

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO E EMPREGO DE
MODELOS SIMPLIFICADOS DE DANO E
PLASTICIDADE PARA A ANÁLISE DE ESTRUTURAS
DE BARRAS EM CONCRETO ARMADO**

Manoel da Silva Álvares

Tese apresentada à Escola de Engenharia
de São Carlos, da Universidade de São
Paulo, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em
Engenharia de Estruturas.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Sérgio Persival Baroncini Proença

São Carlos

1999

Ficha catalográfica preparada pela Seção de Tratamento
da Informação do Serviço de Biblioteca – EESC-USP

B732a Álvares, Manoel da Silva
 Contribuição ao estudo e emprego de modelos
 simplificados de dano e plasticidade para a análise de
 estruturas de barras em concreto armado / Manoel da
 Silva Álvares. -- São Carlos, 1999.

 Tese (Doutorado) -- Escola de Engenharia de
 São Carlos-Universidade de São Paulo, 1999.
 Área: Engenharia de Estruturas.
 Orientador: Prof. Dr. Sérgio Persival Baroncini
 Proença.

 1. Mecânica do dano. 2. Modelos simplificados.
 3. Modelos constitutivos. 4. Análise não-linear.
 5. Métodos numéricos. I. Título.

*A minha esposa Delaine e meus
filhos Frederico Manoel e
Manoel Filho dedico este
trabalho.*

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Sérgio Persival Baroncini Proença, pela orientação segura, permanente incentivo e amizade demonstrada durante a realização deste trabalho.

Ao Prof. René Billardon (LMT – Cachan – França), pela orientação e importante contribuição na definição da linha de pesquisa seguida neste trabalho.

A direção do Laboratoire de Mécanique et Technologie – E.N.S. de Cachan - França, por autorizar a utilização do programa em elementos finitos EfiCoS, bastante útil no desenvolvimento deste trabalho.

Aos amigos do departamento, pela amizade e compreensão demonstrada ao longo dos anos.

A Maria Nadir Minatel pelo auxílio no trabalho de referência bibliográfica.

A Francisco Carlos G. Brito e Sylvia Helena Morette Villani pelos trabalhos de desenho.

Aos Professores Alberto Vilela Chaer, José Maria Baldino e Juan Bernardino Marques Barrio, pelo constante incentivo.

A minha mãe pelos ensinamentos de honestidade e de luta por melhores dias de vida.

A Universidade Católica de Goiás – UCG e CAPES/PICDT pelo apoio financeiro que possibilitou a realização deste trabalho.

Ao CNPq pelo apoio financeiro que possibilitou o cumprimento de um ano de trabalho junto ao Laboratoire de Mécanique et Technologie – Université Pierre et Marie Curie – Paris 6.

A DEUS, por tudo.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	i
LISTA DE TABELAS	v
LISTA DE SÍMBOLOS	vi
RESUMO	xi
ABSTRACT	xii
INTRODUÇÃO	1
1 INTRODUÇÃO	1
2 CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTAIS DO COMPORTAMENTO DO CONCRETO ARMADO	4
3 MODELOS CONSTITUTIVOS	6
4 OBJETIVOS DA TESE	6
5 JUSTIFICATIVA E METODOLOGIA	7
6 RÁPIDA DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO DA TESE	9
CAPÍTULO 1 – COMPORTAMENTO MECÂNICO DO CONCRETO	11
1.1 INTRODUÇÃO	11
1.2 ENSAIOS EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO	12
1.3 ALGUNS RESULTADOS DE ANÁLISES NUMÉRICAS REALIZADAS	17
CAPÍTULO 2 – MODELOS SIMPLIFICADOS: BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.1 MODELO DE ALVES & LUBLINER (1992)	22
2.1.1 O modelo geral	24
2.1.1.1 Relações tensão-deformação generalizada	25
2.1.1.2 Evolução do dano	27

2.1.2	Modelo de evolução do dano no contexto simplificado	29
2.1.2.1	Variáveis de dano do modelo	29
2.1.2.2	Lei de evolução	30
2.2	MODELO DE RIVA & COHN (1990)	33
2.2.1	Relação constitutiva momento-rotação	33
2.2.2	Alguns comentários sobre a relação constitutiva momento-curvatura	37
2.2.3	Comprimento da região plástica	38
2.2.4	Proposta de lei constitutiva momento-rotação	39
2.3	MODELO DE MULAS & FILIPPOU (1990)	42
2.3.1	Definição do elemento	42
2.4	MODELO DE LA BORDERIE (1991)	50
2.4.1	Formulação unidimensional do modelo	53
2.4.2	Solução do modelo constitutivo	55
2.4.3	Identificação paramétrica	60
2.5	MODELO DE FLÓREZ-LÓPEZ (1993a)	66
2.5.1	Identificação paramétrica	72
CAPÍTULO 3 – MODELO PROPOSTO DE DANO CONCENTRADO NAS EXTREMIDADES		75
3.1	DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ	75
3.2	EXEMPLOS DE APLICAÇÃO	82
3.2.1	Viga em balanço	82
3.2.2	Pórtico com deslocamento imposto (FLÓREZ-LÓPEZ (1993a))	83
CAPÍTULO 4 – APLICAÇÃO DOS MODELOS SIMPLICADOS A ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO		86
4.1	INTRODUÇÃO	86
4.2	ANÁLISE NUMÉRICA	87
4.2.1	Vigas de concreto armado	87

4.2.2 Pórtico em concreto armado	94
CAPÍTULO 5 – ANÁLISE CRÍTICA DO MODELO DE DANO CONCENTRADO NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS	99
5.1 INTRODUÇÃO	99
5.2 ESTUDO DA VIABILIDADE DO MODELO DE DANO CONCENTRADO	100
5.2.1 Identificação paramétrica a partir da função g_2	101
5.2.2 Aplicação a vigas de concreto armado	104
5.2.3 pórtico em concreto armado	106
CAPÍTULO 6 - CONCLUSÕES	109
6.1 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ESTUDO DESENVOLVIDO	109
6.2 CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS	111
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	113
APÊNDICE 1 – IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA: PROGRAMA EfiCoS	A-1
1 PRINCÍPIO DE CÁLCULO	A-1
2 EQUILÍBRIO DO ELEMENTO	A-2
3 MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO E VETOR DE ESFORÇOS ANELÁSTICOS	A-3
4 CONTRIBUIÇÃO DA ARMADURA	A-7

LISTA DE FIGURAS

FIGURA	TÍTULO	PÁG.
1.1	Geometria das vigas ensaiadas em ÁLVARES (1993)	13
1.2	Distribuição característica das fissuras. ÁLVARES (1993)	14
1.3	Ensaio e resposta experimental. FLÓREZ-LÓPEZ (1993a)	15
1.4	Evolução aparente de fissuras. LA BORDERIE (1991)	16
1.5	Respostas experimental e numérica vigas com $3\phi 10,00\text{mm}$. PITUBA (1998)	18
1.6	Respostas experimental e numérica vigas com $5\phi 10,00\text{mm}$. PITUBA (1998)	18
1.7	Respostas experimental e numérica vigas com $7\phi 10,00\text{mm}$. PITUBA (1998)	19
2.1	Seção transversal característica	23
2.2	Discretização da seção transversal segundo o modelo	30
2.3	Rotação plástica no nó j: (a) Variação da curvatura $\phi(x)$ ao longo do trecho não linear; (b) Rotação plástica equivalente. RIVA & COHN (1990)	34
2.4	Relação momento-curvatura para seções de concreto estrutural. RIVA & COHN (1990)	35
2.5	Modelo de plasticidade concentrada: (a) Elemento Elástico i; (b) Mola de rigidez plástica j. RIVA & COHN (1990)	36
2.6	Elemento em que é empregada a relação momento-curvatura. RIVA & COHN (1990)	37
2.7	Elemento proposto por MULAS & FILIPPOU (1990)	43
2.8	Elemento proposto por SOLEIMANI; POPOV & BERTERO (1979)	43
2.9	Relação $M-\phi$ empregada para a determinação da matriz de flexibilidade e proposta por CLOUGH (1966)	45

2.10	Modelo modificado de CLOUGH para molas rotacionais. FILIPPOU (1983)	48
2.11	Modelos para a determinação da matriz de rigidez do elemento. MULAS & FILIPPOU (1990)	49
2.12	Influência de Y_{01} no comportamento em tração. LA BORDERIE (1991)	63
2.13	Influência de A_1 no comportamento em tração. LA BORDERIE (1991)	63
2.14	Influência de B_1 no comportamento em tração. LA BORDERIE (1991)	64
2.15	Influência de Y_{02} no comportamento em compressão. LA BORDERIE (1991)	65
2.16	Influência de A_2 no comportamento em compressão. LA BORDERIE (1991)	65
2.17	Influência de B_2 no comportamento em compressão. LA BORDERIE (1991)	66
2.18	Deformações, forças internas, tensões generalizadas e elemento finito. FLÓREZ-LÓREZ (1993a)	68
3.1	a) Graus de liberdade globais; b) Graus de liberdade locais	76
3.2	Contribuições para a rigidez da viga considerando-se giro unitário no nó i	76
3.3	Fator de transmissão em uma viga elástica-linear com dano nulo	77
3.4	Fator de transmissão para uma viga com dano concentrado nas extremidades	77
3.5	Rigidezes de um elemento de viga com danificação concentrada nas extremidades, obtidos impondo-se giro unitário na extremidade i	78
3.6	Rigidezes do elemento de viga com danificação concentrada nas extremidades, compatíveis com um deslocamento vertical na extremidade i	79

3.7	Características geométricas da viga em balanço	82
3.8	Curva força-deslocamento para viga em balanço	83
3.9	Pórtico com deslocamento imposto. FLÓREZ-LÓPEZ (1993a)	84
3.10	Curva força-deslocamento	84
3.11	Evolução das variáveis de dano do pórtico em função do deslocamento	85
4.1	Discretização em elementos finitos – Modelo de LA BORDERIE	88
4.2	Discretização em elementos finitos – Modelo de dano concentrado nas extremidades	90
4.3	Resultados numéricos – viga com 3 ϕ 10,00mm	90
4.4	Resultados numéricos – viga com 5 ϕ 10,00mm	91
4.5	Resultados numéricos – viga com 7 ϕ 10,00mm	91
4.6	Discretização em elementos finitos – análise composta	92
4.7	Resultados numéricos – análise composta - viga com 3 ϕ 10,00mm	93
4.8	Resultados numéricos – análise composta - viga com 5 ϕ 10,00mm	93
4.9	Resultados numéricos – análise composta - viga com 7 ϕ 10,00mm	94
4.10	Detalhes do pórtico em concreto armado	95
4.11	Seções transversais A e B	95
4.12	Resultados numéricos – pórtico em concreto armado	98
5.1	Dano em função da força termodinâmica G	101
5.2	Resultados numéricos – viga com 3 ϕ 10,00mm	105
5.3	Resultados numéricos – viga com 5 ϕ 10,00mm	105
5.4	Resultados numéricos – viga com 7 ϕ 10,00mm	106
5.5	Resultados numéricos – pórtico em concreto armado	108

A.1	Elemento finito estratificado. LA BORDERIE (1991)	A-4
A.2	Transformação de bases	A-6

LISTA DE TABELAS

TABELA	TÍTULO	PÁG.
2.1	Constantes numéricas para I_p/z , eqs. 2.39, 2.40 e 2.41. RIVA & COHN (1990)	41
2.2	Variáveis de estado e variáveis associadas no modelo de dano. LA BORDERIE (1991)	50
2.3	Resumo das relações de interesse	60
4.1	Propriedades dos materiais das vigas	87
4.2	Parâmetros do modelo constitutivo de LA BORDERIE (1991) empregados na análise numérica das vigas	88
4.3	Parâmetros do modelo de danificação concentrada nas extremidades empregados na análise numérica das vigas	89
4.4	Propriedades dos materiais do pórtico	96
4.5	Parâmetros do modelo constitutivo de LA BORDERIE (1991) empregados na análise numérica do pórtico	96
4.6	Parâmetros do modelo de danificação concentrada nas extremidades empregados na análise numérica do pórtico	97
5.1	Parâmetros do modelo de danificação concentrada nas extremidades – função de dano g_2 – vigas em concreto armado	104
5.2	Parâmetros do modelo de danificação concentrada nas extremidades – função de dano g_2 – pórtico em concreto armado	107

LISTA DE SÍMBOLOS

GREGOS

δ	Componente de deformação – extensão
δ^p, δ^d	Componentes, plástica e devido ao dano, do alongamento δ
Ψ	Potencial de energia livre (item 2.1)
σ	Tensor de tensões
σ^+, σ^-	Componentes, positiva e negativa, do tensor de tensões
σ_f	Tensão que controla o fechamento de fissuras
ε	Deformação de uma fibra genérica
ε_i	Deformação segundo a direção i
ε_y	Deformação correspondente ao limite de escoamento
ε_e	Deformação elástica
ε_{an}	Deformação anelástica
ε_0^*	Deformação equivalente correspondente ao início de dano (item 2.1)
φ	Conjunto dos pontos da seção que verificam o critério de dano
Δ_i	Área do estrato i
ζ	Largura do estrato
θ	Rotação
θ_j	Rotação relativa no nó j
θ_j^l, θ_j^r	Rotações a esquerda e a direita do nó j
θ_{el}, θ_p	Componentes elástica e plástica da rotação
ϕ	Curvatura (item 2.2)
$\phi_{(x)}$	Variação da curvatura em função de x (item 2.2)
ϕ_{el}	Componente elástica da curvatura (item 2.2)
ϕ_p	Componente plástica da curvatura (item 2.2)

ϕ_{cr}	Rotação correspondente ao momento crítico (M_{cr}) – Limite elástico (item 2.2)
ϕ_{py}	Rotação plástica correspondente ao momento crítico (M_y) – Limite de escoamento (item 2.2)
ϕ_{pu}	Rotação plástica correspondente ao momento crítico (M_y) – Limite de ruptura (item 2.2)
$\Delta\psi_i, \Delta\psi_j$	Incremento de rotação nas extremidades i e j (item 2.3)
Δv_a	Vetor de deslocamentos transversais (item 2.3)
χ	Potencial de energia livre de Gibbs (item 2.4)
β_1, β_2	Parâmetros de anelasticidade associadas à tração e compressão
β	Força termodinâmica associada ao encruamento plástico (item 2.5)
ν	Coefficiente de Poisson
$\{\phi\}$	Vetor de deformações generalizadas (item 2.5)
ϕ^R	Deformação na rótula
ϕ^P, ϕ^d	Componentes, plástica e devido ao dano, da deformação na rótula
ξ	Taxa de dissipação de energia
α_1, α_2	Componentes, encruamento plástico cinemático e isotrópico, do vetor de variáveis internas associadas ao encruamento plástico $\{\alpha\}$
α	Coefficiente de transmissão de esforços (item 3.1)
γ	Índice de armadura de protensão

ROMANOS

A	Área da seção transversal
A_0	Área inicial íntegra da seção transversal
A_{ef}	Área efetiva da seção transversal

$A, B, C, D, E, F,$	
G	Parâmetros do modelo de RIVA & COHN
A_1, B_1, Y_{01}	Parâmetros do modelo de LA BORDERIE relativos à tração
A_2, B_2, Y_{02}	Parâmetros do modelo de LA BORDERIE relativos à compressão
b	Largura da flange sujeita a tração (item 2.2)
b'	Largura da flange sujeita a compressão (item 2.2)
b_w	Largura da alma (item 2.2)
c, M_y, G_{cr}, q	Parâmetros do modelo de FLÓREZ-LÓPEZ
d_i, d_j, d_n	Variáveis de dano nas extremidades i, j e normal à seção transversal
d_p, d_u	Valores de dano referentes aos momentos de plastificação e último
D_1, D_2	Variáveis de dano em tração e compressão (item 2.4)
E	Módulo de Young do material
E_0	Módulo de Young do material íntegro
e_i, e_j	Comprimentos das zonas rígidas nas extremidades i e j (item 2.3)
F^e	Matriz de flexibilidade elástica (item 2.5)
$F^e(D)$	Matriz de flexibilidade devida ao dano (item 2.5)
$F^{ed}(D)$	Matriz de flexibilidade do conjunto barra elástica e rótula (item 2.5)
f	Função critério de início de propagação do dano (item 2.1)
f	Matriz de flexibilidade (item 2.3)
f_b	Matriz de flexibilidade tangente da viga (item 2.3)
f_s	Matriz de flexibilidade da mola (item 2.3)
f	Função limite de plasticidade (item 2.5)
g	Função limite de dano (item 2.5)
G_1, G_2	Funções de encruamento positivo e negativo (item 2.4)
G	Força termodinâmica associada ao dano (item 2.5)
H	Altura da metade da seção transversal (item 2.1)
I	Momento de inércia da seção transversal

I_p, I_n	Momentos de inércia da seção fissurada para momentos positivos e negativos (item 2.3)
I_0	Momento de inércia da seção íntegra
J_{act}	Conjunto de estratos ativos
k_E	Inclinação do trecho elástico da curva (item 2.3)
K^e	Matriz de rigidez elástica (item 2.1)
K^d	Matriz de rigidez com dano (item 2.1)
K	Matriz de rigidez (item 2.3)
K_{ij}	Coefficientes de rigidez
k	Curvatura (item 2.1)
L	Comprimento do elemento
l	Altura do estrato (item 2.1)
l_e	Comprimento do elemento elástico (item 2.2)
l_p	Comprimento da região plástica (item 2.2)
l_c	Espaçamento entre fissuras
M	Momento fletor
M_y^+, M_y^-	Momentos de plastificação positivo e negativo (item 2.3)
M_{cr}	Momento correspondente ao início do processo de danificação
M_p	Momento correspondente ao início da plastificação
M_u	Momento último resistente
N	Esforço normal
P	Carga aplicada
p, s	Coefficientes de encruamento (item 2.3)
q_i	Forças termodinâmicas associadas às variáveis de estado (item 2.1)
q	Porcentagem mecânica de aço tracionado (item 2.2)
$S^{ed}(D)$	Matriz de rigidez do elemento com dano (itens 2.5 e 3.1)
$S_{11}^0, S_{22}^0, S_{33}^0$	Coefficientes da matriz de rigidez elástica
Tr	Primeiro invariante do tensor de tensões
t_i, t_j	Fator que descreve a rigidez média da zona anelástica (item 2.3)
t	Matriz de transformação (item 2.3)

U^*	Energia potencial complementar
$U^P(\alpha)$	Potencial plástico dependente das variáveis internas ($\alpha_1, \alpha_2, \dots$)
u	Deslocamento imposto
W^*	Energia potencial complementar elástica
w	Conjunto de variáveis internas que descrevem o estado de danificação da seção transversal da viga (item 2.1)
w_0, w_1, \dots, w_n	Variáveis internas que descrevem o estado de danificação da seção transversal da viga (item 2.1)
Y_1, Y_2	Taxa de energia livre em tração e compressão (item 2.4)
z_1, z_2	Variáveis internas encruamento positivo e negativo (item 2.4)
Z_1, Z_2	Variáveis associadas aos encruamento positivo e negativo (item 2.4)
z	Coordenada local (item 2.1)
\mathbf{z}	Abcissa do ponto de contraflexa (item 2.2)
z_i	Posição do centróide do elemento com respeito ao eixo da viga

RESUMO

ÁLVARES, M. S. (1999). *Contribuição ao estudo e emprego de modelos simplificados de dano e plasticidade para a análise de estruturas de barras em concreto armado*. São Carlos, 1999, 113p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O trabalho trata da formulação e análise da resposta numérica de um modelo de danificação e plastificação localizadas em zonas previamente definidas ao longo de elementos estruturais de barra, estendendo-se os conceitos dos modelos clássicos de plasticidade concentrada.

Inicialmente é feita uma breve revisão bibliográfica sobre modelos de dano e plasticidade, destacando-se alguns que contém propostas voltadas para a simplificação de suas formulações ou então da etapa de implementação numérica adotando-se, neste caso, a técnica de discretização em estratos dos elementos de barra.

Em seguida, já no âmbito dos modelos ditos simplificados e estendendo-se a formulação de um modelo para estruturas de barras proposto na bibliografia, deduz-se a matriz de rigidez para o caso de barra em regime elástico com dano. Na dedução, considera-se que os processos de danificação, associados à flexão e restritos às extremidades do elemento de viga, são dependentes entre si e afetam diretamente os coeficientes de transmissão de esforços ao longo do elemento. Nesta etapa, através de dois exemplos numéricos, avalia-se a resposta do modelo quando implementado em um programa de elementos finitos.

Apresenta-se, na seqüência, um estudo sobre a viabilidade da aplicação do modelo estudado às estruturas em concreto armado, incluindo-se casos em que a distribuição da armadura longitudinal é assimétrica. Como resultado desse estudo, sugere-se uma modificação da função critério de danificação, originalmente empregada, para melhor representar o processo de dissipação de energia relacionada à danificação.

A partir dos confrontos entre respostas experimentais de vigas e pórtico em concreto armado e resultados numéricos, conclui-se pelo bom desempenho do modelo modificado. Finalmente, reúnem-se sugestões para a continuidade dos estudos.

Palavras-chave: mecânica do dano, modelos simplificados, modelos constitutivos, análise não-linear, métodos numéricos.

ABSTRACT

ÁLVARES, M. S. (1999). *Contribution of the study and application of simplified damage and plasticity models for analyse of reinforced concrete bars structures*. São Carlos, 1999, 113p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

This work is related to formulation and numerical analysis of a damage and plasticity model which considers such effects localised on zones previously defined along the structural beam elements, extending the concepts of the classics lumped plasticity models.

First of all, a brief bibliography revision on damage and plasticity based models is given, enlightening the ones which propose some kind of simplification at the level of the formulation or only at the stage of the numerical implementation, for instance using a layered technique in a beam element discretization.

Afterwards, on the field of the so called simplified models, a stiffness matrix of an elastic damage beam element is deduced, extending the formulation of a framed structures model proposed in the bibliography. The main characteristic of the new element is that the damage processes is localized on hinges at the extremities of the beam element, being the associated damage variables dependent on each other and reducing progressively the transmission efforts factor along the element. Two basic numerical examples show the performance of the model when implemented in a finite element code.

Next, a study on the feasibility of the model to analyse reinforced concrete structures is presented. In order to enlarge the application field, cases where longitudinal reinforcement is asymmetrically distributed in the cross section are also considered. As a result of the study, a change in the damage criteria function originally used is suggested, aiming to improve the valuation of the dissipated energy related to the damage process.

The response of the modified resulting model is valued by a confront between experimental and numerical results of beams and frame reinforced concrete structures. The results show a very good performance of the modified model. Finally, some topics for further research on the theme explored in this work are suggested.

Key-words: damage mechanics, simplified models, constitutive models, non-linear analysis, numerical methods.

INTRODUÇÃO

1- INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas a evolução dos computadores e a conseqüente expansão dos limites de aplicação de técnicas numéricas como o método dos elementos finitos, o método das diferenças finitas e o método dos elementos de contorno, tem impulsionado o cálculo estrutural na engenharia civil. Aproveitando-se dessas facilidades, tem surgido, dia após dia, várias teorias que se propõem a resolver determinados problemas, buscando respostas cada vez mais próximas do comportamento real da estrutura. No campo do comportamento não-linear físico de estruturas os modelos constitutivos, fundamentados na Mecânica dos Meios Contínuos, complementados com a identificação através de resultados experimentais das leis de evolução das variáveis e parâmetros associados aos fenômenos responsáveis pela resposta não-linear, exercem um papel fundamental na obtenção de respostas confiáveis. No entanto, muitos desses modelos acabam por apresentar uma formulação muito complexa que, mesmo apresentando uma boa resposta, dificulta ou torna inviável sua implementação computacional e aplicação prática.

Os modelos tornam-se ainda mais complexos quando o material a ser modelado é o concreto. Segundo LEMAITRE & CHABOCHE (1985), é difícil

separar os fenômenos de deformação e de ruptura no concreto, pois as microfissuras e as cavidades que existem antes mesmo da existência de qualquer sollicitação, interferem diretamente na resposta inicial do material induzindo-se, desde logo, mecanismos de ruptura frágil e gerando deformações permanentes.

Entretanto, pode-se considerar que abaixo de certo valor de sollicitação microfissuras e cavidades existentes antes da sollicitação sejam, apesar de tudo, pouco importantes. Nessas condições, admite-se que a deformação dentro dessa fase inicial de resposta é o resultado de movimentos quase reversíveis de átomos, ou seja: elástica com uma baixa viscosidade.

Algumas observações importantes sobre o comportamento do concreto em função da intensidade da sollicitação são:

- A ruptura frágil por descolamento pasta-grãos representa o fenômeno essencial de geração de deformação permanente e limitação do regime elástico, sendo fortemente influenciada pela natureza do carregamento (de fato, o limite de elasticidade, ou a resistência a ruptura, são da ordem de 12 vezes maiores na compressão em relação à tração, explicando-se assim o fato de se utilizar o concreto essencialmente em regimes de compressão). Acima da sollicitação correspondente ao limite de elasticidade, as microfissuras nas ligações da pasta com os grãos de maiores dimensões começam a progredir para o interior da pasta e estabelecer pontes de ligação entre si, gerando em escala macroscópica as deformações permanentes.
- Para sollicitações ainda mais elevadas, as microfissuras ganham de vez a pasta, unindo-se e alinhando-se paralelamente à direção da sollicitação interna, se esta for de compressão. Além disso, escorregamentos podem ocorrer em cristais dentro dos grãos, contribuindo dessa forma para a deformação permanente, que se dá a volume constante. Esse processo dito de danificação é, nesta fase, fortemente anisótropo.
- A última fase é a de ruptura: as fissuras macroscópicas aparecem, o material entra num regime de resposta instável pois num processo de deformação controlada a sollicitação necessária para produzir novas deformações diminui. Nessa fase o volume específico aumenta e a ruptura final ocorre quando as microfissuras se

unem para formar uma superfície de descontinuidade tornando todo o corpo ou parte dele hipostático.

As observações acima sugerem o grau de complexidade para modelar o comportamento mecânico do concreto considerando-se o regime de ruptura. No entanto vários modelos propõem-se a simular tal comportamento, utilizando-se teorias de elasticidade, plasticidade e dano. Em ÁLVARES (1993) é feita uma breve exposição dos modelos constitutivos para o concreto levando-se em consideração o tipo de teoria em que foi formulado (elasticidade, plasticidade, mecânica da fratura, mecânica do dano, etc.) e qual o efeito do tempo nas propriedades dos materiais.

Nos modelos que envolvem a elasticidade, seja ela linear ou não-linear (OTTOSEN (1979), LIU; NILSON & SLATE (1972), CEDOLIN & DEI POLI (1977), KUPFER & GERSTLE (1973) e SAENZ (1965)), de uma maneira geral considera-se a isotropia porém pode-se induzir a anisotropia impondo-se resistências diferentes à tração e à compressão.

A teoria da plasticidade se aplica com bons resultados aos geomateriais quando submetidos a compressão. Para o concreto, por exemplo, são muito comuns os modelos que supõem um comportamento elástico-plástico perfeito em compressão e elástico com fratura em tração. Dentre os modelos baseados na plasticidade pode-se distinguir os modelos perfeitamente plásticos e os modelos plásticos com endurecimento ou amolecimento (SUIDAN & SCHNOBRICH (1973), CHEN & CHEN (1975), OWEN; FIGUEIRAS & DAMJANIC (1983), LUBLINER (1991), MAIER (1968 e 1969) e ARGYRIS et al. (1974)).

A mecânica do dano por sua vez analisa a degradação das propriedades mecânicas do material produzida essencialmente pela evolução de microfissuras e cavidades. Introduzida inicialmente para modelar a ruptura por fluência em metais (KACHANOV (1958)), a mecânica do dano é bastante adequada para materiais como o concreto (MAZARS (1984) e LA BORDERIE (1991)) e estende-se atualmente à análise da fadiga (LEMAITRE (1984) e MARIGO (1985)), deformação lenta (*creep*) (KACHANOV (1984) e MURAKAMI (1981)), interação dano deformação lenta-fadiga (LEMAITRE & CHABOCHE (1974) e LEMAITRE (1984)) e dano dúctil-plástico (SIMO & JU (1987), TAI (1990) e HAN & MOU (1993)).

Uma evolução natural são os modelos que acoplam mais de uma teoria, como por exemplo, elasticidade e plasticidade, plasticidade e dano, elasticidade e dano, etc..., surgindo daí formulações quase sempre complexas. No entanto, buscando diminuir o grau de complexidade das formulações, mas ainda levando-se em conta na sua formulação o acoplamento de efeitos, e por consequência de teorias, grande destaque tem sido dado aos chamados modelos constitutivos simplificados.

Nesta tese, enfocam-se os modelos constitutivos ditos “*simplificados*” para aplicação em estruturas de concreto armado. O estudo reúne, inicialmente, uma breve descrição dos principais modelos *simplificados* apresentados na literatura especializada, colocando-se em destaque os modelos propostos por LA BORDERIE (1991) e FLÓREZ-LÓPEZ (1993a). Este último tem como proposição, levar em conta a deterioração estrutural considerando-se o dano ‘localizado’.

Em seguida reúnem-se as contribuições deste trabalho: a formulação de uma nova matriz de rigidez para o modelo de dano localizado e a proposição de uma nova função limite de dano objetivando-se viabilizar a aplicação do modelo às vigas com distribuição não-simétrica de armadura longitudinal nas regiões de tração e compressão da seção.

2 - CARACTERÍSTICAS FUNDAMENTAIS DO COMPORTAMENTO DO CONCRETO ARMADO

Entre os materiais mais utilizados na construção civil está o concreto. Constituído por um conjunto de materiais duros e inertes (agregados), e ligados entre si por uma pasta de cimento, o concreto apresenta uma microestrutura complexa que afeta diretamente as características globais relativas ao seu comportamento mecânico. Assim, as propriedades deste conglomerado dependem, ao mesmo tempo, da qualidade da pasta de cimento, das características dos agregados e da interação na interface pasta-agregado.

Devido à heterogeneidade de sua composição e aos processos químicos de cura ou endurecimento, o concreto apresenta microfissuras, especialmente na

interface pasta-agregado, mesmo antes de ser carregado. Investigações realizadas na argamassa mostram que a distribuição de microfissuras é bastante descontínua e com orientações arbitrárias. Este fato é sustentado por diversas análises da microestrutura, as quais mostram que a microfissuração pode ser considerada como um fenômeno não direcionado, pois a propagação de microfissuras no agregado segue um mecanismo imprevisível que depende, sobretudo, do tamanho de suas partículas. Também, segundo OLLER et al. (1990), o processo de fissuração se dá por um mecanismo não-homogêneo que combina crescimento e união de microfissuras em diferentes direções. No entanto, em escala macroscópica, as direções dominantes de fissuração podem ser interpretadas como um lugar de trajetórias e pontos de degradação estrutural.

Os conceitos acima dão uma idéia do quanto é difícil modelar o comportamento não-linear do concreto. Alguns modelos, como por exemplo os baseados na *Teoria da Plasticidade*, utilizam funções ou critérios de plastificação definidos adequadamente com as diferentes respostas do concreto se em tração ou em compressão. Nos modelos baseados na *Mecânica do Dano* a fissuração é interpretada como um efeito local, levado em conta pela evolução de variáveis que penalizam a rigidez do material; tais modelos estão sendo utilizados com sucesso na modelagem do comportamento não-linear do concreto.

O comportamento do conjunto concreto-aço (*concreto armado*) depende do comportamento de cada material e do tipo de interação entre eles. O comportamento mecânico é altamente influenciado pela disposição geométrica e quantidade de cada um dos componentes e induz (não-localmente) a um comportamento inicial anisótropo.

Vale observar, entretanto, que o comportamento do aço em pequenas deformações pode ser considerado bem mais simples que do concreto. Normalmente, os aços utilizados no concreto armado apresentam um comportamento elástico linear até o valor de tensão limite, apresentando, a partir daí, deformações plásticas. Assim sendo, é suficiente considerar modelos elasto-plásticos perfeito ou com encruamento positivo, segundo o tipo de aço utilizado.

3 - MODELOS CONSTITUTIVOS

A simulação com boa precisão da resposta não-linear de uma estrutura em concreto armado depende da consideração de relações constitutivas realísticas.

É importante ressaltar que ao contrário da elasticidade, a plasticidade e a danificação são o resultado de processos tipicamente dissipativos que ocorrem na microestrutura. Assim, para caracterizar tais comportamentos, os modelos constitutivos utilizam-se de variáveis internas. Cada variável interna introduzida no modelo representa um mecanismo correspondente a um certo fenômeno dissipativo. Por exemplo, em um meio isótropo, a variável escalar de dano relaciona-se com uma medida local da densidade de microdefeitos e microfissuras existentes em determinado instante.

No entanto, não é simples formular uma lei constitutiva que reproduza na íntegra o comportamento de um material específico. Assim sendo, deve-se restringir a escolha das variáveis internas aos fenômenos de maior interesse ou ao seu grau de influência na resposta global do objeto em estudo.

Neste trabalho abordam-se modelos que levam em conta principalmente os fenômenos de *plasticidade* (deformações permanentes) e de *dano* (perda gradual da rigidez), particularizado ainda para regimes de carregamentos proporcionais crescentes, pequenas deformações e isotérmicos.

4 - OBJETIVOS DA TESE

O objetivo fundamental desta tese é apresentar um modelo constitutivo para materiais que apresentam perda de rigidez e deformações permanentes ao longo de determinada história de carregamento. Procura-se criar uma ferramenta simples e eficaz que auxilie na análise de uma gama de estruturas convencionais no dia a dia, como por exemplo os pórticos.

Pretendendo-se chegar a uma resposta mais próxima possível da real, propõe-se fazer uma análise do comportamento não-linear destas estruturas, utilizando-se para tanto os conceitos da Mecânica do Dano Contínuo (*Continuum Damage*

Mechanics). Postula-se englobar dentro de um único índice os efeitos de plasticidade e perda de rigidez consideradas como decorrentes da evolução de microfissuras ou defeitos iniciais.

Para viabilizar uma análise simples e de fácil entendimento a implementação do modelo é feito em combinação com o método dos elementos finitos, utilizando-se um elemento de barra (*viga-coluna*), no qual admite-se que os efeitos não-lineares podem ser concentrados em pontos pré-definidos pela discretização ou distribuídos ao longo de seu comprimento. No primeiro caso, é proposta uma nova matriz de rigidez, na qual a rigidez inicial é penalizada por um fator que combina os índices de dano verificados nos nós do elemento.

5 - JUSTIFICATIVA E METODOLOGIA

Para simular a resposta não-linear decorrente da evolução da deterioração de uma estrutura, poucos trabalhos têm sido desenvolvidos especificamente no que se refere aos modelos simplificados. Um ponto de interesse e que justifica o estudo é avaliar o desempenho de modelos que acoplam fenômenos (*no caso plasticidade e dano*) propondo um único índice que mede o quanto a estrutura está degradada.

Quanto ao tipo de elemento finito a ser empregado na implementação do modelo, justifica-se a escolha e proposição de um elemento finito de barra pela simples consideração de que a maioria dos modelos utilizam elementos complexos, que exigem um enorme tempo na elaboração dos arquivos de dados e no processamento. Outro dado que motiva a adoção deste tipo de elemento finito, é o fato de se poder postular um modelo baseado no modelo de plasticidade concentrada (*Lumped Plasticity Model*), onde supõe-se que todos efeitos não-lineares são concentrados em rótulas anelásticas, visto que em estruturas convencionais, como por exemplo pórticos, a discretização é quase um dado do problema.

A Mecânica do Dano Contínuo, que tem como marco inicial o trabalho de KACHANOV (1958), é atualmente uma importante ferramenta na análise do comportamento não-linear de estruturas em concreto armado e metálicas. A principal

idéia é a introdução de uma nova variável interna, *dano*, que dê uma medida da evolução da densidade de microfissuras e microdefeitos e que tenha influência no comportamento global do material. Em termos de formalismo, a Mecânica do Dano Contínuo é fundamentada na Termodinâmica dos Processos Irreversíveis.

Nas últimas duas décadas, a Mecânica do Dano Contínuo tem sido aplicada na solução de vários problemas dentro da engenharia, aos quais se incluem a modelação da deterioração associada à deformação lenta do material (*creep damage*) (KACHANOV (1984) e MURAKAMI (1981)), dano por fadiga (LEMAITRE (1984) e MARIGO (1985)), interação dano - deformação lenta - fadiga (LEMAITRE; CHABOCHE (1974) e LEMAITRE (1984)), dano em materiais dúcteis (SIMO; JU (1987), TAI (1990), e HAN; MOU (1993)), dano em estruturas de concreto armado (MAZARS (1984)) e dano em estruturas de concreto armado e concreto com fibras sujeitas à carregamento sísmico (LA BORDERIE; PIJAUDIER-CABOT & MAZARS (1991)).

Apesar do grande número de pesquisas e publicações sobre o assunto, quase todos os modelos apresentados na literatura utilizam elementos finitos complexos que sobrecarregam a formulação e o equipamento, e nem sempre este formalismo é o mais adequado para a análise de grande parte das estruturas, como pórticos e elementos rotulados. No entanto, surgem linhas de pesquisas que privilegiam o desenvolvimento de modelos que utilizam elementos mais adequados para estas estruturas.

