

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DE ESTRUTURAS
DE CABOS PARA COBERTURAS DE GRANDES
ÁREAS LIVRES, CONSIDERANDO AS NÃO
LINEARIDADES FÍSICA E GEOMÉTRICA**

Elizabeth Oshima de Aguiar

Tese apresentada à Escola de engenharia de
São Carlos, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Engenharia de
Estruturas

ORIENTADOR: Prof. Dr. Roberto Luiz de Arruda Barbato

São Carlos

1999

*Para Manoel,
Tanja e Andrea*

AGRADECIMENTOS

A todos os familiares e amigos pelo apoio e incentivo para a realização de mais este trabalho.

Em particular agradeço ao meu orientador e amigo de longa data, Professor Roberto Luiz de Arruda Barbato, pela confiança depositada, pela compreensão das minhas dificuldades, pelas palavras de estímulo nas horas certas, e pela ilimitada

Ao meu esposo, pelo companheirismo em todos os momentos.

A todos os professores e funcionários (Laboratório, Biblioteca, Secretaria, Desenho e Informática) do Departamento de Estruturas, cujo apoio técnico foi essencial para o bom andamento deste trabalho.

Ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico) pela concessão da bolsa de estudo.

SUMÁRIO

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

RESUMO

ABSTRACT

1. INTRODUÇÃO

1.1. BREVE HISTÓRICO	1
1.2. CARACTERIZAÇÃO DO SISTEMA ESTRUTURAL	7
1.3. DESCRIÇÃO DAS OBRAS	13
1.3.1. COBERTURA DE UM POSTO DE GASOLINA NO JAPÃO	13
1.3.2. TEATRO DE ARENA EM SÃO JOSÉ DO RIO PARDO	15
1.3.3. COBERTURA DE UM EDIFÍCIO DE ESCRITÓRIOS NA ALEMANHA	17
1.3.4. COBERTURA DE ABRIGO PARA ANIMAIS NO ZOO DE MUNIQUE	18
1.3.5. CENTRO CULTURAL EM HONG KONG	20
1.4. OBJETIVOS DO TRABALHO	23
1.5. OS CAPÍTULOS (e Apêndices)	24

2. ESTADO DA ARTE DA ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS PÊNSEIS APLICADAS A COBERTURAS DE GRANDES VÃOS

2.1. INTRODUÇÃO	27
2.2. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ESTÁTICO	28
2.2.1. DETERMINAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO INICIAL DE EQUILÍBRIO	29
2.2.1.1. TÉCNICAS DO MEIO CONTÍNUO	30
2.2.1.2. PROCESSOS DISCRETOS	32
2.2.2. ANÁLISE DA ESTRUTURA SUBMETIDA A AÇÕES DIVERSAS	36
2.2.2.1. TÉCNICAS DO MEIO CONTÍNUO	37
2.2.2.2. PROCESSOS DISCRETOS	38
2.3. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO	40
2.3.1. AMORTECIMENTO	43
2.3.2. AÇÕES DINÂMICAS	44
2.3.2.1. RESPOSTAS À AÇÃO DO VENTO	44
2.3.2.2. RESPOSTAS A CARGAS DE TERREMOTO	45

2.4. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ELÁSTICO NÃO LINEAR E PÓS-ELÁSTICO DE SISTEMAS PÊNSEIS	46
--	----

3. CARACTERÍSTICAS CONSTRUTIVAS E PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS CABOS E CORDOALHAS EMPREGADOS EM ESTRUTURAS DE COBERTURAS PÊNSEIS

3.1. INTRODUÇÃO	52
3.2. PROCESSOS DE CONSTRUÇÃO E COMPOSIÇÃO DE CABOS DE AÇO	56
3.3. PROCESSO DE PRÉ-ESTIRAMENTO	59
3.4. TIPOS DE CABOS DE AÇO E APLICAÇÕES	60
3.5. PROPRIEDADES DOS CABOS E CORDOALHAS SOB CARREGAMENTO ESTÁTICO	61
3.6. MÓDULO DE ELASTICIDADE DE CABOS E CORDOALHAS DE AÇO	63
3.6.1. DIAGRAMAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO	64
3.6.1.1. CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE GREENBERG	65
3.6.1.2. CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE JONATOWSKI & BIRNSTIEL	67
3.6.1.3. CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE RAMBERG-OSGOOD	68
3.6.1.4. CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE MURRAY & WILLIAMS	69
3.6.1.5. CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE KADLCÁK	71
3.6.2. EFEITO DO CARREGAMENTO REPETIDO	73
3.6.3. TIPOS DE MÓDULOS DE ELASTICIDADE	75
3.7. EFEITO DA MUDANÇA DE TEMPERATURA	79
3.8. EFEITO DE FADIGA	80
3.9. FLUÊNCIA E RELAXAÇÃO	82

4. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ESTÁTICO E DINÂMICO DE CESTAS PROTENDIDAS PELA TÉCNICA DOS ELEMENTOS FINITOS

4.1. FORMULAÇÃO NO CONTÍNUO	83
4.1.1. RELAÇÕES GEOMÉTRICAS	84
4.1.2. RELAÇÃO CONSTITUTIVA	87
4.1.3. EXPRESSÕES DO PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL	88
4.1.4. SOLUÇÃO LINEARIZADA	91
4.2. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO DE CABO	92
4.2.1. SOLUÇÃO LINEARIZADA	95
4.2.2. SOLUÇÃO NÃO LINEAR	97
4.3. RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	98
4.4. MINIMIZAÇÃO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL DO SISTEMA DE CABOS PELO MÉTODO DO GRADIENTE CONJUGADO	99

5. O MODELO FÍSICO-MECÂNICO DAS ESTRUTURAS DE CABOS E PROBLEMAS RELATIVOS À RESOLUÇÃO NUMÉRICA	
5.1. INTRODUÇÃO	103
5.2. NÚMERO DE CONDIÇÃO	105
5.3. ESTRUTURAS E MECANISMOS	107
5.4. MÉTODOS NUMÉRICOS EMPREGADOS NA RESOLUÇÃO DE ESTRUTURAS DE CABOS	110
5.4.1. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	110
5.4.2. MÉTODOS PARA A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES LINEARES	111
5.4.3. MÉTODOS ENERGÉTICOS	113
5.5. CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA	114
6. EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA	
6.1. INTRODUÇÃO	115
6.2. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ELÁSTICO DE ESTRUTURAS DE CABOS	115
6.2.1. CABO LIVREMENTE SUSPENSO COM 2 ELEMENTOS	117
6.2.2. ESTRUTURA DE BARRAS COM 3 ELEMENTOS	118
6.2.3. CABO LIVREMENTE SUSPENSO COM NÚMERO DE ELEMENTOS VARIÁVEL	120
6.2.4. CABO-TRELIÇA COM 29 ELEMENTOS	124
6.2.5. CESTA PROTENDIDA EM FORMA DE PARABOLÓIDE-HIPERBÓLICO COM 64 ELEMENTOS	129
6.3. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO INELÁSTICO DE ESTRUTURAS DE CABOS	136
6.3.1. CABO LIVREMENTE SUSPENSO COM 2 ELEMENTOS	136
6.3.2. CABO-TRELIÇA COM 29 ELEMENTOS	138
6.3.3. CESTA PROTENDIDA EM FORMA DE PARABOLÓIDE-HIPERBÓLICO COM 64 ELEMENTOS	141
6.4. ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE UM MODELO EXPERIMENTAL E MODELOS NUMÉRICOS	148
6.4.1. DESCRIÇÃO DO MODELO EXPERIMENTAL, DO PROCEDIMENTO DE PROTENSÃO E DOS CARREGAMENTOS APLICADOS	148
6.4.2. RESULTADOS OBTIDOS EXPERIMENTALMENTE E ATRAVÉS DE ANÁLISE NUMÉRICA	150
6.4.2.1. RESULTADOS DO CARREGAMENTO a	150
6.4.2.2. RESULTADOS DO CARREGAMENTO b,c,d	155
6.4.2.3. RESULTADOS PARA UM CARREGAMENTO MAIOR	159
6.4.3. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	160
6.5. APLICAÇÃO INCREMENTAL DA FORÇA DE PROTENSÃO	161
6.5.1. APLICAÇÃO DA FORÇA DE PROTENSÃO SIMETRICAMENTE POR MEIO DOS CABOS TENSORES	163

6.5.2. CARREGAMENTOS DE SERVIÇO	166
6.5.3. APLICAÇÃO DA FORÇA DE PROTENSAO POR MEIO DOS CABOS PORTANTES	168
6.5.4. APLICAÇÃO DA FORÇA DE PROTENSAO POR MEIO DOS CABOS TENSORES E CABOS PORTANTES	169
6.5.5. APLICAÇÃO DA FORÇA DE PROTENSÃO EM UMA DAS EXTREMIDADES DOS CABOS TENSORES	171
6.5.6. COMENTÁRIOS SOBRE A TÉCNICA DE PROTENSÃO	174
7. ESTUDO DE CASO: ANÁLISE DA ESTRUTURA DE CABOS DA COBERTURA DO PAVILHÃO DA FEIRA INTERNACIONAL DE INDÚSTRIA E COMÉRCIO - RIO DE JANEIRO	
7.1. DESCRIÇÃO DA OBRA	175
7.2. ASPECTOS ESTRUTURAIS	177
7.3. PROBLEMAS DE EXECUÇÃO	178
7.4. OS CABOS DE AÇO DA COBERTURA	181
7.4.1. PROPRIEDADES MECÂNICAS DO CABO	182
7.4.2. PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS FIOS DE AÇO	185
7.4.3. CÁLCULO TEÓRICO DO MÓDULO DE ELASTICIDADE DAS PERNAS QUE COMPÕEM O CABO	188
7.4.4. CURA DE RELAXAÇÃO DO CABO	189
7.4.4.1. MODELO MISTO DE BOLTZMANN	189
7.4.4.2. MODELO DE RELAXAÇÃO PARA OS CABOS TENSORES	191
7.5. ANÁLISE NUMÉRICA	193
7.5.1. APLICAÇÃO DA PROTENSÃO	194
7.5.2. APLICAÇÃO DOS CARREGAMENTOS	199
7.5.3. COMENTÁRIOS SOBRE O PAVILHÃO DE SÃO CRISTÓVÃO	203
8. COMENTÁRIOS FINAIS	
8.1. SOBRE O COMPORTAMENTO DE ESTRUTURAS DE CABOS	204
8.2. SOBRE OS PROCESSOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL	206
8.3. SOBRE A ANÁLISE DE CAPACIDADE ÚLTIMA	207
8.4. SOBRE OS PROCEDIMENTOS DE MONTAGEM	209
8.5. SOBRE A APLICAÇÃO DA PROTENSÃO	211
8.6. SOBRE O SISTEMA VEDANTE	212
8.7. SOBRE A CONTINUIDADE DA PESQUISA	213

BIBLIOGRAFIA

APÊNDICE I : INTRODUÇÃO ÀS TÉCNICAS NUMÉRICAS DE OTIMIZAÇÃO PARA PROBLEMAS SEM RESTRIÇÕES

APÊNDICE II : *DEFINIÇÕES DE NORMAS DE VETORES E MATRIZES*

APÊNDICE III : *INTRODUÇÃO À ANÁLISE DE ERROS EM CÁLCULOS NUMÉRICOS*

APÊNDICE IV : *FATORES DE CONVERSÃO DE UNIDADES*

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ASCE	-	American Society of Civil Engineers
ASME	-	American Society of Mechanics Engineers
ASTM	-	American Society for Testing and Materials
IABSE	-	International Association for Bridge and Structural Engineering
IASS	-	International Association for Shell and Spatial Structures
ISO	-	International Organization for Standardization
NBR	-	Norma Brasileira Registrada

Caracteres latinos:

A	:	área da seção transversal do elemento de cabo na configuração deslocada
A	:	nó inicial do elemento de cabo
A_0	:	área nominal da seção transversal do elemento de cabo (na configuração indeformada)
A_R	:	área da seção transversal do elemento de cabo na configuração de referência
B	:	constante do material para a curva tensão-deformação
B	:	nó final do elemento de cabo
c	:	número de condicionamento de uma matriz
c	:	número de ciclos de carregamento
$\cos\theta$:	vetor dos cossenos diretores do elemento de cabo na configuração deslocada
$\cos\theta_R$:	vetor dos cossenos diretores do elemento de cabo na configuração de referência
\mathbf{D}	:	vetor deslocamentos nodais do sistema de cabos
d_i	:	diâmetro do círculo interior da camada i de fios
ds	:	comprimento de um segmento de cabo
ds_0	:	comprimento de um segmento de cabo na configuração indeformada
E	:	módulo de deformação longitudinal do material do cabo
e	:	elemento finito de cabo
E_R	:	módulo de deformação longitudinal do material do cabo no estado de referência
f	:	carga distribuída por unidade de volume do cabo
\mathbf{F}_e	:	vetor das forças externas aplicadas aos nós da estrutura

\mathbf{F}_i	:	vetor dos esforços internos
g	:	número de graus de liberdade
g_m	:	número de graus de liberdade mecânica
\mathbf{H}	:	matriz de escalonamento
h_i	:	comprimento do passo da camada i de fios
k	:	coeficiente estrutural do cabo
\mathbf{K}	:	matriz de rigidez da estrutura
ℓ	:	comprimento do elemento de cabo retilíneo
m	:	número de barras da estrutura
m	:	constante do material para a curva tensão-deformação
n	:	número de nós da estrutura
n	:	constante do material para a curva tensão-deformação
p	:	número de soluções linearmente independentes
P_U	:	carga última de tração
\mathbf{P}	:	vetor de forças concentradas aplicadas aos nós do sistema de cabos
\mathbf{Q}	:	vetor da carga distribuída aplicadas aos nós inicial e final do sistema de cabos
q	:	carga distribuída por unidade de comprimento indeformado do cabo
q^*	:	carga distribuída por unidade de comprimento do cabo na configuração deslocada
q_R^*	:	carga distribuída por unidade de comprimento do cabo na configuração de referência
r	:	rank de uma matriz
\mathbf{R}	:	vetor resíduo
\mathbf{S}	:	vetor direção de busca
T	:	esforço normal de tração no elemento de cabo no estado deslocado
T_{est}	:	força de pré-estiramento
T_R	:	esforço normal de tração no elemento de cabo no estado
T_{rup}	:	força de ruptura do cabo
U	:	energia de deformação (trabalho dos esforços internos)

\mathbf{u}	:	vetor deslocamentos nodais do elemento de cabo da configuração de referência para a deslocada
\mathbf{u}_R	:	vetor deslocamentos nodais do elemento de cabo da configuração indeformada para a de referência
X, Y, Z	:	coordenadas cartesianas

Caracteres gregos:

$\phi(\xi)$:	função interpoladora
ξ	:	coordenada adimensional
ε_e	:	deformação elástica limite
ε_u	:	deformação última
ε_p	:	deformação permanente
σ_u	:	tensão axial última do cabo
σ_y	:	tensão de escoamento
$\bar{\sigma}$:	tensão inelástica
$\nabla\Pi$:	vetor gradiente da função energia potencial total
Π	:	função energia potencial total
Ω	:	energia potencial das cargas aplicadas ao sistema (trabalho das forças externas)
α	:	distância dentro de uma busca unidimensional
α_i	:	ângulo entre o fio i e o eixo da cordoalha
α_t	:	coeficiente de dilatação térmica longitudinal do cabo
ε	:	deformação no estado deslocado
ϕ	:	diâmetro do cabo ou cordoalha
γ	:	deformação relativa entre a configuração deslocada e a configuração de referência
λ	:	coeficiente de alongamento do elemento de cabo na configuração deslocada
λ_{\max}	:	maior autovalor de uma matriz
λ_{\min}	:	menor autovalor de uma matriz
λ_R	:	coeficiente de alongamento do elemento de cabo no estado de referência

ν	:	coeficiente de viscosidade (de fluidez)
σ	:	tensão axial no estado deslocado
σ_0	:	tensão axial inicial
σ_R	:	tensão axial no estado de referência
χ	:	tolerância permitida para o critério de convergência de um

RESUMO

AGUIAR, E.O. (1999) Contribuição ao estudo de estruturas de cabos para coberturas de grandes áreas livres, considerando as não linearidades física e geométrica. São Carlos, Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

A pesquisa foi desenvolvida com a finalidade de se analisar o comportamento elástico e inelástico de estruturas de cabos, sob carregamento estático, pela técnica dos elementos finitos. Para a discretização das estruturas de cabos adotou-se um elemento retilíneo isoparamétrico, e na formulação dos princípios variacionais foram considerados a não linearidade física do material e a não linearidade geométrica, inerente às estruturas de cabos. Empregou-se o método incremental-iterativo de Newton-Raphson para a resolução do sistema de equações não lineares. Alternativamente a solução foi obtida da minimização direta da função energia potencial total da estrutura de cabos, utilizando-se o método do Gradiente Conjugado. Vários exemplos de estruturas de cabos comumente empregadas em coberturas de grandes vãos foram estudados. Os resultados obtidos segundo os dois procedimentos foram analisados e a eficiência dos métodos foi comprovada.

Palavras-chave : estruturas de cabos; análise não linear; grandes deslocamentos.

ABSTRACT

AGUIAR, E.O. (1999) Contribution to the study of cable structures for large span roofs by considering material and geometric non-linearity. São Carlos, Tese (Doutorado), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

The research was developed with the purpose of analyzing the elastic and the inelastic behaviour of cable structures, under static load. The finite element method with straight isoparametric element was used. In the formulation of the variational principles, the material and the geometric non-linearity were considered. The Newton-Raphson method was used to resolve the non-linear equations system. Alternatively the solution was obtained of the direct minimization of the total potential energy of the cable structure; in this case using the Conjugated Gradient Method. Several examples of cable structures, commonly employed in roofs of large spaces were studied. The results were obtained according to both processes and the efficiency of the methods was verified.

keywords : cable structures; nonlinear analysis; large displacements.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1. BREVE HISTÓRICO

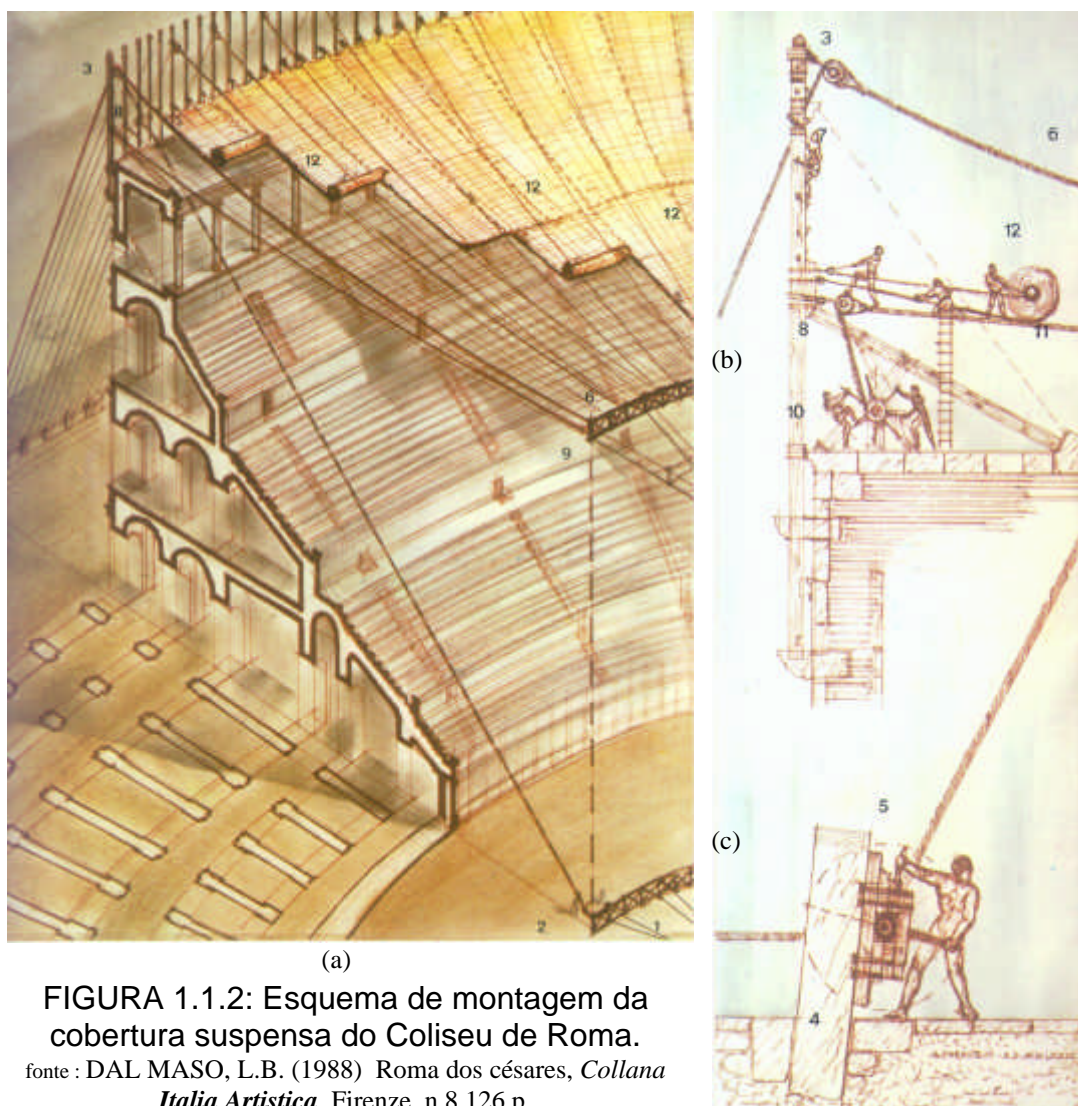
A cobertura pênsil é conhecida desde a antigüidade sob a forma de grandes tendas, feitas de tecido de fibras naturais ou peles de animais, que eram utilizadas como habitações temporárias pelos povos nômades (DREW [1979]). Ainda hoje, empregando novos materiais, as tendas são construídas e utilizadas em regiões de clima quente e seco, como no Norte da África e Oriente Médio (figura 1.1.1).



FIGURA 1.1.1: Tenda preta (*black tent*) utilizada no Afeganistão, construída com tecido de lã de cabra tingido, permitindo melhor ventilação e menor luminosidade interna.

fonte : ROBIN, T. (1996) **Engineering a new architecture**, Quebecor-Eusey Press, USA, 138 p.

O mais antigo documento relatando uma estrutura pênsil cobrindo uma edificação se refere ao coliseu de Roma. O coliseu construído entre os anos 72 e 80 depois de Cristo tem o seu eixo maior com 620 pés (189 m) e o eixo menor com 513 pés (156 m). Segundo a tese de reconstrução do arquiteto italiano A.C. Carpiceci (figura 1.1.2), um conjunto de cordas de cânhamo dispostas em duas camadas de forma radial e fixadas aos mastros de madeira, localizados no teto do último andar, sustentava um grande anel central. Sobre a teia de cordas eram desenrolados os mantos feitos de linho (figura 1.1.2a), que cobriam toda a área destinada aos espectadores.



O processo de içamento do anel e também a desmontagem da cobertura necessitavam o esforço conjunto e sincronizado de quase mil

homens. Estes homens eram marinheiros especializados na manobra de velas, e que eram trazidos especialmente para manobrar os cabestrantes colocados no teto, por onde se esticavam os cabos inferiores (figura 1.1.2b), e no solo onde os cabos superiores eram esticados e ancorados em 160 blocos de pedras engastadas (figura 1.1.2c).

No começo do século XIX, SCHNIRCH¹ apud KADLCÁK [1995] propôs a cobertura de edificações com estruturas suspensas, inspirando-se no sistema estrutural das pontes pênséis. Em seu trabalho B. Schnirch descreve a cobertura de um teatro de 76 m x 30 m, empregando duas correntes de ferro na estrutura da cumeeira, como mostra a figura 1.1.3a,b. B. Schnirch construiu algumas coberturas, seguindo o mesmo princípio, em territórios da atual República Tcheca e Eslováquia. Uma destas obras, localizada em Banska Bystrica, com dimensões em planta de 12,3 m x 25,4 m, se mantém preservada até hoje, servindo ainda ao seu propósito, segundo FERJENCIK².

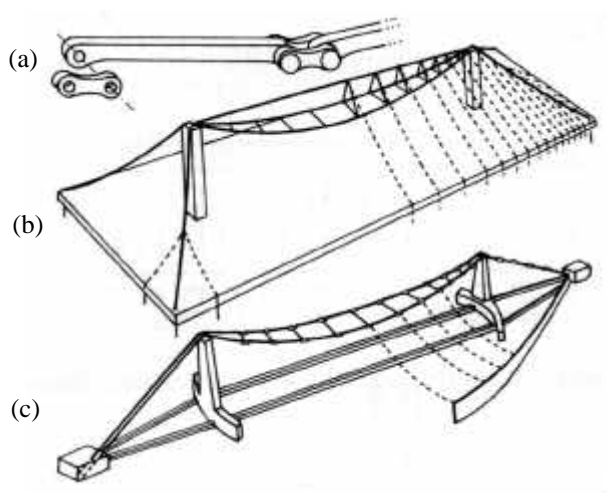


FIGURA 1.1.3: Desenho esquemático (a) de correntes de ligas de ferro empregadas no sistema de suspensão, (b) do esquema estrutural, proposto por B. Schnirch para cobertura de um teatro, (c) do sistema estrutural (com cabos de aço) da cobertura da piscina construída em 1964 em Tóquio por K. Tange e Y. Tsuboi seguindo a mesma idéia de B. Schnirch.

¹ SCHNIRCH, B. (1824) Roof trusses of forgeable iron, their lightweight, low purchase price and application, *Mitteilungen der K.K. Mährish-Schlesischen Gesellschaft zur Beförderung des Ackerbaues*, Die Natur-und Landeskunde in Brünn, n.51, p.401-404.

² FERJENCIK, P. (1992) Über Leben und Arbeit von Bedrich Schnirch, *Bauingenieur*, n.67, p.543-554.

Para DREW [1979], foram as pontes pênses, e não as tendas que forneceram os fundamentos tecnológicos para o desenvolvimento da cobertura pênsil. No entanto, o esquema estrutural das pontes não oferecia a flexibilidade de forma, requerida para um desenvolvimento mais completo.

Em 1896 foram construídos os pavilhões em forma de tenda, por V.G. Shookhov, para a Exposição Industrial em Nijny-Novgorod, na Rússia. A cobertura pênsil destes pavilhões (figura 1.1.4a,b,c) era formada de tiras de aço entrelaçadas no lugar de cabos.

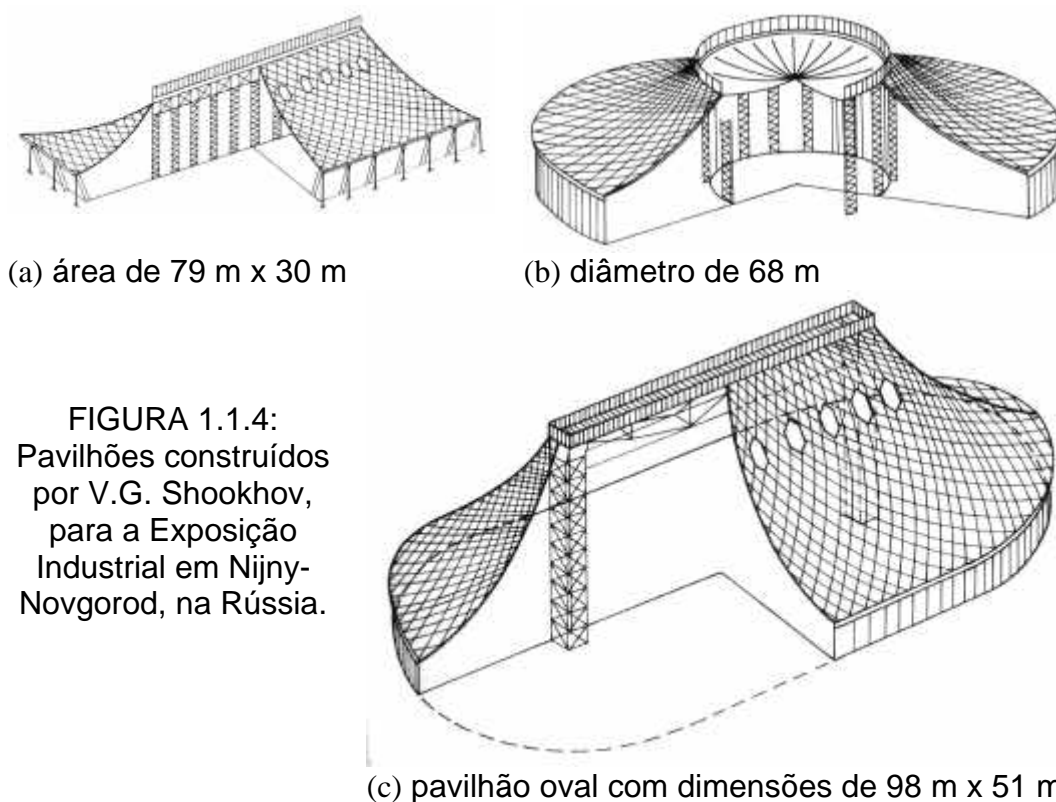


FIGURA 1.1.4:
Pavilhões construídos
por V.G. Shookhov,
para a Exposição
Industrial em Nijny-
Novgorod, na Rússia.

No começo do século XX poucas obras empregando estruturas pênses foram construídas. Cabe citar a cobertura suspensa sobre grandes silos de grãos, construídos em 1932 em Albany, estado de New York, EUA. A cobertura (área em planta de 36 m x 82 m) era composta de chapas de aço formando uma superfície de simples curvatura, seguindo a forma de uma catenária. Um outro exemplo de silo para grãos utilizando chapas de aço é mostrado na figura 1.1.5.

Em 1935 foi construído o pavilhão da França por B. Lafaille, para a feira de Zagreb, na antiga Iugoslávia. O pavilhão, de planta circular com 30 m de diâmetro, era coberto por uma membrana de chapas de aço de 2 mm de espessura suspensa entre dois anéis concêntricos.



FIGURA 1.1.5: Coberturas com chapas metálicas suspensas sobre silos de armazenagem de grãos (USA).

Mas, foi somente a partir da construção da Arena para a Feira Estadual de Raleigh em 1953 (figura 1.1.6), segundo projeto de M. Nowicki, que as coberturas pênseis, na sua forma atual, começaram a ser empregadas com maior frequência.

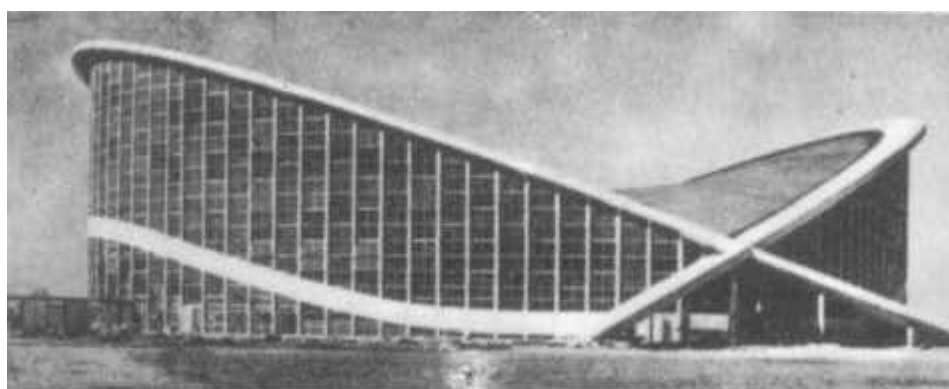


FIGURA 1.1.6: Arena de Raleigh, Carolina do Norte (USA), com área aproximada de 9.000 m².

A Arena de Raleigh possui a cobertura suspensa composta de uma cesta de cabos de aço protendidos, ancorada em dois arcos inclinados de concreto armado (inclinação de 21⁰ em relação à horizontal), e da vedação

em chapas metálicas corrugadas. A combinação das duas famílias de cabos, uma delas suspensa e ancorada nos dois arcos, a outra família de cabos ortogonais à primeira e de curvatura oposta, compõe a clássica forma de sela de montar. O arranjo dos cabos da Arena de Raleigh inspirou outras obras projetadas nas décadas seguintes, como por exemplo:

- a) o pavilhão de exposições de São Cristóvão (1960) no Rio de Janeiro com dimensões de 250 m x 165 m,
- b) o estádio de patinação (1966) em Presov na Eslováquia com dimensões de 78,4 m x 92,0 m,
- c) a piscina coberta (1971) em Ceska Budejovice na República Tcheca com dimensões de 54 m x 64 m,
- d) o palácio de esportes de Milão (1973) com 128 m de diâmetro,
- e) o estádio olímpico de Calgary (1983) no Canadá, diâmetro de 67,65 m,
- f) a arena de esportes (1985) em Atenas com diâmetro de 113,96 m.

Sendo indicadas para cobrir grandes áreas livres, as coberturas pênseis têm sofrido nas últimas décadas grande evolução, e elas estão presentes em obras significativas em vários países.



FIGURA 1.1.7: Palácio de Esportes de Milão.

1.2. CARACTERIZAÇÃO DO SISTEMA ESTRUTURAL

Essencialmente, as coberturas pênses são formadas por um sistema estrutural - geralmente formado por cabos de aço ou por cabos e barras de aço - e um sistema vedante que se apóia no sistema estrutural.

O **sistema vedante** compõe-se da vedação propriamente dita (por exemplo placas metálicas, madeira ou concreto, vidro temperado, tecidos de fibras, lonas, chapas plásticas ou acrílicas, ou fibras de vidro), de peças e acessórios que têm a finalidade de fixar a vedação no sistema estrutural e, em alguns casos, de mantas e membranas de materiais isolantes e impermeáveis que são dispostos sobre a vedação para melhorar as condições de utilização da cobertura.

Os cabos e barras que integram o **sistema estrutural** são associados de modo a formar estruturas planas ou tridimensionais. De acordo com o arranjo dos cabos as estruturas podem ser classificadas em : cestas não protendidas e cestas protendidas, cabos treliças e reticulados tridimensionais.

As **cestas não protendidas** são geradas pela associação de um conjunto de cabos livremente suspensos. A posição relativa dos cabos e sua configuração de equilíbrio definem a forma da superfície da cesta. Dentre os diversos tipos de cestas não protendidas destaca-se o formado por cabos dispostos paralelamente que, nivelados ou desnivelados, geram superfícies de simples curvatura ou de dupla curvatura. São geralmente empregadas em coberturas de planta retangular (figura 1.2.1).

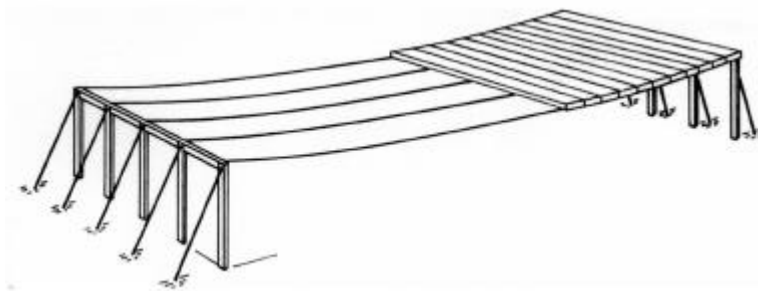


FIGURA 1.2.1: Cesta não protendida para cobertura de planta retangular.

Uma outra possibilidade é a utilização de cabos dispostos radialmente que, ancorados no mesmo nível ou não, geram superfícies de dupla curvatura. Cestas deste tipo são comumente empregadas em coberturas de planta circular. Nos casos mais comuns, os cabos são ancorados num anel interno suspenso ou numa torre central e a outra extremidade na estrutura de contorno da cobertura (figura 1.2.2a,b). Uma combinação adequada dos cabos suspensos pode ser obtida para cobrir plantas elípticas como mostra a figura 1.2.3.

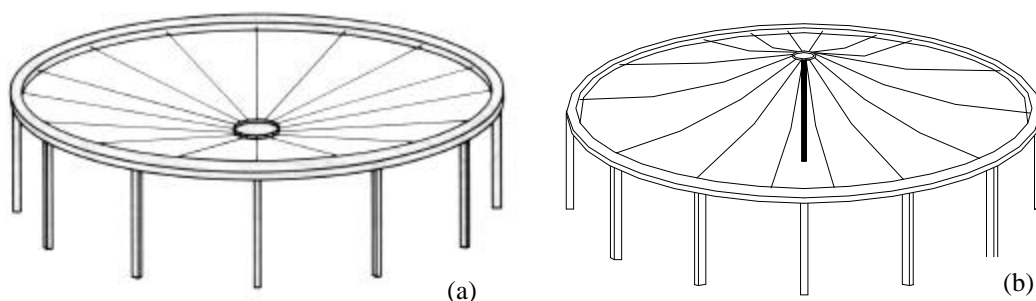


FIGURA 1.2.2: Cestas não protendidas para cobertura de planta circular (a) com anel central e (b) com coluna central.

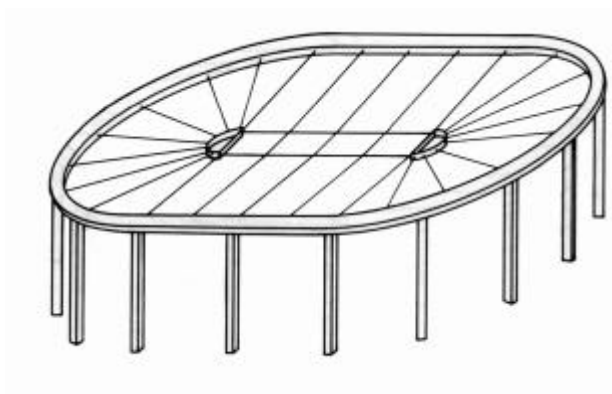


FIGURA 1.2.3: Cesta não protendida para cobertura de planta oval.

As **cestas protendidas** são estruturas que resultam de cestas não protendidas em cujos cabos, adequadamente dispostos, aplicam-se esforços prévios de tração. Dentre os diversos tipos, destaca-se o constituído por duas famílias de cabos que, transversalmente associados formando malhas retangulares, geram uma superfície de dupla curvatura

reversa que pode ser assimilada a um parabolóide hiperbólico (figura 1.2.4). A protensão deste tipo de cesta é aplicada mediante o tracionamento dos cabos de uma ou ambas famílias.

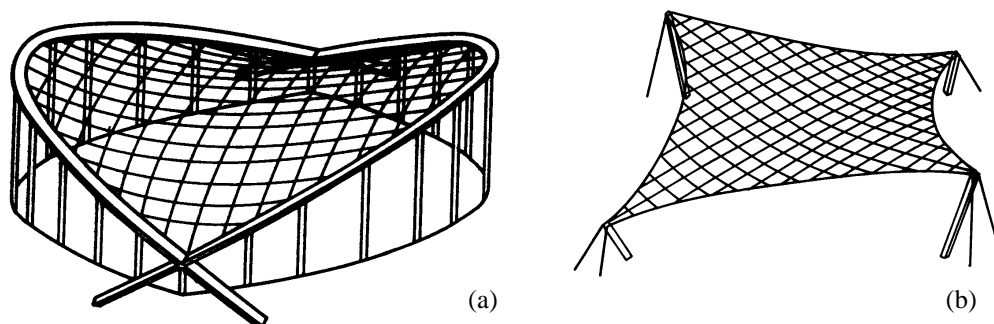


FIGURA 1.2.4: Cestas protendidas em forma de parabolóide-hiperbólico (a) com contorno em arcos de concreto e (b) com cabos no contorno.

Um outro tipo de cesta protendida é o gerado pela associação de duas famílias de cabos conformando uma superfície de revolução de dupla curvatura reversa. Neste tipo de cobertura, um mastro central sustenta os cabos que estão dispostos na forma de malhas trapezoidais (figura 1.2.5). A protensão pode ser feita pelo tracionamento de um dos grupos de cabos que compõem a malha.

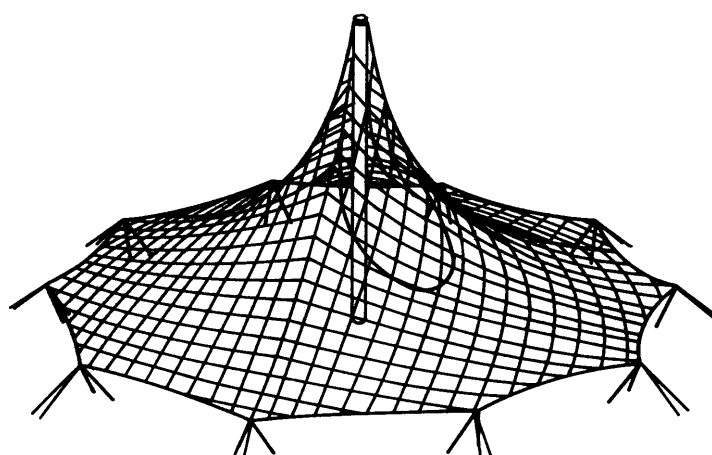


FIGURA 1.2.5 : Cesta protendida com mastro central.

Através de diferentes superfícies de dupla curvatura reversa, pode-se obter ainda um outro tipo de cesta protendida: as cestas de formas livres (figura 1.2.6). Neste tipo de cesta os cabos associam-se transversalmente de modo a compor malhas de diversas formas. A protensão é obtida através de cabos isolados ou mesmo pelo tracionamento dos cabos da própria cesta.

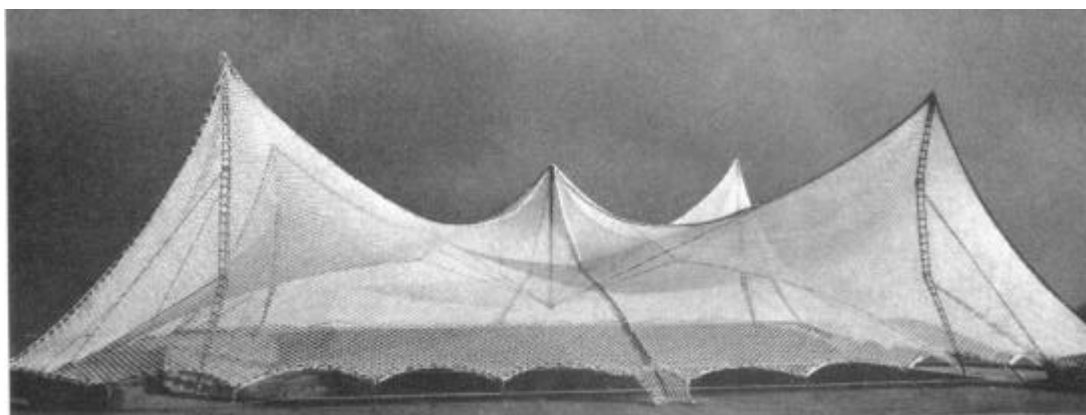


FIGURA 1.2.6: Cesta protendida com forma livre.

Os **cabos-treliça** são estruturas protendidas formadas por dois cabos de curvaturas opostas, que são conectados por barras verticais ou inclinadas. Compõem, dessa maneira, uma treliça plana onde os cabos formam os banzos e as barras sua alma. Dependendo da configuração dos cabos e barras, os cabos-treliça podem ser classificados em bicôncavos, biconvexos e mistos. Nos bicôncavos as barras que conectam os cabos sofrem esforços de tração, enquanto que nos biconvexos, sofrem esforços de compressão. Nos cabos-treliça mistos, as barras na parte convexa ficam comprimidas, e na parte côncava elas ficam tracionadas. A figura 1.2.7 mostra alguns tipos de cabos-treliça.

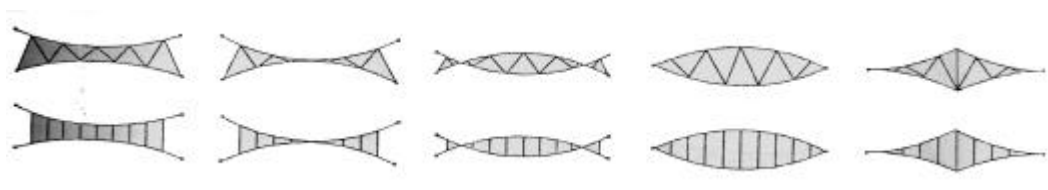


FIGURA 1.2.7: Alguns tipos de cabos-treliça.

A protensão é obtida aplicando-se esforços de tração em um ou em ambos os cabos, ou aplicando-se esforços de tração ou compressão nas barras, ou ainda mediante a aplicação simultânea de esforços nos cabos e nas barras. Para compor o sistema estrutural, os cabos-treliça podem ser dispostos paralelamente, radialmente, como mostra a figura 1.2.8, ou transversalmente, de acordo com a área a ser coberta, e pode ter os apoios nivelados ou desnivelados.

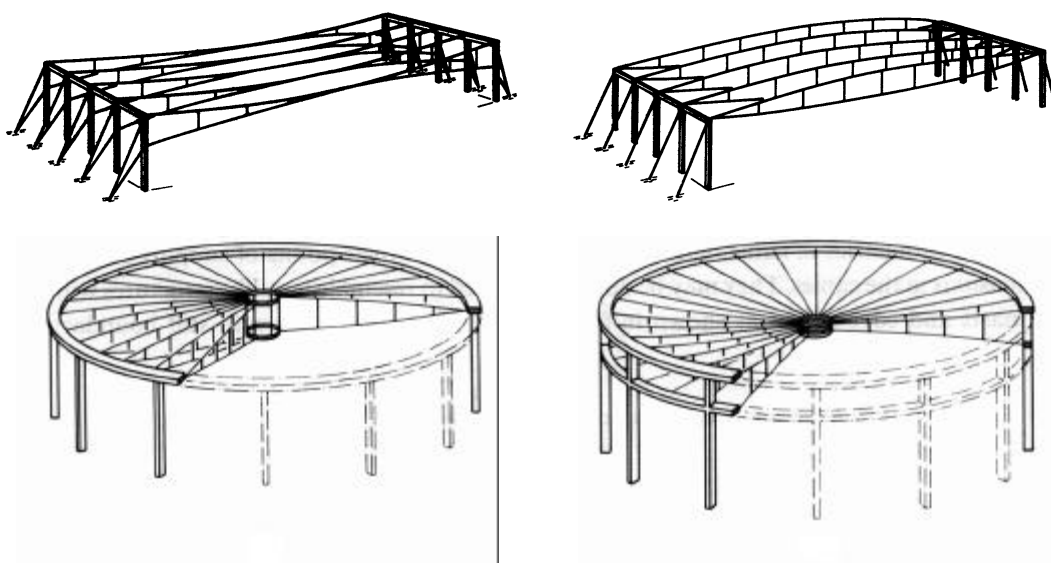


FIGURA 1.2.8: Coberturas empregando cabos-treliça.

Um outro arranjo estrutural pode ser obtido dispondo-se os cabos-treliça de modo a trabalharem não mais num plano independente, mas formando um **reticulado tridimensional de cabos** (figura 1.2.9).

Quanto à associação do sistema estrutural com o sistema vedante, cabe salientar que as cestas não protendidas, por serem estruturas muito deslocáveis, necessitam o emprego de pesados elementos de vedação para estabilizá-las, principalmente face aos efeitos de sucção decorrentes da ação do vento. Cestas protendidas, cabos-treliça e os reticulados tridimensionais são estruturas cujo desempenho depende, essencialmente, de sua configuração inicial de equilíbrio e da intensidade de protensão atuando em seus elementos. Adequadamente projetadas quanto à forma e quanto à protensão, resultam em estruturas consideravelmente rígidas e

podem ser associadas, ao contrário das cestas não protendidas, a elementos de vedação extremamente leves.

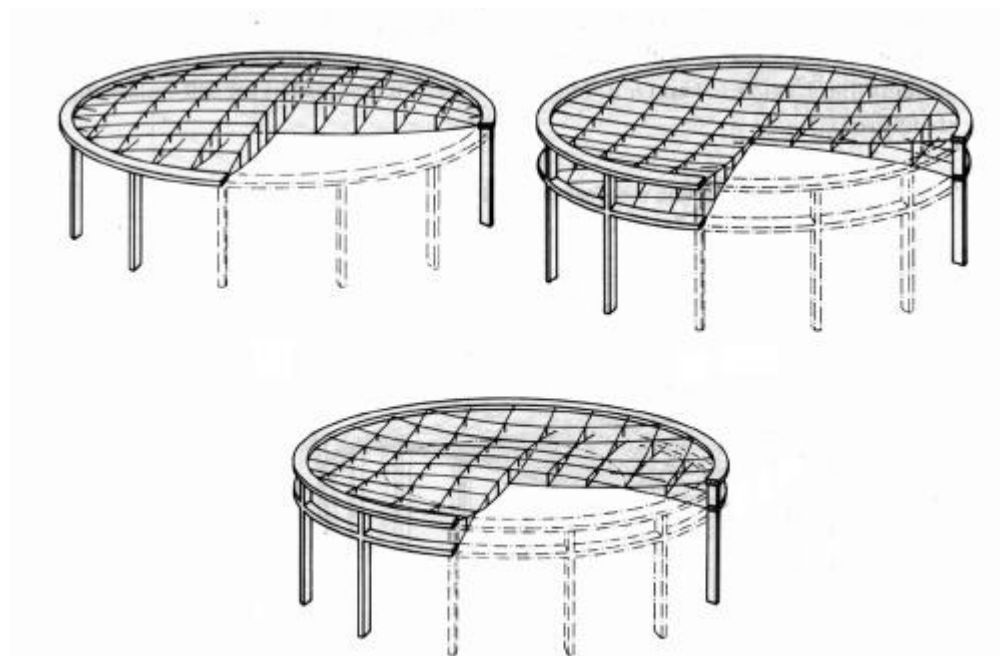


FIGURA 1.2.9: Reticulado tridimensional de cabos.

As inúmeras obras realizadas empregando as coberturas pênseis comprovam seu excelente desempenho técnico/econômico, pois elas demonstram ser adaptáveis a qualquer exigência arquitetônica, além de apresentarem vantagens como a facilidade de montagem, com a conseqüente diminuição do tempo de execução e custo da obra. Devido às características de estruturas simples, leves, versáteis e econômica, as coberturas pênseis têm vasto campo de aplicação, tais como na cobertura de ginásios de esporte, estádios, piscinas, supermercados, depósitos, fábricas, igrejas, teatros, pavilhões de exposição, feiras, aeroportos, terminais rodoviários, ferroviários e marítimos e outras construções.

Após esta breve introdução, onde se apresentam as características básicas das coberturas pênseis, descrevem-se a seguir (item 1.3) algumas obras realizadas.

1.3. DESCRIÇÃO DAS OBRAS

As estruturas de cabos são apropriadas para cobrir extensas áreas livres devido a sua capacidade de vencer grandes vãos (atualmente chegando a distâncias maiores que 1.200 m). Obras de dimensões monumentais encontram-se documentadas em MAJOWIECK [1985]. Embora o enfoque de alguns autores seja dado a coberturas de grandes áreas livres, outros ressaltam a viabilidade econômica de estruturas de cabos também para construções de pequeno porte (BUCHHOLDT [1985]). Muitos exemplos inusitados e originais do emprego de estruturas de cabos surgem constantemente, e algumas dessas obras contemporâneas são descritas sucintamente a seguir.

1.3.1. COBERTURA DE UM POSTO DE GASOLINA NO JAPÃO

A cobertura envidraçada (figura 1.3.1), suspensa por quatro arcos não simétricos de concreto protendido, protege toda a área de um posto de gasolina no Japão. A solução encontrada com a estrutura de cabos de aço, sem se considerar a estrutura de contorno em concreto, é capaz de cobrir um máximo de área com um mínimo de material.

Os cabos da estrutura são dispostos formando duas famílias ortogonais e são protendidos com uma força de 2 *tons*, de modo que todos os cabos ficam tracionados em qualquer situação possível de carregamento.

A vedação é composta de painéis de vidro de 8 mm de espessura, ligados a um manto metálico perfurado de 0,3 mm, selada com uma camada de proteção de poliéster e colocada sobre os cabos. O manto perfurado ao mesmo tempo providencia a sombra necessária e um ganho de 50% de luminosidade para o interior do pátio.

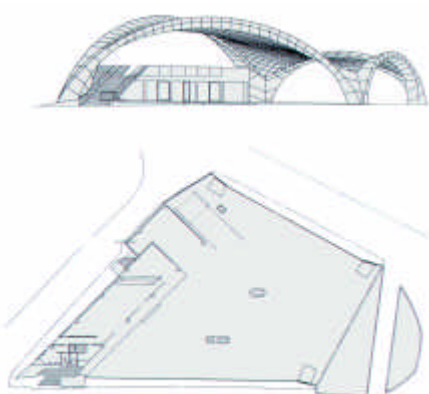
O arquiteto, transpondo as dificuldades de uma área geometricamente desfavorável para estruturas convencionais, conseguiu realizar uma obra esteticamente bonita e funcional, utilizando simplesmente o conceito de formas tracionadas.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 1.3.1: (a) Vista geral do Posto de Gasolina, (b) detalhe da cobertura e (c) elevação e planta do terreno.

fonte : **Architectural Design**, v.65, sept/oct 1995.

1.3.2. TEATRO DE ARENA EM SÃO JOSÉ DO RIO PARDO

Como se sabe, as estruturas tracionadas são muito comuns na Europa, nos EUA, e no Japão. A China, mais recentemente, tem empregado com frequência este sistema estrutural. No Brasil, embora algumas poucas coberturas pênseis já tenham sido construídas desde a década de 60, observa-se, atualmente, um despertar do interesse pelas estruturas de cabos e membranas. A obra do teatro Epidauro, realizada em 1996, no interior do estado de São Paulo, figura 1.3.2, ilustra a viabilidade da construção de coberturas com estrutura de cabos, utilizando materiais, peças e acessórios nacionais e mão de obra local.



FIGURA 1.3.2: Teatro de Arena em São José do Rio Pardo, arquiteto L. P. C. Monteiro, engenheiros V. F. Arcaro e L. C. Almeida.

fonte : **téchne**, n.36, set/out 1998.

A estrutura da cobertura do teatro compõe-se de uma cesta protendida e o sistema vedante, composto de telhas metálicas, é fixado a terças, que se apóiam na estrutura de cabos.

A cesta tem a forma inicial de um parabolóide hiperbólico, e é ancorada em um anel de concreto armado, cuja projeção no plano tem a forma de uma elipse, com eixo maior de 20,00 m e eixo menor de 13,00 m. A rede de cabos é formada por uma malha ortogonal, com espaçamento de

cerca de 2 m, paralela aos eixos da elipse, como mostra a figura 1.3.3. Os dois pontos extremos do eixo maior encontram-se a 2,75 m do chão e os dois pontos do eixo menor estão a 5,50 m, enquanto que no centro a altura é de 4,50 m. A obra consumiu 226 metros de cordoalhas galvanizadas pré-estiradas, com diâmetro de 7/8", compostas de 37 fios de alta resistência, módulo de elasticidade de 15.000 kN/cm².

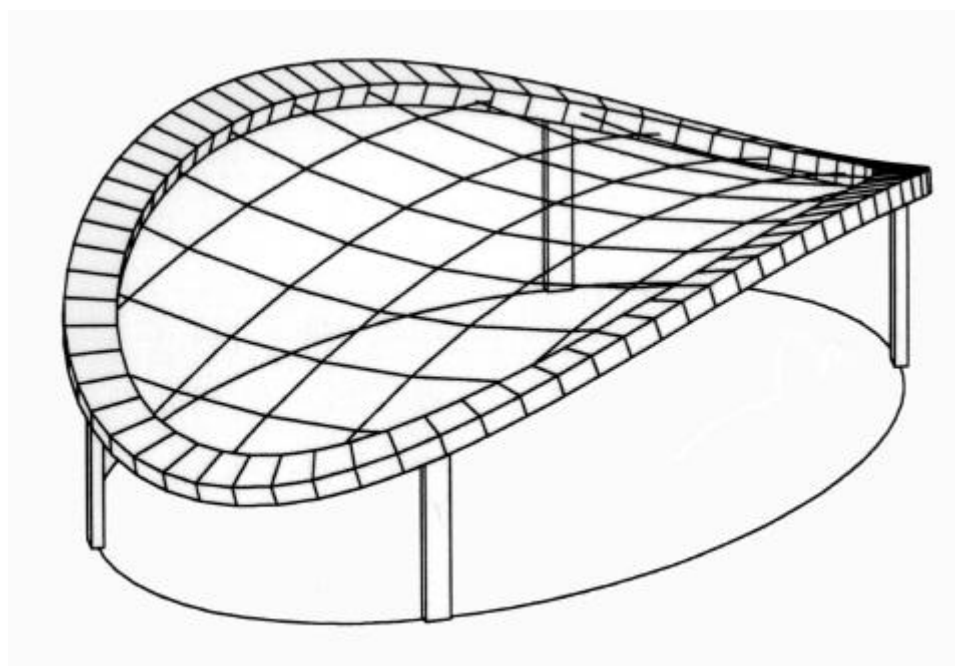


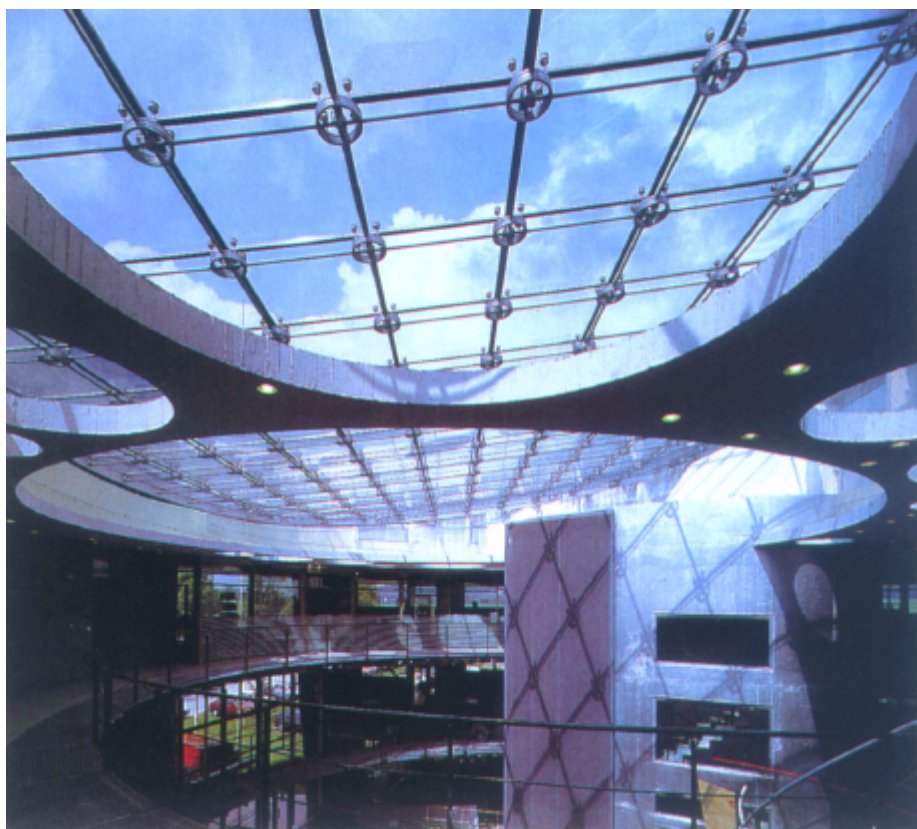
FIGURA 1.3.3: Esquema estrutural da cobertura do teatro de arena.
fonte : **Construção Metálica**, 1º. trimestre de 1998.

O anel de borda tem seção transversal retangular cheia de 1,00 m x 0,45 m, e é sustentado por quatro pilares de concreto armado, medindo 3,71 m de altura e de seção retangular de 0,25 m x 0,50 m.

Os pilares foram supostos rotulados na conexão com o anel, para minimizar o valor do momento torçor no anel, e engastados na base. A estrutura de cabos e o anel de concreto foram analisados conjuntamente, para os vários carregamentos possíveis, e os resultados encontram-se em ARCARO [1996].

1.3.3. COBERTURA DE UM EDIFÍCIO DE ESCRITÓRIOS NA ALEMANHA

A concepção do projeto da cobertura de um edifício, destinado a abrigar somente escritórios na cidade de Gniebel na Alemanha, inspirou-se na forma de uma raquete de tênis. A estrutura de cabos transmite toda a carga dos painéis de vidro, as ações de vento, carga de neve e de chuva, para a estrutura de contorno de forma ovalada, como mostra a figura 1.3.4. A estrutura de contorno em concreto armado trabalha principalmente a compressão. O arquiteto austríaco Seele e seu grupo trabalham com a pesquisa e o desenvolvimento de novas estruturas, utilizando sistemas integrados de aquecimento e resfriamento e de proteção solar.



fonte : **The Architectural Review**, v.198, n.1186, dec. 1995.

1.3.4. COBERTURA DE ABRIGO PARA ANIMAIS NO ZOO DE MUNIQUE

O projeto de um edifício para abrigo e apresentação de felinos e pássaros do zoológico de Munique teve a preocupação de reproduzir um local o mais próximo possível do ambiente natural dos animais. Para tanto foi necessário planejar uma cobertura que permitisse a passagem de luz para o desenvolvimento das plantas e ao mesmo tempo garantisse uma temperatura subtropical apropriada. A solução encontrada foi uma cobertura em forma de tenda assimétrica em cabos de aço, coberta com um colchão pneumático transparente (figura 1.3.5).



FIGURA 1.3.5: Vista geral de um abrigo de animais do zoo de Munique.
fonte : **Detail**, n.4, 1995.

Dois mastros de cerca 17 metros de altura suportam a rede de cabos de aço inoxidável, que são ancorados em outros 8 pontos periféricos como mostra a vista isométrica da estrutura de cabos figura 1.3.6.

O conjunto de cabos tangencial e radial tem espaçamento de cerca de 2 m, formando áreas trapezoidais de diferentes tamanhos. A estrutura de cabos é associada a uma manta dupla de polietileno de 0,15 mm de espessura, disposta ao longo das 64 faixas radiais, e fixada no perfil de alumínio que une os dois mastros principais. As mantas são infladas com ar

limpo e seco através de um sistema automático de ventilação na cumeeira, que fornece uma pressão interna de acordo como o carregamento atuante de vento e neve.

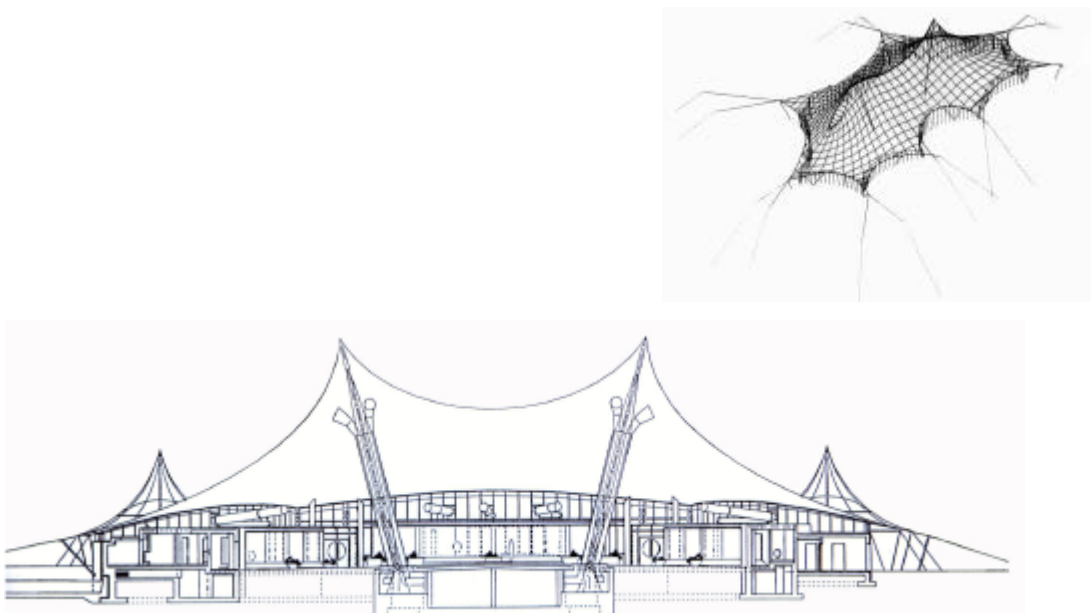


FIGURA 1.3.6: Corte e vista isométrica da cobertura –área aproximada de $40 \times 80 \text{ m}^2$. fonte : **Detail**, n.4, 1995.

O material de vedação escolhido permitiu uma luminosidade de 90% da luz natural. Detalhes do sistema estrutural de cobertura são mostrados na figura 1.3.7.

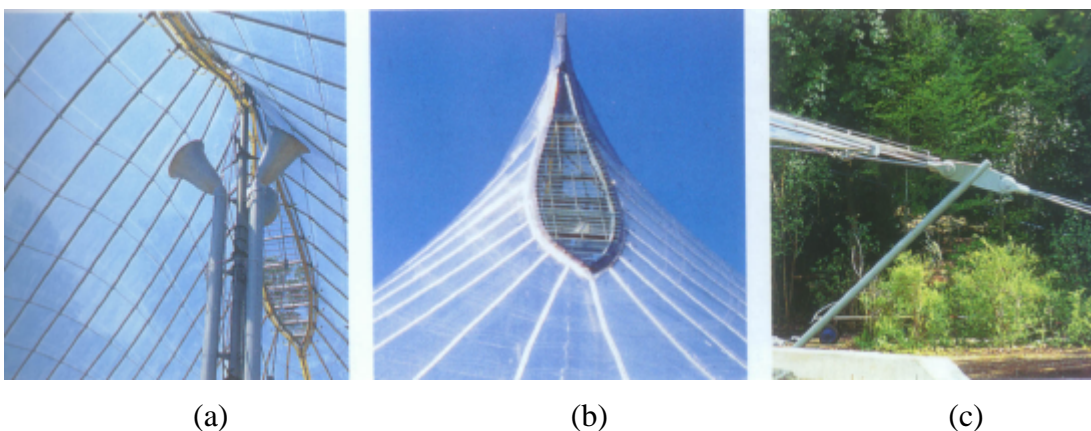


FIGURA 1.3.7: Detalhe (a) do dispositivo mecânico de ventilação, (b) do sistema de ventilação natural da cobertura, através de lâminas de vidro com (c) da ancoragem dos cabos.

fonte : **Detail**, n.4, 1995.

1.3.5. CENTRO CULTURAL EM HONG KONG

O centro cultural Tsim Sha Tsui, construído em Hong Kong, compreende uma área aproximada de 30.000 m² com vários museus, restaurantes, bibliotecas e outros edifícios. O maior destes edifícios, com a forma de asas como mostra a figura 1.3.8a, abriga um teatro lírico de 1.750 lugares, uma sala de concertos para 2.100 pessoas e uma grande galeria de acesso (*foyer*).

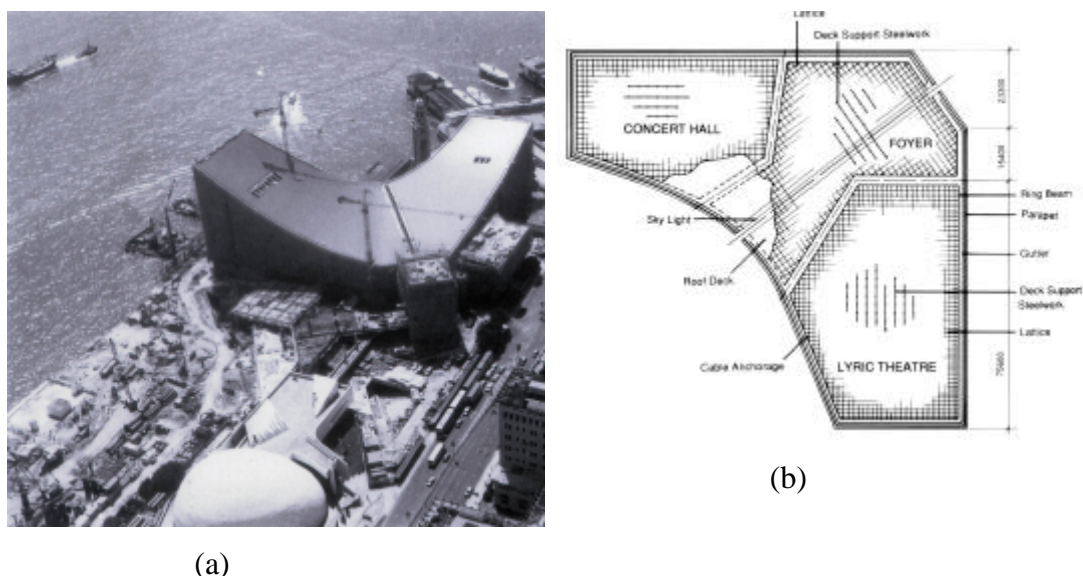


FIGURA 1.3.8: (a) Vista área e (b) planta da cobertura do centro cultural –
 2
 fonte : BURO HAPPOLD – Consulting Engineers (Patterns 9).

Para a cobertura deste edifício, foi projetada uma interessante estrutura suspensa, formada por três conjuntos de cabos de aço helicoidal de 30 mm de diâmetro. Os cabos foram dispostos ortogonalmente com espaçamento de cerca de 1,5 m cobrindo uma área total de cerca de 10.000 m² sem colunas internas. A estrutura de cabos é ancorada na estrutura de contorno em paredes de concreto de espessura média de 40 cm (figura 1.3.8b), formando três caixões com altura variável de 21 a 56 metros.

Devido ao carregamento crítico de vento na região de Hong Kong tornou-se necessário o enrijecimento da estrutura de cabos da cobertura. A solução adotada consistiu no lançamento de uma estrutura reticulada espacial em concreto armado, suspensa na rede de cabos.

Primeiramente foi necessário um pré-tensionamento dos cabos, que foi obtido através de um carregamento transitório com blocos de concreto aplicado nos cabos portantes (figura 1.3.9a). Nesta posição são facilmente fixados os cabos tensores, e o carregamento é retirado (figura 1.3.9b), ficando ambos os cabos tracionados.

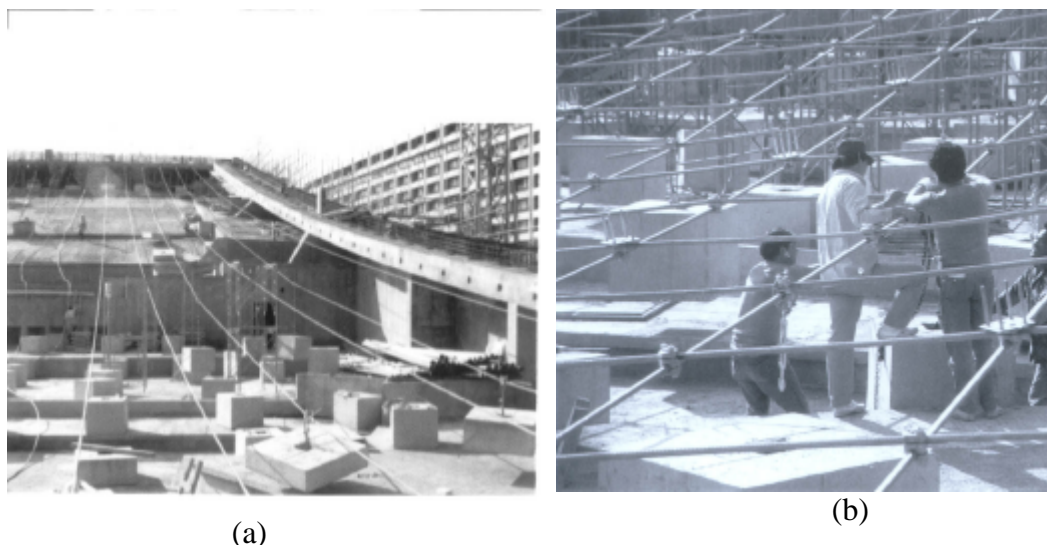


FIGURA 1.3.9: (a) Etapa de pré-tensionamento dos cabos portantes, (b) posicionamento e fixação dos cabos tensores.

fonte : BURO HAPPOLD – Consulting Engineers (Patterns 9).

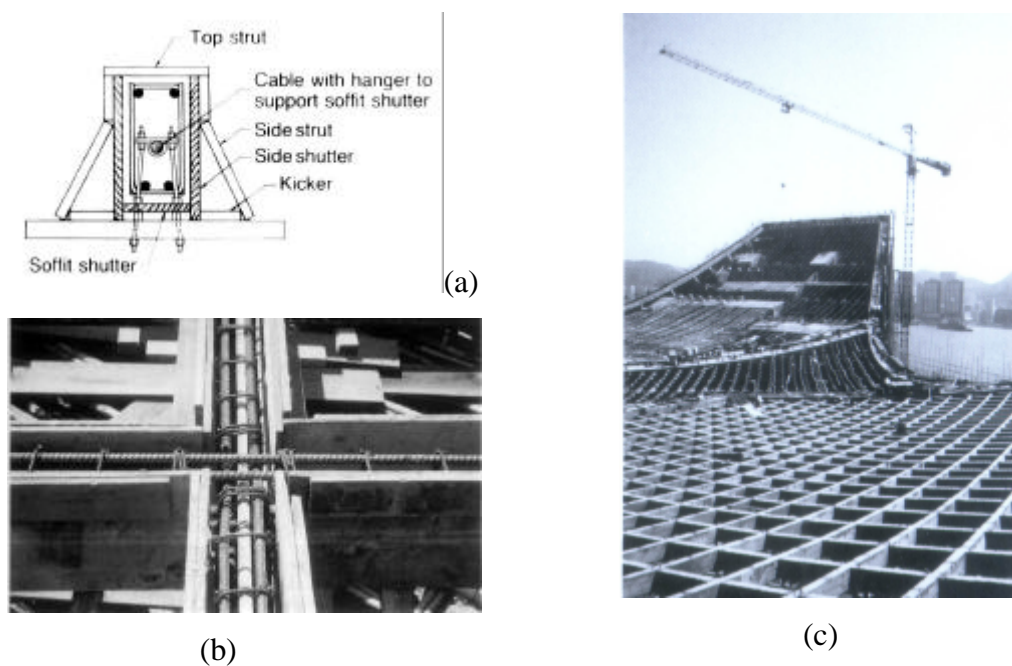


FIGURA 1.3.10: Etapa da montagem do reticulado espacial em concreto armado. fonte : BURO HAPPOLD – Consulting Engineers (Patterns 9).

A etapa seguinte foi dedicada à montagem das formas e armaduras do reticulado espacial. As figuras 1.3.10a,b mostram detalhes da seção transversal de 16 cm por 26 cm, e das formas antes do lançamento do concreto. A figura 1.3.10c ilustra o reticulado parcialmente pronto.

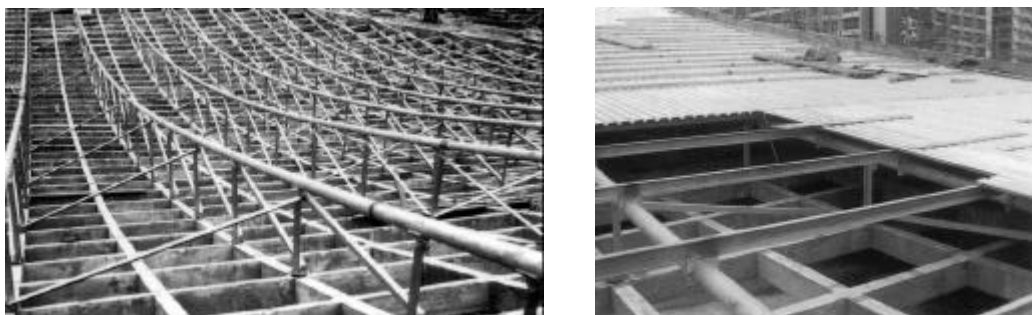


FIGURA 1.3.11: Etapa de montagem do reticulado espacial em concreto armado. fonte : BURO HAPPOLD – Consulting Engineers (Patterns 9).

O sistema vedante composto de telhas laminadas de alumínio (120x60x7mm) foi fixado a uma estrutura metálica auxiliar como mostra a figura 1.3.11. A figura 1.3.12 mostra a obra pronta com detalhes do canal de escoamento de água e a passagem de luz natural no centro do edifício.

Projetistas e construtores da obra enfatizam que apesar da complexidade da obra, em particular a execução completa da cobertura em apenas 13 meses foi relativamente rápida, dentro de um empreendimento que envolveu 8 anos de trabalho.



FIGURA 1.3.12: Vista interior e exterior da cobertura. fonte : BURO HAPPOLD – Consulting Engineers (Patterns 9).

1.4. OBJETIVOS DO TRABALHO

Através do levantamento bibliográfico realizado pôde-se obter informações sobre o estado de desenvolvimento da análise de estruturas tracionadas em geral, e em particular das coberturas pêenseis.

Observa-se que em alguns países muitos pesquisadores se dedicam à investigação teórica e experimental de tais estruturas, formando grupos de pesquisa que já produziram em conjunto numerosos trabalhos, e que, atualmente, desenvolvem pacotes computacionais que geram desde configurações de equilíbrio inicial através de vários métodos, até saídas gráficas, passando por processadores com a análise do comportamento estático e dinâmico das estruturas de cabos. Tem sido relatada a utilização de técnicas de CAD e CAM na fase de projeto e produção de coberturas tracionadas, principalmente nos projetos de estruturas pneumáticas mistas. No Brasil, ainda há poucas contribuições na área de pesquisa de coberturas pêenseis, que se refletem nas poucas obras construídas utilizando esse sistema estrutural.

