho i}\delta_{qj} + (1-4\nu)\delta_{ij}\delta_{\rho q} \right] \quad (5.9b)$$

$$\text{Para 3D} \quad g_{\rho qij} = \frac{-1}{15(1-\nu)} \left[(10\nu-8)\delta_{\rho i}\delta_{qj} + (1-5\nu)\delta_{ij}\delta_{\rho q} \right] \quad (5.9c)$$

A tensão total pode ser facilmente obtida aplicando-se a relação (2.4) na equação integral das tensões elásticas em (5.8).

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) - \sigma_{\rho q}^v(p) = & \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma d\Omega - \int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} d\Omega - g_{\rho qij} \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}(p) + \\ & \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \end{aligned} \quad (5.10)$$

Sabendo-se que a $\sigma_{\rho q}^v = \delta_{\rho i}\delta_{qj}\sigma_{ij}^v = \delta_{\rho i}\delta_{qj}\eta_{ij}^{lm}\dot{\epsilon}_{lm}$, a tensão viscosa apresentada no lado esquerdo da equação integral pode ser reunida com o termo livre, explicitando-se as tensões totais.

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) = & \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma d\Omega - \int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} d\Omega - \bar{g}_{\rho qij} \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}(p) + \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* b_i d\Omega - \\ & \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \end{aligned} \quad (5.11)$$

Assim, fazendo-se uso da expressão (5.11) é possível computar as tensões totais. Logo, obtida as tensões elásticas e totais as tensões viscosas são encontradas de uma forma simples e direta aplicando-se a relação (2.4). Note que o termo livre em (5.11) foi modificado e para a representação integral das tensões totais ele é definido pela seguinte expressão:

$$\text{Para 2D} \quad \bar{g}_{\rho qij} = \frac{-1}{8(1-\nu)} \left[2\delta_{\rho i}\delta_{qj} + (1-4\nu)\delta_{ij}\delta_{\rho q} \right] \quad (5.12a)$$

$$\text{Para 3D} \quad \bar{g}_{\rho qij} = \frac{-1}{15(1-\nu)} \left[(7-5\nu)\delta_{\rho i}\delta_{qj} + (1-5\nu)\delta_{ij}\delta_{\rho q} \right] \quad (5.12b)$$

5.2.2 Tratamento algébrico para as representações integrais

Para se transformar as equações integrais definidas anteriormente em equações algébricas, deve-se dividir o contorno do corpo Γ em n_e elementos de contorno Γ_e e seu domínio Ω com n_c células Ω_c (fig. 3.3). As variáveis do problema são aproximadas,

parametrizando-as com relação aos seus valores nodais, fazendo-se uso de funções interpoladoras apropriadas, aplicadas sobre os elementos de contorno e sobre as células.

$$\begin{aligned}
 p_i &= \phi^\alpha P_i^\alpha \\
 u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha \\
 b_i &= \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} b_i^{\tilde{\alpha}} \\
 \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} &= \eta_{ij}^{lm} \dot{u}_{l,m} = \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}} \dot{U}_l^{\tilde{\alpha}} \\
 \ddot{u}_i &= \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} \ddot{U}_i^{\tilde{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

onde ϕ e $\tilde{\phi}$ são respectivamente as funções de forma adotadas para interpolar os elementos de contorno e as células e os subscritos α e $\tilde{\alpha}$ referem-se ao nó do elemento de contorno e da célula. Os termos P_i^α , U_i^α , $b_i^{\tilde{\alpha}}$, $\dot{U}_i^{\tilde{\alpha}}$ e $\ddot{U}_i^{\tilde{\alpha}}$ são valores nodais de forças de superfície, deslocamentos, forças volumétricas, velocidade e aceleração, respectivamente. Consequentemente, as representações integrais de deslocamento e tensão podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_{ki} U_i(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{U}_l^{\tilde{\alpha}} + \\
 &\sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} u_{ki}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c b_i^{\tilde{\alpha}} - \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} u_{ki}^* \rho \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{U}_i^{\tilde{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{5.14a}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho q}^e(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{t}_{\rho qij}^* \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{U}_l^{\tilde{\alpha}} - \\
 &\sum_{c=1}^{n_p} \frac{\bar{s}_{\rho qij}}{n_p} \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}}(p) \dot{U}_l^{\tilde{\alpha}} + \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c b_i^{\tilde{\alpha}} - \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \rho \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{U}_i^{\tilde{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{5.14b}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho q}(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{t}_{\rho qij}^* \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{U}_l^{\tilde{\alpha}} - \\
 &\sum_{c=1}^{n_p} \frac{\bar{s}_{\rho qij}}{n_p} \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}}(p) \dot{U}_l^{\tilde{\alpha}} + \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c b_i^{\tilde{\alpha}} - \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \rho \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{U}_i^{\tilde{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{5.14c}$$

Deve-se ressaltar que o termo livre apresentado nas equações integrais de deformação e tensão deve ser calculado como a média aritmética dos termos livres referentes às células que chegam ao ponto fonte p , sendo n_p o número de células associadas ao ponto fonte. Depois de

executar todas as integrais e escolher pontos fonte em igual número aos nós do problema, pode-se escrever os seguintes sistemas de equações diferenciais temporais:

$$HU(t) + V\dot{U}(t) + M\ddot{U}(t) = GP(t) + Bb(t) \quad (5.15a)$$

$$\sigma^e(t) = \tilde{G}P(t) - \tilde{H}U(t) - \bar{V}\dot{U}(t) + \tilde{B}b(t) + \tilde{M}\ddot{U}(t) \quad (5.15b)$$

$$\sigma(t) = \tilde{G}P(t) - \tilde{H}U(t) - \tilde{V}\dot{U}(t) + \tilde{B}b(t) + \tilde{M}\ddot{U}(t) \quad (5.15c)$$

onde t representa o tempo. Ressalta-se que a matriz H é obtida através da associação do termo \bar{C}_{ki} com a matriz referente a integral de contorno cuja o núcleo é p_{ki}^* , como usualmente é feito no método dos elementos de contorno. Assim como, as matrizes viscosas V , \bar{V} e \tilde{V} são encontradas a partir da junção do termo livre com a integral de domínio referente a parte viscosa.

5.2.3 Integração temporal numérica

Para se resolver o problema, deve-se integrar no tempo o sistema de equações apresentado na equação (5.15a). Para isto, pode-se fazer uso de técnicas de integração temporal, tais como Houbolt, Newmark ou Wilson θ , que são usualmente empregadas em análises dinâmicas. O algoritmo utilizado será o de Houbolt, que segundo as referências CARRER & TELLES(1991), KOTONI & BESKOS(1992) e CODA *et al.*(1996) é mais adequado para tratar problemas dinâmicos com elementos de contorno, via matriz de massa. Suas expressões para a velocidade e aceleração são definidas por:

$$\dot{U}_{s+1} = \frac{1}{6\Delta t} (11U_{s+1} - 18U_s + 9U_{s-1} - 2U_{s-2}) \quad (5.16a)$$

$$\ddot{U}_{s+1} = \frac{1}{\Delta t^2} (2U_{s+1} - 5U_s + 4U_{s-1} - U_{s-2}) \quad (5.16b)$$

Aplicando a expressão da velocidade e aceleração do algoritmo de Houbolt na equação (5.15a), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\bar{H}U_{s+1} = GP_{s+1} + F_s \quad (5.17)$$

onde

$$\bar{H} = H + \frac{11}{6\Delta t}V + \frac{2}{\Delta t^2}M \quad (5.18a)$$

$$F_s = Bb_{s+1} + \frac{1}{6\Delta t}V(18U_s - 9U_{s-1} + 2U_{s-2}) + \frac{1}{\Delta t^2}M(5U_s - 4U_{s-1} + U_{s-2}) \quad (5.18b)$$

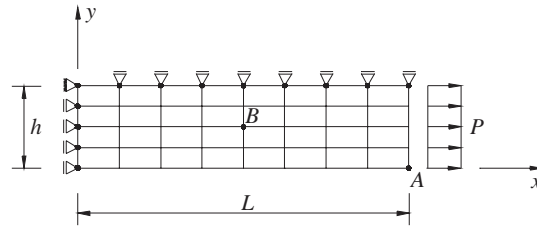
Impondo-se as condições de contorno, como usualmente é feito no método dos elementos de contorno, trocando-se as colunas das matrizes \bar{H} e G , pode-se resolver o sistema linear apresentado em (5.17), obtendo-se assim os deslocamentos e forças de superfícies para o passo de tempo atual. A velocidade e aceleração são obtidas diretamente, através das equações (5.16a) e (5.16b), respectivamente. Com todas as incógnitas do problema de contorno obtidas no passo atual, encontram-se as tensões nos pontos internos fazendo-se uso das expressões (5.15b), (5.15c). Resolvido o problema naquele passo, repete-se o procedimento descrito anteriormente para os próximos passos de tempo.

5.2.4 Exemplos numéricos

A formulação viscoelastodinâmica exposta neste item foi implementada em um elemento de contorno bidimensional de três nós. Esta foi introduzida em um programa já existente proposto inicialmente em CODA *et al.*(1997). Para realizar as integrações de domínio, utilizou-se células de oito nós. As singularidades presentes na representação integral (5.5) são evitadas fazendo-se uso de ponto fonte exterior ao domínio do problema. Já as singularidades presentes nas representações das tensões para pontos internos são determinadas pelo uso das técnicas de transformação de coordenadas e subtração de singularidade expostas no Anexo D.

5.2.4.1 EXEMPLO 01: Peça tracionada

O mesmo exemplo apresentado no item (4.2.3.1) para elementos finitos é aqui proposto. A geometria e as propriedades físicas são as mesmas apresentadas na figura 4.1. A discretização de elementos de contorno e a densidade de células utilizadas é apresentado na figura 5.1. Semelhantemente, fez-se uso da simetria do problema, discretizando-se apenas a metade da estrutura, considerando-se a situação de estado plano de tensão. O problema poderia ser analisado com uma densidade de malha muito menor, porém a malha foi escolhida similarmente àquelas usadas em referências com elementos finitos.

**FIGURA 5.1 – Discretização da estrutura.**

A resposta do deslocamento longitudinal do ponto A para $\rho = 0,0$ e $0,1 \text{ kN dia}^2/\text{mm}^4$ é apresentada na figura 5.2 confrontada com a resposta teórica obtida para um modelo uniaxial e pelo MEF com elementos de barra de dois nós. Para a resposta com elementos finitos, utilizou-se um único elemento para o problema quase-estático, enquanto que para a análise dinâmica foram empregados 4 elementos finitos. Na tentativa de simular o modelo uniaxial adotou-se coeficiente de Poisson zero e fez-se $\theta_\lambda = \theta_\mu$. Assim, é possível adotar o mesmo coeficiente viscoso em ambos os modelos, já que o modelo analítico possui apenas um

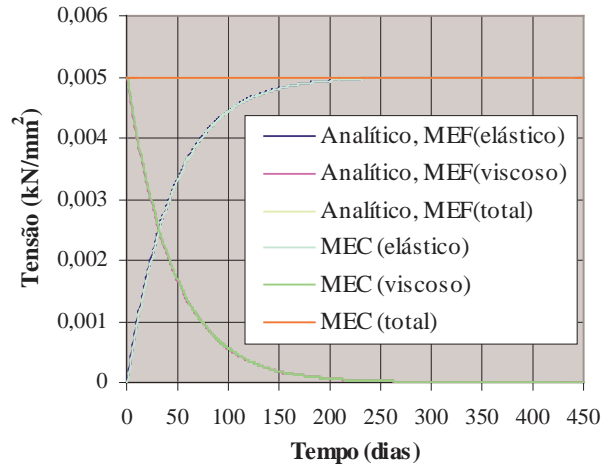


FIGURA 5.3 – Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B.

O ótimo comportamento observado para o MEF do capítulo anterior é aqui reproduzido para o MEC. Uma análise da estabilidade da formulação é apresentada na figura 5.4, onde são apresentados resultados do deslocamento vertical do ponto A, para vários passos de tempo.

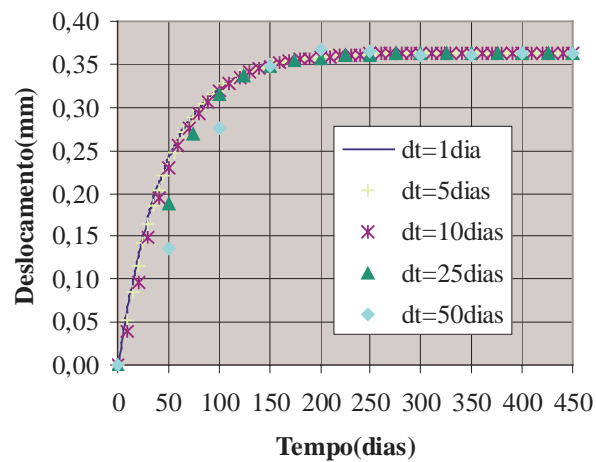


FIGURA 5.4 – Deslocamento vertical do ponto A para diversos Δt .

Pode-se observar que o procedimento proposto conduz ao mesmo valor final para qualquer passo de tempo escolhido. Como esperado, este valor final é o elastostático que deveria ser alcançado utilizando-se qualquer procedimento.

5.2.4.2 EXEMPLO 02: Cilindro sob pressão interna

Um cilindro de parede espessa submetido a uma pressão interna P é analisado. Devido a sua dupla simetria apenas 1/4 da estrutura é discretizada. Os mesmos elementos de contorno e células utilizados no primeiro exemplo foram utilizados neste exemplo. A geometria da estrutura juntamente com sua discretização e suas propriedades físicas são apresentadas na figura 5.5.

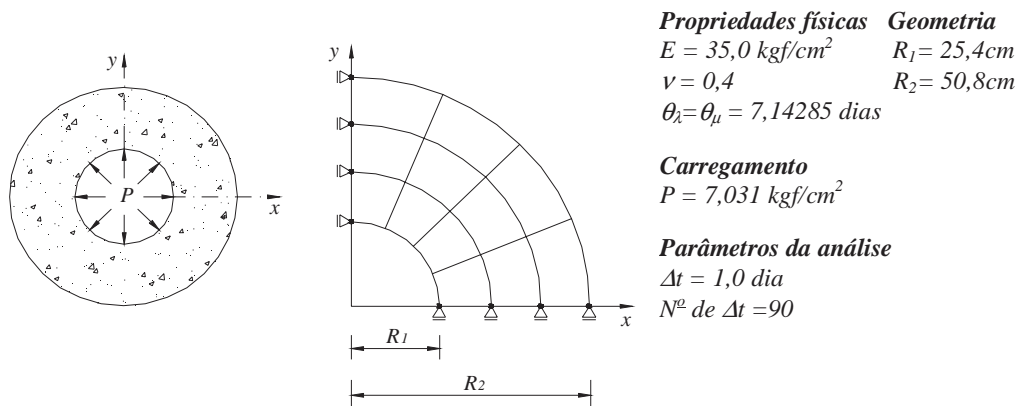


FIGURA 5.5 – Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura.

Os resultados do deslocamento radial, para a situação de estado plano de tensão, da parede interna e externa da estrutura são apresentados nas figuras 5.6 e 5.7, respectivamente. Com o propósito de descrever a generalidade do modelo proposto, o cilindro em consideração é analisado com diferentes valores de θ_μ e θ_λ .

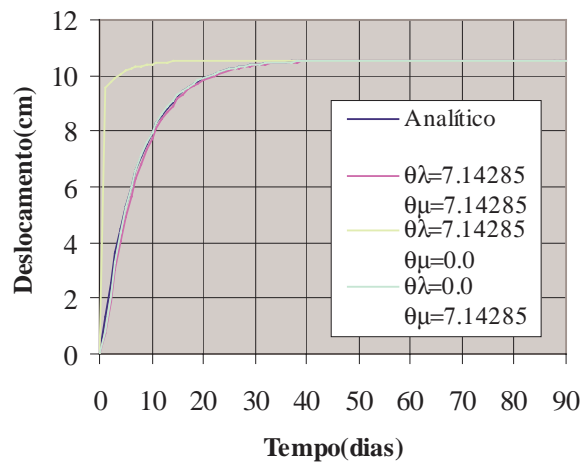


FIGURA 5.6 – Deslocamento radial da parede interna.

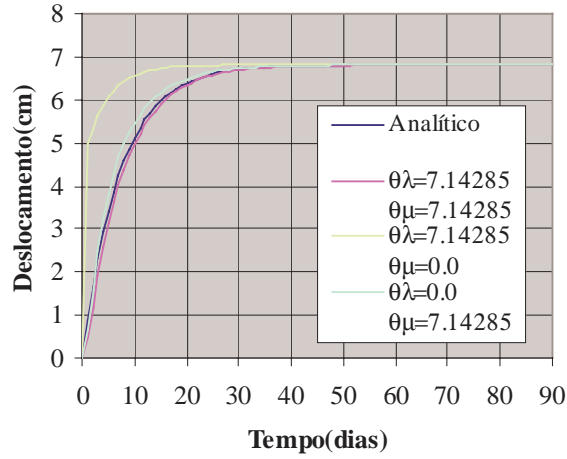


FIGURA 5.7 – Deslocamento radial da parede externa.

Pode-se perceber que θ_μ é o coeficiente mais importante para este problema, em comparação com θ_λ . Os resultados são fortemente dependentes deste parâmetro, enquanto que para θ_λ eles praticamente não variam. A dependência com relação ao tamanho do passo de tempo adotado pode ser analisada nas figuras 5.8 e 5.9. Nestas figuras as respostas numéricas são ambas obtidas para a situação de estado plano de deformação.

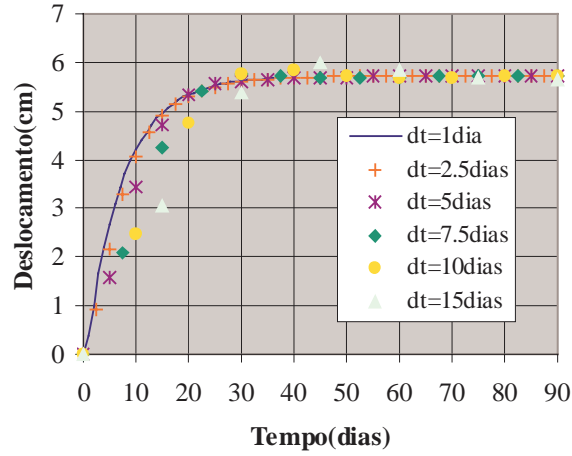


FIGURA 5.9 – Deslocamento radial da parede externa para diversos Δt .

Como pode ser observado, os resultados obtidos são bastante precisos até mesmo para grandes passos de tempo. Note que os valores computados para $\Delta t=10$ e 15 dias, durante um certo período de tempo, são maiores que a resposta final. Isto é uma consequência direta do procedimento de alta-ordem de Houbolt adotado e não devido a efeitos dinâmicos. Quando uma aproximação linear é empregada para executar a integração no tempo, apenas deslocamentos menores que a resposta final elástica são capturados para qualquer passo de tempo.

5.3 FORMULAÇÃO VISCOELÁSTICA: Representação de domínio (Boltzmann)

Com o propósito de desenvolver a representação integral do MEC com o termo viscoso no domínio, específica para o modelo de Boltzmann, impõe-se a relação constitutiva apropriada para o problema em consideração eq.(2.18) sobre a representação integral (3.15). Com a intenção de limitar o trabalho aos seus objetivos, análises quase-estáticas, despreza-se o termo referente à aceleração, de maneira que:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \tag{5.19}$$

Sabendo-se que $\varepsilon_{kij}^* E_e C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j}$ e que $\varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij} = u_{ki,j}^* \dot{\sigma}_{ij}$, logo, a equação (5.19) torna-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.20)$$

Aplicando-se integração por partes na segunda e na quarta integral da equação (5.20), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_i d\Omega \right] - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{\sigma}_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{\sigma}_{ij,j} d\Omega \right] + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.21)$$

A terceira e a sexta integral podem ser reescrita fazendo-se uso, respectivamente, da equação de equilíbrio fundamental eq.(3.20) e da equação de equilíbrio do problema real escrita em forma de taxas, expressa como:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = -\dot{b}_i \quad (5.22)$$

onde \dot{b}_i é a taxa de variação das componentes das forças volumétricas em relação ao tempo. Aplicando-se a equação (3.20) e (5.22) em (5.21), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac e as técnicas para integrais singulares, sabendo-se que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$ e que $\dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{p}_i$, encontra-se:

$$\bar{C}_{ki} u_i(p) = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \frac{E_e}{E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \gamma \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (5.23)$$

A equação (5.23) é a representação integral da formulação viscoelástica do MEC que leva em consideração o modelo reológico de Boltzmann. O termo \bar{C}_{ki} , a 1^a, 2^a e 6^a integrais

são os mesmos apresentados na formulação elastostática e podem ser solucionados seguindo os mesmos princípios. Note que a quarta e a quinta integrais são responsáveis pelo comportamento instantâneo. Estas podem contribuir também para o comportamento viscoso, caso ocorram variações das solitações com o tempo. Em geral, como o peso próprio não varia no tempo e já existia antes da aplicação das cargas, pode-se considerar $\dot{b}=0$ e conseqüentemente a quinta integral se anula. A terceira integral é totalmente responsável pelo comportamento viscoso. Esta integral apresenta singularidade do tipo $1/r$ para o caso bidimensional e $1/r^2$ para o caso tridimensional e neste trabalho será tratada utilizando-se células e uma eficiente técnica de transformação de coordenadas exposta no Anexo D.

5.3.1 Representação integral para tensões em pontos internos

Resolvido o problema de contorno parte-se agora para a determinação das tensões. Para pontos internos o termo $\bar{C}_{ki} = \delta_{ki}$ e conseqüentemente a equação integral (5.23) fica escrita como:

$$u_k(p) = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \frac{E_e}{E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \gamma \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (5.24)$$

Para obter a representação integral das tensões é necessário antes determinar as deformações. A representação integral para as deformações em pontos internos é obtida pela equação (3.24) para a situação de pequenas deformações. A expressão para as deformações é encontrada de maneira análoga ao problema elastostático, entretanto cuidados especiais devem ser tomados na integral que tem como núcleo ε_{kij}^* . Esta deve ser diferenciada utilizando-se os conceitos de integrais singulares MIKHLIN(1962), BUI(1978), TELLES & BREBBIA(1982) e BREBBIA *et al.*(1984). Assim, diferenciando a equação (5.24) e aplicado esta na definição das deformações em (3.24), encontra-se:

$$\varepsilon_{ke}(p) = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* u_i d\Gamma - \frac{E_e}{E_{ve}} \left[\int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{keij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \hat{g}_{keij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}(p) \right] + \gamma \left[\int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kei}^* \dot{b}_i d\Omega \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kei}^* b_i d\Omega \quad (5.25)$$

Note que como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. Observe que a diferenciação da integral responsável pelo comportamento viscoso resultou em um termo adicional conhecido como termo livre. Este é melhor esclarecido no Anexo B que trata da derivação de integrais com domínios singulares. As tensões totais são obtidas de forma trivial, aplicando-se a relação constitutiva do modelo apresentada na equação (2.18) sobre a definição das deformações expressa em (5.25), de maneira que:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) = & \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} d\Omega + g_{\rho qij} \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}(p) \right] + \\ & \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \dot{b}_i d\Omega \right] + \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* b_i d\Omega + \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \eta_{\rho q}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}(p) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{\rho q}(p) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Sabendo-se que $\eta_{\rho q}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}^{ve} = \delta_{\rho i} \delta_{qj} \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}^{ve}$, pode-se adicionar o penúltimo termo da equação integral (5.26) ao termo livre, obtendo-se a seguinte representação integral para as tensões totais:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) = & \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} d\Omega + \bar{g}_{\rho qij} \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}(p) \right] + \\ & \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \dot{b}_i d\Omega \right] + \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* b_i d\Omega - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{\rho q}(p) \end{aligned} \quad (5.27)$$

A equação (5.27) é a representação integral das tensões totais segundo o modelo de Boltzmann. Ressalta-se, semelhantemente as deformações, que a integral de domínio referente ao trecho viscoso (3ª integral) apresenta singularidade do tipo $1/r^2$ para o caso bidimensional e $1/r^3$ para o caso tridimensional e deve ser computada no sentido de valor principal. O procedimento utilizado aqui para determiná-la é a técnica de subtração de singularidade exposta no Anexo D. A solução fundamental $\bar{t}_{\rho qij}^*$ e o termo livre $\bar{g}_{\rho qij}$ são os mesmos definidos nas expressões (5.9a) e (5.12). Para o cálculo da tensão elástica $\sigma_{\rho q}^{el}$ e viscosa $\sigma_{\rho q}^v$ alguns cuidados devem ser tomados. Note que é possível encontrar algumas representações integrais tanto para as tensões elásticas $\sigma_{\rho q}^{el}$ como para as tensões viscosas $\sigma_{\rho q}^v$. Essas expressões, podem ser obtidas através de manipulações na expressão das tensões totais em (5.27) ou aplicando-se a representação integral das deformações totais sobre as relações constitutivas apresentadas em (2.12). Entretanto todas estas representações falham no

primeiro passo. Isto ocorre devido à dificuldade em se avaliar a velocidade naquele passo, pois no primeiro instante o deslocamento passado adotado para avaliar a velocidade é desconhecido e tomado como zero, o que não é correto. Neste modelo o deslocamento inicial deveria ser tomado como o instantâneo, o que não ocorre, provocando assim um erro no primeiro instante que se agrava a medida que se reduz o tamanho do passo de tempo. Observa-se ainda que as tensões totais não são afetadas por esta má avaliação da velocidade. Neste caso, ocorre que o erro produzido no cálculo das tensões elásticas $\sigma_{\rho q}^{el}$ e viscosas $\sigma_{\rho q}^v$ se cancelam não

onde ϕ e $\tilde{\phi}$ são respectivamente as funções de forma adotadas para interpolar os elementos de contorno e as células e os subscritos α e $\tilde{\alpha}$ referem-se aos nós do elemento de contorno e da célula. Os termos P_i^α , U_i^α , $b_i^{\tilde{\alpha}}$, \dot{P}_i^α , $\dot{U}_i^{\tilde{\alpha}}$ e $\dot{b}_i^{\tilde{\alpha}}$ são valores nodais de forças de superfície, deslocamentos, forças volumétricas e suas respectivas velocidades. Consequentemente, as representações integrais de deslocamento e tensão podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ki} U_i(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \\ &\frac{E_e}{E_{ve}} \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{U}_l^{\tilde{\alpha}} + \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{P}_i^\alpha + \gamma \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} u_{ki}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{b}_i^{\tilde{\alpha}} + \\ &\frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} u_{ki}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{b}_i^{\tilde{\alpha}} \end{aligned} \quad (5.29a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \\ &\frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \left[\sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{t}_{\rho qij}^* \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{U}_l^{\tilde{\alpha}} + \sum_{c=1}^{n_p} \frac{\bar{g}_{\rho qij}}{n_p} \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}}(p) \dot{U}_l^{\tilde{\alpha}} \right] + \\ &\frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{P}_i^\alpha + \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{b}_i^{\tilde{\alpha}} \right] + \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{b}_i^{\tilde{\alpha}} - \\ &\frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{\rho q}(p) \end{aligned} \quad (5.29b)$$

Deve-se ressaltar que o termo livre apresentado na equação integral de tensão deve ser calculado como a média aritmética dos termos livres das células que chegam ao ponto fonte p , sendo n_p o número de células associadas ao ponto fonte. Depois de executar todas as integrais e escolher pontos fonte em igual número aos nós do problema, pode-se escrever os seguintes sistemas de equações diferenciais temporais:

$$HU(t) = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} GP(t) - \frac{E_e}{E_{ve}} V\dot{U}(t) + \gamma G\dot{P}(t) + \gamma B\dot{b}(t) + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} Bb(t) \quad (5.30a)$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \tilde{G}P(t) - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H}U(t) - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \tilde{V}\dot{U}(t) + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{G}\dot{P}(t) + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{B}\dot{b}(t) + \\ &\tilde{B}b(t) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}(t) \end{aligned} \quad (5.30b)$$

onde t representa o tempo. Ressalta-se que a matriz H é obtida através da associação do termo \bar{C}_{ki} com a matriz referente a integral de contorno cuja o núcleo é p_{ki}^* , como usualmente é

feito no método dos elementos de contorno. Assim como, a matriz viscosa \tilde{V} é encontrada a partir da junção do termo livre com a integral de domínio referente a parte viscosa.

5.3.3 Integração temporal numérica

Para se resolver o problema viscoso, deve-se integrar no tempo o primeiro sistema de equações apresentado em (5.30). Para isto, pode-se fazer uso de técnicas de integração temporal, tais como Newmark e Houbolt, que são usualmente empregadas em análises dinâmicas. Como o termo referente à aceleração foi desprezado, restando apenas termos com primeira derivada em relação ao tempo, aplicou-se um algoritmo com aproximação linear para definir as velocidades.

$$\begin{aligned}\dot{U}_{s+1} &= \frac{U_{s+1} - U_s}{\Delta t} \\ \dot{P}_{s+1} &= \frac{P_{s+1} - P_s}{\Delta t} \\ \dot{b}_{s+1} &= \frac{b_{s+1} - b_s}{\Delta t} \\ \dot{\sigma}_{s+1} &= \frac{\sigma_{s+1} - \sigma_s}{\Delta t} \\ \dot{\sigma}_{s+1}^{el} &= \frac{\sigma_{s+1}^{el} - \sigma_s^{el}}{\Delta t}\end{aligned}\tag{5.31}$$

Aplicando a expressão da velocidade de deslocamento, de forças de superfície e de forças volumétricas apresentadas em (5.31) na primeira equação em (5.30), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\bar{H}U_{s+1} = \bar{G}P_{s+1} + F_s\tag{5.32}$$

onde

$$\bar{H} = H + \frac{E_e}{\Delta t E_{ve}} V\tag{5.33a}$$

$$\bar{G} = \left(\frac{\gamma}{\Delta t} + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \right) G\tag{5.33b}$$

$$F_s = \frac{E_e}{\Delta t E_{ve}} V U_s - \frac{\gamma}{\Delta t} G P_s + B \left[\left(\frac{\gamma}{\Delta t} + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \right) b_{s+1} - \frac{\gamma}{\Delta t} b_s \right] \quad (5.33c)$$

Impondo-se as condições de contorno, como usualmente é feito no método dos elementos de contorno, trocando-se as colunas das matrizes \bar{H} e \bar{G} , pode-se resolver o sistema linear apresentado em (5.32), obtendo-se assim os deslocamentos e forças de superfícies para o passo de tempo atual. Com todas as incógnitas do problema de contorno obtidas no passo atual, parte-se para a obtenção das tensões totais. Assim, obtidas os deslocamentos e as forças de superfície do problema de contorno no instante $s+1$, pode-se encontrar \dot{P} , \dot{U} e \dot{b} através das equações (5.31). Obtidas essas variáveis calculam-se as tensões totais fazendo-se uso da equação (5.30b) e da quarta equação em (5.31), de maneira que:

$$\sigma_{s+1} = \left(\tilde{G} P_{s+1} - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H} U_{s+1} - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \tilde{V} \dot{U}_{s+1} + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{G} \dot{P}_{s+1} + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{B} \dot{b}_{s+1} + \tilde{B} b_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sigma_s \right) \left/ \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \right) \right. \quad (5.34)$$

A tensão elástica referente a mola em paralelo com o amortecedor pode ser facilmente obtida aplicando-se a aproximação para a velocidade das tensões elásticas $\dot{\sigma}_{ij}^{el}$ apresentada em (5.31) na equação diferencial (4.30).

$$\sigma_{s+1}^{el} = \left(\sigma_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma_s^{el} \right) \left/ \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \right. \quad (5.35)$$

Note que na expressão (5.35) necessita-se do valor das tensões totais que são calculadas através da equação (5.34). Assim, calculadas as tensões totais e as tensões elásticas, pode-se obter as tensões viscosas de uma forma simples e direta aplicando-se a relação (2.15). Resolvido o problema naquele passo, repete-se o procedimento descrito anteriormente para os próximos passos de tempo resolvendo-se assim todo o problema viscoso.

5.3.4 Exemplos numéricos

Os mesmos elementos de contorno e células utilizados nos exemplos do item (5.2) são aqui empregados para validar a formulação. As integrais são evoluídas de forma similar aquelas do item (5.2), fazendo uso das mesmas técnicas numéricas para tratar os problemas de singularidade. Os exemplos utilizados são basicamente os mesmos, diferenciando-se apenas nas propriedades físicas do novo modelo (Boltzmann).

5.3.4.1 EXEMPLO 01: Peça tracionada

Este exemplo, descrito em itens anteriores, será aqui empregado novamente por se tratar de um “benchmarck”, muito utilizado para aferir modelos viscoelásticos. Sua resposta analítica é simples e facilmente obtida. Os parâmetros para análise do problema estão descritos na figura 4.12. Já a discretização com elementos de contorno e a densidade de células utilizada é a mesma apresentada na figura 5.1. A resposta do deslocamento longitudinal do ponto *A* é apresentada na figura 5.10 confrontada com a resposta teórica obtida para um modelo uniaxial. Na tentativa de simular o modelo uniaxial adotou-se um coeficiente de Poisson zero e o mesmo coeficiente viscoso em ambos os modelos.

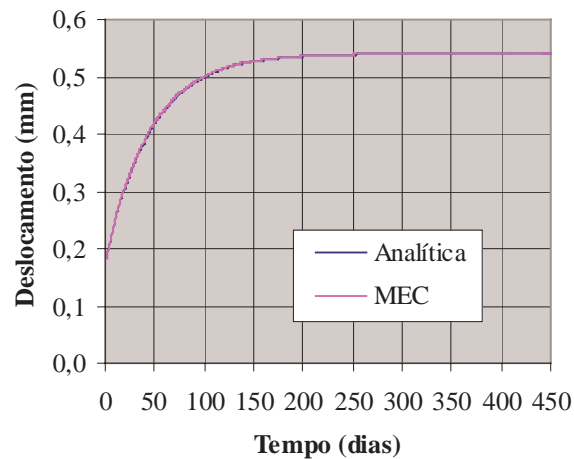


FIGURA 5.10 – Deslocamento longitudinal do ponto *A*.

Observa-se que os resultados estão em concordância. Semelhantemente a figura 5.10, a resposta da tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} extraídas no ponto *B* são apresentadas na figura 5.11, juntamente com a resposta analítica para ambas as tensões.

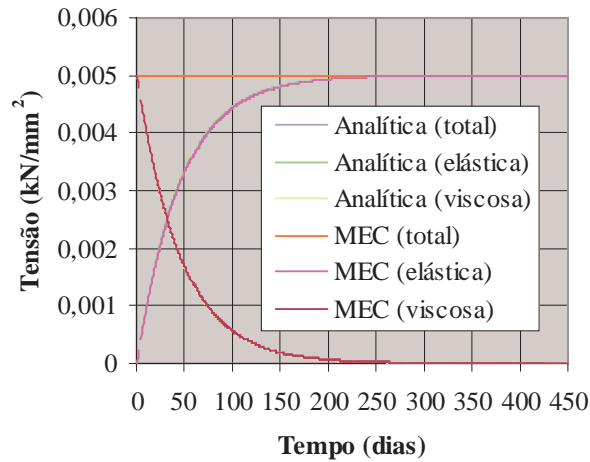


FIGURA 5.11 – Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B.

Semelhantemente a formulação viscoelástica do MEF observa-se uma perfeita concordância entre os resultados obtidos para as tensões. Uma situação mais geral de carregamento é apresentada na figura 5.12. Durante os 199 primeiros passos de tempo o carregamento é mantido, até que no início do tempo $t = 200\text{dias}$ o carregamento é retirado. A resposta do deslocamento do ponto A é apresentada na figura 5.12 juntamente com a resposta analítica.

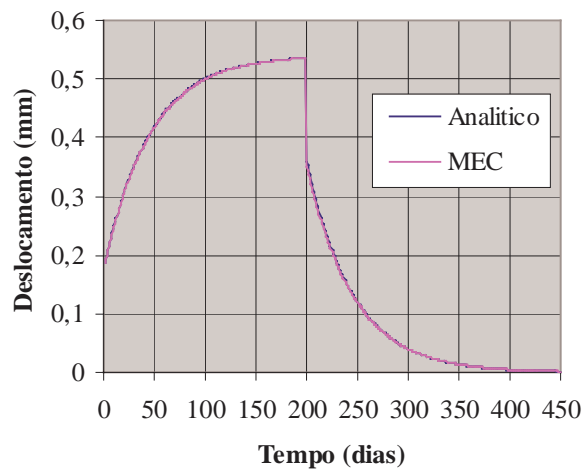


FIGURA 5.12 – Deslocamento do ponto A com variação da solicitação

Observe que o comportamento da solução numérica é o mesmo da solução analítica. A figura 5.13 apresenta resultados do deslocamento vertical do ponto A. A resposta do presente modelo é confrontada com as respostas apresentadas em MUNAIAR(1998). O problema

analisado é o mesmo, a não ser pelo coeficiente de Poisson que é definido como $\nu = 0,3$. Em MUNAIAR(1998) apresentam-se três modelos viscosos: o primeiro foi desenvolvido utilizando técnica de integração explícita, o segundo é o modelo proposto por LEMAITRE & CHABOCHE(1990), e o terceiro é o modelo de SOBOTKA(1984), ambos implementados em um código de elementos finitos. Ressalta-se ainda que a análise foi realizada utilizando-se um passo de tempo $\Delta t = 1 \text{ dia}$.

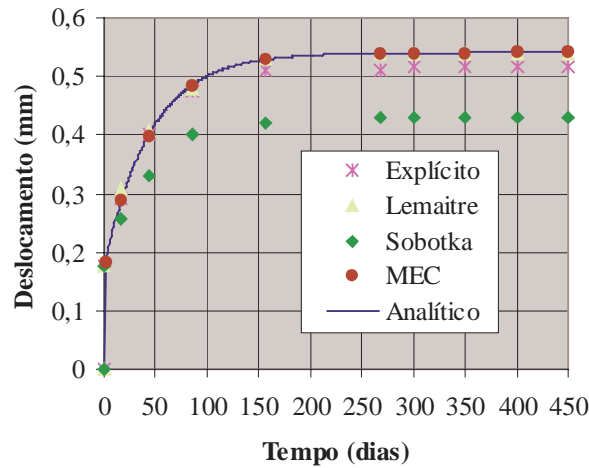


FIGURA 5.13 – Deslocamento longitudinal do ponto A.

Note que o modelo proposto apresenta boa precisão, semelhante ao modelo de Lemaitre. Na figura 5.14 são apresentados resultados do deslocamento vertical do ponto A com o modelo aqui proposto, para vários passos de tempo.

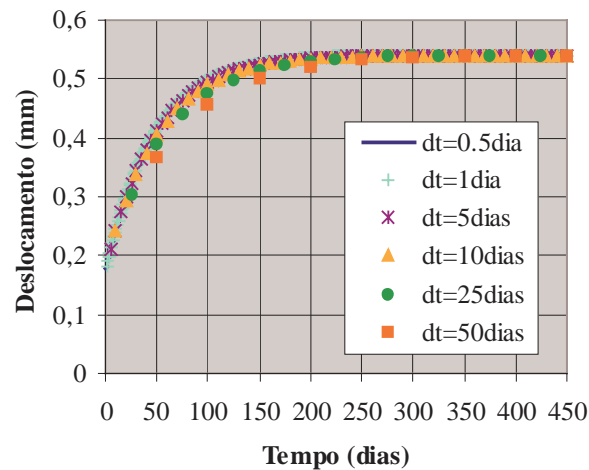


FIGURA 5.14 – Deslocamento do ponto A para vários Δt .

Observando a figura 5.14 é possível comprovar que a formulação é bastante estável. Até mesmo para altos valores de Δt o modelo se comporta bem. Note ainda que a resposta final é praticamente invariante com relação ao Δt . Para este mesmo exemplo, MUNAIAR(1998) ressalta que o procedimento explícito só obtém convergência para valores de $\Delta t \leq 10$ dias.

5.3.4.2 EXEMPLO 02: Cilindro sob pressão interna

Este exemplo é o mesmo apresentado no item (5.2.4.2), considerando-se a situação de estado plano de deformação. Os dados do problema juntamente com a geometria e a discretização são apresentados na figura 5.5. Como dados adicionais referentes ao modelo de Boltzmann, considera-se o módulo de elasticidade do trecho instantâneo $E_e = 90,0 \text{kgf/cm}^2$, do trecho viscoso como $E_{ve} = 35,0 \text{kgf/cm}^2$ e o parâmetro viscoso sendo $\gamma = 7,14285 \text{dia}$. Os resultados para o deslocamento radial da parede interna e externa da estrutura são apresentados nas figuras 5.15 e 5.16, respectivamente. Semelhantemente ao primeiro exemplo, a resposta do presente modelo é confrontada com a resposta dos três modelos apresentados em MUNAIAR(1998) e a resposta analítica do problema. Os resultados foram obtidos utilizando-se um passo de tempo $\Delta t = 1 \text{dia}$, com exceção do procedimento explícito que utilizou um Δt menor (não mencionado), pois segundo MUNAIAR(1998), para $\Delta t > 0,5 \text{dia}$ o procedimento explícito não apresenta convergência.

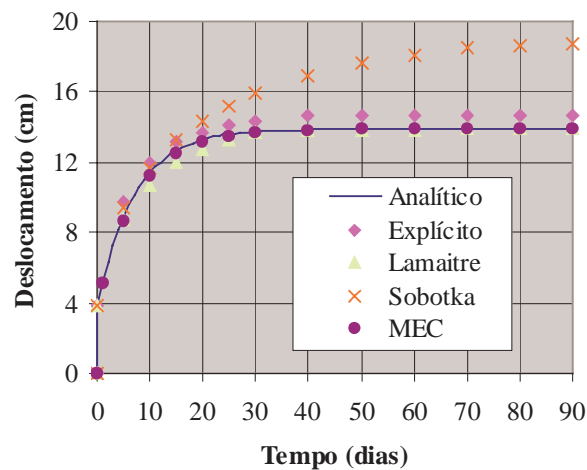


FIGURA 5.15 – Deslocamento radial da parede interna.

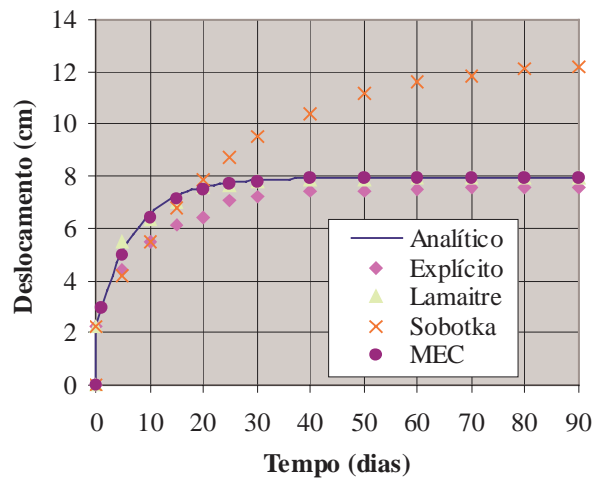


FIGURA 5.16 – Deslocamento radial da parede externa.

O presente modelo converge para a resposta correta em ambos os casos, semelhantemente ao modelo de Lemaitre. O modelo de Sobotka apresenta uma resposta final bastante distorcida. Nas figuras 5.17 e 5.18 apresentam-se respostas do modelo proposto, onde é possível observar o comportamento da parede interna e externa, respectivamente, submetido a passos de tempo variados.

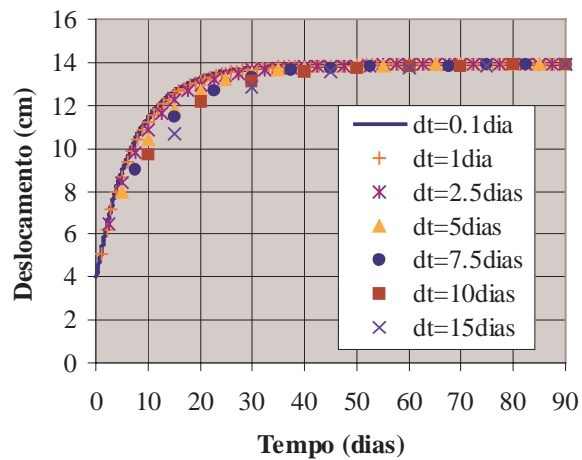


FIGURA 5.17 – Deslocamento radial da parede interna para vários Δt .

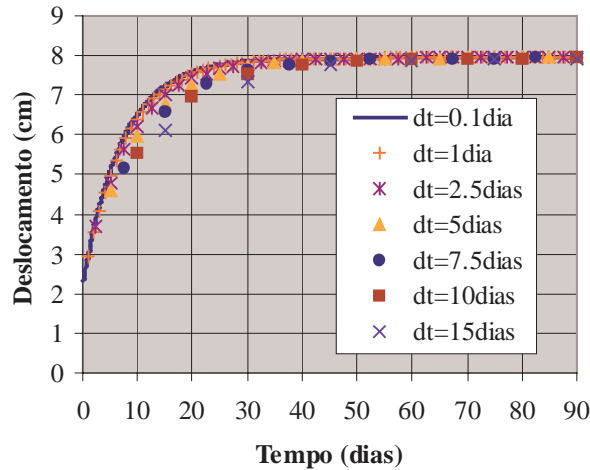


FIGURA 5.18 – Deslocamento radial da parede externa para vários Δt .

Apesar deste problema ser mais complexo que aquele apresentado no primeiro exemplo, nota-se que a resposta final é praticamente invariante com relação ao passo de tempo adotado, demonstrando uma ótima estabilidade.

5.4 FORMULAÇÃO VISCOELÁSTICA: *Representação no contorno (Kelvin)*

Executando-se algumas manipulações matemáticas é possível obter uma representação viscoelástica escrita em função apenas de integrais de contorno. Aplicando-se o método dos elementos de contorno sobre essas representações integrais é possível desenvolver uma ferramenta que possibilita analisar problemas viscoelásticos discretizando-se apenas o contorno do corpo. Como mencionado anteriormente, são muitas as vantagens inerentes desta nova abordagem, porém pode-se destacar a grande economia computacional e a elegância do método no tratamento de problemas viscoelásticos. O procedimento inicial para a obtenção das equações integrais é o mesmo descrito anteriormente no item (5.2), ou seja, aplicando-se a relação constitutiva do modelo de Kelvin-Voigt, equação (2.9b), sobre a representação integral (3.15), resulta:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \mathcal{C}_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.36)$$

Por simplicidade desprezou-se o termo referente à aceleração. Note que a relação constitutiva do modelo reológico empregada é a mais simples, utilizando um único parâmetro viscoso. Esta foi escolhida por facilitar as transformações das integrais de domínio em integrais de contorno. Assim, sabendo-se que:

$$\varepsilon_{kij}^* \mathcal{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j} \quad (5.37a)$$

$$\varepsilon_{kij}^* \gamma \mathcal{C}_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} = \gamma \sigma_{klm}^* \dot{\varepsilon}_{lm} = \gamma \sigma_{klm}^* \dot{u}_{l,m} = \gamma \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} \quad (5.37b)$$

a equação (5.36) torna-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.38)$$

Aplicando-se integração por partes na segunda e na terceira integral da equação (5.38), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i d\Omega - \gamma \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j \dot{u}_i d\Gamma + \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.39)$$

A equação integral (5.39) pode ser reescrita fazendo-se uso da equação de equilíbrio fundamental, definida em (3.20). Aplicando-se a equação (3.20) em (5.39), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac, as técnicas para integrais singulares e sabendo-se que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$, encontra-se:

$$\bar{C}_{ki} u_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (5.40)$$

A equação (5.40) é a representação integral da formulação viscoelástica do MEC que leva em consideração o modelo reológico de Kelvin-Voigt. Note que a única diferença desta representação para a representação elastostática é a presença do segundo termo no lado esquerdo e da terceira integral do lado direito da equação (5.40), ambos responsáveis pelo comportamento viscoso. Ressalta-se ainda que a última integral pode ser transformada em integral de contorno e assim é possível obter uma expressão escrita com apenas integrais no contorno. Considerando-se, por exemplo, o caso onde b_i é uma função constante em todo o

domínio do corpo, a integral de domínio em (5.40) pode ser transformada para o contorno utilizando-se coordenadas polares e integrando-se em r VENTURINI(1988), da seguinte forma:

Para 2D

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = b_i \int_{\Omega} u_{ki}^* d\Omega = b_i \int_{\theta} \int_r u_{ki}^* r dr d\theta = b_i \int_{\Gamma} \int_r u_{ki}^* dr \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma = b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \quad (5.41a)$$

Para 3D

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = b_i \int_{\Omega} u_{ki}^* d\Omega = b_i \int_{\varphi} \int_{\theta} \int_r u_{ki}^* r^2 \cos(\theta) dr d\theta d\varphi = b_i \int_{\Gamma} \int_r u_{ki}^* dr \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma = b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \quad (5.41b)$$

Assumindo a solução fundamental de Kelvin o termo B_{ki}^* fica expresso por:

$$\text{Para 2D} \quad B_{ki}^* = \frac{r}{16\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(r) \right) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i} \right] \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5.42a)$$

$$\text{Para 3D} \quad B_{ki}^* = \frac{1}{32\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i} \right] \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5.42b)$$

sendo $r = r(p \text{ ou } P, S)$, onde as letras maiúsculas significam variáveis do contorno e as minúsculas do domínio. As deduções referentes à transformação das integrais das forças volumétricas são melhor esclarecidas no Anexo A. Logo a equação integral (5.40) pode ser escrita como:

$$\bar{C}_{ki} u_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \quad (5.43)$$

Note que as transformações matemáticas eliminaram as indesejáveis integrais de domínio presentes nas formulações anteriores. A equação (5.43) é a representação integral da formulação viscoelástica do MEC com integrais apenas no contorno do corpo, específica para o modelo reológico de Kelvin-Voigt.

5.4.1 Representação integral para tensões em pontos internos

Resolvido o problema de contorno parte-se agora para a determinação das deformações. Para pontos internos o termo $\bar{C}_{ki} = \delta_{ki}$ e conseqüentemente a equação integral (5.43) fica escrita como:

$$u_k(p) + \gamma \dot{u}_k(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \quad (5.44)$$

A representação integral para as deformações em pontos internos é obtida através da definição de pequenas deformações eq.(3.24). As deformações são obtidas de maneira análoga ao problema elastostático. Assim, diferenciando-se a equação (5.44) e aplicando-se esta na definição das deformações, eq. (3.24), encontra-se:

$$\varepsilon_{ke}(p) + \gamma \dot{\varepsilon}_{ke}(p) = \int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \hat{B}_{kei}^* d\Gamma \quad (5.45)$$

Como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. As tensões totais são obtidas de forma trivial, aplicando-se a relação constitutiva definida na equação (2.6a) sobre a representação integral (5.45), de maneira que:

$$\sigma_{\rho q}^e(p) + \sigma_{\rho q}^v(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma \quad (5.46)$$

Sabendo-se que $\sigma_{\rho q}^e(p) + \sigma_{\rho q}^v(p) = \sigma_{\rho q}(p)$ a equação (5.46) torna-se:

$$\sigma_{\rho q}(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma \quad (5.47)$$

sendo $\bar{\sigma}_{\rho qi}^*$ e $\bar{p}_{\rho qi}^*$ os mesmos definidos nas equações (3.27a) e (3.27b), respectivamente. Já o termo $\bar{B}_{\rho qi}^*$ fica expresso como:

$$\bar{B}_{\rho qi}^* = \bar{\sigma}_{\rho qi}^* r \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5.48)$$

Não é possível escrever as equações integrais em pontos internos para as tensões elásticas e viscosas, ao contrário das tensões totais que são obtidas através da representação integral (5.47). Esta é uma característica particular da presente formulação que considera apenas aproximações para o contorno. Felizmente, pode-se contornar esta situação através de

um procedimento simples e eficiente proposto em MESQUITA & CODA(2001a) e exposto no item(4.3.2) para o MEF, onde as tensões elásticas são obtidas pela solução de uma equação diferencial. Esta equação diferencial é encontrada, semelhantemente ao que foi exposto no item (4.3.2) para o modelo de Boltzmann, escrevendo-se a equação (2.5a) referente ao modelo de Kelvin, em forma de taxa, ou seja:

$$\dot{\sigma}_{ij}^e = C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} = \frac{1}{\gamma} \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} = \frac{1}{\gamma} \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} = \frac{1}{\gamma} \sigma_{ij}^v \Rightarrow \sigma_{ij}^v = \gamma \dot{\sigma}_{ij}^e \quad (5.49)$$

A equação (5.49) expressa uma relação entre a taxa das tensões elásticas e as tensões viscosas. Substituindo-se a equação (5.49) na relação (2.4) é possível encontrar o seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\gamma \dot{\sigma}_{ij}^e + \sigma_{ij}^e - \sigma_{ij} = 0 \quad (5.50)$$

A expressão (5.50) é um conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Para o caso particular de σ_{ij} constante com condições de contorno $\sigma_{ij}^e(t=0)=0$ e $\sigma_{ij}^e(t=\infty)=\sigma_{ij}$ as equações diferenciais (5.50) apresentam a seguinte solução:

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}(1 - e^{-t/\gamma}) \quad (5.51)$$

Porém, neste trabalho as tensões elásticas serão obtidas pela resolução das equações diferenciais (5.50) numericamente, tornando assim o processo genérico, possibilitando a imposição de condições de contorno variando com o tempo. Este procedimento será melhor esclarecido nos próximos itens.

5.4.2 Obtenção das tensões totais no contorno

As tensões totais no contorno serão obtidas de maneira análoga ao que foi exposto para a formulação elastodinâmica do MEC no item(3.3.2), ou seja, em função dos deslocamentos e forças de superfície do contorno que já foram determinados na solução do problema de contorno. Note que, devido à presença dos termos singulares na equação integral (5.47), a aplicação destas representações, tomando-se o limite destas quando o ponto tende ao contorno do corpo, conduz à problemas com forte singularidade. Para compreender melhor a técnica

aqui utilizada, considere por exemplo a figura 3.2, um sistema cartesiano local de coordenadas localizado em um ponto do contorno onde se deseja obter as componentes de tensão. Definidas as funções de forma para os deslocamentos e forças de superfície do contorno e obtidos os seus valores nodais, é possível definir as forças de superfície em qualquer ponto do contorno. Consequentemente, pode-se escrever para o caso 3D que:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{13} &= \bar{\sigma}_{31} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{23} &= \bar{\sigma}_{32} = \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{33} &= \bar{p}_3\end{aligned}\tag{5.52}$$

onde o subscrito indica que os valores são referentes ao sistema local de coordenadas. As outras componentes de tensão podem ser obtidas através da relação constitutiva. Assim, em um dado elemento, o campo de deslocamento sobre ele pode ser escrito em função dos valores dos deslocamentos nodais nas coordenadas locais, como apresentado na equação (3.29). Note que, quando se resolve o problema de contorno, obtém-se as forças de superfície e os deslocamentos nodais no sistema global, porém, para encontrar as tensões no contorno é necessário transformá-los para o sistema local fazendo uso da matriz de transformação entre os dois sistemas. Definido o campo de deslocamento sobre o elemento de contorno, o cap de deformações é obtido pela diferenciação do campo de deslocamento eq.(3.30). Observe que não é necessário determinar todas as componentes de deformação, basta apenas obter aquelas que serão importantes na determinação das componentes de tensão restantes. Logo, as outras componentes do tensor de tensão são encontradas fazendo-se uso da relação constitutiva do modelo reológico de Kelvin eq.(2.9b), que pode ser escrita, fazendo-se uso da terceira equação em (5.52), como:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = 2\mu(\bar{\epsilon}_{12} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{12}) \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu\bar{p}_3 + 2\mu(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11} + \nu\bar{\epsilon}_{22} + \nu\gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22})] \\ \bar{\sigma}_{22} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu\bar{p}_3 + 2\mu(\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22} + \nu\bar{\epsilon}_{11} + \nu\gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11})]\end{aligned}\tag{5.53}$$

As velocidades de deformação são definidas por aproximações lineares, ou seja:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{s+1} = \frac{\bar{\epsilon}_{s+1} - \bar{\epsilon}_s}{\Delta t}\tag{5.54}$$

Substituindo a expressão (5.54) nas equações (5.53) é possível encontrar as tensões no contorno, pois as deformações são obtidas em função dos deslocamentos e forças de superfície do contorno. Note também que as tensões iniciais devem ser transformadas para o sistema local antes da aplicação das expressões (5.53). Na situação onde elementos de contorno constantes são utilizados, as derivadas dos deslocamentos, presentes na definição das deformações, podem ser obtidas aplicando-se as técnicas de diferenças finitas entre elementos de contorno adjacentes. Após a obtenção das tensões, pode-se obtê-las no sistema global utilizando-se a matriz de transformação. As expressões foram obtidas para o caso tridimensional, para o bidimensional o procedimento é similar e mais simples necessitando apenas de uma componente de deformação eq.(3.32). Conseqüentemente, para o caso de estado plano de deformação, as manipulações com as expressões resultam,

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{22} &= \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{12} &= \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu} [\nu \bar{p}_2 + 2\mu(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma \dot{\bar{\epsilon}}_{11})]\end{aligned}\tag{5.55}$$

Note que, no caso 2D \bar{x}_1 (fig. 3.2) é a direção tangencial no ponto onde se deseja extrair as tensões e \bar{x}_2 é a direção normal. Para estado plano de tensão as expressões (5.55) são as mesmas, apenas o coeficiente de Poisson deve ser $\nu/(1+\nu)$ sem alterar a constante de Lamé μ .

5.4.3 Tratamento algébrico para as representações integrais

As equações integrais definidas anteriormente podem ser transformadas em equações algébricas através do método dos elementos de contorno.

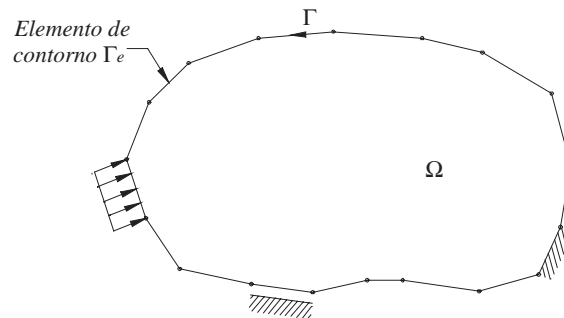


FIGURA 5.19 – Discretização do problema

Assim, o contorno do corpo Γ é discretizado com n_e elementos de contorno Γ_e (fig. 5.19), de tal sorte que as densidades do contorno sejam representadas adequadamente. Dessa forma, as variáveis do problema podem ser aproximadas, parametrizando-as com relação aos seus valores nodais, fazendo-se uso de funções interpoladoras apropriadas.

$$\begin{aligned} p_i &= \phi^\alpha P_i^\alpha \\ u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha \\ \dot{u}_i &= \phi^\alpha \dot{U}_i^\alpha \end{aligned} \quad (5.56)$$

onde ϕ são as funções de forma adotadas para interpolar os elementos de contorno o subscritos α refere-se ao nó do elemento de contorno. Os termos P_i^α , U_i^α e \dot{U}_i^α são valores nodais de forças de superfície, deslocamentos e velocidades, respectivamente. Consequentemente, as representações integrais de deslocamentos, e tensões totais podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ki} U_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{U}_i(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + \\ &+ b_i \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} B_{ki}^* d\Gamma_e \end{aligned} \quad (5.57a)$$

$$\sigma_{\rho q}(p) = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + b_i \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma_e \quad (5.57b)$$

Depois de se executar todas as integrais e se escolher pontos fonte em igual número aos nós do problema, pode-se escrever os seguintes sistemas de equações diferenciais temporais:

$$HU(t) + \gamma H\dot{U}(t) = GP(t) + Bb(t) \quad (5.58a)$$

$$\sigma(t) = \tilde{G}P(t) - \tilde{H}U(t) - \gamma \tilde{H}\dot{U}(t) + \tilde{B}b(t) \quad (5.58b)$$

onde t representa o tempo. Ressalta-se que a matriz H é obtida através da associação do termo \bar{C}_{ki} com a matriz referente a integral de contorno cuja o núcleo é p_{ki}^* , como usualmente é feito no método dos elementos de contorno.

Neste ponto aparece uma expressão interessante, γH , ou seja, o modelo de Kelvin adotado para esta formulação resulta em uma matriz de amortecimento proporcional a H , tal como o amortecimento de primeira ordem (decomposição modal) proporcional a matriz K (matriz de rigidez) utilizado em análises dinâmicas via MEF.

5.4.4 Integração temporal numérica

Para executar a integração temporal adotou-se uma simples aproximação linear para definir a velocidade de deslocamento. Poderia ser qualquer outra técnica de integração temporal, tal como Wilson θ , Newmark ou Houbolt. Porém, observou-se que a aproximação linear apresenta resultados suficientemente precisos para análises viscosas sem o termo de aceleração.

$$\dot{U}_{s+1} = \frac{U_{s+1} - U_s}{\Delta t} \quad (5.59)$$

Aplicando-se a expressão da velocidade de deslocamento apresentada na expressão (5.59) na equação (5.58a), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\bar{H}U_{s+1} = GP_{s+1} + F_s \quad (5.60)$$

onde

$$\bar{H} = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right)H \quad (5.61a)$$

$$F_s = \frac{\gamma}{\Delta t}HU_s + Bb_{s+1} \quad (5.61b)$$

Impondo-se as condições de contorno, como usualmente é feito no método dos elementos de contorno, trocando-se as colunas das matrizes \bar{H} e G , pode-se resolver o sistema linear apresentado em (5.60), obtendo-se assim os deslocamentos e forças de superfície para o passo de tempo atual. A velocidade de deslocamento é obtida diretamente através da equação (5.59). Com todas as incógnitas do problema de contorno obtidas no passo atual, encontram-se as tensões totais fazendo-se uso da expressão (5.58b).

$$\sigma_{s+1} = \tilde{G}P_{s+1} - \tilde{H}U_{s+1} - \gamma\tilde{H}\dot{U}_{s+1} + \tilde{B}b_{s+1} \quad (5.62)$$

As tensões totais no contorno são determinadas conforme descrito no item(5.4.2). A tensão elástica pode ser facilmente obtida adotando-se aproximação linear para a velocidade das tensões elásticas $\dot{\sigma}_{s+1}^e$.

$$\dot{\sigma}_{s+1}^e = \frac{\sigma_{s+1}^e - \sigma_s^e}{\Delta t} \quad (5.63)$$

Aplicando-se a expressão na equação diferencial em (5.50), pode-se escrever:

$$\sigma_{s+1}^e = \left(\sigma_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma_s^e \right) / \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (5.64)$$

Note que na expressão (5.64) necessita-se do valor das tensões totais que são calculadas através da equação (5.62) para pontos internos, ou através das expressões (5.52), (5.53) e (5.55) para pontos no contorno. Assim, calculadas as tensões totais e as tensões elásticas, pode-se obter as tensões viscosas de uma forma simples e direta aplicando-se a relação (2.4). Resolvido o problema naquele passo, repete-se o procedimento descrito anteriormente para os próximos passos de tempo resolvendo-se assim todo o problema viscoso.

5.4.5 Exemplos numéricos

Dois códigos computacionais em elementos de contorno foram implementados utilizando-se esta formulação viscosa. O primeiro, foi o elemento de contorno bidimensional de três nós descrito nas formulações anteriores. Para evitar as singularidades presentes na representação bidimensionais em deslocamento, fez-se uso de ponto fonte exterior ao domínio do problema. A segunda implementação foi realizada no elemento de contorno tridimensional triangular de três nós. As integrais singulares do elemento de contorno 3D são determinadas através das técnicas de subtração de singularidade e transformação de coordenadas expostas no Anexo D. As representações para as tensões com pontos internos são solucionadas utilizando-se técnicas de integração quase-singular. Note que agora não há mais a necessidade de células, pois todas as representações são escritas com integrais de contorno, evitando assim o alto custo computacional necessário na determinação das integrais de domínio, cujo

tratamento tridimensional é bem mais complexo que nos casos bidimensionais. Novamente, com o intuito de validar a formulação bidimensional, utilizou-se os mesmos exemplos anteriormente propostos, pois estes apresentam respostas analíticas que servem como “benchmark”. A formulação 3D é validada no último exemplo, onde as respostas numéricas são confrontadas com as respectivas soluções analíticas.

5.4.5.1 EXEMPLO 01: Peça tracionada

Os parâmetros para análise deste problema estão descritos na figura 4.1, onde agora $\gamma = \theta_\lambda = \theta_\mu$. A malha de elementos de contorno utilizada e a geometria do problema são apresentadas na figura 5.20. Semelhantemente, fez-se uso da simetria, discretizando-se apenas a metade da estrutura.

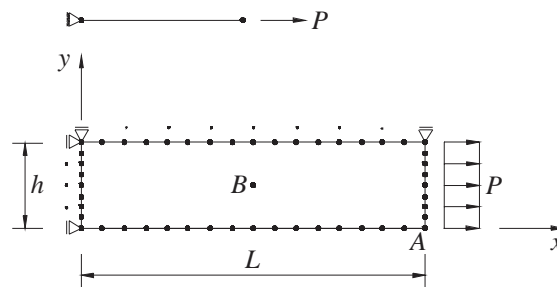


FIGURA 5.20 – Geometria e discretização.

Note que a malha é bastante exagerada, porém esta foi tomada assim devido à referência inicial em elementos finitos que traziam a mesma quantidade de nós no contorno do corpo MUNAIAR(1998). A resposta do deslocamento longitudinal do ponto A é apresentada na figura 5.21 confrontada com a resposta teórica obtida para um modelo uniaxial. Na tentativa de simular o modelo uniaxial adotou-se um coeficiente de Poisson zero.

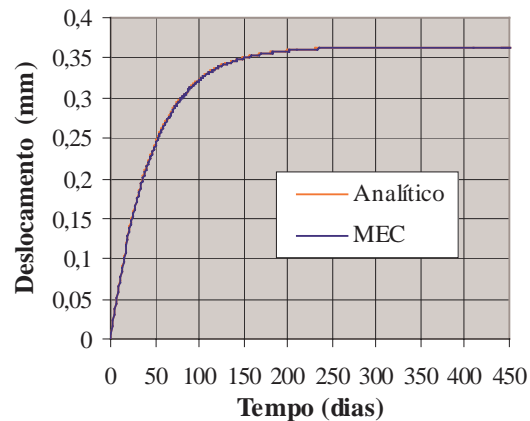


FIGURA 5.21 – Deslocamento longitudinal do ponto A.

Nota-se uma perfeita concordância entre os resultados obtidos pelo presente modelo e a resposta teórica, demonstrando a consistência do modelo em poder recuperar o caso uniaxial. A resposta da tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} para o ponto *B* é apresentada na figura 5.22 juntamente com a resposta teórica para ambas as tensões.

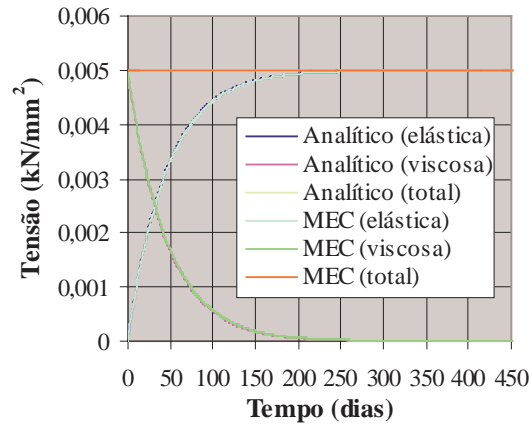


FIGURA 5.22 – Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto *B*.

As mesmas observações feitas para a resposta em deslocamentos podem ser estendidas para as tensões. Na figura 5.23 são apresentados resultados do deslocamento longitudinal do ponto *A* com o modelo aqui proposto, para vários passos de tempo e confrontados com os resultados obtidos pelo modelo do MEC com células internas para $\Delta t = 25$ e 50 dias, que faz uso de células na construção da matriz viscosa.

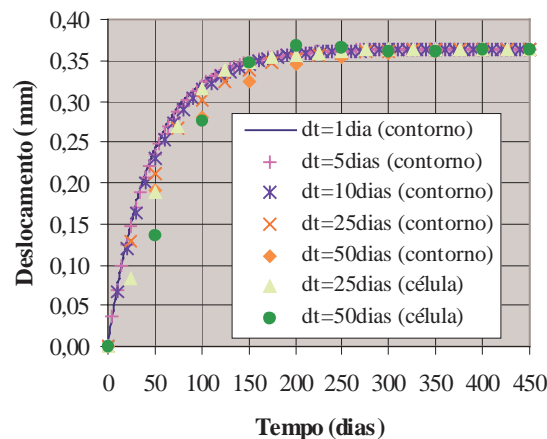


FIGURA 5.23 – Deslocamento longitudinal do ponto *A* para vários Δt .

Observando-se a figura 5.23 é possível constatar o bom comportamento de ambas as formulações do MEC (com e sem células), até mesmo para altos valores de Δt . Note que a

resposta final é praticamente invariante com relação ao Δt . A diferença nas curvas para $\Delta t = 25$ e 50 dias das duas formulações é devido à diferente aproximação temporal utilizada para a velocidade, pois na representação em células utilizou-se a expressão de Houbolt para definir a velocidade de deslocamento.

5.4.5.2 EXEMPLO 02: Cilindro sob pressão interna

Este é o mesmo exemplo apresentado no item (5.2.4.2) para a formulação do MEC com células. Aqui ele é modelado discretizando-se apenas o contorno do corpo figura (5.24). Semelhantemente, a simetria do problema foi considerada, discretizando-se apenas 1/4 da estrutura. Os dados do problema estão descritos na figura (5.5), tomando-se $\gamma = \theta_\lambda = \theta_\mu$.

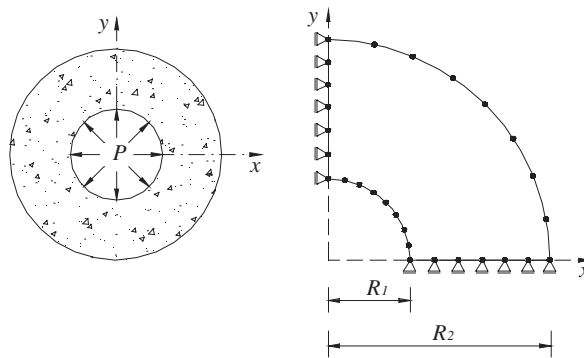


FIGURA 5.24 – Geometria e discretização da estrutura.

O deslocamento radial da parede interna e externa da estrutura, para vários passos de tempo, são apresentados nas figuras 5.25 e 5.26, respectivamente. Estes são confrontados com a resposta analítica do problema e os resultados numéricos do MEC com células para $\Delta t = 10$ e 15 dias, que faz uso de células na construção da matriz viscosa.

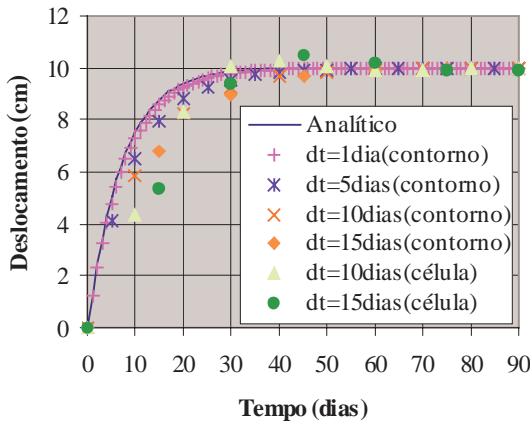


FIGURA 5.25 – Deslocamento radial da parede interna para diversos Δt .

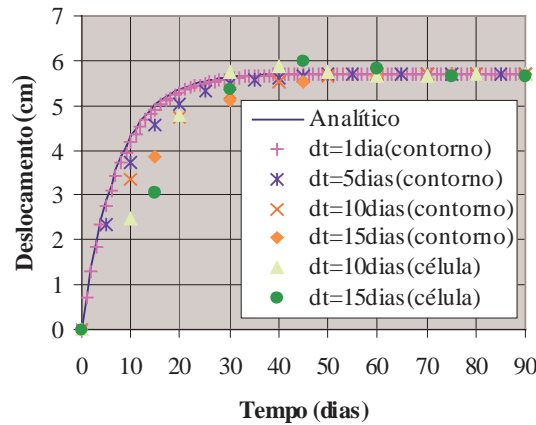


FIGURA 5.26 – Deslocamento radial da parede externa para diversos Δt .

O bom comportamento observado em todos os exemplos até aqui apresentados é novamente reproduzido. Note que a formulação sem células apresenta resposta um pouco melhor para $\Delta t = 10$ e 15 dias, isto é consequência direta do algoritmo de integração temporal adotado.

5.4.5.3 EXEMPLO 03: Peça tracionada 3D

Uma peça submetida a um carregamento distribuído de tração aplicado em sua face livre é analisada. A estrutura de seção transversal quadrada é modelada utilizando-se 24 elementos de contorno tridimensionais triangulares de três nós. O modelo adotado neste exemplo foi o modelo viscoso de Kelvin-Voigt. A geometria da estrutura juntamente com sua discretização e propriedades físicas são apresentadas na figura 5.27.

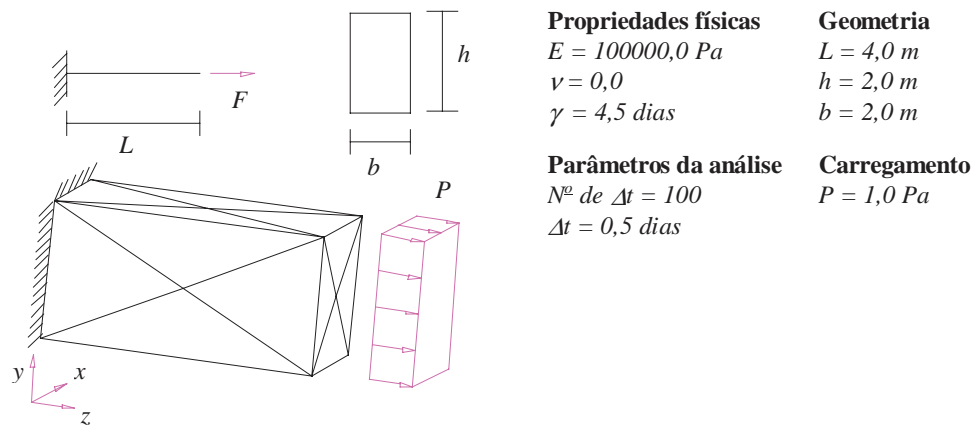


FIGURA 5.27 – Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura.

A resposta do deslocamento longitudinal do ponto central na extremidade onde se aplica a solicitação é apresentada na figura 5.28 e confrontada com a resposta analítica do problema.

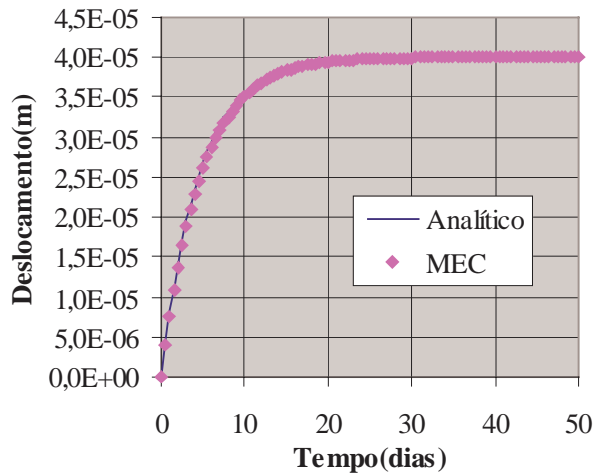


FIGURA 5.28 – Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada.

Semelhantemente ao 2D, nota-se uma perfeita concordância entre os resultados obtidos pela presente formulação e a resposta analítica. A resposta da tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} extraídas no centróide do corpo são apresentadas na figura 5.29 juntamente com a resposta analítica para ambas as tensões.

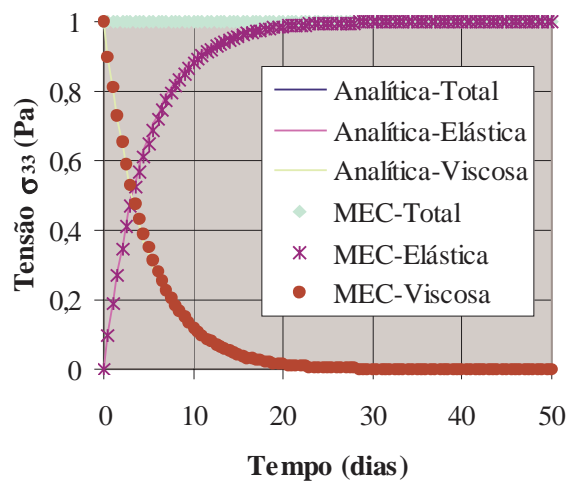


FIGURA 5.29 – Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} no centróide do corpo.

Os resultados apresentados para o MEC tridimensional validam a formulação para o caso 3D, demonstrando ser bastante adequada para tratar problemas viscoelásticos 3D, principalmente na modelagem de corpos infinitos e semi-infinitos, características inerentes ao MEC.

5.5 FORMULAÇÃO VISCOELÁSTICA: *Representação no contorno (Boltzmann)*

Semelhantemente ao que foi feito no item(5.4) para o modelo de Kelvin, faz-se aqui para o modelo de Boltzmann. A metodologia para encontrar as representações integrais é basicamente a mesma, necessitando-se um pouco mais de esforço algébrico para transformar todas as integrais de domínio para o contorno. Fazendo-se uso do MEC é possível encontrar as representações algébricas e os sistemas finais que são gerados a partir de discretizações do contorno apenas. As representações são obtidas pela imposição da relação constitutiva de Boltzmann eq.(2.18) sobre a equação integral (3.15).

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \frac{\gamma E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.65)$$

Sabendo-se que:

$$\varepsilon_{kij}^* E_e C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j} \quad (5.66a)$$

$$\varepsilon_{kij}^* E_e C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} = \sigma_{klm}^* \dot{\varepsilon}_{lm} = \sigma_{klm}^* \dot{u}_{l,m} = \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} \quad (5.66b)$$

$$\varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij} = u_{ki,j}^* \dot{\sigma}_{ij} \quad (5.66c)$$

a equação (5.65) torna-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} d\Omega + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.67)$$

Aplicando-se integração por partes na segunda, terceira e quarta integrais da equação (5.67), encontra-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i d\Omega \right] - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j \dot{u}_i d\Gamma - \right. \\ \left. \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* \dot{u}_i d\Omega \right] + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{\sigma}_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{\sigma}_{ij,j} d\Omega \right] + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.68)$$

Fazendo-se uso, respectivamente, da equação de equilíbrio fundamental eq.(3.20) e da equação de equilíbrio do problema real escrita em forma de taxas eq.(5.22), aplicando-se estas na representação (5.68), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac, as técnicas para integrais singulares e sabendo-se que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$ e que $\dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{p}_i$, encontra-se:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ki} u_i(p) = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma - \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) + \\ \gamma \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \end{aligned} \quad (5.69)$$

A equação (5.69) é a representação integral da formulação viscoelástica do MEC que leva em consideração o modelo reológico de Boltzmann. A 1ª, 2ª e 6ª integrais e o termo \bar{C}_{ki} são os mesmos apresentados na formulação elastostática e podem ser determinados seguindo os mesmos princípios. Note que a quarta e a quinta integrais são responsáveis pelo comportamento instantâneo, porém estas podem contribuir para o comportamento viscoso caso haja variações com o tempo das forças de superfície e/ou volumétricas. Em geral, como o peso próprio não varia no tempo e já existia antes da aplicação das cargas, pode-se considerar $\dot{b} = 0$ e conseqüentemente a quinta integral se anula. A terceira integral e o segundo termo do lado direito da equação integral (5.69) são responsáveis apenas pelo comportamento viscoso. Ressalta-se ainda que a penúltima e a última integrais podem ser transformadas em integrais de contorno, como demonstrado no Anexo A, e assim é possível obter uma expressão escrita com integrais apenas no contorno. Considerando-se, por exemplo, o caso onde b_i é uma função constante em todo o domínio do corpo e conseqüentemente \dot{b}_i é constante em Ω . Nesta situação, as integrais de domínio em (5.69) podem ser transformadas para o contorno utilizando-se coordenadas polares e integrando-se em r . As transformações para b_i já foram

apresentadas nas equações (5.41). No caso de \dot{b}_i o desenvolvimento segue os mesmos passos, ou seja:

Para 2D

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega = \dot{b}_i \int_{\Omega} u_{ki}^* d\Omega = \dot{b}_i \int_{\theta} \int_r u_{ki}^* r dr d\theta = \dot{b}_i \int_{\Gamma} \int_r u_{ki}^* dr \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma = \dot{b}_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \quad (5.70a)$$

Para 3D

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega = \dot{b}_i \int_{\Omega} u_{ki}^* d\Omega = \dot{b}_i \int_{\varphi} \int_{\theta} \int_r u_{ki}^* r^2 \cos(\theta) dr d\theta d\varphi = \dot{b}_i \int_{\Gamma} \int_r u_{ki}^* dr \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma = \dot{b}_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \quad (5.70b)$$

onde o termo B_{ki}^* é o mesmo apresentado na equação (5.42). Logo a equação integral (5.69) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ki} u_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\ &\gamma \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (5.71)$$

A equação (5.71) é a representação integral viscoelástica, com integrais apenas no contorno do corpo, específica para o modelo de Boltzmann. Fazendo-se uso desta representação é possível modelar problemas viscoelásticos discretizando-se apenas o contorno da estrutura. Note que as transformações matemáticas eliminaram as indesejáveis singularidades presentes nas integrais de domínio, cujo tratamento requer um alto custo computacional.

5.5.1 Representação integral para tensões em pontos internos

As tensões no interior do corpo são obtidas a partir da diferenciação da equação (5.71) definida para a situação de pontos internos. Nesta situação o termo $\bar{C}_{ki} = \delta_{ki}$ e consequentemente a equação integral (5.71) fica escrita como:

$$\begin{aligned} u_k(p) + \gamma \dot{u}_k(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\ &\gamma \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (5.72)$$

As deformações são obtidas de maneira análoga ao problema elastostático, diferenciando-se a equação (5.72) e aplicado esta na definição das deformações em (3.24), encontrando-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ke}(p) + \gamma \dot{\varepsilon}_{ke}(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\ &\gamma \left[\int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} \hat{B}_{kei}^* d\Gamma \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} b_i \int_{\Gamma} \hat{B}_{kei}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (5.73)$$

Como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. As tensões totais são obtidas aplicando-se a definição das deformações totais expressas em (5.73) sobre a relação reológica do modelo apresentada na equação (2.18), de maneira que:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) &= \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\ &\frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma \right] + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{\rho q}(p) \end{aligned} \quad (5.74)$$

A equação (5.74) é a representação integral das tensões totais segundo o modelo de Boltzmann, sendo $\bar{\sigma}_{\rho qi}^*$, $\bar{p}_{\rho qi}^*$ e $\bar{B}_{\rho qi}^*$ os mesmos definidos nas equações (3.27a), (3.27b) e (5.48), respectivamente. Note que, semelhantemente a formulação anterior, não é possível escrever as equações integrais em pontos internos para as tensões elásticas e viscosas, ao contrário das tensões totais que são obtidas através da representação integral (5.74). Esta é uma característica particular da presente formulação que considera apenas aproximações para o contorno. Felizmente, pode-se contornar esta situação através de um procedimento simples e eficiente proposto em MESQUITA & CODA(2001a), onde as tensões elásticas são obtidas pela solução numérica de uma equação diferencial. Esta equação diferencial é a mesma obtida no item(4.3.2), sendo definida pela expressão (4.30).

5.5.2 Obtenção das tensões totais no contorno

As tensões no contorno serão obtidas como usualmente é feito pelo MEC, em função dos deslocamentos e forças de superfície do contorno que já foram determinados na solução do problema de contorno. O procedimento aqui descrito é o mesmo apresentado no item(3.3.2) com a relação constitutiva elástica e no item(5.4.2) utilizando o modelo constitutivo de Kelvin.

Neste item as relações serão obtidas considerando-se a equação do modelo de Boltzmann. Tome por exemplo a figura 3.2, um sistema cartesiano local de coordenadas localizado em um ponto do contorno onde se deseja obter as componentes de tensão. Definidas as funções de forma para os deslocamentos e forças de superfície do contorno e obtidos os seus valores nodais, é possível definir as forças de superfície em qualquer ponto do contorno. Consequentemente, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{13} &= \bar{\sigma}_{31} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{23} &= \bar{\sigma}_{32} = \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{33} &= \bar{p}_3\end{aligned}\tag{5.75}$$

onde o subscrito indica que os valores são referentes ao sistema de coordenadas local. As outras componentes de tensão podem ser obtidas através da relação constitutiva específica para o modelo de Boltzmann.

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} 2\mu(\bar{\epsilon}_{12} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{12}) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\bar{\sigma}}_{12} \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left\{ (2\mu + \lambda)(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + \lambda[(\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22}) + (\bar{\epsilon}_{33} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{33})] \right\} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\bar{\sigma}}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} &= \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left\{ (2\mu + \lambda)(\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22}) + \lambda[(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + (\bar{\epsilon}_{33} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{33})] \right\} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\bar{\sigma}}_{22}\end{aligned}\tag{5.76}$$

Deve-se eliminar os termos $\bar{\epsilon}_{33}$ e $\dot{\bar{\epsilon}}_{33}$ utilizando-se a relação constitutiva para $\bar{\sigma}_{33}$, de maneira que:

$$\bar{\epsilon}_{33} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{33} = \frac{1}{2\mu + \lambda} \left\{ \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \bar{p}_3 - \lambda[(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + (\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22})] + \gamma\dot{\bar{\sigma}}_{33} \right\}\tag{5.77}$$

onde μ e λ são as conhecidas constantes de Lamé definidas nas equações (2.7). Note que o módulo de elasticidade utilizada nas expressões de μ e λ é o do trecho instantâneo E_e . As velocidades de deformação são definidas por aproximações lineares, ou seja:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{s+1} = \frac{\bar{\epsilon}_{s+1} - \bar{\epsilon}_s}{\Delta t} \quad ; \quad \dot{\bar{\sigma}}_{s+1} = \frac{\bar{\sigma}_{s+1} - \bar{\sigma}_s}{\Delta t}\tag{5.78}$$

Substituindo as expressões (5.77) e (5.78) nas equações (5.76), pode-se reordena-las, explicitando-se as tensões referentes ao instante $s+I$, tornando possível encontrar as tensões no contorno, pois as deformações são obtidas pela diferenciação eq.(3.30) do campo de deslocamentos escritos nas coordenadas locais eq.(3.29). Note também que as tensões iniciais devem ser transformadas para o sistema local antes da aplicação das expressões (5.76). Na situação onde elementos de contorno constantes são utilizados, as derivadas dos deslocamentos, presentes na definição das deformações, podem ser obtidas aplicando-se as técnicas de diferenças finitas entre elementos de contorno adjacentes. Após a determinação das tensões, pode-se obtê-las no sistema global utilizando-se a matriz de transformação. Para o caso 2D, as tensões ficam determinadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{22} &= \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{12} &= \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left\{ (2\mu + \lambda)(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + \lambda(\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22}) \right\} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\bar{\sigma}}_{11}\end{aligned}\quad (5.79)$$

Semelhantemente ao 3D, deve-se eliminar os termos $\bar{\epsilon}_{22}$ e $\dot{\bar{\epsilon}}_{22}$ utilizando-se a relação constitutiva para $\bar{\sigma}_{22}$, de maneira que:

$$\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22} = \frac{1}{2\mu + \lambda} \left\{ \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \bar{p}_2 - \lambda(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + \gamma\dot{\bar{\sigma}}_{22} \right\}\quad (5.80)$$

As taxas são definidas pelas equações (5.78) e a deformação ϵ_{11} é obtida pela diferenciação (3.32) sobre o campo de deslocamento adotado sobre o elemento nas coordenadas locais.

5.5.3 Tratamento algébrico para as representações integrais

O tratamento algébrico das representações integrais apresentadas aqui segue os mesmos passos daquele exposto no item(5.4.3). Fazendo-se uso do MEC, discretiza-se o contorno do corpo Γ com n_e elementos de contorno Γ_e (fig. 5.19). As variáveis do problema podem ser aproximadas, parametrizando-as com relação aos seus valores nodais, fazendo-se uso de funções de forma apropriadas.

$$\begin{aligned}
p_i &= \phi^\alpha P_i^\alpha \\
u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha \\
\dot{u}_i &= \phi^\alpha \dot{U}_i^\alpha \\
\dot{p}_i &= \phi^\alpha \dot{P}_i^\alpha
\end{aligned} \tag{5.81}$$

onde ϕ são as funções de forma adotadas para interpolar as variáveis sobre os elementos de contorno e o subscrito α refere-se aos nós do elemento de contorno. Os termos P_i^α , U_i^α , \dot{P}_i^α e \dot{U}_i^α são valores nodais de forças de superfície, deslocamentos e suas respectivas velocidades. Consequentemente, as representações integrais de deslocamento e tensão total ficam escritas como:

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{ki} U_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{U}_i(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \\
\gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{P}_i^\alpha + \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} B_{ki}^* d\Gamma_e b_i + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} B_{ki}^* d\Gamma_e b_i
\end{aligned} \tag{5.82a}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho q}(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \\
\frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{P}_i^\alpha + \\
\frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma_e b_i + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma_e b_i - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{\rho q}(p)
\end{aligned} \tag{5.82b}$$

Depois de executar todas as integrais e escolher pontos fonte em igual número aos nós do problema, pode-se escrever os seguintes sistemas de equações diferenciais temporais:

$$HU(t) + \gamma H \dot{U}(t) = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} GP(t) + \gamma G \dot{P}(t) + \gamma B b(t) + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} Bb(t) \tag{5.83a}$$

$$\sigma(t) = \tilde{G}P(t) - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H}U(t) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H} \dot{U}(t) + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{G} \dot{P}(t) + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{B} b(t) + \tag{5.83b}$$

$$\tilde{B} b(t) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}(t)$$

onde t representa o tempo. Ressalta-se que a matriz H é obtida através da associação do tempo \bar{C}_{ki} com a matriz referente a integral de contorno cuja o núcleo é p_{ki}^* , como usualmente é feito no método dos elementos de contorno.

5.5.4 Integração temporal numérica

Semelhantemente ao item(5.4.4), o algoritmo adotado para integrar no tempo os sistemas algébricos definidos em (5.83) será aquele com aproximação linear. Observou-se que apesar da simplicidade das expressões, este é suficientemente adequado para tratar problemas quase-estáticos devido à equação diferencial ser em 1ª ordem. Suas expressões são definidas como:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{s+1} &= \frac{U_{s+1} - U_s}{\Delta t} \\ \dot{P}_{s+1} &= \frac{P_{s+1} - P_s}{\Delta t} \\ \dot{b}_{s+1} &= \frac{b_{s+1} - b_s}{\Delta t} \\ \dot{\sigma}_{s+1} &= \frac{\sigma_{s+1} - \sigma_s}{\Delta t} \\ \dot{\sigma}_{s+1}^{el} &= \frac{\sigma_{s+1}^{el} - \sigma_s^{el}}{\Delta t}\end{aligned}\tag{5.84}$$

Aplicando a expressão da velocidade de deslocamento, de forças de superfície e de forças volumétricas apresentadas em (5.84) na primeira equação em (5.83), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\bar{H}U_{s+1} = \bar{G}P_{s+1} + F_s\tag{5.85}$$

onde

$$\bar{G} = \left(\frac{\gamma}{\Delta t} + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \right) G\tag{5.86a}$$

$$\bar{H} = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) H\tag{5.86b}$$

$$F_s = \frac{\gamma}{\Delta t} H U_s - \frac{\gamma}{\Delta t} G P_s + B \left[\left(\frac{\gamma}{\Delta t} + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \right) b_{s+1} - \frac{\gamma}{\Delta t} b_s \right] \quad (5.86c)$$

Impondo-se as condições de contorno, como usualmente é feito no método dos elementos de contorno, trocando-se as colunas das matrizes \bar{H} e \bar{G} , pode-se resolver o sistema linear apresentado em (5.85), obtendo-se assim os deslocamentos e forças de superfície para o passo de tempo atual. Com todas as incógnitas do problema de contorno determinadas no passo atual, parte-se para encontrar as tensões totais. Assim, obtidos os deslocamentos e as forças de superfície do problema de contorno no instante $s+1$, determinam-se \dot{P} , \dot{U} e \dot{b} através das expressões (5.84). Obtidas essas variáveis calculam-se as tensões totais no interior do corpo fazendo-se uso da equação (5.83b) e da expressão de $\dot{\sigma}_{s+1}$ em (5.84), de maneira que:

$$\sigma_{s+1} = \left(\tilde{G} P_{s+1} - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H} U_{s+1} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H} \dot{U}_{s+1} + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{G} \dot{P}_{s+1} + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{B} \dot{b}_{s+1} + \tilde{B} b_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sigma_s \right) \left/ \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \right) \right. \quad (5.87)$$

As tensões totais no contorno são determinadas conforme descrito no item (5.5.2). A tensão elástica referente a mola em paralelo com o amortecedor pode ser facilmente obtida aplicando-se a aproximação para a velocidade das tensões elásticas $\dot{\sigma}_{s+1}^{el}$ apresentada em (5.84) na equação diferencial (4.30).

$$\sigma_{s+1}^{el} = \left(\sigma_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma_s^{el} \right) \left/ \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \right. \quad (5.88)$$

Note que na expressão (5.88) necessita-se do valor das tensões totais que são calculadas através da equação (5.87) ou pelas expressões do item (5.5.2). Assim, calculadas as tensões totais e as tensões elásticas, pode-se obter as tensões viscosas de uma forma simples e direta aplicando-se a relação (2.15). Resolvido o problema naquele passo, atualizam-se as variáveis e repete-se o procedimento descrito anteriormente para os próximos passos de tempo resolvendo-se assim todo o problema viscoso.

5.5.5 Exemplos numéricos

Os mesmos elementos de contorno utilizados nos exemplos da formulação anterior são aqui empregados. As técnicas utilizadas para calcular as integrais de contorno singulares bi e tridimensionais foram descritas de forma sucinta do item (5.4.5). Os três primeiros exemplos são analisados com elementos de contorno 2D e os dois últimos foram executados com a formulação tridimensional.

5.5.5.1 EXEMPLO 01: Peça tracionada

Este exemplo é o mesmo apresentado no item (4.3.3.1) e sua discretização é a mesma exposta na figura (5.20). O deslocamento radial do ponto A, para vários passos de tempo, é apresentado na figura 5.30. Estes são confrontados com a resposta analítica do problema e os resultados numéricos do MEC viscoelástico para $\Delta t = 25$ e 50 dias, que faz uso de células na construção da matriz viscosa.

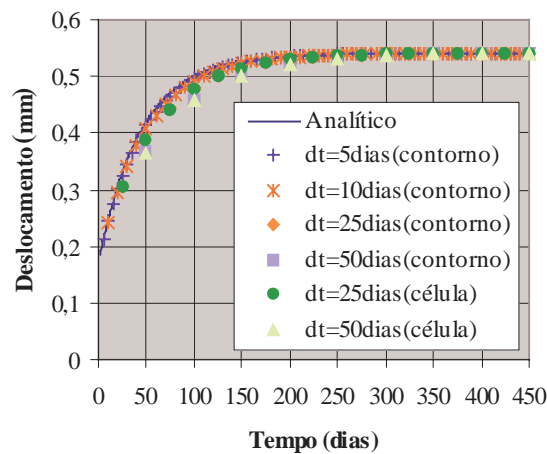


FIGURA 5.30 – Deslocamento longitudinal do ponto A para vários Δt .

Os resultados numéricos das formulações para $\Delta t = 25$ e 50 dias, são bastante coincidentes. Isto é consequência direta da utilização dos mesmos algoritmos de integração temporal, que neste caso são expressos por simples aproximações lineares. A resposta da tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} extraídas no ponto B são apresentadas na figura 5.31 juntamente com as respectivas respostas analíticas.

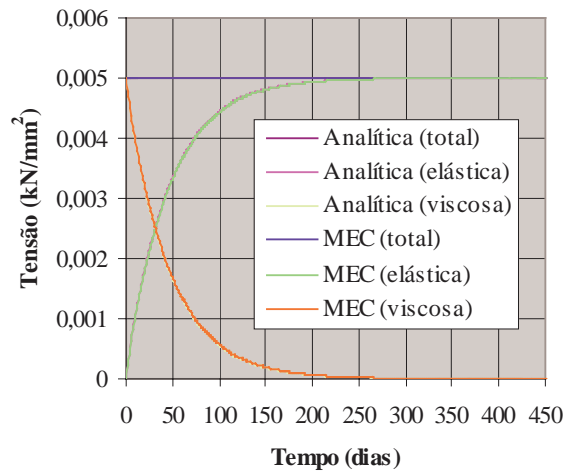


FIGURA 5.31 – Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B.

A figura 5.32 apresenta o comportamento (deslocamento do ponto A) da estrutura para uma situação mais geral de carregamento. A estrutura é inicialmente tencionada até que no início do tempo $t=200$ dias a solitação é removida.

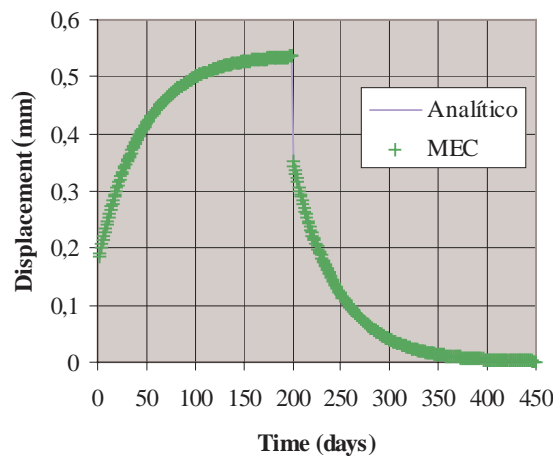


FIGURA 5.32 – Deslocamento longitudinal do ponto A para uma carga removida em $t=200$ dias.

5.5.5.2 EXEMPLO 02: Cilindro sob pressão interna

Este problema já foi analisado pela formulação com termo viscoso de domínio. Os dados do problema são descritos no item(5.3.4.2). A malha utilizada é a mesma exposta na figura (5.24) fazendo uso da simetria do problema. O deslocamento radial da parede interna e externa da estrutura, para vários passos de tempo, são apresentados nas figuras 5.33 e 5.34,

respectivamente. Estes são confrontados com a resposta analítica do problema e os resultados numéricos, para $\Delta t = 10$ e 15 dias, da formulação do MEC com termo viscoso de domínio.

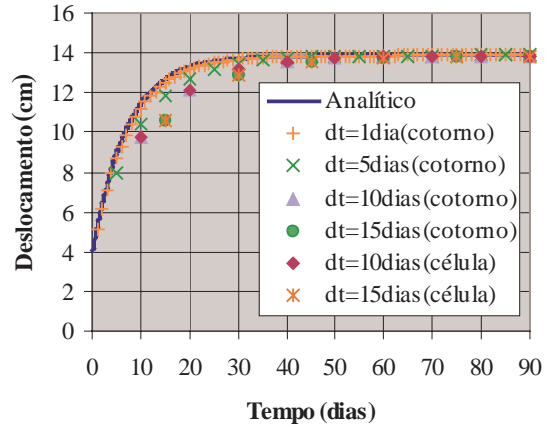


FIGURA 5.33 – Deslocamento radial da parede interna para diversos Δt .

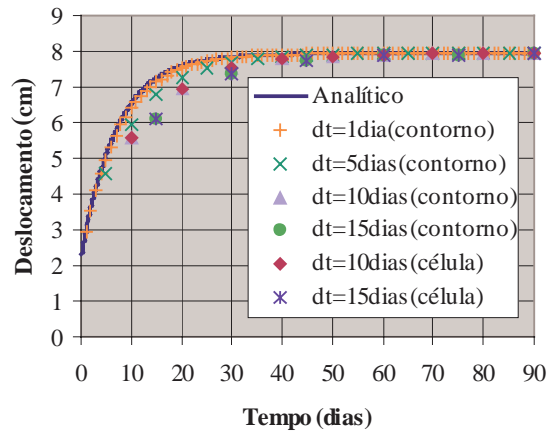


FIGURA 5.34 – Deslocamento radial da parede externa para diversos Δt .

Note que as respostas para as formulações com termo viscoso no domínio e com termo viscoso no contorno coincidem. A justificativa destes comportamentos é a mesma descrita no exemplo anterior.

5.5.5.3 EXEMPLO 03: Túnel submetido a uma pressão interna

Um túnel de seção circular, solicitado por uma pressão interna uniforme P é analisado sob as condições de estado plano de deformação. A estrutura é discretizada com elementos de

contorno de três nós. As propriedades viscoelásticas do solo, considerando-se o modelo de Boltzmann, bem como sua geometria e discretização são apresentadas na figura 5.35.

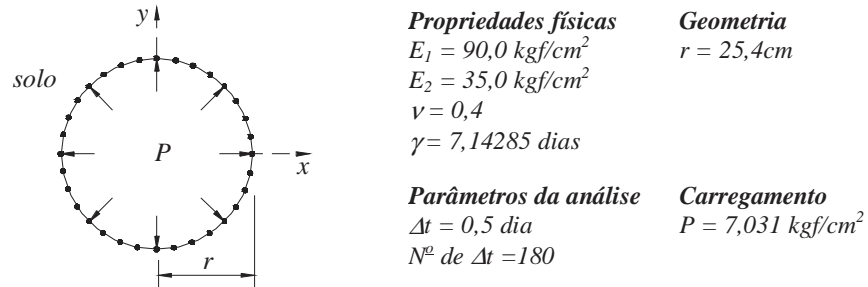


FIGURA 5.35 – Geometria, discretização e propriedades físicas.

Os resultados para o deslocamento radial da parede interna do túnel são apresentados na figura 5.36. A resposta do presente modelo é confrontada com a resposta analítica.

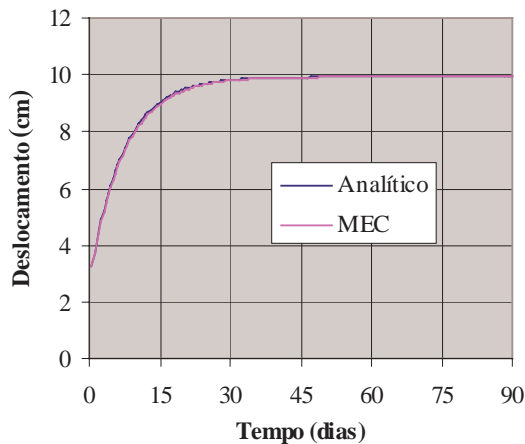


FIGURA 5.36 – Deslocamento radial do túnel.

Observando-se a figura 5.36 verifica-se o bom comportamento do modelo quando comparado com a resposta analítica do problema.

5.5.5.4 EXEMPLO 04: Peça tracionada 3D

O mesmo exemplo tridimensional analisado no item(5.4.5.3) é aqui proposto. Os dados do problema, geometria e discretização são apresentados na figura 5.27. Como dados adicionais referentes ao modelo de Boltzmann, considera-se o módulo de elasticidade do trecho instantâneo $E_e = 100000,0 \text{ Pa}$ e do trecho viscoso como $E_{ve} = 50000,0 \text{ Pa}$. A figura 5.37

apresenta as respostas do deslocamento longitudinal da face livre comparada com a solução analítica do problema

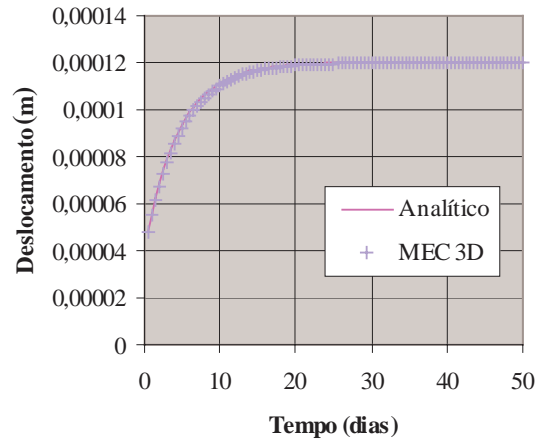


FIGURA 5.37 – Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada.

A resposta da tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} extraídas no centróide do corpo são apresentadas na figura 5.38 juntamente com as respectivas respostas analíticas.

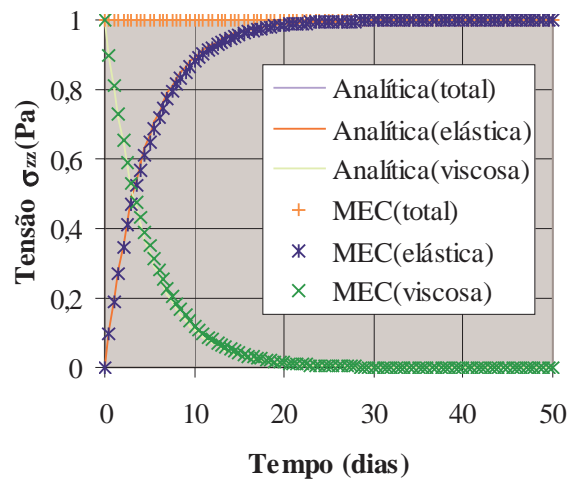


FIGURA 5.38 – Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do centróide do corpo.

5.5.5.5 EXEMPLO 05: Buraco esférico no meio infinito

Um buraco esférico localizado em um meio infinito e solicitado por uma pressão interna uniforme é analisado. A estrutura é discretizada em sua forma completa, sem o uso de simetria, com 1200 elementos de contorno tridimensionais triangulares de três nós. O modelo

adotado neste exemplo foi o modelo viscoso de Boltzmann. A geometria da estrutura juntamente com sua discretização e propriedades físicas são apresentadas na figura 5.39.

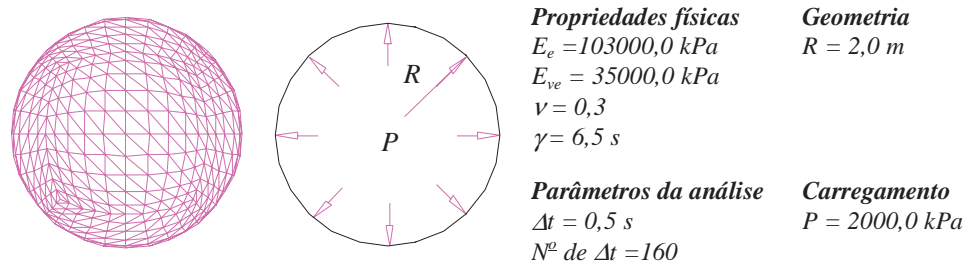


FIGURA 5.39 – Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura.

A figura 5.40 apresenta resultados do deslocamento radial ao longo de uma linha reta que passa pela origem da esfera extraído no tempo $t = 30s$. O resultado é confrontado com a resposta analítica do problema viscoelástico.

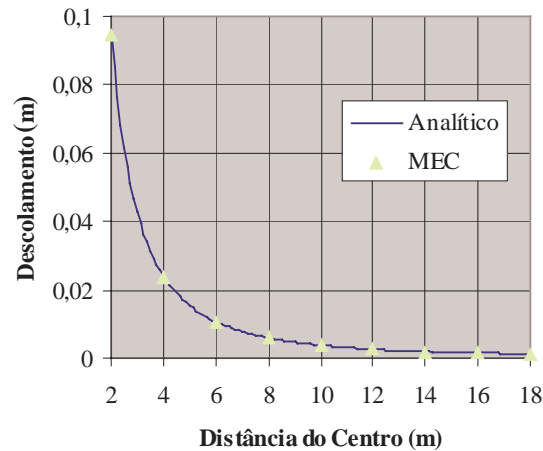


FIGURA 5.40 – Deslocamento radial para $t=30s$.

Observando a figura 5.40 pode-se concluir que a resposta numérica está em perfeito acordo com a analítica. Resultados da tensão radial σ_r e tangencial σ_θ ao longo de uma linha reta que passa pela origem da esfera, referente ao tempo $t = 30s$ são apresentados na figura 5.41. Semelhantemente a figura 5.40, o resultado numérico é confrontado com a resposta analítica do problema viscoelástico.

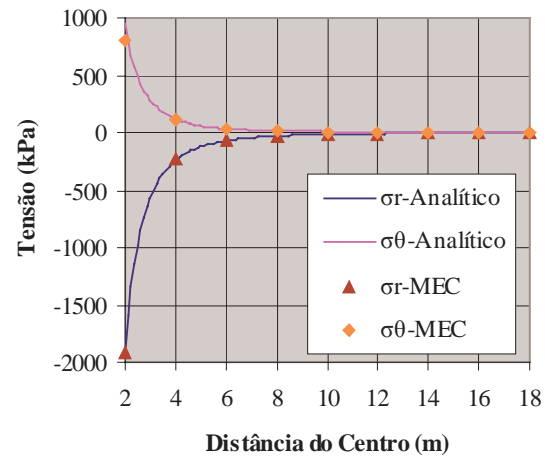


FIGURA 5.41 – Tensão radial σ_r e tangencial σ_θ para $t=30s$.

Os resultados da figura 5.41 demonstram um perfeito comportamento da formulação viscosa tridimensional aqui proposta.

Capítulo 6

FORMULAÇÃO ELASTOPLÁSTICA DO MEC

6.1 INTRODUÇÃO

O comportamento plástico é evidenciado em muitos materiais. A consideração deste em situações limite é indispensável para se compreender melhor a resposta da estrutura analisada. Modelar este comportamento de maneira adequada é uma meta extremamente difícil e seu sucesso depende, em geral, da consideração dos fatores mais importantes envolvidos no processo, tais como: carga, temperatura, duração do processo, comportamento físico, etc.. O regime plástico de um material se caracteriza por uma relação não-linear entre tensões e deformações, ao contrário da elasticidade linear. Este fica evidenciado pelo aparecimento de deformações irreversíveis, quando se anula a sollicitação a que o corpo esteja sujeito. Essas deformações plásticas aparecem quando os níveis de tensão excedem o denominado limite de plastificação.

Este comportamento não-linear pode ser levado em consideração, de uma forma geral e precisa, através dos métodos computacionais, tais como o MEF e o MEC. A consideração de problemas envolvendo plasticidade pelo MEC teve seu início em 1973 com os trabalhos de RICARDELLA(1973) e MENDELSON(1973). As formulações inicialmente propostas apresentavam algumas incorreções que foram contornadas mais tarde por BUI(1978). Procedimentos que até hoje são utilizados no desenvolvimento de pesquisas relativas a este tema podem ser encontrados nos trabalhos de TELLES & BREBBIA(1980) e VENTURINI(1982). Mais recentemente, foram definidas metodologias que consideram a atualização do sistema não-linear do MEC, veja TELLES & CARRER(1991) e TELLES & CARRER(1994). Nestes trabalhos, o operador constitutivo elastoplástico empregado na atualização do sistema não é consistente com o procedimento implícito de atualização das

tensões e sim o operador tangente “clássico” (ou contínuo). O uso do módulo elastoplástico “clássico” provoca a perda da taxa assintótica de convergência quadrática do método de Newton-Raphson SIMO & TAYLOR(1986). Procedimentos mais arrojados que consideram não só a atualização consistente do sistema linear, mas também uma correção das tensões segundo um procedimento implícito do tipo “return mapped” são apresentados em BONNET & MUKHERJEE(1996) e HARRISON *et al.*(1998).

Uma forma alternativa de abordar o problema elastoplástico pelo MEC é apresentada neste capítulo. As representações integrais são basicamente as mesmas, porém o procedimento de correção do resíduo plástico é alterado. As abordagens clássicas baseadas no problema de tensão inicial propõem que esta correção seja feita em nível de tensão, evitando utilizar o sistema de equação em deslocamento, a não ser no final do processo iterativo. Para isto era necessário, um certo esforço algébrico de forma a agrupar e ordenar as expressões das tensões no contorno e no domínio, fazendo-se necessário calcular a inversa da matriz do sistema principal. Pode-se dizer que esta forma de tratar o problema é bem eficiente, computacionalmente falando. Porém, quando se trata de acoplamento não-linear entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos, esta abordagem é inapropriada, pois a combinação entre os resíduos plásticos deve ser feita em concordância com a compatibilidade geométrica entre os meios acoplados, ou seja, em nível de deslocamento. Assim, é necessário escrever as equações do MEC de forma semelhante ao MEF e tratar o problema de correção do resíduo como usualmente é feito pelo MEF. Além disso, esta abordagem permite implementar de forma direta, sem modificações, os procedimentos do tipo implícito, usualmente utilizados no MEF para a atualização das tensões.

6.2 FORMULAÇÃO ELASTOPLÁSTICA

As relações reológicas elastoplásticas foram definidas no item (2.5). O modelo é aquele apresentado na figura 2.4 pelo arranjo em serie de uma mola com um arranjo bloco-mola. A representação integral elastoplástica do MEC é obtida pela imposição da relação reológica do modelo eq.(2.20) sobre a equação integral (3.15).

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij}^p d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega = 0 \quad (6.1)$$

A terceira integral em (6.1) é responsável pela contribuição da plastificação do sólido. Sabendo-se que:

$$\varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} = \sigma_{klm}^* \dot{\varepsilon}_{lm} = \sigma_{klm}^* \dot{u}_{l,m} = \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} \quad (6.2)$$

logo, a equação (6.1) torna-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij}^p d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega = 0 \quad (6.3)$$

Integrando-se por partes na segunda integral da equação (6.3), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij}^p d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega = 0 \quad (6.4)$$

A terceira integral pode ser reescrita fazendo-se uso da equação de equilíbrio fundamental definida em (3.20). Assim, aplicando-se a equação (3.20) em (6.4), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac e as técnicas para integrais singulares artificiais para integrais singulares, sabendo-se que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$, encontra-se:

$$\bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij}^p d\Omega \quad (6.5)$$

Ressalta-se ainda que a penúltima integral pode ser transformada em integral de contorno, tornando a formulação mais elegante e computacionalmente mais econômica. Dessa forma, será necessário o uso de células apenas nas regiões plastificadas. Estas transformações foram apresentadas de forma resumida nas equações (5.41) e (5.70). Uma discussão mais detalhada sobre essas deduções pode ser encontrada no Anexo A. Assim, a equação integral (6.5) pode ser escrita como:

$$\bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij}^p d\Omega \quad (6.6)$$

A equação (6.6) é a representação integral da formulação elastoplástica do MEC. Note que a única diferença desta representação para a representação elastostática, a menos da

representação em taxa, é a presença da terceira integral responsável pelo comportamento plástico. Esta integral de domínio apresenta singularidade de $1/r$ para o caso bidimensional e $1/r^2$ para o caso tridimensional e será tratada utilizando-se células apenas nas regiões onde ocorre o processo de plastificação e sua singularidade será eliminada fazendo-se uso da técnica de transformação de coordenadas. O termo ε_{kij}^* e B_{ki}^* são os mesmos apresentados em (5.2) e (5.42), respectivamente. Para evitar maiores confusões com as formulações viscosas, é importante ressaltar que todos os termos que aparecem com um ponto como sobrescrito referem-se a incrementos infinitesimais e não a derivadas com relação ao tempo.

6.2.1 Representação integral para tensões em pontos internos

Deve-se ressaltar que as expressões podem ser obtidas tanto em sua forma incremental como em sua forma total. Neste trabalho, optou-se por escrever as expressões das tensões em sua forma total, por ser mais eficiente, evitando alocar variáveis necessárias no armazenamento dos valores incrementais. Além disso, esta abordagem facilita a implementação de procedimentos para atualização das tensões do tipo implícito, inicialmente propostos para o MEF. Assim, para se obter a representação integral para tensões em pontos internos, é necessário escrever a equação (6.6) em sua forma total, sabendo que para a situação onde o ponto fonte se localiza no interior do corpo o termo \bar{C}_{ki} transforma-se em δ_{ki} e conseqüentemente a equação integral fica escrita como:

$$u_k(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega \quad (6.7)$$

Diferenciando-se adequadamente a equação (6.7) é possível determinar a representação integral para as deformações em pontos internos, fazendo-se uso da definição de pequenas deformações expressa em (3.24). As deformações são obtidas de maneira análoga ao problema elastostático. Entretanto, cuidados especiais devem ser tomados na integral que tem como núcleo ε_{kij}^* . Esta deve ser diferenciada utilizando-se os conceitos de integrais singulares. Assim, diferenciando a equação (6.7) e aplicando esta na definição das deformações em (3.24), encontra-se:

$$\varepsilon_{ke}(p) = \int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* u_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \hat{B}_{kei}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{keij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega + \hat{g}_{keij} \sigma_{ij}^p(p) \quad (6.8)$$

Note que como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. Observe ainda que a diferenciação da integral cujo núcleo é ε_{kij}^* deu origem a um termo adicional conhecido como termo livre. Este termo está melhor esclarecido no Anexo B referente à derivação de integrais singulares. As tensões totais são obtidas aplicando-se a definição das deformações totais expressas em (6.8) sobre a relação reológica do modelo apresentada na equação (2.20), escrita na sua forma total, resultando:

$$\sigma_{\rho q}(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* P_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega + \bar{g}_{\rho qij} \sigma_{ij}^p(p) - \sigma_{\rho q}^p(p) \quad (6.9)$$

Sabendo-se que $\sigma_{\rho q}^p = \delta_{\rho i} \delta_{qj} \sigma_{ij}^p$, os dois últimos termos da representação integral em (6.9) podem ser reordenados de maneira que:

$$\sigma_{\rho q}(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* P_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega + \bar{g}_{\rho qij} \sigma_{ij}^p(p) \quad (6.10)$$

A equação (6.10) é a representação integral das tensões totais para o caso elastoplástico, sendo $\bar{t}_{\rho qij}^*$, $\bar{g}_{\rho qij}$ e $\bar{B}_{\rho qi}^*$ os mesmos definidos nas equações (5.9a), (5.12) e (5.48), respectivamente. Note que a quarta integral em (6.10) apresenta singularidade do tipo $1/r^2$ para o caso bidimensional e $1/r^3$ para o caso tridimensional. Esta deve ser computada no sentido de valor principal e será tratada utilizando-se células e uma eficiente técnica de subtração de singularidade exposta no Anexo D.

6.2.2 Obtenção das tensões no contorno

As tensões no contorno são obtidas através das forças de superfície e deslocamentos que já foram determinados pela solução do problema de contorno, semelhantemente ao que foi descrito nos capítulos 3 e 5. Uma alternativa para este problema, seria utilizar a equação (6.10), executando-se o limite do ponto fonte tendendo ao contorno do corpo onde se deseja obter as tensões. Porém, esse procedimento provoca o aparecimento de singularidades de alta ordem na representação, cujo tratamento é o objetivo de pesquisas recentes de diversos autores. Assim, as tensões no contorno ficam determinadas, fazendo-se uso das relações elastoplásticas (2.20), pelas seguintes expressões para o caso tridimensional:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{13} &= \bar{\sigma}_{31} = \bar{p}_1 \\
\bar{\sigma}_{23} &= \bar{\sigma}_{32} = \bar{p}_2 \\
\bar{\sigma}_{33} &= \bar{p}_3 \\
\bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = 2\mu\bar{\epsilon}_{12} - \bar{\sigma}_{12}^p \\
\bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_3 + \bar{\sigma}_{33}^p) + 2\mu(\bar{\epsilon}_{11} + \nu\bar{\epsilon}_{22})] - \bar{\sigma}_{11}^p \\
\bar{\sigma}_{22} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_3 + \bar{\sigma}_{33}^p) + 2\mu(\bar{\epsilon}_{22} + \nu\bar{\epsilon}_{11})] - \bar{\sigma}_{22}^p
\end{aligned} \tag{6.11}$$

onde o subscrito indica que os valores são referentes ao sistema de coordenadas local. Utilizando-se funções interpoladoras para as forças de superfície é possível determinar as forças de superfície em qualquer ponto do elemento de contorno e conseqüentemente encontrar uma parcela do tensor de tensões expressa pelas três primeiras equações em (6.11). As componentes de tensão restantes são determinadas fazendo-se uso da relação constitutiva do modelo, expressa pelas três últimas equações. Note que nas duas últimas equações a deformação $\bar{\epsilon}_{33}$ foi eliminada através do uso da terceira equação em (6.11). Assim, torna-se necessário, para determinar as tensões restantes, encontrar as componentes de deformação presentes nas expressões anteriores. Estas são facilmente determinadas pela derivação eq.(3.30) do campo de deslocamento definido sobre o elemento eq.(3.29). Observe que antes da aplicação das expressões (6.11) é necessário transformar as forças de superfície e os deslocamentos nodais para as coordenadas locais, veja figura 3.2. Após a determinação das tensões, pode-se obtê-las no sistema global utilizando-se a matriz de transformação. Para o problema bidimensional o procedimento é o mesmo e necessita apenas da determinação de uma componente de deformação eq.(3.32). Conseqüentemente, para a situação de estado plano de deformação, resulta:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{22} &= \bar{p}_2 \\
\bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = \bar{p}_1 \\
\bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_2 + \bar{\sigma}_{22}^p) + 2\mu\bar{\epsilon}_{11}] - \bar{\sigma}_{11}^p
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Para estado plano de tensão as expressões são as mesmas, apenas o coeficiente de Poisson deve ser $\nu/(1+\nu)$ sem alterar a constante de Lamé μ . Note que, no caso 2D \bar{x}_1 (fig. 3.2) é a direção tangencial no ponto onde se deseja extrair as tensões e \bar{x}_2 é a direção normal. É importante observar que ambas as relações constitutivas são empregadas em sua forma total e não em forma incremental, semelhantemente aquelas obtidas para pontos internos eq.(6.10).

6.2.3 Tratamento algébrico para as representações integrais

O problema elastoplástico será modelado pelo MEC discretizando-se o contorno do corpo e o domínio onde será evidenciada a não-linearidade do material. As equações algébricas do método dos elementos de contorno podem ser obtidas dividindo-se o contorno Γ com n_e elementos de contorno Γ_e e o domínio Ω , onde ocorrerá plastificação, com n_c células Ω_c (fig. 6.1), de maneira que as variáveis do contorno e do domínio sejam representadas adequadamente.

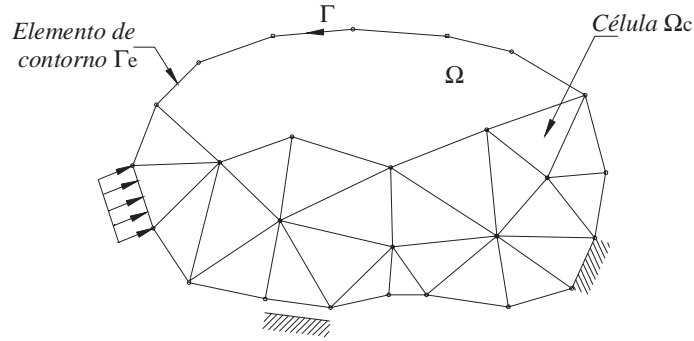


FIGURA 6.1 – Discretização do problema

Assim, as variáveis do problema podem ser aproximadas através de funções de forma, interpoladas com relação aos seus valores nodais.

$$\begin{aligned}
 p_i &= \phi^\alpha P_i^\alpha; & \dot{p}_i &= \phi^\alpha \dot{P}_i^\alpha \\
 u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha; & \dot{u}_i &= \phi^\alpha \dot{U}_i^\alpha \\
 \sigma_{ij}^p &= \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} \sigma_{ij}^{p(\tilde{\alpha})}; & \dot{\sigma}_{ij}^p &= \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} \dot{\sigma}_{ij}^{p(\tilde{\alpha})}
 \end{aligned}
 \tag{6.13}$$

onde ϕ e $\tilde{\phi}$ são respectivamente as funções de forma adotadas para interpolar os elementos de contorno e as células e os subscritos α e $\tilde{\alpha}$ referem-se aos nós do elemento de contorno e da célula, respectivamente. Os termos P_i^α , U_i^α , $\sigma_{ij}^{p(\tilde{\alpha})}$, \dot{P}_i^α , $\dot{U}_i^{\tilde{\alpha}}$ e $\dot{\sigma}_{ij}^{p(\tilde{\alpha})}$ são valores nodais de forças de superfície, deslocamentos, tensões iniciais e seus respectivos incrementos. Consequentemente, as representações integrais de deslocamento e tensão ficam escritas como:

$$\bar{C}_{ki} \dot{U}_i(p) = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{P}_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + \sum_{e=1}^{n_e} \dot{b}_i \int_{\Gamma_e} B_{ki}^* d\Gamma_e +$$

$$\sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \varepsilon_{kij}^* \tilde{\phi} \tilde{\alpha} d\Omega_c \dot{\sigma}_{ij}^{p(\tilde{\alpha})}$$

(6.14a)

$$\sigma_{\rho q}(p) = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha + \sum_{e=1}^{n_e} \dot{b}_i \int_{\Gamma_e} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma_e +$$

$$\sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{t}_{\rho qij}^* \tilde{\phi} \tilde{\alpha} d\Omega_c \sigma_{ij}^{p(\tilde{\alpha})} + \bar{g}_{\rho qij} \sigma_{ij}^p(p)$$

(6.14b)

Note que o termo livre presente na equação das tensões totais deve ser reordenado com o penúltimo termo, bem como o termo \bar{C}_{ki} deve ser adequadamente adicionado a segunda integral em (6.14a), como usualmente é feito no MEC. Depois de executar todas as integrais e escolher pontos fonte em igual número aos nós do problema, pode-se escrever os seguintes sistemas de equações:

$$H\dot{U} = G\dot{P} + B\dot{b} + Q\dot{\sigma}^p \quad (6.15a)$$

$$\sigma = \tilde{G}P - \tilde{H}U + \tilde{B}b + \tilde{Q}\sigma^p \quad (6.15b)$$

6.2.4 Procedimento não-linear

O comportamento plástico dos sólidos é marcado por expressões baseadas em quantidades diferenciais de tensão e deformação. A solução do problema físico exige a integração dessas quantidades diferenciais. Integram-se numericamente as expressões da plasticidade, considerando-se os diferenciais de tensão e deformação como incrementos finitos e não infinitesimais. Consequentemente, um erro de aproximação é cometido. Pode-se reduzir este erro, reaplicando-se, através de um processo iterativo, o resíduo de tensão inicial sobre a estrutura, de maneira que o equilíbrio seja novamente estabelecido. Este procedimento, descrito aqui de forma resumida, é conhecido como procedimento incremental-iterativo. Este será apresentado neste item juntamente com uma abordagem numérica do problema elastoplástico, procurando esclarecer os aspectos computacionais envolvidos na solução do problema não-linear. Assim, enfatizando-se a forma incremental das relações, substituem-se os termos infinitesimais por termos incrementais representados pelo símbolo “ Δ ”. Logo, todo o processo pode ser descrito pelos seguintes passos.

Passo 1 - Inicialmente, admitem-se conhecidas, no final de um instante (passo de carga) “ t ”, as componentes de tensão σ^t , as tensões iniciais $\sigma^{p(t)}$, o incremento das tensões iniciais $\Delta\sigma^{p(t)}$, as deformações plásticas $\varepsilon^{p(t)}$, a variável interna κ^t responsável pelo encruamento, os deslocamentos nodais U^t e as forças de superfície P^t . Ressalta-se que os índices “ i ” e “ t ” referem-se, respectivamente, ao processo iterativo e incremental. Inicia-se um novo incremento de carga.

$$\bar{P}^{t+\Delta t} = \bar{P}^t + \Delta\bar{P}^{t+\Delta t} \quad (6.16a)$$

$$b^{t+\Delta t} = b^t + \Delta b^{t+\Delta t} \quad (6.16b)$$

O subscrito (traço) presente na equação (6.16a) indica a imposição das condições de contorno sobre o vetor P como usualmente visto no MEC.

Passo 2 – Calcula-se o incremento de deslocamento e forças de superfície.

$$\Delta\bar{U}_i^{t+\Delta t} = \bar{H}^{-1}\bar{G}\Delta\bar{P}^{t+\Delta t} + \bar{H}^{-1}B\Delta b^{t+\Delta t} + \bar{H}^{-1}Q\Delta\sigma_{i-1}^{p(t+\Delta t)} \quad (\text{apenas } 1^a \text{ iteração}) \quad (6.17a)$$

$$\Delta\bar{U}_i^{t+\Delta t} = \bar{H}^{-1}Q\Delta\sigma_{i-1}^{p(t+\Delta t)} \quad (\text{demais iterações}) \quad (6.17b)$$

A presença do subscrito na equação (6.17a) e (6.17b) deve ser interpretado da mesma forma que aquele da equação (6.16a), as matrizes e vetores foram modificados devido à imposição das condições de contorno. Na primeira iteração de cada novo incremento $\Delta\bar{U}_1^{t+\Delta t}$ é obtido fazendo-se uso da expressão (6.17a). Porém, para as demais iterações a parte referente ao problema elástico não precisa ser calculada novamente, sendo assim, $\Delta\bar{U}_i^{t+\Delta t}$ é calculado segundo a equação (6.17b). Após a obtenção das incógnitas do problema de contorno, reordena-se os vetores de deslocamento e força de superfície, de maneira que $\Delta U_i^{t+\Delta t}$ contenha apenas deslocamentos e $\Delta P_i^{t+\Delta t}$ apenas forças de superfícies. Estes devem ser acumulados nos respectivos vetores $U_i^{t+\Delta t}$ e $P_i^{t+\Delta t}$, através das expressões:

$$U_i^{t+\Delta t} = U_{i-1}^{t+\Delta t} + \Delta U_i^{t+\Delta t} \quad (6.18a)$$

$$P_i^{t+\Delta t} = P_{i-1}^{t+\Delta t} + \Delta P_i^{t+\Delta t} \quad (6.18b)$$

Passo 3 – Calculam-se as tensões de tentativa para serem verificadas no algoritmo implícito.

$$\sigma_{i(ten)}^{t+\Delta t} = \tilde{G}P_i^{t+\Delta t} - \tilde{H}U_i^{t+\Delta t} + \tilde{B}b^{t+\Delta t} + \tilde{Q}\sigma_{i-1}^{p(t+\Delta t)} \quad (\text{Ponto interno}) \quad (6.19a)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{13}^{ten} &= \bar{\sigma}_{31}^{ten} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{23}^{ten} &= \bar{\sigma}_{32}^{ten} = \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{33}^{ten} &= \bar{p}_3 \\ \bar{\sigma}_{12}^{ten} &= \bar{\sigma}_{21}^{ten} = 2\mu\bar{\epsilon}_{12} - \bar{\sigma}_{12}^p \\ \bar{\sigma}_{11}^{ten} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_3 + \bar{\sigma}_{33}^p) + 2\mu(\bar{\epsilon}_{11} + \nu\bar{\epsilon}_{22})] - \bar{\sigma}_{11}^p \\ \bar{\sigma}_{22}^{ten} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_3 + \bar{\sigma}_{33}^p) + 2\mu(\bar{\epsilon}_{22} + \nu\bar{\epsilon}_{11})] - \bar{\sigma}_{22}^p \end{aligned} \right\} (\text{Ponto no contorno } 3D) \quad (6.19b)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{22}^{ten} &= \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{12}^{ten} &= \bar{\sigma}_{21}^{ten} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{11}^{ten} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_2 + \bar{\sigma}_{22}^p) + 2\mu\bar{\epsilon}_{11}] - \bar{\sigma}_{11}^p \end{aligned} \right\} (\text{Ponto no contorno } 2D) \quad (6.19c)$$

Note que elas são calculadas em sua forma total e não incremental. Além do mais, as expressões para o cálculo das tensões de tentativa são as mesmas em todas as iterações.

Passo 4 - Calculam-se as tensões, as deformações plásticas e as tensões iniciais, ambas nos pontos nodais através de um dos algoritmos de integração implícito, que serão posteriormente apresentados em detalhes no capítulo 7.

$$\sigma_i^{t+\Delta t} = \sigma^t + \int_t^{t+\Delta t} d\sigma_i \quad (6.20)$$

Passo 5 - O critério de convergência verifica se a solução considerada é suficientemente precisa. Este pode ser expresso basicamente de duas maneiras:

$$\text{Convergência em tensão inicial} \quad \frac{\|\Delta\sigma_i^{p(t+\Delta t)}\|}{\|\sigma_1^{p(t+\Delta t)}\|} \leq e_t \quad (6.21a)$$

$$\text{Convergência em deslocamento} \quad \frac{\|U_i^{t+\Delta t} - U_{i-1}^{t+\Delta t}\|}{\|U_1^{t+\Delta t}\|} \leq e_d \quad (6.21b)$$

onde $\|\ \|\$ representa a norma euclidiana e os termos e_t e e_d referem-se a tolerância em tensão inicial e em deslocamento, respectivamente. Verificada a convergência, retorna-se ao **passo 1**,

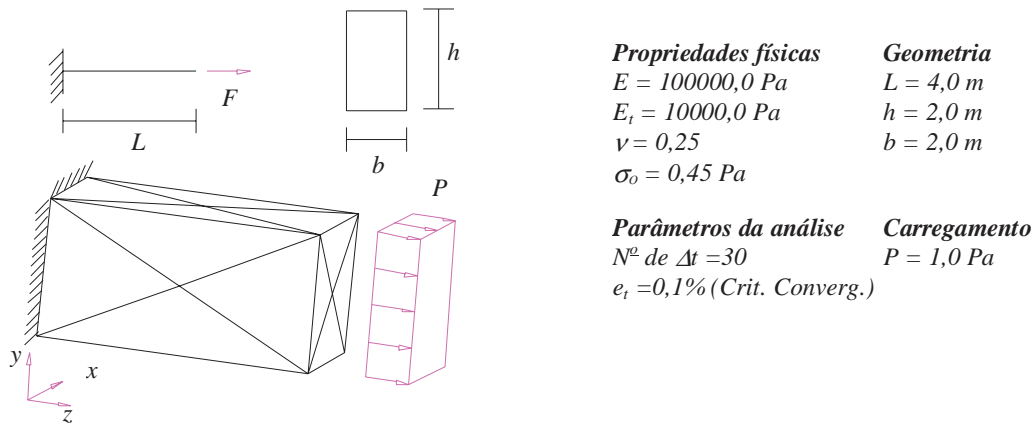


FIGURA 6.3 – Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura.

A resposta do deslocamento longitudinal do ponto central na extremidade onde se aplica a solicitação é apresentada na figura 6.4 e confrontada com a resposta numérica obtida com o método dos elementos finitos utilizando-se elementos de barra e elementos tridimensionais ambos pertencentes ao software ANSYS.

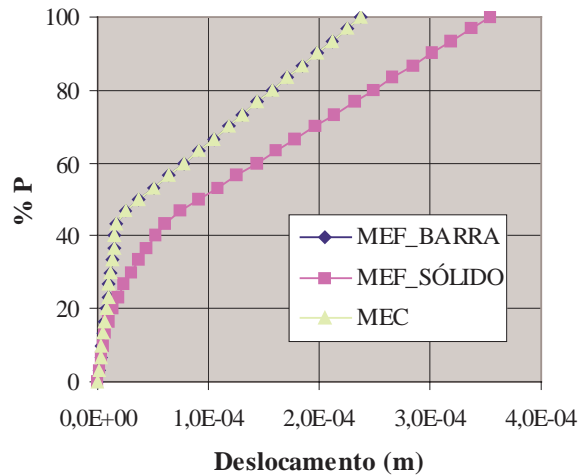


FIGURA 6.4 – Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada.

Nota-se uma perfeita concordância entre os resultados obtidos pela presente formulação e a resposta obtidas com elementos finitos de barra. Já o MEF com elementos sólidos apresenta resultado diferente dos outros dois, expondo um início de plastificação precoce devido à má avaliação das tensões. Porém, a perfeita concordância dos resultados entre o MEC e o MEF com elementos unidimensionais demonstra a consistência do modelo em poder recuperar o caso uniaxial. A resposta da tensão σ_{zz} extraídas em um ponto localizado no centróide do corpo é apresentadas na figura 6.5 juntamente com a resposta analítica.

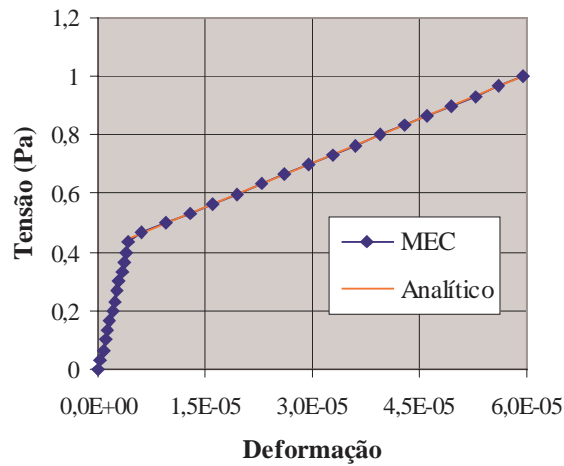


FIGURA 6.5 – Tensão σ_{zz} do ponto localizado no centróide do corpo.

As mesmas observações feitas para a resposta em deslocamentos podem ser estendidas para as tensões. Os próximos resultados foram obtidos com controle de deslocamento. Ao invés de aplicar uma carga distribuída, prescreveu-se deslocamento constante em toda a superfície referente à extremidade livre de um valor total de $3,6 \times 10^{-5} m$, utilizando-se no critério de convergência e_t o valor de 1%. A figura 6.6 apresenta o diagrama *reação x deslocamento* da estrutura analisada considerando-se encruamento nulo, confrontada com a resposta analítica.

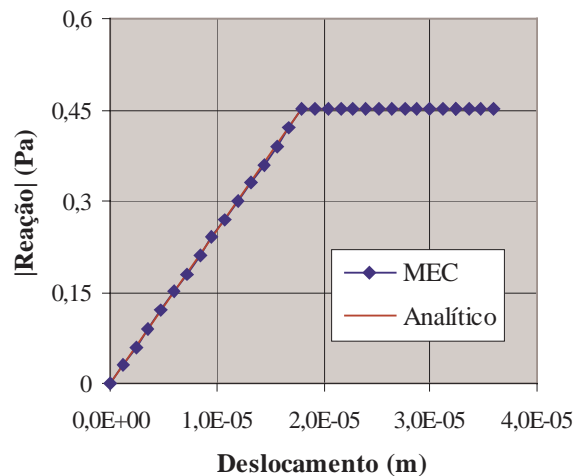


FIGURA 6.6 – Diagrama *reação x deslocamento*.

Semelhantemente a figura 6.6, apresenta-se na figura 6.7 o mesmo diagrama só que levando em consideração o encruamento negativo definido por $E_t = -5,0 \times 10^4 Pa$.

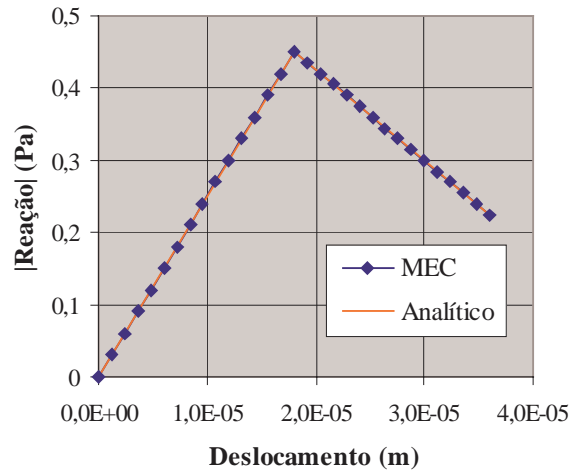


FIGURA 6.7 – Diagrama reação x deslocamento.

Observando as figuras 6.6 e 6.7, novamente percebe-se uma perfeita concordância entre a resposta apresentada pelo MEC e a analítica.

6.2.5.2 Cilindro 3D submetido à pressão interna

Um cilindro de parede espessa submetido a uma pressão interna P sob condições de estado plano de deformação é analisado. Devido a sua dupla simetria apenas 1/4 da estrutura é discretizada. Os mesmos elementos de contorno utilizados no primeiro exemplo foram aqui empregados. Células foram distribuídas apenas na região onde ocorre plastificação. A geometria da estrutura juntamente com sua discretização e suas propriedades físicas são apresentadas na figura 6.8.

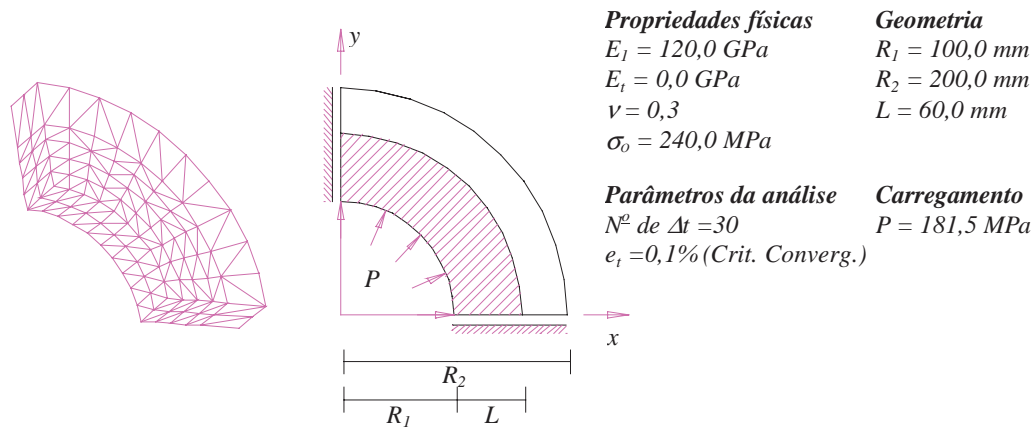


FIGURA 6.8 – Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura.

Os resultados para o deslocamento radial da parede externa da estrutura são apresentados na figura 6.9. A resposta da presente formulação é confrontada com a resposta

obtida por CISILINO(1997) e a resposta analítica do problema para estado plano de deformação.

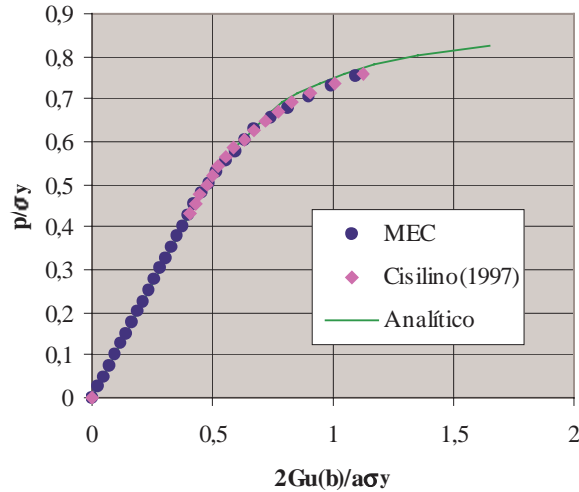


FIGURA 6.9 – Deslocamento radial da parede externa.

Apesar deste problema ser mais complexo que aquele apresentado no primeiro exemplo, verifica-se o bom comportamento de ambas respostas numéricas com a analítica. As tensões σ_r , σ_θ e σ_z ao longo da espessura do cilindro são apresentadas na figura 6.10 confrontadas com as respostas obtidas por CISILINO(1997) e a resposta analítica do problema.

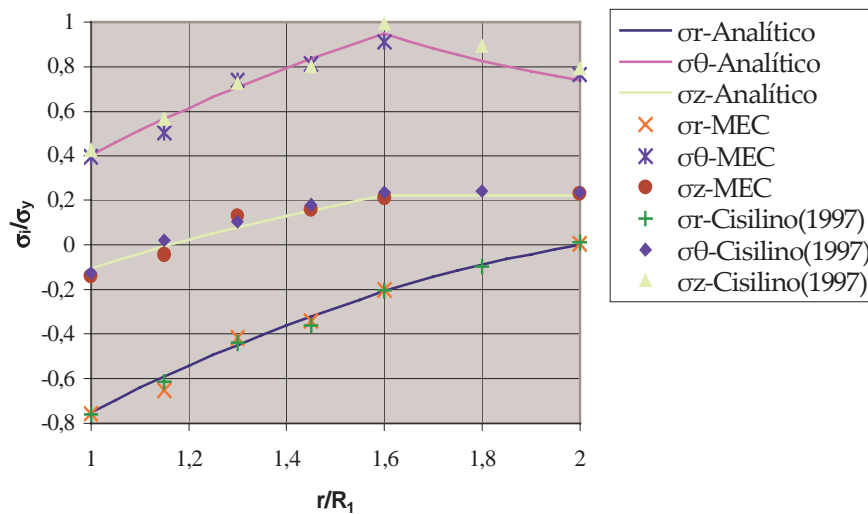


FIGURA 6.10 – Tensões σ_r , σ_θ e σ_z ao longo da espessura

Semelhantemente a resposta em deslocamento observa-se uma boa concordância entre ambos os resultados.

Capítulo 7

ALGORITMOS IMPLÍCITOS PARA ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES

7.1 INTRODUÇÃO

Para se resolver um problema onde o comportamento não-linear do material tem que ser levado em consideração é necessário fazer-se uso de procedimentos numéricos que possibilitem integrar as equações constitutivas que regem o comportamento do material. Porém, deve-se notar que, uma inadequada integração das relações influencia diretamente no comportamento global da estrutura. Algoritmos eficientes são aqueles que possibilitam uma precisa integração das relações constitutivas e uma adequada velocidade de convergência. Essas boas características podem ser encontradas nos algoritmos do tipo "return mapping", amplamente difundidos no meio científico, porém restritos a certos critérios de plastificação e leis de evolução, veja, por exemplo, ORTIZ & POPOV(1985), SIMO & TAYLOR(1986), PRAMONO & WILLAM(1989), CRISFIELD(1991), FEENSTRA & BORST(1996) e MESQUITA(1998). Estes, além de possibilitar uma eficiente atualização das tensões, permitem a obtenção da matriz constitutiva elastoplástica consistente com o algoritmo de retorno, preservando assim a taxa de convergência quadrática do método de Newton-Raphson SIMO & TAYLOR(1986), ORTIZ & POPOV(1985), MESQUITA(1998) e SIMO & TAYLOR(1985).

Nas análises numéricas utilizando-se os algoritmos do tipo implícito, observa-se que o custo computacional maior está na geração da matriz de rigidez global da estrutura (quando o método requer atualização) e no processo de atualização das tensões. O elevado custo na atualização das tensões, principalmente quando o nível de plastificação é alto, é devido ao procedimento iterativo utilizado para resolver a equação de consistência e obter o multiplicador plástico. Entretanto, é possível demonstrar em alguns casos que o multiplicador

plástico pode ser obtido através de simples expressões explícitas encontradas através de uma adequada manipulação das relações constitutivas do modelo proposto. Assim, pode-se evitar os erros de precisão no cálculo do multiplicador plástico e o alto custo computacional necessário para obtê-lo.

Algoritmos do tipo implícito para atualização das tensões são formulados neste capítulo. Estes podem ser introduzidos diretamente tanto nas formulações elastoplásticas apresentada no capítulo 6, quanto nas formulações viscoplásticas que serão posteriormente expostas no capítulo 8. Os procedimentos apresentados são desenvolvidos para o caso tridimensional com os critérios de von Mises e Drucker-Prager com encruamento isotrópico. As expressões do multiplicador plástico são obtidas de forma fechada sem o uso de procedimentos iterativos, preservando as vantagens mencionadas anteriormente. Os dois primeiros algoritmos são construídos com base na lei de fluxo associativa, já os três últimos são formulados segundo uma abordagem não-associativa. Estes últimos seguem a suposição de que o fluxo plástico tende a seguir a direção das deformações elásticas, assim como na mecânica dos fluidos, onde a direção do fluxo é determinada pela diferença de pressão. A adoção desta lei de fluxo simplifica demasiadamente as expressões do algoritmo e sua expressão mais geral permite definir o grau de compressibilidade do material na fase plástica.

