

**CONTRIBUIÇÃO DA RIGIDEZ TRANSVERSAL À FLEXÃO  
DAS LAJES NA DISTRIBUIÇÃO DOS ESFORÇOS EM  
ESTRUTURAS DE EDIFÍCIOS DE ANDARES MÚLTIPLOS, EM  
TEORIA DE SEGUNDA ORDEM**

**Carlos Humberto Martins**

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos  
da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para  
obtenção do Título de Mestre em Engenharia de Estruturas

**ORIENTADORA : Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Helena M. C. Carmo Antunes**

São Carlos

1998

**Aos meus pais,  
Francisco e Tereza**

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, sempre presente em qualquer momento.

À Professora Helena, pela orientação, confiança e paciência durante a elaboração deste trabalho.

A todos os professores, funcionários e amigos do Departamento de Engenharia de Estruturas pelo convívio e dos momentos de descontração.

Aos meus amigos, conquistados durante o período de graduação, que continuaram aqui em São Carlos.

À FAPESP - Fundação de Apoio a Pesquisa do Estado de São Paulo, pela bolsa de estudos concedida.

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 01 : Consideração das excentricidades entre viga-pilar .....   | 09 |
| Figura 02 : Excentricidade laje-viga .....  | 10 |
| Figura 03 : Sistema de referência global do edifício .....  | 12 |
| Figura 04 : Sistema de referência local das vigas .....   | 12 |
| Figura 05 : Sistema de referência das lajes .....   | 13 |
| Figura 06 : Sistema de referência local dos pilares.....  | 13 |
| Figura 07 : Sistema de referência da subestrutura .....   | 14 |
| Figura 08 : Coordenadas deslocamentos locais de um trecho de viga.....  | 15 |
| Figura 09 : Coordenadas deslocamentos de corpo rígido da laje.....  | 16 |
| Figura 10 : Coordenadas deslocamentos do elemento finito DKT .....  | 17 |
| Figura 11 : Coordenadas deslocamentos de um trecho de pilar.....  | 18 |
| Figura 12 : Coordenadas deslocamentos da subestrutura .....   | 19 |
| Figura 13 : Trecho de viga entre nós de pilares .....   | 21 |
| Figura 14 : Distância dos eixos do pilar à origem.....  | 29 |
| Figura 15 : Elemento finito DKT com nove graus de liberdade.....  | 31 |
| Figura 16 : Deslocamento segundo a teoria de Kirchhoff .....  | 33 |
| Figura 17 : Convenções positivas das rotações $\beta_Y$ e $\beta_Z$ .....   | 33 |
| Figura 18 : Disposição inicial dos pontos nodais no elemento DKT nas coordenadas<br>homogêneas $\xi$ e $\eta$ ..... | 37 |
| Figura 19 : Coordenadas dos nós do lado ij do elemento DKT .....  | 39 |
| Figura 20 : Elemento quadrangular formado a partir de 4 elementos DKT .....   | 45 |
| Figura 21 : Subestruturação em paralelo.....  | 49 |

|  |    |
|--|----|
| Figura 22 : Subestruturação em série.....  | 57 |
| Figura 23 : Carga uniformemente distribuída no elemento de viga.....               | 60 |
| Figura 24 : Forças nodais no elemento DKT .....                                    | 61 |
| Figura 25 : Algoritmo da análise iterativa em teoria de 2ª ordem .....             | 65 |
| Figura 26 : Processo de montagem da matriz de rigidez global da estrutura.....     | 69 |
| Figura 27 : Janela inicial com as informações sobre o programa .....               | 73 |
| Figura 28 : Menu Principal de entrada de dados.....                                | 74 |
| Figura 29 : Menu de dados gerais da estrutura .....                                | 74 |
| Figura 30 : Menu Opção ABRIR .....   | 75 |
| Figura 31 : Menu Opção SALVAR .....  | 75 |
| Figura 32 : Menu Opção de entrada de dados.....                                    | 76 |
| Figura 33 : Menu Opção de entrada de dados.....                                    | 77 |
| Figura 34 : Menu Opção de entrada de dados.....                                    | 77 |
| Figura 35 : Menu Opção de entrada de dados.....                                    | 78 |
| Figura 36 : Janela para geração de uma malha de elementos finitos .....            | 79 |
| Figura 37 : Janela para informação de elementos finitos quadrangulares .....       | 79 |
| Figura 38 : Janela para informação de elementos finitos triangulares.....          | 80 |
| Figura 39 : Janela para retirar um quadrângulo de elementos finitos .....          | 80 |
| Figura 40 : Janela para geração de elementos de barra.....                         | 81 |
| Figura 41 : Janela para informação de elementos de barra .....                     | 81 |
| Figura 42 : Janela para informação de características geométricas dos pilares..... | 82 |
| Figura 43 : Janela para geração de características geométricas dos pilares.....    | 82 |
| Figura 44 : Janela para informação de carga devida à ação do vento.....            | 83 |
| Figura 45 : Janela para geração de carga devida à ação do vento.....               | 83 |