Em trabalhos recentes, nota-se um emprego maior de métodos numéricos de otimização na análise de estruturas pêenseis pela técnica de elementos finitos. Isso se deve à tendência atual de se sintetizar as fases de análise e projeto, sendo que esses métodos permitem esse processo com um mínimo esforço computacional.

Muitos autores relatam problemas de convergência e estabilidade na análise de estruturas pêenseis empregando o método iterativo de Newton-Raphson e enfatizam as vantagens da utilização de outros métodos de programação não linear. Neste contexto, o método do gradiente conjugado aparece como o mais indicado na análise de sistemas de cabos com grande número de incógnitas.

Por outro lado, poucas pesquisas tratam do efeito conjunto da não linearidade geométrica e física do material, e do comportamento inelástico das estruturas de cabos.

Este trabalho tem como objetivo principal o estudo de estruturas de cabos, analisando o seu comportamento quando submetido a ações estáticas desde a etapa de protensão até o carregamento último. A análise é realizada considerando-se as não linearidades física e geométrica, características desses sistemas estruturais. O estudo abrange a fase de comportamento inelástico do material, utilizando um modelo elasto-plástico simplificado multi-linear.

Além disso, procurou-se fornecer dados comparativos entre os diversos métodos de resolução do problema não linear, através da experimentação numérica de uma grande variedade de tipos de estruturas de cabos. Os programas implementados constituem uma ferramenta eficiente para a análise do comportamento estático de estruturas de cabos planas e tridimensionais aplicadas a coberturas.

Cabe ressaltar que o presente estudo de estruturas de cabos, para coberturas de grandes vãos, está inserido no contexto do programa de estudo do grupo de coberturas pênséis do Departamento de Estruturas, e vem dar continuidade aos trabalhos inicialmente realizados com os cabos-treliça relatados em OSHIMA [1987].

Embora amplamente difundida no exterior, como já mencionado, a cobertura pênsil tem sido muito pouco empregada no Brasil. A pesquisa realizada pretende contribuir para a divulgação deste sistema estrutural, fornecendo meios para o engenheiro de estruturas projetar e melhor aproveitar o potencial das coberturas suspensas.

1.5. OS CAPÍTULOS (e Apêndices)

Para alcançar os objetivos propostos, vários tópicos foram explorados durante a pesquisa realizada, e encontram-se organizados nos capítulos seguintes. Abaixo segue uma descrição geral do conteúdo destes capítulos:

- o Capítulo 2 é dedicado à apresentação do estado da arte do cálculo de estruturas de cabos empregadas em coberturas de grandes vãos;

- o Capítulo 3 apresenta as características construtivas e as propriedades mecânicas dos cabos e cordoalhas empregados em estruturas de coberturas pênseis;
- o Capítulo 4 apresenta a formulação do elemento finito de cabo empregado na análise das estruturas de cabos;
- o Capítulo 5 descreve o modelo físico-mecânico das estruturas de cabos e discute alguns problemas particulares relativos à resolução numérica deste tipo de estrutura;
- o Capítulo 6 apresenta a análise de uma série representativa de estruturas de cabos para coberturas, empregando o programa implementado pela autora com a formulação de elemento finito dada no capítulo 4;
- o Capítulo 7 apresenta o estudo de caso da cobertura do Pavilhão de São Cristóvão, que até ser desativada, era considerada a maior área livre coberta do mundo;
- o Capítulo 8 finaliza o trabalho com as principais conclusões e comentários a respeito da pesquisa na área de coberturas pênseis.

Embora os assuntos que constam nos apêndices estejam detalhados em muitos livros, julgou-se apropriado apresentá-los, de uma forma resumida, com o objetivo de fornecer algumas informações adicionais aos temas tratados no corpo do trabalho:

- o Apêndice I faz uma introdução às técnicas numéricas de otimização mais usuais para problemas sem restrições.
- o Apêndice II descreve os procedimentos incremental/iterativo comumente empregados na solução de equações algébricas não lineares.
- o Apêndice III apresenta as noções básicas na análise de erros em cálculos numéricos.
- o Apêndice IV apresenta a definição das principais normas de vetores utilizadas nos critérios de convergência para problemas não lineares.

A Bibliografia relaciona um conjunto de trabalhos sobre estruturas de cabos aplicadas a coberturas, procurando cobrir o processo evolutivo das pesquisas nesta área.

CAPÍTULO 2

ESTADO DA ARTE DA ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS PÊNSEIS APLICADAS A COBERTURAS DE GRANDES ÁREAS LIVRES

2.1. INTRODUÇÃO

Desde os anos 50, quando surgiram os diversos sistemas estruturais de coberturas de grandes áreas livres, importantes avanços ocorreram no projeto, na análise e na construção destes sistemas. Para isso contribuíram a introdução do computador, e o desenvolvimento de novos materiais e de novas tecnologias de construção. Nas últimas décadas difundiu-se a aplicação destes sistemas estruturais por todo o mundo, destacando-se os sistemas tracionados, tais como as estruturas de cabos e as membranas.

Uma estrutura suspensa de cabos é um tipo de estrutura formada por cabos e cordoalhas, geralmente de aço, que constituem os elementos sob tração.

Como os cabos têm pouca rigidez à flexão, mudanças no carregamento podem causar grandes deslocamentos da estrutura suspensa. Estes deslocamentos tornam-se um complicador para a análise, o projeto e a construção destas estruturas. No entanto, com o desenvolvimento dos métodos de análise não linear nos últimos anos e o acesso a computadores mais rápidos e de maior capacidade, as dificuldades da análise das estruturas pênseis são mais facilmente contornadas.

Segundo o Comitê de Estruturas Pênseis do ASCE em seu artigo *Cable-suspended roof construction state-of-art* [1971], existiam na época aproximadamente cem obras construídas com coberturas pênseis de diferentes formas. Eram poucas obras em coberturas pênseis, comparando-se com a grande experiência de construção acumulada na área de pontes pênseis, que já dispunha de normas para o projeto e contava com melhorias constantes nas técnicas de construção. O trabalho do Comitê tinha como finalidade a divulgação das informações disponíveis sobre a análise, o projeto e a construção de estruturas pênseis para coberturas.

O artigo de KNUDSON [1991] apresenta um relato do desenvolvimento, nas últimas décadas, dos procedimentos de análise de estruturas pênseis para coberturas, enumera importantes obras realizadas e fornece referências sobre o assunto.

A norma *ASCE STANDARD 19/96 – Structural applications of steel cables for buildings* [1998] - é o resultado de recomendações técnicas atuais para a construção de edificações utilizando cabos de aço estruturais.

Partindo desses trabalhos citados e com base em pesquisa bibliográfica cobrindo os últimos anos, elaborou-se um resumo da evolução do cálculo de estruturas pênseis aplicadas a coberturas, que é apresentada neste capítulo.

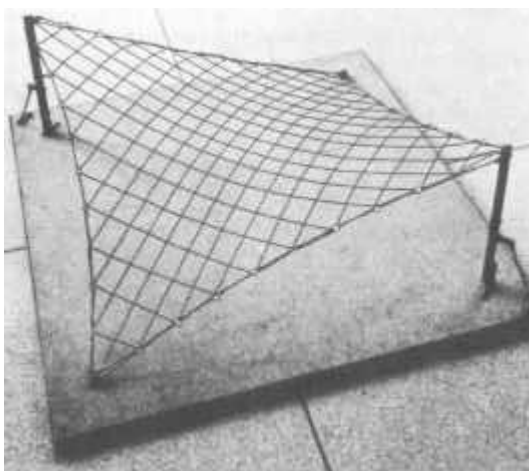
2.2. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ESTÁTICO

A análise do comportamento estático de estruturas pênseis consiste essencialmente de duas etapas. A primeira é relativa à determinação da configuração de equilíbrio do sistema sob o carregamento inicial (peso próprio e protensão). A segunda etapa engloba a determinação dos esforços e deslocamentos, gerados pelas diversas ações atuantes, ou que possam vir a atuar (carregamentos de vento, variação da temperatura, variação da posição da estrutura de suporte, etc).

2.2.1. DETERMINAÇÃO DA CONFIGURAÇÃO INICIAL DE EQUILÍBRIO

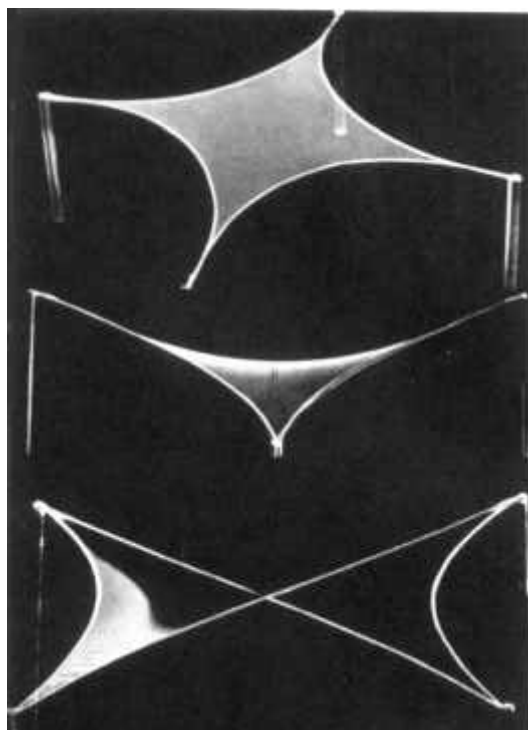
As estruturas tracionadas são as únicas em que a configuração inicial não pode ser especificada independentemente do estado de forças. Isto justifica a ênfase especial dispensada à determinação da configuração inicial de equilíbrio.

A configuração inicial de um sistema suspenso é a posição de equilíbrio sob carregamento inicial, e pode ser determinada analiticamente para uma apropriada combinação de parâmetros de cabos especificados. Usualmente, o carregamento inicial consiste do peso próprio do sistema suspenso mais a protensão dos cabos (se existir). Os parâmetros que podem ser especificados incluem: o comprimento do cabo, a componente horizontal do esforço de tração no cabo, a magnitude, direção e sentido das forças aplicadas, e as coordenadas de pontos significativos sobre o sistema de cabos.



(a)

FIGURA 2.2.1: Modelos físicos utilizando (a) fios de aço, (b) película de sabão.



(b)

Para uma estrutura suspensa, em geral, a determinação da forma inicial pode requerer inúmeros cálculos do tipo tentativa e erro. Até o final da década de 60 os modelos físicos foram bastante utilizados para se obter os valores iniciais para os cálculos iterativos. Frei Otto executou muitos experimentos utilizando diferentes materiais para modelar superfícies de estruturas tracionadas, descritos em OTTO [1969]. Dentre os materiais Frei Otto usou películas de sabão, modelos reduzidos em arame e tecidos (figura 2.2.1). Estes modelos, no entanto, apresentam dificuldades de manuseio e podem não fornecer uma precisão aceitável para as aplicações práticas.

Atualmente os métodos numéricos são mais comumente empregados na determinação da configuração inicial de equilíbrio das estruturas de cabos, com auxílio de técnicas de CAD (*Computer-Aided Design*).

Antes de se examinar os processos utilizados na determinação da configuração inicial de equilíbrio de estruturas pênseis, é necessário considerar os meios de representação de tais estruturas por modelos matemáticos. Basicamente, estruturas pênseis podem ser tratadas matematicamente como sistemas discretos ou sistemas contínuos.

2.2.1.1. TÉCNICAS DO MEIO CONTÍNUO

Na modelagem do meio contínuo, equações diferenciais ordinárias ou equações diferenciais parciais simultâneas são utilizadas para representar a estrutura real. Admite-se que os segmentos de cabo são elementos de forma parabólica ou de catenária, que fisicamente corresponde à geometria real, se apenas cargas distribuídas atuam ao longo do cabo. No entanto, cargas concentradas, quando idealizadas como pontuais, causam descontinuidades na inclinação da curva. No caso de cestas, segundo o modelo contínuo, a rede de cabos é analisada substituindo-a por uma membrana sem rigidez ao cisalhamento. Essa aproximação é válida para cestas com um grande número de cabos.

O cabo isolado (figura 2.2.2), representado como um meio contínuo, tem a sua forma inicial, no plano do carregamento, determinada pela equação (2.2.1):

$$\frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{q(x)}{H} \quad (2.2.1)$$

sendo $q(x)$ a carga distribuída vertical e H a componente horizontal do esforço de tração no cabo.

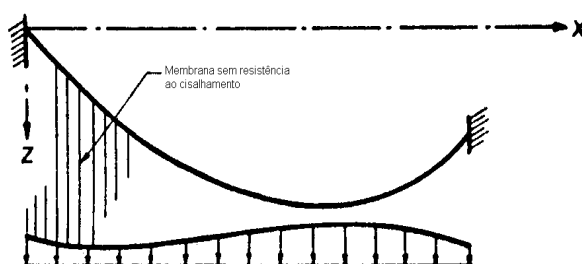


FIGURA 2.2.2: Cabo livremente suspenso sob um carregamento distribuído ao longo do seu vão.

Soluções da equação (2.2.1) para várias funções de carregamento e diferentes tipos de cabos inextensíveis, elasticamente extensíveis, e para cabos de seção não uniforme foram obtidas por JOHNSON, BRYAN & TURNEAURE [1911], STEINMAN [1929], CZITARY [1951], MOLLMAN [1965], PUGSLEY [1968], OTTO & SCHLEYER [1969], e SCALZI, PODOLNY & TENG [1969].

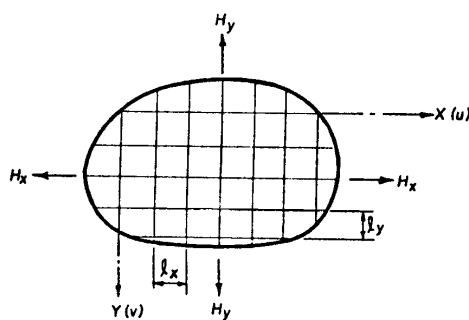


FIGURA 2.2.3: Cesta de malha ortogonal.

As cestas podem ser classificadas como ortogonais ou oblíquas. Cestas ortogonais são estruturas particulares, onde dois conjuntos de cabos, quando projetados no plano formam ângulos retos (figura 2.2.3). Todos os outros casos são denominados oblíquos.

Como já mencionado, no modelo contínuo o conjunto de cabos é substituído por uma membrana sem rigidez à força cortante. A aplicação dessa teoria para cestas ortogonais resulta em equações do tipo:

$$H_x \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + H_y \frac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = -q(x,y) \quad (2.2.2)$$

MOLLMANN [1965] e OTTO & SCHLEYER [1969] utilizaram coordenadas projetadas e de superfície na aplicação da teoria de membrana para cestas ortogonais e oblíquas.

DEAN & UGARTE [1963] analisaram cestas ortogonais com contornos particulares empregando diferenças finitas para a resolução.

ERAS & ELZE [1963] e outros pesquisadores observaram através de verificação experimental, que não há diferenças significativas no comportamento de cestas oblíquas e ortogonais, quando estas são abatidas.

2.2.1.2. PROCESSOS DISCRETOS

No modelo discreto a estrutura real é representada por um conjunto de elementos interconectados por um número finito de pontos nodais, em que o carregamento é admitido concentrado. Em cada nó, o equilíbrio de forças e a compatibilidade de deslocamentos precisam ser satisfeitos.

Um sistema de equações algébricas pode ser obtido diretamente das considerações de equilíbrio de cada nó, em termos das posições dos nós adjacentes.

MOLLMANN & MORTENSEN [1967] e SIEV [1967] obtiveram um sistema de $3n$ equações, representando a estrutura como um sistema discreto de n nós internos e resolveram cestas oblíquas protendidas carregadas verticalmente. A resolução do sistema de equações dependia de

se admitir valores apropriados de tensões iniciais nos cabos, tendo-se as coordenadas dos pontos de apoio fixas.

Para estruturas complexas o número de equações é razoavelmente grande, sendo que a utilização do computador torna-se imprescindível.

Os primeiros métodos com o uso do computador, que resolviam o problema do equilíbrio inicial, eram baseados nas mesmas técnicas de análise de deslocamentos usadas também para estudar o comportamento de estruturas tracionadas sob as diferentes solicitações de carregamento estático. Nestes métodos, técnicas iterativas de análise da não linearidade geométrica eram utilizadas para eliminar forças desequilibradas de uma configuração intermediária que não era a de equilíbrio.

O processo dos deslocamentos pode ser resumido como segue. O projetista primeiramente seleciona valores para todos os parâmetros básicos, que resulta, em geral, numa configuração que não satisfaz os requisitos de equilíbrio, podendo-se obter um vetor de forças desbalanceadas, que é então aplicado à estrutura. A configuração de equilíbrio da estrutura é obtida, permitindo-se que ela se deforme sob esse carregamento. As estruturas tracionadas geralmente desenvolvem grandes deslocamentos para compensar essas cargas desbalanceadas. Por isso são necessários procedimentos iterativos para se considerar a não linearidade geométrica, como por exemplo, o método iterativo de Newton-Raphson, que é baseado na relação de rigidez tangente.

O processo dos deslocamentos com não linearidade geométrica apresenta alguns inconvenientes para resolver o problema da configuração inicial de equilíbrio. Primeiro, porque apresenta dificuldades para o controle da forma e para a distribuição de esforços na estrutura pelo projetista. É possível que alguns elementos resultem comprimidos no final da análise, o que não é aceitável para estruturas tracionadas. Além disso, os cálculos envolvidos com a montagem da matriz de rigidez representam excessivo esforço computacional.

Vários métodos para resolver o problema do equilíbrio inicial têm sido desenvolvidos para evitar alguns dos problemas associados com o método dos deslocamentos.

Um método para a determinação do equilíbrio de forças em cestas com geometria fixada foi desenvolvido independentemente por dois grupos: KNUDSON & SCORDELIS [1972] e OHYAMA & KAWAMATA [1972], baseando-se na técnica dos mínimos quadrados.

O método da densidade de forças desenvolvido por SCHECK [1974] oferece uma solução linear para o problema do equilíbrio inicial para uma classe geral de estruturas de cabos. O problema é linearizado especificando-se uma relação de força sobre o comprimento para cada elemento de cabo. O principal atrativo do método é que o projetista especifica uma relação entre uma forma de superfície e a distribuição de esforços, ao invés de especificar cada variável diretamente.

YOSHIDA, MAJOWIECKI & TSUBOTA [1989] estenderam o conceito de densidade de forças a estruturas de membranas. Eles apresentaram uma decomposição de um elemento finito triangular em três elementos de cabos equivalentes. Em seguida resolveram o problema através da densidade de forças de maneira usual. As tensões finais da membrana são obtidas com a ajuda de uma matriz de transformação entre forças nos cabos e tensões no elemento triangular.

O principal problema do método é que a densidade de força não é uma quantidade significativa para o projetista. Daí a dificuldade de se prever a forma da rede ou a distribuição de tensões a partir de uma densidade de força selecionada. Além disso, se o carregamento é dependente da forma, a solução torna-se não linear, e o método perde alguns de seus atrativos.

BARNES [1975,1980] utilizou métodos de análise dinâmica no problema do equilíbrio inicial de estruturas de cabos e membranas, que resulta numa técnica similar ao método dos deslocamentos. Esta técnica é denominada de relaxação dinâmica, e consiste na aplicação de vibração amortecida a uma estrutura inicialmente desequilibrada, até que uma forma estável é obtida. BARNES [1988] aplica a mesma técnica a cestas

protendidas. BARNES [1994] descreve com detalhes a teoria da relaxação dinâmica e apresenta aplicações da técnica para a determinação da geometria inicial de várias obras construídas.

O problema do equilíbrio inicial pode ser visto ainda como um problema de otimização, envolvendo diversas variáveis básicas de projeto. Esta aproximação foi aplicada a cestas por NAKANISHI & NAMITA [1976], onde a forma da superfície, as condições de contorno e as cargas são prescritas, enquanto a distribuição de tensões é incógnita. O projetista deve especificar uma forma ideal, bem como uma distribuição ideal de tensões, e a solução ótima é aquela que satisfaz estas especificações.

Um ponto que é certamente importante em todo o processo do projeto, mas que é geralmente desprezado no problema do equilíbrio inicial é a deformação e o estado de tensões da estrutura de apoio. Com exceção de algumas obras executadas (FERETTI & ZINGALI [1972], SAMUELSSON & KARRHOLM [1972]), onde aparentemente houve a preocupação da análise conjunta, é mais freqüente desacoplar a estrutura de apoio da estrutura de cabos da cobertura.

STEFANOU & NEJAD [1995] apresentaram um método para a análise de estruturas de cabos, considerando a deformação da estrutura de apoio. O método proposto é baseado na minimização da energia potencial total da estrutura completa (estrutura de cabos e estrutura de apoio) e resolvido pelo método do gradiente conjugado. Ele relata rápida convergência para o caso de contorno rígido, mas para o caso de contornos deformáveis a convergência é reduzida devido à grande diferença de rigidez dos elementos. Uma técnica para melhorar a taxa de convergência é introduzida (*scaling technique*), resultando um método mais compacto (utilizando pouca memória) e rápido, comparando-se com o método de Newton-Raphson.

É usual, em programas computacionais para a determinação da configuração inicial de equilíbrio, desprezar-se o peso próprio da estrutura de cabos, e só incluí-lo na análise subsequente como um carregamento externo. ISHII [1989] em seu trabalho ressalta a importância de se

considerar o peso próprio dos cabos e/ou membranas para se obter valores corretos de tensões, quando o objetivo é monitorar a distribuição de tensões na estrutura. BARNES [1994] indica algumas vantagens para a não consideração do peso próprio na determinação da configuração inicial de equilíbrio. Ele observa que, quando a geometria inicial depende somente da proporção de força de protensão aplicada (e não de sua magnitude) em relação ao peso próprio, o nível de protensão pode ser ajustado durante a etapa de aplicação de carga externa, sem que se necessite repetir a etapa da configuração inicial.

HABER & ABEL [1982a] realizaram um minucioso inventário dos métodos existentes para a solução do problema do equilíbrio inicial, concluindo que não existe um método único ótimo para todos os problemas. É desejável que o projetista selecione um método ou combinação de métodos que seja mais adequado ao problema em questão e que atenda às necessidades do projeto. Por essa razão, nos últimos anos intensificou-se o desenvolvimento de técnicas gráficas interativas para computador, que incorpora vários métodos de solução, além de gerar automaticamente a entrada de dados e produzir saída gráfica de resultados, o que proporciona um monitoramento dinâmico do processo de solução.

2.2.2. ANÁLISE DA ESTRUTURA SUBMETIDA À AÇÕES DIVERSAS

Como já descrito a estrutura pênsil, quando submetida a uma ação externa, pode ser analisada utilizando-se uma representação matemática discreta ou contínua da estrutura. Na maioria das teorias desenvolvidas para a análise da estrutura de cabos sob carregamento de serviço, a posição inicial da estrutura e os esforços iniciais são conhecidos.

Se a aproximação discreta é utilizada, a formulação resulta num conjunto de equações algébricas não lineares, que podem ser resolvidas por procedimentos numéricos. Já na aproximação contínua, obtém-se um conjunto de equações íntegro-diferenciais não lineares, que muitas vezes

são substituídas por uma forma discreta, e depois solucionadas também por procedimentos numéricos.

2.2.2.1. TÉCNICAS DO MEIO CONTÍNUO

Os primeiros trabalhos para o cálculo dos deslocamentos de cabos deformáveis isolados, devido à mudança de carregamento foram baseados em aproximações contínuas.

MARKLAND [1951], PUGSLEY [1968], O'BRIEN & FRANCIS [1964] apresentaram soluções para cabos simplesmente suspensos sob cargas concentradas de pequena ou grande magnitude em relação ao peso próprio do cabo.

Outros estudos de cabos livremente suspensos, sujeitos a mudanças de carregamento aplicado, mudanças de temperatura e movimentos de apoio, encontram-se em KRISHNA [1978], IRVINE [1981], SZABÓ & KOLLÁR [1984], BUCHHOLDT [1985], BARBATO [1991], KADLCÁK [1995].

SCHLEYER [1962], através do modelo contínuo, investigou a aplicação da teoria de membrana para a análise de cestas. Ele desenvolveu um conjunto de equações íntegro-diferenciais não lineares modificada, que são aplicáveis a cestas ortogonais. As equações são de difícil resolução em sua forma fechada, exceto para casos triviais.

Técnicas numéricas têm sido desenvolvidas por vários autores, mas são, na maioria, variações das técnicas lineares iterativas. Na verdade, para utilizar técnicas de solução iterativas as equações íntegro-diferenciais precisam ser transformadas em equações diferenciais, com as integrais substituídas por somatórios. Observe-se que antes da obtenção das equações diferenciais a estrutura é considerada um meio contínuo. Depois, para resolvê-las, as equações contínuas são substituídas por uma forma discreta.

A aproximação contínua para cestas oblíquas é essencialmente a mesma que a utilizada para cestas ortogonais.

SHORE & BATHISH [1967] utilizaram série de Fourier dupla para transformar as equações íntegro-diferenciais em um conjunto de equações algébricas não lineares. Em seu trabalho também descrevem uma verificação experimental do resultado numérico.

BANDEL [1969] analisou cestas em forma de parabolóide-hiperbólico sob forças verticais e submetidas a mudanças de temperatura.

Outros autores analisaram cestas com a técnica do meio contínuo pela teoria de cascas utilizando relações elásticas equivalentes (TOTTENHAM & KHAN [1971]).

A resposta a carregamento estático de muitas formas estruturais de cabos e membranas encontra-se em MOLLMANN [1974] e LEONARD [1988]. Os livros de KRISHNA [1978], IRVINE [1981] e BUCHHOLDT [1985] contêm informações práticas de projeto, além de procedimentos de análise. SZABÓ & KOLLÁR [1984] detalham procedimentos numéricos simplificados e cálculos manuais para o anteprojeto de estrutura de coberturas pênses.

2.2.2.2. PROCESSOS DISCRETOS

Segundo o Subcomitê de Estruturas Pênses do ASCE _ *Cable-suspended roof construction state-of-art* [1971] _ a maioria dos procedimentos de análise discreta era baseada no método dos deslocamentos, e utilizavam a técnica de Newton-Raphson para resolver o problema não linear.

Um dos primeiros procedimentos numéricos para calcular deslocamentos de cabos simplesmente suspensos devidos a mudança de carregamento, utilizando a aproximação discreta, foi apresentada por MICHALOS & BIRNSTIEL [1962] e JENNINGS [1962].

Procedimentos iterativos para cálculo de deslocamentos de cabos isolados foram apresentados por BANDEL [1962] e BROTTON, WILLIAMSON & MILLAR [1963] para o caso de carregamentos tridimensionais e mudanças de temperatura. Mais referências encontram-se em SHORE & CHAUDHARI [1969].

POSKITT [1967] apresentou uma solução particular para estruturas planas de cabos, estudando cabos-treliça, e considerando apenas deslocamentos verticais.

A maioria dos trabalhos, que utilizam a modelagem discreta, são aplicáveis a estruturas de cabos de forma geral. Ou seja, os procedimentos para a análise de estruturas tridimensionais podem ser utilizados para o estudo dos cabos isolados e cabos-treliça.

SIEV & EIDELMAN [1962] trataram a rede como um sistema discreto e obtiveram um sistema de $3n$ equações algébricas não lineares em termos dos deslocamentos incógnitos dos nós (n é igual ao número de nós do sistema). As equações são resolvidas admitindo-se primeiramente um comportamento linear. As correções não lineares, para a solução obtida, são calculadas por um processo iterativo, baseado na hipótese de comportamento linear sob carregamento infinitesimal.

MOLLMANN & LUNDHUS MORTENSEN [1967] desenvolveram equações de equilíbrio linearizadas para pequenos deslocamentos de cestas. Soluções de problemas não lineares são obtidas pela utilização destas equações incrementalmente. O efeito da temperatura é considerado nas equações de equilíbrio, que são aplicáveis a cestas ortogonais e oblíquas.

Sem dúvida, a formulação pela técnica dos elementos finitos tem sido dominante nos trabalhos mais recentes para a análise do comportamento estático dos cabos e membranas.

Aplicações de análise não linear de deslocamentos para cestas, representadas por elementos finitos de treliça retilíneos encontram-se em HAUG & POWELL [1972a] e ARGYRIS, ANGELOPOULOS & BICHAT [1974]. Utilizando técnicas de elementos finitos para estruturas de superfície curva HAUG & POWELL [1972b] analisaram membranas, com elementos triangulares de lados retilíneos. Mais recentemente WILLIAMS [1994] apresenta um elemento de superfície triangular curvilíneo para a análise de cestas com cabos pouco espaçados.

Dois métodos gerais de solução, ambos baseados na formulação de elementos finitos para deslocamentos incógnitos, têm seu uso difundido na análise estática não linear: o método incremental-iterativo de Newton-Raphson (em que forças desequilibradas são repetidamente aplicadas à estrutura até se obter o equilíbrio), e o método da relaxação dinâmica.

Modificações do método de Newton-Raphson, e métodos de programação não linear (como os quasi-Newton, o método do gradiente conjugado, o método gradiente) são também largamente empregados para a solução da análise estática de estruturas de cabos e membranas (BUCHHOLDT [1985], PULINO F^o. [1991], STEFANOU et alli [1993], ARCARO [1996]).

Vários critérios de convergência são utilizados: usualmente o valor absoluto da máxima força desbalanceada ou a sua norma. Critérios de deslocamentos são também comuns. Estratégias para assegurar a convergência, tais como o controle dos deslocamentos ou a limitação do tamanho do incremento de carga são muitas vezes introduzidos.

Sem exceção, os códigos computacionais para estruturas de cabos não permitem que os elementos trabalhem a compressão, o que em termos práticos é obtido pela remoção do elemento frouxo durante a montagem da matriz de rigidez. Contudo, alguns cuidados devem ser considerados para se assegurar que uma estrutura estável seja mantida, e que cada ponto nodal esteja ligado a pelo menos um elemento com esforço de tração. No caso em que todos os elementos que chegam ao nó estejam comprimidos, em uma etapa intermediária, um procedimento clássico é aplicar pequenos valores no elemento da diagonal da matriz de rigidez para torná-la positiva definida.

Outras estratégias são implementadas para se prevenir problemas de mau condicionamento da matriz de rigidez e de convergência do processo, causadas pela mudança na forma da estrutura ou na rigidez.

2.3. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO

A característica de sistemas pênses que os fazem atrativos para grandes áreas livres, que é a eficiente utilização dos elementos tracionados (tendo rigidez à flexão desprezível), também contribui para a maior desvantagem estrutural de tais sistemas. A desvantagem é a inerente instabilidade de sistemas pênses sob carregamento dependente do tempo (ações dinâmicas).

Uma maneira de se evitar o fenômeno da ressonância (amplitude de vibração muito alta) é evitar freqüências de vibração nas vizinhanças das freqüências naturais da estrutura. Esse procedimento é questionável, pois os dados sobre o carregamento dinâmico do vento são por vezes insuficientes para se especificar a freqüência a se evitar.

A utilização de sistema vedante pesado aumenta a rigidez do sistema estrutural, o que diminui a amplitude de vibração. Um amortecimento, isto é, uma diminuição da amplitude da vibração, pode ser introduzida na estrutura por meio de absorvedores de choques mecânicos. Mas uma maneira eficiente de se diminuir a freqüência natural de vibração é a aplicação da protensão ao sistema.

Segundo o Comitê de Estruturas Pênses do ASCE - *Cable-suspended roof construction state-of-art* [1971] - havia na época muitas publicações sobre o comportamento dinâmico de pontes pênses e estaiadas, e poucas informações para se avaliar coberturas sob vibrações livres e forçadas. A partir daí, o campo de pesquisas na área de análise dinâmica evoluiu muito, desde os trabalhos pioneiros de análise linear da resposta dinâmica até a análise não linear da resposta dinâmica dos trabalhos mais recentes.

Um dos primeiros temas de pesquisa em análise dinâmica foi a determinação das freqüências naturais da estrutura. Para cabos isolados, membranas planas e outras formas simples, encontram-se soluções em livros como KRISHNA [1978], IRVINE [1981], BUCHHOLDT [1985] e LEONARD [1988].

Para formas geométricas mais complexas o Método dos Elementos Finitos é comumente usado para a resolução da estrutura.

Matrizes de massa consistente ou concentrada podem ser utilizadas, mas, devido à eficiência computacional, a matriz diagonal de massa concentrada é preferida como matriz de massa para o Método dos Elementos Finitos.

A solução do problema de autovalores para determinar as frequências naturais da estrutura pode ser obtida por qualquer dos vários métodos disponíveis na literatura (métodos iterativos vetoriais, métodos de transformação, métodos iterativos polinomiais). PULINO F^{ot}. [1991] usou o método de Jacobi generalizado.

Apesar de considerar difícil uma generalização para todas as estruturas tracionadas, KNUDSON [1991] escreve algumas observações a respeito das frequências naturais e modos de vibração. Ele relata que tanto membranas como os cabos possuem frequências naturais e modos de vibração dependentes do nível de protensão reinante e da geometria da estrutura. Alerta que as frequências naturais devem ser calculadas usando a geometria deformada sob carregamento estático ou quase-estático esperado no momento da aplicação do carregamento dinâmico. Além disso, para uma resposta mais precisa e global da estrutura, os modos de vibração combinados da cobertura e da estrutura de apoio deveriam ser considerados.

Como a análise dinâmica deve ser realizada na configuração completa da estrutura, ou seja, quando a estrutura já está protendida e sofreu a ação do carregamento permanente, uma análise dinâmica linear é normalmente satisfatória.

A análise da resposta ao carregamento dinâmico pode ser conduzida ou no domínio do tempo ou no domínio da frequência.

Respostas determinísticas usando métodos de integração no tempo tem sido o caminho da maioria das pesquisas realizadas.

A resposta dinâmica linear ao longo do tempo pode ser obtida pela superposição das respostas individuais dos modos de vibração, ou pela

integração direta do conjunto de equações de movimento. Para a resposta dinâmica não linear, exclusivamente métodos de integração são utilizados, tanto nos casos de esquema de integração explícita (onde o deslocamento e a velocidade não dependem da aceleração) como no esquema de integração implícita (onde o deslocamento e a velocidade dependem da aceleração).

A família de algoritmos de integração no tempo, baseados no esquema de NEWMARK [1959] é ainda uma das mais comumente usadas. A família de algoritmos de ARGYRIS et alli [1973] é freqüentemente empregada quando se requer métodos de integração de ordem superior. Outros métodos de integração direta no domínio do tempo podem ser encontrados na literatura (como o Método θ de Wilson e o Método de Houbolt).

2.3.1. AMORTECIMENTO

A determinação do coeficiente de amortecimento é uma grande preocupação em estruturas de grandes vãos, pois é um fator que controla a magnitude da resposta dinâmica. Para estruturas leves, a própria estrutura, a vedação, bem como o ar circundante podem dar origem a um efeito amortecedor.

Num dos primeiros trabalhos experimentais de estrutura pênsil em escala natural JENSEN [1974] encontrou coeficientes de amortecimento na faixa de 0,5% a 1,5%, apenas contando com a estrutura de cabos de aço. Para a membrana de vedação a faixa variou de 6% a 10% e para o amortecimento aerodinâmico de 2% a 8%. Para estruturas em forma de tendas Jensen obteve um coeficiente de amortecimento entre 17% e 20%. Seu trabalho indica que a variabilidade do amortecimento depende da estrutura envolvida.

LEONARD [1988] indica intervalos de fatores de amortecimento típicos próximos aos obtidos por Jensen, e observa que o amortecimento é

consideravelmente maior para cabos frouxos em relação aos cabos esticados.

Em resumo, alguns valores de coeficiente de amortecimento têm sido relatados na literatura, mas é importante que os projetistas investiguem o amortecimento para a estrutura particular a ser analisada.

2.3.2. AÇÕES DINÂMICAS

As duas ações dinâmicas mais importantes para estruturas pênseis são o vento e o terremoto. Rajadas fortes de vento e cargas de choque têm sido mencionados em livros como KRISHNA [1978] e BUCHHOLDT [1985], mas não estão entre as cargas dinâmicas usuais para o projeto.

2.3.2.1. RESPOSTAS À AÇÃO DO VENTO

Como as estruturas de grandes vãos são fortemente suscetíveis à ação do vento, isto tem sido o enfoque principal tanto de pesquisas experimentais como teóricas.

Dois efeitos principais de vento sobre estruturas flexíveis têm sido estudados: a vibração forçada (**buffeting**) da estrutura pelo vento, e a oscilação auto-excitada (**flutter**), que ocorre quando a energia de vibração da estrutura é igual a energia da corrente de ar.

A aproximação mais comum para calcular respostas dinâmicas devido ao vento consiste em dividir a ação do vento em duas parcelas: uma componente quase-estática e uma componente flutuante.

A componente quase-estática é resolvida como um problema estático não linear. A componente flutuante é aplicada como uma carga dinâmica sobre a configuração de equilíbrio sob o carregamento quase-estático.

Vários métodos foram primeiramente utilizados para descrever a distribuição da componente flutuante sobre a estrutura, para então se calcular a resposta dinâmica ao longo do tempo. Felizmente, os

pesquisadores têm agora maior quantidade de registros sobre como o vento atua na estrutura, bem como sobre as respostas dinâmicas destas estruturas, cujos dados são obtidos em ensaios de modelos em túnel de vento, ou estruturas sob condições naturais.

Um outro caminho para se considerar vibrações forçadas é a aproximação não determinística, onde a componente flutuante do vento é caracterizada por suas propriedades espectrais, que seriam usadas para prever o pico de resposta dinâmica esperada. Neste procedimento, as oscilações são também aplicadas sobre a configuração quase-estática do vento.

A área da oscilação auto-excitada, e particularmente o fenômeno da ressonância devido ao caráter periódico da velocidade de oscilação do vento tem sido pouco pesquisado. Um outro campo de pesquisa em aberto refere-se ao estudo da interação entre as camadas de ar e a cobertura, principalmente para as estruturas de membranas.

2.3.2.2. RESPOSTAS À AÇÃO DE TERREMOTO

Dentre as construções de grandes vãos, as estruturas pênseis são preferidas devido a seu baixo peso. Esta característica é especialmente vantajosa para projetos de estruturas sujeitas a terremotos.

KNUDSON [1971a,b] realizou uma análise não linear no domínio do tempo para cestas com dupla curvatura reversa e concluiu que o efeito do vento é muito mais importante que os efeitos do terremoto para tais estruturas, pois as forças de inércia são muito pequenas para as construções leves.

KRISHNA [1978] e LEONARD [1988] chegaram à mesma conclusão pelo exame do espectro do terremoto e das frequências naturais de sistemas pênseis. Eles observaram que a energia sísmica está concentrada tipicamente entre 3Hz e 10Hz, enquanto que as coberturas pênseis têm frequências menores (<4Hz) e as estruturas de apoio têm frequências muito mais altas. O resultado é que as componentes de altas frequências são

amplificadas pela estrutura de apoio e as componentes de baixa frequência são atenuadas.

BUCHHOLDT [1985] também concorda, concluindo que como as redes de cabos são leves e flexíveis, são ideais para zonas de terremotos, pois mesmo para experimentos simulando as acelerações mais altas já registradas em terremotos, pequenas amplificações dinâmicas ocorreram nas estruturas pênséis.

2.4. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ELÁSTICO NÃO LINEAR E PÓS-ELÁSTICO DE SISTEMAS PÊNSEIS

Como se sabe, para um sistema pênsil a relação entre deslocamento e força aplicada não é linear, portanto não é válida a superposição de efeitos, e a não linearidade geométrica da estrutura precisa ser incluída na análise. Além disso, pode ser necessária a consideração da não linearidade física do material em algumas análises.

Os procedimentos para determinação dos deslocamentos de estruturas pênséis revistos nos itens anteriores são baseados na hipótese de comportamento elástico linear do material (validade da Lei de Hooke). Eles não são diretamente aplicáveis para o cálculo dos deslocamentos de estruturas tracionadas, quando as tensões ultrapassam o limite de proporcionalidade.

Depois que o limite de proporcionalidade do material é alcançado o problema torna-se duplamente não linear, ou seja, a resposta às variações de carregamento é não linear com relação aos efeitos geométrico e físico.

O conhecimento da resposta pós-elástica é desejável, pois a reserva de resistência antes da ruptura sob carregamento estático pode ser calculada. Tais cálculos de resistência última são úteis na análise e no projeto de estruturas mais econômicas.

GREENBERG [1970] foi o primeiro a investigar cestas ortogonais com carregamentos verticais crescentes e estudar sua reserva de capacidade de

resistência. Através da formulação modificada de SIEV (1963) ele apresentou soluções baseadas em métodos numéricos para o comportamento geral elástico e pós-elástico, e mostrou que a capacidade de carga última, calculada considerando a não linearidade geométrica e física do material, foi maior que àquelas calculadas por métodos convencionais, denominadas de capacidade de carga nominal e capacidade de carga elástica.

Segundo a definição de Greenberg a capacidade de carga nominal é a carga de ruptura calculada com a teoria de primeira ordem (validade da Lei de Hooke e o equilíbrio é calculado na posição inicial).

A capacidade elástica de carga é a carga de ruptura calculada com a hipótese de material de comportamento elástico linear, levando-se em consideração a não linearidade geométrica (teoria de segunda ordem).

A comparação do comportamento elástico e inelástico do material mostrou três importantes fatores. Primeiramente na mudança da rigidez da estrutura. Sabe-se que com o aumento do carregamento, os deslocamentos que ocorrem levam a um aumento da curvatura da cesta de cabos, de modo que a estrutura fica mais rígida. Isto se reflete na curva carga-deslocamento para material elástico. No entanto, para material inelástico dois efeitos separados ocorrem que tendem a se opor. A estrutura torna-se mais rígida pelo efeito da mudança da curvatura, mas torna-se menos rígida devido ao decréscimo do módulo tangente dos elementos já plastificados. Para a solução inelástica o efeito da mudança da curvatura predomina inicialmente, enquanto que para um nível de carregamento mais elevado a redução do módulo tangente tem efeito maior. Isso explica porque a inclinação da curva carga-deslocamento decresce para níveis altos de carregamento.

Um segundo fator é o efeito do comportamento do material inelástico sobre o carregamento último da cesta. Como foi estabelecida uma determinada tensão última, para o caso inelástico, a deformação correspondente foi muito maior que no caso elástico, de modo que os deslocamentos e a curvatura final do sistema de cabos foram consideravelmente maiores. Conseqüentemente uma maior capacidade de

carga foi obtida. Isso indica que uma análise elástica subestima a capacidade real de carga da estrutura.

Greenberg encontrou discrepância maior para cestas mais abatidas do que para as cestas com substancial curvatura. Por essa razão, ele sugere que um fator de carga variável, dependente da forma inicial, seja introduzido na fase de projeto, para melhor refletir a verdadeira capacidade última, e assim alcançar um projeto mais econômico.

O terceiro fator importante é a benéfica distribuição de tensões. A rigidez instantânea de um elemento individual é proporcional ao módulo tangente, que decresce conforme o nível de tensão aumenta. Assim, em cada nó os elementos menos solicitados tem uma rigidez relativamente maior e transmitem uma porção maior do carregamento aplicado no nó. No caso do carregamento último, o elemento menos tracionado na análise inelástica tinha 84,8% da tensão de ruptura, enquanto que na análise elástica, o elemento menos tracionado tinha apenas 70,2% desta tensão.

Finalmente, Greenberg conclui que a magnitude da carga última depende da forma inicial da estrutura e das propriedades do material. Quanto mais abatida a rede e maior a deformação última do material, maior será a reserva de capacidade de carregamento da rede, comparando-se com os métodos convencionais.

JONATOWSKI & BIRNSTIEL [1970] apresentaram um procedimento numérico (método da rigidez direta com resolução por Newton-Raphson) para determinar o comportamento inelástico de estruturas pênseis tridimensionais enrijecidas (com elementos com rigidez à flexão) e cabos isolados, utilizando uma curva tensão-deformação obtida com dados experimentais de JONATOWSKI & BIRNSTIEL [1967]. Nenhum problema de convergência é mencionado, já que ele utiliza um procedimento incremental de carregamento.

SAAFAN [1970] utilizou o método de Newton-Raphson com um controle de deslocamento ("step length control") para a análise inelástica de estruturas tracionadas .

MURRAY & WILLEMS [1971] apresentaram métodos baseados no princípio de mínima energia potencial total, e utilizaram técnicas de minimização, com o objetivo de aperfeiçoar a eficiência da análise de estruturas pênseis inelásticas. Eles utilizaram a lei de Ramberg-Osgood¹ para representar o comportamento do cabo.

TENE & EPSTEIN [1971] aproximaram a curva tensão-deformação do cabo por uma função polinomial.

IRVINE [1975] através de estudo analítico de cabos isolados abatidos, submetidos a carregamento concentrado e uniformemente distribuído, obteve, como Greenberg, uma capacidade de carga última consideravelmente maior que a capacidade nominal de carga. Ele atribui o resultado aos efeitos da mudança de geometria e ao fenômeno de endurecimento do material, o que indicaria ser admissível a introdução de um fator de carga para projeto. Mas ele alerta que o cabo levado a trabalhar em regiões pós-elásticas sofre deformações não recuperáveis, que causam o alongamento do cabo e assim um rearranjo da posição de equilíbrio inicial, que pode ser inaceitável para cabos originalmente abatidos. Em sua investigação Irvine utilizou informações de SCALZI & Mc GRATH [1971] e JONATOWSKI & BIRNSTIEL [1970].

MAIER & CONTRO [1975] propõem um método para a análise de sistemas suspensos, considerando a não linearidade física e geométrica, e que estão sujeitos a mudanças no carregamento nodal, variações de temperatura, e operações de carregamento e descarregamento. Baseando-se no princípio da mínima energia potencial, eles aplicam técnicas de programação não linear para solucionar o problema. A representação da curva tensão-deformação é aproximada por trechos lineares.

CONTRO [1985] apresenta uma técnica de otimização, onde métodos de programação não linear são aplicados a comportamentos de cabos frouxos ou com trechos elasto-plásticos. Estados de protensão ótimos foram calculados para cestas em forma de parabolóides-hiperbólicos. Estes

¹ RAMBERG, W.; OSGOOD, W.R. (1943) Description of stress-strain curves by three parameters, *NACA* (National Advisory Committee for Aeronautics), TN902, July, 1943.

métodos demonstram ser particularmente próprios para a solução de problemas envolvendo não linearidades física e geométrica, embora também possam ser computacionalmente caros.

MEEK [1994] utiliza o método iterativo de Newton-Raphson para resolver as equações de equilíbrio nodais da estrutura de cabos, considerando-se as deformações plásticas do cabo. A estabilidade do procedimento iterativo é controlada utilizando-se um valor intermediário entre o módulo tangente e o módulo secante da curva tensão-deformação. O autor utiliza uma linearização da curva de Ramberg-Osgood¹ em 2 a 6 trechos retilíneos.

Como no caso da análise elasto-plástica estática, poucos pesquisadores têm considerado a análise elasto-plástica dinâmica de cabos e membranas.

MA, LEONARD & CHU [1979] examinaram a resposta dinâmica não linear de sistemas de cabos incluindo os efeitos da plastificação e afrouxamento dos cabos, utilizando um elemento finito curvo isoparamétrico e o princípio de Hamilton para formular o problema dinâmico. As equações de movimento obtidas são linearizadas utilizando uma teoria incremental para aproximar o comportamento da estrutura dentro de cada incremento de tempo (ou de carregamento). Eles adotaram uma curva tensão-deformação aproximada por trechos retos representando o cabo como um pseudo material de Hooke.

PAPADRAKAKIS [1983] utilizou a relação tensão-deformação de JONATOWSKI & BIRNSTIEL [1970] para representar o comportamento do material, matriz de massa concentrada e o algoritmo de integração no tempo de Newmark, com $\beta = 0$, para a análise dinâmica de rede de cabos.

CHISALITA [1984] apresentou uma formulação elasto-plástica para análise dinâmica de cestas, mas apenas aplicações com material elástico linear foram descritas.

IBRAHIMBEGOVIC [1992] apresentou uma formulação de elemento finito consistente para cabos de material elástico não linear, considerando grandes deslocamentos e grandes deformações. Dois modelos constitutivos

são apresentados: de St. Venant e Ogden (material hiperelástico). A formulação pode ser estendida para a análise de fluência, fenômeno que ocorre em cabos sem pré-estiramento (Capítulo 3). Ambos os problemas: estático e dinâmico são considerados em exemplos com poucos elementos.

Segundo KNUDSON [1991], a dificuldade para se chegar a conclusões gerais sobre a resposta elasto-plástica para as configurações de sistemas pênseis, deve-se à complexidade da interação entre carga e estrutura. Os estudos relatados demonstram que as forças máximas nos elementos tendem a decrescer no regime elasto-plástico. Por outro lado, quando as deformações permanentes do elemento são significativas, torna-se mais difícil fazer generalizações sobre os deslocamentos. Segundo Knudson, nestes casos foram observadas oscilações (não se encontrava uma nova configuração de equilíbrio estático) e o período da vibração tendia a aumentar com o começo da plasticidade. Contudo esse fenômeno mostrava-se mais pronunciado em alguns casos que em outros, evidenciando que o estudo do comportamento pós-elástico de estruturas de cabos é uma área de pesquisa ainda a ser explorada.

CAPÍTULO 3

CARACTERÍSTICAS CONSTRUTIVAS E PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS CABOS E CORDOALHAS EMPREGADOS EM ESTRUTURAS DE COBERTURAS PÊNSEIS

3.1. INTRODUÇÃO

O sistema estrutural de coberturas pênseis é composto, geralmente, ou por cordoalhas de aço ou por cabos de aço de fios torcidos. As cordoalhas de fios paralelos justapostos e cobertos por um enrolamento contínuo para mantê-los unidos são quase exclusivamente empregados nas pontes pênseis e só raramente são usadas nas coberturas suspensas. Arame ou fio (*wire*) é um comprimento contínuo único de metal com uma seção transversal circular ou não. Segundo a NBR 6327, arame é um fio de aço obtido por trefilação.

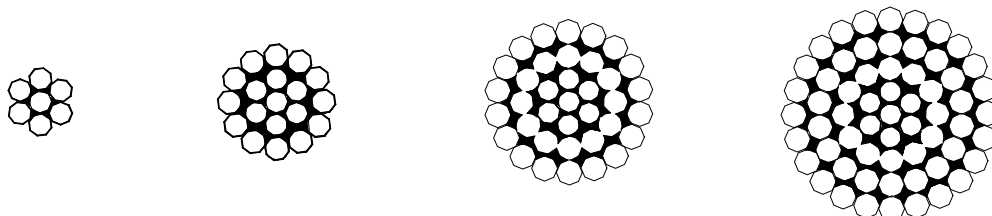


FIGURA 3.1.1: Alguns tipos de cordoalhas de aço de sistema aberto.

Uma cordoalha (*wire strand*) consiste de um arranjo de fios dispostos helicoidalmente, em uma ou mais camadas, ao redor de um eixo, usualmente composto de um fio central, produzindo uma seção simétrica. Existem cordoalhas para fins estruturais fabricadas com 7 até 277 fios, com diâmetros de $\frac{1}{2}$ in a 4 in, e força de ruptura nominal que vai de 126 kN (14,2 tons) a 8.232,5 kN (925 tons), segundo a norma da ASTM A-586/92. A figura 3.1.1 mostra alguns tipos de cordoalhas para fins estruturais.

Um tipo especial de cordoalha, e que é apropriado para coberturas pênseis, consiste de fios dispostos da mesma forma como descrito acima, mas que são envolvidos por uma ou mais camadas fechadas de arames de seção Z, como mostra a figura 3.1.2. Este tipo de cordoalha, denominada cordoalha fechada (*locked coil strand*), tem a vantagem sobre a cordoalha aberta de possuir maior módulo de elasticidade. No entanto a carga última não aumenta proporcionalmente, já que é um valor limitado pela resistência de ruptura dos arames individuais.

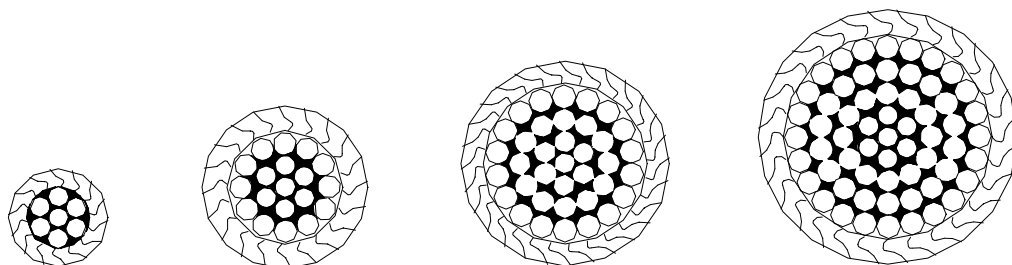


FIGURA 3.1.2: Cordoalhas de aço de sistema fechado.

O cabo de aço de fios torcidos (*wire rope*), figura 3.1.3, apresenta uma pluralidade de cordoalhas, denominadas de pernas, dispostas helicoidalmente ao redor de um núcleo central, também chamado alma, que pode ser composto de uma cordoalha ou de um outro cabo. Os cabos em geral são encontrados com 6 ou 8 pernas, com cada uma delas compostas de 7 a 61 fios. Por isso os cabos são identificados por dois número: o primeiro indicando o número de pernas e o segundo indicando o número de

fios por perna, por exemplo, cabo 6x19. Há ainda certos tipos de cabos que possuem outros fios entre o núcleo e as pernas, por exemplo, o cabo 6x19-25, que além das 6 pernas com 19 fios cada uma, possui mais 25 fios colocados entre o núcleo e as diferentes pernas.

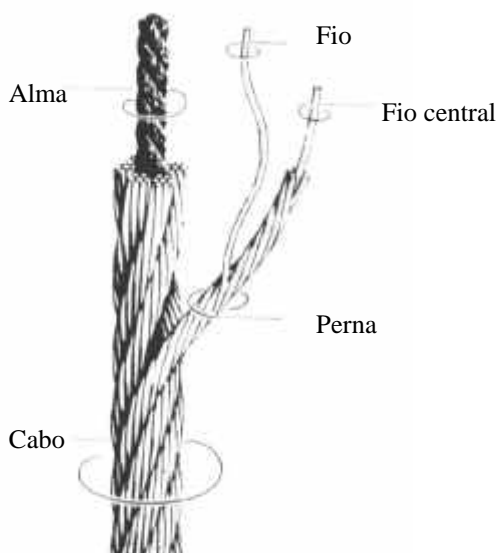


FIGURA 3.1.3: Cabo de aço formado por 6 cordoalhas abertas.

Os cabos são fabricados com diâmetros que variam de $3/8$ in até 4 in e força de ruptura nominal de 52,51 kN (5,9 tons) a 6.497 kN (730 tons), segundo norma da ASTM A-603/94.

A flexibilidade de um cabo, que é medida pela sua maior ou menor resistência ao enrolamento, é função do número e do diâmetro dos fios que o compõe. O raio de curvatura mínimo em que o cabo pode ser curvado é aproximadamente 30ϕ , onde ϕ é o diâmetro do cabo. As bobinas para o transporte dos cabos devem ter no mínimo esta curvatura. Cabos construídos com fios de pequenos diâmetros são evidentemente mais flexíveis que cabos construídos com fios de diâmetros maiores. O diâmetro dos fios também tem influência na resistência dos cabos. Sabe-se que fios de menor diâmetro, devido ao processo de fabricação, ganham acentuado aumento de resistência.

A área metálica de um cabo ou cordoalha de aço é constituída pela soma das áreas das seções transversais dos arames individuais que o compõem, exceto dos arames de enchimento (*filler*). De maneira aproximada pode-se calcular a área metálica multiplicando-se a área total da seção transversal pelo fator de ocupação (*fill factor*) que varia em função da construção do cabo ou cordoalha. Valores típicos deste fator encontram-se na tabela 3.1.

TABELA 3.1.1	
material	fator de ocupação
cabos com 6 pernas e alma em fibra	50%
cabos com 6 pernas e alma de aço	60%
cordoalhas aberta	75%
cordoalha fechada	85%

O comprimento do passo (*length of lay*) de um cabo é a distância, medida paralelamente ao eixo do cabo, em que uma perna faz uma volta completa ao redor do eixo do cabo. O comprimento do passo (*length of lay*) de uma cordoalha é a distância, medida paralelamente ao eixo da cordoalha, em que um fio faz uma volta completa ao redor do eixo da cordoalha (figura 3.1.4).

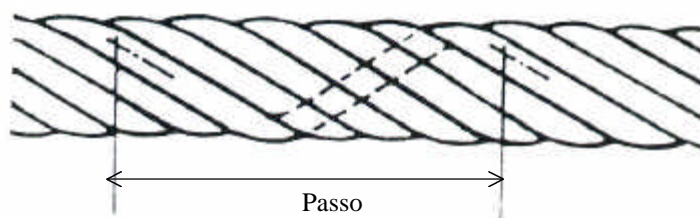


Figura 3.1.4: Comprimento de passo de uma cordoalha.

Devido ao confinamento dos arames, imposto pelo perfeito encaixe da camada exterior, as cordoalhas fechadas podem ter o comprimento do

passo maior, mas limitado a 90 mm; por isso possuem maior grau de utilização da área da seção transversal.

3.2. PROCESSOS DE CONSTRUÇÃO E COMPOSIÇÃO DE CABOS DE AÇO

Primeiramente na fabricação dos cabos, a construção das pernas envolvia várias operações, tendo as diversas camadas de fios comprimentos de passos diferentes. Atualmente, com o aperfeiçoamento das técnicas de fabricação, existem máquinas para a construção de cabos que possibilitam a confecção das pernas em uma única operação, tendo todas as camadas o mesmo passo. Dessa forma, assegura-se um contato permanente entre os arames de camadas sucessivas, obtendo-se melhor distribuição das tensões internas e tornando os cabos mais estáveis, isto é, diminui-se a tendência a torção dos cabos quando estes não estão sendo solicitados. Além disso, ensaios demonstram que os cabos tornam-se mais duráveis, já que o desgaste interno devido ao atrito no cruzamento dos arames é eliminado.

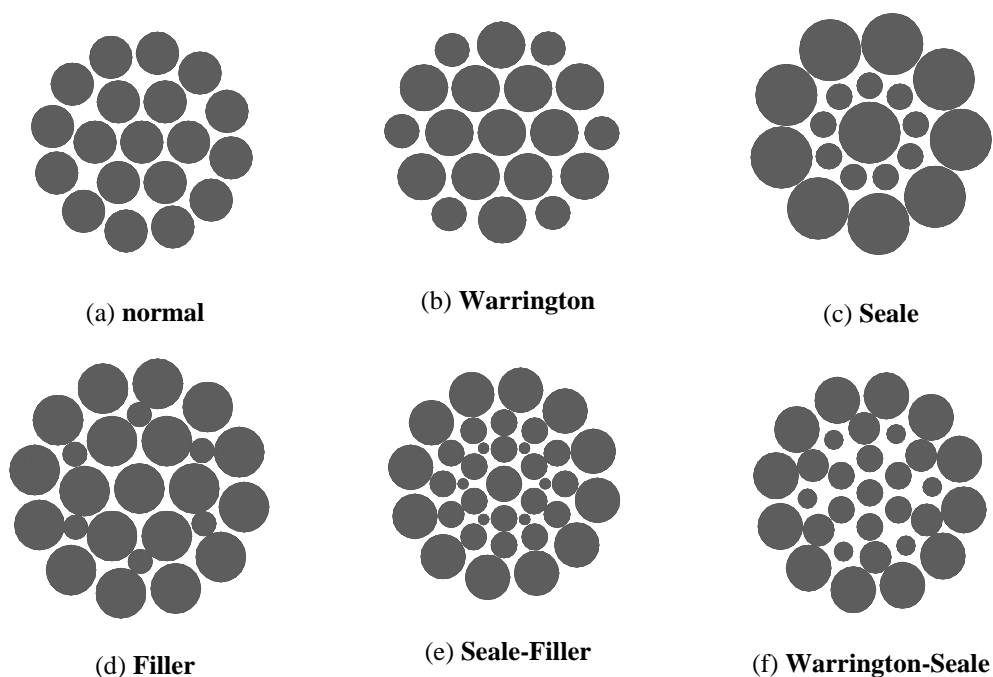


FIGURA 3.2.1: Tipos de construções de cabos de aço.

O contato entre os fios que compõem o cabo torna-se mais efetivo ainda com o emprego de fios de diâmetros diferentes na construção dos cabos. Esta técnica deu origem aos quatro tipos de composições mais conhecidos (citadas pela NBR 6327) : **Seale**, **Warrington**, **Filler** e mista, representados na figura 3.2.1.

A construção **Seale** emprega duas camadas com o mesmo número de fios, sendo a camada interna de diâmetro menor. Esta construção proporciona alta resistência à abrasão devido ao maior diâmetro dos fios externos. A construção **Warrington** emprega na camada externa fios de diâmetros diferentes dispostos alternadamente, gerando uma superfície externa mais lisa e uma seção mais compacta. Este tipo de construção proporciona ao cabo alta resistência ao esmagamento e boa estabilidade. A construção **Filler** apresenta os espaços entre as camadas externas preenchidos com fios de diâmetro menor, gerando uma seção mais compacta entre as descritas e um cabo com boa resistência à abrasão e ao esmagamento. A construção mista é obtida com a combinação das construções anteriores, duas a duas.

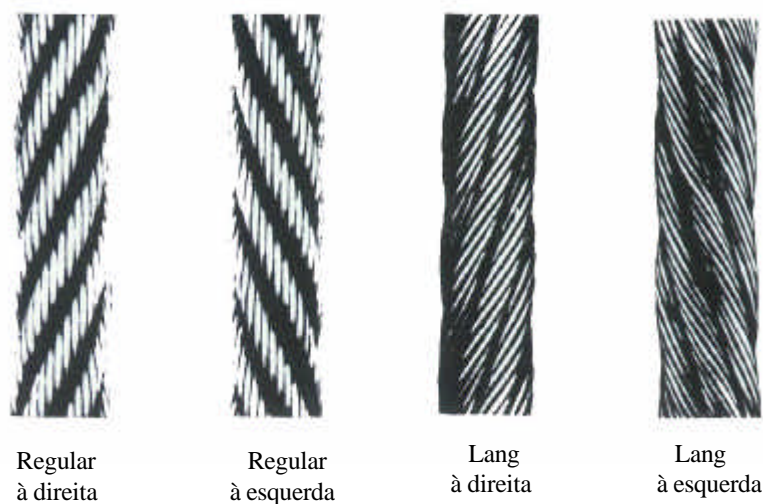


FIGURA 3.2.2: Tipos de enrolamento de cabos de aço.

Quanto à direção de enrolamento dos fios, quando esta coincide com a direção do enrolamento das pernas tem-se um cabo de torção Lang (*Lang*)

lay). Quando a direção de enrolamento dos fios tem sentido inverso à direção do enrolamento das pernas o cabo é chamado cabo de torção regular ou em cruz (*regular lay* ou *ordinary lay*). Segundo o catálogo C-11 da CIMAFE (Companhia Industrial e Mercantil de Artefatos de Ferro) a torção Lang aumenta a resistência à abrasão do cabo e sua flexibilidade (menor resistência ao enrolamento), enquanto a torção regular confere maior estabilidade ao cabo. Os tipos de enrolamentos são mostrados na figura 3.2.2.

O núcleo ou alma de um cabo tem a função de providenciar um suporte para as cordoalhas, de modo que as pernas mantenham a sua posição quando o cabo é submetido a um carregamento. A alma dos cabos pode ser em fibra natural (sisal) ou artificial (polipropileno, polietileno, etc) ou em aço (figura 3.2.3). As almas de fibra em geral conferem ao cabo maior flexibilidade. A alma de fibra artificial (**AFA**), em particular, tem a vantagem de não se deteriorarem na presença de umidade, o que representa uma garantia contra o perigo de corrosão interna do cabo de aço, por outro lado seu preço é mais alto. As almas de aço (**AA**), por sua vez, garantem maior resistência ao amassamento e aumentam a resistência a tração do cabo, porém levam a um acréscimo de peso. Como descrito anteriormente, a alma pode ser formada por uma perna do cabo ou por um cabo de aço independente (**AACI**), sendo esta última construção preferível quando se exige do cabo maior flexibilidade combinada com alta resistência à tração.

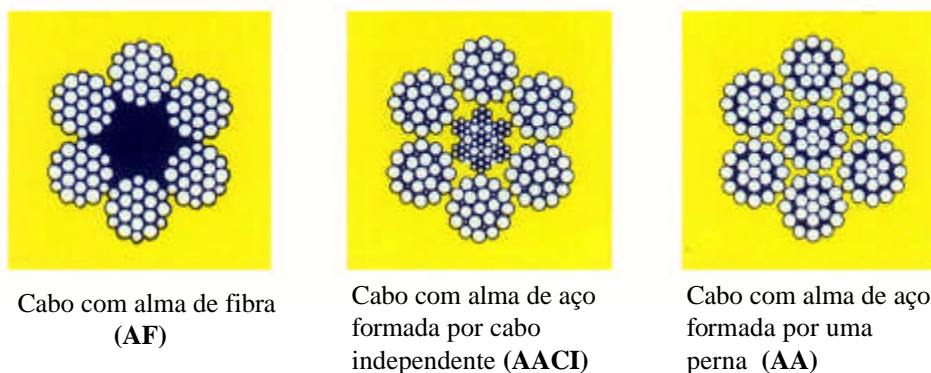


FIGURA 3.2.3: Tipos de núcleos de cabos de aço.

Os cabos podem ser submetidos a um processo adicional de pré-formação, que faz com que as pernas e os fios fiquem torcidos na forma helicoidal, permanecendo dentro do cabo na sua posição natural, com um mínimo de tensões internas. Dessa forma, nos cabos pré-formados as tensões são melhores distribuídas e a tendência ao desenrolamento é menor.

Quanto ao acabamento, os fios que compõem os cabos podem ser galvanizados ou polidos. O cabo de aço polido é aquele constituído por arames de aço sem qualquer revestimento. O cabo de aço galvanizado é constituído por arames galvanizados (zincados). A galvanização pode ser executada na bitola final do arame, ou em uma bitola intermediária, sendo o arame retrefilado posteriormente. De acordo com o processo de galvanização pode-se produzir fios mais resistentes a corrosão, porém mais pesados e mais caros. A escolha do tipo de acabamento depende das condições do ambiente de trabalho dos cabos.

Para melhorar as condições de durabilidade os cabos podem ser fornecidos lubrificados em vários níveis de lubrificação.

3.3. PROCESSO DE PRÉ-ESTIRAMENTO

O alongamento para um dado carregamento, no caso dos cabos e cordoalhas, é a soma de dois efeitos: a extensão do aço propriamente, e a deformação estrutural.

A extensão do aço pode ser elástica ou inelástica, sendo apenas o alongamento elástico recuperável.

A deformação estrutural é inelástica e variável, dependendo do tamanho do cabo, do número e arranjo dos fios, do tipo de núcleo e do equipamento usado no processo de manufatura. A deformação estrutural é permanente, e é causada pelo alongamento de um passo do cabo ou cordoalha quando submetido a um carregamento. O alongamento do passo

ocorre devido ao ajustamento dos fios que compõem as hélices do cabo ou cordoalha, tornando a seção transversal mais densa.

Para a maioria das aplicações estruturais de cabos é necessário que o alongamento estrutural seja removido através de um processo de pré-estiramento. Este processo consiste na aplicação de um certo nível de força de tração ao cabo e na sua manutenção por um determinado período de tempo, suficiente para permitir o ajustamento das partes componentes do cabo àquele carregamento.

O processo de pré-estiramento estabiliza as propriedades elásticas do material, resultando em um aumento do módulo de elasticidade inicial do cabo. É uma prática corrente não apenas o pré-estiramento dos cabos, mas uma prova de carga do conjunto inteiro (cabos e conexões finais) com mais de 50% da resistência de ruptura estimada. Este procedimento tem sido especificado para a maioria das estruturas suspensas recentes, que utilizam cabos com alma de aço, não sendo recomendado para cabos com alma de fibra.

3.4. TIPOS DE CABOS DE AÇO E APLICAÇÕES

Convencionalmente os cabos de aço são fabricados em diversas categorias, e são classificados pela resistência dos fios utilizados, conforme mostra a tabela 3.4.1.

TABELA 3.4.1	
Resistência à tração (Kgf/mm ²)	CATEGORIA (denominação americana)
200 a 230	<i>Extra Improved Plow Steel</i>
180 a 200	<i>Improved Plow Steel</i>
160 a 180	<i>Plow Steel</i>
140 a 160	<i>Mild Plow Steel</i>
120 a 140	<i>Traction Steel</i>
60	Iron

Além da resistência à tração, cada categoria é caracterizada por qualidades de elasticidade, resistência à fadiga e à abrasão, cuja importância depende da utilização do cabo.

O campo de aplicações de cabos é muito grande e as condições de operação são bastante diversas, de modo que uma determinada categoria ou tipo de cabo não pode ser empregado universalmente. O melhor cabo para um uso específico deve ser definido pela análise de suas características e propriedades e pelo estudo das condições de serviço peculiares a cada instalação.

Segundo BUCHHOLDT [1985] para cobertura sujeita a solicitações baixas os cabos de 6 pernas, alma de aço independente, são mais empregados, mas para solicitações maiores as cordoalhas são mais indicadas. Segundo SÁLES [1988], os cabos mais indicados para coberturas pênseis são os de construção Filler ou Warrington-Seale, de torção regular, por serem mais estáveis e menos deformáveis transversalmente; e com alma de aço, por serem menos deformáveis longitudinalmente.

Os cabos, além das características recomendáveis acima descritas, devem ser submetidos aos processos de pré-formação e pré-estiramento. Para condições normais de uso em coberturas de estruturas convencionais é suficiente especificar-se o acabamento do cabo galvanizado classe A (nível mínimo de galvanização) e lubrificação em nível normal.

3.5. PROPRIEDADES DOS CABOS E CORDOALHAS SOB CARREGAMENTO ESTÁTICO

As tensões em um fio de uma cordoalha (ou cabo), cujos terminais estão impedidos de girar, estão relacionadas com a força aplicada, com a área metálica efetiva e com o ângulo (*angle of lay*) que o fio (ou perna) forma com o eixo central da cordoalha (ou cabo).

De uma maneira aproximada, dentro de uma cordoalha as tensões de tração são distribuídas entre os fios proporcionalmente ao quadrado do

cosseno do ângulo da camada (*angle of strand lay*) correspondente ao fio. De maneira similar, em um cabo as tensões de tração são distribuídas nas cordoalhas que o compõem, proporcionalmente ao quadrado do cosseno do ângulo da perna (*angle of rope lay*). Assim, uma distribuição mais uniforme de tensões é obtida em cordoalhas e cabos com maiores comprimentos de passo (menores *angles of lay*). As maiores tensões de tração, conclui-se, ocorrem no núcleo do cabo.

A eficiência do cabo (ou cordoalha), medida através da relação entre a resistência de ruptura do cabo (ou cordoalha) e a soma das resistências individuais dos fios que o compõem, é também maior em cabos (ou cordoalhas) com comprimento do passo maiores. Para alguns tipos de cordoalhas a eficiência é reduzida com o aumento do número de fios, já que as camadas exteriores formam ângulos com o eixo maiores, produzindo uma distribuição não uniforme de tensões. Outros fatores influem na eficiência do cabo, principalmente a característica de alongamento individual do fio. Ou seja, cabos compostos de fios menos dúcteis, terão menor eficiência, já que os fios tendo limitada capacidade de alongamento, não suportariam maiores sobrecargas causadas por uma distribuição desigual de tensões.

Além das tensões resultantes da componente da força axial os fios também estão sujeitos a tensões de flexão. Contudo, estas tensões são difíceis de serem calculadas devido ao movimento relativo das cordoalhas individuais dos cabos. Momentos fletores de cabos é um efeito local em estruturas de cabos e por isso não necessitam ser considerados na análise global da estrutura, embora seja um importante fator na investigação da resistência à fadiga de cabos e conexões.

3.6. MÓDULO DE ELASTICIDADE DE CABOS E CORDOALHAS DE AÇO

Como visto no item sobre as propriedades dos cabos de aço, estes sofrem dois tipos de alongamento: o elástico (recuperável) e o estrutural (permanente). A deformação elástica é afetada pelo módulo de elasticidade e pela quantidade de fios. A deformação estrutural é afetada principalmente pelo tipo de construção do cabo. Conseqüentemente, a deformação dos cabos é maior e o módulo de elasticidade é menor do que nos fios individuais.

O módulo de deformação longitudinal dos cabos depende de muitos fatores, entre os quais o número e o modo de distribuição de camadas de fios numa cordoalha, o número de cordoalhas e a formação destas dentro de um cabo, os tipos de acabamentos do cabo, o número de ciclos e a magnitude do carregamento, etc.

Segundo MURRAY & WILLEMS [1970], o módulo de elasticidade recomendado para cabos de uso estrutural (pré-estirados) com o mínimo de galvanização (aço zincado) e diâmetros até $2 \frac{9}{16} \text{ in}$ é de $165,5 \text{ kN/mm}^2$ ($2,40 \cdot 10^7 \text{ psi}$). Este módulo é reduzido para $158,6 \text{ kN/mm}^2$ ($2,30 \cdot 10^7 \text{ psi}$) para cabos com grandes diâmetros (maiores ou iguais a $2 \frac{5}{8} \text{ in}$), e sofre maior redução no caso de existir maior proteção por galvanização. Para as cordoalhas o mínimo módulo de elasticidade recomendado é de $137,9 \text{ kN/mm}^2$ ($2,00 \cdot 10^7 \text{ psi}$), no caso de galvanização mínima. GREENBERG [1970] fornece indicações genéricas para cabos, admitindo um módulo efetivo de $137,9 \text{ kN/mm}^2$ ($2,00 \cdot 10^7 \text{ psi}$) devido às perdas construtivas.

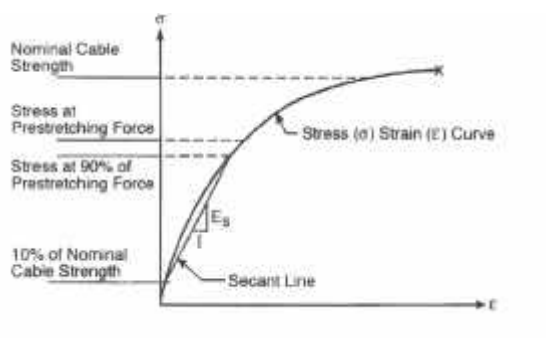


FIGURA 3.6: Módulo de elasticidade secante (E_s) segundo o ASCE 19-96.

A norma do ASCE 19-96 estabelece um módulo de elasticidade convencional E_s para o cabo. Este valor corresponde à secante à curva tensão-deformação, entre 10% da resistência nominal do cabo e 90% da força de pré-estiramento, como mostra a figura 3.6.

Os projetistas de estruturas de cabos de aço devem requerer um material de maior módulo de elasticidade possível, de modo a limitar os alongamentos do cabo sob carregamento e tornar menor o peso da estrutura.

Como a região linear da curva tensão-deformação típica para cabos e cordoalhas estruturais é limitado a aproximadamente 50% da sua resistência última, é evidente que para um projeto mais econômico a região não linear também deveria ser considerada. Assim justifica-se do ponto de vista prático, o desenvolvimento de uma análise do comportamento de sistemas de cabos, incluindo o efeito da não linearidade das propriedades do material.

3.6.1. DIAGRAMAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO

As curvas típicas de tensão-deformação de fios de aço isolados mostram que o alongamento último é de 5% a 6% (0,05 a 0,06), não apresentando nenhum patamar ou ponto definido de escoamento. Como a tensão limite elástica não é definida, pode-se definir o ponto de escoamento, traçando uma reta paralela à curva em 0,2% de deformação ou então definindo a tensão limite como a correspondente a 1% de deformação. Por essas definições, o limite elástico é aproximadamente 55% de sua resistência de ruptura. BUCHHOLDT [1985] indica um módulo de elasticidade para os fios de aço da ordem de 190 kN/mm^2 .

Os catálogos de fabricantes fornecem apenas alguns parâmetros dos cabos, tais como a tensão mínima de ruptura e o mínimo módulo de elasticidade, mas nenhuma curva tensão-deformação com a respectiva região elástica é definida.

3.6.1.1. CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE GREENBERG

GREENBERG [1970] utilizou na sua análise uma expressão algébrica para representar a curva tensão-deformação. Ele empregou uma função exponencial contínua, expressão (3.6.6), para aproximar a porção inelástica da curva tensão-deformação real do cabo. As constantes da função dependem dos valores assumidos para o módulo de elasticidade inicial, a magnitude do pré-estiramento, a tensão última e a deformação última. Admitiu-se uma força de pré-estiramento igual a 50% da força última. O módulo de elasticidade adotado de $165,5 \text{ kN/mm}^2$ ($2,40 \cdot 10^7 \text{ psi}$), decresce a zero para uma deformação última de 3% e tensão de $141,368 \text{ kN/cm}^2$ (205 ksi). A curva tensão-deformação teórica de Greenberg é mostrada na figura 3.6.1.