7.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS (PLASTICIDADE)

Em estados uniaxiais, os limites da resposta elástica de um material, ficam definidos por um intervalo de valores de tensão. Já em estados multiaxiais a região elástica é limitada no espaço das tensões principais por uma superfície. Esta superfície, conhecida como *superfície de plastificação*, separa os estados de tensão elásticos daqueles que geram deformações irreversíveis. Assim, a plastificação em um ponto fica caracterizada pela verificação da igualdade na relação matemática que define a superfície, ou seja,

$$f(\sigma_{ij}, \kappa) = \bar{f}(\sigma_{ij}) - \bar{\sigma}(\kappa) = 0 \quad (7.1)$$

onde $\bar{\sigma}$ é uma tensão equivalente função do parâmetro de encruamento κ , e \bar{f} é uma função do estado de tensão σ_{ij} . Assume-se que as tensões limite só serão alcançadas se a relação matemática que representa a superfície for satisfeita ($f = 0$). Partindo-se desta hipótese, um

descarregamento (retorno à região elástica) fica evidenciado por variações no estado de tensão que conduzam a valores negativos de f . A situação limite de carregamento neutro é caracterizada por acréscimos no estado de tensão que conduzam a verificação da equação (7.1) com a igualdade. Alterações no estado de tensão que determinem valores positivos de f são inacessíveis e indicam o aparecimento de deformações irreversíveis, caracterizando uma situação de carregamento plástico. Nesta última situação, de acordo com o modelo de encruamento do material, a superfície de plastificação tende a evoluir, de forma que o novo estado de tensão ainda resulte sobre a mesma.

A taxa de deformação total pode ser decomposta em uma parcela elástica reversível ($\dot{\epsilon}_{ij}^e$) e uma parcela plástica irreversível ($\dot{\epsilon}_{ij}^p$).

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (7.2)$$

A taxa de deformação elástica é relacionada com a taxa de tensão através da matriz constitutiva elástica C_{ijlm}^e , da seguinte forma:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijlm}^e \dot{\epsilon}_{lm}^e \quad (7.3)$$

A taxa de deformação plástica pode ser expressa através da seguinte relação:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \partial_{\sigma} g_{ij} \quad (7.4)$$

onde $\dot{\lambda}$ é uma constante de proporcionalidade denominada multiplicador plástico, que deve satisfazer as seguintes condições de complementaridade de Kuhn-Tucker,

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad f \leq 0 \quad e \quad \dot{\lambda} \cdot f = 0 \quad (7.5)$$

O termo g na equação (7.4) é um potencial plástico com unidade de tensão. O caso particular de $g = f$ é conhecido como plasticidade associada. Uma outra forma de idealizar o fluxo plástico seria através da seguinte relação:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} n_{ij} \quad (7.6)$$

onde n_{ij} é um tensor de módulo unitário que define a direção do fluxo plástico. Assim, se a direção adotada n_{ij} não for normal a superfície de plastificação no espaço das tensões principais, pode-se dizer que esta lei é não associativa.

Para o caso de encruamento por deformação o escalar $\dot{\kappa}$ é relacionado com a norma do tensor das taxas de deformações plásticas:

$$\dot{\kappa} = \dot{\varepsilon}^{eq} = K \left\| \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right\| \Rightarrow \kappa = \varepsilon^{eq} = \int K \left\| \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right\| \quad (7.7)$$

onde $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ é o tensor das taxas de deformações plásticas, ε^{eq} é conhecida como deformação plástica equivalente e K é um termo cujo valor deve ser escolhido de tal forma que a partir do modelo generalizado possa-se recuperar o caso unidimensional. Outra possibilidade para se definir a taxa de deformação plástica equivalente, conforme apresentado em LOURENÇO(1996), seria através da definição do trabalho plástico por unidade de volume, da seguinte forma:

$$\dot{W}^P = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \bar{\sigma} \dot{\varepsilon}^{eq} \quad (7.8)$$

de maneira que:

$$\dot{\kappa} = \dot{\varepsilon}^{eq} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (7.9)$$

No caso de encruamento por trabalho, o escalar $\dot{\kappa}$ é simplesmente o trabalho plástico,

$$\dot{\kappa} = \dot{W}^P = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \Rightarrow \kappa = W^P = \int \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (7.10)$$

7.3 ASPECTOS DO ALGORITMO

A integração das equações em taxa é um problema de evolução. As variáveis de estado em um certo instante i são conhecidas e devem ser atualizadas de uma forma consistente,

determinando assim, o estado atual referente ao instante $i+1$. As variáveis internas são determinadas através da utilização de um procedimento implícito (Backward Euler), caindo em um problema governado pelas condições de Kuhn-Tucker, expressas em forma incremental por:

$$\Delta\lambda_{i+1} \geq 0, \quad f_{i+1} \leq 0 \quad e \quad \Delta\lambda_{i+1} f_{i+1} = 0 \quad (7.11)$$

As equações do algoritmo podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1} &= \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_{i+1} \\ \sigma_{i+1} &= C^e (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^p) \\ \varepsilon_{i+1}^p &= \varepsilon_i^p + \Delta\varepsilon_{i+1}^p \\ \kappa_{i+1} &= \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} \end{aligned} \quad (7.12)$$

No processo de integração das tensões pelo procedimento implícito, é necessário considerar um estado de tentativa (etapa de previsão), que é tomado como um passo puramente elástico, através das seguintes relações:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1} &= \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_{i+1} \\ \sigma_{i+1}^{ten} &= C^e (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^p) \\ \kappa_{i+1}^{ten} &= \kappa_i \\ f(\sigma_{i+1}^{ten}, \kappa_{i+1}^{ten}) &= \bar{f}(\sigma_{i+1}^{ten}) - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}^{ten}) \end{aligned} \quad (7.13)$$

A partir deste estado de tentativa é possível determinar se o estado de tensão viola o critério definido pela superfície de plastificação. Se o estado de tensão obtido na previsão elástica não violar o critério, significa que o estado obtido é admissível e compatível com o modelo adotado. Por outro lado, se este violar, um outro estado de tensão deve ser procurado de modo a se tornar compatível com o modelo. Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{i+1} &= \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} C^e n_{i+1} \\ \varepsilon_{i+1}^p &= \varepsilon_i^p + \Delta\lambda_{i+1} n_{i+1} \\ \kappa_{i+1} &= \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} (\Delta\lambda_{i+1}) \end{aligned} \quad (7.14)$$

Deve-se observar que as expressões (7.14) dependem da determinação do multiplicador plástico $\Delta\lambda$ no instante atual. Sendo assim, obtendo-se o escalar $\Delta\lambda_{i+1}$ é possível encontrar as variáveis internas em (7.14) e resolver o problema no instante $i+1$. O multiplicador plástico pode ser encontrado resolvendo-se a condição de consistência no instante $i+1$, ou seja:

$$f(\sigma_{i+1}, \kappa_{i+1}) = \bar{f}(\sigma_{i+1}) - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}) = 0 \quad (7.15)$$

Substituindo-se as expressões de atualização em (7.14) do encruamento κ_{i+1} e das tensões σ_{i+1} na condição de consistência (7.15), encontra-se uma nova equação escrita em função apenas do multiplicador plástico $\Delta\lambda_{i+1}$. Esta equação deve ser resolvida, determinando-se o $\Delta\lambda$ que recupera um novo estado compatível com o modelo adotado. A questão é que para se solucionar a equação, normalmente se utilizam métodos aproximados. Além do mais, para o emprego desses processos aproximados é indispensável fazer um estudo cuidadoso da condição de consistência para saber qual o melhor método a ser empregado e qual deve ser a melhor e mais segura aproximação inicial a ser adotada como ponto de partida. Caso contrário, o método pode divergir ou até mesmo convergir para uma outra solução que não a desejada MESQUITA(1998). Além disso, como o processo aproximado é iterativo, o custo computacional envolvido nas situações onde o nível de plastificação é bastante relevante. Felizmente, é possível demonstrar, para alguns critérios de plastificação, que o multiplicador plástico pode ser obtido por uma expressão simples e fechada. Fazendo-se uso de expressões fechada, evitam-se os erros de precisão no cálculo do $\Delta\lambda$ e o alto custo computacional necessário para obtê-lo. Essas deduções serão apresentadas nos próximos itens para o estado tridimensional com os critérios de von Mises e Drucker-Prager com leis de fluxo associativo e não-associativo. Estas podem ser degeneradas diretamente para o estado plano de deformação, bastando apenas suprimir os termos que não interessam ao problema.

7.4 ALGORITMO 1: VON MISES ASSOCIATIVO

O procedimento implícito por si só fornece suficiente precisão, evitando a aplicação de técnicas, tais como sub-incrementação, para melhorar o seu desempenho. Este tem se mostrado em diferentes estudos, veja SIMO & TAYLOR(1986), ser “*incondicionalmente*

estável”¹, para plasticidade- J_2 , não possuindo restrições com relação ao passo de carga. Outros pesquisadores têm também afirmado que, até mesmo quando a superfície é altamente distorcida o algoritmo é incondicionalmente estável ORTIZ & POPOV(1985), LOURENÇO(1996) e FEENSTRA & BORST(1996). Segundo SIMO & HUGHES(1988), este procedimento permite a definição de uma matriz tangente elastoplástica consistente com o algoritmo de retorno². O uso do operador tangente elastoplástico consistente melhora a taxa de convergência método para solução do sistema não-linear. O critério de plastificação utilizando-se a superfície de von Mises pode ser escrito como:

$$f = \bar{f}(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma}(\kappa) = \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T P \boldsymbol{\sigma} \right)^{1/2} - \bar{\sigma}(\kappa) \leq 0 \quad (7.16)$$

O termo P é uma matriz simétrica definida da seguinte forma:

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

Já $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões escrito em forma vetorial como:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23}] \quad (7.18)$$

A tensão equivalente $\bar{\sigma}$ é definida, neste trabalho, segundo uma lei de encruamento isotrópica linear (fig. 7.1) escrita em função do limite de plastificação inicial σ_o do parâmetro de encruamento isotrópico κ e seu respectivo módulo plástico H .

¹ Um procedimento numérico é “condicionalmente estável” se ele é estável apenas quando certas condições no passo de carga são satisfeitas.

²No procedimento explícito a matriz tangente elastoplástica consistente não pode ser formulada sem a perda de sua simetria conforme apresentado em SIMO & TAYLOR(1986).

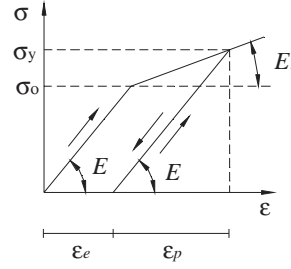


FIGURA 7.1 – Lei de encruamento

$$\bar{\sigma}(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_o + H\kappa) \quad (7.19)$$

As deformações plásticas incrementais são definidas segundo a expressão (7.4), considerando-se a associatividade, ou seja,

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \Delta \lambda \partial_\sigma f = \frac{\Delta \lambda}{2f} P \sigma \quad (7.20)$$

De maneira que a expressão de atualização das deformações plásticas fica escrita como:

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta \varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \frac{\Delta \lambda_{i+1}}{2f_{i+1}} P \sigma_{i+1} \quad (7.21)$$

O incremento $\Delta \kappa$ é obtido utilizando-se a hipótese de encruamento por deformação expressa pela equação (7.7).

$$\Delta \kappa = \Delta \varepsilon^{eq} = K \left\| \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\Delta \varepsilon_{11}^{p2} + \Delta \varepsilon_{22}^{p2} + \Delta \varepsilon_{33}^{p2} + 2(\Delta \varepsilon_{12}^{p2} + \Delta \varepsilon_{13}^{p2} + \Delta \varepsilon_{23}^{p2})} \quad (7.22)$$

Note que a constante K foi escolhida como sendo igual $\sqrt{2/3}$, pois para o critério de von Mises, onde os estados hidrostático não influenciam no processo de plastificação, demonstra-se que assumindo $K = \sqrt{2/3}$ a condição de incompressibilidade na plastificação é respeitada e consegue-se reproduzir o comportamento de um corpo de prova submetido ao

ensaio uniaxial. Substituindo-se a definição das deformações plásticas incrementais em (7.20) na expressão (7.22) pode-se ainda deduzir que:

$$\Delta\kappa = \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}} \quad (7.23)$$

Consequentemente a expressão de atualização do parâmetro de encruamento fica:

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} = \kappa_i + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{\sqrt{3}} \quad (7.24)$$

Agora deve-se partir para encontrar a expressão de atualização das tensões.

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta\sigma_{i+1} = \sigma_i + C^e (\Delta\varepsilon_{i+1} - \Delta\varepsilon_{i+1}^p) \quad (7.25)$$

Pode-se reescrever a expressão (7.25), definindo-se um estado de tentativa puramente elástico (ou seja, $\Delta\varepsilon_{i+1}^p = 0$).

$$\sigma_{i+1}^{ten} = \sigma_i + C^e \Delta\varepsilon_{i+1} \quad (7.26)$$

Substituindo-se a expressão de σ_{i+1}^{ten} em (7.26) e a definição de $\Delta\varepsilon_{i+1}^p$ em (7.20) na equação de atualização das tensões em (7.25), encontra-se:

$$\sigma_{i+1} = \tilde{\Xi} \sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.27)$$

sendo

$$\tilde{\Xi} = \left[I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\hat{f}_{i+1}} C^e P \right]^{-1} \quad (7.28)$$

Note que a matriz Ξ é escrita em função do estado de tensão atual, pois \bar{f} é função de σ_{i+1} , o que não é conveniente para a expressão de atualização das tensões. Felizmente esta pode ser escrita em uma forma mais adequada quando a igualdade (7.1) for verificada.

$$\bar{f}_{i+1} = \bar{\sigma}_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sigma_o + H \left(\kappa_i + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{\sqrt{3}} \right) \right] \quad (7.29)$$

Agora deve-se encontrar a expressão da condição de consistência de maneira que se possa resolve-la e assim determinar o multiplicador plástico. Entretanto para isto, antes deve-se desenvolver a expressão de atualização das tensões. Assim, manipulando com a expressão (7.28) é possível chegar na seguinte expressão para a Ξ :

$$\Xi = \frac{1}{3 \left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu) \right)} \left[3(1+\nu)I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} EL \right] \quad (7.30)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson E é o módulo de elasticidade, I é a matriz identidade de ordem 6×6 e L é uma matriz expressa como:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

Agora, parte-se para explicitar a função \bar{f}_{i+1} , ou seja,

$$\bar{f}_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1} \right) \quad (7.32)$$

Para isto faz-se inicialmente o produto $P\sigma_{i+1}$.

$$P\sigma_{i+1} = \frac{1}{3\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)} \left[3(1+\nu)PI + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}EPL \right] \sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.33)$$

note que $PI = P$ e $PL = 0$, sendo assim,

$$P\sigma_{i+1} = \frac{1}{3\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)} 3(1+\nu)P\sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.34)$$

Desenvolvendo o termo $\sigma_{i+1}^T P\sigma_{i+1}$.

$$\sigma_{i+1}^T P\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{tenT} \frac{1}{3\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)} \left[3(1+\nu)I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}EL \right] \frac{1}{3\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)} 3(1+\nu)P\sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.35)$$

sendo que $IP = P$ e $LP = 0$, onde 0 é uma matriz 6×6 nula, é possível chegar na seguinte expressão:

$$\sigma_{i+1}^T P\sigma_{i+1} = \frac{(1+\nu)^2}{\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)^2} \sigma_{i+1}^{tenT} P\sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.36)$$

Consequentemente,

$$\bar{f}_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^T P\sigma_{i+1} \right)^{1/2} = \frac{1+\nu}{\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)} \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P\sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} \quad (7.37)$$

Logo, explicitando-se \bar{f}_{i+1} em (7.37), obtém-se:

$$\bar{f}_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P\sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} - \Delta\lambda_{i+1}G \quad (7.38)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal. Observe que a expressão (7.38) é função apenas do multiplicador plástico e pode ser utilizada na expressão de atualização das tensões, em lugar, caso desejado, da expressão (7.29). Obtida a expressão de \bar{f}_{i+1} parte-se agora para a obtenção da condição de consistência. É possível obter mais de uma expressão para a condição de consistência. Em geral, é possível encontrar uma expressão mais complexa, possuindo mais de uma raiz e pontos de singularidades. Para isto, substitui-se a expressão (7.37) no critério de plastificação em (7.16).

$$f_{i+1} = \frac{1+\nu}{\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)} \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} - \bar{f}_{i+1} = 0 \quad (7.39)$$

com \bar{f}_{i+1} calculado, por exemplo, pela expressão (7.29). Uma expressão mais simples é obtida pela substituição da expressão (7.38) no critério de plastificação (7.16), de maneira que:

$$f_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} - \Delta\lambda_{i+1} G - \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sigma_o + H \left(\kappa_i + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{\sqrt{3}} \right) \right] = 0 \quad (7.40)$$

Note que foi possível obter duas expressões para a condição de consistência. A primeira eq.(7.39) é uma função mais complexa, em geral possuindo mais de uma raiz e pontos de singularidade. Para solucionar-la é necessário fazer uso de procedimentos iterativos aproximados tal como o método de Newton-Raphson. Já a segunda eq.(7.40) é uma função linear sem nenhuma singularidade e a expressão de sua única raiz pode ser obtida explicitamente por:

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{\left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{3}} [\sigma_o + H \kappa_i]}{G + \frac{H}{3}} = \frac{f_{i+1}^{ten}}{G + \frac{H}{3}} \quad (7.41)$$

Fazendo-se uso dessa expressão é possível obter o valor do multiplicador plástico, para o modelo adotado, sem a necessidade de se utilizar métodos iterativos aproximados. Eliminando-se, conseqüentemente, os erros de precisão e custo computacional envolvido no

cálculo do $\Delta\lambda$. Para uma melhor compreensão de todo o procedimento implícito aqui discutido, apresenta-se, de forma resumida, os passos do algoritmo na figura 7.1.

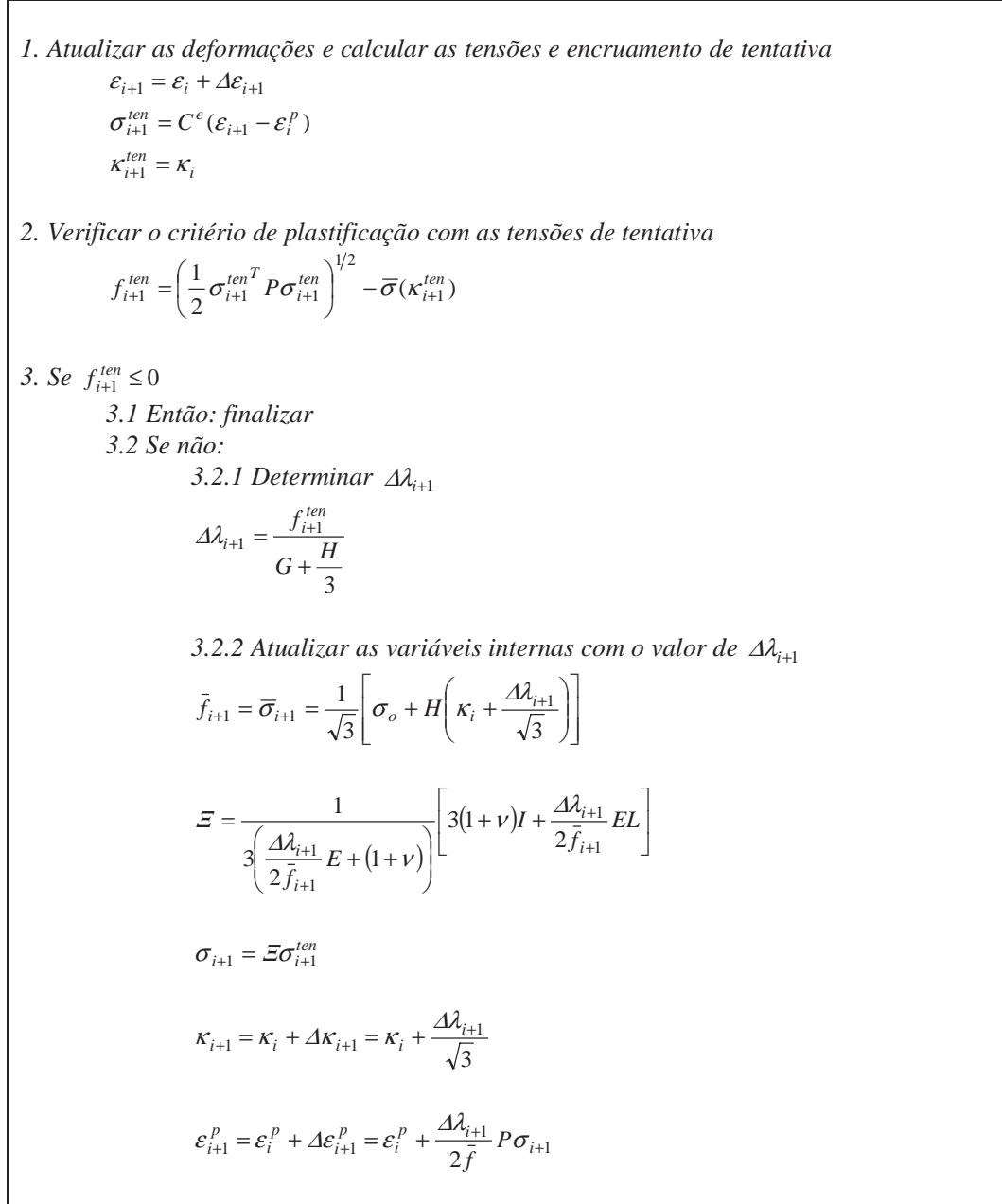


FIGURA 7.2 - Algoritmo de integração implícito para o critério de von Mises 3D.

7.5 ALGORITMO 2: DRUCKER-PRAGER ASSOCIATIVO

Este critério aplica-se a materiais granulares coesivos, sendo uma regularização da superfície de Coulomb. Esta superfície foi proposta por Drucker-Prager em 1952, e representa um cone no espaço das tensões principais. Sua expressão matemática pode ser encontrada através de uma modificação na expressão do critério de von Mises, acrescentado-se uma parcela relativa ao primeiro invariante. Assim, o critério de Drucker-Prager pode ser apresentado na seguinte forma:

$$f = \tilde{f}(\sigma) - \bar{\sigma}(\kappa) = \left(\frac{1}{2} \sigma^T P \sigma \right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma - \bar{\sigma}(\kappa) \leq 0 \quad (7.42)$$

onde P e σ são os mesmos apresentados nas equações (7.17) e (7.18), respectivamente. Já o vetor μ é definido como:

$$\mu^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (7.43)$$

A tensão equivalente $\bar{\sigma}$ é definida, semelhantemente ao critério de von Mises (fig. 7.1), segundo uma lei de encruamento isotrópica, ou seja,

$$\bar{\sigma}(\kappa) = \sigma_o + \frac{H}{\sqrt{3}} \kappa \quad (7.44)$$

Os escalares σ_o e α são definidos em função da coesão c e do ângulo de atrito interno do material ϕ .

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad \text{e} \quad \sigma_o = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (7.45)$$

Para o critério de Drucker-Prager, as deformações plásticas incrementais, definidas segundo a expressão (7.4), ficam expressas como:

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \Delta \lambda \partial_{\sigma} f = \Delta \lambda \alpha \mu + \frac{\Delta \lambda}{2 \bar{f}} P \sigma \quad (7.46)$$

onde o termo \bar{f} é o mesmo definido para o critério de von Mises, ou seja,

$$\bar{f} = \left(\frac{1}{2} \sigma^T P \sigma \right)^{1/2} \quad (7.47)$$

Sendo assim, a expressão de atualização das deformações plásticas fica escrita como:

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta \varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta \lambda_{i+1} \alpha \mu + \frac{\Delta \lambda_{i+1}}{2 \bar{f}_{i+1}} P \sigma_{i+1} \quad (7.48)$$

O incremento $\Delta \kappa$ será obtido utilizando-se a segunda hipótese de encruamento por deformação expressa pela equação (7.9).

$$\Delta \kappa = \Delta \varepsilon^{eq} = K \frac{1}{\bar{\sigma}} \sigma^T \Delta \varepsilon^p \quad (7.49)$$

Note que o escalar K foi introduzido na expressão (7.49), semelhantemente a definição de encruamento por deformação em (7.7), ou seja, de tal forma que a partir do caso generalizado, levando-se em consideração a condição incompressibilidade, possa-se recuperar o caso uniaxial. Assim para este modelo K vale $1/\sqrt{3}$. Logo, substituindo-se a definição das deformações plásticas incrementais em (7.46) na expressão (7.49), sabendo-se que $\bar{f} + \alpha \mu \sigma^T = \bar{\sigma}$, pode-se ainda deduzir,

$$\Delta \kappa = K \Delta \lambda = \Delta \lambda / \sqrt{3} \quad (7.50)$$

Conseqüentemente, a expressão de atualização do parâmetro de encruamento fica:

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta \kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta \lambda_{i+1} \quad (7.51)$$

Semelhantemente ao modelo de von Mises parte-se agora para encontrar a expressão de atualização das tensões.

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta\sigma_{i+1} = \sigma_i + C^e (\Delta\varepsilon_{i+1} - \Delta\varepsilon_{i+1}^p) \quad (7.52)$$

Utilizando-se a mesma expressão definida em (7.26) para um estado de tentativa puramente elástico, é possível escrever a equação (7.52) como:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{ten} - C^e \Delta\varepsilon_{i+1}^p \quad (7.53)$$

Substituindo-se a definição de $\Delta\varepsilon_{i+1}^p$ em (7.46) na equação de atualização das tensões em (7.53), encontra-se:

$$\sigma_{i+1} = \Xi \left(\sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha C^e \mu \right) \quad (7.54)$$

sendo Ξ é a mesma matriz definida na equação (7.28) a não ser pela expressão de \bar{f}_{i+1} . Semelhantemente ao critério de von Mises, note que a matriz Ξ é escrita em função do estado de tensão atual, pois \bar{f}_{i+1} é função de σ_{i+1} , o que não é conveniente para a expressão de atualização das tensões. Felizmente pode-se encontrar uma expressão mais adequada para \bar{f}_{i+1} escrita em função de $\Delta\lambda_{i+1}$, pré-multiplicando ambos os lados da expressão de atualização das tensões em (7.54) por μ^T , antes da inversão, ou seja,

$$\left[\mu^T I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}} \mu^T C^e P \right] \sigma_{i+1} = \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha \mu^T C^e \mu \quad (7.55)$$

Levando-se em consideração que:

$$\mu^T C^e P = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad \text{e} \quad \mu^T C^e \mu = \frac{3E}{1-2\nu} \quad (7.56)$$

Conseqüentemente,

$$\mu^T \sigma_{i+1} = \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha \frac{3E}{1-2\nu} \quad (7.57)$$

A expressão de \bar{f} pode ser melhor escrita fazendo-se uso do critério de plastificação.

$$\bar{f}_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1} \right)^{1/2} = \bar{\sigma}(\Delta\lambda_{i+1}) - \alpha \mu^T \sigma_{i+1} \quad (7.58)$$

Substituindo-se a expressão $\mu^T \sigma_{i+1}$ dada pela equação (7.57) na equação (7.58), pode-se escrever \bar{f}_{i+1} em função apenas de $\Delta\lambda_{i+1}$.

$$\bar{f}_{i+1} = \bar{\sigma}(\Delta\lambda_{i+1}) - \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} + \Delta\lambda_{i+1} \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu} \quad (7.59)$$

Assim, a expressão de atualização das tensões fica escrita apenas em função do multiplicador plástico. Agora é necessário obter a equação de consistência escrita em função apenas de $\Delta\lambda_{i+1}$. Para isto, é necessário fazer algumas manipulações algébricas. Semelhantemente ao que foi feito para o procedimento de von Mises, deve-se desenvolver a expressão de atualização das tensões em (7.54). Assim, executando a inversão e os produtos matriciais e rearranjando os termos é possível escrever:

$$\sigma_{i+1} = \frac{1}{3 \left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu) \right)} \left[3(1+\nu)I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} EL \right] \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha \frac{E}{1-2\nu} \mu \quad (7.60)$$

onde I e L são os mesmos definidos anteriormente. Substituindo a expressão (7.60) na expressão do critério de plastificação (7.42), pode-se desenvolver uma das expressões para a condição de consistência, ou seja,

$$f_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1} \right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma_{i+1} - \bar{\sigma}_{i+1}(\kappa) \quad (7.61)$$

Devido ao grande dimensão das expressões, desenvolve-se termo a termo. Assim, para o primeiro termo da equação (7.61), fazendo-se uso da expressão de atualização das tensões (7.60) encontra-se o termo $P\sigma_{i+1}$, como segue:

$$P\sigma_{i+1} = \frac{1}{3\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)} \left[3(1+\nu)PI + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}EPL \right] \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1}\alpha \frac{E}{1-2\nu} P\mu \quad (7.62)$$

É possível demonstrar que:

$$PI = P, \quad PL = 0 \quad \text{e} \quad P\mu = 0 \quad (7.63)$$

Conseqüentemente, a expressão (7.62) torna-se:

$$P\sigma_{i+1} = \frac{3(1+\nu)}{3\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)} P\sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.64)$$

Pré multiplicando-se a expressão a expressão (7.64) por σ_{i+1}^T , resulta:

$$\sigma_{i+1}^T P\sigma_{i+1} = \left[\frac{\sigma_{i+1}^{ten T}}{3\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)} \left[3(1+\nu)IP + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}ELP \right] - \frac{\Delta\lambda_{i+1}\alpha E}{1-2\nu} \mu^T P \right] \frac{3(1+\nu)}{3\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)} \sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.65)$$

Calculando-se a transposta das expressões em (7.63), é possível concluir,

$$IP = P, \quad LP = 0 \quad \text{e} \quad \mu^T P = 0 \quad (7.66)$$

Introduzindo-se esses valores na expressão (7.65), tem-se:

$$\sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1} = \frac{(1+\nu)^2}{\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu)\right)^2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.67)$$

Assim o primeiro termo da expressão (7.61) fica escrito como:

$$\left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1}\right)^{1/2} = \frac{(1+\nu)}{\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu)\right)} \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} \quad (7.68)$$

Desenvolve-se agora, utilizando-se novamente a expressão (7.60), o segundo termo da equação (7.61).

$$\alpha \mu^T \sigma_{i+1} = \frac{\alpha}{3 \left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu)\right)} \left[3(1+\nu) \mu^T I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E \mu^T L \right] \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha^2 \frac{E}{1-2\nu} \mu^T \mu \quad (7.69)$$

Sabendo-se que:

$$\mu^T I = \mu^T, \quad \mu^T L = 3\mu^T \quad \text{e} \quad \mu^T \mu = 3 \quad (7.70)$$

chega-se na seguinte expressão:

$$\alpha \mu^T \sigma_{i+1} = \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu} \quad (7.71)$$

Sendo assim, substituindo-se as equações (7.68) e (7.71) na equação de consistência (7.61), esta fica melhor escrita como:

$$f_{i+1} = \frac{(1+\nu)}{\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu)\right)} \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu} - \bar{\sigma}_{i+1} (\Delta\lambda_{i+1}) \quad (7.72)$$

onde \bar{f}_{i+1} é definido segundo a equação (7.59). Note que a função de consistência (7.72) é função apenas do multiplicador plástico. Entretanto, para ser solucionada deve-se fazer uso de métodos iterativos aproximados. Uma outra expressão mais simples para a condição de consistência pode ser obtida através da nova expressão de \bar{f}_{i+1} , definida na expressão (7.68), ou seja,

$$\bar{f}_{i+1} = \frac{(1+\nu)}{\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu)\right)} \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} \quad (7.73)$$

Resolvendo-se \bar{f}_{i+1} em (7.73), encontra-se

$$\bar{f}_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} - \Delta\lambda_{i+1} G \quad (7.74)$$

sendo G o módulo de elasticidade transversal. Assim, substituindo-se a expressão (7.74) e a (7.71) no critério de plastificação (7.61) obtém-se a seguinte expressão para a condição de consistência:

$$f_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} - \Delta\lambda_{i+1} G + \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu} - \bar{\sigma}_{i+1} (\Delta\lambda_{i+1}) = 0 \quad (7.75)$$

Semelhantemente ao ocorrido para o critério de von Mises, foi possível obter duas expressões para a condição de consistência eq.(7.72) e eq.(7.75). Estas duas expressões são funções diferentes, porém é possível obter o multiplicador plástico através de ambas. A primeira eq.(7.72), é uma função mais complexa, em geral possuindo mais de uma raiz e pontos de singularidade e para soluçona-la é necessário fazer uso de um procedimento iterativo aproximado. Já a segunda eq.(7.75), é uma função linear sem nenhuma singularidade e sua única raiz pode ser obtida explicitamente como:

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{\left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \left(\sigma_o + \frac{H}{\sqrt{3}} \kappa_i\right)}{G + \frac{H}{3} + \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu}} = \frac{f_{i+1}^{ten}}{G + \frac{H}{3} + \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu}} \quad (7.76)$$

Note que não é possível garantir que a singularidade seja sempre negativa, o que não é muito adequado para definir a aproximação inicial de um procedimento iterativo, tal como o método de Newton-Raphson, por que a singularidade pode se encontrar no domínio de estudo ($\Delta\lambda \geq 0$). A posição do ponto singular possui uma relação com o caso onde o retorno do estado de tentativa vai para o ápice do critério de Drucker. Nas análises realizadas observou-se que quando o ponto singular tornava-se positivo ocorria o aparecimento de duas raízes positivas que satisfaziam o modelo. Esta situação se evidenciava nos casos onde o retorno do estado de tentativa era o ápice do critério. A expressão do ponto singular pode ser obtida da equação (7.72). Assim, para que ocorra singularidade na expressão (7.72) é necessário que o denominador do primeiro termo desta equação seja nulo, isto é,

$$\frac{\Delta\lambda_{i+1}^{sin}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1 + \nu) = 0 \quad (7.77)$$

O ponto singular é encontrado substituindo a expressão (7.59) na equação (7.77), de maneira que:

$$\Delta\lambda_{i+1}^{sin} = \frac{\alpha\mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \sigma_o - \frac{H}{\sqrt{3}} \kappa_i}{\left(G + \frac{H}{3} + \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu} \right)} \quad (7.78)$$

A solução (7.76) é uma das respostas da equação (7.72). Entretanto, em um caso específico, quando o estado de tentativa retorna para o ápice da superfície de Drucker-Prager, essa resposta não é a raiz desejada da equação (7.72). Como mencionando anteriormente, esta situação causa o aparecimento de duas raízes positivas ($\Delta\lambda$). Uma das raízes corresponde à solução (7.76), indesejável para o caso específico. A outra raiz corresponde ao retorno para o ápice do critério, sendo esta a raiz procurada. Esta pode ser explicitamente obtida e corresponde a situação onde $\bar{f}_{i+1} = 0$ eq.(7.59). Logo, aplicando esta condição é possível encontrar.

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{\alpha\mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \sigma_o - \frac{H}{\sqrt{3}} \kappa_i}{\left(\frac{H}{3} + \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu}\right)} \quad (7.79)$$

Assim, é possível resolver todo o problema de forma explícita, sem fazer uso de procedimentos iterativos aproximados. Nas situações onde a expressão (7.79) é negativa, $\Delta\lambda_{i+1}$ pode ser obtido pela equação (7.76), de outra forma a solução do problema é a própria equação (7.79). Para esta última situação um cuidado especial deve ser tomado no cálculo das tensões de retorno. Note que neste caso, a função \bar{f}_{i+1} eq.(7.59) é zero e conseqüentemente a expressão de atualização das tensões torna-se singular. Logo, nesta situação é necessário encontrar uma nova expressão para a atualização das tensões. Esta nova expressão pode ser obtida fazendo-se o limite da equação (7.60) quando \bar{f}_{i+1} tende a zero.

$$\lim_{\bar{f}_{i+1} \rightarrow 0} \sigma_{i+1} = \lim_{\bar{f}_{i+1} \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3 \left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu) \right)} \left[3(1+\nu)I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} EL \right] \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha \frac{E}{1-2\nu} \mu \right) \quad (7.80)$$

Sendo assim, a expressão de atualização das tensões, para o caso onde o retorno das tensões de tentativa recai no ápice do critério de Drucker-Prager, fica escrita como:

$$\sigma_{i+1} = \frac{1}{3} L \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha \frac{E}{1-2\nu} \mu \quad (7.81)$$

É ainda necessário executar o limite da expressão das deformações plásticas (7.48), pois na situação de retorno ao ápice esta expressão apresenta singularidade. Assim, substituindo-se a equação (7.64) na expressão (7.48), resulta,

$$\lim_{\bar{f}_{i+1} \rightarrow 0} \varepsilon_{i+1}^p = \lim_{\bar{f}_{i+1} \rightarrow 0} \left[\varepsilon_i^p + \Delta\lambda_{i+1} \alpha \mu + \frac{\Delta\lambda_{i+1} (1+\nu)}{(\Delta\lambda_{i+1} E + 2\bar{f}_{i+1} (1+\nu))} P \sigma_{i+1}^{ten} \right] \quad (7.82)$$

Desenvolvendo o limite da expressão (7.82), encontra-se:

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\lambda_{i+1}\alpha\mu + \frac{1}{2G} P\sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.83)$$

Um resumo do algoritmo descrito para o critério de Drucker-Prager pode ser melhor visualizado na figura 3.

1. Atualizar as deformações e calcular as tensões e encruamento de tentativa

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_{i+1}$$

$$\sigma_{i+1}^{ten} = C^e (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^p)$$

$$\kappa_{i+1}^{ten} = \kappa_i$$

2. Verificar o critério de plastificação com as tensões de tentativa

$$f_{i+1}^{ten} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} + \alpha\mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}^{ten})$$

3. Se $f_{i+1}^{ten} \leq 0$

3.1 Então: finalizar

3.2 Se não:

3.2.1 Determinar $\Delta\lambda_{i+1}$

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{\alpha\mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \sigma_o - \frac{H}{\sqrt{3}} \kappa_i}{\left(\frac{H}{3} + \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu} \right)}$$

3.2.2 Se $\Delta\lambda_{i+1} < 0$

3.2.2.1 Então:

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{ten}}{G + \frac{H}{3} + \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu}}$$

$$\bar{f}_{i+1} = \bar{\sigma}(\Delta\lambda_{i+1}) - \alpha\mu^T \sigma_{i+1}^{ten} + \Delta\lambda_{i+1} \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu}$$

$$\sigma_{i+1} = \frac{1}{3 \left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu) \right)} \left[3(1+\nu)I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} EL \right] \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha \frac{E}{1-2\nu} \mu$$

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\lambda_{i+1} \alpha\mu + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} P\sigma_{i+1}$$

3.2.2.2 Se não:

$$\sigma_{i+1} = \frac{1}{3} L\sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha \frac{E}{1-2\nu} \mu$$

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\lambda_{i+1} \alpha\mu + \frac{1}{2G} P\sigma_{i+1}^{ten}$$

3.2.3 Atualizar o parâmetro de encruamento com o valor de $\Delta\lambda_{i+1}$

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\lambda_{i+1} / \sqrt{3}$$

FIGURA 7.3 - Algoritmo de integração implícito para o critério de Drucker-Prager 3D.

7.6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o propósito de analisar os algoritmos apresentados anteriormente, as suas respostas numéricas do multiplicador plástico serão confrontadas com aquelas obtidas por procedimentos iterativos aproximados. A resposta aproximada é obtida pelo cálculo iterativo da condição de consistência (7.39) para o algoritmo de von Mises e a função (7.72) para o Drucker–Prager. O procedimento iterativo utilizado para resolver essas funções de consistência é o conhecido método de Newton-Raphson. Os resultados foram obtidos com os seguintes parâmetros:

TABELA 7.1 – Parâmetros da análise.

| Parâmetros | | | | | |
|-------------------|---|-------|--------------------------|---|----------|
| σ_x^{ten} | → | 0.25 | E | → | 100000.0 |
| σ_y^{ten} | → | 0.39 | H | → | 1000.0. |
| σ_z^{ten} | → | 0.98 | ν | → | 0.25 |
| τ_{xy}^{ten} | → | 0.045 | κ | → | 0.00014 |
| τ_{xz}^{ten} | → | 0.049 | c | → | 0.225 |
| τ_{yz}^{ten} | → | 0.88 | ϕ | → | $\pi/18$ |
| | | | $\sigma_{\sigma(Mises)}$ | → | 0.45 |

Resultados do multiplicador plástico para o critério de von Mises são apresentados nas tabelas 7.2 e 7.3.

TABELA 7.2 – Multiplicador plástico para o critério von Mises.

| Expressão fechada ($\Delta\lambda$) | $f(\Delta\lambda)$ | Iteração | Procedimento iterativo ($\Delta\lambda$) | $f(\Delta\lambda)$ |
|---------------------------------------|--------------------|----------|--|------------------------------------|
| 1.54505309097141*10 ⁻⁵ | 0.0 | - | $\Delta\lambda_0 = 0.0$ | 0.623171413358469 |
| | | 1ª | 5.48998475097715*10 ⁻⁶ | 0.24478128443494 |
| | | 2ª | 1.13317260907876*10 ⁻⁵ | 0.071727499823402 |
| | | 3ª | 1.47518839661415*10 ⁻⁵ | 0.010407200603665 |
| | | 4ª | 1.54305486453291*10 ⁻⁵ | 2.89388762487519*10 ⁻⁴ |
| | | 5ª | 1.5450514584515*10 ⁻⁵ | 2.36233121508889*10 ⁻⁷ |
| | | 6ª | 1.54505309097032*10 ⁻⁵ | 1.57707180648003*10 ⁻¹³ |
| | | 7ª | 1.54505309097141*10 ⁻⁵ | 0.0 |

TABELA 7.3 – Multiplicador plástico para o critério von Mises.

| Expressão fechada ($\Delta\lambda$) | $f(\Delta\lambda)$ | Iteração | Procedimento iterativo ($\Delta\lambda$) | $f(\Delta\lambda)$ |
|---------------------------------------|--------------------|----------|--|-------------------------------------|
| 1.54505309097141*10 ⁻⁵ | 0.0 | - | $\Delta\lambda_0 = 0.0001$ | -0.29156538082069 |
| | | 1ª | -1.85917375407944*10 ⁻⁴ | -0.316185526068074 |
| | | 2ª | -7.22154975470778*10 ⁻⁴ | -0.103263750101287 |
| | | 3ª | -1.01788610286747*10 ⁻³ | -1.37304302972388*10 ⁻³ |
| | | 4ª | -1.02190960556935*10 ⁻³ | -1.26547169423474*10 ⁻⁷ |
| | | 5ª | -1.02190997646563*10 ⁻³ | -1.11537195239973*10 ⁻¹⁵ |
| | | 6ª | -1.02190997646564*10 ⁻³ | 0.0 |

Na primeira delas, tabela 7.2, é possível verificar que é necessário apenas um passo para obter a resposta com a expressão fechada. Entretanto, para o método de Newton são necessárias sete iterações para obter uma precisão similar. Já na tabela 7.3 pode ser observado que o procedimento iterativo converge para outra resposta, por causa da aproximação inicial adotada ($\Delta\lambda_0$). Note que $\Delta\lambda$ é negativo, sendo esta resposta inadmissível segundo as condições de Kuhn-Tucker. Semelhantemente, na tabela 7.4 são apresentados resultados do $\Delta\lambda$ para o critério de Drucker-Prager.

TABELA 7.4 – Multiplicador plástico para o critério Drucker-Prager.

| Expressão fechada ($\Delta\lambda$) | $f(\Delta\lambda)$ | Iteração | Procedimento iterativo ($\Delta\lambda$) | $f(\Delta\lambda)$ |
|---------------------------------------|--------------------|----------|--|-----------------------------|
| $1.67537453512869*10^{-5}$ | 0.0 | - | $\Delta\lambda_0 = 0.0$ | 0.726327335441706 |
| | | 1ª | $4.38360276181939*10^{-6}$ | 0.316333280646228 |
| | | 2ª | $1.03025686330178*10^{-5}$ | 0.111207116909211 |
| | | 3ª | $1.51556705230755*10^{-5}$ | 0.02232896338397 |
| | | 4ª | $1.666490605780478*10^{-5}$ | $1.17699715647779*10^{-3}$ |
| | | 5ª | $1.67534799237178*10^{-5}$ | $3.50608173821376*10^{-6}$ |
| | | 6ª | $1.67537453489224*10^{-5}$ | $3.12336267960234*10^{-11}$ |
| | | 7ª | $1.67537453512869*10^{-5}$ | 0.0 |

Observando a tabela 7.4, é possível chegar nas mesmas conclusões que foram anteriormente apresentadas para a tabela 7.2. Com o objetivo de simular o retorno ao ápice do critério de Drucker, o seguinte estado de tentativa foi adotado $\sigma^{ten^T} = [4.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ e para facilitar os cálculos tomou-se $H = 0.0$. Os resultados do multiplicador plástico são apresentados a seguir.

TABELA 7.5 – Multiplicador plástico para o critério Drucker-Prager.

| Expressão fechada ($\Delta\lambda$) | $f(\Delta\lambda)$ | Iteração | Procedimento iterativo ($\Delta\lambda$) | $f(\Delta\lambda)$ |
|---------------------------------------|--------------------|----------|--|------------------------------|
| $1.57844760607995*10^{-5}$ | 0.0 | - | $\Delta\lambda_0 = 0.0$ | 2.64574215274847 |
| | | 1ª | $-1.21519440823048*10^{-6}$ | 1.38582903221216 |
| | | 2ª | $-4.02677231453936*10^{-6}$ | 0.763468639127343 |
| | | 3ª | $-1.17779040417183*10^{-5}$ | 0.473321511930345 |
| | | 4ª | $-4.79099422141167*10^{-5}$ | 0.42932220863332 |
| | | 5ª | $1.77357939244104*10^{-4}$ | -0.320732318865062 |
| | | 6ª | $6.80286146522288*10^{-5}$ | -0.015390005023294 |
| | | 7ª | $6.16746904734277*10^{-5}$ | $-3.98394813343361*10^{-4}$ |
| | | 8ª | $6.15007301089482*10^{-5}$ | $-3.6562137195606*10^{-7}$ |
| | | 9ª | $6.15005701652162*10^{-5}$ | $-3.10862446895044*10^{-13}$ |
| | | 10ª | $6.15005701650802*10^{-5}$ | 0.0 |

Nesta última situação, o ponto singular torna-se positivo e a condição de consistência (7.72) possui duas raízes positivas. Note que o procedimento iterativo encontra uma das respostas positivas. Porém, este resultado não é o procurado e não conduz ao ápice do critério.

Entretanto, com o multiplicado plástico obtido pelo algoritmo aqui proposto, é possível verificar que as tensões de tentativa retornam para o ápice, veja tabela 7.6.

TABELA 7.6 – Retorno ao ápice do critério de Drucker-Prager.

| | <i>Resposta correta</i> | <i>Expressão fechada</i> | <i>Procedimento iterativo</i> |
|-----------------|-------------------------------------|----------------------------|-------------------------------|
| $\Delta\lambda$ | $1.57844760607995*10^{-5}$ | $1.57844760607995*10^{-5}$ | $6.15005701650802*10^{-5}$ |
| σ_x | $\sigma_o/3\alpha=1.27603840941398$ | 1.27603840941398 | 0.786795661464374 |
| σ_y | $\sigma_o/3\alpha=1.27603840941398$ | 1.27603840941398 | 0.547680150279314 |
| σ_z | $\sigma_o/3\alpha=1.27603840941398$ | 1.27603840941398 | 0.547680150279314 |
| τ_{xy} | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| τ_{xz} | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| τ_{yz} | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Note que ambas as soluções para as tensões satisfazem o critério de Drucker-Prager. Entretanto, o procedimento iterativo conduz a uma resposta diferente daquela específica para o ápice. Observe que nesta última situação as tensões principais deveriam ser iguais.

7.7 ALGORITMO 3: VON MISES NÃO-ASSOCIATIVO

A expressão para o critério de von Mises, adotado para o desenvolvimento do algoritmo implícito não-associativo, bem como a expressão da tensão equivalente $\bar{\sigma}$ segundo uma lei de encruamento linear isotrópico, são as mesmas apresentadas nas equações (7.16) e (7.19), respectivamente. Já as deformações plásticas incrementais são definidas segundo uma lei de fluxo não associativa. Esta idealização parte da suposição de que o sólido ao plastificar poderá se comportar como um fluido compressivo, ou seja, não se pode condicionar o fluxo plástico a uma superfície, responsável em princípio por definir apenas os limites elásticos do material. Assim, imagina-se, a partir das observações da mecânica dos fluidos, que se deve estabelecer a direção do fluxo plástico mantendo uma relação com as tensões (analogia pressão/fluxo do fluido), sendo esta relação semelhante à relação elástica (tensão/deformação). Neste sentido, pode-se escolher um tensor unitário qualquer “ n ” como sendo a direção do fluxo plástico, porém é interessante que este esteja relacionado à direção da tensão de tentativa, tal como:

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda \cdot n = \Delta \lambda \frac{\varepsilon^{ten}}{\left| \varepsilon^{ten} \right|} = \Delta \lambda C^{e-1} \frac{\sigma^{ten}}{\left| C^{e-1} \sigma^{ten} \right|} \quad (7.84a)$$

Poderia-se generalizar a expressão (7.84a) adotando-se no lugar da matriz constitutiva C^e uma outra matriz C^* , semelhante a matriz constitutiva, porém com propriedades físicas diferentes. Dessa forma, poderíamos quantificar qualquer grau de compressibilidade do material plastificado. Assim, como o sentido do estado de tentativa elástico preserva as condições de complementaridade de Kuhn-Tucker, a direção de n_{ij} pode ser consistentemente encontrada aqui adotando-se uma “Lei de Hooke” especial, isto é:

$$n_{ij} = \frac{C_{ij}^{kl * -1} \sigma_{kl}^{ten}}{\left| C_{ij}^{kl * -1} \sigma_{kl}^{ten} \right|} \quad (7.84b)$$

Contudo, no desenvolvimento do presente modelo adota-se $C^* = C^e$, ou seja, imaginando-se que o grau de incompressibilidade do material em regime plástico é o mesmo que possuía em regime elástico, porém, um algoritmo referente ao modelo não-associativo generalizado (com C^*) é apresentado e discutido no final deste capítulo. Assim, adotando-se $C^* = C^e$ a expressão de atualização das deformações plásticas fica escrita como:

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta \varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta \lambda_{i+1} C^{e-1} \frac{\sigma_{i+1}^{ten}}{\left| C^{e-1} \sigma_{i+1}^{ten} \right|} \quad (7.85)$$

O incremento $\Delta \kappa$ é obtido utilizando-se a hipótese de encruamento por deformação expressa pela equação (7.7).

$$\Delta \kappa = \Delta \varepsilon^{eq} = K \left\| \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right\| = K \sqrt{\Delta \varepsilon_{11}^{p2} + \Delta \varepsilon_{22}^{p2} + \Delta \varepsilon_{33}^{p2} + 2(\Delta \varepsilon_{12}^{p2} + \Delta \varepsilon_{13}^{p2} + \Delta \varepsilon_{23}^{p2})} \quad (7.86)$$

Nas formulações clássicas o termo K é obtido a partir da hipótese de incompressibilidade, levando sempre em consideração que o coeficiente de Poisson na fase plástica possui valor de 0,5, independentemente do problema analisado. Esta hipótese, além de

não ser muito realista para materiais em geral, restringe o campo de aplicação do modelo a materiais incompressíveis. Neste trabalho a determinação do parâmetro K não será feita segundo essa hipótese, pois como mencionado anteriormente o fluxo plástico será idealizado como o fluxo de um fluido compressível. Conseqüentemente, o parâmetro K agora deve ser uma função do coeficiente de Poisson. Esta determinação é bastante simples e segue os procedimentos clássicos da degeneração do caso tridimensional ao caso unidimensional. Assim, considerando-se um corpo tridimensional infinitesimal (fig. 7.4) solicitado apenas por uma tensão normal em uma determinada direção (caso uniaxial).

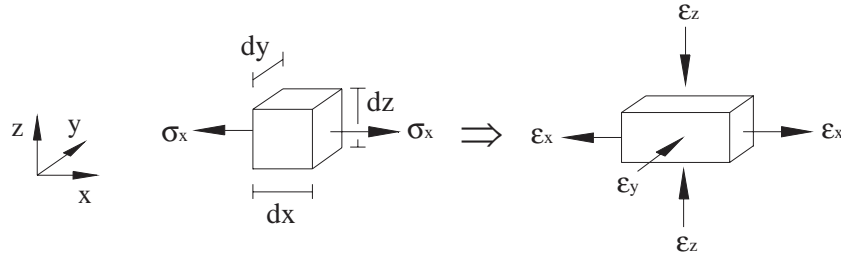


FIGURA 7.4 – Estado de deformação devido a um estado de tensão uniaxial.

Nesta situação aparecem deformações elásticas normais nas três direções, definidas como:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) = \frac{\sigma_x}{E} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \\
 \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z) = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_y = -\nu\varepsilon_x \\
 \varepsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_z = -\nu\varepsilon_x
 \end{aligned}
 \tag{7.87}$$

A norma do estado de deformação anterior pode ser escrita como:

$$|\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon_x^2 + \nu^2\varepsilon_x^2 + \nu^2\varepsilon_x^2} = \sqrt{\varepsilon_x^2(1+2\nu^2)} = |\varepsilon_x| \sqrt{1+2\nu^2}
 \tag{7.88}$$

Para que a norma referente ao estado tridimensional $|\varepsilon|$ seja igual a norma referente ao caso uniaxial, ou seja $|\varepsilon_x|$, é necessário que:

$$|\varepsilon_x| = \frac{1}{\sqrt{1+2\nu^2}} |\varepsilon| = K |\varepsilon|
 \tag{7.89}$$

onde

$$K(\nu) = \frac{1}{\sqrt{1+2\nu^2}} \quad (7.90)$$

Note que, para o caso de material incompressível, hipótese freqüentemente utilizada nos modelos clássicos com associatividade, critério de von Mises e coeficiente de Poisson na fase plástica de 0,5, o parâmetro $K(0,5)$ recai no conhecido valor de $\sqrt{2/3}$. Substituindo-se a definição das deformações plásticas incrementais dadas pela equação (7.84) na expressão (7.86) pode-se ainda mostrar que:

$$\Delta\kappa = \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1+2\nu^2}} \sqrt{n_{11}^2 + n_{22}^2 + n_{33}^2 + 2(n_{12}^2 + n_{13}^2 + n_{23}^2)} \quad (7.91)$$

Como a norma de um tensor unitário é sempre um, segue que:

$$\Delta\kappa = \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1+2\nu^2}} = K\Delta\lambda \quad (7.92)$$

Consequentemente a expressão de atualização do parâmetro de encruamento fica:

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} = \kappa_i + K\Delta\lambda_{i+1} \quad (7.93)$$

Agora deve-se encontrar a expressão de atualização das tensões.

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta\sigma_{i+1} = \sigma_i + C^e (\Delta\epsilon_{i+1} - \Delta\epsilon_{i+1}^p) \quad (7.94)$$

Definindo-se um estado de tentativa elástico (ou seja, $\Delta\epsilon_{i+1}^p = 0$) conforme apresentado em (7.26), é possível escrever a equação (7.94) como:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{ten} - C^e \Delta\epsilon_{i+1}^p \quad (7.95)$$

Substituindo-se a expressão de $\Delta \epsilon_{i+1}^p$ dada pela equação (7.84) na expressão de atualização das tensões (7.93), encontra-se:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{ten} - C^e \Delta \lambda_{i+1} \frac{C^{e-1} \sigma_{i+1}^{ten}}{|C^{e-1} \sigma_{i+1}^{ten}|} = \left(1 - \frac{\Delta \lambda_{i+1}}{|C^{e-1} \sigma_{i+1}^{ten}|} \right) \sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.96)$$

Analisando a equação de atualização das tensões em (7.96) é possível visualizar que o retorno do estado de tentativa não provoca o aparecimento de tensões “residuais” em direções diferentes da estabelecida pela tentativa elástica, ao contrário dos modelos clássicos com lei de fluxo associativa. Nas análises elastoplásticas com os modelos clássicos, estas tensões são corrigidas pelo processo iterativo quando o corpo atinge equilíbrio estático. Porém, em análises viscoplásticas elas induzem o aparecimento de velocidades de tensão nas outras direções. Observando-se ainda a expressão (7.96) pode-se visualizar claramente que a correção do estado de tentativa é sempre feita segundo a direção das tensões de tentativa (fig.7.5), consequência direta da lei de fluxo adotada.

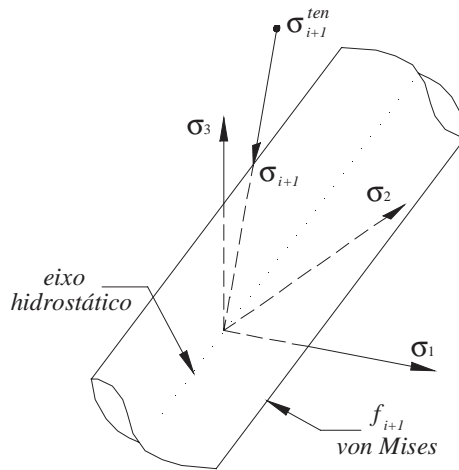


FIGURA 7.5 – Correção do estado de tentativa.

Agora deve-se encontrar a expressão da condição de consistência de maneira que se possa resolvê-la e assim determinar o multiplicador plástico. Assim, para o instante atual o critério de plastificação fica escrito como:

$$f_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1} \right)^{1/2} - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}) = 0 \quad (7.97)$$

Desenvolvendo-se o primeiro termo da equação (7.97), fazendo-se uso da expressão de atualização das tensões em (7.96), encontra-se:

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{\left|C e^{-1} \sigma_{i+1}^{ten}\right|}\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} \quad (7.98)$$

Aplicando-se a definição de encruamento expressa pela equação (7.92), a segunda parte da equação (7.97) fica escrita como:

$$\bar{\sigma}(\kappa_{i+1}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_o + H\kappa_{i+1}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_o + H\kappa_i + H\Delta\kappa_{i+1}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_o + H\kappa_i + HK\Delta\lambda_{i+1}) \quad (7.99)$$

Substituindo as expressões (7.98) e (7.99) na expressão do critério de plastificação em (7.97), encontra-se:

$$f_{i+1} = \left(1 - \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{\left|C e^{-1} \sigma_{i+1}^{ten}\right|}\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_o + H\kappa_i + HK\Delta\lambda_{i+1}) = 0 \quad (7.100)$$

Note que é possível encontrar uma outra expressão para a condição de consistência substituindo no desenvolvimento anterior a primeira equação em (7.14), ao invés da equação (7.96). A função de consistência resultante é uma função do segundo grau e suas raízes podem ser facilmente encontradas. Porém, como pode ser visto, a equação (7.100) é de uma forma mais simples (1º grau) e sua raiz é obtida diretamente.

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_o + H\kappa_i)}{\frac{1}{\left|C e^{-1} \sigma_{i+1}^{ten}\right|} \left(\frac{1}{2}\sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{3}} HK} = \frac{f_{i+1}^{ten}}{\frac{1}{\left|C e^{-1} \sigma_{i+1}^{ten}\right|} \left(\frac{1}{2}\sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{3}} HK} \quad (7.101)$$

Para uma melhor compreensão de todo o procedimento implícito aqui discutido, apresentam-se, de forma resumida, os passos do algoritmo na figura 7.6.

1. Atualizar as deformações e calcular as tensões e encruamento de tentativa

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} = \boldsymbol{\varepsilon}_i + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{ten} = C^e (\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1} - \boldsymbol{\varepsilon}_i^p)$$

$$\kappa_{i+1}^{ten} = \kappa_i$$

2. Verificar o critério de plastificação com as tensões de tentativa

$$f_{i+1}^{ten} = \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{ten T} P \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}^{ten})$$

3. Se $f_{i+1}^{ten} \leq 0$

3.1 Então: finalizar

3.2 Se não:

3.2.1 Determinar $\Delta\lambda_{i+1}$

$$n_{i+1} = \frac{C^{e-1} \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{ten}}{\left| C^{e-1} \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{ten} \right|}$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{1+2\nu^2}}$$

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{ten}}{\frac{1}{\left| C^{e-1} \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{ten} \right|} \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{ten T} P \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{3}} HK}$$

3.2.2 Atualizar as variáveis internas com o valor de $\Delta\lambda_{i+1}$

$$\boldsymbol{\sigma}_{i+1} = \left(1 - \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{\left| C^{e-1} \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{ten} \right|} \right) \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^{ten}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{i+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_i^p + \Delta\lambda_{i+1} n_{i+1}$$

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + K \Delta\lambda_{i+1}$$

FIGURA 7.6a - Algoritmo de integração implícito para o critério de von Mises 3D.

Semelhantemente aos algoritmos com lei de fluxo associativa, foi possível encontrar a expressão fechada do multiplicador plástico. As mesmas vantagens mencionadas anteriormente com relação ao uso da expressão do $\Delta\lambda$ são aqui reproduzidas. O custo computacional, as imprecisões devido ao cálculo aproximado do multiplicador plástico, as dificuldades da escolha do melhor método e de sua aproximação inicial para solucionar a

condição de consistência e as situações de divergência, são problemas que foram contornados devido ao emprego das simples expressões apresentadas no algoritmo da figura 7.6.

O algoritmo mais geral, que possibilita definir um “Poisson plástico” e consequentemente escolher o grau de compressibilidade do material, pode ser encontrado repetindo todo o procedimento anterior, fazendo uso da expressão (7.14) escrita em função da direção “ n ”, tal como em (7.84b). A expressão para este algoritmo é apresentada na figura (7.6b)

1. Atualizar as deformações e calcular as tensões e encruamento de tentativa

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_{i+1}$$

$$\sigma_{i+1}^{ten} = C^e (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^p)$$

$$\kappa_{i+1}^{ten} = \kappa_i$$

2. Verificar o critério de plastificação com as tensões de tentativa

$$f_{i+1}^{ten} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{ten T} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}^{ten})$$

3. Se $f_{i+1}^{ten} \leq 0$

3.1 Então: finalizar

3.2 Se não:

3.2.1 Encontre $\Delta\lambda_{i+1}$

$$n = \frac{C^{* -1} \sigma_{i+1}^{ten}}{\left| C^{* -1} \sigma_{i+1}^{ten} \right|} \quad \text{onde} \quad C^* = C^e(E, \nu^*)$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\nu^{*2}}}$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{2} n^T C^e P C^e n - \frac{1}{3} H^2 K^2$$

$$\Theta_2 = \sigma_{i+1}^{ten T} P C^e n + \frac{2}{3} (\sigma_o + H \kappa_i) H K$$

$$\Theta_3 = \frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{ten T} P \sigma_{i+1}^{ten} - \frac{1}{3} (\sigma_o + H \kappa_i)^2$$

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{\Theta_2 - \sqrt{\Theta_2^2 - 4\Theta_1\Theta_3}}{2\Theta_1}$$

3.2.2 Atualize variáveis internas utilizando $\Delta\lambda_{i+1}$

$$\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} C^e n_{i+1}$$

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\lambda_{i+1} n_{i+1}$$

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + K \Delta\lambda_{i+1}$$

FIGURA 7.6b - Algoritmo generalizado não-associativo para o critério de von Mises 3D.

7.8 ALGORITMO 4: DRUCKER-PRAGER NÃO-ASSOCIATIVO

A expressão para o critério de Drucker-Prager que será utilizada é a mesma apresentada no item 7.5. Este fica definido pela equação (7.42), cuja tensão equivalente $\bar{\sigma}$, segundo uma lei de encruamento isotrópica linear (fig. 7.1), é descrita pela equação (7.44). Adotando-se a mesma hipótese não-associativa para a lei de fluxo apresentada no item 7.6 para o critério de von Mises, é possível chegar nas mesmas expressões para a atualização das deformações plásticas eq.(7.85), do encruamento eq.(7.93) e das tensões eq.(7.96). Note que o parâmetro $K(\nu)$ é idealizado, semelhantemente ao fluxo plástico, segundo a hipótese de compressibilidade, sendo este definido pela expressão (7.90).

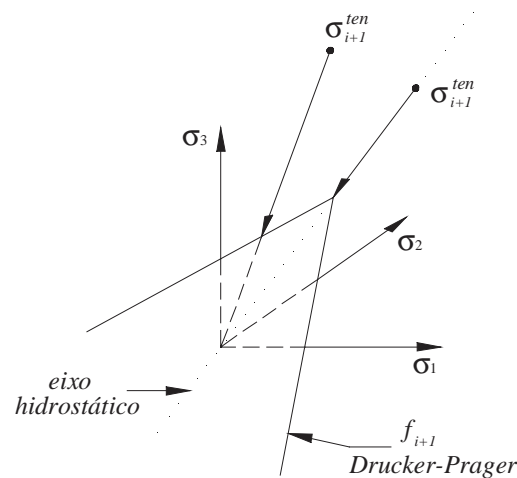


FIGURA 7.7 – Correção do estado de tentativa.

É importante observar que a adoção desta lei de fluxo não-associativa proporciona expressões semelhantes para as variáveis internas (a menos do multiplicador plástico), independentemente do critério³ utilizando. Conseqüentemente, as observações referentes à expressão de atualização das tensões, feitas anteriormente com relação às tensões fictícias, são válidas aqui também. Semelhantemente, pode-se concluir que a correção do estado de tentativa é sempre feita segundo a direção das tensões de tentativa. Além disso, uma interpretação geométrica do modelo aqui proposto permite verificar que o retorno ao ápice só ocorrerá se o estado de tentativa, que viola o critério, encontrar-se no eixo hidrostático (fig.

³ Levando-se em consideração apenas critérios definidos por uma única superfície

7.7). Isto é uma conseqüência direta da lei de fluxo adotada, que elimina as singularidades na função de consistência e torna o retorno ao ápice do critério uma situação comum.

A expressão da condição de consistência deve ser obtida para o caso específico (Drucker-Prager), de maneira que se possa resolve-la e assim determinar o multiplicador plástico. Assim, para o instante atual o critério de plastificação fica escrito como:

$$f_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1} \right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma_{i+1} - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}) = 0 \quad (7.102)$$

O primeiro e o terceiro termo da equação (7.102) já foram desenvolvidos, conforme apresentado pelas equações (7.98) e (7.99), respectivamente. O segundo termo pode ser facilmente obtido aplicando-se a expressão de atualização das tensões eq.(7.96).

$$\alpha \mu^T \sigma_{i+1} = \left(1 - \frac{\Delta \lambda_{i+1}}{|C e^{-1} \sigma_{i+1}^{ten}|} \right) \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.103)$$

Substituindo-se as expressões (7.98), (7.99) e (7.103) na expressão do critério de plastificação em (7.102), encontra-se:

$$f_{i+1} = \left(1 - \frac{\Delta \lambda_{i+1}}{|C e^{-1} \sigma_{i+1}^{ten}|} \right) \left[\left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} \right] - \left(\sigma_o + \frac{H}{\sqrt{3}} \kappa_i + \frac{H}{\sqrt{3}} K \Delta \lambda_{i+1} \right) = 0 \quad (7.104)$$

Note que é possível encontrar uma outra expressão para a condição de consistência substituindo no desenvolvimento anterior a primeira equação em (7.14), ao invés da equação (7.96). A função de consistência resultante é uma função do segundo grau e suas raízes podem ser facilmente encontradas. Porém, como pode ser visto, a equação (7.104) é de uma forma mais simples (1º grau) e sua raiz é obtida diretamente.

$$\Delta \lambda_{i+1} = \frac{\left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_o + H \kappa_i)}{\frac{1}{|C e^{-1} \sigma_{i+1}^{ten}|} \left[\left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} H K} \quad (7.105)$$

Para uma melhor compreensão de todo o procedimento implícito aqui discutido, apresentam-se, de forma resumida, os passos do algoritmo na figura 7.8.

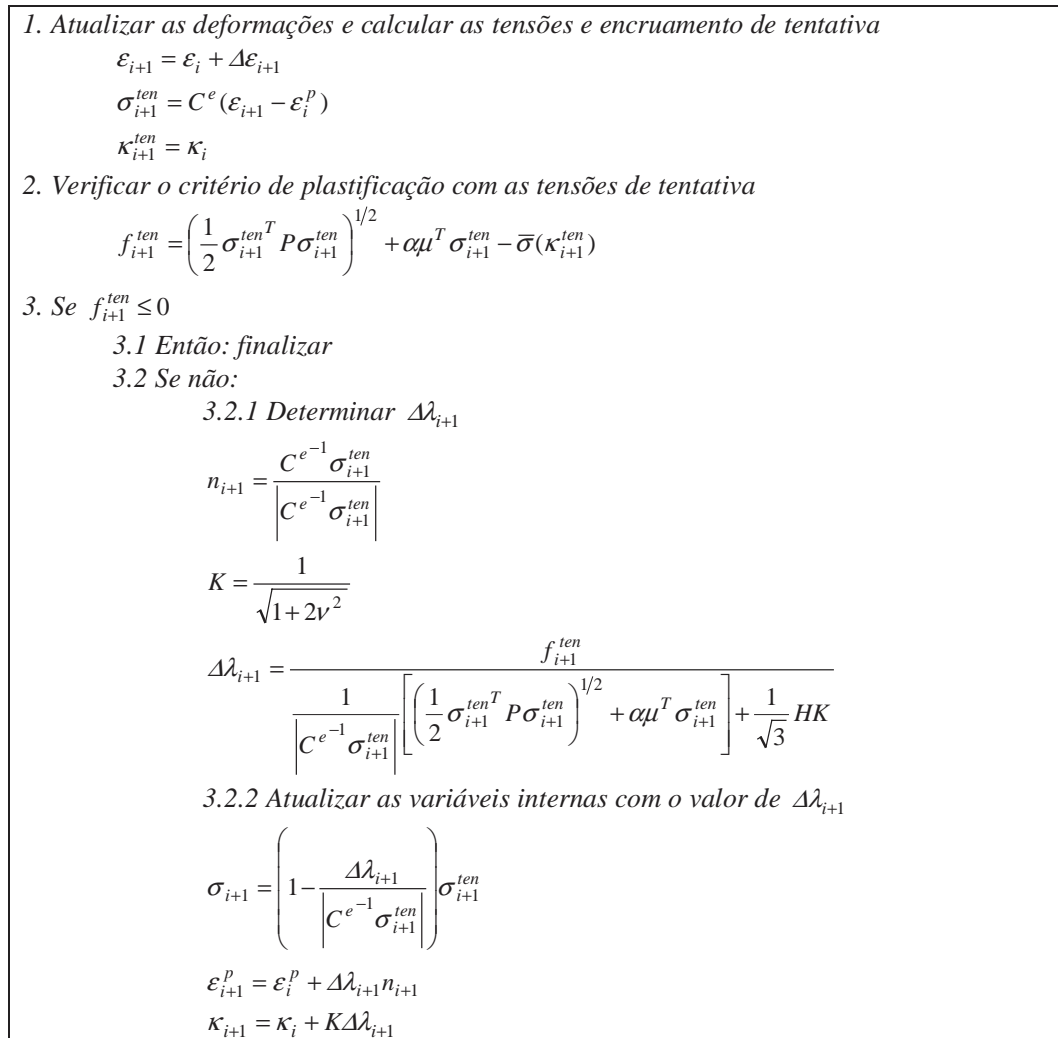


FIGURA 7.8 - Algoritmo de integração implícito para o critério de Drucker-Prager 3D.

Além das vantagens mencionadas anteriormente devido à obtenção do multiplicador plástico de forma fechada, observa-se que a adoção da lei de fluxo não-associativa proporciona expressões mais simples que aquelas obtidas com a lei associativa, evitando os problemas de singularidade na função de consistência relacionados com o retorno ao ápice do critério, cujo tratamento envolve um maior esforço algébrico.

7.9 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste item apresentam-se resultados dos cinco algoritmos propostos anteriormente. Estes foram introduzidos na formulação elastoplástica do MEC exposta no capítulo 6. O

elemento de contorno utilizado é o mesmo descrito no item(6.2.5). Resultados dessa implementação com o algoritmo associativo e critério de von Mises já foram divulgados no capítulo anterior. Porém nenhuma comparação entre os algoritmos associativos e não-associativos foi apresentada. Assim, com o propósito de confrontá-los e analisar seus comportamentos, foram utilizados os mesmos exemplos expostos no item(6.2.5).

Uma notação específica é utilizada para definir os 3 algoritmos empregados com critério de von Mises. Para o modelo associativo (figura 7.2) será adotada a abreviação *ASS* (Associativo). O modelo não-associativo apresentado na figura 7.6a será empregado *NAS* (Não-Associativo) e o não-associativo generalizado (figura 7.6b) será definido por *GNA* (Generalizado Não-Associativo) seguido pelo valor do “Poisson plástico” (ν^*). Para as análises com os algoritmos com critério de Drucker nenhuma sigla é utilizada.

7.9.1 Exemplo 01: Peça tracionada 3D

Este é o mesmo exemplo exposto no item(6.2.5.1), ou seja, uma barra engastada solicitada em sua extremidade livre por um carregamento distribuído de tração. Todos os dados do problema são apresentados na figura 6.3. Resultados do deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada da peça são apresentados na figura 7.9.

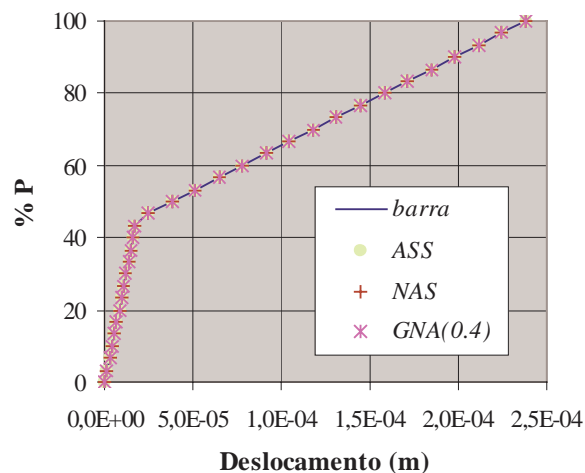


FIGURA 7.9 – Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada.

Os resultados dos modelos com leis de fluxo diferentes e critério de von Mises são confrontados com a resposta numérica obtida com o método dos elementos finitos utilizando-se 3 elementos de barra. Pode-se observar uma perfeita concordância entre os resultados do MEC e do elemento finito de barra. A concordância entre os resultados demonstra a

capacidade das formulações propostas em poder reproduzir o caso uniaxial. Resultados da tensão σ_{zz} extraídos no centróide do corpo, para os algoritmos com o critério de von Mises, são apresentados na figura 7.10 juntamente com a resposta analítica do problema.

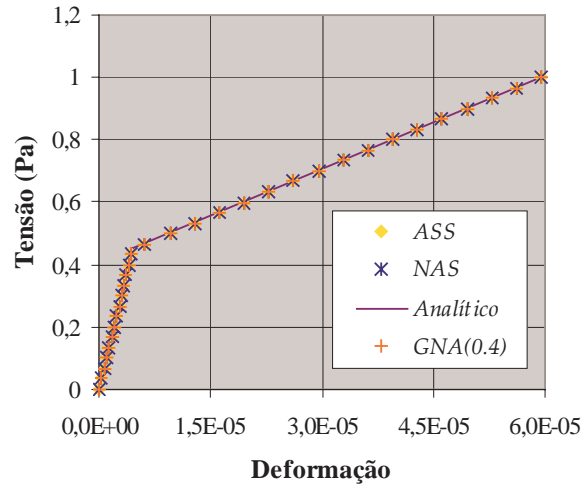


FIGURA 7.10 – Tensão σ_{zz} do ponto localizado no centróide do corpo (critério de von Mises).

Como pode ser visto na figura 7.10 a resposta em tensão é bastante precisa e serve também para validar os modelos. Próximos resultados incluem plasticidade perfeita e amolecimento (softening). Assim, uma análise com controle de deslocamento foi utilizada. O deslocamento aplicado na extremidade livre é de $3,6 \times 10^{-5} m$ e a tolerância adotada é de $0,1\%$ para ambos os critérios de convergência. A figura 7.10a mostra os resultados *reação x deslocamento* para a estrutura analisada considerando encruamento nulo e compara a solução numérica com a analítica.

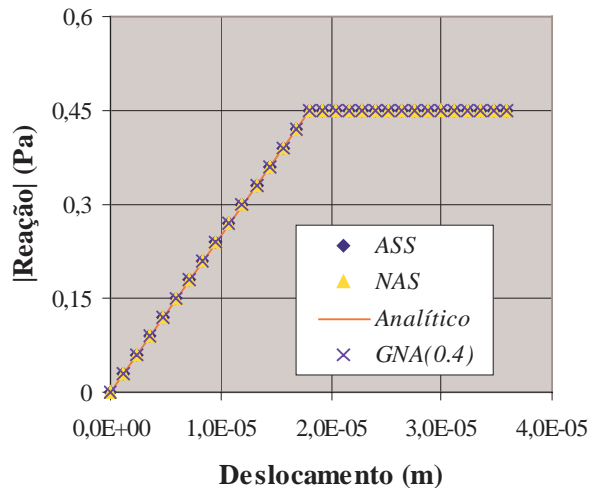


FIGURA 7.10a – Reação x deslocamento com encruamento nulo (critério de von Mises).

A figura 7.10b apresenta o mesmo resultado anterior, só que para a situação de encruamento negativo com $E_t = -5 \times 10^4 Pa$.

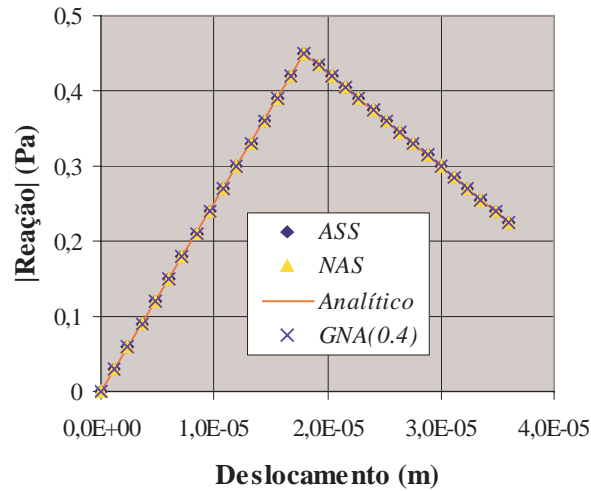


FIGURA 7.10b – Reação x deslocamento com encruamento negativo (critério de von Mises).

Já na figura 7.11 foram confrontadas a resposta analítica e aquelas obtidas com os algoritmos desenvolvidos para o critério de Drucker-Prager. No exemplo da figura 7.11, foram definidos como dados adicionais $E=100000,0Pa$, $\nu=0,25$, $c=0,225$, $\phi=\pi/18$ e por simplicidade adotou-se $E_t=0,0$. Os resultados foram obtidos com controle de deslocamento.

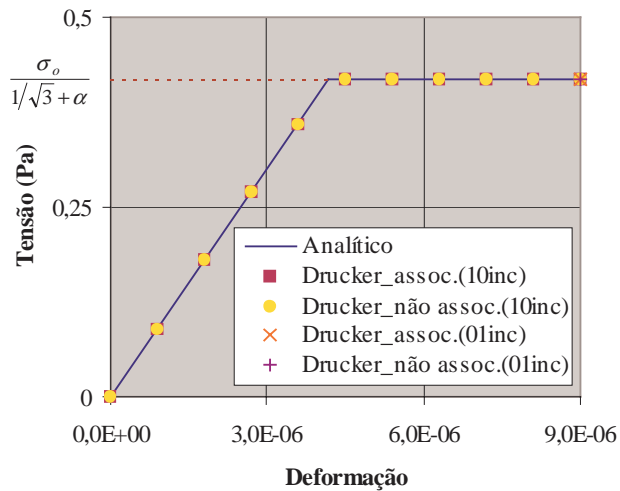


FIGURA 7.11 - Tensão σ_{zz} do ponto localizado no centróide do corpo (critério de Drucker-Prager).

Similarmente aos exemplos anteriores, ao invés de aplicar uma carga distribuída, prescreveu-se deslocamento constante em toda a superfície referente à extremidade livre de um valor total de $3,6 \times 10^{-5} m$. Com o objetivo de analisar a estabilidade do algoritmo, foram realizados dois tipos de análise: a primeira considerando-se 10 incrementos de carga e a segunda com apenas um incremento.

Observando a figura 7.11 nota-se uma perfeita concordância entre os resultados numérico e analítico. É possível ainda observar a elevada estabilidade de ambos os algoritmos, que conseguem obter a resposta utilizando apenas um incremento. Neste último caso o algoritmo com lei associativa necessitou de quatro iterações para encontrar a resposta, enquanto que aquele com lei não-associativa utilizou apenas duas iterações.

Note que os resultados apresentados em todos os gráficos demonstram que as leis de fluxo associativa e não-associativa conseguem reproduzir o mesmo comportamento. Porém, isto só ocorre em situações onde a variação do volume plástico não influencia no comportamento da estrutura, que é o caso deste exemplo. Deve-se ressaltar que na fase plástica, em geral, a variação volumétrica é diferente para os modelos associativos e não-associativos. Para o caso com critério de von Mises, isto é uma consequência de que o modelo associativo satisfaz a condição de incompressibilidade, ou seja $\epsilon_v^p = \epsilon_1^p + \epsilon_2^p + \epsilon_3^p = 0$, e o não-associativo não segue essa hipótese. A figura 7.12 apresenta resultados ϵ_v^p para ambos os modelos associativo e não-associativo com critério de von Mises, onde é possível verificar que a lei de fluxo influencia na variação volumétrica. Os dados utilizados são os mesmo empregados na análise da figura 7.9.

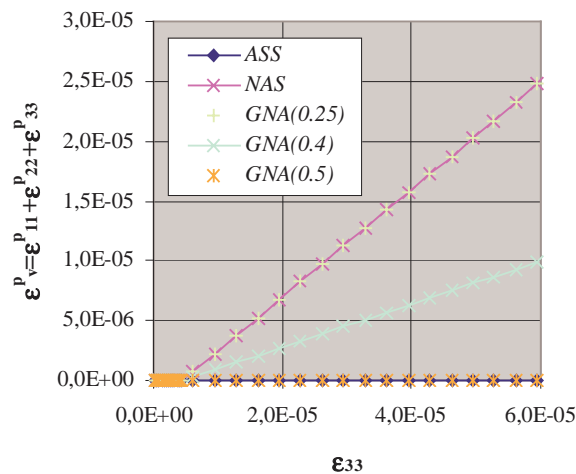


FIGURA 7.12 – Variação volumétrica plástica ε_v^p .

Observando a figura 7.12 é possível concluir que a variação volumétrica na fase plástica é diferente. Observe que o modelo generalizado não-associativo consegue representar qualquer grau de compressibilidade, até mesmo a incompressibilidade ($\nu^* = 0,5$), modificando-se o “Poisson plástico”. Note ainda que o modelo associativo satisfaz a condição de incompressibilidade e que ε_v^p é sempre constante e nulo. Em problemas dependentes da variação volumétrica plástica os modelos associativos e não associativos resultam em comportamentos diferentes. Para esclarecer um pouco essa discussão imagine um cubo de lado L e submetido a uma tração na direção 1 , veja figura 7.13.

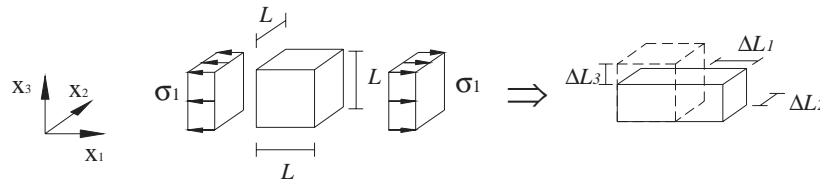


FIGURA 7.13 – Elemento tracionado.

Suponha que pudéssemos quantificar a parcela do incremento de deslocamento devido às deformações plásticas na direção da solicitação ΔL_p . Dessa forma, o volume plástico ε_v^p ficaria determinado como:

$$\varepsilon_v^p = \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p = \frac{\Delta L_p}{L} - \nu^* \frac{\Delta L_p}{L} - \nu^* \frac{\Delta L_p}{L} = \frac{\Delta L_p}{L} (1 - 2\nu^*)$$

onde ν^* seria, fazendo-se uma analogia ao comportamento elástico, o “coeficiente de Poisson” da fase plástica. Note que, para satisfazer a condição de incompressibilidade é necessário adotar um Poisson na fase plástica de $0,5$, impondo uma restrição muito forte para o material. Já o modelo não-associativo simplificado (NAS) pode ser interpretado como se utilizasse ν^* igual ao do regime elástico, o que também não segue as evidências experimentais apresentadas para alguns materiais. Entretanto o modelo não-associativo generalizado (GNA) pode ser definido com qualquer ν^* , permitindo ajustar o grau de compressibilidade do material. Esta sucinta discussão nos permite concluir que, em geral, o volume final para ambos os modelos será diferente. Consequentemente, em problemas cuja variação volumétrica

é importante os modelos resultarão em respostas diferentes. O próximo exemplo é altamente dependente da variação volumétrica plástica. Neste será possível visualizar melhor as diferenças entre as leis de fluxo associativa e não-associativa.

7.9.2 Exemplo 02: Bloco 3D confinado

O exemplo analisado é um bloco paralelepípedo 2x2x4m (veja figura 7.14) totalmente confinado e comprimido por uma carga distribuída aplicada em sua extremidade livre. A idéia inicial era verificar o comportamento das leis de fluxos adotadas (associativa e não-associativa) com o critério de von Mises para um problema dependente da variação volumétrica na fase plástica. A geometria e a discretização utilizada são as mesmas do exemplo anterior e as propriedades físicas adotadas são aquelas expostas na figura 6.3.

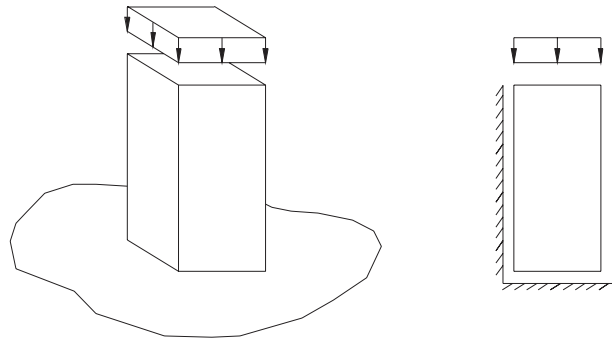


FIGURA 7.14-Compressão de um bloco confinado.

Nesta primeira análise considerou-se encruamento positivo $E_t = 10000,0Pa$ e Poisson 0,25 (“elástico”). Os resultados do deslocamento axial (em módulo) da extremidade onde se aplica a carga são apresentados na figura 7.15

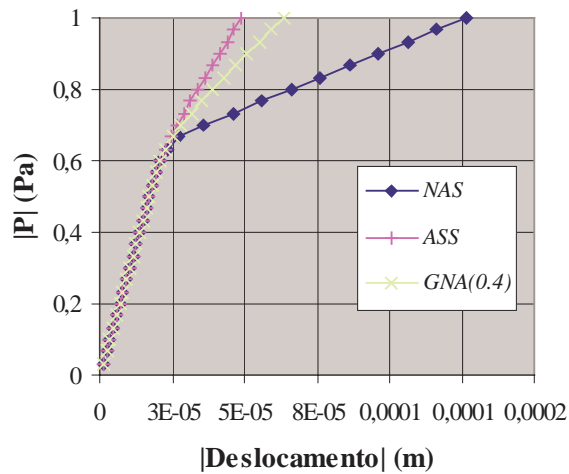


FIGURA 7.15 – Deslocamento do ponto central da extremidade solicitada.

A resposta da figura 7.15 indica realmente que em problemas dependentes da variação volumétrica plástica os modelos associativos e não-associativos resultam em comportamentos diferentes, demonstrando que a condição de incompressibilidade influencia no problema. Com o intuito de apresentar novos argumentos para essa discussão, executou-se novamente o exemplo anterior (com as mesmas condições de confinamento) só que agora impondo o coeficiente de Poisson igual a zero. Dessa forma, espera-se que com Poisson nulo não ocorra deslocamento lateral, pelo menos para o modelo não-associativo, e conseqüentemente que o resultado recaia no problema da barra engastada não confinada, cuja solução conhecemos. Os resultados do deslocamento axial da extremidade livre para os modelos associativo e não-associativo são apresentados na figura 7.16.

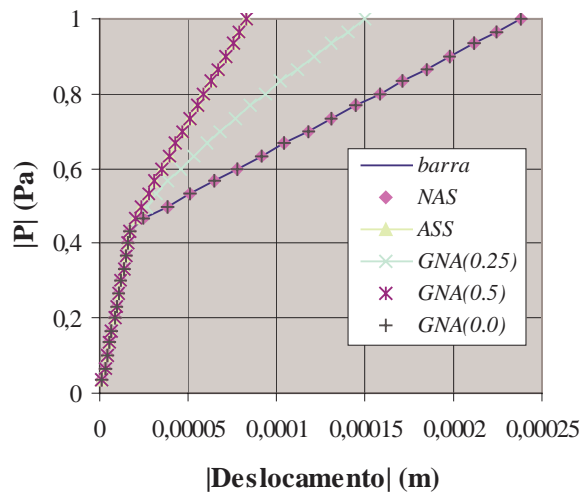


FIGURA 7.16 – Deslocamento do ponto central da extremidade solicitada.

Os resultados são confrontados com a resposta de elementos finitos de barra que corresponde à solução analítica de uma simples barra tracionada (sem confinamento). Assim, é possível verificar que a lei associativa (*ASS*) não consegue representar o caso hipotético de Poisson equivalente plástico (“Poisson plástico”) nulo, pois a condição de incompressibilidade impõe que a variação volumétrica seja nula na fase plástica e para isto é necessário ocorrer deformações laterais que devido às condições de contorno de confinamento resultam em reações nas paredes laterais que altera a resposta esperada. No caso de uma barra simplesmente engastada (sem confinamento) essa variação lateral não resulta em reações laterais, pois não existem restrições nas laterais do corpo e o resultado longitudinal seria coincidente para ambos os modelos, como pode ser visualizado na figura 7.9. Já o modelo não-associativo (*NAS*) representa exatamente o problema hipotético proposto, demonstrando que na fase plástica as variações volumétricas seguem as mesmas proporções do regime elástico. Note ainda que o modelo não-associativo generalizado (*GNA*) pode reproduzir qualquer grau de compressibilidade, de maneira que se escolhermos $\nu^* = 0,0$ é possível encontrar a mesma resposta do modelo não-associativo (*NAS*) e definindo $\nu^* = 0,5$ recupera-se o resultado do modelo associativo (*ASS*).

Para um problema real o mais indicado seria adotar o modelo não-associativo com direção de fluxo plástica definida por um “coeficiente de Poisson plástico” aferido experimentalmente. Contudo, deve-se ressaltar que a teoria matemática associativa é bem fundamentada e suas hipóteses são bem estabelecidas, satisfazendo teoremas importantes da mecânica. Seus fundamentos são adequados para os metais e são baseadas também em evidências experimentais. Porém, para a maioria dos materiais essa idéia não é totalmente válida. Além do mais, não se pode condicionar o fluxo plástico a uma superfície, conduzindo a uma interpretação de que a superfície contenha mais informações a cerca do comportamento plástico do que a simples definição do limite elástico.

7.9.3 Exemplo 03: Cilindro 3D submetido à pressão interna

O mesmo cilindro analisado no item(6.2.5.2) é aqui proposto. A estrutura é solicitada por uma pressão interna e devido a sua simetria, apenas $\frac{1}{4}$ da mesma é discretizado. Os dados do problema são descritos na figura 6.8.

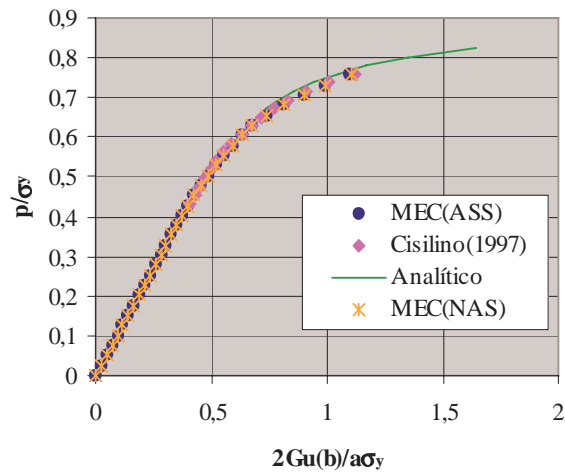


FIGURA 7.17 – Deslocamento radial da parede externa (von Mises).

Os resultados numéricos, considerando a situação de estado plano de deformação, são confrontados com a resposta analítica do problema e como esta última foi obtida para o critério de von Mises (Prandtl-Reuss) apenas resultados dos algoritmos com este critério foram plotados. As respostas numéricas obtidas por CISILINO(1997) também foram apresentadas. Resultados das tensões σ_r , σ_θ e σ_z ao longo da espessura do cilindro são apresentadas na figura 7.18

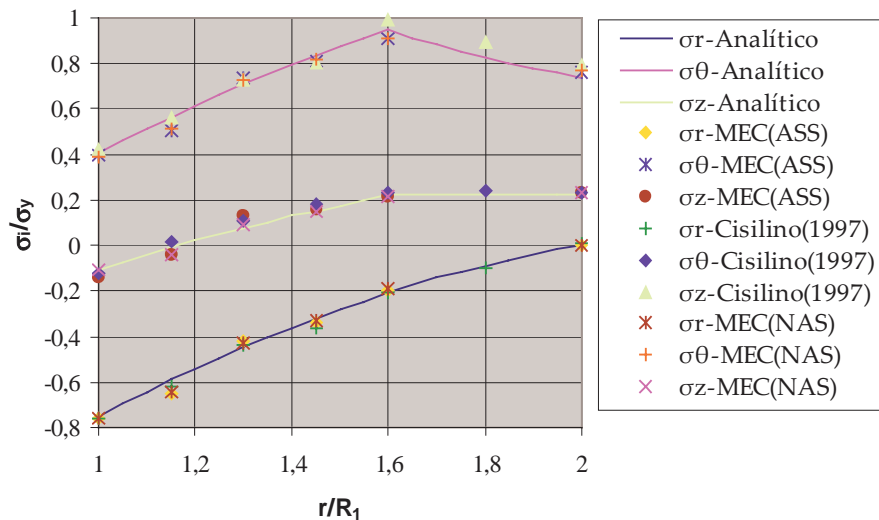


FIGURA 7.18 – Tensões σ_r , σ_θ e σ_z ao longo da espessura (von Mises).

Nota-se que ambas as respostas numéricas estão de acordo com a analítica.

Capítulo 8

FORMULAÇÕES VISCOPLÁSTICAS DO MEC

8.1 INTRODUÇÃO

No capítulo 5 foram apresentadas várias formulações para tratar o problema viscoelástico pelo MEC. Inicialmente, apresentaram-se abordagens com o termo viscoso descrito através de integrais de domínio, exigindo a necessidade de células para tratá-las. Posteriormente, alguns avanços foram conseguidos devido ao desenvolvimento de novas formulações com representações integrais apenas no contorno do corpo. Estas, além de serem computacionalmente mais eficiente que as primeiras e evitarem as indesejáveis integrais singulares de domínio, preservam as boas características de estabilidade e precisão apresentadas nas formulações com termo viscoso de domínio. Assim, como uma evolução natural, apresenta-se neste capítulo uma nova abordagem para tratar problemas viscoplásticos pelo MEC. Esta nova abordagem baseia-se nas formulações viscoelásticas com representações integrais no contorno, apresentadas anteriormente.

A formulação aqui proposta apresenta algumas diferenças com relação aquelas usualmente encontradas na literatura que tratam do problema viscoplástico. A maioria dos trabalhos desenvolvidos nesta área são baseados nos procedimentos inicialmente propostos por PERZYNA(1966), veja, por exemplo, ZIENKIEWICZ & CORMEAU(1974), ARGYRIS *et al.*(1979), OWEN & DAMJANIC(1982), TELLES & BREBBIA(1982) e MUNAIAR(1998). Estes são baseados no conceito de potencial plástico originado na teoria da plasticidade. Assim, as características viscosas são incorporadas na expressão da taxa de deformação viscoplástica por meio de funções dependentes do critério de plastificação e cujo embasamento reológico é bastante discutível. O processo recai em um problema incremental onde a análise é executada aplicando-se sucessivamente incrementos de força. Esta abordagem

é baseada em procedimentos quase-estáticos onde a imposição de cargas externas com dependência temporal arbitrária e o ajuste do tempo real apresentam algumas dificuldades.

A principal diferença entre o procedimento proposto e aqueles apresentados na literatura é a solução temporal. As abordagens clássicas assumem um comportamento conhecido (usualmente constante) das tensões totais durante um incremento de força. A partir desta suposição, resolve-se localmente as relações diferenciais temporais de tensão/deformação, encontrando a contribuição viscosa. Esta contribuição é aplicada nas equações de equilíbrio como um termo corretivo. Já a formulação proposta assume uma relação reológica viscoplástica que deve ser imposta no desenvolvimento das representações integrais. Desta relação encontra-se um sistema de equações diferenciais temporal onde o comportamento plástico do corpo é levado em consideração através de um termo em tensão inicial. Este termo é obtido de forma usual pelos procedimentos elastoplásticos do MEC. Na presente formulação os incrementos são agora definidos como incrementos de tempo e não mais como incrementos de força, proporcionando um significado bem mais definido para o tempo nas análises viscoplásticas. A técnica permite impor, de forma simples e direta, condições de contorno (forças e deslocamentos) que variam com relação ao tempo, ampliando o seu campo de aplicação. Os algoritmos utilizados na atualização das tensões no problema viscoplástico podem ser os mesmos desenvolvidos para tratar os problemas elastoplástico, não havendo a necessidade de desenvolver novos procedimentos viscoplásticos, basta apenas introduzir na formulação viscosa aqueles já propostos pela plasticidade, veja por exemplo o capítulo 7. Além disso, como as integrais referentes ao comportamento viscoso são transformadas em integrais de contorno, para tratar o problema viscoplástico pelo MEC basta apenas discretizar o contorno do corpo e as regiões internas onde ocorrem plastificação, resultando em menor quantidade de dados de entrada e um menor custo computacional. Esta nova metodologia proporciona, com grande simplicidade, uma elevadíssima economia computacional e uma ótima precisão dos resultados que podem ser verificadas nos exemplos apresentados neste capítulo.

8.2 FORMULAÇÃO VISCOPLÁSTICA (sem comportamento instantâneo)

O procedimento aqui empregado para o desenvolvimento das representações integrais viscoplásticas é o mesmo utilizado no desenvolvimento de todas as outras formulações apresentadas anteriormente, ou seja, aplicando-se a relação constitutiva do modelo em questão

no desenvolvimento das equações integrais. O modelo viscoplástico em consideração é aquele expresso pela equação (2.24) onde o comportamento instantâneo não é levado em conta. A imposição desta equação sobre a representação integral (3.15), resulta em:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega = 0 \quad (8.1)$$

onde ε_{kij}^* é a solução fundamental em deformação definida na equação (5.2). Utilizando-se as equações (5.37) é possível escrever a equação (8.1) como:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega = 0 \quad (8.2)$$

Aplicando-se integração por partes na segunda e na terceira integral da equação (8.2), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i d\Omega - \gamma \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j \dot{u}_i d\Gamma + \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega = 0 \quad (8.3)$$

A equação integral (8.3) pode ser reescrita utilizando-se a equação de equilíbrio fundamental, definida em (3.20). Assim, aplicando a equação (3.20) em (8.3), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac, as técnicas para integrais singulares e sabendo-se que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$, encontra-se:

$$\bar{C}_{ki} u_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega \quad (8.4)$$

A equação (8.4) é a representação integral da formulação viscoplástica do MEC que leva em consideração o modelo reológico apresentado na figura 2.5. Note que a única diferença desta representação para a representação viscoelástica (5.40) é a presença do último termo no lado direito da equação (8.4) responsável pelo comportamento plástico do corpo. Esta integral apresenta singularidade do tipo $1/r$ para o caso bidimensional e $1/r^2$ para o caso tridimensional e neste trabalho será tratada utilizando-se células (apenas nas regiões onde ocorrerão plastificação) e uma eficiente técnica de transformação de coordenadas, veja Anexo

D. Ressalta-se ainda que, semelhantemente a formulação viscoelástica, a integral das forças volumétricas pode ser transformada em integral de contorno, permitindo a obtenção de uma expressão mais elegante para o MEC. Estas transformações já foram apresentadas para b_i constante nas equações (5.41). Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada no Anexo A. Consequentemente, a equação integral (8.4) pode ser escrita como:

$$\bar{C}_{ki}u_i(p) + \gamma\bar{C}_{ki}\dot{u}_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega \quad (8.5)$$

onde o termo B_{ki}^* é o mesmo apresentado na equação (5.42).

8.2.1 Representação integral para tensões em pontos internos

O desenvolvimento descrito no item (5.4.1) e realizado aqui impondo-se a representação (8.5) nos pontos internos do domínio. Nesta situação o termo $\bar{C}_{ki} = \delta_{ki}$ e consequentemente a equação integral (8.5) fica escrita como:

$$u_k(p) + \gamma\dot{u}_k(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega \quad (8.6)$$

A representação integral para as deformações em pontos internos é obtida através da definição de pequenas deformações expressa pela equação (3.24). As deformações são obtidas de maneira análoga ao problema elastostático. Assim, diferenciando-se a equação (8.6) e aplicando a definição das deformações em (3.24), encontra-se:

$$\varepsilon_{ke}(p) + \gamma\dot{\varepsilon}_{ke}(p) = \int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \hat{B}_{kei}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{keij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega + \hat{g}_{keij}^* \sigma_{ij}^p(p) \quad (8.7)$$

Note que como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. As tensões totais são obtidas de forma trivial, aplicando-se a representação integral (8.7) sobre a relação constitutiva definida na equação (2.24), de maneira que:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) = & \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega + \\ & \bar{g}_{\rho qij} \sigma_{ij}^p(p) - \sigma_{\rho q}^p(p) \end{aligned} \quad (8.8)$$

Os dois últimos termos da representação integral em (8.8) podem ser reordenados, pois sabendo-se que $\sigma_{\rho q}^p = \delta_{\rho i} \delta_{qj} \sigma_{ij}^p$, tem-se:

$$\sigma_{\rho q}(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega + \bar{g}_{\rho qij} \sigma_{ij}^p(p) \quad (8.9)$$

sendo $\bar{\sigma}_{\rho qi}^*$, $\bar{t}_{\rho qij}^*$, $\bar{g}_{\rho qij}$ e $\bar{B}_{\rho qi}^*$ os mesmos definidos pelas equações (3.27a), (5.9a), (5.12) e (5.48). Note que a quinta integral em (8.9) apresenta singularidade do tipo $1/r^2$ para o caso bidimensional e $1/r^3$ para o caso tridimensional. Estas devem ser computadas no sentido de valor principal, veja ALIABADI *et al.*(1985), MI(1995) e CISILINO(1997), e serão tratadas utilizando-se células e uma eficiente técnica de subtração de singularidade (Anexo D). Note que não é possível escrever as equações integrais em pontos internos para as tensões elásticas e viscosas, ao contrário das tensões totais que são obtidas através da representação integral (8.9). Esta é uma característica particular da presente formulação. Felizmente, pode-se contornar esta situação através de um procedimento simples e eficiente similar àquele exposto anteriormente no item (5.4.1), onde as tensões elásticas são obtidas pela solução numérica de uma equação diferencial. A equação diferencial para o problema específico pode ser encontrada escrevendo-se a equação (2.23a) em forma de taxa, da seguinte maneira:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{ep} = C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}^e = \frac{1}{\gamma} \mathcal{C}_{ij}^{lm} (\dot{\epsilon}_{lm} - \dot{\epsilon}_{lm}^p) = \frac{1}{\gamma} \sigma_{ij}^v - \dot{\sigma}_{ij}^p \Rightarrow \sigma_{ij}^v = \gamma \dot{\sigma}_{ij}^{ep} + \gamma \dot{\sigma}_{ij}^p \quad (8.10)$$

A equação (8.10) expressa uma relação entre as taxas de tensão elastoplástica e inicial e as tensões viscosas. Substituindo a equação (8.10) na relação (2.22) é possível encontrar o seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\gamma \dot{\sigma}_{ij}^{ep} + \sigma_{ij}^{ep} + \gamma \dot{\sigma}_{ij}^p - \sigma_{ij} = 0 \quad (8.11)$$

É importante observar que as taxas presentes na equação (8.11) são derivadas temporais. Sendo assim, as tensões elásticas serão obtidas numericamente pela resolução das equações diferenciais (8.11), tornando assim o processo geral permitindo variações nas condições de contorno. Este procedimento será melhor esclarecido nos próximos itens.

8.2.2 Obtenção das tensões totais no contorno

O procedimento descrito nos capítulos 3, 5 e 6 é basicamente o mesmo que será aqui apresentado para obter as tensões totais no contorno do problema viscoplástico considerado, ou seja, através da obtenção das tensões em função dos deslocamentos e forças de superfície do contorno que já foram determinados na solução do problema de contorno. Uma forma de se obter as tensões totais em pontos do contorno seria através da aplicação da equação (8.9) no contorno. Entretanto, devido aos termos singulares presentes nos integrandos desta representação, este procedimento produziria singularidades de alta ordem. Assim, considere por exemplo a figura 3.2, um sistema cartesiano local de coordenadas localizado em um ponto do contorno onde se deseja obter as componentes de tensão. Definidas as funções de forma para os deslocamentos e forças de superfície do contorno e obtidos os seus valores nodais, é possível definir as forças de superfície em qualquer ponto do elemento de contorno. Consequentemente, pode-se escrever para o caso tridimensional que:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{13} &= \bar{\sigma}_{31} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{23} &= \bar{\sigma}_{32} = \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{33} &= \bar{p}_3\end{aligned}\tag{8.12}$$

onde o subscrito indica que os valores são referentes ao sistema de coordenadas local. As outras componentes de tensão podem ser obtidas através da relação constitutiva. Assim, em um dado elemento, o campo de deslocamento sobre ele pode ser escrito em função dos valores dos deslocamentos nodais nas coordenadas locais, conforme apresentado pela equação (3.29). Note que, quando se resolve o problema de contorno, obtém-se as forças de superfície e os deslocamentos nodais no sistema global, porém, para encontrar as tensões no contorno é necessário transformá-los para o sistema local fazendo uso da matriz de transformação entre os dois sistemas. Definido o campo de deslocamento sobre o elemento de contorno, o campo de deformações é obtido pela diferenciação do campo de deslocamento eq.(3.30). Note que não é necessário determinar todas as componentes de deformação, basta apenas obter aquelas que serão importantes na determinação das componentes de tensão restantes. Logo, as outras

componentes do tensor de tensão são encontradas fazendo-se uso das seguintes relações constitutivas,

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = 2\mu(\bar{\epsilon}_{12} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{12}) - \bar{\sigma}_{12}^p \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_3 + \bar{\sigma}_{33}^p) + 2\mu(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11} + \nu\bar{\epsilon}_{22} + \nu\gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22})] - \bar{\sigma}_{11}^p \\ \bar{\sigma}_{22} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_3 + \bar{\sigma}_{33}^p) + 2\mu(\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22} + \nu\bar{\epsilon}_{11} + \nu\gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11})] - \bar{\sigma}_{22}^p\end{aligned}\quad (8.13)$$

É importante observar que as relações constitutivas são empregadas em sua forma total e não em forma incremental. As velocidades de deformação são definidas por aproximações lineares, tal como descrito para o problema viscoelástico pelo MEC no capítulo 5, ou seja:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{t+\Delta t} = \frac{\bar{\epsilon}_{t+\Delta t} - \bar{\epsilon}_t}{\Delta t}\quad (8.14)$$

Substituindo-se a expressão (8.14) nas equações (8.13) é possível encontrar as tensões no contorno, pois as deformações são obtidas em função dos deslocamentos dos pontos contorno. Note também que as tensões iniciais devem ser transformadas para o sistema local antes da aplicação das expressões (8.13). Após a determinação das tensões, pode-se obtê-las no sistema global utilizando-se a matriz de transformação. Para o caso bidimensional o procedimento é o mesmo descrito, necessitando-se apenas de uma componente de formação eq.(3.32), de maneira que as tensões ficam determinadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{22} &= \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_2 + \bar{\sigma}_{22}^p) + 2\mu(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11})] - \bar{\sigma}_{11}^p\end{aligned}\quad (8.15)$$

Para estado plano de tensão as expressões são as mesmas, apenas o coeficiente de Poisson deve ser $\nu/(1+\nu)$ sem alterar a constante de Lamé μ . Note que, no caso 2D \bar{x}_1 (fig. 3.2) é a direção tangencial no ponto onde se deseja extrair as tensões e \bar{x}_2 é a direção normal. É importante observar que ambas as relações constitutivas são empregadas em sua forma total e não em forma incremental e que a taxas referem-se a derivadas temporais.

8.2.3 Tratamento algébrico para as representações integrais

As equações integrais definidas anteriormente podem ser transformadas em equações algébricas através do método dos elementos de contorno. Assim, o contorno do corpo Γ é discretizado com n_e elementos de contorno Γ_e (fig. 6.1) e o domínio Ω , onde ocorrerá a plastificação, com n_c células. Dessa forma, as variáveis do problema podem ser aproximadas, parametrizando-as com relação aos seus valores nodais, fazendo-se uso de funções interpoladoras apropriadas.

$$\begin{aligned} p_i &= \phi^\alpha P_i^\alpha \\ u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha ; \quad \dot{u}_i = \phi^\alpha \dot{U}_i^\alpha \\ \sigma_{ij}^p &= \tilde{\phi}^{\bar{\alpha}} \sigma_{ij}^{p(\bar{\alpha})} \end{aligned} \quad (8.16)$$

onde ϕ e $\tilde{\phi}$ são respectivamente as funções de forma adotadas para interpolar os elementos de contorno e as células e os subscritos α e $\bar{\alpha}$ referem-se aos nós do elemento de contorno e da célula, respectivamente. Os termos P_i^α , $\sigma_{ij}^{p(\bar{\alpha})}$, U_i^α , e \dot{U}_i^α são valores nodais de forças de superfície, deslocamentos, tensões iniciais e velocidades. Consequentemente, as representações integrais de deslocamento e tensão ficam escritas como:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ki} U_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{U}_i(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + \\ &+ b_i \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} B_{ki}^* d\Gamma_e + \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \varepsilon_{kij}^* \tilde{\phi}^{\bar{\alpha}} d\Omega_c \sigma_{ij}^{p(\bar{\alpha})} \end{aligned} \quad (8.17a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho q i}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho q i}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho q i}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + b_i \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{B}_{\rho q i}^* d\Gamma_e + \\ &+ \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{t}_{\rho q ij}^* \tilde{\phi}^{\bar{\alpha}} d\Omega_c \sigma_{ij}^{p(\bar{\alpha})} + \bar{g}_{\rho q ij} \sigma_{ij}^p(p) \end{aligned} \quad (8.17b)$$

Depois de executar todas as integrais e escolher pontos fonte em igual número aos nós do problema, pode-se escrever os seguintes sistemas de equações diferenciais temporais:

$$HU(t) + \gamma H\dot{U}(t) = GP(t) + Bb(t) + Q\sigma^p(t) \quad (8.18a)$$

$$\sigma(t) = \tilde{G}P(t) - \tilde{H}U(t) - \tilde{\gamma}\tilde{H}\dot{U}(t) + \tilde{B}b(t) + \tilde{Q}\sigma^p(t) \quad (8.18b)$$

onde t representa o tempo. Ressalta-se que a matriz H é obtida através da associação do temo \bar{C}_{ki} com a matriz referente a integral de contorno cuja o núcleo é p_{ki}^* , como usualmente é feito no método dos elementos de contorno. Já o temo livre para tensões é associado à última integral em (8.17b) dando origem a matriz \tilde{Q} .

8.2.4 Integração temporal numérica

Para se resolver o problema viscoplástico, deve-se integrar no tempo o sistema de equações apresentado na equação (8.18a). Para isto, adotou-se uma simples aproximação linear para definir a velocidade de deslocamento, de maneira que:

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \frac{U_{t+\Delta t} - U_t}{\Delta t} \quad (8.19)$$

Aplicando-se a expressão da velocidade de deslocamento apresentada em (8.19) na equação (8.18a), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\hat{H}U_{t+\Delta t} = GP_{t+\Delta t} + F_{t+\Delta t} \quad (8.20)$$

onde

$$\hat{H} = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right)H \quad (8.21a)$$

$$F_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\Delta t}HU_t + Bb_{t+\Delta t} + Q\sigma_{t+\Delta t}^p \quad (8.21b)$$

Impondo-se as condições de contorno, como usualmente é feito no método dos elementos de contorno, trocando-se as colunas das matrizes \hat{H} e G , pode-se resolver o sistema linear apresentado em (8.20), obtendo-se assim os deslocamentos e forças de superfície para o passo de tempo atual. Caso ocorra plastificação e conseqüentemente tensão residual, torna-se necessário redistribuir o resíduo de tensão inicial. Esta redistribuição caracteriza o processo iterativo. Este resíduo é reaplicado fazendo-se uso da equação (8.20) escrita com valores totais (e não incrementais). A velocidade de deslocamento é obtida diretamente através da equação (8.19). Com todas as incógnitas do problema de contorno

obtidas no passo atual, encontram-se as tensões totais fazendo-se uso da expressão (8.18b) para pontos internos.

$$\sigma_{t+\Delta t} = \tilde{G}P_{t+\Delta t} - \tilde{H}U_{t+\Delta t} - \gamma\tilde{H}\dot{U}_{t+\Delta t} + \tilde{B}b_{t+\Delta t} + \tilde{Q}\sigma_{t+\Delta t}^p \quad (8.22)$$

Através do resultado do problema de contorno, encontram-se as tensões totais referentes aos nós do contorno conforme descrito no item (8.2.2). A tensão de tentativa elástica necessária ao procedimento implícito de atualização é obtida adotando-se uma aproximação para a velocidade das tensões elásticas $\dot{\sigma}_{t+\Delta t}^e$ e residuais $\dot{\sigma}_{t+\Delta t}^p$.

$$\dot{\sigma}_{t+\Delta t}^{ep} = \frac{\sigma_{t+\Delta t}^{ep} - \sigma_t^{ep}}{\Delta t}; \quad \dot{\sigma}_{t+\Delta t}^p = \frac{\sigma_{t+\Delta t}^p - \sigma_t^p}{\Delta t} \quad (8.23)$$

Aplicando-se a expressão de $\dot{\sigma}_{t+\Delta t}^{ep}$ e $\dot{\sigma}_{t+\Delta t}^p$ apresentada em (8.23) na equação diferencial em (8.11), pode-se escrever:

$$\sigma_{t+\Delta t}^{ep} = \left[\sigma_{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma_t^{ep} - \gamma \left(\frac{\sigma_{t+\Delta t}^p - \sigma_t^p}{\Delta t} \right) \right] / \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (8.24)$$

As variáveis referentes ao instante passado “ t ” são atualizadas apenas no final de cada passo de tempo, pois são apenas valores do passado. Já aquelas referentes ao instante atual “ $t+\Delta t$ ” devem ser atualizadas em toda iteração. Note que na expressão (8.24) necessita-se do valor das tensões totais que são calculadas como mencionado anteriormente. Assim, calculadas as tensões totais e as tensões de tentativa elásticas, obtém-se as tensões elastoplásticas através de procedimentos usuais para corrigir as tensões de tentativa, de maneira que elas agora verifiquem o modelo não-linear adotado. As tensões viscosas são obtidas de uma forma simples e direta aplicando-se a relação (2.22). Não obtida a convergência repete-se o esquema sem atualizar as variáveis do instante anterior “ t ” caracterizando o processo iterativo. Caso contrário, atualiza-se as variáveis do problema e parte-se para um novo passo de tempo. Note que, para se resolver o problema viscoplástico os deslocamentos internos não são necessários, mas eles podem ser facilmente obtidos fazendo-se uso da expressão (8.6).

8.2.5 Procedimento não-linear

Para que se possa compreender melhor o procedimento viscoplástico proposto, apresenta-se, uma rápida visão deste juntamente com uma abordagem numérica da análise, procurando esclarecer os aspectos computacionais envolvidos na solução do problema não-linear. As equações serão empregadas em sua forma total e não incremental, de maneira que as taxas presentes nas expressões referem-se a derivadas com relação ao tempo. Assim, o processo fica descrito pelos seguintes passos:

Passo 1 – Admitem-se conhecidas, no final de um instante “ t ” (tempo real), as componentes de tensão σ^t , as tensões iniciais $\sigma^{p(t)}$, a variável interna κ^t responsável pelo encruamento, os deslocamentos nodais U^t , as forças de superfície P^t e volumétricas b^t . Inicia-se um novo passo de tempo “ $t + \Delta t$ ” e determinam-se os valores prescritos no instante atual dos deslocamentos, forças de superfície e forças volumétricas

$$\bar{P}^{t+\Delta t} = \bar{P}(t + \Delta t) \quad (8.25a)$$

$$b^{t+\Delta t} = b(t + \Delta t) \quad (8.25b)$$

onde o subscrito presente na equação (8.25a) indica a imposição das condições de contorno sobre o vetor P como usualmente visto no MEC. Os valores prescritos podem variar segundo qualquer função dependente do tempo, semelhantemente as clássicas formulações dinâmicas WARBURTON(1976) e CODA & VENTURINI(1995).

Passo 2 – Calculam-se as forças de superfície e deslocamentos incógnitos resolvendo o sistema de equações (8.20), ou seja:

$$\bar{U}_{i+1}^{t+\Delta t} = \bar{H}^{-1} \left(\bar{G} \bar{P}_{i+1}^{t+\Delta t} + F_i^{t+\Delta t} \right) \quad (8.26)$$

A presença do subscrito na equação (8.26) deve ser interpretado da mesma forma que aquele da equação (8.25a), as matrizes e vetores foram modificados devido à imposição das condições de contorno. Ressalta-se que os índices “ i ” e “ t ” referem-se, respectivamente, ao processo iterativo e temporal. Note que, como as equações são empregadas em sua forma total e não incremental, não é mais necessário, no cálculo dos deslocamentos, fazer uso de expressões diferentes para a primeira iteração e para as demais. Após a obtenção das

incógnitas do problema de contorno, reordena-se os vetores de deslocamento e força de superfície, de maneira que $U_{i+1}^{t+\Delta t}$ contenha apenas deslocamentos e $P_{i+1}^{t+\Delta t}$ apenas forças de superfícies.

$$U_{i+1}^{t+\Delta t} = \begin{cases} \bar{U}_{i+1}^{t+\Delta t} & \text{se } P \text{ prescrito} \\ ou \\ \bar{P}_{i+1}^{t+\Delta t} & \text{se } U \text{ prescrito} \end{cases} \quad (8.27a)$$

$$P_{i+1}^{t+\Delta t} = \begin{cases} \bar{P}_{i+1}^{t+\Delta t} & \text{se } P \text{ prescrito} \\ ou \\ \bar{U}_{i+1}^{t+\Delta t} & \text{se } U \text{ prescrito} \end{cases} \quad (8.27b)$$

Passo 3 – Calculam-se as tensões de tentativa elásticas para serem verificadas no algoritmo implícito através da expressão:

$$\sigma_{i+1}^{ep(t+\Delta t)} = \left[\sigma_{i+1}^{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma^{ep(t)} - \gamma \left(\frac{\sigma_i^{p(t+\Delta t)} - \sigma^{p(t)}}{\Delta t} \right) \right] / \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (8.28)$$

As tensões totais necessárias na expressão (8.28) são determinadas pela expressão (8.22) para pontos internos ou conforme descrito no item (8.2.2) para pontos no contorno. Os termos referentes ao instante anterior “ t ” são sempre os mesmos no processo iterativo do instante atual. Estes só são atualizados no final do incremento, ao contrário daqueles referentes ao instante “ $t + \Delta t$ ” que devem ser atualizados em todas a interações.

Passo 4 - Calculam-se as tensões, as deformações plásticas, as tensões iniciais e o parâmetro de encruamento, ambas nos pontos nodais através de um algoritmo de integração, como aqueles apresentados no capítulo 7.

$$\sigma_i^{ep(t+\Delta t)} = \sigma^{ep(t)} + \int_t^{t+\Delta t} d\sigma_i^{ep} \quad (8.29)$$

Passo 5 - O critério de convergência verifica se a solução considerada é suficientemente precisa. Este pode ser expresso basicamente de duas maneiras:

$$\text{Convergência em tensão inicial} \quad \frac{\|\sigma_{i+1}^{p(t+\Delta t)} - \sigma_i^{p(t+\Delta t)}\|}{\|\sigma_1^{p(t+\Delta t)}\|} \leq e_t \quad (8.30a)$$

$$\text{Convergência em deslocamento} \quad \frac{\|U_{i+1}^{t+\Delta t} - U_i^{t+\Delta t}\|}{\|U_1^{t+\Delta t}\|} \leq e_d \quad (8.30b)$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma euclidiana e os termos e_t e e_d referem-se a tolerância em tensão inicial e em deslocamento, respectivamente. Verificada a convergência, atualizam-se todas as variáveis referentes ao instante “ $t+\Delta t$ ”, armazenando-as nas variáveis referentes ao instante “ t ”. Após isto, retorna-se ao **passo 1**, dando início a um novo passo de tempo. Caso contrário, atualizam-se as variáveis referentes ao instante “ $t+\Delta t$ ” e retorna-se ao **passo 2** fazendo-se uso da equação (8.26) para a obtenção das variáveis de contorno, caracterizando assim o processo iterativo.

8.2.6 Exemplo numérico

No sentido de validar a presente formulação viscoplástica, resultados numéricos da implementação dos algoritmos definidos no capítulo 7 com critério de von Mises (com e sem lei associativa) são apresentados. O problema analisado é uma peça submetida a um carregamento distribuído de tração aplicado em sua face livre. A estrutura de seção transversal quadrada é modelada utilizando-se 24 elementos de contorno tridimensionais triangulares de três nós juntamente com 29 células tetraédricas internas. A geometria da estrutura, sua discretização e propriedades físicas são apresentadas na figura 8.1.

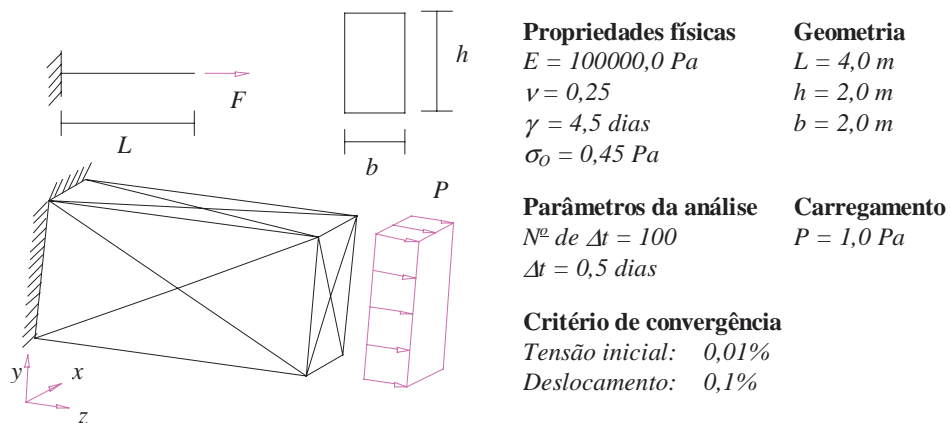


FIGURA 8.1 – Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura.

A resposta do deslocamento longitudinal do ponto central na extremidade onde se aplica a solicitação é apresentada na figura 8.2 para o critério de von Mises associativo e na figura 8.3 para o von Mises não-associativo. Nos gráficos apresentam-se resultados do comportamento viscoelástico, bem como o viscoplástico com encruamento nulo, positivo e negativo.

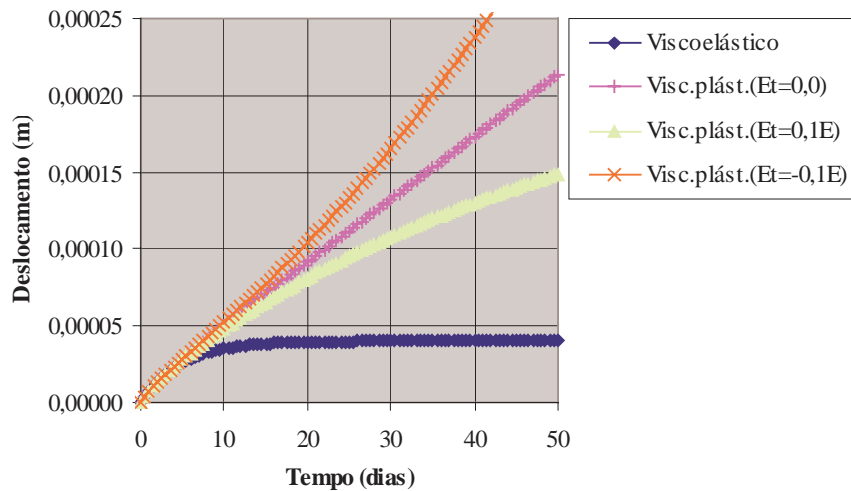


FIGURA 8.2 – Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada.

Observa-se que a resposta viscoelástica está em perfeita concordância com a analítica. Já os resultados viscoplásticos, apesar de não se ter encontrado respostas para confrontá-los, estão de acordo com o esperado. Note que o encruamento nulo induz uma velocidade de deslocamento constante, o que não ocorre com a resposta com encruamento negativo e positivo onde a velocidade é crescente e decrescente, respectivamente. Resultados similares são apresentados na figura 8.3 levando em consideração o algoritmo não-associativo.

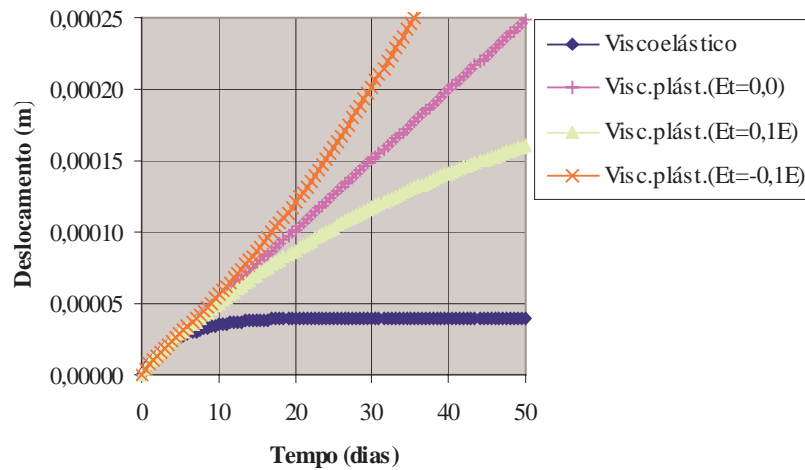


FIGURA 8.3 – Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada.

Os resultados viscoplásticos das figuras 8.2 e 8.3 não poderiam ser iguais, pois as leis de fluxo determinam como a energia será dissipada no processo viscoso. Esta evidência é confirmada pelas figuras 8.4 até 8.7, onde o comportamento das componentes de tensão é apresentado. A figura 8.4 apresenta resultados das tensões σ_{zz}^{ep} , σ_{zz}^v e σ_{zz} extraídas no centróide para o caso de encruamento nulo com os algoritmos associativos e não-associativos.

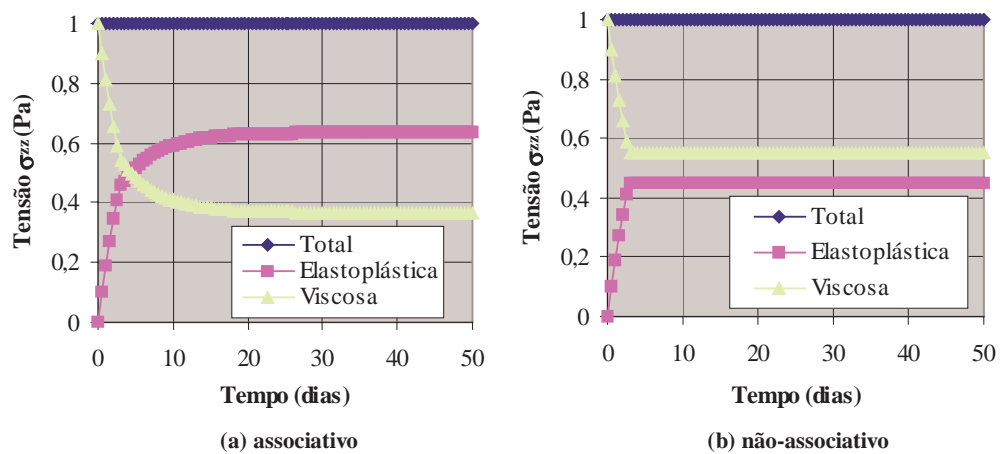


FIGURA 8.4 – Tensão elastoplástica σ_{zz}^{ep} , viscosa σ_{zz}^v e total σ_{zz} no centróide.

Algumas observações podem ser feitas a respeito das repostas em tensão apresentadas nas figuras 8.4. Ambas as repostas estão de acordo com os respectivos modelos viscoplásticos adotados. Note que a tensão total, como era de se esperar, é constante e de valor igual a carga aplicada. A soma da tensão viscosa com a elastoplástica corresponde à

tensão total. Para a situação específica com encruamento nulo, observa-se que o esperado seria que as tensões elastoplásticas convergissem para o limite de plastificação $\sigma_o = 0,45 Pa$ e conseqüentemente as tensões viscosas deveriam convergir para $0,55Pa$.

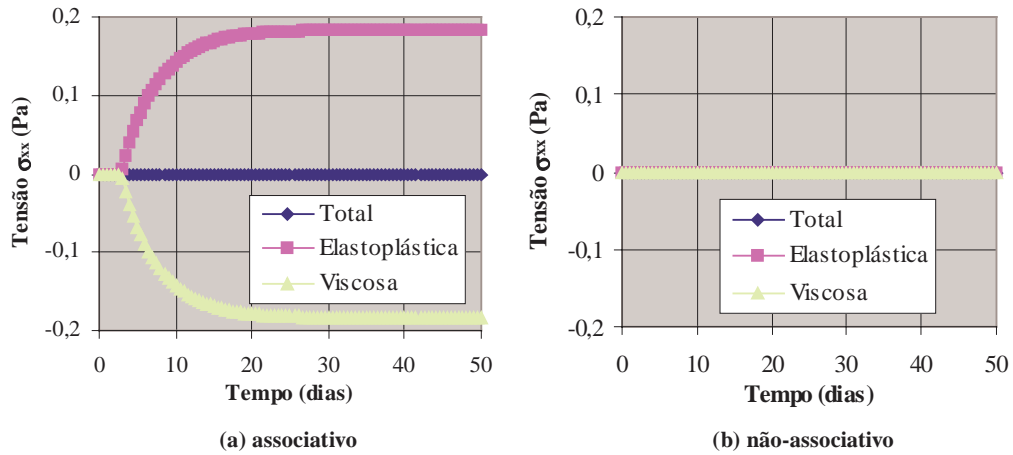


FIGURA 8.5 – Tensão elastoplástica σ_{xx}^{ep} , viscosa σ_{xx}^v e total σ_{xx} no centróide.

Note que esta resposta é encontrada com o modelo não-associativo, porém, com o associativo a resposta obtida é um pouco diferente. Isto é conseqüência direta do modelo elastoplástico adotado. Na realidade o que ocorre é que o retorno à superfície de plastificação segundo a lei associativa provoca o aparecimento de tensões em outras direções (veja figura 8.5). No problema puramente elastoplástico estas tensões convergiriam para zero com o processo iterativo (desde que exista um equilíbrio final), porém no problema viscoplástico elas induzem o aparecimento de velocidade de tensão nas outras direções conduzindo a resposta apresentada na figura 8.4. Gráficos semelhantes àqueles apresentados nas figuras 8.4 e 8.5 são apresentados a seguir, considerando agora encruamento positivo ($E_t=0,1E Pa$).

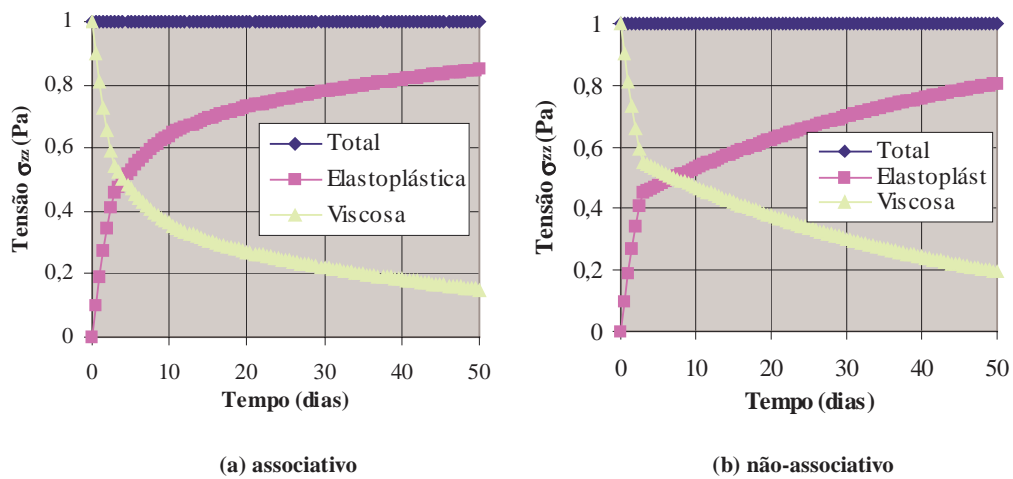


FIGURA 8.6 – Tensão elastoplástica σ_{zz}^{ep} , viscosa σ_{zz}^v e total σ_{zz} no centróide.

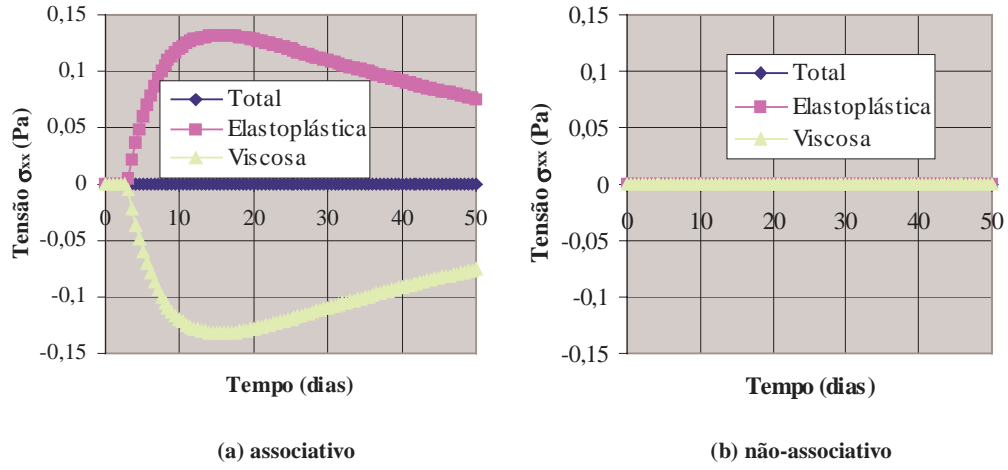


FIGURA 8.7 – Tensão elastoplástica σ_{zz}^{ep} , viscosa σ_{xx}^v e total σ_{xx} no centróide.

Observe novamente o aparecimento de tensões nas outra direção justificada pela lei associativa adotada. Note também que com o encruamento essas tensões tendem a reduzir-se com o tempo.

8.3 FORMULAÇÃO VISCOPLÁSTICA (com comportamento instantâneo)

A formulação que será desenvolvida prevê a consideração do comportamento instantâneo. Sua representação integral é obtida pela aplicação da equação constitutiva (2.32), cujo modelo é apresentado na figura 2.6, sobre a equação (3.15).

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \frac{\gamma E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega = 0 \quad (8.31)$$

Fazendo-se uso das equações (5.66), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} d\Omega + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega = 0 \quad (8.32)$$

Aplicando-se integração por partes na segunda, terceira e quarta integrais da equação (8.32), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i d\Omega \right] - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j \dot{u}_i d\Gamma - \right. \\ & \left. \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* \dot{u}_i d\Omega \right] + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{\sigma}_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{\sigma}_{ij,j} d\Omega \right] + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \\ & \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (8.33)$$

Fazendo-se uso, respectivamente, da equação de equilíbrio fundamental eq.(3.20) e da equação de equilíbrio do problema real escrita em forma de taxas eq.(5.22), aplicando-se estas na representação (8.33), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac e as técnicas para integrais singulares, sabendo-se que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$ e que $\dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{p}_i$, resulta,

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ki} u_i(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma - \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) + \\ & \gamma \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \frac{E_e}{E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega \end{aligned} \quad (8.34)$$

A equação (8.34) é a representação integral da formulação viscoplástica do MEC que leva em consideração o modelo definido na figura 2.6. A 1ª, 2ª e 6ª integrais são as mesmas apresentadas na formulação elastostática e podem ser solucionadas seguindo os mesmos princípios. Note que a quarta e a quinta integrais são responsáveis pelo comportamento instantâneo e podem contribuir para a resposta viscosa se houver variação das solicitações com o tempo. A terceira integral e o quarto termo do lado direito da equação integral (8.34) são responsáveis pelo comportamento viscoso. Note que a única diferença desta representação para a representação viscoelástica é a presença do último termo no lado direito da equação (8.34) responsável pelo comportamento plástico do corpo. Esta integral apresenta singularidade do tipo $1/r$ para o caso bidimensional e $1/r^2$ para o caso tridimensional e neste trabalho será tratada utilizando-se células (apenas nas regiões onde ocorrerão plastificação) e uma eficiente técnica de transformação de coordenadas, conforme exposto no Anexo D. Ressalta-se ainda que a penúltima e a última integrais podem ser transformadas em integrais de contorno e assim é possível obter uma expressão mais elegante para o MEC. Estas

transformações já foram executadas para b_i na equação (5.41) e para \dot{b}_i na equação (5.70), considerando a situação onde ambos são constantes em todo o domínio do corpo. Logo a equação integral (8.34) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ki}u_i(p) + \gamma\bar{C}_{ki}\dot{u}_i(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\ &\gamma \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma + \frac{E_e}{E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega \end{aligned} \quad (8.35)$$

O uso da representação (8.35) permite modelar problemas viscoplásticos pelo MEC discretizando-se apenas o contorno do corpo e as regiões onde será evidenciada a plastificação.

8.3.1 Representação integral para tensões em pontos internos

Resolvido o problema de contorno parte-se agora para a determinação das tensões. Para pontos internos o termo $\bar{C}_{ki} = \delta_{ki}$ e consequentemente a equação integral (8.35) fica escrita como:

$$\begin{aligned} u_k(p) + \gamma\dot{u}_k(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\ &\gamma \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma + \frac{E_e}{E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega \end{aligned} \quad (8.36)$$

A representação integral para as deformações em pontos internos é obtida através da definição de deformações eq.(3.24). Assim, diferenciando-se a equação (8.36) e aplicando-se esta na definição das deformações em (3.24), encontra-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ke}(p) + \gamma\dot{\varepsilon}_{ke}(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} \varepsilon_{kei}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\ &\gamma \left[\int_{\Gamma} \varepsilon_{kei}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} \hat{B}_{kei}^* d\Gamma \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} b_i \int_{\Gamma} \hat{B}_{kei}^* d\Gamma + \frac{E_e}{E_{ve}} \left[\int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{keij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega + \hat{g}_{keij} \sigma_{ij}^{vp}(p) \right] \end{aligned} \quad (8.37)$$

Note que como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. As tensões totais são obtidas de forma trivial, aplicando-se a representação (8.37) na relação constitutiva do modelo eq.(2.32).

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho q}(p) = & \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\
 & \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma \right] + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma + \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega + \right. \\
 & \left. g_{\rho qij} \sigma_{ij}^{vp}(p) \right] - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{\rho q}(p) - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \sigma_{\rho q}^{vp}(p)
 \end{aligned} \quad (8.38)$$

Sabendo-se que $\sigma_{\rho q}^p = \delta_{\rho\alpha} \delta_{qj} \sigma_{ij}^p$, pode-se reordenar o último termo da representação integral em (8.38) com o termo livre, de maneira que:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho q}(p) = & \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\
 & \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma \right] + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma + \\
 & \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega + \bar{g}_{\rho q}(\sigma_{ij}^{vp}(p)) \right] - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{\rho q}(p)
 \end{aligned} \quad (8.39)$$

sendo $\bar{\sigma}_{\rho qi}^*$, $\bar{t}_{\rho qij}^*$, $\bar{g}_{\rho qij}$ e $\bar{B}_{\rho qi}^*$ os mesmos definidos pelas equações (3.27a), (5.9a), (5.12) e (5.48). Note que a sétima integral em (8.39) apresenta singularidade do tipo $1/r^2$ para o caso bidimensional e $1/r^3$ para o caso tridimensional. Estas devem ser computadas no sentido de valor principal, veja ALIABADI *et al.*(1985), MI(1995) e CISILINO(1997), e serão tratadas utilizando-se células e uma eficiente técnica de subtração de singularidade (Anexo D). Note que não é possível escrever as equações integrais em pontos internos para as tensões elásticas e viscosas, ao contrário das tensões totais que são obtidas através da representação integral (8.39). Esta é uma característica particular da formulação viscosa. Felizmente, pode-se contornar esta situação através de um procedimento simples e eficiente, similar aquele desenvolvido no item (4.3.2), onde as tensões elásticas são obtidas pela solução de uma equação diferencial. Esta equação diferencial é encontrada escrevendo-se a equação (2.28a) em forma de taxa, da seguinte maneira:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{ep} = E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} = \frac{1}{\gamma} \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} (\dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} - \dot{\varepsilon}_{lm}^{vp}) = \frac{1}{\gamma} \sigma_{ij}^v - \dot{\sigma}_{ij}^{vp} \Rightarrow \sigma_{ij}^v = \gamma \dot{\sigma}_{ij}^{ep} + \gamma \dot{\sigma}_{ij}^{vp} \quad (8.40)$$

A equação (8.40) expressa uma relação entre as taxas de tensão elastoplástica e inicial e as tensões viscosas. Substituindo a equação (8.40) na relação (2.27) é possível encontrar o seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\gamma \dot{\sigma}_{ij}^{ep} + \sigma_{ij}^{ep} + \gamma \dot{\sigma}_{ij}^{vp} - \sigma_{ij} = 0 \quad (8.41)$$

É importante observar que as taxas presentes na equação (8.41) são derivadas temporais. Sendo assim, as tensões elásticas serão obtidas numericamente pela resolução das equações diferenciais (8.41), tornando assim o processo geral, permitindo variações nas condições de contorno. Este procedimento será melhor esclarecido nos próximos itens.

8.3.2 Obtenção das tensões totais no contorno

O problema em se utilizar a expressão (8.39) para se calcular as tensões no contorno já foi demasiadamente exposto nos capítulos passados que tratam das formulações com elementos de contorno e não necessita ser revisto. As tensões totais no contorno serão obtidas da mesma forma apresentada anteriormente para todas as outras formulações do MEC, ou seja, através dos deslocamentos e forças de superfície do contorno que já foram determinados na solução do problema de contorno. Assim, definidas as funções de forma para os deslocamentos e forças de superfície do contorno e obtidos os seus valores nodais, é possível definir as forças de superfície em qualquer ponto do elemento de contorno. Consequentemente, pode-se escrever para o caso tridimensional que:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{13} &= \bar{\sigma}_{31} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{23} &= \bar{\sigma}_{32} = \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{33} &= \bar{p}_3 \end{aligned} \quad (8.42)$$

onde o subscrito indica que os valores são referentes ao sistema de coordenadas local (fig. 3.2). As outras componentes de tensão podem ser obtidas através da relação constitutiva. Note que, quando se resolve o problema de contorno, obtém-se as forças de superfície e os deslocamentos nodais no sistema global, porém, para encontrar as tensões no contorno é necessário transformá-los para o sistema local fazendo uso da matriz de transformação entre os dois sistemas. Definido o campo de deslocamento sobre o elemento de contorno eq.(3.29), o campo de deformações é obtido pela diferenciação do campo de deslocamento, ou seja, utilizando-se a equação (3.30). Note que não é necessário determinar todas as componentes de

deformação, basta apenas obter aquelas que serão importantes na determinação das componentes de tensão restantes. Logo, as outras componentes do tensor de tensão são encontradas fazendo-se uso das seguintes relações constitutivas,

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{21} &= \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} 2\mu(\bar{\epsilon}_{12} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{12}) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\bar{\sigma}}_{12} - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \bar{\sigma}_{12}^{vp} \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left\{ (2\mu + \lambda)(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + \lambda[(\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22}) + (\bar{\epsilon}_{33} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{33})] \right\} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\bar{\sigma}}_{11} - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \bar{\sigma}_{11}^{vp} \\ \bar{\sigma}_{22} &= \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left\{ (2\mu + \lambda)(\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22}) + \lambda[(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + (\bar{\epsilon}_{33} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{33})] \right\} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\bar{\sigma}}_{22} - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \bar{\sigma}_{22}^{vp}\end{aligned}\quad (8.43)$$

Deve-se eliminar os termos $\bar{\epsilon}_{33}$ e $\dot{\bar{\epsilon}}_{33}$ utilizando-se a relação constitutiva para $\bar{\sigma}_{33}$, de maneira que:

$$\bar{\epsilon}_{33} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{33} = \frac{1}{2\mu + \lambda} \left\{ \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \bar{p}_3 - \lambda[(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + (\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22})] + \gamma\dot{\bar{\sigma}}_{33} + \frac{E_e}{E_{ve}} \bar{\sigma}_{33}^{vp} \right\}\quad (8.44)$$

onde μ e λ são as conhecidas constantes de Lamé escritas como:

$$\lambda = \frac{\nu E_e}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E_e}{2(1 + \nu)}\quad (8.45)$$

É importante observar que as relações constitutivas são empregadas em sua forma total e não em forma incremental. As velocidades de deformação são definidas por aproximações lineares, ou seja:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{t+\Delta t} = \frac{\bar{\epsilon}_{t+\Delta t} - \bar{\epsilon}_t}{\Delta t} \quad ; \quad \dot{\bar{\sigma}}_{t+\Delta t} = \frac{\bar{\sigma}_{t+\Delta t} - \bar{\sigma}_t}{\Delta t}\quad (8.46)$$

Substituindo-se as expressões (8.44) e (8.46) nas equações (8.43), pode-se reordená-las, explicitando-se as tensões referentes ao instante $t + \Delta t$, tornando possível encontrar as tensões no contorno, pois as deformações são obtidas em função dos deslocamentos e forças de superfície do contorno. Note também que as tensões iniciais devem ser transformadas para o sistema local antes da aplicação das expressões (8.43). Após a determinação das tensões,

pode-se obtê-las no sistema global utilizando-se a matriz de transformação. Para o caso bidimensional, o procedimento é o mesmo, porém envolve apenas uma componente de deformação eq.(3.32). Nesta situação as tensões no contorno ficam determinadas pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{22} &= \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left\{ (2\mu + \lambda)(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + \lambda(\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22}) \right\} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\bar{\sigma}}_{11} - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \bar{\sigma}_{11}^{vp}\end{aligned}\quad (8.47)$$

Semelhantemente ao 3D, deve-se eliminar os termos $\bar{\epsilon}_{22}$ e $\dot{\bar{\epsilon}}_{22}$ utilizando-se a relação constitutiva para $\bar{\sigma}_{22}$, de maneira que:

$$\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22} = \frac{1}{2\mu + \lambda} \left\{ \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \bar{p}_2 - \lambda(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + \gamma\dot{\bar{\sigma}}_{22} + \frac{E_e}{E_{ve}} \bar{\sigma}_{22}^{vp} \right\}\quad (8.48)$$

As taxas são definidas pelas equações (8.46) e a deformação ϵ_{11} é obtida pela diferenciação (3.32) sobre o campo de deslocamento adotado sobre o elemento nas coordenadas locais.