A metodologia de trabalho consiste em estudar estes modelos ditos simplificados avaliando as respostas numéricas para os exemplos propostos. Depois desta avaliação é proposto um modelo, baseado na termodinâmica dos processos irreversíveis, que deverá acoplar efeitos plasticidade e dano. Este modelo é implementado via método dos elementos finitos. Os resultados numéricos deste modelo e do modelo de LA BORDERIE (1991) são confrontados com resultados de estruturas testadas experimentalmente que estão documentadas em publicações (em especial FLÓREZ-LÓPEZ (1993a, 1993b), CIPOLLINA; LÓPEZ-INOJOSA & FLOREZ-LÓPEZ (1995), VECCHIO & EMARA (1992), OLLER; LUCCIONI & BARBAT (1996) e ÁLVARES (1993)).

6 - RÁPIDA DESCRIÇÃO DO CONTEÚDO DA TESE

No capítulo 1, mostra-se uma síntese das principais observações e conclusões existentes na bibliografia sobre os mecanismos de degradação de estruturas de concreto armado. Evidências experimentais da degradação do concreto, do processo de localização de fissuras e presença de deformações permanentes são mostradas, bem como resultados numéricos de modelos constitutivos que se propõem a reproduzir tais fenômenos.

No capítulo 2 se apresenta um breve comentário sobre as linhas de pesquisa que investigam os fenômenos de degradação da rigidez do concreto (dano) e presença de deformações permanentes (plasticidade). A seguir são descritos quatro modelos que são denominados simplificados, pois fazem parte de uma linha de pesquisa que visa formular modelos constitutivos que sejam simples e úteis na aplicação do profissional da engenharia. Dentro desta descrição dá-se uma particular atenção aos modelos de LA BORDERIE (1991) e FLÓREZ-LÓPEZ (1993a), que servirão de base para a formulação de um novo modelo.

O capítulo 3, que traz o modelo proposto, mostra um procedimento na determinação da matriz de rigidez quando da consideração de efeitos concentrados em seções pré-determinadas. Em seguida a matriz é implementada juntamente com as funções propostas por FLÓREZ-LÓPEZ (1993a), quando é feita uma análise qualitativa do procedimento sugerido.

No capítulo 4 é feita uma análise dos resultados numéricos dos modelos pelo confronto com resultados experimentais de vigas e pórtico em concreto armado. Nesta fase foram utilizados os modelos de LA BORDERIE (1991) e o modelo de dano e plasticidade localizada nas extremidades do elemento (FLÓREZ-LÓPEZ (1993a)) implementado com a matriz de rigidez deduzida no capítulo 3.

O capítulo 5 faz-se um estudo sobre a melhoria do desempenho do modelo de dano localizado a partir da modificação da função de danificação proposta por FLÓREZ-LÓPEZ (1993a). O objetivo é o de mostrar que tal modelo pode ser eficaz mesmo nas situações em que a disposição da armadura é não-simétrica nas zonas de tração e compressão da seção.

Finalmente as conclusões e as perspectivas futuras para a continuidade deste estudo são apresentadas no capítulo 6.

CAPÍTULO 1

COMPORTAMENTO MECÂNICO DO CONCRETO

1.1- INTRODUÇÃO

Existem na literatura específica diversos estudos experimentais desenvolvidos com o objetivo de elucidar os fenômenos responsáveis pelo comportamento mecânico do concreto sujeito a cursos de carga proporcional ou quaisquer (HILSDORF et al. (1969), SPOONER & DOUGILL (1975), SPOONER et al. (1976), PETERSSON (1980), BERTHAUD (1991), BAZANT & PIJAUDIER-CABOT (1987), etc...).

Um perfeito entendimento e uma correta interpretação das alterações na estrutura interna do material assumem um papel fundamental na formulação de novos modelos constitutivos, os quais permitem relacionar mudanças reais ocorridas na microestrutura com fenômenos evidenciados macroscopicamente.

Formação de fissuras e mecanismos de fratura são fenômenos típicos que podem ser estudados na denominada escala submacroscópica ou média e são basicamente associados a “rearranjos” internos. Em um nível fenomenológico, macroscópico, eles são responsáveis pelas não-linearidades descritas por relações tensão-deformação.

A heterogeneidade do concreto, devida aos diferentes constituintes, influencia as propriedades de deformação (formação e propagação de fissuras) e a resistência final da mistura (ACKER (1987)). O comportamento observado é também afetado

por fatores externos, tais como taxa de carregamento, condições de umidade e temperatura, etc...

De fato, a presença de partículas de agregado envolvidas por argamassa introduz um vínculo fraco no sistema: a interface dos dois ingredientes; nela surgem as primeiras fissuras, visíveis ao microscópio (OLLIVIER (1985)), estando presentes mesmo antes da aplicação do carregamento. Quando o concreto é externamente carregado, ou quando o sistema suporta cargas e mudanças de volume durante a moldagem e hidratação, a heterogeneidade também é causa da não-uniformidade do estado de tensões interno. Por outro lado a presença de vazios favorece a concentração de tensões, servindo, desse modo, como zonas potenciais para a formação de fissuras.

Investigações realizadas por BERTHAUD (1991), utilizando-se de emissão acústica, mostraram que:

1. no caso de solicitação do concreto por tração ocorre uma multilocalização das zonas de fissuração e que estas possuem uma largura não nula. Os resultados mostraram que a localização dessas zonas se dá logo após o término do regime elástico-linear e que deformações permanentes já existem antes da localização das zonas de fissuração;
2. no caso de solicitação por compressão simples observou-se que as deformações de extensão ocorrem em uma direção normal ao eixo que contem o carregamento.

Outras conclusões destas investigações são:

- a localização acontece sempre após o pico da curva tensão-deformação;
- em compressão, macroscopicamente, a banda de localização é uma banda de cisalhamento, mas no interior desta constata-se uma intensa fissuração com uma organização de fissuras bem definida (mecanicamente as fissuras organizam-se de maneira a permitir o escorregamento dos dois blocos).

1.2- ENSAIOS EM VIGAS DE CONCRETO ARMADO

Neste item descrevem-se algumas evidências observadas em ensaios realizados em vigas de concreto armado sujeitas a cursos de carga crescente

proporcionalmente a um certo parâmetro (ÁLVARES (1993)), carga e descarga (FLÓREZ-LÓPEZ (1993a, 1993b)) e carga cíclica (LA BORDERIE (1991)).

Em ÁLVARES (1993) apresenta-se uma série de ensaios em vigas de concreto armado com diferentes taxas de armadura, realizados com o objetivo de avaliar, por meio da curva carga-deslocamento, a resposta numérica de um modelo constitutivo de dano para o concreto que se estudava na época. A geometria, distribuição de armadura na seção transversal e posição do carregamento encontram-se detalhadas na figura 1.1.

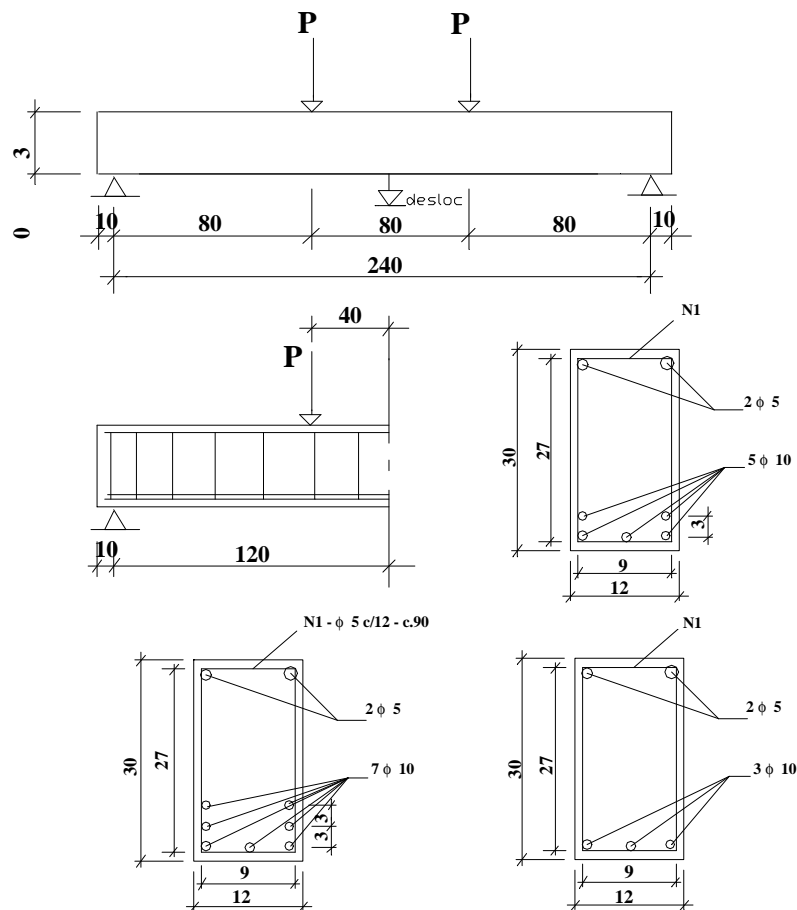


Figura 1.1. Geometria das vigas ensaiadas em ÁLVARES (1993).

Do ponto de vista macroscópico, observações referentes aos processos de aparecimento e propagação de fissuras feitas nas faces das vigas evidenciaram fenômenos descritos no item anterior (fig. 1.2), tais como:

- as primeiras fissuras aparecem na região central da viga, onde o momento fletor é maior e, conseqüentemente, maior a sollicitação por tração. Nesta região, existe um processo de multilocalização de fissuras paralelas à direção de aplicação da carga;
- também na região central da viga, para um nível elevado de carga, nota-se um processo bem localizado de esmagamento do concreto provocado pelas tensões de compressão;
- nas regiões compreendidas entre os apoios e os pontos de aplicação das cargas, a evolução das fissuras dá-se segundo a direção inclinada com o eixo horizontal, o que é compatível com a existência do esforço cortante nesta região.



Figura 1.2. Distribuição característica das fissuras. *ÁLVARES (1993).*

FLÓREZ-LÓPEZ (1993a) descreve em seu trabalho um ensaio em viga de concreto armado simplesmente apoiada e com carga concentrada aplicada no meio do

vão, realizado com vistas à formulação de um modelo constitutivo considerando-se *dano e plasticidade*. Foi aplicada uma história de carregamento que incluiu várias descargas. Os resultados, figura 1.3, revelam, após o trecho inicial elástico linear, a presença de deformações permanentes (*efeito da plasticidade*) e uma degradação progressiva da rigidez inicial (*dano*).

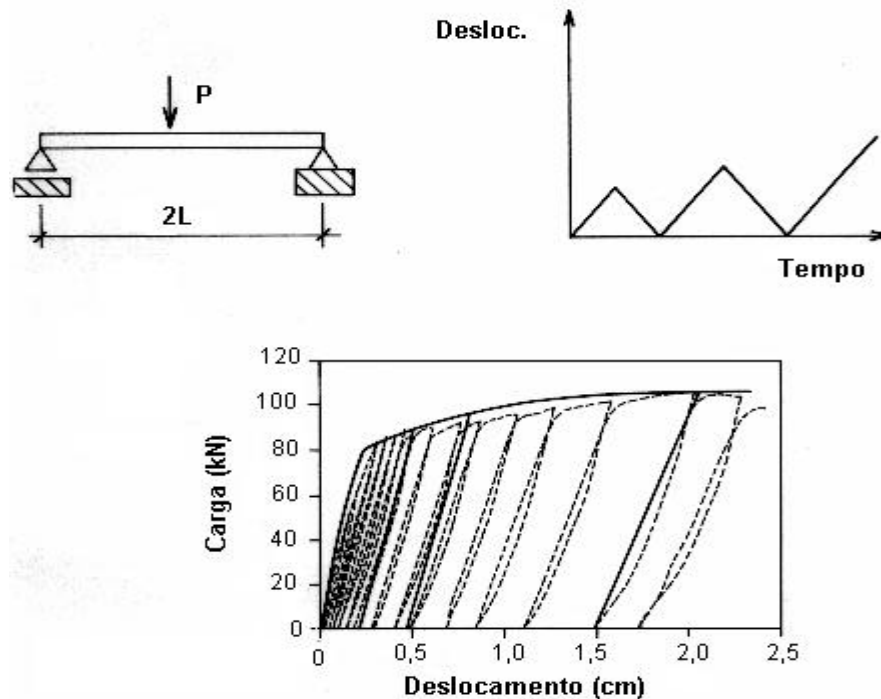


Figura 1.3. Ensaio e resposta experimental. FLÓREZ-LÓPEZ (1993a).

LA BORDERIE (1991) também apresenta resultados de ensaios em vigas de concreto, concreto armado, concreto com fibras e concreto armado com fibras, apoiadas nas extremidades e com cargas concentradas aplicadas no meio dos vãos. Definiu-se uma história de carregamento cíclico. A principal finalidade desses ensaios foi observar e identificar os processos de dissipação de energia quando da abertura e fechamento das fissuras. No que se refere ao fenômeno de formação e propagação de fissuras observou-se que as mesmas se desenvolvem e se localizam na região de aplicação da carga, onde encontra-se a maior solicitação por tração (figura 1.4).

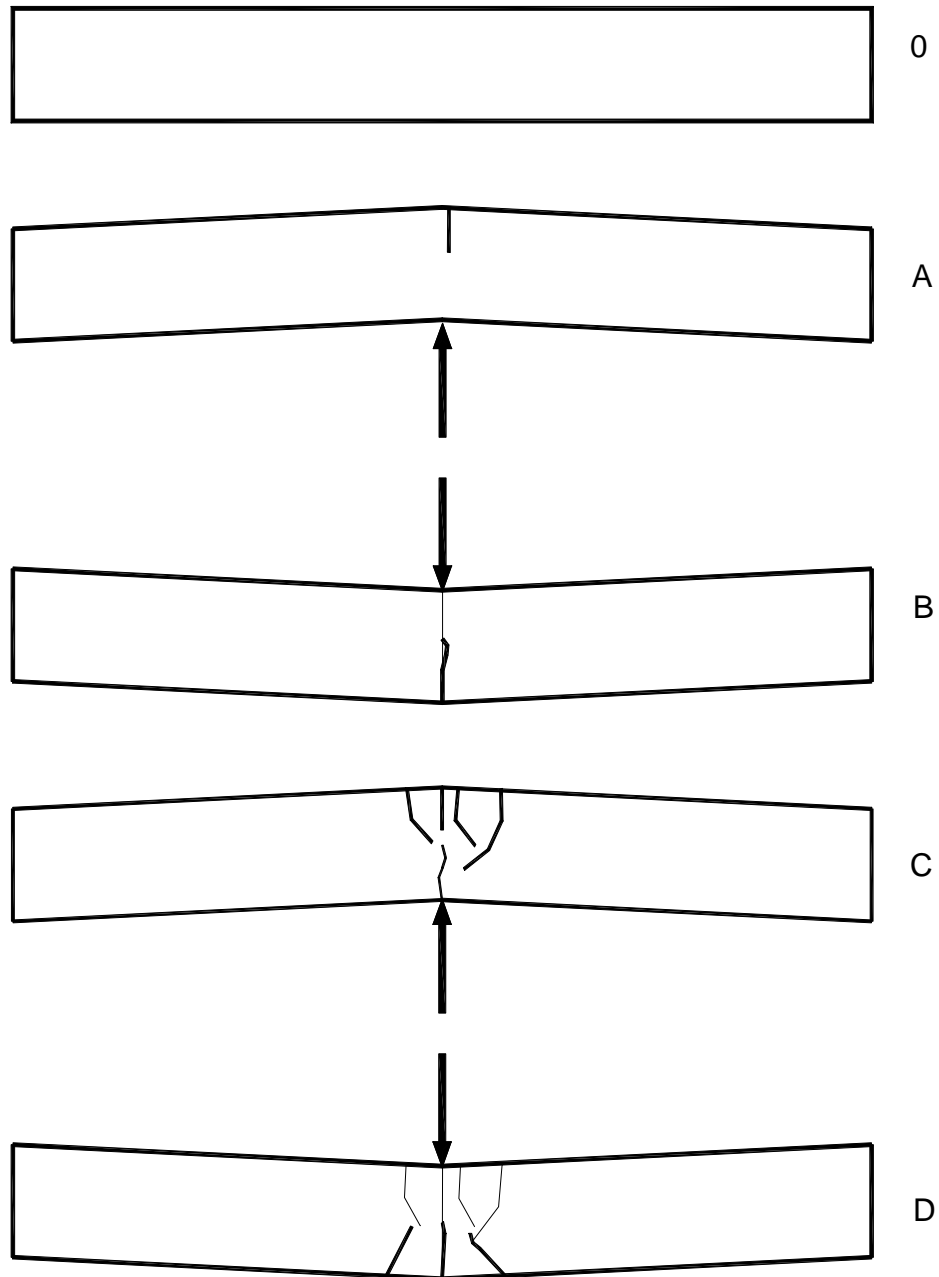


Figura 1.4. Evolução aparente de fissuras. *LA BORDERIE (1991).*

Durante os ensaios foram feitas observações sobre os seguintes aspectos:

- resposta global da estrutura;
- deformações no concreto em função do esforço aplicado;
- deformações na armadura em função do esforço aplicado.

A resposta, observada para todos os tipos de concreto, descrita em função das fases de carregamento, foi:

Fase OA: (fase elástica linear)

A resposta é linear. Dentro desta fase as deformações no concreto aumentam rapidamente. As deformações nas armaduras obtidas na situação A são equivalentes às obtidas no concreto. Pode-se afirmar, então, que a aderência entre a armadura e o concreto é mantida mesmo com a degradação do concreto.

Fase AB: (fase de degradação do concreto – fase anelástica)

As deformações no concreto não se anulam para um esforço nulo. As deformações na armadura são menores que no concreto no ponto de esforço nulo. Pode-se afirmar, então, que as deformações anelásticas são devidas ao concreto degradado, pois a armadura não está ainda plastificada. No entanto não se pode deduzir que a diferença de deformações constatada entre o aço e o concreto venha do escorregamento das interfaces concreto-armadura. As fissuras criadas anteriormente se fecham. Aparece uma fissuração simétrica àquela obtida durante carregamento AO.

Carregamento B-C-D: (fase crescimento das fissuras no concreto sem plastificação da armadura)

Pode-se observar de novo os mesmos fenômenos citados anteriormente, com um aumento considerável do número de fissuras. No entanto não se constatou plastificação da armadura e a carga última prevista não foi atingida nos ensaios.

1.3 - ALGUNS RESULTADOS DE ANÁLISES NUMÉRICAS REALIZADAS

Os resultados experimentais das vigas de concreto armado contidos em ÁLVARES (1993) foram confrontados com resultados numéricos de modelos constitutivos propostos por MAZARS (1984), FLÓREZ-LÓPEZ (1993a, 1993b) e LA BORDERIE (1991), empregando-se no primeiro deles uma discretização com elementos planos bidimensionais e nos outros elementos de barra. Tal confronto, realizado por PITUBA (1998), está resumido nas figuras 1.5, 1.6 e 1.7.

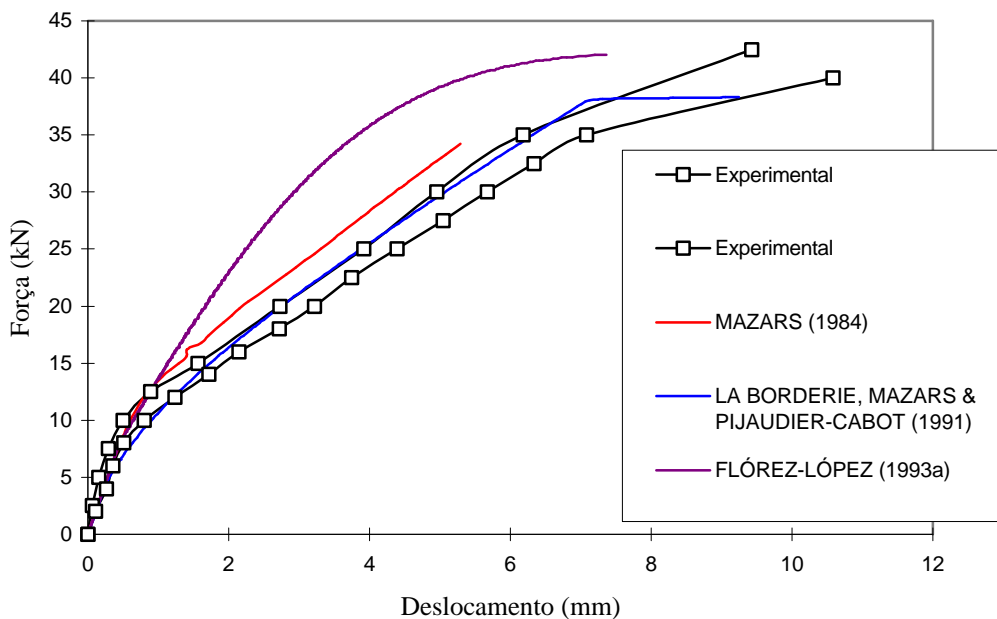


Figura 1.5. Respostas experimental e numérica vigas com 3f10,00mm. PITUBA (1998).

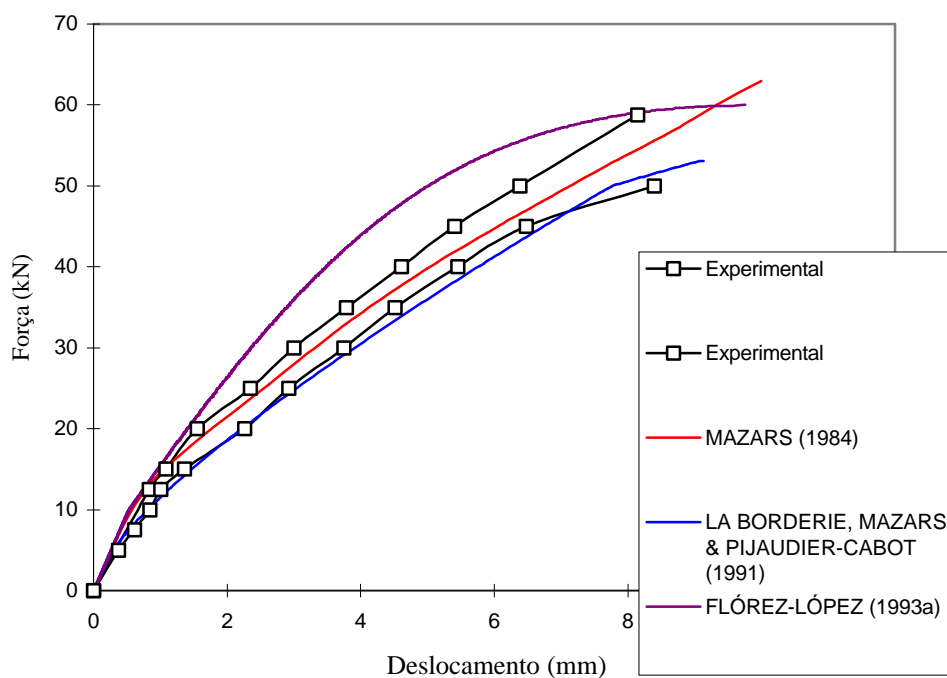


Figura 1.6. Respostas experimental e numérica vigas com 5f10,00mm. PITUBA (1998).

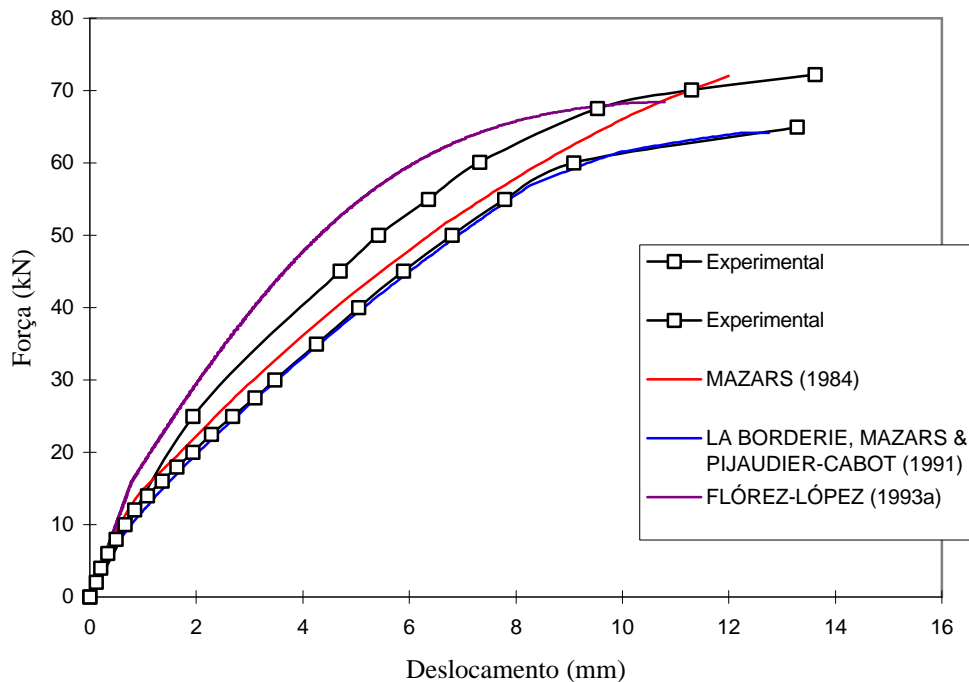


Figura 1.7. Respostas experimental e numérica vigas com 7f10,00mm. PITUBA (1998).

As principais constatações deste estudo foram:

- quanto maior a taxa de armadura da viga maior a precisão da resposta numérica fornecida pelos modelos. A razão disto é que o concreto passa a apresentar uma fissuração distribuída, de acordo com as hipóteses dos modelos de dano.
- o modelo de MAZARS (1984), apesar de fornecer uma resposta satisfatória para as três situações, no caso da viga com 3 ϕ 10,00mm deveria reproduzir uma dissipação maior de energia para fornecer uma resposta mais próxima da experimental. A justificativa para esta resposta recai no fato de MAZARS (1984) postular a inexistência de deformações plásticas (*permanentes*). De fato, em consequência da menor taxa de armadura, o concreto apresenta um panorama de fissuração mais intenso e localizado, que possibilita o aparecimento do efeito de engrenamento dos agregados nas faces da fissura, levando a uma configuração final onde as deformações permanentes são mais presentes.
- no caso de FLÓREZ-LÓPEZ (1993a), a resposta numérica consegue recuperar a carga última que as vigas suportam, porém não descreve de forma satisfatória

todo o desenvolvimento da curva carga-deslocamento. Imagina-se que este fato deve-se à própria concepção do modelo constitutivo, que postula os efeitos de dano e plasticidade concentrados em 'rótulas', exigindo-se uma rigorosa identificação paramétrica de modo a colher os efeitos da distribuição de armaduras e de danificação do concreto.

- o modelo de LA BORDERIE (1991) foi o que apresentou a melhor resposta, pois leva em consideração os efeitos de degradação da rigidez inicial (*dano*) e deformação permanente (*plasticidade*) na resposta global da estrutura, e além disso, considera-se na discretização que o processo de dissipação de energia se dá sobre todo elemento (*volume*).

CAPÍTULO 2

MODELOS SIMPLIFICADOS: BREVE REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nas últimas décadas a mecânica do dano contínuo, que teve como marco inicial o trabalho de KACHANOV (1958), tem se tornado uma das principais linhas de pesquisa na tentativa de descrever o comportamento de materiais em forma mais realista. No entanto, uma grande parte das pesquisas sugerem modelos cujas formulações são muito complicadas ou, então, as aplicações são baseadas em estudos tridimensionais, que além de exigir um maior requinte na sua concepção são, na maioria das vezes, muito complexos para o manuseio de um profissional que não seja um pesquisador.

De acordo com a proposição deste trabalho, procurou-se realizar uma revisão bibliográfica que contemplasse modelos com formulações mais simples e/ou aplicações baseadas em estudos unidimensionais. Na literatura especializada, modelos com tais características são ditos “*simplificados*”. Dentre diferentes modelos, os que mais interessam sob o ponto de vista de formulação, implementação numérica, e resultados experimentais são: FLÓREZ-LÓPEZ (1993a), ALVES & LUBLINER (1992), OLLER; LUCCIONI & BARBAT (1996), MULAS & FILIPPOU (1990), RIVA & COHN (1989) e LA BORDERIE (1991). Além de fornecer elementos que serão utilizados na formulação do modelo constitutivo aqui proposto, naqueles trabalhos, juntamente com os de VECCHIO & EMARA (1992) e

ÁLVARES (1993), encontram-se resultados experimentais úteis para avaliação e confronto dos resultados numéricos.

A seguir descrevem-se os modelos de ALVES & LUBLINER (1992), RIVA & COHN (1990), MULAS & FILIPPOU (1990), LA BORDERIE (1991) e FLÓREZ-LÓPEZ (1993a). Tais trabalhos são interessantes sob o ponto de vista de modelagem pela forma como consideram os fenômenos que provocam a resposta não-linear (*principalmente dano e plasticidade*), particularmente aqueles que introduzem as zonas localizadas de dissipação de energia. Outro interesse está na utilização dos fundamentos de alguns desses modelos (*LA BORDERIE (1991) e FLÓREZ-LÓPEZ (1993a)*) para a proposição de um modelo alternativo útil na análise simplificada de estruturas de barras, como por exemplo os pórticos.

2.1- MODELO DE ALVES & LUBLINER (1992)

O trabalho de ALVES & LUBLINER (1992) tem como objeto de estudo as barras em flexão, cuja cinemática é expressa por um vetor que contém informações sobre o estado de deformação da seção transversal em variáveis generalizadas.

A formulação é restrita à análise plana de vigas de eixo reto e seção retangular com área A_0 , em regime de pequenos deslocamentos, oriundos de um carregamento monótono crescente. As componentes de deformação são descritas por uma extensão δ e uma curvatura k - segundo a hipótese de Euler-Bernoulli; portanto, deformações por cisalhamento são desprezadas.

A figura 2.1 ilustra a seção transversal, apresentando a nomenclatura utilizada neste item. A altura da seção transversal é dada por $2H$, e uma vez que a largura não será explicitada no equacionamento, as seções transversais serão identificadas no domínio $[H, -H]$ e parametrizadas por $z \in [H, -H]$ onde $z = 0$ indica a coordenada do centro de gravidade da seção.

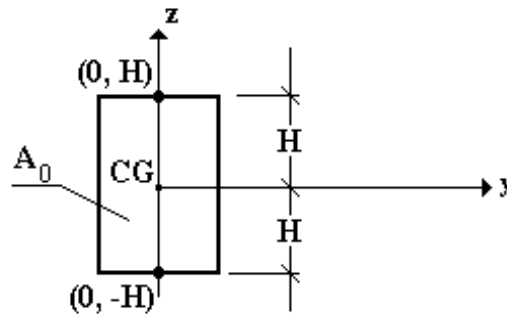


Figura 2.1 - Seção transversal característica.

A formulação do modelo é inteiramente fundamentada na termodinâmica dos sólidos considerando-se processos irreversíveis por meio de variáveis internas.

Assim, na descrição da resposta elástica da barra com dano, o estado termodinâmico é descrito pelo já descrito vetor de deformações generalizadas e um apropriado conjunto de variáveis internas, representando o estado de deterioração do material. Deste modo, postula-se a existência de um potencial de energia livre função das variáveis de estado:

$$\Psi(\delta, k, w) \quad (2.1)$$

onde δ e k são, respectivamente, a extensão e a curvatura e $w = (w_1, \dots, w_n)$ é o conjunto de variáveis internas de natureza escalar que descrevem o estado de danificação da seção transversal da viga. Da variação desse potencial com relação às variáveis de estado decorrem as forças termodinâmicas associadas:

$$\begin{aligned} N &= \partial\Psi(\delta, k, w) / \partial\delta \\ M &= \partial\Psi(\delta, k, w) / \partial k \\ q_i &= -\partial\Psi(\delta, k, w) / \partial w_i \end{aligned} \quad (2.2)$$

Nas equações anteriores N e M são, respectivamente, a força normal e o momento fletor. Por outro lado, considerando-se que o processo de danificação seja isotérmico e adiabático, a inequação de dissipação se reduz a:

$$\sum_{i=1}^n q_i \dot{w}_i \geq 0 \quad (2.3)$$

O modelo se completa definindo-se funções ou critérios de danificação que, com a regra da normalidade, levam a leis de evolução termodinamicamente consistentes para as variáveis internas. Na seqüência apresenta-se o modelo geral e as eventuais simplificações que podem ser empregadas para facilitar a determinação das variáveis internas de dano e as respectivas leis de evolução no caso da barra.

2.1.1 - O Modelo Geral

O dano corresponde à degradação progressiva e irreversível, conseqüente, no caso do concreto, da evolução da microfissuração. Na seção transversal pode-se levar em conta o efeito da microfissuração pela redução de área resistente, quantificada por meio de uma variável escalar de *dano*, aqui representada por w ($\in [0,1]$). Segundo esta interpretação, sendo dA_0 e dA_{ef} os elementos de área inicial íntegra e de área efetiva da seção transversal, respectivamente, a relação entre eles é expressa por:

$$dA_{ef} = (1 - w)dA_0 \quad (2.4)$$

No modelo constitutivo, considera-se que as tensões relacionam-se elasticamente com as deformações: se σ é a tensão de Cauchy, referida à área elementar de seção transversal efetiva, dA_{ef} , e $\epsilon = \delta + kz$ a deformação de uma fibra genérica segundo o modelo de Euler-Bernoulli, então $\sigma = E\epsilon$, onde E é o módulo de Young do material.

Como critério de início e propagação do dano, adota-se uma função f convexa dada por:

$$f(\epsilon, w) = G(\epsilon) - (w + G(\epsilon_0^*)) \leq 0 \quad (2.5)$$

onde ε e ε_0^* são a deformação generalizada corrente e a deformação equivalente correspondente ao início de dano, respectivamente.

Com o objetivo de obter uma lei de evolução da variável de dano, utilizam-se dos conceitos clássicos da plasticidade:

$$\begin{aligned} \dot{f}(\varepsilon, w) &= 0 \\ f_\varepsilon \dot{\varepsilon} + f_w \dot{w} &= 0 \end{aligned} \quad (2.6a, b)$$

De modo que:

$$\begin{aligned} f_\varepsilon &= G'(\varepsilon) = \frac{dG}{d\varepsilon} \\ f_w &= -1 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Substituindo-se em (2.9b):

$$\begin{aligned} G'(\varepsilon) \dot{\varepsilon} - \dot{w} &= 0 \\ \dot{w} &= \dot{\varepsilon} G'(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.8)$$

sendo:

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \quad \dot{\varepsilon} \geq 0 \quad e \quad \dot{w} \geq 0$$

2.1.1.1 - Relações Tensão-Deformação Generalizada

A relação tensão-deformação generalizada é naturalmente obtida da integração da equação constitutiva local sobre a seção transversal da viga. No caso, esta relação envolve a força normal N , o momento de flexão M , o deslocamento δ , a curvatura k e a distribuição de dano.

Sabendo-se que:

$$\begin{aligned} N &= \int_{A_{ef}} \sigma dA_{ef} \\ M &= \int_{A_{ef}} \sigma z dA_{ef} \end{aligned} \quad (2.9)$$

introduzindo-se a relação constitutiva em termos de variáveis generalizadas e a relação entre dA_0 e dA_{ef} , essas integrais resultam:

$$\begin{aligned} N &= E \int_{A_0} \delta(1-w) dA_0 + E \int_{A_0} kz(1-w) dA_0 \\ N &= E\delta \int_{A_0} dA_0 - E\delta \int_{A_0} w dA_0 + Ek \int_{A_0} z dA_0 - Ek \int_{A_0} zw dA_0 \\ \boxed{N} &= \boxed{EA_0(1-w_0)\delta + EA_0Hw_1k} \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} M &= E \int_{A_0} z(1-w)(\delta + kz) dA_0 \\ M &= E\delta \int_{A_0} z dA_0 - E\delta \int_{A_0} zw dA_0 + Ek \int_{A_0} z^2(1-w) dA_0 \\ \boxed{M} &= \boxed{EA_0Hw_1\delta + EI_0(1-w_2)k} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Nas equações acima, I_0 é o momento de inércia da seção íntegra e as variáveis de dano generalizadas são definidas como:

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{1}{A_0} \int_{A_0} w(z) dA_0 \\ w_1 &= -\frac{1}{A_0H} \int_{A_0} zw(z) dA_0 \\ w_2 &= \frac{1}{I_0} \int_{A_0} z^2 w(z) dA_0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Observa-se pelas equações anteriores que as variáveis de dano generalizadas penalizam progressivamente a área transversal, o momento estático e o momento de inércia da seção íntegra.

As variáveis de dano apresentadas em (2.12) são dependentes do estado de deformação e da distribuição de dano ao longo da seção e não podem ser consideradas como variáveis internas, uma vez que o conhecimento da atual deformação e o dano generalizado não implica no conhecimento do estado de deterioração em cada ponto da estrutura e, portanto, seu estado termodinâmico. O estado termodinâmico é, portanto, descrito pelas deformações δ e k e pela distribuição de dano $w(z)$ sobre a seção transversal da viga.

2.1.1.2 - Evolução do dano

As leis de evolução das variáveis de dano generalizado e uma relação incremental entre tensão e deformação devem ser obtidas a partir de (2.5) e da lei de evolução de dano local (2.8), integrando-se sobre a seção transversal da viga.