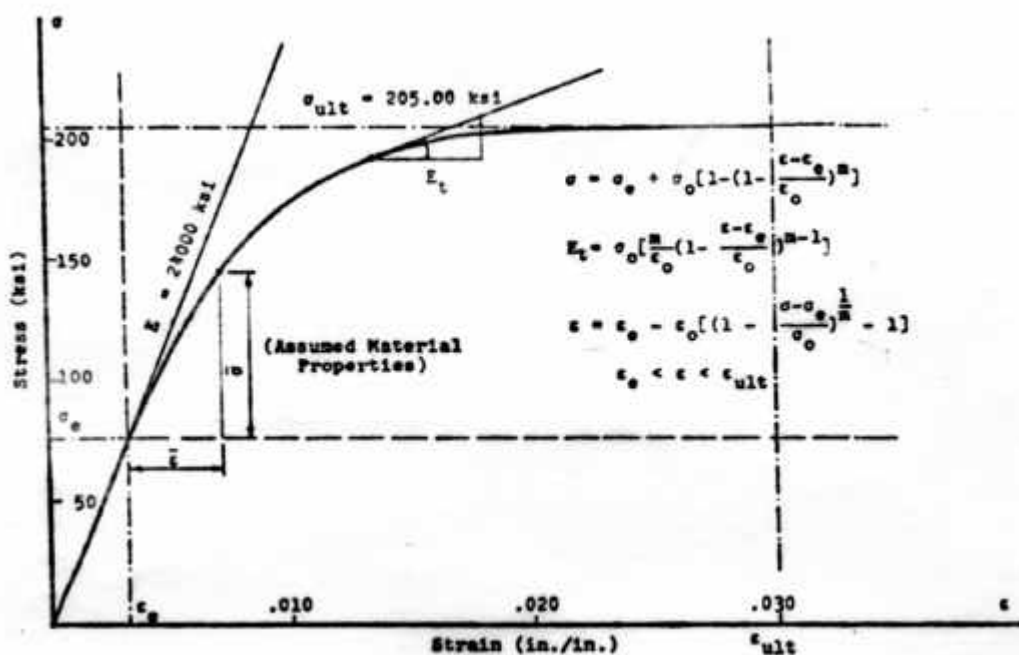


FIGURA 3.6.1: Curva tensão-deformação do cabo de aço segundo GREENBERG [1970].

Como se observa da figura 3.6.1, GREENBERG [1970] sugere a representação da curva tensão-deformação para o material do cabo em três regiões distintas, cuja representação matemática é dada a seguir:

1) **região elástica** : $(0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_e)$

A região elástica da curva tensão-deformação é linear e descrita pela lei de Hooke:

$$\sigma = E\varepsilon \quad (3.6.1)$$

onde σ é a tensão, E é o módulo de elasticidade inicial, e ε é a deformação.

A tensão elástica limite σ_e é dada por:

$$\sigma_e = k_1 k_2 \sigma_u \quad (3.6.2)$$

em que k_1 é uma constante menor que a unidade, e k_2 é a relação entre a força de pré-estiramento e a força última de tração.

A tensão última σ_u é definida como:

$$\sigma_u = \frac{P_u}{A_0} \quad (3.6.3)$$

onde P_u é a força última de tração e A_0 é a área nominal da seção transversal do cabo.

A deformação elástica limite ε_e é obtida por:

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma_e}{E} \quad (3.6.4)$$

2) **região inelástica** : $(\varepsilon_e \leq \varepsilon \leq \varepsilon_u)$

Na região inelástica a tensão é composta de duas parcelas, a tensão elástica limite σ_e e a tensão inelástica $\bar{\sigma}$, ou seja :

$$\sigma = \sigma_e + \bar{\sigma} \quad (3.6.5)$$

onde a relação tensão-deformação inelástica é expressa da seguinte forma:

$$\bar{\sigma} = (\sigma_u - \sigma_e) \left\{ 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_e}{\varepsilon_u - \varepsilon_e} \right)^m \right] \right\} \quad (3.6.6)$$

O expoente m é obtido assumindo-se o módulo tangente igual ao módulo de elasticidade inicial na deformação elástica limite. Assim, tomando-se o seguinte diferencial (em $\varepsilon = \varepsilon_e$):

$$\frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} = E = \frac{\sigma_u - \sigma_e}{\varepsilon_u - \varepsilon_e} \quad (3.6.7)$$

obtemos :

$$m = \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_e}{\sigma - \sigma_e} \right) E \quad (3.6.8)$$

Segundo GREENBERG [1970], para usos práticos das expressões acima pode-se assumir conservativamente que:

- o módulo inicial é igual ao módulo na deformação elástica limite,
- o comportamento do cabo é linearmente elástico até cerca de $\frac{3}{4}$ da carga de pré-estiramento (assim $k_1 = \frac{3}{4}$),
- a carga última é igual à carga última nominal,
- a deformação última é de 2% para cabos e 3% para cordoalhas (segundo Greenberg, foi constatado para um grande de dados experimentais que esses números representam hipóteses realistas).

3) região pós deformação última : ($\varepsilon > \varepsilon_u$)

Alcançada a deformação última, o comportamento do cabo torna-se plástico, com módulo de deformação nulo e tensão constante :

$$\sigma = \sigma_u \quad (3.6.9)$$

3.6.1.2. CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE JONATOWSKI & BIRNSTIEL

JONATOWSKI & BIRNSTIEL[1970] apresentaram a seguinte expressão para representar a curva tensão-deformação dos materiais:

$$\sigma = \frac{E\varepsilon}{\left(1 + \left| \frac{E\varepsilon}{\sigma_u} \right|^n \right)^{1/n}} \quad (3.6.10)$$

onde E é o módulo de elasticidade inicial, n é a constante que define a forma da curva, σ_u é a tensão última. No caso de material elasto-plástico perfeito

$n \geq 10$ e σ_u é igual à tensão de escoamento σ_y .

TABELA 3.6.1		
Parâmetros da curva	Cabo	Cordoalha
E	148,264 kN/mm ² (21500 ksi)	206,88 kN/mm ² (30000 ksi)
n	2,7	1,7
ϵ_u	0,032	0,062
σ_u	147,574 kN/cm ² (214 ksi)	155,849 kN/cm ² (226 ksi)

A figura 3.6.2 apresenta os resultados de ensaios de cabos e cordoalhas de 1 in de diâmetro, obtidos por JONATOWSKI & BIRNSTIEL [1967]. A curva contínua é dada pela expressão (3.6.10), com os parâmetros da tabela 3.6.1 baseados nos dados experimentais.

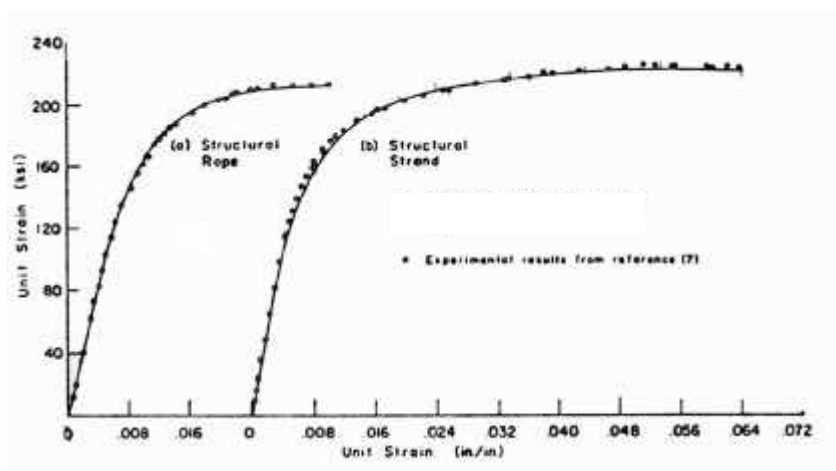


FIGURA 3.6.2: Curva tensão-deformação do cabo de aço segundo JONATOWSKI & BIRNSTIEL [1970].

3.6.1.3. CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE RAMBERG-OSGOOD

RAMBERG & OSGOOD¹ sugeriram a representação da curva completa tensão-deformação de qualquer material por uma única expressão, utilizando três parâmetros:

¹ RAMBERG, W.; OSGOOD, W.R. (1943) Description of stress-strain curves by three parameters, NACA (National Advisory Committee for Aeronautics), TN902, July, 1943.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \left(\frac{\sigma}{B}\right)^n \quad (3.6.11)$$

onde n e B são constantes determinadas para o material, e E é a inclinação da parte inicial da curva.

3.6.1.4. CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE MURRAY & WILLIAMS

MURRAY & WILLEMS [1970] realizaram ensaios carregando axialmente, além do limite elástico, cordoalhas de diferentes diâmetros, constituídas de material típico usado estruturalmente. Cada amostra foi pré-estirada para remover o alongamento construtivo com aproximadamente 55% da carga última nominal. Cada ciclo de pré-estiramento consistiu de aplicação lenta da carga de pré-estiramento, manutenção da carga por cerca de 20 minutos, e retirada lenta da mesma. Três ciclos completos foram suficientes para remover todo o alongamento construtivo, sendo obtida uma curva com a região inicial praticamente linear, como mostra a figura 3.6.3.

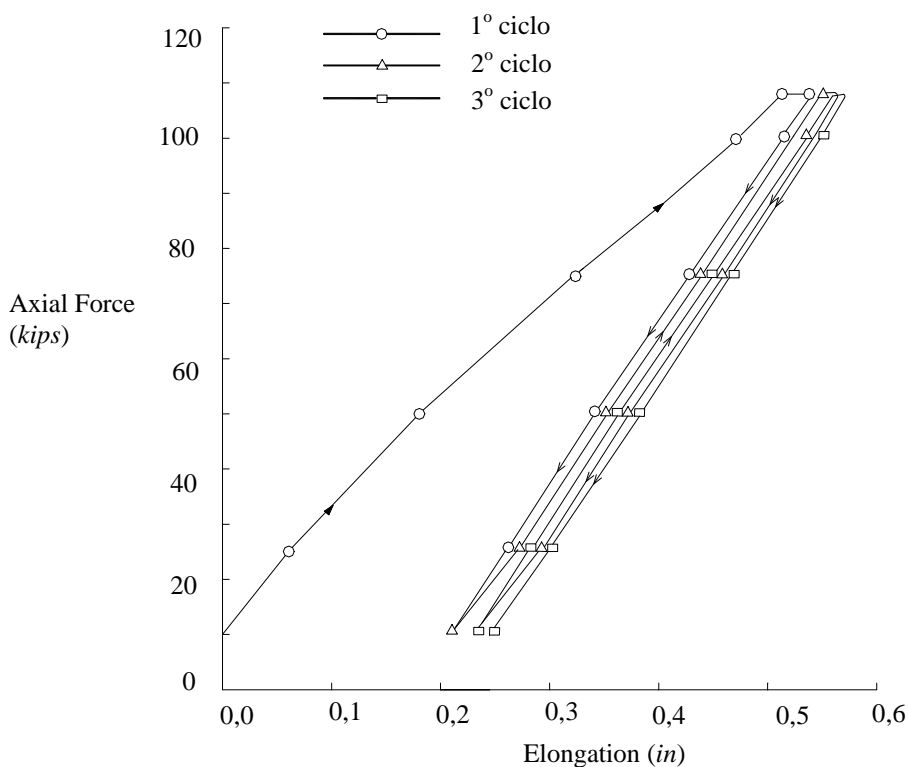


FIGURA 3.6.3: Curvas de força-alongamento para 3 ciclos de estiramento das cordoalhas.

MURRAY & WILLEMS [1970] concluíram que as relações tensão-deformação obtidas não podiam ser representadas com precisão pela curva proposta por GREENBERG [1970], e verificaram que os resultados eram melhor modelados pela expressão proposta por RAMBERG & OSGOOD¹. A tabela 3.6.2 apresenta os parâmetros n e B recomendados para as cordoalhas ensaiadas. Os parâmetros n e B foram calculados utilizando dois pontos da curva experimental tensão-deformação.

diâmetro	E (kN/mm ²)	n	B (kN/mm ²)
3/16" (cordoalha 1x19)	162,75	10,637	2,36505
3/4" (cordoalha 1x19)	195,16	8,548	2,22210
1" (cordoalha 1x19)	175,85	9,326	2,14410
1 1/4" (cordoalha 1x37)	175,16	7,873	2,46966

As curvas que melhor representam o comportamento das cordoalhas ensaiadas são mostradas na figura 3.6.4.

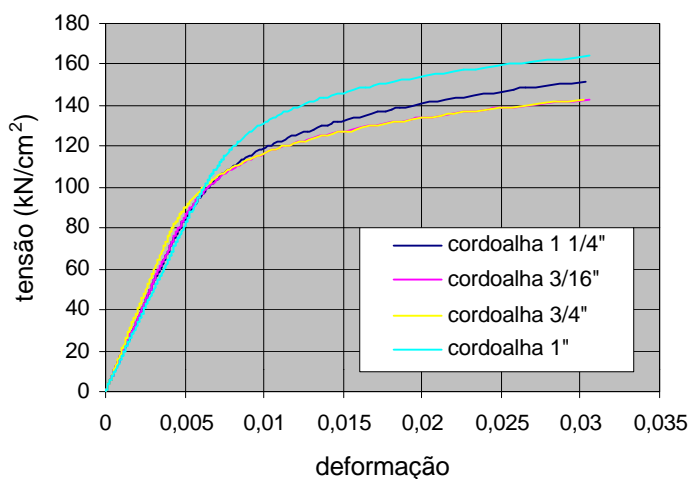


FIGURA 3.6.4: Curvas tensão-deformação de cordoalhas ensaiadas por MURRAY & WILLEMS [1970].

¹ RAMBERG, W.; OSGOOD, W.R. (1943) Description of stress-strain curves by three parameters, *NACA* (National Advisory Committee for Aeronautics), TN902, July, 1943.

Baseando-se em resultados de vários ensaios realizados, MURRAY & WILLEMS [1970] recomendam os valores da tabela 3.6.3 para cordoalhas com diâmetros menores que $1\frac{1}{4}$ in. As curvas correspondentes são apresentadas na figura 3.6.5.

TABELA 3.6.3			
cordoalha	E (kN/mm ²)	n	B (kN/mm ²)
1x19	165,5	9,35	2,13776
1x37	165,5	12,00	1,96536

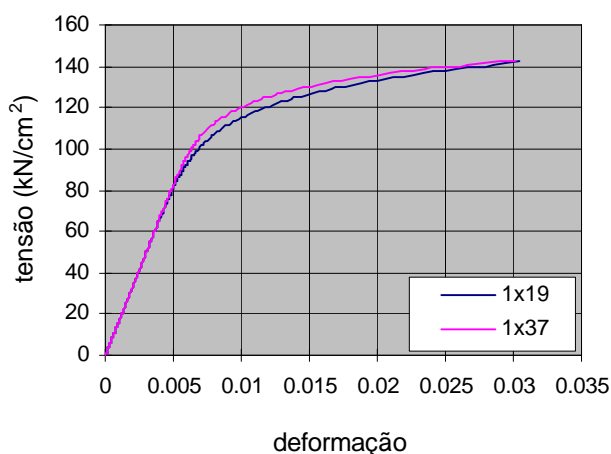


FIGURA 3.6.5: Curvas tensão-deformação para cordoalhas de aço segundo MURRAY & WILLEMS [1970].

3.6.1.5. CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DE KADLCÁK

KADLCÁK [1995] descreve um estudo de cordoalhas não estiradas, vindas diretamente das linhas de produção, sendo carregadas axialmente até a sua ruptura. Considerando a área da seção transversal A_0 , e a força de tração no cabo T , foi obtido o diagrama carga-deslocamento dos ensaios. Os ensaios foram conduzidos aumentando-se a força T uniformemente de um valor inicial T_0 até um valor T_u , que representa o valor da capacidade de carregamento do cabo, após o qual ocorre a ruptura do material. Segundo

HANKUS¹ apud KADLCÁK [1995], que estudou cabos de diversos tipos de construção, a força de tração inicial deveria ser suficiente para produzir uma tensão de tração inicial $\sigma_0=30$ a 40 MPa ($3-4$ kN/cm²). ROSENKRANZ² apud KADLCÁK [1995], que realizou testes com cordoalhas fechadas recomenda $T_0=(1/20)T_u$, ou seja $T_0=5\%T_u$.

Como o alongamento do cabo para a força de tração T_0 não pode ser medido com precisão em um ensaio, devido ao seu valor muito pequeno, considera-se $\varepsilon_0 = \frac{\Delta \ell_0}{\ell} = 0$. Para propósitos práticos aceita-se como válida a hipótese de $E_c = \text{constante}$ para uma força de tração aplicada de 0 a 55% T_u .

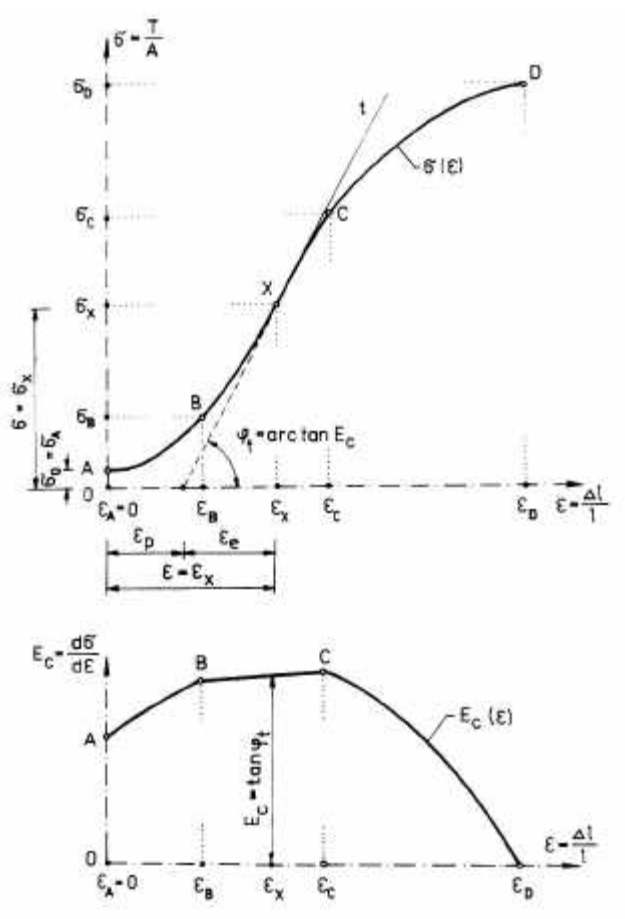


FIGURA 3.6.6: Diagrama ideal de tensão-deformação de um cabo não estirado.

¹ HANKUS, J. (1967). Elastic properties of steel cables of various constructions, In: *Symposium naukow "Ustroje ciegnowe w gornictwie"*, Katowice.

² ROSENKRANZ, B. (1971). Modulus of elasticity of single strand cables of a closed construction, *Pozemní stavby*, n.7, p. 214-17; n.8, p. 241-244.

Desprezando-se as mudanças na área da seção transversal durante o carregamento, foi obtido a curva idealizada de tensão-deformação correspondente, conforme mostrado na figura (3.6.6).

No diagrama idealizado distingue-se três seções distintas A-B, B-C e C-D, limitadas pelas deformações $\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C, \varepsilon_D$. Na seção A-B, para um acréscimo de tensão não significativo, há um aumento considerável de deformação de $\varepsilon_A = 0$ a ε_B , sendo a maior parte constituída de deformação permanente ε_p . Na seção seguinte B-C há um aumento de deformação relativamente uniforme, com o aumento de tensão, de modo que a curva pode ser considerado aproximadamente linear. A terceira seção C-D do diagrama é caracterizada por um grande aumento da deformação permanente. A curva nesta região cresce mais vagarosamente até a ruptura do cabo, correspondendo à deformação ε_D .

O módulo de elasticidade do cabo E_c é portanto um valor variável, dependente da tensão normal σ e da deformação ε :

$$E_c = \lim_{\Delta\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta\varepsilon} \quad (3.6.12)$$

O valor instantâneo do módulo de deformação para um determinado carregamento ou módulo de elasticidade tangencial é obtido da primeira derivada da tensão em relação à deformação:

$$E_c = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \tan \varphi_t \quad (3.6.13)$$

que representa a tangente do ângulo da reta tangente à curva tensão-deformação no ponto considerado. A figura 3.6.6 mostra a função $E_c(\varepsilon)$.

3.6.2. EFEITO DO CARREGAMENTO REPETIDO

KADLCÁK [1995] apresenta o comportamento de cordoalhas não estiradas, submetidas a ciclos de carga e descarga repetidos. A figura 3.6.7 reproduz as curvas tensão-deformação obtidas no processo de carregamento do cabo de 0 até T_1 (linha cheia) e no descarregamento de T_1

a 0 (linha tracejada). A deformação total alcançada no primeiro carregamento é composta de uma parcela de deformação elástica, que é recuperada no processo de descarga, e de uma parcela de deformação plástica que permanece, após o completo descarregamento da cordoalha.

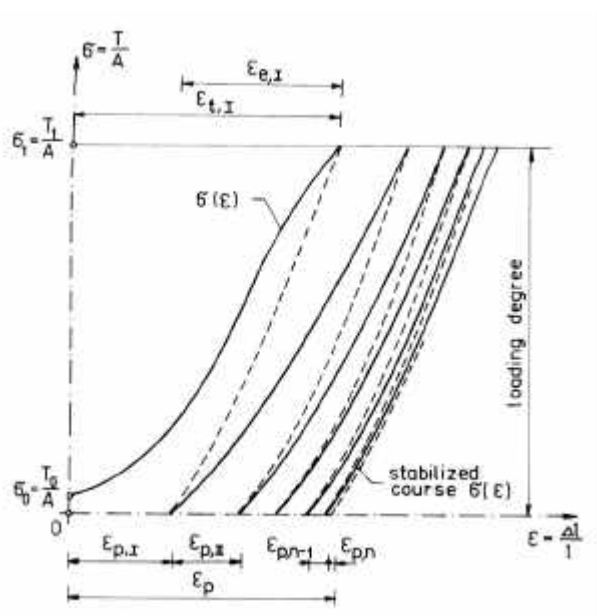


FIGURA 3.6.7: Diagrama de tensão-deformação de um cabo não estirado com ciclos de carga e descarga.

Os ciclos seguintes, atingindo o mesmo nível de carregamento, resultam em deformações permanentes gradualmente menores, e o laço de histerese vão se tornando coincidentes. A deformação permanente é portanto limitada a um valor, que é atingido depois de um certo número de ciclos, ou ao longo do tempo através do fenômeno de fluência (*creep*). O valor total depois de c ciclos, é dado pela somatória individual de cada ciclo, ou seja :

$$\epsilon_p = \sum_{i=1}^c \epsilon_{p,i} \quad (3.6.14)$$

O alongamento construtivo não pode se determinado com precisão através de meio analíticos. Segundo BUCHHOLDT [1985], o valor da deformação permanente inicial pode estar entre 0,25% para baixo nível de carga e 1% para níveis maiores de carregamento.

Baseado em resultados de ensaios KOVALEV¹ apud KADLCÁK [1995] estabelece o valor para a força de pré-estiramento da ordem de 72% da carga de ruptura nominal ($T_{est} = 0,72 T_{rup}$), mantido por 30 a 80 minutos, que seria suficiente para um estiramento efetivo.

Poderia ser aplicado apenas 55% da carga de ruptura ($T_{est} = 0,55 T_{rup}$), segundo MURRAY & WILLEMS [1971] e ROSENKRANZ² apud KADLCÁK [1995], para um estiramento satisfatório. Resultados experimentais mostram que uma parcela considerável da deformação permanente é alcançada nos primeiros 10 ciclos de carga-descarga. MURRAY & WILLEMS [1971] obtiveram bons resultados com apenas 3 ciclos de carregamento. Após esse processo de pré-estiramento as deformações tendem a ser muito pequenas, que segundo ROSENKRANZ² apud KADLCÁK [1995] deve ser da ordem de $\varepsilon_p \leq 0,1 \text{ mm/m}$, de acordo com ensaios realizados. O cabo pré-estirado apresenta comportamento aproximadamente elástico linear, dentro de um certo intervalo de carregamento, com o valor do módulo de elasticidade acrescido de 20 a 30%, comparando-se com o valor inicial, de acordo com ROSENKRANZ¹ apud KADLCÁK [1995].

Se o processo de carga-descarga repetido atingir apenas uma parte da deformação permanente temos um cabo parcialmente pré-estirado.

3.6.3. TIPOS DE MÓDULOS DE ELASTICIDADE

KADLCÁK [1995] enumera diferentes módulos de elasticidade utilizados nas análises de estruturas de cabos: o módulo tangente, o módulo secante, o módulo teórico e o módulo computacional.

O módulo tangente ou módulo real é variável com o ponto da curva tensão-deformação. Seu valor depende do nível de carregamento aplicado e

¹ KOVALEV, N.H. (1963) Deformation Properties of the prestressing reinforcement from steel cables, *Beton i zelezobeton*, n. 9., pp. 245-249.

² ROSENKRANZ, B (1972) Modulus of elasticity of a stretched cable, *Pozemní stavby*, n.2, pp. 35-39.

do número de ciclos de carga já aplicadas. Na prática utiliza-se o módulo da curva estabilizada, cujo valor é aproximadamente constante, E_c , conforme mostra a figura (3.6.7).

O módulo secante ou módulo convencional é dado pelo gradiente de uma linha que liga os pontos inicial e final da curva tensão-deformação, figura 3.6.8. O seu valor depende do número de ciclos de carga aplicados. Outras definições de módulos convencionais aparecem em WASILEWSKI² apud KADLCÁK [1995] e outros.

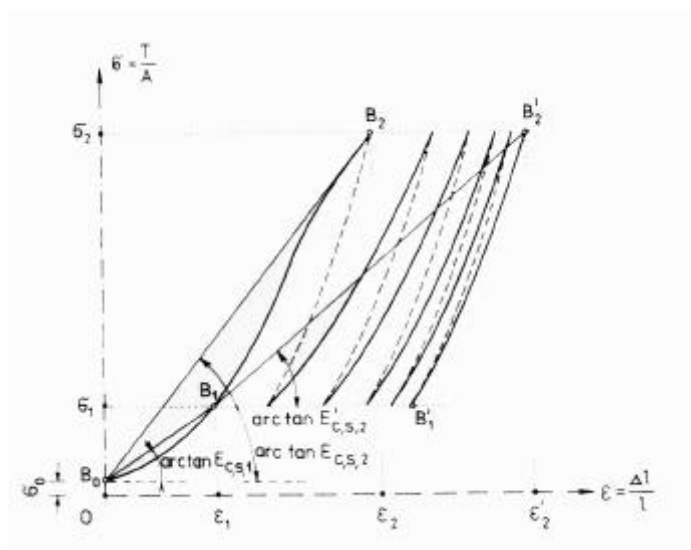


FIGURA 3.6.8: Módulo estabilizado secante de um cabo no intervalo (σ_1, σ_2) .

O módulo teórico do cabo é calculado com base nas características dos arames componentes do cabo, sendo obtido pela relação :

$$E_{\text{cable}} = k_{\text{cable}} E_{\text{wire}} \quad (3.6.15)$$

onde k_{cable} é um coeficiente estrutural do cabo que depende do número de camadas de cordoalhas, e do número e do comprimento do passo dos fios que compõem as cordoalhas.

¹ ROSENKRANZ, B (1975) Stabilization of modulus og elasticity of steel cables, *Proc.: International Symposjum naukow "Cable structures"*, Bratislava, part 1, pp. 11-18.

² WASILEWSKI, Z. Investigation of Modulus of Elasticity of Steel Cables, *Zeszyty naukowe politechnikiWarszawskiej*, n.25.

O módulo teórico de uma cordoalha é calculado com base nas características dos arames componentes da cordoalha, sendo obtido pela relação :

$$E_{\text{strand}} = k_{\text{strand}} E_{\text{wire}} \quad (3.6.16)$$

onde k_{strand} é um coeficiente estrutural da cordoalha.

O valor do coeficiente estrutural é menor que 1 e pode ser calculado pela expressão :

$$k_{\text{strand}} = \frac{\sum_{i=0}^{\text{lay}} A_i k_i}{\sum_{i=0}^{\text{lay}} A_i} \quad (3.6.17)$$

onde A_i é a área da seção transversal dos fios da camada i , lay é o número de camadas do cabo e k_i é o coeficiente estrutural da camada i de fios.

O coeficiente estrutural de uma camada de fios de acordo com DINNIK¹ apud KADLCÁK [1995] é dado por :

$$k_i = \cos^4 \alpha_i \quad (3.6.18)$$

onde α é o ângulo da camada de fios em relação ao eixo do cabo.

Levando-se em consideração a contração da seção transversal do cabo outros módulos de elasticidade são calculados. Por exemplo HUDLER² apud KADLCÁK [1995] chegou à expressão:

$$k_i^4 = \frac{s_i^4}{\left[s_i^4 + \pi^2 (1 + \mu) \right] (s_i^4 + \pi^2)} \quad (3.6.19)$$

onde $s_i = \frac{h_i}{d_i}$, sendo h_i o comprimento do passo da camada i e d_i o diâmetro do círculo interior da camada. O coeficiente de Poisson $\mu = 0,3$ é usado.

¹ DINNIK, A.H. (1957). Articles dealing with mining, *Ungletechizdat*, Moskva.

² HUDLER, S. (1937). Der Elastizitätsmodul des Darhtseiles, *Wasserwirtschaft und Technik*, p.271-279.

Quando o efeito da contração da seção transversal é desprezada, $\mu = 0$, e a expressão (3.6.18) torna-se igual a expressão (3.6.17).

Outra expressão proposta por SCHLEICHER¹ apud KADLCÁK [1995] de aplicação mais prática é dada por :

$$k_i = \frac{1}{[1 + \chi_i(1 + \mu)](1 + \chi_i)} \quad (3.6.20)$$

onde $\chi_i = \tan^2 \alpha = \left(\frac{\pi}{s_i}\right)^2$

A tabela (3.6.4) fornece o valor do coeficiente estrutural k para cordoalhas fechadas de acordo com SPAL² apud KADLCÁK [1995].

TABELA 3.6.4										
s_i	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k	0,579	0,660	0,722	0,769	0,807	0,836	0,859	0,878	0,894	0,906

O módulo real que varia com o nível de deformação é substituído nos cálculos práticos por um valor constante, chamado de módulo de elasticidade computacional. Este valor pode ser representado pelo módulo de elasticidade estabilizado do cabo ou por um módulo convencional.

A norma tcheca³ recomenda o módulo estabilizado para alguns tipos de materiais conforme a tabela 3.6.5.

TABELA 3.6.5 : Módulo de elasticidade	
cordoalha aberta	150 KN/mm ²
cordoalha fechada	160 KN/mm ²
cabo com 6 cordoalhas	110 KN/mm ²
cabos com fios paralelos	200 KN/mm ²

¹ SCHLEICHER, F. (1949). Über die Dehnung von Drahtseilen für Hängebrücken, *Der Bauingenieur*, n.2-3.

² SPAL, L. (1970.) Calculated moduli of elasticity of cables, *Pozemní stavby*, n.8, pp.227-232.

³ ON Standard 731407 *Design Cable Structural Elements*, Normalization and measuring office, Praha,1980, p.32.

3.7. EFEITO DA MUDANÇA DE TEMPERATURA

A mudança no comprimento do cabo como efeito da variação de temperatura deve ser considerada no projeto de uma estrutura de cabos. O alongamento ou encurtamento do comprimento inicial do cabo ℓ_0 , medido sob a temperatura de t_0 , é dado pela expressão :

$$\Delta\ell_{0,t} = \alpha_t \Delta t \ell_0 = \alpha_t (t - t_0) \ell_0 \quad (3.7.1)$$

sendo geralmente usado o coeficiente de expansão térmica linear de $\alpha_t = 0,0000039 / ^\circ\text{C}$, dado por BUCHHOLDT [1985].

KADLCÁK [1995] emprega o coeficiente de dilatação do aço para o cabo, ou seja $\alpha_t = 0,000012 / ^\circ\text{K}$ (lembrando que $^\circ\text{K} = 273,15 + ^\circ\text{C}$). ARCARO [1996] utilizou em seu projeto, descrito no capítulo 1 (item 1.3.2), um coeficiente térmico para os cabos da CIMAF igual a $\alpha_t = 0,0000115 / ^\circ\text{C}$.

No caso de temperaturas elevadas, tais como o produzido pelo aquecimento por fogo, dois fatores de projeto deveriam ser considerados. O primeiro é a mudança nas propriedades mecânicas dos fios durante o aumento de temperatura. Por exemplo, os arames usados na fabricação das cordoalhas estruturais são normalmente pré-formados a frio. Essas cordoalhas têm alta resistência quando trabalham nas mesmas condições de temperatura. Quando submetidas a altas temperaturas, os fios podem retornar à condição *annealed* e conseqüentemente ocorrerá uma redução da resistência dos fios.

O segundo é a possibilidade de mudanças permanentes nas propriedades mecânicas dos fios como efeito de alta temperatura. A norma ASCE 19-96 identifica três variáveis, que afetam as propriedades físicas do material utilizado na fabricação dos cabos, que são: temperatura do fio, tempo em que o fio esteve exposto a elevadas temperaturas e a tensão nos fios durante o tempo em que eles estiveram expostos a elevadas temperaturas (um fio sob grandes tensões será danificado muito mais rapidamente do que um fio sujeito a baixas tensões).

Por outro lado o aumento de temperatura causa uma redução da tensão nos cabos, portanto causa uma redução das forças transmitidas à estrutura de contorno. Desde que essa perda de protensão ocorre numa temperatura bem abaixo do que aquela em que a resistência do aço é prejudicada, a segurança contra o colapso aumenta inicialmente.

3.8. EFEITO DE FADIGA

Fadiga, por definição, é o processo de dano estrutural permanente progressivo e localizado que ocorre em um material solicitado por tensões e/ou deformações cíclicas, em poucos ou em muitos pontos do material, e que podem gerar trincas ou fratura completa do componente mecânico após um número suficiente de ciclos.

Todos os cabos de aço têm uma resistência limite à fadiga, quando então os fios dos cabos começam a romper. Este limite é determinado pelo nível e intensidade da tensão flutuante em que o cabo está trabalhando e as condições em que as tensões são aplicadas.

No caso de coberturas pênses as tensões flutuantes são causadas principalmente pela vibração induzida do vento, que podem causar a ruína da estrutura por fadiga dos cabos.

Como hipótese de projeto, assume-se que os cabos não possuem resistência a força cortante. Durante a análise, considera-se que os cabos são incapazes de transmitir momentos fletores. As conexões são geralmente consideradas uma rótula e freqüentemente incorporam rótulas reais em sua construção.

Na realidade, contudo, na presença de restrições de deslocamentos da conexão, tensões de flexão podem ser induzidas nos cabos. As restrições de deslocamentos e as tensões de flexão nos cabos são causadas pelo impedimento rotacional na fixação das conexões ou por uma mudança angular na direção do cabo, imposta para obtenção de uma curvatura desejada da estrutura de cabos. Outras fontes possíveis de tensões de flexão são devidas a vibrações induzidas pelo vento. A

magnitude destas tensões pode não ser significativa para o comportamento global da construção, mas uma repetição do mesmo intervalo de tensões de flexão pode ser suficiente para causar uma ruína por fadiga de fios individuais e de todo o cabo, se não houver uma vistoria periódica.

A fadiga é causada também pelo atrito entre os cabos, quando ocorre um movimento relativo entre eles.

A resistência a fadiga é afetada pelo tipo de construção do cabo, diâmetro dos fios, detalhes da conexão, comprimento do cabo, e pela história do carregamento. Não há correntemente nenhum método aceitável para estimar a resistência a fadiga para cabos, embora limitadas informações estejam disponíveis para algumas cordoalhas selecionadas. De maneira geral, os resultados demonstram que o número de ciclos, até a ruína por fadiga é maior quanto maior é o número de fios da cordoalha de um dado diâmetro. BUCHHOLDT [1985] cita alguns trabalhos realizados nas últimas décadas que indicam uma faixa de tensões flutuantes não maiores que $200\text{-}250\text{ N/mm}^2$, para garantir uma resistência a fadiga correspondente a 2 milhões de ciclos ou mais. O nível de tensões refere-se apenas a tensões de tração e outros cuidados devem ser tomados para não se adicionar tensões de flexão. Portanto, as conexões muito rígidas devem ser evitadas.

Dependendo do tipo de ancoragem do cabo com o sistema de apoio, a ruína por fadiga pode ser atingida com um intervalo de tensões menores que 10% da resistência última de ruptura do cabo.

É recomendável que os projetos, que utilizam cabos de aço nas construções, incorporem terminais e conexões adequados e recomendem testes periódicos de avaliação e rotinas regulares de manutenção.

3.9. FLUÊNCIA E RELAXAÇÃO

A fluência (*creep*) é o fenômeno de deformação, no tempo, de um corpo, sem que haja alteração da solitação atuante. A relaxação é o fenômeno da diminuição da tensão, no tempo, em um corpo sujeito a deformação constante.

O fenômeno de fluência ocorre para todos os materiais sob efeito de carregamento constante de longa duração e os fios de aço não são exceção. BUCHHOLDT [1985] afirma que para estruturas onde se especificam os cabos de construção com comprimentos de passo adequados, que foram submetidos ao processo de pré-estiramento de maneira aceitável, a deformação lenta que ocorre durante a sua vida útil é muito pequena, e de menor importância. A influência de fenômenos reológicos em estruturas de cabos aumenta no caso do emprego de cabos de ligas aço-alumínio, cabos com núcleo não metálicos (de fibras naturais como algodão, rami, sisal, cânhamo) e cabos de materiais sintéticos (fiberglass e polímeros como orlon, perlon).

HUSIAR [1986] propôs uma equação constitutiva visco-elástica para o material da seguinte forma :

$$P(\iota)\sigma(t) = Q(\iota)\varepsilon(t) \quad (3.9.1)$$

onde P e Q são polinômios em ι , tal que ι^n é interpretado como operador $\frac{\partial}{\partial t^n}$.

Segundo HUSIAR [1986], resultados de ensaios experimentais e de testes numéricos indicam que em problemas estáticos as velocidades dos deslocamentos, causados pelo fenômeno de fluência (*creep*) são muito pequenas e portanto a sua influência pode ser desprezada.

Algumas pesquisas encontram-se em andamento para determinar a extensão do fenômeno de fluência e relaxação nas estruturas de cabos.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ESTÁTICO DE CESTAS PROTENDIDAS PELA TÉCNICA DOS ELEMENTOS FINITOS

Na maioria dos casos, admite-se que as estruturas têm comportamento linear, e a análise é baseada nas relações lineares entre forças aplicadas e deslocamentos, e entre tensões e deformações. Contudo, no caso de estruturas de cabos a teoria linear não representa adequadamente o seu comportamento. Portanto, uma formulação mais acurada deve tratar da não linearidade física e geométrica, inerente às essas estruturas particulares.

A partir das hipóteses fundamentais considerando-se pequenas deformações e grandes deslocamentos, são desenvolvidas as equações matriciais para estruturas de cabos (LEONARD [1988]), incluindo termos não lineares em s e e , e mantendo-se o carregamento externo conservativo (o carregamento não depende da deformação da estrutura).

4.1. FORMULAÇÃO NO CONTÍNUO

Primeiramente, obtêm-se as equações que governam o comportamento do cabo como um meio contínuo, isto é, formulando-se as relações entre tensões, deformações e deslocamentos de um segmento diferencial (infinitesimal).

Desenvolve-se a descrição da geometria e do estado de tensões numa configuração deslocada com relação a uma configuração de referência (descrição lagrangiana). A configuração de referência pode ser, por exemplo, a posição do cabo sob protensão.

4.1.1. RELAÇÕES GEOMÉTRICAS

Considerando a figura 4.1, onde um segmento diferencial de cabo é mostrado, ds_R é o seu comprimento na configuração de referência e ds é o seu comprimento na configuração deslocada. Admite-se que o segmento já sofreu um deslocamento \mathbf{u}_R do seu estado inicial indeformado para o estado de referência e agora está sujeito a novo deslocamento \mathbf{u} , devido às deformações decorrentes de nova aplicação de cargas.

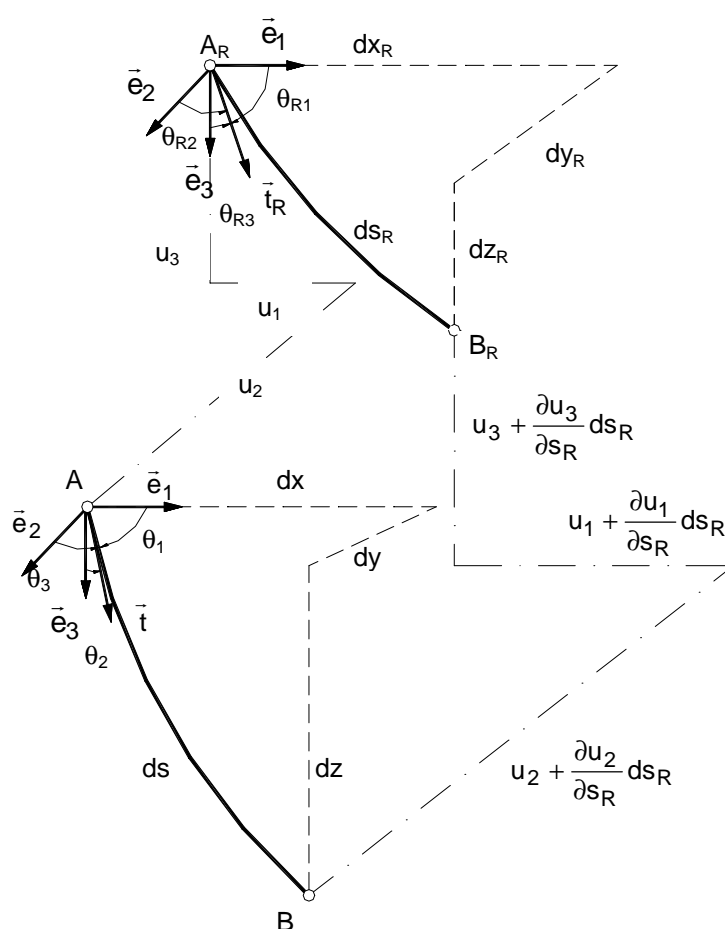


FIGURA 4.1: Segmento de cabo na configuração de referência e na configuração deslocada.

Os cossenos diretores na configuração de referência são dados por:

$$\cos \theta_{R_1} = \frac{dx_R}{ds_R} \quad (4.1.1a)$$

$$\cos \theta_{R_2} = \frac{dy_R}{ds_R} \quad (4.1.1b)$$

$$\cos \theta_{R_3} = \frac{dz_R}{ds_R} \quad (4.1.1c)$$

e na configuração deslocada por:

$$\cos \theta_1 = \frac{dx}{ds} \quad (4.1.2a)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{dy}{ds} \quad (4.1.2b)$$

$$\cos \theta_3 = \frac{dz}{ds} \quad (4.1.2c)$$

O deslocamento do ponto A é dado pelo vetor $[u_1 \ u_2 \ u_3]$, e do ponto B pelo vetor $\left[u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial s_R} ds_R \quad u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial s_R} ds_R \quad u_3 + \frac{\partial u_3}{\partial s_R} ds_R \right]$.

Portanto, as componentes do comprimento diferencial na configuração deslocada ds , segundo os eixos ortogonais representados por $[e_1 \ e_2 \ e_3]$, são:

$$dx = dx_R + \frac{\partial u_1}{\partial s_R} ds_R \quad (4.1.3a)$$

$$dy = dy_R + \frac{\partial u_2}{\partial s_R} ds_R \quad (4.1.3b)$$

$$dz = dz_R + \frac{\partial u_3}{\partial s_R} ds_R \quad (4.1.3c)$$

Introduzindo essas componentes na expressão do comprimento $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, obtém-se (em notação indicial, para $i=1,2,3$):

$$ds = ds_R \left(1 + 2 \cos \theta_{R_i} \frac{\partial u_i}{\partial s_R} + \frac{\partial u_i}{\partial s_R} \frac{\partial u_i}{\partial s_R} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.1.4)$$

Observa-se que o comprimento na configuração de referência é dado por:

$$ds_R^2 = dx_R^2 + dy_R^2 + dz_R^2 \quad (4.1.5)$$

e os cossenos diretores são obtidos da equação (4.1.1).

Sendo ds_0 o comprimento indeformado do segmento diferencial de cabo, definem-se os coeficientes de alongamento na configuração de referência e na configuração deslocada, respectivamente por:

$$\lambda_R = \frac{ds_R}{ds_0} \quad (4.1.6)$$

$$\lambda = \frac{ds}{ds_0} \quad (4.1.7)$$

Adotando-se a definição de deformação quadrática (deformação de Green-Lagrange), tem-se na configuração de referência e na configuração deslocada, respectivamente:

$$\varepsilon_R = \frac{ds_R^2 - ds_0^2}{2ds_0^2} \quad (4.1.8)$$

$$\varepsilon = \frac{ds^2 - ds_0^2}{2ds_0^2} \quad (4.1.9)$$

A deformação relativa entre as configurações deformada e de referência é dada por:

$$\gamma = \frac{ds^2 - ds_R^2}{2ds_R^2} \quad (4.1.10)$$

Introduzindo-se a equação (4.1.4) na equação (4.1.10), a deformação relativa pode ser escrita como:

$$\gamma = \left(\cos \theta_{R_i} \frac{\partial u_i}{\partial s_R} + \frac{1}{2} \frac{\partial u_i}{\partial s_R} \frac{\partial u_i}{\partial s_R} \right) \quad (4.1.11)$$

Da expressão (4.1.10) obtém-se o comprimento deformado em relação ao comprimento de referência:

$$ds = ds_R \sqrt{1 + 2\gamma} \quad (4.1.12)$$

e a relação entre os alongamentos:

$$\lambda = \lambda_R \sqrt{1 + 2\gamma} \quad (4.1.13)$$

Levando-se as expressões (4.1.12) e (4.1.3) nas expressões dos cossenos diretores (4.1.2), obtém-se (em notação indicial, para $i=1,2,3$) a seguinte expressão dos cossenos diretores na configuração deformada:

$$\cos \theta_i = \frac{\cos \theta_{R_i} + \frac{\partial u_i}{\partial s_R}}{\sqrt{1 + 2\gamma}} \quad (4.1.14)$$

4.1.2. RELAÇÃO CONSTITUTIVA

Como muitos materiais usados na fabricação de cabos, incluindo o aço e o nylon, exibem uma relação força de tração/alongamento não linear (figura 4.2a), adota-se um diagrama linearizado por trechos (figura 4.2b) para a análise do comportamento do sistema de cabos.

A força de tração na configuração deslocada (T) pode ser relacionada com a força de tração na configuração de referência (T_R):

$$T = T_R + E_R A_0 (\lambda - \lambda_R) \quad (4.1.15)$$

onde A_0 é a seção transversal do cabo na configuração indeformada, suposta constante e E_R é o módulo de elasticidade do material na configuração de referência.

Introduzindo-se a expressão 4.1.13 em 4.1.15 obtém-se a força de tração em função da deformação relativa:

$$T = T_R + E_R A_0 \lambda_R (\sqrt{1 + 2\gamma} - 1) \quad (4.1.16)$$

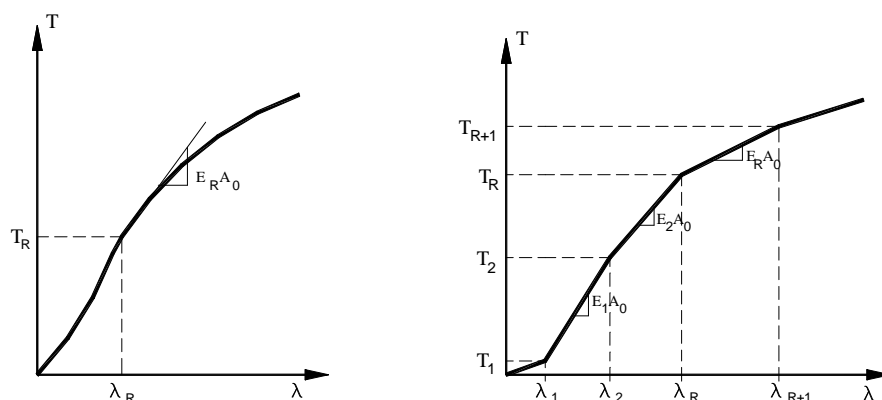


FIGURA 4.2: Diagrama tensão-deformação do cabo.

Observa-se que na expressão (4.1.16) é mantido o mesmo módulo de elasticidade da configuração de referência para a configuração deslocada. Se $\lambda \gg \lambda_R$ seriam introduzidos erros significativos no cálculo da força de tração. Para se contornar tal dificuldade, procede-se a aplicação do carregamento de modo incremental, e periodicamente atualizam-se todos os dados da configuração de referência.

4.1.3. EXPRESSÕES DO PRINCÍPIO DO TRABALHO VIRTUAL

Como ambas as configurações, de referência e a deslocada, estão em equilíbrio, pode-se escrever as equações do trabalho virtual para ambos os estados. Com estas equações é possível se obter uma versão incremental do trabalho virtual, relacionando acréscimos de deslocamentos a cada incremento de carga aplicado.

No caso de estruturas de cabos atuam apenas as componentes axiais de tensão e deformação, que são respectivamente para o estado de referência e deformado:

$$\sigma = \frac{T_R}{A_R}, \varepsilon_R$$

$$\sigma = \frac{T}{A}, \varepsilon.$$

A expressão do trabalho virtual:

$$\int_V \left([\delta\varepsilon]^t \{\sigma\} - [\delta u]^t \{f\} \right) dV - [\delta D]^t \{P\} = 0 \quad (4.1.17)$$

pode ser escrita para os estados de referência e deformado com segue:

$$\int_{s_R} \left(\delta\varepsilon_R \frac{T_R}{A_R} - \delta u_i \cdot f_{R_i} \right) A_R ds_R - \delta D_i \cdot P_{R_i} = 0 \quad (4.1.18)$$

$$\int_s \left(\delta\varepsilon \frac{T}{A} - \delta u_i \cdot f_i \right) A ds - \delta D_i \cdot P_i = 0 \quad (4.1.19)$$

onde f representa a carga distribuída por unidade de volume do cabo.

As cargas volumétricas podem ser substituídas por cargas distribuídas por unidade de comprimento em s_R e s respectivamente:

$$q_{R_i}^* = f_{R_i} A_R \quad (4.1.20)$$

$$q_i^* = f_i \cdot A \quad (4.1.21)$$

Considerando pequenas deformações virtuais $\delta\varepsilon_R$ e $\delta\varepsilon$, devido ao deslocamento virtual pequeno δu , tem-se:

$$\delta\varepsilon_R = \cos \theta_{R_i} \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial s_R} \quad (4.1.22)$$

$$\delta\varepsilon = \cos \theta_i \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial s} \quad (4.1.23)$$

e as equações do PTV tornam-se:

$$\int_{s_R} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial s_R} \cos \theta_{R_i} T_R - \delta u_i \cdot q_{R_i}^* \right) ds_R - \delta D_i \cdot P_{R_i} = 0 \quad (4.1.24)$$

$$\int_s \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial s} \cos \theta_i T - \delta u_i \cdot q_i^* \right) ds - \delta D_i \cdot P_i = 0 \quad (4.1.25)$$

O integrando na configuração deslocada tem seus termos estabelecidos em função de valores conhecidos da configuração de referência, e são obtidos das equações (4.1.12) a (4.1.16).

As cargas distribuídas, em ambos os estados, são mais convenientemente definidas em termos da carga distribuída por unidade de comprimento indeformado. Como a resultante deve ser a mesma (carga conservativa, direção não muda com o deslocamento), têm-se:

$$q_{R_i}^* ds_R = q_{R_i} ds_o \Rightarrow q_{R_i}^* = \frac{q_{R_i}}{\lambda_R} \quad (4.1.26)$$

$$q_i^* ds = q_i ds_o \Rightarrow q_i^* = \frac{q_i}{\lambda} = \frac{q_i}{\lambda_R \sqrt{1+2\gamma}} \quad (4.1.27)$$

As expressões do PTV tornam-se:

$$\int_{s_R} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial s_R} T_R \cos \theta_{R_i} - \delta u_i \cdot \frac{q_{R_i}}{\lambda_R} \right) ds_R - \delta D_i \cdot P_{R_i} = 0 \quad (4.1.28)$$

$$\int_{s_R} \left(\frac{\partial(\delta u_i)}{\partial s_R} \left[T_R + E_R A_o \lambda_R (\sqrt{1+2\gamma} - 1) \right] \frac{\cos \theta_{R_i} + \frac{\partial u_i}{\partial s_R}}{\sqrt{1+2\gamma}} - \delta u_i \cdot \frac{q_i}{\lambda_R} \right) ds_R - \delta D_i \cdot P_i = 0 \quad (4.1.29)$$

Sejam os incrementos de carga aplicados:

$$\Delta q_i = q_i - q_{R_i} \quad (4.1.30)$$

$$\Delta P_i = P_i - P_{R_i} \quad (4.1.31)$$

subtraindo-se as expressões do PTV (1.1.28) de (1.1.29) obtém-se:

$$\int_{s_R} \left\{ \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial s_R} \left[\frac{E_R A_o \lambda_R - T_R}{\sqrt{1+2\gamma}} \left(\cos \theta_{R_i} (\sqrt{1+2\gamma} - 1) - \frac{\partial u_i}{\partial s_R} \right) + E_R A_o \lambda_R \frac{\partial u_i}{\partial s_R} \right] - \frac{\delta u_i}{\lambda_R} \Delta q_i \right\} ds_R +$$

$$-\delta D_i \Delta P_i = 0 \quad (4.1.32)$$

que é a equação que permite calcular grandes deslocamentos u_i devidos a carregamentos incrementais Δq_i e ΔP_i .

4.1.4. SOLUÇÃO LINEARIZADA

Quando pequenos incrementos de carga são aplicados, de modo que se obtenham pequenos deslocamentos, as deformações relativas podem ser simplificadas (linearizadas) como segue:

$$\gamma \cong \cos \theta_{R_i} \frac{\partial u_i}{\partial s_R} \quad (4.1.33)$$

e os seguintes termos podem ser aproximados por:

$$\sqrt{1+2\gamma} - 1 \cong \gamma \quad (4.1.34)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\gamma}} = 1 - \gamma \quad (4.1.35)$$

Introduzindo-se as expressões (4.1.34) e (4.1.35) em (4.1.32) obtém-se:

$$\int_{s_R} \left\{ \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial s_R} \left[(E_R A_o \lambda_R - T_R) \left(\gamma \cos \theta_{R_i} - \frac{\partial u_i}{\partial s_R} \right) (1 - \gamma) + E_R A_o \lambda_R \frac{\partial u_i}{\partial s_R} \right] - \frac{\delta u_i}{\lambda_R} \Delta q_i \right\} ds_R +$$

$$-\delta D_i \Delta P_i = 0 \quad (4.1.36)$$

Levando-se a expressão (4.1.33) em (4.1.36), e desprezando-se os termos de ordem superior, ou seja:

$$\left(\cos \theta_{R_i} \cos \theta_{R_j} \frac{\partial u_j}{\partial s_R} - \frac{\partial u_i}{\partial s_R} \right) \left(1 - \cos \theta_{R_j} \frac{\partial u_j}{\partial s_R} \right) \equiv \cos \theta_{R_i} \cos \theta_{R_j} \frac{\partial u_j}{\partial s_R} - \frac{\partial u_i}{\partial s_R} \quad (4.1.37)$$

a equação (4.1.36) pode ser simplificada para :

$$\int_{s_R} \left\{ \frac{\partial(\delta u_i)}{\partial s_R} \left[T_R \delta_{ij} + (E_R A_o \lambda_R - T_R) \cos \theta_{R_i} \cos \theta_{R_j} \right] \frac{\partial u_j}{\partial s_R} - \frac{\delta u_i}{\lambda_R} \Delta q_i \right\} ds_R - \delta D_i \Delta P_i = 0 \quad (4.1.38)$$

resultando uma equação linear válida para pequenos deslocamentos, a partir de um estado de referência.

Problemas de grandes deslocamentos podem ser analisados através de (4.1.38), com o carregamento incremental, sendo o estado de referência atualizado a cada incremento de carga. Contudo, deve-se observar que pequenos erros são acumulados em cada incremento de carga. Uma alternativa é utilizar métodos iterativos para resolver a equação não linear (4.1.32).

4. 2. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO DE CABO

A idealização mais simples de uma estrutura de cabos consiste de um sistema de elementos retilíneos interconectados (figura 4.3), sendo cada elemento constituído de material uniforme, com tensões e propriedades geométricas uniformes ao longo do seu comprimento.

A ressalva na hipótese de elemento retilíneo é sobre a direção dos cossenos diretores, que numa estrutura real são funções contínuas da forma do elemento. No caso da utilização do elemento retilíneo tem-se descontinuidade da direção dos cossenos diretores nos pontos nodais, necessitando-se de muitos elementos para representar um segmento de cabo com grande curvatura.

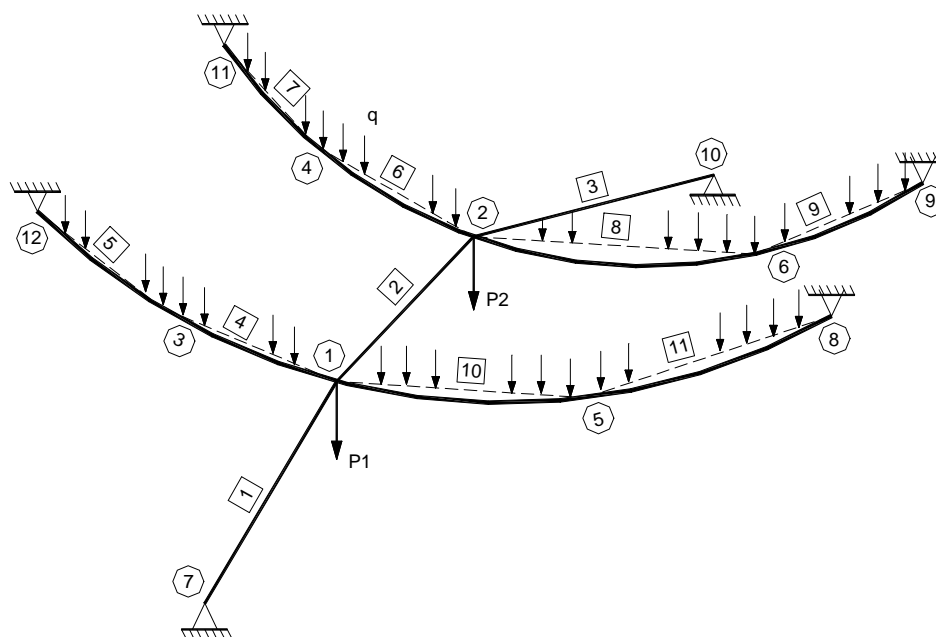


FIGURA 4.3: Sistema estrutural de cabos.

Um elemento típico "e" na configuração de referência é mostrado na figura 4.4 conectado aos nós A e B, de coordenadas x_{A_i} e x_{B_i} , $i=1,2,3$.

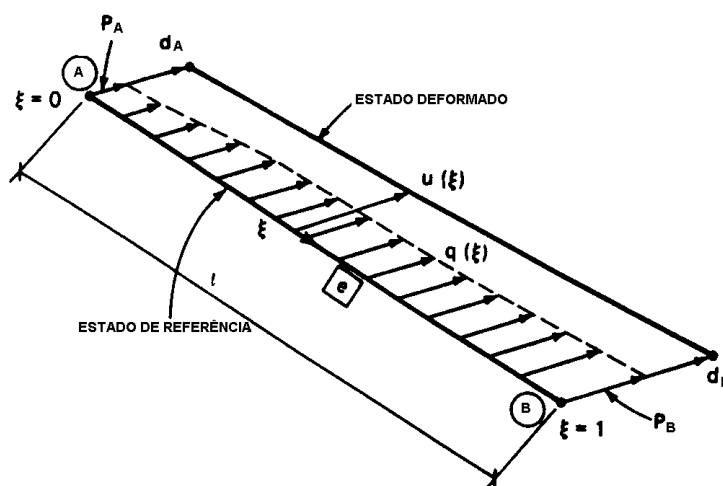


FIGURA 4.4: Elemento finito de cabo.

Os cossenos diretores são dados por:

$$\cos \theta_{R_i} = \frac{x_{A_i} - x_{B_i}}{l} \quad (4.2.1)$$

onde l é o comprimento do elemento retilíneo dado por:

$$\ell = \sqrt{(x_{B_i} - x_{A_i})(x_{B_i} - x_{A_i})} \quad (4.2.2)$$

Definindo-se uma coordenada adimensional $\xi = \frac{s_R}{\ell} \Rightarrow 0 \leq \xi \leq 1$,

tem-se:

$$\frac{d\xi}{ds_R} = \frac{1}{\ell} \quad (4.2.3)$$

Com a hipótese de elemento retilíneo, e admitindo-se que os deslocamentos variam de acordo com uma função polinomial de primeiro grau sobre o comprimento do elemento, obtém-se uma formulação isoparamétrica de primeira ordem. Assim, com as funções interpoladoras:

$$\phi_A(\xi) = 1 - \xi \quad (4.2.4)$$

$$\phi_B(\xi) = \xi \quad (4.2.5)$$

tem-se a função deslocamento:

$$u_i(\xi) = \phi_A u_{A_i} + \phi_B u_{B_i} \quad (4.2.6)$$

sendo $u_i(0) = u_{A_i}$ e $u_i(1) = u_{B_i}$.

Em notação matricial o vetor deslocamento é representado por:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [N_A \quad N_B] \begin{Bmatrix} u_A \\ u_B \end{Bmatrix} \quad (4.2.7)$$

$$\text{onde } \mathbf{u}_A = \begin{Bmatrix} u_{A_1} \\ u_{A_2} \\ u_{A_3} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{u}_B = \begin{Bmatrix} u_{B_1} \\ u_{B_2} \\ u_{B_3} \end{Bmatrix}$$

$$\text{e } [N_A] = \phi_A \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad [N_B] = \phi_B \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} = \left[\frac{\partial \phi_A}{\partial \xi} \mathbf{I} \quad \frac{\partial \phi_B}{\partial \xi} \mathbf{I} \right] \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} = \mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A \quad (4.2.8)$$

e

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s_R} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s_R} = \frac{1}{\ell} (\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A) \quad (4.2.9)$$

Analogamente, os deslocamentos virtuais são obtidos:

$$\{\delta \mathbf{u}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_A & \mathbf{N}_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_A \\ \delta \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} \quad (4.2.10)$$

e

$$\frac{\partial (\delta \mathbf{u})}{\partial \xi} = (\delta \mathbf{u}_B - \delta \mathbf{u}_A) \quad (4.2.11)$$

$$\frac{\partial (\delta \mathbf{u})}{\partial s_R} = \frac{\partial (\delta \mathbf{u})}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial s_R} = \frac{1}{\ell} (\delta \mathbf{u}_B - \delta \mathbf{u}_A) \quad (4.2.12)$$

4.2.1. SOLUÇÃO LINEARIZADA

Com a hipótese de pequenos deslocamentos, as deformações relativas são dadas por (4.1.33), que em notação matricial fica:

$$\gamma \cong \frac{1}{\ell} (\mathbf{cos} \theta_R)^t (\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A) \quad (4.2.13)$$

onde $(\mathbf{cos} \theta_R)^t = \{ \cos \theta_{R_1} \quad \cos \theta_{R_2} \quad \cos \theta_{R_3} \}$.

Admitindo-se para os incrementos de carga as mesmas funções interpoladoras, tem-se:

$$\{\Delta \mathbf{q}\} = \begin{Bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \Delta q_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_A & \mathbf{N}_B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_A \\ \mathbf{q}_B \end{Bmatrix} \quad (4.2.14)$$

$$\text{onde } \mathbf{q}_A = \begin{Bmatrix} q_{A_1} \\ q_{A_2} \\ q_{A_3} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q}_B = \begin{Bmatrix} q_{B_1} \\ q_{B_2} \\ q_{B_3} \end{Bmatrix}.$$

A expressão linearizada do PTV (4.1.38) pode ser escrita na forma matricial:

$$\sum_e \left(\int_0^1 \frac{\partial \{\delta \mathbf{u}\}^t}{\partial \xi} [\mathbf{B}] \frac{\partial \{\mathbf{u}\}}{\partial \xi} dx - \ell \int_0^1 \{\delta \mathbf{u}\}^t \left(\frac{1}{\lambda_R} \right) \{\Delta \mathbf{q}\} dx \right) - \{\delta \mathbf{D}\}^t \{\Delta \mathbf{P}\} = 0 \quad (4.2.15)$$

onde o somatório abrange todos os elementos do sistema, $\delta \mathbf{D}$ é o vetor dos deslocamentos virtuais nodais, $\Delta \mathbf{P}$ é o vetor das cargas externas concentradas nodais (excluídas as parcelas devidas ao peso próprio, já consideradas em $\{\Delta \mathbf{q}\}$), e a matriz

$$\mathbf{B} = T_R \mathbf{I} + (E_R A_o \lambda_R - T_R) \cos \theta_R \cos^t \theta_R \quad (4.2.16)$$

Introduzindo-se as expressões (4.2.8), (4.2.10) e (4.2.14) na (4.2.15) e resolvendo-se a integral, tem-se:

$$\sum_e \left(\left[\delta \mathbf{u}_A \quad \delta \mathbf{u}_B \right] \left(\frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A \\ \mathbf{u}_B \end{Bmatrix} - \frac{\ell}{\lambda_R} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2\mathbf{q}_A + \mathbf{q}_B \\ \mathbf{q}_A + 2\mathbf{q}_B \end{bmatrix} \right) \right) - \{\delta \mathbf{D}\}^t \{\Delta \mathbf{P}\} = 0 \quad (4.2.17)$$

A expressão (4.2.17) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\sum_e \left\{ \left[\delta \mathbf{u}_A \quad \delta \mathbf{u}_B \right] (\mathbf{K}_e \mathbf{u}_e - \mathbf{Q}_e) \right\} - (\delta \mathbf{D})^t (\Delta \mathbf{P}) = 0 \quad (4.2.18)$$

$$\text{onde } \mathbf{K}_e = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{Q}_e = \frac{\ell}{6\lambda_R} \begin{Bmatrix} 2\mathbf{q}_A + \mathbf{q}_B \\ \mathbf{q}_A + 2\mathbf{q}_B \end{Bmatrix}.$$

As contribuições dos elementos podem ser agrupadas através das respectivas matrizes de incidência cinemática $[\Gamma]$ para formar a matriz de rigidez do sistema global:

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{G}^t \mathbf{K}_e \mathbf{G} \quad (4.2.19)$$

e o vetor de cargas residuais

$$\mathbf{R} = \Delta \mathbf{P} + \sum_e \mathbf{G}^t \mathbf{Q}_e \quad (4.2.20)$$

Dessa maneira obtém-se um sistema de equações lineares com o vetor dos deslocamentos incógnitos:

$$\mathbf{K} \mathbf{D} = \mathbf{R} \quad (4.2.21)$$

Resolvido o sistema de equações, com os deslocamentos conhecidos pode-se determinar a nova configuração de referência e aplicar um novo incremento de carga. Deste modo, a resposta não linear do sistema de cabos pode ser aproximada através de uma seqüência de problemas lineares.

4.2.2. SOLUÇÃO NÃO LINEAR

No caso de se considerar grandes deslocamentos, tem-se a expressão da deformação relativa:

$$\gamma = \frac{1}{\ell} \cos \theta_R^t (\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A) + \frac{1}{2\ell^2} (\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A)^t (\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A) \quad (4.2.22)$$

Sendo o vetor dos cossenos diretores:

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+2\gamma}} \cos \theta_R + \frac{1}{\ell} (\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A) \quad (4.2.23)$$

e a força nos elementos $T = T_R + (\lambda - \lambda_R) E_R A_R$, a expressão do PTV da estrutura de cabos na posição deslocada pode ser escrita na forma matricial:

$$\sum_e \left(\int_0^1 \frac{\partial \{\delta \mathbf{u}\}^t}{\partial \xi} T(\cos \theta) d\xi - \int_0^1 (\delta \mathbf{u})^t \left(\frac{1}{\lambda_R} \right) \mathbf{Q} dx \right) - (\delta \mathbf{D})^t (\Delta \mathbf{P}) = 0 \quad (4.2.24)$$

Resolvendo-se as integrais obtém-se:

$$\sum_e \left([\delta \mathbf{u}_A \quad \delta \mathbf{u}_B] \left(\mathbf{T} \begin{Bmatrix} -\cos\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix} - \frac{\ell}{6\lambda_R} \begin{Bmatrix} 2\mathbf{q}_A + \mathbf{q}_B \\ \mathbf{q}_A + 2\mathbf{q}_B \end{Bmatrix} \right) \right) - (\delta \mathbf{D})^t (\Delta \mathbf{P}) = 0 \quad (4.2.25)$$

Através das matrizes de incidência cinemática obtemos o sistema global de equações não lineares:

$$(\delta \mathbf{D})^t (\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_e) = 0 \quad (4.2.26)$$

onde $\mathbf{F}_i = \sum_e \left(\mathbf{T} \begin{Bmatrix} -\cos\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix} \right)$ representa a contribuição dos esforços de todos os

elementos que chegam ao nó, e $\mathbf{F}_e = \sum_e \left(\frac{\ell}{6\lambda_R} \begin{Bmatrix} 2\mathbf{q}_A + \mathbf{q}_B \\ \mathbf{q}_A + 2\mathbf{q}_B \end{Bmatrix} \right) + \mathbf{P}$ representa a contribuição das forças externas.

Portanto, tem-se um sistema de equações não lineares que representa o equilíbrio do sistema, já que $\delta \mathbf{D} \neq 0$ (deslocamento virtual arbitrário):

$$\mathbf{F}_i - \mathbf{F}_e = 0 \quad (4.2.27)$$

4.3. RESOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES PELO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

A solução do sistema de equações não lineares $\mathbf{G} = \mathbf{F}_i - \mathbf{F}_e = 0$ pode ser obtida através de um procedimento incremental/iterativo como o Método de Newton-Raphson (capítulo 5). Para isso necessita-se o cálculo da matriz de rigidez tangente da estrutura (considerando somente forças conservativas). Para o procedimento iterativo obtém-se a matriz de rigidez do elemento na iteração i :

$$[\mathbf{K}^i] = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{D}^i} = \frac{\partial \left(\mathbf{T}^i \begin{Bmatrix} -\cos\theta^i \\ \cos\theta^i \end{Bmatrix} \right)}{\partial \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_A^i \\ \mathbf{u}_B^i \end{Bmatrix}} \quad (4.3.1)$$

A matriz de rigidez da estrutura é o somatório das matrizes de rigidez de todos os elementos finitos que compõe a estrutura:

$$\mathbf{K} = \sum_e [\mathbf{K}_e] \quad (4.3.2)$$

$$\text{sendo } [\mathbf{K}_e] = \frac{1}{l\sqrt{1+2\gamma}} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

$$\text{onde } \mathbf{B} = \left\{ T(\mathbf{I}) + (\lambda_R E_R A_0 - T_R) \cos^t \theta \cos \theta \right\} .$$

O procedimento incremental/iterativo consiste primeiramente em se obter uma solução inicial para o carregamento incremental. Pelo processo iterativo essa solução é melhorada, até que o equilíbrio do sistema seja atingido, dentro de uma tolerância especificada.

4.4. MINIMIZAÇÃO DA ENERGIA POTENCIAL TOTAL DO SISTEMA DE CABOS PELO MÉTODO DO GRADIENTE CONJUGADO

Uma forma alternativa para o problema do equilíbrio do sistema estrutural de cabos, sem a necessidade de se resolver o sistema de equações não lineares (ou seja, sem a necessidade de se obter a matriz de rigidez do sistema de cabos), é torná-lo um problema variacional, onde se busca obter o mínimo da função energia potencial, utilizando-se um método de minimização de ordem um (ver métodos de otimização no apêndice I). O princípio da mínima energia potencial pode ser considerado como um problema de programação matemática de minimização irrestrita.

A energia potencial total Π de um sistema estrutural é dado pela soma de duas componentes : a energia de deformação U (ou trabalho dos esforços internos) e a energia potencial das cargas aplicadas ao sistema Ω (ou trabalho das forças externas):

$$\Pi = U + \Omega \quad (4.4.1)$$

No caso de carregamento conservativo aplicado aos nós de um sistema estrutural discretizado tem-se:

$$\Pi = \sum_{i=1}^m U_i - \mathbf{F}_e^t \mathbf{D} \quad (4.4.2)$$

onde \mathbf{F}_e é o vetor das forças aplicadas aos nós, \mathbf{D} é o vetor dos deslocamentos nodais, U_i é a energia de deformação armazenada em um elemento i e m é o número de elementos do sistema estrutural.

A condição estacionária $\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{P} = \mathbf{0}$, que leva o sistema estrutural à condição de mínima energia potencial, representa a posição de equilíbrio do sistema estrutural para um dado carregamento aplicado. Considerando-se na expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais (item 4.1.3) os deslocamentos virtuais como uma variação de quantidades reais, temos a expressão do Princípio da Mínima Energia Potencial.

A condição de equilíbrio de todos os nós pode ser expressa como:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{ij}} = 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^b \frac{\partial U_{ik}}{\partial u_{ij}} - \mathbf{F}_{eij} = 0 \quad (4.4.3)$$

onde u_{ij} é o deslocamento do nó i na direção j , \mathbf{F}_{eij} é a componente da força no nó i na direção j e b é o número de elementos que chegam ao nó i .

Para um vetor \mathbf{D} que não conduz à posição de equilíbrio do sistema, o vetor gradiente da função energia potencial não será nulo ($\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{P} \neq \mathbf{0}$). Nessas condições, o vetor gradiente compõem-se das forças desbalanceadas em todos os nós do sistema, e por essa razão é chamado vetor resíduo ($\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{P} = \mathbf{R}$). Além disso, o vetor gradiente indica a direção de maior aumento da energia potencial total (ver derivada direcional no apêndice I).

Supondo-se, durante o processo de minimização, no passo k um vetor \mathbf{D}^k , o correspondente vetor gradiente é:

$$\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{P}^k = \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}^k} \quad (4.4.4)$$

e a norma euclidiana das forças desbalanceadas é dada por:

$$\mathbf{N}^k = \left[\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}^k} \right)^t \cdot \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{u}^k} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.4.5)$$

Dividindo-se cada componente do vetor gradiente $\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{P}^k$ por $(-\mathbf{N}^k)$, obtém-se um vetor unitário \mathbf{S} na direção de descida da superfície da energia potencial total:

$$\mathbf{S}^k = -\frac{\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{P}^k}{\mathbf{N}^k} \quad (4.4.6)$$

Da posição \mathbf{D}^k deve-se mover na direção \mathbf{S}^k uma distância α até que um mínimo valor da energia potencial nesta direção é encontrado. E o próximo vetor deslocamento é dado por:

$$\mathbf{D}^{k+1} = \mathbf{D}^k + \alpha \mathbf{S}^k \quad (4.4.7)$$

Sucessivas iterações devem produzir um vetor deslocamento, para o qual o vetor resíduo \mathbf{R} tende a zero, e a energia potencial Π é mínima. Dessa forma obtém-se a configuração de equilíbrio do sistema estrutural para a carga externa aplicada.

Um aumento da eficiência, em termos de taxa de convergência, é obtido utilizando-se o conceito de direções conjugadas (ver apêndice I). O método do gradiente conjugado, parte de uma direção inicial de busca dada pelo gradiente da função:

$$\mathbf{S}^0 = -\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{P}^0 \quad (4.4.8)$$

e segue em direções conjugadas:

$$\mathbf{S}^k = -\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{P}^k + \beta^{k-1} \mathbf{S}^{k-1} \quad (4.4.9)$$

onde β adotado para o problema não linear é dado pela fórmula de Polak-Ribière:

$$\beta^{k-1} = \frac{\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{P}^{k^t} [\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{P}^k - \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{P}^{k-1}]}{\tilde{\mathbf{N}}\mathbf{P}^{k^t} \tilde{\mathbf{N}}\mathbf{P}^{k-1}} \quad (4.4.10)$$

Como se pode observar, o método utiliza apenas informações sobre o gradiente da função, que, no caso, representa o desequilíbrio de forças em cada nó, necessitando-se armazenar apenas dois vetores resíduos (o atual e o anterior). Por outro lado, o método exige uma busca unidimensional exata, para calcular a distância α . O método da falsa posição é apropriado para o problema (apêndice I), já que não requer o cálculo dos valores da função energia potencial.

CAPÍTULO 5

O MODELO FÍSICO-MECÂNICO DAS ESTRUTURAS DE CABOS E PROBLEMAS RELATIVOS À RESOLUÇÃO NUMÉRICA

5.1. INTRODUÇÃO

As estruturas de cabos, bem como as membranas apresentam características particulares de comportamento físico-mecânicas.