8.3.3 Tratamento algébrico para as representações integrais

Através do método dos elementos de contorno pode-se transformar as representações integrais apresentadas anteriormente em equações algébricas, dividindo o contorno do corpo Γ com n_e elementos de contorno Γ_e (fig. 6.1) e o domínio Ω , onde ocorrerá a plastificação, com n_c células Ω_c , de tal sorte que as densidades do contorno sejam representadas adequadamente. Dessa forma, as variáveis do problema podem ser aproximadas, parametrizando-as com relação aos seus valores nodais, fazendo-se uso de funções interpoladoras apropriadas.

$$\begin{aligned}p_i &= \phi^\alpha P_i^\alpha & \dot{p}_i &= \phi^\alpha \dot{P}_i^\alpha \\ u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha ; & \dot{u}_i &= \phi^\alpha \dot{U}_i^\alpha\end{aligned}\quad (8.49)$$

$$\sigma_{ij}^{vp} = \tilde{\phi} \tilde{\alpha} \sigma_{ij}^{vp(\tilde{\alpha})}$$

onde ϕ e $\tilde{\phi}$ são respectivamente as funções de forma adotadas para interpolar os elementos de contorno e as células e os subscritos α e $\tilde{\alpha}$ referem-se aos nós do elemento de contorno e da célula, respectivamente. Os termos $\sigma_{ij}^{vp(\tilde{\alpha})}$, U_i^α , P_i^α , \dot{U}_i^α e \dot{P}_i^α são valores nodais das tensões iniciais, forças de superfície, deslocamentos e suas respectivas velocidades. Consequentemente, as representações integrais de deslocamento e tensão ficam escritas como:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ki} U_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{U}_i(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \\ &\gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{P}_i^\alpha + \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} B_{ki}^* d\Gamma_e \dot{b}_i + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} B_{ki}^* d\Gamma_e b_i + \quad (8.50a) \\ &\frac{E_e}{E_{ve}} \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \varepsilon_{kij}^* \tilde{\phi} \tilde{\alpha} d\Omega_c \sigma_{ij}^{vp(\tilde{\alpha})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \\ &\frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{P}_i^\alpha + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma_e \dot{b}_i + \quad (8.50b) \\ &\sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma_e b_i + \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \left[\sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\varepsilon}_{\rho qij}^* \tilde{\phi} \tilde{\alpha} d\Omega_c \sigma_{ij}^{vp(\tilde{\alpha})} + \bar{g}_{\rho qij} \sigma_{ij}^{vp}(p) \right] - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{\rho q}(p) \end{aligned}$$

Depois de executar todas as integrais e escolher pontos fonte em igual número aos nós do problema, pode-se escrever os seguintes sistemas de equações diferenciais temporais:

$$HU(t) + \gamma H\dot{U}(t) = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} GP(t) + \gamma G\dot{P}(t) + \gamma Bb(t) + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} Bb(t) + \frac{E_e}{E_{ve}} Q\sigma^{vp}(t) \quad (8.51a)$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \tilde{G}P(t) - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H}U(t) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H}\dot{U}(t) + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{G}\dot{P}(t) + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{B}\dot{b}(t) + \\ &\tilde{B}b(t) + \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \tilde{Q}\sigma^{vp}(t) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}(t) \end{aligned} \quad (8.51b)$$

onde t representa o tempo. Ressalta-se que a matriz H é obtida através da associação do termo \bar{C}_{ki} com a matriz referente a integral de contorno cuja o núcleo é p_{ki}^* , como usualmente é

feito no método dos elementos de contorno. Já o temo livre é associado a última integral em (8.50b) dando origem a matriz \tilde{Q} .

8.3.4 Integração temporal numérica

Semelhantemente as formulações viscosas apresentadas anteriormente, para se resolver o problema viscoplástico, deve-se integrar no tempo o sistema de equações apresentado na equação (8.51a). Para isto, adota-se uma simples aproximação linear para definir as velocidades. Poderia-se adotar outras expressões para resolver o problema, porém observou-se que a aproximação linear é suficientemente adequada, de maneira que:

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \frac{U_{t+\Delta t} - U_t}{\Delta t}; \quad \dot{P}_{t+\Delta t} = \frac{P_{t+\Delta t} - P_t}{\Delta t}; \quad \dot{b}_{t+\Delta t} = \frac{b_{t+\Delta t} - b_t}{\Delta t}; \quad \dot{\sigma}_{t+\Delta t} = \frac{\sigma_{t+\Delta t} - \sigma_t}{\Delta t} \quad (8.52)$$

Aplicando-se a expressão das velocidades apresentadas em (8.52) na equação (8.51a), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\hat{H}U_{t+\Delta t} = \hat{G}P_{t+\Delta t} + F_{t+\Delta t} \quad (8.53)$$

onde

$$\hat{H} = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right)H \quad (8.54a)$$

$$\hat{G} = \left(\frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} + \frac{\gamma}{\Delta t}\right)G \quad (8.54b)$$

$$F_{t+\Delta t} = \left(\frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} + \frac{\gamma}{\Delta t}\right)Bb_{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\Delta t}HU_t - \frac{\gamma}{\Delta t}GP_t - \frac{\gamma}{\Delta t}Bb_t + \frac{E_e}{E_{ve}}Q\sigma_{t+\Delta t}^{vp} \quad (8.54c)$$

Impondo-se as condições de contorno, como usualmente é feito no método dos elementos de contorno, trocando-se as colunas das matrizes \hat{H} e \hat{G} , pode-se resolver o sistema linear apresentado em (8.53), obtendo-se assim os deslocamentos e forças de superfície para o passo de tempo atual. Caso ocorra plastificação e conseqüentemente tensão residual, torna-se necessário redistribuir o resíduo de tensão inicial. Esta redistribuição caracteriza o processo iterativo. Este resíduo é reaplicado fazendo-se uso da equação (8.53) escrita com valores totais (e não incrementais). Assim, obtidos os deslocamentos e as forças

de superfície do problema de contorno no instante $t+\Delta t$, determina-se $\dot{P}_{t+\Delta t}$, $\dot{U}_{t+\Delta t}$ e $\dot{b}_{t+\Delta t}$ através das expressões (8.52). Obtidas essas variáveis, calcula-se as tensões totais fazendo-se uso da equação (8.51b) e da expressão de $\dot{\sigma}_{t+\Delta t}$ em (8.52), de maneira que:

$$\sigma_{t+\Delta t} = \left(\tilde{G}P_{t+\Delta t} - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H}U_{t+\Delta t} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H}\dot{U}_{t+\Delta t} + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{G}\dot{P}_{t+\Delta t} + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{B}\dot{b}_{t+\Delta t} + \tilde{B}b_{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sigma_t + \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \tilde{Q}\sigma_{t+\Delta t}^{vp} \right) \left/ \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \right) \right. \quad (8.55)$$

Através do resultado do problema de contorno pode-se encontrar as tensões totais referentes aos nós do contorno conforme descrito no item(8.3.2). A tensão de tentativa elástica necessária ao procedimento implícito de atualização podem ser facilmente obtidas adotando-se uma aproximação para a velocidade das tensões elastoplásticas $\dot{\sigma}_{s+1}^{ep}$ e iniciais $\dot{\sigma}_{s+1}^{vp}$.

$$\dot{\sigma}_{t+\Delta t}^{ep} = \frac{\sigma_{t+\Delta t}^{ep} - \sigma_t^{ep}}{\Delta t}; \quad \dot{\sigma}_{t+\Delta t}^{vp} = \frac{\sigma_{t+\Delta t}^{vp} - \sigma_t^{vp}}{\Delta t} \quad (8.56)$$

Aplicando-se a expressão de $\dot{\sigma}_{s+1}^{ep}$ e $\dot{\sigma}_{s+1}^{vp}$ apresentada em (8.56) na equação diferencial em (8.41), pode-se escrever:

$$\sigma_{t+\Delta t}^{ep} = \left[\sigma_{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma_t^{ep} - \gamma \left(\frac{\sigma_{t+\Delta t}^{vp} - \sigma_t^{vp}}{\Delta t} \right) \right] \left/ \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \right. \quad (8.57)$$

As variáveis referentes ao instante passado “ t ” são atualizadas apenas no final de cada incremento. Já aquelas referentes ao instante atual “ $t+\Delta t$ ” devem ser atualizadas em toda iteração. Note que na expressão (8.57) necessita-se do valor das tensões totais que são calculadas como mencionado anteriormente. Assim, calculadas as tensões totais e as tensões de tentativa elásticas, obtém-se as tensões elastoplásticas através de procedimentos usuais para corrigir as tensões de tentativa, de maneira que elas agora verifiquem o critério de plastificação adotado. As tensões viscosas são obtidas de uma forma simples e direta aplicando-se a relação (2.27). Não obtida a convergência repete-se o esquema sem atualizar as variáveis do instante anterior “ t ”, pois estas já estavam equilibradas no passo anterior, caracterizando o processo iterativo. Caso contrário, atualiza-se as variáveis do problema e

parte-se para um novo incremento de tempo. Note que, para se resolver o problema viscoplástico os deslocamentos internos não são necessários, mas eles podem ser facilmente obtidos fazendo-se uso da expressão (8.36). O procedimento não-linear é o mesmo descrito no item(8.2.5), onde a equação (8.26) é obtida pela imposição das condições de contorno sobre (8.53) e as tensões de tentativa elásticas eq.(8.28) são agora determinadas por (8.57).

8.3.5 Exemplo numérico

O mesmo exemplo empregado no item(8.2.6) será aqui utilizado com o propósito de validar a formulação viscoplástica com comportamento instantâneo. Na análise do problema foram utilizados os algoritmos implícitos com critério de von Mises levando em consideração as hipóteses associativa e não-associativa. Serão considerados como dados adicionais o módulo de elasticidade instantâneo $E_e = 100000,0Pa$ e o módulo de elasticidade do trecho viscoplástico $E_{ve} = 50000,0Pa$. As informações restantes são as mesmas apresentadas na figura 8.1. Semelhantemente, resultados do deslocamento longitudinal do ponto central na extremidade onde se aplica a solicitação são apresentados na figura 8.8 para o von Mises associativo e na figura 8.9 para o von Mises não-associativo. Nos gráficos apresentam-se resultados do comportamento viscoelástico, bem como o viscoplástico com encruamento nulo, positivo e negativo.

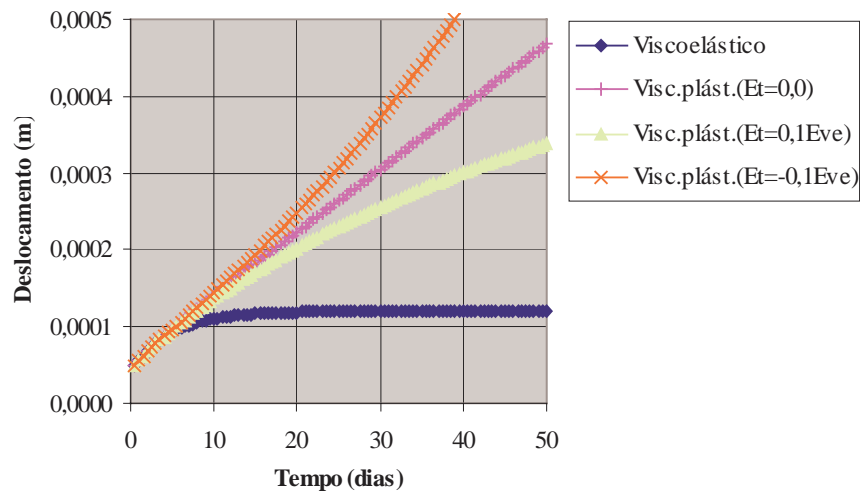


FIGURA 8.8 – Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada.

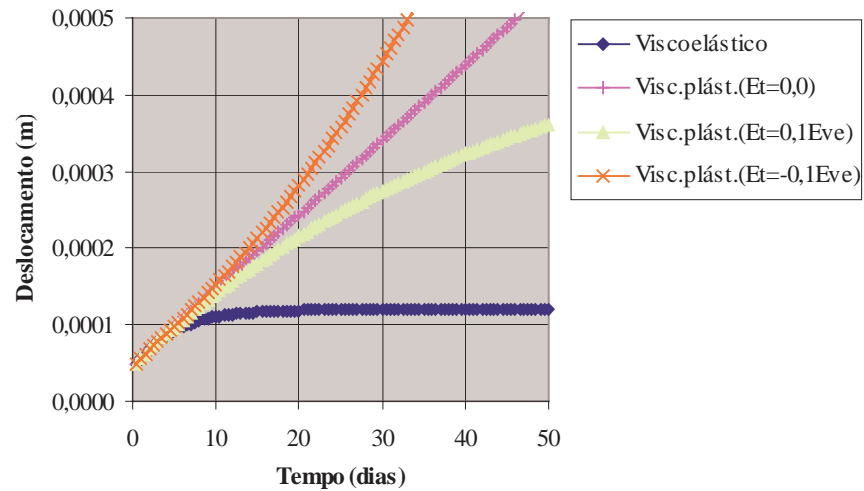


FIGURA 8.9 – Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada.

Observando as figuras 8.8 e 8.9 pode-se chegar as mesmas conclusões obtidas com a primeira formulação viscoplástica. Semelhantemente, note que o encruamento nulo induz uma velocidade de deslocamento constante, o que não ocorre com a resposta com encruamento negativo e positivo onde a velocidade é crescente e decrescente, respectivamente. As respostas obtidas para as tensões são exatamente as mesmas encontradas com a primeira formulação e as conclusões lá apresentadas podem ser aqui estendidas.

Capítulo 9

ACOPLAMENTO MEC/MEF

9.1 INTRODUÇÃO

A maioria dos problemas de engenharia apresentam interação entre partes diferentes do sistema, tais como: interação solo-estrutura, estrutura-estrutura e fluido-estrutura. As fundações das estruturas interagem diretamente com o solo, transmitindo as solicitações de maneira que a estrutura esteja em equilíbrio estático ou dinâmico. Fluidos, tais como: ar, água ou lubrificantes, podem estar interagindo com elementos estruturais como: edifícios, represas, estruturas "offshore", componentes mecânicos, etc. Cada parte do sistema é representada por uma região física, sobre a qual pode-se aplicar uma solução numérica particular. Porém, em muitos casos práticos, por simplicidade, é possível desprezar a interação de uma parte do sistema com a outra. Um exemplo claro desse comportamento desacoplado, seria a atuação direta das forças do vento sobre um edifício suposto rígido. Neste caso, despreza-se a interação, analisando o problema com forças equivalentes atuando sobre a estrutura, na tentativa de simular a presença do fluido. Entretanto, em situações onde se deseja analisar o comportamento de todo o sistema ou mesmo modelar o problema de forma mais realista e coerente, deve-se utilizar técnicas numéricas específicas para cada parte do sistema. Uma maneira eficiente de representar todo o problema seria através do acoplamento de elementos de contorno com elementos finitos. Elementos de contorno são mais adequados para tratar problemas com domínio infinito ou semi-infinito e regiões de concentração de tensões e fluxo. Já elementos finitos são mais apropriados para problemas envolvendo materiais compósitos ou anisotrópicos 3D. Uma aplicação adequada de ambos os métodos na simulação de um problema de interação torna o acoplamento uma ferramenta bastante atraente, possibilitando

uma melhor representação de todo o problema, conduzindo a resultados mais precisos com um custo computacional menor.

9.2 TÉCNICAS DE ACOPLAMENTO

Segundo BREBIA & DOMINGUES(1992) existem várias aproximações proposto para o acoplamento entre elementos finitos e elementos de contorno, porém, do ponto de vista prático, três técnicas se destacam.

Técnica (i) Utiliza a solução de elementos finitos para definir as condições de contorno da região de elementos de contorno.

Técnica (ii) Trata a região de elementos de contorno como uma sub-região equivalente de elementos finitos que será acoplada a outras sub-regiões de elementos finitos.

Técnica (iii) Trata a região de elementos finitos como uma região elementos de contorno equivalente que deve ser combinada a outras regiões de elemento de contorno.

Técnica (i) Esta aproximação consiste basicamente de duas etapas, uma etapa inicial onde o problema é resolvido utilizando-se apenas elementos finitos e um uma segunda etapa onde a resposta da primeira etapa serve de condições de contorno à região de elementos de contorno. Esta é uma aproximação puramente empírica, de maneira que não pode ser facilmente justificada de um ponto de vista puramente matemático, porém, ela é muito utilizada, produzindo razoáveis resultados BREBIA & DOMINGUES(1992). As condições de contorno obtidas do código de elementos finitos e aplicadas na região de elementos de contorno, em geral, são sempre deslocamentos (ou potenciais). Isto pode ser facilmente justificado pela maior precisão dos resultados em deslocamento (ou potencial) obtidos de um código de elementos finitos. Provavelmente, a técnica não apresentaria bons resultados se fossem utilizadas tensões (ou fluxos) como condições de contorno para a região de elementos de contorno.

Técnica (ii) Uma aproximação mais interessante seria aquela em que a região de elementos de contorno é tratada como uma região equivalente de elementos finitos, podendo ser facilmente incorporada em um código computacional de elementos finitos já existente. Em geral, esta técnica conduz a matrizes não simétricas para os elementos finitos equivalentes e consequentemente a perda da simetria da matriz de rigidez global. Matrizes simétricas são

computacionalmente mais eficientes, pois permitem o uso das técnicas de armazenamento em banda, reduzindo a área de armazenamento, além disso, são mais fáceis de serem implementadas em um código de elementos finitos já existente.

O ponto de partida para as deduções das expressões do método dos elementos finitos é o princípio dos trabalhos virtuais. Este requer que durante qualquer deslocamento virtual imposto no corpo, o trabalho externo total provocado pelas forças externas seja igual ao trabalho interno total produzido pelas forças internas, conseqüentemente para o caso elastostático, tem-se:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta u_i p_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega \quad (9.1)$$

onde p_i são as forças de superfície (cargas distribuídas) referentes a direção i , b_i são as forças volumétricas, δu_i o deslocamento virtual, ε_{ij} as componentes de deformação e σ_{ij} as componentes de tensão. Note que a primeira integral refere-se ao trabalho das forças internas e dá origem a matriz de rigidez. Já a integral do lado esquerdo da igualdade representa o trabalho das forças de superfície. Aproximando-se as variáveis do problema, fazendo-se uso de funções interpoladoras apropriadas, parametrizando-as com relação aos seus valores nodais, é possível montar o seguinte sistema de equações:

$$KU = F + B \quad (9.2)$$

sendo K a matriz de rigidez da sub-região de elementos finitos U o vetor de deslocamento nodais e F o vetor independente que possui contribuição das forças externas.

Já para a sub-região de elementos de contorno as equações integrais de contorno podem ser escritas para o caso elastostático como:

$$\bar{C}_{ki} u_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (9.3)$$

onde \bar{C}_{ki} é uma matriz que depende da posição do ponto fonte, u_{ki}^* e p_{ki}^* são, respectivamente, as soluções fundamentais em deslocamento e em força de superfície e representa fisicamente o efeito de uma carga concentrada unitária estática atuando em um ponto de um domínio infinito. Estas soluções foram descritas em capítulos anteriores para o

problema de Kelvin. Os termos b_i , u_i e p_i são as componentes segundo a direção i das forças volumétricas, dos deslocamentos e das forças de superfície, respectivamente. Semelhantemente ao que foi feito à expressão (9.1), faz-se a equação integral (9.3), aproximando as variáveis através de funções interpoladoras, de maneira que a representação integral fica expressa pelo seguinte sistema de equações:

$$HU = GP + \tilde{B} \quad (9.4)$$

sendo H e G as conhecidas matrizes do MEC, U é o vetor de deslocamento nodais e P o vetor de forças de superfície nodais. Para executar o acoplamento como descrito neste item é necessário transformar a equação do MEC em uma forma semelhante aquela do MEF. Sendo assim, deve-se pré-multiplicar a equação (9.4) pela inversa da matriz G de maneira que:

$$G^{-1}HU = P + G^{-1}\tilde{B} \quad (9.5)$$

É importante observar que o vetor P contém forças de superfície (tractions) nos nós. Porém, para tornar a expressão (9.5) em uma forma equivalente ao MEF é necessário transformar as forças de superfície em forças equivalentes nodais. Para isto deve-se fazer uso da matriz “Lumping” L que transforma as forças de superfície em forças equivalentes nodais, definida como:

$$L = \int_{\Gamma} \bar{\phi}_{\beta} \phi_{\alpha} d\Gamma \quad (9.6)$$

onde $\bar{\phi}_{\beta}$ e ϕ_{α} são as funções de forma adotadas para a função ponderadora e para interpolar as forças de superfície, respectivamente, de maneira que:

$$\bar{F} = LP \quad (9.7)$$

Esta operação é bastante usual nas formulações em elementos finitos, porém não é muito comum encontrar a matriz Lumping escrita em uma forma explícita. Pré-multiplicando ambos os lados da equação (9.5) encontra-se a expressão equivalente do MEC para o acoplamento em código de elementos finitos.

$$LG^{-1}HU = LP + LG^{-1}\tilde{B} \Rightarrow \bar{K}U = \bar{F} + \bar{B} \quad (9.8)$$

onde $LG^{-1}H$ é a matriz de “rigidez equivalente” \bar{K} referente a sub-região do MEC, LP é o respectivo vetor de forças equivalente \bar{F} e $LG^{-1}\tilde{B}$ é o vetor das forças volumétricas \bar{B} . Note que não é possível garantir que a matriz de rigidez equivalente seja simétrica. Alguns autores, veja por exemplo SWOBODA *et al.*(1987) e SINGH *et al.*(1988), propõem uma manipulação na matriz de “rigidez” da sub-região de elementos de contorno de maneira que ela se torne simétrica e assim ser possível desfrutar das vantagens de se ter uma matriz simétrica. Uma maneira simples seria impor que a matriz de rigidez equivalente seja expressa por:

$$\bar{K} = \frac{1}{2}[\bar{K} + \bar{K}^T] \quad (9.9)$$

Porém, segundo BREBIA & DOMINGUES(1992) esta operação não é muito recomendada por produzir resultados imprecisos em muitas aplicações práticas. Obtido o sistema em elementos de contorno na forma padrão do MEF e impondo-se as condições de contorno como usualmente é feito pelo MEF em ambas sub-regiões, pode-se executar o acoplamento através das imposições das condições de compatibilidade e equilíbrio na interface que liga as sub-regiões e assim resolver o problema segundo a técnica descrita.

Técnica (iii) Esta técnica é similar à última técnica abordada, inclusive apresenta resultados numéricos semelhantes. Porém, ao invés de tratar o problema como se fosse elementos finitos, esta apresenta uma abordagem diferente, tratando o problema segundo os moldes do método dos elementos de contorno. Entretanto para isto, deve-se considerar as sub-regiões de elementos finitos como se fossem sub-regiões de elementos de contorno equivalente. Sendo assim, fazendo-se uso da matriz Lumping eq.(9.7) é possível escrever o seguinte sistema para elementos finitos:

$$KU = F + B \Rightarrow KU = LP + B \quad (9.10)$$

Considerando-se agora um problema de acoplamento consistindo de duas sub-regiões Ω_1 (elementos de contorno) e Ω_2 (elementos finitos), conforme apresentado na figura 9.1.

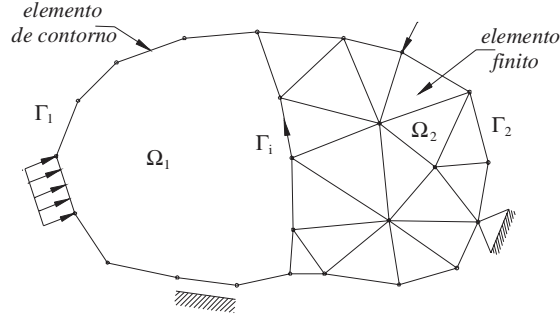


FIGURA 9.1 – Corpo discretizado com elementos de contorno e finitos

As sub-regiões estão conectadas através da interface Γ_i e são caracterizadas pelos seus respectivos sistemas de equações expressos pelas equações (9.4) e (9.10). Estes ficam melhor escritos como:

$$\text{Para } \Omega_1 \rightarrow H_1 U_1 = G_1 P_1 + B_1 \quad (9.11a)$$

$$\text{Para } \Omega_2 \rightarrow K U_2 = L P_2 + B_2 \Rightarrow H_2 U_2 = G_2 P_2 + B_2 \quad (9.11b)$$

Note que $H_2 = K$ e $G_2 = L$. Escrevendo-se agora ambos os sistemas em uma forma mais explícita, separando os graus de liberdade pertencentes a interface (i) e aqueles exteriores (e) a interface, tem-se:

$$\text{Para } \Omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} H_1^e & H_1^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_1^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^e & G_1^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^e \\ P_1^i \end{Bmatrix} + B_1 \quad (9.12a)$$

$$\text{Para } \Omega_2 \rightarrow \begin{bmatrix} H_2^e & H_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2^e \\ U_2^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2^e & G_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2^e \\ P_2^i \end{Bmatrix} + B_2 \quad (9.12b)$$

Considerando-se a opção de prescrever forças de superfície na interface de contato Γ_i , deve-se notar que os vetores P_1^i e P_2^i contém valores prescritos e incógnitos. Assim, separando a parte prescrita da incógnita as equações (9.12) ficam escritas:

$$\text{Para } \Omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} H_1^e & H_1^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_1^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_1^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P_1^i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1^e & G_1^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^e \\ \bar{P}_1^i \end{Bmatrix} + B_1 \quad (9.13a)$$

$$\text{Para } \Omega_2 \rightarrow \begin{bmatrix} H_2^e & H_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2^e \\ U_2^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P_2^i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_2^e & G_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2^e \\ \bar{P}_2^i \end{Bmatrix} + B_2 \quad (9.13b)$$

onde o sobrescrito (traço) no vetor de forças de superfície refere-se aos valores rescritos na interface. As condições de compatibilidade e equilíbrio na interface Γ_i podem ser escritas como:

$$\text{Condição de compatibilidade} \quad \rightarrow U^i = U_1^i = U_2^i \quad (9.14a)$$

$$\text{Condição de equilíbrio} \quad \rightarrow P^i = P_1^i = -P_2^i \quad (9.14b)$$

Aplicando as equações (9.14) nas expressões (9.13), satisfazemos, automaticamente, as condições de compatibilidade e equilíbrio da interface Γ_i , obtendo-se:

$$\text{Para } \Omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} H_1^e & H_1^i & -G_1^i \\ G_1^e & G_1^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U^i \\ P^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^e & G_1^i \\ P_1^e \\ \bar{P}_1^i \end{bmatrix} + B_1 \quad (9.15a)$$

$$\text{Para } \Omega_2 \rightarrow \begin{bmatrix} H_2^e & H_2^i & G_2^i \\ G_2^e & G_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2^e \\ U^i \\ P^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2^e & G_2^i \\ P_2^e \\ \bar{P}_2^i \end{bmatrix} + B_2 \quad (9.15b)$$

Escrevendo as equações (9.15) em um único sistema de equações, tem-se:

$$\begin{bmatrix} H_1^e & 0 & H_1^i & -G_1^i \\ 0 & H_2^e & H_2^i & G_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ U^i \\ P^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^e & 0 & G_1^i & 0 \\ 0 & G_2^e & 0 & G_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \\ \bar{P}_1^i \\ \bar{P}_2^i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} \quad (9.16)$$

As condições de contorno podem ser impostas mais facilmente antes da montagem do sistema final, segundo o procedimento padrão do MEC. Dessa forma, após a imposição das condições de contorno, o sistema (9.16) pode assim ser montado e resolvido, solucionando o problema de acoplamento. Na resolução do sistema é importante considerar rotinas que utilizem pelo menos pivoteamento parcial, caso contrário, para algumas situações não será possível obter resposta devido ao mau condicionamento da matriz. Esta forma de abordar o problema não requer inversões adicionais para transforma o sistema de equações de métodos de domínio na forma padrão do MEC e é adotada neste trabalho para tratar o problema de acoplamento. É importante observar que, seja qual for a formulação empregada, elástica, elastoplástica, viscoelástica, viscoplástica, dinâmica, etc., é possível chegar a sistemas de

equações semelhantes aqueles apresentados pelas equações (9.11). De maneira que, toda a metodologia aqui empregada para executar o acoplamento elastostático entre o MEC e o MEF pode ser diretamente estendida para qualquer outro problema, incluindo também situações com mais de duas regiões CODA(2000).

9.3 ACOPLAMENTO PARA O REFORÇO

Esta abordagem é mais indicada para tratar problemas de acoplamento progressivo que envolve inserção de regiões no corpo em tempos pré-determinados, tais como os problemas de reforço estrutural e de escavações. O reforço é tratado como uma sub-região que será acoplada durante o processo numérico. A interface que receberá reforço, em geral, apresenta-se em uma forma deslocada. Executando-se o acoplamento como descrito na *técnica(iii)* do item anterior, mantendo as condições de compatibilidade e equilíbrio, implicitamente impõe-se que a interface do reforço que será acoplada possuirá deslocamentos e forças de superfícies prescritas iguais aos pontos da interface que recebe o reforço.

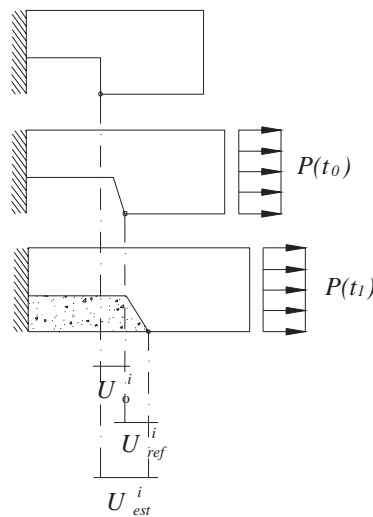


FIGURA 9.2 – Etapas de um reforço estrutural.

Se o acoplamento for considerado desta forma e for empregado um reforço com as mesmas propriedades físicas do meio reforçado, ocorrerá que a estrutura recuperará a rigidez inicial de uma estrutura íntegra com a mesma geometria e propriedades físicas da estrutura reforçada, provocando uma descontinuidade na curva *deslocamento x tempo*, o que não é

correto. Para se evitar este problema, é necessário fazer uma correção no sistema de equações, de maneira que as hipóteses do reforço sejam introduzidas corretamente. Esta correção pode ser melhor compreendida visualizando-se a figura 9.2. A figura 9.2 apresenta as etapas de um problema de reforço. A estrutura a ser reforçada, inicialmente em repouso, é solicitada por uma força, originando uma nova configuração deslocada para a estrutura, até que, em um determinado instante, o reforço é acoplado. Note que as condições de compatibilidade e equilíbrio, para a interface de contato entre o reforço e a estrutura, considerando a hipótese de pequenos deslocamentos, são agora expressas como:

$$\text{Condição de compatibilidade} \quad \rightarrow U_{est}^i = U_{ref}^i + U_o^i \quad (9.17a)$$

$$\text{Condição de equilíbrio} \quad \rightarrow P_{ref}^i = -P_{est}^i \quad (9.17b)$$

sendo U_o^i o vetor de deslocamentos da interface que recebe o reforço no instante anterior ao acoplamento do reforço. Os subscritos *ref* e *est* indicam os termos relacionados, respectivamente, ao reforço e a estrutura a ser reforçada, ambos referentes ao instante atual. É importante observar que a condição de compatibilidade para o problema de reforço é diferente daquela apresentada na equação (9.14a). As equações do problema no instante em que o reforço é conectado são:

$$\text{Para } \Omega_{est} \rightarrow \begin{bmatrix} H_{est}^e & H_{est}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{est}^e \\ U_{est}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_{est}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P_{est}^i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{est}^e & G_{est}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{est}^e \\ \bar{P}_{est}^i \end{Bmatrix} + B_{est} \quad (9.18a)$$

$$\text{Para } \Omega_{ref} \rightarrow \begin{bmatrix} H_{ref}^e & H_{ref}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{ref}^e \\ U_{ref}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_{ref}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P_{ref}^i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{ref}^e & G_{ref}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{ref}^e \\ \bar{P}_{ref}^i \end{Bmatrix} + B_{ref} \quad (9.18b)$$

Substituindo as condições de compatibilidade e equilíbrio, específicas para o problema de reforço, nas equações (9.18), encontra-se:

$$\text{Para } \Omega_{est} \rightarrow \begin{bmatrix} H_{est}^e & H_{est}^i & -G_{est}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{est}^e \\ U_{ref}^i \\ P_{est}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{est}^e & G_{est}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{est}^e \\ \bar{P}_{est}^i \end{Bmatrix} + B_{est} - H_{est}^i U_o^i \quad (9.19a)$$

$$\text{Para } \Omega_{ref} \rightarrow \begin{bmatrix} H_{ref}^e & H_{ref}^i & G_{ref}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{ref}^e \\ U_{ref}^i \\ P_{est}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ref}^e & G_{ref}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{ref}^e \\ \bar{P}_{ref}^i \end{Bmatrix} + B_{ref} \quad (9.19b)$$

No sistema de equações referente à sub-região que recebe o reforço, aparece um termo adicional, oriundo da equação de compatibilidade. Este termo é a correção que deve ser imposta ao sistema, para que as hipóteses do reforço sejam atendidas. Escrevendo as equações (9.19) em um único sistema de equações, tem-se:

$$\begin{bmatrix} H_{est}^e & 0 & H_{est}^i & -G_{est}^i \\ 0 & H_{ref}^e & H_{ref}^i & G_{ref}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{est}^e \\ U_{ref}^e \\ U_{ref}^i \\ P_{est}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{est}^e & 0 & G_{est}^i & 0 \\ 0 & G_{ref}^e & 0 & G_{ref}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{est}^e \\ P_{ref}^e \\ \bar{P}_{est}^i \\ \bar{P}_{ref}^i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{est} \\ B_{ref} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} H_{est}^i U_o^i \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.20)$$

Após a resolução do sistema de equações, obtém-se U_{est}^i e P_{ref}^i através das equações (9.17), encontrando assim todas as incógnitas e solucionando completamente o problema de reforço. Note que, em um problema viscoso, a correção deve ser imposta em todos os passos de tempo, a partir do instante da inserção do reforço.

9.4 PROCEDIMENTO COM ACOPLAMENTO PROGRESSIVO

Para problemas de progressão, onde partes de um sólido são extraídas e inseridas em tempos pré-determinados, tal como em problemas de escavações reforçadas em túneis, o procedimento de acoplamento das sub-regiões é exatamente o mesmo. As partes do corpo que serão fixas, aquelas que serão removidas e aquelas que serão introduzidas são representadas por sub-regiões, de maneira que em uma determinada etapa do problema de progressão seja possível executar a extração de partes do corpo e a inserção de outras. É indispensável adoção de um modelo viscoso para este tipo de problema, pois este possibilita executar a análise em função do tempo, permitindo determinar os tempos de extração e inclusão das sub-regiões. O procedimento é dividido em etapas. Em cada etapa é definida uma nova geometria do problema, ou seja, é de uma etapa para a outra que partes do corpo, caracterizadas por sub-regiões de elementos finitos ou elementos de contorno, são inseridas ou extraídas. As etapas são divididas em passos de tempo oriundos das formulações viscosas. O tempo, com um significado físico bem definido, permanece contínuo de uma etapa para outra. Se o problema considerado for viscoplástico, torna-se necessário um procedimento iterativo dentro de cada passo de tempo para se corrigir o erro de aproximação, de maneira que o equilíbrio seja

novamente estabelecido. Uma descrição sistematizada de todo o procedimento com acoplamento progressivo pode ser vista nos passos a seguir.

Passo 1 - Para cada etapa do problema monta-se o sistema de equações com as sub-regiões acopladas. As matrizes de todas as sub-regiões envolvidas no problema só precisam ser calculadas uma única vez. Estas devem ser armazenadas e lidas no instante da montagem do sistema total da etapa atual. Se o problema envolve variação das propriedades físicas com o tempo, como é o caso do concreto projetado nas idades iniciais, o sistema deve ser montado em todo passo de tempo, acarretando em maior custo computacional.

$$H_i U_i(t) = G_i P_i(t) + B_i(t) \quad (9.21)$$

Note que é possível montar os sistemas de todas as formulações descritas nos capítulos anteriores semelhantemente a equação (9.21). Assim, para cada sub-região i obtêm-se o vetor B_i e as matrizes H_i , G_i com as condições de contorno já impostas pela forma padrão do MEC.

Passo 2 - No início de cada passo de tempo calculam-se os valores prescritos no instante atual dos deslocamentos, forças nodais, forças de superfície e forças volumétricas, de maneira que:

$$P_i^{t+\Delta t} = P_i(t + \Delta t) \quad (9.22a)$$

$$B_i^{t+\Delta t} = B_i(t + \Delta t) \quad (9.22b)$$

Os valores prescritos podem variar segundo qualquer função dependente do tempo, semelhantemente as clássicas formulações dinâmicas WARBURTON(1976) e CODA & VENTURINI(1995).

Passo 3 – Montagem do sistema de equações total com a contribuição de todas as sub-regiões envolvidas na etapa.

$$\begin{bmatrix} H_1^e & \cdots & 0 & \cdots & H_1^i & \cdots & -G_1^i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & H_n^e & \cdots & H_n^i & \cdots & G_n^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ \vdots \\ U_n^e \\ \vdots \\ U^i \\ \vdots \\ P^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^e & \cdots & 0 & \cdots & G_1^i & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & G_n^e & \cdots & 0 & \cdots & G_n^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^e \\ \vdots \\ P_n^e \\ \vdots \\ \bar{P}_1^i \\ \vdots \\ \bar{P}_n^i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} H_1^i U_{1(o)}^i \\ \vdots \\ H_n^i U_{n(o)}^i \end{Bmatrix} \quad (9.23)$$

Note que o vetor de deslocamentos $U_{n(o)}^i$, referente aos graus de liberdade das interfaces da sub-região n conectados a sub-regiões de reforço, obtido no instante anterior ao acoplamento do respectivo reforço, deve ser lido antes da montagem do sistema para se efetuar o cálculo do vetor de correção. Este deve ser salvo e não mais alterados, pois seu valor será sempre necessário na montagem do sistema (9.23) em todos os instantes a partir da inserção do reforço.

Passo 4 – Resolvendo o sistema de equações (9.23) soluciona-se o problema de contorno, encontrando todas as incógnitas referentes às interfaces por meio das equações (9.14), para acoplamento simples, ou das equações (9.17), para acoplamento com reforço. Para o caso mais geral, com m sub-regiões conectadas a uma interface, as condições de compatibilidade e equilíbrio ficam escritas como:

$$\left. \begin{array}{l} U_1^i = \cdots = U_m^i \\ P_1^i = -P_2^i - \cdots - P_m^i \end{array} \right\} \text{sem reforço} \quad (9.24a)$$

$$\left. \begin{array}{l} U_1^i = \cdots = U_m^i = U_{ref}^i + U_o^i \\ P_1^i = -P_2^i - \cdots - P_m^i \end{array} \right\} \text{com reforço} \quad (9.24b)$$

sendo U_o^i o mesmo definido no item 9.3. Obtidas todas as variáveis do problema de contorno, deve-se reordena-las para cada sub-região e salva-las em arquivos, para posteriormente serem utilizadas

Passo 5 – Para cada sub-região executa-se a leitura do(s) respectivo(s) arquivo(s) com as variáveis do problema de contorno. Assim, encontram-se as tensões totais, elásticas e viscosas de acordo com tipo de sub-região (MEC ou MEF) e da formulação adotada.

$$\sigma(t), \quad \sigma^e(t), \quad \sigma^v(t) \quad (9.25)$$

Semelhantemente, estas devem ser salvas em arquivos para serem posteriormente utilizadas. Se o problema considerado for viscoelástico, o processo se encerra aqui e dá-se início a um novo passo de tempo e/ou uma nova etapa retornando-se ao **passo 2**. De outra forma, se a sub-região considerada for do tipo viscoplástica é necessário verificar se as tensões não violam o critério, caso contrário deve-se fazer uma correção através de um algoritmo elastoplástico.

$$\begin{aligned}\sigma_{t+\Delta t}^{ep} &= \sigma_t^{ep} + \int_t^{t+\Delta t} d\sigma^{ep} \\ \sigma_{t+\Delta t}^v &= \sigma_{t+\Delta t} - \sigma_{t+\Delta t}^{ep}\end{aligned}\tag{9.26}$$

Determinadas as variáveis internas, verifica se a solução considerada é suficientemente precisa por meio de critérios de convergência. Verificada a convergência para todas as sub-regiões, atualizam-se todas as variáveis referentes ao instante “ $t+\Delta t$ ”, armazenando-as nas variáveis referentes ao instante “ t ”. Após isto, retorna-se ao **passo 1**, dando início a um novo passo de tempo e/ou uma nova etapa. Caso contrário, atualizam-se as variáveis referentes ao instante “ $t+\Delta t$ ” e retorna-se ao **passo 2**, calculando-se os valores incógnitos para o mesmo instante da última iteração, reaplicando-se o resíduo de força (ou tensão inicial) e fazendo-se uso da equação (9.23) para a obtenção das variáveis de contorno, caracterizando assim o processo iterativo.

Obtida a convergência em todos os passos de tempo da etapa e para todas as sub-regiões, dá-se início a uma outra etapa identificando quais as sub-regiões que deverão ser inseridas ou aquelas que deverão ser extraídas. Monta-se novamente o sistema e repete-se todo o procedimento descrito anteriormente.

9.5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

O acoplamento entre o MEF e o MEC foi realizado para o caso bi e tridimensional. No caso bidimensional foram acoplados o elemento finito de barra de dois nós (pórtico plano) e o elemento de contorno de três nós que faz uso de células de oito nós para evoluir as integrais de domínio das formulações de contorno CODA(2000) e MESQUITA & CODA(2000). Já o acoplamento tridimensional foi executado com o elemento finito de casca triangular de três

nós e com grau de liberdade rotacional proposto em MESQUITA(1998) com o elemento de contorno tridimensional triangular de três nós que utiliza células tetraédricas para calcular as integrais de domínio. Estes mesmos elementos de contorno foram apresentados anteriormente e as técnicas numéricas utilizadas para determinar as integrais singulares de contorno e domínio são descritas no Anexo D.

9.5.1 EXEMPLO 01 – Peça tracionada 3D

Este é um exemplo simples que serve para verificar o acoplamento entre elementos finitos de casca e elementos de contorno 3D. Uma barra engastada discretizada com elementos de contorno triangulares de três nós é acoplada a uma chapa modelada com elementos finitos de casca de mesma geometria. Um carregamento distribuído é aplicado na extremidade livre da sub-região de elementos finitos. A geometria do problema juntamente com as discretizações e propriedades físicas são apresentadas na figura 9.3.

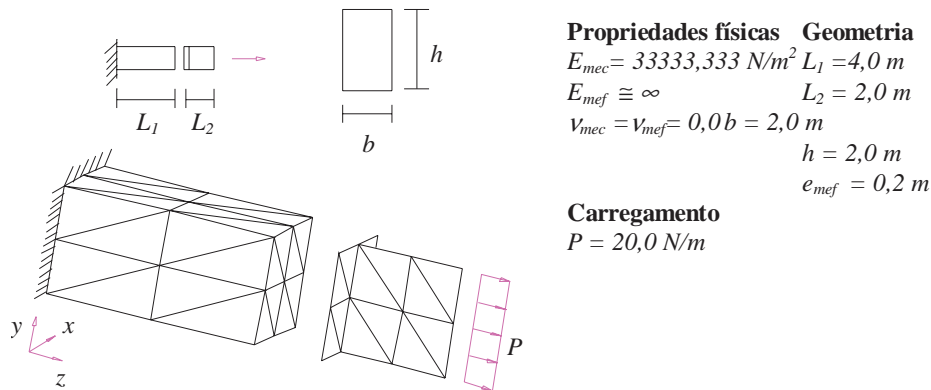


FIGURA 9.3 – Geometria, discretização e propriedades físicas.

A tabela 9.1 apresenta resultados de deslocamento e forças de contato na interface bem como tensões no centróide da sub-região de elementos de contorno.

TABELA 9.1: Resultados do problema de acoplamento

| | DESLOCAMENTO | FORÇA DE CONTATO | TENSÃO |
|-----------|--------------|-----------------------|-----------------------|
| MEC | 0,0012 m | 10,0 N/m ² | 10,0 N/m ² |
| ANALÍTICO | 0,0012 m | 10,0 N/m ² | 10,0 N/m ² |

9.5.2 EXEMPLO 02 – Tubo de concreto armado 2D

A estrutura analisada é um tubo de parede espessa considerado viscoelástico reforçado por barras elásticas e submetido a uma pressão interna P . Devido à dupla simetria apenas $\frac{1}{4}$ da estrutura é discretizada. O problema, considerado como estado plano de deformação, é modelado utilizando-se elementos de contorno de três nós. As armaduras são representadas por elementos finitos de barra de dois nós. A geometria da estrutura juntamente com sua discretização e propriedades físicas são apresentadas na figura 9.4. A formulação viscoelástica empregada é baseada no modelo de Kelvin-Voight e as expressões do MEC são obtidas com a discretização apenas do contorno do corpo, não sendo necessário o uso de células internas.

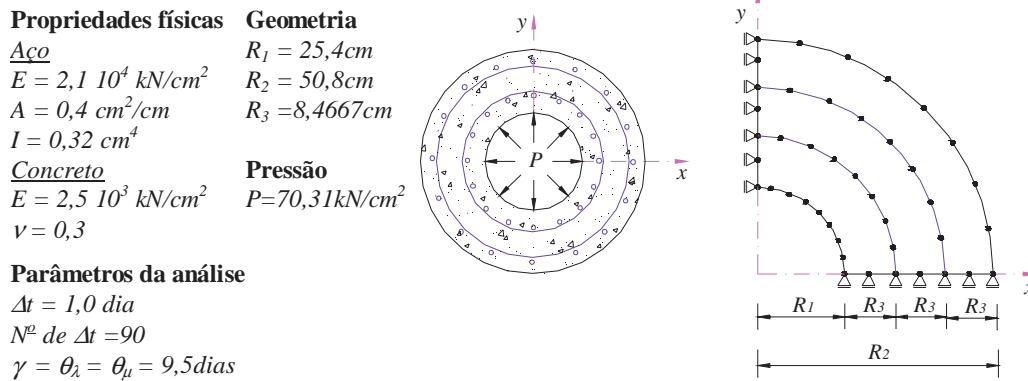


FIGURA 9.4 – Geometria, discretização e propriedades físicas.

Os resultados do deslocamento radial da parede externa e interna da estrutura são apresentados nas figuras 9.5 e 9.6, respectivamente, considerando o tubo de concreto com e sem armadura. A resposta do problema sem armadura é comparada com a solução analítica.

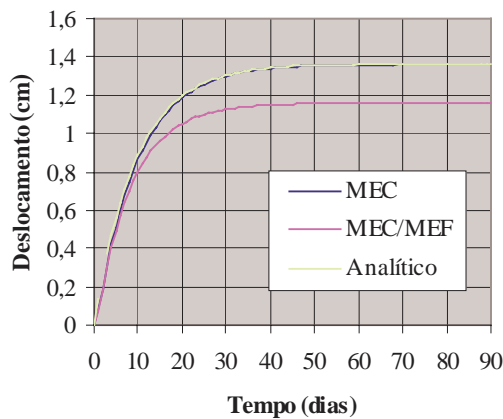


FIGURA 9.5 – Deslocamento radial da parede interna do tubo.

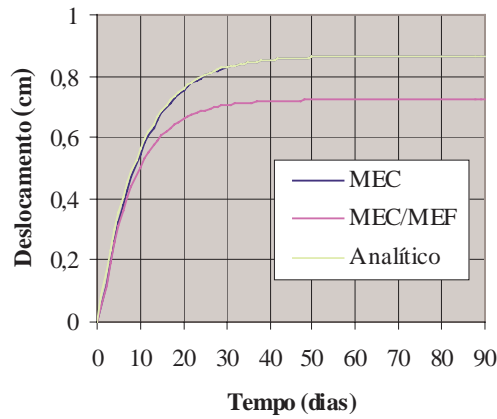


FIGURA 9.6 – Deslocamento radial da parede externa do tubo.

Note que os resultados sem armadura estão em concordância com a solução analítica.

9.5.3 EXEMPLO 03 – Túnel reforçado 2D

Um túnel de seção circular, solicitado por uma pressão interna uniforme P é analisado sob as condições de estado plano de deformação. O solo é discretizada com 16 elementos de contorno de três nós e o suporte com 32 elementos finitos de dois nós. As propriedades físicas do suporte elástico e do solo viscoelástico, considerando-se o modelo de Boltzmann, bem como sua geometria e discretização são apresentadas na figura 9.7.

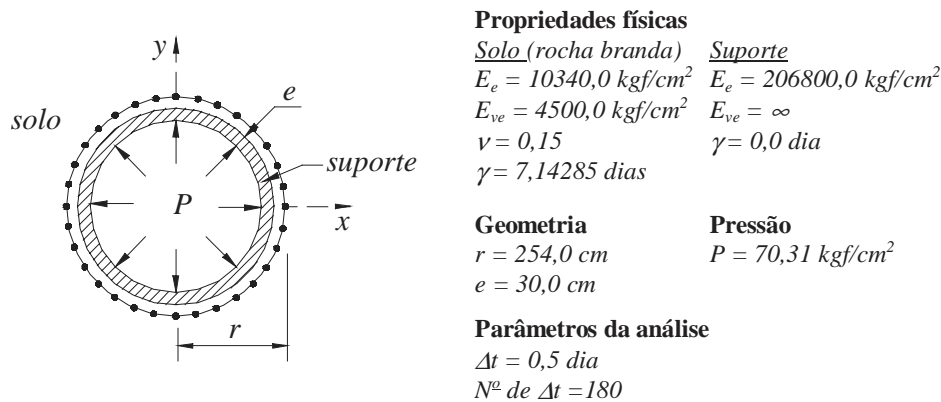


FIGURA 9.7 – Geometria, discretização e propriedades físicas.

O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do solo e suporte foram extraídos de referências usuais que tratam da análise de túneis reforçados, veja, por exemplo, SCHWARTZ & EINSTEIN(1980) e GOMES(1999). Os resultados para o deslocamento

radial da parede interna do túnel são apresentados na figura 9.8 com e sem reforço. O resultado sem reforço é confrontado com a resposta analítica do problema.

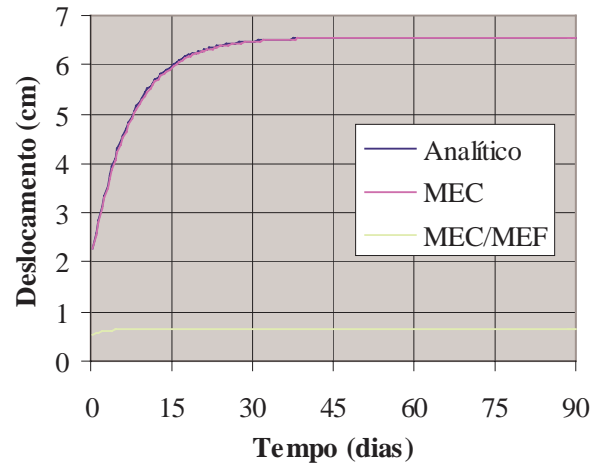


FIGURA 9.8 – Deslocamento radial do túnel.

Observando-se a figura 9.8, verifica-se o bom comportamento do modelo quando comparado com a resposta analítica do problema e a grande influência do reforço no comportamento global da estrutura.

9.5.4 EXEMPLO 04: Pórtico 2D sobre solos diferentes

A estrutura analisada é um pórtico de dois pavimentos solicitado por cargas concentradas constantes no tempo, aplicadas nas extremidades do nível mais alto. O pórtico é simétrico e seus dois pilares estão conectados a sapatas que se encontram acopladas ao solo. As propriedades físicas dos solos conectados às sapatas são diferentes, de maneira que estas apresentarão recalques distintos. A análise foi executada com um incremento de tempo (Δt) de 0,1 mês e levou o tempo total de 48 meses.

TABELA 9.2: Propriedades físicas e geométricas

| PROPRIEDADES FÍSICAS E GEOMÉTRICAS | | |
|---|----------------------------|----------------------------|
| Solo1 | Solo2 | Pórtico |
| $E_e = 2,1 \text{ GPa}$ | $E_e = 2,1 \text{ GPa}$ | $E = 21,0 \text{ GPa}$ |
| $E_{ve} = 2,1 \text{ GPa}$ | $E_{ve} = 1,0 \text{ GPa}$ | $A = 0,03 \text{ m}^2$ |
| $\nu = 0,4$ | $\nu = 0,4$ | $I = 0,000225 \text{ m}^4$ |
| $\gamma = 10 \text{ meses}$ | $\gamma = 5 \text{ meses}$ | |

O pórtico, discretizado como uma sub-região em elementos finitos, é considerado elástico e as sub-regiões que caracterizam os solos são ambas discretizadas por elementos de contorno e consideradas como viscoelásticas segundo o modelo de Boltzmann. A geometria e a discretização do problema são apresentados na figura 9.9 e as propriedades físicas são expostas na tabela 9.2. Considerou-se um maciço rochoso indeformável, localizado a 24m abaixo da superfície, restringindo-se os graus de liberdade localizados nesta posição.

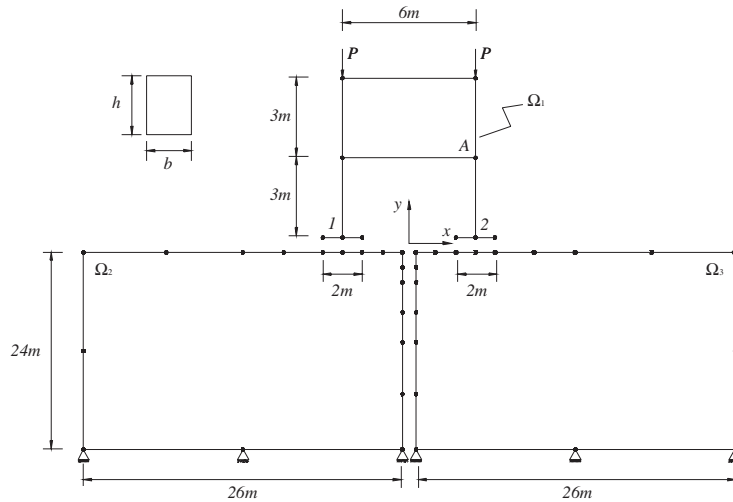


FIGURA 9.9 – Geometria e discretização.

O que se deseja é analisar o comportamento do pórtico solicitado acoplado aos solos com diferentes propriedades físicas e assim, verificar como as propriedades viscosas interferem no comportamento global da estrutura. A figura 9.10 apresenta os resultados do recalque com o tempo de ambas as sapatas.

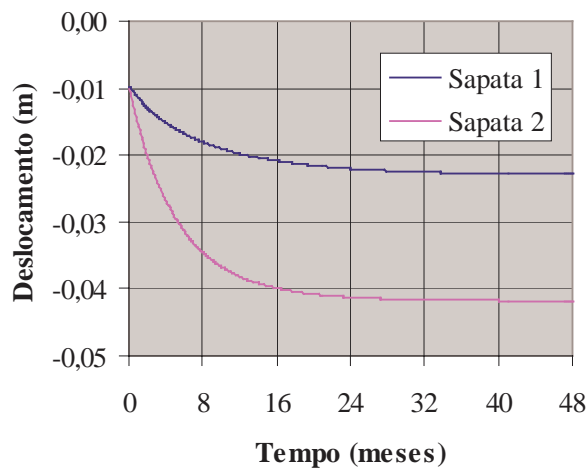


FIGURA 9.10 – Recalque das sapatas.

É possível verificar que as propriedades viscosas diferentes dos solos introduziram um recalque diferencial na estrutura, provocando uma redistribuição dos esforços no pórtico. Essa redistribuição de esforços pode ser visualizada na figura 9.11 que expõe resultados do momento presente na extremidade direita da barra horizontal do primeiro nível do pórtico (ponto A).

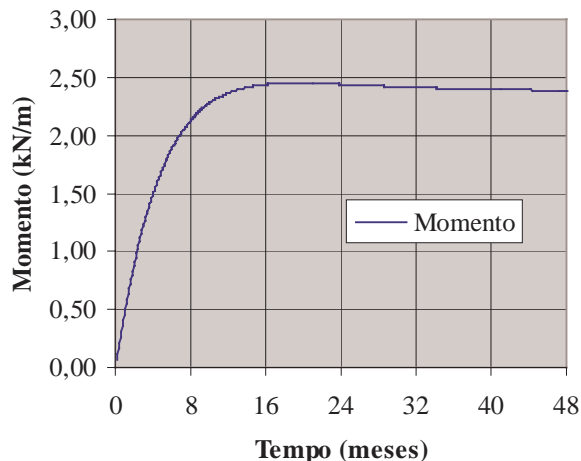


FIGURA 9.11 – Momento no ponto A.

Deve-se notar que, caso os solos tivessem as mesmas propriedades viscoelásticas, devido à simetria do problema, o recalque em ambas as sapatas seria o mesmo e conseqüentemente não apareceria momento significativo no ponto A. Porém, devido ao recalque diferencial, conseqüência das propriedades viscoelásticas diferentes dos solos, é possível verificar o aparecimento de esforços introduzidos na estrutura. O momento atinge um valor máximo e logo depois se estabiliza em um valor um pouco menor. Isto é devido aos diferentes valores dos coeficientes viscosos que induzem velocidades de deformação diferentes para os solos. Ou seja, no instante onde o momento atinge o seu máximo, o recalque diferencial entre as sapatas é máximo, porém, com o tempo a sapata 1 desloca-se mais, atingindo o seu máximo deslocamento, diminuindo o valor do recalque diferencial e conseqüentemente do momento.

9.5.5 EXEMPLO 05: Painel Sanduíche

A estrutura analisada é um painel sanduíche do tipo ISOTHERM SC 80. Este, considerado biapoiado, é solicitado por uma carga constante no tempo e uniformemente

distribuída referente ao seu peso próprio e a um carregamento externo. O painel sanduíche consiste de duas chapas delgadas de aço separadas por uma espuma de uretano. As chapas de aço são consideradas elásticas e a espuma de uretano de baixa densidade como viscoelástica. A seção transversal da estrutura e sua geometria são apresentadas na figura 9.12. O vão do painel é $L = 4000,0\text{mm}$ com uma largura de $b = 1100,0\text{mm}$. A espessura das lâminas é $h_a = 0,5\text{mm}$ e a da espuma é $h_e = 80,0\text{mm}$. As chapas feitas de aço possuem módulo de elasticidade $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, área da seção transversal $A = 561,0\text{mm}^2$ e momento de inércia de $I = 12,16\text{mm}^4$. Na modelagem da estrutura utilizou-se 24 elementos finitos de viga de dois nós para representar as chapas de aço e 26 elementos de contorno de três nós para caracterizar a espuma de uretano.

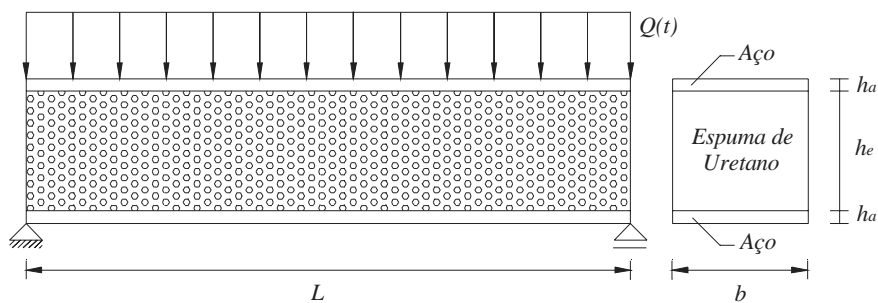


FIGURA 9.12 – Painel Sanduíche.

Na referência RAPP *et al.*(1999) o parâmetro viscoso γ e o módulos de elasticidade cisalhantes (instantâneo G_e e viscoso G_{ve}) para a espuma de uretano são obtidos de uma teoria de flexão simples dada por ALLEN(1969). Os valores resultantes são:

$$G_e = 3,52 \text{ N/mm}^2, G_{ve} = 7,46 \text{ N/mm}^2 \text{ e } \gamma = 4,6083 \text{ dias}$$

Neste trabalho, o problema é resolvido adotando-se a condição de estado plano de tensão. O coeficiente de Poisson é escolhido como sendo $0,4$, como usualmente é feito para polímeros de baixa densidade, veja MERAGHNI *et al.*(1999). Assim, utilizando-se os valores dos módulos cisalhantes acima, resulta:

$$E_e = 9,856 \text{ N/mm}^2 \text{ e } E_{ve} = 20,888 \text{ N/mm}^2$$

O objetivo da presente análise é obter novos valores para as características físicas do polímero a partir do acoplamento entre o método dos elementos finitos (modelando as lâminas de aço elásticas) e o método dos elementos de contorno (modelando a espuma viscosa). A análise é executada com um total de 180 passos de tempo, sendo $\Delta t = 0,25 \text{ dias}$. A referência RAPP *et al.*(1999) menciona que o deslocamento vertical instantâneo medido no meio do vão é $w_o = 14,076 \text{ mm}$ e o deslocamento final é $w_f = 16,876 \text{ mm}$ para uma carga total de $Q = 0,9196 \text{ N/mm}$. Observando a figura 9.13 conclui-se que o deslocamento instantâneo e o final (obtidos pelo método numérico) só serão iguais àqueles obtidos experimentalmente se os módulos de elasticidade da espuma de uretano forem:

$$E_e = 9,388 \text{ N/mm}^2 \text{ e } E_{ve} = 21,167 \text{ N/mm}^2$$

Note que esses valores são ligeiramente diferentes daqueles obtidos pela simples aproximação da referência RAPP *et al.*(1999).

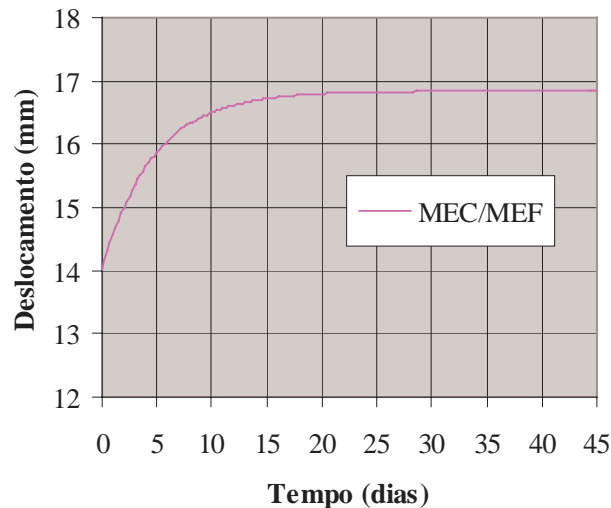


FIGURA 9.13 – Deslocamento total do meio do vão.

Novamente, os resultados do deslocamento vertical do meio do vão são apresentados na figura 9.14. A resposta numérica agora é confrontada com os resultados experimentais e aquela obtida pela simples aproximação em RAPP *et al.*(1999). O parâmetro viscoso ($\gamma = 4,6083 \text{ dias}$) utilizado para a resposta numérica é o mesmo obtido por RAPP *et al.*(1999). O modelo viscoso utilizado foi o de Boltzmann, porém apenas a resposta do trecho viscoso é

apresentada no gráfico eliminando-se a resposta referente ao trecho instantânea, como inicialmente apresentado na referência RAPP *et al.*(1999).

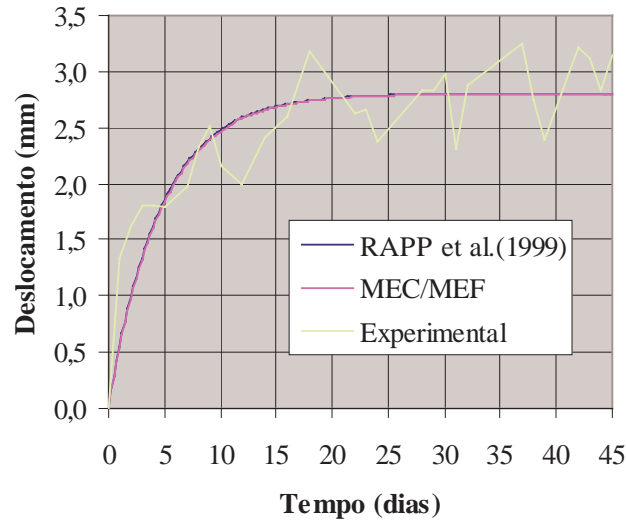


FIGURA 9.14 – Deslocamento do trecho viscoso no meio do vão.

As variações apresentadas pelo resultado experimental são justificadas pela variação da temperatura ocorrida durante todo o período de análise, pois o material, espuma de uretano, é bastante sensível à temperatura. Mesmo assim, observa-se uma ótima concordância entre as respostas. Note que a resposta numérica é exatamente a mesma que aquela obtida pela simples aproximação. Os resultados obtidos validam a técnica proposta e atestam que ela pode ser utilizada para determinar propriedades de materiais viscoelásticos. De maneira que, vários painéis estruturais podem ser simulados utilizando-se a técnica proposta ao invés de procedimentos mais simplificados.

9.5.6 EXEMPLO 06 – Ruptura dinâmica de uma peça tracionada 2D

Uma estrutura formada pela composição de duas sub-regiões, uma com elementos de contorno (elemento quadrático de três nós) e outra com elementos finitos (elemento de pórtico plano de dois nós), é solicitada por uma força concentrada em sua extremidade livre (fig.9.15). Na sub-região de elementos de contorno, utilizam-se células (célula de oito nós) para integrar as equações de domínio. Neste exemplo, o objetivo principal, é analisar o comportamento da estrutura quando esta se rompe, provocando a separação das duas sub-regiões. Em uma primeira etapa, a estrutura intacta é solicitada pela força em sua extremidade livre, até que, após $t=0,03s$ a sub-região em elementos finitos é extraída e a estrutura restante

admite um comportamento de vibração livre (desprezou-se o amortecimento da estrutura). Deve-se ressaltar que o procedimento progressivo bidimensional foi implementado em um programa de acoplamento dinâmico MEC/MEF desenvolvido e apresentado em CODA *et al.*(1996).

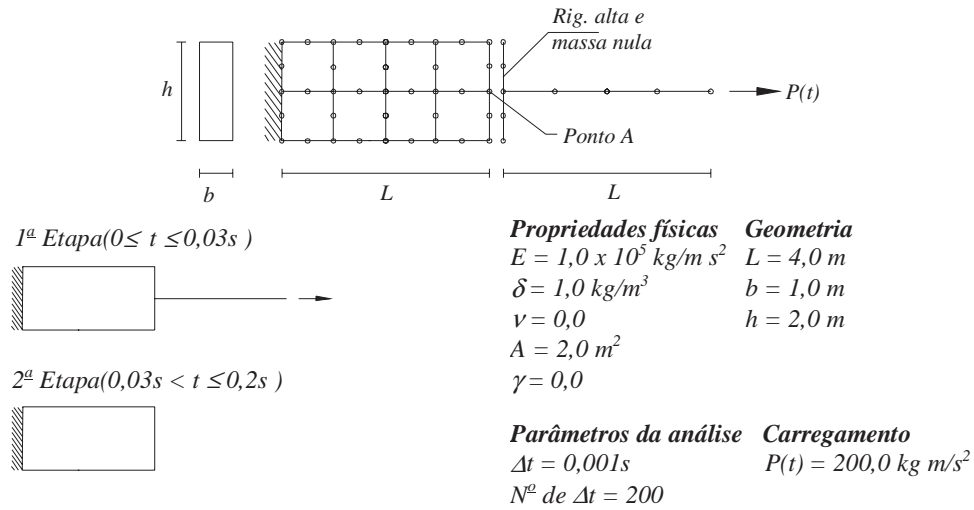


FIGURA 9.15 – Etapas e dados do problema.

A formulação do MEF empregada no acoplamento foi aquela exposta no item (4.2) e para a sub-região de elementos de contorno aquela apresentada no item (5.2). Na figura 9.16 apresentam-se os resultados do deslocamento longitudinal do ponto ‘A’, localizado no centro da interface entre as duas sub-regiões. Os diagramas para a estrutura íntegra e para a estrutura cuja sub-região é extraída após o tempo $t=0,03\text{s}$ são confrontados.

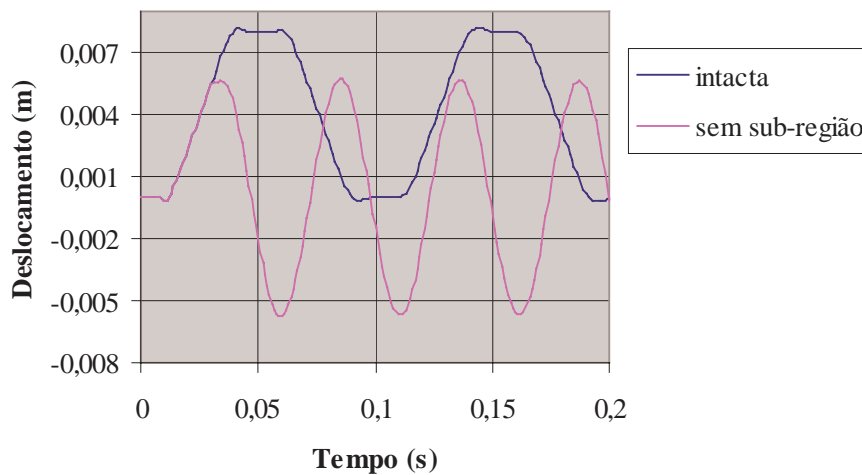


FIGURA 9.16 – Deslocamento do ponto ‘A’.

Os valores de deslocamentos para a estrutura íntegra e para a estrutura cuja sub-região é extraída estão de acordo com o comportamento esperado e com a resposta analítica do problema apresentadas nas literaturas que tratam de análises dinâmicas, veja MANSUR & BREBBIA(1985).

9.5.7 EXEMPLO 07 – Ruptura de uma peça tracionada 3D

A estrutura analisada é a mesma apresentada no exemplo 1. A barra engastada discretizada com elementos de contorno 3D é acoplada em sua extremidade livre a uma sub-região de elementos finitos (elementos de casca) que está solicitada por um carregamento distribuído. A peça é tracionada até que em um determinado instante retira-se a sub-região de elementos finitos, simulando de maneira simples a ruptura na ligação das duas regiões. Semelhantemente, a geometria do problema juntamente com as discretizações e propriedades físicas são apresentadas na figura 9.17. Em uma primeira etapa, a estrutura intacta é solicitada pela força em sua extremidade livre, até que, para o instante $t=75s$ a sub-região em elementos finitos é extraída.

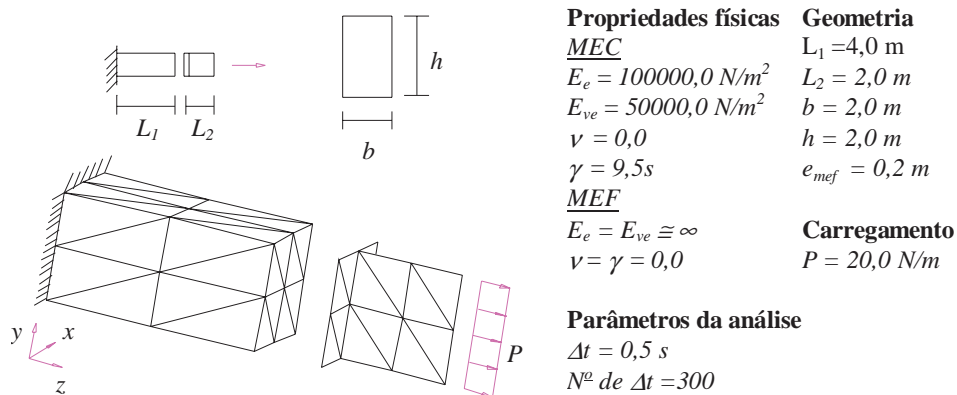


FIGURA 9.17 – Geometria, discretização e propriedades físicas.

O modelo viscoso utilizado no problema foi o de Boltzmann e a formulação viscoelástica do MEC utilizada é aquela com integrais apenas no contorno do corpo. O deslocamento axial do ponto localizado no centro da seção onde é feito o acoplamento é mostrado na figura 9.18.

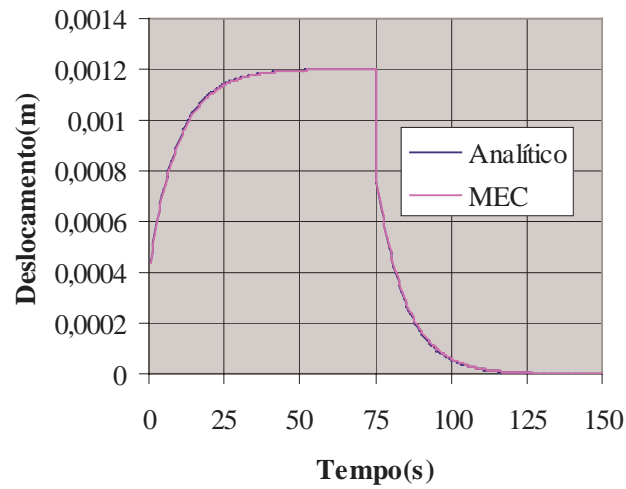


FIGURA 9.18 – Deslocamento do nó central da interface de contato na região do MEC.

As respostas das tensões obtidas no centróide da região de elementos de contorno são apresentadas na figura 9.19.

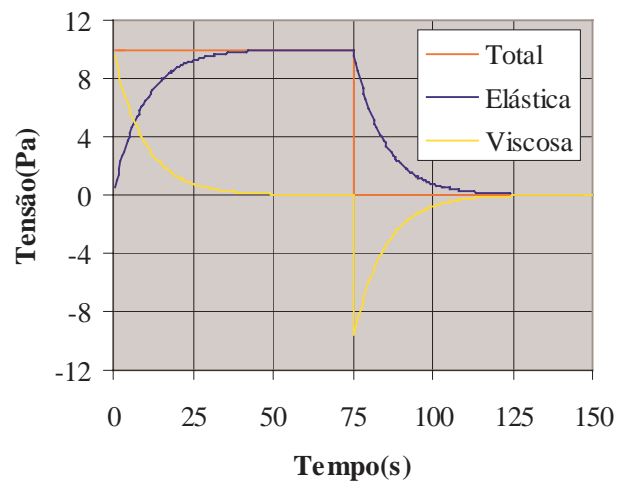


FIGURA 9.19 – Tensões no centróide da região do MEC.

O comportamento das tensões está perfeitamente de acordo com o esperado. Note que a tensão total é a soma das outras duas.

9.5.8 EXEMPLO 08 – Reforço progressivo de túnel 2D

Este é o mesmo exemplo analisado no item(9.5.3), uma cavidade cilíndrica solicitada por uma pressão interna analisada para a situação de estado plano de tensão. As respostas foram obtidas, veja figura 9.8, para o túnel sem reforço e para o mesmo reforçado, sendo que neste último o reforço é inserido antes da aplicação da carga, no início do processo. No presente exemplo a análise é feita de duas formas distintas e diferentes daquelas apresentadas no exemplo 3. A cavidade é solicitada sem nenhum reforço, até que em uma segunda etapa (após $t=10$ dias) o reforço é inserido de duas maneiras. A primeira considerando o acoplamento com as hipóteses usuais de compatibilidade e equilíbrio. Já a segunda é realizada levando em consideração as hipóteses específicas para o reforço.

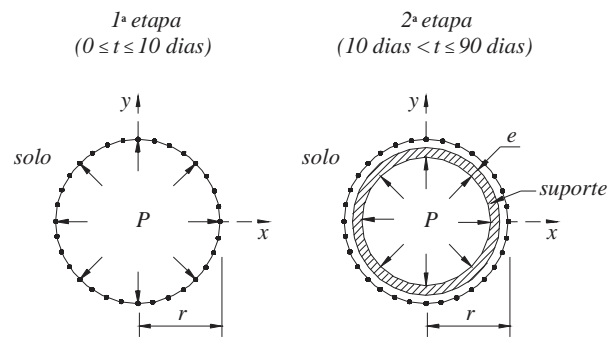


FIGURA 9.20 – Reforço de uma cavidade cilíndrica.

Na figura 9.21, as respostas destas duas análises são plotadas juntamente com aquelas apresentadas no item(9.5.3).

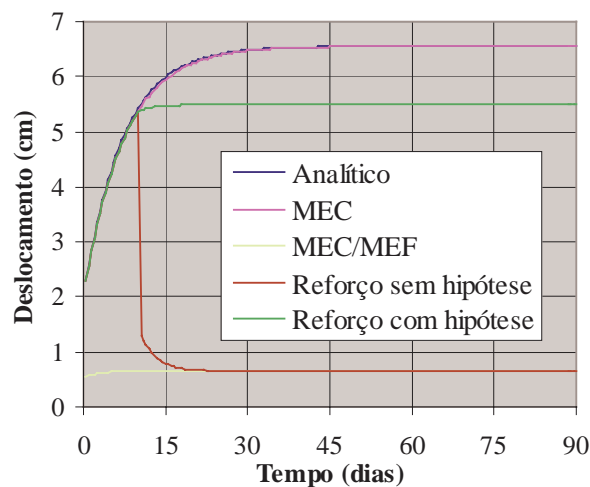


FIGURA 9.21 – Deslocamento radial do túnel.

É importante observar que a execução numérica do acoplamento sem as hipóteses do reforço faz com que a estrutura recupere sua rigidez inicial como se fosse uma estrutura íntegra, o que não ocorre na prática. A imposição das hipóteses do reforço no acoplamento permite simular coerentemente a contribuição deste no comportamento global da estrutura.

9.5.9 EXEMPLO 09 – Reforço de uma viga

Nesse exemplo, simulam-se as etapas de um problema quase estático de reforço. A estrutura analisada é uma viga viscoelástica biapoiada e solicitada por uma carga distribuída localizada no centro do vão, figura 9.22. O meio contínuo é discretizado com sub-regiões de elementos de contorno de três nós. Inicialmente, a estrutura está íntegra; no final do instante $t=6\text{dias}$ ocorre a extração de uma sub-região localizada na parte comprimida da seção central da viga. O reforço, inicialmente indeformado, com geometria e propriedades físicas iguais ao da sub-região extraída, é inserido no local onde ocorreu a extração da sub-região ao final do tempo $t=21\text{dias}$.

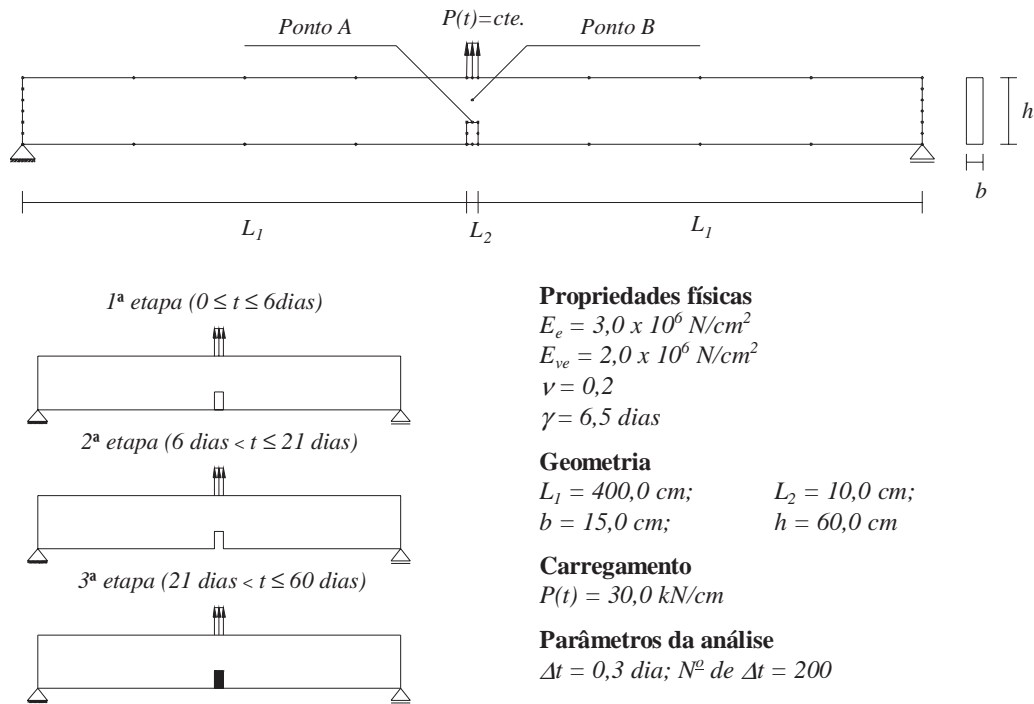


FIGURA 9.22 – Dados do problema e etapas do reforço.

Na figura 9.23a, apresentam-se curvas referente ao deslocamento vertical do ponto A localizado a 20 cm da face inferior, logo abaixo da posição da carga. A curva para a estrutura íntegra (sem a retirada da sub-região), bem como a curva para a estrutura cuja sub-região

central é extraída no tempo $t=6$ dias, são confrontadas. É importante observar-se que as curvas mostradas na figura 9.23a não apresentam ainda a inclusão do reforço.

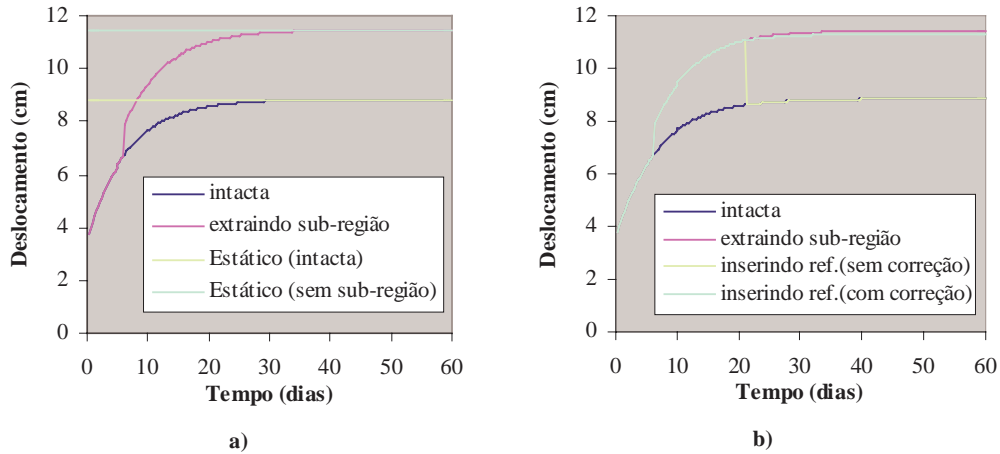


FIGURA 9.23 – Deslocamento transversal do ponto A.

Note que o deslocamento da estrutura íntegra converge para o valor estático da mesma e que o deslocamento da estrutura com a região extraída no tempo $t=6$ dias converge para o deslocamento estático de uma estrutura similar. Na figura 9.23b, apresentam-se as curvas da figura 9.23a confrontadas com os resultados obtidos para o caso da estrutura que tem a sub-região central extraída após $t=6$ dias e o reforço inserido após $t=21$ dias. O reforço foi introduzido de duas maneiras distintas: “sem correção” dado pela equação (9.11) e “com correção” dado pela equação (9.15). É importante observar que, quando o reforço é acoplado sem correção, a estrutura se comporta como se fosse íntegra novamente, readquirindo subitamente sua rigidez inicial, o que não é correto. Quando a correção é feita, o reforço contribui para a rigidez da estrutura de forma correta.

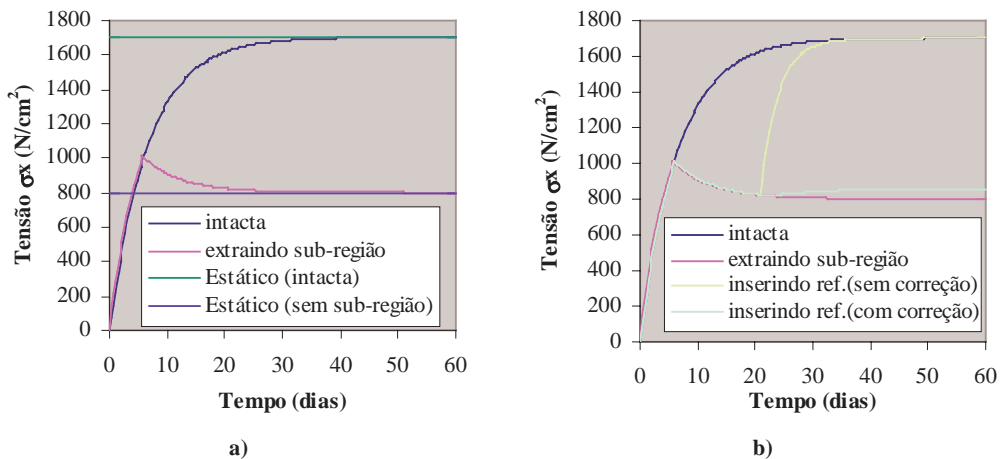


FIGURA 9.24 – Tensão σ_x no ponto B.

De modo similar ao que foi feito na figura 9.23, faz-se na figura 9.24, porém utilizando os resultados da tensão σ_x obtidos no ponto B localizado a 20 cm da face superior, logo abaixo da carga. As mesmas observações para os diagramas da figura 9.23 podem ser aplicadas aos diagramas da figura 9.24. Para os resultados da figura 9.24a, observa-se que nas duas situações os esforços convergem para os seus valores estáticos. Já para os resultados da figura 9.24b, fica evidente o erro que seria cometido para a tensão σ_x ao se desprezar a correção sugerida pela equação (9.20). Neste ponto é importante mencionar a possibilidade de se generalizar a equação (9.20) para aceitar análises de reforços protendidos.

9.5.10 EXEMPLO 10 – Bloco 3D submetido ao peso próprio

Um bloco de forma paralelepédica submetido à ação do peso próprio é analisado neste exemplo. A estrutura viscoelástica, discretizada com elementos de contorno tridimensionais triangulares de três nós, é fixada ao teto através de uma de suas extremidades. Esta se deforma até que em um determinado instante a sua extremidade livre entra em contato com um anteparo deformável. O anteparo, considerado elástico, possui a mesma geometria e discretização do bloco analisado, estando este apoiada em uma superfície rígida. A figura 9.25 expõe uma visão melhor do problema e apresenta os dados utilizados na análise.

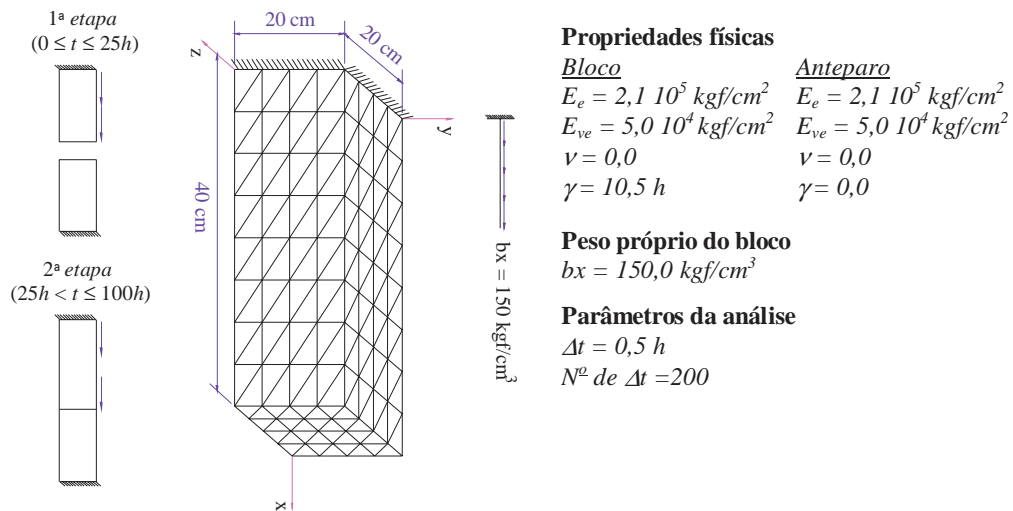


FIGURA 9.25 – Dados do problema.

Resultados do deslocamento axial do nó central da face livre do bloco são apresentados na figura 9.25 considerando apenas o bloco submetido ao peso próprio (sem acoplamento). Este resultado é confrontado com os resultados em que o bloco entra em contato com o

anteparo flexível após o instante $t=25h$. O contato é realizado de duas formas, com e sem a consideração das hipóteses do reforço.

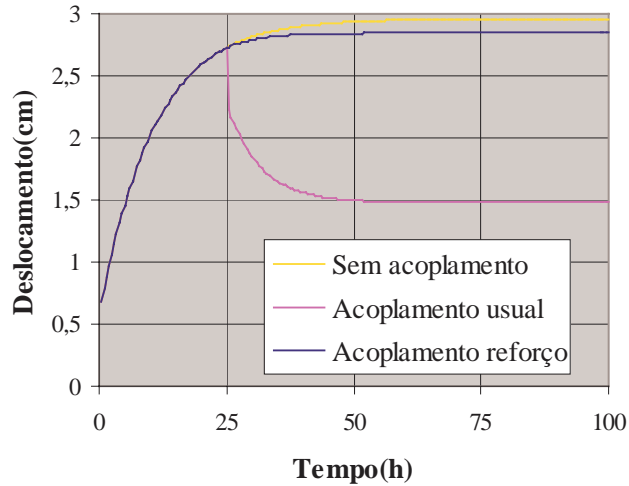


FIGURA 9.26 – Deslocamento axial do nó central da face livre do bloco.

Na figura 9.27 apresentam-se resultados da força de contato extraída no nó central da interface de contato do bloco, considerando-se o acoplamento com a hipótese usual e com a hipótese do reforço.

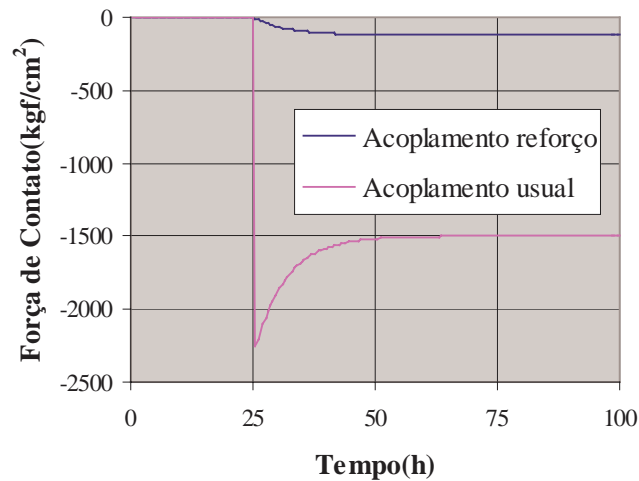


FIGURA 9.27 – Força de contato na interface de contato do bloco.

Similarmente, resultados da tensão elástica σ_x^e , viscosa σ_x^v e total σ_x extraídas no centróide do bloco são apresentadas na figura 9.28. A análise foi realizada considerando o problema de acoplamento com as hipóteses do reforço.

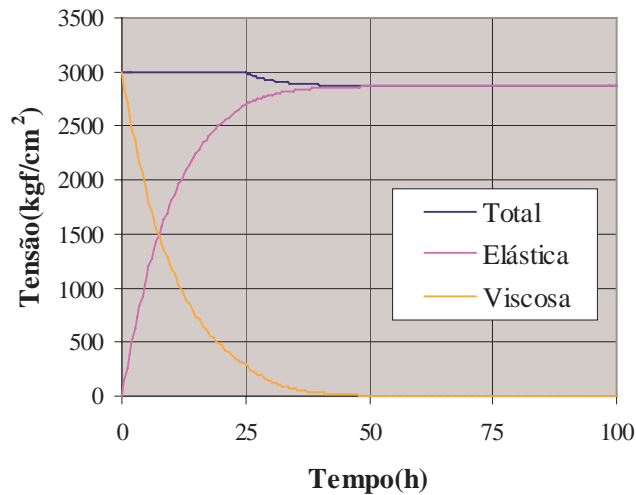


FIGURA 9.28 – Tensões no centróide do bloco.

Observe que o valor da força de contato final (com a hipótese do reforço) é de $118,3\text{kgf/cm}^2$. Este valor deve ser igual à redução da tensão total no final da análise. Para a presente análise o valor da redução da tensão total é de $117,9\text{kgf/cm}^2$, que está de acordo com o esperado.

9.5.11 EXEMPLO 11 – Reforço progressivo de um buraco esférico

Uma cavidade esférica localizada em um meio infinito é analisada. A estrutura com 2m de raio é solicitada por uma pressão interna. O solo, considerado como um material viscoelástico (Boltzmann), é reforçado por um suporte elástico acoplado no instante $t=20\text{dias}$. O meio infinito é discretizado com elementos de contorno triangulares de três nós e o suporte com o elemento finito de casca proposto em MESQUITA(1998). As etapas, a discretização utilizada para ambas as sub-regiões e os dados do problema são apresentados na figura 9.29.

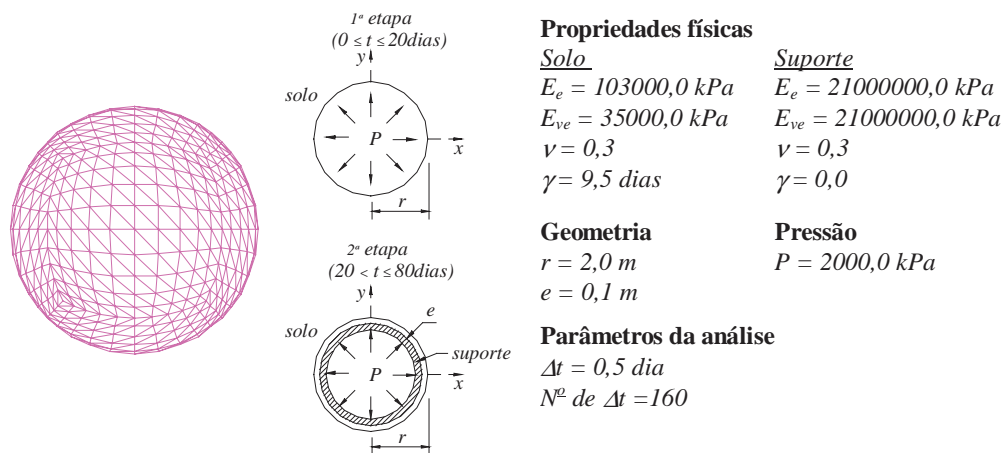


FIGURA 9.29 – Dados do problema de reforço.

Resultados do deslocamento radial de um ponto localizado a 18m do centro da cavidade esférica são apresentados na figura 9.30. Os resultados foram obtidos considerando-se o acoplamento do suporte com e sem as hipóteses do reforço. Resultados da análise viscoelástica da cavidade esférica sem qualquer tipo de acoplamento são também plotados para melhor ilustrar a contribuição do reforço para o enrijecimento global.

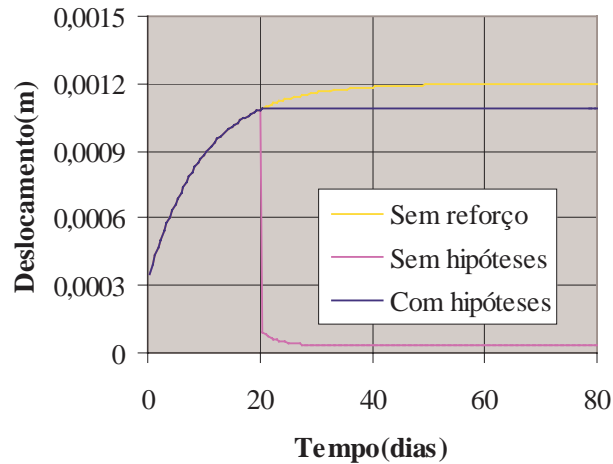


FIGURA 9.30 – Deslocamento radial da cavidade esférica.

Semelhantemente, na figura 9.31 apresentam-se resultados das tensões σ_r (total, elástica e viscosa) extraídas na mesma posição onde foram calculados os deslocamentos da figura 9.30 para a condição de reforço progressivo.

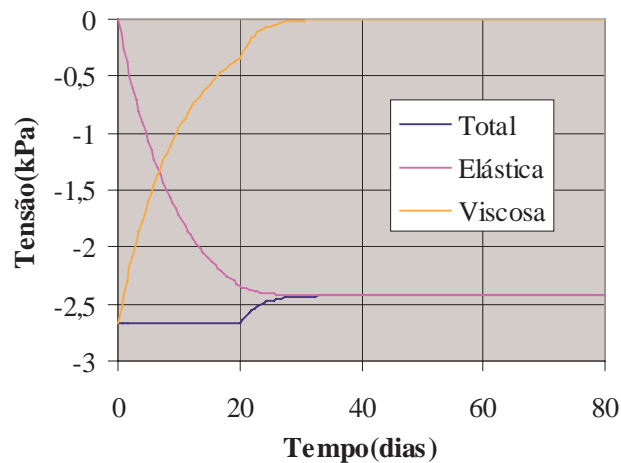


FIGURA 9.31 – Tensões σ_r (total, elástica e viscosa).

Na figura 9.31 observa-se a redução dos níveis de tensão com a introdução do reforço. Note que a soma da tensão elástica e da tensão viscosa é sempre igual à tensão total, evidenciando a satisfação do modelo reológico.

9.5.12 EXEMPLO 12 – Bloco 3D elastoplástico submetido ao peso próprio

O exemplo foi proposto com o intuito de demonstrar uma aplicação do acoplamento progressivo viscoplástico. Este é o mesmo exemplo apresentado no item(9.5.10), porém o bloco paralelepípedo submetido à ação do peso próprio é agora constituído por um material viscoplástico. O problema é analisado levando-se em consideração os critérios de von Mises e Drucker-prager. Para a primeira situação adotou-se $E_t = 10000,0 \text{kgf/cm}^2$ e a tensão de plastificação $\sigma_o = 1300,0 \text{kgf/cm}^2$. O problema analisado com o modelo de Drucker a coesão, o ângulo de atrito e módulo tangente plástico são adotados como: $0,703 \text{kgf/cm}^2$, 20° , e $E_t = 10000,0 \text{kgf/cm}^2$, respectivamente. O modelo viscoplástico utilizado foi aquele com comportamento instantâneo e o algoritmo para atualização das tensões empregada é aquele com lei de fluxo não-associativa. Os dados, a geometria e a discretização do problema são os mesmos apresentados na figura 9.25. Resultados do deslocamento axial da face livre do bloco viscoplástico são apresentados na figura 9.32 para ambos os modelos de Druker-Prager(DP) e von Mises(VM).

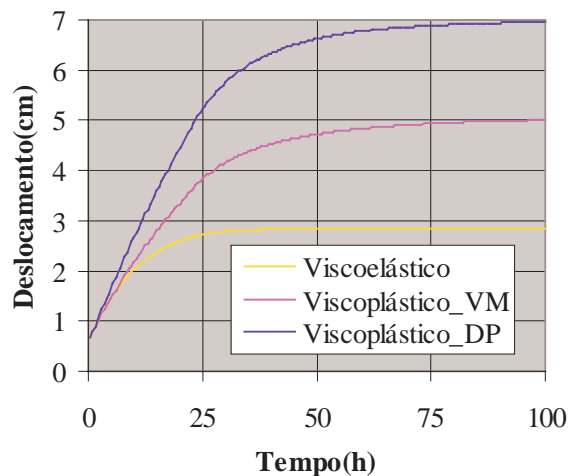


FIGURA 9.32 – Deslocamento axial do nó central da face livre do bloco.

A evolução da força de contato na interface de contato entre os dois blocos pode ser visualizada na figura 9.33.

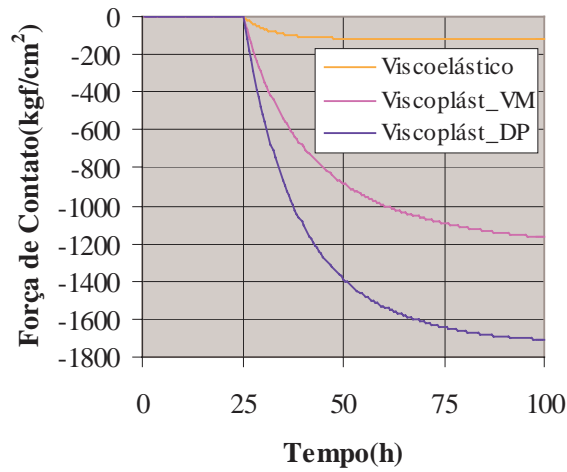


FIGURA 9.33 – Força de contato na interface de contato do bloco.

Por fim, a resposta da tensão elastoplástica σ_x^{ep} , viscosa σ_x^v e total σ_x extraídas no centróide do bloco são apresentadas na figura 9.34 para o critério de von Mises e na figura 9.35 para o modelo de Drucker, ambos considerando o acoplamento com as hipóteses do reforço.

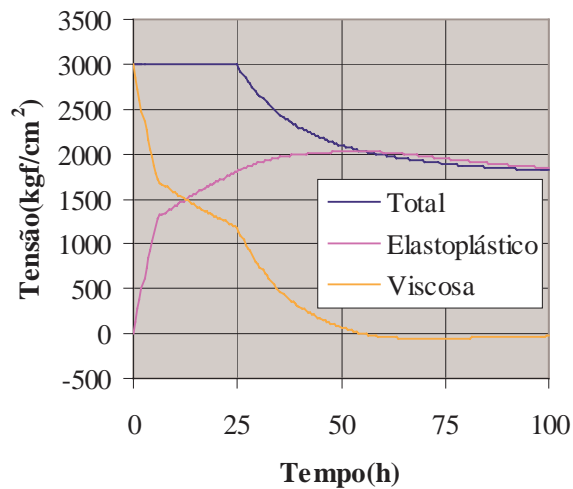


FIGURA 9.34 – Tensões no centróide do bloco (von Mises).

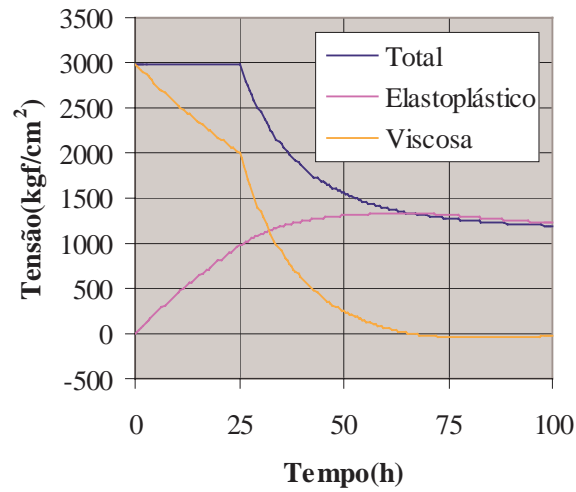


FIGURA 9.35 – Tensões no centróide do bloco (Drucker-Prager).

Algumas conclusões podem ser extraídas deste último exemplo. Semelhantemente ao problema viscoelástico, observe que, para análise com o modelo de von Mises, o valor da força de contato no instante $t=100h$ (com a hipótese do reforço) é de $1167,4\text{kgf/cm}^2$. Este valor deve ser igual à redução da tensão total no final da análise que é $1167,8\text{kgf/cm}^2$. Levando em consideração as complexidades envolvidas e que o problema é analisado de forma aproximada, pode-se dizer que estes valores estão bem próximos. Este resultado representa o estado de equilíbrio do corpo. Para o problema com o modelo de Drucker a força de contato em $t=100h$ é $1710,8\text{kgf/cm}^2$ já a redução da tensão total é $1793,9\text{kgf/cm}^2$.

Capítulo 10

CONCLUSÕES

A proposta inicial deste trabalho foi inspirada nos problemas de escavações de túneis e na dificuldade em se prever o comportamento destes. O objetivo era o desenvolvimento de uma ferramenta que pudesse executar a simulação tridimensional de um problema de escavação viscoplástica progressiva, permitindo modelar a retirada de material e a inclusão do reforço. Com o desenvolvimento do trabalho e a descoberta de novas técnicas e formulações, observou-se que o trabalho possuía um campo de aplicação muito maior e que sua restrição apenas a problemas de escavação era uma visão muito limitada.

Com o intuito de modelar o problema inicialmente proposto, era necessário adotar um modelo que levasse em conta a viscosidade do material, pois, além do comportamento viscoso está presente nos materiais envolvidos, a adoção deste era imprescindível para se levar em consideração a variável tempo, possibilitando determinar os instantes para a extração e inclusão dos materiais. As formulações usuais tratam o problema fazendo uso de funções de fluência e um processo incremental onde as solicitações, consideradas constantes no intervalo, são aplicadas incrementalmente. Este tipo de abordagem conduz, geralmente, a formulações matematicamente complexas e de certa forma, bastante dispendiosa computacionalmente falando. Uma forma mais elegante para considerar a viscosidade do material faz uso da transformação de Laplace-Carson, onde o problema viscoelástico é transformado em um problema elástico equivalente. Após resolver o problema transformado, uma inversão numérica é feita recuperando o comportamento no domínio do tempo. Porém, as técnicas mencionadas são mais apropriadas para resolver problemas onde as condições de contorno não se alteram ao longo do tempo e aplicação destas em análises que envolvem a extração e inclusão de regiões do sólido aumentaria demasiadamente a complexidade do problema.

Uma abordagem mais simples, que permitiria evitar as dificuldades apresentadas anteriormente, seria a consideração da viscosidade do material através do amortecimento viscoso frequentemente empregado em análises dinâmicas. Porém, este além de não apresentar um significado reológico bem definido, demonstrava-se bastante limitado, possuindo um campo de aplicação restrito a materiais que se comportavam similarmente ao modelo de Kelvin-Voigt, ou seja, sem considerar o comportamento instantâneo. Na realidade, a formulação mais adequada para o caso específico seria uma composição das formulações viscosas clássicas que permitiriam caracterizar modelos com um significado reológico bem definido, aliado a simplicidade com que se resolvem as equações temporais e a facilidade em se impor condições de contorno que variam ao longo do tempo presentes nas formulações dinâmicas. Entretanto, os parâmetros viscosos fundamentados na reologia dos materiais e empregados nas formulações clássicas não possuíam relação com os diversos amortecimentos dinâmicos associados à decomposição modal e do decaimento da resposta.

Através de observações dos modelos reológicos, foi possível identificar a importante relação entre a velocidade de deformação e a velocidade material de pontos vizinhos do corpo, antes negligenciada pelas formulações dinâmicas. Baseado nessa relação, pode-se escrever equações constitutivas específicas para cada modelo reológico. As relações constitutivas, introduzidas adequadamente na representação integral do método numérico em questão, dão origem a sistemas de equações temporais que são solucionados através da adoção de algoritmos de integração temporal, semelhantemente àqueles encontrados nas análises dinâmicas. Similarmente, o sistema final apresenta uma matriz viscosa, porém esta agora possui um significado reológico bem definido. A simplificação do modelo reológico de Kelvin, escrevendo este em função apenas de um parâmetro viscoso, permitiu obter a relação entre o amortecimento viscoso e o parâmetro representativo da viscosidade do material. Assim, pôde-se concluir que o amortecimento viscoso proporcional a matriz H para o MEC e proporcional a matriz de rigidez no MEF resultava no mesmo parâmetro viscoso presente na relação reológica de Kelvin. Desta evidência pode-se concluir que pacotes já existentes para análise dinâmica, que consideram o amortecimento como mencionado anteriormente, podem executar análises viscosas considerando o simples modelo de Kelvin-Voigt.

As primeiras formulações viscosas obtidas tanto para o MEF quanto para o MEC eram caracterizadas por representações onde o termo viscoso era definido por integrais de domínio. Este tipo de abordagem é bastante deslegante para o MEC, pois acarreta na necessidade de se discretizar todo o domínio do corpo com células, provocando um custo computacional adicional. Além disso, as integrais de domínio do termo viscoso apresentam singularidades

que para serem solucionadas necessitam de técnicas especiais tais como *transformação de coordenadas* e *subtração de singularidade*, resultando em maiores gastos computacionais. Apesar disso, ambas as formulações do MEC e do MEF se apresentavam estáveis e bastante precisas. Posteriormente, análises mais detalhadas dos modelos reológicos permitiram obter, através de simplificações na matriz constitutiva viscosa, representações para o MEC com integrais apenas no contorno do corpo. Este avanço significativo permitiu executar análises viscoelásticas discretizando-se apenas o contorno do corpo analisado, evitando as células e as indesejáveis integrais singulares de domínio, cujo tratamento requer um alto custo computacional. Para tornar a formulação mais completa, as integrais das forças volumétricas, foram também transformadas em integrais de contorno, permitindo obter integrandos não singulares que podem ser solucionados analiticamente. Esta nova formulação apresentava-se mais adequada para o tratamento de corpos viscoelásticos infinitos ou semi-infinitos, submetidos a condições de contorno que variam ao longo do tempo e/ou sujeito à extração de materiais, tal como aqueles encontrados em problemas de escavações reforçadas. Além disso, as boas características de estabilidade e precisão, presentes nas formulações com termo viscoso de domínio, foram preservadas. De fato, observou-se em todas as formulações propostas que, se a malha adotada na discretização do problema resultasse em uma resposta elástica precisa a resposta viscoelástica final teria o mesmo grau de precisão. O comportamento da integração temporal também mostrou-se bastante estável e preciso.

Baseada nesta nova abordagem viscoelástica com representações integrais apenas no contorno, desenvolveu-se novas formulações viscoplásticas para o MEC. Os procedimentos usuais, em geral, são baseados no conceito de potencial plástico originado na teoria da plasticidade. Para essas formulações clássicas, as características viscosas são incorporadas na expressão da taxa de deformação viscoplástica por meio de funções dependentes do critério de plastificação e cujo embasamento reológico é bastante discutível. O processo recai em um problema incremental onde a análise é executada aplicando-se sucessivos incrementos de força. Esta abordagem, semelhantemente aquelas viscoelásticas, é baseada em procedimentos quase-estáticos onde a imposição de cargas externas com dependência temporal arbitrária apresenta algumas dificuldades. Além disso, é difícil o ajuste do intervalo de tempo fictício ao valor de tempo. As formulações propostas neste trabalho assumem uma relação reológica viscoplástica que deve ser imposta no desenvolvimento das representações integrais. Desta relação encontra-se um sistema de equações diferenciais temporal onde o comportamento plástico do corpo é levado em consideração através de um termo em tensão inicial. Este termo é obtido de forma usual pelos procedimentos elastoplásticos do MEC. Na presente formulação

os incrementos são agora definidos como incrementos de tempo e não mais como passos de força, proporcionando um significado real para o tempo nas análises viscoplásticas. A técnica permite impor, de forma simples e direta, condições de contorno (forças e deslocamentos) que variam com relação ao tempo, ampliando o seu campo de aplicação. Os algoritmos utilizados na atualização das tensões no problema viscoplástico podem ser os mesmos desenvolvidos para tratar os problemas elastoplástico, não havendo a necessidade de desenvolver novos procedimentos viscoplásticos, basta apenas introduzir na formulação viscosa aqueles já propostos pela plasticidade. Além disso, como as integrais referentes ao comportamento viscoso são transformadas em integrais de contorno, para tratar o problema viscoplástico pelo MEC basta apenas discretizar o contorno do corpo e as regiões internas onde ocorrem plastificação, resultando em menor quantidade de dados de entrada e um menor custo computacional.

Para facilitar o acoplamento não-linear entre os métodos numéricos foi necessário escrever uma forma alternativa para abordar o problema elastoplástico pelo MEC. As representações integrais são basicamente as mesmas, porém a forma de tratar o problema de correção do resíduo plástico foi alterada. As abordagens clássicas baseadas no problema de tensão inicial propõem que esta correção seja feita em nível de tensão, evitando utilizar o sistema de equação em deslocamento, a não ser no final do processo iterativo. Para isto era necessário, um certo esforço algébrico de forma a agrupar e ordenar as expressões das tensões no contorno e no domínio, fazendo-se necessário calcular a inversa da matriz do sistema principal. Esta forma de tratar o problema é bastante eficiente, porém, quando se trata de acoplamento não-linear entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos, esta abordagem é inapropriada. É necessário escrever as equações do MEC de forma semelhante ao MEF e tratar o problema de correção do resíduo como usualmente é feito pelo MEF. Além disso, esta abordagem permite implementar de forma direta, sem modificações, os procedimentos do tipo implícito, usualmente utilizados no MEF para a atualização das tensões.

Os algoritmos empregados tanto na formulação elastoplástica quanto nas formulações viscoplásticas foram desenvolvidos seguindo a metodologia de algoritmos do tipo “return mapping”. Estes, além de possibilitar uma eficiente atualização das tensões, permitem a obtenção da matriz constitutiva elastoplástica consistente com o algoritmo de retorno, preservando a taxa de convergência quadrática do método de Newton-Raphson. As expressões do multiplicador plástico de todos os algoritmos apresentados foram obtidas de forma fechada, não havendo a necessidade de procedimentos iterativos para solucionar a condição de

consistência. Pois, um fato importante observado nas análises numéricas utilizando-se os algoritmos do tipo implícito, é que o custo computacional maior está na geração da matriz de rigidez global da estrutura (quando o método requer atualização) e no processo de atualização das tensões. O elevado custo na atualização das tensões, principalmente quando o nível de plastificação é alto, é devido ao procedimento iterativo utilizado para resolver a equação de consistência e obter o multiplicador plástico. Assim, todas as variáveis envolvidas no problema não-linear podem ser obtidas de forma direta através de expressões fechadas. Os algoritmos com lei de fluxo não-associativa apresentaram-se tão eficientes quanto aqueles obtidos com a lei associativa. Além do mais, as expressões obtidas com os algoritmos não-associativos são mais simples e facilmente obtidas, de maneira que esta nova abordagem abre novas perspectivas para o desenvolvimento de algoritmos mais arrojados que podem ser aplicados a materiais mais complexos.

O acoplamento se apresenta como uma ferramenta adequada para o tratamento de problemas de interação, tais como: solo-estrutura e estrutura-estrutura. Assim, cada parte do sistema é representada por uma região física, sobre a qual pode-se aplicar uma solução numérica particular. Elementos de contorno são mais adequados para tratar problemas com domínio infinito ou semi-infinito e regiões de concentração de tensões e fluxo. Já elementos finitos são mais apropriados para problemas envolvendo materiais compósitos, anisotrópicos 3D, estruturas em cascas e reticuladas. Consequentemente, a aplicação adequada de ambos os métodos na simulação de um problema de interação, possibilita uma melhor representação de todo o problema, tornando o acoplamento uma ferramenta bastante eficiente. As novas hipóteses adotadas para o acoplamento do reforço permitiram caracterizar de forma mais realista a contribuição deste para o enrijecimento global. Porém, deve-se ressaltar que o custo computacional envolvido na integração das células tetraédricas ainda é relativamente alto e o armazenamento das matrizes em sua plenitude proporciona ainda um considerável consumo de memória. Como propostas de futuros trabalhos, poderia-se solucionar o problema das células empregando nas áreas onde ocorreria a plastificação, sub-regiões de elementos finitos tridimensionais. Assim, poderia se evitar os gastos necessários na determinação das integrais singulares de domínio, utilizando elementos de contorno na modelagem dos domínios infinitos e semi-infinitos. Já o problema de armazenamento poderia ser minimizado se fossem desenvolvidos procedimentos que aproveitassem as características de simetria das matrizes envolvidas, que é um problema mais complexo e foge da proposta do trabalho. Para se tratar problemas mais gerais é necessário um esforço para o desenvolvimento de pré e pós-processadores adequados ao acoplamento MEC/MEF. Além disso, pode-se sugerir ainda

como continuidade deste trabalho, a consideração de novas formulações viscoelásticas, viscoplásticas e de novos algoritmos elastoplásticos, que possibilitem caracterizar melhor as propriedades reológicas dos materiais envolvidos no problema.

Em síntese, todas as formulações desenvolvidas alcançaram o êxito esperado. Estas podem ser resumidamente descritas como:

- Formulações viscoelásticas (com uma abordagem inicial dinâmica) para o MEC e o MEF considerando os modelos de Kelvin e Boltzmann.
- Algoritmos de retornos associativos e não-associativos implícitos com expressões fechadas.
- Formulações viscoplásticas para o MEC com e sem comportamento instantâneo.
- Procedimentos de acoplamento progressivo para a inclusão e retirada de material em análises 2D e 3D que leva em consideração as hipóteses do reforço.

Como resultados adicionais, abriram-se frentes de pesquisas muito promissoras como, por exemplo, o desenvolvimento de novas metodologias viscoelásticas e viscoplásticas mais gerais e adequadas para o tratamento destes problemas, tanto para elementos de contorno como para elementos finitos e o acoplamento entre ambos.

Anexo A

INTEGRAIS DE CONTORNO DAS FORÇAS VOLUMÉTRICAS

A.1 INTRODUÇÃO

Em geral, as integrais que levam em consideração a contribuição das forças volumétricas nas representações integrais, tanto em deslocamento quanto em deformação (ou tensão) pelo MEC são definidas como integrais de domínio. Este tipo de equação impõe a necessidade de se discretizar também o domínio do corpo fazendo-se uso de células, aumentando assim o custo computacional envolvido no processo e tornando o método deselegante. Felizmente, para muitas aplicações práticas pode-se transformar adequadamente as integrais de domínio em integrais de contorno, mais apropriadas para o MEC. Problemas envolvendo forças volumétricas constantes sobre todo o domínio do corpo, por exemplo, o peso próprio, podem ser adequadamente representados utilizando-se discretização apenas no contorno do sólido.

A.2 REPRESENTAÇÃO EM DESLOCAMENTO

Para se transformar as equações integrais de domínio de forças volumétricas constante em integrais de contorno, deve-se utilizar um procedimento alternativo, fazendo-se uso de coordenadas polares, conforme apresentado na figura A.1. Sendo assim, as integrais referente às forças volumétricas da representação em deslocamento para os casos bi e tridimensional, ficam escritas como:

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = b_i \int_{\Omega} u_{ki}^* d\Omega = b_i \int_{\theta} \int_r u_{ki}^* r dr d\theta \quad \text{para 2D} \quad (\text{A.1a})$$

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = b_i \int_{\Omega} u_{ki}^* d\Omega = b_i \int_{\varphi} \int_{\theta} \int_r u_{ki}^* r^2 \cos(\theta) dr d\theta d\varphi \quad \text{para 3D} \quad (\text{A.1b})$$

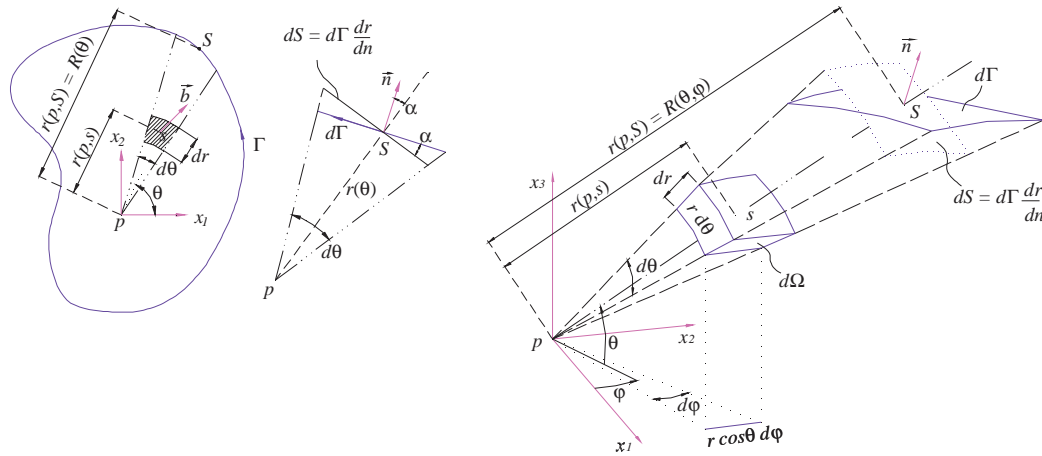


FIGURA A.1 – Coordenadas polares nos casos 2D e 3D.

Considerando-se o problema de “Kelvin”, as soluções fundamentais u_{ki}^* são expressas para os problemas bi e tridimensional, como:

$$u_{ki}^*(\theta, r) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \{(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ki} - r_{,k} r_{,i}\} \quad \text{para 2D} \quad (A.2a)$$

$$u_{ki}^*(\theta, \varphi, r) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \{(3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,k} r_{,i}\} \quad \text{para 3D} \quad (A.2b)$$

Substituindo as soluções fundamentais nas equações integrais das forças volumétrica, obtém-se:

$$b_i \int_{\theta_0}^{R(\theta)} \int_0^{R(\theta)} \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)r \ln(r)\delta_{ki} - r_{,k} r_{,i}] dr d\theta \quad \text{para 2D} \quad (A.3a)$$

$$b_i \int_{\varphi_0}^{\varphi} \int_{\theta_0}^{\theta} \int_0^{R(\theta, \varphi)} \frac{r}{16\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,k} r_{,i}] \cos(\theta) dr d\theta d\varphi \quad \text{para 3D} \quad (A.3b)$$

Deve-se observar que as integrais não apresentam singularidade, não necessitando de maiores cuidados. Assim, pode-se executar a integração em r das equações (A.3a) e (A.3b) diretamente, resultando em:

$$b_i \int_{\theta} \frac{R}{16\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(R) \right) \delta_{ki} + R_{,k} R_{,i} \right] R d\theta \quad \text{para 2D} \quad (A.4a)$$

$$b_i \int_{\varphi} \int_{\theta} \frac{1}{32\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)\delta_{ki} + R_{,k} R_{,i}] R^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi \quad \text{para 3D} \quad (\text{A.4b})$$

Note que R refere-se à distância do ponto fonte a um ponto no contorno. Assim, para utilizar a mesma notação definida nas representações integrais, substitui-se R por r , sabendo-se sempre que r agora é o valor da distância entre o ponto fonte e um ponto localizado no “contorno” do corpo e não mais no domínio.

$$b_i \int_{\theta} \frac{r}{16\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(r) \right) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i} \right] r d\theta \quad \text{para 2D} \quad (\text{A.5a})$$

$$b_i \int_{\varphi} \int_{\theta} \frac{1}{32\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,k} r_{,i}] r^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi \quad \text{para 3D} \quad (\text{A.5b})$$

Neste ponto, torna-se necessário encontrar as relações entre $d\theta$ (e $d\varphi$ para o caso tridimensional) com $d\Gamma$. Observando a figura A.1, nos problemas 2D e 3D é possível identificar que a projeção do infinitésimo $d\Gamma$, representada pelo elemento dS , pode ser expressa por:

$$dS = d\Gamma \frac{\partial r}{\partial n} \quad (\text{A.6})$$

Note que o infinitésimo dS pode também ser escrito como:

$$dS = r d\theta \quad \text{para 2D} \quad (\text{A.7a})$$

$$dS = r^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi \quad \text{para 3D} \quad (\text{A.7b})$$

Igualando as relações (A.7a) e (A.7b) com a expressão (A.6) encontram-se as relações desejadas.

$$r d\theta = d\Gamma \frac{\partial r}{\partial n} \quad \text{para 2D} \quad (\text{A.8a})$$

$$r^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi = d\Gamma \frac{\partial r}{\partial n} \quad \text{para 3D} \quad (\text{A.8b})$$

Substituindo as relações (A.8a) e (A.8b) nas expressões (A.5a) e (A.5b), respectivamente, encontram-se as integrais de contorno das forças volumétricas para o caso específico onde b_i é constante.

$$b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \quad (\text{A.9})$$

onde

$$B_{ki}^* = \frac{r}{16\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(r) \right) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i} \right] \frac{\partial r}{\partial n} \quad \text{para 2D} \quad (\text{A.10a})$$

$$B_{ki}^* = \frac{1}{32\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i} \right] \frac{\partial r}{\partial n} \quad \text{para 3D} \quad (\text{A.10b})$$

Deve-se ressaltar que o termo B_{ki}^* não apresenta nenhuma singularidade, de maneira que não é necessário o uso de técnicas especiais para se obter a integral (A.9). Note ainda que se o elemento de contorno utilizado for um elemento plano, o cálculo da integral do elemento que contém o ponto fonte é desnecessário, pois nesta situação $\partial r/\partial n = 0$ e consequentemente a integral é nula.

A.3 REPRESENTAÇÃO EM DEFORMAÇÃO E TENSÃO

Seguindo os mesmos procedimentos adotados no item anterior, pode-se obter as integrais de contorno das forças volumétricas para as representações em deformação e tensão. Para isto, deve-se escrever as referidas integrais nas coordenadas polares. Inicialmente, desenvolvem-se as expressões para a representação em deformação para os problemas bi e tridimensional e posteriormente obtém-se, de forma análoga e direta, aquelas para as representações em tensão.

$$\int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kie}^* b_i d\Omega = b_i \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kie}^* d\Omega = b_i \int_{\theta} \int_0^{R(\theta)} \hat{\varepsilon}_{kie}^* r dr d\theta \quad \text{para 2D} \quad (\text{A.11a})$$

$$\int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kie}^* b_i d\Omega = b_i \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kie}^* d\Omega = b_i \int_{\varphi} \int_{\theta} \int_0^{R(\theta,\varphi)} \hat{\varepsilon}_{kie}^* r^2 \cos(\theta) dr d\theta d\varphi \quad \text{para 3D} \quad (\text{A.11b})$$

onde $\hat{\varepsilon}_{kie}^*$ é a solução fundamental de “Kelvin” para as deformações, obtida pela adequada diferenciação do campo de deslocamento fundamental u_{ki}^* com relação a posição do ponto “fonte”. Assim, para diferenciar da solução fundamental ε_{kie}^* , obtida da derivação com relação ao ponto de campo, escreve-se $\hat{\varepsilon}_{kie}^*$.

$$\hat{\varepsilon}_{kie}^* = \frac{1}{8\alpha\pi(1-\nu)Gr^\alpha} [(1-2\nu)(\delta_{ke}r_{,i} + \delta_{ie}r_{,k}) - \delta_{ki}r_{,e} + \beta r_{,k} r_{,i} r_{,e}] \quad (\text{A.12})$$

sendo $\alpha=1$ e $\beta=2$ para o caso bidimensional e $\alpha=2$ e $\beta=3$ para o tridimensional. Assim, substituindo (A.12) nas expressões (A.11a) e (A.11b) e integrando em r , encontra-se:

$$b_i \int_{\theta} r \hat{\varepsilon}_{kie}^*(r, \theta) r d\theta \quad \text{para } 2D \quad (\text{A.13a})$$

$$b_i \int_{\varphi} \int_{\theta} r \hat{\varepsilon}_{kie}^*(r, \theta) r^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi \quad \text{para } 3D \quad (\text{A.13b})$$

Ressalta-se novamente que o termo R foi substituído por r , nas expressões (A.13a) e (A.13b), para utilizar a mesma notação do texto principal, porém, deve-se ter em mente que r representa agora o raio definido pela distância do ponto fonte a um ponto no “contorno”. Fazendo-se uso das relações (A.8a) e (A.8b) determinam-se as integrais de contorno das forças volumétricas referente à representação em deformação.

$$b_i \int_{\Gamma} \hat{B}_{kie}^* d\Gamma \quad (\text{A.14})$$

onde

$$\hat{B}_{kie}^* = \hat{\varepsilon}_{kie}^* r \frac{\partial r}{\partial n} \quad (\text{A.15})$$

As equações integrais de contorno das forças volumétricas referente à representação integral em tensão são obtidas de forma idêntica àquelas das representações em deformação, basta apenas substituir nas deduções a solução fundamental $\hat{\varepsilon}_{kie}^*$ por $\bar{\sigma}_{kie}^*$, sendo esta última expressa por:

$$\bar{\sigma}_{kie}^* = \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} [(1-2\nu)(\delta_{ke}r_{,i} + \delta_{ie}r_{,k} - \delta_{ki}r_{,e}) + \beta r_{,k}r_{,i}r_{,e}] \quad (\text{A.16})$$

sendo α e β os mesmos definidos anteriormente. Dessa forma, pode-se obter as integrais de contorno das forças volumétricas referente à representação integral em tensão.

$$b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{kie}^* d\Gamma \quad (\text{A.17})$$

onde

$$\bar{B}_{kie}^* = \bar{\sigma}_{kie}^* r \frac{\partial r}{\partial n} \quad (\text{A.18})$$

Tanto a integral (A.14) quanto (A.17), para o problema tridimensional, aprestam singularidade do tipo $1/r$. Este problema pode ser facilmente tratado utilizando-se transformação de coordenadas, executando as integrações no sistema de coordenadas polares. Porém, como mencionado anteriormente, se o elemento de contorno que contém o ponto fonte for plano, $\partial r/\partial n = 0$ e conseqüentemente a integral sobre este elemento é nula, eliminando-se a singularidade, não havendo necessidade de utilizar-se técnicas especiais para calcular as integrais (A.14) e (A.17). Note que, para determinados elementos, as respostas analíticas das integrais podem ser obtidas de forma relativamente simples, porém este não era o objetivo do trabalho. Por fim, deve-se ressaltar que todas estas deduções, tanto para as representações em deslocamento quanto para as representações integrais em deformação e tensão, são também válidas para as representações integrais incrementais, bastando apenas substituir as componentes das forças volumétricas b_j pelas componentes incrementais das mesmas \dot{b}_j .

Anexo B

DERIVADAS DE INTEGRAIS DE DOMÍNIO SINGULARES

B.1 INTRODUÇÃO

Na obtenção das representações integrais para deformações e consequentemente tensões em pontos internos, alguns cuidados especiais devem ser tomados na diferenciação das integrais singulares. Como as representações serão obtidas para pontos internos, localizados no interior do corpo, apenas as integrais de domínio apresentarão singularidades e necessitam ser diferenciadas, fazendo-se uso dos conceitos de integrais singulares. Logo, as integrais de contorno não se incluem nesta situação por não apresentarem singularidades quando o ponto fonte localiza-se no interior do corpo. As integrais de domínio estão presentes em situações onde se deseja considerar, por exemplo: forças volumétricas (representação integral no domínio), viscosidade (representação integral no domínio), efeitos dinâmicos, efeitos não-lineares, etc. Estas integrais presentes nas equações integrais para deslocamento em pontos internos apresentam singularidade do tipo $\ln r$ e $1/r$ para o caso bidimensional e $1/r$ e $1/r^2$ para o caso tridimensional e podem ser basicamente de dois tipos.

$$\int_{\Omega} u_{ki}^*(p,s) f_i(s,t) d\Omega \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^*(p,s) \bar{f}_{ij}(s,t) d\Omega \quad (\text{B.1})$$

onde p representa a posição do ponto fonte e s refere-se a uma posição no domínio do corpo. Os termos u_{ki}^* e ε_{kij}^* são as conhecidas soluções fundamentais (para ambos os problemas 2D e 3D) em deslocamento e deformação, respectivamente. As funções f_i e \bar{f}_{ij} variam de acordo com o tipo de representação integral e em problemas dependente do tempo estas podem ser escritas em função de t . Por exemplo, f_i pode ser: $b_i(s,t)$, $av \cdot \dot{u}(s,t)$ ou $\rho \cdot \ddot{u}(s,t)$, onde b_i representa as forças volumétricas, av o amortecimento viscoso associado a

velocidade \dot{u} e ρ é a densidade mássica associada a aceleração \ddot{u} . Já o termo \bar{f}_{ij} pode ser: σ_{ij}^v (tensões viscosas) ou σ_{ij}^p (incremento de tensões iniciais).

B.2 ESTUDO DA DIFERENCIAÇÃO DAS INTEGRAIS SINGULARES

Neste ponto torna-se necessário estudar a diferenciação parcial das equações integrais de domínio com núcleos singulares apresentadas na expressão (B.1). Para o desenvolvimento destas derivadas é necessário utilizar um sistema de coordenadas polares cuja o centro está localizado no ponto fonte p sendo também a origem de uma sub-região Ω_ϵ de raio ϵ (nos problemas 2D a sub-região Ω_ϵ é um disco e em 3D ela torna-se uma esfera) extraída do corpo, tão pequena quanto se queira.

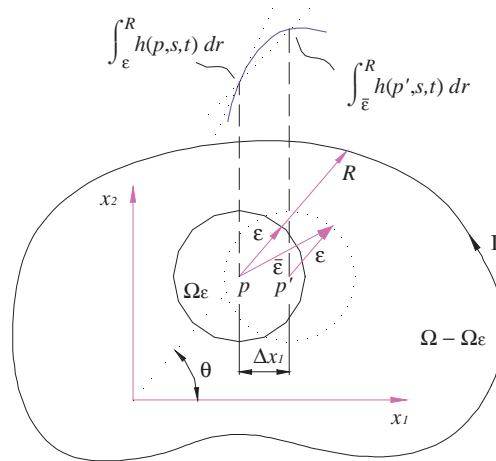


FIGURA B.1 – Domínio Ω decrescido de uma sub-região Ω_ϵ .

de maneira que é possível escrever as derivadas das equações (B.1), como:

$$I_u = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} u_{ki}^*(p, s) f_i(s, t) d\Omega \tag{B.2a}$$

$$I_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} \epsilon_{kij}^*(p, s) \bar{f}_{ij}(s, t) d\Omega \tag{B.2b}$$

Para se desenvolver o limite definido nas expressões (B.2a) e (B.2b), estas devem ser escritas em coordenadas polares, resultando:

$$I_u = \int_0^{2\pi} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\varepsilon}^R u_{ki}^*(\theta, r(p, s)) f_i(s, t) r(p, s) dr \right] d\theta \quad (\text{B.3a})$$

$$I_{\varepsilon} = \int_0^{2\pi} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\varepsilon}^R \varepsilon_{kij}^*(\theta, r(p, s)) \bar{f}_{ij}(s, t) r(p, s) dr \right] d\theta \quad (\text{B.3b})$$

para o problema bidimensional, e

$$I_u = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\varepsilon}^R u_{ki}^*(\theta, \varphi, r(p, s)) f_i(s, t) r^2(p, s) dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta \quad (\text{B.4a})$$

$$I_{\varepsilon} = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\varepsilon}^R \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, r(p, s)) \bar{f}_{ij}(s, t) r^2(p, s) dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta \quad (\text{B.4b})$$

para o caso tridimensional. Observe que em ambos os problemas 2D e 3D a diferenciação está sendo aplicada diretamente sobre a integral em r , pois os limites das integrais em θ e φ não dependem da posição do ponto fonte $x_e(p)$. Assim para uma melhor compreensão vamos considerar um θ (e um φ - caso o problema seja 3D), fixo e fazer o desenvolvimento apenas na direção r . Para se generalizar a aplicação basta apenas considerar θ e φ variando segundo os seus limites predefinidos nas expressões anteriores. Deve-se notar que, para derivar uma integral é necessário saber quais os termos que variam e dependem da variável na qual será aplicada a diferenciação. Para melhor visualizar isto os termos entre colchetes nas expressões (B.3a), (B.3b), (B.4a) e (B.4b) serão escritos em uma forma sintética e genérica, como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\varepsilon}^R h(p, s, t) dr \quad (\text{B.5})$$

Aplicando-se a definição de diferenciação, ou seja, tomando-se um ponto p' tão próximo quanto se queira de p , gera-se um pequeno incremento Δx_e na direção da coordenada cartesiana x_e (Fig.B.1), de tal forma que a derivada da integral em (B.5) fica expressa como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\varepsilon}^R h(p, s, t) dr = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\lim_{p' \rightarrow p} \frac{\int_{\varepsilon}^R h(p', s, t) dr - \int_{\varepsilon}^R h(p, s, t) dr}{\Delta x_e} \right) \quad (\text{B.6})$$

Observe que a origem de integração é a mesma para as integrais entre parênteses em (B.6), justificando a diferença no limite inferior em ambas as integrais. Esta variação identifica a dependência do limite inferior com a posição do ponto fonte p , o que não ocorre com o limite superior. Estes limites podem ser melhor identificados na figura B.1. Identificado-se os termos que dependem da variação do ponto fonte, parte-se agora para determinar os termos I_u e I_ε . Sabendo-se que um dos limites depende da variável a ser diferenciada, torna-se necessário fazer-se uso da fórmula de “Leibnitz” (Anexo C), específica para derivadas de equações integrais cujos limites são funções da variável de diferenciação.

Problema 2D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\bar{\varepsilon}}^R u_{ki}^*(\theta, r) f_i r dr \right] d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\varepsilon}}^R \frac{\partial u_{ki}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} f_i r dr + u_{ki}^*(\theta, R) f_i R \frac{\partial R}{\partial x_e(p)} - u_{ki}^*(\theta, \bar{\varepsilon}) f_i \bar{\varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_e(p)} \right] d\theta$$
(B.7)

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\bar{\varepsilon}}^R \varepsilon_{kij}^*(\theta, r) \bar{f}_{ij} r dr \right] d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\varepsilon}}^R \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij} r dr + \varepsilon_{kij}^*(\theta, R) \bar{f}_{ij} R \frac{\partial R}{\partial x_e(p)} - \varepsilon_{kij}^*(\theta, \bar{\varepsilon}) \bar{f}_{ij} \bar{\varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_e(p)} \right] d\theta$$

Problema 3D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\bar{\varepsilon}}^R u_{ki}^*(\theta, \varphi, r) f_i r^2 dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\varepsilon}}^R \frac{\partial u_{ki}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_e(p)} f_i r^2 dr + u_{ki}^*(\theta, \varphi, R) f_i R^2 \frac{\partial R}{\partial x_e(p)} - u_{ki}^*(\theta, \varphi, \bar{\varepsilon}) f_i \bar{\varepsilon}^2 \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_e(p)} \right] \cos \varphi d\varphi d\theta$$
(B.8)

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\bar{\varepsilon}}^R \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, r) \bar{f}_{ij} r^2 dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\varepsilon}}^R \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij} r^2 dr + \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, R) \bar{f}_{ij} R^2 \frac{\partial R}{\partial x_e(p)} - \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, \bar{\varepsilon}) \bar{f}_{ij} \bar{\varepsilon}^2 \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_e(p)} \right] \cos \varphi d\varphi d\theta$$

As derivadas do limite superior e inferior são:

$$\frac{\partial R}{\partial x_e(p)} = 0$$
(B.9a)

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_e(p)} = \cos(\vec{\varepsilon}, \vec{x}_e) \quad (\text{B.9b})$$

Levando em consideração que no limite quando $p' \rightarrow p$, conseqüentemente $\bar{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon$, logo a equação (B.9b) torna-se

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_e(p)} = \cos(\vec{\varepsilon}, \vec{x}_e) = \cos(\vec{\varepsilon}, \vec{x}_e) = \cos(\vec{r}, \vec{x}_e) = r_e \quad (\text{B.10})$$

Sendo assim as equações (B.7) e (B.8), tornam-se:

Problema 2D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{\partial u_{ki}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} f_i r dr - u_{ki}^*(\theta, \varepsilon) f_i \varepsilon r_e \right] d\theta \quad (\text{B.10a})$$

$$I_{\varepsilon} = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij} r dr - \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varepsilon) \bar{f}_{ij} \varepsilon r_e \right] d\theta \quad (\text{B.10b})$$

Problema 3D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{\partial u_{ki}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_e(p)} f_i r^2 dr - u_{ki}^*(\theta, \varphi, \varepsilon) f_i \varepsilon^2 r_e \right] \cos \varphi d\varphi d\theta \quad (\text{B.11a})$$

$$I_{\varepsilon} = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij} r^2 dr - \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, \varepsilon) \bar{f}_{ij} \varepsilon^2 r_e \right] \cos \varphi d\varphi d\theta \quad (\text{B.11b})$$

B.3 DESENVOLVENDO AS INTEGRAIS I_u

As integrais (B.10a) e (B.11a) apresentadas anteriormente para os problemas bidimensional e tridimensional, respectivamente, serão agora estudada com mais detalhe. Para isto, deve-se escrever as soluções fundamentais $u_{ki}^*(\theta, r)$ para o problema 2D e $u_{ki}^*(\theta, \varphi, r)$ para o caso tridimensional.

Problema 2D

$$u_{ki}^*(\theta, r) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \{ (3-4\nu) \ln(r) \delta_{ki} - r_{,k} r_{,i} \} \quad (\text{B.12a})$$

Problema 3D

$$u_{ki}^*(\theta, \varphi, r) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \{(3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,k} r_{,i}\} \quad (\text{B.12b})$$

De maneira que, o segundo termo das integrais I_u em (B.10a) e (B.11a) podem ser escritos como:

Problema 2D

$$\int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \{(3-4\nu)\varepsilon \ln(\varepsilon)\delta_{ki} - r_{,k} r_{,i}\} f_i r_{,e} \right] d\theta = 0 \quad (\text{B.13a})$$

Problema 3D

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{\varepsilon}{16\pi(1-\nu)G} \{(3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,k} r_{,i}\} f_i r_{,e} \right] \cos \varphi d\varphi d\theta = 0 \quad (\text{B.13b})$$

Na relação (B.13a) ε tende a zero mais rápido que $\ln(\varepsilon)$ tende ao infinito, consequentemente, $\varepsilon \ln(\varepsilon)$ tende a zero. Nos outros termos, tanto em (B.13a) quanto em (B.13b), é fácil identificar que também tendem a zero. Dessa forma, as expressões (B.10a) e (B.11a) ficam escritas como:

Problema 2D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{\partial u_{ki}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} f_i r dr \right] d\theta \quad (\text{B.14a})$$

Problema 3D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{\partial u_{ki}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_e(p)} f_i r^2 dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta \quad (\text{B.14b})$$

Agora deve-se desenvolver o segundo termo e demonstrar que o limite existe. Assim, derivando as funções $u_{ki}^*(\theta, r)$ em (B.14a) e $u_{ki}^*(\theta, \varphi, r)$ em (B.14b) com relação a posição do ponto fonte $x_e(p)$ e substituindo essas relações nas equações (B.14a) e (B.14b) respectivamente, encontra-se:

Problema 2D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{1}{r} \psi_{kie}(\theta) f_i r dr \right] d\theta \quad (\text{B.15a})$$

Problema 3D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{1}{r^2} \psi_{kie}(\theta, \varphi) f_i r^2 dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta \quad (\text{B.15b})$$

Note que a diferenciação gerou uma nova função que cancela o termo singular e as expressões (B.15a) e (B.15b) não mais apresentam singularidades, portanto, as integrais I_u são limitadas e regulares. Consequentemente, é possível garantir a existência dos limites, de maneira que as integrais em (B.14a) e (B.14b) agora podem ser escritas como integrais regulares.

Problema 2D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon}^R \frac{\partial u_{ki}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} f_i r dr d\theta = \int_{\Omega} \frac{\partial u_{ki}^*(p, s)}{\partial x_e(p)} f_i(s, t) d\Omega \quad (\text{B.16a})$$

Problema 3D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varepsilon}^R \frac{\partial u_{ki}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_e(p)} f_i r^2 dr \cos \varphi d\varphi d\theta = \int_{\Omega} \frac{\partial u_{ki}^*(p, s)}{\partial x_e(p)} f_i(s, t) d\Omega \quad (\text{B.16b})$$

Deve-se observar que as integrais singulares do tipo I_u permitem que a diferenciação seja aplicada diretamente sobre o integrando (solução fundamental) o que não ocorre com as integrais do tipo I_{ε} , que serão estudadas no próximo item.

B.4 DESENVOLVENDO AS INTEGRAIS I_{ε}

Os limites (B.10b) e (B.11b) serão determinados utilizando-se procedimentos semelhantes àqueles adotados na determinação das integrais (B.10a) e (B.11a). Pode-se representar as soluções fundamentais ε_{kij}^* para os casos bi e tridimensionais no sistema de coordenadas polares, por:

Problema 2D

$$\varepsilon_{kij}^*(r, \theta) = \frac{1}{r} \psi_{kij}(\theta) \quad (\text{B.17a})$$

Problema 3D

$$\varepsilon_{kij}^*(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \psi_{kij}(\theta, \varphi) \tag{B.17b}$$

Substituindo respectivamente as expressões (B.17a) e (B.17b) no segundo termo do lado direito das expressões (B.10b) e (B.11b) elimina-se a singularidade deste termo, de maneira que o limite em ε só necessita ser aplicado sobre a integral em r .

Problema 2D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^R \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij}(s, t) r dr \right] d\theta - \int_0^{2\pi} \psi_{kij}(\theta) r_{,e} \bar{f}_{ij}(p, t) d\theta \tag{B.18a}$$

Problema 3D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^R \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij}(s, t) r^2 dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta - \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \psi_{kij}(\theta, \varphi) r_{,e} \bar{f}_{ij}(p, t) \cos \varphi d\varphi d\theta \tag{B.18b}$$

O segundo termo do lado direito das expressões (B.18a) e (B.18b) são termos independentes e podem ser determinados fazendo-se uso das relações entre os cosenos diretores e os ângulos θ e φ para ambos os casos bi e tridimensional.

