

**ANÁLISE COMPARATIVA DE
RESULTADOS DE DIFERENTES
DISCRETIZAÇÕES PARA AS LAJES DE
PAVIMENTOS UTILIZANDO OS
ELEMENTOS FINITOS DKT E P15N**

Francisco Patrick Araujo Almeida

Dissertação apresentada à Escola de
Engenharia de São Carlos da Universidade
de São Paulo, como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em
Engenharia de Estruturas

ORIENTADORA: Profa. Dra. Helena M.C. Carmo Antunes

São Carlos
1999

“Quem ama é invencível
pois não conhece o medo
voa sobre os abismos
vence os desafios.”

Marcus Viana

*Aos meus pais Jesus e Irainê,
à minha esposa Renata,
à minha irmã Patricia
e à minha sobrinha Bruna*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por se revelar a cada dia nas coisas mais simples da vida.

À professora Helena M.C.C. Antunes, pela confiança na minha capacidade, pela orientação objetiva e pela amizade.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, pela bolsa de estudos concedida.

Ao professor João C.A. de O. e Souza, pela supervisão do projeto PAE desenvolvido em dois semestres; também pela confiança e amizade.

À minha esposa Renata, por todo o amor nesta caminhada; também pela paciência, apoio e sabedoria.

À minha família, pelo apoio, confiança e fé.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC/USP, especialmente às pessoas dos professores Paiva, Coda, Samuel Giongo, Eloy Machado Jr. e Libânio, e aos funcionários Rosi, Nadir, Eliana e Masaki.

Aos professores da Universidade Federal de Alagoas (UFAL), especialmente às pessoas dos professores Roberaldo C. de Sousa, Severino P.C. Marques, Dilze C.S.C. Marques, Aline R.S. Barboza e Márcio Barboza.

Aos amigos do PET de Engenharia Civil da UFAL, pelo incentivo, confiança e companheirismo.

A todos os amigos que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho, especialmente a Arthur, Suzana, Edgard, Carlos Humberto (Cazuza), Ivan, Rubens, e Valério.

A todos os amigos, novos e antigos, que tornaram estes dois últimos anos muito melhores, especialmente a Alexandre (Topó), Augusto, Luciana, David, Luciano Jorge (Jorginho), Júlio, Márcia, Romel, Paula, Sandra e aos amigos do departamento de Engenharia Química da UFSCar.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	i
LISTA DE TABELAS.....	v
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	vi
LISTA DE SÍMBOLOS	vii
RESUMO	xii
ABSTRACT.....	xiii
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Generalidades	1
1.2 Objetivo	3
1.3 Resumo dos capítulos	4
2 REVISÃO DA LITERATURA.....	5
3 ESTUDO SOBRE PLACAS.....	11
3.1 Conceitos	11
3.2 Classificações	12
3.3 Hipóteses básicas para as teorias das placas e simplificações.....	12
3.4 Equacionamento	14
3.4.1 Esforços internos numa placa solicitada à flexão simples	14
3.4.2 Condições de equilíbrio	15
3.4.3 Relações deformação – deslocamento	16
3.4.4 Campo de deslocamentos.....	17
3.4.5 Campo de deformações	18
3.4.6 Relações tensão – deformação	18
3.4.7 Campo de tensões.....	19
3.4.8 Esforços internos.....	19
3.5 Condições de contorno	21
3.5.1 Borda simplesmente apoiada	23
3.5.2 Borda engastada	24
3.5.3 Borda livre.....	24

3.6 Forças de canto	25
4 O ELEMENTO DKT	26
4.1 Generalidades	26
4.2 Introdução	26
4.3 Matriz de rigidez.....	28
4.3.1 Energia de deformação.....	28
4.3.2 Hipóteses básicas	31
4.4 Vetor de forças nodais equivalentes	43
4.5 Esforços internos no elemento.....	44
4.6 Formação do elemento DKTC.....	44
5 O ELEMENTO P15N	47
5.1 Generalidades	47
5.2 Introdução	47
5.3 Matriz de rigidez.....	48
5.3.1 Configuração nodal do elemento	48
5.3.2 Considerações geométricas	49
5.3.3 Funções de forma.....	51
5.3.4 Expressões gerais para os termos polinomiais.....	53
5.3.5 Matriz de deformações [B]	54
5.3.6 Matriz de rigidez	55
5.4 Tensões	57
5.5 Vetor de cargas nodais equivalentes.....	58
6 O SISTEMA ESTRUTURAL.....	61
6.1 Introdução	61
6.2 O elemento finito de barra	61
6.2.1 Sistema de coordenadas locais.....	61
6.2.2 Matriz de rigidez do elemento de barra	62
6.3 Compatibilização entre o elemento P15N e o elemento de viga	64
6.3.1 Subestruturação em paralelo	64
6.3.2 Transformação de coordenadas.....	67
6.3.3 Contribuição das vigas	70
7 O PROGRAMA COMPUTACIONAL	72
7.1 Introdução	72
7.2 Generalidades	72
7.3 Entrada de dados.....	73
7.3.1 Entrada de dados com pré-processador.....	73
7.3.2 Entrada de dados sem pré-processador	75

7.4 A Sub-rotina PRE_PROCESSADOR.....	76
7.5 Exclusão de elementos.....	77
7.6 Saída de dados	77
7.7 Tempos de processamento.....	78
8 EXEMPLOS.....	80
8.1 Introdução	80
8.2 Exemplo 1	80
8.3 Exemplo 2	93
8.4 Exemplo 3	95
8.5 Exemplo 4	104
8.6 Exemplo 5	111
9 CONCLUSÕES E SUGESTÕES	117
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	120
BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR.....	124
APÊNDICE	126

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 01 – Placa carregada.....	11
FIGURA 02 – Cinemática da placa segundo a teoria de Kirchhoff.....	13
FIGURA 03 – Cinemática da placa segundo a teoria de Reissner-Mindlin	13
FIGURA 04 – Direções positivas de β_y e β_x	14
FIGURA 05 – Tensões numa placa solicitada à flexão simples	15
FIGURA 06 – Força de Kirchhoff	22
FIGURA 07 – Borda simplesmente apoiada.....	23
FIGURA 08 – Borda engastada	24
FIGURA 09 – Borda livre.....	24
FIGURA 10 – Força de canto	25
FIGURA 11 – Elemento finito DKT.....	27
FIGURA 12 – Condensação estática do elemento finito DKT	28
FIGURA 13 – Coordenadas adimensionais ξ e η	32
FIGURA 14 – Coordenada s do elemento de lado ij	35
FIGURA 15 – Geometria do elemento finito DKT	37
FIGURA 16 – Carregamento uniformemente distribuído no elemento.....	44
FIGURA 17 – Formação do vetor de forças nodais $\{f\}^*$	45
FIGURA 18 – Elemento finito P15N.....	48
FIGURA 19 – Sistemas de coordenadas do elemento finito P15N	49
FIGURA 20 – Vetor normal ao lado $j-k$	50
FIGURA 21 – Pontos de Gauss onde as tensões são calculadas	57
FIGURA 22 – Integração na área do elemento	59
FIGURA 23 – Aproximação para carregamento uniformemente distribuído.....	60
FIGURA 24 – Áreas de influência.....	60

FIGURA 25 – Sistema de coordenadas locais do elemento de barra	61
FIGURA 26 – Ângulo α da viga	63
FIGURA 27 – Subestruturação em paralelo	65
FIGURA 28 – Transformação de coordenadas	68
FIGURA 29 – Rotação de coordenadas	69
FIGURA 30 – Carregamento uniformemente distribuído no elemento de viga	70
FIGURA 31 – Entrada de dados do programa PAPEP15N	73
FIGURA 32 – Tipos de discretização da malha.....	77
FIGURA 33 – Tempos de processamento.....	79
FIGURA 34 – Exemplo 1.....	81
FIGURA 35 – Erro no deslocamento w no centro da placa quadrada - tipo S	83
FIGURA 36 – Erro no deslocamento w no centro da placa quadrada - tipo Z	83
FIGURA 37 – Erro no deslocamento w no centro da placa quadrada - tipo X.....	84
FIGURA 38 – Erro no deslocamento w para placa simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído	85
FIGURA 39 – Erro no deslocamento w para placa engastada submetida a carregamento uniformemente distribuído	85
FIGURA 40 – Erro no deslocamento w para placa simplesmente apoiada submetida a carga concentrada	86
FIGURA 41 – Erro no deslocamento w para placa engastada submetida a carga concentrada	86
FIGURA 42 – Erro em $m_x = m_y$ no centro da placa quadrada - tipo S	88
FIGURA 43 – Erro em $m_x = m_y$ no centro da placa quadrada - tipo Z.....	89
FIGURA 44 – Erro em $m_x = m_y$ no centro da placa quadrada - tipo X	89
FIGURA 45 – Erro em $m_x = m_y$ para placa simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído	90
FIGURA 46 – Erro em $m_x = m_y$ para placa engastada submetida a carregamento uniformemente distribuído	90
FIGURA 47 – Placa engastada submetida a carregamento uniformemente distribuído - comparação com outros elementos	91
FIGURA 48 – Placa simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído - comparação com outros elementos.....	91

FIGURA 49 – Placa simplesmente apoiada submetida a carga concentrada - comparação com o elemento finito T18	92
FIGURA 50 – Placa simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído ($m_y = m_x$) - comparação com outros elementos.....	92
FIGURA 51 – Exemplo 2.....	94
FIGURA 52 – Placa esconsa (w e m_y)	95
FIGURA 53 – Exemplo 3.....	95
FIGURA 54 – Erro no deslocamento w no centro da placa apoiada em vigas	98
FIGURA 55 – Erro no deslocamento w no centro da placa apoiada em vigas - comparação entre P15N tipo S/Z e tipo X.....	98
FIGURA 56 – Erro no deslocamento w no centro da placa apoiada em vigas - comparação entre DKT e DKTC.....	99
FIGURA 57 – Erro no deslocamento w no centro da placa apoiada em vigas - comparação entre P15N tipo S/Z e DKT tipo Z.....	99
FIGURA 58 – Erro no deslocamento w no centro da placa apoiada em vigas - comparação entre P15N tipo X e DKTC.....	100
FIGURA 59 – Erro em $m_x = m_y$ no centro da placa apoiada em vigas.....	102
FIGURA 60 – Erro em $m_x = m_y$ no centro da placa apoiada em vigas - comparação entre P15N tipo S/Z e tipo X.....	102
FIGURA 61 – Erro em $m_x = m_y$ no centro da placa apoiada em vigas - comparação entre DKT e DKTC.....	103
FIGURA 62 – Erro em $m_x = m_y$ no centro da placa apoiada em vigas - comparação entre P15N tipo S/Z e DKT tipo Z.....	103
FIGURA 63 – Erro em $m_x = m_y$ no centro da placa apoiada em vigas - comparação entre P15N tipo X e DKTC.....	104
FIGURA 64 – Exemplo 4.....	105
FIGURA 65 – Malha utilizada para o elemento DKTC	106
FIGURA 66 – Malha utilizada para o elemento P15N	106
FIGURA 67 – Diagrama de momentos fletores na viga 2	107
FIGURA 68 – Diagrama de esforços cortantes na viga 2.....	107
FIGURA 69 – Momento fletor m_x na seção AB - $y = 5,41m$	108
FIGURA 70 – Momento fletor m_x na seção AB - $y = 1,80m$	108

FIGURA 71 – Momento fletor m_y na seção AB - $x = 2,25\text{m}$	109
FIGURA 72 – Momento fletor m_y na seção AB - $x = 6,20\text{m}$	109
FIGURA 73 – Linha elástica na seção AB - $x = 6,20\text{m}$	110
FIGURA 74 – Linha elástica na seção AB - $y = 1,80\text{m}$	110
FIGURA 75 – Exemplo 5.....	112
FIGURA 76 – Discretização tipo S para o pavimento do exemplo 5	112
FIGURA 77 – Diagrama de momentos fletores das vigas 2 e 3	114
FIGURA 78 – Diagrama de esforços cortantes das vigas 2 e 3	114
FIGURA 79 – Momento fletor m_y na seção AB - $x = 2,8\text{m}$	115
FIGURA 80 – Momento fletor m_x na seção AB - $y = 2,8\text{m}$	115
FIGURA 81 – Linha elástica na seção AB - $y = 2,8\text{m}$	116
FIGURA 82 – Linha elástica na seção AB - $x = 2,8\text{m}$	116

LISTA DE TABELAS

TABELA 01 – Coeficientes dos elementos da matriz auxiliar [B']	55
TABELA 02 – Localização dos pontos de Gauss onde as tensões são calculadas.....	58
TABELA 03 – Deslocamento w para placa quadrada – tipo S	82
TABELA 04 – Deslocamento w para placa quadrada – tipo Z	82
TABELA 05 – Deslocamento w para placa quadrada – tipo X.....	82
TABELA 06 – Momento $m_x = m_y$ para placa quadrada – tipo S	87
TABELA 07 – Momento $m_x = m_y$ para placa quadrada – tipo Z	87
TABELA 08 – Momento $m_x = m_y$ para placa quadrada – tipo X.....	87
TABELA 09 – Comparação entre métodos de consideração de carregamento uniformemente distribuído – placa quadrada	93
TABELA 10 – Deslocamento w para placa apoiada em vigas – P15N/tipo S/Z.....	97
TABELA 11 – Deslocamento w para placa apoiada em vigas – P15N/tipo X.....	97
TABELA 12 – Deslocamento w para placa apoiada em vigas – DKT/tipo Z.....	97
TABELA 13 – Deslocamento w para placa apoiada em vigas – DKTC	97
TABELA 14 – Momento $m_x = m_y$ para placa apoiada em vigas – P15N/tipo S/Z.....	101
TABELA 15 – Momento $m_x = m_y$ para placa apoiada em vigas – P15N/tipo X	101
TABELA 16 – Momento $m_x = m_y$ para placa apoiada em vigas – DKT/tipo Z.....	101
TABELA 17 – Momento $m_x = m_y$ para placa apoiada em vigas – DKTC.....	101

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACM	– Adini-Clough-Melosh
BFS	– Bogner-Fox-Schmit
C.G.	– centro de gravidade
DKQ	– <i>Discrete Kirchhoff quadrilateral</i>
DKT	– <i>Discrete Kirchhoff triangle</i>
DKTC	– DKT “condensado”
gdl	– graus de liberdade
HSM	– <i>Hybrid stress model</i>
HSMC	– HSM “condensado”
MEF	– Método dos elementos finitos

LISTA DE SÍMBOLOS

A	– área do elemento finito
a, b	– dimensões, distâncias
ak, bk, ck, dk, ek	– coeficientes em função de x_{ij}, y_{ij} e L_{ij}
A_{ξ}, A_{η}, A_r	– áreas dos triângulos 1P3, 1P2 e P23
$[A]$	– matriz que relaciona $\{\beta_x\}$ com $\{\alpha'\}$ ou $\{\beta_y\}$ com $\{\rho'\}$
b_2, b_3, c_2, c_3	– $y_3 - y_1, y_2 - y_1, x_1 - x_3$ e $x_2 - x_1$
$[B]$	– matriz de deformações, que relaciona o vetor $\{k\}$ com o vetor $\{U\}$
$[B']$	– matriz auxiliar que relaciona a matriz $[\bar{C}]$ com a matriz $[B]$ (P15N)
b'_{ij}	– elemento ij da matriz $[B']$
C	– rigidez à torção da placa
c, s	– cosseno e seno de γ_{ij}
C_n	– constante de integração n
$[C]$	– matriz geométrica do elemento P15N (15x15)
$[\bar{C}]$	– inversa da matriz $[C]$, o mesmo que $[C]^{-1}$
D	– rigidez à flexão da placa
$[D]$	– matriz diagonal
$[D]_f$	– matriz de elasticidade para flexão de placas
d_{ij}	– elemento ij da matriz $[D]_f$
dx, dy, dz	– infinitésimo em x, y e z
$\{D_E\}$	– vetor de deslocamentos externos
$\{D_I\}$	– vetor de deslocamentos internos
E	– módulo de elasticidade ou módulo de Young
$\{F_E\}$	– vetor de cargas externas

$\{F_i\}$	– vetor de cargas internas
$\{F_r\}$	– vetor de cargas rotacionado
$\{f\}$	– vetor de forças nodais equivalentes do elemento
$\{f\}^*$	– vetor de forças nodais equivalentes do elemento DKTC
$\{f_v\}$	– vetor de cargas nodais equivalentes do elemento de viga em coordenadas locais
$\{f_{vg}\}$	– vetor de cargas nodais equivalentes do elemento de viga em coordenadas globais
G	– módulo de elasticidade transversal ou módulo de elasticidade ao cisalhamento
$[G]$	– matriz que relaciona $\beta_x(\xi,\eta)$ com $\Psi(\xi,\eta)$ e $\{U\}$
$[G]_i, [H]_i$	– linha i da matriz $[G]$ e da matriz $[H]$
h	– espessura do elemento finito ou da placa
$[H]$	– matriz que relaciona $\beta_y(\xi,\eta)$ com $\Psi(\xi,\eta)$ e $\{U\}$
i, j	– índices
i, j	– nó inicial e nó final do lado ij do elemento
$[I]$	– matriz identidade
j, k	– nó inicial e nó final do lado j-k do elemento
J_t	– momento de inércia à torção
k	– nó de meio de lado (4, 5, 6) (DKT)
$[K]$	– matriz de rigidez do elemento
$[K']$	– matriz de rigidez auxiliar (P15N)
k'_{ij}	– elemento ij da matriz de rigidez auxiliar $[K']$
$\{k\}$	– vetor curvatura
$[K_r]$	– matriz de rigidez rotacionada
$[K_{vg}]$	– matriz de rigidez do elemento de viga segundo coordenadas globais
$[K_{vl}]$	– matriz de rigidez do elemento de viga segundo coordenadas locais
L	– comprimento do lado de um elemento finito
L_i	– comprimento do lado i do elemento
L_{ij}	– comprimento do lado ij do elemento
$\{L\}$	– operador que relaciona a matriz $[N]$ com a matriz $[B]$

$[L]$	– matriz triangular inferior com termos unitários na diagonal principal
\overline{M}	– momento por unidade de comprimento prescrito
m_x, m_y	– momento fletor por unidade de comprimento, em x e y
m_{xy}, m_{yx}	– momento volvente atuante no plano perpendicular ao eixo x e y
$\{m\}$	– vetor de esforços internos de flexão
nci, nce	– número de coordenadas internas e número de coordenadas externas
N_i	– funções de forma i
$[N]$	– matriz (1x15) com as funções de forma do elemento P15N
\vec{n}_i	– normal ao lado i do elemento
P	– carga concentrada perpendicular ao plano x – y
P	– ponto P de coordenadas adimensionais (ξ, η)
p, q	– carregamento uniformemente distribuído (carga por unidade de área)
$\{P\}$	– vetor com os termos do polinômio do 4º grau completo (15 termos) aproximador dos deslocamentos w no elemento P15N
P_i	– termo i do polinômio P
Q_{ji}	– termo i do polinômio Q_j
q_x, q_y	– esforço cortante por unidade de comprimento, atuante no plano perpendicular ao eixo x e y
R	– força de canto
r	– A_r/A
$[R]$	– matriz auxiliar na determinação da matriz de rigidez do elemento DKT
$[RT]$	– matriz retangular
$[R^*]$	– matriz simétrica condensada
S	– direção tangente ao lado ij
s	– coordenada tangente ao lado ij do elemento; varia de 0 a L_{ij}
$[T]$	– matriz de transformação de coordenadas locais (x,y) para coordenadas globais (X,Y)
$[T]^T$	– transposta da inversa de $[T]$
U	– energia de deformação
u, v, w	– translações em X, Y e Z
U_c	– energia de deformação ao cisalhamento

U_f	– energia de deformação à flexão
$\{U\}$	– vetor de deslocamentos nodais do elemento
$\{u_{vg}\}$	– vetor de deslocamentos do elemento de barra segundo o sistema de coordenadas globais
$\{u_{vl}\}$	– vetor de deslocamentos do elemento de barra segundo o sistema de coordenadas locais
\bar{V}	– força cortante por unidade de comprimento prescrita
V_x	– força de Kirchhoff
w	– deslocamento transversal ao plano $x - y$
w_n	– diferencial de w em relação à direção normal a um lado do elemento
w_s	– w em função de s
$w_{,sk}$	– diferencial de w em relação a s no nó de meio de lado k
$w_{,x}, w_{,y}$	– diferencial de w em relação a x e a y
$w_{,xx}, w_{,yy}, w_{,xy}$	– diferencial 2ª de w em relação a x , a y e a x e y
X_i, Y_i	– coordenadas globais do nó i
x_i, y_i	– coordenadas locais do nó i
x_{ij}, y_{ij}	– $x_i - x_j$ e $y_i - y_j$
x_{jk}, y_{jk}	– $x_j - x_k$ e $y_j - y_k$
$[X], [Y], [Z]$	– matrizes que relacionam os elementos do vetor $\{k\}$ com ξ e η e com o vetor $\{U\}$
$[XY_x], [XY_y]$	– matrizes (ambas 6×9) que relacionam $\{\beta_x\}$ e $\{\beta_y\}$ com $\{U\}$
x_1, x_2 e y_3	– coordenadas locais x do nó 1, x do nó 2 e y do nó 3
α_v	– ângulo formado entre o eixo X global e o eixo x local da viga
$\{\alpha\}, \{\alpha'\}, \{\rho'\}$	– vetores de coeficientes polinomiais
$\alpha_i, \alpha'_i, \rho_i, \rho'_i$	– coeficientes polinomiais
β_n	– rotação na direção normal aos lados
β_{sk}	– rotação na direção tangente aos lados no nó de meio de lado k
β_x, β_y	– rotações da normal ao plano médio indeformado do elemento, segundo os planos $x-z$ e $y-z$ (segundo a teoria de Kirchhoff)
β_{xi}, β_{yi}	– valores de β_x ou β_y no nó i

$[\beta]$	– matriz de transformação
$[\beta_v]$	– matriz de incidência cinemática do elemento de barra
$\{\beta_x\}, \{\beta_y\}$	– vetores dos valores de β_x ou β_y nodais
γ_{ij}	– ângulo formado pelo eixo x e pela direção normal ao lado ij
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	– deformações de cisalhamento nos planos perpendiculares aos eixos x, x e y e paralelas aos eixos y, z e z
$\{\gamma\}$	– vetor de deformações por esforço cortante
Δ, ∇^2	– operador Laplaciano
$\{\delta\}^*$	– vetor de deslocamentos nodais do elemento DKTC
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$	– deformações nas direções x, y e z
$\{\epsilon\}_f$	– vetor de deformações por flexão
θ_x, θ_y	– rotações em x e y
λ	– constante utilizada na formulação do elemento finito P15N de valor $\sqrt{0.6}$
ν	– coeficiente de Poisson
ξ, η	– coordenadas adimensionais
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	– tensões normais aos planos perpendiculares aos eixos x, y e z
$\{\sigma\}_c$	– vetor de esforços internos de cisalhamento, ou por esforço cortante
$\{\sigma\}_f$	– vetor de esforços internos de flexão
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	– tensões de cisalhamento em planos perpendiculares aos eixos x, x e y e paralelas aos eixos y, z e z
ϕ_0	– ângulo que o eixo x (local) faz com o eixo X (global) (P15N)
ϕ_j	– ângulo que o vetor normal ao lado j faz com o eixo x (local) (P15N)
$\Psi(\xi, \eta)$	– vetor de funções de ξ e η
ψ	– fator de correção para força cortante
$\frac{\partial}{\partial n_j}$	– diferencial em relação à direção normal ao lado j do elemento
$\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$	– diferencial em x, y e z
$[0]$	– matriz nula

RESUMO

ALMEIDA, F.P.A. (1999). *Análise comparativa de resultados de diferentes discretizações para as lajes de pavimentos utilizando os elementos finitos DKT e P15N*. São Carlos. 126p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Na área de análise de pavimentos, muitos trabalhos já foram realizados, levando-se em conta diferentes considerações sempre com o objetivo de aprimorar os modelos que representam o comportamento estrutural. O Método dos Elementos Finitos tem se mostrado um dos principais métodos na resolução deste problema, onde as lajes podem ser discretizadas por elementos finitos de placa e as vigas por elementos finitos de barra. Dentre os diversos tipos de elementos finitos de placa, o elemento finito DKT (*discrete Kirchhoff triangle*), tem sido largamente utilizado na consideração da rigidez à flexão das lajes. O objetivo deste trabalho é apresentar o recém-formulado elemento finito de placa P15N na análise de pavimentos, bem como apresentar as diferenças e semelhanças na utilização deste elemento com o elemento finito DKT, na discretização das lajes, na determinação dos deslocamentos e esforços em pavimentos. Para a realização das análises descritas, desenvolveu-se um programa computacional em linguagem de programação FORTRAN 90. Vários exemplos numéricos são apresentados.

Palavras-chave: método dos elementos finitos; lajes; pavimentos.

ABSTRACT

ALMEIDA, F.P.A. *Comparative analysis of results of different discretizations for floors slabs using DKT and P15N finite elements*. São Carlos, 1999. 126p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

In the area of floor analysis, many studies have already been carried out taking into account different considerations and always aiming to improve the models which represent the structural behavior. The Finite Element Method has shown to be one of the principal methods for the resolution of this problem, where the slabs and the beams may be meshed by plate finite elements and bar finite elements, respectively. Among the various kinds of plate finite elements, the DKT (discrete Kirchhoff triangle) finite element has been largely used in the consideration of slabs bending stiffness. The objective of this work is to present the P15N as a plate finite element in the analysis of floors, as well as to point out the differences in the utilization of this element with the DKT finite element in slab discretization and in the determination of displacements and stresses in floors. For such analysis, a computational program was developed in FORTRAN 90 programming language. Several numerical examples are presented.

Keywords: finite element method; slabs; floors.

1 INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

A linha de pesquisa em Estruturas de Edifícios Altos alcançou um rápido desenvolvimento no departamento de engenharia de estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos. Os primeiros trabalhos foram realizados pelos professores Schiel e M.C. Stamato. O trabalho deste último, que é considerado o fundador do grupo de pesquisa da área, em 1966, é considerado como um marco. Esse trabalho deu origem a grupos de estudos que foram formados na Escola de Engenharia de São Carlos – USP e também na COPPE – UFRJ.

No ano de 1968, o Prof. Stamato desenvolvendo pesquisas na Universidade de *Southampton*, na Inglaterra, onde obteve muito sucesso nesse campo, juntamente com o grupo de edifícios altos, que era liderado pelo Prof. Sttaford Smith. Ao retornar da Inglaterra, no início da década de 70, encontrou a Universidade de São Paulo em meio à implantação regulamentada da pós-graduação; suas idéias foram expostas em um grande volume de novos trabalhos de pesquisa e o grupo cresceu bastante. Esta época coincidiu com o começo da utilização de computadores em análise estrutural no meio científico do Brasil.

O grupo daquele momento contava com a participação dos professores T. Yagui, R.G. Figueiredo, J.C.A.O. Souza, E. Mancini e H.M.C.C. Antunes e mais alguns alunos matriculados no curso de mestrado em estruturas, recentemente criado. Os temas abordados nas pesquisas em andamento tratavam de problemas relativos à instabilidade, plasticidade e buscavam novas variantes da Técnica do Meio Contínuo. Também no início dos anos 70, os Profs. J.C.A.O. Souza e H.M.C.C. Antunes desenvolveram pesquisas na Universidade de *Southampton*, e o Prof. T. Yagui, estagiou nesta mesma época na Universidade de Osaka, no

Japão. O Prof. T. Yagui e R.G. Figueiredo transferiram-se para a Unicamp e o Prof. M.C. Stamato faleceu.

Com a contribuição de novos docentes, as pesquisas atualmente estão mais voltadas para o aprimoramento das modelagens dentro do método plástico, introdução de novos sistemas estruturais e criação de pré e pós-processadores para tornar mais fácil a utilização dos sistemas computacionais gerados.

Dentre os diferentes trabalhos desenvolvidos na área de edifícios altos, podem ser mencionados: BARBOZA (1977), que estudou através da técnica do meio contínuo e discreto, os edifícios que são formados por paredes de seção aberta submetidos às forças laterais, contraventado por lintéis, onde foi possível comparar os resultados obtidos entre as duas técnicas utilizadas; PRUDENTE (1983), que analisou estruturas tridimensionais usuais de edifícios altos, constituídos de painéis de contraventamento formado por vigas e pilares rigidamente conectados entre si, e também pilares que não estão sujeitos aos esforços de flexo-torção; BECKER (1989), que acrescentou os núcleos estruturais, para tanto o autor se baseou na teoria de VLASSOV (1962), no estudo da interação tridimensional entre os diversos elementos estruturais; RIOS (1991) analisou a estrutura sem a observação da formação de painéis e núcleos, entretanto considerou as excentricidades entre os elementos, e ainda calculou as envoltórias dos esforços para combinações diferentes de carregamento.

O que é possível observar de comum nesses trabalhos citados, é que as lajes trabalham como diafragmas infinitamente rígidos em seu plano horizontal, e a rigidez transversal é desprezível na análise global da estrutura. Contudo, devido ao seu comportamento de placa, sabe-se que essa rigidez à flexão terá alguma influência no comportamento estrutural.

Com a utilização do método dos elementos finitos, alguns autores tais como, SORIA GALVARRO BALCAZAR (1991) e BRUNELLI (1987), analisaram estruturas tridimensionais, considerando a rigidez à flexão das lajes, entretanto com aplicação apenas a edifícios em plantas retangulares, já BEZERRA (1995), considerou edifícios de planta qualquer. Recentemente, MARTINS, C.H. (1998), analisou a contribuição da flexão das lajes em edifícios altos em teoria de segunda ordem. Durante a execução deste trabalho, a orientadora foi despertada para o tema aqui proposto, que é uma verificação da discretização da laje com diferentes tipos de elementos finitos, no caso o DKT (*discrete Kirchhoff triangle*) – utilizado por MARTINS, C.H. (1998) – e o elemento finito P15N – recém–apresentado por MARTINS & SABINO (1997) – em casos de pavimentos, visando uma futura aplicação deste último elemento na análise de edifícios altos.

1.2 OBJETIVO

Atualmente, sabe-se que a não consideração da rigidez à flexão das lajes na determinação de esforços e deslocamentos em edifícios, pode levar a resultados bastante distantes da realidade. Diversos trabalhos já foram realizados nessa área e apresentaram resultados que confirmam essa afirmação.

O método dos elementos finitos (MEF) tem sido largamente utilizado na modelagem de lajes de edifícios na consideração da rigidez à flexão desses elementos estruturais. Desde o surgimento do MEF, diversos elementos de placa foram desenvolvidos com o intuito de resolver os problemas inerentes a esse tipo de análise. Cada um desses elementos finitos possuindo características bastante distintas.

O objetivo proposto para esta dissertação de mestrado é estudar as diferenças e semelhanças nos resultados obtidos na utilização dos elementos finitos de placa DKT e P15N, na discretização de lajes de pavimentos submetidos a carregamentos verticais, na determinação dos esforços e deslocamentos.

O elemento finito DKT foi escolhido por ter sido um elemento bastante utilizado e que tem apresentado bons resultados; sua matriz de rigidez pode ser escrita de forma explícita, e além disso trata-se de um elemento com menor número de graus de liberdade (gdl), 9. O desempenho do elemento finito DKT já foi amplamente verificado para diversas análises estruturais, seja em casos de placas, cascas, pavimentos e edifícios de múltiplos pavimentos. O elemento finito P15N trata-se de um elemento recentemente apresentado à comunidade científica para a solução de problemas de placas; sua formulação é razoavelmente simples e apresenta rápida convergência. O presente trabalho se propõe a realizar uma análise comparativa em primeira ordem entre esses elementos em casos de pavimentos, visando uma futura aplicação do elemento finito P15N ao caso de edifícios altos, onde seria dada continuidade ao trabalho de MARTINS, C.H. (1998) – que utiliza o elemento DKT na discretização das lajes – no que diz respeito à utilização de um programa de computador para análise de edifícios altos.

1.3 RESUMO DOS CAPÍTULOS

O capítulo 1 apresenta um rápido histórico do grupo de pesquisa ao qual o autor e seu trabalho estão inseridos, bem como os avanços obtidos por esse grupo até os tempos atuais. Também é apresentado o objetivo do trabalho e justificativas, mais o presente item.

O capítulo 2 descreve resumidamente as mais relevantes referências bibliográficas estudadas para o desenvolvimento do trabalho, necessárias para o seu embasamento teórico.

O capítulo 3 apresenta um estudo detalhado do problema de flexão de placas; os conceitos iniciais, as classificações das placas, as hipóteses e simplificações envolvidas, o equacionamento do problema e um estudo resumido das condições de contorno.

Os capítulos 4 e 5 apresentam a dedução da matriz de rigidez e vetor de cargas nodais equivalentes para carregamento uniformemente distribuído dos elementos DKT e P15N, respectivamente. No capítulo 4, ainda é apresentada a transformação do elemento DKT no elemento finito DKTC (DKT condensado).

O capítulo 6 apresenta o sistema de coordenadas e a matriz de rigidez do elemento finito de barra utilizado na discretização das vigas do pavimento. Além disso, também o processo desenvolvido para se fazer o acoplamento entre o elemento finito de barra e o elemento finito de placa (P15N).

O capítulo 7 tem como objetivo descrever o programa computacional desenvolvido em termos gerais e as principais sub-rotinas, bem como apresentar a entrada e saída dos dados envolvidos.

O capítulo 8 mostra 5 exemplos numéricos utilizando o programa desenvolvido no trabalho, e o capítulo 9 compreende as conclusões e sugestões para trabalhos futuros. Por fim, estão listadas as referências bibliográficas, bibliografia complementar e apêndice.

2 REVISÃO DA LITERATURA

DEGASPARE (1975) utilizou o elemento finito T 18 na resolução de problemas da teoria das placas delgadas, elásticas e isotrópicas, mediante a aplicação do método dos elementos finitos pelo processo dos deslocamentos. O elemento finito T 21, do qual provém o elemento T 18, foi apresentado por HOLLAND & BELL (1969) supondo constante a espessura do elemento. No trabalho de DEGASPARE (1975), acrescentou-se a consideração de variação linear da espessura ao cubo ao nível do elemento. O computador utilizado na época do trabalho foi um IBM 1130 com 32K de memória central. O autor desenvolveu um programa em linguagem FORTRAN IV para a resolução dos problemas propostos e outro programa que traça, utilizando o PLOTTER IBM 1627, os momentos principais. Vários exemplos foram apresentados, onde as correspondentes soluções numéricas foram comparadas com suas soluções analíticas, quando estas existiam; e com esses exemplos, ficou mostrada a eficiência do elemento finito T 18 para a resolução de problemas de flexão em placas delgadas. Vale dizer que a formulação utilizada foi feita com parâmetros generalizados, ou seja, há a necessidade da inversão da matriz de rigidez para cada elemento distinto da malha. Isso poderia ter sido evitado utilizando-se a formulação nodal com coordenadas homogêneas.

BATOZ; BATHE; HO (1980) apresentaram os resultados do estudo teórico, numérico e detalhado de elementos de placa com 9 graus de liberdade, sendo 3 por vértice (translação em z (w) e rotações em x (θ_x) e y (θ_y)), onde o objetivo desse estudo foi identificar ou desenvolver um elemento ótimo para a análise linear geral de problemas de placas. Foi dada especial atenção à formulação teórica e avaliação numérica de 3 elementos finitos: o DKT, o HSM e o SRI (*selective reduced integration*), onde se utilizou o programa de computador ADINA, apresentado por BATHE (1975), na implementação desses elementos. Os autores concluíram que os mais eficientes e confiáveis elementos triangulares de placa dentre os estudados eram o DKT e o HSM. Os resultados obtidos com o elemento

SRI mostraram que considerando uma placa grossa, o elemento converge para a solução de placas grossas, mas que o mesmo não acontece em se tratando de placas delgadas. Assim, pôde-se dizer que o elemento com integração seletiva reduzida (SRI) não é eficiente quando comparado com os elementos DKT e HSM.

MATTAR NETO (1989) apresentou os fundamentos das teorias das placas clássicas de Kirchhoff e de Reissner-Mindlin, para problemas elásticos e lineares, e mostrou as principais diferenças entre elas. Foram desenvolvidos 15 elementos finitos triangulares de placa com 9 graus de liberdade, sendo 3 por vértice (deslocamento transversal w e as rotações θ_x e θ_y). Desses 15 elementos desenvolvidos, 14 foram com base na teoria de Reissner-Mindlin e 1 a partir de parâmetros concentrados. Utilizou-se principalmente funções de interpolação com continuidade C^0 . Os 15 elementos finitos desenvolvidos foram comparados a partir de critérios definidos visando a precisão dos elementos e sua eficiência computacional numa futura generalização à análise de cascas em problemas não lineares. Foi utilizado o programa de computador apresentado em ZIENKIEWICZ (1977) para a execução das análises, onde as rotinas dos elementos desenvolvidos foram implementadas em formato adequado. Dentre os elementos estudados, está o elemento DKT. O autor observou a inadequação deste elemento em problemas de placas espessas pelos autovalores obtidos nesses casos, onde os valores de rigidez são bem grandes. O autor concluiu que, pelas comparações feitas e observando os critérios estabelecidos no trabalho, o elemento triangular de Hughes, com integração exata das matrizes de rigidez por flexão (K_f) e por cisalhamento (K_c) e com o fator $\frac{c}{1+c}$ multiplicando K_c , onde $c = \frac{(1+\mu)}{h(1-\mu^2)} \frac{t^2}{A}$ (h = fator de distribuição do cisalhamento ao longo da seção transversal ($h=5/6$); μ = coeficiente de Poisson; t = espessura da placa e A = área do elemento), é o melhor, dentre os estudados, para a aplicação em problemas não lineares de cascas/placas finas e moderadamente espessas.

REZENDE (1990) abordou alguns aspectos da análise de pavimentos de edifícios em microcomputadores pela aplicação do método dos elementos finitos na discretização das lajes e vigas dos pavimentos. Os elementos finitos DKT e DKTC* foram utilizados, e suas formulações foram feitas com base em BATOZ; BATHE; HO (1980) e JEYACHANDRABOSE; KIRKHOPE; RAMESH BABU (1985). REZENDE (1990) desenvolveu um sistema em linguagem de programação PASCAL para a resolução do problema inicialmente proposto, onde além da determinação dos esforços e deslocamentos da estrutura carregada, ainda se traçam os diagramas dos mesmos das lajes. Neste sistema, a

*Para maiores detalhes, ver itens 4.2 e 4.6.

entrada de dados é feita pelo uso de palavras-chave no arquivo de entrada e ainda é proposto um algoritmo alternativo e simplificador de montagem da matriz de rigidez da estrutura, que é caracterizado pela geração de blocos de linhas da matriz, correspondentes a cada ponto nodal da discretização efetuada. São apresentados alguns exemplos que mostram a eficiência do sistema desenvolvido.

SOARES (1991) utilizou os elementos finitos HSM e HSMC para estudo de flexão de placas delgadas em regime elástico, na análise de pavimentos de edifícios pelo método dos elementos finitos. A autora apresenta a formulação do elemento HSM, utilizando o sistema de coordenadas homogêneas. Vários exemplos foram apresentados e os resultados foram comparados com os obtidos pelo emprego do elemento finito DKT em REZENDE (1990), pelo método dos elementos de contorno e com valores analíticos, onde se pôde ver a eficiência do elemento finito HSM na resolução dos problemas propostos.

SORIA GALVARRO BALCAZAR (1991) teve como objetivo principal desenvolver um sistema para análise linear de estruturas tridimensionais de plantas retangulares, discretizáveis por elementos de chapa e placa combinados com elementos de barra, utilizando o método dos elementos finitos. Foi adotada a técnica das subestruturas. O elemento finito de chapa utilizado no trabalho foi o A.C.M., que é um elemento retangular desenvolvido por ADINI-CLOUGH-MELOSH de acordo com PRZEMIENIECKI (1968). O elemento finito de placa utilizado no trabalho foi o B.F.S., que é um elemento retangular desenvolvido por BOGNER-FOX-SCHMIT de acordo com BREBBIA & CONNOR (1975). São apresentados 3 tipos de elementos estruturais: paredes, lajes e vigas e pilares. As paredes são discretizadas por elementos de placa; as lajes são discretizadas por elementos de chapa superpostos por elementos de placa; e as vigas e pilares são discretizados por elementos de barra de pórtico tridimensional, podendo trabalhar com todos os seus graus de liberdade ou com parte deles.

CORRÊA & RAMALHO (1993) apresentaram um exame comparativo entre dois processos básicos de análise estática de pavimentos do conjunto laje-viga: grelha com painéis de laje isolados e o método dos elementos finitos com interação de lajes e vigas. Foi utilizado o programa GPLAN, desenvolvido por CORRÊA & RAMALHO (1987), na análise do pavimento pelo processo de grelha e o programa ANSER, desenvolvido por RAMALHO (1990) e implementado por CORRÊA (1991), na análise em elementos finitos. Neste último tipo de análise, foi utilizado 3 tipos de elementos: o clássico de barra tridimensional, com nós nas extremidades com 6 graus de liberdade; o T3AF, que é um elemento triangular de placa com 3 graus de liberdade em cada vértice, desenvolvido por

BERGAN & HANSSEN (1975) com a formulação livre; o Q3AF, que é quadrilateral e formado por 4 elementos T3AF. Os resultados encontrados com a utilização de cada um dos dois processos, para um mesmo exemplo de pavimento de edifício, são diferentes; os autores afirmaram que os resultados provenientes da utilização do método dos elementos finitos são mais confiáveis em função dos vínculos adicionais que permite representar. Como conclusão, os autores afirmaram que a utilização do método dos elementos finitos na análise de pavimentos de edifícios possibilita representar de maneira mais adequada o comportamento estrutural.

BAPTISTA (1994) teve como principal objetivo em seu trabalho a confirmação e divulgação do método dos elementos finitos na análise de pavimentos de edifícios. Foi desenvolvido um pré-processador com gerador de dados para a malha utilizando um procedimento simples e rápido, onde a linguagem de programação utilizada foi o C no ambiente Turbo da Borland. Esse pré-processador desenvolvido apresenta algumas vantagens em relação a outros sistemas estudados: alteração da malha de pontos, conferência dos dados de entrada e dos resultados através de tela gráfica e troca de arquivos. Foi utilizado o programa LASER, desenvolvido por RAMALHO (1990), em todo o processamento dos pavimentos. A dissertação apresenta um estudo da representação ideal do pavimento, através da integração dos seus elementos estruturais e da sistematização dos procedimentos de modelagem. A partir dos resultados encontrados, utilizando os modelos de grelha e elementos finitos, a autora concluiu que é fundamental a utilização de modelos mais próximos à realidade, onde se integrem a laje e os demais componentes estruturais. A autora afirma que a idéia de que o desligamento das peças produz modelos menos rígidos e a favor da segurança é errônea, pois a rigidez relativa dos componentes estruturais é que define os fluxos de carga pelo sistema estrutural hiperestático.

