

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS
TRIDIMENSIONAIS DE EDIFÍCIOS DE ANDARES
MÚLTIPLOS COM NÚCLEOS RESISTENTES,
CONSIDERANDO A RIGIDEZ TRANSVERSAL À FLEXÃO
DAS LAJES**

Carlos Humberto Martins

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos da
Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para
obtenção do Título de Doutor em Engenharia de Estruturas

ORIENTADORA : Prof^{ta} Dr^a Helena M. C. Carmo Antunes

São Carlos

2001

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca - EESC-USP**

M386a Martins, Carlos Humberto
Análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios de andares múltiplos com núcleos resistentes, considerando a rigidez transversal à flexão das lajes / Carlos Humberto Martins. -- São Carlos, 2001.

Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de São Carlos-Universidade de São Paulo, 2001.
Área: Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof^a. Dr^a. Helena M. C. Carmo Antunes.

1. Edifícios de andares múltiplos. 2. Núcleos estruturais. 3. Rigidez transversal da laje. 4. Teoria de Segunda ordem. I. Título.

**Aos meus pais,
Francisco e Tereza**

AGRADECIMENTOS

A Deus, sempre presente em todos os momentos.

À Professora Helena, pela orientação, confiança e paciência durante a elaboração deste trabalho.

A todos os professores, funcionários e amigos do Departamento de Engenharia de Estruturas pelo agradável convívio. Aos amigos Edgard Sousa Jr. e Faustino Sanches Jr. pelas colaborações no desenvolvimento deste trabalho.

À FAPESP - Fundação de Apoio a Pesquisa do Estado de São Paulo, pela bolsa de estudos concedida.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	i
LISTA DE TABELAS	vii
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	ix
LISTA DE SÍMBOLOS.....	x
RESUMO	xvii
ABSTRACT.....	xviii
1 INTRODUÇÃO.....	01
1.1 Generalidades	01
1.2 Objetivos.....	03
1.3 Justificativa.....	03
1.4 Metodologia	04
1.5 Resumo dos capítulos	06
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	08
2.1 Introdução	08
2.2 Técnicas de análises de estruturas de edifícios de andares múltiplos.....	08
2.3 Trabalhos desenvolvidos na área de edifícios de andares múltiplos	10
3 MODELO ESTRUTURAL ADOTADO	33
3.1 Introdução	33
3.2 Descrição do modelo estrutural adotado.....	33
3.3 Descrição dos elementos estruturais.....	35
3.3.1 Vigas.....	35
3.3.2 Lajes.....	36
3.3.3 Pilares	37
3.3.4 Núcleos	37

3.3.5 Subestruturas.....	41
3.4 Sistemas de referência	41
3.4.1 Sistema de referência global.....	41
3.4.2 Sistema de referência local das vigas	42
3.4.3 Sistema de referência das lajes.....	43
3.4.4 Sistema de referência local dos pilares.....	43
3.4.5 Sistema de referência local dos núcleos.....	44
3.4.6 Sistema de referência da subestrutura.....	45
3.5 Coordenadas-deslocamento.....	45
3.5.1 Coordenadas-deslocamento das vigas.....	45
3.5.2 Coordenadas-deslocamento das lajes	46
3.5.3 Coordenadas-deslocamento dos pilares	48
3.5.4 Coordenadas-deslocamento dos núcleos	49
3.5.5 Coordenadas-deslocamento da subestrutura	50
4 MATRIZ DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS ESTRUTURAIS.....	51
4.1 Introdução	51
4.2 Matriz de rigidez de um elemento de viga	51
4.3 Matriz de rigidez dos pilares em teoria de primeira ordem	54
4.4 Matriz de rigidez dos pilares em teoria de segunda ordem	58
4.5 Matriz de rigidez dos núcleos em teoria de primeira ordem.....	61
4.6 Matriz de rigidez dos núcleos em teoria de segunda ordem.....	67
4.7 Matriz de rigidez do elemento de placa	69
4.7.1 Introdução.....	69
4.7.2 O elemento finito DKT – Teoria de Kirchhoff.....	70
4.7.3 O elemento finito DST – Teoria de Reissner-Mindlin	75
4.8 Elemento finito quadrangular.....	81
5 MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DA ESTRUTURA	84
5.1 Introdução	84

5.2	Processo empregado na compatibilização do núcleo com o restante da estrutura.....	85
5.3	Subestruturação em Paralelo	87
5.3.1	Método “Choleski Decomposition “	88
5.4	Contribuição dos pilares e núcleos à matriz de rigidez da estrutura.....	92
5.5	Subestruturação em Série.....	101
5.6	Deslocamentos locais nos elementos.....	104
5.6.1	Introdução.....	104
5.6.2	Deslocamentos locais nos elementos de viga.....	104
5.6.3	Deslocamentos locais nos pilares.....	105
5.6.4	Deslocamentos locais nos núcleos.....	105
5.6.5	Deslocamentos nos elementos de placa.....	106
5.7	Forças nodais	106
5.7.1	Forças nodais equivalentes das vigas.....	106
5.7.2	Forças nodais equivalentes do elemento DKT ou DST.....	107
5.7.3	Forças nodais nas lajes	108
5.8	Esforços solicitantes nos elementos.....	108
5.8.1	Esforços solicitantes nos elementos de viga.....	109
5.8.2	Esforços solicitantes nos pilares.....	109
5.8.3	Esforços solicitantes nos núcleos.....	110
5.8.4	Esforços internos no elemento finito DKT.....	111
5.8.5	Esforços internos no elemento finito DST	112
5.9	Metodologia para análise em teoria de segunda ordem.....	113
5.9.1	Introdução.....	113
5.9.2	Critério de convergência	114
6	PROGRAMA COMPUTACIONAL.....	116
6.1	Introdução	116
6.2	Modularização do programa computacional CEEAM.F90	116
6.2.1	<i>Workspace</i> ANDAR.F90	117
6.2.2	<i>Workspace</i> SISTEMA.F90.....	117

6.2.3 <i>Workspace</i> SERIE.F90.....	118
6.2.4 <i>Workspace</i> DESLOCAMENTO.F90	118
6.2.5 <i>Workspace</i> ESFORCO.F90	118
6.3 Tipos de análises realizadas	118
6.4 Programação em <i>Visual Basic</i>	119
6.5 Janelas de diálogo do programa interativo em <i>Visual Basic 6.0</i>	120
6.6 Comentários gerais sobre o programa interativo EDIFICIO.VBP.....	141
6.7 Arquivos de resultados.....	142
6.8 Limitações do programa.....	143
7 EXEMPLOS NUMÉRICOS	144
7.1 Introdução	144
7.2 Exemplo Numérico 01	144
7.3 Exemplo Numérico 02	153
7.4 Exemplo Numérico 03	158
7.5 Exemplo Numérico 04	170
7.6 Exemplo Numérico 05	179
7.7 Parâmetros de estabilidade global.....	194
7.7.1 Generalidades.....	194
7.7.2 Parâmetro α	194
7.7.3 Parâmetro γ_z	199
7.7.4 Parâmetro α e γ_z para o exemplo 03	200
7.7.5 Parâmetro α e γ_z para o exemplo 04	202
7.7.6 Parâmetro α e γ_z para o exemplo 05	203
8 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	205
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	209
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA	216

LISTA DE FIGURAS

Figura 01 : Elemento de discretização para os núcleos.....	06
Figura 02 : a) segmento de parede b) núcleo estrutural.....	11
Figura 03 : Elemento de parede usado por YAGUI (1971)	11
Figura 04 : Discretização do núcleo segundo YAGUI (1971) - PEREIRA (1997)	12
Figura 05 : Elemento de parede usado por SERRA (1994)	15
Figura 06 : Consideração ou não do cisalhamento no lintel.....	16
Figura 07 : Modelagem do núcleo pelo processo prático.....	19
Figura 08 : Modelagem do núcleo pelo processo simplificado - SMITH&COULL (1991).....	20
Figura 09 : Discretização da parede do núcleo pelo modelo de coluna central.....	21
Figura 10 : (a) modelo de analogia de coluna central (b) elemento de discretização	22
Figura 11 : Exemplo de núcleo discretizado por esta analogia - SMITH&GIRGIS (1984).....	22
Figura 12 : Tipos de elementos adotados na discretização	23
Figura 13 : Modelo de elemento finito de membrana -SMITH & COULL (1991).....	24
Figura 14 : Elementos de membrana representando os lintéis - SMITH & COULL (1991).....	25
Figura 15 : Núcleo estrutural e laje – TARANATH (1968).....	30
Figura 16 : Deformação da laje devido ao empenamento do núcleo	

– TARANATH (1968)	30
Figura 17 : Discretização de um pavimento em elementos finitos	
– TARANATH (1968)	31
Figura 18 : Modelo estrutural adotado	34
Figura 19 : Consideração das excentricidades entre viga-pilar.....	36
Figura 20 : Excentricidade laje-viga.....	37
Figura 21 : Tipos de núcleos estruturais - SMITH & COULL (1991).....	38
Figura 22 : Empenamento da seção transversal - SMITH & COULL (1991).....	39
Figura 23 : Flexão e empenamento do núcleo – SMITH & TARANATH (1972).....	40
Figura 24 : Sistema de referência do edifício	42
Figura 25 : Sistema de referência local das vigas.....	42
Figura 26 : Sistema de referência das lajes – MARTINS (1998)	43
Figura 27 : Sistema de referência local dos pilares – MARTINS(1998).....	44
Figura 28 : Sistema de referência local dos núcleos	44
Figura 29 : sistema de referência da subestrutura	45
Figura 30 : Coordenadas-deslocamento locais de um trecho de viga.....	46
Figura 31 : Coordenadas-deslocamento de corpo rígido da laje – MARTINS (1998)	47
Figura 32 : Coordenadas-deslocamento do elemento finito DKT ou DST.....	48
Figura 33 : Coordenadas-deslocamento de um trecho de pilar.....	49
Figura 34 : Coordenadas-deslocamento do elemento de núcleo.....	49
Figura 35 : Trecho de viga entre nós de pilares – MARTINS (1998).....	53
Figura 36 : Distância dos eixos do pilar à origem.....	57

Figura 37 : Distância dos eixos do centro de torção do núcleo à origem.....	67
Figura 38 : Elemento finito DKT com nove graus de liberdade.....	71
Figura 39 : Deslocamento segunda a teoria de KIRCHHOFF	72
Figura 40 : Deformação do elemento de placa por flexão e cortante	76
Figura 41 : Elemento finito DST.....	78
Figura 42 : Elemento quadrangular formado a partir de 4 elementos DKT ou DST.....	81
Figura 43 : Discretização adotada para os elementos estruturais.....	87
Figura 44 : Subestruturação em paralelo.....	88
Figura 45 : Elementos estruturais do exemplo 02	93
Figura 46 : Etapas para a compatibilização da discretização do núcleo com a laje	94
Figura 47 : Esquema representativo da matriz $[R]_A$ do exemplo 02	98
Figura 48 : Esquema representativo da matriz $[\beta]$ do exemplo 02	99
Figura 49 : Esquema da matriz $[R]_B$	100
Figura 50 : Carga uniformemente distribuída no elemento de viga.....	107
Figura 51 : Forças nodais equivalentes no elemento DKT ou DST.....	108
Figura 52 : Algoritmo da análise iterativa em teoria de 2 ^a ordem	114
Figura 53 : Janela inicial com as informações sobre o programa	121
Figura 54 : Menu principal de entrada de dados	122
Figura 55 : Menu de dados gerais da estrutura	122
Figura 56 : Menu opção abrir	123
Figura 57 : Menu opção salvar.....	124
Figura 58 : Menu opção de entrada de dados	124

Figura 59 : Menu opção de entrada de dados 125

Figura 60 : Menu opção de entrada de dados 126

Figura 61 : Janela para geração de uma malha de elementos finitos 127

Figura 62 : Janela para informação de elementos finitos triangulares ou quadrangulares..... 127

Figura 63 : Janela para retirar um quadrângulo de elementos finitos 128

Figura 64 : Malha com os elementos finitos gerados 128

Figura 65 : Malha de elementos finitos gerada com ‘buraco’ na laje 129

Figura 66 : Janela para geração de elementos de barra 129

Figura 67 : Janela para informação de elementos de barra 130

Figura 68 : Malha com elementos finitos e elementos de barra 130

Figura 69 : Menu dos elementos verticais 131

Figura 70 : Janela para informação de características geométricas dos pilares 131

Figura 71 : Malha com elementos finitos, elementos de barra e pilares..... 132

Figura 72 : Janela para informação de elemento de núcleo..... 132

Figura 73 : Malha com todos os elementos que formam o pavimento 133

Figura 74 : Menu para carga devida à ação do vento 134

Figura 75 : Menu para informar carga devida à ação do vento..... 134

Figura 76 : Janela para geração de carga devida à ação do vento..... 135

Figura 77 : Janela para escolha da opção e/ou opções de modelos de análise 136

Figura 78 : Janela de informação da tolerância para análise em 2^a ordem..... 136

Figura 79 : Menu de opção para editar o arquivo de dados 137

Figura 80 : Exemplo de parte de arquivo de dados editado no WORDPAD 137

Figura 81 : Menu de opção para editar o arquivo de resultados	138
Figura 82 : Exemplo de arquivo de resultados editado no WORDPAD.....	139
Figura 83 : Exemplo de arquivo de resultados editado no WORDPAD.....	139
Figura 84 : Exemplo de arquivo de resultados editado no WORDPAD.....	140
Figura 85 : Exemplos de janelas de mensagens de aviso	140
Figura 86 : Exemplo de janelas de mensagens de aviso de erro.....	141
Figura 87 : Planta baixa dos pavimentos tipos.....	146
Figura 88 : Translação em Y para diferentes espessuras de laje	146
Figura 89 : Translação em Y para espessura da laje $h = 15$ cm.....	147
Figura 90 : Esforço normal no Pilar p01	147
Figura 91 : Momento fletor superior MZ no Pilar 01.....	148
Figura 92 : Momento fletor inferior MZ no centro de torção do núcleo	148
Figura 93 : Malha de elementos finitos para a estrutura	152
Figura 94: Estrutura deformada	152
Figura 95 : Planta baixa do pavimentos tipo.....	153
Figura 96 : Translação em Z para cada pavimento.....	154
Figura 97 : Bimomento no centro de torção (CT) do núcleo	154
Figura 98 : Esforço normal no Pilar p01	155
Figura 99 : Momento fletor MY superior no Pilar P04.....	155
Figura 100 : Momento fletor MZ superior no Pilar P01	156
Figura 101 : Momento fletor à esquerda da Viga v01.....	156
Figura 102 : Estrutura discretizada	157

Figura 103 : Estrutura deformada.....	158
Figura 104 : Planta baixa do pavimento tipo	159
Figura 105 : Discretização adotada para a laje	160
Figura 106 : Translação em Y ao nível de cada pavimento.....	162
Figura 107 : Empenamento da seção do núcleo ao nível de cada pavimento	162
Figura 108 : Momento fletor MY superior no Pilar P01	163
Figura 109 : Esforço normal no Pilar P10.....	163
Figura 110 : Bimomento inferior no centro de torção do núcleo	164
Figura 111 : Momento fletor MY inferior no centro de gravidade do núcleo.....	164
Figura 112 : Momento fletor MZ inferior no Pilar P02	165
Figura 113 : Momento fletor MZ inferior no centro de gravidade (CG) do núcleo.....	165
Figura 114 : Momento fletor MZ inferior no centro de torção (CT) do núcleo.....	166
Figura 115 : Esforço cortante à direita da Viga V02.....	166
Figura 116 : Momento fletor à esquerda da Viga V01.....	167
Figura 117 : Estrutura deformada.....	168
Figura 118 : Estrutura deformada.....	169
Figura 119 : Planta baixa do pavimento tipo	170
Figura 120 : Malha de elementos finitos adotada	171
Figura 121 : Translação em Z para cada pavimento.....	172
Figura 122 : Esforço normal no Pilar p05	173
Figura 123 : Esforço cortante superior no Pilar P10.....	173
Figura 124 : Momento fletor MY superior no Pilar P01	174

Figura 125 : Momento fletor M_Z inferior no Pilar P12	174
Figura 126 : momento fletor à esquerda da Viga v01	175
Figura 127 : momento fletor M_Y superior no núcleo n01	175
Figura 128 : Estrutura discretizada	177
Figura 129 : Estrutura deformada.....	178
Figura 130 : Estrutura deformada.....	179
Figura 131 : Planta baixa do pavimento tipo	180
Figura 132 : Malha de elementos finitos adotada	181
Figura 133 : Translação em Z para cada pavimento.....	181
Figura 134 : Rotação em x para cada pavimento	182
Figura 135 : Empenamento no núcleo N01 para cada pavimento.....	182
Figura 136 : Empenamento no núcleo N02 para cada pavimento.....	183
Figura 137 : Empenamento no núcleo N03 para cada pavimento.....	183
Figura 138 : Esforço normal no Pilar P01	184
Figura 139 : Esforço normal no centro de torção do Núcleo N01.....	184
Figura 140 : Momento fletor M_Y inferior no Pilar P04.....	185
Figura 141 : Momento fletor M_Z superior no Pilar P08	185
Figura 142 : Momento torçor M_X inferior no Pilar P05	186
Figura 143 : Momento fletor à esquerda da Viga N02	186
Figura 144 : Bimomento superior no CT do Núcleo N01	187
Figura 145 : Bimomento superior no CT do Núcleo N02	187
Figura 146 : Bimomento superior no CT do Núcleo N03	188

Figura 147 : Momento fletor MZ superior no CT do Núcleo N01	188
Figura 148 : Momento fletor MZ superior no CG do Núcleo N01.....	189
Figura 149 : Estrutura discretizada	189
Figura 150 : Estrutura deformada.....	190
Figura 151 : Estrutura deformada.....	191
Figura 152 : Estrutura deformada.....	192
Figura 153 : Estrutura deformada.....	192
Figura 154 : Analogia entre um edifício alto e uma coluna engastada na base - PINTO (1997)	195

LISTA DE TABELAS

Tabela 01 : Coordenadas deslocamentos dos elementos.....	85
Tabela 02 : Tipos de modelos possíveis para análise	119
Tabela 03 : Comparação dos deslocamentos com análise pelo DKT e DST	149
Tabela 04 : Deslocamentos ao nível da laje para cada pavimento.....	150
Tabela 05 : Esforço normal (kN) no Núcleo e no Pilar P01	151
Tabela 06 : Comparação dos deslocamentos ao nível da laje.....	161
Tabela 07 : Força do vento concentrada em cada pavimento.....	172
Tabela 08 : Força do vento concentrada em cada pavimento.....	180
Tabela 09 : Tabela auxiliar no cálculo do parâmetro γ_z	201
Tabela 10 : Tabela auxiliar no cálculo do parâmetro γ_z	202
Tabela 11 : Tabela auxiliar no cálculo do parâmetro γ_z	204

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A.C.M : ADINI-CLOUGH-MELOSH

ASCII : American Standard Code for Information Interchange

EESC : Escola de Engenharia de São Carlos

C.G. : Centro de Gravidade

C.T. : Centro de Torção

DKT : Discrete Kirchhoff Theory

DST : Discrete Shear Theory

NBR : Norma Brasileira Regulamentada

USP : Universidade de São Paulo

LISTA DE SÍMBOLOS

Romanos

A : área do elemento finito DKT ou DST

B : esforço de bimomento para o núcleo

$c_y, c_z, s_y, s_z, m_y, m_z$: funções de instabilidade dos pilares

d_{Yp} : distância do eixo y_p do pilar à origem do sistema de referência da subestrutura

d_{Zp} : distância do eixo z_p do pilar à origem do sistema de referência da subestrutura d_{Yn} :

distância do eixo y_n do núcleo, no centro de torção à origem do sistema de referência da

subestrutura

d_{Zn} : distância do eixo z_n do núcleo, no centro de torção à origem do sistema de referência

da subestrutura

E : módulo de elasticidade longitudinal do material

EI_{eqk} : produto de rigidez equivalente

e_{yv} : excentricidade da viga em relação ao pilar na direção Y

e_{zv} : excentricidade da viga em relação ao pilar na direção Z

G : módulo de elasticidade transversal do material

h : espessura da laje

H : altura total da edificação

i_c : raio de giração

I_{xp} : momento de inércia à torção dos pilares

I_{y_p} : momento de inércia à flexão dos pilares em relação ao eixo y_p local

I_{z_p} : momento de inércia à flexão dos pilares em relação ao eixo z_p local

I_{y_n} : momento de inércia à flexão do núcleo em relação ao eixo y_n local

I_{z_n} : momento de inércia à flexão do núcleo em relação ao eixo z_n local

I_{x_n} : momento de inércia à torção do núcleo

$I_{\bar{i}}$: momento setorial de inércia do núcleo

I_{z_v} : momento de inércia das vigas em relação ao eixo z_v

J_t : momento de inércia à torção da viga

K : índice que indica um andar genérico no edifício

k_t : constante referente a resolução da equação diferencial da torção para os pilares

L : altura do pilar ou do núcleo

l : trecho flexível de um trecho de viga

l_{ij} : lados do elemento finito DKT

M_Y, M_Z : momentos fletores no elemento finito DKT

M_{YZ} : momento volvente no elemento finito DKT

N : número do último pavimento da estrutura

NT : número total de coordenadas da subestrutura

NP : número de pilares do pavimento

NPF : número de pontos em cada perfil de núcleo

NN : número de núcleos do pavimento

O_G : Origem do sistema de referência dos eixos globais

O_L : Origem do sistema de referência das lajes

P : esforço axial nos pilares

q : carga uniformemente distribuída no elemento finito DKT

q_v : carga uniformemente distribuída nas vigas

Q_Y, Q_Z : esforços cortantes no elemento DKT

S : área da seção transversal do pilar ou do núcleo

TOL : tolerância pré-definida para análise iterativa em teoria de 2ª ordem

T_x, T_y : esforços cortantes no elemento finito DST

u, v : deslocamentos horizontais de um ponto genérico da placa nas direções Y e Z.

U_f : energia de deformação por flexão do elemento DKT ou DST

U_c : energia de deformação por cisalhamento do elemento DST

$U_{\tilde{u}}$: característica de VLASSOV

U : energia de deformação total do elemento finito DST

v_c, w_c : deslocamento do centróide da seção transversal do pilar

v_{CT}, w_{CT} : deslocamento do centro de torção da seção transversal do núcleo

w'_y, w'_z : derivadas parciais do deslocamento transversal w

X, Y, Z : Eixos globais da estrutura

x_n, y_n, z_n : Sistema de referência local dos núcleos

x_p, y_p, z_p : Sistema de referência local dos pilares

x_v, y_v, z_v : Sistema de referência local das vigas

y_{gt} : distância y do CT do núcleo ao CG

z_{gt} : distância z do CT do núcleo ao CG

Gregos

α : parâmetro de instabilidade global

α_p : ângulo entre o eixo Y da subestrutura e o eixo y_p do sistema local dos pilares

α_v : ângulo entre o eixo Y da subestrutura e o eixo longitudinal da viga

β_Y, β_Z : rotações de uma reta normal à superfície média da laje segundo os planos Y-X e Z-X das lajes

β_n : rotação na direção normal ao lado, no elemento DKT

γ_Z : parâmetro de instabilidade global

ϵ_d : tolerância calculada, segundo o critério de parada adotado

μ_z, μ_y : constantes utilizadas na resolução do sistema de equações diferenciais dos pilares

ξ, η : coordenadas homogêneas do elemento finito DKT

ν : coeficiente de Poisson

ϕ_c : rotação da linha do centróide da seção transversal do pilar

ϕ' : empenamento da seção transversal do núcleo

Matrizes e Vetores

[B] : matriz que relaciona o vetor de curvatura com o vetor deslocamentos

[D_f] : matriz de elasticidade do material que constitui a placa

[D_s] : matriz de elasticidade do material que constitui a placa, para o cisalhamento

$[D_p]$: matriz das características elásticas do material

$\{ F \}$:vetor das forças nodais do sistema estrutural

$\{ F_c \}$:vetor de forças nodais no elemento quadrangular

$\{ F_{DKT} \}$:vetor das forças nodais equivalentes do elemento DKT

$\{ f_\xi \}$:vetor das forças nodais do elemento finito DKT, em relação aos parâmetros externos

$\{ f_i \}$:vetor das forças nodais do elemento finito DKT, em relação aos parâmetros internos

$\{ f_v \}_{EQV}$: vetor das forças nodais equivalentes da viga, nas coordenadas locais.

$\{ F_v \}_{EQV}$: vetor das forças nodais equivalentes da viga, nas coordenadas da subestrutura.

$[G], [H], [B], [\bar{G}], [\bar{H}]$: matrizes utilizadas na formulação da matriz de rigidez do elemento DKT

$[K_c]$: matriz de rigidez condensada do elemento finito quadrangular

$[K_{DKT}]$: matriz de rigidez do elemento finito DKT

$[K_{pg}]^I$: matriz de rigidez dos pilares nas coordenadas da subestrutura em teoria de 1ª ordem

$[K_{pl}]^I$: matriz de rigidez local dos pilares em teoria de 1ª ordem

$[K_{pg}]^{II}$: matriz de rigidez dos pilares nas coordenadas da subestrutura em teoria de 2ª ordem

$[K_{pl}]^{II}$: matriz de rigidez local dos pilares em teoria de 2ª ordem

$[K_{ng}]^I$: matriz de rigidez dos núcleos nas coordenadas da subestrutura em teoria de 1ª ordem

$[K_{nl}]^I$: matriz de rigidez local dos núcleos em teoria de 1ª ordem

$[K_{ng}]^{\text{II}}$: matriz de rigidez dos núcleos nas coordenadas da subestrutura em teoria de 2ª ordem

$[K_{pl}]^{\text{II}}$: matriz de rigidez local dos núcleos em teoria de 2ª ordem

$[K_{nl1}], [K_{nl2}], [K_{nl3}]$: submatrizes da matriz de rigidez local dos núcleos

$[K_{pl1}], [K_{pl2}], [K_{pl3}]$: submatrizes da matriz de rigidez local dos pilares

$[K_{vg}]$: matriz de rigidez das vigas nas coordenadas da subestrutura

$[K_{vl}]$: matriz de rigidez local de um elemento de viga

$\{ k \}$: vetor curvatura

$\{ S_p \}$: vetor dos esforços solicitantes dos pilares em coordenadas locais

$\{ S_v \}$: vetor dos esforços solicitantes das vigas em coordenadas locais

$[T]$: matriz de transformação segundo TARANATH (1988)

$\{ u_{DKT} \}$: vetor das coordenadas deslocamentos do elemento finito DKT

$\{ u_{DST} \}$: vetor das coordenadas deslocamentos do elemento finito DST

$\{ u_L \}$: vetor das coordenadas deslocamentos da laje

$\{ u_n \}$: vetor das coordenadas deslocamentos do núcleo

$\{ u_p \}$: vetor das coordenadas deslocamentos do pilar

$\{ u_v \}$: vetor das coordenadas deslocamentos da viga

$[\beta_n]$: matriz de incidência cinemática para os núcleos

$[\beta_{n1}]$: submatriz de incidência cinemática para a extremidade superior do núcleo

$[\beta_{n2}]$: submatriz de incidência cinemática para a extremidade inferior do núcleo

$[\beta_p]$: matriz de incidência cinemática para os pilares

$[\beta_{p1}]$: submatriz de incidência cinemática para a extremidade superior do pilar

$[\beta_{p2}]$: submatriz de incidência cinemática para a extremidade inferior do pilar

$[\beta_v]$: matriz de incidência cinemática para um elemento de viga

$\{\delta\}_A$: vetor deslocamento da estrutura na fase A

$\{\delta\}_B$: : vetor deslocamento da estrutura na fase A

$\{\delta_e\}$:vetor dos parâmetros externos do elemento finito DKT

$\{\delta_i\}$:vetor dos parâmetros internos do elemento finito DKT

$\{\delta_f\}$: vetor de deslocamentos do corpo rígido da laje, na posição de equilíbrio.

$\{\delta_n\}$ vetor de deslocamentos do corpo rígido da laje na iteração n

$\{\delta_{n-1}\}$ vetor de deslocamentos do corpo rígido da laje na iteração anterior a n

$\{\epsilon_f\}$: vetor de deformação por flexão

$\{\sigma_f\}$: vetor de tensões por flexão

$\{\tilde{\alpha}\}$: vetor deformação por cisalhamento

O significado de outros símbolos não declarados neste item encontram-se no próprio texto.

RESUMO

MARTINS, C. H. (2001). *Análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios de andares múltiplos com núcleos resistentes, considerando a rigidez transversal à flexão das lajes*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O principal objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre análise de estrutura tridimensional de edifícios de andares múltiplos considerando a interação de deslocamentos e esforços entre os vários elementos que formam a estrutura, levando-se em consideração a rigidez transversal à flexão das lajes. Isto é realizado através de um modelo que compatibiliza o elemento que discretiza o núcleo com sete graus de liberdade, baseado na teoria da flexo-torção de Vlassov, com o restante da estrutura tridimensional de edifícios de andares múltiplos formada pelos núcleos, pilares, vigas e lajes.

Os elementos finitos de placa adotados na discretização do pavimento, responsáveis pela consideração da rigidez transversal das lajes na análise do edifício são o DKT (*Discrete Kirchhoff Theory*) e DST (*Discrete Shear Theory*).

Para os pilares e os núcleos o equilíbrio de forças é verificado na sua posição deformada, ou como é conhecido da literatura técnica, análise em teoria de 2ª ordem, considerando a não linearidade geométrica.

Para o cálculo dos esforços e deslocamentos na estrutura são aplicadas as técnicas de subestruturação em série e paralelo na matriz de rigidez global da estrutura. Elaborou-se um programa de computador para o processo de cálculo, utilizando a linguagem computacional *Fortran Power Station 90* e pré e pós processadores em *Visual Basic 6.0* para ambiente *Windows*.

Finalmente são apresentados alguns exemplos para comprovar a validade do processo de cálculo utilizado.

Palavras-chave : Edifícios andares múltiplos; Núcleos estruturais ; Rigidez transversal da Laje ; Teoria de Segunda Ordem

ABSTRACT

MARTINS, C.H. (2001) *Non linear analysis of three-dimensional structures of multistory buildings with core walls, considering the bending stiffness transverse of slabs.* Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

The main aim of this work is to present a study about analysis of three-dimensional structures of multistory buildings considering the interaction of displacements and stresses of the elements of the structures, with the influence of the transverse bending stiffness of slabs.

The plate finite elements adopted in floor discretization, responsible for considering the bending stiffness contribution of slabs in the analysis of buildings, are the DKT (*Discrete Kirchhoff Theory*) and the DST (*Discrete Shear Theory*).

For columns and core walls the forces equilibrium is verified for the columns in their deformed position, which is known in the technical literature as 2nd order analysis, considering the geometric non-linearity.

The techniques of serial and parallel analyses of substructures are applied to the global stiffness matrix for the calculus of forces and displacements in the structure. A computer program was developed for the calculation process, using the computer language *Fortran Power Station 90* and pre and post-processors in *Visual Basic 6.0* for a *Windows* environment.

Finally, some examples are presented to check the validity of the employed calculus process.

Keywords : Multistory buildings;Core walls ; Transverse stiffness of slabs ; Second order theory

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 Generalidades

Do ponto de vista estrutural, a idéia de se pensar que um edifício é considerado alto somente quando ele possui vários andares é equivocada. Procurando conceituar o termo edifícios altos, TARANATH (1988) diz que não existe relação em classificar uma estrutura como alta a partir do seu número de andares ou proporções. Sendo assim, podemos classificar uma estrutura, sob o ponto de vista estrutural, como um edifício alto quando devido a sua altura os efeitos das forças laterais devido à ação do vento não podem ser desprezadas na análise estrutural. Afim de minimizar esta discussão, muitos autores não fazem uso do termo edifícios altos, mas preferem usar o termo edifícios de múltiplos andares, para classificar este tipo de estrutura.

O crescente aumento da densidade populacional associado a uma necessidade contínua de uma maior urbanização, fez com que ocorresse um intenso processo de verticalização das edificações. Com isso torna-se cada vez mais necessário o aprimoramento dos sistemas estruturais e das técnicas de análise das estruturas, de forma a proporcionarem maior economia e principalmente uma adequada segurança.

Visando a melhoria dos resultados na análise estrutural, atualmente as frentes de investigação estão voltadas para o aprimoramento de modelagens para o comportamento físico dos materiais, introdução de novos procedimentos nos problemas de análise em teoria de 2ª. ordem, abordagem de novos sistemas estruturais e a criação de pré e pós-processadores em ambiente *Windows* para facilitar a utilização dos sistemas computacionais gerados.

Neste trabalho será considerado que as lajes contribuem com sua rigidez transversal à flexão na análise global da estrutura, pois devido ao seu comportamento de placa, essa rigidez à flexão influenciará no comportamento estrutural. Para isto, são utilizadas as técnicas do Método dos Elementos Finitos.

Sabe-se que os deslocamentos horizontais, causados pelas ações do vento, produzem esforços adicionais, quando são aplicadas simultaneamente as ações de origem gravitacional. Sendo assim, é feita para os pilares e núcleos a verificação do equilíbrio de forças na sua posição deformada ou análise em 2ª ordem considerando a não linearidade geométrica.

Este comportamento das estruturas de edifícios de múltiplos andares, exige dos engenheiros calculistas projetos estruturais que garantam um bom comportamento para a estrutura quando da ação das cargas laterais. Este bom comportamento estrutural está associado à utilização de arranjos estruturais com o objetivo de se obter uma redução dos deslocamentos na estrutura. Dentre os diversos sistemas estruturais propostos existem os pórticos planos ou tridimensionais, estruturas tubulares, painéis treliçados, painéis parede, pilares isolados, núcleos estruturais e os elementos horizontais de contraventamento que são as lajes e as vigas.

Assim, as estruturas de contraventamento assumem um papel cada vez mais importante no desempenho e segurança da estrutura e, dentro do conjunto de soluções encontradas, os núcleos de estruturais, também chamados núcleos de rigidez ou somente núcleos, são considerados uma das estruturas mais eficientes e econômicas para resistir a carregamentos laterais.

Com essas hipóteses para as lajes, pilares e núcleos, a tese pretende contribuir para a análise de edifícios de andares múltiplos, a fim de se obter estruturas cada vez mais seguras e econômicas, tentando representar de uma forma mais precisa o comportamento real de uma estrutura tridimensional de edifícios de andares múltiplos.

1.2 Objetivos

O principal objetivo do trabalho é realizar a análise de estruturas tridimensionais de edifícios de andares múltiplos formadas pelos pilares, núcleos, vigas e lajes, considerando a rigidez transversal à flexão das lajes na análise global da estrutura. É portanto realizada a análise estrutural onde considera-se a interação de deslocamentos e esforços entre esses elementos estruturais.

Além disto, o trabalho proposto objetiva também determinar, em teoria de segunda ordem, os esforços e deslocamentos em edifícios andares de múltiplos submetidos às ações laterais e verticais.

É formulado um modelo que compatibiliza o elemento que discretiza o núcleo estrutural com sete graus de liberdade, baseado na teoria da flexo-torção de VLASSOV, com o restante da estrutura tridimensional de edifícios de andares múltiplos formada pelos núcleos, pilares, vigas e lajes.

1.3 Justificativa

Diversos já foram os trabalhos desenvolvidos na área de edifícios altos, cada um com suas peculiaridades e considerações. Os primeiros trabalhos foram desenvolvidos utilizando a técnica do meio contínuo para analisar as estruturas, utilizando a teoria da flexo-torção desenvolvida por VLASSOV(1962). Isto era feito, pois nessa época o acesso aos computadores era muito restrito, o que tornava a análise praticamente inviável por processos discretos ou método dos elementos finitos.

Porém a partir da década de 90, com o rápido avanço da computação e com o aparecimento de compiladores de uso mais ‘familiar’ ao usuário (ambiente *Windows*, por exemplo), a grande maioria do trabalhos que analisam estruturas de edifícios de andares múltiplos é realizada por processos discretos, tais como análise matricial pelo processo dos deslocamentos e/ou método dos elementos finitos.

Porém, sempre o objetivo maior na análise estrutural de edifícios de andares múltiplos, seja qual for o método utilizado, está na tentativa de encontrar modelos que

representem de uma maneira mais precisa possível o comportamento real das estruturas de edifícios de múltiplos andares.

Um desses modelos considera que as lajes como tendo uma participação mais efetiva na interação dos esforços e deslocamentos como os demais elementos estruturais (vigas, pilares, núcleos). Isto é possível através da consideração de sua rigidez transversal à flexão, pois muitos trabalhos consideram as lajes como rigidez transversal à flexão nula, ou seja diafragmas totalmente flexíveis fora do seu plano. Porém, sabe-se que as lajes de pavimentos de edifícios devido a seu comportamento de placa, possui rigidez à flexão que pode ser considerada na análise global de estruturas de edifícios altos. Com a consideração dessa rigidez para as lajes é possível uma análise conjunta proveniente da rigidez relativa entre os elementos estruturais que compõem as estruturas dos edifícios de andares múltiplos.

TARANATH (1988) conclui em seu trabalho que é necessário que o fenômeno do empenamento seja considerado seriamente na análise de núcleos com seção aberta. Portanto, há necessidade de se verificar qual a influência da rigidez da laje na restrição parcial desse fenômeno.

Nesta linha de pesquisa, MARTINS(1998) analisou estruturas tridimensionais de edifícios altos em teoria de 2ª ordem. Não foi considerado a presença de núcleos estruturais no modelo de análise da estrutura. As lajes contribuíram com sua rigidez transversal à flexão modificando consideravelmente os deslocamentos e esforços em teoria de 2ª ordem, levando a indicação de que nas estruturas de edifícios de andares múltiplos, com a presença dos núcleos estruturais a influência dessa rigidez transversal à flexão da laje deva ser pesquisada.

1.4 Metodologia

Através do trabalho de levantamento bibliográfico na Biblioteca Central da Escola de Engenharia de São Carlos – USP , foi possível encontrar diversas artigos, dissertações, teses e livros a respeito do assunto núcleos estruturais.

Analisando todo este material, foi possível formular o modelo que compatibiliza o elemento com sete graus de liberdade, baseado na teoria da flexo-torção que discretiza o núcleo estrutural com o restante da estrutura tridimensional de edifícios de andares múltiplos formada pelos núcleos, pilares, vigas e lajes.

As vigas são elementos lineares horizontais posicionadas ao nível das lajes. Devido a laje possuir rigidez infinita no seu plano horizontal, a rigidez axial para as vigas é desprezada. As vigas quando conectadas as paredes internas dos núcleos, são chamadas lintés.

Para os pilares com comportamento tridimensional será realizada a verificação do equilíbrio de forças na sua posição deformada, ou como é conhecida da literatura técnica, análise em teoria de 2^a ordem, considerando a sua não linearidade geométrica. Para possibilitar esta análise serão adotados processos da estática clássica. Considerando inicialmente a estrutura na sua posição indeformada e aplicando-lhe as ações verticais e aquelas originadas da ação do vento, determinam-se os seus esforços. Em função da força normal obtém-se os parâmetros característicos de rigidez de todos os seus elementos, cujo somatório resultará na matriz de rigidez da estrutura em teoria de segunda ordem. O cálculo é iterativo e os deslocamentos resultantes deverão convergir de acordo com um valor de tolerância pré-definido. A análise consistirá em diversas atualizações na matriz de rigidez da estrutura, provocando um aumento nas deformações, que após um certo limite poderá introduzir esforços adicionais significativos, denominados esforços de 2^a ordem.

Os núcleos estruturais terão um comportamento tridimensional, desprezando-se as deformações produzidas pela força cortante. O cálculo da matriz de rigidez de um tramo de núcleo, em teoria de 2^a ordem, será feito através da solução numérica do sistema de equações diferenciais, deduzido a partir da teoria da flexo-torção, desenvolvida por VLASSOV (1962). No cálculo dessa matriz de rigidez, além dos seis deslocamentos usuais do tratamento tridimensional de barras lineares, será considerado mais um, proveniente da deformação por empenamento. Portanto para os núcleos estruturais será utilizado o elemento elástico de barra localizado no centro de torção (CT), o qual possui 7 graus de liberdade por extremidade. Com este elemento elástico de barra irá se

considerar assim o empenamento, tomando como base, a teoria da flexo-torção amplamente pesquisada por VLASSOV (1962).

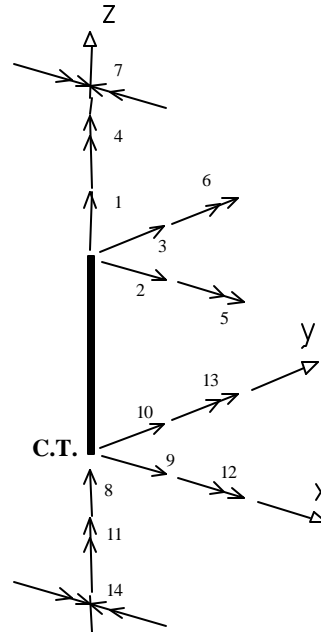


Figura 01 : Elemento de discretização para os núcleos

1.5 Resumo dos capítulos

No próximo capítulo está descrita pesquisa bibliográfica realizada sobre o assunto das estruturas de edifícios de andares múltiplos.

No terceiro capítulo descrevem-se as características de todos os elementos estruturais que formam o edifício. São definidos também o sistema de referência local e as coordenadas deslocamentos de cada elemento estrutural

No quarto capítulo mostram-se as matrizes de rigidez de todos os elementos de barra (viga, pilares, núcleos) e elementos finitos de placa (DKT e DST), nas coordenadas locais e globais.

No quinto capítulo é realizada a montagem da matriz de rigidez global da estrutura. Neste capítulo é mostrada a compatibilização do elemento que discretiza o núcleo estrutural com sete graus de liberdade e o restante da estrutura. Inicialmente é construída a matriz de rigidez condensada do pavimento através da subestruturação em paralelo. Em seguida, a estrutura é calculada através das técnicas de subestruturação em série.

No sexto capítulo apresenta-se a descrição do programa computacional que foi elaborado, para a determinação dos esforços e deslocamentos na estrutura. Estão também listadas as janelas de diálogo do pré-processador elaborado em *Visual Basic 6.0* para ambiente *Windows*.

No sétimo capítulo são analisados cinco exemplos numéricos e os resultados da análise são mostrados em gráficos.

No último capítulo apresentam-se as conclusões e recomendações do trabalho.

CAPÍTULO 2

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Introdução

Na área de estruturas de edifícios de andares múltiplos inúmeros foram os trabalhos desenvolvidos, buscando-se sempre o aperfeiçoamento através da eficiência, precisão, técnicas de cálculos e hipóteses, tentando-se ficar com uma análise cada vez mais próxima da realidade.

A seguir descreve-se um breve histórico dos diversos trabalhos na área de edifícios de andares múltiplos que foram estudados e as técnicas utilizadas para a resolução de cada tipo de estrutura.

2.2 Técnicas de análises de estruturas de edifícios de andares múltiplos

A análise de estruturas com a presença de núcleos estruturais pode ser feita utilizando-se o processo contínuo (técnica do meio contínuo) ou processos discretos, como por exemplo o método dos elementos finitos.

A técnica do meio contínuo tem como vantagem o número reduzido de parâmetros de entrada de dados. Nesta técnica, a estrutura do edifício é substituída por um meio contínuo com rigidez equivalente, uniformemente distribuído ao longo de toda altura do edifício.

As lajes são consideradas como diafragmas rígidos para compatibilizar os deslocamentos horizontais. O comportamento do modelo estrutural é expresso por meio de uma equação diferencial ou por um sistema de equações diferenciais, que podem ser resolvidos por integração direta ou por processos numéricos. Uma das dificuldades na resolução de estruturas pela técnica do meio contínuo é a definição de um modelo arquitetônico que seja o mais uniforme possível, pois para cada variação da arquitetura é preciso definir uma nova equação diferencial.

Os processos discretos, tais como a técnica matricial com o processo dos deslocamentos, não apresentam as limitações da técnica do meio contínuo, podendo-se modelar, por exemplo, núcleos com variações bruscas de geometria e de carregamento.

Os processos discretos consistem em subdividir a estrutura em elementos mais simples interligados entre si através dos nós. A matriz de rigidez local de cada elemento tem que ser conhecida, e assim, é possível montar a matriz de rigidez global da estrutura. Com este procedimento, os processos discretos possibilitam o cálculo de estruturas com variadas disposições arquitetônicas e de carregamentos, e ainda, torna-se mais simples o desenvolvimento de algoritmos para implementar programas de computador que analisam estruturas. Uma desvantagem dos processos discretos seria o elevado número de parâmetros de entrada na dados. Mas, com o avanço da computação gráfica, já foram desenvolvidas técnicas de geração de malhas que minimizam a possibilidade de erros de entrada de dados e agilizam o processo de discretização de uma estrutura.

Segundo SORIANO & SILVA (2000) no método dos elementos finitos, a estrutura original a ser analisada é dividida em um número discreto de sub-domínios ou elementos de dimensões finitas denominados elementos finitos interligados por meio de um número reduzidos de pontos nodais. O comportamento de cada elemento é arbitrado de forma aproximada, com a condição do conjunto ou malha de elementos se comportarem de forma semelhante ao contínuo original.

2.3 Trabalhos desenvolvidos na área de edifícios de andares múltiplos

Vlassov (1962) analisou estruturas constituídas de paredes delgadas, onde um novo tipo de esforço solicitante foi considerado, o bimomento, responsável pelas tensões normais suplementares às causadas pela força normal e momentos fletores nas seções transversais. A teoria desenvolvida por Vlassov(1962), permite a análise dos núcleos resistentes com a consideração do esforço solicitante bimomento, tornando necessário o conhecimento da teoria de flexo-torção. Estas análises podem levar a uma certa complexidade matemática, desencorajando assim a consideração do núcleo resistente na rigidez da estrutura global.

Pensando nisso, Yagui (1971) pesquisou um processo mais simplificado de cálculo aproximado para núcleos resistentes com diafragmas transversais, usando técnicas de cálculo matricial. Independentemente da teoria de Vlassov(1962), o processo permite a análise de estruturas constituídas de paredes delgadas, através do cálculo matricial de estruturas tridimensionais equivalentes.

No modelo proposto por Yagui (1971) o núcleo estrutural é discretizado em segmentos de paredes. Cada segmento de parede situado entre duas lajes (diafragmas) é substituído por elementos formados por duas vigas de rigidez infinita unidas por uma coluna central, que conserva as mesmas características elásticas e geométricas do segmento de parede que a substitui.

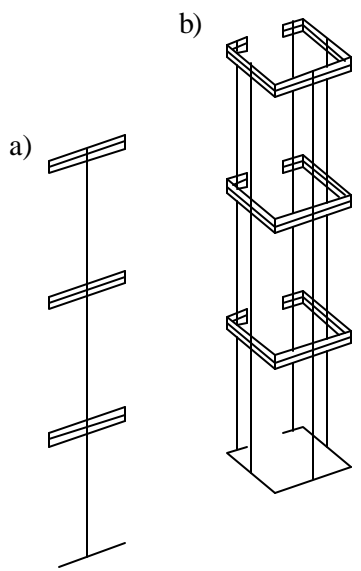


Figura 02 : a) Segmento de parede b) Núcleo Estrutural

Sendo assim, o elemento que discretiza o núcleo estrutural é formado por três elementos com as seguintes características : duas vigas rígidas à flexão ($EI \rightarrow \infty$), que têm por finalidade levar em consideração a largura da parede. Estas vigas horizontais estão localizadas ao nível dos diafragmas (lajes), e uma coluna central que conserva as mesmas características elásticas e geométricas do segmento de parede que a substitui.

A seguir a figura 03 mostra este elemento e seus oito graus de liberdade.

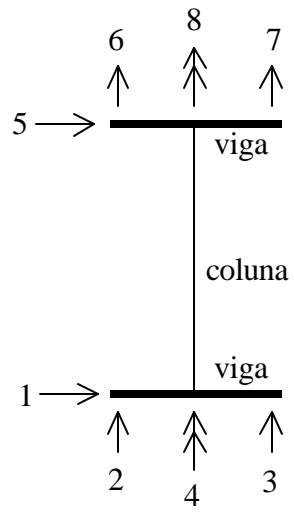


Figura 03 : Elemento de parede usado por YAGUI (1971)

Neste elemento, as coordenadas 4 e 8 consideram a rigidez à torção da coluna. As coordenadas 2/3 e 6/7 procuram compatibilizar o cisalhamento do núcleo. A junção destes elementos é que reproduz o caráter tridimensional do núcleo estrutural. São essas coordenadas que realizam a interação entre os elementos, reproduzindo assim a transmissão de esforço cortante. Consegue-se assim representar o efeito do bimomento como resultante da restrição ao empenamento do núcleo. A figura 04 mostra em detalhe a interação entre as vigas rígidas à flexão e , porém com transmissão de esforços de cisalhamento. As forças de cisalhamento, no modelo, são concentradas atuando nas vigas horizontais concorrentes. Sendo assim, a melhor maneira de representar a vinculação entre as vigas horizontais rígidas é uma rótula.

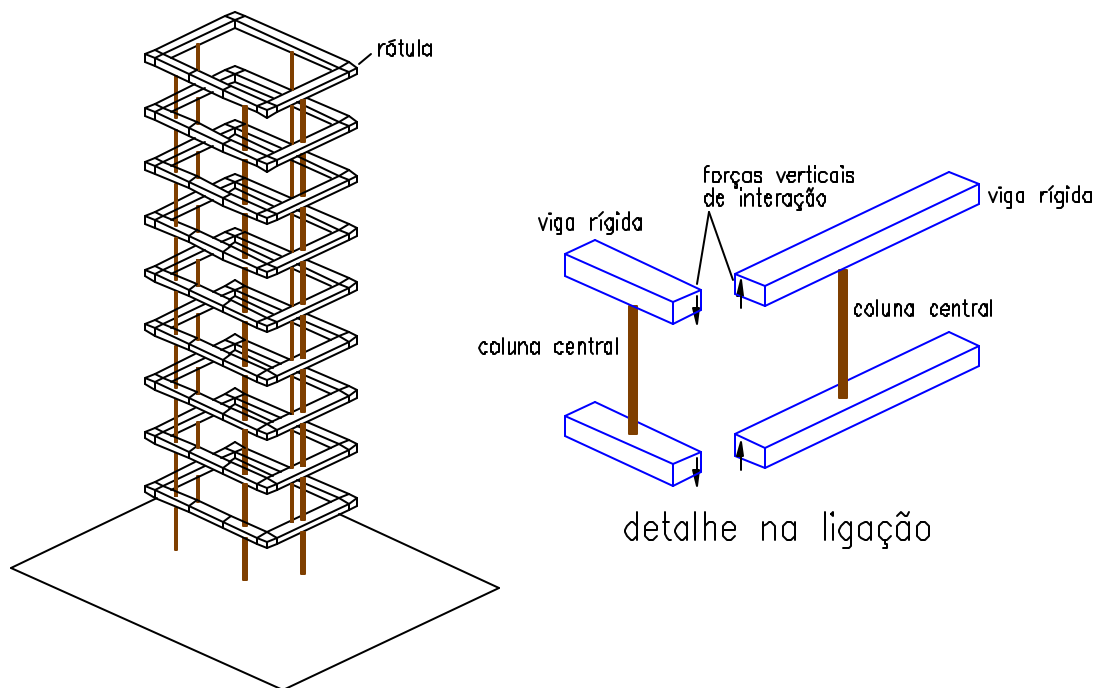


Figura 04 : Discretização do Núcleo segundo YAGUI (1971) - PEREIRA (1997)

YAGUI (1978) analisou a influência do esforço normal em três sistemas estruturais, tendo como elemento principal e núcleo resistente de concreto armado, utilizando as mesmas considerações descritas no seu trabalho de doutorado YAGUI (1971). O primeiro contendo pilares periféricos, o segundo com pendurais vinculados em

treliças de aço posicionadas no seu topo e o terceiro com pilares periféricos vinculados nas suas extremidades superiores às treliças de topo. Além dos esforços é determinado também o carregamento crítico de instabilidade geral no regime elástico.

ANTUNES (1978) teve como principal objetivo a determinação do carregamento crítico de instabilidade elástica geral. Foram analisadas as estruturas tridimensionais de edifícios altos constituídas por pórticos planos e pilares isolados. Utilizando equações diferenciais de equilíbrio do elemento em sua posição deformada, determinaram-se as matrizes de rigidez, em teoria de 2ª ordem, para os pilares, cujas seções transversais possuem um, dois ou nenhum eixo de simetria, sendo consideradas, em alguns casos, as suas propriedades setoriais. Para determinação dos parâmetro de instabilidade foi considerado exclusivamente o esforço axial.

Baseado na teoria de flexo-torção e nas análises desenvolvidas por HEIDEBRECHT & SMITH (1971), BARBOSA (1978) estudou pela técnica do meio contínuo e pelo tratamento discreto, a determinação dos esforços em edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis, sob carga lateral. Através das técnicas do meio contínuo o comportamento da estrutura fica expresso através de uma equação ou sistema de equações diferenciais. Através do método discreto o autor analisou a estrutura pelo processo dos deslocamentos, utilizando as técnicas matriciais, juntamente com a teoria da flexo-torção. BARBOSA(1978) também comparou os resultados obtidos entre as duas técnicas utilizadas e concluiu que há concordância entre os valores obtidos pelo processo contínuo e discreto.

COSTA (1984), utilizando a técnica contínua e a técnica discreta, analisou esforços nas paredes de núcleos estruturais, contraventados por lintéis com vinculação elástica ao nível da fundação. No processo discreto é usado o método dos deslocamentos com as técnicas matriciais tendo sido considerado para o núcleo a mesma estrutura equivalente apresentada por YAGUI (1971). No processo contínuo foi usada a teoria de flexo-torção, considerando para o núcleo comportamento das barras de seção aberta constituídas de paredes delegadas. Por fim é feita uma comparação que evidencia uma boa aproximação entre os valores obtidos nos dois processos.

ROCHA(1985) estudou, utilizando a técnica do meio contínuo, a determinação dos esforços e deslocamentos, em núcleos estruturais de edifícios altos sujeitos à torção. Apresentou três processos, sendo que todos utilizam a técnica do meio contínuo.

O primeiro processo de estudo do núcleo apresentado é baseado no trabalho de TSO & BISWAS(1973) que supõe que os pilares comportam-se como vigas de seção aberta de paredes finas. Em outras palavras, supõe-se que a distribuição da tensão axial de empenamento é dada pela teoria de VLASSOV(1962) para vigas de seção aberta de paredes finas. A deformação dos pilares do núcleo devido à força cortante não é considerada nesta análise. O autor analisou o comportamento dos lintéis no que diz respeito a deformação ou não pelo esforço cortante. Isto é realizado através de um parâmetro k , onde se $k=0$ é desconsiderada para os lintéis a deformação pelo esforço cortante e se $k=1,2$ a deformação dos lintéis pelo esforço cortante é considerada. É feita a comparação de deslocamentos e esforços deste trabalho como o trabalho de BARBOSA (1978), e há boa concordância de valores, porém onde a deformação pelo esforço cortante é considerada, os deslocamentos são maiores.

O segundo é também baseado na mesma hipótese, e ainda considera a deformação das paredes do núcleo devido à força cortante, com base em RUTENBERG & TSO(1975). Novamente o parâmetro k , para consideração ou não da deformação dos lintéis pelo esforço cortante, é aplicado. Na análise, onde a deformação a cortante nos lintéis e paredes do núcleo é considerada concomitantemente, os valores de deslocamentos consequentemente são maiores.

Finalmente a terceira análise de ROCHA (1985) baseia-se no trabalho realizado por ROSMAN (1969), que combinou a teoria da flexo-torção com a análise utilizando o método da energia. ROSMAN (1969) chegou particularmente aos mesmos resultados que TSO & BISWAS (1973), utilizando o método da energia. Devido o trabalho de ROSMAN(1969) ter nas suas expressões a parcela devido ao momento de torção livre ($G.J_t$) há uma pequena diferença nos resultados.

SERRA (1994) em seu trabalho estudou um novo modelo de discretização de núcleos estruturais. Este estudo acrescentou modificações no processo YAGUI (1978) e é apresentado pelo autor como 'Processo Yagui Modificado'.

A figura seguinte mostra este elemento adotado por SERRA (1994) e seus 10 graus de liberdade.

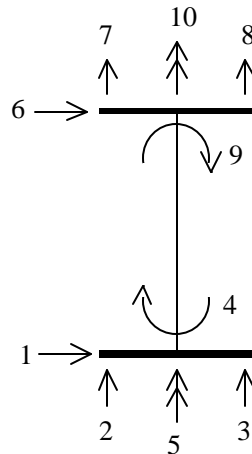


Figura 05 : Elemento de parede usado por SERRA (1994)

Analogamente, ao processo de YAGUI (1971) , as coordenadas 2/3 e 7/8 consideram o cisalhamento no núcleo estrutural. As coordenadas 5 e 10 consideram a rigidez à torção e as coordenadas 4 e 9 consideram a flexão na parede. Para os lintéis são desprezados os esforços normais devido ao efeito de diafragma da laje, com rigidez infinita no seu plano horizontal e desprezível no plano normal.

Na realidade os elementos que discretizam os núcleos são praticamente os mesmos propostos por YAGUI (1971), porém acrescentou duas coordenadas adicionais na coluna central levando em conta a rigidez à flexão das paredes do núcleo estrutural.

Segundo o autor, os núcleos estruturais formam um conjunto de paredes delgadas, em geral de seções parcialmente fechadas por lintéis, sujeitos a vários tipos de esforços, que devido a presença destas vigas, produz um substancial fluxo de tensões de cisalhamento ao redor do núcleo. Desta forma as deformações por cisalhamento são importantes e no modelo YAGUI (1978) consideradas através da coluna central. No modelo de SERRA (1994) a deformação por força cortante do seguimento de parede passa a ser considerada nas vigas ao invés de nas colunas.

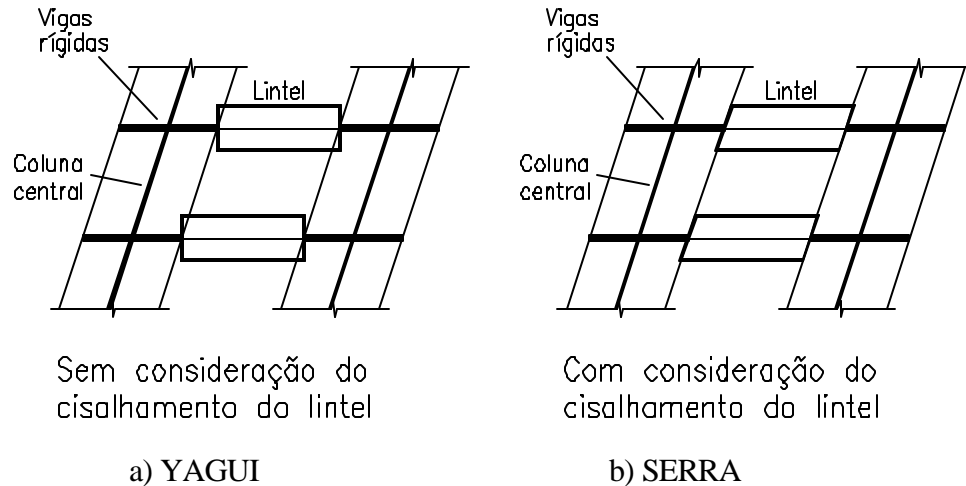


Figura 06 : Consideração ou não do cisalhamento no lintel

A figura 06 ilustra como é considerar ou não a deformação por cisalhamento nos lintéis. YAGUI não considerou a deformação por cortante nos lintéis. SERRA admite esta deformação como parte da compatibilidade de deslocamentos entre a viga rígida e o lintel.

Desta forma as rotações estariam relacionadas com as fibras verticais das paredes, permitindo considerar a deformação por força cortante dos lintéis sem problemas de compatibilidade nos pontos de ligação parede/lintel.

SERRA (1994) propõe mais duas modificações no modelo YAGUI (1978). A primeira é considerar o fator de forma na coluna igual a 1, pois ele afirma ser mais conveniente no caso dos núcleos estruturais; e por último, considerar com maior rigor a rigidez à torção das paredes utilizando o coeficiente sugerido por TIMOSHENKO para o cálculo da constante de torção J_t . Nos vários exemplos calculados SERRA (1994) conclui que os modelos que utilizam a teoria de VLASSOV (1962) superestimam a rigidez do núcleo, em alguns casos o núcleo apresentou rigidez maior do que a obtida em resultados experimentais.

SILVA (1989) analisou o comportamento das estruturas tridimensionais de edifícios com núcleos resistentes, sujeitas a forças verticais e horizontais, considerando a não linearidade geométrica, através do efeito P- Δ . Neste estudo foi utilizado o mesmo modelo de discretização do núcleo proposto por YAGUI (1971). A estrutura composta de pórticos com ou sem diagonais de contraventamento, e paredes de seção aberta (

núcleos), é analisada como uma associação em série de subestruturas tridimensionais, as quais se compõem de um determinado número de andares. As lajes são consideradas como diafragmas rígidos em seu plano e completamente flexíveis transversalmente, sendo responsáveis pela compatibilização dos deslocamentos de todos os nós de um andar no seu plano. A análise da estrutura se faz a partir da consideração dos esforços de 2ª ordem, necessitando da utilização de processo iterativos para sua resolução. Este processo consiste basicamente na utilização de um programa de análise em 1ª ordem que simula o efeito P-Δ através de acréscimos de esforços cortantes e torçores fictícios. O núcleo tem o mesmo comportamento considerado nos trabalhos de YAGUI (1978) e COSTA (1984) quando utiliza o método discreto. Levou-se em consideração a influência das deformações por força cortante, bem como a existência de trechos rígidos entre elementos estruturais.

BECKER (1989), acrescentou os núcleos estruturais baseando-se na teoria da flexo-torção desenvolvida por VLASSOV (1962), SWIFT & HEIDEBRECHET (1970), TARANATH & SMITH (1972), no qual é pesquisado o efeito da deformação por empenamento da seção transversal no estudo da interação tridimensional entre os diversos elementos estruturais. A experiência mostra que os núcleos estruturais (caixa para escadas ou elevadores) quando presentes nas estruturas de edifícios de andares múltiplos, são os grandes responsáveis pela absorção dos esforços decorrentes da carga lateral do vento. É levada em conta a rigidez do núcleo às deformações por empenamento. Por suas características elásticas e geométricas esta peça sempre estará sujeita ao empenamento quando as ações lhe impuserem esforços de torção e/ou flexo-torção. A estrutura é subdivida em subestruturas. Estas por sua vez serão formadas por pórticos, núcleos, pilares individuais e as barras horizontais de contraventamento. Através do tratamento discreto ,utilizando o método dos deslocamentos, determinou-se a matriz de rigidez do núcleo modelando-o como um membro linear com sete deslocamentos por extremidade, sendo seis relacionados ao comportamento tridimensional e o sétimo atribuído ao empenamento. Foram desprezadas as deformações por força cortante.

MORI (1978) analisou esforços solicitantes em barras de seção delgada aberta com vínculos rígidos e elásticos submetidos a esforços torçores concentrados, uniformemente distribuída e bimomentos aplicados. As matrizes de rigidez em teoria de 1ª

e 2ª ordem, bem como o vetor de forças nodais foram obtidos através do método energético e do processo de Ritz, adotando funções polinomiais aproximadas para os deslocamentos.

MORI (1992) analisou a interação tridimensional entre pórticos, pilares isolados, núcleos estruturais e vigas horizontais, eventualmente pertencentes ao sistema estrutural de um edifício alto. A análise foi desenvolvida em regime elástico, a partir da teoria de 2ª ordem, que leva em consideração o equilíbrio da posição deformada da estrutura. A estrutura do edifício é analisada pelo processo dos deslocamentos, empregando-se a técnica matricial de associação de subestruturas tridimensionais, correspondendo cada uma delas a um único andar desse edifício. Para as lajes do sistema de pisos são consideradas como diafragmas completamente flexíveis transversalmente, porém, perfeitamente rígidos no seu plano.

Portanto MORI(1992) acrescentou á análise feita por BECKER (1989) os efeitos da não linearidade geométrica, usando as matrizes de rigidez dos elementos afetada pelos seus respectivos esforços internos. Os pilares isolados, bem como aqueles pertencentes aos pórticos planos são considerados nas matrizes de rigidez em teoria de 2ª ordem, determinadas por ANTUNES (1978). No caso do núcleo resistente a matriz de rigidez em teoria de 2ª ordem é obtida a partir da solução do sistema de equações diferenciais de equilíbrio obtidas com o elemento na sua posição deformada na situação mais geral, ou seja, a seção transversal não possui eixos de simetria e as cargas axiais aplicadas nas suas extremidades admitem excentricidades, surgindo momentos fletores e bimomentos que também influenciarão no cálculo. As três equações resultantes dessas considerações nem sempre são desacopláveis o que torna difícil a solução do sistema de forma fechada, sendo assim o autor optou pela sua resolução usando técnicas numéricas. A grande vantagem no modelo utilizado por MORI (1992) em relação ao modelo de YAGUI (1978) é que ele possibilita a análise de núcleos com variadas formas arquitetônicas, inclusive curvas, já o modelo de YAGUI (1978) está limitado a núcleos formados por associações de paredes retas.

PEREIRA (1997) analisou a modelagem de estruturas de núcleos de rigidez em edifícios de concreto armado. O autor compara a modelagem de núcleos de rigidez através do processo de YAGUI (1971) com outros três procedimentos distintos, com diferentes graus de simplicidade e eficiência. Conclui que o processo desenvolvido por YAGUI (1971) se mostra bastante eficiente e simples. Essa sua simplicidade se verifica pela sua própria concepção, já que necessita-se apenas de elementos de barra para as modelagens.