TABELA B.1 – Relação entre $r_{,i}$ e os ângulos.

| BIDIMENSIONAL | TRIDIMENSIONAL |
|-------------------------|---------------------------------------|
| $r_{,1} = \cos(\theta)$ | $r_{,1} = \cos(\varphi) \cos(\theta)$ |
| $r_{,2} = \sin(\theta)$ | $r_{,2} = \cos(\varphi) \sin(\theta)$ |
| | $r_{,3} = \sin(\varphi)$ |

Fazendo-se uso das relações para os cosenos diretores é possível determinar o termo independente. Este termo dá origem aos termos livres presentes nas representações integrais de deformação e tensão nos problemas viscosos e não-lineares. Consequentemente, as integrais (B.18a) e (B.18b) tornam-se:

Problema 2D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^R \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij}(s, t) r dr \right] d\theta + g_{kije}(p, t) \tag{B.19a}$$

Problema 3D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^R \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_\varepsilon(p)} \bar{f}_{ij}(s, t) r^2 dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta + g_{kije}(p, t) \quad (\text{B.19b})$$

Semelhantemente ao que foi feito para as integrais I_u , deve-se agora verificar a existência do limite presente nas integrais (B.19a) e (B.19b). Porém, para isto torna-se necessário desenvolver as derivadas parciais contidas nessas mesmas equações. Note que é possível derivar a solução fundamental ε_{kij}^* , de tal forma que esta possa ser escrita como:

Problema 2D

$$\frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, r)}{\partial x_\varepsilon(p)} = \frac{1}{r^2} \Psi_{kije}(\theta) \quad (\text{B.20a})$$

Problema 3D

$$\frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_\varepsilon(p)} = \frac{1}{r^3} \Psi_{kije}(\theta, \varphi) \quad (\text{B.20b})$$

Substituindo as expressões da derivada das soluções fundamentais nas equações (B.19a) e (B.19b), encontra-se:

Problema 2D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^R \frac{1}{r} \Psi_{kije}(\theta) \bar{f}_{ij}(s, t) dr \right] d\theta + g_{kije}(p, t) \quad (\text{B.21a})$$

Problema 3D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^R \frac{1}{r} \Psi_{kije}(\theta, \varphi) \bar{f}_{ij}(s, t) dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta + g_{kije}(p, t) \quad (\text{B.21b})$$

Para provar que os limites acima existem utiliza-se o procedimento de somar e subtrair a função $\bar{f}_{ij}(p, t)$ ao primeiro termo das equações (B.21a) e (B.21b), de tal forma que estes termos tornam-se:

Problema 2D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^R \frac{1}{r} [\bar{f}_{ij}(s,t) - \bar{f}_{ij}(p,t)] dr \Psi_{kije}(\theta) d\theta + \bar{f}_{ij}(p,t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^R \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \Psi_{kije}(\theta) d\theta dr + g_{kije}(p,t) \quad (\text{B.22a})$$

Problema 3D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^R \frac{1}{r} [\bar{f}_{ij}(s,t) - \bar{f}_{ij}(p,t)] dr \Psi_{kije}(\theta, \varphi) \cos \varphi d\varphi d\theta + \bar{f}_{ij}(p,t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^R \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{kije}(\theta, \varphi) \cos \varphi d\varphi d\theta dr + g_{kije}(p,t) \quad (\text{B.22b})$$

Para que o primeiro termo do lado direito das equações (B.22a) e (B.22b) seja limitado (possua limite definido quando $\varepsilon \rightarrow 0$), basta apenas que a função \bar{f}_{ij} satisfaça a condição de “Hölder”, ou seja

$$|\bar{f}_{ij}(s,t) - \bar{f}_{ij}(p,t)| \leq Ar^\alpha \quad (\text{B.23})$$

sendo A e α constantes positivas e r a distância entre p e s . Esta condição impõe a continuidade da função \bar{f}_{ij} em p , pois se a diferença entre p e s for tendendo a zero, ou seja $r(p,s) \rightarrow 0$, a diferença entre os valores da função \bar{f}_{ij} calculados em p e em s têm que tender para zero também. Consequentemente, a singularidade é cancelada e a primeira integral presente nas equações (B.22a) e (B.22b) torna-se limitada, possuindo limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Com relação ao segundo termo nas equações (B.22a) e (B.22b), pode-se demonstrar com um certo esforço algébrico que:

Problema 2D

$$\int_0^{2\pi} \Psi_{kije}(\theta) d\theta = 0 \quad (\text{B.24a})$$

Problema 3D

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{kije}(\theta, \varphi) \cos \varphi d\varphi d\theta = 0 \quad (\text{B.24b})$$

Conseqüentemente o segundo termo das equações (B.22a) e (B.22b) é limitado e vale zero. Assim, pode-se dizer que as integrais (B.18) existem e são limitadas, de maneira que elas podem ser escritas em coordenadas polares como:

Problema 2D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^R \frac{\partial \mathcal{E}_{kij}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij}(s, t) r dr d\theta + g_{kije}(p, t) \quad (\text{B.25a})$$

Problema 3D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_\varepsilon^R \frac{\partial \mathcal{E}_{kij}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij}(s, t) r^2 dr \cos \varphi d\varphi d\theta + g_{kije}(p, t) \quad (\text{B.25b})$$

ou de forma geral, como:

$$I_\varepsilon = \int_\Omega \frac{\partial \mathcal{E}_{kij}^*(p, s)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij}(s, t) d\Omega + g_{kije}(p, t) \quad (\text{B.26})$$

Deve-se observar que a integral em (B.26) deve ser obtida como valor principal de Cauchy e que o termo livre fica escrito em função do ponto fonte p .

Anexo C

DEDUÇÃO DA FÓRMULA DE “LEIBNITZ”

C.1 FÓRMULA DE “LEIBNITZ”

Esta fórmula é bastante útil na derivação de integrais cujos limites são escritos em função da variável a ser diferenciada. A fórmula de “Leibnitz” é essencial para a compreensão de alguns termos de domínio (termos livres) que aparecem nas representações integrais de deformações e tensões do MEC. Tome, por exemplo, a integral unidimensional abaixo.

$$\int_{r_1(x_p)}^{r_2(x_p)} h(x_p, x) dx = H(x_p, r_2(x_p)) - H(x_p, r_1(x_p)) \quad (C.1)$$

onde H é a primitiva da função h . Os limites de integração r_1 e r_2 são funções que dependem da variável x_p presente também no integrando. Diferenciando a expressão (C.1) com relação à x_p , obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_p} \left(\int_{r_1(x_p)}^{r_2(x_p)} h(x_p, x) dx \right) = \left[\frac{\partial H(x_p, r_2(x_p))}{\partial r_2(x_p)} \frac{\partial r_2(x_p)}{\partial x_p} + \frac{\partial H(x_p, r_2(x_p))}{\partial x_p} \right] - \left[\frac{\partial H(x_p, r_1(x_p))}{\partial r_1(x_p)} \frac{\partial r_1(x_p)}{\partial x_p} + \frac{\partial H(x_p, r_1(x_p))}{\partial x_p} \right] \quad (C.2)$$

Ressalta-se que a regra da cadeia foi utilizada no desenvolvimento da expressão (C.2). O segundo e o quarto termo do lado direito da equação (C.2) podem ser reunidos e sabendo-se que:

$$\frac{\partial H(x_p, r_1(x_p))}{\partial r_1(x_p)} = h(x_p, r_1(x_p)) \quad \text{e} \quad \frac{\partial H(x_p, r_2(x_p))}{\partial r_2(x_p)} = h(x_p, r_2(x_p)) \quad (\text{C.3})$$

a expressão (C.2), torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\int_{r_1(x_p)}^{r_2(x_p)} h(x_p, x) dx \right) = \\ \int_{r_1(x_p)}^{r_2(x_p)} \frac{\partial h(x_p, x)}{\partial x_p} dx + h(x_p, r_2(x_p)) \frac{\partial r_2(x_p)}{\partial x_p} - h(x_p, r_1(x_p)) \frac{\partial r_1(x_p)}{\partial x_p} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

A equação (C.4) representa a fórmula de “Leibnitz”. Como mencionado, anteriormente, esta fórmula é necessária na dedução de alguns termos de domínio presentes nas representações integrais de deformação e tensão em pontos internos que são obtidos através da diferenciação da equação integral de deslocamento pelo MEC.

Anexo D

TRATAMENTO DAS INTEGRAIS

D.1 INTRODUÇÃO

Técnicas para a determinação das integrais singulares vêm sendo propostas desde o início do método dos elementos de contorno. Porém, o que se tem observado é que quanto mais preciso for o cálculo das integrais, maior será o custo computacional imposto à formulação dos elementos de contorno. Outro fator importante é a ordem de singularidade, pois a determinação de integrais com alto grau de singularidade conduz, na maioria das situações, a um custo computacional mais elevado que aqueles onde o grau de singularidade não é tão alto, levando-se em consideração a mesma precisão em ambas as situações. Dessa forma, para se compreender melhor as técnicas que serão apresentadas, discute-se inicialmente os tipos de singularidades envolvidas nas representações integrais. Assim, de acordo com a natureza do núcleo e a relativa posição do ponto fonte as integrais da formulação dos elementos de contorno podem ser definidas como:

⇒*Integrais quasi-singulares*: Este é o caso das integrais cujo núcleo possui o termo singular, porém como o ponto fonte está localizado fora do elemento (ou célula) a singularidade não se torna presente. Assim, para efetuar este tipo de integral, basta apenas aplicar diretamente um procedimento de integração numérica. Em algumas situações quando o ponto fonte localiza-se próximo ao elemento (ou célula) é necessário fazer-se uso de sub-elementação.

⇒*Integrais com singularidade fraca*: Estas integrais são aquelas onde o ponto fonte pertence ao elemento (ou célula) e cuja singularidade é eliminada quando escritas nas coordenadas polares. Integrais de domínio nos problemas bidimensionais (célula 2D) e integrais de contorno nos casos 3D (elemento de contorno 3D) cujos núcleos apresentem singularidade do tipo $1/r$ se enquadram nesta definição. Também, integrais de domínio em problemas 3D

(célula 3D) cujos núcleos apresentem singularidade do tipo $1/r^2$, são consideradas integrais com singularidade fraca. A forma usual de se tratar estas integrais é através da técnica de transformação de coordenadas, que será vista posteriormente.

⇒ *Integrais com singularidade forte*: Este termo é utilizado para definir as integrais no qual o ponto fonte pertence ao elemento (ou célula) que será integrado e cujo grau de singularidade é maior que aqueles respectivos apresentados pelas integrais com singularidade fraca. Integrais de domínio nos problemas bidimensionais (célula 2D) e integrais de contorno nos casos 3D (elemento de contorno 3D) cujos núcleos apresentem singularidade do tipo $1/r^2$ são consideradas integrais com singularidade forte. Enquadram-se também nesta definição, integrais de domínio em problemas 3D (célula 3D) cujos núcleos apresentem singularidade do tipo $1/r^3$. Existem várias formas de se tratar este tipo de integral singular, algumas delas são específicas para um determinado tipo de elemento (ou célula) outras são obtidas de forma semi-analítica. O procedimento adotada para abordar este problema específico faz uso da técnica de subtração de singularidade que será melhor esclarecida no item D.4.

⇒ *Integrais hiper-singulares*: Estas são as integrais com grau de singularidade mais alto presente nas tradicionais formulações dos elementos de contorno. Este problema aparece, por exemplo, nas situações onde se deseja obter as deformações e/ou tensões no contorno através de representações integrais. Nessas circunstâncias, algumas integrais de contorno apresentam o termo hiper-singular. As integrais de contorno nos problemas bidimensionais que possuem singularidade do tipo $1/r^2$ e as integrais de contorno em problema 3D que possuem singularidade do tipo $1/r^3$ são consideradas integrais hiper-singulares. Para algumas situações específicas, por exemplo, obtenção de tensões ou deformações nos pontos localizados em um contorno suave, essas integrais podem ser determinadas fazendo-se uso da técnica de subtração de singularidade. Como neste trabalho as tensões no contorno são determinadas por um caminho alternativo, evitando as integrais hiper-singulares, estas não serão aqui consideradas.

D.2 TÉCNICA PARA INTEGRAIS QUASI-SINGULARES

Pode-se utilizar um procedimento bastante eficiente para obter as integrais quasi-singulares. A abordagem utilizada é bastante semelhante à técnica de transformação de coordenadas utilizada para eliminar a singularidade em integrais com singularidade fraca. A diferença é que nos problemas de singularidade fraca a sub-elementação em r não é

necessária, pois a singularidade em r foi eliminada, sendo apenas necessário a sub-elementação nas coordenadas polares restantes.

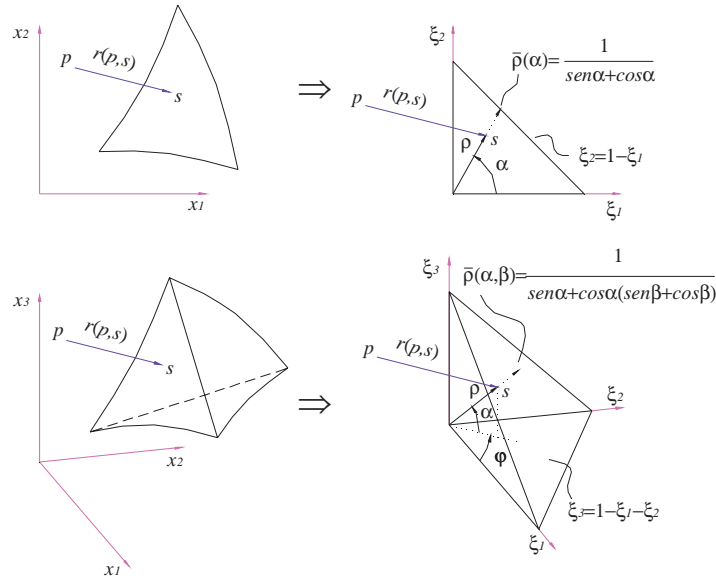


FIGURA D1 – Sistemas de coordenadas.

Porém, para o problema quasi-singular, onde o ponto fonte não pertence ao elemento a ser integrado, é importante fazer-se uso de sub-elementação em r , pois em situações onde o ponto fonte está muito próximo do elemento, pode ocorrer que apenas a integração com pontos de Gauss em r , sem sub-elementação, não seja suficientemente precisa. Nesta situação crítica, este procedimento é mais indicado que os usualmente empregados. Para se desenvolver as expressões numéricas da integral quase singular com sub-elementação nas coordenadas polares é necessário escreve-la inicialmente no sistema de coordenadas adimensionais (Fig.D1), pois neste sistema é mais fácil determinar os limites de integração. Assim, as integrais sobre os elementos de contorno Γ_e e sobre as células Ω_e podem ser expressas como:

Célula 2D

$$\int_{\Omega_e} f(p, s)\phi(s)d\Omega = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} f(p, s(\xi_1, \xi_2))\phi(\xi_1, \xi_2)J(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2 \tag{D.1a}$$

Elemento de Contorno 3D

$$\int_{\Gamma_e} f(p, s)\phi(s)d\Gamma = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} f(p, s(\xi_1, \xi_2))\phi(\xi_1, \xi_2)J(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2 \tag{D.1b}$$

Célula 3D

$$\int_{\Omega_e} f(p, s)\phi(s)d\Omega = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \int_{\xi_3} f(p, s(\xi_1, \xi_2, \xi_3))\phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)J(\xi_1, \xi_2, \xi_3)d\xi_1d\xi_2d\xi_3 \quad (D.1c)$$

onde f é uma função que depende da posição do ponto fonte p , do ponto de campo s e da distância r entre estes pontos. Os termos ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 são as coordenadas adimensionais e J é o determinante da matriz jacobiana que relaciona as coordenadas cartesianas com as coordenadas adimensionais. Para elementos de contorno 3D (ou células 2D) triangulares de três nós, J é definido como duas vezes a área do elemento (ou da célula). Já para a célula tetraédrica de quatro nós J é seis vezes o volume do tetraedro. Porém, para elementos cuja geometria é representada por funções de grau maior que as lineares J varia no elemento (ou célula) e tem que ser determinado ponto a ponto.

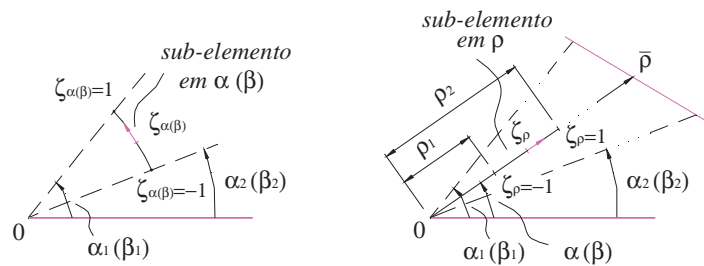


FIGURA D.2 – Sub-elementos nas coordenadas polares.

Ressalta-se que as expressões para a célula 2D e para o elemento de contorno 3D serão idênticas, a não ser pelo cálculo da função f . Sendo assim, adotaremos uma mesma notação para ambos os casos. Agora, escrevem-se as integrais no sistema de coordenadas polares (Fig.D1), onde se deseja efetuar a sub-elementação. Note que as coordenadas polares são definidas no sistema adimensional ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 com limites melhores definidos do que aqueles apresentados no sistema cartesiano.

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(p, s(\rho, \alpha))\phi(\rho, \alpha)J(\rho, \alpha)\rho d\rho d\alpha \quad (D.2a)$$

Célula 3D

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(p, s(\rho, \alpha, \beta))\phi(\rho, \alpha, \beta)J(\rho, \alpha, \beta)\rho^2 \cos(\alpha)d\rho d\alpha d\beta \quad (D.2b)$$

Note que essas expressões são aplicadas diretamente em elementos ou células triangulares, tetraédricas e pentaédricas, pois nestes os limites ficam bem definidos. Porém, elementos ou células com geometrias diferentes destas, por exemplo: geometrias quadrangulares e hexaédricas, estes limites não são tão bem definidos. Felizmente, pode-se contornar esta dificuldade de forma bastante simples, basta apenas dividir os elementos (ou células), no sistema de coordenadas adimensional ξ_i , em n triângulos ou tetraedros (ou pentaedros), efetuando-se a integral em cada um deles e somando-se estas para se obter a integral sobre todo elemento (ou célula). Dessa forma, para essas geometrias as integrais (D.2) teriam de estar acrescidas de uma somatória que varia de um até o número de triângulos, tetraedros ou pentaedros utilizados na discretização.

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\sum_{i=1}^n \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(p, s(\rho, \alpha)) \phi(\rho, \alpha) J(\rho, \alpha) \rho d\rho d\alpha \quad (D.3a)$$

Célula 3D

$$\sum_{i=1}^n \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(p, s(\rho, \alpha, \beta)) \phi(\rho, \alpha, \beta) J(\rho, \alpha, \beta) \rho^2 \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta \quad (D.3b)$$

Observe que agora os limites das integrais são definidos para cada triângulo, tetraedro ou pentaedro utilizado na representação da geometria. A sub-elementação nas coordenadas polares ρ , α e β fica caracterizada subdividindo-se os respectivos limites (Fig.2), de maneira que as integrais (D.3) ficam escritas como:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{k=1}^{n_\rho} \int_{\alpha_1^j}^{\alpha_2^j} \int_{\rho_1^k}^{\rho_2^k} f(p, s(\rho, \alpha)) \phi(\rho, \alpha) J(\rho, \alpha) \rho d\rho d\alpha \quad (D.4a)$$

Célula 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{n_\beta} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{k=1}^{n_\rho} \int_{\beta_1^l}^{\beta_2^l} \int_{\alpha_1^j}^{\alpha_2^j} \int_{\rho_1^k}^{\rho_2^k} f(p, s(\rho, \alpha, \beta)) \phi(\rho, \alpha, \beta) J(\rho, \alpha, \beta) \rho^2 \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta \quad (D.4b)$$

sendo n_β , n_α e n_ρ o número de sub-elementos definidos na direção das respectivas coordenadas polares β , α e ρ . Para executar as integrações numéricas utilizando-se as fórmulas da quadratura unidimensional de Gauss nas direções das coordenadas polares, é necessário escrever as integrais nas coordenadas adimensionais ζ_α , ζ_β e ζ_ρ (variação de -1 a $+1$) referentes respectivamente as coordenadas polares α , β e ρ . As funções de forma que definem a relação entre elas são lineares e iguais aquelas obtidas para o elemento finito unidimensional de dois nós, ou seja,

$$\rho(\zeta_\rho) = \frac{1}{2}(1 - \zeta_\rho)\rho_1^k + \frac{1}{2}(1 + \zeta_\rho)\rho_2^k \quad (\text{D.5a})$$

$$\alpha(\zeta_\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \zeta_\alpha)\alpha_1^j + \frac{1}{2}(1 + \zeta_\alpha)\alpha_2^j \quad (\text{D.5b})$$

$$\beta(\zeta_\beta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta_\beta)\beta_1^l + \frac{1}{2}(1 + \zeta_\beta)\beta_2^l \quad (\text{D.5c})$$

onde ρ_1^k , α_1^j e β_1^l são os limites iniciais e ρ_2^k , α_2^j e β_2^l os limites finais ambos definidos para os sub-elementos k , j e l referentes respectivamente a direção das coordenadas polares ρ , α e β . Determinada as funções, pode-se obter os jacobianos que relacionam as coordenadas polares ρ , α e β com suas respectivas coordenadas adimensionais ζ_ρ , ζ_α e ζ_β .

$$J_\rho^k = \frac{\partial \rho(\zeta_\rho)}{\partial \zeta_\rho} = \frac{1}{2}(\rho_2^k - \rho_1^k) \quad (\text{D.6a})$$

$$J_\alpha^j = \frac{\partial \alpha(\zeta_\alpha)}{\partial \zeta_\alpha} = \frac{1}{2}(\alpha_2^j - \alpha_1^j) \quad (\text{D.6b})$$

$$J_\beta^l = \frac{\partial \beta(\zeta_\beta)}{\partial \zeta_\beta} = \frac{1}{2}(\beta_2^l - \beta_1^l) \quad (\text{D.6c})$$

Assim, obtidas as relações (D.5) e (D.6), pode-se escrever a expressão numérica das integrais (D.4) utilizando a quadratura unidimensional de Gauss.

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{k=1}^{n_\rho} \sum_{l=1}^{\bar{n}_\alpha} \sum_{m=1}^{\bar{n}_\rho} f(p, s(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m)) \phi(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m) J(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m) J_\alpha^j J_\rho^k \rho(\zeta_\rho^m) w_\alpha^l w_\rho^m \quad (\text{D.7a})$$

Célula 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{n_\beta} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{k=1}^{n_\rho} \sum_{m=1}^{\bar{n}_\beta} \sum_{t=1}^{\bar{n}_\alpha} \sum_{h=1}^{\bar{n}_\rho} \left[f(p, s(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m)) \phi(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) J(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) J_\rho^k J_\alpha^j J_\beta^l \right. \\ \left. \rho^2 (\zeta_\rho^h) \cos(\alpha(\zeta_\alpha^t)) w_\rho^h w_\alpha^t w_\beta^m \right] \tag{D.7b}$$

onde \bar{n}_ρ , \bar{n}_α e \bar{n}_β é o número de pontos de Gauss referente as direções ρ , α e β . Os termos w_ρ^h , w_α^t e w_β^m são os pesos dos respectivos pontos de Gauss h , t e m referentes as direções ρ , α e β . Logo, fazendo-se uso das expressões (D.7a) e (D.7b) pode-se determinar as integrais quasi-singulares. Note que é possível ainda realizar a sub-elementação progressiva, para isto basta apenas adotar uma relação que defina os progressivos tamanhos dos sub-elementos. Assim, é possível definir sub-elementos menores nas regiões próximas do ponto fonte, possibilitando uma melhor integração.

D.3 TÉCNICA PARA INTEGRAIS COM SINGULARIDADE FRACA

A técnica mais utilizada para se determinar as integrais com singularidade fraca é a técnica de transformação de coordenada. O objetivo desta é escrever a integral em um outro sistema de coordenada de tal forma que o jacobiano da transformação entre o sistema inicial e o novo sistema cancele o termo singular. Basicamente, consiste em escrever as integrais singulares no sistema de coordenadas polares como realizado para as integrais quasi-singulares. A diferença é que a sub-elementação em r não é mais necessária, pois a singularidade em r é eliminada pelo jacobiano da transformação. Note que agora a integral em ρ possui um limite inicial fixo e igual a zero e um limite final $\bar{\rho}$ que depende das outras coordenadas polares (Fig.D3).

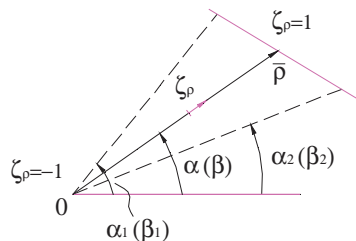


FIGURA D.3 – Limite inicial e final da integração em ρ .

Consequentemente, as integrais (D.4) para a nova situação ficam escritas como:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_\alpha} \int_{\alpha_1^j}^{\alpha_2^j} \int_0^{\bar{\rho}(\alpha)} f(p, s(\rho, \alpha)) \phi(\rho, \alpha) J(\rho, \alpha) \rho d\rho d\alpha \quad (\text{D.8a})$$

Célula 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{n_\beta} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \int_{\beta_1^l}^{\beta_2^l} \int_{\alpha_1^j}^{\alpha_2^j} \int_0^{\bar{\rho}(\alpha, \beta)} f(p, s(\rho, \alpha, \beta)) \phi(\rho, \alpha, \beta) J(\rho, \alpha, \beta) \rho^2 \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta \quad (\text{D.8b})$$

Note que as integrais são regulares, pois a divisão do jacobiano da transformação (entre as coordenadas dimensionais ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 e as polares ρ , α e β) com o termo singular presente na função f , resulta um número finito. Poderia-se enxergar mais facilmente o cancelamento do termo singular se nas integrais (D.8) não fosse utilizada a transformação para o sistema de coordenadas dimensionais ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , assim o jacobiano seria uma função de r e não de ρ , conseqüentemente o termo singular seria cancelado diretamente com o jacobiano, pois nas soluções fundamentais (ou seja, na função f) o termo singular é escrito em função de r . Neste ponto, torna-se necessário escrever uma nova relação para $\rho(\zeta_\rho)$, pois a integral em ρ possui agora novos limites.

$$\rho(\zeta_\rho) = \frac{1}{2}(1 + \zeta_\rho)\bar{\rho} \quad (\text{D.9})$$

De maneira que o jacobiano J_ρ torna-se:

$$J_\rho = \frac{\partial \rho(\zeta_\rho)}{\partial \zeta_\rho} = \frac{1}{2}\bar{\rho} \quad (\text{D.10})$$

Logo, as expressões para integração numérica fazendo-se uso da quadratura unidimensional de Gauss para evoluir as integrais com singularidade fraca são:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{l=1}^{\bar{n}_\alpha} \sum_{m=1}^{\bar{n}_\rho} f(p, s(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m)) \phi(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m) J(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m) J_\alpha^l J_\rho^m (\bar{\rho}(\alpha)) \rho(\zeta_\rho^m) w_\alpha^l w_\rho^m \quad (\text{D.11a})$$

Célula 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{n_\beta} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{m=1}^{\bar{n}_\beta} \sum_{t=1}^{\bar{n}_\alpha} \sum_{h=1}^{\bar{n}_\rho} \left[f(p, s(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m)) \phi(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) J(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) J_\rho(\bar{\rho}(\alpha, \beta)) J_\alpha^j J_\beta^l \right. \\ \left. \rho^2(\zeta_\rho^h) \cos(\alpha(\zeta_\alpha^t)) w_\rho^h w_\alpha^t w_\beta^m \right] \quad (D.11b)$$

Observe que a somatória referente à sub-elementação em ρ foi eliminada. Esta não é a única diferença entre expressões (D.11) e (D.7), note que a origem da coordenada ρ (raio nas coordenadas adimensionais ξ_1, ξ_2 e ξ_3) coincide com a origem de r (raio nas coordenadas cartesianas x, y e z) possibilitando o cancelamento do termo singular.

D.4 TÉCNICA PARA INTEGRAIS COM SINGULARIDADE FORTE

As integrais com singularidade forte serão evoluídas fazendo-se uso da técnica de subtração de singularidade desenvolvida por GUIGGIANI *et al.*(1991). Esta forma de tratar o problema é mais geral, podendo ser aplicada para qualquer tipo de elemento ou célula, o que não ocorre com outras técnicas específicas para certos elementos (ou células) com uma determinada geometria. A técnica é baseada na expansão em série de Taylor das coordenadas cartesianas, funções de forma e do jacobiano da transformação, ALIABADI *et al.*(1985). Nesta técnica a parte singular presente no núcleo da integral é subtraída e evoluída analiticamente ou semi-analiticamente.

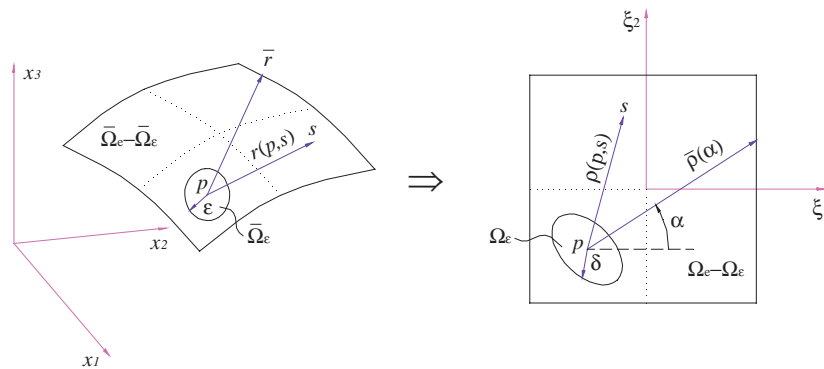


FIGURA D.4 – Ponto singular caracterizado no domínio real e adimensional.

A aplicação pura da técnica de transformação de coordenadas para resolver o problema de singularidade apresentado por este tipo de integral, não é suficiente, pois as

integrais agora possuem um grau de singularidade maior que aqueles das integrais com singularidade fraca, de maneira que, as integrais (D.2) ficam agora escritas como:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon - \Omega_\varepsilon} f(\rho, \alpha) \phi(\rho, \alpha) J(\rho, \alpha) \rho d\rho d\alpha \quad (\text{D.12a})$$

Célula 3D

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon - \Omega_\varepsilon} f(\rho, \alpha, \beta) \phi(\rho, \alpha, \beta) J(\rho, \alpha, \beta) \rho^2 \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta \quad (\text{D.12b})$$

A técnica de subtração de singularidade consiste basicamente em obter um integrando com o mesmo grau de singularidade apresentado em (D.12), porém em uma forma mais simples. Este integrando aproximado deve ser somado e subtraído na integral original resultando em uma integral regular e uma nova integral com o mesmo grau de singularidade inicial, só que em uma forma simples, possível de ser evoluída analiticamente ou semi-analiticamente. Para se determinar um integrando aproximado que possua a mesma ordem de singularidade, deve-se escrever as coordenadas cartesianas através de uma aproximação de Taylor de primeira ordem nas coordenadas adimensionais envolta do ponto singular $x_i(\xi_j^0) = x_i^0$.

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$x_i(\xi_1, \xi_2) \cong x_i(\xi_1^0, \xi_2^0) + \frac{\partial x_i(\xi_1^0, \xi_2^0)}{\partial \xi_1} (\xi_1 - \xi_1^0) + \frac{\partial x_i(\xi_1^0, \xi_2^0)}{\partial \xi_2} (\xi_2 - \xi_2^0) \quad (\text{D.12a})$$

Célula 3D

$$x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cong x_i(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0) + \frac{\partial x_i(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)}{\partial \xi_1} (\xi_1 - \xi_1^0) + \frac{\partial x_i(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)}{\partial \xi_2} (\xi_2 - \xi_2^0) + \frac{\partial x_i(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)}{\partial \xi_3} (\xi_3 - \xi_3^0) \quad (\text{D.12b})$$

É importante ressaltar que se as funções de forma utilizadas para descrever a geometria do elemento ou da célula forem lineares a aproximação em primeira ordem das coordenadas cartesianas são as próprias coordenadas. Observando a figura D.1 pode-se concluir que:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\xi_1 - \xi_1^0 = \rho \cos(\alpha) \quad (\text{D.13a})$$

$$\xi_2 - \xi_2^0 = \rho \text{sen}(\alpha) \quad (\text{D.13b})$$

Célula 3D

$$\xi_1 - \xi_1^0 = \rho \cos(\alpha) \cos(\beta) \quad (\text{D.13c})$$

$$\xi_2 - \xi_2^0 = \rho \cos(\alpha) \text{sen}(\beta) \quad (\text{D.13d})$$

$$\xi_3 - \xi_3^0 = \rho \text{sen}(\alpha) \quad (\text{D.13e})$$

Para simplificar as expressões escreve-se derivadas parciais apresentadas nas expressões (D.12) como:

$$\frac{\partial x_i(\xi_k^0)}{\partial \xi_j} = x_{i,j}^0 \quad (\text{D.14})$$

Assim, aplicando as expressões (D.13) e (D.14) em (D.12), obtém-se:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$x_i(\xi_1, \xi_2) = x_i^0 + x_{i,1}^0 \rho \cos(\alpha) + x_{i,2}^0 \rho \text{sen}(\alpha) \quad (\text{D.15a})$$

Célula 3D

$$x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = x_i^0 + x_{i,1}^0 \rho \cos(\alpha) \cos(\beta) + x_{i,2}^0 \rho \cos(\alpha) \text{sen}(\beta) + x_{i,3}^0 \rho \text{sen}(\alpha) \quad (\text{D.15b})$$

Encontrada a aproximação de primeira ordem para as coordenadas cartesianas, parte-se para a obtenção das componentes do raio.

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$r_i = x_i(\xi_1, \xi_2) - x_i^0 = \rho(x_{i,1}^0 \cos(\alpha) + x_{i,2}^0 \text{sen}(\alpha)) = \rho a_i(\alpha) \quad (\text{D.16a})$$

Célula 3D

$$r_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - x_i^0 = \rho(x_{i,1}^0 \cos(\alpha) \cos(\beta) + x_{i,2}^0 \cos(\alpha) \text{sen}(\beta) + x_{i,3}^0 \text{sen}(\alpha)) = \rho a_i(\alpha, \beta) \quad (\text{D.16b})$$

Consequentemente, o raio fica escrito como:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \rho \sqrt{a_1^2(\alpha) + a_2^2(\alpha)} = \rho A(\alpha) \quad (\text{D.17a})$$

Célula 3D

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = \rho \sqrt{a_1^2(\alpha, \beta) + a_2^2(\alpha, \beta) + a_3^2(\alpha, \beta)} = \rho A(\alpha, \beta) \quad (\text{D.17b})$$

Logo, a derivada do raio com relação às coordenadas cartesianas fica escrita como:

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{r_i}{r} = \frac{a_i}{A} \quad (\text{D.18})$$

De posse das expressões (D.17) e (D.18) é possível escrever uma função com o mesmo grau de singularidade da solução fundamental, só que em uma forma mais simples que aquela presente na integral que queremos determinar. Para isto basta apenas substituir as expressões (D.17) e (D.18) na expressão original da solução fundamental, resultando em uma função \bar{f} , que pode também ser escrita como:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\bar{f}(\rho, \alpha) = \frac{1}{\rho^2} \psi(\alpha) \quad (\text{D.19a})$$

Célula 3D

$$\bar{f}(\rho, \alpha, \beta) = \frac{1}{\rho^3} \psi(\alpha, \beta) \quad (\text{D.19b})$$

Como mencionado anteriormente, caso as funções de forma utilizadas para descrever a geometria do elemento ou da célula forem lineares a aproximação em primeira ordem das coordenadas cartesianas são as próprias coordenada, conseqüentemente a função \bar{f} é a própria f definida em (D.12). Por fim, deve-se expandir em série de Taylor as funções de forma e o determinante da matriz jacobiana, desprezando-se os termos lineares e de alta ordem.

$$\phi(\xi_i) \equiv \phi(\xi_i^0) + \frac{\partial \phi(\xi_i^0)}{\partial \xi_j} (\xi_j - \xi_j^0) \dots \equiv \phi(\xi_i^0) = \phi_0 \quad (\text{D.20a})$$

$$J(\xi_i) \equiv J(\xi_i^0) + \frac{\partial J(\xi_i^0)}{\partial \xi_j} (\xi_j - \xi_j^0) \dots \equiv J(\xi_i^0) = J_0 \quad (\text{D.20b})$$

De posse das equações (D.19) e (D.20) pode-se escrever o integrando aproximado.

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\bar{f}(\rho, \alpha) \phi(\xi_1^0, \xi_2^0) J(\xi_1^0, \xi_2^0) = \frac{1}{\rho^2} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 \quad (\text{D.21a})$$

Célula 3D

$$\bar{f}(\rho, \alpha, \beta) \phi(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0) J(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0) = \frac{1}{\rho^3} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \quad (\text{D.21b})$$

Obtido o integrando aproximado deve-se agora somá-lo e subtraí-lo nas integrais (D.12), de maneira que estas integrais ficam escritas como:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\int_{\Omega_e} \left(f(\rho, \alpha) \rho \phi(\rho, \alpha) J(\rho, \alpha) - \frac{1}{\rho} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 \right) d\rho d\alpha + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_e - \Omega_\varepsilon} \frac{1}{\rho} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 d\rho d\alpha \quad (\text{D.22a})$$

Célula 3D

$$\int_{\Omega_e} \left(f(\rho, \alpha, \beta) \rho^2 \phi(\rho, \alpha, \beta) J(\rho, \alpha, \beta) - \frac{1}{\rho} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \right) \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_e - \Omega_\varepsilon} \frac{1}{\rho} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta \quad (\text{D.22b})$$

O integrando aproximado possui o mesmo grau de singularidade que o integrando original, de maneira que nas proximidades do ponto singular ambos possuem a mesma assíntota (ver figura D.5). O comportamento do integrando aproximado nas vizinhanças da singularidade torna possível a regularização do integrando presente na primeira integral em (D.22). Logo, pode-se concluir que a primeira integral nas expressões (D.22) é regular, de maneira que o limite nesta integral não precisa ser mais aplicado. Esta integral pode ser determinada utilizando-se diretamente um procedimento de integração numérica.

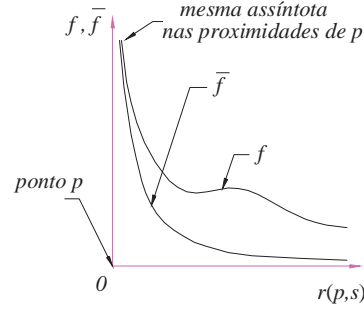


FIGURA D.5 – Representação do integrando original e aproximado.

A segunda integral possui ainda singularidade, porém esta é de uma forma mais simples que a integral original e pode ser determinada semi-analiticamente. Assim, desenvolvendo a integração em ρ da segunda integral das expressões (D.22), encontra-se:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon - \Omega_\varepsilon} \frac{1}{\rho} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 d\rho d\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\delta(\varepsilon, \alpha)}^{\bar{\rho}(\alpha)} \frac{1}{\rho} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 d\rho d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 \ln|\bar{\rho}(\alpha)| d\alpha - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 \ln|\delta(\varepsilon, \alpha)| d\alpha \quad (D.23a)$$

Célula 3D

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon - \Omega_\varepsilon} \frac{1}{\rho} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\delta(\varepsilon, \alpha, \beta)}^{\bar{\rho}(\alpha, \beta)} \frac{1}{\rho} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \cos(\alpha) \ln|\bar{\rho}(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \cos(\alpha) \ln|\delta(\varepsilon, \alpha, \beta)| d\alpha d\beta \quad (D.23b)$$

onde $\bar{\rho}$ é a distância “ ρ ” da origem do sistema polar à fronteira superior do domínio em consideração (Fig.D.4). O termo δ é o limite inicial ε transformado para o sistema adimensional, ou seja, é a distância “ ρ ” da origem do sistema polar à fronteira inferior do domínio analisado. Este pode ser escrito utilizando as expressões (D.17), de maneira que:

$$r = \rho A \Rightarrow \varepsilon = \delta A \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{A} \quad (D.24)$$

Substituindo a equação (D.24) nas integrais em (D.23), encontra-se:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 \ln|\bar{\rho}(\alpha)A(\alpha)| d\alpha - \phi_0 J_0 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln|\varepsilon| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha) d\alpha \quad (D.25a)$$

Célula 3D

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \cos(\alpha) \ln|\bar{\rho}(\alpha, \beta)A(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta - \phi_0 J_0 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln|\varepsilon| \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha, \beta) \cos(\alpha) d\alpha d\beta \quad (D.25b)$$

Pode-se demonstrar, com um certo esforço algébrico, que a última integral nas expressões (D.25), para as situações específicas onde o ponto fonte está localizado no interior do corpo ou em um contorno suave, são nulas, ou seja,

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\int_0^{2\pi} \psi(\alpha) d\alpha = 0 \quad (D.26a)$$

Célula 3D

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \psi(\alpha, \beta) \cos(\alpha) d\alpha d\beta = 0 \quad (D.26b)$$

Caso o ponto fonte esteja localizado no nó do elemento ou da célula, as integrais (D.26) representam um somatório de integrais sobre cada elemento (ou célula) que estejam conectados ao ponto singular. Demonstrações, para casos específicos, das afirmações (D.26) podem ser encontrados em CRUSE & POLCH(1986) para a situação de ponto singular interno e em LEITÃO & ALIABADI(1995) para pontos em contorno suave. Entretanto, sobre o cancelamento da última integral em (D.25) referente ao elemento de contorno, quando o ponto fonte localiza-se em um contorno não suave, nada se tem mencionado. Felizmente, nesta situação pôde-se verificar numericamente que o termo se cancelava quando o ponto fonte localizava-se em cantos e arestas. Sendo assim, as equações (D.22) podem ser escritas como:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^{\bar{\rho}(\alpha)} \left(f(\rho, \alpha) \rho \phi(\rho, \alpha) J(\rho, \alpha) - \frac{1}{\rho} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 \right) d\rho d\alpha + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 \ln|\bar{\rho}(\alpha)A(\alpha)| d\alpha \quad (D.27a)$$

Célula 3D

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^{\bar{\rho}(\alpha, \beta)} \left(f(\rho, \alpha, \beta) \rho^2 \phi(\rho, \alpha, \beta) J(\rho, \alpha, \beta) - \frac{1}{\rho} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \right) \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta +$$

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \cos(\alpha) \ln|\bar{\rho}(\alpha, \beta) A(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta \quad (\text{D.27b})$$

Agora as integrais são regulares e podem ser numericamente evoluídas fazendo-se uso da quadratura de Gauss. Como a singularidade foi eliminada, aplica-se a sub-elementação apenas na direção das coordenadas polares α e β . Logo, a expressão numérica das equações (D.27) é:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{l=1}^{\bar{n}_\alpha} \sum_{m=1}^{\bar{n}_\rho} \left(f(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m) \rho(\zeta_\rho^m) \phi(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m) J(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m) - \frac{1}{\rho(\zeta_\rho^m)} \psi(\zeta_\alpha^l) \phi_0 J_0 \right) J_\rho(\bar{\rho}(\zeta_\alpha^l)) J_\alpha^j w_\rho^m w_\alpha^l +$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{l=1}^{\bar{n}_\alpha} \psi(\zeta_\alpha^l) \phi_0 J_0 \ln|\bar{\rho}(\zeta_\alpha^l) A(\zeta_\alpha^l)| J_\rho(\bar{\rho}(\zeta_\alpha^l)) J_\alpha^j w_\alpha^l \quad (\text{D.11a})$$

Célula 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{n_\beta} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{m=1}^{\bar{n}_\beta} \sum_{t=1}^{\bar{n}_\alpha} \sum_{h=1}^{\bar{n}_\rho} \left[\left(f(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) \rho^2(\zeta_\rho^h) \phi(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) J(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) - \frac{1}{\rho(\zeta_\rho^h)} \psi(\zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) \phi_0 J_0 \right) \cos(\alpha(\zeta_\alpha^t)) J_\rho(\bar{\rho}(\zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m)) J_\alpha^j J_\beta^l w_\rho^h w_\alpha^t w_\beta^m \right] +$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{n_\beta} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{m=1}^{\bar{n}_\beta} \sum_{t=1}^{\bar{n}_\alpha} \psi(\zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) \phi_0 J_0 \ln|\bar{\rho}(\zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) A(\zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m)| \cos(\alpha(\zeta_\alpha^t)) J_\alpha^j J_\beta^l w_\alpha^t w_\beta^m \quad (\text{D.27b})$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLEN, HG (1969). *Analysis and design of structural sandwich panels*, Pergamon Press Oxford.
- ALIABADI, M.H.; HALL, W.S.; PHEMISTER, T.G. (1985). Taylor expansions for singular kernels in the boundary element method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v. 21, p. 2221-2236.
- ARGYRIS, J.H.; DOLTSINIS, J.ST.; WILLAM, K.J. (1979). New developments in the inelastic analysis of quasistatic and dynamic problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.14, pp.1813-1850.
- ARGYRIS, J.H.; KELSET, S. (1960) *Energy theorems and structural analysis*. London, Butterworths.
- ATLURI, S.N.; GRANNELL, J.J. (1978). Boundary element methods (BEM) and combination of BEM-FEM. Atlanta, Center for the Advancement of Computational Mechanics, Georgia Institute of Technology. (Report n. GIT-ESM-SA-78-16)
- BATHE, K.J. (1996) *Finite element procedure*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, USA.
- BATOZ, J.L.; BATHE, K.J.; HO, L.W. (1980). A study of three-node triangular plate bending elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v.15, p.1771-1812.

- BEER, G.; WATSON, J. O. (1992). *Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers*. John Wiley & Sons, New York.
- BERGAN, P.G.; FELIPPA, C.A. (1985). A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Comp. Meths. in Appl. Mech. Eng.*, v.50, p.25-69.
- BONNET, M.; MUKHERJEE, S. (1996). Implicit BEM formulations for usual and sensitivity problems in elastoplasticity using the consistent tangent operator concept. *Int. J. Solids Structures*, v.33, n.30, p.4461-4480.
- BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. (1992). *Boundary elements: an introductory course*. 2.ed. McGraw-Hill Book Company, Great Britain.
- BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C. (1984). *Boundary element techniques: Theory and applications in engineering*. Springer-Verlag, Berlin.
- BUI, H.D. (1978). Some remarks about the formulation three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations, *Int. J. Solids Structures*, v.14, p.935-939.
- CHEN, W.H.; CHANG, C.M.; YEH, J.T. (1993). An incremental relaxation finite element analysis of viscoelastic problems with contact and friction. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng*, v.109, p.315-319.
- CARRER, J.A.M.; TELLES, J.C.F. (1991). *Transient dynamic elastoplastic analysis by the boundary element method*. In: *Boundary Element Technology VI, Proceedings*, Ed. C.A. Brebbia. CMP, UK, p.265-277.
- CISILINO, A.P. (1997). *Boundary element formulations for 3D analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear fracture mechanics*. UK, 234p. Thesis (Doctor of Philosophy) – Wessex Institute of Technology, University of Wales.
- CLOUGH, R.W. (1960) *The finite element in plane stress analysis*. In: *Asce conf. on electronic comp.*, 2nd, Pittsburg.

- CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. (1975). *Dynamics of structures*. McGraw-Hill.
- CODA, H.B. (1993). *Análise tridimensional transiente de estruturas pela combinação do entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos*. São Carlos. 202p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. (1995). Three dimensional transient BEM analysis. *Computer of Structures*, v. 56, n. 5, p.751-768, Pergamon.
- CODA, H.B.; VENTURINI, W.C.; ALIABADI M.H. (1996). *A simple coupling of 2D BEM and FEM bar model applied to mass matrix elastodynamic analysis*. In: Boundary Elements XVIII, Proceedings, Eds Brebbia e al., CMP, UK, p.363-372.
- CODA, H.B.; VENTURINI, W.C.; ALIABADI M.H. (1997). *Consideração do amortecimento viscoso na análise dinâmica através da combinação entre o MEC e o MEF*. XVIII Iberian Latin-American Congresso on Computational Methods in Engineering - XVIII CILAMCE, Brasília, v.2, p.750-766.
- CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. (1998). *Boundary Element Dynamic non-linear Stress Analysis by Mass Matrix Approach*, In: Boundary Elements XX, Computational Mechanics Publications, Southampton, p. 607-616.
- CODA, H.B. (2000). *Contribuição à análise dinâmica transiente de meios contínuos pelo método dos elementos de contorno*. São Carlos. 381p. Tese (Livre-Docência) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CRISFIELD, M.A. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. v.1, England, John Wiley & Sons.
- CRUSE, T.A.; POLCH; E.Z. (1986). Application of an elastoplastic boundary-element method to some fracture-mechanics problems. *Eng. Fracture Mech.*, v. 23, p. 1085-1096.

- ERINGEN, A.C.; SUHUBI, E.S. (1974) *Elastodynamics: finite motions*. New York/London, Academic Press, v.1 and v.2.
- FEENSTRA, P.H.; BORST, R. de (1996). A composite plasticity model for concrete. *Int. J. Solids Structures*, v.33, pp. 707-703.
- FREDHOLM, I. (1903). Sur une classe d'equations fonctionelles. *Acta Math.*, v.27, p.365-390.
- GOMES, R.A. (1999). *Análise da interação maciço-suporte de túneis considerando o comportamento dependente do tempo*. São Carlos. 100p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- GUIGGIANI, M.; KRISHNASAMY, G.; RIZZO, F.J.; RUDOLPHI, T.J. (1991). Hypersingular boundary integral equations. A new approach to their numerical treatment. In: MORINO, L.; PIVA, R. *Boundary integral methods, theory and applications..* Springer-Verlag, Berlin, p. 211-220.
- GUIGGIANI, M.; KRISHNASAMY, G.; RIZZO, F.J.; RUDOLPHI, T.J. (1992). A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *ASME J. Appl. Mech.*, 59, p. 604-614.
- GUIGGIANI, M.(1994). Hypersingular formulation for boundary stresses evaluation. *Engng. Analysis Boundary Element*. 13, p. 169-179.
- HARRISON, P.; MUKHERJEE, S.; BONNET, M. (1998). Numerical implementation of a CTO-based implicit approach for the BEM solution of usual and sensitivity problems in elasto-plasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.22, p. 257-269.
- KOTONI, D.P.N.; BESKOS, D.E. (1992). *The dual reciprocity boundary element method for the transient dynamic analysis of elastoplastic problems*. In: Boundary Element Technology VII, Proceedings, Ed. C.A. Brebbia. CMP, UK, and Elsevier, UK, p.259-272.

- KOTONI, D.P.N.; BESKOS, D.E. (1993). Transient dynamic elastoplastic analysis by the dual reciprocity BEM. *Eng. Anal. Boundary Elem.*, v.12, p.1-16.
- LEITÃO, V.; ALIABADI, M.H.; ROOKE, D.P. (1995). The dual boundary element formulation for elastoplastic fracture mechanics. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v. 38, p. 315-333.
- LEMAITRE, J. and CHABOCHE, J.L. (1990). *Mechanics of Solids*, Cambridge University Press.
- LOURENÇO, P.B. (1996). *Computational strategies for masonry structures*. Delft University Press, Netherlands.
- LOVE, A.E.H. (1944) *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. 4.ed. New York, Dover.
- MANSUR, W.J.; BREBBIA, C.A. (1985). Transient elastodynamics. In: BREBBIA, C.A., ed. *Topics in Boundary Element Research – 2*. Berlin, Springer-Verlag, p.124-155.
- MENDELSON, A. (1973). *Boundary integral methods in elasticity and plasticity*, Report No. NASA TN D-7418, NASA.
- MERAGHNI, F.; DESRUMAUX, F; BENZEGGAGH, M.L. (1999). Mechanical behaviour of cellular core for structural sandwich panels, *Composites, Part A* 30, pp.767-779.
- MESQUITA, A.D. (1998). *Uma formulação do método dos elementos finitos aplicada à análise elastoplástica de cascas*. São Carlos. 144p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MESQUITA, A.D.; CODA, H.B.; VENTURINI, W.S.(1999). Modelo viscoso transiente para análise de retirada de material e inclusão de reforço via MEC/MEF [CD-ROM]. In: PIMENTA, P.M.; BRASIL, R.M.L.R.F.; ALMEIDA NETO, E.S., eds. *Computational methods in engineering'99* (IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 20./BRAZILIAN CONGRESS

ON COMPUTATIONAL MECHANICS, 1., São Paulo, 3-5 Nov. 1999). São Paulo, EPUSP, 11p.

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. (2000). O acoplamento entre o MEC e o MEF aplicado à análise viscoelástica de materiais compostos [CD-ROM]. In: VAZ, L.E., ed. *Computational methods in engineering'2000* (21st IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (CILAMCE 2000), Rio de Janeiro, December 6-8, 2000. Rio de Janeiro, PUC-Rio, 18p.

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. (2001). Alternative time marching process for BEM and FEM viscoelastic analyses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.51, p.1157-1173.

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. (2001a) An Alternative time integration procedure for Boltzmann viscoelasticity: A BEM approach. *Computers & Structures*, v.79/16, p.1487-1496.

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. (2001b). A FEM viscoelastic analysis of plates and shells: A new methodology and the Boltzmann model. *Computers & Structures*. (Submitted)

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. (2002a) Alternative Kelvin viscoelastic procedure for finite elements. *Applied Mathematical Modelling*, v.26, n.4, p.501-516.

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. (2002b) Alternative non-associative return mapping methodology with BEM applications. *International Journal of Solids and Structures*, (Submitted)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. (2002c) Boundary integral equations for general viscoelastic analysis. *International Journal of Solids and Structures*, v.39, n.9, p.2643-2664.

MIKHLIN, S.G. (1962). Singular integral equations. *Amer. Math. Soc. Trans. Series 1*, v.10, p.84-197.

- MI, Y. (1995). Three dimensional dual boundary element analysis of crack growth. UK. p.227. PhD Thesis, Wessex Institute of Technology, University of Portsmouth.
- MI, Y.; ALIABADI, M.H. (1992). Dual boundary element method for three dimensional fracture analysis. *Engng. Analysis with Boundary Elements*. v.10, p. 161-171.
- MLEJNEK, H.P.; ARGYRIS, J.F.R.S. (1991). *Dynamics of structures*. In: Texts on computational mechanics, ed. Argyris, J.F.R.S.
- MUNAIAR NETO, J. (1998) *Um estudo da formulação de modelos constitutivos viscoelásticos e elasto-viscoplásticos e do emprego de algoritmos implícitos para a sua integração numérica*. São Carlos. 214p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- ORTIZ, M. e POPOV, E.P. (1985). Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 21, pp. 1561-1576.
- OWEN, D.R.J.; DAMJANIC, F. (1982). Viscoplastic analysis of solids, stability considerations. In: *Recent Advances in non-linear computational mechanics*, Pineridge Press, Uk.
- PERZYNA, P. (1966). Fundamental problems in viscoplasticity. *Adv. Appl. Mech.*, v.9, p.243-377.
- POON, H.; MUKHERJEE, S.; BONNET, M.(1998). Numerical implementation of a CTO-based implicit approach for the BEM solution of usual and sensitivity problems in elastoplasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.22, p. 257-269.
- PRAMONO, E. e WILLAM, K.J. (1989). Implicit integration of composite yield surfaces with corners. *Engng. Comput.*, v.7, pp. 186-197.
- RAPP, P.; KURZYKA, J.; SZOSTAK, W. (1999). *The creep and relaxation in sandwich panels with the viscoelastic cores*. In: Mäkeläinen, P. and Hassinen, P. *Light-weight Steel and Aluminium Structures*. Elsevier Science.

- RICCARDELLA, P.C. (1973). *A implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity*, SM-73-10, Dept. Mech. Engng., Carnegie Mellon University, Pittsburg.
- RICHARDSON, J.D.(1998). *Weakly singular BEM for fracture modelling*. PhD Thesis, Vanderbilt University.
- SCHWARTZ, C.W.; EINSTEIN, H.H. (1980). Improved design of tunnel supports: simplified analysis of ground-structure interaction in tunnelling. v.1, Massachusetts Institute of Technology, Boston, 427p. (Report N^o UMTA-MA-06-01000-80-40)
- SIMO, J.C.; HUGHES, T.J.R. (1988). *Elastoplasticity and viscoplasticity: computational aspects*, to be published.
- SIMO, J.C., KENNEDY, J.G. e GOVINDJEE, S. (1988) “Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms”. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 26, pp. 2161-2185.
- SIMO, J.C.; TAYLOR, R.L. (1985). Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, n.48, p.101-118.
- SIMO, J.C.; TAYLOR, R.L. (1986). A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v.22, p.649-670.
- SINGH, R.B.; SHARMA, K.G.; VARADARAJAN, A. (1988). Elasto-plastic analysis of tunnel excavation in layered rock medium by coupled FEBEM. *Numerical Methods in Geomechanics*. Balkema, p. 941-950.
- SOBOTKA, Z. (1984). *Rheology of materials and engineering structures*. Elsevier Science Publishers, Prague, Czechoslovakia.
- SOUTHWELL, R.V. (1946). *Relaxation methods in theoretical physics*. London, Oxford University Press.

- STAMOS, A.A.; BESKOS, D.E. (1995). Dynamic analysis of large 3D underground structures by the BEM. *Earthquake engineering and structural dynamics*, v24, p.917-934.
- SWOBODA, G.; MERTZ, W.; BEER, G. (1987). Rheological analysis of tunnel excavation by means of coupled finite element (FEM)-boundary element (BEM) analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. John Wiley & Sons, v.11, p.115-129.
- TELLES, J.C.F. & BREBBIA, C.A. (1980). On the application of the boundary element method to plasticity. *Appl. Math. Modelling*, 3: 466-470.
- TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A. (1982). Elastic/viscoplastic problems using boundary elements. *Int. J. Mech. Sci.*, v.4, n.10, p.605-618.
- TELLES J.F.C. & CARRER J.A.M. (1991). Implicit procedures for the solution of elastoplastic problems by the Boundary Element Method. *Mathematical Computational modelling*, **15**, 303-311
- TELLES J.C.F & CARRER J.A.M. (1994). Static and transient dynamic nonlinear stress analysis by the boundary element method with implicit techniques, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **14**, 65-74.
- TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. (1970) *Theory of elasticity*. Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha.
- TURNER, M.J. *et al.* (1956) Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aero. Sci.*, v.23, p.805-823.
- VENTURINI, W.S. (1982). *Application of the boundary element formulation to solve geomechanical problems*. Southampton. 272p. Thesis of Doctor – University of Southampton.

- VENTURINI, W.S. (1988). *Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia*. São Carlos. 349p. Tese (Livre-Docência) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- WARBURTON, G.B. (1976). *The dynamical behaviour of structures*. 2^a ed., Oxford, Pergamon Press.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; CORMEAU, I.C. (1974). Visco-plasticity-plasticity and creep in elastic solids-a unified numerical solution approach. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 8, pp. 821-845.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; KELLY, D.W.; BETTESS, P. (1977). The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.11, p.355-375.

*Aos meus pais,
que tanto amo, Nivaldo e Solange*

*“Quem entre vós é sábio e entendido?
Mostre em mansidão de sabedoria, mediante
condigno proceder, as suas obras.*

*A sabedoria, porém, lá do alto, é
primeiramente pura; depois pacífica,
indulgente, tratável, plena de misericórdia e de
bons frutos, imparcial, sem fingimento.”*

Tg 3. 13,17

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Humberto Breves Coda, pelo cuidadoso trabalho de orientação, incentivo e especialmente pela amizade demonstrada durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Professor Paulo Lourenço da Universidade do Minho pelas valiosas discussões a respeito de modelos não-lineares e sobretudo pela amizade e agradável convivência em Portugal.

Ao Professor Wilson Sérgio Venturini, pela cooperação e apoio, demonstrando sempre disposição para ajudar e esclarecer dúvidas a cerca deste trabalho.

Aos meus pais Nivaldo e Solange, meus irmãos André e Alexandre e minha querida avó Ofélia. Família que Deus me presenteou e que sempre me apoiou em todos os momentos de minha vida.

À minha pequena Vinie, pelo seu grande amor, seu companherismo e por proporcionar-me uma agradável convivência, sempre incentivando-me na realização deste trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, pela bolsa de estudo concedida.

A todos os amigos do Departamento de Engenharia de Estruturas - EESC/USP pelo gratificante convívio e amizade.

Acima de tudo, a DEUS, companheiro fiel, presente em todos os momentos difíceis da minha vida.

SUMÁRIO

| | |
|---|-----|
| LISTA DE FIGURAS..... | i |
| LISTA DE TABELAS..... | vi |
| LISTA DE SÍMBOLOS..... | vii |
| RESUMO..... | x |
| <i>ABSTRACT</i> | xi |
| | |
| CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO | |
| 1.1 Generalidades..... | 1 |
| 1.2 Objetivo..... | 6 |
| 1.3 Organização do trabalho..... | 6 |
| 1.4 Observações finais..... | 8 |
| | |
| CAPÍTULO 2 – MODELOS REOLÓGICOS | |
| 2.1 Introdução..... | 11 |
| 2.2 Modelos básicos..... | 12 |
| 2.3 Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt..... | 13 |
| 2.4 Modelo viscoelástico de Boltzmann..... | 15 |
| 2.5 Modelo elastoplástico..... | 18 |
| 2.6 Modelo viscoplástico (sem comportamento instantâneo)..... | 19 |
| 2.7 Modelo viscoplástico (com comportamento instantâneo)..... | 21 |
| | |
| CAPÍTULO 3 – FORMULAÇÕES ELASTODINÂMICAS DO MEF E MEC | |
| 3.1 Introdução..... | 24 |
| 3.2 Método dos elementos finitos..... | 25 |
| 3.2.1 Tratamento algébrico para a representação integral..... | 27 |
| 3.3 Método dos elementos de contorno..... | 29 |
| 3.3.1 Representação integral para tensões em pontos internos..... | 32 |
| 3.3.2 Obtenção das tensões no contorno..... | 34 |
| 3.3.3 Tratamento algébrico para as representações integrais..... | 36 |

CAPÍTULO 4 – FORMULAÇÕES VISCOELÁSTICAS DO MEF

| | |
|---|----|
| 4.1 Introdução..... | 38 |
| 4.2 Formulação viscoelastodinâmica (Kelvin-Voigt)..... | 40 |
| 4.2.1 Tratamento algébrico para a representação integral..... | 40 |
| 4.2.2 Integração temporal numérica..... | 42 |
| 4.2.3 Exemplos numéricos..... | 43 |
| 4.2.3.1 Exemplo 01: Peça tracionada..... | 44 |
| 4.2.3.2 Exemplo 02: Placa circular engastada..... | 46 |
| 4.2.3.3 Exemplo 03: Casca cilíndrica sob pressão interna..... | 47 |
| 4.2.3.4 Exemplo 04: Cilindro com paredes rígidas..... | 49 |
| 4.3 Formulação viscoelástica (Boltzmann)..... | 50 |
| 4.3.1 Tratamento algébrico para a representação integral..... | 51 |
| 4.3.2 Integração temporal numérica..... | 53 |
| 4.3.3 Exemplos numéricos..... | 56 |
| 4.3.3.1 Exemplo 01: Peça tracionada..... | 56 |
| 4.3.3.2 Exemplo 02: Placa circular engastada..... | 59 |
| 4.3.3.3 Exemplo 03: Casca cilíndrica sob pressão interna..... | 60 |

CAPÍTULO 5 - FORMULAÇÕES VISCOELÁSTICAS DO MEC

| | |
|---|----|
| 5.1 Introdução..... | 62 |
| 5.2 Formulação viscoelastodinâmica - representação de domínio (Kelvin)..... | 63 |
| 5.2.1 Representação integral para tensões em pontos internos..... | 64 |
| 5.2.2 Tratamento algébrico para as representações integrais..... | 66 |
| 5.2.3 Integração temporal numérica..... | 68 |
| 5.2.4 Exemplos numéricos..... | 69 |
| 5.2.4.1 Exemplo 01: Peça tracionada..... | 69 |
| 5.2.4.2 Exemplo 02: Cilindro sob pressão interna..... | 72 |
| 5.3 Formulação viscoelástica - representação de domínio (Boltzmann)..... | 74 |
| 5.3.1 Representação integral para tensões em pontos internos..... | 76 |
| 5.3.2 Tratamento algébrico para as representações integrais..... | 78 |
| 5.3.3 Integração temporal numérica..... | 80 |
| 5.3.4 Exemplos numéricos..... | 82 |
| 5.3.4.1 Exemplo 01: Peça tracionada..... | 82 |
| 5.3.4.2 Exemplo 02: Cilindro sob pressão interna..... | 85 |
| 5.4 Formulação viscoelástica - representação no contorno (Kelvin)..... | 87 |

| | |
|---|-----|
| 5.4.1 Representação integral para tensões em pontos internos..... | 89 |
| 5.4.2 Obtenção das tensões totais no contorno..... | 91 |
| 5.4.3 Tratamento algébrico para as representações integrais..... | 93 |
| 5.4.4 Integração temporal numérica..... | 95 |
| 5.4.5 Exemplos numéricos..... | 96 |
| 5.4.5.1 Exemplo 01: Peça tracionada..... | 97 |
| 5.4.5.2 Exemplo 02: Cilindro sob pressão interna..... | 99 |
| 5.4.5.3 Exemplo 03: Peça tracionada 3D..... | 100 |
| 5.5 Formulação viscoelástica - representação no contorno (Boltzmann)..... | 102 |
| 5.5.1 Representação integral para tensões em pontos internos..... | 104 |
| 5.5.2 Obtenção das tensões totais no contorno..... | 105 |
| 5.5.3 Tratamento algébrico para as representações integrais..... | 107 |
| 5.5.4 Integração temporal numérica..... | 109 |
| 5.5.5 Exemplos numéricos..... | 111 |
| 5.5.5.1 Exemplo 01: Peça tracionada..... | 111 |
| 5.5.5.2 Exemplo 02: Cilindro sob pressão interna..... | 112 |
| 5.5.5.3 Exemplo 03: Túnel submetido a uma pressão interna..... | 113 |
| 5.5.5.4 Exemplo 04: Peça tracionada 3D..... | 114 |
| 5.5.5.5 Exemplo 05: Buraco esférico no meio infinito..... | 115 |

CAPÍTULO 6 – FORMULAÇÃO ELASTOPLÁSTICA DO MEC

| | |
|---|-----|
| 6.1 Introdução..... | 118 |
| 6.2 Formulação elastoplástica..... | 119 |
| 6.2.1 Representação integral para tensões em pontos internos..... | 121 |
| 6.2.2 Obtenção das tensões no contorno..... | 122 |
| 6.2.3 Tratamento algébrico para as representações integrais..... | 124 |
| 6.2.4 Procedimento não-linear..... | 125 |
| 6.2.5 Exemplos numéricos..... | 128 |
| 6.2.5.1 Exemplo 01: Peça tracionada 3D..... | 128 |
| 6.2.5.2 Exemplo 02: Cilindro 3D submetido à pressão interna. | 131 |

CAPÍTULO 7 – ALGORITMOS IMPLÍCITOS PARA ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES

| | |
|---|-----|
| 7.1 Introdução..... | 133 |
| 7.2 Relações constitutivas (plasticidade) | 134 |

| | |
|--|-----|
| 7.3 Aspectos do algoritmo..... | 136 |
| 7.4 Algoritmo 1: von Mises associativo..... | 138 |
| 7.5 Algoritmo 2: Drucker-Prager associativo..... | 146 |
| 7.6 Resultados numéricos..... | 156 |
| 7.7 Algoritmo 3: von Mises não-associativo..... | 158 |
| 7.8 Algoritmo 4: Drucker-Prager não-associativo..... | 166 |
| 7.9 Exemplos numéricos..... | 168 |
| 7.9.1 Exemplo 01: Peça tracionada 3D..... | 169 |
| 7.9.2 Exemplo 02: Bloco 3D confinado..... | 174 |
| 7.9.3 Exemplo 03: Cilindro 3D submetido à pressão interna..... | 176 |

CAPÍTULO 8 - FORMULAÇÕES VISCOPLÁSTICAS DO MEC

| | |
|---|-----|
| 8.1 Introdução..... | 178 |
| 8.2 Formulação viscoplástica (sem comportamento instantâneo)..... | 179 |
| 8.2.1 Representação integral para tensões em pontos internos..... | 181 |
| 8.2.2 Obtenção das tensões totais no contorno..... | 183 |
| 8.2.3 Tratamento algébrico para as representações integrais..... | 185 |
| 8.2.4 Integração temporal numérica..... | 186 |
| 8.2.5 Procedimento não-linear..... | 188 |
| 8.2.6 Exemplo numérico..... | 190 |
| 8.3 Formulação viscoplástica (com comportamento instantâneo)..... | 194 |
| 8.3.1 Representação integral para tensões em pontos internos..... | 196 |
| 8.3.2 Obtenção das tensões totais no contorno..... | 198 |
| 8.3.3 Tratamento algébrico para as representações integrais..... | 200 |
| 8.3.4 Integração temporal numérica..... | 201 |
| 8.3.5 Exemplo numérico..... | 203 |

CAPÍTULO 9 – ACOPLAMENTO MEC/MEF

| | |
|---|-----|
| 9.1 Introdução..... | 206 |
| 9.2 Técnicas de acoplamento..... | 207 |
| 9.3 Acoplamento para o reforço..... | 213 |
| 9.4 Procedimento com acoplamento progressivo..... | 215 |
| 9.5 Exemplos numéricos..... | 218 |
| 9.5.1 Exemplo 01: Peça tracionada 3D..... | 219 |
| 9.5.2 Exemplo 02: Tubo de concreto armado 2D..... | 220 |

| | |
|---|-----|
| 9.5.3 Exemplo 03: Túnel reforçado 2D..... | 221 |
| 9.5.4 Exemplo 04: Pórtico 2D sobre solos diferentes..... | 222 |
| 9.5.5 Exemplo 05: Painel sanduíche..... | 224 |
| 9.5.6 Exemplo 06: Ruptura dinâmica de uma peça tracionada 2D..... | 227 |
| 9.5.7 Exemplo 07: Ruptura de uma peça tracionada 3D..... | 229 |
| 9.5.8 Exemplo 08: Reforço progressivo de túnel 2D..... | 231 |
| 9.5.9 Exemplo 09: Reforço de uma viga..... | 232 |
| 9.5.10 Exemplo 10: Bloco 3D submetido ao peso próprio..... | 234 |
| 9.5.11 Exemplo 11: Reforço progressivo de um buraco esférico..... | 236 |
| 9.5.12 Exemplo 12: Bloco 3D elastoplástico submetido ao peso próprio..... | 238 |
| | |
| CAPÍTULO 10 - CONCLUSÕES..... | 241 |
| | |
| ANEXO A - INTEGRAIS DE CONTORNO DAS FORÇAS VOLUMÉTRICAS | |
| A.1 Introdução..... | 247 |
| A.2 Representação em deslocamento..... | 247 |
| A.3 Representação em deformação e tensão..... | 250 |
| | |
| ANEXO B - DERIVADAS DE INTEGRAIS DE DOMÍNIO SINGULARES | |
| B.1 Introdução..... | 253 |
| B.2 Estudo da diferenciação das integrais singulares..... | 254 |
| B.3 Desenvolvendo as integrais Iu | 257 |
| B.4 Desenvolvendo as integrais $I\varepsilon$ | 259 |
| | |
| ANEXO C – DEDUÇÃO DA FÓRMULA DE “LEIBNITZ” | |
| C.1 Formula de “Leibnitz”..... | 264 |
| | |
| ANEXO D - TRATAMENTO DAS INTEGRAIS | |
| D.1 Introdução..... | 266 |
| D.2 Técnica para integrais quasi-singulares..... | 267 |
| D.3 Técnica para integrais com singularidade fraca..... | 272 |
| D.4 Técnica para integrais com singularidade forte..... | 274 |
| | |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS..... | 282 |

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-------------|---|----|
| FIGURA 2.1 | - Representação reológica uniaxial: (a) elástico; (b) viscoso; (c) plástico..... | 12 |
| FIGURA 2.2 | - Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt (representação uniaxial)..... | 13 |
| FIGURA 2.3 | - Modelo viscoelástico de Boltzmann (representação uniaxial)..... | 16 |
| FIGURA 2.4 | - Modelo elastoplástico (representação uniaxial)..... | 18 |
| FIGURA 2.5 | - Modelo viscoplástico (representação uniaxial)..... | 19 |
| FIGURA 2.6 | - Modelo viscoplástico (representação uniaxial)..... | 21 |
| FIGURA 3.1 | - Discretização do Problema..... | 27 |
| FIGURA 3.2 | - Sistema cartesiano local de coordenadas..... | 34 |
| FIGURA 3.3 | - Discretização do problema..... | 36 |
| FIGURA 4.1 | - Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura..... | 44 |
| FIGURA 4.2 | - Deslocamento longitudinal do ponto A..... | 44 |
| FIGURA 4.3 | - Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B..... | 45 |
| FIGURA 4.4 | - Deslocamento longitudinal do ponto A..... | 45 |
| FIGURA 4.5 | - Deslocamento longitudinal do ponto A..... | 46 |
| FIGURA 4.6 | - Discretização, deformada, geometria e propriedades físicas da estrutura..... | 46 |
| FIGURA 4.7 | - Deslocamento transversal do centro da placa..... | 47 |
| FIGURA 4.8 | - Discretização, geometria e propriedades físicas da estrutura..... | 48 |
| FIGURA 4.9 | - Deslocamento radial do ponto A..... | 48 |
| FIGURA 4.10 | - Discretização, deformada (ampliada), geometria e propriedades físicas..... | 49 |
| FIGURA 4.11 | - Deslocamento do ponto A..... | 49 |
| FIGURA 4.12 | - Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura..... | 57 |
| FIGURA 4.13 | - Deslocamento longitudinal do ponto A..... | 57 |

| | | |
|-------------|--|----|
| FIGURA 4.14 | - Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B | 58 |
| FIGURA 4.15 | - Deslocamento longitudinal do ponto A | 58 |
| FIGURA 4.16 | - Deslocamento longitudinal do ponto A | 59 |
| FIGURA 4.17 | - Discretização, forma deformada, geometria e propriedades físicas da estrutura..... | 59 |
| FIGURA 4.18 | - Deslocamento transversal do centro da placa..... | 60 |
| FIGURA 4.19 | - Discretização, geometria e propriedades físicas da estrutura..... | 60 |
| FIGURA 4.20 | - Deslocamento radial do ponto A | 61 |
| FIGURA 5.1 | - Discretização da estrutura..... | 70 |
| FIGURA 5.2 | - Deslocamento longitudinal do ponto A | 70 |
| FIGURA 5.3 | - Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B | 71 |
| FIGURA 5.4 | - Deslocamento vertical do ponto A para diversos Δt | 71 |
| FIGURA 5.5 | - Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura..... | 72 |
| FIGURA 5.6 | - Deslocamento radial da parede interna..... | 72 |
| FIGURA 5.7 | - Deslocamento radial da parede externa..... | 73 |
| FIGURA 5.8 | - Deslocamento radial da parede interna para diversos Δt | 73 |
| FIGURA 5.9 | - Deslocamento radial da parede externa para diversos Δt | 74 |
| FIGURA 5.10 | - Deslocamento longitudinal do ponto A | 82 |
| FIGURA 5.11 | - Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B | 83 |
| FIGURA 5.12 | - Deslocamento do ponto A com variação da solicitação..... | 83 |
| FIGURA 5.13 | - Deslocamento longitudinal do ponto A | 84 |
| FIGURA 5.14 | - Deslocamento do ponto A para vários Δt | 84 |
| FIGURA 5.15 | - Deslocamento radial da parede interna..... | 85 |
| FIGURA 5.16 | - Deslocamento radial da parede externa..... | 86 |
| FIGURA 5.17 | - Deslocamento radial da parede interna para vários Δt | 86 |
| FIGURA 5.18 | - Deslocamento radial da parede externa para vários Δt | 87 |
| FIGURA 5.19 | - Discretização do problema..... | 93 |
| FIGURA 5.20 | - Geometria e discretização..... | 97 |
| FIGURA 5.21 | - Deslocamento longitudinal do ponto A | 97 |
| FIGURA 5.22 | - Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B | 98 |
| FIGURA 5.23 | - Deslocamento longitudinal do ponto A para vários Δt | 98 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| FIGURA 5.24 | - Geometria e discretização da estrutura..... | 99 |
| FIGURA 5.25 | - Deslocamento radial da parede interna para diversos Δt | 99 |
| FIGURA 5.26 | - Deslocamento radial da parede externa para diversos Δt | 100 |
| FIGURA 5.27 | - Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura..... | 100 |
| FIGURA 5.28 | - Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada..... | 101 |
| FIGURA 5.29 | - Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do centróide do corpo | 101 |
| FIGURA 5.30 | - Deslocamento longitudinal do ponto A para vários Δt | 111 |
| FIGURA 5.31 | - Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B..... | 112 |
| FIGURA 5.32 | - Deslocamento longitudinal do ponto A para uma carga removida em $t=200$ dias..... | 112 |
| FIGURA 5.33 | - Deslocamento radial da parede interna para diversos Δt | 113 |
| FIGURA 5.34 | - Deslocamento radial da parede externa para diversos Δt | 113 |
| FIGURA 5.35 | - Geometria, discretização e propriedades físicas..... | 114 |
| FIGURA 5.36 | - Deslocamento radial do túnel..... | 114 |
| FIGURA 5.37 | - Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada..... | 115 |
| FIGURA 5.38 | - Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do centróide do corpo | 115 |
| FIGURA 5.39 | - Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura..... | 116 |
| FIGURA 5.40 | - Deslocamento radial para $t=30s$ | 116 |
| FIGURA 5.41 | - Tensão radial σ_r e tangencial σ_θ para $t=30s$ | 117 |
| FIGURA 6.1 | - Discretização do problema..... | 124 |
| FIGURA 6.2 | - Estratégia de solução incremental-iterativa (caso unidimensional).. | 128 |
| FIGURA 6.3 | - Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura..... | 129 |
| FIGURA 6.4 | - Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada..... | 129 |
| FIGURA 6.5 | - Tensão σ_{zz} do ponto localizado no centróide do corpo..... | 130 |
| FIGURA 6.6 | - Diagrama <i>reação x deslocamento</i> | 130 |
| FIGURA 6.7 | - Diagrama <i>reação x deslocamento</i> | 131 |
| FIGURA 6.8 | - Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura..... | 131 |
| FIGURA 6.9 | - Deslocamento radial da parede externa..... | 132 |

| | | |
|--------------|--|-----|
| FIGURA 6.10 | - Tensões σ_r , σ_θ e σ_z ao longo da espessura..... | 132 |
| FIGURA 7.1 | - Lei de encruamento..... | 140 |
| FIGURA 7.2 | - Algoritmo de integração implícito para o critério de von Mises 3D | 145 |
| FIGURA 7.3 | - Algoritmo de integração implícito para o critério de Drucker-Prager 3D..... | 155 |
| FIGURA 7.4 | - Estado de deformação devido a um estado de tensão uniaxial..... | 160 |
| FIGURA 7.5 | - Correção do estado de tentativa..... | 162 |
| FIGURA 7.6a | - Algoritmo de integração implícito para o critério de von Mises 3D | 164 |
| FIGURA 7.6b | - Algoritmo generalizado não-associativo para o critério de von Mises 3D..... | 165 |
| FIGURA 7.7 | - Correção do estado de tentativa..... | 166 |
| FIGURA 7.8 | - Algoritmo de integração implícito para o critério de von Mises 3D | 168 |
| FIGURA 7.9 | - Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada..... | 169 |
| FIGURA 7.10 | - Tensão σ_{zz} do ponto localizado no centróide do corpo (critério de von Mises)..... | 170 |
| FIGURA 7.10a | - <i>Reação x deslocamento</i> com encruamento nulo (critério de von Mises)..... | 170 |
| FIGURA 7.10b | - <i>Reação x deslocamento</i> com encruamento negativo (critério de von Mises)..... | 171 |
| FIGURA 7.11 | - Tensão σ_{zz} do ponto localizado no centróide do corpo (critério de Drucker-Prager)..... | 171 |
| FIGURA 7.12 | - Variação volumétrica plástica ε_v^p | 172 |
| FIGURA 7.13 | - Elemento tracionado..... | 173 |
| FIGURA 7.14 | - Compressão de um bloco confinado..... | 174 |
| FIGURA 7.15 | - Deslocamento do ponto central da extremidade solicitada..... | 174 |
| FIGURA 7.16 | - Deslocamento do ponto central da extremidade solicitada..... | 175 |
| FIGURA 7.17 | - Deslocamento radial da parede externa (von Mises)..... | 176 |
| FIGURA 7.18 | - Tensões σ_r , σ_θ e σ_z ao longo da espessura (von Mises)..... | 177 |
| FIGURA 8.1 | - Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura..... | 190 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| FIGURA 8.2 | - Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada..... | 191 |
| FIGURA 8.3 | - Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada..... | 191 |
| FIGURA 8.4 | - Tensão elástica σ_{zz}^e , viscosa σ_{zz}^v e total σ_{zz} no centróide..... | 192 |
| FIGURA 8.5 | - Tensão elástica σ_{xx}^e , viscosa σ_{xx}^v e total σ_{xx} no centróide..... | 192 |
| FIGURA 8.6 | - Tensão elástica σ_{zz}^e , viscosa σ_{zz}^v e total σ_{zz} no centróide..... | 193 |
| FIGURA 8.7 | - Tensão elástica σ_{xx}^e , viscosa σ_{xx}^v e total σ_{xx} no centróide..... | 193 |
| FIGURA 8.8 | - Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada..... | 204 |
| FIGURA 8.9 | - Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada..... | 204 |
| FIGURA 9.1 | - Corpo discretizado com elementos de contorno e finitos..... | 211 |
| FIGURA 9.2 | - Etapas de um reforço estrutural..... | 213 |
| FIGURA 9.3 | - Geometria, discretização e propriedades físicas..... | 219 |
| FIGURA 9.4 | - Geometria, discretização e propriedades físicas..... | 220 |
| FIGURA 9.5 | - Deslocamento radial da parede interna do tubo..... | 220 |
| FIGURA 9.6 | - Deslocamento radial da parede externa do tubo..... | 221 |
| FIGURA 9.7 | - Geometria, discretização e propriedades físicas..... | 221 |
| FIGURA 9.8 | - Deslocamento radial do túnel..... | 222 |
| FIGURA 9.9 | - Geometria e discretização..... | 223 |
| FIGURA 9.10 | - Recalque das sapatas..... | 223 |
| FIGURA 9.11 | - Momento no ponto A..... | 224 |
| FIGURA 9.12 | - Painel Sanduíche..... | 225 |
| FIGURA 9.13 | - Deslocamento total do meio do vão..... | 226 |
| FIGURA 9.14 | - Deslocamento do trecho viscoso no meio do vão..... | 227 |
| FIGURA 9.15 | - Etapas e dados do problema..... | 228 |
| FIGURA 9.16 | - Deslocamento do ponto 'A'..... | 228 |
| FIGURA 9.17 | - Geometria, discretização e propriedades físicas..... | 229 |
| FIGURA 9.18 | - Deslocamento do nó central da interface de contato na região do MEC..... | 230 |

| | | |
|-------------|---|-----|
| FIGURA 9.19 | - Tensões no centróide da região do MEC..... | 230 |
| FIGURA 9.20 | - Reforço de uma cavidade cilíndrica..... | 231 |
| FIGURA 9.21 | - Deslocamento radial do túnel..... | 231 |
| FIGURA 9.22 | - Dados do problema e etapas do reforço..... | 232 |
| FIGURA 9.23 | - Deslocamento transversal do ponto <i>A</i> | 233 |
| FIGURA 9.24 | - Tensão σ_x no ponto <i>B</i> | 233 |
| FIGURA 9.25 | - Dados do problema..... | 234 |
| FIGURA 9.26 | - Deslocamento axial do nó central da face livre do bloco..... | 235 |
| FIGURA 9.27 | - Força de contato na interface de contato do bloco..... | 235 |
| FIGURA 9.28 | - Tensões no centróide do bloco..... | 236 |
| FIGURA 9.29 | - Dados do problema de reforço..... | 236 |
| FIGURA 9.30 | - Deslocamento radial da cavidade esférica..... | 237 |
| FIGURA 9.31 | - Tensões σ_r (total, elástica e viscosa)..... | 237 |
| FIGURA 9.32 | - Deslocamento axial do nó central da face livre do bloco..... | 238 |
| FIGURA 9.33 | - Força de contato na interface de contato do bloco..... | 239 |
| FIGURA 9.34 | - Tensões no centróide do bloco (von Mises)..... | 239 |
| FIGURA 9.35 | - Tensões no centróide do bloco (Drucker-Prager)..... | 240 |
| FIGURA A.1 | - Coordenadas polares nos casos 2D e 3D..... | 248 |
| FIGURA B.1 | - Domínio Ω decrescido de uma sub-região Ω_ϵ | 254 |
| FIGURA D.1 | - Sistemas de coordenadas..... | 268 |
| FIGURA D.2 | - Sub-elementos nas coordenadas polares..... | 269 |
| FIGURA D.3 | - Limite inicial e final da integração em ρ | 272 |
| FIGURA D.4 | - Ponto singular caracterizado no domínio real e adimensional..... | 274 |
| FIGURA D.5 | - Representação do integrando original e aproximado..... | 279 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|------------|--|-----|
| TABELA 7.1 | - Parâmetros da análise..... | 156 |
| TABELA 7.2 | - Multiplicador plástico para o critério von Mises..... | 156 |
| TABELA 7.3 | - Multiplicador plástico para o critério von Mises..... | 156 |
| TABELA 7.4 | - Multiplicador plástico para o critério Drucker-Prager..... | 157 |
| TABELA 7.5 | - Multiplicador plástico para o critério Drucker-Prager..... | 157 |
| TABELA 7.6 | - Retorno ao ápice do critério de Drucker-Prager..... | 158 |
| TABELA 9.1 | - Resultados do problema de acoplamento..... | 219 |
| TABELA 9.2 | - Propriedades físicas e geométricas..... | 222 |
| TABELA B.1 | - Relação entre $r_{,i}$ e os ângulos..... | 260 |

LISTA DE SÍMBOLOS

| | | |
|--|---|---|
| σ_{ij} | - | Componentes do tensor das tensões totais |
| $\sigma_{ij}^e, \sigma_{ij}^{el}$ | - | Tensões elásticas |
| σ_{ij}^v | - | Componente do tensor das tensões viscosas |
| σ_{ij}^{ve} | - | Componente do tensor das tensões viscoelásticas |
| $\dot{\sigma}_{ij}$ | - | Taxa de tensão total |
| $\dot{\sigma}_{ij}^p$ | - | Taxa de tensão inicial |
| $\Delta\sigma, \Delta\sigma^p$ | - | Incremento de tensão e tensão inicial |
| $\sigma_{ij}^p, \sigma_{ij}^{vp}$ | - | Tensões iniciais |
| σ_{ij}^{ep} | - | Tensões elastoplásticas |
| σ_{i+1}^{ten} | - | Tensões de tentativa |
| σ_o | - | Limite de plastificação inicial |
| $\varepsilon_{lm}, \delta\varepsilon_{lm}$ | - | Deformações reais e virtuais totais |
| ε_{ij}^e | - | Componente do tensor das deformações elásticas |
| ε_{ij}^v | - | Componente do tensor das deformações viscosas |
| ε_{lm}^{ve} | - | Componente do tensor das deformações viscoelásticas |
| $\dot{\varepsilon}_{lm}$ | - | Taxa de deformação total |
| $\dot{\varepsilon}_{lm}^e$ | - | Taxa de deformação elástica |
| $\dot{\varepsilon}_{lm}^{ve}$ | - | Taxa de deformação viscoelástica |
| $\dot{\varepsilon}_{lm}^p$ | - | Taxa de deformação plástica |
| ε_{ij}^p | - | Deformação plástica |
| ε_{ij}^{vp} | - | Deformações viscoplásticas |
| $\varepsilon^{eq}, \Delta\varepsilon^{eq}$ | - | Deformação plástica equivalente e seu respectivo incremento |

| | | |
|---|---|--|
| ε_{i+1}^{ten} | - | Deformação de tentativa |
| $\Delta\varepsilon, \Delta\varepsilon^p$ | - | Incremento de deformação total e plástica |
| $C_{ij}^{lm}, \tilde{C}_{ij}^{lm}, \hat{C}_{ij}^{lm}$ | - | Matrizes constitutivas elásticas dependentes de E , E_e e E_{ve} respectivamente |
| η_{ij}^{lm} | - | Matriz constitutiva viscosa |
| $\theta_\lambda, \theta_\mu, \gamma$ | - | Parâmetros representativos da viscosidade do material |
| λ, μ | - | Constantes de Lamé |
| $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ | - | Constantes de Lamé adimensionalizadas |
| E, G | - | Módulo de elasticidade longitudinal e transversal |
| E_e | - | Módulo de elasticidade do trecho instantâneo |
| E_{ve} | - | Módulo de elasticidade do trecho viscoelástico |
| ν | - | Coefficiente de Poisson |
| b_i, \dot{b}_i | - | Componente das forças volumétricas e sua respectiva velocidade |
| $b_i^\alpha, \dot{b}_i^\alpha$ | - | Vetor nodal das forças volumétricas e de sua respectiva velocidade |
| $u_i, \delta u_i$ | - | Componente de deslocamento real e virtual |
| $U_i^\alpha, \delta U_i^\alpha$ | - | Vetor dos deslocamentos reais e virtuais nodais |
| \dot{u}_i, \ddot{u}_i | - | Velocidade e aceleração |
| $\dot{U}_i^\alpha, \ddot{U}_i^\alpha$ | - | Vetor das velocidades e acelerações nodais |
| U_o^i | - | Vetor de deslocamento da interface em t_o |
| U_{est}^i, U_{ref}^i | - | Vetor de deslocamento da estrutura e do reforço na interface |
| p_i, \dot{p}_i | - | Componente das forças de superfície e sua respectiva velocidade |
| $P_i^\alpha, \dot{P}_i^\alpha$ | - | Vetor das forças de superfícies nodais e sua respectiva velocidade |
| P_{est}^i, P_{ref}^i | - | Vetor das forças de superfície da estrutura e do reforço na interface |
| $\Delta U, \Delta P, \Delta b$ | - | Incremento de deslocamento, força de superfície e volumétrica |
| ρ | - | Densidade mássica |
| n_i | - | Componente do versor normal ao contorno |
| n_{ij} | - | Componente do tensor unitário |
| Γ, Ω | - | Variáveis que definem o contorno e o domínio |
| $\phi^\alpha, \hat{\phi}^\alpha, \tilde{\phi}^\alpha$ | - | Funções de forma |
| $\phi_{,i}^\alpha, \tilde{\phi}_{,i}^\alpha$ | - | Derivada da função de forma segundo a direção i |

| | | |
|--|---|---|
| M, K, V, L, F | - | Matriz de rigidez, massa, viscosa, lumping e vetor de forças nodais |
| H, G, B | - | Matriz H, G e das forças volumétricas |
| u_{ij}^*, p_{ij}^* | - | Solução fundamental em deslocamento e força de superfície |
| $\varepsilon_{ijk}^*, \sigma_{ijk}^*$ | - | Solução fundamental em deformação e tensão |
| $B_{ij}^*, \bar{B}_{ijk}^*$ | - | Soluções fundamentais referentes às forças volumétricas |
| $\hat{\varepsilon}_{ijk}^*, \hat{p}_{ijk}^*, \bar{\sigma}_{ijk}^*,$ $\bar{p}_{ijk}^*, \hat{t}_{ijk}^*, \bar{t}_{ijk}^*$ | - | Outras soluções fundamentais |
| $g_{ijkl}, \hat{g}_{ijkl}, \bar{g}_{ijkl}$ | - | Termos livres |
| $r(p, s), R(p, s)$ | - | Distância entre os pontos p (fonte) e s |
| ρ | - | Raio adimensionalizado |
| $r_{,i}, R_{,i}$ | - | Derivada do raio em relação a direção i |
| $\delta(p, s)$ | - | Delta de Dirac |
| δ_{ij} | - | Delta de Kronecker |
| \bar{C}_{ij} | - | Termo da representação integral do MEC |
| t e Δt | - | Tempo e incremento de tempo |
| $\lambda, \Delta \lambda$ | - | Multiplicador plástico |
| f, g | - | Critério de plastificação e potencial plástico |
| W^p | - | Trabalho plástico por unidade de volume |
| κ | - | Parâmetro de encruamento |
| $\dot{\kappa}, \Delta \kappa$ | - | Taxa e incremento do parâmetro de encruamento |
| κ_{i+1}^{ten} | - | Parâmetro de encruamento de tentativa |
| c, ϕ | - | Coesão e ângulo de atrito do material |
| θ, φ | - | Ângulos referentes às coordenadas polares |
| α, β | - | Ângulos referentes às coordenadas polares adimensionalizadas |
| I_u, I_ε | - | Integrais singulares |
| ξ_1, ξ_2, ξ_3 | - | Coordenadas adimensionais |
| $w_\rho^h, w_\alpha^l, w_\beta^m$ | - | Pesos ponderadores da integração numérica |
| J | - | Determinante da matriz jacobiana |

RESUMO

MESQUITA, A.D. (2002). *Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com acoplamento progressivo MEC/MEF*. São Carlos. 291p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Novas formulações, técnicas e procedimentos são propostos para o tratamento de problemas inelásticos considerando-se acoplamento progressivo. O procedimento apresenta-se bastante adequado para a consideração de problemas de interação bi e tridimensionais que envolvam modificações na geometria e variações das condições de contorno ao longo do tempo. Este permite a inclusão e retirada de sub-regiões e a consideração de hipóteses especiais para o reforço, de maneira que o mesmo contribua adequadamente para o enrijecimento da estrutura. As formulações viscoelásticas e viscoplásticas são baseadas em uma nova metodologia e proporcionam com simplicidade e elegância resultados estáveis e bastante precisos. As representações viscosas para elementos de contorno são obtidas de duas formas, com o termo viscoso obtido através de integrais de domínio e de contorno. Esta última permite a análise viscoelástica de sólidos discretizando-se apenas o contorno do corpo, apresentando-se mais adequada para o tratamento de meios infinitos ou semi-infinitos. O comportamento plástico é levado em consideração através de algoritmos implícitos associativos e não-associativos, cujas expressões são obtidas de forma fechada, resultando em uma considerável economia computacional e uma melhor precisão na resposta não-linear.

Palavras-chave: acoplamento, elemento finito, elemento de contorno, viscoelástico, viscoplástico, elastoplástico, implícito.

ABSTRACT

MESQUITA, A.D. (2002). *New methodologies and formulations for the treatment of inelastic problems with BEM/FEM progressive coupling*. São Carlos. 291p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

New formulations, techniques and procedures are proposed for the treatment of inelastic problems considering progressive coupling. The procedure is quite adequate for the consideration two and three-dimensional interaction problems which involve modifications in geometry and variations of the boundary conditions along the time. This allows the inclusion and retreat of sub-regions and the consideration of special hypothesis for the reinforcement, contributing appropriately for the stiffness of the structure. The viscoelastic and viscoplastic formulations are based in a new methodology and provide with simplicity and elegance quite stable and precise results. The viscous representations for boundary elements are obtained by two ways, with viscous term obtained through domain and boundary integral. The last one permits viscoelastic analysis of solids discretizing only the body's boundary, showing to be more appropriate for the treatment of the infinite or semi-infinite regions. The plastic behaviour is taken into account through associative e non-associative implicit algorithms, whose expressions are obtained in closed way, resulting in a considerable computational economy and a better precision in the non-linear answer.

Key words: coupling, finite element, boundary element, viscoelastic, viscoplastic, elastoplastic, implicit.

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

Todo problema de engenharia é resolvido através da adoção de modelos teóricos com os quais se pretende representar as características e comportamentos presentes. Essa representação tem evoluído muito e cada vez mais, os modelos tendem a representar melhor os problemas reais. Na prática, estes modelos se expressam na forma de equações diferenciais ou integrais, mais ou menos complexas, conforme o problema tratado e as simplificações adotadas.

O desenvolvimento de métodos analíticos, que proporcionem soluções exatas para as equações diferenciais e integrais representativas dos problemas físicos, foi e ainda é de interesse de muitos pesquisadores que trabalham nos diversos campos da ciência. Veja, por exemplo, os trabalhos de LOVE(1944), TIMOSHENKO & GOODIER(1970) e ERINGEN & SUHUBI(1974) que obtêm soluções analíticas para diversos problemas da elasticidade estática e dinâmica. Porém, em geral, as soluções encontradas são sempre limitadas pelas condições de contorno, geometria e hipóteses simplificadoras.

Na tentativa de contornar estas limitações e estabelecer ferramentas mais gerais, que permitissem resolver problemas mais complexos de forma aproximada, surgiram os métodos aproximados e com eles os métodos numéricos. O uso de métodos numéricos para a resolução de problemas de engenharia é atualmente imprescindível. Cada vez mais a análise dos problemas de engenharia passa a ser feita através de processos aproximados cujo emprego necessita do computador para permitir a obtenção de respostas confiáveis. Como em qualquer atividade, hoje a computação aparece como a grande responsável pelo desenvolvimento das técnicas numéricas, pelo seu uso e aprimoramento.

O avanço das técnicas numéricas torna possível uma análise cada vez mais próxima da realidade para problemas físicos relacionados à engenharia, permitindo uma modelagem bastante precisa. Desta forma, a segurança envolvida nos mais variados projetos tende a aumentar, sem mencionar, é claro, o próprio fato da automação reduzir em muito os erros humanos e possibilitar a consideração de parâmetros até então desprezados VENTURINI(1988).

Os primeiros métodos numéricos de relevância e fundamentados em bases matemáticas foram o Método das Diferenças Finitas (MDF), SOUTHWELL(1946) e o Método dos Elementos Finitos (MEF) com TURNER *et al.*(1956), ARGYRIS & KELSET(1960) e CLOUGH(1960), que é, sem sombra de dúvidas o mais difundido. Estes são caracterizados como técnicas de domínio, por fazerem uso de aproximações em todo o domínio do corpo para solucionar as equações diferenciais (ou integrais) do problema. As equações do primeiro método (MDF) são obtidas através da aplicação de operadores, definidos por diferenças finitas, sobre pontos distribuídos em todo o domínio do corpo. Já no segundo método (MEF), o contínuo é subdividido em pequenos subdomínios, denominados elementos finitos, sobre os quais se aproximam os campos incógnitos associados ao problema que se pretende analisar. Estes métodos foram sempre os mais utilizados como ferramentas básicas na elaboração dos sistemas computacionais destinados à análise de problemas de engenharia, em particular, aos relacionados à engenharia estrutural.

O Método dos Elementos Finitos surgiu no contexto da engenharia estrutural ao mesmo tempo em que os avanços da tecnologia davam origem aos computadores. Com esta facilidade e aliado à simplicidade, elegância e versatilidade de sua formulação o método teve um crescimento extremamente rápido, abrangendo praticamente todos os ramos da engenharia. Pode-se dizer que este é um dos métodos mais empregados na análise de diversos problemas da engenharia. Entretanto, devido à necessidade de se discretizar todo o domínio do corpo, este apresenta algumas limitações na modelagem de meios infinitos e semi-infinitos. Para tratar tais problemas pelo MEF, é necessário a criação de um contorno fictício, definindo limites que podem acarretar na distorção da resposta final, principalmente em análises dinâmicas, onde o truncamento do meio provoca o aparecimento das indesejáveis reflexões de ondas.

Uma forma de evitar tais complicações e reduzir consideravelmente o número de variáveis envolvidas no problema são as chamadas Técnicas de Contorno. Estas são baseadas na técnica de discretização limite FREDHOLM(1903) empregada na teoria matemática para solucionar equações diferenciais através da transformação destas em equações integrais. As

técnicas de contorno se diferenciam daquelas de domínio pela necessidade de se discretizar apenas o contorno do corpo em consideração, quando se abordam problemas lineares.

O surgimento do Método dos Elementos de Contorno, como uma alternativa para a resolução dos problemas da engenharia é, sem dúvida, o principal avanço científico nessa área do conhecimento dos últimos anos. Uma das principais vantagens deste método, quando comparado com os métodos de domínio usuais, é a redução do número de variáveis do problema, pois, enquanto nos métodos usuais o domínio a ser tratado precisa ser dividido em vários subdomínios, no Método dos Elementos de Contorno apenas o contorno do mesmo precisa ser discretizado. Além disso, para muitos problemas, já é comprovado que o Método dos Elementos de Contorno apresenta respostas mais precisas e confiáveis do que os métodos tradicionalmente empregados para análises similares.

Fundamentado em representações integrais de contorno, o MEC se apresenta mais apropriado para a análise de domínios infinitos ou semi-infinitos, proporcionando uma considerável redução do número de equações e volume de dados. Além disso, devido à natureza das funções ponderadoras, este é mais indicado para modelar regiões com concentração de tensão ou fluxo. Contudo, elementos de contorno não apresentam características vantajosas com relação à análise de estruturas em cascas e reticuladas, ao contrário do MEF. Assim, uma consequência natural para a análise de estruturas interagindo com meios infinitos ou semi-infinitos, tais como aqueles encontrados em problemas de interação solo-estrutura e fluido-estrutura, seria o acoplamento entre o MEC e o MEF.

O acoplamento entre o MEC e o MEF já era discutido por ZIENKIEWICZ *et al.*(1977) e ATLURI & GRANNELL(1978) que refletiam a cerca destas considerações. As vantagens da utilização deste acoplamento são bem definidas, principalmente no tratamento de problemas de interação, onde o MEC é mais adequado para representar domínios infinitos e regiões de concentração de tensões (ou fluxo) e o MEF é mais apropriados para modelar estruturas envolvendo materiais compósito, anisotrópicos ou não-lineares. Uma boa revisão sobre o assunto pode ser encontrada nos trabalhos de BEER & WATSON(1992) e de STAMOS & BESKOS(1995). Algumas contribuições referentes ao acoplamento MEC/MEF tri e bidimensionais para problemas elastodinâmicos, podem ser encontrados em CODA(1993), CODA & VENTURINI(1995) e CODA(2000).

No que diz respeito ao acoplamento bidimensional entre o MEF e o MEC para modelar os problemas de escavações reforçadas, algumas referências podem ser citadas, entre elas encontram-se os trabalhos de SWOBODA *et al.*(1987) e SINGH *et al.*(1988). Nestes trabalhos as sub-regiões de elementos de contorno são tratadas como regiões equivalentes de

elementos finitos e para não perder a simetria do problema estes impõem a simetria da “matriz de rigidez equivalente” referente à sub-região de elementos de contorno. Este procedimento, segundo BREBBIA & DOMINGUEZ(1992), não é muito recomendado, conduzindo a resultados imprecisos em muitas situações práticas.

Um fator importante, que não é levado em conta nas formulações numéricas com acoplamento propostas para tratar problemas de reforço, seria a necessidade de uma correção que deve ser imposta no sistema devido à inclusão da sub-região de reforço. Isto pode ser melhor compreendido considerando-se um caso simples, por exemplo, uma viga solicitada inicialmente intacta, onde em um instante posterior uma certa região do corpo é retirada. Na tentativa de simular numericamente o reforço estrutural, introduz-se uma nova sub-região no local danificado com as mesmas propriedades físicas e geométricas da sub-região extraída, ocorrerá que a estrutura recuperará totalmente a sua rigidez inicial quando a compatibilidade geométrica usual for empregada, o que é incoerente. Assim, é necessário fazer uma correção no sistema de equações de maneira que o reforço contribua de forma adequada para o enrijecimento da estrutura reforçada. Esta correção é proposta por MESQUITA *et al.*(1999), os quais apresentam técnica baseada no acoplamento MEC/MEF bidimensional para o tratamento de problemas que envolvem retiradas de partes de um sólido solicitado e colocação de reforços. A técnica foi desenvolvida com base na equação de equilíbrio dinâmico de corpos elásticos, considerando amortecimento viscoso. Esta equação é o ponto de partida para o desenvolvimento de uma nova metodologia para o tratamento do comportamento viscoso para ambos MEC e MEF como pode ser visto nos trabalhos de MESQUITA *et al.*(2001), MESQUITA & CODA(2002a), MESQUITA & CODA(2001a) e MESQUITA & CODA(2001b). Esta nova proposta apresenta-se mais estável e computacionalmente mais vantajosa que as formulações viscosas clássicas. Além disso, esta permite a obtenção de representações integrais viscosas para o MEC com integrais apenas no contorno, MESQUITA & CODA(2002c), tornando possível modelar um problema viscoelástico com discretização apenas no contorno do corpo, preservando assim todas as vantagens inerentes ao MEC, principalmente em problemas envolvendo meios infinitos ou semi-infinitos como o solo.

Outros avanços foram conquistados na área do comportamento dos materiais. Baseado nas formulações viscosas descritas anteriormente, foi possível desenvolver novas formulações viscoplásticas. A maioria dos trabalhos desenvolvidos nesta área são baseados em funções de relaxação OWEN & DAMJANIC(1982), TELLES & BREBBIA(1982) e MUNAIAR(1998). As características viscosas são incorporadas na relação tensão-deformação efetiva por meio de funções de relaxação, caindo em um problema incremental onde a análise é executada

aplicando-se sucessivamente incrementos de força. Estas abordagens são baseadas em procedimentos incrementais quase-estáticos onde o comportamento temporal da solução é recuperado por uma função de decaimento de tensão, de maneira que a imposição de cargas externas com dependência temporal arbitrária apresenta algumas dificuldades.

A formulação proposta assume uma relação cinemática para a velocidade de deformação, isto é, relaciona velocidade de deformação com velocidade material. Desta relação encontra-se um sistema equações diferencial temporal global que deve ser solucionado com a adoção de procedimentos para a atualização das tensões e um adequado algoritmo de integração temporal. Uma outra diferença é que na formulação proposta as solicitações são aplicadas integralmente e os incrementos são agora definidos como incrementos de tempo e não mais como incrementos de força, proporcionando um significado bem mais definido para o tempo nas análises viscoplásticas. Além disso, para o caso específico do MEC, as integrais referentes ao comportamento viscoso podem ser transformadas em integrais de contorno, de maneira que para tratar o problema viscoplástico pelo MEC basta apenas discretizar o contorno do corpo e as regiões internas onde ocorreram plastificação, resultando em menor quantidade de dados de entrada e um menor custo computacional.

Os modelos elastoplásticos usuais podem ser implementados nas formulações viscoplásticas propostas de forma direta sem muitas alterações, ou seja, não é necessário formular novos modelos viscoplásticos que em geral são bastante complexos, basta apenas introduzir os modelos elastoplásticos já existentes nas formulações viscosas. Atualmente os procedimentos elastoplásticos são desenvolvidos baseados nos princípios de algoritmos do tipo "closest point projection" SIMO & TAYLOR(1986), SIMO *et al.*(1988), PRAMONO & WILLAM(1989), FEENSTRA & BORST(1996), LOURENÇO(1996) e MESQUITA(1998). Estes, além de possibilitar uma eficiente atualização das tensões, permitem a obtenção da matriz constitutiva elastoplástica consistente com o algoritmo de retorno, preservando assim a taxa de convergência quadrática do método de Newton-Raphson SIMO & TAYLOR(1985). Nas análises numéricas utilizando-se este tipo de algoritmo, observa-se que o custo computacional maior está na geração da matriz de rigidez global da estrutura (quando o método requer atualização) e no processo de atualização das tensões. O alto custo na atualização das tensões, principalmente quando o nível de plastificação é elevado, é devido ao procedimento iterativo utilizado para resolver a equação de consistência e obter o multiplicador plástico. Entretanto é possível demonstrar em alguns casos que o multiplicador plástico pode ser obtido através de simples expressões fechadas encontradas através de uma adequada manipulação das relações constitutivas do modelo proposto MESQUITA &

CODA(2002b). Assim, pode-se evitar os erros de precisão no cálculo do multiplicador plástico e o alto custo computacional necessário para obtê-lo. Outros algoritmos foram propostos seguindo os mesmos princípios só que adotando-se uma lei de fluxo não associativa. Esta nova abordagem, definida a partir de observações do fluxo na mecânica dos fluidos, simplifica demasiadamente as expressões de atualização e sua forma mais geral possibilita quantificar o grau de compressibilidade do material na fase plástica.

Com a adoção das formulações descritas anteriormente juntamente com as técnicas de acoplamento MEC/MEF que permitem a extração e a inserção de regiões do corpo (com ou sem as hipóteses do reforço) é possível analisar casos bastante complexos, tais como problemas de reforço estrutural, escavações reforçadas, interação solo-estrutura, interação fluido-estrutura e até mesmo aqueles aonde as condições de contorno (forças e deslocamentos) variam com o tempo.

1.2 OBJETIVO

A princípio este trabalho deveria ser desenvolvido para tratar problemas de escavações reforçadas fazendo uso de formulações e técnicas já consagradas no meio científico. Com o decorrer do tempo, desenvolveram-se novas abordagens e os objetivos se tornaram mais amplos. Em resumo pode-se definir o seguinte objetivo para o trabalho: desenvolvimento de formulações viscoelásticas e viscoplásticas eficientes e estáveis que permitam realizar de forma simples o acoplamento entre o MEC e o MEF, possibilitando a retirada gradativa de porções do corpo, inserção de reforços e variações das condições de contorno (força e deslocamento) com o tempo. Como parte desse objetivo considera-se também o desenvolvimento de algoritmos do tipo implícito com expressões fechadas do multiplicador plástico com leis associativas e não-associativas, adequados para serem implementados nas formulações viscoplásticas.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Neste item apresenta-se sucintamente o conteúdo referente a cada capítulo. Os capítulos estão organizados, o quanto possível, de forma clara e sequencial, objetivando-se facilitar a compreensão dos conceitos abordados. A apresentação do trabalho está dividida em 10 capítulos no qual o primeiro deles é a introdução.

No capítulo 2 apresenta-se uma rápida revisão sobre modelos reológicos e suas respectivas relações básicas. Para cada modelo deduz-se as relações constitutivas extremamente importantes no desenvolvimento das formulações que serão apresentadas nos capítulos seguintes.

Uma visão inicial do problema elastodinâmico pelo MEF e MEC (utilizando-se solução fundamental estática) é apresentada no capítulo 3. As formulações levam em consideração apenas o termo referente à aceleração. O termo que corresponde ao amortecimento viscoso não é considerado nas representações integrais. O amortecimento será levado em consideração nos capítulos 4 e 5 fazendo-se uso de modelos viscosos que proporcionam um significado reológico bem mais definido.

Formulações viscoelásticas (com uma abordagem dinâmica inicial) específicas para os modelos de Kelvin e Boltzmann são desenvolvidas para o método dos elementos finitos no capítulo 4. As formulações são baseadas nos modelos físicos da reologia dos materiais e não apresentam restrições para impor variações nas cargas ao longo do tempo. Resultados das implementações computacionais em elementos de barra, chapa, placa e cascas são também apresentados no final de cada formulação.

Semelhantemente ao que foi desenvolvido com MEF no capítulo 4, faz-se ao MEC no capítulo 5. Formulações viscoelásticas (com uma abordagem dinâmica inicial) específicas para o Método dos elementos de Contorno são descritas neste capítulo. Inicialmente, apresentam-se formulações que levam em consideração o comportamento viscoso através de integrais de domínio que devem ser solucionadas com o uso de células internas. Posteriormente, obtém-se as representações viscoelásticas com integrais apenas no contorno permitindo análises viscosas com discretizações apenas do contorno do corpo. Resultados numéricos são apresentados no final da exposição de cada formulação com o propósito de validá-las e demonstrar a estabilidade e eficiência do método.

Uma forma alternativa para abordar o problema elastoplástico pelo MEC é apresentada no capítulo 6. As representações integrais são basicamente as mesmas, porém a forma de tratar o problema de correção do resíduo plástico é alterada. A nova técnica propõe que a correção seja feita em nível de deslocamento, ao contrário das abordagens clássicas onde a correção é feita em nível de tensão. O procedimento apresentado é mais adequado para tratar o acoplamento não-linear entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos. Alguns resultados são apresentados para demonstrar a eficácia da técnica

No capítulo 7 faz-se uma rápida introdução à teoria da plasticidade, apresentando-se uma abordagem numérica do problema elastoplástico e definindo-se os algoritmos para a

solução do problema não-linear. Os algoritmos desenvolvidos são do tipo implícito com leis de fluxo associativas e não-associativas. Os procedimentos são obtidos para o caso tridimensional com fórmulas fechadas, sem necessidade de processos iterativos para a obtenção do multiplicador plástico. Algumas discussões sobre as leis de fluxos e comparações entre o modelo associativo e não-associativo são apresentadas no final deste capítulo.

No capítulo 8 apresentam-se formulações viscoplásticas do método dos elementos de contorno. A representação integral de contorno do problema viscoplástico é obtida através da imposição das equações do modelo reológico diretamente na equação integral de movimento. Esta aproximação evita o uso de funções de relaxação e permite, de forma simples, mudanças nas condições de contorno ao longo do tempo. As equações integrais de domínio responsáveis pelo comportamento viscoso são transformadas para o contorno, evitando assim a necessidade de técnicas especiais de integração numéricas para solucioná-las e o alto custo computacional na discretização de todo o domínio. Uma rápida discussão sobre a associatividade e não associatividade dos modelos viscoplásticos é feita, levando-se em consideração a existência ou não de hardening.

A técnica de acoplamento progressivo é apresentada no capítulo 9. O acoplamento entre o MEC e o MEF é realizado segundo a técnica de sub-regiões usualmente encontradas nas bibliografias de elementos de contorno. As hipóteses cinemáticas do reforço são formuladas e introduzidas através de uma correção no sistema de equações. Exemplos são mostrados no final do capítulo para ilustrar a potencialidade da técnica.

No capítulo 10 apresentam-se as conclusões e considerações finais dos estudos desenvolvidos e propõe sugestões para o prosseguimento dos trabalhos nessa mesma linha de pesquisa.

1.4 OBSERVAÇÕES FINAIS

Deve-se ressaltar que durante o desenvolvimento desta tese muitos trabalhos foram publicados, frutos do programa de doutorado desenvolvido pelo candidato. A maioria destas referências são citadas ao longo dos textos contidos no presente trabalho. Porém, não se deseja, com as citações, retirar a originalidade das idéias desenvolvidas e sim esclarecer que estas já foram tornadas públicas. Como resultado do esforço despendido pelo candidato na elaboração desta tese, podem ser citados os seguintes artigos:

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. Modelo viscoso transiente para análise de retirada de material e inclusão de reforço via MEC/MEF [CD-ROM]. In: PIMENTA, P.M.; BRASIL, R.M.L.R.F.; ALMEIDA NETO, E.S., eds. *Computational methods in engineering'99* (IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 20. / BRAZILIAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, 1., São Paulo, 3-5 Nov. 1999). São Paulo, EPUSP, 1999. 11p.(ISBN: 85-901027-1-8)

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. Análise viscoelástica da interação solo-estrutura, representação bidimensional [CD-ROM]. In: SIMPÓSIO INTERAÇÃO ESTRUTURA-SOLO EM EDIFÍCIOS, São Carlos, 27-28 nov. 2000. *Artigos completos*. São Carlos, Programas de Pós-Graduação em Geotécnica e Engenharia de Estruturas da EESC-USP, 2000. 17p.

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. Análise viscoelastodinâmica alternativa de placas e cascas via MEF, considerando o modelo de Kelvin [CD-ROM]. In: VAZ, L.E., ed. *Computational methods in engineering'2000* (21st IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (CILAMCE 2000), Rio de Janeiro, December 6-8, 2000. Rio de Janeiro, PUC-Rio, 2000. 16p. (ISBN: 85-901717-1-X)

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. O acoplamento entre o MEC e o MEF aplicado à análise viscoelástica de materiais compostos [CD-ROM]. In: VAZ, L.E., ed. *Computational methods in engineering'2000* (21st IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (CILAMCE 2000), Rio de Janeiro, December 6-8, 2000. Rio de Janeiro, PUC-Rio, 2000. 18p.(ISBN: 85-901717-1-X)

MESQUITA, A.D; CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. Alternative time marching process for BEM and FEM viscoelastic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.51, n.10, p.1157-1173, Aug. 2001. (ISSN: 0029-5981)

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. An alternative time integration procedure for Boltzmann viscoelasticity: a BEM approach. *Computers & Structures*, v.79, n.16, p.1487-1496, June, 2001. (ISSN: 0045-7949)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. Alternative Kelvin viscoelastic procedure for finite elements. *Applied Mathematical Modeling*, v.26, n.4, p.501-516, 2002.

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. Boundary integral equations for general viscoelastic analysis. *International Journal of Solids and Structures*, v.39, n.9, p.2643-2664, 2002. (ISSN: 0020-7683)

CODA, H. B.; MESQUITA, A. D.; PAIVA, J. B. Viscoelastic analysis of soil-structure interaction [CD-ROM]. In: AIMETA CONGRESS OF THEORETICAL AND APPLIED MECHANICS, 15., Taormina, Italia, 26-29 set. 2001. Taormina, AIMETA, 2001. 9p. (ISSN: 1592-8950)

MESQUITA, A.D. & CODA, H.B. Análise viscoelástica da interação solo-estrutura, estrutura-estrutura: representação bidimensional [CD-ROM]. In: PALERMO, L.; MESQUITA, E., eds. (IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 22. / BRAZILIAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, 2., Campinas, 7-9 Nov. 2001). Campinas, UNICAMP, 2001. 16p. (ISBN: 85-902253-1-3)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. A FEM viscoelastic analysis of plates and shells: A new methodology and the Boltzmann model. *Computers & Structures*, 2001. (Submitted)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. New methodology for the treatment of two dimensional viscoelastic coupling problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2001. (Accepted)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. A two dimensional BEM/FEM coupling applied to viscoelastic analysis of composite domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2001. (Accepted)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. A boundary element methodology for viscoelastic analysis: Part I with cells. *Computational Mechanics*, 2001. (Submitted)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. A boundary element methodology for viscoelastic analysis: Part II without cells. *Computational Mechanics*, 2001. (Submitted)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. Alternative non-associative return mapping methodology with BEM applications. *International Journal of Solids and Structures*, 2002. (Submitted)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. An alternative numerical viscoplastic formulation based on differential constitutive relations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2002. (Submitted)

Capítulo 2

MODELOS REOLÓGICOS

2.1 INTRODUÇÃO

Devido à complexidade do comportamento real dos materiais e da necessidade de se obter uma melhor representação destes, diversos estudos dão bastante ênfase ao problema da modelagem das relações constitutivas (relação tensão-deformação). Entretanto, caracterizar e equacionar o comportamento dos materiais de forma exata é uma meta extremamente difícil de se alcançar. Dessa forma, torna-se indispensável a adoção de modelos simplificados que proporcionem soluções suficientemente próximas do comportamento real da estrutura estudada.

A análise teórica dos corpos se depara então no problema essencial da modelagem do comportamento do material constituinte. Em geral, o comportamento físico dos materiais é influenciado por vários parâmetros, tais como: tempo, temperatura, condições ambientais, condições de carregamento, etc.. Além do mais, não se pode desenvolver uma única lei constitutiva a qual possa ser aplicada para qualquer material. Na prática o que se faz é tentar formular modelos específicos para cada tipo de material e aqueles mais complexos são, em geral, combinações de modelos básicos.

Neste capítulo apresenta-se de forma sucinta uma descrição dos modelos reológicos utilizados no desenvolvimento das formulações que serão posteriormente apresentadas. As relações básicas dos modelos juntamente com as suas respectivas relações constitutivas são apresentadas. Esta última é extremamente importante nos desenvolvimentos posteriores que serão expostos nos próximos capítulos.

2.2 MODELOS BÁSICOS

Os modelos básicos, em geral, são definidos através de relações matemáticas simples. A junção destes dá origem a modelos mais refinados que procuram caracterizar de forma mais realista materiais com comportamento mais complexo, fatalmente não-lineares. Assim, para que se possa compreender melhor os modelos combinados e seu campo de aplicação é necessário um estudo inicial do comportamento dos modelos básicos. Na figura 2.1 apresentam-se as representações reológicas uniaxiais dos modelos básicos: elástico, viscoso e plástico.

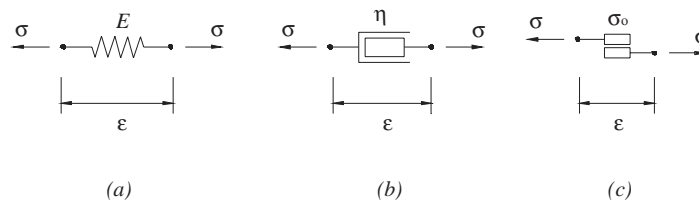


FIGURA 2.1 Representação reológica uniaxial: (a) elástico; (b) viscoso; (c) plástico.

O modelo elástico é representado por uma mola (fig. 2.1a). Este caracteriza-se pelo aparecimento de deformações elásticas instantâneas simultaneamente a aplicação de uma solicitação estática. O modelo se aplica a materiais cujo comportamento é invariável com relação ao tempo e que em uma situação de descarregamento não apresenta deformações residuais, ao contrário do modelo plástico. No caso da elasticidade linear a relação constitutiva fica expressa através da lei de Hooke.

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \epsilon_{lm} \quad (2.1)$$

onde σ_{ij} e ϵ_{lm} são as tensões e deformações respectivamente e C_{ij}^{lm} é a matriz constitutiva elástica. A relação linear entre tensões e deformações não é pré-requisito para caracterizar o comportamento elástico, pois existem materiais elásticos que apresentam relações não-lineares. Este trabalho se limitará a tratar o modelo elástico básico como linear.

Já o modelo viscoso, cuja representação reológica uniaxial é caracterizada por um amortecedor (fig. 2.1b), apresenta um comportamento dependente do tempo, ao contrário do modelo elástico. Assim, mesmo que as tensões aplicadas permaneçam constantes, haverá

variação das deformações ao longo do tempo. Este comportamento pode ser facilmente observado nos fluidos, porém nos sólidos ele também se manifesta e sua relação fundamental é escrita como:

$$\sigma_{ij} = \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} \quad (2.2)$$

onde η_{ij}^{lm} é a matriz viscosa escrita em função de parâmetros representativos da viscosidade do material que podem ser determinados experimentalmente. Note que as tensões são proporcionais a velocidade de deformação. Esta característica permite o aparecimento de deformações que se desenvolvem ao longo do tempo, ao contrário do modelo elástico onde as deformações são imediatas.

O modelo plástico caracteriza-se pelo aparecimento de deformações irreversíveis e imediatas que aparecem e se desenvolvem quando um determinado nível de tensão é alcançado. Este pode ser descrito, através de uma interpretação reológica uniaxial, por um sólido (fig. 2.1c) que desliza a partir do instante em que a tensão aplicada ultrapassar o valor σ_o (tensão de plastificação).

2.3 MODELO VISCOELÁSTICO DE KELVIN-VOIGT

O primeiro modelo reológico combinado adotado para o desenvolvimento das representações integrais é o modelo de Kelvin-Voigt (fig. 2.2). Este modelo é representado pelo arranjo em paralelo de um amortecedor e de uma mola.

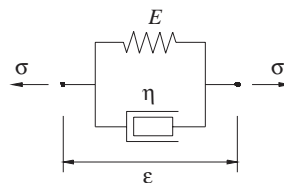


FIGURA 2.2 – Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt (representação uniaxial)

Além do mais, este fica caracterizado pela igualdade de deformações nos dois elementos.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij}^v \quad (2.3)$$

onde ε_{ij} , ε_{ij}^e e ε_{ij}^v são, respectivamente, as deformações totais, elásticas e viscosas. Já as tensões são definidas pela soma das tensões viscosas (no amortecedor) e das tensões elásticas (na mola), como:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^v \quad (2.4)$$

Semelhantemente as deformações σ_{ij} , σ_{ij}^e e σ_{ij}^v são, respectivamente, as tensões totais, elásticas e viscosas. Estas duas últimas podem ser definidas da seguinte forma:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} \quad (2.5a)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \quad (2.5b)$$

Note que as tensões viscosas são proporcionais a velocidade de deformação, sendo C_{ij}^{lm} a matriz constitutiva elástica e η_{ij}^{lm} a matriz viscosa, definidas em uma forma indicial pelas seguintes expressões:

$$C_{ij}^{lm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \quad (2.6a)$$

$$\eta_{ij}^{lm} = \theta_\lambda \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \theta_\mu \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \quad (2.6b)$$

Para o caso de estado plano de tensão a matriz viscosa fica escrita matricialmente como:

$$\eta = \frac{2\theta_\mu \mu}{\theta_\lambda \lambda + 2\theta_\mu \mu} \begin{bmatrix} 2(\theta_\lambda \lambda + \theta_\mu \mu) & \theta_\lambda \lambda & 0 \\ \theta_\lambda \lambda & 2(\theta_\lambda \lambda + \theta_\mu \mu) & 0 \\ 0 & 0 & \theta_\lambda \lambda + 2\theta_\mu \mu \end{bmatrix} \quad (2.6c)$$

onde θ_λ e θ_μ são coeficientes representativos da viscosidade do material. Estes podem ser determinados através de resultados de testes de tração uniaxial e testes de cisalhamento, veja

por exemplo LEMAITRE & CHABOCHE(1990) e MUNAIAR(1998). Os termos λ e μ são as conhecidas constantes de Lamé, expressas por:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.7)$$

Os termos E , G e ν são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal, o módulo de elasticidade transversal e o coeficiente de Poisson. Na grande maioria dos materiais a matriz viscosa pode ser apresentada em uma forma mais simples, dependendo apenas de um único parâmetro viscoso. Neste caso tem-se que $\gamma = \theta_\lambda = \theta_\mu$ e conseqüentemente a equação (2.6b) fica escrita como:

$$\eta_{ij}^{lm} = \gamma [\lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl})] = \gamma C_{ij}^{lm} \quad (2.8)$$

A expressão (2.8) será útil no desenvolvimento das formulações com representações integrais apenas no contorno do corpo. O parâmetro γ pode ser determinado de forma similar aos parâmetros θ_λ e θ_μ . A relação para o modelo de Kelvin pode ser obtida substituindo-se as equações (2.5) na expressão (2.4), obtendo-se:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} + \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \quad (\text{para } \forall \theta_\lambda \text{ e } \theta_\mu) \quad (2.9a)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} + \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \quad (\text{para } \theta_\lambda = \theta_\mu = \gamma) \quad (2.9b)$$

Uma das relações (2.9) deve ser imposta no desenvolvimento da equação integral do método numérico para se obter a formulação viscoelástica específica para o modelo de Kelvin-Voigt.

2.4 MODELO VISCOELÁSTICO DE BOLTZMANN

O modelo de Boltzmann (fig. 2.3) é representado pelo arranjo em série do modelo de Kelvin-Voigt com uma mola.

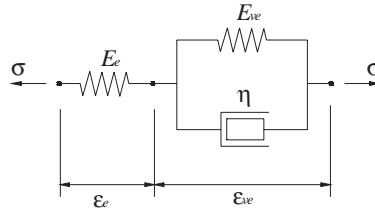


FIGURA 2.3 – Modelo viscoelástico de Boltzmann (representação uniaxial)

Este modelo se diferencia do modelo de Kelvin pela capacidade de simular deformações elásticas instantâneas. Além do mais, este fica caracterizado pela igualdade das tensões nos dois trechos: elástico e viscoelástico.

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^{ve} \quad (2.10)$$

onde σ_{ij} , σ_{ij}^e e σ_{ij}^{ve} são, respectivamente, as tensões totais, elásticas e viscoelásticas. Já as deformações totais são definidas pela soma das deformações elásticas da primeira mola e das deformações viscoelásticas referente ao conjunto mola-amortecedor.

$$\varepsilon_{lm} = \varepsilon_{lm}^e + \varepsilon_{lm}^{ve} \quad (2.11)$$

Semelhantemente, as deformações ε_{lm} , ε_{lm}^e e ε_{lm}^{ve} são, respectivamente, as deformações totais, elásticas e viscoelásticas. Para se obter as equações integrais é necessário adotar como hipótese a igualdade dos coeficientes de Poisson de ambos os trechos. Esta simplificação é bastante razoável, pois na prática o coeficiente de Poisson referente ao trecho viscoelástico pouco varia em relação ao do trecho elástico. Além do mais, aliado a isto, pode-se ressaltar o número limitado de trabalhos científicos que tratam do assunto e a dificuldade em se obter resultados experimentais razoavelmente precisos. Assim, levando em consideração esta simplificação, pode-se definir as tensões elásticas e viscosas através das seguintes relações:

$$\sigma_{ij}^e = \tilde{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = E_e C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e \quad (2.12a)$$

$$\sigma_{ij}^{el} = \hat{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} \quad (2.12b)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} = \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} \quad (2.12c)$$

onde σ_{ij}^{el} são as tensões elásticas referente a mola em paralelo com o amortecedor. Note que as tensões viscosas são proporcionais a velocidade de deformação, sendo E_e e E_{ve} , respectivamente, o módulo de elasticidade referente aos trechos elástico e viscoelástico. O coeficiente γ é o parâmetro representativo da viscosidade do material. Este pode ser determinado como descrito anteriormente para o modelo de Kelvin. O termo η_{ij}^{lm} representa a matriz viscosa definida pela equação (2.8). As matrizes \tilde{C}_{ij}^{lm} e \hat{C}_{ij}^{lm} são matrizes constitutivas escritas em função dos módulos de elasticidade E_e e E_{ve} , respectivamente. Observe que, diferentemente do modelo de Kelvin, C_{ij}^{lm} agora é definida como a matriz constitutiva ausente do módulo de elasticidade, ou seja:

$$C_{ij}^{lm} = \bar{\lambda} \delta_{ij} \delta_{lm} + \bar{\mu} (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \quad (2.13)$$

onde $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$ são as constantes de Lamé ausentes do módulo de elasticidade:

$$\bar{\lambda} = \frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad ; \quad \bar{\mu} = \frac{1}{2(1+\nu)} \quad (2.14)$$

Com relação ao trecho viscoelástico é possível escrever

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{ve} = \sigma_{ij}^{el} + \sigma_{ij}^v = E_{ve} C_{ij}^{lm} \epsilon_{lm}^{ve} + \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}^{ve} \quad (2.15)$$

A partir da (2.11), pode-se escrever uma relação entre as velocidades de deformação¹ de ambos os trechos do modelo de Boltzmann.

$$\dot{\epsilon}_{lm} = \dot{\epsilon}_{lm}^e + \dot{\epsilon}_{lm}^{ve} \quad (2.16)$$

onde $\dot{\epsilon}_{lm}$, $\dot{\epsilon}_{lm}^e$ e $\dot{\epsilon}_{lm}^{ve}$ são as velocidades das deformações totais, elásticas e viscoelásticas, respectivamente. Explicitando-se as deformações elásticas na equação (2.12a) e as deformações viscoelásticas na expressão (2.15), fazendo-se uso da relação (2.16), obtém-se:

¹ Denominou-se a taxa de deformação com relação ao tempo como velocidade de deformação

$$\varepsilon_{lm}^e = \frac{1}{E_e} C_{lm}^{ij -1} \sigma_{ij} \quad (2.17a)$$

$$\varepsilon_{lm}^{ve} = \frac{1}{E_{ve}} C_{lm}^{ij -1} \sigma_{ij} - \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} = \frac{1}{E_{ve}} C_{lm}^{ij -1} \sigma_{ij} - \gamma (\dot{\varepsilon}_{lm} - \dot{\varepsilon}_{lm}^e) \quad (2.17b)$$

Substituindo-se as expressões das deformações elásticas ε_{lm}^e e viscoelásticas ε_{lm}^{ve} apresentadas nas equações (2.17a) e (2.17b), respectivamente, na definição das deformações totais ε_{lm} em (2.11), obtém-se a relação reológica para este modelo.

$$\sigma_{ij} = \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} + \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (2.18)$$

sendo $\dot{\sigma}_{ij}$ a taxa de variação da tensão total com o tempo ou velocidade de tensão total. Esta é a relação que deve ser imposta no desenvolvimento da equação integral para se obter a formulação viscoelástica específica para o modelo de Boltzmann.

2.5 MODELO ELASTOPLÁSTICO

Este modelo é representado pelo arranjo em serie de uma mola com um arranjo bloco-mola que permite o aparecimento de deformações residuais (fig. 2.4). Além do mais, este fica caracterizado pela igualdade das tensões nos dois trechos: elástico e plástico.

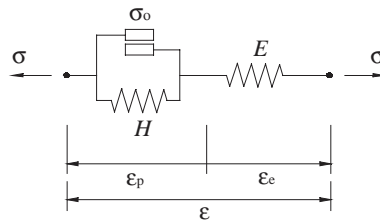


FIGURA 2.4 – Modelo elastoplástico (representação uniaxial)

onde H (fig. 2.4) representa o módulo plástico do material e σ_o a tensão de escoamento (ou plastificação). Já as deformações totais são definidas pela soma das deformações elásticas da primeira mola e das deformações plásticas referente ao conjunto bloco-mola.

$$\dot{\epsilon}_{lm} = \dot{\epsilon}_{lm}^e + \dot{\epsilon}_{lm}^p \tag{2.19}$$

Os incrementos de deformações, $\dot{\epsilon}_{lm}$, $\dot{\epsilon}_{lm}^e$ e $\dot{\epsilon}_{lm}^p$ são, respectivamente, deformações totais, elásticas e plásticas. Note que, na equação acima, o ponto representa incrementos infinitesimais de deformação e não velocidade de deformação. É importante perceber a diferença para evitar maiores confusões com velocidades reais dos problemas viscoelásticos e viscoplásticos. Pode-se definir o incremento das tensões fazendo-se uso da relação (2.19) como:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}^e = C_{ij}^{lm} (\dot{\epsilon}_{lm} - \dot{\epsilon}_{lm}^p) = C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} - \dot{\sigma}_{ij}^p \tag{2.20}$$

sendo $\dot{\sigma}_{ij}^p$ o incremento de tensão inicial ou “plástica” definido por $\dot{\sigma}_{ij}^p = C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}^p$ e C_{ij}^{lm} a matriz constitutiva elástica definida em uma forma indicial pela expressão (2.6a). Semelhantemente aos modelos descritos anteriormente, a relação (2.20) deve ser imposta no desenvolvimento da equação integral para se obter a formulação elastoplástica.

2.6 MODELO VISCOPLÁSTICO (sem comportamento instantâneo)

O modelo reológico aqui descrito é baseado no modelo de Kelvin-Voigt (fig. 2.5). Este modelo é representado pelo arranjo em série de um conjunto em paralelo bloco/mola com a respectiva mola do modelo viscoelástico de Kelvin.

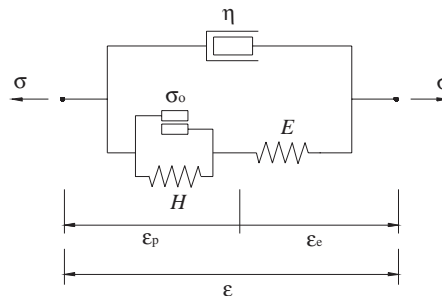


FIGURA 2.5 – Modelo viscoplástico (representação uniaxial)

Para o modelo viscoplástico apresentado na figura 2.5 as deformações são relacionadas através da seguinte expressão:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{ij}^e = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^p \quad (2.21)$$

onde ε_{ij} , ε_{ij}^e , ε_{ij}^v e ε_{ij}^p são, respectivamente, as deformações totais, elásticas, viscosas e plásticas. Já as tensões totais são definidas pela soma das tensões viscosas (no amortecedor) e das tensões elastoplásticas (no trecho elastoplástico), como:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^v + \sigma_{ij}^{ep} \quad (2.22)$$

Semelhantemente as deformações, σ_{ij} , σ_{ij}^{ep} e σ_{ij}^v são, respectivamente, as tensões totais, elastoplásticas e viscosas. Estas duas últimas podem ser definidas da seguinte forma:

$$\sigma_{ij}^{ep} = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e \quad (2.23a)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^v = \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \quad (2.23b)$$

As matrizes C_{ij}^{lm} e η_{ij}^{lm} são as mesmas apresentadas nas equações (2.6a) e (2.6b ou 2.8), respectivamente. A relação para este modelo pode ser obtida substituindo-se as equações (2.23) na expressão (2.22), obtendo-se:

$$\sigma_{ij} = \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} + C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} + C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} - \varepsilon_{lm}^p) = C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} + \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}) - \sigma_{ij}^p \quad (2.24)$$

Esta é a relação que deve ser imposta no desenvolvimento da representação integral para se obter a formulação viscoplástica. O termo σ_{ij}^p é oriundo dos problemas de tensão inicial, sendo expresso por:

$$\sigma_{ij}^p = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^p \quad (2.25)$$

Note que, neste modelo viscoplástico, as expressões constitutivas serão consideradas em sua forma total e não na forma incremental como usualmente é feito nas formulações elastoplásticas. Sendo assim, todos os termos que aparecem com um ponto como sobrescrito

referem-se literalmente a respectiva derivada no tempo (ou seja: $\dot{x} = \partial x / \partial t$) e não significam incrementos infinitesimais como usualmente encontrado nas literaturas que tratam da teoria da plasticidade.

2.7 MODELO VISCOPLÁSTICO (com comportamento instantâneo)

O modelo viscoplástico apresentado neste item (fig. 2.6) é baseado no modelo de Boltzmann descrito anteriormente. Este se diferencia do modelo viscoplástico apresentado no item anterior pela capacidade de simular deformações elásticas instantâneas. O modelo é representado pelo arranjo em série de um conjunto em paralelo bloco/mola com a mola do trecho viscoelástico do modelo de Boltzmann.

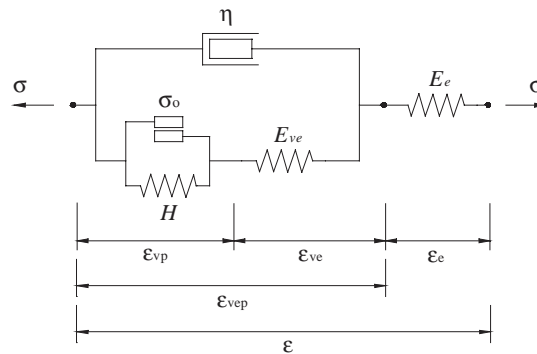


FIGURA 2.6 – Modelo viscoplástico (representação uniaxial)

Para o modelo viscoplástico apresentado na figura 2.6 as deformações são relacionadas através da seguinte expressão:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^{ve} + \epsilon_{ij}^{vp} \quad \Rightarrow \quad \epsilon_{ij}^{ve} = \epsilon_{ij} - \epsilon_{ij}^e - \epsilon_{ij}^{vp} \quad (2.26)$$

onde ϵ_{ij} , ϵ_{ij}^e , ϵ_{ij}^{ve} e ϵ_{ij}^{vp} são, respectivamente, as deformações totais, elásticas (comportamento instantâneo), viscoelásticas e viscoplásticas. Já as tensões totais são definidas pela soma das tensões viscosas (no amortecedor) e das tensões elastoplásticas (no trecho elastoplástico), como:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^v + \sigma_{ij}^{ep} \quad (2.27)$$

Semelhantemente as deformações, σ_{ij} , σ_{ij}^{ep} e σ_{ij}^v são, respectivamente, as tensões totais, elasto-plásticas e viscosas. Utilizando-se a mesma justificativa adotada no desenvolvimento do modelo de Boltzmann, considera-se a hipótese da igualdade dos coeficientes de Poisson de ambos os trechos, instantâneo e viscoplástico. Assim, levando em consideração esta simplificação, pode-se definir as tensões através das seguintes relações:

$$\sigma_{ij}^{ep} = \tilde{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} \quad (2.28a)$$

$$\sigma_{ij}^e = \hat{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = E_e C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e \quad (2.28b)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} = \gamma \tilde{C}_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} = \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} \quad (2.28c)$$

onde σ_{ij}^e são as tensões elásticas referentes a mola em série com o amortecedor. Note que as tensões viscosas são proporcionais a velocidade de deformação $\dot{\varepsilon}_{lm}^{vep}$, sendo H o módulo plástico, E_e e E_{ve} , respectivamente, os módulos de elasticidade referentes aos trechos instantâneo e viscoplástico. O coeficiente γ é o mesmo parâmetro representativo da viscosidade do material apresentado anteriormente. Semelhantemente, as matrizes C_{ij}^{lm} e η_{ij}^{lm} são as mesmas apresentadas nas equações (2.6a) e (2.8), respectivamente. Com relação ao trecho viscoplástico é possível escrever

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{ep} + \sigma_{ij}^v = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} + \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} \quad (2.29)$$

Pode-se escrever uma relação entre as velocidades de deformação de ambos os trechos do modelo proposto, de forma similar à expressão (2.26).

$$\dot{\varepsilon}_{lm} = \dot{\varepsilon}_{lm}^e + \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} + \dot{\varepsilon}_{lm}^{vp} = \dot{\varepsilon}_{lm}^e + \dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} \quad (2.30)$$

onde, semelhantemente ao item 2.6, o ponto sobre os termos presentes na expressão (2.30) indica a respectiva derivada com relação ao tempo, ou seja, velocidade de deformação. Explicitando-se as deformações elásticas ε_{lm}^e na equação (2.28b) e as deformações viscoelásticas na expressão (2.29), fazendo-se uso da relação (2.30), obtém-se:

$$\varepsilon_{lm}^e = \frac{1}{E_e} C_{lm}^{ij-1} \sigma_{ij} \quad (2.31a)$$

$$\varepsilon_{lm}^{ve} = \frac{1}{E_{ve}} C_{lm}^{ij-1} \sigma_{ij} - \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} = \frac{1}{E_{ve}} C_{lm}^{ij-1} \sigma_{ij} - \gamma (\dot{\varepsilon}_{lm} - \dot{\varepsilon}_{lm}^e) \quad (2.31b)$$

Substituindo-se as expressões das deformações elásticas ε_{lm}^e e viscoelásticas ε_{lm}^{ve} apresentadas nas equações (2.31a) e (2.31b), respectivamente, na definição das deformações totais ε_{lm} em (2.26), obtém-se a relação reológica para este modelo.

$$\sigma_{ij} = \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} + \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \sigma_{ij}^{vp} \quad (2.32)$$

sendo $\dot{\sigma}_{ij}$ a taxa de variação da tensão total com o tempo. Esta é a relação que deve ser imposta no desenvolvimento da equação integral para se obter a formulação específica para o modelo aqui proposto. O termo σ_{ij}^{vp} é oriundo dos problemas de tensão inicial, sendo aqui expresso por:

$$\sigma_{ij}^{vp} = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{vp} \quad (2.33)$$

As expressões constitutivas, semelhantemente ao item 2.6, serão consideradas em sua forma total e não na forma incremental como usualmente é feito nas formulações elastoplásticas. Sendo assim, todos os termos que aparecem com um ponto como sobrescrito referem-se literalmente a respectiva derivada no tempo (ou seja: $\dot{x} = \partial x / \partial t$) e não significam incrementos infinitesimais como usualmente encontrado nas literaturas que tratam da teoria da plasticidade.

Vários outros modelos constitutivos viscoelástico ou viscoplásticos podem ser elaborados a partir dos elementos reológicos básicos. Suas relações constitutivas podem ser obtidas seguindo-se os mesmos passos aqui apresentados. Porém, como os objetivos de implementação numérica deste trabalho são muito extensos, os modelos reológicos serão limitados aos descritos neste capítulo.

Capítulo 3

FORMULAÇÕES ELASTODINÂMICAS DO MEF E MEC

3.1 INTRODUÇÃO

A grande dificuldade na determinação das soluções analíticas da maioria dos problemas na engenharia é devido a complexidade matemática dos modelos adotados. As soluções exatas, obtidas para casos específicos, são limitadas pela geometria do problema e por hipóteses bastante simplificadoras. Graças ao surgimento dos computadores, tais procedimentos simplificados vêm sendo substituídos por métodos numéricos, que representam o comportamento do problema abordado de maneira precisa e eficiente.

O desenvolvimento dos recursos computacionais tem proporcionado um grande crescimento na aplicação dos métodos numéricos, contribuindo para o aparecimento de novas formulações que proporcionam modelagens cada vez mais detalhadas, levando em consideração comportamentos que em outras épocas seria praticamente impossível. O campo de aplicação dos métodos numéricos tem evoluído tanto que hoje em dia é possível encontrar aplicações dos métodos até mesmo na medicina na área da biomecânica. Percebe-se que o grande número de pesquisa envolvendo métodos numéricos resultou em ferramentas bastante confiáveis, baseadas em formulações conceitualmente muito bem estabelecidas.

Neste capítulo apresentam-se as equações integrais elastodinâmicas referentes às formulações do método dos elementos finitos e do método dos elementos de contorno. O termo referente ao amortecimento viscoso, usualmente encontrado nas análises dinâmicas, não será considerado. O amortecimento será introduzido nos próximos capítulos com a consideração da viscosidade reológica dos materiais, tendo em vista os objetivos do trabalho. As representações integrais e algébricas apresentadas para os métodos, são ambas equacionadas a partir da equação de equilíbrio dinâmico baseadas na técnica dos resíduos ponderados. Esta

técnica é o ponto de partida para o desenvolvimento de todas as formulações que serão apresentadas nos próximos capítulos.

3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Um dos métodos numéricos mais difundido e aplicado em toda a engenharia é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Neste método, o contínuo é subdividido em pequenos subdomínios, denominados elementos finitos, sobre os quais se aproximam as grandezas físicas associadas ao problema que se pretende analisar. O mesmo envolve procedimentos extensivos, que devido a natureza repetitiva, torna-se ideal para a implementação em microcomputadores. Este tem se consagrado como uma ferramenta em potencial para a mecânica aplicada, sendo mais indicado para tratar problemas como estruturas reticuladas, cascas, materiais compósitos, anisotrópicos e não-lineares. A representação integral dinâmica de um corpo em equilíbrio via MEF, pode ser obtida a partir da equação de equilíbrio dinâmico de uma porção infinitesimal do sólido.

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.1)$$

onde b_i e \ddot{u}_i representam, respectivamente, as componentes das forças de volume e aceleração referentes a direção i e ρ é a densidade mássica. Pode-se ponderar o erro produzido pela equação de equilíbrio (3.1), quando a solução exata é substituída por uma aproximada, utilizando-se como função ponderadora a função de deslocamento virtual δu_i . Sendo assim, a equação de ponderação sobre todo o domínio Ω pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \delta u_i (\sigma_{ij,j} + b_i - \rho \ddot{u}_i) d\Omega = 0 \quad (3.2)$$

Integrando-se por partes o primeiro termo da equação (3.2), obtém-se:

$$\int_{\Gamma} \delta u_i \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \delta u_{i,j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.3)$$

sendo Γ a variável que define o contorno do corpo e n_j a componente j do versor normal a superfície. Sabendo-se que $\sigma_{ij}n_j = p_i$ e que $\delta u_{i,j}\sigma_{ij} = \delta \varepsilon_{ij}\sigma_{ij}$, onde $\delta \varepsilon_{ij}$ são as componentes de deformação virtual, a equação (3.3) fica,

$$\int_{\Gamma} \delta u_i p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.4a)$$

A expressão (3.4a) é o tão conhecido princípio dos trabalhos virtuais específico para o problema dinâmico. A primeira e a terceira integrais representam, respectivamente, o trabalho das forças de superfície e volumétricas. A segunda integral refere-se ao trabalho das forças internas e dá origem a matriz de rigidez. Já a quarta integral corresponde ao trabalho das forças inerciais de onde se obtém a matriz de massa. Note que o trabalho das forças concentradas está representado pela primeira integral em (3.4a). Assim, para a situação de uma carga concentrada atuando em um ponto s da superfície Γ , a primeira integral resulta:

$$\int_{\Gamma} \delta u_i p_i d\Gamma = \delta u_i(s) p_i(s) \quad (3.4b)$$

Porém, por simplicidade a expressão do trabalho das cargas concentradas será omitida e considerada de forma implícita, representada na integral das forças de superfície. A equação (3.4a) é o ponto de partida para a obtenção da representação integral viscoelástica dinâmica do MEF. Nela se impõe a relação reológica, tal como aquelas apresentadas no capítulo 2, específica para o problema que se deseja tratar pelo MEF. Assim, para encontrar a formulação elastodinâmica, basta apenas substituir a relação constitutiva do modelo reológico elástico eq.(2.1) na equação (3.4a).

$$\int_{\Gamma} \delta u_i p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.5)$$

A expressão (3.5) é a representação integral elastodinâmica. Note que a única diferença desta representação para a representação usual elástica é a presença da quarta integral responsável pelo comportamento dinâmico. Assim, resolvida a equação (3.5), obtendo-se os deslocamentos, parte-se para a obtenção das tensões. As tensões são determinadas pelo MEF de maneira relativamente simples quando comparado ao MEC. Para o caso elástico elas ficam

expressas, fazendo-se uso da aproximação para as deformações apresentadas na equação (3.7), como:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^{\alpha} U_l^{\alpha} \quad (3.6)$$

3.2.1 Tratamento algébrico para a representação integral

A equação integral definida anteriormente pode ser transformada em equação algébrica através do método dos elementos finitos. Assim, o domínio do corpo Ω é discretizado com n_e elementos finitos Ω_e (fig. 3.1), de tal sorte que as densidades do domínio sejam representadas adequadamente.

