

**CÁLCULO DE ESFORÇOS E DESLOCAMENTOS EM
PAVIMENTOS DE EDIFÍCIOS CONSIDERANDO-SE MODELOS
PRÓPRIOS PARA O CONCRETO ARMADO**

Eng. FAUSTINO SANCHES JUNIOR

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Wilson Sergio Venturini

São Carlos

1998

Ofereço este trabalho aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

A Deus.

Ao Prof. Venturini, pelo paciente trabalho de orientação e pela amizade.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo – FAPESP, pelo auxílio financeiro.

A todos professores, colegas e funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da EESC-USP.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	<i>v</i>
LISTA DE TABELAS	<i>viii</i>
LISTA DE SÍMBOLOS	<i>ix</i>
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	<i>xii</i>
RESUMO	<i>xiii</i>
<i>ABSTRACT</i>	<i>xiiiv</i>
1-INTRODUÇÃO	1
1.1-GENERALIDADES	1
1.2-OBJETIVOS	3
1.3-METODOLOGIA	4
1.4- ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	5
2-COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO	7
2.1-INTRODUÇÃO	7
2.2-ESTADOS LIMITES	8
2.2.1-ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO	8
2.2.2-ESTADO LIMITE ÚLTIMO	9
2.3-ESTÁDIOS DE SOLICITAÇÃO	10
2.3.1-CÁLCULO CLÁSSICO NO ESTÁDIO 1 PARA A FLEXÃO SIMPLES	14

2.3.2-CÁLCULO CLÁSSICO NO ESTÁDIO 2 PARA FLEXÃO SIMPLES	18
2.4-CONTRIBUIÇÃO DO CONCRETO INTACTO ENTRE FISSURAS – “TENSION STIFFENING”	21
2.4.1-TIRANTE DE CONCRETO ARMADO	22
3-FENÔMENOS REOLÓGICOS DO CONCRETO ARMADO	27
3.1-INTRODUÇÃO	27
3.2-FLUÊNCIA DO CONCRETO	28
3.3-RETRAÇÃO DO CONCRETO	32
3.4-RELAXAÇÃO DO CONCRETO	34
3.5-CÁLCULO DA RETRAÇÃO E FLUÊNCIA DE ACORDO COM O CÓDIGO - MODELO DE 1990 DO CEB	36
3.5.1-APLICABILIDADE DO MODELO	36
3.5.2-PARÂMETROS DE CÁLCULO	36
3.5.3-CÁLCULO DA RETRAÇÃO	38
3.5.4-CÁLCULO DA FLUÊNCIA DO CONCRETO	40
3.6-VARIAÇÃO DO MÓDULO DE DEFORMAÇÃO LONGITUDINAL DO CONCRETO	43
3.7-DESENVOLVIMENTO DA RESISTÊNCIA COM O TEMPO	44
3.7.1-RESSITÊNCIA À COMPRESSÃO	44
3.7.2-RESISTÊNCIA À TRAÇÃO	45
3.8-CÁLCULO DO COEFICIENTE DE ENVELHECIMENTO DO CONCRETO	46
3.8.1-RELAÇÕES BÁSICAS	46
3.8.2-ALGORITMO “PASSO A PASSO” PARA O CÁLCULO DA RELAXAÇÃO DO CONCRETO.	48
3.9-MODIFICAÇÕES NOS ESFORÇOS SOLICITANTES DEVIDO À FLUÊNCIA	53
4-MODELOS DE COMPORTAMENTO DO CONCRETO ARMADO	56

4.1-INTRODUÇÃO	56
4.2-MODELO DE GHALI & FAVRE – FLEXÃO SIMPLES	57
4.2.1-INSTANTE DA APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO	57
4.2.2-INSTANTE GENÉRICO DE TEMPO	60
4.3-MODELO DE DEBERNARDI – FLEXÃO SIMPLES	66
4.3.1-INTRODUÇÃO	66
4.3.2-HIPÓTESES BÁSICAS	67
4.3.3-EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS	67
4.3.4-TENSÕES E DEFORMAÇÕES: SEÇÃO NÃO FISSURADA DE CONCRETO ARMADO	...69
4.3.5-TENSÕES E DEFORMAÇÕES: SEÇÃO FISSURADA DE CONCRETO ARMADO	76
5-ANÁLISE LINEAR E NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS	93
5.1-GENERALIDADES	93
5.1.1 - PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL	94
5.1.2-CASO NÃO-LINEAR	95
5.2-ELEMENTO FINITO DE BARRA	95
5.2.1-MATRIZ DE RIGIDEZ : PARCELA DA FLEXÃO	97
5.2.2 - MATRIZ DE RIGIDEZ - PARCELA DA TORÇÃO	99
5.3-CÁLCULO DOS RESÍDUOS DE CARREGAMENTO NO ELEMENTO	100
5.4-SOLUÇÃO NUMÉRICA	101
5.4.1-INTRODUÇÃO	101
5.4.2-FORMULAÇÃO INCREMENTAL	102
5.4.3-FORMULAÇÃO ITERATIVA : Método de Newton-Raphson:	103
6-PROGRAMA PARA ANÁLISE DE GRELHAS	106
6.1-INTRODUÇÃO	106
6.2-NÃO-LINEARIDADE FÍSICA – INSTANTE DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO	107
6.3-ESFORÇOS E DEFORMAÇÕES AO LONGO DO TEMPO	114

6.4-APLICAÇÃO DE CARGAS NO INSTANTE DE TEMPO “t”.	117
6.5-DESCARREGAMENTO	119
7-EXEMPLOS	120
7.1-INTRODUÇÃO	120
7.2-EXEMPLOS DO BULLETIN-158 DO CEB	121
7.2.1-VIGA BI-ENGASTADA	121
7.2.2-VIGA SIMPLEMENTE APOIADA	124
7.2.3-VIGA BI-APOIADA COM SEÇÃO “T”	127
7.3-COMPARAÇÃO COM DADOS EXPERIMENTAIS	128
7.3.1-LABORATÓRIO DE ESTRUTURAS DAS EESC-USP	128
7.3.2-ENSAIO DE BRESLER e SCORDELIS	133
7.4-PAVIMENTOS DE EDÍFICIOS	135
7.4.2-PAVIMENTO FICTÍCIO	135
7.4.3-PAVIMENTO REAL	138
8-CONCLUSÕES	146
ANEXOS	148
ANEXO A – FORMULAÇÃO PARA SEÇÃO ‘T’ NO ESTÁDIO 1	148
ANEXO B – FORMULAÇÃO PARA SEÇÃO ‘T’ NO ESTÁDIO 2	150
ANEXO C – COORDENADAS DOS NÓS DO EXEMPLO 7.4.2	152
ANEXO D – INCIDÊNCIA DAS BARRAS DO EXEMPLO 7.4.2	154
ANEXO E – SEÇÕES TRANSVERSAIS DOS ELEMENTOS DO EXEMPLO 7.4.2	155
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	161

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 : Estádios de solitação de uma seção de concreto armado	13
Figura 2.2 : Seção transversal e deformações para o estágio 1	15
Figura 2.3: Seção transversal e deformações para o estágio 2	19
Figura 2.4 : Tensões em um tirante fissurado de concreto armado	23
Figura 3.1 : Barra de concreto carregada axialmente	29
Figura 3.2 : Deformações ao longo do tempo	32
Figura 3.3 : Retração e expansão ao longo do tempo	33
Figura 3.4 : Deformação de barra prismática	35
Figura 3.5 : Relaxação do concreto	35
Figura 3.6 : Módulos de deformação longitudinal tangente e secante para o concreto	43
Figura 3.7 : Divisão de tensões com o tempo para a análise “passo a passo” da relaxação do concreto	49
Figura 3.8 : Aplicação do processo dos deslocamentos	54
Figura 3.9 : Momentos isostáticos	54
Figura 4.1 : Peça fissurada de concreto armado	57
Figura 4.2 : Diagrama Momento-Curvatura - Flexão Simples	60
Figura 4.3 : Efeitos da fluência e retração numa seção não fissurada de concreto armado	63
Figura 4.4 : Efeitos da fluência e retração numa seção fissurada de concreto armado	64
Figura 4.5 : Tensões e deformações nos tempos “ t_0 ” e “ t ” para uma seção não-fissurada de concreto armado	70

Figura 4.6 : Tensões e Deformações Nos Tempos “ t_0 ” e “ t ” Para Uma Seção Fissurada De Concreto Armado	77
Figura 4.7 : Contribuição do concreto intacto entre fissuras – “tension stiffening” – na flexão simples	78
Figura 5.1 : Viga com carregamento qualquer	94
Figura 5.2 : Elemento de barra	97
Figura 5.3 : Métodos de Newton-Raphson	105
Figura 6.1 : Seção transversal típica	107
Figura 6.2 : Elemento de barra	108
Figura 6.3 : Ilustração do cálculo das curvaturas	110
Figura 6.4 : Resíduos de momento para uma seção	110
Figura 6.5 : Determinação do modulo de deformação por flexão secante	112
Figura 6.6: Apresentação de fluxograma de procedimento incremental-iterativo	113
Figura 6.8 : Diagrama momento curvatura, com a consideração da fluência	114
Figura 6.9 : Resíduo de momento devido a fluência para o instante de tempo “ $t_0 + \Delta t$ ”	115
Figura 6.10 : Fluxograma de procedimento incremental-iterativo para o instante de aplicação das cargas e incremental para a consideração das deformações ao longo do tempo	116
Figura 6.11 : Novo carregamento na estrutura	117
Figura 6.12 : Fluxograma para análise considerando carregamentos em instantes de tempo distintos	118
Figura 6.13 : Descarregamento	119
Figura 7.1: Exemplo 7.2.1- viga bi-engastada de concreto armado	121
Figura 7.2 : Diagrama de momentos para exemplo 7.2.1. (kN.cm)	122
Figura 7.3 : Curva de Deslocamentos Para o Ponto Central da Viga	123
Figura 7.4 : Viga bi-apoiada do exemplo 7.2.2.	124

Figura 7.5: Viga do exemplo 7.2.3	127
Figura 7.6 :Viga do exemplo 7.3.1	129
Figura 7.7: Resultados numéricos para viga pouco armada	131
Figura 7.8 : Resultados numéricos para viga normalmente armada	131
Figura 7.9 : Resultados numéricos para viga muito armada	132
Figura 7.10 : Viga ensaiada por Bresler & Scordelis	134
Figura 7.11 : Resultados numéricos para viga ensaiada por BRESLER & SCORDELIS	134
Figura 7.12 : Resultados para viga V01	136
Figura 7.13 : Pavimento fictício	137
Figura 7.14 : Pavimento : Pilotis de Edifício	139
Figura 7.15 : Simetria no pavimento	140
Figura 7.16 : Discretização em elementos finitos	141
Figura 7.17 : Carregamentos no pavimento	142
Figura 7.18 : Diagramas de momento fletor – exemplo 7.4	143
Figura A.1 : Seção em forma de “ I ”	148
Figura A.2 : Estádio 2 : a) seção transversal; b) comportamento de seção retangular; c) comportamento de seção “ I ”	151

LISTA DE TABELAS

Tabela 7.1 : Taxas de armadura e carregamento para a viga Fig.(7.4)	124
Tabela 7.2 : Deslocamento vertical do ponto médio do vão da viga do exemplo 7.2.2 para os instantes " t_0 "	125
Tabela 7.3 : Deslocamento vertical do ponto médio do vão da viga do exemplo 7.2.2 " t "	125
Tabela 7.4 : Viga do exemplo 7.3.1	129
Tabela 7.5: Deslocamentos em pontos nodais	141
Tabela A.1 : Coordenadas do exemplo 7.4.2	152
Tabela A.2 : Incidência das barras do exemplo 7.4.2	154
Tabela A.3 : Seções transversais das barras do exemplo 7.4.2	156

LISTA DE SÍMBOLOS

letras romanas maiúsculas

A	- área
A_s	- área da armadura longitudinal tracionada
A'_s	- área da armadura longitudinal comprimida
E_c	- módulo de elasticidade longitudinal do concreto
E_s	- módulo de elasticidade longitudinal do aço
F	- vetor de esforços nodais na estrutura
G	- módulo de elasticidade transversal
K	- matriz de rigidez da estrutura
K_e	- matriz de rigidez de um elemento
L	- comprimento
M	- momento fletor
M_r	- momento de fissuração
$M_{r,k}$	- momento resistente – função do modelo constitutivo
N	- esforço normal
S	- momento estático da seção
U	- energia de deformação
W	- energia potencial das ações externas

letras romanas minúsculas

e	- excentricidade da carga axial
f_{ck}	- resistência característica do concreto à compressão
f_{cm}	- resistência média do concreto à compressão

f_{ctk}	- resistência característica do concreto à tração
f_{ctm}	- resistência média do concreto à tração
f_{yk}	- resistência característica do aço à tração
p	- carregamento uniformemente distribuído no elemento
t	- instante de tempo qualquer, porém maior que t_0
t_0	- instante de aplicação do carregamento
$1/r$	- curvatura da seção
u	- vetor de deslocamentos nodais da estrutura
v	- deslocamento vertical
x	- posição da linha neutra
x_1	- posição da linha neutra no estágio 1
x_2	- posição da linha neutra no estágio 2

letras gregas maiúsculas

Δ	- variação
Δf	- incremento de carga
ΔM	- resíduo de momento
Φ	- função de fluência
I_1	- momento de inércia da seção – estágio 1
I_2	- momento de inércia da seção – estágio 2
Π	- funcional de energia
Q_x	- rotação em torno do eixo X
Q_y	- rotação em torno do eixo Y

letras gregas minúsculas

α	- coeficiente de homogeneização da seção
β	- matriz que relaciona as deformações aos deslocamentos nodais

ξ	- coeficiente de envelhecimento do concreto
δ_e	- vetor de deslocamentos nodais do elemento
e	- deformação
e_{cs}	- deformação por retração
ω	- coeficiente de fluência
ψ	- coeficiente de Poisson
ζ	- coeficiente de ponderação entre os estádios 1 e 2
ξ	- coeficiente de envelhecimento do concreto
ψ	- coeficiente de Poisson
r	- taxa de armadura
s	- tensor das tensões
t	- tensão de aderência
y	- vetor esforços residuais na estrutura

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AAEM	- "Age adjusted effective modullus"
CEB	- Comité Euro-international du Béton
EESC	- Escola de Engenharia de São Carlos
MC	- Model Code
NB	- Norma Brasileira
NBR	- Norma Brasileira Regulamentada
USP	- Universidade de São Paulo

Resumo

SANCHES JR, F. *Cálculo de esforços e deslocamentos em pavimentos de edifícios considerando-se modelos próprios para o concreto armado*. São Carlos, 1998. 159p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O objetivo deste trabalho é fornecer uma contribuição à análise estrutural de pavimentos de edifícios de concreto armado. Com esse fim, foram implementados os modelos de DEBERNARDI e de GHALI & FAVRE, próprios para barras de concreto armado. Os resultados são obtidos para o instante de aplicação de um carregamento e para um instante qualquer de tempo, considerando-se a fluência.

Apresenta-se, no decorrer do trabalho, o equacionamento dos modelos e das variáveis envolvidas no processo. São mostrados exemplos práticos de aplicação dos algoritmos desenvolvidos e discute-se, nos capítulos finais, a redistribuição de momentos que ocorre em estruturas reticulares de concreto armado.

Palavras-chave: *não-linearidade física, concreto armado, estruturas reticuladas, elementos finitos.*

ABSTRACT

SANCHES JR, F. *Calculation of stresses and displacements in building floors with proper models for reinforced concrete*. São Carlos, 1998. 159p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

The aim of this work is to give a contribution to structural analysis of reinforced concrete building floors. Therefore, DEBERNARDI's and GHALI & FAVRE's models for reinforced concrete were implemented. The results are obtained at the loading application instant and at any instant of time, considering therefore the creep.

In this work, it is presented the formulations of the adopted models and the variables used in the process. Some practical examples of application for the developed algorithms are shown. Finally, it is discussed the redistribution of bending moments that may occur in reinforced concrete grid structures.

Keywords: physical nonlinearly, reinforced concrete, grid structures, finite elements.

1-INTRODUÇÃO

1.1-GENERALIDADES

A análise de esforços e deslocamentos em estruturas de concreto armado tem como principal objetivo reproduzir matematicamente o comportamento deste material. As clássicas hipóteses fundamentadas na **Lei de Hooke** para a modelagem do concreto armado, onde é assumida a relação linear entre tensões e deformações, são de largo uso tanto no meio técnico quanto científico. Isso se dá desde o surgimento desse material até os dias atuais, constituindo-se na forma mais simples e freqüente de se analisar um sistema estrutural.

Os modelos elástico-lineares são, certamente, os de mais fácil compreensão e de maior utilização pelo meio técnico, pois dentre outros fatores admitem a superposição de efeitos, evidentemente onde a linearidade geométrica pode ser assumida. Entretanto, há de se questionar a validade de tais hipóteses para o concreto armado, cujo comportamento é bastante complexo devido ao trabalho em conjunto dos materiais que o constituem – concreto e armadura passiva – e, também, ao caráter não-linear de cada um dos seus constituintes.

O concreto armado apresenta um comportamento que se desvia das hipóteses elástico-lineares, mesmo quando submetido a níveis baixos de tensão. Sua resistência à tração é esgotada para níveis de tensão cerca de dez vezes menor que aqueles que causariam a ruptura na compressão. Quando submetido à flexão simples, a região tracionada sofrerá um processo de danificação, dando início à formação de fissuras, exigindo armadura passiva para que obtenha-se uma configuração de equilíbrio.

Para um elemento de concreto armado submetido à flexão simples, fissuras espaçadas entre si deverão ocorrer. O alongamento máximo do aço tracionado se dará na localização da fissura, diminuindo à medida que se caminha para o ponto médio entre fissuras sucessivas. Esse fato exemplifica a **contribuição do concreto íntegro entre fissuras**, conhecido no meio técnico por “*tension stiffening*”.

O comportamento que foi brevemente descrito é marcadamente não-linear. Uma maneira apropriada e simples para representar esse comportamento é através das relações **momento-curvatura**. Outro caráter indispensável para uma melhor modelação do concreto armado é a consideração das deformações não imediatas, tais como a fluência e retração. O efeito desses fenômenos também pode ser acoplado aos diagramas **momento-curvatura**.

Como pode ser visto, uma melhor modelação das estruturas de concreto armado deve ser baseada em critérios que considerem a danificação do concreto armado e as deformações não-imediatas. A formulação deste problema não-linear conduz à sistemas matemáticos extremamente complexos que não podem ser resolvidos analiticamente, mas sim numericamente. Tais soluções numéricas somente são viáveis na prática quando rotinas computacionais devidamente implementadas em equipamento programável são disponíveis.

A partir da década de 1960 surgiram os primeiros programas para análise estrutural via computador, empregando-se técnicas matriciais e discretizações pelo método dos elementos finitos (MEF). O forte impulso que a microinformática vem apresentando, essencialmente nas duas últimas décadas, permite uma evolução nos processos de cálculo e os modelos baseados na **Lei de Hooke** vão sendo substituídos por outros onde a não-linearidade é acoplada, visando representar de maneira mais realista o comportamento das estruturas em geral e dos materiais que as constituem.

À medida que os estudos sobre modelos mais apropriados para a modelação do concreto armado avançam, e também que o uso de computadores se torna cada vez mais freqüente, é extremamente

interessante que se passe a agregar estes progressos ao cálculo de estruturas correntes de concreto armado, tais como os **pavimentos de edifícios**.

1.2-OBJETIVOS

O projeto de estruturas de concreto armado deve satisfazer as condições de segurança a uma possível ruína, quer seja de um elemento estrutural isolado ou desta como um todo; além de garantir que durante a sua vida útil apresente condições adequadas à utilização para cargas de serviço.

No passado as verificações pertinentes aos “*Estados Limites de Utilização*” não recebiam por parte dos projetistas o mesmo tratamento dispensado ao cálculo na ruína – “*Estado Limite Último*”. Esse fato era, até certo ponto, compreensível haja visto que as dimensões dos elementos estruturais resultavam vantajadas. À medida que as técnicas de cálculo foram evoluindo, aliado ao emprego de materiais de maior resistência, as dimensões de peças de uma estrutura de concreto armado foram tornando-se cada vez mais esbeltas, o que exige uma verificação em serviço mais rigorosa.

Nesse sentido pretende-se fornecer uma pequena contribuição para a análise em serviço de esforços e deslocamentos em pavimentos de edifícios de concreto armado. O fenômeno da fluência também será tratado. Assim sendo, cria-se uma ferramenta computacional – “software” – que possibilita ao projetista de estruturas uma determinação mais rigorosa de flechas; além de proporcionar um cálculo de esforços solicitantes mais realista uma vez que a diminuição da rigidez da estrutura é considerada. É possível, também, manipular as taxas de armadura visando uma distribuição de esforços mais adequada à forma estrutural.

Em se tratando do meio científico procuram-se efetuar comparações entre modelos para barras de concreto armado, baseados em relações

momento x curvatura, tanto para o instante inicial de carregamento quanto da consideração da deformação lenta. Estudos futuros e mais completos podem sugerir diretrizes sobre a escolha de um modelo mais apropriado a ser empregado para os casos de interesse prático.

A ferramenta computacional desenvolvida permite simular a aplicação de diversas etapas de carregamento num piso de edifício, levando-se em conta o instante de tempo de cada etapa. Para esse caso a perda de rigidez devida a deformação lenta será considerada. Desse modo, pode-se, a título de exemplo, dizer que o peso próprio da estrutura é aplicado na ocasião da desforma, a alvenaria após tempo específico conhecido porém curto; idem para as ações acidentais etc...

As finalidades a que se destinam as implementações referidas neste trabalho são de emprego perfeitamente viável à rotina de escritórios de cálculo pois os tempos de processamento requeridos mostram-se reduzidos. Objetiva-se também que a nível educacional seja possível a utilização do programa desenvolvido para uma melhor exemplificação do comportamento em serviço das estruturas de concreto armado, através da manipulação com taxas de armadura, por exemplo.

1.3-METODOLOGIA

O pavimento será analisado como **grelha**, dessa forma trabalha-se apenas com elementos lineares. As reações de apoio das lajes sobre as vigas devem ser determinadas a priori empregando-se um procedimento adequado para tal fim. O Método dos Elementos Finitos (**MEF**) é empregado para a resolução do subsistema estrutural.

Emprega-se para a consideração da não-linearidade física e dos fenômenos reológicos os modelos propostos pelos autores **Ghali & Favre (1986)** e **Debernardi (1983)**. Os parâmetros necessários aos cálculos seguem as indicações do **CEB-90**. O sistema de equações não-lineares resultantes é resolvido numericamente através de algoritmos do tipo

Newton-Raphson. Comparações com os resultados obtidos, quando consideram-se os métodos clássicos também são abordadas através de exemplos.

Todas implementações necessárias foram executadas na linguagem de programação **FORTRAN** com a utilização do compilador Power Station-Microsoft. Os processamentos dos exemplos deram-se em microcomputador equipado com processador Pentium de 200 Mhz, 32Mb de memória.

1.4- ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O segundo capítulo deste texto aborda alguns aspectos sobre o comportamento em serviço do concreto armado; visando, principalmente a introdução de conceitos e definições que serão necessários para os capítulos seguintes. Algumas noções sobre os efeitos dependentes do tempo nas estruturas de concreto armado serão estudadas no capítulo 3. É desenvolvido um conjunto de tópicos que são necessários para a implementação numérica dos modelos de comportamento do concreto armado.

Definidos os conceitos de estádios de solitação do concreto armado e introduzidas as noções básicas relativamente às deformações não-imediatas, pode-se apresentar os modelos de comportamento em serviço no capítulo 4. Serão descritos os modelos de GHALI & FAVRE e de DEBERNARDI.

Noções elementares sobre a análise linear e não-linear de estruturas serão apresentadas no capítulo 5, com ênfase para a determinação do vetor de esforços residuais a ser reaplicado numa estrutura, quando da consideração da não-linearidade física. Nesse capítulo também é apresentado o elemento finito usado neste trabalho.

No capítulo 6 são apresentados fluxogramas dos programas desenvolvidos e, também, as considerações adotadas para a implementação numérica dos algoritmos.

Nos capítulos finais são apresentados vários exemplos de resultados obtidos para estruturas de pavimentos de edifícios. São efetuadas comparações entre os resultados numéricos e dados experimentais que constam da literatura.

2-COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

2.1-INTRODUÇÃO

Denominam-se ações de serviço aquelas que efetivamente ocorrerão numa estrutura de concreto armado sem que a ruína seja atingida. As verificações nesse estado de solicitação visam garantir condições de utilização satisfatórias para uma edificação. A grande preocupação dos projetistas de estruturas é garantir a segurança quanto à ruína. Apenas recentemente é que as verificações em serviço vêm assumindo um papel de importância no meio técnico.

As deformações excessivas em lajes ou vigas de um pavimento podem causar danos irreparáveis a uma edificação tais como: fissuras nas alvenarias que nelas se apoiam ou rompimento e inutilização de caixilhos e canalizações. De outro modo avaliações superestimadas da magnitude das flechas podem induzir ao uso de contra-flechas exageradas causando um mau aspecto arquitetônico. Ainda a não verificação dos estados limites de aberturas de fissuras ou fissuração inadmissível (ver próxima seção) podem fazer, por exemplo no caso de um reservatório, que estes percam a sua capacidade de armazenamento de água. Além disso, a durabilidade de uma estrutura qualquer, e não somente um reservatório, pode ficar comprometida pela exposição da armadura - estado limite de fissuração inaceitável - a agentes externos nocivos. Ressalta-se que a nova NB1 traz recomendações amplas quanto às verificações nos estados limites de utilização.

Capítulo 2 : COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Com o emprego de materiais – concreto e aço – mais resistentes nas estruturas correntes, as dimensões dos elementos estruturais tornam-se cada vez menos robustas aumentando a probabilidade de flechas inadmissíveis, por exemplo. Além disso, existe uma tendência de aproximar os cálculos em ruína e em serviço visando uma maior economia sem comprometer a segurança e a funcionalidade de uma edificação. Desse modo o projetista pode conduzir à uma distribuição de esforços que seja mais adequada à forma estrutural.

A forma mais tradicional e antiga de se proceder à análise em serviço de uma estrutura de concreto armado é aquela baseada nas hipóteses clássicas de estádios de tensão onde considera-se a seção fissurada ou não dependendo do nível de solicitação ao qual estiver submetida. As situações intermediárias entre um e outro estágio são as que melhor representam o comportamento de uma peça estrutural.

2.2-ESTADOS LIMITES

Uma estrutura de concreto armado atinge um “estado limite” quando em parte ou como um todo, não mais desempenha as principais finalidades para as quais foi projetada e construída. Dessa forma existem dois tipos de estados limites a serem considerados: os “*estados limites de utilização*” e os “*estados limites últimos*”, que serão descritos a seguir. Para este texto e para os programas que foram desenvolvidos, deve-se ressaltar que todas as análises são efetuadas em serviço, ou seja, visando as condições limites de utilização.

2.2.1-ESTADOS LIMITES DE UTILIZAÇÃO

Os estados limites de utilização são aqueles que ocorrem sem que a capacidade resistente da estrutura tenha-se esgotado; dessa forma, fica caracterizado pelo sistema estrutural não mais oferecer condições de

Capítulo 2 : COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

durabilidade, conforto, estética ou funcionalidade devido a presença de grandes deslocamentos ou fissuração em toda a estrutura ou até mesmo em parte dela.

Para os projetos mais comuns os principais itens que devem ser verificados são os seguintes :

- a) abertura de fissuras,
- b) fissuração inaceitável,
- c) deformação excessiva,
- d) vibrações de grande amplitude,
- e) outros, de acordo com critério apropriado do projetista.

Maiores detalhes devem ser procurados em literatura apropriada, podendo-se sugerir FUSCO (1986), LEONHARDT (1977). Neste trabalho terão particular interesse a determinação das flechas em vigas solicitadas a flexão simples (momento fletor e força cortante), para tanto serão calculados tensões e deformações para as solicitações em serviço.

2.2.2-ESTADO LIMITE ÚLTIMO

Como o próprio nome sugere, o estado limite último fica definido pelo esgotamento da capacidade resistente da estrutura quer seja desta como um todo ou em parte. Segundo o CEB-90 os mesmos podem ocorrer devido as seguintes causas: transformação da estrutura em um mecanismo - ruptura após plastificação; perda da estabilidade quando o elemento for considerado como um corpo rígido; instabilidade por excesso de deformação e deterioração por fadiga. Ainda, segundo FUSCO (1986) também devem ser consideradas as deformações elásticas ou plásticas, deformação lenta ou fissuração que provoquem uma mudança da geometria da estrutura, tornando necessária a sua substituição.

Para o caso do dimensionamento de uma seção de concreto armado, de um modo geral, a ruína fica configurada quando a deformação máxima da armadura tracionada atingir um alongamento plástica excessivo, ou quando a fibra mais comprimida de concreto atingir determinado encurtamento limite.

O estudo destes não compete ao escopo deste trabalho; sugere-se para tanto que sejam consultadas as referências citadas na bibliografia.

2.3-ESTÁDIOS DE SOLICITAÇÃO

Denomina-se estádios de solicitação às diversas fases de comportamento em termos de tensões pelas quais passa uma peça de concreto armado quando submetida a um carregamento externo que varia desde zero até provocar a ruptura. Imagine-se uma seção de forma em forma qualquer, como mostrada pela figura (2.1-a) solicita à flexão simples por um momento fletor **M** crescente.

Ainda nesta mesma figura são ilustrados os diagramas de deformações e tensões da seção para quatro níveis distintos de solicitação sendo que todos estes se devem à aplicação de cargas de serviço. Cada uma dessas fases de solicitação é denominada “**estádio**”. Será empregada neste trabalho a mesma nomenclatura utilizada por FUSCO (1986) e GHALI & FAVRE (1986). No primeiro estádio, as solicitações são bastante pequenas e designa-se a nomenclatura de **estádio 1-a**, a medida que crescem os esforços se definem os demais estádios, a saber, respectivamente : **estádio 1-b**, **estádio 2** e **estádio 3**.

Para as cargas de utilização, pode-se admitir com razoável precisão que as relações tensão x deformação para o concreto comprimido e para o aço podem ser admitidas lineares. Em se tratando do concreto, a proporcionalidade pode ser considerada para tensões da ordem de 40 % a 50 % de sua resistência f_c .

Define-se o **estádio 1-a** como sendo aquele onde a seção permanece íntegra (sem fissuração) e as tensões no concreto são de pequena magnitude de forma que pode ser aplicada a proporcionalidade entre tensão e deformação para qualquer fibra da seção transversal, conforme ilustrado pela figura (2.1-b). Tal fato somente ocorre para valores de **M** bastante pequenos.

Capítulo 2 : COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DAS ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO

Com um pequeno aumento nos esforços solicitantes, o concreto ainda permanece íntegro, entretanto o diagrama de tensões não é mais linear na região tracionada; novos incrementos nos esforços aumentariam as deformações ao longo da altura da seção, entretanto as tensões de tração no concreto não cresceriam mais na mesma proporção, caracterizando assim a plastificação da zona tracionada. Na iminência da fissuração o diagrama de tensões para abaixo da linha neutra será aproximadamente retangular.

No instante em que o módulo da tensão na fibra de concreto mais tracionada atingir a sua resistência à tração, f_{ct} , tem início o **estádio 1-b**. Esse estágio fica caracterizado pelo crescimento da fissura, ou fratura, em direção à linha neutra a medida que o módulo do carregamento aplicado cresce. Define-se **estádio 2** como sendo aquele em que o concreto abaixo da linha neutra não mais resiste à tração. Conforme pode-se observar pela figura (2.1-d) existe um trecho abaixo da linha neutra ainda resistindo à tração, entretanto sua contribuição será desprezada e admitir-se-á que toda região abaixo da linha neutra de tensões está fissurada.

Com o crescimento das cargas até se tornarem extremamente elevadas, a seção atinge o **estádio 3** que é o estado limite de ruptura do concreto na compressão. Deve-se distinguir este estágio do estado limite de ruptura do concreto ou deformação plástica excessiva da armadura tracionada (cálculo na ruína), visto que este último é mais genérico e pode ser caracterizado pelo **estádio 3** ou, como já foi citado, pelo alongamento excessivo da armadura, ou, ainda, por ambos simultaneamente. Tal fato leva a constantes confusões entre os leitores mais distraídos, entretanto referência a este foram extraídas de FUSCO (1986) e MACHADO (1989).

Atualmente as verificações não são mais efetuadas considerando-se os **estádios 1** ou **2** isoladamente, mas sim através de valores intermediários obtidos por meio de apropriadas interpolações entre estes visando a consideração da contribuição do concreto íntegro entre fissuras.

De maneira resumida, os estádios de solicitação ficam definidos da seguinte forma, em relação as tensões :

a) estágio 1-a :

$$\sigma_{ct} \leq f_{cte} \quad (2.1)$$

e

$$|\bar{\sigma}_c| \leq f_{ce} \quad (2.2)$$

b) estágio 1-b :

$$|\bar{\sigma}_c| \leq f_{ce} \quad (2.3)$$

e

$$\sigma_{ct} = f_{ct} \quad (2.4)$$

c) estágio 2 :

$$|\bar{\sigma}_c| \leq f_{ce} \quad (2.5)$$

e

$$\varepsilon_{ct} \geq \varepsilon_{ctu} \quad (2.6)$$

d) estágio 3 :

$$|\bar{\sigma}_c| = f_{cc} \quad (2.7)$$

e

$$\varepsilon_{ct} \gg \varepsilon_{ctu} \quad (2.8)$$

onde σ_{ct} é a tensão na fibra mais tracionada; f_{cte} e f_{ct} são, respectivamente, a tensão de proporcionalidade na tração e tensão que provoca ruptura no concreto; f_{ce} e f_{cc} têm o mesmo significado para a compressão; $\bar{\sigma}_c$ é a maior tensão de compressão; ε_{ct} é o alongamento da fibra mais tracionada e ε_{ctu} o valor limite para essa deformação.

**Capítulo 2 : COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DAS ESTRUTURAS DE
CONCRETO ARMADO**

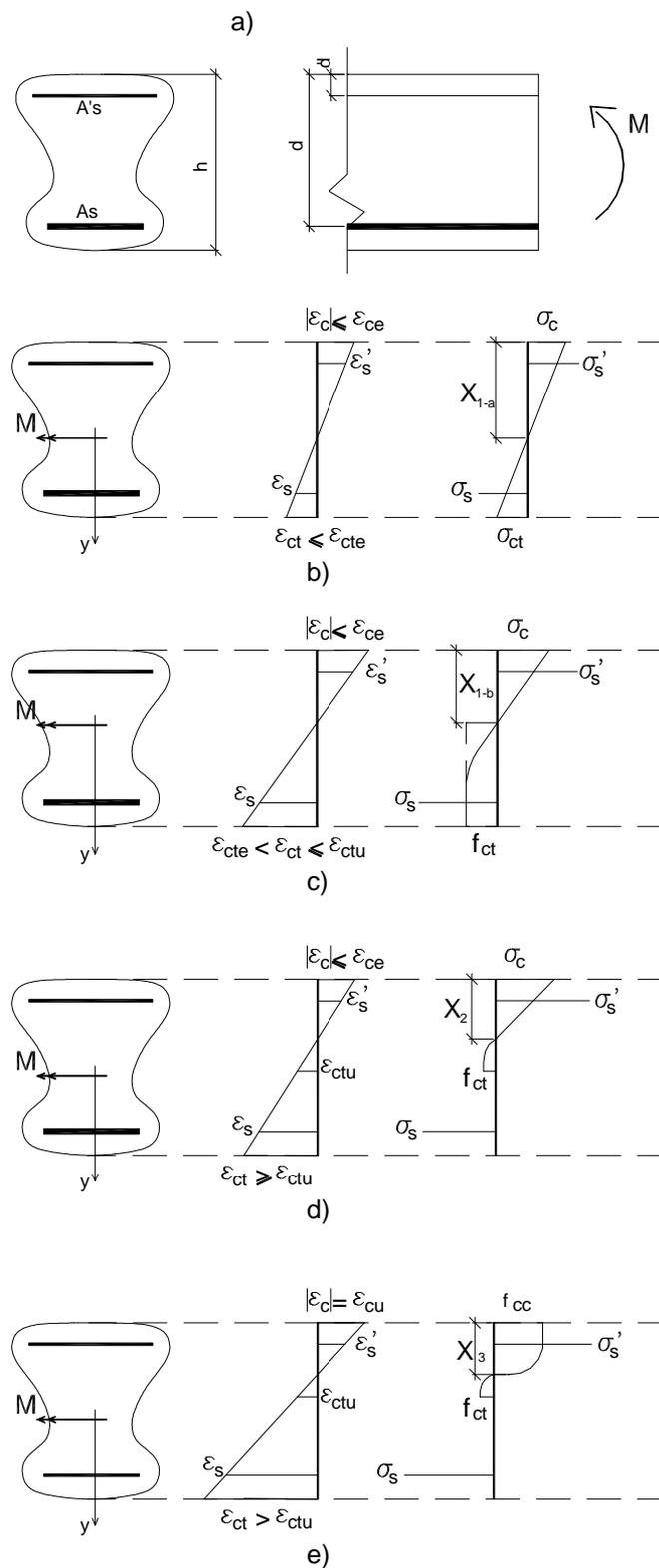


Figura 2.1 : Estádios de solicitação de uma seção de concreto armado solicitada à flexão simples: a) geometria; b) estágio 1-a; c) estágio 1-b; d) estágio 2; e) estágio 3.

2.3.1-CÁLCULO CLÁSSICO NO ESTÁDIO 1 PARA A FLEXÃO SIMPLES

O cálculo no estágio 1 é aplicado às estruturas não fissuradas de concreto armado. Na prática isto deverá ocorrer para as seguintes situações: lajes onde a solicitação é de pequena intensidade, peças onde é aplicado um esforço de protensão tal que a seção transversal esteja totalmente comprimida, além de regiões íntegras entre fissuras sucessivas de vigas. Os dois primeiros casos não serão tratados neste trabalho, entretanto o último terá grande importância para o estudo da contribuição do concreto intacto entre fissuras.

Pretende-se, no decorrer desta seção, apresentar as hipóteses de cálculo e desenvolver expressões que possam ser utilizadas na prática por meio de algoritmos bastante simples possíveis de serem implementados em qualquer computador, ou até mesmo resolvidos manualmente sem grande trabalho.

HIPÓTESES BÁSICAS :

O diagrama de deformações para a seção transversal de um elemento de concreto armado solicitado à flexão simples por um momento **M**, atuando no plano do eixo **oy** que passa pelo seu eixo de simetria, é mostrado pela figura (2.2) . As hipóteses fundamentais para a consideração e o equacionamento do cálculo no estágio 1 serão apresentadas, item a item, como segue :

- a) A resistência à tração do concreto, f_{ct} , não será atingida, dessa forma não haverá formação de fissuras na seção.
- b) Existe um eixo de simetria pertencente ao plano do esforço atuante.
- c) É suposta a perfeita aderência entre as barras da armadura e o concreto que as envolve. Dessa forma, é válida a seguinte relação :

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_{c,y} (p / y = d_i - X_1) \quad (2.9)$$

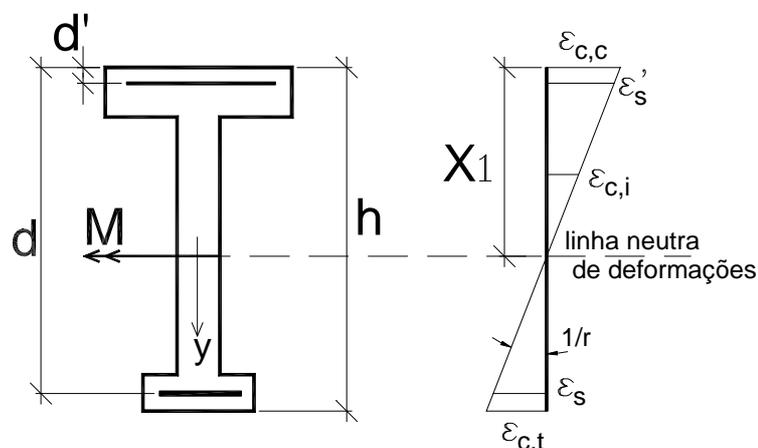


Figura 2.2 : Seção transversal e deformações para o estágio 1.

d) A clássica hipótese de Bernoulli da manutenção das seções planas à configuração deformada, para materiais homogêneos é estendida às seções armadas. Portanto, o digrama de deformações será linear ao longo da altura da seção e serão válidas as seguintes relações :

$$\left| \frac{\epsilon_{c,y}}{y} \right| = - \frac{1}{r} \quad (2.10)$$

$$\frac{\epsilon_{si}}{d_i - x_1} = \frac{1}{r} \quad (2.11)$$

d) A seção gira em torno de um eixo perpendicular ao seu plano de simetria. A este denomina-se “linha neutra de deformações”, que na ausência de deformações impostas coincide com a “linha neutra de tensões”.

e) A relação entre tensões e deformação será linear tanto para o concreto quanto para o aço, permitindo-se escrever as tensões no concreto e no aço, respectivamente, pelas expressões para uma fibra genérica descritas abaixo :

$$\sigma_{c,y} = E_c \cdot \epsilon_{c,y} \quad (2.12)$$

$$\sigma_{si} = E_s \cdot \epsilon_{si} \quad (2.13)$$

onde E_c é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto e E_s tem o mesmo significado para o aço.