O primeiro processo que o autor comenta é o chamado processo prático ou usual. Este outro processo é muito utilizado nos escritórios de cálculo de estruturas. Consiste na modelagem dos pilares-parede independentemente. Ou seja, não são consideradas as forças de cisalhamento nos vértices do núcleo.

Deste modo, segundo PEREIRA (1997), este processo ‘despreza’ uma parte da inércia à flexão do núcleo estrutural, pois analisa o núcleo estrutural discretizado em seções independentes umas das outras, e não como um único elemento estrutural.

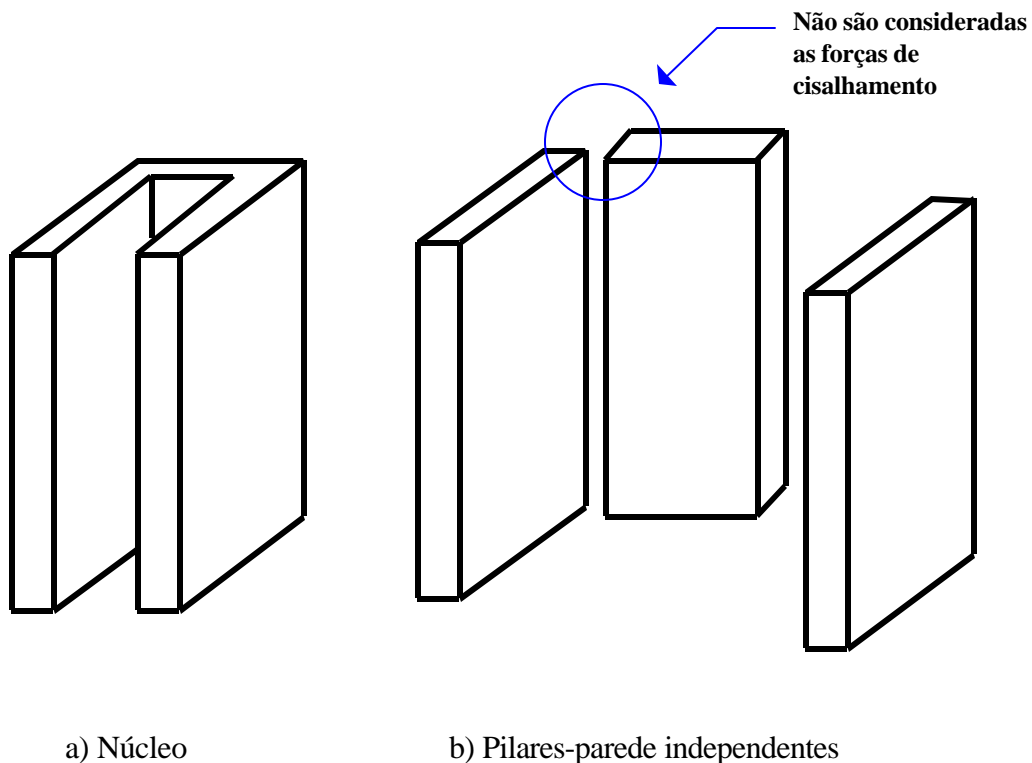


Figura 07 : Modelagem do núcleo pelo processo prático

Depois o autor comenta o processo simplificado, figura 08, que consiste na substituição dos tramos do núcleo estrutural entre duas lajes consecutivas por elementos de barra simples, com seis graus de liberdade por nó (pórtico espacial) localizados no centro de torção do núcleo e com rigidez equivalente.

Segundo PEREIRA (1997) o processo simplificado além de não fornecer bom desempenho para torção, apresenta outros inconvenientes. O primeiro é a necessidade do cálculo do centro de cisalhamento, o que pode ser bastante trabalhoso dependendo da seção transversal do núcleo. O segundo, e mais grave, é a impossibilidade de modelar as vigas que se conectam ao núcleo estrutural. Por essas razões, o processo simplificado não representa adequadamente o núcleo estrutural.

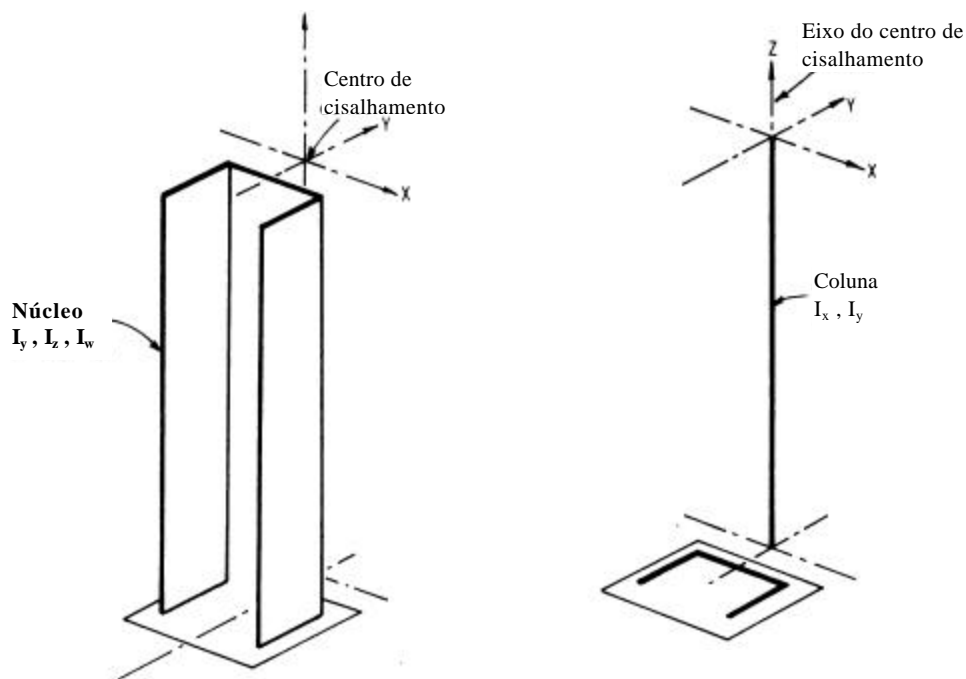


Figura 08: Modelagem do núcleo pelo processo simplificado - SMITH&COULL (1991)

PEREIRA (1997) estudou estruturas com o proposto por TARANATH (1968), que se baseia na teoria da flexo-torção, ou teoria de VLASSOV (1962), e utiliza um

elemento de barra com 7 graus de liberdade por nó. Esse grau de liberdade adicional é utilizado para considerar o empenamento.

SMITH & GIRGIS (1984) propõem dois modelos semelhantes para análise de núcleos estruturais.

O primeiro um modelo de analogia por uma coluna central com barras diagonais. Este modelo consiste em vigas horizontais rígidas, de igual comprimento e largura do segmento de parede substituído, conectadas com uma coluna central e barras diagonais rotuladas as extremidades das vigas.

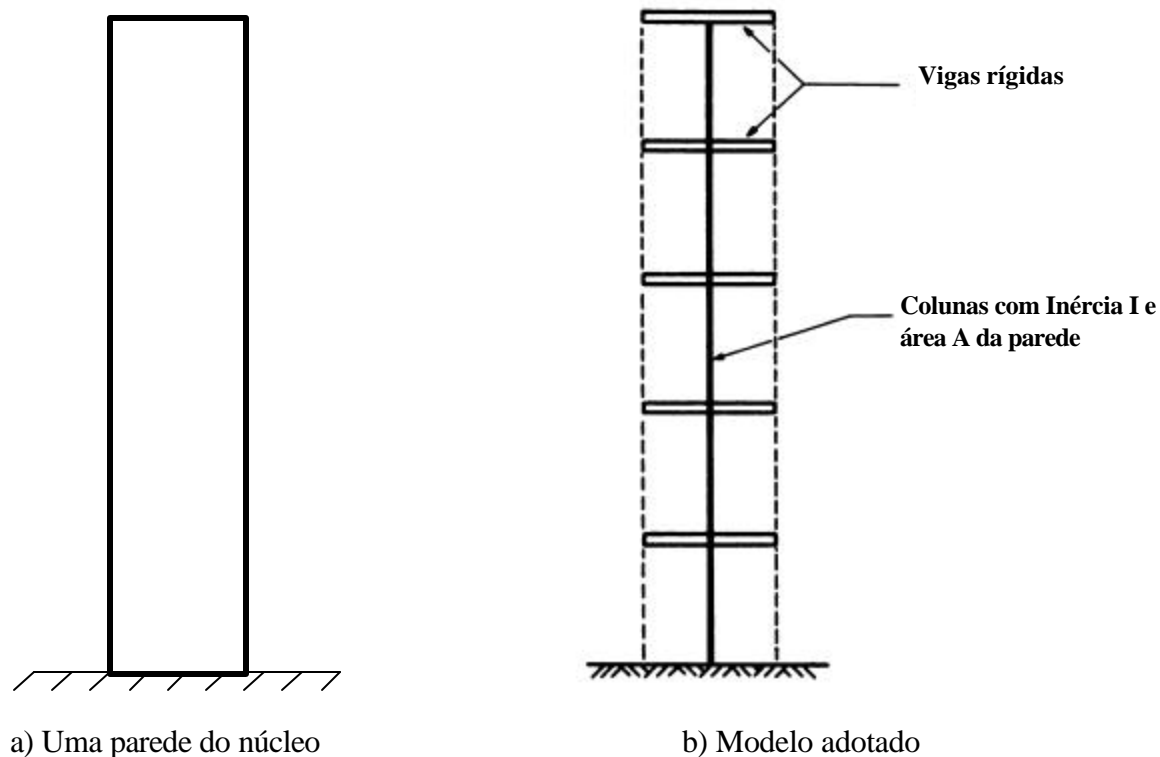


Figura 09 : Discretização da parede do núcleo pelo modelo de coluna central

A seguir apresentam-se os modelos, retirado do trabalho dos autores.

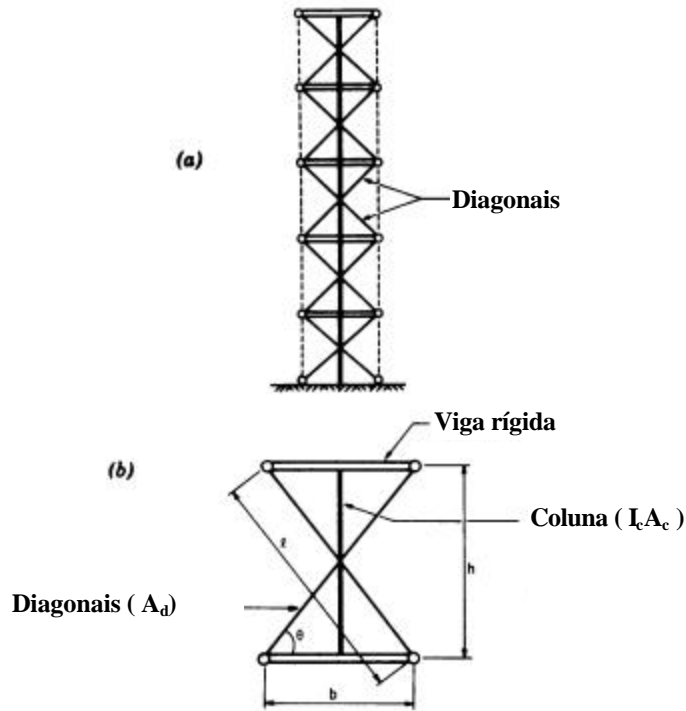


Figura 10 : (a) Modelo de analogia de coluna central (b) Elemento de discretização

O modelo simula rigidez à flexão, cisalhamento e deformação axial do correspondente segmento de parede.

O segundo modelo consiste na analogia de pórticos com barras diagonais. Esta analogia consiste em discretizar o núcleo estrutural em elementos compostos de vigas rígidas e barras diagonais rotuladas com finalidade de contraventamento.

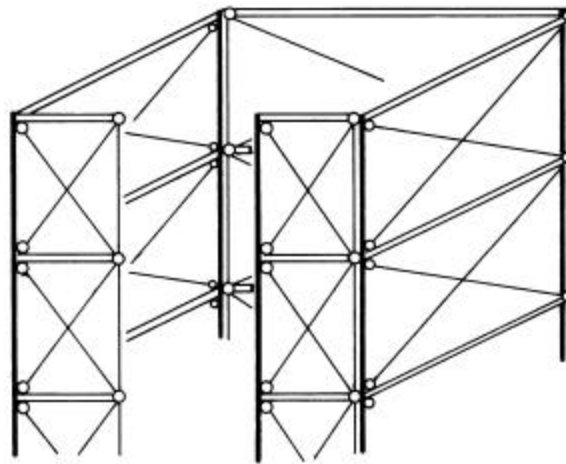


Figura 11 :Exemplo de núcleo discretizado por esta analogia - SMITH&GIRGIS (1984)

Os elementos discretizadores podem ser de dois tipos. O primeiro tipo é formado por duas colunas, o que torna o modelo simétrico, figura 12 (a) e o outro tipo formado por apenas um coluna, de acordo com a figura 12 (b) . Neste caso, no lado esquerdo há uma coluna conectada à vigas rígidas e no outro lado apenas uma barra de ligação.

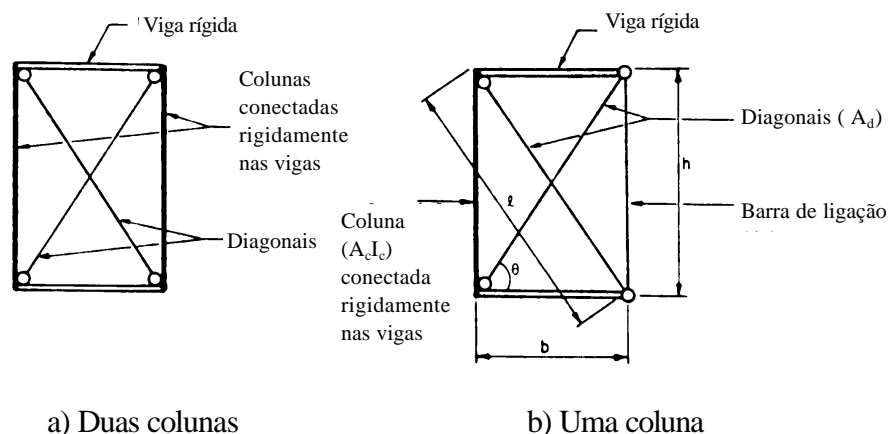


Figura 12 : Tipos de elementos adotados na discretização

Com estes elementos, o modelo pode também simular o comportamento a flexão, cisalhamento e esforço axial.

Os resultados obtidos foram muito satisfatórios. Um dos modelos praticamente obteve resultados iguais ao modelo de elementos finitos de casca e o outro modelo de pórtico, resultados bem próximos. Os autores enfatizaram que o uso dos modelos de pórtico possuem as vantagens de serem mais simples de serem discretizados e de exigirem menos esforço computacional comparando-se com o modelo de elementos finitos de casca.

Os núcleos estruturais também podem ser discretizados com elementos de casca, com seis graus de liberdades por ponto nodal, porém isto aumentaria muito a matriz de rigidez global da estrutura, pois exigiria que as lajes também fossem discretizadas com elementos de cascas para possibilitar a compatibilização dos deslocamentos, e não como elementos de placa que possuem apenas três graus de liberdade por ponto nodal. Dessa forma, o número de parâmetros de entrada de dados pode inviabilizar o cálculo.

Nesta linha de pesquisa, ZIENKIEWICZ (1971) modelou uma estrutura de edifício, onde para as paredes utiliza um elemento plano de tensões, para os lintéis e

pórticos elementos de barra e para as lajes, elementos finitos de placa. Para os núcleos estruturais, desenvolveu um estudo comparativo entre elementos de casca e elementos de membrana, para a sua discretização.

SMITH & COULL (1991) apresentaram um elemento finito de membrana que representa as paredes do núcleo. O modelo pode ser analisado através de elementos quadrangulares de membrana com elemento em estado plano de tensões em associação com elementos de barra. Os lintéis podem ser discretizados em elementos de membrana ou ainda elemento de barra. As figuras 13 e 14 ilustram este modelo. Segundo os autores, uma das vantagens de se utilizar este modelo de análise para o núcleo, é que este modelo não requer o conhecimento do efeito do empenamento no núcleo e nem o cálculo das propriedades setoriais da teoria da flexo-torção, muitas vezes complexa, dependendo da seção transversal do núcleo. As vigas auxiliares servem para manter a forma da seção transversal do núcleo, quando este estiver sujeito a carregamento.

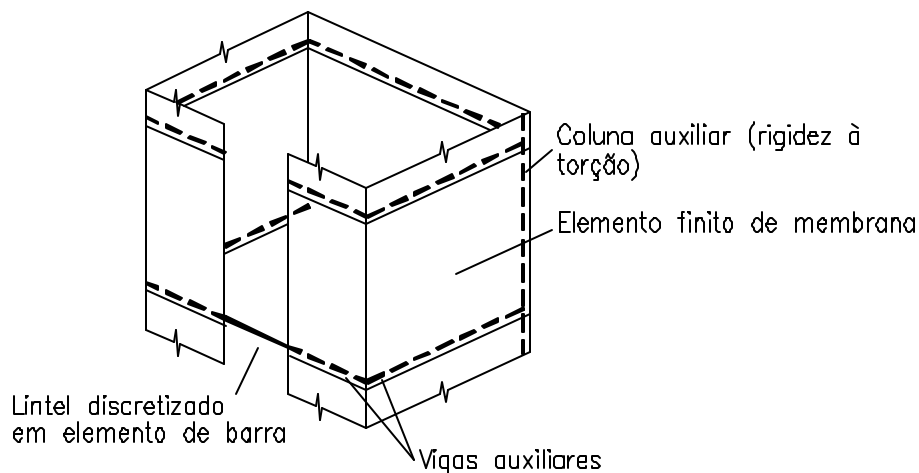


Figura 13 : Modelo de elemento finito de casca -SMITH & COULL (1991)

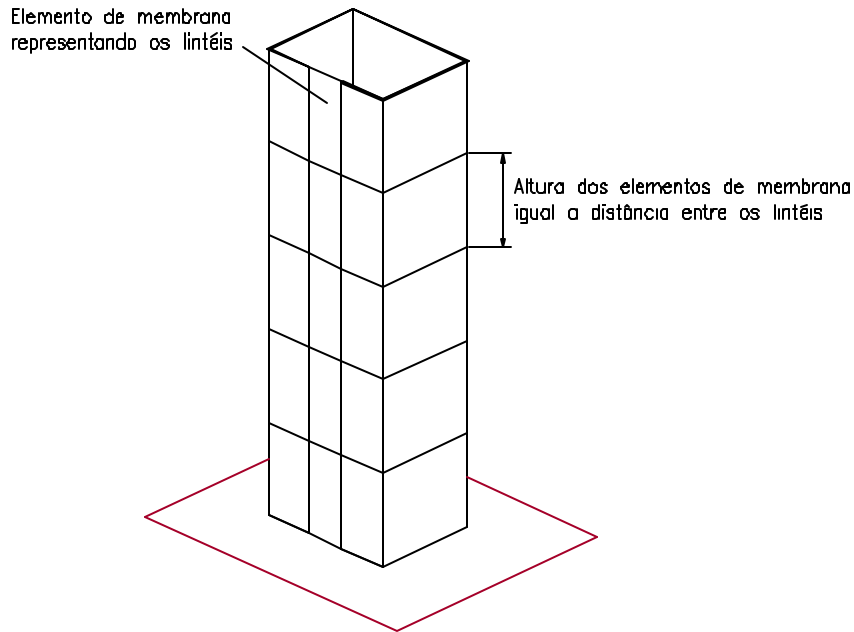


Figura 14 : Elementos de membrana representando os lintéis - SMITH & COULL (1991)

Baseando-se também nos trabalhos desenvolvidos por BECKER (1989) e MORI (1992), MATIAS JR (1997) analisou a interação tridimensional entre núcleos e as estruturas de contraventamento, tais como treliças, pórticos e pilares isolados, considerando a influência das suas fundações no equilíbrio final da estrutura, principalmente quando são introduzidos os efeitos da não linearidade geométrica. Para a automação dos cálculos foram utilizados o método dos deslocamentos e as técnicas matriciais. As matrizes de rigidez foram determinadas aplicando-se o princípio da energia potencial total mínima. Os efeitos de 2ª ordem são considerados através de processo de cálculo iterativo, onde a matriz de rigidez da estrutura tem seus coeficientes afetados pelos esforços normais e no caso dos sistemas com núcleos, além destes, os momentos fletores e os bimomentos. Para o núcleo resistente o autor utilizou o elemento de barra com sete graus de liberdade desenvolvido por TARANATH(1968). O autor também implementou rotinas que tornaram possível a consideração de trechos rígidos e excentricidades existentes entre os eixos longitudinais dos elementos incidentes no mesmo nó. Desprezou-se a deformação pelo esforço cortante nos elementos estruturais.

TORRES (1999) realizou a análise estrutural de edifícios de andares múltiplos que apresentam núcleos resistentes, considerando a deformação pelo esforço cortante nos mesmos, bem como nos pilares. Para atingir esse objetivo, optou-se que o comportamento à flexão dos elementos verticais de contraventamento passasse a ser regido pela teoria de TIMOSHENKO e não mais pela teoria de EULER-BERNOULLI. Foram então desenvolvidos algoritmos que, utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), permitem calcular os fatores de forma de quaisquer seções transversais abertas de paredes delgadas pertencentes a núcleos estruturais, bem como a distribuição da tensão de cisalhamento na seção transversal em função do esforço cortante atuante. O autor conclui que a translação do nó mestre das lajes é sempre aumentada, e esse aumento é mais notável apenas nos pavimentos mais baixos, sendo a alteração da flecha lateral muito pequena. A redistribuição de esforços cortante entre núcleos e pilares é mais pronunciada nos pavimentos inferiores e mínima quando próximo do topo do edifício. Além disso, de uma forma geral, pode-se considerar que há uma redução de rigidez das estruturas à torção, embora isso não se confirmou para todos os exemplos de seu trabalho.

PRUDENTE (1983), analisou as estruturas usuais de edifícios altos constituídas de painéis de contraventamento, formados por vigas e pilares rigidamente conectados entre si, e pilares individuais não sujeitos aos efeitos de flexo-torção. As estruturas analisadas são formadas por subestruturas também tridimensionais, as quais compõem um determinado número de andares. Estas subestruturas por sua vez são formadas por pilares individuais e os painéis, sendo estes compostos de vigas e pilares rigidamente conectados entre si. A análise estática foi feita através do processo dos deslocamentos. Na análise do trabalho, o sistema estrutural considerado foi de uma estrutura tridimensional formada por subestruturas também tridimensionais, que por sua vez, eram formadas pelos painéis e pilares individuais travados horizontalmente pelas lajes.

RIOS (1991), analisou as estruturas de edifícios de andares múltiplos sem observar a formação de painéis e núcleos, entretanto considerou as excentricidades entre os elementos, e calculou ainda as envoltórias dos esforços para diferentes combinações de carregamento, segundo a NBR-8681, que trata o estado limite último para verificação da

segurança. Os edifícios tratados são constituídos por vigas e pilares interligados, ao nível de cada andar, pela laje, unidos monoliticamente, sem a consideração de rigidez de vigas e pilares à torção. As seções das vigas podem ser poligonais e são simétricas em relação ao eixo vertical, enquanto as seções dos pilares podem ser circulares ou poligonais. Os pavimentos podem ser diferentes entre si, no que diz respeito às seções diferentes de vigas ou pilares, arrumação das vigas, excentricidades, interrupção de pilares em determinado pavimento etc. Foi utilizado o processo dos deslocamentos, combinado a técnicas correntes de análise matricial de estruturas.

Como conclusões, o autor verificou que a associação de painéis desprezou esforços importantes, como o momento fletor em alguns pilares, justamente na base onde a força normal tem o valor elevado. É também evidente que a consideração de trechos rígidos nas vigas altera significativamente os esforços e deslocamentos na estrutura. Isto ocorreu, devido ao fato de que no processo de associação de painéis não se considera a rigidez do pilar na direção ortogonal àquela do pórtico a que pertence, alguns desses responsáveis pela diminuição dos deslocamentos horizontais. Nesta situação, pode-se observar que a influência dessa rigidez é predominante na base, sendo que nos pavimentos superiores há diminuição desse efeito.

Finalmente o autor conclui que o modelo apresentado em seu trabalho traz algumas vantagens em relação à associação tridimensional de painéis planos, especialmente quando se analisa edifícios com alto grau de complexidade. No modelo adotado no trabalho, a consideração da excentricidade é direta, as seções dos pilares e vigas podem ter formas quaisquer e as vigas têm direção qualquer no plano da laje. Nessas condições, é possível analisar com maior precisão essas estruturas.

O que se observa de comum nos trabalhos anteriormente citados, é que as lajes trabalham como diafragmas infinitamente rígidos em seu plano horizontal, e rigidez transversal desprezível na análise global da estrutura. Entretanto, é de se supor que devido ao seu comportamento de placa, essa rigidez à flexão terá influência no comportamento estrutural.

Utilizando-se o Método dos Elementos Finitos, BRUNELI, A.C. (1987), analisou diversas estruturas de edifícios andares múltiplos, sujeitas à ação do vento, considerando a

rigidez à flexão das lajes. Para isto o autor empregou o método dos elementos finitos, através do processo dos deslocamentos. Na discretização da laje, para representar o efeito de membrana, empregou-se o elemento retangular ACM (*ADINI-CLOUGH-MELOSH*). O autor conclui que há uma considerável contribuição por parte da rigidez da laje no enrijecimento das estruturas de edifícios por ele analisadas. Posteriormente, SORIA GALVARRO BALCAZAR (1991), analisou estruturas tridimensionais, também considerando a rigidez à flexão das lajes, porém utilizou técnica e a inclusão do elemento de chapa modificado, para representar o comportamento dos pilares parede, melhorando a convergência dos resultados. Para a melhor implementação do programa computacional desenvolvido empregou-se as técnicas de subestruturação em série e paralelo. O elemento retangular de placa utilizado também foi o ACM. No entanto, esses dois últimos trabalhos aplicam-se apenas aos edifícios em plantas retangulares.

BEZERRA (1995) utilizando, também, o Método dos Elementos Finitos, e a implementação do elemento finito triangular DKT (*Discrete Kirchhoff Theory*), que através da condensação estática obteve facilmente um elemento quadrangular, foi possível analisar edifícios de planta qualquer, porém utilizando teoria de primeira ordem para os pilares. No sistema estrutural não considera a presença dos núcleos estruturais, pilares ou pilares-parede submetidos à flexo-torção. O processo para obtenção da matriz de rigidez global da estrutura, através da contribuição de cada elemento estrutural, é análogo ao processo usado por PRUDENTE (1983) e RIOS (1991), já citados anteriormente. A principal conclusão dessa análise foi que ao computar a rigidez à flexão das lajes na estrutura, os deslocamentos horizontais nos pavimentos são menores que os obtidos pelos modelos que as consideram como diafragmas rígidos, com uma diferença de até 17 % referente a translação do último pavimento. Com os deslocamentos reduzidos, verifica-se de uma forma geral uma redução dos esforços de flexão nos elementos estruturais e também do esforço cortante. O autor conclui que no modelo estrutural adotado, as lajes têm participação mais efetiva na interação dos esforços e deslocamentos com os demais elementos (vigas e pilares), em comparação com os outros modelos que as consideram apenas como diafragmas rígidos. Com a utilização do Método dos Elementos Finitos, foi

possível obter informações sobre os deslocamentos independentes em diversos pontos do pavimento, tornando-se uma grande vantagem em relação aos demais modelos.

MARTINS (1998) analisou estruturas de edifícios de andares múltiplos onde as lajes contribuem com sua rigidez transversal à flexão na análise global da estrutura. Para isto, são utilizadas as técnicas do Método dos Elementos Finitos. Sabe-se que os deslocamentos horizontais, causados pelas ações do vento, produzem esforços adicionais, quando são aplicadas simultaneamente as ações de origem gravitacional. Sendo assim, é feita para os pilares a verificação do equilíbrio de forças na sua posição deformada ou análise em 2ª ordem considerando a não linearidade geométrica. Com essas hipóteses para as lajes e os pilares, a dissertação contribui para a análise de edifícios de andares múltiplos, a fim de se obter estruturas cada vez mais eficientes e econômicas, tentando representar de uma forma mais precisa o comportamento físico real de uma estrutura tridimensional de edifícios de andares múltiplos. O autor também realizou um estudo sobre os parâmetros de estabilidade α e γ_z para edifícios altos.

Dentro da linha de pesquisa de análise de estruturas de edifícios altos considerando a interação laje-núcleo estrutural, podemos citar o trabalho de TARANATH(1968). Com o objetivo de reduzir drasticamente o volume de dados de entrada, para o caso específico de núcleos de rigidez, TARANATH (1968) formulou um elemento de barra que possui sete graus de liberdade por nó, considerando-se assim o empenamento. Este elemento foi baseado na teoria de flexo-torção, desenvolvida por VLASSOV (1962). Quando se considera as lajes como diafragmas rígidos, pode-se modelar tramos de núcleo compreendidos entre lajes adjacentes simplesmente com um único elemento. As lajes ligadas ao núcleo estrutural têm duas ações distintas: uma é manter a seção transversal do núcleo constante enquanto ocorrer o empenamento, tornando, assim, válidas as hipóteses usadas na teoria de flexo-torção; e a outra ação das lajes é impedir parcialmente a deformação longitudinal do núcleo estrutural devido à torção. Na figura 15 observa-se o empenamento de um núcleo.

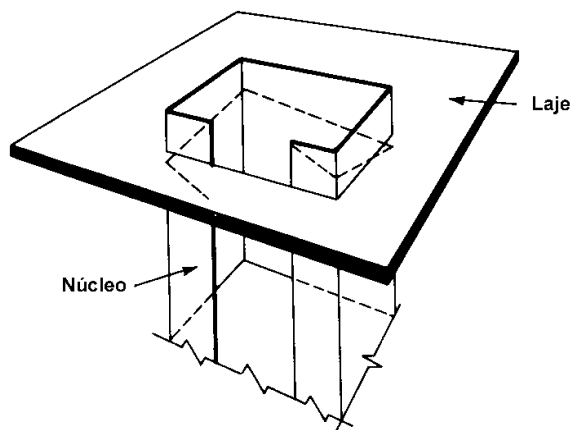


Figura 15 : Núcleo estrutural e laje – TARANATH (1968)

Cabe salientar, que TARANATH (1968) analisou estruturas bastante simples, formadas somente por lajes e núcleos e a análise foi realizada em teoria de 1^a ordem.

O método de análise considerado neste trabalho é o efeito do empenamento para os núcleos estruturais de seção aberta interagindo com a rigidez transversal das lajes. Na figura 16 observa-se a deformação da laje devido ao empenamento do núcleo.

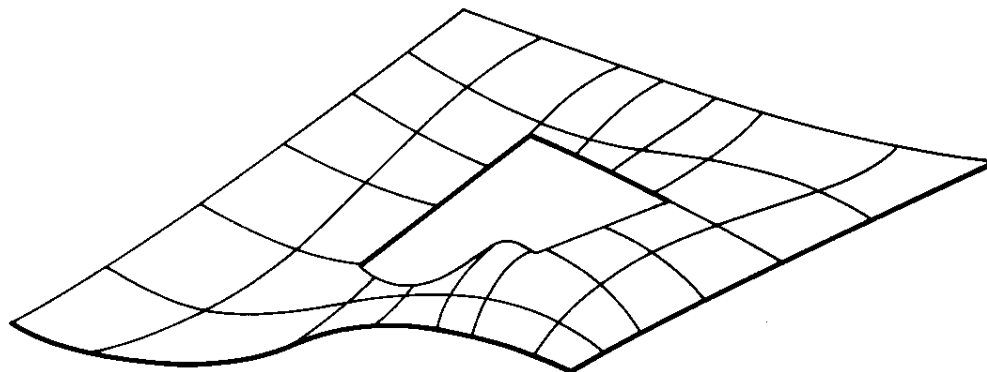


Figura 16 : Deformação da laje devido ao empenamento do núcleo –
TARANATH (1968)

Foram adotadas as técnicas do método dos elementos finitos para computar a rigidez da laje fora do plano (rigidez transversal a flexão). Para a laje é adotado comportamento de corpo rígido, com rigidez infinita no seu plano horizontal.

O fenômeno do empenamento é considerado para todo o núcleo com seções abertas. As paredes são conectadas as lajes sem nenhuma viga no sistema. Para as lajes são assumidas como comportamento de corpo rígido, dessa forma os deslocamentos relativos das seções do núcleo permanecem constantes.

Para o núcleo as coordenadas deslocamentos são de 6 graus de liberdade para as rotações e translações para os eixos ortogonais e a sétima coordenadas é referente ao empenamento, em cada extremidade. Dessa forma a matriz de rigidez local do núcleo estrutural apresenta dimensão de 14 x 14.

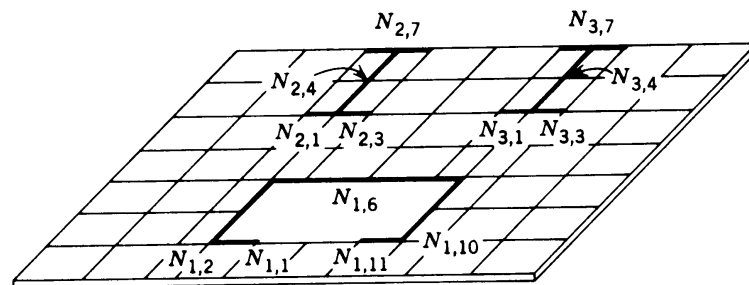


Figura 17 : Discretização de um pavimento em elementos finitos – TARANATH (1968)

O elemento finito quadrangular adotado para a discretização da laje é o elemento finito ACM - *ADINI* e *CLOUGH* e *MELOSH*, que possui 12 graus de liberdade.

Tendo obtido a matriz de rigidez do elemento finito discretizador da laje, o próximo passo é “adicioná-la” aos elementos de lajes a matriz dos elementos verticais. Finalmente obtém-se a matriz de rigidez de cada andar e posteriormente a matriz de rigidez de toda a estrutura. Devido a simetria da matriz ela é armazenada em semi-banda, para melhorar a eficiência do sistema computacional.

Como conclusões, o autor observou que os deslocamentos e as rotações na estrutura, onde considerou-se o empenamento e a rigidez da laje, possuem valores aproximadamente

25 % menores que os obtidos pela análise mais simples, onde o empenamento e essa rigidez são desprezados.

PEREIRA (2000) realizou análise comparativa de resultados, de estruturas de edifícios altos, adotando para o núcleo resistente diferentes tipos de modelagens. Cada estrutura, apresentando o mesmo projeto, porém somente com modelagens diferentes para o núcleo, é submetida simultaneamente às forças horizontais do vento e às ações de origem gravitacional, sendo a partir daí, analisado o comportamento da estrutura de contraventamento diante do efeito destas ações. Foram utilizadas quatro modelagens distintas para o núcleo resistente: pilares paredes isolados, pilares paredes ligados entre si em duas opções, considerando ou não o efeito do bimomento e a modelagem proposta por YAGUI (1971). Uma quinta modelagem, utilizando o software ANSYS[®] foi executada fornecendo resultados que também foram utilizados no processo comparativo. As análises das estruturas de edifícios altos são tridimensionais, considerando cada uma das modelagens apresentadas e levando em conta a sua não linearidade geométrica.

Finalmente, SOUSA, JR (2001) analisou estruturas tridimensionais de edifícios altos, considerando a interação núcleo estrutural e lajes de pavimentos de edifícios em teoria de 1ª ordem. O autor conclui através da modelagem de estruturas de edifícios de andares múltiplos no software ANSYS[®], levando em consideração a rigidez transversal à flexão das lajes, que a não consideração dessa rigidez no impedimento parcial do empenamento do núcleo pode levar a erros consideráveis na análise dos deslocamentos da estrutura.

CAPÍTULO 3

MODELO ESTRUTURAL ADOTADO



3.1 Introdução

Descreve-se a seguir o comportamento dos elementos que fazem parte das estruturas de contraventamento dos edifícios de andares múltiplos. O conjunto de vigas, pilares e núcleos travados horizontalmente pelas lajes, constitui o sistema estrutural.

O modelo adotado permite uma análise tridimensional do sistema estrutural, onde a interação de esforços e deslocamentos é estudada nas três direções. As vigas e lajes são analisadas em teoria de primeira ordem e para os pilares e núcleos é considerado a sua não linearidade geométrica. Para o material é adotado um comportamento elástico-linear, ou seja, não é considerada a não linearidade física para o material constituinte dos elementos estruturais.

3.2 Modelo estrutural adotado

Com o modelo estrutural adotado no trabalho faz-se uma análise tridimensional da estrutura, onde a interação de esforços e deslocamentos entre os elementos estruturais ocorrem nas três direções X, Y e Z. A figura 18 mostra um aspecto geral das estruturas que são analisadas.

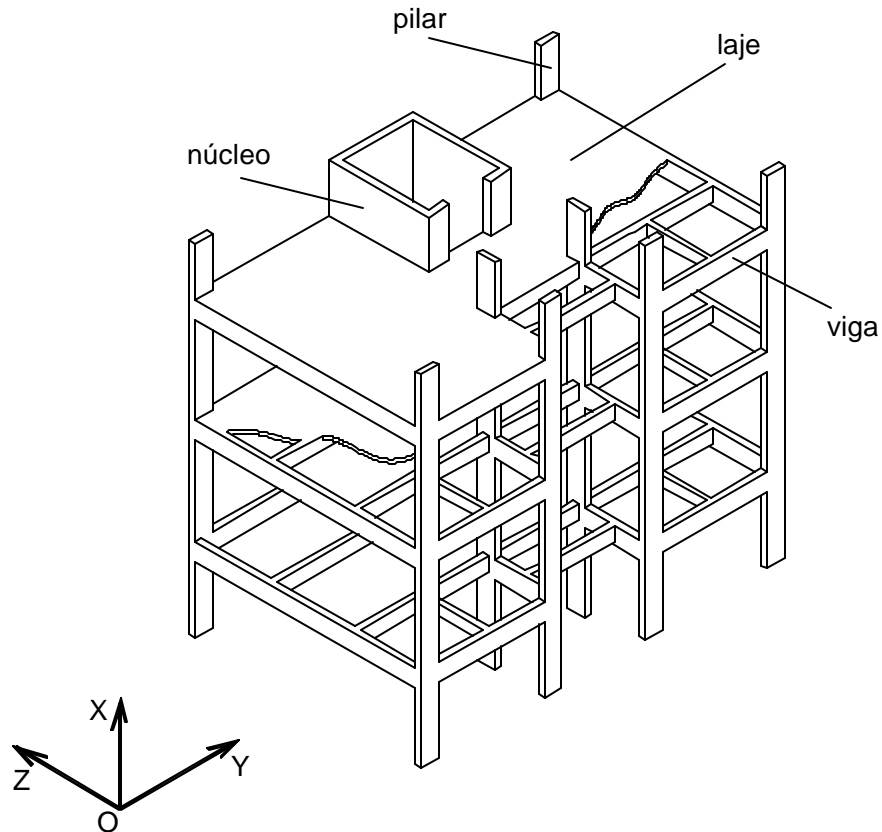


Figura 18 : Modelo estrutural adotado

Os pilares possuem um comportamento tridimensional, tendo sua rigidez ao empenamento desprezada, na sua matriz de rigidez. Para os pilares o equilíbrio é feito em sua posição deformada, teoria de 2ª ordem para assim considerar a sua não linearidade geométrica.

As vigas são barras horizontais posicionadas ao nível das lajes. Sua rigidez axial é desprezada no caso em que as lajes funcionam como elemento de rigidez infinita no seu plano. Quando conectam-se internamente aos núcleos são denominadas lintéis. São discretizadas em elementos de barra interagindo com as lajes discretizadas em elementos finitos de placa, dando origem ao sistema estrutural do pavimento, cuja resistência à flexão também é considerada na estrutura.

Os núcleos estruturais terão um comportamento tridimensional, desprezando-se as deformações produzidas pelo esforço cortante. O cálculo da matriz de rigidez de um tramo de núcleo, em teoria de 2ª ordem, será feito através da solução numérica do sistema de

equações diferenciais, deduzido a partir da teoria da flexo-torção, desenvolvida por VLASSOV (1962). No cálculo dessa matriz de rigidez, além dos seis deslocamentos usuais do tratamento tridimensional de barras lineares, será considerado mais um, proveniente da deformação por empenamento.

As lajes se comportarão como diafragma infinitamente rígido em seu plano horizontal. Porém será considerada a sua rigidez transversal à flexão na rigidez global da estrutura. A consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, será realizada através do método dos elementos finitos. Neste caso os elementos de contraventamento horizontais deverão ser discretizados em elementos finitos de barra e a laje em elementos finitos de placa, possibilitando assim, a determinação da rigidez do sistema estrutural do pavimento. Dessa forma as lajes poderão ainda contribuir com sua rigidez à flexão para diminuir o empenamento das seções transversais dos núcleos.

3.3 Descrição dos elementos estruturais

3.3.1 Vigas

As vigas são compostas por elementos lineares contidos no plano horizontal, ao nível das lajes. Suas extremidades podem estar conectadas tanto nos pilares e núcleos como em outras vigas. Para cada trecho de viga são admitidas seções com eixos principais de inércia, permitindo ainda variação de seção entre os diversos elementos.

No caso da extremidade do trecho de viga se conectar com um pilar, uma excentricidade pode ser admitida em relação ao centróide da seção transversal do pilar, a fim de que se possa considerar um trecho rígido, como mostra a figura seguinte.

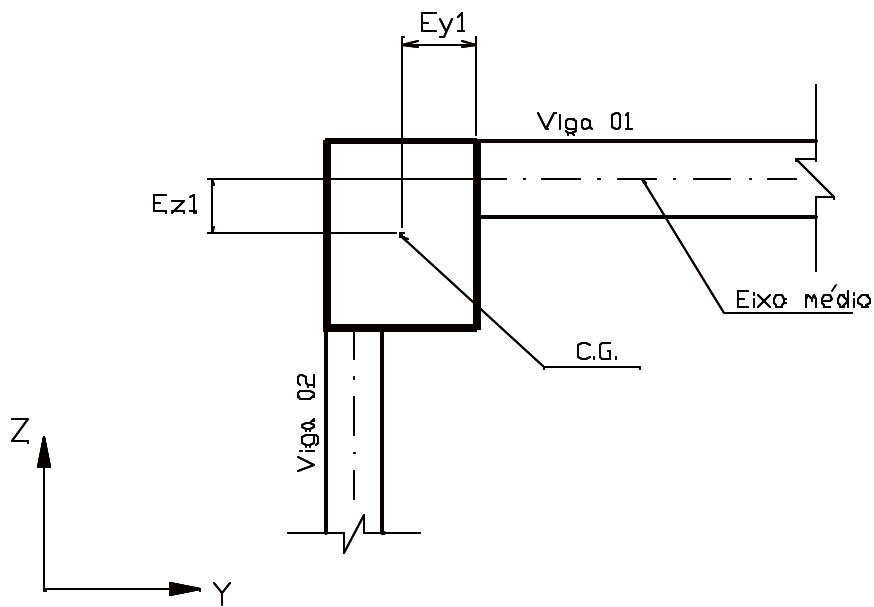


Figura 19 :Consideração das excentricidades entre viga-pilar

3.3.2 Lajes

Para as lajes admite-se que elas tenham comportamento de um corpo rígido em seu plano, compatibilizando as translações horizontais e funcionando como elemento transmissor de forças horizontais para os demais elementos horizontais do sistema de contraventamento. As cargas verticais atuantes nas lajes são transmitidas a todos os elementos conectados às mesmas.

As lajes contribuem também com sua rigidez transversal à flexão na análise global da estrutura. Para considerar a rigidez transversal à flexão, utilizou-se o Método dos Elementos Finitos, onde as lajes são discretizadas em vários elementos finitos de placa.

No modelo adotado no trabalho o eixo do elemento de barra (viga) não coincide com o plano médio da placa, e ao discretizar o pavimento em elementos finitos esta excentricidade não é considerada, fazendo com que o eixo da laje coincida com o eixo médio da viga.

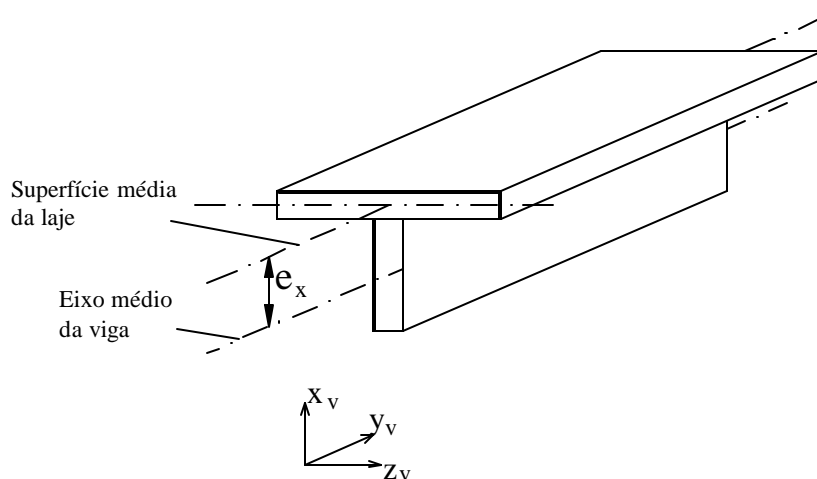


Figura 20 : Excentricidade laje-viga

3.3.3 Pilares

Os pilares que interpõem-se a dois pavimentos consecutivos devem apresentar trechos lineares verticais e ter seção transversal bi-simétrica. Não se considerou excentricidades entre pilares de uma mesma prumada.

Como na análise do sistema estrutural, o edifício é dividido em várias subestruturas independentes, não é preciso que um mesmo pilar esteja presente em todos andares, podendo então ocorrer sua interrupção em qualquer pavimento.

3.3.4 Núcleos

Autores como MORI (1992) e MATIAS JR. (1997) descrevem os núcleos estruturais como elementos de grande rigidez, formados por paredes continuamente ligadas entre si, que podem suportar tanto carregamentos verticais como horizontais. No interior dessas paredes planas podem se localizar elevadores, escadas, depósitos ou servir para a instalação de tubulações elétricas ou hidráulicas. A figura 21 apresenta tipos de núcleos

estruturais, como por exemplo, os de seções abertas formadas por paredes delgadas (a), os que possuem seções parcialmente fechadas por lintéis ao nível das lajes (b) e os de seções parcialmente fechadas pelas lajes (c).

Os núcleos estruturais sendo parcialmente fechados pelas vigas, lintéis ou lajes, estes elementos contribuem com sua resistências à flexão para diminuir o empenamento. Frequentemente, a posição do núcleo estrutural causa assimetria à estrutura do edifício e com isso, quando o edifício recebe o carregamento horizontal, surgem efeitos de flexão e torção que devem ser considerados no cálculo dos núcleos estruturais.

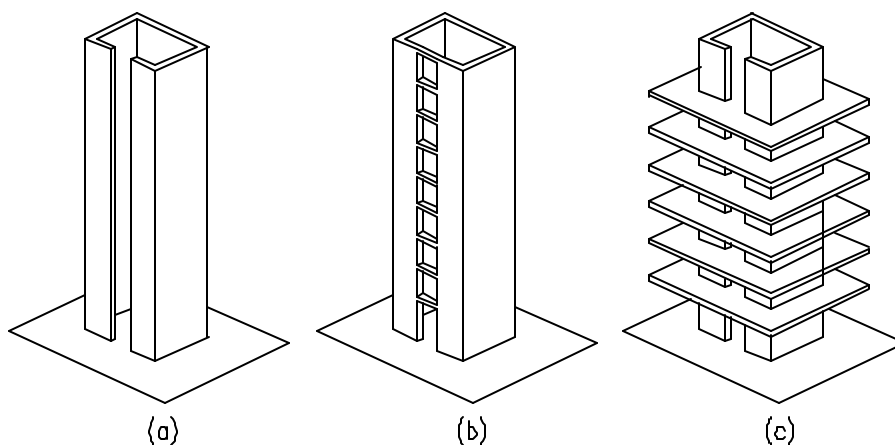


Figura 21 : Tipos de Núcleos Estruturais - SMITH & COULL (1991)

Segundo MATIAS JR. (1997) a característica principal que distingue os núcleos estruturais dos demais sistemas estruturais é a sua capacidade de absorver as cargas horizontais. A figura 22 mostra o empenamento de um núcleo de seção aberta.

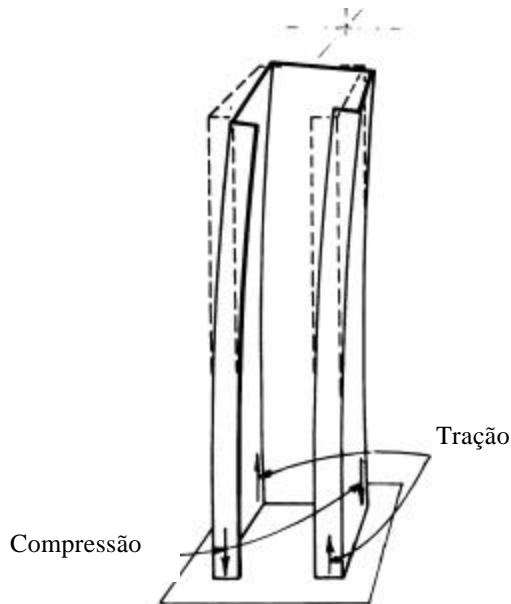


Figura 22 : Empenamento da seção transversal - SMITH & COULL (1991)

Sendo os núcleos estruturais parcialmente fechados pelas vigas, lintéis ou lajes, estes elementos contribuem com suas resistências à flexão para diminuir as deformações na direção do empenamento. Em alguns edifícios altos eles podem isoladamente constituir a estrutura, absorvendo tanto os esforços horizontais como verticais; nestes casos as tensões devido às deformações por flexão e empenamento podem ter a mesma ordem de grandeza, devendo ser ambas consideradas, o que exige conhecimentos da teoria da flexo-torção.

Os lintéis são vigas de grande altura relativamente aos seus vãos e se encontram geralmente aos níveis dos pisos de modo a fechar parcialmente os núcleos. Eles serão considerados engastados nas paredes que lhe são coplanares, e em caso contrário, serão considerados articulados. Se um lintel é engastado em pelo menos uma parede, ele restringirá parcialmente o empenamento da seção, ou seja, a sua presença enrijece o núcleo estrutural quando sujeito a esforços de torção. Normalmente são localizados sobre vãos de portas de elevadores e/ou aberturas que dão forma ao núcleo estrutural.

MATIAS JR. & MORI(1997) descreve o fenômeno do empenamento nos núcleos estruturais como sendo consequência das suas dimensões, ou seja, seu comportamento estrutural assemelha-se ao de um perfil delgado aberto que quando

submetido à torção faz com que suas seções transversais, originalmente planas, empenem, provocando tensões normais de tração e compressão, as quais integradas sob a área da seção transversal fornece uma nova grandeza introduzida por VLASSOV (1962) e denominada de bimomento. Esse esforço solicitante desempenha uma função na flexo-torção equivalente ao momento fletor na flexão simples. As tensões normais adicionais, responsáveis pelo aparecimento do bimomento, surgem em consequência da variação do momento torçor aplicado ao longo de sua altura ou quando existem vínculos que impeçam total ou parcialmente o empenamento da seção da base. A presença das vigas, lintéis ou lajes, contribuem com a resistência à flexão para diminuir o empenamento. A figura 23 mostra a flexão e empenamento do núcleo com seção aberta, com fechamento parcial por lintéis e com fechamento parcial por lajes

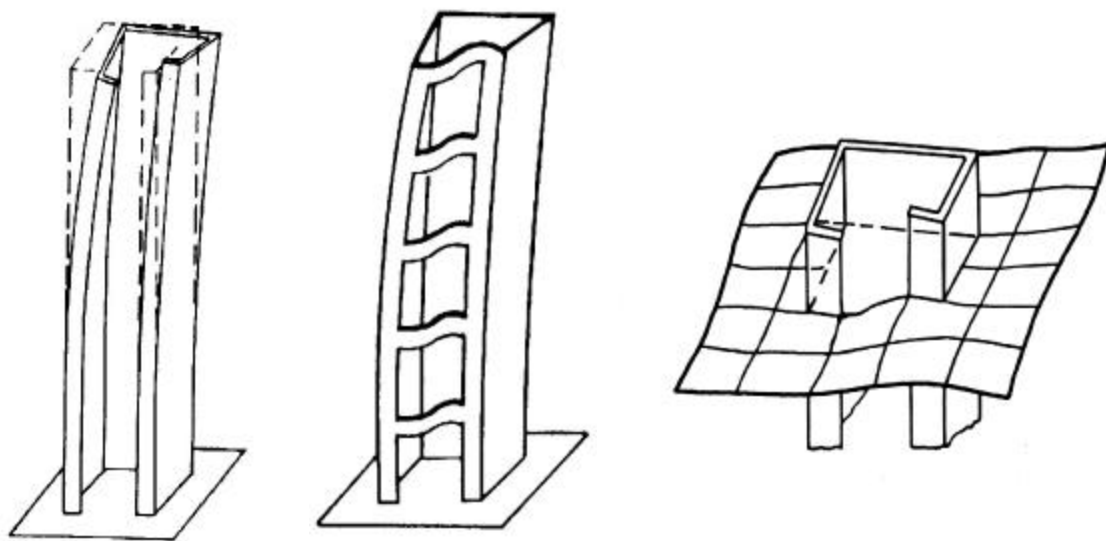


Figura 23 : Flexão e empenamento do núcleo– SMITH & TARANATH (1972)

3.3.5 Subestruturas

Cada andar do sistema estrutural é representado pela subestrutura que compreende os elementos horizontais (vigas e lajes), contidos no pavimento superior, e os elementos verticais (pilares), que se ligam ao pavimento inferior.

Os pavimentos correspondentes a cada subestrutura podem ser diferentes entre si, ocasionados por alguma variação de seus elementos estruturais constituintes, tais como : interrupção de pilares, nova distribuição das vigas, mudanças de carregamentos, alteração nas seções transversais, etc.

3.4 Sistemas de referência

3.4.1 Sistema de referência global

Para a estrutura é adotado um sistema de eixos cartesianos X, Y e Z com origem O_G contida em um ponto arbitrário do plano da base do edifício. O sentido positivo dos eixos é adotado de acordo com a Figura 24, sendo que o eixo X tem direção vertical e seu sentido será considerado positivo da base para o topo.

A partir do sistema de eixos globais, definem-se todos os nós das subestruturas, dos elementos de placa discretizadores das lajes e ainda:

- **nós de vigas** : encontro de dois ou mais trechos de vigas ao nível da laje.
- **nós de pilares**: encontro do pilar com a laje, no centro de gravidade do pilar.
- **nós de perfil de núcleo** : encontro de cada nó do perfil do núcleo com a laje discretizada
- **nós de núcleo** : nó de cada núcleo , situado no centro de torção (CT) da seção transversal do mesmo

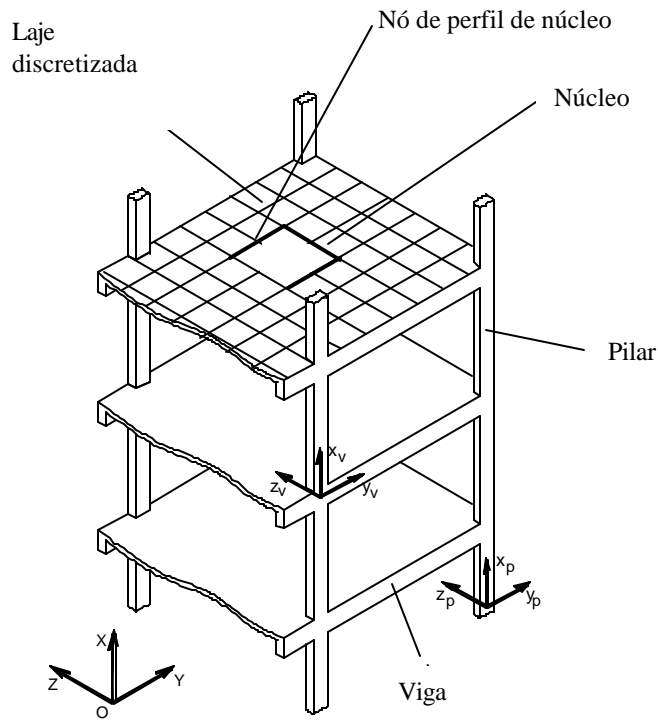


Figura 24 : Sistema de referência do edifício

3.4.2 Sistema de referência local das vigas

Para um trecho de viga, adota-se um sistema de referência local x_v , y_v e z_v , dextrorso, com origem O_v no centro de gravidade da seção transversal, em uma de suas extremidades. O eixo y_v é o eixo longitudinal da peça e é considerado coincidente com a superfície média da laje, o eixo x_v é paralelo ao eixo X do sistema global, sempre orientado para cima.

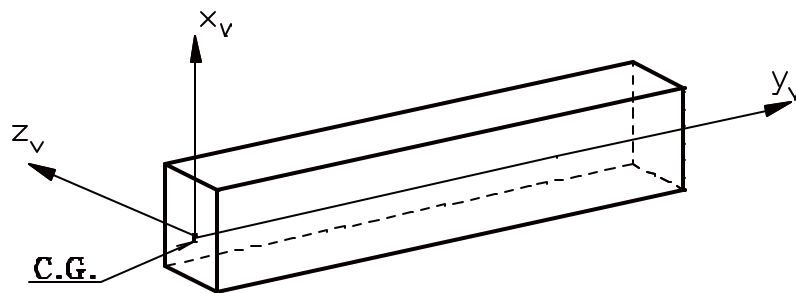


Figura 25 : Sistema de referência local das vigas

3.4.3 Sistema de referência das lajes

O sistema de referência para as lajes é definido por um sistema cartesiano de eixos X, Y e Z, sendo Y e Z os eixos horizontais e X o eixo vertical, positivo para cima, com origem O_L pertencente a sua superfície média em um ponto arbitrário, como mostra Figura 26.

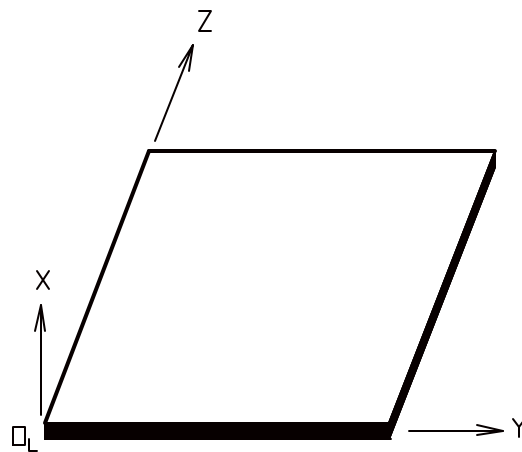


Figura 26 : Sistema de referência das lajes – MARTINS (1998)

3.4.4 Sistema de referência local dos pilares

A barra cujo comportamento tridimensional será estudado está referida a um sistema de eixos cartesianos x_p , y_p e z_p como indicado na figura 27, sendo y_p e z_p os eixos principais de inércia da seção e x_p é o eixo longitudinal passando pelo centróide da seção transversal do pilar.

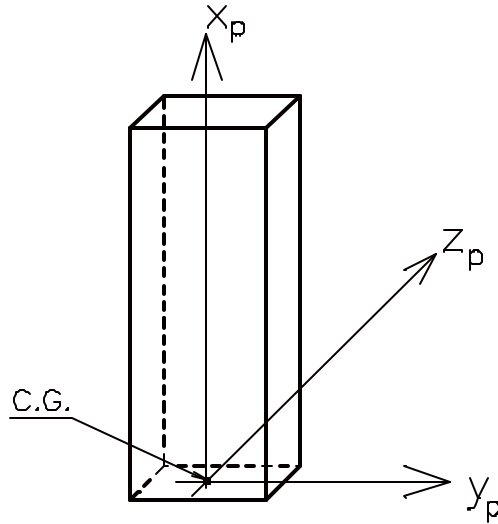


Figura 27 : Sistema de referência local dos pilares – MARTINS (1998)

3.4.5 Sistema de referência local dos núcleos

A barra, baseada na teoria da flexo –torção, está referida a um sistema de eixos cartesianos x_n , y_n e z_n como indicado na figura 28, sendo y_n e z_n os eixos principais de inércia da seção e x_n é o eixo longitudinal passando pelo centro de torção da seção transversal do núcleo.

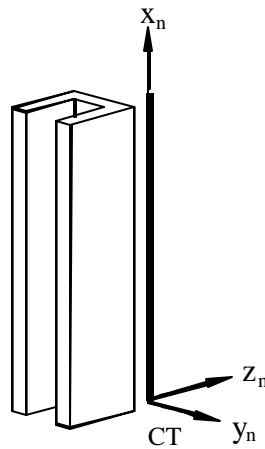


Figura 28 : Sistema de referência local dos núcleos

3.4.6 Sistema de referência da subestrutura

O sistema de referência da subestrutura é o mesmo das lajes, ou seja, com origem O_s no plano do pavimento correspondente.

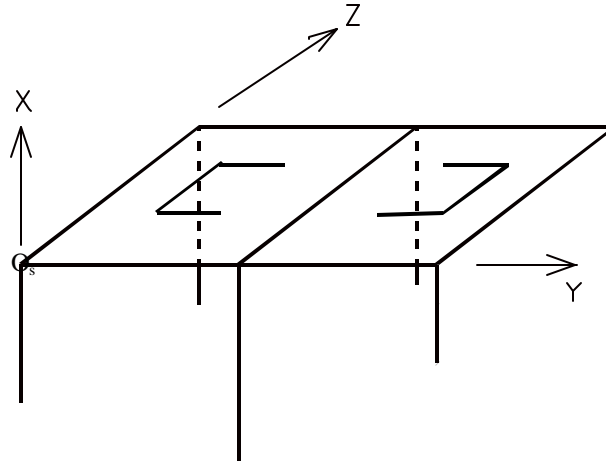


Figura 29 : Sistema de referência das subestruturas

3.5 Coordenadas-deslocamento

As coordenadas-deslocamento são orientações nas direções dos possíveis deslocamentos independentes, associados às extremidades de cada elemento estrutural. Sendo assim, as coordenadas-deslocamento são convencionadas de acordo com o sistema de referência local adotado para cada elemento.

3.5.1 Coordenadas-deslocamento das vigas

As coordenadas-deslocamento independentes nas extremidades das vigas são :

- rotação em torno dos eixos y_v e z_v do sistema local
- translação segundo o eixo x_v do sistema local.

Então, para cada trecho de viga estão associados seis coordenadas-deslocamento, sendo três em cada extremidade. Não se considerou as deformações axiais, devido à hipótese das lajes trabalharem como diafragmas rígidos.

Dessa forma, a transposta do vetor de deslocamentos da viga, $\{ u_v \}^t$, em coordenadas locais fica :

$$\{ u_v \}^t = \{ \delta_{xv1} \ \phi_{yv1} \ \phi_{zv1} \ \delta_{xv2} \ \phi_{yv2} \ \phi_{zv2} \}$$

onde :

- os índices 1 e 2 representam cada uma das extremidades da viga e δ_x a translação segundo x_v e as rotações ϕ_y e ϕ_z segundo y_v e z_v .

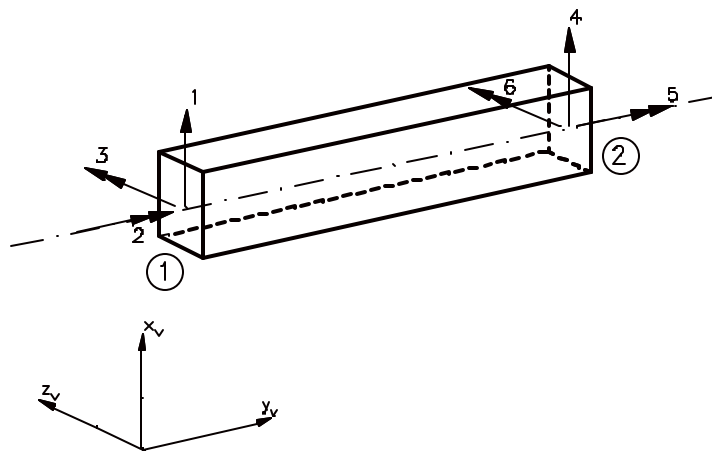


Figura 30 : Coordenadas-deslocamento locais de um trecho de viga

3.5.2 Coordenadas-deslocamento das lajes

Cada laje é considerada como se fosse um diafragma infinitamente rígido em seu plano horizontal. As forças laterais do vento são aplicadas diretamente nas lajes e em direções contidas no seu plano.