BEZERRA (1995) estudou o comportamento de estruturas tridimensionais de edifícios altos submetidas a ações verticais e laterais, levando em consideração a contribuição da rigidez transversal à flexão das lajes. Os elementos adotados para a análise da flexão das lajes do edifício são o DKT e o DKTC. As lajes foram consideradas como diafragmas infinitamente rígidos em seu plano, compatibilizando os deslocamentos correspondentes e transmitindo as forças do vento aos pilares. Foram admitidas excentricidades em pilares de mesma prumada entre pavimentos consecutivos e excentricidades das vigas em relação ao centro de gravidade dos pilares. Os pavimentos puderam ser diferentes entre si. A técnica das subestruturas foi utilizada, onde cada subestrutura correspondeu a um andar do sistema estrutural, englobando os elementos

horizontais, que são as vigas e lajes contidos no pavimento superior, e os elementos verticais, que são os pilares ou pilares-parede, que se ligam ao pavimento inferior. Foi desenvolvido um sistema computacional, onde se utilizou os recursos gráficos da linguagem Turbo PASCAL; porém, a estrutura principal do sistema foi desenvolvida na linguagem FORTRAN. A entrada e saída de dados foi feita via arquivos, e aquela utiliza palavras-chave. Os dados dos elementos de viga e placa foram implementados com o auxílio do módulo I do programa desenvolvido por REZENDE (1990). O autor observou nos 2 exemplos apresentados, que levando em conta a rigidez à flexão das lajes, os deslocamentos são menores.

MARTINS & SABINO (1997) apresentaram o elemento finito denominado P15N. São apresentados vários exemplos utilizando-se este elemento. Os resultados encontrados para os deslocamentos w no centro de uma placa quadrada, submetida a carregamento uniformemente distribuído ou carga concentrada, e tendo como condições de contorno os lados simplesmente apoiados ou engastados, são apresentados graficamente, onde se pode notar a boa convergência do referido elemento, inclusive comparando-se com resultados encontrados, para o mesmo exemplo, utilizando-se vários outros elementos, como o DKQ e o ACM. Além de exemplos de placas de formato quadrado, são apresentados outros exemplos com placas de forma retangular, triangular e circular. Também são apresentados exemplos comparativos utilizando-se sistemas de análise estrutural internacionalmente conhecidos, como os ANSYS e SAP.

MARTINS, C.H. (1998) teve como principal objetivo em seu trabalho calcular esforços e deslocamentos de estruturas tridimensionais de edifícios de andares múltiplos, sujeitos às ações verticais e laterais, considerando a rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 2ª ordem, onde se considerou a não linearidade geométrica dos pilares da estrutura. O trabalho é uma continuação do que foi feito em BEZERRA (1995), que utilizou a teoria de 1ª ordem. Apresentou-se ainda um estudo sobre os parâmetros de instabilidade global α e γ_z em edifícios altos. Para possibilitar as análises descritas, desenvolveu-se um programa de computador, de nome EDIFICIO.F90, dividido em 5 subprogramas, em linguagem de programação FORTRAN com pré e pós-processadores desenvolvidos no *Visual Basic 4.0*. O material da estrutura foi considerado como apresentando um comportamento elástico-linear. As lajes foram admitidas como diafragmas infinitamente rígidos em seus planos e foram discretizadas com o elemento finito DKTC. As vigas foram discretizadas por elementos lineares, com 3 graus de liberdade (gdl) por extremidade, ao nível das lajes; podendo estar ligadas a pilares ou a outras vigas. Admitem-se variação de seção para os diversos elementos

de viga e excentricidades entre a extremidade de um trecho de viga em relação ao centro de gravidade do pilar, podendo-se considerar trechos rígidos. Os pilares apresentam 6 gdl por extremidade, devem apresentar seção transversal bissetricada e não foram consideradas excentricidades entre pilares de mesma prumada. Não há a necessidade de que todos os pilares estejam presentes em todos os pavimentos. As cargas laterais foram aplicadas diretamente nas lajes. Cada andar do sistema estrutural foi formado pela subestrutura que compreende as vigas e as lajes do pavimento superior e os pilares que se ligam ao pavimento inferior. As técnicas de subestruturação em série e em paralelo na matriz de rigidez global da estrutura foram utilizadas. A técnica de subestruturação em paralelo pelo método de condensação estática “*Choleski Decomposition*” foi utilizada para se obter a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais do pavimento em função dos nós externos, onde as coordenadas dos nós internos são liberadas parcialmente para se chegar à matriz de rigidez na forma condensada. O método de condensação estática tradicional não foi escolhido por apresentar maior número de operações numéricas e maior esforço computacional. O autor observou com os resultados obtidos que com a consideração da rigidez à flexão das lajes os deslocamentos horizontais nos pavimentos são menores, e com isso os esforços de flexão nos elementos estruturais, podendo ser verificado nos pilares e vigas, também são reduzidos; que considerando a não linearidade geométrica nos pilares, observa-se um aumento dos valores obtidos para os deslocamentos horizontais dos pavimentos e esforços envolvidos; que com a consideração de trechos rígidos entre viga-pilar os deslocamentos são reduzidos e há uma redistribuição dos esforços nos elementos estruturais. O autor concluiu seu trabalho comentando sobre a importância da consideração da rigidez à flexão das lajes, e observou que para alguns casos, esta importância foi tão significativa, que em teoria de 2ª ordem considerando a rigidez transversal da laje, os deslocamentos foram menores que em teoria de 1ª ordem sem a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes. O trabalho não apresentou um estudo sobre diferentes formas de se discretizar as lajes dos pavimentos, e observou sobre a possibilidade de se utilizar outro elemento finito de placa no lugar do DKT para fins de comparação. Como outra sugestão para a continuação da pesquisa, o autor citou um estudo mais aprofundado dos parâmetros de instabilidade global em edifícios altos.

3 ESTUDO SOBRE PLACAS

3.1 CONCEITOS

As placas, juntamente com as chapas e cascas, fazem parte dos elementos estruturais laminares, também denominados por de superfície ou folhas. Estes elementos são caracterizados por apresentarem uma dimensão “pequena” em relação às outras duas. São muito importantes por poderem exibir maior rigidez e maior economia em relação a outros elementos estruturais, como por exemplo, os lineares, também conhecidos como reticulares ou barras, que apresentam duas dimensões “pequenas” em relação à outra, se estes fossem utilizados em lugar daqueles.

As placas, assim como as chapas, são planas. Estão submetidas a carregamentos ortogonais ao plano médio, ou superfície média, ou ainda folheto médio, que é a superfície equidistante daquelas que definem o elemento. A espessura da placa (h) é dada pela distância entre estas duas superfícies. Figura 01.

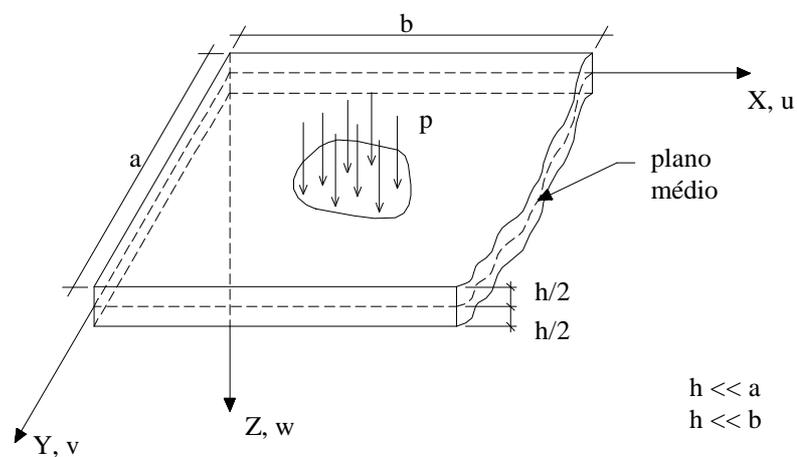


FIGURA 01 – Placa carregada

3.2 CLASSIFICAÇÕES

Quanto ao material o qual são constituídas, as placas podem ser classificadas como:

- isótropas: quando as propriedades forem as mesmas em qualquer direção;
- ortótropas: quando as propriedades forem diferentes em duas direções ortogonais;
- anisótropas: quando as propriedades forem diferentes em todas as direções.

Quanto à relação h/a , onde a é o menor dos vãos da placa, elas podem ser classificadas como:

- muito delgadas: $\frac{h}{a} \leq \frac{1}{100}$;
- delgadas: $\frac{1}{100} < \frac{h}{a} \leq \frac{1}{5}$;
- moderadamente espessas ou espessas: $\frac{h}{a} > \frac{1}{5}$.

3.3 HIPÓTESES BÁSICAS PARA AS TEORIAS DAS PLACAS E SIMPLIFICAÇÕES

As hipóteses básicas para as teorias das placas são:

- Na superfície média da placa, não há deformações e a superfície neutra vai gerar a superfície elástica;
- O efeito de σ_z é desprezado no cálculo das deformações;
- A última hipótese depende da cinemática da placa, que pode ser segundo a teoria de Kirchhoff ou segundo a teoria de Reissner-Mindlin.

Pela teoria de Kirchhoff, seções planas permanecem planas após a deformação da estrutura, ou seja, qualquer reta perpendicular à superfície média antes do carregamento, permanece perpendicular à superfície média deformada após o carregamento; isso pode não acontecer pela teoria de Reissner-Mindlin, por causa da consideração de deformações por cisalhamento. Ver figuras 02 e 03.

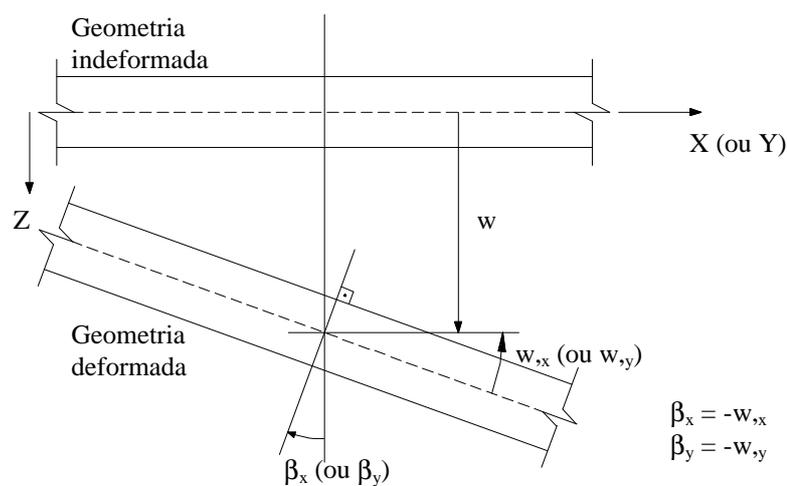


FIGURA 02 – Cinemática da placa segundo a teoria de Kirchhoff

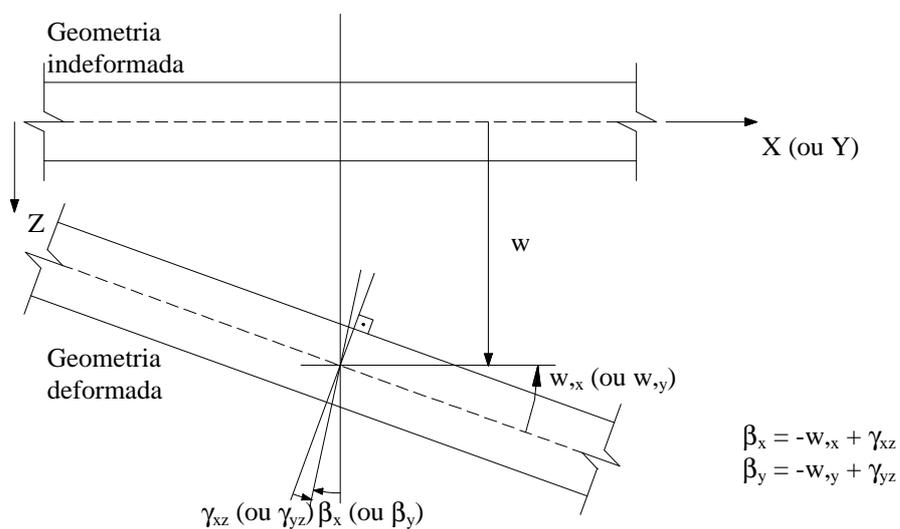


FIGURA 03 – Cinemática da placa segundo a teoria de Reissner-Mindlin

Pela teoria de Kirchhoff:

$$\beta_x = -\frac{\partial w}{\partial x} = -w_{,x} \quad (1.a)$$

$$\beta_y = -\frac{\partial w}{\partial y} = -w_{,y} \quad (1.b)$$

Pela teoria de Reissner-Mindlin:

$$\beta_x = -w_{,x} + \gamma_{xz} \quad (2.a)$$

$$\beta_y = -w_{,y} + \gamma_{yz} \quad (2.b)$$

Os sentidos positivos de β_x e β_y são dados na figura 04 abaixo:

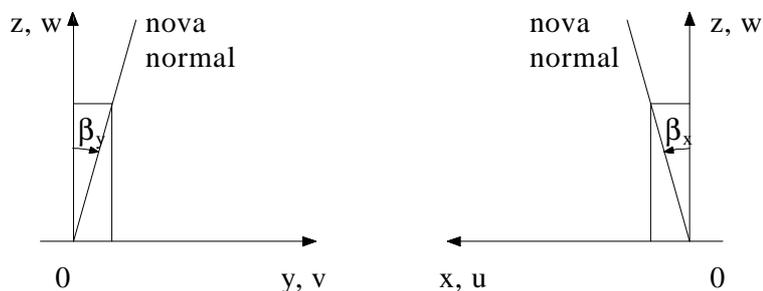


FIGURA 04 – Direções positivas de β_y e β_x

A teoria de Reissner-Mindlin é aplicável a problemas de placas delgadas e moderadamente espessas, enquanto que a teoria de Kirchhoff, apenas ao caso de placas delgadas. Quanto mais fina for uma placa, analisada pelas duas teorias, mais próximos estarão os resultados obtidos, pois as deformações por cisalhamento transversal serão cada vez menores.

São admitidas ainda as seguintes simplificações:

- As tensões aplicadas às superfícies limites são desprezíveis quando comparadas com aquelas de flexão e normais à seção da placa;
- O material da placa é considerado elástico linear, onde as Leis de Hooke são válidas;
- Os deslocamentos são muito menores que a espessura da placa.

3.4 EQUACIONAMENTO

3.4.1 Esforços internos numa placa solicitada à flexão simples

No equacionamento a ser desenvolvido a seguir, deve-se considerar uma placa delgada, isótropa e homogênea, submetida à flexão simples. Será utilizada a teoria de Kirchhoff.

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (3.a)$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad (3.b)$$

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (3.c)$$

$$m_{yx} = m_{xy} \quad (3.d)$$

$$q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad (3.e)$$

$$q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (3.f)$$

A figura 05 A mostra um elemento de placa dx , dy , h , submetido a um carregamento distribuído p e sob as tensões σ_x , σ_y , τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} . A figura 05 B mostra os esforços solicitantes, momentos fletores e volventes e esforços cortantes, atuantes nas faces do elemento, definidos a partir das tensões citadas. Os esforços solicitantes são dados para largura unitária das faces do elemento. As tensões σ_z são consideradas desprezíveis.

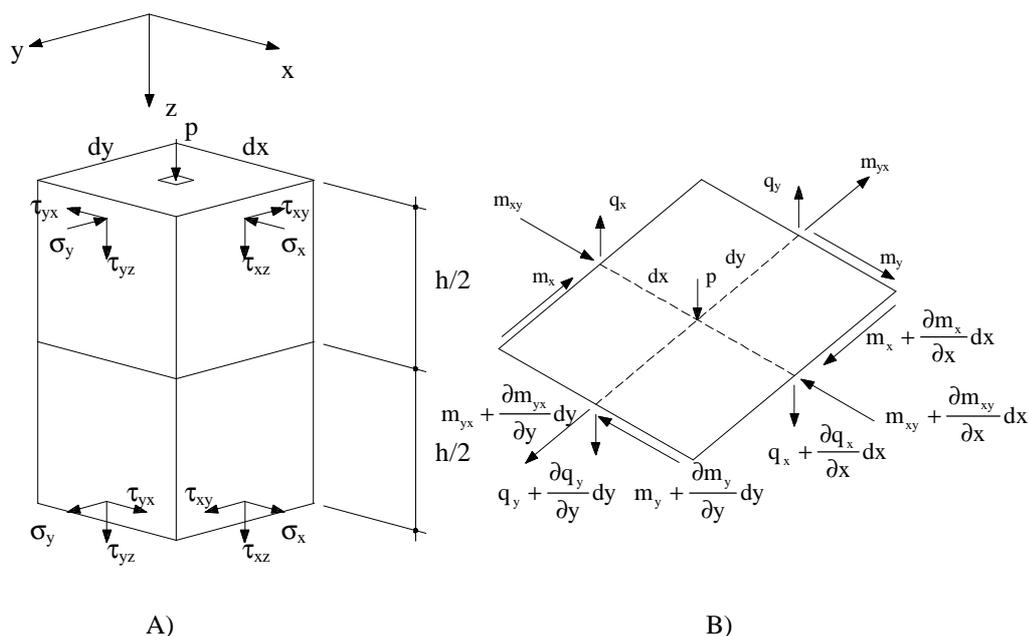


FIGURA 05 – Tensões numa placa solicitada à flexão simples

3.4.2 Condições de equilíbrio

Fazendo o equilíbrio na translação em z , rotação em torno do eixo x e rotação em torno do eixo y , obtemos as seguintes equações, respectivamente:

$$\begin{aligned}
& -q_y dx + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx - q_x dy + \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy + p dx dy = 0 \\
& \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_x}{\partial x} = -p \tag{4.a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& m_y dx - \left(m_y + \frac{\partial m_y}{\partial y} dy \right) dx + m_{xy} dy - \left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx \right) dy + q_y dx \frac{dy}{2} + \\
& + \left(q_y + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dy}{2} = 0 \\
& \frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = q_y \tag{4.b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -m_{yx} dx + \left(m_{yx} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} dy \right) dx - m_x dy + \left(m_x + \frac{\partial m_x}{\partial x} dx \right) dy - q_x dy \frac{dx}{2} + \\
& - \left(q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} dx \right) dy \frac{dx}{2} = 0 \\
& \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = q_x \tag{4.c}
\end{aligned}$$

Agrupando as 3 equações em uma só:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -p \tag{5}$$

Deve-se observar que as derivadas de ordem superior dx^2 e dy^2 foram desprezadas e que na obtenção da eq.(4.c) foi utilizada a eq.(3.d).

3.4.3 Relações deformação – deslocamento

Admitindo como hipóteses que $\sigma_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, as relações deformação – deslocamento do problema podem ser escritas como:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (6.a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6.b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w(x,y)}{\partial z} = 0 \quad (6.c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (6.d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y)}{\partial x} = 0 \quad (6.e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} = 0 \quad (6.f)$$

3.4.4 Campo de deslocamentos

A partir da eq.(6.e), pode-se determinar a expressão para o deslocamento u:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \int \partial u &= -\int \frac{\partial w}{\partial x} \partial z \\ u &= -z \frac{\partial w}{\partial x} + C_1 \end{aligned}$$

Para $z = 0$, $u = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

Assim:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (7.a)$$

Analogamente:

$$v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (7.b)$$

$$\{u, v, w\} = \left\{ -z \frac{\partial w}{\partial x}, -z \frac{\partial w}{\partial y}, w \right\}$$

3.4.5 Campo de deformações

A partir das expressões para os deslocamentos (eq.(7.a) e eq.(7.b)), pode-se determinar as expressões para as deformações.

Substituindo-se a eq.(7.a) e a eq.(7.b) nas eq.(6.a), (6.b) e (6.c), obtemos:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (8.a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (8.b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \left(-z \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8.c)$$

$$\{ \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy} \} = \left\{ -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}$$

3.4.6 Relações tensão – deformação

As relações tensão – deformação, ou Lei de Hooke, podem ser expressas, já admitindo as hipóteses iniciais, como:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu \sigma_y] \quad (9.a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu \sigma_x] \quad (9.b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (9.c)$$

$$\text{onde } G = \frac{E}{2(1 + \nu)}.$$

Escrevendo na forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

Escrevendo inversamente:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (11)$$

3.4.7 Campo de tensões

Substituindo-se as eq.(8.a), (8.b) e (8.c) na eq.(11) escrita de forma separada, tem-se:

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z \quad (12.a)$$

$$\sigma_y = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) z \quad (12.b)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \quad (12.c)$$

3.4.8 Esforços internos

Substituindo-se as eq.(12.a), (12.b) e (12.c) nas eq.(3.a), (3.b) e (3.c), respectivamente:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = \int_{-h/2}^{h/2} -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z^2 dz = -\frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \cdot \frac{h^3}{12}$$

Fazendo $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D$, temos:

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (13.a)$$

Analogamente:

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (13.b)$$

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} -2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z^2 dz = -2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{h^3}{12} = -2G \frac{h^3}{12} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)$$

$$\text{Fazendo } C = G \frac{h^3}{12} = \frac{D}{2}(1-\nu)$$

$$m_{xy} = -2C \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (13.c.1)$$

ou:

$$m_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (13.c.2)$$

Lembrando que $m_{xy} = m_{yx}$ (eq.(3.d)).

Substituindo-se as eq.(13.a) e (13.c.2) na eq.(4.c):

$$q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (13.d.1)$$

ou, utilizando-se o operador Laplaciano ∇^2 ou $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$:

$$q_x = -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial x} = -D \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \quad (13.d.2)$$

Analogamente:

$$q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right) \quad (13.e.1)$$

ou:

$$q_y = -D \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial y} = -D \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \quad (13.e.2)$$

Substituindo-se as eq.(13.a), (13.b) e (13.c.2) na eq.(5), temos:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (14.1)$$

ou, utilizando-se o operador Laplaciano:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{p}{D} \quad (14.2)$$

ou:

$$\Delta \Delta w = \frac{p}{D}$$

$$\Delta^2 w = \frac{p}{D} \quad (14.3)$$

3.5 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Seja a placa da figura 06. Consideram-se dois elementos consecutivos de comprimento dy localizados na borda $X = a$. Como se vê na figura citada, o elemento da esquerda está submetido ao momento volvente $\left(m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy \right) dy$, enquanto que o momento volvente atuante no elemento da direita possui valor de $m_{xy} dy$. Substituindo esses momentos por seus binários correspondentes e procedendo-se à devida subtração, observa-se

uma força de $\frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy$, que, por unidade de comprimento, somada com a força transversal q_x produz uma força denominada de força de Kirchhoff (v_x).

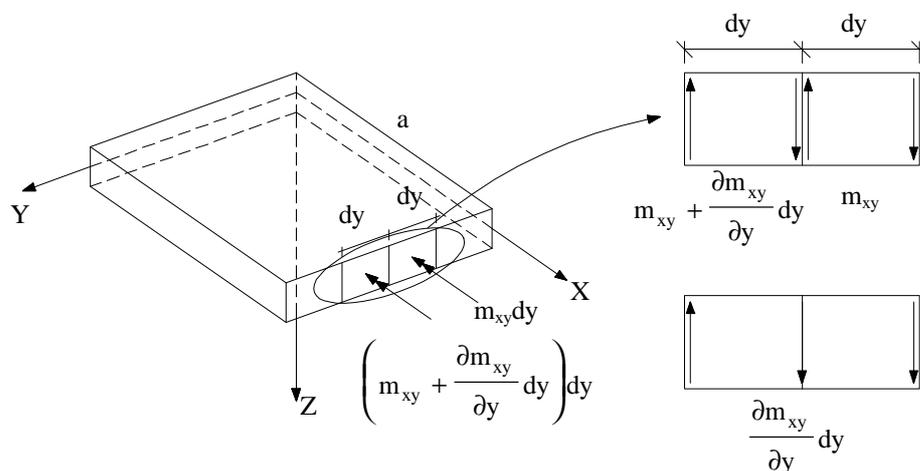


FIGURA 06 – Força de Kirchhoff

$$m_{xy} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy - m_{xy} = \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy$$

$$v_x dy = q_x dy + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} dy$$

ou:

$$v_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad (15.a.1)$$

Substituindo-se as eq.(13.d.1) e (13.c.2) na eq.(15.a.1), temos:

$$v_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) - D(1-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

$$v_x = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - D \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - D \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + D\nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$$

$$v_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \nu \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right]$$

$$v_x = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] \quad (15.a.2)$$

Analogamente:

$$v_y = q_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad (15.b.1)$$

ou:

$$v_y = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] \quad (15.b.2)$$

Mostra-se neste momento os tipos mais comuns de condições de contorno de placas:

3.5.1 Borda simplesmente apoiada

$$\text{Para } X = a \quad \Rightarrow \quad w = 0 \quad \text{e} \quad m_x = \bar{M}$$

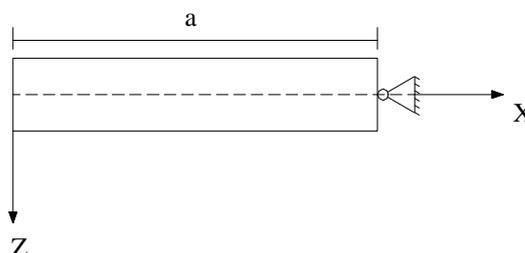


FIGURA 07 – Borda simplesmente apoiada

Substituindo-se $m_x = \bar{M}$ na eq.(13.a) tem-se:

$$-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \bar{M}$$

$$\text{Como } \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \text{ basta dizer que } \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\bar{M}}{D}$$

$$\text{Para } \bar{M} = 0 \Rightarrow w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

3.5.2 Borda engastada

$$\text{Para } X = a \Rightarrow w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

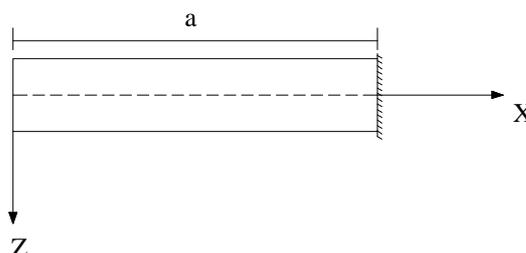


FIGURA 08 – Borda engastada

3.5.3 Borda livre

$$\text{Para } X = a \Rightarrow m_x = \bar{M} \quad \text{e} \quad v_x = \bar{V}$$

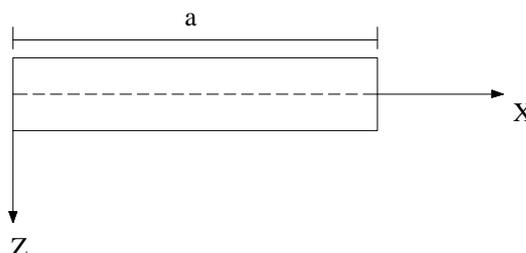


FIGURA 09 – Borda livre

Substituindo-se $m_x = \bar{M}$ na eq.(13.a) e $v_x = \bar{V}$ na eq.(15.a.2) tem-se:

$$-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \bar{M}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\bar{M}}{D}$$

$$-D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = \bar{V}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = -\frac{\bar{V}}{D}$$

Para $\bar{M} = 0$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

Para $\bar{V} = 0$:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$$

3.6 FORÇAS DE CANTO

A figura 10 mostra o aparecimento de uma força no canto da placa, conhecida como força de canto, devido à soma dos dois vetores de mesmo sentido dos binários formadores dos momentos m_{yx} e m_{xy} no canto da placa.

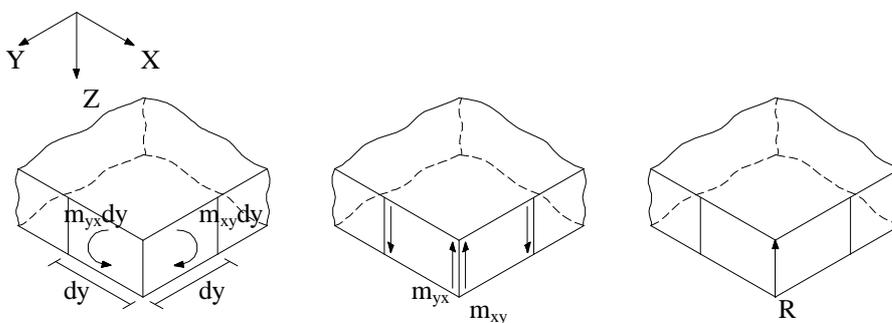


FIGURA 10 – Força de canto

Levando-se em consideração a eq.(3.d), pode-se escrever a eq.(16) abaixo:

$$R = 2m_{xy} \quad (16)$$

4 O ELEMENTO DKT

4.1 GENERALIDADES

Neste capítulo será apresentada a dedução da matriz de rigidez do elemento finito DKT (*discrete Kirchhoff triangle*) e tensões, bem como seu vetor de cargas nodais equivalentes para carregamento uniformemente distribuído. Por fim, será apresentada a transformação do elemento finito DKT no elemento finito DKTC (DKT condensado), já citado em capítulo precedente. O presente capítulo foi escrito com base em BATOZ; BATHE; HO (1980), JEYACHANDRABOSE et al. (1985) e BEZERRA (1995).

4.2 INTRODUÇÃO

O elemento finito DKT faz parte do grupo dos elementos finitos triangulares de placa com 9 graus de liberdade, sendo 3 por vértice (translação em z (w) e rotações em x (θ_x) e y (θ_y)). Ver figura 11.

A teoria de pequenos deslocamentos de placas com deformações por esforço cortante incluídos, também conhecida como teoria das placas de Reissner-Mindlin, é utilizada na formulação do elemento finito DKT. Após as deduções das expressões de energia de deformação e antes de se chegar à matriz de rigidez do elemento DKT, admite-se que o elemento será utilizado na análise de placas delgadas e assim, as deformações por esforço cortante, e conseqüentemente a energia de deformação causada por esse esforço, são desprezadas quando comparadas com a energia de deformação por flexão.

A formulação do elemento finito DKT baseia-se nas seguintes hipóteses: as rotações β_x e β_y variam quadraticamente no elemento, sendo β_x e β_y as rotações da normal ao plano médio indeformado do elemento, segundo os planos $x-z$ e $y-z$, respectivamente; a hipótese

maioria dos casos práticos da análise estrutural, as placas que são tratadas, ou seja, as lajes, são de formato retangular.

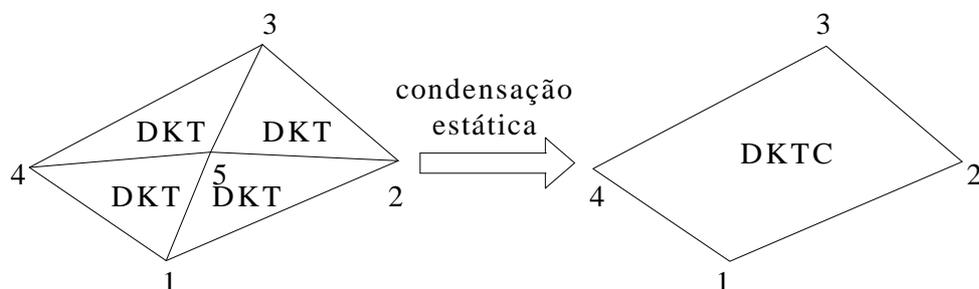


FIGURA 12 – Condensação estática do elemento finito DKT

Como observações adicionais, pode-se dizer que quando a formulação do DKT é aplicada a um elemento de viga, obtém-se a matriz de rigidez exata utilizando um polinômio cúbico de w ; a formulação do elemento DKT pode ser estendida a elementos quadriláteros, sem serem submetidos ao processo de condensação estática, com 12 graus de liberdade (como é o caso do elemento DKQ comentado anteriormente) e outros elementos poligonais de placa.

4.3 MATRIZ DE RIGIDEZ

4.3.1 Energia de deformação

Utilizando-se a teoria de Reissner-Mindlin, o campo de deslocamentos de um elemento de placa pode ser escrito como:

$$u = z \cdot \beta_x(x, y) = z \cdot (-w_{,x} + \gamma_{xz}) \quad (17.a)$$

$$v = z \cdot \beta_y(x, y) = z \cdot (-w_{,y} + \gamma_{yz}) \quad (17.b)$$

$$w = w(x, y) \quad (17.c)$$

Nota-se que foram utilizadas as eq.(2.a) e (2.b) e que as direções positivas para β_x e β_y foram apresentadas na figura 04.

O campo de deformações por flexão, dado pelo vetor $\{\varepsilon\}_f$, pode ser escrito, utilizando-se as eq.(6.a), (6.b), (6.d), (17.a) e (17.b), como:

$$\{\varepsilon\}_f = \begin{Bmatrix} z \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ z \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ z \left(\frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} = z \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} = z\{k\} \quad (18)$$

onde o vetor $\{k\}$ é conhecido como vetor curvatura.

Utilizando-se as eq.(2.a) e (2.b), pode-se escrever o vetor de deformações por esforço cortante, como:

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

Os esforços internos de flexão podem ser apresentados pelo vetor $\{\sigma\}_f$, utilizando as eq.(11) e (18), como:

$$\{\sigma\}_f = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = z \cdot \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \{k\} = z[D]\{k\} \quad (20)$$

Utilizando-se a eq.(9.c) e fazendo-se analogia para a deformação γ_{yz} , substituindo-se a expressão de G em função de ν , e acrescentando-se o fator de correção para esforço cortante ψ^* , podemos escrever o vetor de esforços internos de cisalhamento, ou por força cortante:

$$\{\sigma\}_c = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E \cdot \psi}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = [E]\{\gamma\} \quad (21)$$

* Geralmente é adotado valor de 5/6 para ψ .

A expressão da energia de deformação do elemento pode ser escrita como a soma entre a parcela da energia de deformação por flexão e a parcela de energia de deformação por cisalhamento.

$$U = U_f + U_c \quad (22)$$

onde U_f , utilizando-se as eq.(18) e (20), pode ser escrita como:

$$U_f = \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_f^T \{\boldsymbol{\sigma}\}_f dv = \frac{1}{2} \int_V \{\mathbf{k}\}^T z^2 [\mathbf{D}] \{\mathbf{k}\} dx dy dz$$

$$\text{fazendo } \int_{-h/2}^{h/2} z^2 [\mathbf{D}] dz = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = [\mathbf{D}]_f,$$

onde $[\mathbf{D}]_f$ é a matriz de elasticidade para flexão de placas.

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{\mathbf{k}\}^T [\mathbf{D}]_f \{\mathbf{k}\} dx dy = \frac{1}{2} \int_A \{\mathbf{k}\}^T [\mathbf{D}]_f \{\mathbf{k}\} dA \quad (23.1)$$

De maneira semelhante, determina-se U_c :

$$U_c = \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\gamma}\}^T \{\boldsymbol{\sigma}\}_c dv = \frac{1}{2} \int_V \{\boldsymbol{\gamma}\}^T [\mathbf{E}] \{\boldsymbol{\gamma}\} dx dy dz$$

$$\text{fazendo } \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{E}] dz = \frac{Eh\nu}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{D}]_c,$$

$$U_c = \frac{1}{2} \int_A \{\boldsymbol{\gamma}\}^T [\mathbf{D}]_c \{\boldsymbol{\gamma}\} dx dy = \frac{1}{2} \int_A \{\boldsymbol{\gamma}\}^T [\mathbf{D}]_c \{\boldsymbol{\gamma}\} dA \quad (24.1)$$

Efetuada-se as operações dos integrandos das eq.(23.1) e (24.1), obtém-se, respectivamente:

$$U_f = \frac{D}{2} \int_A \left(\beta_{x,x}^2 + \beta_{y,y}^2 + 2\nu\beta_{x,x}\beta_{y,y} + \frac{(1-\nu)}{2} (\beta_{x,y} + \beta_{y,x})^2 \right) dA \quad (23.2)$$

onde D é a rigidez à flexão da placa dada por $\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$, como foi visto no capítulo anterior.

$$U_c = \frac{Eh\nu}{4(1+\nu)} \int_A \left((\beta_x + w_{,x})^2 + (\beta_y + w_{,y})^2 \right) dA \quad (24.2)$$

4.3.2 Hipóteses básicas

Para a obtenção da matriz de rigidez do elemento finito DKT, são admitidas as seguintes hipóteses básicas:

a) As deformações por cisalhamento transversal e, conseqüentemente, a energia de deformação por cisalhamento transversal são desprezadas quando comparadas com aquelas de flexão. Assim, apenas a matriz de rigidez de flexão é deduzida nesse elemento.

$$U = U_f + U_c \cong U_f \quad (25.1)$$

b) As rotações β_x e β_y variam quadraticamente no elemento.

$$\beta_x(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 \quad (26.a)$$

$$\beta_y(x, y) = \rho_1 + \rho_2 x + \rho_3 y + \rho_4 x^2 + \rho_5 xy + \rho_6 y^2 \quad (26.b)$$

onde se observa a necessidade de 3 nós por lado do elemento. Este 3º nó “provisório” é localizado no meio de cada lado do elemento.

Escrevendo β_x e β_y em função de coordenadas adimensionais ξ e η , temos:

$$\beta_x(\xi, \eta) = \alpha'_1 + \alpha'_2 \xi + \alpha'_3 \eta + \alpha'_4 \xi^2 + \alpha'_5 \xi \eta + \alpha'_6 \eta^2 \quad (27.a.1)$$

$$\beta_y(\xi, \eta) = \rho_1' + \rho_2'\xi + \rho_3'\eta + \rho_4'\xi^2 + \rho_5'\xi\eta + \rho_6'\eta^2 \quad (27.b.1)$$

$$\beta_x(\xi, \eta) = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2\} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \\ \alpha_4' \\ \alpha_5' \\ \alpha_6' \end{Bmatrix} = \Psi(\xi, \eta) \cdot \{\alpha'\} \quad (27.a.2)$$

$$\beta_y(\xi, \eta) = \{1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2\} \cdot \begin{Bmatrix} \rho_1' \\ \rho_2' \\ \rho_3' \\ \rho_4' \\ \rho_5' \\ \rho_6' \end{Bmatrix} = \Psi(\xi, \eta) \cdot \{\rho'\} \quad (27.b.2)$$

O significado das coordenadas adimensionais ξ e η pode ser visto na figura 13.

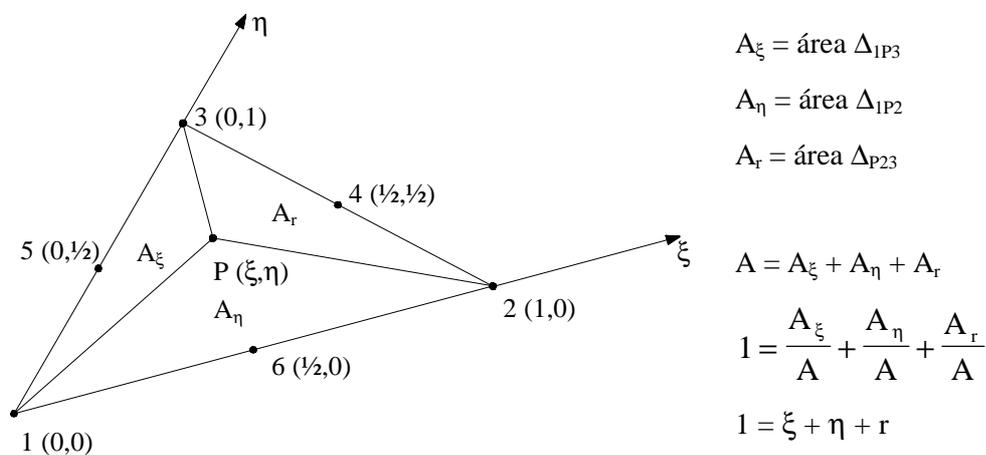


FIGURA 13 – Coordenadas adimensionais ξ e η

O vetor com os valores dos β_x nodais pode ser escrito como:

$$\{\beta_x\} = \begin{Bmatrix} \beta_{x1} \\ \beta_{x2} \\ \beta_{x3} \\ \beta_{x4} \\ \beta_{x5} \\ \beta_{x6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \{\alpha'\} = [A] \cdot \{\alpha'\} \quad (28.a)$$

Analogamente:

$$\{\beta_y\} = \begin{Bmatrix} \beta_{y1} \\ \beta_{y2} \\ \beta_{y3} \\ \beta_{y4} \\ \beta_{y5} \\ \beta_{y6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \{\rho'\} = [A] \cdot \{\rho'\} \quad (28.b)$$

$$\{\alpha'\} = [A]^{-1} \cdot \{\beta_x\} \quad (29.a)$$

$$\{\rho'\} = [A]^{-1} \cdot \{\beta_y\} \quad (29.b)$$

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

Substituindo as eq.(29.a) e (29.b) nas eq.(27.a.2) e (27.b.2), respectivamente, e utilizando-se a eq.(30), podemos escrever que:

$$\beta_x(\xi, \eta) = \Psi(\xi, \eta) \cdot [A]^{-1} \cdot \{\beta_x\} = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6\} \cdot \{\beta_x\} \quad (27.a.3)$$

$$\beta_y(\xi, \eta) = \Psi(\xi, \eta) \cdot [A]^{-1} \cdot \{\beta_y\} = \{N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4 \quad N_5 \quad N_6\} \cdot \{\beta_y\} \quad (27.b.3)$$

onde os N_i são as funções de forma dadas por:

$$N_1 = 1 - 3(\xi + \eta) + 2(\xi + \eta)^2 \quad (31.a)$$

$$N_2 = 2\xi^2 - \xi \quad (31.b)$$

$$N_3 = 2\eta^2 - \eta \quad (31.c)$$

$$N_4 = 4\xi\eta \quad (31.d)$$

$$N_5 = 4\eta(1 - \xi - \eta) \quad (31.e)$$

$$N_6 = 4\xi(1 - \xi - \eta) \quad (31.f)$$

c) A teoria de Kirchhoff é imposta discretamente nos nós * :

c.1) de vértice (1, 2, 3)

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + w_{,x} \\ \beta_y + w_{,y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

c.2) de meio de lado (4, 5, 6)

$$\beta_{sk} + w_{,sk} = 0 \quad (33)$$

onde β_{sk} e $w_{,sk}$ são a rotação na direção tangente ao lado do elemento e a diferencial de w em relação a s , respectivamente, ambos para o nó de meio de lado de número k . Ver figura 14.

Observa-se que no lugar de ξ na figura 14 poderia se ter η .

d) w varia cubicamente ao longo dos lados do elemento

$$w_s = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 \quad (34.1)$$

$$w_s = \alpha_0' + \alpha_1' \frac{s}{L_{ij}} + \alpha_2' \frac{s^2}{L_{ij}^2} + \alpha_3' \frac{s^3}{L_{ij}^3} \quad (34.2)$$

*Esta hipótese básica justifica o nome da teoria do elemento (*discrete Kirchhoff theory* ou teoria **discreta** de Kirchhoff).