Estas estruturas, estando pré-solicitadas ou não, usualmente constituem um esquema estrutural hipostático, com amplas possibilidades de deslocamentos associadas a pequenas deformações (não linearidade geométrica). Sob carregamento o comportamento global da estrutura é tipicamente em *hardening*, isto é, ocorre aumento da rigidez com o aumento da solicitação. Localmente, ao contrário, é freqüentemente observado que parte da estrutura trabalha em *hardening* e parte em *softening*, devido ao afrouxamento localizado de alguns cabos.

Do ponto de vista do material empregado, também o comportamento de alguns tipos de cabos de aço com módulo elástico não estabilizado, de cabos de poliéster de alta resistência, e de membranas de borracha sintética apresentam diagramas constitutivos do material com variações do tipo *softening* e *hardening* muito marcantes. Necessita-se, portanto, um esquema de análise apropriado, levando-se em consideração o efeito da não linearidade do material. Além disso, os fenômenos de fluência e de

relaxação a curto e a longo prazo, principalmente de estruturas de cabos construídas com material sintético devem ser analisados considerando-se as variações mecânicas do material em função do tempo, do estado de deformação e de tensão.

Do ponto de vista numérico, encontram-se grandes dificuldades na análise das estruturas tracionadas. Primeiramente ocorre com freqüência a geração de um sistema de equações de equilíbrio mal condicionado, com conseqüentes erros de precisão, ocasionando a não convergência iterativa numa análise não linear. Em segundo lugar, normalmente há a necessidade de resolução de um grande número de incógnitas, com conseqüentes erros cumulativos (*rounding error*, apêndice III). Em terceiro lugar, há o problema da compatibilidade do problema físico a resolver com a precisão da máquina, especialmente quando se emprega microcomputadores (*truncation error*, apêndice III). E finalmente há a necessidade de se minimizar o emprego de memória virtual (*out of core memory*), diretamente ligado ao custo computacional.

A causa principal da geração de uma matriz de rigidez de coeficientes mal condicionados é a existência, internamente na estrutura, de um elemento ou uma região, de grande rigidez, ligada a um elemento ou a uma região de pequena rigidez. Nas cestas abatidas (pequenas flechas em relação ao vão) isto ocorre em todos os nós, já que os coeficientes de rigidez na direção x e y (plano horizontal) são muito maiores que a rigidez na direção z (direção vertical). Nas estruturas elementares como um cabo livremente suspenso, a matriz de rigidez torna-se pior condicionada quanto mais ela se torna singular, ou seja, quando a estrutura se torna mais hipostática.

Outra origem do mau condicionamento são as ligações com elementos de rigidez muito diferentes. As estruturas de cabos, em geral, são ancoradas a estruturas de rigidez relativa muito elevadas. É muito comum as estruturas de cabos serem ancoradas em estruturas de concreto armado, como por exemplo, a cesta não protendida ancorada em anel de concreto

externo e interno (figura 1.2.2a). Neste caso é sensível a diferença entre a rigidez da estrutura de contorno e a estrutura de cabos.

Portanto no estudo de estruturas de cabos, considerando o contorno deformável, o mau condicionamento tem como origem as grandes variações de rigidezes dos elementos que compõem o sistema. Quando as matrizes individuais dos elementos são associadas para compor a matriz de rigidez global da estrutura, as rigidezes de rotação ao lado das rigidezes de translação tornam o mau condicionamento mais aparente.

Se na estrutura existe uma relação entre rigidezes muito diferentes, podem ocorrer ainda alguns dos problemas de precisão na resolução numérica. Principalmente quando se empregam máquinas que trabalham com palavras de poucos bits, são perdidas informações numéricas essenciais por truncamento na representação dos números. A consequência se reflete nos resultados absurdos tanto em deslocamentos quanto em esforços. Estes erros estão relacionados com o limite de representação dos números (*overflow* e *underflow*, apêndice III), por diminuição brusca dos termos diagonais. Em outras palavras, ocorre um aumento muito grande do número de condicionamento da matriz.

5.2. NÚMERO DE CONDIÇÃO

Para a matriz de rigidez $[K]$, simétrica positiva definida, o número de condição espectral c é definido como a relação entre o maior (λ_{\max}) e o menor (λ_{\min}) autovalor da matriz :

$$c = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (5.2.1)$$

O valor de c pode ser usado para estimar o efeito do mau condicionamento da matriz de rigidez. De maneira geral quanto maior o número de condição da matriz de rigidez da estrutura pior condicionado é o sistema de equações de equilíbrio. A taxa de convergência dos métodos de solução depende do valor de c .

A partir da interpretação geométrica de um problema estrutural com apenas duas incógnitas (figura 5.2.1), observa-se que um número de condição muito grande indica que a superfície da energia potencial total (figura 5.2.2) tem o contorno com a forma elíptica muito alongada. Quando c tende a 1, o contorno elíptico se aproxima de uma circunferência e o sistema torna-se bem condicionado.

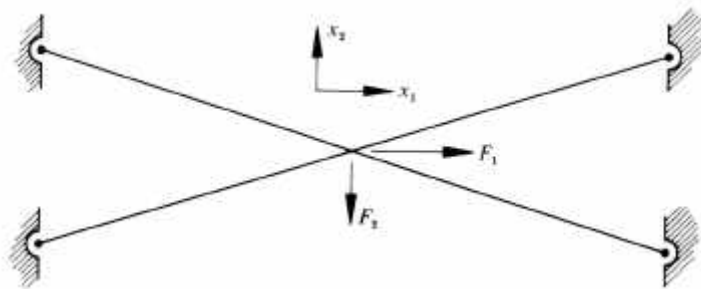


FIGURA 5.2.1: Estrutura plana de cabos, com 4 elementos e apenas 1 nó.

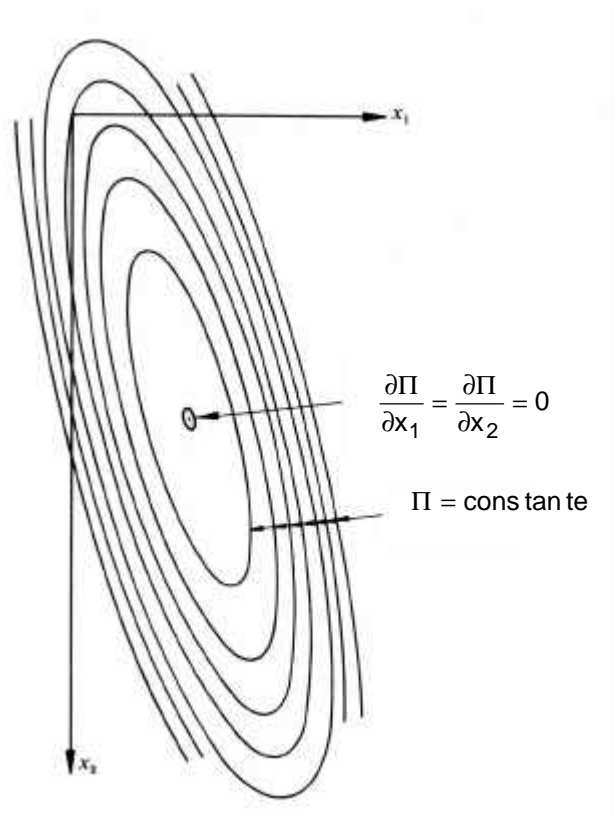


FIGURA 5.2.2: Linhas de contorno da superfície da energia potencial total da estrutura de cabos da figura 5.2.1.

A *scaling technique* é utilizada para os casos citados de mau condicionamento da matriz de rigidez. Esta técnica consiste em ampliar os contornos da superfície da energia potencial total. Isto é obtido substituindo-se o vetor deslocamento real $\{D\}$ por um vetor de transformação :

$$\{\hat{D}\} = [H]\{D\} \quad (5.2.2)$$

onde $[H]$ é a matriz que amplia os deslocamentos. A obtenção de um *optimal scaling* é por si só um problema de grandes dificuldades numéricas.

Na prática, considerável melhoria computacional é obtida escolhendo-se a matriz diagonal com componentes iguais a :

$$H_{ii} = \left[\frac{1}{K_{ii}} \right]^{1/2} \quad (5.2.3)$$

onde K_{ii} é o termo correspondente da diagonal da matriz de rigidez.

Esta técnica é sugerida por STEFANO & NEJAD [1993] para a análise de estruturas de cabos e contorno deformável.

5.3. ESTRUTURAS E MECANISMOS

Como se sabe, as estruturas de cabos necessitam uma atenção especial, já que não possuindo rigidez a flexão constituem muito freqüentemente mecanismos (estruturas hipostáticas). Isto implica que sem alguma forma de restrição adicional, por exemplo em deslocamentos ou tensões, a matriz de rigidez é singular.

Considerando-se uma estrutura tridimensional formada por m barras e n nós e possuindo 3 graus de liberdade por nó, o número de graus de liberdade da estrutura é $g = 3n$.

Sendo $\{F\}$ o vetor das forças (ações externas) aplicadas aos nós, com três forças por nó, uma em cada direção cartesiana (X,Y,Z), e $\{T\}$ o vetor dos esforços internos atuantes nas m barras, o equilíbrio da estrutura é representado pela seguinte expressão :

$$[A]_{(g \times m)} \{T\}_{(m \times 1)} = \{F\}_{(g \times 1)} \quad (5.3.1)$$

Uma configuração de equilíbrio de uma estrutura de cabos é chamada de estado de protensão pura se o carregamento externo é nulo $\{F\} = \{0\}$, enquanto as forças internas dos elementos não são nulas $\{T\} \neq \{0\}$.

Sendo o número $r \geq 1$ o rank da matriz $[A]$ que indica a maior ordem de uma submatriz de $[A]$, cujo determinante é diferente de zero. Se $g > m$, existem mais equações que incógnitas. Isto significa que existem $p = m - r$ soluções linearmente independentes que satisfazem à equação $[A]\{T\} = \{0\}$, onde $r \leq m$. Ou seja, existem p modos diferentes de se protender uma estrutura de cabos (existem p diferentes formas de equilíbrio com $\{F\} = \{0\}$).

Sendo $\{\delta\ell\}$ o vetor dos alongamentos das barras e $\{\delta D\}$ o vetor dos deslocamentos dos nós, pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais tem-se:

$$\{F\}_{(1 \times g)}^t \{\delta D\}_{(g \times 1)} = \{T\}_{(1 \times m)}^t \{\delta\ell\}_{(m \times 1)} \quad (5.3.2)$$

Da expressão 5.3.1 tem-se que $\{F\}^t = \{T\}^t [A]^t$, e portanto a expressão 5.3.2 pode ser escrita como:

$$\{T\}^t [A]^t \{\delta D\} = \{T\}^t \{\delta\ell\} \quad (5.3.3)$$

Desde que a relação 5.3.3 deve ser válida para um $\{T\}$ arbitrário, implica que:

$$[A]^t \{\delta D\} = \{\delta\ell\} \quad (5.3.4)$$

Como $[A]^t$ tem o mesmo rank que $[A]$, e sendo $g > m$ e $r \leq m$, existem $g_m = g - r$ soluções independentes tal que $[A]^t \{\delta D\} = 0$. Isto significa que, para um particular carregamento, é possível ocorrer deslocamentos da estrutura sem que haja o alongamento das barras (deslocamentos de corpo rígido).

Portanto, o número g_m define o grau de liberdade mecânica da estrutura e vale:

$$g_m = g - r = g - (m - p) = g - m + p \quad (5.3.5)$$

Se $g_m > 0$ tem-se um mecanismo e se $g_m = 0$ tem-se uma estrutura. Da expressão 5.3.5 observa-se que a existência do grau de liberdade mecânica pode ser detectada determinando-se o número de modos de se protender a estrutura, no lugar de se verificação as propriedades cinemáticas da estrutura.

Considerando-se uma estrutura de barras de comportamento linear, o vetor de esforços internos é igual a :

$$\{T\} = [E]\{\delta\ell\} \quad (5.3.6)$$

onde $[E]$ é a matriz diagonal dos coeficientes elásticos :

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{l_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{E_2 A_2}{l_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{E_m A_m}{l_m} \end{bmatrix} \quad (5.3.7)$$

Introduzindo a expressão 5.3.3 em 5.3.4 obtém-se :

$$\{T\} = [E][A]^t\{\delta D\} \quad (5.3.8)$$

Pré-multiplicando-se ambos os membros da expressão 5.3.8 pela matriz $[A]$ tem-se $[A]\{T\} = [A][E][A]^t\{\delta D\}$.

Definindo-se então a matriz de rigidez $[K] = [A][E][A]^t$, obtém-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\{F\}_{(gx1)} = [K]_{(gxg)}\{\delta D\}_{(gx1)} \quad (5.3.9)$$

O cálculo dos deslocamentos $\{\delta D\}$ é obtido pela inversão da matriz de rigidez, o que necessita ter-se $g = r$. Quando $r \leq m < g$ a inversão não é possível, pois a matriz de rigidez é singular, e não existe uma solução única possível.

5.4. MÉTODOS NUMÉRICOS EMPREGADOS NA RESOLUÇÃO DE ESTRUTURAS DE CABOS

Como vimos no capítulo 4, no caso de estruturas de cabos temos um sistema de equações não lineares de equilíbrio em $\{\delta D\}$ que não podem ser resolvidos diretamente, necessitando-se de um processo incremental e/ou iterativo de resolução. A grande maioria dos trabalhos na área de estudo de cabos emprega o método de Newton-Raphson ou técnicas de programação não linear.

5.4.1. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Primeiramente, fazendo-se uma substituição de variáveis $y = \{\delta D\}$, o método de Newton-Raphson parte de uma solução aproximada y^i e as equações ficam:

$$G(y^i) = K(y^i)y^i + F = 0 \quad (5.4.1)$$

Uma solução melhorada pode ser escrita mediante uma série de Taylor limitada a dois termos da seguinte forma :

$$G(y^{i+1}) = G(y^i) + \left(\frac{dG}{dy} \right)_i \Delta y^i = 0 \quad (5.4.2)$$

sendo $\left(\frac{dG}{dy} \right)_i = K_t(y^i)$ a matriz de rigidez tangente no ponto y^i .

O valor melhorado da solução $y^{i+1} = y^i + \Delta y^i$ é obtido calculando-se o erro :

$$\Delta y^i = -\left(K_t^i \right)^{-1} \cdot G(y^i) \quad (5.4.3)$$

sendo portanto necessário a resolução de um sistema de equações lineares em cada passo.

A forma usual do método de Newton-Raphson consiste na atualização da matriz de rigidez tangente no começo de cada iteração.

Modificações deste esquema usam uma matriz aproximada e a tornam constante durante um certo número de iterações.

Um procedimento comum é aplicar um fator de sub ou sobre-relaxação como um escalar multiplicador da matriz de rigidez. Associado com o procedimento básico existe uma variedade de técnicas de aceleração de convergência, que usa resultados de iterações sucessivas para melhorar a eficiência do método modificado. Quando, por exemplo, uma oscilação da resposta é detectada, uma nova estimativa poderia ser feita usando a média ponderada das últimas duas estimativas.

Dois grandes problemas são observados no uso do método de Newton-Raphson e suas variações. Primeiro é a estabilidade condicional destes métodos. Existe um intervalo ao redor da solução para o qual o método convergirá. O intervalo de convergência é um problema dependente, e na maioria dos casos não é possível calculá-lo explicitamente. O segundo problema é a necessidade de se estimar uma solução inicial. Normalmente assume-se um deslocamento zero como a solução inicial, o que significa assumir a configuração inicial como a de equilíbrio. Em seguida calcula-se o deslocamento por uma análise linear.

Freqüentemente a configuração inicial de uma estrutura de cabos gera uma matriz de rigidez singular ou mal condicionada. Isto significa que a primeira iteração não pode ser executada ou a solução está muito longe da configuração inicial. Este mau condicionamento pode ser contornado introduzindo-se uma rigidez artificial. Mesmo assim não haverá garantia que se chegará a uma solução na primeira iteração próxima da solução correta, havendo grande probabilidade de ocorrer divergência nas iterações seguintes.

5.4.2. MÉTODOS PARA A RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES LINEARES

A não dominância dos termos da diagonal da matriz de rigidez é uma característica de sistema de equações pobremente condicionadas, e como vimos é um problema inerente na análise de estruturas suspensas. A matriz

torna-se pior condicionada quanto mais abatida é a estrutura, pois os termos da diagonal tornam-se muito menores comparados com os outros termos.

Devido ao mau condicionamento da matriz de rigidez o método de eliminação de Gauss é um dos métodos mais utilizado para a solução de sistemas lineares no estudo de estruturas de cabos. O método de Gauss é um método direto de solução que não é substancialmente afetado pelo condicionamento das equações, e é aplicável a qualquer sistema quadrado não singular. Aproveitando-se da simetria da matriz de rigidez, e sendo ela positiva definida o método de Cholesky é mais adequado.

O método de Cholesky é uma variante do método de eliminação de Gauss adaptado para as matrizes simétricas definidas positivas.

Tomando-se o seguinte sistema de equações lineares a ser resolvido:

$$[A]\{x\} = \{b\} \quad (5.4.4)$$

onde $[A]$ é uma matriz $g \times g$ simétrica definida positiva, $\{b\}$ é o vetor dos coeficientes independentes de dimensão g , e $\{x\}$ é o vetor, de dimensão g , das incógnitas a serem calculadas.

O teorema de Cholesky permite decompor a matriz $[A]$ da seguinte forma :

$$[A] = [L][L]^t \quad (5.4.5)$$

onde $[L]$ é uma matriz triangular inferior com elementos da diagonal positivos.

A expressão 5.4.4 pode ser escrita como:

$$[L][L]^t\{x\} = \{b\} \quad (5.4.6)$$

Fazendo-se a substituição da variável $\{z\} = [L]^t\{x\}$ na expressão acima, obtém-se :

$$[L]\{z\} = \{b\} \quad (5.4.7)$$

No caso de matrizes esparsas, a matriz $[L]$ resultante do método de Cholesky, normalmente apresenta elementos não nulos em posições

anteriormente nulas da matriz. Isso aumenta o tempo de processamento e o requerimento de memória para seu armazenamento.

Os métodos diretos em geral podem não ser práticos se $[A]$ for de grande porte, esparsa e de estrutura não definida, pois as matrizes obtidas na fatorização podem ser densas.

No presente trabalho optou-se pela utilização do método direto de Cholesky para resolver o sistema de equações lineares, obtido dentro de uma iteração do método de Newton-Raphson.

Atualmente, com a necessidade de se resolver problemas de porte cada vez maior, ocorre uma retomada do interesse pelos métodos iterativos de resolução de equações lineares, tais como o método do Gradiente Conjugado. Pré-condicionadores são desenvolvidos para melhorar o desempenho (quanto à velocidade de convergência e estabilidade) dos algoritmos, principalmente no caso de matrizes mal condicionadas.

5.4.3 MÉTODOS ENERGÉTICOS

Reformulando o problema estrutural como um problema de minimização de um funcional e executando esta minimização numericamente se constitui uma técnica vantajosa em certos casos. Este tipo de aproximação usualmente relaciona um princípio de mínima energia e emprega os métodos de programação não linear (ver apêndice I) para a busca dos parâmetros que correspondem ao mínimo. Um aspecto importante desta forma de resolução é que se trata de uma função escalar de quantidades vetoriais. Isto significa que o armazenamento de grandes matrizes não é requerido no cálculo do funcional. Infelizmente os procedimentos mais efetivos, denominados métodos de segunda ordem, fazem uso de operações com grandes matrizes em soluções iterativas.

O maior problema encontrado no uso dos métodos energéticos para calcular a resposta estrutural é o número de coordenadas generalizadas envolvidas. Problemas típicos de cabos usam centenas de graus de liberdade e podem consumir muito tempo para a resolução. Uma escolha

precisa ser feita entre a eficiência do algoritmo, o que significa manipulação de grandes matrizes, ou um grande número de iterações, realizando simples operações com poucos vetores.

5.5. CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

Um critério de convergência adequado consiste na verificação da norma infinito do vetor resíduo, que corresponde ao máximo desequilíbrio nodal, e que deve ser menor que uma tolerância especificada χ , ou seja:

$$\|\mathbf{R}^k\|_{\infty} \leq \chi \quad (5.5.1)$$

sendo χ um valor que depende das unidades utilizadas no problema.

Um outro critério de parada pode ser expresso por:

$$\|\mathbf{R}^k\|_{\infty} \leq \chi \|\mathbf{R}^0\|_{\infty} \quad (5.5.2)$$

significando que o máximo desequilíbrio nodal deve ser menor que χ vezes o máximo desequilíbrio na configuração de referência, ou seja, na configuração cujos deslocamentos incógnitos são iguais a zero. Segundo ARCARO [1996], $\chi = 0,00001$ é um valor usual na análise estrutural.

Outro critério de parada deve ser especificado, para se evitar um número excessivo de iterações nos problemas de convergência muito lenta. ARCARO [1996] sugere como regra geral o número máximo de iterações permitidas igual a 10 vezes o número de incógnitas.

Os critérios de convergência que comparam valores absolutos ou relativos da energia potencial total ou valores de deslocamentos, entre iterações sucessivas, devem ser acompanhados de outros critérios que verifiquem o equilíbrio da estrutura (apêndice I).

CAPÍTULO 6

EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA

6.1. INTRODUÇÃO

Como visto no capítulo 1, é possível o projeto de infinitas formas geométricas de estruturas de cabos suspensas, para a cobertura de uma determinada área. Por exemplo, variando-se o contorno da estrutura, a elevação deste, a distribuição dos cabos e os esforços de protensão, obtêm-se cestas de diferentes curvaturas.

Uma variedade de problemas foi selecionada da literatura para estudo e comparação de resultados. Alguns exemplos foram escolhidos para a verificação da validade dos programas implementados, e que foram analisadas por vários outros pesquisadores da área. Muitas dessas estruturas selecionadas representam formas geométricas e propriedades mecânicas de cabos freqüentemente empregadas em coberturas pênseis construídas.

6.2. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO ELÁSTICO DE ESTRUTURAS DE CABOS

Como descrito nos capítulos anteriores, dois métodos de resolução foram empregados neste trabalho. O método iterativo de Newton-Raphson foi utilizado sem modificações, já que consiste no método de maior taxa de

convergência. Por outro lado, este método requer maior número de informações a serem armazenadas.

O método do Gradiente Conjugado é uma técnica de natureza numérica de minimização da energia potencial da estrutura, que envolve apenas operações com vetores, requerendo, portanto, pouco espaço de memória. Desde que uma garantia teórica da convergência não existe, a única forma de testar a estabilidade do método consiste de um extensivo estudo com várias formas de estruturas de cabos.

O trabalho de MURRAY & WILLEMS [1971] apresenta um estudo numérico de diversos esquemas estruturais de cabos empregando algumas das principais técnicas de minimização direta da energia potencial total da estrutura de cabos. Eles adotaram a variação relativa da energia potencial total entre duas iterações (6.2.1a) e o somatório da variação absoluta dos deslocamentos de todos os nós (6.2.1.b) como critérios de parada:

$$\left| \frac{\Pi_{i-1} - \Pi_i}{\Pi_i} \right| \leq \chi \quad (6.2.1a)$$

$$\sum_D |D_i - D_{i-1}| \leq \chi \quad (6.2.1b)$$

em que $\chi = 1,0 \cdot 10^{-6}$, sendo este valor aumentado nos casos em que houve dificuldades para se obter convergência. Os autores alertam para a necessidade de uma verificação adicional com o vetor gradiente, para a validação dos resultados.

MURRAY & WILLEMS [1971] optaram por dois esquemas de busca unidimensional: a interpolação cúbica e a série de Fibonacci (apêndice I).

Os resultados obtidos pelos referidos autores servem para comparar a eficiência dos métodos, escolhidos por eles, com o método de Newton-Raphson e o método do Gradiente Conjugado usados neste trabalho. Cabe observar que adotou-se, nos programas implementados, denominado de MEF-cabos, a norma infinito do vetor das forças residuais como critério de terminação para o processo iterativo:

$$\|\mathbf{R}^k\|_{\infty} \leq \chi \quad (6.1.2)$$

sendo χ um valor que depende da magnitude do carregamento aplicado, mas não maior que 0,1%. O método da Falsa Posição foi escolhido para a busca unidimensional, pois não necessita o cálculo de valores da função energia potencial. Limitou-se a busca unidimensional a 200 iterações (internas), e, como regra geral, o valor igual a 10 vezes o número de coordenadas (incógnitas) foi adotado como número limite de iterações.

6.2.1. CABO LIVREMENTE SUSPENSO COM 2 ELEMENTOS

A análise de uma estrutura com apenas 2 elementos teve como objetivo a verificação do programa implementado e a comparação com os resultados obtidos pelos programas de elementos finitos LUSAS¹ e ANSYS². Adotou-se uma área de 1 cm² para os cabos e módulo de elasticidade de 1.000 kN/cm².

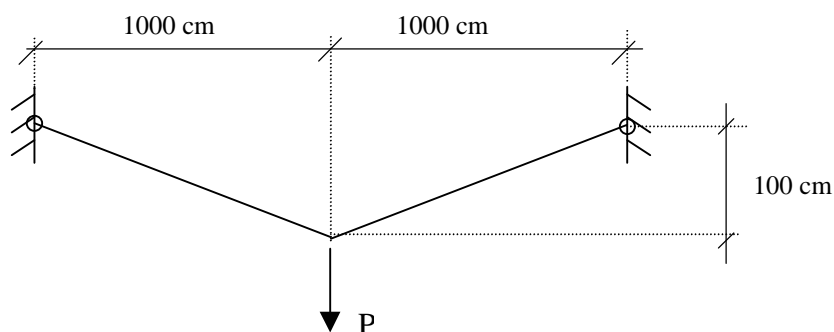


FIGURA 6.2.1: Cabo livremente suspenso com 2 elementos.

Para uma carga aplicada $P=10$ kN, foram obtidos os resultados da tabela 6.2.1.

TABELA 6.2.1			
	MEF-cabos	ANSYS	LUSAS
deslocamento	134,090140 cm	134,095 cm	131,889 cm
força	21.936,71391 N	21.937 N	21.670 N

¹ LUSAS (1995). *Finite element system, version 11*. Survey, UK, FEA.

² ANSYS (1998) ,version 5.5

Os resultados obtidos com o MEF-cabos mostram que a estrutura está em equilíbrio na sua posição deformada. No caso do LUSAS, escolheu-se o elemento retilíneo com 2 nós (BAR2) para estruturas de barras no plano, já que não dispõe de elemento próprio para estruturas de cabo. A única formulação disponível (na versão 11) era a lagrangeana total, onde a configuração de referência é a configuração indeformada (não é atualizada). O manual do LUSAS alerta que a formulação não é válida para rotações maiores que 1 radiano, e que uma limitação mais severa pode ocorrer na prática. Isto foi observado nos resultados obtidos. No caso do ANSYS (versão 5.3) utilizou-se o elemento retilíneo LINK10 (*only tension spar*), com as opções apropriadas para a análise de grandes deslocamentos e grandes rotações.

6.2.2. ESTRUTURA DE BARRAS COM 3 ELEMENTOS

Analizou-se o comportamento da estrutura plana de barras da figura 6.2.2, admitindo-se o comprimento das barras $l=1000$ cm, a seção transversal $A=1,0$ cm² e o módulo de elasticidade $E=1.000$ kN/cm².

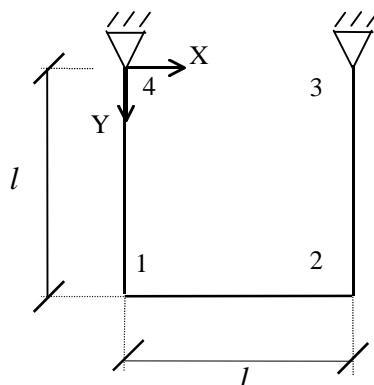


FIGURA 6.2.2: Cabo livremente suspenso com 3 elementos.

Como visto no capítulo 5, temos neste caso $m=7$ (número de barras, incluindo as barras vinculares) e $n=4$ (número de nós). Considerando a estrutura carregada apenas no plano, e elementos com 2 deslocamentos de translação por nó, o número de graus de liberdade é $g=8$. Como $g>m$ têm-se mais equações do que incógnitas. Isto significa que é possível ocorrer

deslocamentos da estrutura sem que haja o alongamento das barras (deslocamentos de corpo rígido). Tem-se um mecanismo, cujo grau de liberdade mecânica é $g_m=1$.

Como a matriz de rigidez de um mecanismo é uma matriz singular não é possível a sua inversão, ou a utilização dos métodos próprios para matrizes definidas positivas. Para contornar o problema alguns programadores utilizam o artifício de se introduzir uma deformação ou tensão fictícia à estrutura. Alternativamente pode-se adicionar uma matriz positiva definida à matriz de rigidez, suficiente para remover a singularidade, e assim iniciar o processo iterativo.

Para o exemplo em questão somou-se apenas uma matriz identidade, obtendo-se os resultados (pelo MEF-cabos com o método de Newton-Raphson) da tabela 6.2.3 para os casos de carregamento da tabela 6.2.2.

TABELA 6.2.2	
CASOS DE CARREGAMENTO	CARGA APLICADA
a) carreg. vertical simétrico	$P_V=1$ kN aplicados nos nós 1 e 2
b) carreg. vertical não simétrico	$P_V=1$ kN aplicado no nó 2
c) carreg. horizontal	$P_H=1$ kN aplicado no nó 2

TABELA 6.2.3							
carreg.	Dx (cm)		Dy (cm)		Força (N)		
	nó 1	nó 2	nó 1	nó 2	el. 4-1	el. 1-2	el. 2-3
caso a	0	0	1	1	1000	0	1000
caso b	0,0005	0	0	1	0,000001	0,000001	1000
caso c	1000,3	1000,6	-1000	-1000	333,3	333,3	666,7

Problemas de erros numéricos foram detectados quando se empregou o método do Gradiente Conjugado. A solução para o caso c de carregamento convergia muito lentamente, devido a um pequeno resíduo na direção y. A rotina foi alterada, impondo-se uma força residual “nula” convencional ($1 \cdot 10^{-9}$).

6.2.3. CABO LIVREMENTE SUSPENSO COM NÚMERO DE ELEMENTOS VARIÁVEL

Analisou-se o efeito de uma carga concentrada aplicada a um cabo livremente suspenso entre apoios nivelados, como se mostra na figura 6.2.3. A estrutura de 304,8 m (1.000 *ft*) de vão foi originalmente apresentada por MICHALOS & BIRNSTIEL [1962], especificando uma cordoalha de sistema fechado (*locked coil strand*) de 1 1/8" de diâmetro, correspondendo a uma área metálica de 5,484 cm² (0,85 in²) e módulo de elasticidade de 13.102,4 kN/cm² (19.000 *ksi*).

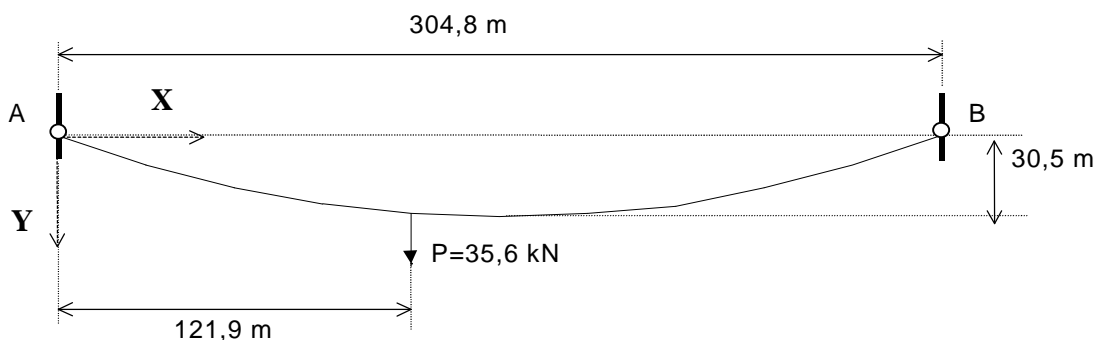


FIGURA 6.2.3: Cabo livremente suspenso sob carregamento concentrado.

A configuração inicial de equilíbrio é obtida da equação da catenária:

$$| Y = - \left[\frac{H_w}{w} \left(\cosh \frac{wX}{H_w} - 1 \right) \right] \quad (6.2.1)$$

assumindo-se uma flecha de aproximadamente 30,5 m (100 *ft*) e a carga de peso próprio de $w=47,026\text{N/m}$ (3,16 *lb/ft*). A componente horizontal da força de tração devida ao peso próprio é igual a $H_w=17,8\text{ kN}$ (4 *kips*).

Inicialmente o cabo foi dividido em 10 elementos, cuja projeção no eixo x correspondeu a 1/10 do vão. O carregamento de peso próprio (carga distribuída ao longo do comprimento) foi transformado em carregamento equivalente concentrado nos nós. Aplicou-se a carga concentrada P a uma distância de 121,9 m do apoio A. Os resultados de deslocamentos dos nós

encontram-se nas figuras 6.2.4 e 6.2.5. Os esforços nos elementos, com o método de Newton-Raphson e com o Gradiente Conjugado, são apresentados na tabela 6.2.4.

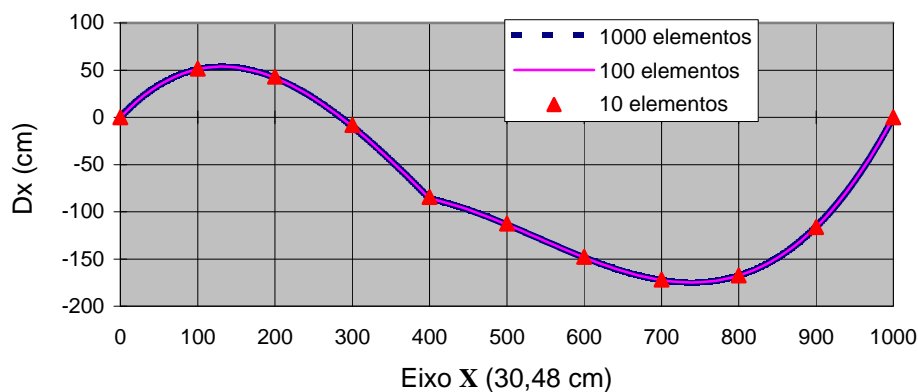


FIGURA 6.2.4: Deslocamentos horizontais.

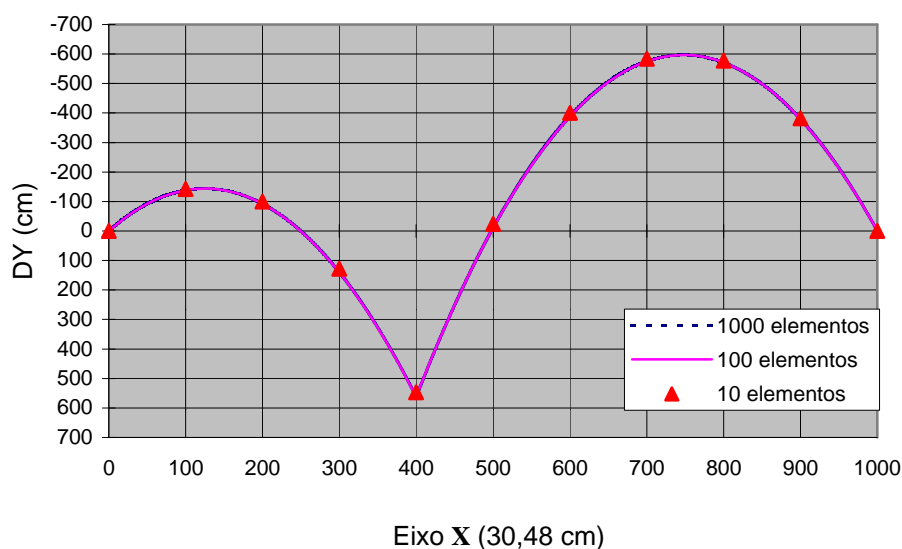


FIGURA 6.2.5: Deslocamentos verticais.

A mesma estrutura foi analisada por MURRAY & WILLEMS [1971] através de vários métodos de otimização (apêndice I), dois tipos de esquemas para a busca linear, e com ou sem o emprego de *scaling technique*. O número de iterações requerido encontra-se na tabela 6.2.5a, juntamente com resultados obtidos pelo programa MEF-cabos,

implementado com o método do gradiente conjugado (algoritmo de Polak-Ribière) e busca linear com o método da falsa posição (máximo de 200 iterações internas).

elemento	MEF-cabos (N-R)	MEF-cabos (Grad.Conj.)
1	94091,6358	94091,8487
2	93663,192	93663,4104
3	93264,5534	93264,7174
4	92892,3525	92892,519
5	90837,092	90837,2077
6	91055,3411	91055,5071
7	91295,5341	91295,6085
8	91559,3999	91559,5162
9	91849,1983	91849,2895
10	92167,7418	92167,9256

método	número de iterações	resíduo máximo (N)
FMFP*	38	1,7
FMFP* c/ <i>scaling</i>	62	2,1
FMFP**	35	21,4
FMVM	57	200,3
FMCG*	237	40,5
FMCG* c/ <i>scaling</i>	300 - não convergiu	
FMCG**	219 - não convergiu	
MEF-cabos (Grad. Conj.)	168	25,4
MEF-cabos	273	0,08

FMFP - *Function Minimization Fletcher-Powell*

FMVM - *Function Minimization Variable Metric of Fiacco and McCormick*

FMCG - *Function Minimization Conjugate Gradient (Fletcher-Reeves algorithm)*

* busca linear através de interpolação cúbica

** busca linear através da série de Fibonacci.

Os resultados de deslocamentos obtidos por MURRAY & WILLEMS [1970], com o método FMFP (Fletcher-Powell) após 38 iterações, apresentaram variação menor que 0,01% em relação ao obtido pelo

programa MEF-cabos. Para esforços a variação de resultados permaneceu menor que 0,007%.

TABELA 6.2.5b		
MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON		
Número de elementos	número de iterações	resíduo máximo (N)
10	13	0,0000031
100	13	0,0024878
1000	13	0,0004489
MÉTODO DO GRADIENTE CONJUGADO		
Número de elementos	número de iterações	resíduo máximo (N)
10	273	0,0782
100	5466	0,0939
1000	54262	0,0990

Um segundo estudo foi realizado dividindo-se o cabo em 100 elementos e em 1000 elementos. Os resultados foram obtidos obedecendo-se sempre o mesmo critério de parada do processo iterativo, através da norma infinito do vetor resíduo. A tolerância para a norma infinito do vetor resíduo foi especificada, de maneira que o máximo desequilíbrio fosse menor que 0,1 N. A tabela 6.2.5b mostra os resultados obtidos pelo método de Newton-Raphson e pelo método do Gradiente Conjugado.

Como a estrutura é um mecanismo, o aumento do número de elementos de cabos a torna mais hipostática, aumentando o mau condicionamento do problema. No caso do emprego do método do Gradiente Conjugado, que acumula resíduos em cada busca do mínimo, o mau condicionamento dá origem a erros numéricos que levam à uma convergência mais lenta para a solução do problema. Em certos casos os erros acumulados podem levar à divergência da solução. Um procedimento recomendado é o *restart* do processo de busca pelo gradiente, porém sem uma garantia de melhora na taxa de convergência.

6.2.4. CABO-TRELIÇA COM 29 ELEMENTOS

O cabo-treliça com hastes verticais e apoios nivelados, figura 6.2.6, com 30,48 m (100 *ft*) de vão foi originalmente apresentado por MICHALOS & BIRNSTIEL [1962]. Foram especificados cabos com módulo de elasticidade de 16.550,4 kN/cm² (24.000 *ksi*) e área da seção transversal de 6,452 cm² (1 *in*²) para o cabo tensor, 12,903 cm² (2 *in*²) para o cabo portante e 0,645 cm² (0,10 *in*²) para as hastes verticais.

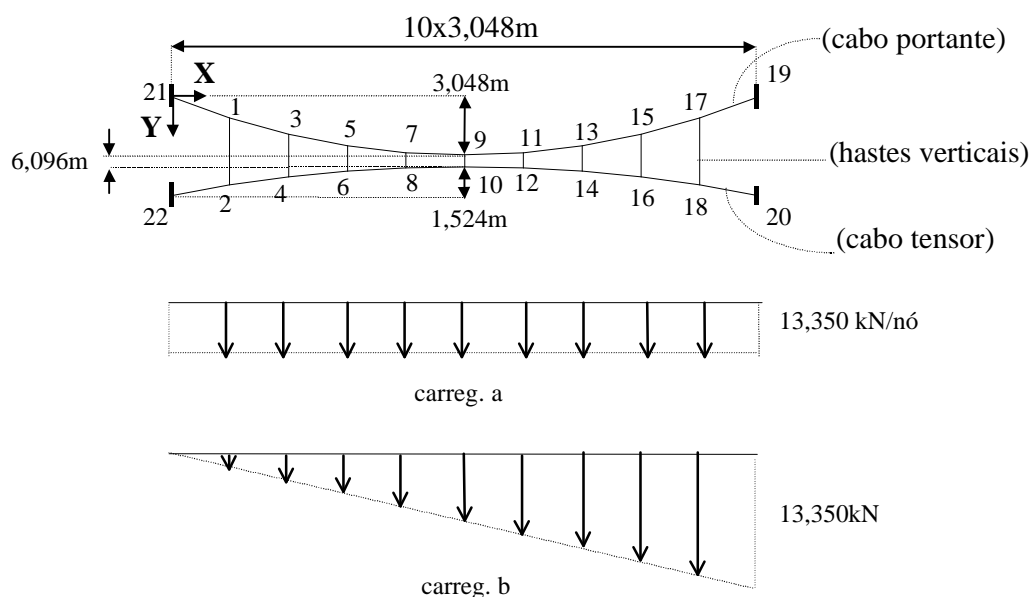


FIGURA 6.2.6: Cabo-treliça sob carregamento distribuído.

Analizou-se primeiramente o cabo-treliça submetido a uma carga uniformemente distribuída de 0,3 *kips/ft* ao longo do vão da estrutura e aplicado aos nós do cabo tensor (carregamento a). O segundo carregamento consiste numa carga linearmente variável (carregamento b), como mostra a figura 6.2.6, aplicado aos nós do cabo tensor. Admite-se uma configuração inicial parabólica dos cabos tensor e portante, tendo respectivamente flecha de 1,524 m (5,0 *ft*) e 3,048 m (10,0 *ft*) no meio do vão. A componente horizontal da força de protensão atuante no cabo tensor é de 44,5 kN (10 *kips*) e de 22,25 kN (5 *kips*) no cabo portante. Nas hastes verticais a força de protensão é de 1,78 kN (0,4 *kips*).

Os deslocamentos para os casos de carregamento encontram-se nas figuras 6.2.7 e 6.2.8, obtidos com o programa MEF-cabos, resolução pelo método de Newton-Raphson e com o seguinte critério de convergência : norma infinito do vetor resíduo $\leq 1.10^{-3}$.

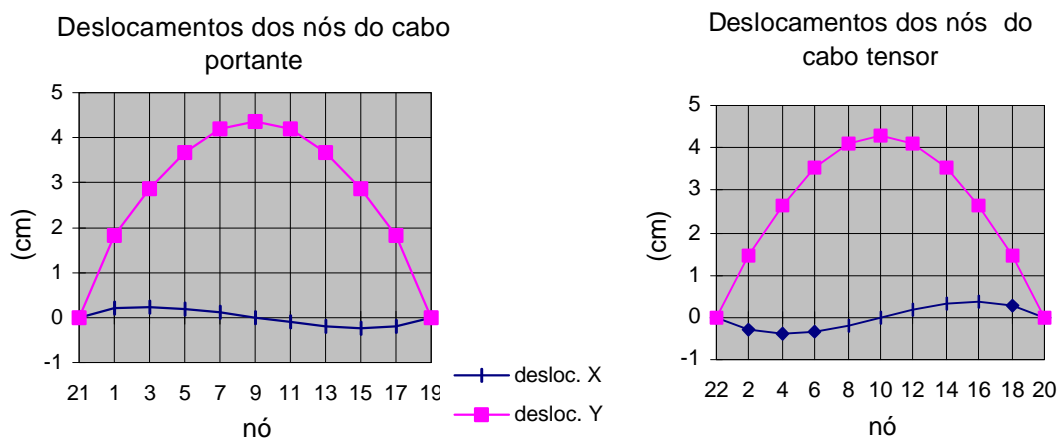


FIGURA 6.2.7: Deslocamentos nos cabos principais para o carregamento uniformemente distribuído (carregamento a).

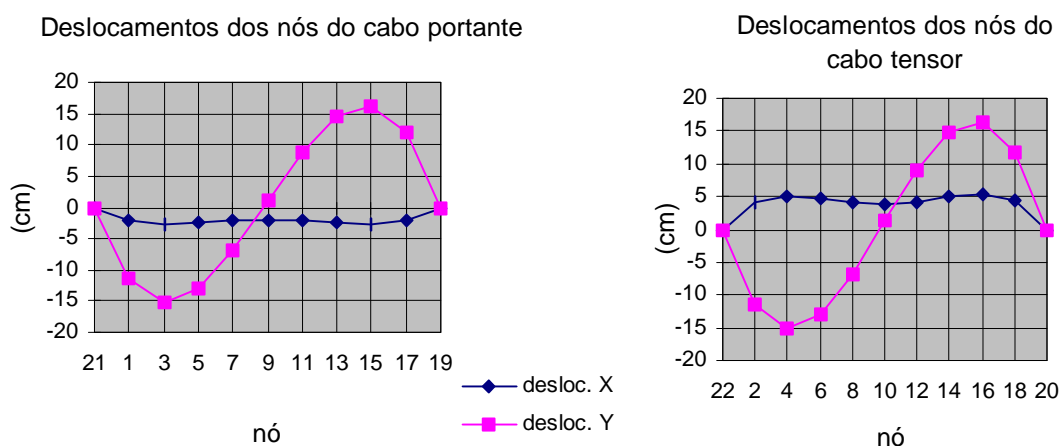


FIGURA 6.2.8: Deslocamentos nos cabos principais para o carregamento linearmente variável (carregamento b).

A tabela 6.2.6 mostra os máximos deslocamentos obtidos com o MEF-cabos, juntamente com resultados obtidos por MURRAY & WILLEMS [1971] utilizando o método de Fletcher-Powell com busca linear por interpolação cúbica. Os esforços encontram-se nas tabelas 6.2.7 e 6.2.8.

TABELA 6.2.6				
carregamento a				
	MEF-cabos		FMFP*	
nó	desloc. x (cm)	desloc. y (cm)	desloc. x (cm)	desloc. y (cm)
9	0	4,362	0	4,368
10	0	4,295	0	4,301
carregamento b				
	MEF-cabos		FMFP*	
nó	desloc. x (cm)	desloc. y (cm)	desloc. x (cm)	desloc. y (cm)
3	5,172	-15,091	5,173	-15,091
4	-2,679	-15,124	-2,679	-15,124
15	5,457	16,218	5,456	16,218
16	-2,595	16,288	-2,594	16,289

FMFP - *Function Minimization Fletcher-Powell s/ scaling*

* busca linear através a interpolação cúbica.

TABELA 6.2.7 (carreg. a)					
ESFORÇOS DE TRAÇÃO (kN) c/ MEF-cabos					
cabo portante		cabo tensor		hastes verticais	
21-1	177,477	22-2	4,577	1-2	1,3516
1-3	173,290	2-4	4,569	3-4	13,524
3-5	170,058	4-6	4,586	5-6	13,525
5-7	167,839	6-8	4,626	7-8	13,529
7-9	166,692	8-10	4,671	9-10	13,531

TABELA 6.2.8 (carreg.a)					
ESFORÇOS DE TRAÇÃO (kN) c/ FMFP*					
cabo portante		cabo tensor		hastes verticais	
21-1	177,493	22-2	4,628	1-2	13,524
1-3	173,350	2-4	4,601	3-4	13,541
3-5	170,043	4-6	4,584	5-6	13,573
5-7	167,894	6-8	4,584	7-8	13,541
7-9	166,653	8-10	4,561	9-10	13,533

FMFP - *Function Minimization Fletcher-Powell s/ scaling*

- busca linear através a interpolação cúbica.

TABELA 6.2.9 (carreg. b)					
ESFORÇOS DE TRAÇÃO (kN) c/ MEF-cabos					
cabo portante		cabo tensor		hastes verticais	
21-1	118,616	22-2	68,553	1-2	5,780
1-3	117,091	2-4	67,642	3-4	6,686
3-5	115,775	4-6	66,922	5-6	7,556
5-7	114,887	6-8	66,279	7-8	8,418
7-9	114,684	8-10	65,564	9-10	9,281
9-11	115,333	10-12	64,742	11-12	10,126
11-13	116,729	12-14	64,059	13-14	10,997
13-15	118,942	14-16	63,599	15-16	11,922
15-17	122,189	16-18	63,318	17-18	12,833
17-19	126,639	18-20	63,198		

TABELA 6.2.10 (carreg.b)					
ESFORÇOS DE TRAÇÃO (kN) c/ FMFP*					
elementos do cabo portante		elementos do cabo tensor		hastes verticais	
21-1	118,628	22-2	68,552	1-2	5,781
1-3	117,062	2-4	67,631	3-4	6,688
3-5	115,785	4-6	66,933	5-6	7,561
5-7	114,912	6-8	66,296	7-8	8,419
7-9	114,694	8-10	65,571	9-10	9,283
9-11	115,335	10-12	64,748	11-12	10,128
11-13	116,732	12-14	64,067	13-14	10,996
13-15	118,935	14-16	63,604	15-16	11,917
15-17	122,202	16-18	63,328	17-18	12,834
17-19	126,643	18-20	63,203		

FMFP - *Function Minimization Fletcher-Powell s/ scaling.*

* busca linear através a interpolação cúbica.

Observa-se no cabo-treliça que os pontos correspondentes do cabo tensor e cabo portante sofreram deslocamentos horizontais diferentes, o que inviabiliza, neste caso, o uso da técnica do meio contínuo para a análise da estrutura. Ocorre no caso deste tipo de carregamento um aumento de esforço no cabo portante e uma redução no cabo tensor.

TABELA 6.2.11		
Carregamento a (uniforme)		
método	número de iterações	resíduo máximo (N)
FMFP*	11	138,0
FMFP* <i>c/ scaling</i>	42	124,6
FMCG*	250	382,7
FMCG* <i>c/ scaling</i>	292	298,15
MEF-cabos** (N-R)	3	0,004
MEF-cabos** (Grad.Conj.)	271	0,08
Carregamento b (triangular)		
método	número de iterações	resíduo máximo (N)
FMFP*	44	36,9
FMFP* <i>c/ scaling</i>	53	66,8
FMCG*	275	124,6
FMCG* <i>c/ scaling</i>	179	35,6
MEF-cabos** (N-R)	8	0,00000045
MEF-cabos** (Grad.Conj.)	423	0,08866
MEF-cabos (Grad.Conj.)	217	24,6

FMFP - *Function Minimization Fletcher-Powell*

FMCG - *Function Minimization Conjugate Gradient (Fletcher-Reeves algorithm)*

* busca linear através a interpolação cúbica

** critério de convergência : norma infinito do vetor resíduo $\leq 1.10^{-3}$.

A tabela 6.2.6 mostra resultados obtidos pelo MEF-cabos iguais aos obtidos por Murray e Willems utilizando o método de Fletcher-Powell. Quanto a esforços os resultados variaram cerca de 0,07%. A causa principal das variações de resultados, provavelmente, são os diferentes critérios de convergência utilizados. Para isso também contribuem os erros de arredondamento na conversão de unidades, já que Murray e Willems usaram unidades inglesas.

Os resultados da tabela 6.2.11 mostram que os algoritmos dos métodos de Newton-Raphson Gradiente Conjugado foram eficientemente implementados no programa MEF-cabos. A análise foi realizada em um Pentium 233 MHz com 128 Mbytes de memória RAM, e para todos os casos o tempo de processamento foi próximo a 1 segundo.

6.2.5. CESTA PROTENDIDA EM FORMA DE PARABOLÓIDE-HIPERBÓLICO COM 64 ELEMENTOS

As cestas formadas por duas famílias de cabos ortogonais conectadas nas intersecções têm sido largamente empregadas na cobertura de grandes áreas. Por serem estruturas extremamente flexíveis, as cestas são inicialmente protendidas ou recebem uma sobrecarga de peso próprio de modo a reduzir os deslocamentos resultantes de uma mudança de carregamento.

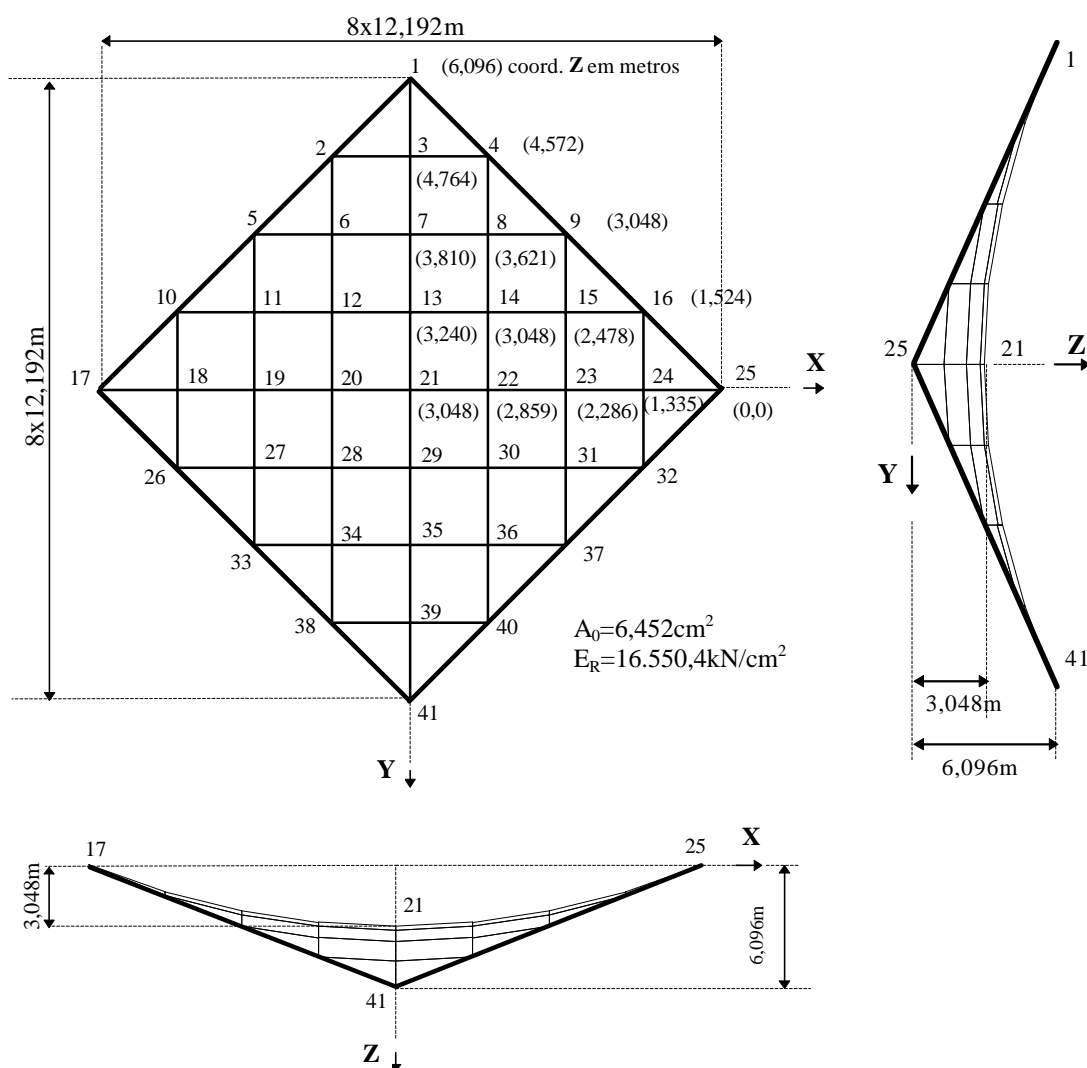


FIGURA 6.2.9: Cesta protendida em forma de parabolóide-hiperbólico.

A cesta em forma de parabolóide-hiperbólico de planta quadrada, esquematizada na figura 6.2.9, tem 97,536 m na diagonal e área aproximada de 4.757 m². A estrutura foi originalmente apresentada por THORNTON & BIRNSTIEL [1967], que especificaram um cabo de 1 in² de área da seção transversal e com módulo de elasticidade de 16.550,4 kN/cm² (24.000.000 *psi*). Admitindo-se um fator de ocupação total do cabo, a área metálica é de 6,4516 cm².

Considerando que a configuração inicial corresponde a um estado de protensão em que cada elemento possui uma força de componente horizontal igual a 222,5 kN, analisou-se a estrutura de cabos considerando-se três tipos de carregamentos, desprezando-se o peso próprio dos cabos. O primeiro (carregamento a) consiste de uma carga de 4,450kN aplicada a cada nó. A este estado de carregamento é adicionada uma carga de 62,3 kN aplicada no nó 13 (carregamento b). O terceiro carregamento consiste numa força horizontal de 44,5 kN aplicada no nó 13 na direção Y (carregamento c), simultaneamente com os carregamentos anteriores.

Admitindo-se o contorno rígido, foram obtidos os deslocamentos e os esforços pelo programa MEF-cabos que se encontram nas figuras e tabelas a seguir.

As figuras 6.2.10 e 6.2.11 mostram os deslocamentos que ocorrem no cabo diagonal segundo o eixo Y. Para os carregamentos especificados este cabo não apresenta nenhum deslocamento na direção X.

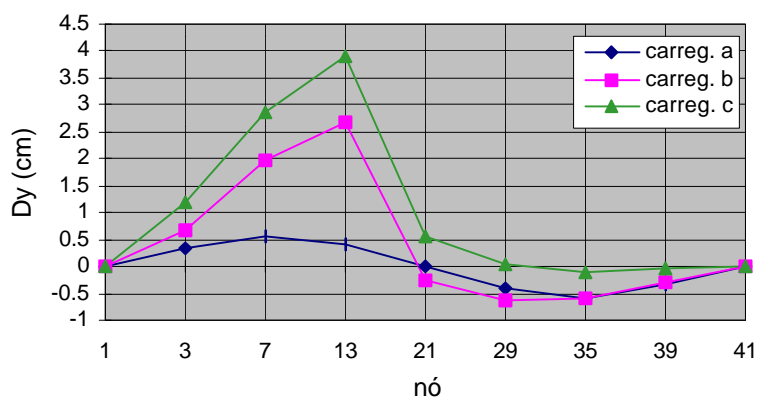


FIGURA 6.2.10: Deslocamentos horizontais na direção Y.

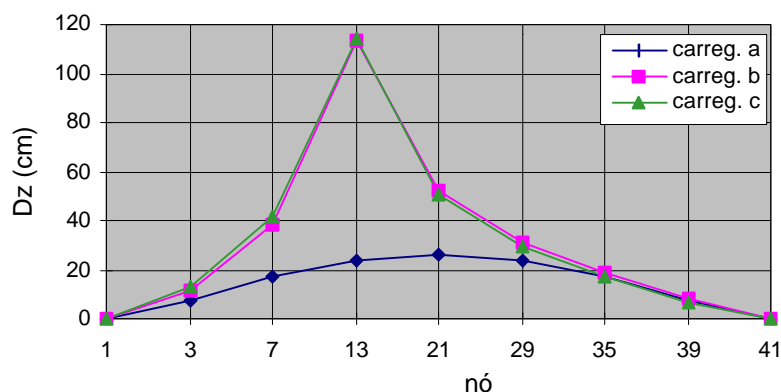


FIGURA 6.2.11: Deslocamentos verticais.

As figuras 6.2.12 e 6.2.13 apresentam os deslocamentos horizontais e a figura 6.2.14 mostra os deslocamentos verticais que ocorrem no outro cabo diagonal segundo o eixo X.

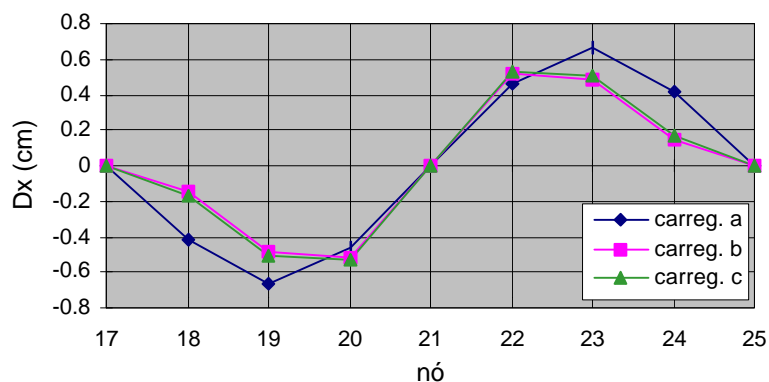


FIGURA 6.2.12: Deslocamentos horizontais na direção X.

A mesma estrutura foi analisada por MURRAY & WILLEMS [1971], apenas com os casos de carregamento a e b, através de vários métodos de otimização, e com ou sem o emprego de *scaling technique* (apêndice I). Os resultados encontram-se na tabela 6.2.15, juntamente com resultados obtidos pelo programa MEF-cabos, implementado com o método do gradiente conjugado (algoritmo de Polak-Ribière) e busca linear com o método da falsa posição.

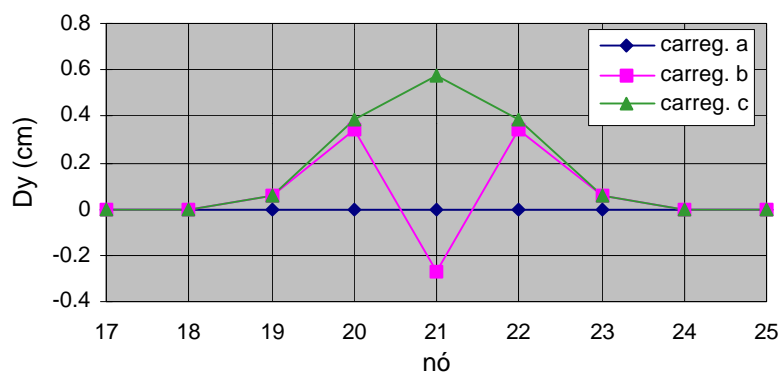


FIGURA 6.2.13: Deslocamentos horizontais na direção Y.

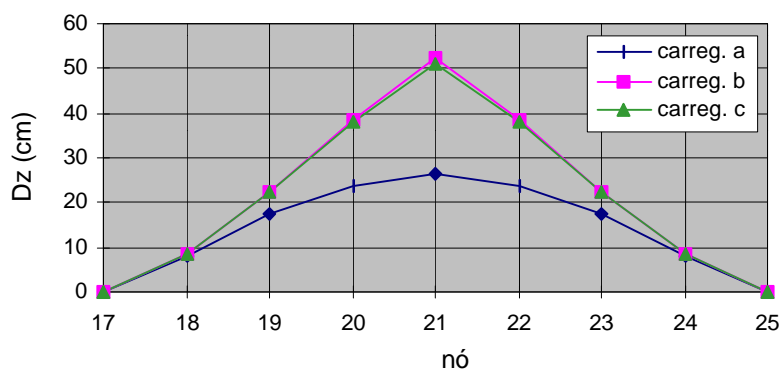


FIGURA 6.2.14: Deslocamentos verticais.

MURREY & WILLEMS [1971] obtiveram deslocamentos e esforços bastante próximos dos apresentados. A tabela 6.2.12 contém os deslocamentos máximos na direção Z, para os carregamentos a,b. Observe-se que o deslocamento máximo produzido pela carga concentrada foi da ordem de quatro vezes o deslocamento máximo produzido pelo carregamento distribuído. Deve-se ressaltar que os deslocamentos obtidos nas direções X e Y foram muito menores que os deslocamentos na direção Z.

TABELA 6.2.12: Deslocamentos verticais máximos.			
MEF-cabos		Murray&Willems	
nó 21 (carreg. a)	nó 13 (carreg. b)	nó 21 (carreg. a)	nó 13 (carreg. b)
26,351 cm	113,384 cm	26,326 cm	113,300 cm

A análise dos resultados da cesta protendida (tabelas 6.2.13 e 6.2.14), mostra que o carregamento uniformemente distribuído produziu um acréscimo de esforço nos cabos com concavidade para cima (portantes), e uma redução nos cabos com concavidade para baixo (tensores). No caso de carga concentrada ocorreu o mesmo efeito. Pode-se concluir, dos esforços finais, que a protensão aplicada foi adequada para garantir um sistema integralmente tracionado.

TABELA 6.2.13: ESFORÇOS DE TRAÇÃO (kN)					
elemento	carreg. a	carreg. b	elemento	carreg. a	carreg. b
1-3	183,611	178,498	3-4	235,139	243,143
3-7	183,234	178,164	7-8	253,888	293,267
7-13	182,985	178,434	8-9	254,269	293,948
13-21	182,855	179,717	13-14	266,114	401,549
21-29	182,855	179,033	14-15	266,476	401,556
29-35	182,985	178,944	15-16	267,204	402,018
35-39	183,234	179,122	21-22	266,952	293,990
39-41	183,611	179,514	22-23	267,277	294,540
4-8	184,877	166,537	23-24	267,937	295,306
8-14	184,669	166,233	24-25	268,902	296,179
14-22	184,568	166,098	29-30	266,114	276,677
22-30	184,568	166,256	30-31	266,476	277,082
30-36	184,669	166,480	31-32	267,204	277,869
36-40	184,877	166,753	35-36	253,888	256,174
9-15	196,788	190,475	36-37	254,269	256,552
15-23	196,684	190,223	39-40	235,139	235,409
23-31	196,684	190,159			
31-37	196,788	190,211			
16-24	213,768	213,442			
24-32	213,768	213,428			

elemento	carreg. c	elemento	carreg. c	elemento	carreg. c
2-3	247,648	28-29	274,829	12-20	166,425
5-6	299,329	33-34	254,580	20-28	166,392
6-7	298,641	34-35	254,207	28-34	166,482
10-11	404,258	38-39	233,631	34-38	166,671
11-12	403,807	10-18	213,423	1-3	205,496
12-13	403,810	18-26	213,409	3-7	205,303
17-18	294,718	5-11	190,576	7-13	205,947
18-19	293,839	11-19	190,307	13-21	163,493
19-20	293,064	19-27	190,235	21-29	163,211
20-21	292,509	27-33	190,281	29-35	163,400
26-27	276,013	2-6	167,408	35-39	163,744
27-28	275,228	6-12	166,924	39-41	164,206

Carregamento a		
método	número de iterações	resíduo máximo (N)
FMFP*	32	142,4
FMFP* c/ <i>scaling</i>	13	244,75
FMCG*	45	356,0
FMCG* c/ <i>scaling</i>	15	209,15
MEF-cabos (Grad.Conj.)	23	139,707387
MEF-cabos (Grad.Conj.)	98	0,097666
MEF-cabos (N-R)	3	0,0001
Carregamento b		
método	número de iterações	resíduo máximo (N)
FMFP*	54	890
FMFP* c/ <i>scaling</i>	23	102,4
FMCG*	118	342,7
FMCG* c/ <i>scaling</i>	31	186,9
MEF-cabos (Grad.Conj.)	60	165,4
MEF-cabos (Grad.Conj.)	149	0,06
MEF-cabos (N-R)	5	0,00001

FMFP - *Function Minimization Fletcher-Powell*

FMCG - *Function Minimization Conjugate Gradient (Fletcher-Reeves algorithm)*,

* busca linear através a interpolação cúbica.

A análise da tabela 6.2.15 mostra a eficiência do método do gradiente conjugado com o algoritmo de Polak-Ribière em relação ao algoritmo de Fletcher-Reeves. Quanto ao tempo de processamento não foi possível chegar a alguma conclusão, já que os processos de busca unidimensional são diferentes.

Com relação ao método de Fletcher-Powell, o programa MEF-cabos com o método do gradiente conjugado obteve forças residuais menores com menor número de iterações. Cabe lembrar que o FMFP trabalha com uma aproximação da matriz hessiana (apêndice I) no processo de minimização e o MEF-cabos com vetores gradiente. No entanto, não se pode concluir a respeito do tempo de processamento, já que os resultados foram obtidos em máquinas diferentes.

A análise foi realizada em um Pentium 233 MHz com 128 Mbytes de memória RAM. Definindo-se o critério de convergência igual à norma infinito do vetor resíduo $\leq 0,1 N$, todos os casos de carregamento resolvidos com o processo de Newton-Raphson consumiram tempo de processamento menor a 1 segundo, como se observa na tabela 6.2.16. Com o método do Gradiente Conjugado o tempo de processamento foi bem maior, ficando evidente que para problemas com pequeno número de incógnitas o Método de Newton-Raphson é mais eficiente. É importante lembrar que o tempo de processamento que consta da tabela 6.2.16 não é um valor absoluto, pois está afetado pelo processamento de outras tarefas ao mesmo tempo. Mas as condições de operação do computador foram as mesmas para se proceder uma comparação dos métodos.

TABELA 6.2.16						
* tempo em centésimos de segundo	carreg.a		carreg.b		carreg.c	
	iter.	tempo*	iter.	tempo*	iter.	tempo*
MEF-cabos (Grad.Conj.)	98	148	149	175	161	236
MEF-cabos (N-R)	3	38	5	61	5	44

6.3. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO INELÁSTICO DE ESTRUTURAS DE CABOS

Um estudo do comportamento pós-elástico do cabo foi realizado, para estruturas de cabos planas e tridimensionais. Adotou-se as curvas de tensão deformação dadas por MURRAY & WILLEMS [1970], que constam do capítulo 3. Todos os resultados foram obtidos com o programa MEF-cabos, com a formulação apresentada no capítulo 4, e resolução pelo método de Newton-Raphson e pelo método do Gradiente Conjugado.

6.3.1. CABO LIVREMENTE SUSPENSO COM 2 ELEMENTOS

Investigou-se o efeito de um carregamento concentrado sobre o comportamento pós-elástico do cabo livremente suspenso da figura 6.3.1. O carregamento foi aplicado no nó 1, de modo incremental, até que a deformação do cabo atingiu cerca de 3% (deformação última convencional). Definiu-se uma cordoalha com área de seção transversal igual a $6,4516 \text{ cm}^2$ (1 in^2). A curva de tensão-deformação da cordoalha foi aproximada por uma curva multi-linear, com 4 trechos, como mostra a figura 6.3.2.

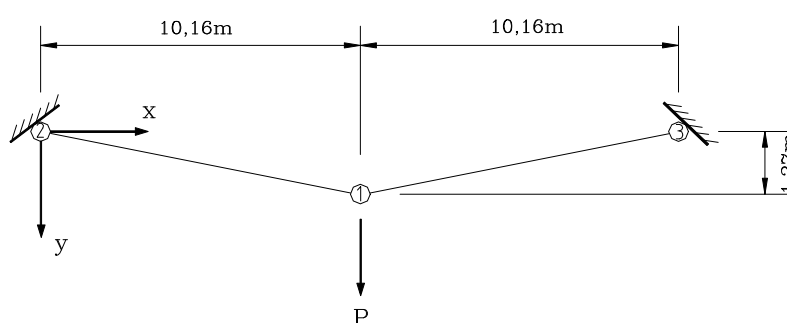


FIGURA 6.3.1: Cabo livremente suspenso submetido a carga concentrada.

O deslocamento do nó 1 e a força nos elementos de cabo 2-1 e 1-3 são mostrados nas figuras 6.3.3a e 6.3.3b. Comparando-se os resultados, observa-se que para uma tensão de ruptura definida, o carregamento último é menor quando o material é definido como perfeitamente elástico linear.

Além disso, na análise inelástica, como o material tem o módulo de deformação que diminui, com o aumento da tensão, os deslocamentos são maiores.

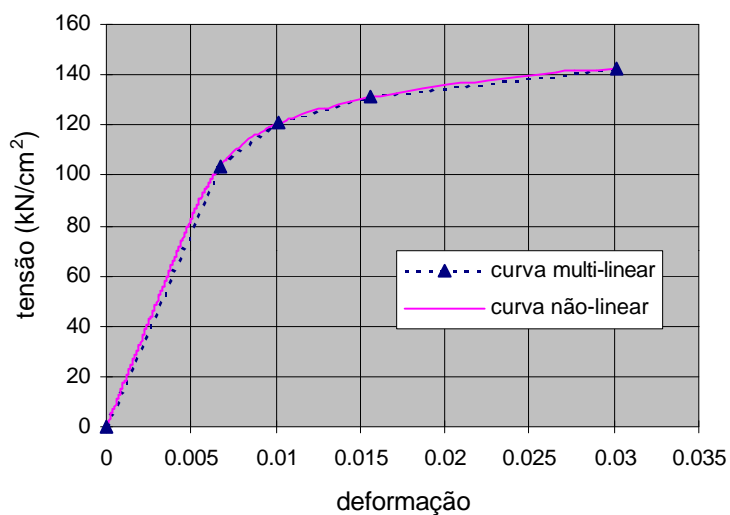


FIGURA 6.3.2: Curva tensão-deformação para cordoalha de 1" de diâmetro (1x37), MURRAY & WILLEMS [1970].

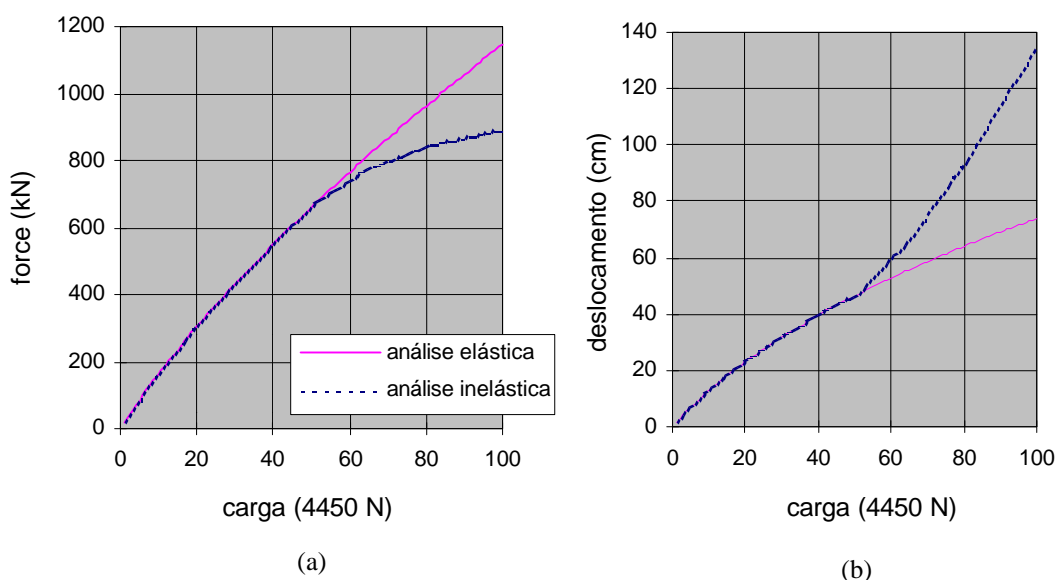


FIGURA 6.3.3: (a) Força nos elementos de cabo e (b) deslocamentos com a variação da carga aplicada.

6.3.2. CABO-TRELIÇA COM 29 ELEMENTOS

O efeito de um carregamento linearmente variável sobre um cabo-treliça (figura 6.3.4) foi investigado. Admitiu-se uma configuração inicial parabólica para os cabos portante (cabo côncavo) e tensor (cabo convexo). Para os cabos portante, tensor e cabos verticais foram definidas, respectivamente, as seguintes áreas de seção transversal: $12,903 \text{ cm}^2$, $6,452 \text{ cm}^2$, $0,645 \text{ cm}^2$. Para simplificar o problema, adotou-se uma única curva hipotética de tensão-deformação, que foi aproximada por 6 trechos lineares, como mostra a figura 6.3.5.

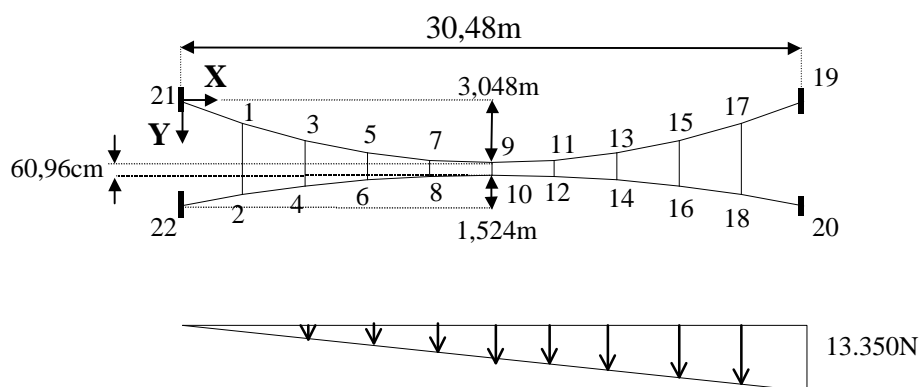


FIGURA 6.3.4: Cabo-treliça submetido a carregamento linearmente variável.

O carregamento incremental foi aplicado na direção Y, nos nós do cabo tensor, até um nível de carga que produzisse uma tensão última, correspondente a uma deformação de 3%, em pelo menos um elemento de cabo.