Convém ressaltar que na equação (2.5), $f(\delta, k, w)$ depende implicitamente de $z \in [H, -H]$. Para uma certa tripla de valores (δ, k, w) , $f(\delta, k, w) = 0$ define indiretamente o subdomínio da seção transversal que pode apresentar evolução de dano.

Define-se então, φ como o conjunto dos pontos da seção que verificam o critério de dano: ($f = 0$) e que podem apresentar evolução do dano ($\dot{w} > 0$). Das equações (2.5) e (2.8) segue que:

$$\varphi = \{z \in [H, -H] \mid f(\delta, k, w) = 0 \text{ e } G'(\varepsilon) \dot{\varepsilon} \geq 0\} \quad (2.13)$$

Pelas equações 2.12 segue que as taxas de variação das variáveis de dano generalizadas podem ser determinadas por:

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_0 &= \frac{1}{A_0} \int_{\varphi} \dot{w}(z) dA_0 \\
 \dot{w}_1 &= -\frac{1}{A_0 H} \int_{\varphi} z \dot{w}(z) dA_0. \\
 \dot{w}_2 &= \frac{1}{I_0} \int_{\varphi} z^2 \dot{w}(z) dA_0
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Substituindo-se a lei de evolução de dano (2.8) nas equações (2.14), segue que:

$$\begin{aligned}
 \dot{w}_0 &= \frac{G'(\varepsilon)}{A_0} (\varphi_0 \dot{\delta} + \varphi_1 \dot{k}), \\
 \dot{w}_1 &= -\frac{G'(\varepsilon)}{A_0 H} (\varphi_1 \dot{\delta} + \varphi_2 \dot{k}), \\
 \dot{w}_2 &= \frac{G'(\varepsilon)}{I_0} (\varphi_2 \dot{\delta} + \varphi_3 \dot{k})
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Os coeficientes φ_i para $i = 0, \dots, 3$ são integrais definidas no conjunto de pontos pertencentes a φ :

$$\varphi_i = \int_{\varphi} z^i dA_0 \tag{2.16}$$

Finalmente, as relações entre taxas de tensões e deformações generalizadas são obtidas de uma diferenciação no tempo das equações (2.10) e (2.11). Da substituição da (2.15) nas relações em taxas obtém-se:

$$\begin{pmatrix} \dot{N} \\ \dot{M} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{K}^e & -\hat{K}^d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\delta} \\ \dot{k} \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

onde:

$$\begin{aligned} \left[\hat{\mathbf{K}}^e \right] &= \begin{pmatrix} EA_0(1-w_0) & EA_0Hw_1 \\ EA_0Hw_1 & EI_0(1-w_2) \end{pmatrix} \\ \left[\hat{\mathbf{K}}^d \right] &= \begin{pmatrix} G'(\varepsilon)E(\delta\varphi_0 + k\varphi_1) & G'(\varepsilon)E(\delta\varphi_1 + k\varphi_2) \\ G'(\varepsilon)E(\delta\varphi_1 + k\varphi_2) & G'(\varepsilon)E(\delta\varphi_2 + k\varphi_3) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.1.2 - Modelo de evolução do dano no contexto simplificado

2.1.2.1 - Variáveis de dano do modelo

A formulação a seguir tem como objetivo simplificar o tratamento geral apresentado. Para isso, a seção transversal da viga é dividida em estratos nos quais verifica-se um dos dois estados seguintes:

- o estrato é totalmente ativo: existe evolução do dano em todo o seu domínio.
- o estrato é totalmente inativo: não há evolução de dano.

Neste sentido, a evolução das variáveis de dano macroscópicas generalizadas passam a depender das deformações locais, $\varepsilon = \delta + kz$, dos estratos.

Dividindo-se então a seção transversal da viga em n estratos de área Δ_i de modo que $\cup_{i=1}^n \Delta_i = A_0$, o campo de dano generalizado sobre a seção transversal da viga passa a ser descrito por:

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{1}{A_0} \sum_{i=1}^n \int_{\Delta_i} w(z) dA_0 \\ w_1 &= -\frac{1}{A_0 H} \sum_{i=1}^n \int_{\Delta_i} z w(z) dA_0 \\ w_2 &= \frac{1}{I_0} \sum_{i=1}^n \int_{\Delta_i} z^2 w(z) dA_0 \end{aligned} \quad (2.19)$$

Para cada elemento Δ_i da seção transversal:

$$z = z_i + \zeta \quad (2.20)$$

onde z_i é a posição do centróide do elemento com respeito ao eixo da viga e $\zeta \in [-l/2, l/2]$, sendo $l \ll H$ a largura do estrato definida de modo a ser representativa de um comprimento característico do material ou simplesmente em função das propriedades geométricas da seção transversal (figura 2.2).

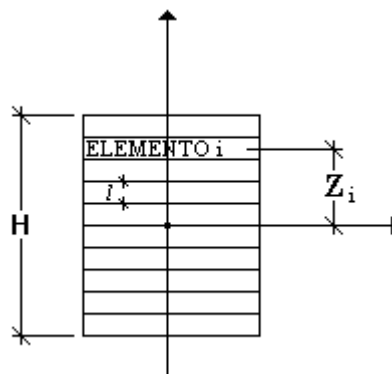


Figura 2.2. Discretização da seção transversal segundo o modelo

2.1.2.2 - Lei de evolução

Na hipótese de o estrato estar ativo, o modelo propõe uma maneira aproximada de caracterizar a evolução do dano em qualquer ponto da camada e, a partir daí, por integração direta, obter leis de evolução explícitas para as variáveis internas de dano como uma função das deformações de Euler-Bernoulli generalizadas, δ e k . Dois grupos de leis de evolução são derivados baseando-se numa aproximação dita de primeira ordem e numa outra de segunda ordem.

Na *aproximação de segunda ordem*, a variável interna de dano é postulada depender do campo de deformações locais até a segunda ordem em l . Para um ponto qualquer do estrato a deformação longitudinal e o potencial de dano são dados por:

$$\begin{aligned}\varepsilon(\zeta) &= (\delta + kz_i) + k\zeta = \varepsilon_i + k\zeta, & \zeta \in [-l/2; l/2] \\ G(\varepsilon) &= G(\varepsilon_i) + G'(\varepsilon_i)k\zeta + G''(\varepsilon_i)\frac{k^2\zeta^2}{2} + O(\zeta^3)\end{aligned}\tag{2.21a,b}$$

Integrando-se a equação (2.21b) sobre um elemento Δ_i , negligenciando-se termos de ordem l^2 , a função critério de dano sobre o estrato pode ser escrita na forma:

$$f_i(\delta, k, w_{0i}) = \Delta_i G(\varepsilon_i) + G''(\varepsilon_i) \frac{I_i k^2}{2} - (w_{0i} + \Delta_i G(\varepsilon_0^*))\tag{2.22}$$

lembrando-se que:

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_i} \zeta d\Delta_i &= 0 \\ \int_{\Delta_i} \zeta^2 d\Delta_i &= I_i\end{aligned}\tag{2.23a, b}$$

Observa-se que a equação (2.22) governa também a evolução da variável generalizada de dano w_{0i} .

$$\dot{w}_{0i} = G''(\varepsilon_i) I_i k \dot{k}\tag{2.24}$$

Por outro lado são válidas as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\dot{w}_{1i} &= \int_{\Delta_i} (z_i + \zeta) \dot{w}(z) dA_0 \\ \dot{w}_{2i} &= \int_{\Delta_i} (z_i + \zeta)^2 \dot{w}(z) dA_0\end{aligned}\tag{2.25}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, a evolução das demais variáveis internas de dano sobre o elemento considerado também dependem apenas do campo de deformações locais até termos de ordem l^2 . Calculando-se a evolução da variável interna $w (=w(z))$ em função de ε_i e ζ :

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \dot{\varepsilon} G'(\varepsilon) \\ G'(\varepsilon) &= G'(\varepsilon_i) + G''(\varepsilon_i) k \zeta \\ \dot{\varepsilon}(\zeta) &= \dot{\varepsilon}_i + \dot{k} \zeta\end{aligned}\tag{2.26}$$

segue que:

$$\dot{w} = \dot{\varepsilon}_i \left[G'(\varepsilon_i) + G''(\varepsilon_i) k \zeta \right] + \dot{k} \left[G'(\varepsilon_i) \zeta + G''(\varepsilon_i) k \zeta^2 \right]\tag{2.27}$$

Combinando-se as equações (2.21) e (2.22) e levando-se em conta a (2.24) resultam:

$$\begin{aligned}\dot{w}_{1i} &= z_i \dot{w}_{0i} + \int_{\Delta_i} \zeta \left[\left(G'(\varepsilon_i) + G''(\varepsilon_i) k \zeta \right) + \dot{k} \left(G'(\varepsilon_i) \zeta + G''(\varepsilon_i) k \zeta^2 \right) \right] dA_0 + O(\zeta^2) \\ \therefore \dot{w}_{1i} &= z_i \dot{w}_{0i} + G''(\varepsilon_i) k \int_{\Delta_i} \zeta^2 dA_0 \dot{\varepsilon}_i + G'(\varepsilon_i) \dot{k} \int_{\Delta_i} \zeta^2 dA_0 \dot{\varepsilon}_i\end{aligned}\tag{2.28}$$

Daí empregando-se a (2.23b) segue que:

$$\dot{w}_{1i} = z_i \dot{w}_{0i} + I_i \left(G'(\varepsilon_i) \dot{k} + G''(\varepsilon_i) k \dot{\varepsilon}_i \right)\tag{2.29}$$

Seguindo-se o mesmo raciocínio, pode-se expressar a evolução da variável de dano w_{2i} na forma:

$$\dot{w}_{2i} = \left(\frac{I_i + \Delta_i z_i^2}{\Delta_i} \right) \dot{w}_{0i} + 2z_i \dot{w}_{1i} - \frac{I_\alpha}{\Delta_i} \left(\dot{w}_{0i} - \Delta_i G'(\varepsilon_i) \dot{\varepsilon}_i \right)\tag{2.30}$$

Para a *aproximação de primeira ordem* termos de ordem l são desprezados, simplificando-se consideravelmente o modelo. Deste modo, segue que:

$$f_i(\delta, k, w_{0i}) = \Delta_i G(\varepsilon_i) - w_{0i} - \Delta_i G(\varepsilon_0^*)\tag{2.31}$$

Pode-se obter diretamente as equações de evolução das variáveis internas:

$$\dot{w}_{0_i} = \Delta_i G'(\varepsilon_i) \dot{\varepsilon}_i, \quad \dot{w}_{1_i} = z \dot{w}_{0_i}, \quad \dot{w}_{2_i} = z^2 \dot{w}_{0_i} \quad (2.32)$$

Nesta aproximação, portanto, a evolução do dano é descrita pelo conhecimento de apenas uma variável independente, w_{0i} (para $i = 1, \dots, n$) e a matriz $[K^d]$ é reduzida à seguinte forma simétrica:

$$[K^d] = EA_0 G'(\varepsilon) \sum_{i \in J_{act}} \begin{pmatrix} \Delta_i (\delta + k z_i) & \Delta_i z_i (\delta + k z_i) \\ \Delta_i z_i (\delta + k z_i) & \Delta_i z_i^2 (\delta + k z_i) \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

onde J_{act} é o conjunto de estratos ativos.

2.2- MODELO DE RIVA & COHN (1990)

Este estudo descreve um método de análise não-linear que combina um modelo constitutivo do tipo momento-rotação ($M - \theta$) com um modelo estrutural relativamente simples que considera o efeito da plasticidade concentrada em regiões. Trata-se de uma aproximação que tende a balancear as necessidades das análises reais e práticas. O modelo resultante é aplicável a estruturas de concreto armado, concreto protendido e concreto pré-fabricado, considerando-se vários tipos de carregamentos.

2.2.1- Relação Constitutiva Momento-Rotação

Naturalmente, como condição geral, admite-se que para um certo nível de carregamento as distribuições de momento e de curvatura na estrutura são determinadas de modo a satisfazer as relações de equilíbrio, de compatibilidade e constitutivas.

Por compatibilidade a rotação relativa no nó j de uma viga contínua, por exemplo, pode ser expressa por

$$\theta_j = \theta_j^l + \theta_j^r \quad (2.34)$$

onde θ_j^l e θ_j^r são as rotações a esquerda e a direita do nó j , respectivamente.

Dividindo cada rotação em componentes elásticas e plásticas, pode-se escrever

$$\theta_j = (\theta_{el} + \theta_p)_j^l + (\theta_{el} + \theta_p)_j^r \quad (2.35)$$

onde θ_{el} e θ_p são as componentes elástica e plástica da rotação.

Em cada lado do nó, a rotação plástica é definida como

$$\theta_{pj} = \int_0^z [\phi(x) - \phi_{el}(x)] dx \quad (2.36)$$

onde z é a abcissa do ponto de inflexão (ou seja, ponto onde $\phi - \phi_{el} = 0$). A variação da curvatura $\phi(x)$, bem como a definição de rotação plástica equivalente são mostradas na figura 2.3.

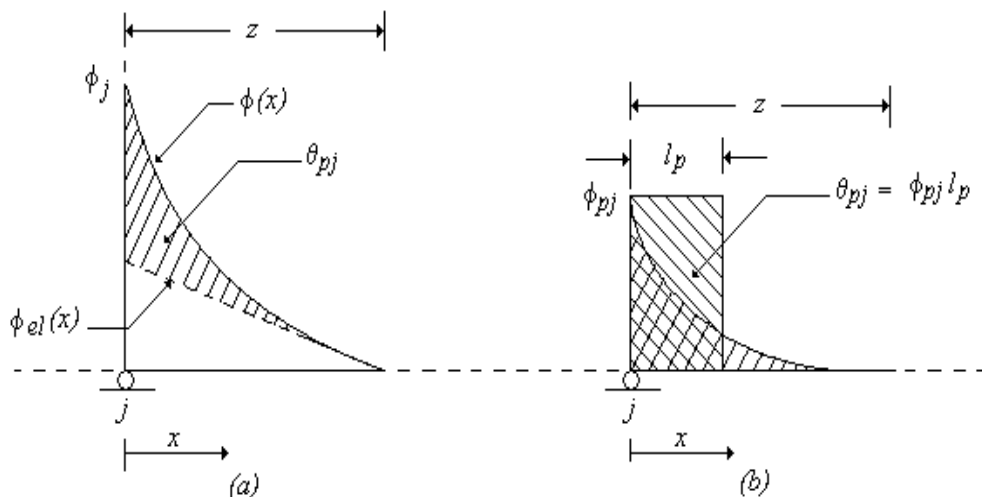


Figura 2.3. Rotação plástica no nó j : (a) Variação da curvatura $\phi(x)$ ao longo do trecho não-linear; (b) Rotação plástica equivalente. RIVA & COHN (1990).

No modelo define-se um “comprimento plástico l_p ” equivalente em um lado do nó j , por

$$l_{pj} = \frac{1}{(\phi - \phi_{el})_j} \int_0^z [\phi(x) - \phi_{el}(x)] dx \quad (2.37)$$

tal que a rotação plástica resulta expressa em função da curvatura plástica na seção j , na forma:

$$\theta_{pj} = (\phi - \phi_{el})_j l_{pj} = \phi_{pj} l_{pj} \quad (2.38)$$

Na última relação as componentes elástica e plástica da curvatura (ϕ_{el} e ϕ_p , respectivamente) são determinadas a partir da relação momento-curvatura na seção j (fig. 2.4). Observa-se que a rotação plástica é calculada para um comportamento anelástico (concreto em fissuração).

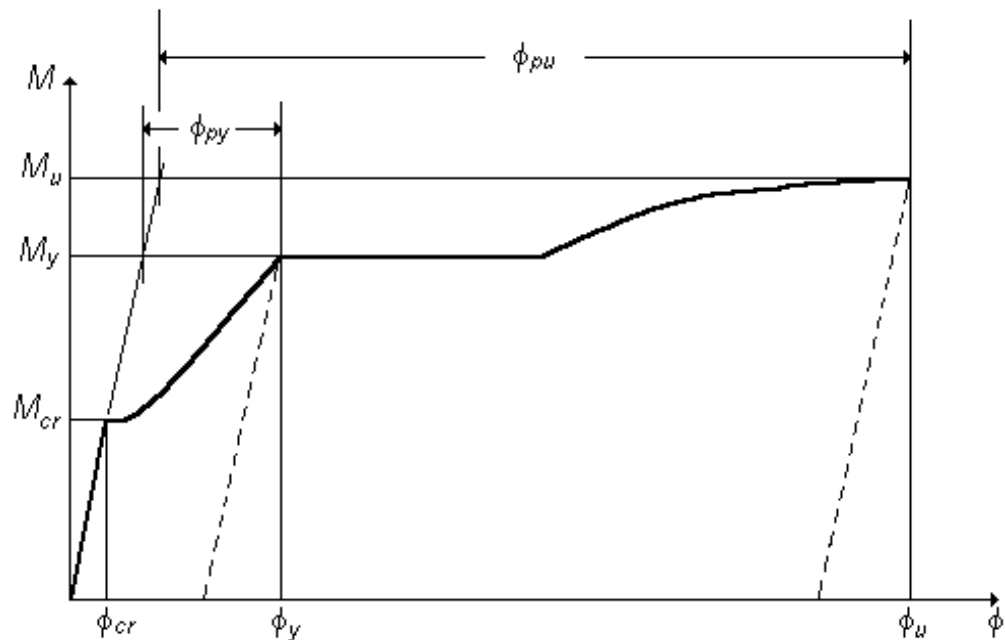


Figura 2.4. Relação momento-curvatura para seções de concreto estrutural.

RIVA & COHN (1990).

Uma relação entre a rotação plástica θ_p e o momento na seção j , obtida a partir da combinação de um comportamento indicado na fig. 2.4 e expressão 2.38, é mostrada na figura 2.5b. Nota-se que adotando-se a eq. 2.38 para a rotação plástica θ_p , o desenvolvimento da relação $M - \theta_p$ é reduzida ao estudo da lei constitutiva momento-curvatura ($M - \phi$) e da expressão do comprimento da região plástica l_p . Como o comprimento l_p relativo à zona de comportamento não-linear depende do carregamento (intensidade, distribuição e historia do carregamento) e da estrutura (geometria, condições de contorno e distribuição dos cabos de protensão quando fôr o caso), todos os parâmetros referentes ao material, a geometria e carregamento que também influenciam a relação momento-curvatura $M - \phi$ estão, por conseqüência, considerados na relação $M - \theta_p$.

Como conseqüência da aproximação proposta, a estrutura pode ser discretizada em elementos elásticos lineares, com porções de comportamento não-linear localizadas em nós onde é admitido um comportamento plástico ('plasticidade concentrada'), (fig. 2.5).

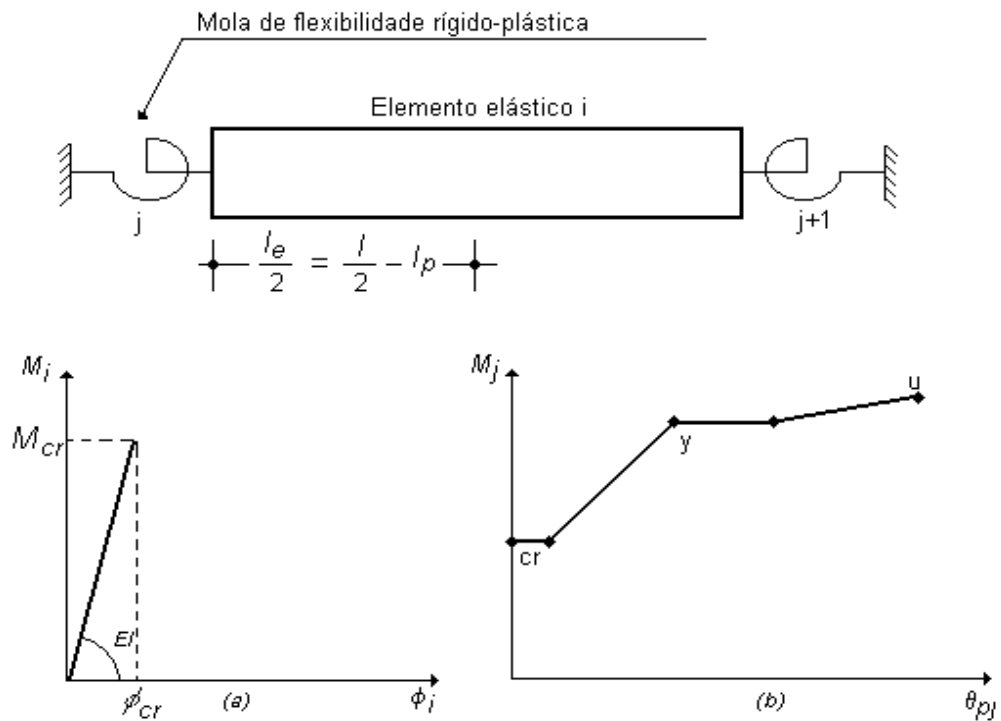


Figura 2.5. Modelo de plasticidade concentrada: (a) Elemento elástico i ; (b)

Mola de rigidez plástica j . RIVA & COHN (1990)

2.2.2 - Alguns comentários Sobre a Relação Constitutiva Momento-Curvatura

Usualmente empregam-se as seguintes hipóteses na definição da relação momento-curvatura:

- carregamento monótono crescente;
- desconsideração de efeito de cisalhamento;
- distribuição linear de deformações;

A lei $M-\phi$ é determinada a partir do estudo de um elemento com comprimento igual ao espaçamento entre fissuras l_c , submetido a momento constante e expressando-se as condições de compatibilidade e equilíbrio na seção fissurada **B**, ilustrada na figura 2.6. A curvatura ϕ é definida como sendo a razão entre as rotações relativas das seções **A** e **C** e o espaçamento entre fissuras l_c .

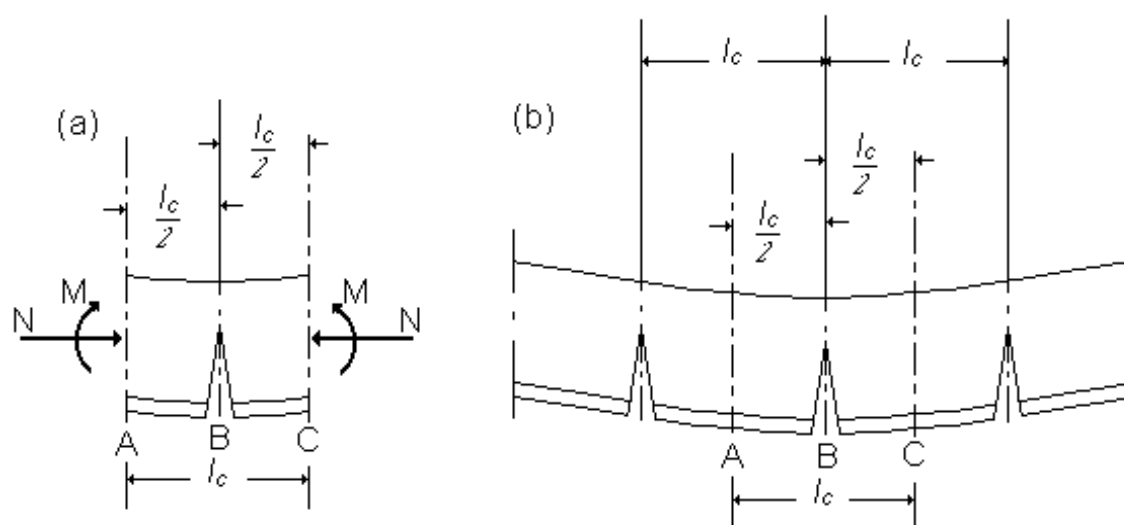


Figura 2.6. Elemento em que é empregada a relação momento curvatura. RIVA & COHN (1990).

O valor limite ϕ_y é definido como sendo a curvatura que provoca no aço a deformação limite ϵ_y (*deformação de escoamento*). Para seções de concreto protendido, o valor de ϕ_y é assumido como o valor da curvatura que provoca um incremento de deformação no aço (a partir do valor efetivo de protensão) igual à deformação limite ϵ_y .

2.2.3- Comprimento da Região Plástica

Para um certo elemento estrutural, a definição de l_p dado pela eq. 2.37 é geral e válida durante toda a história de carregamento, exigindo-se, porém que sejam conhecidos continuamente a distância até o ponto da seção crítica z onde $\phi - \phi_{el} = 0$ e a distribuição da curvatura $\phi(x)$. Visto que z e $\phi(x)$ variam com o carregamento e a configuração estrutural, é de interesse determinar uma expressão aproximada para o comprimento da região plástica l_p , fruto de uma investigação sistemática da relação entre a rotação plástica e curvatura da seção crítica, que possa ser aplicada para qualquer elemento estrutural. Para obter resultados válidos e gerais, a relação entre l_p e a quantia não-dimensional ϕ_p/ϕ_{py} é estudada no trabalho em questão, sendo ϕ_p e ϕ_{py} as curvaturas plástica e plástica limite de uma seção crítica, respectivamente (fig. 2.5).

O estudo paramétrico envolve a análise não-linear de vigas simplesmente apoiadas e engastadas em concreto armado e protendido, com diferentes seções transversais e sujeitas a carregamentos do tipo uniformemente distribuído ou concentrado. É estudada a influência dos seguintes parâmetros na relação ϕ_p/ϕ_{py} : forma da seção, distribuição dos cabos de protensão, porcentagem mecânica de aço tracionado q e índice de armadura de protensão γ no caso de peças protendidas, distribuição de carga, configuração estrutural e condições de apoio (condições de contorno).

São estudadas vigas estaticamente determinadas, porque nestes casos a distância z é constante durante a história de carregamento, independentemente do tipo de carregamento, e igual a metade ou comprimento total do vão, para vigas bi-apoiadas e engastadas, respectivamente.

As análises não-lineares foram realizadas utilizando-se plasticidade concentrada (teoria implementada no programa STRUPL-1C, COHN & KRZYWIECKI (1987)) discretizando-se as vigas em elementos de comprimento menor que a altura da seção transversal.

Os resultados obtidos indicam que a relação entre l_p/z e ϕ_p/ϕ_{py} é caracterizada por três fases distintas:

1. Estado de pós-fissuração ($\phi_p/\phi_{py} \leq 1,0$), no qual o comprimento da região plástica cresce a partir do 0 até um valor correspondente ao estado limite (exceto para γ próximos a 1,0, onde o máximo valor de l_p/z corresponde a valores maiores de curvatura que ao relacionado com o estado limite). Este comportamento é associado ao desenvolvimento progressivo das fissuras ao longo da viga com o aumento do carregamento.
2. Fase pós estado limite, ($1,0 \leq \phi_p/\phi_{py} \leq 7,0$), onde o comprimento da região plástica é drasticamente reduzido. Isto se deve ao comportamento plástico quase perfeito das seções críticas para este intervalo de ϕ_p/ϕ_{py} . Este comportamento leva a uma concentração progressiva de deformações nestas seções, seguida por uma drástica redução de l_p . Uma exceção a este comportamento é observada para seções protendidas, onde o comprimento da região plástica continua crescendo por um tempo após o estado limite. Isto é uma consequência da definição convencional assumida para o estado limite, o qual não corresponde a uma mudança sensível de inclinação na lei momento-curvatura.
3. Estado pós encruamento, no qual o comprimento da região plástica aumenta até o valor último.

2.2.4-Proposta de Lei Constitutiva Momento-Rotação

Os resultados da análise paramétrica, descritos no item 2.2.3, permitem a proposição de uma expressão para o comprimento equivalente da região plástica. Neste sentido, a relação $l_p/z - \phi_p/\phi_{py}$, resulta de uma regressão não-linear feita sobre um conjunto de respostas obtidas de um programa de simulação numérica.

Uma formulação simples da relação $l_p/z - \phi_p/\phi_{py}$ pode ser obtida considerando-se separadamente as três fases identificadas no item anterior. O trabalho considera somente o caso de uma viga de concreto armado com seção retangular ($\gamma = 0$, $b/b_w = 1$, e $b'/b_w = 1$, sendo b/b_w e b'/b_w as relações entre as larguras da flange tracionada e comprimida e a largura da alma, respectivamente) para valores variáveis de q . Um conjunto inicial de expressões aproximadas, uma para cada

comportamento identificado, relacionando l_p/z com valores de ϕ_p/ϕ_{py} , foi desenvolvido para esse caso de viga. Em seguida as expressões foram modificadas para levar em consideração diferentes valores para γ , b/b_w , e b'/b_w . Como resultado, foram obtidas as seguintes expressões:

Da fissuração até o estado limite ($\phi_p/\phi_{py} \leq 1,0$)

$$\frac{l_p}{z} = \left(A - \frac{B}{1000q} \right) \left(\frac{\phi_p}{\phi_{py}} \right)^{(C/100q)} \left(\frac{b'}{b_w} \right)^{-\left(D/1000q^2 \right)} f(\gamma) \quad (2.39)$$

Do estado limite até encruamento da armadura ($1,0 \leq \phi_p/\phi_{py} \leq 7,0$)

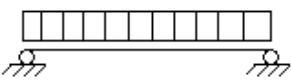
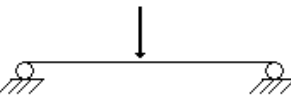
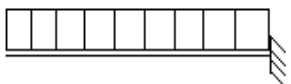
$$\frac{l_p}{z} = \left(A - \frac{B}{1000q} \right) \left(\frac{\phi_p}{\phi_{py}} \right)^{-(0,9-0,8\gamma)} \left(\frac{b'}{b_w} \right)^{-\left(D/1000q^2 \right)} f(\gamma) \quad (2.40)$$

Estado Limite Último (somente se $\phi_{pu}/\phi_{py} > 7,0$)

$$\frac{l_p}{z} = \left(\frac{E}{100} + \frac{F}{1000} \frac{\phi_{pu}}{\phi_{py}} \right) \left(\frac{b}{b_w} \right)^G \quad (2.41)$$

onde as constantes A , B , C , D , E , F , G , e a função $f(\gamma)$, dependentes da distribuição de momento fletor considerado, são mostradas na tabela 2.1. Estes valores são aproximações dos determinados pela análise de regressão não-linear. Finalmente, para valores de ϕ_p/ϕ_{py} entre 7,0 e ϕ_{pu}/ϕ_{py} , pode-se usar uma interpolação linear entre valores de l_p/z calculados pela eq. 2.40 com $\phi_p/\phi_{py} = 7,0$ e valores obtidos pela eq. 2.41.

Tabela 2.1. Constantes Numéricas para l_p/z , Eqs. 2.39, 2.40, e 2.41. RIVA & COHN (1990).

Modelo de Viga	A	B	C	D	E	F	G	F(γ)
	0,58	3,0	3,5	3,0	5,0	6,5	0,5	$(1-0,5\gamma^{3/2})^{1/10q}$
	0,39	7,0	6,5	5,5	5,4	0,0	0,75	$(1-0,75\gamma^{3/2})^{1/10q}$
	0,25	7,0	8,0	6,0	2,8	0,0	0,8	$1-0,80\gamma$

Com os valores de l_p/z , eq. 2.39, 2.40, ou 2.41, a lei constitutiva momento-rotação pode ser derivada a partir do cálculo da rotação plástica como uma função da curvatura plástica na seção crítica, ou seja

$$\theta_p = \phi_p l_p \tag{2.42}$$

A eq. 2.42 requer ainda uma avaliação prévia da variável z . Para vigas estaticamente determinadas z é constante ao longo da historia de carregamento e este valor é uma função apenas da distribuição do carregamento e condições de apoio. No entanto, para vigas hiperestáticas este valor varia ao longo da história de carregamento e é também uma função da distribuição da armadura na viga. Portanto, uma definição prévia de z é somente uma aproximação. Historicamente, utiliza-se uma média dos valores elásticos e plásticos de z na análise não-linear.

Observa-se que o conceito de um comprimento equivalente de região plástica poderia não ser aplicável quando somente uma fissura se faz presente na seção crítica (isto é, após a formação da primeira fissura), porque neste caso l_p é igual a zero. Contudo, erros resultantes da aplicação desta formulação também no estado de formação de fissuras podem não afetar as soluções das análises não-lineares em estados posteriores, porque a quantidade de deformação plástica ao final da fase de

transição do primeiro (não-fissurado) e o segundo estado (fissurado) é pequena relativamente à deformação plástica total.

Comparações dos valores de l_p obtidos pelas eqs. 2.39, 2.40, e 2.41 e valores teóricos determinados em estudos paramétricos mostram que o valor do erro absoluto é menor que 10% na maioria dos casos (RIVA (1988)). Exceções são estabelecidas ao final do estado limite de fissuração (onde o conceito de comprimento de região plástica não é aplicável), entre o encruamento da armadura e o estado limite último (devido a linearidade assumida para a relação $l_p/z-\phi_p/\phi_{py}$ nesta fase), e para seções protendidas no início da região pós estado limite (devido à definição adotada de estado limite para estas seções). No entanto, os erros na predição do valor de l_p/z com as eqs. 2.39, 2.40, e 2.41 são aceitáveis também para seções protendidas, em algum estado que não seja nas vizinhanças do estado limite. Os resultados sugerem que a formulação pode ser adotada na prática também em análises com valores de γ próximos de 1.

2.3- MODELO DE MULAS & FILIPPOU (1990)

No modelo de MULAS & FILIPPOU (1990) é estudada sob um ponto de vista analítico a resposta anelástica de pórticos planos de concreto armado sujeitos a solicitações sísmicas. Dois problemas diferentes são discutidos: modelagem de elementos e o desenvolvimento de técnicas numéricas eficientes em análise dinâmica não-linear. No entanto, nesta revisão será abordado somente o procedimento utilizado pelos autores para a determinação de um novo elemento, baseado no modelo de viga não-linear inicialmente proposto por SOLEIMANI; POPOV & BERTERO (1979).

2.3.1- Definição do Elemento

O elemento utilizado neste estudo está mostrado esquematicamente na figura 2.7. Ele consiste em três componentes: componente não-linear representando a viga, molas rotacionais não-lineares descrevendo as rotações de engaste da interface viga-coluna e zonas rígidas equivalentes à ligação viga-coluna. O modelo de

SOLEIMANI; POPOV & BERTERO (1979) é usado na descrição do comportamento não-linear ao longo do componente viga. Aquele componente é subdividido em três zonas: uma zona elástica no centro e duas zonas anelásticas nos extremos (fig. 2.8). O comprimento da zona anelástica é calculado com base no diagrama de momentos fletores.

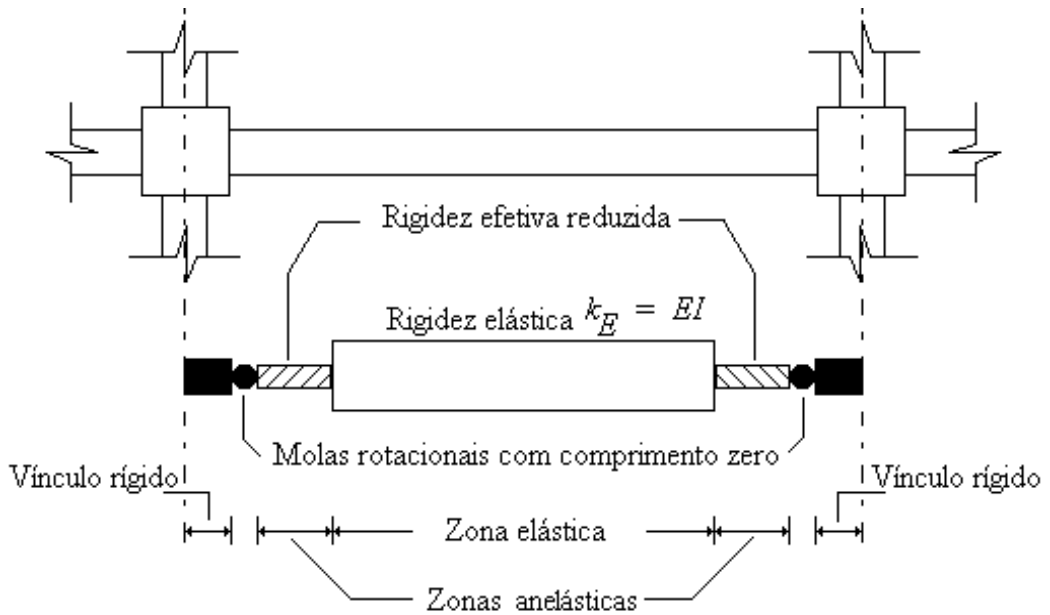


Figura 2.7. Elemento proposto por MULAS & FILIPPOU (1990).

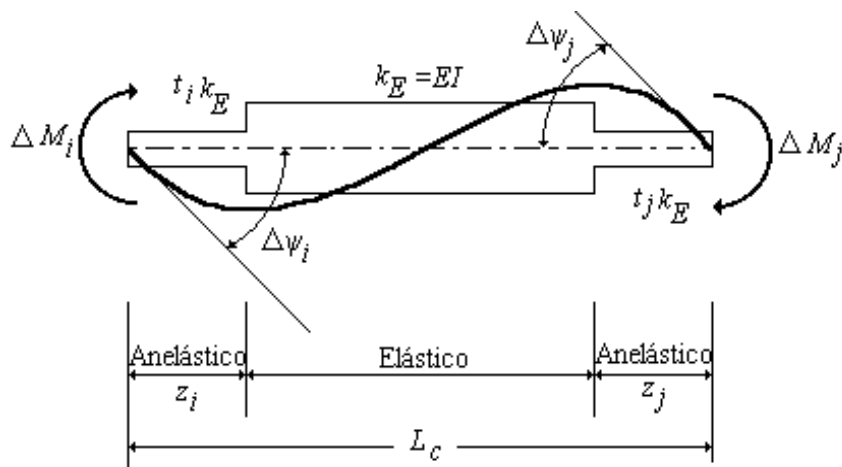


Figura 2.8. Elemento proposto por SOLEIMANI; POPOV & BERTERO (1979).