Cada pavimento apresenta três coordenadas-deslocamento associadas às lajes:

- translação segundo os eixos Y e Z do sistema de referência global ou da subestrutura;

- rotação em torno do eixo X do mesmo sistema

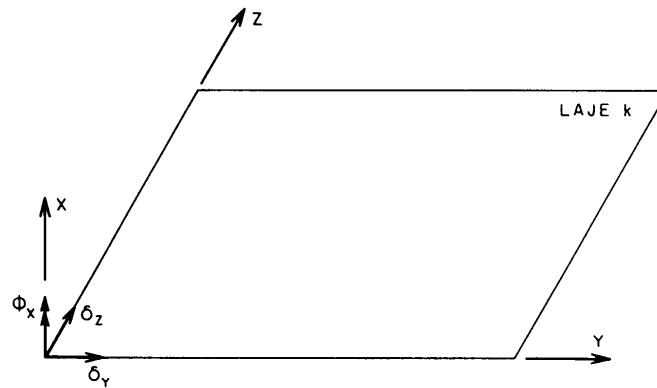


Figura 31 : Coordenadas-deslocamento de corpo rígido da laje – MARTINS (1998)

Então, a transposta do vetor de deslocamentos referente ao movimento do corpo rígido $\{ u_L \}^T$, fica :

$$\{ u_L \}^T = \{ \delta_Y \quad \delta_Z \quad \phi_X \}$$

Como também se está considerando a rigidez transversal à flexão da laje, têm-se ainda três coordenadas-deslocamento por nó, pertencentes a cada elemento de placa DKT ou DST, que compõe a laje discretizada, que são :

- translação segundo o eixo X do sistema global (δ_X).
- rotação em torno dos eixos Y e Z do sistema global (ϕ_Y e ϕ_Z)

Dessa forma a transposta do vetor de deslocamentos de cada elemento finito de placa $\{ u_{\text{elemento_finito}} \}^T$, fica definido como :

$$\{ u_{\text{elemento_finito}} \}^T = \{ \delta_{X1} \quad \phi_{Y1} \quad \phi_{Z1} \quad \delta_{X2} \quad \phi_{Y2} \quad \phi_{Z2} \quad \delta_{X3} \quad \phi_{Y3} \quad \phi_{Z3} \}$$

onde:

- os índices 1 , 2 e 3 representam os nós dos vértices do elemento finito triangular, como mostra a figura seguinte .

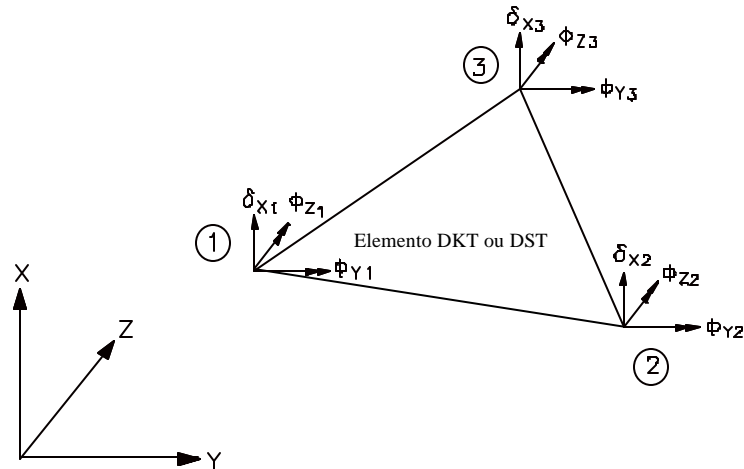


Figura 32 : Coordenadas-deslocamento do elemento finito DKT ou DST

3.5.3 Coordenadas-deslocamento dos pilares

Os pilares têm suas coordenadas-deslocamento representadas na figura 33. São coordenadas de uma barra prismática vertical, de pórtico espacial, com três rotações e três translações em cada extremidade, referidas aos eixos centrais de inércia da seção transversal.

Dessa forma, a transposta dos deslocamentos dos pilares $\{ u_p \}^t$, em função de suas coordenadas locais fica :

$$\{ u_p \}^t = \{ \delta_{xp1} \ \delta_{yp1} \ \delta_{zp1} \ \phi_{xp1} \ \phi_{yp1} \ \phi_{zp1} \ \delta_{xp2} \ \delta_{yp2} \ \delta_{zp2} \ \phi_{xp2} \ \phi_{yp2} \ \phi_{zp2} \}$$

onde :

- os índices 1 e 2 indicam as extremidades superior e inferior, respectivamente.

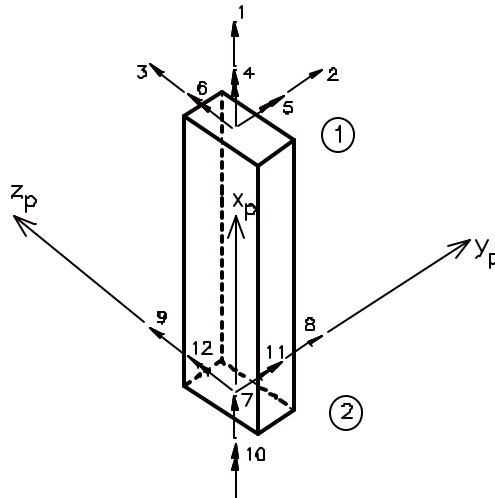


Figura 33 : Coordenadas-deslocamento de um trecho de pilar

3.5.4 Coordenadas-deslocamento dos núcleos

O elemento de barra que discretiza o núcleo possui catorze coordenadas, sete em cada extremidade, onde seis são referentes ao comportamento tridimensional de pórtico e a sétima está relacionada com a derivada da rotação em torno do eixo $x - \phi'_{xn}$ (empenamento).

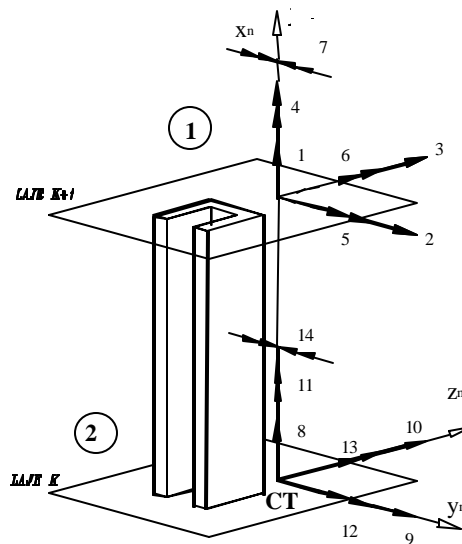


Figura 34 : Coordenadas-deslocamento do elemento de núcleo

Dessa forma, a transposta dos deslocamentos dos núcleos $\{ u_n \}^t$, em função de suas coordenadas locais fica :

$$\{ u_n \}^t = \{ \delta_{xn1} \ \delta_{yn1} \ \delta_{zn1} \ \phi_{xn1} \ \phi_{yn1} \ \phi_{zn1} \ \phi'_{xn1} \ \delta_{xn2} \ \delta_{yn2} \ \delta_{zn2} \ \phi_{xn2} \ \phi_{yn2} \ \phi_{zn2} \ \phi'_{xn2} \}$$

onde :

- os índices 1 e 2 indicam as extremidades superior e inferior, respectivamente.

3.5.5 Coordenadas-deslocamento da subestrutura

Como cada subestrutura é composta de diferentes elementos e suas coordenadas são estabelecidas em função de cada elemento constituinte. As coordenadas locais de todos os elementos horizontais (lajes e vigas), são colocadas em função das coordenadas independentes dos elementos verticais (pilares e núcleos).

Os deslocamentos da estrutura são divididos em quatro grupos :

- **para cada nó de pilar** : para cada pilar tem-se os deslocamentos independentes que são : rotação em torno dos eixos Y e Z, e a translação segundo o eixo X do sistema de referência da subestrutura (δ_X , ϕ_Y e ϕ_Z).

- **para cada nó de perfil** : para cada nó de perfil de núcleo tem-se os deslocamentos independentes que são : rotação em torno dos eixos Y e Z, e a translação segundo o eixo X do sistema de referência da subestrutura (δ_X , ϕ_Y e ϕ_Z).

- **para cada nó de núcleo** : para cada nó de núcleo , situado no centro de torção (CT) da seção transversal do núcleo ,tem-se os deslocamentos independentes que são : rotação em torno dos eixos Y e Z, a translação segundo o eixo X do sistema de referência da subestrutura e o deslocamento referente ao empenamento da seção transversal. (δ_X , ϕ_Y , ϕ_Z e ϕ'_x).

- **para cada laje** : para as lajes que formam o pavimento, têm-se as suas coordenadas-deslocamento referentes ao movimento de corpo rígido, que é único em cada pavimento. Estas coordenadas-deslocamento são : rotação em torno do eixo X e translação em torno de Y e Z (ϕ_X , δ_Y e δ_Z).

CAPÍTULO 4

MATRIZ DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS ESTRUTURAIS



4.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se a matriz de rigidez de cada elemento estrutural que forma as subestruturas, isto é, viga, pilar, núcleo e os elementos finitos adotados na discretização da laje, referentes ao sistema de coordenadas locais e globais (subestrutura). Além disso, determina-se também de modo resumido a matriz de rigidez do elemento finito DKT e DST, responsável pela consideração da rigidez transversal à flexão da laje.

4.2 Matriz de rigidez de um elemento de viga

Através das técnicas de análise matricial, a matriz de rigidez de um elemento de viga, associada ao seu sistema de coordenadas locais, $[K_{v1}]$, segundo figura 30, é dada por :

$$[K_v] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_{zv}}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_{zv}}{l^2} & -\frac{12EI_{zv}}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_{zv}}{l^2} \\ 0 & \frac{GJ_t}{l} & 0 & 0 & -\frac{GJ_t}{l} & 0 \\ -\frac{6EI_{zv}}{l^2} & 0 & \frac{4EI_{zv}}{l} & \frac{6EI_{zv}}{l^2} & 0 & \frac{2EI_{zv}}{l} \\ -\frac{12EI_{zv}}{l^3} & 0 & \frac{6EI_{zv}}{l^2} & \frac{12EI_{zv}}{l^3} & 0 & \frac{6EI_{zv}}{l^2} \\ 0 & -\frac{GJ_t}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{l} & 0 \\ -\frac{6EI_{zv}}{l^2} & 0 & \frac{2EI_{zv}}{l} & \frac{6EI_{zv}}{l^2} & 0 & \frac{4EI_{zv}}{l} \end{bmatrix}$$

sendo :

E - módulo de elasticidade longitudinal

G - módulo de elasticidade transversal

I_{zv} - momento de inércia em relação ao seu eixo z_v

J_t - momento de inércia à torção.

l - comprimento flexível do trecho

A matriz de rigidez do trecho de viga apresentada anteriormente refere-se ao sistema local. O que se deseja é que esta matriz seja referida em função das coordenadas deslocamentos da subestrutura. Para isso é necessário fazer uma transformação de coordenadas de rotação, através de uma matriz de incidência cinemática correspondente.

Considerando um trecho de viga entre nós de pilares, temos as excentricidades representadas pela figura seguinte.

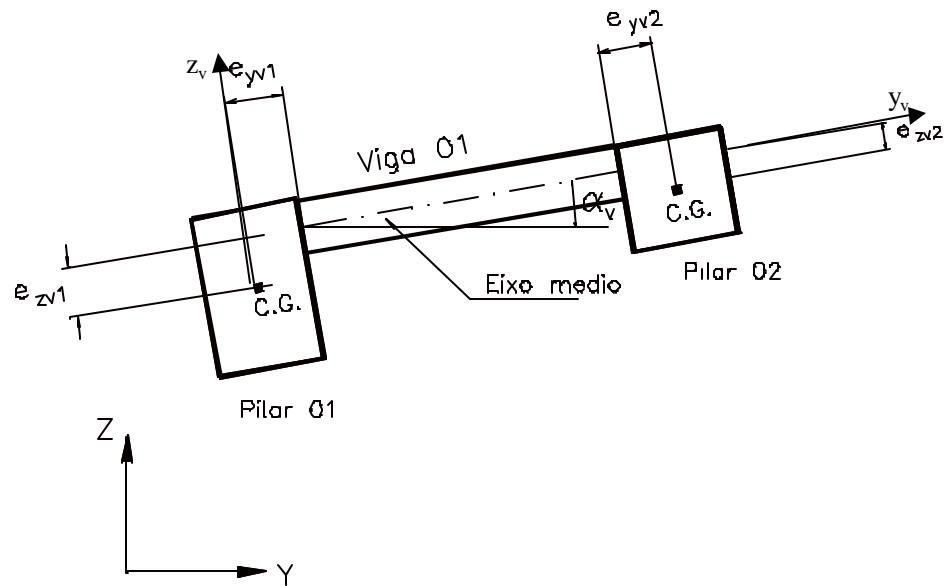


Figura 35 : Trecho de viga entre nós de pilares – MARTINS (1998)

onde :

- e_{yv1} e e_{zv1} são as excentricidades da viga em relação ao pilar 01 em que se conecta.
- e_{yv2} e e_{zv2} são as excentricidades da viga em relação ao pilar 02 em que se conecta.
- α_v é o ângulo formado entre o eixo Y da subestrutura e o próprio eixo da viga, no sentido anti-horário positivo.

Os deslocamentos $\{ u_v \}$, do sistema local, são obtidos a partir dos deslocamentos $\{ U \}$, do sistema global, através da matriz $\{ \beta_v \}$ de transformação de coordenadas, através da seguinte expressão :

$$\{ u_v \} = [\mathbf{b}_v] \cdot \{ U \}$$

onde $[\beta_v]$ é a matriz de incidência cinemática da estática clássica, que pode ser escrita da seguinte forma :

$$[\beta_v] = \begin{bmatrix} 1 & e_{zv1} & -e_{yv1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_v) & \sin(\alpha_v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha_v) & \cos(\alpha_v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e_{zv2} & -e_{yv2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_v) & \sin(\alpha_v) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha_v) & \cos(\alpha_v) \end{bmatrix}$$

Agora, se um trecho de viga qualquer estiver compreendido entre nós de viga as excentricidades não existirão mais. Sendo assim, a matriz de incidência cinemática é análoga, porém com $e_{zv1} = e_{zv2} = e_{yv1} = e_{yv2} = 0$.

Com a matriz de incidência determinada, a matriz de rigidez das vigas, em função das coordenadas da subestrutura $[K_{vg}]$, é obtida através da seguinte expressão :

$$[K_{vg}] = [b_v]^T [K_v] [b_v]$$

sendo $[b_v]^T$ a transposta da matriz $[b_v]$

4.3 Matriz de rigidez dos pilares em teoria de primeira ordem

Para os pilares admite-se comportamento tridimensional de pórtico com 06 coordenadas por extremidade, como já dito anteriormente. Não é previsto a aplicação de carregamentos externos ao longo de seu eixo longitudinal e as seções transversais são bi-simétricas.

A matriz de rigidez do pilar em teoria de primeira ordem através das técnicas correntes da análise matricial, em coordenadas locais é dada por :

$$[K_{pl}]^I = \begin{bmatrix} [K_{pl}]_1 & [K_{pl}]_2 \\ [K_{pl}]_2^T & [K_{pl}]_3 \end{bmatrix}$$

com :

$$[K_{pl}]_1 = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zp}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{zp}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{yp}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{yp}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{xp}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_{yp}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{yp}}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_{zp}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{zp}}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_{pl}]_2 = \begin{bmatrix} -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{zp}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{zp}}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_{yp}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{yp}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GI_{xp}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_{yp}}{L^2} & 0 & \frac{2EI_{yp}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{zp}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{zp}}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_{pl}]_3 = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zp}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{zp}}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{yp}}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_{yp}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GI_{xp}}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_{yp}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{yp}}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_{zp}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_{zp}}{L} \end{bmatrix}$$

onde :

G – módulo de elasticidade transversal

E - módulo de elasticidade longitudinal

L - altura do pilar

S - área da seção transversal

I_{yp} = momentos de inércia em relação ao eixo principal y_p

I_{zp} = momento de inércia em relação ao eixo principal z_p

I_{xp} = momento de inércia à torção

Para os pilares, também deve-se relacionar as coordenadas locais do pilar com suas coordenadas na subestrutura (globais). As translações segundo os eixos horizontais, δ_y e δ_z , e a rotação em torno do eixo vertical ϕ_x , que a princípio se poderia considerar para todos os pilares, são compatibilizados através de um único nó, devido à rigidez infinita admitida no plano horizontal das lajes, proporcionando portanto, os mesmos movimentos desses três graus de liberdade em cada pavimento.

Com isto, a matriz de rigidez do pilar associada às coordenadas da subestrutura, pode ser obtida a partir de $[K_{pl}]^l$, através de uma matriz de incidência cinemática, mostrada abaixo, referente à rotação e translação dos eixos horizontais.

Portanto, a matriz de incidência $[\beta_p]$, que relaciona os deslocamentos globais (subestrutura) do pilar com seus deslocamentos locais, é dada por :

$$[\mathbf{b}_p] = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_{p1}] & [0] \\ [0] & [\mathbf{b}_{p2}] \end{bmatrix}$$

onde $[\mathbf{b}_{p1}]$ e $[\mathbf{b}_{p2}]$ são sub-matrizes referente às extremidades superior e inferior do pilar, respectivamente

No caso da extremidade superior do pilar tem-se :

$$[\mathbf{b}_{p1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\mathbf{a}_p) & \sin(\mathbf{a}_p) & d_{y_p} \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\mathbf{a}_p) & \cos(\mathbf{a}_p) & d_{z_p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos(\mathbf{a}_p) & \sin(\mathbf{a}_p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\mathbf{a}_p) & \cos(\mathbf{a}_p) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde :

- d_{y_p} e d_{z_p} são as distâncias dos eixos y_p e z_p do pilar à origem do sistema de referência da subestrutura, dadas por :

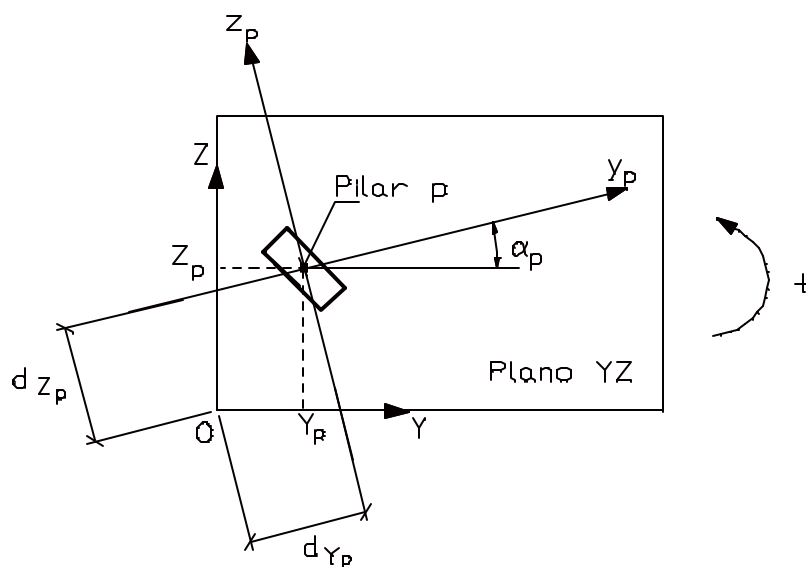


Figura 36 : Distância dos eixos do pilar à origem

$$d_{Y_p} = Y_p \cdot \cos(\mathbf{a}_p) + Z_p \cdot \sin(\mathbf{a}_p)$$

$$d_{Z_p} = Y_p \cdot \sin(\mathbf{a}_p) - Z_p \cdot \cos(\mathbf{a}_p)$$

α_p - ângulo entre o eixo Y do sistema de referência da subestrutura e o eixo y_p do sistema local.

As distâncias Y_p e Z_p são as coordenadas cartesianas Y e Z do centro de gravidade do pilar p, associadas à origem do sistema de referência da estrutura.

O mesmo acontece para a extremidade inferior, já que não há variação da seção transversal do pilar.

Assim, a matriz de rigidez do pilar, em teoria de primeira ordem, em função das coordenadas da subestrutura, $[K_{pg}]^I$, é obtida por :

$$[K_{pg}]^I = [\mathbf{b}_p]^T [K_{pl}]^I [\mathbf{b}_p]$$

4.4 Matriz de rigidez dos pilares em teoria de segunda ordem

Para a obtenção da matriz de rigidez dos pilares em teoria de segunda ordem, serão feitas as seguintes hipóteses e simplificações de cálculo :

- as seções transversais são bi-simétricas
- não há distorção da seção transversal fora do seu plano (empenamento).
- a carga axial está aplicada no centróide da seção transversal, não havendo portanto excentricidades.
- não é prevista a aplicação de cargas externas ao longo da barra.

Sendo assim, o sistema de equações diferenciais com as considerações acima, regente deste problema, o qual encontra-se deduzido em MORI (1992), é dado pela expressão :

$$\begin{aligned}
 EI_{xp} v_c^{IV} + P \cdot v_c'' &= 0 \\
 EI_{yp} w_c^{IV} + P \cdot w_c'' &= 0 \\
 -(GI_{xp} - P \cdot i_c^2) \cdot \phi_c'' &= 0
 \end{aligned}$$

onde :

- w_c e v_c são dos deslocamentos do centróide da seção transversal.
- P – carga axial aplicada no centróide da seção transversal, positiva quando de compressão.

Este sistema é formado por três equações independentes, sendo as duas primeiras relacionadas à flexão nos seus planos principais de inércia e a última à torção.

ANTUNES (1978) resolve o sistema de equações diferenciais para diversos tipos de seções transversais, inclusive as bi-simétricas. A solução exata deste sistema de equações diferenciais foi obtido supondo que os nós são suficientemente rígidos para impedirem os empenamentos das seções transversais. Essa hipótese resume-se em adotar, como condição de contorno para o tramo da barra, nas duas extremidades que a derivada primeira do ângulo de rotação é nula ($\phi_c' = 0$).

Com essa hipótese o sistema de equações diferenciais é resolvido para os casos de carga P de compressão ou tração. As expressões dos esforços ao longo das barras são determinadas e a matriz de rigidez do tramo da barra é então calculada.

Os esforços devido à deformação axial da barra, são idênticos aos de uma barra em teoria de 1ª. ordem, esteja ou não atuando o esforço axial P , pois a seção transversal do pilar não se altera.

Com estes esforços obtém-se a matriz de rigidez, em teoria de segunda ordem, de cada tramo de pilar, nas coordenadas locais, mostrada abaixo :

$$[K_{pl}]^H = \begin{bmatrix} [K_{pl}]_1 & [K_{pl}]_2 \\ [K_{pl}]_2^T & [K_{pl}]_3 \end{bmatrix}$$

com :

$$[K_{pl}]_1 = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{m_z L^3} & 0 & 0 & 0 & -s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{L^2} \\ 0 & 0 & 2s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{m_y L^3} & 0 & s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{L^2} & 0 & s_y\frac{EI_{yp}}{L} & 0 \\ 0 & -s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & s_z\frac{EI_{zp}}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_{pl}]_2 = \begin{bmatrix} -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{m_z L^3} & 0 & 0 & 0 & -s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{L^2} \\ 0 & 0 & -2s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{m_y L^3} & 0 & s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{L^2} & 0 & s_y c_y \frac{EI_{yp}}{L} & 0 \\ 0 & s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & s_z c_z \frac{EI_{zp}}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_{pl}]_3 = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{m_z L^3} & 0 & 0 & 0 & s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{L^2} \\ 0 & 0 & 2s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{m_y L^3} & 0 & -s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{L^2} & 0 & s_y\frac{EI_{yp}}{L} & 0 \\ 0 & s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & s_z\frac{EI_{zp}}{L} \end{bmatrix}$$

onde :

E - módulo de elasticidade longitudinal

G - módulo de deformação transversal

L - altura do pilar

S - área da seção transversal

I_{yp} - momentos de inércia em relação ao eixo principal y_p

I_{zp} - momento de inércia em relação ao eixo principal z_p

I_{xp} - momento de inércia à torção

k_t - constante igual a $k_t = GI_{xp} - Pi_c^2$

i_c - raio de giração dado por $i_c = \sqrt{\frac{I_{yp} + I_{zp}}{S}}$

Temos que s_y , c_y , m_y e s_z , c_z , m_z são as funções de instabilidade, as quais podem ser encontradas em ANTUNES (1978).

O processo para obtenção da matriz dos pilares em teoria de segunda ordem em suas coordenadas na subestrutura (globais) é o mesmo que para teoria de primeira ordem. Pois devido à consideração de diafragma rígido para as lajes no seu plano, não há mudança na posição dos pilares ou de sua seção transversal. Portanto a matriz de incidência $[\beta_p]$, que relaciona os deslocamentos globais (subestrutura) do pilar com seus deslocamentos locais, é a mesma mostrada no item 4.3.

Assim, a matriz de rigidez do pilar, em teoria de segunda ordem, em função das coordenadas da subestrutura, $[K_{pg}]^II$, é obtida por :

$$[K_{pg}]^II = [\mathbf{b}_p]^T [K_{pl}]^II [\mathbf{b}_p]$$

4.5 Matriz de rigidez do núcleo em teoria de primeira ordem

Como já foi mencionado, para se considerar a rigidez dos núcleos na rigidez global da estrutura, o elemento de núcleo será discretizado em um elemento de barra com 07 graus de liberdade por extremidade, de acordo com a teoria da flexo-torção de

VLASSOV (1962). A formulação completa da matriz de rigidez de modo mais completo pode ser encontrada em MATIAS JR. (1997).

O sistema de equações diferenciais desse elemento de núcleo com 7 graus de liberdade pode ser expresso por :

$$\begin{aligned} E.S.u'' &= 0 \\ E.I_{yn}.w_{CT}'''' &= 0 \\ E.I_{zn}.v_{CT}'''' &= 0 \\ E.I_w.f'''' - G.I_{xn}.f'' &= 0 \end{aligned}$$

onde :

- v_{CT} – função que define os deslocamentos no eixo y
- w_{CT} – função que define os deslocamentos no eixo z
- \hat{O} – função que define as rotações no eixo x
- $I_{\hat{u}}$ – momento setorial de inércia da seção transversal
- I_{xn} – momento de torção à torção
- I_{yn} - momentos de inércia em relação ao eixo principal y_n
- I_{zn} - momento de inércia em relação ao eixo principal z_n
- S – área da seção transversal

As matrizes de rigidez axial e à flexão nos planos principais de inércia são fornecidas pelas 03 primeiras equações. A última equação diferencial está relacionada à torção e ao empenamento.

A resolução desse sistemas de equações, através da adoção das condições de contorno convenientes para cada extremidade do elemento com 7 graus de liberdade fornece a matriz de rigidez do elemento que discretiza o núcleo.

Por fim serão reunidos na matriz $[K_{nl}]^l$ todos os coeficientes de rigidez do elemento de núcleo, com suas posições definidas pelo sistema de coordenadas locais mostrado na figura 34.

$$[K_{nl}]^I = \begin{bmatrix} [K_{nl}]_1 & [K_{nl}]_2 \\ [K_{nl}]_2^T & [K_{nl}]_3 \end{bmatrix}$$

$$[K_{nl}]_1 = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{ES}{L} z_{gt} & -\frac{ES}{L} y_{gt} & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zn}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{zn}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{yn}}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_{yn}}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{gash} & 0 & 0 & -\mathbf{g}(ch-1) \\ \frac{ES}{L} z_{gt} & 0 & \frac{6EI_{yn}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{yn}}{L} + \frac{ES}{L} z_{gt}^2 & -\frac{ES}{L} z_{gt} y_{gt} & 0 \\ -\frac{ES}{L} y_{gt} & -\frac{6EI_{zn}}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} z_{gt} y_{gt} & \frac{4EI_{zn}}{L} + \frac{ES}{L} y_{gt}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{g}(ch-1) & 0 & 0 & \mathbf{g}(Lch - \frac{sh}{a}) \end{bmatrix}$$

$$[K_{nl}]_2 = \begin{bmatrix} -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} z_{gt} & \frac{ES}{L} y_{gt} & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_{zn}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{zn}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_{yn}}{L^3} & 0 & \frac{6EI_{yn}}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{gash} & 0 & 0 & -\mathbf{g}(ch-1) \\ -\frac{ES}{L} z_{gt} & 0 & -\frac{6EI_{yn}}{L^2} & 0 & \frac{2EI_{yn}}{L} - \frac{ES}{L} z_{gt}^2 & \frac{ES}{L} z_{gt} y_{gt} & 0 \\ \frac{ES}{L} y_{gt} & \frac{6EI_{zn}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_{zn}}{L} + \frac{ES}{L} y_{gt}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{g}(ch-1) & 0 & 0 & \mathbf{g}(\frac{sh}{a} - L) \end{bmatrix}$$

$$\left[K_{nl} \right]_3 = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{ES}{L} z_{gt} & -\frac{ES}{L} y_{gt} & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{zn}}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{zn}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_{yn}}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_{yn}}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{g}a.sh & 0 & 0 & \mathbf{g}(ch-1) \\ \frac{ES}{L} z_{gt} & 0 & -\frac{6EI_{yn}}{L^2} & 0 & \frac{4EI_{yn}}{L} + \frac{ES}{L} z_{gt}^2 & -\frac{ES}{L} z_{gt} y_{gt} & 0 \\ -\frac{ES}{L} y_{gt} & \frac{6EI_{zn}}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{ES}{L} z_{gt} y_{gt} & \frac{4EI_{zn}}{L} + \frac{ES}{L} y_{gt}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{g}(ch-1) & 0 & 0 & \mathbf{g}(L.ch - \frac{sh}{a}) \end{bmatrix}$$

onde :

E - módulo de elasticidade longitudinal

G – módulo de elasticidade transversal

L - altura do núcleo

S - área da seção transversal

I_{yn} = momentos de inércia em relação ao eixo principal y_n

I_{zn} = momento de inércia em relação ao eixo principal z_n

$$\mathbf{a} = \sqrt{\frac{G.I_{xn}}{E.I_w}}$$

$$\mathbf{g} = \frac{G.I_{xn}}{2 - 2.ch + L.a.sh}$$

$$sh = \sinh(\alpha.L)$$

$$ch = \cosh(\alpha.L)$$

S - Área transversal do elemento de núcleo

Se as seções transversais dos núcleos forem assimétricas, haverá excentricidades entre os eixos que passam pelos centros de torção (C.T.) e do centróide da seção transversal (C.G.). Sendo portanto necessária a relação entre os deslocamentos nestes dois eixos. Com a hipótese da laje ter comportamento de corpo rígido no seu plano, foi determinada a matriz de translação $[T]$, que tem a função de transladar as coordenadas do "C. G." para o "C. T."

$$[T] = \begin{bmatrix} [t] & [0] \\ [0] & [t] \end{bmatrix}$$

onde:

$$[t] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -z_{gt} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y_{gt} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[0] - Matriz quadrada nula de dimensão 7.

y_{gt} - Distância y do C. T. ao C. G.

z_{gt} - Distância z do C. T. ao C. G..

Assim a matriz de rigidez do núcleo, em primeira ordem ou segunda ordem, será referida ao centro de torção através de :

$$[K_{nl}]^l = [T]^T \cdot [\overline{K_{nl}}] \cdot [T]$$

onde a matriz $[\overline{K_{nl}}]$ representa a matriz de rigidez do núcleo em relação ao CG.

Portanto a matriz de rigidez do núcleo mostrada anteriormente, já possui seus coeficientes de rigidez axial e à flexão, transladados do centróide da seção transversal (C.G.) para o centro de torção C.T

O processo de obtenção da matriz de rigidez do elemento de núcleo em teoria de primeira ordem nas coordenadas da subestrutura é análogo ao processo aplicado aos pilares.

Inicialmente é necessário definir uma matriz de incidência cinemática [β_n] que relaciona os deslocamentos globais (subestrutura) do núcleo com seus deslocamentos locais.

Portanto, a matriz de incidência [β_n] , que relaciona os deslocamentos globais (subestrutura) do núcleo com seus deslocamentos locais, é dada por :

$$[\mathbf{b}_n] = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_{n1}] & [0] \\ [0] & [\mathbf{b}_{n2}] \end{bmatrix}$$

onde [β_{n1}] e [β_{n2}] são sub-matrizes referente as extremidades superior e inferior do núcleo, respectivamente

No caso da extremidade superior do núcleo tem-se :

$$[\mathbf{b}_{n1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos \mathbf{a}_n & \sin \mathbf{a}_n & d_{Y_n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin \mathbf{a}_n & \cos \mathbf{a}_n & d_{Z_n} \\ 0 & \cos \mathbf{a}_n & \sin \mathbf{a}_n & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\sin \mathbf{a}_n & \cos \mathbf{a}_n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde :

- d_{Y_n} e d_{Z_n} são as distâncias dos eixos y_n e z_n do núcleo, em relação ao CT à origem do sistema de referência da subestrutura, dadas por :

$$d_{Y_n} = Y_{CT} \cdot \cos(\mathbf{a}_n) + Z_{CT} \cdot \sin(\mathbf{a}_n)$$

$$d_{Z_n} = Y_{CT} \cdot \sin(\mathbf{a}_n) - Z_{CT} \cdot \cos(\mathbf{a}_n)$$

α_n - ângulo entre o eixo Y do sistema de referência da subestrutura e o eixo y_n do sistema local.

As distâncias Y_{CT} e Z_{CT} são as coordenadas cartesianas Y e Z do centro de torção do núcleo, associadas à origem do sistema de referência da estrutura.

O mesmo acontece para a extremidade inferior, já que não há variação da seção transversal do elemento.

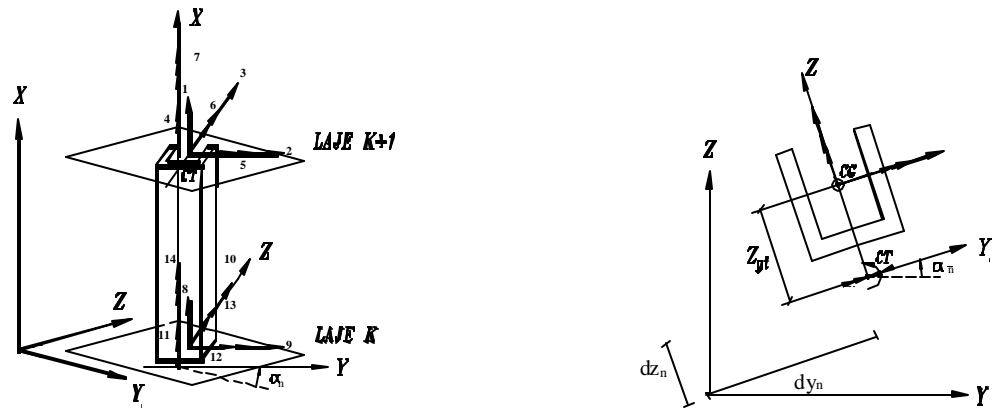


Figura 37 : Distância dos eixos do centro de torção do núcleo à origem

Assim, a matriz de rigidez do núcleo, em teoria de primeira ordem, em função das coordenadas da subestrutura, $[K_{ng}]^I$, é obtida por :

$$[K_{ng}]^I = [b_n]^T [K_{nl}]^I [b_n]$$

4.6 Matriz de rigidez do núcleo em teoria de segunda ordem

A matriz de rigidez local do núcleo, em teoria de segunda ordem, será obtida através de um processo semelhante ao apresentado para os pilares, sendo considerada, no

cálculo dos seus coeficientes a influência do esforço axial, dos momentos fletores e do bimomento. Para isso, serão apresentadas as equações diferenciais regentes dos problemas de deformação de um elemento de núcleo. Com a inclusão de condições de contorno convenientes em cada extremidade da barra de núcleo, a solução do sistema de equações diferenciais fornecerá os esforços em cada extremidade e assim obtém-se a matriz de rigidez em teoria de segunda ordem do elemento de núcleo.

O sistema de equações diferenciais de um elemento de núcleo, sem qualquer eixo de simetria, em teoria de segunda ordem é dado por :

$$\begin{aligned}
 E.I_{zn} \cdot v_{CT}'''' - [N \cdot (v'_{CT} - z_{CT} \cdot f')] + 2 \cdot My' \cdot f' + My \cdot f'' &= 0 \\
 E.I_w \cdot w_{CT}'''' - [N \cdot (w'_{CT} - y_{CT} \cdot f')] + 2 \cdot Mz' \cdot f' + Mz \cdot f'' &= 0 \\
 E.I_w \cdot f'''' - G.I_{zn} \cdot f'' - \left\{ [N \cdot i_{CT}^2 + Mz \cdot J_y + My \cdot J_z + \frac{B}{I_w} \cdot U_w] \cdot f' \right\}' - \\
 (N \cdot w'_{CT})' \cdot y_{CT} + (N \cdot v'_{CT})' \cdot z_{CT} + Mz \cdot w_{CT}'' - My \cdot v_{CT}'' &= 0
 \end{aligned}$$

Onde:

- y_{CT} e z_{CT} são as coordenadas do centro de torção do núcleo.
- i_{CT}, K_y, K_z e U_w são características geométricas definidas a seguir:
- i_{CT} é o raio de giração polar em relação ao centro de torção dado por:

$$i_{CT} = \sqrt{y_{CT}^2 + z_{CT}^2 + \frac{I_y + I_z}{S}}$$

- K_y e K_z são as coordenadas do círculo de estabilidade ou do ponto do Kinden dadas por :

$$\begin{aligned}
 K_y &= \frac{1}{2 \cdot I_{zn}} \int_S y \cdot (y^2 + z^2) \cdot ds \\
 K_z &= \frac{1}{2 \cdot I_{yn}} \int_S z \cdot (y^2 + z^2) \cdot ds
 \end{aligned}$$

- U_w - característica introduzida por VLASSOV (1962), conhecida como característica geométrica de VLASSOV.

$$U_{\omega} = \int_S \omega \cdot (y^2 + z^2) \cdot ds$$

- J_Y e J_Z são denominados de segmentos característicos e são dados por:

$$J_Y = 2 \cdot (K_Y - y_{CT})$$

$$J_Z = 2 \cdot (K_Z - y_{CT})$$

E - módulo de elasticidade longitudinal.

G - módulo de elasticidade transversal.

N - Esforço normal no núcleo.

M_X - Momento torçor em torno do eixo x.

M_Y - Momento fletor em relação ao eixo y.

M_Z - Momento fletor em relação ao eixo z.

B - Bimomento.

I_X - Momento de inércia à torção.

I_{ω} - Momento setorial de inércia.

ω - Área setorial.

u - Função que define os deslocamentos de translação no eixo x_n

v_{CT} - Função que define os deslocamentos de translação no eixo y_n

w_{CT} - Função que define os deslocamentos de translação no eixo z_n

ϕ - Função que define os deslocamentos de rotação em torno do eixo x_n

' - Símbolo de derivação em relação a x_n .

As equações do sistema de equações diferenciais neste caso não são independentes e suas soluções fornecerão os coeficientes da matriz de rigidez do elemento de núcleo em teoria de segunda ordem. Para obtenção destas soluções foi utilizado o processo desenvolvido por MORI (1992), o qual consiste na aplicação de técnicas numéricas auxiliadas pelas subrotinas ODEPACK que são subrotinas para resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias desenvolvidas por HINDMARCH (1983).

Maiores detalhes sobre a resolução desse sistema de equações diferenciais e a obtenção da matriz de rigidez do núcleo em teoria de segunda ordem poderão ser encontrados em MORI (1992) e MATIAS JR. (1997).

4.7 Matriz de rigidez dos elementos finitos de placa

4.7.1 Introdução

Através de uma formulação utilizando o método dos elementos finitos, para as lajes discretizadas em elementos de placa, é que pretende-se analisar a contribuição da rigidez à flexão das lajes nas estruturas de edifícios andares de múltiplos, em teoria de segunda ordem para os pilares e núcleos.

A contribuição da rigidez transversal à flexão das lajes na matriz de rigidez global da estrutura será realizada adotando na discretização dois elementos finitos de placa. O primeiro elemento finito de placa é o elemento finito triangular DKT, que considera a teoria de Kirchhoff na sua formulação e o segundo elemento finito de placa triangular é o DST, que considera a teoria de Reissner- Mindlin na formulação de sua matriz de rigidez.

Cabe salientar que pretende-se mostrar aqui uma formulação resumida da matriz de rigidez de cada elemento finito, enfocando mais as hipóteses adotadas para a formulação da matriz de rigidez de cada elemento finito. Porém a formulação completa, com todos os passos matemáticos, pode ser facilmente encontrada nas referências bibliográficas citadas para cada elemento finito adotado.

4.7.2 O elemento finito DKT – Teoria de Kirchhoff

BATOZ *et al* (1980) diz em seu trabalho que a análise de flexão de placas delgadas pode ser realizada genérica e eficientemente, utilizando-se elementos finitos triangulares com nove graus de liberdade (deslocamento e rotações nos pontos nodais localizados nos vértices do triângulo). Em sua análise comparativa dos elementos finitos (com nove graus de liberdade) disponíveis para análise de flexão de placas delgadas, este autor mostra em um pequeno histórico, os problemas apresentados pelos diversos elementos já desenvolvidos, quando se pensa em generalidade na aplicação do mesmo. As

dificuldades vão desde a falta de convergência para alguns tipos de malha, até a variação de resultados com a mudança da orientação da malha.

Concluindo, BATOZ *et al* (1980), mostra dentre este vários tipos de elementos, o elemento finito triangular DKT (Discrete Kirchhoff Theory), que se apresentou como sendo um elemento eficiente sob o ponto de vista numérico e computacional.

Os elementos finitos DKT, que comporão a laje discretizada, possuem três graus de liberdade por nó , sendo translação segundo o eixo X e rotação em torno dos eixos Y e Z , como mostra a figura 38.

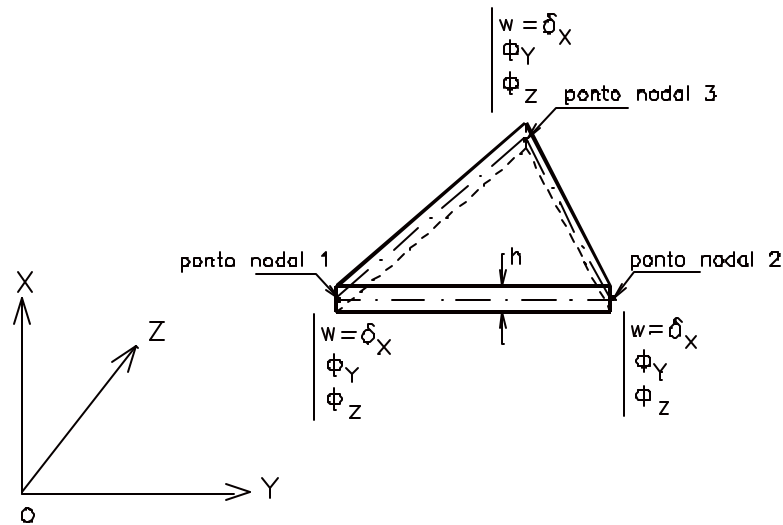


Figura 38 : Elemento finito DKT com nove graus de liberdade

Portanto, com a formulação desse elemento, determina-se a contribuição da rigidez das lajes à flexão, possibilitando a implementação de um modelo mais representativo do comportamento real da estrutura.

A formulação resumida do elemento DKT, a ser mostrada neste trabalho, baseia-se em BATOZ *et al* (1980) e C. JEYACHANDRABOSE (1985), onde são inicialmente consideradas as deformações por esforço cortante, da teoria de Reissner-Mindlin. O elemento finito DST , mostrado a seguir, considera essa teoria na formulação da sua matriz de rigidez.

Sabe-se porém, que na teoria clássica de placas delgadas , ou teoria de Kirchhoff , a parcela da energia de deformação relativa ao esforço cortante é desprezível quando comparada à energia de deformação por flexão.

Sendo assim a hipótese clássica de Kirchhoff , onde “ *uma reta normal ao plano médio indeformado da placa, mantém-se normal à superfície média após a deformação*”, é imposta ao longo dos lados do elemento e dessa forma a energia de deformação relativa ao esforço cortante é finalmente desprezada.

Então, pela teoria clássica, as rotações β_Y e β_Z de uma reta normal à superfície média segundo os planos Y-X e Z-X, respectivamente, são diretamente relacionadas com as derivadas parciais dos deslocamentos transversais w'_y e w'_z , segundo os eixos de referência Y e Z das lajes.

$$\beta_Y = -\frac{\partial w}{\partial y} = -w'_y \quad (4.1)$$

$$\beta_Z = -\frac{\partial w}{\partial z} = -w'_z \quad (4.2)$$

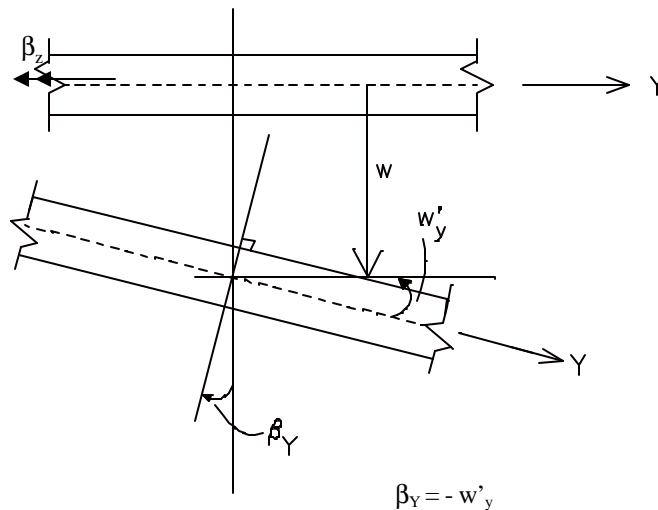


Figura 39 : Deslocamento segunda a teoria de Kirchhoff

Considerando-se a hipótese de Kirchhoff e admitindo-se pequenos deslocamentos, as componentes de deslocamentos horizontais u e v , de um ponto genérico da placa de coordenadas X , Y e Z , são :

$$u = X \cdot \beta_y(Y, Z)$$

$$v = X \cdot \beta_z(Y, Z)$$

$w = w(Y, Z)$, onde w é o deslocamento transversal na direção de X .

A energia de deformação por flexão pode ser escrita de acordo com a seguinte expressão :

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{k\}^t [D]_f \{k\} dA \quad (4.3)$$

$\{k\}$ - vetor das curvaturas dado por $\{\beta_{y,y} \ \beta_{z,z} \ \beta_{y,z} + \beta_{z,y}\}$

Sendo :

$$[D]_f = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X^2 [D] dX \quad (4.4)$$

Realizando a integração ao longo da espessura da placa (h constante) encontra-se :

$$[D]_f = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\text{Com } [D] = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{n} & 0 \\ \mathbf{n} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mathbf{n}}{2} \end{bmatrix}$$

Com a energia de deformação, é possível obter explicitamente a matriz de rigidez do elemento DKT , já em relação ao sistema de referência das lajes.

Para a obtenção da matriz de rigidez do elemento DKT a partir da energia de deformação, são assumidas quatro hipóteses :

- (1) As rotações β_Y e β_Z variam quadraticamente no elemento.
- (2) A hipótese de Kirchhoff é imposta nos pontos nodais dos vértices e nos pontos médios dos lados.
- (3) A variação de w é cúbica ao longos dos lados do elemento.
- (4) Impõem-se uma variação linear β_n (rotação na direção normal), ao longo dos lados.

Baseando-se nas quatro hipóteses anteriores e nas relações geométricas do triângulo, pode-se escrever β_Y e β_Z em cada ponto do triângulo em função dos parâmetros nodais $\{ u_{DKT} \}$:

$$\{ u_{DKT} \}^T = \{ \delta_{X1} \ \phi_{Y1} \ \phi_{Z1} \ \delta_{X2} \ \phi_{Y2} \ \phi_{Z2} \ \delta_{X3} \ \phi_{Y3} \ \phi_{Z3} \}$$

As rotações em função dos parâmetros nodais $\{ u_{DKT} \}$, já definidos nas coordenadas deslocamentos da laje , pode ser escrita como :

$$\beta_Y = [\overline{G}] \{ u_{DKT} \} \quad (4.6)$$

$$\beta_Z = [\overline{H}] \{ u_{DKT} \} \quad (4.7)$$

sendo $[\overline{G}]$ e $[\overline{H}]$, matrizes de ordem 1 x 9.

Podemos relacionar o vetor de curvaturas com os parâmetros nodais do elemento finito através :

$$\{ k \} = [B] \{ u_{DKT} \} \quad (4.8)$$

onde [B] é a matriz de ordem 3 x 9 que relaciona o vetor curvatura com o vetor deslocamento do elemento, explicitada em BATOZ *et al* (1980)

Sabe-se da equação (4.3) que a energia de deformação do elemento DKT, é dada por :

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{k\}' [D]_f \{k\} dYdZ$$

Substituindo-se a equação (4.8) , na equação da energia de deformação acima obtém-se :

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{u_{DKT}\}^T [B]^T [D]_f [B] \{u_{DKT}\} dYdZ \quad (4.9)$$

Mudando as variáveis e os limites de integração para coordenadas adimensionais, encontram-se :

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{u_{DKT}\}^T [B]^T [D]_f [B] \{u_{DKT}\} 2A dx dh \quad (4.10)$$

$$U_f = \frac{1}{2} \{u_{DKT}\}^T \int_0^1 \int_0^{1-x} 2A [B]^T [D]_f [B] dx dh \{u_{DKT}\} \quad (4.11)$$

Sabe-se que a energia de deformação, em função da matriz de rigidez [K] do elemento, pode ser escrita como :

$$U_f = \frac{1}{2} \{u_{DKT}\}^T [K] \{u_{DKT}\} \quad (4.12)$$

então :

$$[K] = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} 2A[B]^T [D]_f [B] d\xi d\eta \quad (4.13)$$

Efetuada-se as integrações da equação anterior, determina-se explicitamente a matriz de rigidez [K] do elemento DKT, já em relação ao sistema de referência das lajes ou da subestrutura.

4.7.3 Elemento finito DST - Teoria de Reissner-Mindlin

As placas são elementos estruturais laminares planos, simétricos em relação à uma superfície média, na qual as ações externas são aplicadas; sua espessura pode ser constante ou variável, porém pequena em relação às suas demais dimensões. As lajes são um caso particular de placa onde o plano médio é horizontal.

Em relação a sua esbeltez as placas podem ser definidas em três tipos:

- 1) placas muito delgadas: são aquelas onde a relação entre a espessura e o menor dimensão for menor que 1/150;
- 2) placas delgadas: a relação entre a espessura e a menor dimensão está compreendida entre 1/150 e 1/5.
- 3) placas espessas: são aquelas em que a relação entre a espessura e a menor dimensão excede o valor de 1/5.

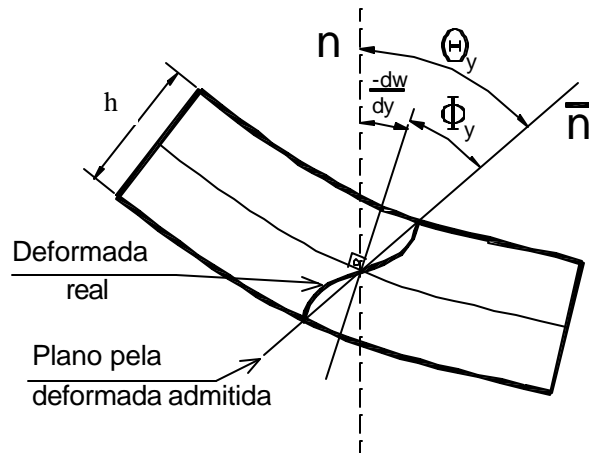


Figura 40 : Deformação do elemento de placa por flexão e cortante

A teoria de flexão de placas de Kirchhoff como já dito anteriormente prevê que as deformações sejam devidas exclusivamente a esforços de flexão. Na teoria de Reissner-Mindlin considera-se também a deformação por esforço cortante; desse modo as hipóteses passam a ser as seguintes :

- (1) os deslocamentos horizontais do plano médio da placa são desprezíveis.
- (2) pontos da placa que inicialmente estavam contidos numa reta normal ao plano médio permanecem, após a deformação, contidos numa reta. Porém existe um ângulo de distorção entre essa reta e a normal ao plano médio. Essa distorção corresponde à deformação por cisalhamento (figura 40).
- (3) as tensões normais ao plano médio são desprezadas.

Pode-se dizer ainda que todos os pontos contidos numa normal ao plano médio possuem o mesmo deslocamento vertical, o que equivale a dizer que a deformação nessa direção é nula.

A deformação por cisalhamento deve, necessariamente, ser considerada para placas delgadas e espessas, pois nesses casos a distorção da seção é bastante acentuada e desprezá-la constituir-se numa hipótese bastante grosseira.

No caso de placas delgadas a consideração da deformação pelo esforço cortante acaba sendo desprezível em comparação com a parcela da flexão. Portanto o elemento finito DST acaba tendo mesma rigidez que o elemento finito DKT, para o caso onde a placa é considerada delgada. As lajes de edifícios usuais de concreto armado em sua grande maioria são consideradas delgadas, devido a sua relação espessura / vão. Portanto através de testes comprovou-se que a influência da consideração da deformação do esforço cortante no elemento de flexão que discretiza a laje é pouco significativa. Porém cabe salientar que o elemento finito DST, a nível de formulação matemática, é um elemento com tratamento mais refinado que o elemento finito DKT, pois é possível resolver tanto placas delgadas como placas espessas.

O elemento de flexão de placa DST (*Discrete Shear Triangle*), proposto por BATOZ & LARDEUR (1989), mostra-se bastante eficiente para a aplicação nos problemas de engenharia.

O elemento também possui nove graus de liberdade sendo duas rotações e uma translação por nó. Na sua formulação emprega-se as hipóteses de Reissner-Mindlin para placas espessas. A figura 41 ilustra o elemento.

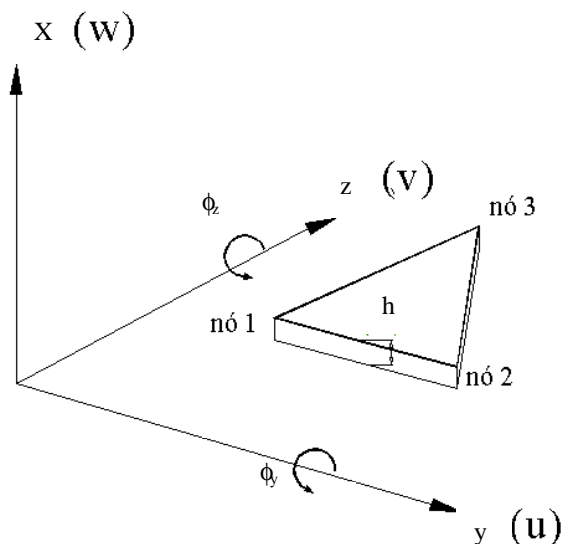


Figura 41: Elemento Finito DST

A formulação do elemento de flexão de placas DST contempla as hipóteses da teoria de flexão de placas grossas de Reissner-Mindlin. Dessa forma, uma reta normal ao plano médio da placa permanece reta porém não mais normal ao plano médio após a deformação. O campo de deslocamentos do elemento é definido por:

$$u = X\mathbf{b}_y \quad v = X\mathbf{b}_z \quad w = w(y, z)$$

onde: w é o deslocamento vertical, β_y e β_z representam as rotações da normal conforme a figura 39.

As equações de equilíbrio de esforços em relação ao plano médio da seção são supostas válidas para todo o domínio do elemento.

$$T_{y,y} + T_{z,z} = q$$

$$M_{y,y} + M_{yz,z} - T_y = 0$$

$$M_{yz,y} + M_{z,z} - T_z = 0$$

onde

- q é o carregamento uniformemente distribuído sobre o plano médio da placa.
- T_y e T_z são os esforços cortantes no elemento finito de placa DST
- M_y e M_z são os momentos fletores
- M_{yz} é o momento volvente ou momento de torção

O funcional de energia de deformação interna do elemento é composto por duas parcelas, sendo a primeira relativa a deformação por flexão e a segunda relativa a deformação por cisalhamento, assim:

$$U = U_f + U_c \tag{4.14}$$

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{k\}' [D_f] \{k\} dA \tag{4.15}$$

$$U_c = \frac{1}{2} \int_A \{g\}' [D_c] \{g\} dA \tag{4.15}$$

onde: $\{ k \} = \{ \beta_{y,y} \ \beta_{z,z} \ \beta_{y,z} + \beta_{z,y} \} e \quad \{ \tilde{a} \} = \{ \tilde{a}_{xz} \ \tilde{a}_{yz} \}$

A energia de deformação por flexão de um elemento finito de placa é dado pela expressão (4.3) mostrada a seguir :

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{k\}' [D_f] \{k\} dA$$

onde $\{ k \}$ é o vetor de curvaturas $[D_f]$ é a matriz constitutiva do material integrada ao longo da espessura da placa conforme equação (4.5)

Novamente, precisamos escrever o vetor de curvaturas $\{ k \}$ em função dos deslocamentos nodais do elemento finito. Isto é feito através da matriz $[B_b]$, que relaciona as curvaturas com o vetor de deslocamentos nodais, pode está explicitada em BATOZ & LARDEUR (1989).

Efetuando-se a transformação de coordenadas, substituindo-se $\{ k \}$ na equação 4.15 e minimizando o funcional de energia obtém-se a matriz de rigidez à flexão do elemento que é fornecida pela seguinte expressão:

$$K_f = 2A \int_0^{1-\xi} \int_0^{\xi} [B_b]^T [D_b] [B_b] dz dh \tag{4.18}$$

A energia de deformação por cisalhamento de um elemento finito de placa é descrita pela expressão a seguir :

$$U_c = \frac{1}{2} \int_A \{g\}' [D_c] \{g\} dA \tag{4.19}$$

onde $\{ \tilde{\alpha} \}$ é o vetor de distorções $\{ \tilde{\alpha}_{xz} \text{ e } \tilde{\alpha}_{yz} \}$ e $[D_c]$ é a matriz constitutiva do material integrada ao longo da espessura da placa conforme equação a seguir :

$$[D]_c = \frac{E h c}{2(1 + \nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

com $c = 5/6$.

Para obtermos a parcela devido ao cisalhamento na matriz de rigidez do elemento finito DST é necessário escrever o vetor de distorções em função dos deslocamentos nodais.

Temos que o vetor das distorções relaciona-se com o vetor dos deslocamentos nodais através de :

$$\{ \mathbf{g} \} = \begin{Bmatrix} \mathbf{g}_{zy} \\ \mathbf{g}_{yz} \end{Bmatrix} = [B]_c \{ u \}_{DST} \quad (4.21)$$

Efetuando-se a transformação de coordenadas, substituindo-se $\{ \tilde{\alpha} \}$ na equação (4.19) e minimizando o funcional de energia , obtemos a parcela do cisalhamento da matriz de rigidez do elemento finito de placa DST.

$$K_c = 2A \int_0^{1-\zeta} \int_0^{\zeta} [B_c]^T [D_c] [B_c] dz d\mathbf{h} \quad (4.22)$$

Todas as matrizes escritas nas expressões acima , são explicitadas em BATOZ & LARDEUR (1989),

Portanto a matriz de rigidez completa do elemento DST é obtida somando-se as parcelas relativas à flexão e ao cisalhamento.

$$[K] = [K]_f + [K]_c \quad (4.23)$$

4.8 Elemento finito quadrangular

As lajes que compõem os pavimentos de edifícios apresentam geralmente geometria retangular. Nesse caso uma discretização do pavimento por malhas compostas de elementos quadrangulares, principalmente os retangulares, torna-se mais simples do que a por elementos triangulares. Além disso, a geração de pontos nodais para formar quadrângulos apresenta menor complexidade que a geração de pontos nodais para formar elementos triangulares.

O elemento quadrangular pode ser obtido facilmente pela composição de quatro elementos triangulares DKT ou DST, quando colocam-se os parâmetros internos, comum ao elementos, em função dos seus parâmetros externos, através da condensação estática, conforme a figura seguinte:

A obtenção do elemento quadrangular é feita através da condensação estática do grau de liberdade do nó interno, conforme figura a seguir:

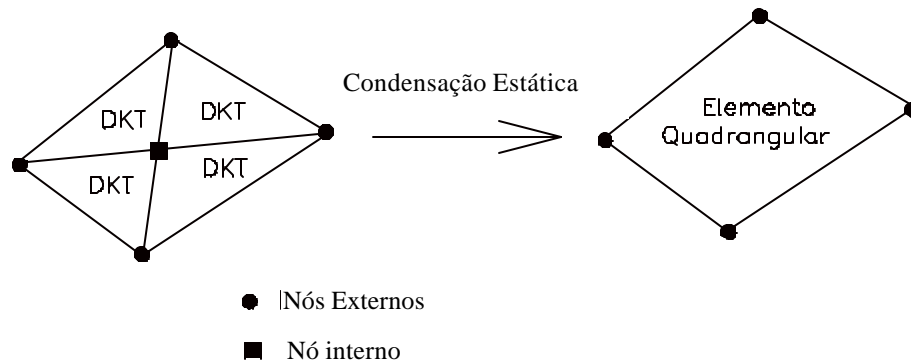


Figura 42 : Elemento quadrangular formado a partir de 4 elementos DKT ou DST

A relação entre forças nodais $\{ f \}$ e deslocamentos $\{ \delta \}$, do quadrilátero, pode ser escrito da seguinte forma :

$$[K]\{d\} = \{f\} \quad (4.24)$$

Esta expressão, pode ser reescrita, distinguindo-se os parâmetros externos localizados nos vértices do quadrilátero $\{\delta_e\}$, dos parâmetros internos do ponto médio $\{\delta_i\}$ e , fazendo-se o mesmo para o vetor de cargas. Desta forma :

$$\begin{bmatrix} [K_{ee}]_{12 \times 12} & [K_{ei}]_{12 \times 3} \\ [K_{ie}]_{3 \times 12} & [K_{ii}]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{d_e\}_{12 \times 1} \\ \{d_i\}_{3 \times 1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_e\}_{12 \times 1} \\ \{f_i\}_{3 \times 1} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

onde :

- índice i indica parâmetro interno do elemento quadrangular
- índice e indica parâmetro externo do elemento quadrangular

Efetuando-se os produtos matriciais da equação anterior, obtém-se :

$$\{f_e\} = [K_{ee}]\{d_e\} + [K_{ei}]\{d_i\} \quad (4.26)$$

$$\{f_i\} = [K_{ie}]\{d_e\} + [K_{ii}]\{d_i\} \quad (4.27)$$

Da equação (4.27) pode-se obter $\{d_i\}$ da seguinte maneira :

$$\{d_i\} = [K_{ii}]^{-1} \{ \{f_i\} - [K_{ie}]\{d_e\} \} \quad (4.28)$$

Substituindo-se agora a equação (4.28) em (4.26), obtém-se :

$$\{f_e\} - [K_{ie}][K_{ii}]^{-1}\{f_i\} = \{ [K_{ee}] - [K_{ei}][K_{ii}]^{-1}[K_{ie}] \} \{d_e\} \quad (48)$$

Definindo:

$$\{f\}_c = \{f_e\} - [K_{ei}][K_{ii}]^{-1}\{f_i\} \quad (4.30)$$

$$[K]_c = [K_{ee}] - [K_{ei}][K_{ii}]^{-1}[K_{ie}] \quad (4.31)$$

a equação (4.29) fica :

$$\{f\}_c = [K]_c \{d_e\} \quad (4.32)$$

onde $[K]_c$ representa a matriz de rigidez condensada do quadrilátero de ordem 12, função apenas dos parâmetros externos. Deve-se observar que as forças nodais também foram modificadas, pois eliminou-se os parâmetros internos.

CAPÍTULO 5

MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DA ESTRUTURA

5.1 Introdução

A matriz de rigidez global da estrutura é obtida através da contribuição das rigidezes de todos os seus elementos estruturais componentes (elementos de placas e barras). Seria portanto, trabalhosa a análise global da estrutura, considerando-se de uma só vez todas as coordenadas deslocamentos envolvidas, devido ao grande número de incógnitas presentes no sistema de equações correspondente. Para que se tenha um sistema computacional eficaz na resolução de estruturas de grande porte, como edifícios de múltiplos andares, utilizam-se as técnicas de subestruturação, que analisam a rigidez de um andar por vez, ao invés de resolver a estrutura como um todo. Dessa forma, com a divisão do edifício em várias subestruturas, teoricamente é possível analisar edifícios de múltiplos andares com um número qualquer de andares. As técnicas de subestruturação utilizadas são feitas em paralelo e série.

O aspecto de maior interesse no trabalho é a compatibilização do elemento que discretiza o núcleo com 7 graus de liberdade e os elementos finitos que discretizam a de laje.

5.2 Processo empregado na compatibilização do núcleo com o restante da estrutura

As lajes podem ser discretizadas por elementos finitos de placa quadrilaterais ou triangulares. A matriz de rigidez dos elementos quadrilaterais são matrizes ordem 12 e, a dos elementos triangulares são matrizes de ordem 9. Os graus de liberdade para cada nó de um elemento de placa são os mesmos para os nós de um elemento de viga: duas rotações nos eixos Y e Z, e uma translação no eixo X, sendo X o eixo vertical. O elemento de pilar possui comportamento tridimensional de pórtico com três rotações e três translações em cada nó. E, por último, os nós de um elemento de núcleo têm os mesmos graus de liberdade dos nós de um elemento de pilar acrescidos do grau de liberdade referente ao deslocamento empenamento. Portanto o núcleo é discretizado em um elemento de barra com 7 graus de liberdade por nó, de acordo com a teoria da flexo-torção estudada por VLASSOV (1962). Como os pontos nodais de cada elemento não têm os mesmos graus de liberdade é necessário uma compatibilização de deslocamentos, de forma conveniente, entre estes elementos.

A tabela 01 mostra a ordem das matrizes de rigidez de cada elemento e as coordenadas deslocamentos dos mesmos.