HOMOGENEIZAÇÃO DA SEÇÃO :

Para a aplicação do método clássico de cálculo é necessário que a seção do elemento em análise seja composta por um material homogêneo. Isto pode ser obtido transformando-se uma seção de concreto armado em outra, fictícia, tomando o concreto como material de referência. Para tanto é definido o coeficiente de homogeneização, α_s , da seguinte forma :

$$\alpha_s = \frac{E_s}{E_c} \quad (2.14)$$

A obtenção desse coeficiente pode ser facilmente demonstrada a partir das hipóteses de perfeita aderência entre o aço e o concreto e linearidade física dos materiais, ambas anteriormente descritas. Desse modo o que se busca é escrever a tensão numa camada genérica de armadura, localizada na fibra d_i , em função da tensão na mesma se esta fosse composta efetivamente de concreto, que é o material de referência. Assim, com o emprego das expressões (2.12) e (2.13) pode-se escrever:

$$\sigma_{s_i} = \frac{E_s}{E_c} \sigma_{c,y} = \alpha_s \cdot \sigma_{c,y} \quad (c / y = d_i) \quad (2.15)$$

Assim, a área da seção homogeneizada no estágio 1, A_1 , pode ser escrita da seguinte forma, descontando-se os espaços ocupados pela armadura:

$$A_1 = A_{c_n} + \sum_{i=1}^n (\alpha_s - 1) A_{s_i} \quad (2.16)$$

Onde A_{c_n} é a área total da seção transversal, n é o número de camadas de armadura e A_{s_i} é a área de cada uma dessas camadas.

CÁLCULO NA FLEXÃO SIMPLES :

Considere-se a seção de concreto armado apresentada na figura (2.2); a seu respeito podem ser escritas as seguintes equações de equilíbrio em termos de força e de momento, respectivamente :

$$\int_{A_c} \sigma_{c,y'} dA_c + \sum_{i=1}^n (\alpha_s - 1) A_{si} \left(\frac{\sigma_{si}}{\alpha_s} \right) = 0 \quad (2.17)$$

$$\int_{A_c} \sigma_{c,y'} y' dA_c + \sum_{i=1}^n (\alpha_s - 1) A_{si} \left(\frac{\sigma_{si}}{\alpha_s} \right) (x_1 - d_i) = M \quad (2.18)$$

Os significados de todas as variáveis empregadas nas equações (2.17) e (2.18) já foram anteriormente descrito.

A partir do diagrama de tensões da figura (2.1-b) podem ser escritas as seguintes relações :

$$-\frac{\sigma_c}{x_1} = -\frac{\sigma_{c,y'}}{y'} = \frac{\sigma_{si}}{\alpha_s (d_i - x)} \quad (2.19)$$

Fazendo-se transformações nas equações de equilíbrio de esforços (2.17) e (2.18), de maneira a não alterá-las o significado, são obtidas as seguintes expressões :

$$\int_{A_c} \frac{\sigma_{c,y'}}{y'} y' \sigma_{c,y'} dA_c + \sum_{i=1}^n (\alpha_s - 1) A_{si} \left(\frac{\sigma_{si}}{\alpha_s (x_1 - d_i)} \right) (x_1 - d_i) = 0 \quad \dots(2.20)$$

e :

$$\int_{A_c} \frac{\sigma_{c,y'}}{y'} (y')^2 dA_c + \sum_{i=1}^n (\alpha_s - 1) A_{si} \left(\frac{\sigma_{si}}{\alpha_s (x_1 - d_i)} \right) (x_1 - d_i)^2 = M \quad \dots(2.21)$$

Os momentos estático e de inércia, no estágio 1, para a seção homogeneizada em relação à linha neutra valem, respectivamente:

$$S_{n,1} = \int_{A_c} y' dA_c + \sum_{i=1}^n (\alpha_s - 1) A_{si} (x_1 - d_i) \quad (2.22)$$

$$I_{n,1} = \int_{A_c} (y')^2 dA_c + \sum_{i=1}^n (\alpha_s - 1) A_{si} (x_1 - d_i)^2 \quad (2.23)$$

A partir das equações acima descritas, é possível escrever as equação de equilíbrio de esforços de forma resumida empregando-se para tanto as condições de compatibilidade de tensões expressas pela relação (2.19). Assim :

$$\frac{\sigma_c}{X} S_{n,1} = 0 \quad (2.24)$$

e :

$$\frac{\sigma_c}{X} I_{n,1} = M \quad (2.25)$$

Para a determinação da linha neutra em seções de concreto armado não fissuradas submetidas à flexão simples, será imposta a condição de momento estático nulo como pode ser observado pela expressão (2.24). Após a determinação do valor de X_1 , o momento de inércia será calculado através da expressão (2.23).

2.3.2 - CÁLCULO CLÁSSICO NO ESTÁDIO 2 PARA FLEXÃO SIMPLES

O cálculo de deformações e tensões no estágio 2 tem aplicação às estruturas fissuradas de concreto armado. Esta situação poderá ocorrer nas regiões mais solicitadas à flexão de vigas onde, em geral, deverão aparecer

fissuras. Nesta seção serão apresentadas as hipóteses fundamentais para o estágio 2 e desenvolvidas expressões para uma seção em forma qualquer de concreto armado, do mesmo modo que foi efetuado na seção anterior para o estágio 1.

HIPÓTESES DE CÁLCULO :

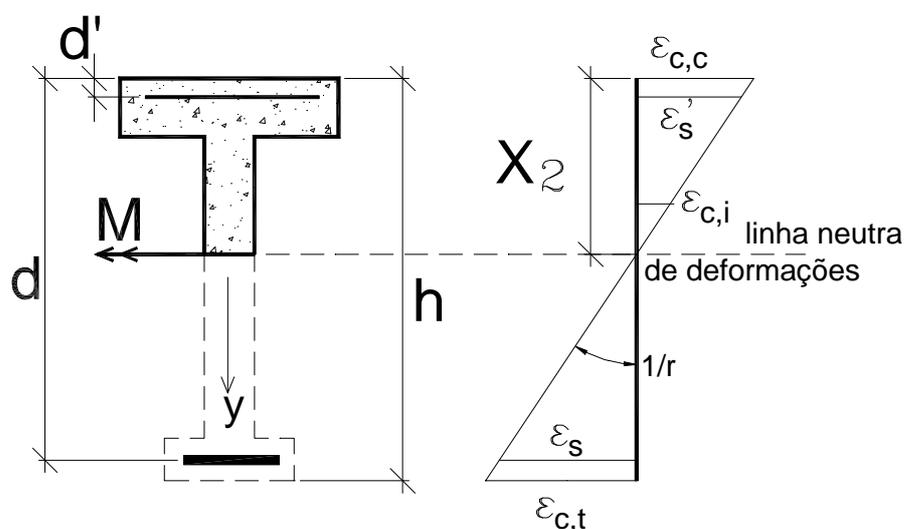


Figura 2.3: Seção transversal e deformações para o estágio 2.

Uma seção fissurada de concreto armado e seu diagrama de deformações são ilustrados pela figura (2.3). As notações utilizadas serão as mesmas da seção anterior. As hipóteses básicas são relacionadas a seguir :

- a) O momento fletor atuante, **M**, tem intensidade suficiente para provocar a fissuração do concreto na fibra mais tracionada.
- b) Toda a região de concreto abaixo da linha neutra será totalmente desprezada, mesmo que ainda haja um pequeno trecho resistindo à tração, como pode ser observado na figura (2.1-d).
- c) As hipóteses b, c, d, e, além de f empregadas na seção anterior, onde tratava-se do cálculo no estágio 1 continuam válidas para o estágio 2.

HOMOGENEIZAÇÃO DA SEÇÃO :

O conceito é análogo ao exposto para o estágio 1, a única diferença está no fato de que a área de concreto abaixo da linha neutra será completamente desprezada para o cálculo dos momentos estático e de inércia em relação a esta. Deve-se lembrar que as áreas ocupadas pela armadura só devem ser descontadas para fibras na região comprimida da seção. Desse modo a área da seção homogeneizada no estágio 2, A_2 , será calculada de acordo com a expressão (2.26).

$$A_2 = A_{cc} + \sum_{i=1}^{n_c} A_{si} (\alpha_s - 1) + \sum_{i=n_c+1}^n A_{si} \alpha_s \quad (2.26)$$

onde A_{cc} é a área de concreto comprimido; n_c e n são, respectivamente, o número de barras de aço na região acima da linha neutra, devendo o espaço ocupado pelas barras ser descontado e o número total de barras na seção.

CÁLCULO NA FLEXÃO SIMPLES :

Do mesmo modo que foi desenvolvido para o estágio 1, são escritas as equações de equilíbrio em termos de esforço normal e de momento para uma seção de concreto armado semelhante aquela da figura (2.3), com seção de forma qualquer, tem-se :

$$\int_{A_{cc}} \sigma_{c,y'} dA_{cc} - \sum_{i=1}^{n_c} A_{si} \left(\frac{\sigma_{si}}{\alpha_s} \right) + \sum_{i=1}^n (A_{si} \sigma_{si}) = 0 \quad (2.27)$$

e:

$$\int_{A_{cc}} \sigma_{c,y'} y' dA_{cc} - \sum_{i=1}^{n_c} A_{si} \left(\frac{\sigma_{si}}{\alpha_s} \right) (x_2 - d_i) + \sum_{i=1}^n A_{si} \sigma_{si} (x_2 - d_i) = M \quad (2.28)$$

Transformando-se as expressões acima, de modo que as relações expressas em (2.19) possam ser utilizadas tem-se :

$$\int_{A_{cc}} \frac{\sigma_{c,y'}}{y'} y' dA_{cc} - \sum_{i=1}^{n_c} (\alpha_s - 1) A_{si} \left(\frac{\sigma_{si}}{\alpha_s (x_2 - d_i)} \right) (x_2 - d_i) + \dots(2.29)$$

$$+ \sum_{i=n_c+1}^n A_{si} \left(\frac{\sigma_{si}}{\alpha_s (x_2 - d_i)} \right) \alpha_s (x_2 - d_i) = 0$$

e:

$$\int_{A_{cc}} \frac{\sigma_{c,y'}}{y'} (y')^2 dA_{cc} - \sum_{i=1}^{n_c} (\alpha_s - 1) A_{si} \left(\frac{\sigma_{si}}{\alpha_s (x_2 - d_i)} \right) (x_2 - d_i)^2 + \dots(2.30)$$

$$+ \sum_{i=n_c+1}^n A_{si} \left(\frac{\sigma_{si}}{\alpha_s (x_2 - d_i)} \right) \alpha_s (x_2 - d_i)^2 = M$$

Desenvolvendo-se as expressões (2.29) e (2.30) da mesma forma que foi efetuado para o estádio 1 chega-se às equações dos momentos estático e de inércia em relação a linha neutra para o estádio 2, a saber :

$$S_{n,2} = \int_{A_{cc}} y' dA_{cc} + \sum_{i=1}^{n_c} (\alpha_s - 1) A_{si} (x_2 - d_i) + \sum_{i=n_c+1}^n \alpha_s A_{si} (x_2 - d_i) \quad (2.31)$$

e:

$$I_{n,2} = \int_{A_{cc}} (y')^2 dA_{cc} + \sum_{i=1}^{n_c} (\alpha_s - 1) A_{si} (x_2 - d_i)^2 + \sum_{i=n_c+1}^n \alpha_s A_{si} (x_2 - d_i)^2 \dots(2.32)$$

2.4-CONTRIBUIÇÃO DO CONCRETO INTACTO ENTRE FISSURAS – “TENSION STIFFENING”

Conforme foi anteriormente citado, um elemento estrutural de concreto armado pode ter seu comportamento melhor descrito por uma situação intermediária entre os estádios de tensão abordados. Tal fato se justifica pela presença de armadura na região tracionada de uma seção transversal. Diversos autores trataram desse assunto. Neste trabalho, serão apresentados os modelos propostos por DEBERNARDI (1983) e GHALI &

FAVRE (1986), que foram empregados nas implementações computacionais necessárias.

A diferença básica entre estes modelos é caracterizada pela utilização, por GHALI & FAVRE, de uma apropriada interpolação entre os resultados obtidos pelos estádios 1 e 2; enquanto DEBERNARDI, por sua vez, faz um equacionamento relativo à configuração média deformada. Estes métodos serão descritos para a flexão simples no capítulo 4.

Nesta seção será exemplificado o caso de um tirante de concreto armado onde emprega-se o modelo de GHALI & FAVRE visando unicamente uma melhor elucidação de como o concreto intacto entre fissuras contribui para a diminuição dos níveis de deformação da armadura tracionada.

2.4.1-TIRANTE DE CONCRETO ARMADO

Seja um tirante de concreto armado submetido a um esforço axial \mathbf{N} conforme a figura (2.4); a primeira fissura ocorrerá quando tomarmos para \mathbf{N} um valor igual a \mathbf{N}_r (esforço normal de fissuração) dado pela expressão seguinte:

$$N_r = f_{ct} [A_c + (\alpha_s - 1)A_s] \cong f_{ct} \cdot A_c \quad (2.33)$$

Pouco antes de ocorrer a primeira fissura, a seção se comporta de acordo com as hipóteses do estágio 1, sendo a tensão no concreto igual a f_{ct} e no aço $\alpha_s \cdot f_{ct}$. Imediatamente após a fissuração, a seção onde esta ocorreu terá comportamento típico do estágio 2, a tensão no concreto será nula, com toda a tração sendo absorvida pela armadura, desse modo para a armadura nesta seção:

$$\sigma_{sr} = \frac{N_r}{A_s} = f_{ct} \left[\frac{A_c}{A_s} + \alpha_s - 1 \right] \quad (2.34)$$

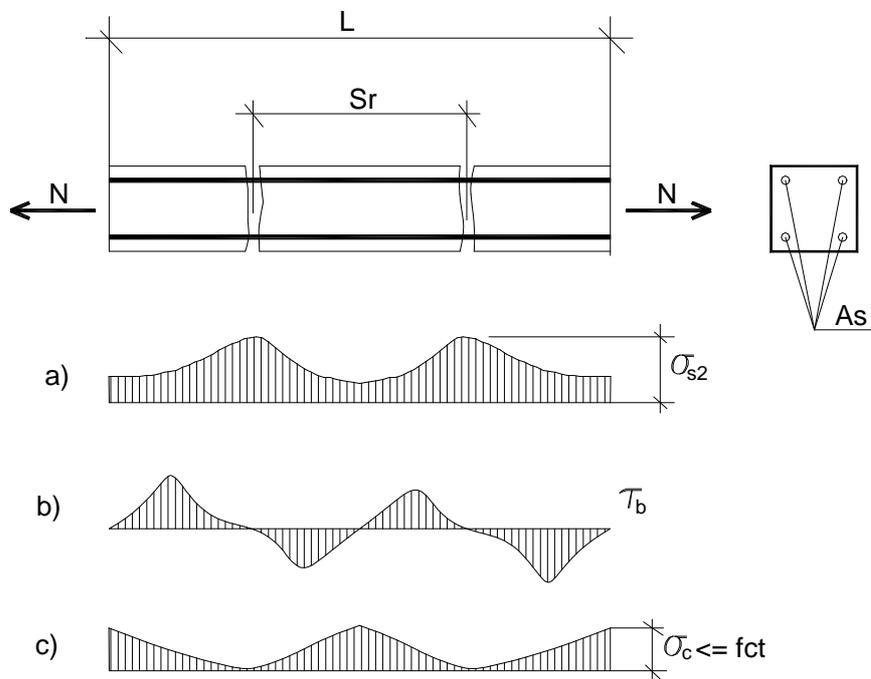


Figura 2.4 - Tensões em um tirante fissurado de concreto armado: a) tensões na armadura; b) tensões de aderência; c) tensões no concreto.

A tensão no aço aumenta repentinamente (após a fissuração) devido à transferência da tração que antes era absorvida pelo concreto, produzindo uma deformação da armadura incompatível com a deformação do concreto adjacente o que resulta num aumento na abertura da fissura. A contribuição do concreto intacto entre fissuras tende a diminuir a deformação do aço (ver fig. (2.4)), e a uma distância s_r ocorre uma nova fissura. É interessante lembrar que numa região vizinha às fissuras o comportamento do concreto não é governado pelo estágio 1 e nem pelo estágio 2. Ocorre que esta é uma região de transição e o estágio de tensões pode ser definido pelo aparecimento de um estágio intermediário causado pelo escorregamento da armadura.

**Capítulo 2 : COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DAS ESTRUTURAS DE
CONCRETO ARMADO**

Nas seções fissuradas, as tensões e as deformações no aço serão determinadas pelas expressões (2.35) e (2.36), respectivamente.

$$\sigma_{s2} = \frac{N}{A_s} \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{\sigma_{s2}}{E_s} = \frac{N}{E_s A_s} \quad (2.36)$$

Quando $N = N_r$, a deformação na armadura correspondente à tensão de fissuração σ_{sr} pode ser escrita conforme a expressão seguinte:

$$\varepsilon_{sr2} = \frac{\sigma_{sr}}{E_s} = \frac{N_r}{E_s A_s} \quad (2.37)$$

Entre duas fissuras consecutivas a tensão de tração no aço terá valor menor que σ_{s2} , enquanto que a tensão de tração no concreto é máxima na seção média entre duas fissuras. O fato de haver uma redução da tensão no aço, deixa claro que esta foi provocada pela colaboração do concreto não fissurado. Uma consequência imediata é que a deformação da armadura varia ao longo do comprimento do elemento, podendo-se definir uma deformação média dada por:

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\Delta L}{L} \quad (2.38)$$

onde L é o comprimento total do elemento, e ΔL é o alongamento deste. Pode-se dizer que há uma redução da deformação do aço ($\Delta \varepsilon_s$) causada pela contribuição do concreto. Assim, escreve-se (2.38) na forma:

$$\varepsilon_{sm} = \varepsilon_{s2} - \Delta \varepsilon_s \quad (2.39)$$

**Capítulo 2 : COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DAS ESTRUTURAS DE
CONCRETO ARMADO**

O valor de ϵ_{sm} está compreendido entre ϵ_{s2} e ϵ_{s1} , onde este último é uma deformação hipotética do aço admitindo estágio 1, dada por:

$$\epsilon_{s1} = \epsilon_{c1} = \frac{N}{E_c (A_c + \alpha_s A_s)} = \frac{N}{E_c A_1} \quad (2.40)$$

O módulo de D_{es} representa a diferença numérica entre a deformação média ϵ_{sm} e a deformação do aço na seção fissurada. Esta diferença assume um valor máximo $D_{es,max}$ no início da fissuração, quando $N = N_r$, segundo GHALI e FAVRE (1986) D_{es} varia parabolicamente com σ_{s2} conforme as equações que seguem.

$$\Delta_{es} = \Delta_{es,max} \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \quad (2.41)$$

com:

$$\Delta_{es,max} = (\epsilon_{s2} - \epsilon_{s1}) \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \quad (2.42)$$

Substituindo-se (2.41) e (2.42) em (2.39), obtém-se a expressão da deformação média no aço:

$$\epsilon_{sm} = (1 - \zeta)\epsilon_{s1} + \zeta\epsilon_{s2} \quad (2.43)$$

Onde ζ é um coeficiente de ponderação compreendido entre 0 e 1. Para seções não fissuradas ($N < N_r$) ζ assume o valor zero, quando $N > N_r$, o valor de ζ é dado pelas expressões seguintes:

$$\zeta = 1 - \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}}\right)^2, \sigma_{s2} > \sigma_{sr} \quad (2.44)$$

ou ainda:

**Capítulo 2 : COMPORTAMENTO EM SERVIÇO DAS ESTRUTURAS DE
CONCRETO ARMADO**

$$\zeta = 1 - \left(\frac{N_r}{N}\right)^2, N > N_r \quad (2.45)$$

Para levarem-se em conta as condições de aderência da armadura e a duração de aplicação ou a repetição dos carregamentos o CEB-FIP (MC-90) faz um ajuste na expressão de \mathbf{z} , introduzindo os coeficientes \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 nas expressões acima, resultando em:

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}}\right)^2, \sigma_{s2} > \sigma_{sr} \quad (2.46)$$

e:

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2 \left(\frac{N_r}{N}\right)^2, N > N_r \quad (2.47)$$

onde:

- considerando-se as condições de aderência:
 - $\beta_1 = 1,0$ para barras de alta aderência ($\eta_b \geq 1,5$)
 - $\beta_1 = 0,5$ para barras lisas ($\eta_b = 1,0$)

- considerando-se as condições de carregamento:
 - $\beta_2 = 1,0$ para o primeiro carregamento, ou para cargas pouco repetitivas, não permanentes.
 - $\beta_2 = 0,5$ para cargas permanentes ou com grande número de ciclos.

3-FENÔMENOS REOLÓGICOS DO CONCRETO ARMADO

3.1-INTRODUÇÃO

As estruturas de concreto armado estão, de uma maneira geral, sujeitas a sofrerem uma série de mudanças em seu estado de tensões e deformações desde o instante em que um carregamento é aplicado, aqui denominado “ t_0 ”, até outro instante de tempo genérico, “ t ” maior que t_0 . Estas mudanças têm sido objeto de estudo de diversos autores, dentre os quais pode-se destacar NEVILLE (1983) e BAZANT (1972).

As modificações nos estados de tensões e deformações dos elementos de concreto armado estão relacionadas a diversos fatores dentre os quais assume grande importância a fluência e a retração do concreto, itens estes que serão sucintamente estudados no transcorrer deste capítulo. Para avaliar as mudanças nas deformações causadas por esses fenômenos torna-se necessário o emprego de funções de tempo apropriadas, recorrendo-se às formulações empregadas por normas internacionais conceituadas dentre elas o **ACI** e os **Códigos-modelo** do **CEB**. Aqui optou-se pelo **MC-90 do CEB** por apresentar uma formulação atual e facilmente programável.

Ao longo do tempo o módulo de elasticidade do concreto sofre sucessivos acréscimos em relação ao seu valor inicial; do mesmo modo ocorre com a resistência a compressão e a resistência a tração; para tais casos será aqui utilizada novamente a formulação do **Código-modelo** de **1990** do **CEB**. Nessas recomendações utiliza-se na formulação um fator denominado “ b_2 ” que DEBERNARDI (1983) em seu trabalho diz parecer

uma tentativa de avaliar a fluência na aderência entre a armadura e o concreto que o envolve, marcando aí mais um efeito dependente do tempo.

Nas estruturas isostáticas tanto a fluência quanto a retração, alteram-se somente os deslocamentos destas, pois os esforços solicitantes dependem apenas de equações de equilíbrio externo. Entretanto, em se tratando de vigas, grelhas, pórticos etc... hiperestáticos é possível que ocorra também uma redistribuição de esforços; este fato será visto mais adiante e pode também ser encontrado em NEVILLE (1983).

As deformações que irão ocorrer internamente numa estrutura devido ao efeito da fluência do concreto implicarão num aumento da magnitude dos seus deslocamentos ao longo do tempo. Para os casos onde o efeito de segunda ordem não for desprezível, a deformação lenta também deve ser considerada.

Outro fato importante a ser citado é que as estruturas de pavimentos de edifícios sofrem ao longo do tempo mudanças em suas condições de apoio, isto se deve à presença do cimbramento até a estrutura adquirir certa resistência mínima necessária para a sua retirada. Desta maneira fica evidenciado que deverão ocorrer grandes mudanças tanto em termos de deformações e deslocamentos quanto em termos de tensões internas e esforços solicitantes.

O concreto é um material de comportamento difícil de ser analisado com rigor, ainda mais quando o efeito do tempo é envolvido. Procura-se reunir subsídios necessários para as implementações de fenômenos reológicos no programas desenvolvido e também para futuras implementações nessa linha.

3.2-FLUÊNCIA DO CONCRETO

Considere-se uma barra prismática de concreto tal que a área de sua seção transversal seja igual a "A" constante ao longo de todo o seu comprimento e esteja apoiada continuamente sobre um plano ao longo de

toda sua base, conforme mostrado pela figura (3.1). Se for aplicado em seu extremo superior, num instante de tempo denominado inicial “ t_0 ”, uma ação uniformemente distribuída de módulo igual a “ p ” por unidade de área a tensão atuante num plano qualquer paralelo aquele que define o extremo superior da barra terá o valor em módulo conforme a equação (3.1).

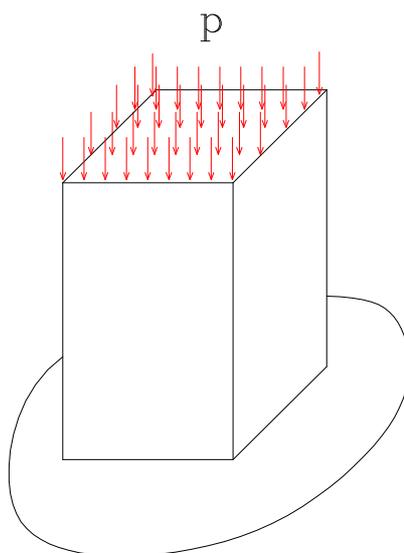


Figura 3.1 : Barra de concreto carregada axialmente.

$$\sigma = \frac{pA}{A} = p \quad (3.1)$$

Neste caso a deformação elástica no instante “ t_0 ” assumirá o seguinte valor :

$$\varepsilon_{ce}(t_0) = \frac{\sigma}{E_c(t_0)} \quad (3.2)$$

onde $E_c(t_0)$ é o módulo de elasticidade longitudinal do concreto para o instante de tempo igual a “ t_0 ”.

Supondo-se que o carregamento externo aplicado seja mantido constante ao longo de um intervalo de tempo que varie de “ t_0 ” até “ t ”, as tensões permanecerão constantes ao longo do tempo; entretanto devido a

um re-arranjo da estrutura interna do concreto, as deformações sofrerão acréscimos em seus valores. Dessa maneira a fluência é definida como sendo o acréscimo de deformações sob tensão constante. A deformação total num instante genérico de tempo será obtida por :

$$\varepsilon_{c,tot}(t) = \varepsilon_c(t_0) + \varepsilon_{cc}(t, t_0) \quad (3.3)$$

onde $\varepsilon_{cc}(t, t_0)$ é a deformação no concreto por fluência. A expressão (3.3) também pode ser escrita da seguinte forma :

$$\varepsilon_{c,tot}(t) = \varepsilon_c(t_0) (1 + \varphi(t, t_0)) \quad (3.4)$$

onde o termo $\varphi(t, t_0)$ é relação entre a deformação no concreto por fluência e deformação elástica inicial, também denominado coeficiente de fluência. Ao se relacionar a deformação total com a tensão inicial do concreto pode-se definir uma função de fluência na seguinte forma :

$$\varphi(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{c,tot}(t) - \varepsilon_c(t_0)}{\varepsilon_c(t_0)} = \frac{\varepsilon_{c,tot}(t)}{\varepsilon_c(t_0)} - 1 \quad (3.5)$$

Suponha-se agora que ação externa seja abruptamente retirada no instante de tempo igual a "t". Logo de início existe uma diminuição no nível de deformações devida a recuperação elástica. Esta deformação pode ser determinada de maneira semelhante à equação (3.2), no entanto o sinal é invertido por se tratar de descarregamento e, ainda, o módulo é menor devido ao ganho de resistência e a diminuição da deformabilidade do concreto. Assim :

$$\varepsilon_{cc}(t) = -1 \frac{\sigma}{E_c(t)} \quad c / E_c(t) > E_c(t_0) \quad (3.6)$$

No caso do descarregamento parte da deformação devida à fluência será recuperada ao longo do tempo, a esta denomina-se de acordo com NEVILLE (1983), “fluência recuperável” ou “reversível”. Por outro lado, a parcela de deformação que não pode ser recuperada é dividida em duas partes, a saber: “deformação lenta irreversível” e “fluência rápida” que é aquela que ocorre nas primeiras 24 horas após o carregamento.

A evolução das deformações ao longo do tempo de uma barra do tipo daquela da figura (3.1) sujeita a um estado de tensões constante durante um intervalo que varia de “ t_0 ” até “ t ” pode ser ilustrado pela figura (3.2) onde $e_{ce}(t_0)$ é a deformação elástica inicial; $e_{ce}(t, t_0)$ é o acréscimo de deformações no concreto devido a fluência; $e_{ce}(t)$ é a recuperação elástica no tempo “ t ”; e_{ccd} é a fluência recuperável; e_{ccf} é a parcela irreversível desta e e_{cca} é fluência rápida. Será apresentada neste capítulo a formulação para o cálculo do coeficiente de fluência de acordo o **MC-90 do CEB**.

Quando se efetua a análise de estruturas de concreto armado sujeitas à flexão, as tensões acabam por sofrer variações ao longo do tempo e não existe mais fluência pura como no caso da barra da figura (3.1). Embora não se pretenda neste capítulo aprofundar-se nesse fenômeno deve-se ao menos ser citado que para tais casos existe um equacionamento através de uma integração ao longo do tempo e a deformação total passa a ser dada por :

$$\varepsilon_{c,tot}(t) = \sigma_{c(t_0)} \cdot \phi_{(t,t_0)} + \int_{t_0}^t \phi_{(t,\tau)} \cdot d\sigma_{c(\tau)} \quad (3.7)$$

A equação acima pode ser resolvida através do emprego do método AAEM (“*Age Adjusted Effective Modulus*”) e mais detalhes sobre esse assunto podem ser encontrados na bibliografia citada.

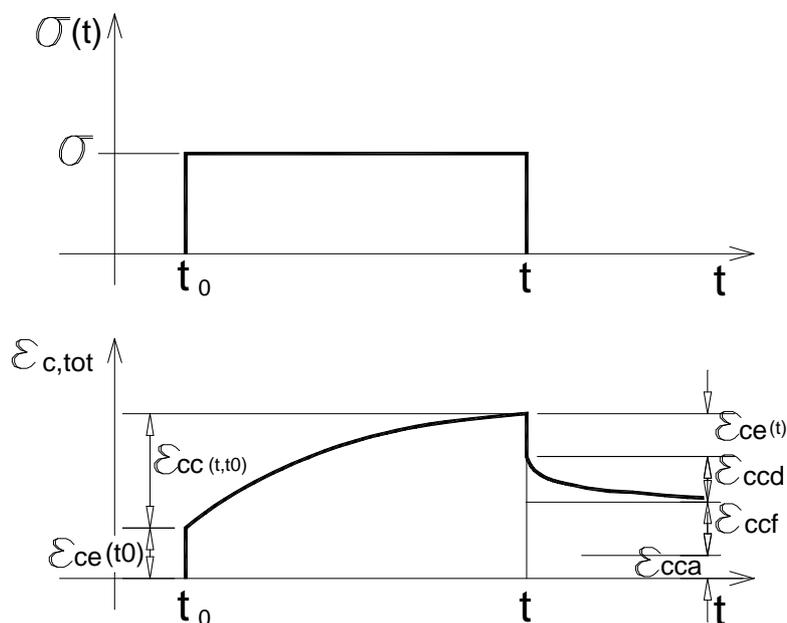


Figura 3.2 : Deformações ao longo do tempo para barra comprimida de concreto armado.

3.3-RETRAÇÃO DO CONCRETO

Denomina-se retração à redução espontânea de volume que ocorre em uma barra de concreto, mesmo na ausência de carregamento externo causando tensões mecânicas ou de variação de temperatura. Pode também ocorrer o inverso, ou seja, o aumento de volume quando a peça estiver em ambiente extremamente úmido ou submersa; tais fatos são ilustrados pela figura (3.3) que mostra ainda que a retração é maior no início tendendo a um valor constante com o envelhecimento do concreto.

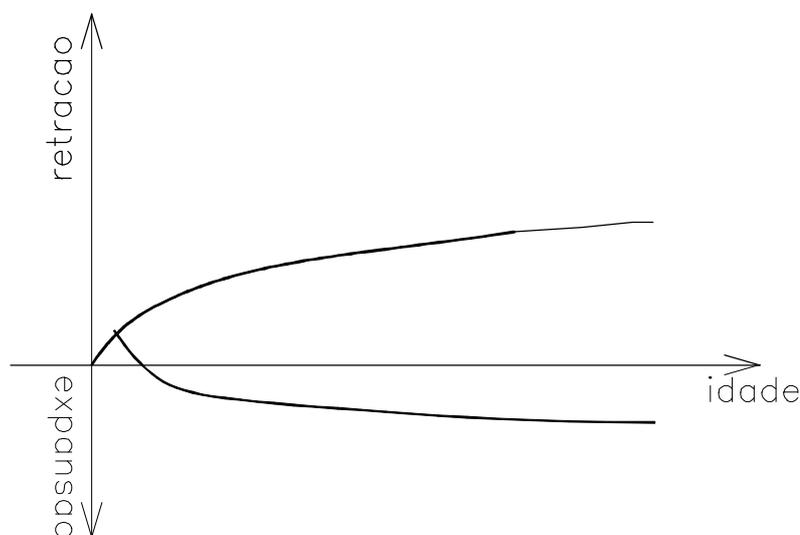


Figura 3.3 : Retração e expansão ao longo do tempo.

As causas da retração e da expansão estão relacionadas basicamente com a estrutura interna do concreto e, enumeradas em PINHEIRO (1992), estão as três principais: química, evaporação da água dos capilares do concreto e carbonatação. Como o estudo mais aprofundado destes fenômenos implicaria na elaboração de uma pesquisa muito mais abrangente sobre a estrutura interna do concreto, indica-se o trabalho de SMERDA (1988) além dos demais já citados anteriormente.

Os fatores principais que influem na retração do concreto estão relacionados basicamente com :

- a) *tipo do cimento*: cimentos mais resistentes e de endurecimento mais rápido apresentam maior retração; a finura das partículas também faz com que a retração aumente pois quanto mais fino for o grão mais água de amassamento é necessária .
- b) *quantidade de cimento*: quanto maior mais retração química haverá.
- c) *água de amassamento*: quando maior a relação água/cimento maior será o número de capilares resultando maior diminuição espontânea de volume.
- d) *tamanho dos agregados*: quanto menor mais água será necessária à mistura.

- e) *umidade ambiente*: assume grande influência no processo de cura do concreto, dificultando a retração.
- f) *temperatura*: seu aumento favorece a evaporação da água, aumentando a retração.
- g) *espessura dos elementos*: quando menor, maior será a superfície relativa em contato com o ambiente provocando o aumento da evaporação.
- h) *idade do concreto*: o aumento de sua resistência com o tempo dificulta a retração.
- i) *presença de armadura*: influencia na deformabilidade da peça dificultando inclusive a deformação espontânea.

3.4-RELAXAÇÃO DO CONCRETO

Para a análise do comportamento do concreto sob o efeito de ações de longa duração, além da deformação lenta, como já tratado, deve-se também ser considerado outro fenômeno denominado “relaxação”.

Considere-se, para tanto, uma barra prismática de comprimento L como mostrado pela figura (3.4-a). Se num instante qualquer for imposto um deslocamento \mathbf{DL} (figura 3.4-b) a deformação correspondente será :

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (3.8)$$

Se o módulo de elasticidade da barra para esse instante for igual a \mathbf{E} , o valor da tensão correspondente será $\mathbf{s}(t_0) = \mathbf{E} \mathbf{e}$. Suponha-se, agora, que \mathbf{DL} e, conseqüentemente, \mathbf{e} sejam mantidos constantes ao longo do tempo com o auxílio de algum instrumento de controle apropriado; a tensão que inicialmente valia \mathbf{s}_i vai sofrendo uma diminuição em seu módulo ao longo do tempo até se estabilizar atingindo o valor $\mathbf{s}(t_f)$ num tempo infinito conforme ilustrado pela figura (3.5).

Pode-se dizer, então, que relaxação de um material é a “diminuição de tensão sob deformação constante”; entretanto em estruturas de concreto este fenômeno se dá juntamente com a deformação lenta, não existindo dessa forma a relaxação pura para o concreto.

A relação entre a tensão num instante de tempo t qualquer, desde que maior que t_0 , e a deformação inicial de uma fibra do concreto é denominada função de relaxação, $r(t, t_0)$; esta função será de importância no cálculo do “coeficiente de envelhecimento do concreto”, $\chi(t, t_0)$, como será visto no item (3.8). Assim :

$$\sigma(t) = \varepsilon r(t, t_0) \quad (3.9)$$

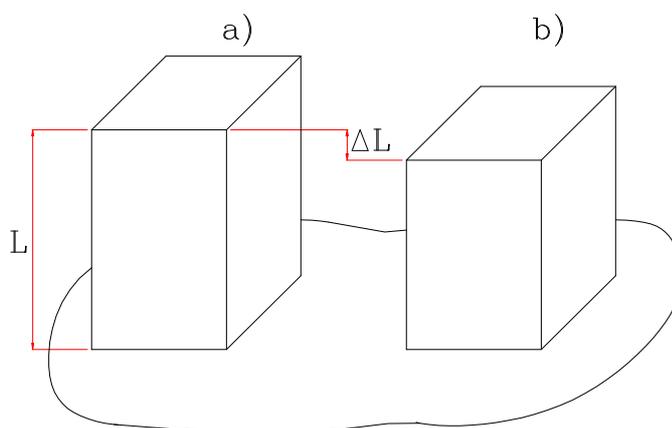


Figura 3.4 : Deformação de barra prismática.

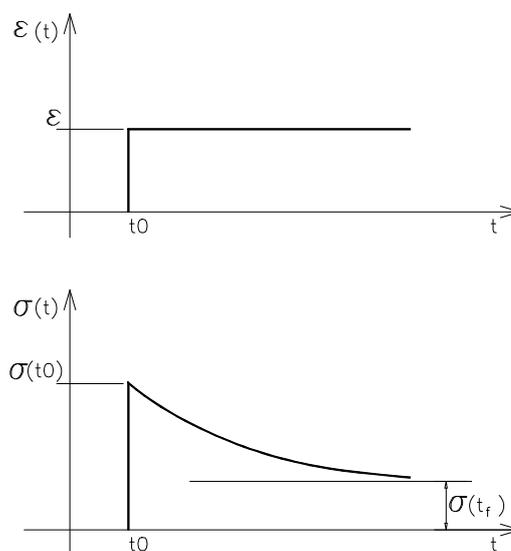


Figura 3.5 : Relaxação do concreto.

3.5-CÁLCULO DA RETRAÇÃO E FLUÊNCIA DE ACORDO COM O CÓDIGO - MODELO DE 1990 DO CEB

3.5.1-APLICABILIDADE DO MODELO

Segundo o **CEB (1990)**, o equacionamento apresentado é válido para os concretos estruturais correntemente usados na prática podendo sua resistência característica à compressão, f_{ck} , assumir valores que variam desde 12 MPa até o máximo de 80 MPa. As tensões de compressão não devem exceder 40 por cento da resistência média à compressão do dia correspondente ao carregamento, ou seja **isê á $f_{cm}(t_0)$** . A umidade ambiente deve estar compreendida entre **40 e 100%** e a temperatura entre **5°C e 30°C**. O modelo também é válido para as solicitações de tração.

3.5.2-PARÂMETROS DE CÁLCULO

O cálculo das deformações devido a fluência e retração do concreto depende de vários fatores sendo que os principais são a resistência a compressão, a espessura equivalente, a idade do concreto, a temperatura ambiente, a umidade e o tipo do cimento dentre outros. Todos estes parâmetros são considerados no equacionamento como será descrito a seguir.

a) resistência à compressão :

O valor da resistência média à compressão aos 28 dias é dado pela expressão (3.10). Onde f_{ck} é resistência característica à compressão tomada aos 28 dias.

$$f_{cm} = f_{ck} + 8\text{MPa} \quad (3.10)$$

b) espessura equivalente :

A espessura equivalente h_0 (cm) é determinada por :

$$h_0 = \frac{2A_c}{\mu} \quad (3.11)$$

onde A_c é a área da seção transversal (cm^2) e μ (cm) é o perímetro exposto ao ambiente. Pode-se notar que peças muito esbeltas terão uma grande espessura equivalente e sofrerão maiores deformações por retração.

c) maturidade do concreto :

A temperatura média ambiente tem um efeito sobre a maturidade do concreto que é levado em conta de modo a substituir a idade real deste por outra, denominada “ idade fictícia “, t_T , que será exatamente igual a real se a temperatura média ambiente for de 20°C . Dessa forma o intervalo total de tempo deve ser dividido em sub-intervalos que caracterizem a predominância de determinada temperatura média, assim sendo:

$$t_T = \sum_{i=1}^n \Delta t_i \cdot \exp - \left[\frac{4000}{273 + \frac{T(\Delta t_i)}{T_0}} - 13.65 \right] \quad (3.12)$$

onde $T(\Delta t_i)$ é a temperatura média [$^\circ\text{C}$] durante um intervalo de tempo igual a Δt_i em dias e T_0 assume o valor de 1°C .

d) tipo do cimento :

O efeito do tipo de cimento no cálculo da fluência do concreto é considerado por meio da correção da sua idade por ocasião do carregamento ou seja, da idade inicial ou “ t_0 ”. Isto é feito por meio da aplicação da equação (3.13).

$$t_{of} = t_{0T} \cdot \left[\frac{9}{2 + (t_{0T} / t_{01})^{0.50}} \right]^{\alpha} \geq 0,5 \text{ dia} \quad (3.13)$$

onde t_{01} é igual a 1 dia, t_{0T} é a idade inicial do concreto, corrigida de acordo com a expressão (3.12) e a potência \mathbf{a} é função do tipo de cimento e assume os seguintes valores :

$\mathbf{a} = -1$ para cimentos de endurecimento lento tipos (AF, POZ, MRS,ARS);

$\mathbf{a} = 0$ para cimento portland comum (CP);

$\mathbf{a} = +1$ para alta resistência inicial e rápido endurecimento (ARI).

3.5.3-CÁLCULO DA RETRAÇÃO

O valor total da retração do concreto que se desenvolve desde um instante de referência, t_s até outro aqui denominado t é dado pela seguinte expressão :

$$\varepsilon_{cs}(t, t_s) = \varepsilon_{cs0} \beta_s (t - t_s) \quad (3.14)$$

onde t é idade real no instante em que se calculam as deformações; t_s é a idade real do concreto no dia a partir do qual a retração interessa a ser considerada; ε_{cs0} é o valor de referência da retração dado pela expressão (3.15); β_s é função da evolução da retração com o tempo e tem seu valor dado pela equação (3.19).