Para determinar precisamente a matriz de flexibilidade tangente f_b é necessário traçar a história do carregamento de seções críticas na zona anelástica. Isto requer, entretanto, um considerável tempo de processamento e o armazenamento de uma grande quantidade de dados. Para evitar estes dois pontos, as seguintes hipóteses são feitas no modelo de SOLEIMANI; POPOV & BERTERO (1979):

- qualquer seção da zona anelástica está num mesmo estado (descarregamento, encruamento positivo ou degradação da rigidez) que a seção de extremidade. Assim o comportamento da seção de extremidade controla o comportamento de toda a zona anelástica;
- a zona anelástica tem uma rigidez tangente média $t_k k_E$ (fig. 2.8) determinada em função da rigidez da seção de extremidade.

O comportamento à flexão de cada seção de extremidade é descrito pela relação $M - \varphi$ (momento-curvatura) não-linear, contemplando ciclos, proposta por CLOUGH (1966) (fig. 2.9) e modificada pelos autores.

Diferentes valores do momento de plastificação M_y^+ e M_y^- são considerados como momentos positivo e negativo, respectivamente. A curva primária neste modelo é bilinear: a primeira parte até o momento de plastificação M_y é elástica com inclinação $k_E = EI$; a segunda parte tem uma inclinação $p.k_E$, com p relacionado ao encruamento positivo. E é o módulo de Young do concreto e I é a média entre I_p e I_n , onde I_p e I_n são os momentos de inércia da seção fissurada para momentos positivos e negativos, respectivamente. Se I_p e I_n variam ao longo do comprimento da viga, I é a média entre os valores nos extremos opostos da viga. O descarregamento, na curva primária, é feito com inclinação k_E . Nas curvas secundárias um descarregamento parcial seguido de carregamento é representado pelo segmento HIJ (fig. 2.9). Nota-se que a degradação da rigidez se manifesta quando há inversão do sinal da solicitação. Por exemplo pela inclinação da reta que une os pontos DE, igual a $s.k_E$, com $s \leq 1$.

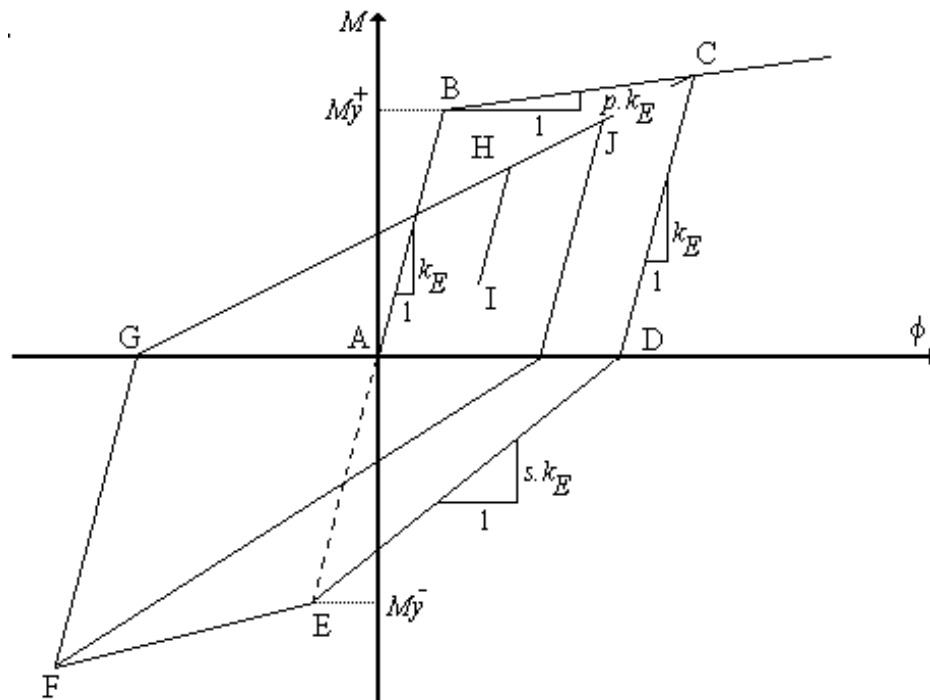


Figura 2.9. Relação $M-\phi$ empregada para a determinação da matriz de flexibilidade e proposta por CLOUGH (1966).

O fator t que descreve a rigidez média da zona anelástica pode ser definido pelos seguintes casos:

- descarregamento ou primeiro carregamento: todas as seções estão elástica, por conseguinte

$$t_i = t_j = 1 \quad (2.43)$$

onde os índices i e j indicam as extremidades do elemento.

- carregamento com inversão de sinal e degradação da rigidez: a seção de extremidade terá rigidez $s_i k_E$ sofrendo a máxima redução, enquanto a seção na interface entre a zona elástica e a zona anelástica permanecerá elástica, então uma degradação média da rigidez que seja representativa para o trecho pode ser determinada pela seguinte expressão:

$$\frac{\Delta M_i}{t_i k_E} = \frac{\left(\frac{\Delta M_i}{s_i k_E} + \frac{\Delta M_i}{k_E} \right)}{2} \quad (2.44)$$

Portanto

$$\frac{1}{t_i} = \frac{\left(\frac{1}{s_i} + 1 \right)}{2} \quad (2.45)$$

Uma relação similar vale para o trecho adjacente à extremidade j.

- Encruamento positivo: mantendo-se o sinal da solicitação, atinge-se a região de encruamento positivo e a correspondente rigidez tangente $p.k_E$ é admitida constante e independente da história do carregamento prévio; portanto

$$t_i = t_j = p \quad (2.46)$$

O comprimento z da zona plástica (fig. 2.8), é claro, afeta fortemente a matriz de flexibilidade f_b . Ele é inicialmente zero e desenvolve-se quando apresenta encruamento positivo, seguindo uma lei de evolução proposta por SOLEIMANI; POPOV & BERTERO (1979), até um valor máximo de 0,25L.

Dados os coeficientes t_i e t_j , o comprimento da viga L e os comprimentos da zona plástica z_i e z_j , a matriz de flexibilidade tangente da viga proposta é a seguinte (fig. 2.8)

$$\Delta \Psi_1 = \begin{bmatrix} \Delta \psi_i \\ \Delta \psi_j \end{bmatrix} = \frac{L}{6k_E} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} \\ f_{12} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta M_i \\ \Delta M_j \end{bmatrix} = f_b \cdot \Delta M_b \quad (2.47)$$

sendo

$$f_{11} = 2 + 2\gamma_i \left[1 - (1 - \xi_i)^3 \right] + 2\gamma_j \xi_j^3 \quad (2.48)$$

$$f_{12} = -1 - \gamma_i (3\xi_i^2 - 2\xi_i^3) - \gamma_j (3\gamma_j^2 - 2\xi_j^3) \quad (2.49)$$

$$f_{22} = 2 + 2\gamma_j \left[1 - (1 - \xi_j)^3 \right] + 2\gamma_i \xi_i^3 \quad (2.50)$$

$$\xi_i = \frac{z_i}{L} \qquad \xi_j = \frac{z_j}{L} \qquad (2.51)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{t_i} - 1 \qquad \gamma_j = \frac{1}{t_j} - 1 \qquad (2.52)$$

e onde $\Delta\Psi_1$ e ΔM_b são os incrementos de rotação e de momento nas extremidades da viga, respectivamente (fig. 2.8).

Para modelar os efeitos na junção viga-coluna, molas rotacionais são introduzidas na interface viga-coluna, tendo suas matrizes de flexibilidade a seguinte forma geral:

$$f_s = \begin{bmatrix} f_{si} & 0 \\ 0 & f_{sj} \end{bmatrix}. \qquad (2.53)$$

As flexibilidades f_{si} e f_{sj} são determinados do modelo M- θ (momento-rotação) mostrado na figura 2.10. Este modelo, obtido por FILIPPOU (1983), é baseado nas modificações do ciclo de carga do modelo de CLOUGH (1966) com a finalidade de levar em consideração as características do efeito ‘*pinching*’ (efeito constritivo ou estritivo) que é observado em estudos analíticos e experimentais do comportamento em ciclos das junções de viga-coluna com quantidades desiguais da armadura positiva e negativa. Sendo, de um modo geral, a quantidade da armadura positiva menor que a negativa, o momento de plastificação M_y^- será maior que o momento de plastificação M_y^+ . Estes resultados com rigidez desigual pré e pós-plastificação sob momentos fletores positivo e negativo são mostrados na figura 2.10. No presente modelo é introduzido um novo ciclo para descrever o comportamento da junção viga-coluna durante o carregamento com inversão de sinal (trecho G-H-I); o carregamento segue inicialmente a linha G-H a partir do ponto de momento zero (ponto G) que corresponde a uma inversão de comportamento (descarregamento-recarregamento) com grandes rotações nas extremidades. O ponto H tem um momento igual ao menor ao momento limite (escoamento) da junção ($M_y^+ = |\gamma \cdot M_y^-|$ na figura 2.10). O

carregamento continua até atingir o ponto I.

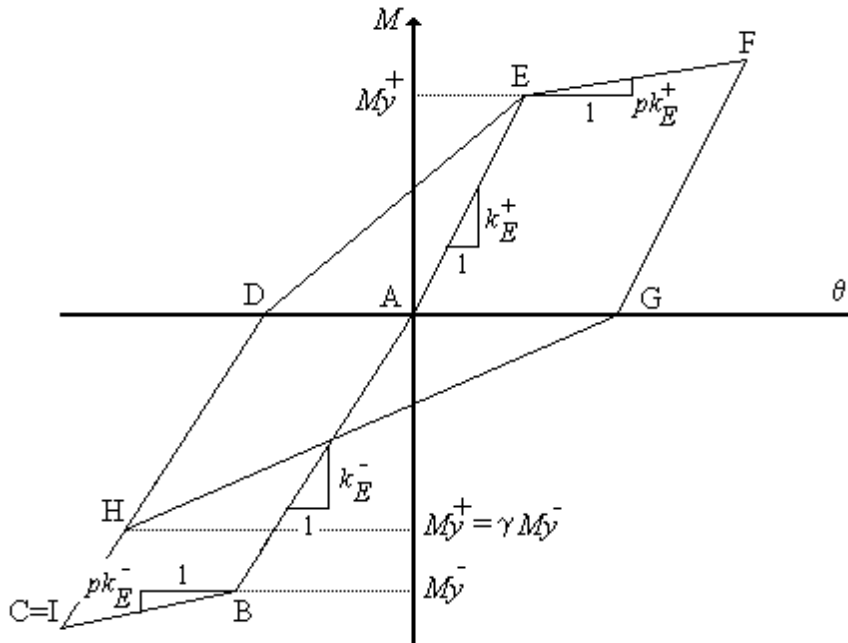


Figura 2.10. Modelo modificado de CLOUGH para molas rotacionais.
 FILIPPOU (1983).

A matriz de flexibilidade do elemento completo composto de viga em série com molas é obtido pela soma das seguintes matrizes

$$f = f_b + f_s \tag{2.54}$$

onde f_b e f_s são as matrizes de flexibilidade da viga e da mola, respectivamente.

A matriz $k = f^{-1}$ representa a matriz tangente do elemento na figura 2.11a. A matriz de rigidez k do elemento na figura 2.11b com relação aos graus de liberdade representado pelo vetor Δv_a que inclui a rigidez das extremidades e os deslocamentos transversais pode ser obtida pela seguinte transformação:

$$K = t^T k t \quad (2.55)$$

onde, dado os comprimentos das zonas rígidas e_i e e_j , a matriz de transformação t é igual a

$$t = \begin{bmatrix} 1+e_i/L & e_j/L & 1/L & -1/L \\ e_i/L & 1+e_j/L & 1/L & -1/L \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

A deformabilidade axial das vigas é negligenciada neste estudo.

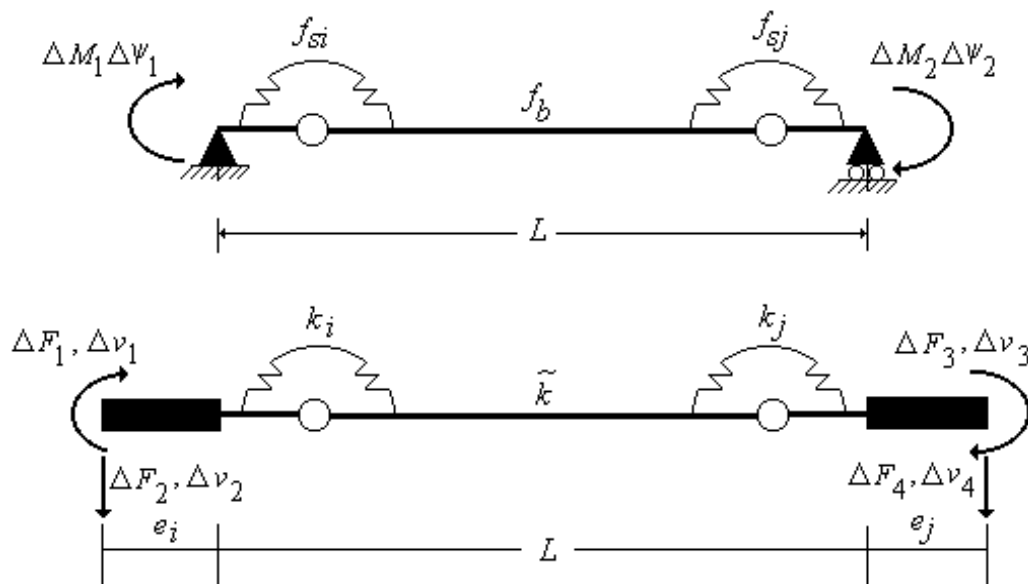


Figura 2.11. Modelos para a determinação da matriz de rigidez do elemento.

MULAS & FILIPPOU (1990).

2.4- MODELO DE LA BORDERIE (1991)

O modelo está fundamentado na termodinâmica dos sólidos (LEMAITRE & CHABOCHE (1985)) e permite levar em conta o diferente comportamento do material em tração e compressão através da definição de duas variáveis representativas do dano em tração e do dano em compressão. A ativação de um ou outro processo de danificação é feita através de um controle sobre o sinal das tensões principais. Consideram-se também deformações anelásticas devidas apenas ao dano.

Na formulação do modelo proposto por LA BORDERIE (1991) define-se um conjunto de variáveis de estado (observáveis e internas) e de variáveis associadas, reunidas na tabela 2.2.

Tabela 2.2 - Variáveis de estado e variáveis associadas no modelo de dano. LA BORDERIE (1991).

VARIÁVEIS DE ESTADO			VARIÁVEIS ASSOCIADAS	
	Observável	Interna		
Tensão	σ		ϵ	Deformação
Dano 1		D_1	Y_1	Taxa de liberação de energia 1
Dano 2		D_2	Y_2	Taxa de liberação de energia 2
Encruamento 1		z_1	Z_1	
Encruamento 2		z_2	Z_2	

Na tabela D_1 e D_2 são variáveis de dano, Y_1 e Y_2 são as variáveis associadas, interpretadas como taxa de liberação de energia durante o processo de evolução de dano, e Z_1 e Z_2 são variáveis associadas a z_1 e z_2 ; estas, respectivamente, controlam o processo de encruamento e estão inseridas nas funções representativas dos critérios de danificação.

As relações entre as variáveis de estado e as associadas derivam de um potencial de estado. Neste modelo sugere-se o emprego do potencial de energia livre de Gibbs (χ) como potencial de estado, adotando-se para ele a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \chi = \chi(\sigma, D_1, D_2, z_1, z_2) = & \frac{\sigma^+ : \sigma^+}{2E_0(1-D_1)} + \frac{\sigma^- : \sigma^-}{2E_0(1-D_2)} + \frac{\nu_0}{2E_0} (\sigma : \sigma - \text{Tr } \sigma^2) \\ & + \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1-D_1)} f(\text{Tr}(\sigma)) + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1-D_2)} \text{Tr } \sigma + G_1(z_1) + G_2(z_2) \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde σ^+ e σ^- são, respectivamente, as partes positiva e negativa do tensor de tensões, $\text{Tr}(\sigma)$ é o primeiro invariante do tensor de tensões, E_0 é o módulo de YOUNG do material íntegro ($D_1=D_2=0$), ν_0 é o coeficiente de Poisson do material virgem, β_1 e β_2 são parâmetros anelásticos a serem identificados. Na equação acima a operação “:” representa uma contração dupla de índices característica de um produto interno entre tensores de segunda ordem. A função $f(\text{Tr}(\sigma))$ controla as condições de abertura e de fechamento da fissura:

$$\begin{aligned} f(\text{Tr}(\sigma)) = \text{Tr}(\sigma) & \quad \text{quando} \quad \text{Tr}(\sigma) \in]0, \infty] \\ f(\text{Tr}(\sigma)) = \left(1 + \frac{\text{Tr}(\sigma)}{2\sigma_f}\right) \text{Tr}(\sigma) & \quad \text{quando} \quad \text{Tr}(\sigma) \in]-\sigma_f, 0] \\ f(\text{Tr}(\sigma)) = -\frac{\sigma_f}{2} \text{Tr}(\sigma) & \quad \text{quando} \quad \text{Tr}(\sigma) \in]-\infty, -\sigma_f] \end{aligned} \quad (2.58)$$

onde σ_f é a tensão de fechamento de fissura (parâmetro do modelo que controla o fechamento das fissuras no carregamento com inversão de sinal). Finalmente, $G_1(z_1)$ e $G_2(z_2)$ são funções de encruamento.

As leis de estado derivam do potencial (2.57) e definem as variáveis associadas em função das variáveis de estado. Por exemplo, o tensor de deformações resulta de:

$$\varepsilon = \frac{\partial \chi}{\partial \sigma} = \varepsilon_e + \varepsilon_{an} \quad (2.59)$$

onde ε_e é o tensor de deformações elásticas e ε_{an} é o tensor de deformações anelásticas. Esses tensores são dados por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_e &= \frac{\sigma^+}{E_0(1-D_1)} + \frac{\sigma^-}{E_0(1-D_2)} + \frac{\nu_0}{E_0}(\sigma - \text{Tr}(\sigma) \mathbf{1}) \\ \text{e} \quad \varepsilon_{an} &= \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1-D_1)} \frac{\partial f}{\partial \sigma} + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1-D_2)} \mathbf{1} \end{aligned} \quad (2.60)$$

onde $\mathbf{1}$ é o tensor identidade.

Por sua vez, as variáveis associadas às variáveis de dano resultam de:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\partial \chi}{\partial D_1} = \frac{\sigma^+ : \sigma^+ + 2\beta_1 f(\text{Tr}(\sigma))}{2E_0(1-D_1)^2} \\ Y_2 &= \frac{\partial \chi}{\partial D_2} = \frac{\sigma^- : \sigma^- + 2\beta_2 \text{Tr}(\sigma)}{2E_0(1-D_2)^2} \end{aligned} \quad (2.61)$$

Também variáveis associadas às variáveis de encruamento podem ser definidas, propondo-se, neste caso, uma expressão resultante do ajuste sobre resultados experimentais. A forma proposta é a seguinte:

$$Z_i = \frac{\partial G_i(z_i)}{\partial z_i} = \left[Y_{0i} + \frac{1}{A_i} \left(\frac{-D_i}{1+D_i} \right)^{1/B_i} \right] \quad (i = 1,2) \quad (2.62)$$

onde A_i , B_i e Y_{0i} são parâmetros a serem identificados.

Nota-se que as variáveis Z_i tem valor inicial dado por $Z_i(D_i = 0) = Y_{0i}$. As expressões (2.62) aparecem, na verdade, nas funções critério de danificação: $F_i = Y_i - Z_i$ as quais caracterizam condições para a evolução ou não do dano em tração ou em compressão. Tais condições são:

- Se $Y_i < Z_i$ então $\dot{D}_i = 0$: a resposta é elástica linear.

- Se $Y_i = Z_i$ e $\dot{Y}_i > 0$ então $\dot{Z}_i = \dot{Y}_i$ e $\dot{D}_i \neq 0$. Pode-se determinar D_i a partir da própria (2.62) por:

$$D_i = 1 - \frac{1}{1 + [A_i (Y_i - Y_{0i})]^{B_i}} \quad (2.63)$$

2.4.1- Formulação Unidimensional do Modelo

Unidimensionalmente o modelo é escrito da seguinte forma:

- Relação Tensão-Deformação

$$\varepsilon = \frac{\sigma^+}{E_0(1-D_1)} + \frac{\sigma^-}{E_0(1-D_2)} + \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1-D_1)} f'(\sigma) + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1-D_2)} \quad (2.64)$$

- Taxas liberação de energia

$$\begin{cases} Y_1 = \frac{\sigma^{+2}}{2E_0(1-D_1)^2} + \frac{\beta_1 f(\sigma)}{E_0(1-D_1)^2} \\ Y_2 = \frac{\sigma^{-2}}{2E_0(1-D_2)^2} + \frac{\beta_2 f(\sigma)}{E_0(1-D_2)^2} \end{cases} \quad (2.65)$$

- Leis de evolução das variáveis de dano

$$D_1 = 1 - \frac{1}{1 + A_1 (Y_1 - Y_{01})^{B_1}} \quad \text{se } Y_1 > Z_1 \quad \text{com } Z_1 = \max(Y_1, Y_{01}) \quad (2.66)$$

$$D_2 = 1 - \frac{1}{1 + A_2 (Y_2 - Y_{02})^{B_2}} \quad \text{se } Y_2 > Z_2 \quad \text{com } Z_2 = \max(Y_2, Y_{02}) \quad (2.67)$$

- Função controle de fechamento de fissuras $f(\sigma)$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \text{se } \sigma \geq 0 & f(\sigma) = \sigma & f'(\sigma) = 1 \\ \text{se } 0 > \sigma > -\sigma_f & f(\sigma) = \sigma \left(1 + \frac{\sigma}{2\sigma_f} \right) & f'(\sigma) = 1 + \frac{\sigma}{\sigma_f} \\ \text{se } \sigma \leq -\sigma_f & f(\sigma) = \frac{-\sigma_f}{2} & f'(\sigma) = 0 \end{array} \right. \quad (2.68)$$

Observando-se o conjunto de relações do modelo nota-se que os dados de entrada podem ser divididos em constantes e variáveis:

- O conjunto das constantes consiste de:

$E_0 \rightarrow$ módulo de elasticidade do material íntegro;

$\beta_1, \beta_2 \rightarrow$ parâmetros de anelasticidade (permitem descrever a evolução de deformações permanentes criadas por tração e compressão, respectivamente);

$Y_{01}, Y_{02} \rightarrow$ limites iniciais (critérios para início de dano em tração e compressão, respectivamente);

$A_1, A_2, B_1, B_2 \rightarrow$ parâmetros relacionados à evolução das variáveis de dano;

$\sigma_f \rightarrow$ tensão que controla o fechamento de fissuras.

- O conjunto dos valores variáveis é composto de:

$\varepsilon \rightarrow$ deformação;

$Z_1, Z_2 \rightarrow$ critério para evolução do dano (atualizado passo a passo).

Após a resolução do modelo constitutivo determinam-se: a tensão σ , as taxas de restituição de energia Y_1 e Y_2 e as variáveis de dano D_1 e D_2 .

2.4.2 - Solução do Modelo Constitutivo

A partir dos dados de entrada, num passo inicial, é necessário verificar em qual dos três casos seguintes a tensão estimada numa etapa de previsão elástica se enquadra:

- caso nº 1: $\sigma \geq 0$
- caso nº 2: $0 > \sigma > -\sigma_f$
- caso nº 3: $\sigma \leq -\sigma_f$

- No caso nº 1 tem-se $f'(\sigma)=1$ e, portanto, possibilidade de evolução de D_1 , com D_2 permanecendo inalterado.

- No caso nº 2, D_1 não pode mais evoluir e, fazendo-se a hipótese que o limite de compressão Y_{02} é suficientemente elevado para que a condição $Y_2(-\sigma_f) < Y_{02}$ seja atendida, D_2 não evolui mais. No entanto é necessário calcular o valor de $f'(\sigma)$.

- No caso nº 3 tem-se $f'(\sigma)=0$ e, portanto, D_1 não pode evoluir e possibilidade para evolução de D_2 .

As relações a serem empregadas em cada caso resumem-se no que segue:

Caso nº 1 ($\sigma \geq 0$)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0(1-D_1)} + \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1-D_1)} + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1-D_2)}$$

$$\text{seja } \sigma = E_0 \varepsilon (1-D_1) - \beta_1 D_1 - \frac{\beta_2 D_2 (1-D_1)}{1-D_2}$$

$$\sigma \geq 0 \Rightarrow \varepsilon \geq \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1-D_1)} + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1-D_2)} \quad (2.69)$$

Caso nº 2 ($0 > \sigma > -\sigma_f$)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0(1-D_2)} + \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1-D_1)} f'(\sigma) + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1-D_2)}$$

seja $\sigma = E_0 \varepsilon (1-D_2) - \beta_2 D_2 - \frac{\beta_1 D_1 (1-D_2)}{1-D_1} f'(\sigma)$

com $f'(\sigma) = 1 + \frac{\sigma}{\sigma_f}$

$$\sigma \left[1 + \frac{\beta_1 D_1 (1-D_2)}{(1-D_1)\sigma_f} \right] = E_0 \varepsilon (1-D_2) - \beta_2 D_2 - \frac{\beta_1 D_1 (1-D_2)}{1-D_1}$$

com $1 + \frac{\beta_1 D_1 (1-D_2)}{(1-D_1)\sigma_f} > 0$

$$\sigma < 0 \Rightarrow \varepsilon < \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1-D_1)} + \frac{\beta_2 D_2}{E_0(1-D_2)} \quad (2.70)$$

$$\sigma > \sigma_f \Rightarrow E_0 \varepsilon (1-D_2) - \beta_2 D_2 - \frac{\beta_1 D_1 (1-D_1)}{1-D_1} f'(-\sigma_f) < -\sigma_f \quad (2.71)$$

com $f'(-\sigma_f) = 0$

$$\sigma > -\sigma_f \Rightarrow \varepsilon > \frac{\beta_2 D_2 - \sigma_f}{E_0(1-D_2)} \quad (2.72)$$

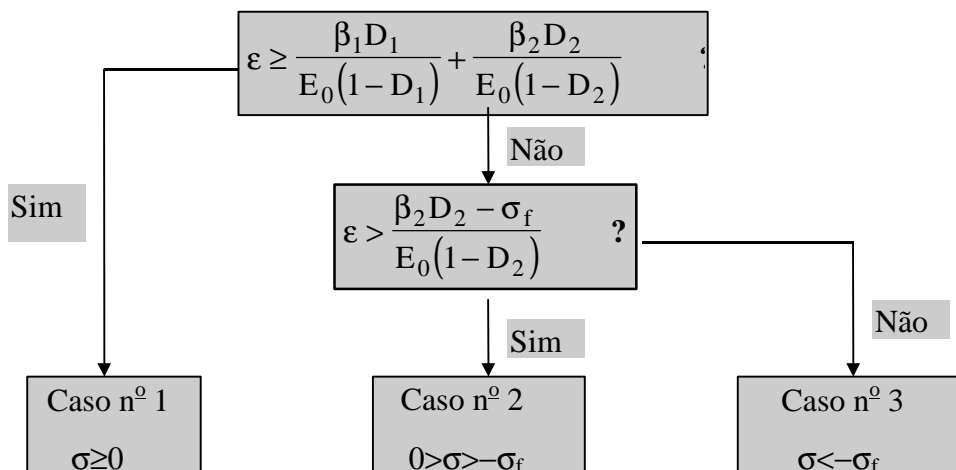
Caso nº 3 ($\sigma \leq -\sigma_f$)

$$f'(\sigma) = 0$$

$$e \sigma = E_0 \varepsilon (1 - D_2) - \beta_2 D_2$$

$$\sigma \leq -\sigma_f \quad \Rightarrow \quad \varepsilon \leq \frac{\beta_2 D_2 - \sigma_f}{E_0 (1 - D_2)} \quad (2.73)$$

Como conclusão pode-se apresentar o seguinte organograma:



As outras incógnitas D_1 , Y_1 , D_2 e Y_2 são determinadas de acordo com as relações que seguem.

Evolução de D_1 e Y_1

Esta situação acontece dentro do caso nº 1, dessa forma a taxa de restituição de energia Y_1 será dada por

$$Y_1 = \frac{\sigma^2}{2E_0(1-D_1)^2} + \frac{\beta_1 \sigma}{E_0(1-D_1)^2} = \frac{\sigma}{2E_0(1-D_1)^2} (\sigma + 2\beta_1)$$

ou ainda com $\sigma = E_0\varepsilon(1-D_1) - \beta_1 D_1 - \frac{\beta_2 D_2 (1-D_1)}{1-D_2}$

ou

$$\sigma = \left[E_0\varepsilon + \beta_1 - \frac{\beta_2 D_2}{1-D_2} \right] (1-D_1) - \beta_1$$

então

$$Y_1 = \frac{1}{2E_0} \left[\left(E_0\varepsilon + \beta_1 - \frac{\beta_2 D_2}{1-D_2} \right)^2 - \frac{\beta_1^2}{(1-D_1)^2} \right] \quad (2.74)$$

Nota-se que o valor de Y_1 de um modo geral é dependente de D_1 . Em particular se ele é inferior ao limite (Y_{01}) então D_1 não evolui e Y_1 é dado diretamente pela equação 2.74; caso contrário, deve-se resolver o sistema de 2 equações e 2 incógnitas abaixo

$$\begin{cases} Y_1 - \frac{1}{2E_0} \left[\left(E_0\varepsilon + \beta_1 - \frac{\beta_2 D_2}{1-D_2} \right)^2 - \frac{\beta_1^2}{(1-D_1)^2} \right] = 0 \\ D_1 - 1 + \frac{1}{1 + A_1 (Y_1 - Y_{01})^{B_1}} = 0 \end{cases} \quad (2.75)$$

Evolução de D_2 e Y_2

O problema agora situa-se dentro do caso nº 3. Procedendo-se de forma análoga ao caso anterior obtém-se:

$$Y_2 = \frac{1}{2E_0} \left[(E_0\varepsilon + \beta_2)^2 - \frac{\beta_2^2}{(1-D_2)^2} \right] \quad (2.76)$$

Este cálculo é válido se $Y_2 \leq Z_2$, caso contrário, tem-se que resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} Y_2 - \frac{1}{2E_0} \left[(E_0\varepsilon + \beta_2)^2 - \frac{\beta_2^2}{(1-D_2)^2} \right] = 0 \\ D_2 - 1 + \frac{1}{1 + A_2(Y_2 - Y_{02})^{B_2}} = 0 \end{cases} \quad . \quad (2.77)$$

Uma vez determinadas as variáveis de dano, nota-se que a função que controla a abertura a fechamento das fissuras deve ser, no caso nº 2, atualizada. Como:

$$f'(\sigma) = 1 + \frac{\sigma}{\sigma_f} \Rightarrow \sigma = f'(\sigma)\sigma_f - \sigma_f$$

$$\text{sendo ainda, } \sigma = E_0\varepsilon(1 - D_2) - \beta_2 D_2 - \frac{\beta_1 D_1 (1 - D_2)}{(1 - D_1)} f'(\sigma)$$

resulta que,

$$f'(\sigma) = \frac{E_0\varepsilon(1 - D_2) - \beta_2 D_2 + \sigma_f}{\sigma_f + \frac{\beta_1 D_1 (1 - D_2)}{(1 - D_1)}} \quad (2.78)$$

Solução do Problema

Com as variáveis do problema atualizadas, pode-se calcular agora os novos valores para σ , E e ε_{an} sem dificuldade. A tabela 2.3 reúne as relações a serem empregadas nesta etapa.

Tabela 2.3 – Resumo das relações de interesse.

	Caso nº 1	Caso nº 2	Caso nº 3
s	$E_0\varepsilon(1 - D_2) - \beta_2 D_2 - \frac{\beta_2 D_2(1 - D_1)}{(1 - D_2)}$	$E_0\varepsilon(1 - D_2) - \beta_2 D_2 - \frac{\beta_1 D_1(1 - D_2)}{(1 - D_1)}$	$E_0\varepsilon(1 - D_2) - \beta_2 D_2$
E	$E_0(1 - D_1)$	$E_0(1 - D_2)$	$E_0(1 - D_2)$
e_{an}	$-\frac{\beta_1 D_1}{E_0} - \frac{\beta_2 D_2(1 - D_1)}{E_0(1 - D_2)}$	$-\frac{\beta_2 D_2}{E_0} - \frac{\beta_1 D_1(1 - D_2)}{E_0(1 - D_1)} f'(\sigma)$	$-\frac{\beta_2 D_2}{E_0}$

2.4.3 Identificação Paramétrica

a) Diferentes fases da identificação

Os parâmetros a serem identificados são classificados em quatro grupos:

1. parâmetros de elasticidade E_0, ν .
2. parâmetros de dano: de tração Y_{01}, A_1, B_1 ;
de compressão Y_{02}, A_2, B_2 .
3. parâmetros referentes à anelasticidade β_1, β_2 .
4. parâmetro de fechamento de fissuras σ_f .

Os parâmetros de elasticidade podem ser identificados através de um ensaio clássico de compressão simples.

Através de ensaios de tração e compressão que compreendem diversos descarregamentos, identificam-se os parâmetros anelásticos.

Os parâmetros de dano são identificados sobre os mesmos ensaios realizados para identificação de β_1, β_2 .

Finalmente, para o parâmetro σ_f é feita uma avaliação tomando-se por base os resultados e observações dos ensaios realizados e dos apresentados em literatura especializada.

b) Identificação de \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2

O parâmetro β_1 permite descrever a evolução das deformações anelásticas criadas por tração

$$\varepsilon_{anl} = \frac{\beta_1 D_1}{E_0(1 - D_1)} \quad (2.79)$$

Em LA BORDERIE (1991) a identificação foi realizada por dois tipos de ensaios:

- Um ensaio de tração direto em corpos de prova;
- Um ensaio de tração tipo PIED (Pour Identifier l'Endommagement Diffus) realizado sobre micro-concreto (RAMTANI (1990)).

Como nesses ensaios são realizadas diversas etapas de descarregamento, fornecendo-se em cada uma delas valores de D_1 e ε_{anl} , o valor de β_1 pode ser calculado pelo processo dos mínimos quadrados, ou seja:

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_{anl} \left(\frac{D_1}{E_0(1 - D_1)} \right)_i}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{D_1}{E_0(1 - D_1)} \right)_i^2} \quad (2.80)$$

O procedimento para identificação do parâmetro β_2 é o mesmo que o descrito para o parâmetro β_1 , utilizando-se de um ensaio de compressão simples (RAMTANI (1990)). Assim β_2 será determinado como

$$\beta_2 = \frac{\sum_{i=1}^n \varepsilon_{anl} \left(\frac{D_2}{E_0(1-D_2)} \right)_i}{\sum_{i=1}^n \left(\frac{D_2}{E_0(1-D_2)} \right)_i^2} \quad (2.81)$$

c) Identificação dos parâmetros relativos ao dano

No que concerne ao dano deve-se identificar três parâmetros relativos a tração e três a compressão; respectivamente: Y_{01} , A_1 , B_1 , Y_{02} , A_2 e B_2 . A identificação é realizada com base em resultados experimentais de tração e compressão simples, com descargas sucessivas, realizadas sobre corpos de prova de concreto.

A influência de cada um dos parâmetros sobre o comportamento da curva tensão-deformação é mostrada nas figuras 2.12, 2.13, 2.14, 2.15, 2.16 e 2.17.

Os parâmetros identificados através de um ensaio de esforço uniaxial de tração são apresentados nas figuras 2.12, 2.13 e 2.14. A influência de cada um sobre a curva tensão-deformação pode ser descrita como:

- O parâmetro Y_{01} influencia o início e a inclinação inicial do trecho não-linear, figura 2.12;
- No caso do parâmetro A_1 , a figura 2.13 mostra uma influência sobre a inclinação inicial do trecho não-linear e no valor da assíntota horizontal;
- O parâmetro B_1 exerce uma influência sobre a curvatura do trecho não-linear e sobre o valor da assíntota horizontal, figura 2.14.

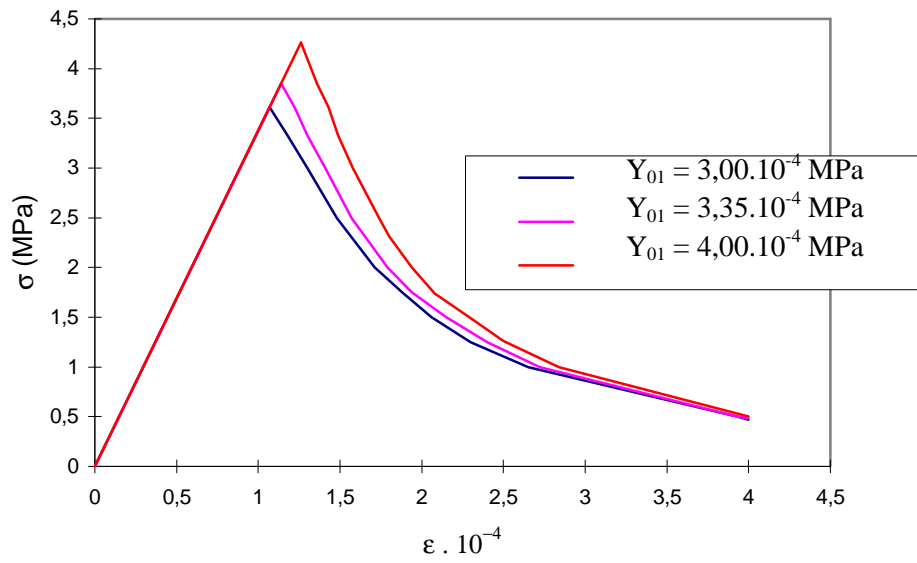


Figura 2.12. Influência de Y_{01} no comportamento em tração. LA BORDERIE (1991).