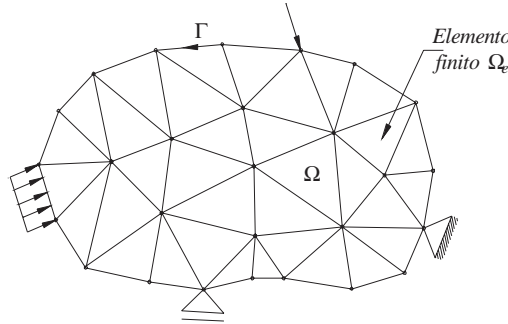


FIGURA 3.1 – Discretização do Problema

Dessa forma, as variáveis do problema podem ser aproximadas, parametrizando-as com relação aos seus valores nodais, fazendo-se uso de funções interpoladoras apropriadas.

$$\begin{aligned} u_i &= \phi^{\alpha} U_i^{\alpha} & \Rightarrow & & \varepsilon_{ij} &= \phi_{,j}^{\alpha} U_i^{\alpha} \\ \delta u_i &= \phi^{\alpha} \delta U_i^{\alpha} & \Rightarrow & & \delta \varepsilon_{ij} &= \phi_{,j}^{\alpha} \delta U_i^{\alpha} \\ \ddot{u}_i &= \phi^{\alpha} \ddot{U}_i^{\alpha}; & b_i &= \tilde{\phi}^{\alpha} b_i^{\alpha}; & p_i &= \hat{\phi}^{\alpha} P_i^{\alpha} \end{aligned} \quad (3.7)$$

onde $\hat{\phi}$ e $\tilde{\phi}$ são as funções de forma adotadas para interpolar as forças de superfície e as forças volumétricas respectivamente, ϕ são as funções de formas adotadas para interpolar o restante das variáveis e o subscrito α refere-se aos nós do elemento finito. Note que para a aproximação no contorno α corresponde ao número de nós pertencente a superfície onde p_i é aproximado. Os termos U_i^{α} , \ddot{U}_i^{α} , δU_i^{α} , P_i^{α} e b_i^{α} são valores nodais de deslocamento,

aceleração, deslocamento virtual, forças de superfície e forças volumétricas, respectivamente. Substituindo-se as expressões (3.7) na representação integral (3.5) encontra-se:

$$\delta U_i^\alpha \left[\sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \hat{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e U_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Omega_e b_i^\beta - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \rho \phi^\beta d\Omega_e \ddot{U}_i^\beta \right] = 0 \quad (3.8)$$

onde n_s é o número de superfícies solicitadas. Note que os deslocamentos virtuais δU_i^α presentes na expressão (3.8) podem ser quaisquer, logo, para que a igualdade em (3.8) seja verificada tem-se:

$$\sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e U_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \rho \phi^\beta d\Omega_e \ddot{U}_i^\beta = \sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \hat{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Omega_e b_i^\beta \quad (3.9)$$

A expressão (3.9) pode ser escrita em uma forma matricial como:

$$KU(t) + M\ddot{U}(t) = F(t) \quad (3.10)$$

sendo t o tempo, K a matriz de rigidez da estrutura, M a matriz de massa e F as forças nodais, ambas definidas como:

$$K = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e \quad (3.11a)$$

$$M = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \rho \phi^\beta d\Omega_e \quad (3.11b)$$

$$F = \sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \hat{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Omega_e b_i^\beta \quad (3.11c)$$

Para se resolver o sistema expresso pela equação (3.10) é necessário executar a integração temporal. Em geral, nas análises dinâmicas com o método dos elementos finitos a equação (3.10) é integrada com o método de Newmark ou outra técnica similar.

3.3 MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

O método dos elementos de contorno-MEC apresenta-se como uma alternativa para solução de diversos problemas físicos regidos por equações integrais de contorno. A principal diferença desse método, com relação aos métodos usuais de domínio, tais como o método dos elementos finitos-MEF e o método das diferenças finitas-MDF, é a facilidade em modelar certos problemas discretizando-se apenas o contorno do corpo, reduzindo assim, o número de variáveis envolvida no problema. Além disso, O MEC é mais indicado para tratar problemas com domínios infinitos ou semi-infinitos e problemas onde ocorram concentrações de tensão ou fluxo. As representações integrais do MEC podem ser obtidas, semelhantemente ao MEF, a partir da equação de equilíbrio (3.1), fazendo-se uso da técnica dos resíduos ponderados. A grande diferença é que a função ponderadora utilizada é a solução fundamental e não mais a função de deslocamento virtual. Esta alteração impõe algumas singularidades nas representações integrais que devem ser resolvidas com técnicas especiais de integração. Neste trabalho apenas a solução fundamental estática (Kelvin) será empregada como função ponderadora, resultando no método dos elementos de contorno com matriz de massa MMBEM (Matrix Mass BEM). Em formulações mais elegantes como o TDBEM (Time Domain BEM), soluções fundamentais de problemas dinâmicos (ondulatórias) tais como as soluções fundamentais de Stokes e de Lamb são utilizadas. Nestes casos a necessidade de matriz de massa é abolida e os problemas dinâmicos são tratados apenas com discretizações no contorno. Maiores detalhes desta formulação podem ser vistos em CODA(2000).

Porém, como o objetivo deste trabalho não é abordar as forças inerciais, mas apenas o comportamento viscoso quase-estático dos meios contínuos, a descrição da formulação dinâmica simplificada do MEC (MMBEM), apresenta-se bastante adequada para os propósitos do trabalho, proporcionando um maior entendimento das formulações viscosas que serão apresentadas nos próximos capítulos. A formulação dinâmica do MEC com matriz de massa pode ser obtida a partir da técnica dos resíduos ponderados empregada sobre a equação de equilíbrio do problema em consideração, ou seja:

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* (\sigma_{ij,j} + b_i - \rho \ddot{u}_i) d\Omega = 0 \quad (3.12)$$

onde u_{ki}^* é denominado solução fundamental e representa fisicamente o efeito de uma carga concentrada unitária estática atuando em um ponto de um domínio infinito elástico e homogêneo, sendo definida para o problema de Kelvin por:

$$\text{Para 2D} \quad u_{ki}^*(p, s) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu) \ln(r) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i}] \quad (3.13a)$$

$$\text{Para 3D} \quad u_{ki}^*(p, s) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} [(3-4\nu) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i}] \quad (3.13b)$$

onde o primeiro índice correspondente a direção da carga aplicada em p e o segundo referente ao deslocamento gerado em s . O termo $r = r(p, s)$ é a distância entre os pontos p e s . Deve-se observar que $r_{,i} = \partial r / \partial x_i$. Note que a solução fundamental para o caso bidimensional refere-se à situação de estado plano de deformação. Para se obter a solução para estado plano de tensão basta substituir o coeficiente de Poisson por $\nu/(1+\nu)$ sem alterar o módulo de elasticidade transversal G . Integrando-se por partes o primeiro termo da equação (3.12), tem-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.14)$$

sendo Γ a variável que define o contorno do corpo e n_j a componente do vetor normal a superfície. Sabendo-se que $\sigma_{ij} n_j = p_i$ e que $u_{ki,j}^* \sigma_{ij} = \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}$, onde ε_{kij}^* é a solução fundamental em deformações, a equação (3.14) fica:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.15)$$

Semelhantemente a equação (3.4a) para o MEF, a equação (3.15) é o ponto de partida para a obtenção das representações integrais pelo MEC. Nela se impõe uma relação reológica, como aquelas definidas no capítulo 2, para que se possa obter a formulação com o modelo reológico desejado. Para o caso elástico eq.(2.1) a expressão (3.15) fica:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.16)$$

Sabendo-se que

$$\varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j} \quad (3.17)$$

a equação (3.16) torna-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.18)$$

Aplicando-se integração por partes na segunda integral da equação (3.18), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (3.19)$$

A equação integral (3.19) pode ser reescrita fazendo uso da equação de equilíbrio fundamental, definida por:

$$\sigma_{kij,j}^* = -\delta(p,s) \delta_{ki} \quad (3.20)$$

onde $\delta(p,s)$ é o conhecido delta de Dirac, s refere-se a uma posição do domínio do sólido e p representa a posição do ponto fonte. Aplicando a equação (3.20) em (3.19), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac, as técnicas apropriadas para desenvolver integrais singulares e que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$, encontra-se:

$$\overline{C}_{ki} u_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \quad (3.21)$$

O termo \overline{C}_{ki} é o mesmo obtido nas formulações elastostáticas e sua expressão pode ser facilmente encontrada nas bibliografias usuais do método dos elementos de contorno, veja

BREBBIA *et al.*(1984) e BREBBIA & DOMINGUEZ(1992). Já o termo p_{ki}^* é a solução fundamental para forças de superfície.

$$p_{ki}^*(p, s) = -\frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{ki} + \beta r_{,k} r_{,i}] - (1-2\nu)(r_{,k} n_i - r_{,i} n_k) \right\} \quad (3.22)$$

onde $(\alpha, \beta) = (1,2)$ para o caso 2D (estado plano de deformações) e $(\alpha, \beta) = (2,3)$ para o problema tridimensional. A equação (3.21) é a representação integral da formulação elastodinâmica do MEC aqui adotada. Note que a única diferença desta para a representação elastostática usual é a presença do último termo do lado direito responsável pelo comportamento dinâmico. Note também que as integrais apresentam singularidades. Uma forma de evitar estas singularidades seria através da utilização de ponto fonte exterior ao domínio do problema analisado, ou dependendo do caso, podem ser solucionadas analiticamente ou semi-analiticamente fazendo-se uso de técnica similares àquelas apresentadas no Anexo D.

3.3.1 Representação integral para tensões em pontos internos

Resolvido o problema de contorno parte-se agora para a determinação das tensões. Para pontos internos o termo $\bar{C}_{ki} = \delta_{ki}$ e conseqüentemente a equação integral (3.21) fica escrita como:

$$u_k(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \quad (3.23)$$

A representação integral para as deformações em pontos internos (considerando a hipótese de pequenas deformações) é obtida através da seguinte relação:

$$\varepsilon_{ke} = \frac{1}{2}(u_{k,e} + u_{e,k}) \quad (3.24)$$

As deformações são obtidas de maneira análoga ao problema elastostático BREBBIA *et al.*(1984). Assim, diferenciando-se a equação (3.23) e aplicando esta na definição das deformações em (3.24), encontra-se:

$$\varepsilon_{ke}(p) = \int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kei}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kei}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \quad (3.25)$$

Note que como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte, apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. As tensões elásticas são obtidas de forma trivial, aplicando-se a relação constitutiva elástica apresentada na equação (2.1) sobre a definição das deformações (3.25), de maneira que:

$$\sigma_{\rho q}(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \quad (3.26)$$

Note que como o ponto fonte se encontra no interior do corpo as integrais de contorno presentes na equação (3.26) apresentam-se em sua forma não-singular e apenas as integrais de domínio necessitam de cuidados especiais para serem determinadas. Estas podem ser calculadas através da técnica de transformação de coordenadas exposta no Anexo D. Os termos $\bar{\sigma}_{\rho qi}^*$ e $\bar{p}_{\rho qi}^*$ são definidos como:

$$\bar{\sigma}_{\rho qi}^* = \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left[(1-2\nu)(\delta_{\rho q} r_{,i} + \delta_{iq} r_{,\rho} - \delta_{\rho i} r_{,q}) + \beta r_{,\rho} r_{,i} r_{,q} \right] \quad (3.27a)$$

$$\bar{p}_{\rho qi}^* = \frac{G}{2\alpha\pi(1-\nu)r^\beta} \left[\beta \frac{\partial r}{\partial n} \{ (1-2\nu)\delta_{\rho q} r_{,i} + \nu(\delta_{\rho i} r_{,q} + \delta_{qi} r_{,\rho}) - \varpi r_{,\rho} r_{,q} r_{,i} \} + \beta\nu(n_{\rho} r_{,q} r_{,i} + n_q r_{,\rho} r_{,i}) + (1-2\nu)(\beta n_i r_{,\rho} r_{,q} + n_q \delta_{\rho i} + n_{\rho} \delta_{qi}) - (1-4\nu)n_i \delta_{\rho q} \right] \quad (3.27b)$$

sendo $(\alpha, \beta, \varpi) = (1, 2, 4)$ para o caso 2D (estado plano de deformações) e $(\alpha, \beta, \varpi) = (2, 3, 5)$ para o problema tridimensional. Assim, fazendo-se uso da expressão (3.26) é possível calcular as tensões em pontos internos. Para pontos no contorno a representação integral apresenta forte singularidade que ainda não foram totalmente solucionadas. Muitas contribuições têm sido propostas na literatura com relação a este tema, veja por exemplo, GIUGGIANNI *et al.*(1992), GIUGGIANNI(1994) e RICHARDSON(1998). Porém, neste trabalho as singularidades serão evitadas utilizando-se um simples procedimento que será apresentado no próximo item. Esta abordagem é largamente difundida nas formulações do MEC para a obtenção de tensões no contorno em problemas lineares e não-lineares apresentando-se bastante adequada como pode ser visto nos trabalhos de TELLES & BREBBIA(1982), TELLES & CARER(1994), POON *et al.*(1997) e CISILINO(1997).

3.3.2 Obtenção das tensões no contorno

Uma forma de obter as tensões em pontos do contorno seria através da aplicação da equação (3.26) no contorno. Entretanto, devido aos termos singulares presentes nos integrandos desta representação, este procedimento produziria singularidades de alta ordem. Este problema pode ser contornado e resolvida de uma forma simples, através da obtenção das tensões em função dos deslocamentos e forças de superfície do contorno, que já foram determinados na solução do problema de contorno. Considere por exemplo a figura 3.2, um sistema cartesiano local de coordenadas localizado em um ponto do contorno onde se deseja obter as componentes de tensão.

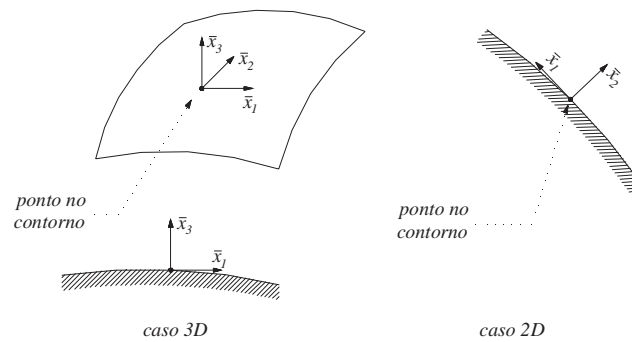


FIGURA 3.2 – Sistema cartesiano local de coordenadas

Definidas as funções de forma para os deslocamentos e forças de superfície do contorno e obtidos os seus valores nodais, é possível definir as forças de superfície em qualquer ponto do contorno. Consequentemente, pode-se escrever para o caso 3D que:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{13} &= \bar{\sigma}_{31} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{23} &= \bar{\sigma}_{32} = \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{33} &= \bar{p}_3 \end{aligned} \tag{3.28}$$

onde o sobrescrito indica que os valores são referentes ao sistema local de coordenadas. As outras componentes de tensão podem ser obtidas através da relação constitutiva. Assim, em um dado elemento, o campo de deslocamento sobre ele pode ser escrito em função dos valores dos deslocamentos nodais nas coordenadas locais, da seguinte forma:

$$\bar{u}_i(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) = \phi^\alpha(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \bar{u}_i^\alpha \tag{3.29}$$

sendo \bar{u}_i o campo de deslocamento em coordenadas locais, ϕ^α são funções de forma definidas para o elemento de contorno e \bar{u}_i^α o deslocamento nodal segundo a direção “ i ” no nó “ α ” definido no sistema de coordenadas local. Note que, quando se resolve o problema de contorno, obtém-se as forças de superfície e os deslocamentos nodais no sistema global, porém, para encontrar as tensões no contorno é necessário transformá-los para o sistema local fazendo uso da matriz de transformação entre os dois sistemas. Definido o campo de deslocamento sobre o elemento de contorno, o campo de deformações é obtido pela diferenciação do campo de deslocamento, ou seja:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{u}_j(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)}{\partial \bar{x}_i} \right) \quad i, j = 1, 2 \quad (3.30)$$

Note que não é necessário determinar todas as componentes de deformação, basta apenas obter aquelas que serão importantes na determinação das componentes de tensão restantes. Logo, as outras componentes do tensor de tensão são encontradas fazendo-se uso da relação constitutiva elástica eq.(2.1), que pode ser escrita, fazendo-se uso da terceira equação em (3.28), como:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = 2\mu\bar{\epsilon}_{12} \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu} [\nu\bar{p}_3 + 2\mu(\bar{\epsilon}_{11} + \nu\bar{\epsilon}_{22})] \\ \bar{\sigma}_{22} &= \frac{1}{1-\nu} [\nu\bar{p}_3 + 2\mu(\bar{\epsilon}_{22} + \nu\bar{\epsilon}_{11})] \end{aligned} \quad (3.31)$$

Utilizando as expressões (3.28) e (3.31) é possível encontrar as tensões no contorno, pois as deformações presentes em (3.31) são obtidas em função dos deslocamentos e forças de superfície do contorno. Na situação onde elementos de contorno constantes são utilizados, as derivadas dos deslocamentos presentes na definição das deformações, podem ser obtidas aplicando-se as técnicas de diferenças finitas entre elementos de contorno adjacentes. Após a obtenção das tensões, pode-se obtê-las no sistema global utilizando-se a matriz de transformação. As expressões foram obtidas para o caso tridimensional, para o bidimensional o procedimento é similar e mais simples necessitando apenas de uma componente de deformação.

$$\bar{\varepsilon}_{11} = \frac{\partial \bar{u}_1(\zeta_1, \zeta_2)}{\partial \bar{x}_1} \quad (3.32)$$

Conseqüentemente, para o caso de estado plano de deformação, as manipulações com as expressões resultam,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{22} &= \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{12} &= \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu} [\nu \bar{p}_2 + 2\mu \bar{\varepsilon}_{11}] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Note que, no caso 2D \bar{x}_1 (fig. 3.2) é a direção tangencial no ponto onde se deseja extrair as tensões e \bar{x}_2 é a direção normal. Para estado plano de tensão as expressões (3.33) são as mesmas, apenas o coeficiente de Poisson deve ser $\nu/(1+\nu)$ sem alterar a constante de Lamé μ .

3.3.3 Tratamento algébrico para as representações integrais

Similarmente ao MEF, as equações integrais definidas anteriormente podem ser transformadas em equações algébricas através do método dos elementos de contorno. Assim, o contorno do corpo Γ é discretizado com n_e elementos de contorno Γ_e e seu domínio Ω modelado com n_c células internas Ω_c (fig. 3.3), de tal sorte que as densidades do contorno e do domínio sejam representadas adequadamente. Dessa forma, as variáveis do problema podem ser aproximadas, parametrizando-as com relação aos seus valores nodais, fazendo-se uso de funções interpoladoras apropriadas.

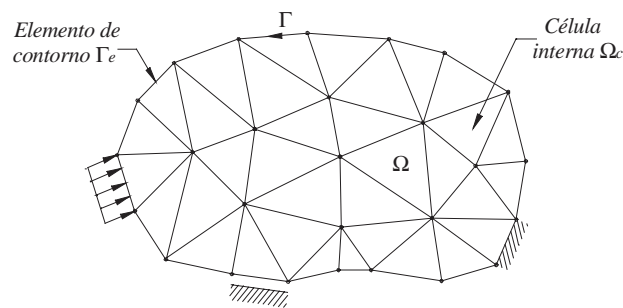


FIGURA 3.3 – Discretização do problema

$$\begin{aligned}
 p_i &= \phi^\alpha P_i^\alpha \\
 u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha \\
 b_i &= \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} b_i^{\tilde{\alpha}} \\
 \ddot{u}_i &= \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} \ddot{U}_i^{\tilde{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

onde ϕ e $\tilde{\phi}$ são respectivamente as funções de forma adotadas para interpolar os elementos de contorno e as células e os subscritos α e $\tilde{\alpha}$ referem-se ao nó do elemento de contorno e da célula. Os termos P_i^α , U_i^α , $\dot{U}_i^{\tilde{\alpha}}$ e $b_i^{\tilde{\alpha}}$ são valores nodais de forças de superfície, deslocamentos, aceleração e forças volumétricas, respectivamente. Consequentemente, as representações integrais de deslocamento e tensão podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
 \bar{C}_{ki} U_i(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha + \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} u_{ki}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c b_i^{\tilde{\alpha}} - \\
 &\sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} u_{ki}^* \rho \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \ddot{U}_i^{\tilde{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{3.26a}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\rho i}(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho i}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho i}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha + \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\sigma}_{\rho i}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c b_i^{\tilde{\alpha}} - \\
 &\sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\sigma}_{\rho i}^* \rho \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \ddot{U}_i^{\tilde{\alpha}}
 \end{aligned} \tag{3.26c}$$

Depois de executar todas as integrais e escolher pontos fonte em igual número aos nós do problema, pode-se escrever os seguintes sistemas de equações diferenciais temporais:

$$HU(t) + M\ddot{U}(t) = GP(t) + Bb(t) \tag{3.27a}$$

$$\sigma(t) = \tilde{G}P(t) - \tilde{H}U(t) + \tilde{B}b(t) - \tilde{M}\ddot{U}(t) \tag{3.27b}$$

onde t representa o tempo. Ressalta-se que a matriz H é obtida através da associação do termo \bar{C}_{ki} com a matriz referente a integral de contorno cuja o núcleo é p_{ki}^* , como usualmente é feito no método dos elementos de contorno. Para se resolver os sistemas de equações (3.27) deve-se adotar um algoritmo de integração temporal tal como: Houbolt, Wilson θ ou Newmark. Porém, o procedimento mais indicado é o de Houbolt, pois este tem demonstrado ser mais apropriado para análises dinâmicas com elementos de contorno KONTONI & BESKOS(1993), TELLES & CARRER(1994), CODA & VENTURINI(1998) e CODA(2000).

Capítulo 4

FORMULAÇÕES VISCOELÁSTICAS DO MEF

4.1 INTRODUÇÃO

Muitos materiais como aços (submetidos a altas temperaturas), polímeros, madeira, solo e o concreto apresentam um comportamento viscoso. Em muitas situações práticas este comportamento pode ser negligenciado devido à introdução de simplificações sobre as condições reais, tais como: características dos materiais, estratégias de construção e sazonalidades específicas do local da obra. Entretanto, existem situações onde o comportamento ao longo do tempo é indispensável e precisa ser levado em consideração de forma bastante realista. Um exemplo claro pode ser visto em problemas de escavações de túneis, onde todo o processo dura dias e o material apresenta um comportamento destacadamente dependente do tempo (viscoso).

O estudo do comportamento dos materiais ao longo do tempo tem sido alvo de muitos pesquisadores, encontrando-se inúmeros trabalhos na bibliografia especializada, entre eles destacam-se os trabalhos de TELLES & BREBBIA(1982), VENTURINI(1982), LEMAITRE & CHABOCHE(1984), SOBOTKA(1984), SIMO & HUGHES(1988), CHEN *et al.*(1993) e MUNAIAR(1998). Usualmente, a viscosidade do material é considerada fazendo-se uso de funções de fluência ou relaxação e um adequado processo incremental onde as solicitações, consideradas constantes no intervalo, são aplicadas incrementalmente. Este tipo de abordagem conduz, geralmente, a uma formulação matemática complexa e de certa forma computacionalmente dispendiosa. Este é baseado em procedimentos incrementais quase-estáticos e apresenta algumas dificuldades na imposição de deslocamentos e cargas externas com dependência temporal arbitrária. Além do mais, na maioria dos modelos, a resposta final é bastante sensível ao tamanho do incremento de tempo adotado.

Uma outra forma de abordar o problema, não baseado em funções de fluência ou relaxação, faz uso da transformação de Laplace-Carson, transformando o problema viscoelástico em um problema elástico equivalente. Após resolver o problema transformado, uma inversão numérica é feita para que se possa recuperar o comportamento no domínio do tempo. Esta técnica é mais apropriada para resolver problemas onde a natureza das condições de contorno não se alteram ao longo do tempo.

Por outro lado, no campo de métodos numéricos aplicados na resolução de problemas dinâmicos, considerando corpos elásticos e inelásticos, nenhuma menção é feita às propriedades reológicas do material na definição das matrizes de amortecimento viscoso WARBURTON(1976), CLOUGH & PENZIEN(1975) e MLEJNEK & ARGYRIS(1991), negligenciando a importante relação entre a velocidade de deformação e a velocidade relativa de pontos vizinhos dentro do corpo. Nos procedimentos usuais, a decomposição modal e o decaimento da resposta dinâmica são utilizados para definir os parâmetros de amortecimento da estrutura sem levar em consideração as características reológicas do material que a constitui. Porém, a consideração das propriedades reológicas do material na equação de equilíbrio do corpo pode ser facilmente estabelecida, como pode ser visto nos trabalhos de CODA(2000), MESQUITA *et al.*(2001), MESQUITA & CODA(2002a), MESQUITA & CODA(2001a), MESQUITA & CODA(2001b) e MESQUITA & CODA(2002c). A técnica envolvida é muito simples e tem como ponto de partida a imposição do modelo reológico sobre a equação de equilíbrio, resultando em uma equação de movimento semelhante àquelas encontradas em formulações dinâmicas usuais, apresentando porém, uma matriz viscosa com um significado reológico bem definido. Em problemas quase-estáticos, onde os efeitos da massa são negligenciados, desprezando-se o termo referente à aceleração, esta formulação representa adequadamente problemas viscoelásticos.

Neste capítulo apresentam-se formulações viscoelásticas (com uma abordagem inicial a análises dinâmicas) específicas para o método dos elementos finitos MESQUITA *et al.*(2001), MESQUITA & CODA(2002a) e MESQUITA & CODA(2001b). A equação integral é obtida pela imposição do modelo reológico sobre a equação de movimento e deve ser solucionada fazendo-se uso de algoritmos de integração temporal, tal como aqueles usualmente empregados nas análises dinâmicas. Esta formulação não apresenta dificuldades na imposição de solicitações e condições de contorno que variam ao longo do tempo. A formulação proposta se apresenta mais estável e computacionalmente mais econômica que aquelas citadas anteriormente, veja por exemplo MUNAIAR(1998), LEMAITRE & CHABOCHE(1984),

etc.. No final da apresentação de cada formulação são apresentados exemplos numéricos que servem para validar as formulações e demonstrar a sua precisão e estabilidade.

4.2 FORMULAÇÃO VISCOELASTODINÂMICA (Kelvin-Voight)

A equação (3.4), obtida através da técnica dos resíduos ponderados aplicada sobre a equação de equilíbrio dinâmico (3.1), é o ponto de partida para a obtenção da representação integral viscoelástica dinâmica do MEF. Nela se impõe a relação reológica definida para o modelo de Kelvin-Voight pela equação (2.9a), de maneira que:

$$\int_{\Gamma} \delta u_i p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta u_i \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (4.1)$$

A expressão (4.1) é a representação integral viscoelástica dinâmica que leva em consideração o modelo reológico de Kelvin. Note que a única diferença desta representação para a representação usual elastodinâmica é a presença da terceira integral responsável pelo comportamento viscoso.

4.2.1 Tratamento algébrico para a representação integral

Como usualmente é feito para o método dos elementos finitos, o corpo Ω é dividido em n_e pequenos sub-elementos denominados elementos finitos (fig. 3.1). Sobre estes elementos as variáveis do problema são aproximadas e parametrizadas com relação aos seus valores nodais, fazendo-se uso de funções de forma.

$$\begin{aligned} u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha & \Rightarrow & \quad \varepsilon_{ij} = \phi_{,j}^\alpha U_i^\alpha \\ \delta u_i &= \phi^\alpha \delta U_i^\alpha & \Rightarrow & \quad \delta \varepsilon_{ij} = \phi_{,j}^\alpha \delta U_i^\alpha \\ \dot{u}_i &= \phi^\alpha \dot{U}_i^\alpha & \Rightarrow & \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \phi_{,j}^\alpha \dot{U}_i^\alpha \\ \ddot{u}_i &= \phi^\alpha \ddot{U}_i^\alpha; & b_i &= \phi^\alpha b_i^\alpha; & p_i &= \tilde{\phi}^\alpha P_i^\alpha \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde $\tilde{\phi}$ é a função de forma adotada para interpolar as forças de superfície e ϕ são as funções de forma adotadas para interpolar o restante das variáveis e o subscripto α refere-se aos nós do elemento finito. Note que para a aproximação no contorno α corresponde ao número de

nós pertencente a superfície onde p_i é aproximado. Os termos U_i^α , \dot{U}_i^α , \ddot{U}_i^α , δU_i^α , P_i^α e b_i^α são valores nodais de deslocamento, velocidade, aceleração, deslocamento virtual, forças de superfície e forças volumétricas, respectivamente. Substituindo-se as expressões (4.2) na representação integral (4.1) encontra-se:

$$\begin{aligned} \delta U_i^\alpha \left[\sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e U_l^\beta - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha \eta_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e \dot{U}_l^\beta + \right. \\ \left. \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e b_i^\beta - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \rho \phi^\beta d\Omega_e \ddot{U}_i^\beta \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

onde n_s é o número de superfícies solicitadas. Note que os deslocamentos virtuais δU_i^α presentes na expressão (4.3) podem ser quaisquer, logo, para que a igualdade em (4.3) seja verificada tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e U_l^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha \eta_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e \dot{U}_l^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \rho \phi^\beta d\Omega_e \ddot{U}_i^\beta = \\ \sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e b_i^\beta \end{aligned} \quad (4.4)$$

A expressão (4.4) pode ser escrita em uma forma matricial como:

$$KU + V\dot{U} + M\ddot{U} = F \quad (4.5)$$

sendo K a matriz de rigidez da estrutura, V a matriz referente ao comportamento viscoso, M a matriz de massa e F as forças nodais equivalentes, ambas definidas como:

$$K = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e \quad (4.6a)$$

$$V = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha \eta_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e \quad (4.6b)$$

$$M = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \rho \phi^\beta d\Omega_e \quad (4.6c)$$

$$F = \sum_{s=1}^{n_e} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e b_i^\beta \quad (4.6d)$$

Observe que se for assumido $\theta_\lambda = \theta_\mu = \gamma$, a matriz referente ao comportamento viscoso do elemento finito se degenera na matriz de amortecimento viscoso proporcional à rigidez usualmente empregada nas análises dinâmicas.

$$V = \gamma K \quad (4.7)$$

Em geral, nas análises dinâmicas com o método dos elementos finitos a equação (4.5) é integrada com o método de Newmark β ou outra técnica similar.

4.2.2 Integração temporal numérica

Para se resolver o problema viscoso, deve-se integrar no tempo o sistema de equações apresentado em (4.5). Para isto, pode-se fazer uso de técnicas de integração temporal, tais como Newmark β WARBURTON(1976), Houbolt CODA & VENTURINI(1998) ou Wilson θ BATHE(1996), que são usualmente empregadas em análises dinâmicas. Nesta formulação adotou-se o método de Newmark, que é o mais empregado em análises dinâmicas pelo MEF. Suas aproximações para a aceleração e velocidade são definidas como:

$$\ddot{U}_{s+1} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left[U_{s+1} - U_s - \Delta t \dot{U}_s - \left(\frac{1}{2} - \beta \right) \Delta t^2 \ddot{U}_s \right] \quad (4.8a)$$

$$\dot{U}_{s+1} = \dot{U}_s + \frac{1}{2} \Delta t (\ddot{U}_{s+1} + \ddot{U}_s) \quad (4.8b)$$

onde $s+1$ refere-se ao instante atual. Manipulando as expressões (4.5), (4.8a) e (4.8b), veja, por exemplo, WARBURTON(1976), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\bar{K} U_{s+1} = \bar{F}_{s+1} \quad (4.9)$$

onde

$$\bar{K} = \left[M + \frac{1}{2} \Delta t V + \beta \Delta t^2 K \right] \quad (4.10a)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}_{s+1} = \Delta t^2 [\beta F_{s+1} + (1-2\beta)F_s + \beta F_{s-1}] + [2M - \Delta t^2(1-2\beta)K] U_s - \\ \left[M - \frac{1}{2} \Delta t V + \beta \Delta t^2 K \right] U_{s-1} \end{aligned} \quad (4.10b)$$

Impondo-se as condições de contorno, como usualmente é feito no método dos elementos finitos, pode-se resolver o sistema linear apresentado em (4.9), obtendo assim os deslocamentos para o passo de tempo atual. Com as incógnitas do problema de contorno conhecidas no passo atual, parte-se para a determinação das tensões. Assim, obtidos os deslocamentos no instante $s+1$, determina-se a aceleração \ddot{U}_{s+1} e a velocidade \dot{U}_{s+1} através das expressões (4.8). Obtidas essas variáveis, calculam-se as tensões elásticas e viscosas fazendo-se uso das respectivas equações (2.5a) e (2.5b), que podem ser escritas como:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^{\alpha} U_l^{\alpha} \quad (4.11a)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} = \eta_{ij}^{lm} \phi_{,m}^{\alpha} \dot{U}_l^{\alpha} \quad (4.11b)$$

Obtidas as tensões elásticas e viscosas, a tensão total, definida como a soma das duas primeiras, é facilmente encontrada através da expressão (2.4). Resolvido o problema naquele passo, repete-se o procedimento descrito nos próximos passos de tempo, resolvendo-se assim todo o problema viscoelástico dinâmico.

4.2.3 Exemplos numéricos

A formulação descrita anteriormente foi implementada no elemento finito de casca proposto inicialmente para análises lineares por MESQUITA(1998). O elemento apresenta geometria triangular e é o resultado do acoplamento entre o elemento de flexão de placas DKT BATOZ *et al.*(1980) e um elemento de tensão plana com graus de liberdade rotacionais desenvolvido através da formulação livre BERGAN & FELIPPA(1985). Nos exemplos, os parâmetros α e β , específicos do elemento de membrana, foram assumidos como 1,5 e 0,5, respectivamente. Por conveniência, o elemento de casca aqui apresentado é denominado FFDKT (Free Formulation Discrete Kirchoff Triangle).

4.2.3.1 EXEMPLO 01: Peça tracionada

Este é um exemplo clássico, muito utilizado para aferir modelos viscoelásticos. A sua solução analítica é muito simples e facilmente obtida. Uma peça submetida a um carregamento distribuído de tração aplicado em sua face livre é analisada. A estrutura de seção transversal quadrada é modelada e devido à sua simetria discretiza-se apenas a metade da mesma. A Resposta obtida com o elemento FFDKT é confrontada com a resposta obtida com elementos finitos de barra (MEF), elementos de contorno (MEC) ambos extraídos de MESQUITA *et al.*(2001), e com a resposta analítica. A geometria da estrutura juntamente com sua discretização e propriedades físicas são apresentadas na figura 4.1.

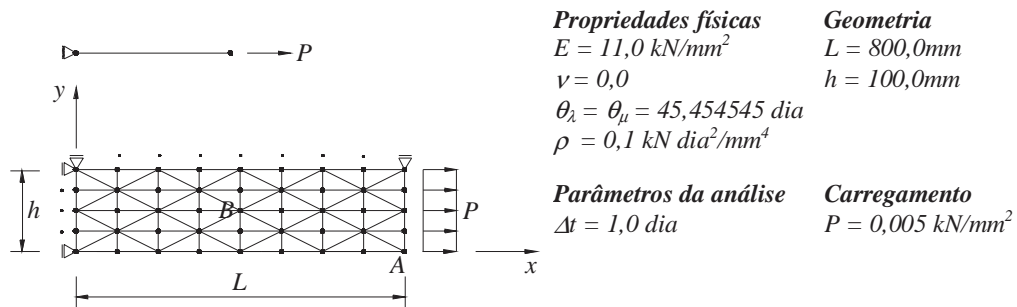


FIGURA 4.1 – Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura.

A resposta do deslocamento longitudinal do ponto A é apresentada na figura 4.2 para $\rho = 0,0$ e $\rho = 0,1 \text{ kN dia}^2 / \text{mm}^4$ confrontada com a resposta teórica obtida para um modelo uniaxial. Para simular o modelo uniaxial adotou-se um coeficiente de Poisson nulo.

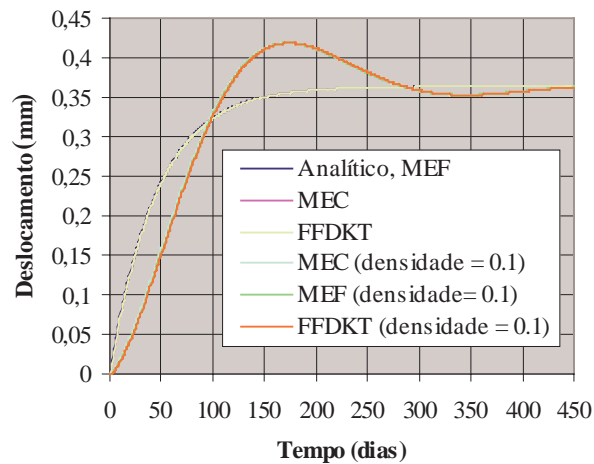


FIGURA 4.2 – Deslocamento longitudinal do ponto A.

Nota-se uma perfeita concordância entre os resultados obtidos pelo presente modelo e a resposta teórica, demonstrando a consistência do modelo em poder recuperar o caso uniaxial.

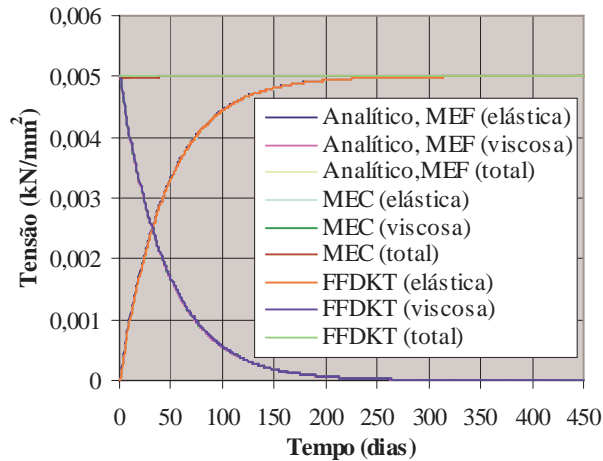


FIGURA 4.3 – Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B.

Semelhantemente a figura 4.2, a resposta da tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} calculadas no ponto B são apresentadas na figura 4.3 juntamente com suas respectivas respostas analíticas. As mesmas observações feitas para a resposta em deslocamentos podem ser estendidas para as tensões. Note que as respostas em tensão são praticamente as mesmas que aquelas apresentadas pelas respostas analíticas. Na figura 4.4 pode-se observar o resultado do deslocamento longitudinal do ponto A para vários passos de tempo considerando $\rho = 0,0$.

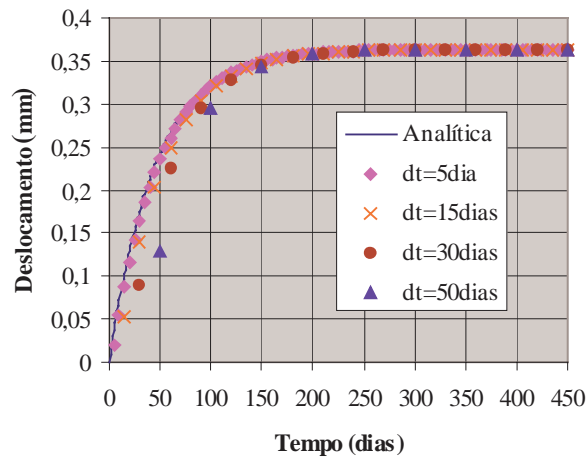


FIGURA 4.4 – Deslocamento longitudinal do ponto A.

Como pode ser observado, os resultados são muito estáveis e precisos até mesmo para grandes passos de tempo. A solução elastostática final é sempre alcançada para qualquer passo de tempo. A figura 4.5 apresenta o resultado do deslocamento longitudinal do ponto A para uma situação de carregamento mais geral com $\rho = 0,0$. Durante os primeiros 199 passos de tempo a carga é mantida até que no instante $t=200\text{dias}$ ela é retirada.

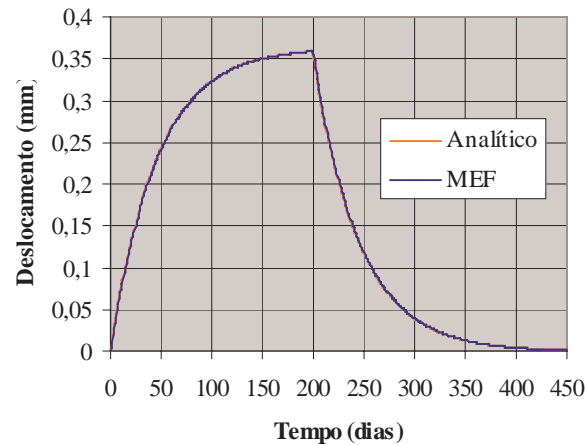


FIGURA 4.5 – Deslocamento longitudinal do ponto A.

O comportamento da solução numérica está perfeitamente de acordo com aquele apresentado pela solução analítica.

4.2.3.2 EXEMPLO 02: Placa circular engastada

A placa circular apresentada na figura 4.6 possui vínculos de engastamento em toda a sua borda e é solicitada por um carregamento distribuído Q em toda a sua superfície. Devido à sua simetria discretiza-se apenas $1/4$ da mesma.

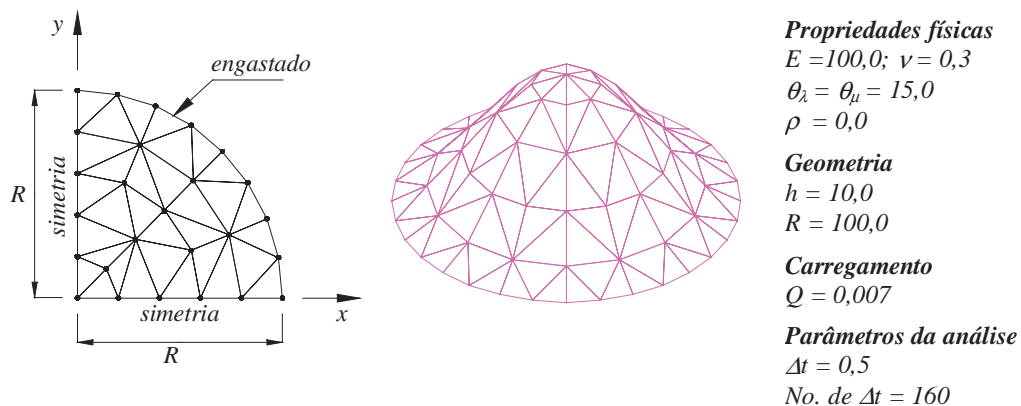


FIGURA 4.6 – Discretização, deformada, geometria e propriedades físicas da estrutura.

Os resultados do deslocamento transversal do centro da placa para $\rho = 0,0$ são apresentados na figura 4.7 utilizando-se uma malha com 32 elementos finitos confrontados com a resposta analítica do problema, expressa por:

$$w(r,t) = \frac{3Q(1-\nu^2)}{16Eh^3} (R^2 - r^2)^2 (1 - e^{-t/\gamma})$$

onde R é o raio da placa, r é a distância da origem de onde se deseja calcular o deslocamento, h é a espessura da placa e $\gamma = \theta_\lambda = \theta_\mu$ é o parâmetro representativo da viscosidade.

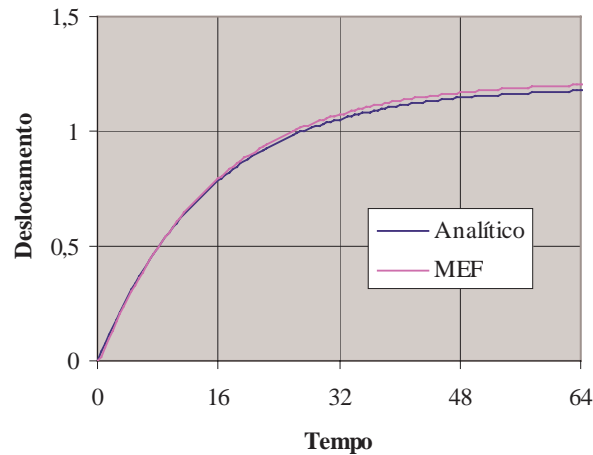


FIGURA 4.7 – Deslocamento transversal do centro da placa.

Nota-se uma boa concordância entre o resultado obtido pelo elemento finito e a resposta analítica. Ressalta-se que a pequena diferença no final da resposta poderia ser menor se fossem utilizadas malhas mais refinadas, melhorando o desempenho do elemento de flexão de placa DKT.

4.2.3.3 EXEMPLO 03: Casca cilíndrica sob pressão interna

Um cilindro com as extremidades livres é solicitado por uma pressão interna uniforme, figura 4.8. Fazendo-se uso da simetria do problema discretiza-se apenas $\frac{1}{8}$ do mesmo. A geometria do problema, discretização e as propriedades físicas são apresentadas na figura 4.8.

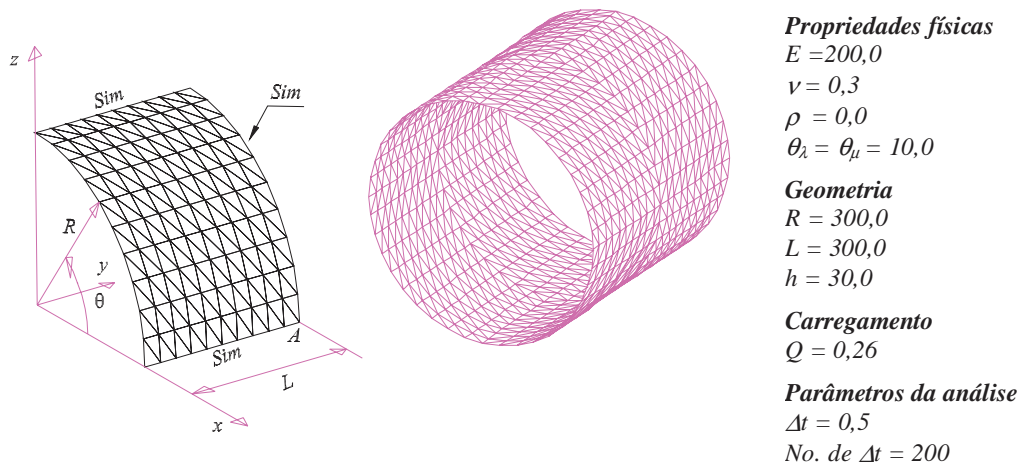


FIGURA 4.8 – Discretização, geometria e propriedades físicas da estrutura.

Os resultados para o deslocamento radial do ponto A são apresentados na figura 4.9 considerando-se $\rho = 0,0$. Semelhantemente ao segundo exemplo, a resposta do presente formulação é confrontada com a resposta analítica do problema, expressa por:

$$u(t) = \frac{PR^2}{Eh} (1 - e^{-t/\gamma})$$

onde P , R e h são respectivamente a pressão aplicada, o raio e a espessura do cilindro. O tempo $\gamma = \theta_\lambda = \theta_\mu$ é o parâmetro representativo da viscosidade. Na análise com o elemento finito FFDKT utilizou-se uma malha com $10 \times 10 \times 2$ elementos.

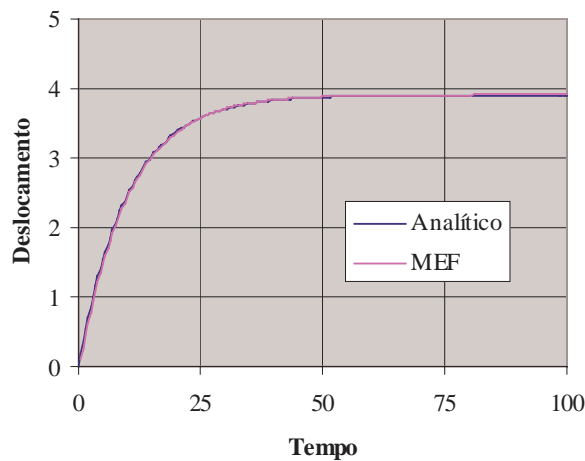


FIGURA 4.9 – Deslocamento radial do ponto A.

Observando-se a figura 4.9 nota-se a boa concordância entre os resultados numérico e analítico.

4.2.3.4 EXEMPLO 04: Cilindro com paredes rígidas

Um cilindro com paredes rígidas em suas extremidades é solicitado por uma carga concentrada (fig. 4.10). Devido à simetria do problema, apenas um $\frac{1}{8}$ deste é discretizado. A deformada da estrutura para $t=20$ juntamente com a geometria, discretização e propriedades físicas são apresentadas na figura 4.10.

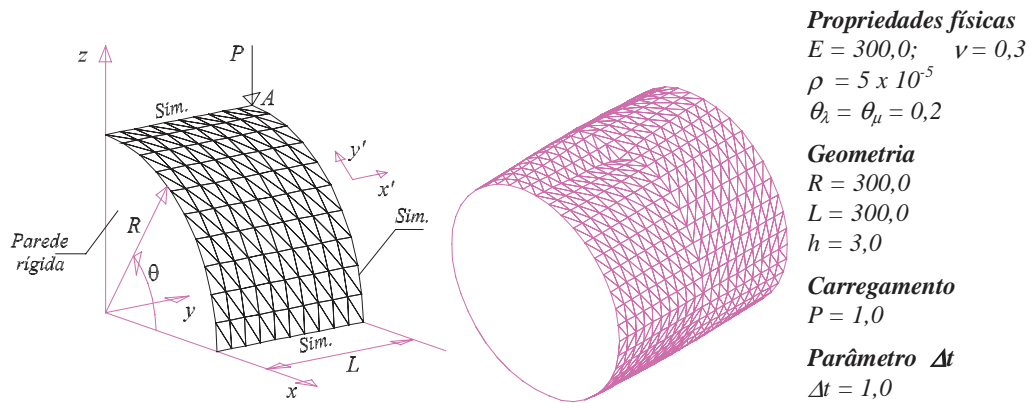


FIGURA 4.10 – Discretização, deformada (ampliada), geometria e propriedades físicas.

O resultado da presente formulação (FFDKT viscoso) é comparado com os resultados obtidos utilizando o software ANSYS. Uma análise com amortecimento dinâmico foi considerada, levando em consideração a conclusão dada pela expressão (4.7), ou seja, quando $\theta_\lambda = \theta_\mu$ é considerado, a matriz de amortecimento proporcional a rigidez é equivalente a matriz viscoelástica para o modelo de Kelvin. Os resultados para o deslocamento vertical no ponto A (ponto da carga) é apresentado na figura 4.11.

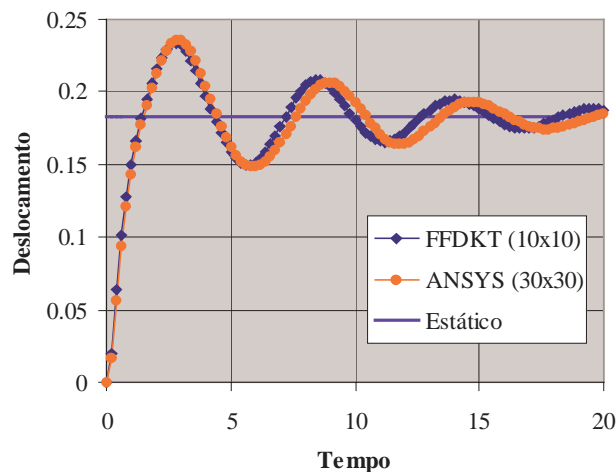


FIGURA 4.11 – Deslocamento do ponto A.

A resposta do presente modelo é confrontada com a resposta do elemento de casca Shell63 do sistema ANSYS que utiliza uma malha mais refinada com 30x30x2 elementos, enquanto o elemento FDKT utiliza uma malha com 10x10x2 elementos. Está bastante claro que uma análise viscosa simples (quase-estática ou dinâmica) pode ser feita por qualquer programa que apresente pacotes para análises dinâmicas.

4.3 FORMULAÇÃO VISCOELÁSTICA (Boltzmann)

Tendo em vista que nos objetivos propostos para o trabalho as forças inerciais não são consideradas, o termo referente à aceleração, por simplicidade, não será incluído na formulação viscoelástica específica para o modelo de Boltzmann. O desenvolvimento desta, segue os mesmos princípios adotados para a formulação viscoelastodinâmica com o modelo de Kelvin descrito anteriormente. Assim, a representação viscoelástica (particularizada para o modelo de Boltzmann) de um corpo em equilíbrio via MEF, pode ser obtida a partir da imposição da relação constitutiva viscosa (2.18) sobre a representação integral (3.4), ou seja,

$$\int_{\Gamma} \delta u_i p_i d\Gamma - \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \frac{\gamma E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega = 0 \quad (4.12)$$

A quarta integral pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \dot{\sigma}_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} \delta u_{i,j} \dot{\sigma}_{ij} d\Omega \quad (4.13)$$

Integrando-se por partes a equação (4.13) encontra-se:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \dot{\sigma}_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta u_i \dot{\sigma}_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \delta u_i \dot{\sigma}_{ij,j} d\Omega \quad (4.14)$$

Sabendo-se que $\dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{p}_i$ e $\dot{\sigma}_{ij,j} = -\dot{b}_i$ (derivada da equação de equilíbrio estática em relação ao tempo) a expressão (4.14) torna-se:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \dot{\sigma}_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta u_i \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i \dot{b}_i d\Omega \quad (4.15)$$

Substituindo a expressão (4.15) na equação integral (4.12) obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \delta u_i p_i d\Gamma - \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \frac{\gamma E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \\ & \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \delta u_i \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i \dot{b}_i d\Omega \right] + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (4.16)$$

A expressão (4.16) é a representação integral viscoelástica que leva em consideração o modelo reológico de Boltzmann. Note que a 1ª, 2ª e 3ª integrais são as mesmas apresentadas na formulação elastostática e podem ser solucionadas seguindo o mesmo princípio. A terceira integral é responsável pelo comportamento viscoso. Já a quarta e a quinta integrais são responsáveis pelo comportamento instantâneo, podendo contribuir também para o comportamento viscoso caso ocorram variações das solicitações com o tempo. Em geral, como o peso próprio não varia com o tempo e já existia antes da aplicação das cargas, pode-se considerar nestas situações $\dot{b}_i = 0$ e conseqüentemente a quinta integral se anula.

4.3.1 Tratamento algébrico para a representação integral

Elementos finitos são empregados para discretizar o sólido, transformando a expressão (4.16) em uma equação algébrica. Assim, o domínio do corpo Ω é discretizado com n_e elementos finitos Ω_e (fig. 3.1). Parametrizando-se as variáveis em relação aos seus valores nodais, utilizando-se adequadas funções interpoladoras, tem-se:

$$\begin{aligned} u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha & \Rightarrow & \quad \varepsilon_{ij} = \phi_{,j}^\alpha U_i^\alpha \\ \delta u_i &= \phi^\alpha \delta U_i^\alpha & \Rightarrow & \quad \delta \varepsilon_{ij} = \phi_{,j}^\alpha \delta U_i^\alpha \\ \dot{u}_i &= \phi^\alpha \dot{U}_i^\alpha & \Rightarrow & \quad \dot{\varepsilon}_{ij} = \phi_{,j}^\alpha \dot{U}_i^\alpha \\ b_i &= \phi^\alpha b_i^\alpha & \Rightarrow & \quad \dot{b}_i = \phi^\alpha \dot{b}_i^\alpha \\ p_i &= \tilde{\phi}^\alpha P_i^\alpha & \Rightarrow & \quad \dot{p}_i = \tilde{\phi}^\alpha \dot{P}_i^\alpha \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde $\tilde{\phi}$ é a função de forma adotada para interpolar as forças de superfície, ϕ são as funções de forma adotadas para interpolar o restante das variáveis e o subscrito α refere-se aos nós do elemento finito. Note que para a aproximação no contorno α corresponde ao número de

nós pertencente a superfície onde p_i e \dot{p}_i são aproximados. Os termos U_i^α , \dot{U}_i^α , δU_i^α , P_i^α , \dot{P}_i^α , b_i^α e \dot{b}_i^α são valores nodais de deslocamento, velocidade, deslocamento virtual, forças de superfície, velocidade de força de superfície, forças volumétricas e velocidade de forças volumétricas, respectivamente. Substituindo-se as expressões em (4.17) na representação integral em (4.16) encontra-se:

$$\begin{aligned} \delta U_i^\alpha & \left[\sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta - \sum_{e=1}^{n_e} \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e U_l^\beta - \right. \\ & \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\mathcal{E}_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e \dot{U}_l^\beta + \sum_{s=1}^{n_s} \frac{\mathcal{E}_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s \dot{P}_i^\beta + \\ & \left. \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\mathcal{E}_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e \dot{b}_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e b_i^\beta \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde n_s é o número de superfícies solicitadas. Note que os deslocamentos virtuais δU_i^α presentes na expressão (4.18) podem ser quaisquer, logo, para que a igualdade seja verificada tem-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta - \sum_{e=1}^{n_e} \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e U_l^\beta - \\ & \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\mathcal{E}_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e \dot{U}_l^\beta + \sum_{s=1}^{n_s} \frac{\mathcal{E}_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s \dot{P}_i^\beta + \\ & \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\mathcal{E}_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e \dot{b}_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e b_i^\beta = 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

Rearranjando a equação (4.19), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{e=1}^{n_e} \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e U_l^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\mathcal{E}_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^\alpha C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^\beta d\Omega_e \dot{U}_l^\beta = \\ & \sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s P_i^\beta + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e b_i^\beta + \sum_{s=1}^{n_s} \frac{\mathcal{E}_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma_s} \phi^\alpha \tilde{\phi}^\beta d\Gamma_s \dot{P}_i^\beta + \\ & \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\mathcal{E}_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi^\alpha \phi^\beta d\Omega_e \dot{b}_i^\beta \end{aligned} \quad (4.20)$$

Note que a primeira e a segunda integrais são iguais e correspondem, a não ser pela ausência do módulo de elasticidade, à matriz de rigidez usualmente empregada no MEF. A expressão (4.20) pode ser escrita em uma forma matricial como:

$$KU(t) + V\dot{U}(t) = LP(t) + Bb(t) + \bar{L}\dot{P}(t) + \bar{B}\dot{b}(t) \quad (4.21)$$

onde t representa o tempo, K é a nova matriz de rigidez da estrutura, V a matriz referente ao comportamento viscoso, L e \bar{L} são as matrizes “Lumping” referente respectivamente a forças de superfície e sua velocidade. Os termos B e \bar{B} são matrizes referente as forças volumétricas e a sua respectiva velocidade. Estas matrizes ficam definidas como:

$$\begin{aligned} K &= \sum_{e=1}^{n_e} \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^{\alpha} C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^{\beta} d\Omega_e \\ V &= \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\gamma E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi_{,j}^{\alpha} C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^{\beta} d\Omega_e \\ L &= \sum_{s=1}^{n_s} \int_{\Gamma_s} \phi^{\alpha} \tilde{\phi}^{\beta} d\Gamma_s \\ B &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \phi^{\alpha} \phi^{\beta} d\Omega_e b_i^{\beta} \\ \bar{L} &= \sum_{s=1}^{n_s} \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma_s} \phi^{\alpha} \tilde{\phi}^{\beta} d\Gamma_s \\ \bar{B} &= \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega_e} \phi^{\alpha} \phi^{\beta} d\Omega_e \end{aligned} \quad (4.22)$$

Para resolver a equação temporal (4.22) utiliza-se um adequado procedimento de integração no tempo, como será visto no próximo item.

4.3.2 Integração temporal numérica

Como a equação diferencial a ser integrada é linear, pois o termo referente à aceleração não foi considerado, esta será integrada utilizando-se um simples algoritmo de integração temporal com aproximação linear. Assim, as velocidades presentes na representação algébrica ficam escritas como:

$$\dot{U}_{s+1} = \frac{(U_{s+1} - U_s)}{\Delta t} \quad (4.23a)$$

$$\dot{P}_{s+1} = \frac{(P_{s+1} - P_s)}{\Delta t} \quad (4.23b)$$

$$\dot{b}_{s+1} = \frac{(b_{s+1} - b_s)}{\Delta t} \quad (4.23c)$$

onde $s+1$ refere-se ao instante atual e Δt o incremento de tempo adotado. Aplicando-se as expressões das velocidades definidas em (4.23) na expressão (4.21), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\bar{K}U_{s+1} = \bar{F}_{s+1} \quad (4.24)$$

sendo

$$\bar{K} = [\Delta t K + V] \quad (4.25a)$$

$$\bar{F}_{s+1} = [\Delta t L + \bar{L}]P_{s+1} + [\Delta t B + \bar{B}]b_{s+1} + VU_s - L\bar{P}_s - \bar{B}b_s \quad (4.25b)$$

Impondo-se as condições de contorno, como usualmente é feito no método dos elementos finitos, pode-se resolver o sistema linear apresentado em (4.24), obtendo assim os deslocamentos para o passo de tempo atual. Encontrado os deslocamentos no instante $s+1$, determina-se a velocidade \dot{U}_{s+1} através das expressões (4.23a). Com todas as incógnitas do problema de contorno determinadas no passo atual, parte-se para encontrar as tensões totais. Estas podem ser obtidas a partir da equação (2.18), rescrita como:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} C_{ij}^{lm} \phi_{,m}^{\alpha} (U_l^{\alpha} + \gamma \dot{U}_l^{\alpha}) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{ij} \quad (4.26)$$

Para determinar as tensões totais é necessário adotar-se ainda uma aproximação para a taxa $\dot{\sigma}_{ij}$, semelhantemente as aproximações (4.23).

$$\dot{\sigma}_{s+1} = \frac{\sigma_{s+1} - \sigma_s}{\Delta t} \quad (4.27)$$

Substituindo-se a expressão (4.27) na equação (4.26), encontra-se:

$$\sigma_{s+1} = \left[\frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \hat{B}(U_{s+1} + \gamma \dot{U}_{s+1}) + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \frac{\sigma_s}{\Delta t} \right] \left/ \left[1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \right] \right. \quad (4.28)$$

onde \hat{B} é definido como o produto da matriz constitutiva (trecho instantâneo) pela matriz de deformação usualmente empregada na formulação do MEF. Deve-se notar a dificuldade em se obter as tensões elásticas e viscosas. Uma forma de resolver este problema seria escrever um novo sistema de equações, de maneira que fosse possível obter os deslocamentos instantâneos. Assim poderia separar o campo de deslocamento, tornando possível determinar as deformações instantâneas, viscoelásticas e conseqüentemente as tensões elásticas e viscosas do trecho de Kelvin. Porém, esta abordagem é computacionalmente dispendiosa. Felizmente, pode-se contornar esta dificuldade através de um procedimento simples e eficiente proposto em MESQUITA & CODA(2001a), onde as tensões elásticas são obtidas pela solução de uma equação diferencial. Esta equação diferencial é encontrada escrevendo-se a equação (2.12b) em forma de taxa, da seguinte maneira:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{el} = E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}^{ve} = \frac{1}{\gamma} \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}^{ve} = \frac{1}{\gamma} \sigma_{ij}^v \Rightarrow \sigma_{ij}^v = \gamma \dot{\sigma}_{ij}^{el} \quad (4.29)$$

A equação (4.29) expressa uma relação entre a taxa de tensão elástica e as tensões viscosas. Substituindo a equação (4.29) na relação (2.15) é possível encontrar o seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\gamma \dot{\sigma}_{ij}^{el} + \sigma_{ij}^{el} - \sigma_{ij} = 0 \quad (4.30)$$

A expressão (4.30) é um conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Para o caso particular de σ_{ij} constante com condições de contorno $\sigma_{ij}^{el}(t=0) = 0$ e $\sigma_{ij}^{el}(t=\infty) = \sigma_{ij}$ as equações diferenciais (4.30) apresentam a seguinte solução:

$$\sigma_{ij}^{el} = \sigma_{ij} (1 - e^{-t/\gamma}) \quad (4.31)$$

Porém, neste trabalho as tensões elásticas serão obtidas pela resolução das equações diferenciais (4.30) numericamente, tornando assim o processo genérico, possibilitando a imposição de solicitações e condições de contorno variando com relação ao tempo. Para isto adotaremos a seguinte aproximação para a taxa $\dot{\sigma}_{ij}^{el}$:

$$\dot{\sigma}_{s+1}^{el} = \frac{\sigma_{s+1}^{el} - \sigma_s^{el}}{\Delta t} \quad (4.32)$$

Substituindo a expressão (4.32) na equação diferencial (4.30) obtém-se a expressão para as tensões elásticas.

$$\sigma_{s+1}^{el} = \left(\sigma_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma_s^{el} \right) / \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (4.33)$$

Note que na expressão (4.33) necessita-se do valor das tensões totais que são calculadas através da equação (4.28). Assim, calculadas as tensões totais e as tensões elásticas, pode-se obter as tensões viscosas de uma forma simples e direta aplicando-se a relação (2.15). Resolvido o problema naquele passo, repete-se o procedimento descrito anteriormente para os próximos passos de tempo resolvendo-se assim todo o problema viscoso.

4.3.3 Exemplos numéricos

Os exemplos apresentados são iguais aos três primeiros exemplos propostos no item 4.2. Porém, por uma questão didática, as descrições dos problemas serão novamente enunciadas. Semelhantemente ao que foi feito no tem 4.2, a formulação descrita foi implementada no elemento finito de cascas FFDKT (Free Formulation Discrete Kirchoff Triangle) proposto inicialmente para análises lineares por MESQUITA(1998). Os parâmetros α e β do elemento de cascas mantêm-se os mesmos do item 4.2.

4.3.3.1 EXEMPLO 01: Peça tracionada

Uma peça submetida a um carregamento distribuído de tração aplicado em sua face livre é analisada. A estrutura de seção transversal quadrada é modelada e devido à sua simetria discretiza-se apenas a metade da mesma. A resposta obtida com o elemento FFDKT é confrontada com a reposta obtida com elementos de contorno (MEC) MESQUITA &

CODA(2001a) e com a resposta analítica. A geometria da estrutura juntamente com sua discretização e propriedades físicas são apresentadas na figura 4.12.

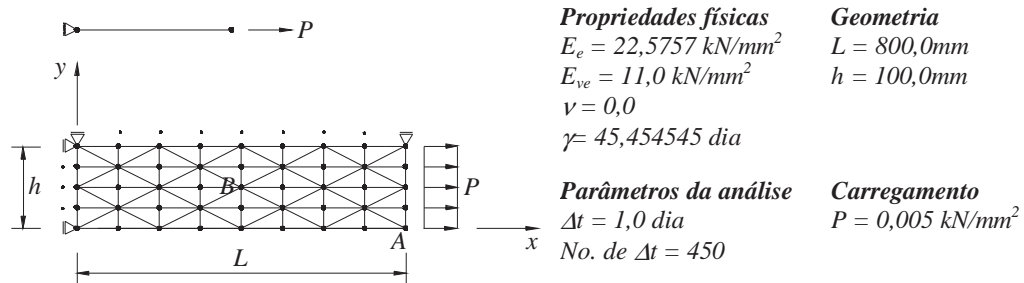


FIGURA 4.12 – Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura.

A resposta do deslocamento longitudinal do ponto A é apresentada na figura 4.13 confrontada com a resposta teórica obtida para um modelo uniaxial e pelo MEC. Na tentativa de simular o modelo uniaxial adotou-se coeficiente de Poisson nulo.

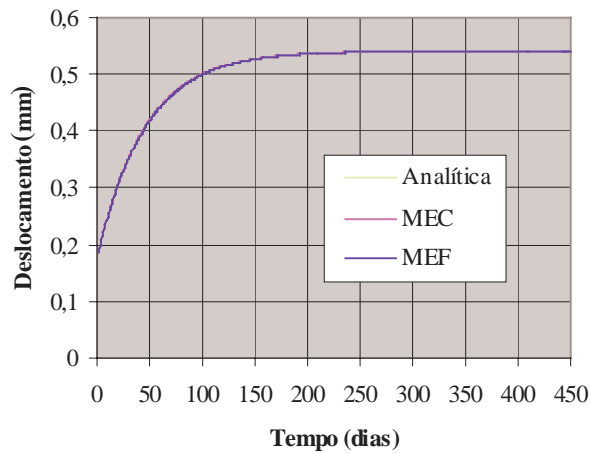


FIGURA 4.13 – Deslocamento longitudinal do ponto A.

Nota-se uma perfeita concordância entre os resultados obtidos pelo presente modelo e a resposta teórica, demonstrando a consistência do modelo em poder recuperar o caso uniaxial. Semelhantemente a figura 4.13, a resposta da tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} calculadas no ponto B são apresentadas na figura 4.14 juntamente com a resposta analítica e aquela obtida pelo MEC.

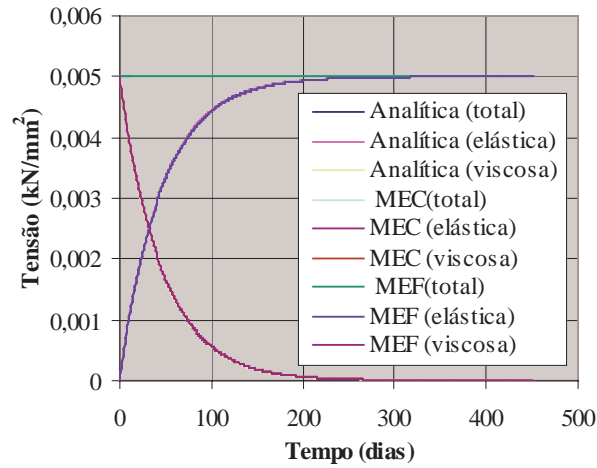


FIGURA 4.14 – Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B.

As mesmas observações feitas para a resposta em deslocamentos podem ser estendidas para as tensões. Na figura 4.15 pode-se observar o resultado do deslocamento longitudinal do ponto A para vários passos de tempo.

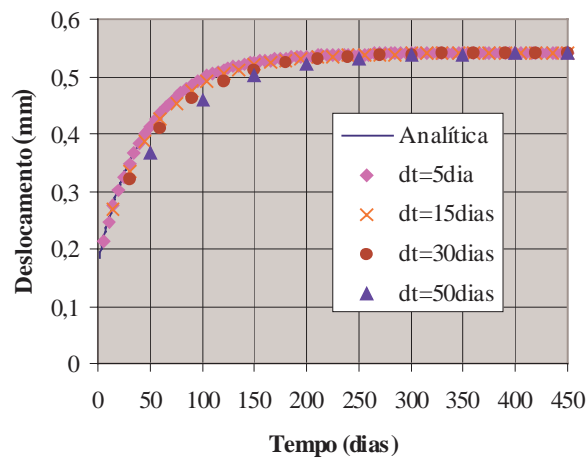


FIGURA 4.15 – Deslocamento longitudinal do ponto A.

Como pode ser observado, os resultados são estáveis e precisos até mesmo para grandes passos de tempo. A solução elastostática final é sempre alcançada para qualquer passo de tempo. A figura 4.16 apresenta o resultado do deslocamento longitudinal do ponto A para uma situação de carregamento mais geral. Durante os primeiro 199 passos de tempo a carga é mantida até que no instante $t=200$ dias ela é retirada.

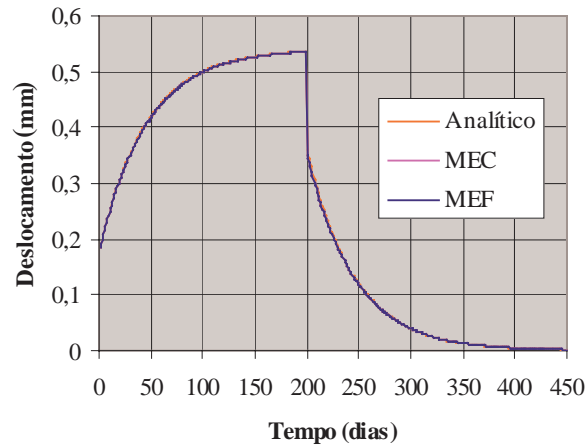


FIGURA 4.16 – Deslocamento longitudinal do ponto A.

O comportamento da solução numérica está de acordo com aquele apresentado pela solução analítica. É importante observar que o comportamento instantâneo é obtido diretamente do processo numérico.

4.3.3.2 EXEMPLO 02: Placa circular engastada

A placa circular apresentada na figura 4.17 possui vínculos de engastamento em toda a sua borda e é solicitada por um carregamento distribuído Q em toda a sua superfície. Devido à sua simetria discretiza-se apenas $1/4$ da mesma.

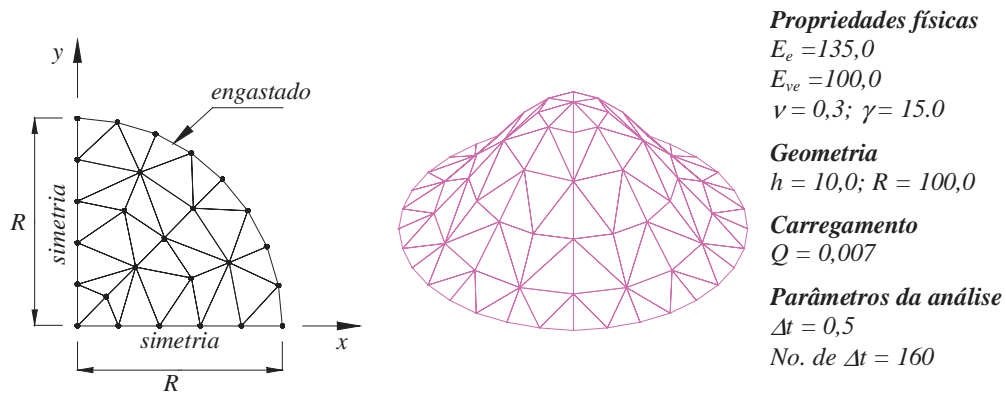


FIGURA 4.17 – Discretização, forma deformada, geometria e propriedades físicas da estrutura.

Os resultados do deslocamento transversal do centro da placa são apresentados na figura 4.18, utilizando-se uma malha com 32 elementos finitos, confrontados com a resposta analítica, que para o modelo de Boltzmann é escrita com:

$$w(r,t) = \frac{3Q(1-\nu^2)}{16h^3} (R^2 - r^2)^2 \left[\frac{1}{E_e} + \frac{1}{E_{ve}} (1 - e^{-t/\gamma}) \right]$$

onde os termos presentes na equação acima são os mesmos definidos na figura 4.17.

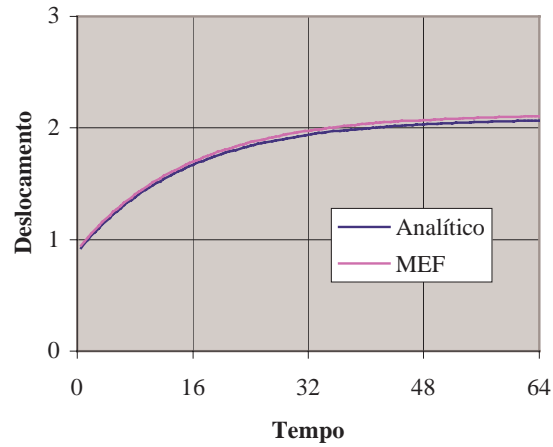


FIGURA 4.18– Deslocamento transversal do centro da placa.

Nota-se uma boa concordância entre o resultado obtido por elementos finitos e a resposta analítica. A pequena diferença na resposta é devido à aproximação da geometria. Mesmo assim, o comportamento no tempo é muito bom.

4.3.3.3 EXEMPLO 03: Casca cilíndrica sob pressão interna

Um cilindro com as extremidades livres é solicitado por uma pressão interna uniforme, figura 4.19. Fazendo-se uso da simetria do problema discretiza-se apenas 1/8 do mesmo. A geometria da estrutura, discretização e propriedades físicas são apresentadas na figura 4.19

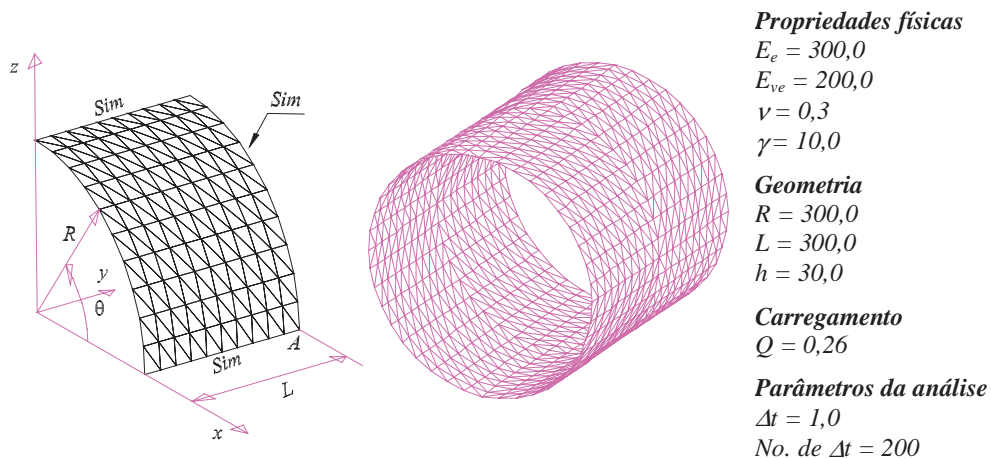


FIGURA 4.19 - Discretização, geometria e propriedades físicas da estrutura.

Os resultados para o deslocamento radial do ponto A são apresentados na figura 4.20. Semelhantemente ao segundo exemplo, a resposta da presente formulação é confrontada com a resposta analítica do problema.

$$u(t) = \frac{PR^2}{h} \left[\frac{1}{E_e} + \frac{1}{E_{ve}} (1 - e^{-t/\gamma}) \right]$$

Na análise com o elemento finito FFDKT utilizou-se uma malha com 10x10x2 elementos.

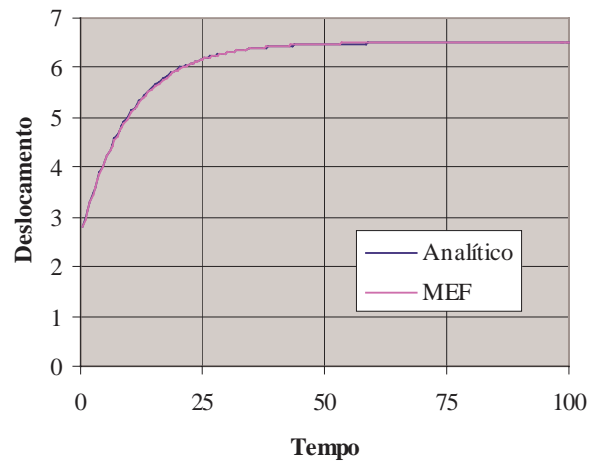


FIGURA 4.20 – Deslocamento radial do ponto A.

Observando-se a figura 4.20 nota-se novamente uma perfeita concordância entre os resultados numérico e analítico.

Capítulo 5

FORMULAÇÕES VISCOELÁSTICAS DO MEC

5.1 INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores foram propostos novos procedimentos para ambos os métodos dos elementos finitos e elementos de contorno para a solução de problemas viscoelásticos (quase-estáticos e dinâmicos), que já foram publicados em recentes trabalhos (veja MESQUITA *et al.*(2001), MESQUITA & CODA(2002a), MESQUITA & CODA(2001a), MESQUITA & CODA(2001b) e MESQUITA & CODA(2002c)). Estas formulações são baseadas em relações constitutivas diferenciais viscoelásticas, que aplicadas na equação de movimento dão origem a sistemas de equações diferenciais que devem ser resolvidos com a adoção de adequados algoritmos de integração temporal. Esta nova forma de tratar o problema, permite, de maneira simples, aplicar cargas e condições de contorno que variam ao longo do tempo, além de se apresentarem mais estáveis, mais precisas e computacionalmente mais vantajosas que as abordagens clássicas.

O procedimento tem como ponto de partida a técnica dos resíduos ponderados aplicada sobre a equação de equilíbrio. Este já foi totalmente exposto para o MEF no capítulo 4. Semelhantemente, pretende-se neste capítulo apresentar as formulações viscoelásticas (com uma abordagem inicial a análises dinâmicas) específicas para o método dos elementos de contorno. Inicialmente são apresentadas as formulações onde o termo viscoso é definido por integrais de domínio. Estas integrais de domínio apresentam singularidades que devem ser solucionadas com células internas e técnicas especiais de integração tal como as encontradas nos trabalhos de ALIABADI *et al.*(1985), GUIGGIANI *et al.*(1991), MI & ALIABADI(1992) e LEITÃO *et al.*(1995). Posteriormente, apresentam-se formulações viscoelásticas com representações integrais apenas no contorno, evitando o uso de células

internas. Esta abordagem permite executar análises viscoelásticas discretizando-se apenas o contorno do corpo analisado, além de evitar as indesejáveis integrais de domínio que apresentam singularidades e cujo tratamento requer um alto custo computacional. Este aperfeiçoamento é muito importante porque reduz a quantidade de variáveis a serem computadas e torna exequível o tratamento de corpos viscoelásticos infinitos e semi-infinitos submetido a carregamentos e/ou sujeito à extração de materiais, tal como aqueles encontrados nos problemas de escavações reforçadas. Além disso, todas as boas características (tais como: estabilidade e precisão) das formulações com termo viscoso de domínio foram preservadas, tornando o MEC viscoelástico uma ferramenta mais elegante. No final da apresentação de cada formulação são apresentados exemplos numéricos que servem para validar as formulações e demonstrar a sua eficiência.

5.2 FORMULAÇÃO VISCOELASTODINÂMICA: *Representação de domínio (Kelvin)*

Para se encontrar a equação integral apropriada para o problema em consideração e as correspondentes relações algébricas para a formulação de elementos de contorno, deve-se aplicar a relação constitutiva, específica para o modelo reológico que se queira considerar, sobre a representação integral (3.15). O modelo que será levado em consideração é o de Kelvin-Voigt e sua relação constitutiva é expressa pela equação (2.9a). Cosequentemente, substituindo-se a expressão reológica do modelo na representação integral (3.15), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (5.1)$$

onde ε_{kij}^* é a solução fundamental em deformações expressa por:

$$\varepsilon_{kij}^* = \frac{-1}{8\alpha\pi(1-\nu)Gr^\alpha} \left[(1-2\nu)(r_{,j} \delta_{ki} + r_{,i} \delta_{kj}) - r_{,k} \delta_{ij} + \beta r_{,k} r_{,i} r_{,j} \right] \quad (5.2)$$

sendo $(\alpha, \beta) = (1,2)$ para o caso 2D (estado plano de deformações) e $(\alpha, \beta) = (2,3)$ para o problema tridimensional. Sabendo-se que $\varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j}$, logo a equação (5.1) torna-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (5.3)$$

Aplicando-se integração por partes na segunda integral da equação (5.3), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega = 0 \quad (5.4)$$

A terceira integral pode ser reescrita fazendo-se uso da equação de equilíbrio fundamental, definida em (3.20). Aplicando-se a equação (3.20) em (5.4), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac e as técnicas de integração singular, sabendo-se que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$, encontra-se:

$$\overline{C}_{ki} u_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \quad (5.5)$$

O termo \overline{C}_{ki} é o mesmo presente na formulação elastodinâmica expressa pela equação (3.21). A equação (5.5) é a representação integral da formulação viscoelastodinâmica do MEC, via matriz de massa, que leva em consideração o modelo reológico de Kelvin-Voigt. Note que a única diferença desta representação para a representação elastodinâmica é a presença da terceira integral, responsável pelo comportamento viscoso. Esta integral apresenta singularidade do tipo $1/r$ para o caso bidimensional e $1/r^2$ para o caso tridimensional e neste trabalho será tratada utilizando-se células e uma eficiente técnica de transformação de coordenadas apresentada no Anexo D.

5.2.1 Representação integral para tensões em pontos internos

Resolvido o problema de contorno parte-se agora para a determinação das tensões. Para pontos internos o termo $\overline{C}_{ki} = \delta_{ki}$ e consequentemente a equação integral (5.5) fica escrita como:

$$u_k(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} u_{ki}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \quad (5.6)$$

A representação integral para as deformações em pontos internos é obtida levando-se em consideração a hipótese de pequenas deformações, equação (3.24). As deformações são

obtidas de maneira análoga ao problema elastostático, entretanto cuidados especiais devem ser tomados na integral que tem como núcleo ε_{kij}^* . Esta deve ser diferenciada utilizando-se os conceitos de integrais singulares MIKHLIN(1962), BUI(1978), TELLES & BREBBIA(1982) e BREBBIA *et al.*(1984). Assim, diferenciando a equação (5.6) e aplicado esta na definição das deformações em (3.24), encontra-se:

$$\varepsilon_{ke}(p) = \int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \hat{t}_{keij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega - \hat{g}_{keij} \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}(p) + \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kei}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kei}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \quad (5.7)$$

Note que como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. Observe que a diferenciação da integral responsável pelo comportamento viscoso resultou em um termo adicional conhecido como termo livre. Este é melhor esclarecido no Anexo B que trata da derivação de integrais com domínios singulares. As tensões elásticas são obtidas de forma trivial, aplicando-se a relação constitutiva elástica apresentada na equação (2.5a) sobre a definição das deformações expressa em (5.7), de maneira que:

$$\sigma_{\rho q}^e(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma d\Omega - \int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega - g_{\rho qij} \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}(p) + \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \quad (5.8)$$

Ressalta-se que a terceira integral em (5.8) apresenta singularidade do tipo $1/r^2$ para o caso bidimensional e $1/r^3$ para o caso tridimensional e deve ser computada no sentido de valor principal de Cauchy. O procedimento utilizado aqui para determiná-la é a técnica de subtração de singularidade exposta no Anexo D. O termo $\bar{t}_{\rho qij}^*$ é definido como:

$$\bar{t}_{\rho qij}^* = \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\beta} \left[(1-2\nu) \left\{ \delta_{\rho i} \delta_{qj} + \delta_{qi} \delta_{\rho j} - \delta_{\rho q} \delta_{ji} + \beta \delta_{\rho q} r_{,j} r_{,i} \right\} + \beta \nu \left(\delta_{\rho j} r_{,q} r_{,i} + \delta_{qi} r_{,\rho} r_{,j} + \delta_{\rho i} r_{,q} r_{,j} + \delta_{qj} r_{,\rho} r_{,i} \right) + \beta \delta_{ji} r_{,\rho} r_{,q} - \beta \varpi r_{,\rho} r_{,i} r_{,j} r_{,q} \right] \quad (5.9a)$$

onde $(\alpha, \beta, \varpi) = (1, 2, 4)$ para o caso bidimensional e $(\alpha, \beta, \varpi) = (2, 3, 5)$ para o tridimensional. Já o termo livre fica expresso como:

$$\text{Para 2D} \quad g_{\rho qij} = \frac{-1}{8(1-\nu)} \left[(8\nu-6)\delta_{\rho i}\delta_{qj} + (1-4\nu)\delta_{ij}\delta_{\rho q} \right] \quad (5.9b)$$

$$\text{Para 3D} \quad g_{\rho qij} = \frac{-1}{15(1-\nu)} \left[(10\nu-8)\delta_{\rho i}\delta_{qj} + (1-5\nu)\delta_{ij}\delta_{\rho q} \right] \quad (5.9c)$$

A tensão total pode ser facilmente obtida aplicando-se a relação (2.4) na equação integral das tensões elásticas em (5.8).

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) - \sigma_{\rho q}^v(p) = & \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma d\Omega - \int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} d\Omega - g_{\rho qij} \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}(p) + \\ & \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* b_i d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \end{aligned} \quad (5.10)$$

Sabendo-se que a $\sigma_{\rho q}^v = \delta_{\rho i}\delta_{qj}\sigma_{ij}^v = \delta_{\rho i}\delta_{qj}\eta_{ij}^{lm}\dot{\epsilon}_{lm}$, a tensão viscosa apresentada no lado esquerdo da equação integral pode ser reunida com o termo livre, explicitando-se as tensões totais.

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) = & \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma d\Omega - \int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} d\Omega - \bar{g}_{\rho qij} \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}(p) + \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* b_i d\Omega - \\ & \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \rho \ddot{u}_i d\Omega \end{aligned} \quad (5.11)$$

Assim, fazendo-se uso da expressão (5.11) é possível computar as tensões totais. Logo, obtida as tensões elásticas e totais as tensões viscosas são encontradas de uma forma simples e direta aplicando-se a relação (2.4). Note que o termo livre em (5.11) foi modificado e para a representação integral das tensões totais ele é definido pela seguinte expressão:

$$\text{Para 2D} \quad \bar{g}_{\rho qij} = \frac{-1}{8(1-\nu)} \left[2\delta_{\rho i}\delta_{qj} + (1-4\nu)\delta_{ij}\delta_{\rho q} \right] \quad (5.12a)$$

$$\text{Para 3D} \quad \bar{g}_{\rho qij} = \frac{-1}{15(1-\nu)} \left[(7-5\nu)\delta_{\rho i}\delta_{qj} + (1-5\nu)\delta_{ij}\delta_{\rho q} \right] \quad (5.12b)$$

5.2.2 Tratamento algébrico para as representações integrais

Para se transformar as equações integrais definidas anteriormente em equações algébricas, deve-se dividir o contorno do corpo Γ em n_e elementos de contorno Γ_e e seu domínio Ω com n_c células Ω_c (fig. 3.3). As variáveis do problema são aproximadas,

parametrizando-as com relação aos seus valores nodais, fazendo-se uso de funções interpoladoras apropriadas, aplicadas sobre os elementos de contorno e sobre as células.

$$\begin{aligned}
p_i &= \phi^\alpha P_i^\alpha \\
u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha \\
b_i &= \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} b_i^{\tilde{\alpha}} \\
\eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} &= \eta_{ij}^{lm} \dot{u}_{l,m} = \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}} \dot{U}_l^{\tilde{\alpha}} \\
\dot{u}_i &= \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} \dot{U}_i^{\tilde{\alpha}}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

onde ϕ e $\tilde{\phi}$ são respectivamente as funções de forma adotadas para interpolar os elementos de contorno e as células e os subscritos α e $\tilde{\alpha}$ referem-se ao nó do elemento de contorno e da célula. Os termos P_i^α , U_i^α , $b_i^{\tilde{\alpha}}$, $\dot{U}_i^{\tilde{\alpha}}$ e $\ddot{U}_i^{\tilde{\alpha}}$ são valores nodais de forças de superfície, deslocamentos, forças volumétricas, velocidade e aceleração, respectivamente. Consequentemente, as representações integrais de deslocamento e tensão podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{ki} U_i(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{U}_l^{\tilde{\alpha}} + \\
&\sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} u_{ki}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c b_i^{\tilde{\alpha}} - \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} u_{ki}^* \rho \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{U}_i^{\tilde{\alpha}}
\end{aligned} \tag{5.14a}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho q}^e(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{t}_{\rho qij}^* \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{U}_l^{\tilde{\alpha}} - \\
&\sum_{c=1}^{n_c} \frac{\bar{g}_{\rho qij}}{n_p} \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}}(p) \dot{U}_l^{\tilde{\alpha}} + \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c b_i^{\tilde{\alpha}} - \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \rho \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{U}_i^{\tilde{\alpha}}
\end{aligned} \tag{5.14b}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho q}(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{t}_{\rho qij}^* \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{U}_l^{\tilde{\alpha}} - \\
&\sum_{c=1}^{n_c} \frac{\bar{g}_{\rho qij}}{n_p} \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}}(p) \dot{U}_l^{\tilde{\alpha}} + \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c b_i^{\tilde{\alpha}} - \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \rho \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{U}_i^{\tilde{\alpha}}
\end{aligned} \tag{5.14c}$$

Deve-se ressaltar que o termo livre apresentado nas equações integrais de deformação e tensão deve ser calculado como a média aritmética dos termos livres referentes às células que chegam ao ponto fonte p , sendo n_p o número de células associadas ao ponto fonte. Depois de

executar todas as integrais e escolher pontos fonte em igual número aos nós do problema, pode-se escrever os seguintes sistemas de equações diferenciais temporais:

$$HU(t) + V\dot{U}(t) + M\ddot{U}(t) = GP(t) + Bb(t) \quad (5.15a)$$

$$\sigma^e(t) = \tilde{G}P(t) - \tilde{H}U(t) - \bar{V}\dot{U}(t) + \tilde{B}b(t) + \tilde{M}\ddot{U}(t) \quad (5.15b)$$

$$\sigma(t) = \tilde{G}P(t) - \tilde{H}U(t) - \tilde{V}\dot{U}(t) + \tilde{B}b(t) + \tilde{M}\ddot{U}(t) \quad (5.15c)$$

onde t representa o tempo. Ressalta-se que a matriz H é obtida através da associação do termo \bar{C}_{ki} com a matriz referente a integral de contorno cuja o núcleo é p_{ki}^* , como usualmente é feito no método dos elementos de contorno. Assim como, as matrizes viscosas V , \bar{V} e \tilde{V} são encontradas a partir da junção do termo livre com a integral de domínio referente a parte viscosa.

5.2.3 Integração temporal numérica

Para se resolver o problema, deve-se integrar no tempo o sistema de equações apresentado na equação (5.15a). Para isto, pode-se fazer uso de técnicas de integração temporal, tais como Houbolt, Newmark ou Wilson θ , que são usualmente empregadas em análises dinâmicas. O algoritmo utilizado será o de Houbolt, que segundo as referências CARRER & TELLES(1991), KOTONI & BESKOS(1992) e CODA *et al.*(1996) é mais adequado para tratar problemas dinâmicos com elementos de contorno, via matriz de massa. Suas expressões para a velocidade e aceleração são definidas por:

$$\dot{U}_{s+1} = \frac{1}{6\Delta t} (11U_{s+1} - 18U_s + 9U_{s-1} - 2U_{s-2}) \quad (5.16a)$$

$$\ddot{U}_{s+1} = \frac{1}{\Delta t^2} (2U_{s+1} - 5U_s + 4U_{s-1} - U_{s-2}) \quad (5.16b)$$

Aplicando a expressão da velocidade e aceleração do algoritmo de Houbolt na equação (5.15a), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\bar{H}U_{s+1} = GP_{s+1} + F_s \quad (5.17)$$

onde

$$\bar{H} = H + \frac{11}{6\Delta t}V + \frac{2}{\Delta t^2}M \quad (5.18a)$$

$$F_s = Bb_{s+1} + \frac{1}{6\Delta t}V(18U_s - 9U_{s-1} + 2U_{s-2}) + \frac{1}{\Delta t^2}M(5U_s - 4U_{s-1} + U_{s-2}) \quad (5.18b)$$

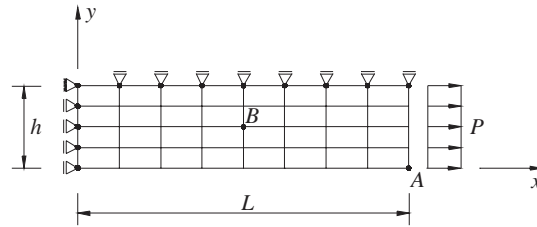
Impondo-se as condições de contorno, como usualmente é feito no método dos elementos de contorno, trocando-se as colunas das matrizes \bar{H} e G , pode-se resolver o sistema linear apresentado em (5.17), obtendo-se assim os deslocamentos e forças de superfícies para o passo de tempo atual. A velocidade e aceleração são obtidas diretamente, através das equações (5.16a) e (5.16b), respectivamente. Com todas as incógnitas do problema de contorno obtidas no passo atual, encontram-se as tensões nos pontos internos fazendo-se uso das expressões (5.15b), (5.15c). Resolvido o problema naquele passo, repete-se o procedimento descrito anteriormente para os próximos passos de tempo.

5.2.4 Exemplos numéricos

A formulação viscoelastodinâmica exposta neste item foi implementada em um elemento de contorno bidimensional de três nós. Esta foi introduzida em um programa já existente proposto inicialmente em CODA *et al.*(1997). Para realizar as integrações de domínio, utilizou-se células de oito nós. As singularidades presentes na representação integral (5.5) são evitadas fazendo-se uso de ponto fonte exterior ao domínio do problema. Já as singularidades presentes nas representações das tensões para pontos internos são determinadas pelo uso das técnicas de transformação de coordenadas e subtração de singularidade expostas no Anexo D.

5.2.4.1 EXEMPLO 01: Peça tracionada

O mesmo exemplo apresentado no item (4.2.3.1) para elementos finitos é aqui proposto. A geometria e as propriedades físicas são as mesmas apresentadas na figura 4.1. A discretização de elementos de contorno e a densidade de células utilizadas é apresentado na figura 5.1. Semelhantemente, fez-se uso da simetria do problema, discretizando-se apenas a metade da estrutura, considerando-se a situação de estado plano de tensão. O problema poderia ser analisado com uma densidade de malha muito menor, porém a malha foi escolhida similarmente àquelas usadas em referências com elementos finitos.

**FIGURA 5.1 – Discretização da estrutura.**

A resposta do deslocamento longitudinal do ponto A para $\rho = 0,0$ e $0,1 \text{ kN dia}^2/\text{mm}^4$ é apresentada na figura 5.2 confrontada com a resposta teórica obtida para um modelo uniaxial e pelo MEF com elementos de barra de dois nós. Para a resposta com elementos finitos, utilizou-se um único elemento para o problema quase-estático, enquanto que para a análise dinâmica foram empregados 4 elementos finitos. Na tentativa de simular o modelo uniaxial adotou-se coeficiente de Poisson zero e fez-se $\theta_\lambda = \theta_\mu$. Assim, é possível adotar o mesmo coeficiente viscoso em ambos os modelos, já que o modelo analítico possui apenas um

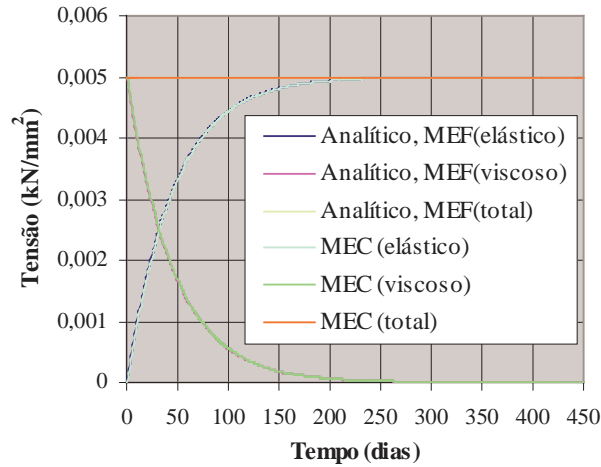


FIGURA 5.3 – Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B.

O ótimo comportamento observado para o MEF do capítulo anterior é aqui reproduzido para o MEC. Uma análise da estabilidade da formulação é apresentada na figura 5.4, onde são apresentados resultados do deslocamento vertical do ponto A, para vários passos de tempo.

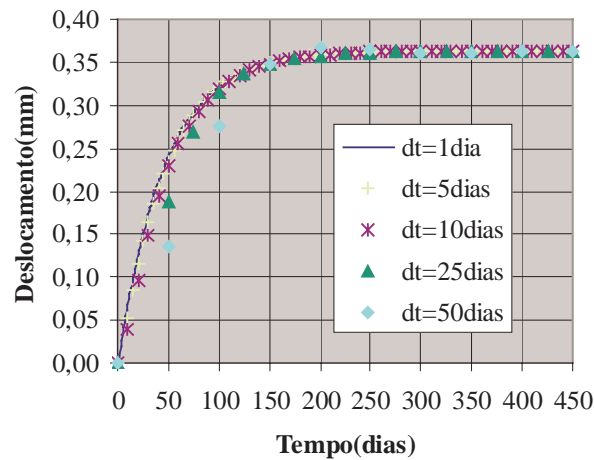


FIGURA 5.4 – Deslocamento vertical do ponto A para diversos Δt .

Pode-se observar que o procedimento proposto conduz ao mesmo valor final para qualquer passo de tempo escolhido. Como esperado, este valor final é o elastostático que deveria ser alcançado utilizando-se qualquer procedimento.

5.2.4.2 EXEMPLO 02: Cilindro sob pressão interna

Um cilindro de parede espessa submetido a uma pressão interna P é analisado. Devido a sua dupla simetria apenas 1/4 da estrutura é discretizada. Os mesmos elementos de contorno e células utilizados no primeiro exemplo foram utilizados neste exemplo. A geometria da estrutura juntamente com sua discretização e suas propriedades físicas são apresentadas na figura 5.5.

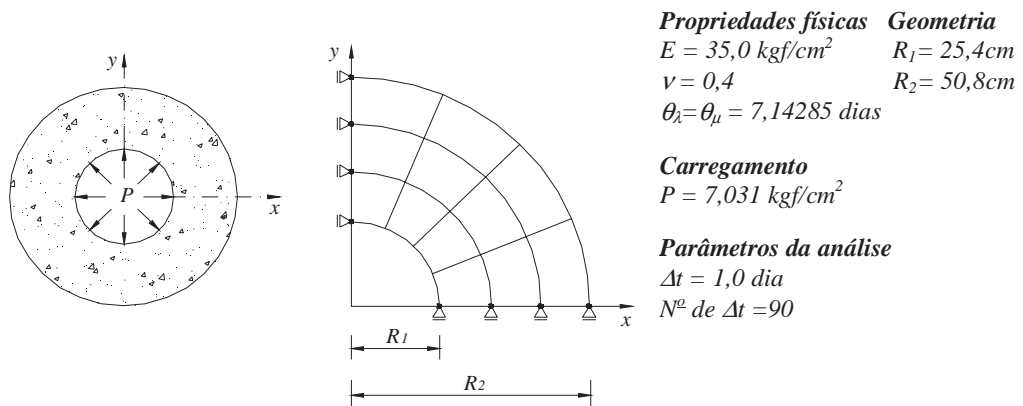


FIGURA 5.5 – Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura.

Os resultados do deslocamento radial, para a situação de estado plano de tensão, da parede interna e externa da estrutura são apresentados nas figuras 5.6 e 5.7, respectivamente. Com o propósito de descrever a generalidade do modelo proposto, o cilindro em consideração é analisado com diferentes valores de θ_μ e θ_λ .

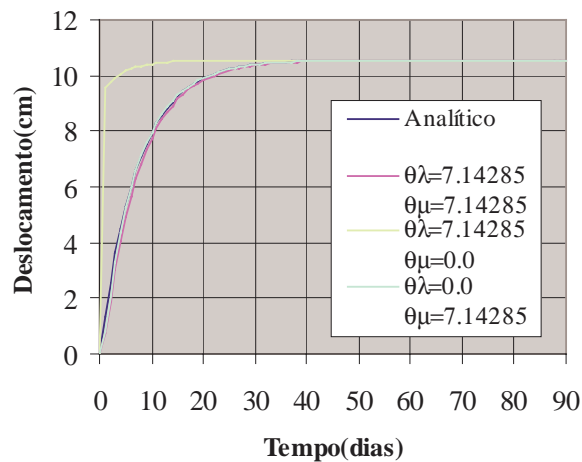


FIGURA 5.6 – Deslocamento radial da parede interna.

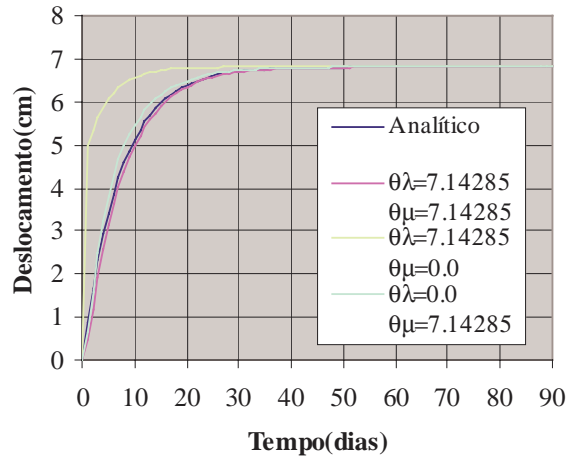


FIGURA 5.7 – Deslocamento radial da parede externa.

Pode-se perceber que θ_μ é o coeficiente mais importante para este problema, em comparação com θ_λ . Os resultados são fortemente dependentes deste parâmetro, enquanto que para θ_λ eles praticamente não variam. A dependência com relação ao tamanho do passo de tempo adotado pode ser analisada nas figuras 5.8 e 5.9. Nestas figuras as respostas numéricas são ambas obtidas para a situação de estado plano de deformação.

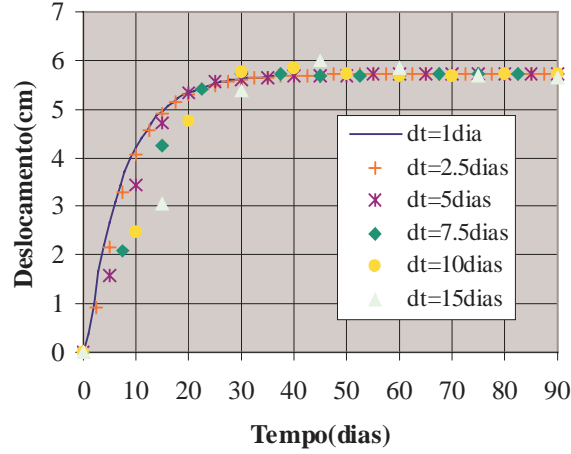


FIGURA 5.9 – Deslocamento radial da parede externa para diversos Δt .

Como pode ser observado, os resultados obtidos são bastante precisos até mesmo para grandes passos de tempo. Note que os valores computados para $\Delta t=10$ e 15 dias, durante um certo período de tempo, são maiores que a resposta final. Isto é uma consequência direta do procedimento de alta-ordem de Houbolt adotado e não devido a efeitos dinâmicos. Quando uma aproximação linear é empregada para executar a integração no tempo, apenas deslocamentos menores que a resposta final elástica são capturados para qualquer passo de tempo.

5.3 FORMULAÇÃO VISCOELÁSTICA: Representação de domínio (Boltzmann)

Com o propósito de desenvolver a representação integral do MEC com o termo viscoso no domínio, específica para o modelo de Boltzmann, impõe-se a relação constitutiva apropriada para o problema em consideração eq.(2.18) sobre a representação integral (3.15). Com a intenção de limitar o trabalho aos seus objetivos, análises quase-estáticas, despreza-se o termo referente à aceleração, de maneira que:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \tag{5.19}$$

Sabendo-se que $\varepsilon_{kij}^* E_e C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j}$ e que $\varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij} = u_{ki,j}^* \dot{\sigma}_{ij}$, logo, a equação (5.19) torna-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.20)$$

Aplicando-se integração por partes na segunda e na quarta integral da equação (5.20), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_i d\Omega \right] - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{\sigma}_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{\sigma}_{ij,j} d\Omega \right] + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.21)$$

A terceira e a sexta integral podem ser reescrita fazendo-se uso, respectivamente, da equação de equilíbrio fundamental eq.(3.20) e da equação de equilíbrio do problema real escrita em forma de taxas, expressa como:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = -\dot{b}_i \quad (5.22)$$

onde \dot{b}_i é a taxa de variação das componentes das forças volumétricas em relação ao tempo. Aplicando-se a equação (3.20) e (5.22) em (5.21), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac e as técnicas para integrais singulares, sabendo-se que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$ e que $\dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{p}_i$, encontra-se:

$$\bar{C}_{ki} u_i(p) = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \frac{E_e}{E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \gamma \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (5.23)$$

A equação (5.23) é a representação integral da formulação viscoelástica do MEC que leva em consideração o modelo reológico de Boltzmann. O termo \bar{C}_{ki} , a 1^a, 2^a e 6^a integrais

são os mesmos apresentados na formulação elastostática e podem ser solucionados seguindo os mesmos princípios. Note que a quarta e a quinta integrais são responsáveis pelo comportamento instantâneo. Estas podem contribuir também para o comportamento viscoso, caso ocorram variações das solitações com o tempo. Em geral, como o peso próprio não varia no tempo e já existia antes da aplicação das cargas, pode-se considerar $\dot{b}=0$ e consequentemente a quinta integral se anula. A terceira integral é totalmente responsável pelo comportamento viscoso. Esta integral apresenta singularidade do tipo $1/r$ para o caso bidimensional e $1/r^2$ para o caso tridimensional e neste trabalho será tratada utilizando-se células e uma eficiente técnica de transformação de coordenadas exposta no Anexo D.

5.3.1 Representação integral para tensões em pontos internos

Resolvido o problema de contorno parte-se agora para a determinação das tensões. Para pontos internos o termo $\bar{C}_{ki} = \delta_{ki}$ e consequentemente a equação integral (5.23) fica escrita como:

$$u_k(p) = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \frac{E_e}{E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \gamma \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (5.24)$$

Para obter a representação integral das tensões é necessário antes determinar as deformações. A representação integral para as deformações em pontos internos é obtida pela equação (3.24) para a situação de pequenas deformações. A expressão para as deformações é encontrada de maneira análoga ao problema elastostático, entretanto cuidados especiais devem ser tomados na integral que tem como núcleo ε_{kij}^* . Esta deve ser diferenciada utilizando-se os conceitos de integrais singulares MIKHLIN(1962), BUI(1978), TELLES & BREBBIA(1982) e BREBBIA *et al.*(1984). Assim, diferenciando a equação (5.24) e aplicado esta na definição das deformações em (3.24), encontra-se:

$$\varepsilon_{ke}(p) = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* u_i d\Gamma - \frac{E_e}{E_{ve}} \left[\int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{keij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \hat{g}_{keij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}(p) \right] + \gamma \left[\int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kei}^* \dot{b}_i d\Omega \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kei}^* b_i d\Omega \quad (5.25)$$

Note que como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. Observe que a diferenciação da integral responsável pelo comportamento viscoso resultou em um termo adicional conhecido como termo livre. Este é melhor esclarecido no Anexo B que trata da derivação de integrais com domínios singulares. As tensões totais são obtidas de forma trivial, aplicando-se a relação constitutiva do modelo apresentada na equação (2.18) sobre a definição das deformações expressa em (5.25), de maneira que:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) = & \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} d\Omega + g_{\rho qij} \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}(p) \right] + \\ & \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \dot{b}_i d\Omega \right] + \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* b_i d\Omega + \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \eta_{\rho q}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}(p) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{\rho q}(p) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Sabendo-se que $\eta_{\rho q}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}^{ve} = \delta_{\rho i} \delta_{qj} \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}^{ve}$, pode-se adicionar o penúltimo termo da equação integral (5.26) ao termo livre, obtendo-se a seguinte representação integral para as tensões totais:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) = & \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} d\Omega + \bar{g}_{\rho qij} \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}(p) \right] + \\ & \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \dot{b}_i d\Omega \right] + \int_{\Omega} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* b_i d\Omega - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{\rho q}(p) \end{aligned} \quad (5.27)$$

A equação (5.27) é a representação integral das tensões totais segundo o modelo de Boltzmann. Ressalta-se, semelhantemente as deformações, que a integral de domínio referente ao trecho viscoso (3ª integral) apresenta singularidade do tipo $1/r^2$ para o caso bidimensional e $1/r^3$ para o caso tridimensional e deve ser computada no sentido de valor principal. O procedimento utilizado aqui para determiná-la é a técnica de subtração de singularidade exposta no Anexo D. A solução fundamental $\bar{t}_{\rho qij}^*$ e o termo livre $\bar{g}_{\rho qij}$ são os mesmos definidos nas expressões (5.9a) e (5.12). Para o cálculo da tensão elástica $\sigma_{\rho q}^{el}$ e viscosa $\sigma_{\rho q}^v$ alguns cuidados devem ser tomados. Note que é possível encontrar algumas representações integrais tanto para as tensões elásticas $\sigma_{\rho q}^{el}$ como para as tensões viscosas $\sigma_{\rho q}^v$. Essas expressões, podem ser obtidas através de manipulações na expressão das tensões totais em (5.27) ou aplicando-se a representação integral das deformações totais sobre as relações constitutivas apresentadas em (2.12). Entretanto todas estas representações falham no

primeiro passo. Isto ocorre devido à dificuldade em se avaliar a velocidade naquele passo, pois no primeiro instante o deslocamento passado adotado para avaliar a velocidade é desconhecido e tomado como zero, o que não é correto. Neste modelo o deslocamento inicial deveria ser tomado como o instantâneo, o que não ocorre, provocando assim um erro no primeiro instante que se agrava a medida que se reduz o tamanho do passo de tempo. Observa-se ainda que as tensões totais não são afetadas por esta má avaliação da velocidade. Neste caso, ocorre que o erro produzido no cálculo das tensões elásticas $\sigma_{\rho q}^{el}$ e viscosas $\sigma_{\rho q}^v$ se cancelam não

onde ϕ e $\tilde{\phi}$ são respectivamente as funções de forma adotadas para interpolar os elementos de contorno e as células e os subscritos α e $\tilde{\alpha}$ referem-se aos nós do elemento de contorno e da célula. Os termos P_i^α , U_i^α , $b_i^{\tilde{\alpha}}$, \dot{P}_i^α , $\dot{U}_i^{\tilde{\alpha}}$ e $\dot{b}_i^{\tilde{\alpha}}$ são valores nodais de forças de superfície, deslocamentos, forças volumétricas e suas respectivas velocidades. Consequentemente, as representações integrais de deslocamento e tensão podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ki} U_i(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \\ &\frac{E_e}{E_{ve}} \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \varepsilon_{kij}^* \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{U}_i^{\tilde{\alpha}} + \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{P}_i^\alpha + \gamma \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} u_{ki}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{b}_i^{\tilde{\alpha}} + \\ &\frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} u_{ki}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c b_i^{\tilde{\alpha}} \end{aligned} \quad (5.29a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \\ &\frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \left[\sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{t}_{\rho qij}^* \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{U}_i^{\tilde{\alpha}} + \sum_{c=1}^{n_p} \frac{\bar{g}_{\rho qij}}{n_p} \eta_{ij}^{lm} \tilde{\phi}_{,m}^{\tilde{\alpha}}(p) \dot{U}_i^{\tilde{\alpha}} \right] + \\ &\frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{P}_i^\alpha + \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c \dot{b}_i^{\tilde{\alpha}} \right] + \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} d\Omega_c b_i^{\tilde{\alpha}} - \\ &\frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{\rho q}(p) \end{aligned} \quad (5.29b)$$

Deve-se ressaltar que o termo livre apresentado na equação integral de tensão deve ser calculado como a média aritmética dos termos livres das células que chegam ao ponto fonte p , sendo n_p o número de células associadas ao ponto fonte. Depois de executar todas as integrais e escolher pontos fonte em igual número aos nós do problema, pode-se escrever os seguintes sistemas de equações diferenciais temporais:

$$HU(t) = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} GP(t) - \frac{E_e}{E_{ve}} V\dot{U}(t) + \gamma G\dot{P}(t) + \gamma B\dot{b}(t) + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} Bb(t) \quad (5.30a)$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \tilde{G}P(t) - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H}U(t) - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \tilde{V}\dot{U}(t) + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{G}\dot{P}(t) + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{B}\dot{b}(t) + \\ &\tilde{B}b(t) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}(t) \end{aligned} \quad (5.30b)$$

onde t representa o tempo. Ressalta-se que a matriz H é obtida através da associação do termo \bar{C}_{ki} com a matriz referente a integral de contorno cuja o núcleo é p_{ki}^* , como usualmente é

feito no método dos elementos de contorno. Assim como, a matriz viscosa \tilde{V} é encontrada a partir da junção do termo livre com a integral de domínio referente a parte viscosa.

5.3.3 Integração temporal numérica

Para se resolver o problema viscoso, deve-se integrar no tempo o primeiro sistema de equações apresentado em (5.30). Para isto, pode-se fazer uso de técnicas de integração temporal, tais como Newmark e Houbolt, que são usualmente empregadas em análises dinâmicas. Como o termo referente à aceleração foi desprezado, restando apenas termos com primeira derivada em relação ao tempo, aplicou-se um algoritmo com aproximação linear para definir as velocidades.

$$\begin{aligned}\dot{U}_{s+1} &= \frac{U_{s+1} - U_s}{\Delta t} \\ \dot{P}_{s+1} &= \frac{P_{s+1} - P_s}{\Delta t} \\ \dot{b}_{s+1} &= \frac{b_{s+1} - b_s}{\Delta t} \\ \dot{\sigma}_{s+1} &= \frac{\sigma_{s+1} - \sigma_s}{\Delta t} \\ \dot{\sigma}_{s+1}^{el} &= \frac{\sigma_{s+1}^{el} - \sigma_s^{el}}{\Delta t}\end{aligned}\tag{5.31}$$

Aplicando a expressão da velocidade de deslocamento, de forças de superfície e de forças volumétricas apresentadas em (5.31) na primeira equação em (5.30), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\bar{H}U_{s+1} = \bar{G}P_{s+1} + F_s\tag{5.32}$$

onde

$$\bar{H} = H + \frac{E_e}{\Delta t E_{ve}} V\tag{5.33a}$$

$$\bar{G} = \left(\frac{\gamma}{\Delta t} + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \right) G\tag{5.33b}$$

$$F_s = \frac{E_e}{\Delta t E_{ve}} V U_s - \frac{\gamma}{\Delta t} G P_s + B \left[\left(\frac{\gamma}{\Delta t} + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \right) b_{s+1} - \frac{\gamma}{\Delta t} b_s \right] \quad (5.33c)$$

Impondo-se as condições de contorno, como usualmente é feito no método dos elementos de contorno, trocando-se as colunas das matrizes \bar{H} e \bar{G} , pode-se resolver o sistema linear apresentado em (5.32), obtendo-se assim os deslocamentos e forças de superfícies para o passo de tempo atual. Com todas as incógnitas do problema de contorno obtidas no passo atual, parte-se para a obtenção das tensões totais. Assim, obtidas os deslocamentos e as forças de superfície do problema de contorno no instante $s+1$, pode-se encontrar \dot{P} , \dot{U} e \dot{b} através das equações (5.31). Obtidas essas variáveis calculam-se as tensões totais fazendo-se uso da equação (5.30b) e da quarta equação em (5.31), de maneira que:

$$\sigma_{s+1} = \left(\tilde{G} P_{s+1} - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H} U_{s+1} - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \tilde{V} \dot{U}_{s+1} + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{G} \dot{P}_{s+1} + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{B} \dot{b}_{s+1} + \tilde{B} b_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sigma_s \right) \left/ \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \right) \right. \quad (5.34)$$

A tensão elástica referente a mola em paralelo com o amortecedor pode ser facilmente obtida aplicando-se a aproximação para a velocidade das tensões elásticas $\dot{\sigma}_{ij}^{el}$ apresentada em (5.31) na equação diferencial (4.30).

$$\sigma_{s+1}^{el} = \left(\sigma_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma_s^{el} \right) \left/ \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \right. \quad (5.35)$$

Note que na expressão (5.35) necessita-se do valor das tensões totais que são calculadas através da equação (5.34). Assim, calculadas as tensões totais e as tensões elásticas, pode-se obter as tensões viscosas de uma forma simples e direta aplicando-se a relação (2.15). Resolvido o problema naquele passo, repete-se o procedimento descrito anteriormente para os próximos passos de tempo resolvendo-se assim todo o problema viscoso.

5.3.4 Exemplos numéricos

Os mesmos elementos de contorno e células utilizados nos exemplos do item (5.2) são aqui empregados para validar a formulação. As integrais são evoluídas de forma similar aquelas do item (5.2), fazendo uso das mesmas técnicas numéricas para tratar os problemas de singularidade. Os exemplos utilizados são basicamente os mesmos, diferenciando-se apenas nas propriedades físicas do novo modelo (Boltzmann).

5.3.4.1 EXEMPLO 01: Peça tracionada

Este exemplo, descrito em itens anteriores, será aqui empregado novamente por se tratar de um “benchmarck”, muito utilizado para aferir modelos viscoelásticos. Sua resposta analítica é simples e facilmente obtida. Os parâmetros para análise do problema estão descritos na figura 4.12. Já a discretização com elementos de contorno e a densidade de células utilizada é a mesma apresentada na figura 5.1. A resposta do deslocamento longitudinal do ponto *A* é apresentada na figura 5.10 confrontada com a resposta teórica obtida para um modelo uniaxial. Na tentativa de simular o modelo uniaxial adotou-se um coeficiente de Poisson zero e o mesmo coeficiente viscoso em ambos os modelos.

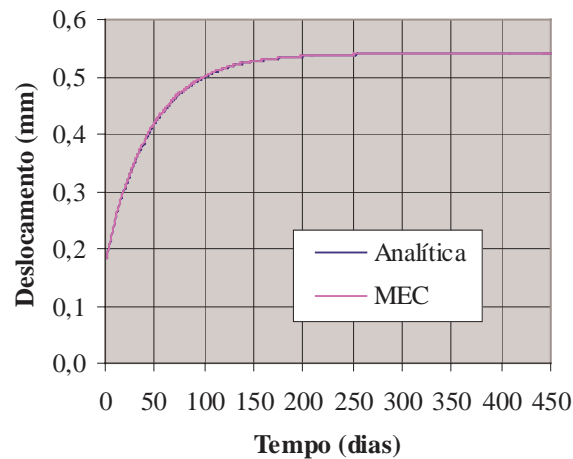


FIGURA 5.10 – Deslocamento longitudinal do ponto *A*.

Observa-se que os resultados estão em concordância. Semelhantemente a figura 5.10, a resposta da tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} extraídas no ponto *B* são apresentadas na figura 5.11, juntamente com a resposta analítica para ambas as tensões.

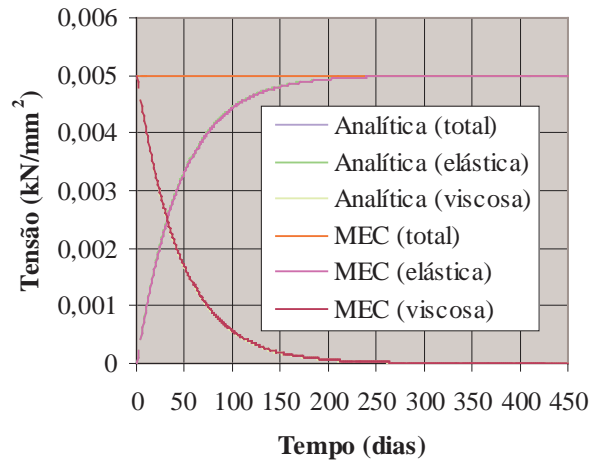


FIGURA 5.11 – Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B.

Semelhantemente a formulação viscoelástica do MEF observa-se uma perfeita concordância entre os resultados obtidos para as tensões. Uma situação mais geral de carregamento é apresentada na figura 5.12. Durante os 199 primeiros passos de tempo o carregamento é mantido, até que no início do tempo $t = 200\text{dias}$ o carregamento é retirado. A resposta do deslocamento do ponto A é apresentada na figura 5.12 juntamente com a resposta analítica.

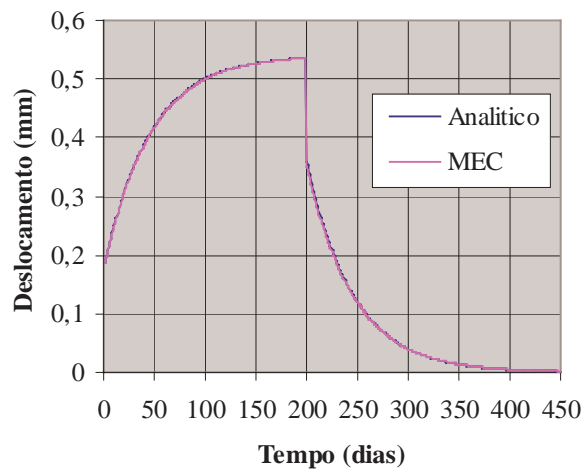


FIGURA 5.12 – Deslocamento do ponto A com variação da solicitação

Observe que o comportamento da solução numérica é o mesmo da solução analítica. A figura 5.13 apresenta resultados do deslocamento vertical do ponto A. A resposta do presente modelo é confrontada com as respostas apresentadas em MUNAIAR(1998). O problema

analisado é o mesmo, a não ser pelo coeficiente de Poisson que é definido como $\nu = 0,3$. Em MUNAIAR(1998) apresentam-se três modelos viscosos: o primeiro foi desenvolvido utilizando técnica de integração explícita, o segundo é o modelo proposto por LEMAITRE & CHABOCHE(1990), e o terceiro é o modelo de SOBOTKA(1984), ambos implementados em um código de elementos finitos. Ressalta-se ainda que a análise foi realizada utilizando-se um passo de tempo $\Delta t = 1 \text{ dia}$.

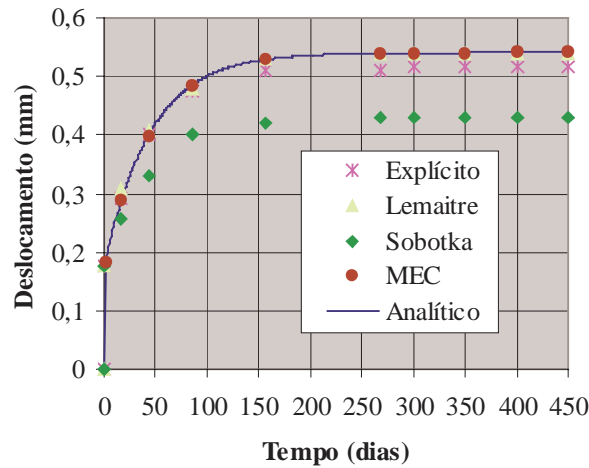


FIGURA 5.13 – Deslocamento longitudinal do ponto A.

Note que o modelo proposto apresenta boa precisão, semelhante ao modelo de Lemaitre. Na figura 5.14 são apresentados resultados do deslocamento vertical do ponto A com o modelo aqui proposto, para vários passos de tempo.

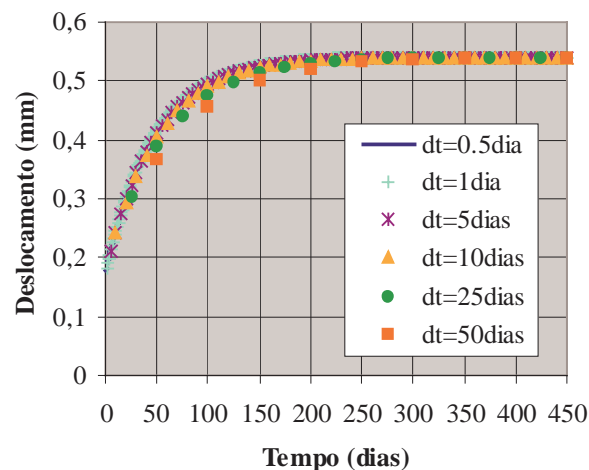


FIGURA 5.14 – Deslocamento do ponto A para vários Δt .

Observando a figura 5.14 é possível comprovar que a formulação é bastante estável. Até mesmo para altos valores de Δt o modelo se comporta bem. Note ainda que a resposta final é praticamente invariante com relação ao Δt . Para este mesmo exemplo, MUNAIAR(1998) ressalta que o procedimento explícito só obtém convergência para valores de $\Delta t \leq 10$ dias.

5.3.4.2 EXEMPLO 02: Cilindro sob pressão interna

Este exemplo é o mesmo apresentado no item (5.2.4.2), considerando-se a situação de estado plano de deformação. Os dados do problema juntamente com a geometria e a discretização são apresentados na figura 5.5. Como dados adicionais referentes ao modelo de Boltzmann, considera-se o módulo de elasticidade do trecho instantâneo $E_e = 90,0 \text{kgf/cm}^2$, do trecho viscoso como $E_{ve} = 35,0 \text{kgf/cm}^2$ e o parâmetro viscoso sendo $\gamma = 7,14285 \text{dia}$. Os resultados para o deslocamento radial da parede interna e externa da estrutura são apresentados nas figuras 5.15 e 5.16, respectivamente. Semelhantemente ao primeiro exemplo, a resposta do presente modelo é confrontada com a resposta dos três modelos apresentados em MUNAIAR(1998) e a resposta analítica do problema. Os resultados foram obtidos utilizando-se um passo de tempo $\Delta t = 1 \text{dia}$, com exceção do procedimento explícito que utilizou um Δt menor (não mencionado), pois segundo MUNAIAR(1998), para $\Delta t > 0,5 \text{dia}$ o procedimento explícito não apresenta convergência.

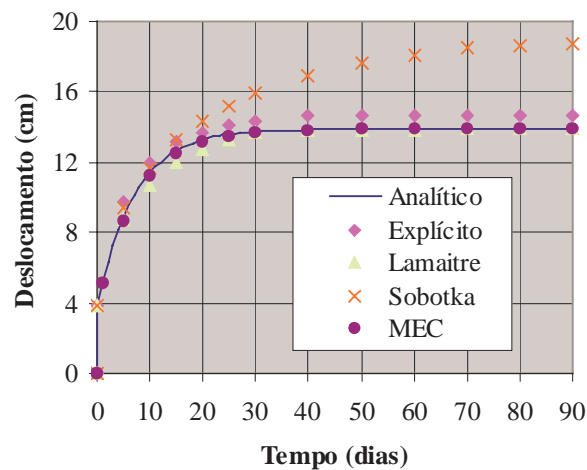


FIGURA 5.15 – Deslocamento radial da parede interna.

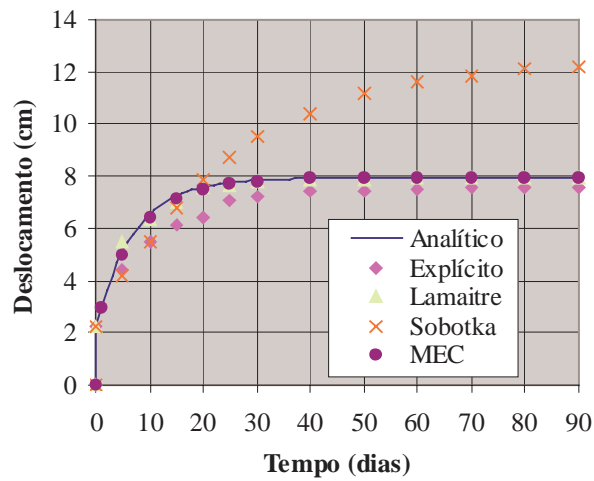


FIGURA 5.16 – Deslocamento radial da parede externa.

O presente modelo converge para a resposta correta em ambos os casos, semelhantemente ao modelo de Lemaitre. O modelo de Sobotka apresenta uma resposta final bastante distorcida. Nas figuras 5.17 e 5.18 apresentam-se respostas do modelo proposto, onde é possível observar o comportamento da parede interna e externa, respectivamente, submetido a passos de tempo variados.

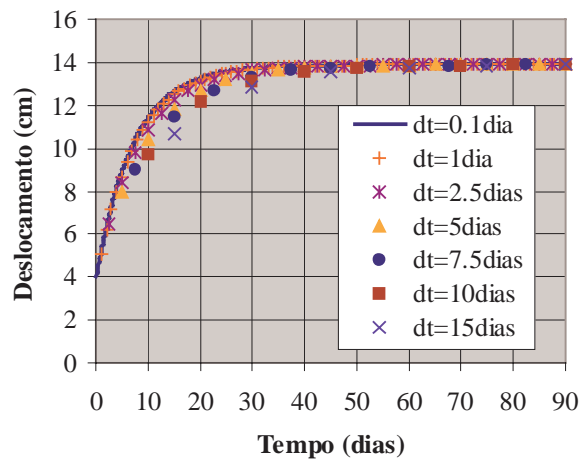


FIGURA 5.17 – Deslocamento radial da parede interna para vários Δt .

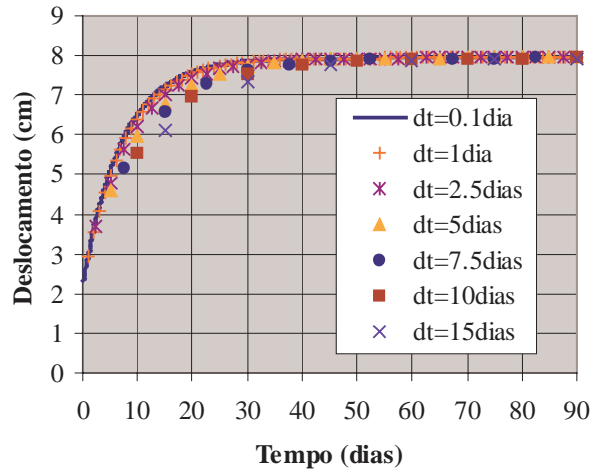


FIGURA 5.18 – Deslocamento radial da parede externa para vários Δt .

Apesar deste problema ser mais complexo que aquele apresentado no primeiro exemplo, nota-se que a resposta final é praticamente invariante com relação ao passo de tempo adotado, demonstrando uma ótima estabilidade.

5.4 FORMULAÇÃO VISCOELÁSTICA: Representação no contorno (Kelvin)

Executando-se algumas manipulações matemáticas é possível obter uma representação viscoelástica escrita em função apenas de integrais de contorno. Aplicando-se o método dos elementos de contorno sobre essas representações integrais é possível desenvolver uma ferramenta que possibilita analisar problemas viscoelásticos discretizando-se apenas o contorno do corpo. Como mencionado anteriormente, são muitas as vantagens inerentes desta nova abordagem, porém pode-se destacar a grande economia computacional e a elegância do método no tratamento de problemas viscoelásticos. O procedimento inicial para a obtenção das equações integrais é o mesmo descrito anteriormente no item (5.2), ou seja, aplicando-se a relação constitutiva do modelo de Kelvin-Voigt, equação (2.9b), sobre a representação integral (3.15), resulta:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.36)$$

Por simplicidade desprezou-se o termo referente à aceleração. Note que a relação constitutiva do modelo reológico empregada é a mais simples, utilizando um único parâmetro viscoso. Esta foi escolhida por facilitar as transformações das integrais de domínio em integrais de contorno. Assim, sabendo-se que:

$$\varepsilon_{kij}^* \mathcal{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j} \quad (5.37a)$$

$$\varepsilon_{kij}^* \gamma \mathcal{C}_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} = \gamma \sigma_{klm}^* \dot{\varepsilon}_{lm} = \gamma \sigma_{klm}^* \dot{u}_{l,m} = \gamma \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} \quad (5.37b)$$

a equação (5.36) torna-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.38)$$

Aplicando-se integração por partes na segunda e na terceira integral da equação (5.38), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i d\Omega - \gamma \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j \dot{u}_i d\Gamma + \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.39)$$

A equação integral (5.39) pode ser reescrita fazendo-se uso da equação de equilíbrio fundamental, definida em (3.20). Aplicando-se a equação (3.20) em (5.39), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac, as técnicas para integrais singulares e sabendo-se que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$, encontra-se:

$$\bar{C}_{ki} u_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (5.40)$$

A equação (5.40) é a representação integral da formulação viscoelástica do MEC que leva em consideração o modelo reológico de Kelvin-Voigt. Note que a única diferença desta representação para a representação elastostática é a presença do segundo termo no lado esquerdo e da terceira integral do lado direito da equação (5.40), ambos responsáveis pelo comportamento viscoso. Ressalta-se ainda que a última integral pode ser transformada em integral de contorno e assim é possível obter uma expressão escrita com apenas integrais no contorno. Considerando-se, por exemplo, o caso onde b_i é uma função constante em todo o

domínio do corpo, a integral de domínio em (5.40) pode ser transformada para o contorno utilizando-se coordenadas polares e integrando-se em r VENTURINI(1988), da seguinte forma:

Para 2D

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = b_i \int_{\Omega} u_{ki}^* d\Omega = b_i \int_{\theta} \int_r u_{ki}^* r dr d\theta = b_i \int_{\Gamma} \int_r u_{ki}^* dr \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma = b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \quad (5.41a)$$

Para 3D

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = b_i \int_{\Omega} u_{ki}^* d\Omega = b_i \int_{\varphi} \int_{\theta} \int_r u_{ki}^* r^2 \cos(\theta) dr d\theta d\varphi = b_i \int_{\Gamma} \int_r u_{ki}^* dr \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma = b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \quad (5.41b)$$

Assumindo a solução fundamental de Kelvin o termo B_{ki}^* fica expresso por:

$$\text{Para 2D} \quad B_{ki}^* = \frac{r}{16\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(r) \right) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i} \right] \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5.42a)$$

$$\text{Para 3D} \quad B_{ki}^* = \frac{1}{32\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i} \right] \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5.42b)$$

sendo $r = r(p \text{ ou } P, S)$, onde as letras maiúsculas significam variáveis do contorno e as minúsculas do domínio. As deduções referentes à transformação das integrais das forças volumétricas são melhor esclarecidas no Anexo A. Logo a equação integral (5.40) pode ser escrita como:

$$\bar{C}_{ki} u_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \quad (5.43)$$

Note que as transformações matemáticas eliminaram as indesejáveis integrais de domínio presentes nas formulações anteriores. A equação (5.43) é a representação integral da formulação viscoelástica do MEC com integrais apenas no contorno do corpo, específica para o modelo reológico de Kelvin-Voigt.

5.4.1 Representação integral para tensões em pontos internos

Resolvido o problema de contorno parte-se agora para a determinação das deformações. Para pontos internos o termo $\bar{C}_{ki} = \delta_{ki}$ e consequentemente a equação integral (5.43) fica escrita como:

$$u_k(p) + \gamma \dot{u}_k(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \quad (5.44)$$

A representação integral para as deformações em pontos internos é obtida através da definição de pequenas deformações eq.(3.24). As deformações são obtidas de maneira análoga ao problema elastostático. Assim, diferenciando-se a equação (5.44) e aplicando-se esta na definição das deformações, eq. (3.24), encontra-se:

$$\varepsilon_{ke}(p) + \gamma \dot{\varepsilon}_{ke}(p) = \int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \hat{B}_{kei}^* d\Gamma \quad (5.45)$$

Como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. As tensões totais são obtidas de forma trivial, aplicando-se a relação constitutiva definida na equação (2.6a) sobre a representação integral (5.45), de maneira que:

$$\sigma_{\rho q}^e(p) + \sigma_{\rho q}^v(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma \quad (5.46)$$

Sabendo-se que $\sigma_{\rho q}^e(p) + \sigma_{\rho q}^v(p) = \sigma_{\rho q}(p)$ a equação (5.46) torna-se:

$$\sigma_{\rho q}(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma \quad (5.47)$$

sendo $\bar{\sigma}_{\rho qi}^*$ e $\bar{p}_{\rho qi}^*$ os mesmos definidos nas equações (3.27a) e (3.27b), respectivamente. Já o termo $\bar{B}_{\rho qi}^*$ fica expresso como:

$$\bar{B}_{\rho qi}^* = \bar{\sigma}_{\rho qi}^* r \frac{\partial r}{\partial n} \quad (5.48)$$

Não é possível escrever as equações integrais em pontos internos para as tensões elásticas e viscosas, ao contrário das tensões totais que são obtidas através da representação integral (5.47). Esta é uma característica particular da presente formulação que considera apenas aproximações para o contorno. Felizmente, pode-se contornar esta situação através de

um procedimento simples e eficiente proposto em MESQUITA & CODA(2001a) e exposto no item(4.3.2) para o MEF, onde as tensões elásticas são obtidas pela solução de uma equação diferencial. Esta equação diferencial é encontrada, semelhantemente ao que foi exposto no item (4.3.2) para o modelo de Boltzmann, escrevendo-se a equação (2.5a) referente ao modelo de Kelvin, em forma de taxa, ou seja:

$$\dot{\sigma}_{ij}^e = C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} = \frac{1}{\gamma} \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} = \frac{1}{\gamma} \eta_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm} = \frac{1}{\gamma} \sigma_{ij}^v \Rightarrow \sigma_{ij}^v = \gamma \dot{\sigma}_{ij}^e \quad (5.49)$$

A equação (5.49) expressa uma relação entre a taxa das tensões elásticas e as tensões viscosas. Substituindo-se a equação (5.49) na relação (2.4) é possível encontrar o seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\gamma \dot{\sigma}_{ij}^e + \sigma_{ij}^e - \sigma_{ij} = 0 \quad (5.50)$$

A expressão (5.50) é um conjunto de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Para o caso particular de σ_{ij} constante com condições de contorno $\sigma_{ij}^e(t=0)=0$ e $\sigma_{ij}^e(t=\infty)=\sigma_{ij}$ as equações diferenciais (5.50) apresentam a seguinte solução:

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}(1 - e^{-t/\gamma}) \quad (5.51)$$

Porém, neste trabalho as tensões elásticas serão obtidas pela resolução das equações diferenciais (5.50) numericamente, tornando assim o processo genérico, possibilitando a imposição de condições de contorno variando com o tempo. Este procedimento será melhor esclarecido nos próximos itens.

5.4.2 Obtenção das tensões totais no contorno

As tensões totais no contorno serão obtidas de maneira análoga ao que foi exposto para a formulação elastodinâmica do MEC no item(3.3.2), ou seja, em função dos deslocamentos e forças de superfície do contorno que já foram determinados na solução do problema de contorno. Note que, devido à presença dos termos singulares na equação integral (5.47), a aplicação destas representações, tomando-se o limite destas quando o ponto tende ao contorno do corpo, conduz à problemas com forte singularidade. Para compreender melhor a técnica

aqui utilizada, considere por exemplo a figura 3.2, um sistema cartesiano local de coordenadas localizado em um ponto do contorno onde se deseja obter as componentes de tensão. Definidas as funções de forma para os deslocamentos e forças de superfície do contorno e obtidos os seus valores nodais, é possível definir as forças de superfície em qualquer ponto do contorno. Consequentemente, pode-se escrever para o caso 3D que:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{13} &= \bar{\sigma}_{31} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{23} &= \bar{\sigma}_{32} = \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{33} &= \bar{p}_3\end{aligned}\tag{5.52}$$

onde o subscrito indica que os valores são referentes ao sistema local de coordenadas. As outras componentes de tensão podem ser obtidas através da relação constitutiva. Assim, em um dado elemento, o campo de deslocamento sobre ele pode ser escrito em função dos valores dos deslocamentos nodais nas coordenadas locais, como apresentado na equação (3.29). Note que, quando se resolve o problema de contorno, obtém-se as forças de superfície e os deslocamentos nodais no sistema global, porém, para encontrar as tensões no contorno é necessário transformá-los para o sistema local fazendo uso da matriz de transformação entre os dois sistemas. Definido o campo de deslocamento sobre o elemento de contorno, o cap de deformações é obtido pela diferenciação do campo de deslocamento eq.(3.30). Observe que não é necessário determinar todas as componentes de deformação, basta apenas obter aquelas que serão importantes na determinação das componentes de tensão restantes. Logo, as outras componentes do tensor de tensão são encontradas fazendo-se uso da relação constitutiva do modelo reológico de Kelvin eq.(2.9b), que pode ser escrita, fazendo-se uso da terceira equação em (5.52), como:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = 2\mu(\bar{\epsilon}_{12} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{12}) \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu\bar{p}_3 + 2\mu(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11} + \nu\bar{\epsilon}_{22} + \nu\gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22})] \\ \bar{\sigma}_{22} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu\bar{p}_3 + 2\mu(\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22} + \nu\bar{\epsilon}_{11} + \nu\gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11})]\end{aligned}\tag{5.53}$$

As velocidades de deformação são definidas por aproximações lineares, ou seja:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{s+1} = \frac{\bar{\epsilon}_{s+1} - \bar{\epsilon}_s}{\Delta t}\tag{5.54}$$

Substituindo a expressão (5.54) nas equações (5.53) é possível encontrar as tensões no contorno, pois as deformações são obtidas em função dos deslocamentos e forças de superfície do contorno. Note também que as tensões iniciais devem ser transformadas para o sistema local antes da aplicação das expressões (5.53). Na situação onde elementos de contorno constantes são utilizados, as derivadas dos deslocamentos, presentes na definição das deformações, podem ser obtidas aplicando-se as técnicas de diferenças finitas entre elementos de contorno adjacentes. Após a obtenção das tensões, pode-se obtê-las no sistema global utilizando-se a matriz de transformação. As expressões foram obtidas para o caso tridimensional, para o bidimensional o procedimento é similar e mais simples necessitando apenas de uma componente de deformação eq.(3.32). Conseqüentemente, para o caso de estado plano de deformação, as manipulações com as expressões resultam,

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{22} &= \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{12} &= \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu} [\nu \bar{p}_2 + 2\mu(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma \dot{\bar{\epsilon}}_{11})]\end{aligned}\tag{5.55}$$

Note que, no caso 2D \bar{x}_1 (fig. 3.2) é a direção tangencial no ponto onde se deseja extrair as tensões e \bar{x}_2 é a direção normal. Para estado plano de tensão as expressões (5.55) são as mesmas, apenas o coeficiente de Poisson deve ser $\nu/(1+\nu)$ sem alterar a constante de Lamé μ .

5.4.3 Tratamento algébrico para as representações integrais

As equações integrais definidas anteriormente podem ser transformadas em equações algébricas através do método dos elementos de contorno.

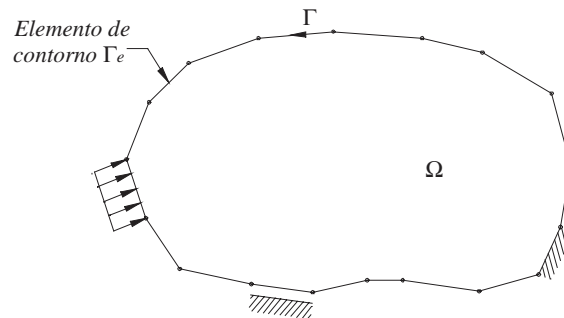


FIGURA 5.19 – Discretização do problema

Assim, o contorno do corpo Γ é discretizado com n_e elementos de contorno Γ_e (fig. 5.19), de tal sorte que as densidades do contorno sejam representadas adequadamente. Dessa forma, as variáveis do problema podem ser aproximadas, parametrizando-as com relação aos seus valores nodais, fazendo-se uso de funções interpoladoras apropriadas.

$$\begin{aligned} p_i &= \phi^\alpha P_i^\alpha \\ u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha \\ \dot{u}_i &= \phi^\alpha \dot{U}_i^\alpha \end{aligned} \quad (5.56)$$

onde ϕ são as funções de forma adotadas para interpolar os elementos de contorno o subscritos α refere-se ao nó do elemento de contorno. Os termos P_i^α , U_i^α e \dot{U}_i^α são valores nodais de forças de superfície, deslocamentos e velocidades, respectivamente. Consequentemente, as representações integrais de deslocamentos, e tensões totais podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ki} U_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{U}_i(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + \\ &+ b_i \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} B_{ki}^* d\Gamma_e \end{aligned} \quad (5.57a)$$

$$\sigma_{\rho q}(p) = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho q i}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho q i}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho q i}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + b_i \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{B}_{\rho q i}^* d\Gamma_e \quad (5.57b)$$

Depois de se executar todas as integrais e se escolher pontos fonte em igual número aos nós do problema, pode-se escrever os seguintes sistemas de equações diferenciais temporais:

$$HU(t) + \gamma H\dot{U}(t) = GP(t) + Bb(t) \quad (5.58a)$$

$$\sigma(t) = \tilde{G}P(t) - \tilde{H}U(t) - \gamma \tilde{H}\dot{U}(t) + \tilde{B}b(t) \quad (5.58b)$$

onde t representa o tempo. Ressalta-se que a matriz H é obtida através da associação do termo \bar{C}_{ki} com a matriz referente a integral de contorno cuja o núcleo é p_{ki}^* , como usualmente é feito no método dos elementos de contorno.

Neste ponto aparece uma expressão interessante, γH , ou seja, o modelo de Kelvin adotado para esta formulação resulta em uma matriz de amortecimento proporcional a H , tal como o amortecimento de primeira ordem (decomposição modal) proporcional a matriz K (matriz de rigidez) utilizado em análises dinâmicas via MEF.