O valor da retração de referência é dado por :

$$\varepsilon_{cs0} = \varepsilon_c (f_{cm}) \beta_{UR} \quad (3.15)$$

com :

$$\varepsilon_c (f_{cm}) = [160 + 10\beta_{sc} (9 - f_{cm} / f_{cm0})] \cdot 10^{-6} \quad (3.16)$$

onde f_{cm} é a resistência média à compressão do concreto aos 28 dias conforme a expressão (3.10); f_{cm0} é igual a 10 MPa e h_{sc} é o coeficiente para levar em consideração o tipo do cimento e pode assumir um dos seguintes valores abaixo :

$h_{sc} = 4$ para cimentos de endurecimento lento tipos (AF, POZ, MRS,ARS);

$h_{sc} = 5$ para cimento portland comum (CP);

$h_{sc} = 8$ para alta resistência inicial e rápido endurecimento (ARI).

O termo h_{UR} , que aparece na equação (3.15), tem como função levar em conta a umidade do meio ambiente, sendo calculado pela expressão (3.17) ou pela (3.18)- conforme a umidade relativa do ambiente. Valores negativos deste significam que houve diminuição de volume na peça, ao passo que o sinal positivo para o módulo de h_{UR} indicariam uma possível expansão.

$$\beta_{UR} = -1,55 \left[1 - \left(\frac{UR}{100} \right)^3 \right] \quad \text{para } 40\% \leq UR < 99\% \quad (3.17)$$

$$\beta_{UR} = +0,25 \quad \text{para } UR \geq 99\% \quad (3.18)$$

O desenvolvimento da retração com o tempo depende do intervalo considerado e da espessura fictícia. Dessa forma o valor de $\beta_s(t, t_s)$ é dado por (3.19):

$$\beta_s(t - t_s) = \left(\frac{t - t_s}{350(h_0 / h_{ref})^2 + (t - t_s) / t_1} \right)^{0,5} \quad (3.19)$$

onde t_1 é igual a 1 dia e h_{ref} vale 10 cm.

3.5.4-CÁLCULO DA FLUÊNCIA DO CONCRETO

O valor da deformação devido a fluência no concreto, quando submetido a uma tensão constante, pode ser calculado pela expressão (3.20) desde que as condições de aplicabilidade expressas pelo item (3.5.1) deste texto sejam satisfeitas.

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(28)} \cdot \phi_{28}(t, t_0) \quad (3.20)$$

onde $\sigma_c(t_0)$ é a tensão no concreto; $E_c(28)$ é o módulo de elasticidade longitudinal que tem seu valor de acordo com o item (3.6) e $\phi_{28}(t, t_0)$ é o coeficiente de fluência em relação à deformação aos 28 dias.

A deformação total num instante de tempo qualquer, devida a uma tensão constante aplicada numa fibra do concreto pode ser relacionada com esta tensão através de uma “função de fluência” como já foi comentado no item (3.2). Dessa forma :

$$\varepsilon_{c,tot}(t) = \sigma_c(t_0) \cdot \phi(t, t_0) \quad (3.21)$$

onde a função de fluência pode ser escrita na seguinte forma:

$$f(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{j_{28}(t, t_0)}{E_c(28)} \quad (3.22)$$

CÁLCULO DO COEFICIENTE DE FLUÊNCIA:

O coeficiente de fluência é calculado da seguinte forma :

$$j_{28}(t, t_0) = j_0 b_c(t - t_0) \quad (3.23)$$

onde \mathbf{j}_0 é o valor de referência do coeficiente de fluência para a idade \mathbf{t}_0 e $\mathbf{b}_c(\mathbf{t}-\mathbf{t}_0)$ é um coeficiente que mede o desenvolvimento da fluência ao longo do tempo.

A umidade relativa do ambiente, a espessura equivalente, a resistência do concreto, o tipo do cimento e o instante da aplicação do carregamento são os fatores que influem no valor do coeficiente de referência que é determinado conforme as expressões seguintes :

$$\varphi_0 = \varphi_{UR} \cdot \beta(f_{cm}) \cdot \beta(t_0) \quad (3.24)$$

com :

$$\varphi_{UR} = 1 + \frac{1 - UR / 100}{0.215(h_0)^{1/3}} \quad (3.25)$$

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{(f_{cm})^{0,5}} \quad (3.26)$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0,1 + (t_{of})^{0,2}} \quad (3.27)$$

onde **UR** é a umidade relativa em %; **h₀** é a espessura fictícia calculada conforme a expressão (3.11); **f_{cm}** dado por (3.10) e **t_{of}** é a idade inicial corrigida pelas equações (3.12) e (3.13), respectivamente.

O desenvolvimento da fluência com o tempo é dado por :

$$\beta_c(t, t_0) = \left[\frac{(t - t_0) / t_1}{\beta_H + (t - t_0) / t_1} \right]^{0,3} \quad (3.28)$$

com :

$$\beta_H = 150 \left\{ 1 + \left(1.2 \frac{UR}{100} \right)^{18} \right\} \frac{h_0}{h_{ref}} + 250 \leq 1500 \quad (3.29)$$

onde **(t-t₀)** é o intervalo real em dias, não corrigido; **h_{ref}** é a espessura de referência que é tomada como valendo 10cm; **t₁** vale 1 dia.

OBSERVAÇÕES:

De acordo com as indicações do **CEB**, o cálculo do coeficiente de fluência é proposto como sendo a relação entre a deformação por fluência no instante “*t*” e a deformação instantânea para uma tensão aplicada aos 28 dias, daí o fato de estar sendo usado na nomenclatura o símbolo \mathbf{j}_{28} . Assim a partir da equação (3.20) resulta :

$$\varphi_{28}(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cc}(t, t_0)}{\sigma_c(t_0) / E_c(28)} \quad (3.30)$$

Podem também ser interessante definir o coeficiente de fluência como a relação entre a deformação por fluência no instante “*t*” e a deformação elástica para o instante inicial “*t*₀”. Desse modo resulta uma expressão semelhante a (3.30) descrita a seguir :

$$\varphi_0(t, t_0) = \frac{\varepsilon_{cc}(t, t_0)}{\sigma_c(t_0) / E_c(t_0)} \quad (3.31)$$

O coeficiente de fluência em relação ao tempo inicial pode ser obtido a partir do valor calculado pelas recomendações do **CEB**, bastando para isso isolar o termo correspondente a deformação por fluência nas expressões (3.30) e (3.31) e depois igualar as equações resultantes. Assim :

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(28)} \cdot \varphi_{28}(t, t_0) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot \varphi_0(t, t_0) \quad (3.32)$$

portanto:

$$\varphi_0(t, t_0) = \varphi_{28}(t, t_0) \cdot \frac{E_c(t_0)}{E_c(28)} \quad (3.33-a)$$

e, analogamente :

$$\varphi_{28}(t, t_0) = \varphi_0(t, t_0) \cdot \frac{E_c(28)}{E_c(t_0)} \quad (3.33-b)$$

3.6-VARIAÇÃO DO MÓDULO DE DEFORMAÇÃO LONGITUDINAL DO CONCRETO

O módulo de elasticidade longitudinal, tangente na origem do diagrama tensão x deformação, para concretos de peso específico normal, pode ser estimado da seguinte forma, de acordo com as indicações do CEB de 1990:

$$E_c(28) = 21500 \left[(f_{ck} + \Delta f) / f_{cm0} \right]^{1/3} \quad (3.34)$$

onde $E_c(28)$ tem seu valor em MPa e se refere a idade de 28 dias; f_{ck} é a resistência característica do concreto à compressão; f_{cm0} é igual a 10 MPa e Δf é tomado como sendo igual a 8 MPa.

Para o caso de análise em regime de elasticidade linear, com a consideração da fluência e níveis de tensão maiores é definido um módulo secante, $E_{cs}(28)$, que é na realidade uma minoração do módulo tangente; estes fatos podem ser ilustrados pela figura (3.6) .

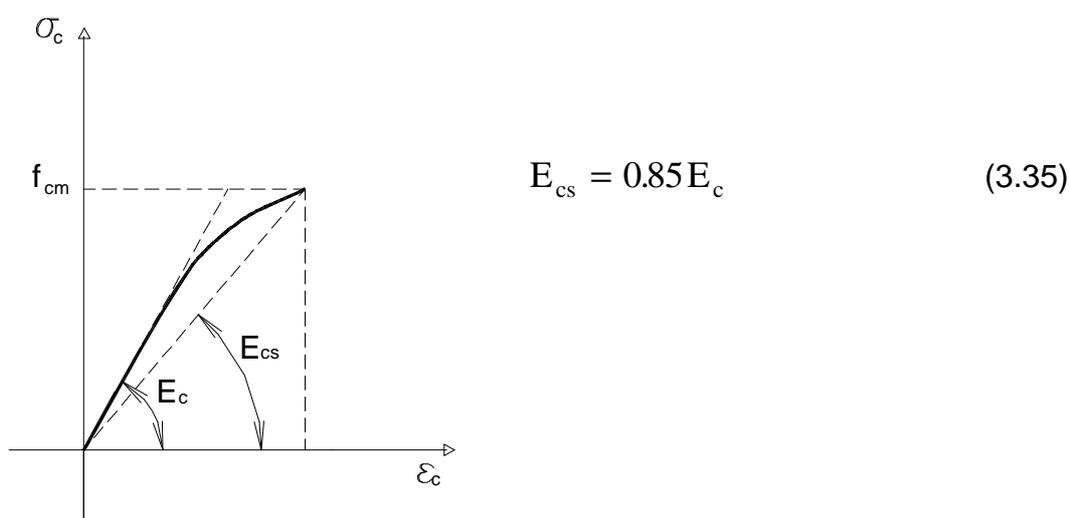


Figura 3.6 : Módulos de deformação longitudinal tangente e secante para o concreto.

Para uma idade qualquer do concreto, diferente de 28 dias, o **CEB-90** apresenta uma formulação para a avaliação do valor do módulo elástico como será apresentado a seguir :

$$E_c(t) = \beta_E(t) \cdot E_c(28) \quad (3.36)$$

Com :

$$\beta_E(t) = \sqrt{\beta_{cc}(t)} \quad (3.37)$$

e :

$$\beta_{cc}(t) = \exp\left[s\left(1 - \sqrt{28/t}\right)\right] \quad (3.38)$$

O termo “**s**” é um coeficiente que é função do tipo de cimento; seus valores possíveis são os seguintes :

s = 0,20 para cimentos de endurecimento lento tipos (AF, POZ, MRS, ARS);

s = 0,25 para cimento portland comum (CP);

s = 0,38 para alta resistência inicial e rápido endurecimento (ARI).

3.7-DESENVOLVIMENTO DA RESISTÊNCIA COM O TEMPO

3.7.1-RESISTÊNCIA À COMPRESSÃO

O valor da resistência média à compressão, f_{cm} , já foi estudado no item (3.5.2), pois seu conhecimento era de interesse para os cálculos relativos à fluência e à retração. Naquela ocasião o valor calculado referia-se aos 28 dias após a concretagem, neste item pretende-se expor a formulação para avaliação das mudanças devido ao tempo na resistência do concreto. Novamente, as equações apresentadas serão relativas ao **MC-90** do **CEB**. Assim, para um instante genérico de tempo:

$$f_{cm}(t) = \beta_{cc}(t) \cdot f_{cm} \quad (3.39)$$

onde $f_{cc}(t)$ e f_{cm} são calculados de acordo com as equações (3.38) e (3.10), respectivamente.

3.7.2–RESISTÊNCIA À TRAÇÃO

A resistência à tração do concreto tem uma variabilidade maior que aquela à compressão, por isso o **CEB** indica um valor inferior e outro superior para o seu cálculo, sendo que também estabelece uma média entre ambos. Indica, ainda, que estes podem ser adotados na ausência de outro valor mais acuradamente determinado. Para os cálculos a que este trabalho se interessa será adotado o valor médio obtido por (3.42). Assim :

$$f_{ctk,min} = 0,95(f_{ck} / f_{ck0})^{\frac{2}{3}} \quad (3.40)$$

$$f_{ctk,max} = 1,80(f_{ck} / f_{ck0})^{\frac{2}{3}} \quad (3.41)$$

$$f_{ctm} = 1,40(f_{ck} / f_{ck0})^{\frac{2}{3}} \quad (3.42)$$

onde f_{ck} é a resistência característica do concreto à compressão para 28 dias e f_{ck0} é igual a 10 MPa.

Segundo as recomendações do **CEB**, o desenvolvimento da resistência à tração com o tempo é largamente influenciado pelo processo de cura e pelas dimensões da peça. Este código-modelo indica, como uma primeira aproximação, que se pode assumir que o desenvolvimento da resistência à tração seja semelhante à evolução da resistência à compressão para casos onde houve cura adequada e idade do concreto ≥ 28 dias.

3.8-CÁLCULO DO COEFICIENTE DE ENVELHECIMENTO DO CONCRETO

3.8.1-RELAÇÕES BÁSICAS

Conforme já foi dito em seções anteriores, dificilmente existe a fluência pura nas estruturas de concreto. Assim sendo, a deformação total de uma fibra num instante qualquer de tempo (t) será determinada pela expressão abaixo :

$$\varepsilon_{c(t,t_0)} = \sigma_{c(t_0)} \cdot \phi_{(t,t_0)} + \int_{t_0}^t \phi_{(t,\tau)} \cdot d\sigma_{c(\tau)} + \varepsilon_{cs(t,t_0)} \quad (3.43)$$

onde t é um instante genérico entre t_0 e t , $d\sigma_{c(t)}$ é um incremento infinitesimal de tensão aplicado na idade t , $\varepsilon_{cs(t,t_0)}$ é a retração no período e ϕ são as funções de fluência definidas a seguir:

$$\phi(t,t_0) = \frac{1 + \varphi_0(t,t_0)}{E_c(t_0)} \quad (3.44)$$

$$\phi(t,\tau) = \frac{1 + \varphi_0(t,\tau)}{E_c(\tau)} \quad (3.45)$$

onde φ_0 é o coeficiente de fluência conforme definido na seção (3.5.2), $E_c(t_0)$ e $E_c(t)$ são os módulos elásticos dependentes do tempo determinados conforme o item (3.6) deste capítulo.

Analisando-se a expressão (3.43) pode-se pensar na fluência total da seguinte forma: primeiramente a tensão inicial $\sigma_{c(t_0)}$, se permanecesse constante ao longo do tempo, causaria uma deformação total no tempo t de valor igual ao primeiro termo do lado direito da equação (3.43); como na realidade a tensão é variável com o tempo, existindo um incremento de tensões, $d\sigma_{c(t)}$, existe outra parcela de deformação (tanto elástica, quanto

por fluência), cujo valor é dado pela integração que aparece na expressão (3.43).

Como pode-se supor, $\mathbf{Ds}_c(t)$ não é introduzido de uma só vez no instante inicial e sim gradualmente variando de zero para o tempo t_0 até $\mathbf{Ds}_c(t)$ para t . Seja um intervalo t de tempo, um incremento $\mathbf{Ds}_c(t)$ introduzido gradualmente no decorrer deste provocaria menor deformação por fluência do que se fosse introduzido integralmente no início do intervalo. Através de um coeficiente apropriado, adimensional, positivo e menor que a unidade, \mathbf{x} , é possível supor que todo o incremento $\mathbf{Ds}_c(t)$ seja aplicado no instante inicial do intervalo e mantido constante, simplificando bastante a expressão (3.43). A este denomina-se “coeficiente de envelhecimento do concreto”. Assim, a deformação total no tempo t devida a $\mathbf{Ds}_c(t)$ é calculada de maneira semelhante ao que se faz para $\mathbf{s}_c(t_0)$, com o coeficiente de fluência $\mathbf{j}_0(t, t_0)$ multiplicado por \mathbf{x} . Desse modo, a equação (3.43) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\varepsilon_{c(t, t_0)} = \sigma_{c(t_0)} \cdot \phi_{(t, t_0)} + \Delta\sigma_{c(t)} \cdot \phi^*_{(t, t_0)} \quad (3.46)$$

com :

$$\phi^*(t, t_0) = \frac{1 + \chi\phi_0(t, t_0)}{E_c(t_0)} \quad (3.47)$$

O valor do coeficiente de envelhecimento é função basicamente dos instantes inicial e final do intervalo de tempo, podendo-se afirmar que $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t, t_0)$. GHALI & FAVRE (1986) demonstram que é possível relacionar \mathbf{x} com a relaxação e a fluência do concreto, resultando na expressão (3.48) que é bastante simples de ser empregada.

$$\chi(t, t_0) = \frac{1}{1 - r(t, t_0) / E_c(t_0)} - \frac{1}{\phi_0(t, t_0)} \quad (3.48)$$

As determinações do coeficiente de fluência e do módulo de elasticidade do concreto, empregados pela expressão (3.48), já foram definidas em seções anteriores restando apenas a definição do valor de $r(t, t_0)$ para o cálculo de ϵ . A função de relaxação pode ser encontrada em ábacos propostos por GHALI & FAVRE (1986), onde também é apresentado um algoritmo programável para a sua determinação. Este último foi implementado no decorrer deste trabalho de mestrado e será descrito resumidamente a seguir. Maiores detalhes e a dedução completa do algoritmo, podem ser encontrados também em BAZANT (1972) e MACHADO (1989).

3.8.2-ALGORITMO “PASSO A PASSO” PARA O CÁLCULO DA RELAXAÇÃO DO CONCRETO.

O diagrama que expressa a variação das tensões ao longo do tempo para uma fibra (de concreto) da seção transversal de um elemento de concreto armado tem o aspecto da figura (3.7). Supõe-se que uma tensão inicial, D_{s_c1} , é introduzida nessa fibra no instante de tempo t_0 ; esta tensão vai aumentando gradualmente no intervalo de tempo (t_0, t) . O acréscimo de tensão D_{s_cj} é suposto no ponto médio do j -ésimo intervalo, no caso de acréscimos bruscos de tensão como ocorrem nos intervalos 1 e k o comprimento da variação de tempo é considerado nulo. Ainda para o intervalo genérico j , o tempo $t_{j-1/2}$ define o seu extremo inferior, t_j o ponto médio e $t_{j+1/2}$ o extremo superior.

A partir do emprego das equações (3.46) e (3.47) é possível escrever-se a deformação total no final do i -ésimo intervalo conforme as expressões (3.49) e (3.50).

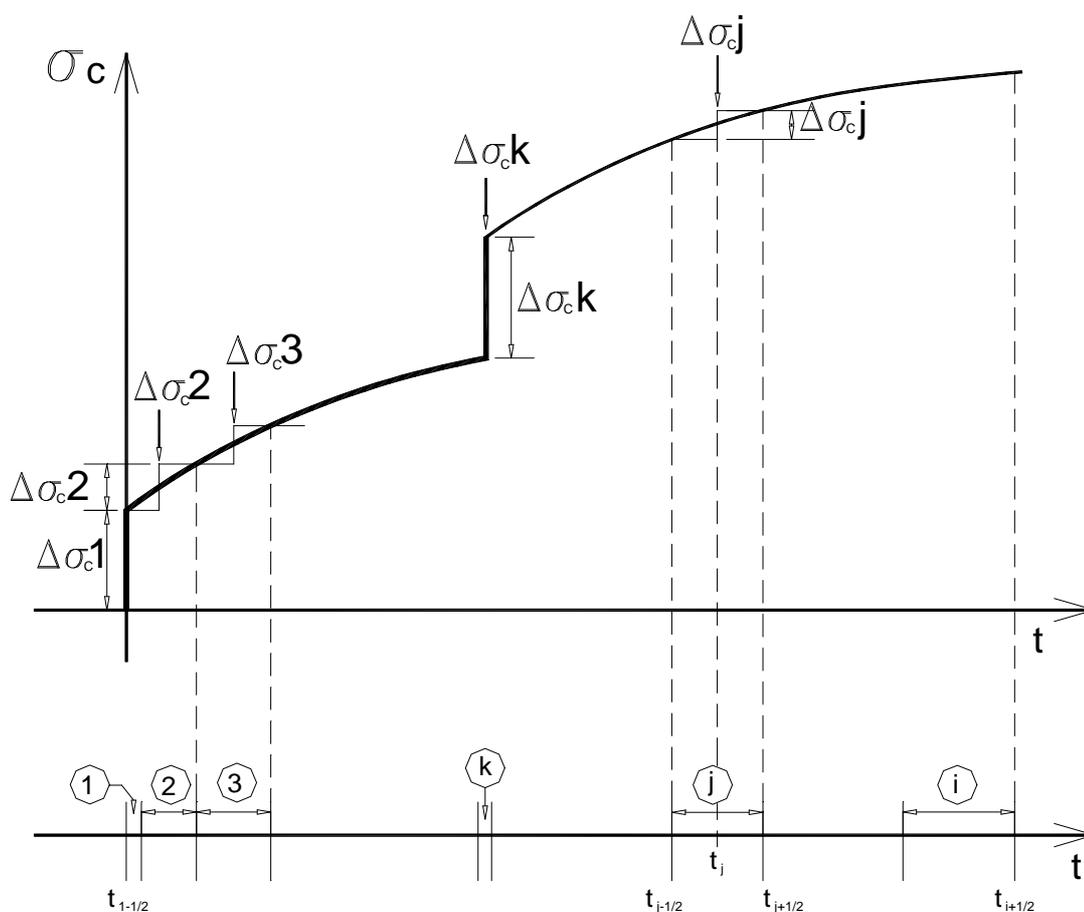


Figura 3.7 : Divisão de tensões com o tempo para a análise “passo a passo” da relaxação do concreto.

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t_{i+1/2}) = & (\Delta\sigma_c)_1 \frac{1+\varphi_0(t_{i+1/2}, t_1 = t_0)}{E_c(t_1)} + (\Delta\sigma_c)_2 \frac{1+\varphi_0(t_{i+1/2}, t_2)}{E_c(t_2)} + \\ & (\Delta\sigma_c)_j \frac{1+\varphi_0(t_{i+1/2}, t_j)}{E_c(t_j)} + (\Delta\sigma_c)_i \frac{1+\varphi_0(t_{i+1/2}, t_i)}{E_c(t_i)} + \varepsilon_{cs}(t_{i+1/2}, t_0) \end{aligned} \quad \dots(3.49)$$

A expressão acima pode ser escrita na forma compacta :

$$\varepsilon_c(t_{i+1/2}) = \sum_{j=1}^i \left[(\Delta\sigma_c)_j \frac{1+\varphi_0(t_{i+1/2}, t_j)}{E_c(t_j)} \right] + \varepsilon_{cs}(t_{i+1/2}, t_0) \quad (3.50)$$

Para o caso em que todos os incrementos de tensão são conhecidos, a equação acima fornece a deformação total para o instante $t_{i+1/2}$. No entanto, para o problema do cálculo da relaxação, o que se conhece é a deformação total, ϵ_c , que é imposta no instante t_0 e mantida constante provocando uma tensão inicial igual $\sigma_c(t_0)$ que vai sendo relaxada ao longo do tempo; nesse caso, os valores dos incrementos $\Delta\sigma_c$ devem ser calculados passo a passo e a tensão total ao término do último intervalo de tempo será determinada por :

$$\begin{aligned}\sigma_c(t_{i+1/2}) &= (\Delta\sigma_c)_1 + (\Delta\sigma_c)_2 + \dots + (\Delta\sigma_c)_j + \dots + (\Delta\sigma_c)_i \\ &= \sum_{j=1}^i (\Delta\sigma_c)_j\end{aligned}\quad (3.51)$$

As tensões inicial e final serão calculadas pelas expressões (3.52) e (3.53), respectivamente, onde $r(t, t_0)$ é a função de relaxação do concreto no período.

$$\sigma_c(t_0) = E_c(t_0) \cdot \epsilon_c \quad (3.52)$$

$$\sigma_c(t_i) = r(t_{i+1/2}, t_0) \cdot \epsilon_c \quad (3.53)$$

O valor da relaxação no final do último intervalo pode ser determinado igualando-se as expressões (3.51) e (3.53), assim :

$$r(t_{i+1/2}, t_0) = \frac{1}{\epsilon_c} \sum_{j=1}^i (\Delta\sigma_c)_j \quad (3.54)$$

Tomando-se o valor unitário para a deformação imposta ϵ_c , o valor da relaxação fica definido como sendo a soma de todos os incrementos de tensão que ocorreram durante t_0 e t . Para a dedução do algoritmo é conveniente rescrever (3.50) isolando o último termo da somatória o que resulta na expressão (3.55).

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t_{i+1/2}) = & \sum_{j=1}^{i-1} \left[(\Delta\sigma_c)_j \frac{1 + \varphi_0(t_{i+1/2}, t_j)}{E_c(t_j)} \right] + \\ & (\Delta\sigma_c)_i \frac{1 + \varphi_0(t_{i+1/2}, t_i)}{E_c(t_i)} + \varepsilon_{cs}(t_{i+1/2}, t_0) \end{aligned} \quad (3.55)$$

Conforme já foi dito, a deformação imposta inicialmente é mantida constante ao longo do tempo, portanto $\varepsilon_c(t_i)$ será constante e igual à unidade. Dessa forma é possível escrever um incremento genérico de tensões $(\Delta\sigma_c)_i$ em função do módulo de elasticidade e dos coeficientes de fluência dos intervalos precedentes, assim :

$$\begin{aligned} (\Delta\sigma_c)_i = & \frac{E_c(t_i)}{1 + \varphi_0(t_{i+1/2}, t_i)} \{ \varepsilon_c(t_{i+1/2}) - \varepsilon_{cs}(t, t_0) - \\ & \sum_{j=1}^{i-1} \left[(\Delta\sigma_c)_j \frac{1 + \varphi_0(t_{i+1/2}, t_j)}{E_c(t_j)} \right] \} \end{aligned} \quad (3.56)$$

A expressão acima dever ser aplicada sucessivamente para $i=1, 2, \dots, n$, onde n é o número de intervalos em que o tempo total foi dividido. Dessa forma ao se aplicar (3.56) para o cálculo do incremento no i -ésimo intervalo todos os incrementos precedentes, $(\Delta\sigma_c)_i$, necessários para a sua resolução já estarão previamente determinados. Assim a relaxação total será :

$$r(t_{i+1/2}, t_0) = \sum_{j=1}^i (\Delta\sigma_c)_j \quad (3.57)$$

O coeficiente de envelhecimento do concreto será calculado de acordo com a expressão (3.48) aqui repetida por comodidade.

$$\chi(t, t_0) = \frac{1}{1 - r(t, t_0) / E_c(t_0)} - \frac{1}{\varphi_0(t, t_0)} \quad (3.58)$$

O número total de sub-intervalos (n) em que o intervalo principal ($t_0 - t$) deve ser dividido influi na precisão dos resultados, dessa forma se n for um valor suficientemente grande conduzirá, evidentemente, a melhores resultados, entretanto a grande custo computacional. Por outro lado quando o número de subintervalos for pequeno, o resultado será impreciso, apesar da facilidade computacional. BAZANT (1972) sugere que o tempo total seja repartido em torno de 5 ou 6 parcelas. Através do programa computacional efetuado para a análise “passo a passo” da relaxação do concreto pode-se perceber que para $n > 10$ o valor obtido praticamente não se alterava, por isso neste trabalho, indica-se que o intervalo total de tempo seja dividido em 10 partes.

Ainda de acordo com BAZANT, a forma como os subintervalos são tomados influi significativamente nos resultados. Esse autor indica que melhores resultados são obtidos quando os comprimentos Δt_i dos intervalos são aproximadamente iguais quando colocados sobre uma escala logarítmica. Sugere-se, neste trabalho, que estes sejam tomados da seguinte forma :

$$\Delta t' = \frac{\log(t) - \log(t_0)}{n} \quad (3.59)$$

Assim, o extremo inferior de um intervalo i , $t_{i-1/2}$, será igual ao extremo superior do intervalo $i-1$, que já foi previamente determinado. Por outro lado, $t_{i+1/2}$ deverá ser avaliado da seguinte forma :

$$\log(t_{i+1/2}) = \log(t_{i-1/2}) + \Delta t' \quad (3.60)$$

3.9-MODIFICAÇÕES NOS ESFORÇOS SOLICITANTES DEVIDAS À FLUÊNCIA

Conforme já foi citado no início deste capítulo a fluência pode, ao longo do tempo, causar uma redistribuição de esforços solicitantes nas estruturas hiperestáticas. Pretende-se nesta seção analisar as circunstâncias em que este fato irá ocorrer; para tanto será aqui empregado o processo dos esforços. Deve-se esclarecer que as demonstrações que serão efetuadas a seguir podem ser encontradas em BAZANT (1972).

A determinação do momento hiperestático sobre o apoio intermediário de uma viga composta por dois tramos, conforme mostra a figura (3.8), é tratado agora. Pode-se afirmar que a rotação relativa do eixo da viga em relação a um ponto fixo sobre o apoio intermediário (\mathbf{d}_{1r}) é nulo. O vínculo que transmite momentos fletores entre os dois tramos será liberado e, em seu lugar, será imposto um momento fletor \mathbf{F}_1 com o objetivo de restituir a condição real da viga. A questão então passa a ser determinar o valor de \mathbf{F} para que \mathbf{d}_{1r} seja nulo; o problema original hiperestático passa a ser representado por dois problemas isostáticos. Com o emprego do processo dos esforços pode-se escrever a seguinte equação de compatibilidade entre deslocamentos:

$$\delta_{1r} = \delta_{10} + F_1 \delta_{11} = 0 \quad (3.61)$$

Assim :

$$M = F_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} \quad (3.62)$$

Aplicando-se o princípio do trabalhos virtuais, PTV obtém-se (3.63) e (3.64).

$$\delta_{10} = \int_{est} \frac{M_0 M_1}{E_c I_c} ds \quad (3.63)$$

e :

$$\delta_{11} = \int_{\text{est}} \frac{M_1^2}{E_c I_c} ds \quad (3.64)$$

onde M_0 corresponde ao diagrama de momentos para o problema “0” conforme a figura (3.9), e M_1 tem o mesmo significado para o problema “1” e M será o momento final sobre o apoio intermediário.

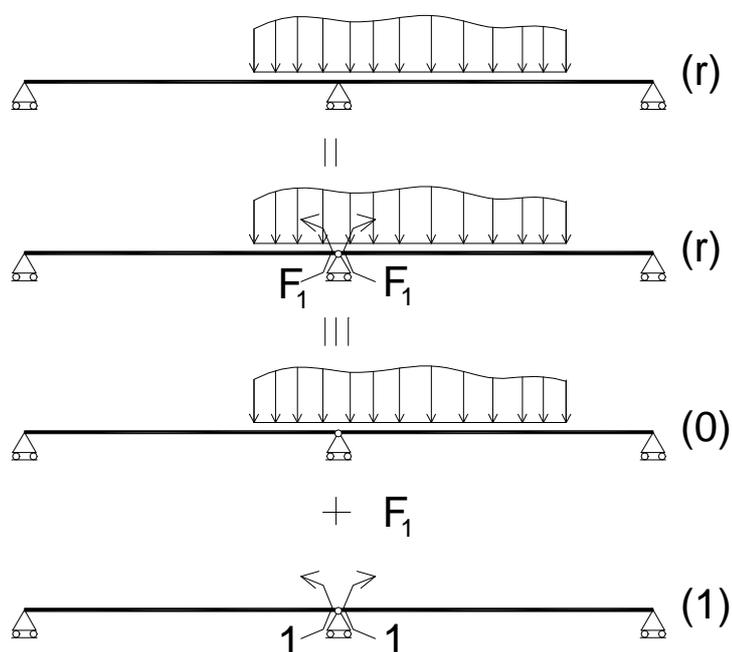


Figura 3.8 : Aplicação do processo dos deslocamentos.

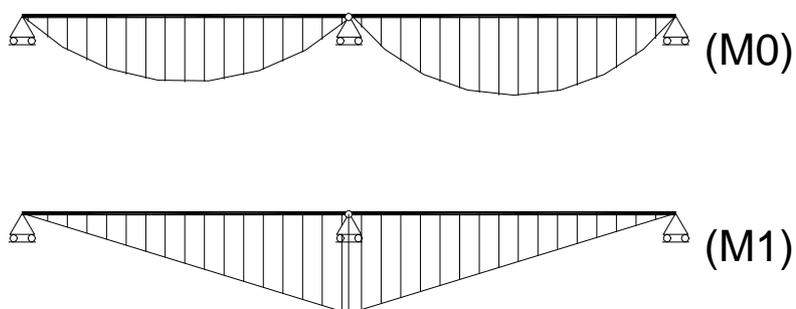


Figura 3.9 : Momentos isostáticos.

Supõe-se que ambos os tramos da viga tenham as mesmas propriedades físicas e geométricas e foram concretados no mesmo instante. Transcorrido um intervalo de tempo $(t-t_0)$ novos deslocamentos devidos à fluência irão ocorrer na viga da figura (3.8). Para o caso das estruturas isostáticas basta multiplicar o deslocamento inicial pelo já definido coeficiente de fluência. Pode ser escrita um equação de compatibilidade semelhante à (3.61) em termos dos acréscimos de deslocamentos com o tempo.

$$0. \varphi = \delta_{10} \varphi + M \delta_{11} \varphi + \Delta M \delta_{11} (1 + \varphi) \quad (3.65)$$

onde $\mathbf{j} = \mathbf{j}(t, t_0)$ é o coeficiente de fluência e \mathbf{DM} é a variação de esforços solicitantes.

Como os valores de \mathbf{d}_{10} , \mathbf{d}_{11} e \mathbf{M} são não-nulos, a equação (3.65) só pode ser satisfeita de \mathbf{DM} for zero. Isso significa que para as estruturas hiperestáticas com o mesmo coeficiente de fluência em todos os seus membros a fluência não causa uma redistribuição de esforços.

Em se tratando de estruturas de concreto armado, além da condição anterior, os membros da estrutura devem ter idênticas taxas de armadura positiva e negativa para que a redistribuição de esforços devida à fluência seja nula. Segundo BAZANT (1972) essa conclusão se estende a todas as estruturas hiperestáticas onde não se considera efeitos de segunda ordem e não somente ao caso particular acima descrito.

Dessa forma, para as estruturas de concreto armado, **a grande responsável pela redistribuição de esforços solicitantes é a presença de armadura.** Deve ser efetuado um adequado equacionamento do equilíbrio nos instantes inicial e final de tempo e este obrigatoriamente deve considerar a presença da armadura, que de certo modo tendem a diminuir a fluência e a retração.

4-MODELOS DE COMPORTAMENTO DO CONCRETO ARMADO

4.1-INTRODUÇÃO

A modelagem do comportamento em serviço do concreto armado, através do método dos elementos finitos com a incorporação da não-linearidade física, pode ser feita através de duas maneiras distintas, a saber:

1. modelagem das relações entre tensões e deformações dos materiais constituintes: concreto e aço;
2. modelagem via diagramas momento x curvatura de uma seção transversal.

Os modelos do tipo 1 têm um campo de aplicação mais amplo do que os do tipo 2 – podem ser empregados em qualquer tipo de elemento finito. Os modelos do tipo 2 têm a virtude de considerar facilmente, através de um modelo adequado, a contribuição do concreto intacto entre fissuras. Ambos devem ter seus parâmetros aferidos experimentalmente.

Os resultados obtidos em estruturas de concreto armado empregando-se as relações momento x curvatura são bastante satisfatórios e não encontra-se na literatura justificativa fundamentada que mostre serem os modelos do tipo 1 melhores do que os do tipo 2. Neste trabalho serão empregados modelos baseados nas relações momento x curvatura.

Serão descritos neste capítulo os algoritmos propostos por GHALI & FAVRE (1986) e DEBERNARDI (1983). A diferença básica entre eles é que os primeiros autores efetuam uma interpolação direta entre os estádios 1 e 2

enquanto DEBERNARDI equaciona o equilíbrio em relação a uma configuração média deformada.

4.2-MODELO DE GHALI & FAVRE – FLEXÃO SIMPLES

4.2.1-INSTANTE DA APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO

Para uma seção não fissurada de concreto armado são admitidas todas as hipóteses do estágio 1, sendo que o cálculo das propriedades geométricas e da curvatura correspondente à seção íntegra são efetuados conforme o capítulo 2 deste trabalho. Da mesma maneira procede-se para seções totalmente fissuradas – estágio 2, com as mesmas hipóteses e considerações do cap. 2. Descreve-se a seguir a formulação desenvolvida por GHALI & FAVRE para uma configuração média entre os estádios 1 e 2.

Considere-se que uma barra de concreto armado solicitada à flexão simples conforme ilustrada na figura (4.1). Esta apresentará uma primeira fissura quando o momento máximo ao longo da sua extensão atingir um valor tal que a tensão na fibra mais tracionada da seção supere a resistência média à tração do concreto, f_{ctm} . Este momento é denominado momento de fissuração, M_r e pode ser calculado de acordo com a expressão (4.1) proposta pelo CEB-90.

$$M_r = \frac{f_{ctm} I_1}{(h - x_1)} \quad (4.1)$$

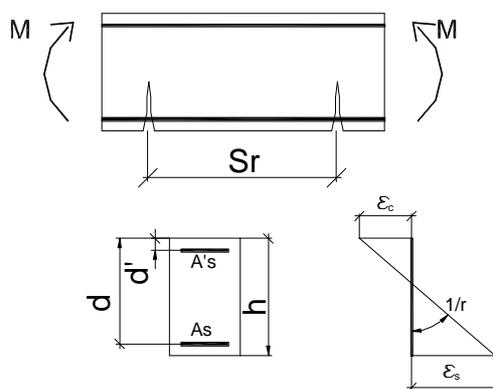


Figura 4.1 – Peça fissurada de concreto armado.

onde I_1 e x_1 são, respectivamente, o momento de inércia da seção homogeneizada e a posição da linha neutra no estágio 1.

Para a atuação de um momento fletor $M > M_r$, as tensões na armadura de tração variam de um valor máximo nas seções das fissuras para um mínimo num ponto médio entre fissuras sucessivas. Assumindo-se que a contribuição do concreto entre fissuras – “tension stiffening”- causa um efeito equivalente ao descrito para a tração simples (vide seção 2.4) para a determinação da deformação média no aço, podemos escrever a deformação média na fibra correspondente à armadura tracionada na seguinte forma :

$$\varepsilon_{sm} = (1 - \zeta)\varepsilon_{s1} + \zeta\varepsilon_{s2} \quad (4.2)$$

onde ε_{s1} é a deformação da armadura tracionada quando supõe-se estágio 1, ε_{s2} tem o mesmo significado para o estágio 2, ζ é um coeficiente de ponderação definido por GHALI & FAVRE pela expressão que segue :

$$\zeta = 1 - \beta_1\beta_2 \left(\frac{\sigma_{sf}}{\sigma_{s2}}\right)^2 = 1 - \beta_1\beta_2 \left(\frac{M_r}{M}\right)^2 \quad (4.3)$$

onde β_1 e β_2 são coeficientes que levam em contas as condições de aderência e o tipo do carregamento, respectivamente. Assim :

a) condições de aderência:

$$\beta_1 = 1,0 \text{ para barras de alta aderência } (\eta_b \geq 1,5)$$

$$\beta_1 = 0,5 \text{ para barras lisas } (\eta_b = 1,0)$$

b) condições de carregamento:

$\beta_2 = 1,0$ para o primeiro carregamento, ou para cargas pouco repetitivas, não permanentes.

$\beta_2 = 0,5$ para cargas permanentes ou com grande número de ciclos.

No caso de uma análise estrutural onde os efeitos dependentes do tempo foram considerados, ou seja com a consideração da deformação lenta, sugere-se que \mathbf{b}_2 seja tomado igual a 1,0 para o instante inicial da análise e igual a 0,5 para um instante genérico de tempo.

Para um espaçamento médio entre fissuras s_{rm} , pode-se calcular a abertura destas por:

$$w = s_{rm} \zeta \varepsilon_{s2} \quad (4.4)$$

A curvatura $1/r$ para uma seção transversal fissurada ou não, admitindo-se as hipóteses da seção plana assim permanecer após a deformação e da proporcionalidade entre tensões e deformações, pode ser expressa para a flexão simples por :

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{E_c I} \quad (4.5)$$

ou, ainda:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_s + \varepsilon_c}{d} \quad (4.6)$$

onde E_c é módulo de elasticidade do concreto (conforme seção 3.5), I é o momento de inércia da seção, ε_s e ε_c são respectivamente a deformação na fibra mais comprimida de concreto e na fibra correspondente à armadura tracionada e d é a distância entre a fibra mais comprimida e a armadura tracionada.

Assumindo-se a contribuição do concreto íntegro entre fissuras, pode-se escrever a expressão da curvatura média – que é ilustrada na figura (4.2) - por:

$$\frac{1}{r_m} = (1 - \zeta) \frac{1}{r_1} + \zeta \frac{1}{r_2} \quad (4.7)$$

onde $1/r_1$ e $1/r_2$ são as curvaturas correspondentes a um momento fletor M , calculadas conforme a expressão (4.5) assumindo-se estágio 1 e estágio 2 respectivamente. O coeficiente α tem função de interpolar as curvaturas do estágio 1 e do estágio 2. Uma vez obtido o valor de $1/r_m$ é possível determinar um módulo de deformação por flexão médio – $(E_c I)_m$, que na verdade corresponde a uma rigidez secante para a seção, assim :

$$(EI)_m = \frac{M}{1/r_m} \quad (4.8)$$

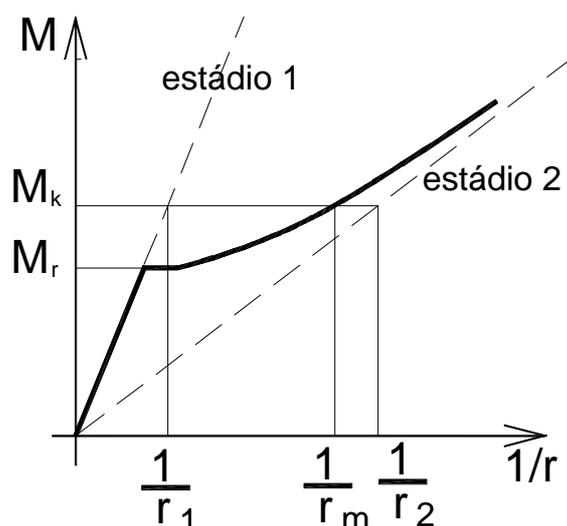


Figura 4.2 - Diagrama Momento-Curvatura - Flexão Simples.