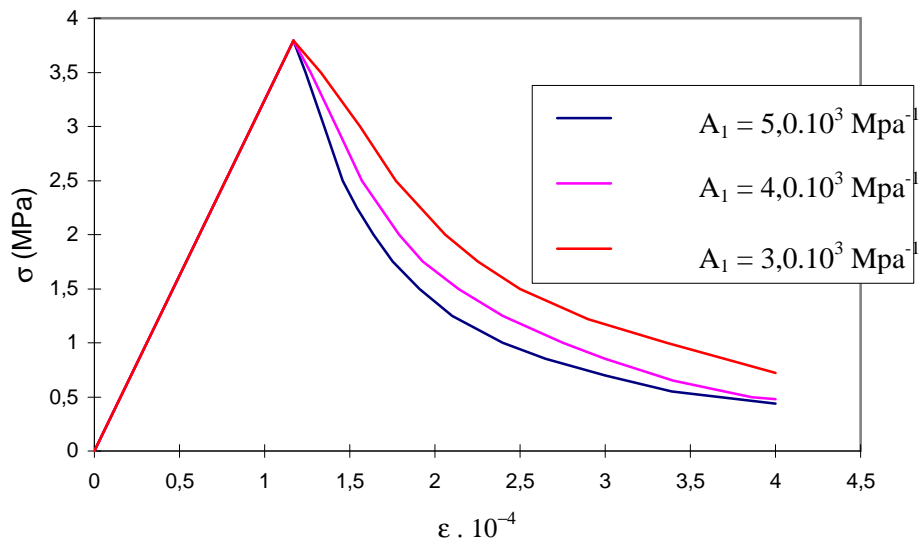


Figura 2.13. Influência de A_1 no comportamento em tração. LA BORDERIE (1991).

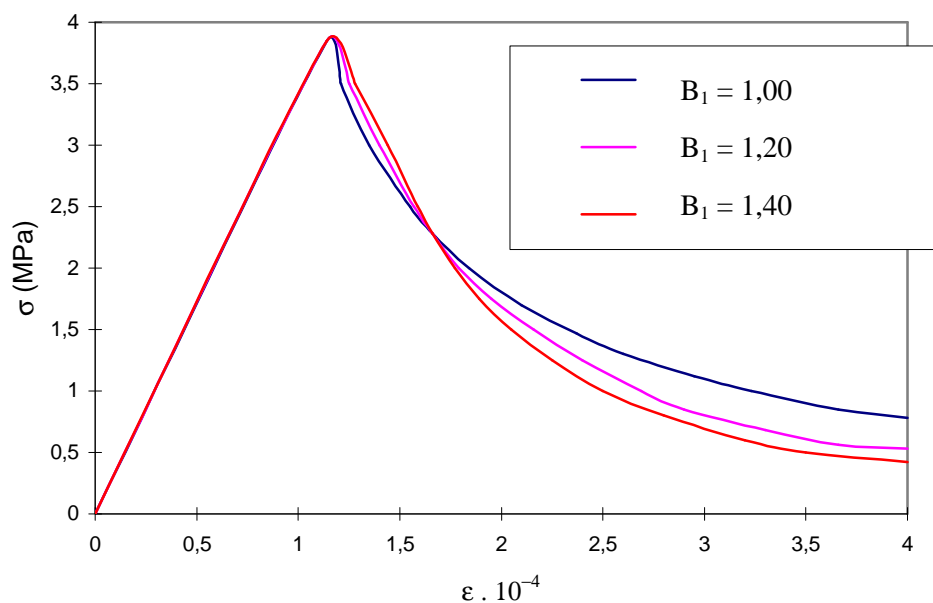


Figura 2.14. Influência de B_1 no comportamento em tração. LA BORDERIE (1991).

Os parâmetros identificados através de um ensaio de esforço uniaxial de compressão são apresentados nas figuras 2.15, 2.16 e 2.17. A influência de cada um sobre a curva tensão-deformação pode ser descrita como:

- A influência do parâmetro Y_{02} , figura 2.15, é observada no ponto de início e na inclinação inicial do trecho não-linear;
- O parâmetro A_2 influencia o comportamento da inclinação inicial do trecho não-linear e no valor da tensão máxima de compressão, figura 2.16;
- O parâmetro B_2 exerce influência sobre a curvatura do trecho não-linear e no valor da tensão máxima, figura 2.17.

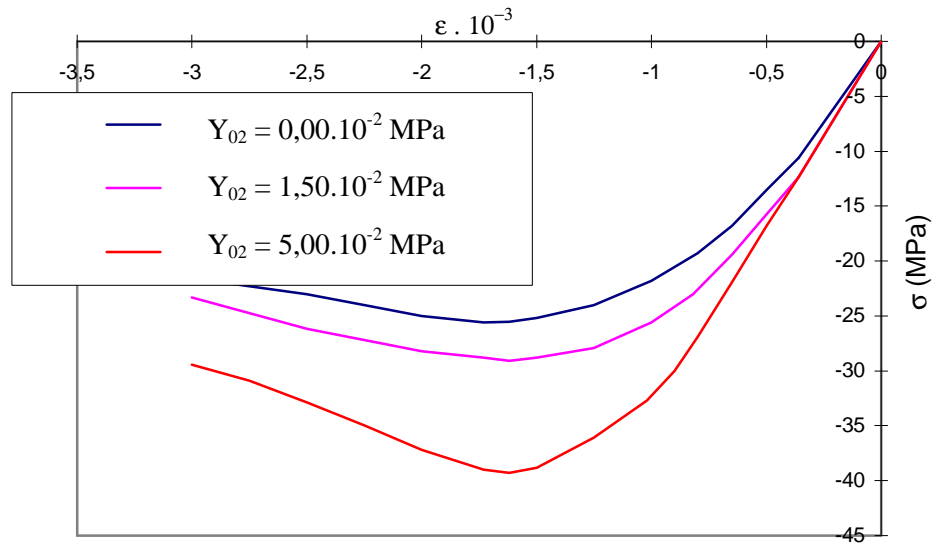


Figura 2.15. Influência de Y_{02} no comportamento em compressão. LA BORDERIE (1991).

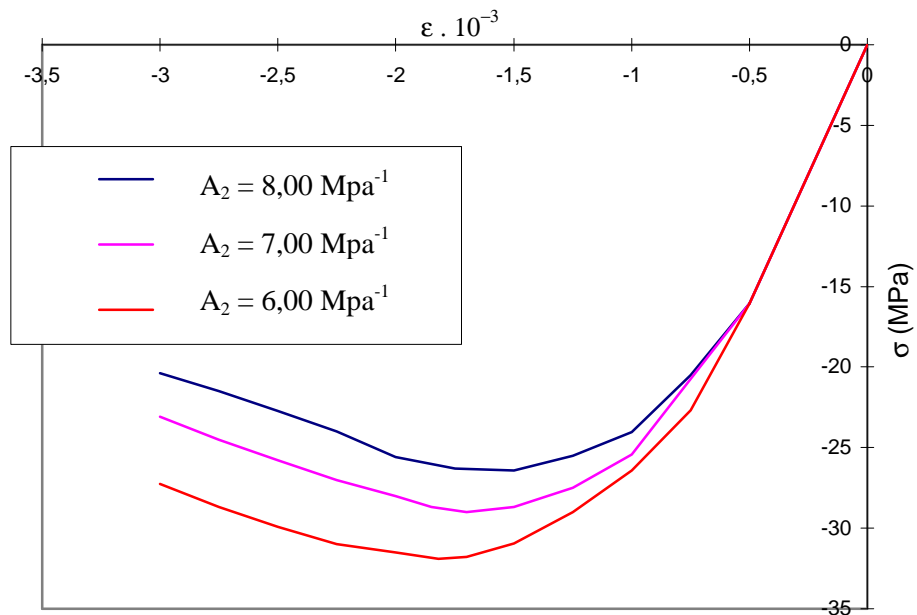


Figura 2.16. Influência de A_2 no comportamento em compressão. LA BORDERIE (1991).

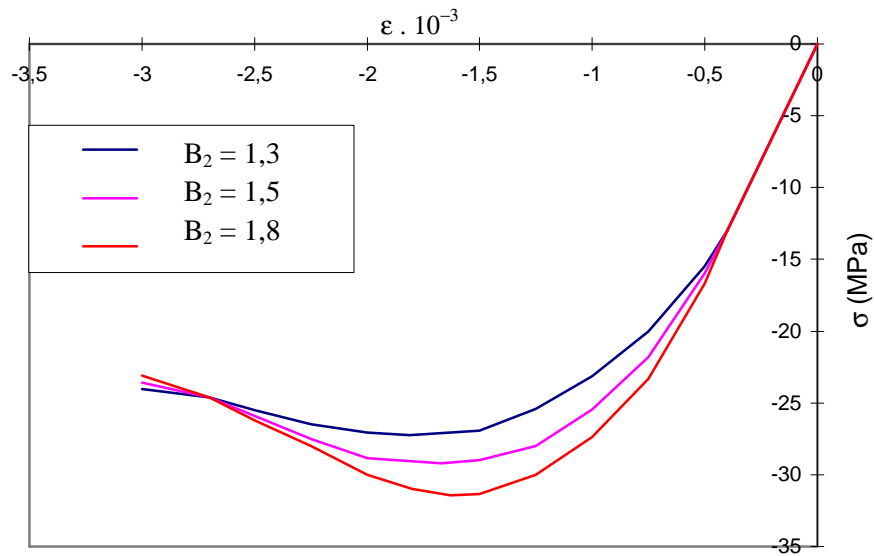


Figura 2.17. Influência de B_2 no comportamento em compressão. LA BORDERIE (1991).

2.5- MODELO DE FLÓREZ-LÓPEZ (1993a)

É um modelo para a consideração dos efeitos de *dano e plasticidade* que ocorrem no elemento estrutural imaginando-se que, em forma equivalente, a dissipação de energia possa ser considerada localizada sobre uma seção. Esse modelo se assemelha àqueles que empregam a noção de plasticidade concentrada (*'lumped plasticity models'*), nos quais a plasticidade é um efeito localizado em pontos denominados “rótulas plásticas” [veja MAIER; DE DONATO & CORRADI (1973), COHN & FRANCHI (1979), RIVA & COHN (1989)].

Fundamentado nos métodos e conceitos da termodinâmica dos meios contínuos (variáveis internas, potenciais termodinâmicos, leis de evolução, etc.), o modelo permite, de modo simplificado, levar em conta as deformações permanentes e a perda de rigidez em barras e estruturas reticuladas em concreto armado sujeitas a carregamentos proporcionais crescentes ou reversíveis sem inversão de sinal.

Segundo o modelo, num elemento de barra os processos dissipativos concentram-se somente em rótulas dispostas em suas extremidades, enquanto o

comportamento do restante da barra permanece elástico. O vetor de deformações generalizadas nodais de um elemento (barra + rótulas) é expresso por

$$\{\phi\} = [F^e]\{M\} + \{\phi^R\}, \quad (2.82)$$

onde $[F^e]$ é a matriz de flexibilidade elástica e o vetor M reúne os esforços generalizados: $\{M\}^t = (M_i, M_j, N)$.

O modelo admite que as deformações nas rótulas (ϕ^R) são compostas por deformações plásticas (ϕ^P), como na teoria de plasticidade para pórticos, e por deformações devidas ao dano (ϕ^d)

$$\{\phi^R\} = \{\phi^P\} + \{\phi^d\}. \quad (2.83)$$

O elemento finito utilizado no modelo, com nós de extremidade i e j , suas deformações e forças internas generalizadas são mostradas na figura 2.18.

Postulando-se que a cada um dos graus de liberdade esteja associado uma variável de dano, contida no intervalo $[0;1]$, pode-se definir o vetor $\{D\}^t = (d_i, d_j, d_n)$; nessas condições a deformação devido ao dano fica expressa por:

$$\{\phi^d\} = [F^d(D)]\{M\}. \quad (2.84)$$

Na relação anterior $[F^d(D)]$ é a matriz de flexibilidade devida ao dano, composta pela contribuição das duas rótulas de um elemento e definida por

$$[F^d(D)] = \begin{pmatrix} \frac{d_i}{(1-d_i)S_{11}^0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d_j}{(1-d_j)S_{22}^0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d_n}{(1-d_n)S_{33}^0} \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

onde $S_{11}^0 = \frac{4EI}{L}$, $S_{22}^0 = \frac{4EI}{L}$ e $S_{33}^0 = \frac{EA}{L}$.

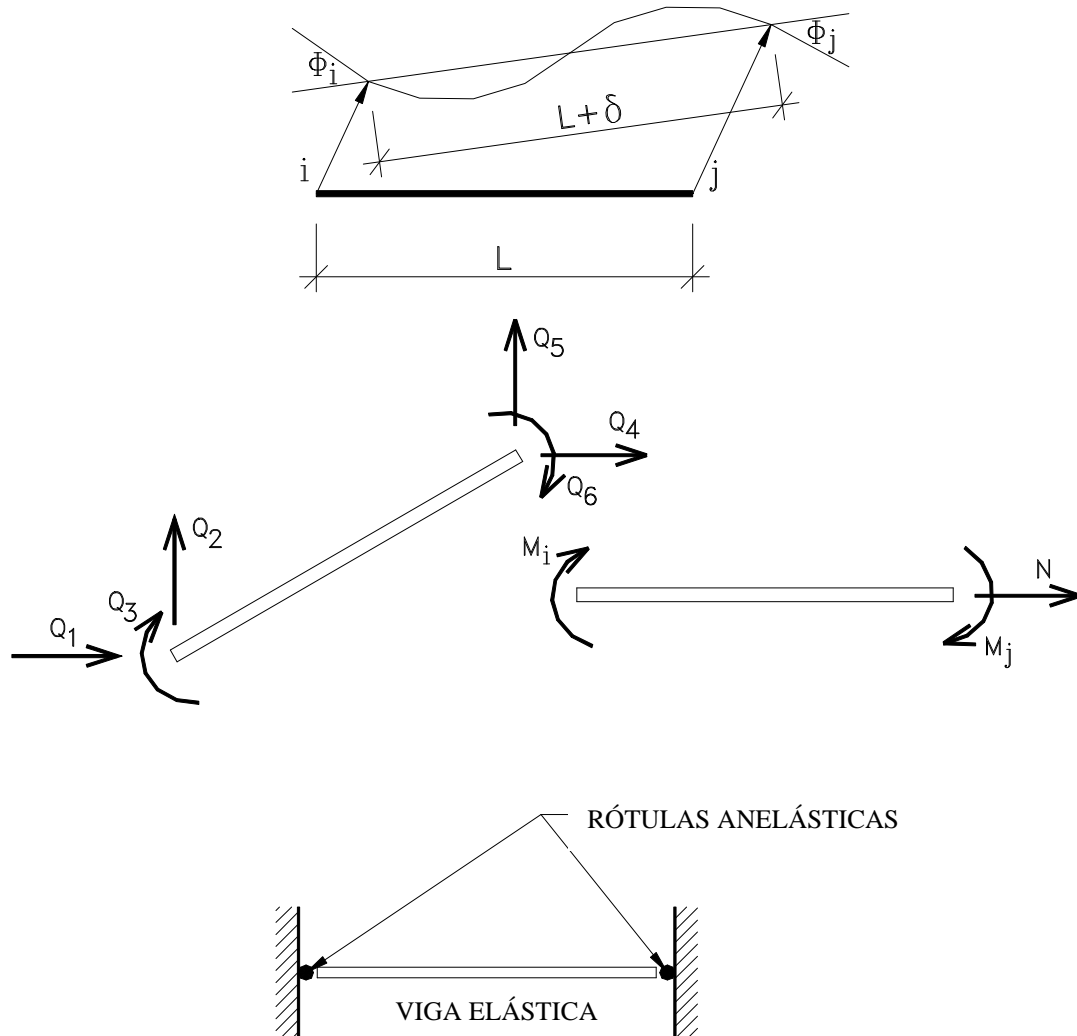


Figura 2.18. Deformações, forças internas, tensões generalizadas e elemento finito. FLÓREZ-LÓPEZ (1993a)

Novamente, observa-se que os parâmetros d_i e d_j medem respectivamente o dano correspondente à rotação das 'rótulas' i e j , e d_n o dano devido ao esforço axial na barra. Observa-se, também, a independência entre as flexibilidades, dada à ausência de componentes fora da diagonal principal.

A equação (2.84) é, de fato, uma generalização do modelo da barra submetida a força normal. Naquele caso, admitindo-se inicialmente uma barra de material

elastoplástico onde o dano afeta diretamente a resposta elástica, por meio de redução de sua rigidez, e utilizando-se a hipótese de deformação equivalente (*ver LEMAITRE & CHABOCHE (1985)*), o alongamento δ de uma barra pode ser definido como

$$\delta = \frac{N}{(1-D) S_{33}^0} + \delta^P, \quad (2.86)$$

onde $S_{33}^0 = EA/L$ é a rigidez elástica axial do meio íntegro, N o esforço axial e δ^P é o alongamento devido ao efeito de plasticidade.

Imaginando-se então que os processos dissipativos estejam localizados, o alongamento total passa a ser composto por uma parcela devida à deformação elástica da barra e outras duas associadas aos efeitos de plasticidade e dano. Assim, obtém-se:

$$\delta = \frac{N}{S_{33}^0} + \delta^P + \delta^d. \quad (2.87)$$

Com (2.87) em (2.86), o alongamento da barra devido ao dano resulta

$$\delta^d = \frac{D}{(1-D) S_{33}^0} N. \quad (2.88)$$

Nota-se que agora $\frac{D}{(1-D)S_{33}^0}$ é a flexibilidade decorrente da danificação. A generalização da (2.88) leva à (2.84).

Da combinação de (2.82), (2.83) e (2.84) define-se a relação tensão-deformação generalizada de uma barra com dano

$$\{\phi - \phi^P\} = [F^{ed}(D)] \{M\}, \quad (2.89)$$

onde

$$[F^{ed}(D)] = [F^e] + [F^d(D)] \quad (2.90)$$

é a matriz de flexibilidade da barra.

Por inversão da matriz de flexibilidade $[F^{ed}(D)]$ segue que para uma barra de inércia I , área A e comprimento L , considerando-se pequenos deslocamentos, a matriz de rigidez é dada por

$$[S^{ed}(D)] = \begin{bmatrix} \frac{(1-d_i)(4-d_j)}{4-d_i d_j} 4EI/L & \frac{4(1-d_i)(1-d_j)}{4-d_i d_j} 2EI/L & 0 \\ \frac{(1-d_j)(4-d_i)}{4-d_i d_j} 4EI/L & \frac{4(1-d_j)(1-d_i)}{4-d_i d_j} 2EI/L & 0 \\ \text{SIM.} & & (1-d_n) \frac{AE}{L} \end{bmatrix}. \quad (2.91)$$

Pode-se observar que para $\{D\}=0$ obtém-se a matriz de uma barra com comportamento elástico. Quando os parâmetros d_i e d_j são iguais a 1,0 obtém-se a matriz de rigidez de uma barra de treliça.

Para a definição das forças termodinâmicas associadas às variáveis internas, o modelo propõe a utilização de um potencial termodinâmico composto por uma parcela referente à resposta elástica com dano e outra referente à resposta plástica.

Considerando-se que a energia potencial complementar U^* de um elemento com dano é dada por

$$U^*(M, D) = \frac{1}{2} \{M\}^t [F^d(D)] \{M\} + W^*, \quad (2.92)$$

onde o primeiro termo é a contribuição das rótulas e W^* representa a energia potencial complementar da viga elástica, o potencial termodinâmico pode então ser definido da seguinte forma:

$$\chi = U^*(M, D) + U^P(\alpha), \quad (2.93)$$

onde $U^P(\alpha)$ é um potencial plástico dependente de um conjunto de variáveis internas reunidas no vetor: $\{\alpha\}^t = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$. Em geral o vetor α tem duas componentes que tem correspondência com os tipos básicos de encruamento plástico: o cinemático e o isótropo.

As forças termodinâmicas G e β conjugadas, respectivamente, aos vetores de dano e encruamento plástico, são dadas por

$$\begin{aligned} \{G\} &= -\left\{ \frac{\partial \chi}{\partial D} \right\} \\ \{\beta\} &= -\left\{ \frac{\partial \chi}{\partial \alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

A dissipação ξ devido aos efeitos do dano e plasticidade pode então ser expressa como

$$\xi = \{\dot{D}\}^t \{G\} + \{\dot{\phi}^P\} \{M\} + \{\dot{\alpha}\} \{\beta\} \geq 0. \quad (2.95)$$

As funções adotadas pelo modelo para controlar a evolução da plastificação e do dano numa rótula são:

$$\begin{aligned} f &= \left| M - \left(\frac{1-d}{4-d} \right) c \phi^P \right| - 4 \left(\frac{1-d}{4-d} \right) M_y \\ g &= G - \left(G_{cr} + q \frac{\ln(1-d)}{(1-d)} \right) \end{aligned} \quad (2.96)$$

onde c , M_y , G_{cr} e q são constantes que caracterizam o elemento.

Pode-se observar, que, para a função f , se o dano permanece constante e se a constante c toma um valor igual a zero o modelo reduz-se a um modelo elasto-

plástico perfeito. Se c é positivo, não havendo incremento de dano, tem-se um modelo elasto-plástico bilinear. Assim o modelo torna-se apto à análise de diversas situações indicadas pelo comportamento do material em estudo.

A função g indica que para a existência de um incremento sobre o valor de d , a força termodinâmica G deve alcançar o valor crítico G_{cr} acrescido de um termo relacionado ao endurecimento; tal termo é função do dano e proporcional à constante q .

2.5.1- Determinação Paramétrica

Os parâmetros introduzidos na eq.(2.96) não têm um significado mecânico bem definido. O cálculo do valor desses parâmetros é feito mediante a resolução do seguinte sistema de equações não-lineares.

$$\left\{ \begin{array}{lll} M = M_{cr} \Rightarrow d = 0 & e & g = 0 \\ M = M_p \Rightarrow \Phi^P = 0; f = 0 & e & g = 0 \\ M = M_u \Rightarrow \Phi^P = \Phi_u^P & e & f = 0 \\ M = M_u \Rightarrow \frac{dM}{dd} = 0 & e & g = 0 \end{array} \right. \quad (2.97)$$

onde M_{cr} é o momento de fissuração da seção, M_p é o momento correspondente ao início do processo de plastificação, M_u é o momento último, Φ_u^P é a rotação plástica correspondente ao momento último e dM indica um incremento infinitesimal no momento M .

A primeira condição indica que o dano tem início somente quando o momento na rótula alcança o momento de fissuração M_{cr} . Se as forças termodinâmicas conjugadas ao dano são dadas por:

$$\begin{aligned} G_i &= \frac{1}{2S_{11}^0} \left[\frac{M_i}{(1-d_i)} \right]^2 \\ G_j &= \frac{1}{2S_{22}^0} \left[\frac{M_j}{(1-d_j)} \right]^2 \\ G_n &= \frac{1}{2S_{33}^0} \left[\frac{N}{(1-d_n)} \right]^2 \end{aligned} \quad (2.98)$$

Esta hipótese leva ao cálculo do valor de G_{cr} como uma função de M_{cr} , ou seja, com $d=0$ na equação (2.98)

$$G_{cr} = \frac{M_{cr}^2}{2S_{11}^0}. \quad (2.99)$$

A última condição indica que o momento, como uma função do dano, alcança um valor máximo quando é igual ao momento último M_u . A relação entre momento e dano pode ser obtida da equação $g=0$:

$$\frac{M^2}{2S_{11}^0} = (1-d)^2 G_{cr} + q(1-d) \ln(1-d). \quad (2.100)$$

A procura de pontos críticos para M^2 na equação anterior mostra que

$$-2(1-d_u)G_{cr} - q[\ln(1-d_u) + 1] = 0 \quad (2.101)$$

onde d_u é o valor de dano correspondente ao momento último. Da substituição deste valor em (2.100) vem

$$\frac{M_u^2}{2S_{11}^0} = (1-d_u)^2 G_{cr} + q(1-d_u) \ln(1-d_u). \quad (2.102)$$

As equações (2.101) e (2.102) constituem um sistema de duas equações com duas incógnitas, o parâmetro q e o valor d_u .

A segunda condição indica que a deformação plástica tem início quando o momento na rótula iguala o momento de plastificação da seção, admitindo-se que o momento de fissuração já tenha sido alcançado ou ultrapassado, ou seja, $M_p \geq M_{cr}$. Assim, a equação $g=0$ neste caso fica

$$\frac{M_p^2}{2(1-d_p)^2 S_{11}^0} - G_{cr} - q \frac{\ln(1-d_p)}{(1-d_p)} = 0. \quad (2.103)$$

A expressão (2.103) permite o cálculo de d_p , que corresponde ao valor de dano na rótula quando o momento atinge o valor limite para início de plastificação. Agora, com a condição $f = 0$, tem-se

$$M_p - \frac{4(1-d_p)}{(4-d_p)} M_y = 0. \quad (2.104)$$

A equação (2.104) permite calcular o parâmetro M_y .

Finalmente a terceira condição mostra que:

$$M_u - \frac{(1-d_u)}{(4-d_u)} (c\Phi_u^p) - 4 \frac{(1-d_u)}{(4-d_u)} M_y = 0 \quad (2.105)$$

A equação (2.105) fornece o valor do parâmetro c , e dessa forma todos os parâmetros do modelo são identificados.

CAPÍTULO 3

MODELO PROPOSTO DE DANO CONCENTRADO NAS EXTREMIDADES

Neste capítulo faz-se inicialmente uma apresentação do procedimento adotado na determinação da matriz de rigidez de um elemento de barra para a análise de pórticos planos com a consideração de efeitos anelásticos concentrados nas suas extremidades. A seguir duas aplicações numéricas utilizando-se essa matriz são mostradas.

3.1 - DETERMINAÇÃO DA MATRIZ DE RIGIDEZ

O modelo proposto por FLÓREZ-LÓPEZ (1993a), descrito no capítulo anterior, apresenta na sua configuração original três coordenadas que compõem o vetor de tensões generalizadas $\left(\{M\}^T = \{M_i, M_j, N\}\right)$, e independência dos processos de danificação. No procedimento aqui proposto os processos não são mais independentes e afetam os coeficientes de transmissão.

A dedução da matriz de rigidez se faz com base nos graus de liberdade locais ilustrados na figura 3.1(b).

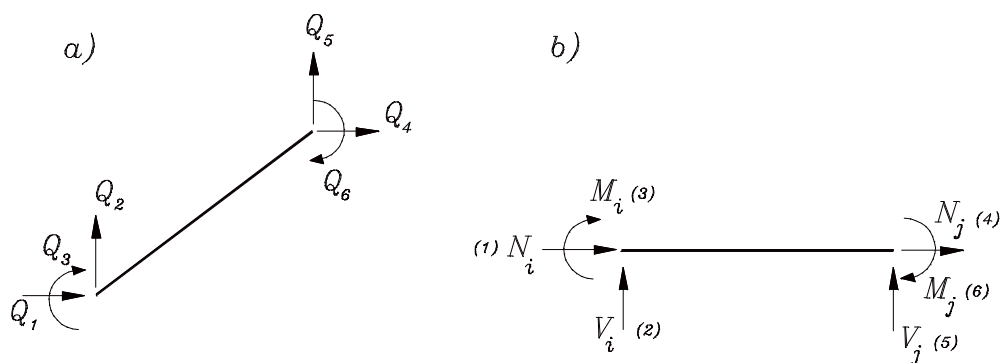


Figura 3.1.a) Graus de liberdade globais; b) Graus de liberdade locais.

Submetendo-se uma viga elástica de comprimento l , seção transversal com inércia I e área A a um giro unitário no nó i , tem-se a situação ilustrada na figura 3.2 onde:

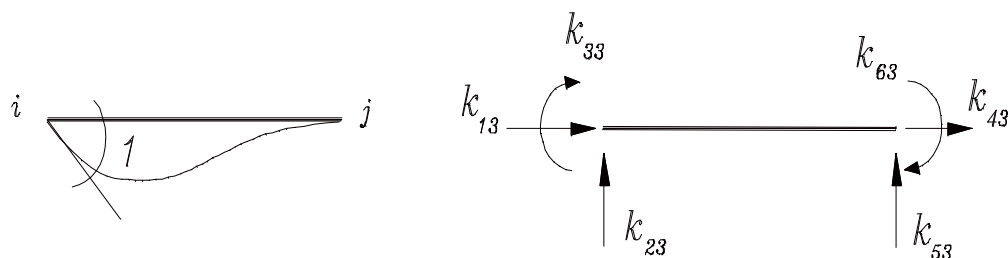


Figura 3.2. Contribuições para a rigidez da viga considerando-se giro unitário no nó i .

$$\begin{array}{ll}
 K_{13} = 0 & K_{43} = 0 \\
 K_{23} = \frac{-6EI}{l^2} & K_{53} = \frac{6EI}{l^2} \\
 K_{33} = \frac{4EI}{l} & K_{63} = \frac{2EI}{l}
 \end{array}$$

No caso ilustrado, para se provocar um giro unitário no nó i foi necessária a aplicação de um momento K_{33} . Observa-se que o momento resistente ao giro do nó j , K_{63} , é igual à metade do valor aplicado em i , podendo-se então afirmar que existe um

fator de transmissão de efeitos α , que neste caso é igual a 0,5, ou seja, para um membro com as características descritas acima e com dano nulo, tem-se a situação ilustrada na figura 3.3.

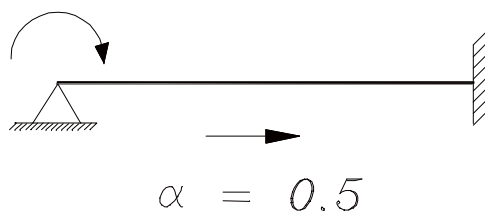


Figura 3.3. Fator de transmissão em uma viga elástica-linear com dano nulo.

No entanto, se no nó j o valor de dano estiver entre]0, 1] a situação será diferente e os valores dos coeficientes de transmissão serão alterados. De um modo geral, pode-se admitir que o valor do fator de transmissão α seja afetado pelo valor da variável de dano do nó para o qual o efeito é transmitido (figura 3.4). Neste caso, os valores de dano d_i e d_j afetam os diretamente os momentos e o dano axial d_n é de valor único e independente dos outros.

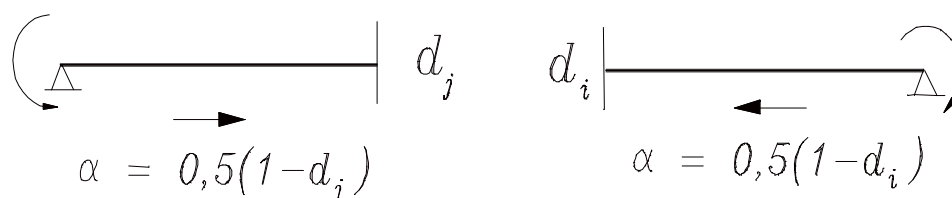


Figura 3.4. Fator de transmissão para uma viga com dano concentrado nas extremidades.

Estendendo-se a idéia para uma situação na qual em ambas as extremidades existem certos níveis de danificação, então os valores dos coeficientes de rigidez correspondentes aos deslocamentos em cada grau de liberdade serão afetados pelos valores de dano nos nós i e j .

Na figura 3.5 ilustra-se o procedimento adotado para o cálculo dos coeficientes de rigidez para uma viga submetida a um giro unitário na extremidade i .

A viga possui inércia I , área da seção transversal A , comprimento l e danificação concentradas nas extremidades i e j .

O procedimento compreende três etapas distintas nas quais, por superposição, procura-se levar em conta os efeitos da danificação:

- Etapa (a) corresponde ao comportamento elástico-linear, dessa maneira os coeficientes de rigidez são aqueles do elemento com dano nulo;
- Etapa (b), corresponde à consideração da redução da rigidez do nó i por efeito do dano nele localizado; o momento de redução se transmite para o nó j através do fator $\alpha = 0,5(1 - d_j)$;
- Etapa (c), corresponde à consideração da redução da rigidez do nó j por efeito do dano nele localizado; o momento de redução se transmite para o nó i através do fator $\alpha = 0,5(1 - d_i)$.

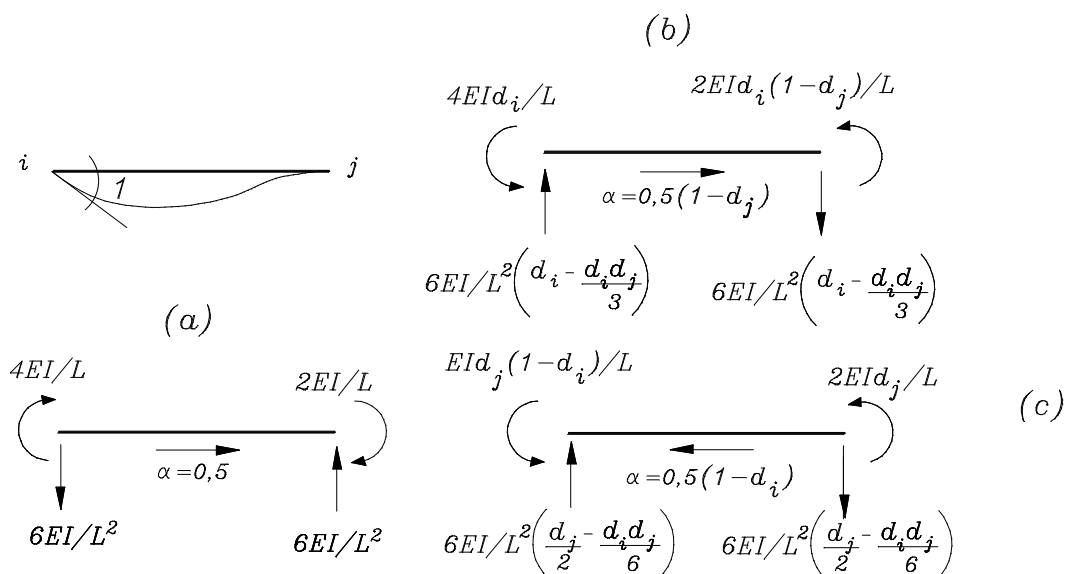


Figura 3.5. Rigidezes de um elemento de viga com danificação concentrada nas extremidades, obtidos impondo-se um giro unitário na extremidade i .

Os valores finais dos coeficientes de rigidez serão dados pela soma das três etapas, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 K_{13} &= 0 \\
 K_{23} &= -\frac{6EI}{L} \left(1 - d_i - \frac{d_j}{2} + \frac{d_i d_j}{2} \right) \\
 K_{33} &= \frac{4EI}{L} \left(1 - d_i - \frac{d_j}{4} + \frac{d_i d_j}{4} \right) \\
 K_{43} &= 0 \\
 K_{53} &= \frac{6EI}{L} \left(1 - d_i - \frac{d_j}{2} + \frac{d_i d_j}{2} \right) \\
 K_{63} &= \frac{2EI}{L} \left(1 - d_i - d_j + d_i d_j \right)
 \end{aligned}$$

Para o mesmo elemento, impondo-se um deslocamento vertical unitário na direção da coordenada correspondente na extremidade i , tem-se a situação ilustrada na figura 3.6. O procedimento para a determinação das rigidezes é análogo ao descrito anteriormente, onde a etapa a corresponde ao elemento íntegro, a etapa b à correção da rigidez por efeito do dano na extremidade i e a etapa c corresponde à correção da rigidez por efeito do dano na extremidade j .

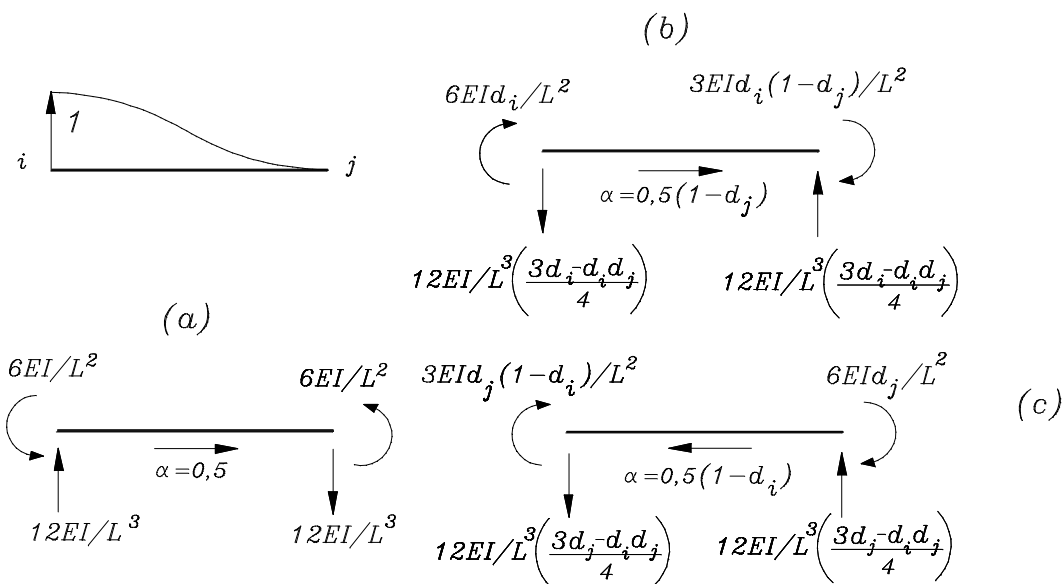


Figura 3.6. . Rigidezes do elemento de viga com danificação concentrada nas extremidades, compatíveis com um deslocamento vertical unitário na extremidade i .