|   |     |
|---|-----|
| Figura 46 : Janela para escolha da opção e/ou opções de modelos de análise..... | 84  |
| Figura 47 : Janela para informação da tolerância para análise em 2ª ordem.....  | 84  |
| Figura 48 : Janela para informação de dados referentes a trechos rígidos.....   | 85  |
| Figura 49 : Janela para informação de dados referentes a trechos rígidos.....   | 85  |
| Figura 50 : Janela que contém a malha do pavimento .....                        | 86  |
| Figura 51 : Menu de opção para editar o arquivo de dados.....                   | 87  |
| Figura 52 : Exemplo de parte de arquivo de dados editado no WORDPAD.....        | 87  |
| Figura 53 : Menu opção para editar os arquivos de resultados no WORDPAD.....    | 88  |
| Figura 54 : Exemplo de arquivo de resultados editado no WORDPAD.....            | 88  |
| Figura 55 : Exemplo de arquivo de resultados editado no WORDPAD.....            | 89  |
| Figura 56 : Exemplo de janelas de mensagens de aviso .....                      | 89  |
| Figura 57 : Exemplo de janelas de mensagens de aviso de erro .....              | 89  |
| Figura 58 : Planta baixa do pavimento tipo do exemplo 01.....                   | 96  |
| Figura 59 : Discretização do pavimento tipo do exemplo 01 .....                 | 97  |
| Figura 60 : Translação em Z .....   | 98  |
| Figura 61 : Esforço Normal no P13 .....   | 98  |
| Figura 62 : Esforço Normal no P22 .....   | 99  |
| Figura 63 : Translação em X no P17.....   | 99  |
| Figura 64 : Momento Fletor Superior MY no P01.....                              | 100 |
| Figura 65 : Momento Fletor Superior MY no P16.....                              | 100 |
| Figura 66 : Momento Fletor Superior MY no P17.....                              | 101 |
| Figura 67 : Momento Fletor Superior MZ no P03 .....                             | 101 |
| Figura 68 : Momento Fletor Inferior MZ no P06.....                              | 102 |
| Figura 69 : Esforço Cortante Superior VZ no P08.....                            | 102 |

|  |     |
|--|-----|
| Figura 70 : Esforço Cortante Superior VZ no P20.....                         | 103 |
| Figura 71 : Momento Fletor Esquerdo na V02 .....                             | 103 |
| Figura 72 : Esforço Cortante Esquerdo na V07 .....                           | 104 |
| Figura 73 : Planta baixa do pavimento tipo do exemplo 02.....                | 108 |
| Figura 74 : Discretização do pavimento tipo do exemplo 02 .....              | 109 |
| Figura 75 : Translação em Z .....  | 110 |
| Figura 76 : Rotação em X .....   | 110 |
| Figura 77 : Esforço Normal no P19 .....                                      | 111 |
| Figura 78 : Esforço Normal no P26 .....                                      | 111 |
| Figura 79 : Momento Fletor Superior MY no P10.....                           | 112 |
| Figura 80 : Momento Fletor Superior MY no P20.....                           | 112 |
| Figura 81 : Momento Fletor Superior MZ no P13 .....                          | 113 |
| Figura 82 : Momento Torçor MX no P23 .....                                   | 113 |
| Figura 83 : Esforço Cortante Superior VZ no P12.....                         | 114 |
| Figura 84 : Momento Fletor Esquerdo no V10 .....                             | 114 |
| Figura 85 : Planta baixa do pavimento tipo do exemplo 03.....                | 118 |
| Figura 86 : Discretização do pavimento tipo do exemplo 03 .....              | 119 |
| Figura 87 : Translação em Z sem a consideração de trechos rígidos.....       | 120 |
| Figura 88 : Translação em Z considerando trechos rígidos .....               | 120 |
| Figura 89 : Esforço Normal no P07 sem a consideração de trechos rígidos..... | 121 |
| Figura 90 : Esforço Normal no P07 considerando trechos rígidos .....         | 121 |
| Figura 91 : Esforço Normal no P09 sem a consideração de trechos rígidos..... | 122 |
| Figura 92 : Esforço Normal no P09 considerando trechos rígidos .....         | 122 |
| Figura 93 : Momento Fletor Superior MZ no P03 sem a consideração de trechos  |     |