4.2.2-INSTANTE GENÉRICO DE TEMPO

Uma fibra genérica de concreto está sujeita a sofrer uma mudança em seu estado de tensões que vai ocorrer entre o instante em que o carregamento é aplicado até outro instante de tempo qualquer. Isto se deve à presença da armadura que restringe a deformação lenta nas fibras de concreto adjacentes a ela, supondo-se a inexistência de armadura pode-se

afirmar que as tensões não sofrem alterações. A tensão total e a deformação para o instante de tempo “t”, desprezando-se a retração são dadas respectivamente por :

$$\sigma_c(t) = \sigma_c(t_0) + \Delta\sigma_c(t, t_0) \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} \cdot (1 + \varphi(t, t_0)) + \frac{\Delta\sigma_c(t, t_0)}{\bar{E}_c(t, t_0)} \quad (4.10)$$

onde:

$$\bar{E}_c(t, t_0) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \chi\varphi(t, t_0)} \quad (4.11)$$

$\bar{E}_c(t, t_0)$ é chamado de **módulo elástico ajustado**. GHALI & FAVRE (1986) também apresentam em seu trabalho a seguinte relação que deve ser atendida :

$$\Delta\varepsilon_c(t, t_0) = \frac{\Delta\sigma_c(t, t_0)}{\bar{E}_c(t, t_0)} \quad (4.12)$$

Da expressão acima pode-se concluir que o módulo elástico ajustado somente tem sentido para as seções com a presença de armadura. Para o caso de uma seção de concreto simples haveria variação de deformação e a mudança no estado de tensões seria nula tornando impossível atender à equação (4.12).

SEÇÃO TRANSFORMADA:

Uma seção transversal composta de concreto e armadura passiva pode ser substituída por outra, homogênea, transformando a área de aço numa área equivalente de concreto, ou qualquer outro material de referência. Para esse fim define-se um coeficiente de homogeneização α . Em se tratando da análise de esforços que variam ao longo do tempo define-se um coeficiente de homogeneização $\bar{\alpha}(t, t_0)$ tal que a expressão (4.13) seja atendida.

$$\bar{\alpha}(t, t_0) = \frac{E_s}{\bar{E}_c(t, t_0)} \quad (4.13)$$

A seção ajustada, ou transformada, será aquela onde a área e o momento de inércia são calculados considerando-se que a área da armadura será multiplicada por $\bar{\alpha}(t, t_0)$ na homogeneização da seção.

EFEITOS DA FLUÊNCIA E RETRAÇÃO PARA SEÇÕES NÃO-FISSURADAS DE CONCRETO ARMADO:

Considere-se uma seção transversal de uma peça de concreto armado como ilustrado na figura (4.3), a deformação numa fibra **O** (centro da seção transformada) e respectiva curvatura da seção sofrerão mudanças devidas à retração e à fluência. GHALI & FAVRE (1986) fornecem as seguintes expressões para a avaliação dessas mudanças :

$$\Delta \epsilon_o = \eta \left\{ \varphi(t, t_0) \left[\epsilon_o(t_0) + \frac{1}{r}(t_0) y_c \right] + \epsilon_{cs}(t, t_0) \right\} \quad (4.14)$$

$$\Delta \frac{1}{r} = k \left[\varphi(t, t_0) \left(\frac{1}{r}(t_0) + \epsilon_o(t_0) \frac{y_c}{r_c^2} \right) + \epsilon_{cs}(t, t_0) \frac{y_c}{r_c^2} \right] \quad (4.15)$$

onde $\epsilon_o(t_0)$ é a deformação instantânea no ponto **O**; y_c é a distância entre os centros geométricos da seção de concreto bruto e da seção transformada; h é a relação entre a área da seção bruta de concreto e a área da seção transformada e k tem o mesmo significado em relação ao momento de inércia, com I_c e \bar{I} respectivamente os momentos de inércia da área bruta de concreto e da área transformada em relação ao ponto **O**. Assim :

$$\eta = \frac{A_c}{A} \quad (4.16)$$

$$k = \frac{I_c}{I} \quad (4.17)$$

e

$$r^2 = \frac{I_c}{A_c} \quad (4.18)$$

Os termos **h** e **k** (equações (4.16) e (4.17)) são empregados por GHALI & FAVRE visando considerar o efeito da armadura na diminuição dos acréscimos de deformação e curvatura devidos à deformação lenta e à retração. Para altas taxas de armadura, como pode ser observado nas expressões (4.17) e (4.18) tais variações tenderiam a zero, ao passo que para seções pouco armadas tenderiam à fluência e retração puras.

A figura (4.3) tem por objetivo ilustrar as variáveis empregadas no equacionamento.

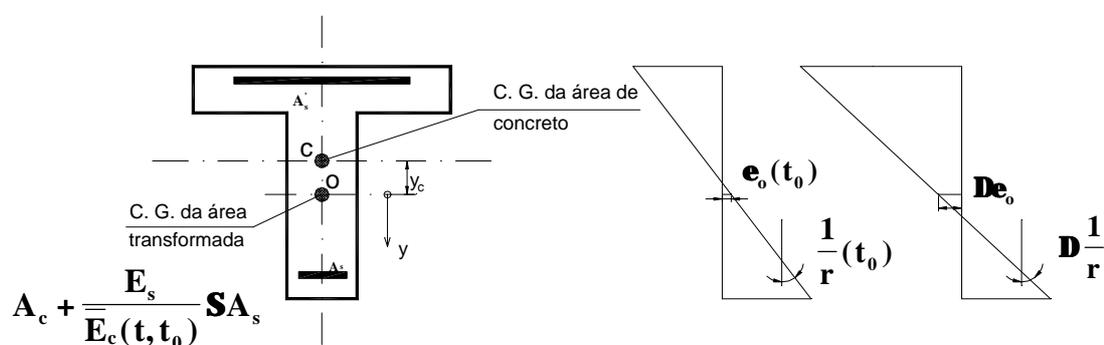


Figura 4.3 – Efeitos da fluência e retração numa seção não fissurada de concreto armado.

EFEITOS DA FLUÊNCIA E RETRAÇÃO PARA SEÇÕES FISSURADAS DE CONCRETO ARMADO:

Numa seção fissurada de concreto armado (vide figura 4.4), somente parte da área de concreto estará sujeita a sofrer retração e fluência; uma consequência disto é o deslocamento da linha neutra em direção à fibra mais tracionada da seção, aumentando a área de concreto comprimido, que alteraria o equacionamento do equilíbrio em termos de esforços normal e fletor. Desprezar esse fato não constitui um erro grande, além do mais quando se comparar com os demais erros embutidos no processo.

Assumindo-se essa simplificação, os efeitos da fluência e retração para uma seção transversal de concreto armado no estágio 2 são tratados por GHALI & FAVRE de maneira semelhante ao descrito para as seções não-fissuradas. Assim as equações (4.14) e (4.15) permanecem válidas. O significado de cada um de seus termos é ilustrado pela figura (4.4).

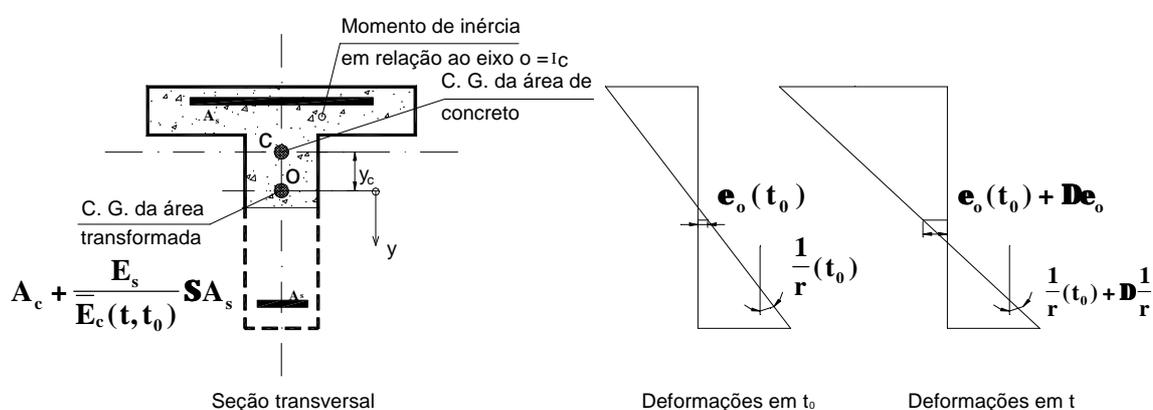


Figura 4.4 – Efeitos da fluência e retração numa seção fissurada de concreto armado.

EFEITOS DA RETRAÇÃO E DA FLUÊNCIA PARA UMA CONFIGURAÇÃO MÉDIA:

A curvatura média num instante de tempo genérico “t” será obtida efetuando-se a interpolação entre aquelas determinadas para os estádios 1 e 2, conforme já mencionado neste capítulo. Assim :

$$\frac{1}{r_m}(t) = (1 - \zeta) \frac{1}{r_1}(t) + \zeta \frac{1}{r_2}(t) \quad (4.19)$$

$$\zeta = 1 - \beta_1 \beta_2(t) \left(\frac{M_r}{M} \right)^2 \quad (4.20)$$

onde M_r é calculado para o instante inicial do carregamento e $\beta_2(t)$ é igual a 0,5.

4.3-MODELO DE DEBERNARDI – FLEXÃO SIMPLES

4.3.1-INTRODUÇÃO

O método de GHALI & FAVRE (1986), estudado na seção anterior, tem por objetivo apresentar expressões simplificadas para o cálculo de deslocamentos e esforços em elementos de concreto armado, quer seja este fissurado ou não. Esse modelo é bastante atrativo para o uso na prática, uma vez que seu equacionamento é relativamente simples.

DEBERNARDI (1983) procura fazer uma análise bastante rigorosa para o cálculo da curvatura média. É considerado em seu modelo o efeito simultâneo da *fissuração, fluência, retração, da fluência devido à aderência, da colaboração do concreto entre fissuras e é descontado o espaço ocupado pela armadura comprimida*. Dessa forma o método de Debernardi torna-se bastante complexo, sendo o de maior rigor entre os diversos existentes atualmente – no campo das relações momento x curvatura.

A diferença básica em relação aos outros métodos está no fato de não ser empregada uma interpolação entre os valores obtidos no estágio 1 e 2 para o cálculo da curvatura. DEBERNARDI apenas utiliza interpolação no cálculo da deformação média da armadura tracionada. Ainda, seu processo é formulado para uma seção de forma qualquer.

Neste modelo é analisado primeiramente o estado de tensões e deformações para um instante " t_0 ". Para a consideração dos efeitos reológicos (retração e fluência) no instante genérico " t ", Debernardi utiliza o método AAEM (*Age Adjusted Effective Modulus Method*), admitindo que esse procedimento seja válido independentemente da variação da posição da linha neutra com o tempo.

4.3.2-HIPÓTESES BÁSICAS

Entre as hipóteses admitidas está a manutenção das seções planas após a deformação para uma configuração média, onde são escritas as equações de equilíbrio para a obtenção das tensões e deformações médias. Só é empregada a interpolação para o cálculo da *deformação média da armadura tracionada* - hipótese do C.E.B. Vale lembrar que para outros métodos conhecidos na literatura a curvatura é obtida por meio de interpolação entre as curvaturas nos estádios 1 e 2 , esta hipótese não é utilizada por Debernardi.

Os valores de tensões, deformações e curvaturas serão obtidos diretamente, escrevendo-se as equações de equilíbrio na configuração média entre os instantes “t” e “t₀” . Por isso é admitida a extensão da hipótese das seções planas permanecerem planas à configuração média.

4.3.3-EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

CONCRETO:

As tensões no concreto não são constantes ao longo do tempo e, portanto, não há fluência pura. A deformação total de uma fibra comprimida de concreto, tomando em particular a que sofre maior encurtamento, é obtida a partir da superposição de efeitos, a partir de :

$$\varepsilon_{c(t,t_0)} = \sigma_{c(t_0)} \cdot \phi_{(t,t_0)} + \int_{t_0}^t \phi_{(t,\tau)} \cdot d\sigma_{c(\tau)} + \varepsilon_{cs(t,t_0)} \quad (4.21)$$

Apresenta-se, a seguir, a expressão (4.22) que é a solução da equação integral (4.21) e pode ser obtida a partir do emprego do método AAEM (*Age Adjusted Effective Modulus Method*). Maiores detalhes podem ser encontrados em Debernardi (1983) e Machado (1989).

$$\varepsilon_{c(t)} = \varepsilon_{c(t_0)} + \frac{\sigma_{c(t_0)}}{E_{c28}} \cdot \varphi_{28(t,t_0)} + [\sigma_{c(t)} - \sigma_{c(t_0)}] \cdot \left[\frac{1}{E_{c(t_0)}} + \chi_{(t,t_0)} \cdot \frac{\varphi_{28(t,t_0)}}{E_{c28}} \right] + \varepsilon_{cs(t,t_0)} \quad \dots(4.22)$$

ARMADURA:

A deformação média \mathbf{e}_{sm} da armadura tracionada \mathbf{A}_s é obtida efetuando-se uma apropriada interpolação entre os estádios 1 e 2, tal que :

$$\varepsilon_{sm} = \frac{\sigma_{s2}}{E_s} - \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \left(\frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \varepsilon_{s1r} \right) \cdot \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2}} \quad (4.23)$$

onde:

\mathbf{s}_{s1} - tensão na armadura no instante anterior à deformação;

\mathbf{e}_{s1r} - deformação da armadura imediatamente antes da fissuração, devido ao momento ou esforço normal de fissuração;

\mathbf{s}_{s2} - tensão atuante na armadura na seção de fissura, após a fissuração - estágio 2;

\mathbf{s}_{sr} - tensão atuante na armadura devido ao momento de fissuração;

\mathbf{e}_{s2} - deformação da armadura no estágio 2;

\mathbf{e}_{s1} - deformação da armadura no estágio 1..

Os valores de \mathbf{b}_1 e \mathbf{b}_2 são os mesmos anteriormente definidos.

Deve ser lembrado que, conhecendo-se o valor da deformação no centro de gravidade da armadura \mathbf{e}_{sm} , o valor da tensão na armadura não pode mais ser tomado pelo produto do seu módulo de elasticidade pela deformação pois o diagrama, para valores médios, não é mais linear. Portanto $\mathbf{s}_{sm} \neq \mathbf{e}_{sm} E_s$. Como a equação $\mathbf{s}_{sm} = \mathbf{f}(\mathbf{e}_{sm})$ não é diretamente explicitada o valor da tensão \mathbf{s}_{sm} será obtido por meio de tentativas a partir das equações de equilíbrio.

4.3.4-TENSÕES E DEFORMAÇÕES: SEÇÃO NÃO FISSURADA DE CONCRETO ARMADO

Considere-se a seção de forma qualquer mostrada pela figura (4.5), com armadura superior e inferior solicitada à flexão simples por um momento externo M de intensidade não suficiente para provocar a ruptura da sua fibra mais tracionada. Como a seção transversal é suposta não fissurada, ou seja $\bar{\sigma}_c < f_{ct}$, todas as hipóteses definidas para o cálculo clássico no estágio 1 continuam válidas.

As tensões e deformações serão calculadas para os instantes inicial e final do intervalo de tempo, onde serão escritas as equações de equilíbrio em termos de esforço de compressão, que nesse caso é nulo, e momento fletor. A figura (4.5) é bastante genérica e admite que as linhas neutra de tensão e deformação possam não ser coincidentes. Os diagramas de deformações e tensões são lineares, conforme foi estudado no cálculo de seções no estágio 1, dessa forma é possível escrever as seguintes relações de compatibilidade de tensão tomadas em módulo :

$$\frac{\sigma_c(t)}{X_\sigma} = \frac{\sigma'_s(t)}{\alpha_s(X_\sigma - d')} = \frac{\sigma(t)}{y'} = \frac{\sigma_{G1}(t)}{y'_0} = \frac{\sigma_s(t)}{\alpha_s(d - X_\sigma)} = \frac{\bar{\sigma}_c(t)}{h - X_\sigma} \quad (4.24)$$

O ponto de referência $G1$, da figura (4.5), corresponde ao centro de gravidade da seção homogeneizada no estágio 1, podendo ser obtido com a imposição do momento estático igual a zero. Para o caso da flexão simples, esse ponto coincide com a profundidade da linha neutra de deformações e tensões, na ausência de deformações impostas.

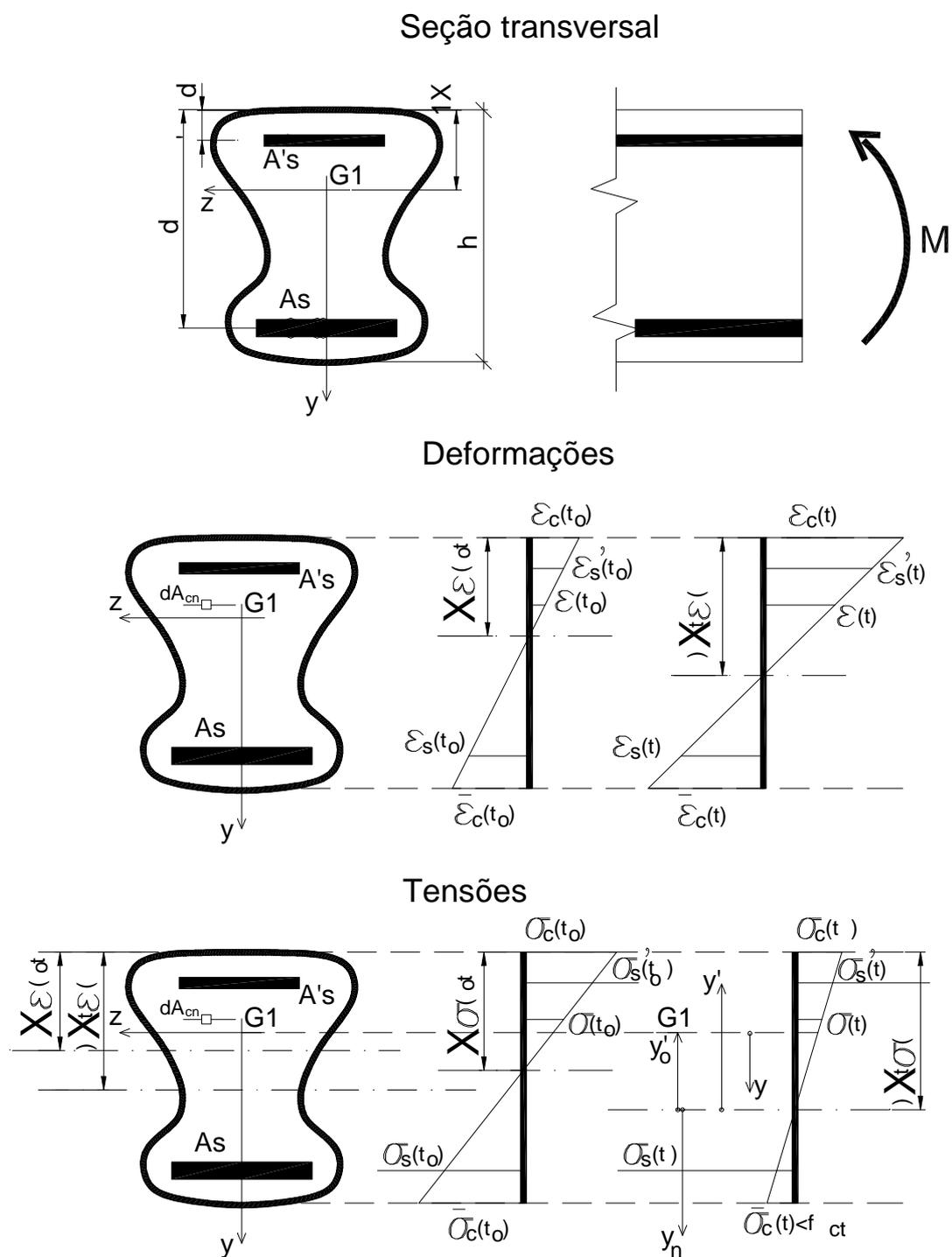


Figura 4.5 : Tensões e deformações nos tempos “ t_0 ” e “ t ” para uma seção não-fissurada de concreto armado.

TENSÕES E DEFORMAÇÕES INSTANTÂNEAS:

Os diversos elementos da seção devem ser determinados, primeiramente, para o instante de aplicação do carregamento. Dessa forma, as deformações e tensões para o tempo “ t_0 ” deverão ser obtidas aplicando-se as expressões para o estágio 1 na flexão simples. Será empregado o módulo de elasticidade para o instante inicial, $E_c(t_0)$.

Após a configuração inicial da seção de concreto armado estar completamente definida, procede-se ao cálculo no instante de tempo igual a “ t ”, onde são escritas equações de equilíbrio em termos de momento fletor e esforço normal, sendo que estas dependem do conhecimento das tensões iniciais ao longo da peça bem como das funções de fluência e retração.

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO NO INSTANTE “ t ”:

Serão escritas para o tempo “ t ” duas equações de equilíbrio, (4.26) e (4.27), sendo que a primeira leva em conta o esforço normal e a última considera o momento fletor atuante na seção. A área A_{cn} empregada no equacionamento se refere à área líquida de concreto, descontando-se os espaços ocupados pela armadura, ou seja :

$$A_{cn} = A_c - \sum_{i=1}^n A_{si} \quad (4.25)$$

onde A_c é a área da seção transversal bruta; A_{si} é área de cada barra de aço e n é o número total destas. As equações de equilíbrio são as seguintes:

a) equilíbrio de esforço normal:

$$\int_{A_{cn}} \sigma(t) dA_{cn} + A_s \sigma_s(t) + A'_s \sigma'_s(t) = 0 \quad (4.26)$$

b) equilíbrio de momento fletor (em relação ao ponto **G1**):

$$\int_{A_{cn}} \sigma(t) y dA_{cn} + A_s \sigma_s(t) (d - X_{G1}) + A'_s \sigma'_s(t) (d' - X_{G1}) = M \quad (4.27)$$

Da figura (4.5) é possível escrever :

$$y' = y'_0 - y \quad (4.28)$$

$$e: \quad y'_0 = X_{\sigma}(t) - X_{G1} \quad (4.29)$$

Empregando-se as relações de compatibilidade de tensões expressas em (4.24) em conjunto com as expressões acima, pode-se modificar as equações de equilíbrio transformando-as nas seguintes :

$$\int_{A_{cn}} \frac{\sigma(t)}{y'} (y'_0 - y) dA_{cn} + A_s \sigma_s(t) + A'_s \sigma'_s(t) = 0 \quad (4.30)$$

e:

$$\int_{A_{cn}} \frac{\sigma(t)}{y'} (y'_0 - y) y dA_{cn} + A_s \sigma_s(t) (d - X_{G1}) + A'_s \sigma'_s(t) (d' - X_{G1}) = M \quad \dots(4.31)$$

A posição da linha neutra de tensões pode ser expressa em função das tensões das fibras mais extremas da seção, assim :

$$X_{\sigma}(t) = \frac{\sigma_c(t)}{\sigma_c(t) - \bar{\sigma}_c(t)} h \quad (4.32)$$

As deformações das armadura inferior e superior podem ser escritas em função das deformações do concreto, como segue :

$$\varepsilon_s(t) = \varepsilon_c(t) - \frac{\varepsilon_c(t) - \bar{\varepsilon}_c(t)}{h} d \quad (4.33)$$

$$e: \quad \varepsilon'_s(t) = \varepsilon_c(t) - \frac{\varepsilon_c(t) - \bar{\varepsilon}_c(t)}{h} d' \quad (4.34)$$

Os momentos estático e de inércia da seção líquida de concreto são determinados, respectivamente, pelas expressões (4.35) e (4.36). Deve-se lembrar que nestes cálculos, a área ocupada pelas armaduras deve ser descontada.

$$S_{cn} = \int_{A_{cn}} y dA_{cn} \quad (4.35)$$

$$I_{cn} = \int_{A_{cn}} y^2 dA_{cn} \quad (4.36)$$

As equações de equilíbrio são rescritas na seguinte forma :

a) esforço normal:

$$\left[\sigma_c(t) - \frac{\sigma_c(t) - \bar{\sigma}_c(t)}{h} X_{G1} \right] A_{cn} - \frac{\sigma_c(t) - \bar{\sigma}_c(t)}{h} S_{cn} +$$

$$+ A_s E_s \left[\varepsilon_c(t) - \frac{\varepsilon_c(t) - \bar{\varepsilon}_c(t)}{h} d \right] + A'_s E_s \left[\varepsilon_c(t) - \frac{\varepsilon_c(t) - \bar{\varepsilon}_c(t)}{h} d' \right] = 0 \quad (4.37)$$

b) momentos em relação à **G1** :

$$\left[\sigma_c(t) - \frac{\sigma_c(t) - \bar{\sigma}_c(t)}{h} X_{G1} \right] S_{cn} - \frac{\sigma_c(t) - \bar{\sigma}_c(t)}{h} I_{cn} +$$

$$+ A_s E_s \left[\varepsilon_c(t) - \frac{\varepsilon_c(t) - \bar{\varepsilon}_c(t)}{h} d \right] (d - X_{G1}) +$$

$$+ A'_s E_s \left[\varepsilon_c(t) - \frac{\varepsilon_c(t) - \bar{\varepsilon}_c(t)}{h} d' \right] (d' - X_{G1}) = M$$

...(4.38)

As deformações no concreto, para o instante de tempo “t”, serão determinadas a partir das deformações iniciais, aplicando-se o método AAEM para a resolução da equação integral da deformação ao longo do tempo. Desse modo:

a) para a fibra extrema comprimida :

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(t) = & \varepsilon_c(t_0) + \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(28)} \varphi_{28}(t, t_0) + \\ & + [\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)] \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \chi(t, t_0) \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_c(28)} \right] + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \end{aligned} \quad (4.39)$$

b) para a fibra extrema tracionada :

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_c(t) = & \bar{\varepsilon}_c(t_0) + \frac{\bar{\sigma}_c(t_0)}{E_c(28)} \varphi_{28}(t, t_0) + \\ & + \left[\bar{\sigma}_c(t) - \bar{\sigma}_c(t_0) \right] \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \chi(t, t_0) \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_c(28)} \right] + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Define-se as variáveis f , $q(t_0)$ e $\bar{q}(t_0)$ com o fim de simplificar a escrita de modo que as expressões acima possam ser modificadas para :

$$\varepsilon_c(t) = q(t_0) + \sigma_c(t) f \quad (4.41)$$

e:
$$\bar{\varepsilon}_c(t) = \bar{q}(t_0) + \bar{\sigma}_c(t) f \quad (4.42)$$

onde :

$$f = \frac{1}{E_c(t_0)} + \chi(t, t_0) \frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_c(28)} \quad (4.43)$$

$$q(t_0) = \varepsilon_c(t_0) + \sigma_c(t_0) \left[\frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_c(28)} - f \right] + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \quad (4.44)$$

$$\bar{q}(t_0) = \bar{\varepsilon}_c(t_0) + \bar{\sigma}_c(t_0) \left[\frac{\varphi_{28}(t, t_0)}{E_c(28)} - f \right] + \varepsilon_{cs}(t, t_0) \quad (4.45)$$

Empregando-se a notação definida por MACHADO (1989) as equações de equilíbrio passam a ser expressas de maneira simplificada, gerando um sistema de duas equações a duas incógnitas (eq. (4.46) e (4.47)) onde os termos não conhecidos são os valores das tensões nas fibras extremas da seção para o tempo "t". Desse modo :

$$\sigma_c(t)E_1 + \bar{\sigma}_c(t)E_2 = N_1 \quad (4.46)$$

$$\sigma_c(t)F_1 + \bar{\sigma}_c(t)F_2 = N_2 \quad (4.47)$$

onde :

$$E_1 = (h - X_{G1})A_{cn} - S_{cn} + E_s f [A'_s (h - d') + A_s (h - d)] \quad (4.48)$$

$$E_2 = X_{G1}A_{cn} + S_{cn} + f E_s (A'_s d' + A_s d) \quad (4.49)$$

$$F_1 = (h - X_{G1})S_{cn} - I_{cn} + E_s f [A'_s (h - d')(d' - X_{G1}) + A_s (h - d)(d - X_{G1})] \quad \dots(4.50)$$

$$F_2 = X_{G1}S_{cn} + I_{cn} + f E_s [A'_s d'(d' - X_{G1}) + A_s d(d - X_{G1})] \quad (4.51)$$

$$N_1 = -A'_s E_s [q(t_0)(h - d') + \bar{q}(t_0)d'] - A_s E_s [q(t_0)(h - d) + \bar{q}(t_0)d] \quad \dots(4.52)$$

$$N_2 = M - A'_s E_s (d' - X_{G1}) [q(t_0)(h - d') + \bar{q}(t_0)d'] - A_s E_s (d - X_{G1}) [q(t_0)(h - d) + \bar{q}(t_0)d] \quad (4.53)$$

A partir da solução do sistema acima obtém-se as tensões nas fibras externas da seção transversal, já as tensões nas armaduras são obtidas por meio das relações de compatibilidade. Dessa forma :

$$\sigma_c(t) = \frac{N_1 F_2 - N_2 E_2}{E_1 F_2 - E_2 F_1} \quad (4.54)$$

$$\bar{\sigma}_c(t) = \frac{N_2 E_1 - N_1 F_1}{E_1 F_2 - E_2 F_1} \quad (4.55)$$

$$\sigma_s(t) = E_s \left[\varepsilon_s(t) - \frac{\varepsilon_c(t) - \bar{\varepsilon}_c(t)}{h} d \right] \quad (4.56)$$

$$\sigma'_s(t) = E_s \left[\varepsilon_s(t) - \frac{\varepsilon_c(t) - \bar{\varepsilon}_c(t)}{h} d' \right] \quad (4.57)$$

As deformações no concreto, para o instante de tempo genérico “t”, ficam determinadas a partir da aplicação das expressões (4.39) e (4.40), Para a determinação das deformações nas armaduras de compressão e de tração emprega-se as relações de compatibilidade expressas por (4.34) e (4.33), respectivamente. Em hipótese alguma, para o instante genérico de tempo, pode-se supor a proporcionalidade entre tensões e deformações, ou seja $\sigma \neq E\varepsilon$.

4.3.5-TENSÕES E DEFORMAÇÕES: SEÇÃO FISSURADA DE CONCRETO ARMADO

INTRODUÇÃO:

As tensões e deformações para uma seção fissurada de concreto armado são determinadas a partir do equacionamento do equilíbrio de esforços para os instantes inicial e final de tempo para uma configuração média deformada. Os esforços solicitantes – momento fletor e esforço normal – são admitidos constantes. A fluência e a retração são consideradas através da equação (4.22) aplicada à fibras adequadamente escolhidas. Os esforços solicitantes – momento fletor e esforço normal – são admitidos constantes.

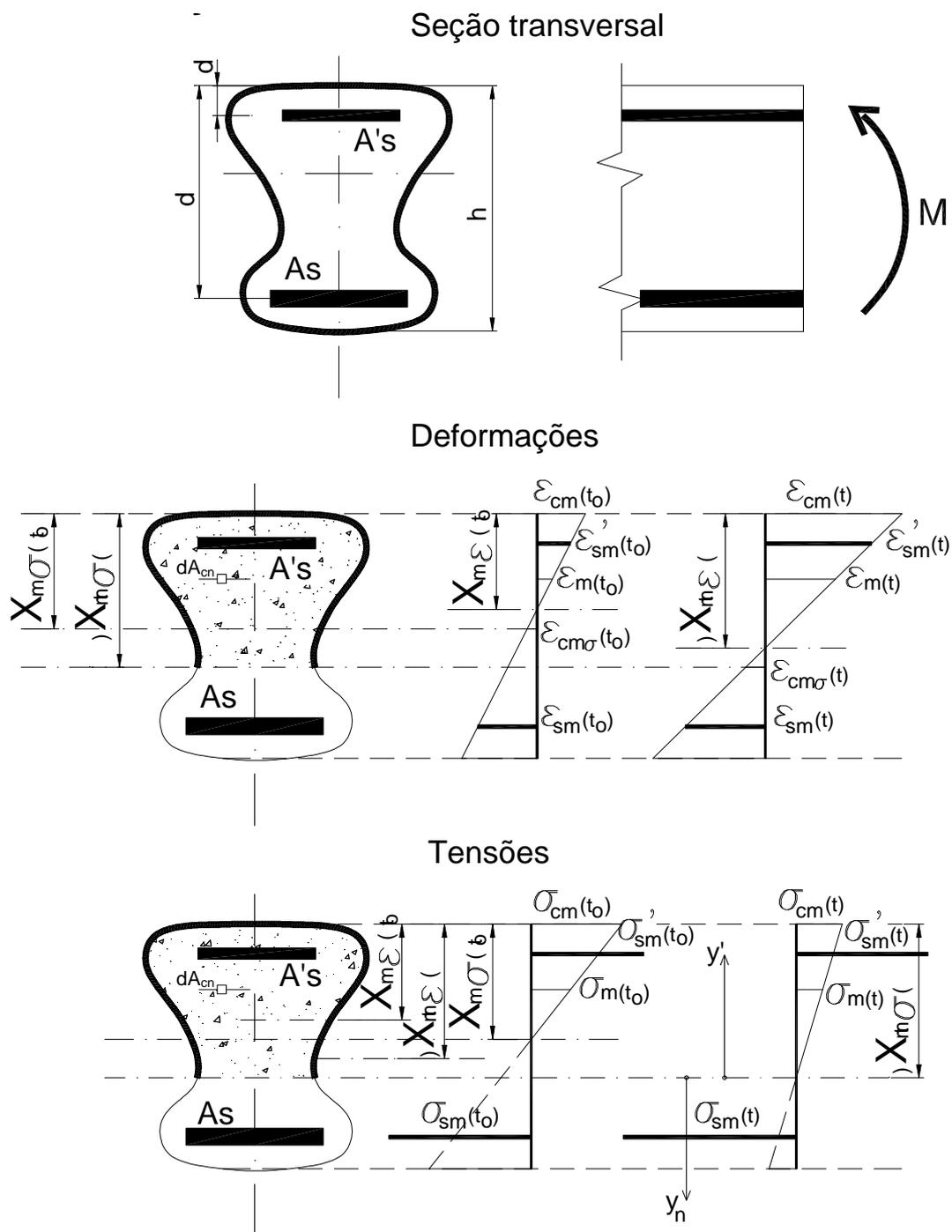


Figura 4.6 : Tensões e deformações para os instantes de tempos “ t_0 ” e “ t ” para uma seção fissurada de concreto armado.

O deslocamento para baixo da linha neutra ao longo do tempo e o conseqüente aumento na área de concreto comprimido são considerados no equacionamento de DEBERNARDI, ao contrário do método de GHALI & FAVRE. É necessário que diversas configurações da seção sejam verificadas. O equacionamento é feito supondo-se uma seção de forma qualquer com armadura dupla.

A figura (4.6) ilustra o comportamento ao longo do tempo das seções fissuradas de concreto – configuração média deformada. Também são definidas as principais variáveis envolvidas no equacionamento desse item. A figura (4.7) mostra o efeito da contribuição do concreto intacto entre fissuras – *tension stiffening*.

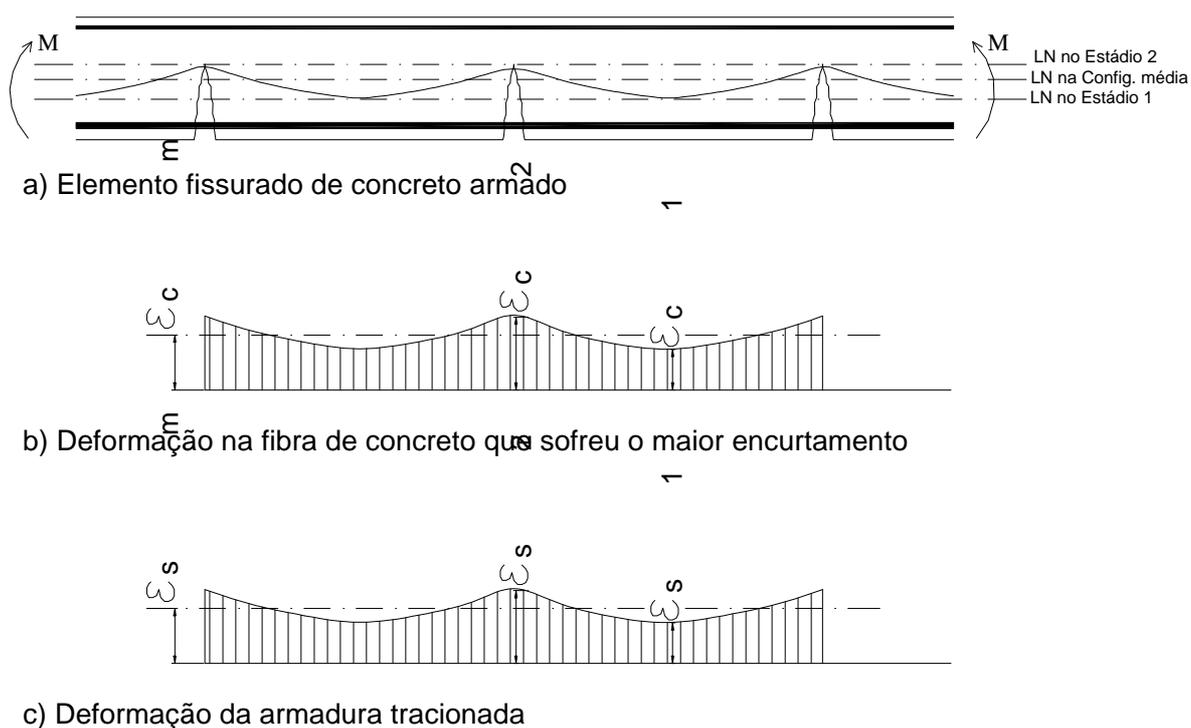


Figura 4.7 : Contribuição do concreto intacto entre fissuras – “tension stiffening” – na flexão simples.

CONFIGURAÇÕES A SEREM VERIFICADAS:

A obtenção das tensões e deformações na configuração média da seção para os instantes inicial “ t_0 ” e final “ t ” exige que essas grandezas sejam previamente determinadas considerando-se as hipótese do estágio 2 para ambos os instantes de análise. A deformação média da armadura de tração, e_{sm} , depende dos valores de $s_{sr}(t_0)$, $s_{sr}(t)$, $s_{s2}(t_0)$ e $s_{s2}(t)$. Para atender a todas as etapas de cálculo serão consideradas as seguintes configurações:

- a) configuração da seção no estágio 2 para o instante t_0 ;
- b) configuração da seção média no instante inicial t_0 ;
- c) configuração da seção no estágio 2 no instante final (ou desejado) t ;
- d) configuração da seção média no instante final (ou desejado) t .

CONFIGURAÇÕES PARA O INSTANTE INICIAL ($t = t_0$):

Calcula-se, de início, para uma dado par de esforços M e N referidos a um ponto O qualquer com os módulos de elasticidade reais do aço e do concreto E_s e E_c , respectivamente, os elementos da seção (inércia, deformações e tensões), no instante $t = t_0$ (é suposto não haver nenhuma deformação imposta no instante inicial) para os estádios de solicitação 1 e 2.

Conhecendo-se o valor de $e_{sm}(t_0)$ a partir de $s_{sr}(t_0)$, da tensão $s_{s2}(t_0)$ e de $e_{s1r}(t_0)$ substituídos na equação (4.23), as tensões e deformações na configuração média poderão ser obtidas de forma iterativa ou direta (analiticamente), conforme será mostrado a seguir.

Cálculo Iterativo.

- 1) É atribuído, para considerar o concreto entre fissuras, uma rigidez fictícia à zona tracionada, adotando-se de início um módulo $E_s^* > E_s$ tal que :

$$a^* = E_s^* / E_c(t_0)$$
 Para a contribuição da armadura comprimida A_s' e da

área de concreto comprimida A_{cc} são utilizados os módulos reais do aço e do concreto. Um primeiro valor para E_s^* pode ser adotado como:

$$E_{s(t_0)}^* = \frac{\sigma_{s2(t_0)}}{\epsilon_{sm(t_0)}} \quad (4.58)$$

- 2) Com os esforços M e N é efetuado o cálculo no estágio 2 , determinando-se s_s^* e a deformação e_s^* .
- 3) Compara-se e_s^* com o valor conhecido de $e_{sm}(t_0)$. Se a diferença entre esses valores estiver dentro de uma tolerância pré estabelecida, considera-se que houve convergência. A partir da última iteração obtém-se os valores para a configuração média no instante t_0 : a posição da linha neutra $x_{ms(t_0)} = x_{me(t_0)}$ e os valores das tensões e deformações $s_{cm(t_0)}$, $s_{sm(t_0)} = s_s^*$ e $e_{sm(t_0)}$.

A curvatura média no instante t_0 é dada por :

$$\frac{1}{r_m(t_0)} = - \frac{\epsilon_{sm(t_0)}}{x_{me(t_0)} - d} \quad (4.59)$$

e a resultante de tração na armadura para a configuração média será:

$$R_{sm(t_0)} = \sigma_{sm(t_0)} \cdot A_s \quad (4.60)$$

Cálculo Analítico

Para a obtenção da solução analítica é escrita a equação de equilíbrio de momentos fletores em relação ao centro de gravidade da armadura tracionada A_s , que no caso independe do módulo de elasticidade fictício E_s^* e que simula o acréscimo de rigidez devido a contribuição do concreto entre fissuras.

Seja $A_{ccm}(t_0)$ a área de concreto comprimida na configuração média para o instante t_0 , a equação de equilíbrio de momentos pode ser escrita por:

$$\int_{A_{cm(t_0)}} \sigma_{m(t_0)} \cdot [d - x_{m\sigma(t_0)} - y_n] dA_{ccm(t_0)} - \frac{\sigma'_{sm(t_0)}}{\alpha_s} \cdot A'_s \cdot (d - d') + \sigma'_{sm(t_0)} \cdot A'_s \cdot (d - d') + Ne_s = 0 \quad \dots(4.61)$$

onde y_n é a distância em relação à linha neutra.