Os coeficientes finais de rigidez devido ao deslocamento unitário na extremidade i , obtidos pela soma das três etapas, são:

$$\begin{aligned}
 K_{12} &= 0 \\
 K_{22} &= \frac{12EI}{L^3} \left(1 - \frac{3d_i}{4} - \frac{3d_j}{4} + \frac{d_i d_j}{2} \right) \\
 K_{32} &= -\frac{6EI}{L^2} \left(1 - d_i - \frac{d_j}{2} + \frac{d_i d_j}{2} \right) \\
 K_{42} &= 0 \\
 K_{52} &= -\frac{12EI}{L^3} \left(1 - \frac{3d_i}{4} - \frac{3d_j}{4} + \frac{d_i d_j}{2} \right) \\
 K_{62} &= -\frac{6EI}{L^2} \left(1 - \frac{d_i}{2} - d_j + \frac{d_i d_j}{2} \right)
 \end{aligned}$$

O procedimento para cálculo dos demais coeficientes de rigidez correspondentes aos giro e deslocamento unitário na extremidade j , é análogo. Já os coeficientes de rigidez devido a um deslocamento unitário na direção axial são os mesmos obtidos para o modelo de FLÓREZ-LÓPEZ (1993a). Assim, a matriz de rigidez para uma viga de inércia I , área da seção transversal A e comprimento l se escreve

$$[S^d(D)] = \begin{bmatrix}
 K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\
 & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\
 & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\
 & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\
 & & & & K_{55} & K_{56} \\
 & & & & & K_{66}
 \end{bmatrix}$$

SIMETRIA

onde:

$$K_{11} = \frac{EA}{L}(1 - d_n)$$

$$K_{12} = 0$$

$$K_{13} = 0$$

$$K_{14} = -\frac{EA}{L}(1 - d_n)$$

$$K_{15} = 0$$

$$K_{16} = 0$$

$$K_{22} = \frac{12EI}{L^3} \left(1 - \frac{3d_i}{4} - \frac{3d_j}{4} + \frac{d_i d_j}{2} \right)$$

$$K_{23} = -\frac{6EI}{L^2} \left(1 - d_i - \frac{d_j}{2} + \frac{d_i d_j}{2} \right)$$

$$K_{24} = 0$$

$$K_{25} = -\frac{12EI}{L^3} \left(1 - \frac{3d_i}{4} - \frac{3d_j}{4} + \frac{d_i d_j}{2} \right)$$

$$K_{26} = -\frac{6EI}{L^2} \left(1 - \frac{d_i}{2} - d_j + \frac{d_i d_j}{2} \right)$$

$$K_{33} = \frac{4EI}{L} \left(1 - d_i - \frac{d_j}{4} + \frac{d_i d_j}{4} \right)$$

$$K_{34} = 0$$

$$K_{35} = \frac{6EI}{L^2} \left(1 - d_i - \frac{d_j}{2} + \frac{d_i d_j}{2} \right)$$

$$K_{36} = \frac{2EI}{L} \left(1 - d_i - d_j + d_i d_j \right)$$

$$K_{44} = \frac{EA}{L}(1 - d_n)$$

$$K_{45} = 0$$

$$K_{46} = 0$$

$$K_{55} = \frac{12EI}{L^3} \left(1 - \frac{3d_i}{4} - \frac{3d_j}{4} + \frac{d_i d_j}{2} \right)$$

$$K_{56} = \frac{6EI}{L^2} \left(1 - \frac{d_i}{2} - d_j + \frac{d_i d_j}{2} \right)$$

$$K_{66} = \frac{4EI}{L} \left(1 - \frac{d_i}{4} - d_j + \frac{d_i d_j}{4} \right)$$

3.2 - EXEMPLOS DE APLICAÇÃO

A matriz de rigidez determinada anteriormente foi implementada em um programa de elementos finitos juntamente com os critérios de plastificação e danificação definidos no modelo de FLÓREZ-LÓPEZ (1993a). Os testes numéricos realizados objetivaram mostrar que o elemento aqui deduzido é capaz de fornecer resultados coerentes tanto em situações básicas como uma viga em balanço quanto em mais complexas como um pórtico. Os resultados mostrados a seguir são puramente numéricos, pois se tratam de estruturas para as quais não se dispõe de resultados experimentais. O objetivo nesta fase é verificar o desempenho do modelo em relação a outros procedimentos já adotados.

3.2.1 - Viga em Balanço

A estrutura mostrada na figura 3.7 é uma adaptação do exemplo da viga biapoiada mostrada por FLÓREZ-LÓPEZ (1993a). As propriedades físicas e os parâmetros daquele exemplo foram mantidos, alterando-se apenas as condições de vinculação e o ponto de aplicação da carga.

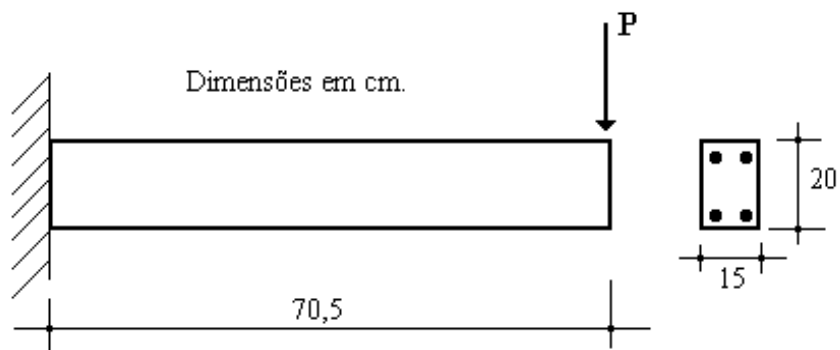


Figura 3.7 – Características geométricas da viga em balanço.

A seção transversal contém $4\phi 10$ mm; adotando-se para o aço uma resistência ao escoamento f_y de 420 N/mm^2 e para o concreto uma resistência à compressão f_c de 25 N/mm^2 . Os parâmetros do modelo são $M_u = 16,29 \text{ kN.m}$, $M_p = 11,50 \text{ kN.m}$, $M_{cr} = 0$ e $\phi_{pu} = 0,174822$.

A resposta numérica, figura 3.8, foi obtida a partir de deslocamento imposto na extremidade livre, sendo que o algoritmo adotado encontra situações equilibradas ao final de cada passo. A curva força-deslocamento resultante apresenta um comportamento regular no trecho pós-pico.

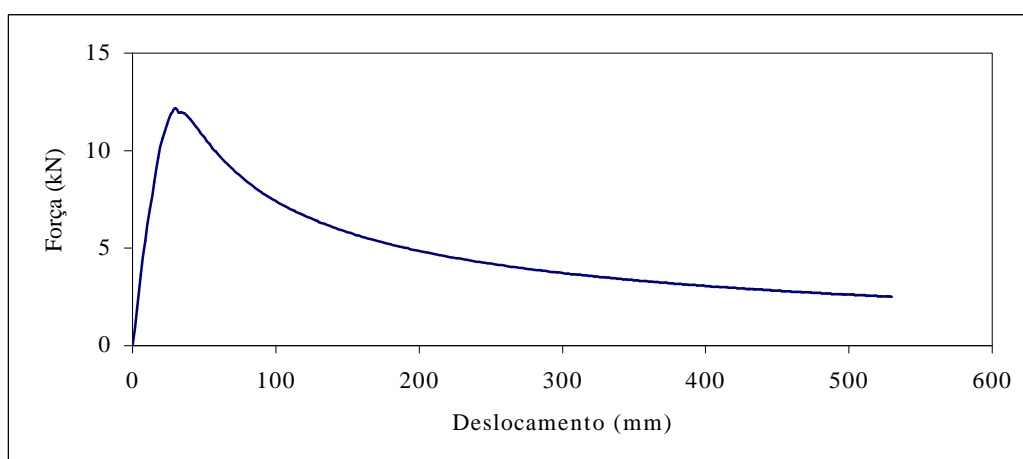


Figura 3.8 – Curva força-deslocamento para viga em balanço.

3.2.2 -Pórtico com Deslocamento Imposto (FLÓREZ-LÓPEZ (1993a))

Neste exemplo considera-se o pórtico ilustrado na figura 3.9 submetido a um deslocamento horizontal imposto ao nó superior à esquerda.

Utilizam-se as seguintes funções para critérios de dano e plasticidade:

$$f = -1$$

$$g = G - m(d)^n + G_{cr}$$

onde m , n e G_{cr} são parâmetros adotados no exemplo. O emprego de uma função de plasticidade constante e negativa (*de valor arbitrário*) é um artifício a fim de considerar somente o dano como variável interna dentro do cálculo. Os valores utilizados para as propriedades físicas e parâmetros são os seguintes:

$$EI = 332 \text{ kN.m}^2; AI = 3,32 \times 10^{-8} \text{ m}^6;$$

$$m = 0,991 \text{ kN.m}; n = 1; G_{cr} = 0,085 \text{ kN.m.}$$

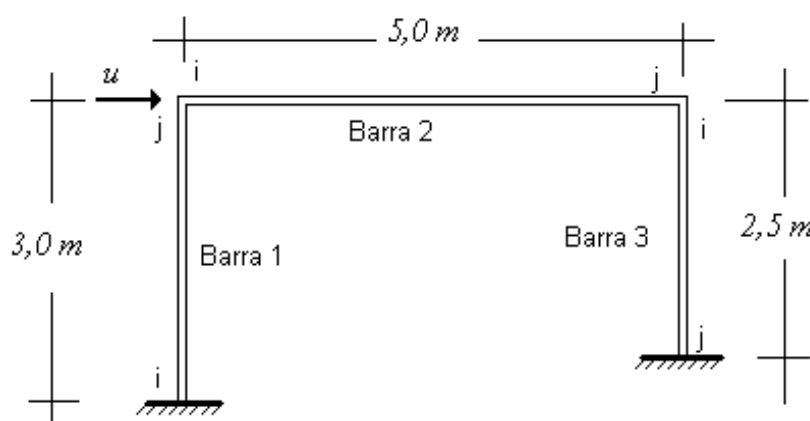


Figura 3.9 – Pórtico com deslocamento imposto. FLÓREZ-LÓPEZ (1993a).

Neste exemplo, observa-se ao longo do processo de carregamento o aparecimento de rótulas (pontos onde a variável de dano alcança o valor 1,0) nos elementos da estrutura. Os resultados obtidos com a matriz de rigidez deduzida foram comparados com os do modelo de FLÓREZ-LÓPEZ (1993a).

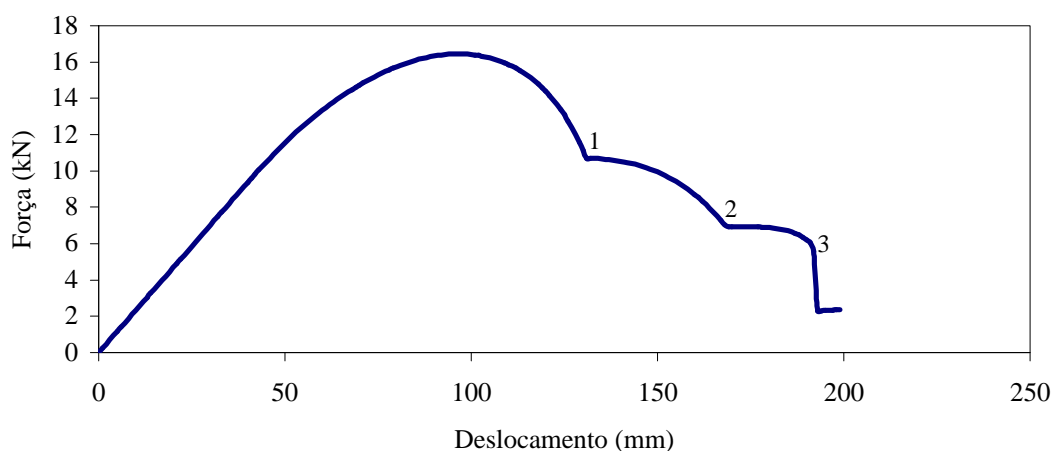


Figura 3.10 – Curva força-deslocamento.

A resposta numérica, curva força-deslocamento resultante (fig. 3.10), inclui uma fase global de amolecimento (*softning*) da estrutura, ou região de pós-pico, e o efeito do aparecimento sucessivo de três rótulas (*pontos 1, 2 e 3, respectivamente*). As rótulas alteram a resposta estrutural global no sentido de mudança na velocidade de queda de resistência com o acréscimo dos deslocamentos nos trechos 1-2 e 2-3. A figura 3.11 mostra a evolução dos variáveis de dano nas extremidades de cada barra.

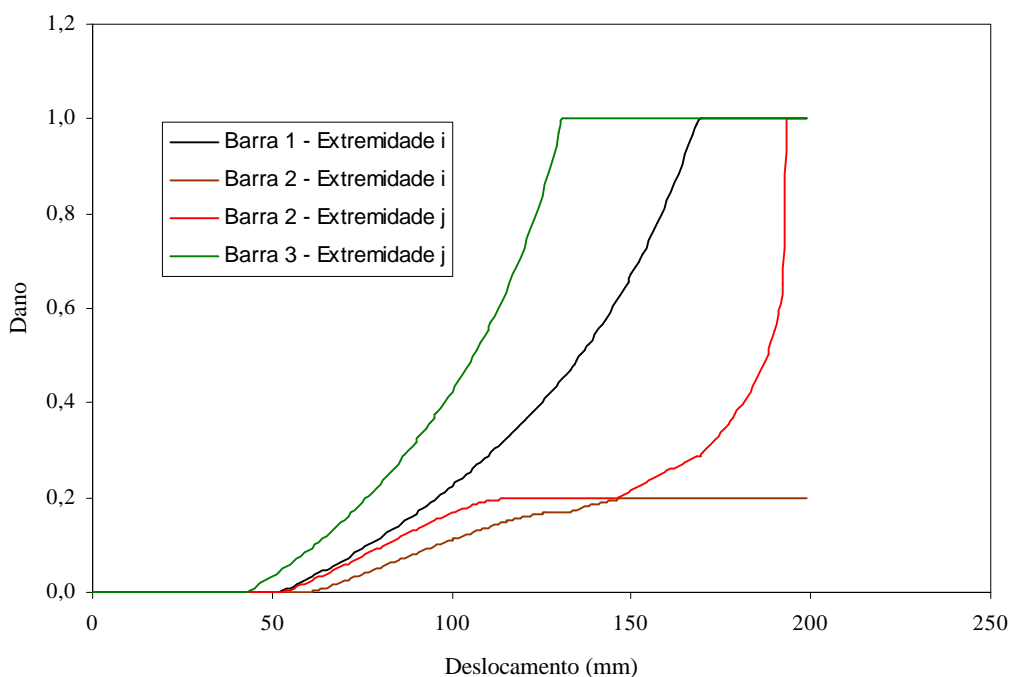


Figura 3.11 – Evolução das variáveis de dano do pórtico em função do deslocamento.

Os resultados apresentados nas figuras 3.10 e 3.11 reproduzem em quase sua totalidade as respostas apresentadas por FLÓREZ-LÓPEZ (1993a), incluindo-se, adicionalmente as fases 1-2 e 2-3 ilustradas na figura 3.10 (a curva força-deslocamento mostrada por FLÓREZ-LÓPEZ (1993a) é regular até o ponto 1 e não apresenta nenhum comentário sobre o comportamento da curva após esse ponto).

CAPÍTULO 4

APLICAÇÃO DOS MODELOS SIMPLIFICADOS A ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

4.1 INTRODUÇÃO

No presente capítulo, faz-se uma análise do desempenho dos modelos simplificados pelo confronto entre valores experimentais de vigas biapoiadas e pórtico em concreto armado e respostas numéricas obtidas com os modelos de FLÓREZ-LÓPEZ (1993a), implementado com a matriz de rigidez obtida pelo procedimento descrito no capítulo anterior, e LA BORDERIE (1991).

Essa análise tem por objetivo identificar pontos positivos e negativos de cada modelo. Além de casos sugeridos na bibliografia e apresentados nos estudos de FLÓREZ-LÓPEZ e LA BORDERIE, optou-se por considerar também vigas com características diferentes, sobretudo no que se refere à distribuição da armadura longitudinal. De fato, as vigas apresentadas por FLÓREZ-LÓPEZ e LA BORDERIE apresentam armadura longitudinal simétrica enquanto que as vigas aqui estudadas apresentam armadura longitudinal somente de tração, portanto não simétrica (*ver característica de geometria e de armação das vigas no item 1.2*).

4.2 – ANÁLISE NUMÉRICA

As análises numéricas realizadas nesse estudo tiveram por base os modelos de FLÓREZ-LÓPEZ (1993a), modificado com a implementação da matriz de rigidez aqui proposta, e LA BORDERIE (1991), pois trata-se de dois modelos de formulação e implementação numérica bastante simples (*ver apêndice 1*). Os testes foram conduzidos empregando-se uma discretização com elementos finitos unidimensionais, fazendo-se uso da simetria de carregamento e geometria, analisando-se, portanto, somente metade da estrutura, no caso das vigas.

4.2.1 – Vigas em Concreto Armado

As vigas estudadas são as mesmas apresentadas no item 1.2, figura 1.1. Os valores das propriedades dos materiais empregados nas vigas estão descritos na tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Propriedades dos materiais das vigas.

<u>Propriedades do Concreto</u>	
Módulo de YOUNG	E = 29200 MPa
Coeficiente de POISSON	$\nu = 0,2$ (adotado)
<u>Propriedades do Aço</u>	
Módulo de YOUNG	E = 196000 MPa

Na tabela 4.2 reúnem-se os valores adotados para os parâmetros do modelo constitutivo de LA BORDERIE (1991), observando-se que para β_1 e β_2 não houve uma identificação particular, adotando os valores médios sugeridos na tese de LA BORDERIE.

Tabela 4.2 – Parâmetros do modelo constitutivo de LA BORDERIE (1991) empregados na análise numérica das vigas.

Parâmetros do Modelo de LA BORDERIE (1991)	
$Y_{01} = 3,35 \times 10^{-4}$ MPa	$B_1 = 1,2$
$Y_{02} = 1,50 \times 10^{-2}$ MPa	$B_2 = 1,5$
$A_1 = 4,00 \times 10^{-3}$ MPa ⁻¹	$\beta_1 = 1,00$ MPa
$A_2 = 7,00$ MPa ⁻¹	$\beta_2 = -40,0$ MPa
$\sigma_f = 3,5$ MPa	

Para análise pelo modelo de LA BORDERIE foram utilizados elementos finitos de barra, adotando-se para todos os casos uma malha composta de 20 elementos finitos, 21 nós e 15 camadas na discretização da seção transversal, figura 4.1. Quanto ao número de camadas de aço, foram utilizadas 1, 2 e 3 camadas para as vigas com armadura de 3 ϕ 10,00mm, 5 ϕ 10,00mm e 7 ϕ 10,00mm, respectivamente.

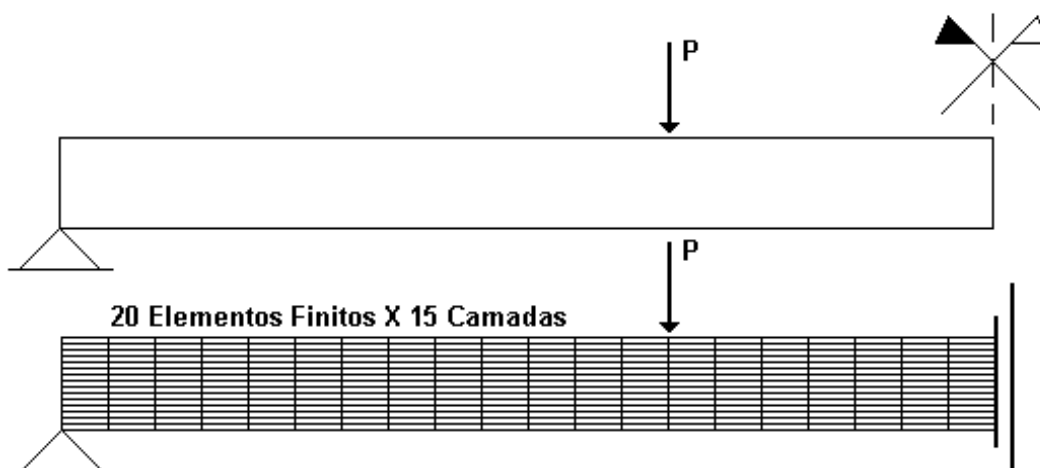


Figura 4.1 – Discretização em elementos finitos – modelo de LA BORDERIE.

Com respeito ao comportamento do aço, admite-se uma relação constitutiva elástica-plástica perfeita com $f_y = 420$ MPa.

No caso do modelo de dano concentrado nas extremidades, implementado utilizando-se a matriz de rigidez aqui proposta no capítulo 3 e as funções limites de dano e plasticidade propostas por FLÓREZ-LÓPEZ (1993a), os parâmetros utilizados foram os seguintes:

Tabela 4.3 – Parâmetros do modelo de danificação concentrada nas extremidades empregados na análise numérica das vigas.

<u>VIGA 3φ10,00mm</u>	<u>VIGA 5φ10,00mm</u>	<u>VIGA 7φ10,00mm</u>
$M_{cr} = 8,00 \times 10^{-03}$ MN.m	$M_{cr} = 10,00 \times 10^{-03}$ MN.m	$M_{cr} = 12,50 \times 10^{-03}$ MN.m
$M_p = 8,00 \times 10^{-03}$ MN.m	$M_p = 10,00 \times 10^{-03}$ MN.m	$M_p = 12,50 \times 10^{-03}$ MN.m
$M_u = 32,00 \times 10^{-03}$ MN.m	$M_u = 48,00 \times 10^{-03}$ MN.m	$M_u = 52,00 \times 10^{-03}$ MN.m
$\phi_{pu} = 0.009$	$\phi_{pu} = 0.010$	$\phi_{pu} = 0.013$
$c = 28,496$ MN.m	$c = 39,477$ MN.m	$c = 32,255$ MN.m
$M_y = 8,00 \times 10^{-03}$ MN.m	$M_y = 10,00 \times 10^{-03}$ MN.m	$M_y = 12,50 \times 10^{-03}$ MN.m
<u>Para L = 0,40 m</u>	<u>Para L = 0,40 m</u>	<u>Para L = 0,40 m</u>
$q = -1,750 \times 10^{-05}$ MN.m	$q = -3,948 \times 10^{-05}$ MN.m	$q = -4,624 \times 10^{-05}$ MN.m
<u>Para L = 0,80 m</u>	<u>Para L = 0,80 m</u>	<u>Para L = 0,80 m</u>
$q = -3,500 \times 10^{-05}$ MN.m	$q = -7,896 \times 10^{-05}$ MN.m	$q = -9,248 \times 10^{-05}$ MN.m

Os valores de M_{cr} , M_p , M_u e ϕ_{pu} foram definidos através das respostas experimentais de cada viga.

Nesse caso, para a metade da viga, foram utilizados 2 (dois) elementos finitos, 3 (três) nós e a seção transversal não foi dividida em estratos, figura 4.2, pois o modelo proposto não contempla este tipo de discretização.

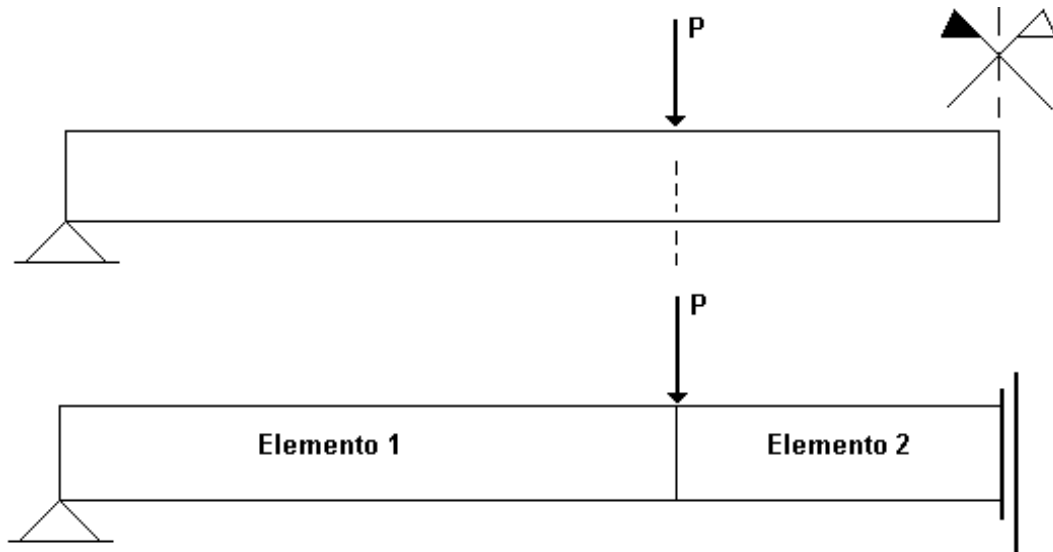


Figura 4.2 – Discretização em elementos finitos – modelo de dano concentrado nas extremidades.

Os resultados numéricos fornecidos pelos dois modelos, confrontados com os resultados experimentais são mostrados nas figuras 4.3, 4.4 e 4.5 que ilustram o comportamento da curva carga aplicada por deslocamento vertical no meio do vão.

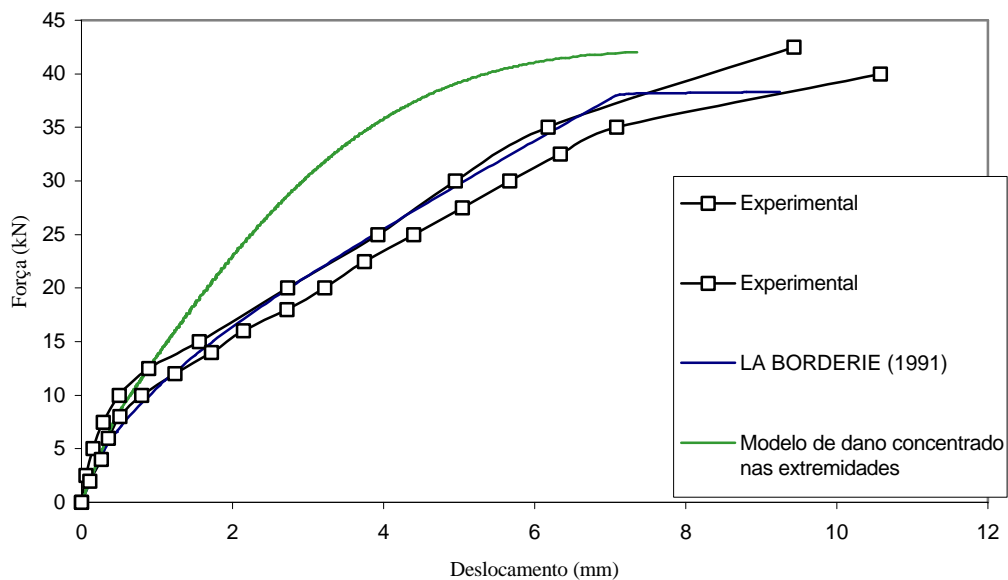


Figura 4.3 – Resultados numéricos – viga com 3f10,00mm.

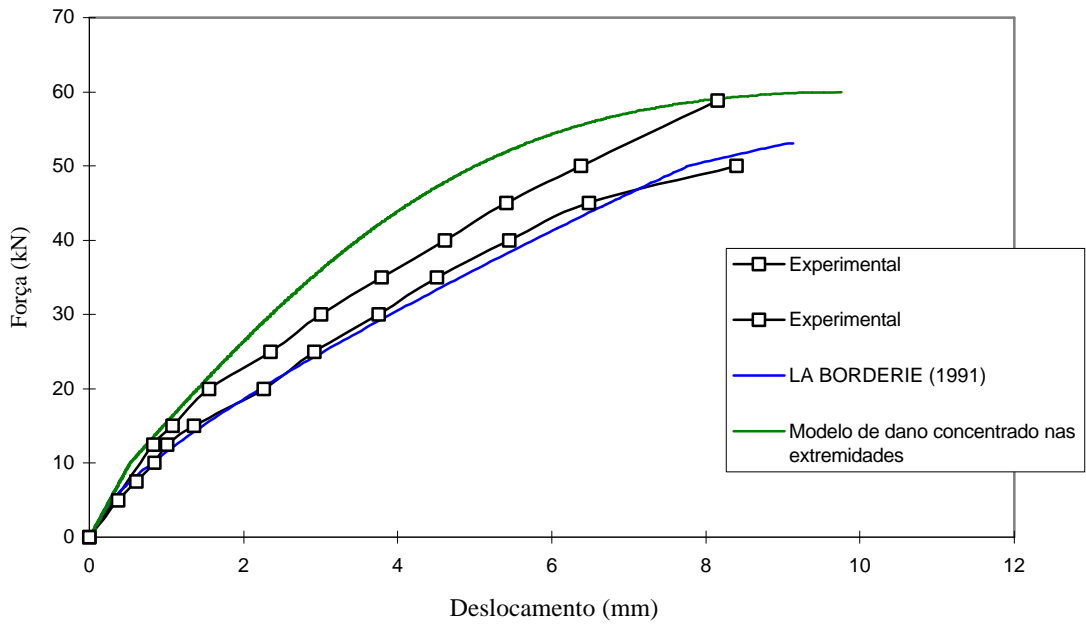


Figura 4.4 – Resultados numéricos – viga com 5f10,00mm.

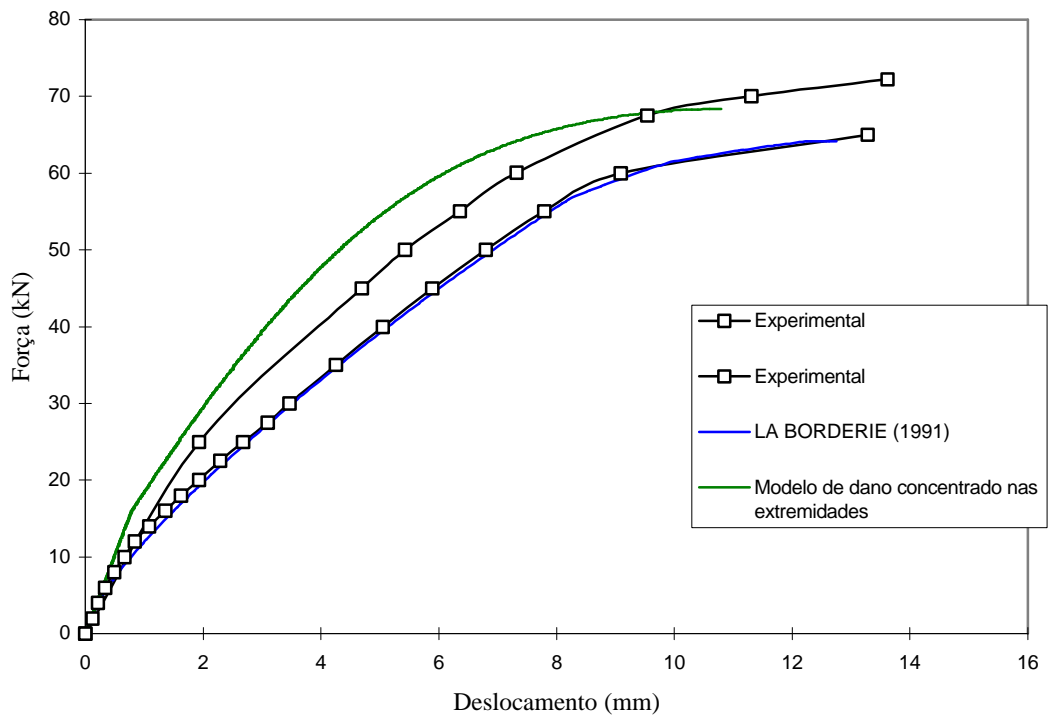


Figura 4.5 – Resultados numéricos – viga com 7f10,00mm.

Como já comentado no capítulo 1, o modelo de LA BORDERIE (1991) apresenta os melhores resultados, pois, apesar de ser um modelo simples, leva em consideração deformações residuais e a eventual plastificação da armadura, fatores não considerados pelo modelo de dano e plasticidade concentrada que considera a barra com um comportamento elástico.

Contudo, o modelo de dano e plasticidade pode ser considerado eficiente quando da sua utilização em conjunto com outros modelos, no caso com o modelo de LA BORDERIE (1991), evitando-se uma discretização muito fina em zonas ou regiões onde efeitos de danificação e plasticidade apresentam-se bastante uniformes e, portanto, podem ser considerados de forma equivalente por modelos de não-linearidade concentrada.

As figuras a seguir mostram respostas numéricas das mesmas estruturas, considerando-se somente o dano nos dois modelos. O modelo de dano concentrado foi utilizado para discretizar a parte central das vigas, região mais deteriorada, conforme os resultados experimentais. Em todos os casos foram utilizados, para a metade da estrutura, 5 elementos para o modelo, com 15 camadas na discretização da seção transversal, e 1 elemento para o modelo de dano concentrado nas extremidades, figura 4.6.

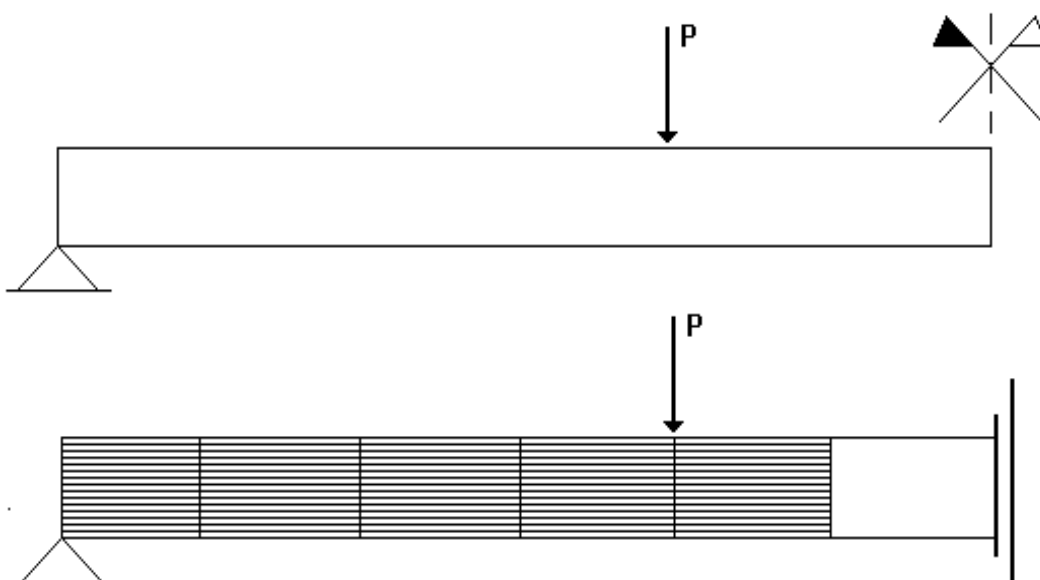


Figura 4.6 – Discretização em elementos finitos – análise composta.

Os resultados dessa análise estão ilustrados nas curvas carga aplicada por deslocamento vertical no meio do vão, figuras 4.7, 4.8 e 4.9.

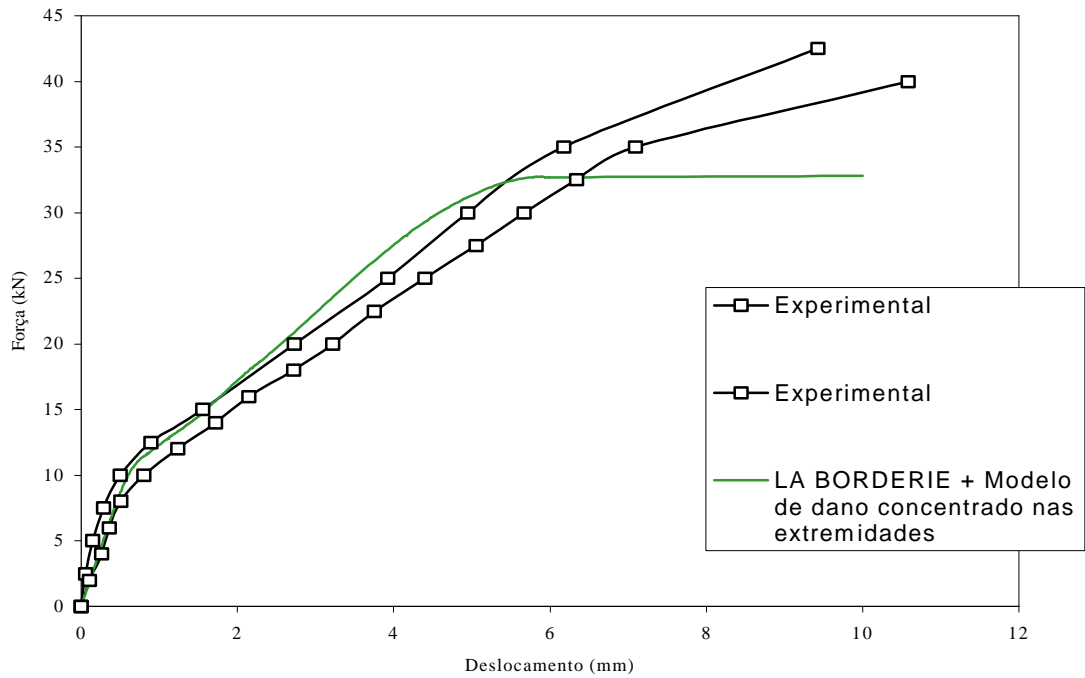


Figura 4.7 – Resultados numéricos – análise composta – viga com 3f10,00mm.