Para maiores detalhes, ver item 3.3.

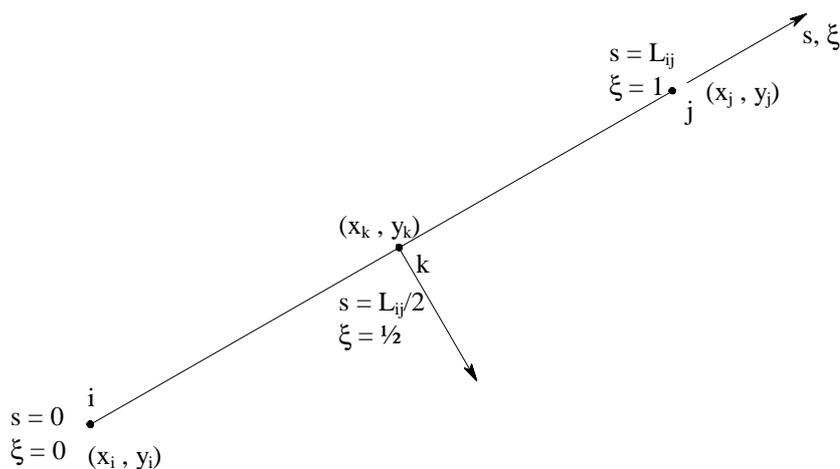


FIGURA 14 – Coordenada s do elemento de lado ij

Derivando-se w_s em relação a s , tem-se:

$$w_{s,s} = \frac{1}{L_{ij}} \alpha'_1 + \frac{2}{L_{ij}^2} \alpha'_2 s + \frac{3}{L_{ij}^3} \alpha'_3 s^2 \quad (35)$$

Para o nó i (figura 14) ($s = 0$):

$$w_i = \alpha'_0$$

$$w_{,si} = \frac{1}{L_{ij}} \alpha'_1$$

Para o nó k (figura 14) ($s = L_{ij}/2$):

$$w_k = \alpha'_0 + \frac{1}{2} \alpha'_1 + \frac{1}{4} \alpha'_2 + \frac{1}{8} \alpha'_3$$

$$w_{,sk} = \frac{1}{L_{ij}} \left(\alpha'_1 + \alpha'_2 + \frac{3}{4} \alpha'_3 \right)$$

Para o nó j (figura 14) ($s = L_{ij}$):

$$w_j = \alpha'_0 + \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3$$

$$w_{,sj} = \frac{1}{L_{ij}} (\alpha_1' + 2\alpha_2' + 3\alpha_3')$$

Para os nós i e j , pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ L_{ij}w_{,si} \\ w_j \\ L_{ij}w_{,sj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \alpha_0' \\ \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{Bmatrix} \quad (36)$$

Escrevendo inversamente:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0' \\ \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \alpha_3' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w_i \\ L_{ij}w_{,si} \\ w_j \\ L_{ij}w_{,sj} \end{Bmatrix} \quad (37)$$

onde se pode explicitar as expressões de α_i' :

$$\alpha_0' = w_i \quad (38.a)$$

$$\alpha_1' = L_{ij}w_{,si} \quad (38.b)$$

$$\alpha_2' = -3w_i - 2L_{ij}w_{,si} + 3w_j - L_{ij}w_{,sj} \quad (38.c)$$

$$\alpha_3' = 2w_i + L_{ij}w_{,si} - 2w_j + L_{ij}w_{,sj} \quad (38.d)$$

Substituindo-se as eq.(38.b) a (38.d) na expressão de $w_{,sk}$ obtemos:

$$w_{,sk} = -\frac{3}{2} \frac{w_i}{L_{ij}} - \frac{1}{4} w_{,si} + \frac{3}{2} \frac{w_j}{L_{ij}} - \frac{1}{4} w_{,sj}$$

e) β_n varia linearmente ao longo dos lados

$$\beta_{nk} = \frac{\beta_{ni} + \beta_{nj}}{2} \quad (39)$$

A figura 15 mostra a geometria do elemento DKT.

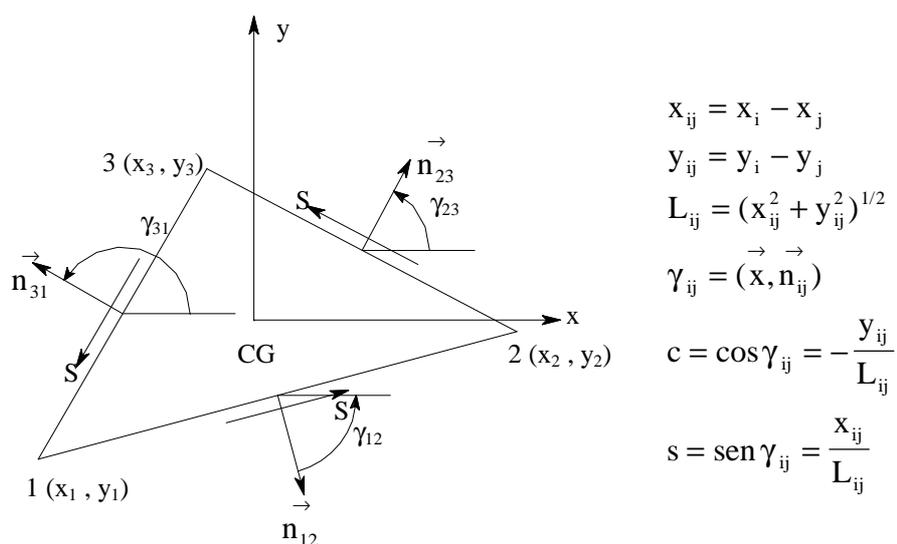


FIGURA 15 – Geometria do elemento finito DKT

As rotações β_x e β_y podem ser escritas em função de β_n e β_s utilizando-se de rotação dos eixos x e y . Assim:

$$\begin{Bmatrix} \beta_x \\ \beta_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \beta_n \\ \beta_s \end{Bmatrix} \quad (40)$$

e:

$$\begin{Bmatrix} w_{,s} \\ w_{,n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c & s \\ s & -c \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \quad (41)$$

onde θ_x e θ_y são as rotações em x e y , respectivamente e são utilizadas as eq.(1.a) e (1.b) e as seguintes igualdades*:

$$\theta_x = w_{,y} \quad (42.a)$$

*Para maiores detalhes, ver figura 11.

$$\theta_y = -w_{,x} \quad (42.b)$$

Deseja-se escrever agora β_x e β_y em função de ξ e η e do vetor de deslocamentos nodais do elemento dado pela eq.(43) abaixo:

$$\{U\}^T = \{w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3}\} \quad (43)$$

Para tanto, deve-se em primeiro lugar escrever o vetor $\{\beta_x\}$ e $\{\beta_y\}$ em função de x_{ij} , y_{ij} e L_{ij} e do vetor de deslocamentos nodais $\{U\}$, utilizando-se as eq.(32), (42.a), (42.b), (40), (39), (33) e (41).

$$\{\beta_x\}_{6 \times 1} = [XY_x]_{6 \times 9} \cdot \{U\}_{9 \times 1} \quad (44.a)$$

$$\{\beta_y\}_{6 \times 1} = [XY_y]_{6 \times 9} \cdot \{U\}_{9 \times 1} \quad (44.b)$$

onde:

$$[XY_x] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 \cdot a4 & b4 & -c4 & -1.5 \cdot a4 & b4 & -c4 \\ -1.5 \cdot a5 & b5 & -c5 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \cdot a5 & b5 & -c5 \\ 1.5 \cdot a6 & b6 & -c6 & -1.5 \cdot a6 & b6 & -c6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45.a)$$

e:

$$[XY_y] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.5 \cdot d4 & e4 & -b4 & -1.5 \cdot d4 & e4 & -b4 \\ -1.5 \cdot d5 & e5 & -b5 & 0 & 0 & 0 & 1.5 \cdot d5 & e5 & -b5 \\ 1.5 \cdot d6 & e6 & -b6 & -1.5 \cdot d6 & e6 & -b6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45.b)$$

sendo:

$$a_k = -\frac{x_{ij}}{L_{ij}^2} \quad (46.a)$$

$$b_k = \frac{3}{4} \cdot \frac{x_{ij} y_{ij}}{L_{ij}^2} \quad (46.b)$$

$$c_k = \frac{\left(\frac{1}{4} x_{ij}^2 - \frac{1}{2} y_{ij}^2\right)}{L_{ij}^2} \quad (46.c)$$

$$d_k = -\frac{y_{ij}}{L_{ij}^2} \quad (46.d)$$

$$e_k = \frac{\left(\frac{1}{4} y_{ij}^2 - \frac{1}{2} x_{ij}^2\right)}{L_{ij}^2} \quad (46.e)$$

onde $k = 4, 5, 6$ para os lados $ij = 23, 31, 12$, respectivamente.

Substituindo as eq.(44.a) e (44.b) nas eq.(27.a.3) e (27.b.3), respectivamente, temos:

$$\beta_x(\xi, \eta) = \Psi(\xi, \eta) \cdot [A]^{-1} \cdot [XY_x] \cdot \{U\} = \Psi(\xi, \eta) \cdot [G] \cdot \{U\} \quad (27.a.4)$$

$$\beta_y(\xi, \eta) = \Psi(\xi, \eta) \cdot [A]^{-1} \cdot [XY_y] \cdot \{U\} = \Psi(\xi, \eta) \cdot [H] \cdot \{U\} \quad (27.b.4)$$

onde:

$$[G]^T = \begin{bmatrix} 0 & 6.0 \cdot a_6 & -6.0 \cdot a_5 & -6.0 \cdot a_6 & 6.0 \cdot a_5 - 6.0 \cdot a_6 & 6.0 \cdot a_5 \\ 0 & 4 \cdot b_6 & 4 \cdot b_5 & -4 \cdot b_6 & -4 \cdot b_5 - 4 \cdot b_6 & -4 \cdot b_5 \\ 1 & -3 - 4 \cdot c_6 & -3 - 4 \cdot c_5 & 2 + 4 \cdot c_6 & 4 + 4 \cdot c_5 + 4 \cdot c_6 & 2 + 4 \cdot c_5 \\ 0 & -6.0 \cdot a_6 & 0 & 6.0 \cdot a_6 & 6.0 \cdot a_4 + 6.0 \cdot a_6 & 0 \\ 0 & 4 \cdot b_6 & 0 & -4 \cdot b_6 & 4 \cdot b_4 - 4 \cdot b_6 & 0 \\ 0 & -1 - 4 \cdot c_6 & 0 & 2 + 4 \cdot c_6 & -4 \cdot c_4 + 4 \cdot c_6 & 0 \\ 0 & 0 & 6.0 \cdot a_5 & 0 & -6.0 \cdot a_4 - 6.0 \cdot a_5 & -6.0 \cdot a_5 \\ 0 & 0 & 4 \cdot b_5 & 0 & 4 \cdot b_4 - 4 \cdot b_5 & -4 \cdot b_5 \\ 0 & 0 & -1 - 4 \cdot c_5 & 0 & -4 \cdot c_4 + 4 \cdot c_5 & 2 + 4 \cdot c_5 \end{bmatrix} \quad (47.a)$$

e:

$$[H]^T = \begin{bmatrix} 0 & 6.0 \cdot d6 & -6.0 \cdot d5 & -6.0 \cdot d6 & 6.0 \cdot d5 - 6.0 \cdot d6 & 6.0 \cdot d5 \\ -1 & 3 + 4 \cdot e6 & 3 + 4 \cdot e5 & -2 - 4 \cdot e6 & -4 - 4 \cdot e5 - 4 \cdot e6 & -2 - 4 \cdot e5 \\ 0 & -4 \cdot b6 & -4 \cdot b5 & 4 \cdot b6 & 4 \cdot b5 + 4 \cdot b6 & 4 \cdot b5 \\ 0 & -6.0 \cdot d6 & 0 & 6.0 \cdot d6 & 6.0 \cdot d4 + 6.0 \cdot d6 & 0 \\ 0 & 1 + 4 \cdot e6 & 0 & -2 - 4 \cdot e6 & 4 \cdot e4 - 4 \cdot e6 & 0 \\ 0 & -4 \cdot b6 & 0 & 4 \cdot b6 & -4 \cdot b4 + 4 \cdot b6 & 0 \\ 0 & 0 & 6.0 \cdot d5 & 0 & -6.0 \cdot d4 - 6.0 \cdot d5 & -6.0 \cdot d5 \\ 0 & 0 & 1 + 4 \cdot e5 & 0 & 4 \cdot e4 - 4 \cdot e5 & -2 - 4 \cdot e5 \\ 0 & 0 & -4 \cdot b5 & 0 & -4 \cdot b4 + 4 \cdot b5 & 4 \cdot b5 \end{bmatrix} \quad (47.b)$$

Deseja-se escrever agora o vetor $\{k\}$ em função do vetor de deslocamentos nodais $\{U\}$. Deve-se determinar então a matriz $[B]$ que relaciona $\{k\}$ com $\{U\}$.

$$\{k\} = [B] \cdot \{U\} \quad (48)$$

Da eq.(18), sabe-se que:

$$\{k\} = \begin{Bmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (49.1)$$

As expressões de $\beta_{x,x}$, $\beta_{y,y}$, $\beta_{x,y}$ e $\beta_{y,x}$ são determinadas a partir das eq.(27.a.4) e (27.b.4), onde se deve primeiro escrever ξ e η em função de x e y e das coordenadas em x e y dos nós de vértice do elemento.

$$\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \cdot \begin{bmatrix} x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_2 y_1 - x_1 y_2 & y_2 - y_1 & x_1 - x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (50)$$

A eq.(50) pode ser obtida utilizando-se as equações da figura 13, com as áreas dos referidos triângulos calculadas por determinante.

Com a eq.(50), pode-se agora diferenciar o vetor $\Psi(\xi, \eta)$ em relação a x e a y e assim se determinar os elementos do vetor $\{k\}$.

$$\beta_{x,x} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_2[G]_2 + b_3[G]_3 \\ 2b_2[G]_4 + b_3[G]_5 \\ b_2[G]_5 + 2b_3[G]_6 \end{bmatrix} \{U\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot [X] \cdot \{U\} \quad (51.a)$$

$$\beta_{y,y} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_2[H]_2 + b_3[H]_3 \\ 2c_2[H]_4 + c_3[H]_5 \\ c_2[H]_5 + 2c_3[H]_6 \end{bmatrix} \{U\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot [Y] \cdot \{U\} \quad (51.b)$$

$$\beta_{x,y} + \beta_{y,x} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot [Z] \cdot \{U\} \quad (51.c)$$

onde:

$$[Z] = \begin{bmatrix} b_2[H]_2 + b_3[H]_3 + c_2[G]_2 + c_3[G]_3 \\ 2b_2[H]_4 + b_3[H]_5 + 2c_2[G]_4 + c_3[G]_5 \\ b_2[H]_5 + 2b_3[H]_6 + c_2[G]_5 + 3c_3[G]_6 \end{bmatrix}$$

e $b_2 = y_3 - y_1$, $b_3 = y_2 - y_1$, $c_2 = x_1 - x_3$ e $c_3 = x_2 - x_1$. As matrizes $[G]_i$ e $[H]_i$ são as linhas i das matrizes $[G]$ e $[H]$, respectivamente.

Assim:

$$\{k\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot [X] \\ \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot [Y] \\ \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot [Z] \end{bmatrix} \{U\} \quad (49.2)$$

e:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot [X] \\ \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot [Y] \\ \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta \end{bmatrix} \cdot [Z] \end{bmatrix} \quad (52)$$

Substituindo-se a eq.(48) na eq.(23.1), levando-se em conta a eq.(25.1), obtêm-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{U\}^T [B]^T [D]_f [B] \{U\} dA \quad (25.2)$$

Deve-se escrever dA em função de ξ e η . Supondo que $dA = d\xi d\eta$:

$$\int_A dA = \int_A d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} d\xi d\eta = \int_0^1 (1-\eta) d\eta = \left. \eta - \frac{\eta^2}{2} \right|_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$A = \frac{1}{2}$$

Nota-se que multiplicando-se o 2º termo da equação por $2A$, a igualdade se torna verdadeira, ou seja:

$$dA = 2A d\xi d\eta \quad (53)$$

Assim:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{U\}^T [B]^T [D]_f [B] \{U\} 2A d\xi d\eta \quad (25.3)$$

$$U = \frac{1}{2} \{U\}^T \int_A 2A [B]^T [D]_f [B] d\xi d\eta \{U\} \quad (25.4)$$

A matriz de rigidez $[K]$ do elemento é dada por:

$$[K] = \int_A 2A [B]^T [D]_f [B] d\xi d\eta \quad (54.1)$$

ou:

$$[K] = 2A \int_0^1 \int_0^{1-\eta} [B]^T [D]_f [B] d\xi d\eta \quad (54.2)$$

onde:

$$[B]^T = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} [X]^T \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} & [Y]^T \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} & [Z]^T \begin{bmatrix} 1 \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (55)$$

e:

$$[D]_f = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \quad (56)$$

Substituindo-se as eq.(55), (56) e (52) na eq.(54.2), obtém-se:

$$[K] = \frac{1}{2A} \cdot \begin{bmatrix} [X] \\ [Y] \\ [Z] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{11}[R] & D_{12}[R] & D_{13}[R] \\ D_{21}[R] & D_{22}[R] & D_{23}[R] \\ D_{31}[R] & D_{32}[R] & D_{33}[R] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [X] \\ [Y] \\ [Z] \end{bmatrix} \quad (54.3)$$

onde:

$$[R] = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (57)$$

4.4 VETOR DE FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES

O vetor de cargas nodais equivalentes para um carregamento uniformemente distribuído (q) em um elemento de área A é dado por:

$$\{f\}^T = \frac{qA}{3} \{1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\} \quad (58)$$

Ver figura 16.

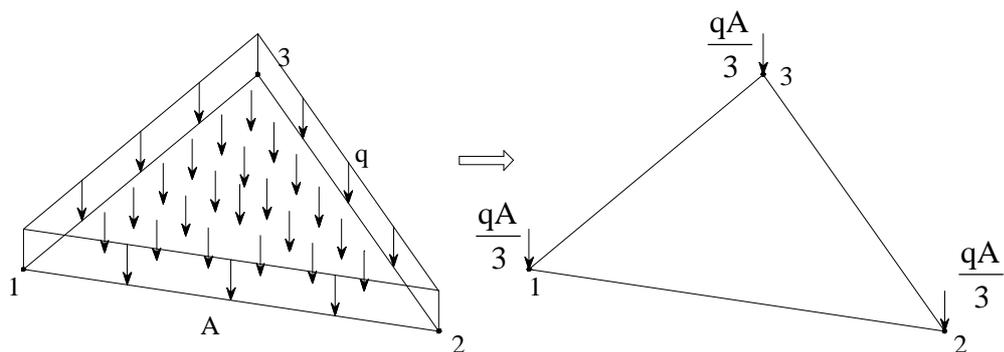


FIGURA 16 – Carregamento uniformemente distribuído no elemento

4.5 ESFORÇOS INTERNOS NO ELEMENTO

Os esforços internos de flexão presentes no elemento finito DKT são os momentos fletores m_x e m_y e o momento volvente m_{xy} , e os esforços internos de cisalhamento são dados por q_x e q_y .

Assim, utilizando-se as eq.(3.a), (3.b), (3.c), (20), (48) e a matriz $[D]_f$, pode-se escrever o vetor de esforços internos de flexão como sendo:

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \int_{-h/2}^{h/2} \{\sigma\}_f z dz = \int_{-h/2}^{h/2} [D] \{k\} z^2 dz = \int_{-h/2}^{h/2} [D] z^2 dz \{k\} = [D]_f \{k\}$$

$$\{m\} = [D]_f [B] \{U\} \quad (59.a)$$

e utilizando-se as eq.(4.b) e (4.c), pode-se escrever o vetor de esforços de cisalhamento como sendo:

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m_{x,x} + m_{xy,y} \\ m_{y,y} + m_{xy,x} \end{Bmatrix} \quad (59.b)$$

4.6 FORMAÇÃO DO ELEMENTO DKTC

A formação do elemento finito DKTC, formado por 4 elementos triangulares DKT, onde os parâmetros internos, comuns aos 4 elementos, são postos em função dos seus parâmetros externos utilizando de condensação estática, é feita de maneira bastante simples*.

A relação entre o vetor de forças nodais $\{f\}^*$ e o vetor de deslocamentos nodais $\{\delta\}^*$ do elemento DKTC pode ser escrita como (ver figura 17):

$$\begin{Bmatrix} \{f_e\}_{12 \times 1}^* \\ \{f_i\}_{3 \times 1}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K_{ee}]_{12 \times 12} & [K_{ei}]_{12 \times 3} \\ [K_{ie}]_{3 \times 12} & [K_{ii}]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_e\}_{12 \times 1}^* \\ \{\delta_i\}_{3 \times 1}^* \end{Bmatrix} \quad (60)$$

onde:

$$\{f_e\}^{*T} = \frac{q}{3} \{(A_1 + A_2) \quad 0 \quad 0 \quad (A_2 + A_3) \quad 0 \quad 0 \quad (A_3 + A_4) \quad 0 \quad 0 \quad (A_1 + A_4) \quad 0 \quad 0\}$$

$$\{f_i\}^{*T} = \frac{q}{3} \{A \quad 0 \quad 0\}$$

e as letras e e i são referentes aos nós externos e interno, respectivamente.

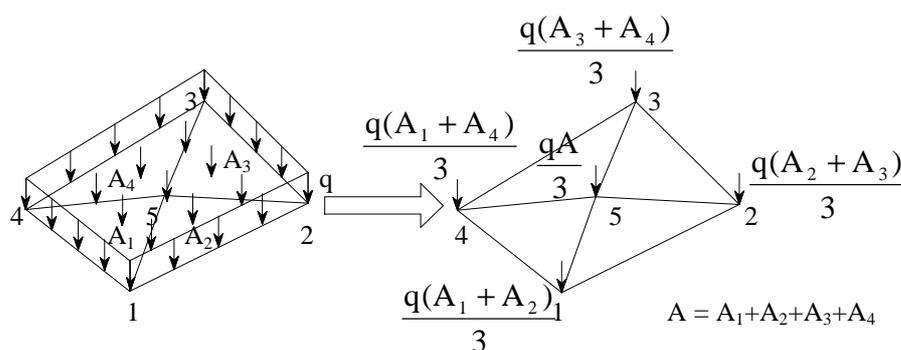


FIGURA 17 – Formação do vetor de forças nodais $\{f\}^*$

Desenvolvendo-se a eq.(60), temos:

$$\{f_e\}^* = [K_{ee}]\{\delta_e\}^* + [K_{ei}]\{\delta_i\}^*$$

$$\{f_i\}^* = [K_{ie}]\{\delta_e\}^* + [K_{ii}]\{\delta_i\}^*$$

*Ver figura 12.

$$[\mathbf{K}_{ii}]\{\delta_i\}^* = \{f_i\}^* - [\mathbf{K}_{ie}]\{\delta_e\}^*$$

$$\{\delta_i\}^* = [\mathbf{K}_{ii}]^{-1}(\{f_i\}^* - [\mathbf{K}_{ie}]\{\delta_e\}^*)$$

$$\{f_e\}^* = [\mathbf{K}_{ee}]\{\delta_e\}^* + [\mathbf{K}_{ei}][\mathbf{K}_{ii}]^{-1}(\{f_i\}^* - [\mathbf{K}_{ie}]\{\delta_e\}^*)$$

$$\{f_e\}^* = [\mathbf{K}_{ee}]\{\delta_e\}^* + [\mathbf{K}_{ei}][\mathbf{K}_{ii}]^{-1}\{f_i\}^* - [\mathbf{K}_{ei}][\mathbf{K}_{ii}]^{-1}[\mathbf{K}_{ie}]\{\delta_e\}^*$$

$$\{f_e\}^* - [\mathbf{K}_{ei}][\mathbf{K}_{ii}]^{-1}\{f_i\}^* = \{[\mathbf{K}_{ee}] - [\mathbf{K}_{ei}][\mathbf{K}_{ii}]^{-1}[\mathbf{K}_{ie}]\}\{\delta_e\}^*$$

Fazendo:

$$\{f\}_c = \{f_e\}^* - [\mathbf{K}_{ei}][\mathbf{K}_{ii}]^{-1}\{f_i\}^*$$

e:

$$[\mathbf{K}]_c = [\mathbf{K}_{ee}] - [\mathbf{K}_{ei}][\mathbf{K}_{ii}]^{-1}[\mathbf{K}_{ie}]$$

tem-se:

$$\{f\}_c = [\mathbf{K}]_c \{\delta_e\}^* \quad (61)$$

5 O ELEMENTO P15N

5.1 GENERALIDADES

Neste capítulo será apresentada a formulação do elemento finito P15N, ou seja, a dedução da sua matriz de rigidez, tensões e vetor de cargas nodais equivalentes para carregamento uniformemente distribuído. Tomou-se como base o trabalho desenvolvido por MARTINS & SABINO (1997), onde o elemento finito P15N é apresentado.

5.2 INTRODUÇÃO

MARTINS & SABINO (1997) apresentaram em seu trabalho um novo elemento finito. O elemento é denominado de P15N, onde a letra P, segundo os autores, alude a polinômio, justificado pelo fato de que este elemento é derivado de um polinômio do 4º grau completo, ou então a *patch test*, porque este elemento satisfaz o referido teste; o número 15 é justificado pelo número de termos do polinômio (15) ou pelo número de graus de liberdade (gdl) do elemento, que é 15; a letra N se refere a normal, pois alguns dos gdl do elemento são rotações normais aos lados do mesmo, ou porque se trata de um elemento não conforme.

Os 15 gdl do elemento são: 6 translações em z (w), sendo uma em cada vértice do triângulo e uma no meio de cada lado; 9 rotações do tipo $w_{,n}$, normais aos lados do elemento, sendo 3 ao longo de cada lado. Ver figura 18.

Os autores que apresentaram o elemento afirmam que a formulação do P15N, que é feita com base na teoria de placas de Kirchhoff, é relativamente simples e a comparam com

a formulação de um outro elemento, o *constant strain triangle* para flexão de placas, introduzido por MORLEY (1971).

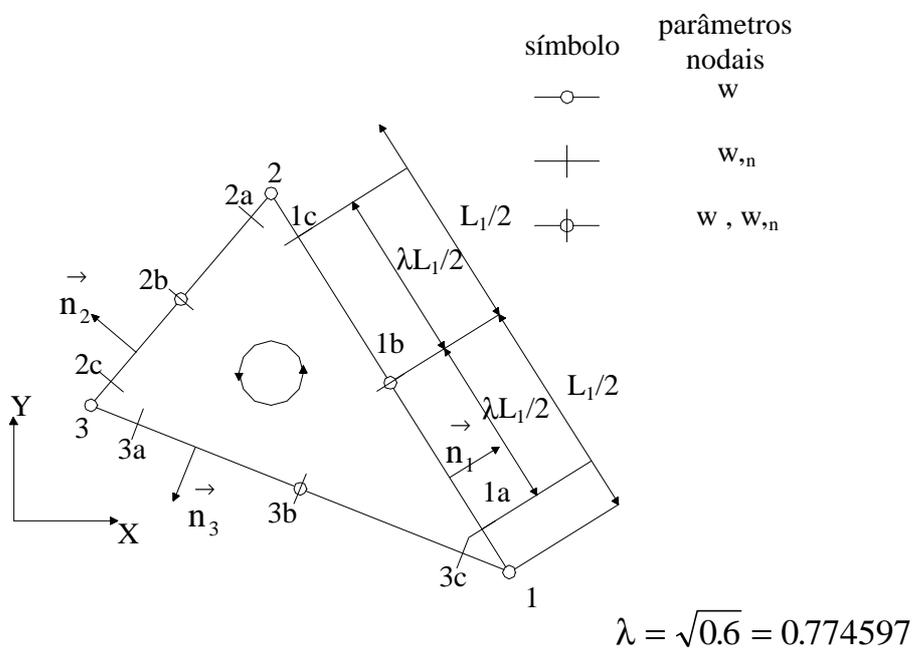


FIGURA 18 – Elemento finito P15N

O elemento apresentado é submetido a vários testes do tipo *patch test* e é comprovada a eficiência de seu comportamento. Esses testes são feitos tanto com elementos isolados, como em conjunto. São apresentados vários exemplos, onde se pode notar a boa convergência do elemento P15N.

5.3 MATRIZ DE RIGIDEZ

5.3.1 Configuração nodal do elemento

O vetor de deslocamentos nodais pode ser escrito da seguinte forma:

$$\{U\} = \left\{ \{U\}_1 \quad \{U\}_2 \quad \{U\}_3 \right\}^T \quad (62.1)$$

onde:

$$\{U\}_j = \left\{ w_j \left(\frac{\partial w}{\partial n_j} \right)_{ja} \quad w_{jb} \left(\frac{\partial w}{\partial n_j} \right)_{jb} \quad \left(\frac{\partial w}{\partial n_j} \right)_{jc} \right\}^T \quad (63.1)$$

com $j = 1, 2, 3$ (referente a cada lado do elemento), devendo-se observar o sentido anti-horário para a numeração dos nós.

5.3.2 Considerações geométricas

A figura 19 abaixo mostra o sistema de coordenadas globais da placa (X,Y) e o sistema de coordenadas locais (x,y), sendo este referente a cada elemento.

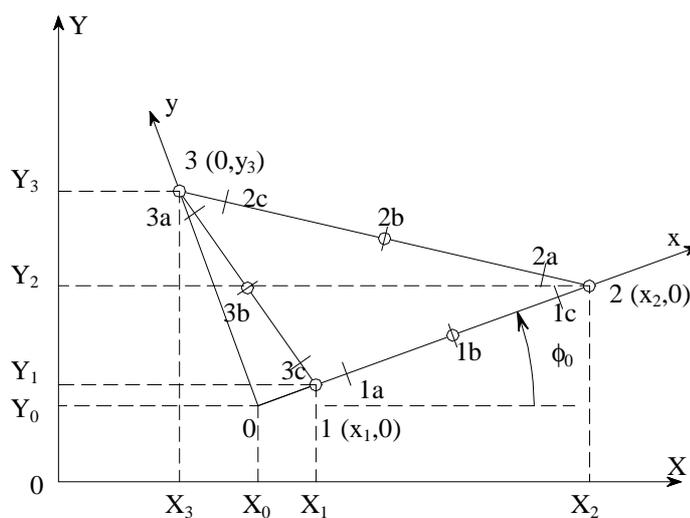


FIGURA 19 – Sistemas de coordenadas do elemento finito P15N

A relação entre esses dois sistemas de coordenadas é feita da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{Bmatrix} + [T] \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \quad (64)$$

e:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \left(\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{Bmatrix} \right) \quad (65)$$

onde:

$$[T]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & \text{sen } \phi_0 \\ -\text{sen } \phi_0 & \cos \phi_0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

e:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \phi_0 & -\text{sen } \phi_0 \\ \text{sen } \phi_0 & \cos \phi_0 \end{bmatrix} = [T]^{-T} \quad (67)$$

A matriz $[T]$ é conhecida como matriz de transformação de coordenadas.

A diferencial normal de w ao longo do lado j - k é dada por:

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial n_j} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n_j} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n_j} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \phi_j + \frac{\partial w}{\partial y} \text{sen } \phi_j \quad (68.1)$$

Ver figura 20 abaixo.

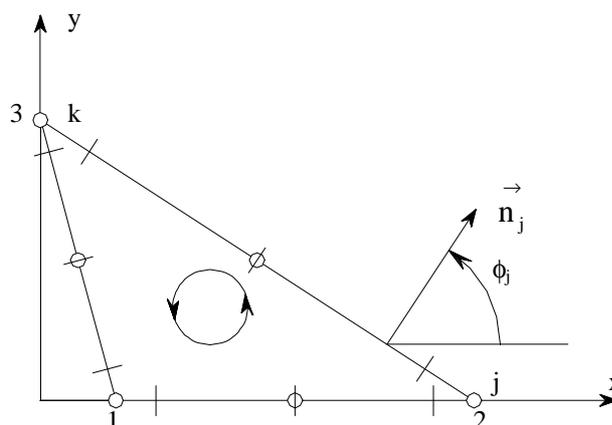


FIGURA 20 – Vetor normal ao lado j - k

A eq.(68.1) também pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial w}{\partial n_j} = \left[\frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \right] \{n_j\} \quad (68.2)$$

onde:

$$\{n_j\} = \pm \begin{Bmatrix} \cos \phi_j \\ \text{sen } \phi_j \end{Bmatrix} = \pm \frac{1}{L_j} \begin{Bmatrix} -y_{jk} \\ x_{jk} \end{Bmatrix} \quad (69)$$

sendo L_j o comprimento do lado j , podendo ser calculado pela eq.(70) abaixo:

$$L_j = \sqrt{x_{jk}^2 + y_{jk}^2} \quad (70)$$

com:

$$x_{jk} = x_j - x_k \quad (71.a)$$

$$y_{jk} = y_j - y_k \quad (71.b)$$

e é admitida a seguinte convenção de sinais: quando o número global do nó k for maior que o número global do nó j , o vetor \vec{n}_j será direcionado para fora do elemento (sinal positivo na eq.(69)). Com este artifício, resolve-se o problema de compatibilidade entre as diferenciais de w com relação à normal aos lados comuns a dois elementos, não havendo necessidade de nenhuma transformação da matriz de rigidez de cada elemento segundo as coordenadas locais para as coordenadas globais.

5.3.3 Funções de forma

O deslocamento w , função de x e y , para cada elemento, pode ser escrito da seguinte forma:

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \\ + \alpha_{11} x^4 + \alpha_{12} x^3 y + \alpha_{13} x^2 y^2 + \alpha_{14} xy^3 + \alpha_{15} y^4 \quad (72.1)$$

ou:

$$w(x, y) = \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6 \quad \alpha_7 \quad \alpha_8 \quad \alpha_9 \quad \alpha_{10} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{12} \quad \alpha_{13} \quad \alpha_{14} \quad \alpha_{15}\} \cdot \{1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^4 \quad x^3y \quad x^2y^2 \quad xy^3 \quad y^4\}^T \quad (72.2)$$

ou:

$$w(x, y) = \{\alpha\}^T \{P\} \quad (72.3)$$

onde $\{P\}$ é o vetor cujos elementos são os termos do polinômio do 4º grau completo que aproxima os deslocamentos w do elemento.

Substituindo a eq.(72.3) na eq.(68.2), tem-se:

$$\frac{\partial w}{\partial n_j} = \{\alpha\}^T \left[\frac{\partial \{P\}}{\partial x} \quad \frac{\partial \{P\}}{\partial y} \right] \{n_j\} = \{\alpha\}^T \{Q_j\} \quad (68.3)$$

Substituindo as eq.(72.3) e (68.3) na eq.(63.1), tem-se:

$$\{U\}_j = \left\{ \{\alpha\}^T \{P_j\} \quad \{\alpha\}^T \{Q_{ja}\} \quad \{\alpha\}^T \{P_{jb}\} \quad \{\alpha\}^T \{Q_{jb}\} \quad \{\alpha\}^T \{Q_{jc}\} \right\}^T \quad (63.2)$$

$$\{U\}_j = \left\{ \{P_j\}^T \{\alpha\} \quad \{Q_{ja}\}^T \{\alpha\} \quad \{P_{jb}\}^T \{\alpha\} \quad \{Q_{jb}\}^T \{\alpha\} \quad \{Q_{jc}\}^T \{\alpha\} \right\}^T \quad (63.3)$$

$$\{U\}_j = \left\{ \{P_j\}^T \quad \{Q_{ja}\}^T \quad \{P_{jb}\}^T \quad \{Q_{jb}\}^T \quad \{Q_{jc}\}^T \right\}^T \{\alpha\} \quad (63.4)$$

$$\{U\}_j = [C]_j \{\alpha\} \quad (63.5)$$

Substituindo a eq.(63.5) na eq.(62.1), tem-se:

$$\{U\} = \left\{ [C]_1 \{\alpha\} \quad [C]_2 \{\alpha\} \quad [C]_3 \{\alpha\} \right\}^T \quad (62.2)$$

$$\{U\} = \left\{ [C]_1 \quad [C]_2 \quad [C]_3 \right\}^T \{\alpha\} \quad (62.3)$$

$$\{U\} = [C]\{\alpha\} \quad (62.4)$$

Observa-se que a matriz $[C]_{15 \times 15}$ depende apenas das características geométricas de cada elemento.

Pode-se escrever também:

$$\{\alpha\} = [\bar{C}]\{U\} \quad (73)$$

onde $[\bar{C}] = [C]^{-1}$

Substituindo a eq.(73) na eq.(72.3), escrita de forma inversa, tem-se:

$$w(x, y) = \{P\}^T \{\alpha\} = \{P\}^T [\bar{C}]\{U\} = [N]\{U\} \quad (72.4)$$

onde a matriz $[N]_{1 \times 15}$ é a matriz das funções de forma procurada.

5.3.4 Expressões gerais para os termos polinomiais

Os termos do polinômio $\{P\}$ podem ser determinados com a utilização da expressão abaixo:

$$P_i = x^{m(i)} y^{n(i)} \quad (i = 1, 2, \dots, 15) \quad (74)$$

onde:

$$\begin{cases} m(i) = 1 + \beta(i) - i \\ n(i) = \alpha(i) - \beta(i) + i \end{cases}$$

e:

$$\begin{cases} \alpha(i) = \text{INT}\left(\frac{\sqrt{8i-7}-3}{2}\right) \\ \beta(i) = \frac{(\alpha(i)+1)(\alpha(i)+4)}{2} \end{cases}$$

Os termos do polinômio $\{Q_j\}$ podem ser determinados utilizando-se a expressão abaixo:

$$Q_{ji} = [m(i)x^{m(i)-1}y^{n(i)} \quad n(i)x^{m(i)}y^{n(i)-1}] \{n_j\} \quad (i = 1, 2, \dots, 15) \quad (75)$$

onde:

$$\text{se } m(i) = 0 \Rightarrow m(i)x^{m(i)-1}y^{n(i)} = 0 \text{ e}$$

$$\text{se } n(i) = 0 \Rightarrow n(i)x^{m(i)}y^{n(i)-1} = 0$$

5.3.5 Matriz de deformações [B]

A matriz [B] é geralmente escrita da seguinte forma:

$$[B] = \{L\}[N] \quad (76.1)$$

onde:

$$\{L\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{array} \right\} \quad (77)$$

Substituindo-se a expressão de [N] da eq.(72.4) na eq.(76.1), tem-se:

$$[B] = \{L\} \{P\}^T [\bar{C}] = [B'] [\bar{C}] \quad (76.2)$$

A matriz auxiliar $[B']$ é dada por:

$$[B'] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 12x^2 & 6xy & 2y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 0 & 2x^2 & 6xy & 12y^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 0 & 6x^2 & 8xy & 6y^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (78)$$

Os termos da matriz $[B']$ podem ser determinados utilizando-se a expressão abaixo:

$$b'_{ij} = r_{ij} x^{m_{ij}} y^{n_{ij}} \quad (i = 1,2,3 ; j = 1,2,\dots,15) \quad (79)$$

onde os coeficientes r_{ij} , m_{ij} e n_{ij} são determinados utilizando-se a tabela 01 abaixo:

TABELA 01 – Coeficientes dos elementos da matriz auxiliar $[B']$

i	r_{ij}	m_{ij}	n_{ij}
1	$m(j)[m(j)-1] \geq 0$	$m(j)-2 \geq 0$	$n(j)$
2	$n(j)[n(j)-1] \geq 0$	$m(j)$	$n(j)-2 \geq 0$
3	$2m(j)n(j)$	$m(j)-1 \geq 0$	$n(j)-1 \geq 0$

5.3.6 Matriz de rigidez

A expressão geral para a matriz de rigidez do elemento pode ser escrita como:

$$[K] = \int_A [B]^T [D]_f [B] dA \quad (80.1)$$

onde $[D]_f$ é a matriz de elasticidade para flexão de placas (eq.(23.1)) e a integral é feita na área do elemento.

Substituindo-se a eq.(76.2) na eq.(80.1), tem-se:

$$[K] = \int_A [\bar{C}]^T [B']^T [D]_f [B'] [\bar{C}] dA \quad (80.2)$$

$$[K] = [\bar{C}]^T \int_A [B']^T [D]_f [B'] dA [\bar{C}] \quad (80.3)$$

$$[K] = [\bar{C}]^T [K'] [\bar{C}] \quad (80.4)$$

Os elementos da matriz de rigidez auxiliar $[K']$ podem ser determinados exatamente utilizando-se a expressão abaixo:

$i, j = 1, 2, \dots, 15$

$$k'_{ij} = \int_A \sum_{k=1}^3 \left(b'_{kj} \sum_{l=1}^3 b'_{li} d_{lk} \right) dA = \int_A \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 b'_{kj} b'_{li} d_{lk} dA \quad (81.1)$$

onde d_{ij} é o elemento ij da matriz $[D]_f$.

Substituindo-se a eq.(79) na eq.(81.1), tem-se:

$$k'_{ij} = \int_A \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 d_{lk} r_{kj} x^{m_{kj}} y^{n_{kj}} r_{li} x^{m_{li}} y^{n_{li}} dA \quad (81.2)$$

$$k'_{ij} = \int_A \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 d_{lk} r_{kj} r_{li} x^{(m_{kj}+m_{li})} y^{(n_{kj}+n_{li})} dA \quad (81.3)$$

$$k'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 d_{lk} r_{kj} r_{li} \int_A x^{(m_{kj}+m_{li})} y^{(n_{kj}+n_{li})} dA \quad (81.4)$$

$$k'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 d_{lk} r_{kj} r_{li} J_{ijkl} \quad (81.5)$$

onde J_{ijkl} pode ser calculado utilizando-se a seguinte expressão:

$$J_{ijkl} = y_3^{n+1} (x_2^{m+1} - x_1^{m+1}) \frac{m!n!}{(m+n+2)!} \quad (82)$$

sendo m e n inteiros definidos por:

$$\begin{cases} m = m_{kj} + m_{li} \\ n = n_{kj} + n_{li} \end{cases} \quad (83)$$

Vale observar que x_1 , x_2 e y_3 são respectivamente as coordenadas locais x do nó 1, x do nó 2 e y do nó 3. Ver figura 19.

5.4 TENSÕES

As tensões (momentos) podem ser calculadas em quaisquer pontos do elemento utilizando-se a eq.(59.a), aqui repetida.

$$\{m\} = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = [D]_r [B] \{U\} \quad (59.a)$$

Como sugestão, pode-se calcular as tensões nos 4 pontos de integração de Gauss de 3ª ordem para triângulos. Ver figura 21 e tabela 02.