Da proporcionalidade entre tensões e deformações obtém-se :

$$\sigma'_{sm(t_0)} = \alpha_s \cdot \sigma_{cm(t_0)} \cdot \frac{x_{m\sigma(t_0)} - d'}{x_{m\sigma(t_0)}} \quad (4.62)$$

$$\sigma_{cm(t_0)} = E_{c(t_0)} \cdot \varepsilon_{sm(t_0)} \cdot \frac{x_{m\sigma(t_0)}}{x_{m\sigma(t_0)} - d} \quad (4.63)$$

Substituindo-se a tensão média $\sigma_{cm}(t_0)$ da expressão (4.62) pela expressão (4.63) resulta:

$$\sigma'_{sm(t_0)} = \alpha_s \cdot E_{c(t_0)} \cdot \varepsilon_{sm(t_0)} \cdot \frac{x_{m\sigma(t_0)} - d'}{x_{m\sigma(t_0)}} \quad (4.64)$$

Da figura (4.6), pode-se escrever :

$$\frac{\sigma_{m(t_0)}}{y_n} = \frac{\sigma_{cm(t_0)}}{-x_{m\sigma(t_0)}} \quad (4.65)$$

e:

$$\sigma_{m(t_0)} = -\sigma_{cm(t_0)} \cdot \frac{y_n}{x_{m\sigma(t_0)}} \quad (4.66)$$

A área elementar da zona comprimida é :

$$dA_{cc(t_0)} = b_{(y_n)} \cdot dy_n \quad (4.67)$$

Usando-se as expressões anteriores e fazendo-se transformações na equação de equilíbrio (4.61), obtém-se :

$$\left\{ \begin{aligned} & \left[d - x_{m\sigma(t_0)} \right] \cdot \int_{-x_{m\sigma(t_0)}}^0 \frac{\sigma_{m(t_0)}}{y_n} \cdot y_n \cdot b_{(y_n)} \cdot dy_n + \\ & - \int_{-x_{m\sigma(t_0)}}^0 \frac{\sigma_{m(t_0)}}{y_n} \cdot y_n \cdot b_{(y_n)} \cdot y_n \cdot dy_n \end{aligned} \right\} + \quad (4.68)$$

$$+ A_s' \cdot (\alpha_s - 1) \cdot E_{c(t_0)} \epsilon_{sm(t_0)} \cdot \frac{x_{m\sigma(t_0)} - d'}{x_{m\sigma(t_0)} - d} \cdot (d - d') + Ne_s = 0$$

A relação $\frac{\sigma_{m(t_0)}}{y_n}$ é constante no tempo t_0 ; portanto pode ser retirada do integrando e a expressão (4.68) pode ser reescrita por :

$$\begin{aligned} & \left[d - x_{m\sigma(t_0)} \right] \cdot S_{ccm(t_0)} - I_{ccm(t_0)} - (\alpha_s - 1) \cdot A_s' \cdot \left[x_{m\sigma(t_0)} - d' \right] \cdot (d - d') = \\ & = Ne_s \cdot \frac{x_{m\sigma(t_0)} - d}{E_{c(t_0)} \cdot \epsilon_{sm(t_0)}} \end{aligned} \quad \dots(4.69)$$

Onde $S_{ccm(t_0)}$ e $I_{ccm(t_0)}$ são, respectivamente, o momento estático e o momento de inércia da área bruta de concreto comprimido em relação à linha neutra de tensões. Assim:

$$S_{ccm(t_0)} = \int_{-x_{m\sigma(t_0)}}^0 b_{(y_n)} \cdot y_n \cdot dy_n \quad (4.70)$$

$$I_{ccm(t_0)} = \int_{-x_{m\sigma(t_0)}}^0 b_{(y_n)} \cdot y_n^2 \cdot dy_n \quad (4.71)$$

Os momentos estático e de inércia dependem da forma da seção transversal e têm seus valores dados em função da posição da linha neutra de tensões. Sendo $\mathbf{e}_{sm(t_0)}$ conhecido, a equação (4.69) tem como incógnita $\mathbf{x}_{ms}(t_0)$, que é a posição da referida linha neutra.

$I_{ccm}(t_0)$ é pelo menos uma função cúbica de $\mathbf{x}_{ms}(t_0)$, para seção retangular, e a equação (4.69) é geralmente de grau superior a dois. Para equações de ordem elevada podem-se obter as soluções através de métodos iterativos ou analiticamente.

INSTANTE GENÉRICO (tempo = t):

Para um instante genérico de tempo "t", as equações que regem o equilíbrio serão, de início, escritas para uma configuração média gerando um sistema de equações lineares. A deformação média \mathbf{e}_{sm} deve ser conhecida para a resolução do sistema; seu valor será calculado mais adiante para a configuração fissurada no tempo genérico t .

CONFIGURAÇÃO MÉDIA - instante t:

As equações que regem o equilíbrio, tomando a configuração média num instante t , podem ser escritas por :

a) equilíbrio de esforço normal:

$$\int_{A_{ccmn}(t)} \sigma_{m(t)} dA_{ccmn}(t) + \sigma'_{sm(t)} \cdot A'_s - R_{sm(t)} + N = 0 \quad (4.72)$$

b) equilíbrio de momentos em relação ao centro de gravidade da armadura de tração \mathbf{A}_s :

$$\int_{A_{ccmn}(t)} \sigma_{m(t)} \cdot \left[y - \left(d - x_{m\sigma(t)} \right) \right] \cdot dA_{ccmn}(t) + \sigma'_{sm(t)} \cdot A'_s \cdot (d - d') - Ne_s = 0$$

...(4.73)

onde $A_{ccmn}(t)$ é a área da seção líquida de concreto comprimido para a configuração média, sendo sua diferencial expressa por :

$$dA_{ccmn(t)} = b_{(y_n)} \cdot dy_n \quad (4.74)$$

A partir da linearidade do diagrama de tensões pode-se escrever:

$$\frac{\sigma_{m(t)}}{y_n} = \frac{\sigma_{cm(t)}}{-x_{m\sigma(t)}} \quad (4.75)$$

$$\sigma_{m(t)} = -\sigma_{cm(t)} \cdot \frac{y_n}{x_{m\sigma(t)}} \quad (4.76)$$

onde $\sigma_{m(t)}$ é a tensão no concreto em uma fibra genérica.

Os momentos estático e de inércia da seção líquida de concreto solicitado à comprimido são, respectivamente:

$$S_{ccm(t)} = \int_{-x_{m\sigma(t)}}^0 b_{(y_n)} \cdot y_n \cdot dy_n - A'_s \cdot [d' - x_{m\sigma(t)}] \quad (4.77)$$

$$I_{ccm(t)} = \int_{-x_{m\sigma(t)}}^0 b_{(y_n)} \cdot y_n^2 \cdot dy_n - A'_s \cdot [d' - x_{m\sigma(t)}]^2 \quad (4.78)$$

As equações de equilíbrio podem ser modificadas de modo que o termo $\sigma_m(t)/y_n$ fique em evidência. Empregando-se as expressões (4.77) e (4.78) obtém-se:

$$-\frac{\sigma_{cm(t)}}{x_{m\sigma(t)}} \cdot S_{ccm(t)} + A'_s \cdot \sigma'_{sm(t)} + R_{sm(t)} = N \quad (4.79)$$

$$-\frac{\sigma_{cm(t)}}{x_{m\sigma(t)}} \cdot \left\{ I_{ccm(t)} - [d - x_{m\sigma(t)}] \cdot S_{ccm(t)} \right\} - A'_s \cdot \sigma'_{sm(t)} \cdot (d - d') = Ne_s$$

...(4.80)

Para que o diagrama de deformações da seção seja completamente caracterizado, devido a hipótese da manutenção das seções planas, deve-se definir duas deformações correspondentes a duas fibras distintas ou a deformação de uma fibra mais a curvatura da seção. Neste trabalho optou-se por determinar deformações nas seguintes fibras: a correspondente ao encurtamento máximo do concreto e aquela que passa pela linha neutra de tensões no tempo t_0 .

Aplicando-se o AAEM através da equação (4.22) obtém-se :

a) na fibra superior :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{cm(t)} = & \varepsilon_{cm(t_0)} + \frac{\sigma_{cm(t_0)}}{E_{c28}} \cdot \Phi_{28(t,t_0)} + \\ & + \left[\sigma_{cm(t)} - \sigma_{cm(t_0)} \right] \cdot \left[\frac{1}{E_{c(t_0)}} + \chi_{(t,t_0)} \cdot \frac{\Phi_{28(t,t_0)}}{E_{c28}} \right] + \varepsilon_{cs(t,t_0)} \end{aligned} \quad (4.81)$$

b) na fibra da LN das tensões para $t = t_0$, onde a tensão $\sigma_{cms(t_0)} = 0$:

$$\varepsilon_{cm\sigma(t)} = \varepsilon_{cm\sigma(t_0)} + \sigma_{cm\sigma(t)} \cdot \left[\frac{1}{E_{c(t_0)}} + \chi_{(t,t_0)} \cdot \frac{\Phi_{28(t,t_0)}}{E_{c28}} \right] + \varepsilon_{cs(t,t_0)} \quad (4.82)$$

As expressões acima são gerais, pois permitem que as linhas neutras de tensão e deformação não sejam coincidentes, nem no instante t_0 , devido a existência de deformações impostas.

As deformações, admitindo-se a hipótese das seções permanecerem planas, podem ser escritas em função da deformação na fibra mais comprimida do concreto $\varepsilon_{cm}(t)$, assim :

$$\varepsilon_{sm(t)} = \frac{x_{m\varepsilon(t)} - d}{x_{m\varepsilon(t)}} \cdot \varepsilon_{cm(t)} \quad (4.83)$$

$$\varepsilon'_{sm(t)} = \frac{x_{m\varepsilon(t)} - d'}{x_{m\varepsilon(t)}} \cdot \varepsilon_{cm(t)} \quad (4.84)$$

$$\varepsilon_{cm\sigma(t)} = \frac{X_{m\sigma(t)} - X_{m\sigma(t_0)}}{X_{m\sigma(t)}} \cdot \varepsilon_{cm(t)} \quad (4.85)$$

Da equação (4.84) resulta :

$$\sigma'_{sm(t)} = E_s \cdot \varepsilon'_{sm(t)} = E_s \cdot \left(1 - \frac{d'}{X_{m\sigma(t)}} \right) \cdot \varepsilon_{cm(t)} \quad (4.86)$$

Para uma determinada seção, pode-se escrever:

$$\sigma_{cm\sigma(t)} = \left(1 - \frac{X_{m\sigma(t_0)}}{X_{m\sigma(t)}} \right) \cdot \sigma_{cm(t)} \quad (4.87)$$

Define-se um parâmetro f , a ser empregado na equação constitutiva do concreto; para simplificar o equacionamento, assim:

$$f = \frac{1}{E_{c(t_0)}} + \chi_{(t,t_0)} \cdot \frac{\Phi_{28(t,t_0)}}{E_{c28}} \quad (4.88)$$

Substituindo-se (4.86) em (4.79) e (4.80); (4.85) e (4.87) em (4.82) obtém-se :

$$-\frac{\sigma_{cm(t)}}{X_{m\sigma(t)}} \cdot S_{ccmn(t)} + E_s \cdot A'_s \cdot \left(1 - \frac{d'}{X_{m\sigma(t)}} \right) \cdot \varepsilon_{cm(t)} + R_{sm(t)} = N \quad (4.89)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{\sigma_{cm(t)}}{X_{m\sigma(t)}} \cdot \left\{ I_{ccmn(t)} - [d - X_{m\sigma(t)}] \cdot S_{ccmn(t)} \right\} + \\ & - A'_s \cdot E_s \cdot \left(1 - \frac{d'}{X_{m\sigma(t)}} \right) \cdot \varepsilon_{cm(t)} \cdot (d - d') = Ne_s \end{aligned} \quad (4.90)$$

$$\varepsilon_{cm(t)} = \varepsilon_{cm(t_0)} + \frac{\sigma_{cm(t_0)}}{E_{c28}} \cdot \Phi_{28(t,t_0)} + \left(\sigma_{cm(t)} - \sigma_{cm(t_0)} \right) \cdot f + \varepsilon_{cs(t,t_0)} \quad (4.91)$$

$$\left(1 - \frac{X_{m\sigma(t_0)}}{X_{m\epsilon(t)}}\right) \cdot \epsilon_{cm(t)} = \epsilon_{cm\sigma(t_0)} + \sigma_{cm(t)} \cdot f \cdot \left(1 - \frac{X_{m\sigma(t_0)}}{X_{m\sigma(t)}}\right) + \epsilon_{cs(t,t_0)} \quad (4.92)$$

Para simplificar as expressões, define-se:

$$g_{1m(t)} = \frac{1}{X_{m\sigma(t)}} \cdot \left\{ I_{ccmn(t)} - [d - X_{m\sigma(t)}] \cdot S_{ccmn(t)} \right\} \quad (4.93)$$

$$g_{2m(t_0)} = \epsilon_{cm(t_0)} + \sigma_{cm(t_0)} \cdot \left[\frac{\Phi_{28(t,t_0)}}{E_{c28}} - f \right] + \epsilon_{cs(t,t_0)} \quad (4.94)$$

Manipulando-se as expressões deduzidas pode-se escrever um sistema de cinco incógnitas e quatro equações (4.95-4.98):

$$-\frac{\sigma_{cm(t)}}{X_{m\sigma(t)}} \cdot S_{ccmn(t)} + E_s \cdot A'_s \cdot \left(1 - \frac{d'}{X_{m\epsilon(t)}}\right) \cdot \epsilon_{cm(t)} + R_{sm(t)} = N \quad (4.95)$$

$$-\sigma_{cm(t)} \cdot g_{1m(t)} - A'_s \cdot E_s \cdot \left(1 - \frac{d'}{X_{m\epsilon(t)}}\right) \cdot \epsilon_{cm(t)} \cdot (d - d') = N e_s \quad (4.96)$$

$$\epsilon_{cm(t)} = g_{2m(t_0)} + f \cdot \sigma_{cm(t)} \quad (4.97)$$

$$\frac{1}{X_{m\epsilon(t)}} = \frac{1}{X_{m\sigma(t_0)}} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{\epsilon_{cm(t)}} \cdot \left[\epsilon_{cm\sigma(t_0)} + \left(1 - \frac{X_{m\sigma(t_0)}}{X_{m\sigma(t)}}\right) \cdot \sigma_{cm(t)} \cdot f + \epsilon_{cs(t,t_0)} \right] \right\} \quad \dots(4.98)$$

Onde as duas primeiras são as equações em termos de equilíbrio; (4.97) e (4.98) são as duas equações de compatibilidade de deformações. Para o caso da flexão simples N é igual a zero e_s por consequência deve assumir um valor tal que o produto $N e_s$ resulte igual a M .

O momento estático, $S_{ccmn}(t)$, e o momento de inércia, $S_{ccmn}(t)$, são dependentes da posição da linha neutra de tensões para um instante de tempo t . As incógnitas do sistema formado pelas equações (4.95) a (4.98) são as seguintes: $x_{ms}(t)$, $x_{me}(t)$, $e_{cm}(t)$, $s_{cm}(t)$ e $R_{sm}(t)$ que será resolvida de maneira iterativa.

Para simplificar o equacionamento será definida a função $g_{3m}(t_0)$:

$$g_{3m}(t_0) = \frac{d'}{X_{m\sigma}(t_0)} \left[g_{2m}(t_0) - \epsilon_{cm\sigma}(t_0) - \epsilon_{cs}(t,t_0) \right] - g_{2m}(t_0) \quad (4.99)$$

Dessa forma, tem-se para a tensão no concreto:

$$\sigma_{cm}(t) = \frac{E_s \cdot A'_s \cdot (d - d') \cdot g_{3m}(t_0) - N \cdot e_s}{E_s \cdot A'_s \cdot (d - d') \cdot f \cdot \left(1 - \frac{d'}{X_{m\sigma}(t)} \right) + g_{1m}(t)} \quad (4.100)$$

A incógnita básica do sistema é a posição da linha neutra de tensões $x_{ms}(t)$; a relação entre $R_{sm}(t)$ e $x_{ms}(t)$ não pode ser explicitada. Disto resulta um sistema de quatro equações com cinco incógnitas, incluindo $R_{sm}(t)$.

A solução pode ser obtida por iterações conforme o roteiro de cálculo que será apresentado a seguir. É necessário uma condição suplementar para tornar possível e determinado o sistema de equações. Para tanto calcula-se a deformação média da armadura de tração, $e_{sm}(t)$, a partir da tensão no aço para a seção fissurada, conforme será visto mais adiante. O valor de $e_{sm}(t)$ será uma condição que deve ser respeitada na resolução do sistema.

Roteiro para Solução do Sistema – Equações (4.95) a (4.98)

- 1) adota-se um valor inicial para $x_{ms}(t)$;
- 2) calculam-se f , $g_{2m}(t_0)$ e $g_{3m}(t_0)$ por meio das expressões (4.88), (4.94) e (4.99), respectivamente;
- 3) calculam-se os valores de $S_{ccmn}(t)$, $I_{ccmn}(t)$, $g_{1m}(t)$ por (4.77), (4.78) e (4.93);
- 4) calculam-se os valores de $s_{cm}(t)$, $e_{cm}(t)$, $x_{me}(t)$, $e_{sm}(t)$, respectivamente pelas expressões (4.90), (4.97), (4.98) e (4.83);
- 5) verifica-se o valor de $e_{sm}(t)$.

Compara-se o valor de $e_{sm}(t)$ obtido pelo passo (4) do roteiro acima com o valor correto já deve ser previamente calculado (sua determinação será efetuada a partir da equação (4.102) do próximo item). Se os valores forem próximos (dentro de uma tolerância previamente estabelecida) considera-se que o processo convergiu e os resultados podem ser aceitos. Caso contrário recomeça-se o cálculo a partir do primeiro passo com um novo valor para $x_{me}(t)$ até que seja verificada a convergência. Quando esta ocorrer o valor para a curvatura média será :

$$\frac{1}{r_m}(t) = -\frac{\varepsilon_{sm}(t)}{x_{me}(t) - d} \quad (4.101)$$

CONFIGURAÇÃO DA SEÇÃO FISSURADA. CÁLCULO DA DEFORMAÇÃO MÉDIA NA ARMADURA TRACIONADA:

Para a solução do sistema descrito na seção anterior torna-se necessário conhecer a deformação média na armadura tracionada para um instante genérico t , $e_{sm}(t)$, rescrevendo-se a expressão (4.23) em função de t , obtém-se a seguinte equação:

$$\varepsilon_{sm(t)} = \frac{\sigma_{s2(t)}}{E_s} - \beta_1 \cdot \beta_{2(t)} \cdot \left(\frac{\sigma_{sr}}{E_s} - \varepsilon_{sr} \right) \cdot \frac{\sigma_{sr}}{\sigma_{s2(t)}} \quad (4.102)$$

onde $\beta_{2(t)}$ é um coeficiente que considera a fluência do concreto devido às tensões de aderência e $\sigma_{s2(t)}$ é a tensão na armadura calculada para na seção fissurada.

Os valores de ε_{sr} e σ_{sr} serão os mesmos dos calculados para o instante inicial t_0 , pois admite-se que a fissuração do concreto aconteceu no tempo t_0 .

Para a seção onde ocorreram fissuras a resultante de tração na armadura será :

$$R_{s(t)} = \varepsilon_{s(t)} \cdot E_s \cdot A_s \quad (4.103)$$

A deformação na armadura será :

$$\varepsilon_{s(t)} = \frac{x_{\varepsilon(t)} - d}{x_{\varepsilon(t)}} \cdot \varepsilon_{c(t)} \quad (4.104)$$

Que substituída em (4.103) resulta :

$$R_{s(t)} = \frac{x_{\varepsilon(t)} - d}{x_{\varepsilon(t)}} \cdot \varepsilon_{c(t)} \cdot E_s \cdot A_s \quad (4.105)$$

Analogamente à configuração média, para a seção fissurada também pode ser escrito um sistema de quatro equações. Ao invés dos valores médios anteriormente empregados são tomados agora os valores locais. Assim:

$$-\frac{\sigma_{c(t)}}{x_{\sigma(t)}} \cdot S_{ccn(t)} + E_s \cdot A'_s \cdot \left(1 - \frac{d'}{x_{\varepsilon(t)}}\right) \cdot \varepsilon_{c(t)} + R_{s(t)} = N \quad (4.106)$$

$$-\sigma_{c(t)} \cdot g_{1(t)} - A'_s \cdot E_s \cdot \left(1 - \frac{d'}{x_{\varepsilon(t)}}\right) \cdot \varepsilon_{c(t)} \cdot (d - d') = Ne_s \quad (4.107)$$

$$\varepsilon_{c(t)} = g_{2(t_0)} + f \cdot \sigma_{c(t)} \quad (4.108)$$

$$\frac{1}{x_{\varepsilon(t)}} = \frac{1}{x_{\sigma(t_0)}} \cdot \left\{ 1 - \frac{1}{\varepsilon_{c(t)}} \cdot \left[\varepsilon_{c\sigma(t_0)} + \left(1 - \frac{x_{\sigma(t_0)}}{x_{\sigma(t)}}\right) \cdot \sigma_{c(t)} \cdot f + \varepsilon_{cs(t,t_0)} \right] \right\} \quad (4.109)$$

As incógnitas básicas deste sistema são $\mathbf{x}_s(\mathbf{t})$, $\mathbf{x}_\varepsilon(\mathbf{t})$, $\mathbf{e}_c(\mathbf{t})$, $\mathbf{s}_c(\mathbf{t})$. Para uma seção transversal de forma qualquer, o sistema deve ser resolvido por iterações.

Roteiro para Solução do Sistema – Equações (4.106) a (4.109)

- 1) adota-se um valor inicial para $\mathbf{x}_s(\mathbf{t})$;
- 2) calculam-se os valores de \mathbf{f} pela expressão (4.88) e os valores de $\mathbf{g}_2(\mathbf{t}_0)$ e $\mathbf{g}_3(\mathbf{t}_0)$ respectivamente por:

$$g_{2(t_0)} = \varepsilon_{c(t_0)} + \sigma_{c(t_0)} \cdot \left[\frac{\Phi_{28(t,t_0)}}{E_{c28}} - f \right] + \varepsilon_{cs(t,t_0)} \quad (4.110)$$

$$g_{3(t_0)} = \frac{d'}{x_{\sigma(t_0)}} \left[g_{2(t_0)} - \varepsilon_{cm\sigma(t_0)} - \varepsilon_{cs(t,t_0)} \right] - g_{2(t_0)} \quad (4.111)$$

- 3) calculam-se os valores de $\mathbf{S}_{ccn}(\mathbf{t})$, $\mathbf{I}_{ccn}(\mathbf{t})$ e $\mathbf{g}_1(\mathbf{t})$ pelas seguintes expressões:

$$S_{cc(t)} = \int_{-x_{\sigma(t)}}^0 b_{(y_n)} \cdot dy_n - A'_s \cdot [d' - x_{\sigma(t)}] \quad (4.112)$$

$$I_{cc(t)} = \int_{-x_{\sigma(t)}}^0 b_{(y_n)} \cdot y_n \cdot dy_n - A'_s \cdot [d' - x_{\sigma(t)}]^2 \quad (4.113)$$

$$g_{l(t)} = \frac{1}{x_{\sigma(t)}} \cdot \left\{ I_{ccn(t)} - [d - x_{\sigma(t)}] \cdot S_{ccn(t)} \right\} \quad (4.114)$$

4) calculam-se os valores de $\mathbf{x}_s(t)$, $\mathbf{x}_e(t)$, $\mathbf{e}_c(t)$ e $\mathbf{s}_c(t)$ através de expressões análogas àquelas da configuração média, assim :

$$\sigma_{c(t)} = \frac{E_s \cdot A'_s \cdot (d - d') \cdot g_{3(t_0)} - N \cdot e_s}{E_s \cdot A'_s \cdot (d - d') \cdot f \cdot \left(1 - \frac{d'}{x_{\sigma(t)}} \right) + g_{l(t)}} \quad (4.115)$$

e, $\mathbf{e}_c(t)$ e $\mathbf{x}_e(t)$ são obtidos, respectivamente, pelas expressões (4.108) e (4.109).

5) verifica-se a equação (4.106)

Para que o valor adotado de $\mathbf{x}_s(t)$ seja a solução do sistema, todos os valores das incógnitas anteriormente calculados devem satisfazer à equação (4.106), dentro de uma tolerância pré-estabelecida. Se não for satisfeita esta condição, deve-se retomar o processo a partir do primeiro passo com um novo valor para $\mathbf{x}_s(t)$ até que a convergência seja verificada. Obtida a solução do sistema, o valor de $\mathbf{s}_{s2}(t)$ é dado por :

$$\sigma_{s2(t)} = \varepsilon_{s(t)} \cdot E_s \quad (4.116)$$

A partir da deformação na armadura tracionada, na configuração média, $\mathbf{e}_{sm}(t)$, calcula-se finalmente a curvatura dessa seção por :

$$\frac{1}{r_m}(t) = - \frac{\varepsilon_{sm(t)}}{x_{m\varepsilon(t)} - d} = \frac{-M}{E_{c(t)} \cdot I_{m(t)}} \quad (4.117)$$

5-ANÁLISE LINEAR E NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS

5.1-GENERALIDADES

A energia potencial total de um sistema conservativo ou seja, de comportamento elástico, pode ser expressa por duas parcelas: energia de deformação (ou energia potencial dos esforços solicitantes) e energia potencial das ações externas. Pode haver também manifestações de energia associada a trechos apoiados elasticamente sobre uma base ou, ainda, apoios elásticos discretos (molas). A soma das duas principais parcelas de energia pode ser expressa pela equação abaixo:

$$\Pi = U + W \quad (5.1)$$

onde Π é o funcional que expressa a energia total do sistema, U representa a soma das energias de deformação dos vários elementos e W corresponde à energia das ações externas.

A parcela correspondente à energia de deformação pode ser entendida como o trabalho das tensões internas ao corpo sobre as suas respectivas componentes de deformação. Esta parcela pode ser escrita pela equação (5.2) :

$$U = \int_V \sigma^T \varepsilon \, dV \quad (5.2)$$

Suponha-se que uma barra carregada por uma ação externa específica (ver figura 5.1) tenha sua linha elástica de deformação dada por

uma função $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$. O trabalho de cada ação externa será igual ao produto do módulo desta ação pelo respectivo deslocamento. No caso de carregamentos distribuídos, deve ser efetuada a integral no domínio.

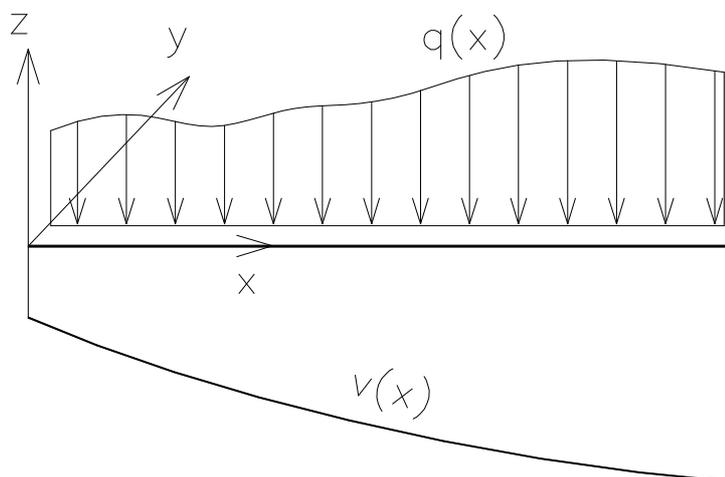


Figura 5.1 : Viga com carregamento qualquer

Dessa forma, a energia potencial externa será determinada por :

$$w_i = - \int q(x) v(x) dx \quad (5.3)$$

Que é a equação do trabalho com sinal trocado.

5.1.1 - PRINCÍPIO DA MÍNIMA ENERGIA POTENCIAL

O princípio da mínima energia potencial total consiste na aplicação do princípio dos trabalhos virtuais -PTV- afirmando que na posição de equilíbrio, ao invés dos trabalhos virtuais interno e externo serem iguais, o trabalho virtual total é nulo. Como em termos dimensionais trabalho e energia são iguais, pode-se dizer também que a variação de energia total dado pelo funcional (5.1) é nula no equilíbrio. Assim a expressão da variação de energia total para a posição de equilíbrio é escrita por :

$$d\Pi=0 \quad \therefore \quad \frac{d\Pi}{dv_i} = 0 \quad (5.4)$$

onde v_i expressa o deslocamento i do vetor de deslocamentos nodais. A equação (5.4) será usada para a obtenção da matriz de rigidez e do vetor de carregamentos nodais.

5.1.2-CASO NÃO-LINEAR

Considere-se um material cujo comportamento seja não-linear em termos das relações entre tensões e deformações. A partir das suas relações constitutivas pode-se observar que, também para o caso não-linear; a energia interna do sistema, expressa pela integral (5.2), deve ser igual à energia potencial das ações externas. Desse modo, o funcional de energia pode ser reescrito pela seguinte expressão:

$$\Pi = (U + U_r) + W \quad (5.5)$$

onde U_r é a parcela de energia correspondente à integral do produto das deformações residuais pelas respectivas componentes de tensão.

5.2-ELEMENTO FINITO DE BARRA

Considere-se um elemento de barra conforme ilustrado na figura (5.2), tendo, em cada um de seus nós, aos seguintes graus de liberdade: uma translação segundo o eixo oy , uma rotação paralela ao eixo ox e outra rotação paralela à oy . A expressão da energia de deformação passa a ser escrita somente em função das variáveis que são de interesse, admitindo-se as hipóteses da seção permanecer plana após a deformação e da proporcionalidade entre tensões e deformações. Dessa forma :

$$U = \frac{1}{2} \int_{\text{estr}} \left(\frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{GJ_t} \right) dx \quad (5.6)$$

Da teoria técnica da flexão, obtém-se:

$$M = -EI \frac{d^2v}{dx^2} \rightarrow \rightarrow \frac{d^2v}{dx^2} = v'' \quad (5.7)$$

$$T = GJ_t \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \rightarrow \rightarrow \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \alpha \quad (5.8)$$

A equação (5.9) pode ser decomposta, considerando-se os efeitos da flexão e da torção de modo independente, e reescrita na forma abaixo (supondo a seção transversal constante ao longo de um elemento) :

$$U = U_m + U_t \quad (5.9)$$

onde :

$$U_m = \frac{EI}{2} \int_{\text{est}} v''^2 dx \quad (5.10)$$

e

$$U_T = \frac{GJ_t}{2} \int_{\text{est}} \alpha^2 dx \quad (5.11)$$

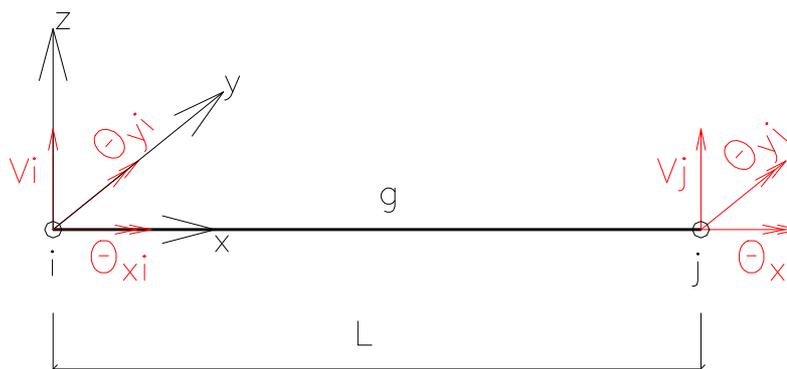


Figura 5.2 : Elemento de barra

5.2.1-MATRIZ DE RIGIDEZ : PARCELA DA FLEXÃO

Os deslocamentos verticais ao longo do elemento são aproximados por uma função polinomial de terceiro grau - expressão (5.12). Os valores do polinômio são conhecidos para os pontos extremos do elemento (onde $x=0$ e $x = L$). A partir desses valores são determinados os coeficientes do polinômio.

$$v = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \quad (5.12)$$

$$\theta_y = -\frac{dv}{dx} = -a_2 - 2a_3 x - 3a_4 x^2 \quad (5.13)$$

Da imposição das condições de contorno, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ \theta_{y1} \\ v_2 \\ \theta_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & -1 & -2L & -3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Simplificando a notação pode-se reescrever (5.14) e (5.12), respectivamente por :

$$\delta_e = A \alpha \quad (5.15)$$

e :

$$v = f(x)^t \alpha \quad (5.16)$$

com (5.15) em (5.16) :

$$v = f(x)^t A^{-1} \delta_e \quad (5.17)$$

expressando a inversa da matriz **A**, obtém-se :

$$A^{-1} = \frac{1}{L^4} \begin{bmatrix} L^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -L^4 & 0 & 0 \\ -3L^2 & 2L^3 & 3L^2 & L^3 \\ 2L & -L^2 & -2L & -L^2 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

A curvatura da seção em cada ponto ao longo do eixo do elemento pode ser obtida de maneira aproximada pelo inverso da derivada segunda do polinômio que expressa os deslocamentos. Assim :

$$\frac{1}{r} = \beta^t \delta_e \quad (5.19)$$

onde, empregando-se as equações já definidas :

$$\beta = -f''^t A^{-1} \quad (5.20)$$

que, efetuando as operações resulta em :

$$\beta^t = \left[-6 \frac{(L-2x)}{L^3} \quad 2 \frac{(2L-3x)}{L^2} \quad 6 \frac{(L-2x)}{L^3} \quad 2 \frac{(L-3x)}{L^2} \right] \quad (5.21)$$

Aplicando-se o princípio da mínima energia expresso na equação (5.4) obtém-se a matriz de rigidez para o elemento de barra, considerando apenas a parcela da flexão:

$$K_f = \int_0^L \beta EI \beta^t dx \quad (5.22)$$

5.2.2 - MATRIZ DE RIGIDEZ - PARCELA DA TORÇÃO

Para a obtenção da matriz de rigidez da parcela de energia devida à torção de um elemento de barra deve ser empregada uma função que aproxime a rotação em torno do eixo **OX**. Esta função será adotada segundo uma aproximação linear conforme a equação abaixo :

$$\theta_x = a_1 + a_2 x \quad (5.23)$$

A partir de (5.23) e repetindo o mesmo processo empregado anteriormente para o caso da flexão, obtém-se a matriz de rigidez de um elemento de barra considerando de modo independente o efeito da torção.

A matriz de rigidez para o elemento de barra mostrado na figura (5.3) é apresentada a seguir, já considerando a soma das parcelas relativas à torção e à flexão.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ_t}{L} & 0 & 0 & \frac{-GJ_t}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{-GJ_t}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{L} & 0 \\ \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

O vetor de cargas nodais equivalentes é obtido a partir da imposição da condição de mínima energia. Apresenta-se a seguir esse vetor relativo aos graus de liberdade mostrados na figura (5.2), considerando-se uma ação vertical e um momento torçor ambos uniformemente distribuídos ao longo da extensão do elemento.

$$F^t = \begin{bmatrix} \frac{qL}{2} & \frac{TL}{2} & \frac{-qL^2}{12} & \frac{qL}{2} & \frac{TL}{2} & \frac{-qL^2}{12} \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

5.3-CÁLCULO DOS RESÍDUOS DE CARREGAMENTO NO ELEMENTO

Considere-se um elemento de barra onde existe um resíduo de momentos ao longo da sua extensão e deseja-se reapplicá-lo à estrutura em forma de esforço externo. A transformação desses resíduos em esforço externo é obtida através do emprego do Princípio dos Trabalhos Virtuais – PTV. Conforme já foi citado, sabe-se que as curvaturas da seção podem ser relacionadas aos deslocamentos através da matriz \mathbf{b} . Assim :

$$\frac{1}{r} = \beta^t \varphi \quad (5.26)$$

onde \mathbf{w} são os deslocamentos virtuais.

Pode ainda ser a relação entre uma variação no campo de curvaturas e deslocamentos virtuais por :

$$\delta \frac{1}{r} = \beta^t \delta \varphi \quad (5.27)$$

Para um elemento de barra de comprimento L o PTV impõe que o trabalho virtual do carregamento externo \mathbf{c}_e pelo deslocamento virtual

relativo δw é a igual ao trabalho virtual dos resíduos de momento pela deformação virtual $\delta \frac{1}{r}$:

$$\Psi_e^T \delta \varphi = \int_L \Delta M_0^T \delta \frac{1}{r} dL \quad (5.28)$$

e:

$$\Psi_e^T \delta \varphi = \int_L \beta \Delta M_0^T \delta \varphi dL \quad (5.29)$$

Dividindo-se as equações (5.28) e (5.29) por δw , obtém-se o vetor de esforços residuais para o elemento e . Assim :

$$\mathbf{Y}_e^T = \int_L \beta \mathbf{DM}_0^T \mathbf{b} dL \quad (5.30)$$

onde a matriz \mathbf{b} é aquela definida em (5.21) e \mathbf{DM}_0 é uma função apropriada que deve descrever a variação dos resíduos de momento ao longo do elemento finito.

5.4-SOLUÇÃO NUMÉRICA

5.4.1-INTRODUÇÃO

O emprego do método dos elementos finitos na análise linear de estruturas resulta num sistema de equações na seguinte forma :

$$\mathbf{K}u - \mathbf{F} = 0 \quad (5.31)$$

onde \mathbf{u} é o vetor dos deslocamentos nodais (que são os termos desconhecidos do sistema), \mathbf{F} é o vetor dos carregamentos aplicados segundo um sistema de coordenadas globais previamente definido e \mathbf{K} é a matriz de rigidez da estrutura.

Quando a não linearidade física for considerada, os esforços internos e externos não mais estarão em equilíbrio e a matriz de rigidez da estrutura é função dos estado de deformações. A equação (5.31) passa a ser escrita por :

$$K(u)u - F = \Psi \quad (5.32)$$

Os métodos de resolução de sistemas não-lineares podem ser classificados em iterativos, incrementais ou mistos. Segundo BATHE e CIMENTO (1980) uma análise não-linear pelo método dos elementos finitos é feita usando uma formulação incremental, na qual as variáveis são atualizadas incrementalmente, correspondendo a passos de carga sucessivos. Nesse tipo de solução, é importante que as equações de equilíbrio sejam satisfeitas a cada passo, de forma a se assegurar precisão na resposta. Portanto deve-se usar um grande número de incrementos, o que se torna o inconveniente de tais métodos. Além disso, o equilíbrio não é rigorosamente garantido em cada passo de resolução para um incremento gerando, portanto, um erro em cada passo, e este erro é cumulativo.

Já os métodos iterativos garantem o equilíbrio na convergência, no entanto exigem um grande trabalho computacional. Os métodos mistos utilizam as vantagens dos dois métodos anteriores e seu emprego é o mais indicado. OWEN & HINTON (1980) trazem uma completa discussão sobre esses métodos; apresentam-se a seguir os conceitos básicos dos procedimentos incremental e iterativo, respectivamente.

5.4.2-Formulação incremental

A formulação incremental consiste em dividir o carregamento total, F , em incrementos de carga, Δf , de modo que:

$$F = \sum_{i=1}^n \Delta f_i \quad c / \quad \Delta f_i = \alpha_i F \quad (5.33)$$

Para cada incremento calcula-se a parcela de deslocamentos correspondentes:

$$\Delta u_i = [K_t(u_i)]^{-1} \Delta f_i \quad (5.34)$$

O deslocamento total será:

$$u = \sum_{i=1}^n \Delta u_i \quad (5.35)$$

com n sendo o número de incrementos definidos, $K_t(u_i)$ é o gradiente local da relação esforço/deslocamento para o incremento i e α um coeficiente menor que a unidade.

5.4.3-Formulação iterativa : método de Newton-Raphson

Esta formulação consiste em resolver uma equação não-linear de modo iterativo, de forma que a cada passo da iteração existe um vetor de carregamentos residuais que é resolvido pelo passo seguinte; assim sucessivamente, até que os resíduos sejam suficientemente pequenos. O vetor de esforços residuais para cada iteração será determinado de acordo com a equação abaixo :

$$\Psi = Ku - F \neq 0 \quad (5.36)$$

ou:

$$\Psi = F - F^{\text{interno}} \quad (5.37)$$

Com os esforços residuais Ψ determina-se um acréscimo ao vetor de deslocamentos nodais da seguinte forma :

$$\Delta u_i = [K_t(u_i)]^{-1} \Psi \quad (5.38)$$

O vetor de deslocamentos da estrutura para a iteração 'i' será dado por :

$$u_i = u_{i-1} + \Delta u_i \quad (5.38)$$

A fórmula de recorrência para a solução de um resíduo \mathbf{C} é a seguinte:

$$\Psi_i = \mathbf{K}_t^i \Delta u_i \quad (5.39)$$

onde \mathbf{K}_t^i é a matriz de rigidez tangente correspondente aos deslocamentos u_i e é dada pelo gradiente local tensão-deformação.

O procedimento de resolução prossegue até que ocorra a convergência dentro de certas tolerâncias pré estabelecidas, para isso deverão ser atendidas simultaneamente as inequações expressas por :

$$\frac{\|\Psi\|}{\|F\|} \leq \varepsilon_f, e: \frac{\|\Delta u_i\|}{\|u_i\|} \leq \varepsilon_i \quad (5.40)$$

A figura (5.3) tem como objetivo ilustrar os procedimentos de resolução de sistemas de equações não lineares citados neste trabalho.