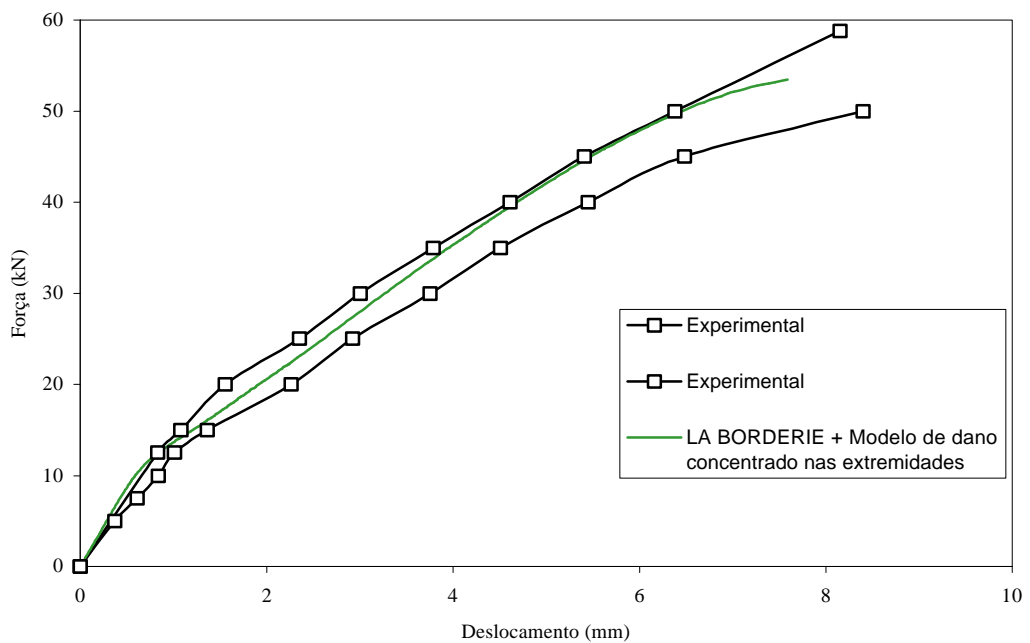


Figura 4.8 – Resultados numéricos – análise composta – viga com 5f10,00mm.

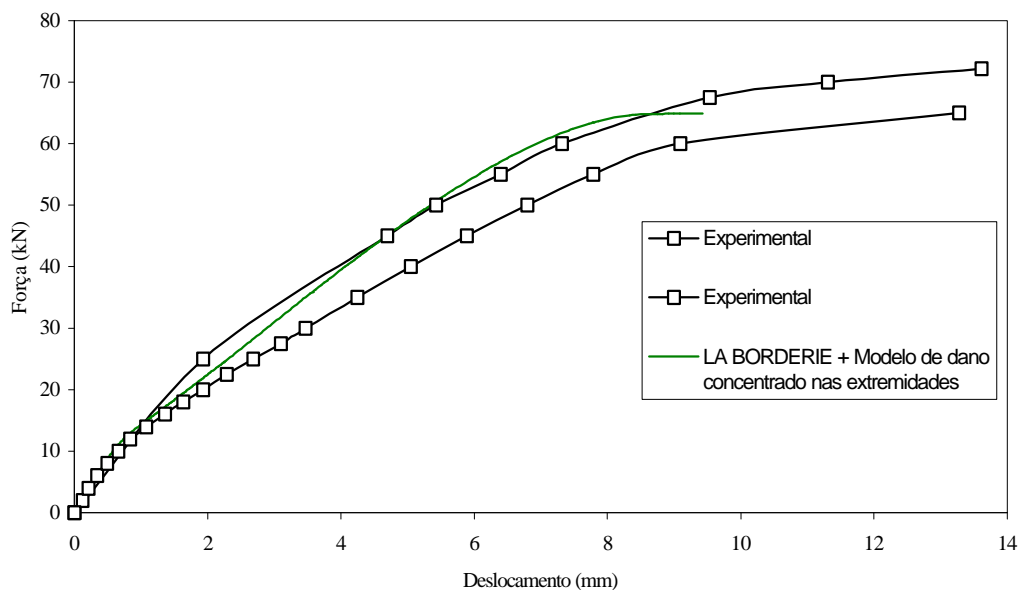


Figura 4.9 – Resultados numéricos – análise composta – viga com 7f10,00mm.

Os resultados numéricos acima ilustrados mostram que à medida que o modelo de dano concentrado é confinado em uma região onde a distribuição de fissuras é mais uniforme, a análise ganha em qualidade e a resposta numérica reproduz quase que na sua totalidade a resposta experimental. Cabe ressaltar que nesta análise o custo computacional foi bem menor que o exigido para a análise com o modelo de LA BORDERIE (1991), visto que nesta etapa foram suficientes apenas 5 elementos finitos estratificados contra 20 elementos utilizados na análise anterior.

4.2.2 – Pórtico em Concreto Armado

O pórtico, figuras 4.10 e 4.11, possui dois andares com um vão total de 5,70m e uma altura total de 4,60m. As seções transversais utilizadas para as vigas foram de 30x40cm, e para as colunas foram de 40x30cm. Todos os elementos do pórtico possuem armadura longitudinal composta por 8 barras de $\phi 20,00\text{mm}$ e armadura transversal de $\phi 10,00\text{mm}$ com espaçamento de 12,5cm. Maiores detalhes sobre o procedimento experimental encontram-se em VECCHIO & EMARA (1992).

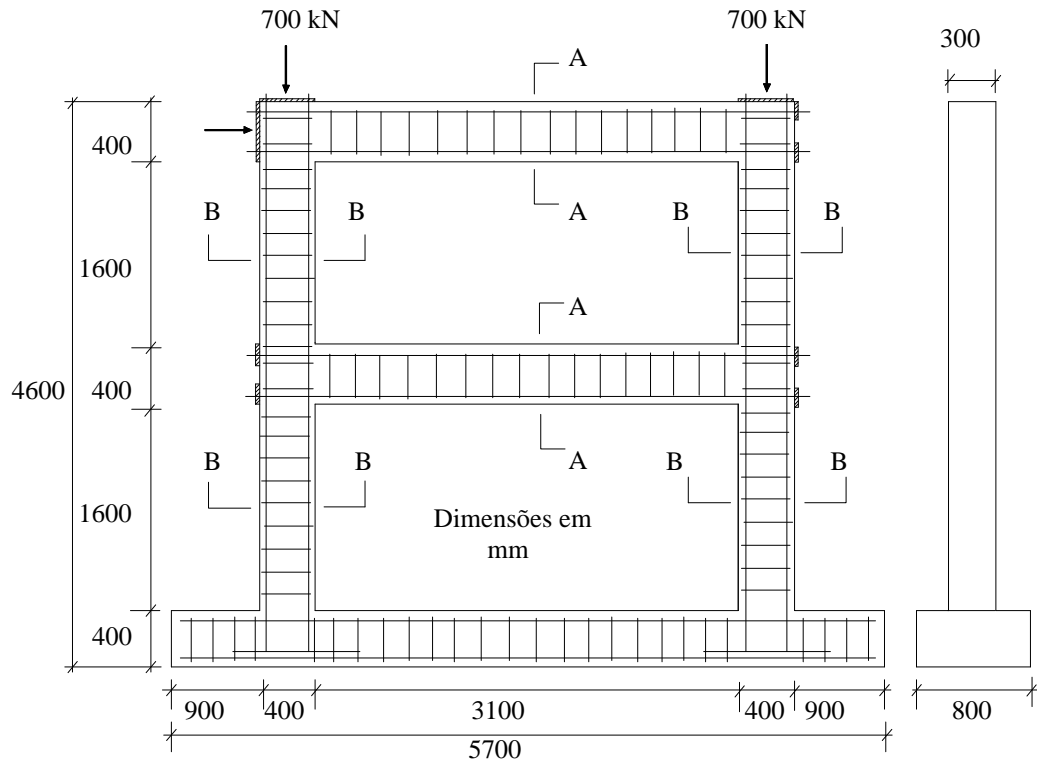


Figura 4.10 – Detalhes do pórtico em concreto armado.

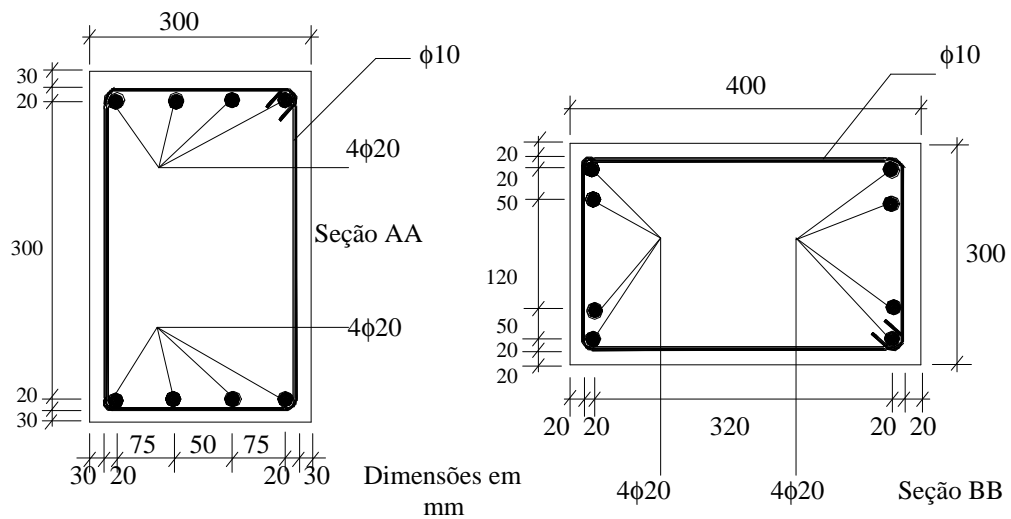


Figura 4.11 – Seções transversais A e B.

Na tabela 4.4, a seguir, estão descritas as propriedades dos materiais que constituem o pórtico.

Tabela 4.4 – Propriedades dos materiais do pórtico.

<u>Propriedades do Concreto</u>	
Módulo de YOUNG	E = 28600 MPa
<u>Propriedades do Aço</u>	
Módulo de YOUNG	E = 192500 MPa
Tensão de Plastificação	$f_y = 418$ MPa
Tensão Última	$f_u = 596$ MPa

O pórtico foi analisado com os modelos de LA BORDERIE e o de dano concentrado nas extremidades da barra, implementado com as funções limites de dano e plasticidade propostas por FLÓREZ-LÓPEZ (1993a). Os parâmetros empregados nos dois modelos estão listados nas tabelas 4.5 e 4.6.

Tabela 4.5 – Parâmetros do modelo constitutivo de LA BORDERIE (1991) empregados na análise numérica do pórtico.

<u>Parâmetros do Modelo de LA BORDERIE (1991)</u>	
$Y_{01} = 3,35 \times 10^{-4}$ MPa	$B_1 = 1,2$
$Y_{02} = 1,50 \times 10^{-2}$ MPa	$B_2 = 1,5$
$A_1 = 4,00 \times 10^{-3}$ MPa ⁻¹	$\beta_1 = 1,00$ MPa
$A_2 = 7,00$ MPa ⁻¹	$\beta_2 = -40,0$ MPa
$\sigma_f = 3,5$ MPa	

Na discretização do pórtico foram utilizados 30 elementos e 30 nós, sendo 10 elementos para cada coluna e 5 para cada viga e a seção transversal foi subdividida em 10 camadas, sendo 2 camadas de aço dentre as 10.

No modelo de dano concentrado nas extremidades da barra foram empregados os seguintes parâmetros, tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Parâmetros do modelo de danificação concentrada nas extremidades empregados na análise do pórtico.

<u>VIGAS</u>	<u>COLUNAS</u>
$M_{cr} = 0,28 \times 10^{-1} \text{ MN.m}$	$M_{cr} = 0,69 \times 10^{-1} \text{ MN.m}$
$M_p = 1,61 \times 10^{-1} \text{ MN.m}$	$M_p = 2,53 \times 10^{-1} \text{ MN.m}$
$M_u = 1,89 \times 10^{-1} \text{ MN.m}$	$M_u = 2,73 \times 10^{-1} \text{ MN.m}$
$\phi_{pu} = 1,67 \times 10^{-2}$	$\phi_{pu} = 0,60 \times 10^{-2}$
$c = 50,699 \text{ MN.m}$	$c = 154,092 \text{ MN.m}$
$q = -9,256 \times 10^{-04} \text{ MN.m}$	$q = -1,097 \times 10^{-03} \text{ MN.m}$
$M_y = 2,185 \times 10^{-1} \text{ MN.m}$	$M_y = 3,838 \times 10^{-1} \text{ MN.m}$

Na discretização foram utilizados 6 elementos e 6 nós, sendo 4 elementos para colunas e 2 elementos para vigas. Cada elemento tem suas extremidades localizadas nos encontros de barras e vínculos externos do pórtico.

A seguir, figura 4.12, mostra o confronto entre as respostas numéricas e experimental em forma de curvas carga horizontal aplicada e deslocamento horizontal no andar superior do pórtico. As análises numéricas foram conduzidas utilizando-se controle de deslocamento.

Os resultados apresentados pelo modelo de dano concentrado são satisfatórios levando-se em conta a simplicidade do modelo e o pequeno esforço computacional envolvido na análise. Como nas análises realizadas nas vigas, item 4.2.1, o modelo de dano concentrado apresenta uma curva semelhante à experimental, porém mais rígida durante a fase de início de dano até o ponto de carga máxima. No entanto o modelo captura a carga máxima de modo bastante satisfatório.

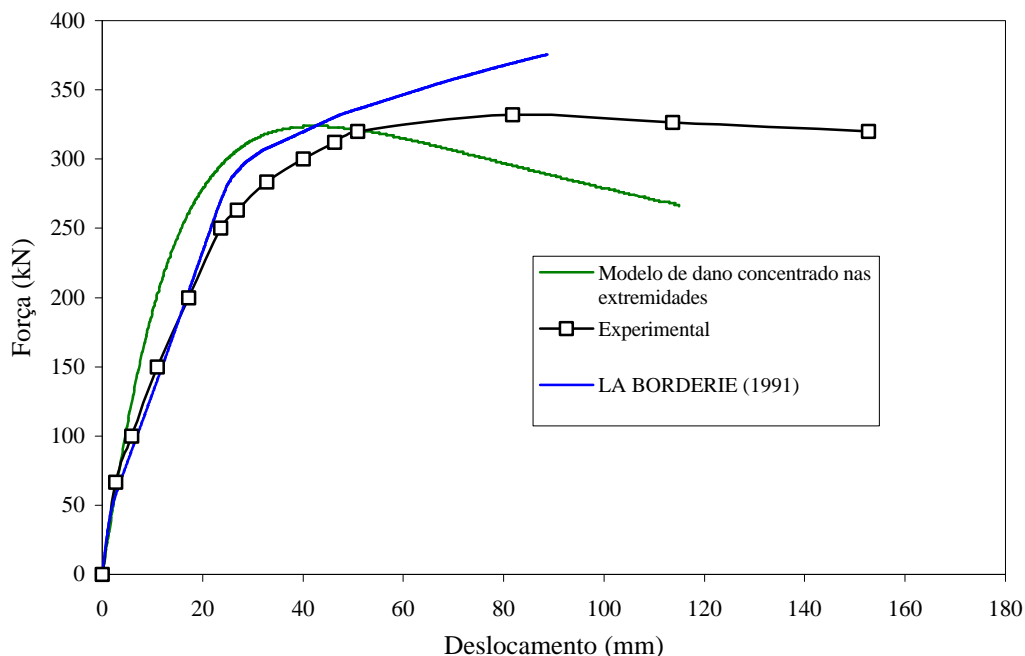


Figura 4.12 – Resultados numéricos – pórtico em concreto armado.

O modelo de LA BORDERIE (1991) apresenta resultados numéricos bem próximos dos resultados experimentais. O comportamento da curva carga-deslocamento é praticamente igual à curva de resultados experimentais até nas proximidades do ponto de carga máxima. Nesse ponto, ao contrário do modelo de dano concentrado, o modelo não consegue capturar o valor da carga máxima aplicada ao pórtico. Entende-se que tal fato deve-se a um melhor ajuste nos parâmetros referentes ao dano em tração do modelo, principalmente o parâmetro Y_{01} . Outro aspecto negativo do modelo é o enorme esforço computacional envolvido na análise numérica.

CAPÍTULO 5

**ANÁLISE CRÍTICA DO MODELO DE DANO CONCENTRADO
NAS EXTREMIDADES DAS BARRAS**

5.1 – INTRODUÇÃO

Os resultados numéricos das vigas apresentados no capítulo anterior indicam que o modelo de dano concentrado quando aplicado isoladamente não consegue reproduzir com eficácia a resposta experimental. Porém, tal fato pode ser atribuído às funções limites de danificação e plastificação propostas por FLÓREZ-LÓPEZ (1993a) e utilizadas para implementar o modelo. Essas funções foram propostas para descrever o comportamento de peças estruturais que apresentam a mesma composição para as armaduras longitudinais superior e inferior, diferente das vigas aqui estudadas que apresentam uma armadura resistente longitudinal somente na parte inferior.

No entanto, entende-se que o modelo de dano concentrado pode ser aplicado isoladamente e apresentar uma resposta eficaz para estruturas que não apresentem características semelhantes às utilizadas para a identificação das funções limites de dano e plasticidade originais. Para tanto torna-se necessário a adoção de procedimentos que dêem ao modelo um caráter mais abrangente e eficaz nas análises

desse tipo de estrutura, definindo-se, através de experimentos em peças estruturais com tais características, novas funções limites para dano e plasticidade.

Um estudo, sobre o efeito da modificação da função de dano é apresentado a seguir.

5.2 – ESTUDO DA VIABILIDADE DO MODELO DE DANO CONCENTRADO

O estudo aqui apresentado não tem a pretensão de propor uma nova função limite para o dano, uma vez que não foram realizados estudos experimentais. O objetivo é mostrar que o modelo de dano concentrado pode ser eficaz desde que as funções que controlam o início e a evolução das variáveis relacionadas ao dano e plasticidade sejam definidas de forma consistente com as características dos elementos estruturais a serem analisados.

Com tal objetivo, o estudo toma por base as seguintes funções de dano e plasticidade:

$$\begin{aligned} f &= \left| M - \left(\frac{1-d}{4-d} \right) c\phi_p \right| - 4 \left(\frac{1-d}{4-d} \right) M_y \\ g_1 &= G - \left(G_{cr} + q_1 \frac{\ln(1-d)}{1-d} \right) \\ g_2 &= G - \left(G_{cr} + q_2 \frac{(\ln(1-d))^2}{1-d} \right) \end{aligned} \quad (5.1)$$

As curvas mostrando a variação do dano, levando-se em conta as funções g_1 e g_2 , em função da força termodinâmica G a ele associado são mostradas a seguir. Tais curvas foram identificadas para um material com as seguintes propriedades: $E = 29200$ MPa, $A = 12 \times 30$ cm, $L = 40,00$ cm, $M_{cr} = 8,00$ kN.m, $M_u = 32,00$ kN.m, $q_1 = -1,75 \times 10^{-02}$ kN.m e $q_2 = 1,198 \times 10^{-02}$ kN.m. Os parâmetros q_1 e q_2 foram identificados pelos procedimentos descritos nos itens 2.5.1 e 5.2.1, respectivamente.

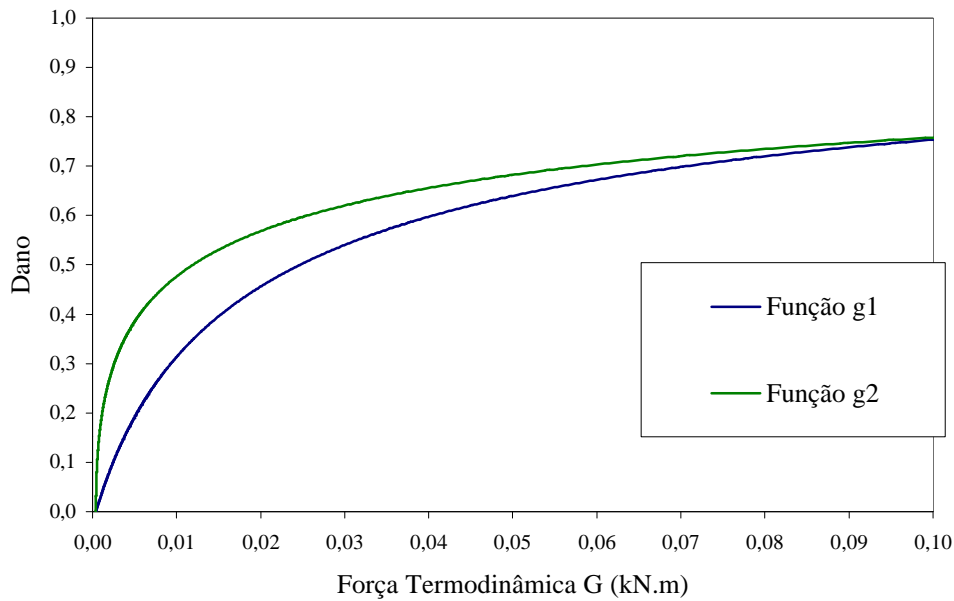


Figura 5.1 – Dano como função da força termodinâmica G.

A figura 5.1 mostra que ao adotar a função g_2 , para indicar o início e evolução da variável de dano, tem-se inicialmente uma evolução mais rápida da variável de dano, ou seja, o processo inicial de dissipação de energia em função do dano será maior para a função g_2 . Tal comportamento da variável de dano pode ser interessante, visto que no caso das vigas simuladas no capítulo anterior a evolução inicial do dano, utilizando-se a função g_1 , não reproduz o comportamento verificado experimentalmente.

5.2.1 – Identificação Paramétrica a Partir da Função g_2

O cálculo dos parâmetros é feito utilizando-se as funções f e g_2 , definidas no conjunto de equações 5.1, mediante a resolução do seguinte sistema de equações não-lineares.

$$\left\{ \begin{array}{l} M = M_{cr} \Rightarrow d = 0 \quad e \quad g = 0 \\ M = M_p \Rightarrow \Phi^P = 0; f = 0 \quad e \quad g = 0 \\ M = M_u \Rightarrow \Phi^P = \Phi_u^P \quad e \quad f = 0 \\ M = M_u \Rightarrow \frac{dM}{dd} = 0 \quad e \quad g = 0 \end{array} \right. \quad (5.2)$$

onde M_{cr} , M_p , M_u , Φ_u^P e dM continuam tendo os mesmos significados definidos no item 2.5.1.

A primeira condição indica que o dano tem início somente quando o momento na rótula alcança o momento de fissuração M_{cr} . Se as forças termodinâmicas conjugadas ao dano são dadas por:

$$\begin{aligned} G_i &= \frac{1}{2S_{11}^0} \left[\frac{M_i}{(1-d_i)} \right]^2 \\ G_j &= \frac{1}{2S_{22}^0} \left[\frac{M_j}{(1-d_j)} \right]^2 \\ G_n &= \frac{1}{2S_{33}^0} \left[\frac{N}{(1-d_n)} \right]^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Esta hipótese leva ao cálculo do valor de G_{cr} como uma função de M_{cr} , ou seja, com $d=0$ na equação (5.3)

$$G_{cr} = \frac{M_{cr}^2}{2S_{11}^0}. \quad (5.4)$$

A última condição indica que o momento como uma função do dano e que este alcança um d_u quando o momento é igual ao momento último M_u . A relação entre momento e dano pode ser obtida fazendo-se $g=0$:

$$\frac{M^2}{2S_{11}^0} = (1-d)^2 G_{cr} + q_2(1-d) (\ln(1-d))^2. \quad (5.5)$$

A procura de pontos críticos para M^2 na equação anterior mostra que

$$-2(1-d_u)G_{cr} + q_2 \left[2\ln(1-d_u) + (\ln(1-d_u))^2 \right] = 0 \quad (5.6)$$

onde d_u é o valor de dano correspondente ao momento último. Da substituição deste valor em (5.5) vem

$$\frac{M_u^2}{2S_{11}^0} = (1-d_u)^2 G_{cr} + q_2(1-d_u) (\ln(1-d_u))^2. \quad (5.7)$$

As equações (5.6) e (5.7) constituem um sistema de duas equações com duas incógnitas, o parâmetro q_2 e o valor d_u .

A segunda condição indica que a deformação plástica tem início quando o momento na rótula alcança o momento de plastificação da seção. Assumindo-se aí que o momento de fissuração já tenha sido alcançado ou ultrapassado, ou seja, $M_p \geq M_{cr}$. Assim, a equação $g=0$ neste caso fica

$$\frac{M_p^2}{2(1-d_p)^2 S_{11}^0} - G_{cr} - q \frac{(\ln(1-d_p))^2}{(1-d_p)} = 0 \quad (5.8)$$

A expressão (5.8) permite o cálculo de d_p que corresponde ao valor de dano na rótula quando o momento atinge o valor limite para início de plastificação. Agora, com a condição $f = 0$, tem-se

$$M_p - \frac{4(1-d_p)}{(4-d_p)} M_y = 0. \quad (5.9)$$

A equação (5.9) permite calcular o parâmetro M_y .

Finalmente a terceira condição mostra que:

$$M_u - \frac{(1 - d_u)}{(4 - d_u)} (c \Phi_u^p) - 4 \frac{(1 - d_u)}{(4 - d_u)} M_y = 0 \quad (5.10)$$

A equação (5.10) fornece o valor do parâmetro c , e dessa forma todos os parâmetros do modelo são identificados.

5.2.2 - Aplicação a Vigas de Concreto Armado

O modelo, agora, utiliza-se das funções limites f e g_2 para plasticidade e dano, respectivamente, e aplica-se à análise das vigas em concreto armado, cujas características são descritas no item 1.2. Os parâmetros definidos em função do procedimento descrito no item 5.2.1, são reunidos na tabela a seguir.

Tabela 5.1 – Parâmetros do modelo de danificação concentrada nas extremidades – função de dano g_2 - vigas em concreto armado.

<u>VIGA 3φ10,00mm</u>	<u>VIGA 5φ10,00mm</u>	<u>VIGA 7φ10,00mm</u>
$M_{cr} = 8,00 \times 10^{-03}$ MN.m	$M_{cr} = 10,00 \times 10^{-03}$ MN.m	$M_{cr} = 12,50 \times 10^{-03}$ MN.m
$M_p = 8,00 \times 10^{-03}$ MN.m	$M_p = 10,00 \times 10^{-03}$ MN.m	$M_p = 12,50 \times 10^{-03}$ MN.m
$M_u = 32,00 \times 10^{-03}$ MN.m	$M_u = 48,00 \times 10^{-03}$ MN.m	$M_u = 52,00 \times 10^{-03}$ MN.m
$\phi_{pu} = 0.009$	$\phi_{pu} = 0.010$	$\phi_{pu} = 0.013$
$c = 76,086$ MN.m	$c = 106,611$ MN.m	$c = 88,109$ MN.m
<u>Para L = 0,40 m</u>	<u>Para L = 0,40 m</u>	<u>Para L = 0,40 m</u>
$q_2 = 1,198 \times 10^{-05}$ MN.m	$q_2 = 2,697 \times 10^{-05}$ MN.m	$q_2 = 3,164 \times 10^{-05}$ MN.m
<u>Para L = 0,80 m</u>	<u>Para L = 0,80 m</u>	<u>Para L = 0,80 m</u>
$q_2 = 2,396 \times 10^{-05}$ MN.m	$q_2 = 5,394 \times 10^{-05}$ MN.m	$q_2 = 6,328 \times 10^{-05}$ MN.m

As figuras, a seguir, mostram os resultados numéricos do modelo implementado com a função limite de dano g_2 confrontados com os obtidos pelo

modelo implementado com a função limite de dano g_1 e respostas experimentais das vigas em concreto armado. As análises foram conduzidas utilizando-se a mesma discretização utilizada na obtenção dos resultados numéricos do item 4.2.1.

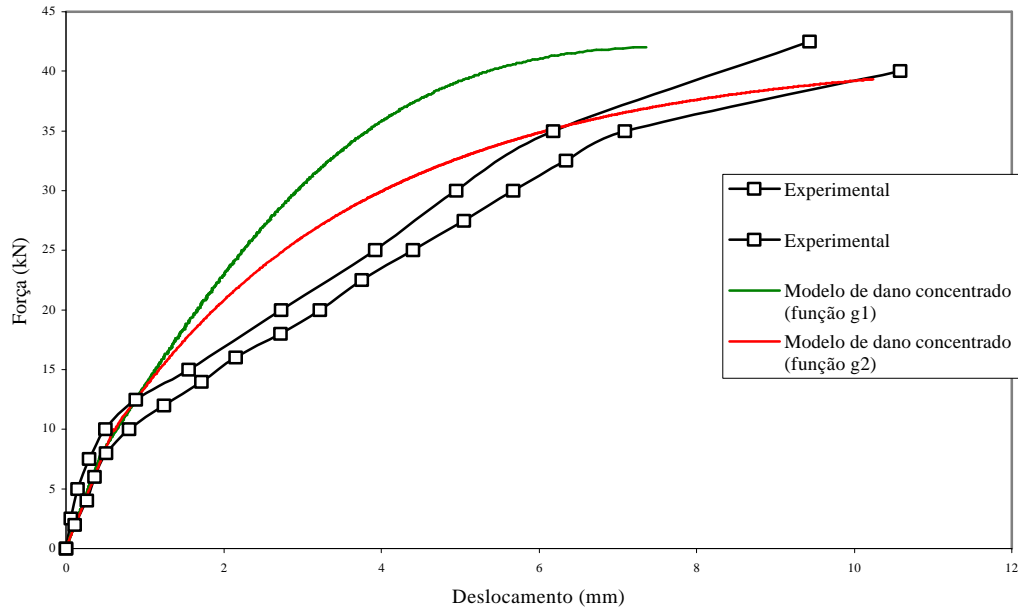


Figura 5.2 – Resultados numéricos – viga 3f10,00mm.

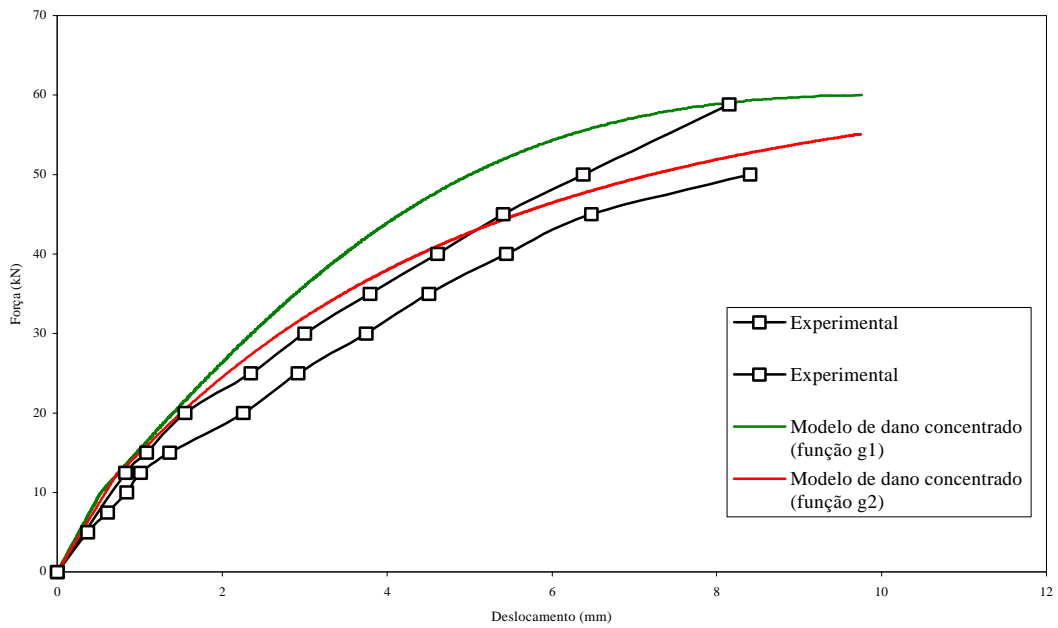


Figura 5.3 – Resultados numéricos – viga 5f10,00mm.

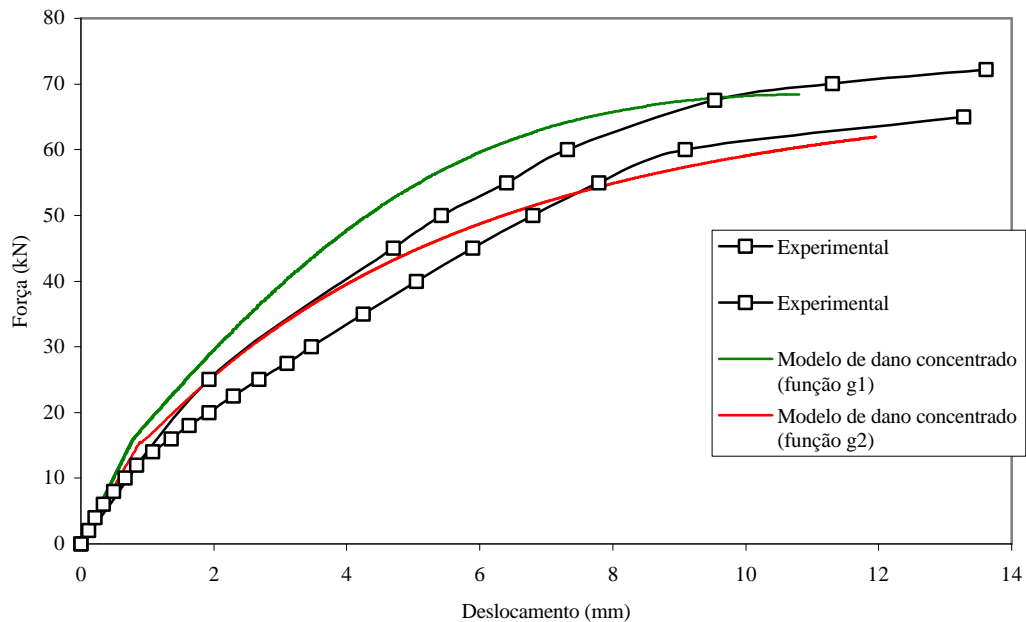


Figura 5.4 – Resultados numéricos – viga 7f10,00mm.

As figuras 5.2, 5.3 e 5.4 mostram uma melhora considerável na eficácia do modelo quando da consideração de uma função limite de dano mais apropriada à análise de estruturas que não apresentam armadura longitudinal simétrica. As respostas numéricas das vigas, com o procedimento adotado, podem ser consideradas muito satisfatórias, mesmo para a viga 3φ10,00mm (figura 5.2) cujos resultados ainda não reproduzem com total eficácia a resposta experimental.

5.2.3 – Pórtico em Concreto Armado

O pórtico em concreto armado do item 4.2.2, também foi analisado pelo procedimento aqui adotado. Apesar de apresentar armadura longitudinal simétrica

para todos os elementos estruturais constituintes da estrutura, o modelo de dano concentrado, implementado com a função limite de dano g_1 , não foi capaz de descrever com eficácia o comportamento observado nas investigações experimentais.

Os parâmetros obtidos para o pórtico, quando da consideração da função limite de dano g_2 , são apresentados na tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Parâmetros do modelo de danificação concentrada nas extremidades – função de dano g_2 – pórtico em concreto armado.

<u>VIGAS</u>	<u>COLUNAS</u>
$M_{cr} = 0,28 \times 10^{-1} \text{ MN.m}$	$M_{cr} = 0,69 \times 10^{-1} \text{ MN.m}$
$M_p = 1,61 \times 10^{-1} \text{ MN.m}$	$M_p = 2,53 \times 10^{-1} \text{ MN.m}$
$M_u = 1,89 \times 10^{-1} \text{ MN.m}$	$M_u = 2,73 \times 10^{-1} \text{ MN.m}$
$\phi_{pu} = 1,67 \times 10^{-2}$	$\phi_{pu} = 0,60 \times 10^{-2}$
$c = 168,623 \text{ MN.m}$	$c = 543,727 \text{ MN.m}$
$q = 6,303 \times 10^{-4} \text{ MN.m}$	$q = 7,513 \times 10^{-4} \text{ MN.m}$
$M_y = 3,91 \times 10^{-1} \text{ MN.m}$	$M_y = 7,66 \times 10^{-1} \text{ MN.m}$

A resposta numérica, figura 5.5, mostra, como nos exemplos anteriores que empregaram a função limite de dano g_2 , uma melhora considerável da resposta numérica, aproximando-se em muito da resposta experimental (VECCHIO & EMARA (1992)) e chegando a apresentar, na região pós-pico da curva, um desempenho melhor que o modelo de LA BORDERIE (1991).