|   |     |
|---|-----|
| rígidos.....  | 123 |
| Figura 94: Momento Fletor Superior MZ no P03 considerando trechos rígidos.....        | 123 |
| Figura 95 : Esforço Cortante Superior no P06 sem a consideração de trechos rígidos .  | 124 |
| Figura 96 : Esforço Cortante Superior no P06 considerando trechos rígidos.....        | 124 |
| Figura 97 : Esforço Cortante Direito na V02 sem a consideração de trechos rígidos ... | 125 |
| Figura 98 : Esforço Cortante Direito na V02 considerando trechos rígidos.....         | 125 |

## **LISTA DE TABELAS**

|  |    |
|--|----|
| Tabela 01 : Expressões para as funções de instabilidade..... | 27 |
|--|----|



|   |     |
|---|-----|
| Tabela 02 : Expressões de w para os nós dos lados do elemento DKT ..... | 40  |
| Tabela 03 : Tipos de modelos possíveis para análise.....                | 71  |
| Tabela 04 : Forças do vento para o exemplo 01 .....                     | 95  |
| Tabela 05 : Forças do vento para o exemplo 02 .....                     | 106 |
| Tabela 06 : Forças do vento para o exemplo 03 .....                     | 116 |
| Tabela 07 : Tabela auxiliar no cálculo do parâmetro $\gamma_z$ .....    | 129 |
| Tabela 08 : Momento Fletor Superior MY no Pilar 16 (kN.cm) .....        | 130 |
| Tabela 09 : Tabela auxiliar no cálculo do parâmetro $\gamma_z$ .....    | 131 |
| Tabela 10 : Momento Fletor Superior MY no Pilar 20 (kN.cm) .....        | 132 |

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

A.C.M : ADINI-CLOUGH-MELOSH

ASCII : American Standard Code for Information Interchange

EESC : Escola de Engenharia de São Carlos

C.G. : Centro de Gravidade

DKT : Discrete Kirchhoff Theory

NBR : Norma Brasileira Regulamentada

USP : Universidade de São Paulo

## LISTA DE SÍMBOLOS

### **Romanos**

A : área do elemento finito DKT

$C_1, C_2, \dots, C_{10}$  : constantes utilizadas na resolução do sistema de equações diferenciais dos pilares

$c_y, c_z, s_y, s_z, m_y, m_z$  : funções de instabilidade dos pilares

$d_{y_p}, d_{z_p}$  : distância dos eixos  $y_p$  e  $z_p$  do pilar à origem do sistema de referência da subestrutura

$E$  : módulo de elasticidade longitudinal do material

$EI_{eqk}$  : produto de rigidez equivalente

$e_{yv}$  : excentricidade da viga em relação ao pilar na direção Y

$e_{zv}$  : excentricidade da viga em relação ao pilar na direção Z

$G$  : módulo de elasticidade transversal do material

$h$  : espessura da laje

$H$  : altura total da edificação

$i_c$  : raio de giração

$I_{xp}$  : momento de inércia à torção dos pilares

$I_{yp}$  : momento de inércia à flexão dos pilares em relação ao eixo  $y_p$  local

$I_{zp}$  : momento de inércia à flexão dos pilares em relação ao eixo  $z_p$  local

$I_{zv}$  : momento de inércia das vigas em relação ao eixo  $z_v$

$J_t$  : momento de inércia à torção da viga

$K$  : índice que indica um andar genérico no edifício

$k_t$  : constante referente a resolução da equação diferencial da torção para os pilares

$L$  : altura do pilar

$l$  : trecho flexível de um trecho de viga

$l_{ij}$  : lados do elemento finito DKT

$M_Y, M_Z$  : momentos fletores no elemento finito DKT

$M_{YZ}$  : momento volvente no elemento finito DKT

$N$  : número do último pavimento da estrutura

$N_p$  : número de pilares do pavimento

$N_T$  : número total de coordenadas da subestrutura

$O_G$  : Origem do sistema de referência dos eixos globais

$O_L$  : Origem do sistema de referência das lajes

$P$  : esforço axial nos pilares

$q$  : carga uniformemente distribuída no elemento finito DKT

$q_v$  : carga uniformemente distribuída nas vigas

$Q_Y, Q_Z$  : esforços cortantes no elemento DKT

$S$  : área da seção transversal do pilar

$TOL$  : tolerância pré-definida para análise iterativa em teoria de 2ª ordem

$u, v$  : deslocamentos horizontais de um ponto genérico da placa nas direções  $Y$  e  $Z$ .