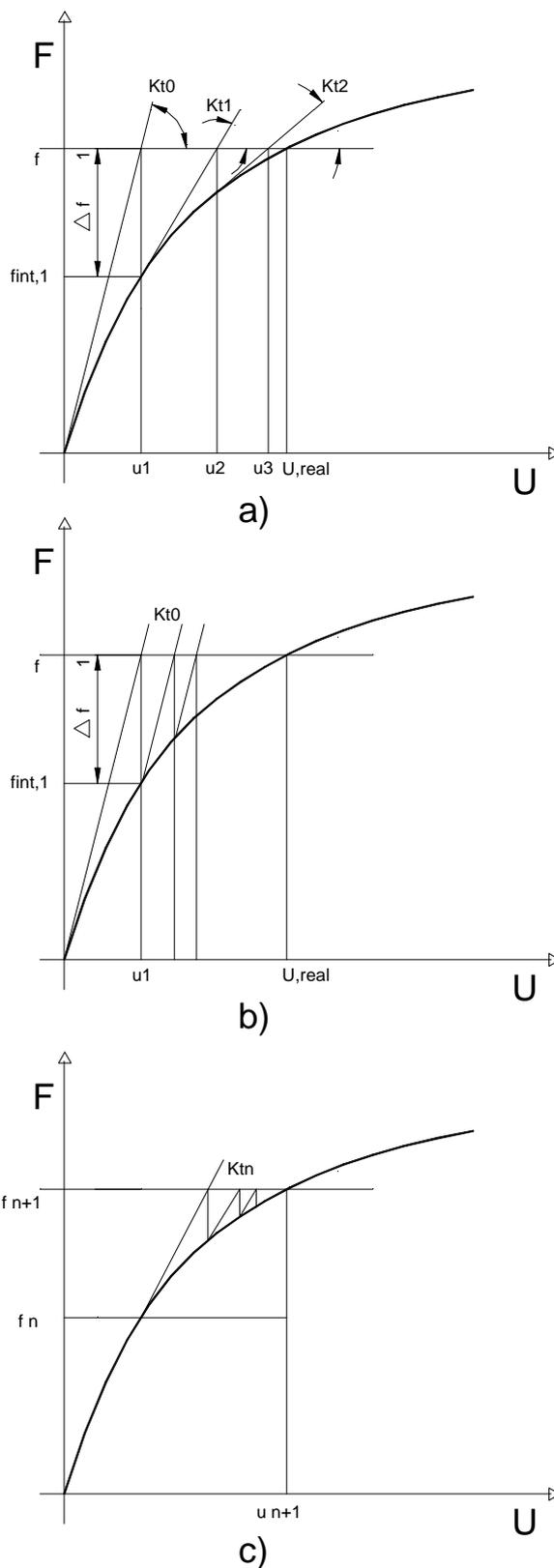


Figura 5.3 - Métodos de Newton-Raphson: a) Método de Newton-Raphson puro; b) Método da Rigidez Inicial ; c) Método de Newton-Raphson Modificado ou Misto.

6-IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA DE ALGORITMO PARA ANÁLISE NÃO-LINEAR DE GRELHAS

6.1-INTRODUÇÃO

Neste capítulo pretende-se mostrar o desenvolvimento de um algoritmo numérico para a determinação de esforços solicitantes e deslocamentos em pavimentos de edifícios onde o sub-sistema estrutural “grelha” é empregado. As seções transversais das barras de concreto armado obedecem um critério não-linear escrito em termos da relação entre momentos e curvaturas. Foram implementados os modelos de GHALI & FAVRE (1986) e DEBERNARDI (1983) para o concreto armado. O Método dos Elementos Finitos é empregado na discretização da estrutura.

O programa foi desenvolvido de forma a permitir simultaneamente basicamente três tipos de análise, a saber:

- Análise de esforços e deslocamentos na estrutura considerando a não-linearidade física para o instante de aplicação do carregamento;
- Consideração da fluência do concreto e das alterações nos esforços solicitantes e deslocamentos que ocorrerão ao longo do tempo;
- Simulação de fases de carregamento, onde cada ação é considerada aplicada num instante de tempo conhecido.

Cada um desses fenômenos será tratado nesse capítulo de maneira isolada, por simplicidade. Para o cálculo das propriedades mecânicas do concreto - tais como módulo de elasticidade, resistência à compressão, resistência à tração etc..., além das deformações dependentes do tempo e

do momento de fissuração da seção e foram empregadas as recomendações do CEB-1990. Serão apresentados fluxogramas simplificados do programa no decorrer deste capítulo.

O programa permite que se trabalhe com barras de seção transversal em forma de “ I ” com apenas um eixo de simetria e armaduras superior e inferior. Os dados de entrada são propriedades geométricas da seção e são ilustrados na figura (6.1).

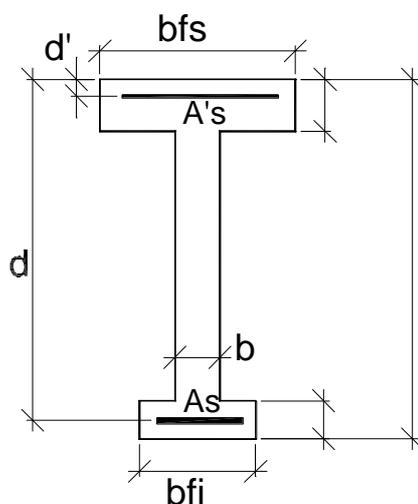


Figura 6.1 : Seção transversal típica.

6.2-NÃO-LINEARIDADE FÍSICA – INSTANTE DE APLICAÇÃO DO CARREGAMENTO

A consideração da não-linearidade física na análise de estruturas de concreto armado requer uma estratégia incremental-iterativa para sua resolução. Esse assunto foi tratado no item 5.4 deste texto sendo que no item 5.3 foi desenvolvido uma expressão, a partir da aplicação do PTV, para o cálculo do vetor de esforços residuais num elemento de barra. Pretende-se agora mostrar o procedimento utilizado nos algoritmos para a determinação dos resíduos, a partir da resolução da expressão (5.30) aqui repetida por comodidade.

$$\Psi_e^T = \int_L \Delta M(x) \beta dL \quad (6.1)$$

Considere-se um elemento de barras conforme mostrado na figura (6.2). São conhecidos nos seus nós os valores de duas rotações segundo os eixos específicos – \mathbf{ox} e \mathbf{oy} - e um deslocamento vertical segundo o eixo \mathbf{oz} . É possível conhecer, de maneira aproximada, a curvatura em cada ponto do elemento empregando-se a expressão (6.2). Assim :

$$\frac{1}{r} = \beta^t \delta_e \quad (6.2)$$

onde :

$$\beta^t = \left[-6 \frac{(L-2x)}{L^3} \quad 2 \frac{(2L-3x)}{L^2} \quad 6 \frac{(L-2x)}{L^3} \quad 2 \frac{(L-3x)}{L^2} \right] \quad (6.3)$$

e :

$$\delta_e^t = [v_i \quad \theta_{xi} \quad v_j \quad \theta_{xj}] \quad (6.4)$$

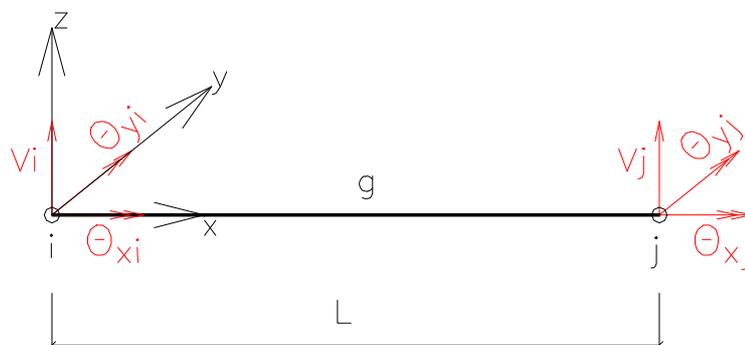


Figura 6.2 : Elemento de barra.

Como pode-se observar, a função (6.3) tem uma variação linear. Como a curvatura real varia parabolicamente ao longo do comprimento do elemento – isto para carregamentos uniformemente distribuídos – foi utilizada uma correção no valor da curvatura que é empregada somente na primeira iteração de cada incremento de carga. Assim, para os nós i e j pode-se escrever a expressão (6.5).

$$\frac{1}{\Gamma_{K,cor}} = \frac{1}{r} - cor \quad (6.5)$$

com:

$$cor = \frac{\Delta p L^2}{8EI_m} \quad (6.6)$$

onde Δp é o incremento de carregamento uniformemente distribuído e EI_m é o módulo de deformação por flexão médio que será definido neste capítulo.

Como o problema é não-linear e emprega-se uma estratégia incremental-iterativa, é necessário utilizar a expressão (6.2) para calcular, na verdade, incrementos de curvatura para uma seção em função dos acréscimos nos deslocamentos da estrutura que ocorrerão a cada iteração. Assim, para cada nó do elemento:

$$\frac{1}{\Gamma_{k,tot}}^i = \frac{1}{\Gamma_{k,tot}}^{i-1} + \Delta \frac{1}{\Gamma_{k,cor}} \quad (6.7)$$

onde o índice sobrescrito i indica a iteração e o termo $\Delta \frac{1}{\Gamma_{k,cor}}$ é determinado

empregando-se as expressões (6.2) a (6.6) substituindo-se, evidentemente, os deslocamentos totais por incrementos de deslocamento. A figura (6.3) tem por objetivo esclarecer essas considerações.

Uma vez conhecido o valor da curvatura total nos nós de um elemento a partir dos seus deslocamentos nodais, determina-se, através do emprego dos modelos de DEBERNARDI ou de GHALI & FAVRE, para o instante de aplicação do carregamento (tratado no capítulo 4), o momento correspondente à essa curvatura. O resíduo de momento, ΔM_k , é determinado para cada nó do elemento de acordo com a expressão (6.8) onde o índice da iteração é suprimido por comodidade. Assim :

$$\Delta M_k = M_k - M_{r,k} \quad (6.8)$$

onde $M_{r,k}$ é função da seção transversal, dos seus materiais e da curvatura total. A figura (6.4) tem por objetivo mostrar a avaliação dos resíduos de momento numa seção.

Como a relação entre momento e curvatura é não-linear torna-se necessário o emprego do método da biseção para a determinação do momento correspondente à curvatura total acumulada, uma vez que os modelos fornecem a curvatura a partir de um momento fletor conhecido.

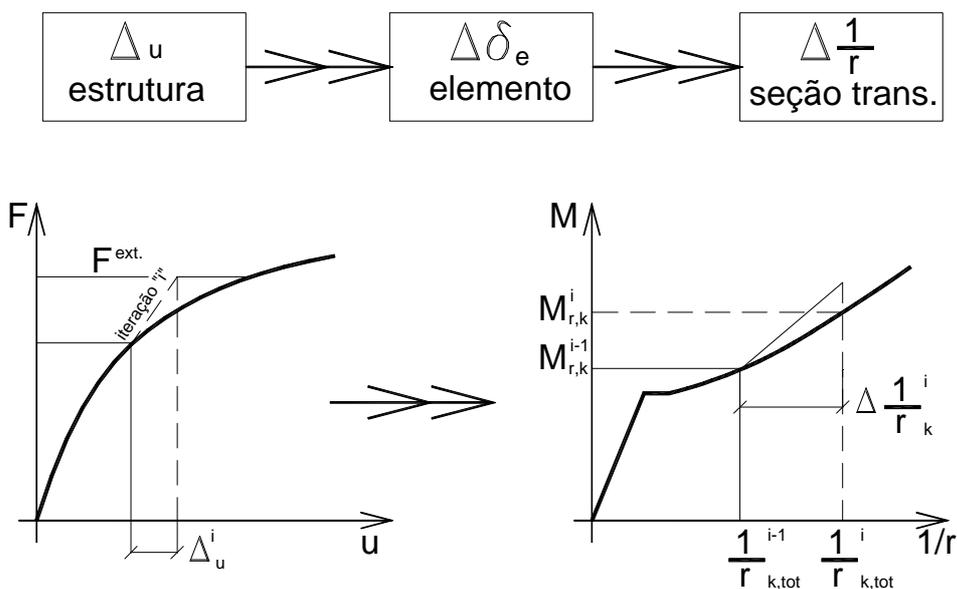


Figura 6.3: Ilustração do cálculo das curvaturas.

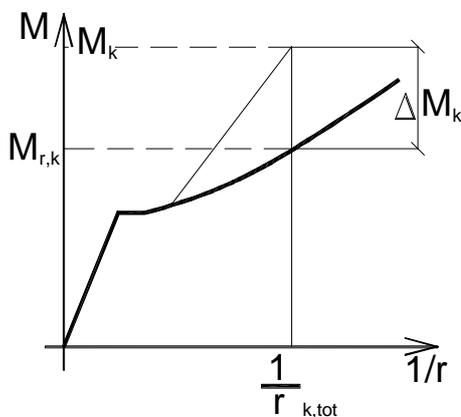


Figura 6.4: Resíduos de momento para uma seção.

Conhecidos os resíduos de momento fletor em cada nó pode-se escrever a função $\Delta\mathbf{M}(\mathbf{x})$ tendo em vista seu emprego na expressão (6.1). Emprega-se uma aproximação linear para cada resíduo; assim:

$$\Delta M(x)_i = \Delta M_i - \frac{\Delta M_i}{L} x \quad (6.9)$$

$$\Delta M(x)_j = \Delta M_j - \frac{\Delta M_j}{L} (L - x) \quad (6.10)$$

Efetuando-se a integração da expressão (6.1) com o uso de (6.9) e (6.10) obtêm-se os vetores de carregamentos residuais Ψ_e , considerando de maneira isolada a contribuição de cada nó do elemento. Assim resulta:

$$\Psi_{e,i} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta M_i}{L} \\ 0 \\ \frac{\Delta M_i}{L} \\ \frac{\Delta M_i}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$$\Psi_{e,j} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta M_j}{L} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\Delta M_j}{L} \\ 0 \\ \Delta M_j \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

O vetor de resíduos totais para um elemento será a soma das parcelas (6.11) e (6.12). Os esforços residuais da estrutura serão obtidos a partir da consideração da contribuição de cada elemento.

A matriz de rigidez do elemento, para cada iteração, é determinada pela expressão (5.24) a partir do módulo de deformação por flexão “secante”, relativo à rigidez média do elemento, calculado pela expressão (6.13) que é ilustrada pela figura (6.5). Assim :

$$EI_m = \frac{M_{r,k}}{\frac{1}{r_{k,tot}}} \quad (6.13)$$

e:

$$K_e = \begin{bmatrix} \frac{12EI_m}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_m}{L^2} & \frac{-12EI_m}{L^3} & 0 & \frac{-6EI_m}{L^2} \\ 0 & \frac{GJ_t}{L} & 0 & 0 & \frac{-GJ_t}{L} & 0 \\ \frac{-6EI_m}{L^2} & 0 & \frac{4EI_m}{L} & \frac{6EI_m}{L^2} & 0 & \frac{2EI_m}{L} \\ \frac{-12EI_m}{L^3} & 0 & \frac{6EI_m}{L^2} & \frac{12EI_m}{L^3} & 0 & \frac{6EI_m}{L^2} \\ 0 & \frac{-GJ_t}{L} & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{L} & 0 \\ \frac{-6EI_m}{L^2} & 0 & \frac{2EI_m}{L} & \frac{6EI_m}{L^2} & 0 & \frac{4EI_m}{L} \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

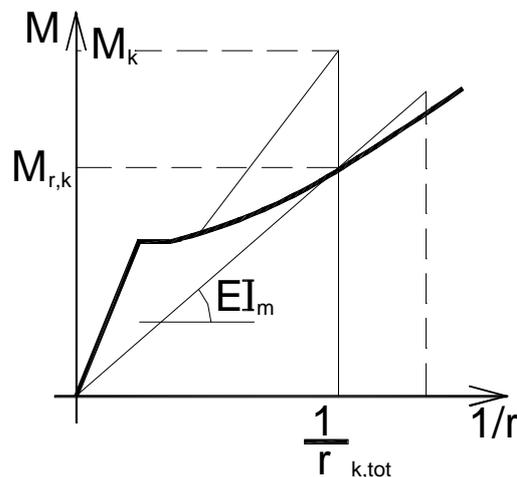


Figura 6.5: Determinação do módulo de deformação por flexão secante.

Com o emprego dos parâmetros definidos nesta seção procede-se a resolução da estrutura conforme mostrado no capítulo 5. Adotam-se dois critérios de convergência para o processo iterativo sendo um em termos de esforços e outro em termos de deslocamentos. Assim, empregando-se as expressões definidas em OWEN & HINTON (1980), tem-se :

$$\frac{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^n (\psi_i^r)^2 \right]}}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^n (f_i)^2 \right]}} \times 100 \leq \text{TOL} \quad (6.15)$$

onde o numerador indica a norma da soma dos esforços residuais, e o denominador a norma do total de forças aplicadas; TOL é o valor pré-estabelecido da tolerância.

Em termos de deslocamentos, obtém-se:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (\Delta u_i^r)^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i)^2}} \times 100 \leq \text{TOL} \quad (6.16)$$

onde Δu_i^r é o valor do acréscimo de deslocamentos para a iteração r e u_i é o deslocamento total acumulado até a iteração i .

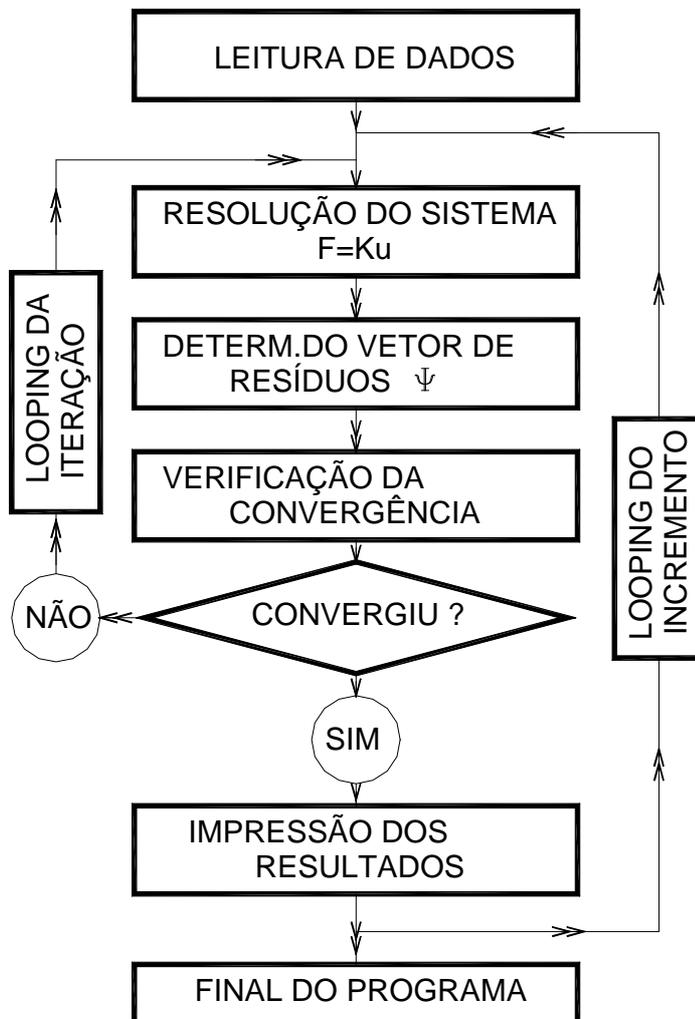


Figura 6.6: Apresentação de fluxograma de procedimento incremental-iterativo.

6.3-ESFORÇOS E DEFORMAÇÕES AO LONGO DO TEMPO

A variação nos esforços solicitantes e deslocamentos que devem ocorrer na estrutura de um pavimento de edifício, entre os instantes de tempo “ t_0 ” e “ t ”, devido ao efeito da fluência são considerados no programa desenvolvido através de uma estratégia incremental onde as deformações visco-plásticas são reaplicadas à estrutura na forma de esforços residuais nos nós dos elementos que a constituem.

Pretende-se nesta seção mostrar, de maneira resumida, o desenvolvimento de um procedimento utilizado para a análise da fluência. Os modelos de GHALI & FAVRE ou DEBERNADI fornecem um diagrama de curvatura x momento resistente para o instante de tempo “ t ”, além daquele para o instante “ t_0 ”, já tratado na seção anterior. A figura (6.8) ilustra esses dois diagramas num mesmo gráfico. Desse modo obtém-se para um momento fletor M as curvaturas em “ t_0 ” e em “ t ”.

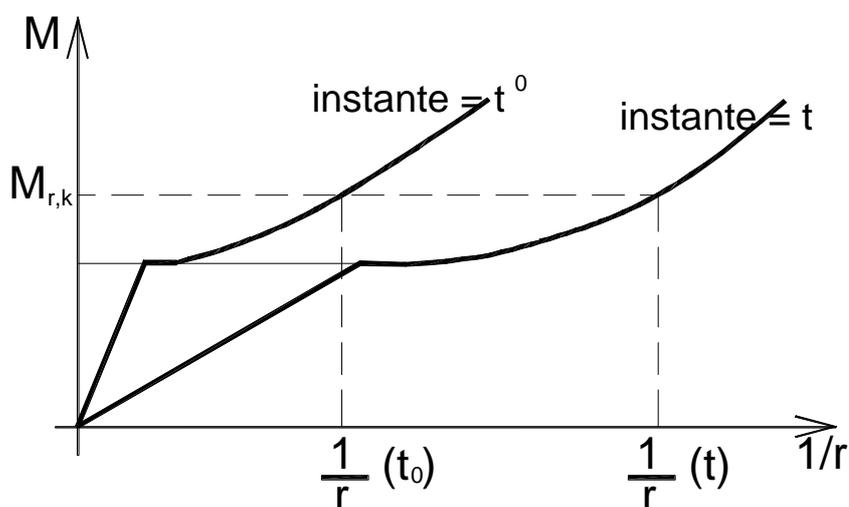


Figura 6.8 : Diagrama momento curvatura, com a consideração da fluência.

Suponha-se uma estrutura que foi resolvida para o instante “ t_0 ” e deseja-se a sua resolução também no instante “ t ”. São definidos incrementos de tempo Δt da seguinte forma:

$$\Delta t = \frac{(t - t_0)}{n} \quad (6.17)$$

onde n é o número de sub-intervalos de tempo.

Para o instante de tempo “ $t_0 + \Delta t$ ” determina-se, a partir dos modelos utilizados, a curvatura $\frac{1}{r}(t_0 + \Delta t)$, lembrando-se que $\frac{1}{r}(t_0)$ é conhecido. O vetor de resíduos a ser reaplicado na estrutura é determinado do mesmo modo que aquele mostrado na seção 6.2, onde o valor de ΔM_k será dado por:

$$\Delta M_k = \left(\frac{1}{r}(t_0 + \Delta t) - \frac{1}{r}(t_0) \right) \cdot EI_m \quad (6.18)$$

A matriz de rigidez com a qual a estrutura deve ser resolvida é determinada de maneira análoga ao utilizado na seção (6.2). A curvatura real de uma seção no instante “ $t_0 + \Delta t$ ” não é aquela determinada a partir das relações constitutivas e deve ser calculada a partir dos deslocamentos nodais dos elementos obtidos após a resolução da estrutura, já que houve uma redistribuição nos esforços solicitantes. Para instantes de tempo diferentes de “ $t_0 + \Delta t$ ” procede-se da mesma maneira, sendo que a matriz de rigidez é atualizada a cada incremento.

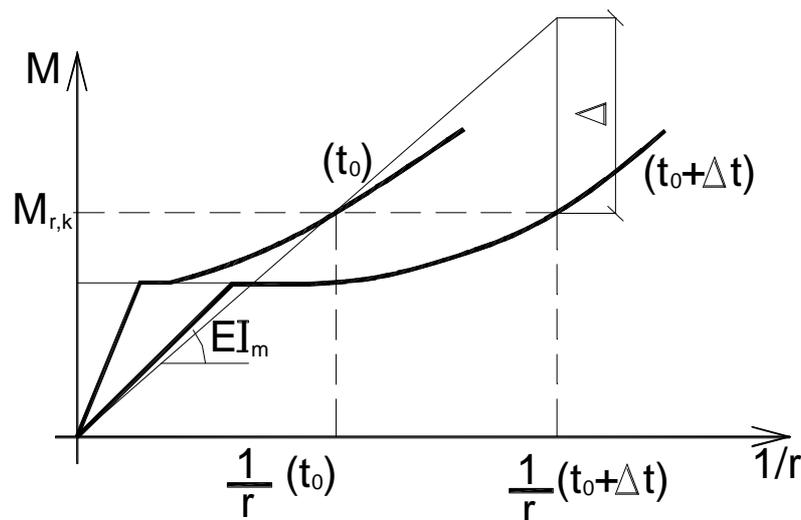


Figura 6.9: Resíduo de momento devido a fluência para o instante de tempo “ $t_0 + \Delta t$ ”.

É apresentado, a seguir, um fluxograma simplificado onde as deformações ao longo do tempo são consideradas.

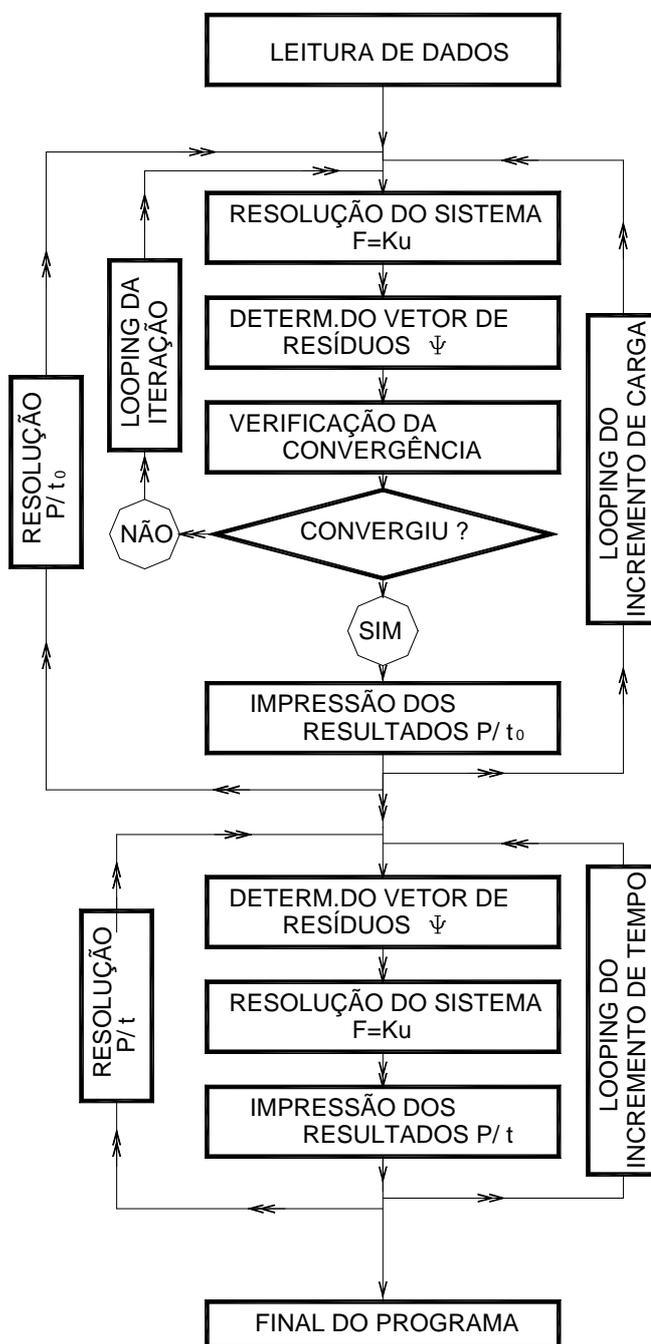


Figura 6.10: Fluxograma de procedimento incremental-iterativo para o instante de aplicação das cargas e incremental para a consideração das deformações ao longo do tempo.

6.4-APLICAÇÃO DE CARGAS NO INSTANTE DE TEMPO “t”.

O programa foi desenvolvido de modo a permitir a análise da aplicação de diversos carregamentos distintos, cada um num instante de tempo conhecido. São consideradas as perdas de rigidez que ocorreram antes da aplicação de um carregamento; provocadas por carregamentos anteriores a este. Deste modo, a matriz de rigidez da estrutura é aquela obtida a partir do módulo de deformação por flexão médio – já definido neste capítulo. A aplicação de um novo carregamento é ilustrada pela figura (6.11) relativa a uma seção transversal.

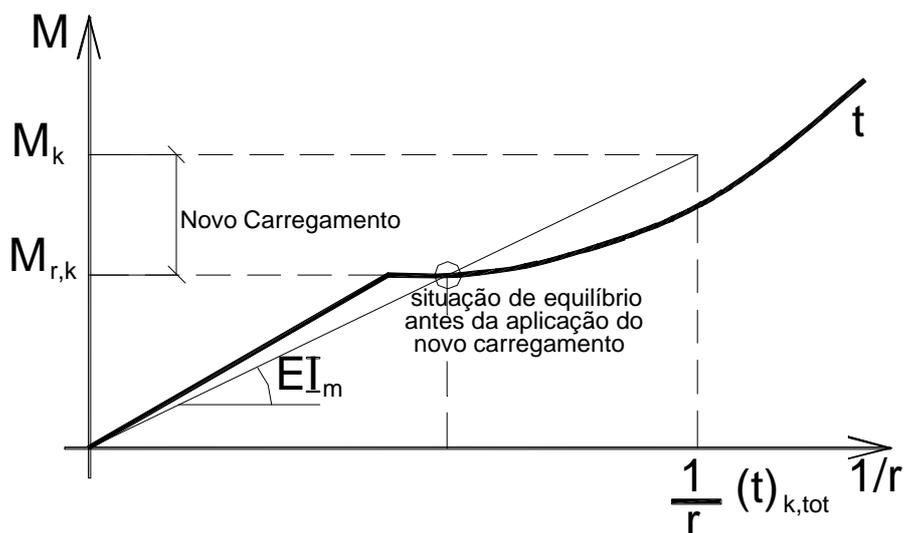


Figura 6.11 : Novo carregamento na estrutura.

O novo carregamento deve ser aplicado à estrutura em incrementos e, da mesma forma que na seção 6.2, a nova configuração de equilíbrio será obtida através de uma estratégia incremental-iterativa utilizando o mesmo procedimento descrito naquela seção.

Os modelos de DEBERNARDI ou de GHALI & FAVRE a serem empregados na resolução de um novo carregamento aplicado no instante de tempo “t” devem considerar a fluência que ocorreu no intervalo de tempo (t_0, t) , visto que a estrutura sofreu alterações no seu estado de deformações devidas à fluência nesse intervalo.

O fluxograma apresentado na figura (6.10) é agora empregado para cada etapa de carregamento conforme ilustrado pela figura (6.12).

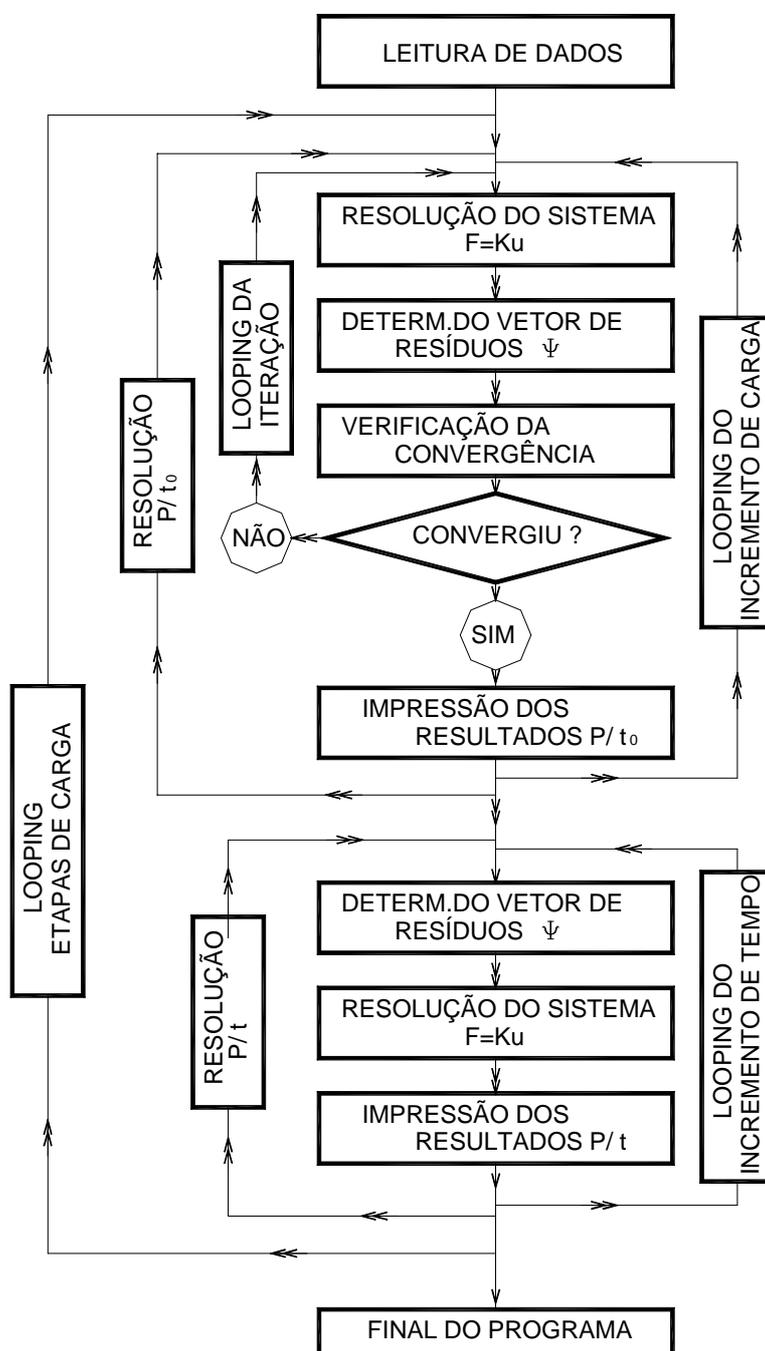


Figura 6.12: Fluxograma para análise considerando carregamentos em instantes de tempo distintos.

6.5-DESCARREGAMENTO

O descarregamento foi considerado de maneira simplificada neste trabalho, desprezando a danificação da estrutura. A matriz de rigidez da estrutura, quando ocorrer o descarregamento, será determinada conforme a expressão (6.14) onde o módulo de deformação por flexão será igual ao produto do módulo elástico do concreto pela inércia calculada no estágio 1 - tanto para o instante " t_0 " quanto para o instante " t ". Assim:

$$EI_m = EI_1 \quad (6.19)$$

A figura (6.13) tem por objetivo ilustrar essa consideração.

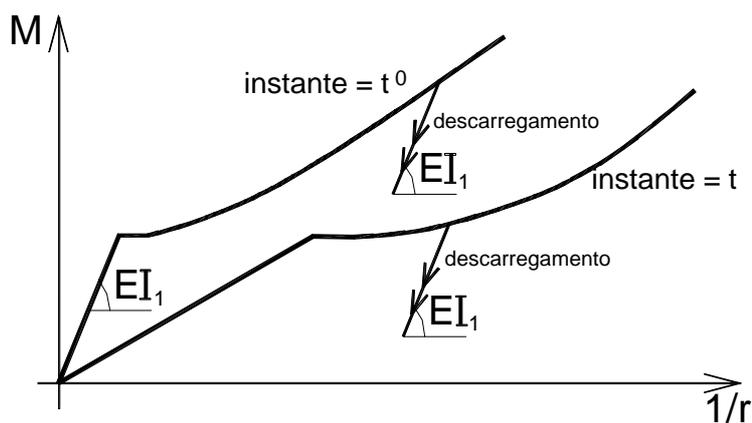


Figura 6.13: Descarregamento.

7-EXEMPLOS

7.1-INTRODUÇÃO

Neste capítulo pretende-se mostrar alguns exemplos de aplicação do programa desenvolvido. Serão efetuadas comparações entre os modelos implementados visando destacar as vantagens e desvantagens de cada modelo. Procura-se também efetuar, em alguns exemplos, comparações com dados experimentais conhecidos na literatura.

7.2-EXEMPLOS DO BULLETIN-158 DO CEB

7.2.1-VIGA BI-ENGASTADA

O “Bulletin” informativo n° 158 do CEB (1990) apresenta os resultados em termos de esforços e deslocamentos para uma viga bi-engastada de concreto armado solicitada por uma ação vertical uniformemente distribuída conforme mostrado na figura (7.1). Foram consideradas as seguintes características para os materiais:

- concreto $f_{ck} = 25$ MPa;
- módulo de elasticidade longitudinal do aço igual a 200 Gpa;
- barras de aço rugosas.

O carregamento é suposto aplicado aos 28 dias. Considera-se a fluência que ocorrerá desde a aplicação da carga até um instante de tempo igual a 10000 dias, procurando-se aproximar o coeficiente de fluência calculado pelo programa com o valor empregado pelo CEB (o CEB considera $\omega(t,t_0)=2,5$ e um coeficiente de envelhecimento do concreto igual a 0,8).

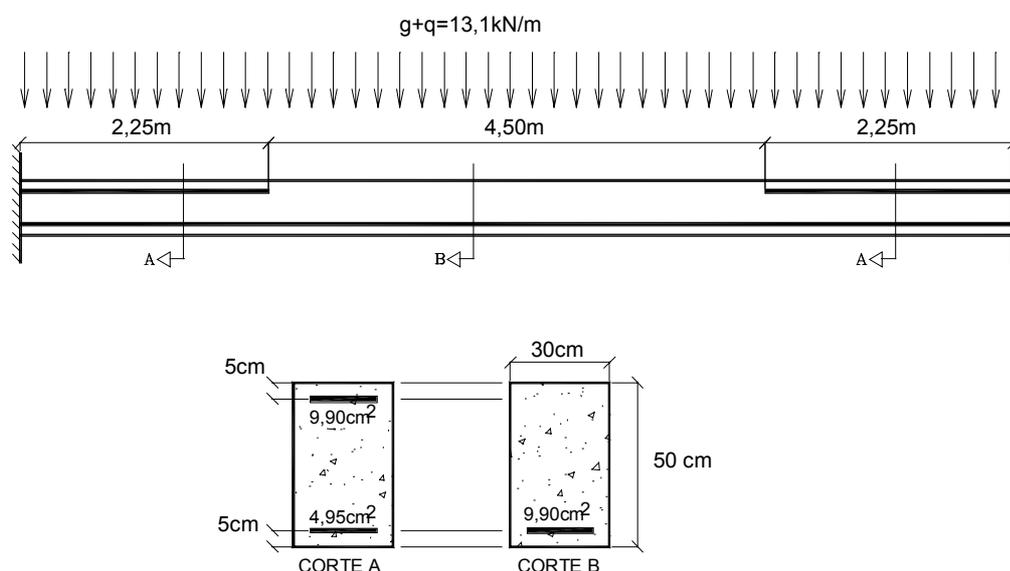


Figura 7.1: Exemplo 7.2.1- viga bi-engastada de concreto armado.

Para a resolução do exemplo a viga foi dividida em 20 elementos finitos iguais e a carga foi aplicada do seguinte modo:

- 20 incrementos de 5%;
- tolerância exigida no processo iterativo : 0,01%;
- número máximo de iterações : 50.

Para a consideração da fluência, o intervalo de tempo dos 28 aos 10000 dias foi dividido em 100 sub-intervalos iguais. A retração não foi considerada.

Após a execução do programa os resultados obtidos foram os seguintes:

- a) Diagrama de momentos fletores elásticos e após a redistribuição de esforços – para 28 e 10000 dias. Foram plotados apenas os valores de momento relativos ao modelo de Debernardi, visto que o modelo de Ghali & Favre forneceu, para este exemplo, valores bem próximos.

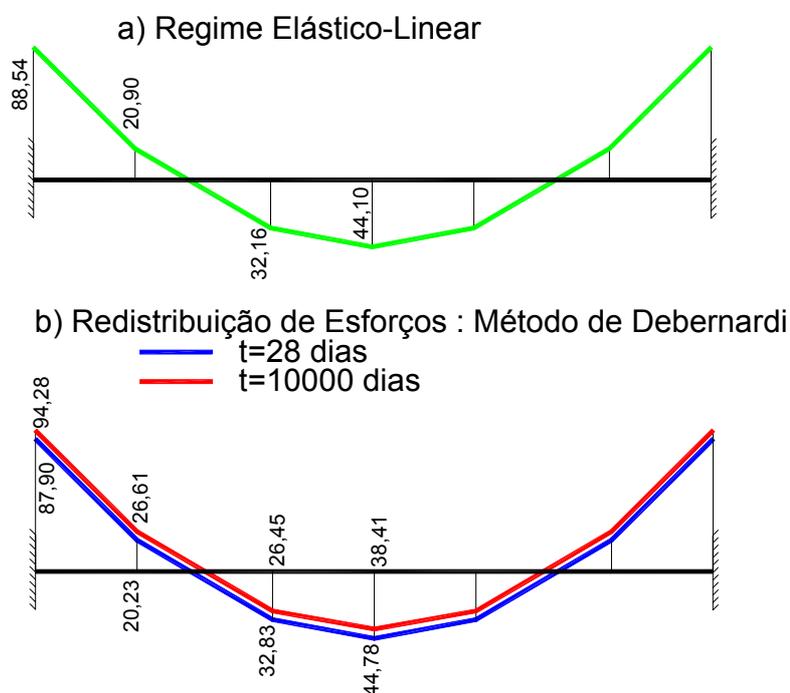


Figura 7.2: Diagrama de momentos para exemplo 7.2.1. (kN.cm)

- b) Deslocamento do ponto central da viga, para o instante $t=28$ dias, em função do percentual do carregamento externo aplicado :

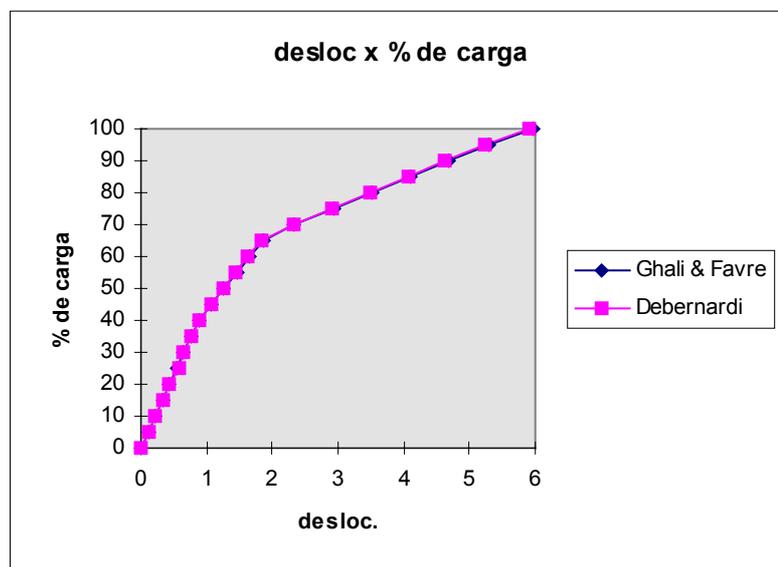


Figura 7.3 : Curva de Deslocamentos Para o Ponto Central da Viga (mm).