5.4.4 Integração temporal numérica

Para executar a integração temporal adotou-se uma simples aproximação linear para definir a velocidade de deslocamento. Poderia ser qualquer outra técnica de integração temporal, tal como Wilson θ , Newmark ou Houbolt. Porém, observou-se que a aproximação linear apresenta resultados suficientemente precisos para análises viscosas sem o termo de aceleração.

$$\dot{U}_{s+1} = \frac{U_{s+1} - U_s}{\Delta t} \quad (5.59)$$

Aplicando-se a expressão da velocidade de deslocamento apresentada na expressão (5.59) na equação (5.58a), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\bar{H}U_{s+1} = GP_{s+1} + F_s \quad (5.60)$$

onde

$$\bar{H} = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right)H \quad (5.61a)$$

$$F_s = \frac{\gamma}{\Delta t}HU_s + Bb_{s+1} \quad (5.61b)$$

Impondo-se as condições de contorno, como usualmente é feito no método dos elementos de contorno, trocando-se as colunas das matrizes \bar{H} e G , pode-se resolver o sistema linear apresentado em (5.60), obtendo-se assim os deslocamentos e forças de superfície para o passo de tempo atual. A velocidade de deslocamento é obtida diretamente através da equação (5.59). Com todas as incógnitas do problema de contorno obtidas no passo atual, encontram-se as tensões totais fazendo-se uso da expressão (5.58b).

$$\sigma_{s+1} = \tilde{G}P_{s+1} - \tilde{H}U_{s+1} - \gamma\tilde{H}\dot{U}_{s+1} + \tilde{B}b_{s+1} \quad (5.62)$$

As tensões totais no contorno são determinadas conforme descrito no item(5.4.2). A tensão elástica pode ser facilmente obtida adotando-se aproximação linear para a velocidade das tensões elásticas $\dot{\sigma}_{s+1}^e$.

$$\dot{\sigma}_{s+1}^e = \frac{\sigma_{s+1}^e - \sigma_s^e}{\Delta t} \quad (5.63)$$

Aplicando-se a expressão na equação diferencial em (5.50), pode-se escrever:

$$\sigma_{s+1}^e = \left(\sigma_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma_s^e \right) / \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (5.64)$$

Note que na expressão (5.64) necessita-se do valor das tensões totais que são calculadas através da equação (5.62) para pontos internos, ou através das expressões (5.52), (5.53) e (5.55) para pontos no contorno. Assim, calculadas as tensões totais e as tensões elásticas, pode-se obter as tensões viscosas de uma forma simples e direta aplicando-se a relação (2.4). Resolvido o problema naquele passo, repete-se o procedimento descrito anteriormente para os próximos passos de tempo resolvendo-se assim todo o problema viscoso.

5.4.5 Exemplos numéricos

Dois códigos computacionais em elementos de contorno foram implementados utilizando-se esta formulação viscosa. O primeiro, foi o elemento de contorno bidimensional de três nós descrito nas formulações anteriores. Para evitar as singularidades presentes na representação bidimensionais em deslocamento, fez-se uso de ponto fonte exterior ao domínio do problema. A segunda implementação foi realizada no elemento de contorno tridimensional triangular de três nós. As integrais singulares do elemento de contorno 3D são determinadas através das técnicas de subtração de singularidade e transformação de coordenadas expostas no Anexo D. As representações para as tensões com pontos internos são solucionadas utilizando-se técnicas de integração quase-singular. Note que agora não há mais a necessidade de células, pois todas as representações são escritas com integrais de contorno, evitando assim o alto custo computacional necessário na determinação das integrais de domínio, cujo

tratamento tridimensional é bem mais complexo que nos casos bidimensionais. Novamente, com o intuito de validar a formulação bidimensional, utilizou-se os mesmos exemplos anteriormente propostos, pois estes apresentam respostas analíticas que servem como “benchmark”. A formulação 3D é validada no último exemplo, onde as respostas numéricas são confrontadas com as respectivas soluções analíticas.

5.4.5.1 EXEMPLO 01: Peça tracionada

Os parâmetros para análise deste problema estão descritos na figura 4.1, onde agora $\gamma = \theta_\lambda = \theta_\mu$. A malha de elementos de contorno utilizada e a geometria do problema são apresentadas na figura 5.20. Semelhantemente, fez-se uso da simetria, discretizando-se apenas a metade da estrutura.

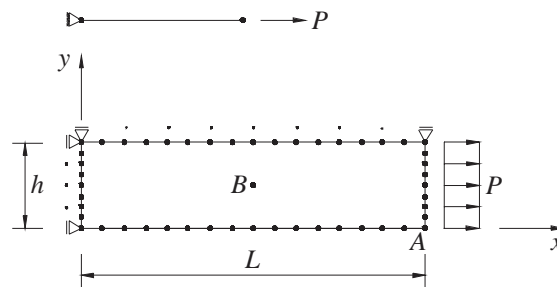


FIGURA 5.20 – Geometria e discretização.

Note que a malha é bastante exagerada, porém esta foi tomada assim devido à referência inicial em elementos finitos que traziam a mesma quantidade de nós no contorno do corpo MUNAIAR(1998). A resposta do deslocamento longitudinal do ponto A é apresentada na figura 5.21 confrontada com a resposta teórica obtida para um modelo uniaxial. Na tentativa de simular o modelo uniaxial adotou-se um coeficiente de Poisson zero.

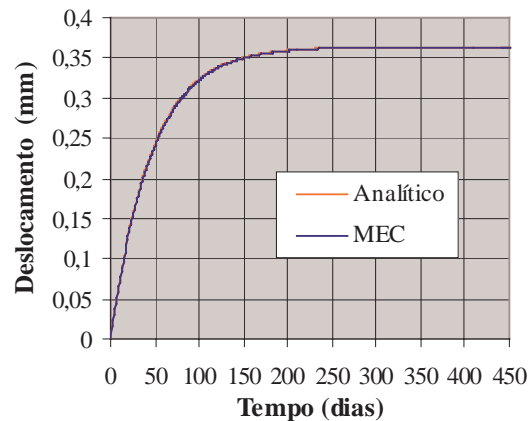


FIGURA 5.21 – Deslocamento longitudinal do ponto A.

Nota-se uma perfeita concordância entre os resultados obtidos pelo presente modelo e a resposta teórica, demonstrando a consistência do modelo em poder recuperar o caso uniaxial. A resposta da tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} para o ponto *B* é apresentada na figura 5.22 juntamente com a resposta teórica para ambas as tensões.

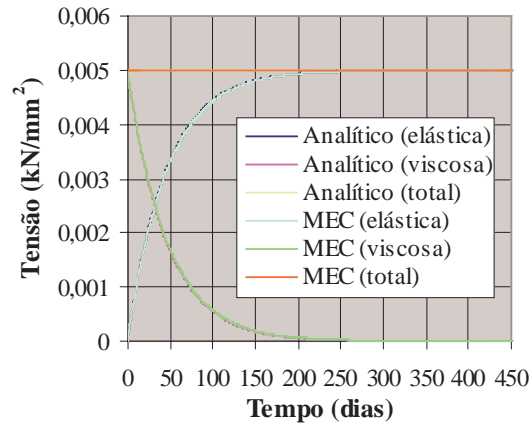


FIGURA 5.22 – Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto *B*.

As mesmas observações feitas para a resposta em deslocamentos podem ser estendidas para as tensões. Na figura 5.23 são apresentados resultados do deslocamento longitudinal do ponto *A* com o modelo aqui proposto, para vários passos de tempo e confrontados com os resultados obtidos pelo modelo do MEC com células internas para $\Delta t = 25$ e 50 dias, que faz uso de células na construção da matriz viscosa.

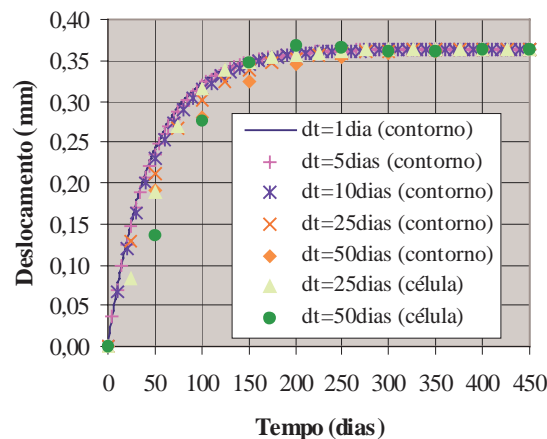


FIGURA 5.23 – Deslocamento longitudinal do ponto *A* para vários Δt .

Observando-se a figura 5.23 é possível constatar o bom comportamento de ambas as formulações do MEC (com e sem células), até mesmo para altos valores de Δt . Note que a

resposta final é praticamente invariante com relação ao Δt . A diferença nas curvas para $\Delta t = 25$ e 50 dias das duas formulações é devido à diferente aproximação temporal utilizada para a velocidade, pois na representação em células utilizou-se a expressão de Houbolt para definir a velocidade de deslocamento.

5.4.5.2 EXEMPLO 02: Cilindro sob pressão interna

Este é o mesmo exemplo apresentado no item (5.2.4.2) para a formulação do MEC com células. Aqui ele é modelado discretizando-se apenas o contorno do corpo figura (5.24). Semelhantemente, a simetria do problema foi considerada, discretizando-se apenas 1/4 da estrutura. Os dados do problema estão descritos na figura (5.5), tomando-se $\gamma = \theta_\lambda = \theta_\mu$.

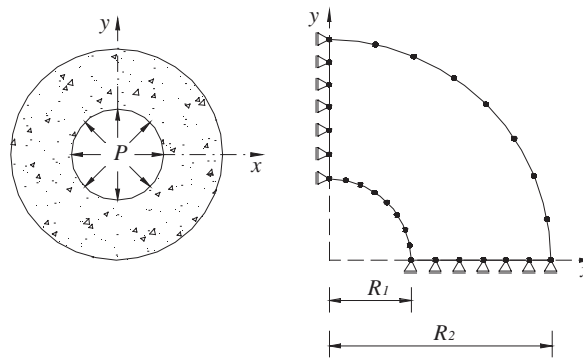


FIGURA 5.24 – Geometria e discretização da estrutura.

O deslocamento radial da parede interna e externa da estrutura, para vários passos de tempo, são apresentados nas figuras 5.25 e 5.26, respectivamente. Estes são confrontados com a resposta analítica do problema e os resultados numéricos do MEC com células para $\Delta t = 10$ e 15 dias, que faz uso de células na construção da matriz viscosa.

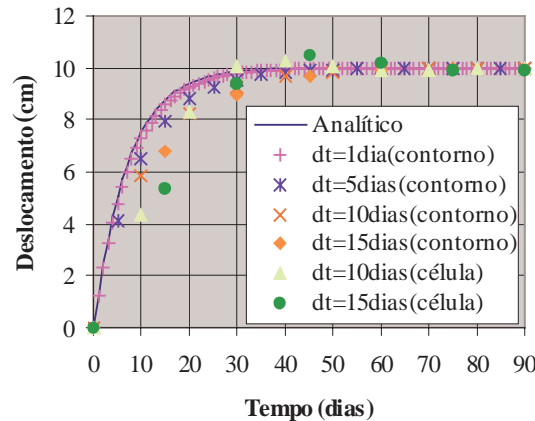


FIGURA 5.25 – Deslocamento radial da parede interna para diversos Δt .

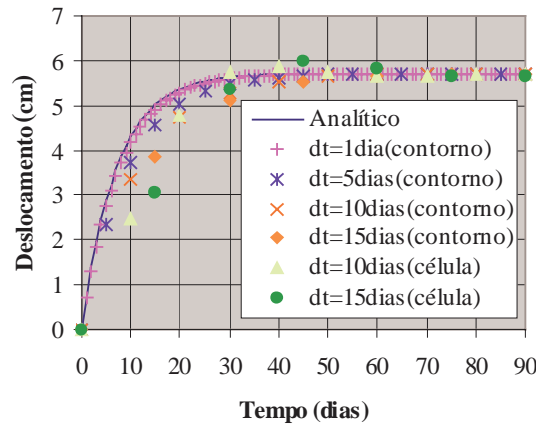


FIGURA 5.26 – Deslocamento radial da parede externa para diversos Δt .

O bom comportamento observado em todos os exemplos até aqui apresentados é novamente reproduzido. Note que a formulação sem células apresenta resposta um pouco melhor para $\Delta t = 10$ e 15 dias, isto é consequência direta do algoritmo de integração temporal adotado.

5.4.5.3 EXEMPLO 03: Peça tracionada 3D

Uma peça submetida a um carregamento distribuído de tração aplicado em sua face livre é analisada. A estrutura de seção transversal quadrada é modelada utilizando-se 24 elementos de contorno tridimensionais triangulares de três nós. O modelo adotado neste exemplo foi o modelo viscoso de Kelvin-Voigt. A geometria da estrutura juntamente com sua discretização e propriedades físicas são apresentadas na figura 5.27.

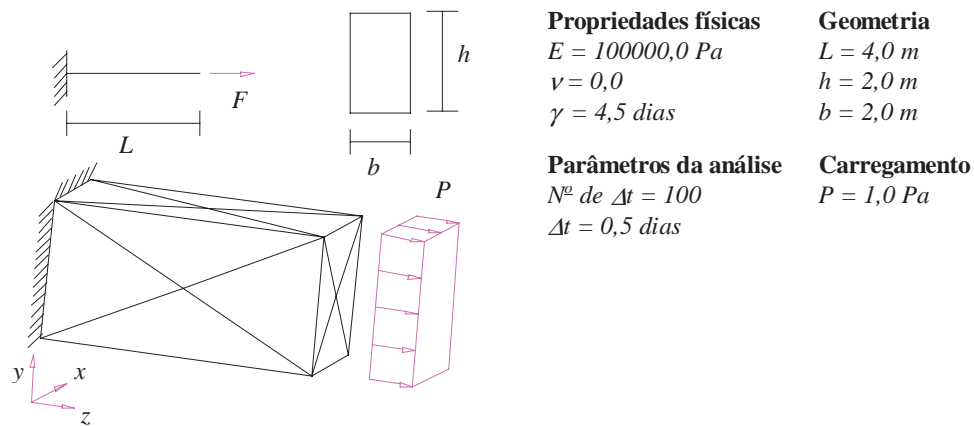


FIGURA 5.27 – Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura.

A resposta do deslocamento longitudinal do ponto central na extremidade onde se aplica a solicitação é apresentada na figura 5.28 e confrontada com a resposta analítica do problema.

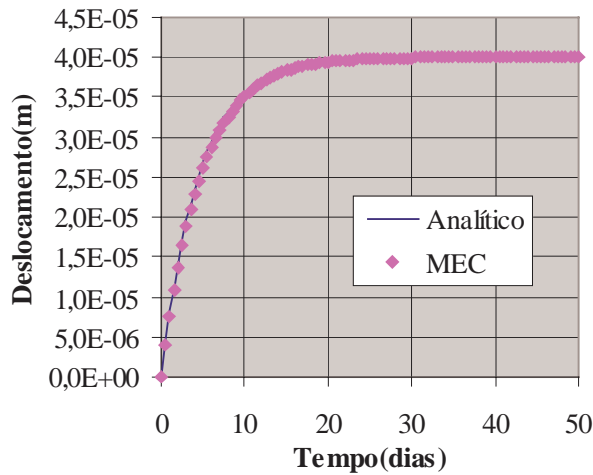


FIGURA 5.28 – Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada.

Semelhantemente ao 2D, nota-se uma perfeita concordância entre os resultados obtidos pela presente formulação e a resposta analítica. A resposta da tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} extraídas no centróide do corpo são apresentadas na figura 5.29 juntamente com a resposta analítica para ambas as tensões.

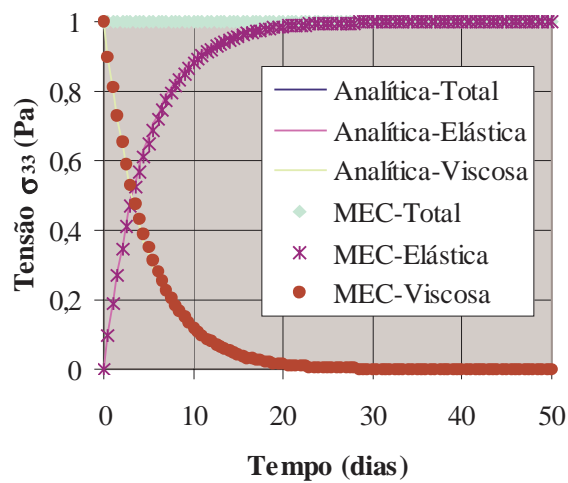


FIGURA 5.29 – Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} no centróide do corpo.

Os resultados apresentados para o MEC tridimensional validam a formulação para o caso 3D, demonstrando ser bastante adequada para tratar problemas viscoelásticos 3D, principalmente na modelagem de corpos infinitos e semi-infinitos, características inerentes ao MEC.

5.5 FORMULAÇÃO VISCOELÁSTICA: *Representação no contorno (Boltzmann)*

Semelhantemente ao que foi feito no item(5.4) para o modelo de Kelvin, faz-se aqui para o modelo de Boltzmann. A metodologia para encontrar as representações integrais é basicamente a mesma, necessitando-se um pouco mais de esforço algébrico para transformar todas as integrais de domínio para o contorno. Fazendo-se uso do MEC é possível encontrar as representações algébricas e os sistemas finais que são gerados a partir de discretizações do contorno apenas. As representações são obtidas pela imposição da relação constitutiva de Boltzmann eq.(2.18) sobre a equação integral (3.15).

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \frac{\gamma E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.65)$$

Sabendo-se que:

$$\varepsilon_{kij}^* E_e C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j} \quad (5.66a)$$

$$\varepsilon_{kij}^* E_e C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} = \sigma_{klm}^* \dot{\varepsilon}_{lm} = \sigma_{klm}^* \dot{u}_{l,m} = \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} \quad (5.66b)$$

$$\varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij} = u_{ki,j}^* \dot{\sigma}_{ij} \quad (5.66c)$$

a equação (5.65) torna-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} d\Omega + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (5.67)$$

Aplicando-se integração por partes na segunda, terceira e quarta integrais da equação (5.67), encontra-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i d\Omega \right] - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j \dot{u}_i d\Gamma - \right. \\ \left. \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* \dot{u}_i d\Omega \right] + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{\sigma}_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{\sigma}_{ij,j} d\Omega \right] + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.68)$$

Fazendo-se uso, respectivamente, da equação de equilíbrio fundamental eq.(3.20) e da equação de equilíbrio do problema real escrita em forma de taxas eq.(5.22), aplicando-se estas na representação (5.68), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac, as técnicas para integrais singulares e sabendo-se que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$ e que $\dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{p}_i$, encontra-se:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ki} u_i(p) = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma - \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) + \\ \gamma \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \end{aligned} \quad (5.69)$$

A equação (5.69) é a representação integral da formulação viscoelástica do MEC que leva em consideração o modelo reológico de Boltzmann. A 1ª, 2ª e 6ª integrais e o termo \bar{C}_{ki} são os mesmos apresentados na formulação elastostática e podem ser determinados seguindo os mesmos princípios. Note que a quarta e a quinta integrais são responsáveis pelo comportamento instantâneo, porém estas podem contribuir para o comportamento viscoso caso haja variações com o tempo das forças de superfície e/ou volumétricas. Em geral, como o peso próprio não varia no tempo e já existia antes da aplicação das cargas, pode-se considerar $\dot{b} = 0$ e conseqüentemente a quinta integral se anula. A terceira integral e o segundo termo do lado direito da equação integral (5.69) são responsáveis apenas pelo comportamento viscoso. Ressalta-se ainda que a penúltima e a última integrais podem ser transformadas em integrais de contorno, como demonstrado no Anexo A, e assim é possível obter uma expressão escrita com integrais apenas no contorno. Considerando-se, por exemplo, o caso onde b_i é uma função constante em todo o domínio do corpo e conseqüentemente \dot{b}_i é constante em Ω . Nesta situação, as integrais de domínio em (5.69) podem ser transformadas para o contorno utilizando-se coordenadas polares e integrando-se em r . As transformações para b_i já foram

apresentadas nas equações (5.41). No caso de \dot{b}_i o desenvolvimento segue os mesmos passos, ou seja:

Para 2D

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega = \dot{b}_i \int_{\Omega} u_{ki}^* d\Omega = \dot{b}_i \int_{\theta} \int_r u_{ki}^* r dr d\theta = \dot{b}_i \int_{\Gamma} \int_r u_{ki}^* dr \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma = \dot{b}_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \quad (5.70a)$$

Para 3D

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega = \dot{b}_i \int_{\Omega} u_{ki}^* d\Omega = \dot{b}_i \int_{\varphi} \int_{\theta} \int_r u_{ki}^* r^2 \cos(\theta) dr d\theta d\varphi = \dot{b}_i \int_{\Gamma} \int_r u_{ki}^* dr \frac{\partial r}{\partial n} d\Gamma = \dot{b}_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \quad (5.70b)$$

onde o termo B_{ki}^* é o mesmo apresentado na equação (5.42). Logo a equação integral (5.69) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ki} u_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\ &\gamma \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (5.71)$$

A equação (5.71) é a representação integral viscoelástica, com integrais apenas no contorno do corpo, específica para o modelo de Boltzmann. Fazendo-se uso desta representação é possível modelar problemas viscoelásticos discretizando-se apenas o contorno da estrutura. Note que as transformações matemáticas eliminaram as indesejáveis singularidades presentes nas integrais de domínio, cujo tratamento requer um alto custo computacional.

5.5.1 Representação integral para tensões em pontos internos

As tensões no interior do corpo são obtidas a partir da diferenciação da equação (5.71) definida para a situação de pontos internos. Nesta situação o termo $\bar{C}_{ki} = \delta_{ki}$ e consequentemente a equação integral (5.71) fica escrita como:

$$\begin{aligned} u_k(p) + \gamma \dot{u}_k(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\ &\gamma \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (5.72)$$

As deformações são obtidas de maneira análoga ao problema elastostático, diferenciando-se a equação (5.72) e aplicado esta na definição das deformações em (3.24), encontrando-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ke}(p) + \gamma \dot{\varepsilon}_{ke}(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\ &\gamma \left[\int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} \hat{B}_{kei}^* d\Gamma \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} b_i \int_{\Gamma} \hat{B}_{kei}^* d\Gamma \end{aligned} \quad (5.73)$$

Como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. As tensões totais são obtidas aplicando-se a definição das deformações totais expressas em (5.73) sobre a relação reológica do modelo apresentada na equação (2.18), de maneira que:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) &= \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\ &\frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma \right] + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{\rho q}(p) \end{aligned} \quad (5.74)$$

A equação (5.74) é a representação integral das tensões totais segundo o modelo de Boltzmann, sendo $\bar{\sigma}_{\rho qi}^*$, $\bar{p}_{\rho qi}^*$ e $\bar{B}_{\rho qi}^*$ os mesmos definidos nas equações (3.27a), (3.27b) e (5.48), respectivamente. Note que, semelhantemente a formulação anterior, não é possível escrever as equações integrais em pontos internos para as tensões elásticas e viscosas, ao contrário das tensões totais que são obtidas através da representação integral (5.74). Esta é uma característica particular da presente formulação que considera apenas aproximações para o contorno. Felizmente, pode-se contornar esta situação através de um procedimento simples e eficiente proposto em MESQUITA & CODA(2001a), onde as tensões elásticas são obtidas pela solução numérica de uma equação diferencial. Esta equação diferencial é a mesma obtida no item(4.3.2), sendo definida pela expressão (4.30).

5.5.2 Obtenção das tensões totais no contorno

As tensões no contorno serão obtidas como usualmente é feito pelo MEC, em função dos deslocamentos e forças de superfície do contorno que já foram determinados na solução do problema de contorno. O procedimento aqui descrito é o mesmo apresentado no item(3.3.2) com a relação constitutiva elástica e no item(5.4.2) utilizando o modelo constitutivo de Kelvin.

Neste item as relações serão obtidas considerando-se a equação do modelo de Boltzmann. Tome por exemplo a figura 3.2, um sistema cartesiano local de coordenadas localizado em um ponto do contorno onde se deseja obter as componentes de tensão. Definidas as funções de forma para os deslocamentos e forças de superfície do contorno e obtidos os seus valores nodais, é possível definir as forças de superfície em qualquer ponto do contorno. Consequentemente, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{13} &= \bar{\sigma}_{31} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{23} &= \bar{\sigma}_{32} = \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{33} &= \bar{p}_3\end{aligned}\tag{5.75}$$

onde o subscrito indica que os valores são referentes ao sistema de coordenadas local. As outras componentes de tensão podem ser obtidas através da relação constitutiva específica para o modelo de Boltzmann.

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} 2\mu(\bar{\epsilon}_{12} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{12}) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\bar{\sigma}}_{12} \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left\{ (2\mu + \lambda)(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + \lambda[(\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22}) + (\bar{\epsilon}_{33} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{33})] \right\} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\bar{\sigma}}_{11} \\ \bar{\sigma}_{22} &= \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left\{ (2\mu + \lambda)(\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22}) + \lambda[(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + (\bar{\epsilon}_{33} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{33})] \right\} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\bar{\sigma}}_{22}\end{aligned}\tag{5.76}$$

Deve-se eliminar os termos $\bar{\epsilon}_{33}$ e $\dot{\bar{\epsilon}}_{33}$ utilizando-se a relação constitutiva para $\bar{\sigma}_{33}$, de maneira que:

$$\bar{\epsilon}_{33} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{33} = \frac{1}{2\mu + \lambda} \left\{ \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \bar{p}_3 - \lambda[(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + (\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22})] + \gamma\dot{\bar{\sigma}}_{33} \right\}\tag{5.77}$$

onde μ e λ são as conhecidas constantes de Lamé definidas nas equações (2.7). Note que o módulo de elasticidade utilizada nas expressões de μ e λ é o do trecho instantâneo E_e . As velocidades de deformação são definidas por aproximações lineares, ou seja:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{s+1} = \frac{\bar{\epsilon}_{s+1} - \bar{\epsilon}_s}{\Delta t} \quad ; \quad \dot{\bar{\sigma}}_{s+1} = \frac{\bar{\sigma}_{s+1} - \bar{\sigma}_s}{\Delta t}\tag{5.78}$$

Substituindo as expressões (5.77) e (5.78) nas equações (5.76), pode-se reordena-las, explicitando-se as tensões referentes ao instante $s+I$, tornando possível encontrar as tensões no contorno, pois as deformações são obtidas pela diferenciação eq.(3.30) do campo de deslocamentos escritos nas coordenadas locais eq.(3.29). Note também que as tensões iniciais devem ser transformadas para o sistema local antes da aplicação das expressões (5.76). Na situação onde elementos de contorno constantes são utilizados, as derivadas dos deslocamentos, presentes na definição das deformações, podem ser obtidas aplicando-se as técnicas de diferenças finitas entre elementos de contorno adjacentes. Após a determinação das tensões, pode-se obtê-las no sistema global utilizando-se a matriz de transformação. Para o caso 2D, as tensões ficam determinadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{22} &= \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{12} &= \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left\{ (2\mu + \lambda)(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + \lambda(\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22}) \right\} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\bar{\sigma}}_{11}\end{aligned}\quad (5.79)$$

Semelhantemente ao 3D, deve-se eliminar os termos $\bar{\epsilon}_{22}$ e $\dot{\bar{\epsilon}}_{22}$ utilizando-se a relação constitutiva para $\bar{\sigma}_{22}$, de maneira que:

$$\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22} = \frac{1}{2\mu + \lambda} \left\{ \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \bar{p}_2 - \lambda(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + \gamma\dot{\bar{\sigma}}_{22} \right\}\quad (5.80)$$

As taxas são definidas pelas equações (5.78) e a deformação ϵ_{11} é obtida pela diferenciação (3.32) sobre o campo de deslocamento adotado sobre o elemento nas coordenadas locais.

5.5.3 Tratamento algébrico para as representações integrais

O tratamento algébrico das representações integrais apresentadas aqui segue os mesmos passos daquele exposto no item(5.4.3). Fazendo-se uso do MEC, discretiza-se o contorno do corpo Γ com n_e elementos de contorno Γ_e (fig. 5.19). As variáveis do problema podem ser aproximadas, parametrizando-as com relação aos seus valores nodais, fazendo-se uso de funções de forma apropriadas.

$$\begin{aligned}
p_i &= \phi^\alpha P_i^\alpha \\
u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha \\
\dot{u}_i &= \phi^\alpha \dot{U}_i^\alpha \\
\dot{p}_i &= \phi^\alpha \dot{P}_i^\alpha
\end{aligned} \tag{5.81}$$

onde ϕ são as funções de forma adotadas para interpolar as variáveis sobre os elementos de contorno e o subscrito α refere-se aos nós do elemento de contorno. Os termos P_i^α , U_i^α , \dot{P}_i^α e \dot{U}_i^α são valores nodais de forças de superfície, deslocamentos e suas respectivas velocidades. Consequentemente, as representações integrais de deslocamento e tensão total ficam escritas como:

$$\begin{aligned}
\bar{C}_{ki} U_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{U}_i(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \\
\gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{P}_i^\alpha + \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} B_{ki}^* d\Gamma_e b_i + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} B_{ki}^* d\Gamma_e b_i
\end{aligned} \tag{5.82a}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho q}(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \\
\frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{P}_i^\alpha + \\
\frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma_e b_i + \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma_e b_i - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{\rho q}(p)
\end{aligned} \tag{5.82b}$$

Depois de executar todas as integrais e escolher pontos fonte em igual número aos nós do problema, pode-se escrever os seguintes sistemas de equações diferenciais temporais:

$$HU(t) + \gamma H \dot{U}(t) = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} GP(t) + \gamma G \dot{P}(t) + \gamma B b(t) + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} Bb(t) \tag{5.83a}$$

$$\sigma(t) = \tilde{G}P(t) - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H}U(t) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H} \dot{U}(t) + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{G} \dot{P}(t) + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{B} b(t) + \tag{5.83b}$$

$$\tilde{B} b(t) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}(t)$$

onde t representa o tempo. Ressalta-se que a matriz H é obtida através da associação do tempo \bar{C}_{ki} com a matriz referente a integral de contorno cuja o núcleo é p_{ki}^* , como usualmente é feito no método dos elementos de contorno.

5.5.4 Integração temporal numérica

Semelhantemente ao item(5.4.4), o algoritmo adotado para integrar no tempo os sistemas algébricos definidos em (5.83) será aquele com aproximação linear. Observou-se que apesar da simplicidade das expressões, este é suficientemente adequado para tratar problemas quase-estáticos devido à equação diferencial ser em 1ª ordem. Suas expressões são definidas como:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{s+1} &= \frac{U_{s+1} - U_s}{\Delta t} \\ \dot{P}_{s+1} &= \frac{P_{s+1} - P_s}{\Delta t} \\ \dot{b}_{s+1} &= \frac{b_{s+1} - b_s}{\Delta t} \\ \dot{\sigma}_{s+1} &= \frac{\sigma_{s+1} - \sigma_s}{\Delta t} \\ \dot{\sigma}_{s+1}^{el} &= \frac{\sigma_{s+1}^{el} - \sigma_s^{el}}{\Delta t}\end{aligned}\tag{5.84}$$

Aplicando a expressão da velocidade de deslocamento, de forças de superfície e de forças volumétricas apresentadas em (5.84) na primeira equação em (5.83), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\bar{H}U_{s+1} = \bar{G}P_{s+1} + F_s\tag{5.85}$$

onde

$$\bar{G} = \left(\frac{\gamma}{\Delta t} + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \right) G\tag{5.86a}$$

$$\bar{H} = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) H\tag{5.86b}$$

$$F_s = \frac{\gamma}{\Delta t} H U_s - \frac{\gamma}{\Delta t} G P_s + B \left[\left(\frac{\gamma}{\Delta t} + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \right) b_{s+1} - \frac{\gamma}{\Delta t} b_s \right] \quad (5.86c)$$

Impondo-se as condições de contorno, como usualmente é feito no método dos elementos de contorno, trocando-se as colunas das matrizes \bar{H} e \bar{G} , pode-se resolver o sistema linear apresentado em (5.85), obtendo-se assim os deslocamentos e forças de superfície para o passo de tempo atual. Com todas as incógnitas do problema de contorno determinadas no passo atual, parte-se para encontrar as tensões totais. Assim, obtidos os deslocamentos e as forças de superfície do problema de contorno no instante $s+1$, determinam-se \dot{P} , \dot{U} e \dot{b} através das expressões (5.84). Obtidas essas variáveis calculam-se as tensões totais no interior do corpo fazendo-se uso da equação (5.83b) e da expressão de $\dot{\sigma}_{s+1}$ em (5.84), de maneira que:

$$\sigma_{s+1} = \left(\tilde{G} P_{s+1} - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H} U_{s+1} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H} \dot{U}_{s+1} + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{G} \dot{P}_{s+1} + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{B} \dot{b}_{s+1} + \tilde{B} b_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sigma_s \right) \left/ \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \right) \right. \quad (5.87)$$

As tensões totais no contorno são determinadas conforme descrito no item (5.5.2). A tensão elástica referente a mola em paralelo com o amortecedor pode ser facilmente obtida aplicando-se a aproximação para a velocidade das tensões elásticas $\dot{\sigma}_{s+1}^{el}$ apresentada em (5.84) na equação diferencial (4.30).

$$\sigma_{s+1}^{el} = \left(\sigma_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma_s^{el} \right) \left/ \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \right. \quad (5.88)$$

Note que na expressão (5.88) necessita-se do valor das tensões totais que são calculadas através da equação (5.87) ou pelas expressões do item (5.5.2). Assim, calculadas as tensões totais e as tensões elásticas, pode-se obter as tensões viscosas de uma forma simples e direta aplicando-se a relação (2.15). Resolvido o problema naquele passo, atualizam-se as variáveis e repete-se o procedimento descrito anteriormente para os próximos passos de tempo resolvendo-se assim todo o problema viscoso.

5.5.5 Exemplos numéricos

Os mesmos elementos de contorno utilizados nos exemplos da formulação anterior são aqui empregados. As técnicas utilizadas para calcular as integrais de contorno singulares bi e tridimensionais foram descritas de forma sucinta do item (5.4.5). Os três primeiros exemplos são analisados com elementos de contorno 2D e os dois últimos foram executados com a formulação tridimensional.

5.5.5.1 EXEMPLO 01: Peça tracionada

Este exemplo é o mesmo apresentado no item (4.3.3.1) e sua discretização é a mesma exposta na figura (5.20). O deslocamento radial do ponto A, para vários passos de tempo, é apresentado na figura 5.30. Estes são confrontados com a resposta analítica do problema e os resultados numéricos do MEC viscoelástico para $\Delta t = 25$ e 50 dias, que faz uso de células na construção da matriz viscosa.

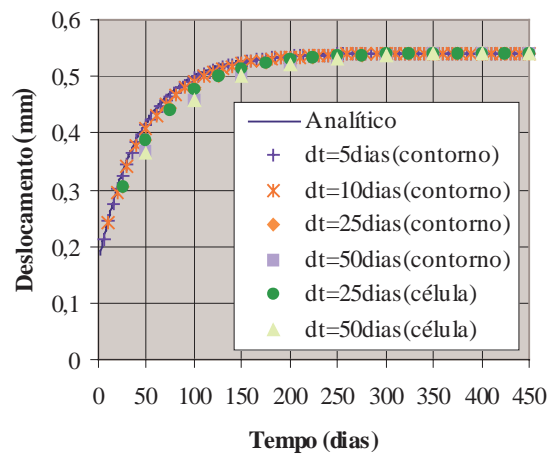


FIGURA 5.30 – Deslocamento longitudinal do ponto A para vários Δt .

Os resultados numéricos das formulações para $\Delta t = 25$ e 50 dias, são bastante coincidentes. Isto é consequência direta da utilização dos mesmos algoritmos de integração temporal, que neste caso são expressos por simples aproximações lineares. A resposta da tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} extraídas no ponto B são apresentadas na figura 5.31 juntamente com as respectivas respostas analíticas.

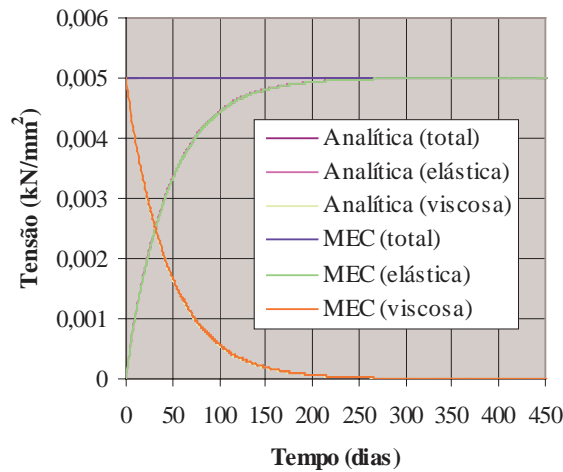


FIGURA 5.31 – Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do ponto B.

A figura 5.32 apresenta o comportamento (deslocamento do ponto A) da estrutura para uma situação mais geral de carregamento. A estrutura é inicialmente tencionada até que no início do tempo $t=200$ dias a solitação é removida.

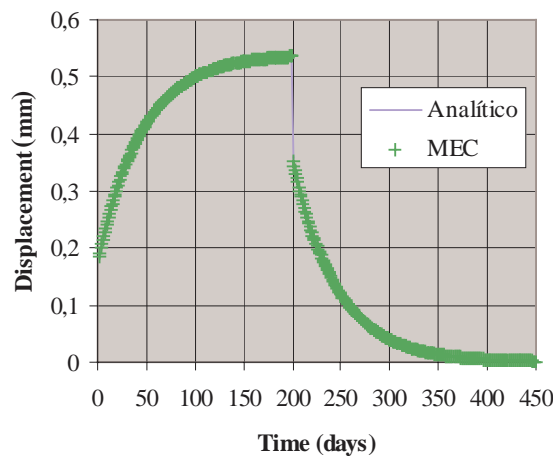


FIGURA 5.32 – Deslocamento longitudinal do ponto A para uma carga removida em $t=200$ dias.

5.5.5.2 EXEMPLO 02: Cilindro sob pressão interna

Este problema já foi analisado pela formulação com termo viscoso de domínio. Os dados do problema são descritos no item(5.3.4.2). A malha utilizada é a mesma exposta na figura (5.24) fazendo uso da simetria do problema. O deslocamento radial da parede interna e externa da estrutura, para vários passos de tempo, são apresentados nas figuras 5.33 e 5.34,

respectivamente. Estes são confrontados com a resposta analítica do problema e os resultados numéricos, para $\Delta t = 10$ e 15 dias, da formulação do MEC com termo viscoso de domínio.

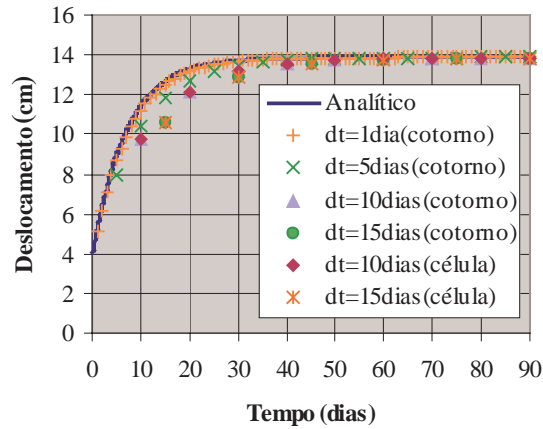


FIGURA 5.33 – Deslocamento radial da parede interna para diversos Δt .

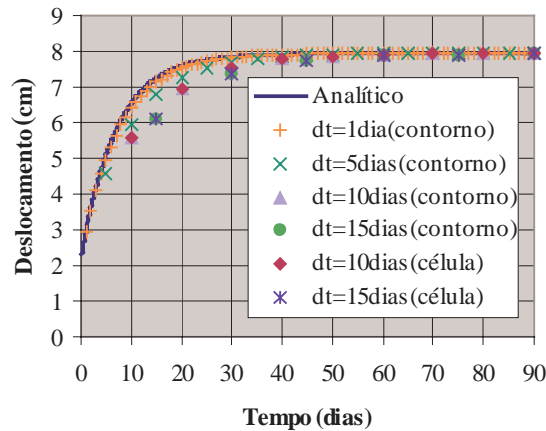


FIGURA 5.34 – Deslocamento radial da parede externa para diversos Δt .

Note que as respostas para as formulações com termo viscoso no domínio e com termo viscoso no contorno coincidem. A justificativa destes comportamentos é a mesma descrita no exemplo anterior.

5.5.5.3 EXEMPLO 03: Túnel submetido a uma pressão interna

Um túnel de seção circular, solicitado por uma pressão interna uniforme P é analisado sob as condições de estado plano de deformação. A estrutura é discretizada com elementos de

contorno de três nós. As propriedades viscoelásticas do solo, considerando-se o modelo de Boltzmann, bem como sua geometria e discretização são apresentadas na figura 5.35.

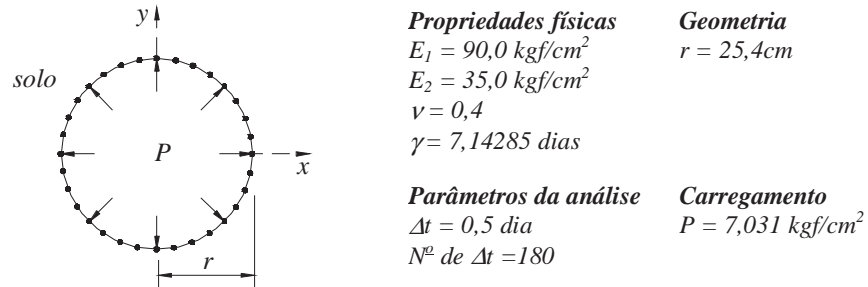


FIGURA 5.35 – Geometria, discretização e propriedades físicas.

Os resultados para o deslocamento radial da parede interna do túnel são apresentados na figura 5.36. A resposta do presente modelo é confrontada com a resposta analítica.

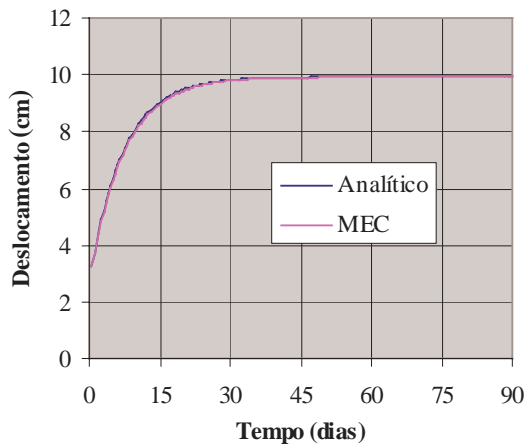


FIGURA 5.36 – Deslocamento radial do túnel.

Observando-se a figura 5.36 verifica-se o bom comportamento do modelo quando comparado com a resposta analítica do problema.

5.5.5.4 EXEMPLO 04: Peça tracionada 3D

O mesmo exemplo tridimensional analisado no item(5.4.5.3) é aqui proposto. Os dados do problema, geometria e discretização são apresentados na figura 5.27. Como dados adicionais referentes ao modelo de Boltzmann, considera-se o módulo de elasticidade do trecho instantâneo $E_e = 100000,0 \text{ Pa}$ e do trecho viscoso como $E_{ve} = 50000,0 \text{ Pa}$. A figura 5.37

apresenta as respostas do deslocamento longitudinal da face livre comparada com a solução analítica do problema

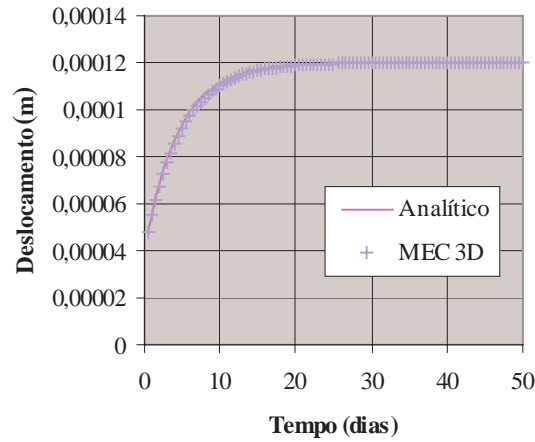


FIGURA 5.37 – Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada.

A resposta da tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} extraídas no centróide do corpo são apresentadas na figura 5.38 juntamente com as respectivas respostas analíticas.

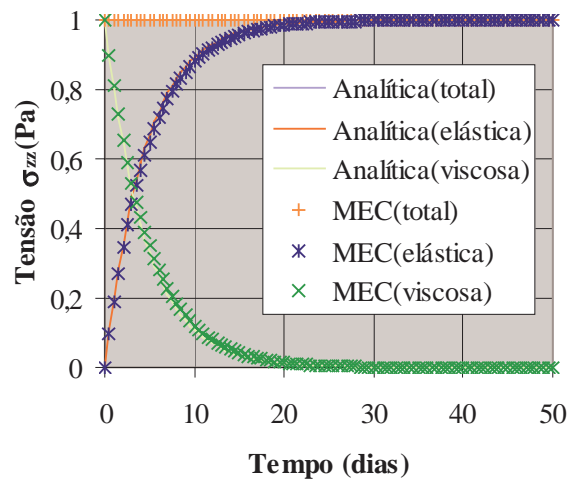


FIGURA 5.38 – Tensão elástica σ_{11}^e , viscosa σ_{11}^v e total σ_{11} do centróide do corpo.

5.5.5.5 EXEMPLO 05: Buraco esférico no meio infinito

Um buraco esférico localizado em um meio infinito e solicitado por uma pressão interna uniforme é analisado. A estrutura é discretizada em sua forma completa, sem o uso de simetria, com 1200 elementos de contorno tridimensionais triangulares de três nós. O modelo

adotado neste exemplo foi o modelo viscoso de Boltzmann. A geometria da estrutura juntamente com sua discretização e propriedades físicas são apresentadas na figura 5.39.

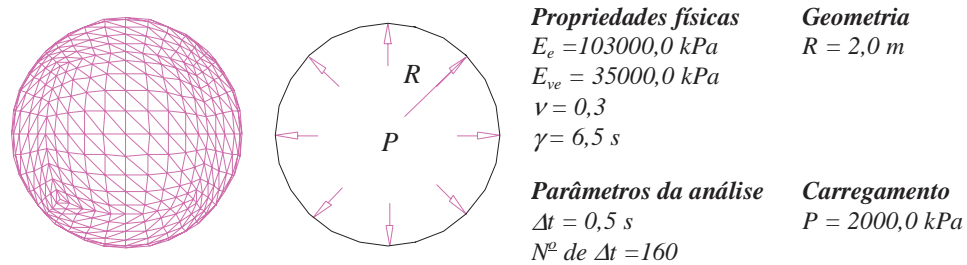


FIGURA 5.39 – Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura.

A figura 5.40 apresenta resultados do deslocamento radial ao longo de uma linha reta que passa pela origem da esfera extraído no tempo $t = 30s$. O resultado é confrontado com a resposta analítica do problema viscoelástico.

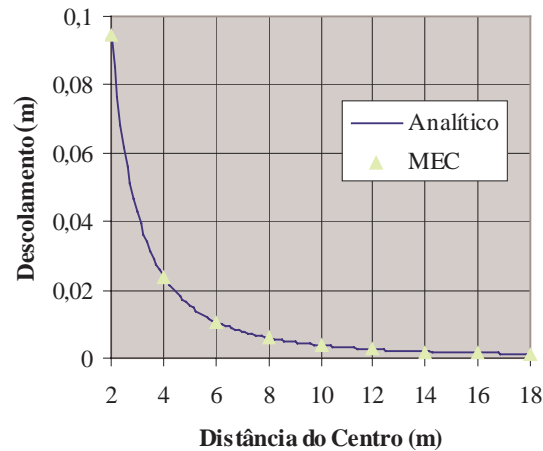


FIGURA 5.40 – Deslocamento radial para $t=30s$.

Observando a figura 5.40 pode-se concluir que a resposta numérica está em perfeito acordo com a analítica. Resultados da tensão radial σ_r e tangencial σ_θ ao longo de uma linha reta que passa pela origem da esfera, referente ao tempo $t = 30s$ são apresentados na figura 5.41. Semelhantemente a figura 5.40, o resultado numérico é confrontado com a resposta analítica do problema viscoelástico.

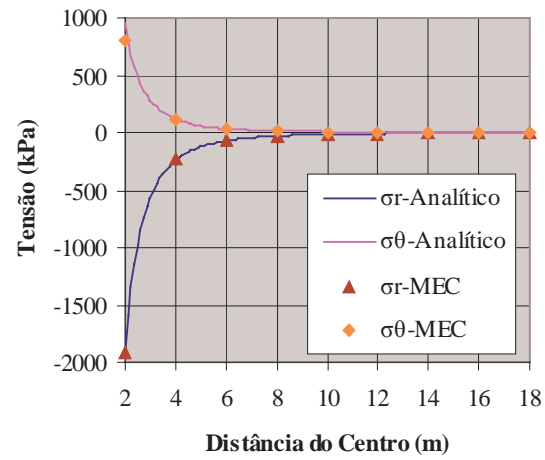


FIGURA 5.41 – Tensão radial σ_r e tangencial σ_θ para $t=30s$.

Os resultados da figura 5.41 demonstram um perfeito comportamento da formulação viscosa tridimensional aqui proposta.

Capítulo 6

FORMULAÇÃO ELASTOPLÁSTICA DO MEC

6.1 INTRODUÇÃO

O comportamento plástico é evidenciado em muitos materiais. A consideração deste em situações limite é indispensável para se compreender melhor a resposta da estrutura analisada. Modelar este comportamento de maneira adequada é uma meta extremamente difícil e seu sucesso depende, em geral, da consideração dos fatores mais importantes envolvidos no processo, tais como: carga, temperatura, duração do processo, comportamento físico, etc.. O regime plástico de um material se caracteriza por uma relação não-linear entre tensões e deformações, ao contrário da elasticidade linear. Este fica evidenciado pelo aparecimento de deformações irreversíveis, quando se anula a sollicitação a que o corpo esteja sujeito. Essas deformações plásticas aparecem quando os níveis de tensão excedem o denominado limite de plastificação.

Este comportamento não-linear pode ser levado em consideração, de uma forma geral e precisa, através dos métodos computacionais, tais como o MEF e o MEC. A consideração de problemas envolvendo plasticidade pelo MEC teve seu início em 1973 com os trabalhos de RICARDELLA(1973) e MENDELSON(1973). As formulações inicialmente propostas apresentavam algumas incorreções que foram contornadas mais tarde por BUI(1978). Procedimentos que até hoje são utilizados no desenvolvimento de pesquisas relativas a este tema podem ser encontrados nos trabalhos de TELLES & BREBBIA(1980) e VENTURINI(1982). Mais recentemente, foram definidas metodologias que consideram a atualização do sistema não-linear do MEC, veja TELLES & CARRER(1991) e TELLES & CARRER(1994). Nestes trabalhos, o operador constitutivo elastoplástico empregado na atualização do sistema não é consistente com o procedimento implícito de atualização das

tensões e sim o operador tangente “clássico” (ou contínuo). O uso do módulo elastoplástico “clássico” provoca a perda da taxa assintótica de convergência quadrática do método de Newton-Raphson SIMO & TAYLOR(1986). Procedimentos mais arrojados que consideram não só a atualização consistente do sistema linear, mas também uma correção das tensões segundo um procedimento implícito do tipo “return mapped” são apresentados em BONNET & MUKHERJEE(1996) e HARRISON *et al.*(1998).

Uma forma alternativa de abordar o problema elastoplástico pelo MEC é apresentada neste capítulo. As representações integrais são basicamente as mesmas, porém o procedimento de correção do resíduo plástico é alterado. As abordagens clássicas baseadas no problema de tensão inicial propõem que esta correção seja feita em nível de tensão, evitando utilizar o sistema de equação em deslocamento, a não ser no final do processo iterativo. Para isto era necessário, um certo esforço algébrico de forma a agrupar e ordenar as expressões das tensões no contorno e no domínio, fazendo-se necessário calcular a inversa da matriz do sistema principal. Pode-se dizer que esta forma de tratar o problema é bem eficiente, computacionalmente falando. Porém, quando se trata de acoplamento não-linear entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos, esta abordagem é inapropriada, pois a combinação entre os resíduos plásticos deve ser feita em concordância com a compatibilidade geométrica entre os meios acoplados, ou seja, em nível de deslocamento. Assim, é necessário escrever as equações do MEC de forma semelhante ao MEF e tratar o problema de correção do resíduo como usualmente é feito pelo MEF. Além disso, esta abordagem permite implementar de forma direta, sem modificações, os procedimentos do tipo implícito, usualmente utilizados no MEF para a atualização das tensões.

6.2 FORMULAÇÃO ELASTOPLÁSTICA

As relações reológicas elastoplásticas foram definidas no item (2.5). O modelo é aquele apresentado na figura 2.4 pelo arranjo em serie de uma mola com um arranjo bloco-mola. A representação integral elastoplástica do MEC é obtida pela imposição da relação reológica do modelo eq.(2.20) sobre a equação integral (3.15).

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij}^p d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega = 0 \quad (6.1)$$

A terceira integral em (6.1) é responsável pela contribuição da plastificação do sólido. Sabendo-se que:

$$\varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} = \sigma_{klm}^* \dot{\varepsilon}_{lm} = \sigma_{klm}^* \dot{u}_{l,m} = \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} \quad (6.2)$$

logo, a equação (6.1) torna-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij}^p d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega = 0 \quad (6.3)$$

Integrando-se por partes na segunda integral da equação (6.3), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij}^p d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega = 0 \quad (6.4)$$

A terceira integral pode ser reescrita fazendo-se uso da equação de equilíbrio fundamental definida em (3.20). Assim, aplicando-se a equação (3.20) em (6.4), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac e as técnicas para integrais singulares artificiais para integrais singulares, sabendo-se que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$, encontra-se:

$$\bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij}^p d\Omega \quad (6.5)$$

Ressalta-se ainda que a penúltima integral pode ser transformada em integral de contorno, tornando a formulação mais elegante e computacionalmente mais econômica. Dessa forma, será necessário o uso de células apenas nas regiões plastificadas. Estas transformações foram apresentadas de forma resumida nas equações (5.41) e (5.70). Uma discussão mais detalhada sobre essas deduções pode ser encontrada no Anexo A. Assim, a equação integral (6.5) pode ser escrita como:

$$\bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij}^p d\Omega \quad (6.6)$$

A equação (6.6) é a representação integral da formulação elastoplástica do MEC. Note que a única diferença desta representação para a representação elastostática, a menos da

representação em taxa, é a presença da terceira integral responsável pelo comportamento plástico. Esta integral de domínio apresenta singularidade de $1/r$ para o caso bidimensional e $1/r^2$ para o caso tridimensional e será tratada utilizando-se células apenas nas regiões onde ocorre o processo de plastificação e sua singularidade será eliminada fazendo-se uso da técnica de transformação de coordenadas. O termo ε_{kij}^* e B_{ki}^* são os mesmos apresentados em (5.2) e (5.42), respectivamente. Para evitar maiores confusões com as formulações viscosas, é importante ressaltar que todos os termos que aparecem com um ponto como sobrescrito referem-se a incrementos infinitesimais e não a derivadas com relação ao tempo.

6.2.1 Representação integral para tensões em pontos internos

Deve-se ressaltar que as expressões podem ser obtidas tanto em sua forma incremental como em sua forma total. Neste trabalho, optou-se por escrever as expressões das tensões em sua forma total, por ser mais eficiente, evitando alocar variáveis necessárias no armazenamento dos valores incrementais. Além disso, esta abordagem facilita a implementação de procedimentos para atualização das tensões do tipo implícito, inicialmente propostos para o MEF. Assim, para se obter a representação integral para tensões em pontos internos, é necessário escrever a equação (6.6) em sua forma total, sabendo que para a situação onde o ponto fonte se localiza no interior do corpo o termo \bar{C}_{ki} transforma-se em δ_{ki} e conseqüentemente a equação integral fica escrita como:

$$u_k(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega \quad (6.7)$$

Diferenciando-se adequadamente a equação (6.7) é possível determinar a representação integral para as deformações em pontos internos, fazendo-se uso da definição de pequenas deformações expressa em (3.24). As deformações são obtidas de maneira análoga ao problema elastostático. Entretanto, cuidados especiais devem ser tomados na integral que tem como núcleo ε_{kij}^* . Esta deve ser diferenciada utilizando-se os conceitos de integrais singulares. Assim, diferenciando a equação (6.7) e aplicando esta na definição das deformações em (3.24), encontra-se:

$$\varepsilon_{ke}(p) = \int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* u_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \hat{B}_{kei}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{keij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega + \hat{g}_{keij} \sigma_{ij}^p(p) \quad (6.8)$$

Note que como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. Observe ainda que a diferenciação da integral cujo núcleo é ε_{kij}^* deu origem a um termo adicional conhecido como termo livre. Este termo está melhor esclarecido no Anexo B referente à derivação de integrais singulares. As tensões totais são obtidas aplicando-se a definição das deformações totais expressas em (6.8) sobre a relação reológica do modelo apresentada na equação (2.20), escrita na sua forma total, resultando:

$$\sigma_{\rho q}(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega + \bar{g}_{\rho qij} \sigma_{ij}^p(p) - \sigma_{\rho q}^p(p) \quad (6.9)$$

Sabendo-se que $\sigma_{\rho q}^p = \delta_{\rho i} \delta_{qj} \sigma_{ij}^p$, os dois últimos termos da representação integral em (6.9) podem ser reordenados de maneira que:

$$\sigma_{\rho q}(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega + \bar{g}_{\rho qij} \sigma_{ij}^p(p) \quad (6.10)$$

A equação (6.10) é a representação integral das tensões totais para o caso elastoplástico, sendo $\bar{t}_{\rho qij}^*$, $\bar{g}_{\rho qij}$ e $\bar{B}_{\rho qi}^*$ os mesmos definidos nas equações (5.9a), (5.12) e (5.48), respectivamente. Note que a quarta integral em (6.10) apresenta singularidade do tipo $1/r^2$ para o caso bidimensional e $1/r^3$ para o caso tridimensional. Esta deve ser computada no sentido de valor principal e será tratada utilizando-se células e uma eficiente técnica de subtração de singularidade exposta no Anexo D.

6.2.2 Obtenção das tensões no contorno

As tensões no contorno são obtidas através das forças de superfície e deslocamentos que já foram determinados pela solução do problema de contorno, semelhantemente ao que foi descrito nos capítulos 3 e 5. Uma alternativa para este problema, seria utilizar a equação (6.10), executando-se o limite do ponto fonte tendendo ao contorno do corpo onde se deseja obter as tensões. Porém, esse procedimento provoca o aparecimento de singularidades de alta ordem na representação, cujo tratamento é o objetivo de pesquisas recentes de diversos autores. Assim, as tensões no contorno ficam determinadas, fazendo-se uso das relações elastoplásticas (2.20), pelas seguintes expressões para o caso tridimensional:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{13} &= \bar{\sigma}_{31} = \bar{p}_1 \\
\bar{\sigma}_{23} &= \bar{\sigma}_{32} = \bar{p}_2 \\
\bar{\sigma}_{33} &= \bar{p}_3 \\
\bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = 2\mu\bar{\epsilon}_{12} - \bar{\sigma}_{12}^p \\
\bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_3 + \bar{\sigma}_{33}^p) + 2\mu(\bar{\epsilon}_{11} + \nu\bar{\epsilon}_{22})] - \bar{\sigma}_{11}^p \\
\bar{\sigma}_{22} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_3 + \bar{\sigma}_{33}^p) + 2\mu(\bar{\epsilon}_{22} + \nu\bar{\epsilon}_{11})] - \bar{\sigma}_{22}^p
\end{aligned} \tag{6.11}$$

onde o subscrito indica que os valores são referentes ao sistema de coordenadas local. Utilizando-se funções interpoladoras para as forças de superfície é possível determinar as forças de superfície em qualquer ponto do elemento de contorno e conseqüentemente encontrar uma parcela do tensor de tensões expressa pelas três primeiras equações em (6.11). As componentes de tensão restantes são determinadas fazendo-se uso da relação constitutiva do modelo, expressa pelas três últimas equações. Note que nas duas últimas equações a deformação $\bar{\epsilon}_{33}$ foi eliminada através do uso da terceira equação em (6.11). Assim, torna-se necessário, para determinar as tensões restantes, encontrar as componentes de deformação presentes nas expressões anteriores. Estas são facilmente determinadas pela derivação eq.(3.30) do campo de deslocamento definido sobre o elemento eq.(3.29). Observe que antes da aplicação das expressões (6.11) é necessário transformar as forças de superfície e os deslocamentos nodais para as coordenadas locais, veja figura 3.2. Após a determinação das tensões, pode-se obtê-las no sistema global utilizando-se a matriz de transformação. Para o problema bidimensional o procedimento é o mesmo e necessita apenas da determinação de uma componente de deformação eq.(3.32). Conseqüentemente, para a situação de estado plano de deformação, resulta:

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_{22} &= \bar{p}_2 \\
\bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = \bar{p}_1 \\
\bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_2 + \bar{\sigma}_{22}^p) + 2\mu\bar{\epsilon}_{11}] - \bar{\sigma}_{11}^p
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Para estado plano de tensão as expressões são as mesmas, apenas o coeficiente de Poisson deve ser $\nu/(1+\nu)$ sem alterar a constante de Lamé μ . Note que, no caso 2D \bar{x}_1 (fig. 3.2) é a direção tangencial no ponto onde se deseja extrair as tensões e \bar{x}_2 é a direção normal. É importante observar que ambas as relações constitutivas são empregadas em sua forma total e não em forma incremental, semelhantemente aquelas obtidas para pontos internos eq.(6.10).

6.2.3 Tratamento algébrico para as representações integrais

O problema elastoplástico será modelado pelo MEC discretizando-se o contorno do corpo e o domínio onde será evidenciada a não-linearidade do material. As equações algébricas do método dos elementos de contorno podem ser obtidas dividindo-se o contorno Γ com n_e elementos de contorno Γ_e e o domínio Ω , onde ocorrerá plastificação, com n_c células Ω_c (fig. 6.1), de maneira que as variáveis do contorno e do domínio sejam representadas adequadamente.

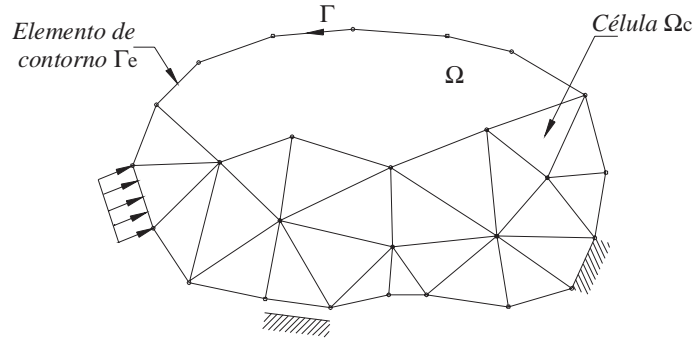


FIGURA 6.1 – Discretização do problema

Assim, as variáveis do problema podem ser aproximadas através de funções de forma, interpoladas com relação aos seus valores nodais.

$$\begin{aligned}
 p_i &= \phi^\alpha P_i^\alpha; & \dot{p}_i &= \phi^\alpha \dot{P}_i^\alpha \\
 u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha; & \dot{u}_i &= \phi^\alpha \dot{U}_i^\alpha \\
 \sigma_{ij}^p &= \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} \sigma_{ij}^{p(\tilde{\alpha})}; & \dot{\sigma}_{ij}^p &= \tilde{\phi}^{\tilde{\alpha}} \dot{\sigma}_{ij}^{p(\tilde{\alpha})}
 \end{aligned}
 \tag{6.13}$$

onde ϕ e $\tilde{\phi}$ são respectivamente as funções de forma adotadas para interpolar os elementos de contorno e as células e os subscritos α e $\tilde{\alpha}$ referem-se aos nós do elemento de contorno e da célula, respectivamente. Os termos P_i^α , U_i^α , $\sigma_{ij}^{p(\tilde{\alpha})}$, \dot{P}_i^α , $\dot{U}_i^{\tilde{\alpha}}$ e $\dot{\sigma}_{ij}^{p(\tilde{\alpha})}$ são valores nodais de forças de superfície, deslocamentos, tensões iniciais e seus respectivos incrementos. Consequentemente, as representações integrais de deslocamento e tensão ficam escritas como:

$$\bar{C}_{ki} \dot{U}_i(p) = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{P}_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + \sum_{e=1}^{n_e} \dot{b}_i \int_{\Gamma_e} B_{ki}^* d\Gamma_e +$$

$$\sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \varepsilon_{kij}^* \tilde{\phi} \tilde{\alpha} d\Omega_c \dot{\sigma}_{ij}^{p(\tilde{\alpha})}$$

(6.14a)

$$\sigma_{\rho q}(p) = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha + \sum_{e=1}^{n_e} \dot{b}_i \int_{\Gamma_e} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma_e +$$

$$\sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{t}_{\rho qij}^* \tilde{\phi} \tilde{\alpha} d\Omega_c \sigma_{ij}^{p(\tilde{\alpha})} + \bar{g}_{\rho qij} \sigma_{ij}^p(p)$$

(6.14b)

Note que o termo livre presente na equação das tensões totais deve ser reordenado com o penúltimo termo, bem como o termo \bar{C}_{ki} deve ser adequadamente adicionado a segunda integral em (6.14a), como usualmente é feito no MEC. Depois de executar todas as integrais e escolher pontos fonte em igual número aos nós do problema, pode-se escrever os seguintes sistemas de equações:

$$H\dot{U} = G\dot{P} + B\dot{b} + Q\dot{\sigma}^p \quad (6.15a)$$

$$\sigma = \tilde{G}P - \tilde{H}U + \tilde{B}b + \tilde{Q}\sigma^p \quad (6.15b)$$

6.2.4 Procedimento não-linear

O comportamento plástico dos sólidos é marcado por expressões baseadas em quantidades diferenciais de tensão e deformação. A solução do problema físico exige a integração dessas quantidades diferenciais. Integram-se numericamente as expressões da plasticidade, considerando-se os diferenciais de tensão e deformação como incrementos finitos e não infinitesimais. Consequentemente, um erro de aproximação é cometido. Pode-se reduzir este erro, reaplicando-se, através de um processo iterativo, o resíduo de tensão inicial sobre a estrutura, de maneira que o equilíbrio seja novamente estabelecido. Este procedimento, descrito aqui de forma resumida, é conhecido como procedimento incremental-iterativo. Este será apresentado neste item juntamente com uma abordagem numérica do problema elastoplástico, procurando esclarecer os aspectos computacionais envolvidos na solução do problema não-linear. Assim, enfatizando-se a forma incremental das relações, substituem-se os termos infinitesimais por termos incrementais representados pelo símbolo “ Δ ”. Logo, todo o processo pode ser descrito pelos seguintes passos.

Passo 1 - Inicialmente, admitem-se conhecidas, no final de um instante (passo de carga) “ t ”, as componentes de tensão σ^t , as tensões iniciais $\sigma^{p(t)}$, o incremento das tensões iniciais $\Delta\sigma^{p(t)}$, as deformações plásticas $\varepsilon^{p(t)}$, a variável interna κ^t responsável pelo encruamento, os deslocamentos nodais U^t e as forças de superfície P^t . Ressalta-se que os índices “ i ” e “ t ” referem-se, respectivamente, ao processo iterativo e incremental. Inicia-se um novo incremento de carga.

$$\bar{P}^{t+\Delta t} = \bar{P}^t + \Delta\bar{P}^{t+\Delta t} \quad (6.16a)$$

$$b^{t+\Delta t} = b^t + \Delta b^{t+\Delta t} \quad (6.16b)$$

O subscrito (traço) presente na equação (6.16a) indica a imposição das condições de contorno sobre o vetor P como usualmente visto no MEC.

Passo 2 – Calcula-se o incremento de deslocamento e forças de superfície.

$$\Delta\bar{U}_i^{t+\Delta t} = \bar{H}^{-1}\bar{G}\Delta\bar{P}^{t+\Delta t} + \bar{H}^{-1}B\Delta b^{t+\Delta t} + \bar{H}^{-1}Q\Delta\sigma_{i-1}^{p(t+\Delta t)} \quad (\text{apenas } 1^a \text{ iteração}) \quad (6.17a)$$

$$\Delta\bar{U}_i^{t+\Delta t} = \bar{H}^{-1}Q\Delta\sigma_{i-1}^{p(t+\Delta t)} \quad (\text{demais iterações}) \quad (6.17b)$$

A presença do subscrito na equação (6.17a) e (6.17b) deve ser interpretado da mesma forma que aquele da equação (6.16a), as matrizes e vetores foram modificados devido à imposição das condições de contorno. Na primeira iteração de cada novo incremento $\Delta\bar{U}_1^{t+\Delta t}$ é obtido fazendo-se uso da expressão (6.17a). Porém, para as demais iterações a parte referente ao problema elástico não precisa ser calculada novamente, sendo assim, $\Delta\bar{U}_i^{t+\Delta t}$ é calculado segundo a equação (6.17b). Após a obtenção das incógnitas do problema de contorno, reordena-se os vetores de deslocamento e força de superfície, de maneira que $\Delta U_i^{t+\Delta t}$ contenha apenas deslocamentos e $\Delta P_i^{t+\Delta t}$ apenas forças de superfícies. Estes devem ser acumulados nos respectivos vetores $U_i^{t+\Delta t}$ e $P_i^{t+\Delta t}$, através das expressões:

$$U_i^{t+\Delta t} = U_{i-1}^{t+\Delta t} + \Delta U_i^{t+\Delta t} \quad (6.18a)$$

$$P_i^{t+\Delta t} = P_{i-1}^{t+\Delta t} + \Delta P_i^{t+\Delta t} \quad (6.18b)$$

Passo 3 – Calculam-se as tensões de tentativa para serem verificadas no algoritmo implícito.

$$\sigma_{i(ten)}^{t+\Delta t} = \tilde{G}P_i^{t+\Delta t} - \tilde{H}U_i^{t+\Delta t} + \tilde{B}b^{t+\Delta t} + \tilde{Q}\sigma_{i-1}^{p(t+\Delta t)} \quad (\text{Ponto interno}) \quad (6.19a)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{13}^{ten} &= \bar{\sigma}_{31}^{ten} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{23}^{ten} &= \bar{\sigma}_{32}^{ten} = \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{33}^{ten} &= \bar{p}_3 \\ \bar{\sigma}_{12}^{ten} &= \bar{\sigma}_{21}^{ten} = 2\mu\bar{\epsilon}_{12} - \bar{\sigma}_{12}^p \\ \bar{\sigma}_{11}^{ten} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_3 + \bar{\sigma}_{33}^p) + 2\mu(\bar{\epsilon}_{11} + \nu\bar{\epsilon}_{22})] - \bar{\sigma}_{11}^p \\ \bar{\sigma}_{22}^{ten} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_3 + \bar{\sigma}_{33}^p) + 2\mu(\bar{\epsilon}_{22} + \nu\bar{\epsilon}_{11})] - \bar{\sigma}_{22}^p \end{aligned} \right\} (\text{Ponto no contorno 3D}) \quad (6.19b)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_{22}^{ten} &= \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{12}^{ten} &= \bar{\sigma}_{21}^{ten} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{11}^{ten} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_2 + \bar{\sigma}_{22}^p) + 2\mu\bar{\epsilon}_{11}] - \bar{\sigma}_{11}^p \end{aligned} \right\} (\text{Ponto no contorno 2D}) \quad (6.19c)$$

Note que elas são calculadas em sua forma total e não incremental. Além do mais, as expressões para o cálculo das tensões de tentativa são as mesmas em todas as iterações.

Passo 4 - Calculam-se as tensões, as deformações plásticas e as tensões iniciais, ambas nos pontos nodais através de um dos algoritmos de integração implícito, que serão posteriormente apresentados em detalhes no capítulo 7.

$$\sigma_i^{t+\Delta t} = \sigma^t + \int_t^{t+\Delta t} d\sigma_i \quad (6.20)$$

Passo 5 - O critério de convergência verifica se a solução considerada é suficientemente precisa. Este pode ser expresso basicamente de duas maneiras:

$$\text{Convergência em tensão inicial} \quad \frac{\|\Delta\sigma_i^{p(t+\Delta t)}\|}{\|\sigma_1^{p(t+\Delta t)}\|} \leq e_t \quad (6.21a)$$

$$\text{Convergência em deslocamento} \quad \frac{\|U_i^{t+\Delta t} - U_{i-1}^{t+\Delta t}\|}{\|U_1^{t+\Delta t}\|} \leq e_d \quad (6.21b)$$

onde $\|\cdot\|$ representa a norma euclidiana e os termos e_t e e_d referem-se a tolerância em tensão inicial e em deslocamento, respectivamente. Verificada a convergência, retorna-se ao **passo 1**,

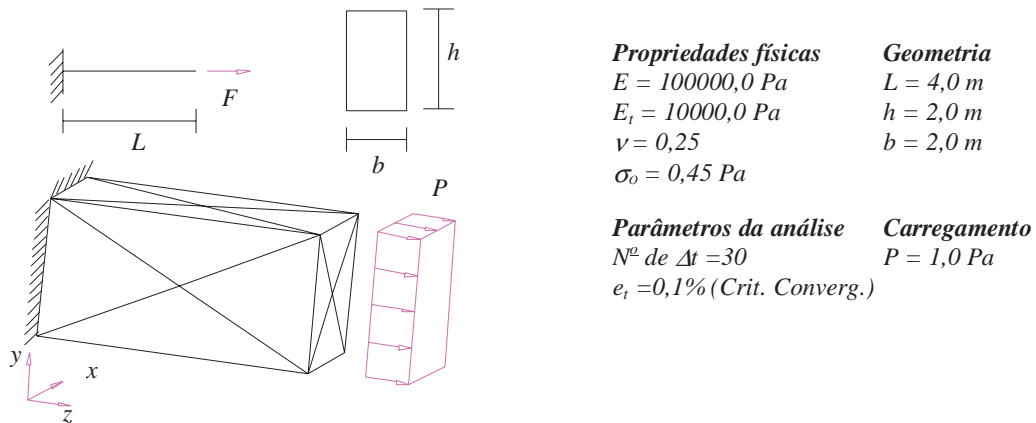


FIGURA 6.3 – Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura.

A resposta do deslocamento longitudinal do ponto central na extremidade onde se aplica a solicitação é apresentada na figura 6.4 e confrontada com a resposta numérica obtida com o método dos elementos finitos utilizando-se elementos de barra e elementos tridimensionais ambos pertencentes ao software ANSYS.

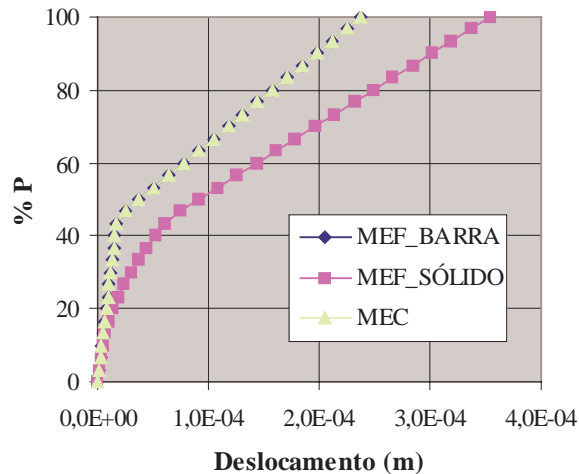


FIGURA 6.4 – Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada.

Nota-se uma perfeita concordância entre os resultados obtidos pela presente formulação e a resposta obtidas com elementos finitos de barra. Já o MEF com elementos sólidos apresenta resultado diferente dos outros dois, expondo um início de plastificação precoce devido à má avaliação das tensões. Porém, a perfeita concordância dos resultados entre o MEC e o MEF com elementos unidimensionais demonstra a consistência do modelo em poder recuperar o caso uniaxial. A resposta da tensão σ_{zz} extraídas em um ponto localizado no centróide do corpo é apresentadas na figura 6.5 juntamente com a resposta analítica.

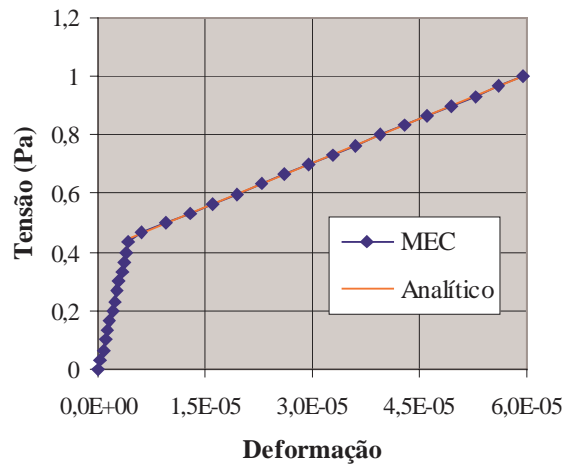


FIGURA 6.5 – Tensão σ_{zz} do ponto localizado no centróide do corpo.

As mesmas observações feitas para a resposta em deslocamentos podem ser estendidas para as tensões. Os próximos resultados foram obtidos com controle de deslocamento. Ao invés de aplicar uma carga distribuída, prescreveu-se deslocamento constante em toda a superfície referente à extremidade livre de um valor total de $3,6 \times 10^{-5} m$, utilizando-se no critério de convergência e_t o valor de 1%. A figura 6.6 apresenta o diagrama *reação x deslocamento* da estrutura analisada considerando-se encruamento nulo, confrontada com a resposta analítica.

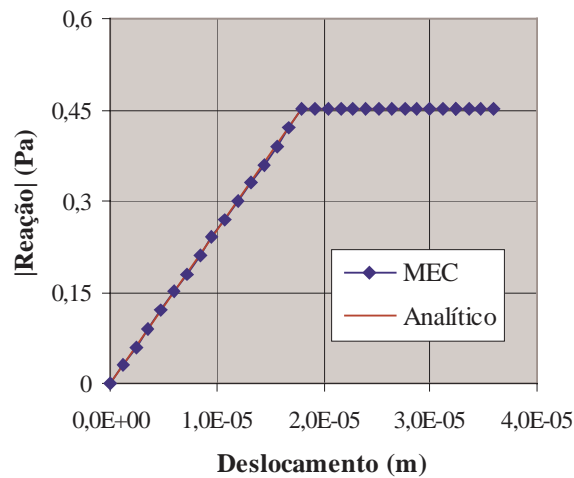


FIGURA 6.6 – Diagrama *reação x deslocamento*.

Semelhantemente a figura 6.6, apresenta-se na figura 6.7 o mesmo diagrama só que levando em consideração o encruamento negativo definido por $E_t = -5,0 \times 10^4 Pa$.

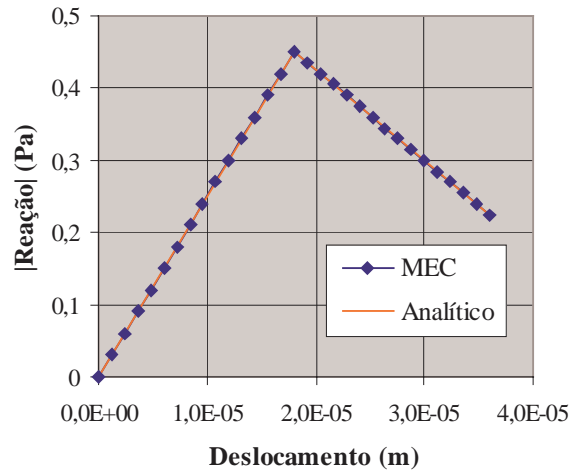


FIGURA 6.7 – Diagrama reação x deslocamento.

Observando as figuras 6.6 e 6.7, novamente percebe-se uma perfeita concordância entre a resposta apresentada pelo MEC e a analítica.

6.2.5.2 Cilindro 3D submetido à pressão interna

Um cilindro de parede espessa submetido a uma pressão interna P sob condições de estado plano de deformação é analisado. Devido a sua dupla simetria apenas 1/4 da estrutura é discretizada. Os mesmos elementos de contorno utilizados no primeiro exemplo foram aqui empregados. Células foram distribuídas apenas na região onde ocorre plastificação. A geometria da estrutura juntamente com sua discretização e suas propriedades físicas são apresentadas na figura 6.8.

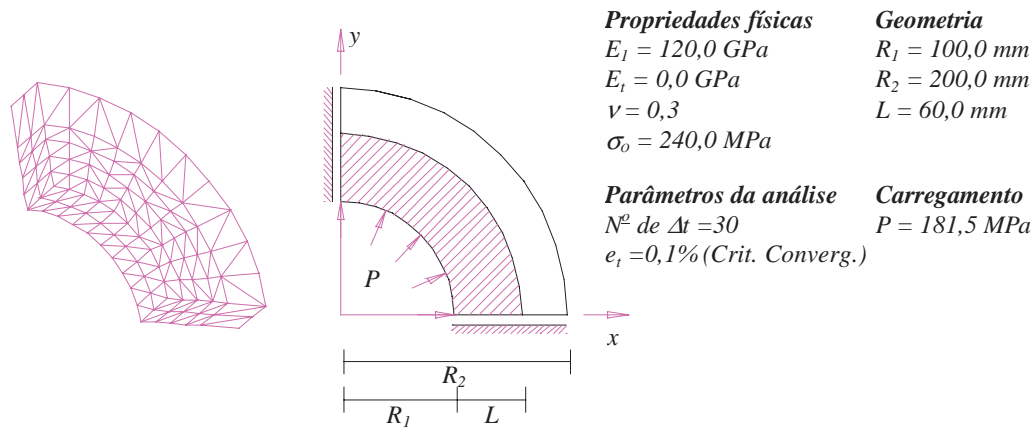


FIGURA 6.8 – Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura.

Os resultados para o deslocamento radial da parede externa da estrutura são apresentados na figura 6.9. A resposta da presente formulação é confrontada com a resposta

obtida por CISILINO(1997) e a resposta analítica do problema para estado plano de deformação.

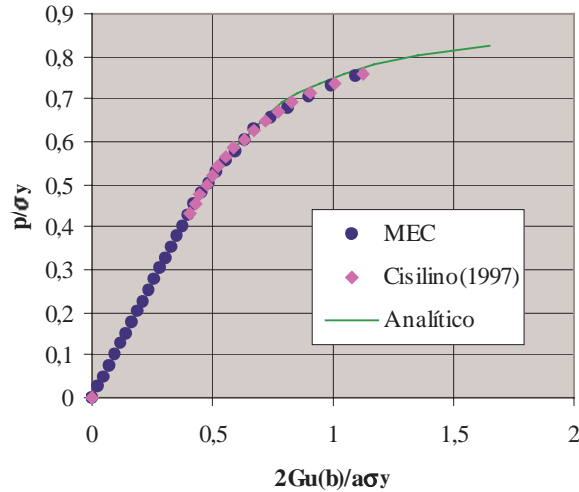


FIGURA 6.9 – Deslocamento radial da parede externa.

Apesar deste problema ser mais complexo que aquele apresentado no primeiro exemplo, verifica-se o bom comportamento de ambas respostas numéricas com a analítica. As tensões σ_r , σ_θ e σ_z ao longo da espessura do cilindro são apresentadas na figura 6.10 confrontadas com as respostas obtidas por CISILINO(1997) e a resposta analítica do problema.

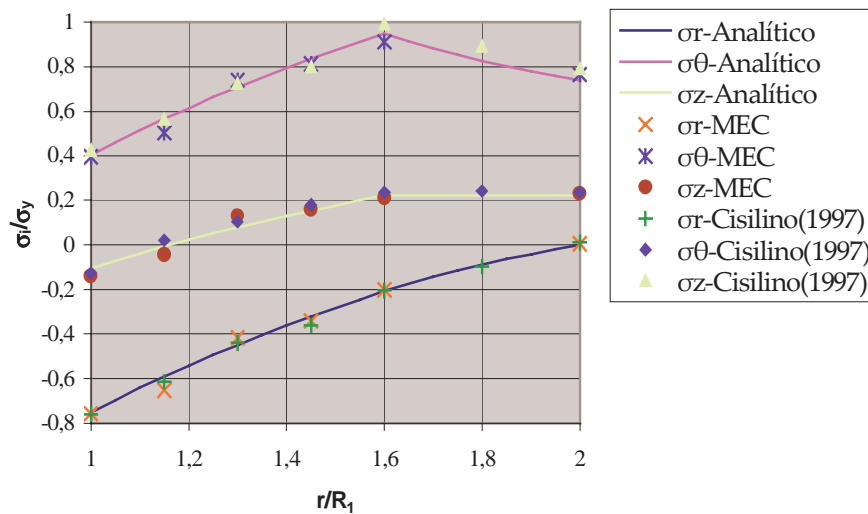


FIGURA 6.10 – Tensões σ_r , σ_θ e σ_z ao longo da espessura

Semelhantemente a resposta em deslocamento observa-se uma boa concordância entre ambos os resultados.

Capítulo 7

ALGORITMOS IMPLÍCITOS PARA ATUALIZAÇÃO DAS TENSÕES

7.1 INTRODUÇÃO

Para se resolver um problema onde o comportamento não-linear do material tem que ser levado em consideração é necessário fazer-se uso de procedimentos numéricos que possibilitem integrar as equações constitutivas que regem o comportamento do material. Porém, deve-se notar que, uma inadequada integração das relações influencia diretamente no comportamento global da estrutura. Algoritmos eficientes são aqueles que possibilitam uma precisa integração das relações constitutivas e uma adequada velocidade de convergência. Essas boas características podem ser encontradas nos algoritmos do tipo "return mapping", amplamente difundidos no meio científico, porém restritos a certos critérios de plastificação e leis de evolução, veja, por exemplo, ORTIZ & POPOV(1985), SIMO & TAYLOR(1986), PRAMONO & WILLAM(1989), CRISFIELD(1991), FEENSTRA & BORST(1996) e MESQUITA(1998). Estes, além de possibilitar uma eficiente atualização das tensões, permitem a obtenção da matriz constitutiva elastoplástica consistente com o algoritmo de retorno, preservando assim a taxa de convergência quadrática do método de Newton-Raphson SIMO & TAYLOR(1986), ORTIZ & POPOV(1985), MESQUITA(1998) e SIMO & TAYLOR(1985).

Nas análises numéricas utilizando-se os algoritmos do tipo implícito, observa-se que o custo computacional maior está na geração da matriz de rigidez global da estrutura (quando o método requer atualização) e no processo de atualização das tensões. O elevado custo na atualização das tensões, principalmente quando o nível de plastificação é alto, é devido ao procedimento iterativo utilizado para resolver a equação de consistência e obter o multiplicador plástico. Entretanto, é possível demonstrar em alguns casos que o multiplicador

plástico pode ser obtido através de simples expressões explícitas encontradas através de uma adequada manipulação das relações constitutivas do modelo proposto. Assim, pode-se evitar os erros de precisão no cálculo do multiplicador plástico e o alto custo computacional necessário para obtê-lo.

Algoritmos do tipo implícito para atualização das tensões são formulados neste capítulo. Estes podem ser introduzidos diretamente tanto nas formulações elastoplásticas apresentada no capítulo 6, quanto nas formulações viscoplásticas que serão posteriormente expostas no capítulo 8. Os procedimentos apresentados são desenvolvidos para o caso tridimensional com os critérios de von Mises e Drucker-Prager com encruamento isotrópico. As expressões do multiplicador plástico são obtidas de forma fechada sem o uso de procedimentos iterativos, preservando as vantagens mencionadas anteriormente. Os dois primeiros algoritmos são construídos com base na lei de fluxo associativa, já os três últimos são formulados segundo uma abordagem não-associativa. Estes últimos seguem a suposição de que o fluxo plástico tende a seguir a direção das deformações elásticas, assim como na mecânica dos fluidos, onde a direção do fluxo é determinada pela diferença de pressão. A adoção desta lei de fluxo simplifica demasiadamente as expressões do algoritmo e sua expressão mais geral permite definir o grau de compressibilidade do material na fase plástica.

7.2 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS (PLASTICIDADE)

Em estados uniaxiais, os limites da resposta elástica de um material, ficam definidos por um intervalo de valores de tensão. Já em estados multiaxiais a região elástica é limitada no espaço das tensões principais por uma superfície. Esta superfície, conhecida como *superfície de plastificação*, separa os estados de tensão elásticos daqueles que geram deformações irreversíveis. Assim, a plastificação em um ponto fica caracterizada pela verificação da igualdade na relação matemática que define a superfície, ou seja,

$$f(\sigma_{ij}, \kappa) = \bar{f}(\sigma_{ij}) - \bar{\sigma}(\kappa) = 0 \quad (7.1)$$

onde $\bar{\sigma}$ é uma tensão equivalente função do parâmetro de encruamento κ , e \bar{f} é uma função do estado de tensão σ_{ij} . Assume-se que as tensões limite só serão alcançadas se a relação matemática que representa a superfície for satisfeita ($f = 0$). Partindo-se desta hipótese, um

descarregamento (retorno à região elástica) fica evidenciado por variações no estado de tensão que conduzam a valores negativos de f . A situação limite de carregamento neutro é caracterizada por acréscimos no estado de tensão que conduzam a verificação da equação (7.1) com a igualdade. Alterações no estado de tensão que determinem valores positivos de f são inacessíveis e indicam o aparecimento de deformações irreversíveis, caracterizando uma situação de carregamento plástico. Nesta última situação, de acordo com o modelo de encruamento do material, a superfície de plastificação tende a evoluir, de forma que o novo estado de tensão ainda resulte sobre a mesma.

A taxa de deformação total pode ser decomposta em uma parcela elástica reversível ($\dot{\epsilon}_{ij}^e$) e uma parcela plástica irreversível ($\dot{\epsilon}_{ij}^p$).

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (7.2)$$

A taxa de deformação elástica é relacionada com a taxa de tensão através da matriz constitutiva elástica C_{ijlm}^e , da seguinte forma:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijlm}^e \dot{\epsilon}_{lm}^e \quad (7.3)$$

A taxa de deformação plástica pode ser expressa através da seguinte relação:

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \partial_{\sigma} g_{ij} \quad (7.4)$$

onde $\dot{\lambda}$ é uma constante de proporcionalidade denominada multiplicador plástico, que deve satisfazer as seguintes condições de complementaridade de Kuhn-Tucker,

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad f \leq 0 \quad e \quad \dot{\lambda} \cdot f = 0 \quad (7.5)$$

O termo g na equação (7.4) é um potencial plástico com unidade de tensão. O caso particular de $g = f$ é conhecido como plasticidade associada. Uma outra forma de idealizar o fluxo plástico seria através da seguinte relação:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} n_{ij} \quad (7.6)$$

onde n_{ij} é um tensor de módulo unitário que define a direção do fluxo plástico. Assim, se a direção adotada n_{ij} não for normal a superfície de plastificação no espaço das tensões principais, pode-se dizer que esta lei é não associativa.

Para o caso de encruamento por deformação o escalar $\dot{\kappa}$ é relacionado com a norma do tensor das taxas de deformações plásticas:

$$\dot{\kappa} = \dot{\varepsilon}^{eq} = K \left\| \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right\| \Rightarrow \kappa = \varepsilon^{eq} = \int K \left\| \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right\| \quad (7.7)$$

onde $\dot{\varepsilon}_{ij}^p$ é o tensor das taxas de deformações plásticas, ε^{eq} é conhecida como deformação plástica equivalente e K é um termo cujo valor deve ser escolhido de tal forma que a partir do modelo generalizado possa-se recuperar o caso unidimensional. Outra possibilidade para se definir a taxa de deformação plástica equivalente, conforme apresentado em LOURENÇO(1996), seria através da definição do trabalho plástico por unidade de volume, da seguinte forma:

$$\dot{W}^P = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p = \bar{\sigma} \dot{\varepsilon}^{eq} \quad (7.8)$$

de maneira que:

$$\dot{\kappa} = \dot{\varepsilon}^{eq} = \frac{1}{\bar{\sigma}} \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (7.9)$$

No caso de encruamento por trabalho, o escalar $\dot{\kappa}$ é simplesmente o trabalho plástico,

$$\dot{\kappa} = \dot{W}^P = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \Rightarrow \kappa = W^P = \int \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (7.10)$$

7.3 ASPECTOS DO ALGORITMO

A integração das equações em taxa é um problema de evolução. As variáveis de estado em um certo instante i são conhecidas e devem ser atualizadas de uma forma consistente,

determinando assim, o estado atual referente ao instante $i+1$. As variáveis internas são determinadas através da utilização de um procedimento implícito (Backward Euler), caindo em um problema governado pelas condições de Kuhn-Tucker, expressas em forma incremental por:

$$\Delta\lambda_{i+1} \geq 0, \quad f_{i+1} \leq 0 \quad e \quad \Delta\lambda_{i+1} f_{i+1} = 0 \quad (7.11)$$

As equações do algoritmo podem ser expressas como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1} &= \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_{i+1} \\ \sigma_{i+1} &= C^e (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^p) \\ \varepsilon_{i+1}^p &= \varepsilon_i^p + \Delta\varepsilon_{i+1}^p \\ \kappa_{i+1} &= \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} \end{aligned} \quad (7.12)$$

No processo de integração das tensões pelo procedimento implícito, é necessário considerar um estado de tentativa (etapa de previsão), que é tomado como um passo puramente elástico, através das seguintes relações:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1} &= \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_{i+1} \\ \sigma_{i+1}^{ten} &= C^e (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^p) \\ \kappa_{i+1}^{ten} &= \kappa_i \\ f(\sigma_{i+1}^{ten}, \kappa_{i+1}^{ten}) &= \bar{f}(\sigma_{i+1}^{ten}) - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}^{ten}) \end{aligned} \quad (7.13)$$

A partir deste estado de tentativa é possível determinar se o estado de tensão viola o critério definido pela superfície de plastificação. Se o estado de tensão obtido na previsão elástica não violar o critério, significa que o estado obtido é admissível e compatível com o modelo adotado. Por outro lado, se este violar, um outro estado de tensão deve ser procurado de modo a se tornar compatível com o modelo. Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{i+1} &= \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} C^e n_{i+1} \\ \varepsilon_{i+1}^p &= \varepsilon_i^p + \Delta\lambda_{i+1} n_{i+1} \\ \kappa_{i+1} &= \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} (\Delta\lambda_{i+1}) \end{aligned} \quad (7.14)$$

Deve-se observar que as expressões (7.14) dependem da determinação do multiplicador plástico $\Delta\lambda$ no instante atual. Sendo assim, obtendo-se o escalar $\Delta\lambda_{i+1}$ é possível encontrar as variáveis internas em (7.14) e resolver o problema no instante $i+1$. O multiplicador plástico pode ser encontrado resolvendo-se a condição de consistência no instante $i+1$, ou seja:

$$f(\sigma_{i+1}, \kappa_{i+1}) = \bar{f}(\sigma_{i+1}) - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}) = 0 \quad (7.15)$$

Substituindo-se as expressões de atualização em (7.14) do encruamento κ_{i+1} e das tensões σ_{i+1} na condição de consistência (7.15), encontra-se uma nova equação escrita em função apenas do multiplicador plástico $\Delta\lambda_{i+1}$. Esta equação deve ser resolvida, determinando-se o $\Delta\lambda$ que recupera um novo estado compatível com o modelo adotado. A questão é que para se solucionar a equação, normalmente se utilizam métodos aproximados. Além do mais, para o emprego desses processos aproximados é indispensável fazer um estudo cuidadoso da condição de consistência para saber qual o melhor método a ser empregado e qual deve ser a melhor e mais segura aproximação inicial a ser adotada como ponto de partida. Caso contrário, o método pode divergir ou até mesmo convergir para uma outra solução que não a desejada MESQUITA(1998). Além disso, como o processo aproximado é iterativo, o custo computacional envolvido nas situações onde o nível de plastificação é bastante relevante. Felizmente, é possível demonstrar, para alguns critérios de plastificação, que o multiplicador plástico pode ser obtido por uma expressão simples e fechada. Fazendo-se uso de expressões fechada, evitam-se os erros de precisão no cálculo do $\Delta\lambda$ e o alto custo computacional necessário para obtê-lo. Essas deduções serão apresentadas nos próximos itens para o estado tridimensional com os critérios de von Mises e Drucker-Prager com leis de fluxo associativo e não-associativo. Estas podem ser degeneradas diretamente para o estado plano de deformação, bastando apenas suprimir os termos que não interessam ao problema.

7.4 ALGORITMO 1: VON MISES ASSOCIATIVO

O procedimento implícito por si só fornece suficiente precisão, evitando a aplicação de técnicas, tais como sub-incrementação, para melhorar o seu desempenho. Este tem se mostrado em diferentes estudos, veja SIMO & TAYLOR(1986), ser “*incondicionalmente*

estável”¹, para plasticidade- J_2 , não possuindo restrições com relação ao passo de carga. Outros pesquisadores têm também afirmado que, até mesmo quando a superfície é altamente distorcida o algoritmo é incondicionalmente estável ORTIZ & POPOV(1985), LOURENÇO(1996) e FEENSTRA & BORST(1996). Segundo SIMO & HUGHES(1988), este procedimento permite a definição de uma matriz tangente elastoplástica consistente com o algoritmo de retorno². O uso do operador tangente elastoplástico consistente melhora a taxa de convergência método para solução do sistema não-linear. O critério de plastificação utilizando-se a superfície de von Mises pode ser escrito como:

$$f = \bar{f}(\boldsymbol{\sigma}) - \bar{\sigma}(\kappa) = \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T P \boldsymbol{\sigma} \right)^{1/2} - \bar{\sigma}(\kappa) \leq 0 \quad (7.16)$$

O termo P é uma matriz simétrica definida da seguinte forma:

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

Já $\boldsymbol{\sigma}$ é o tensor de tensões escrito em forma vetorial como:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{13} \quad \sigma_{23}] \quad (7.18)$$

A tensão equivalente $\bar{\sigma}$ é definida, neste trabalho, segundo uma lei de encruamento isotrópica linear (fig. 7.1) escrita em função do limite de plastificação inicial σ_o do parâmetro de encruamento isotrópico κ e seu respectivo módulo plástico H .

¹ Um procedimento numérico é “condicionalmente estável” se ele é estável apenas quando certas condições no passo de carga são satisfeitas.

²No procedimento explícito a matriz tangente elastoplástica consistente não pode ser formulada sem a perda de sua simetria conforme apresentado em SIMO & TAYLOR(1986).

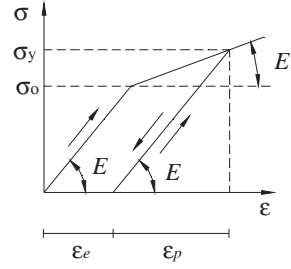


FIGURA 7.1 – Lei de encruamento

$$\bar{\sigma}(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_o + H\kappa) \tag{7.19}$$

As deformações plásticas incrementais são definidas segundo a expressão (7.4), considerando-se a associatividade, ou seja,

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \Delta \lambda \partial_\sigma f = \frac{\Delta \lambda}{2f} P \sigma \tag{7.20}$$

De maneira que a expressão de atualização das deformações plásticas fica escrita como:

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta \varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \frac{\Delta \lambda_{i+1}}{2f_{i+1}} P \sigma_{i+1} \tag{7.21}$$

O incremento $\Delta \kappa$ é obtido utilizando-se a hipótese de encruamento por deformação expressa pela equação (7.7).

$$\Delta \kappa = \Delta \varepsilon^{eq} = K \left\| \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\Delta \varepsilon_{11}^{p2} + \Delta \varepsilon_{22}^{p2} + \Delta \varepsilon_{33}^{p2} + 2(\Delta \varepsilon_{12}^{p2} + \Delta \varepsilon_{13}^{p2} + \Delta \varepsilon_{23}^{p2})} \tag{7.22}$$

Note que a constante K foi escolhida como sendo igual $\sqrt{2/3}$, pois para o critério de von Mises, onde os estados hidrostático não influenciam no processo de plastificação, demonstra-se que assumindo $K = \sqrt{2/3}$ a condição de incompressibilidade na plastificação é respeitada e consegue-se reproduzir o comportamento de um corpo de prova submetido ao

ensaio uniaxial. Substituindo-se a definição das deformações plásticas incrementais em (7.20) na expressão (7.22) pode-se ainda deduzir que:

$$\Delta\kappa = \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{3}} \quad (7.23)$$

Consequentemente a expressão de atualização do parâmetro de encruamento fica:

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} = \kappa_i + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{\sqrt{3}} \quad (7.24)$$

Agora deve-se partir para encontrar a expressão de atualização das tensões.

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta\sigma_{i+1} = \sigma_i + C^e (\Delta\varepsilon_{i+1} - \Delta\varepsilon_{i+1}^p) \quad (7.25)$$

Pode-se reescrever a expressão (7.25), definindo-se um estado de tentativa puramente elástico (ou seja, $\Delta\varepsilon_{i+1}^p = 0$).

$$\sigma_{i+1}^{ten} = \sigma_i + C^e \Delta\varepsilon_{i+1} \quad (7.26)$$

Substituindo-se a expressão de σ_{i+1}^{ten} em (7.26) e a definição de $\Delta\varepsilon_{i+1}^p$ em (7.20) na equação de atualização das tensões em (7.25), encontra-se:

$$\sigma_{i+1} = \tilde{\Xi} \sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.27)$$

sendo

$$\tilde{\Xi} = \left[I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\hat{f}_{i+1}} C^e P \right]^{-1} \quad (7.28)$$

Note que a matriz Ξ é escrita em função do estado de tensão atual, pois \bar{f} é função de σ_{i+1} , o que não é conveniente para a expressão de atualização das tensões. Felizmente esta pode ser escrita em uma forma mais adequada quando a igualdade (7.1) for verificada.

$$\bar{f}_{i+1} = \bar{\sigma}_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sigma_o + H \left(\kappa_i + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{\sqrt{3}} \right) \right] \quad (7.29)$$

Agora deve-se encontrar a expressão da condição de consistência de maneira que se possa resolve-la e assim determinar o multiplicador plástico. Entretanto para isto, antes deve-se desenvolver a expressão de atualização das tensões. Assim, manipulando com a expressão (7.28) é possível chegar na seguinte expressão para a Ξ :

$$\Xi = \frac{1}{3 \left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu) \right)} \left[3(1+\nu)I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} EL \right] \quad (7.30)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson E é o módulo de elasticidade, I é a matriz identidade de ordem 6×6 e L é uma matriz expressa como:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7.31)$$

Agora, parte-se para explicitar a função \bar{f}_{i+1} , ou seja,

$$\bar{f}_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1} \right) \quad (7.32)$$

Para isto faz-se inicialmente o produto $P \sigma_{i+1}$.

$$P\sigma_{i+1} = \frac{1}{3\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)} \left[3(1+\nu)PI + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}EPL \right] \sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.33)$$

note que $PI = P$ e $PL = 0$, sendo assim,

$$P\sigma_{i+1} = \frac{1}{3\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)} 3(1+\nu)P\sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.34)$$

Desenvolvendo o termo $\sigma_{i+1}^T P\sigma_{i+1}$.

$$\sigma_{i+1}^T P\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{tenT} \frac{1}{3\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)} \left[3(1+\nu)I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}EL \right] \frac{1}{3\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)} 3(1+\nu)P\sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.35)$$

sendo que $IP = P$ e $LP = 0$, onde 0 é uma matriz 6×6 nula, é possível chegar na seguinte expressão:

$$\sigma_{i+1}^T P\sigma_{i+1} = \frac{(1+\nu)^2}{\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)^2} \sigma_{i+1}^{tenT} P\sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.36)$$

Consequentemente,

$$\bar{f}_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^T P\sigma_{i+1} \right)^{1/2} = \frac{1+\nu}{\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)} \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P\sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} \quad (7.37)$$

Logo, explicitando-se \bar{f}_{i+1} em (7.37), obtém-se:

$$\bar{f}_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P\sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} - \Delta\lambda_{i+1}G \quad (7.38)$$

onde G é o módulo de elasticidade transversal. Observe que a expressão (7.38) é função apenas do multiplicador plástico e pode ser utilizada na expressão de atualização das tensões, em lugar, caso desejado, da expressão (7.29). Obtida a expressão de \bar{f}_{i+1} parte-se agora para a obtenção da condição de consistência. É possível obter mais de uma expressão para a condição de consistência. Em geral, é possível encontrar uma expressão mais complexa, possuindo mais de uma raiz e pontos de singularidades. Para isto, substitui-se a expressão (7.37) no critério de plastificação em (7.16).

$$f_{i+1} = \frac{1+\nu}{\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)} \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} - \bar{f}_{i+1} = 0 \quad (7.39)$$

com \bar{f}_{i+1} calculado, por exemplo, pela expressão (7.29). Uma expressão mais simples é obtida pela substituição da expressão (7.38) no critério de plastificação (7.16), de maneira que:

$$f_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} - \Delta\lambda_{i+1} G - \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sigma_o + H \left(\kappa_i + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{\sqrt{3}} \right) \right] = 0 \quad (7.40)$$

Note que foi possível obter duas expressões para a condição de consistência. A primeira eq.(7.39) é uma função mais complexa, em geral possuindo mais de uma raiz e pontos de singularidade. Para solucionar-la é necessário fazer uso de procedimentos iterativos aproximados tal como o método de Newton-Raphson. Já a segunda eq.(7.40) é uma função linear sem nenhuma singularidade e a expressão de sua única raiz pode ser obtida explicitamente por:

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{\left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{3}} [\sigma_o + H \kappa_i]}{G + \frac{H}{3}} = \frac{f_{i+1}^{ten}}{G + \frac{H}{3}} \quad (7.41)$$

Fazendo-se uso dessa expressão é possível obter o valor do multiplicador plástico, para o modelo adotado, sem a necessidade de se utilizar métodos iterativos aproximados. Eliminando-se, conseqüentemente, os erros de precisão e custo computacional envolvido no

cálculo do $\Delta\lambda$. Para uma melhor compreensão de todo o procedimento implícito aqui discutido, apresenta-se, de forma resumida, os passos do algoritmo na figura 7.1.

1. Atualizar as deformações e calcular as tensões e encruamento de tentativa

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_{i+1}$$

$$\sigma_{i+1}^{ten} = C^e (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^p)$$

$$\kappa_{i+1}^{ten} = \kappa_i$$

2. Verificar o critério de plastificação com as tensões de tentativa

$$f_{i+1}^{ten} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}^{ten})$$

3. Se $f_{i+1}^{ten} \leq 0$

3.1 Então: finalizar

3.2 Se não:

3.2.1 Determinar $\Delta\lambda_{i+1}$

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{ten}}{G + \frac{H}{3}}$$

3.2.2 Atualizar as variáveis internas com o valor de $\Delta\lambda_{i+1}$

$$\bar{f}_{i+1} = \bar{\sigma}_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\sigma_o + H \left(\kappa_i + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{\sqrt{3}} \right) \right]$$

$$\Xi = \frac{1}{3 \left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu) \right)} \left[3(1+\nu)I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} EL \right]$$

$$\sigma_{i+1} = \Xi \sigma_{i+1}^{ten}$$

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} = \kappa_i + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{\sqrt{3}}$$

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}} P \sigma_{i+1}$$

FIGURA 7.2 - Algoritmo de integração implícito para o critério de von Mises 3D.

7.5 ALGORITMO 2: DRUCKER-PRAGER ASSOCIATIVO

Este critério aplica-se a materiais granulares coesivos, sendo uma regularização da superfície de Coulomb. Esta superfície foi proposta por Drucker-Prager em 1952, e representa um cone no espaço das tensões principais. Sua expressão matemática pode ser encontrada através de uma modificação na expressão do critério de von Mises, acrescentado-se uma parcela relativa ao primeiro invariante. Assim, o critério de Drucker-Prager pode ser apresentado na seguinte forma:

$$f = \tilde{f}(\sigma) - \bar{\sigma}(\kappa) = \left(\frac{1}{2} \sigma^T P \sigma \right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma - \bar{\sigma}(\kappa) \leq 0 \quad (7.42)$$

onde P e σ são os mesmos apresentados nas equações (7.17) e (7.18), respectivamente. Já o vetor μ é definido como:

$$\mu^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (7.43)$$

A tensão equivalente $\bar{\sigma}$ é definida, semelhantemente ao critério de von Mises (fig. 7.1), segundo uma lei de encruamento isotrópica, ou seja,

$$\bar{\sigma}(\kappa) = \sigma_o + \frac{H}{\sqrt{3}} \kappa \quad (7.44)$$

Os escalares σ_o e α são definidos em função da coesão c e do ângulo de atrito interno do material ϕ .

$$\alpha = \frac{2 \operatorname{sen} \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad \text{e} \quad \sigma_o = \frac{6c \cos \phi}{\sqrt{3}(3 - \operatorname{sen} \phi)} \quad (7.45)$$

Para o critério de Drucker-Prager, as deformações plásticas incrementais, definidas segundo a expressão (7.4), ficam expressas como:

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \Delta \lambda \partial_{\sigma} f = \Delta \lambda \alpha \mu + \frac{\Delta \lambda}{2 \bar{f}} P \sigma \quad (7.46)$$

onde o termo \bar{f} é o mesmo definido para o critério de von Mises, ou seja,

$$\bar{f} = \left(\frac{1}{2} \sigma^T P \sigma \right)^{1/2} \quad (7.47)$$

Sendo assim, a expressão de atualização das deformações plásticas fica escrita como:

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta \varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta \lambda_{i+1} \alpha \mu + \frac{\Delta \lambda_{i+1}}{2 \bar{f}_{i+1}} P \sigma_{i+1} \quad (7.48)$$

O incremento $\Delta \kappa$ será obtido utilizando-se a segunda hipótese de encruamento por deformação expressa pela equação (7.9).

$$\Delta \kappa = \Delta \varepsilon^{eq} = K \frac{1}{\bar{\sigma}} \sigma^T \Delta \varepsilon^p \quad (7.49)$$

Note que o escalar K foi introduzido na expressão (7.49), semelhantemente a definição de encruamento por deformação em (7.7), ou seja, de tal forma que a partir do caso generalizado, levando-se em consideração a condição incompressibilidade, possa-se recuperar o caso uniaxial. Assim para este modelo K vale $1/\sqrt{3}$. Logo, substituindo-se a definição das deformações plásticas incrementais em (7.46) na expressão (7.49), sabendo-se que $\bar{f} + \alpha \mu \sigma^T = \bar{\sigma}$, pode-se ainda deduzir,

$$\Delta \kappa = K \Delta \lambda = \Delta \lambda / \sqrt{3} \quad (7.50)$$

Conseqüentemente, a expressão de atualização do parâmetro de encruamento fica:

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta \kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta \lambda_{i+1} \quad (7.51)$$

Semelhantemente ao modelo de von Mises parte-se agora para encontrar a expressão de atualização das tensões.

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta\sigma_{i+1} = \sigma_i + C^e (\Delta\varepsilon_{i+1} - \Delta\varepsilon_{i+1}^p) \quad (7.52)$$

Utilizando-se a mesma expressão definida em (7.26) para um estado de tentativa puramente elástico, é possível escrever a equação (7.52) como:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{ten} - C^e \Delta\varepsilon_{i+1}^p \quad (7.53)$$

Substituindo-se a definição de $\Delta\varepsilon_{i+1}^p$ em (7.46) na equação de atualização das tensões em (7.53), encontra-se:

$$\sigma_{i+1} = \Xi \left(\sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha C^e \mu \right) \quad (7.54)$$

sendo Ξ é a mesma matriz definida na equação (7.28) a não ser pela expressão de \bar{f}_{i+1} . Semelhantemente ao critério de von Mises, note que a matriz Ξ é escrita em função do estado de tensão atual, pois \bar{f}_{i+1} é função de σ_{i+1} , o que não é conveniente para a expressão de atualização das tensões. Felizmente pode-se encontrar uma expressão mais adequada para \bar{f}_{i+1} escrita em função de $\Delta\lambda_{i+1}$, pré-multiplicando ambos os lados da expressão de atualização das tensões em (7.54) por μ^T , antes da inversão, ou seja,

$$\left[\mu^T I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}} \mu^T C^e P \right] \sigma_{i+1} = \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha \mu^T C^e \mu \quad (7.55)$$

Levando-se em consideração que:

$$\mu^T C^e P = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad \text{e} \quad \mu^T C^e \mu = \frac{3E}{1-2\nu} \quad (7.56)$$

Conseqüentemente,

$$\mu^T \sigma_{i+1} = \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha \frac{3E}{1-2\nu} \quad (7.57)$$

A expressão de \bar{f} pode ser melhor escrita fazendo-se uso do critério de plastificação.

$$\bar{f}_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1} \right)^{1/2} = \bar{\sigma}(\Delta\lambda_{i+1}) - \alpha \mu^T \sigma_{i+1} \quad (7.58)$$

Substituindo-se a expressão $\mu^T \sigma_{i+1}$ dada pela equação (7.57) na equação (7.58), pode-se escrever \bar{f}_{i+1} em função apenas de $\Delta\lambda_{i+1}$.

$$\bar{f}_{i+1} = \bar{\sigma}(\Delta\lambda_{i+1}) - \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} + \Delta\lambda_{i+1} \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu} \quad (7.59)$$

Assim, a expressão de atualização das tensões fica escrita apenas em função do multiplicador plástico. Agora é necessário obter a equação de consistência escrita em função apenas de $\Delta\lambda_{i+1}$. Para isto, é necessário fazer algumas manipulações algébricas. Semelhantemente ao que foi feito para o procedimento de von Mises, deve-se desenvolver a expressão de atualização das tensões em (7.54). Assim, executando a inversão e os produtos matriciais e rearranjando os termos é possível escrever:

$$\sigma_{i+1} = \frac{1}{3 \left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu) \right)} \left[3(1+\nu)I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} EL \right] \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha \frac{E}{1-2\nu} \mu \quad (7.60)$$

onde I e L são os mesmos definidos anteriormente. Substituindo a expressão (7.60) na expressão do critério de plastificação (7.42), pode-se desenvolver uma das expressões para a condição de consistência, ou seja,

$$f_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1} \right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma_{i+1} - \bar{\sigma}_{i+1}(\kappa) \quad (7.61)$$

Devido ao grande dimensão das expressões, desenvolve-se termo a termo. Assim, para o primeiro termo da equação (7.61), fazendo-se uso da expressão de atualização das tensões (7.60) encontra-se o termo $P\sigma_{i+1}$, como segue:

$$P\sigma_{i+1} = \frac{1}{3\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)} \left[3(1+\nu)PI + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}EPL \right] \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1}\alpha \frac{E}{1-2\nu} P\mu \quad (7.62)$$

É possível demonstrar que:

$$PI = P, \quad PL = 0 \quad \text{e} \quad P\mu = 0 \quad (7.63)$$

Conseqüentemente, a expressão (7.62) torna-se:

$$P\sigma_{i+1} = \frac{3(1+\nu)}{3\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)} P\sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.64)$$

Pré multiplicando-se a expressão a expressão (7.64) por σ_{i+1}^T , resulta:

$$\sigma_{i+1}^T P\sigma_{i+1} = \left[\frac{\sigma_{i+1}^{tenT}}{3\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)} \left[3(1+\nu)IP + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}ELP \right] - \frac{\Delta\lambda_{i+1}\alpha E}{1-2\nu} \mu^T P \right] \frac{3(1+\nu)}{3\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}}E + (1+\nu)\right)} \sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.65)$$

Calculando-se a transposta das expressões em (7.63), é possível concluir,

$$IP = P, \quad LP = 0 \quad \text{e} \quad \mu^T P = 0 \quad (7.66)$$

Introduzindo-se esses valores na expressão (7.65), tem-se:

$$\sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1} = \frac{(1+\nu)^2}{\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu)\right)^2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.67)$$

Assim o primeiro termo da expressão (7.61) fica escrito como:

$$\left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1}\right)^{1/2} = \frac{(1+\nu)}{\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu)\right)} \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} \quad (7.68)$$

Desenvolve-se agora, utilizando-se novamente a expressão (7.60), o segundo termo da equação (7.61).

$$\alpha \mu^T \sigma_{i+1} = \frac{\alpha}{3 \left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu)\right)} \left[3(1+\nu) \mu^T I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E \mu^T L \right] \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha^2 \frac{E}{1-2\nu} \mu^T \mu \quad (7.69)$$

Sabendo-se que:

$$\mu^T I = \mu^T, \quad \mu^T L = 3\mu^T \quad \text{e} \quad \mu^T \mu = 3 \quad (7.70)$$

chega-se na seguinte expressão:

$$\alpha \mu^T \sigma_{i+1} = \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu} \quad (7.71)$$

Sendo assim, substituindo-se as equações (7.68) e (7.71) na equação de consistência (7.61), esta fica melhor escrita como:

$$f_{i+1} = \frac{(1+\nu)}{\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu)\right)} \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu} - \bar{\sigma}_{i+1} (\Delta\lambda_{i+1}) \quad (7.72)$$

onde \bar{f}_{i+1} é definido segundo a equação (7.59). Note que a função de consistência (7.72) é função apenas do multiplicador plástico. Entretanto, para ser solucionada deve-se fazer uso de métodos iterativos aproximados. Uma outra expressão mais simples para a condição de consistência pode ser obtida através da nova expressão de \bar{f}_{i+1} , definida na expressão (7.68), ou seja,

$$\bar{f}_{i+1} = \frac{(1+\nu)}{\left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu)\right)} \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} \quad (7.73)$$

Resolvendo-se \bar{f}_{i+1} em (7.73), encontra-se

$$\bar{f}_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} - \Delta\lambda_{i+1} G \quad (7.74)$$

sendo G o módulo de elasticidade transversal. Assim, substituindo-se a expressão (7.74) e a (7.71) no critério de plastificação (7.61) obtém-se a seguinte expressão para a condição de consistência:

$$f_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} - \Delta\lambda_{i+1} G + \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu} - \bar{\sigma}_{i+1} (\Delta\lambda_{i+1}) = 0 \quad (7.75)$$

Semelhantemente ao ocorrido para o critério de von Mises, foi possível obter duas expressões para a condição de consistência eq.(7.72) e eq.(7.75). Estas duas expressões são funções diferentes, porém é possível obter o multiplicador plástico através de ambas. A primeira eq.(7.72), é uma função mais complexa, em geral possuindo mais de uma raiz e pontos de singularidade e para soluçona-la é necessário fazer uso de um procedimento iterativo aproximado. Já a segunda eq.(7.75), é uma função linear sem nenhuma singularidade e sua única raiz pode ser obtida explicitamente como:

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{\left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \left(\sigma_o + \frac{H}{\sqrt{3}} \kappa_i\right)}{G + \frac{H}{3} + \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu}} = \frac{f_{i+1}^{ten}}{G + \frac{H}{3} + \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu}} \quad (7.76)$$

Note que não é possível garantir que a singularidade seja sempre negativa, o que não é muito adequado para definir a aproximação inicial de um procedimento iterativo, tal como o método de Newton-Raphson, por que a singularidade pode se encontrar no domínio de estudo ($\Delta\lambda \geq 0$). A posição do ponto singular possui uma relação com o caso onde o retorno do estado de tentativa vai para o ápice do critério de Drucker. Nas análises realizadas observou-se que quando o ponto singular tornava-se positivo ocorria o aparecimento de duas raízes positivas que satisfaziam o modelo. Esta situação se evidenciava nos casos onde o retorno do estado de tentativa era o ápice do critério. A expressão do ponto singular pode ser obtida da equação (7.72). Assim, para que ocorra singularidade na expressão (7.72) é necessário que o denominador do primeiro termo desta equação seja nulo, isto é,

$$\frac{\Delta\lambda_{i+1}^{sin}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1 + \nu) = 0 \quad (7.77)$$

O ponto singular é encontrado substituindo a expressão (7.59) na equação (7.77), de maneira que:

$$\Delta\lambda_{i+1}^{sin} = \frac{\alpha\mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \sigma_o - \frac{H}{\sqrt{3}} \kappa_i}{\left(G + \frac{H}{3} + \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu} \right)} \quad (7.78)$$

A solução (7.76) é uma das respostas da equação (7.72). Entretanto, em um caso específico, quando o estado de tentativa retorna para o ápice da superfície de Drucker-Prager, essa resposta não é a raiz desejada da equação (7.72). Como mencionando anteriormente, esta situação causa o aparecimento de duas raízes positivas ($\Delta\lambda$). Uma das raízes corresponde à solução (7.76), indesejável para o caso específico. A outra raiz corresponde ao retorno para o ápice do critério, sendo esta a raiz procurada. Esta pode ser explicitamente obtida e corresponde a situação onde $\bar{f}_{i+1} = 0$ eq.(7.59). Logo, aplicando esta condição é possível encontrar.

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{\alpha\mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \sigma_o - \frac{H}{\sqrt{3}} \kappa_i}{\left(\frac{H}{3} + \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu}\right)} \quad (7.79)$$

Assim, é possível resolver todo o problema de forma explícita, sem fazer uso de procedimentos iterativos aproximados. Nas situações onde a expressão (7.79) é negativa, $\Delta\lambda_{i+1}$ pode ser obtido pela equação (7.76), de outra forma a solução do problema é a própria equação (7.79). Para esta última situação um cuidado especial deve ser tomado no cálculo das tensões de retorno. Note que neste caso, a função \bar{f}_{i+1} eq.(7.59) é zero e conseqüentemente a expressão de atualização das tensões torna-se singular. Logo, nesta situação é necessário encontrar uma nova expressão para a atualização das tensões. Esta nova expressão pode ser obtida fazendo-se o limite da equação (7.60) quando \bar{f}_{i+1} tende a zero.

$$\lim_{\bar{f}_{i+1} \rightarrow 0} \sigma_{i+1} = \lim_{\bar{f}_{i+1} \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3 \left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu) \right)} \left[3(1+\nu)I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} EL \right] \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha \frac{E}{1-2\nu} \mu \right) \quad (7.80)$$

Sendo assim, a expressão de atualização das tensões, para o caso onde o retorno das tensões de tentativa recai no ápice do critério de Drucker-Prager, fica escrita como:

$$\sigma_{i+1} = \frac{1}{3} L \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha \frac{E}{1-2\nu} \mu \quad (7.81)$$

É ainda necessário executar o limite da expressão das deformações plásticas (7.48), pois na situação de retorno ao ápice esta expressão apresenta singularidade. Assim, substituindo-se a equação (7.64) na expressão (7.48), resulta,

$$\lim_{\bar{f}_{i+1} \rightarrow 0} \varepsilon_{i+1}^p = \lim_{\bar{f}_{i+1} \rightarrow 0} \left[\varepsilon_i^p + \Delta\lambda_{i+1} \alpha \mu + \frac{\Delta\lambda_{i+1} (1+\nu)}{(\Delta\lambda_{i+1} E + 2\bar{f}_{i+1} (1+\nu))} P \sigma_{i+1}^{ten} \right] \quad (7.82)$$

Desenvolvendo o limite da expressão (7.82), encontra-se:

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\lambda_{i+1}\alpha\mu + \frac{1}{2G}P\sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.83)$$

Um resumo do algoritmo descrito para o critério de Drucker-Prager pode ser melhor visualizado na figura 3.

1. Atualizar as deformações e calcular as tensões e encruamento de tentativa

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_{i+1}$$

$$\sigma_{i+1}^{ten} = C^e(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^p)$$

$$\kappa_{i+1}^{ten} = \kappa_i$$

2. Verificar o critério de plastificação com as tensões de tentativa

$$f_{i+1}^{ten} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} + \alpha\mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}^{ten})$$

3. Se $f_{i+1}^{ten} \leq 0$

3.1 Então: finalizar

3.2 Se não:

3.2.1 Determinar $\Delta\lambda_{i+1}$

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{\alpha\mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \sigma_o - \frac{H}{\sqrt{3}} \kappa_i}{\left(\frac{H}{3} + \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu} \right)}$$

3.2.2 Se $\Delta\lambda_{i+1} < 0$

3.2.2.1 Então:

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{ten}}{G + \frac{H}{3} + \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu}}$$

$$\bar{f}_{i+1} = \bar{\sigma}(\Delta\lambda_{i+1}) - \alpha\mu^T \sigma_{i+1}^{ten} + \Delta\lambda_{i+1} \alpha^2 \frac{3E}{1-2\nu}$$

$$\sigma_{i+1} = \frac{1}{3 \left(\frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} E + (1+\nu) \right)} \left[3(1+\nu)I + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} EL \right] \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha \frac{E}{1-2\nu} \mu$$

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\lambda_{i+1} \alpha \mu + \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{2\bar{f}_{i+1}} P \sigma_{i+1}$$

3.2.2.2 Se não:

$$\sigma_{i+1} = \frac{1}{3} L \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} \alpha \frac{E}{1-2\nu} \mu$$

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\lambda_{i+1} \alpha \mu + \frac{1}{2G} P \sigma_{i+1}^{ten}$$

3.2.3 Atualizar o parâmetro de encruamento com o valor de $\Delta\lambda_{i+1}$

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\lambda_{i+1} / \sqrt{3}$$

FIGURA 7.3 - Algoritmo de integração implícito para o critério de Drucker-Prager 3D.

7.6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Com o propósito de analisar os algoritmos apresentados anteriormente, as suas respostas numéricas do multiplicador plástico serão confrontadas com aquelas obtidas por procedimentos iterativos aproximados. A resposta aproximada é obtida pelo cálculo iterativo da condição de consistência (7.39) para o algoritmo de von Mises e a função (7.72) para o Drucker–Prager. O procedimento iterativo utilizado para resolver essas funções de consistência é o conhecido método de Newton-Raphson. Os resultados foram obtidos com os seguintes parâmetros:

TABELA 7.1 – Parâmetros da análise.

| <i>Parâmetros</i> | | | | | |
|-------------------|---|-------|--------------------------|---|----------|
| σ_x^{ten} | → | 0.25 | E | → | 100000.0 |
| σ_y^{ten} | → | 0.39 | H | → | 1000.0. |
| σ_z^{ten} | → | 0.98 | ν | → | 0.25 |
| τ_{xy}^{ten} | → | 0.045 | κ | → | 0.00014 |
| τ_{xz}^{ten} | → | 0.049 | c | → | 0.225 |
| τ_{yz}^{ten} | → | 0.88 | ϕ | → | $\pi/18$ |
| | | | $\sigma_{\sigma(Mises)}$ | → | 0.45 |

Resultados do multiplicador plástico para o critério de von Mises são apresentados nas tabelas 7.2 e 7.3.

TABELA 7.2 – Multiplicador plástico para o critério von Mises.

| <i>Expressão fechada ($\Delta\lambda$)</i> | <i>f($\Delta\lambda$)</i> | <i>Iteração</i> | <i>Procedimento iterativo ($\Delta\lambda$)</i> | <i>f($\Delta\lambda$)</i> |
|---|--------------------------------------|-----------------|--|--------------------------------------|
| 1.54505309097141*10 ⁻⁵ | 0.0 | - | $\Delta\lambda_0 = 0.0$ | 0.623171413358469 |
| | | 1ª | 5.48998475097715*10 ⁻⁶ | 0.24478128443494 |
| | | 2ª | 1.13317260907876*10 ⁻⁵ | 0.071727499823402 |
| | | 3ª | 1.47518839661415*10 ⁻⁵ | 0.010407200603665 |
| | | 4ª | 1.54305486453291*10 ⁻⁵ | 2.89388762487519*10 ⁻⁴ |
| | | 5ª | 1.5450514584515*10 ⁻⁵ | 2.36233121508889*10 ⁻⁷ |
| | | 6ª | 1.54505309097032*10 ⁻⁵ | 1.57707180648003*10 ⁻¹³ |
| | | 7ª | 1.54505309097141*10 ⁻⁵ | 0.0 |

TABELA 7.3 – Multiplicador plástico para o critério von Mises.

| <i>Expressão fechada ($\Delta\lambda$)</i> | <i>f($\Delta\lambda$)</i> | <i>Iteração</i> | <i>Procedimento iterativo ($\Delta\lambda$)</i> | <i>f($\Delta\lambda$)</i> |
|---|--------------------------------------|-----------------|--|--------------------------------------|
| 1.54505309097141*10 ⁻⁵ | 0.0 | - | $\Delta\lambda_0 = 0.0001$ | -0.29156538082069 |
| | | 1ª | -1.85917375407944*10 ⁻⁴ | -0.316185526068074 |
| | | 2ª | -7.22154975470778*10 ⁻⁴ | -0.103263750101287 |
| | | 3ª | -1.01788610286747*10 ⁻³ | -1.37304302972388*10 ⁻³ |
| | | 4ª | -1.02190960556935*10 ⁻³ | -1.26547169423474*10 ⁻⁷ |
| | | 5ª | -1.02190997646563*10 ⁻³ | -1.11537195239973*10 ⁻¹⁵ |
| | | 6ª | -1.02190997646564*10 ⁻³ | 0.0 |

Na primeira delas, tabela 7.2, é possível verificar que é necessário apenas um passo para obter a resposta com a expressão fechada. Entretanto, para o método de Newton são necessárias sete iterações para obter uma precisão similar. Já na tabela 7.3 pode ser observado que o procedimento iterativo converge para outra resposta, por causa da aproximação inicial adotada ($\Delta\lambda_0$). Note que $\Delta\lambda$ é negativo, sendo esta resposta inadmissível segundo as condições de Kuhn-Tucker. Semelhantemente, na tabela 7.4 são apresentados resultados do $\Delta\lambda$ para o critério de Drucker-Prager.

TABELA 7.4 – Multiplicador plástico para o critério Drucker-Prager.

| Expressão fechada ($\Delta\lambda$) | $f(\Delta\lambda)$ | Iteração | Procedimento iterativo ($\Delta\lambda$) | $f(\Delta\lambda)$ |
|---------------------------------------|--------------------|----------|--|-----------------------------|
| $1.67537453512869*10^{-5}$ | 0.0 | - | $\Delta\lambda_0 = 0.0$ | 0.726327335441706 |
| | | 1ª | $4.38360276181939*10^{-6}$ | 0.316333280646228 |
| | | 2ª | $1.03025686330178*10^{-5}$ | 0.111207116909211 |
| | | 3ª | $1.51556705230755*10^{-5}$ | 0.02232896338397 |
| | | 4ª | $1.666490605780478*10^{-5}$ | $1.17699715647779*10^{-3}$ |
| | | 5ª | $1.67534799237178*10^{-5}$ | $3.50608173821376*10^{-6}$ |
| | | 6ª | $1.67537453489224*10^{-5}$ | $3.12336267960234*10^{-11}$ |
| | | 7ª | $1.67537453512869*10^{-5}$ | 0.0 |

Observando a tabela 7.4, é possível chegar nas mesmas conclusões que foram anteriormente apresentadas para a tabela 7.2. Com o objetivo de simular o retorno ao ápice do critério de Drucker, o seguinte estado de tentativa foi adotado $\sigma^{ten^T} = [4.5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$ e para facilitar os cálculos tomou-se $H = 0.0$. Os resultados do multiplicador plástico são apresentados a seguir.

TABELA 7.5 – Multiplicador plástico para o critério Drucker-Prager.

| Expressão fechada ($\Delta\lambda$) | $f(\Delta\lambda)$ | Iteração | Procedimento iterativo ($\Delta\lambda$) | $f(\Delta\lambda)$ |
|---------------------------------------|--------------------|----------|--|------------------------------|
| $1.57844760607995*10^{-5}$ | 0.0 | - | $\Delta\lambda_0 = 0.0$ | 2.64574215274847 |
| | | 1ª | $-1.21519440823048*10^{-6}$ | 1.38582903221216 |
| | | 2ª | $-4.02677231453936*10^{-6}$ | 0.763468639127343 |
| | | 3ª | $-1.17779040417183*10^{-5}$ | 0.473321511930345 |
| | | 4ª | $-4.79099422141167*10^{-5}$ | 0.42932220863332 |
| | | 5ª | $1.77357939244104*10^{-4}$ | -0.320732318865062 |
| | | 6ª | $6.80286146522288*10^{-5}$ | -0.015390005023294 |
| | | 7ª | $6.16746904734277*10^{-5}$ | $-3.98394813343361*10^{-4}$ |
| | | 8ª | $6.15007301089482*10^{-5}$ | $-3.6562137195606*10^{-7}$ |
| | | 9ª | $6.15005701652162*10^{-5}$ | $-3.10862446895044*10^{-13}$ |
| | | 10ª | $6.15005701650802*10^{-5}$ | 0.0 |

Nesta última situação, o ponto singular torna-se positivo e a condição de consistência (7.72) possui duas raízes positivas. Note que o procedimento iterativo encontra uma das respostas positivas. Porém, este resultado não é o procurado e não conduz ao ápice do critério.

Entretanto, com o multiplicado plástico obtido pelo algoritmo aqui proposto, é possível verificar que as tensões de tentativa retornam para o ápice, veja tabela 7.6.

TABELA 7.6 – Retorno ao ápice do critério de Drucker-Prager.

| | <i>Resposta correta</i> | <i>Expressão fechada</i> | <i>Procedimento iterativo</i> |
|-----------------|---------------------------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| $\Delta\lambda$ | $1.57844760607995 \cdot 10^{-5}$ | $1.57844760607995 \cdot 10^{-5}$ | $6.15005701650802 \cdot 10^{-5}$ |
| σ_x | $\sigma_o/3\alpha = 1.27603840941398$ | 1.27603840941398 | 0.786795661464374 |
| σ_y | $\sigma_o/3\alpha = 1.27603840941398$ | 1.27603840941398 | 0.547680150279314 |
| σ_z | $\sigma_o/3\alpha = 1.27603840941398$ | 1.27603840941398 | 0.547680150279314 |
| τ_{xy} | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| τ_{xz} | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| τ_{yz} | 0.0 | 0.0 | 0.0 |

Note que ambas as soluções para as tensões satisfazem o critério de Drucker-Prager. Entretanto, o procedimento iterativo conduz a uma resposta diferente daquela específica para o ápice. Observe que nesta última situação as tensões principais deveriam ser iguais.

7.7 ALGORITMO 3: VON MISES NÃO-ASSOCIATIVO

A expressão para o critério de von Mises, adotado para o desenvolvimento do algoritmo implícito não-associativo, bem como a expressão da tensão equivalente $\bar{\sigma}$ segundo uma lei de encruamento linear isotrópico, são as mesmas apresentadas nas equações (7.16) e (7.19), respectivamente. Já as deformações plásticas incrementais são definidas segundo uma lei de fluxo não associativa. Esta idealização parte da suposição de que o sólido ao plastificar poderá se comportar como um fluido compressivo, ou seja, não se pode condicionar o fluxo plástico a uma superfície, responsável em princípio por definir apenas os limites elásticos do material. Assim, imagina-se, a partir das observações da mecânica dos fluidos, que se deve estabelecer a direção do fluxo plástico mantendo uma relação com as tensões (analogia pressão/fluxo do fluido), sendo esta relação semelhante à relação elástica (tensão/deformação). Neste sentido, pode-se escolher um tensor unitário qualquer “ n ” como sendo a direção do fluxo plástico, porém é interessante que este esteja relacionado à direção da tensão de tentativa, tal como:

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda \cdot n = \Delta \lambda \frac{\varepsilon^{ten}}{\left| \varepsilon^{ten} \right|} = \Delta \lambda C^{e-1} \frac{\sigma^{ten}}{\left| C^{e-1} \sigma^{ten} \right|} \quad (7.84a)$$

Poderia-se generalizar a expressão (7.84a) adotando-se no lugar da matriz constitutiva C^e uma outra matriz C^* , semelhante a matriz constitutiva, porém com propriedades físicas diferentes. Dessa forma, poderíamos quantificar qualquer grau de compressibilidade do material plastificado. Assim, como o sentido do estado de tentativa elástico preserva as condições de complementaridade de Kuhn-Tucker, a direção de n_{ij} pode ser consistentemente encontrada aqui adotando-se uma “Lei de Hooke” especial, isto é:

$$n_{ij} = \frac{C_{ij}^{kl} \ast^{-1} \sigma_{kl}^{ten}}{\left| C_{ij}^{kl} \ast^{-1} \sigma_{kl}^{ten} \right|} \quad (7.84b)$$

Contudo, no desenvolvimento do presente modelo adota-se $C^* = C^e$, ou seja, imaginando-se que o grau de incompressibilidade do material em regime plástico é o mesmo que possuía em regime elástico, porém, um algoritmo referente ao modelo não-associativo generalizado (com C^*) é apresentado e discutido no final deste capítulo. Assim, adotando-se $C^* = C^e$ a expressão de atualização das deformações plásticas fica escrita como:

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta \varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta \lambda_{i+1} C^{e-1} \frac{\sigma_{i+1}^{ten}}{\left| C^{e-1} \sigma_{i+1}^{ten} \right|} \quad (7.85)$$

O incremento $\Delta \kappa$ é obtido utilizando-se a hipótese de encruamento por deformação expressa pela equação (7.7).

$$\Delta \kappa = \Delta \varepsilon^{eq} = K \left\| \dot{\varepsilon}_{ij}^p \right\| = K \sqrt{\Delta \varepsilon_{11}^{p2} + \Delta \varepsilon_{22}^{p2} + \Delta \varepsilon_{33}^{p2} + 2(\Delta \varepsilon_{12}^{p2} + \Delta \varepsilon_{13}^{p2} + \Delta \varepsilon_{23}^{p2})} \quad (7.86)$$

Nas formulações clássicas o termo K é obtido a partir da hipótese de incompressibilidade, levando sempre em consideração que o coeficiente de Poisson na fase plástica possui valor de 0,5, independentemente do problema analisado. Esta hipótese, além de

não ser muito realista para materiais em geral, restringe o campo de aplicação do modelo a materiais incompressíveis. Neste trabalho a determinação do parâmetro K não será feita segundo essa hipótese, pois como mencionado anteriormente o fluxo plástico será idealizado como o fluxo de um fluido compressível. Conseqüentemente, o parâmetro K agora deve ser uma função do coeficiente de Poisson. Esta determinação é bastante simples e segue os procedimentos clássicos da degeneração do caso tridimensional ao caso unidimensional. Assim, considerando-se um corpo tridimensional infinitesimal (fig. 7.4) solicitado apenas por uma tensão normal em uma determinada direção (caso uniaxial).

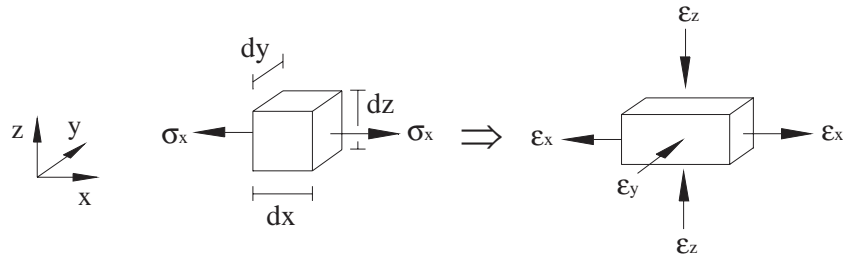


FIGURA 7.4 – Estado de deformação devido a um estado de tensão uniaxial.

Nesta situação aparecem deformações elásticas normais nas três direções, definidas como:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z) = \frac{\sigma_x}{E} \Rightarrow \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} \\ \epsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x - \nu\sigma_z) = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \Rightarrow \epsilon_y = -\nu\epsilon_x \\ \epsilon_z &= \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y) = -\frac{\nu\sigma_x}{E} \Rightarrow \epsilon_z = -\nu\epsilon_x \end{aligned} \quad (7.87)$$

A norma do estado de deformação anterior pode ser escrita como:

$$|\epsilon| = \sqrt{\epsilon_x^2 + \nu^2 \epsilon_x^2 + \nu^2 \epsilon_x^2} = \sqrt{\epsilon_x^2 (1 + 2\nu^2)} = |\epsilon_x| \sqrt{1 + 2\nu^2} \quad (7.88)$$

Para que a norma referente ao estado tridimensional $|\epsilon|$ seja igual a norma referente ao caso uniaxial, ou seja $|\epsilon_x|$, é necessário que:

$$|\epsilon_x| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\nu^2}} |\epsilon| = K |\epsilon| \quad (7.89)$$

onde

$$K(\nu) = \frac{1}{\sqrt{1+2\nu^2}} \quad (7.90)$$

Note que, para o caso de material incompressível, hipótese freqüentemente utilizada nos modelos clássicos com associatividade, critério de von Mises e coeficiente de Poisson na fase plástica de 0,5, o parâmetro $K(0,5)$ recai no conhecido valor de $\sqrt{2/3}$. Substituindo-se a definição das deformações plásticas incrementais dadas pela equação (7.84) na expressão (7.86) pode-se ainda mostrar que:

$$\Delta\kappa = \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1+2\nu^2}} \sqrt{n_{11}^2 + n_{22}^2 + n_{33}^2 + 2(n_{12}^2 + n_{13}^2 + n_{23}^2)} \quad (7.91)$$

Como a norma de um tensor unitário é sempre um, segue que:

$$\Delta\kappa = \frac{\Delta\lambda}{\sqrt{1+2\nu^2}} = K\Delta\lambda \quad (7.92)$$

Consequentemente a expressão de atualização do parâmetro de encruamento fica:

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} = \kappa_i + K\Delta\lambda_{i+1} \quad (7.93)$$

Agora deve-se encontrar a expressão de atualização das tensões.

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta\sigma_{i+1} = \sigma_i + C^e (\Delta\epsilon_{i+1} - \Delta\epsilon_{i+1}^p) \quad (7.94)$$

Definindo-se um estado de tentativa elástico (ou seja, $\Delta\epsilon_{i+1}^p = 0$) conforme apresentado em (7.26), é possível escrever a equação (7.94) como:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_i + \Delta\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{ten} - C^e \Delta\epsilon_{i+1}^p \quad (7.95)$$

Substituindo-se a expressão de $\Delta \epsilon_{i+1}^p$ dada pela equação (7.84) na expressão de atualização das tensões (7.93), encontra-se:

$$\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{ten} - C^e \Delta \lambda_{i+1} \frac{C^{e-1} \sigma_{i+1}^{ten}}{|C^{e-1} \sigma_{i+1}^{ten}|} = \left(1 - \frac{\Delta \lambda_{i+1}}{|C^{e-1} \sigma_{i+1}^{ten}|} \right) \sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.96)$$

Analisando a equação de atualização das tensões em (7.96) é possível visualizar que o retorno do estado de tentativa não provoca o aparecimento de tensões “residuais” em direções diferentes da estabelecida pela tentativa elástica, ao contrário dos modelos clássicos com lei de fluxo associativa. Nas análises elastoplásticas com os modelos clássicos, estas tensões são corrigidas pelo processo iterativo quando o corpo atinge equilíbrio estático. Porém, em análises viscoplásticas elas induzem o aparecimento de velocidades de tensão nas outras direções. Observando-se ainda a expressão (7.96) pode-se visualizar claramente que a correção do estado de tentativa é sempre feita segundo a direção das tensões de tentativa (fig.7.5), consequência direta da lei de fluxo adotada.

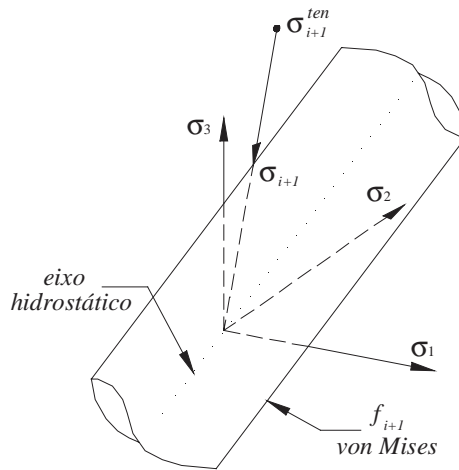


FIGURA 7.5 – Correção do estado de tentativa.

Agora deve-se encontrar a expressão da condição de consistência de maneira que se possa resolvê-la e assim determinar o multiplicador plástico. Assim, para o instante atual o critério de plastificação fica escrito como:

$$f_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1} \right)^{1/2} - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}) = 0 \quad (7.97)$$

Desenvolvendo-se o primeiro termo da equação (7.97), fazendo-se uso da expressão de atualização das tensões em (7.96), encontra-se:

$$\left(\frac{1}{2}\sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1}\right)^{1/2} = \left(1 - \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{|C e^{-1} \sigma_{i+1}^{ten}|}\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} \quad (7.98)$$

Aplicando-se a definição de encruamento expressa pela equação (7.92), a segunda parte da equação (7.97) fica escrita como:

$$\bar{\sigma}(\kappa_{i+1}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_o + H\kappa_{i+1}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_o + H\kappa_i + H\Delta\kappa_{i+1}) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_o + H\kappa_i + HK\Delta\lambda_{i+1}) \quad (7.99)$$

Substituindo as expressões (7.98) e (7.99) na expressão do critério de plastificação em (7.97), encontra-se:

$$f_{i+1} = \left(1 - \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{|C e^{-1} \sigma_{i+1}^{ten}|}\right) \left(\frac{1}{2}\sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_o + H\kappa_i + HK\Delta\lambda_{i+1}) = 0 \quad (7.100)$$

Note que é possível encontrar uma outra expressão para a condição de consistência substituindo no desenvolvimento anterior a primeira equação em (7.14), ao invés da equação (7.96). A função de consistência resultante é uma função do segundo grau e suas raízes podem ser facilmente encontradas. Porém, como pode ser visto, a equação (7.100) é de uma forma mais simples (1º grau) e sua raiz é obtida diretamente.

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_o + H\kappa_i)}{\frac{1}{|C e^{-1} \sigma_{i+1}^{ten}|} \left(\frac{1}{2}\sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{3}} HK} = \frac{f_{i+1}^{ten}}{\frac{1}{|C e^{-1} \sigma_{i+1}^{ten}|} \left(\frac{1}{2}\sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten}\right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{3}} HK} \quad (7.101)$$

Para uma melhor compreensão de todo o procedimento implícito aqui discutido, apresentam-se, de forma resumida, os passos do algoritmo na figura 7.6.

1. Atualizar as deformações e calcular as tensões e encruamento de tentativa

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i+1} &= \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_{i+1} \\ \sigma_{i+1}^{ten} &= C^e (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^p) \\ \kappa_{i+1}^{ten} &= \kappa_i\end{aligned}$$

2. Verificar o critério de plastificação com as tensões de tentativa

$$f_{i+1}^{ten} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{ten T} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}^{ten})$$

3. Se $f_{i+1}^{ten} \leq 0$

3.1 Então: finalizar

3.2 Se não:

3.2.1 Determinar $\Delta\lambda_{i+1}$

$$n_{i+1} = \frac{C^{e-1} \sigma_{i+1}^{ten}}{\left| C^{e-1} \sigma_{i+1}^{ten} \right|}$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{1+2\nu^2}}$$

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{f_{i+1}^{ten}}{\frac{1}{\left| C^{e-1} \sigma_{i+1}^{ten} \right|} \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{ten T} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{3}} HK}$$

3.2.2 Atualizar as variáveis internas com o valor de $\Delta\lambda_{i+1}$

$$\sigma_{i+1} = \left(1 - \frac{\Delta\lambda_{i+1}}{\left| C^{e-1} \sigma_{i+1}^{ten} \right|} \right) \sigma_{i+1}^{ten}$$

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\lambda_{i+1} n_{i+1}$$

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + K \Delta\lambda_{i+1}$$

FIGURA 7.6a - Algoritmo de integração implícito para o critério de von Mises 3D.

Semelhantemente aos algoritmos com lei de fluxo associativa, foi possível encontrar a expressão fechada do multiplicador plástico. As mesmas vantagens mencionadas anteriormente com relação ao uso da expressão do $\Delta\lambda$ são aqui reproduzidas. O custo computacional, as imprecisões devido ao cálculo aproximado do multiplicador plástico, as dificuldades da escolha do melhor método e de sua aproximação inicial para solucionar a

condição de consistência e as situações de divergência, são problemas que foram contornados devido ao emprego das simples expressões apresentadas no algoritmo da figura 7.6.