$U_f$  : energia de deformação por flexão do elemento DKT

$v_c, w_c$  : deslocamento do centróide da seção transversal do pilar

$w'_y, w'_z$  : derivadas parciais do deslocamento transversal  $w$

$X, Y, Z$  : Eixos globais da estrutura

$x_p, y_p, z_p$  : Sistema de referência local dos pilares

$x_v, y_v, z_v$  : Sistema de referência local das vigas

## **Gregos**

$\alpha$  : parâmetro de instabilidade global

$\alpha_p$  : ângulo entre o eixo Y da subestrutura e o eixo  $y_p$  do sistema local dos pilares

$\alpha_v$  : ângulo entre o eixo Y da subestrutura e o eixo longitudinal da viga

$\beta_Y$  ,  $\beta_Z$  : rotações de uma reta normal à superfície média da laje segundo os planos Y-X e Z-X das lajes

$\beta_n$  : rotação na direção normal ao lado, no elemento DKT

$\gamma_Z$  : parâmetro de instabilidade global

$\varepsilon_d$  : tolerância calculada, segundo o critério de parada adotado

$\mu_z$  ,  $\mu_y$  : constantes utilizadas na resolução do sistema de equações diferenciais dos pilares

$\xi$  ,  $\eta$  : coordenadas homogêneas do elemento finito DKT

$\nu$  : coeficiente de Poisson

$\phi_c$  : rotação da linha do centróide da seção transversal do pilar

### **Matrizes e Vetores**

[B] : matriz que relaciona o vetor de curvatura com o vetor deslocamentos

[D<sub>f</sub>] : matriz de elasticidade do material que constitui a placa

[D<sub>p</sub>] : matriz das características elásticas do material

{ F } : vetor das forças nodais do sistema estrutural

{ F<sub>c</sub> } : vetor de forças nodais no elemento quadrangular

{ F<sub>DKT</sub> } : vetor das forças nodais equivalentes do elemento DKT

{ f<sub>e</sub> } : vetor das forças nodais do elemento finito DKT, em relação aos parâmetros externos

$\{ f_i \}$  :vetor das forças nodais do elemento finito DKT, em relação aos parâmetros internos

$\{ f_v \}_{EQV}$  : vetor das forças nodais equivalentes da viga, nas coordenadas locais.

$\{ F_v \}_{EQV}$  : vetor das forças nodais equivalentes da viga, nas coordenadas da subestrutura.

$[G], [H], [B], [\bar{G}], [\bar{H}]$  : matrizes utilizadas na formulação da matriz de rigidez do elemento DKT

$[K_c]$  : matriz de rigidez condensada do elemento finito quadrangular

$[K_{DKT}]$  : matriz de rigidez do elemento finito DKT

$[K_{pg}]$  : matriz de rigidez dos pilares nas coordenadas da subestrutura

$[K_{pl}]$  : matriz de rigidez local dos pilares

$[K_{pl1}], [K_{pl2}], [K_{pl3}]$  : submatrizes da matriz de rigidez local dos pilares

$[K_{vg}]$  : matriz de rigidez das vigas nas coordenadas da subestrutura

$[K_{vi}]$  : matriz de rigidez local de um elemento de viga

$\{ k \}$  : vetor curvatura

$\{ S_p \}$  : vetor dos esforços solicitantes dos pilares em coordenadas locais

$\{ S_v \}$  : vetor dos esforços solicitantes das vigas em coordenadas locais

$\{ u_{DKT} \}$  : vetor das coordenadas deslocamentos do elemento finito DKT

$\{ u_L \}$  : vetor das coordenadas deslocamentos da laje

$\{ u_p \}$  : vetor das coordenadas deslocamentos do pilar

$\{ u_v \}$  : vetor das coordenadas deslocamentos da viga

$[\beta_p]$  : matriz de incidência cinemática para os pilares

$[\beta_{p1}]$ : submatriz de incidência cinemática para a extremidade superior do pilar

$[\beta_{p2}]$ : submatriz de incidência cinemática para a extremidade inferior do pilar

$[\beta_v]$  : matriz de incidência cinemática para um elemento de viga

$\{\delta_e\}$  : vetor dos parâmetros externos do elemento finito DKT

$\{\delta_i\}$  : vetor dos parâmetros internos do elemento finito DKT

$\{\delta_f\}$  : vetor de deslocamentos do corpo rígido da laje, na posição de equilíbrio.