Tabela 01 : Coordenadas deslocamentos dos elementos

Elemento	Matriz de rigidez local	Dimensão	Grau de liberdade por nó	Coordenadas Dependentes
Viga	$[r]_{\text{viga}}$	6x6	3	0
Laje	$[r]_{\text{laje}}$	9x9	3	0
Pilar	$[r]_{\text{pilar}}$	12x12	6	3
Núcleo	$[r]_{\text{núcleo}}$	14x14	7	4

Como cada subestrutura é composta de diferentes elementos, suas coordenadas são estabelecidas em função de cada elemento constituinte. As coordenadas locais de todos os elementos horizontais (lajes e vigas), são colocadas em função das coordenadas independentes dos elementos verticais (pilares).

Os deslocamentos da estrutura são divididos em quatro grupos :

- **para cada nó de pilar** : para cada pilar tem-se os deslocamentos independentes que são : rotação em torno dos eixos Y e Z, e a translação segundo o eixo X do sistema de referência da subestrutura (δ_X , ϕ_Y e ϕ_Z).

- **para cada nó de perfil** : para cada nó de perfil de núcleo tem-se os deslocamentos independentes que são : rotação em torno dos eixos Y e Z, e a translação segundo o eixo X do sistema de referência da subestrutura (δ_X , ϕ_Y e ϕ_Z).

- **para cada nó de núcleo** : para cada nó de núcleo , situado no centro de torção (CT) da seção transversal do núcleo ,tem-se os deslocamentos independentes que são : rotação em torno dos eixos Y e Z, a translação segundo o eixo X do sistema de referência da subestrutura e o deslocamento referente ao empenamento da seção transversal. (δ_X , ϕ_Y , ϕ_Z e ϕ'_x).

- **para cada laje** : para as lajes que formam o pavimento, têm-se as suas coordenadas deslocamentos referentes ao movimento de corpo rígido, que é único em cada pavimento. Estas coordenadas deslocamentos são : rotação em torno do eixo X e translação em torno de Y e Z (ϕ_X , δ_Y e δ_Z).

Dessa forma, deve-se compatibilizar as três coordenadas que determinam o movimento de corpo rígido das lajes, e também as coordenadas dos elementos DKT ou DST que compõem as lajes discretizadas, devem ser condensadas para as coordenadas independentes dos pilares (δ_X , ϕ_Y e ϕ_Z) e perfis de núcleos através de uma subestruturação em paralelo, o qual será visto mais adiante.

A rigidez do núcleo na matriz de rigidez global da estrutura será considerada através de uma barra linear no centro de torção (CT) que possui 7 graus de liberdade, como já foi dito.

Porém a discretização da laje, forma nós na seção transversal do núcleo

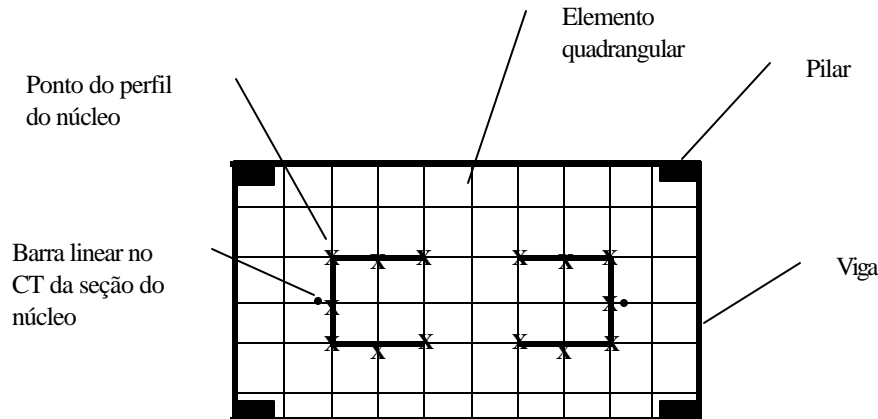


Figura 43 : Discretização adotada para os elementos estruturais

Para o melhor entendimento do processo do comportamento do núcleo com o restante da estrutura, vamos trabalhar com a estrutura que será analisada no exemplo 02, formada por 4 pilares, 2 núcleos discretizados em 04 nós de perfil cada, vigas discretizadas em elementos de viga, segundo a discretização adotada para a laje.

5.3 Subestruturação em Paralelo

A partir do sistema de referência de cada subestrutura, definem-se todos os nós que compõem o pavimento. Os pontos nodais dos elementos finitos que se conectam aos pilares e ao perfil do núcleo são definidos como nós externos, e aqueles que não apresentam conectividade com os elementos verticais, são os nós internos.

A matriz de rigidez e o vetor de forças nodais do pavimento, devem ser condensados para as coordenadas das subestruturas. Nessa primeira fase de montagem da matriz de rigidez global do edifício, é utilizada a técnica de subestruturação em paralelo.

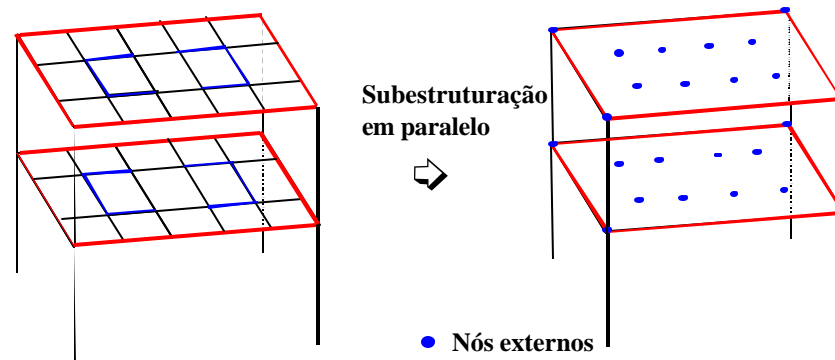


Figura 44 : Subestruturação em paralelo

Para se obter a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais do pavimento em função apenas dos nós externos será utilizado o método de condensação estática “*Choleski Decomposition*” descrito no trabalho ROSEN (1970).

5.3.1 Método “Choleski Decomposition”

Seja a equação matricial de equilíbrio do pavimento :

$$\begin{bmatrix} [R_{II}] & [R_{IE}] \\ [R_{EI}] & [R_{EE}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_I\} \\ \{D_E\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_I\} \\ \{F_E\} \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

sendo :

I - índice que indica os parâmetros internos do pavimento

E - índice que indica os parâmetros externos do pavimento

Este método pode ser formulado a partir da decomposição da matriz de rigidez num triplo produto matricial.

$$\begin{bmatrix} [R_{II}] & [R_{IE}] \\ [R_{EI}] & [R_{EE}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [RT] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [R^*] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [L]^T & [RT]^T \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

sendo :

[L] - matriz triangular inferior com termos unitários na diagonal principal

[RT] - matriz retangular

[0] - matriz nula

[I] - matriz identidade

[D] - matriz diagonal

[R*] - matriz simétrica condensada.

Da equação (5.2), obtém-se as seguintes expressões :

$$[R_{II}] = [L][D][L]^T \quad (5.3)$$

$$[R_{EI}] = [R_{IE}]^T = [RT][D][L]^T \quad (5.4)$$

$$[R_{EE}] = [R^*] + [RT][D][RT]^T \quad (5.5)$$

Relacionando-se a equação (5.2) em (5.1), encontram-se os seguintes sistemas desacoplados :

$$\begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [R^*] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_I^*\} \\ \{D_E^*\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_I^*\} \\ \{F_E^*\} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

onde :

$$\begin{Bmatrix} \{D_I^*\} \\ \{D_E^*\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L]^T & [RT]^T \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_I\} \\ \{D_E\} \end{Bmatrix} \quad (07)$$

$$\begin{Bmatrix} \{F_I\} \\ \{F_E\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [RT] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F_I^*\} \\ \{F_E^*\} \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

Da equação (5.4), encontra-se a expressão da submatriz [RT], como sendo :

$$[RT] = [R_{EI}] \left[[D][L]^T \right]^{-1} \quad (5.9)$$

Da equação (5.5), tira-se :

$$[R^*] = [R_{EE}] - [RT][D][RT]^T \quad (5.10)$$

Das equações (5.9) e (5.10), determinam-se as expressões genéricas dos termos da matriz [RT] e [R*], respectivamente.

$$RT_{i,j} = \frac{1}{D_{j,j}} R_{i+NI,j} - \sum_{k=1}^{j-1} RT_{i,k} L_{j,k} D_{k,k} \quad (5.11)$$

e

$$R^*_{i,j} = R_{i+NI,j+NI} - \sum_{k=1}^{NI} L^2_{i,k} D_{k,k} \quad (5.12)$$

sendo :

$R_{i,j}$ - termo da matriz de rigidez original

NI - número de coordenadas internas.

Observa-se que a matriz $[R^*]$, pode ser determinada a partir da triangularização de GAUSS até a coluna referente a última coordenada interna.

$$\begin{bmatrix} [R_{II}] & [R_{IE}] \\ [R_{EI}] & [R_{EE}] \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Triangularizac\~ao}} \begin{bmatrix} [L]^T & [RT] \\ [0] & [R^*] \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Da equação (5.2) obtém-se :

$$[R^*]\{D_E^*\} = \{F_E^*\} \quad (5.14)$$

lembrando-se que $[R^*]$ e $\{F_E^*\}$ representam a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais, em função das coordenadas externas, respectivamente.

Da equação (5.7), conclui-se que :

$$\{D_E^*\} = \{D_E\} \quad (5.15)$$

e da equação (5.8), encontra-se :

$$\{F_I\} = [L]\{F_I^*\} \quad (5.16)$$

e

$$\{F_E\} = [RT]\{F_I^*\} + \{F_E^*\} \quad (5.17)$$

então :

$$\{F_E^*\} = \{F_E\} - [RT]\{F_I^*\} \quad (5.18)$$

Uma vez calculado $\{F_I^*\}$ da equação (5.16), pode-se obter $\{D_I^*\}$, de acordo com a equação (5.6) :

$$[D]\{D_i^*\} = \{F_i^*\} \quad (5.19)$$

A partir da equação (5.7), encontra-se a expressão do vetor deslocamento das coordenadas internas $\{D_i\}$, como sendo :

$$\{D_i\} = \left[[L]^T \right]^{-1} \left(\{D_i^*\} - [RT]^T \{D_E\} \right) \quad (5.20)$$

Analisando-se as equações (5.14) e (5.18), observa-se que não é necessário inversões de matrizes para se obter $[R^*]$ e $\{F_E^*\}$, resultando assim, num método de menor número de operações numéricas e menor esforço computacional que o método tradicional.

5.4 Contribuição dos pilares e núcleos à matriz de rigidez da estrutura

Devido a presença dos pilares e núcleos, a matriz de rigidez de cada subestrutura relaciona-se com o pavimento superior e inferior. A contribuição da rigidez dos elementos horizontais à subestrutura fica restrita ao próprio pavimento em que estão contidos, assim, para um pavimento K , a matriz de rigidez dos elementos horizontais, já nas coordenadas da subestrutura, é espalhada apenas na matriz $[R]_{K,K}$.

Entretanto, os termos da matriz de rigidez dos pilares e núcleos, são espalhados nas matrizes $[R]_{K,K}$, $[R]_{K,K-1}$ e $[R]_{K-1,K-1}$, onde o índice K-1 representa o pavimento inferior ao K.

O endereçamento dos termos da matriz de rigidez condensada de cada elemento contido no pavimento, à matriz de rigidez $[R]_{K,K}$ da subestrutura, depende de suas conectividades com os nós dos pilares e de perfil dos núcleos. Sabe-se que as coordenadas envolvidas no espalhamento da matriz de rigidez do pilar são :

- coordenadas independentes nos eixos do próprio pilar ou de nós do perfil do núcleo, com os respectivos endereçamentos :

$$- \delta_x = 3j-2$$

$$- \phi_y = 3j-1$$

$$- \phi_z = 3j$$

- coordenadas dependentes, referente ao movimento de corpo rígido das lajes,
que são :

$$- \delta_y = NT -2$$

$$- \delta_z = NT -1$$

$$- \phi_x = NT$$

onde:

-j refere-se ao número do nó do pilar ou nó de perfil do núcleo na discretização do pavimento

-NT - número total de coordenadas da subestrutura sendo

$$NT = 3*(NP +NPF)+4*NN+3$$

NP - número de pilares de cada pavimento

NPF - número de nós do perfil de cada núcleo

NN - número de núcleos

No exemplo 02 , mostrado no capítulo 07 deste trabalho, temos NP = 4 , NPF = 4 , NN = 2 e portanto NT = 47

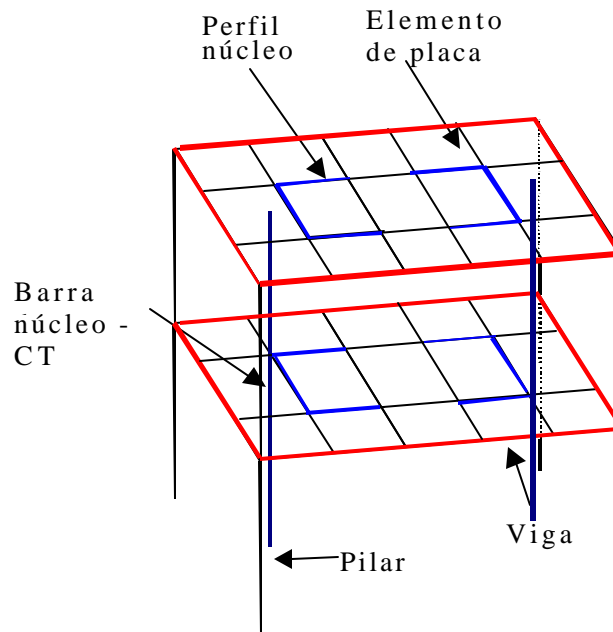


Figura 45 : Elementos estruturais do exemplo 02

A metodologia para realizarmos a compatibilização dos deslocamentos entre os elementos que compõem o pavimento segue as etapas descritas a seguir.

Inicialmente a matriz de rigidez dos elementos horizontais (vigas e lajes) são condensadas para os nós externos (nós de pilares e nós de perfil de núcleo) como já descrito no item anterior de subestruturação em paralelo.

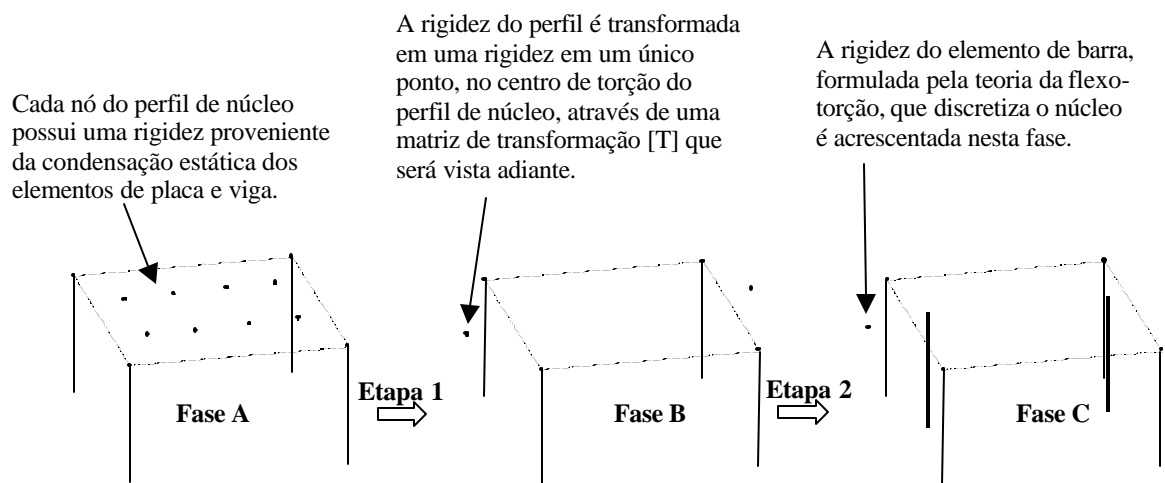


Figura 46 : Etapas para a compatibilização da discretização do núcleo com a laje

Da análise matricial de estruturas, utilizaremos uma matriz de incidência cinemática $[\beta]$ na etapa 1. Portanto a estrutura do Fase A será transformada em uma estrutura na Fase B, através dessa matriz de incidência cinemática $[\beta]$.

A estrutura na Fase A é composta por elementos de pilar, perfis de núcleos e as rigidezes da condensação estática dos elementos de placa e viga, levadas para estes nós que são os chamados nós externos do pavimento. A estrutura na Fase B já não possui mais os perfis de núcleos. E a estrutura na Fase C, é a mesma do estágio B acrescida do elementos de barra da teoria da flexo-torção que discretiza o núcleo. A equação (5.21) representa a transformação do vetor deslocamento da estrutura na Fase A para a estrutura na Fase B.

$$\{\mathbf{d}_B\} = [\mathbf{b}] \cdot \{\mathbf{d}_A\} \quad (5.21)$$

ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{d}_{\text{pilares}}\} \\ \{\mathbf{d}_{\text{perfis de núcleo}}\} \\ \{\mathbf{d}_{\text{corpo rígido}}\} \end{array} \right\}_{NL \times 1} = \begin{bmatrix} [\mathbf{b}_{\text{pilares}}] \\ [\mathbf{b}_{\text{núcleos}}] \\ [\mathbf{b}_{\text{corpo rígido}}] \end{bmatrix}_{NL \times NC} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \{\mathbf{d}_{\text{pilares}}\} \\ \{\mathbf{d}_{\text{nós de núcleo}}\} \\ \{\mathbf{d}_{\text{corpo rígido}}\} \end{array} \right\}_{NC \times 1} \quad (5.22)$$

sendo que:

NP = número de pilares = 4

NPF = número de nos de perfis em cada núcleo = 4 (2 núcleos, cada um com 4 nós por perfil) = 8

NN = número de nós de núcleo = 2

NL = 3 · NP + 3 · NPF + 3 = 39 - Número de linhas

NC = 3 · NP + 4 · NN + 3 = 23 - Número de colunas

A seguir é explicitada os vetores deslocamentos de cada elemento.

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{d}_{\text{pilares}}\} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{x1} \\ \mathbf{f}_{y1} \\ \mathbf{f}_{z1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{xNP} \\ \mathbf{f}_{yNP} \\ \mathbf{f}_{zNP} \end{Bmatrix}_{(3\text{-NP}) \times 1} & \{\mathbf{d}_{\text{perfis de núcleos}}\} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{x1} \\ \mathbf{f}_{y1} \\ \mathbf{f}_{z1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{xNPF} \\ \mathbf{f}_{yNPF} \\ \mathbf{f}_{zNPF} \end{Bmatrix}_{(3\text{-NPF}) \times 1} \\
 \\
 \{\mathbf{d}_{\text{nós de núcleos}}\} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_{x1} \\ \mathbf{f}_{y1} \\ \mathbf{f}_{z1} \\ \mathbf{f}_{x1} \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{xNN} \\ \mathbf{f}_{yNN} \\ \mathbf{f}_{zNN} \\ \mathbf{f}_{xNN} \end{Bmatrix}_{(4\text{-NN}) \times 1} & \{\mathbf{d}_{\text{corporígio}}\} &= \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_y \\ \mathbf{d}_z \\ \mathbf{f}_x \end{Bmatrix}_{3 \times 1}
 \end{aligned}$$

A matriz [T] é a matriz de transformação obtida de TARANATH (1988) que transforma os deslocamentos de um perfil de núcleo para um nó de núcleo, no seu centro de torção, equação (5.23).

$$\{\mathbf{d}\}_{\text{no de núcleo}} = [\mathbf{T}]^T \cdot \{\mathbf{d}\}_{\text{perfil de núcleo}} \tag{5.23}$$

$$\begin{bmatrix} d_{x1} \\ q_{y1} \\ q_{z1} \\ d_{x2} \\ q_{y2} \\ q_{z2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_{xn} \\ q_{yn} \\ q_{zn} \end{bmatrix} \text{perfil de núcleo} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & -z_1 & w_1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\partial w_1}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\partial w_1}{\partial y} \\ 1 & x_2 & -z_2 & w_2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\partial w_2}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\partial w_2}{\partial y} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & -z_n & w_n \\ 0 & 1 & 0 & \frac{\partial w_n}{\partial z} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\partial w_n}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_x \\ q_y \\ q_z \\ q'_x \end{bmatrix} \text{nó de núcleo} \quad (5.24)$$

Onde:

- x_i, z_i - Distâncias y e z do i-ésimo nó do perfil de núcleo referentes ao centro de torção do núcleo (CT).
- w_i - Área setorial no i-ésimo nó do perfil de núcleo referente ao centro de torção do núcleo.
- $\frac{\partial w_i}{\partial y}, \frac{\partial w_i}{\partial z}$ - Taxas de variação da área setorial no i-ésimo nó do perfil de núcleo nas direções y e z respectivamente.
- d_{xi} - Deslocamento vertical no i-ésimo nó do perfil de núcleo.
- q_{yi}, q_{zi} - Rotações do i-ésimo nó do perfil de núcleo referentes aos eixos y e z respectivamente.
- d_x - Deslocamento vertical no nó do núcleo.
- q_y, q_z - Rotações do nó do núcleo referentes aos eixos y e z respectivamente.
- q'_x - Empenamento do núcleo referente ao centro de torção do núcleo.

Tendo definida a matriz de incidência cinemática $[\beta]$ do vetor deslocamento da estrutura no estágio A para a estrutura no estágio B, representa a operação necessária

para transformar a matriz de rigidez condensada $[R]_A$ da fase A para a matriz condensada $[R]_B$ da fase B de tal forma que possa receber o elemento de barra, formulada com base na teoria da flexo-torção, que discretiza os núcleos.

$$[R]_B = [b]^T \cdot [R]_A \cdot [b] \quad (5.25)$$

sendo:

$[R]_A$ = matriz de rigidez condensada da estrutura na Fase A

$[R]_B$ = matriz de rigidez condensada da estrutura na Fase B, pronta para receber a contribuição dos elementos de barra de núcleo.

Enquanto a matriz $[R]_B$ é montada, o vetor de forças associado a $[R]_A$ precisa ser transformado de maneira adequada para se tornar o vetor de forças da matriz $[R]_B$.

Segue abaixo (figuras 47 e 48) as matrizes $[R]_A$ e $[b]$ para o exemplo 02 composto por quatro pilares, dois perfis de núcleo, uma laje formada por elementos de placa e de elementos de viga.

		Pilares 12 colunas			Perfil do núcleo 01 12 colunas				Perfil do núcleo 02 12 colunas				Corpo rígido 3 colunas
12 linhas	[K _{1,1}] + [P ₁₁]	[K _{1,2}]	[K _{1,3}]	[K _{1,4}]	[L _{1,5}]	[L _{1,6}]	[L _{1,7}]	[L _{1,8}]	[L _{1,9}]	[L _{1,10}]	[L _{1,11}]	[L _{1,12}]	[PCR _{1,13}]
	[K ₂₂] + [P ₂₂]	[K ₂₃]	[K ₂₄]		[L _{2,5}]	[L _{2,6}]	[L _{2,7}]	[L _{2,8}]	[L _{1,5}]	[L _{1,6}]	[L _{1,7}]	[L _{1,8}]	[PCR _{2,13}]
	[K ₃₃] + [P ₃₃]	[K ₃₄]			[L _{3,5}]	[L _{3,6}]	[L _{3,7}]	[L _{3,8}]	[L _{3,9}]	[L _{3,10}]	[L _{3,11}]	[L _{3,12}]	[PCR _{3,13}]
	[K ₄₄] + [P ₄₄]				[L _{4,5}]	[L _{4,6}]	[L _{4,7}]	[L _{4,8}]	[L _{4,9}]	[L _{4,10}]	[L _{4,11}]	[L _{4,12}]	[PCR _{4,13}]
12 linhas					[M _{5,5}]	[M _{5,6}]	[M _{5,7}]	[M _{5,8}]	[M _{5,9}]	[M _{5,10}]	[M _{5,11}]	[M _{5,12}]	[O _{5,13}]
						[M _{6,6}]	[M _{6,7}]	[M _{6,8}]	[M _{6,9}]	[M _{6,10}]	[M _{6,11}]	[M _{6,12}]	[O _{6,13}]
							[M _{7,7}]	[M _{7,8}]	[M _{7,9}]	[M _{7,10}]	[M _{7,11}]	[M _{7,12}]	[O _{7,13}]
								[M _{8,8}]	[M _{8,9}]	[M _{8,10}]	[M _{8,11}]	[M _{8,12}]	[O _{8,13}]
12 linhas	SIMÉTRICA								[M _{9,9}]	[M _{9,10}]	[M _{9,11}]	[M _{9,12}]	[O _{9,13}]
										[M _{10,10}]	[M _{10,11}]	[M _{10,12}]	[O _{10,13}]
											[M _{11,11}]	[M _{11,12}]	[O _{11,13}]
3										[M _{12,12}]	[O _{12,13}]		
												[CR _{13,13}]	

Figura 47 : Esquema representativo da matriz $[R]_A$ do exemplo 02

Onde:

- $[K_{ij}]$, $[L_{ij}]$ e $[M_{ij}]$ representam a contribuição da rigidez dos elementos de placa e de viga, condensada pelo método *Choleski Decomposition*. São matrizes de dimensões 3x3. $[K_{ij}]$ são as contribuições dos pilares sobre eles mesmos, $[L_{ij}]$ são contribuições

dos pilares interagindo com os núcleos e vice-versa e $[M_{ij}]$ são as contribuições dos núcleos sobre eles mesmos.

- $[0_{ij}]$ são matrizes nulas de dimensões 3×3
- $[P_{11}]$, $[P_{22}]$, $[P_{33}]$ e $[P_{44}]$ representam a contribuição da rigidez dos elementos de pórtico espacial de 6 coordenadas por nó que discretizam o pilar. São matrizes de dimensões 3×3 .
- $[PCR_{1,13}]$, $[PCR_{2,13}]$, $[PCR_{3,13}]$ e $[PCR_{4,13}]$ representam a contribuição da rigidez proveniente dos elementos de pilar de pórtico espacial que contribuem para as coordenadas dependentes do corpo rígido da laje. São matrizes de dimensões 3×3 .
- $[CR_{13,13}]$ matriz de dimensões 3×3 que se refere a contribuição das rigidezes referente somente ao corpo rígido de todos os elementos de pilar.

		Pilares 12 colunas				Núcleo 01 4 colunas	Núcleo 02 4 colunas	Corpo rígido 3 colunas
12 linhas		$[I_{1,1}]$	$[0_{1,2}]$	$[0_{1,3}]$	$[0_{1,4}]$	$[0_{1,5}]$	$[0_{1,6}]$	$[0^*_{1,7}]$
			$[I_{2,2}]$	$[0_{2,3}]$	$[0_{2,4}]$	$[0_{2,5}]$	$[0_{2,6}]$	$[0^*_{2,7}]$
				$[I_{3,3}]$	$[0_{3,4}]$	$[0_{3,5}]$	$[0_{3,6}]$	$[0^*_{3,7}]$
					$[I_{4,4}]$	$[0_{4,5}]$	$[0_{4,6}]$	$[0^*_{4,7}]$
12		SIMÉTRICA				$[T_{5,5}]$	$[0_{5,6}]$	$[0^{**}_{5,7}]$
12							$[T_{6,6}]$	$[0^{**}_{6,7}]$
3								$[I_{7,7}]$

Figura 48 : Esquema representativo da matriz $[\beta]$ do exemplo 02

Onde:

- $[I_{ij}]$ são matrizes identidade de dimensões 3×3
- $[T_{55}]$, $[T_{66}]$ são as matrizes de transformação, dimensão 12×4 que transformam os deslocamentos de um perfil de núcleo para um nó de núcleo no centro de torção (CT), como visto anteriormente
- $[0_{ij}]$ são matrizes com todos os elementos iguais a zero, com dimensão 3×4

- $[0^*_{ij}]$ são matrizes com todos os elementos iguais a zero, com dimensão 3×3
- $[0^{**}_{ij}]$ são matrizes com todos os elementos iguais a zero, com dimensão 12×3

		Pilares 12 colunas			Núcleo 01 4 colunas	Núcleo 02 4 colunas	Corpo rígido 3 colunas
12 linhas	$[K_{1,1}]$ + $[P_{11}]$	$[K_{1,2}]$	$[K_{1,3}]$	$[K_{1,4}]$	$[L_{1,5}] [T_{5,5}]$	$[L_{1,6}] [T_{6,6}]$	$[PCR_{1,7}]$
	$[K_{1,1}]$ + $[P_{11}]$	$[K_{1,2}]$	$[K_{1,3}]$		$[L_{2,5}] [T_{5,5}]$	$[L_{2,6}] [T_{6,6}]$	$[PCR_{2,7}]$
		$[K_{1,1}]$ + $[P_{11}]$	$[K_{1,2}]$		$[L_{3,5}] [T_{5,5}]$	$[L_{3,6}] [T_{6,6}]$	$[PCR_{3,7}]$
			$[K_{1,1}]$ + $[P_{11}]$	$[L_{4,5}] [T_{5,5}]$	$[L_{4,6}] [T_{6,6}]$	$[PCR_{4,7}]$	
4					$[T_{5,5}]^T [M_{5,5}] [T_{5,5}] + [N_{5,5}]$	$[T_{5,5}]^T [M_{5,6}] [T_{6,6}]$	$[NCR_{5,7}]$
4	SIMÉTRICA					$[T_{6,6}]^T [M_{6,6}] [T_{6,6}] + [N_{6,6}]$	$[NCR_{6,7}]$
3							$[CR_{7,7}]$

Figura 49 : Esquema da matriz $[R]_B$

A figura 49 é um esquema da matriz $[R]_B$ para o mesmo exemplo 02 citado anteriormente. Nesta representação da matriz $[R]_B$, já foram incluídas as contribuições das rigidezes dos elementos de barra de núcleo.

Onde:

- $[K_{ij}]$, $[L_{ij}]$ e $[M_{ij}]$ representam a contribuição da rigidez dos elementos de placa e de viga, condensada pelo método *Choleski Decomposition*. São matrizes de dimensões 3×3 . $[K_{ij}]$ são as contribuições dos pilares sobre eles mesmos, $[L_{ij}]$ são contribuições dos pilares interagindo com os núcleos e vice-versa e $[M_{ij}]$ são as contribuições dos núcleos sobre eles mesmos.
- $[T_{55}]$, $[T_{66}]$ são matrizes de transformação de TARANATH (1988) de dimensões 12×4 referentes aos perfis de núcleo 1, 2 respectivamente. Como cada perfil possui 04 nós, essa matriz possui 12 linhas.
- $[P_{11}]$, $[P_{22}]$, $[P_{33}]$ e $[P_{44}]$ representam a contribuição da rigidez dos elementos de pilar, são matrizes de dimensões 3×3 .
- $[PCR_{18}]$, $[PCR_{28}]$, $[PCR_{38}]$ e $[PCR_{48}]$ representam a contribuição da rigidez proveniente dos elementos de pilar que contribuem tanto para os pilares como para o corpo rígido, são matrizes de dimensões 3×3 .
- $[N_{55}]$, $[N_{66}]$ representam a contribuição da rigidez dos elementos de barra de núcleo, são matrizes de dimensões 4×4 . Portanto nesta fase é inserido a contribuição da elemento que discretiza o núcleo com 07 graus de liberdade, formulado pela teoria da flexo-torção de VLASSOV.
- $[NCR_{57}]$, $[NCR_{67}]$ representam a contribuição da rigidez proveniente dos elementos de barra de núcleo que contribuem tanto para as barras de núcleo como para o corpo rígido, são matrizes de dimensões 4×3 .
- $[CR_{77}]$ é uma matriz de dimensão 3×3 que recebe a contribuição das rigidezes referente somente ao corpo rígido de todos os elementos de pilar e de todos os elementos de núcleos.

5.5 Subestruturação em série

Como o sistema estrutural é dividido em várias subestruturas em série, a matriz de rigidez global será formada pela contribuição das matrizes de rigidez de todos os andares

já na forma condensada, observando obviamente sua seqüência de numeração. Assim, o sistema de equilíbrio global fica expresso por :

$$\begin{bmatrix}
 [R]_{N,N} & [R]_{N,N-1} & & & & & & & & [0] \\
 [R]_{N-1,N} & [R]_{N-1,N-1} & [R]_{N-1,N-2} & & & & & & & \\
 & & \vdots & & & & & & & \\
 & & & [R]_{K,K+1} & [R]_{K,K} & [R]_{K,K-1} & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & [R]_{1,2} & [R]_{1,1} & [R]_{1,0} & & & \\
 [0] & & & & [R]_{0,1} & [R]_{0,0} & & & &
 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix}
 [D]_N \\
 [D]_{N-1} \\
 \\ \\ \\
 [D]_K \\
 \\ \\ \\
 [D]_1 \\
 [D]_0
 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix}
 [F]_N \\
 [F]_{N-1} \\
 \\ \\ \\
 [F]_K \\
 \\ \\ \\
 [F]_1 \\
 [F]_0
 \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

Os índices das submatrizes indicam os pavimentos a que se referem, sendo $[D]_K$ o vetor deslocamento e $[F]_K$ o vetor de forças nodais de um pavimento genérico K , considerando-se já forças nodais equivalentes. A primeira linha da matriz corresponde ao último pavimento N do edifício, e a última linha refere-se a base do edifício, representado pelo número 0. Respeitando essa numeração, observa-se que a matriz de rigidez global é uma matriz simétrica em banda.

Da primeira linha do sistema de equações (5.26) tem-se :

$$[R]_{N,N}[D]_N + [R]_{N,N-1}[D]_{N-1} = [F]_N \quad (5.27)$$

Da segunda linha resulta :

$$[R]_{N-1,N}[D]_N + [R]_{N-1,N-1}[D]_{N-1} + [R]_{N-1,N-2}[D]_{N-2} = [F]_{N-1} \quad (5.28)$$

Substituindo-se a expressão de $[D]_N$ que se obtém em (5.27) na equação acima, encontra-se :

$$\begin{aligned} & \{[R]_{N-1,N} - [R]_{N-1,N} [R]_{N,N}^{-1} [R]_{N,N-1}\} [D]_{N-1} + \\ & + [R]_{N-1,N-2} [D]_{N-2} = \{[F]_{N-1} - [R]_{N-1,N} [R]_{N,N}^{-1} [F]_N\} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Definindo :

$$[R]_{N-1,N-1}^* = [R]_{N-1,N-1} - [R]_{N-1,N} [R]_{N,N}^{-1} [R]_{N,N-1} \quad (5.30)$$

e

$$[F]_{N-1}^* = [F]_{N-1} - [R]_{N-1,N} [R]_{N,N}^{-1} [F]_N \quad (5.31)$$

temos:

$$[R]_{N-1,N-1}^* [D]_{N-1} + [R]_{N-1,N-2} [D]_{N-2} = [F]_{N-1}^* \quad (5.32)$$

Eliminando-se de maneira análoga os deslocamentos das equações de equilíbrio subsequentes, num processo de substituição para frente (método da eliminação em série), num andar genérico K, encontra-se :

$$[R]_{K,K}^* [D]_K + [R]_{K,K-1} [D]_{K-1} = [F]_K^* \quad (5.33)$$

onde

$$[R]_{K,K}^* = [R]_{K,K} - [R]_{K,K-1} [R]_{K-1,K-1}^{*-1} [R]_{K-1,K} \quad (5.34)$$

e

$$[F]_K^* = [F]_K - [R]_{K,K-1} [R]_{K-1,K-1}^{*-1} [F]_K^* \quad (5.35)$$

A última eliminação da série, fica então :

$$[R]_{1,1}^* [D]_1 + [R]_{1,0} [D]_0 = [F]_1^* \quad (5.36)$$

Como a vinculação na base é suposta engastada, temos que $[D]_0 = [0]$. Sendo assim, com os deslocamentos na ligação estrutura-fundação conhecidos, volta-se às equações anteriores, onde através do processo de retro-substituições, calculam-se os deslocamentos de todos os elementos em cada subestrutura, da base até o topo do edifício.

5.6 Deslocamentos locais nos elementos

5.6.1 Introdução

Os deslocamentos calculados anteriormente, são relacionados às coordenadas globais das subestruturas. A seguir, são descritas as técnicas de cálculo matricial empregadas na obtenção dos deslocamentos e esforços nas extremidades dos elementos existentes, segundo seus sistemas de referência locais.

5.6.2 Deslocamentos locais nos elementos de viga

Os deslocamentos locais nas extremidades de cada elemento de viga são obtidos através da seguinte expressão :

$$\{u\}_v = [b]_v \{U\}$$

onde :

$\{u\}_v$: representa os deslocamentos nas extremidades de cada elemento de viga, em coordenadas locais

$\{U\}$: representa os deslocamentos nodais determinados nas coordenadas da subestrutura.

$\{\beta\}_v$: matriz de incidência cinemática correspondente a cada elemento de viga.

5.6.3 Deslocamentos locais nos pilares

Os deslocamentos locais nos pilares, de forma análoga para os elementos de vigas, são obtidos através da seguinte expressão :

$$\{u\}_p = [\mathbf{b}]_p \{U\}$$

onde :

$\{\beta\}_p$: matriz de incidência cinemática de cada pilar

$\{u\}_p$: representa os deslocamentos nas extremidades de cada pilar, em coordenadas locais

$\{U\}$: representa os deslocamentos nodais determinados nas coordenadas da subestrutura.

5.6.4 Deslocamentos locais nos núcleos

Os deslocamentos locais nos núcleos, de forma análoga para os elementos de pilares, são obtidos através da seguinte expressão :

$$\{u\}_n = [b]_n \{U\}$$

onde :

$\{\beta\}_n$: matriz de incidência cinemática de cada núcleo

$\{u\}_n$: representa os deslocamentos nas extremidades de cada núcleo, em coordenadas locais

$\{U\}$: representa os deslocamentos nodais determinados nas coordenadas da subestrutura.

5.6.5 Deslocamentos nos elementos de placa

Os deslocamentos nodais nos elementos finitos são calculados diretamente pela equação (4.27), já mencionada no item 4.8.

5.7 Forças nodais

O vetor de forças nodais do sistema estrutural é obtido pela contribuição direta das forças concentradas nos nós, mais as possíveis forças nodais equivalentes, devido ao carregamento distribuído ao longo dos elementos.

$$\{F\} = \{F\}_{NO} + \{F\}_{EQV}$$

onde :

$\{F\}$: vetor de forças nodais, em coordenadas locais

$\{F\}_{NO}$: vetor de forças concentradas diretamente aplicadas nos nós, em coordenadas locais

$\{F\}_{EQV}$: representa o vetor de forças nodais equivalentes, em coordenadas locais.

5.7.1 Forças nodais equivalentes das vigas

O vetor de forças nodais equivalentes $\{f_v\}_{EQV}$ das vigas, segundo as coordenadas locais, corresponde às forças segundo estas coordenadas, sem que existam deslocamentos correspondentes. Por isso, a determinação das forças nodais equivalentes se resume nos esforços de engastamento perfeito em cada extremidade. E no caso de cargas uniformemente distribuídas no seu comprimento, de acordo com as coordenadas deslocamentos adotadas temos :

$$\{f_v\}_{EQV}^T = \left\{ \frac{q_v l}{2} \quad 0 \quad \frac{q_v l^2}{12} \quad -\frac{q_v l^2}{12} \quad 0 \quad \frac{q_v l^2}{12} \right\}$$

sendo :

l - comprimento de cada trecho

q_v - carga uniformemente distribuída.

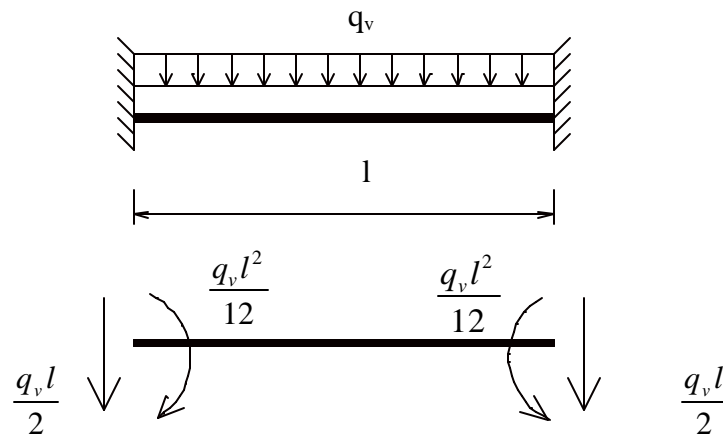


Figura 50 : Carga uniformemente distribuída no elemento de viga

O vetor de forças nodais equivalentes da viga $\{F_v\}_{EQV}$, agora nas coordenadas da subestrutura, pode ser determinado através da seguinte expressão :

$$\{F_v\}_{EQV} = [b_v]^T \{f_v\}_{EQV}$$

onde $[\beta_v]^T$ é a transposta da matriz de incidência $[\beta_v]$ já mencionada em 4.2.

5.7.2 Forças nodais equivalentes do elemento DKT ou DST

As forças nodais equivalentes no elemento triangular DKT ou DST para um carregamento uniformemente distribuído q são dados por :

$$\{F_{DKT}\}^T = \frac{qA}{3} \{1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\}$$

onde

A - área do elemento triangular.

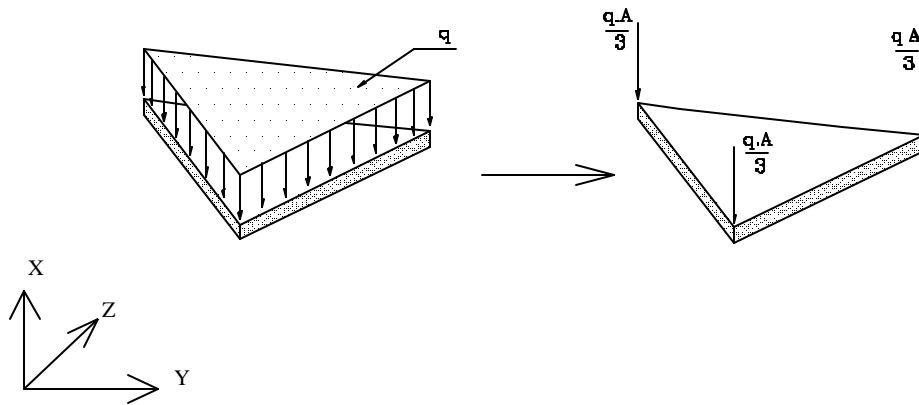


Figura 51 : Forças nodais equivalentes no elemento DKT ou DST

Portanto, admite-se que as cargas uniformemente distribuída q , fiquem representadas apenas por cargas concentradas em cada nó do elemento.

5.7.3 Forças nodais na lajes

As forças laterais do vento, são aplicadas no plano médio das lajes ao nível de cada pavimento, e têm a sua resultante decomposta nas direções Z, Y e momento nas coordenadas da subestrutura.

Sendo assim, a contribuição das forças laterais do vento já é feita diretamente no vetor de forças nodais da subestrutura.

5.8 Esforços solicitantes nos elementos

Uma vez calculados os deslocamentos locais $\{u_v\}$ dos elementos de viga, $\{u_p\}$ dos pilares, $\{u_n\}$ dos núcleos e o vetor de forças nodais equivalentes, é possível o cálculo dos esforços internos em cada elemento.

5.8.1 Esforços solicitantes nos elementos de viga

Os esforços solicitantes em cada elemento de viga, são dados através da seguinte expressão, da análise matricial :

$$\{S\}_v = [K_{vl}]\{u\}_v - \{f_v\}_{eqv}$$

sendo :

$\{S\}_v$: esforços nos extremos de cada elemento de viga

$[K_{vl}]$: matriz de rigidez local de cada elemento de viga

$\{f_v\}_{eqv}$: vetor de forças nodais equivalentes do elemento.

$\{u_v\}$: deslocamentos nas extremidades de cada elemento de viga, em coordenadas locais.

5.8.2 Esforços solicitantes nos pilares

Analogamente, para os pilares, os esforços solicitantes são calculados de acordo com a expressão abaixo :

$$\{S\}_p = [K_{pl}]\{u\}_p$$

sendo :

$\{u_p\}$: deslocamentos nas extremidades de cada pilar, em coordenadas locais.

$\{S\}_p$ = esforços nas extremidades dos pilares

$[K_{pl}]$ = matriz de rigidez local de cada pilar em primeira ou segunda ordem

Observa-se portanto, que no caso dos pilares o vetor de forças nodais equivalentes é nulo.

5.8.3 Esforços solicitantes nos núcleos

Analogamente, para os núcleos, os esforços solicitantes são calculados de acordo com a expressão abaixo :

$$\{S\}_n = [K_{nl}]\{u\}_n$$

sendo :

$\{u_n\}$: deslocamentos nas extremidades de cada núcleo, em coordenadas locais.

$\{S\}_n$ = esforços nas extremidades dos núcleos

Como já dito anteriormente, se as seções transversais dos núcleos forem assimétricas, haverá excentricidades entre os eixos que passam pelos centros de torção

(C. T.) e pelo centróide da seção transversal (C. G.). Sendo portanto necessária a relação entre os esforços nestes dois eixos através matriz de translação $[T]$, que tem a função de transladar as coordenadas do "C. G.". para o "C. T.".

Assim esforços do núcleo será referida ao centróide da seção transversal através de :

$$[S]_{CG} = [T]^T \cdot [S_{CT}] \cdot [T]$$

Onde:

$[S_{CT}]$ - Esforços no núcleo, referidos ao centro de torção.

$[S_{CG}]$ - Esforços no núcleo, referidos ao centróide da seção transversal

5.8.4 Esforços internos no elemento DKT

Os esforços internos presentes no elemento DKT são os momentos fletores M_Y e M_Z , o momento volvente M_{YZ} , e também as forças cortantes Q_Y e Q_Z .

Os momentos fletores e volvente podem ser obtidos através da seguinte equação :

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_Y \\ M_Z \\ M_{YZ} \end{Bmatrix} = [D]_f \{k\}$$

onde :

$\{M\}$ - vetor dos momentos

$\{k\}$ - vetor das curvaturas

$[D]_f$ - matriz já definida em na expressão (4.5)

Substituindo-se o vetor de curvatura $\{k\}$ pela expressão (4.8), que relaciona o vetor curvatura com os pontos nodais do elemento finito, obtém-se a expressão dos momentos fletores $\{M\}$ para qualquer ponto no interior ou contorno do elemento, em função dos seus deslocamentos nodais.

$$\{M\} = [D]_f [B] \{u_{DKT}\}$$

As forças cortantes (Q_Y e Q_Z), são obtidas através das expressões da elasticidade que relacionam as mesmas, com os momentos fletores e volventes.

$$Q_Y = M_{Y'Y} + M_{YZ'Y}$$

$$Q_Z = M_{Z'Z} + M_{YZ'Z}$$

5.8.5 Esforços internos no elemento DST

Os momentos fletores são determinados em qualquer ponto do elemento com o auxílio da equação abaixo.

$$\{M\} = [D_f] \{k\}$$

Os esforços cisalhantes, ou esforços cortantes, são diretamente determinados pela expressão:

$$\{T\} = [D_c] [B_c] \{u_{DST}\}$$

Portanto em relação ao elemento finito DKT os esforços cortantes são calculados de forma direta pela equação acima. Portanto não é necessário recorrer a aproximação de derivação dos momentos fletores, como foi feito no elemento finito DKT.

5.9 Metodologia para análise iterativa em teoria de segunda ordem

5.9.1 Introdução

Para os pilares e os núcleos a matriz de rigidez é formulada em teoria de 2ª ordem na sua posição deformada.

O cálculo de uma estrutura em teoria de segunda ordem exige o conhecimento prévio dos esforços e deslocamentos, resultantes da sua análise em teoria de primeira ordem.

Após a análise linear, inicia-se o cálculo em teoria de segunda ordem, com base nos resultados obtidos anteriormente. Os esforços resultantes são novamente guardados, pois deverão ser utilizados na análise da próxima iteração. Este processo se repete várias vezes, sendo as ações aplicadas constantes.

Para os pilares a matriz de rigidez da estrutura é atualizada em função dos esforços axiais. Já para os núcleos além dos esforços axiais, a matriz de rigidez é também atualizada levando-se em consideração os momentos fletores e bimomento calculados na etapa anterior.

Estes esforços, tanto para os pilares e núcleos, contribuem para que ocorra uma degenerescência gradativa da rigidez global da estrutura, aumentando conseqüentemente os deslocamentos dos seus nós.

Sendo assim esse processo iterativo prossegue para definir a posição final de equilíbrio da estrutura.

O processo adotado é a técnica de iteração direta, no qual os deslocamentos resultantes convergem de acordo com um valor de tolerância pré-definido.

A seguir apresenta-se um algoritmo simplificado deste processo iterativo de análise não linear.

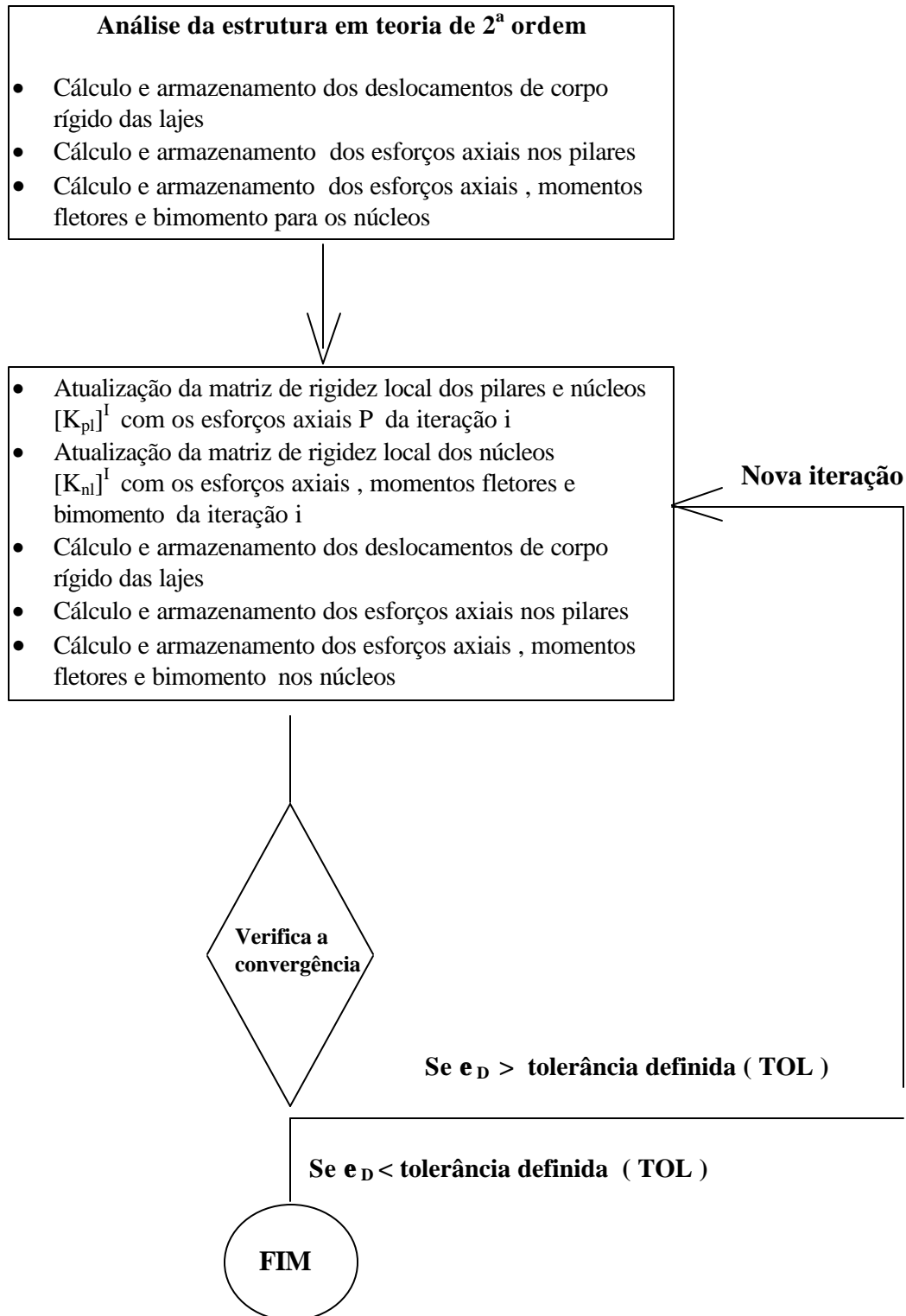


Figura 52 : Algoritmo da análise iterativa em teoria de 2ª ordem

5.9.2 Critério de convergência

O processo iterativo deverá ser encerrado quando o valor da tolerância TOL pré-definida, for igual ou superior ao valor “ ϵ_d ” calculado por :

$$e_d = \frac{\|\{\mathbf{d}_f\} - \{\mathbf{d}_{n-1}\}\|}{\|\mathbf{d}_f\|}$$

onde :

$\|\ \|$ - representa a norma Euclidiana de um vetor

$\{\mathbf{d}_f\}$ - vetor dos deslocamentos no estado de equilíbrio.

$\{\mathbf{d}_{n-1}\}$ - vetor dos deslocamentos na iteração anterior a n

A definição do fim de um processo iterativo deve ser feita através de um critério e segundo uma tolerância pré-definida. O critério adotado, será o critério de convergência dos deslocamentos.

Como o valor final dos deslocamentos $\{\mathbf{d}_f\}$ não é conhecido ao longo da resolução do sistema de equações, é usual utilizar como aproximação o último resultado obtido para o vetor dos deslocamentos $\{\mathbf{d}_n\}$, ou seja o vetor dos deslocamentos obtidos na iteração n. Como neste problema, em teoria de segunda ordem, há uma tendência geral de crescimento dos deslocamentos, pois é um problema de degenerescência de rigidez, a norma $\{\mathbf{d}_n\}$ deverá ser menor que $\{\mathbf{d}_f\}$. Então a aproximação de $\{\mathbf{d}_f\}$ no lugar de $\{\mathbf{d}_f\}$ atende ao critério de convergência, sendo até mais rigoroso.

Com o intuito de evitar inconsistências de dimensões, separa-se o critério de deslocamentos em dois outros :

- um envolvendo as translação de corpo rígido da laje nas direções Y e Z.
- outro envolvendo a rotação de corpo rígido da laje na direção X.

Segundo BATHE (1980), em ambos os casos adota-se o valor de $\epsilon_D = 0,0001$.

CAPITULO 6

PROGRAMA COMPUTACIONAL

6.1 Introdução

O principal objetivo deste trabalho é realizar a compatibilização do elemento que discretiza o núcleo com o elemento finito de placa que discretiza a laje e também determinar os esforços e deslocamentos na estrutura respeitando as hipóteses de cálculo feitas nos capítulos anteriores. Para cumprir este fim, elaborou-se um programa computacional em *Fortran Power Station 90*, denominado CEEAM (Cálculo de Esforços em Edifícios de Andares Múltiplos).

Além disso, elaborou-se também um programa interativo, em *Visual Basic 6.0*, para auxiliar a montagem do arquivo de leitura de dados. Sua estrutura é composta de caixas de diálogo que facilitam para o usuário a entrada de dados necessários ao processamento das estruturas. A comunicação entre as duas linguagens foi possível devido ao acesso de arquivos comuns de leitura.

O sistema de unidades de saída está sempre de acordo com o sistema de unidades de entrada, dispensando portanto as transformações entre unidades de mesma grandeza.

6.2 Modularização do programa computacional CEEAM.F90

A linguagem computacional *Fortran Power Station 90* permite que um programa computacional de maior porte seja dividido em vários módulos ou “*Workspaces*”, de

modo a organizar melhor o seu entendimento e com a intenção também de aproveitar melhor a memória do computador.

Dessa forma, o programa computacional CEEAM.F90 encontra-se dividido em cinco “*Workspaces*” ou módulos descrito a seguir.

6.2.1 *Workspace* ANDAR.F90

Este módulo do programa realiza a leitura de dados dos arquivos gerados pelo programa interativo EDIFICIO.VBP elaborado em *Visual Basic 6.0*. Faz ainda as seguintes etapas de programação :

- montagem da matriz de rigidez local de cada elemento
- condensação estática para a montagem da matriz de rigidez do elemento quadrangular, a partir de 4 elementos finitos DKT ou DST.
- montagem da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais de cada subestrutura.
- montagem da matriz de rigidez condensada do pavimento, através da subestruturação em paralelo.

6.2.2 *Workspace* SISTEMA.F90

Este módulo realiza a montagem da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais, mas agora considerando todos os andares do edifício. Esta composição da matriz de rigidez global do edifício a partir da matriz de rigidez das subestruturas é realizada através da composição das rigidezes de todas as subestruturas a partir do último pavimento, adicionando-se sempre a parcela da rigidez das coordenadas de base da subestrutura anterior com as coordenadas de topo da subestrutura seguinte, até que se chegue ao primeiro andar do edifício. De acordo com a expressão (5.26), sabe-se que o sistema de

equilíbrio global resultante apresenta a matriz de rigidez em banda, em consequência da numeração seqüencial adotada para os andares.

6.2.3 *Workspace* SERIE.F90

Este módulo, como o próprio nome diz, realiza a subestruturação em série do sistema construído pela *Workspace* SISTEMA.F90. Com a resolução desse sistema são calculados os deslocamentos nos andares, isto é, deslocamentos nos pilares e de corpo rígido das lajes. O processo numérico adotado para o cálculo dos deslocamentos foi o método de eliminação de GAUSS.

6.2.4 *Workspace* DESLOCAMENTO.F90

Este módulo determina os deslocamentos dos nós internos do pavimento, representados pelos elementos de viga e placa.

6.2.5 *Workspace* ESFORCO.F90

Finalmente o último módulo, que realiza o cálculo dos esforços em todos os elementos de cada pavimento do edifício, referente às suas coordenadas locais.

6.3 Tipos de análises realizadas

Com algumas simples alterações no programa computacional e/ou entrada de dados, é possível encontrar resultados através de até 4 modelos de análises.

- **Análise tridimensional considerando ou não a rigidez transversal das lajes.**

É possível desprezar a influência da rigidez transversal das lajes na estrutura, anulando-se os termos da matriz de rigidez dos elementos de placa (elemento DKT ou DST). Esta mudança é feita no sub-programa ANDAR.F90.

- **Análise tridimensional em teoria de primeira ordem ou segunda ordem para os pilares e núcleos**

Para a análise estrutural em teoria de segunda ordem, deve-se alterar a matriz de rigidez dos pilares com os esforços axiais, que foram previamente obtidos em teoria de primeira ordem e a matriz de rigidez dos núcleos alterada com o esforço axial e os momentos fletores e o bimomento.

Dessa forma, com os esforços e com a mudança da matriz de rigidez local dos pilares e núcleos, a análise da estrutura em teoria de segunda ordem, é então realizada iterativamente.

A mudança é novamente realizada no sub-programa ANDAR.F90.

Tabela 02 : Tipos de modelos possíveis para análise

Modelo	Consideração ou não da Rigidez Transversal da Laje	Teoria para os pilares e núcleos
1	NÃO	1 ^a . ordem
2	SIM	1 ^a . ordem
3	NÃO	2 ^a . ordem
4	SIM	2 ^a . ordem

6.4 Programação em *Visual Basic*

O *VISUAL BASIC 6.0* é um software muito interessante, pois permite ao programador criar sofisticados programas para o ambiente *Windows*.

Como o nome sugere, grande parte do trabalho de programação com o *Visual Basic* é feito visualmente. Isso significa que na fase de elaboração, você pode verificar como o projeto irá comportar-se ao ser executado. Trata-se de uma grande vantagem sobre outras linguagens de programação, pois é possível alterar e testar os programas até o programador ficar satisfeito com as cores, tamanhos e imagens incluídas no programa.

Sabe-se que na grande maioria dos programas de análise estrutural, um dos grandes problemas é a entrada de dados, que é normalmente fornecida via teclado ou um arquivo com os dados da estrutura é construído em algum editor de texto ASCII e então o programa computacional executa este arquivo.

Porém, com as janelas criadas pelo *Visual Basic*, esse problema de erros criados na entrada de dados é extremamente diminuído, pois erros comuns de consistência de dados são imediatamente avisados ao usuário, através de caixas de diálogo. Além disso as janelas de diálogo facilitam a introdução dos dados necessários ao processamento da estrutura.

Por esses e outros motivos, adotou-se o *Visual Basic 6.0*, para a criação do pré-processador do programa Computacional para a análise estrutural.

É através do programa **EDIFICIO.VBP** que é realizada entrada de dados, através de menus e janelas de extração de dados. Com isso a entrada de dados é facilitada para o usuário, fornecendo um maior profissionalismo ao trabalho.

6.5 Janelas de diálogo do programa interativo em *Visual Basic*

Este item contém as janelas de diálogos que facilitam a montagem do arquivo de entrada de dados.

A seguir são apresentadas as figuras destas janelas de diálogo, bem como algumas explicações.



Figura 53 : Janela inicial com as informações sobre o programa

Para iniciar a entrada de dados, é necessário clicar com o botão do MOUSE no CONTINUAR.

A função deste menu principal é iniciar o processo interativo de introdução de dados ao programa.

Este MENU PRINCIPAL está formado por outros sub-menus. Através do MOUSE é possível percorrer este SUB-MENUS e inserir os dados desejados.

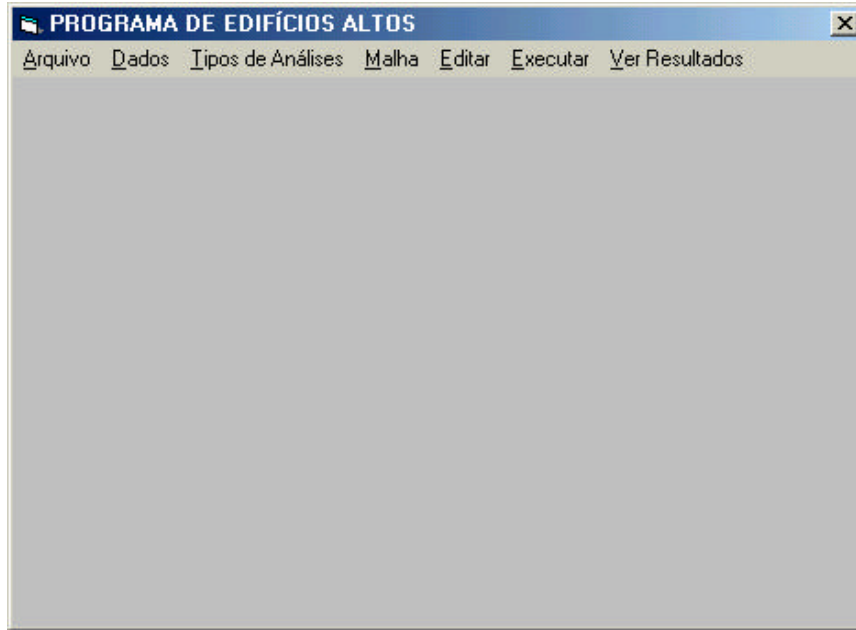


Figura 54 : Menu Principal de entrada de dados

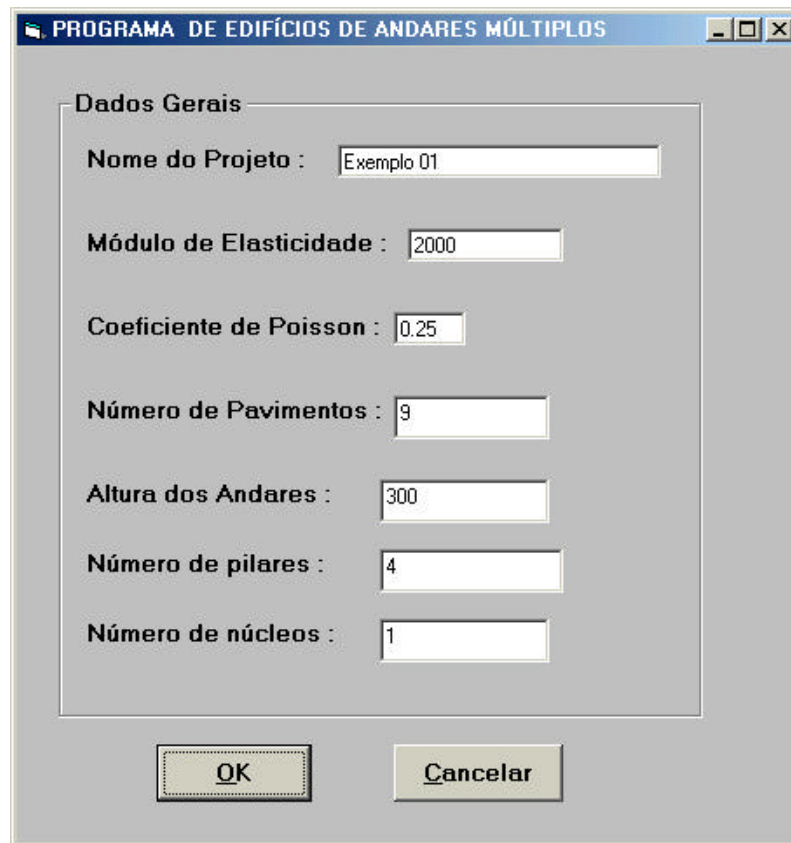


Figura 55 : Menu de dados gerais da estrutura

Se a opção selecionada no MENU PRINCIPAL for Novo , inicia-se o processo de entrada de dados para uma nova estrutura.