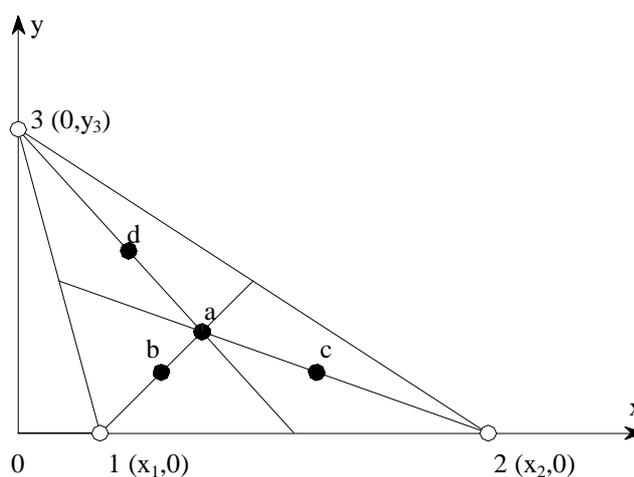


FIGURA 21 – Pontos de Gauss onde as tensões são calculadas

As tensões apresentadas na eq.(59.a) estão referidas em termos de coordenadas locais (x,y) . A transformação para coordenadas globais (X,Y) é feita utilizando-se a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} m_x & m_{xy} \\ m_{xy} & m_y \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} m_x & m_{xy} \\ m_{xy} & m_y \end{bmatrix} [T]^T \quad (84)$$

TABELA 02 – Localização dos pontos de Gauss onde as tensões são calculadas

Pontos de Gauss	Coordenadas de área			Coordenadas locais cartesianas	
	L ₁	L ₂	L ₃	x	y
a	1/3	1/3	1/3	(x ₁ +x ₂)/3	y ₃ /3
b	0,6	0,2	0,2	0,6x ₁ +0,2x ₂	0,2y ₃
c	0,2	0,6	0,2	0,2x ₁ +0,6x ₂	0,2y ₃
d	0,2	0,2	0,6	0,2x ₁ +0,2x ₂	0,6y ₃

5.5 VETOR DE CARGAS NODAIS EQUIVALENTES

O vetor de cargas nodais equivalentes, ou vetor de forças nodais equivalentes, para carregamento distribuído no elemento pode ser determinado utilizando-se a equação abaixo:

$$\{f\} = \int_A q(x,y)[N]^T dx dy \quad (85.1)$$

Admitindo-se que o carregamento distribuído seja uniforme no elemento:

$$\{f\} = q \int_A [N]^T dx dy \quad (85.2)$$

Substituindo-se a expressão de [N], escrita na eq.(72.4), na eq.(85.2), tem-se:

$$\{f\} = q \int_A [\bar{C}]^T \{P\} dx dy \quad (85.3)$$

$$\{f\} = q [\bar{C}]^T \int_A \{P\} dx dy \quad (85.4)$$

Uma simplificação para a realização da integral na área do elemento da eq.(85.4) acima é considerar o elemento como sendo um triângulo como o da figura 22.

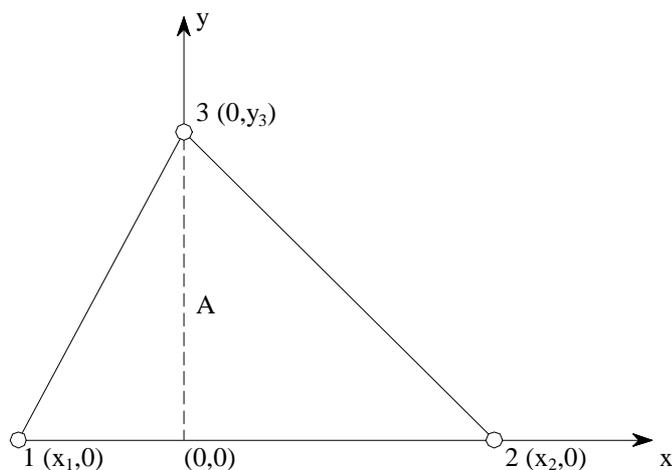


FIGURA 22 – Integração na área do elemento

Considerando o elemento da figura 22, pode-se rescrever a eq.(85.4) como sendo:

$$\{f\} = q[\bar{C}]^T \left(\int_{x_1}^0 \int_0^{-\frac{y_3}{x_1}x+y_3} \{P\} dy dx + \int_0^{x_2} \int_0^{-\frac{y_3}{x_2}x+y_3} \{P\} dy dx \right) \quad (85.5)$$

ou:

$$\{f\} = q[\bar{C}]^T \{P'\} \quad (85.6)$$

onde o vetor $\{P'\}$ é:

$$\{P'\} = \frac{1}{120} \begin{Bmatrix} 60y_3(x_2 - x_1) \\ 20y_3(x_2^2 - x_1^2) \\ 20y_3^2(x_2 - x_1) \\ 10y_3(x_2^3 - x_1^3) \\ 5y_3^2(x_2^2 - x_1^2) \\ 10y_3^3(x_2 - x_1) \\ 6y_3(x_2^4 - x_1^4) \\ 2y_3^2(x_2^3 - x_1^3) \\ 2y_3^3(x_2^2 - x_1^2) \\ 6y_3^4(x_2 - x_1) \\ 4y_3(x_2^5 - x_1^5) \\ y_3^2(x_2^4 - x_1^4) \\ \frac{2}{3}y_3^3(x_2^3 - x_1^3) \\ y_3^4(x_2^2 - x_1^2) \\ 4y_3^5(x_2 - x_1) \end{Bmatrix} \quad (86)$$

Uma outra alternativa mais simples, porém menos exata, para se considerar o carregamento uniformemente distribuído seria a transformação deste em cargas concentradas nos nós onde houvesse o grau de liberdade w , como está representado na figura 23 abaixo. Porém, este artifício, comumente utilizado no método dos elementos finitos*, trata-se de uma aproximação e assim, existem erros embutidos em sua utilização, além dos erros inerentes ao emprego do próprio MEF. Ver tabela 09, no capítulo 8.

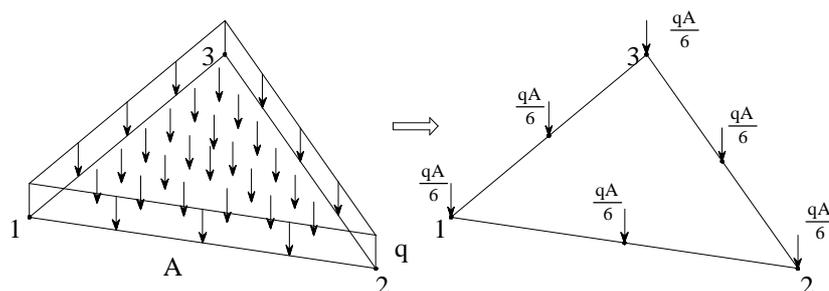


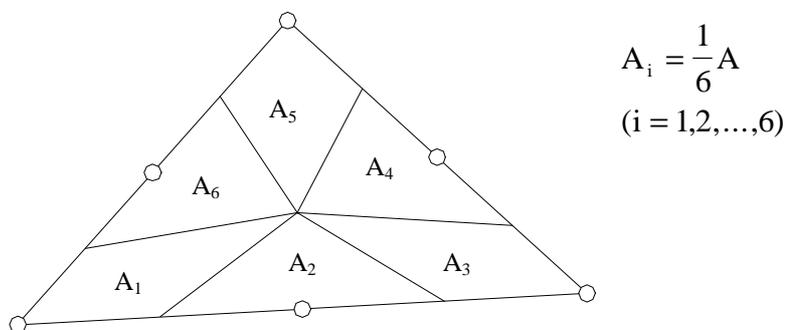
FIGURA 23 – Aproximação para carregamento uniformemente distribuído

O vetor de cargas nodais equivalentes neste caso seria:

$$\{f\} = \frac{qA}{6} \{1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\}^T \quad (87)$$

Nota-se que com a utilização do citado artifício, a contribuição do efeito momento não é considerada.

Vale ainda observar que o fato das cargas serem de mesmo valor ($qA/6$) é justificável, pois as áreas de influência de cada nó envolvido são iguais entre si para qualquer triângulo considerado. Ver figura 24.



$$A_i = \frac{1}{6} A$$

$$(i = 1, 2, \dots, 6)$$

FIGURA 24 – Áreas de influência

*O citado artifício aparece na determinação do vetor de cargas nodais equivalentes para carga uniformemente distribuída no elemento DKT. Para maiores detalhes, ver item 4.4.

6 O SISTEMA ESTRUTURAL

6.1 INTRODUÇÃO

O presente capítulo apresenta o sistema de coordenadas e a matriz de rigidez do elemento finito de barra utilizado na discretização das vigas do pavimento. Além disso, será apresentado também o processo desenvolvido para se fazer o acoplamento entre o elemento finito de barra e o elemento finito de placa (P15N).

6.2 O ELEMENTO FINITO DE BARRA

6.2.1 Sistema de coordenadas locais

O elemento finito de barra utilizado no presente trabalho possui 3 graus de liberdade (gdl) por extremidade, sendo eles: translação em z (w) e rotações em x (θ_x) e y (θ_y), nesta ordem. Figura 25.

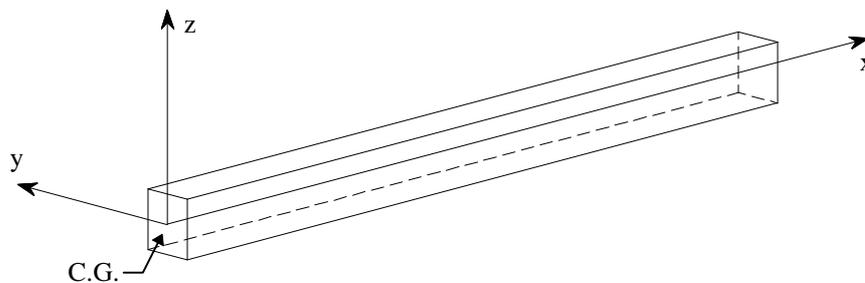


FIGURA 25 – Sistema de coordenadas locais do elemento de barra

Na figura 25, o eixo x é o eixo longitudinal da viga e coincide com a superfície média da laje, como uma aproximação. O eixo z é paralelo ao eixo Z global da estrutura e apresenta sentido positivo para cima.

A partir das coordenadas locais dos elementos de barra, pode-se definir seus deslocamentos locais, bem como os esforços internos associados a eles.

6.2.2 Matriz de rigidez do elemento de barra

A matriz de rigidez do elemento de barra adotado em coordenadas locais pode ser escrita da seguinte forma:

$$[K_{vl}] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ_t}{L} & 0 & 0 & -\frac{GJ_t}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{GJ_t}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{L} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

onde:

E – módulo de elasticidade longitudinal, ou módulo de Young, do material;

G – módulo de elasticidade transversal do material;

I – momento de inércia em relação ao eixo y;

J_t – momento de inércia à torção;

L – comprimento do elemento de barra.

A matriz de rigidez do elemento da barra apresentada anteriormente foi escrita no sistema de coordenadas locais do elemento; para escrevê-la em termos de coordenadas globais da estrutura é necessário que se determine antes a sua matriz de incidência cinemática, o que pode ser feito utilizando-se a eq.(88).

$$\{u_{vl}\} = [\beta_v] \cdot \{u_{vg}\} \quad (88)$$

onde:

$\{u_{vl}\}$ – vetor de deslocamentos do elemento de barra segundo o sistema de coordenadas locais;

$[\beta_v]$ – matriz de incidência cinemática do elemento de barra;

$\{u_{vg}\}$ – vetor de deslocamentos do elemento de barra segundo o sistema de coordenadas globais.

Explicitando-se a matriz de incidência cinemática $[\beta_v]$, tem-se:

$$[\beta_v] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_v) & \sin(\alpha_v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha_v) & \cos(\alpha_v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_v) & \sin(\alpha_v) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha_v) & \cos(\alpha_v) \end{bmatrix}$$

Onde o ângulo α_v é aquele formado entre o eixo X global e o eixo x local da viga.

Figura 26.

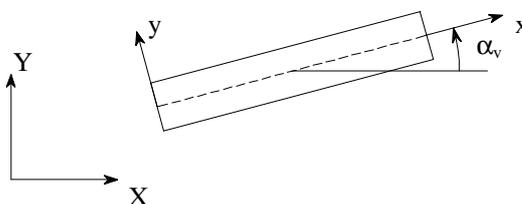


FIGURA 26 – Ângulo α da viga

Com a matriz de incidência cinemática, pode-se determinar a matriz de rigidez do elemento de viga em coordenadas globais utilizando-se a eq.(89).

$$[K_{vg}] = [\beta_v]^T [K_{vl}] [\beta_v] \quad (89)$$

6.3 COMPATIBILIZAÇÃO ENTRE O ELEMENTO P15N E O ELEMENTO DE VIGA

A princípio, o elemento finito P15N foi formulado apenas para resolver problemas de placas, sem se preocupar com a compatibilidade entre seus graus de liberdade (w e $w_{,n}$) e os graus de liberdade de um possível elemento finito de barra. Para se utilizar esse elemento finito na análise de pavimentos, e futuramente na análise de edifícios altos, fez-se necessário o desenvolvimento de um processo computacional que compatibilizasse os graus de liberdade desse elemento e os graus de liberdade (globais) do elemento finito de barra escolhido (w , θ_x e θ_y). Esse processo alternativo desenvolvido no presente trabalho será apresentado a seguir.

6.3.1 Subestruturação em paralelo

Após a determinação da matriz de rigidez da placa da estrutura com a contribuição de todos os elementos finitos de placa, deseja-se escrever agora essa matriz de rigidez em função apenas dos graus de liberdade dos lados que contenham os elementos de viga. Figura 27. Foi adotada a técnica das subestruturas. Essa técnica, assim definida na engenharia estrutural, foi originalmente proposta em KARDESTUNGER (1975) com o nome de método da separação (Diakoptico) para a análise de circuitos elétricos e estruturas elásticas sob a forma de subespaços. No método das subestruturas, utiliza-se condensação estática dos graus de liberdade, onde existem dois métodos para efetuar-la matematicamente: o “*Full Release*”, apresentado em ROSEN & RUBINSTEIN (1970), que implica a liberação total dos graus de liberdade internos da subestrutura e é considerado o método tradicional; e o “*Cholesky Decomposition*”, que libera parcialmente esses graus de liberdade, e foi apresentado por BOSSHARD (1971) e ROSEN & RUBINSTEIN (1970). Este último método, que apresenta menor número de operações numéricas e menor esforço computacional, foi o escolhido neste trabalho.

Matriz de rigidez e vetor de cargas da placa segundo as coordenadas externas

A equação matricial de equilíbrio do pavimento pode ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} [R_{II}] & [R_{IE}] \\ [R_{EI}] & [R_{EE}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_I\} \\ \{D_E\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_I\} \\ \{F_E\} \end{Bmatrix} \quad (90)$$

onde:

I – índice que indica os parâmetros internos da estrutura;

E – índice que indica os parâmetros externos da estrutura.

Observa-se que, para se escrever a eq.(90), a numeração dos graus de liberdade da estrutura deve ser feita de tal forma que primeiro sejam numerados os graus de liberdade internos, ou seja, aqueles que estão localizados em lados que não contenham elementos de viga, e por fim, os gdl externos (aqueles que estão em lados que contenham elementos de viga).

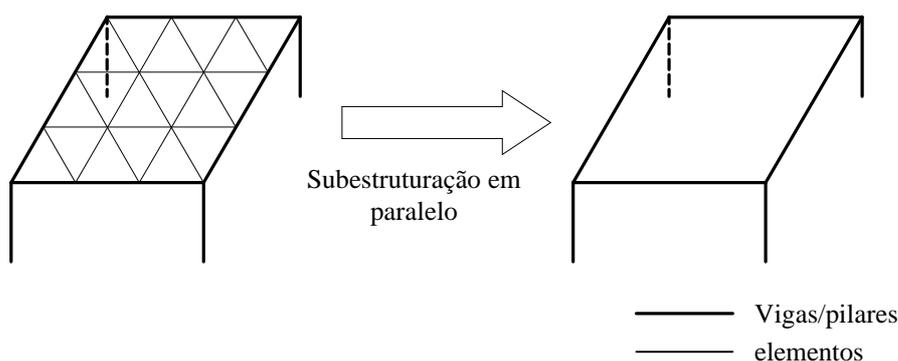


FIGURA 27 – Subestruturação em paralelo

O processo de triangularização de Gauss é aplicado à matriz de rigidez da placa até a coluna referente à última coordenada interna.

$$\begin{bmatrix} [R_{II}] & [R_{IE}] \\ [R_{EI}] & [R_{EE}] \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{triangularizacão de Gauss}} \begin{bmatrix} [L]^T & [RT]^T \\ [0] & [R^*] \end{bmatrix} \quad (91)$$

onde:

$[L]_{nci \times nci}$ – matriz triangular inferior com termos unitários na diagonal principal;

$[RT]_{nce \times nci}$ – matriz retangular;

$[0]$ – matriz nula;

$[\mathbf{R}^*]_{nce \times nce}$ – matriz simétrica condensada.

onde **nci** e **nce** são número de coordenadas internas e número de coordenadas externas, respectivamente.

Outra maneira de se escrever a matriz de rigidez da placa é através de sua decomposição em um produto matricial triplo.

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{R}_{II}] & [\mathbf{R}_{IE}] \\ [\mathbf{R}_{EI}] & [\mathbf{R}_{EE}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{L}] & [0] \\ [0] & [\mathbf{R}^*] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{D}] & [0] \\ [0] & [\mathbf{I}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{L}]^T & [\mathbf{RT}]^T \\ [0] & [\mathbf{I}] \end{bmatrix} \quad (92)$$

onde às matrizes da eq.(91) são acrescentadas:

$[\mathbf{I}]_{nce \times nce}$ – matriz identidade;

$[\mathbf{D}]_{nci \times nci}$ – matriz diagonal.

Relacionando as eq.(92) e (90), tem-se:

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{D}] & [0] \\ [0] & [\mathbf{R}^*] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{D}_I^*\} \\ \{\mathbf{D}_E^*\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_I^*\} \\ \{\mathbf{F}_E^*\} \end{Bmatrix} \quad (93)$$

$$\begin{Bmatrix} \{\mathbf{D}_I^*\} \\ \{\mathbf{D}_E^*\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{L}]^T & [\mathbf{RT}]^T \\ [0] & [\mathbf{I}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{D}_I\} \\ \{\mathbf{D}_E\} \end{Bmatrix} \quad (94)$$

$$\begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_I\} \\ \{\mathbf{F}_E\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{L}] & [0] \\ [0] & [\mathbf{I}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{F}_I^*\} \\ \{\mathbf{F}_E^*\} \end{Bmatrix} \quad (95)$$

Da eq.(93) pode-se escrever:

$$[\mathbf{R}^*] \{\mathbf{D}_E^*\} = \{\mathbf{F}_E^*\} \quad (96)$$

observando que $[R^*]$ e $[F_E^*]$ representam a matriz de rigidez e o vetor de cargas nodais em coordenadas externas, respectivamente.

Da eq.(94), pode-se escrever:

$$\{D_E^*\} = \{D_E\} \quad (97)$$

Da eq.(95), pode-se escrever:

$$\{F_I\} = [L]\{F_I^*\} \quad (98)$$

$$\{F_E^*\} = \{F_E\} - [RT]\{F_I^*\} \quad (99)$$

Resolvendo-se o sistema da eq.(98) determina-se o vetor $\{F_I^*\}$. Substituindo-o na eq.(99), juntamente com a matriz $[RT]$ determinada pelo processo de triangularização de Gauss (eq.(91)), determina-se o vetor de cargas nodais em coordenadas externas, $\{F_E^*\}$.

A partir da eq.(93), pode-se escrever:

$$[D]\{D_I^*\} = \{F_I^*\} \quad (100)$$

Resolvendo-se o sistema da eq.(100), obtém-se o vetor $\{D_I^*\}$.

A partir da eq.(94) determina-se a expressão para o vetor dos deslocamentos internos:

$$\{D_I\} = [L]^{-T}(\{D_I^*\} - [RT]^T\{D_E\}) \quad (101)$$

6.3.2 Transformação de coordenadas

Após o processo de subestruturação em paralelo, tem-se a matriz de rigidez da placa e vetor de cargas expressos apenas em termos das coordenadas externas da estrutura, ou

seja, aquelas em que existem os graus de liberdade do elemento de viga. Porém, essa matriz de rigidez e vetor estão escritos nos graus de liberdade originais do elemento finito P15N (w e $w_{,n}$); é necessário que se faça a transformação destes gdl para aqueles do elemento de viga, e assim, a compatibilização entre os dois elementos. A figura 28 ilustra o processo de transformação de coordenadas de uma placa quadrada discretizada por dois elemento finitos P15N com vigas nas bordas. Através da subestruturação em paralelo, os graus de liberdade internos – localizados na diagonal da placa – são condensados para aqueles das bordas, ou seja, onde existem as vigas. Em seguida, pelo processo de rotação de coordenadas, a placa está “pronta” para receber a contribuição das vigas.

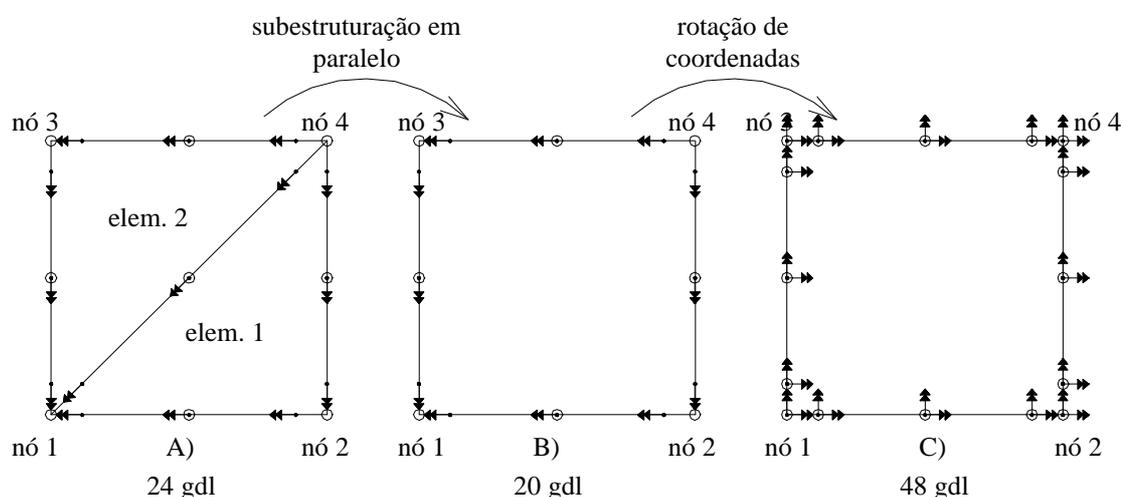


FIGURA 28 – Transformação de coordenadas

Para que a transformação de coordenadas seja feita, é preciso que se determine uma matriz de transformação β que relacione os deslocamentos do sistema B com os deslocamentos do sistema C (figura 28).

$$\{U_B\} = [\beta]\{U_C\} \quad (102)$$

Tomando-se como exemplo o lado genérico da figura 29, pode-se escrever a eq.(103).

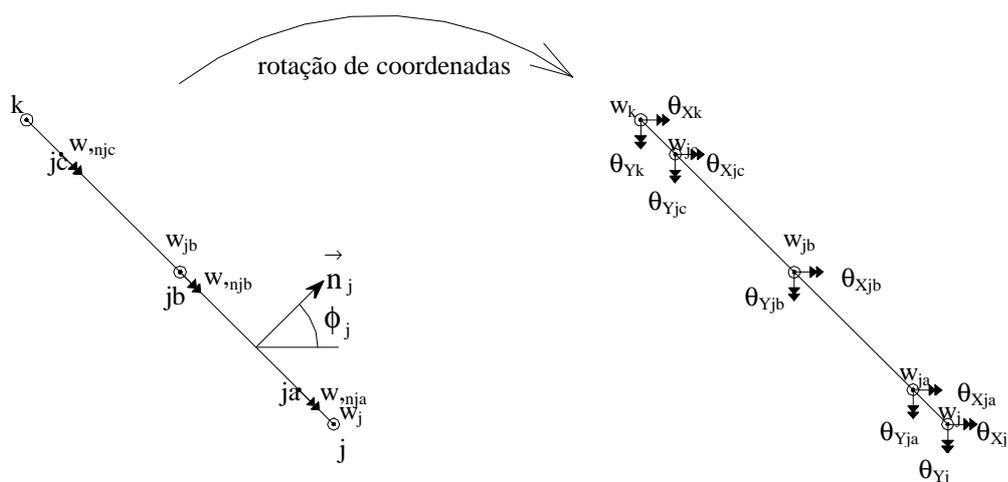


FIGURA 29 – Rotação de coordenadas

$$\begin{Bmatrix} w_j \\ w_{nja} \\ w_{jb} \\ w_{njb} \\ w_{njc} \\ w_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{\phi_j} & -c_{\phi_j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{\phi_j} & -c_{\phi_j} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{\phi_j} & -c_{\phi_j} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_j \\ \theta_{Xj} \\ \theta_{Yj} \\ w_{ja} \\ \theta_{Xja} \\ \theta_{Yja} \\ w_{jb} \\ \theta_{Xjb} \\ \theta_{Yjb} \\ w_{jc} \\ \theta_{Xjc} \\ \theta_{Yjc} \\ w_k \\ \theta_{Xk} \\ \theta_{Yk} \end{Bmatrix}$$

onde:

$$\begin{Bmatrix} c_{\phi_j} \\ s_{\phi_j} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \phi_j \\ \sin \phi_j \end{Bmatrix}$$

dados pela eq.(69), onde o sinal positivo ou negativo depende da numeração global dos nós j e k :

para $j < k \Rightarrow$ sinal = +

para $j > k \Rightarrow$ sinal = -

A matriz $[\beta]$ é construída com a contribuição de todos os lados **com viga** da estrutura.

A matriz de rigidez nas novas coordenadas da estrutura é determinada através da seguinte equação:

$$[K_r] = [\beta]^T [R^*] [\beta] \quad (104)$$

e o vetor de cargas rotacionado pode ser determinado através da seguinte equação:

$$\{F_r\} = [\beta]^T \{F_E^*\} \quad (105)$$

6.3.3 Contribuição das vigas

Após o processo descrito anteriormente, podemos acrescentar a contribuição das vigas na matriz de rigidez da estrutura e no vetor de cargas rotacionados.

Como podemos deduzir observando a figura 28 C, cada lado com viga da estrutura, corresponderá a 4 elementos de viga: dois com comprimentos de $\lambda L_j/2$ e dois com comprimentos de $(1-\lambda)L_j/2$, sendo $\lambda = \sqrt{0.6}$ e L_j o comprimento total do lado j .

Neste trabalho foi admitido apenas que as vigas estaria submetidas a carregamento uniformemente distribuído. Figura 30.

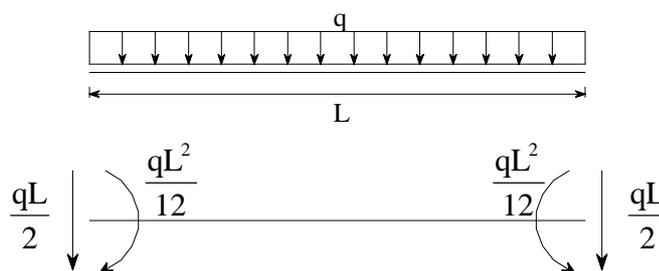


FIGURA 30 – Carregamento uniformemente distribuído no elemento de viga

Assim, o vetor de cargas nodais equivalentes, nas coordenadas locais das vigas, para este tipo de carregamento, pode ser escrito como:

$$\{f_v\} = \left\{ \frac{-qL}{2} \quad 0 \quad \frac{qL^2}{12} \quad \frac{-qL}{2} \quad 0 \quad \frac{-qL^2}{12} \right\} \quad (106)$$

Para se determinar este vetor em função das coordenadas globais da estrutura, basta pré-multiplicá-lo pela transposta da sua matriz de incidência cinemática $[\beta_v]^*$.

$$\{f_{vg}\} = [\beta_v]^T \{f_v\} \quad (107)$$

Após a contribuição das vigas, o próximo passo é a resolução do sistema de equações final, com a matriz de rigidez e vetor de cargas rotacionados acrescidos da contribuição dos elementos de viga, de onde se determina o vetor de deslocamentos nodais nas coordenadas externas rotacionadas. Com o vetor de deslocamentos citado, facilmente se determina este vetor em termos das coordenadas w e w_n com a utilização da matriz β de transformação; e já utilizando a eq.(97), tem-se:

$$\{D_E\} = [\beta] \{D_r\} \quad (108)$$

Substituindo-se o vetor $\{D_E\}$ na eq.(101), obtém-se o vetor $\{D_I\}$, e assim o vetor de deslocamentos completo da estrutura, nas coordenadas do elemento P15N (w e w_n).

*Ver expressão de β_v neste mesmo capítulo.

7 O PROGRAMA COMPUTACIONAL

7.1 INTRODUÇÃO

Com base no desenvolvimento descrito nos capítulos anteriores – principalmente os 3, 5 e 6 – elaborou-se um programa computacional com o intuito de realizar as análises propostas inicialmente. O presente capítulo tem como objetivo descrever o programa computacional desenvolvido em termos gerais e as principais sub-rotinas, bem como apresentar a entrada e saída dos dados envolvidos.

7.2 GENERALIDADES

O programa computacional desenvolvido foi intitulado como “PAPEP15N” – Programa de Análise de Pavimentos utilizando o Elemento finito P15N. Foi implementado em linguagem de programação FORTRAN 90 utilizando-se o *software Fortran PowerStation 4.0*. O programa PAPEP15N foi concebido em módulo (*workspace*) único; sua versão última apresenta:

tamanho da versão .for.....88982 bytes
tamanho da versão executável.....355840 bytes
número de linhas.....3546
número de sub-rotinas.....89

7.3 ENTRADA DE DADOS

A entrada de dados do programa PAPEP15N é feita através de arquivo de dados. Em sua interface com o usuário, é necessário apenas informar se a entrada de dados será feita com a utilização de pré-processador (p ou P) ou não (m ou M – de manual) e o nome do arquivo de dados, com extensão, até 50 caracteres. Figura 31.

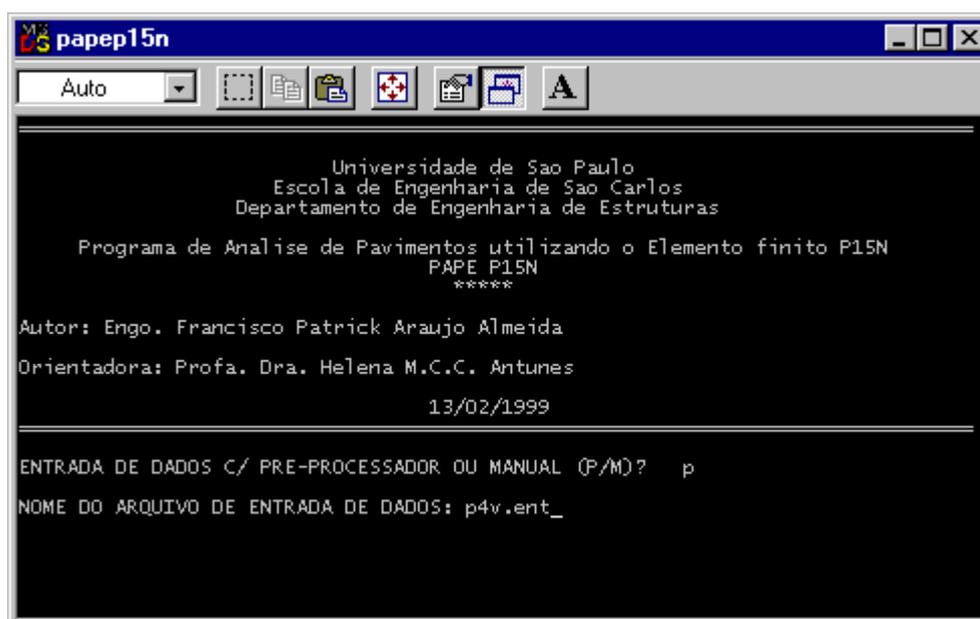


FIGURA 31 – Entrada de dados do programa PAPEP15N

7.3.1 Entrada de dados com pré-processador

Se a entrada de dados for com a utilização do pré-processador, o arquivo de dados deverá ser escrito de acordo com o esquema abaixo:

E H POISSON RTV
 NCC Q NDP NS NV NEAR NC
 XI XS
 YI YS
 NEX NEY
 TIPO

NOC(I) VCC(I) {se NCC>0}
 NOD1(I) VDP1(I) {se NDP>0 e NV=0}
 NOD2(I) VDP2(I) DN(I) FXN(I) FYN(I) {se NDP>0 e NV>0}
 NI(I) NF(I) W(I) WN(I) {se NS>0}
 NIV(I) NFV(I) E(I) POI(I) IN(I) Q(I) D(I) FX(I) FY(I){se NV>0}
 EAR(I)

onde:

E	– módulo de elasticidade ou módulo de Young;
H	– espessura da placa;
POISSON	– coeficiente de Poisson;
RTV	– rigidez à torção das vigas (GJ_t/L)*; nas análises realizadas não se considerou a rigidez à torção das vigas, porém não se pode atribuir valor nulo às mesmas; utilizou-se um valor “pequeno” em todas as análises de valor 1.0E-10;
NCC	– número de cargas concentradas;
Q	– valor da carga uniformemente distribuída na placa;
NDP	– número de deslocamentos prescritos; no caso de pavimentos, pode corresponder ao número de pilares;
NS	– número de seqüências; seguimentos de reta com as mesmas vinculações; estas não são computadas em NDP;
NV	– número de vigas; não é o número de elementos de viga, mas o número de seguimentos de viga com características constantes;
NEAR	– número de elementos de placa a excluir;
NC	– número de um nó que se queira ver seus resultados em destaque, por exemplo um nó central;
XI, XS	– coordenadas X dos nós inferior esquerdo e superior direito da placa;
YI, YS	– coordenadas Y dos nós inferior esquerdo e superior direito da placa;
NEX, NEY	– número de elementos (lados de elementos) de placa em X e em Y;

*Ver item 6.2.2.

TIPO	– tipo de discretização da malha (S, Z ou X); figura 32;
NOC(I)	– vetor de nós com carga concentrada; seu tamanho é NCC;
VCC(I)	– vetor com o valor das cargas concentradas, com sentido positivo para cima; seu tamanho também é NCC;
NOD1(I)	– vetor com os nós com deslocamentos prescritos; possui tamanho NDP;
VDP1(I)	– vetor com os valores dos deslocamentos prescritos; possui tamanho NDP;
NOD2(I)	– vetor com os nós dos pilares; possui tamanho NDP;
VDP2(I)	– vetor nulo; seu tamanho também é NDP;
DN(I)	– vetor que indica se o nó tem deslocamento w restrito (1) ou livre (0); tamanho: NDP;
FXN(I)	– vetor que indica se o nó tem deslocamento θ_x restrito (1) ou livre (0); tamanho: NDP;
FYN(I)	– vetor que indica se o nó tem deslocamento θ_y restrito (1) ou livre (0); tamanho: NDP;
NI(I), NF(I)	– nós inicial e final da seqüência I;
W(I), WN(I)	– indica as restrições da seqüência I, se w e $w_{,n}$ são livres (0) ou restritos (1);
NIV(I), NFV(I)	– nós iniciais e finais das vigas;
E(I), POI(I), IN(I), Q(I)	– módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson, momento de inércia e valor da carga uniformemente distribuída (sentido positivo para cima) da viga I;
D(I), FX(I), FY(I)	– restrições nos deslocamentos w , θ_x e θ_y das vigas; (1) restrito e (0) livre;
EAR(I)	– vetor com os elementos de placa que devem ser excluídos.

7.3.2 Entrada de dados sem pré-processador

A entrada de dados sem a utilização do pré-processador é feita de acordo com o esquema a seguir:

E H POISSON RTV

NN NL NE NV NEAR
 NCC Q NDP
 I XGT(I) YGT(I)
 I LG(I,1) LG(I,2)
 I N123(I,1) N123(I,2) N123(I,3)
 NGDLC(I) VCC(I) {se NCC>0}
 NGDLD(I) VDP(I) {se NDP>0 e NV=0}
 NOD(I) VDP(I) DN(I) FXN(I) FYN(I) {se NDP>0 e NV>0}
 NIV(I) NFV(I) E(I) POI(I) IN(I) Q(I) D(I) FX(I) FY(I)
 EAR(I)

onde:

NN	– número de nós;
NL	– número de lados;
NE	– número de elementos de placa;
I, XG(I), YG(I)	– nó I, coordenada X e Y globais do nó I;
I, LG(I,1), LG(I,2)	– lado I, nós inicial e final do lado I;
I, N123(I,1), N123(I,2), N123(I,3)	– elemento I, nós 1, 2 e 3 do elemento I;
NGDLC(I), VCC(I)	– número do grau de liberdade com carga concentrada e valor da carga concentrada I (sentido positivo para cima);
NGDLD(I), VDP(I)	– número do grau de liberdade com deslocamento prescrito e valor do deslocamento prescrito I.

As demais variáveis envolvidas foram definidas no item anterior.

7.4 A SUB-ROTINA PRE_PROCESSADOR

A sub-rotina pré-processador tem por objetivo determinar as coordenadas X e Y dos nós da estrutura, os nós inicial e final de cada lado e os nós 1, 2 e 3 de cada elemento de placa, a partir das coordenadas dos nós inferior esquerdo e superior direito da placa, do

número de elementos em X e em Y e do tipo de discretização da malha, que pode ser S, Z ou X. Figura 32. A nomenclatura criada pelo autor é inspirada nas “letras” a que se assemelham a disposição dos lados em cada retângulo de discretização.

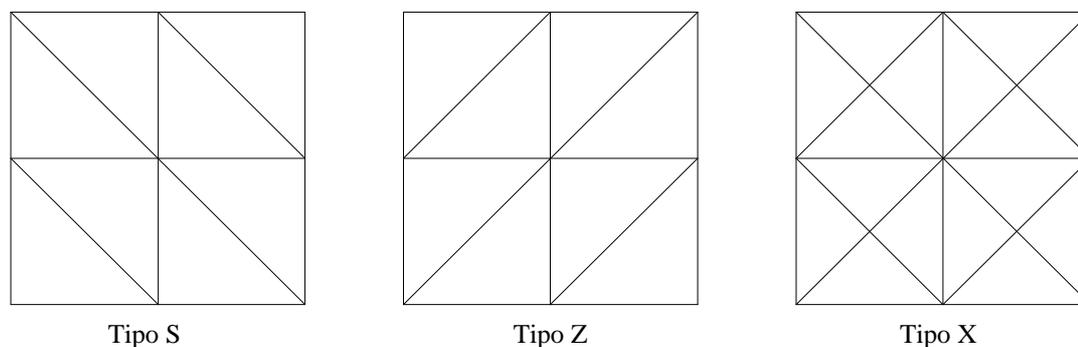


FIGURA 32 – Tipos de discretização da malha

A numeração dos lados é feita de forma que se tenha uma menor largura de banda para a matriz de rigidez da estrutura.

7.5 EXCLUSÃO DE ELEMENTOS

A exclusão de elementos é um recurso bastante necessário quando se está trabalhando com malhas de formato irregular e/ou em casos de existirem “buracos” na mesma. O programa PAPEP15N atribui um módulo de elasticidade fictício (reduzido) para os elementos que devem ser excluídos, além de não considerar a contribuição da carga uniformemente distribuída (se houver) nestes elementos. Este módulo de elasticidade fictício corresponde a $1.0E-16$ do valor do módulo de elasticidade dos outros elementos de placa.

7.6 SAÍDA DE DADOS

A saída de dados do programa PAPEP15N é feita através de 5 arquivos de dados gerados pelo programa, cujos nomes são os mesmos do arquivo de entrada de dados, com a

modificação da extensão. Desses 5 arquivos de dados, 4 são incondicionais e 1, com os resultados referentes às vigas, só será criado se houver vigas na estrutura.

Se o nome do arquivo de dados for p4v.ent por exemplo, o programa irá gerar os seguintes arquivos:

p4v.dat.....dados de entrada da estrutura;
p4v.gdl.....graus de liberdade por lado da estrutura;
p4v.plc.....resultados referentes à placa;
p4v.vgp.....resultados referentes às vigas (se houver vigas);
p4v.tmp...tempos de processamento das diversas etapas do programa e tempo total.

Todos os arquivos possuem um cabeçalho com o nome do arquivo, a data e a hora do início da análise. No apêndice estão os arquivos gerados por uma análise do exemplo 03* como demonstração.

7.7 TEMPOS DE PROCESSAMENTO

As etapas envolvidas nas análises são diferentes para o caso de se tratar de uma placa ou um pavimento. Se a estrutura analisada for uma placa, as etapas envolvidas são:

Leitura dos dados
Montagem da matriz de rigidez da placa
Condições de contorno
Solução do sistema de equações
Tensões na placa

Se um pavimento for analisado, as etapas serão:

Leitura dos dados
Montagem da matriz de rigidez da placa
Subestruturação em paralelo

*Ver capítulo 8.

Rotação de coordenadas da placa

Contribuição das vigas

Condições de contorno

Solução do sistema de equações

Retrosubstituição

Tensões na placa

Esforços nas vigas

onde a etapa retrosubstituição é responsável pela determinação dos deslocamentos internos da placa a partir dos deslocamentos externos.

Após o fornecimento do nome do arquivo de entrada de dados, inicia-se a execução do programa propriamente dita. Durante esta execução e após o fim de cada etapa realizada, o programa escreve em tela o nome da etapa realizada e o tempo de processamento despendido. Ao fim de toda a análise, o tempo total é fornecido. Figura 33.



```
PAPE P15N
*****

TEMPOS DE PROCESSAMENTO:
Leitura dos dados:                0 centesimos
Montagem da matriz de rigidez da placa: 16 centesimos
Subestruturacao em paralelo:      0 centesimos
Rotacao de coordenadas da placa:  1 s
Contribuicao das vigas:            0 centesimos
Condicoes de contorno:           0 centesimos
Solucao do sistema de equacoes:  0 centesimos
Retrosubstituicao:                0 centesimos
Tensoes na placa:                0 centesimos
Esforços nas vigas:              0 centesimos

-----
TEMPO TOTAL:                      1 s
-----

Pause - Please enter a blank line (to continue) or a DOS command.
```

FIGURA 33 – Tempos de processamento

8 EXEMPLOS

8.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo serão apresentados 5 exemplos numéricos utilizando-se o programa desenvolvido no trabalho. Nas análises realizadas com o elemento finito DKT utilizou-se o programa SRP desenvolvido por CHAVES (1996), em alguns casos, com a utilização do gerador de arquivos PEC, de SOUSA JUNIOR (1996).