O algoritmo mais geral, que possibilita definir um “Poisson plástico” e consequentemente escolher o grau de compressibilidade do material, pode ser encontrado repetindo todo o procedimento anterior, fazendo uso da expressão (7.14) escrita em função da direção “ n ”, tal como em (7.84b). A expressão para este algoritmo é apresentada na figura (7.6b)

1. Atualizar as deformações e calcular as tensões e encruamento de tentativa

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \Delta\varepsilon_{i+1}$$

$$\sigma_{i+1}^{ten} = C^e (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^p)$$

$$\kappa_{i+1}^{ten} = \kappa_i$$

2. Verificar o critério de plastificação com as tensões de tentativa

$$f_{i+1}^{ten} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{ten T} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}^{ten})$$

3. Se $f_{i+1}^{ten} \leq 0$

3.1 Então: finalizar

3.2 Se não:

3.2.1 Encontre $\Delta\lambda_{i+1}$

$$n = \frac{C^{* -1} \sigma_{i+1}^{ten}}{\left| C^{* -1} \sigma_{i+1}^{ten} \right|} \quad \text{onde} \quad C^* = C^e(E, \nu^*)$$

$$K = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\nu^{*2}}}$$

$$\Theta_1 = \frac{1}{2} n^T C^e P C^e n - \frac{1}{3} H^2 K^2$$

$$\Theta_2 = \sigma_{i+1}^{ten T} P C^e n + \frac{2}{3} (\sigma_o + H \kappa_i) H K$$

$$\Theta_3 = \frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{ten T} P \sigma_{i+1}^{ten} - \frac{1}{3} (\sigma_o + H \kappa_i)^2$$

$$\Delta\lambda_{i+1} = \frac{\Theta_2 - \sqrt{\Theta_2^2 - 4\Theta_1\Theta_3}}{2\Theta_1}$$

3.2.2 Atualize variáveis internas utilizando $\Delta\lambda_{i+1}$

$$\sigma_{i+1} = \sigma_{i+1}^{ten} - \Delta\lambda_{i+1} C^e n_{i+1}$$

$$\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_i^p + \Delta\lambda_{i+1} n_{i+1}$$

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + K \Delta\lambda_{i+1}$$

FIGURA 7.6b - Algoritmo generalizado não-associativo para o critério de von Mises 3D.

7.8 ALGORITMO 4: DRUCKER-PRAGER NÃO-ASSOCIATIVO

A expressão para o critério de Drucker-Prager que será utilizada é a mesma apresentada no item 7.5. Este fica definido pela equação (7.42), cuja tensão equivalente $\bar{\sigma}$, segundo uma lei de encruamento isotrópica linear (fig. 7.1), é descrita pela equação (7.44). Adotando-se a mesma hipótese não-associativa para a lei de fluxo apresentada no item 7.6 para o critério de von Mises, é possível chegar nas mesmas expressões para a atualização das deformações plásticas eq.(7.85), do encruamento eq.(7.93) e das tensões eq.(7.96). Note que o parâmetro $K(\nu)$ é idealizado, semelhantemente ao fluxo plástico, segundo a hipótese de compressibilidade, sendo este definido pela expressão (7.90).

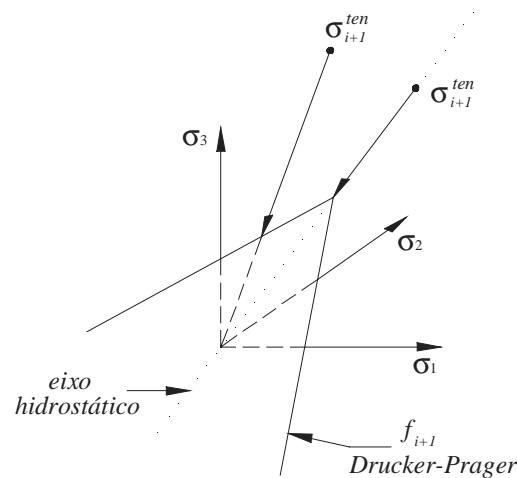


FIGURA 7.7 – Correção do estado de tentativa.

É importante observar que a adoção desta lei de fluxo não-associativa proporciona expressões semelhantes para as variáveis internas (a menos do multiplicador plástico), independentemente do critério³ utilizando. Conseqüentemente, as observações referentes à expressão de atualização das tensões, feitas anteriormente com relação às tensões fictícias, são válidas aqui também. Semelhantemente, pode-se concluir que a correção do estado de tentativa é sempre feita segundo a direção das tensões de tentativa. Além disso, uma interpretação geométrica do modelo aqui proposto permite verificar que o retorno ao ápice só ocorrerá se o estado de tentativa, que viola o critério, encontrar-se no eixo hidrostático (fig.

³ Levando-se em consideração apenas critérios definidos por uma única superfície

7.7). Isto é uma conseqüência direta da lei de fluxo adotada, que elimina as singularidades na função de consistência e torna o retorno ao ápice do critério uma situação comum.

A expressão da condição de consistência deve ser obtida para o caso específico (Drucker-Prager), de maneira que se possa resolve-la e assim determinar o multiplicador plástico. Assim, para o instante atual o critério de plastificação fica escrito como:

$$f_{i+1} = \left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^T P \sigma_{i+1} \right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma_{i+1} - \bar{\sigma}(\kappa_{i+1}) = 0 \quad (7.102)$$

O primeiro e o terceiro termo da equação (7.102) já foram desenvolvidos, conforme apresentado pelas equações (7.98) e (7.99), respectivamente. O segundo termo pode ser facilmente obtido aplicando-se a expressão de atualização das tensões eq.(7.96).

$$\alpha \mu^T \sigma_{i+1} = \left(1 - \frac{\Delta \lambda_{i+1}}{|C e^{-1} \sigma_{i+1}^{ten}|} \right) \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} \quad (7.103)$$

Substituindo-se as expressões (7.98), (7.99) e (7.103) na expressão do critério de plastificação em (7.102), encontra-se:

$$f_{i+1} = \left(1 - \frac{\Delta \lambda_{i+1}}{|C e^{-1} \sigma_{i+1}^{ten}|} \right) \left[\left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} \right] - \left(\sigma_o + \frac{H}{\sqrt{3}} \kappa_i + \frac{H}{\sqrt{3}} K \Delta \lambda_{i+1} \right) = 0 \quad (7.104)$$

Note que é possível encontrar uma outra expressão para a condição de consistência substituindo no desenvolvimento anterior a primeira equação em (7.14), ao invés da equação (7.96). A função de consistência resultante é uma função do segundo grau e suas raízes podem ser facilmente encontradas. Porém, como pode ser visto, a equação (7.104) é de uma forma mais simples (1º grau) e sua raiz é obtida diretamente.

$$\Delta \lambda_{i+1} = \frac{\left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} - \frac{1}{\sqrt{3}} (\sigma_o + H \kappa_i)}{\frac{1}{|C e^{-1} \sigma_{i+1}^{ten}|} \left[\left(\frac{1}{2} \sigma_{i+1}^{tenT} P \sigma_{i+1}^{ten} \right)^{1/2} + \alpha \mu^T \sigma_{i+1}^{ten} \right] + \frac{1}{\sqrt{3}} H K} \quad (7.105)$$

Para uma melhor compreensão de todo o procedimento implícito aqui discutido, apresentam-se, de forma resumida, os passos do algoritmo na figura 7.8.

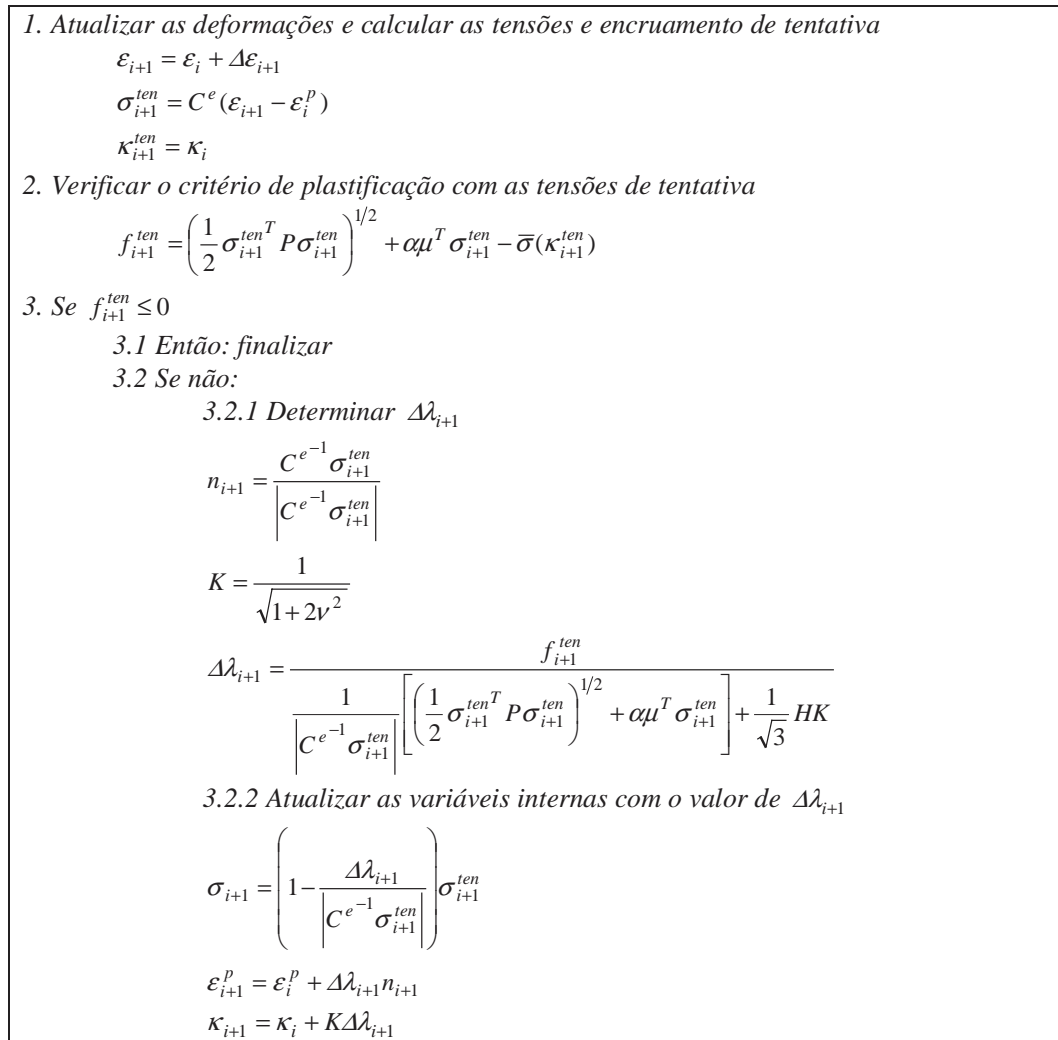


FIGURA 7.8 - Algoritmo de integração implícito para o critério de Drucker-Prager 3D.

Além das vantagens mencionadas anteriormente devido à obtenção do multiplicador plástico de forma fechada, observa-se que a adoção da lei de fluxo não-associativa proporciona expressões mais simples que aquelas obtidas com a lei associativa, evitando os problemas de singularidade na função de consistência relacionados com o retorno ao ápice do critério, cujo tratamento envolve um maior esforço algébrico.

7.9 EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste item apresentam-se resultados dos cinco algoritmos propostos anteriormente. Estes foram introduzidos na formulação elastoplástica do MEC exposta no capítulo 6. O

elemento de contorno utilizado é o mesmo descrito no item(6.2.5). Resultados dessa implementação com o algoritmo associativo e critério de von Mises já foram divulgados no capítulo anterior. Porém nenhuma comparação entre os algoritmos associativos e não-associativos foi apresentada. Assim, com o propósito de confrontá-los e analisar seus comportamentos, foram utilizados os mesmos exemplos expostos no item(6.2.5).

Uma notação específica é utilizada para definir os 3 algoritmos empregados com critério de von Mises. Para o modelo associativo (figura 7.2) será adotada a abreviação *ASS* (Associativo). O modelo não-associativo apresentado na figura 7.6a será empregado *NAS* (Não-Associativo) e o não-associativo generalizado (figura 7.6b) será definido por *GNA* (Generalizado Não-Associativo) seguido pelo valor do “Poisson plástico” (ν^*). Para as análises com os algoritmos com critério de Drucker nenhuma sigla é utilizada.

7.9.1 Exemplo 01: Peça tracionada 3D

Este é o mesmo exemplo exposto no item(6.2.5.1), ou seja, uma barra engastada solicitada em sua extremidade livre por um carregamento distribuído de tração. Todos os dados do problema são apresentados na figura 6.3. Resultados do deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada da peça são apresentados na figura 7.9.

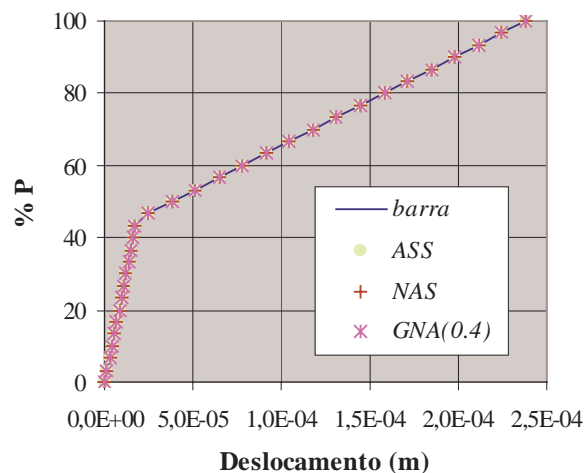


FIGURA 7.9 – Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada.

Os resultados dos modelos com leis de fluxo diferentes e critério de von Mises são confrontados com a resposta numérica obtida com o método dos elementos finitos utilizando-se 3 elementos de barra. Pode-se observar uma perfeita concordância entre os resultados do MEC e do elemento finito de barra. A concordância entre os resultados demonstra a

capacidade das formulações propostas em poder reproduzir o caso uniaxial. Resultados da tensão σ_{zz} extraídos no centróide do corpo, para os algoritmos com o critério de von Mises, são apresentados na figura 7.10 juntamente com a resposta analítica do problema.

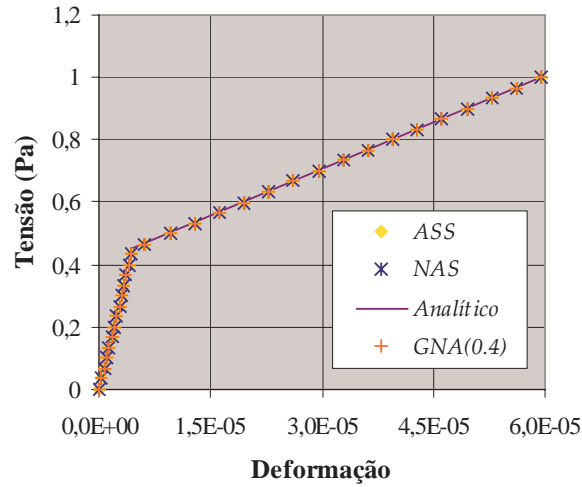


FIGURA 7.10 – Tensão σ_{zz} do ponto localizado no centróide do corpo (critério de von Mises).

Como pode ser visto na figura 7.10 a resposta em tensão é bastante precisa e serve também para validar os modelos. Próximos resultados incluem plasticidade perfeita e amolecimento (softening). Assim, uma análise com controle de deslocamento foi utilizada. O deslocamento aplicado na extremidade livre é de $3,6 \times 10^{-5} m$ e a tolerância adotada é de 0,1% para ambos os critérios de convergência. A figura 7.10a mostra os resultados *reação x deslocamento* para a estrutura analisada considerando encruamento nulo e compara a solução numérica com a analítica.

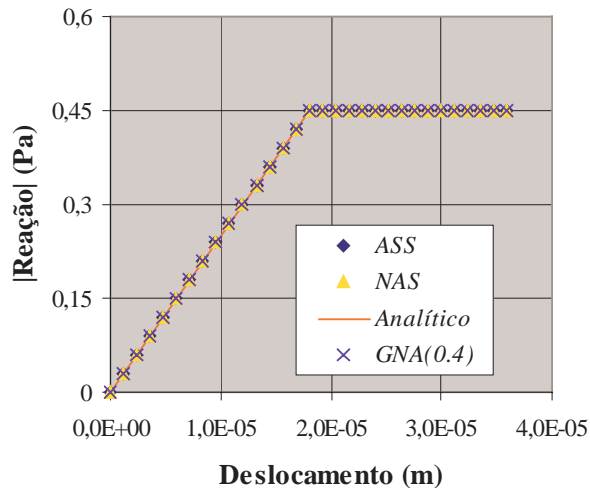


FIGURA 7.10a – Reação x deslocamento com encruamento nulo (critério de von Mises).

A figura 7.10b apresenta o mesmo resultado anterior, só que para a situação de encruamento negativo com $E_t = -5 \times 10^4 Pa$.

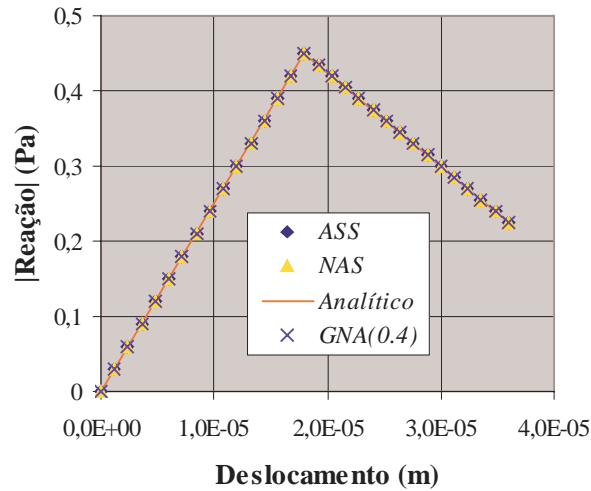


FIGURA 7.10b – Reação x deslocamento com encruamento negativo (critério de von Mises).

Já na figura 7.11 foram confrontadas a resposta analítica e aquelas obtidas com os algoritmos desenvolvidos para o critério de Drucker-Prager. No exemplo da figura 7.11, foram definidos como dados adicionais $E=100000,0Pa$, $\nu=0,25$, $c=0,225$, $\phi=\pi/18$ e por simplicidade adotou-se $E_t=0,0$. Os resultados foram obtidos com controle de deslocamento.

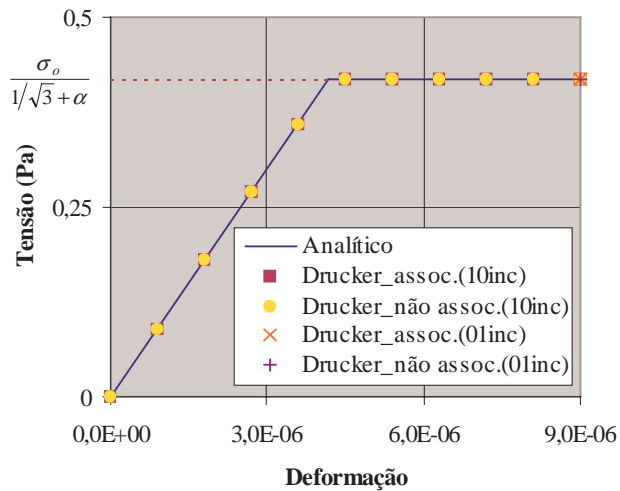


FIGURA 7.11 - Tensão σ_{zz} do ponto localizado no centróide do corpo (critério de Drucker-Prager).

Similarmente aos exemplos anteriores, ao invés de aplicar uma carga distribuída, prescreveu-se deslocamento constante em toda a superfície referente à extremidade livre de um valor total de $3,6 \times 10^{-5} m$. Com o objetivo de analisar a estabilidade do algoritmo, foram realizados dois tipos de análise: a primeira considerando-se 10 incrementos de carga e a segunda com apenas um incremento.

Observando a figura 7.11 nota-se uma perfeita concordância entre os resultados numérico e analítico. É possível ainda observar a elevada estabilidade de ambos os algoritmos, que conseguem obter a resposta utilizando apenas um incremento. Neste último caso o algoritmo com lei associativa necessitou de quatro iterações para encontrar a resposta, enquanto que aquele com lei não-associativa utilizou apenas duas iterações.

Note que os resultados apresentados em todos os gráficos demonstram que as leis de fluxo associativa e não-associativa conseguem reproduzir o mesmo comportamento. Porém, isto só ocorre em situações onde a variação do volume plástico não influencia no comportamento da estrutura, que é o caso deste exemplo. Deve-se ressaltar que na fase plástica, em geral, a variação volumétrica é diferente para os modelos associativos e não-associativos. Para o caso com critério de von Mises, isto é uma consequência de que o modelo associativo satisfaz a condição de incompressibilidade, ou seja $\epsilon_v^p = \epsilon_1^p + \epsilon_2^p + \epsilon_3^p = 0$, e o não-associativo não segue essa hipótese. A figura 7.12 apresenta resultados ϵ_v^p para ambos os modelos associativo e não-associativo com critério de von Mises, onde é possível verificar que a lei de fluxo influencia na variação volumétrica. Os dados utilizados são os mesmo empregados na análise da figura 7.9.

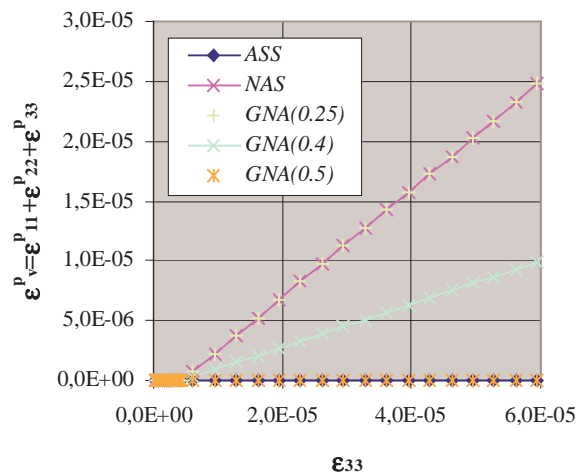


FIGURA 7.12 – Variação volumétrica plástica ε_v^p .

Observando a figura 7.12 é possível concluir que a variação volumétrica na fase plástica é diferente. Observe que o modelo generalizado não-associativo consegue representar qualquer grau de compressibilidade, até mesmo a incompressibilidade ($\nu^* = 0,5$), modificando-se o “Poisson plástico”. Note ainda que o modelo associativo satisfaz a condição de incompressibilidade e que ε_v^p é sempre constante e nulo. Em problemas dependentes da variação volumétrica plástica os modelos associativos e não associativos resultam em comportamentos diferentes. Para esclarecer um pouco essa discussão imagine um cubo de lado L e submetido a uma tração na direção 1 , veja figura 7.13.

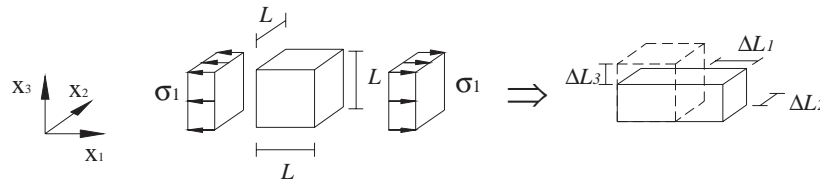


FIGURA 7.13 – Elemento tracionado.

Suponha que pudéssemos quantificar a parcela do incremento de deslocamento devido às deformações plásticas na direção da solicitação ΔL_p . Dessa forma, o volume plástico ε_v^p ficaria determinado como:

$$\varepsilon_v^p = \varepsilon_1^p + \varepsilon_2^p + \varepsilon_3^p = \frac{\Delta L_p}{L} - \nu^* \frac{\Delta L_p}{L} - \nu^* \frac{\Delta L_p}{L} = \frac{\Delta L_p}{L} (1 - 2\nu^*)$$

onde ν^* seria, fazendo-se uma analogia ao comportamento elástico, o “coeficiente de Poisson” da fase plástica. Note que, para satisfazer a condição de incompressibilidade é necessário adotar um Poisson na fase plástica de $0,5$, impondo uma restrição muito forte para o material. Já o modelo não-associativo simplificado (NAS) pode ser interpretado como se utilizasse ν^* igual ao do regime elástico, o que também não segue as evidências experimentais apresentadas para alguns materiais. Entretanto o modelo não-associativo generalizado (GNA) pode ser definido com qualquer ν^* , permitindo ajustar o grau de compressibilidade do material. Esta sucinta discussão nos permite concluir que, em geral, o volume final para ambos os modelos será diferente. Consequentemente, em problemas cuja variação volumétrica

é importante os modelos resultarão em respostas diferentes. O próximo exemplo é altamente dependente da variação volumétrica plástica. Neste será possível visualizar melhor as diferenças entre as leis de fluxo associativa e não-associativa.

7.9.2 Exemplo 02: Bloco 3D confinado

O exemplo analisado é um bloco paralelepípedo 2x2x4m (veja figura 7.14) totalmente confinado e comprimido por uma carga distribuída aplicada em sua extremidade livre. A idéia inicial era verificar o comportamento das leis de fluxos adotadas (associativa e não-associativa) com o critério de von Mises para um problema dependente da variação volumétrica na fase plástica. A geometria e a discretização utilizada são as mesmas do exemplo anterior e as propriedades físicas adotadas são aquelas expostas na figura 6.3.

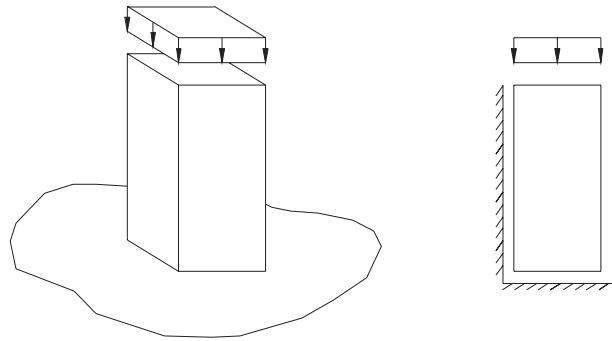


FIGURA 7.14-Compressão de um bloco confinado.

Nesta primeira análise considerou-se encruamento positivo $E_t = 10000,0Pa$ e Poisson $0,25$ (“elástico”). Os resultados do deslocamento axial (em módulo) da extremidade onde se aplica a carga são apresentados na figura 7.15

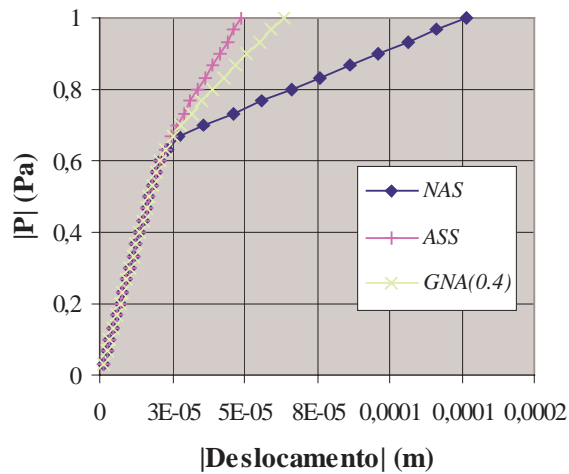


FIGURA 7.15 – Deslocamento do ponto central da extremidade solicitada.

A resposta da figura 7.15 indica realmente que em problemas dependentes da variação volumétrica plástica os modelos associativos e não-associativos resultam em comportamentos diferentes, demonstrando que a condição de incompressibilidade influencia no problema. Com o intuito de apresentar novos argumentos para essa discussão, executou-se novamente o exemplo anterior (com as mesmas condições de confinamento) só que agora impondo o coeficiente de Poisson igual a zero. Dessa forma, espera-se que com Poisson nulo não ocorra deslocamento lateral, pelo menos para o modelo não-associativo, e conseqüentemente que o resultado recaia no problema da barra engastada não confinada, cuja solução conhecemos. Os resultados do deslocamento axial da extremidade livre para os modelos associativo e não-associativo são apresentados na figura 7.16.

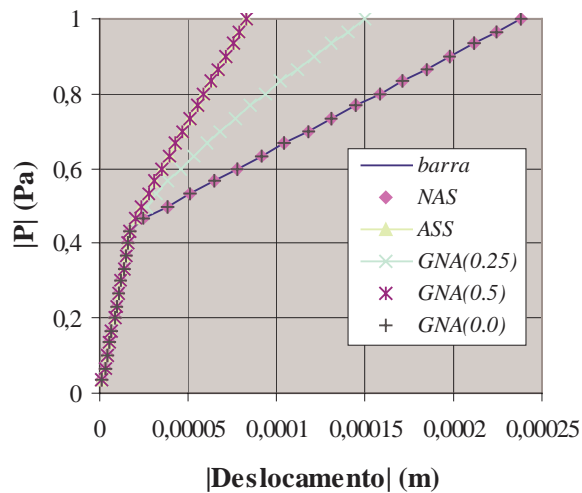


FIGURA 7.16 – Deslocamento do ponto central da extremidade solicitada.

Os resultados são confrontados com a resposta de elementos finitos de barra que corresponde à solução analítica de uma simples barra tracionada (sem confinamento). Assim, é possível verificar que a lei associativa (*ASS*) não consegue representar o caso hipotético de Poisson equivalente plástico (“Poisson plástico”) nulo, pois a condição de incompressibilidade impõe que a variação volumétrica seja nula na fase plástica e para isto é necessário ocorrer deformações laterais que devido às condições de contorno de confinamento resultam em reações nas paredes laterais que altera a resposta esperada. No caso de uma barra simplesmente engastada (sem confinamento) essa variação lateral não resulta em reações laterais, pois não existem restrições nas laterais do corpo e o resultado longitudinal seria coincidente para ambos os modelos, como pode ser visualizado na figura 7.9. Já o modelo não-associativo (*NAS*) representa exatamente o problema hipotético proposto, demonstrando que na fase plástica as variações volumétricas seguem as mesmas proporções do regime elástico. Note ainda que o modelo não-associativo generalizado (*GNA*) pode reproduzir qualquer grau de compressibilidade, de maneira que se escolhermos $\nu^* = 0,0$ é possível encontrar a mesma resposta do modelo não-associativo (*NAS*) e definindo $\nu^* = 0,5$ recupera-se o resultado do modelo associativo (*ASS*).

Para um problema real o mais indicado seria adotar o modelo não-associativo com direção de fluxo plástica definida por um “coeficiente de Poisson plástico” aferido experimentalmente. Contudo, deve-se ressaltar que a teoria matemática associativa é bem fundamentada e suas hipóteses são bem estabelecidas, satisfazendo teoremas importantes da mecânica. Seus fundamentos são adequados para os metais e são baseadas também em evidências experimentais. Porém, para a maioria dos materiais essa idéia não é totalmente válida. Além do mais, não se pode condicionar o fluxo plástico a uma superfície, conduzindo a uma interpretação de que a superfície contenha mais informações a cerca do comportamento plástico do que a simples definição do limite elástico.

7.9.3 Exemplo 03: Cilindro 3D submetido à pressão interna

O mesmo cilindro analisado no item(6.2.5.2) é aqui proposto. A estrutura é solicitada por uma pressão interna e devido a sua simetria, apenas $\frac{1}{4}$ da mesma é discretizado. Os dados do problema são descritos na figura 6.8.

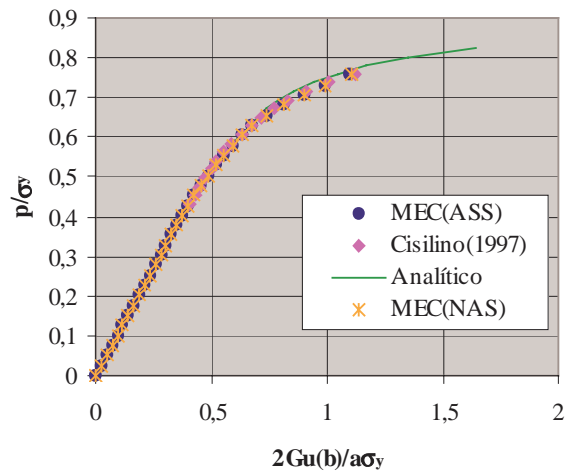


FIGURA 7.17 – Deslocamento radial da parede externa (von Mises).

Os resultados numéricos, considerando a situação de estado plano de deformação, são confrontados com a resposta analítica do problema e como esta última foi obtida para o critério de von Mises (Prandtl-Reuss) apenas resultados dos algoritmos com este critério foram plotados. As respostas numéricas obtidas por CISILINO(1997) também foram apresentadas. Resultados das tensões σ_r , σ_θ e σ_z ao longo da espessura do cilindro são apresentadas na figura 7.18

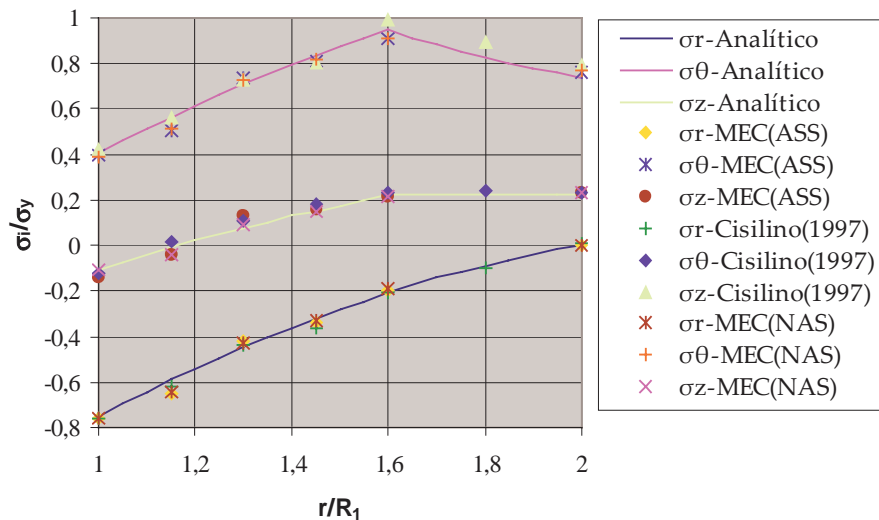


FIGURA 7.18 – Tensões σ_r , σ_θ e σ_z ao longo da espessura (von Mises).

Nota-se que ambas as respostas numéricas estão de acordo com a analítica.

Capítulo 8

FORMULAÇÕES VISCOPLÁSTICAS DO MEC

8.1 INTRODUÇÃO

No capítulo 5 foram apresentadas várias formulações para tratar o problema viscoelástico pelo MEC. Inicialmente, apresentaram-se abordagens com o termo viscoso descrito através de integrais de domínio, exigindo a necessidade de células para tratá-las. Posteriormente, alguns avanços foram conseguidos devido ao desenvolvimento de novas formulações com representações integrais apenas no contorno do corpo. Estas, além de serem computacionalmente mais eficiente que as primeiras e evitarem as indesejáveis integrais singulares de domínio, preservam as boas características de estabilidade e precisão apresentadas nas formulações com termo viscoso de domínio. Assim, como uma evolução natural, apresenta-se neste capítulo uma nova abordagem para tratar problemas viscoplásticos pelo MEC. Esta nova abordagem baseia-se nas formulações viscoelásticas com representações integrais no contorno, apresentadas anteriormente.

A formulação aqui proposta apresenta algumas diferenças com relação aquelas usualmente encontradas na literatura que tratam do problema viscoplástico. A maioria dos trabalhos desenvolvidos nesta área são baseados nos procedimentos inicialmente propostos por PERZYNA(1966), veja, por exemplo, ZIENKIEWICZ & CORMEAU(1974), ARGYRIS *et al.*(1979), OWEN & DAMJANIC(1982), TELLES & BREBBIA(1982) e MUNAIAR(1998). Estes são baseados no conceito de potencial plástico originado na teoria da plasticidade. Assim, as características viscosas são incorporadas na expressão da taxa de deformação viscoplástica por meio de funções dependentes do critério de plastificação e cujo embasamento reológico é bastante discutível. O processo recai em um problema incremental onde a análise é executada aplicando-se sucessivamente incrementos de força. Esta abordagem

é baseada em procedimentos quase-estáticos onde a imposição de cargas externas com dependência temporal arbitrária e o ajuste do tempo real apresentam algumas dificuldades.

A principal diferença entre o procedimento proposto e aqueles apresentados na literatura é a solução temporal. As abordagens clássicas assumem um comportamento conhecido (usualmente constante) das tensões totais durante um incremento de força. A partir desta suposição, resolve-se localmente as relações diferenciais temporais de tensão/deformação, encontrando a contribuição viscosa. Esta contribuição é aplicada nas equações de equilíbrio como um termo corretivo. Já a formulação proposta assume uma relação reológica viscoplástica que deve ser imposta no desenvolvimento das representações integrais. Desta relação encontra-se um sistema de equações diferenciais temporal onde o comportamento plástico do corpo é levado em consideração através de um termo em tensão inicial. Este termo é obtido de forma usual pelos procedimentos elastoplásticos do MEC. Na presente formulação os incrementos são agora definidos como incrementos de tempo e não mais como incrementos de força, proporcionando um significado bem mais definido para o tempo nas análises viscoplásticas. A técnica permite impor, de forma simples e direta, condições de contorno (forças e deslocamentos) que variam com relação ao tempo, ampliando o seu campo de aplicação. Os algoritmos utilizados na atualização das tensões no problema viscoplástico podem ser os mesmos desenvolvidos para tratar os problemas elastoplástico, não havendo a necessidade de desenvolver novos procedimentos viscoplásticos, basta apenas introduzir na formulação viscosa aqueles já propostos pela plasticidade, veja por exemplo o capítulo 7. Além disso, como as integrais referentes ao comportamento viscoso são transformadas em integrais de contorno, para tratar o problema viscoplástico pelo MEC basta apenas discretizar o contorno do corpo e as regiões internas onde ocorrem plastificação, resultando em menor quantidade de dados de entrada e um menor custo computacional. Esta nova metodologia proporciona, com grande simplicidade, uma elevadíssima economia computacional e uma ótima precisão dos resultados que podem ser verificadas nos exemplos apresentados neste capítulo.

8.2 FORMULAÇÃO VISCOPLÁSTICA (sem comportamento instantâneo)

O procedimento aqui empregado para o desenvolvimento das representações integrais viscoplásticas é o mesmo utilizado no desenvolvimento de todas as outras formulações apresentadas anteriormente, ou seja, aplicando-se a relação constitutiva do modelo em questão

no desenvolvimento das equações integrais. O modelo viscoplástico em consideração é aquele expresso pela equação (2.24) onde o comportamento instantâneo não é levado em conta. A imposição desta equação sobre a representação integral (3.15), resulta em:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega = 0 \quad (8.1)$$

onde ε_{kij}^* é a solução fundamental em deformação definida na equação (5.2). Utilizando-se as equações (5.37) é possível escrever a equação (8.1) como:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega = 0 \quad (8.2)$$

Aplicando-se integração por partes na segunda e na terceira integral da equação (8.2), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i d\Omega - \gamma \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j \dot{u}_i d\Gamma + \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* \dot{u}_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega = 0 \quad (8.3)$$

A equação integral (8.3) pode ser reescrita utilizando-se a equação de equilíbrio fundamental, definida em (3.20). Assim, aplicando a equação (3.20) em (8.3), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac, as técnicas para integrais singulares e sabendo-se que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$, encontra-se:

$$\bar{C}_{ki} u_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega \quad (8.4)$$

A equação (8.4) é a representação integral da formulação viscoplástica do MEC que leva em consideração o modelo reológico apresentado na figura 2.5. Note que a única diferença desta representação para a representação viscoelástica (5.40) é a presença do último termo no lado direito da equação (8.4) responsável pelo comportamento plástico do corpo. Esta integral apresenta singularidade do tipo $1/r$ para o caso bidimensional e $1/r^2$ para o caso tridimensional e neste trabalho será tratada utilizando-se células (apenas nas regiões onde ocorrerão plastificação) e uma eficiente técnica de transformação de coordenadas, veja Anexo

D. Ressalta-se ainda que, semelhantemente a formulação viscoelástica, a integral das forças volumétricas pode ser transformada em integral de contorno, permitindo a obtenção de uma expressão mais elegante para o MEC. Estas transformações já foram apresentadas para b_i constante nas equações (5.41). Uma descrição mais detalhada pode ser encontrada no Anexo A. Consequentemente, a equação integral (8.4) pode ser escrita como:

$$\bar{C}_{ki}u_i(p) + \gamma\bar{C}_{ki}\dot{u}_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega \quad (8.5)$$

onde o termo B_{ki}^* é o mesmo apresentado na equação (5.42).

8.2.1 Representação integral para tensões em pontos internos

O desenvolvimento descrito no item (5.4.1) e realizado aqui impondo-se a representação (8.5) nos pontos internos do domínio. Nesta situação o termo $\bar{C}_{ki} = \delta_{ki}$ e consequentemente a equação integral (8.5) fica escrita como:

$$u_k(p) + \gamma\dot{u}_k(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega \quad (8.6)$$

A representação integral para as deformações em pontos internos é obtida através da definição de pequenas deformações expressa pela equação (3.24). As deformações são obtidas de maneira análoga ao problema elastostático. Assim, diferenciando-se a equação (8.6) e aplicando a definição das deformações em (3.24), encontra-se:

$$\varepsilon_{ke}(p) + \gamma\dot{\varepsilon}_{ke}(p) = \int_{\Gamma} \hat{\varepsilon}_{kei}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \hat{B}_{kei}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{keij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega + \hat{g}_{keij}^* \sigma_{ij}^p(p) \quad (8.7)$$

Note que como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. As tensões totais são obtidas de forma trivial, aplicando-se a representação integral (8.7) sobre a relação constitutiva definida na equação (2.24), de maneira que:

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) = & \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega + \\ & \bar{g}_{\rho qij} \sigma_{ij}^p(p) - \sigma_{\rho q}^p(p) \end{aligned} \quad (8.8)$$

Os dois últimos termos da representação integral em (8.8) podem ser reordenados, pois sabendo-se que $\sigma_{\rho q}^p = \delta_{\rho i} \delta_{qj} \sigma_{ij}^p$, tem-se:

$$\sigma_{\rho q}(p) = \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* \dot{u}_i d\Gamma + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma + \int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega + \bar{g}_{\rho qij} \sigma_{ij}^p(p) \quad (8.9)$$

sendo $\bar{\sigma}_{\rho qi}^*$, $\bar{t}_{\rho qij}^*$, $\bar{g}_{\rho qij}$ e $\bar{B}_{\rho qi}^*$ os mesmos definidos pelas equações (3.27a), (5.9a), (5.12) e (5.48). Note que a quinta integral em (8.9) apresenta singularidade do tipo $1/r^2$ para o caso bidimensional e $1/r^3$ para o caso tridimensional. Estas devem ser computadas no sentido de valor principal, veja ALIABADI *et al.*(1985), MI(1995) e CISILINO(1997), e serão tratadas utilizando-se células e uma eficiente técnica de subtração de singularidade (Anexo D). Note que não é possível escrever as equações integrais em pontos internos para as tensões elásticas e viscosas, ao contrário das tensões totais que são obtidas através da representação integral (8.9). Esta é uma característica particular da presente formulação. Felizmente, pode-se contornar esta situação através de um procedimento simples e eficiente similar àquele exposto anteriormente no item (5.4.1), onde as tensões elásticas são obtidas pela solução numérica de uma equação diferencial. A equação diferencial para o problema específico pode ser encontrada escrevendo-se a equação (2.23a) em forma de taxa, da seguinte maneira:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{ep} = C_{ij}^{lm} \dot{\epsilon}_{lm}^e = \frac{1}{\gamma} \gamma C_{ij}^{lm} (\dot{\epsilon}_{lm} - \dot{\epsilon}_{lm}^p) = \frac{1}{\gamma} \sigma_{ij}^v - \dot{\sigma}_{ij}^p \Rightarrow \sigma_{ij}^v = \gamma \dot{\sigma}_{ij}^{ep} + \gamma \dot{\sigma}_{ij}^p \quad (8.10)$$

A equação (8.10) expressa uma relação entre as taxas de tensão elastoplástica e inicial e as tensões viscosas. Substituindo a equação (8.10) na relação (2.22) é possível encontrar o seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\gamma \dot{\sigma}_{ij}^{ep} + \sigma_{ij}^{ep} + \gamma \dot{\sigma}_{ij}^p - \sigma_{ij} = 0 \quad (8.11)$$

É importante observar que as taxas presentes na equação (8.11) são derivadas temporais. Sendo assim, as tensões elásticas serão obtidas numericamente pela resolução das equações diferenciais (8.11), tornando assim o processo geral permitindo variações nas condições de contorno. Este procedimento será melhor esclarecido nos próximos itens.

8.2.2 Obtenção das tensões totais no contorno

O procedimento descrito nos capítulos 3, 5 e 6 é basicamente o mesmo que será aqui apresentado para obter as tensões totais no contorno do problema viscoplástico considerado, ou seja, através da obtenção das tensões em função dos deslocamentos e forças de superfície do contorno que já foram determinados na solução do problema de contorno. Uma forma de se obter as tensões totais em pontos do contorno seria através da aplicação da equação (8.9) no contorno. Entretanto, devido aos termos singulares presentes nos integrandos desta representação, este procedimento produziria singularidades de alta ordem. Assim, considere por exemplo a figura 3.2, um sistema cartesiano local de coordenadas localizado em um ponto do contorno onde se deseja obter as componentes de tensão. Definidas as funções de forma para os deslocamentos e forças de superfície do contorno e obtidos os seus valores nodais, é possível definir as forças de superfície em qualquer ponto do elemento de contorno. Consequentemente, pode-se escrever para o caso tridimensional que:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{13} &= \bar{\sigma}_{31} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{23} &= \bar{\sigma}_{32} = \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{33} &= \bar{p}_3\end{aligned}\tag{8.12}$$

onde o subscrito indica que os valores são referentes ao sistema de coordenadas local. As outras componentes de tensão podem ser obtidas através da relação constitutiva. Assim, em um dado elemento, o campo de deslocamento sobre ele pode ser escrito em função dos valores dos deslocamentos nodais nas coordenadas locais, conforme apresentado pela equação (3.29). Note que, quando se resolve o problema de contorno, obtém-se as forças de superfície e os deslocamentos nodais no sistema global, porém, para encontrar as tensões no contorno é necessário transformá-los para o sistema local fazendo uso da matriz de transformação entre os dois sistemas. Definido o campo de deslocamento sobre o elemento de contorno, o campo de deformações é obtido pela diferenciação do campo de deslocamento eq.(3.30). Note que não é necessário determinar todas as componentes de deformação, basta apenas obter aquelas que serão importantes na determinação das componentes de tensão restantes. Logo, as outras

componentes do tensor de tensão são encontradas fazendo-se uso das seguintes relações constitutivas,

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = 2\mu(\bar{\epsilon}_{12} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{12}) - \bar{\sigma}_{12}^p \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_3 + \bar{\sigma}_{33}^p) + 2\mu(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11} + \nu\bar{\epsilon}_{22} + \nu\gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22})] - \bar{\sigma}_{11}^p \\ \bar{\sigma}_{22} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_3 + \bar{\sigma}_{33}^p) + 2\mu(\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22} + \nu\bar{\epsilon}_{11} + \nu\gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11})] - \bar{\sigma}_{22}^p\end{aligned}\quad (8.13)$$

É importante observar que as relações constitutivas são empregadas em sua forma total e não em forma incremental. As velocidades de deformação são definidas por aproximações lineares, tal como descrito para o problema viscoelástico pelo MEC no capítulo 5, ou seja:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{t+\Delta t} = \frac{\bar{\epsilon}_{t+\Delta t} - \bar{\epsilon}_t}{\Delta t}\quad (8.14)$$

Substituindo-se a expressão (8.14) nas equações (8.13) é possível encontrar as tensões no contorno, pois as deformações são obtidas em função dos deslocamentos dos pontos contorno. Note também que as tensões iniciais devem ser transformadas para o sistema local antes da aplicação das expressões (8.13). Após a determinação das tensões, pode-se obtê-las no sistema global utilizando-se a matriz de transformação. Para o caso bidimensional o procedimento é o mesmo descrito, necessitando-se apenas de uma componente de formação eq.(3.32), de maneira que as tensões ficam determinadas pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{22} &= \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{1}{1-\nu}[\nu(\bar{p}_2 + \bar{\sigma}_{22}^p) + 2\mu(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11})] - \bar{\sigma}_{11}^p\end{aligned}\quad (8.15)$$

Para estado plano de tensão as expressões são as mesmas, apenas o coeficiente de Poisson deve ser $\nu/(1+\nu)$ sem alterar a constante de Lamé μ . Note que, no caso 2D \bar{x}_1 (fig. 3.2) é a direção tangencial no ponto onde se deseja extrair as tensões e \bar{x}_2 é a direção normal. É importante observar que ambas as relações constitutivas são empregadas em sua forma total e não em forma incremental e que a taxas referem-se a derivadas temporais.

8.2.3 Tratamento algébrico para as representações integrais

As equações integrais definidas anteriormente podem ser transformadas em equações algébricas através do método dos elementos de contorno. Assim, o contorno do corpo Γ é discretizado com n_e elementos de contorno Γ_e (fig. 6.1) e o domínio Ω , onde ocorrerá a plastificação, com n_c células. Dessa forma, as variáveis do problema podem ser aproximadas, parametrizando-as com relação aos seus valores nodais, fazendo-se uso de funções interpoladoras apropriadas.

$$\begin{aligned} p_i &= \phi^\alpha P_i^\alpha \\ u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha ; \quad \dot{u}_i = \phi^\alpha \dot{U}_i^\alpha \\ \sigma_{ij}^p &= \tilde{\phi}^{\bar{\alpha}} \sigma_{ij}^{p(\bar{\alpha})} \end{aligned} \quad (8.16)$$

onde ϕ e $\tilde{\phi}$ são respectivamente as funções de forma adotadas para interpolar os elementos de contorno e as células e os subscritos α e $\bar{\alpha}$ referem-se aos nós do elemento de contorno e da célula, respectivamente. Os termos P_i^α , $\sigma_{ij}^{p(\bar{\alpha})}$, U_i^α , e \dot{U}_i^α são valores nodais de forças de superfície, deslocamentos, tensões iniciais e velocidades. Consequentemente, as representações integrais de deslocamento e tensão ficam escritas como:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ki} U_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{U}_i(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + \\ &+ b_i \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} B_{ki}^* d\Gamma_e + \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \varepsilon_{kij}^* \tilde{\phi}^{\bar{\alpha}} d\Omega_c \sigma_{ij}^{p(\bar{\alpha})} \end{aligned} \quad (8.17a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho q i}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho q i}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho q i}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + b_i \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{B}_{\rho q i}^* d\Gamma_e + \\ &+ \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{t}_{\rho q ij}^* \tilde{\phi}^{\bar{\alpha}} d\Omega_c \sigma_{ij}^{p(\bar{\alpha})} + \bar{g}_{\rho q ij} \sigma_{ij}^p(p) \end{aligned} \quad (8.17b)$$

Depois de executar todas as integrais e escolher pontos fonte em igual número aos nós do problema, pode-se escrever os seguintes sistemas de equações diferenciais temporais:

$$HU(t) + \gamma H\dot{U}(t) = GP(t) + Bb(t) + Q\sigma^p(t) \quad (8.18a)$$

$$\sigma(t) = \tilde{G}P(t) - \tilde{H}U(t) - \tilde{\gamma}\tilde{H}\dot{U}(t) + \tilde{B}b(t) + \tilde{Q}\sigma^p(t) \quad (8.18b)$$

onde t representa o tempo. Ressalta-se que a matriz H é obtida através da associação do temo \bar{C}_{ki} com a matriz referente a integral de contorno cuja o núcleo é p_{ki}^* , como usualmente é feito no método dos elementos de contorno. Já o temo livre para tensões é associado à última integral em (8.17b) dando origem a matriz \tilde{Q} .

8.2.4 Integração temporal numérica

Para se resolver o problema viscoplástico, deve-se integrar no tempo o sistema de equações apresentado na equação (8.18a). Para isto, adotou-se uma simples aproximação linear para definir a velocidade de deslocamento, de maneira que:

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \frac{U_{t+\Delta t} - U_t}{\Delta t} \quad (8.19)$$

Aplicando-se a expressão da velocidade de deslocamento apresentada em (8.19) na equação (8.18a), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\hat{H}U_{t+\Delta t} = GP_{t+\Delta t} + F_{t+\Delta t} \quad (8.20)$$

onde

$$\hat{H} = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right)H \quad (8.21a)$$

$$F_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\Delta t}HU_t + Bb_{t+\Delta t} + Q\sigma_{t+\Delta t}^p \quad (8.21b)$$

Impondo-se as condições de contorno, como usualmente é feito no método dos elementos de contorno, trocando-se as colunas das matrizes \hat{H} e G , pode-se resolver o sistema linear apresentado em (8.20), obtendo-se assim os deslocamentos e forças de superfície para o passo de tempo atual. Caso ocorra plastificação e conseqüentemente tensão residual, torna-se necessário redistribuir o resíduo de tensão inicial. Esta redistribuição caracteriza o processo iterativo. Este resíduo é reaplicado fazendo-se uso da equação (8.20) escrita com valores totais (e não incrementais). A velocidade de deslocamento é obtida diretamente através da equação (8.19). Com todas as incógnitas do problema de contorno

obtidas no passo atual, encontram-se as tensões totais fazendo-se uso da expressão (8.18b) para pontos internos.

$$\sigma_{t+\Delta t} = \tilde{G}P_{t+\Delta t} - \tilde{H}U_{t+\Delta t} - \gamma\tilde{H}\dot{U}_{t+\Delta t} + \tilde{B}b_{t+\Delta t} + \tilde{Q}\sigma_{t+\Delta t}^p \quad (8.22)$$

Através do resultado do problema de contorno, encontram-se as tensões totais referentes aos nós do contorno conforme descrito no item (8.2.2). A tensão de tentativa elástica necessária ao procedimento implícito de atualização é obtida adotando-se uma aproximação para a velocidade das tensões elásticas $\dot{\sigma}_{t+\Delta t}^e$ e residuais $\dot{\sigma}_{t+\Delta t}^p$.

$$\dot{\sigma}_{t+\Delta t}^{ep} = \frac{\sigma_{t+\Delta t}^{ep} - \sigma_t^{ep}}{\Delta t}; \quad \dot{\sigma}_{t+\Delta t}^p = \frac{\sigma_{t+\Delta t}^p - \sigma_t^p}{\Delta t} \quad (8.23)$$

Aplicando-se a expressão de $\dot{\sigma}_{t+\Delta t}^{ep}$ e $\dot{\sigma}_{t+\Delta t}^p$ apresentada em (8.23) na equação diferencial em (8.11), pode-se escrever:

$$\sigma_{t+\Delta t}^{ep} = \left[\sigma_{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma_t^{ep} - \gamma \left(\frac{\sigma_{t+\Delta t}^p - \sigma_t^p}{\Delta t} \right) \right] / \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (8.24)$$

As variáveis referentes ao instante passado “ t ” são atualizadas apenas no final de cada passo de tempo, pois são apenas valores do passado. Já aquelas referentes ao instante atual “ $t+\Delta t$ ” devem ser atualizadas em toda iteração. Note que na expressão (8.24) necessita-se do valor das tensões totais que são calculadas como mencionado anteriormente. Assim, calculadas as tensões totais e as tensões de tentativa elásticas, obtém-se as tensões elastoplásticas através de procedimentos usuais para corrigir as tensões de tentativa, de maneira que elas agora verifiquem o modelo não-linear adotado. As tensões viscosas são obtidas de uma forma simples e direta aplicando-se a relação (2.22). Não obtida a convergência repete-se o esquema sem atualizar as variáveis do instante anterior “ t ” caracterizando o processo iterativo. Caso contrário, atualiza-se as variáveis do problema e parte-se para um novo passo de tempo. Note que, para se resolver o problema viscoplástico os deslocamentos internos não são necessários, mas eles podem ser facilmente obtidos fazendo-se uso da expressão (8.6).

8.2.5 Procedimento não-linear

Para que se possa compreender melhor o procedimento viscoplástico proposto, apresenta-se, uma rápida visão deste juntamente com uma abordagem numérica da análise, procurando esclarecer os aspectos computacionais envolvidos na solução do problema não-linear. As equações serão empregadas em sua forma total e não incremental, de maneira que as taxas presentes nas expressões referem-se a derivadas com relação ao tempo. Assim, o processo fica descrito pelos seguintes passos:

Passo 1 – Admitem-se conhecidas, no final de um instante “ t ” (tempo real), as componentes de tensão σ^t , as tensões iniciais $\sigma^{p(t)}$, a variável interna κ^t responsável pelo encruamento, os deslocamentos nodais U^t , as forças de superfície P^t e volumétricas b^t . Inicia-se um novo passo de tempo “ $t + \Delta t$ ” e determinam-se os valores prescritos no instante atual dos deslocamentos, forças de superfície e forças volumétricas

$$\bar{P}^{t+\Delta t} = \bar{P}(t + \Delta t) \quad (8.25a)$$

$$b^{t+\Delta t} = b(t + \Delta t) \quad (8.25b)$$

onde o subscrito presente na equação (8.25a) indica a imposição das condições de contorno sobre o vetor P como usualmente visto no MEC. Os valores prescritos podem variar segundo qualquer função dependente do tempo, semelhantemente as clássicas formulações dinâmicas WARBURTON(1976) e CODA & VENTURINI(1995).

Passo 2 – Calculam-se as forças de superfície e deslocamentos incógnitos resolvendo o sistema de equações (8.20), ou seja:

$$\bar{U}_{i+1}^{t+\Delta t} = \bar{H}^{-1} \left(\bar{G} \bar{P}_{i+1}^{t+\Delta t} + F_i^{t+\Delta t} \right) \quad (8.26)$$

A presença do subscrito na equação (8.26) deve ser interpretado da mesma forma que aquele da equação (8.25a), as matrizes e vetores foram modificados devido à imposição das condições de contorno. Ressalta-se que os índices “ i ” e “ t ” referem-se, respectivamente, ao processo iterativo e temporal. Note que, como as equações são empregadas em sua forma total e não incremental, não é mais necessário, no cálculo dos deslocamentos, fazer uso de expressões diferentes para a primeira iteração e para as demais. Após a obtenção das

incógnitas do problema de contorno, reordena-se os vetores de deslocamento e força de superfície, de maneira que $U_{i+1}^{t+\Delta t}$ contenha apenas deslocamentos e $P_{i+1}^{t+\Delta t}$ apenas forças de superfícies.

$$U_{i+1}^{t+\Delta t} = \begin{cases} \bar{U}_{i+1}^{t+\Delta t} & \text{se } P \text{ prescrito} \\ ou \\ \bar{P}_{i+1}^{t+\Delta t} & \text{se } U \text{ prescrito} \end{cases} \quad (8.27a)$$

$$P_{i+1}^{t+\Delta t} = \begin{cases} \bar{P}_{i+1}^{t+\Delta t} & \text{se } P \text{ prescrito} \\ ou \\ \bar{U}_{i+1}^{t+\Delta t} & \text{se } U \text{ prescrito} \end{cases} \quad (8.27b)$$

Passo 3 – Calculam-se as tensões de tentativa elásticas para serem verificadas no algoritmo implícito através da expressão:

$$\sigma_{i+1}^{ep(t+\Delta t)} = \left[\sigma_{i+1}^{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma^{ep(t)} - \gamma \left(\frac{\sigma_i^{p(t+\Delta t)} - \sigma^{p(t)}}{\Delta t} \right) \right] / \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \quad (8.28)$$

As tensões totais necessárias na expressão (8.28) são determinadas pela expressão (8.22) para pontos internos ou conforme descrito no item (8.2.2) para pontos no contorno. Os termos referentes ao instante anterior “ t ” são sempre os mesmos no processo iterativo do instante atual. Estes só são atualizados no final do incremento, ao contrário daqueles referentes ao instante “ $t + \Delta t$ ” que devem ser atualizados em todas a interações.

Passo 4 - Calculam-se as tensões, as deformações plásticas, as tensões iniciais e o parâmetro de encruamento, ambas nos pontos nodais através de um algoritmo de integração, como aqueles apresentados no capítulo 7.

$$\sigma_i^{ep(t+\Delta t)} = \sigma^{ep(t)} + \int_t^{t+\Delta t} d\sigma_i^{ep} \quad (8.29)$$

Passo 5 - O critério de convergência verifica se a solução considerada é suficientemente precisa. Este pode ser expresso basicamente de duas maneiras:

$$\text{Convergência em tensão inicial} \quad \frac{\|\sigma_{i+1}^{p(t+\Delta t)} - \sigma_i^{p(t+\Delta t)}\|}{\|\sigma_1^{p(t+\Delta t)}\|} \leq e_t \quad (8.30a)$$

$$\text{Convergência em deslocamento} \quad \frac{\|U_{i+1}^{t+\Delta t} - U_i^{t+\Delta t}\|}{\|U_1^{t+\Delta t}\|} \leq e_d \quad (8.30b)$$

onde $\| \cdot \|$ representa a norma euclidiana e os termos e_t e e_d referem-se a tolerância em tensão inicial e em deslocamento, respectivamente. Verificada a convergência, atualizam-se todas as variáveis referentes ao instante “ $t+\Delta t$ ”, armazenando-as nas variáveis referentes ao instante “ t ”. Após isto, retorna-se ao **passo 1**, dando início a um novo passo de tempo. Caso contrário, atualizam-se as variáveis referentes ao instante “ $t+\Delta t$ ” e retorna-se ao **passo 2** fazendo-se uso da equação (8.26) para a obtenção das variáveis de contorno, caracterizando assim o processo iterativo.

8.2.6 Exemplo numérico

No sentido de validar a presente formulação viscoplástica, resultados numéricos da implementação dos algoritmos definidos no capítulo 7 com critério de von Mises (com e sem lei associativa) são apresentados. O problema analisado é uma peça submetida a um carregamento distribuído de tração aplicado em sua face livre. A estrutura de seção transversal quadrada é modelada utilizando-se 24 elementos de contorno tridimensionais triangulares de três nós juntamente com 29 células tetraédricas internas. A geometria da estrutura, sua discretização e propriedades físicas são apresentadas na figura 8.1.

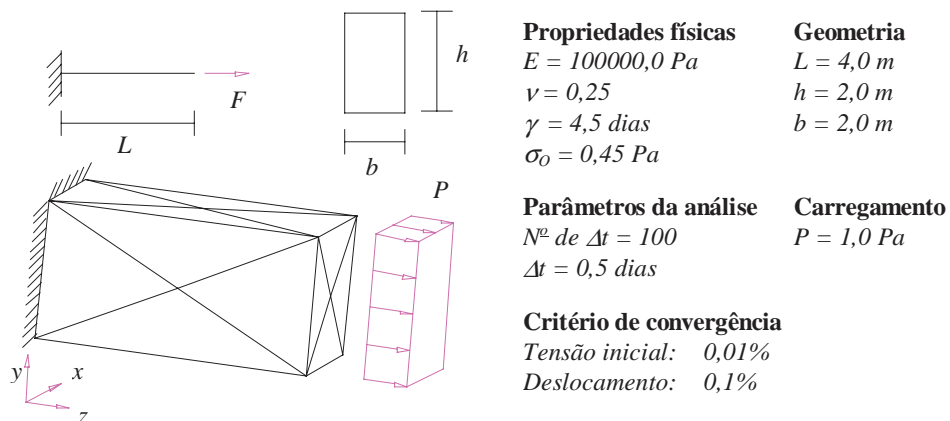


FIGURA 8.1 – Geometria, discretização e propriedades físicas da estrutura.

A resposta do deslocamento longitudinal do ponto central na extremidade onde se aplica a solicitação é apresentada na figura 8.2 para o critério de von Mises associativo e na figura 8.3 para o von Mises não-associativo. Nos gráficos apresentam-se resultados do comportamento viscoelástico, bem como o viscoplástico com encruamento nulo, positivo e negativo.

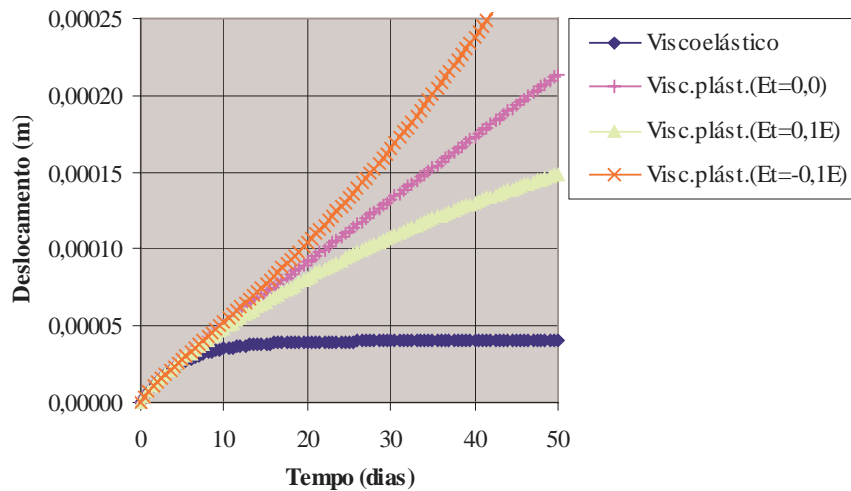


FIGURA 8.2 – Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada.

Observa-se que a resposta viscoelástica está em perfeita concordância com a analítica. Já os resultados viscoplásticos, apesar de não se ter encontrado respostas para confrontá-los, estão de acordo com o esperado. Note que o encruamento nulo induz uma velocidade de deslocamento constante, o que não ocorre com a resposta com encruamento negativo e positivo onde a velocidade é crescente e decrescente, respectivamente. Resultados similares são apresentados na figura 8.3 levando em consideração o algoritmo não-associativo.

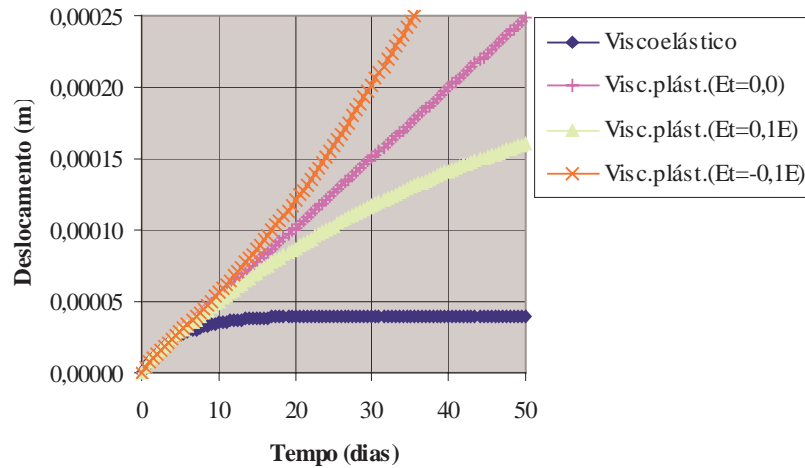


FIGURA 8.3 – Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada.

Os resultados viscoplásticos das figuras 8.2 e 8.3 não poderiam ser iguais, pois as leis de fluxo determinam como a energia será dissipada no processo viscoso. Esta evidência é confirmada pelas figuras 8.4 até 8.7, onde o comportamento das componentes de tensão é apresentado. A figura 8.4 apresenta resultados das tensões σ_{zz}^{ep} , σ_{zz}^v e σ_{zz} extraídas no centróide para o caso de encruamento nulo com os algoritmos associativos e não-associativos.

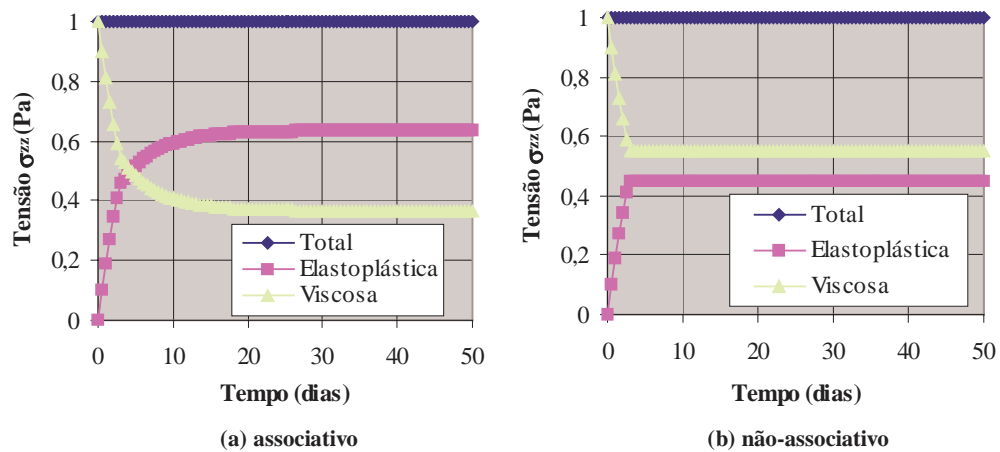


FIGURA 8.4 – Tensão elasto-plástica σ_{zz}^{ep} , viscosa σ_{zz}^v e total σ_{zz} no centróide.

Algumas observações podem ser feitas a respeito das repostas em tensão apresentadas nas figuras 8.4. Ambas as repostas estão de acordo com os respectivos modelos viscoplásticos adotados. Note que a tensão total, como era de se esperar, é constante e de valor igual a carga aplicada. A soma da tensão viscosa com a elasto-plástica corresponde à

tensão total. Para a situação específica com encruamento nulo, observa-se que o esperado seria que as tensões elastoplásticas convergissem para o limite de plastificação $\sigma_o = 0,45 Pa$ e conseqüentemente as tensões viscosas deveriam convergir para $0,55Pa$.

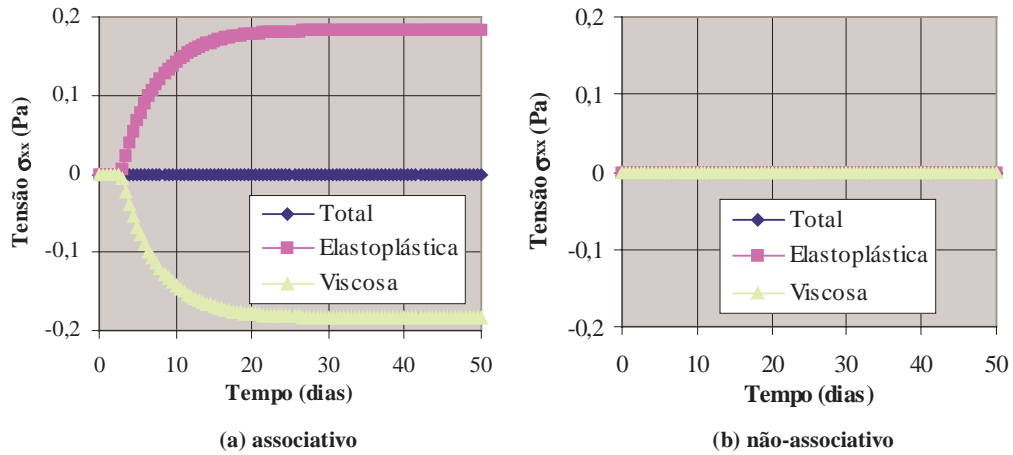


FIGURA 8.5 – Tensão elastoplástica σ_{xx}^{ep} , viscosa σ_{xx}^v e total σ_{xx} no centróide.

Note que esta resposta é encontrada com o modelo não-associativo, porém, com o associativo a resposta obtida é um pouco diferente. Isto é conseqüência direta do modelo elastoplástico adotado. Na realidade o que ocorre é que o retorno à superfície de plastificação segundo a lei associativa provoca o aparecimento de tensões em outras direções (veja figura 8.5). No problema puramente elastoplástico estas tensões convergiriam para zero com o processo iterativo (desde que exista um equilíbrio final), porém no problema viscoplástico elas induzem o aparecimento de velocidade de tensão nas outras direções conduzindo a resposta apresentada na figura 8.4. Gráficos semelhantes àqueles apresentados nas figuras 8.4 e 8.5 são apresentados a seguir, considerando agora encruamento positivo ($E_t=0,1E Pa$).

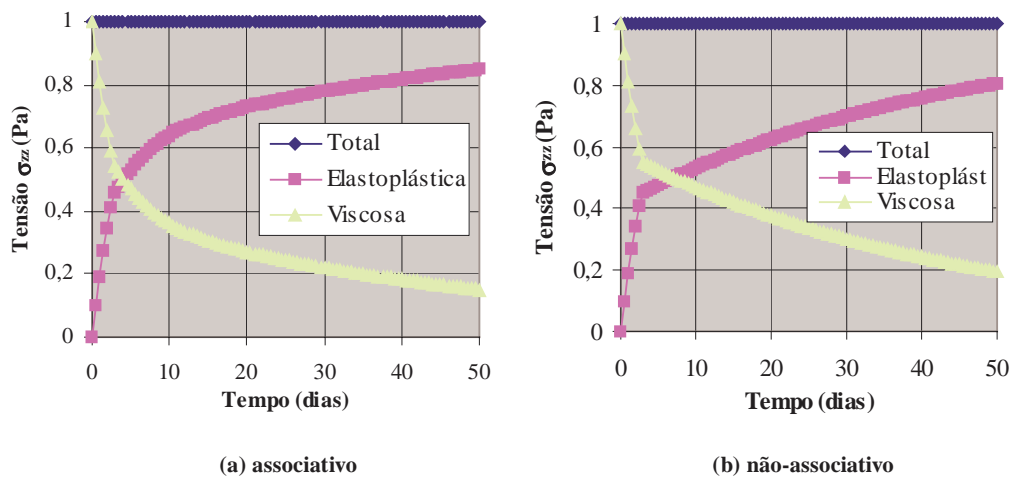


FIGURA 8.6 – Tensão elastoplástica σ_{zz}^{ep} , viscosa σ_{zz}^v e total σ_{zz} no centróide.

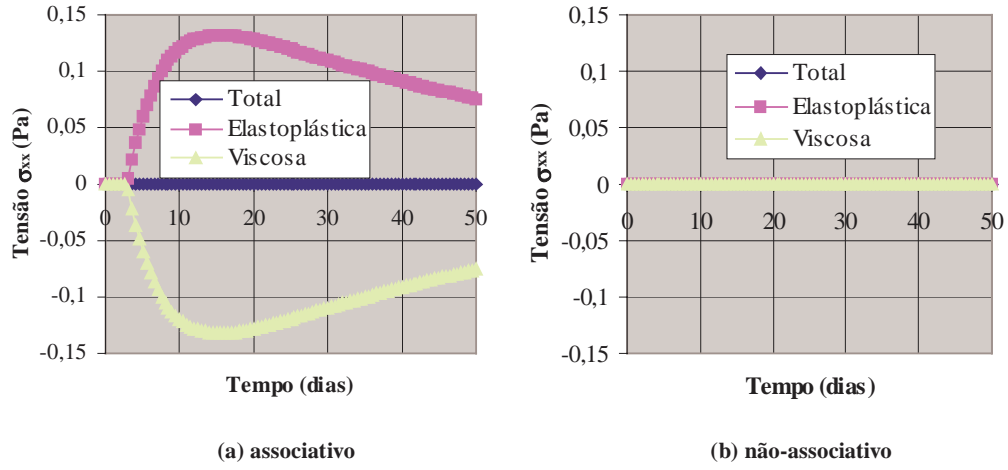


FIGURA 8.7 – Tensão elastoplástica σ_{zz}^{ep} , viscosa σ_{xx}^v e total σ_{xx} no centróide.

Observe novamente o aparecimento de tensões nas outra direção justificada pela lei associativa adotada. Note também que com o encruamento essas tensões tendem a reduzir-se com o tempo.

8.3 FORMULAÇÃO VISCOPLÁSTICA (com comportamento instantâneo)

A formulação que será desenvolvida prevê a consideração do comportamento instantâneo. Sua representação integral é obtida pela aplicação da equação constitutiva (2.32), cujo modelo é apresentado na figura 2.6, sobre a equação (3.15).

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega - \frac{\gamma E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} d\Omega + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega = 0 \quad (8.31)$$

Fazendo-se uso das equações (5.66), encontra-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} d\Omega + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \dot{\sigma}_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega = 0 \quad (8.32)$$

Aplicando-se integração por partes na segunda, terceira e quarta integrais da equação (8.32), obtém-se:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i d\Omega \right] - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j \dot{u}_i d\Gamma - \right. \\ & \left. \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* \dot{u}_i d\Omega \right] + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{\sigma}_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{\sigma}_{ij,j} d\Omega \right] + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \\ & \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (8.33)$$

Fazendo-se uso, respectivamente, da equação de equilíbrio fundamental eq.(3.20) e da equação de equilíbrio do problema real escrita em forma de taxas eq.(5.22), aplicando-se estas na representação (8.33), levando-se em consideração as propriedades do delta de Dirac e as técnicas para integrais singulares, sabendo-se que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$ e que $\dot{\sigma}_{ij} n_j = \dot{p}_i$, resulta,

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ki} u_i(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma - \gamma \bar{C}_{ki} \dot{u}_i(p) + \\ & \gamma \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* \dot{b}_i d\Omega \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega + \frac{E_e}{E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega \end{aligned} \quad (8.34)$$

A equação (8.34) é a representação integral da formulação viscoplástica do MEC que leva em consideração o modelo definido na figura 2.6. A 1ª, 2ª e 6ª integrais são as mesmas apresentadas na formulação elastostática e podem ser solucionadas seguindo os mesmos princípios. Note que a quarta e a quinta integrais são responsáveis pelo comportamento instantâneo e podem contribuir para a resposta viscosa se houver variação das solicitações com o tempo. A terceira integral e o quarto termo do lado direito da equação integral (8.34) são responsáveis pelo comportamento viscoso. Note que a única diferença desta representação para a representação viscoelástica é a presença do último termo no lado direito da equação (8.34) responsável pelo comportamento plástico do corpo. Esta integral apresenta singularidade do tipo $1/r$ para o caso bidimensional e $1/r^2$ para o caso tridimensional e neste trabalho será tratada utilizando-se células (apenas nas regiões onde ocorrerão plastificação) e uma eficiente técnica de transformação de coordenadas, conforme exposto no Anexo D. Ressalta-se ainda que a penúltima e a última integrais podem ser transformadas em integrais de contorno e assim é possível obter uma expressão mais elegante para o MEC. Estas

transformações já foram executadas para b_i na equação (5.41) e para \dot{b}_i na equação (5.70), considerando a situação onde ambos são constantes em todo o domínio do corpo. Logo a equação integral (8.34) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ki}u_i(p) + \gamma\bar{C}_{ki}\dot{u}_i(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\ &\gamma \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma + \frac{E_e}{E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega \end{aligned} \quad (8.35)$$

O uso da representação (8.35) permite modelar problemas viscoplásticos pelo MEC discretizando-se apenas o contorno do corpo e as regiões onde será evidenciada a plastificação.

8.3.1 Representação integral para tensões em pontos internos

Resolvido o problema de contorno parte-se agora para a determinação das tensões. Para pontos internos o termo $\bar{C}_{ki} = \delta_{ki}$ e consequentemente a equação integral (8.35) fica escrita como:

$$\begin{aligned} u_k(p) + \gamma\dot{u}_k(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\ &\gamma \left[\int_{\Gamma} u_{ki}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma + \frac{E_e}{E_{ve}} \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega \end{aligned} \quad (8.36)$$

A representação integral para as deformações em pontos internos é obtida através da definição de deformações eq.(3.24). Assim, diferenciando-se a equação (8.36) e aplicando-se esta na definição das deformações em (3.24), encontra-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ke}(p) + \gamma\dot{\varepsilon}_{ke}(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \int_{\Gamma} \varepsilon_{kei}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} \hat{p}_{kei}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\ &\gamma \left[\int_{\Gamma} \varepsilon_{kei}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} \hat{B}_{kei}^* d\Gamma \right] + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} b_i \int_{\Gamma} \hat{B}_{kei}^* d\Gamma + \frac{E_e}{E_{ve}} \left[\int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{keij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega + \hat{g}_{keij} \sigma_{ij}^{vp}(p) \right] \end{aligned} \quad (8.37)$$

Note que como a diferenciação é feita em relação à posição do ponto fonte apenas os valores fundamentais necessitam ser diferenciados. As tensões totais são obtidas de forma trivial, aplicando-se a representação (8.37) na relação constitutiva do modelo eq.(2.32).

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho q}(p) &= \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\
&\frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma \right] + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma + \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega + \right. \\
&\left. g_{\rho qij} \sigma_{ij}^{vp}(p) \right] - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{\rho q}(p) - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \sigma_{\rho q}^{vp}(p)
\end{aligned} \tag{8.38}$$

Sabendo-se que $\sigma_{\rho q}^p = \delta_{\rho\alpha} \delta_{qj} \sigma_{ij}^p$, pode-se reordenar o último termo da representação integral em (8.38) com o termo livre, de maneira que:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\rho q}(p) &= \int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* p_i d\Gamma - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* u_i d\Gamma - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \int_{\Gamma} \bar{p}_{\rho qi}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\
&\frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Gamma} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \dot{p}_i d\Gamma + \dot{b}_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma \right] + b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma + \\
&\frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \left[\int_{\Omega} \bar{t}_{\rho qij}^* \sigma_{ij}^{vp} d\Omega + \bar{g}_{\rho q}(\sigma_{ij}^{vp}(p)) \right] - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{\rho q}(p)
\end{aligned} \tag{8.39}$$

sendo $\bar{\sigma}_{\rho qi}^*$, $\bar{t}_{\rho qij}^*$, $\bar{g}_{\rho qij}$ e $\bar{B}_{\rho qi}^*$ os mesmos definidos pelas equações (3.27a), (5.9a), (5.12) e (5.48). Note que a sétima integral em (8.39) apresenta singularidade do tipo $1/r^2$ para o caso bidimensional e $1/r^3$ para o caso tridimensional. Estas devem ser computadas no sentido de valor principal, veja ALIABADI *et al.*(1985), MI(1995) e CISILINO(1997), e serão tratadas utilizando-se células e uma eficiente técnica de subtração de singularidade (Anexo D). Note que não é possível escrever as equações integrais em pontos internos para as tensões elásticas e viscosas, ao contrário das tensões totais que são obtidas através da representação integral (8.39). Esta é uma característica particular da formulação viscosa. Felizmente, pode-se contornar esta situação através de um procedimento simples e eficiente, similar aquele desenvolvido no item (4.3.2), onde as tensões elásticas são obtidas pela solução de uma equação diferencial. Esta equação diferencial é encontrada escrevendo-se a equação (2.28a) em forma de taxa, da seguinte maneira:

$$\dot{\sigma}_{ij}^{ep} = E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} = \frac{1}{\gamma} \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} (\dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} - \dot{\varepsilon}_{lm}^{vp}) = \frac{1}{\gamma} \sigma_{ij}^v - \dot{\sigma}_{ij}^{vp} \Rightarrow \sigma_{ij}^v = \gamma \dot{\sigma}_{ij}^{ep} + \gamma \dot{\sigma}_{ij}^{vp} \tag{8.40}$$

A equação (8.40) expressa uma relação entre as taxas de tensão elastoplástica e inicial e as tensões viscosas. Substituindo a equação (8.40) na relação (2.27) é possível encontrar o seguinte conjunto de equações diferenciais:

$$\gamma \dot{\sigma}_{ij}^{ep} + \sigma_{ij}^{ep} + \gamma \dot{\sigma}_{ij}^{vp} - \sigma_{ij} = 0 \quad (8.41)$$

É importante observar que as taxas presentes na equação (8.41) são derivadas temporais. Sendo assim, as tensões elásticas serão obtidas numericamente pela resolução das equações diferenciais (8.41), tornando assim o processo geral, permitindo variações nas condições de contorno. Este procedimento será melhor esclarecido nos próximos itens.

8.3.2 Obtenção das tensões totais no contorno

O problema em se utilizar a expressão (8.39) para se calcular as tensões no contorno já foi demasiadamente exposto nos capítulos passados que tratam das formulações com elementos de contorno e não necessita ser revisto. As tensões totais no contorno serão obtidas da mesma forma apresentada anteriormente para todas as outras formulações do MEC, ou seja, através dos deslocamentos e forças de superfície do contorno que já foram determinados na solução do problema de contorno. Assim, definidas as funções de forma para os deslocamentos e forças de superfície do contorno e obtidos os seus valores nodais, é possível definir as forças de superfície em qualquer ponto do elemento de contorno. Consequentemente, pode-se escrever para o caso tridimensional que:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{13} &= \bar{\sigma}_{31} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{23} &= \bar{\sigma}_{32} = \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{33} &= \bar{p}_3 \end{aligned} \quad (8.42)$$

onde o subscrito indica que os valores são referentes ao sistema de coordenadas local (fig. 3.2). As outras componentes de tensão podem ser obtidas através da relação constitutiva. Note que, quando se resolve o problema de contorno, obtém-se as forças de superfície e os deslocamentos nodais no sistema global, porém, para encontrar as tensões no contorno é necessário transformá-los para o sistema local fazendo uso da matriz de transformação entre os dois sistemas. Definido o campo de deslocamento sobre o elemento de contorno eq.(3.29), o campo de deformações é obtido pela diferenciação do campo de deslocamento, ou seja, utilizando-se a equação (3.30). Note que não é necessário determinar todas as componentes de

deformação, basta apenas obter aquelas que serão importantes na determinação das componentes de tensão restantes. Logo, as outras componentes do tensor de tensão são encontradas fazendo-se uso das seguintes relações constitutivas,

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{12} = \bar{\sigma}_{21} &= \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} 2\mu(\bar{\epsilon}_{12} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{12}) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\bar{\sigma}}_{12} - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \bar{\sigma}_{12}^{vp} \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left\{ (2\mu + \lambda)(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + \lambda[(\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22}) + (\bar{\epsilon}_{33} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{33})] \right\} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\bar{\sigma}}_{11} - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \bar{\sigma}_{11}^{vp} \\ \bar{\sigma}_{22} &= \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left\{ (2\mu + \lambda)(\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22}) + \lambda[(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + (\bar{\epsilon}_{33} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{33})] \right\} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\bar{\sigma}}_{22} - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \bar{\sigma}_{22}^{vp}\end{aligned}\quad (8.43)$$

Deve-se eliminar os termos $\bar{\epsilon}_{33}$ e $\dot{\bar{\epsilon}}_{33}$ utilizando-se a relação constitutiva para $\bar{\sigma}_{33}$, de maneira que:

$$\bar{\epsilon}_{33} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{33} = \frac{1}{2\mu + \lambda} \left\{ \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \bar{p}_3 - \lambda[(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + (\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22})] + \gamma\dot{\bar{\sigma}}_{33} + \frac{E_e}{E_{ve}} \bar{\sigma}_{33}^{vp} \right\} \quad (8.44)$$

onde μ e λ são as conhecidas constantes de Lamé escritas como:

$$\lambda = \frac{\nu E_e}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad ; \quad \mu = \frac{E_e}{2(1 + \nu)} \quad (8.45)$$

É importante observar que as relações constitutivas são empregadas em sua forma total e não em forma incremental. As velocidades de deformação são definidas por aproximações lineares, ou seja:

$$\dot{\bar{\epsilon}}_{t+\Delta t} = \frac{\bar{\epsilon}_{t+\Delta t} - \bar{\epsilon}_t}{\Delta t} \quad ; \quad \dot{\bar{\sigma}}_{t+\Delta t} = \frac{\bar{\sigma}_{t+\Delta t} - \bar{\sigma}_t}{\Delta t} \quad (8.46)$$

Substituindo-se as expressões (8.44) e (8.46) nas equações (8.43), pode-se reordená-las, explicitando-se as tensões referentes ao instante $t + \Delta t$, tornando possível encontrar as tensões no contorno, pois as deformações são obtidas em função dos deslocamentos e forças de superfície do contorno. Note também que as tensões iniciais devem ser transformadas para o sistema local antes da aplicação das expressões (8.43). Após a determinação das tensões,

pode-se obtê-las no sistema global utilizando-se a matriz de transformação. Para o caso bidimensional, o procedimento é o mesmo, porém envolve apenas uma componente de deformação eq.(3.32). Nesta situação as tensões no contorno ficam determinadas pelo seguinte conjunto de equações:

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{22} &= \bar{p}_2 \\ \bar{\sigma}_{12} &= \bar{\sigma}_{21} = \bar{p}_1 \\ \bar{\sigma}_{11} &= \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \left\{ (2\mu + \lambda)(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + \lambda(\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22}) \right\} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\bar{\sigma}}_{11} - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \bar{\sigma}_{11}^{vp}\end{aligned}\quad (8.47)$$

Semelhantemente ao 3D, deve-se eliminar os termos $\bar{\epsilon}_{22}$ e $\dot{\bar{\epsilon}}_{22}$ utilizando-se a relação constitutiva para $\bar{\sigma}_{22}$, de maneira que:

$$\bar{\epsilon}_{22} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{22} = \frac{1}{2\mu + \lambda} \left\{ \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \bar{p}_2 - \lambda(\bar{\epsilon}_{11} + \gamma\dot{\bar{\epsilon}}_{11}) + \gamma\dot{\bar{\sigma}}_{22} + \frac{E_e}{E_{ve}} \bar{\sigma}_{22}^{vp} \right\}\quad (8.48)$$

As taxas são definidas pelas equações (8.46) e a deformação ϵ_{11} é obtida pela diferenciação (3.32) sobre o campo de deslocamento adotado sobre o elemento nas coordenadas locais.

8.3.3 Tratamento algébrico para as representações integrais

Através do método dos elementos de contorno pode-se transformar as representações integrais apresentadas anteriormente em equações algébricas, dividindo o contorno do corpo Γ com n_e elementos de contorno Γ_e (fig. 6.1) e o domínio Ω , onde ocorrerá a plastificação, com n_c células Ω_c , de tal sorte que as densidades do contorno sejam representadas adequadamente. Dessa forma, as variáveis do problema podem ser aproximadas, parametrizando-as com relação aos seus valores nodais, fazendo-se uso de funções interpoladoras apropriadas.

$$\begin{aligned}p_i &= \phi^\alpha P_i^\alpha & \dot{p}_i &= \phi^\alpha \dot{P}_i^\alpha \\ u_i &= \phi^\alpha U_i^\alpha ; & \dot{u}_i &= \phi^\alpha \dot{U}_i^\alpha\end{aligned}\quad (8.49)$$

$$\sigma_{ij}^{vp} = \tilde{\phi} \tilde{\alpha} \sigma_{ij}^{vp(\tilde{\alpha})}$$

onde ϕ e $\tilde{\phi}$ são respectivamente as funções de forma adotadas para interpolar os elementos de contorno e as células e os subscritos α e $\tilde{\alpha}$ referem-se aos nós do elemento de contorno e da célula, respectivamente. Os termos $\sigma_{ij}^{vp(\tilde{\alpha})}$, U_i^α , P_i^α , \dot{U}_i^α e \dot{P}_i^α são valores nodais das tensões iniciais, forças de superfície, deslocamentos e suas respectivas velocidades. Consequentemente, as representações integrais de deslocamento e tensão ficam escritas como:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{ki} U_i(p) + \gamma \bar{C}_{ki} \dot{U}_i(p) &= \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \\ &\gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{P}_i^\alpha + \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} B_{ki}^* d\Gamma_e \dot{b}_i + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} B_{ki}^* d\Gamma_e b_i + \quad (8.50a) \\ &\frac{E_e}{E_{ve}} \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \varepsilon_{kij}^* \tilde{\phi} \tilde{\alpha} d\Omega_c \sigma_{ij}^{vp(\tilde{\alpha})} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\rho q}(p) &= \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e P_i^\alpha - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e U_i^\alpha - \\ &\frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{p}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{U}_i^\alpha + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{\sigma}_{\rho qi}^* \phi^\alpha d\Gamma_e \dot{P}_i^\alpha + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma_e \dot{b}_i + \quad (8.50b) \\ &\sum_{e=1}^{n_e} \int_{\Gamma_e} \bar{B}_{\rho qi}^* d\Gamma_e b_i + \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \left[\sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} \bar{\varepsilon}_{\rho qij}^* \tilde{\phi} \tilde{\alpha} d\Omega_c \sigma_{ij}^{vp(\tilde{\alpha})} + \bar{g}_{\rho qij} \sigma_{ij}^{vp}(p) \right] - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{\rho q}(p) \end{aligned}$$

Depois de executar todas as integrais e escolher pontos fonte em igual número aos nós do problema, pode-se escrever os seguintes sistemas de equações diferenciais temporais:

$$HU(t) + \gamma H\dot{U}(t) = \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} GP(t) + \gamma G\dot{P}(t) + \gamma Bb(t) + \frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} Bb(t) + \frac{E_e}{E_{ve}} Q\sigma^{vp}(t) \quad (8.51a)$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \tilde{G}P(t) - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H}U(t) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H}\dot{U}(t) + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{G}\dot{P}(t) + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{B}\dot{b}(t) + \\ &\tilde{B}b(t) + \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \tilde{Q}\sigma^{vp}(t) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}(t) \end{aligned} \quad (8.51b)$$

onde t representa o tempo. Ressalta-se que a matriz H é obtida através da associação do termo \bar{C}_{ki} com a matriz referente a integral de contorno cuja o núcleo é p_{ki}^* , como usualmente é

feito no método dos elementos de contorno. Já o temo livre é associado a última integral em (8.50b) dando origem a matriz \tilde{Q} .

8.3.4 Integração temporal numérica

Semelhantemente as formulações viscosas apresentadas anteriormente, para se resolver o problema viscoplástico, deve-se integrar no tempo o sistema de equações apresentado na equação (8.51a). Para isto, adota-se uma simples aproximação linear para definir as velocidades. Poderia-se adotar outras expressões para resolver o problema, porém observou-se que a aproximação linear é suficientemente adequada, de maneira que:

$$\dot{U}_{t+\Delta t} = \frac{U_{t+\Delta t} - U_t}{\Delta t}; \quad \dot{P}_{t+\Delta t} = \frac{P_{t+\Delta t} - P_t}{\Delta t}; \quad \dot{b}_{t+\Delta t} = \frac{b_{t+\Delta t} - b_t}{\Delta t}; \quad \dot{\sigma}_{t+\Delta t} = \frac{\sigma_{t+\Delta t} - \sigma_t}{\Delta t} \quad (8.52)$$

Aplicando-se a expressão das velocidades apresentadas em (8.52) na equação (8.51a), encontra-se o seguinte sistema de equações:

$$\hat{H}U_{t+\Delta t} = \hat{G}P_{t+\Delta t} + F_{t+\Delta t} \quad (8.53)$$

onde

$$\hat{H} = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right)H \quad (8.54a)$$

$$\hat{G} = \left(\frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} + \frac{\gamma}{\Delta t}\right)G \quad (8.54b)$$

$$F_{t+\Delta t} = \left(\frac{E_e + E_{ve}}{E_{ve}} + \frac{\gamma}{\Delta t}\right)Bb_{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\Delta t}HU_t - \frac{\gamma}{\Delta t}GP_t - \frac{\gamma}{\Delta t}Bb_t + \frac{E_e}{E_{ve}}Q\sigma_{t+\Delta t}^{vp} \quad (8.54c)$$

Impondo-se as condições de contorno, como usualmente é feito no método dos elementos de contorno, trocando-se as colunas das matrizes \hat{H} e \hat{G} , pode-se resolver o sistema linear apresentado em (8.53), obtendo-se assim os deslocamentos e forças de superfície para o passo de tempo atual. Caso ocorra plastificação e conseqüentemente tensão residual, torna-se necessário redistribuir o resíduo de tensão inicial. Esta redistribuição caracteriza o processo iterativo. Este resíduo é reaplicado fazendo-se uso da equação (8.53) escrita com valores totais (e não incrementais). Assim, obtidos os deslocamentos e as forças

de superfície do problema de contorno no instante $t+\Delta t$, determina-se $\dot{P}_{t+\Delta t}$, $\dot{U}_{t+\Delta t}$ e $\dot{b}_{t+\Delta t}$ através das expressões (8.52). Obtidas essas variáveis, calcula-se as tensões totais fazendo-se uso da equação (8.51b) e da expressão de $\dot{\sigma}_{t+\Delta t}$ em (8.52), de maneira que:

$$\sigma_{t+\Delta t} = \left(\tilde{G}P_{t+\Delta t} - \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H}U_{t+\Delta t} - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{H}\dot{U}_{t+\Delta t} + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{G}\dot{P}_{t+\Delta t} + \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \tilde{B}\dot{b}_{t+\Delta t} + \tilde{B}b_{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \sigma_t + \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \tilde{Q}\sigma_{t+\Delta t}^{vp} \right) \left/ \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \frac{E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \right) \right. \quad (8.55)$$

Através do resultado do problema de contorno pode-se encontrar as tensões totais referentes aos nós do contorno conforme descrito no item(8.3.2). A tensão de tentativa elástica necessária ao procedimento implícito de atualização podem ser facilmente obtidas adotando-se uma aproximação para a velocidade das tensões elastoplásticas $\dot{\sigma}_{s+1}^{ep}$ e iniciais $\dot{\sigma}_{s+1}^{vp}$.

$$\dot{\sigma}_{t+\Delta t}^{ep} = \frac{\sigma_{t+\Delta t}^{ep} - \sigma_t^{ep}}{\Delta t}; \quad \dot{\sigma}_{t+\Delta t}^{vp} = \frac{\sigma_{t+\Delta t}^{vp} - \sigma_t^{vp}}{\Delta t} \quad (8.56)$$

Aplicando-se a expressão de $\dot{\sigma}_{s+1}^{ep}$ e $\dot{\sigma}_{s+1}^{vp}$ apresentada em (8.56) na equação diferencial em (8.41), pode-se escrever:

$$\sigma_{t+\Delta t}^{ep} = \left[\sigma_{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma_t^{ep} - \gamma \left(\frac{\sigma_{t+\Delta t}^{vp} - \sigma_t^{vp}}{\Delta t} \right) \right] \left/ \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \right. \quad (8.57)$$

As variáveis referentes ao instante passado “ t ” são atualizadas apenas no final de cada incremento. Já aquelas referentes ao instante atual “ $t+\Delta t$ ” devem ser atualizadas em toda iteração. Note que na expressão (8.57) necessita-se do valor das tensões totais que são calculadas como mencionado anteriormente. Assim, calculadas as tensões totais e as tensões de tentativa elásticas, obtém-se as tensões elastoplásticas através de procedimentos usuais para corrigir as tensões de tentativa, de maneira que elas agora verifiquem o critério de plastificação adotado. As tensões viscosas são obtidas de uma forma simples e direta aplicando-se a relação (2.27). Não obtida a convergência repete-se o esquema sem atualizar as variáveis do instante anterior “ t ”, pois estas já estavam equilibradas no passo anterior, caracterizando o processo iterativo. Caso contrário, atualiza-se as variáveis do problema e

parte-se para um novo incremento de tempo. Note que, para se resolver o problema viscoplástico os deslocamentos internos não são necessários, mas eles podem ser facilmente obtidos fazendo-se uso da expressão (8.36). O procedimento não-linear é o mesmo descrito no item(8.2.5), onde a equação (8.26) é obtida pela imposição das condições de contorno sobre (8.53) e as tensões de tentativa elásticas eq.(8.28) são agora determinadas por (8.57).

8.3.5 Exemplo numérico

O mesmo exemplo empregado no item(8.2.6) será aqui utilizado com o propósito de validar a formulação viscoplástica com comportamento instantâneo. Na análise do problema foram utilizados os algoritmos implícitos com critério de von Mises levando em consideração as hipóteses associativa e não-associativa. Serão considerados como dados adicionais o módulo de elasticidade instantâneo $E_e = 100000,0Pa$ e o módulo de elasticidade do trecho viscoplástico $E_{ve} = 50000,0Pa$. As informações restantes são as mesmas apresentadas na figura 8.1. Semelhantemente, resultados do deslocamento longitudinal do ponto central na extremidade onde se aplica a solicitação são apresentados na figura 8.8 para o von Mises associativo e na figura 8.9 para o von Mises não-associativo. Nos gráficos apresentam-se resultados do comportamento viscoelástico, bem como o viscoplástico com encruamento nulo, positivo e negativo.

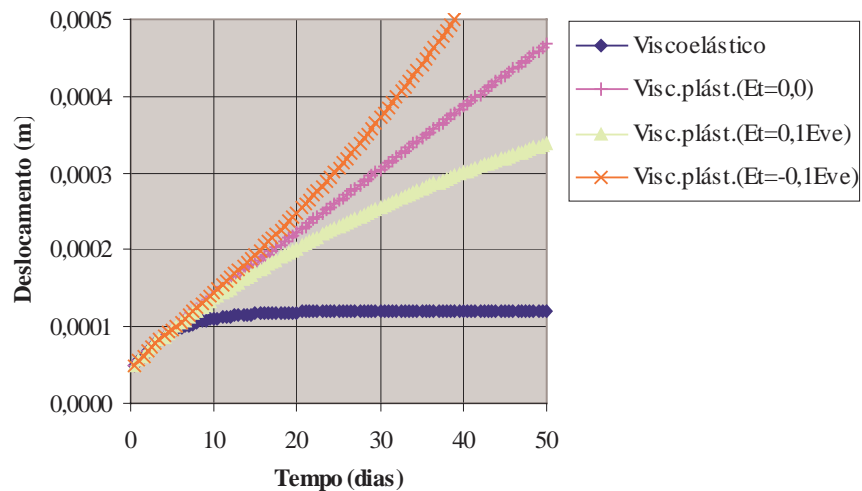


FIGURA 8.8 – Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada.

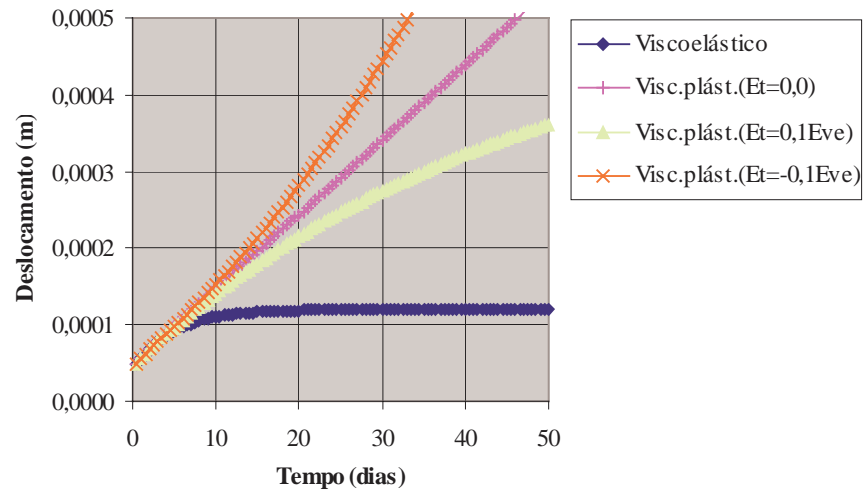


FIGURA 8.9 – Deslocamento longitudinal do ponto central da extremidade solicitada.

Observando as figuras 8.8 e 8.9 pode-se chegar as mesmas conclusões obtidas com a primeira formulação viscoplástica. Semelhantemente, note que o encruamento nulo induz uma velocidade de deslocamento constante, o que não ocorre com a resposta com encruamento negativo e positivo onde a velocidade é crescente e decrescente, respectivamente. As respostas obtidas para as tensões são exatamente as mesmas encontradas com a primeira formulação e as conclusões lá apresentadas podem ser aqui estendidas.

Capítulo 9

ACOPLAMENTO MEC/MEF

9.1 INTRODUÇÃO

A maioria dos problemas de engenharia apresentam interação entre partes diferentes do sistema, tais como: interação solo-estrutura, estrutura-estrutura e fluido-estrutura. As fundações das estruturas interagem diretamente com o solo, transmitindo as solicitações de maneira que a estrutura esteja em equilíbrio estático ou dinâmico. Fluidos, tais como: ar, água ou lubrificantes, podem estar interagindo com elementos estruturais como: edifícios, represas, estruturas "offshore", componentes mecânicos, etc. Cada parte do sistema é representada por uma região física, sobre a qual pode-se aplicar uma solução numérica particular. Porém, em muitos casos práticos, por simplicidade, é possível desprezar a interação de uma parte do sistema com a outra. Um exemplo claro desse comportamento desacoplado, seria a atuação direta das forças do vento sobre um edifício suposto rígido. Neste caso, despreza-se a interação, analisando o problema com forças equivalentes atuando sobre a estrutura, na tentativa de simular a presença do fluido. Entretanto, em situações onde se deseja analisar o comportamento de todo o sistema ou mesmo modelar o problema de forma mais realista e coerente, deve-se utilizar técnicas numéricas específicas para cada parte do sistema. Uma maneira eficiente de representar todo o problema seria através do acoplamento de elementos de contorno com elementos finitos. Elementos de contorno são mais adequados para tratar problemas com domínio infinito ou semi-infinito e regiões de concentração de tensões e fluxo. Já elementos finitos são mais apropriados para problemas envolvendo materiais compósitos ou anisotrópicos 3D. Uma aplicação adequada de ambos os métodos na simulação de um problema de interação torna o acoplamento uma ferramenta bastante atraente, possibilitando

uma melhor representação de todo o problema, conduzindo a resultados mais precisos com um custo computacional menor.

9.2 TÉCNICAS DE ACOPLAMENTO

Segundo BREBIA & DOMINGUES(1992) existem várias aproximações proposto para o acoplamento entre elementos finitos e elementos de contorno, porém, do ponto de vista prático, três técnicas se destacam.

Técnica (i) Utiliza a solução de elementos finitos para definir as condições de contorno da região de elementos de contorno.

Técnica (ii) Trata a região de elementos de contorno como uma sub-região equivalente de elementos finitos que será acoplada a outras sub-regiões de elementos finitos.

Técnica (iii) Trata a região de elementos finitos como uma região elementos de contorno equivalente que deve ser combinada a outras regiões de elemento de contorno.

Técnica (i) Esta aproximação consiste basicamente de duas etapas, uma etapa inicial onde o problema é resolvido utilizando-se apenas elementos finitos e um uma segunda etapa onde a resposta da primeira etapa serve de condições de contorno à região de elementos de contorno. Esta é uma aproximação puramente empírica, de maneira que não pode ser facilmente justificada de um ponto de vista puramente matemático, porém, ela é muito utilizada, produzindo razoáveis resultados BREBIA & DOMINGUES(1992). As condições de contorno obtidas do código de elementos finitos e aplicadas na região de elementos de contorno, em geral, são sempre deslocamentos (ou potenciais). Isto pode ser facilmente justificado pela maior precisão dos resultados em deslocamento (ou potencial) obtidos de um código de elementos finitos. Provavelmente, a técnica não apresentaria bons resultados se fossem utilizadas tensões (ou fluxos) como condições de contorno para a região de elementos de contorno.

Técnica (ii) Uma aproximação mais interessante seria aquela em que a região de elementos de contorno é tratada como uma região equivalente de elementos finitos, podendo ser facilmente incorporada em um código computacional de elementos finitos já existente. Em geral, esta técnica conduz a matrizes não simétricas para os elementos finitos equivalentes e consequentemente a perda da simetria da matriz de rigidez global. Matrizes simétricas são

computacionalmente mais eficientes, pois permitem o uso das técnicas de armazenamento em banda, reduzindo a área de armazenamento, além disso, são mais fáceis de serem implementadas em um código de elementos finitos já existente.

O ponto de partida para as deduções das expressões do método dos elementos finitos é o princípio dos trabalhos virtuais. Este requer que durante qualquer deslocamento virtual imposto no corpo, o trabalho externo total provocado pelas forças externas seja igual ao trabalho interno total produzido pelas forças internas, conseqüentemente para o caso elastostático, tem-se:

$$\int_{\Omega} \delta \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} d\Omega = \int_{\Gamma} \delta u_i p_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta u_i b_i d\Omega \quad (9.1)$$

onde p_i são as forças de superfície (cargas distribuídas) referentes a direção i , b_i são as forças volumétricas, δu_i o deslocamento virtual, ε_{ij} as componentes de deformação e σ_{ij} as componentes de tensão. Note que a primeira integral refere-se ao trabalho das forças internas e dá origem a matriz de rigidez. Já a integral do lado esquerdo da igualdade representa o trabalho das forças de superfície. Aproximando-se as variáveis do problema, fazendo-se uso de funções interpoladoras apropriadas, parametrizando-as com relação aos seus valores nodais, é possível montar o seguinte sistema de equações:

$$KU = F + B \quad (9.2)$$

sendo K a matriz de rigidez da sub-região de elementos finitos U o vetor de deslocamento nodais e F o vetor independente que possui contribuição das forças externas.

Já para a sub-região de elementos de contorno as equações integrais de contorno podem ser escritas para o caso elastostático como:

$$\bar{C}_{ki} u_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (9.3)$$

onde \bar{C}_{ki} é uma matriz que depende da posição do ponto fonte, u_{ki}^* e p_{ki}^* são, respectivamente, as soluções fundamentais em deslocamento e em força de superfície e representa fisicamente o efeito de uma carga concentrada unitária estática atuando em um ponto de um domínio infinito. Estas soluções foram descritas em capítulos anteriores para o

problema de Kelvin. Os termos b_i , u_i e p_i são as componentes segundo a direção i das forças volumétricas, dos deslocamentos e das forças de superfície, respectivamente. Semelhantemente ao que foi feito à expressão (9.1), faz-se a equação integral (9.3), aproximando as variáveis através de funções interpoladoras, de maneira que a representação integral fica expressa pelo seguinte sistema de equações:

$$HU = GP + \tilde{B} \quad (9.4)$$

sendo H e G as conhecidas matrizes do MEC, U é o vetor de deslocamento nodais e P o vetor de forças de superfície nodais. Para executar o acoplamento como descrito neste item é necessário transformar a equação do MEC em uma forma semelhante aquela do MEF. Sendo assim, deve-se pré-multiplicar a equação (9.4) pela inversa da matriz G de maneira que:

$$G^{-1}HU = P + G^{-1}\tilde{B} \quad (9.5)$$

É importante observar que o vetor P contém forças de superfície (tractions) nos nós. Porém, para tornar a expressão (9.5) em uma forma equivalente ao MEF é necessário transformar as forças de superfície em forças equivalentes nodais. Para isto deve-se fazer uso da matriz “Lumping” L que transforma as forças de superfície em forças equivalentes nodais, definida como:

$$L = \int_{\Gamma} \bar{\phi}_{\beta} \phi_{\alpha} d\Gamma \quad (9.6)$$

onde $\bar{\phi}_{\beta}$ e ϕ_{α} são as funções de forma adotadas para a função ponderadora e para interpolar as forças de superfície, respectivamente, de maneira que:

$$\bar{F} = LP \quad (9.7)$$

Esta operação é bastante usual nas formulações em elementos finitos, porém não é muito comum encontrar a matriz Lumping escrita em uma forma explícita. Pré-multiplicando ambos os lados da equação (9.5) encontra-se a expressão equivalente do MEC para o acoplamento em código de elementos finitos.

$$LG^{-1}HU = LP + LG^{-1}\tilde{B} \Rightarrow \bar{K}U = \bar{F} + \bar{B} \quad (9.8)$$

onde $LG^{-1}H$ é a matriz de “rigidez equivalente” \bar{K} referente a sub-região do MEC, LP é o respectivo vetor de forças equivalente \bar{F} e $LG^{-1}\tilde{B}$ é o vetor das forças volumétricas \bar{B} . Note que não é possível garantir que a matriz de rigidez equivalente seja simétrica. Alguns autores, veja por exemplo SWOBODA *et al.*(1987) e SINGH *et al.*(1988), propõem uma manipulação na matriz de “rigidez” da sub-região de elementos de contorno de maneira que ela se torne simétrica e assim ser possível desfrutar das vantagens de se ter uma matriz simétrica. Uma maneira simples seria impor que a matriz de rigidez equivalente seja expressa por:

$$\bar{K} = \frac{1}{2}[\bar{K} + \bar{K}^T] \quad (9.9)$$

Porém, segundo BREBIA & DOMINGUES(1992) esta operação não é muito recomendada por produzir resultados imprecisos em muitas aplicações práticas. Obtido o sistema em elementos de contorno na forma padrão do MEF e impondo-se as condições de contorno como usualmente é feito pelo MEF em ambas sub-regiões, pode-se executar o acoplamento através das imposições das condições de compatibilidade e equilíbrio na interface que liga as sub-regiões e assim resolver o problema segundo a técnica descrita.

Técnica (iii) Esta técnica é similar à última técnica abordada, inclusive apresenta resultados numéricos semelhantes. Porém, ao invés de tratar o problema como se fosse elementos finitos, esta apresenta uma abordagem diferente, tratando o problema segundo os moldes do método dos elementos de contorno. Entretanto para isto, deve-se considerar as sub-regiões de elementos finitos como se fossem sub-regiões de elementos de contorno equivalente. Sendo assim, fazendo-se uso da matriz Lumping eq.(9.7) é possível escrever o seguinte sistema para elementos finitos:

$$KU = F + B \Rightarrow KU = LP + B \quad (9.10)$$

Considerando-se agora um problema de acoplamento consistindo de duas sub-regiões Ω_1 (elementos de contorno) e Ω_2 (elementos finitos), conforme apresentado na figura 9.1.

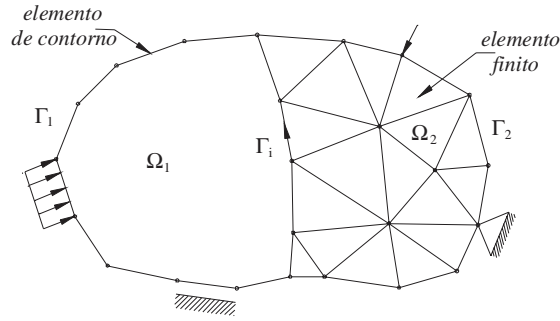


FIGURA 9.1 – Corpo discretizado com elementos de contorno e finitos

As sub-regiões estão conectadas através da interface Γ_i e são caracterizadas pelos seus respectivos sistemas de equações expressos pelas equações (9.4) e (9.10). Estes ficam melhor escritos como:

$$\text{Para } \Omega_1 \rightarrow H_1 U_1 = G_1 P_1 + B_1 \quad (9.11a)$$

$$\text{Para } \Omega_2 \rightarrow K U_2 = L P_2 + B_2 \Rightarrow H_2 U_2 = G_2 P_2 + B_2 \quad (9.11b)$$

Note que $H_2 = K$ e $G_2 = L$. Escrevendo-se agora ambos os sistemas em uma forma mais explícita, separando os graus de liberdade pertencentes a interface (i) e aqueles exteriores (e) a interface, tem-se:

$$\text{Para } \Omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} H_1^e & H_1^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_1^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^e & G_1^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^e \\ P_1^i \end{Bmatrix} + B_1 \quad (9.12a)$$

$$\text{Para } \Omega_2 \rightarrow \begin{bmatrix} H_2^e & H_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2^e \\ U_2^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2^e & G_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2^e \\ P_2^i \end{Bmatrix} + B_2 \quad (9.12b)$$

Considerando-se a opção de prescrever forças de superfície na interface de contato Γ_i , deve-se notar que os vetores P_1^i e P_2^i contém valores prescritos e incógnitos. Assim, separando a parte prescrita da incógnita as equações (9.12) ficam escritas:

$$\text{Para } \Omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} H_1^e & H_1^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_1^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_1^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P_1^i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_1^e & G_1^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^e \\ \bar{P}_1^i \end{Bmatrix} + B_1 \quad (9.13a)$$

$$\text{Para } \Omega_2 \rightarrow \begin{bmatrix} H_2^e & H_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2^e \\ U_2^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P_2^i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_2^e & G_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_2^e \\ \bar{P}_2^i \end{Bmatrix} + B_2 \quad (9.13b)$$

onde o sobrescrito (traço) no vetor de forças de superfície refere-se aos valores rescritos na interface. As condições de compatibilidade e equilíbrio na interface Γ_i podem ser escritas como:

$$\text{Condição de compatibilidade} \quad \rightarrow U^i = U_1^i = U_2^i \quad (9.14a)$$

$$\text{Condição de equilíbrio} \quad \rightarrow P^i = P_1^i = -P_2^i \quad (9.14b)$$

Aplicando as equações (9.14) nas expressões (9.13), satisfazemos, automaticamente, as condições de compatibilidade e equilíbrio da interface Γ_i , obtendo-se:

$$\text{Para } \Omega_1 \rightarrow \begin{bmatrix} H_1^e & H_1^i & -G_1^i \\ G_1^e & G_1^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U^i \\ P^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^e & G_1^i \\ P_1^e \\ \bar{P}_1^i \end{bmatrix} + B_1 \quad (9.15a)$$

$$\text{Para } \Omega_2 \rightarrow \begin{bmatrix} H_2^e & H_2^i & G_2^i \\ G_2^e & G_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_2^e \\ U^i \\ P^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_2^e & G_2^i \\ P_2^e \\ \bar{P}_2^i \end{bmatrix} + B_2 \quad (9.15b)$$

Escrevendo as equações (9.15) em um único sistema de equações, tem-se:

$$\begin{bmatrix} H_1^e & 0 & H_1^i & -G_1^i \\ 0 & H_2^e & H_2^i & G_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ U_2^e \\ U^i \\ P^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^e & 0 & G_1^i & 0 \\ 0 & G_2^e & 0 & G_2^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^e \\ P_2^e \\ \bar{P}_1^i \\ \bar{P}_2^i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} \quad (9.16)$$

As condições de contorno podem ser impostas mais facilmente antes da montagem do sistema final, segundo o procedimento padrão do MEC. Dessa forma, após a imposição das condições de contorno, o sistema (9.16) pode assim ser montado e resolvido, solucionando o problema de acoplamento. Na resolução do sistema é importante considerar rotinas que utilizem pelo menos pivoteamento parcial, caso contrário, para algumas situações não será possível obter resposta devido ao mau condicionamento da matriz. Esta forma de abordar o problema não requer inversões adicionais para transforma o sistema de equações de métodos de domínio na forma padrão do MEC e é adotada neste trabalho para tratar o problema de acoplamento. É importante observar que, seja qual for a formulação empregada, elástica, elastoplástica, viscoelástica, viscoplástica, dinâmica, etc., é possível chegar a sistemas de

equações semelhantes aqueles apresentados pelas equações (9.11). De maneira que, toda a metodologia aqui empregada para executar o acoplamento elastostático entre o MEC e o MEF pode ser diretamente estendida para qualquer outro problema, incluindo também situações com mais de duas regiões CODA(2000).

9.3 ACOPLAMENTO PARA O REFORÇO

Esta abordagem é mais indicada para tratar problemas de acoplamento progressivo que envolve inserção de regiões no corpo em tempos pré-determinados, tais como os problemas de reforço estrutural e de escavações. O reforço é tratado como uma sub-região que será acoplada durante o processo numérico. A interface que receberá reforço, em geral, apresenta-se em uma forma deslocada. Executando-se o acoplamento como descrito na *técnica(iii)* do item anterior, mantendo as condições de compatibilidade e equilíbrio, implicitamente impõe-se que a interface do reforço que será acoplada possuirá deslocamentos e forças de superfícies prescritas iguais aos pontos da interface que recebe o reforço.

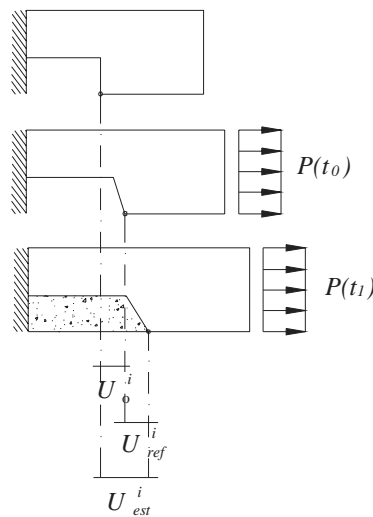


FIGURA 9.2 – Etapas de um reforço estrutural.

Se o acoplamento for considerado desta forma e for empregado um reforço com as mesmas propriedades físicas do meio reforçado, ocorrerá que a estrutura recuperará a rigidez inicial de uma estrutura íntegra com a mesma geometria e propriedades físicas da estrutura reforçada, provocando uma descontinuidade na curva *deslocamento x tempo*, o que não é

correto. Para se evitar este problema, é necessário fazer uma correção no sistema de equações, de maneira que as hipóteses do reforço sejam introduzidas corretamente. Esta correção pode ser melhor compreendida visualizando-se a figura 9.2. A figura 9.2 apresenta as etapas de um problema de reforço. A estrutura a ser reforçada, inicialmente em repouso, é solicitada por uma força, originando uma nova configuração deslocada para a estrutura, até que, em um determinado instante, o reforço é acoplado. Note que as condições de compatibilidade e equilíbrio, para a interface de contato entre o reforço e a estrutura, considerando a hipótese de pequenos deslocamentos, são agora expressas como:

$$\text{Condição de compatibilidade} \quad \rightarrow U_{est}^i = U_{ref}^i + U_o^i \quad (9.17a)$$

$$\text{Condição de equilíbrio} \quad \rightarrow P_{ref}^i = -P_{est}^i \quad (9.17b)$$

sendo U_o^i o vetor de deslocamentos da interface que recebe o reforço no instante anterior ao acoplamento do reforço. Os subscritos *ref* e *est* indicam os termos relacionados, respectivamente, ao reforço e a estrutura a ser reforçada, ambos referentes ao instante atual. É importante observar que a condição de compatibilidade para o problema de reforço é diferente daquela apresentada na equação (9.14a). As equações do problema no instante em que o reforço é conectado são:

$$\text{Para } \Omega_{est} \rightarrow \begin{bmatrix} H_{est}^e & H_{est}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{est}^e \\ U_{est}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_{est}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P_{est}^i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{est}^e & G_{est}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{est}^e \\ \bar{P}_{est}^i \end{Bmatrix} + B_{est} \quad (9.18a)$$

$$\text{Para } \Omega_{ref} \rightarrow \begin{bmatrix} H_{ref}^e & H_{ref}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{ref}^e \\ U_{ref}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G_{ref}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ P_{ref}^i \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} G_{ref}^e & G_{ref}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{ref}^e \\ \bar{P}_{ref}^i \end{Bmatrix} + B_{ref} \quad (9.18b)$$

Substituindo as condições de compatibilidade e equilíbrio, específicas para o problema de reforço, nas equações (9.18), encontra-se:

$$\text{Para } \Omega_{est} \rightarrow \begin{bmatrix} H_{est}^e & H_{est}^i & -G_{est}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{est}^e \\ U_{ref}^i \\ P_{est}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{est}^e & G_{est}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{est}^e \\ \bar{P}_{est}^i \end{Bmatrix} + B_{est} - H_{est}^i U_o^i \quad (9.19a)$$

$$\text{Para } \Omega_{ref} \rightarrow \begin{bmatrix} H_{ref}^e & H_{ref}^i & G_{ref}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{ref}^e \\ U_{ref}^i \\ P_{est}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{ref}^e & G_{ref}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{ref}^e \\ \bar{P}_{ref}^i \end{Bmatrix} + B_{ref} \quad (9.19b)$$

No sistema de equações referente à sub-região que recebe o reforço, aparece um termo adicional, oriundo da equação de compatibilidade. Este termo é a correção que deve ser imposta ao sistema, para que as hipóteses do reforço sejam atendidas. Escrevendo as equações (9.19) em um único sistema de equações, tem-se:

$$\begin{bmatrix} H_{est}^e & 0 & H_{est}^i & -G_{est}^i \\ 0 & H_{ref}^e & H_{ref}^i & G_{ref}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{est}^e \\ U_{ref}^e \\ U_{ref}^i \\ P_{est}^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{est}^e & 0 & G_{est}^i & 0 \\ 0 & G_{ref}^e & 0 & G_{ref}^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_{est}^e \\ P_{ref}^e \\ \bar{P}_{est}^i \\ \bar{P}_{ref}^i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_{est} \\ B_{ref} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} H_{est}^i U_o^i \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (9.20)$$

Após a resolução do sistema de equações, obtém-se U_{est}^i e P_{ref}^i através das equações (9.17), encontrando assim todas as incógnitas e solucionando completamente o problema de reforço. Note que, em um problema viscoso, a correção deve ser imposta em todos os passos de tempo, a partir do instante da inserção do reforço.

9.4 PROCEDIMENTO COM ACOPLAMENTO PROGRESSIVO

Para problemas de progressão, onde partes de um sólido são extraídas e inseridas em tempos pré-determinados, tal como em problemas de escavações reforçadas em túneis, o procedimento de acoplamento das sub-regiões é exatamente o mesmo. As partes do corpo que serão fixas, aquelas que serão removidas e aquelas que serão introduzidas são representadas por sub-regiões, de maneira que em uma determinada etapa do problema de progressão seja possível executar a extração de partes do corpo e a inserção de outras. É indispensável adoção de um modelo viscoso para este tipo de problema, pois este possibilita executar a análise em função do tempo, permitindo determinar os tempos de extração e inclusão das sub-regiões. O procedimento é dividido em etapas. Em cada etapa é definida uma nova geometria do problema, ou seja, é de uma etapa para a outra que partes do corpo, caracterizadas por sub-regiões de elementos finitos ou elementos de contorno, são inseridas ou extraídas. As etapas são divididas em passos de tempo oriundos das formulações viscosas. O tempo, com um significado físico bem definido, permanece contínuo de uma etapa para outra. Se o problema considerado for viscoplástico, torna-se necessário um procedimento iterativo dentro de cada passo de tempo para se corrigir o erro de aproximação, de maneira que o equilíbrio seja

novamente estabelecido. Uma descrição sistematizada de todo o procedimento com acoplamento progressivo pode ser vista nos passos a seguir.

Passo 1 - Para cada etapa do problema monta-se o sistema de equações com as sub-regiões acopladas. As matrizes de todas as sub-regiões envolvidas no problema só precisam ser calculadas uma única vez. Estas devem ser armazenadas e lidas no instante da montagem do sistema total da etapa atual. Se o problema envolve variação das propriedades físicas com o tempo, como é o caso do concreto projetado nas idades iniciais, o sistema deve ser montado em todo passo de tempo, acarretando em maior custo computacional.

$$H_i U_i(t) = G_i P_i(t) + B_i(t) \quad (9.21)$$

Note que é possível montar os sistemas de todas as formulações descritas nos capítulos anteriores semelhantemente a equação (9.21). Assim, para cada sub-região i obtêm-se o vetor B_i e as matrizes H_i , G_i com as condições de contorno já impostas pela forma padrão do MEC.

Passo 2 - No início de cada passo de tempo calculam-se os valores prescritos no instante atual dos deslocamentos, forças nodais, forças de superfície e forças volumétricas, de maneira que:

$$P_i^{t+\Delta t} = P_i(t + \Delta t) \quad (9.22a)$$

$$B_i^{t+\Delta t} = B_i(t + \Delta t) \quad (9.22b)$$

Os valores prescritos podem variar segundo qualquer função dependente do tempo, semelhantemente as clássicas formulações dinâmicas WARBURTON(1976) e CODA & VENTURINI(1995).

Passo 3 – Montagem do sistema de equações total com a contribuição de todas as sub-regiões envolvidas na etapa.

$$\begin{bmatrix} H_1^e & \cdots & 0 & \cdots & H_1^i & \cdots & -G_1^i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & H_n^e & \cdots & H_n^i & \cdots & G_n^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1^e \\ \vdots \\ U_n^e \\ \vdots \\ U^i \\ \vdots \\ P^i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1^e & \cdots & 0 & \cdots & G_1^i & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & G_n^e & \cdots & 0 & \cdots & G_n^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1^e \\ \vdots \\ P_n^e \\ \vdots \\ \bar{P}_1^i \\ \vdots \\ \bar{P}_n^i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} H_1^i U_{1(o)}^i \\ \vdots \\ H_n^i U_{n(o)}^i \end{Bmatrix} \quad (9.23)$$

Note que o vetor de deslocamentos $U_{n(o)}^i$, referente aos graus de liberdade das interfaces da sub-região n conectados a sub-regiões de reforço, obtido no instante anterior ao acoplamento do respectivo reforço, deve ser lido antes da montagem do sistema para se efetuar o cálculo do vetor de correção. Este deve ser salvo e não mais alterados, pois seu valor será sempre necessário na montagem do sistema (9.23) em todos os instantes a partir da inserção do reforço.

Passo 4 – Resolvendo o sistema de equações (9.23) soluciona-se o problema de contorno, encontrando todas as incógnitas referentes às interfaces por meio das equações (9.14), para acoplamento simples, ou das equações (9.17), para acoplamento com reforço. Para o caso mais geral, com m sub-regiões conectadas a uma interface, as condições de compatibilidade e equilíbrio ficam escritas como:

$$\left. \begin{array}{l} U_1^i = \cdots = U_m^i \\ P_1^i = -P_2^i - \cdots - P_m^i \end{array} \right\} \text{sem reforço} \quad (9.24a)$$

$$\left. \begin{array}{l} U_1^i = \cdots = U_m^i = U_{ref}^i + U_o^i \\ P_1^i = -P_2^i - \cdots - P_m^i \end{array} \right\} \text{com reforço} \quad (9.24b)$$

sendo U_o^i o mesmo definido no item 9.3. Obtidas todas as variáveis do problema de contorno, deve-se reordena-las para cada sub-região e salva-las em arquivos, para posteriormente serem utilizadas

Passo 5 – Para cada sub-região executa-se a leitura do(s) respectivo(s) arquivo(s) com as variáveis do problema de contorno. Assim, encontram-se as tensões totais, elásticas e viscosas de acordo com tipo de sub-região (MEC ou MEF) e da formulação adotada.

$$\sigma(t), \quad \sigma^e(t), \quad \sigma^v(t) \quad (9.25)$$

Semelhantemente, estas devem ser salvas em arquivos para serem posteriormente utilizadas. Se o problema considerado for viscoelástico, o processo se encerra aqui e dá-se início a um novo passo de tempo e/ou uma nova etapa retornando-se ao **passo 2**. De outra forma, se a sub-região considerada for do tipo viscoplástica é necessário verificar se as tensões não violam o critério, caso contrário deve-se fazer uma correção através de um algoritmo elastoplástico.

$$\begin{aligned}\sigma_{t+\Delta t}^{ep} &= \sigma_t^{ep} + \int_t^{t+\Delta t} d\sigma^{ep} \\ \sigma_{t+\Delta t}^v &= \sigma_{t+\Delta t} - \sigma_{t+\Delta t}^{ep}\end{aligned}\tag{9.26}$$

Determinadas as variáveis internas, verifica se a solução considerada é suficientemente precisa por meio de critérios de convergência. Verificada a convergência para todas as sub-regiões, atualizam-se todas as variáveis referentes ao instante “ $t+\Delta t$ ”, armazenando-as nas variáveis referentes ao instante “ t ”. Após isto, retorna-se ao **passo 1**, dando início a um novo passo de tempo e/ou uma nova etapa. Caso contrário, atualizam-se as variáveis referentes ao instante “ $t+\Delta t$ ” e retorna-se ao **passo 2**, calculando-se os valores incógnitos para o mesmo instante da última iteração, reaplicando-se o resíduo de força (ou tensão inicial) e fazendo-se uso da equação (9.23) para a obtenção das variáveis de contorno, caracterizando assim o processo iterativo.

Obtida a convergência em todos os passos de tempo da etapa e para todas as sub-regiões, dá-se início a uma outra etapa identificando quais as sub-regiões que deverão ser inseridas ou aquelas que deverão ser extraídas. Monta-se novamente o sistema e repete-se todo o procedimento descrito anteriormente.

9.5 EXEMPLOS NUMÉRICOS

O acoplamento entre o MEF e o MEC foi realizado para o caso bi e tridimensional. No caso bidimensional foram acoplados o elemento finito de barra de dois nós (pórtico plano) e o elemento de contorno de três nós que faz uso de células de oito nós para evoluir as integrais de domínio das formulações de contorno CODA(2000) e MESQUITA & CODA(2000). Já o acoplamento tridimensional foi executado com o elemento finito de casca triangular de três

nós e com grau de liberdade rotacional proposto em MESQUITA(1998) com o elemento de contorno tridimensional triangular de três nós que utiliza células tetraédricas para calcular as integrais de domínio. Estes mesmos elementos de contorno foram apresentados anteriormente e as técnicas numéricas utilizadas para determinar as integrais singulares de contorno e domínio são descritas no Anexo D.

9.5.1 EXEMPLO 01 – Peça tracionada 3D

Este é um exemplo simples que serve para verificar o acoplamento entre elementos finitos de casca e elementos de contorno 3D. Uma barra engastada discretizada com elementos de contorno triangulares de três nós é acoplada a uma chapa modelada com elementos finitos de casca de mesma geometria. Um carregamento distribuído é aplicado na extremidade livre da sub-região de elementos finitos. A geometria do problema juntamente com as discretizações e propriedades físicas são apresentadas na figura 9.3.

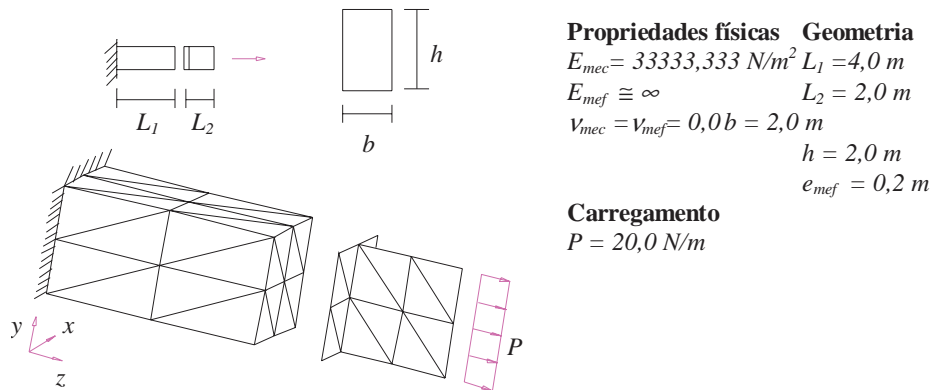


FIGURA 9.3 – Geometria, discretização e propriedades físicas.

A tabela 9.1 apresenta resultados de deslocamento e forças de contato na interface bem como tensões no centróide da sub-região de elementos de contorno.

TABELA 9.1: Resultados do problema de acoplamento

| | DESLOCAMENTO | FORÇA DE CONTATO | TENSÃO |
|-----------|--------------|-----------------------|-----------------------|
| MEC | 0,0012 m | 10,0 N/m ² | 10,0 N/m ² |
| ANALÍTICO | 0,0012 m | 10,0 N/m ² | 10,0 N/m ² |

9.5.2 EXEMPLO 02 – Tubo de concreto armado 2D

A estrutura analisada é um tubo de parede espessa considerado viscoelástico reforçado por barras elásticas e submetido a uma pressão interna P . Devido à dupla simetria apenas $\frac{1}{4}$ da estrutura é discretizada. O problema, considerado como estado plano de deformação, é modelado utilizando-se elementos de contorno de três nós. As armaduras são representadas por elementos finitos de barra de dois nós. A geometria da estrutura juntamente com sua discretização e propriedades físicas são apresentadas na figura 9.4. A formulação viscoelástica empregada é baseada no modelo de Kelvin-Voight e as expressões do MEC são obtidas com a discretização apenas do contorno do corpo, não sendo necessário o uso de células internas.

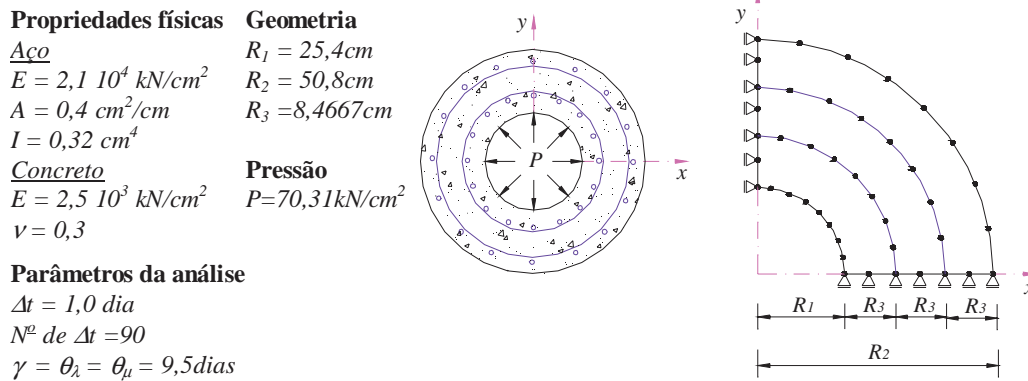


FIGURA 9.4 – Geometria, discretização e propriedades físicas.

Os resultados do deslocamento radial da parede externa e interna da estrutura são apresentados nas figuras 9.5 e 9.6, respectivamente, considerando o tubo de concreto com e sem armadura. A resposta do problema sem armadura é comparada com a solução analítica.

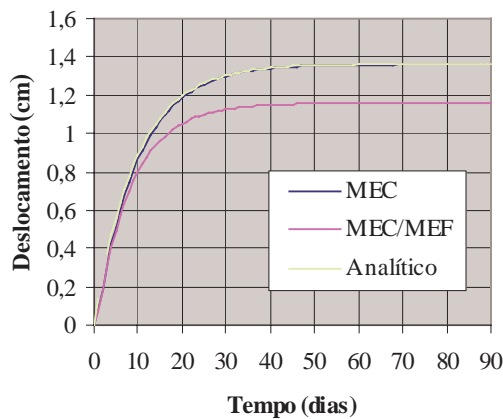


FIGURA 9.5 – Deslocamento radial da parede interna do tubo.

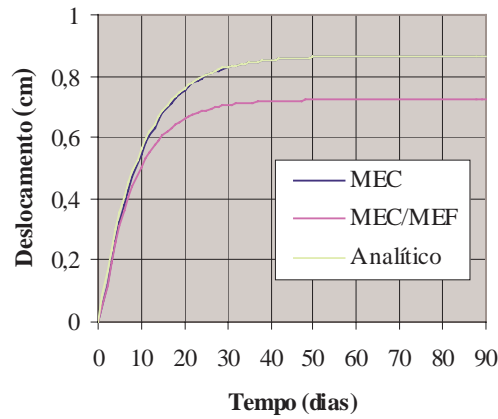


FIGURA 9.6 – Deslocamento radial da parede externa do tubo.

Note que os resultados sem armadura estão em concordância com a solução analítica.

9.5.3 EXEMPLO 03 – Túnel reforçado 2D

Um túnel de seção circular, solicitado por uma pressão interna uniforme P é analisado sob as condições de estado plano de deformação. O solo é discretizada com 16 elementos de contorno de três nós e o suporte com 32 elementos finitos de dois nós. As propriedades físicas do suporte elástico e do solo viscoelástico, considerando-se o modelo de Boltzmann, bem como sua geometria e discretização são apresentadas na figura 9.7.

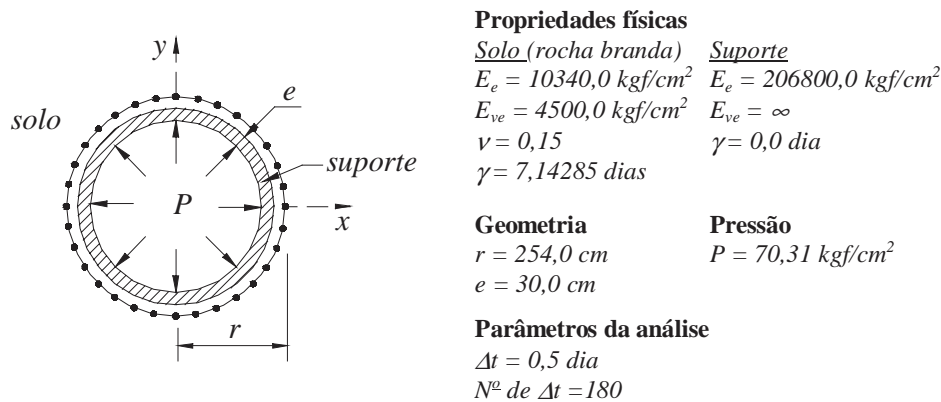


FIGURA 9.7 – Geometria, discretização e propriedades físicas.

O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson do solo e suporte foram extraídos de referências usuais que tratam da análise de túneis reforçados, veja, por exemplo, SCHWARTZ & EINSTEIN(1980) e GOMES(1999). Os resultados para o deslocamento

radial da parede interna do túnel são apresentados na figura 9.8 com e sem reforço. O resultado sem reforço é confrontado com a resposta analítica do problema.

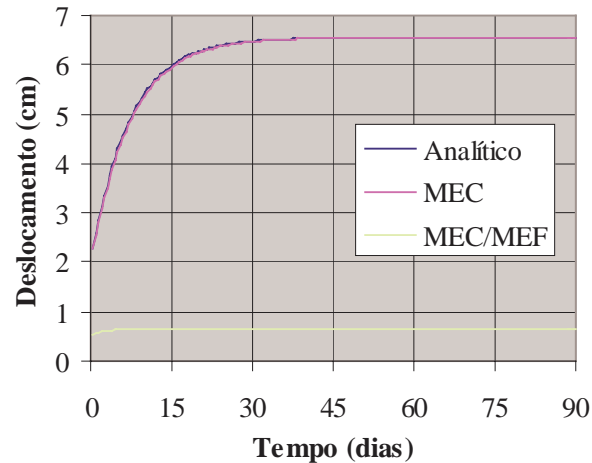


FIGURA 9.8 – Deslocamento radial do túnel.

Observando-se a figura 9.8, verifica-se o bom comportamento do modelo quando comparado com a resposta analítica do problema e a grande influência do reforço no comportamento global da estrutura.

9.5.4 EXEMPLO 04: Pórtico 2D sobre solos diferentes

A estrutura analisada é um pórtico de dois pavimentos solicitado por cargas concentradas constantes no tempo, aplicadas nas extremidades do nível mais alto. O pórtico é simétrico e seus dois pilares estão conectados a sapatas que se encontram acopladas ao solo. As propriedades físicas dos solos conectados às sapatas são diferentes, de maneira que estas apresentarão recalques distintos. A análise foi executada com um incremento de tempo (Δt) de 0,1 mês e levou o tempo total de 48 meses.

TABELA 9.2: Propriedades físicas e geométricas

| PROPRIEDADES FÍSICAS E GEOMÉTRICAS | | |
|---|----------------------------|----------------------------|
| Solo1 | Solo2 | Pórtico |
| $E_e = 2,1 \text{ GPa}$ | $E_e = 2,1 \text{ GPa}$ | $E = 21,0 \text{ GPa}$ |
| $E_{ve} = 2,1 \text{ GPa}$ | $E_{ve} = 1,0 \text{ GPa}$ | $A = 0,03 \text{ m}^2$ |
| $\nu = 0,4$ | $\nu = 0,4$ | $I = 0,000225 \text{ m}^4$ |
| $\gamma = 10 \text{ meses}$ | $\gamma = 5 \text{ meses}$ | |

O pórtico, discretizado como uma sub-região em elementos finitos, é considerado elástico e as sub-regiões que caracterizam os solos são ambas discretizadas por elementos de contorno e consideradas como viscoelásticas segundo o modelo de Boltzmann. A geometria e a discretização do problema são apresentados na figura 9.9 e as propriedades físicas são expostas na tabela 9.2. Considerou-se um maciço rochoso indeformável, localizado a 24m abaixo da superfície, restringindo-se os graus de liberdade localizados nesta posição.

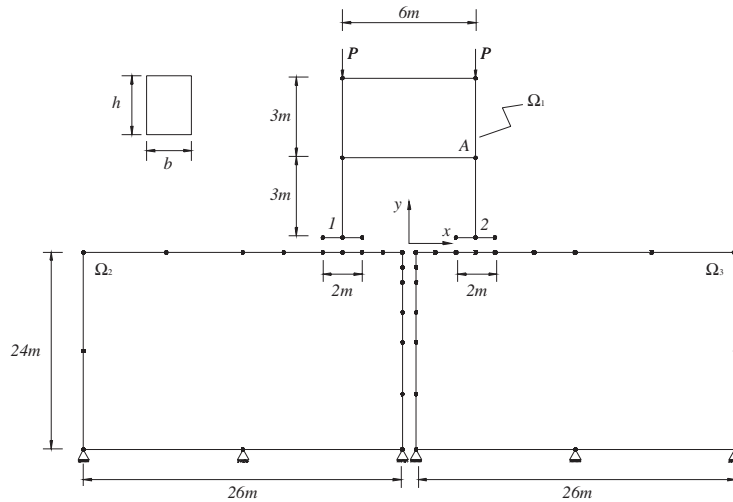


FIGURA 9.9 – Geometria e discretização.

O que se deseja é analisar o comportamento do pórtico solicitado acoplado aos solos com diferentes propriedades físicas e assim, verificar como as propriedades viscosas interferem no comportamento global da estrutura. A figura 9.10 apresenta os resultados do recalque com o tempo de ambas as sapatas.

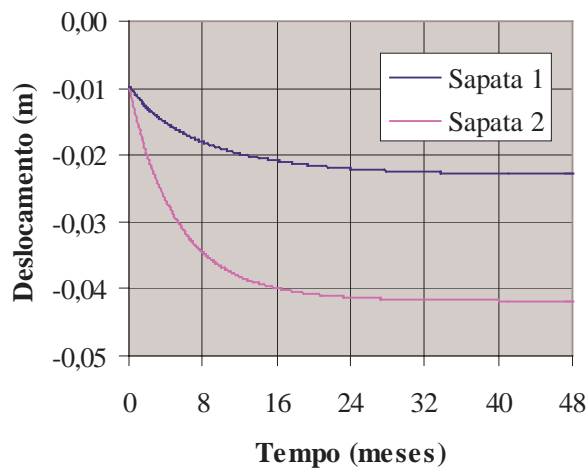


FIGURA 9.10 – Recalque das sapatas.

É possível verificar que as propriedades viscosas diferentes dos solos introduziram um recalque diferencial na estrutura, provocando uma redistribuição dos esforços no pórtico. Essa redistribuição de esforços pode ser visualizada na figura 9.11 que expõe resultados do momento presente na extremidade direita da barra horizontal do primeiro nível do pórtico (ponto A).

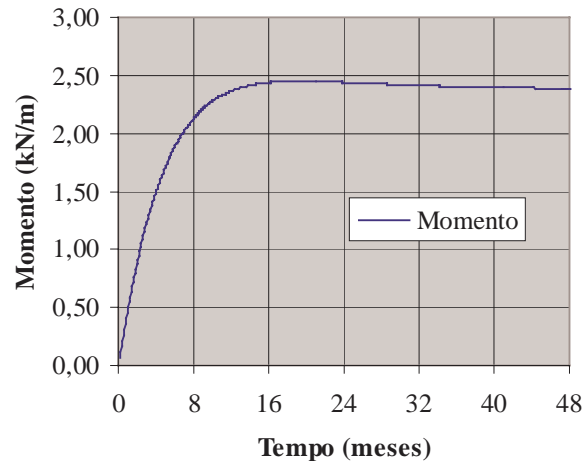


FIGURA 9.11 – Momento no ponto A.

Deve-se notar que, caso os solos tivessem as mesmas propriedades viscoelásticas, devido à simetria do problema, o recalque em ambas as sapatas seria o mesmo e conseqüentemente não apareceria momento significativo no ponto A. Porém, devido ao recalque diferencial, conseqüência das propriedades viscoelásticas diferentes dos solos, é possível verificar o aparecimento de esforços introduzidos na estrutura. O momento atinge um valor máximo e logo depois se estabiliza em um valor um pouco menor. Isto é devido aos diferentes valores dos coeficientes viscosos que induzem velocidades de deformação diferentes para os solos. Ou seja, no instante onde o momento atinge o seu máximo, o recalque diferencial entre as sapatas é máximo, porém, com o tempo a sapata 1 desloca-se mais, atingindo o seu máximo deslocamento, diminuindo o valor do recalque diferencial e conseqüentemente do momento.

9.5.5 EXEMPLO 05: Painel Sanduíche

A estrutura analisada é um painel sanduíche do tipo ISOTHERM SC 80. Este, considerado biapoiado, é solicitado por uma carga constante no tempo e uniformemente

distribuída referente ao seu peso próprio e a um carregamento externo. O painel sanduíche consiste de duas chapas delgadas de aço separadas por uma espuma de uretano. As chapas de aço são consideradas elásticas e a espuma de uretano de baixa densidade como viscoelástica. A seção transversal da estrutura e sua geometria são apresentadas na figura 9.12. O vão do painel é $L = 4000,0\text{mm}$ com uma largura de $b = 1100,0\text{mm}$. A espessura das lâminas é $h_a = 0,5\text{mm}$ e a da espuma é $h_e = 80,0\text{mm}$. As chapas feitas de aço possuem módulo de elasticidade $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$, área da seção transversal $A = 561,0\text{mm}^2$ e momento de inércia de $I = 12,16\text{mm}^4$. Na modelagem da estrutura utilizou-se 24 elementos finitos de viga de dois nós para representar as chapas de aço e 26 elementos de contorno de três nós para caracterizar a espuma de uretano.