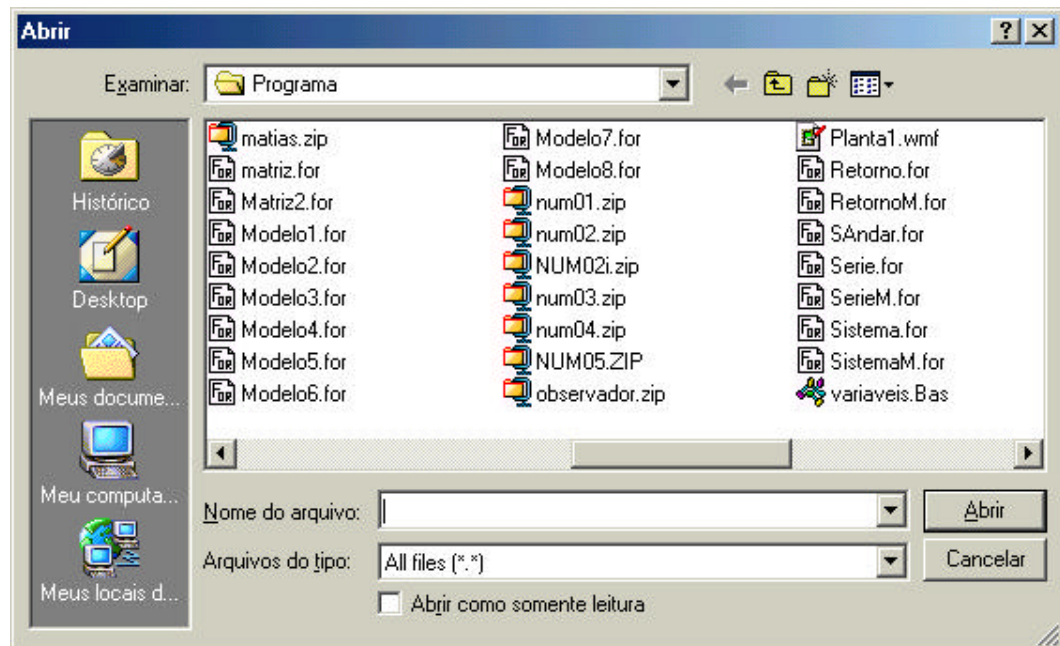


Figura 56 : Menu Opção ABRIR

É possível também abrir um arquivo de dados de uma estrutura onde os seus dados já foram informados ou processados. Para isto é utilizado a janela de “ABRIR “ arquivos de dados do *Windows* .

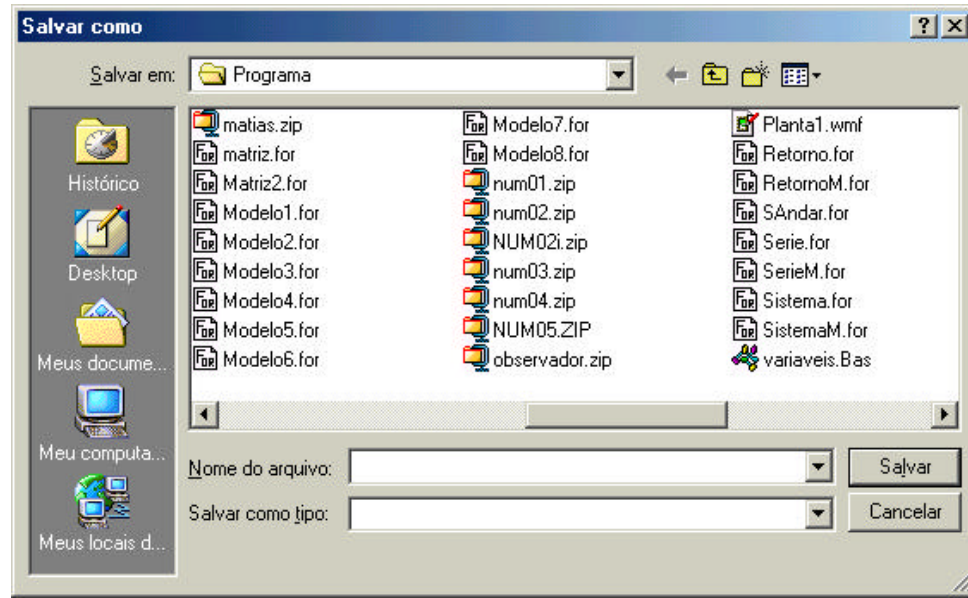


Figura 57 : Menu opção SALVAR

Após informar os dados de uma nova estrutura, ou então modificar os dados de uma estrutura já existente, é possível salvá-la com a opção de “SALVAR” arquivos do *Windows* .

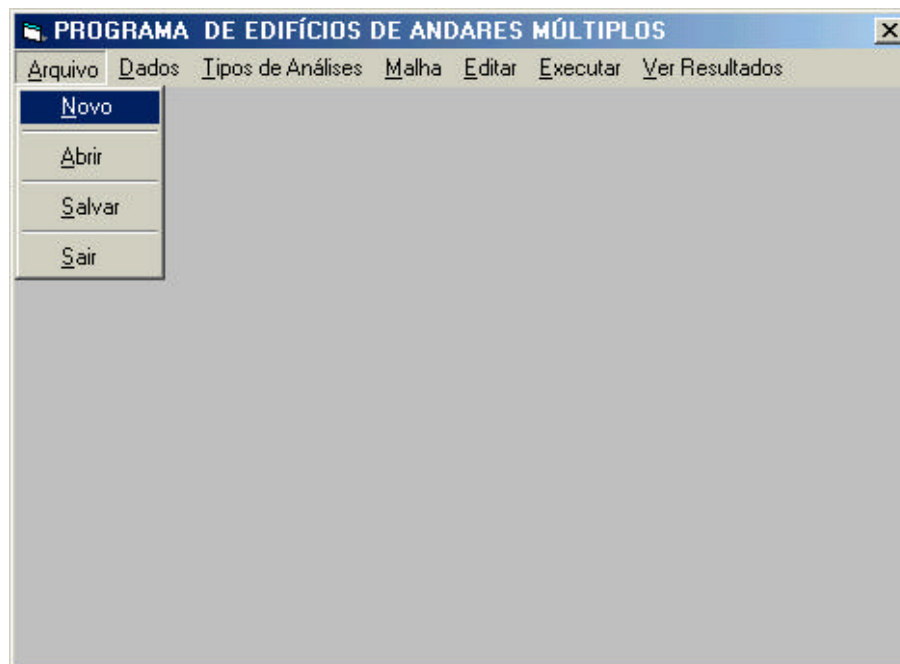


Figura 58 : Menu Opção de entrada de dados

As figuras seguintes mostram como é possível percorrer os outros sub-menus do MENU PRINCIPAL e assim inserir dados .

Deve-se atentar que é necessário seguir uma certa seqüência de informação dos dados. Por exemplo, não é possível plotar a malha do pavimento, sem antes ter gerado uma malha de elementos finitos.

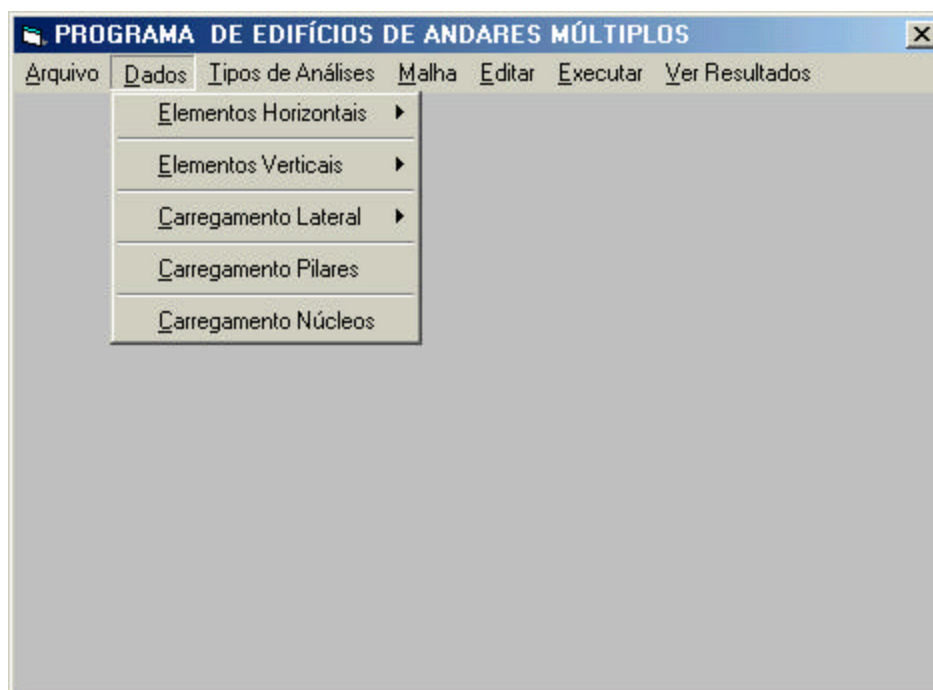


Figura 59 : Menu Opção de entrada de dados

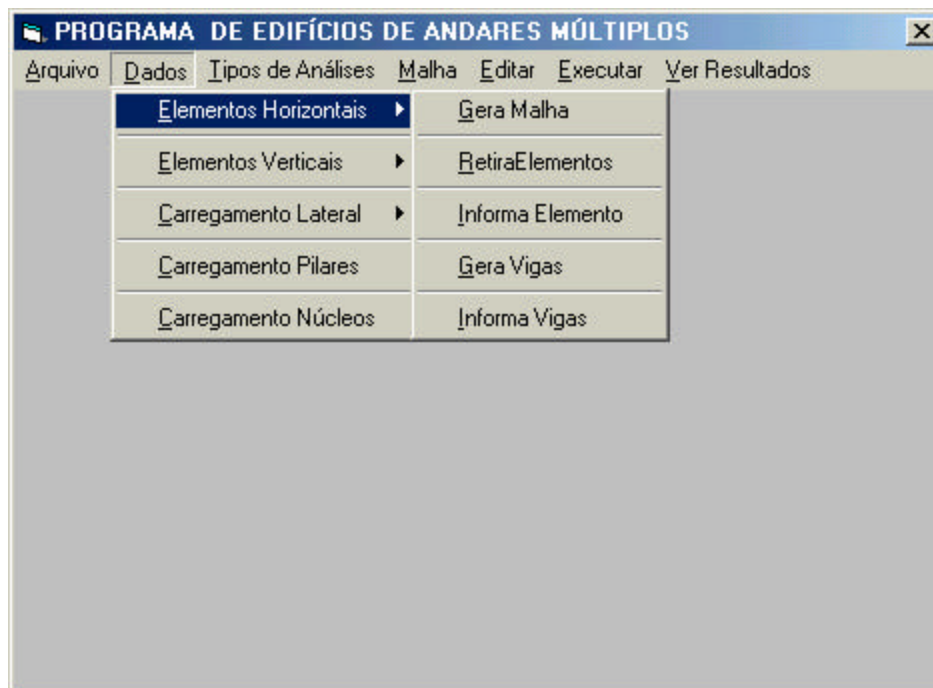


Figura 60 : Menu Opção de entrada de dados

As próximas figuras são as janelas de diálogos

que permitem ao usuário inserir dados referentes à topologia da estrutura e às características geométricas dos elementos estruturais, tais como :

- gerar uma malha de elementos finitos quadrangulares ou triangulares.
- informar elementos finitos quadrangulares ou triangulares.
- retirar elementos finitos, opção útil se houver “buracos “na laje devido por exemplo, a caixas de elevadores.
- informar as características geométricas de pilares, núcleos e vigas.
- informar carregamentos verticais nas lajes e vigas e carregamentos horizontais devido a ação do vento.

PROGRAMA DE EDIFÍCIOS DE ANDARES MÚLTIPLOS

Gera Malha de Elementos Finitos

Forma dos Elementos: Elemento Quadrangular
 Elemento Triangular

Tipo do Elemento: DKT DST

Número de Divisões na Horizontal e Vertical:

Eixos:

Coordenadas do Quadrilátero:

Ponto	Coord. Y	Coord. Z	
C1	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="-300"/>	<input type="text" value="150"/>
C2	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="300"/>	<input type="text" value="150"/>
C3	<input type="text" value="16"/>	<input type="text" value="300"/>	<input type="text" value="-150"/>
C4	<input type="text" value="13"/>	<input type="text" value="-300"/>	<input type="text" value="-150"/>

Espessura:
Carregamento:

Adicionar **OK** **Cancelar**

Figura 61 : Janela para geração de uma malha de elementos finitos

PROGRAMA DE EDIFÍCIOS DE ANDARES MÚLTIPLOS

Definição de Elementos de Placa

Forma do elemento:

Tipo do elemento: DKT DST

Pontos Nodais:

	Coord. Y	Coord. Z	
C1	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="100"/>	<input type="text" value="200"/>
C2	<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="200"/>	<input type="text" value="200"/>
C3	<input type="text" value="3"/>	<input type="text" value="150"/>	<input type="text" value="300"/>

Espessura:
Carregamento:

Eixos:

Numeração dos Nós

Adicionar
OK
Cancelar

Figura 62: Janela para informação de elementos finitos triangulares ou quadrangulares

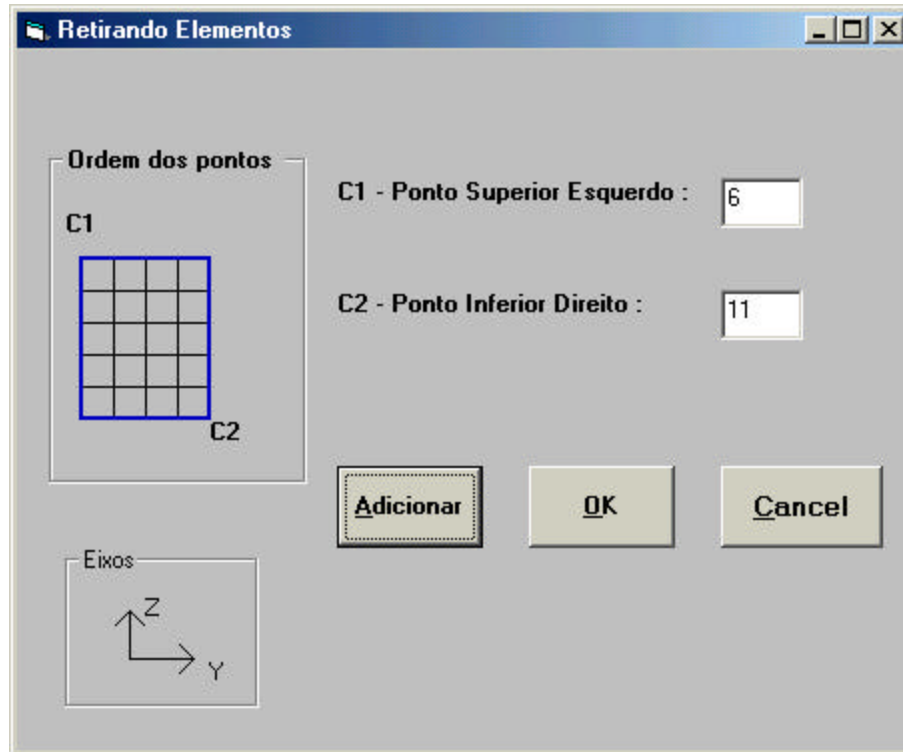


Figura 63 : Janela para retirar um quadrângulo de elementos finitos

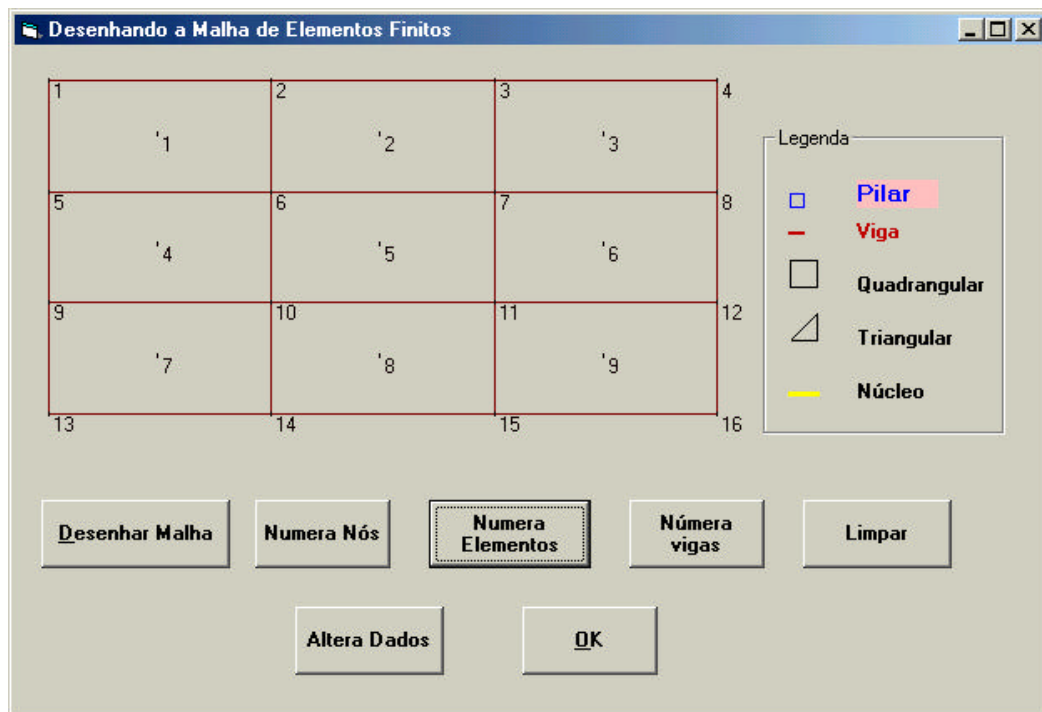


Figura 64 : Malha com os elementos finitos gerados

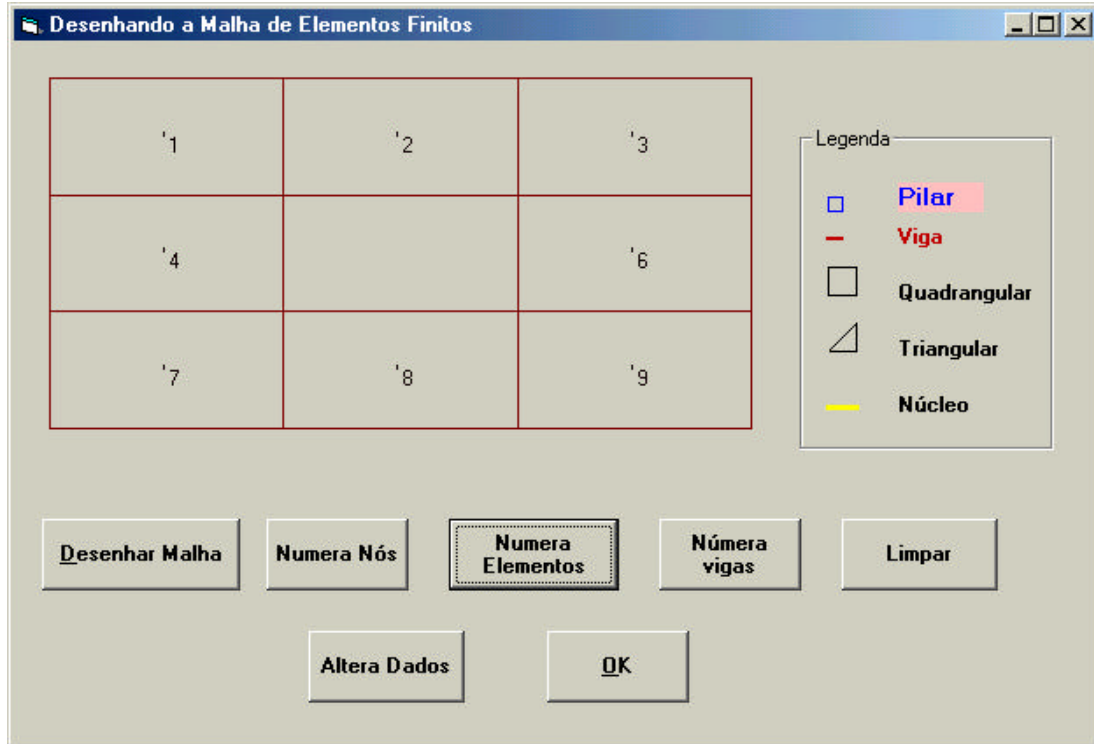


Figura 65 : Malha de elementos finitos gerada com 'buraco' na laje



Figura 66 : Janela para geração de elementos de barra

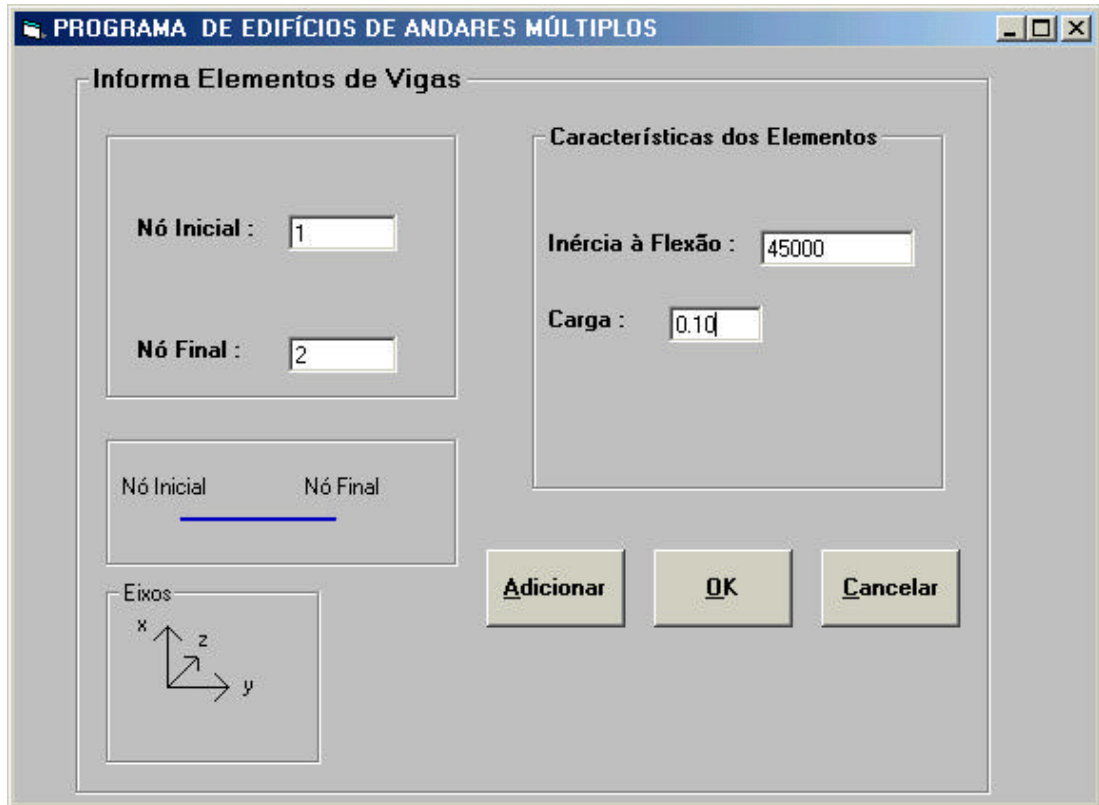


Figura 67 : Janela para informação de elementos de barra

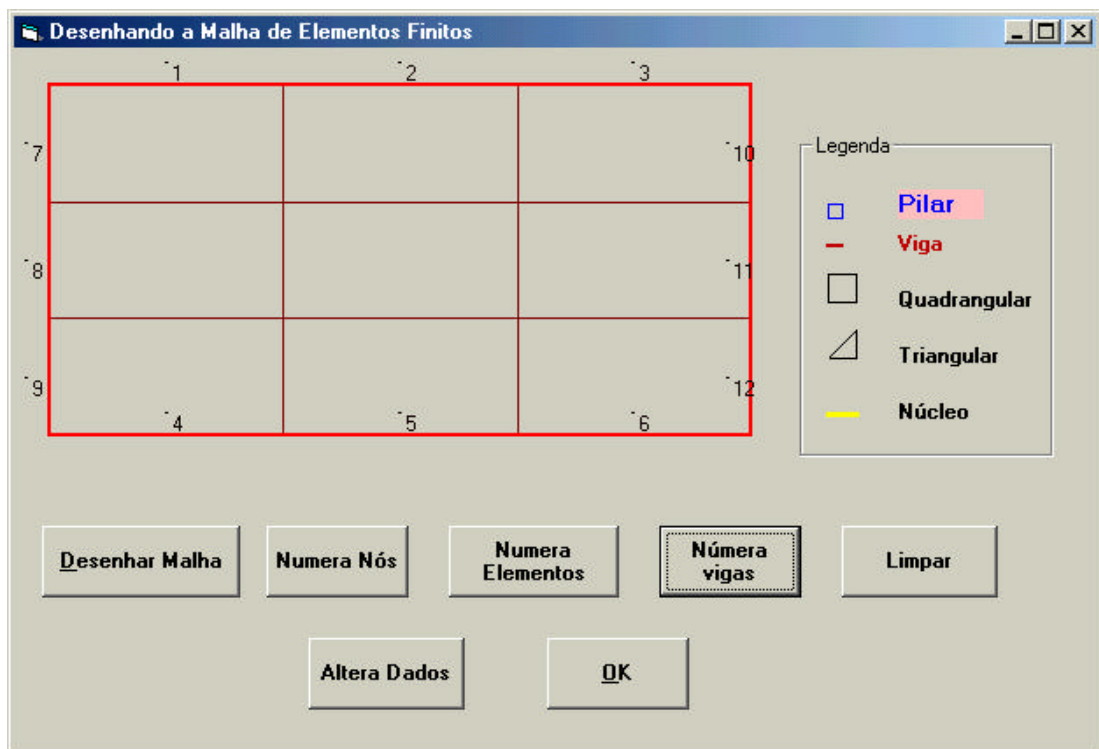


Figura 68 : Malha com elementos finitos e elementos de barra

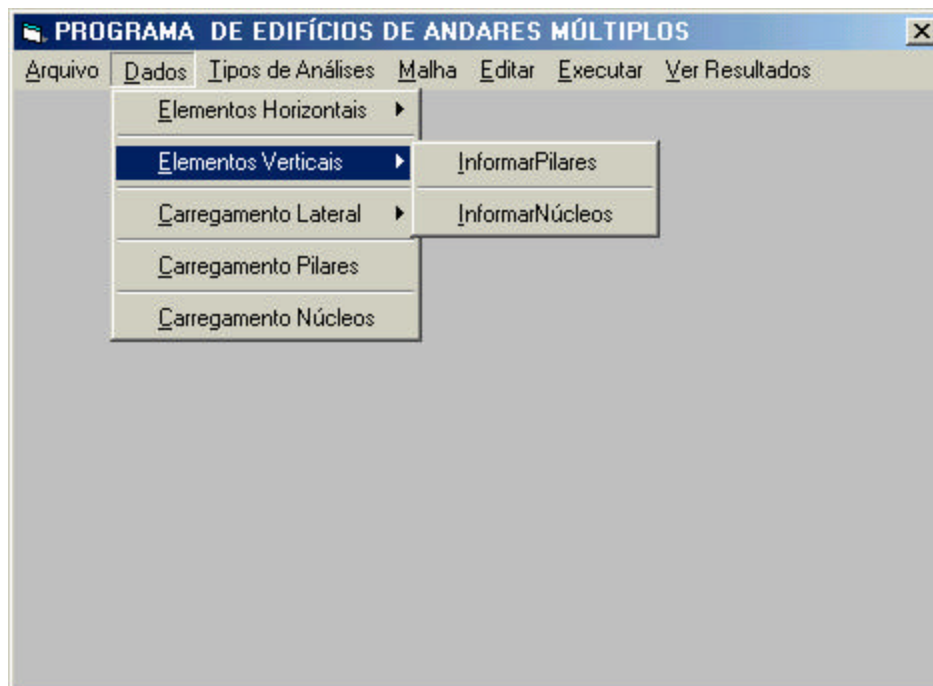


Figura 69 : Menu dos elementos verticais

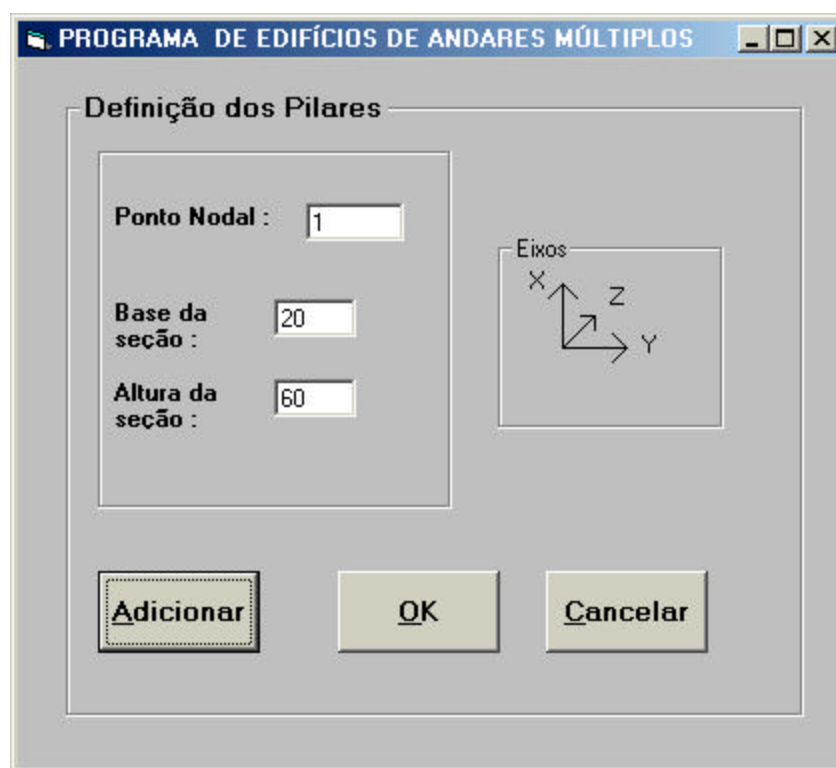


Figura 70 : Janela para informação de características geométricas dos pilares

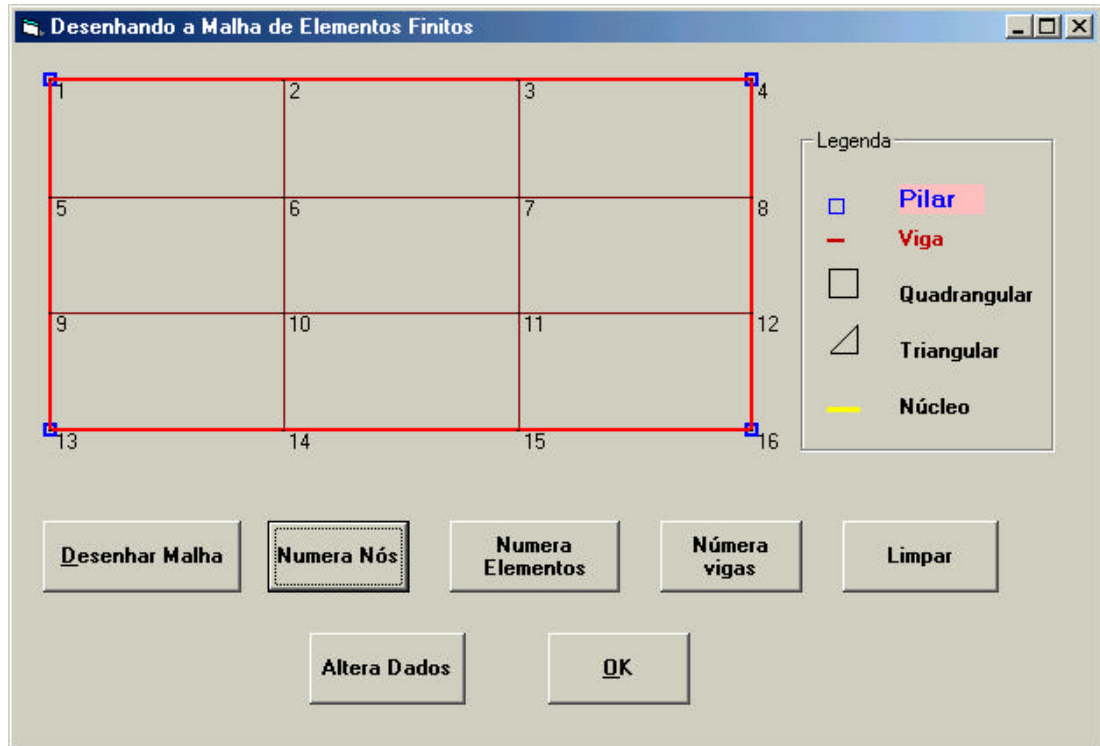


Figura 71 : Malha com elementos finitos, elementos de barra e pilares

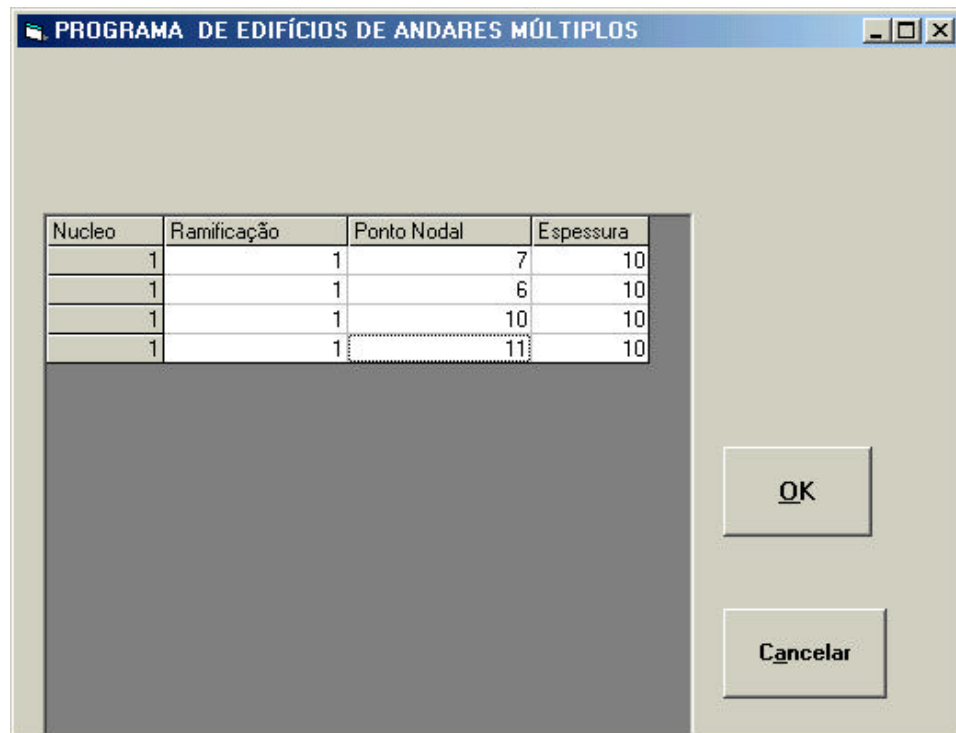


Figura 72 : Janela para informação de elemento de núcleo

Após a entrada dos dados referentes ao pavimento, através das janelas de diálogo anteriores, é possível plotar uma malha dos elementos estruturais, o qual ajuda na conferência das coordenadas dos elementos finitos, incidência dos pilares, núcleos e conectividades das vigas. A planta apresentada na Figura 74 é a planta do pavimento tipo do EXEMPLO 02, apresentado no CAPÍTULO 07.

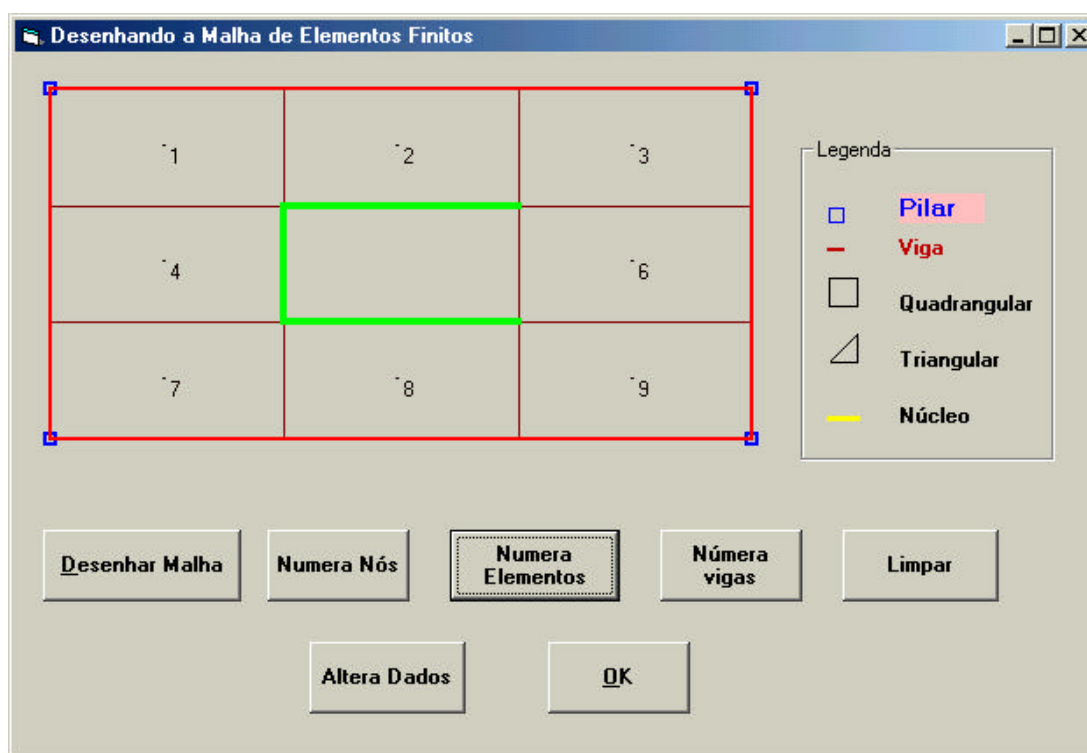


Figura 73 : Malha com todos os elementos que formam o pavimento

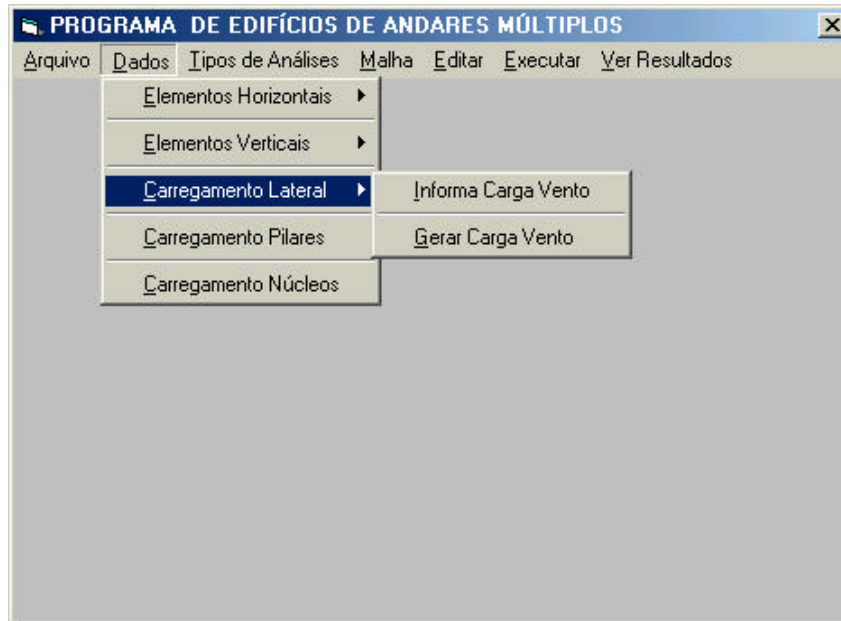


Figura 74 : Menu para carga devida à ação do vento

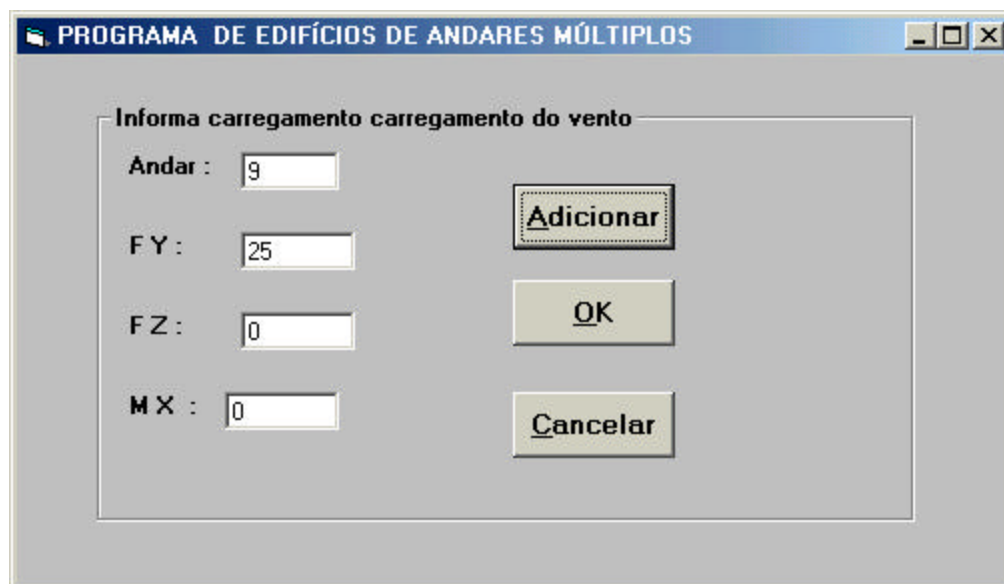


Figura 75 : Janela para informar carga devida à ação do vento

The image shows a software dialog box with the title "PROGRAMA DE EDIFÍCIOS DE ANDARES MÚLTIPLOS". The dialog is titled "Geração de carregamento devido ao vento". It contains several input fields and buttons:

- Andar :** Input field with the value "1".
- Incremento :** Input field with the value "1".
- Número de Gerações :** Input field with the value "9".
- F Y :** Input field with the value "50".
- F Z :** Input field with the value "0".
- M X :** Input field with the value "0".
- Buttons:** "Adicionar", "OK", and "Cancelar".

Figura 76 : Janela para geração de carga devida à ação do vento

É possível escolher até 04 modelos de análise para cada estrutura. Para cada modelo de análise o programa gera automaticamente arquivos com extensão MD1 , MD2 , MD3 e MD4, de acordo com a escolha dos modelos de 01 a 04, respectivamente.



Figura 77: Janela para escolha da opção e/ou opções de modelos de análise

Se for escolhido algum modelo onde será realizada a análise interativa em teoria de 2ª ordem, é necessário informar o valor da tolerância, utilizada no critério de convergência.

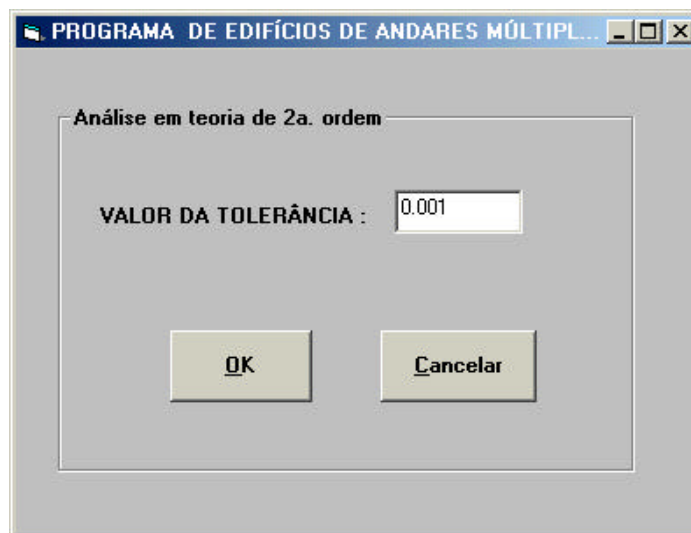


Figura 78: Janela de informação da tolerância para análise em 2ª ordem

Se a malha estiver coerente, é possível editar no WORDPAD do *Windows*, o arquivo de dados, e dessa forma, verificar se o arquivo de dados informado está coerente e a estrutura então poderá ser executada.

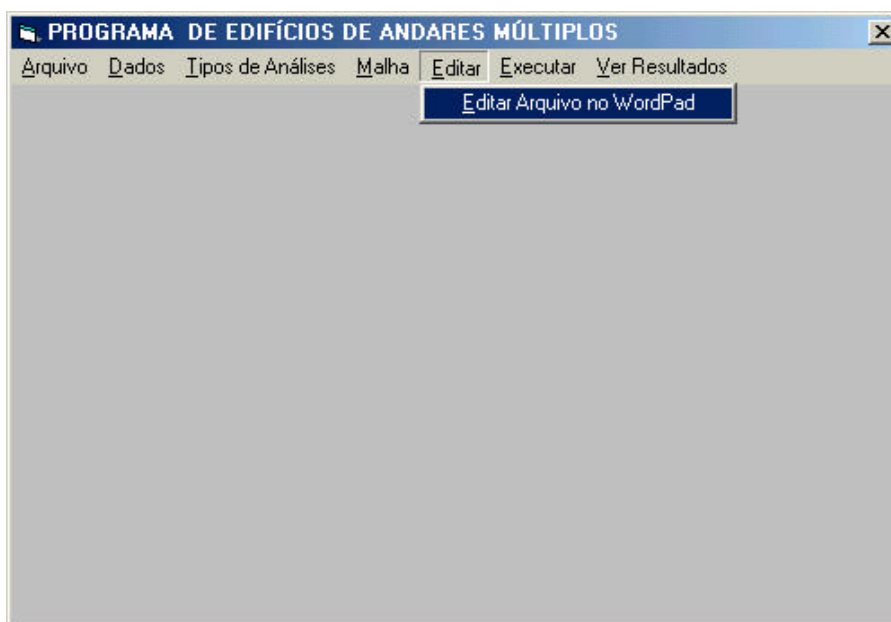


Figura 79 : Menu de opção para editar o arquivo de dados

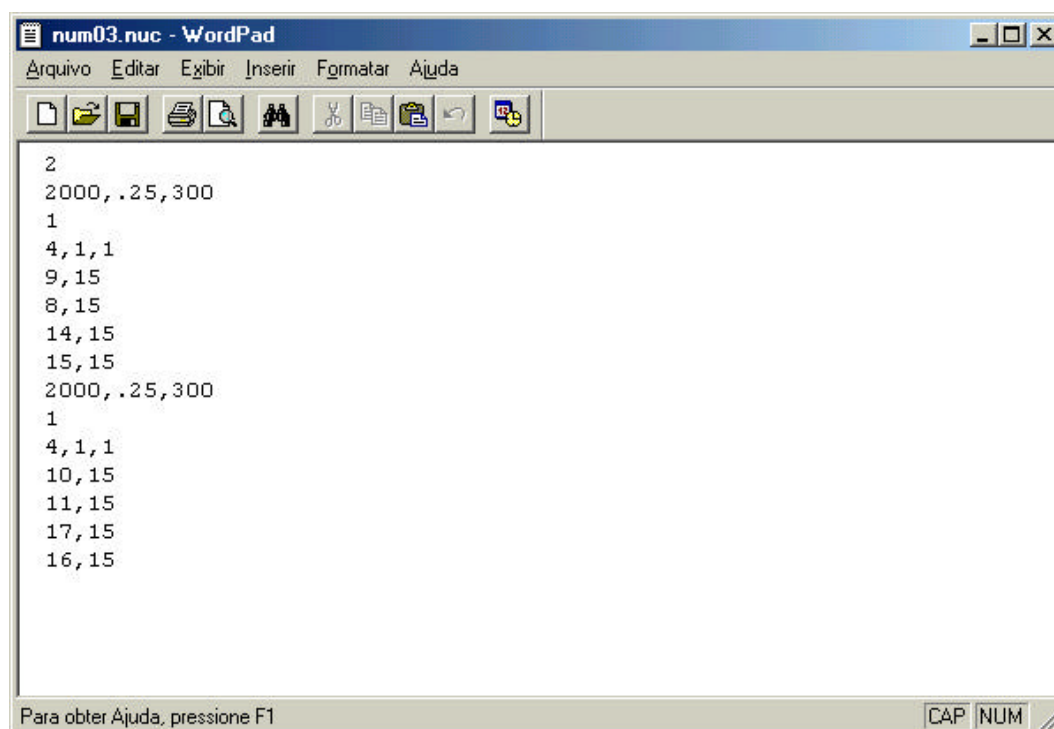


Figura 80 : Exemplo de parte de arquivo de dados editado no WORDPAD

A figura anterior ilustrada uma parte do arquivo de dados do elemento de núcleo do EXEMPLO 02

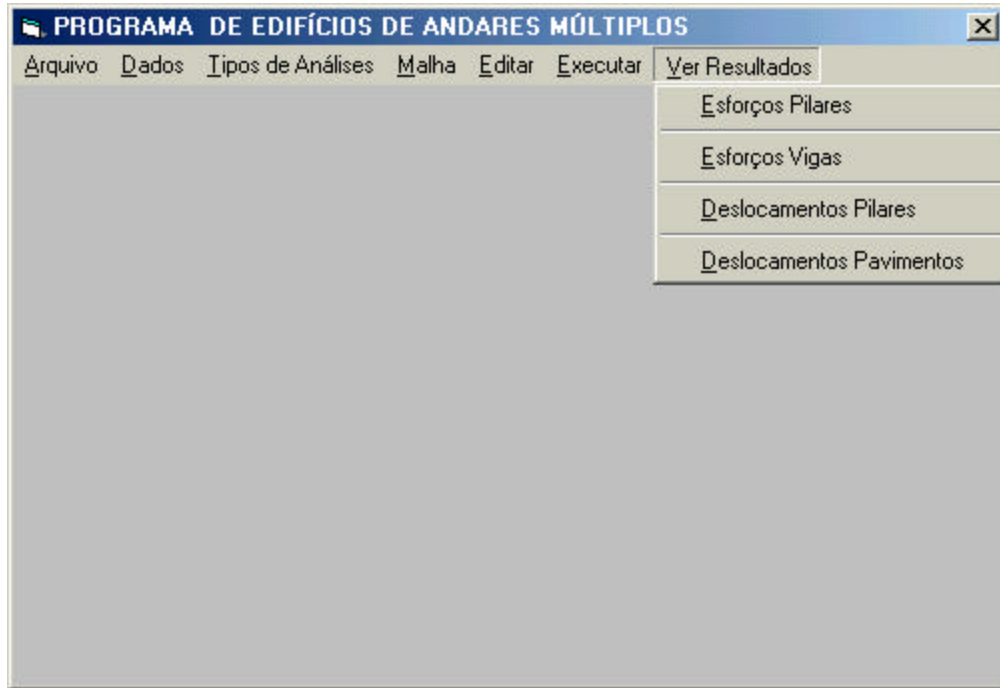


Figura 81 : Menu de opção para editar o arquivo de resultados

Após executar a estrutura no menu principal, através de um clique com o botão do MOUSE em EXECUTAR, é possível ver os arquivos de resultados no WORDPAD.

As figuras seguintes apresentam três arquivos de resultados.

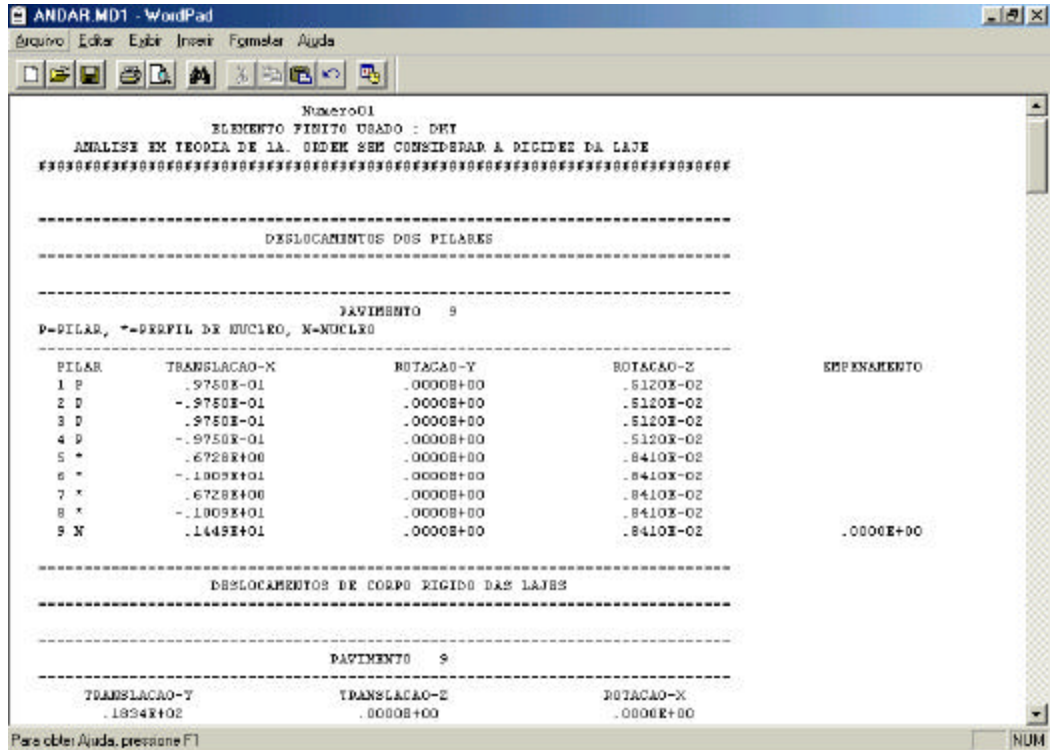


Figura 82 : Exemplo de arquivo de resultados editado no WORDPAD

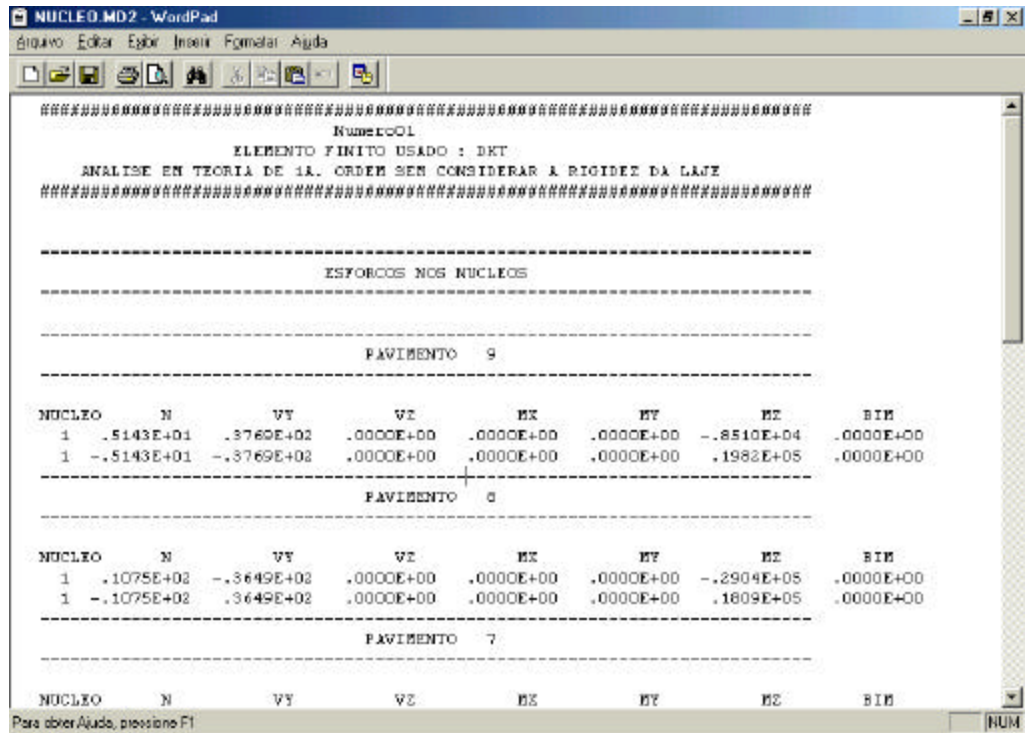


Figura 83 : Exemplo de arquivo de resultados editado no WORDPAD

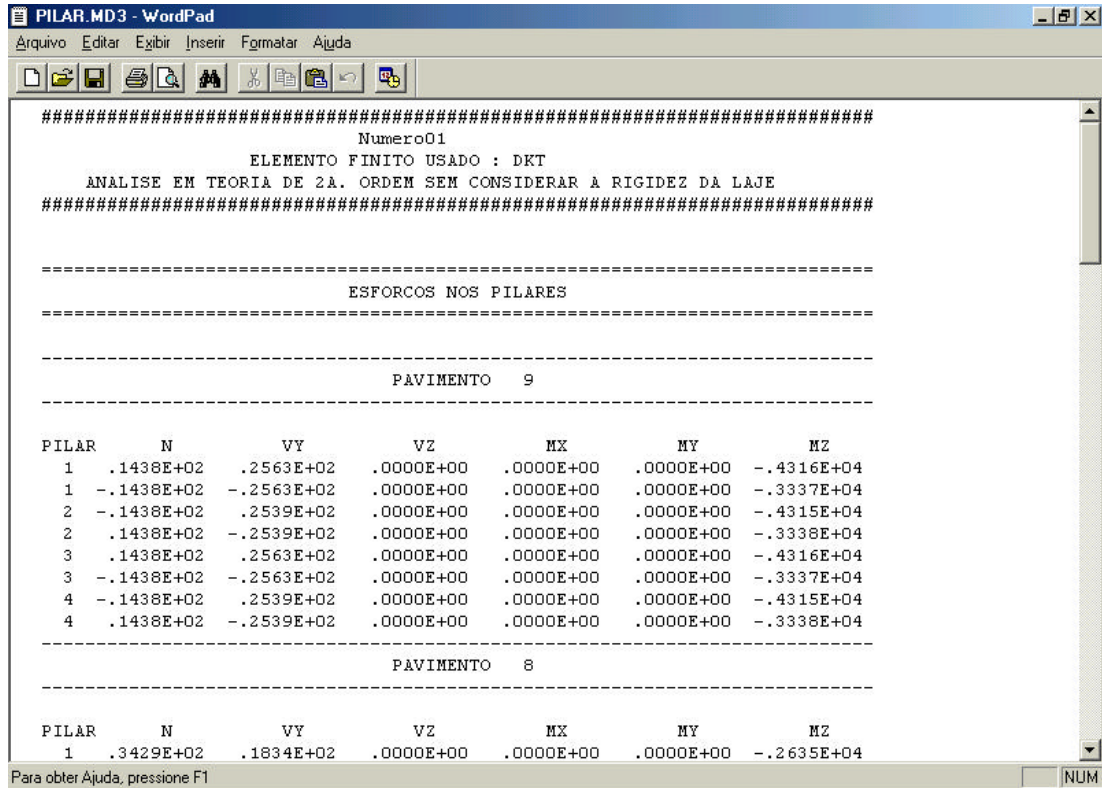


Figura 84 : Exemplo de arquivo de resultados editado no WORDPAD

O programa também contém janelas que ao longo de sua execução informam ao usuário mensagens de aviso para que eventuais erros não sejam cometidos. Quase todos os campos para entrada de dados possuem uma janela de aviso para que os mesmos não fiquem sem serem preenchidos.

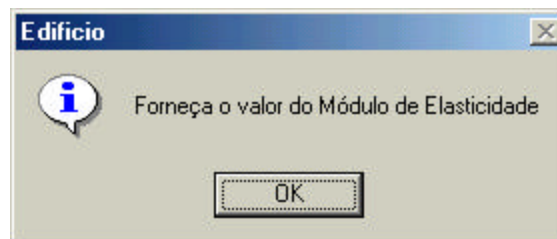


Figura 85 : Exemplos de janelas de mensagens de aviso

Além disso, dados fornecidos com dimensões incorretas serão avisadas através de janelas de “AVISO DE ERRO “.

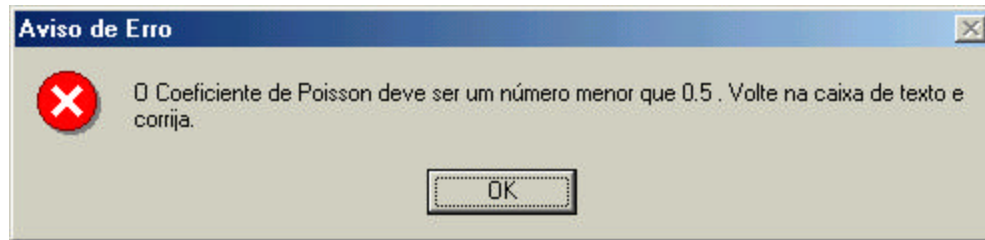


Figura 86 : Exemplo de janelas de mensagens de aviso de erro

6.6 Comentários gerais sobre o programa interativo EDIFICIO.VBP

A seguir apresentam-se algumas sugestões para facilitar a execução do programa computacional interativo em *Visual Basic 6.0*, e dessa forma tentar diminuir o número de erros que por qualquer eventualidade venha a surgir.

- deve-se observar com atenção as mensagens exibidas pelo programa nas caixas de diálogo que aparecem durante o processamento do programa EDIFICIO.VBP, pois elas informam sobre atitudes não coerentes na fase de entrada de dados.

- para inserir dados de uma caixa de texto para outra, é necessário pressionar com o botão esquerdo do MOUSE na caixa de diálogo correspondente ou então teclar ENTER.

- aconselha-se sempre no processamento de qualquer estrutura, visualizar a malha formada pelos elementos estruturais do pavimento. Com o desenho esquemático desta malha é possível observar se não há falta de elementos finitos, se os pilares estão nos pontos corretos, se as vigas estão com suas conectividades certas, etc...

- como o pré-processador foi elaborado em *Visual Basic 6.0* para ambiente *Windows* e o processador de dados foi também elaborado em *Fortran Power Station 90* para ambientes *Windows*, aconselha-se executar os programas em Sistema

Operacional *Windows* , para que não surjam problemas de incompatibilidade de *Softwares*.

6.7 Arquivos de resultados

Para cada estrutura analisada são criados até 06 arquivos de saída, contendo os resultados obtidos pelo programa computacional CEEAM.F90

As extensões dos arquivos criados são de acordo com o tipo de modelo de análise no qual a estrutura foi executada. Por exemplo, se a estrutura for executada com o Modelo 1, os arquivos de saída serão :

- **ANDAR.MD1** : contém os deslocamentos independentes de todos os pilares e também os deslocamentos de corpo rígido das lajes.

- **PAVIM.MD1** : contém os deslocamentos dos nós internos do pavimento, com as respectivas coordenadas. Os nós internos dos pavimento são os nós dos elementos de viga e placa que não possuem conectividade com os pilares.

- **PILAR.MD1** : contém os esforços nos pilares em todos os pavimentos do edifício. Os esforços nos pilares estão relacionados de acordo com o sistema de coordenadas locais.

- **VIGA.MD1** : contém os esforços nos elementos de viga, de acordo com o sistema de coordenadas locais. Os esforços solicitantes nas vigas sempre estão relacionados ao seu trecho flexível.

- **NUCLEO.MD1** : contém os esforços nos núcleos em todos os pavimentos do edifício. Os esforços nos núcleos estão relacionados de acordo com o sistema de coordenadas locais. Os esforços são dados para as coordenada do centro de gravidade e do centro de torção do elemento.

Se a estrutura for analisada por um dos modelos que considera a rigidez transversal à flexão das lajes, teremos também um arquivo de resultados que fornece os momentos fletores e os esforços cortantes nas lajes.

- **LAJE.MD2** : no caso de se considerar a rigidez transversal à flexão das lajes este arquivo contém os esforços nos elementos finitos de laje.

Deve-se salientar ainda, que poderão ser executados para a mesma estrutura até os 4 modelos fornecidos na tabela 03. Sendo assim os arquivos terão extensão MD1 para o Modelo 1, MD2 para o Modelo 2 ; e assim sucessivamente até MD4 para o Modelo 4.

6.8 Limitações do programa

Atualmente com o rápido avanço computacional é talvez obsoleto tratar o assunto de limites de processamentos para os microcomputadores e *softwares* existentes , já que esses possuem uma grande capacidade de memória para resolver problemas de grande porte.

O *software Fortran Power Station 90*, utilizado na elaboração do programa computacional, permite realizar a alocação dinâmica de memória para matrizes e vetores. Sendo assim, somente o espaço a ser realmente utilizado por determinada matriz ou vetor será ocupado. Sendo assim, não é necessário reservar no início do programa grandes áreas de memória para matrizes e vetores que poderão ao longo da execução do programa ter dimensões menores que as inicialmente reservadas.

Com o objetivo de obter ainda um melhor aproveitamento da memória do computador, as matrizes de rigidez referentes às coordenadas internas e externas do pavimento são armazenadas em vetores contendo os elementos da diagonal principal e os elementos situados acima dela. Isto é possível devido a simetria das matrizes.

Como se está usando o Método dos Elementos Finitos para a discretização do pavimento, o tempo de processamento será proporcional ao número de pontos nodais utilizados na referida discretização. Além disso, o tempo de processamento depende do número de andares da estrutura. Porém como está se utilizando técnicas de subestruturação, o número de andares não é um parâmetro limitante para o programa computacional, pois o sistema de equações do equilíbrio global da estrutura é função apenas do próprio andar e dos andares superior e inferior, como pode ser visto no item 5.5.

CAPÍTULO 7

EXEMPLOS NUMÉRICOS

7.1 Introdução

Apresenta-se a seguir cinco exemplos numéricos, cujos resultados são analisados com o intuito de se obter conclusões a respeito do comportamento estrutural dos edifícios de andares múltiplos quando se considera a rigidez transversal à flexão das lajes e a não linearidade geométrica para os pilares e núcleos.