8.2 EXEMPLO 1

O exemplo 1 trata de uma placa quadrada em que serão considerados os seguintes casos:

- placa simplesmente apoiada nas bordas submetida a carregamento uniformemente distribuído;
- placa engastada nas bordas submetida a carregamento uniformemente distribuído;
- placa simplesmente apoiada nas bordas submetida a carga concentrada no centro;
- placa engastada nas bordas submetida a carga concentrada no centro.

Os demais dados necessários para as análises da placa são mostrados na figura 34, onde também são apresentados exemplos de malhas do tipo S^* , onde facilmente se faz uma analogia com os outros tipos de discretização apresentados (Z e X).

Por questões de simetria, apenas um quarto da placa foi modelado. Vale a observação que para que isto seja feito, os lados AB e AD apresentam $w_{,n} = 0$ como condições de contorno – BC e DC depende da análise – e deve-se atribuir valor 1000 para a carga concentrada P.

*Ver item 7.4.

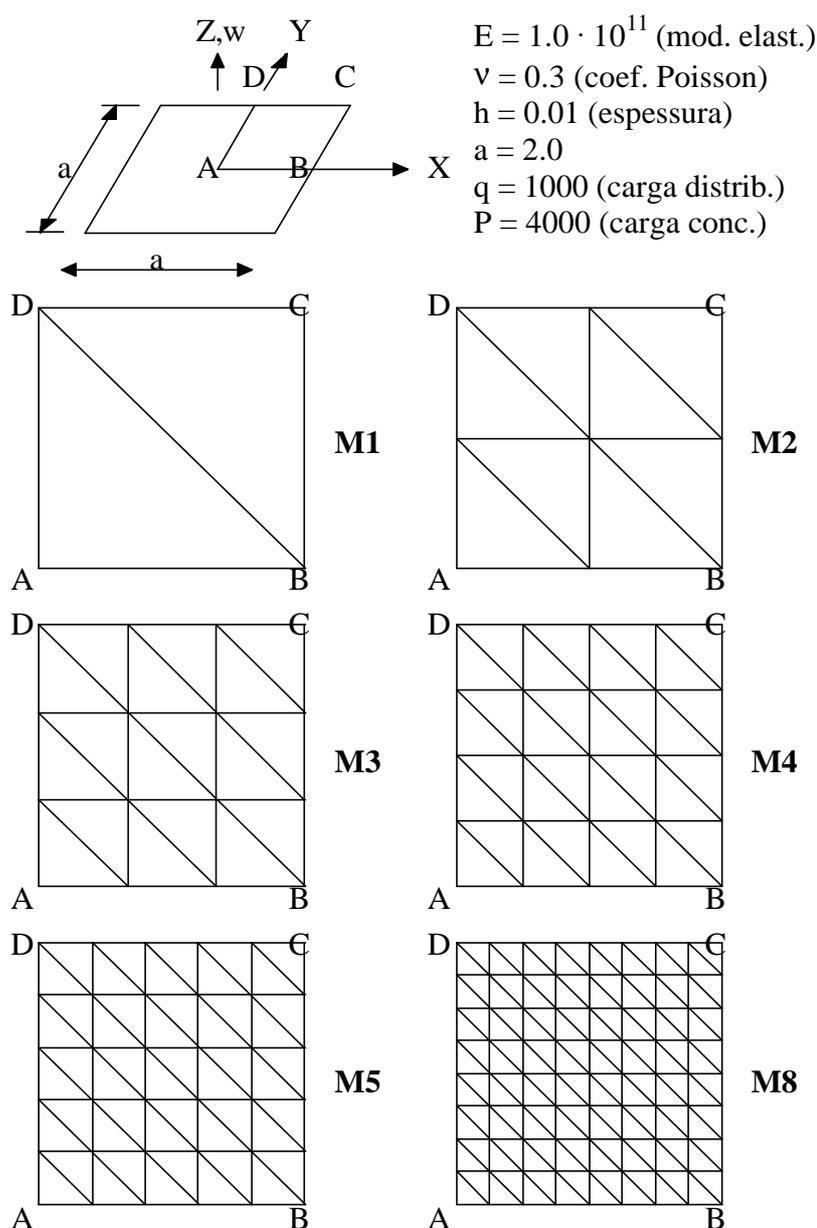


FIGURA 34 – Exemplo 1

As tabelas 03, 04 e 05 mostram os resultados das diversas análises realizadas com o elemento finito P15N para o deslocamento w no centro da placa para os 3 tipos de discretizações estudadas. Os valores analíticos são de MARTINS & SABINO (1997).

A partir das tabelas 03, 04 e 05 diversos gráficos são apresentados com o intuito de se comparar a convergência das diferentes discretizações realizadas.

As figuras 35, 36 e 37 apresentam a convergência monotônica dos 3 tipos de discretização da malha (S, Z e X) para os diversos casos de condições de contorno e carregamento da placa. O eixo das ordenadas apresenta o erro, em porcentagem, no deslocamento w no centro da placa e o eixo das abscissas o refinamento das malhas utilizadas

– M1, M2, M3, etc. Através dessas figuras, pode-se perceber a rápida convergência do elemento P15N para este caso de placa quadrada. Com um refinamento de número 2 (8 elementos para os tipos S e Z e 16 para X) já se obtém erros inferiores a 2%.

TABELA 03 – Deslocamento w para placa quadrada – tipo S

malha S	elementos	gdl	carga distribuída				carga concentrada			
			apoiada		engastada		apoiada		engastada	
			w	erro (%)	w	erro (%)	w	erro (%)	w	erro (%)
M1	2	24	7,07187	-0,364	2,18172	-1,314	19,5260	-3,665	9,01932	-8,015
M2	8	73	7,10235	0,065	2,22676	0,723	20,1021	-0,823	9,65773	-1,504
M3	18	148	7,10053	0,039	2,21779	0,318	20,1996	-0,342	9,74420	-0,622
M4	32	249	7,09942	0,024	2,21448	0,168	20,2318	-0,183	9,77243	-0,334
M5	50	376	7,09884	0,015	2,21304	0,103	20,2461	-0,112	9,78502	-0,206
M6	72	529	7,09851	0,011	2,21230	0,069	20,2536	-0,075	9,79167	-0,138
M8	128	913	7,09817	0,006	2,21159	0,037	20,2608	-0,040	9,79805	-0,073
valor analítico			7,09774	0	2,21077	0	20,2689	0	9,80521	0

TABELA 04 – Deslocamento w para placa quadrada – tipo Z

malha Z	elementos	gdl	carga distribuída				carga concentrada			
			apoiada		engastada		apoiada		engastada	
			w	erro (%)	w	erro (%)	w	erro (%)	w	erro (%)
M1	2	24	7,16048	0,884	2,27032	2,694	20,2582	-0,053	8,92531	-8,974
M2	8	73	7,10810	0,146	2,21335	0,117	20,2249	-0,217	9,73222	-0,744
M3	18	148	7,10177	0,057	2,21327	0,113	20,2500	-0,093	9,78241	-0,233
M4	32	249	7,09988	0,030	2,2125	0,078	20,2590	-0,049	9,79445	-0,110
M5	50	376	7,09906	0,019	2,21197	0,054	20,2629	-0,030	9,79910	-0,062
M6	72	529	7,09863	0,013	2,21163	0,039	20,2650	-0,019	9,80135	-0,039
M8	128	913	7,09823	0,007	2,21127	0,023	20,2669	-0,010	9,80336	-0,019
valor analítico			7,09774	0	2,21077	0	20,2689	0	9,80521	0

TABELA 05 – Deslocamento w para placa quadrada – tipo X

malha X	elementos	gdl	carga distribuída				carga concentrada			
			apoiada		engastada		apoiada		engastada	
			w	erro (%)	w	erro (%)	w	erro (%)	w	erro (%)
M1	4	37	7,12087	0,326	2,15878	-2,352	20,1432	-0,620	9,40130	-4,119
M2	16	125	7,10675	0,127	2,21840	0,345	20,2535	-0,076	9,78850	-0,170
M3	36	265	7,10170	0,056	2,21456	0,171	20,2650	-0,019	9,80181	-0,035
M4	64	457	7,09995	0,031	2,21291	0,097	20,2679	-0,005	9,80454	-0,007
M5	100	701	7,09915	0,020	2,21213	0,062	20,2688	0,000	9,80538	0,002
M6	144	997	7,09872	0,014	2,21171	0,043	20,2692	0,001	9,80568	0,005
M8	256	1745	7,09829	0,008	2,21130	0,024	20,2694	0,002	9,80579	0,006
valor analítico			7,09774	0	2,21077	0	20,2689	0	9,80521	0

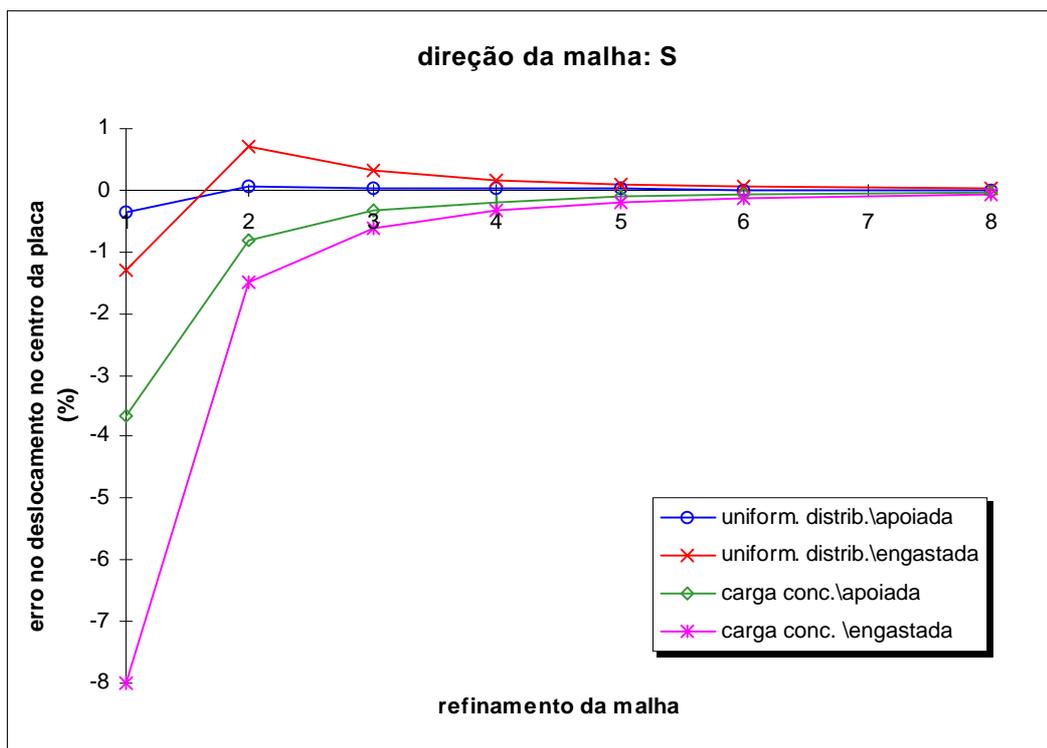


FIGURA 35 – Erro no deslocamento w no centro da placa quadrada – tipo S

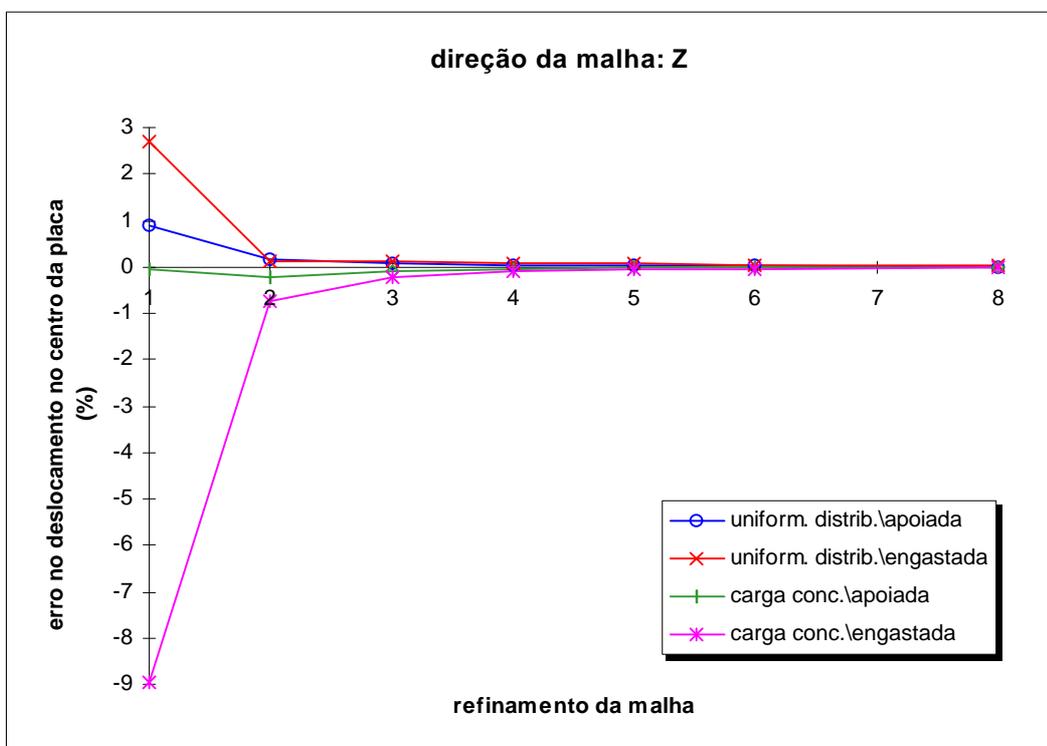


FIGURA 36 – Erro no deslocamento w no centro da placa quadrada – tipo Z

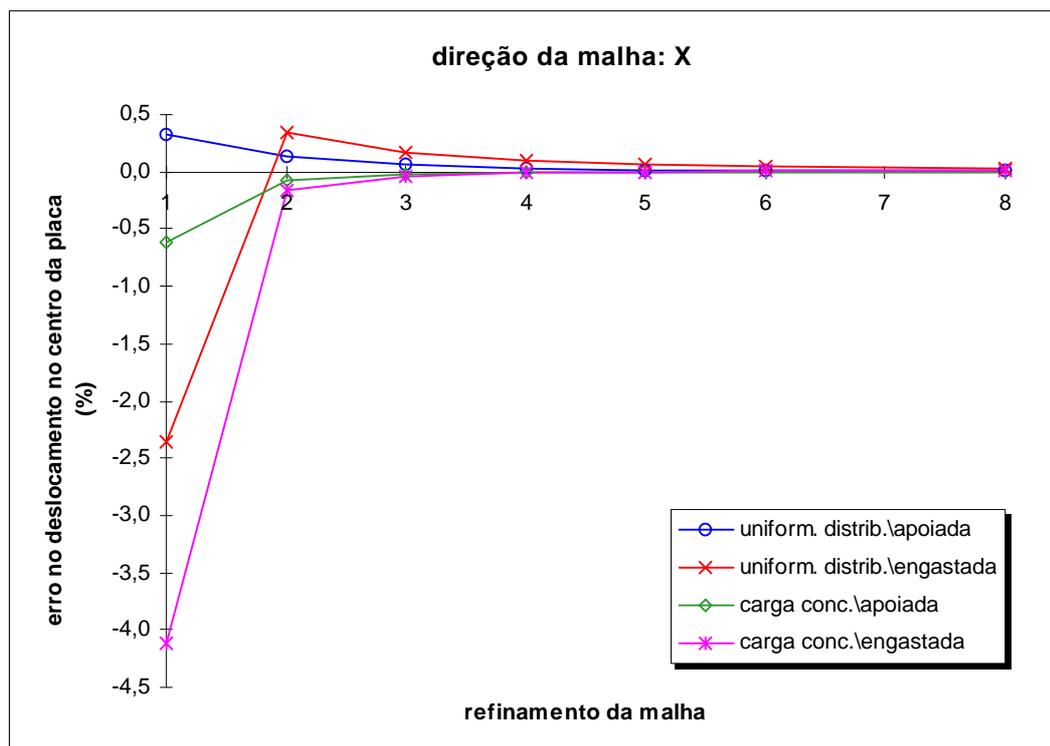


FIGURA 37 – Erro no deslocamento w no centro da placa quadrada – tipo X

A figura 38 compara a convergência entre os 3 tipos de discretização da malha para o caso da placa estar simplesmente apoiada e submetida a carregamento uniformemente distribuído. No eixo x, desta vez, estão apresentados os números de graus de liberdade de cada análise. Pode-se perceber que, apesar dos resultados serem parecidos, a discretização tipo S apresenta-se como sendo de mais rápida convergência que os outros dois tipos. Em geral, os erros encontrados são bem reduzidos (máximo de 0,884%).

A figura 39 repete o que foi apresentado na figura 38, sendo que para o caso de placa engastada. Desta vez a discretização tipo Z mostrou-se melhor que as outras duas.

As figuras 40 e 41 repetem o que se mostrou nas duas figuras anteriores, para placa simplesmente apoiada e engastada, respectivamente, sob carga concentrada. Os tipos Z e X apresentaram os melhores desempenhos em ambos os casos.

As tabelas 06, 07 e 08 são semelhantes às tabelas 03, 04 e 05, sendo que apresentam os resultados para os momentos no centro da placa quadrada. Apenas o caso de carga uniformemente distribuída foi considerado, pois para carga concentrada os resultados tendem para infinito. Os valores analíticos são de TIMOSHENKO & WOINOWSKY-KRIEGER (1959).

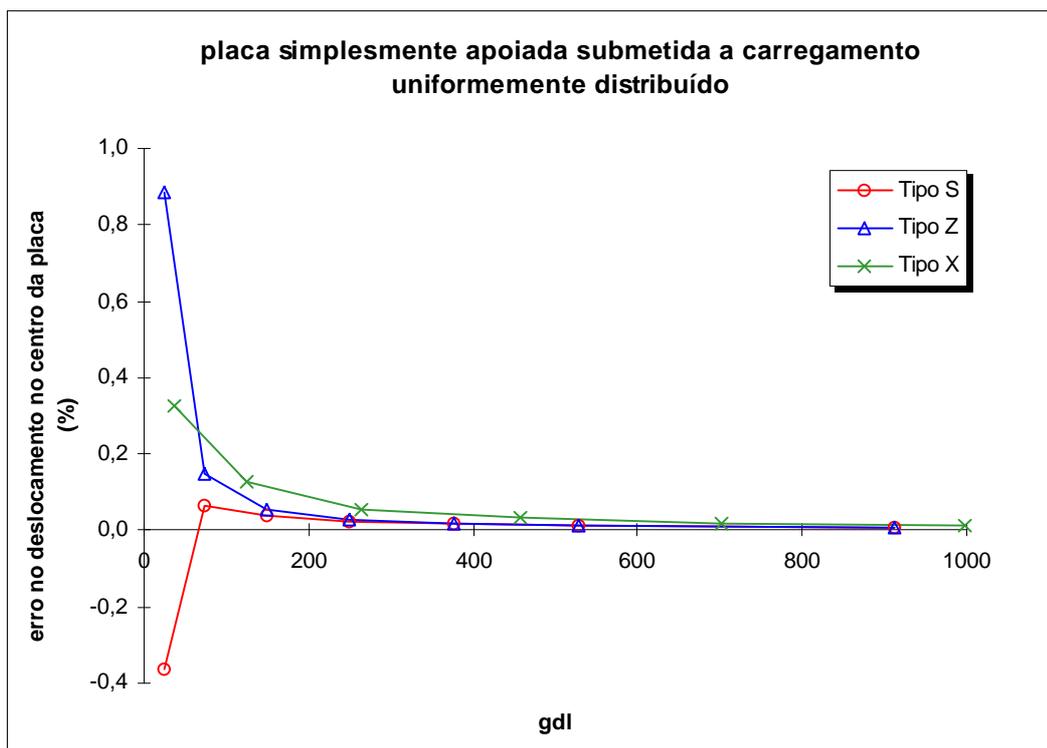


FIGURA 38 – Erro no deslocamento w para placa simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído

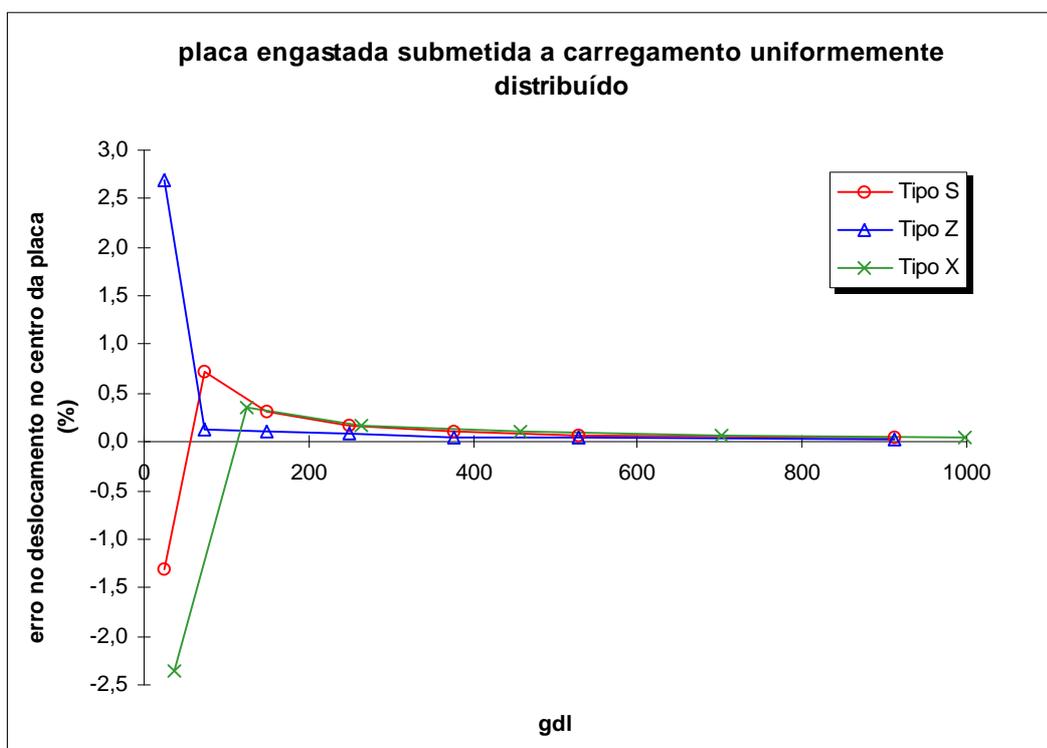


FIGURA 39 – Erro no deslocamento w para placa engastada submetida a carregamento uniformemente distribuído

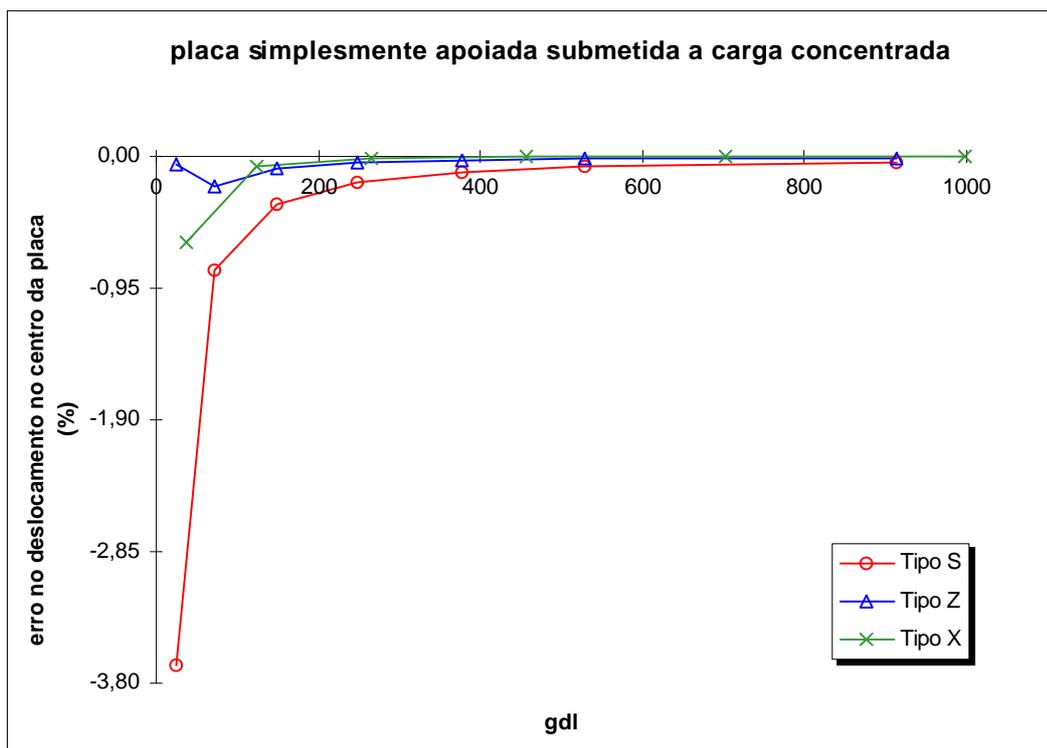


FIGURA 40 – Erro no deslocamento w para placa simplesmente apoiada submetida a carga concentrada

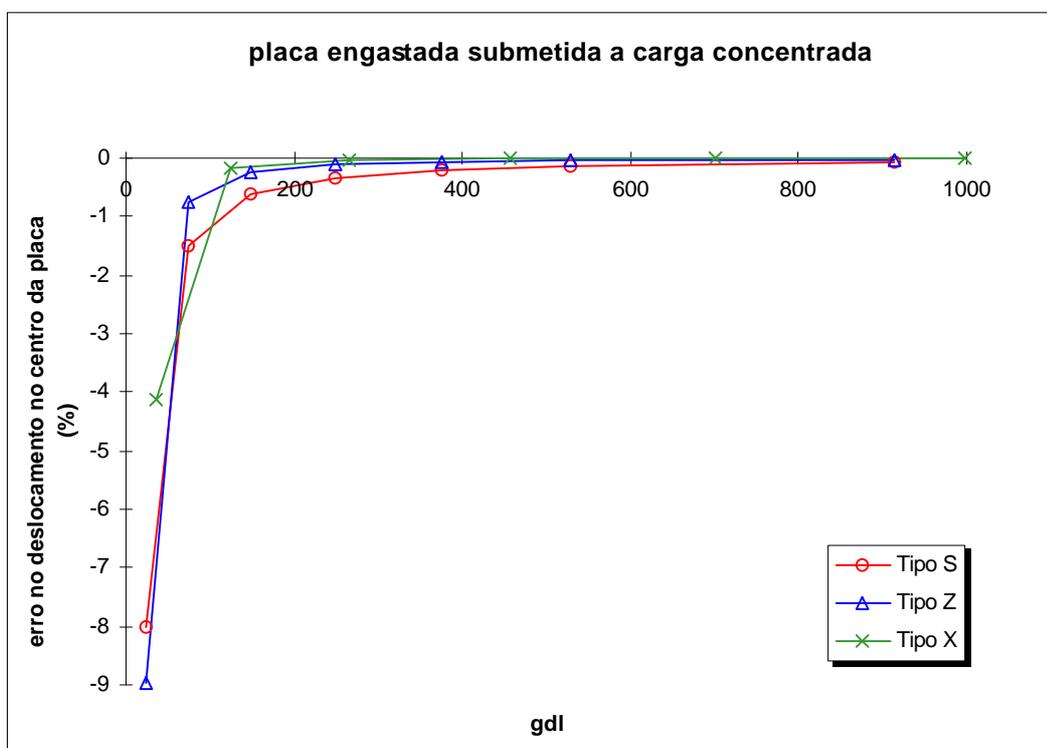


FIGURA 41 – Erro no deslocamento w para placa engastada submetida a carga concentrada

TABELA 06 – Momento $m_x = m_y$ para placa quadrada – tipo S

malha S	elementos	gdl	carga distribuída			
			apoiada		engastada	
			$m_x = m_y$	erro (%)	$m_x = m_y$	erro (%)
M1	2	24	160,544	-16,209	50,6486	-45,185
M2	8	73	185,882	-2,984	85,4481	-7,524
M3	18	148	189,061	-1,325	88,9414	-3,743
M4	32	249	190,162	-0,751	90,1318	-2,455
M5	50	376	190,665	-0,488	90,6735	-1,869
M6	72	529	190,937	-0,346	90,9653	-1,553
M8	128	913	191,205	-0,206	91,2536	-1,241
valor analítico			191,600	0	92,4000	0

TABELA 07 – Momento $m_x = m_y$ para placa quadrada – tipo Z

malha Z	elementos	gdl	carga distribuída			
			apoiada		engastada	
			$m_x = m_y$	erro (%)	$m_x = m_y$	erro (%)
M1	2	24	203,075	5,989	140,6760	52,247
M2	8	73	191,676	0,040	92,2049	-0,211
M3	18	148	191,165	-0,227	91,4532	-1,025
M4	32	249	191,254	-0,181	91,4107	-1,071
M5	50	376	191,336	-0,138	91,4428	-1,036
M6	72	529	191,391	-0,109	91,4794	-0,996
M8	128	913	191,453	-0,077	91,5306	-0,941
valor analítico			191,600	0	92,4000	0

TABELA 08 – Momento $m_x = m_y$ para placa quadrada – tipo X

malha X	elementos	gdl	carga distribuída			
			apoiada		engastada	
			$m_x = m_y$	erro (%)	$m_x = m_y$	erro (%)
M1	4	37	174,911	-8,710	60,8433	-34,152
M2	16	125	189,463	-1,115	89,0147	-3,664
M3	36	265	190,764	-0,436	90,7666	-1,768
M4	64	457	191,134	-0,243	91,1998	-1,299
M5	100	701	191,290	-0,162	91,3688	-1,116
M6	144	997	191,372	-0,119	91,4523	-1,026
M8	256	174 5	191,449	-0,079	91,5295	-0,942
valor analítico			191,600	0	92,4000	0

As figuras 42 a 46 são semelhantes às 35 a 39 sendo que os resultados são para os momentos no centro da placa; as figuras foram geradas a partir dos resultados expressos nas tabelas 06 a 08. Nas figuras 42 a 44 pode-se perceber que se a placa estiver apoiada ao invés de engastada a convergência ocorre de maneira mais rápida. Também os erros, em geral, são maiores que aqueles encontrados para o deslocamento w no centro da placa. As figuras 45 e 46 mostram que apesar dos resultados serem parecidos para os 3 tipos de discretização da malha, o tipo Z apresenta resultados um pouco melhores que os outros dois.

As figuras 47 a 50 comparam a eficiência do elemento finito P15N com outros elementos finitos de placa: DKTC, HSMC* e T18, para o mesmo exemplo de placa quadrada. Os resultados apresentados para os DKTC e HSMC são provenientes de SOARES (1991) e para o T 18, de DEGASPARE (1975). Como se pode observar nessas figuras, como regra geral, a convergência dos elementos finitos T 18 e P15N se deu com mais rapidez que com os dois outros elementos. Esse fato era de se esperar, pois aqueles dois elementos possuem mais graus de liberdade (18 e 15, respectivamente) que o DKTC e HSMC (12, para ambos).

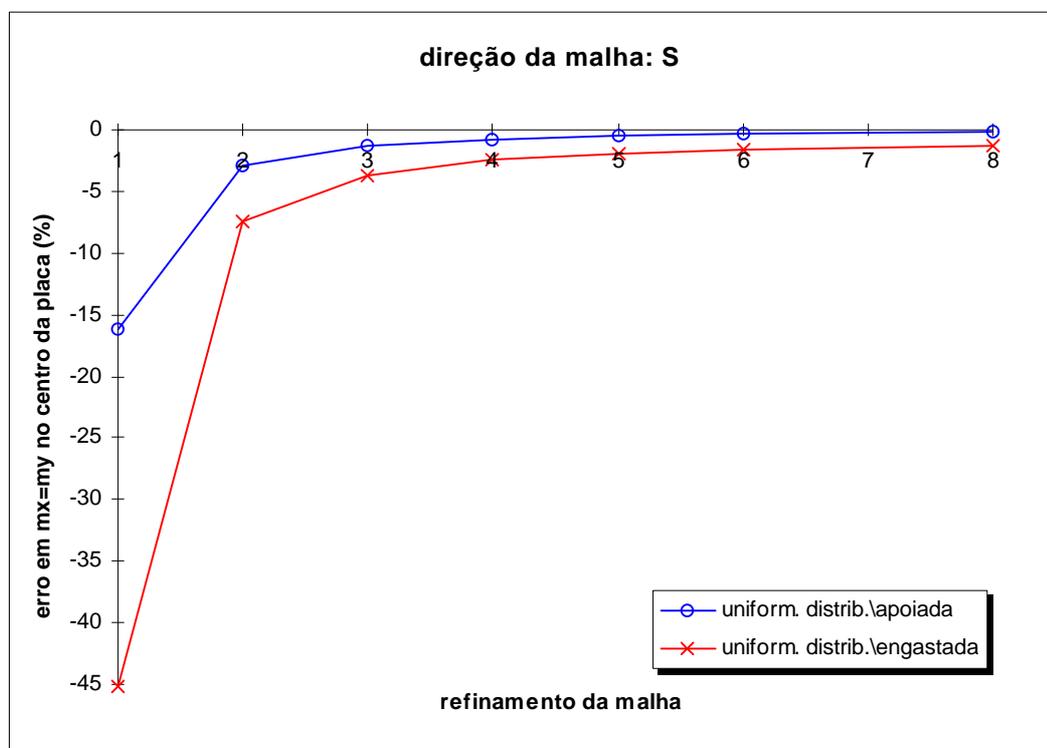


FIGURA 42 – Erro em $m_x = m_y$ no centro da placa quadrada – tipo S

*O elemento finito HSM (*hybrid stress model*) também pode ser submetido ao processo de condensação estática como o elemento DKT, formando assim o elemento HSMC. Ver item 4.6.

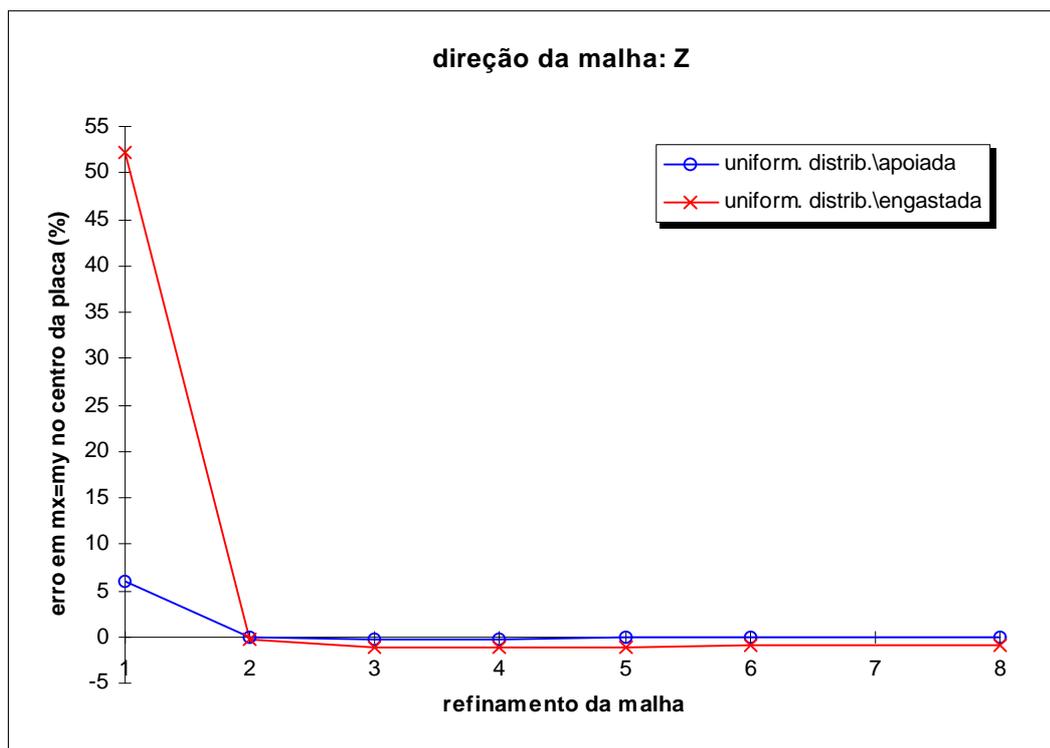


FIGURA 43 – Erro em $m_x = m_y$ no centro da placa quadrada – tipo Z

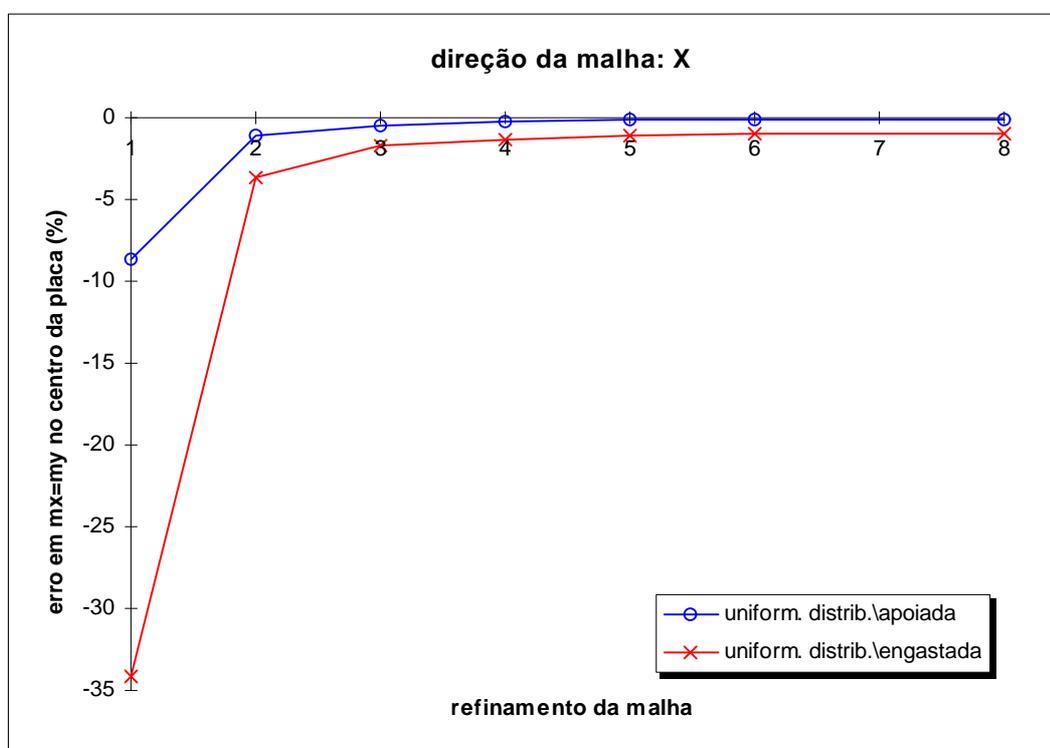


FIGURA 44 – Erro em $m_x = m_y$ no centro da placa quadrada – tipo X

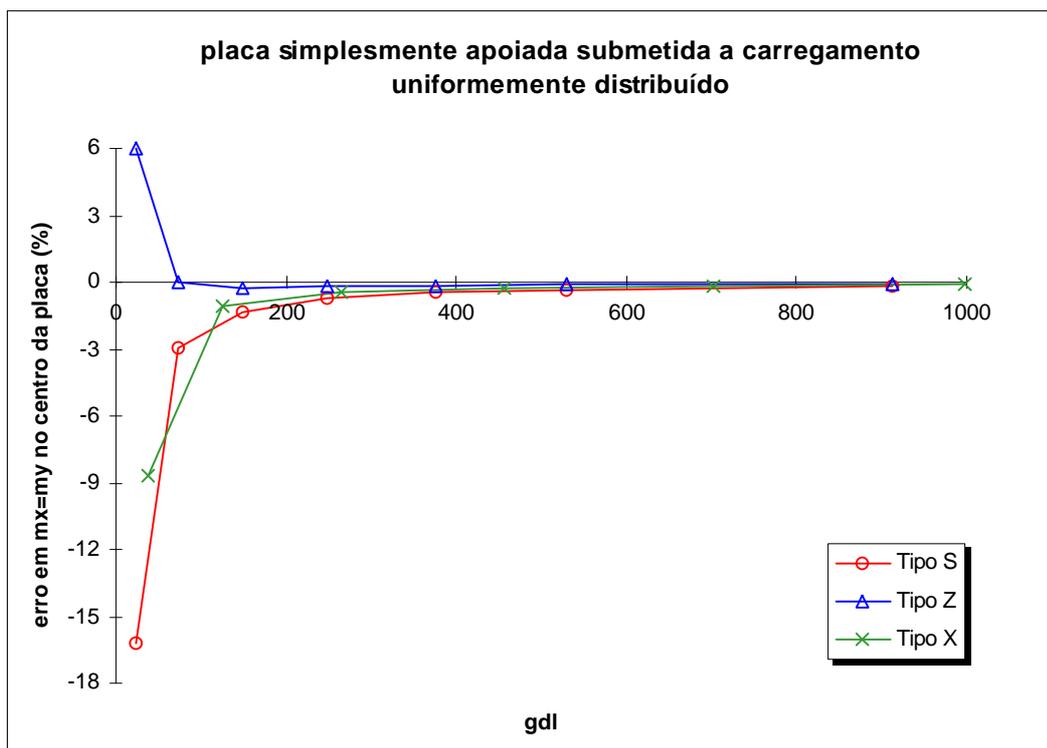


FIGURA 45 – Erro em $m_x = m_y$ para placa simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído

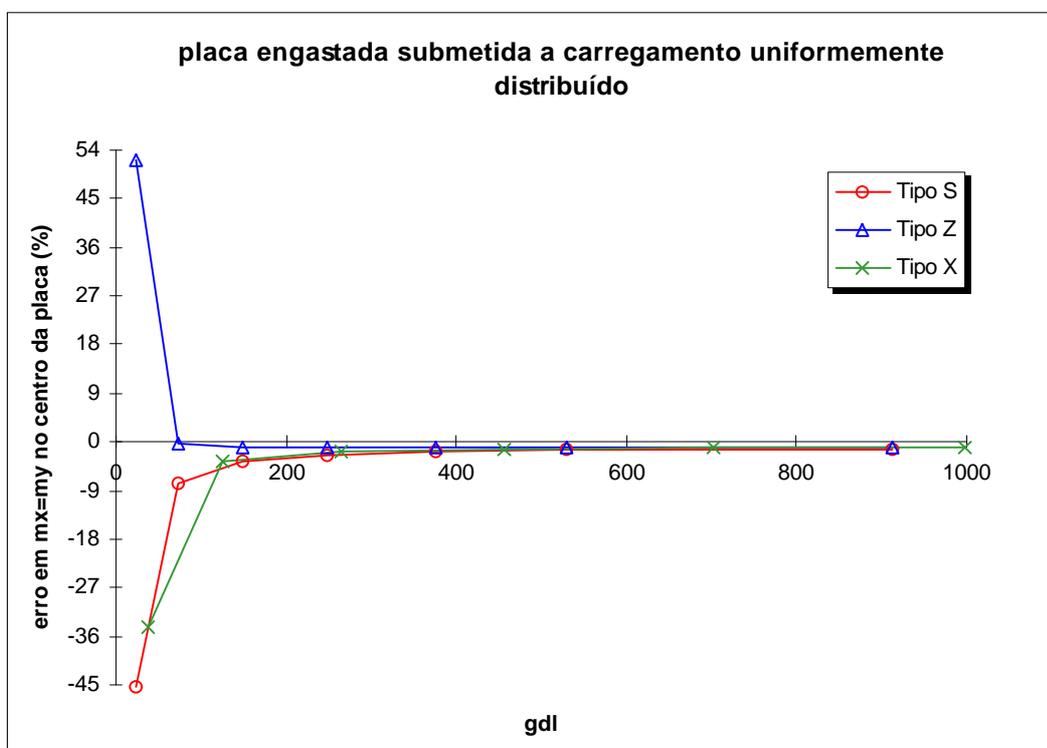


FIGURA 46 – Erro em $m_x = m_y$ para placa engastada submetida a carregamento uniformemente distribuído