A configuração inicial já protendida, tem como componente horizontal de protensão uma força igual a 44,5 kN nos cabos tensores, 22,25 kN nos cabos portantes e 1,78 kN nos cabos verticais.

Os deslocamentos dos nós do cabo-treliça, com o acréscimo de carregamento é mostrado na figura 6.3.6. As figuras 6.3.7, 6.3.8, 6.3.9 mostram a variação da força nos elementos de cabo com o aumento da carga aplicada.

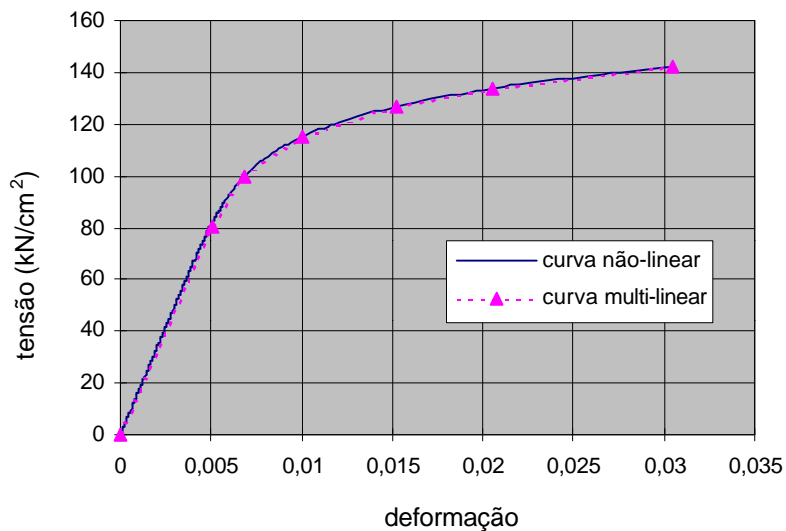


FIGURA 6.3.5: Curva tensão-deformação para cordoalhas (1x19), MURRAY & WILLEMS [1970].

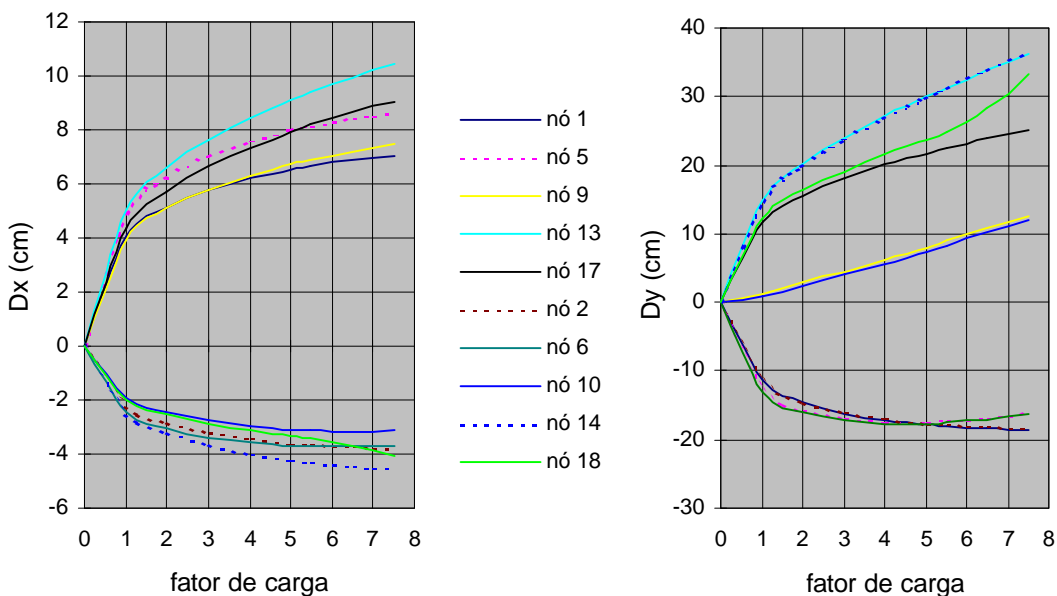


FIGURA 6.3.6: Deslocamentos horizontais e verticais dos nós do cabo-treliça com a variação da carga aplicada.

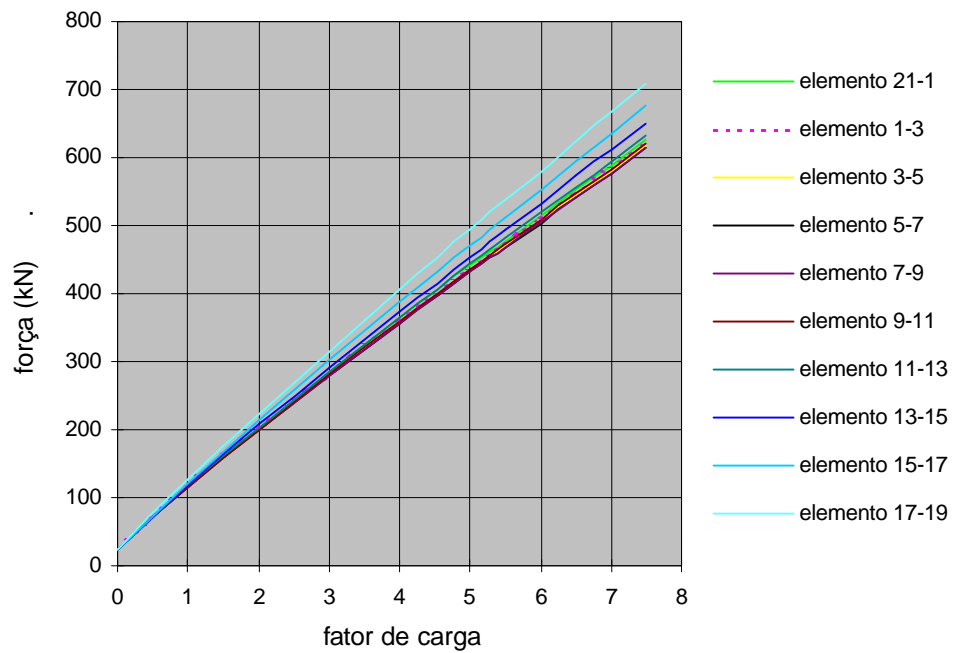


FIGURA 6.3.7: Força nos elementos do cabo portante.

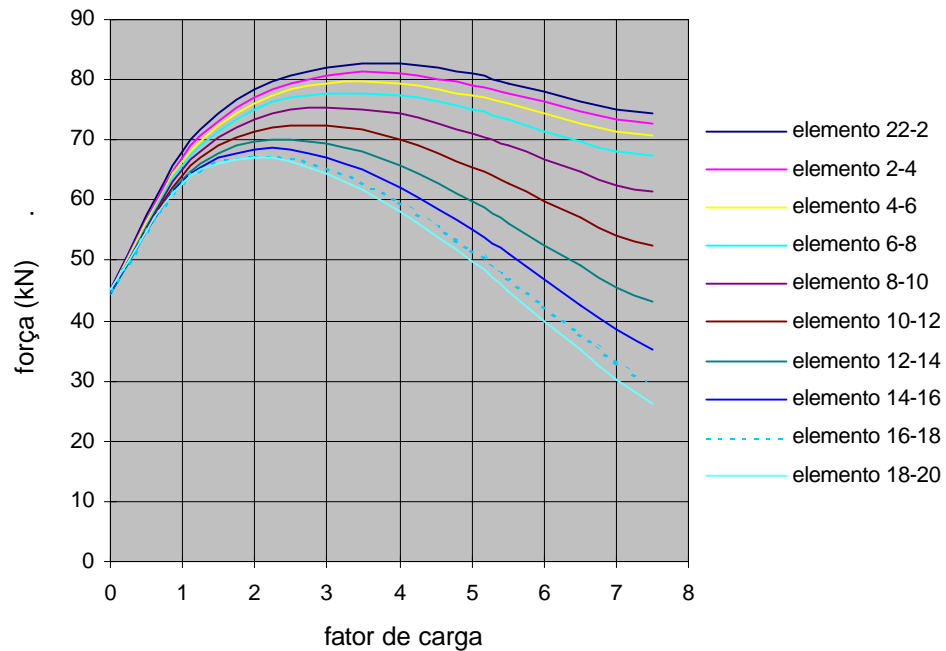


FIGURA 6.3.8: Força nos elementos do cabo tensor.

Observa-se das figuras 6.3.7, 6.3.8 e 6.3.9 que, em todos os níveis de carregamento, as maiores forças ocorrem nos elementos do cabo portante.

A análise foi feita para múltiplos inteiros do carregamento inicial, portanto o fator de carga último é igual a 7. Para este nível de carregamento a ruptura ocorre no elemento 17-18, com uma força de tração de aproximadamente 88,5 kN. Todos os elementos do cabo portante e tensor e os elementos verticais 1-2, 3-4, 5-6, 7-8 permaneceram com tensões abaixo do limite elástico. O limite elástico foi definido como a tensão de 80 kN/cm², que corresponde a cerca de 55% da tensão de ruptura do material.

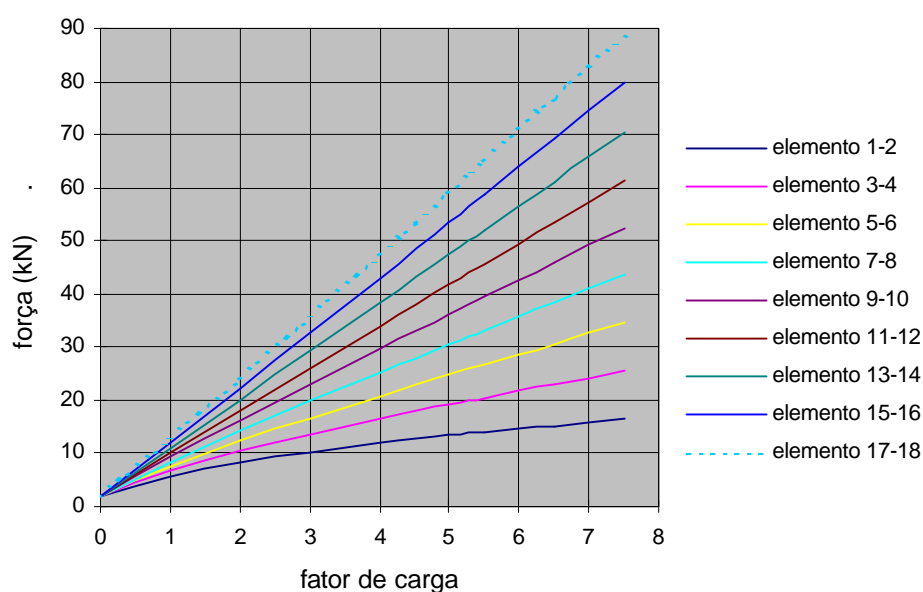


FIGURA 6.3.9: Força nos cabos verticais.

6.3.3. CESTAS DE FORMA PARABOLÓIDE-HIPERBÓLICA COM 64 ELEMENTOS

O efeito de um carregamento distribuído sobre uma cesta em forma de parabolóide hiperbólico (figura 6.3.10) foi investigado. Adotou-se uma área de seção transversal em todos os cabos de 6,4516 cm² (1 in²). O carregamento incremental foi aplicado na direção Z, em todos os nós internos da cesta, até um nível de carga que produziu a deformação última em pelo menos um elemento de cabo. Convencionou-se uma deformação última de 2%, e admitiu-se para o material a curva de tensão-deformação

dada na figura 6.3.11, linearizada em 6 trechos. A componente horizontal da força de protensão em todos os cabos é igual a 222,5 kN.

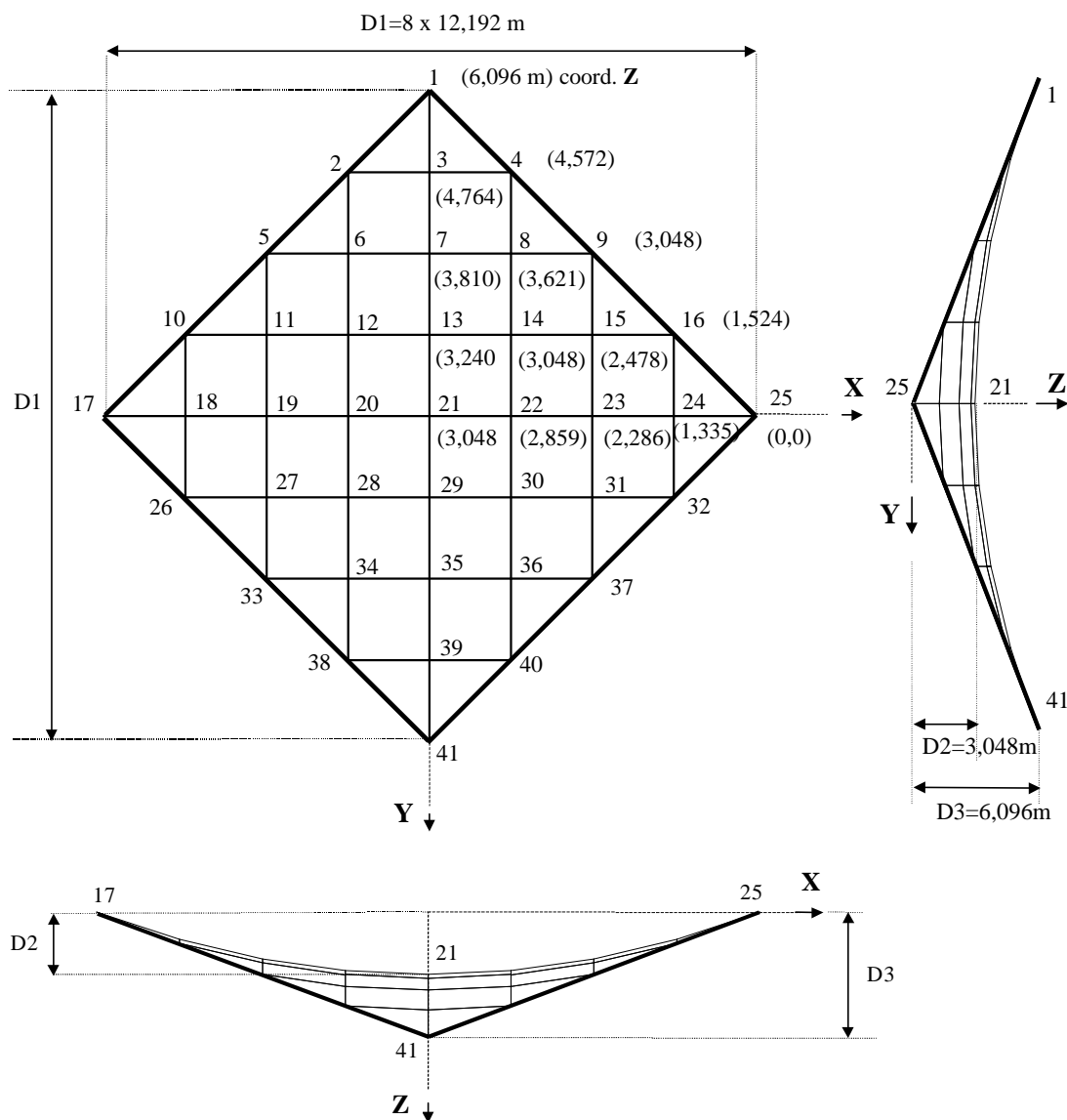


FIGURA 6.3.10: Cesta submetida a carregamento uniformemente distribuído.

Considerando a estrutura de contorno rígida, foram obtidos os deslocamentos verticais (direção Z) dos nós que se encontram resumidos na figura 6.3.12. O deslocamento máximo ocorre no nó central (nó 21) e uma comparação entre a análise elástica e inelástica é mostrada na figura 6.3.15.

As figuras 6.3.13 e 6.3.14 mostram a variação da força nos elementos de cabo com o aumento do carregamento.

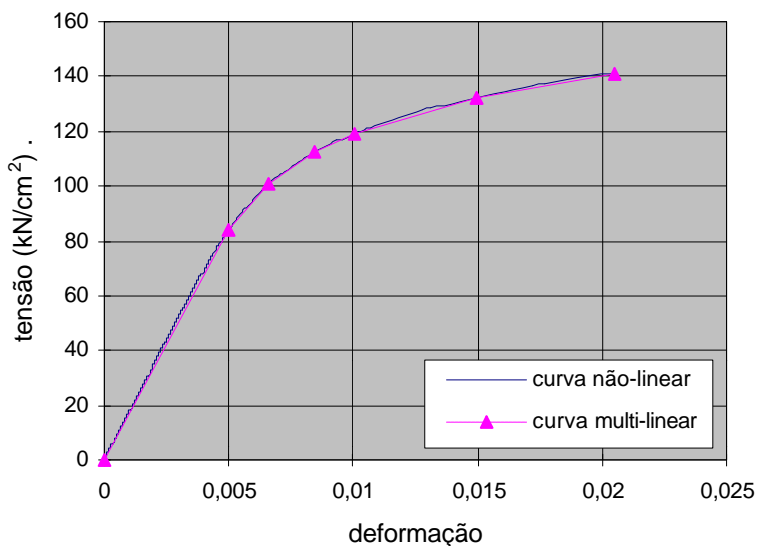


FIGURA 6.3.11: Curva tensão-deformação.

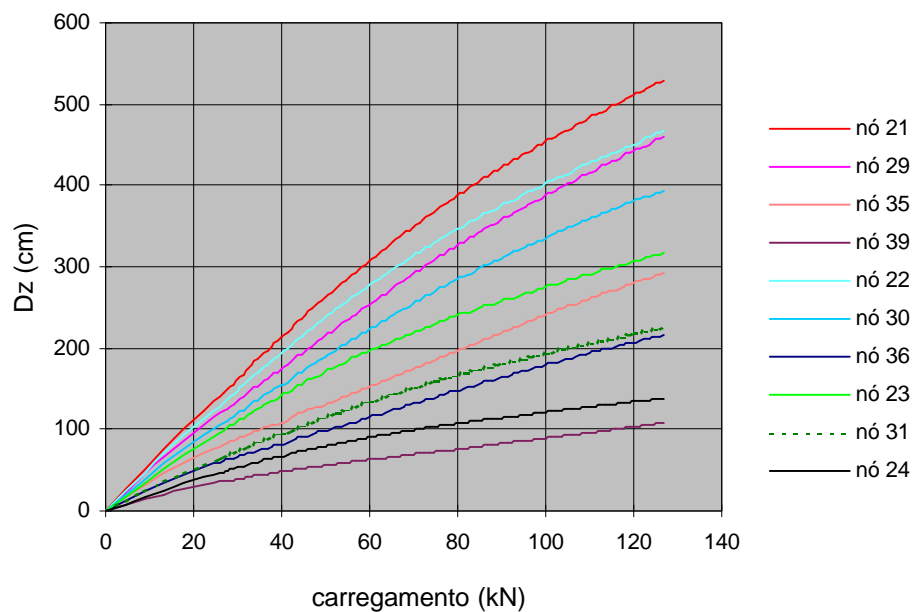


FIGURA 6.3.12: Deslocamentos verticais dos nós da cesta com a variação da carga aplicada.

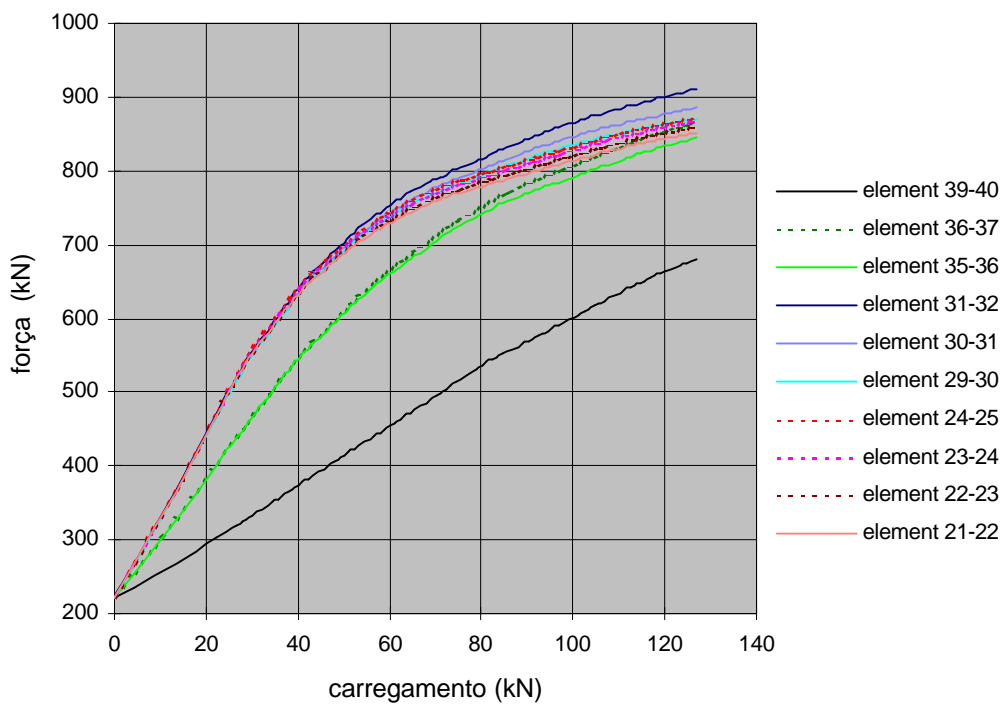


FIGURA 6.3.13: Força nos elementos dos cabos portantes (cabos com concavidade para cima).

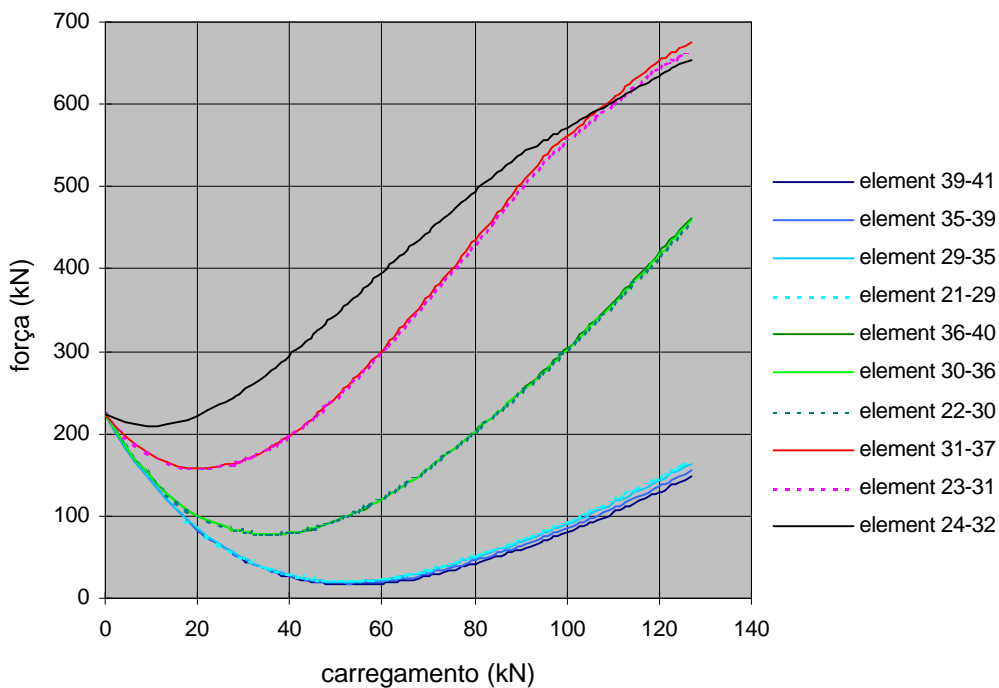


FIGURA 6.3.14: Força nos elementos dos cabos tensores (cabos com concavidade para baixo).

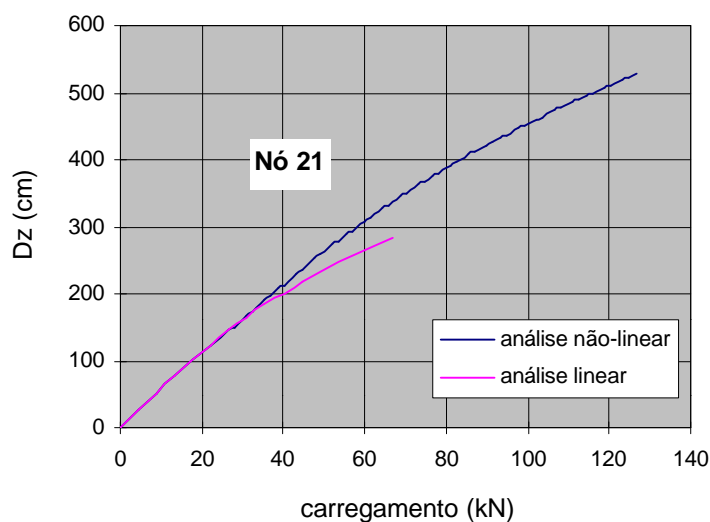


FIGURA 6.3.15: Deslocamento vertical do nó central da cesta com a variação da carga aplicada.

Para todos os níveis de carregamento as forças de tração máximas ocorreram nos elementos dos cabos portantes. A força nos elementos dos cabos tensores decresceram até a mudança de curvatura da cesta. A figura 6.3.17 mostra a configuração inicial da cesta, juntamente com a configuração deformada para o carregamento último.

A deformação última ocorreu simultaneamente nos elementos 31-32, 16-15, 10-11, 26-27, que são elementos simétricos próximos ao contorno e pertencentes à família de cabos portantes. A força máxima é de aproximadamente 912 kN nestes elementos, para uma carga aplicada de 126 kN em todos os nós da cesta.

Para o carregamento máximo a tensão nos elementos 39-41, 35-39, 29-35, 21-29, 36-40, 30-26, 22-30 e nos correspondentes simétricos, pertencentes à família de cabos tensores, permaneceu ainda no regime elástico do material. Todo o histórico da mudança do módulo de deformação dos elementos com o acréscimo de carregamento pode ser observado na figura 6.3.16.

A figura 6.3.15 mostra a reserva de capacidade de carregamento da cesta quando se considera na análise a curva não-linear do material.

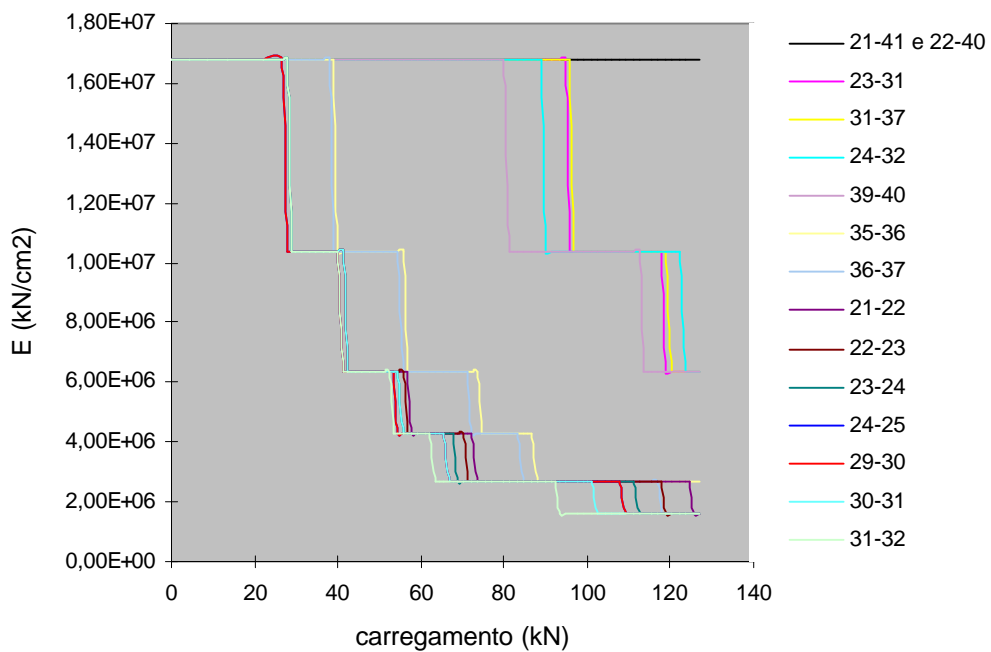


FIGURA 6.3.16: Módulo de deformação dos elementos (quadrante positivo) da cesta com a variação da carga aplicada.

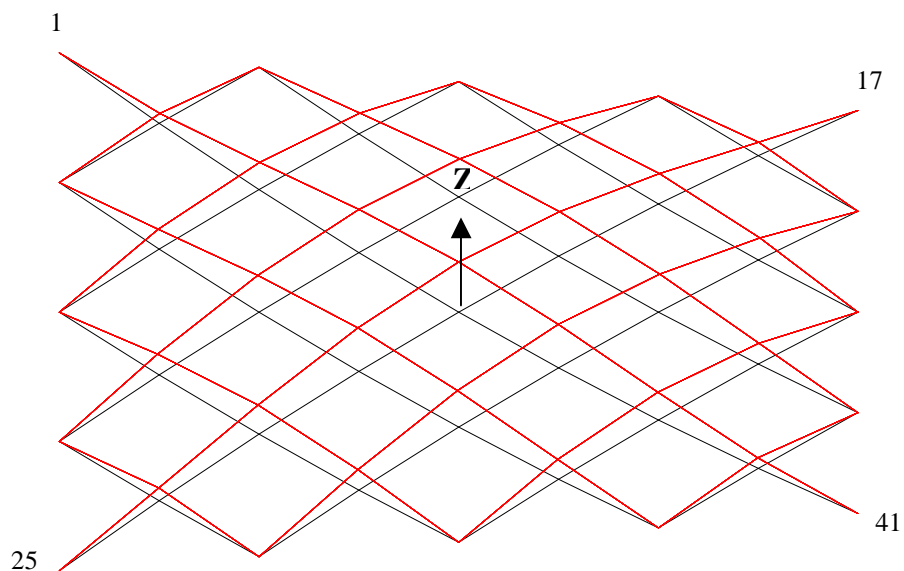


FIGURA 6.3.17: Configuração inicial (preto) e configuração deformada (vermelho) da cesta.

6.3.4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Na análise realizada, os resultados da variação dos deslocamentos com o acréscimo de carga demonstra um aspecto importante do comportamento de estruturas de cabos. A rigidez das estruturas de cabos aumenta, enquanto o limite elástico não é alcançado, por causa da mudança da força nos elementos e da geometria, pelo aumento da curvatura dos cabos. Depois do limite elástico, mudanças na força e na geometria ainda ocorrem para acomodar o acréscimo de carregamento. No entanto, a inclinação da curva carga/deslocamento diminui, indicando que o efeito do módulo de deformação decrescente é mais pronunciado, principalmente para níveis maiores de carregamento.

As estruturas (itens 6.3.1, 6.3.2, 6.3.3) foram analisadas para uma capacidade de carga última convencional. Admitiu-se que a ruptura dos elementos de cabo ocorreram quando estes elementos atingiram uma tensão que correspondia a uma deformação última definida, e obtida da curva tensão-deformação. No caso do cabo livremente suspenso com 2 elementos, o colapso da estrutura realmente ocorre. No caso da cesta e do cabo-treliça, o colapso global ainda não ocorreu, e os elementos restantes poderiam redistribuir os esforços.

Por outro lado, os deslocamentos excessivos, que poderiam tornar a estrutura inutilizável (por exemplo, causando danos à vedação), não foram considerados como limitante da capacidade última da estrutura.

Finalmente, cabe lembrar que foram obtidos excelentes resultados com ambos os métodos (Newton-Raphson e Gradiente Conjugado) utilizados para a resolução do problema não-linear. Nenhum dos métodos apresentou problemas de convergência. Contudo, o método de Newton-Raphson apresentou nítida vantagem com relação ao tempo de processamento, pois os exemplos consistem em problemas de pequeno porte (64 elementos e 75 deslocamentos incógnitos, no caso da cesta).

6.4. ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE UM MODELO EXPERIMENTAL E MODELOS NUMÉRICOS

6.4.1. DESCRIÇÕES DO MODELO EXPERIMENTAL, DO PROCEDIMENTO DE PROTENSÃO E DOS CARREGAMENTOS APLICADOS

KRISHNA & AGARWAL [1971] em seu trabalho experimental, descreveram um procedimento de protensão de estruturas de cabos, seguindo um detalhamento prático. Eles utilizaram um modelo de 12 *ft* x 12 *ft* (365,76 cm x 365,76 cm), com uma malha ortogonal de fios de aço, formando uma cesta em forma de parabolóide-hiperbólico. A estrutura é simétrica, com os pontos mais altos e os pontos mais baixos distantes cerca de 9 *in* (22,86 cm) do ponto central da cesta, como mostra a figura 6.4.1.

Para simplificar o problema a cesta foi ancorada em vigas retas rígidas, cujas extremidades eram fixas a pilares suficientemente rígidos, de modo a não flexionarem sob a máxima força estimada para os fios. Para o modelo foram utilizados fios maciços de aço de alta resistência de 0,16 *in* de diâmetro, substituindo as cordoalhas normalmente empregadas nas estruturas reais. Os fios foram dispostos uniformemente com espaçamento de 17 *in* (43,18 cm). A resistência mínima de ruptura dos fios de 4,6 *Kips* (20.470 N), e a rigidez EA de 618,2 *Kips* (2.750.990 N) foram determinados em ensaio.

Foi estabelecida uma força de protensão de componente horizontal igual a 1,2 *Kips* (5.340 N), correspondendo a aproximadamente 27% da carga de ruptura dos fios. Previamente, um estudo do efeito de diferentes seqüências de esticamento dos fios foi executado por KRISHNA & AGARWAL [1971]. Eles analisaram a interação entre as famílias de fios, esticando pares de fios simétricos e medindo as variações de tensões no restante da estrutura. A partir deste estudo, o modelo foi protendido seguindo uma seqüência de etapas, com o objetivo de obter a força de protensão estipulada, e uma geometria a mais próxima da projetada. O

resultado final foi uma dispersão máxima de 2,7% do valor de 1,2 *Kips* em cada fio e uma diferença menor que 0,5% na forma requerida da cesta.

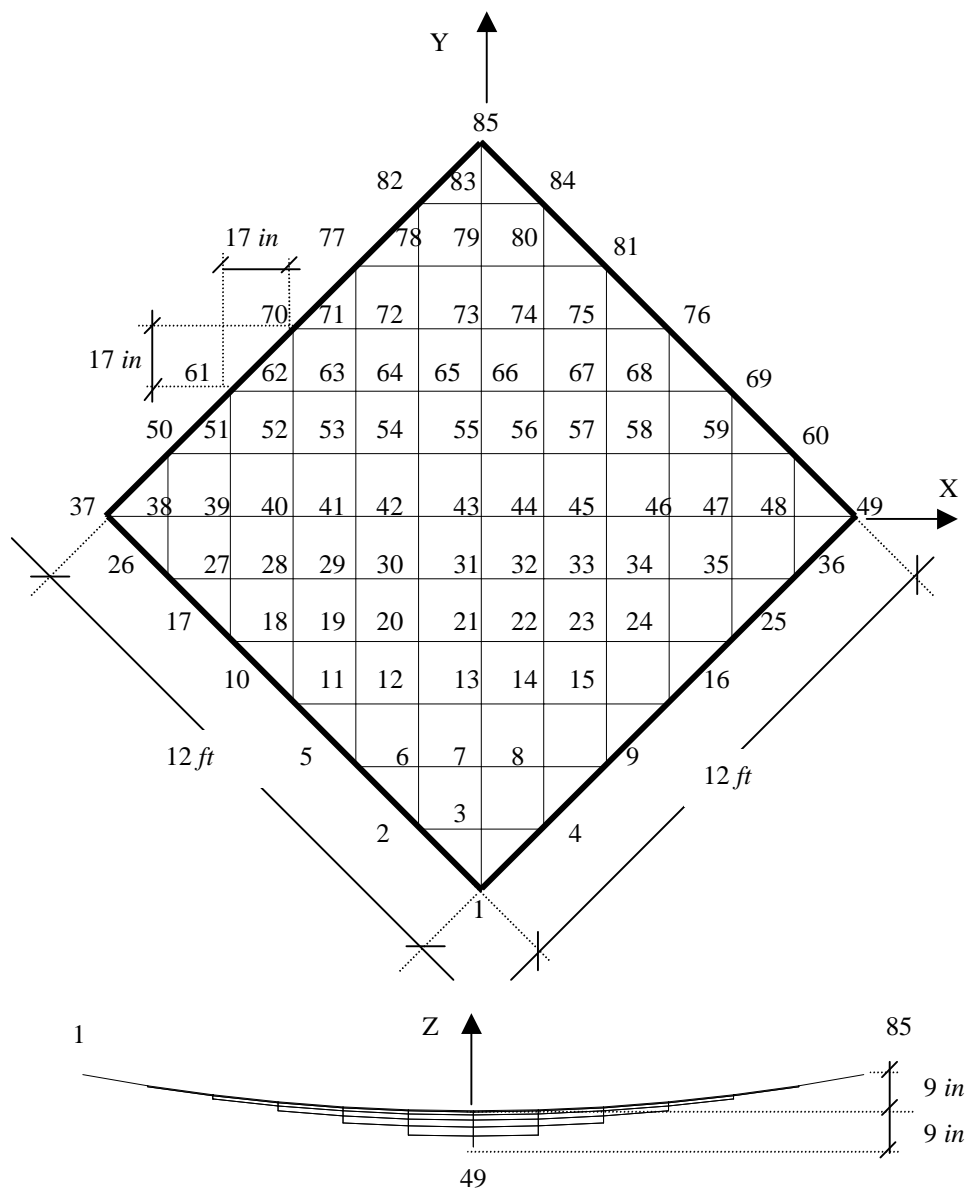


FIGURA 6.4.1: Modelo experimental de cesta com 144 elementos.

O modelo foi então carregado com pesos suspensos diretamente nas conexões entre os fios, simulando os casos de carregamento dados na tabela 6.4.1:

TABELA 6.4.1: Carregamentos na direção contrária ao eixo Z.	
Carregamento a	Carga concentrada de 0,22 <i>Kips</i> (979 N) no nó 43
Carregamento b	Carga concentrada de 0,22 <i>Kips</i> (979 N) no nó 21
Carregamento c	Carga concentrada de 0,22 <i>Kips</i> (979 N) no nó 7
Carregamento d	Carga concentrada de 0,022 <i>Kips</i> (97,9 N) nos nós internos entre 1 e 49

6.4.2. RESULTADOS OBTIDOS EXPERIMENTALMENTE E ATRAVÉS DE ANÁLISE NUMÉRICA

Para a análise numérica, parte-se da configuração pretendida da cesta, ou seja, têm-se todas as posições dos nós e as forças de tração nos fios conhecidas. A equação do parabolóide-hiperbólico é dada por:

$$Z = 9in. \left(\frac{Y^2 - X^2}{6.17in} \right) \quad (6.4.1)$$

e as forças em cada fio podem ser calculadas, sabendo-se que a sua componente horizontal é de 1,2 *Kips*. As mesmas unidades inglesas foram adotadas para os parâmetros de entrada nos programas, evitando-se erros de arredondamento durante a conversão de unidades.

6.4.2.1. RESULTADOS DO CARREGAMENTO a

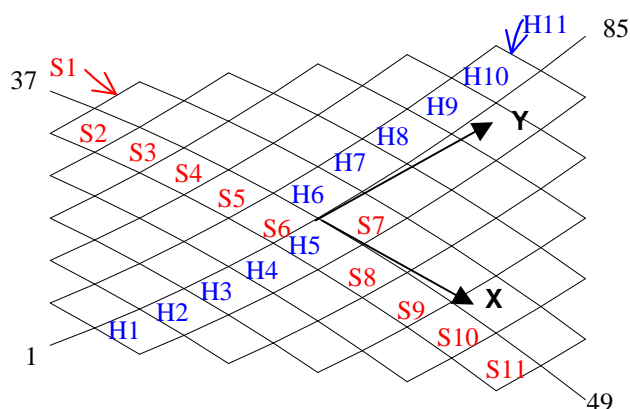


FIGURA 6.4.2: Vista isométrica do modelo com a numeração dos fios, utilizada por KRISHNA & AGARWAL [1971].

A tabela 6.4.2 traz os valores, medidos por KRISHNA & AGARWAL [1971], da variação de força nos fios paralelos ao eixo X (H1 a H11) e nos fios paralelos ao eixo Y (S1 a S11), segundo a numeração dada na figura 6.4.2. A força nos fios foi medida através de dinamômetros posicionados próximos ao contorno da cesta. Juntamente com esses valores encontram-se os resultados numéricos obtidos, na primeira iteração e no final do processo iterativo, para os elementos correspondentes aos fios pelo programa MEF-cabos. O programa foi implementado, em linguagem C++, segundo a formulação apresentada no capítulo 4 (apenas a solução pelo método de Newton-Raphson é apresentada nas tabelas).

TABELA 6.4.2: Variação da força (<i>kips</i>) para o carregamento a.					
fio	análise linear [*]	Experimental ^{**}	Elemento	MEF-cabos (1 ^a . it.)	MEF-cabos ^{***}
H1	0,0125		2-3	0,013037	0,018478
H2	0,0145	0,0152	5-6	0,015307	0,020173
H3	-0,0053	-0,0058	10-11	-0,00555	-0,002966
H4	-0,0440	-0,0435	17-18	-0,04395	-0,042875
H5	-0,0985	-0,1010	26-27	-0,10101	-0,091124
H6	-0,1750	-0,1985	37-38	-0,17682	-0,081428
S1	-0,0125		26-38	-0,0117	-0,005139
S2	-0,0145	-0,0154	17-27	-0,01456	-0,006444
S3	0,0053	0,0059	10-18	0,00426	0,010077
S4	0,0440	0,0418	5-11	0,044667	0,047343
S5	0,0985	0,1100	2-6	0,100534	0,10738
S6	0,1750	0,1950	1-3	0,17741	0,262623

* teoria linear desprezando-se os deslocamentos horizontais (SIEV & EIDELMAN [1964])

** KRISHNA & AGARWAL [1971] utilizaram outra numeração dos nós em seu trabalho experimental.

*** critério de convergência : norma infinito do vetor resíduo $\leq 1.10^{-7}$.

A tabela 6.4.3 mostra os valores da variação de força nos elementos dos cabos diagonais entre os nós 1-43 e entre os nós 37-43, para o carregamento a, obtido pelo programa MEF-cabos. Na mesma tabela encontram-se os resultados numéricos obtidos por ARCARO [1996] e BROUGHTON & NDUMBARO [1994].

As hipóteses adotadas para o processo dos deslocamentos formulado por BROUGHTON & NDUMBARO [1994], são basicamente as mesmas do capítulo 4, porém eles obtêm a matriz de rigidez nas coordenadas locais do elemento e fazem a transformação para o sistema global. Em seu trabalho eles apresentam uma listagem do seu programa, em linguagem FORTRAN, e a resolução do sistema de equações não lineares pelo método de Newton-Raphson.

ARCARO [1996] parte da formulação da energia potencial total, e através do método quase Newton busca a minimização dessa função. Para este exemplo, apresenta uma estimativa do peso próprio dos fios, e os seus resultados foram obtidos a partir da configuração protendida mais o carregamento de peso próprio. Ele conclui que o carregamento de peso próprio pode ser desprezado na análise. As diferenças na variação da força, comparando-se os valores numéricos foram menores que 1% (tabelas 6.4.3).

TABELA 6.4.3: Variação da força (<i>kips</i>) para o carregamento a.			
elemento	MEF-cabos*	Broughton & Ndumbaro**	Arcaro*
37-38	-0,081428	-0,0811	
38-39	-0,081888	-0,0813	-0,0810
39-40	-0,08128	-0,0816	-0,0813
40-41	-0,082549	-0,0818	-0,0815
41-42	-0,08143	-0,0816	-0,0813
42-43	-0,079676	-0,0797	-0,0795
31-43	0,273585	0,273	0,2735
21-31	0,271038	0,27	0,2710
13-21	0,267441	0,268	0,2683
7-13	0,2662	0,265	0,2659
3-7	0,263571	0,264	0,2642
1-3	0,262623	0,263	

* critério de convergência : norma infinito do vetor resíduo $\leq 1.10^{-7}$.

** critério de convergência : norma euclidiana da variação do vetor deslocamento.

Da tabela 6.4.3 observa-se que todos os resultados numéricos de análise não linear estão bem próximos, mas as diferenças são significativas em relação aos valores medidos por KRISHNA & AGARWAL [1971]. ARCARO [1996] comenta que parte dessa diferença pode ser atribuída a pequenas variações na deformação dos fios do modelo experimental, causada pelos nós de dimensões finitas. Contudo, deve-se ressaltar que neste caso, a análise linear forneceu resultados mais próximos dos valores medidos.

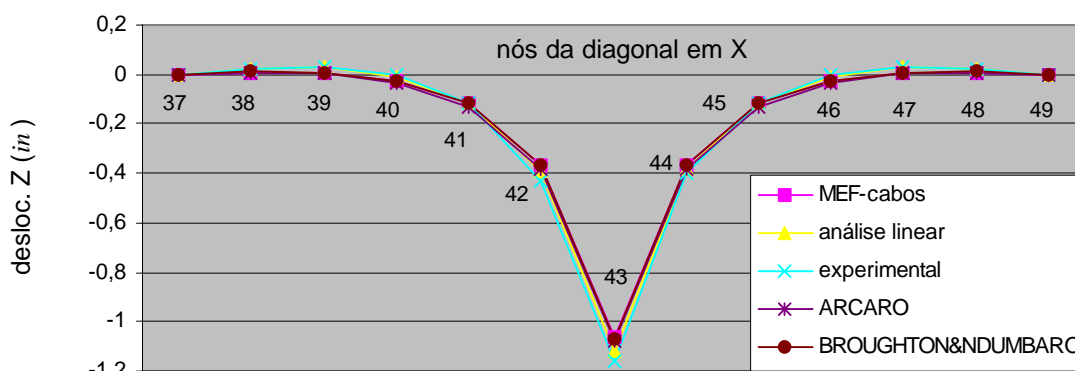


FIGURA 6.4.3: Deslocamentos verticais dos nós da diagonal segundo o eixo X, para o carregamento a.

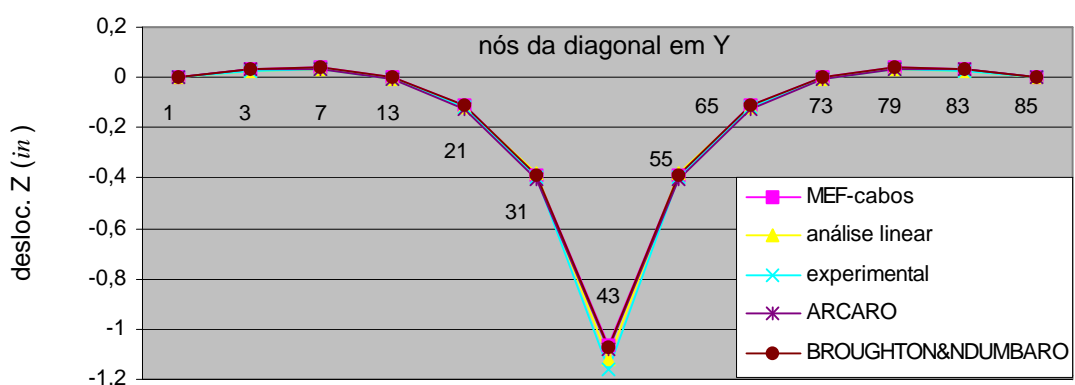


FIGURA 6.4.4: Deslocamentos verticais dos nós da diagonal segundo o eixo Y, para o carregamento a.

O comportamento de estruturas de cabos é em geral não-linear, mas cestas protendidas de moderada curvatura podem apresentar um grau de não linearidade baixo, dependendo do nível de protensão dos cabos. Estudos de KRISHNA & NATRAJAN [1968] mostraram que, para cestas de

forma parabolóide-hiperbólicas com pequena relação flecha/vão, os resultados numéricos, obtidos com a teoria linear desprezando-se os deslocamentos horizontais (SIEV & EIDELMAN [1964]), são próximos dos resultados não lineares se as cargas aplicadas estão dentro dos limites usuais. Para a cesta analisada (relação flecha/vão de 4,4%) observa-se que os valores de deslocamentos verticais dos dois cabos diagonais segundo X e Y (figuras 6.4.3 e 6.4.4) apresentam pequenas diferenças entre os obtidos pela análise linear e pela análise não linear. A diferença no ponto de aplicação da carga (nó 43) é de 5%.

TABELA 6.4.4: Deslocamentos horizontais para o carregamento a.				
Nó	MEF-cabos *		Broughton & Ndumbaro**	
	desloc.X (in)	desloc.Y (in)	desloc.X (in)	desloc.Y (in)
3	0,000000	0,012563	$0,9 \cdot 10^{-9}$	0,0120
6	-0,000210	0,005242	$-0,207 \cdot 10^{-3}$	0,00525
7	0,000000	0,020797	$0,416 \cdot 10^{-8}$	0,0208
11	0,000202	0,000925	$0,211 \cdot 10^{-3}$	$0,918 \cdot 10^{-3}$
12	0,000160	0,006025	$0,167 \cdot 10^{-3}$	0,00602
13	0,000000	0,024364	$0,512 \cdot 10^{-8}$	0,0244
18	-0,000666	-0,000085	$-0,674 \cdot 10^{-3}$	$-0,792 \cdot 10^{-4}$
19	-0,000018	0,000220	$-0,146 \cdot 10^{-4}$	$0,221 \cdot 10^{-3}$
20	0,000660	0,003685	$0,665 \cdot 10^{-3}$	0,00369
21	0,000000	0,022980	$0,153 \cdot 10^{-7}$	0,0230
27	-0,003601	0,000167	-0,00359	$0,169 \cdot 10^{-3}$
28	-0,003946	-0,000143	-0,00395	$-0,138 \cdot 10^{-3}$
29	-0,001915	-0,000597	-0,00191	$-0,595 \cdot 10^{-3}$
30	0,000788	0,000253	$0,796 \cdot 10^{-3}$	$0,256 \cdot 10^{-3}$
31	0,000000	0,015909	$0,108 \cdot 10^{-7}$	0,0159
38	-0,003880	0,000000	-0,00388	$0,117 \cdot 10^{-8}$
39	-0,006004	0,000000	-0,00599	$0,474 \cdot 10^{-9}$
40	-0,004982	0,000000	-0,00498	$0,895 \cdot 10^{-8}$
41	-0,000513	0,000000	$-0,499 \cdot 10^{-3}$	$0,676 \cdot 10^{-8}$
42	0,006330	0,000000	0,00634	$0,650 \cdot 10^{-8}$
43	0,000000	0,000000	$0,344 \cdot 10^{-7}$	$0,219 \cdot 10^{-7}$

*todos os parâmetros definidos com dupla precisão, ** precisão simples.

Os deslocamentos horizontais, obtidos por experimentação numérica, encontram-se na tabela 6.4.4. Observa-se que o máximo deslocamento horizontal ($0,024364 \text{ in}$) ocorre no nó 13 na direção Y. Embora esse valor seja pequeno em relação ao deslocamento vertical máximo (representa apenas 2% do deslocamento de $-1,066311 \text{ in}$ no nó 43), é um número significativo em relação ao deslocamento vertical ($0,002207 \text{ in}$) no mesmo nó 13. Portanto, uma análise mais precisa deve considerar os deslocamentos horizontais.

6.4.2.2. RESULTADOS DO CARREGAMENTO b,c,d

A tabela 6.4.5 apresenta a variação da força nos elementos para os casos de carregamentos b,c e d.

TABELA 6.4.5: Variação da força (kips) para o carregamento b,c,d.

elemento	MEF-cabos* carreg. b	MEF-cabos* carreg. c	MEF-cabos* carreg. d	Arcaro* carreg. b	Arcaro* carreg. c	Arcaro* carreg. d
37-38	-0,02827	0,010577	-0,2172			
38-39	-0,02852	0,010487	-0,21497	-0,0280	0,0110	-0,2140
39-40	-0,02768	0,011413	-0,21231	-0,0280	0,0110	-0,2122
40-41	-0,02876	0,010362	-0,21213	-0,0280	0,0111	-0,2109
41-42	-0,02776	0,011319	-0,21038	-0,0279	0,0111	-0,2101
42-43	-0,0277	0,011244	-0,21001	-0,0278	0,0110	-0,2097
83-85	0,240992	0,189326	0,172711			
79-83	0,241881	0,189995	0,173312			
73-79	0,244469	0,192335	0,1749	0,2441	0,1917	0,1748
65-73	0,24579	0,193395	0,174473	0,2465	0,1938	0,1755
55-65	0,249813	0,197198	0,176007	0,2496	0,1967	0,1761
43-55	0,253416	0,200741	0,176405	0,2533	0,2003	0,1765
31-43	0,257329	0,204987	0,176489	0,2572	0,2045	0,1766
21-31	0,261031	0,209836	0,177205	0,2609	0,2093	0,1773
13-21	0,274101	0,213949	0,177458	0,2749	0,2144	0,1785
7-13	0,273602	0,219637	0,180279	0,2733	0,2190	0,1802
3-7	0,271258	0,247282	0,181731	0,2718	0,2475	0,1825
1-3	0,27043	0,246928	0,184756			

*critério de convergência : norma infinito do vetor resíduo $\leq 1.10^{-7}$.

Observa-se dos deslocamentos verticais para os carregamentos b,c,d (figuras 6.4.5 a 6.4.10), que no caso c, isto é, carregamento concentrado no nó 7, as diferenças percentuais foram maiores entre os valores obtidos pela análise não linear e pela análise linear (SIEV & EIDELMAN [1964]).

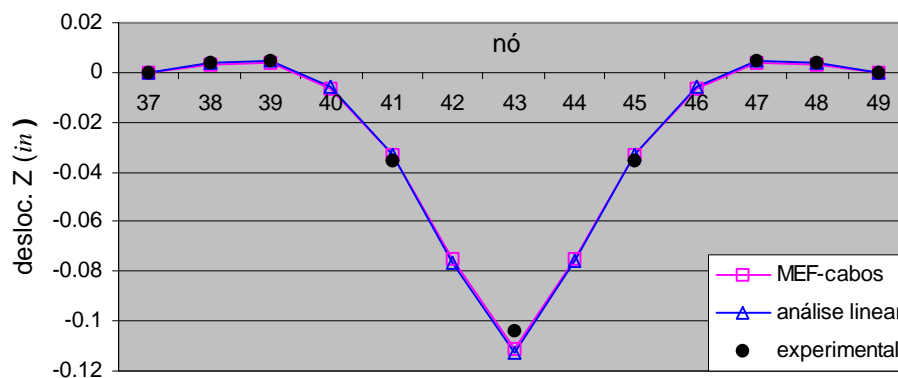


FIGURA 6.4.5: Deslocamentos verticais dos nós da diagonal segundo o eixo X, para o carregamento b.

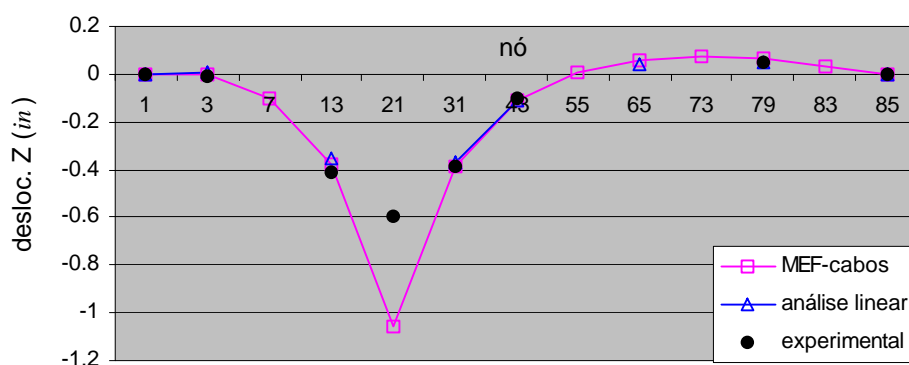


FIGURA 6.4.6: Deslocamentos verticais dos nós da diagonal segundo o eixo Y, para o carregamento b.

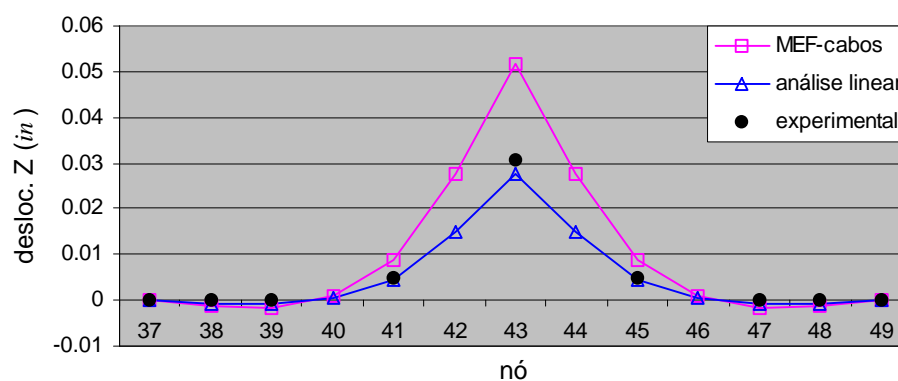


FIGURA 6.4.7: Deslocamentos verticais dos nós da diagonal segundo o eixo X, para o carregamento c.

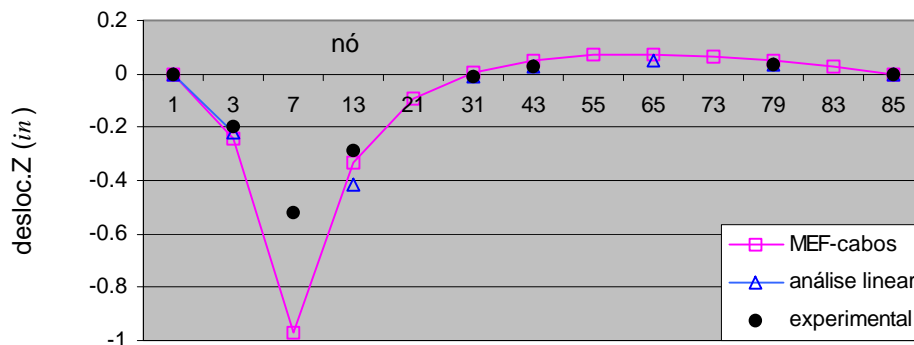


FIGURA 6.4.8: Deslocamentos verticais dos nós da diagonal segundo o eixo Y, para o carregamento c.

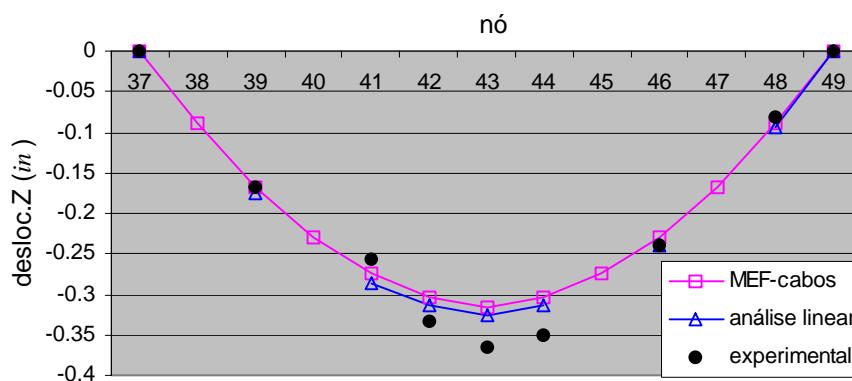


FIGURA 6.4.9: Deslocamentos verticais dos nós da diagonal segundo o eixo X, para o carregamento d.

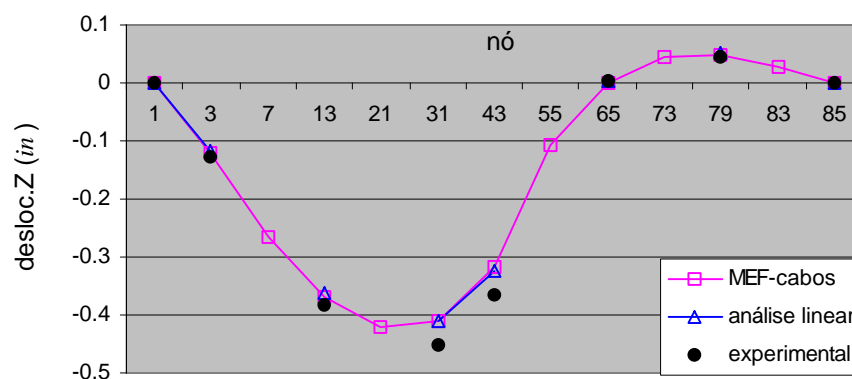


FIGURA 6.4.10: Deslocamentos verticais dos nós da diagonal segundo o eixo Y, para o carregamento d.

Na tabela 6.4.6 encontram-se os deslocamentos horizontais dos nós, para os casos de carregamento b,c,d.

TABELA 6.4.6: Deslocamentos horizontais (MEF-cabos).						
Nó	Carregamento b		Carregamento c		Carregamento d	
	desloc.X (in)	desloc.Y (in)	desloc.X (in)	desloc.Y (in)	desloc.X (in)	desloc.Y (in)
3	0,000000	0,006997	0,000000	-0,033870	0,000000	-0,0149798
6	0,000939	-0,005373	0,006998	-0,035158	0,0031718	-0,0209114
7	0,000000	0,001258	0,000000	-0,035158	0,000000	-0,0293092
11	0,000196	-0,004719	-0,000697	-0,003290	0,00670549	-0,0161398
12	0,001889	-0,016548	0,001357	-0,023947	0,0056122	-0,0297944
13	0,000000	-0,021604	0,000000	-0,079385	0,000000	-0,0355682
18	-0,001615	-0,000967	-0,000697	-0,000182	0,0093731	-0,0096860
19	0,001549	-0,007654	-0,000244	-0,002574	0,0109423	-0,0200369
20	0,007514	-0,027102	0,000543	-0,016235	0,0070109	-0,0298575
21	0,000000	-0,078217	0,000000	-0,057464	0,000000	-0,0345607
27	-0,003421	0,000224	0,000047	0,000000	0,0105945	-0,0040093
28	-0,003941	-0,000674	0,000120	-0,000158	0,0140590	0,0094902
29	-0,001942	-0,005478	0,000286	-0,001820	0,0123623	-0,0167853
30	0,000782	-0,018793	0,000226	-0,012667	0,0071482	-0,0247430
31	0,000000	-0,054681	0,000000	-0,047576	0,000000	-0,0291368
38	-0,001351	0,000000	0,000539	0,000000	0,0081503	-0,0000012
39	-0,002158	0,000095	0,000876	0,000017	0,0124105	-0,0015186
40	-0,001847	-0,000437	0,000929	-0,000123	0,0127636	-0,0052483
41	-0,000734	-0,004026	0,000627	-0,001599	0,0101437	-0,0113461
42	0,000297	-0,014937	0,000086	-0,011069	0,0055937	-0,0186534
43	0,000000	-0,045798	0,000000	-0,041358	0,000000	-0,0231707
51	-0,000026	0,000067	0,000789	0,000051	0,0035623	-0,0009235
52	0,000142	-0,000354	0,000959	-0,000136	0,0044347	-0,0043683
53	0,000189	-0,003608	0,000525	-0,001644	0,0036461	-0,0103764
54	0,000106	-0,013730	-0,000106	-0,010069	0,0020211	-0,0177521
55	0,000000	-0,041044	0,000000	-0,036109	0,000000	-0,0226667
62	0,000450	-0,000301	0,000560	-0,000124	0,0005551	-0,0035201
63	0,000139	-0,003377	0,000263	-0,001600	0,0002827	-0,0098132
64	-0,000260	-0,012804	-0,000281	-0,008928	0,0000567	-0,0175361
65	0,000000	-0,036455	0,000000	-0,030810	0,000000	-0,0229490
71	-0,000135	-0,002486	0,000018	-0,001190	-0,0007868	-0,0069717
72	-0,000532	-0,010833	-0,000387	-0,007235	-0,0007596	-0,0154004
73	0,000000	-0,030612	0,000000	-0,024989	0,000000	-0,0214695
78	-0,000502	-0,006950	-0,000338	-0,004540	-0,0007208	-0,0098930
79	0,000000	-0,022859	0,000000	-0,018244	0,000000	-0,0170041
83	0,000000	-0,012653	0,000000	-0,010052	0,000000	-0,0092829

6.4.2.3. RESULTADOS PARA UM CARREGAMENTO MAIOR

Uma análise para a mesma cesta foi realizada aplicando-se carregamentos maiores segundo a tabela 6.4.7.

TABELA 6.4.7: Carregamentos na direção contrária ao eixo Z.	
Carregamento a	Carga concentrada de 0,44 <i>Kips</i> (1.958 N) no nó 43
Carregamento b	Carga concentrada de 0,33 <i>Kips</i> (1.468,5 N) no nó 21
Carregamento c	Carga concentrada de 0,352 <i>Kips</i> (1555,4 N) no nó 7
Carregamento d	Carga concentrada de 0,055 <i>Kips</i> (244,75 N):nós 1 a 49

As tabelas 6.4.8 e 6.4.9 apresentam respectivamente os deslocamentos máximos e as variações máximas de forças (nos cabos portantes), obtidos pelo programa MEF-cabos, para cada caso de carregamento. Nas mesmas tabelas encontram-se os valores medidos por KRISHNA & AGARWAL [1971], com seu modelo experimental descrito no item 6.4.1.

TABELA 6.4.8: Deslocamentos verticais máximos (<i>in</i>).			
carregamento	nó	Experimental*	MEF-cabos**
a	43	-2,05	-1,92
b	21	-1,8	-1,52
c	7	-1,75	-1,43
d	21	-1,15	-1,05

TABELA 6.4.9: Forças máximas (<i>kips</i>).				
carregamento	Experimental*		elemento	MEF-cabos**
a	0,396		55-43	0,6358
b	0,264		1-3	0,4473
c	0,220		1-3	0,4350
d	0,275		8-4	0,5145

*valores máximos de força em cabos portantes, obtidos por interpolação de pontos desenhados em gráficos, e podem não corresponder exatamente aos mesmos elementos da 4ª. coluna da tabela.

**critério de convergência : norma infinito do vetor resíduo $\leq 1.10^{-7}$.

Da tabela 6.4.9 observa-se grandes diferenças entre os valores experimentais e numéricos. Deve-se alertar que as forças medidas não correspondem às máximas forças obtidas numericamente, já que apenas alguns elementos no contorno foram monitorados. Uma possibilidade a lembrar se refere à imprecisão das medições de uma análise experimental. Por outro lado, uma análise numérica mais próxima dos resultados experimentais deveria considerar a influência da rigidez das conexões entre os fios.

6.4.3. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Como sugere KRISHNA & AGARWAL [1971], para certas condições de carregamento, uma análise preliminar do comportamento da cesta pode ser realizada mediante uma teoria linear. Os resultados obtidos na primeira iteração do programa MEF-cabos, para todos os carregamentos, ficaram próximos dos valores medidos experimentalmente.

Com o aumento da magnitude do carregamento e no caso de carregamento assimétrico, os efeitos não lineares são mais pronunciados e uma teoria apropriada deve ser adotada, considerando-se também os deslocamentos horizontais.

Cabe ainda ressaltar que para satisfazer o critério de convergência (norma infinito do vetor resíduo $\leq 1.10^{-7}$), em todos os casos de carregamento da tabela 6.4.1, o tempo de processamento, com o método iterativo de Newton-Raphson, foi menor que 1 segundo. Foi utilizado um Pentium de 233 MHz e 128 Mbytes de memória RAM. Nos casos de carregamento concentrado a,b,c o processo convergiu em 4 iterações. No caso d de carregamento distribuído a estrutura atingiu o equilíbrio com apenas 3 iterações.

6.5. ESTUDO DA PROTENSÃO

Como a configuração de referência não é trivial para estruturas tracionadas, é preferível do ponto de vista de fabricação a adoção de características geométricas iniciais indeformada, já que uma superfície protendida prescrita leva a dificuldades para se obter a forma original indeformada.

Nos itens anteriores deste capítulo foram analisadas estruturas de cabos com a configuração de referência dada. Todas as análises partiam de um estado de solicitação conhecido da estrutura, sobre o qual eram aplicados novos carregamentos. Considera-se que uma maneira simples de análise e mais próxima do procedimento de execução, consiste na resolução da estrutura inicialmente indeformada sendo submetida a várias etapas de protensão.

Uma série de possibilidades de esticamento dos cabos deve ser estudada de modo a se obter a superfície final projetada e totalmente tracionada. Deve-se prever a aplicação da protensão de modo incremental, variando a direção dos esforços aplicados, de modo a reproduzir o processo real de esticamento.

É importante lembrar que o estado de protensão aplicado deve ser suficiente para garantir uma estrutura tracionada, mesmo quando se considera a combinação mais desfavorável dos carregamentos atuantes. Deste modo, é possível que a protensão inicialmente imposta deva ser revista.

A configuração inicial indeformada no caso de cestas deve necessariamente compor uma superfície de curvatura anticlástica (dupla curvatura reversa). As curvaturas devem ser opostas para permitir o procedimento de protensão dos cabos.

A seguir analisa-se uma cesta de cabos (figura 6.5.1), partindo-se de uma configuração conhecida (desprezando-se o peso próprio) e definida por uma superfície em parabolóide hiperbólico, dada pela expressão:

$$Z = -f_x \frac{X^2}{l_x/2} + f_y \frac{Y^2}{l_y/2} \quad (6.5.1)$$

com $f_x=83,82$ cm (2,75 ft) e $f_y=167,64$ cm (5,50 ft), $l_x=1.280,16$ cm (42 ft) e $l_y=1.828,8$ cm (60 ft).

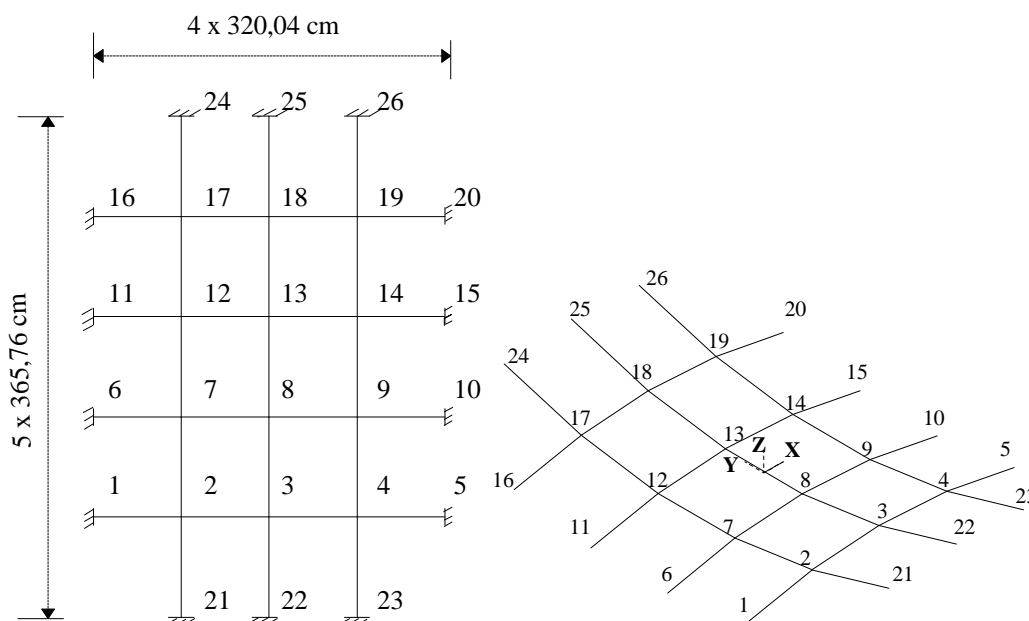


FIGURA 6.5.1: Cesta de planta retangular com superfície em forma de parabolóide-hiperbólico.

A cesta de contorno retangular tem, portanto, as coordenadas dos nós, na configuração indeformada, definidas conforme a tabela 6.5.1. A estrutura é composta por cabos pré-estirados de área de seção transversal igual a $9,29$ cm² e módulo de elasticidade de 17.244 kN/cm².

TABELA 6.5.1								
COORDENADAS DOS NÓS (cm)								
	1	2	3	6	7	8	21	22
X	-640,08	-320,04	0,0	-640,08	-320,04	0,0	-320,04	0,0
Y	-548,64	-548,64	-548,64	-182,88	-182,88	-182,88	-914,40	-914,40
Z	-23,470	39,319	60,350	-77,114	-14,326	6,706	146,609	167,640

6.5.1. APLICAÇÃO DA FORÇA DE PROTENSÃO SIMETRICAMENTE POR MEIO DOS CABOS TENSORES

Inicialmente imprime-se à estrutura um estado de protensão através dos cabos tensores 17-24, 18-25, 19-26, 2-21, 3-22, 4-23. A força de protensão (P) de 382,594 kN, é aplicada em vários incrementos iguais, na direção dos cabos tensores, simulando-se desta forma o procedimento de execução. Observe-se que a cada incremento de carga o ponto de aplicação, bem como a direção da força de protensão varia.

A configuração protendida é obtida para 20 incrementos de carga, sendo os deslocamentos dos nós em cada incremento apresentados nas figuras 6.5.2 e 6.5.3.

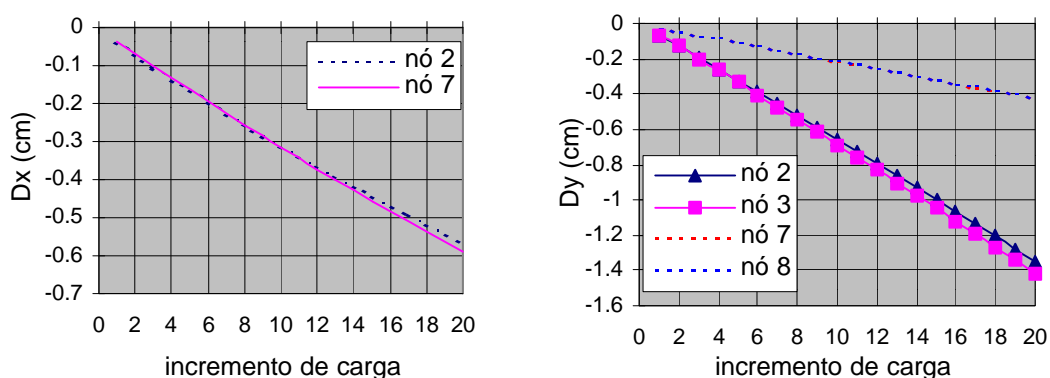


FIGURA 6.5.2: Deslocamentos dos nós nas direções X e Y.

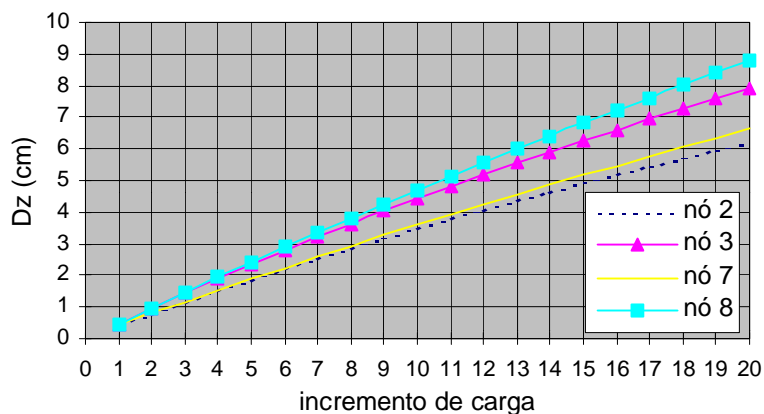


FIGURA 6.5.3: Deslocamentos dos nós na direção Z.

As figuras 6.5.4 e 6.5.5 mostram o acréscimo de força nos elementos de cabo com o incremento de protensão.

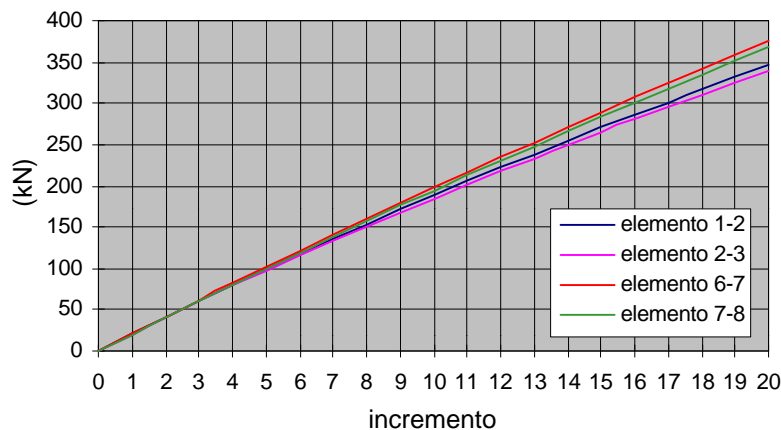


FIGURA 6.5.4: Força nos cabos portantes.