$\{\delta_n\}$  : vetor de deslocamentos do corpo rígido da laje na iteração n

$\{\delta_{n-1}\}$  : vetor de deslocamentos do corpo rígido da laje na iteração anterior a n

$\{\varepsilon_f\}$  : vetor de deformação por flexão

$\{\sigma_f\}$  : vetor de tensões por flexão

O significado de outros símbolos não declarados neste item encontram-se no próprio texto.

## RESUMO

MARTINS, C. H. (1998). *Contribuição da rigidez transversal à flexão das lajes na distribuição dos esforços em estruturas de edifícios de andares múltiplos, em teoria de segunda ordem*. São Carlos. Dissertação ( Mestrado ) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O principal objetivo deste trabalho é calcular esforços e deslocamentos de estruturas tridimensionais de edifícios de andares múltiplos, sujeitos às ações verticais e laterais, considerando a rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 2ª ordem. O elemento finito de placa adotado na discretização do pavimento, responsável pela consideração da rigidez transversal das lajes na análise do edifício é o DKT (*Discrete Kirchhoff Theory*).

Para os pilares o equilíbrio de forças é verificado na sua posição deformada, ou como é conhecido da literatura técnica, análise em teoria de 2ª ordem, considerando a não linearidade geométrica.

Para o cálculo dos esforços e deslocamentos na estrutura são aplicadas as técnicas de subestruturação em série e paralelo na matriz de rigidez global da estrutura. Elaborou-se um programa de computador para o processo de cálculo, utilizando a linguagem computacional *Fortran Power Station 90* e pré e pós processadores em *Visual Basic 4.0* para ambiente *Windows*.

Finalmente são apresentados alguns exemplos para comprovar a validade do processo de cálculo utilizado.

Palavras-chave : Edifícios andares múltiplos; Rigidez transversal da Laje ; Segunda Ordem

#### **ABSTRACT**

MARTINS, C.H. (1998) *Contribution of bending stiffness transverse of slabs in the forces distribution in structures of multistory buildings, in second order theory* .

Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo



The main aim of this work is to calculate stresses and displacements of three-dimensional structures of multistory buildings, subjected to vertical and lateral loads, considering the transverse bending stiffness of slabs, in second order theory.

The plate finite element adopted in floor discretization, responsible for considering the bending stiffness contribution of slabs in the analysis of buildings, is the DKT (*Discrete Kirchhoff Theory*).

For columns the forces equilibrium is verified for the columns in their deformed position, which is known in the technical literature as 2<sup>nd</sup> order analysis, considering the geometric non-linearity.

The techniques of serial and parallel analysis of substructures are applied to the global stiffness matrix for the calculus of forces and displacements in the structure. A computer program was developed for the calculation process, using the computer language *Fortran Power Station 90* and pre and post-processors in *Visual Basic 4.0* for a *Windows* environment.

Finally, some examples are presented to check the validity of the employed calculus process.