O deslocamento vertical do ponto central da viga, obtido através dos modelos implementados foi o seguinte :

- Debernardi : 5,97mm.
- Ghali & Favre : 5,90mm.

O valor indicado pelo CEB é de aproximadamente 6mm. Através do gráfico da figura (7.3) pode-se perceber a evolução da fissuração da peça que começa a ocorrer com cerca de 40% do carregamento total aplicado, existindo o que aparenta ser uma transição entre os comportamentos de estádios 1 e 2 para o carregamento variando de 40 a 70% do total, a partir daí a estrutura se comporta como fortemente fissurada.

- c) Os valores do deslocamento do ponto central da viga, para o instante $t=10000$ são os seguintes:
- Presente trabalho – Modelo de Debernardi : 10,71 mm;
 - Presente trabalho – Modelo de Ghali & Favre : 14,71 mm;

- Bulletin 158 do CEB – Método exato com integração : 12,20 mm;
- Bulletin 158 do CEB – Método dos coeficientes globais : 16,40 mm;
- Bulletin 158 do CEB – Método bilinear : 16,00 mm.

Existe uma diferença entre todos os valores para o instante de tempo “t” sendo que nem os métodos sugeridos pelo próprio CEB são próximos do valor obtido por integração (CEB). Debernardi faz um tratamento da deformação lenta bastante rigoroso, por isso acredita-se que conduza a um valor mais preciso.

7.2.2-VIGA SIMPLEMENTE APOIADA

A finalidade deste exemplo é comparar os resultados obtidos através do programa desenvolvido com os resultados fornecidos pelo CEB para várias taxas de armadura. A viga é ilustrada na figura (7.4).

Tabela 7.1: Taxas de armadura e carregamento para a viga Fig.(7.4).

ρ (%)	0,3	0,6			0,9
ρ' (%)	0	0	0,15	0,30	0
q (kN/m)	8,9	16,9	16,9	16,9	25,0
Caso	1	2	3	4	5

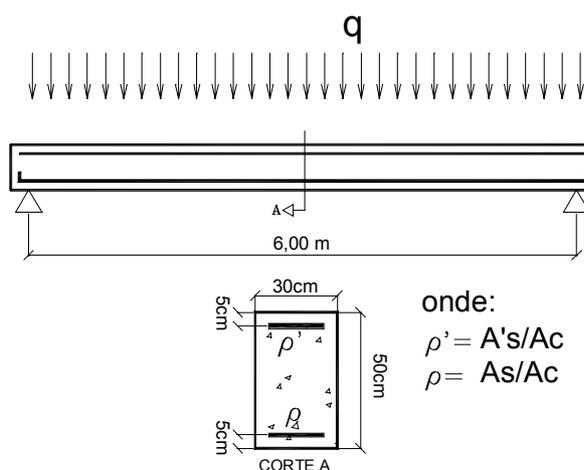


Figura 7.4 : Viga bi-apoiada do exemplo 7.2.2.

A viga foi dividida em 20 elementos finitos iguais e a carga foi aplicada do seguinte modo:

- 20 incrementos de 5%;
- tolerância exigida no processo iterativo : 0,01%;
- número máximo de iterações : 50.

Para a consideração da fluência o intervalo de tempo dos 28 aos 10000 dias foi dividido em 100 sub-intervalos iguais. A retração foi desprezada.

O deslocamento do ponto médio do vão é mostrado na tabela (7.2) para o instante de aplicação do carregamento e na tabela (7.3) para $t=10000$ dias.

Tabelas 7.2 e 7.3 : Deslocamento vertical do ponto médio do vão da viga do exemplo 7.2.2 para os instantes “ t_0 ” e “ t ”, respectivamente.

Caso	BULLETIN DO CEB			PRESENTE	TRABALHO
	Método Exato – CEB (mm)	método bi-linear (mm)	Método dos coef. Globais (mm)	método de Debernardi (mm)	Método de Ghali & Favre (mm)
1	4,20	3,80	3,80	3,15	3,09
2	10,00	8,20	8,40	8,90	8,84
3	10,00	8,20	8,40	8,79	8,73
4	9,90	8,20	8,40	8,68	8,63
5	12,10	10,60	10,60	11,01	10,99

Caso	BULLETIN DO CEB			PRESENTE	TRABALHO
	Método Exato – CEB (mm)	Método bi-linear (mm)	Método dos coef. Globais (mm)	Método de Debernardi (mm)	Método de Ghali & Favre (mm)
1	10,90	11,20	11,00	9,25	9,30
2	16,20	15,00	15,60	16,18	14,97
3	15,50	14,40	15,00	15,38	14,29
4	14,90	14,00	14,30	14,69	13,72
5	19,20	18,50	18,60	20,20	18,00

Pode-se mencionar, a partir da interpretação das tabelas (7.2) e (7.3) o seguinte:

- Para o instante de aplicação do carregamento os Modelos de Debernardi e Ghali & Favre conduzem a resultados bastante próximos - praticamente não existindo diferença entre ambos; no entanto é possível destacar que para baixas taxas de armadura Ghali & Favre resulta num erro maior em relação à Debernardi, indicando que quanto maior a taxa de armadura mais próximos são os valores.
- Para o instante de tempo $t=10000$ dias, existe uma diferença considerável entre os modelos implementados. O modelo de Ghali & Favre resulta próximo aos modelos do CEB. A diferença de resultados entre ambos se deve ao fato de, neste trabalho, a deformação lenta ser aplicada em incrementos.
- Os resultados obtidos pelo método de Debernardi – com a consideração da fluência são bem próximos aos do CEB relativos ao método “exato”.

O valor “exato” do CEB é obtido a partir da integração das curvaturas ao longo do vão, visando considerar a redistribuição de esforços. É utilizada uma estratégia iterativa. Deve-se deixar claro que o valor exato referido é uma indicação do Bulletin 158 do CEB.

7.2.3-VIGA BI-APOIADA COM SEÇÃO “T”

Este exemplo tem como objetivo mostrar os resultados obtidos pelo programa para uma seção “T” de concreto armado. A viga é ilustrada na figura 7.5.

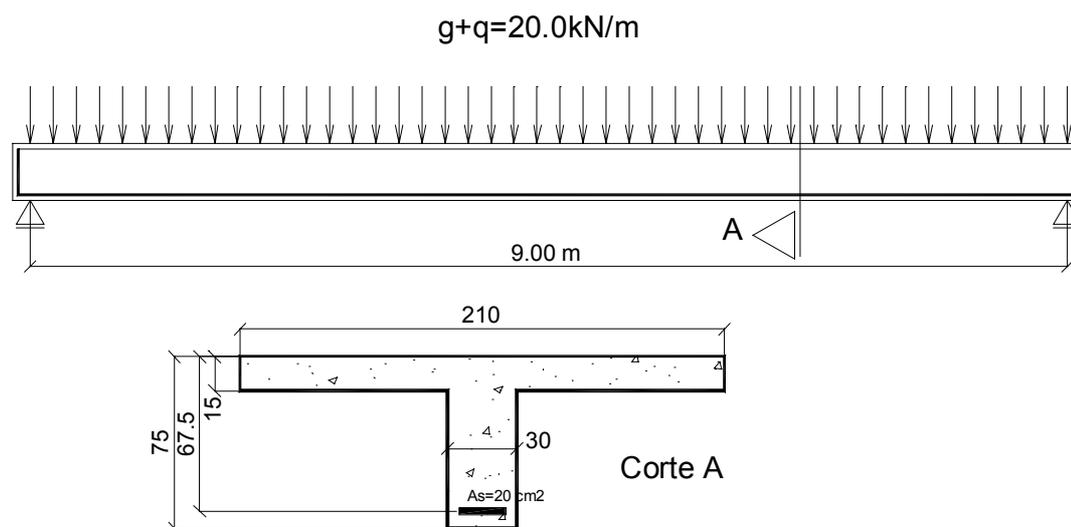


Figura 7.5: Viga do exemplo 7.2.3

Os demais dados deste exemplo são comuns aos exemplos anteriores. Os resultados obtidos, para o deslocamento central da viga foram os seguintes:

- Modelo de Ghali & Favre : 5,75mm para t=28 dias e 9,43 mm para t=10000 dias;
- Modelo de Debernardi : 7,04mm para t=28 dias e 12,34mm para t=10000 dias.

O Bulletin 158 do CEB indica os valores de 6,4mm para o instante de aplicação do carregamento e 13,0mm quando a fluência é considerada. Esses valores são calculados no CEB a partir da transformação da seção T numa seção retangular equivalente e da aplicação do método dos coeficientes globais (ver Bulletin 158).

Para esta viga pode-se observar que houve uma grande diferença entre os dois modelos implementados, esta se deve ao fato de Debernardi equacionar sua formulação para uma seção transversal de forma qualquer (neste trabalho, a seção transversal pode ser no máximo seção “I”). Neste caso, pode-se dizer que os resultados obtidos pelo modelo de Debernardi são mais precisos que os demais. A precisão para seções de forma qualquer constitui-se numa das grandes vantagens do modelo de Debernardi.

7.3-COMPARAÇÃO COM DADOS EXPERIMENTAIS

7.3.1-LABORATÓRIO DE ESTRUTURAS DA EESC-USP

ÁLVARES (1993) propôs um conjunto de três vigas que foram ensaiadas no Laboratório de Engenharia de Estruturas da EESC-USP. Segundo ÁLVARES, a resposta experimental de cada viga foi colhida de uma prova realizada com controle de carga, sendo as leituras tomadas em relógios comparadores posicionados nos apoios e no trecho central, além de extensômetros elétricos nas faces superior, inferior e na armadura tracionada. Os dados relativos às seções transversais das vigas são apresentados na tabela (7.4). A carga “P” foi aplicada no ensaio até provocar a ruptura das vigas. As propriedades mecânicas dos materiais são apresentadas a seguir :

- Módulo de elasticidade do concreto : 29200 MPa;
- Módulo de elasticidade do aço : 196000 MPa.

Empregando-se a expressão do CEB-90 (7.1) para o cálculo do módulo de elasticidade médio do concreto aos 28 dias em função do f_{ck} pode-se determinar o valor da resistência característica do concreto à compressão. Assim com :

$$E_{cm} = 9500(f_{ck} + 8\text{Mpa})^{1/3} \quad (7.1)$$

e

$$29200 = 9500(f_{ck} + 8\text{Mpa})^{1/3} \quad (7.2)$$

resulta $f_{ck}=21,04$ MPa, que é um parâmetro necessário para a análise numérica.

Tabela 7.4 : Viga do exemplo 7.3.1

Caso	A_s (cm ²)	d(cm)	$A's$ (cm ²)	d' (cm)	
1	2,4	27,5	0,2	2,0	Pouco arm.
2	4,0	27,0	0,2	2,0	Normal.arm.
3	5,6	26,0	0,2	2,0	Muito arm.

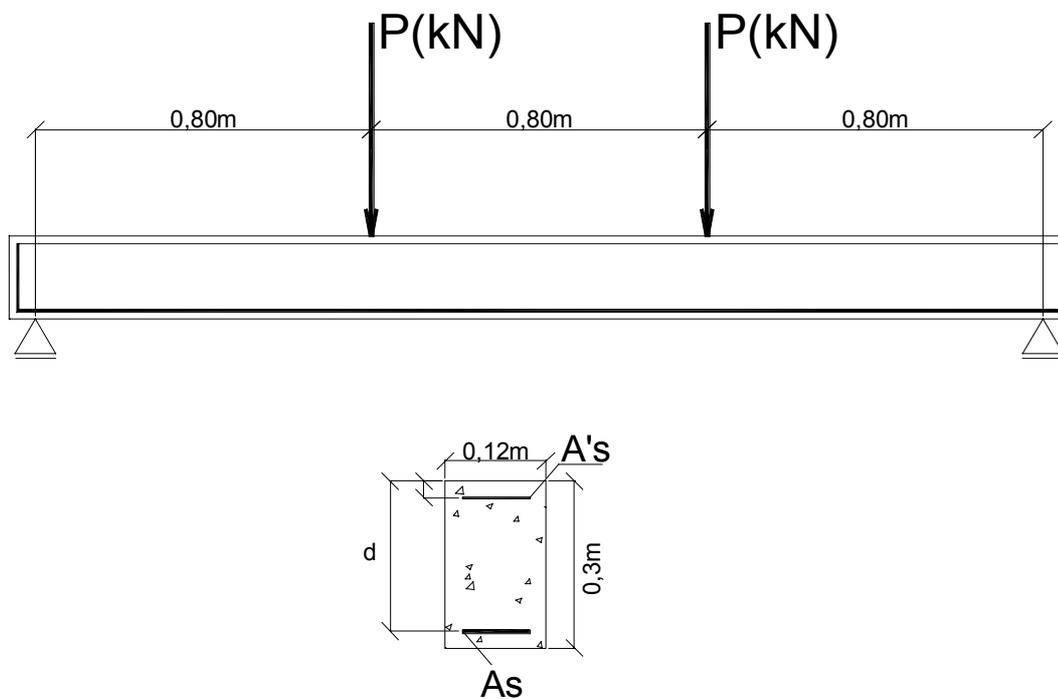


Figura 7.6 :Viga do exemplo 7.3.1

O CEB sugere que o momento de fissuração para uma seção de concreto armado seja calculado da seguinte forma :

$$M_r = \frac{f_{ctm} I_1}{h - x_1} \quad (7.3)$$

O emprego da expressão (7.3) conduz a valores maiores para os deslocamentos, visto que considera uma passagem abrupta do estágio 1 para o estágio 2, desprezando a plastificação na tração. Neste exemplo, pretende-se discutir um fator de correção , “ $c \geq 1$ ”, a ser empregado na expressão (7.3), tal que :

$$M_r = \frac{c f_{ctm} I_1}{h - x_1} \quad (7.4)$$

Utilizou-se apenas o modelo de Ghali & Favre que, para carregamentos instantâneos, conduz a resultados bons quando comparados ao modelo de Debernardi. As vigas foram discretizadas em 30 elementos finitos iguais e a carga foi aplicada do seguinte modo:

- 50 incrementos de 2% cada;
- tolerância exigida no processo iterativo : 0,01%;
- número máximo de iterações : 50;
- a carga aplicada foi $P=100$ kN.

Os resultados obtidos são apresentados a seguir e confrontados com aqueles obtidos nos experimentos de ÁLVARES.

Da interpretação das figuras (7.7) a (7.9) pode-se concluir o seguinte:

- O modelo de Ghali & Favre encontra-se bastante próximo da curva inferior experimental, para ações em serviço – cerca de 70% da carga última – para as seções pouco e normalmente armada;
- Para a seção muito armada, o modelo numérico só é representativo para ações inferiores a 60% da carga última;
 - Acredita-se que isso se deva ao fato de não ser considerada no modelo a plastificação da armadura.
 - A plastificação da armadura também não é contemplada no modelo de DEBERNARDI.

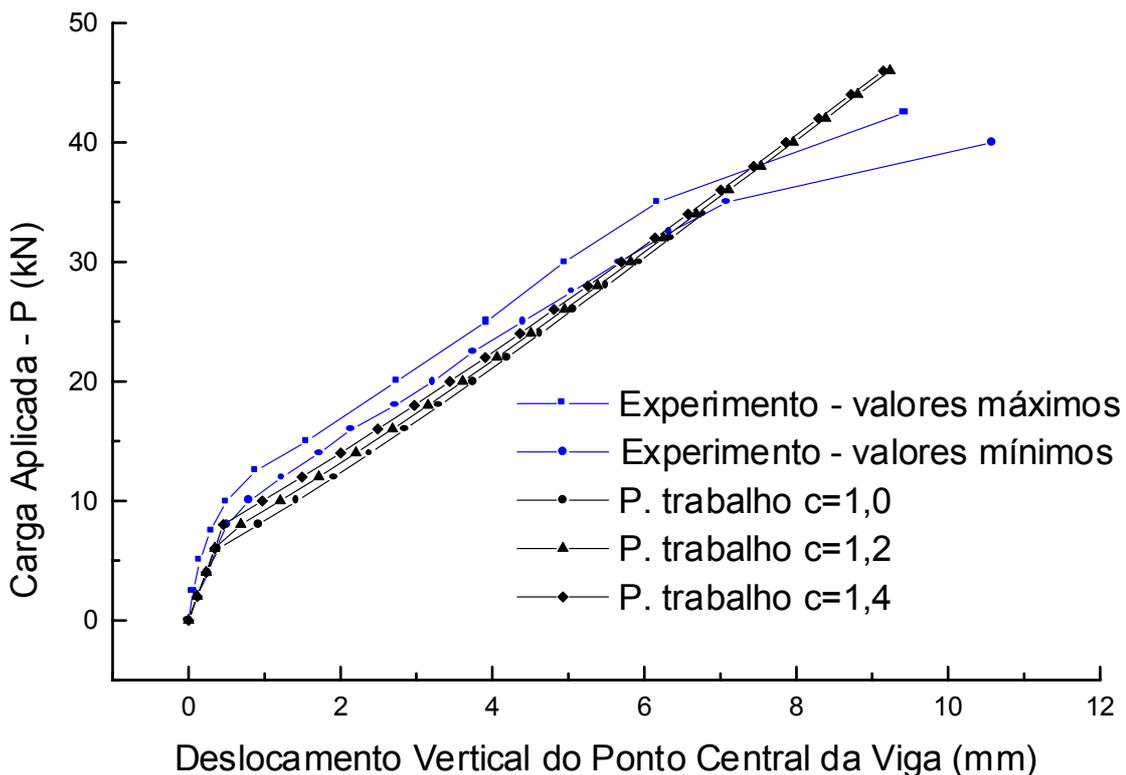


Figura 7.7: Resultados numéricos para viga pouco armada.

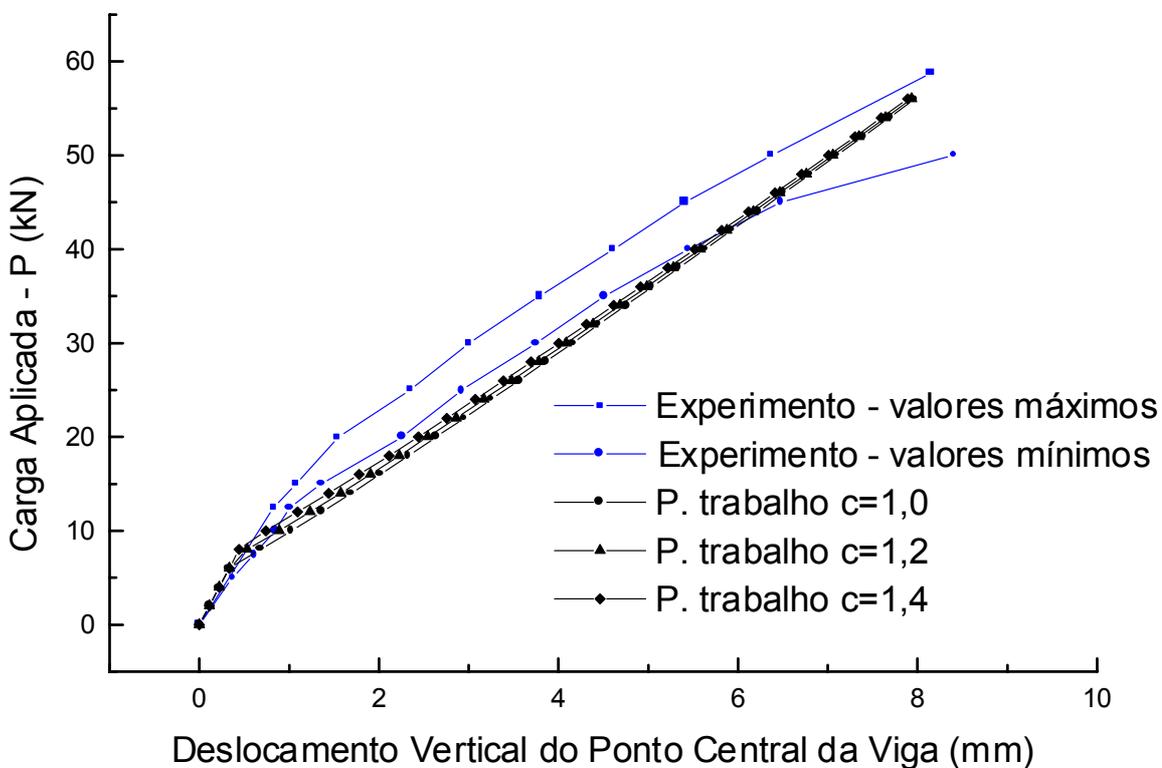


Figura 7.8: Resultados numéricos para viga normalmente armada.

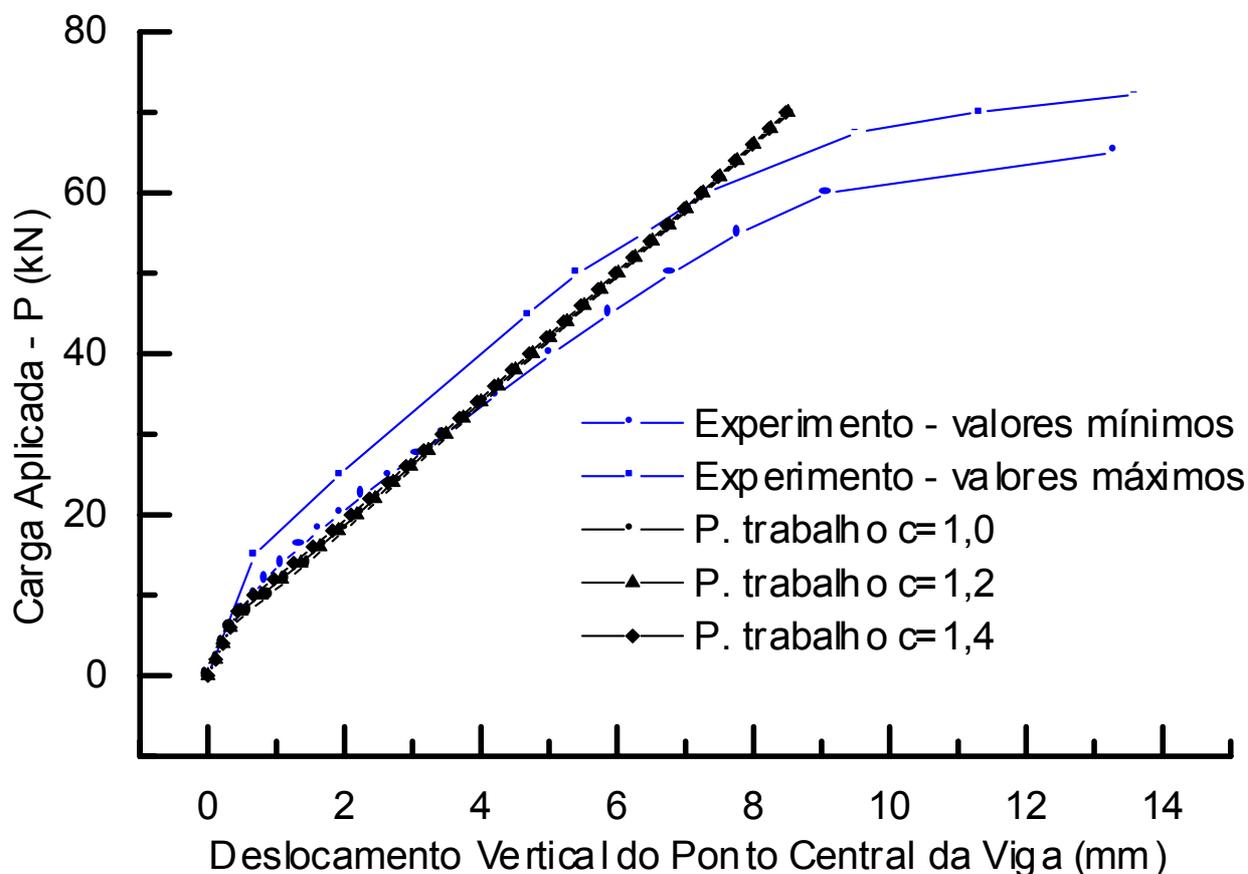


Figura 7.9: Resultados numéricos para viga muito armada.

- Valores de $c=1,0$ na equação (7.4) resultam em deslocamentos muito a favor da segurança
 - Pode-se observar, para este exemplo, que o emprego de um fator $c=1,4$ resulta em uma curva carga x deslocamento bem próximo dos valores mínimos da curva experimental.
- Pode-se concluir, ainda, que os modelos são confiáveis para as ações de serviço nas estruturas de concreto armado.

7.3.2-ENSAIO DE BRESLER e SCORDELIS

Este exemplo visa comparar os resultados obtidos com o programa com outros obtidos em experimentos, para esse fim, utiliza-se uma viga biapoiada de concreto armado ensaiada por BRESSER e SCORDELIS e que consta do trabalho de **OLIVEIRA (1997)**. As características da viga ensaiada são mostradas na figura (7.10). As propriedades mecânicas dos materiais são as seguintes:

- Módulo de elasticidade longitudinal do aço igual a 195456,6 MPa;
- $E_{cm}=23201,7$ MPa
- $f_{ctm}= 2,3413$ MPa.

Os valores acima foram impostos na execução ao programa ou seja, estas variáveis não foram calculadas a partir de f_{ck} .

Deve ser citado que as unidades apresentadas por **OLIVEIRA** eram originalmente polegadas e PSi. Estas foram convertidas para o sistema internacional de unidades, exceto no gráfico abaixo que representa o deslocamento central da viga em relação ao carregamento aplicado (este está localizado na metade do vão).

Foi imposto $c=1,5$ para efetuar uma comparação com os valores de OLIVEIRA. Com $c=1,5$; o momento de fissuração calculado pelo programa desenvolvido condiz com os valores de OLIVEIRA, como pode ser observado no gráfico da figura (7.11).

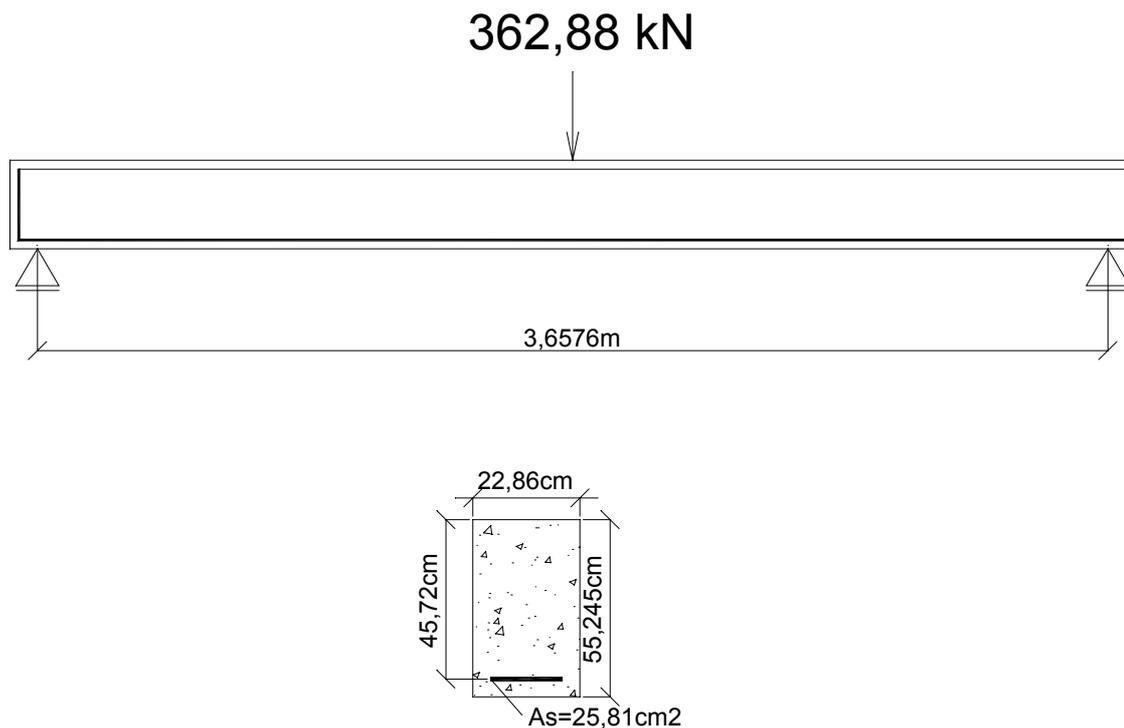


Figura 7.10 : Viga ensaiada por Bresler & Scordelis.

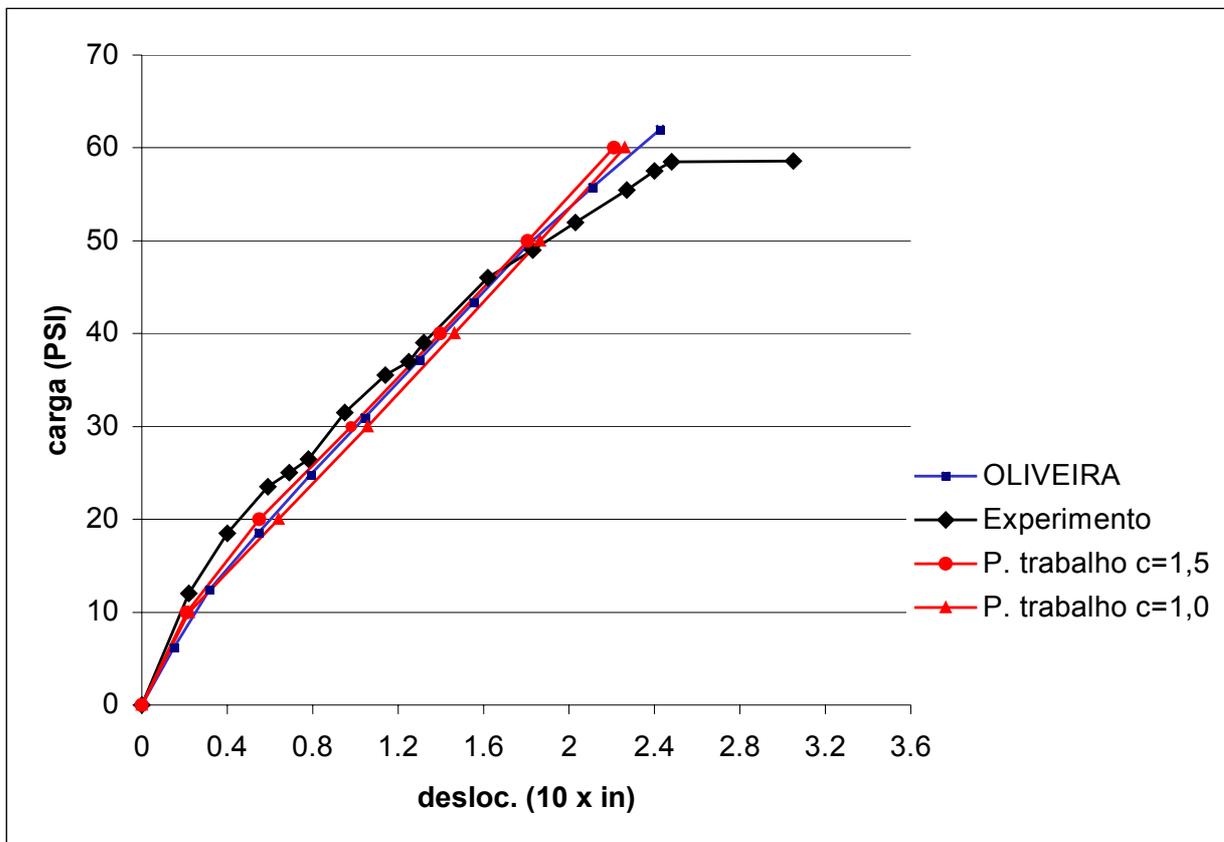


Figura 7.11 : Resultados numéricos para viga ensaiada por BRESLER & SCORDELIS.

7.4-PAVIMENTOS DE EDÍFICIOS

7.4.1-PAVIMENTO FICTÍCIO

Este exemplo tem como objetivo mostrar a redistribuição de esforços ao longo do tempo num pavimento de edifício fictício, figura (7.13), e ilustrar a aplicação de vários carregamentos cada um num instante de tempo. Os dados do pavimento são os seguintes :

- concreto $f_{ck} = 25$ MPa;
- módulo de elasticidade longitudinal do aço igual a 200 GPa;
- barras de aço rugosas.
- considerou-se, para o cálculo dos coeficientes de fluência que a parte da seção exposta ao ambiente corresponde a 50% do perímetro total; umidade relativa do ar de 70% e temperatura média ambiente de 20⁸ C.
- a inércia reduzida à torção foi considerada tal que resultasse um valor bem próximo de zero.

Os carregamentos são os seguintes :

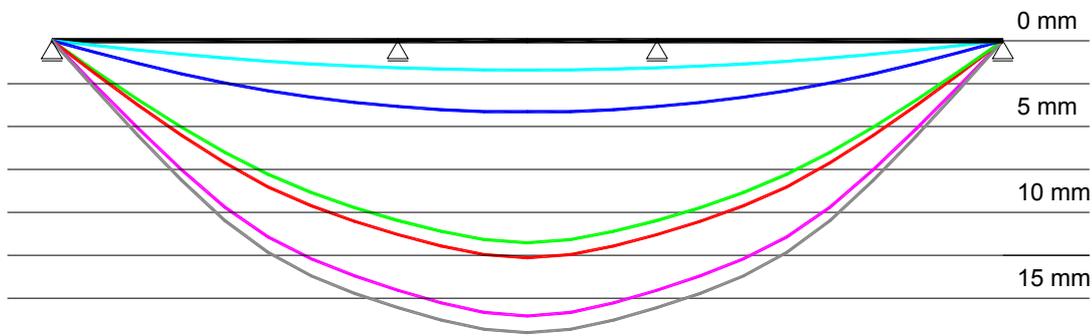
- peso próprio da estrutura $G=7,0$ kN/m, aplicado aos 14 dias após a concretagem;
- sobrecarga devida as alvenarias $Q1=7,0$ kN/m, aplicada aos 150 dias;
- sobrecarga devida a revestimentos $Q2=3,5$ kN/m, aos 300 dias.

Para a resolução do exemplo, o programa foi executado do seguinte modo :

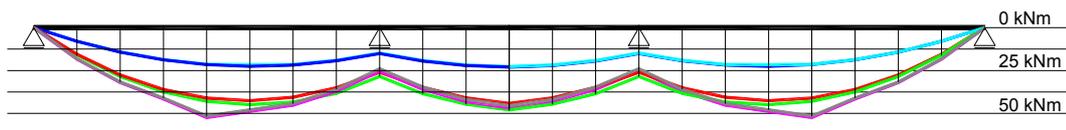
- empregou-se o algoritmo de DEBERNARDI;
- cada carregamento foi aplicado em 4 incrementos de 25% cada;
- tolerância exigida no processo iterativo : 0,5 %;
- número máximo de iterações : 100.
- cada intervalo de tempo foi dividido em 100 sub-intervalos para a consideração da fluência.

Os resultados obtidos, para uma viga, são apresentados a seguir.

a) Deslocamentos ao longo da viga V01



b) Diagrama de momento fletor para viga V01



Legenda :

- | | |
|---|--|
| — Aplicação de G, 14 dias | — Aplicação de Q1, 150 dias |
| — 150 dias | — 300 dias |
| | — Aplicação de Q2, 300 dias |
| | — 1000 dias |

Figura 7.12 : Resultados para viga V01.

Nesse exemplo pode-se observar que houve uma mudança bastante pequena nos esforços solicitantes ao longo da viga e que a estrutura sofre uma perda de rigidez devida à fluência. Entretanto, nesse exemplo, não está sendo considerado o ganho de resistência do concreto ao longo de seu envelhecimento.

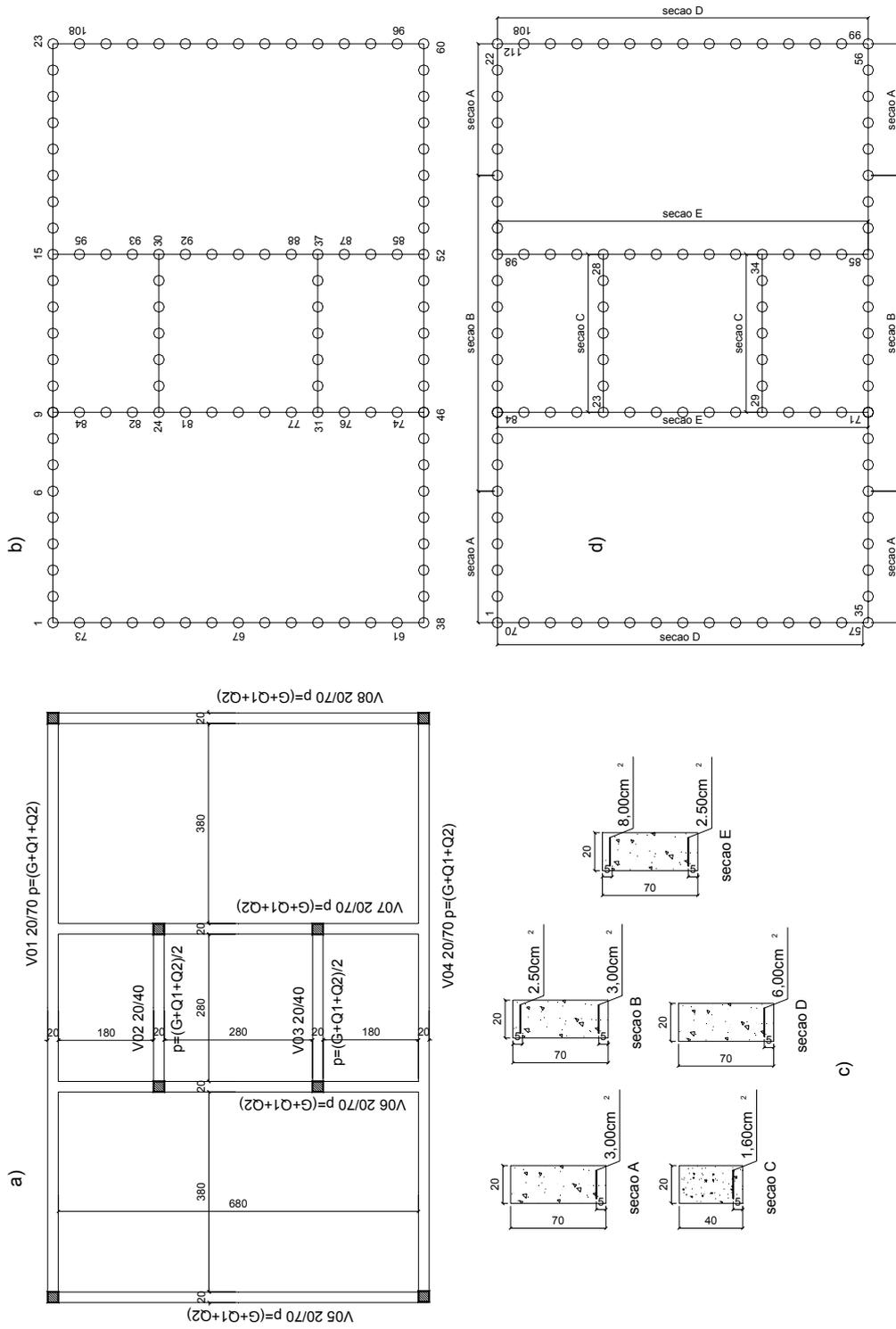


Figura 7.13 : Pavimento fictício.

7.4.2-PAVIMENTO REAL

Esse exemplo tem como objetivo mostrar a aplicação do programa desenvolvido à uma caso prático. Analisou-se o pilotis de um edifício de alvenaria estrutural que foi construído na cidade de Brasília-DF, cujo projeto estrutural foi gentilmente cedido pela empresa TECSOFF – ENGENHARIA DE ESTRUTURAS, da cidade de São Carlos. O pavimento completo é mostrado na figura (7.14).

Na discretização da estrutura foi considerada a simetria e desprezada a caixa da escada, reduzindo assim o piso do edifício ao ilustrado na figura (7.14). Os elementos finitos e nós são mostrados na figura (7.16); e os carregamentos na figura (7.17).

As coordenadas dos nós podem ser encontradas no anexo C; a incidência dos elementos no anexo D e as seções transversais e respectivas armaduras no anexo E. Os demais dados do pavimento são os seguintes :

- concreto $f_{ck} = 20$ MPa;
- módulo de elasticidade longitudinal do aço igual a 200 Gpa;
- barras de aço rugosas;
- considerou-se, para o cálculo dos coeficientes de fluência um perímetro exposto ao ambiente de 50% do perímetro da seção, umidade relativa do ar de 70% e temperatura média ambiente de 20^o C;
- a inércia reduzida à torção foi considerada por : $I_t = hb^3/1200$.
- as seções transversais são mostradas nas tabelas em anexo.
- coordenadas dos nós e incidência dos elementos podem ser encontradas no anexo.