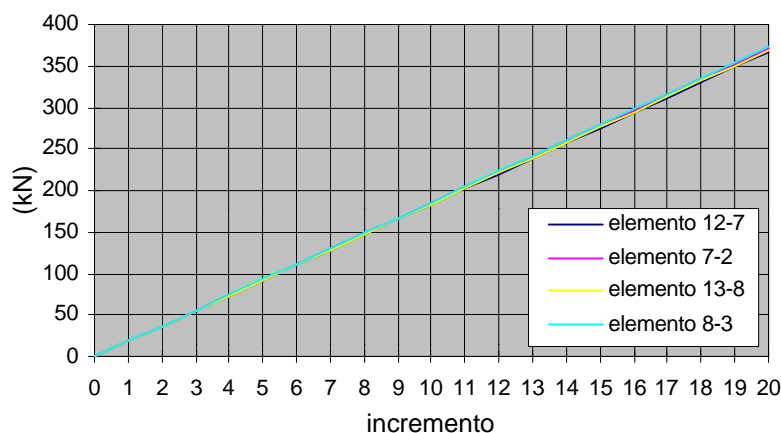


FIGURA 6.5.5: Força nos cabos tensores.

Nas tabelas 6.5.2 e 6.5.3 encontram-se as forças nos elementos e os deslocamentos totais na direção Z ao final da aplicação parcelada da protensão (P incremental) em 20, 10 e 3 incrementos, juntamente com resultados obtidos no caso de aplicação da força total de protensão (P) em uma única parcela. Observa-se que os valores de forças nos elementos e deslocamentos nos nós, para a aplicação da protensão incremental em 10 e 20 incrementos, não sofreram grandes variações.

TABELA 6.5.2				
FORÇA (kN)				
elemento	P/20	P/10	P/3	P
1-2	346,275	347,641	354,422	381,487
2-3	338,793	340,150	346,887	373,727
6-7	375,949	376,054	376,578	378,607
7-8	368,302	368,406	368,928	370,951
12-7	366,785	366,724	366,418	365,180
7-2	371,113	371,054	370,759	369,563
13-8	368,876	368,810	368,480	367,087
8-3	372,680	372,619	372,309	371,001

TABELA 6.5.3				
DESLOCAMENTO EM Z (cm)				
nó	P/20	P/10	P/3	P
2	6,219	6,239	6,338	6,718
3	7,932	7,943	8,131	8,902
7	6,642	6,643	6,646	6,656
8	8,775	8,780	8,803	8,899

A etapa de aplicação da força de protensão é de grande importância nas estruturas de cabos, mas poucas informações a respeito estão disponíveis na literatura.

Neste primeiro estudo considerou-se a carga aplicada através dos elementos tensores terminais com pontos de fixação no contorno, sendo estes pontos considerados indeslocáveis. A análise dos resultados da cesta de planta retangular indica que o carregamento de protensão em uma única parcela produziu deslocamentos com diferenças de até 12% nos pontos de aplicação, comparando-se com resultados da aplicação incremental (20 incrementos). As diferenças nos esforços finais chegaram a 10% nos elementos portantes próximos aos pontos de aplicação. De onde se conclui a significativa influência da mudança de direção da força de protensão no resultado final.

6.5.2. CARREGAMENTOS DE SERVIÇO

A partir da configuração protendida, obtida no item 6.5.1, a cesta é submetida aos carregamentos de peso próprio da cobertura (sistema vedante e acessórios) e três diferentes sobrecargas. Os casos de carregamento de peso próprio ($0,862 \text{ kN/m}^2$) e de sobrecarga ($1,437 \text{ kN/m}^2$) são transformados em cargas equivalentes concentradas e aplicadas nos nós, como definidas na tabela 6.5.4. Os resultados são apresentados nas figuras 6.5.6 e 6.5.7 e tabela 6.5.5.

TABELA 6.5.4	
CASOS DE CARREGAMENTO	CARGA APLICADA
a) peso próprio da cobertura	$P_z=10,092 \text{ kN}$ em todos os nós
b) peso próprio + sobrecarga total	$P_z=26,914 \text{ kN}$ em todos os nós
c) peso próprio + 3 x sobrecarga total	$P_z=60,558 \text{ kN}$ em todos os nós
d) peso próprio + sobrecarga parcial	$P_z=10,092 \text{ kN}$ em todos os nós e $P_z=16,822 \text{ kN}$ nos nós 2,3,4,7,8,9

	TABELA 6.5.5			
	FORÇA NOS ELEMENTOS (kN)			
elemento	carreg. a	carreg. b	carreg. c	carreg. d
1-2	380,662	440,735	564,507	458,473
2-3	372,311	430,867	551,365	448,097
6-7	412,598	473,038	592,645	487,572
7-8	404,042	462,922	579,228	476,970
12-7	337,986	290,515	199,377	314,706
7-2	342,018	294,057	201,941	318,329
13-8	336,328	281,571	173,670	309,609
8-3	339,783	284,443	175,368	312,602
2-21	352,534	303,106	208,268	327,867
3-22	348,574	291,500	179,157	320,087

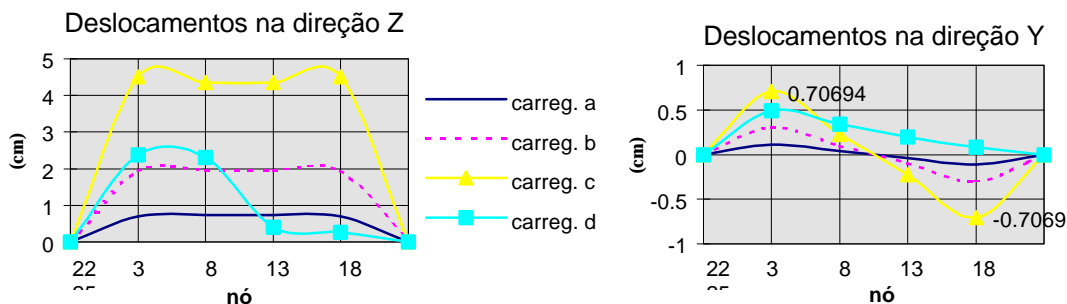


FIGURA 6.5.6: Deslocamentos dos nós dos cabos portantes.

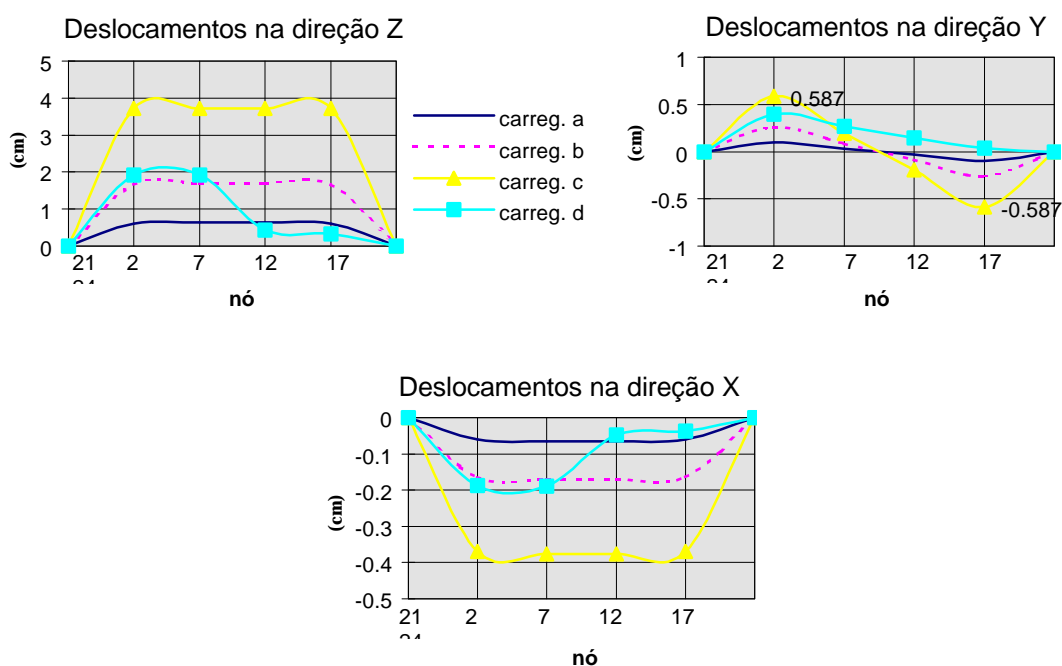


FIGURA 6.5.7: Deslocamentos dos nós dos cabos tensores.

Uma estrutura similar à estrutura da figura 6.5.1, de cesta de planta retangular com 31 elementos, foi apresentada por BARON & VENKATESAN [1971]. Eles propuseram a cesta já protendida na forma de parabolóide-hiperbólica e estudaram o seu comportamento sob os carregamentos da tabela 6.5.4.

Escolheu-se para força de protensão aplicada no item 6.5.1 um valor próximo da protensão adotada pelos autores citados. Embora eles tenham partido de configurações de referência diferentes, os deslocamentos finais foram próximos dos deslocamentos obtidos no presente estudo.

Da tabela 6.5.5 observa-se que a estrutura permaneceu totalmente tracionada para todos os casos de carregamento. A protensão aplicada produziu uma cesta de bom desempenho estrutural.

6.5.3. APLICAÇÃO DA FORÇA DE PROTENSAO POR MEIO DOS CABOS PORTANTES

O segundo estudo considera a aplicação da carga de protensão através dos elementos portantes terminais, com pontos de fixação no contorno, considerados indelocáveis. Imprime-se à estrutura um estado de protensão através dos cabos portantes 2-1, 7-6, 12-11, 17-16, 19-20, 14-15, 9-10, 4-5. A força de protensão (P) de 411,180 kN, é aplicada em 10 incrementos iguais, na direção dos cabos portantes. A figura 6.5.8 mostra o acréscimo de força nos elementos de cabo com o incremento de protensão.

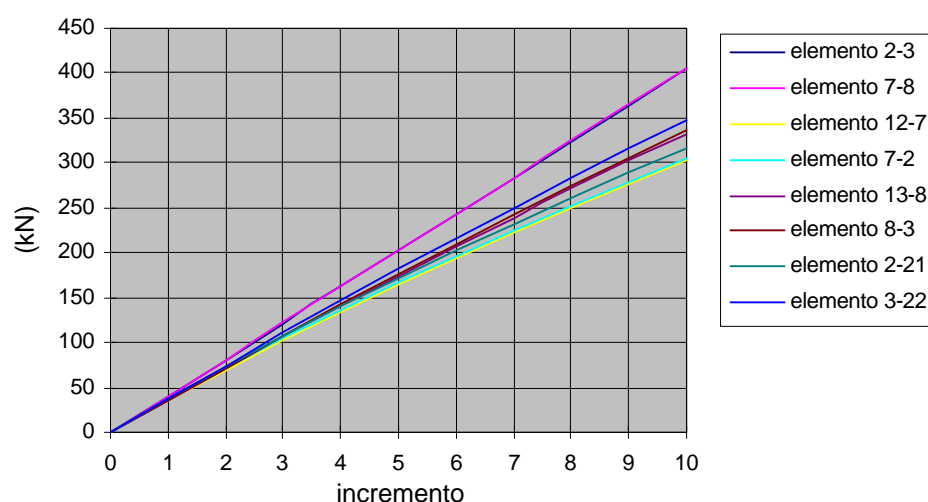


FIGURA 6.5.8: Força nos elementos com o incremento da força de protensão.

Observando-se as forças finais nos elementos tensores, verifica-se que os valores ficaram abaixo de 350 kN, apesar da aplicação de uma força de protensão maior em relação ao primeiro estudo (protensão pelos cabos tensores). Conclui-se que obtém-se menor eficiência com a aplicação da protensão pelos cabos portantes, que possuem menor curvatura. Além da

pouca eficiência dessa forma de procedimento de protensão, existe o inconveniente da necessidade de se manipular os dispositivos de protensão a uma altura, em geral, muito maior, em relação à primeira forma (protensão pelos cabos tensores).

6.5.4. APLICAÇÃO DA FORÇA DE PROTENSAO POR MEIO DOS CABOS TENSORES E CABOS PORTANTES

Uma maneira alternativa de se protender a cesta consiste em aplicar a força primeiramente através dos cabos tensores e em seguida através dos cabos portantes.

Neste terceiro estudo, a força de protensão (P) de 190 kN é aplicada em 10 incrementos iguais, na direção dos cabos tensores. A partir desta configuração protendida, outra carga de 190 kN é aplicada, desta vez através dos cabos portantes, também em 10 incrementos iguais.

As figuras 6.5.9 e 6.5.10 mostram o acréscimo de força nos elementos de cabo com o incremento de protensão.

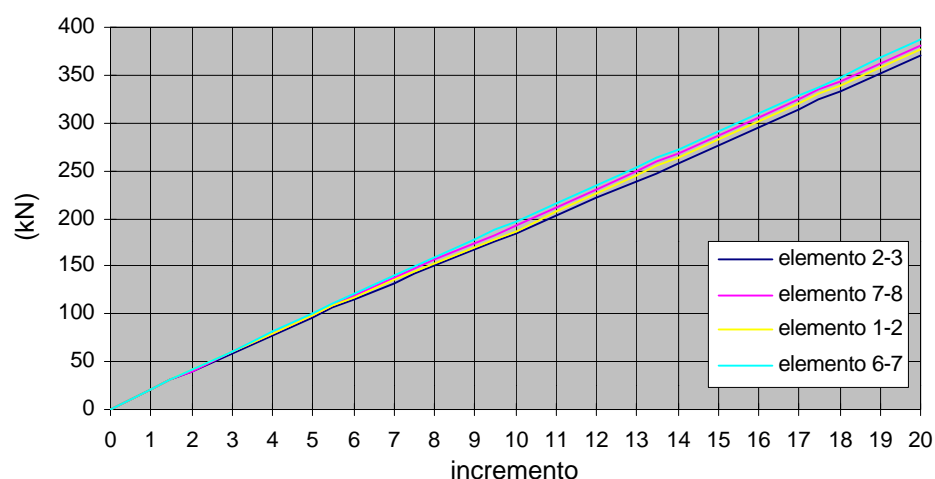


FIGURA 6.5.9: Força nos cabos portantes.

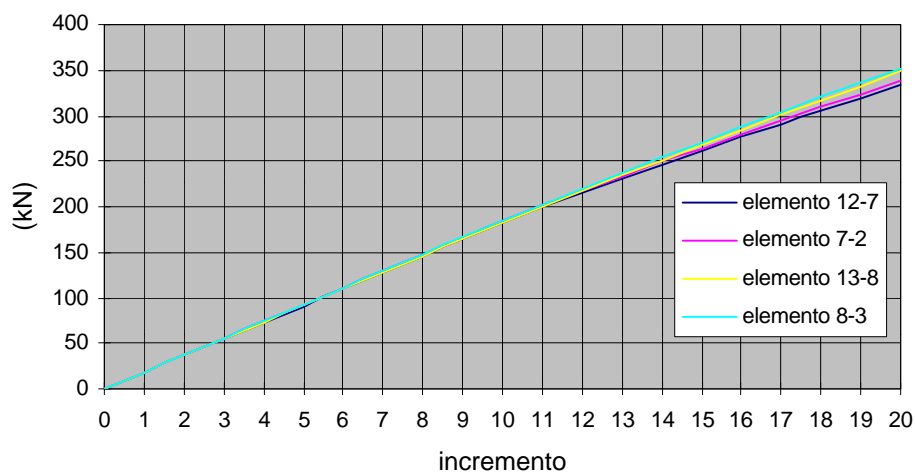


FIGURA 6.5.10: Força nos cabos tensores.

A protensão aplicada pelos cabos tensores seguida da protensão aplicada pelos cabos portantes produz uma distribuição mais homogênea de forças, em relação aos dois primeiros procedimentos, e uma configuração final de equilíbrio mais próxima da configuração inicial.

Deste ponto de vista, uma seqüência de protensão alternada seria mais apropriada. O inconveniente deste processo reside na necessidade de um grande número de dispositivos de protensão.

As figuras 6.5.11, 6.5.12 e 6.5.13 ilustram os deslocamentos acumulados ao final da aplicação alternada da protensão.

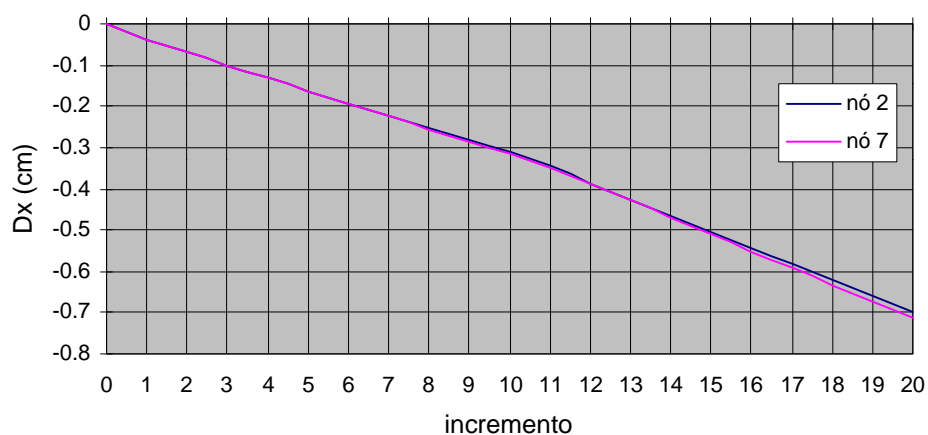


FIGURA 6.5.11: Deslocamentos acumulados na direção X.

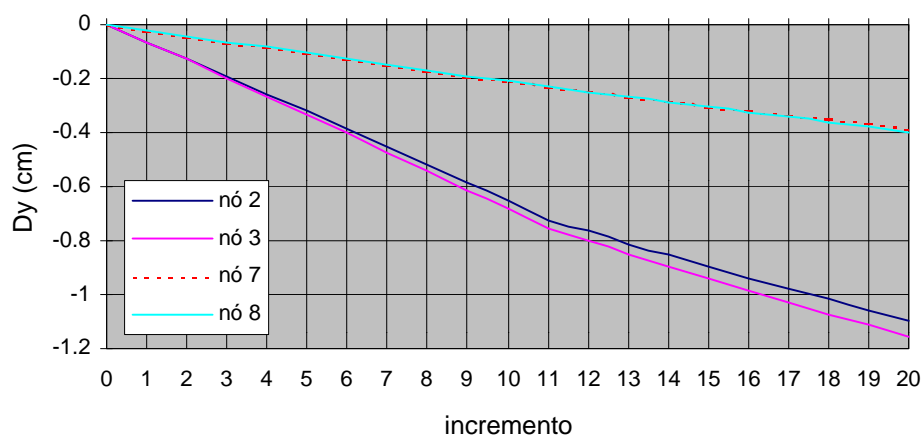


FIGURA 6.5.12: Deslocamentos acumulados na direção Y.

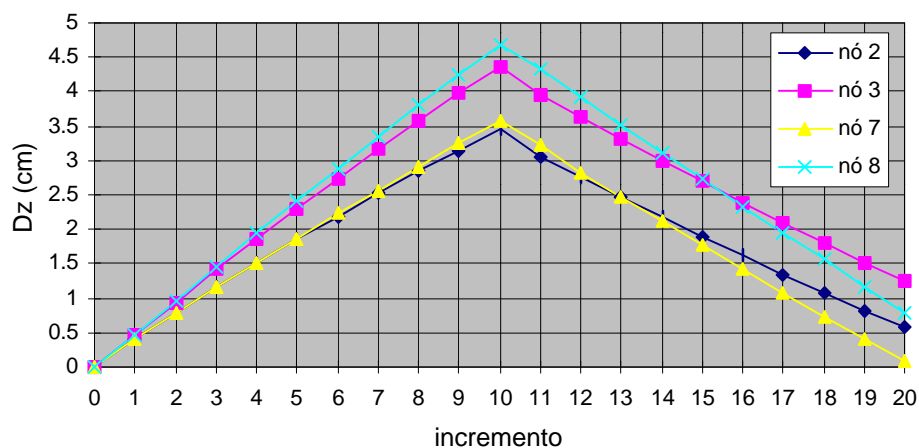


FIGURA 6.5.13: Deslocamentos acumulados na direção Z.

6.5.5. APLICAÇÃO DA FORÇA DE PROTENSÃO EM UMA DAS EXTREMIDADES DOS CABOS TENSORES

A forma que parece ser a mais apropriada para se protender a cesta consiste na protensão dos cabos tensores por etapas alternadas. Primeiramente são protendidos os cabos tensores de um lado da cesta, permanecendo os pontos do outro lado fixos. Na etapa seguinte completa-se o carregamento de protensão através da aplicação do restante da força, desta vez invertendo-se os lados.

No presente estudo uma força de protensão de 190 kN é aplicada em 10 incrementos iguais, na direção dos cabos tensores 2-21, 3-22, 4-23. A

partir desta configuração protendida, outra carga de 190 kN é aplicada por meio dos cabos tensores 17-24, 18-25, 19-26, também em 10 incrementos iguais. As figuras 6.5.14 e 6.5.15 mostram o acréscimo de força nos elementos de cabo com o incremento de protensão.

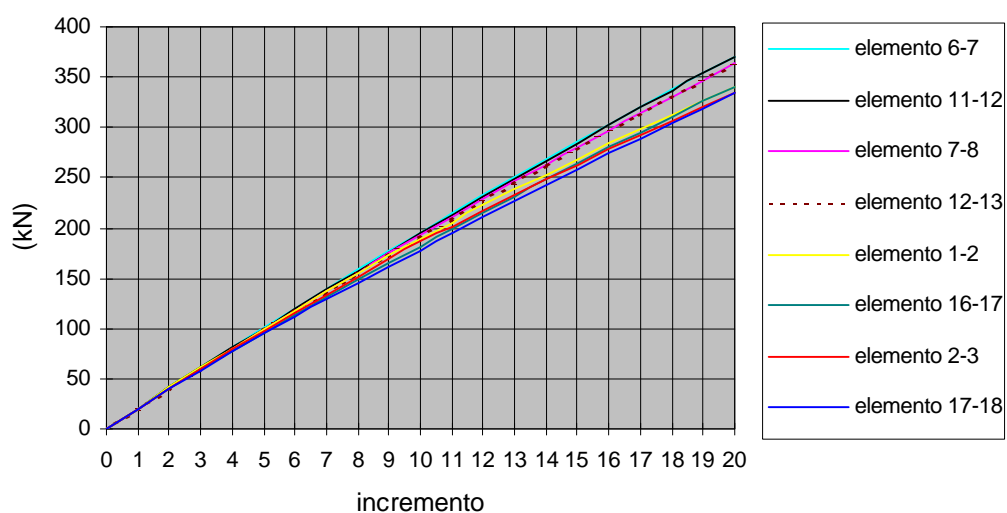


FIGURA 6.5.14: Força nos cabos portantes.

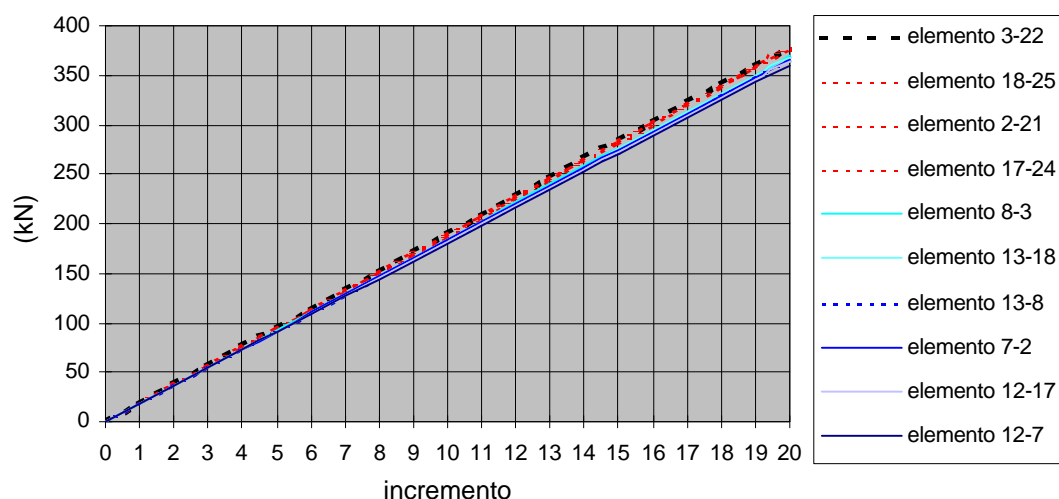


FIGURA 6.5.15: Força nos cabos tensores.

As figuras 6.5.16, 6.5.17 e 6.5.18 ilustram os deslocamentos acumulados ao final da aplicação parcelada da protensão.

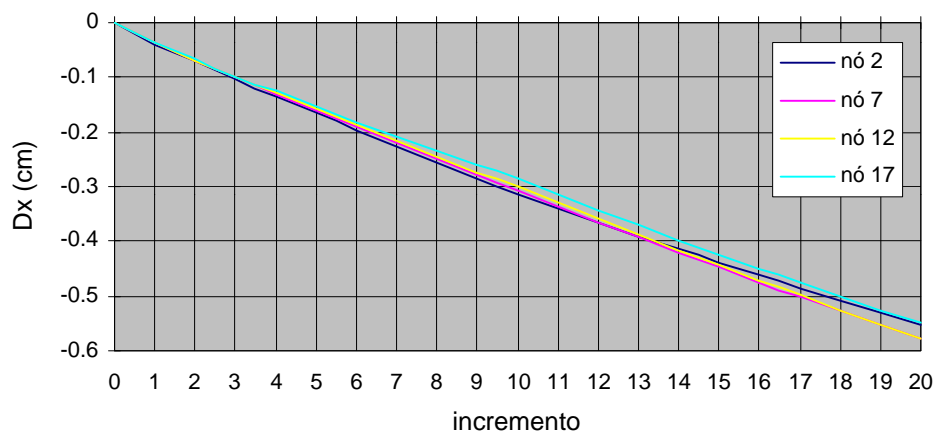


FIGURA 6.5.16: Deslocamentos acumulados na direção X.

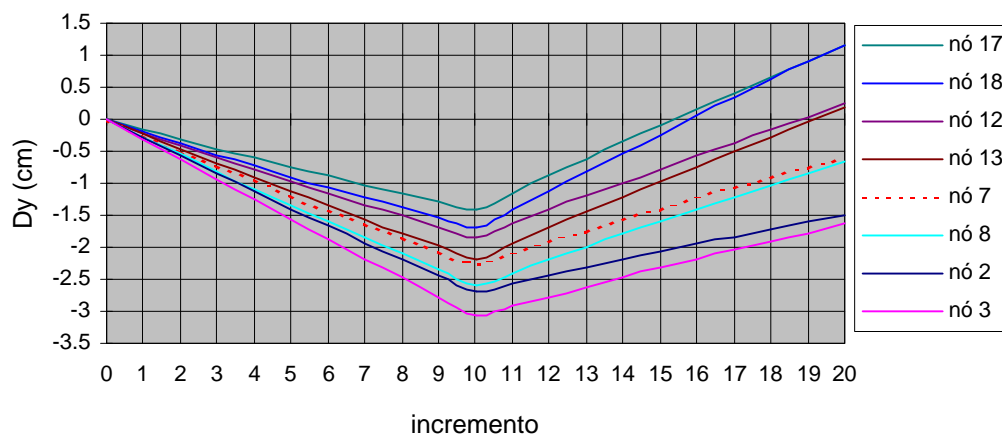


FIGURA 6.5.17: Deslocamentos acumulados na direção Y.

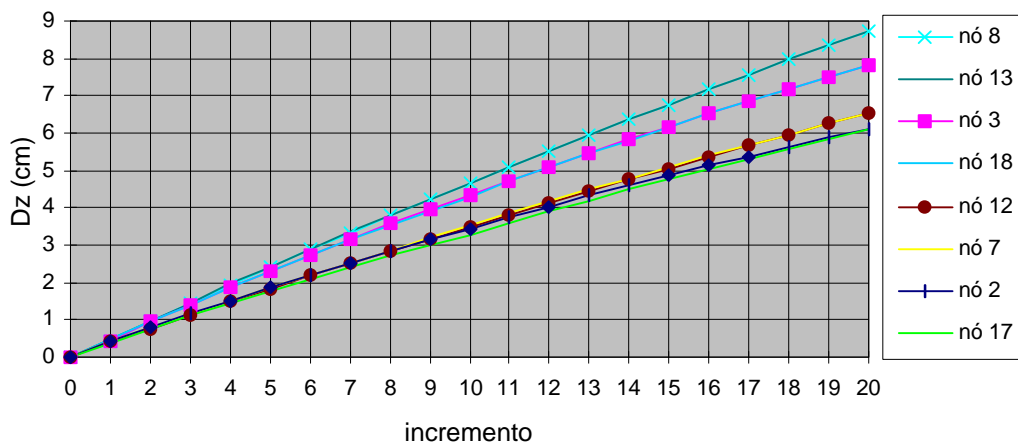


FIGURA 6.5.18: Deslocamentos acumulados na direção Z.

O procedimento de protensão dessa maneira causa uma perda da simetria da superfície original.

6.5.6. COMENTÁRIOS SOBRE A TÉCNICA DE PROTENSÃO

Na realidade os processos de aplicação da força de protensão são muito mais complexos do que os procedimentos propostos neste estudo. Além disso, existem as limitações técnicas que impedem certos procedimentos. Por exemplo, a execução simultânea da protensão de todos os cabos tensores não é praticamente possível.

Os casos aqui descritos são apenas uma indicação do comportamento de estruturas de cabos, em particular da cesta de cabos, para os arranjos propostos de esticamento.

Certamente um valor a ser considerado em todos os possíveis procedimentos de esticamento dos cabos, é o deslocamento dos pontos de aplicação da força. Este é um parâmetro importante que fornece uma estimativa do curso necessário do esticador para se obter a protensão requerida.

CAPÍTULO 7

ESTUDO DE CASO: ANÁLISE DA ESTRUTURA DE CABOS DA COBERTURA DO PAVILHÃO DA FEIRA INTERNACIONAL DE INDÚSTRIA E COMÉRCIO - RIO DE JANEIRO

7.1. DESCRIÇÃO DA OBRA

O pavilhão, destinado a exposições, compreendia 32.000 metros quadrados de área livre aproximadamente, e localizava-se no campo de São Cristóvão, na cidade do Rio de Janeiro. A obra, inaugurada em dezembro de 1960, foi projetada pelo arquiteto Sérgio W. Bernardes e calculada pelo Prof. Eng. Paulo R. Fragoso.

Na época o pavilhão ostentava a maior cobertura pênsil do mundo, com os apoios dispostos unicamente no seu perímetro. A cobertura de forma elíptica em planta, apresentava dois eixos de simetria (o eixo menor com 165 metros e o maior com 250 metros) que dividia o edifício em quatro setores, como mostra a figura 7.1.1. A mesma figura apresenta, respectivamente, um corte no meio do pavilhão e uma vista lateral do mesmo.

A concepção arquitetônica da cobertura do pavilhão, considerada pioneira no país, consistia de uma imensa superfície em forma de sela. A vedação composta de placas de ligas de alumínio era suspensa por uma cesta de cabos de aço, que por sua vez era ancorada na estrutura periférica em arco de concreto. As águas pluviais eram recolhidas em dois lagos

localizados nas extremidades do eixo maior do pavilhão.

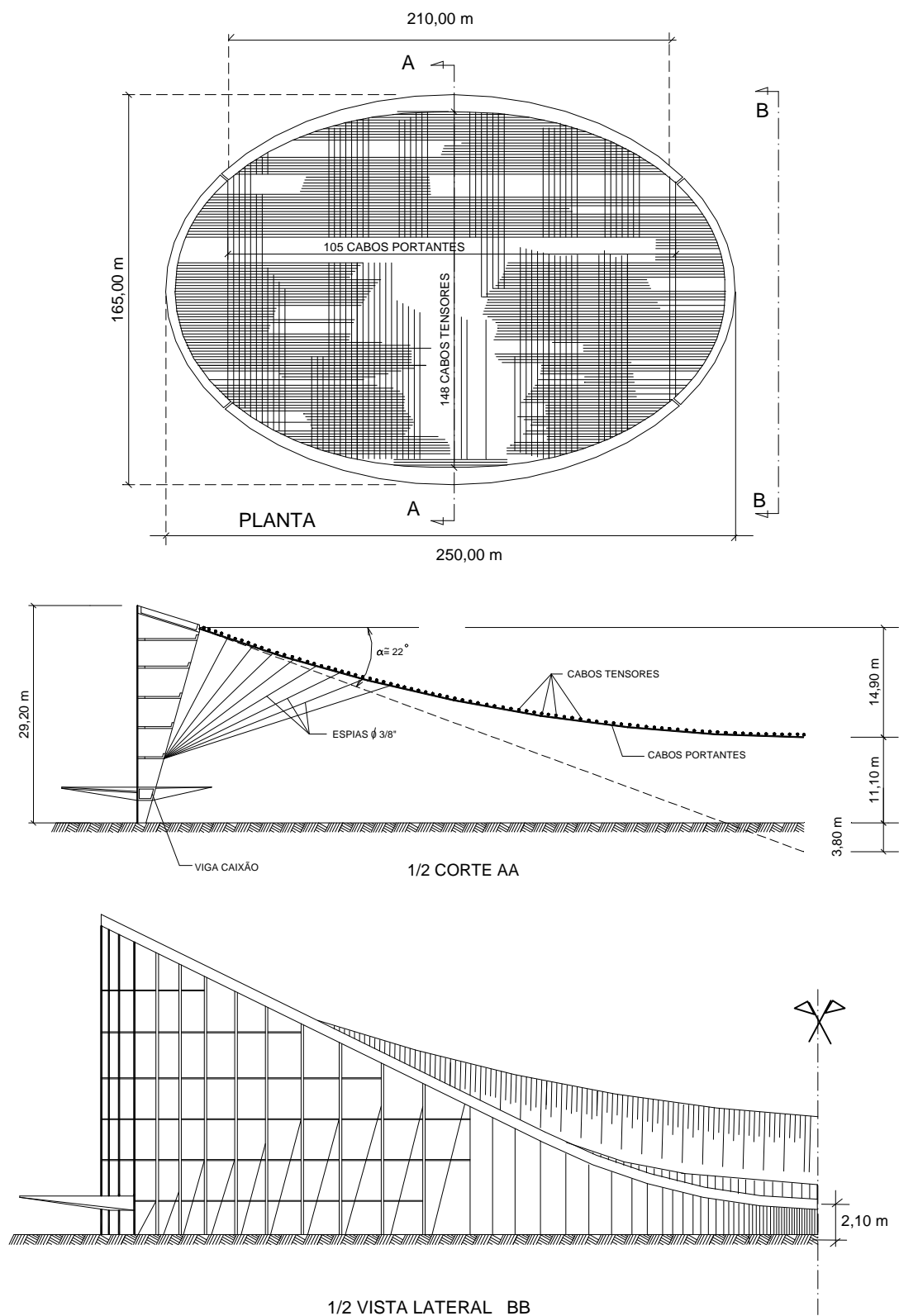


FIGURA 7.1.1: Planta, corte e vista lateral do Pavilhão de São Cristóvão.

7.2. ASPECTOS ESTRUTURAIS

A super-estrutura de concreto compunha-se basicamente de dois grandes arcos parabólicos inclinados, apoiados em 52 pilares (distanciados de eixo a eixo de 8,33 m a 8,50 m), que eram contraventados entre si por lajes de 12 cm de espessura a cada 4,00 m de altura, em média. Externamente, nas junções dos arcos, foram construídos dois encontros estruturais de concreto, preenchidos parcialmente com pedra britada e areia, com a função de resistir aos empuxos ocasionados pela cobertura. A altura dos arcos variava de 19,20 metros na parte central, e diminuía para 14,43 metros. Nesta altura, situavam-se duas articulações tipo “Freyssinet” e os respectivos encontros. Os pilares tinham altura e seções transversais variáveis, acompanhando a altura e largura dos arcos, que eram mais largos na sua parte central. Cada vão entre pilares (com exceção dos vãos centrais e extremidades dos arcos) era preenchido com paredes vazadas de alvenaria, tendo pilaretes de concreto para amarração (figura 7.2.1).

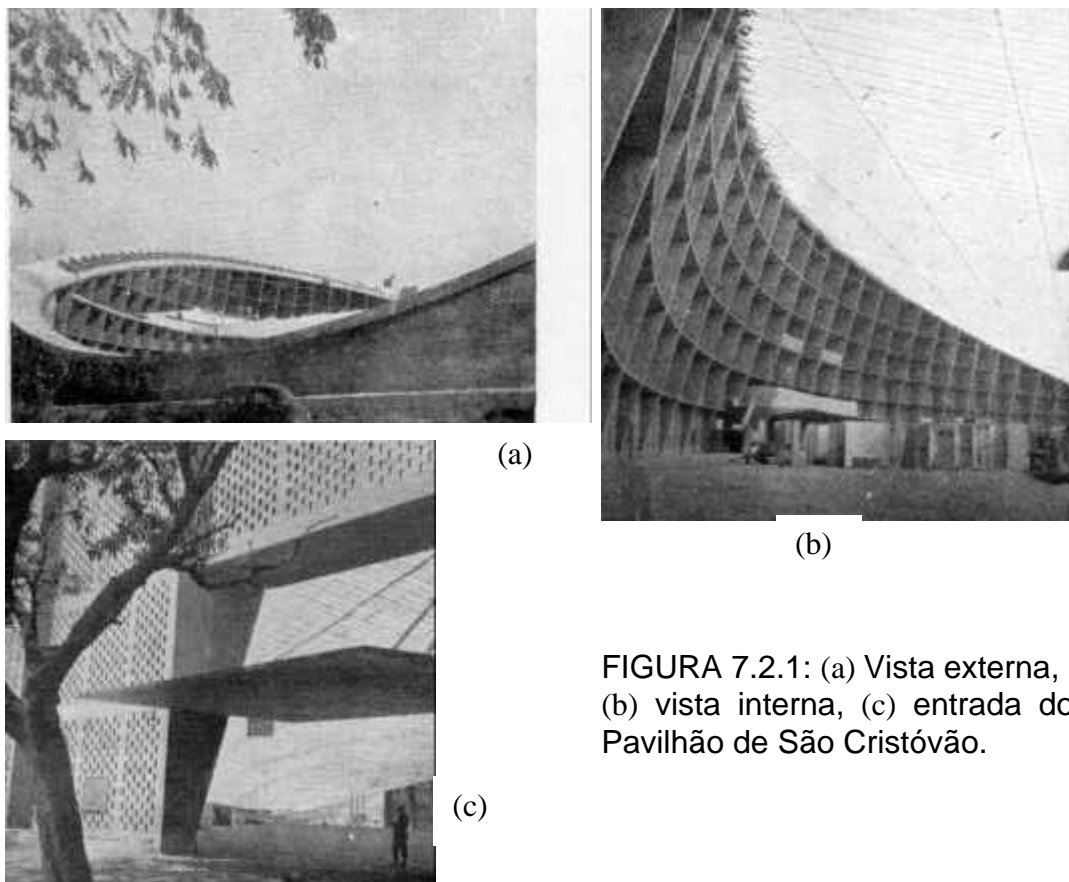


FIGURA 7.2.1: (a) Vista externa, (b) vista interna, (c) entrada do Pavilhão de São Cristóvão.

A infra-estrutura de concreto compunha-se de blocos de fundação sob os pilares e sob um dos encontros, que se apoiavam sobre um conjunto de estacas “Frankl”. O outro encontro possuía fundação direta em função de características locais.

A estrutura de cabos, com dupla curvatura reversa, era composta de um conjunto de 105 cabos portantes (transversais) espaçados de 2,0 m, que eram suspensos dos arcos de concreto, e 148 cabos tensores (longitudinais) espaçados de 1,0 m, que se ancoravam nos encontros de concreto. Existiam ainda os cabos espia verticais junto aos lagos (ancorados no solo) e os tirantes diagonais na região de pequena curvatura mais ao centro (ancorados nos pilares), que colaboravam no combate às oscilações da estrutura de cabos devido à ação do vento.

7.3. PROBLEMAS DE EXECUÇÃO

O projeto original previa a colocação de chapas de plástico poliéster (reforçadas com lã de vidro), que deveriam ser refrigeradas pela água recalcada dos lagos. Problemas técnicos ocorreram durante a fase de colocação da vedação, inutilizando as chapas plásticas, o que resultou na troca pelas placas de alumínio.

Segundo FRAGOSO¹ os problemas com as chapas de poliéster, empregadas com sucesso em outras obras no exterior, ocorreram devido a diversos fatores, entre eles a falta de estudos sobre as juntas utilizadas. As juntas rígidas primeiramente escolhidas rachavam com facilidade, e a substituição por juntas elásticas superpostas também não funcionou convenientemente. Além disso, a resina usada na cola das juntas atingiu os cabos, soldando-os de modo que qualquer movimento do cabo era transmitido às chapas, que devido a sua rigidez se rompiam. Outro problema foi o tipo de fixação escolhida, bastante inadequada, ocasionando concentração de tensões junto aos furos de fixação. E finalmente a

¹ FRAGOSO, P.R. (1963) Considerações sobre as coberturas suspensas. *Estrutura*, n.56, p.13-17, n.57, p.33-60.

qualidade do material das chapas adquiridas, que se modificava completamente sob a ação do sol, mudava de cor e endurecia, e que não resistia ao efeito abrasivo das águas da chuva, contribuiu para o fracasso de sua utilização.

Um outro fator, que ocasionou um grande atraso no andamento da obra foi o processo de esticamento dos cabos, que apresentou dificuldades não previstas e durou cerca de 10 meses. Após a colocação preliminar dos cabos, constatou-se que estes não apresentavam a força de tração projetada (tanto que sob a ação de sucção do vento chegou a danificar a vedação plástica), e que os esticadores não tinham um comprimento suficiente para permitir os ajustes necessários. Tornou-se necessário um acompanhamento da operação de re-esticamento dos cabos tensores, nos quais deveriam ser criadas as tensões pré-fixadas de tração. Estes cabos, por outro lado, já haviam sofrido um tracionamento prévio, por ocasião da montagem.

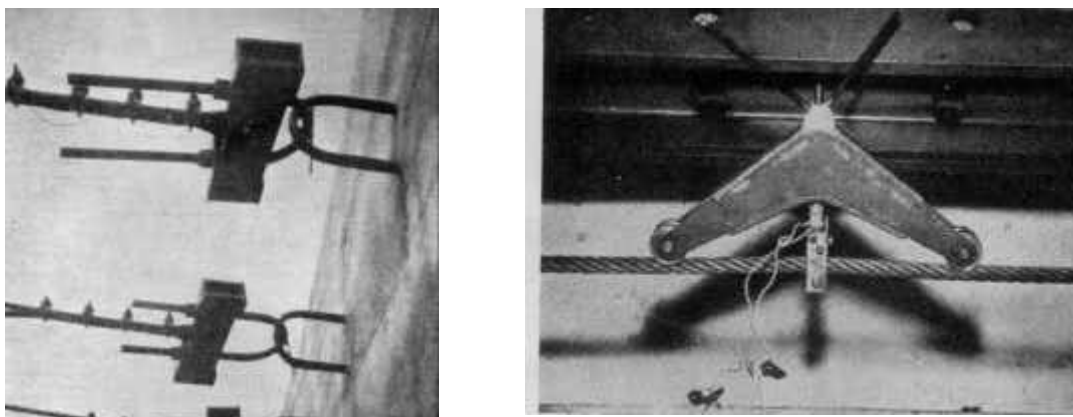


FIGURA 7.3.1: Detalhe dos esticadores e “protensômetro”.

O Laboratório de Estruturas da EESC foi contratado para realizar todas as medidas de tensões, desde a fase de protensão até a fase das solicitações permanentes. Utilizando um dispositivo especial (denominado “protensômetro”, figura 7.3.1), desenvolvido pelo próprio Laboratório de Estruturas da EESC, foi possível a verificação imediata das forças atuantes nos cabos, sem a necessidade de afrouxamento dos cabos, e os devidos ajustes foram realizados. As informações do levantamento das tensões

realizadas entre 30 de janeiro e 4 de fevereiro de 1960 e os dados da operação de verificação efetuados entre 26 e 30 de abril de 1960 constam em publicação da época, de autoria do Prof. MARTINELLI². Observou-se que de maneira geral os cabos tensores não sofreram considerável perda de tensão, e ao contrário do que se esperava, alguns cabos apresentaram pequeno acréscimo no valor medido. MARTINELLI² atribui o fato, especialmente na faixa central, às diferentes condições de temperatura durante a realização das medições (diferenças da ordem de 10°C).

Os deslocamentos sofridos pela estrutura sob mudanças de temperatura e ação de vento foram observados, e medidos através de aparelhos chamados “oscilômetro”, que marcavam as amplitudes máximas e mínimas das oscilações da cobertura. Estes registros compreendidos entre 5 de novembro de 1959 e 26 de abril de 1960 encontram-se em gráfico em MARTINELLI².

Na época da construção não se fabricava no Brasil cabos de aço com alma de aço, e as dificuldades de importação levaram à adoção de cabos com alma de fibra. No caso foram utilizados cabos com alma de cânhamo, que é um material muito mais deformável que o aço e que pode se deteriorar com o tempo. Outro fator desfavorável, para os cabos com alma de fibra, em geral, é a falta de pré-estiramento durante o processo de fabricação, providência que reduz apreciavelmente as perdas de tensão posteriores nos cabos com alma de aço. O tipo de cabo especificado não é indicado para obras estruturais permanentes, necessitando inspeção e ajustes periódicos.

MARTINELLI² comenta que os resultados obtidos de deslocamentos da estrutura eram bastante satisfatórios na ocasião da execução da obra, com variações de apenas 2 a 3 cm sob a ação de vento. Nas verificações posteriores, realizadas anos depois, devido ao afrouxamento dos cabos e ruína de algumas espias, os deslocamentos tornaram-se significativos, provocando danos à vedação. Foram realizados três trabalhos de verificação de tensões e deslocamentos pelo Laboratório de Estruturas da EESC, cujo

² MARTINELLI, D.A.O. (1961) A observação da cobertura pênsil da exposição internacional da indústria e comércio. *Engenharia*, n.217, p.219-228.

relatório final alertava para a necessidade de execução de um re-esticamento dos cabos e recuperação das espias. Os dados obtidos por ocasião desses levantamentos (janeiro de 1963, outubro de 1973 e junho de 1980) encontram-se anexos ao referido relatório³.

A obra, que foi iniciada no final de 1957, nunca chegou a ser totalmente concluída como previa os detalhes construtivos descritos no projeto original (por exemplo, a impermeabilização da super-estrutura de concreto foi executada apenas parcialmente) segundo informações contidas em laudo pericial elaborado pelo arquiteto Mário Pereira de Lucena Filho, em 1974. O pavilhão sofreu ao longo do tempo diversas alterações para se adequar a diferentes usos. Além disso, nenhum trabalho de manutenção adequado foi efetuado, contribuindo para a deterioração precoce da obra.

7.4. OS CABOS DE AÇO DA COBERTURA

A estrutura da cobertura era formada por uma rede de cabos de aço polido, categoria 6x19, com diâmetros variáveis (1", 7/8", 3/4", 5/8", 1/2" e 3/8"), e distribuídos dependendo da região ser mais ou menos solicitada. A distribuição dos cabos é mostrada na figura 7.4.2.

A composição dos cabos tensores principais era do tipo *filler*, com diâmetro de 1", sendo as pernas compostas de arames de diâmetros aproximadamente iguais, como mostra a figura 7.4.1.

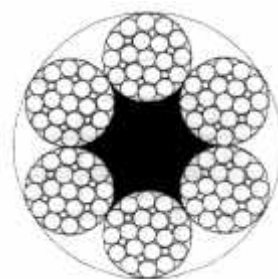


FIGURA 7.4.1: Cabo de 1" de diâmetro (6x19 – filler), alma de fibra natural, empregado nos cabos tensores principais.

³ MONTANARI, I.; BARBATO, R.L.A.; TAKEYA, T. (1980) *Verificação da cobertura pênsil do pavilhão de São Cristóvão*. São Carlos, EESC-USP, 23p. (Relatório LE-EXT 80/2).

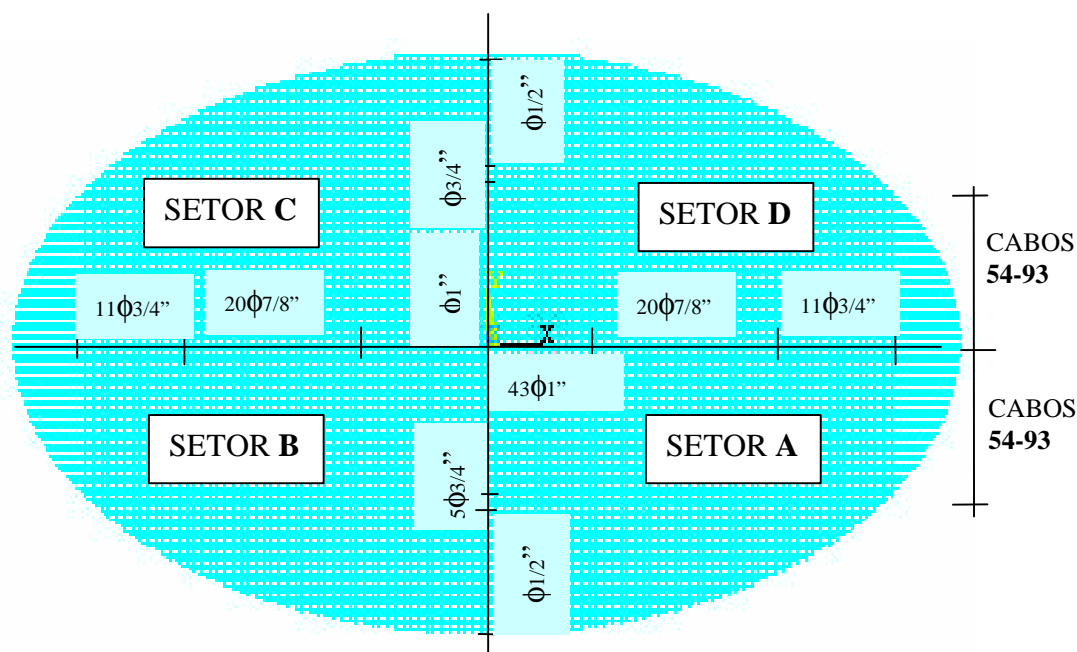


FIGURA 7.4.2: Distribuição dos cabos, de acordo com o diâmetro.

7.4.1. PROPRIEDADES MECÂNICAS DO CABO

Uma amostra de cabo de 1", do lote fornecido para o pavilhão de São Cristóvão, foi durante muitos anos usada para calibrar o "protensômetro" (figura 7.1.3) nas diversas ocasiões em que se mediu *in loco* a força nos cabos. Recentemente, esta amostra foi ensaiada pelo Laboratório de Estruturas da EESC com a finalidade de se obter algumas informações a respeito de suas propriedades mecânicas.

Os ensaios do cabo foram realizados no equipamento INSTRON do Laboratório de Estruturas da EESC-USP (figura 7.4.4a), sendo o alongamento monitorado através de um extensômetro de comprimento inicial de 50 mm (figura 7.4.4b).

Num primeiro ensaio, o cabo de 1,25 m foi submetido a 6 ciclos de carga e descarga. Cada ciclo consistiu da aplicação de uma força axial de 150 kN, seguida da retirada da mesma, com um controle da velocidade de deslocamento igual a 0,01 mm/s.. Antes do ensaio uma pré-carga de 5 kN foi aplicada para a retificação do cabo e acomodação das pernas do cabo.

As curvas obtidas, com a região inicial linear, indicam que praticamente todo o alongamento construtivo já havia sido removido, como

mostra a figura (7.4.3). O módulo de elasticidade obtido foi de aproximadamente 90 kN/mm^2 , valor que se encontra dentro do intervalo esperado para cabos com alma de fibra ($85 \text{ a } 95 \text{ kN/mm}^2$).

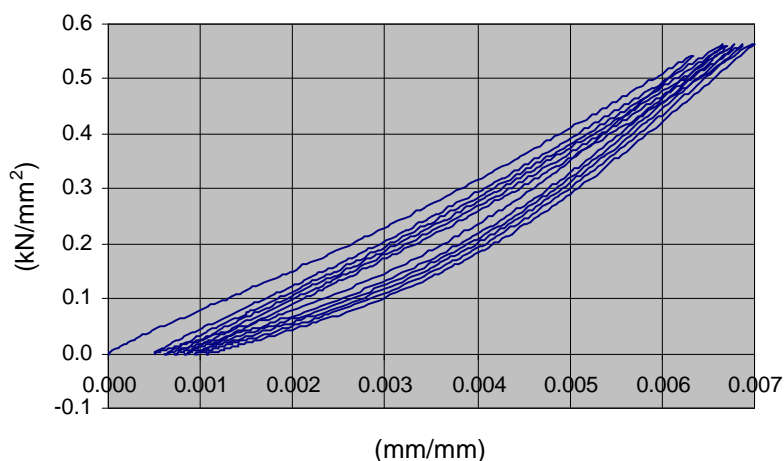


FIGURA 7.4.3: Curva de tensão-deformação do cabo de 1”.

A carga de ruptura mínima nominal especificada para este cabo de 1” era de 405 kN (40,5 tf). A mesma amostra foi submetida a um ensaio de tração até uma carga de aproximadamente 80% da carga de ruptura nominal. Neste ponto ocorreu uma variação nas medidas do extensômetro, e acreditou-se ter ocorrido um deslizamento dos cabos nos soquetes.

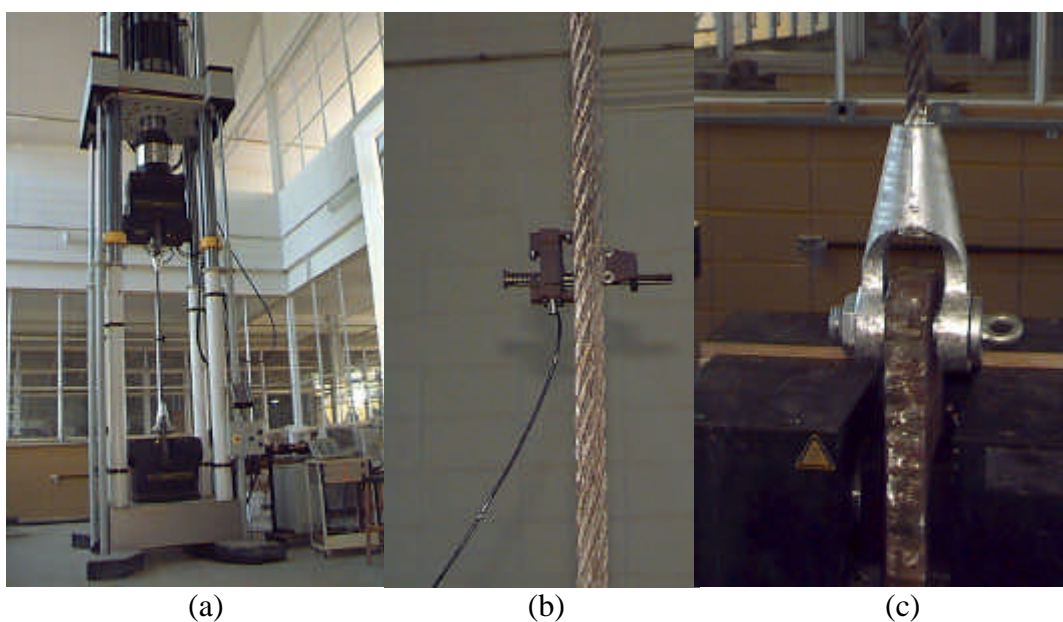


FIGURA 7.4.4: (a) Montagem do ensaio, (b) extensômetro de garra, (c) detalhe do soquete do cabo.

O gráfico da figura 7.4.5 apresenta a variação de deslocamento, medido entre os soquetes, com o aumento da força de tração aplicada no cabo. A região final desta curva mostra uma mudança de inclinação, indicando uma diminuição do módulo de deformação do cabo.

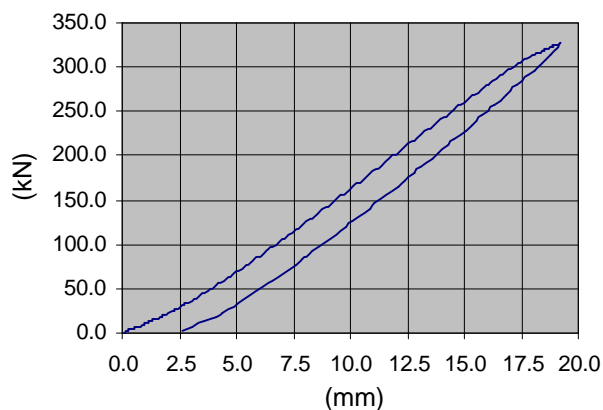


FIGURA 7.4.5 : Curva de carga-deslocamento (medido entre os soquetes) do cabo 1" de diâmetro nominal e comprimento de 1,25m.

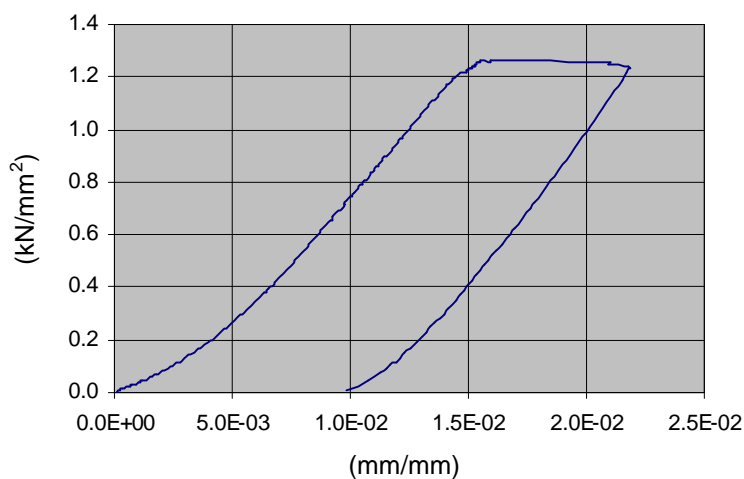


FIGURA 7.4.6: Curva de tensão-deformação do cabo de 1" de diâmetro nominal e comprimento de 1,25 m (carregamento e descarregamento).

Um terceiro ensaio com o mesmo cabo de aço de 1" foi realizado, com o objetivo de medir a resistência efetiva de tração. Um tratamento com fluido lubrificante micro-texturizado foi executado para a remoção de possíveis pontos de ferrugem interna.

A ruptura ocorreu sob um carregamento de 320 kN, com um

alongamento menor que o esperado (cerca de 1,7%). O fenômeno poderia ser caracterizado como uma ruptura frágil do cabo de aço, devido a mudanças nas suas propriedades mecânicas. No entanto, o material ensaiado esteve guardado em ambiente protegido, e apresentava boas condições visuais. Provavelmente havia uma sobretensão inicial de algumas pernas, causada por defeito na confecção dos soquetes terminais. Pode ser observado na figura 7.4.7 a ruptura de duas pernas do cabo nas proximidades dos soquetes.



FIGURA 7.4.7: Ruptura do cabo de 1" de diâmetro.

7.4.2. PROPRIEDADES MECÂNICAS DOS FIOS DE AÇO

Um ensaio de tração também foi realizado nos arames que compõem o cabo de aço original, utilizando-se um equipamento DARTEC do Laboratório de Estruturas de Madeiras do Departamento de Estruturas da EESC-USP. O alongamento foi monitorado através de um extensômetro apropriado de comprimento inicial de 25 mm. Foi imposto, durante todo o ensaio, um controle da velocidade de deslocamento igual a 0,01 mm/s..

Os fios de aço de diâmetro aproximado de 1,7 mm apresentaram a curva de tensão-deformação da figura 7.4.8. O módulo de elasticidade inicial, medido a 0,2% de deformação chegou a 20.000 kgf/mm² (200

kN/mm²). O coeficiente estrutural do cabo é igual a

$$k_{\text{cable}} = \frac{E_{\text{cable}}}{E_{\text{wire}}} = \frac{90}{200} = 0,45.$$

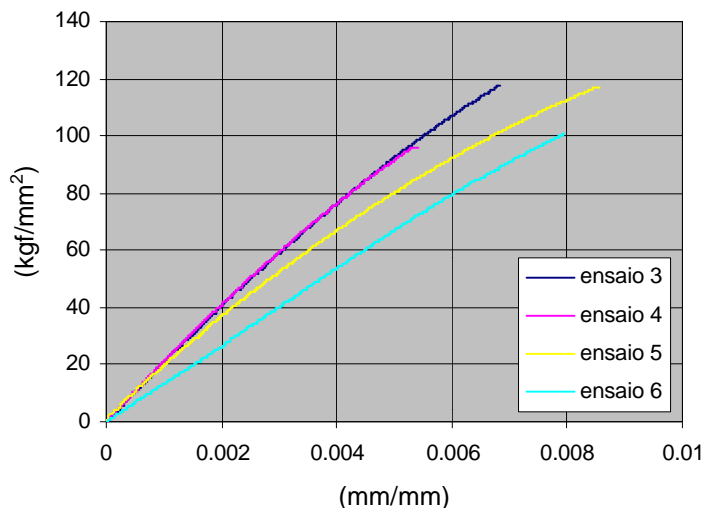


FIGURA 7.4.8: Curvas de tensão-deformação dos fios de 1,7 mm de diâmetro.

A curva aproximada de carregamento contra o alongamento total dos fios é mostrada na figura 7.4.9. Este alongamento foi medido através do deslocamento entre as garras do equipamento, sofrendo o efeito da sua rigidez. Foram ensaiados 6 fios, sendo cada amostra retirada de uma perna do cabo. Dois dos ensaios foram descartados, devido ao rompimento dos fios nas proximidades das garras.

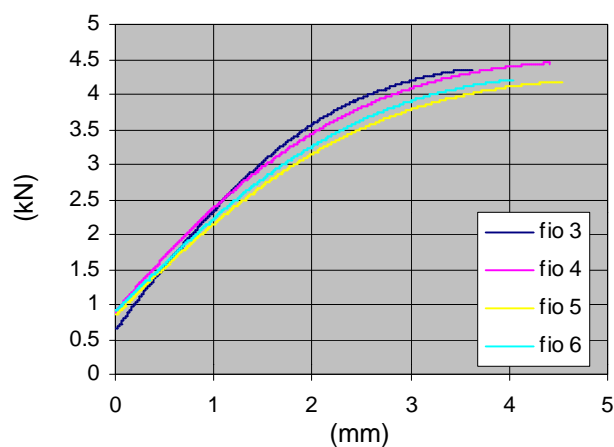


FIGURA 7.4.9: Curvas de carga-deslocamento dos fios de 1,7 mm de diâmetro, até a ruptura.

Para os outros 4 ensaios a tensão de ruptura dos fios individuais, entre 140 a 160 kgf/mm² (tabela 7.4.1), indica tratar-se de fios de aço de média resistência. Segundo gráfico da figura 7.4.10, retirado do catálogo C-11 da CIMAFE (Companhia Industrial e Mercantil de Artefatos de Ferro), os fios estão dentro da faixa de classificação *Plow Steel*.

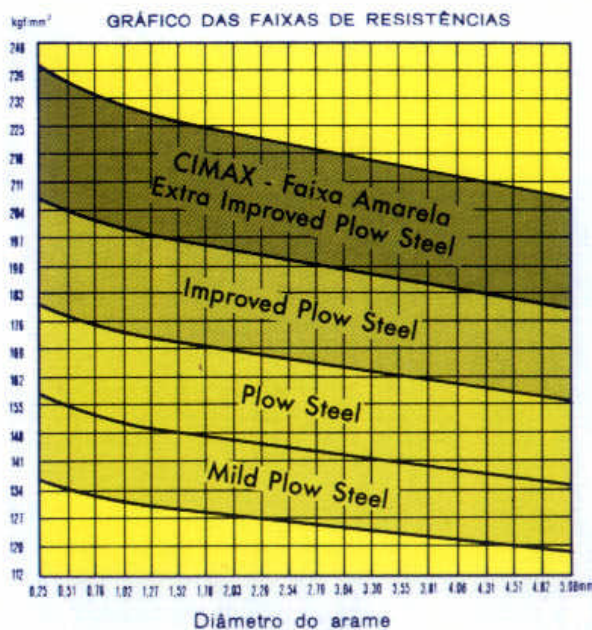


FIGURA 7.4.10: Variação da resistência dos arames em função do seu diâmetro.

fio	3	4	5	6
Tensão de ruptura (kgf/mm ²)	163	157	147	145
força de ruptura do fio (kgf)	370	356	334	329
força de ruptura do cabo (kN)	420	405	380	375

A tensão média de 153 Kgf/mm² corresponde a uma carga de ruptura média de 3,473 kN (347,3 Kgf para uma área do fio de 2,2698 mm²). Este valor resulta em força de ruptura $T_{rup}=396$ kN para um cabo 6x19, no caso de fios paralelos e máxima eficiência. Para o caso de cabo de alma de fibra a força de ruptura estimada é igual a $0,86.T_{rup}=340$ kN. Portanto, conclui-se que não se poderia alcançar a força de 420 kN para o cabo, que corresponde à força de ruptura nominal.

A eficiência do cabo, que é quantificada através da relação entre a resistência de ruptura do cabo e a soma das resistências individuais dos fios que compõem o cabo em estudo, foi no caso igual a 80%.

7.4.3. CÁLCULO TEÓRICO DO MÓDULO DE ELASTICIDADE DAS PERNAS QUE COMPÕEM O CABO

O cálculo teórico do módulo de elasticidade de uma perna do cabo pode ser efetuada pelas expressões do capítulo 3 (item 3.6.3). Para isso tomaram-se as medidas do comprimento de passo das pernas (15 cm) e do comprimento de passo de um fio da camada externa (aproximadamente 7,2 cm).

Sendo o diâmetro do fio igual a 1,7 mm, o diâmetro externo da perna (total de 19 fios) é 8,5 mm (=5.1,7) e o diâmetro da camada interna (correspondendo a 7 fios) é 5,1 mm (=3.1,7).

Assumindo-se que o passo da camada interna seja metade do passo da camada externa, o ângulo que cada fio forma com o eixo da perna é igual a 16° . Com este valor calcula-se o coeficiente estrutural de cada fio desta camada: $k_i = \cos^4 \alpha_i = 0,85$.

O coeficiente estrutural para a camada externa, depende do ângulo de que cada fio forma com o eixo da perna que vale 13° , e assim: $k_i = \cos^4 \alpha_i = 0,90$.

Para a perna formada de fios de mesmo diâmetro, obtém-se o seu

$$\text{coeficiente estrutural por: } k_{\text{strand}} = \frac{\sum_{i=0}^{\text{lay}} f_i k_i}{\sum_{i=0}^{\text{lay}} f_i} = \frac{(7 \cdot 0,85) + (12 \cdot 0,90)}{(7 + 12)} = 0,88, \text{ onde}$$

lay é o número de camadas, f_i é o número de fios e k_i é o coeficiente estrutural da camada i de fios.

Uma estimativa do módulo de elasticidade teórico da perna pode ser obtida: $E_{\text{strand}} = k_{\text{strand}} E_{\text{wire}} = 0,88 \cdot 200 = 176 \text{ kN/mm}^2$.

7.4.4. CURVA DE RELAXAÇÃO DO CABO

Um modelo hipotético visco-elástico é proposto para o cabo com alma de cânhamo, baseando-se em dados recolhidos ao longo do tempo de alguns cabos tensores principais. Estes dados encontram-se documentados em relatório citado no item 7.3..

Para estudar o comportamento dos cabos ao longo do tempo, com relação ao efeito da perda de protensão, é adotado o modelo misto de Boltzmann, assumindo-se que taxa de deformação do cabo é muito pequena, podendo ser desprezada.

7.4.4.1. MODELO MISTO DE BOLTZMANN

O comportamento real dos materiais é muito complexo, e depende do tipo de solicitação (estática ou dinâmica), do tempo de duração da solicitação, das condições do meio ambiente (temperatura, umidade, etc). Por isso modelos simplificados são propostos para representar o mais próximo possível o comportamento de um dado material.

No presente estudo um modelo aproximado para os cabos é obtido a partir de uma combinação dos modelos básicos, elástico e viscoso. Os cabos, de maneira geral, apresentam propriedades características de deformação imediata e de deformação lenta, portanto, um arranjo misto como o modelo de Boltzman pode ser adotado.

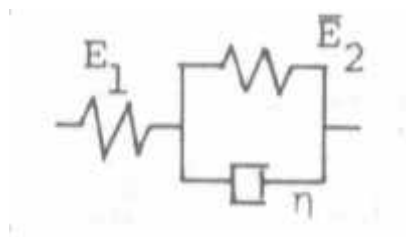


FIGURA 7.4.11: Diagrama do modelo misto de Boltzman.

A figura 7.4.1 representa esquematicamente o modelo misto de Boltzmann, onde são válidas as seguintes expressões:

$$s = e_1 E_1 \quad (7.4.1)$$

$$\mathbf{s} = \mathbf{h}\dot{\mathbf{e}}_2 + E_2\mathbf{e}_2 \quad (7.4.2)$$

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \quad (7.4.3)$$

Derivando-se as expressões de tensão (7.4.41) e deformação (7.4.3) em relação ao tempo, e substituindo-se na expressão (7.4.42), obtém-se a equação constitutiva do material:

$$\mathbf{s}(E_1 + E_2) + \dot{\mathbf{s}}\mathbf{h} = E_1E_2\dot{\mathbf{e}} + E_1\mathbf{h}\dot{\mathbf{e}} \quad (7.4.4)$$

O comportamento do material visco-elástico é usualmente exibido na forma de diagramas de fluência e de relaxação, que podem ser obtidos da expressão (7.4.44).

Para o estudo de fluência admite-se que a tensão assume um valor $\bar{\mathbf{s}}$ invariável no tempo. Assim, a taxa de variação da tensão com o tempo é nula e a equação constitutiva torna-se :

$$\bar{\mathbf{s}}(E_1 + E_2) = E_1E_2\dot{\mathbf{e}} + E_1\mathbf{h}\dot{\mathbf{e}} \quad (7.4.5)$$

Integrando-se a expressão e aplicando-se a condição inicial $\mathbf{e}(0) = \frac{\bar{\mathbf{s}}}{E_1}$

obtém-se a equação tensão-deformação :

$$\mathbf{e}(t) = \bar{\mathbf{s}} \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{e^{-\frac{E_2 t}{\mathbf{h}}}}{E_2} \right] \quad (7.4.6)$$

A função de fluência é então obtida :

$$\frac{1}{E(t)} = \left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} - \frac{e^{-\frac{E_2 t}{\mathbf{h}}}}{E_2} \right] \quad (7.4.7)$$

que fornece a variação do módulo de elasticidade com o tempo, sendo

$$E(0) = E_1 \text{ e } E(\infty) = \frac{E_1E_2}{E_1 + E_2}.$$

Para o estudo da relaxação admite-se que a deformação assume um valor $\bar{\mathbf{e}}$ invariável no tempo. Assim a taxa de variação da deformação com o tempo é nula e a equação constitutiva torna-se :

$$\mathbf{s}(E_1 + E_2) + \dot{\mathbf{s}}h = E_1 E_2 \mathbf{e} \quad (7.4.8)$$

Integrando-se a expressão e aplicando-se a condição inicial $\mathbf{s}(0) = E_1 \bar{\mathbf{e}}$ obtém-se a equação tensão-deformação :

$$\mathbf{s}(t) = \bar{\mathbf{e}} \left[\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} + \frac{E_1^2}{E_1 + E_2} e^{-\frac{(E_1 + E_2)}{h} t} \right] \quad (7.4.9)$$

A função de relaxação é então obtida :

$$E(t) = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} + \frac{E_1^2}{E_1 + E_2} e^{-\frac{(E_1 + E_2)}{h} t} \quad (7.4.10)$$

A expressão 7.4.10 fornece a variação do módulo de elasticidade com o tempo, sendo $E(0) = E_1$ e $E(\infty) = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}$.

7.4.4.2. MODELO DE RELAXAÇÃO PARA OS CABOS TENSORES DE SÃO CRISTOVÃO

As medidas das forças nos cabos tensores, identificados com a numeração de 54 a 93 na figura 7.4.2, foram efetuadas em diferentes épocas pelo Laboratório de Estruturas da EESC-USP. As médias das forças encontram-se resumidas na tabela 7.4.2.

TABELA 7.4.2									
FORÇA MÉDIA NOS CABOS TENSORES (tf)									
T _{projeto}	setor	cabos	jan/60	abr/60	jul/60	nov/60	jan/63	out/73	jun/80
6,0 tf	AB	54-63	11,6	11,6	7,2	7,1	6,4	6,071	5,087
	CD	54-63	11,5	11,9	7,2	7,2	6,5	6,408	5,497
7,0 tf	AB	64-73	11,4	11,4	8,2	8,0	7,2	6,985	5,925
	CD	64-73	11,3	11,6	8,2	8,1	7,5	7,188	6,424
8,5 tf	AB	74-83	10,2	10,2	10,2	9,9	9,5	8,028	7,478
	CD	74-83	10,3	10,1	9,6	9,3	8,9	7,860	7,110
10,0tf	AB	84-93	11,0	11,0	11,4	11,5	11,8	9,431	8,661
	CD	84-93	12,0	12,4	11,5	11,4	11,5	9,844	8,897

Os cabos tensores centrais apresentaram a variação de tensão ao longo do tempo dada na figura 7.4.12.

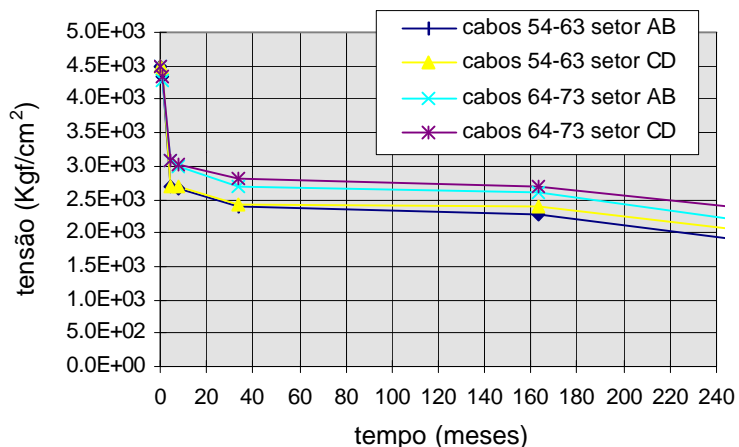


FIGURA 7.4.12: Variação da tensão nos cabos tensores centrais.

Admitindo-se que a variação da deformação do cabo no tempo seja muito pequena, a curva de relaxação pode ser obtida da expressão (7.4.10). Para os cabos tensores foi obtida uma aproximação da curva de relaxação dada na figura 7.4.13, a partir dos valores de força medidos, adotando-se o modelo de Boltzman.

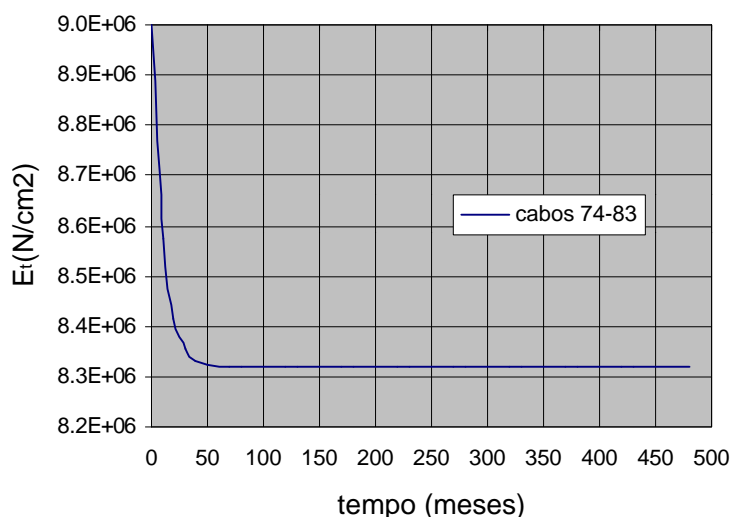


FIGURA 7 5.13: Curva de relaxação aproximada para os cabos de fibra de cânhamo empregados na cobertura do Pavilhão de São Cristóvão.

7.5. ANÁLISE NUMÉRICA

Inicialmente foi obtida a configuração inicial da cesta em forma de parabolóide hiperbólico e contorno elíptico pelas expressões:

$$Z = -9\left(\frac{X}{122,5}\right)^2 + 14,9\left(\frac{Y}{74,5}\right)^2 \quad (7.5.1)$$

$$1 = \left(\frac{X}{122,5}\right)^2 + \left(\frac{Y}{74,5}\right)^2 \quad (7.5.2)$$

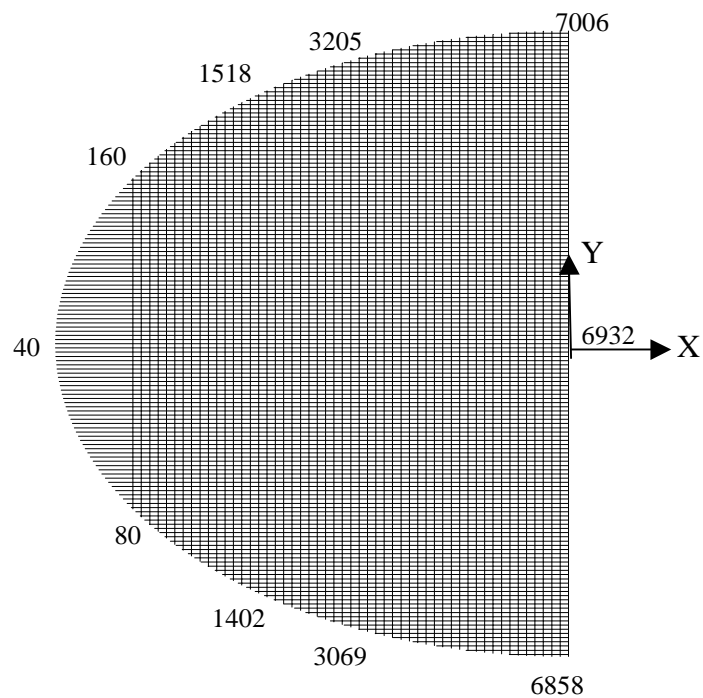


FIGURA 7.5.1: Numeração dos nós dos setores B e C da cesta (cabos tensores paralelos ao eixo Y e cabos portantes paralelos ao eixo X).