Keywords : Multistory buildings; Transverse stiffness of slabs ; Second order

## SUMÁRIO

|  |             |
|--|-------------|
| <b>LISTA DE FIGURAS .....</b>                        | <b>i</b>    |
| <b>LISTA DE TABELAS.....</b>                         | <b>vi</b>   |
| <b>LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS .....</b>          | <b>vii</b>  |
| <b>LISTA DE SÍMBOLOS.....</b>                        | <b>viii</b> |
| <b>RESUMO .....</b>                                  | <b>xiii</b> |
| <b>ABSTRACT .....</b>                                | <b>xiv</b>  |
| <br>   |             |
| <b>1 INTRODUÇÃO .....</b>                            | <b>01</b>   |
| 1.1 Generalidades .....                              | 01          |
| 1.2 Alguns trabalhos desenvolvidos na EESC-USP ..... | 02          |
| 1.3 Objetivos .....                                  | 05          |
| 1.4 Metodologia .....                                | 06          |
| 1.5 Resumo dos capítulos .....                       | 06          |
| <br>   |             |
| <b>2 SISTEMA ESTRUTURAL .....</b>                    | <b>08</b>   |
| 2.1 Introdução .....                                 | 08          |
| 2.2 Descrição dos elementos estruturais .....        | 08          |
| 2.2.1 Vigas .....                                    | 08          |
| 2.2.2 Lajes .....                                    | 09          |
| 2.2.3 Pilares .....                                  | 10          |
| 2.2.4 Subestruturas .....                            | 10          |
| 2.3 Sistemas de referência .....                     | 11          |
| 2.3.1 Sistema de referência global .....             | 11          |
| 2.3.2 Sistema de referência local das vigas .....    | 12          |
| 2.3.3 Sistema de referência das lajes .....          | 12          |
| 2.3.4 Sistema de referência local dos pilares .....  | 13          |
| 2.3.5 Sistema de referência da subestrutura .....    | 14          |

|  |           |
|--|-----------|
| 2.4 Coordenadas deslocamentos .....  | 14        |
| 2.4.1 Coordenadas deslocamentos das vigas .....                              | 14        |
| 2.4.2 Coordenadas deslocamentos das lajes .....                              | 15        |
| 2.4.3 Coordenadas deslocamentos dos pilares .....                            | 17        |
| 2.4.4 Coordenadas deslocamentos da subestrutura .....                        | 18        |
| <br>   |           |
| <b>3 MATRIZ DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS QUE FORMAM A<br/>SUBESTRUTURA .....</b> | <b>20</b> |
| <br>   |           |
| 3.1 Introdução .....   | 20        |
| 3.2 Matriz de rigidez de um elemento de viga.....                            | 20        |
| 3.3 Matriz de rigidez dos pilares em teoria de segunda ordem .....           | 23        |
| 3.4 Matriz de rigidez do elemento de placa.....                              | 30        |
| 3.4.1 Generalidades sobre o Método dos Elementos Finitos (M.E.F.).....       | 30        |
| 3.4.2 O elemento finito adotado - DKT.....                                   | 30        |
| 3.4.3 Energia de deformação para o elemento finito.....                      | 32        |
| 3.4.4 Elemento finito quadrangular .....                                     | 44        |
| <br>   |           |
| <b>4 MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DA ESTRUTURA .....</b>                         | <b>48</b> |
| <br>   |           |
| 4.1 Introdução .....   | 48        |
| 4.2 Subestruturação em Paralelo.....   | 48        |
| 4.2.1 Método “Choleski Decomposition “ .....                                 | 49        |
| 4.3 Contribuição dos pilares à matriz de rigidez da estrutura .....          | 53        |
| 4.4 Subestruturação em Série .....   | 54        |
| 4.5 Deslocamentos locais nos elementos.....                                  | 57        |
| 4.5.1 Introdução.....  | 57        |
| 4.5.2 Deslocamentos locais nos elementos de viga.....                        | 58        |
| 4.5.3 Deslocamentos locais nos pilares .....                                 | 58        |
| 4.5.4 Deslocamentos nos elementos de placa.....                              | 59        |
| 4.6 Forças nodais .....  | 59        |
| 4.6.1 Forças nodais equivalentes das vigas .....                             | 59        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| 4.6.2    | Forças nodais equivalentes do elemento DKT .....                                       | 60        |
| 4.6.3    | Forças nodais nas lajes .....  | 61        |
| 4.7      | Esforços solicitantes nos elementos.....   | 61        |
| 4.7.1    | Esforços solicitantes nos elementos de viga.....                                       | 62        |
| 4.7.2    | Esforços solicitantes nos pilares.....   | 62        |
| 4.7.3    | Esforços internos no elemento DKT .....  | 63        |
| 4.8      | Metodologia para análise em 2ª ordem.....  | 64        |
| 4.8.1    | Introdução.....  | 64        |
| 4.8.2    | Critério de convergência .....   | 66        |
| <b>5</b> | <b>PROGRAMA COMPUTACIONAL .....</b>  | <b>67</b> |
| 5.1      | Introdução .....   | 67        |
| 5.2      | Modularização do programa computacional EDIFICIO.F90 .....                             | 67        |
| 5.2.1    | <i>Workspace</i> MATRIZ.F90.....   | 68        |
| 5.2.2    | <i>Workspace</i> MONTAGEM.F90.....   | 68        |
| 5.2.3    | <i>Workspace</i> SERIE.F90 .....   | 69        |
| 5.2.4    | <i>Workspace</i> DESLOCAMENTO.F90 .....  | 69        |
| 5.2.5    | <i>Workspace</i> ESFORCO.F90 .....   | 69        |
| 5.3      | Tipos de análises realizadas.....  | 70        |
| 5.3.1    | Análise tridimensional considerando ou não a rigidez transversal das lajes....         | 70        |
| 5.3.2    | Análise tridimensional em teoria de primeira ou segunda ordem para os<br>pilares ..... | 70        |
| 5.3.3    | Análise tridimensional com trechos rígidos ou sem trechos rígidos .....                | 71        |
| 5.4      | Programação em Visual Basic 4.0 .....  | 72        |
| 5.5      | Janelas de diálogo do programa interativo em <i>Visual Basic 4.0</i> .....             | 73        |
| 5.5.1    | Comentários gerais sobre o programa interativo EDIFICIO.VBP .....                      | 90        |
| 5.6      | Arquivos de Resultados .....   | 91        |
| 5.7      | Limitações do programa .....   | 91        |
| <b>6</b> | <b>EXEMPLOS NUMÉRICOS .....</b>  | <b>93</b> |
| 6.1      | Introdução .....   | 93        |