Para a resolução do exemplo, o programa foi executado do seguinte modo :

- empregou-se o algoritmo de DEBERNARDI;
- cada carregamento foi aplicado em 2 incrementos de 50% cada;
- tolerância exigida no processo iterativo : 0.5 %;
- número máximo de iterações : 100;

- consideraram-se três casos para análises : comportamento elástico-linear, comportamento não-linear em “t₀”=28 dias e em “t”=1000 dias;
- o intervalo de tempo foi dividido em 100 sub-intervalos para a consideração da fluência.

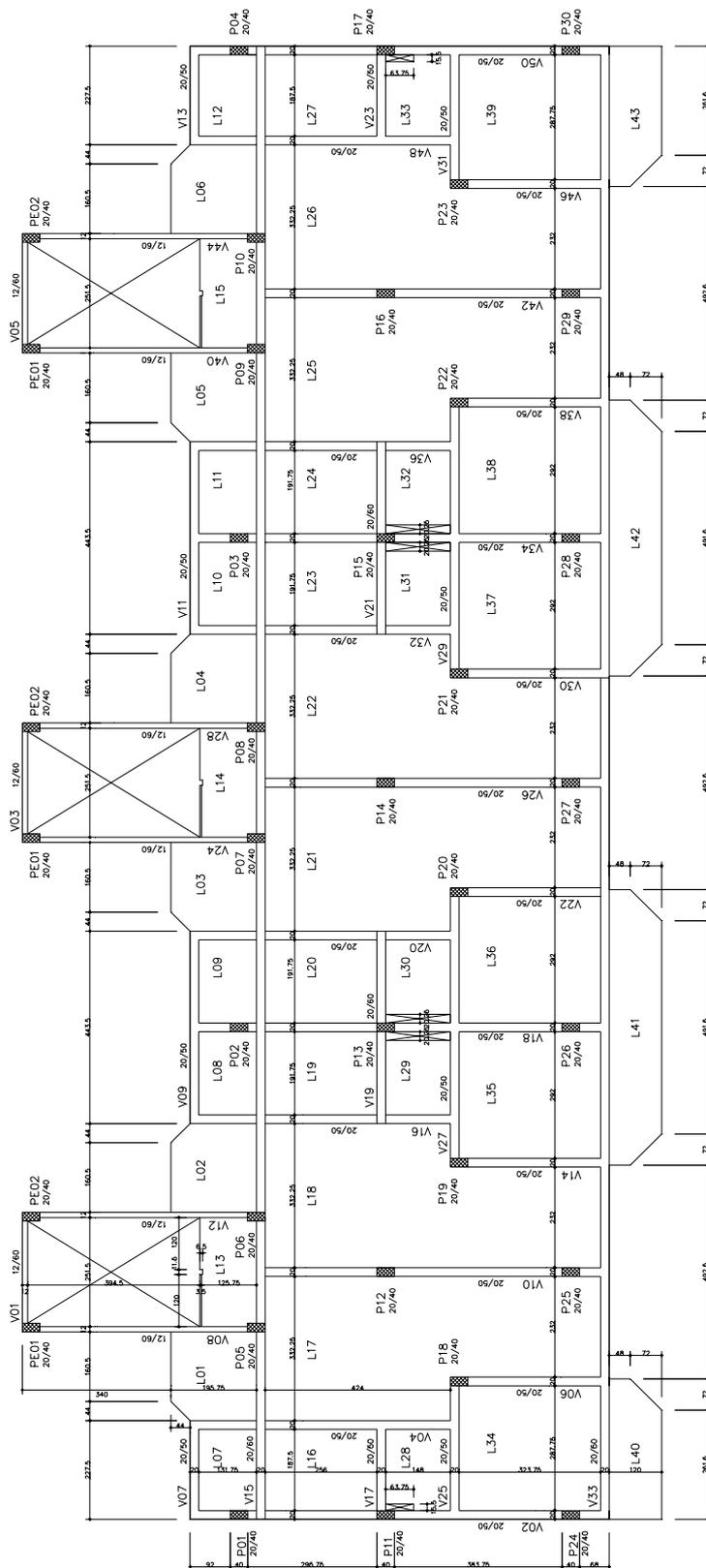


Figura 7.14 : Pavimento : Pilotis de Edifício.

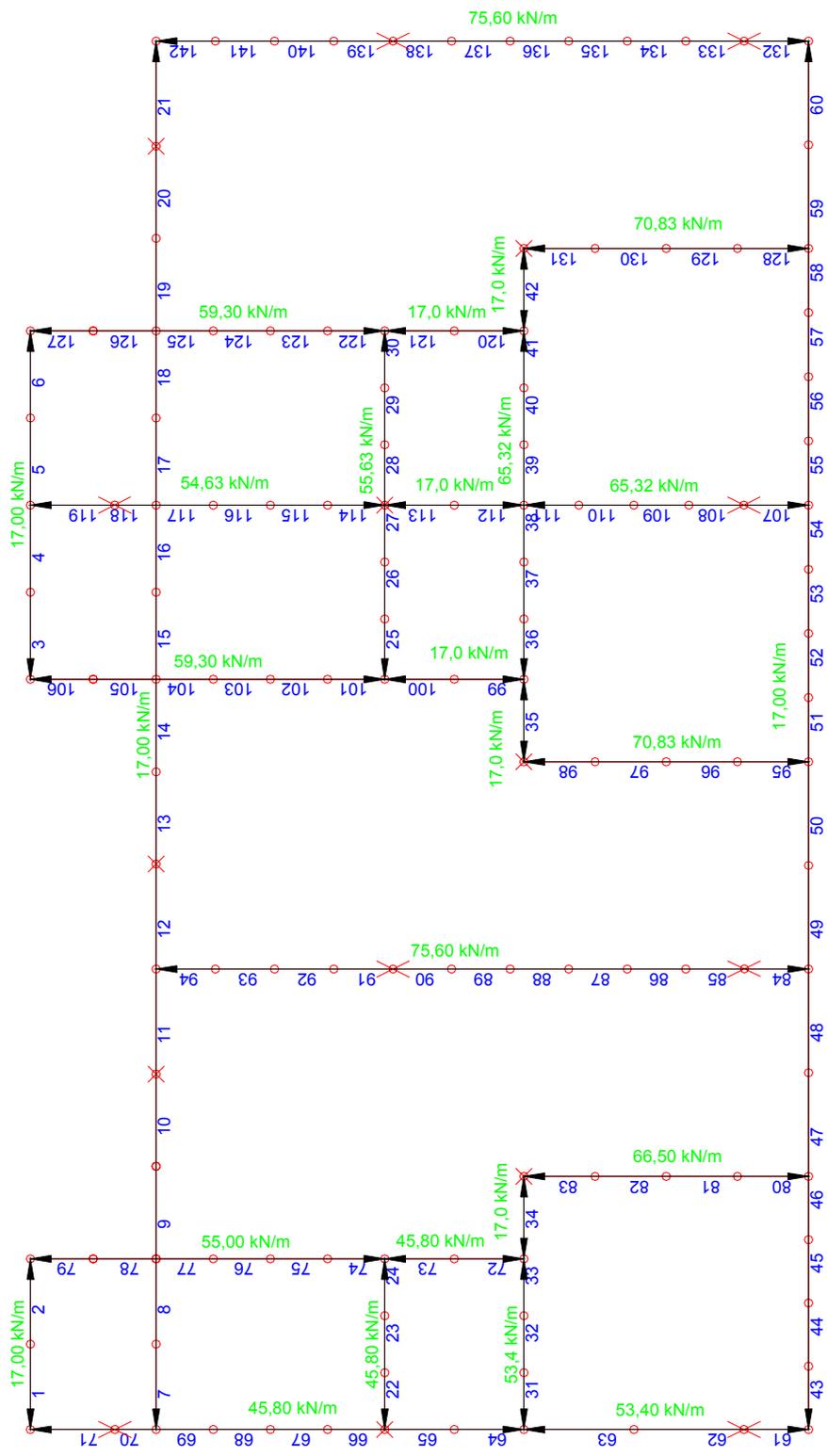


Figura 7.17 : Carregamentos no pavimento.

Alguns dos resultados obtidos são apresentados a seguir:

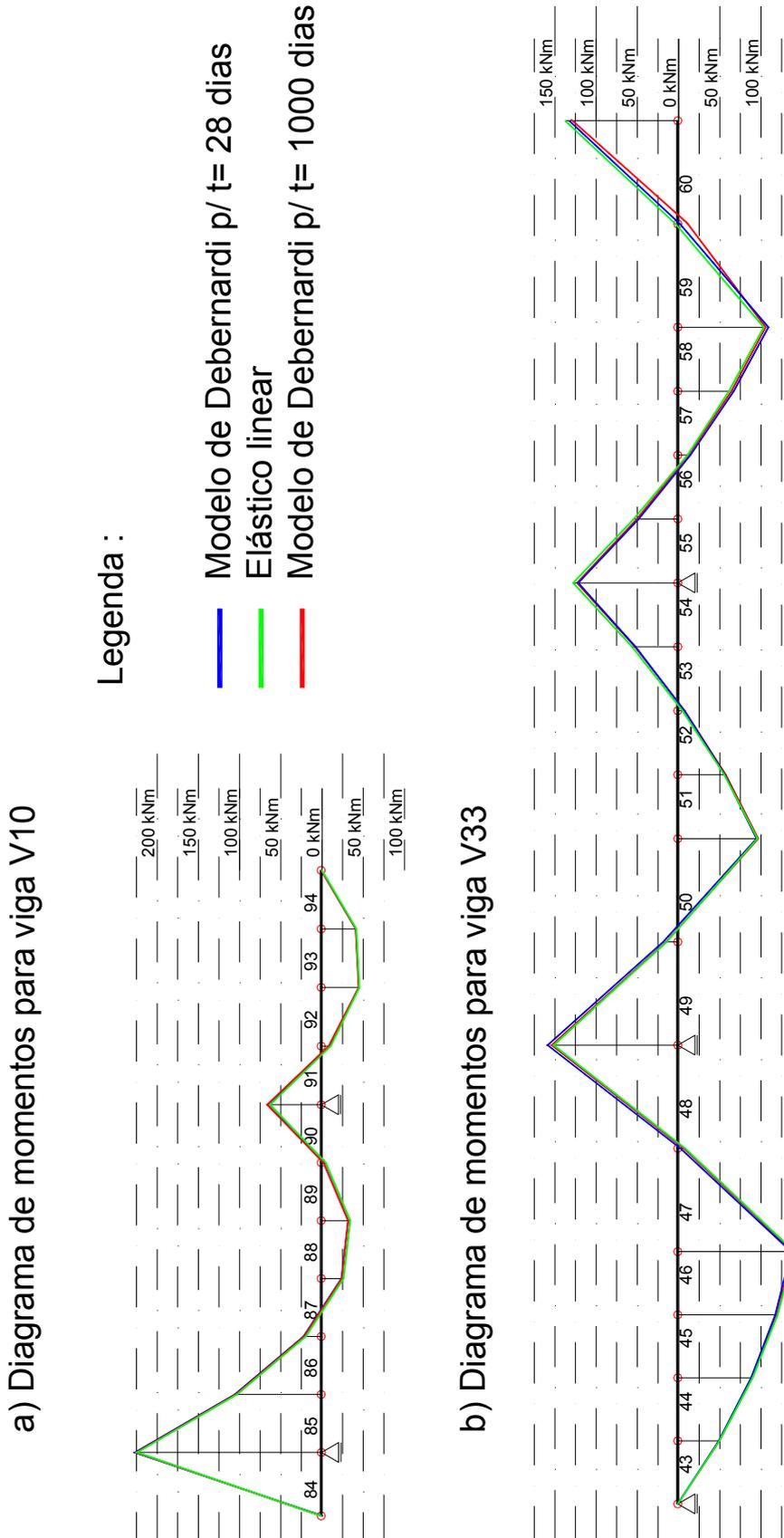


Figura 7.18: Diagramas de momento fletor – exemplo 7.4.2

Tabela 7.5: Deslocamentos em pontos nodais.

Nó	Deslocamento (mm)		
	Elástico linear	Debernardi 28 dias	Debernardi 1000 dias
1	0,10	0,02	-0,23
3	1,25	-2,75	0,02
4	1,24	2,79	4,68
6	0,30	-0,41	-0,43
8	0,79	2,06	3,22
11	2,64	6,33	10,04
14	-0,46	-1,00	1,78
17	1,37	3,99	6,04
19	0,17	0,94	1,35
21	1,04	3,44	4,94
25	-0,82	-2,11	-2,77
29	5,49	14,28	23,32
31	1,93	4,75	7,27
33	2,96	9,58	12,56
37	0,08	0,62	0,79
41	2,36	7,10	10,74
56	5,66	19,85	26,57
57	5,59	19,66	26,44
59	2,25	7,59	10,74
78	2,49	6,83	10,56
91	2,36	4,57	6,86
100	2,36	6,63	10,14
113	1,18	4,99	6,56

Este exemplo permite uma discussão a respeito da redistribuição de momentos fletores nos elementos de barra de um pavimento de edifício; embora foram analisados os diagramas de momentos fletores apenas para duas vigas, as conclusões podem ser generalizadas para todo o pavimento.

Pode-se observar que os esforços obtidos a partir da análise linear praticamente não sofrem redistribuição devida ao comportamento não-linear do pavimento, nem tampouco devida à fluência. Este fato se deve à armação das vigas do pavimento ter sido efetuada de maneira apropriada, ou seja, de acordo com a distribuição de momentos elástico-linear; o que vem a tranquilizar os projetistas de estruturas de concreto armado.

Por outro lado, se não for efetuada uma armação adequada das vigas do pavimento, ocorrerá redistribuição de esforços na análise não-linear e na consideração da fluência. Para ilustrar este fato imagine-se uma viga contínua tal que exigisse a disposição de armadura longitudinal negativa sobre os seus apoios. Se o seu projetista optasse pela omissão dessas armaduras, o máximo momento fletor que seria permitido sobre tais apoios seria aquele correspondente ao momento de fissuração das respectivas seções; dessa forma este poderia ser diferente do momento obtido pela análise elástico-linear.

Outro fato que pode ser notado é relativo ao acréscimo dos deslocamentos devido à fluência. Pode-se observar que a maneira mais apropriada de analisar o comportamento estrutural ao longo da vida útil da estrutura é através do emprego de programas de análise não-linear de estruturas. Embora não foram efetuadas comparações com procedimentos de normas, fica evidenciado pela análise dos deslocamentos da tabela 7.5 que o acréscimo de deslocamentos devido à fluência não é tão grande como a maioria das normas indicam

8-CONCLUSÕES

Através da interpretação dos resultados numéricos obtidos pelo algoritmo computacional desenvolvido pode-se concluir, em relação aos modelos implementados, que para seções retangulares de concreto armado, o modelo simplificado de GHALI & FAVRE para o instante de aplicação do carregamento é mais vantajoso do que o modelo de DEBERNARDI, considerado mais rigoroso do que o primeiro, cujo tempo de processamento é cerca de 50 vezes menor.

Em se tratando de elementos de concreto pouco armado, o modelo de DEBERNARDI conduziu, dentre vários exemplos analisados, a valores de deslocamentos cerca de 1,5% maiores do que os valores obtidos pelo modelo de GHALI & FAVRE. Por outro lado, nos elementos muito armados, os valores são bem próximos para ambos os modelos; este fato se justifica pelo fato de DEBERNARDI indicar que o cálculo da deformação média da armadura tracionada deva ser feito através da interpolação entre os resultados obtidos entre os estádios 1 e 2, que é a hipótese básica do modelo de GHALI & FAVRE.

Desejando-se uma análise estrutural onde as deformações não-imediatas devam ser consideradas, o modelo de DEBERNARDI mostrou-se mais apropriado; do mesmo modo ocorre para as seções transversais de forma qualquer. Isto se deve ao fato deste modelo ser desenvolvido para uma seção transversal de forma qualquer e para um instante qualquer após a aplicação do carregamento.

A análise estrutural de pavimentos de edifícios de concreto armado, onde não houver grandes disparidades entre as rigidezes de cada tramo de viga, pode ser feita em regime elástico-linear para o instante de aplicação

do carregamento. Observou-se que, nestes casos, quando a não-linearidade física é incorporada à análise praticamente não existe redistribuição de esforços, nem para o instante de aplicação do carregamento, nem para um instante qualquer de tempo. Portanto, os pavimentos usuais podem ser armados, de maneira coerente, para os esforços obtidos na estrutura em regime elástico-linear.

A consideração da aplicação de várias fases de carregamento no pavimento, em instantes de tempo específico, foi implementada neste trabalho de maneira simplificada e não conduziu a bons resultados. Entretanto, para seu melhor desempenho, basta efetuar a implementação de rotina que considere o ganho de resistência do concreto ao longo do tempo; isto é bastante simples de ser incorporado ao programa desenvolvido.

Sugere-se para trabalhos futuros a implementação da consideração da retração. Todas as rotinas implementadas encontram-se preparadas para a incorporação da retração; esta é atualmente uma variável cujo valor é nulo. Desse modo, basta ser implementado um elemento finito com um grau de liberdade a mais do que o atual para a consideração de esforços normais que irão ocorrer devido a retração.

ANEXOS

ANEXO A – FORMULAÇÃO PARA SEÇÃO “I” NO ESTÁDIO 1

Considere-se a seção transversal de concreto armado apresentada na figura (A.1) onde todas as suas características geométricas, bem como o plano de atuação dos esforços solicitantes são mostrados. Nesta seção será inicialmente determinada uma equação, em termos daquelas características, para a determinação da posição da linha neutra no estágio 1, posteriormente será calculado o momento de inércia. A seção será homogeneizada e os espaços ocupados pela armadura serão descontados.

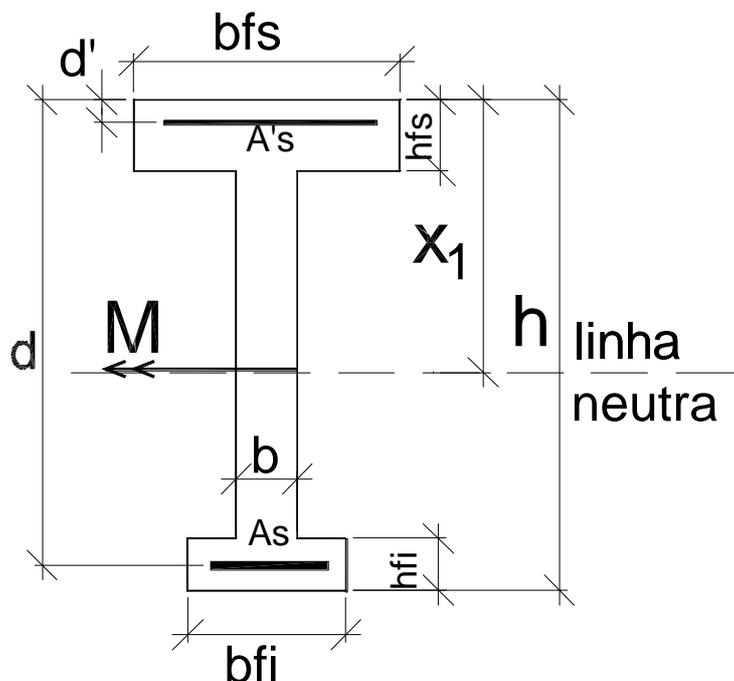


Figura A.1 : Seção em forma de “ I ”.

Aplicando a condição de momento estático nulo ($S_{n,1}=0$) em relação à linha neutra, X_1 :

$$\frac{b \cdot h^2}{2} + \alpha^* \cdot A'_s \cdot (x_1 - d') + \text{auxs} \cdot \text{hfs} \cdot \left(x_1 - \frac{\text{hfs}}{2}\right) +$$

$$- \frac{b \cdot (h - x_1)^2}{2} - \alpha^* \cdot A_s \cdot (d - x_1) - \text{auxi} \cdot \text{hfi} \cdot \left(h - \frac{\text{hfi}}{2} - x_1\right) = 0 \quad (\text{A.1})$$

onde:

$$\begin{aligned} \text{auxs} &= \text{bfs} - b \\ \text{auxi} &= \text{bfï} - b \\ \mathbf{a}^* &= \mathbf{a}_s - 1 \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Isolando-se X_1 , a posição da linha neutra pode ser determinada pela expressão abaixo :

$$x_1 = \frac{\frac{b \cdot h^2}{2} + \alpha^* \cdot (A_s \cdot d + A'_s \cdot d') + \frac{\text{auxs} \cdot \text{hfs}^2}{2} + \text{auxi} \cdot \left(\text{hfi} \cdot h - \frac{\text{hfi}^2}{2}\right)}{b \cdot h + \alpha^* \cdot (A_s + A'_s) + \text{auxs} \cdot \text{hfs} + \text{auxi} \cdot \text{hfi}} \quad \dots(\text{A.3})$$

O momento de inércia no estágio 1 em relação à linha neutra será

$$\begin{aligned} I_{n,1} &= \frac{b \cdot h^3}{12} + b \cdot h \cdot \left(\frac{h}{2} - x_1\right)^2 + \alpha^* \cdot A'_s \cdot (x_1 - d')^2 + \alpha^* \cdot A_s \cdot (d - x_1)^2 + \\ &+ \frac{\text{auxs} \cdot \text{hfs}^3}{12} + \text{auxs} \cdot \text{hfs} \cdot \left(x_1 - \frac{\text{hfs}}{2}\right)^2 + \frac{\text{auxi} \cdot \text{hfi}^3}{12} + \text{auxi} \cdot \text{hfi} \cdot \left(h - \frac{\text{hfi}}{2} - x_1\right)^2 \end{aligned} \quad \dots(\text{A.4})$$

ANEXO B – FORMULAÇÃO PARA SEÇÃO “T” NO ESTÁDIO 2

Serão apresentadas fórmulas práticas para a determinação da posição da linha neutra, X_2 , e do momento de inércia, I_2 , para a seção transversal apresentada na figura (A.2). Impondo-se a condição de momento estático nulo em relação a linha neutra resulta:

$$\frac{b \cdot x_2^2}{2} + \text{auxs} \cdot \text{hfs} \cdot \left(x_2 - \frac{\text{hfs}}{2}\right)^2 + \alpha^* \cdot A_s' \cdot (x_2 - d') - \alpha_s \cdot A_s \cdot (d - x_2) = 0$$

...(A.4)

A expressão acima é uma equação de segundo grau onde apenas uma de suas raízes tem sentido físico (pertence à seção, para flexão simples). Deve-se verificar, inicialmente, se a seção se comporta como se fosse retangular, de base igual a **bfs**. Para esse fim é imposta esta condição, de início, e será aceita se a posição da linha neutra resultante estiver localizada acima da mesa comprimida, desse modo:

$$\begin{aligned} \beta &= 2 \cdot (\alpha_s \cdot A_s + \alpha^* A_s') / \text{bfs} \\ \Delta &= \beta^2 + 8 \cdot (\alpha_s \cdot A_s \cdot d + \alpha^* A_s' \cdot d') / \text{bfs} \\ X_2 &= (-\beta + \sqrt{\Delta}) / 2 \end{aligned}$$

(A.5)

O momento de inércia no estágio 2, deste modo, será dado pela expressão abaixo, confirmada a hipótese de seção retangular:

$$I_2 = \frac{b \cdot x_2^3}{3} + \alpha^* \cdot A_s' \cdot (x_2 - d')^2 + \alpha_s \cdot A_s \cdot (x_2 - d)^2$$

(A.6)

De outra forma, se $x_2 > \text{hfs}$, a seção se comporta de maneira diferente e os cálculos devem ser refeitos, empregando-se as expressões abaixo:

$$\beta = 2.[\text{auxs.hfs} + (\alpha_s.A_s + \alpha^*.A'_s)] / b$$

$$\Delta = \beta^2 + 8.\left(\frac{\text{auxs.hfs}^2}{2} + \alpha_s.A_s.d + \alpha^*.A'_s.d'\right) / b \quad (\text{A.7})$$

$$x_2 = (-\beta + \sqrt{\Delta}) / 2$$

O momento de inércia para o estágio 2, em relação a linha será calculado de acordo com a seguinte fórmula :

$$I_2 = \frac{b.x_2^3}{3} + \alpha_s.A_s.(d - x_2)^2 + \alpha^*.A'_s.(d' - x_2)^2 + \frac{\text{auxs.hfs}^3}{12} + \text{auxs.hfs}.\left(x_2 - \frac{\text{hfs}}{2}\right)^2 \quad (\text{A.8})$$

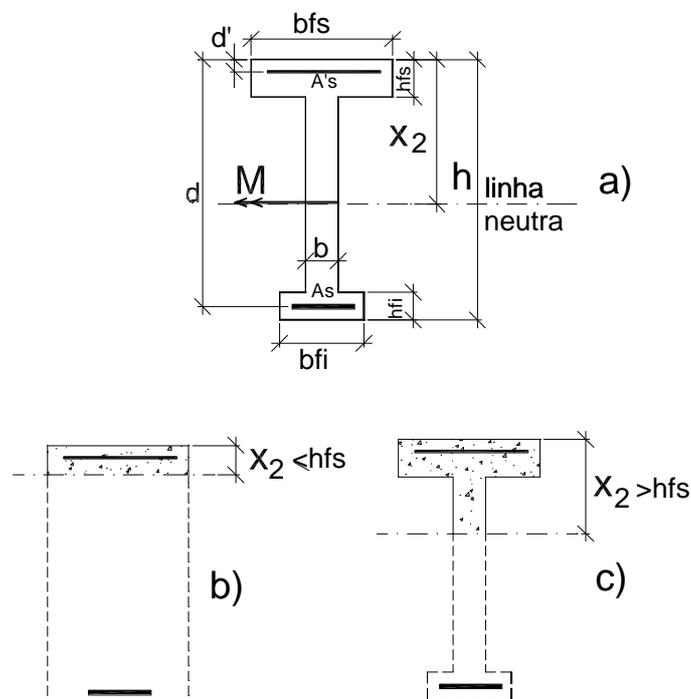


Figura A.2: Estádio 2 : a) seção transversal; b) comportamento de seção retangular; c) comportamento de seção “ I”

ANEXO C – COORDENADAS DOS NÓS DO EXEMPLO 7.4.2**Tabela A.1 : Coordenadas do exemplo 7.4.2**

Nó	x (cm)	y (cm)	Nó	x (cm)	y (cm)	Nó	x (cm)	y (cm)
1	100.00	1039.50	51	100.00	310.88	101	1435.50	527.75
2	203.75	1039.50	52	100.00	178.00	102	1435.50	443.75
3	307.50	1039.50	53	307.50	963.63	103	1535.75	443.75
4	1012.00	1039.50	54	307.50	818.75	104	1535.75	357.81
5	1117.88	1039.50	55	307.50	749.75	105	1535.75	271.88
6	1223.75	1039.50	56	307.50	680.75	106	1535.75	185.94
7	1329.63	1039.50	57	307.50	611.75	107	1787.75	816.25
8	1435.50	1039.50	58	307.50	527.75	108	1787.75	744.75
9	100.00	887.75	59	307.50	443.75	109	1787.75	673.25
10	203.75	887.75	60	407.75	443.75	110	1787.75	601.75
11	307.50	887.75	61	407.75	357.81	111	1787.75	531.13
12	419.75	887.75	62	407.75	271.88	112	1787.75	460.50
13	532.00	887.75	63	407.75	185.94	113	1787.75	389.88
14	659.75	887.75	64	659.75	816.25	114	1787.75	319.25
15	787.50	887.75	65	659.75	744.75	115	1787.75	248.63
16	899.75	887.75	66	659.75	673.25	116	1787.75	178.00
17	1012.00	887.75	67	659.75	601.75	117	169.10	611.75
18	1117.88	887.75	68	659.75	531.13	118	238.30	611.75
19	1223.75	887.75	69	659.75	460.50	119	169.10	443.75
20	1329.63	887.75	70	659.75	389.88	120	238.30	443.75
21	1435.50	887.75	71	659.75	319.25	121	1085.35	611.75
22	1547.75	887.75	72	659.75	248.63	122	1154.55	611.75
23	1660.00	887.75	73	659.75	178.00	123	1297.10	611.75
24	1787.75	887.75	74	1012.00	963.63	124	1366.30	611.75
25	100.00	100.00	75	1012.00	818.75	125	1085.35	443.75
26	176.94	100.00	76	1012.00	749.75	126	1154.50	443.75
27	253.88	100.00	77	1012.00	680.75	127	1297.10	443.75
28	330.81	100.00	78	1012.00	611.75	128	1366.30	443.75
29	407.75	100.00	79	1012.00	527.75			
30	533.75	100.00	80	1012.00	443.75			

ANEXOS

Tabela A.1 : Coordenadas do exemplo 7.4.2 (continuação)

31	659.75	100.00	81	911.75	443.75
32	785.75	100.00	82	911.75	357.81
33	911.75	100.00	83	911.75	271.88
34	989.75	100.00	84	911.75	185.94
35	1067.75	100.00	85	1223.75	937.50
36	1145.75	100.00	86	1223.75	818.75
37	1223.75	100.00	87	1223.75	749.75
38	1301.75	100.00	88	1223.75	680.75
39	1379.75	100.00	89	1223.75	611.75
40	1457.75	100.00	90	1223.75	527.75
41	1535.75	100.00	91	1223.75	443.75
42	1661.75	100.00	92	1223.75	377.31
43	1787.75	100.00	93	1223.75	310.88
44	100.00	937.50	94	1223.75	244.44
45	100.00	818.75	95	1223.75	178.00
46	100.00	749.75	96	1435.50	963.63
47	100.00	680.75	97	1435.50	818.75
48	100.00	611.75	98	1435.50	749.75
49	100.00	527.75	99	1435.50	680.75
50	100.00	443.75	100	1435.50	611.75

ANEXO D – INCIDÊNCIA DAS BARRAS DO EXEMPLO 7.4.2**Tabela A.2 : Incidência das barras do exemplo 7.4.2**

Barra	Nó inicial	Nó final	Barra	Nó inicial	Nó final	Barra	Nó inicial	Nó final
1	1	2	51	33	34	101	78	77.00
2	2	3	52	34	35	102	77	76
3	4	5	53	35	36	103	76	75
4	5	6	54	36	37	104	75	17
5	6	7	55	37	38	105	17	74
6	7	8	56	38	39	106	74	4
7	9	10	57	39	40	107	37	95
8	10	11	58	40	41	108	95	94
9	11	12	59	41	42	109	94	93
10	12	13	60	42	43	110	93	92
11	13	14	61	25	52	111	92	91
12	14	15	62	52	51	112	91	90
13	15	16	63	51	50	113	90	89
14	16	17	64	50	49	114	89	88
15	17	18	65	49	48	115	88	87
16	18	19	66	48	47	116	87	86
17	19	20	67	47	46	117	86	19
18	20	21	68	46	45	118	19	85
19	21	22	69	45	9	119	85	6
20	22	23	70	9	44	120	102	101
21	23	24	71	44	1	121	101	100
22	48	117	72	59	58	122	100	99
23	117	118	73	58	57	123	99	98
24	118	57	74	57	56	124	98	97
25	78	121	75	56	55	125	97	21
26	121	122	76	55	54	126	21	96
27	122	89	77	54	11	127	96	8
28	89	123	78	11	53	128	41	106
29	123	124	79	53	3	129	106	105
30	124	100	80	29	63	130	105	104

ANEXOS

Tabela A.2 : Incidência das barras do exemplo 7.4.2 (continuação)

31	50	119	81	63	62	131	104	103
32	119	120	82	62	61	132	43	116
33	120	59	83	61	60	133	116	115
34	59	60	84	31	73	134	115	114
35	81	80	85	73	72	135	114	113
36	80	125	86	72	71	136	113	112
37	125	126	87	71	70	137	112	111
38	126	91	88	70	69	138	111	110
39	91	127	89	69	68	139	110	109
40	127	128	90	68	67	140	109	108
41	128	102	91	67	66	141	108	107
42	102	103	92	66	65	142	107	24
43	25	26	93	65	64			
44	26	27	94	64	14			
45	27	28	95	33	84			
46	28	29	96	84	83			
47	29	30	97	83	82			
48	30	31	98	82	81			
49	31	32	99	80	79			
50	32	33	100	79	78			

ANEXO E – SEÇÕES TRANSVERSAIS E ARMADURAS DOS ELEMENTOS DO EXEMPLO 7.4.2

Tabela A.3 : Seções transversais dos elementos.

Elemento	B (cm)	H (cm)	A's (cm ²)	d' (cm)	As (cm ²)	d (cm)
1	20	50	1.6	3	1.6	47
2	20	50	1.6	3	1.6	47
3	20	50	2.5	3	1.6	47
4	20	50	3.75	3	1.6	47
5	20	50	3.75	3	1.6	47
6	20	50	2.5	3	1.6	47
7	20	60	2.5	3	10	57
8	20	60	2.5	3	14	57
9	20	60	4	3	14	57
10	20	60	8	3	8.5	57
11	20	60	8	3	2.5	57
12	20	60	5	3	2.5	57
13	20	60	5	3	6	57
14	20	60	2.5	3	10	57
15	20	60	4	3	10	57
16	20	60	8	3	6	57
17	20	60	8	3	6	57
18	20	60	4	3	10	57
19	20	60	2.5	3	10	57
20	20	60	5	3	6	57
21	20	60	5	3	4	57
22	20	50	1.6	3	1.6	47
23	20	50	1.6	3	1.6	47
24	20	50	1.6	3	1.6	47
25	20	60	6	3	2.5	57
26	20	60	10	3	2.5	57
27	20	60	10	3	2.5	57
28	20	60	10	3	2.5	57
29	20	60	10	3	2.5	57
30	20	60	6	3	2.5	57

Tabela A.3 : Seções transversais dos elementos (continuação).

31	20	50	1.6	3	6	47
32	20	50	1.6	3	6	47
33	20	50	1.6	3	6	47
34	20	50	1.6	3	6	47
35	20	50	1.6	3	6	47
36	20	50	1.6	3	6	47
37	20	50	1.6	3	6	47
38	20	50	1.6	3	4	47
39	20	50	1.6	3	4	47
40	20	50	1.6	3	6	47
41	20	50	1.6	3	6	47
42	20	50	1.6	3	6	47
43	20	50	1.6	3	4	47
44	20	50	0.6	3	8	47
45	20	50	0.6	3	8	47
46	20	50	0.6	3	8	47
47	20	50	0.6	3	8	47
48	20	50	8	3	4	47
49	20	50	8	3	4	47
50	20	50	0.6	3	6	47
51	20	50	0.6	3	6	47
52	20	50	0.6	3	4	47
53	20	50	6	3	4	47
54	20	50	6	3	4	47
55	20	50	6	3	4	47
56	20	50	6	3	4	47
57	20	50	0.6	3	4	47
58	20	50	0.6	3	8	47
59	20	50	0.6	3	8	47
60	20	50	6	3	4	47

Tabela A.3 : Seções transversais dos elementos (continuação).

61	20	50	3.75	3	4	47
62	20	50	3.75	3	4	47
63	20	50	6	3	6	47
64	20	50	6	3	6	47
65	20	50	6	3	4	47
66	20	50	6	3	2.5	47
67	20	50	6	3	2.5	47
68	20	50	6	3	2.5	47
69	20	50	3.75	3	2.5	47
70	20	50	3.75	3	2.5	47
71	20	50	3.75	3	2.5	47
72	20	50	1.6	3	4	47
73	20	50	1.6	3	6	47
74	20	50	10	3	6	47
75	20	50	10	3	4	47
76	20	50	10	3	4	47
77	20	50	10	3	4	47
78	20	50	10	3	4	47
79	20	50	10	3	4	47
80	20	50	1.6	3	5	47
81	20	50	1.6	3	5	47
82	20	50	2.5	3	5	47
83	20	50	2.5	3	2.5	47
84	20	50	10	3	2.5	47
85	20	50	10	3	2.5	47
86	20	50	10	3	2.5	47
87	20	50	10	3	3.75	47
88	20	50	2.5	3	3.75	47
89	20	50	5	3	2.5	47
90	20	50	5	3	2.5	47
91	20	50	5	3	2.5	47
92	20	50	5	3	2.5	47

ANEXOS

Tabela A.3 : Seções transversais dos elementos (continuação).

93	20	50	2.5	3	3.75	47
94	20	50	1.6	3	3.75	47
95	20	50	1.6	3	5	47
96	20	50	1.6	3	5	47
97	20	50	2.5	3	5	47
98	20	50	2.5	3	2.5	47
99	20	50	1.6	3	2.5	47
100	20	50	1.6	3	3.75	47
101	20	50	4	3	3.75	47
102	20	50	4	3	3.75	47
103	20	50	8	3	2.5	47
104	20	50	8	3	2.5	47
105	20	50	8	3	1	47
106	20	50	8	3	1	47
107	20	50	10	3	6	47
108	20	50	10	3	6	47
109	20	50	10	3	6	47
110	20	50	10	3	14	47
111	20	50	6	3	14	47
112	20	50	14	3	14	47
113	20	50	14	3	2.5	47
114	20	50	14	3	2.5	47
115	20	50	14	3	2.5	47
116	20	50	24	3	2.5	47
117	20	50	10	3	3.75	47
118	20	50	10	3	3.75	47
119	20	50	10	3	3.75	47
120	20	50	1.6	3	2.5	47
121	20	50	1.6	3	3.75	47
122	20	50	4	3	3.75	47
123	20	50	4	3	3.75	47
124	20	50	8	3	2.5	47

Tabela A.3 : Seções transversais dos elementos (continuação).

126	20	50	8	3	1	47
127	20	50	8	3	1	47
128	20	50	1.6	3	5	47
129	20	50	1.6	3	5	47
130	20	50	2.5	3	5	47
131	20	50	2.5	3	2.5	47
132	20	50	8	3	4	47
133	20	50	8	3	4	47
134	20	50	8	3	4	47
135	20	50	4	3	4	47
136	20	50	2.5	3	4	47
137	20	50	5	3	4	47
138	20	50	5	3	4	47
139	20	50	5	3	2.5	47
140	20	50	5	3	2.5	47
141	20	50	1.6	3	3.75	47
142	20	50	1.6	3	3.75	47

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁLVARES, M.S. (1993); *Estudo de um modelo para o concreto: formulação, identificação paramétrica e aplicação do método dos elementos finitos*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP.

AMERICAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS (1982). *State-of-the-art report on finite element analysis of reinforced concrete*. New York. ASCE.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1978). *NB-1 – Projeto e execução de obras de concreto armado*. Rio de Janeiro.

____ (1984). *NBR 8681 – Ações e segurança nas estruturas*. Rio de Janeiro.

BATHE, K. J. and CIMENTO, A. P. (1980). Some practical procedures for the solution of nonlinear finite element equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. V. 22, n. 1, 59-85, April 1980.

BAZANT, Z. P. (1982). *Creep and Shrinkage in Concrete Structures*. Chichester, John Willey & Sons. 2ª. edição.

BRESLER, B. ; SCORDELIS, A.C. (1963). Shear strength of reinforced concrete beams. *Proc. of the American Concrete Institute*, v. 60 n8 1 p.51-74.

CAMARA, J. M. M. N. (1988). Comportamento em serviço das estruturas de betão armado e pré-esforçado. Tese (Doutorado). Departamento de Engenharia Civil, Universidade Técnica de Lisboa.

CHEN, W. F. (1982). *Plasticity in reinforced concrete*. New York. MacGraw-Hill.

BIBLIOGRAFIA

- CHEN, W. F. and ZHANG, H. (1990). *Structural plasticity : Theory, problems and CAE Software*. Indiana, Springer-Verlag.
- CILONI, A. D. (1993). Sobre o comportamento em serviço Estruturas Planas de Concreto Armado. Tese (Doutorado) - Departamento de Engenharia de Estruturas, EESC-USP.
- CEB; Manual on cracking and deformations; Bulletin n8 158; 1985
- COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON (1990). CEB-FIP Model Code 1990.
- CORREA, M. R. S. (1990). *Aperfeiçoamento dos modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios*. Tese (Doutorado). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- DEBERNARDI, P. G. (1983). La Deformazione Differita in C. A. Sogette a Fessurazione: Considerazioni sui Metodi Approssimati di Calcolo. *L'Industria Italiana del Cemento*. Roma. V. 7/8, pg. 499-510 .
- FUSCO, P. B. (1986). *Estruturas de concreto: solicitações normais*. Rio de Janeiro, Guanabara Dois. 2ª.edição.
- GHALI, A. and FAVRE, R. (1986). *Concrete structures: stress and deformations*. Chapman and Hall, 1ª. edição.
- LEONHARDT, FRITZ (1977). *Construções de concreto - volume 1 : Princípios básicos para o dimensionamento das estruturas de concreto armado*. Tradução. Rio de Janeiro, Interciência. 1ª. edição.
- MACHADO, C. P. (1989). *Tensões, deformações e deslocamentos em estruturas de concreto armado e protendido*. Dissertação de Mestrado. Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

BIBLIOGRAFIA

- MUNAIAR NETO, J. (1994). *Modelos de comportamento viscoelástico e viscoplástico na análise de estruturas planas*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- NEVILE, A. M. (1983). *Creep of Plain and Structural Concrete*. New York. London Construction Press.
- OLIVEIRA, R. S. (1997). *Análise de pavimentos de concreto armado com a consideração da não-linearidade física*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- OWEN, D. R. J. and HINTON, H. (1980). *Finite Element in Plasticity : Theory and Practice*. Swansea, Pineridge Press Ltd.
- PROENÇA, S. P. B. (1986). *Noções Básicas de Reologia*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - Publicações. Publicação 045/86.
- PROENÇA, S. P. B. (1996). Notas de Aula da Disciplina Análise Não-linear de Estruturas. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, Departamento de Engenharia de Estruturas.
- SAVASSI, W. (1996). *Introdução ao Método dos Elementos Finitos em Análise Linear de Estruturas*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos - Publicações. 1ª. edição.
- ZIENKIEWICS, O. C.; VALLIAPAN, S.; KING, I.P. (1969). Elasto-plastic solutions on engineering problems – ‘initial stress’, finite element approach. *Int. Journal of Num. Methods in Engineering*, V.1, p.75-100.