A malha tem espaçamento de 2m segundo a direção X e de 1m na direção Y. Da geração automática dos nós da cesta, resultou um total de 13.906 nós. Problemas de mau condicionamento foram detectados, devido a alguns elementos de comprimento muito pequeno no contorno da cesta. Estes foram posteriormente incorporados aos elementos adjacentes. Além disso, melhorou-se o modelo através da retirada do cabo tensor mais abatido (em ambos os lados). Com estas modificações obteve-se uma malha

de 13.863 nós (sendo 480 nós de contorno, com deslocamentos prescritos nulos) e 27.018 elementos. A numeração dos nós resultou numa diferença máxima de 149 entre o nó inicial e final de um elemento, conforme mostra a figura 7.5.1.

7.5.1. APLICAÇÃO DA PROTENSÃO

Para a primeira análise numérica considerou-se a cesta uniforme, com todos os cabos de diâmetro igual a 1 in (2,58 cm² de área metálica) e com um módulo de elasticidade do cabo igual a 90 kN/mm².

Foram aplicados 10 incrementos de 1 kN a todos os cabos tensores. Duas situações de carregamento foram consideradas: no primeiro caso desprezou-se o peso próprio dos cabos e no segundo caso o efeito conjunto do peso próprio e protensão foi levado em conta. O peso próprio foi totalmente aplicado junto com a primeira parcela de protensão. Para a resolução empregou-se o método do Gradiente Conjugado, e adotou-se um resíduo máximo de 1 N como critério de convergência.

Parcela de protensão	Número de iterações	
	Carreg. protensão	Carreg. prot. + pp
1	13606	6018
2	11500	2870
3	10850	2740
4	9591	2275
5	12012	2514
6	9041	2207
7	9731	1972
8	9167	2056
9	8130	2265
10	8241	1941
total de iterações	101.869	26.858

A análise da estrutura foi inicialmente realizada utilizando-se um computador PENTIUM II, de 450 MHz de freqüência e 512 Mbytes de memória RAM. Os resultados em termos de número de iterações encontram-se na tabela 7.5.1.

O método de Newton Raphson também foi testado, não obtendo-se convergência, no primeiro incremento de protensão e peso próprio, com menos de 3 horas de processamento. A matriz gerada é da ordem de 41.589 linhas e 450 colunas.

Para o segundo estudo considerou-se a estrutura com a distribuição real de cabos, isto é, tomou-se as seções transversais dos cabos como descrito na figura 7.4.2.

Procedeu-se a aplicação da força de protensão em duas etapas, procurando simular o procedimento de execução relatado em documentos da época (citados no item 7.3). Primeiramente foram esticados apenas os cabos tensores centrais (denominados de cabos 54 – 93 da figura 7.4.2) de maneira simétrica, com força de protensão igual a 100 kN. Em seguida os cabos restantes foram esticados com 10 kN, também de ambos os lados.

Os resultados obtidos com o programa MEF-cabos, com a resolução pelo método do Gradiente Conjugado encontram-se nas figuras 7.5.2 a 7.5.10. A análise foi realizada em uma estação de trabalho Sylicom modelo Origin 200.

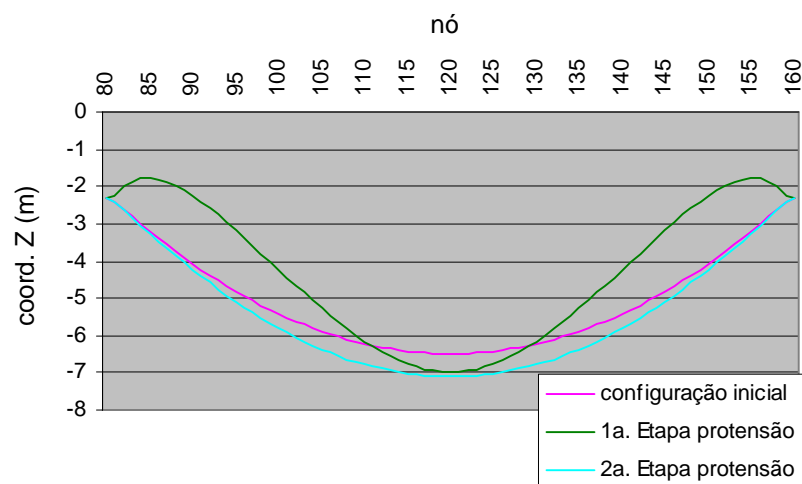


FIGURA 7.5.2: Coordenadas Z do cabo portante mais afastado do centro ($x=-104m$).

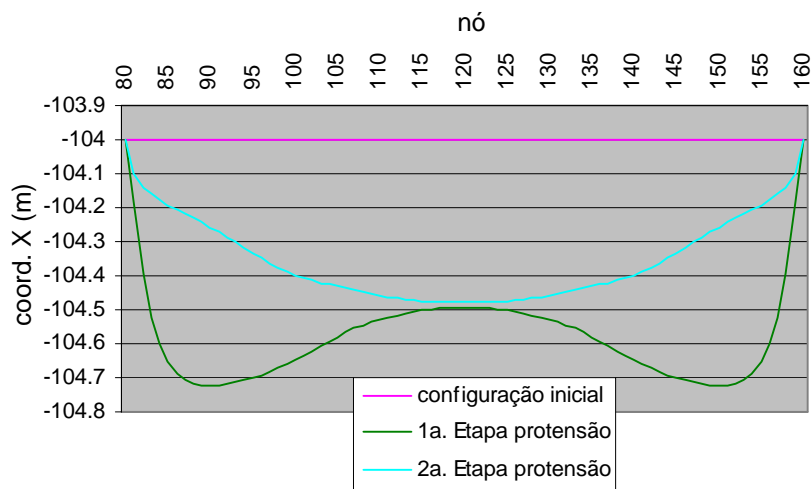


FIGURA 7.5.3: Coordenadas X do cabo portante mais afastado do centro ($x = -104\text{m}$).

A observação global dos resultados numéricos mostram maiores efeitos sobre os deslocamentos verticais e horizontais na região próxima à aplicação da protensão, diminuindo na região central da cesta. A análise local do cabo portante das figuras 7.5.2.e 7.5.3 indica que os deslocamentos maiores ocorrem nas laterais da região de protensão, na primeira etapa.

A segunda etapa de protensão providencia uma superfície mais regular e próxima da superfície inicial.

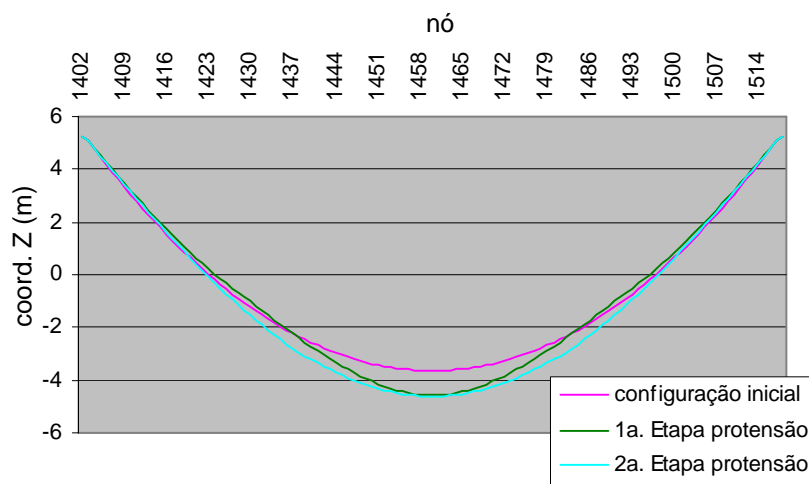


FIGURA 7.5.4: Coordenadas Z do cabo portante ($x = -78\text{m}$).

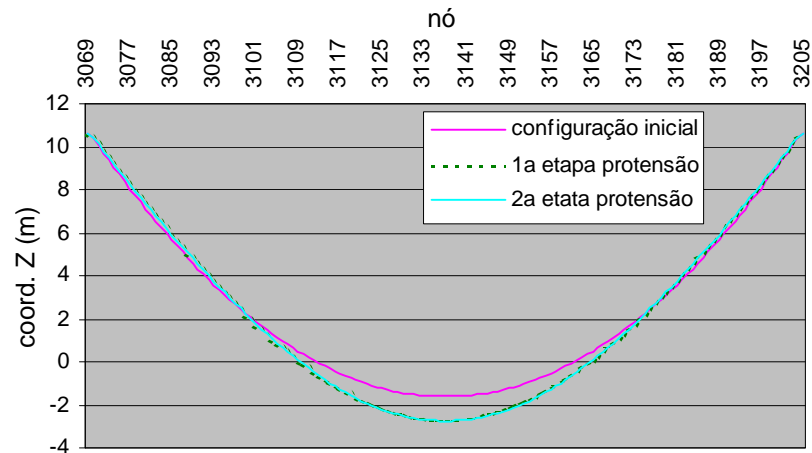
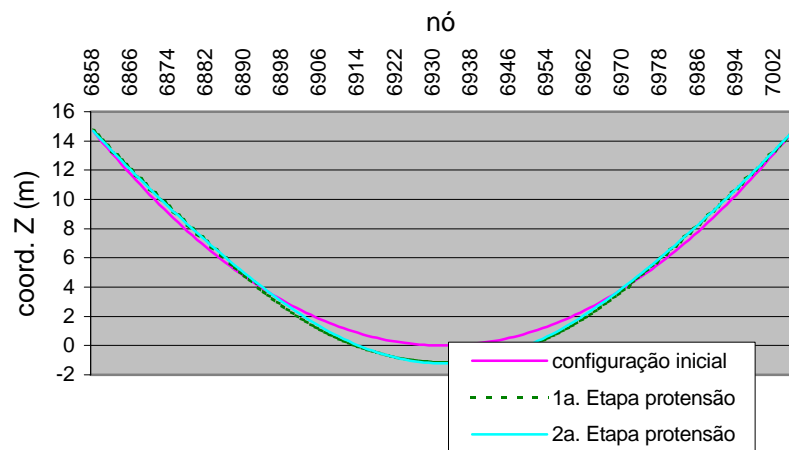


FIGURA 7.5.5: Coordenadas Z do cabo portante ($x=-52m$).



7.5.6: Coordenadas Z do cabo portante central ($x=0$).

FIGURA

A primeira etapa de protensão providencia um estado de tração em todos os elementos, com menores valores (entre 300 N a 600 N) nos elementos tensores próximos ao contorno, na área central da cesta (região mais abatida). No entanto, nesta configuração de equilíbrio, as forças nos cabos portantes próximos ao contorno (na região de aplicação da força) são excessivamente altas (figura 7.5.7) para os cabos dimensionados.

A segunda etapa proporciona uma drástica redução da força de tração nestes elementos, chegando-se a valores seguros. Portanto, sugere-se outro esquema de protensão por etapas alternadas de menores valores, entre a região central e os cabos tensores restantes.

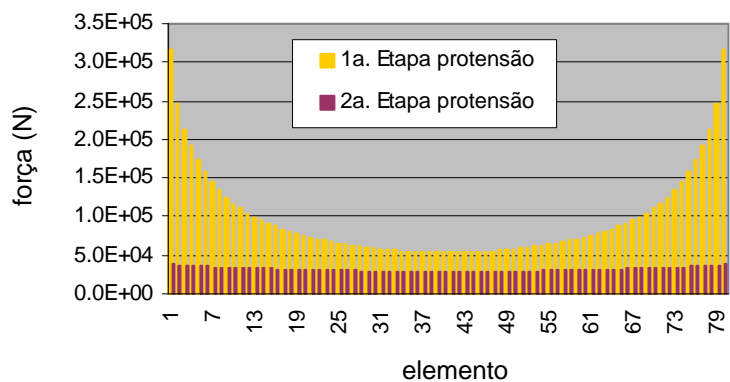


FIGURA 7.5.7: Força nos elementos do cabo portante entre os nós 80 a 160 ($x=-104\text{m}$).

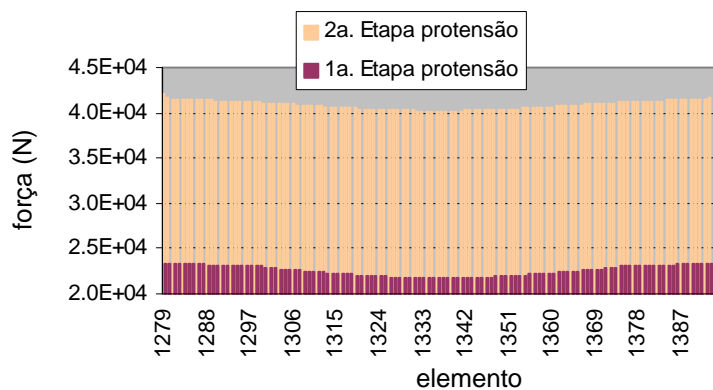


FIGURA 7.5.8: Força nos elementos do cabo portante entre os nós 1402 a 1518 ($x=-78\text{m}$).

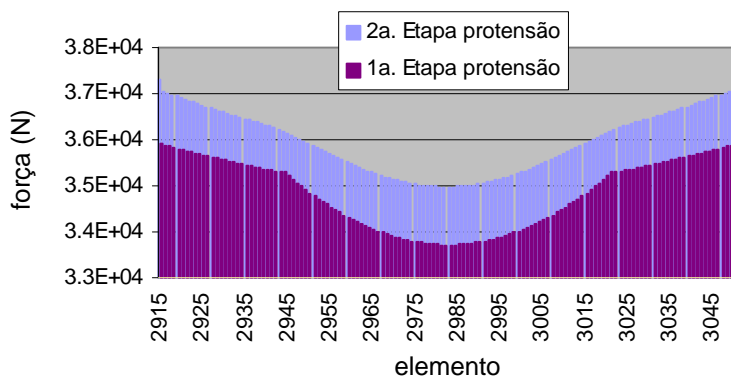


FIGURA 7.5.9: Força nos elementos do cabo portante entre os nós 3069 a 3205 ($x=-52\text{m}$).

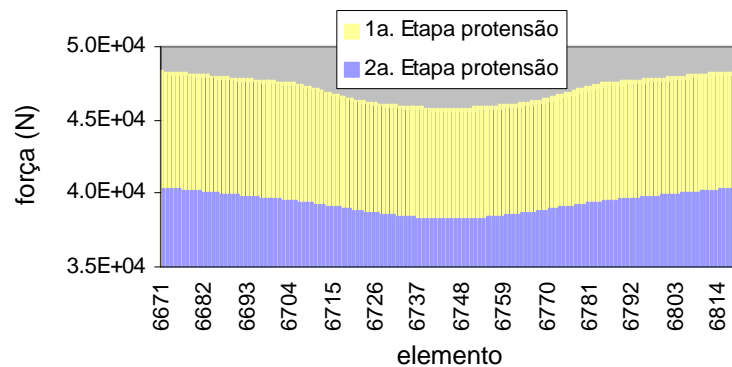


FIGURA 7.5.10: Força nos elementos do cabo portante central - nós 6858 a 7006 ($x=0$).

7.5.2. APLICAÇÃO DOS CARREGAMENTOS

A partir da configuração protendida foram aplicados 1.000 N/m^2 de ação de vento (velocidade de 40 m/s) e 100 N/m^2 de peso próprio correspondente à vedação. Deste modo resultam forças de 1.100 N/m^2 para baixo e 900 N/m^2 para cima. Considerando que a rede de cabos é regular de 1 m por 2 m , aplicou-se, em cada nó, uma força de 2.200 N para baixo e 1.800 N para cima.

As figuras seguintes mostram os esforços e as configurações deslocadas de alguns cabos portantes, para os carregamentos aplicados. As figuras 7.5.12 a 7.5.14 apresentam a força nos elementos de apenas metade do cabo portante, já que os valores são simétricos para a outra metade.

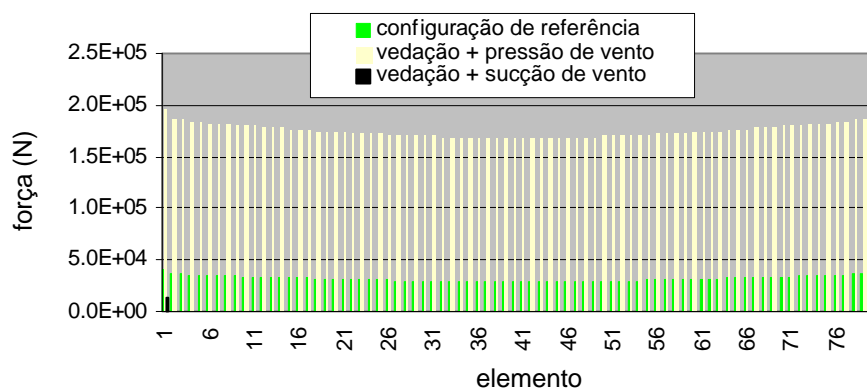


FIGURA 7.5.11: Força nos elementos do cabo portante entre os nós 80 a 160 ($x=-104\text{m}$).

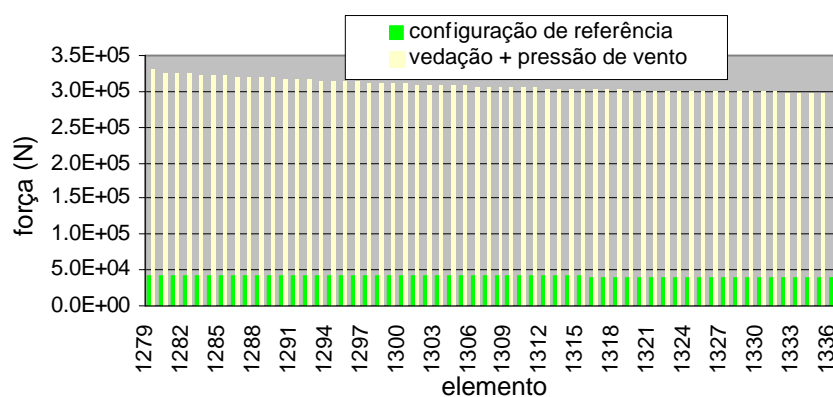


FIGURA 7.5.12: Força nos elementos do cabo portante entre os nós 1402 a 1460 ($x=-78\text{m}$).

Para o carregamento simulando a sucção de vento os elementos do cabo portante para $x=-78\text{ m}$ ficaram com reduzida força de tração (menos que 400 N).

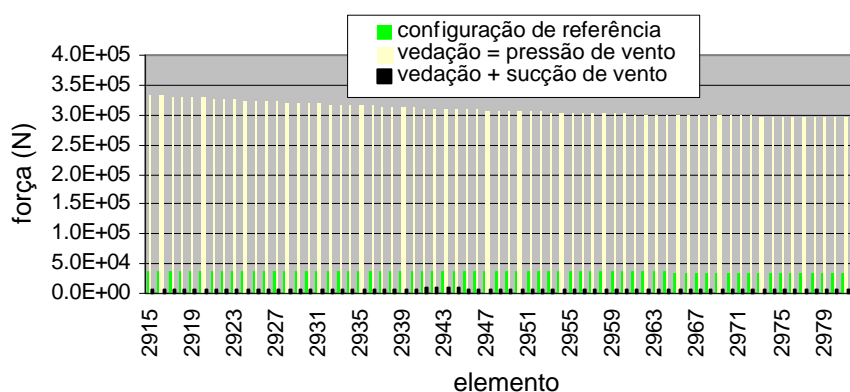


FIGURA 7.5.13: Força nos elementos do cabo portante entre os nós 3069 a 3137 ($x=-52\text{m}$).

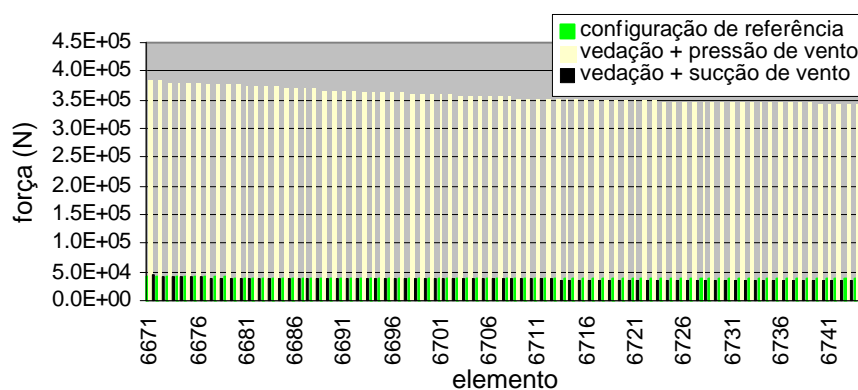


FIGURA 7.5.14: Força nos elementos do cabo portante central - nós 6858 a 6932 ($x=0$).

O resultado para o primeiro carregamento (vedação + pressão de vento) indicou 688 elementos de cabo destracionados e um grande número de elementos com baixa força de tração (2560 elementos com $T < 1\text{kN}$). Por outro lado os cabos portantes atingiram níveis de tensão muito elevados, o que poderia causar a ruptura de vários elementos.

Para o carregamento simulando a sucção de vento ocorreu um destracionamento dos cabos portantes na região das extremidades do eixo maior da cesta. Para o interior da cesta as variações de força diminuíram. E na região central, resultaram pequenas variações (para mais e para menos) em torno dos valores de força do estado de referência. Os cabos tensores, por sua vez, chegaram a níveis de tensão muito elevados, bem próximos ao de ruptura.

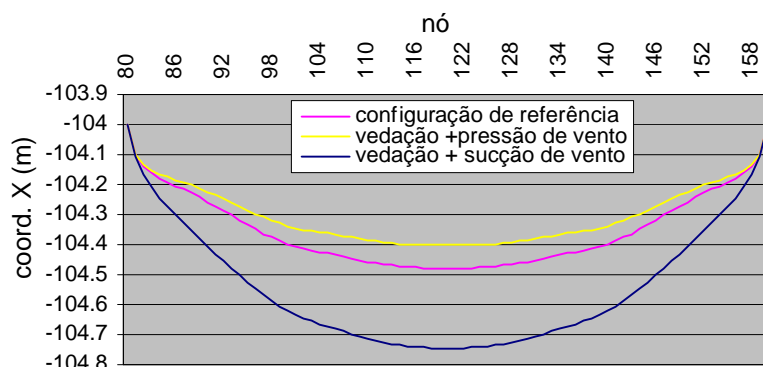


FIGURA 7.5.15: Coordenadas X do cabo portante mais afastado do centro ($x=-104\text{m}$).

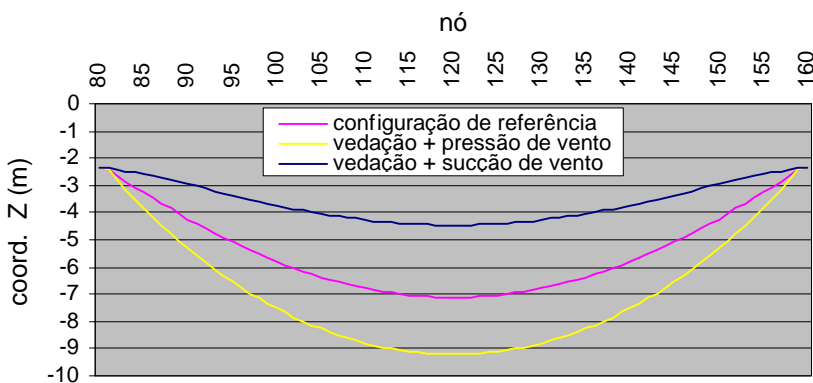


FIGURA 7.5.16: Coordenadas Z do cabo portante mais afastado do centro ($x=-104\text{m}$).

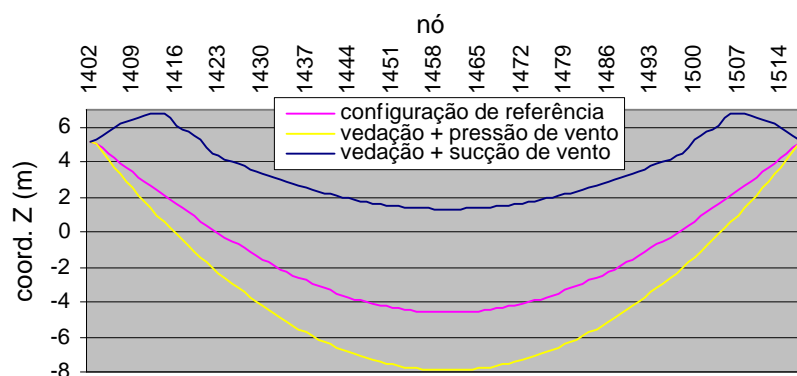


FIGURA 7.5.17: Coordenadas Z do cabo portante (x=-78m).

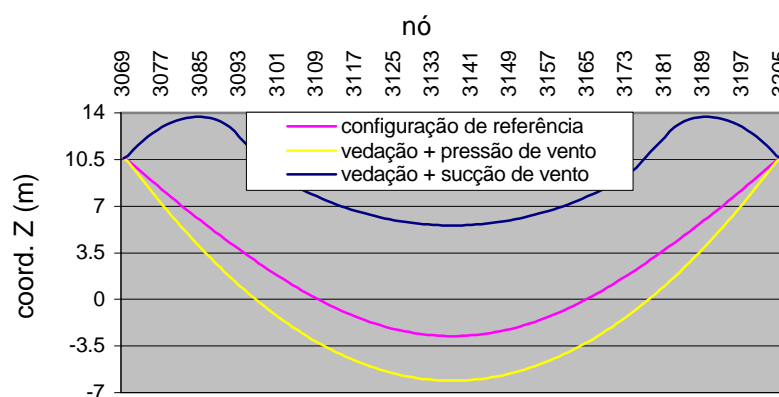


FIGURA 7.5.18: Coordenadas Z do cabo portante (x=-52m).

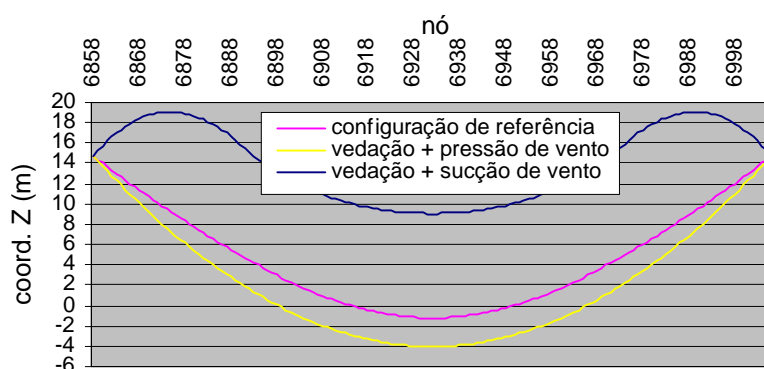


FIGURA 7.5.19: Coordenadas Z do cabo portante central (x=0).

Quanto aos deslocamentos horizontais, observa-se os maiores valores na região das extremidades do eixo maior da cesta, enquanto que os deslocamentos verticais crescem na região central.

7.5.3. COMENTÁRIOS SOBRE O PAVILHÃO DE SÃO CRISTÓVÃO

Para os casos de carregamento de vento considerados mostrou-se que a protensão aplicada é ineficiente. A ruptura da vedação ocorreria, já que não poderia absorver os deslocamentos excessivos resultantes. Por outro lado, a partir de um determinado deslocamento o sistema vedante passa a trabalhar junto com o sistema de cabos. Utilizando-se elementos de membrana poderia ser simulado essa contribuição das chapas metálicas na rigidez global da estrutura.

Além dos problemas com a vedação, devido às pequenas seções metálicas de cabo adotadas, ocorreria a ruptura de um grande número de cabos, o que levaria a estrutura ao colapso.

Cabe lembrar que o projeto original especificava cabos com alma de aço, que são menos deformáveis, e cabos espia foram colocados na região de pequena curvatura, como descrito no item 7.2, para reduzir os deslocamentos devidos à sucção de vento. Na época de sua realização o cálculo da estrutura do pavilhão foi realizada a partir de métodos simplificados, e considerou-se um valor para a ação de vento bem menor que os carregamentos deste estudo.

Um sensível aumento da rigidez da estrutura pode ser obtido com o aumento da flecha dos cabos tensores e diminuição da flecha dos cabos portantes, obedecendo as características geométricas do contorno. Com essa providência, certamente a aplicação da protensão seria também mais efetiva.

CAPÍTULO 8

COMENTÁRIOS FINAIS

8.1. SOBRE O COMPORTAMENTO DE ESTRUTURAS DE CABOS

As estruturas de cabo são do tipo carga-adaptadas, isto é, elas mudam as suas características geométricas para melhor absorver as mudanças de forma e magnitude do carregamento. Em outras palavras, a configuração de equilíbrio do cabo depende do estado de carregamento aplicado.

Devido às suas características de rigidez reduzida à flexão, as estruturas tracionadas, em geral, são suscetíveis a grandes movimentos devido principalmente a cargas concentradas. Nestas condições as estruturas de cabos têm comportamento geometricamente não linear, mesmo que haja linearidade física do material e linearidade de carregamento.

Na teoria de pequenas deformações e grandes deslocamentos considerada no presente trabalho, os segmentos de reta que modelam o cabo não sofrem alongamentos significativos, mas transladam e rodam apreciavelmente, isto é, eles sofrem rotações relativas grandes sob ações aplicadas.

A resposta pode ser não linear ou quase linear dependendo da magnitude e direção das forças aplicadas em relação ao estado de protensão. Em estruturas, como as cestas e cabos-treliça, adequadamente

protendidas os deslocamentos são pequenos, e portanto o comportamento pode ser admitido quase linear. Já nos cabos livremente suspensos o efeito da protensão é substituído por uma vedação pesada, produzindo um sistema pênsil com deslocamentos pequenos, podendo-se pensar em tratamento quase linear.

A magnitude dos deslocamentos para todas essas ações depende, além da relação entre a carga aplicada e a protensão atuante na configuração de referência, e da localização do ponto de aplicação do carregamento, também da flecha inicial dos cabos e das propriedades elásticas do material. Estrutura de cabo com maior curvatura inicial, maior rigidez axial (EA) e maior nível de protensão tende a responder com menores deslocamentos a carregamentos aplicados. Já para um cabo-treliça, por exemplo, com pequena relação flecha/vão nos cabos tensor e portante, necessita-se aplicar uma força de protensão muito grande, causando grandes esforços na estrutura de apoio.

BUCHHOLDT (1985) recomenda adotar flechas entre 4% e 6% do vão para se obter uma estrutura de cabo com comportamento estrutural satisfatório. Segundo o mesmo autor, para cestas com contorno rígido, com arcos, uma curvatura correspondendo a uma relação flecha/vão entre 3% a 6% é suficiente e para o caso de contorno flexível pode ser necessária uma curvatura maior.

Para uma cesta protendida em forma de parabolóide hiperbólico com contorno elíptico, PFEIL & HALLAK [1997] fizeram um estudo da influência da estrutura de contorno no comportamento da estrutura de cabos. No caso do contorno rígido (todos os deslocamentos impedidos) verificaram que o comportamento da cesta era praticamente linear para um carregamento crescente e uniformemente distribuído e a rigidez da cesta era maior para o caso de maior curvatura. Como se esperava, houve um aumento da força de tração nos cabos portantes e diminuição nos cabos tensores. Além disso, observaram que o nível de protensão não afetava significativamente os deslocamentos.

No caso de contorno flexível, com apenas deslocamentos verticais

restritos, a mesma cesta exibiu um comportamento não linear. Ao contrário do que se esperava os autores relatam maiores deslocamentos horizontais no contorno produzidos por malha de cabo com maior curvatura. Além disso, foram observados acréscimos de esforços tanto nos cabos portantes como nos tensores, quando se aumentava o carregamento vertical. E ficou evidente que o nível de protensão influía consideravelmente na rigidez da cesta.

Um fato a lembrar se refere à acomodação dos fios dos cabos ao longo do tempo, com conseqüente perda da protensão nos cabos, e portanto, uma perda de rigidez da estrutura.

8.2. SOBRE OS PROCESSOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL

Quanto à análise estrutural segundo o ASCE [1995] (Structural Applications of Steel Cables for Buildings) numa análise não-linear de uma estrutura de cabos podem ser necessárias as seguintes considerações: (1) o efeito dos deslocamentos dos nós sobre o equilíbrio dos nós; (2) os termos não lineares nas equações para a mudança do comprimento; (3) equações constitutivas não lineares. Destes itens a influência dos deslocamentos dos nós é o mais importante. Como os deslocamentos devidos às cargas permanentes são freqüentemente muito maiores que os deslocamentos devidos às cargas acidentais, a análise não-linear pode ser dispensável, nos estágios finais de análise.

Quanto à modelagem matemática, as estruturas de cabos podem ser resolvidas por meio de técnicas do meio contínuo ou por processos discretos.

O sucesso de uma modelagem discreta da estrutura para determinação dos deslocamentos depende do procedimento iterativo adotado. Vários procedimentos estão disponíveis para resolver o problema não linear da análise estrutural, mas existem poucas informações sobre a taxa de convergência no estudo de estruturas de cabos. Estudos recentes sugerem que a utilização de técnicas de minimização direta da energia

potencial total é um caminho econômico para se obter as soluções para grandes sistemas, como ficou comprovado na análise do pavilhão de São Cristóvão (capítulo 7).

Segundo BUCHHOLDT & McMILLAN [1971] que compararam vários métodos de solução, o método do Gradiente Conjugado parece adequado à análise de grandes estruturas não-lineares, devido à pouca necessidade de armazenamento e devido às características de convergência relativamente rápida. Alguns autores citam que a vantagem desses métodos consiste em evitar os problemas de divergência que poderiam ocorrer em problemas não lineares. Isto não ficou comprovado com o exemplo do cabo livremente suspenso (capítulo 6, item 6.2.3). No presente estudo o que se pode com certeza afirmar é a viabilidade do método do Gradiente Conjugado em problemas estruturais de grande porte, como no caso do exemplo de São Cristóvão.

No caso do emprego do método de Newton-Raphson, em problemas que envolvem grande número de incógnitas, a resolução do sistema de equações lineares por meio de métodos iterativos pode ser uma alternativa para melhorar o tempo de processamento.

Na análise comparativa entre o método de Newton-Raphson e o método do Gradiente conjugado, constata-se que este último converge mais vagarosamente em termos do número de iterações, contudo a sua compacidade é que o faz atraente para a análise de grandes estruturas, e o torna adequado para o uso em micro e minicomputadores.

8.3. SOBRE A ANÁLISE DE CAPACIDADE ÚLTIMA

Na análise teórica das estruturas são adotados modelos simplificados, que devem representar o comportamento do material de maneira satisfatória. Do ponto de vista prático, as estruturas atuais vêm exigindo um projeto cada vez mais racional, o que implica no emprego de técnicas de análise mais requintadas, que permitam prever o comportamento da estrutura nas fases de utilização e até mesmo em regime

de ruptura. Portanto cresce o interesse no desenvolvimento de formulações que utilizam relações constitutivas mais complexas, e que levam necessariamente à análise não linear física.

Depois que o limite elástico do cabo é alcançado, o problema da resposta torna-se mais difícil devido a não linearidade com respeito à geometria e às propriedades do material. O carregamento que leva um segmento de cabo alcançar o limite elástico pode ser encontrado com a teoria elástica linear, mas para determinar o maior carregamento, após o que qualquer incremento de carregamento levaria ao colapso (carregamento último), considerações precisam ser adicionadas para obter a resposta pós-elástica.

A carga que causa o colapso é sempre bem maior que a carga pertencente ao limite elástico. Um cabo suspenso resiste a carregamento aplicado pela mudança na força de tração e na geometria. Além do limite elástico mudanças nos esforços e na geometria podem ainda ocorrer para acomodar o aumento de carga.

Mudanças na força de tração dos cabos ocorrem por causa da pronunciada característica de endurecimento (*strain-hardening*) de aços de alta resistência freqüentemente usados em cabos, para os quais não há um patamar de escoamento definido. Para o aço usado em cabos, a relação de deformação última para a deformação do limite elástico é pequena, sendo da ordem de 10. Isto pode ser contrastado com o aço doce, que tem uma plataforma de escoamento claramente definido, onde esta relação pode ser da ordem de 100 ou mais.

O colapso ocorre quando a deformação última é alcançada em alguma porção do cabo. Um parâmetro que define uma ligação frágil na corrente (*weakest link in the chain*), obviamente explicaria o colapso real e precisaria ser considerado no cálculo do alongamento cumulativo para o cabo inteiro.

Por outro lado, uma característica de cabos suspensos, relativamente abatidos, consiste no fato de que pequenas mudanças no comprimento do cabo dão origem a uma substancial mudança na geometria do cabo. Mesmo

sendo a deformação não recuperável pequena, este comportamento junto com o efeito de endurecimento torna possível para o carregamento que causa o colapso ser freqüentemente muito maior que o carregamento que apenas chega ao limite elástico.

8.4. SOBRE OS PROCEDIMENTOS DE MONTAGEM

Durante o processo construtivo de uma cobertura empregando estrutura de cabos toda a sequência de elevação da estrutura proposta deve ser detalhada, e todos os procedimentos devem ser previstos já na fase do projeto estrutural. Os casos de carregamentos e a respectiva configuração do cabo devem ser avaliados, levando-se em conta o comportamento de carga-adaptativa destas estruturas. Isto significa que o comportamento peculiar de estruturas de cabos pode exigir do projetista mais atenção aos procedimentos de construção que normalmente exigiriam as estruturas mais rígidas. As conexões e ligações dos cabos, os dispositivos de ancoragem e os próprios cabos devem estar aptos a resistir a uma grande variação de estados de carregamentos.

Além disso, a fase de montagem representa o teste mais severo para a estrutura de apoio. Em geral, as estruturas de contorno fechadas, como os anéis, arcos ou quadros mostram maior sensibilidade aos procedimentos de elevação e protensão. Também os cabos podem sofrer grandes deslocamentos durante a colocação do sistema vedante, devido à necessidade da colocação gradual dos elementos de vedação.

Segundo alguns autores, dentre eles MAJOWIECK [1985], na realização de uma estrutura de cabos a montagem constitui a fase mais importante, pois influirá de maneira decisiva no comportamento estático final da estrutura. É essencial a determinação cuidadosa do comprimento inicial dos cabos, a localização precisa das estruturas de apoio, e exercer um controle rigoroso na obtenção da geometria definida em projeto e das tensões iniciais.

Assim, uma vez escolhida uma técnica de montagem, muitas vezes é

necessário a análise na direção contrária, partindo-se da geometria esperada, e passo a passo obter a geometria inicial (comprimento dos cabos). Também as conexões devem ser especiais, de modo a permitir fácil ajustamento e assim obter uma requerida geometria modificada. Finalmente aparelhos de medição devem ser previstos, para o acompanhamento das variações de força e deslocamentos, durante a fase de montagem e por toda a vida útil da estrutura.

Embora a ordem de operações na construção de uma cobertura pênsil não possa ser generalizada, usualmente constrói-se primeiro a estrutura de suporte, colunas, anéis ou quadros, incluindo-se as ancoragens e fundações. A ordem de montagem da estrutura de cabos também não pode ser generalizada, mas habitualmente procede-se como descrito a seguir.

Em estruturas planas, empregando cabos-treliça, os cabos portante e tensor são conectados ainda no chão, e a estrutura de cabos já assume uma forma próxima da geometria definitiva. A fase de fixação das ligações é a mais importante mas ao mesmo tempo a fase mais simples, já que todas as operações são realizadas ainda no chão. Em seguida a estrutura é elevada e os cabos são fixados nos terminais de ancoragem. A última operação antes da colocação do sistema vedante é a aplicação da protensão, através de macacos hidráulicos e com auxílio de instrumentos de medição.

No caso de coberturas com planta retangular, os cabos-treliça são dispostos paralelamente, e a aplicação da protensão é realizada individualmente, já que não ocorre nenhuma interação entre os cabos-treliça. No caso de coberturas com planta circular, uma estrutura radial de cabos-treliça pode ser apoiada em um anel central tracionado e em um anel exterior comprimido. Neste caso as treliças interagem entre si, não sendo possível a aplicação da protensão separadamente. O procedimento ideal seria a aplicação simultânea da protensão em todos os cabos, mas isso é praticamente impossível. Sugere-se uma seqüência de aplicação da protensão em cabos com simetria radial.

No caso de cestas, cuja estrutura de contorno consiste de estrutura circular em planta, por exemplo, mas com elevações em forma de sela. Inicialmente são posicionados os cabos tensores, compondo uma curvatura oposta àquela final de projeto. Em seguida são montados os cabos portantes, que suportam os cabos tensores, e são fixados os conectores. Finalmente procede-se a protensão por meio de pares de macacos e o controle da aplicação da força é feito mediante a observação das medidas geométricas do contorno, que devem coincidir com os valores teóricos calculados.

8.5. SOBRE A APLICAÇÃO DA PROTENSÃO

O bom desempenho das cestas protendidas e dos cabos-treliça está diretamente ligado às técnicas de protensão empregadas. Ou seja, um nível de protensão adequado vai garantir um bom desempenho estrutural sob as várias ações a que a estrutura estará sujeita durante sua vida útil.

O procedimento de protensão deve ser escolhido, dentro das limitações técnicas, aquele que permite o tracionamento dos cabos de maneira mais eficiente. Além disso, a seqüência de protensão adotada não deve provocar mudanças bruscas nas características geométricas iniciais da estrutura. E em todas as etapas o limite de tensão elástica, para os cabos mais solicitados, não deve ser ultrapassado.

Como o processo de aplicação da protensão é gradativo, o modelo matemático deve simular estas etapas, e a análise do comportamento da estrutura de cabos deve ser feita de modo incremental, como já descrito.

8.6. SOBRE O SISTEMA VEDANTE

O tipo de vedação a ser empregado em coberturas pênseis depende essencialmente do tipo de sistema estrutural de cabos. No caso de cabos-treliça e cestas protendidas a vedação pode ser leve. No caso de estruturas de cabos livremente suspensos os elementos vedantes devem ser pesados

para aumentar a rigidez da estrutura.

Quanto ao material de vedação para uma cobertura suspensa, este deve ser durável e também satisfazer às exigências de boa estanqueidade, de isolamento térmico, de isolamento acústico e às vezes de translucidez. De preferência deveria resistir a esforços em qualquer direção, ter uma pequena ondulação ou ter propriedades elásticas suficientes para acompanhar o movimento da rede de cabos.

O sistema vedante, em geral, pode ser constituído de material monolítico, composto de um conjunto de placas pré-fabricadas, ou executado com material corrugado.

No caso de sistema monolítico, é frequente a execução de uma camada de concreto de 2 cm de espessura sobre uma malha de fios (argamassa armada), que é conectada aos cabos. Outras camadas de materiais impermeabilizantes e isolantes térmicos são necessárias. A membrana monolítica de concreto é muito sensível aos deslocamentos da cobertura, e surgem pequenas fissuras, embora a malha de fios distribuída dê ao concreto melhor resistência à tração. Recomenda-se dividir a superfície coberta em pequenas áreas, através de juntas de dilatação, para permitir pequenos movimentos relativos, quando a estrutura de cabos da cobertura se desloca.

Os elementos pré-fabricados, por exemplo chapas de concreto leve, chapas de madeira e plásticas formam sistemas vedantes muito flexíveis devido às juntas existentes. Nestes casos, embora a mobilidade da cobertura suspensa seja inevitável, deve-se evitar grandes deslocamentos relativos entre as placas. As juntas podem ser cobertas com a superposição de outros materiais, que assegurem a continuidade da cobertura.

Chapas metálicas (cobre, zinco, alumínio) corrugadas ou lisas constituem os elementos de vedação mais leves, e devem ser fixadas de tal forma a permitir livre movimento da rede de cabos, com as juntas feitas por justaposição.

Para satisfazer todas as exigências de uma boa cobertura, muitas vezes torna-se necessária a colocação de outros materiais sobre os

elementos de vedação, por exemplo cortiça, lã de vidro, massa betuminosas, etc. No caso de ambientes sujeitos a vapores (piscinas cobertas aquecidas) recomenda-se proteção contra umidade.

8.7. SOBRE A CONTINUIDADE DA PESQUISA

O presente estudo teve como objetivo a análise do comportamento de estruturas de cabos sob carregamentos estáticos. Para isso foi implementado um programa, que permite o cálculo dessas estruturas desde a fase de protensão até a sua capacidade última. A formulação adotada considera a não linearidade geométrica e física, propriedades inerentes às estruturas de cabos. Os métodos de resolução empregados mostraram-se eficientes nos casos de grande deslocabilidade da estrutura, e perfeitamente viáveis em problemas com grande número de incógnitas. Com isso desenvolveu-se um programa simples, suficientemente preciso e compacto para a utilização de microcomputadores pessoais para a análise não linear de estruturas de cabos planas e tridimensionais.

Como uma continuidade da pesquisa nesta área é sugerida a análise do comportamento da estrutura de cabos ao longo do tempo, considerando o efeito da perda de protensão dos cabos. Além disso, alguns exemplos de estruturas de cabos com contorno flexível devem ser investigados.

Outra área de pesquisa futura poderia tratar da investigação de outros métodos de resolução, como os métodos quasi-Newton, para o problema não-linear de estruturas de cabos.

Lembrando que, para o caso de estruturas planas, uma formulação para o estudo do efeito dinâmico do vento foi implementado na dissertação de mestrado (em OSHIMA [1987]), é proposta uma extensão para o estudo do comportamento dinâmico de cestas.

BIBLIOGRAFIA

ABOUL-ELLA, F. (1991). New iterative analysis of cable-stayed structures. *Computers and Structures*, v.40, n.3, p.549-554.

AGUIAR, E.O.; BARBATO, R.L.A. (1998). Post-elastic analysis of cable structures [CD-ROM]. In: WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, 4., Buenos Aires, Argentina, 29 June- 2 July 1998 (IDELSOHN, S.R.; ONATE, E.; DVORKIN, E.N., eds. *Computational mechanics : new trends and applications*). Barcelona, CIMNE/IACM.

AI, M.; NAKANO, T.; MASUDA, S. (1994). Consideration on the slackened and tightened cables. *Structural Engineering / Earthquake Engineering*, v.11, n.3, p.141-144.

AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS (1997). *ASCE Standard 19/96 – Structural applications of steel cables for buildings*. New York, USA.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS (1996). *ASTM A-931/96 - Standard testing method for tension testing of wire ropes and strand*. Philadelphia, USA.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS (1998). *ASTM A-586/92 - Standard specification for zinc-coated parallel and helical steel wire structural strand*. Philadelphia, USA.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS (1998). *ASTM A-603/94 - Standard specification for zinc-coated steel structural strand rope*. Philadelphia, USA.

ARCARO, V.F.; PULINO, A.R.; IGUTI, F. (1990). Treliça - grandes deslocamentos e grandes deformações. In: CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA A ENGENHARIA, 11., Rio de Janeiro, 29-31 out. 1990. *Anais*. Rio de Janeiro, COPPE-UFRJ/AMC. v.1, p. 37-45.

- ARCARO, V.F. (1992). Treliza : análise não linear inelástica. In: CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 13., Porto Alegre, 23-25 nov. 1992. *Anais*. Porto alegre, CPGEC-UFRGS. v.1, p. 171-180.
- ARCARO, V.F. (1996). *Contribuição ao projeto de coberturas tridimensionais*. Campinas. 167 p. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP.
- ARGYRIS, J.H.; ANGELOPOULOS, T.; BICHAT, B. (1974). A general method for shape finding of light weight tension structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.3, p.135-149.
- ARGYRIS, J.H.; FLUH, H.H. (1983). On the dynamic response of lightweight structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.38, n.3, p.347-369.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1985). *NBR 5909 - Cordoalhas de fios de aço zincados, para estais, tirantes, cabos mensageiros e usos similares : especificação*. Rio de Janeiro, ABNT.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1998). *NBR ISO 3108 - Cabos de aço para uso geral : determinação da carga de ruptura real*. Rio de Janeiro, ABNT.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1998). *NBR 6327 - Cabos de aço para uso geral*. Rio de Janeiro, ABNT.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1998). *NBR ISO 3178 - Cabos de aço para uso geral : termos de aceitação*. Rio de Janeiro, ABNT.
- AUFAURE, M. (1993). Finite element of cable passing through a pulley. *Computers and Structures*, v.46, n.5, p.807-812.
- AVENT, R.R. (1969). Nonlinear field analysis of structural nets. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.95, n.5, p.889-907.
- BANDEL; H.K. (1969). The hanging cable under three-dimensional loading and temperature change. *Der Bauingenieur*, Berlin, v.37, n.4, p.145-146.
- BARBATO, R.L.A. (1972). *Sobre o comportamento estático de cabos de coberturas pênséis*. São Carlos. 90 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- BARBATO, R.L.A. (1975). *Contribuição ao estudo das coberturas pênséis em casca protendida de revolução*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.

- BARBATO, R.L.A. (1991). *Emprego de cabos livremente suspensos e cabos-treliça na construção de coberturas pênseis*. São Carlos. Tese (Livre-docência) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- BARNES, M.R. (1975). Applications of dynamic relaxation to the design and analysis of cable, membrane and pneumatic structures. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURES, 2., Guildford.
- BARNES, M.R. (1980). Non-linear numerical solution methods for static and dynamic analysis of tension structures in air-supported structures: state of the art. *The Institution of Structural Engineers*, London, U.K., p. 38-56.
- BARNES, M.R. (1988). Form-finding and analysis of prestressed nets and membranes. *Computers and Structures*, v.30, n.3, p.685-695.
- BARNES, M. (1994). Form and stress engineering of tension structures. *Structural Engineering Review*, v.6,n. 3-4, p.175-202.
- BARON, F.; VENKATESAN, M.S. (1971). Nonlinear analysis of cable and truss structures. *Journal of the Structural Divison*, ASCE, v.97, n.ST2, p.679-710.
- BISBOS, C.D. (1994). Superposition in stress-unilateral cable structures. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL STRUCTURES TECHNOLOGY PART 1, 2., Athens, Greece. *Proc.*
- BROTTON; D.M.; WILLIAMSON, N.W.; MILLAR, M. (1963). The solution of suspension bridge problems by digital computers- Part I. *The Structural Engineer*, v.41, n.4.
- BROUGHTON, P.; NDUMBARO, P. (1994). *The analysis of cable and catenary structures*. London, U.K., Thomas Telford, 88p.
- BUCHHOLDT, H.A. (1966). Deformation of prestressed cable-nets. *Acta Polytechnica Scandinavica*, Trondheim, Noway, Series(b), n.138.
- BUCHHOLDT, H.A. (1967). The behaviour of small prestressed cable roofs subjected to uniformly distributed loading. In: DAVIES, R.M. *Space structures*. Oxford, Blackwell Scientific. Chap.77, p.907-915.
- BUCHHOLDT, H.A.; McMILLAN, B.R. (1972). Iterative methods for the solution of pretensioned cable structures and pinjointed assemblies having significant geometrical displacements. In: IASS PACIFIC SYMPOSIUM - PART II: ON TENSION STRUCTURES AND SPACE FRAMES, Tokyo and Kyoto, Oct. 17-23, 1971. *Proc.* Tokyo, Architectural Institute of Japan, p.305-316.

- BUCHHOLDT, H.A.; MOOSSAVINEJAD, S. (1982). Nonlinear dynamic response analysis using conjugate gradients. *Engineering Structures*, v.4, p.44-52.
- BUCHHOLDT, H.A. (1985). *An introduction to cable roof structures*. Cambridge, Cambridge University Press. 257p.
- CABLE-SUSPENDED roof construction state-of-the-art. (1971). *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.97, n.6, p.1715-1761.
- CANNAROZZI, M. (1985). Stationary and extremum variational formulations for the elastostatics of cable networks. *Meccanica*, v.20, n.2, p.136-143.
- CANNAROZZI, M. (1987). A minimum principle for tractions in the elastostatics of cable networks. *International Journal Solids Structures*, v.23, n.5, p.551-568.
- CLARKE, D. (1980). Design of counter-stressed cable structures. *Journal of the Structural Division*, v.106, n.11, p.2259-2278.
- CHISALITA, A. (1884). Finite deformation analysis of cable networks. *Journal of Engineering Mechanics*, ASME, v.110, n.2, p.207-223.
- CHU, K.-H.; MA, D.C. (1976). Nonlinear cable and frame interaction. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.102, n.3, p.569-589.
- CINQUINI, C.; CONTRO, R. (1985). Prestressing design method for cable net structures. *Engineering Structures*, v.7, p.183-189.
- CONTRO, R.; MAYER, G.; ZAVELANI, A. (1975). Inelastic analysis of suspension structures by nonlinear programming. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, v.5, p.127-143.
- CONTRO, R.; MAYER, G. (1986). Inelastic analysis of pretensioned cable structures by mathematical programming. In: PAVILOVIC, M.N., eds. *Steel structures : recent research advances and their applications to design*. p.85-105.
- CONTRO, R. (1985). Prestressing design method for cable net structures. *Engineering Structures*, v.7, p.183-188.
- COYETTE, J.P.; GUISET, P. (1988). Cable network analysis by a nonlinear programming technique. *Engineering Structures*, v.10, p.41-46.
- CRAILA, E. (1993). Studies of the evolution of prestressing forces in members of large-span suspended structures. In: PARKE, G.A.R.; HOWARD, C.M., eds. *Space Structures*. London, U.K., Thomas Telford. v.1.

- CZITARY, E. (1951). *Seilschwebbahnen*. Viena, Áustria, Springer Verlag.
- DAL MASO, L.B. (1988). Roma dos césaes, *Collana Italia Artistica*, Firenze, n.8,126 p.
- DAVID, R.A. (1995). *Estudo de cestas protendidas pela técnica do meio* São Carlos. 102 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- DEAN, D. L.; UGARTE, C. P.(1963). Analysis of structural nets, *Publication IABSE*. Zurich, Switzerland, v.23, p.71-90.
- DESAI, Y.M.; et al. (1988). Geometric nonlinear static analysis of cable supported structures. *Computers and Structures*, v.29, n.6, p.1001-1009.
- DOMINGUEZ, R.F.; SMITH, C.E. (1972). Dynamic analysis of cable systems. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.98, n.ST8, p.1817-1834.
- DREW, P. (1979). *Tensile architecture*. Hampshire, Great Britain, Granada Publishing Limited, 237p.
- EISENLOFFEL, K.; ADELI, H. (1994). Interactive microcomputer-aided analysis of tensile network structures. *Computers and Structures*, v.50, n.5, p.665-675.
- EL DEBS, A.L.H.C. (1983). *Contribuição ao estudo das coberturas pênseis com cabos-treliça*. São Carlos. 144 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- EPSTEIN, M.; TENE, Y. (1971). Nonlinear analysis of pin-jointed space trusses. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.97, n.9, p.2189-2202.
- ERAS, G.; ELZE, H. (1963). Cable networks their calculation and statically advantageous shape. In: IASS COLLOQUIUM ON HANGING ROOFS, CONTINUOUS METALLIC SHELL ROOFS AND SUPERFICIAL LATTIC ROOFS, Paris, France, July 1962. *Proc.* New York, John Wiley and Sons, p.68-75.
- ERNST, H.J. (1965). Der E-modul von Seilen unter Berücksichtigung des Durchhanges. *Der Bauingenieur*, v.40, n.2, p.52-55.
- ESCHENAUER H.; JENDO S. (1986). Multiobjective optimization of cable structures. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, v.66, n.5, p.T342-T343.

- FELLIPA, C.A. (1974). Finite element analysis of three-dimensional cable structures. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL METHODS IN NONLINEAR MECHANICS. *Proc.*, p.311-324.
- FERRETI, A.S.; ZINGALI, A. (1972). A large span hanging roof : The Palasport in Milan. Preliminary Report. In: IABSE CONGRESS, 9., Amsterdam. *Proc.* p.413-418.
- FRIED, I. (1982). Large deformation static and dynamic finite element analysis of extensible cables. *Computers and Structures*, v.15, n.3, p.315-319.
- GAMBHIR, M.L.; BATCHELOR, B.V. (1977). A finite element for 3-D prestressed cablenets. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, v.11, p.1699-1718.
- GESCHWINDNER JR., L.F.; WEST, H.H. (1981). Nonlinear dynamic analysis of cable roof networks. In: LONG SPAN ROOF STRUCTURES, Oct. 26-30, 1981, *Proc.*, p.313-330.
- GODBOLE, P.N.; KRISHNA, P.; JAIN, J.K. (1984). Boundary effects in suspended cable roofs. *Journal of the Structural Engineering*, ASCE, v.110, n.5, p.1099-1113.
- GREENBERG, D.P. (1970). Inelastic analysis of suspension roof structures. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.96, n.5, p.905-930.
- HABER, R.B.; ABEL, J.F. (1982a). Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes. Part 1: formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, v.30, p.263-284.
- HABER, R.B.; ABEL, J.F. (1982b). Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes. Part 2: implementation. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, v.30, p.263-284.
- HAUG, E.; POWELL, G.H. (1972a). Analytical shape finding for cable nets. In: IASS PACIFIC SYMPOSIUM ON TENSION STRUCTURES AND SPACE FRAMES, Tokyo and Kyoto, 1971. *Proc.*
- HAUG, E.; POWELL, G.H. (1972b). Finite element analysis of nonlinear membrane structures. In: IASS PACIFIC SYMPOSIUM ON TENSION STRUCTURES AND SPACE FRAMES, Tokyo and Kyoto, 1971. *Proc.*
- HENGHOLD, W.M.; RUSSELL, J.J. (1976). Equilibrium and natural frequencies of cable structures (a nonlinear finite element approach). *Computers and Structures*, v.6, p.267-271.

- HENGHOLD, W.M.; RUSSELL, J.J. (1977). Free vibrations of cable in three dimensions. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.103, n.5, p.1127-1136.
- HOSOZAWA O.; SHIMAMURA K.; MIZUTANI T. (1999). The role of cables in large span spatial structures: introduction of recent space structures with cables in Japan. *Engineering Structures*, v.21, n.8, p. 795-804.
- HSIAO, K.M.; HOU, F.Y. (1987). Nonlinear finite element analysis of elastic frames. *Computers and Structures*, v.26, p.693-701.
- HUSIAR, B.; SWITKA, R. (1986). Creep and relaxation in net structures. In: IASS SYMPOSIUM ON MEMBRANES STRUCTURES AND SPACE FRAMES, Osaka, Japan. *Proc. (HEKI, K., eds. Shells, membranes and spaces frames)*. Amsterdam, Elsevier, v.2, p.63-70.
- IBRAHIMBEGOVIC, A. (1992). A consistent finite-element formulation of non-linear elastic cables. *Communications in Applied Numerical Methods*, v.8, p.547-556.
- IRVINE, H.M. (1974). *The statics and dynamic of simple cable systems*. Report DYNL-108, Dynamic Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California, Jan. 1974.
- IRVINE, H.M.; CAUGHEY, T.K. (1974). The linear theory of free vibrations of a suspended cable. *Proceedings of the Royal Society, U.K.*, A341, p.299-315.
- IRVINE, H.M. (1975). Statics of suspended cables. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASME*, v.101, n.3, p.187-205.
- IRVINE, H.M. (1975). Post-elastic response of suspended cables. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASME*, v.101, n.6, p.725-737.
- IRVINE, H.M.; GRIFFIN, J.H. (1976). On the dynamic response of a suspended cable. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, v.4, n.4, p.389-402.
- IRVINE, H.M. (1976). Analytical solutions for pretensioned cable nets. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASME*, v.102, n.1, p.43-69.
- IRVINE, H.M. (1978). Free vibrations of inclined cables. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.104, n.ST2, p.343-347.
- IRVINE, H.M. (1981). *Cable structures*. Cambridge, Ma./London, The MIT Press. 259p.

- IRVINE, H.M. (1990). On the free vibrations of suspended cables with frictional end restraint. *Journal of Applied Mechanics*, Transactions ASME, v.57, n.2, p.419-422.
- IRVINE, M. (1992). Local bending stress in cables. In: INTERNATIONAL OFFSHORE AND POLAR ENGINEERING CONFERENCE, 2., San Francisco, CA, USA, June 14-19, 1992. *Proc. Golden Co., Soc of Offshore and Polar Engineers (ISOPE)*. p.342-345.
- ISHII, K. (1989). Numerical methods for tension structures. In: 10 YEARS OF PROGRESS IN SHELL AND SPATIAL STRUCTURES, 30 ANNIVERSARY OF IASS, Madrid. *Proc.*
- JAYARAMAN, H.B.; KNUDSON, W.C. (1981). A curved element for the analysis of cable structures. *Computers and Structures*, v.14, n.3/4, p.325-333.
- JENDO, J. (1986). Multicriteria optimization of cable Systems. In. IASS SYMPOSIUM ON MEMBRANES STRUCTURES AND SPACE FRAMES, Osaka, Japan, *Proc.* (HEKI, K., eds. *Shells, membranes and space frames*). Amsterdam, Elsevier, v.2, p.71-78.
- JENNINGS, A. (1962). The free cable. *The Engineer*, v.214, n.5579, London, U.K., p.111-1112.
- JENSEN, J.J. (1974). Dynamics of tension roof structures. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON TENSION ROOF STRUCTURES, Polytechnic of Central London.
- JONATOWSKI, J.J. ; BIRNSTIEL, C. (1967). Tensile tests of Bridge strand and Rope *Research Divison Report*, School of Engineering and Science, New York University, N.Y.
- JONATOWSKI, J.J.; BIRNSTIEL, C. (1970). Inelastic stiffened suspension space structures. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.96, n.ST6, p.1143-1166.
- JOHNSON, J.B.; BRYAN, C.W.; TURNEAURE, F.E. (1911). *Modern framed structures: Part II*, 9., New York, John Wiley and Sons.
- JUDD, B.J.; WHEEN, R.J. (1978). Nonlinear cable behavior. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.104, n.3, p.567-575.
- KADLCÁK, J. (1993). The theory of suspended cable roofs. In: PARKE, G.A.R.; HOWARD, C.M., eds. *Space structures*. London, U.K., Thomas Telford. v.1.

- KADLCÁK, J. (1995). *Statics of suspension cable roofs*. Brookfield, USA, A.A. Balkema. 295 p.
- KAR, A.K.; OKAZAKI, C.Y. (1973). Convergence in highly nonlinear cable net problems. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.99, n.3, p.321-334.
- KLARBIRNG, A.; RONNQVIST, M. (1995). Nested approach to structural optimization in nonsmooth mechanics. *Structural Optimization*, v.10, n.2, p.79-86.
- KLIMKE, H.; STUTZKI, C. (1993). Design of hybrid space structures for large spans. In: PARKE, G.A.R.; HOWARD, C.M., eds. *Space structures*. London, U.K., Thomas Telford. v.1.
- KNEEN, P. (1993). Cable-supported space frame roof structure. In: PARKE, G.A.R.; HOWARD, C.M., eds. *Space structures*. v.1, London, U.K., Thomas Telford.
- KNUDSON, W.C. (1971a). Response of cable-net structure under dynamic loads. In: IASS PACIFIC SYMPOSIUM ON TENSION STRUCTURES, Tokyo and Kyoto, 1971. *Proc*.
- KNUDSON, W.C. (1971b). *Static and dynamic analysis of cable-net structures*. Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley.
- KNUDSON, W.C.; SCORDELIS, A.C. (1972). Cable forces for desired shapes in cable-net structures. In: IASS PACIFIC SYMPOSIUM ON TENSION STRUCTURES, Tokyo and Kyoto, 1971. *Proc*.
- KNUDSON, W.C. (1991). Recent advances in the field of long span tension structures. *Engineering Structures*, v.13, n.2, p.164-177.
- KRISHNA, P.; NATRAJAN, P.R. (1968). Behaviour of doubly curved cable roof network. *Bulletin of the IASS*, n.34.
- KRISHNA, P. (1978). *Cable-suspended roofs*. New York, McGraw-Hill, 314p.
- KULBACH, V.; TALVIK, I. (1998). Efficiency of steel in suspended structures. *Journal of Constructional Steel Research*, v.46, n.1-3, paper 185.
- KULBACH, V. (1999). Half-span loading of cable structures. *Journal of Constructional Steel Research*, v.49, n.2, p.167-180.
- KWAN, A.S.K. (1998). A new approach to geometric nonlinearity of cable structures. *Computers and Structures*, v.67, p.243-252.

- LE, T.T.; KNAPP, R.H. (1994). A finite element model for cables with nonsymmetrical geometry and loads. *ASME Transactions*, v.116, p.14-20.
- LEONARD, J.W.; RECKER, W.W. (1972). Nonlinear dynamics of cables with low initial tension. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.98, n.EM2, p.293-309.
- LEONARD, J.W. (1973). Nonlinear dynamics of curved cable elements. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.99, n.3, p.616-621.
- LEONARD, J.W. (1973). Incremental response of 3-D cable networks. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.99, n.3, p.621-629.
- LEONARD, J.W.; NATH, J.H. (1981). Comparison of finite element and lumped parameter methods for oceanic cables. *Engineering Structures*, v.3, n.3, p.153-167.
- LEONARD, J.W. (1988). *Tension structures : behavior and analysis of cable structures*. New York, Mc. Graw Hill, 391p.
- LEWIS, W.J.; JONES, M.S., RUSHTON, K.R. (1984). Dynamic relaxation analysis of the non-linear static response of pretensioned cable roofs. *Computers and Structures*, v.18, n.6, p.989-997.
- LEWIS, W.J.; JONES, M.S. (1984). Cladding-network interaction in pretensioned cable roofs, studied by dynamic relaxation. *Computers and Structures*, v.19, n.5/6, p.885-897.
- LEWIS, W.J. (1989). Efficiency of numerical methods for the analysis of prestressed nets and pin-jointed frame structures. *Computers and Structures*, v.33, n.3, p.791-800.
- LEWIS, W.J. (1998). Lightweight tension membranes : an overview. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, v.126, n.4, p.171-181.
- MA, D.; LEONARD, J.; CHU, K.H. (1979). Slack-elasto-plastic dynamics of cable systems. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.105, n.2, p.207-222.
- MAIER, G.; CONTRO, R. (1975). Energy approach to inelastic cable-structure analysis. *Journal of the Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.101, n.5, p.531-548.
- MAJOWIECKI, M. (1971). Structures suspendues, système Jawerth. *Acier-Stahl-Steel*. v.4.
- MAJOWIECKI, M. (1985). *Tensostrutture: progetto e verifica*. Milano, Cisia, 165p.

- MAKOWSKI, Z.S. (1993). Space structures - a review of the developments within the last decade. In: PARKE, G.A.R.; HOWARD, C.M., eds. *Space structures*. London, U.K., Thomas Telford. v.1.
- MARKLAND, E. (1951). Deflection of a cable due to a single point load. *Philosophical Magazine*, London, U.K., v.42, n.33.
- MEEK, J.L. (1994). Elasto-plastic analysis of cable net structures. In: IASS-ASCE INTERNATIONAL SYMPOSIUM. Atlanta, USA. *Proc.*, p.781-790.
- MEHRABI, A.B.; TABATABAI, H. (1998). Unified finite difference formulation for free vibration of cables. *Journal of Structural Engineering*, v.124, n.11, p.1313-1322.
- MESAROVIC, S.; GASPARINI, D. (1991). Dynamic behavior of a non-linear cable truss. In: ASCE ENGINEERING MECHANICS SPECIALTY CONFERENCE, Columbus, USA, May 20-22, 1991, New York, ASCE. p.707-711.
- MESAROVIC, S.; GASPARINI, D.A. (1992). Dynamic behavior of nonlinear cable system. *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, v.118, n.5, p.890-903.
- MICHALOS, J.; BIRNSTIEL, C. (1960). Movements of a cable due to changes in loading. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.86, n.12, p.23-38.
- MICHALOS, J.; BIRNSTIEL, C. (1962). Movements of a cable due to changes in loading. *ASCE Transactions*, v.127, part II, p.267-303.
- MITSUGI, J.; YASAKA, T. (1991). Nonlinear static and dynamic analysis method of cable structures. *AIAA Journal*, v.29, n.1, p.150-152.
- MITSUGI, J. (1994). Static analysis of cable networks and their supporting structures. *Computers and Structures*, v.51, n.1, p.47-56.
- MOLLMANN, H. (1965). *Suspension structures*. Denmark, Akademisk Forlag. 268p.
- MOLLMANN, H.; LUNDHUS MORTENSEN, P. (1967). The analysis of prestressed suspended roofs (cable nets). In: DAVIES, R.M. *Space structures*. New York, USA., John Wiley and Sons.
- MOLLMANN, H. (1970). Analysis of plane prestressed cable structures. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.96, n.10, p.2059-2082.
- MOLLMANN, H. (1974). *Analysis of hanging roofs by means of the displacement method*. Lyngby, Polyteknisk Forlag. 268p.

- MONACO, P. (1998). Il modulo equivalente secante dello strallo com tiranti. *Costruzione Metalliche*, v.50, n.3, p.43-49.
- MONFORTON G.R.; ELHAKIM N.M. (1980). Analysis of truss-cable structures. *Computers and Structures*, v.11, n.4, p.327-335.
- MORRIS, N.F. (1974). Dynamic analysis of cable-stiffened structures. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.100, n.5, p.971-981.
- MORRIS, N.F. (1975). Modal analysis of cable networks. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.101, n.15, p.97-108.
- MORRIS, N.F. (1976). Analysis of cable-stiffened space structures. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.102, n.3, p.501-513.
- MOTE, S.H.; CHU, K.H. (1978). Cable trusses subjected to earthquakes. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v. 104, n.ST4, p.667-680.
- MURRAY T.M.; WILLEMS, N. (1970). *Application of direct energy minimization to the static analysis of cable supported structures*. Lawrence, Center for Research in Engineering Science, University of Kansas. (Studies in engineering mechanics Report n.33).
- MURRAY T.M.; WILLEMS, N. (1971). Analysis of inelastic suspension structures. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.97, n.12, p.2791-2806.
- NAKANISHI, H.; NAMITA, Y. (1976). Shape determination analysis of cable structures for optimization problem. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM OF WIDE SPAN SURFACE STRUCTURES, Stuttgart.
- NAKANISHI, H.; FUKUMOTO, H. (1988). Large deformation analysis of cable structures employing curved finite elements. *Kobelco Technology Review*, n.4, p.19-22.
- NAPPI, A. (1985). Piecewise-linear constitutive laws for the analysis of truss-like structures and of cable-networks. *Engineering Structures*, v.7, p.176-182.
- NISHINO, F.; DUGGAL, R.; LOGANATHAN, S. (1989). Design analysis of cable networks. *Journal of Structural Engineering*, ASCE, v.115, n.12, p.3123-3141.
- O'BRIEN, W.T.; FRANCIS, A.J. (1964). Cable movements under two-dimensional loads. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.90, n.ST3, p.89-123.

- OHMORI, H.; HAGIWARA, N.; MATSUI, T.; MATSUOKA, O. (1989). Numerical analysis of minimum surface by finite element method, structures. In: 10 YEARS OF PROGRESS IN SHELL AND SPATIAL STRUCTURES, 30 ANNIVERSARY OF IASS, Madrid. *Proc.*
- OHYAMA, H; KAWAMATA, S. (1972). A problem of surface design for prestressed cable nets. In: IASS PACIFIC SYMPOSIUM ON TENSION STRUCTURES AND SPACE FRAMES, Tokyo and Kyoto, 1971. *Proc.*
- OSHIMA, E. (1987). *Cálculo de cabo-treliça mediante o emprego de computador*. São Carlos. 135p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- OTTO, F.; SCHLEYER, F.K. (1969). *Zubeanspruchte Konstruktionen*, v.2. Berlin, Germany, Ullstein Fachverlag, 1966, translated by the Israel Program for Scientific Translations and published as *Tensile Structures*, v.2. Cambridge, Mass, MIT Press.
- OZDEMIR, H. (1979). A finite element approach for cable problems. *International Journal of Solids and Structures*, v.15, n.5, p.427-437.
- PALKOWSKI, S.; KOZLOWSKA, M. (1988). Ein einfaches Verfahren zur statischen Analyse von Seilnetzen (Simple structural analysis method for cable nets). *Bautechnik*, v.65, n.10, p.332-335.
- PALKOWSKI, S. (1989). Zur statischen Berechnung von Seilen (Static calculation of cables).. *Bautechnik*, v.66, n.8, p.265-269.
- PANAGIOTOPOULOS, P.D. (1976). A variational inequality approach to the inelastic stress-unilateral analysis of cable-structures. *Computers and Structures*, v.6, p.133-139.
- PAPADRAKAKIS, M (1983). Inelastic dynamic response of cable networks. *Journal of Structural Engineering*, v.109, n.5, p.1139-1154.
- PELISSIER, R. (1962). Physical properties of wire ropes for hanging roofs. In: IASS COLLOQUIUM ON HANGING ROOFS, CONTINUOUS METALLIC SHELL ROOFS AND SUPERFICIAL LATTIC ROOFS, Paris, France, July 1962. *Proc.* New York, USA, John Wiley and Sons, p.199-204.
- PEYROT, A.H.; GOULOIS, A.M. (1979). Analysis of cable structures. *Computers and Structures*, v.10, n.5, p.805-813.
- PFEIL, M.; HALLAK, P.B. (1997). Comportamento estrutural de malhas de cabos protendidos na forma de parabolóide hiperbólico. In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 28., São Carlos, 1-5 set. 1997. *Anais*. v.1, p. 547-556.

- PIETRZAK, J. (1978). Matrix formulation of static analysis of cable structures. *Computers and Structures*, v.9, p.39-42.
- POSKITT, T.J. (1967). Numerical solution of nonlinear structures. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.93, n.4, p.69-94.
- PUGSLEY, A. (1968). *The theory of suspension bridges*, 2. ed. London, UK, Edward Arnold
- PULINO FILHO, A.R. (1991). *Contribuição ao estudo das coberturas Campinas*. Tese (Doutorado) - Faculdade de Engenharia Mecânica, UNICAMP.
- RAOOF, M.; KRAINCANIC, I. (1998). Determination of wire recovery length in steel cables and its practical applications. *Computers and Structures*, v.68, n.5, p.445-460.
- ROSEMEIER, G-E. (1998). Zur ermittlung verformungs-abhängiger Windlasten bei leichten Flächentragwerken. *Bautechnik*, v.75, n.6.
- ROUSSEL, P. (1976). Numerical solution of static and dynamic equations of cables. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, v.9, p.65-74.
- SAAFAN, S.A. (1970). Theoretical analysis of suspension roofs. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.96, n.2, p.393-405.
- SALES, J.J. (1988). *Projeto e viabilidade econômica de coberturas pênseis com cabos-treliça*. São Carlos. 151p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.
- SAMUELSSON, A.; KARRHOLM, G. (1972). Analysis of a prestressed cable roof anchored in a space curved ring beam. In: IABSE SYMPOSIUM, Amsterdam, p.427-431.
- SCALZI, J.B.; PODOLNY Jr., W.; TENG, W.C. (1969). *Design fundamentals of cable roof structures*. Booklet ADUSS 55-3580-01, United States Steel Corp., Pittsburgh, USA.
- SCALZI, J.B.; Mc GRATH, W.K. (1971). Mechanical properties of structural cables. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.97, n.12, p.2837-2844.
- SCHEK, H.J. (1974). The force densities method for form finding and computation of general networks. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, v.3, p.115-134.