Para facilitar a entrada de dados das forças do vento, o sistema de referência do edifício localiza-se no centro geométrico de cada pavimento, dispensando assim a inclusão de sua componente de momento. Além disso, as forças laterais do vento são concentradas ao nível de cada pavimento e a estrutura é suposta engastada na base.

Seria interessante a listagem dos arquivos de dados, porém, devido a grande quantidade de informações que se obtém para cada edifício quando se utiliza o Método dos Elementos Finitos, tornar-se inviável a impressão de todos os resultados. Dessa forma, optou-se por apresentar alguns dados na forma de gráficos que permitem uma melhor visualização dos resultados encontrados.

7.2 Exemplo 01

Neste exemplo estuda-se uma estrutura simples com todos os pavimentos iguais em planta conforme a figura 87, tendo as seguintes características :

- espessura da laje variável de 5 , 10 , 15 e 25 cm
- pé-direito dos andares : 300 cm
- número de andares : 09
- módulo elasticidade : 2000 kN/cm²
- coeficiente de Poisson : 0,25
- ação do vento concentrada em cada pavimento : $F_Y = 50$ kN
- dimensões do pilares : 20 x 60 cm
- dimensões das vigas : 20 x 30 cm
- espessura das paredes do núcleo : 10 cm

Esta estrutura e as demais foram analisadas de acordo com os 04 modelos apresentados abaixo :

MODELO 01 : Análise tridimensional sem a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 1^a ordem.

MODELO 02 : Análise tridimensional e considerando a rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 1^a ordem.

MODELO 03 : Análise tridimensional sem a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 2^a ordem.

MODELO 04 : Análise tridimensional e considerando a rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 2^a ordem.

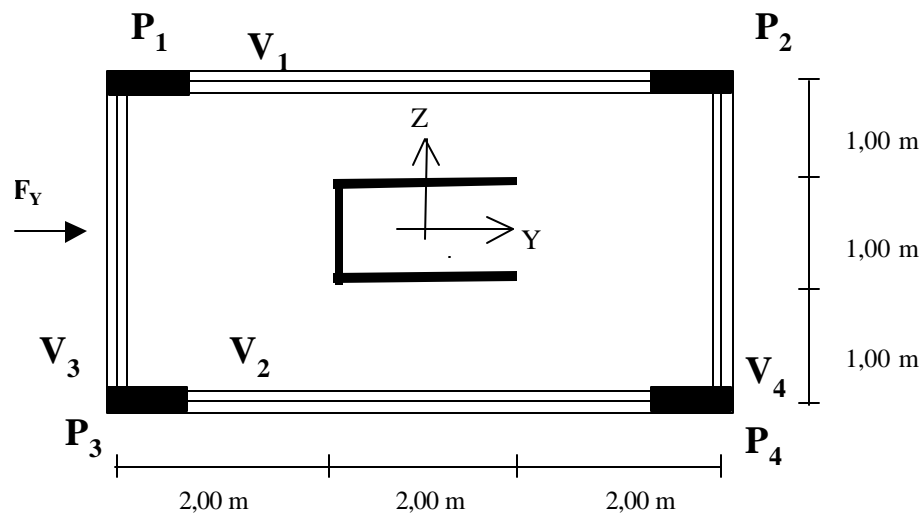


Figura 87 : Planta baixa dos pavimentos tipos

A seguir são apresentados alguns resultados desse exemplo simplificado.

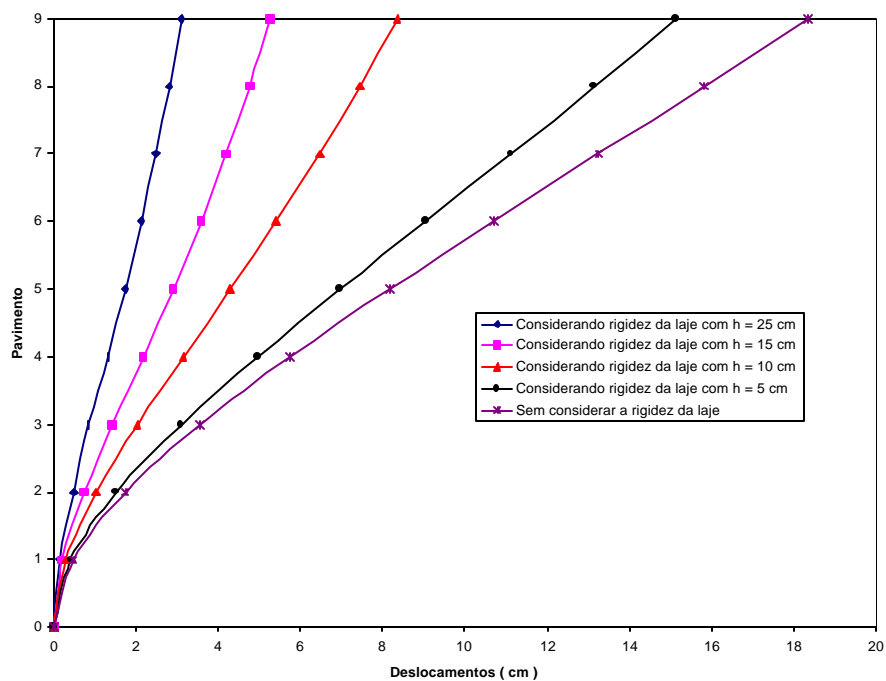


Figura 88 : Translação em Y para diferentes espessuras de laje

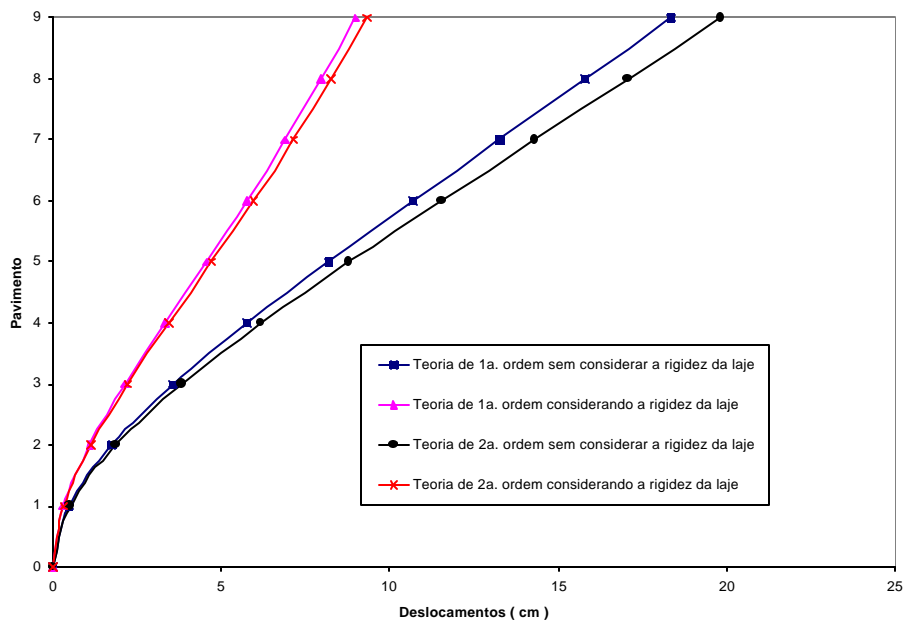


Figura 89 : Translação em Y para espessura da laje h = 15 cm

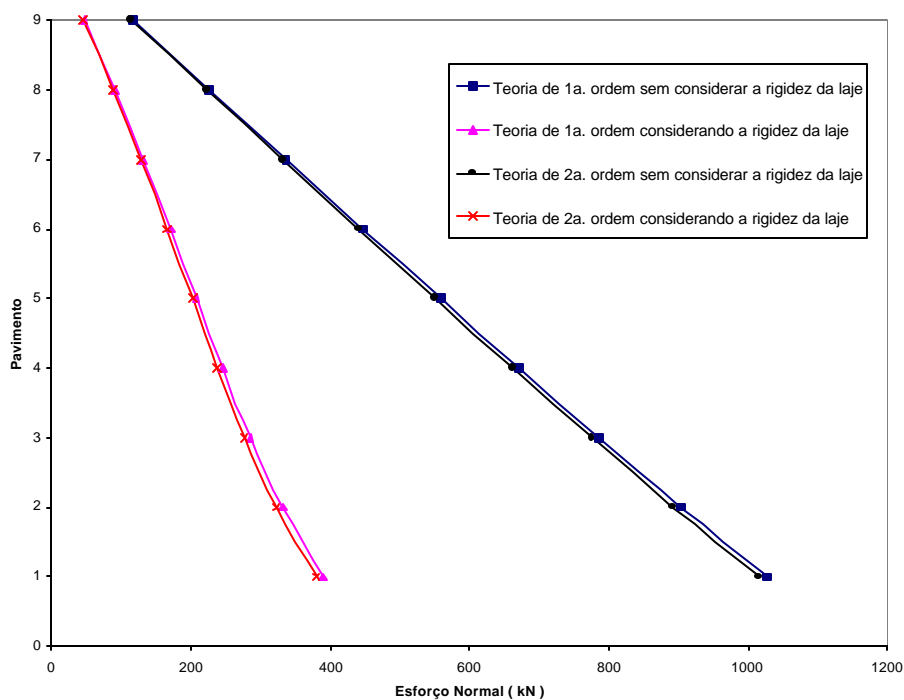


Figura 90 : Esforço Normal no Pilar P01

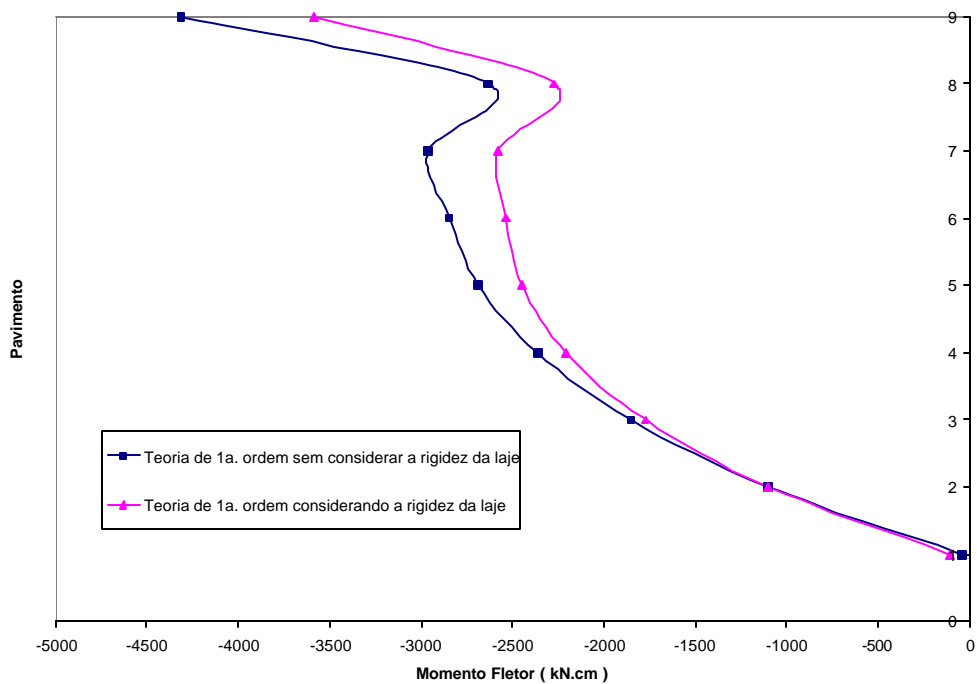


Figura 91 : Momento Fletor Superior MZ no Pilar P01

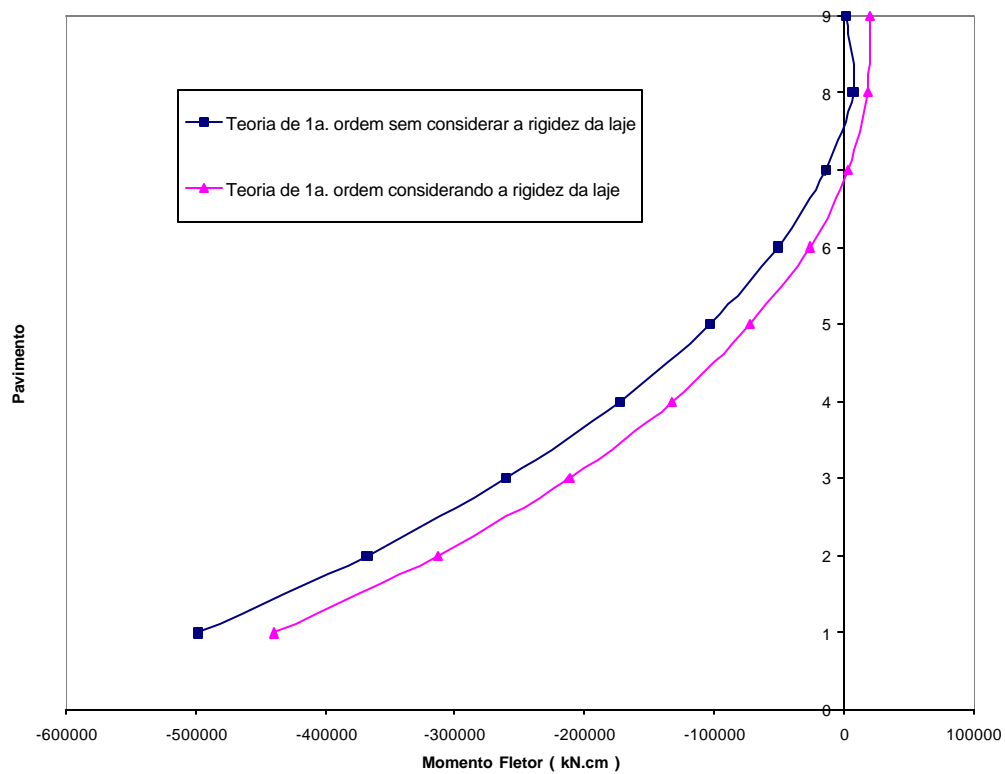


Figura 92 : Momento Fletor Inferior MZ no centro de torção do Núcleo

Os gráficos anteriores foram obtidos pela análise da estrutura com o elemento finito DKT .

A seguir apresenta-se duas tabelas para comparação de análise da estrutura utilizando-se os 02 elementos finitos na discretização da laje. O elemento finito DKT e o elemento finito DST. O elemento finito DKT não considera a parcela da deformação provocada pelo esforço cortante na sua energia de deformação, já o elemento finito DST considera essa parcela. Por isso os deslocamentos dados pelo análise com elemento finito DST são maiores que os fornecidos pelo DKT. Porém a diferença é pouco significativa, já que para placas delgadas, onde a relação entre a espessura h e o seu menor vão está entre 0,2 e 0,01, a energia de deformação é desprezível em relação a energia de deformação dada pela flexão. Portanto a influência da deformação devido ao esforço cortante é mais significativo nas placas espessas, cuja relação entre a espessura e menor vão é maior que 0,2. No caso de lajes de edifícios em concreto armado, a grande maioria são classificadas como placas delgadas.

Para esse exemplo e as espessuras dadas temos as seguintes relações entre a espessura (h) e o menor vão :

Tabela 03: Comparação dos deslocamentos com análise pelo DKT e DST

	Espessura (h)	Relação h/l	Diferença entre DKT/DST (%)
	25 cm	0,08	2,5
Menor vão l = 300 cm	15 cm	0,05	0,37
	10 cm	0,03	0,24
	5 cm	0,02	0

Tabela 04 : Deslocamentos ao nível da laje para cada pavimento

Laje com h = 25 cm		Laje com h = 15 cm		Laje com h = 10 cm		Laje com h = 5 cm	
DKT	DST	DKT	DST	DKT	DST	DKT	DST
3,107	3,115	5,267	5,269	8,353	8,355	15,14	15,14
2,814	2,821	4,764	4,765	7,439	7,441	13,15	13,15
2,491	2,497	4,209	4,211	6,465	6,466	11,12	11,12
2,132	2,138	3,59	3,591	5,416	5,417	9,048	9,048
1,74	1,745	2,907	2,908	4,302	4,303	6,975	6,975
1,322	1,326	2,179	2,18	3,156	3,157	4,96	4,961
0,85	0,8975	1,442	1,443	2,038	2,039	3,102	3,102
0,487	0,4882	0,7586	0,7587	1,042	1,042	1,533	1,533
0,1524	0,15273	0,2259	0,2259	0,3001	0,3001	0,426	0,426
0	0	0	0	0	0	0	0

A tabela 05 mostra os valores dos esforços normais do núcleo para análise em teoria de primeira ordem e os esforços normais no pilar 01 quando considera-se e não se considera a rigidez da laje, em teoria de primeira ordem.

É importante salientar neste exemplo e nos outros que a influência dos lintéis no comportamento dos núcleos estruturais é muito significativa, pois a presença de lintéis, fechando a seção transversal do núcleo, aumenta a rigidez dos núcleos, restringindo também parcialmente o empenamento das seções do núcleo. Portanto a significativa diferença nos deslocamentos laterais dos pavimentos é também devido a não estar considerando a presença dos lintéis neste exemplos. No exemplo 05 é realizada a análise de uma estrutura com a presença de lintéis fechando a seção transversal do núcleo.

O que se observa na figura 88 é que ao aumentar a espessura da laje, há uma diminuição dos deslocamentos laterais, pois a estrutura torna-se mais rígida. Portanto daí a necessidade da consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, pois estes

elementos estruturais trabalham como uma placa possuindo rigidez à flexão que não pode ser desprezada na análise global da estrutura.

Analisando as figuras 89, observa-se que ao computar a rigidez à flexão das lajes na estrutura, os deslocamentos horizontais dos pavimentos são menores que os obtidos pelo modelo que as consideram como diafragmas totalmente flexíveis

Tabela 05 : Esforço normal (kN) no núcleo e no pilar 01

Andar	Modelo 01	Modelo 01	Modelo 02
	Núcleo	Pilar 01	Pilar 01
9	230,5	115,6	46,24
8	443,8	225,7	89,82
7	658,1	336,6	131,2
6	869,4	447,3	170,1
5	1078	558,5	207
4	1284	670,9	244,7
3	1487	785,5	284,7
2	1688	903,5	331,6
1	1892	1027	390

Utilizando-se o programa de SOUSA JR. (2001), apenas para gerar as malhas de elementos finitos, podemos observar a malha de elementos deste exemplo e a estrutura deformada com os valores do deslocamentos transversais calculados considerando-se a rigidez transversal à flexão das lajes e em teoria de 2^a ordem para os núcleos e pilares.

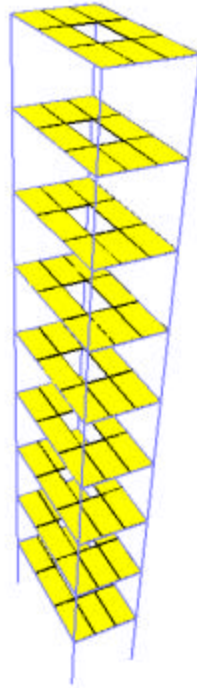


Figura 93 : Malha de elementos finitos para a estrutura

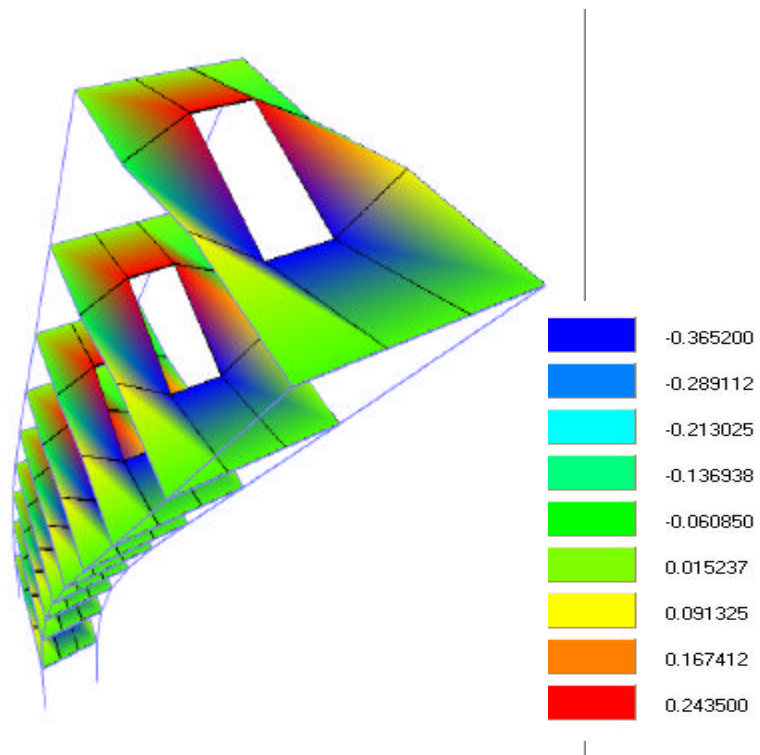


Figura 94 : Estrutura deformada e sua respectiva legenda

7.3 Exemplo 02

Neste exemplo analisa-se um edifício com todos os pavimentos iguais em planta conforme a figura 95, tendo os seguintes dados :

- pé-direito : 300 cm
- número de andares : 10
- carga uniformemente distribuída nas lajes : $10,0 \text{ kN/m}^2$
- carga distribuída nas vigas : 15 kN/m
- espessura das lajes : 15 cm
- módulo de elasticidade : 2000 kN/cm^2
- coeficiente de Poisson : 0,25
- ação do vento concentrada em cada pavimento : $F_Z = 100 \text{ kN}$
- dimensões do pilares : $30 \times 60 \text{ cm}$
- dimensões das vigas : $20 \times 60 \text{ cm}$
- espessura das paredes dos núcleos : 15 cm

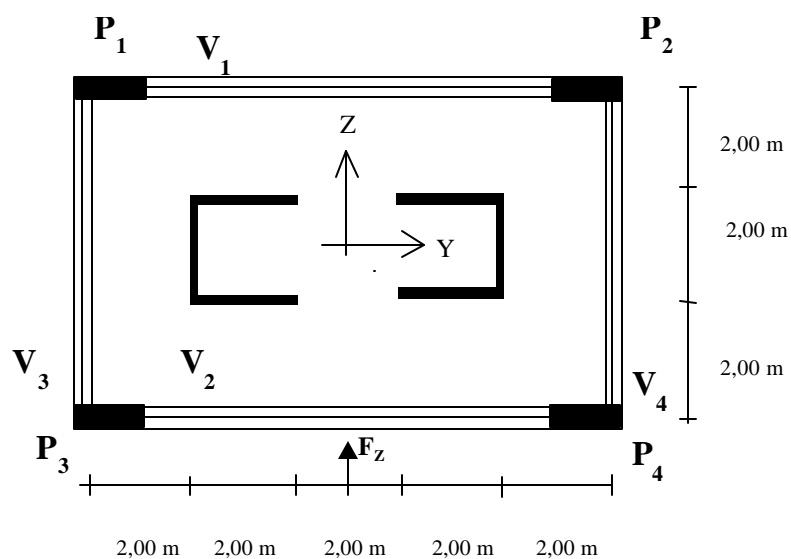


Figura 95 : Planta baixa do pavimento tipo

Nas páginas seguintes, parte dos resultados encontrados neste exemplo são apresentados e novamente dispostos em gráficos e a estrutura é novamente analisada pelos 04 modelos já descritos no exemplo 01.

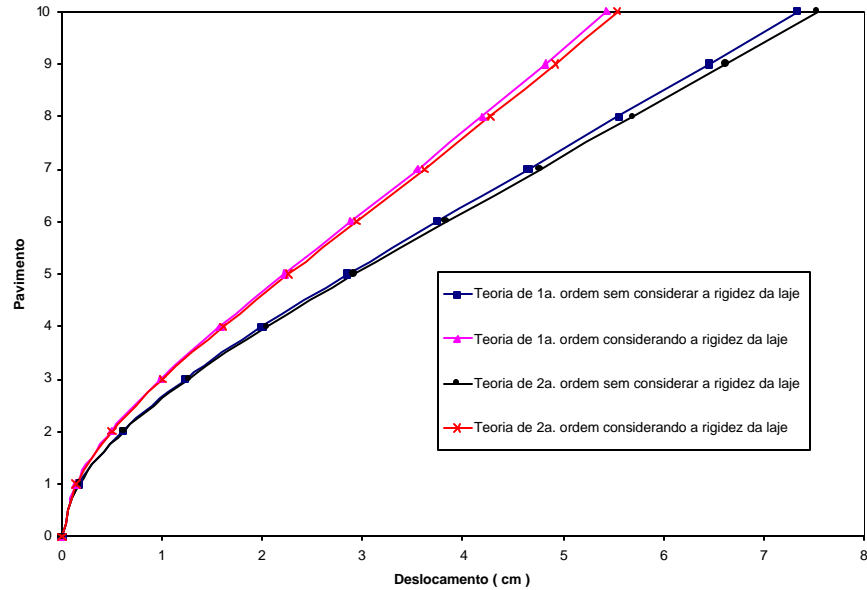


Figura 96 : Translação em Z para cada pavimento

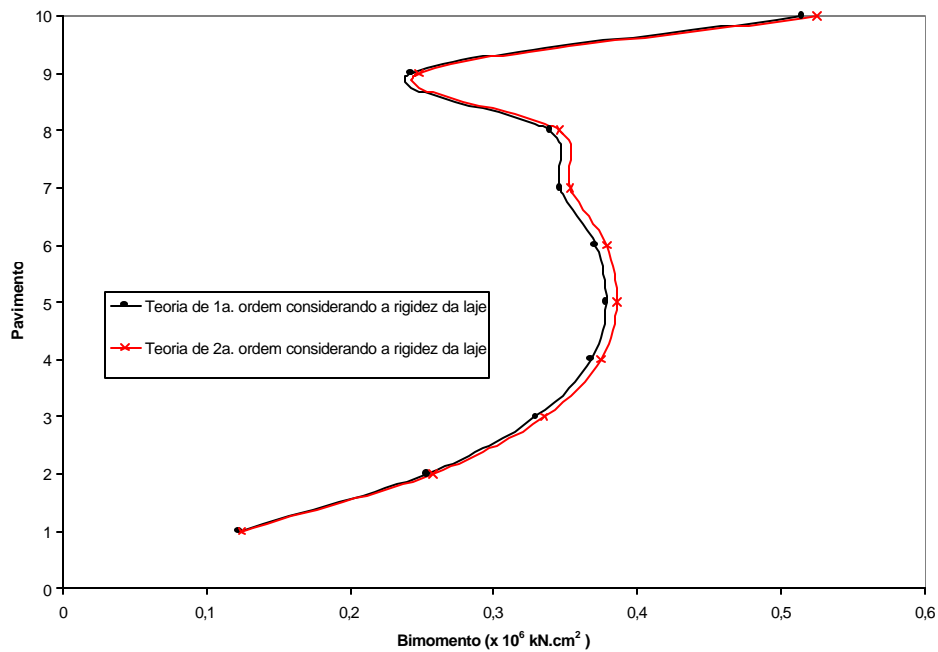


Figura 97 : Bimomento no centro de torção (CT) do núcleo

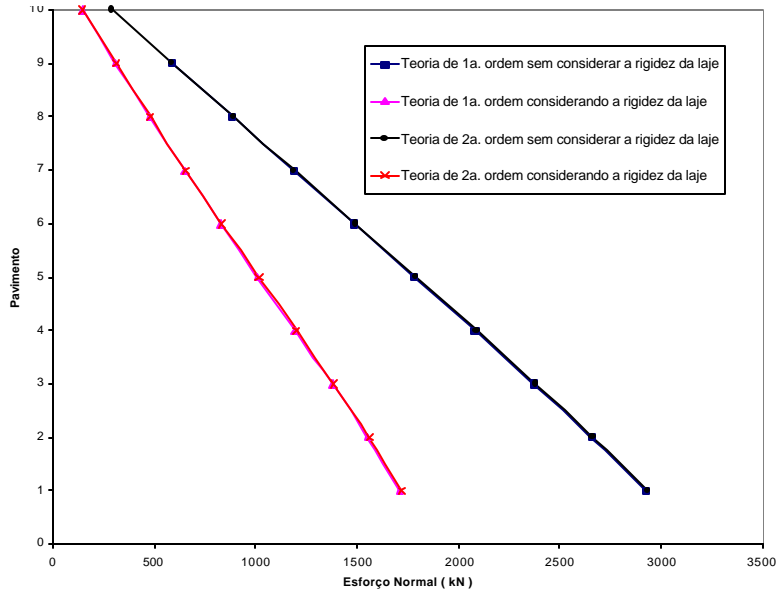


Figura 98 : Esforço Normal no Pilar P01

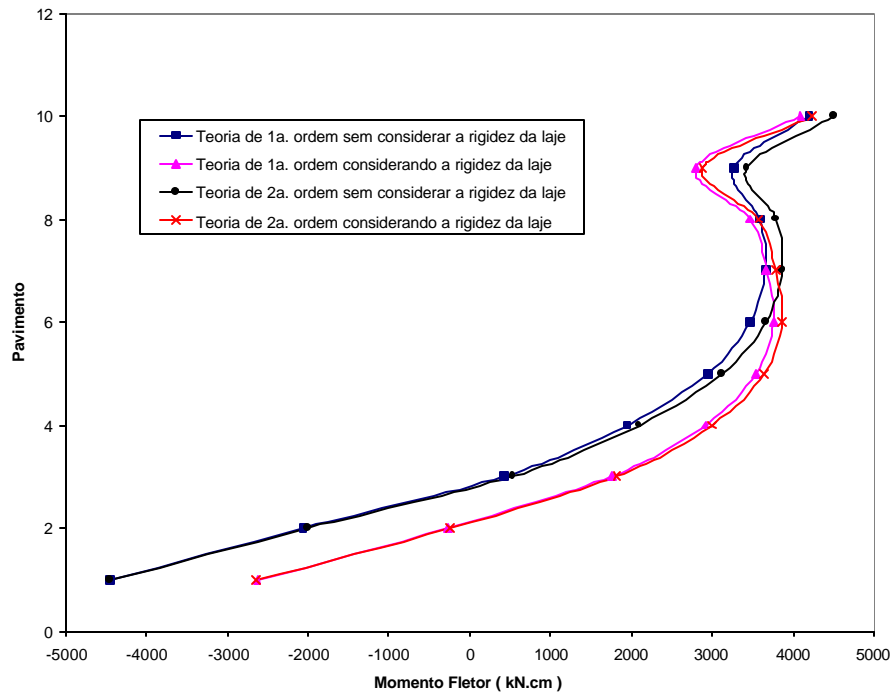


Figura 99 : Momento Fletor MY superior no Pilar P04

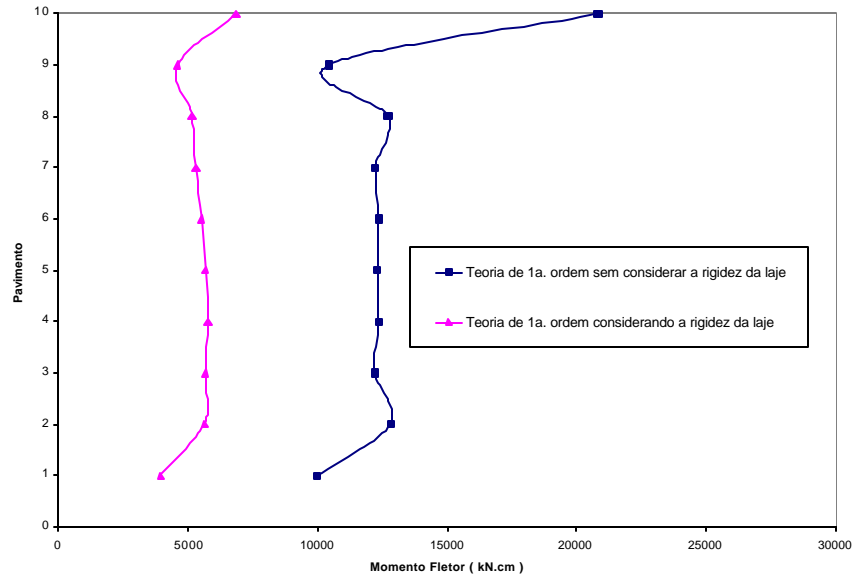


Figura 100 : Momento Fletor MZ superior no Pilar P01

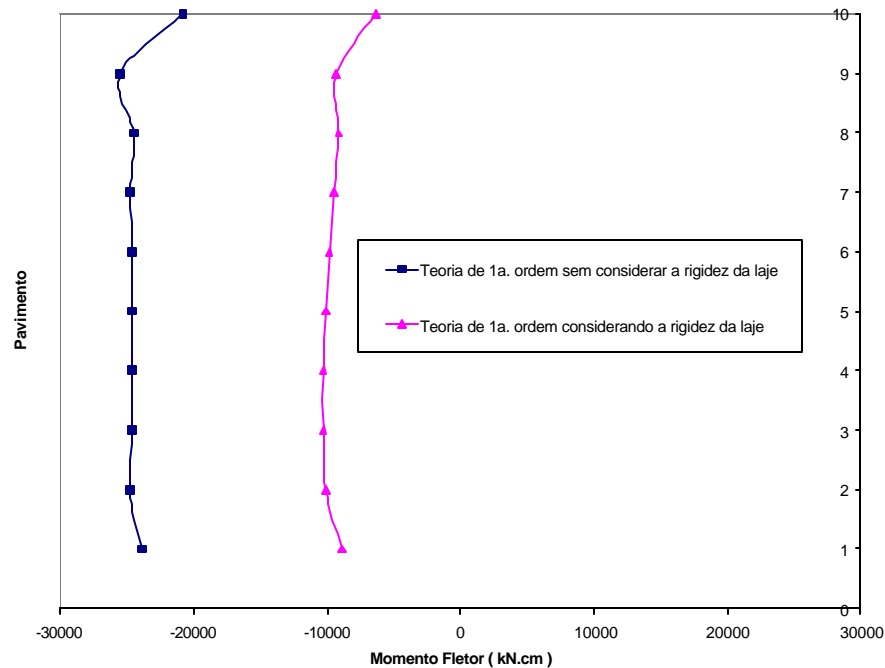


Figura 101 : Momento Fletor à esquerda da viga V01

Verifica-se novamente que ao se levar em conta a rigidez transversal à flexão das lajes ocorre uma redução dos deslocamentos horizontais nos pavimentos (figura 96). Há uma diminuição da translação em Z de corpo rígido da laje da ordem de 31 %, devido à contribuição da rigidez da laje e considerando teoria de 2ª ordem essa redução foi de 34 %.

Novamente neste exemplo observa-se que sem a consideração da rigidez transversal à flexão da laje o bimomento na seção transversal do núcleo é nulo. Já quando se considera a rigidez à flexão da laje surge a restrição parcial ao empenamento e conseqüentemente o esforço bimomento a ele associado. Por isso na figura 97 foram listados somente os valores dos modelos que consideram a rigidez transversal à flexão das lajes, pois para os outros dois modelos estes valores foram nulos.

A figura 98 mostra uma diminuição nos esforços normais nos pilares, quando considera a rigidez transversal à flexão das lajes. Isto ocorre, pois quando há consideração dessa rigidez há o empedimento ao empenamento do núcleo, e portanto aparecem neste elemento estrutural esforço normal e bimomento, e dessa forma há um alívio nos esforços normais para os pilares.

As figuras a seguir mostram a malha de elementos finitos utilizada para este exemplo e a estrutura deformada de acordo com o carregamento aplicado. Estas figuras foram obtidas utilizando programa desenvolvido em SOUSA JR. (2001). A legenda da estrutura deformada indica os valores dos deslocamentos transversais nos elementos finitos de placa.

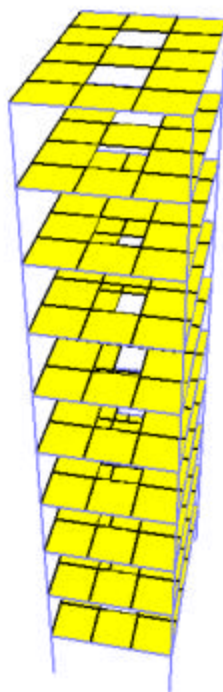


Figura 102 : Estrutura discretizada

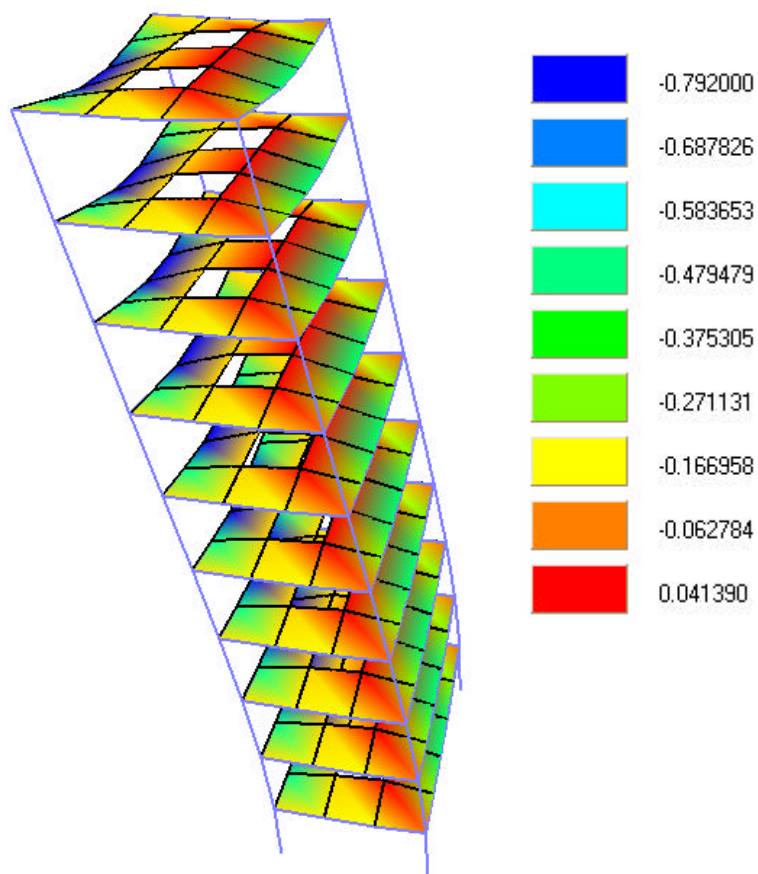


Figura 103: Estrutura deformada

7.4 Exemplo 03

Neste exemplo analisa-se a estrutura já calculada nos trabalhos de SILVA (1989) e MATIAS JR. (1997) para testarmos a validade do programa desenvolvido e utilizado neste trabalho.

O edifício possui todos os pavimentos iguais em planta conforme a figura 104, tendo os seguintes dados :

- Pé-direito : 400 cm
- Número de Andares : 15
- Espessura das lajes : 15 cm
- Módulo de Elasticidade : 2000 kN/cm²
- Coeficiente de Poisson : 0,25
- Pilares : 25 x 50 cm
- Vigas : 20 x 60 cm
- Espessura do núcleo : 15 cm

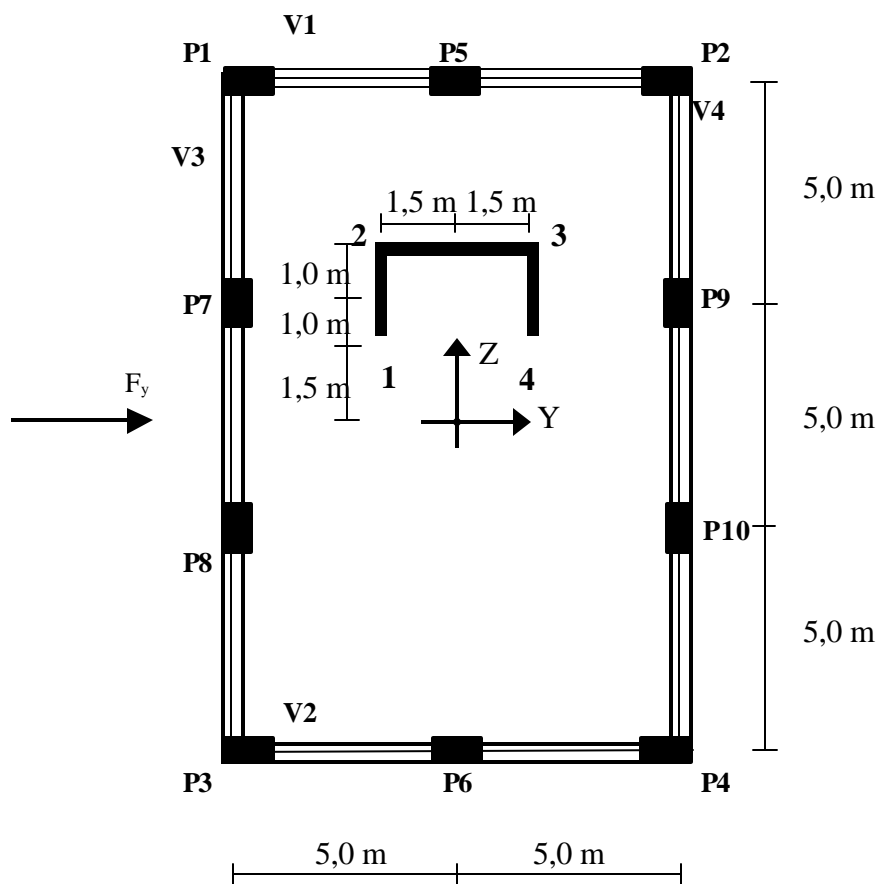


Figura 104 : Planta baixa do pavimento tipo

O carregamento aplicado consiste em forças horizontais e verticais.

No último pavimento, as forças aplicadas são:

- Carregamento uniformemente distribuído sobre as vigas de 10 kN/m .

- Forças verticais aplicadas nos pontos 1, 2, 3 e 4 do núcleo de 35 kN, 90 kN, 90 kN e 35 kN, respectivamente.
- Força horizontal aplicada na direção e sentido do eixo Y de $F_Y = 25,5$ kN.

Nos demais pavimentos, as forças aplicadas são:

- Carregamento uniformemente distribuído sobre as vigas de 20 kN/m.
- Forças verticais aplicadas nos pontos 1, 2, 3 e 4 do núcleo de 70 kN, 180 kN, 180 kN e 70 kN, respectivamente.
- Força horizontal aplicada na direção e sentido do eixo Y de $F_Y = 51,0$ kN.

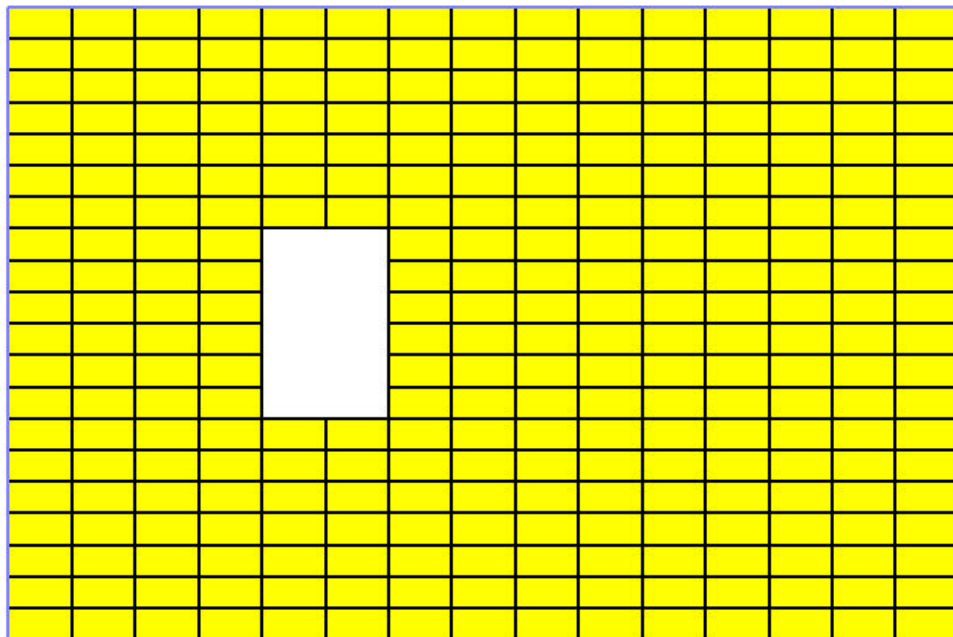


Figura 105 : Discretização adotada para a laje

O sistema de contraventamento adotado por MATIAS JR. (1997) é constituído por quatro pórticos planos, quatro pilares de flexão em torno de dois planos e um núcleo estrutural de seção transversal em forma de U. Já para a análise da estrutura neste trabalho, o modelo estrutural adotado foi de análise tridimensional da estrutura, onde a interação dos esforços e deslocamentos dá-se nos três planos X ,

Y e Z. Há portanto uma pequena diferença nos deslocamentos como pode ser visto na tabela a seguir.

Tabela 06 : Comparação dos deslocamentos ao nível da laje

Pavimento	MATIAS	MARTINS	MATIAS	MARTINS
	1ª ordem	1ª ordem	2ª ordem	2ª ordem
15	18,05	17,98	19,37	19,82
14	17,05	16,98	18,30	18,72
13	16,00	15,93	17,18	17,57
12	14,89	14,81	15,99	16,34
11	13,70	13,62	14,72	15,03
10	13,44	12,36	13,37	13,64
9	11,12	11,04	11,95	12,11
8	9,37	9,653	10,46	10,66
7	8,30	8,229	8,93	9,084
6	6,85	6,783	7,37	7,488
5	5,41	5,345	5,82	5,898
4	4,00	3,947	4,31	4,353
3	2,68	2,633	2,88	2,9
2	1,49	1,457	1,60	1,6
1	0,51	0,4983	0,55	0,5432

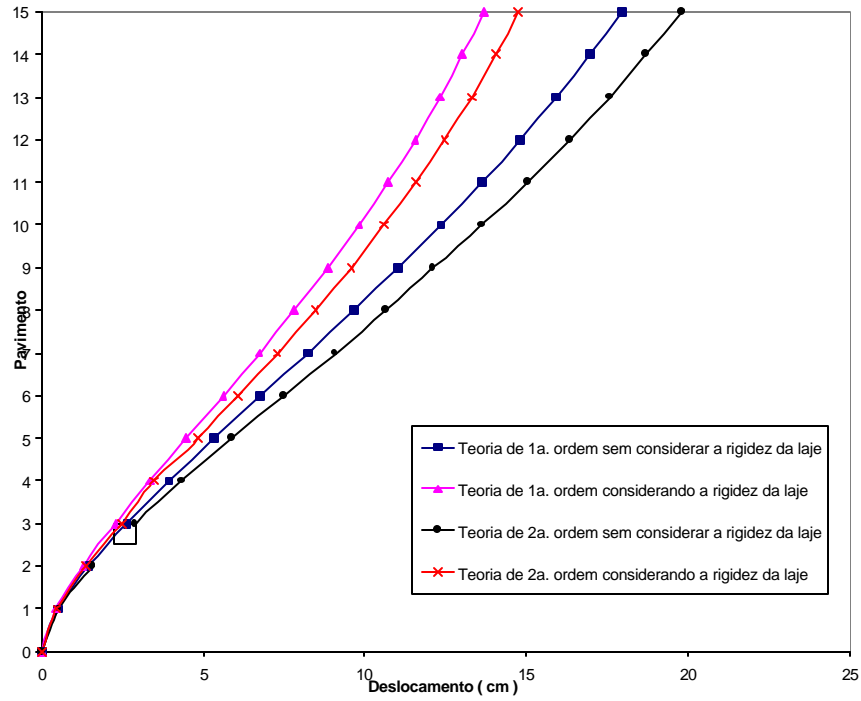


Figura 106 : Translação em Y ao nível de cada pavimento

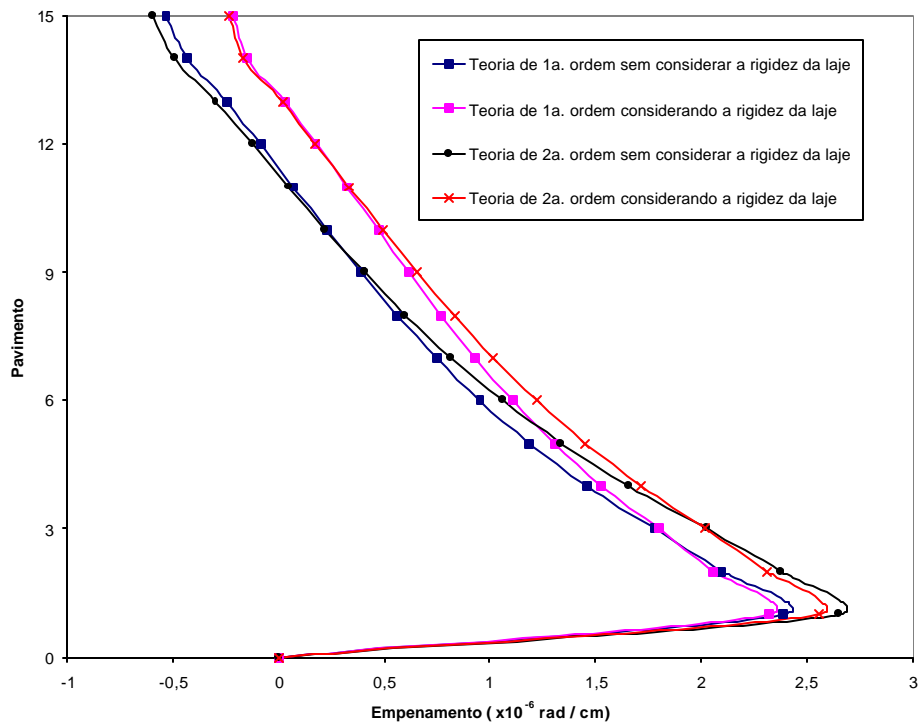


Figura 107 : Empenamento da seção do núcleo ao nível de cada pavimento

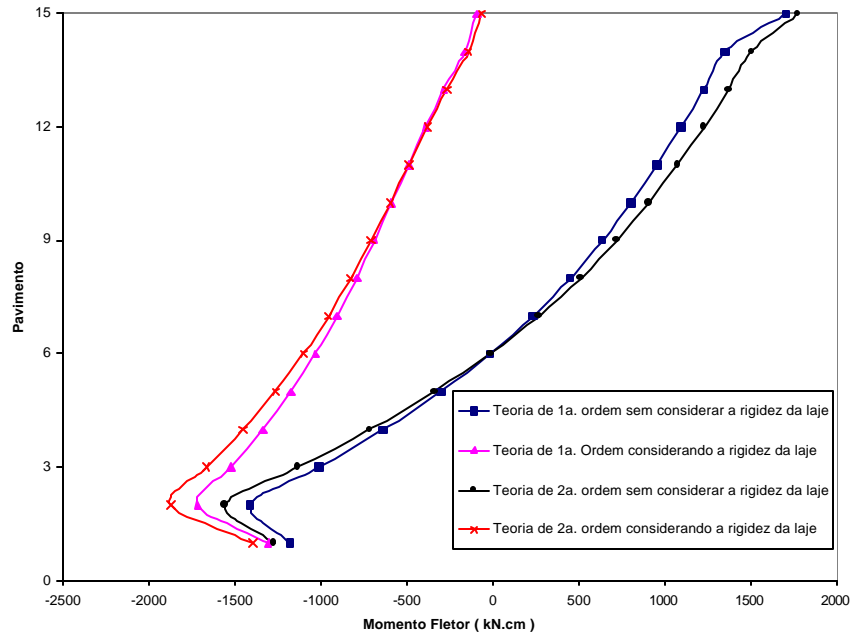


Figura 108 : Momento Fletor MY superior no Pilar P01

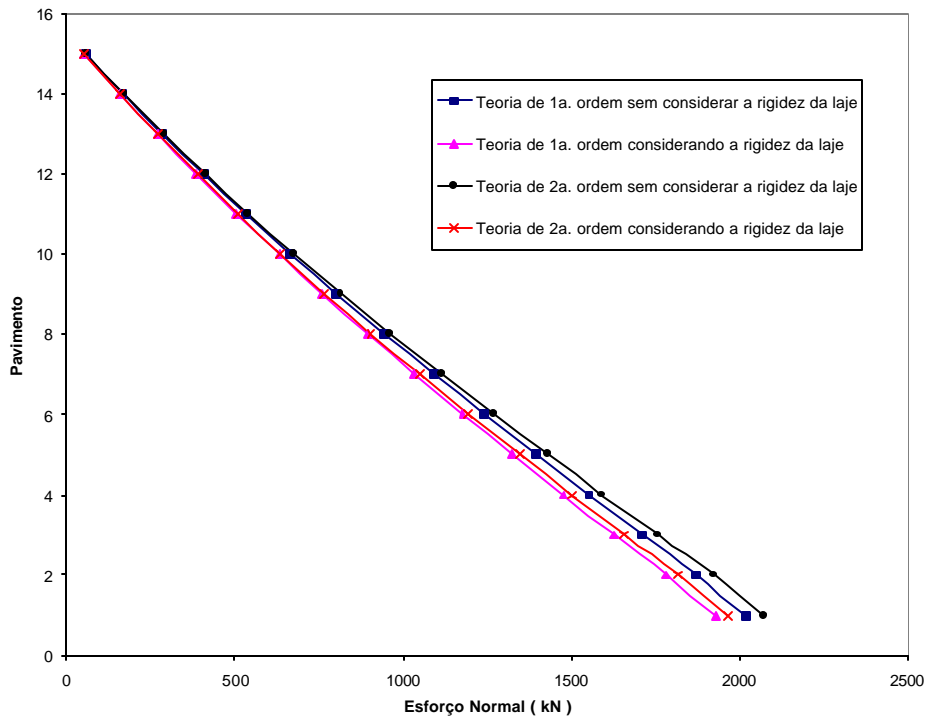


Figura 109 : Esforço normal no Pilar P10

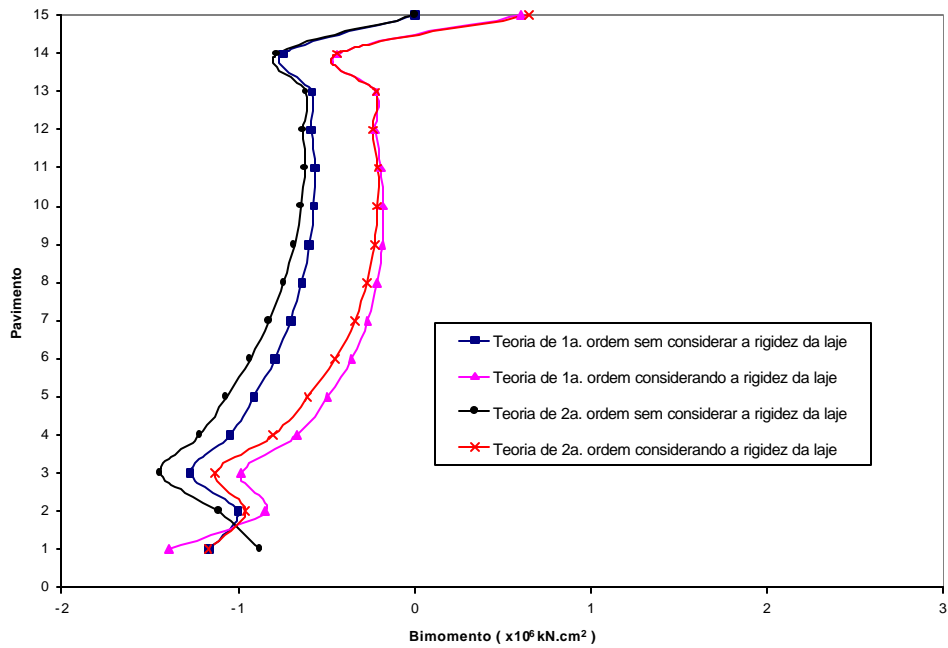


Figura 110 : Bimomento Superior no centro de torção do Núcleo

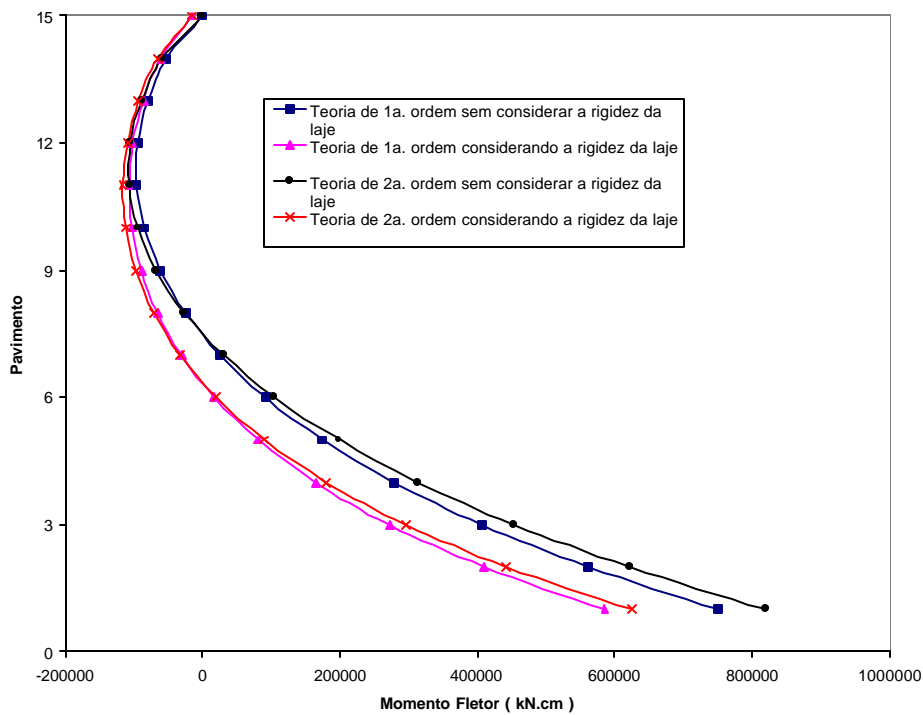


Figura 111 : Momento Fletor MY superior no centro de gravidade (CG) do núcleo

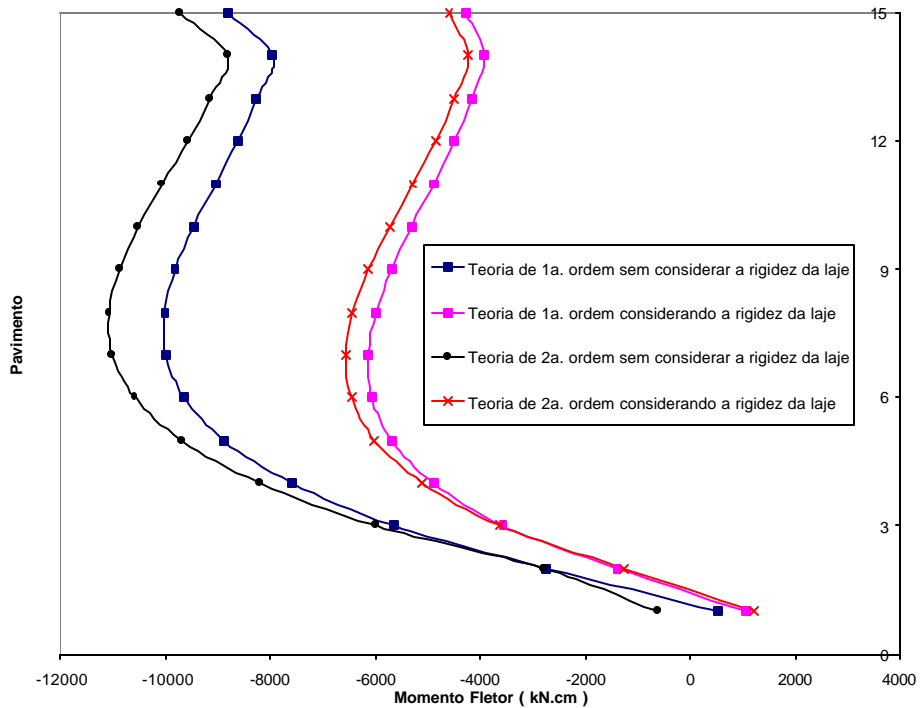


Figura 112 : Momento Fletor MZ Inferior no Pilar P02

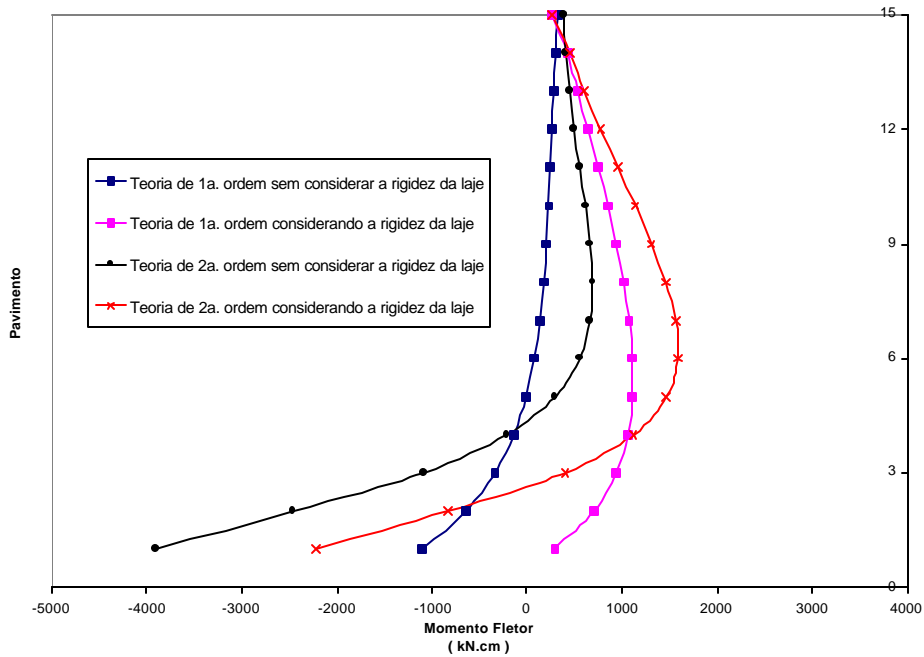


Figura 113 : Momento Fletor MZ inferior no centro de gravidade (CG) do núcleo

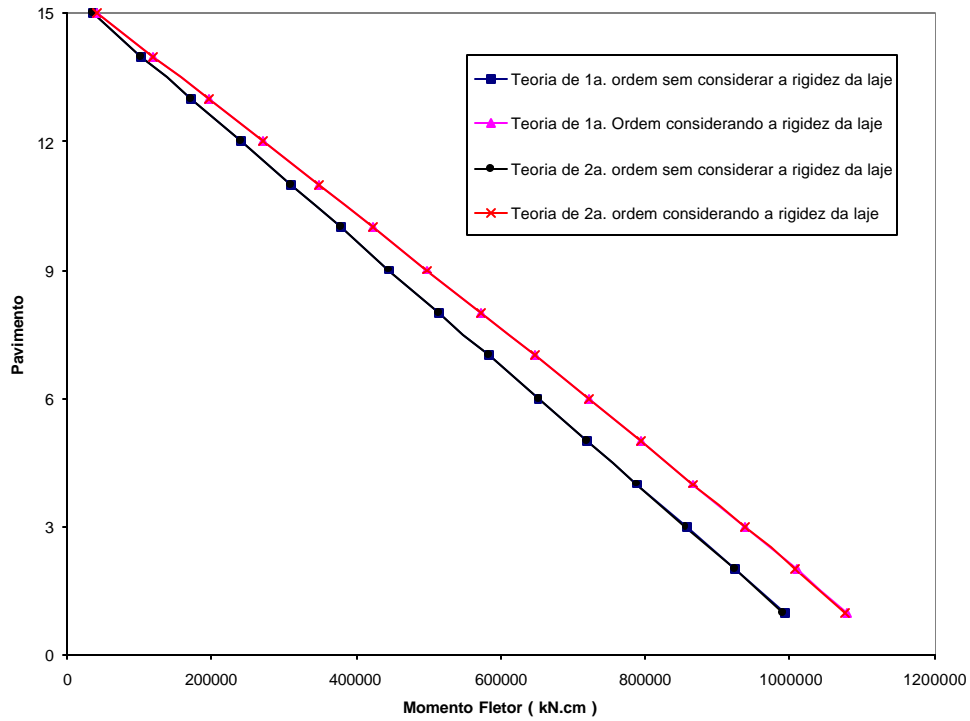


Figura 114 : Momento Fletor MZ inferior no centro de torção (CT) do núcleo

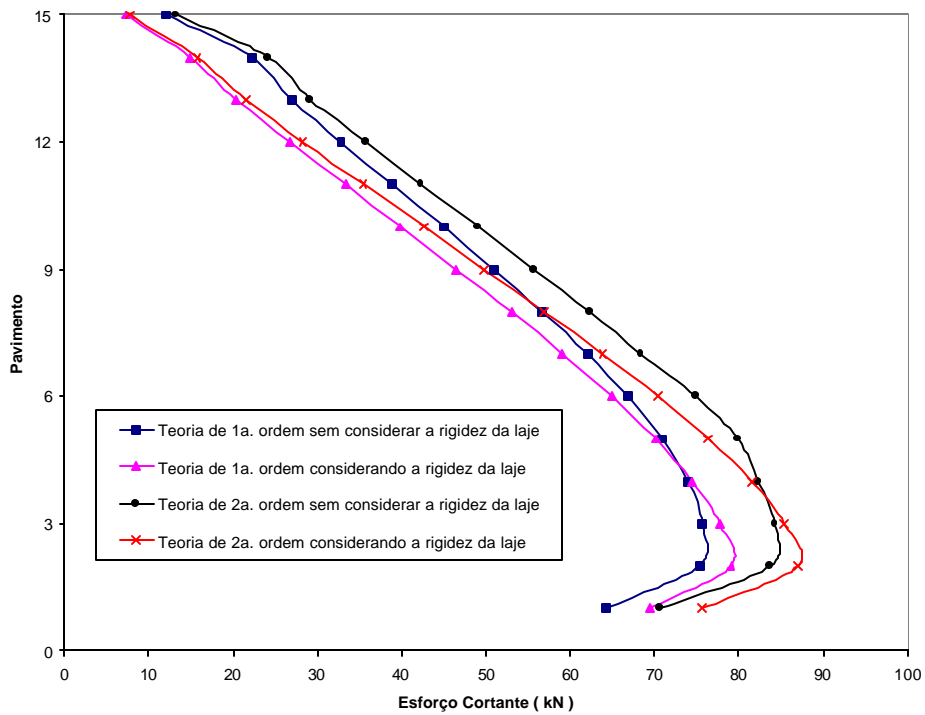


Figura 115 : Esforço Cortante à direita da viga V02

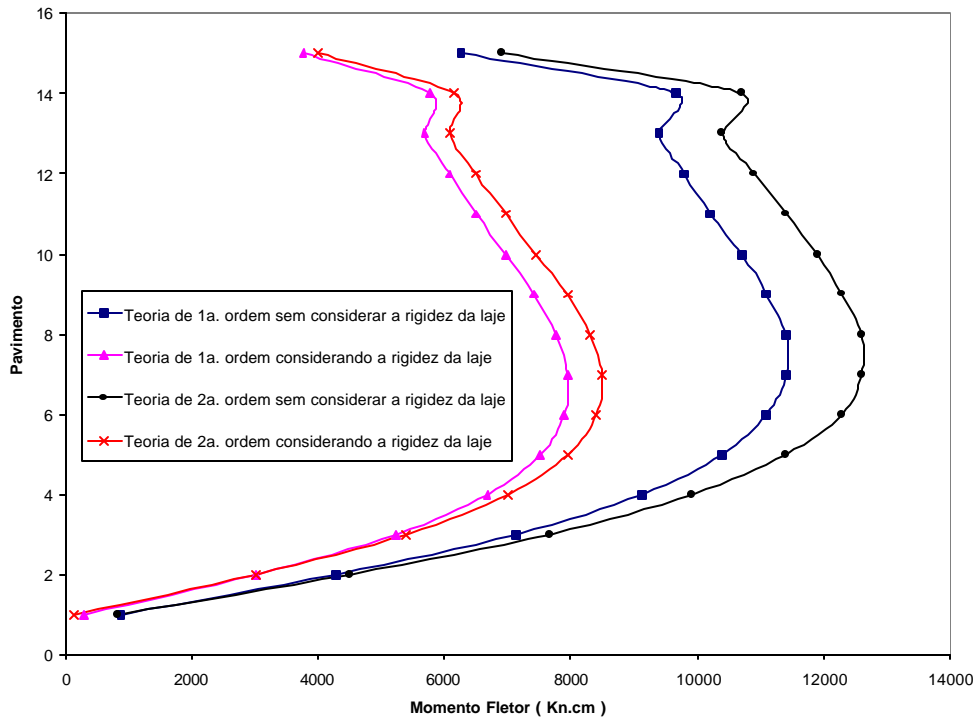


Figura 116 : Momento Fletor à esquerda da viga V01

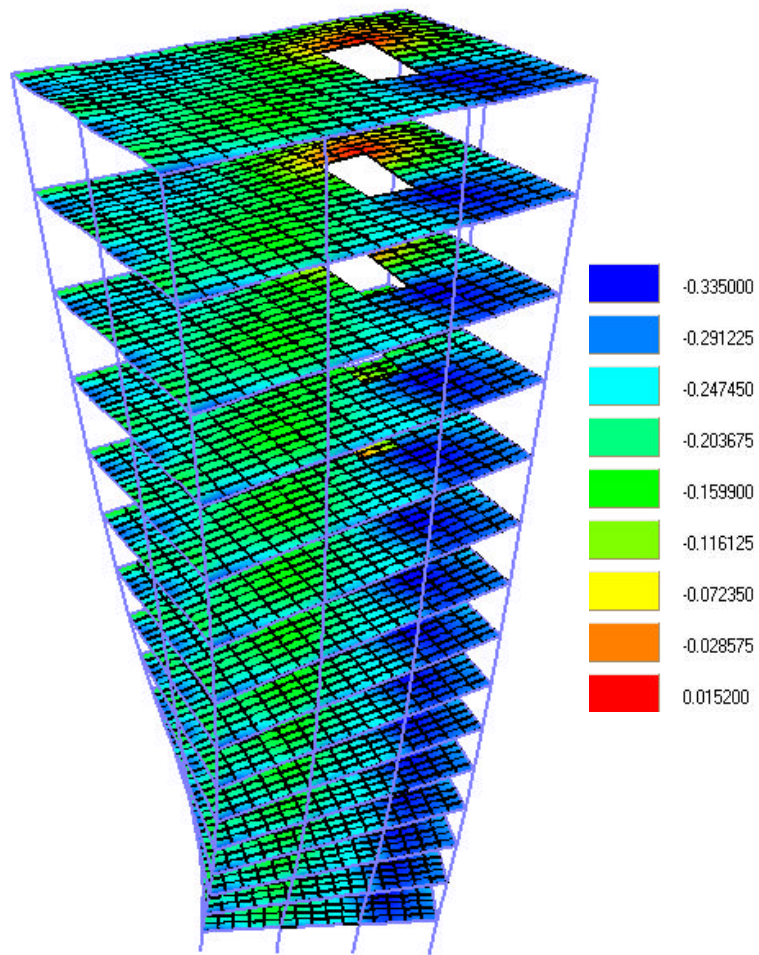


Figura 117: Estrutura deformada

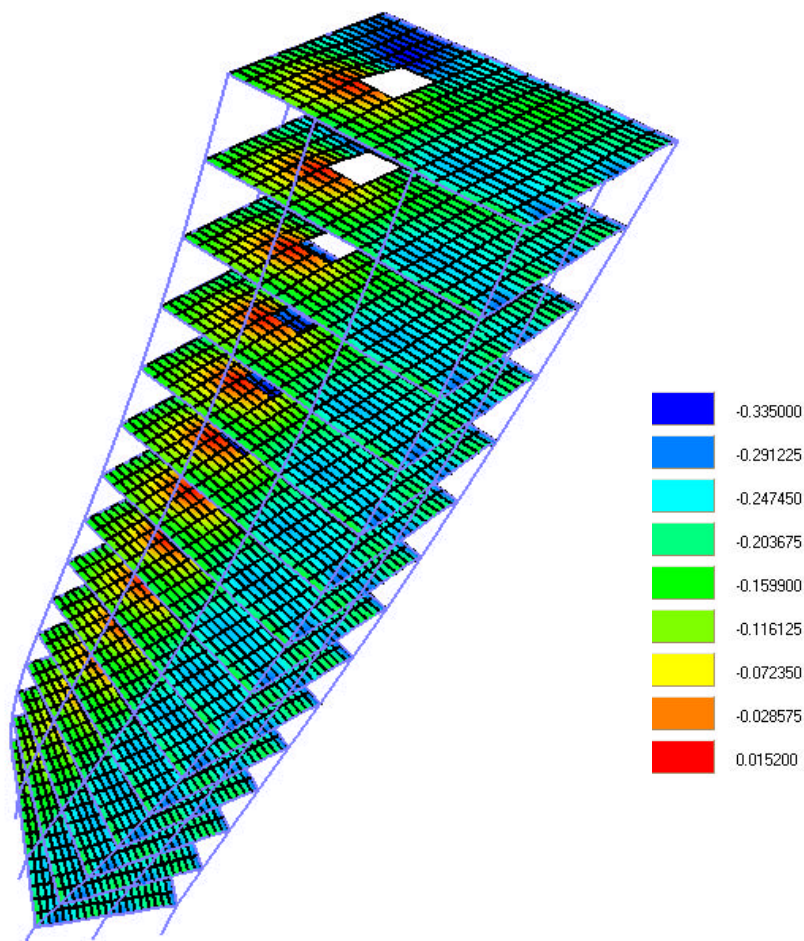


Figura 118: Estrutura deformada

Através dos gráficos mostrados neste exemplo, verifica-se de forma geral que com a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes ocorre uma redução dos deslocamentos e uma redistribuição dos esforços nos elementos estruturais.