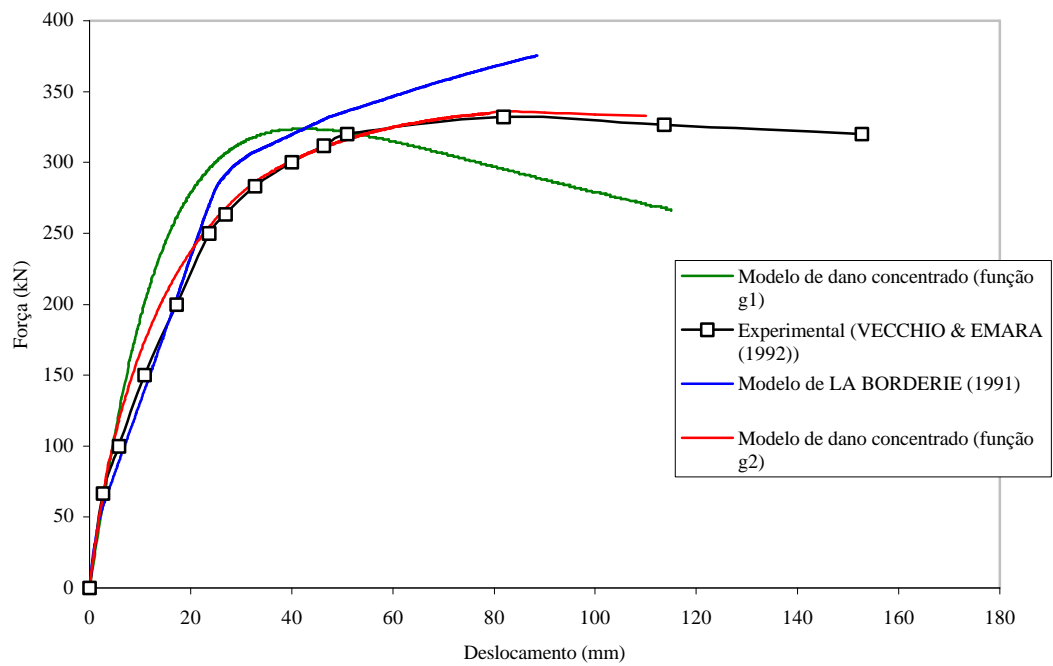


Figura 5.5 – Resultados numéricos – pórtico em concreto armado.

CAPÍTULO 6 CONCLUSÕES

6.1 - ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ESTUDO DESENVOLVIDO

Este trabalho trata do estudo, implementação numérica, verificação das respostas numéricas dos modelos simplificados de dano aplicados a estruturas de concreto armado e proposição de um novo procedimento na determinação da matriz de rigidez de um elemento onde o fenômeno de danificação é considerado localizado em suas extremidades.

Inicialmente foram comentados aspectos ligados aos processos de deterioração estrutural em vigas de concreto armado, discutindo-se quais os fenômenos determinantes na resposta global e qual o tipo de análise que melhor se adapta tomando-se por base o confronto de respostas numéricas de modelos simplificados com respostas experimentais.

Da revisão bibliográfica destacaram-se cinco modelos simplificados, cada qual traz na sua formulação diferentes formas de modelar os processos que geram a evolução da degradação estrutural. Dos cinco modelos, dois serviram de base para o

estudo, um que considera os fenômenos distribuídos ao longo do elemento e outro que os considera concentrados nas suas extremidades.

Do estudo do modelo proposto por FLÓREZ-LÓPEZ (1993a), que considera os fenômenos concentrados nas extremidades, propôs-se um novo procedimento para a determinação da matriz de rigidez do elemento deteriorado ($d \geq 0$). Esta matriz, em conjunto com as funções limites de danificação e plastificação do modelo original, foi implementada em um código de cálculo em elementos finitos a fim de testar a sua eficácia em estruturas rotineiras, cujo comportamento não-linear nem todos os modelos propostos conseguem reproduzir, como, por exemplo uma viga em balanço.

Análises de casos mais complexos foram conduzidas empregando-se independentemente os modelos de LA BORDERIE (1991) e de FLÓREZ-LÓPEZ (1993a), este implementado com a matriz de rigidez aqui proposta. Tais análises mostraram que o modelo de LA BORDERIE (1991) é bastante eficaz em relação ao comportamento global da estrutura e que o modelo de dano e plasticidade concentrados é eficiente somente no que diz respeito à captura da carga máxima.

Porém um estudo envolvendo a combinação dos dois modelos em uma mesma análise evidenciou que o modelo de dano concentrado pode ser útil quando confinado nas regiões onde os fenômenos são uniformemente distribuídos. Além disso, o emprego em conjunto dos dois modelos reduz em muito o número de elementos finitos utilizados na discretização e, por conseqüência, o esforço computacional envolvido na análise.

No entanto, o estudo mais detalhado do modelo de dano e plasticidade concentrada, mostrou que o aparente baixo desempenho numérico poderia ser significativamente melhorado. É importante observar que as funções limites inicialmente propostas por FLÓREZ-LÓPEZ (1993a) foram calibradas para estruturas que tinham armadura longitudinal simétrica, fato este constatado nas estruturas que constam nos trabalhos por ele publicados. Aquí propôs-se uma função de dano que mostrasse com mais realismo a evolução inicial da força termodinâmica associada ao dano, e que pode ser empregada com sucesso na análise de estruturas semelhantes às estudadas neste trabalho, ou seja, estruturas com armadura longitudinal não simétrica. De fato, evidências experimentais mostraram que o processo de deterioração inicial é mais forte nas estruturas analisadas.

6.2 - CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS

Considerando-se a simplicidade da formulação e implementação, pode-se afirmar que o modelo de dano e plasticidade concentrada pode apresentar bom desempenho desde que as funções adotadas pelo modelo para controlar a evolução dos fenômenos envolvidos no processo de dissipação de energia sejam definidas adequadamente com o tipo do elemento e arranjo de armadura a ser considerado. O outro modelo explorado no estudo apresentou melhores resultados, pois apesar de suas hipóteses simplificadoras, leva em conta na sua formulação os efeitos do dano distribuído ao longo do comprimento da barra e isto tem influência na resposta global da estrutura.

Quanto às etapas de trabalho, deve-se destacar, particularmente a determinação da matriz de rigidez levando em conta a influência do dano concentrado nas extremidades do elemento sobre o fator de transmissão de esforços.

Com relação à experimentação numérica, pode-se destacar a utilização dos modelos de LA BORDERIE (1991) e de dano e plasticidade concentrada proposto originalmente por FLÓREZ-LÓPEZ (1993a), estendido com a matriz de rigidez aqui proposta. As análises numéricas indicaram um potencial muito grande para o modelo de LA BORDERIE (1991), com a desvantagem de um maior custo computacional. Por outro lado, o modelo de dano e plasticidade concentrada mostrou-se eficiente particularmente quando utilizado em conjunto com outro modelo que considere fenômenos como dano e plasticidade distribuídos ao longo da barra. Tal procedimento pode diminuir em muito o esforço computacional envolvido na análise.

Mas, além disso, o modelo de danificação concentrada pode ser eficiente mesmo quando empregado isoladamente desde que adotados critérios de dano e plasticidade coerentes com as características dos elementos estruturais a serem estudados.

Como considerações finais entende-se que o modelo de dano e plasticidade concentrada pode ser estendido para sua aplicação em situações mais próximas da realidade exigindo-se uma melhor identificação das funções limites de dano e

plasticidade através de ensaios em elementos estruturais semelhantes aos envolvidos na análise.

Outra sugestão, seria a adoção de alguma combinação com formulações semelhantes às descritas no capítulo de revisão bibliográfica. Os modelos ali apresentados, e não explorados mais a fundo neste estudo, como o proposto por ALVES & LUBLINER (1992), constituem um vasto material que pode ser utilizado numa melhor descrição do comportamento não-linear de barras em concreto armado.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACKER, P. (1987). *Comportement mécanique du béton: apports de l'approche physico-chimique*. Paris, 1987. Thèse de Doctorat de l'E.N.P.C.
- ÁLVARES, M.S. (1993). *Estudo de um modelo de dano para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação com emprego do método dos elementos finitos*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos - USP.
- ÁLVARES, M.S.; PITUBA, J.J.C.; PROENÇA, S.P.B. (1998). Resposta numérica de modelos de dano aplicados a estruturas de concreto armado. III CONGRESSO DE ENGENHARIA CIVIL, Juiz de Fora, 1998. *Anais*. Minas Gerais, p.185-94.
- ALVES, B.K.; LUBLINER, J. (1992). A damage mechanics model for beams. Application to reinforced concrete beams. In. ALDER, H.; HEINRICH, J.C.; OÑATE, E.; SUÁREZ, B. ed. *Numerical methods in engineering*. Barcelona, *Proc. CIMNE*, p.277-286,

- ALVES, B.K.; LUBLINER, J. (1994). A damage model for beams: a linear damage evolution model. *European Journal of Mechanics, A/Solids*, vol.13, n.2, p.189-213.
- ARGYRIS, J.H. et al. (1974). Recent developments in the finite element analysis of prestressed concrete reactor vessels. *Int. J. Nuclear Eng. and Design*, vol.28.
- BAZANT, Z.P.; PIJAUDIER-CABOT, G. (1989). Measurement of characteristic length of non local continuum. *J. of Engng. Mechanics, ASCE*, vol.115, n.4, p.755-67.
- BENDITO, A.; THONSOM, E.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. (1997). Fatiga oligocíclica en elementos estructurales en concreto armado. In: XXVIII JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, São Carlos, 1997. *Anais. São Carlos*, v.5, p.2079-88.
- BERNEDE, P. (1994). *Effet de l'oxydation sur la fissuration en fatigue-fluage d'un superalliage pour disques de turbines, l'astroloy*. Paris, France, Ecole Nationale Supérieure des Mines.
- BERTHAUD, Y. (1991). *Mesures et modelisations de l'endommagement des materiaux*. Paris, 1991. Memoire d'habilitation a diriger des recherches – Université Paris 6.
- BILLARDON, R. (1989). *Etude de la rupture par la mécanique de l'endommagement*. Paris, 1989. Thèse (Doctorat d'état) - Université Paris 6.
- BOLZON, G.; BILLARDON, R. (1995). *A approximate method for fatigue-life prediction of framed structures*. Cachan, France, Laboratoire de Mécanique et Technologie, (Rapport Interne)

- CEDOLIN, L.; DEI POLI, S. (1977). Finite elements studies of shear-critical r/c beams. *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, vol.103, n.EM3, Jun.
- CHEN, A.C.T.; CHEN, W.F. (1975). Constitutive relations for concrete. *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, vol.101, n.EM4, Aug.
- CIPOLLINA, A.; LÓPEZ-INOJOSA, A.; FLÓREZ-LÓPEZ, J. (1995). A simplified damage mechanics approach to non-linear analysis of frames. *Computers and Structures*, v.54, n.6, p.1113-1126.
- CLOUGH, R.W. (1966). *Effect of stiffness degradation on earthquake ductility requirements*. Rep. N^o 66-16, University of California, Berkeley, Oct.
- COHN, Z.M.; FRANCHI, A. (1979). STRUPL: A computer system for structural plasticity. *J. Struct. Div.*, ASCE, v.105, n.4, p.789-804.
- COHN, Z.M.; KRZYWIECKI, W. (1987). Nonlinear analysis system for concrete structures: STRUPL-1C. *Eng. Struct.*, vol.9, Apr, p.104-23.
- COMI, C.; BERTHAUD, Y.; BILLARDON, R. (1995). On localization in ductile-brittle materials under compressive loadings. *Eur. J. Mech., A/Solids*, vol.14, n.1, p.19-43.
- CORIGLIANO, A. (1992). *Formulation, identification and use of interface models in the numerical analysis of composite delamination*. Cachan, France, Laboratoire de Mécanique et Technologie, (Rapport Interne n.135)
- DAVIDSON, D.L. (1981). Incorporating threshold and environmental effects into the damage accumulation model for fatigue crack growth. *Fatigue Engng Mater. Struct.*, v.3, p.229-236.

- DE FOUQUET, J. (1980). Effet d'environnement. In: BATHIAS, C.; BAILON, J.P., eds. *La fatigue des matériaux et des structures*. Paris, Maloine Editeur, p.291-311.
- FILIPPOU, F. (1983). *Effects of bond deterioration on seismic response of RC frames*. Berkeley, 1983. Ph.D Dissertation, University of California, May.
- FLÓREZ-LÓPEZ, J. (1993a). Calcul simplifié de portiques endommageables. *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol.2, n.1, p.47-74.
- FLÓREZ-LÓPEZ, J. (1993b). Modelos de daño concentrado para la simulation numerica del colapso de porticos planos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, vol.9, n.2, p.123-139.
- GERMAIN, P. (1973). *Cours de mécanique des milieux continus*. Paris, Université de Paris. Tome I.
- HAN, R.P.S.; MOU, Y. (1993). *Void induced damage in ductile materials*. In: 14th CANCAM, Kingston, Ontario.
- HILSDORF, H.K. (1969). *Drying and shrinkage of concrete and reinforced concrete structures*. Ernst and Sohn.
- HULT, J. (1988). Engineering damage mechanics - Past and present. *Revist. Phys. Appl.*, vol.23, p.245-276.
- JANSON, J.; HULT, J. (1977). Fracture mechanics and damage mechanics a combined approach. *Journal de Mécanique Appliquée*, vol.1, n.1, p.69-84.
- JU, J.W. (1989). On energy based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects. *Int. J. Solids Structures*, vol.25, p.803-833.

- KACHANOV, L.M. (1958). Time of the rupture process of non-linear solid mechanics. *Otd.. Tech. Nauk.*, v.8, p.28-31.
- KACHANOV, L.M. (1984). On brittle fracture of a thin plastic interlayer in creep conditions. In: DVORAK, G.; SHIELD, R., ed. *Mechanics of material behavior*. Amsterdam, Elsevier.
- KATTAN, P.I.; VOYIADJIS, G.Z. (1990). A coupled theory of damage mechanics and finite strain elasto-plasticity - I. Damage and elastic deformations. *Int. J. Eng. Sci.*, vol.28, n.5, p.421-435.
- KRAJCINOVIC, D. (1989). Damage mechanics. *Mechanics of Materials*, vol.8, p.117-197.
- KUPFER, H.B.; GERSTLE, K.H. (1973). Behavior of concrete under biaxial stresses. *J. Eng. Mech. Div.*, ASCE, vol.99, n.EM4, Aug.
- LA BORDERIE, C. (1991). *Phenomenes unilateraux dans un materiau endommageable: modelisation et application a l'analyse de structures en beton*. Paris, 1991. Thèse (Doctorat) - Université Paris 6.
- LA BORDERIE, C.; PIJAUDIER-CABOT, G.; MAZARS, J. (1991). *Response of plain and reinforced concrete structures under cyclic loadings*. Cachan, France, Laboratoire de Mécanique et Technologie. (Rapport Interne, n.123)
- LAL, D.N. (1992). A model for the effect of a gaseous environment on the LEFM fatigue threshold condition of steels. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, v.15, p.793-807.

- LARSSON, R.; RUNESSON, K.; OTTOSEN, N.S. (1993). Discontinuons displacement approximation for capturing plastic localization. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol.36, n.12, p.2087-2105.
- LEMAITRE, J. (1984). How to use damage mechanics. *Nucl. Eng. Des.*, v.80, p.233.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.L. (1974). A non-linear model of creep-fatigue damage cumulation and interation. In: IUTAM SYMP. OF MECHANICS OF VISCOELASTIC MEDIA AND BODIES, Gothenburg, 1974. *Proc. Springer*.
- LEMAITRE, J.; CHABOCHE, J.C. (1985). *Mécanique des matériaux solids*. Paris, Dunod-Bordas.
- LEMAITRE, J.; MARQUIS, D. (1988). Modelling elasto-plasticity, damage and ageing as coupled behaviours in engineering materials. *Revist. Phys. Appl.*, vol.23, p.277-302.
- LIU, T.C.Y.; NILSON, A.H.; SLATE, F.O. (1972). Biaxial stress strain relations for concrete. *J. Struct. Div.*, ASCE, vol.98, n.ST5, May.
- LUBLINER, J. (1991). A simple model of generalized plasticity. *Int. J. Solids Structures*, vol.28, n.6, p.769-78.
- LUCCIONI, B.; RAMALHO, J.C.; DANESI, R.F. (1997). Prediccion del comportamiento de estructuradas reparadas bajo carga. XXVIII JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, São Carlos, 1997. *Anais. São Carlos*, v.4, p.1487-96.
- MAIER, G. (1968). *Sul comportamento flessionale instabile nelle travi inflesse elastoplastiche*. Rendiconte dell'Ístituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. 102, p.648-77.

- MAIER, G. (1969). *'Linear' flow-laws of elastoplasticity: a unified general approach*. Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Serie VIII, vol.47, n.5, p.266-76.
- MAIER, G.; DE DONATO, L.; CORRADI, L. (1973). Inelastic analysis of reinforced concrete frames by quadratic programming. In: SIMP. ON INELASTICITY AND NONLINEARITIES IN STRUCT. CONCR., Univ. of Waterloo, Canada, 1973.
- MARIGO, J.J. (1985). Modeling of brittle and fatigue damage for elastic material by growth of microvoid. *Eng. Fract. Mech.*, v.21, p.861.
- MAZARS, J. (1984). *Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure*. Paris, 1984. Thèse (Doctorat d'état) - Université Paris 6.
- MAZARS, J.; BERTHAUD, Y.; RAMTANI, S. (1990). The unilateral behavior of damage concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.35, n.4/5, p.629-635.
- MULAS, M.G.; FILIPPOU, F.C. (1990). Analytical procedures in the study of seismic response of reinforced concrete frames. *Eng. Struct.*, v.12, Jan.
- MURAKAMI, S. (1981). Effects of cavity distribution in constitutive equations of creep and creep damage. In: EUROMECH COLLOQUE ON DAMAGE MECHANICS, Cachan, France, 1981.
- ÒLLER, S.; LUCCIONI, B.; BARBAT, A.H. (1996). Un método de evaluación del daño sísmico en estructuras de hormigón armado. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v.12, n.2, p.215-238.

- ÒLLER, S.; OÑATE, E.; OLIVER, J.; LUBLINER, J. (1990). Finite element nonlinear analysis of concrete structures using a “plastic-damage model”. *Engineering Fracture Mechanics*, vol.35, n.1/2/3, p.219-231.
- OLLIVIER, J.P. (1985). A non-destructive procedure to observe the microcracks of concrete by scanning electron microscopy. *Cement and Concrete Research*, vol.15, n.6, p.1055-60.
- OTTOSEN, N.S. (1979). Constitutive model for short-time loading of concrete. *J. Eng. Mech. Div.*, vol.105, n.EM1, Feb.
- OWEN, D.R.J.; FILGUEIRAS, J.A.; DAMJANIC, F. (1983). Finite element analysis of reinforced and prestressed concrete structures including thermal loading. *Comp. Meth. Appl. Mach. Eng.*, vol.41.
- PELLOUX, R.M. (1980). Fadigue-corrosion. In: BATHIAS, C.; BAILON, J.P., eds. *La fatigue des materiaux et des structures..* Paris, Maloine Editeur, 1980. p.271-289.
- PETERSSON, P.E. (1980). Fracture energy of concrete: method of determination. *Cement and Concrete Research*, vol.10.
- PITUBA, J.J.C. (1998). *Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos - USP.
- PRIGENT, P. (1993). *Modèle de propagation de fissure à haute température avec interaction fatigue-fluage-oxydation*. Châtillon, France, Thèse (Doctorat).-Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

- PROENÇA, S.P.B. (1986). *Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto*. Tese (Doutorado) - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos - USP.
- PROENÇA, S.P.B. (1992). Simulação numérica do comportamento de elementos estruturais em concreto e argamassa armada pelo emprego de um modelo de dano. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, v.8.4, p.351-60.
- PROENÇA, S.P.B. (1997). Sobre atividades de pesquisa em mecânica de materiais e análise não-linear de estruturas. Tese (Livre Docência) - Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos - USP.
- PROENÇA, S.P.B.; ÁLVARES, M.S. (1992). On numerical performance of a damage model applied to analysis of concrete structural members. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING AND APPLIED SCIENCES, Concepcion, Chile, 1992. *Anais*.
- PROENÇA, S.P.B.; ÁLVARES, M.S. (1994). About numerical precision aspects on the use of a continuum damage model to concrete. In: XV CILAMCE, Belo Horizonte, 1994. *Anais*.
- QUINTERO, G.; GÓMEZ, G.; FLÓREZ-LÓPEZ, J.; INGLESSIS, P. (1997). Modelos simplificados de daño para el análisis de estructuras en acero. XXVIII JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, São Carlos, 1997. *Anais*. São Carlos, v.5, p.2149-58.
- RAGAB, A.; ALAWI, H.; SOREIN, K. (1989). Corrosion fatigue of steel in various aqueous environments. *Fatigue Fract. Engng. Mater. Struct.*, v.12, p.469-479.

- RAMTANI, S. (1990). *Contribution à la modélisation du comportement multiaxial du béton endommagé avec description du caractère unilatéral*. Paris, 1990. Thèse de Doctorat – Université Paris 6.
- RIVA, P. (1988). *Engineering approaches to nonlinear analysis of concrete structures*. Ontario, Canada, 1988. Tesis Ph.D – University of Waterloo.
- RIVA, P.; COHN, M.Z. (1990). Engineering approach to non-linear analysis of concrete structures. *J. Struct. Div.*, ASCE, v.116, n.8, p.2162-2185.
- SAENZ, L.P. (1965). Equation for stress strain curve of concrete in uniaxial and biaxial compression of concrete. *A.C.I. Journal*, vol.61.
- SIMO, J.C.; JU, J.W. (1987). Stress and strain based continuum damage models: I. Formulation. *Int. J. Solids Structures*, v.23, p.821.
- SOLEIMANI, D.; POPOV, E.P.; BERTERO, V.V. (1979). Nonlinear beam model for RC frame analysis. In: *Proc. Seventh ASCE Conf. On Electronic Computation*, St. Louis, MO, USA, Aug.
- SPOONER, D.C.; DOUGILL, J.W. (1975). A quantitative assesment of damage sustained in concrete during compressive loading. *Megazine of Concrete Research*, vol.27, n.92, Sept.
- SPOONER, D.C.; POMEROY, C.D.; DOUGILL, J.W. (1976). Damage and energy dissipation in cement pastes in compression. *Megazine of Concrete Research*, vol.28, n.94, March.
- SUIDAN, M.; SCHINOBRICH, W.C. (1973). Finite elements analysis of reinforced concrete. *J. Struct. Div.*, ASCE, vol.99, Oct.

TAI, W.H. (1990). Plastic damage and ductile fracture in mild steels. *Eng. Fract. Mech.*, v.37, p.853.

VECCHIO, F.J.; EMARA, M.B.E. (1992). Shear deformations in reinforced concrete frames. *ACI Structural Journal*, v.89, n.1, p. 46-56.

WRIGGERS, P.; SIMO, J.C. (1990). A general procedure for the direct computation of turning and bifurcation points. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol.30, p.155-176.

APÊNDICE 1

IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA: PROGRAMA EFiCoS

A seguir descreve-se a aproximação utilizada para a implementação do modelo de LA BORDERIE (1991) em um código de cálculo em elementos finitos. O programa chamado de EFiCoS (*Eléments Finis à Couches Superposées*), foi desenvolvido pelos pesquisadores do LMT Cachan – França, e gentilmente cedido para o desenvolvimento desse estudo. EFiCoS utiliza uma aproximação semi-global em elementos finitos de vigas (barras) estratificados, OWEN (1980).

1 - PRINCÍPIO DE CÁLCULO

O elemento de viga estratificado é baseado em um elemento de viga clássico com dois nós e três graus de liberdade (u , v e q) por nó, figura A.1.

A integração da lei de comportamento é obtida após discretização em estratos do elemento dentro de sua altura.

As hipóteses feitas para a implementação numérica do modelo são:

- Despreza-se as deformações devidas a distorção ϵ_{xy} ;
- As seções originalmente planas permanecem planas.

2 - EQUILÍBRIO DO ELEMENTO

A relação de equilíbrio a ser verificada para o elemento é dada pelo princípio dos trabalhos virtuais, escrito como:

$$\delta U^T \mathbf{F} = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} \, dv \quad \text{com} \quad \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T = \delta (\mathbf{B} \mathbf{U})^T = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{B}^T \quad (1)$$

Considerando que a deformação é composta pelas partes elástica e anelástica, tem-se:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{E(D)} + \boldsymbol{\varepsilon}_{an}(D). \quad (2)$$

Assim

$$\boldsymbol{\sigma} = E(D) [\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{an}(D)]. \quad (3)$$

onde D é a variável de dano.

Portanto a relação (1) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\delta U^T \mathbf{F} = \int_V \delta \mathbf{U}^T \mathbf{B}^T E(D) (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{an}(D)) \, dv. \quad (4)$$

Seja

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{B}^T E(D) (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_{an}(D)) \, dv \quad (5)$$

ou ainda

$$\mathbf{F} = \left\{ \int_V \mathbf{B}^T E_{(D)} \mathbf{B} \, dv \right\} \mathbf{U} - \int_V \mathbf{B}^T E_{(D)} \boldsymbol{\varepsilon}_{an}(D) \, dv. \quad (6)$$

Sendo $\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}_{(D)} \mathbf{B} dv$ a matriz de rigidez elementar e $\mathbf{F}_{an} = - \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}_{(D)} \boldsymbol{\varepsilon}_{an(D)} dv$ o esforço anelástico elementar, tem-se:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_{(D)} \mathbf{U} + \mathbf{F}_{an(D)}. \quad (7)$$

Com essa repartição de não linearidade dentro da matriz de rigidez e no vetor de esforços anelásticos LA BORDERIE consegue conservar uma matriz de rigidez secante não singular quando a estrutura é submetida a carregamentos cíclicos, situação que não será abordada nesse trabalho.

3 - MATRIZ DE RIGIDEZ DO ELEMENTO E VETOR DE ESFORÇOS ANELÁSTICOS

Para a formulação numérica do modelo foram feitas as seguintes aproximações:

- O elemento de base é discretizado em N estratos, figura A.1;
- O módulo de elasticidade e a deformação anelástica são constantes dentro de uma mesma camada.

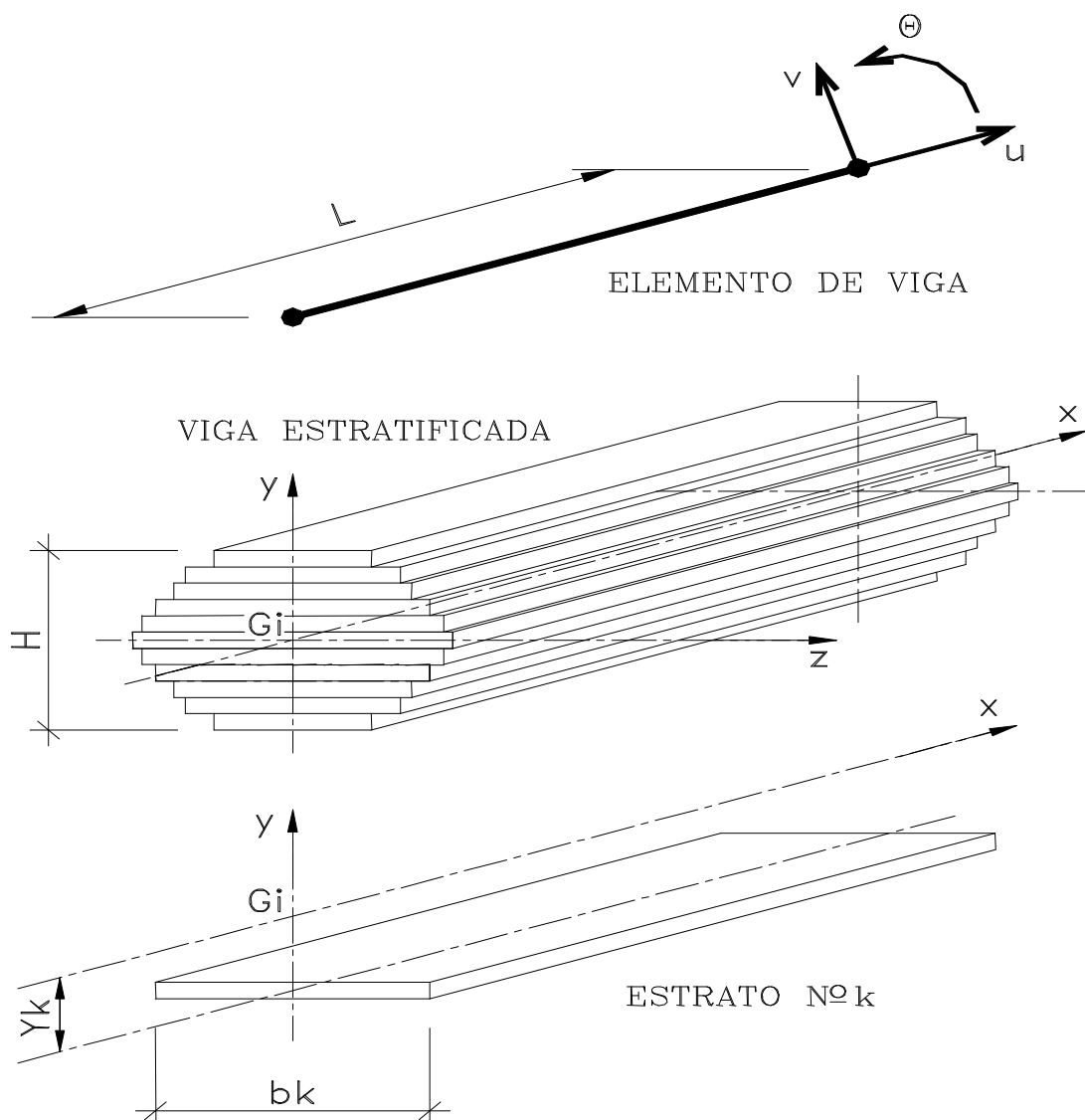


Figura A.1 – Elemento Finito estratificado. LA BORDERIE (1991).

Matriz de Rigidez do Elemento

Utilizando o índice ℓ para indicar as grandezas relativas ao estrato N^o ℓ e aproximando as integrais pela soma de RIEMANN, tem-se a seguinte representação para a matriz de um elemento finito de barra estratificado no modelo:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & k_4 & -k_1 & 0 & -k_4 \\ & k_3 & k_5 & 0 & -k_3 & k_5 \\ & & k_6 & -k_4 & -k_5 & 0,5k_6 \\ & & & k_1 & 0 & k_4 \\ \text{SIM} & & & & k_3 & -k_5 \\ & & & & & k_6 \end{bmatrix} \quad (8)$$

com:

$$k_1 = \frac{h}{L} \sum_{\ell=1}^N E_{\ell} b_{\ell} \quad k_5 = \frac{6h}{L^2} \sum_{\ell=1}^N E_{\ell} b_{\ell} y_{\ell}^2$$

$$k_3 = \frac{12h}{L^3} \sum_{\ell=1}^N E_{\ell} b_{\ell} h_{\ell} y_{\ell}^2 \quad k_6 = \frac{4h}{L} \sum_{\ell=1}^N E_{\ell} b_{\ell} y_{\ell}^2$$

$$k_4 = -\frac{h}{L} \sum_{\ell=1}^N E_{\ell} b_{\ell} y_{\ell}$$

Vetor de Esforços Anelásticos

Por definição, o vetor de esforços anelásticos é

$$\mathbf{F}_{\text{an}} = - \int_{\mathbf{V}} \mathbf{B}^T E_{(D)} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{an}(D)} d\mathbf{v}$$

ou ainda

$$\mathbf{F}_{\text{an}} = - \sum_{\ell=1}^N \int_{\mathbf{V}_{\ell}} \mathbf{B}^T E_{(D)} \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{an}(D)} d\mathbf{v} \quad (9)$$

com $E = E_{\ell}$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_{\text{an}} = \boldsymbol{\varepsilon}_{\text{an}\ell}$ no estrato $N^{\circ} \ell$

$$\mathbf{F}_{an} = - \sum_{\ell=1}^N E_{\ell} \epsilon_{an\ell} \int_{V_{\ell}} \mathbf{B}^T dv \quad (10)$$

resultando em:

$$\mathbf{F}_{an} = \begin{bmatrix} f_1 \\ 0 \\ f_3 \\ -f_1 \\ 0 \\ -f_3 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \begin{aligned} f_1 &= -L h \sum_{\ell=1}^N E_{\ell} \epsilon_{an\ell} b_{\ell} \\ f_3 &= L h \sum_{\ell=1}^N E_{\ell} \epsilon_{an\ell} b_{\ell} y_{\ell} \end{aligned} \quad (11)$$

Matriz de Transformação

Sendo $\mathbf{L} (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ o conjunto de componentes na base local e $\mathbf{T} (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z})$ o conjunto de componentes na base global e α o angulo entre \mathbf{L} e \mathbf{T} , figura A.2,

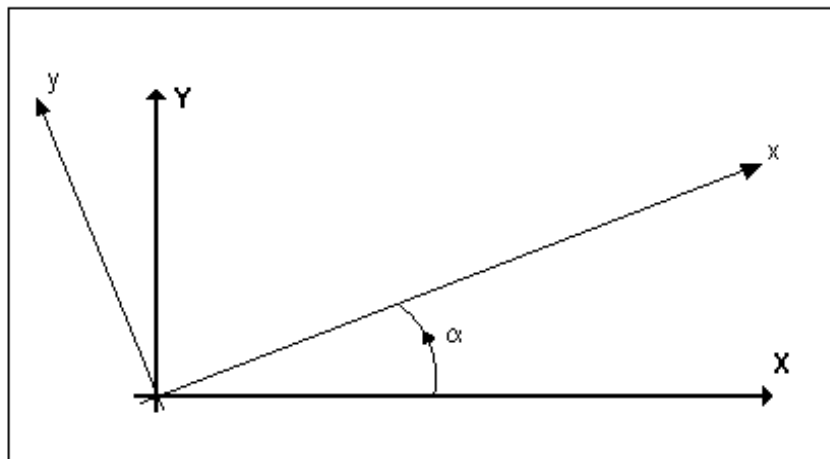


Figura A.2 – Transformação de bases.

A matriz de transformação que permite passar de \mathbf{L} para \mathbf{T} é:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Para transformar as coordenadas do vetor de deslocamentos generalizados \mathbf{U} , utiliza-se a seguinte matriz de rotação:

$$\tilde{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (13)$$

então

$$\mathbf{U}_T = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{U}_L \quad \text{e} \quad \mathbf{U}_L = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{U}_T. \quad (14)$$

Assim obtém-se a matriz de rigidez de membro e vetor de esforços anelásticos para os eixos da estrutura:

$$\mathbf{K}_T = \tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{K}_L \tilde{\mathbf{R}} \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_{anT} = \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{F}_{anL} \quad (15)$$

4 - CONTRIBUIÇÃO DA ARMADURA

Considerando que cada estrato pode ser constituído por concreto e aço, e supondo-se uma perfeita aderência entre os materiais constituintes, a integração dentro de um elemento composto por concreto e aço se faz utilizando a hipótese de homogeneização de VOIGT:

$$E_\ell = (1 - C_{al}) E_{bl} + C_{al} E_{al} \quad (16)$$

$$\varepsilon_{an\ell} = (1 - C_{al}) \varepsilon_{anb\ell} + C_{al} \varepsilon_{apl}$$

onde: $C_{a\ell}$ é a concentração volumétrica de aço dentro do estrato $N^\circ \ell$;
 $E_{a\ell}$ o módulo de elasticidade do aço dentro do estrato $N^\circ \ell$;
 $E_{b\ell}$ o módulo de elasticidade do concreto dentro do estrato $N^\circ \ell$;
 $\varepsilon_{p\ell}$ a deformação plástica do aço dentro do estrato $N^\circ \ell$;
 $\varepsilon_{an\ell}$ a deformação anelástica do concreto dentro do estrato $N^\circ \ell$.

Além da hipótese de aderência perfeita entre os materiais, o modelo também contém hipóteses próprias da cinemática do elemento utilizado que fazem com que os efeitos triaxiais e as conseqüências relativas à diferença dos coeficientes de POISSON dos materiais não sejam levadas em consideração.

5 - ALGORITMO DE RESOLUÇÃO

O modelo parte do princípio de que pode haver 3 (três) tipos de não-linearidades:

- Modificação de rigidez: levada em consideração dentro da matriz de rigidez, através de uma correção por um índice de dano uniformemente distribuído ao longo de toda barra;
- Criação de deformações anelásticas: levada em consideração dentro do vetor de esforços generalizados.

O algoritmo escolhido é de interação direta, onde a convergência é testada comparando-se o resíduo máximo com o valor obtido da soma dos quadrados dos resíduos pela soma dos quadrados dos esforços externos.

Obs.: O modelo de dano e plasticidade concentrada foi implementado utilizando-se a estrutura do programa EFiCoS, modificando, para tanto, as rotinas de cálculo da evolução das variáveis de dano conforme o modelo e considerando somente que o número de camadas ou estratos seja sempre igual a 1.