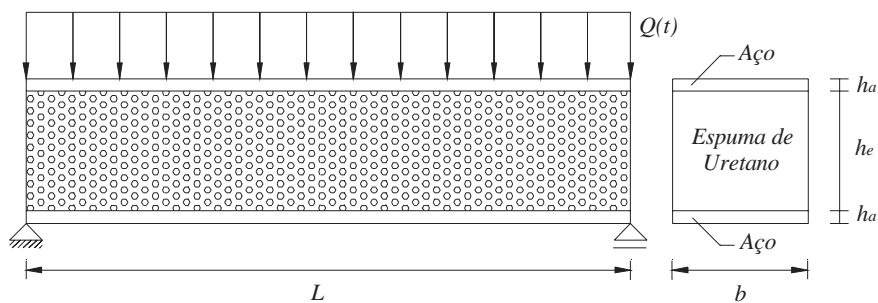


FIGURA 9.12 – Painel Sanduíche.

Na referência RAPP *et al.*(1999) o parâmetro viscoso γ e o módulos de elasticidade cisalhantes (instantâneo G_e e viscoso G_{ve}) para a espuma de uretano são obtidos de uma teoria de flexão simples dada por ALLEN(1969). Os valores resultantes são:

$$G_e = 3,52 \text{ N/mm}^2, G_{ve} = 7,46 \text{ N/mm}^2 \text{ e } \gamma = 4,6083 \text{ dias}$$

Neste trabalho, o problema é resolvido adotando-se a condição de estado plano de tensão. O coeficiente de Poisson é escolhido como sendo $0,4$, como usualmente é feito para polímeros de baixa densidade, veja MERAGHNI *et al.*(1999). Assim, utilizando-se os valores dos módulos cisalhantes acima, resulta:

$$E_e = 9,856 \text{ N/mm}^2 \text{ e } E_{ve} = 20,888 \text{ N/mm}^2$$

O objetivo da presente análise é obter novos valores para as características físicas do polímero a partir do acoplamento entre o método dos elementos finitos (modelando as lâminas de aço elásticas) e o método dos elementos de contorno (modelando a espuma viscosa). A análise é executada com um total de 180 passos de tempo, sendo $\Delta t = 0,25 \text{ dias}$. A referência RAPP *et al.*(1999) menciona que o deslocamento vertical instantâneo medido no meio do vão é $w_o = 14,076 \text{ mm}$ e o deslocamento final é $w_f = 16,876 \text{ mm}$ para uma carga total de $Q = 0,9196 \text{ N/mm}$. Observando a figura 9.13 conclui-se que o deslocamento instantâneo e o final (obtidos pelo método numérico) só serão iguais àqueles obtidos experimentalmente se os módulos de elasticidade da espuma de uretano forem:

$$E_e = 9,388 \text{ N/mm}^2 \text{ e } E_{ve} = 21,167 \text{ N/mm}^2$$

Note que esses valores são ligeiramente diferentes daqueles obtidos pela simples aproximação da referência RAPP *et al.*(1999).

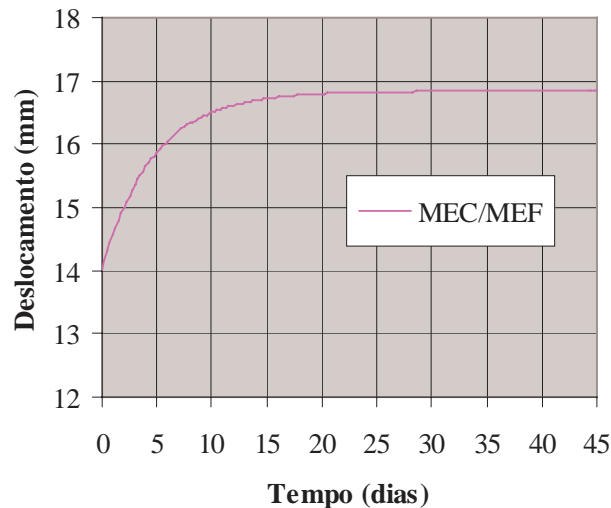


FIGURA 9.13 – Deslocamento total do meio do vão.

Novamente, os resultados do deslocamento vertical do meio do vão são apresentados na figura 9.14. A resposta numérica agora é confrontada com os resultados experimentais e aquela obtida pela simples aproximação em RAPP *et al.*(1999). O parâmetro viscoso ($\gamma = 4,6083 \text{ dias}$) utilizado para a resposta numérica é o mesmo obtido por RAPP *et al.*(1999). O modelo viscoso utilizado foi o de Boltzmann, porém apenas a resposta do trecho viscoso é

apresentada no gráfico eliminando-se a resposta referente ao trecho instantânea, como inicialmente apresentado na referência RAPP *et al.*(1999).

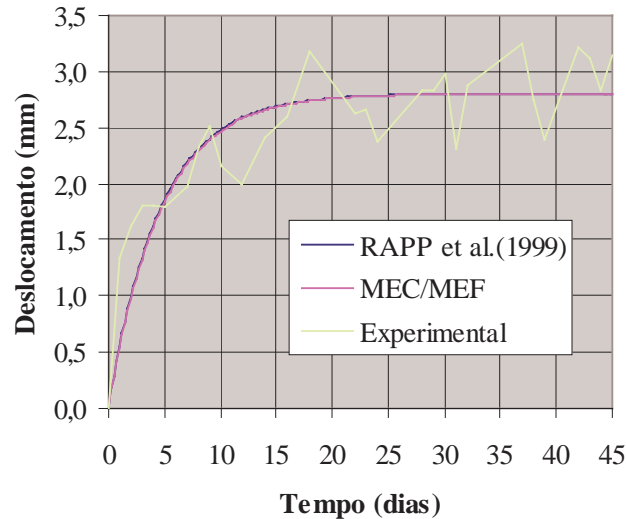


FIGURA 9.14 – Deslocamento do trecho viscoso no meio do vão.

As variações apresentadas pelo resultado experimental são justificadas pela variação da temperatura ocorrida durante todo o período de análise, pois o material, espuma de uretano, é bastante sensível à temperatura. Mesmo assim, observa-se uma ótima concordância entre as respostas. Note que a resposta numérica é exatamente a mesma que aquela obtida pela simples aproximação. Os resultados obtidos validam a técnica proposta e atestam que ela pode ser utilizada para determinar propriedades de materiais viscoelásticos. De maneira que, vários painéis estruturais podem ser simulados utilizando-se a técnica proposta ao invés de procedimentos mais simplificados.

9.5.6 EXEMPLO 06 – Ruptura dinâmica de uma peça tracionada 2D

Uma estrutura formada pela composição de duas sub-regiões, uma com elementos de contorno (elemento quadrático de três nós) e outra com elementos finitos (elemento de pórtico plano de dois nós), é solicitada por uma força concentrada em sua extremidade livre (fig.9.15). Na sub-região de elementos de contorno, utilizam-se células (célula de oito nós) para integrar as equações de domínio. Neste exemplo, o objetivo principal, é analisar o comportamento da estrutura quando esta se rompe, provocando a separação das duas sub-regiões. Em uma primeira etapa, a estrutura intacta é solicitada pela força em sua extremidade livre, até que, após $t=0,03s$ a sub-região em elementos finitos é extraída e a estrutura restante

admite um comportamento de vibração livre (desprezou-se o amortecimento da estrutura). Deve-se ressaltar que o procedimento progressivo bidimensional foi implementado em um programa de acoplamento dinâmico MEC/MEF desenvolvido e apresentado em CODA *et al.*(1996).

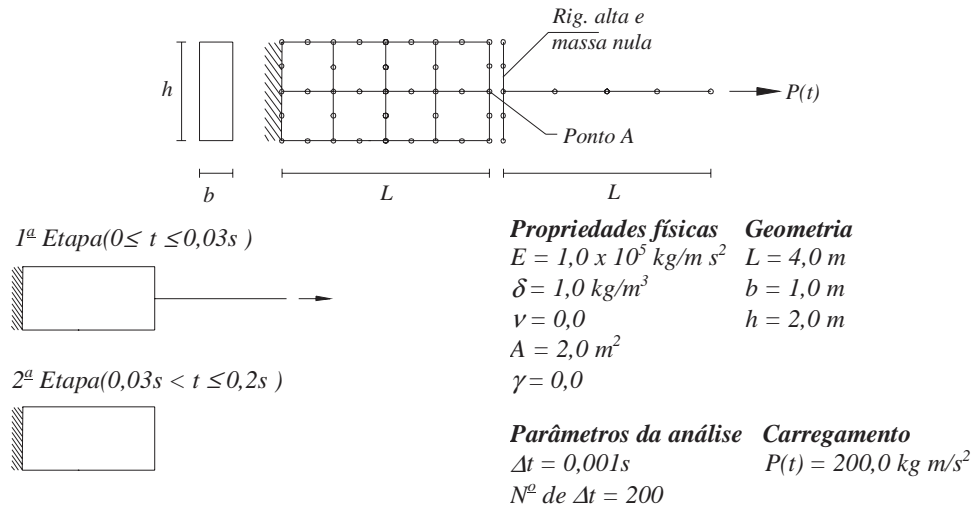


FIGURA 9.15 – Etapas e dados do problema.

A formulação do MEF empregada no acoplamento foi aquela exposta no item (4.2) e para a sub-região de elementos de contorno aquela apresentada no item (5.2). Na figura 9.16 apresentam-se os resultados do deslocamento longitudinal do ponto ‘A’, localizado no centro da interface entre as duas sub-regiões. Os diagramas para a estrutura íntegra e para a estrutura cuja sub-região é extraída após o tempo $t=0,03\text{s}$ são confrontados.

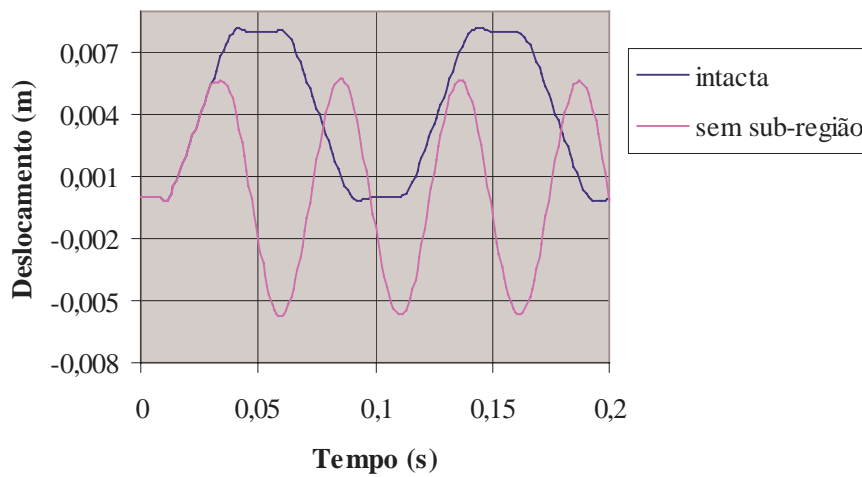


FIGURA 9.16 – Deslocamento do ponto ‘A’.

Os valores de deslocamentos para a estrutura íntegra e para a estrutura cuja sub-região é extraída estão de acordo com o comportamento esperado e com a resposta analítica do problema apresentadas nas literaturas que tratam de análises dinâmicas, veja MANSUR & BREBBIA(1985).

9.5.7 EXEMPLO 07 – Ruptura de uma peça tracionada 3D

A estrutura analisada é a mesma apresentada no exemplo 1. A barra engastada discretizada com elementos de contorno 3D é acoplada em sua extremidade livre a uma sub-região de elementos finitos (elementos de casca) que está solicitada por um carregamento distribuído. A peça é tracionada até que em um determinado instante retira-se a sub-região de elementos finitos, simulando de maneira simples a ruptura na ligação das duas regiões. Semelhantemente, a geometria do problema juntamente com as discretizações e propriedades físicas são apresentadas na figura 9.17. Em uma primeira etapa, a estrutura intacta é solicitada pela força em sua extremidade livre, até que, para o instante $t=75s$ a sub-região em elementos finitos é extraída.

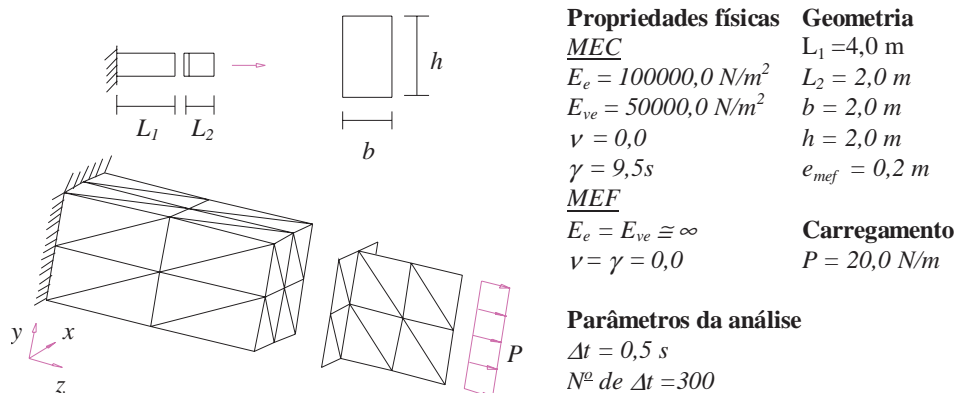


FIGURA 9.17 – Geometria, discretização e propriedades físicas.

O modelo viscoso utilizado no problema foi o de Boltzmann e a formulação viscoelástica do MEC utilizada é aquela com integrais apenas no contorno do corpo. O deslocamento axial do ponto localizado no centro da seção onde é feito o acoplamento é mostrado na figura 9.18.

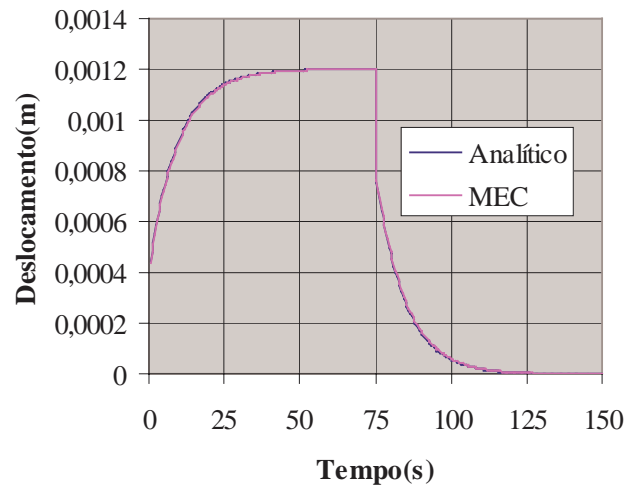


FIGURA 9.18 – Deslocamento do nó central da interface de contato na região do MEC.

As respostas das tensões obtidas no centróide da região de elementos de contorno são apresentadas na figura 9.19.

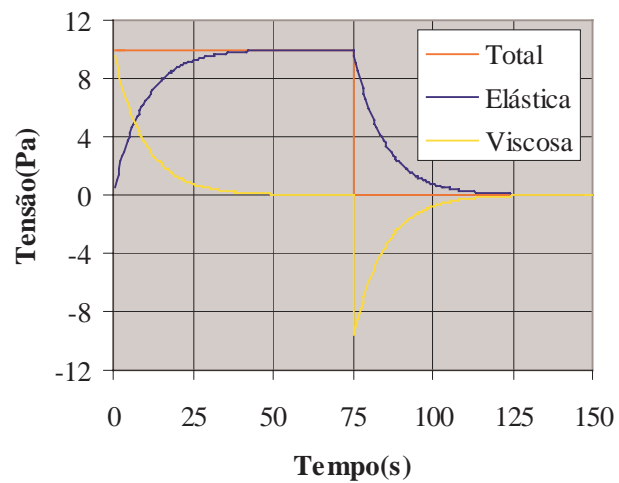


FIGURA 9.19 – Tensões no centróide da região do MEC.

O comportamento das tensões está perfeitamente de acordo com o esperado. Note que a tensão total é a soma das outras duas.

9.5.8 EXEMPLO 08 – Reforço progressivo de túnel 2D

Este é o mesmo exemplo analisado no item(9.5.3), uma cavidade cilíndrica solicitada por uma pressão interna analisada para a situação de estado plano de tensão. As respostas foram obtidas, veja figura 9.8, para o túnel sem reforço e para o mesmo reforçado, sendo que neste último o reforço é inserido antes da aplicação da carga, no início do processo. No presente exemplo a análise é feita de duas formas distintas e diferentes daquelas apresentadas no exemplo 3. A cavidade é solicitada sem nenhum reforço, até que em uma segunda etapa (após $t=10$ dias) o reforço é inserido de duas maneiras. A primeira considerando o acoplamento com as hipóteses usuais de compatibilidade e equilíbrio. Já a segunda é realizada levando em consideração as hipóteses específicas para o reforço.

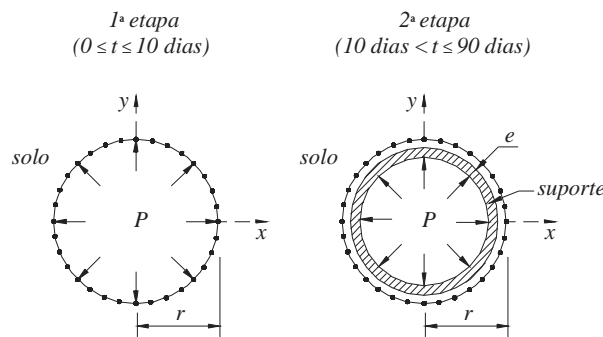


FIGURA 9.20 – Reforço de uma cavidade cilíndrica.

Na figura 9.21, as respostas destas duas análises são plotadas juntamente com aquelas apresentadas no item(9.5.3).

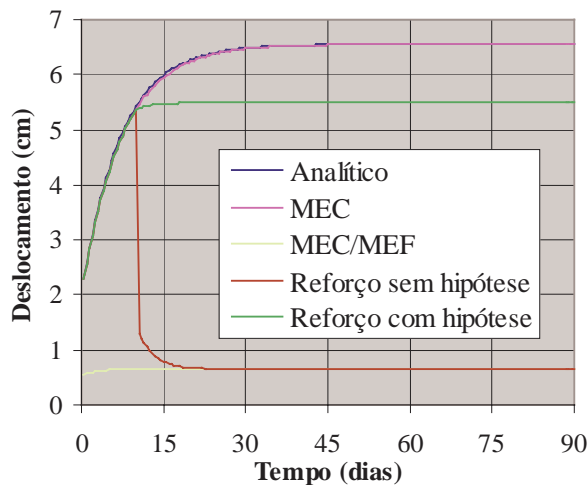


FIGURA 9.21 – Deslocamento radial do túnel.

É importante observar que a execução numérica do acoplamento sem as hipóteses do reforço faz com que a estrutura recupere sua rigidez inicial como se fosse uma estrutura íntegra, o que não ocorre na prática. A imposição das hipóteses do reforço no acoplamento permite simular coerentemente a contribuição deste no comportamento global da estrutura.

9.5.9 EXEMPLO 09 – Reforço de uma viga

Nesse exemplo, simulam-se as etapas de um problema quase estático de reforço. A estrutura analisada é uma viga viscoelástica biapoiada e solicitada por uma carga distribuída localizada no centro do vão, figura 9.22. O meio contínuo é discretizado com sub-regiões de elementos de contorno de três nós. Inicialmente, a estrutura está íntegra; no final do instante $t=6$ dias ocorre a extração de uma sub-região localizada na parte comprimida da seção central da viga. O reforço, inicialmente indeformado, com geometria e propriedades físicas iguais ao da sub-região extraída, é inserido no local onde ocorreu a extração da sub-região ao final do tempo $t=21$ dias.

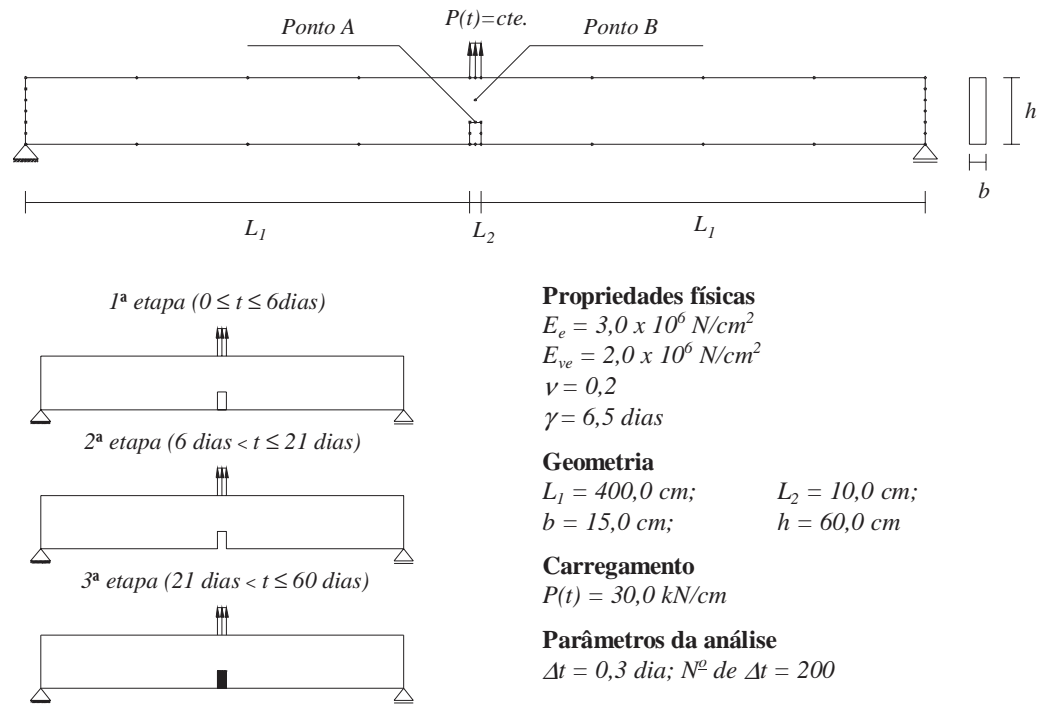


FIGURA 9.22 – Dados do problema e etapas do reforço.

Na figura 9.23a, apresentam-se curvas referente ao deslocamento vertical do ponto A localizado a 20 cm da face inferior, logo abaixo da posição da carga. A curva para a estrutura íntegra (sem a retirada da sub-região), bem como a curva para a estrutura cuja sub-região

central é extraída no tempo $t=6$ dias, são confrontadas. É importante observar-se que as curvas mostradas na figura 9.23a não apresentam ainda a inclusão do reforço.

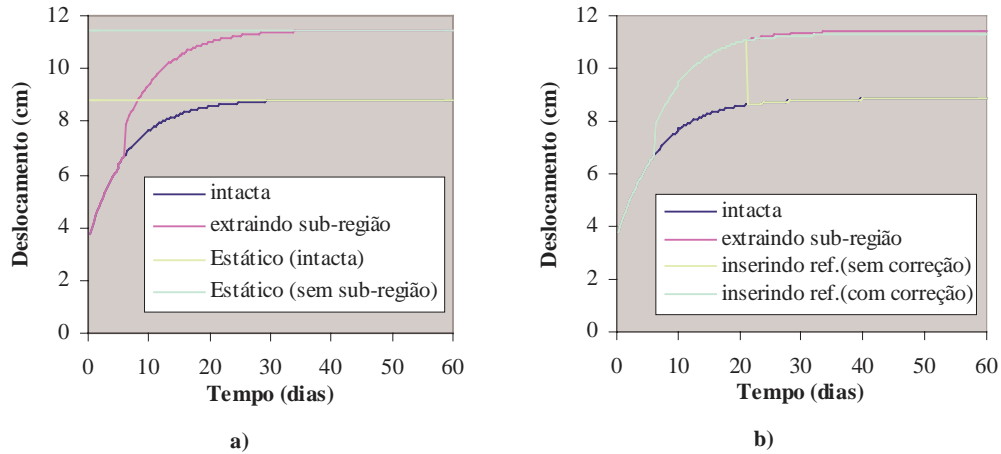


FIGURA 9.23 – Deslocamento transversal do ponto A.

Note que o deslocamento da estrutura íntegra converge para o valor estático da mesma e que o deslocamento da estrutura com a região extraída no tempo $t=6$ dias converge para o deslocamento estático de uma estrutura similar. Na figura 9.23b, apresentam-se as curvas da figura 9.23a confrontadas com os resultados obtidos para o caso da estrutura que tem a sub-região central extraída após $t=6$ dias e o reforço inserido após $t=21$ dias. O reforço foi introduzido de duas maneiras distintas: “sem correção” dado pela equação (9.11) e “com correção” dado pela equação (9.15). É importante observar que, quando o reforço é acoplado sem correção, a estrutura se comporta como se fosse íntegra novamente, readquirindo subitamente sua rigidez inicial, o que não é correto. Quando a correção é feita, o reforço contribui para a rigidez da estrutura de forma correta.

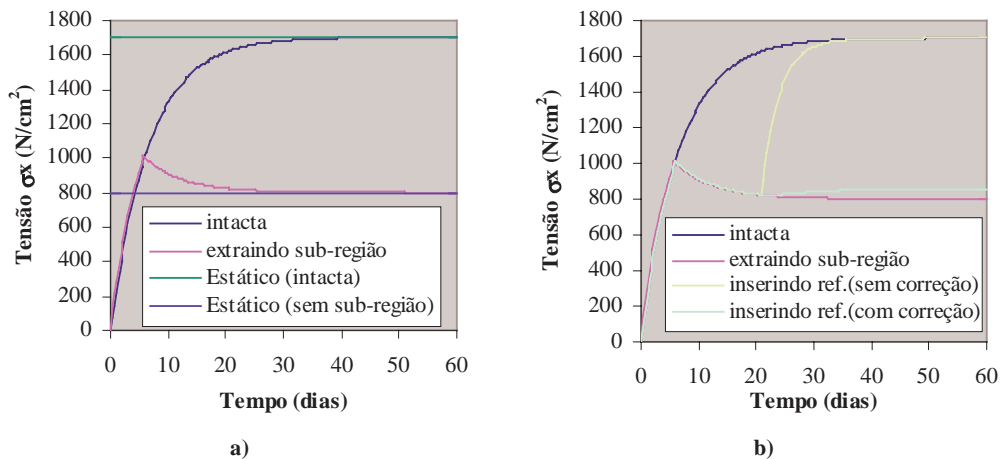


FIGURA 9.24 – Tensão σ_x no ponto B.

De modo similar ao que foi feito na figura 9.23, faz-se na figura 9.24, porém utilizando os resultados da tensão σ_x obtidos no ponto B localizado a 20 cm da face superior, logo abaixo da carga. As mesmas observações para os diagramas da figura 9.23 podem ser aplicadas aos diagramas da figura 9.24. Para os resultados da figura 9.24a, observa-se que nas duas situações os esforços convergem para os seus valores estáticos. Já para os resultados da figura 9.24b, fica evidente o erro que seria cometido para a tensão σ_x ao se desprezar a correção sugerida pela equação (9.20). Neste ponto é importante mencionar a possibilidade de se generalizar a equação (9.20) para aceitar análises de reforços protendidos.

9.5.10 EXEMPLO 10 – Bloco 3D submetido ao peso próprio

Um bloco de forma paralelepédica submetido à ação do peso próprio é analisado neste exemplo. A estrutura viscoelástica, discretizada com elementos de contorno tridimensionais triangulares de três nós, é fixada ao teto através de uma de suas extremidades. Esta se deforma até que em um determinado instante a sua extremidade livre entra em contato com um anteparo deformável. O anteparo, considerado elástico, possui a mesma geometria e discretização do bloco analisado, estando este apoiada em uma superfície rígida. A figura 9.25 expõe uma visão melhor do problema e apresenta os dados utilizados na análise.

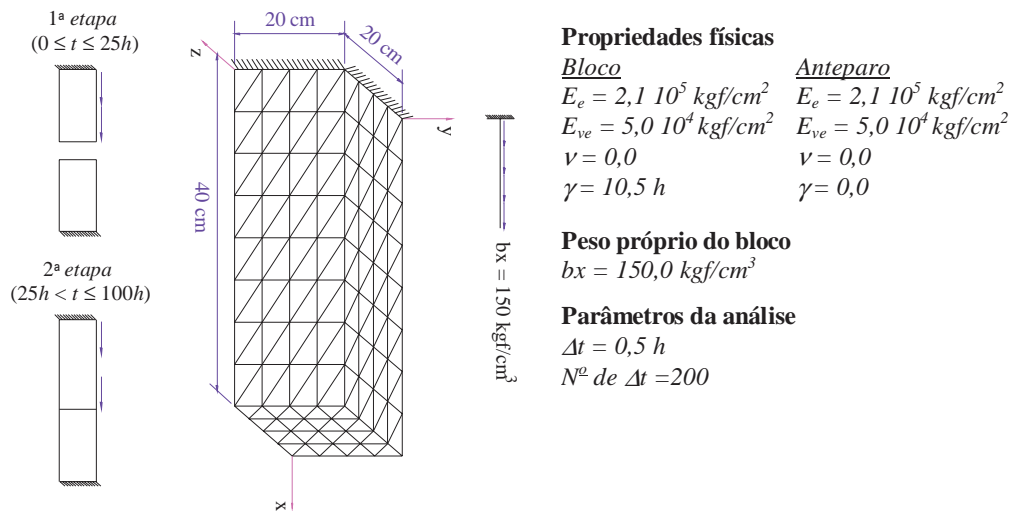


FIGURA 9.25 – Dados do problema.

Resultados do deslocamento axial do nó central da face livre do bloco são apresentados na figura 9.25 considerando apenas o bloco submetido ao peso próprio (sem acoplamento). Este resultado é confrontado com os resultados em que o bloco entra em contato com o

anteparo flexível após o instante $t=25h$. O contato é realizado de duas formas, com e sem a consideração das hipóteses do reforço.

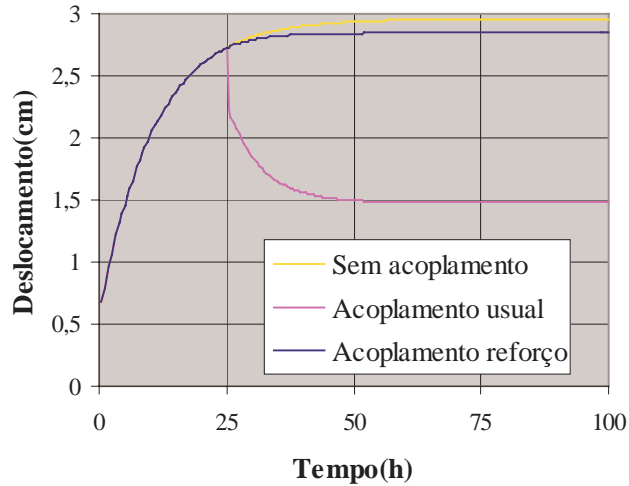


FIGURA 9.26 – Deslocamento axial do nó central da face livre do bloco.

Na figura 9.27 apresentam-se resultados da força de contato extraída no nó central da interface de contato do bloco, considerando-se o acoplamento com a hipótese usual e com a hipótese do reforço.

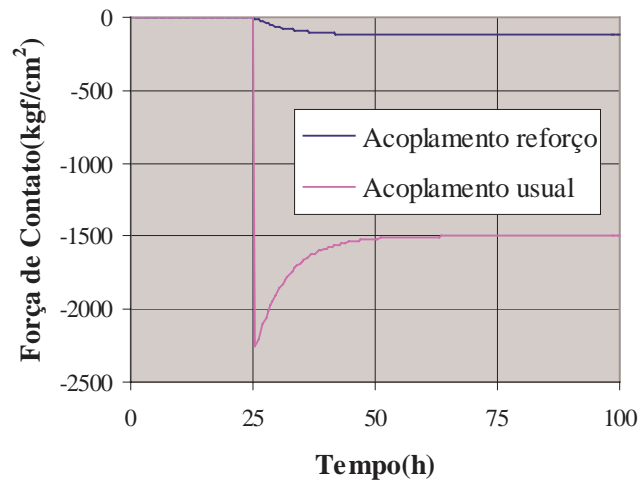


FIGURA 9.27 – Força de contato na interface de contato do bloco.

Similarmente, resultados da tensão elástica σ_x^e , viscosa σ_x^v e total σ_x extraídas no centróide do bloco são apresentadas na figura 9.28. A análise foi realizada considerando o problema de acoplamento com as hipóteses do reforço.

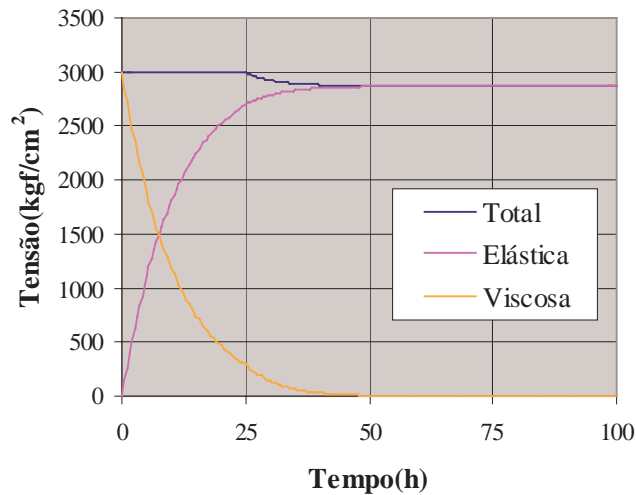


FIGURA 9.28 – Tensões no centróide do bloco.

Observe que o valor da força de contato final (com a hipótese do reforço) é de $118,3\text{kgf/cm}^2$. Este valor deve ser igual à redução da tensão total no final da análise. Para a presente análise o valor da redução da tensão total é de $117,9\text{kgf/cm}^2$, que está de acordo com o esperado.

9.5.11 EXEMPLO 11 – Reforço progressivo de um buraco esférico

Uma cavidade esférica localizada em um meio infinito é analisada. A estrutura com 2m de raio é solicitada por uma pressão interna. O solo, considerado como um material viscoelástico (Boltzmann), é reforçado por um suporte elástico acoplado no instante $t=20\text{dias}$. O meio infinito é discretizado com elementos de contorno triangulares de três nós e o suporte com o elemento finito de casca proposto em MESQUITA(1998). As etapas, a discretização utilizada para ambas as sub-regiões e os dados do problema são apresentados na figura 9.29.

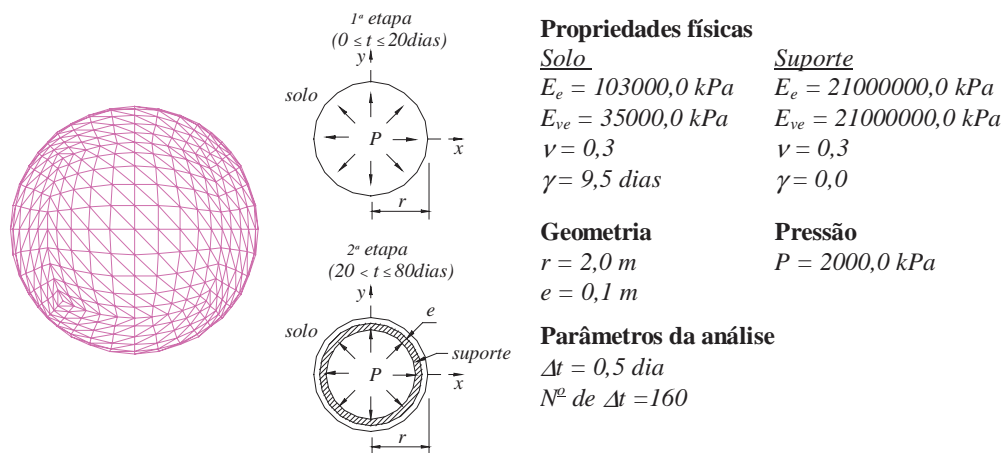


FIGURA 9.29 – Dados do problema de reforço.

Resultados do deslocamento radial de um ponto localizado a 18m do centro da cavidade esférica são apresentados na figura 9.30. Os resultados foram obtidos considerando-se o acoplamento do suporte com e sem as hipóteses do reforço. Resultados da análise viscoelástica da cavidade esférica sem qualquer tipo de acoplamento são também plotados para melhor ilustrar a contribuição do reforço para o enrijecimento global.

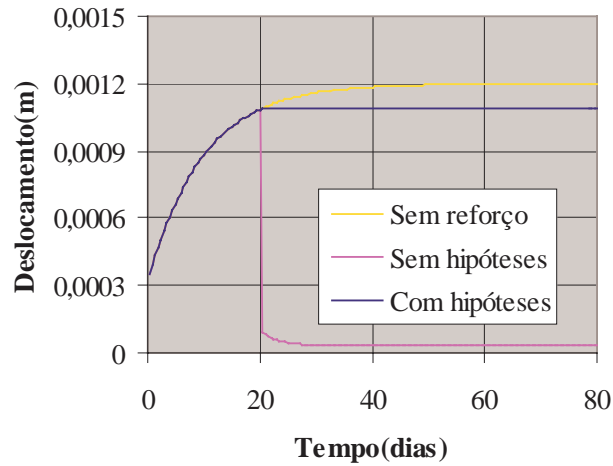


FIGURA 9.30 – Deslocamento radial da cavidade esférica.

Semelhantemente, na figura 9.31 apresentam-se resultados das tensões σ_r (total, elástica e viscosa) extraídas na mesma posição onde foram calculados os deslocamentos da figura 9.30 para a condição de reforço progressivo.

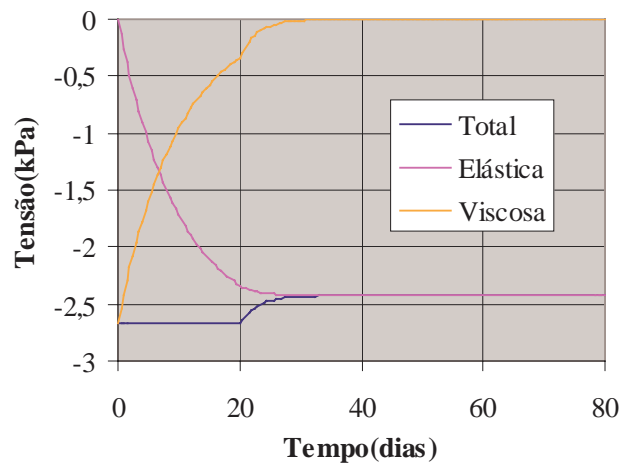


FIGURA 9.31 – Tensões σ_r (total, elástica e viscosa).

Na figura 9.31 observa-se a redução dos níveis de tensão com a introdução do reforço. Note que a soma da tensão elástica e da tensão viscosa é sempre igual à tensão total, evidenciando a satisfação do modelo reológico.

9.5.12 EXEMPLO 12 – Bloco 3D elastoplástico submetido ao peso próprio

O exemplo foi proposto com o intuito de demonstrar uma aplicação do acoplamento progressivo viscoplástico. Este é o mesmo exemplo apresentado no item(9.5.10), porém o bloco paralelepípedo submetido à ação do peso próprio é agora constituído por um material viscoplástico. O problema é analisado levando-se em consideração os critérios de von Mises e Drucker-prager. Para a primeira situação adotou-se $E_t = 10000,0 \text{kgf} / \text{cm}^2$ e a tensão de plastificação $\sigma_o = 1300,0 \text{kgf} / \text{cm}^2$. O problema analisado com o modelo de Drucker a coesão, o ângulo de atrito e módulo tangente plástico são adotados como: $0,703 \text{kgf} / \text{cm}^2$, 20° , e $E_t = 10000,0 \text{kgf} / \text{cm}^2$, respectivamente. O modelo viscoplástico utilizado foi aquele com comportamento instantâneo e o algoritmo para atualização das tensões empregada é aquele com lei de fluxo não-associativa. Os dados, a geometria e a discretização do problema são os mesmos apresentados na figura 9.25. Resultados do deslocamento axial da face livre do bloco viscoplástico são apresentados na figura 9.32 para ambos os modelos de Druker-Prager(DP) e von Mises(VM).

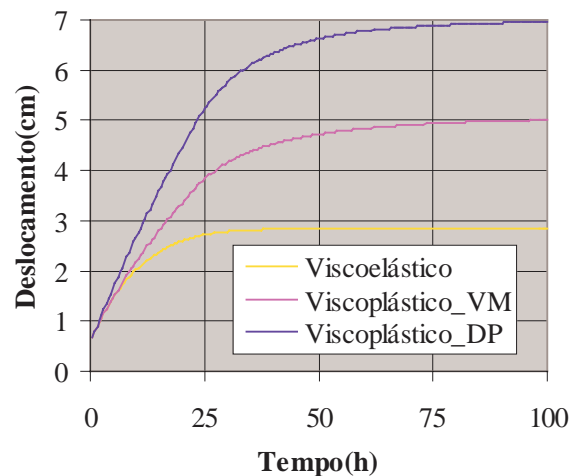


FIGURA 9.32 – Deslocamento axial do nó central da face livre do bloco.

A evolução da força de contato na interface de contato entre os dois blocos pode ser visualizada na figura 9.33.

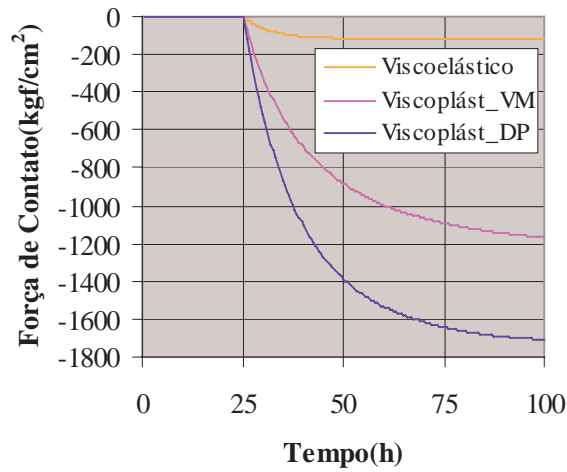


FIGURA 9.33 – Força de contato na interface de contato do bloco.

Por fim, a resposta da tensão elastoplástica σ_x^{ep} , viscosa σ_x^v e total σ_x extraídas no centróide do bloco são apresentadas na figura 9.34 para o critério de von Mises e na figura 9.35 para o modelo de Drucker, ambos considerando o acoplamento com as hipóteses do reforço.

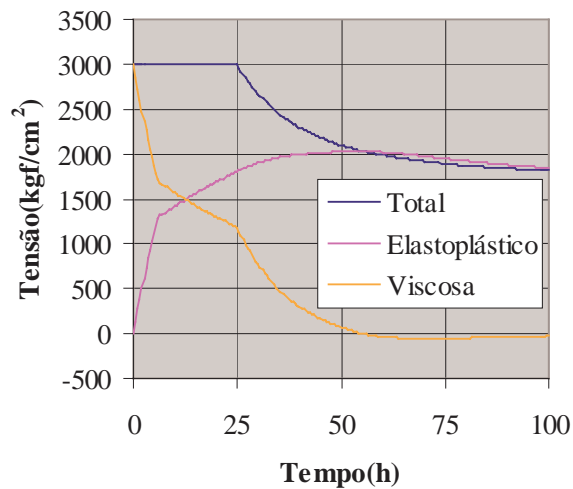


FIGURA 9.34 – Tensões no centróide do bloco (von Mises).

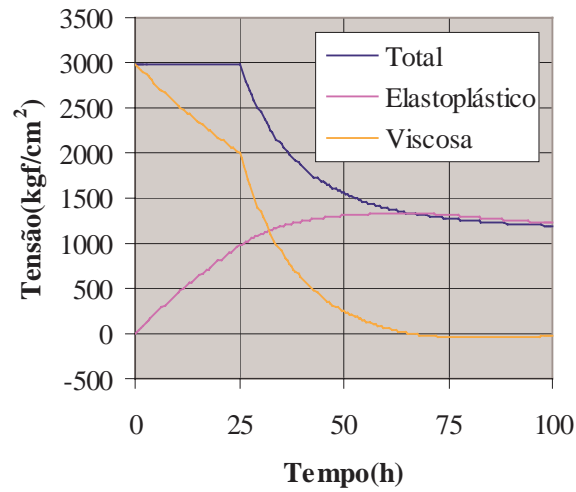


FIGURA 9.35 – Tensões no centróide do bloco (Drucker-Prager).

Algumas conclusões podem ser extraídas deste último exemplo. Semelhantemente ao problema viscoelástico, observe que, para análise com o modelo de von Mises, o valor da força de contato no instante $t=100h$ (com a hipótese do reforço) é de $1167,4kgf/cm^2$. Este valor deve ser igual à redução da tensão total no final da análise que é $1167,8kgf/cm^2$. Levando em consideração as complexidades envolvidas e que o problema é analisado de forma aproximada, pode-se dizer que estes valores estão bem próximos. Este resultado representa o estado de equilíbrio do corpo. Para o problema com o modelo de Drucker a força de contato em $t=100h$ é $1710,8kgf/cm^2$ já a redução da tensão total é $1793,9kgf/cm^2$.

Capítulo 10

CONCLUSÕES

A proposta inicial deste trabalho foi inspirada nos problemas de escavações de túneis e na dificuldade em se prever o comportamento destes. O objetivo era o desenvolvimento de uma ferramenta que pudesse executar a simulação tridimensional de um problema de escavação viscoplástica progressiva, permitindo modelar a retirada de material e a inclusão do reforço. Com o desenvolvimento do trabalho e a descoberta de novas técnicas e formulações, observou-se que o trabalho possuía um campo de aplicação muito maior e que sua restrição apenas a problemas de escavação era uma visão muito limitada.

Com o intuito de modelar o problema inicialmente proposto, era necessário adotar um modelo que levasse em conta a viscosidade do material, pois, além do comportamento viscoso está presente nos materiais envolvidos, a adoção deste era imprescindível para se levar em consideração a variável tempo, possibilitando determinar os instantes para a extração e inclusão dos materiais. As formulações usuais tratam o problema fazendo uso de funções de fluência e um processo incremental onde as solicitações, consideradas constantes no intervalo, são aplicadas incrementalmente. Este tipo de abordagem conduz, geralmente, a formulações matematicamente complexas e de certa forma, bastante dispendiosa computacionalmente falando. Uma forma mais elegante para considerar a viscosidade do material faz uso da transformação de Laplace-Carson, onde o problema viscoelástico é transformado em um problema elástico equivalente. Após resolver o problema transformado, uma inversão numérica é feita recuperando o comportamento no domínio do tempo. Porém, as técnicas mencionadas são mais apropriadas para resolver problemas onde as condições de contorno não se alteram ao longo do tempo e aplicação destas em análises que envolvem a extração e inclusão de regiões do sólido aumentaria demasiadamente a complexidade do problema.

Uma abordagem mais simples, que permitiria evitar as dificuldades apresentadas anteriormente, seria a consideração da viscosidade do material através do amortecimento viscoso frequentemente empregado em análises dinâmicas. Porém, este além de não apresentar um significado reológico bem definido, demonstrava-se bastante limitado, possuindo um campo de aplicação restrito a materiais que se comportavam similarmente ao modelo de Kelvin-Voigt, ou seja, sem considerar o comportamento instantâneo. Na realidade, a formulação mais adequada para o caso específico seria uma composição das formulações viscosas clássicas que permitiriam caracterizar modelos com um significado reológico bem definido, aliado a simplicidade com que se resolvem as equações temporais e a facilidade em se impor condições de contorno que variam ao longo do tempo presentes nas formulações dinâmicas. Entretanto, os parâmetros viscosos fundamentados na reologia dos materiais e empregados nas formulações clássicas não possuíam relação com os diversos amortecimentos dinâmicos associados à decomposição modal e do decaimento da resposta.

Através de observações dos modelos reológicos, foi possível identificar a importante relação entre a velocidade de deformação e a velocidade material de pontos vizinhos do corpo, antes negligenciada pelas formulações dinâmicas. Baseado nessa relação, pode-se escrever equações constitutivas específicas para cada modelo reológico. As relações constitutivas, introduzidas adequadamente na representação integral do método numérico em questão, dão origem a sistemas de equações temporais que são solucionados através da adoção de algoritmos de integração temporal, semelhantemente àqueles encontrados nas análises dinâmicas. Similarmente, o sistema final apresenta uma matriz viscosa, porém esta agora possui um significado reológico bem definido. A simplificação do modelo reológico de Kelvin, escrevendo este em função apenas de um parâmetro viscoso, permitiu obter a relação entre o amortecimento viscoso e o parâmetro representativo da viscosidade do material. Assim, pôde-se concluir que o amortecimento viscoso proporcional a matriz H para o MEC e proporcional a matriz de rigidez no MEF resultava no mesmo parâmetro viscoso presente na relação reológica de Kelvin. Desta evidência pode-se concluir que pacotes já existentes para análise dinâmica, que consideram o amortecimento como mencionado anteriormente, podem executar análises viscosas considerando o simples modelo de Kelvin-Voigt.

As primeiras formulações viscosas obtidas tanto para o MEF quanto para o MEC eram caracterizadas por representações onde o termo viscoso era definido por integrais de domínio. Este tipo de abordagem é bastante deslegante para o MEC, pois acarreta na necessidade de se discretizar todo o domínio do corpo com células, provocando um custo computacional adicional. Além disso, as integrais de domínio do termo viscoso apresentam singularidades

que para serem solucionadas necessitam de técnicas especiais tais como *transformação de coordenadas* e *subtração de singularidade*, resultando em maiores gastos computacionais. Apesar disso, ambas as formulações do MEC e do MEF se apresentavam estáveis e bastante precisas. Posteriormente, análises mais detalhadas dos modelos reológicos permitiram obter, através de simplificações na matriz constitutiva viscosa, representações para o MEC com integrais apenas no contorno do corpo. Este avanço significativo permitiu executar análises viscoelásticas discretizando-se apenas o contorno do corpo analisado, evitando as células e as indesejáveis integrais singulares de domínio, cujo tratamento requer um alto custo computacional. Para tornar a formulação mais completa, as integrais das forças volumétricas, foram também transformadas em integrais de contorno, permitindo obter integrandos não singulares que podem ser solucionados analiticamente. Esta nova formulação apresentava-se mais adequada para o tratamento de corpos viscoelásticos infinitos ou semi-infinitos, submetidos a condições de contorno que variam ao longo do tempo e/ou sujeito à extração de materiais, tal como aqueles encontrados em problemas de escavações reforçadas. Além disso, as boas características de estabilidade e precisão, presentes nas formulações com termo viscoso de domínio, foram preservadas. De fato, observou-se em todas as formulações propostas que, se a malha adotada na discretização do problema resultasse em uma resposta elástica precisa a resposta viscoelástica final teria o mesmo grau de precisão. O comportamento da integração temporal também mostrou-se bastante estável e preciso.

Baseada nesta nova abordagem viscoelástica com representações integrais apenas no contorno, desenvolveu-se novas formulações viscoplásticas para o MEC. Os procedimentos usuais, em geral, são baseados no conceito de potencial plástico originado na teoria da plasticidade. Para essas formulações clássicas, as características viscosas são incorporadas na expressão da taxa de deformação viscoplástica por meio de funções dependentes do critério de plastificação e cujo embasamento reológico é bastante discutível. O processo recai em um problema incremental onde a análise é executada aplicando-se sucessivos incrementos de força. Esta abordagem, semelhantemente aquelas viscoelásticas, é baseada em procedimentos quase-estáticos onde a imposição de cargas externas com dependência temporal arbitrária apresenta algumas dificuldades. Além disso, é difícil o ajuste do intervalo de tempo fictício ao valor de tempo. As formulações propostas neste trabalho assumem uma relação reológica viscoplástica que deve ser imposta no desenvolvimento das representações integrais. Desta relação encontra-se um sistema de equações diferenciais temporal onde o comportamento plástico do corpo é levado em consideração através de um termo em tensão inicial. Este termo é obtido de forma usual pelos procedimentos elastoplásticos do MEC. Na presente formulação

os incrementos são agora definidos como incrementos de tempo e não mais como passos de força, proporcionando um significado real para o tempo nas análises viscoplásticas. A técnica permite impor, de forma simples e direta, condições de contorno (forças e deslocamentos) que variam com relação ao tempo, ampliando o seu campo de aplicação. Os algoritmos utilizados na atualização das tensões no problema viscoplástico podem ser os mesmos desenvolvidos para tratar os problemas elastoplástico, não havendo a necessidade de desenvolver novos procedimentos viscoplásticos, basta apenas introduzir na formulação viscosa aqueles já propostos pela plasticidade. Além disso, como as integrais referentes ao comportamento viscoso são transformadas em integrais de contorno, para tratar o problema viscoplástico pelo MEC basta apenas discretizar o contorno do corpo e as regiões internas onde ocorrem plastificação, resultando em menor quantidade de dados de entrada e um menor custo computacional.

Para facilitar o acoplamento não-linear entre os métodos numéricos foi necessário escrever uma forma alternativa para abordar o problema elastoplástico pelo MEC. As representações integrais são basicamente as mesmas, porém a forma de tratar o problema de correção do resíduo plástico foi alterada. As abordagens clássicas baseadas no problema de tensão inicial propõem que esta correção seja feita em nível de tensão, evitando utilizar o sistema de equação em deslocamento, a não ser no final do processo iterativo. Para isto era necessário, um certo esforço algébrico de forma a agrupar e ordenar as expressões das tensões no contorno e no domínio, fazendo-se necessário calcular a inversa da matriz do sistema principal. Esta forma de tratar o problema é bastante eficiente, porém, quando se trata de acoplamento não-linear entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos, esta abordagem é inapropriada. É necessário escrever as equações do MEC de forma semelhante ao MEF e tratar o problema de correção do resíduo como usualmente é feito pelo MEF. Além disso, esta abordagem permite implementar de forma direta, sem modificações, os procedimentos do tipo implícito, usualmente utilizados no MEF para a atualização das tensões.

Os algoritmos empregados tanto na formulação elastoplástica quanto nas formulações viscoplásticas foram desenvolvidos seguindo a metodologia de algoritmos do tipo “return mapping”. Estes, além de possibilitar uma eficiente atualização das tensões, permitem a obtenção da matriz constitutiva elastoplástica consistente com o algoritmo de retorno, preservando a taxa de convergência quadrática do método de Newton-Raphson. As expressões do multiplicador plástico de todos os algoritmos apresentados foram obtidas de forma fechada, não havendo a necessidade de procedimentos iterativos para solucionar a condição de

consistência. Pois, um fato importante observado nas análises numéricas utilizando-se os algoritmos do tipo implícito, é que o custo computacional maior está na geração da matriz de rigidez global da estrutura (quando o método requer atualização) e no processo de atualização das tensões. O elevado custo na atualização das tensões, principalmente quando o nível de plastificação é alto, é devido ao procedimento iterativo utilizado para resolver a equação de consistência e obter o multiplicador plástico. Assim, todas as variáveis envolvidas no problema não-linear podem ser obtidas de forma direta através de expressões fechadas. Os algoritmos com lei de fluxo não-associativa apresentaram-se tão eficientes quanto aqueles obtidos com a lei associativa. Além do mais, as expressões obtidas com os algoritmos não-associativos são mais simples e facilmente obtidas, de maneira que esta nova abordagem abre novas perspectivas para o desenvolvimento de algoritmos mais arrojados que podem ser aplicados a materiais mais complexos.

O acoplamento se apresenta como uma ferramenta adequada para o tratamento de problemas de interação, tais como: solo-estrutura e estrutura-estrutura. Assim, cada parte do sistema é representada por uma região física, sobre a qual pode-se aplicar uma solução numérica particular. Elementos de contorno são mais adequados para tratar problemas com domínio infinito ou semi-infinito e regiões de concentração de tensões e fluxo. Já elementos finitos são mais apropriados para problemas envolvendo materiais compósitos, anisotrópicos 3D, estruturas em cascas e reticuladas. Consequentemente, a aplicação adequada de ambos os métodos na simulação de um problema de interação, possibilita uma melhor representação de todo o problema, tornando o acoplamento uma ferramenta bastante eficiente. As novas hipóteses adotadas para o acoplamento do reforço permitiram caracterizar de forma mais realista a contribuição deste para o enrijecimento global. Porém, deve-se ressaltar que o custo computacional envolvido na integração das células tetraédricas ainda é relativamente alto e o armazenamento das matrizes em sua plenitude proporciona ainda um considerável consumo de memória. Como propostas de futuros trabalhos, poderia-se solucionar o problema das células empregando nas áreas onde ocorreria a plastificação, sub-regiões de elementos finitos tridimensionais. Assim, poderia se evitar os gastos necessários na determinação das integrais singulares de domínio, utilizando elementos de contorno na modelagem dos domínios infinitos e semi-infinitos. Já o problema de armazenamento poderia ser minimizado se fossem desenvolvidos procedimentos que aproveitassem as características de simetria das matrizes envolvidas, que é um problema mais complexo e foge da proposta do trabalho. Para se tratar problemas mais gerais é necessário um esforço para o desenvolvimento de pré e pós-processadores adequados ao acoplamento MEC/MEF. Além disso, pode-se sugerir ainda

como continuidade deste trabalho, a consideração de novas formulações viscoelásticas, viscoplásticas e de novos algoritmos elastoplásticos, que possibilitem caracterizar melhor as propriedades reológicas dos materiais envolvidos no problema.

Em síntese, todas as formulações desenvolvidas alcançaram o êxito esperado. Estas podem ser resumidamente descritas como:

- Formulações viscoelásticas (com uma abordagem inicial dinâmica) para o MEC e o MEF considerando os modelos de Kelvin e Boltzmann.
- Algoritmos de retornos associativos e não-associativos implícitos com expressões fechadas.
- Formulações viscoplásticas para o MEC com e sem comportamento instantâneo.
- Procedimentos de acoplamento progressivo para a inclusão e retirada de material em análises 2D e 3D que leva em consideração as hipóteses do reforço.

Como resultados adicionais, abriram-se frentes de pesquisas muito promissoras como, por exemplo, o desenvolvimento de novas metodologias viscoelásticas e viscoplásticas mais gerais e adequadas para o tratamento destes problemas, tanto para elementos de contorno como para elementos finitos e o acoplamento entre ambos.

Anexo A

INTEGRAIS DE CONTORNO DAS FORÇAS VOLUMÉTRICAS

A.1 INTRODUÇÃO

Em geral, as integrais que levam em consideração a contribuição das forças volumétricas nas representações integrais, tanto em deslocamento quanto em deformação (ou tensão) pelo MEC são definidas como integrais de domínio. Este tipo de equação impõe a necessidade de se discretizar também o domínio do corpo fazendo-se uso de células, aumentando assim o custo computacional envolvido no processo e tornando o método deselegante. Felizmente, para muitas aplicações práticas pode-se transformar adequadamente as integrais de domínio em integrais de contorno, mais apropriadas para o MEC. Problemas envolvendo forças volumétricas constantes sobre todo o domínio do corpo, por exemplo, o peso próprio, podem ser adequadamente representados utilizando-se discretização apenas no contorno do sólido.

A.2 REPRESENTAÇÃO EM DESLOCAMENTO

Para se transformar as equações integrais de domínio de forças volumétricas constante em integrais de contorno, deve-se utilizar um procedimento alternativo, fazendo-se uso de coordenadas polares, conforme apresentado na figura A.1. Sendo assim, as integrais referente às forças volumétricas da representação em deslocamento para os casos bi e tridimensional, ficam escritas como:

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = b_i \int_{\Omega} u_{ki}^* d\Omega = b_i \int_{\theta} \int_r u_{ki}^* r dr d\theta \quad \text{para 2D} \quad (\text{A.1a})$$

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = b_i \int_{\Omega} u_{ki}^* d\Omega = b_i \int_{\varphi} \int_{\theta} \int_r u_{ki}^* r^2 \cos(\theta) dr d\theta d\varphi \quad \text{para 3D} \quad (\text{A.1b})$$

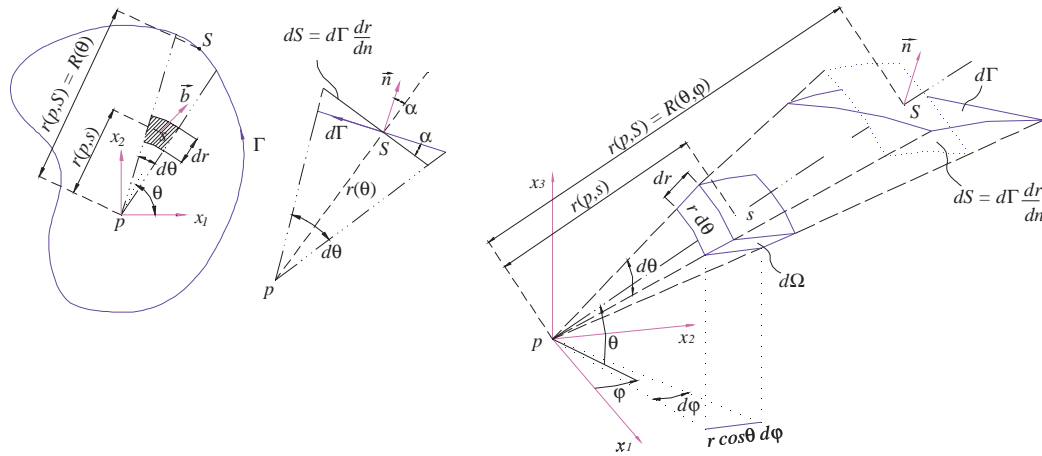


FIGURA A.1 – Coordenadas polares nos casos 2D e 3D.

Considerando-se o problema de “Kelvin”, as soluções fundamentais u_{ki}^* são expressas para os problemas bi e tridimensional, como:

$$u_{ki}^*(\theta, r) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \{(3-4\nu)\ln(r)\delta_{ki} - r_{,k} r_{,i}\} \quad \text{para 2D} \quad (A.2a)$$

$$u_{ki}^*(\theta, \varphi, r) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \{(3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,k} r_{,i}\} \quad \text{para 3D} \quad (A.2b)$$

Substituindo as soluções fundamentais nas equações integrais das forças volumétrica, obtém-se:

$$b_i \int_{\theta_0}^{R(\theta)} \int_0^{R(\theta)} \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)r \ln(r)\delta_{ki} - r_{,k} r_{,i}] dr d\theta \quad \text{para 2D} \quad (A.3a)$$

$$b_i \int_{\varphi_0}^{\varphi} \int_{\theta_0}^{\theta} \int_0^{R(\theta, \varphi)} \frac{r}{16\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,k} r_{,i}] \cos(\theta) dr d\theta d\varphi \quad \text{para 3D} \quad (A.3b)$$

Deve-se observar que as integrais não apresentam singularidade, não necessitando de maiores cuidados. Assim, pode-se executar a integração em r das equações (A.3a) e (A.3b) diretamente, resultando em:

$$b_i \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{R}{16\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(R) \right) \delta_{ki} + R_{,k} R_{,i} \right] R d\theta \quad \text{para 2D} \quad (A.4a)$$

$$b_i \int_{\varphi} \int_{\theta} \frac{1}{32\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)\delta_{ki} + R_{,k} R_{,i}] R^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi \quad \text{para 3D} \quad (\text{A.4b})$$

Note que R refere-se à distância do ponto fonte a um ponto no contorno. Assim, para utilizar a mesma notação definida nas representações integrais, substitui-se R por r , sabendo-se sempre que r agora é o valor da distância entre o ponto fonte e um ponto localizado no “contorno” do corpo e não mais no domínio.

$$b_i \int_{\theta} \frac{r}{16\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(r) \right) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i} \right] r d\theta \quad \text{para 2D} \quad (\text{A.5a})$$

$$b_i \int_{\varphi} \int_{\theta} \frac{1}{32\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,k} r_{,i}] r^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi \quad \text{para 3D} \quad (\text{A.5b})$$

Neste ponto, torna-se necessário encontrar as relações entre $d\theta$ (e $d\varphi$ para o caso tridimensional) com $d\Gamma$. Observando a figura A.1, nos problemas 2D e 3D é possível identificar que a projeção do infinitésimo $d\Gamma$, representada pelo elemento dS , pode ser expressa por:

$$dS = d\Gamma \frac{\partial r}{\partial n} \quad (\text{A.6})$$

Note que o infinitésimo dS pode também ser escrito como:

$$dS = r d\theta \quad \text{para 2D} \quad (\text{A.7a})$$

$$dS = r^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi \quad \text{para 3D} \quad (\text{A.7b})$$

Igualando as relações (A.7a) e (A.7b) com a expressão (A.6) encontram-se as relações desejadas.

$$r d\theta = d\Gamma \frac{\partial r}{\partial n} \quad \text{para 2D} \quad (\text{A.8a})$$

$$r^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi = d\Gamma \frac{\partial r}{\partial n} \quad \text{para 3D} \quad (\text{A.8b})$$

Substituindo as relações (A.8a) e (A.8b) nas expressões (A.5a) e (A.5b), respectivamente, encontram-se as integrais de contorno das forças volumétricas para o caso específico onde b_i é constante.

$$b_i \int_{\Gamma} B_{ki}^* d\Gamma \quad (\text{A.9})$$

onde

$$B_{ki}^* = \frac{r}{16\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \left(\frac{1}{2} - \ln(r) \right) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i} \right] \frac{\partial r}{\partial n} \quad \text{para 2D} \quad (\text{A.10a})$$

$$B_{ki}^* = \frac{1}{32\pi(1-\nu)G} \left[(3-4\nu) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i} \right] \frac{\partial r}{\partial n} \quad \text{para 3D} \quad (\text{A.10b})$$

Deve-se ressaltar que o termo B_{ki}^* não apresenta nenhuma singularidade, de maneira que não é necessário o uso de técnicas especiais para se obter a integral (A.9). Note ainda que se o elemento de contorno utilizado for um elemento plano, o cálculo da integral do elemento que contém o ponto fonte é desnecessário, pois nesta situação $\partial r/\partial n = 0$ e consequentemente a integral é nula.

A.3 REPRESENTAÇÃO EM DEFORMAÇÃO E TENSÃO

Seguindo os mesmos procedimentos adotados no item anterior, pode-se obter as integrais de contorno das forças volumétricas para as representações em deformação e tensão. Para isto, deve-se escrever as referidas integrais nas coordenadas polares. Inicialmente, desenvolvem-se as expressões para a representação em deformação para os problemas bi e tridimensional e posteriormente obtém-se, de forma análoga e direta, aquelas para as representações em tensão.

$$\int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kie}^* b_i d\Omega = b_i \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kie}^* d\Omega = b_i \int_{\theta} \int_0^{R(\theta)} \hat{\varepsilon}_{kie}^* r dr d\theta \quad \text{para 2D} \quad (\text{A.11a})$$

$$\int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kie}^* b_i d\Omega = b_i \int_{\Omega} \hat{\varepsilon}_{kie}^* d\Omega = b_i \int_{\varphi} \int_{\theta} \int_0^{R(\theta,\varphi)} \hat{\varepsilon}_{kie}^* r^2 \cos(\theta) dr d\theta d\varphi \quad \text{para 3D} \quad (\text{A.11b})$$

onde $\hat{\varepsilon}_{kie}^*$ é a solução fundamental de “Kelvin” para as deformações, obtida pela adequada diferenciação do campo de deslocamento fundamental u_{ki}^* com relação a posição do ponto “fonte”. Assim, para diferenciar da solução fundamental ε_{kie}^* , obtida da derivação com relação ao ponto de campo, escreve-se $\hat{\varepsilon}_{kie}^*$.

$$\hat{\varepsilon}_{kie}^* = \frac{1}{8\alpha\pi(1-\nu)Gr^\alpha} [(1-2\nu)(\delta_{ke}r_{,i} + \delta_{ie}r_{,k}) - \delta_{ki}r_{,e} + \beta r_{,k} r_{,i} r_{,e}] \quad (\text{A.12})$$

sendo $\alpha=1$ e $\beta=2$ para o caso bidimensional e $\alpha=2$ e $\beta=3$ para o tridimensional. Assim, substituindo (A.12) nas expressões (A.11a) e (A.11b) e integrando em r , encontra-se:

$$b_i \int_{\theta} r \hat{\varepsilon}_{kie}^*(r, \theta) r d\theta \quad \text{para } 2D \quad (\text{A.13a})$$

$$b_i \int_{\varphi} \int_{\theta} r \hat{\varepsilon}_{kie}^*(r, \theta) r^2 \cos(\theta) d\theta d\varphi \quad \text{para } 3D \quad (\text{A.13b})$$

Ressalta-se novamente que o termo R foi substituído por r , nas expressões (A.13a) e (A.13b), para utilizar a mesma notação do texto principal, porém, deve-se ter em mente que r representa agora o raio definido pela distância do ponto fonte a um ponto no “contorno”. Fazendo-se uso das relações (A.8a) e (A.8b) determinam-se as integrais de contorno das forças volumétricas referente à representação em deformação.

$$b_i \int_{\Gamma} \hat{B}_{kie}^* d\Gamma \quad (\text{A.14})$$

onde

$$\hat{B}_{kie}^* = \hat{\varepsilon}_{kie}^* r \frac{\partial r}{\partial n} \quad (\text{A.15})$$

As equações integrais de contorno das forças volumétricas referente à representação integral em tensão são obtidas de forma idêntica àquelas das representações em deformação, basta apenas substituir nas deduções a solução fundamental $\hat{\varepsilon}_{kie}^*$ por $\bar{\sigma}_{kie}^*$, sendo esta última expressa por:

$$\bar{\sigma}_{kie}^* = \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} [(1-2\nu)(\delta_{ke}r_{,i} + \delta_{ie}r_{,k} - \delta_{ki}r_{,e}) + \beta r_{,k}r_{,i}r_{,e}] \quad (\text{A.16})$$

sendo α e β os mesmos definidos anteriormente. Dessa forma, pode-se obter as integrais de contorno das forças volumétricas referente à representação integral em tensão.

$$b_i \int_{\Gamma} \bar{B}_{kie}^* d\Gamma \quad (\text{A.17})$$

onde

$$\bar{B}_{kie}^* = \bar{\sigma}_{kie}^* r \frac{\partial r}{\partial n} \quad (\text{A.18})$$

Tanto a integral (A.14) quanto (A.17), para o problema tridimensional, aprestam singularidade do tipo $1/r$. Este problema pode ser facilmente tratado utilizando-se transformação de coordenadas, executando as integrações no sistema de coordenadas polares. Porém, como mencionado anteriormente, se o elemento de contorno que contém o ponto fonte for plano, $\partial r/\partial n = 0$ e conseqüentemente a integral sobre este elemento é nula, eliminando-se a singularidade, não havendo necessidade de utilizar-se técnicas especiais para calcular as integrais (A.14) e (A.17). Note que, para determinados elementos, as respostas analíticas das integrais podem ser obtidas de forma relativamente simples, porém este não era o objetivo do trabalho. Por fim, deve-se ressaltar que todas estas deduções, tanto para as representações em deslocamento quanto para as representações integrais em deformação e tensão, são também válidas para as representações integrais incrementais, bastando apenas substituir as componentes das forças volumétricas b_j pelas componentes incrementais das mesmas \dot{b}_j .

Anexo B

DERIVADAS DE INTEGRAIS DE DOMÍNIO SINGULARES

B.1 INTRODUÇÃO

Na obtenção das representações integrais para deformações e consequentemente tensões em pontos internos, alguns cuidados especiais devem ser tomados na diferenciação das integrais singulares. Como as representações serão obtidas para pontos internos, localizados no interior do corpo, apenas as integrais de domínio apresentarão singularidades e necessitam ser diferenciadas, fazendo-se uso dos conceitos de integrais singulares. Logo, as integrais de contorno não se incluem nesta situação por não apresentarem singularidades quando o ponto fonte localiza-se no interior do corpo. As integrais de domínio estão presentes em situações onde se deseja considerar, por exemplo: forças volumétricas (representação integral no domínio), viscosidade (representação integral no domínio), efeitos dinâmicos, efeitos não-lineares, etc. Estas integrais presentes nas equações integrais para deslocamento em pontos internos apresentam singularidade do tipo $\ln r$ e $1/r$ para o caso bidimensional e $1/r$ e $1/r^2$ para o caso tridimensional e podem ser basicamente de dois tipos.

$$\int_{\Omega} u_{ki}^*(p,s) f_i(s,t) d\Omega \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^*(p,s) \bar{f}_{ij}(s,t) d\Omega \quad (\text{B.1})$$

onde p representa a posição do ponto fonte e s refere-se a uma posição no domínio do corpo. Os termos u_{ki}^* e ε_{kij}^* são as conhecidas soluções fundamentais (para ambos os problemas 2D e 3D) em deslocamento e deformação, respectivamente. As funções f_i e \bar{f}_{ij} variam de acordo com o tipo de representação integral e em problemas dependente do tempo estas podem ser escritas em função de t . Por exemplo, f_i pode ser: $b_i(s,t)$, $av \cdot \dot{u}(s,t)$ ou $\rho \cdot \ddot{u}(s,t)$, onde b_i representa as forças volumétricas, av o amortecimento viscoso associado a

velocidade \dot{u} e ρ é a densidade mássica associada a aceleração \ddot{u} . Já o termo \bar{f}_{ij} pode ser: σ_{ij}^v (tensões viscosas) ou σ_{ij}^p (incremento de tensões iniciais).

B.2 ESTUDO DA DIFERENCIAÇÃO DAS INTEGRAIS SINGULARES

Neste ponto torna-se necessário estudar a diferenciação parcial das equações integrais de domínio com núcleos singulares apresentadas na expressão (B.1). Para o desenvolvimento destas derivadas é necessário utilizar um sistema de coordenadas polares cuja o centro está localizado no ponto fonte p sendo também a origem de uma sub-região Ω_ϵ de raio ϵ (nos problemas 2D a sub-região Ω_ϵ é um disco e em 3D ela torna-se uma esfera) extraída do corpo, tão pequena quanto se queira.

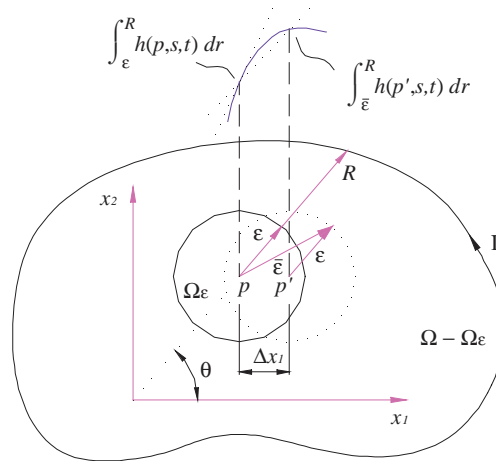


FIGURA B.1 – Domínio Ω decrescido de uma sub-região Ω_ϵ .

de maneira que é possível escrever as derivadas das equações (B.1), como:

$$I_u = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} u_{ki}^*(p, s) f_i(s, t) d\Omega \tag{B.2a}$$

$$I_\epsilon = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\Omega - \Omega_\epsilon} \epsilon_{kij}^*(p, s) \bar{f}_{ij}(s, t) d\Omega \tag{B.2b}$$

Para se desenvolver o limite definido nas expressões (B.2a) e (B.2b), estas devem ser escritas em coordenadas polares, resultando:

$$I_u = \int_0^{2\pi} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\varepsilon}^R u_{ki}^*(\theta, r(p, s)) f_i(s, t) r(p, s) dr \right] d\theta \quad (\text{B.3a})$$

$$I_{\varepsilon} = \int_0^{2\pi} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\varepsilon}^R \varepsilon_{kij}^*(\theta, r(p, s)) \bar{f}_{ij}(s, t) r(p, s) dr \right] d\theta \quad (\text{B.3b})$$

para o problema bidimensional, e

$$I_u = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\varepsilon}^R u_{ki}^*(\theta, \varphi, r(p, s)) f_i(s, t) r^2(p, s) dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta \quad (\text{B.4a})$$

$$I_{\varepsilon} = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\varepsilon}^R \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, r(p, s)) \bar{f}_{ij}(s, t) r^2(p, s) dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta \quad (\text{B.4b})$$

para o caso tridimensional. Observe que em ambos os problemas 2D e 3D a diferenciação está sendo aplicada diretamente sobre a integral em r , pois os limites das integrais em θ e φ não dependem da posição do ponto fonte $x_e(p)$. Assim para uma melhor compreensão vamos considerar um θ (e um φ - caso o problema seja 3D), fixo e fazer o desenvolvimento apenas na direção r . Para se generalizar a aplicação basta apenas considerar θ e φ variando segundo os seus limites predefinidos nas expressões anteriores. Deve-se notar que, para derivar uma integral é necessário saber quais os termos que variam e dependem da variável na qual será aplicada a diferenciação. Para melhor visualizar isto os termos entre colchetes nas expressões (B.3a), (B.3b), (B.4a) e (B.4b) serão escritos em uma forma sintética e genérica, como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\varepsilon}^R h(p, s, t) dr \quad (\text{B.5})$$

Aplicando-se a definição de diferenciação, ou seja, tomando-se um ponto p' tão próximo quanto se queira de p , gera-se um pequeno incremento Δx_e na direção da coordenada cartesiana x_e (Fig.B.1), de tal forma que a derivada da integral em (B.5) fica expressa como:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\varepsilon}^R h(p, s, t) dr = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\lim_{p' \rightarrow p} \frac{\int_{\varepsilon}^R h(p', s, t) dr - \int_{\varepsilon}^R h(p, s, t) dr}{\Delta x_e} \right) \quad (\text{B.6})$$

Observe que a origem de integração é a mesma para as integrais entre parênteses em (B.6), justificando a diferença no limite inferior em ambas as integrais. Esta variação identifica a dependência do limite inferior com a posição do ponto fonte p , o que não ocorre com o limite superior. Estes limites podem ser melhor identificados na figura B.1. Identificado-se os termos que dependem da variação do ponto fonte, parte-se agora para determinar os termos I_u e I_ε . Sabendo-se que um dos limites depende da variável a ser diferenciada, torna-se necessário fazer-se uso da fórmula de “Leibnitz” (Anexo C), específica para derivadas de equações integrais cujos limites são funções da variável de diferenciação.

Problema 2D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\bar{\varepsilon}}^R u_{ki}^*(\theta, r) f_i r dr \right] d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\varepsilon}}^R \frac{\partial u_{ki}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} f_i r dr + u_{ki}^*(\theta, R) f_i R \frac{\partial R}{\partial x_e(p)} - u_{ki}^*(\theta, \bar{\varepsilon}) f_i \bar{\varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_e(p)} \right] d\theta$$
(B.7)

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\bar{\varepsilon}}^R \varepsilon_{kij}^*(\theta, r) \bar{f}_{ij} r dr \right] d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\varepsilon}}^R \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij} r dr + \varepsilon_{kij}^*(\theta, R) \bar{f}_{ij} R \frac{\partial R}{\partial x_e(p)} - \varepsilon_{kij}^*(\theta, \bar{\varepsilon}) \bar{f}_{ij} \bar{\varepsilon} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_e(p)} \right] d\theta$$

Problema 3D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\bar{\varepsilon}}^R u_{ki}^*(\theta, \varphi, r) f_i r^2 dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\varepsilon}}^R \frac{\partial u_{ki}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_e(p)} f_i r^2 dr + u_{ki}^*(\theta, \varphi, R) f_i R^2 \frac{\partial R}{\partial x_e(p)} - u_{ki}^*(\theta, \varphi, \bar{\varepsilon}) f_i \bar{\varepsilon}^2 \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_e(p)} \right] \cos \varphi d\varphi d\theta$$
(B.8)

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_e(p)} \int_{\bar{\varepsilon}}^R \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, r) \bar{f}_{ij} r^2 dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\bar{\varepsilon}}^R \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij} r^2 dr + \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, R) \bar{f}_{ij} R^2 \frac{\partial R}{\partial x_e(p)} - \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, \bar{\varepsilon}) \bar{f}_{ij} \bar{\varepsilon}^2 \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_e(p)} \right] \cos \varphi d\varphi d\theta$$

As derivadas do limite superior e inferior são:

$$\frac{\partial R}{\partial x_e(p)} = 0$$
(B.9a)

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_e(p)} = \cos(\vec{\varepsilon}, \vec{x}_e) \quad (\text{B.9b})$$

Levando em consideração que no limite quando $p' \rightarrow p$, conseqüentemente $\bar{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon$, logo a equação (B.9b) torna-se

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial x_e(p)} = \cos(\vec{\varepsilon}, \vec{x}_e) = \cos(\vec{\varepsilon}, \vec{x}_e) = \cos(\vec{r}, \vec{x}_e) = r_e \quad (\text{B.10})$$

Sendo assim as equações (B.7) e (B.8), tornam-se:

Problema 2D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{\partial u_{ki}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} f_i r dr - u_{ki}^*(\theta, \varepsilon) f_i \varepsilon r_e \right] d\theta \quad (\text{B.10a})$$

$$I_{\varepsilon} = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij} r dr - \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varepsilon) \bar{f}_{ij} \varepsilon r_e \right] d\theta \quad (\text{B.10b})$$

Problema 3D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{\partial u_{ki}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_e(p)} f_i r^2 dr - u_{ki}^*(\theta, \varphi, \varepsilon) f_i \varepsilon^2 r_e \right] \cos \varphi d\varphi d\theta \quad (\text{B.11a})$$

$$I_{\varepsilon} = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij} r^2 dr - \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, \varepsilon) \bar{f}_{ij} \varepsilon^2 r_e \right] \cos \varphi d\varphi d\theta \quad (\text{B.11b})$$

B.3 DESENVOLVENDO AS INTEGRAIS I_u

As integrais (B.10a) e (B.11a) apresentadas anteriormente para os problemas bidimensional e tridimensional, respectivamente, serão agora estudada com mais detalhe. Para isto, deve-se escrever as soluções fundamentais $u_{ki}^*(\theta, r)$ para o problema 2D e $u_{ki}^*(\theta, \varphi, r)$ para o caso tridimensional.

Problema 2D

$$u_{ki}^*(\theta, r) = \frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \{ (3-4\nu) \ln(r) \delta_{ki} - r_{,k} r_{,i} \} \quad (\text{B.12a})$$

Problema 3D

$$u_{ki}^*(\theta, \varphi, r) = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} \{(3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,k} r_{,i}\} \quad (\text{B.12b})$$

De maneira que, o segundo termo das integrais I_u em (B.10a) e (B.11a) podem ser escritos como:

Problema 2D

$$\int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\frac{-1}{8\pi(1-\nu)G} \{(3-4\nu)\varepsilon \ln(\varepsilon)\delta_{ki} - r_{,k} r_{,i}\} f_i r_{,e} \right] d\theta = 0 \quad (\text{B.13a})$$

Problema 3D

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{\varepsilon}{16\pi(1-\nu)G} \{(3-4\nu)\delta_{ki} + r_{,k} r_{,i}\} f_i r_{,e} \right] \cos \varphi d\varphi d\theta = 0 \quad (\text{B.13b})$$

Na relação (B.13a) ε tende a zero mais rápido que $\ln(\varepsilon)$ tende ao infinito, consequentemente, $\varepsilon \ln(\varepsilon)$ tende a zero. Nos outros termos, tanto em (B.13a) quanto em (B.13b), é fácil identificar que também tendem a zero. Dessa forma, as expressões (B.10a) e (B.11a) ficam escritas como:

Problema 2D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{\partial u_{ki}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} f_i r dr \right] d\theta \quad (\text{B.14a})$$

Problema 3D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{\partial u_{ki}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_e(p)} f_i r^2 dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta \quad (\text{B.14b})$$

Agora deve-se desenvolver o segundo termo e demonstrar que o limite existe. Assim, derivando as funções $u_{ki}^*(\theta, r)$ em (B.14a) e $u_{ki}^*(\theta, \varphi, r)$ em (B.14b) com relação a posição do ponto fonte $x_e(p)$ e substituindo essas relações nas equações (B.14a) e (B.14b) respectivamente, encontra-se:

Problema 2D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{1}{r} \psi_{kie}(\theta) f_i r dr \right] d\theta \quad (\text{B.15a})$$

Problema 3D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \frac{1}{r^2} \psi_{kie}(\theta, \varphi) f_i r^2 dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta \quad (\text{B.15b})$$

Note que a diferenciação gerou uma nova função que cancela o termo singular e as expressões (B.15a) e (B.15b) não mais apresentam singularidades, portanto, as integrais I_u são limitadas e regulares. Consequentemente, é possível garantir a existência dos limites, de maneira que as integrais em (B.14a) e (B.14b) agora podem ser escritas como integrais regulares.

Problema 2D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon}^R \frac{\partial u_{ki}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} f_i r dr d\theta = \int_{\Omega} \frac{\partial u_{ki}^*(p, s)}{\partial x_e(p)} f_i(s, t) d\Omega \quad (\text{B.16a})$$

Problema 3D

$$I_u = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varepsilon}^R \frac{\partial u_{ki}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_e(p)} f_i r^2 dr \cos \varphi d\varphi d\theta = \int_{\Omega} \frac{\partial u_{ki}^*(p, s)}{\partial x_e(p)} f_i(s, t) d\Omega \quad (\text{B.16b})$$

Deve-se observar que as integrais singulares do tipo I_u permitem que a diferenciação seja aplicada diretamente sobre o integrando (solução fundamental) o que não ocorre com as integrais do tipo I_{ε} , que serão estudadas no próximo item.

B.4 DESENVOLVENDO AS INTEGRAIS I_{ε}

Os limites (B.10b) e (B.11b) serão determinados utilizando-se procedimentos semelhantes àqueles adotados na determinação das integrais (B.10a) e (B.11a). Pode-se representar as soluções fundamentais ε_{kij}^* para os casos bi e tridimensionais no sistema de coordenadas polares, por:

Problema 2D

$$\varepsilon_{kij}^*(r, \theta) = \frac{1}{r} \psi_{kij}(\theta) \quad (\text{B.17a})$$

Problema 3D

$$\varepsilon_{kij}^*(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{r^2} \psi_{kij}(\theta, \varphi) \tag{B.17b}$$

Substituindo respectivamente as expressões (B.17a) e (B.17b) no segundo termo do lado direito das expressões (B.10b) e (B.11b) elimina-se a singularidade deste termo, de maneira que o limite em ε só necessita ser aplicado sobre a integral em r .

Problema 2D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^R \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij}(s, t) r dr \right] d\theta - \int_0^{2\pi} \psi_{kij}(\theta) r_{,e} \bar{f}_{ij}(p, t) d\theta \tag{B.18a}$$

Problema 3D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^R \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij}(s, t) r^2 dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta - \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \psi_{kij}(\theta, \varphi) r_{,e} \bar{f}_{ij}(p, t) \cos \varphi d\varphi d\theta \tag{B.18b}$$

O segundo termo do lado direito das expressões (B.18a) e (B.18b) são termos independentes e podem ser determinados fazendo-se uso das relações entre os cosenos diretores e os ângulos θ e φ para ambos os casos bi e tridimensional.

TABELA B.1 – Relação entre $r_{,i}$ e os ângulos.

| BIDIMENSIONAL | TRIDIMENSIONAL |
|-------------------------|---------------------------------------|
| $r_{,1} = \cos(\theta)$ | $r_{,1} = \cos(\varphi) \cos(\theta)$ |
| $r_{,2} = \sin(\theta)$ | $r_{,2} = \cos(\varphi) \sin(\theta)$ |
| | $r_{,3} = \sin(\varphi)$ |

Fazendo-se uso das relações para os cosenos diretores é possível determinar o termo independente. Este termo dá origem aos termos livres presentes nas representações integrais de deformação e tensão nos problemas viscosos e não-lineares. Consequentemente, as integrais (B.18a) e (B.18b) tornam-se:

Problema 2D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^R \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij}(s, t) r dr \right] d\theta + g_{kije}(p, t) \tag{B.19a}$$

Problema 3D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^R \frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_\varepsilon(p)} \bar{f}_{ij}(s, t) r^2 dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta + g_{kije}(p, t) \quad (\text{B.19b})$$

Semelhantemente ao que foi feito para as integrais I_u , deve-se agora verificar a existência do limite presente nas integrais (B.19a) e (B.19b). Porém, para isto torna-se necessário desenvolver as derivadas parciais contidas nessas mesmas equações. Note que é possível derivar a solução fundamental ε_{kij}^* , de tal forma que esta possa ser escrita como:

Problema 2D

$$\frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, r)}{\partial x_\varepsilon(p)} = \frac{1}{r^2} \Psi_{kije}(\theta) \quad (\text{B.20a})$$

Problema 3D

$$\frac{\partial \varepsilon_{kij}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_\varepsilon(p)} = \frac{1}{r^3} \Psi_{kije}(\theta, \varphi) \quad (\text{B.20b})$$

Substituindo as expressões da derivada das soluções fundamentais nas equações (B.19a) e (B.19b), encontra-se:

Problema 2D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^R \frac{1}{r} \Psi_{kije}(\theta) \bar{f}_{ij}(s, t) dr \right] d\theta + g_{kije}(p, t) \quad (\text{B.21a})$$

Problema 3D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_\varepsilon^R \frac{1}{r} \Psi_{kije}(\theta, \varphi) \bar{f}_{ij}(s, t) dr \right] \cos \varphi d\varphi d\theta + g_{kije}(p, t) \quad (\text{B.21b})$$

Para provar que os limites acima existem utiliza-se o procedimento de somar e subtrair a função $\bar{f}_{ij}(p, t)$ ao primeiro termo das equações (B.21a) e (B.21b), de tal forma que estes termos tornam-se:

Problema 2D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^R \frac{1}{r} [\bar{f}_{ij}(s,t) - \bar{f}_{ij}(p,t)] dr \Psi_{kije}(\theta) d\theta + \bar{f}_{ij}(p,t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^R \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \Psi_{kije}(\theta) d\theta dr + g_{kije}(p,t) \quad (\text{B.22a})$$

Problema 3D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^R \frac{1}{r} [\bar{f}_{ij}(s,t) - \bar{f}_{ij}(p,t)] dr \Psi_{kije}(\theta, \varphi) \cos \varphi d\varphi d\theta + \bar{f}_{ij}(p,t) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_\varepsilon^R \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{kije}(\theta, \varphi) \cos \varphi d\varphi d\theta dr + g_{kije}(p,t) \quad (\text{B.22b})$$

Para que o primeiro termo do lado direito das equações (B.22a) e (B.22b) seja limitado (possua limite definido quando $\varepsilon \rightarrow 0$), basta apenas que a função \bar{f}_{ij} satisfaça a condição de “Hölder”, ou seja

$$|\bar{f}_{ij}(s,t) - \bar{f}_{ij}(p,t)| \leq Ar^\alpha \quad (\text{B.23})$$

sendo A e α constantes positivas e r a distância entre p e s . Esta condição impõe a continuidade da função \bar{f}_{ij} em p , pois se a diferença entre p e s for tendendo a zero, ou seja $r(p,s) \rightarrow 0$, a diferença entre os valores da função \bar{f}_{ij} calculados em p e em s têm que tender para zero também. Consequentemente, a singularidade é cancelada e a primeira integral presente nas equações (B.22a) e (B.22b) torna-se limitada, possuindo limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Com relação ao segundo termo nas equações (B.22a) e (B.22b), pode-se demonstrar com um certo esforço algébrico que:

Problema 2D

$$\int_0^{2\pi} \Psi_{kije}(\theta) d\theta = 0 \quad (\text{B.24a})$$

Problema 3D

$$\int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \Psi_{kije}(\theta, \varphi) \cos \varphi d\varphi d\theta = 0 \quad (\text{B.24b})$$

Consequentemente o segundo termo das equações (B.22a) e (B.22b) é limitado e vale zero. Assim, pode-se dizer que as integrais (B.18) existem e são limitadas, de maneira que elas podem ser escritas em coordenadas polares como:

Problema 2D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_\varepsilon^R \frac{\partial \mathcal{E}_{kij}^*(\theta, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij}(s, t) r dr d\theta + g_{kije}(p, t) \quad (\text{B.25a})$$

Problema 3D

$$I_\varepsilon = \int_0^{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_\varepsilon^R \frac{\partial \mathcal{E}_{kij}^*(\theta, \varphi, r)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij}(s, t) r^2 dr \cos \varphi d\varphi d\theta + g_{kije}(p, t) \quad (\text{B.25b})$$

ou de forma geral, como:

$$I_\varepsilon = \int_\Omega \frac{\partial \mathcal{E}_{kij}^*(p, s)}{\partial x_e(p)} \bar{f}_{ij}(s, t) d\Omega + g_{kije}(p, t) \quad (\text{B.26})$$

Deve-se observar que a integral em (B.26) deve ser obtida como valor principal de Cauchy e que o termo livre fica escrito em função do ponto fonte p .

Anexo C

DEDUÇÃO DA FÓRMULA DE “LEIBNITZ”

C.1 FÓRMULA DE “LEIBNITZ”

Esta fórmula é bastante útil na derivação de integrais cujos limites são escritos em função da variável a ser diferenciada. A fórmula de “Leibnitz” é essencial para a compreensão de alguns termos de domínio (termos livres) que aparecem nas representações integrais de deformações e tensões do MEC. Tome, por exemplo, a integral unidimensional abaixo.

$$\int_{r_1(x_p)}^{r_2(x_p)} h(x_p, x) dx = H(x_p, r_2(x_p)) - H(x_p, r_1(x_p)) \quad (C.1)$$

onde H é a primitiva da função h . Os limites de integração r_1 e r_2 são funções que dependem da variável x_p presente também no integrando. Diferenciando a expressão (C.1) com relação à x_p , obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x_p} \left(\int_{r_1(x_p)}^{r_2(x_p)} h(x_p, x) dx \right) = \left[\frac{\partial H(x_p, r_2(x_p))}{\partial r_2(x_p)} \frac{\partial r_2(x_p)}{\partial x_p} + \frac{\partial H(x_p, r_2(x_p))}{\partial x_p} \right] - \left[\frac{\partial H(x_p, r_1(x_p))}{\partial r_1(x_p)} \frac{\partial r_1(x_p)}{\partial x_p} + \frac{\partial H(x_p, r_1(x_p))}{\partial x_p} \right] \quad (C.2)$$

Ressalta-se que a regra da cadeia foi utilizada no desenvolvimento da expressão (C.2). O segundo e o quarto termo do lado direito da equação (C.2) podem ser reunidos e sabendo-se que:

$$\frac{\partial H(x_p, r_1(x_p))}{\partial r_1(x_p)} = h(x_p, r_1(x_p)) \quad \text{e} \quad \frac{\partial H(x_p, r_2(x_p))}{\partial r_2(x_p)} = h(x_p, r_2(x_p)) \quad (\text{C.3})$$

a expressão (C.2), torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\int_{r_1(x_p)}^{r_2(x_p)} h(x_p, x) dx \right) = \\ \int_{r_1(x_p)}^{r_2(x_p)} \frac{\partial h(x_p, x)}{\partial x_p} dx + h(x_p, r_2(x_p)) \frac{\partial r_2(x_p)}{\partial x_p} - h(x_p, r_1(x_p)) \frac{\partial r_1(x_p)}{\partial x_p} \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

A equação (C.4) representa a fórmula de “Leibnitz”. Como mencionado, anteriormente, esta fórmula é necessária na dedução de alguns termos de domínio presentes nas representações integrais de deformação e tensão em pontos internos que são obtidos através da diferenciação da equação integral de deslocamento pelo MEC.

Anexo D

TRATAMENTO DAS INTEGRAIS

D.1 INTRODUÇÃO

Técnicas para a determinação das integrais singulares vêm sendo propostas desde o início do método dos elementos de contorno. Porém, o que se tem observado é que quanto mais preciso for o cálculo das integrais, maior será o custo computacional imposto à formulação dos elementos de contorno. Outro fator importante é a ordem de singularidade, pois a determinação de integrais com alto grau de singularidade conduz, na maioria das situações, a um custo computacional mais elevado que aqueles onde o grau de singularidade não é tão alto, levando-se em consideração a mesma precisão em ambas as situações. Dessa forma, para se compreender melhor as técnicas que serão apresentadas, discute-se inicialmente os tipos de singularidades envolvidas nas representações integrais. Assim, de acordo com a natureza do núcleo e a relativa posição do ponto fonte as integrais da formulação dos elementos de contorno podem ser definidas como:

⇒ *Integrais quasi-singulares*: Este é o caso das integrais cujo núcleo possui o termo singular, porém como o ponto fonte está localizado fora do elemento (ou célula) a singularidade não se torna presente. Assim, para efetuar este tipo de integral, basta apenas aplicar diretamente um procedimento de integração numérica. Em algumas situações quando o ponto fonte localiza-se próximo ao elemento (ou célula) é necessário fazer-se uso de sub-elementação.

⇒ *Integrais com singularidade fraca*: Estas integrais são aquelas onde o ponto fonte pertence ao elemento (ou célula) e cuja singularidade é eliminada quando escritas nas coordenadas polares. Integrais de domínio nos problemas bidimensionais (célula 2D) e integrais de contorno nos casos 3D (elemento de contorno 3D) cujos núcleos apresentem singularidade do tipo $1/r$ se enquadram nesta definição. Também, integrais de domínio em problemas 3D

(célula 3D) cujos núcleos apresentem singularidade do tipo $1/r^2$, são consideradas integrais com singularidade fraca. A forma usual de se tratar estas integrais é através da técnica de transformação de coordenadas, que será vista posteriormente.

⇒ *Integrais com singularidade forte*: Este termo é utilizado para definir as integrais no qual o ponto fonte pertence ao elemento (ou célula) que será integrado e cujo grau de singularidade é maior que aqueles respectivos apresentados pelas integrais com singularidade fraca. Integrais de domínio nos problemas bidimensionais (célula 2D) e integrais de contorno nos casos 3D (elemento de contorno 3D) cujos núcleos apresentem singularidade do tipo $1/r^2$ são consideradas integrais com singularidade forte. Enquadram-se também nesta definição, integrais de domínio em problemas 3D (célula 3D) cujos núcleos apresentem singularidade do tipo $1/r^3$. Existem várias formas de se tratar este tipo de integral singular, algumas delas são específicas para um determinado tipo de elemento (ou célula) outras são obtidas de forma semi-analítica. O procedimento adotada para abordar este problema específico faz uso da técnica de subtração de singularidade que será melhor esclarecida no item D.4.

⇒ *Integrais hiper-singulares*: Estas são as integrais com grau de singularidade mais alto presente nas tradicionais formulações dos elementos de contorno. Este problema aparece, por exemplo, nas situações onde se deseja obter as deformações e/ou tensões no contorno através de representações integrais. Nessas circunstâncias, algumas integrais de contorno apresentam o termo hiper-singular. As integrais de contorno nos problemas bidimensionais que possuem singularidade do tipo $1/r^2$ e as integrais de contorno em problema 3D que possuem singularidade do tipo $1/r^3$ são consideradas integrais hiper-singulares. Para algumas situações específicas, por exemplo, obtenção de tensões ou deformações nos pontos localizados em um contorno suave, essas integrais podem ser determinadas fazendo-se uso da técnica de subtração de singularidade. Como neste trabalho as tensões no contorno são determinadas por um caminho alternativo, evitando as integrais hiper-singulares, estas não serão aqui consideradas.

D.2 TÉCNICA PARA INTEGRAIS QUASI-SINGULARES

Pode-se utilizar um procedimento bastante eficiente para obter as integrais quasi-singulares. A abordagem utilizada é bastante semelhante à técnica de transformação de coordenadas utilizada para eliminar a singularidade em integrais com singularidade fraca. A diferença é que nos problemas de singularidade fraca a sub-elementação em r não é

necessária, pois a singularidade em r foi eliminada, sendo apenas necessário a sub-elementação nas coordenadas polares restantes.

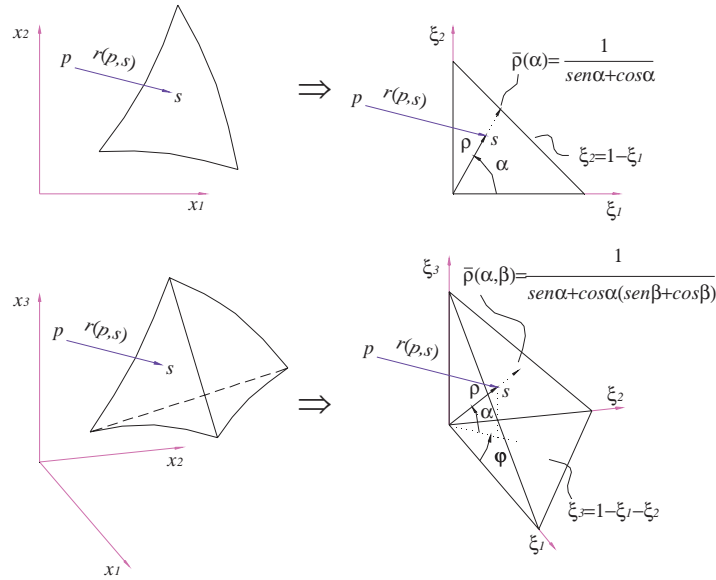


FIGURA D1 – Sistemas de coordenadas.

Porém, para o problema quasi-singular, onde o ponto fonte não pertence ao elemento a ser integrado, é importante fazer-se uso de sub-elementação em r , pois em situações onde o ponto fonte está muito próximo do elemento, pode ocorrer que apenas a integração com pontos de Gauss em r , sem sub-elementação, não seja suficientemente precisa. Nesta situação crítica, este procedimento é mais indicado que os usualmente empregados. Para se desenvolver as expressões numéricas da integral quase singular com sub-elementação nas coordenadas polares é necessário escreve-la inicialmente no sistema de coordenadas adimensionais (Fig.D1), pois neste sistema é mais fácil determinar os limites de integração. Assim, as integrais sobre os elementos de contorno Γ_e e sobre as células Ω_e podem ser expressas como:

Célula 2D

$$\int_{\Omega_e} f(p, s)\phi(s)d\Omega = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} f(p, s(\xi_1, \xi_2))\phi(\xi_1, \xi_2)J(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2 \tag{D.1a}$$

Elemento de Contorno 3D

$$\int_{\Gamma_e} f(p, s)\phi(s)d\Gamma = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} f(p, s(\xi_1, \xi_2))\phi(\xi_1, \xi_2)J(\xi_1, \xi_2)d\xi_1 d\xi_2 \tag{D.1b}$$

Célula 3D

$$\int_{\Omega_e} f(p, s)\phi(s)d\Omega = \int_{\xi_1} \int_{\xi_2} \int_{\xi_3} f(p, s(\xi_1, \xi_2, \xi_3))\phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)J(\xi_1, \xi_2, \xi_3)d\xi_1d\xi_2d\xi_3 \quad (D.1c)$$

onde f é uma função que depende da posição do ponto fonte p , do ponto de campo s e da distância r entre estes pontos. Os termos ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 são as coordenadas adimensionais e J é o determinante da matriz jacobiana que relaciona as coordenadas cartesianas com as coordenadas adimensionais. Para elementos de contorno 3D (ou células 2D) triangulares de três nós, J é definido como duas vezes a área do elemento (ou da célula). Já para a célula tetraédrica de quatro nós J é seis vezes o volume do tetraedro. Porém, para elementos cuja geometria é representada por funções de grau maior que as lineares J varia no elemento (ou célula) e tem que ser determinado ponto a ponto.

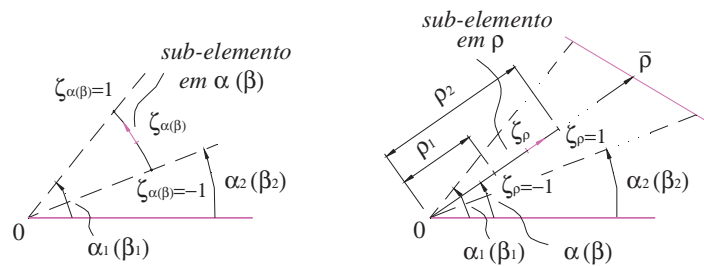


FIGURA D.2 – Sub-elementos nas coordenadas polares.

Ressalta-se que as expressões para a célula 2D e para o elemento de contorno 3D serão idênticas, a não ser pelo cálculo da função f . Sendo assim, adotaremos uma mesma notação para ambos os casos. Agora, escrevem-se as integrais no sistema de coordenadas polares (Fig.D1), onde se deseja efetuar a sub-elementação. Note que as coordenadas polares são definidas no sistema adimensional ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 com limites melhores definidos do que aqueles apresentados no sistema cartesiano.

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(p, s(\rho, \alpha))\phi(\rho, \alpha)J(\rho, \alpha)\rho d\rho d\alpha \quad (D.2a)$$

Célula 3D

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(p, s(\rho, \alpha, \beta))\phi(\rho, \alpha, \beta)J(\rho, \alpha, \beta)\rho^2 \cos(\alpha)d\rho d\alpha d\beta \quad (D.2b)$$

Note que essas expressões são aplicadas diretamente em elementos ou células triangulares, tetraédricas e pentaédricas, pois nestes os limites ficam bem definidos. Porém, elementos ou células com geometrias diferentes destas, por exemplo: geometrias quadrangulares e hexaédricas, estes limites não são tão bem definidos. Felizmente, pode-se contornar esta dificuldade de forma bastante simples, basta apenas dividir os elementos (ou células), no sistema de coordenadas adimensional ξ_i , em n triângulos ou tetraedros (ou pentaedros), efetuando-se a integral em cada um deles e somando-se estas para se obter a integral sobre todo elemento (ou célula). Dessa forma, para essas geometrias as integrais (D.2) teriam de estar acrescidas de uma somatória que varia de um até o número de triângulos, tetraedros ou pentaedros utilizados na discretização.

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\sum_{i=1}^n \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(p, s(\rho, \alpha)) \phi(\rho, \alpha) J(\rho, \alpha) \rho d\rho d\alpha \quad (D.3a)$$

Célula 3D

$$\sum_{i=1}^n \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} f(p, s(\rho, \alpha, \beta)) \phi(\rho, \alpha, \beta) J(\rho, \alpha, \beta) \rho^2 \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta \quad (D.3b)$$

Observe que agora os limites das integrais são definidos para cada triângulo, tetraedro ou pentaedro utilizado na representação da geometria. A sub-elementação nas coordenadas polares ρ , α e β fica caracterizada subdividindo-se os respectivos limites (Fig.2), de maneira que as integrais (D.3) ficam escritas como:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{k=1}^{n_\rho} \int_{\alpha_1^j}^{\alpha_2^j} \int_{\rho_1^k}^{\rho_2^k} f(p, s(\rho, \alpha)) \phi(\rho, \alpha) J(\rho, \alpha) \rho d\rho d\alpha \quad (D.4a)$$

Célula 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{n_\beta} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{k=1}^{n_\rho} \int_{\beta_1^l}^{\beta_2^l} \int_{\alpha_1^j}^{\alpha_2^j} \int_{\rho_1^k}^{\rho_2^k} f(p, s(\rho, \alpha, \beta)) \phi(\rho, \alpha, \beta) J(\rho, \alpha, \beta) \rho^2 \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta \quad (D.4b)$$

sendo n_β , n_α e n_ρ o número de sub-elementos definidos na direção das respectivas coordenadas polares β , α e ρ . Para executar as integrações numéricas utilizando-se as fórmulas da quadratura unidimensional de Gauss nas direções das coordenadas polares, é necessário escrever as integrais nas coordenadas adimensionais ζ_α , ζ_β e ζ_ρ (variação de -1 a $+1$) referentes respectivamente as coordenadas polares α , β e ρ . As funções de forma que definem a relação entre elas são lineares e iguais aquelas obtidas para o elemento finito unidimensional de dois nós, ou seja,

$$\rho(\zeta_\rho) = \frac{1}{2}(1 - \zeta_\rho)\rho_1^k + \frac{1}{2}(1 + \zeta_\rho)\rho_2^k \quad (\text{D.5a})$$

$$\alpha(\zeta_\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \zeta_\alpha)\alpha_1^j + \frac{1}{2}(1 + \zeta_\alpha)\alpha_2^j \quad (\text{D.5b})$$

$$\beta(\zeta_\beta) = \frac{1}{2}(1 - \zeta_\beta)\beta_1^l + \frac{1}{2}(1 + \zeta_\beta)\beta_2^l \quad (\text{D.5c})$$

onde ρ_1^k , α_1^j e β_1^l são os limites iniciais e ρ_2^k , α_2^j e β_2^l os limites finais ambos definidos para os sub-elementos k , j e l referentes respectivamente a direção das coordenadas polares ρ , α e β . Determinada as funções, pode-se obter os jacobianos que relacionam as coordenadas polares ρ , α e β com suas respectivas coordenadas adimensionais ζ_ρ , ζ_α e ζ_β .

$$J_\rho^k = \frac{\partial \rho(\zeta_\rho)}{\partial \zeta_\rho} = \frac{1}{2}(\rho_2^k - \rho_1^k) \quad (\text{D.6a})$$

$$J_\alpha^j = \frac{\partial \alpha(\zeta_\alpha)}{\partial \zeta_\alpha} = \frac{1}{2}(\alpha_2^j - \alpha_1^j) \quad (\text{D.6b})$$

$$J_\beta^l = \frac{\partial \beta(\zeta_\beta)}{\partial \zeta_\beta} = \frac{1}{2}(\beta_2^l - \beta_1^l) \quad (\text{D.6c})$$

Assim, obtidas as relações (D.5) e (D.6), pode-se escrever a expressão numérica das integrais (D.4) utilizando a quadratura unidimensional de Gauss.

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{k=1}^{n_\rho} \sum_{l=1}^{\bar{n}_\alpha} \sum_{m=1}^{\bar{n}_\rho} f(p, s(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m)) \phi(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m) J(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m) J_\alpha^j J_\rho^k \rho(\zeta_\rho^m) w_\alpha^l w_\rho^m \quad (\text{D.7a})$$

Célula 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{n_\beta} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{k=1}^{n_\rho} \sum_{m=1}^{\bar{n}_\beta} \sum_{t=1}^{\bar{n}_\alpha} \sum_{h=1}^{\bar{n}_\rho} \left[f(p, s(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m)) \phi(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) J(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) J_\rho^k J_\alpha^j J_\beta^l \right. \\ \left. \rho^2 (\zeta_\rho^h) \cos(\alpha(\zeta_\alpha^t)) w_\rho^h w_\alpha^t w_\beta^m \right] \tag{D.7b}$$

onde \bar{n}_ρ , \bar{n}_α e \bar{n}_β é o número de pontos de Gauss referente as direções ρ , α e β . Os termos w_ρ^h , w_α^t e w_β^m são os pesos dos respectivos pontos de Gauss h , t e m referentes as direções ρ , α e β . Logo, fazendo-se uso das expressões (D.7a) e (D.7b) pode-se determinar as integrais quasi-singulares. Note que é possível ainda realizar a sub-elementação progressiva, para isto basta apenas adotar uma relação que defina os progressivos tamanhos dos sub-elementos. Assim, é possível definir sub-elementos menores nas regiões próximas do ponto fonte, possibilitando uma melhor integração.

D.3 TÉCNICA PARA INTEGRAIS COM SINGULARIDADE FRACA

A técnica mais utilizada para se determinar as integrais com singularidade fraca é a técnica de transformação de coordenada. O objetivo desta é escrever a integral em um outro sistema de coordenada de tal forma que o jacobiano da transformação entre o sistema inicial e o novo sistema cancele o termo singular. Basicamente, consiste em escrever as integrais singulares no sistema de coordenadas polares como realizado para as integrais quasi-singulares. A diferença é que a sub-elementação em r não é mais necessária, pois a singularidade em r é eliminada pelo jacobiano da transformação. Note que agora a integral em ρ possui um limite inicial fixo e igual a zero e um limite final $\bar{\rho}$ que depende das outras coordenadas polares (Fig.D3).

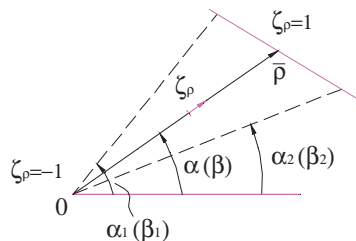


FIGURA D.3 – Limite inicial e final da integração em ρ .

Consequentemente, as integrais (D.4) para a nova situação ficam escritas como:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_\alpha} \int_{\alpha_1^j}^{\alpha_2^j} \int_0^{\bar{\rho}(\alpha)} f(p, s(\rho, \alpha)) \phi(\rho, \alpha) J(\rho, \alpha) \rho d\rho d\alpha \quad (\text{D.8a})$$

Célula 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{n_\beta} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \int_{\beta_1^l}^{\beta_2^l} \int_{\alpha_1^j}^{\alpha_2^j} \int_0^{\bar{\rho}(\alpha, \beta)} f(p, s(\rho, \alpha, \beta)) \phi(\rho, \alpha, \beta) J(\rho, \alpha, \beta) \rho^2 \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta \quad (\text{D.8b})$$

Note que as integrais são regulares, pois a divisão do jacobiano da transformação (entre as coordenadas dimensionais ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 e as polares ρ , α e β) com o termo singular presente na função f , resulta um número finito. Poderia-se enxergar mais facilmente o cancelamento do termo singular se nas integrais (D.8) não fosse utilizada a transformação para o sistema de coordenadas dimensionais ξ_1 , ξ_2 e ξ_3 , assim o jacobiano seria uma função de r e não de ρ , conseqüentemente o termo singular seria cancelado diretamente com o jacobiano, pois nas soluções fundamentais (ou seja, na função f) o termo singular é escrito em função de r . Neste ponto, torna-se necessário escrever uma nova relação para $\rho(\zeta_\rho)$, pois a integral em ρ possui agora novos limites.

$$\rho(\zeta_\rho) = \frac{1}{2}(1 + \zeta_\rho)\bar{\rho} \quad (\text{D.9})$$

De maneira que o jacobiano J_ρ torna-se:

$$J_\rho = \frac{\partial \rho(\zeta_\rho)}{\partial \zeta_\rho} = \frac{1}{2}\bar{\rho} \quad (\text{D.10})$$

Logo, as expressões para integração numérica fazendo-se uso da quadratura unidimensional de Gauss para evoluir as integrais com singularidade fraca são:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{l=1}^{\bar{n}_\alpha} \sum_{m=1}^{\bar{n}_\rho} f(p, s(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m)) \phi(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m) J(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m) J_\alpha^l J_\rho^m (\bar{\rho}(\alpha)) \rho(\zeta_\rho^m) w_\alpha^l w_\rho^m \quad (\text{D.11a})$$

Célula 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{n_\beta} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{m=1}^{\bar{n}_\beta} \sum_{t=1}^{\bar{n}_\alpha} \sum_{h=1}^{\bar{n}_\rho} \left[f(p, s(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m)) \phi(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) J(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) J_\rho(\bar{\rho}(\alpha, \beta)) J_\alpha^j J_\beta^l \right. \\ \left. \rho^2(\zeta_\rho^h) \cos(\alpha(\zeta_\alpha^t)) w_\rho^h w_\alpha^t w_\beta^m \right] \quad (D.11b)$$

Observe que a somatória referente à sub-elementação em ρ foi eliminada. Esta não é a única diferença entre expressões (D.11) e (D.7), note que a origem da coordenada ρ (raio nas coordenadas adimensionais ξ_1, ξ_2 e ξ_3) coincide com a origem de r (raio nas coordenadas cartesianas x, y e z) possibilitando o cancelamento do termo singular.

D.4 TÉCNICA PARA INTEGRAIS COM SINGULARIDADE FORTE

As integrais com singularidade forte serão evoluídas fazendo-se uso da técnica de subtração de singularidade desenvolvida por GUIGGIANI *et al.*(1991). Esta forma de tratar o problema é mais geral, podendo ser aplicada para qualquer tipo de elemento ou célula, o que não ocorre com outras técnicas específicas para certos elementos (ou células) com uma determinada geometria. A técnica é baseada na expansão em série de Taylor das coordenadas cartesianas, funções de forma e do jacobiano da transformação, ALIABADI *et al.*(1985). Nesta técnica a parte singular presente no núcleo da integral é subtraída e evoluída analiticamente ou semi-analiticamente.

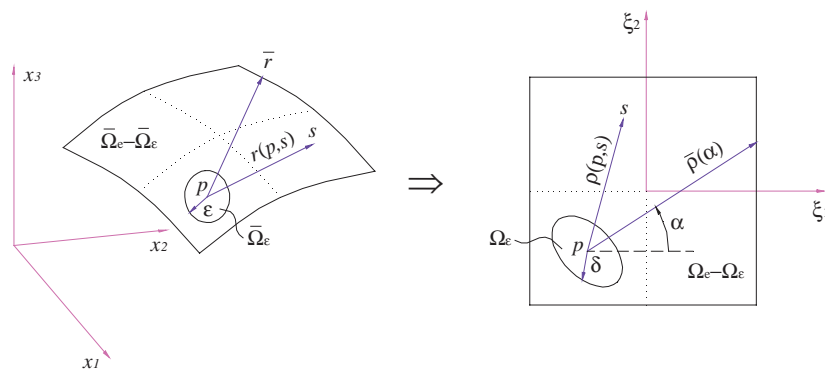


FIGURA D.4 – Ponto singular caracterizado no domínio real e adimensional.

A aplicação pura da técnica de transformação de coordenadas para resolver o problema de singularidade apresentado por este tipo de integral, não é suficiente, pois as

integrais agora possuem um grau de singularidade maior que aqueles das integrais com singularidade fraca, de maneira que, as integrais (D.2) ficam agora escritas como:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon - \Omega_\varepsilon} f(\rho, \alpha) \phi(\rho, \alpha) J(\rho, \alpha) \rho d\rho d\alpha \quad (\text{D.12a})$$

Célula 3D

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon - \Omega_\varepsilon} f(\rho, \alpha, \beta) \phi(\rho, \alpha, \beta) J(\rho, \alpha, \beta) \rho^2 \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta \quad (\text{D.12b})$$

A técnica de subtração de singularidade consiste basicamente em obter um integrando com o mesmo grau de singularidade apresentado em (D.12), porém em uma forma mais simples. Este integrando aproximado deve ser somado e subtraído na integral original resultando em uma integral regular e uma nova integral com o mesmo grau de singularidade inicial, só que em uma forma simples, possível de ser evoluída analiticamente ou semi-analiticamente. Para se determinar um integrando aproximado que possua a mesma ordem de singularidade, deve-se escrever as coordenadas cartesianas através de uma aproximação de Taylor de primeira ordem nas coordenadas adimensionais envolta do ponto singular $x_i(\xi_j^0) = x_i^0$.

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$x_i(\xi_1, \xi_2) \cong x_i(\xi_1^0, \xi_2^0) + \frac{\partial x_i(\xi_1^0, \xi_2^0)}{\partial \xi_1} (\xi_1 - \xi_1^0) + \frac{\partial x_i(\xi_1^0, \xi_2^0)}{\partial \xi_2} (\xi_2 - \xi_2^0) \quad (\text{D.12a})$$

Célula 3D

$$x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \cong x_i(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0) + \frac{\partial x_i(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)}{\partial \xi_1} (\xi_1 - \xi_1^0) + \frac{\partial x_i(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)}{\partial \xi_2} (\xi_2 - \xi_2^0) + \frac{\partial x_i(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)}{\partial \xi_3} (\xi_3 - \xi_3^0) \quad (\text{D.12b})$$

É importante ressaltar que se as funções de forma utilizadas para descrever a geometria do elemento ou da célula forem lineares a aproximação em primeira ordem das coordenadas cartesianas são as próprias coordenadas. Observando a figura D.1 pode-se concluir que:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\xi_1 - \xi_1^0 = \rho \cos(\alpha) \quad (\text{D.13a})$$

$$\xi_2 - \xi_2^0 = \rho \text{sen}(\alpha) \quad (\text{D.13b})$$

Célula 3D

$$\xi_1 - \xi_1^0 = \rho \cos(\alpha) \cos(\beta) \quad (\text{D.13c})$$

$$\xi_2 - \xi_2^0 = \rho \cos(\alpha) \text{sen}(\beta) \quad (\text{D.13d})$$

$$\xi_3 - \xi_3^0 = \rho \text{sen}(\alpha) \quad (\text{D.13e})$$

Para simplificar as expressões escreve-se derivadas parciais apresentadas nas expressões (D.12) como:

$$\frac{\partial x_i(\xi_k^0)}{\partial \xi_j} = x_{i,j}^0 \quad (\text{D.14})$$

Assim, aplicando as expressões (D.13) e (D.14) em (D.12), obtém-se:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$x_i(\xi_1, \xi_2) = x_i^0 + x_{i,1}^0 \rho \cos(\alpha) + x_{i,2}^0 \rho \text{sen}(\alpha) \quad (\text{D.15a})$$

Célula 3D

$$x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = x_i^0 + x_{i,1}^0 \rho \cos(\alpha) \cos(\beta) + x_{i,2}^0 \rho \cos(\alpha) \text{sen}(\beta) + x_{i,3}^0 \rho \text{sen}(\alpha) \quad (\text{D.15b})$$

Encontrada a aproximação de primeira ordem para as coordenadas cartesianas, parte-se para a obtenção das componentes do raio.

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$r_i = x_i(\xi_1, \xi_2) - x_i^0 = \rho(x_{i,1}^0 \cos(\alpha) + x_{i,2}^0 \text{sen}(\alpha)) = \rho a_i(\alpha) \quad (\text{D.16a})$$

Célula 3D

$$r_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) - x_i^0 = \rho(x_{i,1}^0 \cos(\alpha) \cos(\beta) + x_{i,2}^0 \cos(\alpha) \text{sen}(\beta) + x_{i,3}^0 \text{sen}(\alpha)) = \rho a_i(\alpha, \beta) \quad (\text{D.16b})$$

Consequentemente, o raio fica escrito como:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \rho \sqrt{a_1^2(\alpha) + a_2^2(\alpha)} = \rho A(\alpha) \quad (\text{D.17a})$$

Célula 3D

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + r_3^2} = \rho \sqrt{a_1^2(\alpha, \beta) + a_2^2(\alpha, \beta) + a_3^2(\alpha, \beta)} = \rho A(\alpha, \beta) \quad (\text{D.17b})$$

Logo, a derivada do raio com relação às coordenadas cartesianas fica escrita como:

$$r_{,i} = \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{r_i}{r} = \frac{a_i}{A} \quad (\text{D.18})$$

De posse das expressões (D.17) e (D.18) é possível escrever uma função com o mesmo grau de singularidade da solução fundamental, só que em uma forma mais simples que aquela presente na integral que queremos determinar. Para isto basta apenas substituir as expressões (D.17) e (D.18) na expressão original da solução fundamental, resultando em uma função \bar{f} , que pode também ser escrita como:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\bar{f}(\rho, \alpha) = \frac{1}{\rho^2} \psi(\alpha) \quad (\text{D.19a})$$

Célula 3D

$$\bar{f}(\rho, \alpha, \beta) = \frac{1}{\rho^3} \psi(\alpha, \beta) \quad (\text{D.19b})$$

Como mencionado anteriormente, caso as funções de forma utilizadas para descrever a geometria do elemento ou da célula forem lineares a aproximação em primeira ordem das coordenadas cartesianas são as próprias coordenada, conseqüentemente a função \bar{f} é a própria f definida em (D.12). Por fim, deve-se expandir em série de Taylor as funções de forma e o determinante da matriz jacobiana, desprezando-se os termos lineares e de alta ordem.

$$\phi(\xi_i) \equiv \phi(\xi_i^0) + \frac{\partial \phi(\xi_i^0)}{\partial \xi_j} (\xi_j - \xi_j^0) \dots \equiv \phi(\xi_i^0) = \phi_0 \quad (\text{D.20a})$$

$$J(\xi_i) \equiv J(\xi_i^0) + \frac{\partial J(\xi_i^0)}{\partial \xi_j} (\xi_j - \xi_j^0) \dots \equiv J(\xi_i^0) = J_0 \quad (\text{D.20b})$$

De posse das equações (D.19) e (D.20) pode-se escrever o integrando aproximado.

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\bar{f}(\rho, \alpha) \phi(\xi_1^0, \xi_2^0) J(\xi_1^0, \xi_2^0) = \frac{1}{\rho^2} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 \quad (\text{D.21a})$$

Célula 3D

$$\bar{f}(\rho, \alpha, \beta) \phi(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0) J(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0) = \frac{1}{\rho^3} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \quad (\text{D.21b})$$

Obtido o integrando aproximado deve-se agora somá-lo e subtraí-lo nas integrais (D.12), de maneira que estas integrais ficam escritas como:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\int_{\Omega_e} \left(f(\rho, \alpha) \rho \phi(\rho, \alpha) J(\rho, \alpha) - \frac{1}{\rho} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 \right) d\rho d\alpha + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_e - \Omega_\varepsilon} \frac{1}{\rho} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 d\rho d\alpha \quad (\text{D.22a})$$

Célula 3D

$$\int_{\Omega_e} \left(f(\rho, \alpha, \beta) \rho^2 \phi(\rho, \alpha, \beta) J(\rho, \alpha, \beta) - \frac{1}{\rho} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \right) \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_e - \Omega_\varepsilon} \frac{1}{\rho} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta \quad (\text{D.22b})$$

O integrando aproximado possui o mesmo grau de singularidade que o integrando original, de maneira que nas proximidades do ponto singular ambos possuem a mesma assíntota (ver figura D.5). O comportamento do integrando aproximado nas vizinhanças da singularidade torna possível a regularização do integrando presente na primeira integral em (D.22). Logo, pode-se concluir que a primeira integral nas expressões (D.22) é regular, de maneira que o limite nesta integral não precisa ser mais aplicado. Esta integral pode ser determinada utilizando-se diretamente um procedimento de integração numérica.

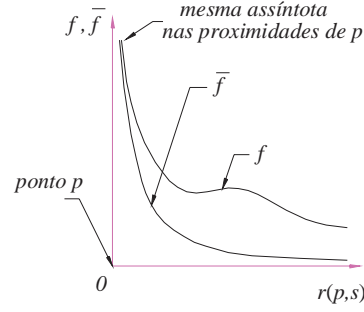


FIGURA D.5 – Representação do integrando original e aproximado.

A segunda integral possui ainda singularidade, porém esta é de uma forma mais simples que a integral original e pode ser determinada semi-analiticamente. Assim, desenvolvendo a integração em ρ da segunda integral das expressões (D.22), encontra-se:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon - \Omega_\varepsilon} \frac{1}{\rho} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 d\rho d\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\delta(\varepsilon, \alpha)}^{\bar{\rho}(\alpha)} \frac{1}{\rho} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 d\rho d\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 \ln|\bar{\rho}(\alpha)| d\alpha - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 \ln|\delta(\varepsilon, \alpha)| d\alpha \tag{D.23a}$$

Célula 3D

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon - \Omega_\varepsilon} \frac{1}{\rho} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\delta(\varepsilon, \alpha, \beta)}^{\bar{\rho}(\alpha, \beta)} \frac{1}{\rho} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta = \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \cos(\alpha) \ln|\bar{\rho}(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \cos(\alpha) \ln|\delta(\varepsilon, \alpha, \beta)| d\alpha d\beta \tag{D.23b}$$

onde $\bar{\rho}$ é a distância “ ρ ” da origem do sistema polar à fronteira superior do domínio em consideração (Fig.D.4). O termo δ é o limite inicial ε transformado para o sistema adimensional, ou seja, é a distância “ ρ ” da origem do sistema polar à fronteira inferior do domínio analisado. Este pode ser escrito utilizando as expressões (D.17), de maneira que:

$$r = \rho A \Rightarrow \varepsilon = \delta A \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{A} \tag{D.24}$$

Substituindo a equação (D.24) nas integrais em (D.23), encontra-se:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 \ln|\bar{\rho}(\alpha)A(\alpha)| d\alpha - \phi_0 J_0 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln|\varepsilon| \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha) d\alpha \quad (\text{D.25a})$$

Célula 3D

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \cos(\alpha) \ln|\bar{\rho}(\alpha, \beta)A(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta - \phi_0 J_0 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln|\varepsilon| \int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha, \beta) \cos(\alpha) d\alpha d\beta \quad (\text{D.25b})$$

Pode-se demonstrar, com um certo esforço algébrico, que a última integral nas expressões (D.25), para as situações específicas onde o ponto fonte está localizado no interior do corpo ou em um contorno suave, são nulas, ou seja,

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\int_0^{2\pi} \psi(\alpha) d\alpha = 0 \quad (\text{D.26a})$$

Célula 3D

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \psi(\alpha, \beta) \cos(\alpha) d\alpha d\beta = 0 \quad (\text{D.26b})$$

Caso o ponto fonte esteja localizado no nó do elemento ou da célula, as integrais (D.26) representam um somatório de integrais sobre cada elemento (ou célula) que estejam conectados ao ponto singular. Demonstrações, para casos específicos, das afirmações (D.26) podem ser encontrados em CRUSE & POLCH(1986) para a situação de ponto singular interno e em LEITÃO & ALIABADI(1995) para pontos em contorno suave. Entretanto, sobre o cancelamento da última integral em (D.25) referente ao elemento de contorno, quando o ponto fonte localiza-se em um contorno não suave, nada se tem mencionado. Felizmente, nesta situação pôde-se verificar numericamente que o termo se cancelava quando o ponto fonte localizava-se em cantos e arestas. Sendo assim, as equações (D.22) podem ser escritas como:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^{\bar{\rho}(\alpha)} \left(f(\rho, \alpha) \rho \phi(\rho, \alpha) J(\rho, \alpha) - \frac{1}{\rho} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 \right) d\rho d\alpha + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha) \phi_0 J_0 \ln|\bar{\rho}(\alpha)A(\alpha)| d\alpha \quad (\text{D.27a})$$

Célula 3D

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_0^{\bar{\rho}(\alpha, \beta)} \left(f(\rho, \alpha, \beta) \rho^2 \phi(\rho, \alpha, \beta) J(\rho, \alpha, \beta) - \frac{1}{\rho} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \right) \cos(\alpha) d\rho d\alpha d\beta +$$

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \psi(\alpha, \beta) \phi_0 J_0 \cos(\alpha) \ln|\bar{\rho}(\alpha, \beta) A(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta \quad (\text{D.27b})$$

Agora as integrais são regulares e podem ser numericamente evoluídas fazendo-se uso da quadratura de Gauss. Como a singularidade foi eliminada, aplica-se a sub-elementação apenas na direção das coordenadas polares α e β . Logo, a expressão numérica das equações (D.27) é:

Célula 2D e Elemento de Contorno 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{l=1}^{\bar{n}_\alpha} \sum_{m=1}^{\bar{n}_\rho} \left(f(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m) \rho(\zeta_\rho^m) \phi(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m) J(\zeta_\alpha^l, \zeta_\rho^m) - \frac{1}{\rho(\zeta_\rho^m)} \psi(\zeta_\alpha^l) \phi_0 J_0 \right) J_\rho(\bar{\rho}(\zeta_\alpha^l)) J_\alpha^j w_\rho^m w_\alpha^l +$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{l=1}^{\bar{n}_\alpha} \psi(\zeta_\alpha^l) \phi_0 J_0 \ln|\bar{\rho}(\zeta_\alpha^l) A(\zeta_\alpha^l)| J_\rho(\bar{\rho}(\zeta_\alpha^l)) J_\alpha^j w_\alpha^l \quad (\text{D.11a})$$

Célula 3D

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{n_\beta} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{m=1}^{\bar{n}_\beta} \sum_{t=1}^{\bar{n}_\alpha} \sum_{h=1}^{\bar{n}_\rho} \left[\left(f(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) \rho^2(\zeta_\rho^h) \phi(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) J(\zeta_\rho^h, \zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) - \frac{1}{\rho(\zeta_\rho^h)} \psi(\zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) \phi_0 J_0 \right) \cos(\alpha(\zeta_\alpha^t)) J_\rho(\bar{\rho}(\zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m)) J_\alpha^j J_\beta^l w_\rho^h w_\alpha^t w_\beta^m \right] +$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^{n_\beta} \sum_{j=1}^{n_\alpha} \sum_{m=1}^{\bar{n}_\beta} \sum_{t=1}^{\bar{n}_\alpha} \psi(\zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) \phi_0 J_0 \ln|\bar{\rho}(\zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m) A(\zeta_\alpha^t, \zeta_\beta^m)| \cos(\alpha(\zeta_\alpha^t)) J_\alpha^j J_\beta^l w_\alpha^t w_\beta^m \quad (\text{D.27b})$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLEN, HG (1969). *Analysis and design of structural sandwich panels*, Pergamon Press Oxford.
- ALIABADI, M.H.; HALL, W.S.; PHEMISTER, T.G. (1985). Taylor expansions for singular kernels in the boundary element method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v. 21, p. 2221-2236.
- ARGYRIS, J.H.; DOLTSINIS, J.ST.; WILLAM, K.J. (1979). New developments in the inelastic analysis of quasistatic and dynamic problems. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.14, pp.1813-1850.
- ARGYRIS, J.H.; KELSET, S. (1960) *Energy theorems and structural analysis*. London, Butterworths.
- ATLURI, S.N.; GRANNELL, J.J. (1978). Boundary element methods (BEM) and combination of BEM-FEM. Atlanta, Center for the Advancement of Computational Mechanics, Georgia Institute of Technology. (Report n. GIT-ESM-SA-78-16)
- BATHE, K.J. (1996) *Finite element procedure*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, USA.
- BATOZ, J.L.; BATHE, K.J.; HO, L.W. (1980). A study of three-node triangular plate bending elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v.15, p.1771-1812.

- BEER, G.; WATSON, J. O. (1992). *Introduction to Finite and Boundary Element Methods for Engineers*. John Wiley & Sons, New York.
- BERGAN, P.G.; FELIPPA, C.A. (1985). A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Comp. Meths. in Appl. Mech. Eng.*, v.50, p.25-69.
- BONNET, M.; MUKHERJEE, S. (1996). Implicit BEM formulations for usual and sensitivity problems in elastoplasticity using the consistent tangent operator concept. *Int. J. Solids Structures*, v.33, n.30, p.4461-4480.
- BREBBIA, C.A.; DOMINGUEZ, J. (1992). *Boundary elements: an introductory course*. 2.ed. McGraw-Hill Book Company, Great Britain.
- BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C. (1984). *Boundary element techniques: Theory and applications in engineering*. Springer-Verlag, Berlin.
- BUI, H.D. (1978). Some remarks about the formulation three-dimensional thermoelastoplastic problems by integral equations, *Int. J. Solids Structures*, v.14, p.935-939.
- CHEN, W.H.; CHANG, C.M.; YEH, J.T. (1993). An incremental relaxation finite element analysis of viscoelastic problems with contact and friction. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng*, v.109, p.315-319.
- CARRER, J.A.M.; TELLES, J.C.F. (1991). *Transient dynamic elastoplastic analysis by the boundary element method*. In: *Boundary Element Technology VI, Proceedings*, Ed. C.A. Brebbia. CMP, UK, p.265-277.
- CISILINO, A.P. (1997). *Boundary element formulations for 3D analysis of fatigue crack growth in linear and non-linear fracture mechanics*. UK, 234p. Thesis (Doctor of Philosophy) – Wessex Institute of Technology, University of Wales.
- CLOUGH, R.W. (1960) *The finite element in plane stress analysis*. In: *Asce conf. on electronic comp.*, 2nd, Pittsburg.

- CLOUGH, R.W.; PENZIEN, J. (1975). *Dynamics of structures*. McGraw-Hill.
- CODA, H.B. (1993). *Análise tridimensional transiente de estruturas pela combinação do entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos*. São Carlos. 202p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. (1995). Three dimensional transient BEM analysis. *Computer of Structures*, v. 56, n. 5, p.751-768, Pergamon.
- CODA, H.B.; VENTURINI, W.C.; ALIABADI M.H. (1996). *A simple coupling of 2D BEM and FEM bar model applied to mass matrix elastodynamic analysis*. In: Boundary Elements XVIII, Proceedings, Eds Brebbia e al., CMP, UK, p.363-372.
- CODA, H.B.; VENTURINI, W.C.; ALIABADI M.H. (1997). *Consideração do amortecimento viscoso na análise dinâmica através da combinação entre o MEC e o MEF*. XVIII Iberian Latin-American Congresso on Computational Methods in Engineering - XVIII CILAMCE, Brasília, v.2, p.750-766.
- CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. (1998). *Boundary Element Dynamic non-linear Stress Analysis by Mass Matrix Approach*, In: Boundary Elements XX, Computational Mechanics Publications, Southampton, p. 607-616.
- CODA, H.B. (2000). *Contribuição à análise dinâmica transiente de meios contínuos pelo método dos elementos de contorno*. São Carlos. 381p. Tese (Livre-Docência) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CRISFIELD, M.A. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. v.1, England, John Wiley & Sons.
- CRUSE, T.A.; POLCH; E.Z. (1986). Application of an elastoplastic boundary-element method to some fracture-mechanics problems. *Eng. Fracture Mech.*, v. 23, p. 1085-1096.

- ERINGEN, A.C.; SUHUBI, E.S. (1974) *Elastodynamics: finite motions*. New York/London, Academic Press, v.1 and v.2.
- FEENSTRA, P.H.; BORST, R. de (1996). A composite plasticity model for concrete. *Int. J. Solids Structures*, v.33, pp. 707-703.
- FREDHOLM, I. (1903). Sur une classe d'equations fonctionelles. *Acta Math.*, v.27, p.365-390.
- GOMES, R.A. (1999). *Análise da interação maciço-suporte de túneis considerando o comportamento dependente do tempo*. São Carlos. 100p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- GUIGGIANI, M.; KRISHNASAMY, G.; RIZZO, F.J.; RUDOLPHI, T.J. (1991). Hypersingular boundary integral equations. A new approach to their numerical treatment. In: MORINO, L.; PIVA, R. *Boundary integral methods, theory and applications..* Springer-Verlag, Berlin, p. 211-220.
- GUIGGIANI, M.; KRISHNASAMY, G.; RIZZO, F.J.; RUDOLPHI, T.J. (1992). A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *ASME J. Appl. Mech.*, 59, p. 604-614.
- GUIGGIANI, M.(1994). Hypersingular formulation for boundary stresses evaluation. *Engng. Analysis Boundary Element*. 13, p. 169-179.
- HARRISON, P.; MUKHERJEE, S.; BONNET, M. (1998). Numerical implementation of a CTO-based implicit approach for the BEM solution of usual and sensitivity problems in elasto-plasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.22, p. 257-269.
- KOTONI, D.P.N.; BESKOS, D.E. (1992). *The dual reciprocity boundary element method for the transient dynamic analysis of elastoplastic problems*. In: Boundary Element Technology VII, Proceedings, Ed. C.A. Brebbia. CMP, UK, and Elsevier, UK, p.259-272.

- KOTONI, D.P.N.; BESKOS, D.E. (1993). Transient dynamic elastoplastic analysis by the dual reciprocity BEM. *Eng. Anal. Boundary Elem.*, v.12, p.1-16.
- LEITÃO, V.; ALIABADI, M.H.; ROOKE, D.P. (1995). The dual boundary element formulation for elastoplastic fracture mechanics. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v. 38, p. 315-333.
- LEMAITRE, J. and CHABOCHE, J.L. (1990). *Mechanics of Solids*, Cambridge University Press.
- LOURENÇO, P.B. (1996). *Computational strategies for masonry structures*. Delft University Press, Netherlands.
- LOVE, A.E.H. (1944) *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. 4.ed. New York, Dover.
- MANSUR, W.J.; BREBBIA, C.A. (1985). Transient elastodynamics. In: BREBBIA, C.A., ed. *Topics in Boundary Element Research – 2*. Berlin, Springer-Verlag, p.124-155.
- MENDELSON, A. (1973). *Boundary integral methods in elasticity and plasticity*, Report No. NASA TN D-7418, NASA.
- MERAGHNI, F.; DESRUMAUX, F; BENZEGGAGH, M.L. (1999). Mechanical behaviour of cellular core for structural sandwich panels, *Composites, Part A* 30, pp.767-779.
- MESQUITA, A.D. (1998). *Uma formulação do método dos elementos finitos aplicada à análise elastoplástica de cascas*. São Carlos. 144p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MESQUITA, A.D.; CODA, H.B.; VENTURINI, W.S.(1999). Modelo viscoso transiente para análise de retirada de material e inclusão de reforço via MEC/MEF [CD-ROM]. In: PIMENTA, P.M.; BRASIL, R.M.L.R.F.; ALMEIDA NETO, E.S., eds. *Computational methods in engineering'99* (IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 20./BRAZILIAN CONGRESS

ON COMPUTATIONAL MECHANICS, 1., São Paulo, 3-5 Nov. 1999). São Paulo, EPUSP, 11p.

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. (2000). O acoplamento entre o MEC e o MEF aplicado à análise viscoelástica de materiais compostos [CD-ROM]. In: VAZ, L.E., ed. *Computational methods in engineering'2000* (21st IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING (CILAMCE 2000), Rio de Janeiro, December 6-8, 2000. Rio de Janeiro, PUC-Rio, 18p.

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. (2001). Alternative time marching process for BEM and FEM viscoelastic analyses. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.51, p.1157-1173.

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. (2001a) An Alternative time integration procedure for Boltzmann viscoelasticity: A BEM approach. *Computers & Structures*, v.79/16, p.1487-1496.

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. (2001b). A FEM viscoelastic analysis of plates and shells: A new methodology and the Boltzmann model. *Computers & Structures*. (Submitted)

MESQUITA, A.D.; CODA, H.B. (2002a) Alternative Kelvin viscoelastic procedure for finite elements. *Applied Mathematical Modelling*, v.26, n.4, p.501-516.

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. (2002b) Alternative non-associative return mapping methodology with BEM applications. *International Journal of Solids and Structures*, (Submitted)

MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. (2002c) Boundary integral equations for general viscoelastic analysis. *International Journal of Solids and Structures*, v.39, n.9, p.2643-2664.

MIKHLIN, S.G. (1962). Singular integral equations. *Amer. Math. Soc. Trans. Series 1*, v.10, p.84-197.

- MI, Y. (1995). Three dimensional dual boundary element analysis of crack growth. UK. p.227. PhD Thesis, Wessex Institute of Technology, University of Portsmouth.
- MI, Y.; ALIABADI, M.H. (1992). Dual boundary element method for three dimensional fracture analysis. *Engng. Analysis with Boundary Elements*. v.10, p. 161-171.
- MLEJNEK, H.P.; ARGYRIS, J.F.R.S. (1991). *Dynamics of structures*. In: Texts on computational mechanics, ed. Argyris, J.F.R.S.
- MUNAIAR NETO, J. (1998) *Um estudo da formulação de modelos constitutivos viscoelásticos e elasto-viscoplásticos e do emprego de algoritmos implícitos para a sua integração numérica*. São Carlos. 214p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- ORTIZ, M. e POPOV, E.P. (1985). Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 21, pp. 1561-1576.
- OWEN, D.R.J.; DAMJANIC, F. (1982). Viscoplastic analysis of solids, stability considerations. In: *Recent Advances in non-linear computational mechanics*, Pineridge Press, Uk.
- PERZYNA, P. (1966). Fundamental problems in viscoplasticity. *Adv. Appl. Mech.*, v.9, p.243-377.
- POON, H.; MUKHERJEE, S.; BONNET, M.(1998). Numerical implementation of a CTO-based implicit approach for the BEM solution of usual and sensitivity problems in elastoplasticity. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.22, p. 257-269.
- PRAMONO, E. e WILLAM, K.J. (1989). Implicit integration of composite yield surfaces with corners. *Engng. Comput.*, v.7, pp. 186-197.
- RAPP, P.; KURZYKA, J.; SZOSTAK, W. (1999). *The creep and relaxation in sandwich panels with the viscoelastic cores*. In: Mäkeläinen, P. and Hassinen, P. *Light-weight Steel and Aluminium Structures*. Elsevier Science.

- RICCARDELLA, P.C. (1973). *A implementation of the boundary integral technique for planar problems in elasticity and elastoplasticity*, SM-73-10, Dept. Mech. Engng., Carnegie Mellon University, Pittsburg.
- RICHARDSON, J.D.(1998). *Weakly singular BEM for fracture modelling*. PhD Thesis, Vanderbilt University.
- SCHWARTZ, C.W.; EINSTEIN, H.H. (1980). Improved design of tunnel supports: simplified analysis of ground-structure interaction in tunnelling. v.1, Massachusetts Institute of Technology, Boston, 427p. (Report N^o UMTA-MA-06-01000-80-40)
- SIMO, J.C.; HUGHES, T.J.R. (1988). *Elastoplasticity and viscoplasticity: computational aspects*, to be published.
- SIMO, J.C., KENNEDY, J.G. e GOVINDJEE, S. (1988) “Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. Loading/unloading conditions and numerical algorithms”. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 26, pp. 2161-2185.
- SIMO, J.C.; TAYLOR, R.L. (1985). Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, n.48, p.101-118.
- SIMO, J.C.; TAYLOR, R.L. (1986). A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v.22, p.649-670.
- SINGH, R.B.; SHARMA, K.G.; VARADARAJAN, A. (1988). Elasto-plastic analysis of tunnel excavation in layered rock medium by coupled FEBEM. *Numerical Methods in Geomechanics*. Balkema, p. 941-950.
- SOBOTKA, Z. (1984). *Rheology of materials and engineering structures*. Elsevier Science Publishers, Prague, Czechoslovakia.
- SOUTHWELL, R.V. (1946). *Relaxation methods in theoretical physics*. London, Oxford University Press.

- STAMOS, A.A.; BESKOS, D.E. (1995). Dynamic analysis of large 3D underground structures by the BEM. *Earthquake engineering and structural dynamics*, v24, p.917-934.
- SWOBODA, G.; MERTZ, W.; BEER, G. (1987). Rheological analysis of tunnel excavation by means of coupled finite element (FEM)-boundary element (BEM) analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. John Wiley & Sons, v.11, p.115-129.
- TELLES, J.C.F. & BREBBIA, C.A. (1980). On the application of the boundary element method to plasticity. *Appl. Math. Modelling*, 3: 466-470.
- TELLES, J.C.F.; BREBBIA, C.A. (1982). Elastic/viscoplastic problems using boundary elements. *Int. J. Mech. Sci.*, v.4, n.10, p.605-618.
- TELLES J.F.C. & CARRER J.A.M. (1991). Implicit procedures for the solution of elastoplastic problems by the Boundary Element Method. *Mathematical Computational modelling*, **15**, 303-311
- TELLES J.C.F & CARRER J.A.M. (1994). Static and transient dynamic nonlinear stress analysis by the boundary element method with implicit techniques, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **14**, 65-74.
- TIMOSHENKO, S.P.; GOODIER, J.N. (1970) *Theory of elasticity*. Tokyo, McGraw-Hill Kogakusha.
- TURNER, M.J. *et al.* (1956) Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aero. Sci.*, v.23, p.805-823.
- VENTURINI, W.S. (1982). *Application of the boundary element formulation to solve geomechanical problems*. Southampton. 272p. Thesis of Doctor – University of Southampton.

- VENTURINI, W.S. (1988). *Um estudo sobre o método dos elementos de contorno e suas aplicações em problemas de engenharia*. São Carlos. 349p. Tese (Livre-Docência) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- WARBURTON, G.B. (1976). *The dynamical behaviour of structures*. 2^a ed., Oxford, Pergamon Press.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; CORMEAU, I.C. (1974). Visco-plasticity-plasticity and creep in elastic solids-a unified numerical solution approach. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 8, pp. 821-845.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; KELLY, D.W.; BETTESS, P. (1977). The coupling of the finite element method and boundary solution procedures. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.11, p.355-375.