Podemos concluir também que em geral, que os esforços em teoria de 2ª ordem considerando a rigidez transversal da laje, foram menores que os esforços em teoria de 1ª ordem sem a consideração da rigidez de laje. Portanto, também neste caso a consideração da rigidez transversal da laje, foi importante na contribuição da rigidez global da estrutura. As figuras 113 à 116 mostram esse comportamento da estrutura.

Através dos gráficos apresentados, notam-se diferenças significativas nos deslocamentos laterais quando comparam-se os modelos analisados. Percebe-se que os deslocamentos diminuíram quando se considerou a rigidez transversal da laje.

Verifica-se através da figura 106 que a influência da rigidez transversal da laje chegou a ser tão significativa, que em teoria de 2ª ordem considerando a rigidez transversal da laje, os deslocamentos foram menores do que no modelo em teoria de 1ª ordem sem a consideração da rigidez transversal á flexão das lajes.

Podemos observar também na figura 107 a redução do empenamento do núcleo quando da consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, tanto em teoria de 1ª ordem como de 2ª ordem.

7.5 Exemplo 04

Neste exemplo analisa-se a estrutura de um edifício com 20 pavimentos iguais em planta conforme a Figura 119, tendo os seguintes dados :

- Pé-direito : 300 cm
- Número de Andares : 20
- Espessura das lajes : 15 cm
- Módulo de Elasticidade : 2800 kN/cm²
- Carga uniformemente distribuída nas lajes : 10,0 kN/m²
- Carga distribuída nas vigas : 10 kN/m
- Coeficiente de Poisson :0,25
- Pilares : P01, P04, P17 e P20 : 40 x 40 cm
P02, P03, P18 e P19 : 20 x 60 cm
P06, P08, P10, P11, P13 e P15 : 20 x 60 cm
P05, P07, P09, P12 ,P14 e P16 : 20 x 80 cm
- Vigas : Periféricas : 20 x 60 cm e as demais : 20 x 40 cm
- Espessura do núcleo : 20 cm

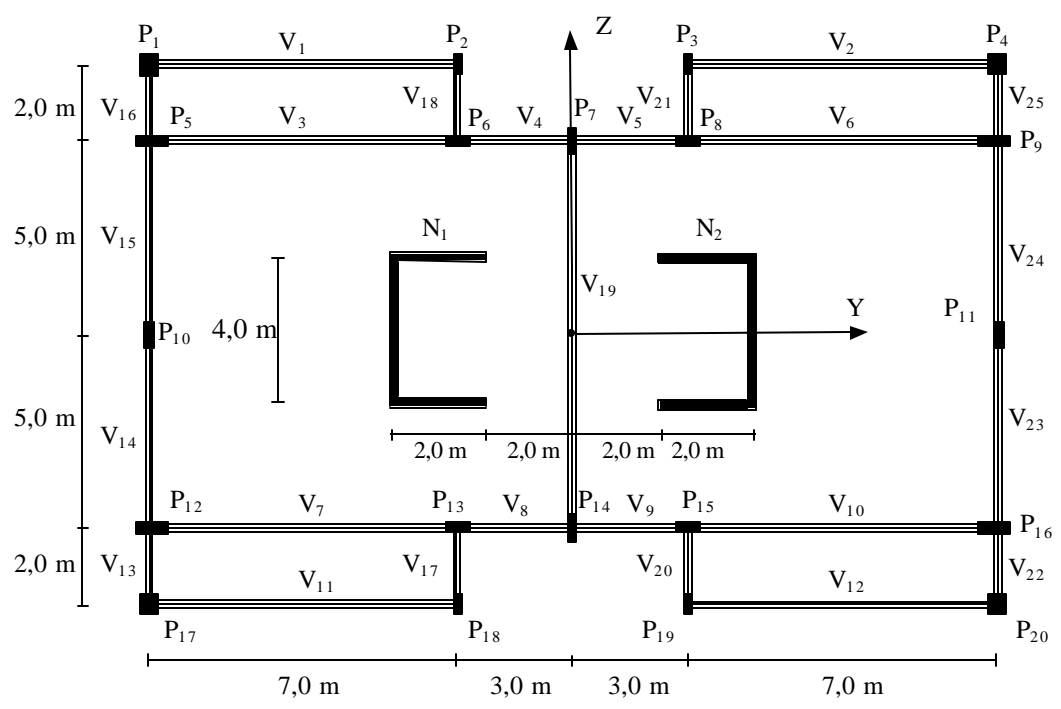


Figura 119 : Planta baixa do pavimento tipo

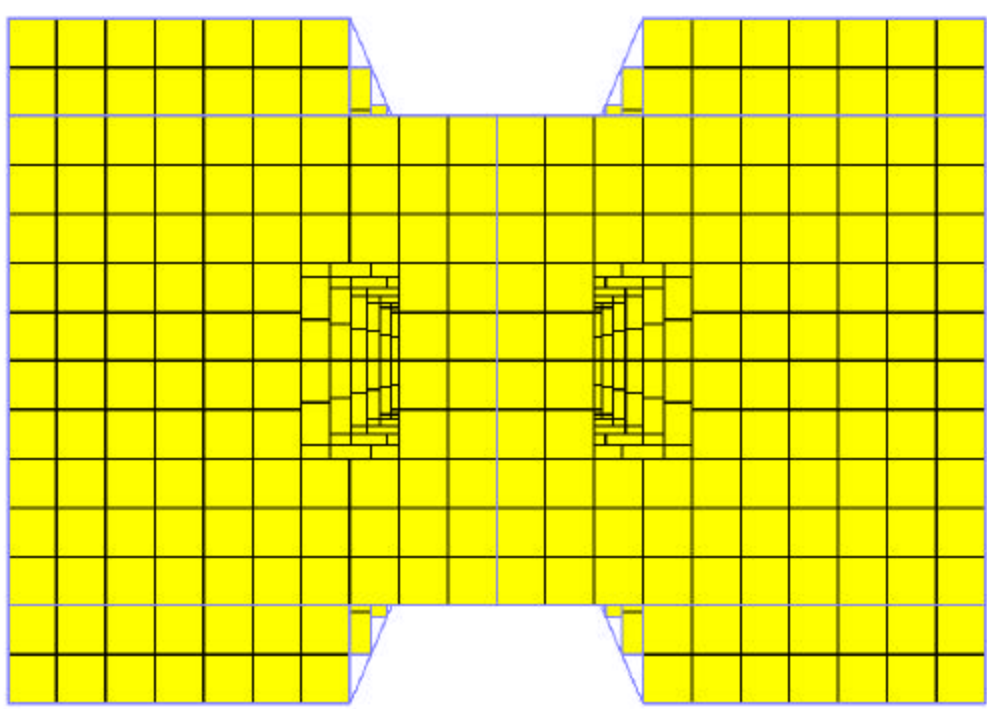


Figura 120 : Malha de elementos finitos adotada

As forças do vento foram determinadas respeitando-se a norma NBR 6123, e estão listadas na tabela abaixo.

Tabela 07 : Força do vento concentrada em cada pavimento

Pavimento	Força Fz (kN)	Pavimento	Força Fz (kN)
20	27.40	10	51.27
19	54.50	9	50.81
18	54.20	8	50.32
17	53.88	7	49.80
16	53.56	6	49.24
15	53.22	5	48.64
14	52.87	4	47.97
13	52.50	3	47.24
12	52.11	2	46.44
11	51.70	1	46.10

A seguir são apresentados , em gráficos, alguns dos resultados obtidos com a análise desta estrutura.

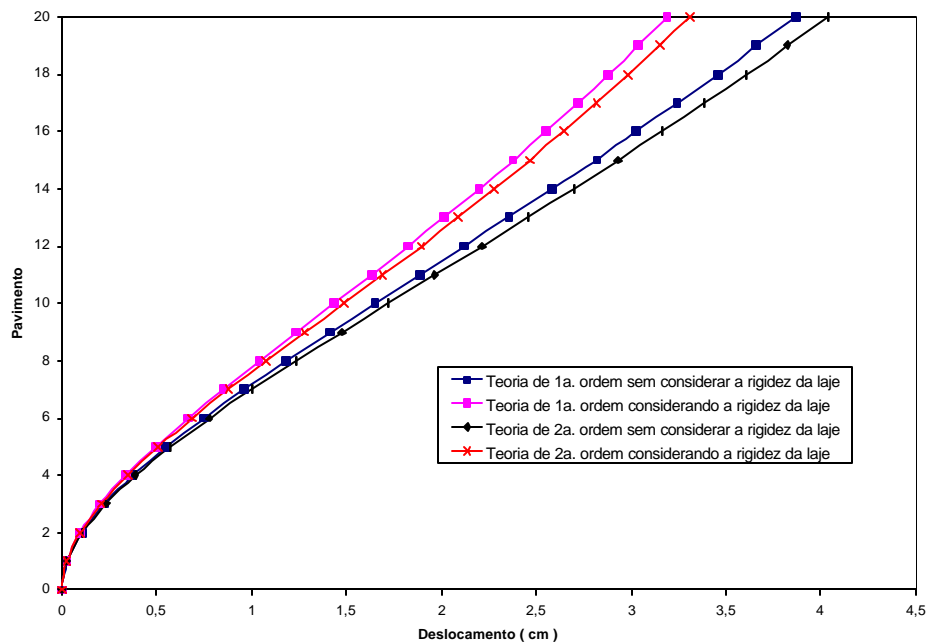


Figura 121 : Translação em Z para cada pavimento

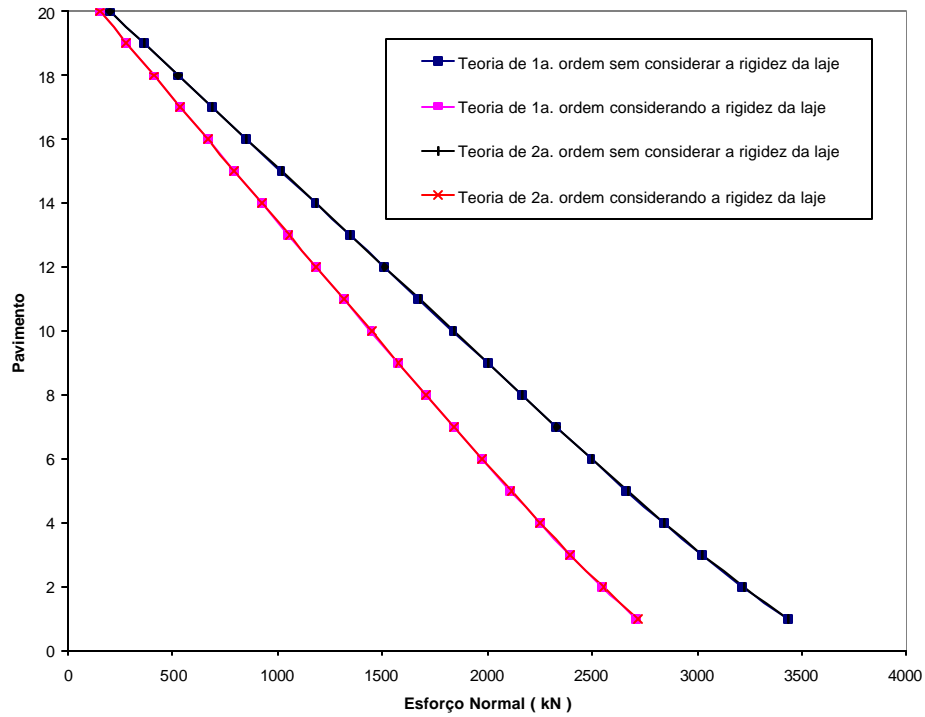


Figura 122 : Esforço Normal no Pilar P05

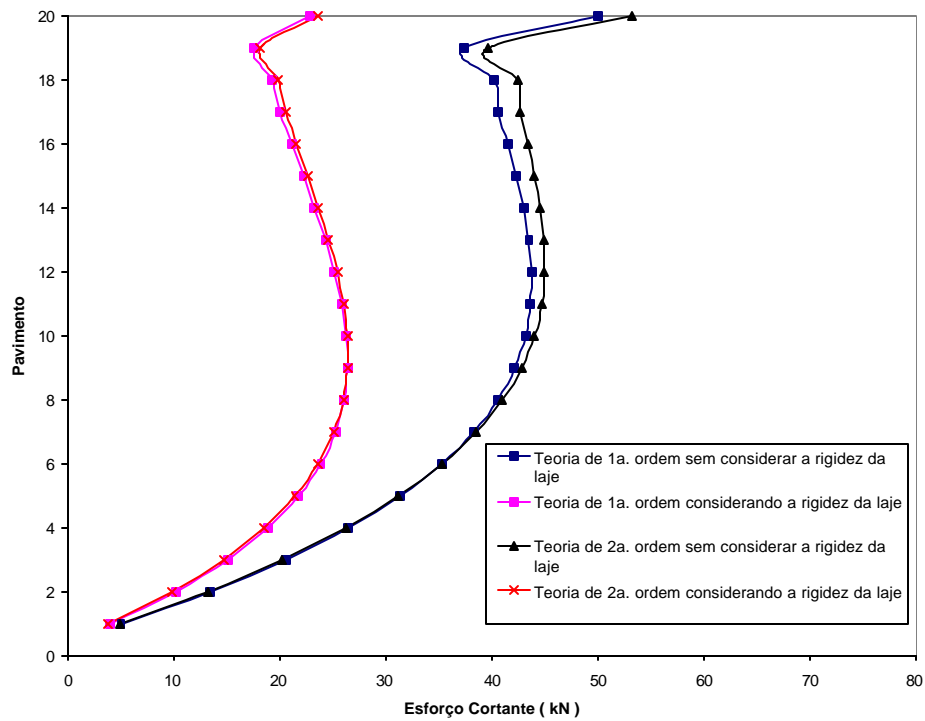


Figura 123 : Esforço Cortante Superior no Pilar P10

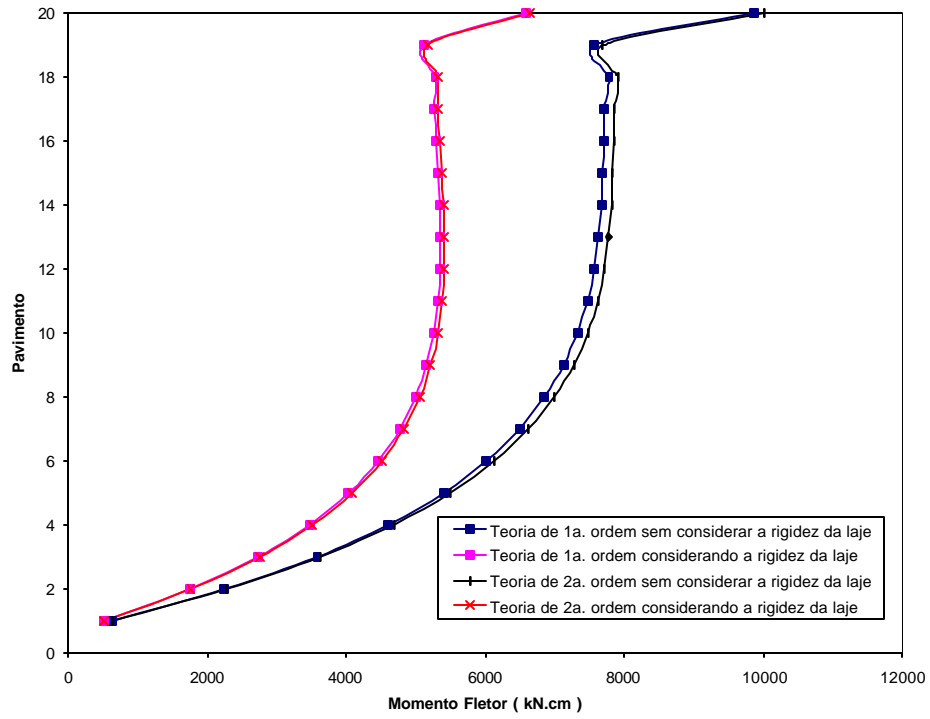


Figura 124 : Momento Fletor MY Superior no Pilar P01

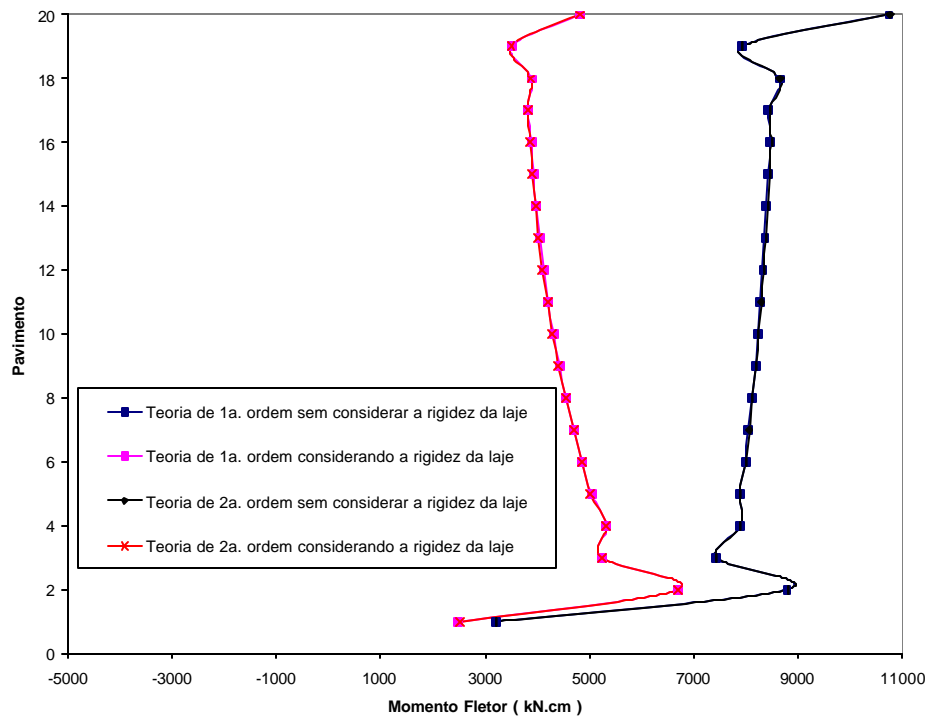


Figura 125 : Momento Fletor MZ Inferior no Pilar P12

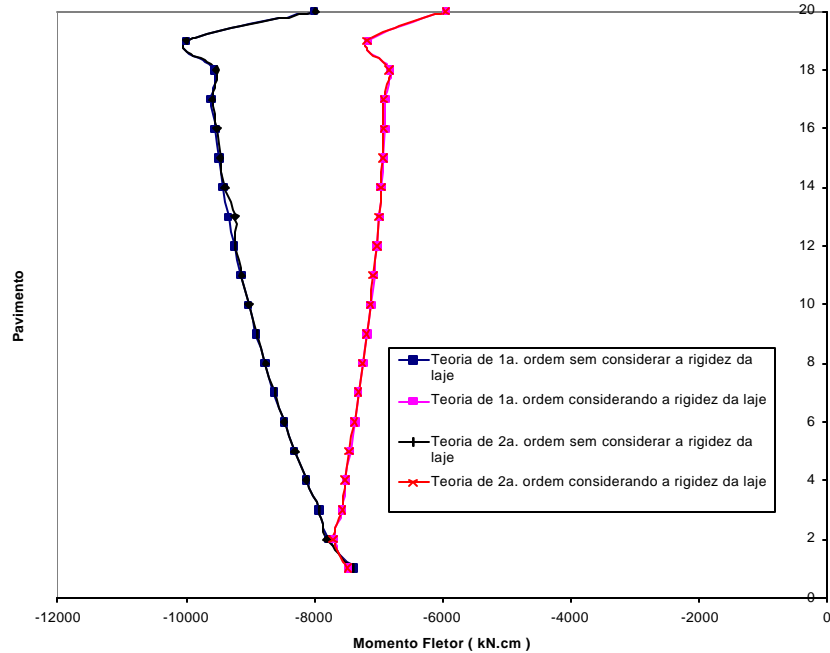


Figura 126 : Momento Fletor à esquerda da Viga V01

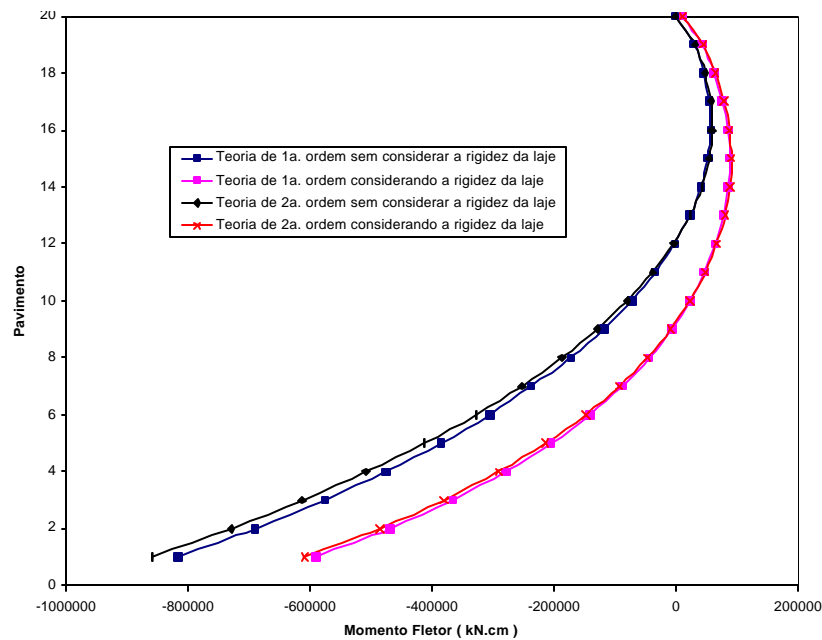


Figura 127 : Momento Fletor MY Superior no Núcleo N01

Novamente podemos observar que com a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes há uma significativa redução dos deslocamentos laterais e uma redistribuição nos esforços nos elementos estruturais, tanto em análise em teoria de primeira ordem como em teoria de segunda ordem.

Através da figura 121 podemos observar uma significativa diminuição dos deslocamentos laterais quando se considera a rigidez transversal à flexão das lajes. Esta diminuição foi da ordem de 21 % para a análise da estrutura em teoria de 1ª ordem e de 23 % para análise em teoria de 2ª ordem.

Neste exemplo formado por dois núcleos simétricos, deve-se salientar que quando não se considera a rigidez da laje, os esforços normais no núcleo, esforço normal e bimomento, são nulos. Porém quando se considera a rigidez transversal à flexão há o impedimento parcial do empenamento do núcleo e portanto aparecem os esforços normais e os bimotoes, que são de módulos iguais, porém sinais opostos. Este comportamento da estrutura quando da consideração da rigidez transversal à flexão da laje já foi comentado no exemplo 02.

A figura 122 mostra uma diminuição significativa no esforço normal dos pilares, quando se considera a rigidez transversal à flexão das lajes. Isto ocorre pelo fato de que ao se considerar tal rigidez para a laje, aparecem esforços normais nos núcleos, aliviando dessa forma esses esforços nos pilares, para assim manter a estrutura em equilíbrio de esforços.

Na figura 125, podemos perceber claramente uma diminuição no momento fletor do pilar 12 quando se considera a rigidez da laje.

Os esforços de 2ª ordem não foram significativos neste exemplo, como veremos mais adiante através do cálculo dos parâmetros de estabilidade para este exemplo. Pois de acordo com os parâmetros de estabilidade α e $\tilde{\alpha}_z$ a estrutura realmente não possui problemas de estabilidade devido aos esforços de 2ª ordem.

Utilizando-se novamente o programa de SOUSA JR. (2001), apenas para gerar as malhas de elementos finitos, podemos observar a malha de elementos deste exemplo e a estrutura deformada com os deslocamentos calculados considerando-se a rigidez transversal à flexão das lajes e em teoria de 2ª ordem para os núcleos e pilares. A legenda da estrutura deformada indica os valores dos deslocamentos transversais na laje.

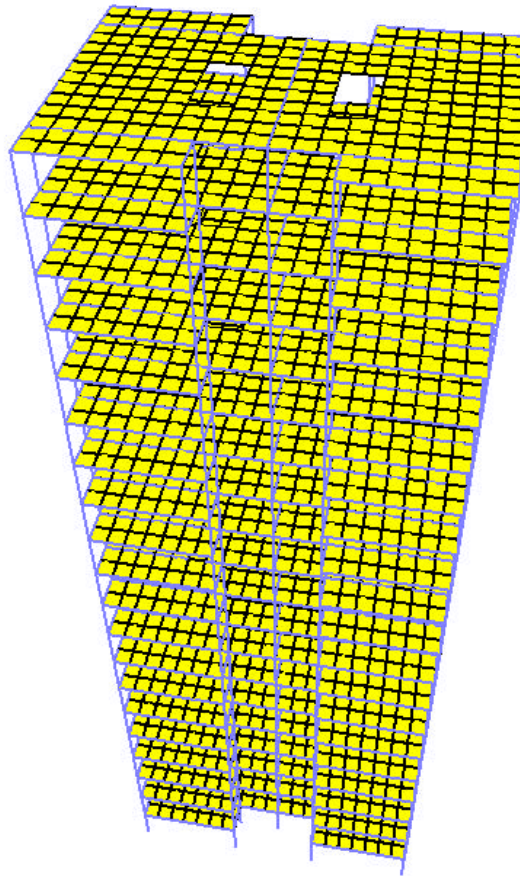


Figura 128 : Estrutura discretizada

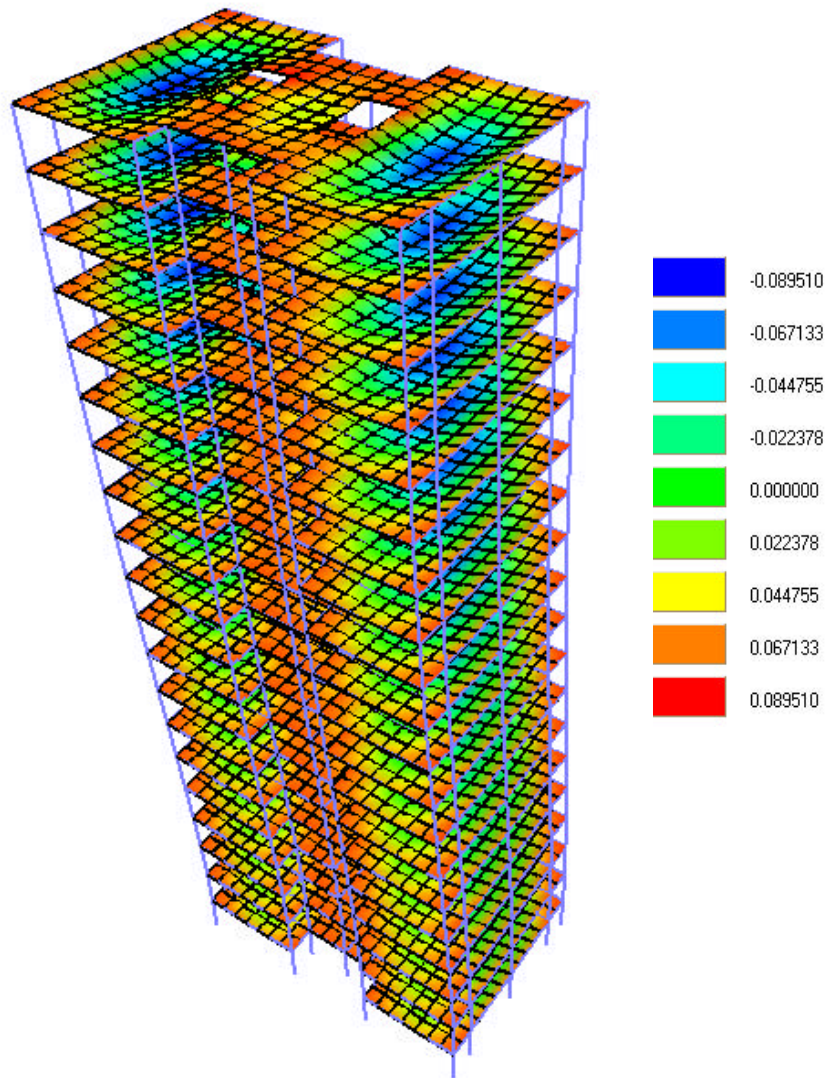


Figura 129 : Estrutura deformada

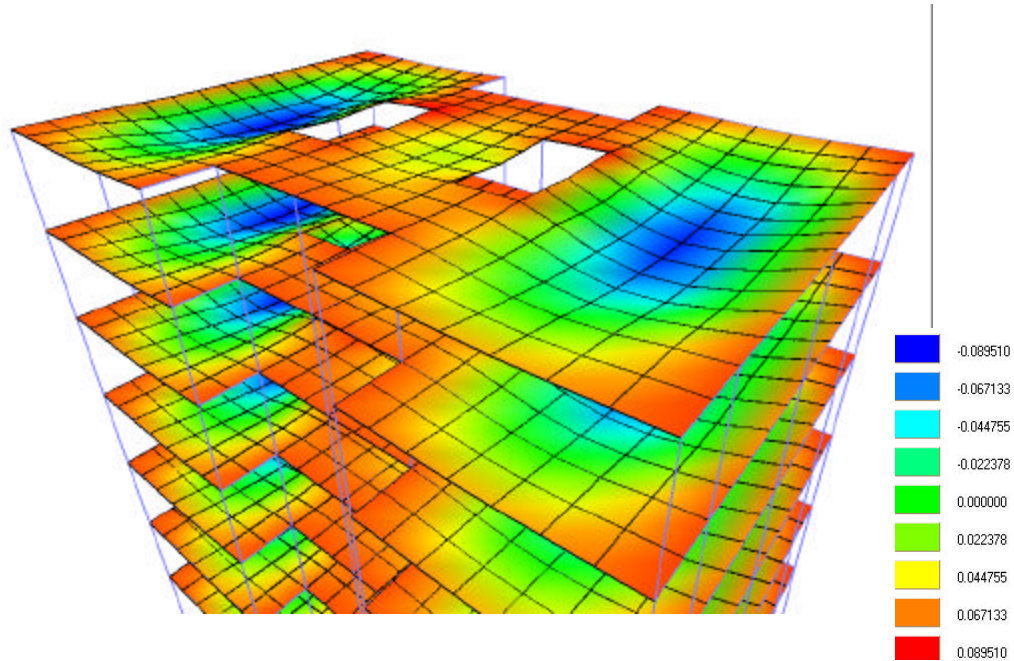


Figura 130 : Estrutura deformada

7.6 Exemplo 05

Neste exemplo analisa-se a estrutura analisada um edifício com 25 pavimentos iguais em planta conforme a figura 131, tendo os seguintes dados :

- Pé-direito : 300 cm
- Espessura das lajes : 15 cm
- Módulo de Elasticidade : 3800 kN/cm^2
- Coeficiente de Poisson : 0,25
- Carga uniformemente distribuída nas lajes : $10,0 \text{ kN/m}^2$
- Carga distribuída nas vigas : 15 kN/m
- Pilares : 20 x 120 cm
- Vigas : Periféricas : 20 x 60 cm e as demais : 20 x 40 cm
- Espessura do núcleo : 20 cm

As forças do vento foram determinadas respeitando-se a norma NBR 6123

Tabela 08 : Força do vento concentrada em cada pavimento

Pavimento	Força Fz (kN)	Pavimento	Força Fz (kN)
25	31.22	12	56.76
24	62.11	11	56.12
23	61.77	10	55.43
22	61.41	9	54.68
21	61.05	8	53.85
20	60.66	7	52.92
19	60.25	6	51.87
18	59.83	5	50.65
17	59.39	4	49.21
16	58.92	3	47.40
15	58.43	2	44.96
14	57.91	1	41.09
13	57.35	-	-

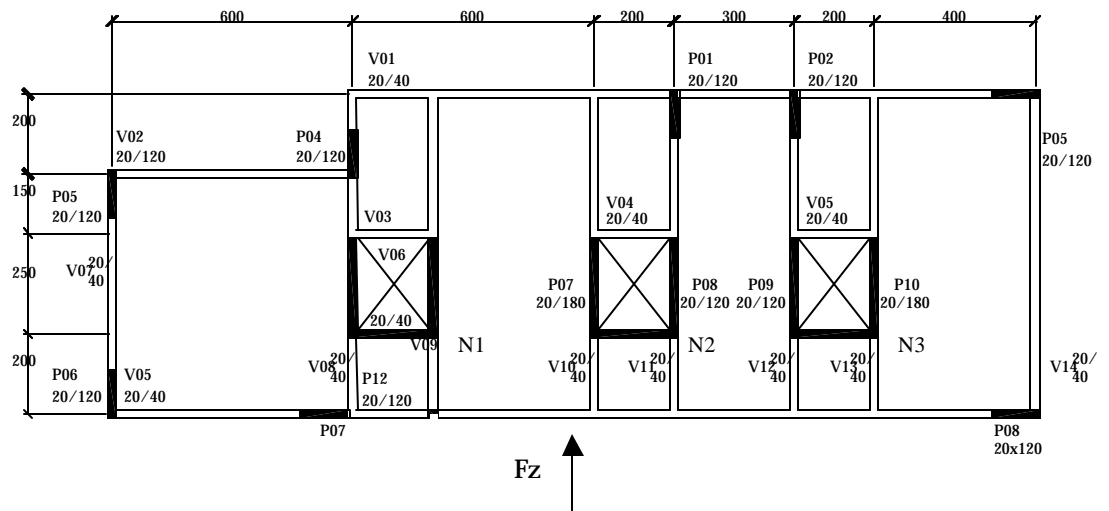


Figura 131 : Planta baixa do pavimento tipo

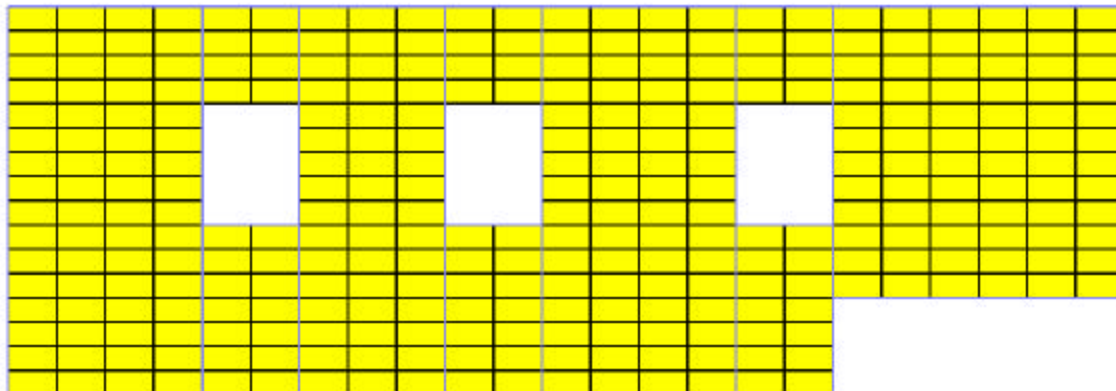


Figura 132 : Malha de elementos finitos adotada

A seguir são apresentados , em gráficos, alguns dos resultados obtidos com a análise desta estrutura.