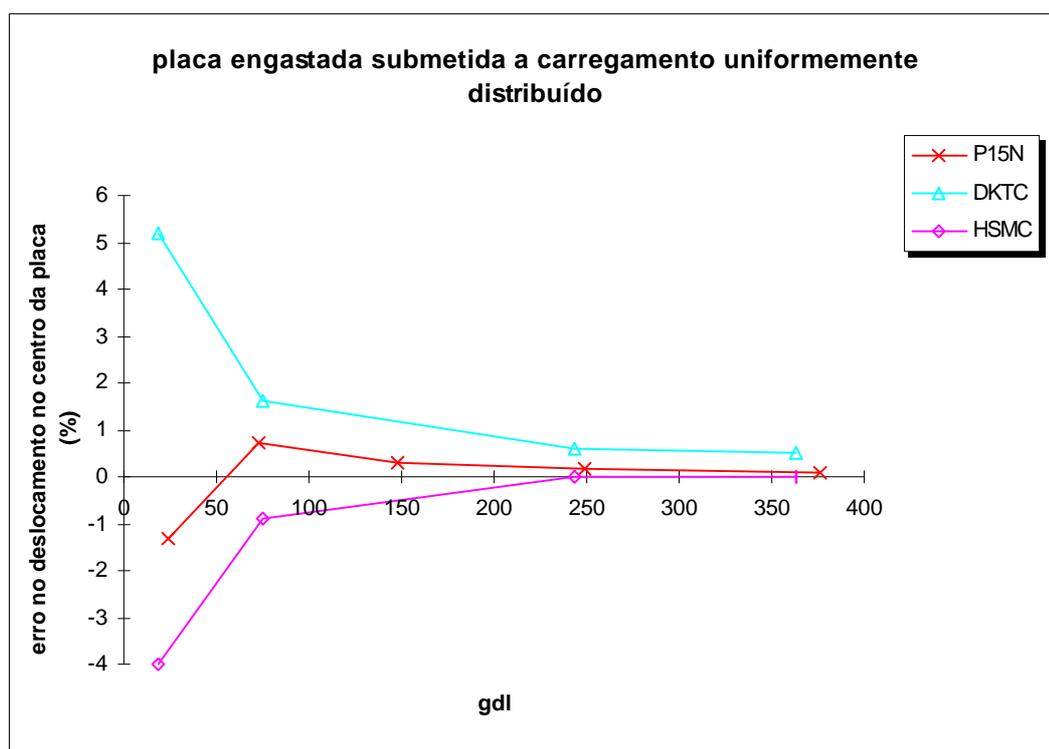


FIGURA 47 – Placa engastada submetida a carregamento uniformemente distribuído – comparação com outros elementos

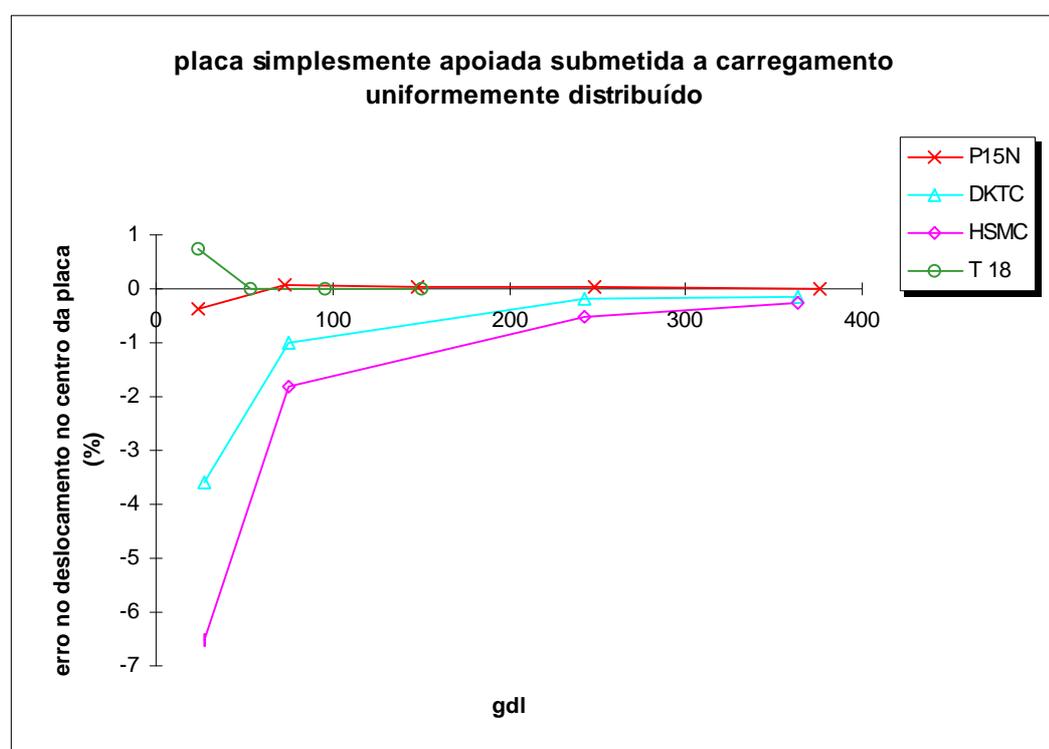


FIGURA 48 – Placa simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído – comparação com outros elementos

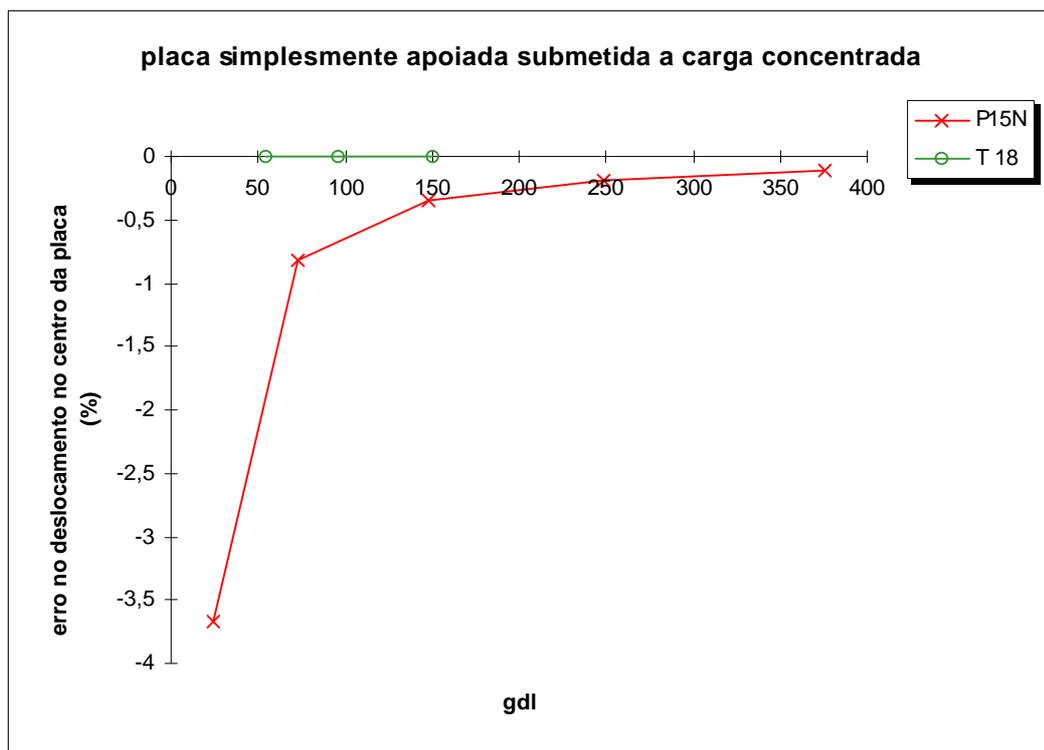


FIGURA 49 – Placa simplesmente apoiada submetida a carga concentrada – comparação com o elemento finito T18

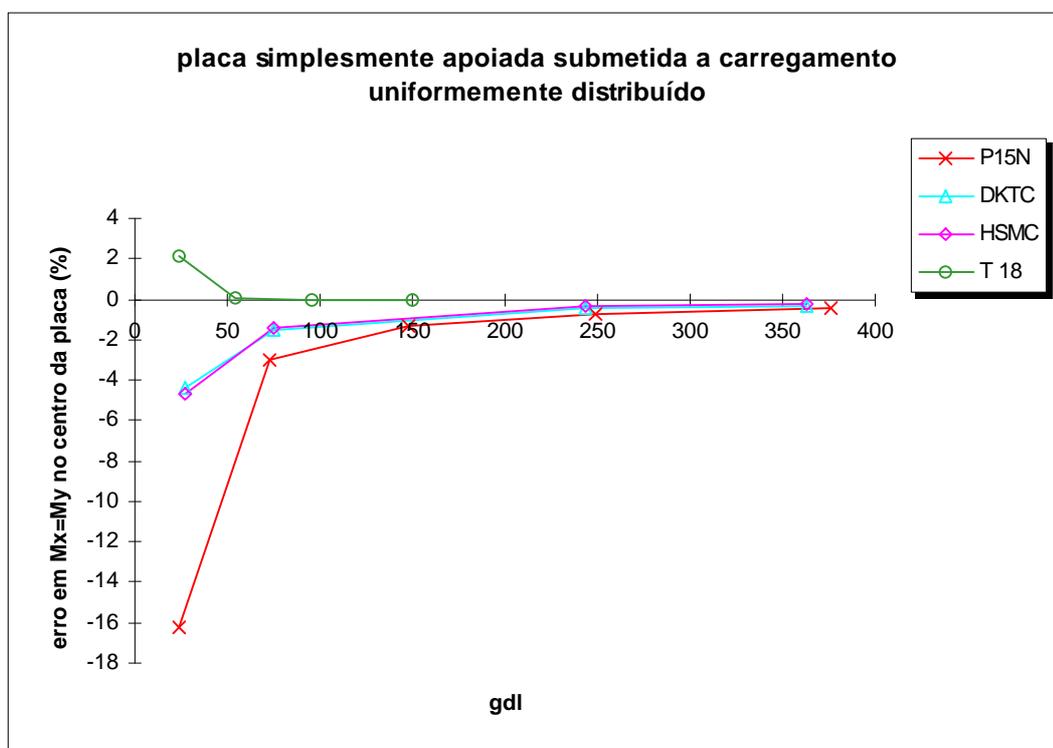


FIGURA 50 – Placa simplesmente apoiada submetida a carregamento uniformemente distribuído ($m_y = m_x$) – comparação com outros elementos

A última comparação deste primeiro exemplo é mostrada na tabela 09, onde se explicita a diferença entre os resultados obtidos com a utilização de dois métodos de consideração do carregamento uniformemente distribuído: o primeiro é o que foi utilizado no programa desenvolvido no trabalho, ou seja, com o vetor de cargas equivalentes escrito a partir das funções de forma do elemento; e o segundo é aquele que considera a carga distribuída no elemento como 6 cargas concentradas. Ver item 5.5.

TABELA 09 – Comparação entre métodos de consideração de carregamento uniformemente distribuído – placa quadrada

malha	elementos	gdl	vetor completo				aproximação com qA/6			
			apoiada		engastada		apoiada		engastada	
			w	erro (%)	w	erro (%)	w	erro (%)	w	erro (%)
M1	2	24	7,07187	-0,364	2,18172	-1,314	5,10054	-28,139	1,83333	-17,073
M2	8	73	7,10235	0,065	2,22676	0,723	6,56982	-7,438	2,12837	-3,727
M3	18	148	7,10053	0,039	2,21779	0,318	6,86034	-3,345	2,17304	-1,707
M4	32	249	7,09942	0,024	2,21448	0,168	6,96366	-1,889	2,18914	-0,978
M5	50	376	7,09884	0,015	2,21304	0,103	7,01176	-1,211	2,19677	-0,633
M6	72	529	7,09851	0,011	2,21230	0,069	7,03796	-0,842	2,20098	-0,443
M8	128	913	7,09817	0,006	2,21160	0,038	7,06407	-0,474	2,20522	-0,251
valor analítico			7,09774	0	2,21077	0	7,09774	0	2,21077	0

Observando-se a tabela 09, pode-se perceber que apesar da convergência monotônica dos valores obtidos com a utilização do segundo método, os resultados são bem menos aproximados que aqueles obtidos com o vetor de cargas nodais equivalentes completo.

Os resultados apresentados na tabela 09 foram obtidos pelo autor utilizando-se de programa de computador, por ele desenvolvido.

8.3 EXEMPLO 2

O exemplo 2 trata da análise de uma placa esconsa, apoiada em duas bordas e livre nas duas outras bordas, submetida a carregamento uniformemente distribuído, conforme figura 51 A. O elemento P15N é comparado com os elementos DKTC, HSMC e T 18, onde os resultados para estes elementos têm as mesmas procedências que os do exemplo anterior, inclusive para os valores analíticos. As malhas empregadas são apresentadas na figura 51 B.

A figura 52 apresenta o erro, em porcentagem, para o deslocamento w e momento fletor m_y no centro da placa (ponto c).

Pela figura 52, observa-se que o elemento P15N apresenta resultados tão bons quanto os encontrados com os outros elementos, porém com número menor de elementos. Pelas discretizações utilizadas, a malha para os DKTC e HSMC possui 100 elementos (363 gdl); para o T18, são 120 (462 gdl); para o P15N são apenas 32 elementos (249 gdl).

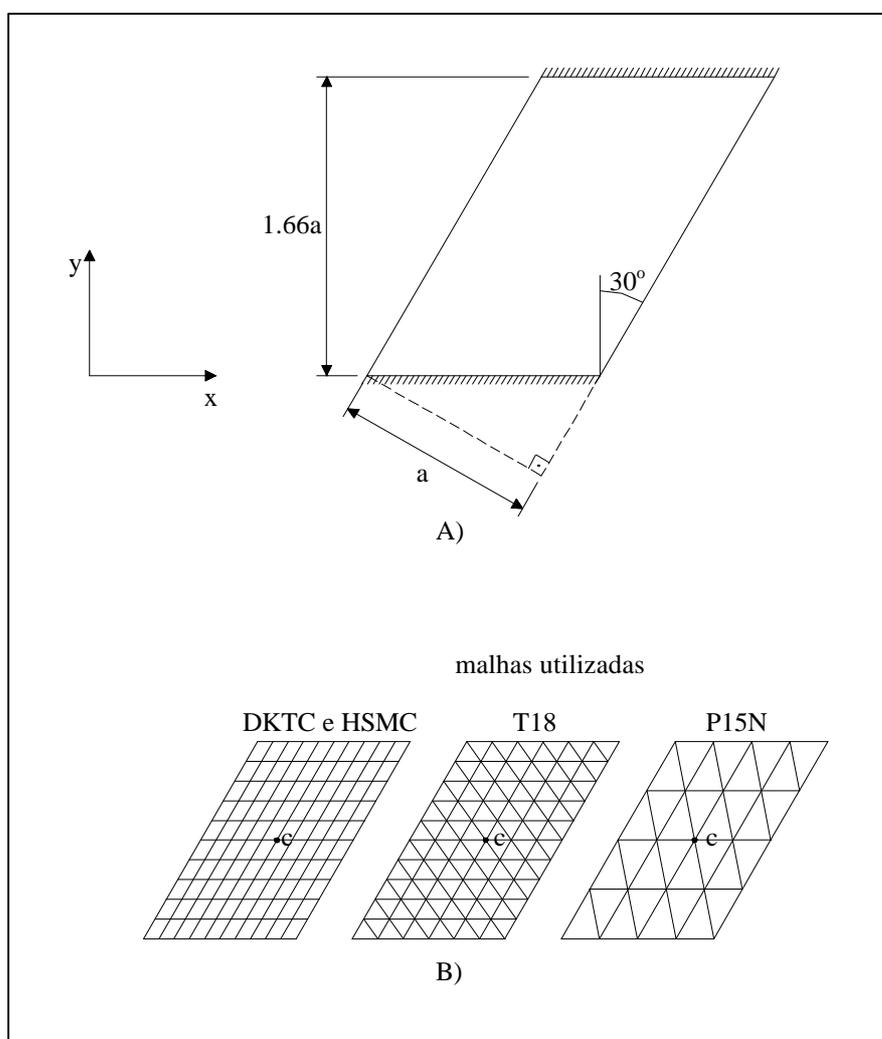
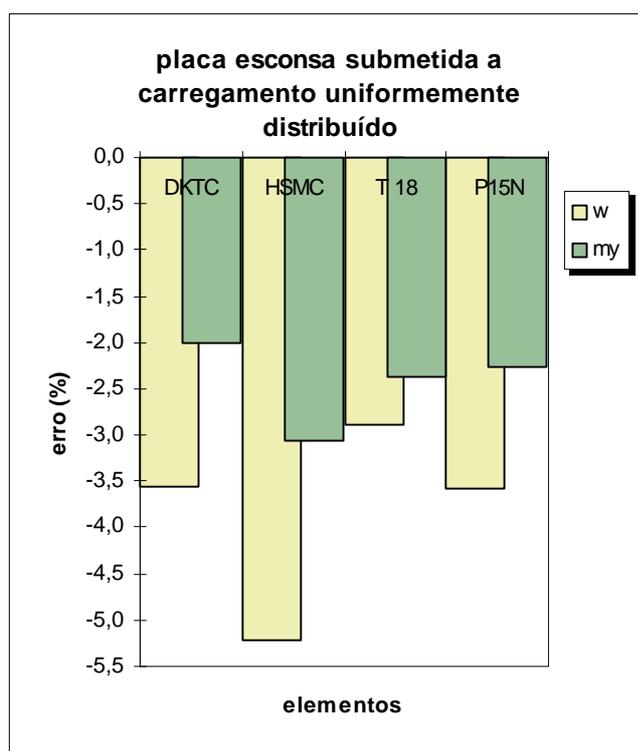
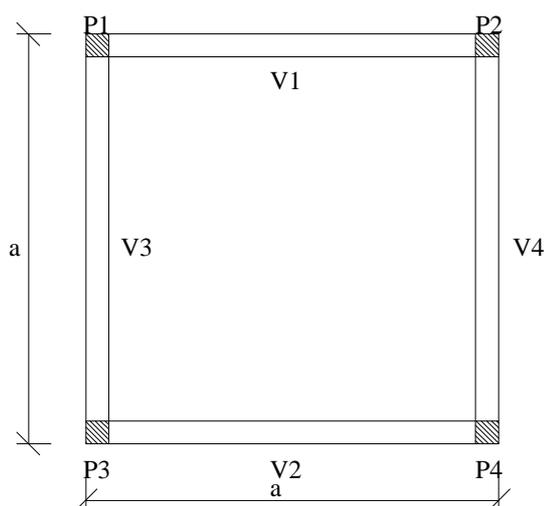


FIGURA 51 – Exemplo 2

FIGURA 52 – Placa esconsa (w e m_y)

8.4 EXEMPLO 3

O exemplo 3 trata-se de uma placa quadrada com vigas nas bordas e apoiada em 4 pilares. Figura 53.



$a = 2.0$ (lado da placa)

$h = 0.01$ (espessura da placa)

$E = 1.0E+11$ (módulo de elasticidade da placa e vigas)

$\nu = 0.25$ (coeficiente de Poisson da placa e vigas)

$I_1 = I_2 = I_3 = I_4$: momentos de inércia das vigas

$q = 1000$ (carga uniformemente distribuída na placa)

Os pilares são considerados apoios rígidos, translação em Z impedida e rotações livres.

FIGURA 53 – Exemplo 3

A inércia à torção das vigas é desprezada e para os momentos de inércia à flexão, já utilizando os valores estabelecidos anteriormente, é adotado o valor:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = \frac{5aD}{E} = 8.8889E - 7$$

onde D é a rigidez à flexão da placa*.

As tabelas 10 a 13 apresentam os resultados encontrados para o deslocamento vertical no centro da placa, utilizando-se exclusivamente os elementos finitos P15N e DKT/DKTC. Os resultados para os elementos DKT/DKTC foram obtidos utilizando-se o programa SRP desenvolvido por CHAVES (1996). O esquema de malhas é o mesmo que o adotado no exemplo 1. Os valores analíticos foram tirados de TIMOSHENKO & WOINOWSKY-KRIEGER (1959).

Os resultados encontrados utilizando-se as malhas tipo S e Z foram iguais para o elemento P15N e estão mostrados na tabela 10.

A figura 54 compara os resultados das tabelas 10 a 13. O eixo y corresponde aos erros no deslocamento vertical no centro da placa, em porcentagem, e o eixo x corresponde ao número de graus de liberdade. Pela figura 54 podemos observar que a convergência do elemento finito P15N ocorre muito mais rapidamente que a dos elementos DKT/DKTC. Para a malha mais “pobre” do exemplo (malha M1) a discretização tipo S/Z apresenta erro de 2,076% para menos, e para a discretização tipo X, um erro de 1,122% para mais. A malha M1 não pode nem ser utilizada pelo elemento DKT, pois não apresenta resultados para o meio da placa; utilizando-se porém a sua malha mais “pobre” (M2) o erro obtido é de -17,973 para tipo Z e -10,102 para o DKTC.

A superioridade do elemento finito P15N para esse exemplo é ainda observada analisando-se os números de graus de liberdade envolvidos no problema. Para se ter um resultado tão bom quanto aquele obtido utilizando-se o elemento P15N com 73 gdl para uma discretização tipo S/Z são necessários 507 gdl para o DKT.

As figuras 55 a 58 mostram comparações particulares da figura 54. A figura 55 compara as discretizações tipos S/Z e X do elemento P15N e pode-se observar que a partir da discretização M2, os resultados são bem parecidos, com uma diferença importante: o número de gdl. Enquanto a malha M6, por exemplo, da discretização tipo S/Z possui 529 gdl, a mesma malha para o tipo X possui 997 gdl. A figura 56 compara os resultados obtidos com os elementos finitos DKT e DKTC, onde para o mesmo número de gdl, o DKTC apresenta melhores resultados, como era de se esperar. As figuras 57 e 58 comparam os elementos P15N e DKT/DKTC para tipos de discretização semelhantes, onde se observa mais uma vez a superioridade dos resultados obtidos com o P15N para esse exemplo.

*Ver item 3.4.8.

TABELA 10 – Deslocamento w para placa apoiada em vigas – P15N/tipo S/Z

malha	elementos	gdl	w·1000	erro (%)
M1	2	24	9,14807	-2,076
M2	8	73	9,37058	0,306
M4	32	249	9,35376	0,126
M6	72	529	9,34981	0,084
M8	128	913	9,34833	0,068
valor analítico			9,34200	0

TABELA 11 – Deslocamento w para placa apoiada em vigas – P15N/tipo X

malha	elementos	gdl	w·1000	erro (%)
M1	4	37	9,44683	1,122
M2	16	125	9,37135	0,314
M3	36	265	9,35618	0,152
M4	64	457	9,35537	0,143
M5	100	701	9,35124	0,099
M6	144	997	9,35032	0,089
valor analítico			9,34200	0

TABELA 12 – Deslocamento w para placa apoiada em vigas – DKT/tipo Z

malha	elementos	gdl	w·1000	erro (%)
M2	8	27	7,6630	-17,973
M4	32	75	8,9714	-3,967
M6	72	147	9,1874	-1,655
M8	128	243	9,2592	-0,886
M12	288	507	9,3086	-0,358
M16	512	867	9,3254	-0,178
valor analítico			9,3420	0

TABELA 13 – Deslocamento w para placa apoiada em vigas – DKTC

malha	elementos	gdl	w·1000	erro (%)
M2	4	27	8,3983	-10,102
M4	16	75	9,0892	-2,706
M6	36	147	9,2318	-1,180
M8	64	243	9,2819	-0,643
M12	144	507	9,3177	-0,260
M16	256	867	9,3303	-0,125
valor analítico			9,3420	0

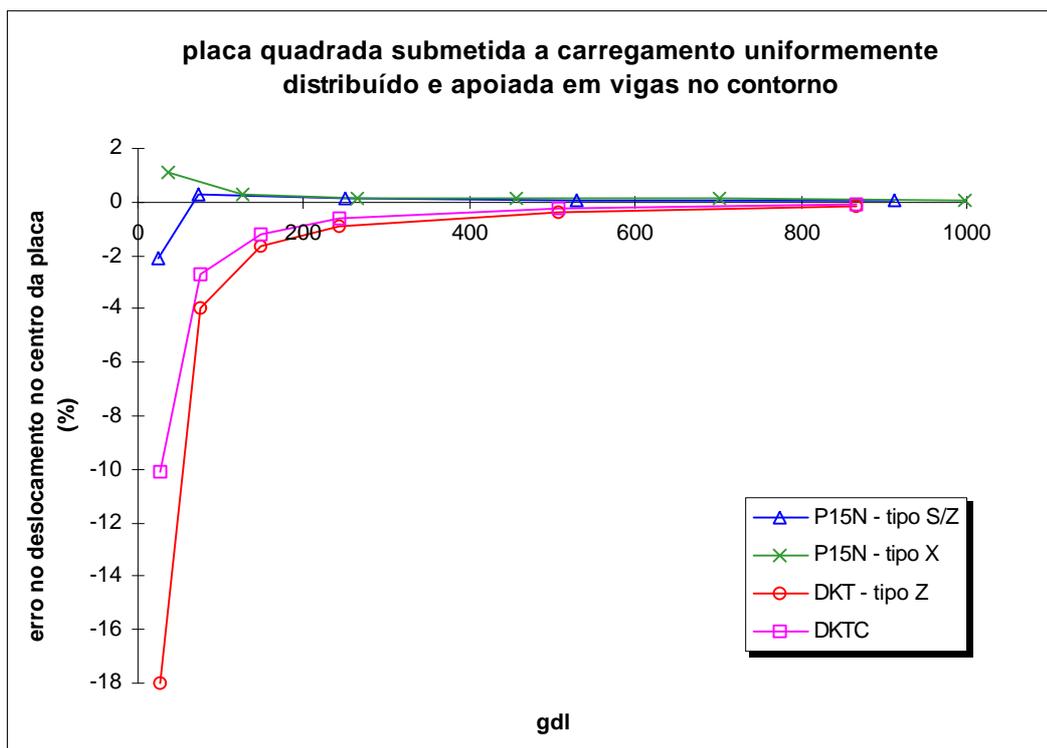


FIGURA 54 – Erro no deslocamento w no centro da placa apoiada em vigas

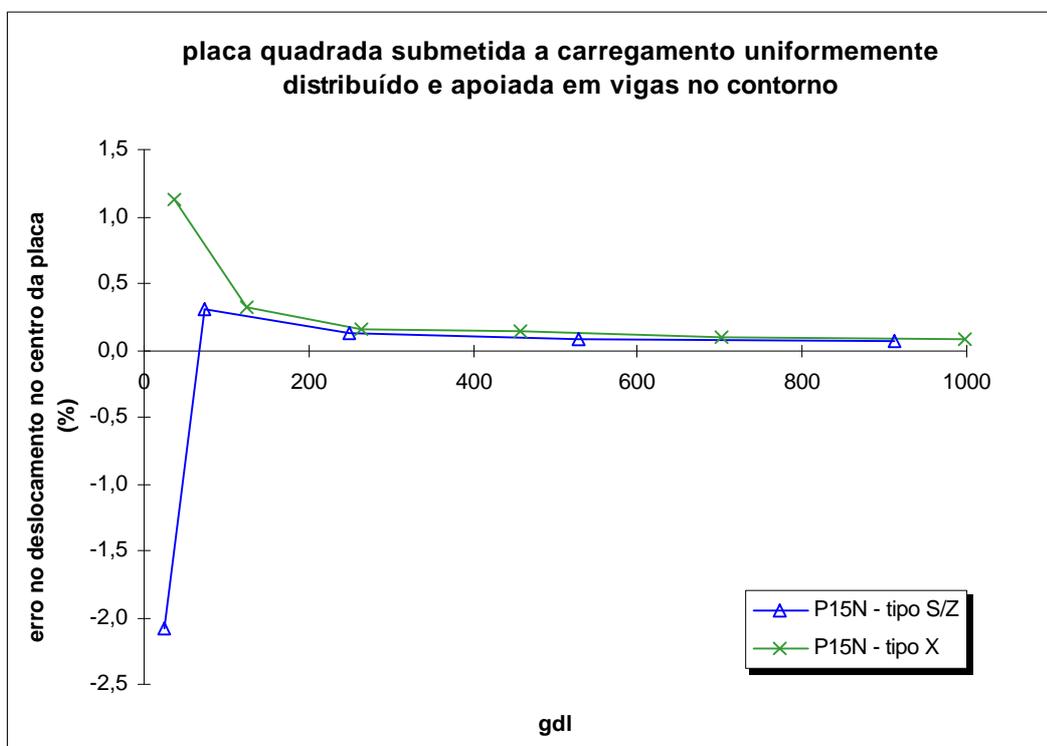


FIGURA 55 – Erro no deslocamento w no centro da placa apoiada em vigas – comparação entre P15N tipos S/Z e tipo X

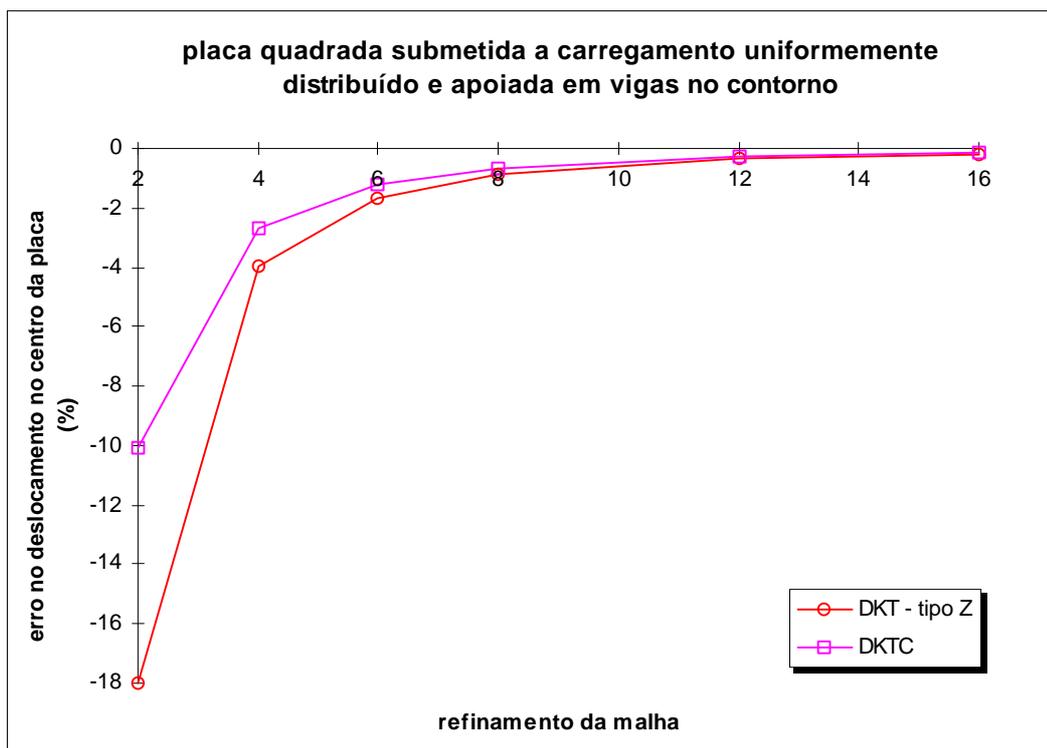


FIGURA 56 – Erro no deslocamento w no centro da placa apoiada em vigas – comparação entre DKT e DKTC

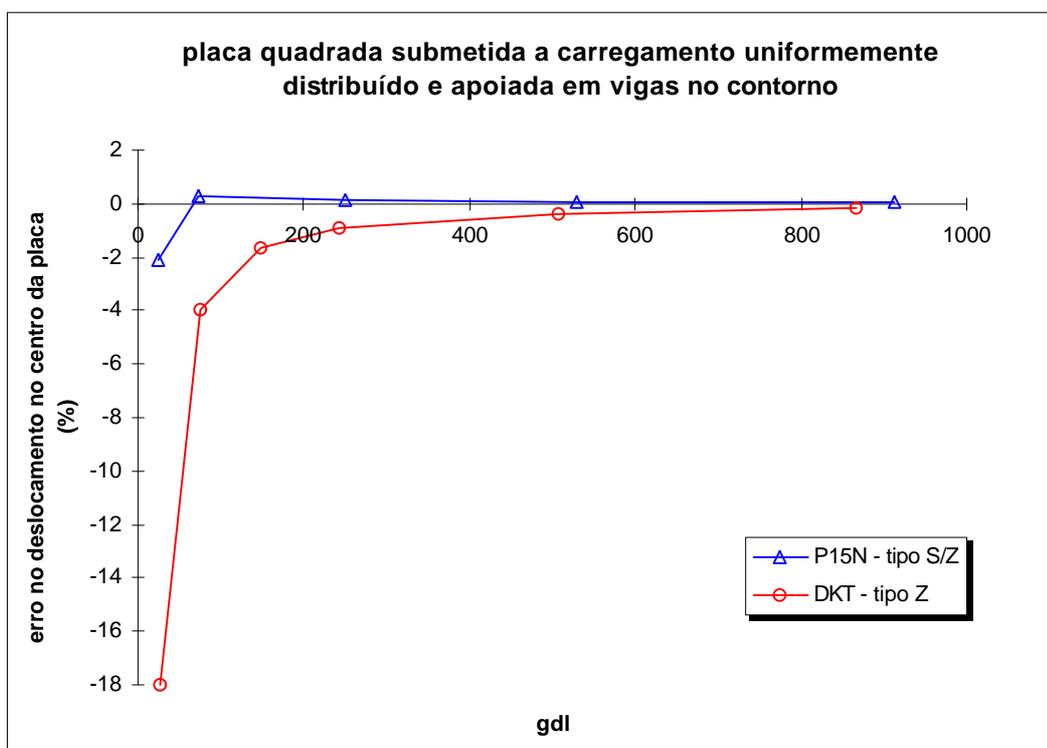


FIGURA 57 – Erro no deslocamento w no centro da placa apoiada em vigas – comparação entre P15N tipo S/Z e DKT tipo Z

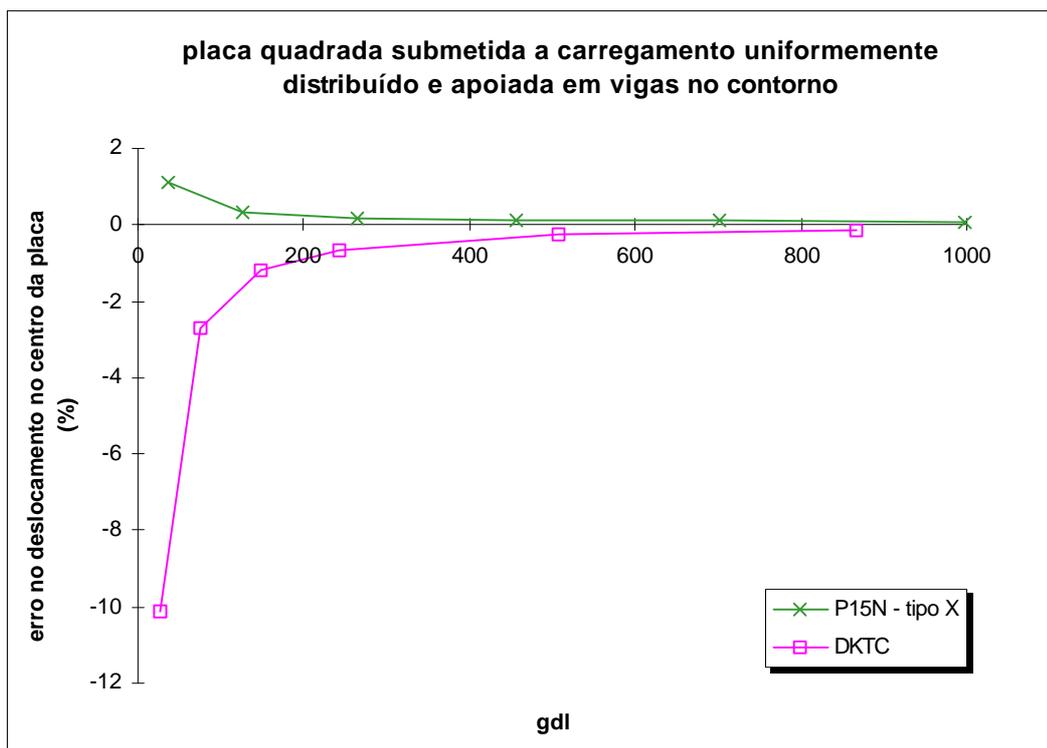


FIGURA 58 – Erro no deslocamento w no centro da placa apoiada em vigas – comparação entre P15N tipo X e DKTC

As tabelas 14 a 17 são semelhantes às tabelas 10 a 13 sendo que apresentam os erros, em porcentagem, para o momento $m_x = m_y$ no centro da placa.

A figura 59 mostra a convergência dos resultados encontrados com os elementos P15N, DKT e DKTC, onde mais uma vez se percebe o melhor desempenho do elemento finito P15N sobre o elemento DKT.

As figuras 60 a 63 são as comparações particulares, semelhante ao que se fez com o deslocamento w no centro da placa. Na figura 60 pode-se ver que, até 400 gdl, os resultados obtidos com a discretização tipo S/Z são bem melhores que aqueles obtidos com o tipo X; a partir de 400 gdl os resultados são bem próximos. As figuras 61 a 63 repetem o que foi observado nas figuras 56 a 58.