- SCHLAICH, J.; BERGERMANN, R.; SOBEK, W. (1990). Tensile membrane structures. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures*, v.31, n.102-103, p.19-32.
- SCHLEYER, F.K. (1962). The analysis of cable nets. In: IASS COLLOQUIUM ON HANGING ROOFS, CONTINUOUS METALLIC SHELL ROOFS AND SUPERFICIAL LATTIC ROOFS, Paris, France, Jul. 1962, *Proc. New York, USA, John Wiley and Sons*, p.48-55.
- SHIMANOVSKY, V.N.; SHIMANOVISKY, A.V. (1998). Theory, calculation and design of space suspended roof systems for buildings. *Journal of Constructional Steel Research*, v.46, n.1-3, paper 351.
- SCHREFLER, B.A.; ODORIZZI, S. (1983). A total lagrangian geometrically non-linear analysis of combined beam and cable structures. *Computers and Structures*, v.17, n.1, p.115-127.
- SHAN, W.; YAMAMOTO, C.; ODA, K. (1993). Analysis of frame cable structures. *Computers and Structures*, v.47, n.4-5, p.673-682.
- SHORE, S.; BATHISH, G.N. (1967). Membrane analysis of cable roofs. In: DAVIES, R.M. *Space Structures*. Oxford, Blackwell Scientific. Chap.76, p.890-906.
- SHORE, S.; CHAUDHARI, B. (1969). *Bibliography-structural applications of steel cable systems*. New York, USA, The American Iron and Steel Institute.
- SHVOLAK J. (1991). Dynamic investigation of cable structures. *Soviet Applied Mechanics*, v.27, n.11, p.1130-1136.
- SIEV, A.; EIDELMAN, J. (1962). Shapes of suspended roofs. In: IASS COLLOQUIUM ON HANGING ROOFS, CONTINUOUS METALLIC SHELL ROOFS AND SUPERFICIAL LATTIC ROOFS, Paris, France, Jul. 1962, *Proc. New York, USA, John Wiley and Sons*, p.42-47.
- SIEV, A.; EIDELMAN, J. (1964). Stress analysis of prestressed roofs. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v.90, n.4, p.103-121.
- SIEV, A. (1967). Prestressed suspended roofs bounded by main cables *Publication IABSE*, v.27.
- SINCLAIR, G.B. (1981). Exact solutions for elastic cable systems. *International Journal of Solids and Structures*, v.17, n.9, p.845-854.
- SOBOTKA, Z. (1988). Shapes, sags and tensions of the hanging roofs with horizontal boundaries. *Acta Technica CSAV (Ceskoslovensk Akademie Ved)*., v.33, n.2, p.233-268.

- STEFANO, G.D. (1992). Dynamic response of tension cable structures due to wind loads. *Computers and Structures*, v.43, n.2, p.365-372.
- STEFANO, G.D.; NEJAD, S.E.M. (1993). A method for analysis of cables structures with fixed and flexible elastic boundaries. *Structural Dynamics*, Eurodyn 93, p.563-568.
- STEFANO, G.D.; MOOSSAVI, E.; BISHOP, S.; KOLIOPOULOS, P. (1993). Conjugate Gradient method for calculating the response of large cable nets to static loads. *Computers and Structures*, v.49, n.5, p.843-848.
- STEFANO, G.D. (1995). General method for the analysis of cable assemblies with fixed and flexible elastic boundaries. *Computers and Structures*, v.55, n.5, p.897-905.
- STEFANO, G.D.; NEJAD, S.E.M. (1995). A general method for the analysis of cable assemblies with fixed and flexible elastic boundaries. *Computers and Structures*, v.55, n.5, p.897-905.
- STEFANO, G.D. (1995). Dynamic response analysis of nonlinear structures using step-by-step integration techniques. *Computers and Structures*, v.57, n.6, p.1063-1070.
- STEINMAN, D.B.(1929). *Suspension bridge*. 2. ed., New York, USA, John Wiley and Sons.
- SUFIAN, F.M.A.; TEMPLEMAN, A.B. (1992). On the non-linear analysis of pretensioned cable net structures. *Structural Engineering*, v.4, n.2, p.147-158.
- SULLIVAN, B.J.; BATTERMAN, S.C. (1980). Nonlinear static and dynamic deformations of viscoelastic cables. *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, v.106, n.3, p.543-571.
- SWADDIWUDHIPONG, S. et al. (1989). Optimal pretensioned forces for cable networks. *Computers and Structures*, v.33, n.6, p.1349-1354.
- SZABÓ, J.; KOLLAR, L. (1984). *Design of cable-suspended roofs*. New York, USA, John Wiley, 243p.
- TABARROK, B.; QIN, Z. (1992). Finite element procedure for form finding of tension structures. *Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineers*, v.16, n.3-4, p.235-250.
- TAN, G.E.B.; PELLEGRINO, S. (1997). Non-linear dynamic identification : an application to prestressed cable structures. *Journal of sound and vibration*,v.208, n.1, p.33-45.

- TANAKA, H.; HANGAI, Y. (1986). Rigid body displacement and stabilization conditions of unstable truss structures. In: IASS SYMPOSIUM ON MEMBRANES STRUCTURES AND SPACE FRAMES, Osaka, Japan. *Proc.* (HEKI, K., eds. *Shells, membranes and spaces frames*). Amsterdam, Elsevier. v.2, p.55-62.
- TENE, Y.; EPSTEIN, M. (1971). Nonlinear space trusses with tension-only members. In: IASS PACIFIC SYMPOSIUM ON TENSION STRUCTURES AND SPACE FRAMES, Tokyo and Kyoto, 1971. *Proc.*
- THORNTON, C.H.; BIRNSTIEL, C. (1967). Three-dimensional suspension structures. *Journal of the Structural division, ASCE*, v.93, n.ST2, p.247-270.
- TOMKA, P. (1997). Lateral stability of cable structures. *International Journal of Space Structures*, v.12, n.1, p.19-30.
- TOTTENHAM, H.; WILLIAMS, P.G. (1970). Cable net: continuous system analysis. *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, v.96, n.3, p.277-293.
- TOTTENHAM, H.; KHAN, M.A. (1971). Elastic non-linear analysis of prestressed cable networks using equivalent continuum theory. In: IASS PACIFIC SYMPOSIUM ON TENSION STRUCTURES AND SPACE FRAMES, Tokyo and Kyoto, 1971. *Proc.*
- VERMA, V.K.; LEONARD, J.W. (1978). Nonlinear behavior of cable-reinforced membranes. *Journal of Engineering Mechanics Division, ASME*, v.104, n.4, p.735-750.
- VILNAY, O. (1986). The response of determinate cable nets. In: IASS SYMPOSIUM ON MEMBRANES STRUCTURES AND SPACE FRAMES, Osaka, Japan. *Proc.* (HEKI, K., eds. *Shells, membranes and spaces frames*). Amsterdam, Elsevier, v.2, p.47-54.
- VILNAY, O. (1987). Characteristics of cable nets. *Journal of Structural Engineering, ASCE*, v.113, n.7, p.1586-1599.
- VILNAY, O.; ROGERS, P. (1990). Statical and dynamical response of cable nets. *International Journal of Solids and Structures*, v.26, n.3, p.299-312.
- WANG, C.M. (1984). Optimal shape of cables. *Journal of Engineering Mechanics, ASME*, v.110, n.11, p.1649-1653.
- WANG, C.M.; PULMANO, V.A.; LEE, S.L. (1986). Cable optimization under selfweight and concentrated loads. *Journal of Structural Mechanics*, v.14, n.2, p.191-207.

- WATTS, A.M.; FRITH, R.H. (1981). Efficient numerical solution of the dynamic equations of cables. *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, v.25, p.1-9.
- WEST, H.H.; GESCHWINDNER, L.F.; SUHOSKI, J.E..(1975). Natural vibrations of suspension cables. *Journal of the Structural Division*, ASCE, v.101, n.ST11, p.2277-2291.
- WILLIAMS, C.J.K. (1994). The use of modified Bézier triangles for the form finding and analysis of cable net structures. *Structural Engineering Review*, v.6, n.3-4, p.245-253.
- WU, J.-S.; CHEN, C.-C. (1989). Dynamic analysis of a suspended cable due to a moving load. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.28, n.10, p.2361-2381.
- YAMADA, G.; KOBAYASHI, Y.; NAKAE, S. (1991). Equivalence of a hanging cable net to an orthotropic membrane. *Journal of Sound and Vibration*, v.145, n.1, p.163-167, Feb. 22, 1991.
- YAMAGUCHI, H.; FUJINO, Y. (1988). Effects of support flexibility on modal damping of cables. *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers*, n.398 pt I-10, p.99-107.
- YAMAGUCHI, H. (1990). Analytical study on growth mechanism of rain vibration of cables. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v.33, n.1-2, p.73-80.
- YAMAGUCHI, H.; JAYAWARDENA, L. (1992). Analytical estimation of structural damping in cable structures. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, v.43, n.1-3, p.1961-1972.
- YAMAMOTO, K. (1992). Shape optimization of truss-type variable geometry structures using sensitivity analysis. In: JAPAN CONGRESS ON APPLIED MECHANICS (NCTAM-41), 41., Tokyo, Japan, Jan. 28-30, 1992. *Proc. Univ of Tokyo Press*, p.77-86.
- YOSHIDA, A.; MAJOWIECKI, M.; TSUBOTA, H. (1989). Form finding analysis for membrane structures using force densities method, structures. In: 10 YEARS OF PROGRESS IN SHELL AND SPATIAL STRUCTURES, 30 ANNIVERSARY OF IASS, Madrid. *Proc.*
- ZI, C.; SCHICHENG, T.; SUDUO, X. (1989). An investigation on a dynamic response of cable suspended roofs. In: 10 YEARS OF PROGRESS IN SHELL AND SPATIAL STRUCTURES, 30 ANNIVERSARY OF IASS, Madrid. *Proc.*

APÊNDICE I

INTRODUÇÃO ÀS TÉCNICAS NUMÉRICAS DE OTIMIZAÇÃO PARA PROBLEMAS SEM RESTRIÇÕES

I.1. CONCEITOS BÁSICOS

A otimização pode ser definida como o processo de se achar o mínimo ou o máximo de algum parâmetro (função objetivo), satisfazendo certos requisitos (restrições) de projeto.

Embora o objetivo usual dos métodos de otimização seja a procura racional do projeto ótimo que atenda a certas necessidades especificadas, estes métodos podem também ser usados no processo de análise. Por exemplo, na análise não linear de estruturas as técnicas de otimização podem ser utilizadas para resolver o problema não linear de minimização da função energia potencial do sistema estrutural.

Muitos algoritmos foram desenvolvidos nas últimas décadas para atender à classes específicas de problemas, dentre eles os algoritmos de programação linear, quadrática, inteira, dinâmica e geométrica. Uma categoria de algoritmos denominados de programação não linear fornece soluções para problemas gerais de otimização.

Este apêndice pretende introduzir os conceitos sobre alguns métodos de programação não linear, e apresentar as vantagens e as limitações do seu emprego na análise de estruturas.

I.2. ESTRATÉGIA GERAL DE OTIMIZAÇÃO

Considerando-se a função $\Pi: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ e o seguinte problema de programação irrestrita (P_1): $\min \Pi(x), \quad x \in \mathfrak{R}^n$.

A maioria dos métodos iterativos requer que um conjunto de variáveis, x^0 , definidas em um espaço de dimensão n (\mathfrak{R}^n), seja inicialmente especificada. A partir desses dados o processo iterativo consiste numa atualização destas informações, ou seja:

$$x^q = x^{q-1} + \alpha^{*q} S^q \quad (1.2.1)$$

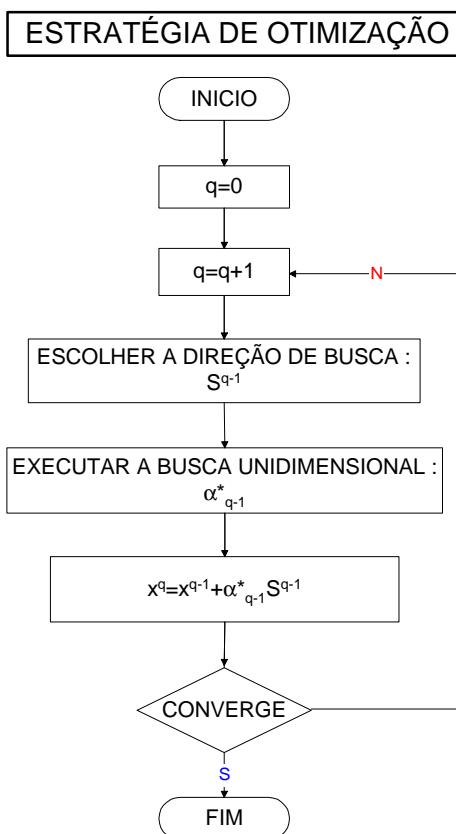
tal que $x^q, x^{q-1}, S^q \in \mathfrak{R}^n$ e $\alpha^{*q} \in \mathfrak{R}^+$, e onde q é o número da iteração, S^q o vetor direção de busca no domínio das variáveis consideradas, e α^{*q} é um escalar que define a distância que se deve mover na direção S^q .

A estratégia de otimização (fluxograma I.1) consiste de dois passos básicos : primeiro é a determinação da direção de busca S^q , tal que nesta direção se consiga minimizar a função Π , ou seja, $\Pi(x^q) \geq \Pi(x^q + S^q)$; o segundo passo é a determinação do escalar α^{*q} , tal que:

$$\Pi(x^q) \geq \Pi(x^q + S^q) \geq \Pi(x^q + \alpha^{*q} S^q) \quad (1.2.2)$$

Note-se que dentro de uma iteração q o problema (P_1) se reduz a um problema (P_2) de **busca unidimensional** em α , ou seja, (P_2): $\min \Pi(\alpha), \quad \alpha \in \mathfrak{R}^+$. O problema (P_2) equivale a encontrar $\alpha^* \in \mathfrak{R}^+$, tal que $\Pi(x + \alpha S) \geq \Pi(x + \alpha^* S)$. Uma das maneiras de se resolver (P_2) é através da interpolação de $\Pi(\alpha)$ para valores conhecidos $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

No decorrer deste apêndice serão definidos vários métodos que se diferenciam pela determinação da direção de busca S^q e pela determinação do parâmetro α^* , muito embora alguns métodos não necessitem realizar a busca unidimensional ($\alpha = 0$), ou admitam uma busca imprecisa.



FLUXOGRAMA I.1

I.3. MÉTODOS DE BUSCA UNIDIMENSIONAL (*Line Search*)

Considere-se o problema (P_2) definido no item anterior.

Como citado anteriormente, o procedimento para se determinar um ponto de mínimo numa dada direção é denominado **busca unidimensional**. Com esse procedimento um problema de minimização de uma função de n variáveis converte-se numa seqüência de problemas de minimização de uma função de uma variável (α).

Dentre os diversos métodos usados na busca unidimensional, destacam-se os métodos de interpolação polinomial, Método da falsa posição, Método de Busca através da série de Fibonacci, Método da Seção Áurea, Regra de Armijo. A seguir são definidos alguns métodos de busca unidimensional.

I.3.1. MÉTODOS DE INTERPOLAÇÃO POLINOMIAL

A interpolação polinomial é uma das técnicas mais efetivas para se encontrar o mínimo de uma função de uma variável e as raízes dessa função.

O procedimento consiste em se calcular valores da função em vários pontos (e possivelmente as derivadas da função nesses pontos), e então se ajustar um polinômio para aqueles pontos conhecidos. Em seguida determina-se o mínimo deste polinômio, que é considerado uma estimativa do mínimo da função real.

O método tem a vantagem de requerer somente o cálculo de poucos valores da função. Contudo, não há garantias de precisão quanto à aproximação utilizada, principalmente para o caso de problemas altamente não lineares.

De acordo com o grau do polinômio interpolador adotado, necessita-se um número de informações adequadas da função ou de sua derivada. A tabela abaixo mostra alguns exemplos.

APROXIMAÇÃO	INFORMAÇÕES REQUERIDAS
linear*	$\Pi(\alpha_1), \Pi(\alpha_2)$
quadrática	$\Pi(\alpha_1), \Pi(\alpha_2), \Pi(\alpha_3)$ ou $\Pi(\alpha_1), \Pi'(\alpha_1), \Pi(\alpha_2)$
cúbica	$\Pi(\alpha_1), \Pi(\alpha_2), \Pi(\alpha_3), \Pi(\alpha_4)$ ou $\Pi(\alpha_1), \Pi'(\alpha_1), \Pi(\alpha_2), \Pi'(\alpha_2)$

* Método das Secantes.

A idéia do Método das Secantes consiste na substituição da função Π por uma reta, usando os valores α de duas iterações seguidas anteriores, ou

seja: $\alpha_{p+1} = \alpha_p - \left(\frac{\alpha_p - \alpha_{p-1}}{\Pi_p - \Pi_{p-1}} \right) \Pi_p$, $p=1,2,\dots$ Para iniciar o processo iterativo

necessita-se de dois valores α_0, α_1 que se forem tomados próximos a α^* , a taxa de convergência do método torna-se superlinear. No entanto, se os

valores da função Π para os valores iniciais de α forem de mesmo sinal, pode ocorrer uma extrapolação do resultado.

Os algoritmos para alguns métodos de interpolação polinomial básicos encontram-se em LUENBERGER [1989].

I.3.2. MÉTODO DA FALSA POSIÇÃO (*Regula Falsi Method*)

O método da falsa posição é uma modificação do método das secantes, com taxa de convergência linear. Emprega-se o método no caso em que o cálculo de valores da função não é possível, ou é muito trabalhoso.

O procedimento consiste em encontrar um intervalo $[c_1, c_2]$ usando somente valores da derivada da função Π , de maneira que o seu mínimo esteja contido neste intervalo. A idéia do método é achar a raiz da derivada Π' , conforme ilustra a figura I.1.

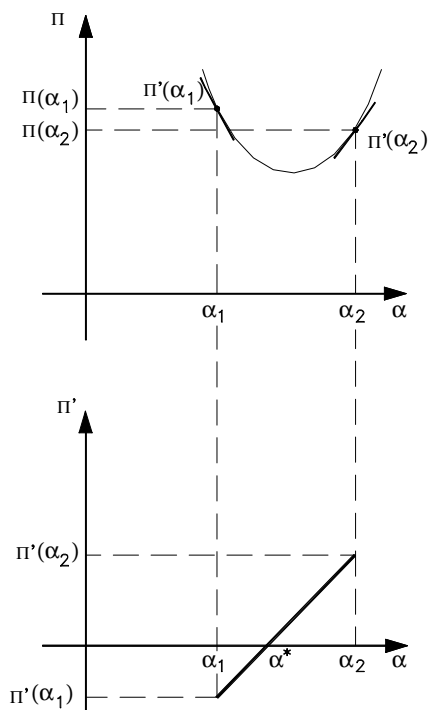
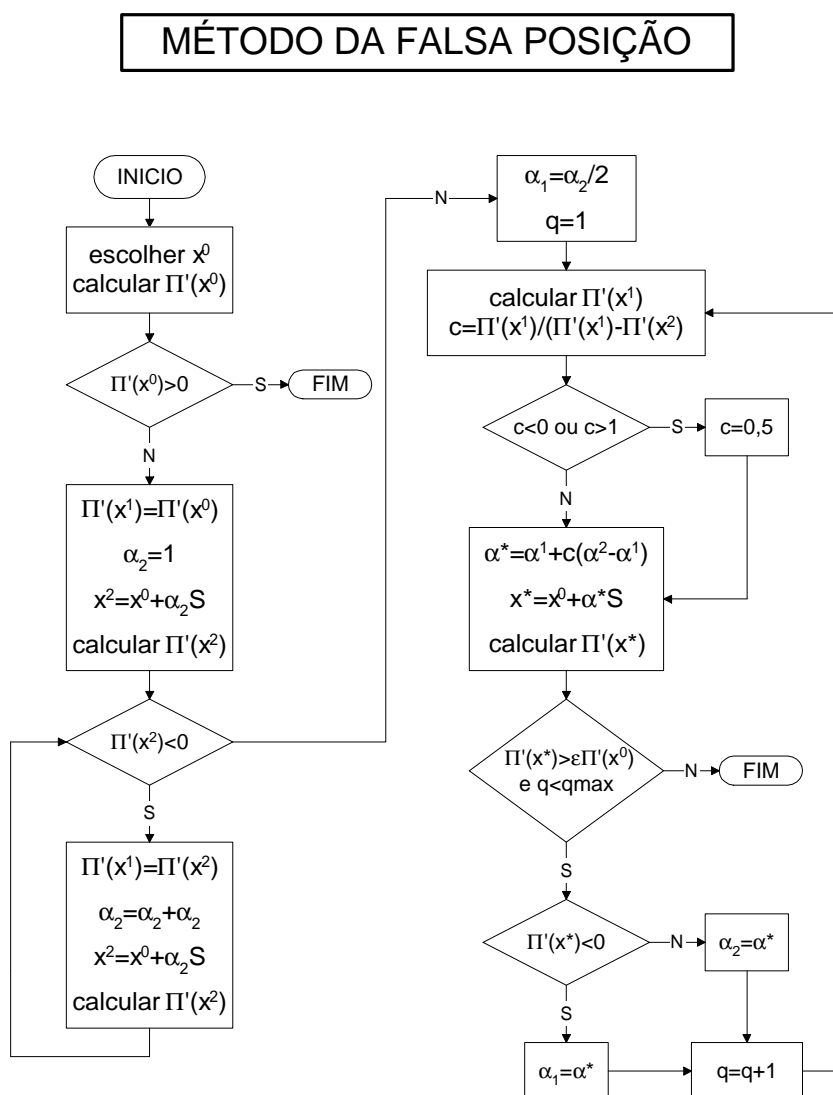


FIGURA I.1

Utilizando-se os pontos limites do intervalo interpola-se uma reta para aproximar a derivada da função, e determina-se o ponto de mínimo da função como sendo a raiz dessa reta, ou seja:

$$\alpha^* = c_1 - \Pi'(c_1) \left[\frac{c_1 - c_2}{\Pi'(c_1) - \Pi'(c_2)} \right] \quad (I.3.1)$$

Redefine-se o intervalo, baseando-se no valor α^* (ver exemplo no fluxograma I.2) e observando-se o sinal da derivada da função neste ponto. Deve-se verificar $\Pi'(c_1)\Pi'(c_2) < 0$. Prossegue-se até que uma precisão definida seja satisfeita.



FLUXOGRAMA I.2

I.3.3. MÉTODO DE BUSCA ATRAVÉS DA SÉRIE DE FIBONACCI

O método determina um valor mínimo de uma função Π dentro de um intervalo $[c_1, c_2]$. Exige-se apenas que a função seja unimodal, isto é que tenha um único mínimo relativo dentro do intervalo.

O mínimo da função é determinado comparando-se medidas de valores da função $\Pi(\alpha)$ num certo número de pontos N dentro do intervalo:

$$c_1 = \alpha_0 \leq \alpha_1, \dots, \alpha_N \leq \alpha_{N+1} = c_2.$$

Sendo o primeiro intervalo de busca $d_1 = c_2 - c_1$, deve-se procurar diminuir este intervalo de incerteza através da relação $d_K = \frac{\Pi_{N-K+1}}{\Pi_N} d_1$, onde d_K representa o intervalo depois de K medidas. Os números de Fibonacci são dados por: $\Pi_K = \Pi_{K-1} + \Pi_{K-2}$, sendo $\Pi_0 = \Pi_1 = 1$, e o intervalo final de incerteza torna-se $d_N = \frac{1}{\Pi_N} d_1$.

I.3.4. MÉTODO DA SEÇÃO ÁUREA (*Golden Section Method*)

O Método da Seção Áurea parte do mesmo princípio do Método de Fibonacci, fazendo-se o número de pontos N tender ao infinito.

Pode ser mostrado que $\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\Pi_{K-1}}{\Pi_K} \cong 0,6180 = \tau$.

De acordo com o procedimento da Seção Áurea, se o intervalo inicial é $[0,1]$, estes dois pontos devem ser substituídos por $(1-\tau)$ e τ . Sendo o intervalo de incerteza durante o processo de busca:

$$d_K = \left(\frac{1}{1,6180} \right)^{K-1} d_1 \Rightarrow \frac{d_{K+1}}{d_K} = 0,6180 = \tau.$$

Com isso, o intervalo de incerteza é reduzido de um fator τ em cada passo do processo de busca.

I.3.5. REGRA DE ARMIJO (*Armijo Rule*)

Na prática é impossível a obtenção do ponto exato do mínimo numa busca unidimensional. E freqüentemente prefere-se que se diminua a precisão numa busca unidimensional, para se manter um tempo de processamento global aceitável. Por essa razão alguns procedimentos de busca unidimensional inexata foram desenvolvidos.

Neste contexto a Regra de Armijo é um dos procedimentos mais utilizados, e consiste em um critério de terminação da busca unidimensional onde se procura um valor de α não tão grande, nem muito pequeno (figura I.2).

O valor de α não será muito grande se para $0 < \varepsilon < 1$:

$$\Pi(\alpha) \leq \Pi(0) + \alpha[\varepsilon\Pi'(0)] \quad (I.3.2)$$

O valor de α não será muito pequeno se para $\eta > 1$:

$$\Pi(\eta\alpha) > \Pi(0) + \eta\alpha[\varepsilon\Pi'(0)] \quad (I.3.3)$$

Segundo LUENBERGER [1989] os valores $\eta=2$ ou $\eta=10$ e $\varepsilon=0,2$ são mais usados.

Inicia-se o processo de busca com um α arbitrário, se satisfizer a condição I.3.2 o valor α é incrementado por η . Procede-se o incremento de α até I.3.2 não ser mais atendido, e neste caso toma-se o penúltimo valor de α . A figura I.2 ilustra a região definida pela regra de Armijo para $\eta=2$.

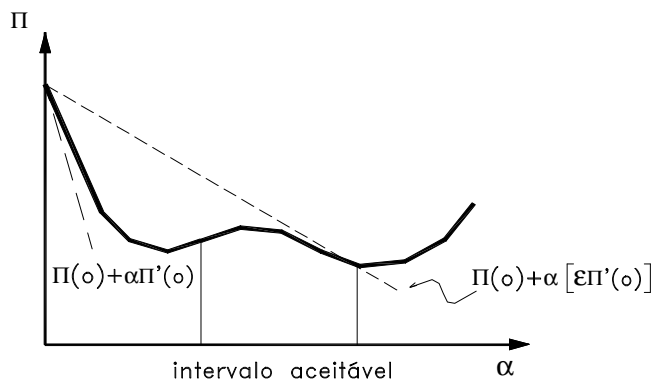


FIGURA I.2

I.4. MÉTODOS PARA A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO IRRESTRITA

Em muitos problemas de engenharia requer-se que o mínimo de uma função Π de n variáveis seja encontrada sem a imposição de nenhuma restrição, recaindo-se num problema de programação irrestrita (P_1):

$$\min \Pi(x), \quad x \in \mathcal{R}^n.$$

Por exemplo, em análise estrutural não linear, os deslocamentos da estrutura sob um dado carregamento são obtidos pela minimização da energia potencial total do sistema estrutural.

Sendo $\Pi(x)$ a função energia potencial, o princípio da mínima energia potencial total é expresso por:

$$\nabla \Pi(x) = 0, \quad \text{onde} \quad \nabla \Pi(x) = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial \Pi}{\partial x_n} \end{Bmatrix}.$$

Nesse caso os pontos x representam os deslocamentos nodais da estrutura para o carregamento aplicado e o vetor gradiente da função energia potencial, $\nabla \Pi(x)$, representa o vetor resíduo, onde cada componente é o desequilíbrio de forças de um certo nó em uma dada direção.

Na prática é raramente possível resolver este problema diretamente, porque as componentes de $\nabla \Pi(x)$ podem ser funções implícitas altamente não lineares em x . Procedimentos iterativos são necessários, onde um valor inicial x^0 é escolhido e novos valores do vetor de deslocamentos são obtidos (expressão I.2.1), de modo que o valor da função torna-se menor (expressão I.2.2).

Alguns métodos iterativos requerem a construção da matriz hessiana, cujas componentes são obtidas pela segunda derivada da função objetivo:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_n^2} \end{bmatrix},$$

que representa a matriz de rigidez do sistema estrutural.

Deve-se observar, contudo, que a determinação do ponto, onde o gradiente da função é nulo, consiste em uma condição necessária, mas não suficiente para se assegurar a “otimalidade”. Isto no contexto da análise estrutural significa que os deslocamentos obtidos não garantem que um ponto de equilíbrio estável foi alcançado.

Se a matriz hessiana (matriz de rigidez) é positiva definida, ou seja, todos os seus auto-valores são positivos, assegura-se que o ponto encontrado é pelo menos um mínimo local. Se a função objetivo (energia potencial) é estritamente convexa em x , existe um único ponto de mínimo, o que na prática é difícil de se provar.

I.5. MÉTODOS ITERATIVOS BÁSICOS

Os métodos iterativos podem ser classificados de acordo com o tipo de informações necessárias para a busca do mínimo da função, como : Métodos de ordem zero (por ex. Random Search, Powell Method), Métodos de ordem um (por ex. Método Gradiente, Métodos das Direções Conjugadas, Métodos das Variáveis Métricas), Métodos de ordem dois (por ex. Método de Newton e suas modificações).

I.5.1. MÉTODOS DE ORDEM ZERO

Os métodos de ordem zero requerem apenas valores da função objetivo. Essas técnicas de otimização têm uma longa história de aplicações, com a geração de muitos programas confiáveis e simples, sendo

apropriadas nos casos de funções não convexas e funções descontínuas.

A desvantagem dos métodos de ordem zero é que, mesmo para problemas simples, requerem um número muito grande de valores da função, sendo por isso mais utilizados em problemas cujo cálculo da função não é computacionalmente caro.

I.5.1.1. MÉTODOS DE BUSCA RANDÔMICAS (*Random Search*)

Os métodos de busca randômica são os mais ineficientes, mas por outro lado, são de fácil implementação requerem pouca memória de armazenamento (podendo ser aplicados até mesmo a calculadoras programáveis).

O mais simples destes métodos consiste na seleção do vetor x randomicamente dentro do domínio do problema, usualmente limitado a um intervalo de busca $x^i \leq x \leq x^s$. Para se obter a i -ésima variável tem-se a seguinte expressão: $x_i^q = x_i^i + r(x_i^s - x_i^i)$, onde r é o número randômico entre 0 e 1. A função deve ser calculada para cada x e os valores comparados.

Um aumento significativo de eficiência do processo de minimização é obtido utilizando-se o conceito de direção de busca unidimensional presente nos métodos seguintes.

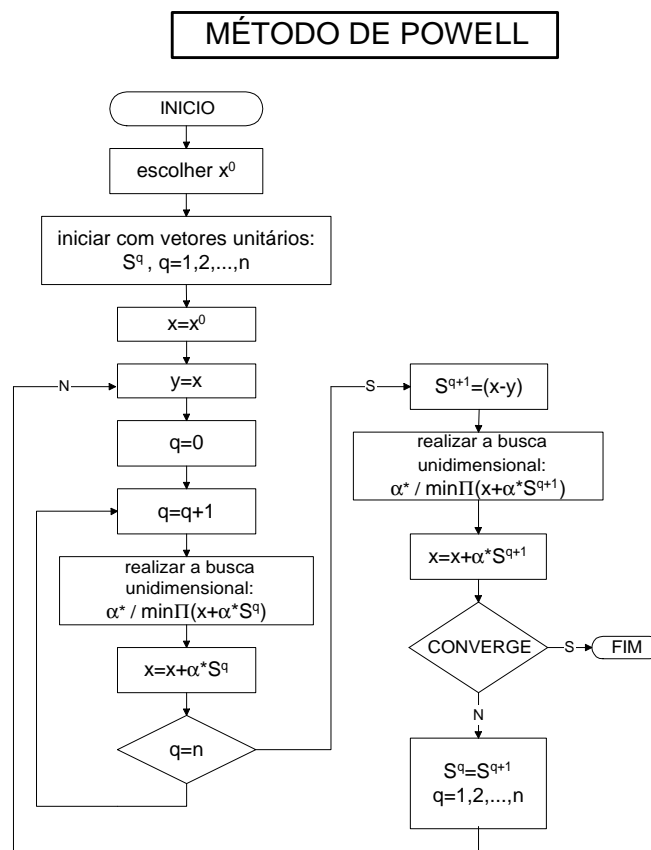
I.5.1.2. MÉTODO DE POWELL

O método de Powell é um dos mais populares dos métodos de ordem zero e um dos mais eficientes dentre os métodos de ordem um. O cálculo é baseado no conceito de direções conjugadas.

Os vetores S^i e S^j são direções Q conjugadas se $(S^i)^t Q S^j = 0$, onde Q é uma matriz positiva definida. Se $Q = 0$ quaisquer vetores S^i, S^j são conjugados, se $Q = I$ os vetores são ortogonais e se Q é matriz positiva definida os vetores são linearmente independentes.

O procedimento básico do Método de Powell consiste em primeiro lugar realizar a busca em n direções ortogonais S^q , com $q=1, \dots, n$. Essas

direções iniciais devem ser armazenadas em $M = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.



FLUXOGRAMA I.3

Em seguida a nova direção de busca é obtida pelo somatório de todos os movimentos anteriores: $S^{n+1} = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* S^i$, onde $\alpha_i^*, \alpha_{n+1}^*$ são determinadas por uma busca unidimensional.

Atualiza-se a matriz: $M = [\alpha_2^* S^2 \ \dots \ \alpha_n^* S^n \ \alpha_{n+1}^* S^{n+1}]$ retirando-se a primeira coluna e acrescentando-se a nova direção de busca. Em seguida recomeça-se o processo iterativo (fluxograma I.3). Note-se a necessidade do armazenamento da matriz M com as n direções conjugadas.

Para uma função quadrática a convergência é alcançada em n ou menos direções conjugadas, isto é, em no máximo $n(n+1)$ iterações. Para o caso de problemas altamente não lineares a eficiência tende a ser muito menor.

I.5.2. MÉTODOS DE ORDEM UM

Os métodos de ordem um utilizam informações do gradiente da função (que devem ser calculadas analiticamente ou por diferenças finitas) e não são adequados aos casos de funções descontínuas nas primeiras derivadas.

I.5.2.1. MÉTODO DO GRADIENTE (*Steepest Descent*)

Neste método a direção de busca é a direção oposta do gradiente da função: $S^q = -\nabla\Pi(x^q)$.

Como o método não utiliza informações da iteração anterior, a taxa de convergência é baixa. Por essa razão o método não é recomendado para aplicações gerais, embora se constitua na direção de partida em outros métodos mais poderosos.

I.5.2.2. MÉTODOS DAS DIREÇÕES CONJUGADAS (*Fletcher-Reeves, Polak-Ribière*)

Estes métodos requerem somente uma simples modificação do algoritmo do Método Gradiente e provoca uma substancial mudança na taxa de convergência. Conceitualmente são similares ao Método de Powell, exceto que cada direção de busca é conjugada. A direção inicial é dada pela direção oposta ao gradiente no ponto x^0 , $S^0 = -\nabla\Pi(x^0)$, e as direções seguintes são dadas por:

$$S^q = -\nabla\Pi(x^q) + \beta^{q-1}S^{q-1}$$

onde β é um escalar, podendo ser definido por :

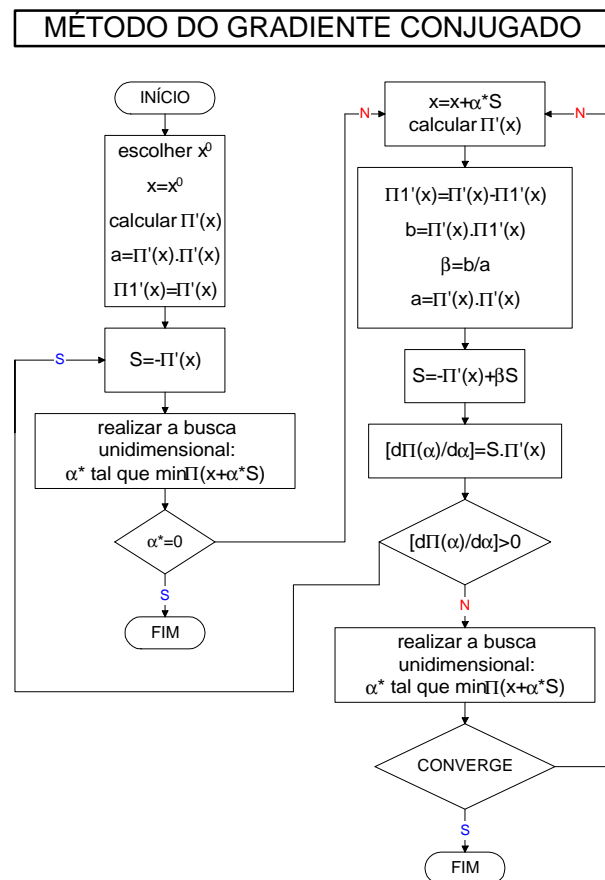
$$\beta^{q-1} = \frac{\nabla\Pi(x^q)^t \nabla\Pi(x^q)}{\nabla\Pi(x^{q-1})^t \nabla\Pi(x^{q-1})}$$

fórmula de Fletcher-Reeves para caso quadrático,

$$\beta^{q-1} = \frac{\nabla\Pi(x^q)^t [\nabla\Pi(x^q) - \nabla\Pi(x^{q-1})]}{\nabla\Pi(x^{q-1})^t \nabla\Pi(x^{q-1})}$$

fórmula de Polak-Ribière para caso geral.

LUENBERGER [1989] menciona que evidências experimentais comprovaram o melhor desempenho da fórmula de Polak-Ribière nos processos de minimização de problemas não quadráticos (fluxograma I.4).



FLUXOGRAMA I.4

Essa classe de métodos gera direções de busca sem a necessidade de se armazenar uma matriz com informações da iteração anterior, no entanto exigem uma busca unidimensional exata (α^*) . Se uma busca imprecisa é feita não se garante obter uma direção de descida. Na prática é comum a necessidade de se recomeçar o processo periodicamente, devido à natureza não quadrática de um problema geral, ou por causa de imprecisão numérica, que resulta numa busca que não reduz o valor da função objetivo.

As grandes vantagens destes métodos são a facilidade de implementação e a necessidade de pouca memória de armazenamento. Eles são indicados no caso de se ter a matriz hessiana muito grande ou muito densa.

I.5.2.3. MÉTODOS DAS MÉTRICAS VARIÁVEIS (*Quasi-Newton*)

Os métodos das direções conjugadas tem eficiência significativa sobre o Método Gradiente, pois armazena informações da iteração anterior num parâmetro escalar β . No método das métricas variáveis esses dados são armazenados numa matriz, esperando-se com isso maior eficiência em termos de taxa de convergência.

Se a função objetivo é uma função quadrática com a matriz hessiana positiva definida constante, esta define uma “métrica” ou “norma”. Nos métodos quasi-Newton, como são conhecidos, uma aproximação da matriz hessiana é formada para definir a direção de busca em cada iteração, o que significa que a norma varia (métrica variável).

O conceito básico dos métodos quasi-Newton é, portanto, criar uma matriz \bar{H} que aproxime a inversa da matriz hessiana no processo de otimização. A direção de busca é dada por:

$$S^q = -\bar{H}^q \nabla \Pi(x^q) \quad (I.5.1)$$

onde \bar{H}^q é a inversa aproximada da matriz hessiana :

$$\bar{H}^{q+1} = \bar{H}^q + D^q \quad (1.5.2)$$

com $\bar{H}^0 = I$.

A inversa aproximada da hessiana é obtida, portanto, da inversa da matriz hessiana da iteração anterior mais a matriz D dada por:

$$D^q = \frac{\Delta x \Delta(\nabla \Pi) + \theta \Delta(\nabla \Pi)^t \bar{H}^q \Delta(\nabla \Pi)^q}{(\Delta x \Delta(\nabla \Pi))^2} + \frac{\theta - 1}{\Delta(\nabla \Pi)^t \bar{H}^q \Delta(\nabla \Pi)} \bar{H}^q \Delta(\nabla \Pi) (\bar{H}^q \Delta(\nabla \Pi))^t +$$

$$- \frac{\theta}{\Delta x} \frac{1}{\Delta(\nabla \Pi)} \left[\bar{H}^q \Delta(\nabla \Pi) \Delta x^t + \Delta x \quad (\bar{H}^q \Delta(\nabla \Pi))^t \right] \quad (1.5.3)$$

sendo $\Delta x = x^q - x^{q-1}$ e $\Delta(\nabla \Pi) = \nabla \Pi(x^q) - \nabla \Pi(x^{q-1})$.

Devido à utilização de uma aproximação da inversa da hessiana, estes métodos têm características de convergência similares aos métodos de segunda ordem. Os métodos mais utilizados são o DFP (*Davidon-Fletcher-Powell*) com $\theta = 0$ na expressão 1.5.3, e a família de algoritmos do tipo BFGS (*Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno*) com $\theta = 1$.

1.5.3. MÉTODOS DE ORDEM DOIS

Nos métodos de ordem dois necessita-se além de valores da função, informações sobre o gradiente e também sobre as derivadas segundas da função. Se a função a ser minimizada é uma função quadrática nas variáveis consideradas, a convergência é bastante rápida com uma iteração. Na prática como as funções são gerais, o cálculo das derivadas segundas pode se tornar muito dispendioso.

Os métodos de segunda ordem compreendem basicamente o Método de Newton e suas várias modificações.

Considerando-se Π uma função contínua e duas vezes diferenciável; o método de Newton começa com uma expansão da função objetivo em série de Taylor até segunda ordem:

$$\Pi(x) \cong \Pi(x^q) + \nabla \Pi(x^q) \delta x + \frac{1}{2} \delta x^t H(x^q) \delta x \quad (1.5.4)$$

onde $\delta x = x^{q+1} - x^q$.

$$\text{Da condição necessária: } \nabla \Pi(x^*) = 0 \Rightarrow \delta x = -[H(x^q)]^{-1} \nabla \Pi(x^q) \quad .$$

Rearranjando a expressão acima obtém-se:

$$x^{q+1} = x^q + \delta x = x^q - [H(x^q)]^{-1} \nabla \Pi(x^q) \quad .$$

$$\text{Portanto, a direção de busca torna-se: } S^q = -[H(x^q)]^{-1} \nabla \Pi(x^q) \quad ,$$

ou seja, recai-se no sistema de equações lineares $HS^q = \nabla \Pi$, para o caso de função quadrática.

Em problemas gerais, onde a função não é quadrática, pode-se modificar o algoritmo para melhorar a sua eficiência quanto à taxa de convergência, reduzindo-se o tempo de processamento. Primeiramente atualizando a direção de busca. Uma segunda modificação consiste em se calcular a matriz hessiana a cada poucas iterações, mantendo a atualização do vetor gradiente a cada iteração (método de Newton modificado). Isto significa assumir que as segundas derivadas da função não mudam rapidamente, e por isso não necessitam serem atualizadas com frequência, como as primeiras derivadas. Se o cálculo da hessiana é dispendioso, o método de Newton modificado torna a otimização eficiente sem afetar significativamente o resultado final.

A principal dificuldade dos métodos de segunda ordem é que a matriz hessiana pode ser singular, ou não positiva definida como é requerido para garantir a solução para um mínimo da função. A matriz hessiana será singular sempre que a função objetivo for linear em uma ou mais variáveis. Se a função objetivo é próxima da linear em alguma variável, a solução para o vetor S pode tornar-se tão mal condicionada que o resultado não será válido. Observe-se que uma função linear não tem mínimo (ou seja, a solução não será limitada), e assim o mau condicionamento da matriz H pode ser usado para identificar uma solução ilimitada.

Se a matriz hessiana tem auto-valores negativos, isto identifica que o problema é não convexo. No caso, o Método de Newton leva a grandes oscilações da solução. Por esta razão é usual providenciar limites de movimento da solução em cada iteração para se evitar um mau condicionamento da hessiana.

Assim como para os métodos quasi-Newton, a taxa de convergência para o Método de Newton depende da relação entre o maior e o menor auto-valor da matriz H.

Se, felizmente, a matriz hessiana é facilmente obtida e é bem condicionada, o Método de Newton é a aproximação preferível, pela alta taxa de convergência.

I.6. CRITÉRIOS DE CONVERGÊNCIA

I.6.1. NÚMERO MÁXIMO DE ITERAÇÕES

Se o número de iterações excede o número máximo especificado (q_{\max}), o processo de busca é interrompido, o que impede que dificuldades numéricas, a instabilidade do algoritmo empregado ou mesmo erros de implementação, conduzam a um processo muito lento, ou que continue iterando indefinidamente.

I.6.2. VARIAÇÃO ABSOLUTA OU RELATIVA NA FUNÇÃO OBJETIVO

Um critério de parada consiste em checar o desenvolvimento do processo comparando valores absolutos de $\Pi(x)$ em sucessivas iterações.

A convergência seria alcançada se $\left| \Pi(x^q) - \Pi(x^{q-1}) \right| \leq \varepsilon_A$, onde ε_A é uma tolerância especificada. Por exemplo pode ser uma fração do valor inicial da função: $\varepsilon_A = 0,001 \left| \Pi(x^0) \right|$.

Um outro critério é checar a variação relativa na função $\Pi(x)$ entre sucessivas iterações. A convergência é alcançada se:

$$\frac{|\Pi(x^q) - \Pi(x^{q-1})|}{\max[|\Pi(x^q)|, 10^{-10}]} \leq \varepsilon_R, \text{ onde } \varepsilon_R \text{ representa uma variação fracional em}$$

relação ao valor de $\Pi(x^q)$. Se $\Pi(x^q)$ é um valor muito pequeno, o denominador será 10^{-10} , o que impede uma divisão por zero.

A utilização de ambos os critérios de convergência assegura que a convergência é identificada nos casos de $\Pi(x)$ ser um valor muito grande ou muito pequeno. Se um dos critérios é satisfeito, obtemos a convergência. Porém é importante, a verificação em duas iterações sucessivas, no mínimo, pois os processos de otimização costumam ser inicialmente muito lentos e aceleram significativamente quando encontram uma direção de descida adequada.

Alternativamente, para o caso de funções que decrescem lentamente, pode-se armazenar uma seqüência de valores da função e compará-los:

$$|\Pi(x^{q+r}) - \Pi(x^q)| \leq \varepsilon_R.$$

Além desses critérios, recomenda-se uma verificação final com a direção gradiente para assegurar que a convergência aparente não é resultado de erros acumulados.

I.6.3. VERIFICAÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DE PONTOS

A verificação de uma seqüência convergente de pontos de mínimo pode ser um critério de parada: $\|x^{q+1} - x^q\|_\infty \leq \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é um número pequeno, mas que vai depender das unidades utilizadas no problema.

I.6.4. CONDIÇÃO DE OTIMALIDADE

O critério de convergência final consiste na verificação das condições necessárias para a "otimalidade".

No caso de problemas irrestritos, as condições necessárias tornam-se

apenas a verificação do vetor gradiente $\nabla\Pi(x)$, cujas componentes devem ser suficientemente próximas de zero, isto é, $\left| \nabla\Pi(x^q) \right| \leq \varepsilon_k$, onde $\varepsilon_k = 10^{-4}$ é um valor usual.

Este critério é facilmente implementado no caso de métodos que empregam o cálculo do gradiente durante o processo.

No caso de análise estrutural, esse critério consiste em verificar se o máximo desequilíbrio nodal é menor que ε_k , ou alternativamente que a norma seja uma porcentagem do desequilíbrio inicial: $\|\nabla\Pi(x)\|_\infty \leq \varepsilon \|\nabla\Pi(x^0)\|_\infty$, onde é usual adotar-se $\varepsilon=0,00001$.

I.7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ADELI, H. (1994) ***Advances in design optimization***. 1 ed., Chapman & Hall, London, 573 p.
- FLETCHER, R. (1986) ***Practical methods of optimization : unconstrained optimization***. v.1, John Wiley & Sons, Winchester, England, 120 p.
- FRITZSCHE, H. (1978) ***Programação não-linear : análise e métodos***. EDUSP, São Paulo, 170 p.
- GILL, P.E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M.H. (1981) ***Practical optimization***. 9 ed., Academic Press, London, 401 p.
- KIRSCH, U. (1981) ***Optimum structural design : concepts, methods and applications***. McGraw-Hill, New York, 441 p.
- LASDON, L.S. (1970) ***Optimization theory for large system***. McMillan, New York, 523 p.
- LUENBERGER, D.G. (1989) ***Linear and nonlinear programming***. 2 ed., Addison Wesley, Massachusetts, 474 p.
- VANDERPLAATS, G.N. (1989) ***Numerical optimization techniques for engineering design with applications***. McGraw-Hill, USA, 333 p.

APÊNDICE II

DEFINIÇÕES DE NORMAS DE VETORES E MATRIZES

A norma de um vetor x de ordem n , $\|x\|$, é um número real que satisfaz as seguintes propriedades :

- a) $\|x\| \geq 0$ sendo $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- b) $\|cx\| = |c| \|x\|$, onde c é um escalar
- c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dentre as normas mais utilizadas no espaço R^n estão:

a) norma infinito : $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq n\}$

b) norma 1 : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$

c) norma euclidiana : $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$

APÊNDICE III

INTRODUÇÃO À ANÁLISE DE ERROS EM CÁLCULOS NUMÉRICOS

Na prática da análise numérica é importante estar claro para o programador, para o analista e para o usuário de um programa, que as soluções computadas não são soluções matemáticas exatas. A precisão de uma solução numérica pode ser afetada por diversos fatores. A compreensão destas dificuldades deve guiar o programador na implementação e/ou no desenvolvimento de algoritmos numéricos.

Deve-se estabelecer tolerâncias aceitáveis de erros que não comprometam a finalidade dos cálculos. Além disso, há a necessidade de se detectar valores absurdos, sejam provenientes de erros de implementação, de limitação do método ou do computador utilizados. Em seguida deve-se analisá-los, e procurar eliminar as causas destes resultados. Um usuário de *software* numérico deve conhecer os métodos e algoritmos que emprega, o suficiente para poder fazer modificações, simplificações e até correções quando necessários. Em princípio, o melhor *software* é aquele desenvolvido especificamente para uma dada necessidade.

III.1 CÁLCULO NUMÉRICO E ALGORITMOS NUMÉRICOS

A matemática computacional pode ser definida como sendo o estudo da matemática sob o ponto de vista computacional. Ou seja, a matemática computacional é o ramo que estuda algoritmos suscetíveis de implementação em máquinas digitais. Ela trata, portanto, da resolução algorítmica de problemas, utilizando o computador. Dentro da matemática computacional, a matemática numérica trata da resolução de problemas numéricos utilizando o computador, e tem por objetivo o estudo dos algoritmos numéricos, levando-se em consideração aspectos de confiabilidade, economia de memória e de esforço computacional, e erros de arredondamento.

ALGORITMO é uma seqüência ordenada e sem ambigüidades de passos e de operações, estabelecida de modo formal, com o objetivo de resolver um determinado problema ou vários problemas do mesmo tipo. Se o problema a ser resolvido for numérico, ou seja, se a solução envolve cálculos e dados numéricos, o algoritmo é dito numérico. As características principais exigidas de um algoritmo numérico são :

- deve ser logicamente correto
- deve ser independente da linguagem de programação e de equipamento
- deve conter uma quantidade finita de cálculos com critérios de parada bem definidos
- deve possuir um critério de exatidão suficiente para o problema específico
- deve ser eficaz, isto é, não deve conter erros e deve produzir resultados confiáveis
- deve ser eficiente, isto é, deve ser de execução rápida e apresentar economia de memória
- deve ser simples e claro, facilitando os trabalhos de manutenção.

III.2. REPRESENTAÇÃO NUMÉRICA NO COMPUTADOR

A primeira origem de erros em computação numérica está nos muitos processos de representação de números no computador. Os detalhes de representação variam de uma série de máquinas para outra, mas o mesmo princípio básico pode ser aplicado a todas.

Um meio padrão de representação de informação consiste em uma seqüência ordenada de dígitos. O sistema de números decimais usa este princípio, desde um sinal de mais ou menos, uma cadeia de dígitos 0,1,...,9 e um ponto decimal (algumas vezes implícito) são interpretados como um número real. Na interpretação da cadeia de dígitos, a posição de cada dígito, com relação ao ponto decimal indica a potência relevante de dez.

Exatamente esta mesma idéia é aplicada quando números são armazenados no computador. Em *hardware* a mais simples distinção está na mudança *on* ou *off*. Estes valores podem ser considerados para definir um número binário (dois-valores) que precisa ser ou zero ou um, e é definido *bit* (*binary digit*). Por causa do uso de circuitos de lógica binária, as bases de número usadas nos computadores são normalmente potências de 2. As três bases mais comuns são 2 (aritmética binária), 8 (octal, com dígitos 0,1,2,...,7), e 16 (hexadecimal, com dígitos 0,1,2,...,9,A,...,F).

É comum se alocar um número fixo de dígitos (usualmente definido como palavra: *word*) para armazenar um número único. Dois formatos de números são essencialmente regras para a interpretação de dígitos dentro de uma palavra : formato do ponto fixo e formato de ponto flutuante.

O primeiro formato é chamado de ponto fixo (*fixed-point format*) porque o ponto que divide o inteiro da parte fracionária de um número real é assumido estar numa posição fixa. Com quatro dígitos decimais, por exemplo, os números 0 até 9999 pode ser representado exatamente como eles seriam escritos, com exceção que os zeros não seriam omitidos, por exemplo, 0020 representaria 20.

Para representar números com sinal em ponto fixo, um número especificado (chamado *bias* ou *offset*) pode ser adicionado ao número

desejado antes que ele seja armazenado - por exemplo, se as *bias* estavam no 4999 no exemplo anterior, '5000' representaria 4999. Alternativamente, desde que o sinal é uma escolha binária, um *bit* único pode ser designado como o *sign bit*.

O formato de ponto fixo é aceitável quando todos os números a serem representados são conhecidos, ficando num certo intervalo, mas é muito restritivo para a maioria dos cálculos científicos, onde os números podem variar grandemente em magnitude.

O segundo formato a ser considerado é o de ponto flutuante: (*floating-point format*), que é análogo à notação científica onde um número é escrito como uma fração com sinal vezes uma potência de 10.

No formato de ponto flutuante, um número não zero x é escrito na forma $x=mb^e$, onde b é a base da máquina, e e é um número inteiro com sinal conhecido como o expoente de x ; e o número m é a mantissa de x . Dado um particular valor de b , esta representação pode ser feita de maneira única, requerendo que a mantissa seja normalizada, isto é, m precisa satisfazer $\frac{1}{b} \leq |m| < 1$.

Desde que o expoente e é um número inteiro com sinal, este pode ser armazenado em algum formato de ponto fixo conveniente. Também, nesse caso, qualquer quantidade de valor binário pode ser usada para armazenar o sinal da mantissa. A magnitude da fração m é assumida estar armazenada como uma cadeia de t dígitos m_1, m_2, \dots, m_t onde $0 \leq m_i \leq b-1$; isto representa a fração $b^{-t}(m_1b^{t-1} + m_2b^{t-2} + \dots + m_t)$.

Se m é normalizado, $m_1 \neq 0$. Com uma representação normalizada, o valor máximo de $|m|$ é $1 - b^{-t}$, que corresponde a $m_i = b-1$, $i = 1, \dots, t$. O menor valor de $|m|$ é b^{-1} , que corresponde a $m_1=1, m_2=\dots=m_t=0$.

Desde que zero não é um número normalizado, qualquer esquema para armazenar um número em ponto flutuante precisa incluir uma forma especial para o zero.

Considerando uma máquina hipotética com aritmética em base decimal e palavras de 8 dígitos, o número $+ .12345 \times 10^{-3}$ na base aritmética

decimal, teria o sinal representado pelo primeiro dígito à esquerda, os próximos dois dígitos conteriam o expoente *biased* de 50, e os últimos 5 dígitos representariam a magnitude da mantissa normalizada:

+	6	7	1	2	3	4	5
sinal	<i>biased expoent</i>		mantissa				

Nos computadores que usam aritmética hexadecimal, um número de precisão simples no formato de ponto flutuante é representado por uma palavra composta de 32 bits, dividido em quatro (8-bits) bytes, ou 8 dígitos hexadecimais. O primeiro bit da palavra conteria o sinal da mantissa - 0 para mais, 1 para menos. Os próximos 7 bits (restantes do primeiro byte) contêm o expoente *biased* por 64. Os bytes de 2 a 4 conteriam a mantissa normalizada.

III.3. MEDIDAS DE ERROS

Freqüentemente necessita-se medir o quanto um valor calculado está próximo da quantidade exata. Intuitivamente, uma medida satisfatória do erro seria zero se a aproximação fosse exata, “pequena” se as duas quantidades fossem “próximas”, e “grande” se a aproximação fosse “pobre”. O uso de termos subjetivos como pequeno e pobre indica as complicações na definição de um critério apropriado do erro.

Supondo-se que \bar{p} é uma aproximação de p . O erro absoluto é $E_p = p - \bar{p}$ e o erro relativo é $R_p = (p - \bar{p}) / p$, desde que $p \neq 0$. O erro absoluto é simplesmente a diferença entre o valor verdadeiro e o valor aproximado, enquanto o erro relativo é uma porção do valor absoluto, considerando, dessa forma, o tamanho do valor exato. O erro relativo é preferível para a representação em ponto flutuante, pois trata diretamente com a mantissa do número. Como não se dispõe normalmente do valor

exato, e sim de uma estimativa do erro absoluto, é mais usual utilizar a expressão $R_p = E_p / p$ para o cálculo do erro relativo.

Precauções devem ser tomadas no cálculo do erro relativo, quando o valor exato envolvido tende a um número próximo a zero. Nesse caso, torna-se conveniente utilizar-se uma medida, que combina os erros relativo

e absoluto, dado pela expressão: $\frac{|\bar{p} - p|}{1 + |p|}$. Esta medida é similar ao erro

relativo quando $|p| \gg 1$, e ao erro absoluto quando $|p| \ll 1$.

O erro percentual é o erro relativo em termos percentuais, $R_p \cdot 100\%$.

III.4. FONTES DE ERROS EM CÁLCULO COMPUTACIONAL

Quanto às causas, os erros cometidos em cálculos numéricos através de computadores podem ser classificados em:

- erros inerentes, os quais ocorrem geralmente na fase de levantamento e/ou introdução de dados devidos a enganos pessoais, pouca precisão dos dados, má aferição de equipamentos de medidas, simplificações e arredondamentos indevidos, etc.
- erros de truncamento, que são introduzidos pela paralisação de procedimentos numéricos infinitos.
- erros de arredondamento, que são provenientes da capacidade limitada do computador para representar números de ponto flutuante.

III.4.1. ERROS INERENTES

Os dados de um problema real podem conter incertezas ou erros. Este tipo de erro é referido como *noise*, e afetará a acuidade de qualquer cálculo numérico que está baseado em dados. Uma melhora de precisão não é obtida pela realização de cálculos sucessivos sobre dados com *noise*. Portanto, se o processo começa com d dígitos significativos de acuidade, o

resultado de um cálculo será relatado em d dígitos significativos de acuidade.

Por exemplo, supondo-se que os dados $p_1=4,152$ e $p_2=0,07931$ tenham ambos quatro dígitos de acuidade. Então a soma $p_1+p_2=4,23131$ tem mais dígitos significativos que os dados originais e não representam maior precisão do resultado. A resposta mais apropriada, neste caso, seria $p_1+p_2=4,231$.

III.4.2. ERROS DE TRUNCAMENTO (*truncation error*)

A noção de truncamento refere-se usualmente a erros introduzidos quando uma expressão matemática complicada é substituída por uma fórmula elementar. Esta terminologia tem origem na técnica de substituição de uma função complicada por uma série de Taylor truncada.

III.4.3. ERROS DE ARREDONDAMENTO (*round-off error*)

Somente um conjunto finito de números pode ser representado por formato fixo ou por formato de ponto flutuante. Se uma palavra contém t dígitos na base b , então no máximo b^t números distintos podem ser representados, e eles formam o conjunto de números representáveis para aquela máquina. Todos os outros números não podem ser representados exatamente, e alguns erros ocorrerão se se tentar armazenar tal número. Estes erros são definidos como erros de arredondamento ou erros de representação.

Alguns números não podem ser representados porque sua magnitude fica fora do intervalo de valores que podem ser armazenados. Se e_{\max} é o expoente máximo disponível, a magnitude do maior número em ponto flutuante normalizado é $K = b^{e_{\max}} (1 - b^{-t})$. Se e_{\min} é o mínimo expoente disponível, a menor magnitude não-zero representável é $K = b^{(e_{\min} - 1)}$. Um número maior em magnitude que K causa um *overflow* (*transbordamento da*

capacidade de representação máxima), e um número não-zero de magnitude menor que K causa um *underflow* (*transbordamento da capacidade de representação mínima*). Se o número é representável ou não depende da base b , empregada na máquina.

Outros números não podem ser representados porque sua mantissa contém mais que t dígitos significativos. Por exemplo o número π , que não pode ser representado exatamente com um número finito de dígitos.

Por outro lado, dado um número x que não causa *overflow* nem *underflow*, há ainda a questão de como selecionar o número que mais se aproxima deste número, representado em ponto flutuante, $fl(x)$.

Desde que x fica entre dois números representáveis, um esquema que minimiza os erros de arredondamento é aquele que escolhe o mais próximo dentro da vizinhança do número representável, x^* . Uma regra que leva a uma minimização dos erros de arredondamento, quando a vizinhança mais próxima é única, consiste em não se modificar m_t se a porção de m a ser descartada é menor que a metade de uma unidade da última posição de dígito significativo a ser conservado $\left(\frac{1}{2}b^{-t}\right)$. Se a porção de m a ser descartada é maior que $\left(\frac{1}{2}b^{-t}\right)$, adiciona-se uma unidade a m_t , e renormaliza-se se necessário. Com este esquema, em uma máquina decimal com uma mantissa de 6 dígitos, o número 3.14159265 e -20.98999 torna-se 3.14159 e -20.9900, respectivamente.

Quando o número exato é a metade entre dois números representáveis, há vários caminhos para se resolver essa ambigüidade automaticamente. Por exemplo, a regra do arredondamento para o mais próximo par pode ser usada, onde um número é arredondado para o número representável mais próximo cujo último dígito é par. Com esta regra, uma máquina com 4 dígitos decimais significativos de mantissa, o número .98435 e .98445 seriam ambos arredondados para .9844.

Procedimentos corretos de arredondamento produzem erros na representação que não é maior que a metade da unidade no último dígito significativo da mantissa, ou seja, produzem erro relativo : $\frac{|f(x) - x|}{|x|} \leq \frac{1}{2} b^{1-t}$.

O número b^{1-t} tem um papel importante em qualquer cálculo em ponto flutuante, e é denominado “precisão relativa da máquina” ou simplesmente precisão de máquina ε_m .

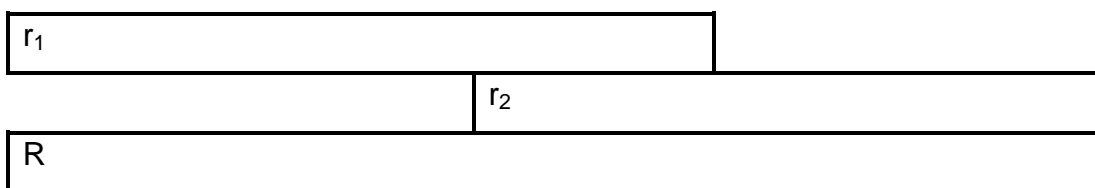
Alguns computadores usam outros esquemas, como por exemplo, a regra de truncamento, onde todos os dígitos de m depois do último a ser retido são descartados. Neste caso, o limite do erro relativo para o truncamento pode ser uma unidade inteira no último dígito : $\frac{|f(x) - x|}{|x|} \leq b^{1-t}$.

Pela regra do truncamento, na aritmética com 4 dígitos decimais, todos os números entre .98340 e .983499...9 seriam representados como .9834.

III.4.4. ERROS INCORRIDOS DURANTE OPERAÇÕES ARITMÉTICAS

Quando operações aritméticas são executadas no computador, erros de arredondamento adicionais ocorrem por causa da necessidade de armazenamento de resultados não representáveis. Mesmo se não há erros na representação de x_1 ou x_2 , sua soma ou produto exatos não são necessariamente representáveis.

Por exemplo, supondo-se que se queira adicionar ou subtrair dois números em ponto flutuante x_1 e x_2 . O número de maior magnitude é armazenado num registro r_1 ; o número menor é armazenado num registro r_2 e transformado à direita até os expoentes de r_1 e r_2 concordarem no mesmo valor. A adição ou subtração é executada com r_1 e r_2 como operandos e o resultado é armazenado num registro mais longo R .



O registro R tem um dígito *overflow* extra (“.”) para permitir a ocorrência de um dígito significativo extra antes do ponto decimal durante a adição ou subtração. Se o resultado do cálculo resulta na utilização do dígito *overflow*, então o registro precisa ser re-normalizado pela execução de uma mudança à direita. Se o cálculo resulta em zeros depois do ponto decimal, então uma mudança adequada à esquerda precisa ser feita.

O erro na adição e subtração ocorre porque o número contido no registro R é geralmente mais longo que t dígitos e precisa ser arredondado para t dígitos. Algumas máquinas não armazenam todos os dígitos de r_2 e R, quando os dígitos de r_2 são movidos além do último dígito significativo de r_1 durante a mudança à direita. Neste caso, pode ocorrer uma perda adicional da acuidade se dígitos insuficientes são retidos.

Na prática, o resultado armazenado de uma operação de ponto flutuante satisfaz $fl(a \text{ op } b) + (a \text{ op } b)(1+h)$, onde a e b são dois números representáveis, “op” é uma das operações “+”, “-”, “*”, “/”, e h depende de a , b , da precisão da máquina, e do *floating-point hardware*.

O menor limite possível de h é aquele associado com o erro de arredondamento simples, e na prática h é usualmente limitado por um pequeno múltiplo da precisão da máquina.

III.4.5. ERROS DE CANCELAMENTO (*loss of significance*)

Certos cálculos em computador carregam o risco de introduzir maiores erros relativos do que pequenos múltiplos da precisão da máquina, em particular, a subtração de números arredondados próximos (*subtractive cancellation*). O erro associado com este procedimento é denominado de erro de cancelamento.

Considerando dois números x_1 e x_2 , cujos valores em ponto flutuante são $x_1^* = x_1(1 + \varepsilon_1)$ e $x_2^* = x_2(1 + \varepsilon_2)$, onde ε_1 e ε_2 são limitados em magnitude pela precisão relativa da máquina. A diferença exata de x_1^* e x_2^* pode ser escrita como $\Delta x^* \equiv x_1^*(1 + \varepsilon_1) - x_2^*(1 + \varepsilon_2) \equiv (x_1 - x_2)(1 + \eta)$, de modo que η representa o erro relativo em Δx^* , com relação à diferença exata dos números originais. Rearranjando-se a expressão obtém-se que

$$\eta = \frac{\varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 x_2}{x_1 - x_2}.$$

Se $x_1 = x_2$, diz-se que ocorre o cancelamento completo.

O erro relativo em Δx^* pode ser limitado com

$$|\eta| = \frac{|\varepsilon_1 x_1 - \varepsilon_2 x_2|}{|x_1 - x_2|} = \frac{|\varepsilon_2 (x_1 - x_2) + x_1 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)|}{|x_1 - x_2|} \leq \varepsilon_m \left(1 + 2 \frac{|x_1|}{|x_1 - x_2|} \right),$$

assumindo-se que $|x_1| \geq |x_2|$.

Se $|x_1 - x_2|$ é relativamente pequeno em relação a $|x_1|$ (isto é, x_1 muito próximo de x_2), a expressão acima mostra que o erro relativo em Δx^* não está restrito à ordem de ε_m . O erro pode ser maior, mas não devido a erros na subtração de x_1^* , já que Δx^* é uma diferença exata, e sim por causa dos erros iniciais ocorridos no arredondamento de x_1 e x_2 . Deve-se observar que se ε_1 e ε_2 são zeros, $\eta = 0$. Se x_1 é muito próximo de x_2 , os dígitos significativos de alta ordem original se cancelam durante a subtração, o que significa que dígitos de menor ordem descartados no arredondamento são os dígitos mais significativos do resultado exato, ou seja, o cancelamento revela o erro do arredondamento. Se x_1 e x_2 não são similares, o limite no erro de cancelamento torna-se da mesma ordem que o erro resultante de qualquer outra operação de ponto flutuante, e não é de qualquer significado especial.

Como exemplo, considera-se a subtração dos números $x_1=.2946796847$ e $x_2=.2946782596$ em uma máquina com uma mantissa de 6 dígitos decimais ($\epsilon_m=10^{-5}$). Se o arredondamento correto é utilizado, os valores de x_1^* e x_2^* são $.294680$ e $.294678$, respectivamente, com a diferença Δx^* , calculada exatamente, sendo $.2 \times 10^{-5}$. Contudo a diferença entre os valores exatos de x_1 e x_2 é $.14251 \times 10^{-5}$, o que implica que Δx^* tem um erro de cancelamento de $\eta=.40341$. O limite do erro de cancelamento relativo decresce com ϵ_m , se 8 dígitos são usados para representar x_1 e x_2 , o erro de cancelamento relativo é de $.357 \times 10^{-2}$.

Não é possível calcular o valor exato do erro de cancelamento relativo η , sem a utilização de valores exatos de x_1 e x_2 , e aritmética exata. Além disso, pode-se somente estimar o limite do erro de cancelamento. Por conveniência, refere-se usualmente à estimativa de um limite sobre o erro de cancelamento como “erro de cancelamento”, e relaciona-se com estimativas calculáveis de tal limite. Métodos de estimar o erro de cancelamento são discutidos em GILL et alli [1981], capítulo 8.

III.5. ACUIDADE NUMA SEQUÊNCIA DE CÁLCULOS

Freqüentemente tratamos com valores calculados que são resultado de uma seqüência complexa de cálculos envolvendo outras quantidades medidas ou calculadas.

Seja p um valor exato da quantidade de interesse; este seria o valor obtido se todos os cálculos intermediários fossem executados com aritmética exata e com os valores exatos de todas as quantidades associadas. Seja $fl(p)$ o resultado final calculado. Se $fl(p)=p+E_p$, a quantidade E_p é o erro absoluto em $fl(p)$. Usa-se o termo precisão absoluta para definir um escalar positivo ϵ_A , que é um limite superior do erro absoluto, isto é,

$$E_p \leq \epsilon_A \cdot$$

Quando p é não-zero, o erro em $fl(p)$ pode algumas vezes ser expresso em termos de acuidade relativa. Erros relativos são importantes porque eles são inerentes na natureza da aritmética de ponto flutuante e nos métodos usuais para cálculo de funções *standard*. Por exemplo, na maioria das máquinas o valor calculado de \sqrt{x} contém um erro não maior que uma unidade na última posição da mantissa. Quando se considera o erro relativo, escreve-se $fl(p)$ como $fl(p)=p(1+R_p)$. A precisão relativa ε_R é um escalar positivo tal que $R_p \leq \varepsilon_R$.

Algebricamente, os erros R_p e E_p satisfazem $|R_p \cdot p| = |E_p|$. Infelizmente, não há nenhuma relação fixada entre os limites associados ε_A e ε_R . Muitas vezes, as precisões absoluta e relativa satisfazem a relação aproximada $\varepsilon_A \approx \varepsilon_R |p|$. Por exemplo, quando f é uma função *standard*, $\varepsilon_R = \varepsilon_m$ e $\varepsilon_A = \varepsilon_m |f|$. Contudo, a relação entre ε_A e ε_R é, em geral, muito mais complicada, particularmente quando $|f|$ é pequeno.

III.6. ANÁLISE DE ERROS EM ALGORITMOS

O resultado final de um algoritmo para resolver um problema em um computador é um conjunto de números representáveis, que, em geral, foi produzido por uma seqüência de operações em ponto flutuante. Considera-se aqui, como atingir o mérito de um algoritmo em termos de produzir uma solução calculada “aceitável”.

Idealmente, deseja-se obter uma solução que é próxima da solução exata. O processo de pós-análise do erro é direcionada para achar uma relação da forma $\|p - \bar{p}\| \leq \delta$, onde p é a solução exata, \bar{p} é a solução calculada, e $\|\cdot\|$ define alguma medida razoável da diferença. Infelizmente, a pós-análise de erros não é de utilidade para a maioria dos algoritmos, porque o valor de δ não será pequeno para todos os problemas.

Para entender porque isso ocorre, observa-se que certos problemas são inerentemente mal condicionados, isto é, uma pequena perturbação nos

dados do problema pode levar a uma grande mudança na solução exata. Mau condicionamento não está relacionado com cálculos em ponto flutuante, mas é uma propriedade do problema.

Um problema numérico é dito ser instável, mal condicionado ou mal posto, quando a sua solução for muito sensível a pequenas alterações nos seus dados de entrada.

Um algoritmo é dito mal condicionado ou instável, quando o resultado final obtido depende da maneira como os dados são manipulados. Em outras palavras, o algoritmo não se adapta a todos os casos do problema a ser resolvido.

O caso de instabilidade de problemas, em geral, é mais complicado de ser tratado, e até de ser identificado. Uma análise mais rigorosa de um problema já reconhecidamente instável, e a sua resolução por métodos distintos, pode ajudar a chegar a conclusões, senão definitivas, pelo menos mais próximas da realidade sobre o mesmo. Analogias com problemas semelhantes, porém menos instáveis, também são indicadas.

O primeiro caso, a instabilidade de algoritmos, é mais fácil de ser contornado, via de regra, bastando escolher o método mais adequado dentre os disponíveis para a resolução do problema em questão, e/ou adequar o algoritmo às particularidades de cada problema a ser resolvido.

Por exemplo, supondo-se que um algoritmo foi desenvolvido com todos os cálculos sendo executados exatamente, exceto por um simples erro de arredondamento. Por qualquer padrão razoável, isto seria qualificado como um “bom” algoritmo. Contudo, se este algoritmo for aplicado a um problema altamente mal condicionado, a solução calculada poderia diferir enormemente da solução exata, e o limite δ não seria pequeno. Portanto, a pós-análise do erro indicaria que o algoritmo é insatisfatório, mesmo embora o processo de cálculo desviasse da perfeição somente por um erro pequeno.

Em contraste, a forma de análise do erro que tem sido mais utilizada é denominada pré-análise do erro. Ao invés de considerar a solução calculada como uma perturbação da solução exata, a pré-análise do erro

usualmente considera a solução calculada como uma solução exata de uma perturbação do problema original. Em essência, as perturbações introduzidas no cálculo de ponto flutuante são refletidas antes no problema e não depois na solução.

Seja P o problema a ser resolvido, e assumindo que a solução calculada é a solução exata de algum outro problema \bar{P} . A pré-análise do erro tipicamente providencia um limite da forma $\|P - \bar{P}\| \leq \Delta$, onde Δ torna-se pequeno para a maioria dos bons algoritmos. Um algoritmo cujo resultado satisfatório da forma $\|P - \bar{P}\| \leq \Delta$ pode ser obtido, é dito ser numericamente estável porque os erros introduzidos pelos cálculos da solução tem um pequeno efeito no desvio da solução original. Deve-se observar que a mera representação de P em uma máquina pode implicar que Δ não seja nulo.

III.7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- DAHLQUIST, G.; BJÖRCK, A. (1974). ***Numerical Methods***, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- DIEGUEZ, J.P.P. (1992). ***Métodos numéricos computacionais para a engenharia***, v.1, Editora Interciência, Rio de Janeiro.
- GILL, P.E.; MURRAY, W.; WRIGHT, M.H. (1981). ***Practical optimization***, 9 ed., Academic Press, London, 401 p..
- HAMMING, R.W. (1973). ***Numerical methods for scientists and engineers***, 2^a. edition, McGraw-Hill, Tokyo.
- KAHAN, W. (1973). ***The implementation of algorithms : Part 1***, Technical Report 20, Department of Computer Science, University of California, Berkeley.
- MATHEWS, J.H. (1992). ***Numerical methods for mathematics, science, and engineering***, 2^a.ed. , Prentice Hall, New Jersey, 646p.
- WILKINSON, J.H. (1961). *Error analysis of direct methods of matrix inversion. J. Assoc. Comp. Math.* , 8, 281-330.

WILKINSON, J.H. (1963). *Rounding Errors in Algebraic Processes*, **Notes on applied Sciences**, n. 32, Her Majesty's Stationery Office, Prentice-Hall.

WILKINSON, J.H. (1967). *The solution of Ill-conditioned Linear Equations*, **Mathematical Methods for digital Computers**, ed. A. Ralston & H.S. Wilf, v.2, N.Y., p.65-93.

APÊNDICE IV

FATORES DE CONVERSÃO DE UNIDADES

UNIDADES INGLESAS para SISTEMA INTERNACIONAL

1 <i>in</i>	:	2,54 cm
1 <i>ft</i>	:	30,48 cm
1 <i>ksi</i>	:	10 ³ psi
1 <i>psi</i>	:	0,6896 N/cm ²
1 <i>Ksf</i>	:	4,7899 N/cm ²
1 <i>kip</i>	:	4.450 N
1 <i>lb</i>	:	4,450 N (=0,445 kgf)

DEFINIÇÃO DE UNIDADES INGLESAS

FORÇA

1 <i>kip</i> (ou <i>kips</i>)	=	1000 <i>lbf</i>
1 <i>ton</i> (ou <i>tons</i>)	=	2000 <i>lbf</i>

COMPRIMENTO

<i>lf</i>	=	<i>ft</i>
-----------	---	-----------

ÁREA

<i>sf</i>	=	<i>ft</i> ²
-----------	---	------------------------

VOLUME

<i>cf</i>	=	<i>ft</i> ³
-----------	---	------------------------

FORÇA/COMPRIMENTO

<i>plf</i>	=	<i>lbf/ft</i>
<i>klf</i>	=	<i>kips/ft</i>

PRESSÃO

<i>psi</i>	=	<i>lbf/in</i> ²
<i>ksi</i>	=	<i>kips/in</i> ²
<i>ksf</i>	=	<i>kips/ft</i> ²
<i>psf</i>	=	<i>lbf/ft</i> ²

DENSIDADE

<i>pcf</i>	=	<i>lbf/ft</i> ³
------------	---	----------------------------