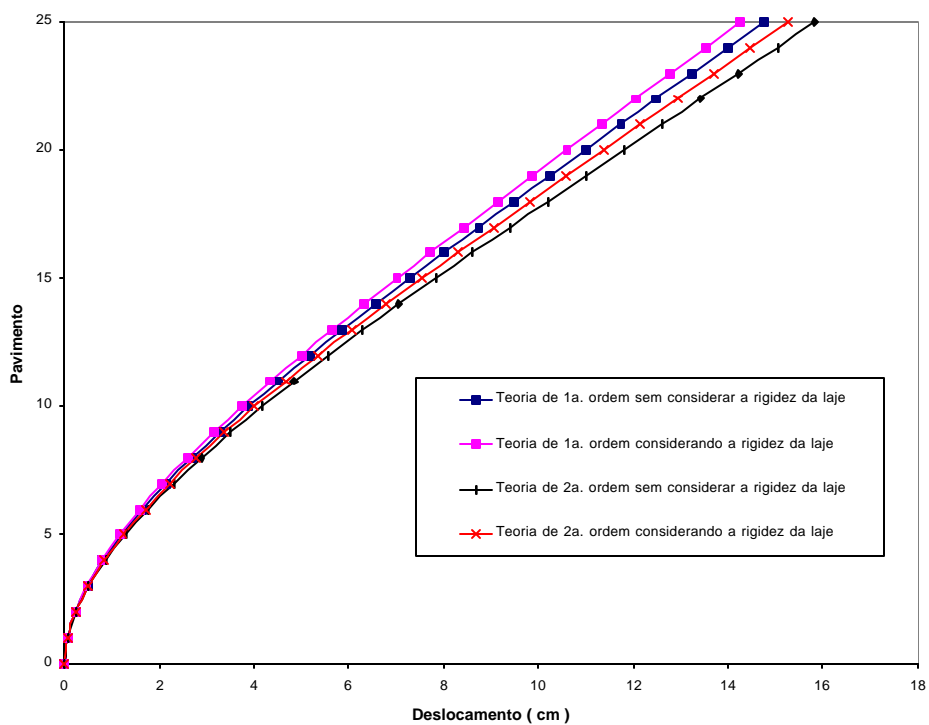


Figura 133 : Translação em Z para cada pavimento

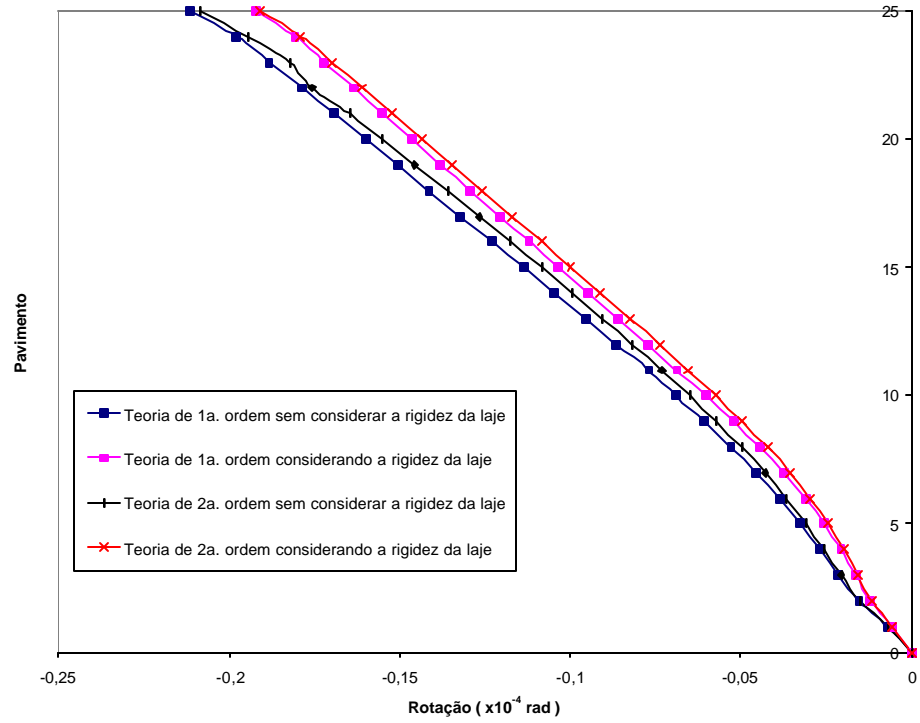


Figura 134 : Rotação em X para cada pavimento

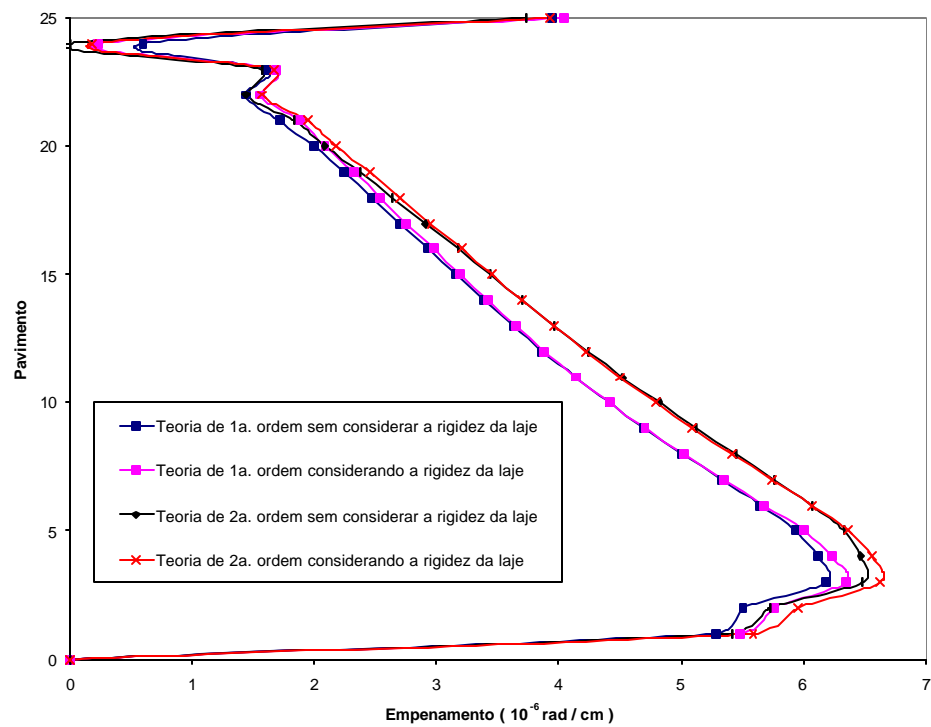


Figura 135 : Empenamento no Núcleo N01 para cada pavimento

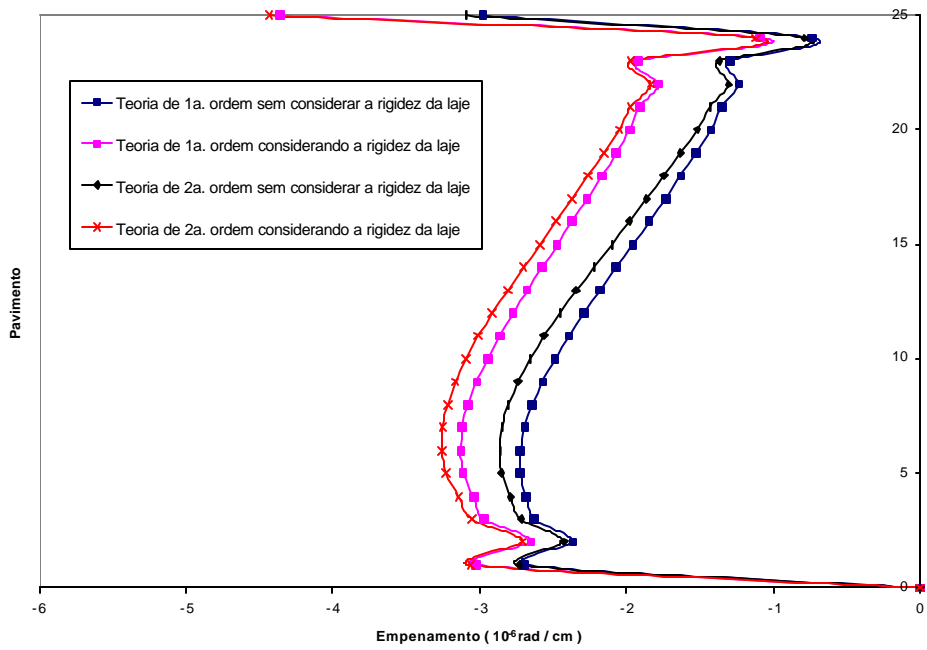


Figura 136 : Empenamento no Núcleo 02 para cada pavimento

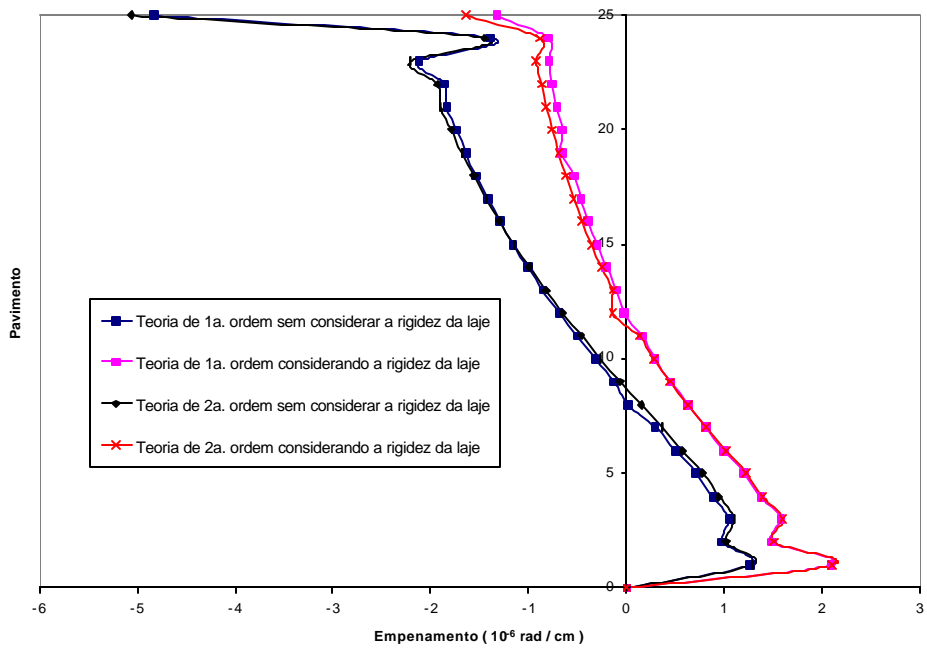


Figura 137 : Empenamento no Núcleo 03 para cada pavimento

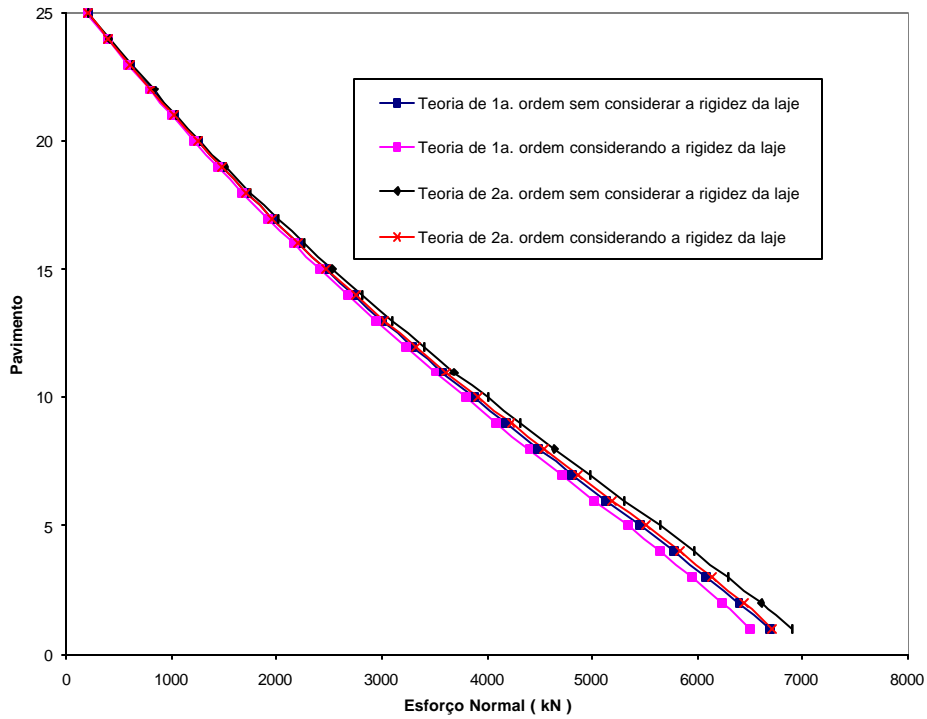


Figura 138 : Esforço Normal no Pilar P01

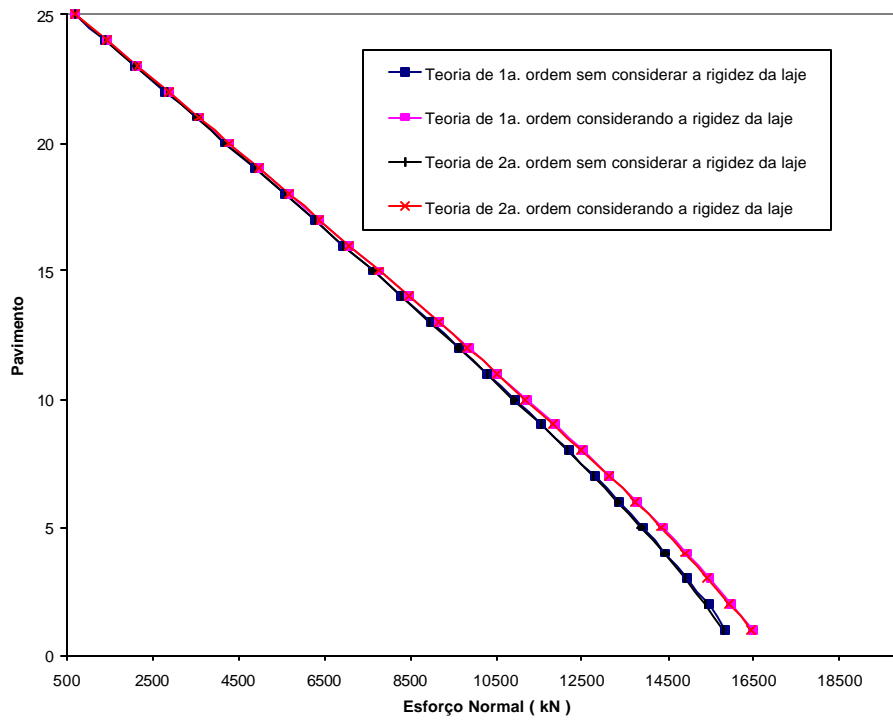


Figura 139 : Esforço Normal no centro de torção do Núcleo N01

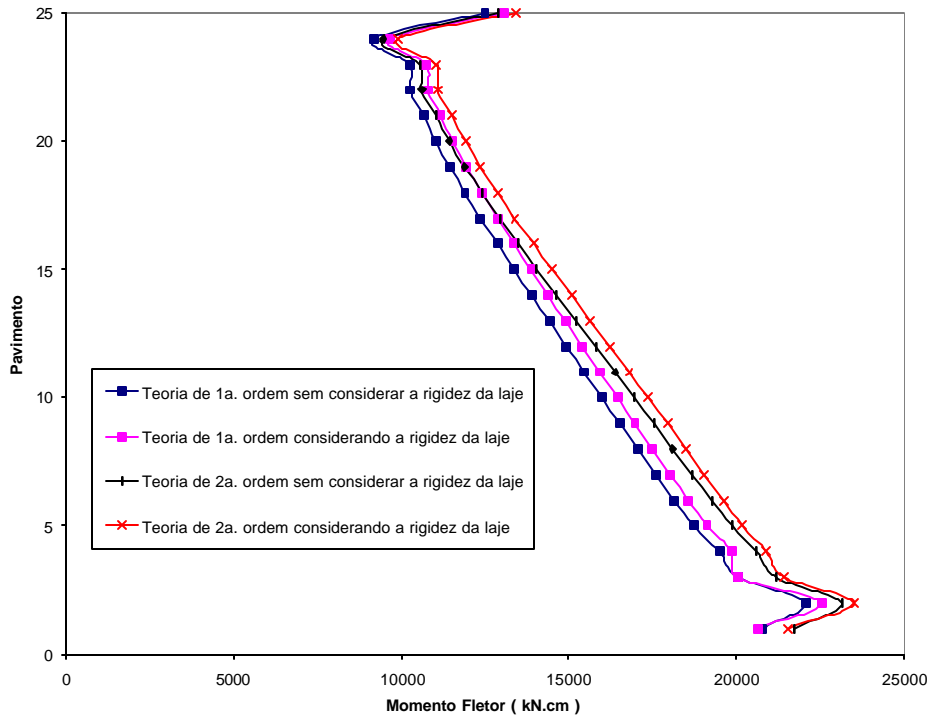


Figura 140 : Momento Fletor MY Inferior no Pilar P04

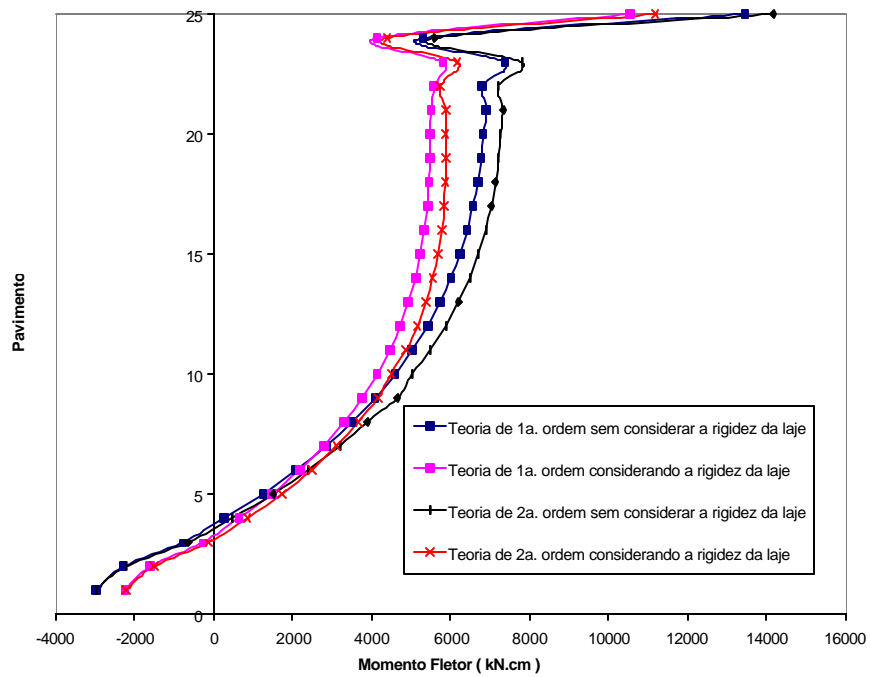


Figura 141 : Momento Fletor MZ Superior no Pilar P08

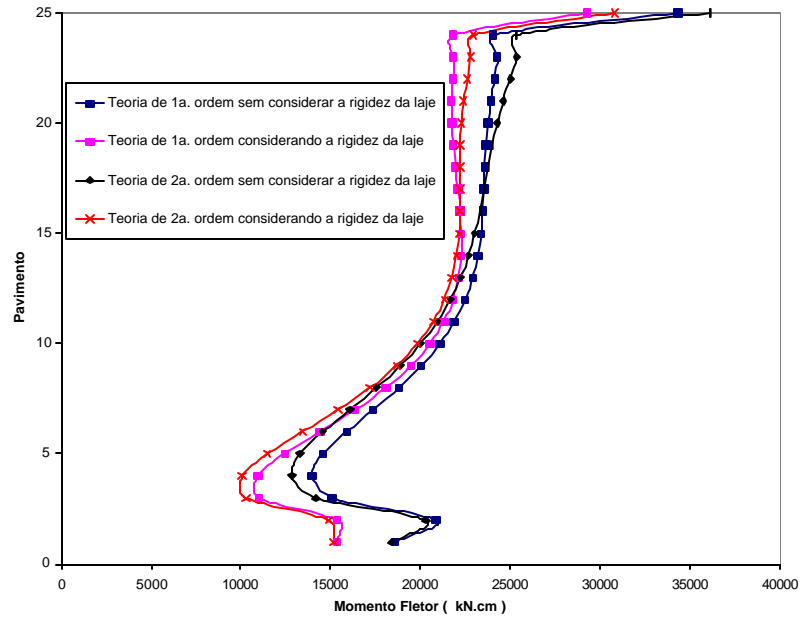


Figura 142 : Momento Torçor M_X Inferior no Pilar P05

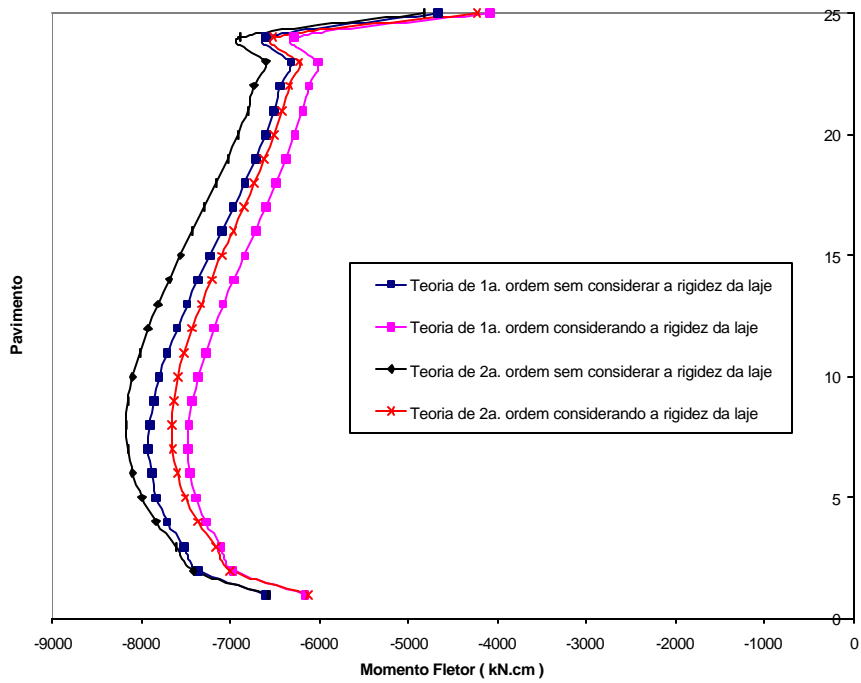


Figura 143 : Momento Fletor à esquerda da Viga V02

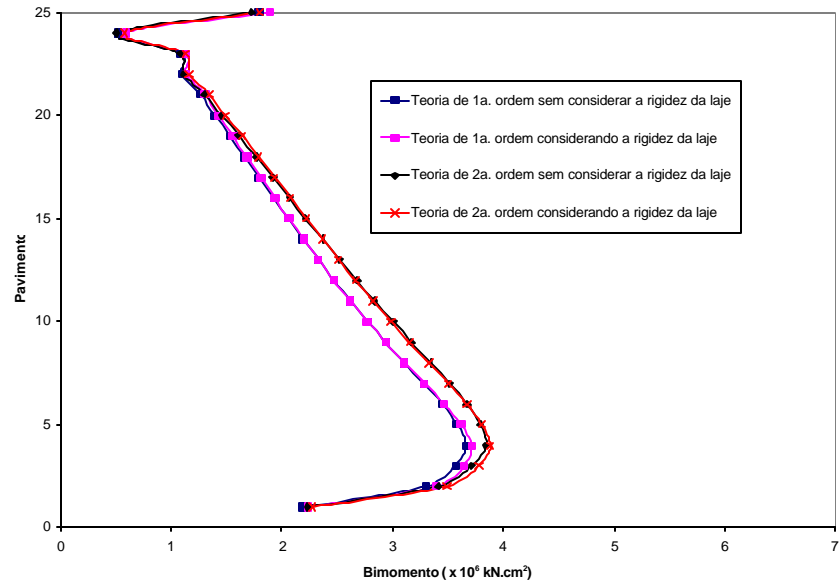


Figura 144 :Bimomento Superior no CT do Núcleo N01

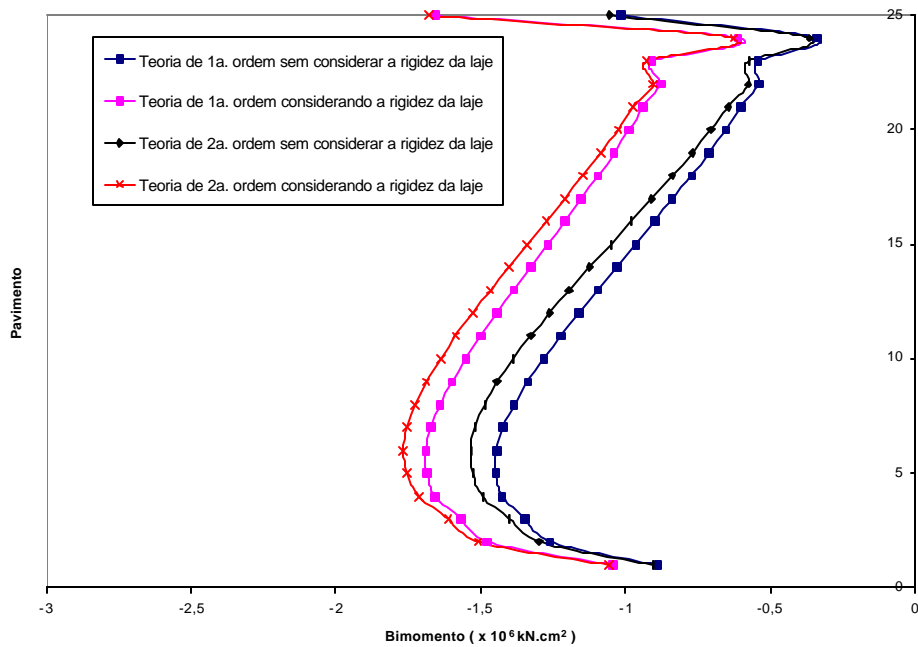


Figura 145 :Bimomento Superior no CT do Núcleo N02

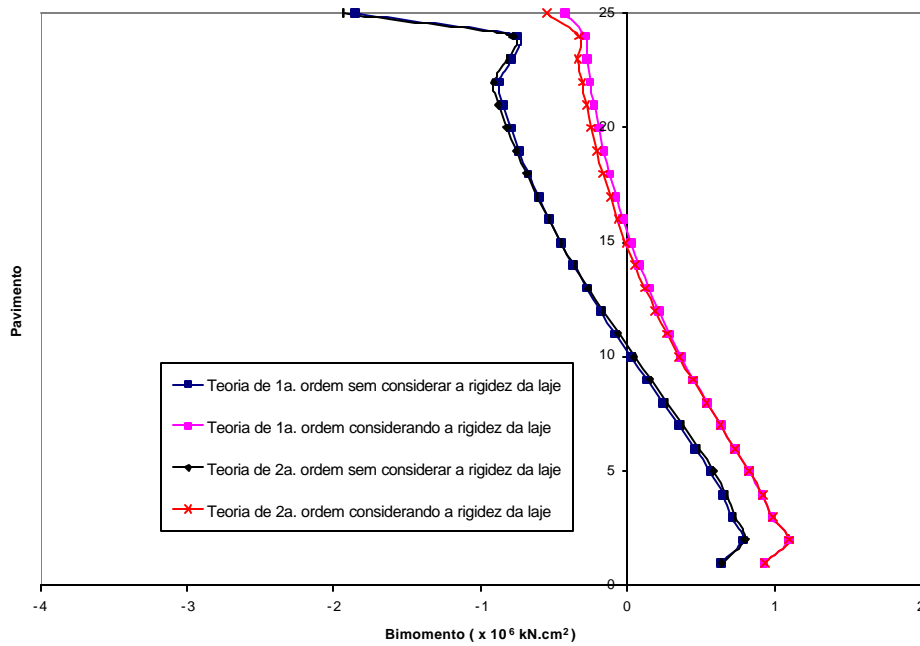


Figura 146 :Bimomento Superior no CT do Núcleo 03

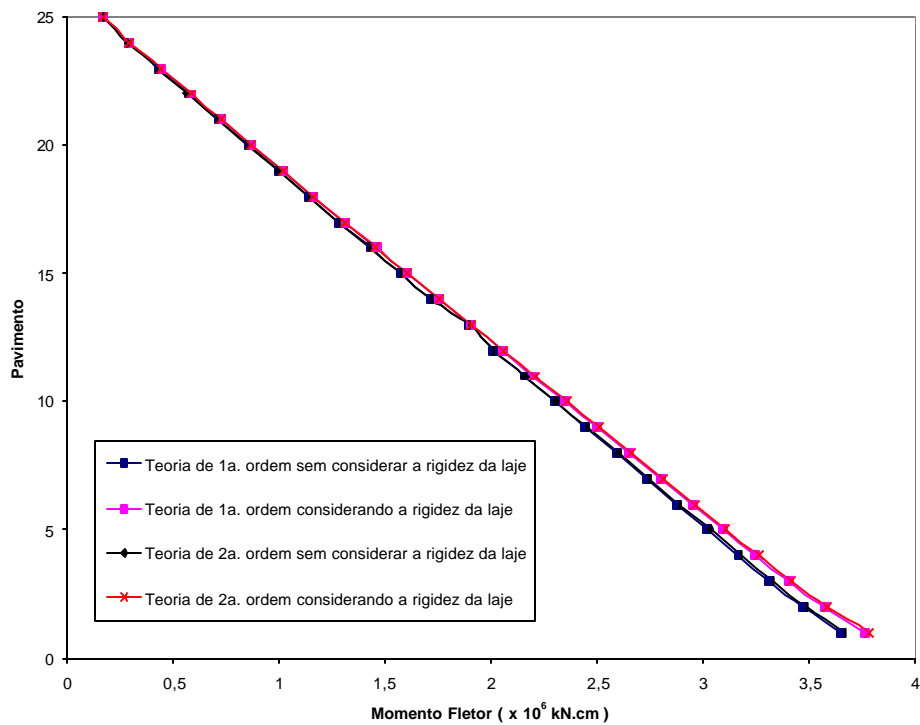


Figura 147 : Momento Fletor MZ Superior no CT do Núcleo N01

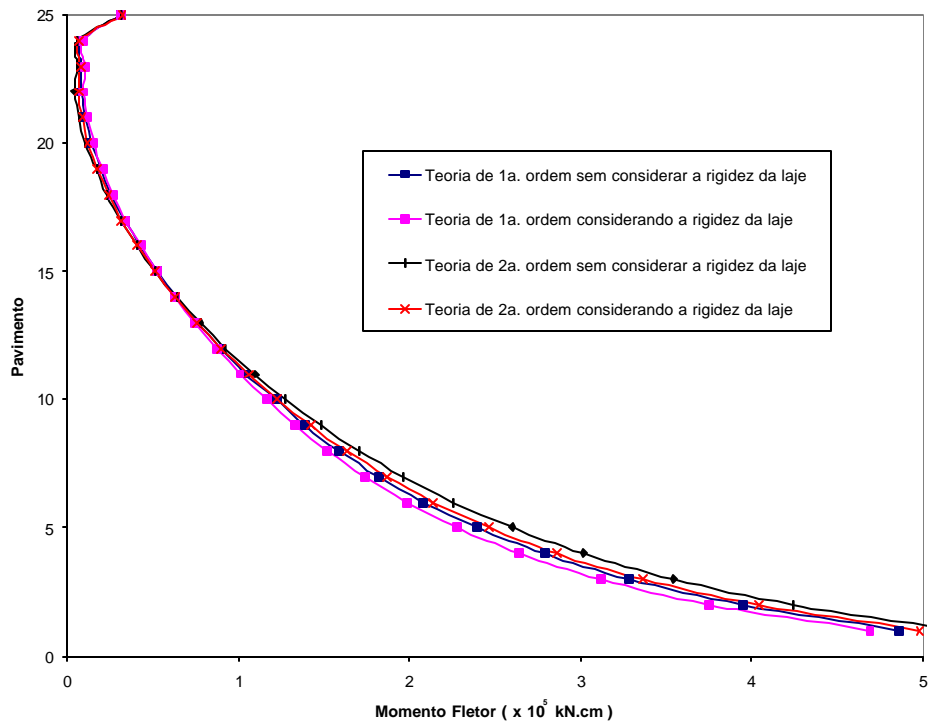


Figura 148 : Momento Fletores MZ Superior no CG do Núcleo N01

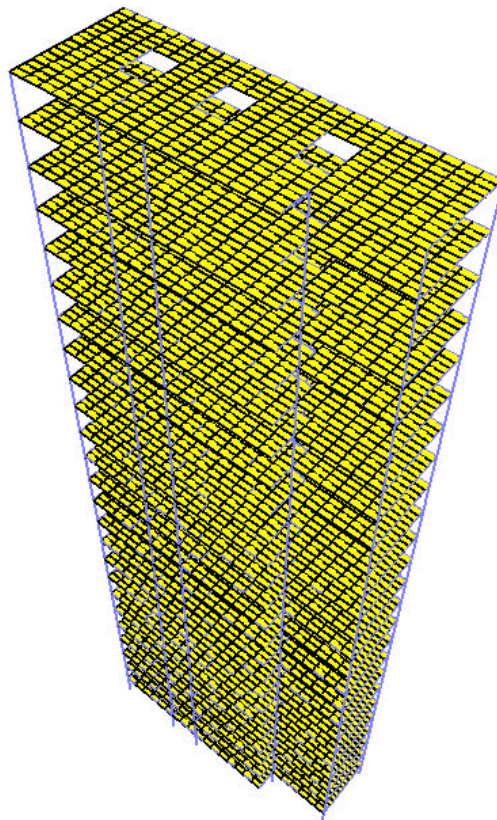


Figura 149 : Estrutura discretizada

Novamente utilizando-se programa desenvolvido em SOUSA JR. (2001), apenas para gerar as malhas, podemos observar algumas figuras da estrutura deformada.

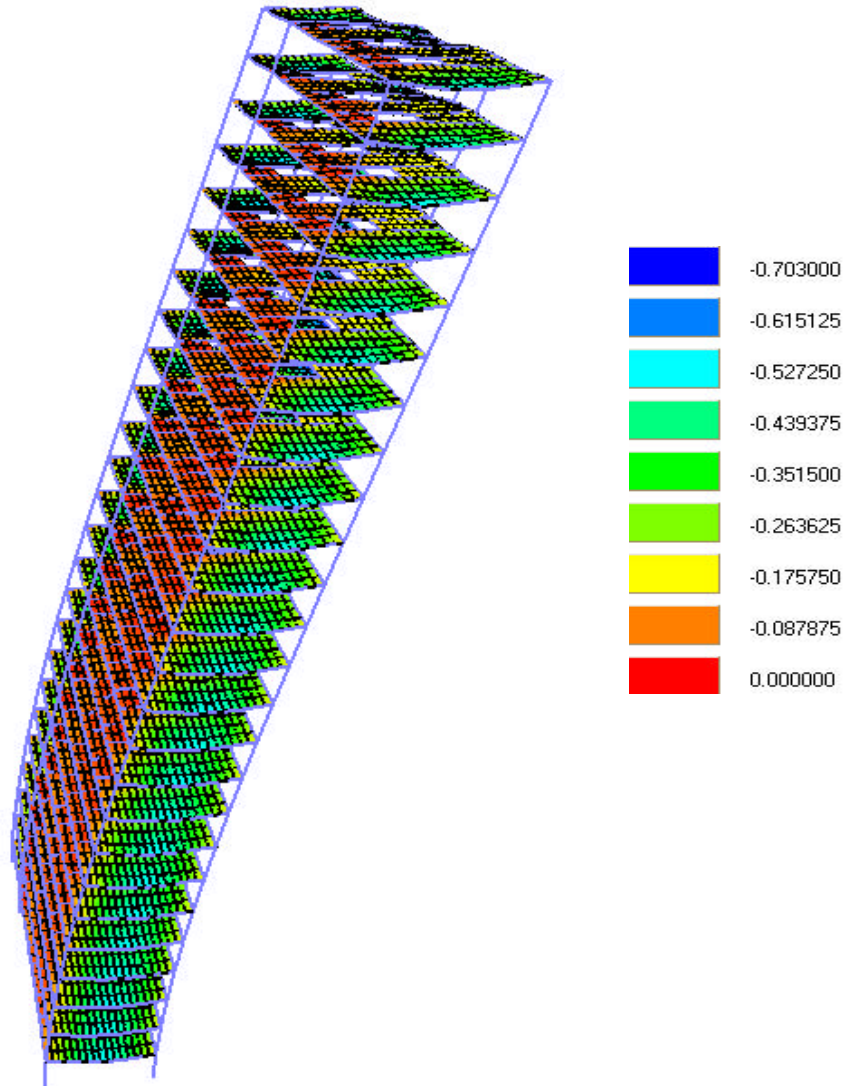


Figura 150 : Estrutura deformada

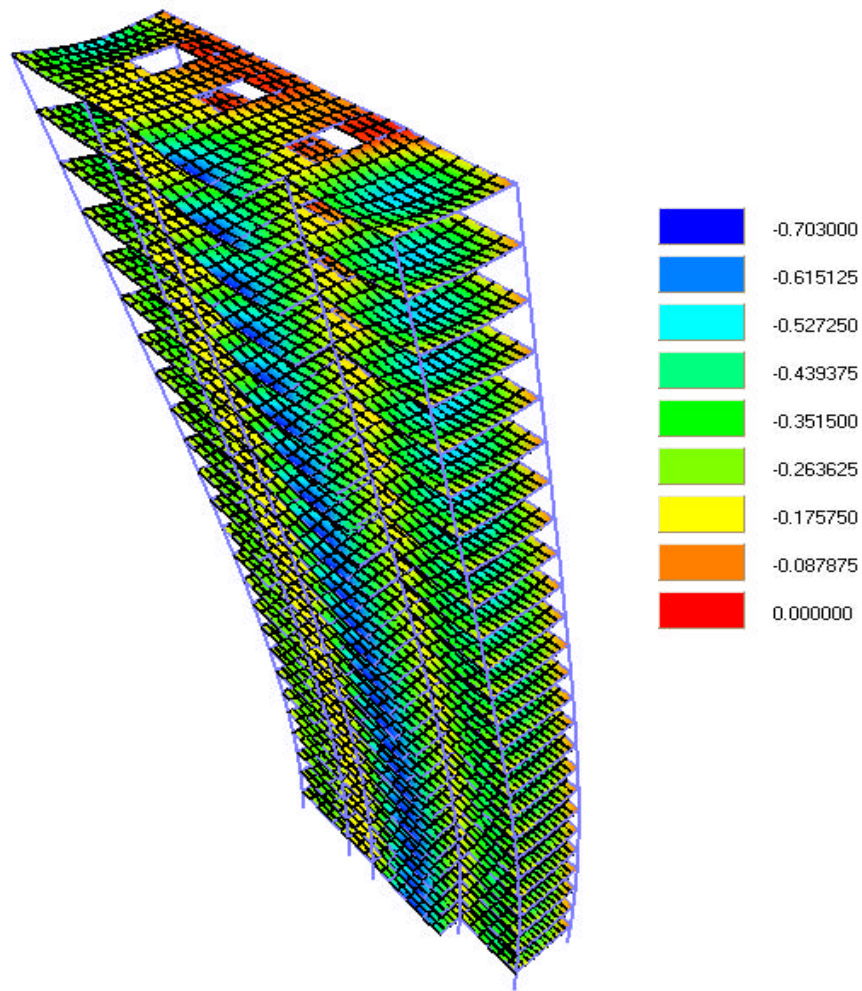


Figura 151 : Estrutura deformada

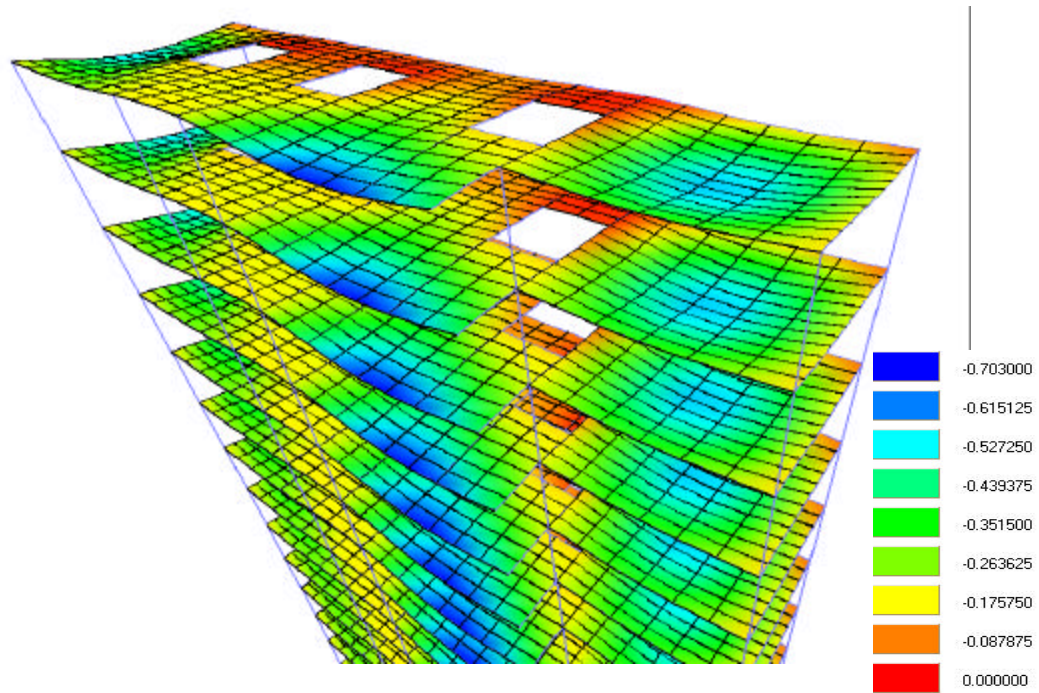


Figura 152 : Estrutura deformada

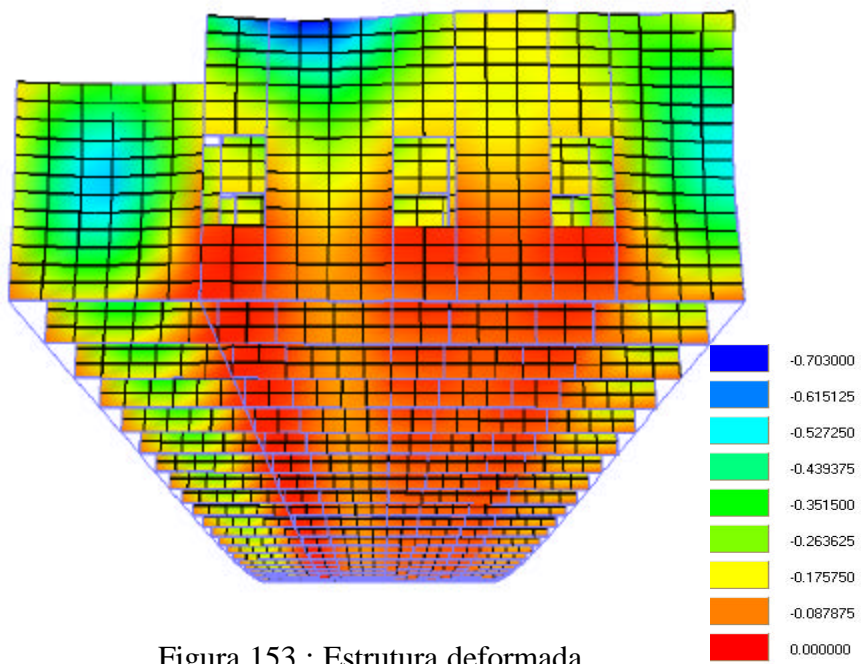


Figura 153 : Estrutura deformada

Novamente podemos observar através dos gráficos que houve uma redução nos deslocamentos laterais na direção da aplicação da ação do vento e na rotação dos pavimentos, quando da consideração da rigidez transversal à flexão das lajes. A redução dos deslocamentos laterais foi em torno de 5 % tanto em teoria de 1ª ordem como de 2ª ordem.

Sendo assim, houve uma redistribuição dos esforços nos elementos estruturais. Houve de maneira geral uma diminuição dos esforços, como podemos observar nas figuras 143, 144, 145 e 148.

Os empenamentos nos núcleos também mudaram, com a consideração ou não da rigidez das lajes, conforme figuras 135 à 137, tanto em teoria de 1ª ordem como em teoria de 2ª ordem.

Na figura 138 podemos observar uma redução do esforço normal no pilar 01, enquanto que este esforço para o núcleo N01 aumentou, quando considera-se a rigidez transversal da laje, de acordo com a figura 139. Já a figura 140 mostra uma redução do momento fletor para pilar 04. Por isso sempre se falou neste trabalho em redistribuição dos esforços nos elementos estruturais, pois para alguns elementos o esforço aumenta, quando da consideração da rigidez transversal da laje, e para outros diminui. Isto ocorre pois o equilíbrio de esforços da estrutura precisa manter-se.

Cabe salientar aqui para este exemplo e para os outros analisados que foram realizados testes variando-se o número de elementos finitos utilizados na discretização, e constatou-se que com poucas subdivisões das lajes os resultados já convergiram. Como o objetivo principal do trabalho foi analisar a influência da rigidez transversal à flexão das lajes na estrutura global, e determinar seus deslocamentos e esforços correspondentes, não se ateu a discretizar o pavimento com diversas malhas de elementos finitos. Além disso, uma discretização da laje com uma malha muito refinada de elementos finitos aumenta consideravelmente o tempo de processamento. Porém, deve-se salientar, que se o objetivo for conhecer a distribuição de tensões no pavimento, é conveniente utilizar malhas mais refinadas.

7.7 Parâmetros de estabilidade

7.7.1 Generalidades

Pode-se dizer de modo simplificado, que os efeitos da não linearidade geométrica são aqueles devido a mudança de posição da estrutura no espaço. Esses efeitos são determinados através de uma análise na qual se considera para o equilíbrio da estrutura a sua posição deformada. No caso da análise de edifício de múltiplos andares, deve-se considerar simultaneamente na análise o carregamento vertical e as ações horizontais. Isso porque, o carregamento vertical agindo na estrutura deslocada pode ocasionar o aparecimento de esforços adicionais na estrutura.

No sentido de se estabelecer o grau de sensibilidade das estruturas aos efeitos de segunda ordem, tem-se pesquisado critérios seguros e de fácil implementação prática que permitam dizer se os efeitos de 2ª ordem são pequenos e podem ser desprezados ou se são significativos e devendo ser obrigatoriamente considerados. Surgiram assim os dois mais conhecidos parâmetros de estabilidade, os parâmetros α e γ_z .

7.7.2 Parâmetro α

O parâmetro α , foi introduzido por BECK & KÖNIG (1966) como uma grandeza capaz de avaliar a sensibilidade da estrutura em relação aos efeitos de 2ª ordem. O modelo proposto considera um pilar engastado na base, com uma carga vertical distribuída ao longo de toda a sua altura, supondo-se para o mesmo um comportamento elástico-linear. O parâmetro fica, então, definido do seguinte modo:

$$\alpha = H \cdot \sqrt{\frac{F_v}{EI}}$$

onde:

H = altura total do pilar

F_v = carga vertical característica no pilar

EI = produto de rigidez do pilar em regime de utilização

Segundo a teoria desenvolvida por BECK & KÖNIG (1966) para α superior a 0,60, torna-se necessária a consideração do efeito de 2ª ordem no pilar.

Posteriormente, este conceito foi estendido por FRANCO (1985) para o caso de edifícios altos, uma vez que pode-se associar um edifício alto a uma coluna engastada na base, com os pavimentos tipo conferindo às cargas verticais o caráter de carregamento uniformemente distribuído.

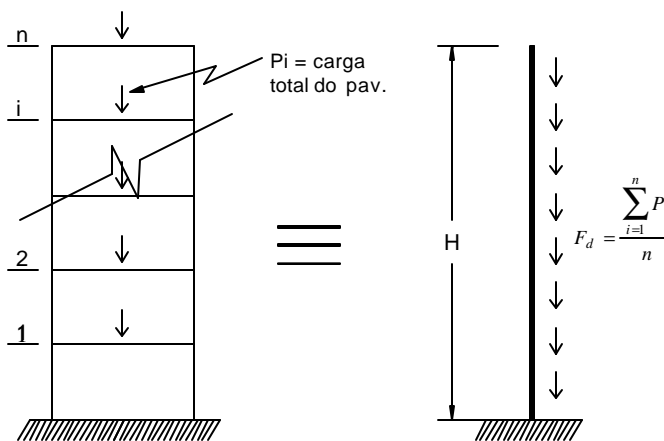


Figura 154 - Analogia entre um edifício alto e uma coluna engastada na base - PINTO (1997)

Para que se possa realizar esta analogia, no entanto, deve-se estender às estruturas dos edifícios altos os conceitos de *produto de rigidez equivalente* e *parâmetro de forma da linha elástica*, detalhados a seguir.

- **produto de rigidez equivalente**

Considere-se uma estrutura submetida a uma ação horizontal uniformemente distribuída q e seja a o deslocamento horizontal da laje de topo. O produto de rigidez $(EI)_{eq}$ é aquele equivalente a uma estrutura prismática engastada na base, de módulo

de rigidez E constante ao longo de sua altura H , que sob a ação da carga distribuída q apresenta o mesmo deslocamento a no topo.

Através da expressão da linha elástica correspondente a um pilar engastado na base com uma ação lateral uniformemente distribuída, tem-se:

$$(EI)_{eq} = \frac{q \times H^4}{8 \times a}$$

Portanto o parâmetro α , para o caso de edifícios altos fica definido como :

$$\alpha = H \cdot \sqrt{\frac{P_d}{(EI)_{eq}}}$$

onde : $P_d = \sum_{i=1}^n P_i$ é a carga vertical total no edifício com n sendo o número de andares

- **parâmetro de forma da linha elástica**

Define-se o parâmetro de forma da linha elástica como sendo:

$$y = \frac{d_1}{a}$$

onde :

δ_1 é o deslocamento horizontal de 1ª ordem do ponto de aplicação da resultante das cargas verticais de intensidade P_d .

Esse parâmetro pode ser facilmente calculado para estruturas regulares com o auxílio da seguinte expressão :

$$y = \frac{\sum P_i \cdot z_i}{a \cdot P_d}$$

com :

P_i = carga vertical total do pavimento i ;

z_i = deslocamento horizontal total do pavimento i ;

a = deslocamento da laje de topo da edificação;

P_d = carga total da edificação.

FRANCO (1985) apresenta os seguintes valores para ψ de acordo com o sistema de contraventamento predominante na estrutura :

$\psi=0,4$ - estruturas com contraventamento em pilar parede

$\psi=0,5$ - estruturas com contraventamento misto

$\psi=0,67$ - estruturas com contraventamento em pórtico

Nota-se que, na análise de edifícios altos, o parâmetro α serve como um indicador da necessidade ou não de se levar em conta o efeito de 2ª ordem para o projeto da estrutura. Assim, pode-se desprezar o efeito de 2ª ordem quando o valor calculado de α for menor que α_{lim} . Isso equivale a dizer que os esforços totais, em segunda ordem, não ultrapassam em 10% os de 1ª ordem (condição de indeslocabilidade dos nós).

Alguns valores de α_{lim} , para edifícios de vários pavimentos, foram propostos por alguns pesquisadores de forma a viabilizar a sua utilização.

- **Parâmetro a de acordo com o CEB (1977)**

De acordo com o CEB (1977), para edifícios de vários pavimentos, tem-se:

$$\alpha_{lim} \leq 0,2 + 0,1 \cdot n \quad ; \quad \text{para } n \leq 3$$

$$\alpha_{\text{lim}} \leq 0,6 \quad ; \quad \text{para } n \geq 4$$

onde n é o número de pavimentos do edifício.

Esta definição de α_{lim} pressupõe que o contraventamento seja constituído exclusivamente por pilares-parede, visto que se despreza a influência das vigas.

- **Parâmetro a de acordo com FRANCO (1985)**

FRANCO (1985) apresenta valores limites do parâmetro α dependentes do tipo de contraventamento predominante na estrutura. Esses valores limites são obtidos através da *condição generalizada de indeslocabilidade dos nós* como:

$$a_{\text{lim}} \leq \sqrt{\frac{2}{11y}}$$

Partindo-se do parâmetro de forma da linha elástica pode-se estabelecer valores limites de α em função do tipo de contraventamento predominante na estrutura. Os resultados obtidos para estruturas regulares, são:

$$\alpha_{\text{lim}} \leq 0,7; \text{ contraventamento em pilares-parede;}$$

$\alpha_{\text{lim}} \leq 0,6$; contraventamento misto (pilares-parede + pórticos ou associações de pilares parede).

$$\alpha_{\text{lim}} \leq 0,5; \text{ contraventamento em pórtico;}$$

- **Parâmetro a de acordo com VASCONCELOS (1987)**

VASCONCELOS (1987) sugere uma variação de a_{lim} em função do número de pavimentos n , dada por (para $n \geq 1$):

$$\mathbf{a}_{\text{im}} = \frac{1}{\sqrt{1,2}} \left(0,88 - 0,44 \times 10^{-0,144n} \right)$$

7.7.3 Parâmetro \mathbf{g}_z

Um outro modo de se avaliar a sensibilidade da estrutura em relação às ações horizontais é através do parâmetro γ_z .

Esse parâmetro foi proposto por FRANCO & VASCONCELOS (1991) como um coeficiente majorador dos esforços em primeira ordem, para a obtenção dos esforços finais que incluem os de segunda ordem. Portanto tem-se : $M_{2d} \cong \mathbf{g}_z M_{1d}$

Partindo-se de uma análise linear para as ações horizontais, na qual seja calculado o momento de primeira ordem M_1 em relação à base da estrutura e os deslocamentos horizontais de cada pavimento, verifica-se que esses deslocamentos combinados com as ações verticais ocasionam o aparecimento de acréscimos de momentos ΔM_2 . Esses acréscimos proporcionam o surgimento de novos deslocamentos. Esse processo ocorre sucessivamente ao longo de várias iterações, diminuindo ao longo destas, até que os acréscimos sejam desprezíveis, e portanto o processo iterativo convergiu. Com os diversos acréscimos de momentos determina-se os momentos finais em segunda ordem.

Um processo direto para o cálculo do parâmetro γ_z é dado por :

$$\mathbf{g}_z = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_i \cdot z_i}{\sum F_i \cdot h_i}}$$

P_i = carga vertical total do pavimento i ;

z_i = deslocamento horizontal total do pavimento i ;

F_i = carga horizontal aplicada ao nível do pavimento i ;

h_i = altura correspondente ao pavimento i em relação à base do edifício;

Desse modo, pode-se obter uma aproximação dos esforços em segunda ordem da estrutura, com uma análise simplificada em primeira ordem.

A principal vantagem do parâmetro γ_z sobre o parâmetro α consiste no fato de que, enquanto o parâmetro α apenas indica a necessidade de se considerar ou não uma análise em 2ª ordem para a estrutura, o parâmetro γ_z fornece uma estimativa dos acréscimos dos esforços globais em 2ª ordem. FRANCO & VASCONCELOS (1991) afirmam ter utilizado com sucesso o parâmetro γ_z , para valores até 1,2 ou mais.

Finalmente VASCONCELOS (1998) faz um amplo histórico da origem dos parâmetro de estabilidade α e γ_z , assim como considerações mais detalhadas sobre os mesmos.

7.7.4 Parâmetro a_k e g_z para o EXEMPLO 03

No caso do exemplo 03 temos :

$$- a_k = 19,82 \text{ cm}$$

$$- q_k = 12,33 \text{ kN/m}$$

$$- H = 15 \times 4,00 = 60,00 \text{ m}$$

$$- F_k = 21750 \text{ kN}$$

$$- EI_{eqk} = \frac{q_k H^4}{8a_k} = \frac{12,33 \cdot (60,00)^4}{8 \cdot 0,1982} = 100780020 \text{ kN.m}^2$$

$$a_k = 60 \sqrt{\frac{21750}{100780020}} = 0,88 > 0,6$$

Com o auxílio da tabela 09 .o parâmetro γ_z pode ser facilmente calculado

$$g_z = \frac{1}{1 - \frac{\sum 22950}{\sum 2187,69}} = 1,11 > 1,10$$

Tabela 09 : Tabela auxiliar no cálculo do parâmetro γ_z

Andar	h_i	F_i	z_i	P_i	$P_i * z_i$	$F_i * h_i$
-	m	kN	cm	kN	kN.m	kN.m
15	60	25,5	19,82	750	148,65	1530
14	56	51	18,72	1500	280,8	2856
13	52	51	17,57	1500	263,55	2652
12	48	51	16,34	1500	245,1	2448
11	44	51	15,03	1500	225,45	2244
10	40	51	13,64	1500	204,6	2040
9	36	51	12,11	1500	181,65	1836
8	32	51	10,66	1500	159,90	1632
7	28	51	9,084	1500	136,26	1428
6	24	51	7,488	1500	112,3	1224
5	20	51	5,898	1500	88,47	1020
4	16	51	4,353	1500	65,29	816
3	12	51	2,9	1500	43,50	612
2	8	51	1,6	1500	24,00	408
1	4	51	0,5432	1500	8,148	204
somatório					2187,69	22950

De acordo com as figuras 112, 113 e 116 podemos perceber que os momentos fletores nos elementos estruturais aumentaram quando da análise em teoria de 2ª ordem, sem a consideração ou não da rigidez transversal à flexão das lajes. Podemos observar também nestas figuras que com a consideração da rigidez da laje em teoria de 2ª ordem os momentos fletores foram menores que em relação a análise em teoria de 1ª ordem sem a consideração da rigidez transversal da laje.

Porém de acordo com o CEB (1977) como o parâmetro $\alpha > 0,60$, deveria ser realizada uma análise em teoria de 2ª ordem. Porém o que se observa é que os esforços em teoria de 2ª ordem considerando a rigidez transversal à flexão das lajes são em geral menores que os esforços em teoria de 1ª ordem sem a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes.

De acordo com o parâmetro de estabilidade γ_z , para ser realizar uma análise simplificada em teoria de 2ª ordem, temos que os esforços de 1ª ordem deveriam ser majorados em 11% ($\gamma_z = 1,11$). Porém observamos que com a consideração da rigidez da laje, esta majoração não mostra o comportamento realista da estrutura em teoria de 2ª ordem.

7.7.5 Parâmetro g_z e a_k para o EXEMPLO 04

No caso do exemplo 04 temos :

$$- a_k = 3,867 \text{ cm}$$

$$- q_k = 16,56 \text{ kN/m}$$

$$- H = 20 \times 3,00 = 60 \text{ m}$$

$$- F_k = 3420 \times 20 = 68400 \text{ kN}$$

$$- EI_{eqk} = \frac{q_k H^4}{8a_k} = \frac{16,56 \cdot (60,0)^4}{8 \cdot 0,03867} = 693747090,7 \text{ kN.m}^2$$

$$a_k = 60,0 \sqrt{\frac{68400}{693747090,7}} = 0,60 = 0,60$$

Com o auxílio da Tabela 08 o parâmetro γ_z pode ser facilmente calculado

$$g_z = \frac{1}{1 - \frac{\sum 1240,68}{\sum 31438,17}} = 1,05 < 1,10$$

Tabela 10 : Tabela auxiliar no cálculo do parâmetro γ_z

Andar	h_i	F_i	z_i	P_i	$P_i * z_i$	$F_i * h_i$
-	m	kN	cm	kN	kN.m	kN.m
20	60,0	27,4	3,867	3420	132,25	1644,00
19	57	54,5	3,662	3420	125,24	3106,50
18	54	54,2	3,456	3420	118,20	2926,80
17	51	53,88	3,245	3420	110,98	2747,88
16	48	53,56	3,03	3420	103,63	2570,88
15	45	53,22	2,82	3420	96,44	2394,90
14	42	52,87	2,585	3420	88,41	2220,54
13	39	52,5	2,356	3420	80,58	2047,50
12	36	52,11	2,123	3420	72,61	1875,96
11	33	51,7	1,887	3420	64,54	1706,10
10	30	51,27	1,651	3420	56,46	1538,10
9	27	50,81	1,416	3420	48,43	1371,87
8	24	50,32	1,185	3420	40,53	1207,68
7	21	49,8	0,9614	3420	32,88	1045,80
6	18	49,24	0,7489	3420	25,61	886,32
5	15	48,64	0,5516	3420	18,86	729,60
4	12	47,97	0,3747	3420	12,81	575,64
3	9	47,24	0,2238	3420	7,65	425,16
2	6	46,44	0,1057	3420	3,61	278,64
1	3	46,1	0,02807	3420	0,96	138,30
Somatório					1240,68	31438,17

Temos que através do valores dos parâmetros de estabilidade γ_Z e α_k esta estrutura não apresenta problemas com os esforços em teoria de 2ª ordem. As figuras dos valores dos esforços mostradas para este exemplo, confirmam este fato. Pode-se observar a proximidade dos valores dos esforços em teoria de 1ª ordem e de 2ª ordem, com ou sem rigidez transversal à flexão das lajes.

7.7.6 Parâmetro g_Z e a_k para o EXEMPLO 05

No caso do exemplo 05 temos :

$$- a_k = 5,780 \text{ cm}$$

$$- q_k = 19,50 \text{ kN/m}$$

$$- H = 25 \times 2,80 \text{ m} = 70 \text{ m}$$

$$- F_k = 3370 \times 25 = 84250 \text{ kN}$$

$$- EI_{eqk} = \frac{q_k H^4}{8a_k} = \frac{19,50 \cdot (70,0)^4}{8 \cdot 0,1475} = 396775423,73 \text{ kN.m}^2$$

$$a_k = 70,0 \sqrt{\frac{84250}{396775423,73}} = 1,02 > 0,60$$

Com o auxílio da tabela 11 o parâmetro γ_Z pode ser facilmente calculado

$$g_Z = \frac{1}{1 - \frac{\sum 5370,93}{\sum 51311,46}} = 1,12 > 1,10$$

Tabela 11 : Tabela auxiliar no cálculo do parâmetro γ_z

Andar	h_i	F_i	z_i	P_i	$P_i * z_i$	$F_i * h_i$
-	m	kN	cm	kN	kN.m	kN.m
25	70	31,22	14,75	3370	497,08	2185,40
24	67,2	62,11	14	3370	471,80	4173,79
23	64,4	61,77	13,25	3370	446,53	3977,99
22	61,6	61,41	12,49	3370	420,91	3782,86
21	58,8	61,05	11,74	3370	395,64	3589,74
20	56	60,66	10,99	3370	370,36	3396,96
19	53,2	60,25	10,23	3370	344,75	3205,30
18	50,4	59,83	9,483	3370	319,58	3015,43
17	47,6	59,39	8,738	3370	294,47	2826,96
16	44,8	58,92	8	3370	269,60	2639,62
15	42	58,43	7,272	3370	245,07	2454,06
14	39,2	57,91	6,555	3370	220,90	2270,07
13	36,4	57,35	5,853	3370	197,25	2087,54
12	33,6	56,76	5,169	3370	174,20	1907,14
11	30,8	56,12	4,506	3370	151,85	1728,50
10	28	55,43	3,867	3370	130,32	1552,04
9	25,2	54,68	3,257	3370	109,76	1377,94
8	22,4	53,85	2,68	3370	90,32	1206,24
7	19,6	52,92	2,14	3370	72,12	1037,23
6	16,8	51,87	1,643	3370	55,37	871,42
5	14	50,65	1,196	3370	40,31	709,10
4	11,2	49,21	0,8043	3370	27,10	551,15
3	8,4	47,4	0,4771	3370	16,08	398,16
2	5,6	44,96	0,2246	3370	7,57	251,78
1	2,8	41,09	0,05976	3370	2,01	115,05
Somatório					5370,93	51311,46

Sendo assim, de acordo com os valores dos parâmetros de estabilidade, há necessidade de se considerar o cálculo da estrutura em teoria de 2ª ordem. Porém a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes na análise da estrutura altera seus deslocamentos e esforços, como pode ser visto nos gráficos mostrados para este exemplo.

As figuras de 142 à 144 mostram que os esforços de 2ª ordem foram inferiores que os de 1ª ordem, quando da consideração da rigidez transversal à flexão das lajes. Os deslocamentos laterais para análise em teoria de 2ª ordem considerando a rigidez transversal da laje foram menores que em teoria de 1ª ordem sem a consideração dessa rigidez para a laje. Isto pode ser observado na figura 133.

CAPÍTULO 8

CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Com os resultados obtidos nos exemplos numéricos apresentados e em vários outros testes, observa-se que a rigidez transversal das lajes influencia sensivelmente o comportamento estrutural do edifício. Isto ocorre porque as lajes, com o modelo estrutural adotado, têm uma participação mais efetiva na interação dos esforços e deslocamentos com os demais elementos (vigas , pilares e núcleos), em comparação a outros modelos que as consideram apenas como diafragmas totalmente flexíveis fora do seu plano. Há portanto, uma análise conjunta mais realista proveniente da simulação relativa da rigidez entre os elementos estruturais.

Através dos gráficos apresentados, notam-se diferenças significativas nos deslocamentos laterais quando comparam-se os modelos analisados. Percebe-se que os deslocamentos diminuíram quando se considerou a rigidez transversal da laje. Verifica-se que até para alguns casos a influência da rigidez transversal da laje chegou a ser tão significativa, que em teoria de 2ª ordem considerando a rigidez transversal da laje, os deslocamentos foram menores do que no modelo em teoria de 1ª ordem sem a consideração da rigidez transversal á flexão das lajes. Os valores de deslocamentos mostrados nas figuras 89, 96, 106 e 121 comprovam este comportamento para a estrutura.

Através do cálculo dos valores dos parâmetros de estabilidade α e γ_z , sem qualquer consideração de rigidez transversal à flexão para as lajes, as estruturas mostradas aqui apresentam esforços de 2ª ordem que podem ser significativos. Porém observa-se que ao computar a rigidez transversal à flexão das lajes, os deslocamentos de 2ª ordem são menores do que aqueles de 1ª ordem sem aquela consideração.

Dessa forma, deve-se atentar para o fato de que os parâmetros de estabilidade α e γ_z não representam, nesses casos, de modo adequado, os esforços de 2ª ordem, já que nos seus cálculos não é computada a rigidez transversal à flexão das lajes.

Portanto sugere-se que mais estudos sejam realizados no sentido de aprimorar a aplicação desses parâmetros de estabilidade na análise de estruturas de edifícios de múltiplos andares.

Com a análise dos resultados obtidos, observa-se que a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes influencia no comportamento estrutural da estrutura, ocorrendo uma diminuição dos deslocamentos horizontais e uma redistribuição de esforços. Fala-se em redistribuição, pois em alguns elementos os esforços estruturais aumentaram e em outros diminuíram, para a consideração ou não da rigidez transversal à flexão das lajes. Isto ocorre, pois o equilíbrio de esforços na estrutura deve ser mantido para qualquer tipo de modelo de análise da estrutura.

Esta redistribuição de esforços em nível de dimensionamento dos elementos estruturais mostra-se bastante interessante. Pois no modelo de análise sem a consideração da rigidez transversal das lajes alguns elementos podem estar superdimensionados em relação ao seu cálculo que considera a rigidez transversal para a laje, pois com a consideração da rigidez da laje diminui o esforço em alguns elementos estruturais. Já pensando em segurança, alguns elementos podem estar sub-dimensionados pois alguns esforços nos elementos aumentam com a consideração da laje.

No exemplo 02 e exemplo 04 formados por dois núcleos simétricos, deve-se salientar que quando não se considera a rigidez da laje, os esforços normais no núcleo, esforço normal e bimomento, são nulos. Porém quando se considera a rigidez transversal à flexão há o impedimento parcial do empenamento do núcleo na direção longitudinal de sua seção transversal, e portanto aparecem os esforços normais e os bimomentos, que são

iguais e de sinais opostos. Desta forma ao se considerar tal rigidez para a laje, aparecem esforços normais nos núcleos, aliviando dessa forma esses esforços nos pilares, para assim manter a estrutura em equilíbrio de esforços.

Em relação a discretizar as lajes com elementos finitos DKT ou DST, pode-se dizer que não houve diferenças significativas na obtenção dos deslocamentos e esforços para as estruturas de edifícios de andares múltiplos na utilização de um ou outro elemento finito. Isto ocorreu devido as lajes de pavimentos de edifícios, na maioria das vezes, serem consideradas placas delgadas na relação de seu vão pela espessura. A influência da deformação pelo esforço cortante, que o elemento finito DST considera na sua formulação, torna-se significativa apenas em placas espessas.

Apesar do modelo estrutural ter-se mostrado bastante eficiente, ele ainda pode ser aperfeiçoado mais ainda com a consideração de outras hipóteses de cálculo. Pode-se considerar trechos rígidos verticais nas ligações pilar-pilar ou até mesmo excentricidades nas ligações laje-viga.

Com os elementos finitos de placa DKT (*Discrete Kirchhoff Theory*) e DST (*Discrete Shear Theory*) utilizado na discretização da laje dos pavimentos foram obtidos bons resultados, porém é possível adotar outro tipo de elemento finito de placa para posterior comparação de resultados e ainda, diferentes discretizações da laje variando-se o número de elementos finitos utilizados.

A hipótese de diafragma rígido para as lajes pode ser substituída pela consideração da deformabilidade das lajes em seu plano, que poderá ser analisada através de sua discretização em elementos finitos de chapa; dessa forma é possível computar os esforços axiais nas vigas quando a estrutura estiver submetida ao carregamento lateral de vento.

Além disso, outros trabalhos deveriam explorar mais exaustivamente a influência da rigidez transversal à flexão da laje quando se considera a não linearidade geométrica para os pilares, através da análise de outros exemplos e um estudo mais detalhado a cerca dos parâmetros de instabilidade global α e γ_z .

Algumas outras sugestões para trabalhos futuros dentro desta linha de pesquisa de edifícios de andares múltiplos, é a avaliação da contribuição da rigidez das alvenarias de

fechamento (paredes) na análise global da estrutura, ou ainda fazer a análise global da estrutura considerando a não-linearidade física dos materiais dos elementos estruturais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTUNES, H.M.C.C. (1978). *Carregamento crítico de instabilidade geral para estruturas tridimensionais de edifícios altos*. São Carlos. 160p. Tese (Doutorado) Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1980). *NBR -6123.Ações devidas ao vento em edificações*. Rio de Janeiro, ABNT. 52p.

BARBOSA, J.A. (1978). *Edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis, sob carga lateral*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

BATHE, K.J.; CIMENTO, A.P. (1980). *Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equation*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v.22, p.59-85.

BATOZ, J.L.; BATHE, K.J. ; HO, L.W. (1980). A study of three-node triangular plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.15, p.1771-1812.

BATOZ, J.L. ; LARDEUR, P. (1989). *A Discrete shear triangular nine D.O.F element for the analysis of thick to very thin plates* *International Journal for the numerical methods in engineering* , vol 28, 533-560

- BECK, H.; KÖNIG, G. (1966). Restraining forces (Festhaltekräfte) in the analysis of tall buildings. In: SIMPOSIUM ON TALL BUILDINGS, Oxford. Proceedings. p. 513-536.
- BECKER, E.P. (1989). *Edifícios altos: interação tridimensional das peças de contraventamento*. São Carlos. 181p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BEZERRA, D.P. (1995). *Análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos considerando a rigidez transversal à flexão das lajes*. São Carlos. 138p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BRUNELLI, A.C (1987) *Análise estrutural de edifícios sujeitos ao carregamento horizontal, considerando a rigidez das lajes, com o método dos elementos finitos*. São Carlos. 245p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON (1977). Code modèle CEB-FIP pour les structures en béton. CEB *Bulletin D'Information*,N.124/125
- COSTA, J.L. (1984). *Núcleos estruturais sobre fundações flexíveis*. São Carlos. 187p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- FRANCO, M. (1985). O parâmetro de estabilidade nos edifícios de concreto. In: REUNIÃO ANUAL DO IBRACON: Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado, São Paulo, 22-26 jul. *Anais*. 26p.

- FRANCO, M; VASCONCELOS, A.C. (1991) . Pratical assessment of second order effects in tall buildings. In: COLLOQUIUM ON THE CEB-FIP MC 90,Rio de Janeiro. *Proceedings*. P.307-324.
- HEIDEBRECHT, A. C.; SWIFT, R. D. (1971). Analysis of asymmetrical coupled shear walls. *Journal of the Structural Division*, p. 1407-1422, May
- HINDMARCH, A. C. (1983) *ODEPACK : a sistematized collection of ODE (Ordinary differencial Equationa) solvers, in scientific computing*. Edited by R. S. Stepleman et al. Amsterdan, North Holland, p. 55-64
- JEYACHANDRABOSE, C.; KIKHOPE, J. (1985). An alternative explicit formulation for the DKT plate-bending element. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, v.21, n.7, p.1289-1293.
- MARTINS, C.H. (1998). *Contribuição da rigidez à flexão das lajes, na distribuição dos esforços em estruturas de edifícios de andares múltiplos, em teoria de segunda ordem*. Dissertação (mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MATIAS JUNIOR, I.G. (1997). *Análise não-linear de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleos resistentes sobre fundações flexíveis*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MATIAS JR., I.G.; MORI, D.D. Núcleos resistentes sobre fundações flexíveis. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 28., São Carlos, 1-5 set. 1997. *Estruturas e fundações*. São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas-EESC-USP / Associação Sulamericana de Engenharia Estrutural, 1997. v.4, p.1387-1396.

- MORI, D.D. (1978). *Flexo-torção: teorias de 1ª e 2ª ordem - automatização do cálculo*. São Carlos. 174p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MORI, D.D. (1992). *Os núcleos estruturais e a não linearidade geométrica na análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos*. São Carlos. 196p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PEREIRA, G. S. (1997).; *Contribuições à Análise de Estruturas de Contraventamento de Edifícios em Concreto Armado*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PEREIRA, A.C.O. (2000) *Estudo da influência da modelagem estrutural no núcleo nos painéis de contraventamento de edifícios altos*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PINTO, R.S. (1997). *Não-linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PRUDENTE, M. (1983). *Análise de estruturas tridimensionais usuais de edifícios altos*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RIOS, B.M.C. (1991). *Análise tridimensional e envoltória de esforços em edifícios altos sujeitos à ações verticais e laterais*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

- ROCHA, A. B. (1985). *Análise de núcleos estruturais de edifícios sujeitos a torção*.
Dissertação (mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- ROSEN, R.; RUBINSTEIN, M.F. (1970). Substructure analysis by matrix decomposition. *Journal of Structural Division*, ASCE, v.96, n.3, p.663-670, Mar.
- ROSMAN, R. (1969). Torsion of perforated concrete shafts. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v. 95, No. ST5, p. 991-1010.
- RUTENBERG, A.V.; TSO, W.K. (1975) Torsional analysis of perforated core structure. *Journal of the Structural Division* Vol. 101, no. ST03, pp. 539-550
- SERRA, J. L. F. A. (1994). *Contribuição ao estudo de núcleos resistentes de concreto armado*. Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SILVA, R.M. (1989). *Análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleo resistentes considerando o efeito P-d* São Carlos. 239p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SMITH, B.S. , TARANATH, B.S.(1972) The analysis of tall core-supported structures subject to torsion. *Proc. Institution of Civil Engineers*, v.53, p.173-87
- SMITH, B.S ; GIRGIS, A. M. (1984). Simple analogous frames for shear wall analysis. *Journal of Structural Engineering* Vol. 110. No. 11, pp. 2655-2666. November
- SMITH, B. S.; COULL, A (1991).; *Tall Building Structures. Analysis and Design*; A Wiley - Interscience Publication.

SORIA GALVARRO BALCAZAR, E.A (1991) *Análise linear de estruturas tridimensionais retangulares pelo método dos elementos finitos utilizando subestruturação*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

SORIANO., H. L ; LIMA, S.S. (2000) *Método de elementos finitos em análise de estruturas* – Livro texto - Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ.

SOUSA JR. , E. (2001) *Análise da interação entre núcleos estruturais e lajes em edifícios altos* - Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

SWIFT, R.D.; HEIDEBRECHT, A.C. (1970). *Behaviour of coupled shear-wall building*. Ontário, Dept. of Civ. Engrg. and Engrg. Mech. p.70-75.

TARANATH, B. S. (1968). *Torsional behavior of open section shear wall structures*. Southampton, England, Tese de Doutorado. University of Southampton.

TARANATH, B. S. (1988). *Structural analysis and design of tall buildings*, McGraw-Hill.

TORRES, IVAN F. R. (1999). *Efeito da deformação por cortante no cálculo de edifícios de andares múltiplos com núcleos estruturais*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

TSO, W.K.; BISWAS, J.K. (1973). Analysis of core wall structure subjected to applied torque. *Build. Sci.*, v.8, p.251-257.

VASCONCELOS, A.C. (1998) . Origem dos parâmetros de estabilidade α e γ_z . In: REVISTA IBRACON - Janeiro/marco 98 , P.16-26.

- VLASOV, B. Z. (1962). *Pièces longues em voiles minces*. Paris, Eyrolles, 655 p.
- YAGUI, T. (1971). *Estruturas constituídas de paredes delgadas com diafragmas transversais*. São Carlos. 138p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- YAGUI, T. (1978). *Análise de estruturas de edifícios constituídas de núcleo de concreto armado e pilares ou pendurais de aço (carregamento crítico de instabilidade geral)*. Limeira. Tese (Livre-docência) - Faculdade Engenharia de Limeira, Universidade Estadual de Campinas.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; PAREKH, C. J.; TEPLY, B. (1971). Three-dimensional analysis of buildings composed of floor and wall panels. *Proc. Instn. Civ. Engrs*, v.2, p.316-332, July.

BIBLIOGRAFICA CONSULTADA

ANTUNES, H.M.C.C. ; MORI, D.D. ; SOUZA, J.C.A.O. (1995) Núcleos estruturais In : *Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural* – Tucumán - Argentina. pp. 123-132

ANTUNES, H.M.C.C.; MARTINS,C.H.(2000) *Influence os slabs on the analysis of multi-storey building* [CD ROM]. In: EUROPEAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN APPLIED SCIENCES AND ENGINEERING , Barcelona, Spain, 11-14 September, . Barcelona, CIMNE.

ANTUNES,H.M.C.C.; MARTINS,C.H.(2000). *Novas considerações sobre os parâmetros de estabilidade a e g* In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, XXIX., Punta Del Este, URUGUAI, Novembro 13-17.

ANTUNES, H.M.C.C.; SOUSA JR.,E. ; MARTINS, C.H. (2000) *Interação núcleo estrutural e lajes de pavimentos* In : 42º. Reunião do IBRACON – Instituto Brasileiro do Concreto – Fortaleza – CE

ASSAN, A. E. (1999) *Método dos elementos finitos : primeiros passos* – Campinas , SP : Editora da Unicamp

ANTUNES, H.M.C.C. ; MORI, D.D. ; SOUZA, J.C.A.O. (1995) Núcleos estruturais In : *Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural* – Tucumán - Argentina. pp. 123-132

- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1984). *NBR-8681 - Ações e segurança nas estruturas*. Rio de Janeiro, ABNT. 21p.
- BATOZ, J.L. (1982). An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.18, p.1077-1089.
- CHAUDHARY, A.B. (1982) Generalized Stiffness Matrix for thin walled beams. *Journal of the Structural Division*. Vol. 108, no.ST3, p. 559-577,
- CHEN, C.J.; LIU, W. ; CHERN, S.M. (1991) Torsional analysis of shear core structures with openings. *Computer & Structures*. Vol. 41, no.1, p. 99-104.
- COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON (1977). Code modèle CEB-FIP pour les structures en béton. *CEB Bulletin D'Information*, N.124/125
- CORRÊA, M.R.S. (1991). *Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CORRÊA, M.R.S.; RAMALHO, M.A.(1993) Cálculo de pavimentos de edifícios utilizando-se o método dos elementos finitos. In : *Jornadas Sudamericanas de Engenharia Estructural* – Montevideo – Uruguai. pp. 109-120
- COUNCIL ON TALL BUILDINGS AND URBAN HABITAT (1988), *Second century of the skyscraper*, Edited by L.S. Beedle. New York, Van Nostrand Reinhold Company

COUNCIL ON TALL BUILDINGS AND URBAN HABITAT (1995).; *Structural Systems for Tall Buildings*; McGraw-Hill, NY,

HJELMSTAD, K. D. (1987) Warping effects in transverse bending of thin-walled beams. *Journal of Engineering Mechanics*, v.113. No.6, p. 907-924

KÓZAK, J.; *Steel-Concrete structures for Multistorey Buildings*; Elsevier, 1991.

KRAJCINOVIC, D. (1970). Matrix force analysis of thin-walled structures. *Jornal of the Structural Dvision*. Vol. 96, no.ST1, p. 107-121, January

KWAN, A.K.H. (1991) Analysis of coupled wall/frame structures by frame method with shear deformation allowed. *Proceedings. Institutional. Civil Engineers Part 2. V.* 91, p. 273-297, June

KWAN, A.K.H. (1992) Reformulation of the frame method *Proceeding Engrs. Structures & Buildings*, Vol. 94, pp. 103-116, Feb.

KWAN, A.K.H. (1992). Rotational DOF in the frame method analysis of coupled shear/core wall structures. *Computer & Structures*. Vol. 44, no. 5, pp. 989-1005

KWAN, A.K.H. (1993) Local deformations and rotational degrees of freedom at beam-wall joints. *Computer & Structures*. Vol. 48, no.4, p. 615-625.

KWAN, A.K.H. (1993) On definition of beam - wall joint rotations in the analysis of coupled wall-frame structures. *Engineering Structural*. Vol. 15, no. 2 p. 74-82

KWAN, A.K.H. (1993). Mixed finite element method for analysis of coupled shear/core walls. *Journal of Structural Engineering* Vol. 119. No. 5, pp. 1388-1401. May

- KWAN, A.K.H. (1993). Resolving the artificial flexure problem in the frame method. *Proceedings Inst. Civil Engineers Structural & Buildings* Vol. 99, pp.14, Feb.
- KWAN, A.K.H. (1994) Unification of existing frame analogies for coupled shear/core wall analysis. *Computer & Structures*. Vol. 51, no.4, p. 393-401.
- KWAN, A.K.H. (1996) Shear Lag in shear/core walls *Journal of Structural Engineering*. Vol 122, no. 9, p. 1097-1104, September
- MacLEOD, I. A.; HOSNY, H. M. (1977). Frame analysis of shear wall cores. *Journal of the Structural Division*, p. 1921-1931, September
- MANCINI, E. (1972) *Associação contínua tridimensional de pórticos e paredes com engastamento elástico*. São Carlos - Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos-USP.
- MANCINI, E. (1983).; *Núcleos estruturais sobre fundação flexível*; EESC-USP, São Carlos
- MANCINI E.(1995) *Aplicação da técnica do meio contínuo à problemas relativos a estruturas de edifícios altos*. São Carlos - Tese (Livre-Docência). EESC-USP. Escola de Engenharia de São Carlos-USP.
- MARTINS, C.H.; ANTUNES, H.M.C.C (2000). *Análise em segunda ordem de edifícios altos*. In: CONGRESSO NACIONAL DE MECÂNICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 6., Aveiro, Portugal, 17-19 abril 2000. Aveiro, Universidade de Aveiro, 2000. v.1, p.685-694

MORI, D.D. (1988). *Flexo-torção*: barras com seção transversal aberta e paredes delgadas. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 132p.

MORI, D.D.; SOUZA, J.C.A.O.; ANTUNES, H.M.C.C(1992). A flexo-torção na análise em segunda ordem de núcleos resistentes em estruturas de edifícios altos. In: CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA - XIII CILAMCE

MORI, D.D.; MATIAS JR., I.G. Não linearidade geométrica nos núcleos resistentes. In: CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO DE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 18., Brasília, 29-31 out. 1997. *Anais*. Brasília, AMC / UnB, 1997. v.1, p. 159-166.

MORI, D.D.; SOUZA, J.C.A.O.; ANTUNES, H.M.C.C. Os núcleos estruturais e sua contribuição na absorção de esforços de 1a. e 2a. ordens em estruturas de edifícios altos. In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL, 26., Montevideo, Uruguay, 15-19 nov. 1993. *Memorias*. Montevideo, CLAES/ASAIE, 1993. v.2, p.475-484

MORI, D.D.; SOUZA, J.C.A.O.; ANTUNES, H.M.C.C. Tall buildings with cores. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TALL BUILDINGS, Rio de Janeiro, Brazil, May 17-19, 1993. *Proceedings*. Bethlehem, Council on Tall Buildings and Urban Habitat, 1994. p.289-300

NOLLET, M.J. ; STAFFORD SMITH, B. (1993). Behavior of curtailed wall-frame structures. *Journal of Structural Engineering*, v. 119, No. 10, p. 2835-2854.

ODEN, J.T. (1967) *Mechanics of elastic structures*. Mac Graw-Hill Book Company, p. 218-224

- PEREIRA, G. S.; RAMALHO, M. A.; CORRÊA, M. R. S. (1997). Análise de núcleos de rigidez em concreto armado. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA CIVIL, São Carlos, Anais. EESC-USP. p.119-128
- RACHID, M. (1975). *Instabilidade de barras de seção delgada*. São Carlos. 119p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RACHID, M.; MORI, D.D. (1989). *Instabilidade: conceitos- aplicação na flambagem por flexão*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 130p.
- RACHID, M.; MORI, D.D. (1993). *Instabilidade: flambagem de barras de seção delgada por torção e flexão*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. 166p.
- RUTENBERG, A.; SHTARKMAN, M. ; EISENBERG, M. (1986) Torsional analysis methods for perforated cores *Journal of Structural Engineering*. Vol 112., no. 6, pp. 1207-1227, June
- SALEEB, A.F. ; CHANG, T.Y. (1987) An efficient quadrilateral element for plate bending analysis. *International Journal for numerical methods in engineering*, v.24, p. 1123-1155
- SORIANO., H. L (2000). *Estudo comparativo de elementos finitos quadrilaterais de flexão de placa de Reissner – Mindlin* In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, XXIX., Punta Del Este, URUGUAI, Novembro 13-17.
- STAMATO, M. C. (1971). *Associação Contínua de painéis de contraventamento*, São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo..

- ///
- TARANATH, B. S. (1975). Analysis of interconnected open section shear wall structures. *Journal of the Structural Division*, p. 2367-2384, November.
- TARANATH, B.S. (1975). Torsion analysis of braced multy-storey cores. *The Structural Engineer*, v.53, p.285-288.
- TSO, W.K. (1983) Shear walls coupled by cross wall. *Journal of Structural Engineering*, v. 109, No. 08, p. 2010-2016
- TSO, W.K. ; BISWAS, J.K. (1973) General analisis of nonplanar coupled shear walls.. *Journal of Structural Division*, ST03, p. 365-380
- VASQUEZ, J. ; RIDELL, R. (1984). Thin-walled core element for multistory buildigs *.Journal of Structural Engineering* Vol. 110. No. 5, pp. 1021-1034.

**Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca - EESC-USP**

M386a Martins, Carlos Humberto
Análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios de andares múltiplos com núcleos resistentes, considerando a rigidez transversal à flexão das lajes / Carlos Humberto Martins. -- São Carlos, 2001.

Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de São Carlos-Universidade de São Paulo, 2001.

Área: Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof^a. Dr^a. Helena M. C. Carmo

Antunes.

1. Edifícios de andares múltiplos. 2. Núcleos estruturais. 3. Rigidez transversal da laje. 4. Teoria de Segunda ordem. I. Título.