TABELA 14 – Momento $m_x = m_y$ para placa apoiada em vigas – P15N/tipo S/Z

malha	elementos	gdl	$m_x = m_y$	erro (%)
M2	8	73	195,912	-0,854
M4	32	249	196,519	-0,547
M6	72	529	197,030	-0,288
M8	128	913	197,319	-0,142
valor analítico			197,600	0

TABELA 15 – Momento $m_x = m_y$ para placa apoiada em vigas – P15N/tipo X

malha	elementos	gdl	$m_x = m_y$	erro (%)
M1	4	37	171,530	-13,193
M2	16	125	182,906	-7,436
M3	36	265	190,626	-3,529
M4	64	457	195,841	-0,890
M5	100	701	195,138	-1,246
M6	144	997	197,023	-0,292
valor analítico			197,600	0

TABELA 16 – Momento $m_x = m_y$ para placa apoiada em vigas – DKT/tipo Z

malha	elementos	gdl	$m_x = m_y$	erro (%)
M2	8	27	227,028	14,893
M4	32	75	204,358	3,420
M6	72	147	201,323	1,884
M8	128	243	199,791	1,109
M12	288	507	198,678	0,546
M16	512	867	198,276	0,342
valor analítico			197,600	0

TABELA 17 – Momento $m_x = m_y$ para placa apoiada em vigas – DKTC

malha	elementos	gdl	$m_x = m_y$	erro (%)
M2	8	27	219,812	11,241
M4	32	75	201,135	1,789
M6	72	147	199,145	0,782
M8	128	243	198,505	0,458
M12	288	507	198,075	0,240
M16	512	867	197,930	0,167
valor analítico			197,600	0

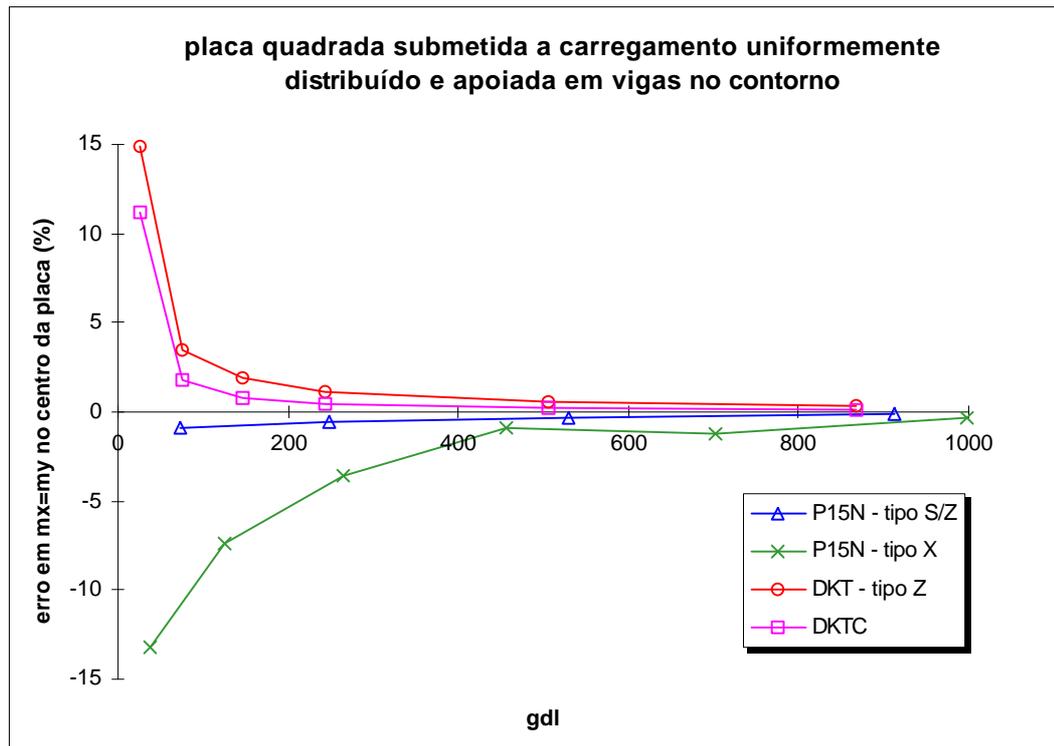


FIGURA 59 – Erro em $m_x = m_y$ no centro da placa apoiada em vigas

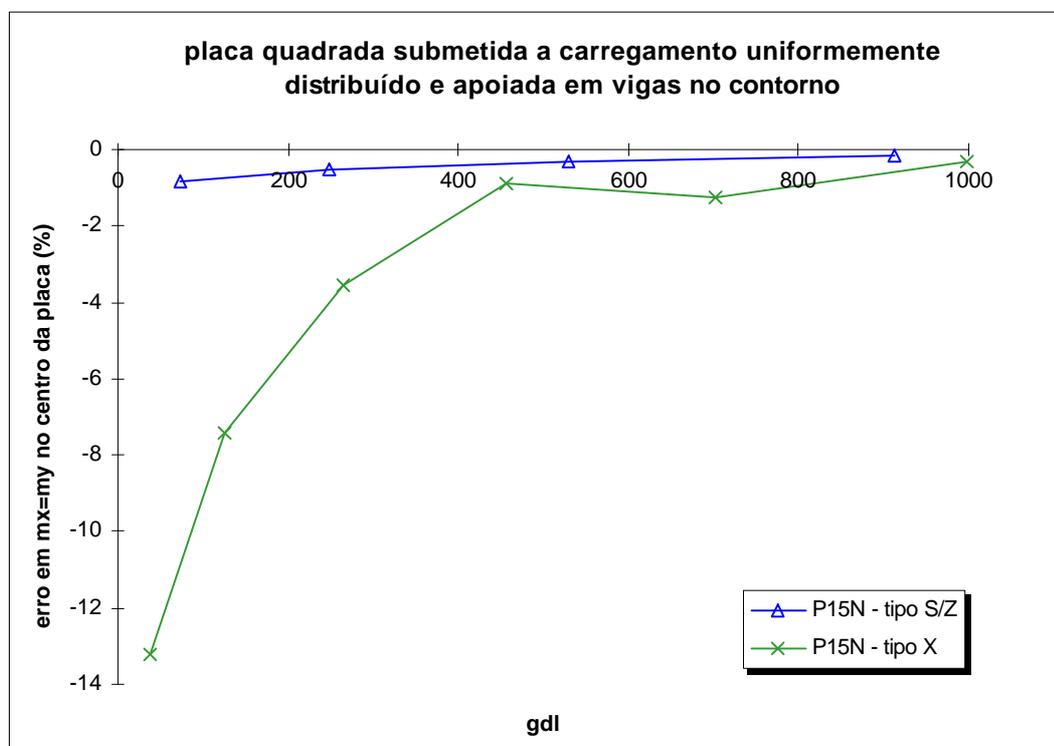


FIGURA 60 – Erro em $m_x = m_y$ no centro da placa apoiada em vigas – comparação entre P15N tipos S/Z e tipo X

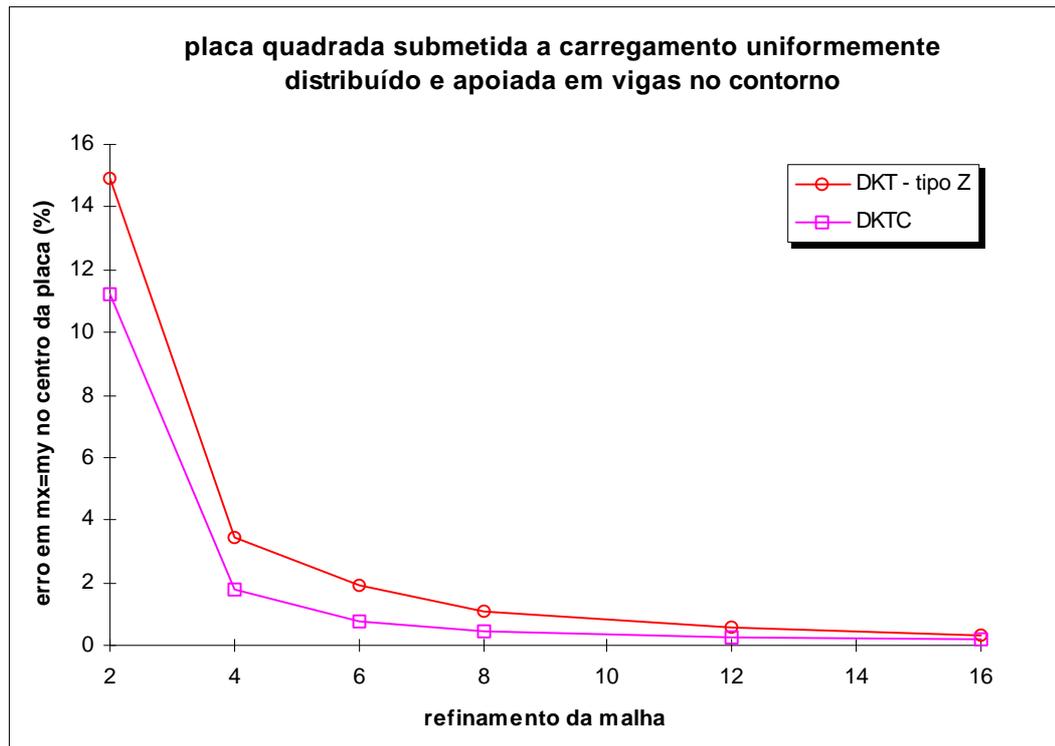


FIGURA 61 – Erro em $m_x = m_y$ no centro da placa apoiada em vigas – comparação entre DKT e DKTC

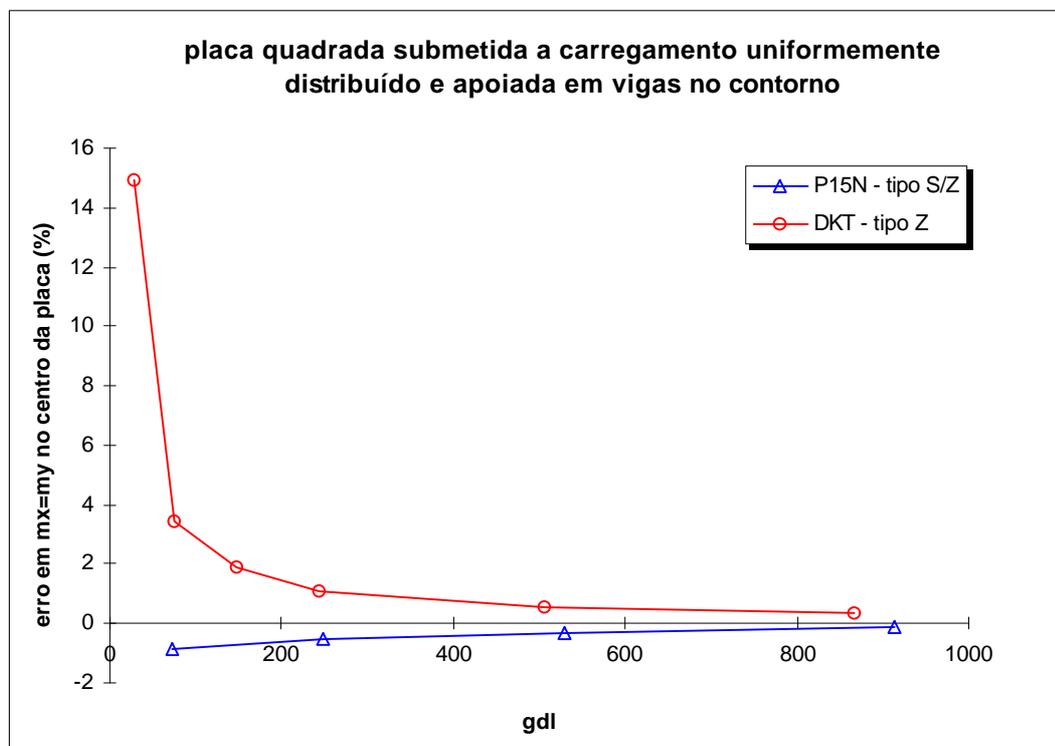


FIGURA 62 – Erro em $m_x = m_y$ no centro da placa apoiada em vigas – comparação entre P15N tipo S/Z e DKT tipo Z

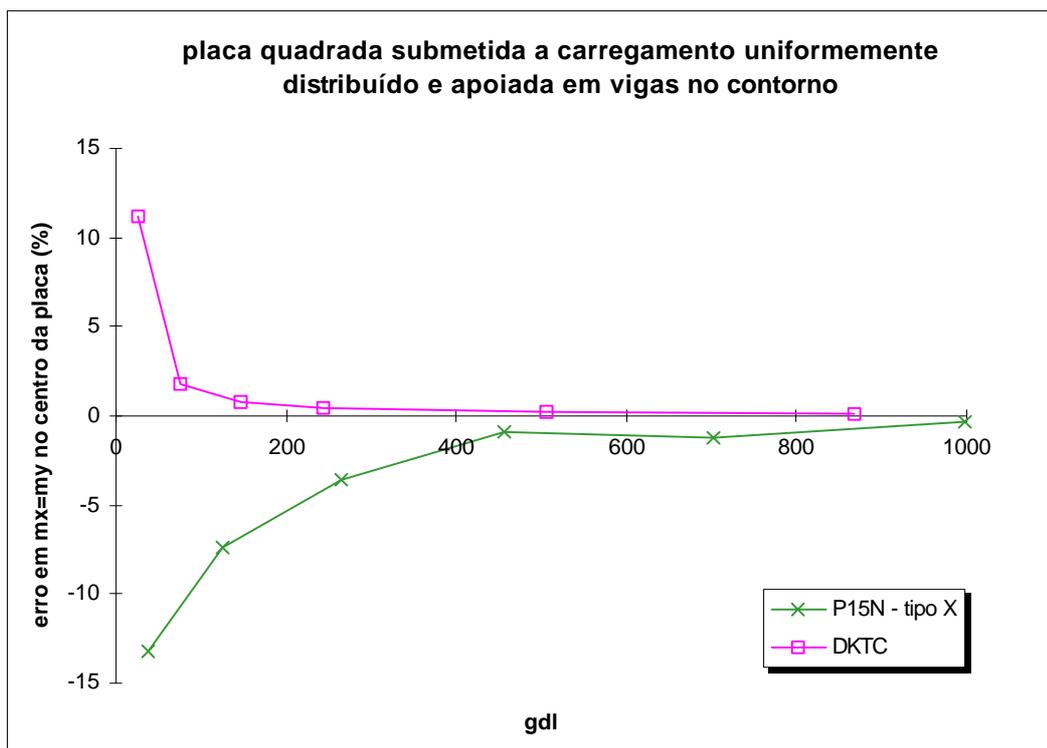


FIGURA 63 – Erro em $m_x = m_y$ no centro da placa apoiada em vigas – comparação entre P15N tipo X e DKTC

8.5 EXEMPLO 4

A estrutura do exemplo 4 é um pavimento com 5 lajes, 9 pilares e 6 vigas conforme figura 64. Este mesmo exemplo foi apresentado em SOARES (1991), onde a autora comparou o elemento finito DKT com o HSM. No presente trabalho, a comparação será feita entre os elementos finitos P15N e DKT em sua forma quadrangular (DKTC). Os resultados obtidos com o DKTC foram obtidos utilizando-se o programa SRP, desenvolvido por CHAVES (1996), e o pré-processador PEC, desenvolvido por SOUSA JUNIOR (1996), ambos já comentados anteriormente. As malhas utilizadas por cada elemento são mostradas nas figuras 65 e 66. Nota-se que a malha escolhida para o DKTC é bem mais refinada (182 elementos) que aquela escolhida para o elemento P15N (40 elementos).

As figuras 67 e 68 mostram os diagramas de momentos fletores e esforços cortantes para a viga 2, respectivamente. Observa-se por estas figuras que os resultados encontrados são bastante próximos; mais uma vez, deve-se lembrar que a malha utilizada para o elemento finito P15N é bem menos discretizada que aquela para o DKTC.

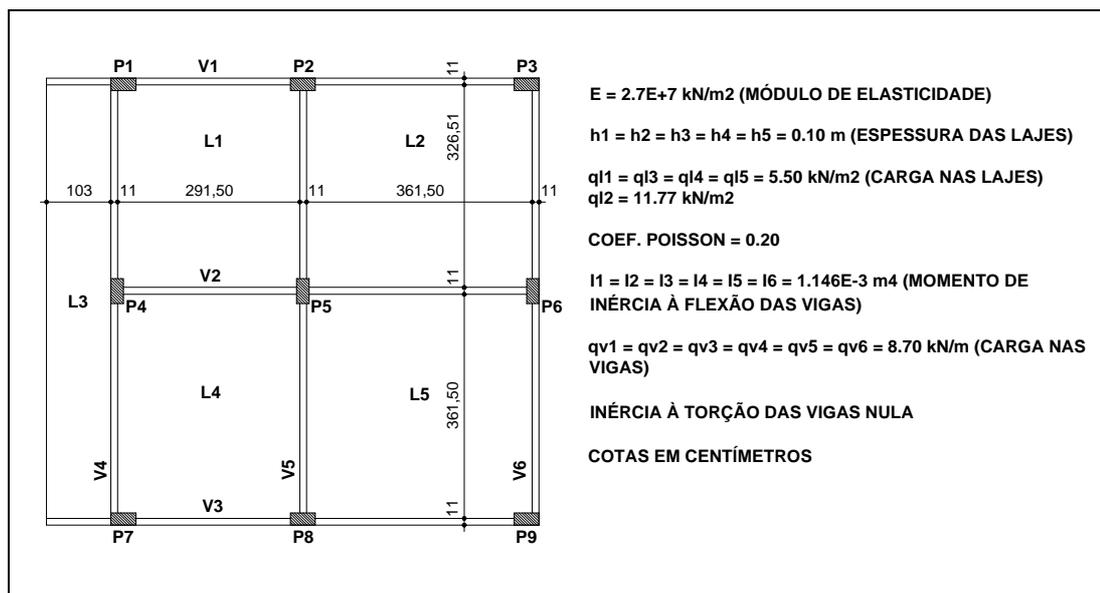


FIGURA 64 – Exemplo 4

As figuras 69 a 72 mostram momentos fletores nas lajes. Também nestas figuras, observa-se que os resultados obtidos com os dois elementos finitos são próximos. Elas chamam a atenção para uma desvantagem da discretização utilizada para o elemento finito P15N; se por um lado é interessante obter bons resultados com uma malha menos refinada, por outro, trabalhar com uma malha com esta qualidade traz consigo a desvantagem de se obter um número mais limitado de resultados, pelo menor número de pontos nodais.

As figuras 73 e 74 mostram linhas elásticas em duas direções da estrutura do exemplo. No eixo y são apresentados os valores para os deslocamentos w em metros. Estas duas últimas análises apresentam resultados realmente muito próximos para os dois elementos utilizados. Para os principais valores, mostrados nas duas figuras, simplesmente ocorre uma coincidência dos mesmos. A desvantagem observada nas 4 figuras anteriores, torna-se menor para o caso de deslocamentos verticais por causa dos nós de meio de lado do elemento finito P15N. Por exemplo, para os resultados da figura 73, são 14 nós para a discretização com o elemento DKTC contra 9 nós para o P15N; na figura 72, onde são comparados os valores do momento fletor m_y , são os mesmos 14 nós do DKTC para apenas 5 do P15N.

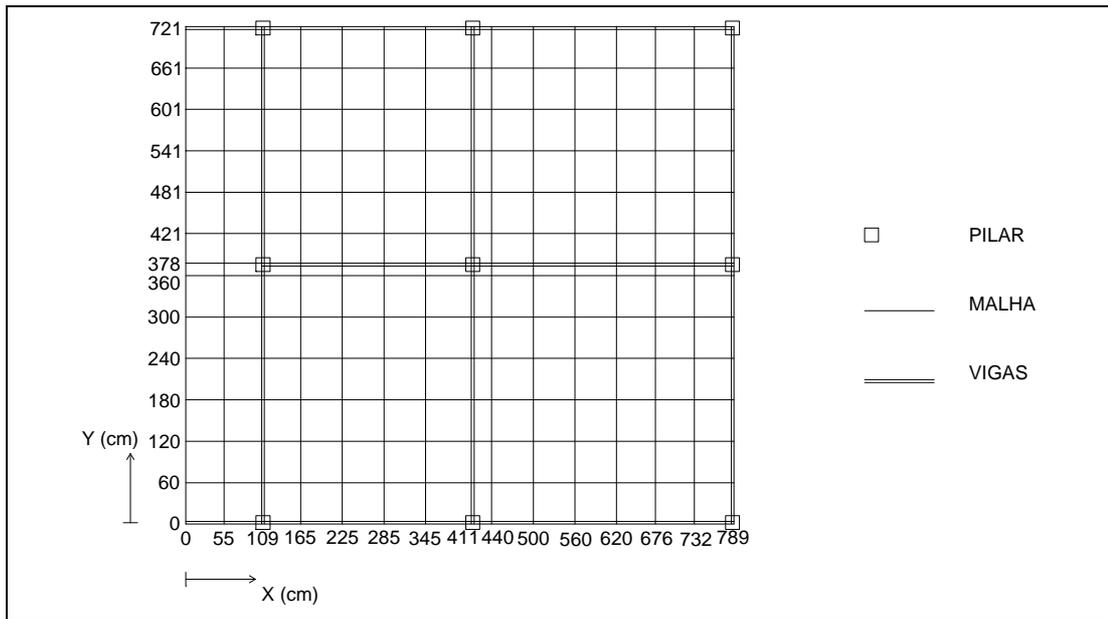


FIGURA 65 – Malha utilizada para o elemento DKTC

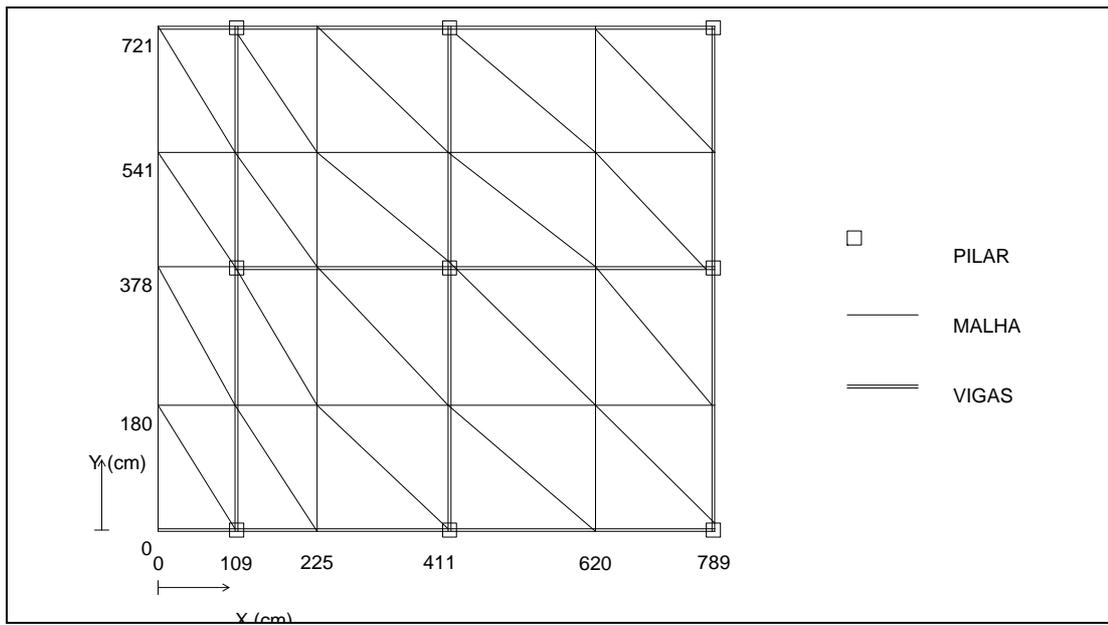


FIGURA 66 – Malha utilizada para o elemento P15N

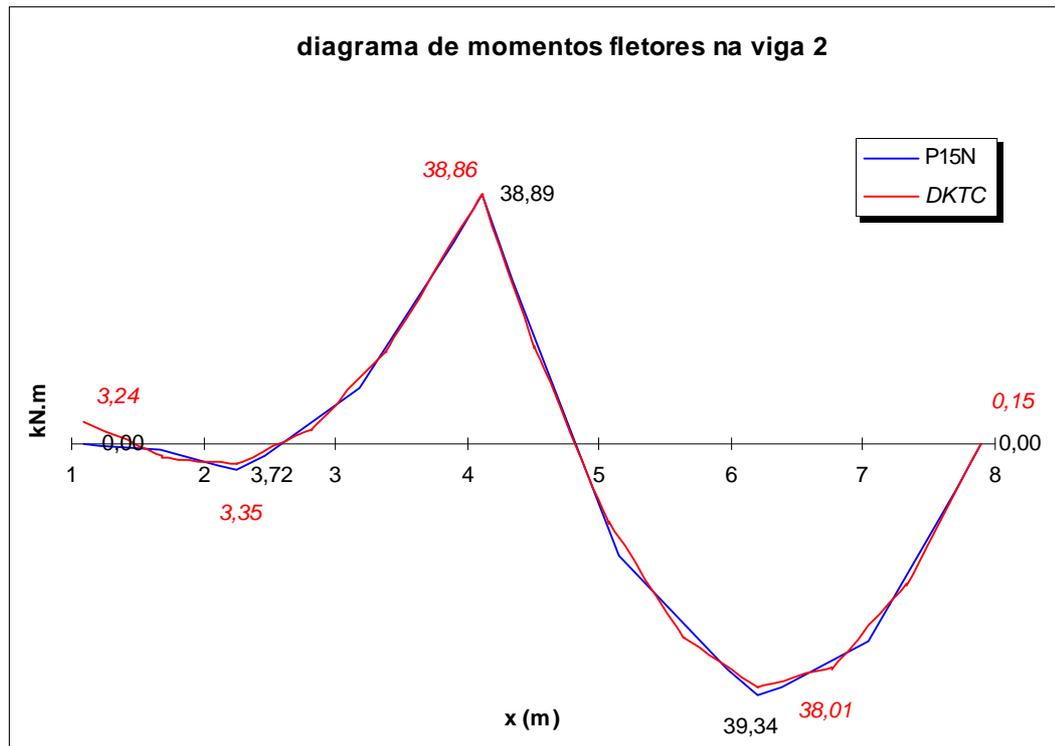


FIGURA 67 – Diagrama de momentos fletores na viga 2

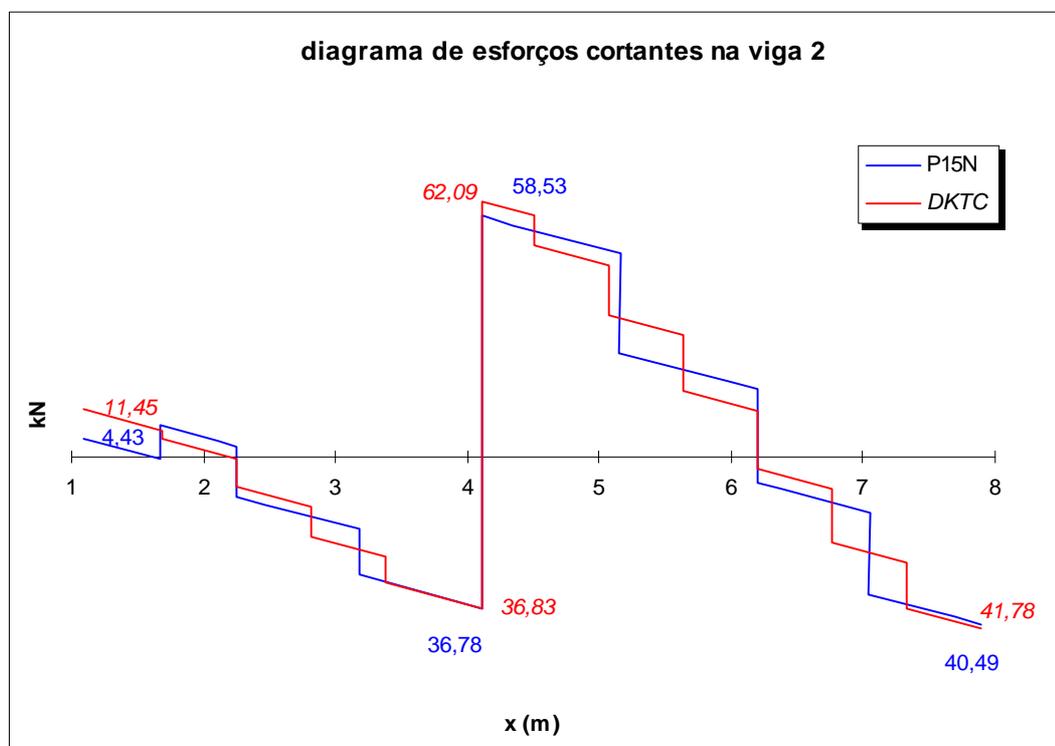


FIGURA 68 – Diagrama de esforços cortantes na viga 2

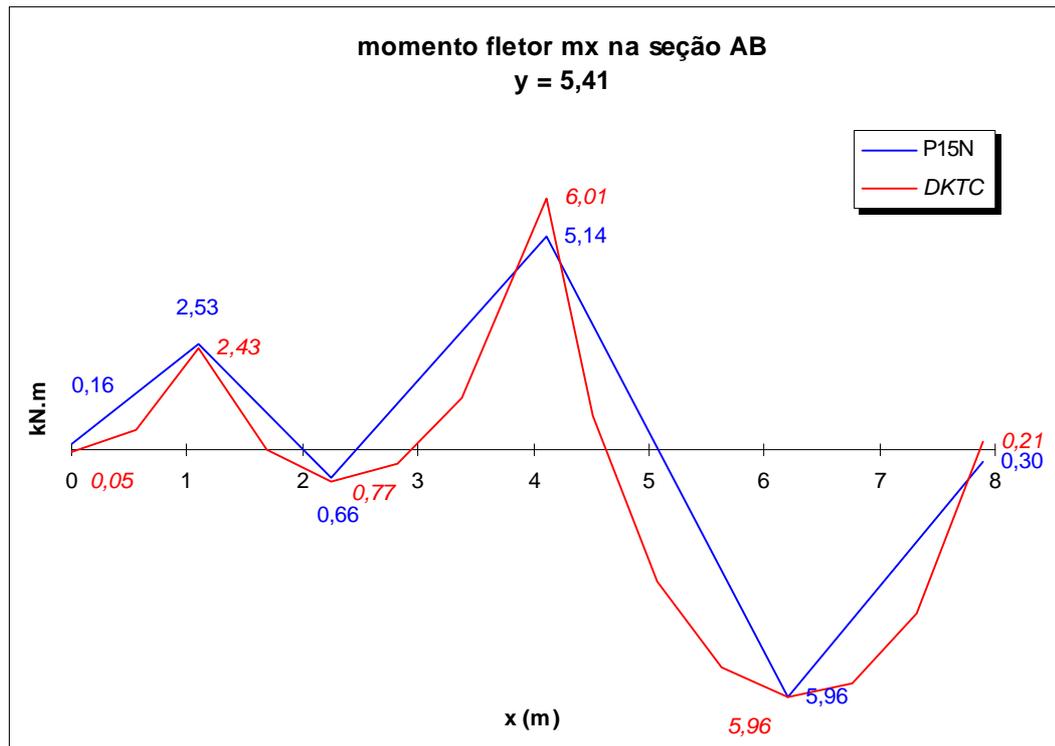


FIGURA 69 – Momento fletor mx na seção AB – y = 5,41m

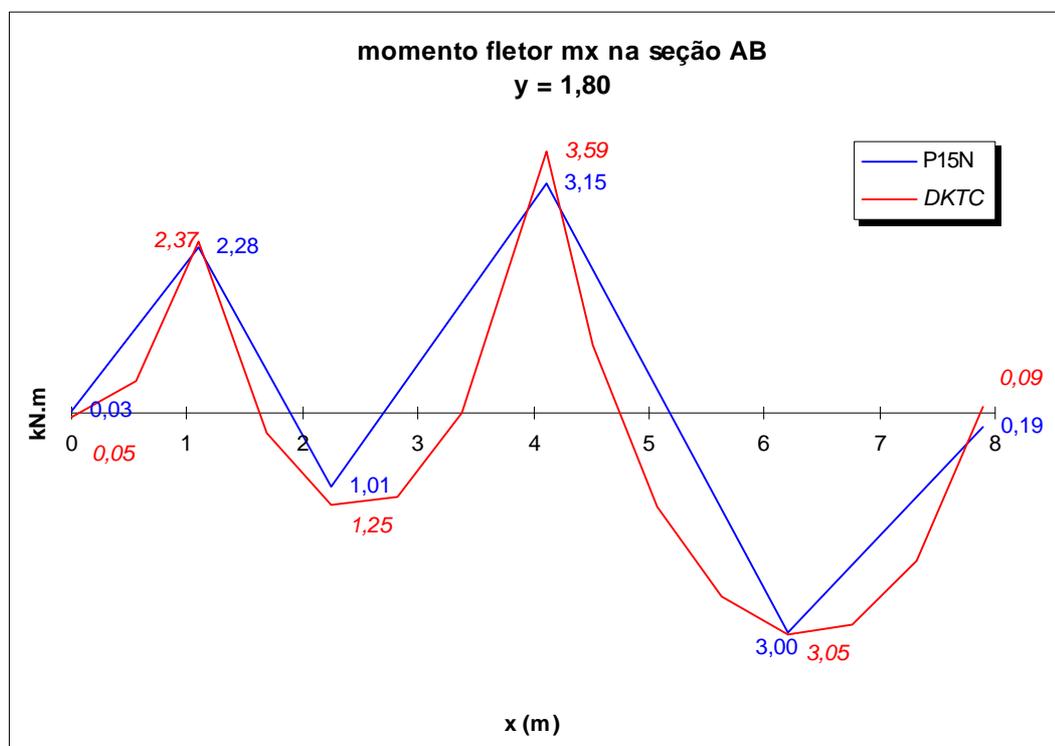
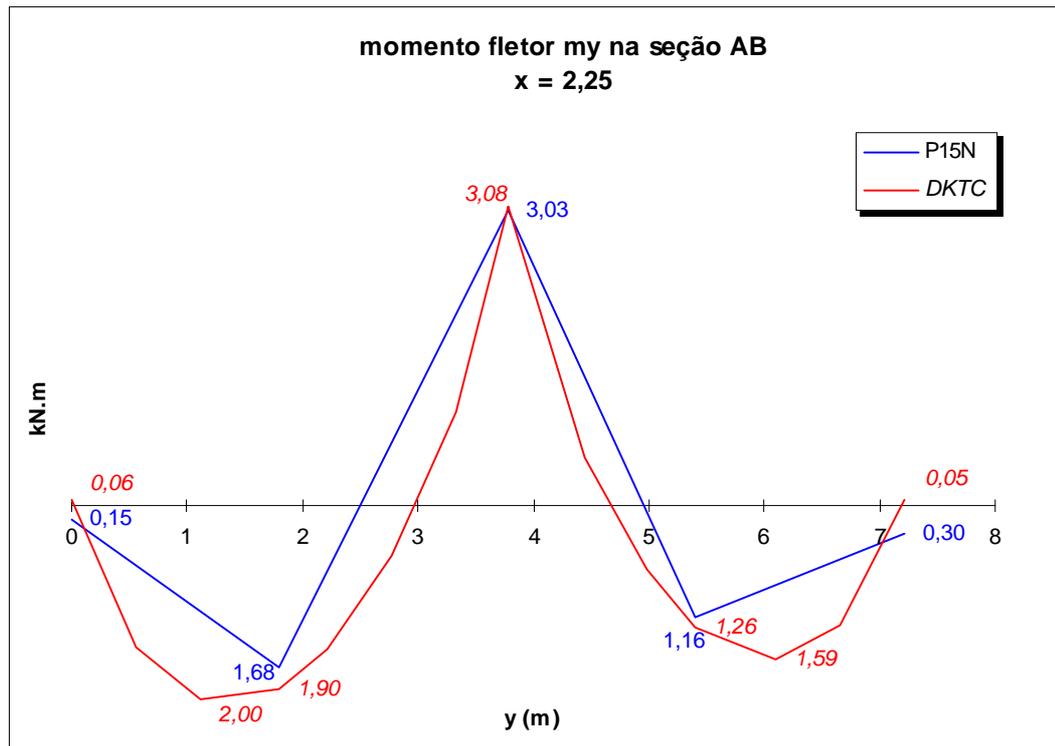
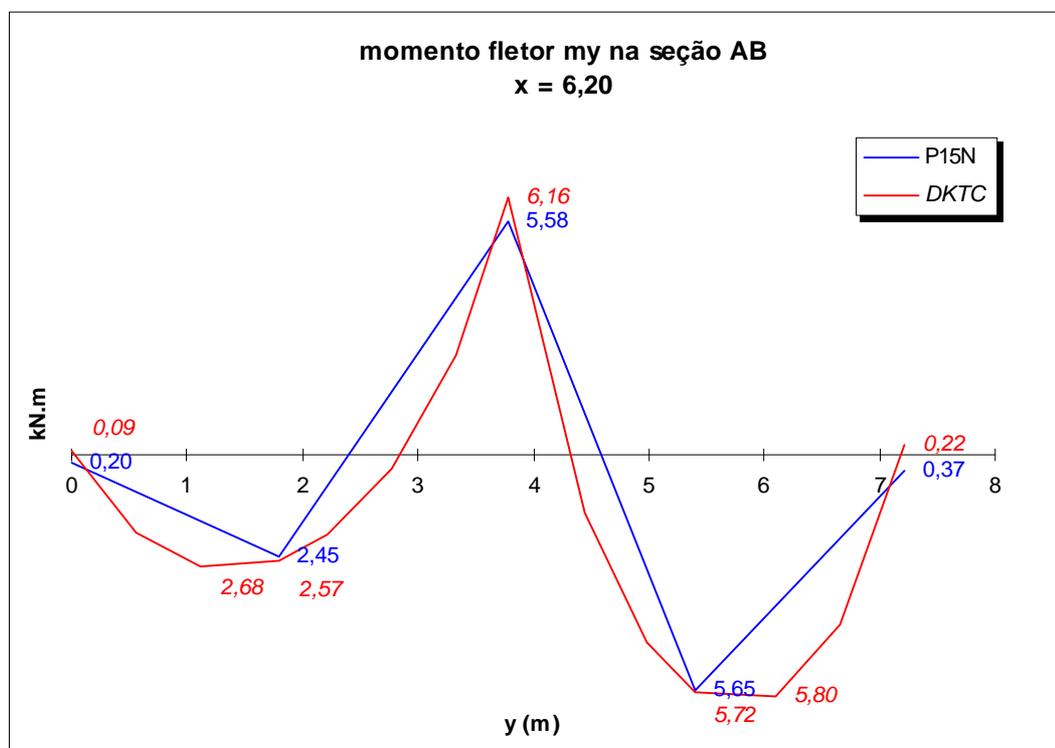
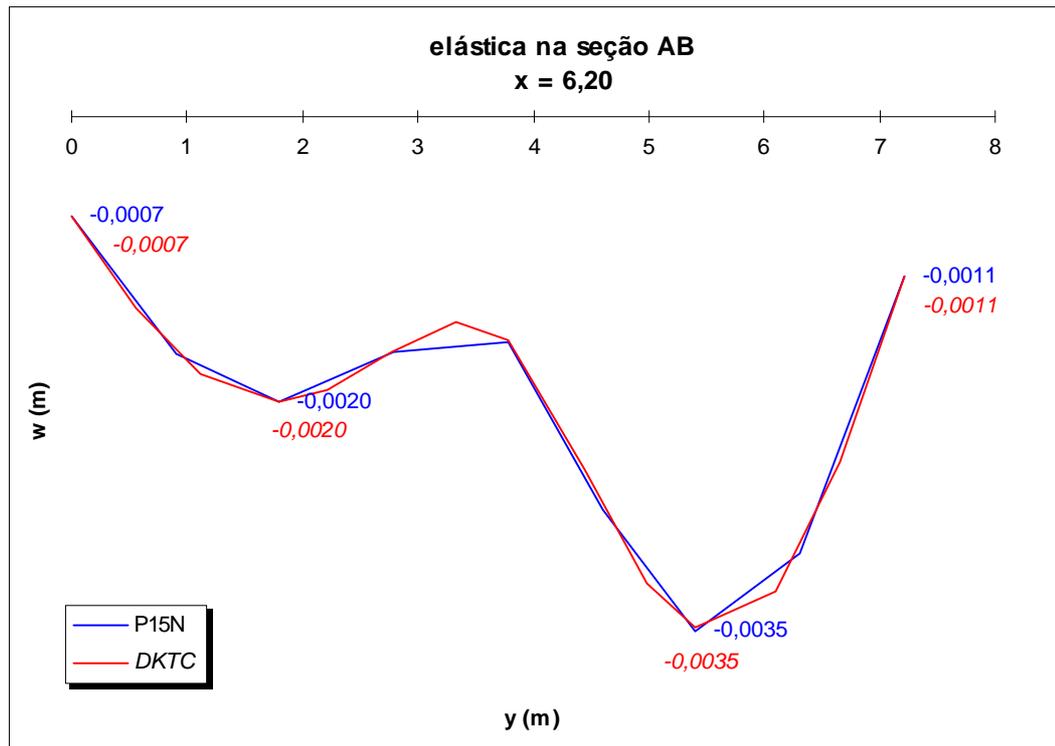
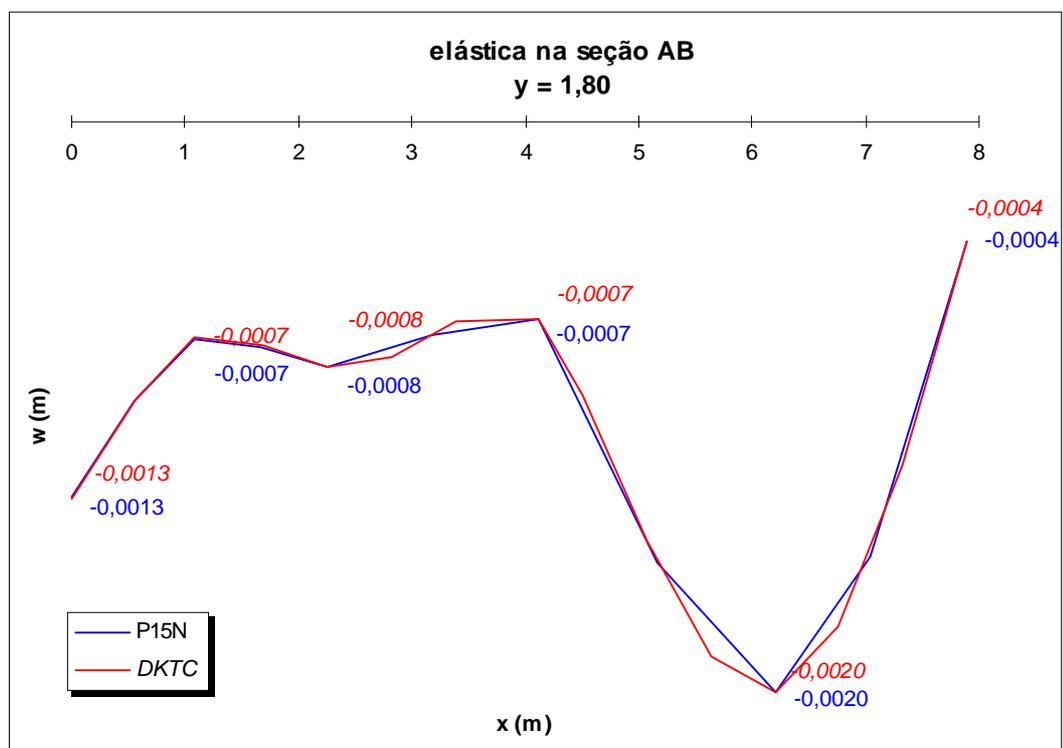


FIGURA 70 – Momento fletor mx na seção AB – y = 1,80m

FIGURA 71 – Momento fletor m_y na seção AB – $x = 2,25$ mFIGURA 72 – Momento fletor m_y na seção AB – $x = 6,20$ m

FIGURA 73 – Linha elástica na seção AB – $x = 6,20$ mFIGURA 74 – Linha elástica na seção AB – $y = 1,80$ m

8.6 EXEMPLO 5

O quinto e último exemplo trata-se de um pavimento com 4 lajes conforme figura 75 e assemelha-se com o pavimento tipo do exemplo 3 do trabalho de MARTINS, C.H. (1998). Os demais dados envolvidos no problema são:

$E = 2.0E+7 \text{ kN/m}^2$ (módulo de elasticidade para lajes e vigas);

$\nu = 0.25$ (coeficiente de Poisson para lajes e vigas);

$h = 0.15 \text{ m}$ (espessura das lajes);

$q_l = 10.0 \text{ kN/m}^2$ (carga uniformemente distribuída nas lajes);

$q_v = 8.0 \text{ kN/m}$ (carga uniformemente distribuída nas vigas).

As dimensões dos pilares e vigas estão na figura 75 em centímetros (cm) e as cotas indicadas na figura estão em metros (m).

Neste exemplo serão comparados os elementos finitos DKT (malhas tipo S e Z) e DKTC e o P15N (malhas tipo S e Z). Mais uma vez, os resultados apresentados para os elementos finitos DKT e DKTC foram obtidos utilizando-se os programas SRP e PEC, de CHAVES (1996) e SOUSA JUNIOR (1996), respectivamente. A figura 76 ilustra, como exemplo, a discretização tipo S, adotada para o elemento P15N. Os elementos dos vazios são desconsiderados utilizando-se o processo descrito no item 7.5.

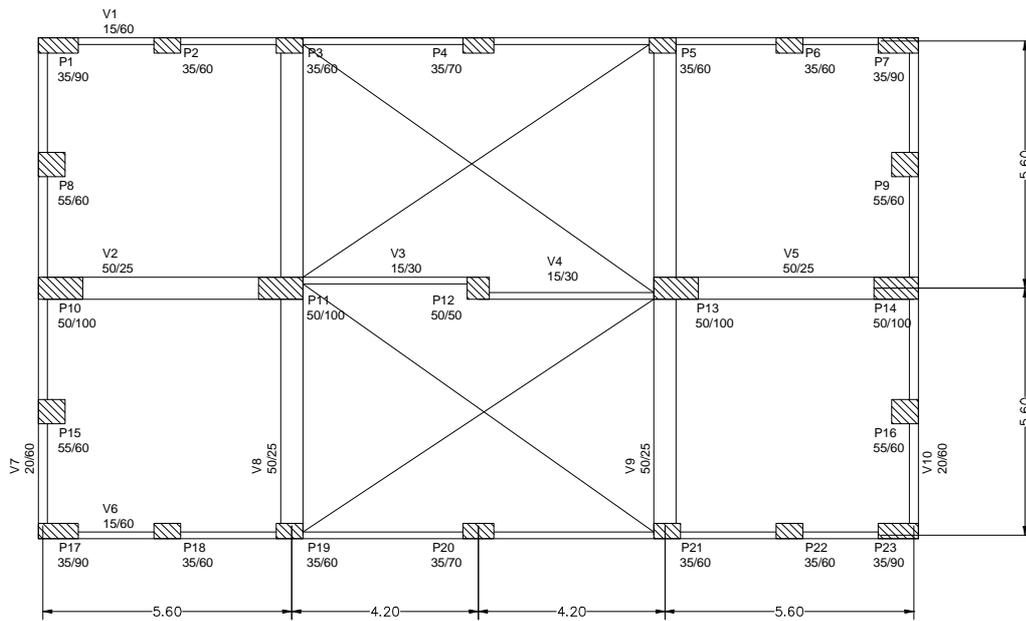


FIGURA 75 – Exemplo 5

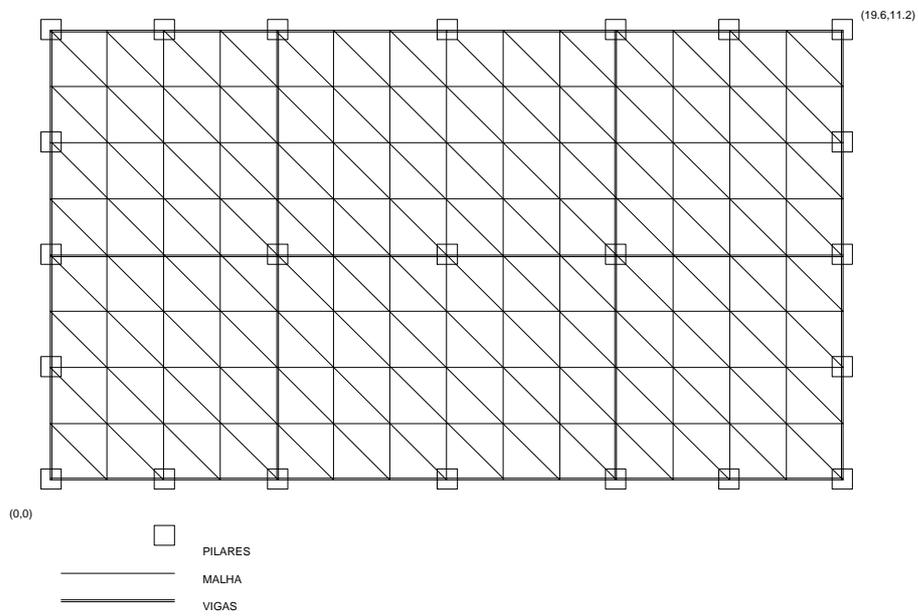


FIGURA 76 – Discretização tipo S para o pavimento do exemplo 5

Neste exemplo, ao contrário do anterior, serão utilizadas malhas equivalentes para os elementos comparados. A partir da figura 76 é fácil imaginar a discretização tipo Z do elemento P15N. Para o elemento DKT, basta não considerar os elementos dos vazios, e para o DKTC, além disto, considerar um elemento como sendo o quadrado formado por dois triângulos das discretizações tipo S/Z. Pela figura 76 observa-se que não são consideradas excentricidades de forma alguma nas análises feitas, sejam de pilares com vigas, vigas com vigas ou lajes com vigas. Na discretização exemplo da figura citada são utilizados 224 elementos P15N; a origem do sistema de coordenadas é localizada no ponto inferior esquerdo do pavimento (pilar 17).

As figuras 77 e 78 mostram os diagramas de momentos fletores e esforços cortantes nas vigas 2 e 3. Observa-se que os resultados encontrados, com as malhas tipo S ou Z são iguais, para os dois elementos. Os resultados, em geral são bem próximos.

As figuras 79 e 80 mostram momentos fletores na laje inferior esquerda do pavimento. Também observa-se a proximidade entre os resultados. Vale acrescentar, que o elemento finito P15N apresenta resultados mais próximos de zero (0) na borda, que aqueles obtidos com os elementos DKT e DKTC.

As figuras 81 e 82 correspondem às elásticas em duas seções da laje inferior esquerda da estrutura do exemplo; a primeira a uma cota y de 2,8m e a segunda a uma cota de x igual a 2,8m. Também desta vez observa-se a semelhança entre os resultados obtidos com os 2 elementos finitos em suas variantes de discretização. O valor zero (0) nas bordas foi comum em todas as análises. Outra observação que merece ser feita é o fato dos resultados máximos terem sido obtidos com a discretização S/Z do elemento P15N – as discretizações S e Z do elemento DKT forneceram respostas diferentes; mais próximo destes valores estão aqueles obtidos com o elemento DKTC, que apresentou melhores resultados que aqueles obtidos com as discretizações S/Z no exemplo 3.

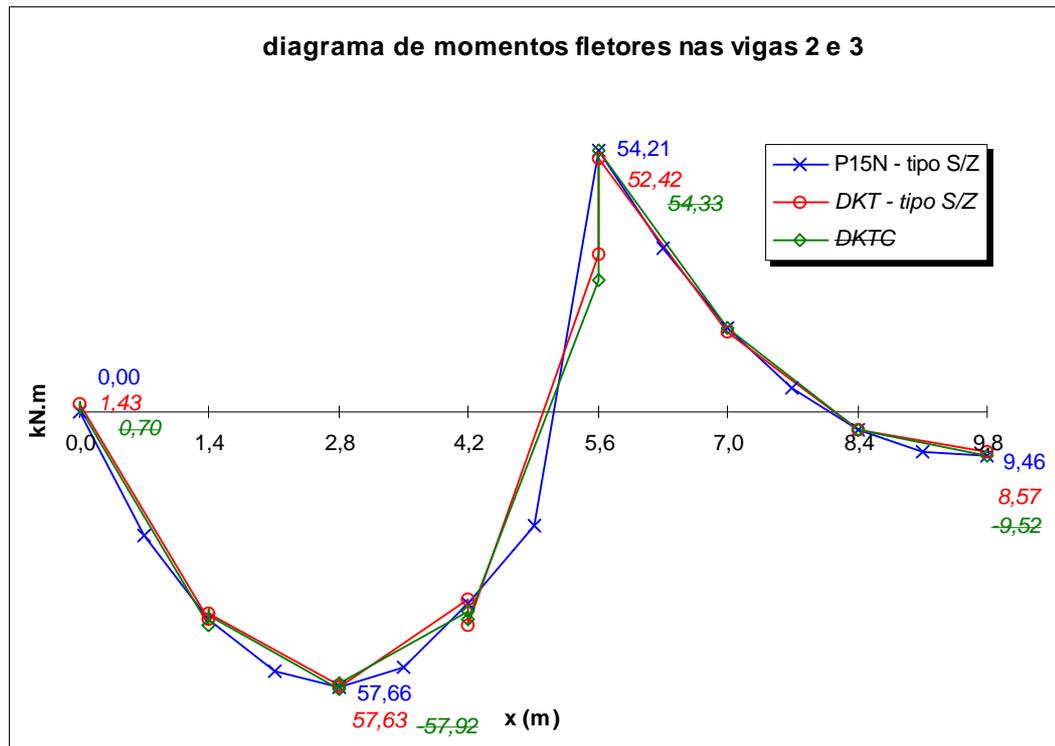


FIGURA 77 – Diagrama de momentos fletores das vigas 2 e 3

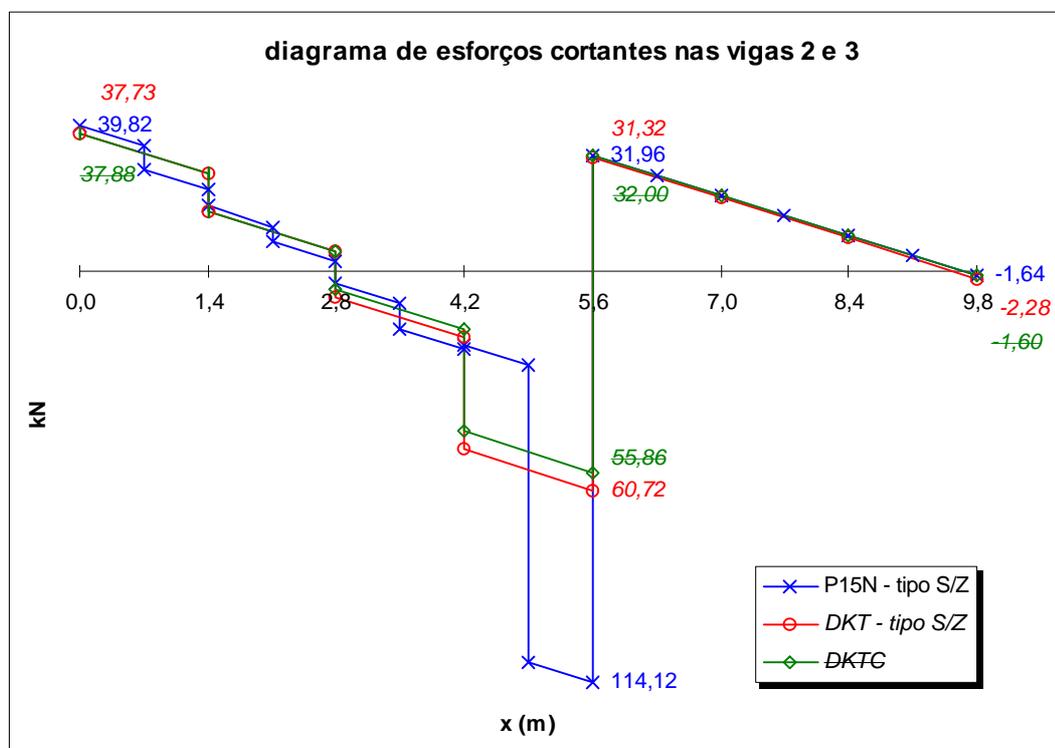
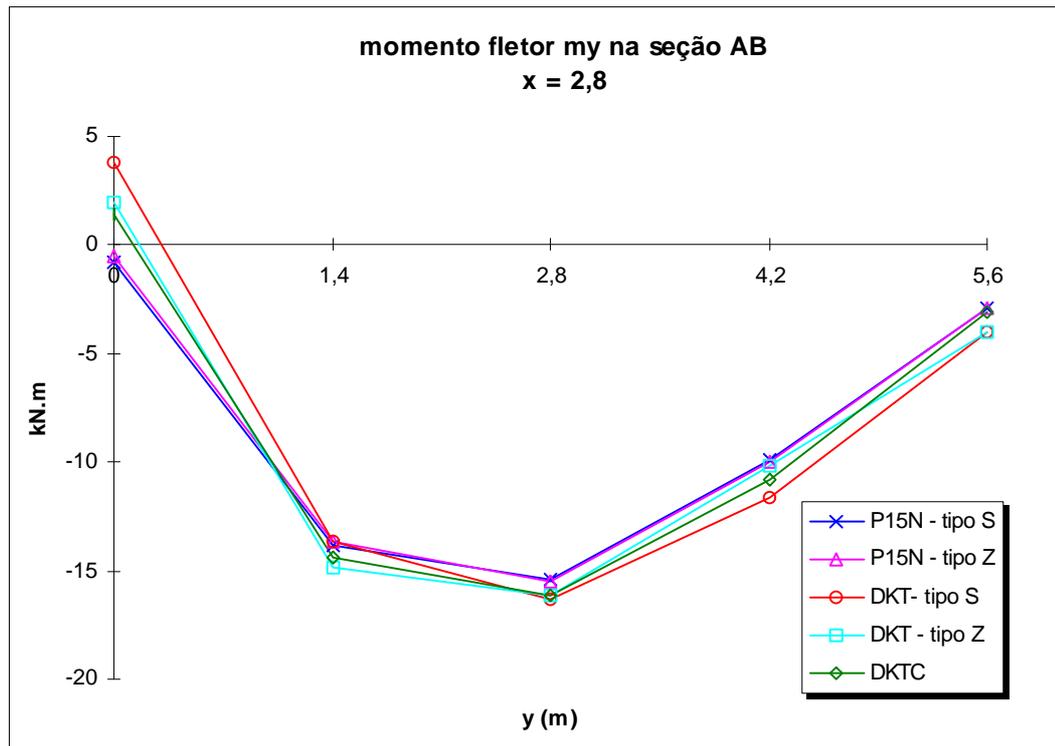
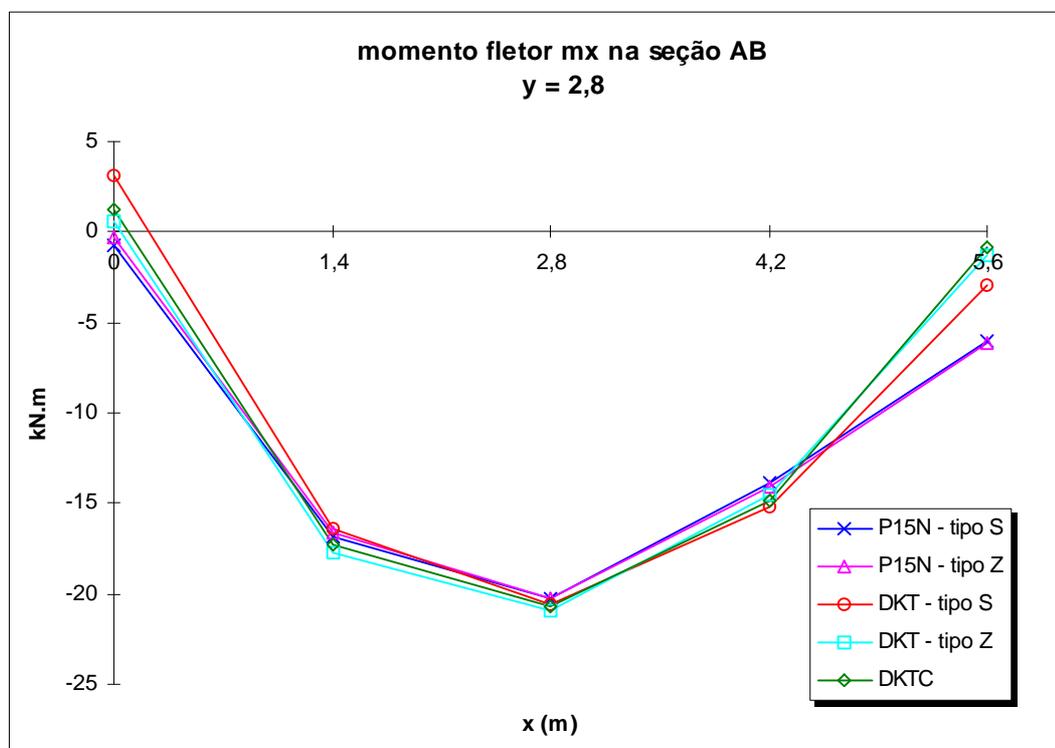


FIGURA 78 – Diagrama de esforços cortantes das vigas 2 e 3

FIGURA 79 – Momento fletor m_y na seção AB – $x = 2,8$ mFIGURA 80 – Momento fletor m_x na seção AB – $y = 2,8$ m

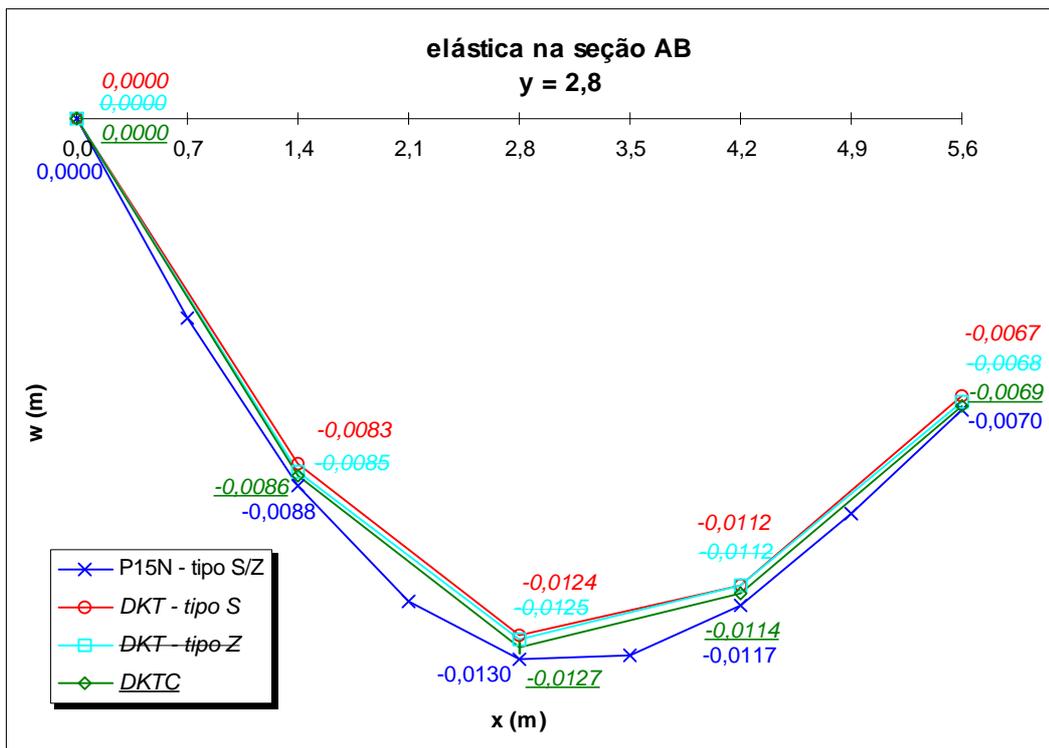


FIGURA 81 – Linha elástica na seção AB – y = 2,8m

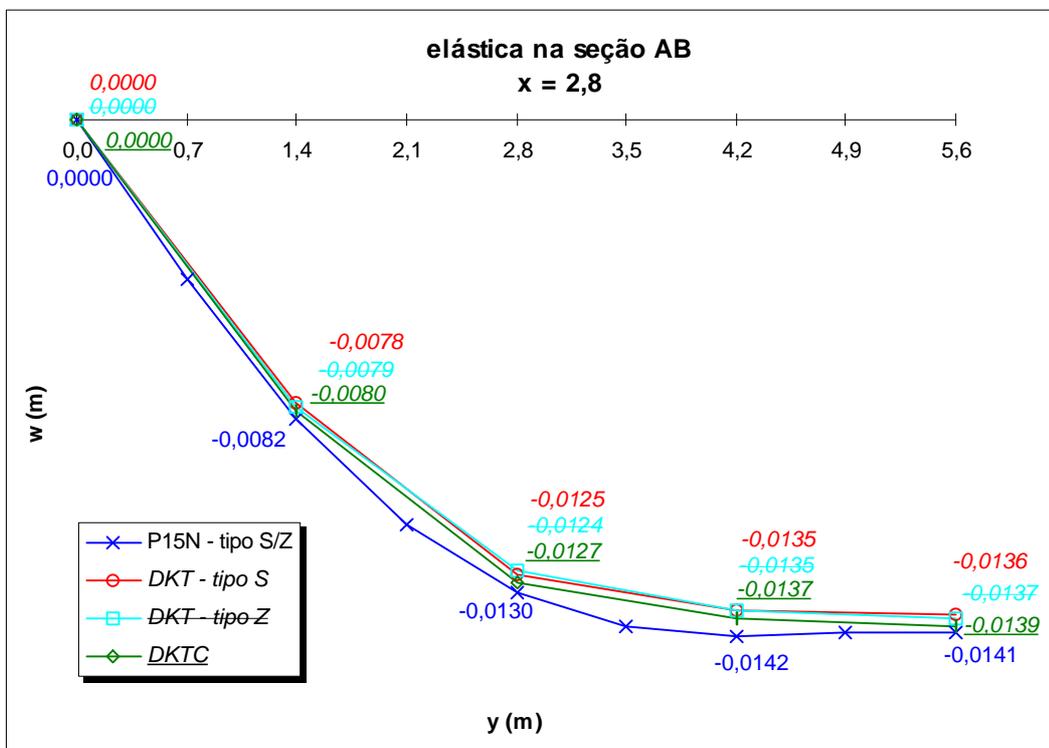


FIGURA 82 – Linha elástica na seção AB – x = 2,8m

9 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Os objetivos propostos para esta dissertação de mestrado foram apresentar o elemento finito de placa P15N, formulado por MARTINS & SABINO (1997) para a análise de placas, na análise de pavimentos submetidos a carregamentos verticais, e comparar os resultados obtidos com a utilização deste elemento com aqueles obtidos com os elementos finitos DKT e DKTC. Para a realização de tal projeto desenvolveu-se um programa computacional em linguagem de programação FORTRAN 90, utilizando o elemento P15N, onde vários exemplos foram analisados.

A partir da análise dos exemplos estudados, várias conclusões foram tiradas. A primeira delas, já explícita no trabalho de MARTINS & SABINO (1997), foi a boa convergência do elemento finito P15N para o caso de placas sob diferentes tipos de carregamento vertical e condições de contorno. Os 3 tipos de discretização estudados apresentaram convergências distintas e com boa qualidade. A respeito das diferenças de convergência observadas para diferentes direções da malha, as análises realizadas mostraram que os resultados envolvidos nem sempre são tão previsíveis quanto possa parecer. Em termos gerais, para o caso de placa quadrada, o elemento P15N forneceu melhores resultados com a discretização tipo Z, tanto para deslocamentos, quanto para momentos fletores no meio da placa.

Para o caso de placa apoiada sobre vigas nas bordas, todas as análises realizadas (capítulo 8) mostraram que o elemento finito P15N apresenta convergência muito mais rápida – deslocamento e momento fletor no centro da placa – que o elemento DKT, independentemente da direção da malha considerada. O elemento DKT apresentou melhores resultados em seu formato quadrangular (DKTC) que em seu formato original, o que era esperado, pois implicitamente este trabalha com menor número de graus de liberdade (gdl) que aquele. O elemento P15N apresentou respostas iguais para deslocamentos e momentos

fletores para as discretizações S e Z, e estas foram semelhantes às obtidas com a discretização tipo X para deslocamento e, para momentos fletores, diferentes, onde o tipo S ou Z apresentou melhores resultados.

Em termos dos esforços nas extremidades das vigas, os resultados obtidos com os elementos comparados foram bem parecidos, mesmo que a discretização com o elemento P15N fosse menos refinada que a utilizada com o elemento DKT/DKTC. O maior número de elementos de viga (4) por lado de elemento de placa, como foi feito no trabalho, colaborou para esta vantagem, fornecendo inclusive maior número de resultados, já que no elemento DKT, o elemento de viga corresponde a um lado do elemento de placa. Os deslocamentos nas lajes também foram muito próximos com a utilização dos dois elementos, observando a vantagem do elemento P15N de ter o nó de meio de lado, uma resposta a mais (deslocamento vertical) que o elemento DKT não apresenta. Outra conclusão pertinente, foi observada no exemplo último; a técnica de diminuir radicalmente a rigidez dos elementos para a não consideração dos mesmos foi testada e, a partir da semelhança entre os resultados obtidos com o programa desenvolvido no trabalho com aqueles provenientes da utilização dos DKT/DKTC, apresentou boa aceitação.

A conclusão – talvez a mais importante – a partir de todas as análises realizadas, é que o elemento finito P15N pode ser utilizado na consideração da rigidez à flexão das lajes de pavimentos com bons resultados. Devido à sua rápida convergência, pode-se utilizar discretizações menos refinadas que aquelas necessárias para se chegar a resultados tão bons quanto os obtidos com os elementos DKT/DKTC. Como já foi comentado, paga-se um preço por esta discretização menos refinada: o menor número de resultados obtidos, podendo não ser o necessário para a análise desejada.

Muito há a se acrescentar ao trabalho desenvolvido, a começar da sua natural continuação, que seria a aplicação do elemento P15N a uma análise de edifícios altos, submetidos a carregamentos verticais e laterais. Porém, antes disso, talvez fosse necessário um melhor estudo a respeito da técnica de compatibilização entre elementos de viga e elementos de placa, podendo até se pensar em algumas mudanças na própria formulação do elemento. O desenvolvimento de pré e pós-processadores gráficos também seria muito interessante, principalmente pela disposição dos gdl no elemento P15N. Uma boa sugestão complementar, seria a criação de um ambiente *windows* para o programa desenvolvido, possivelmente em *Visual Basic*, como o fez MARTINS, C.H. (1998) em seu trabalho.

Outra sugestão seria a consideração de diversos tipos de excentricidade entre os elementos estruturais; como já foi citado no quinto exemplo do capítulo anterior:

excentricidades de pilares com vigas, pilares de mesma prumada (caso de edifício), vigas com vigas e vigas com lajes.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAPTISTA, S.M. (1994). *Análise de pavimentos de edifícios com a utilização do método dos elementos finitos*. São Carlos. 109p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BARBOZA, J.A. (1977). *Edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis, sob carga lateral*. São Carlos. 301p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BATHE, K.J. (1975). *ADINA - a finite element program for automatic dynamic incremental nonlinear analysis*. Acoustics and Vibration Lab., Rep. 82448-1; Dept. of Mech. Eng., MIT.
- BATOZ, J.L.; BATHE, K.J.; HO, L.W. (1980). A study of three-node triangular plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.15, n.12, p.1771-812, Dec.
- BATOZ, J.L.; TAHAR, M.B. (1982). Evaluation of a new quadrilateral thin plate bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.18, p.1655-77.
- BECKER, E.P. (1989). *Edifícios altos: interação tridimensional das peças de contraventamento*. São Carlos. 181p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BERGAN, P.G.; HANSSSEN, L. (1975). A new approach for deriving “good” element stiffness matrices. In: Whiteman, J.R., ed. *The Mathematics of Finite Elements and Applications II*. p.483-98. Academic Press, London.
- BEZERRA, D.P. (1995). *Análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos considerando a rigidez transversal à flexão das lajes*. São Carlos. 138p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BOSSHARD, W. (1971). *An introduction to finite element technique*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

- BREBBIA, C.A.; CONNOR, J.J. (1975). *Metodos de los elementos finitos en la ingenieria civil*. Madri, Colegio Oficial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
- BRUNELLI, A.C. (1987). *Análise estrutural de edifícios sujeitos ao carregamento horizontal, considerando a rigidez das lajes, com o método dos elementos finitos*. São Carlos. 245p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CHAVES, E.W.V. (1996). *SRP - sistema de resolução de pavimentos pelo método dos elementos finitos*. São Carlos. Departamento de Engenharia de Estruturas - Escola de Engenharia de São Carlos./Digitado/
- CORRÊA, M.R.S. (1991). *Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto estrutural de edifícios*. São Carlos. 331p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CORRÊA, M.R.S.; RAMALHO, M.A. (1987). Sistema LASER de análise estrutural. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE TECNOLOGIA DE CONSTRUÇÃO, 5., São Paulo, 1987. *Anais*. São Paulo, EPUSP.
- CORRÊA, M.R.S.; RAMALHO, M.A. (1993). Cálculo de pavimentos de edifícios utilizando-se o método dos elementos finitos. In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERIA ESTRUTURAL, 26., Montevideo, UR, 1993. *Memória*. Montevideo, CLAES/ASAIE. v.1, p.109-20.
- DEGASPARÉ, J.C. (1975). *Aplicações do elemento finito T 18 para flexão de placas delgadas elástico-isótropas*. São Carlos. 139p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- HOLAND, I.; BELL, K. (1969). *Finite element methods in stress analysis*. Trondheim, Norway Tapir.
- JEYACHANDRABOSE, C.; KIRKHOPE, J.; RAMESH BABU, C. (1985). An alternative explicit formulation for the DKT plate-bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.21, p.1289-93.
- KARDESTUNGER, H. (1975). *Fundamentos de analisis matricial de estruturas*. Colombia, Carvajal.
- MARTINS, C.H. (1998). *Contribuição da rigidez à flexão das lajes, na distribuição de esforços em estruturas de edifícios de andares múltiplos, em teoria de segunda ordem*. São Carlos. 141p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

- MARTINS, R.A.F.; SABINO, J. (1997). A simple and efficient triangular finite element for plate bending. *Engineering Computations*, v.14, n.8, p.883-900.
- MATTAR NETO, M. (1989). *Elementos finitos simples de placa*. São Paulo. 131p. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da USP, Universidade de São Paulo.
- MORLEY, L.S.D. (1971). On the constant moment plate bending element. *J. Strain Analysis*, v.6, p.20-4.
- PRUDENTE, M. (1983). *Análise de estruturas tridimensionais usuais de edifícios altos*. São Carlos. 156p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PRZEMIENIECKI, J.S. (1968). *Theory of matrix structural analysis*. New York, McGraw-Hill.
- RAMALHO, M.A. (1990). *Sistema para análise de estruturas considerando interação com o meio elástico*. São Carlos. 389p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- REZENDE, M.N. (1990). *Análise de pavimentos de edifícios pelo método dos elementos finitos em microcomputador*. São Carlos. 87p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RIOS, B.M.C. (1991). *Análise tridimensional e envoltória de esforços em edifícios altos sujeitos à ações verticais e laterais*. São Carlos. 254p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- ROSEN, R.; RUBINSTEIN, M.F. (1970). Substructure analysis by matrix recomposition. *Journal of Structural Division*, ASCE, v.96, n.3, p.663-70, Mar.
- SOARES, S.M. (1991). *Utilização do elemento finito HSM (Hybrid Stress Model) na análise de pavimentos de edifícios*. São Carlos. 81p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SORIA GALVARRO BALCAZAR, E.A. (1991). *Análise linear de estruturas tridimensionais retangulares pelo método dos elementos finitos utilizando subestruturação*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SOUSA JUNIOR, E. (1996). *Um aplicativo para o ambiente windows para aquisição de dados para análise de pavimentos de edifícios via método dos elementos finitos*. São Carlos. 99p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

- TIMOSHENKO, S.P.; WOINOWSKY–KRIEGER, S. (1959). *Theory of plates and shells*.
2.ed. New York, McGraw-Hill International Editions. (Engineering mechanics series).
- VLASSOV, B.Z. (1962). *Pièces longues en voiles minces*. Paris, Eyrolles.
- ZIENKIEWICZ, O.C. (1977). *The finite element method*. 3.ed. London, McGraw-Hill.

BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

- ANDRADE, J.R.L. (1982). *Apostila estruturas correntes de concreto armado*, 1^a parte. São Carlos, EESC.
- CARRIJO, E.C.; PAIVA, J.B. (1997). Estudo numérico e experimental da interação placa-viga. *Mecânica Computacional*, v.18, p.347-356./ Apresentado ao 10. Congresso Sobre Métodos Numéricos y Sus Aplicaciones, San Carlos de Bariloche, AR, 1997/
- CINTRA, J.C.A.; ROHM, M.N.G. (1998). *Exame de qualificação na EESC - USP*. São Carlos, EESC.
- COSTA, H.B.; FERREIRA, M.R.D. (1993). Elementos finitos na formulação mista do problema das placas delgadas. In: CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO DE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 14., São Paulo, 1993. *Anais*. São Paulo, AMC/IPT. p.47-53.
- MARTINELLI, D.A.O.; MONTANARI, I.; SAVASSI, W. (1986). *Placas elásticas: equações gerais e placas retangulares*. São Carlos, EESC.
- MATIAS JUNIOR, I.G. (1997). *Análise não-linear de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleos resistentes sobre fundações flexíveis*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MORI, D.D. (1992). *Os núcleos estruturais e a não-linearidade geométrica na análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos*. São Carlos. 196p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PAIVA, J.B.; BARRETTO, S.F.A. (1993). Comparação dos resultados da análise da teoria de Reissner para placas, variando a relação espessura/comprimento , através do MEF e do MEC. In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERIA ESTRUCTURAL, 26., Montevideo, UR, 1993. *Memória*. Montevideo, CLAES/ASAIE. v.1, p.193-202.
- PILKEY, W.D.; WUNDERLICH, W. (1992). *Mechanics of structures: variational and computational methods*. CRC Press, Boca Raton.

- RIOS, B.M.C. (1991). *Análise tridimensional e envoltória de esforços em edifícios altos sujeitos à ações verticais e laterais*. São Carlos. 254p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RODRIGUES, M.R.P. (1992). *Cálculo de esforços em estruturas tridimensionais de edifícios altos utilizando microcomputadores*. São Carlos. 159p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SAVASSI, W. (1996). *Introdução ao método dos elementos finitos: em análise linear de estruturas*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- TIMOSHENKO, S.P. (1940). *Theory of plates and shells*. New York, McGraw-Hill Book Company, Inc.
- UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. Escola de Engenharia de São Carlos. Serviço de Biblioteca (1993). *Diretrizes para elaboração de dissertações e teses na EESC-USP*. São Carlos.

APÊNDICE

Arquivos de saída do programa PAPEP15N

- p4v.dat
- p4v.gdl
- p4v.plc
- p4v.vgp
- p4v.tmp

P4V.DAT

p4v.dat

10/05/1999

01h05min43s

UTILIZAÇÃO DO PRÉ-PROCESSADOR: SIM

CARACTERÍSTICAS DA PLACA:

DIREÇÃO DA MALHA: S

MÓDULO DE ELASTICIDADE: 1.0000E+11

COEFICIENTE DE POISSON: .250

ESPESSURA: 1.000E-02

NÚMERO DE NÓS: 4

COORDENADAS X E Y DOS NÓS:

NÓ	COORDENADA X	COORDENADA Y
1	.0000	.0000
2	2.0000	.0000
3	.0000	2.0000
4	2.0000	2.0000

NÚMERO DE LADOS: 5

LADO	NÓ INICIAL	NÓ FINAL
1	2	1
2	1	3
3	3	2
4	2	4
5	4	3

NÚMERO DE ELEMENTOS: 2

ELEMENTO	NÓ 1	NÓ 2	NÓ 3
1	1	2	3
2	4	3	2

DADOS REFERENTES AO CARREGAMENTO DA PLACA:

CARREGAMENTO UNIFORMEMENTE DISTRIBUÍDO: -1000.000

NÚMERO DE CARGAS CONCENTRADAS: 0

CONDIÇÕES DE CONTORNO:

NÚMERO DE SEQÜÊNCIAS: 0

CARACTERÍSTICAS DAS VIGAS:

NÚMERO DE VIGAS: 4

VIGA	NÓ INIC.	NÓ FINAL	MOD.ELAST.	MOM.INERC.	CARGA Q	DELTA	FIX	FIY	C.POISSON
1	1	2	1.0000E+11	8.8889E-07	.00	0	0	0	.250
2	1	3	1.0000E+11	8.8889E-07	.00	0	0	0	.250
3	2	4	1.0000E+11	8.8889E-07	.00	0	0	0	.250
4	3	4	1.0000E+11	8.8889E-07	.00	0	0	0	.250

0- LIVRE

1- RESTRITO

RIGIDEZ À TORÇÃO DAS VIGAS: 1.0000E-10

DADOS REFERENTES AOS PILARES:

NÚMERO DE PILARES: 4

PILAR	NÓ	TRANSLAÇÃO Z	ROTAÇÃO X	ROTAÇÃO Y
1	1	1	0	0
2	2	1	0	0
3	3	1	0	0
4	4	1	0	0

0- LIVRE
1- RESTRITO

P4V.GDL

p4v.gdl

10/05/1999

01h05min43s

NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE DA ESTRUTURA: 24

GRAUS DE LIBERDADE DA ESTRUTURA POR LADO:

LADO	GDL1	GDL2	GDL3	GDL4	GDL5
1	5	6	7	8	9
2	10	11	12	13	14
3	15	1	2	3	4
4	5	16	17	18	19
5	20	21	22	23	24

P4V.PLC

p4v.plc

10/05/1999

01h05min43s

RESULTADOS REFERENTES À PLACA:

NÚMERO DE GRAUS DE LIBERDADE DA PLACA: 24

NÓ PROCURADO: 1

GDL	DESLOCAMENTO	MX	MY	MXY
10	0.00000E+00	7.10865E+01	7.10865E+01	-8.02447E+01

DESLOCAMENTOS GLOBAIS:

GDL	DESLOCAMENTO
1	-5.09855E-15
2	-9.14807E-03
3	-3.23563E-16
4	3.28359E-15
5	0.00000E+00
6	7.45509E-03
7	-1.69719E-03
8	1.26817E-02
9	6.93543E-03
10	0.00000E+00
11	-6.93543E-03
12	-1.69719E-03
13	-1.26817E-02
14	-7.45509E-03
15	0.00000E+00
16	7.45509E-03
17	-1.69719E-03
18	1.26817E-02
19	6.93543E-03
20	0.00000E+00
21	-6.93543E-03
22	-1.69719E-03
23	-1.26817E-02
24	-7.45509E-03

ESFORÇOS POR CADA NÓ DE CADA ELEMENTO:

ELEMENTO	NÓ	MX	MY	MXY
1	1	7.10865E+01	7.10865E+01	-8.02447E+01
	2	2.02622E+01	2.02622E+01	1.63596E+02
	3	2.02622E+01	2.02622E+01	1.63596E+02
2	4	7.10865E+01	7.10865E+01	-8.02447E+01
	3	2.02622E+01	2.02622E+01	1.63596E+02
	2	2.02622E+01	2.02622E+01	1.63596E+02

ESFORÇOS POR NÓ:

NÓ	MX	MY	MXY
1	7.10865E+01	7.10865E+01	-8.02447E+01
2	2.02622E+01	2.02622E+01	1.63596E+02
3	2.02622E+01	2.02622E+01	1.63596E+02
4	7.10865E+01	7.10865E+01	-8.02447E+01

P4V.VGP

p4v.vgp

10/05/1999

01h05min43s

RESULTADOS REFERENTES ÀS VIGAS:

DESLOCAMENTOS LOCAIS DOS ELEMENTOS DE VIGA:

LADO	NÓ INIC.	NÓ FINAL	ELEMENTO	TRANSL. Z	ROTAÇÃO X	ROTAÇÃO Y
1	2	1	1	0.0000E+00 -5.6411E-04	2.5458E-03 7.4551E-03	2.5458E-03 2.4164E-03
			2	-5.6411E-04 -1.6972E-03	7.4551E-03 1.2682E-02	2.4164E-03 -1.6861E-20
			3	-1.6972E-03 -5.6411E-04	1.2682E-02 6.9354E-03	-1.6861E-20 -2.4164E-03
			4	-5.6411E-04 0.0000E+00	6.9354E-03 2.5458E-03	-2.4164E-03 -2.5458E-03
2	1	3	1	0.0000E+00 -5.6411E-04	2.5458E-03 6.9354E-03	2.5458E-03 2.4164E-03
			2	-5.6411E-04 -1.6972E-03	6.9354E-03 1.2682E-02	2.4164E-03 -1.3926E-18
			3	-1.6972E-03 -5.6411E-04	1.2682E-02 7.4551E-03	-1.3926E-18 -2.4164E-03
			4	-5.6411E-04 0.0000E+00	7.4551E-03 2.5458E-03	-2.4164E-03 -2.5458E-03
4	2	4	1	0.0000E+00 -5.6411E-04	-2.5458E-03 -7.4551E-03	2.5458E-03 2.4164E-03
			2	-5.6411E-04 -1.6972E-03	-7.4551E-03 -1.2682E-02	2.4164E-03 1.6886E-18
			3	-1.6972E-03 -5.6411E-04	-1.2682E-02 -6.9354E-03	1.6886E-18 -2.4164E-03
			4	-5.6411E-04 0.0000E+00	-6.9354E-03 -2.5458E-03	-2.4164E-03 -2.5458E-03
5	4	3	1	0.0000E+00 -5.6411E-04	-2.5458E-03 -6.9354E-03	2.5458E-03 2.4164E-03
			2	-5.6411E-04 -1.6972E-03	-6.9354E-03 -1.2682E-02	2.4164E-03 -6.1588E-19
			3	-1.6972E-03 -5.6411E-04	-1.2682E-02 -7.4551E-03	-6.1588E-19 -2.4164E-03
			4	-5.6411E-04 0.0000E+00	-7.4551E-03 -2.5458E-03	-2.4164E-03 -2.5458E-03

ESFORÇOS NAS EXTREMIDADES DAS VIGAS:

LADO	NÓ INIC.	NÓ FINAL	ELEMENTO	E. CORTANTE	MOM. TORÇOR	MOM. FLETOR
1	2	1	1	4.5259E+02 -4.5259E+02	1.0001E-12 1.0001E-12	-1.5916E-12 -1.0201E+02
			2	4.5259E+02 -4.5259E+02	2.0137E-12 2.0137E-12	1.0201E+02 -4.5259E+02
			3	-4.5259E+02 4.5259E+02	1.9617E-12 1.9617E-12	4.5259E+02 -1.0201E+02
			4	-4.5259E+02 4.5259E+02	9.4812E-13 9.4812E-13	1.0201E+02 1.8190E-12
2	1	3	1	4.5259E+02 -4.5259E+02	9.4812E-13 9.4812E-13	0.0000E+00 -1.0201E+02
			2	4.5259E+02 -4.5259E+02	1.9617E-12 1.9617E-12	1.0201E+02 -4.5259E+02
			3	-4.5259E+02	2.0137E-12	4.5259E+02

				4.5259E+02	2.0137E-12	-1.0201E+02
			4	-4.5259E+02 4.5259E+02	1.0001E-12 1.0001E-12	1.0201E+02 1.8190E-12
4	2	4	1	4.5259E+02 -4.5259E+02	-1.0001E-12 -1.0001E-12	-9.0949E-13 -1.0201E+02
			2	4.5259E+02 -4.5259E+02	-2.0137E-12 -2.0137E-12	1.0201E+02 -4.5259E+02
			3	-4.5259E+02 4.5259E+02	-1.9617E-12 -1.9617E-12	4.5259E+02 -1.0201E+02
			4	-4.5259E+02 4.5259E+02	-9.4812E-13 -9.4812E-13	1.0201E+02 1.8190E-12
5	4	3	1	4.5259E+02 -4.5259E+02	-9.4812E-13 -9.4812E-13	-2.2737E-13 -1.0201E+02
			2	4.5259E+02 -4.5259E+02	-1.9617E-12 -1.9617E-12	1.0201E+02 -4.5259E+02
			3	-4.5259E+02 4.5259E+02	-2.0137E-12 -2.0137E-12	4.5259E+02 -1.0201E+02
			4	-4.5259E+02 4.5259E+02	-1.0001E-12 -1.0001E-12	1.0201E+02 9.0949E-13

P4V.TMP

p4v.tmp

10/05/1999

01h05min43s

TEMPOS DE PROCESSAMENTO:

Leitura dos dados:	22 centesimos
Montagem da matriz de rigidez da placa:	1 s
Subestruturacao em paralelo:	0 centesimos
Rotacao de coordenadas da placa:	55 centesimos
Contribuicao das vigas:	0 centesimos
Condicoes de contorno:	0 centesimos
Solucao do sistema de equacoes:	6 centesimos
Retrosstituicao:	0 centesimos
Tensoes na placa:	0 centesimos
Esforços nas vigas	0 centesimos
TEMPO TOTAL:	1 s