|   |            |
|---|------------|
| 6.2 Exemplo 01 .....  | 94         |
| 6.3 Exemplo 02 .....  | 105        |
| 6.4 Exemplo 03 .....  | 115        |
| 6.5 Parâmetros de instabilidade global .....                  | 126        |
| 6.5.1 Parâmetro $\alpha$ .....                                | 126        |
| 6.5.2 Parâmetro $\gamma_Z$ .....                              | 128        |
| 6.5.3 Parâmetro $\alpha$ e $\gamma_Z$ para o exemplo 01 ..... | 129        |
| 6.5.4 Parâmetro $\alpha$ e $\gamma_Z$ para o exemplo 02 ..... | 130        |
| <b>7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.....</b>                      | <b>133</b> |
| <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>                        | <b>135</b> |
| <b>BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.....</b>                           | <b>138</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 Generalidades

O crescente aumento da densidade populacional associado a uma necessidade contínua de uma maior urbanização, fez com que ocorresse um intenso processo de verticalização das edificações. Com isso torna-se cada vez mais necessário o aprimoramento dos sistemas estruturais e das técnicas de análise das estruturas, de forma a proporcionarem maior economia e principalmente uma adequada segurança.

Visando o aprimoramento da análise estrutural, atualmente as frentes de investigação estão voltadas para o aprimoramento de modelagens para o comportamento físico dos materiais, introdução de novos procedimentos nos problemas de análise em teoria de 2<sup>a</sup>. ordem, abordagem de novos sistemas estruturais e a criação de pré e pós-processadores em ambiente *Windows* para facilitar a utilização dos sistemas computacionais gerados.

Neste trabalho as lajes contribuem com sua rigidez transversal à flexão na análise global da estrutura, pois devido ao seu comportamento de placa, essa rigidez à flexão influenciará no comportamento estrutural. Para isto, são utilizadas as técnicas do Método dos Elementos Finitos.

Sabe-se que os deslocamentos horizontais, causados pelas ações do vento, produzem esforços adicionais, quando são aplicadas simultaneamente as ações de origem gravitacional. Sendo assim, é feita para os pilares a verificação do equilíbrio de forças na sua posição deformada ou análise em 2<sup>a</sup> ordem considerando a não linearidade geométrica.

Com essas hipóteses para as lajes e os pilares, a dissertação pretende contribuir para a análise de edifícios de andares múltiplos, a fim de se obter estruturas cada vez mais eficientes e econômicas, tentando representar de uma forma

mais precisa o comportamento físico real de uma estrutura tridimensional de edifícios de andares múltiplos.

## **1.2 Alguns trabalhos desenvolvidos na EESC-USP**

A linha de pesquisa em Estruturas de Edifícios Altos teve um rápido desenvolvimento no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo .

Sendo assim, dentro da área de estruturas de edifícios de andares múltiplos, inúmeros trabalhos foram desenvolvidos, buscando-se sempre o aperfeiçoamento através da eficiência, precisão, técnicas de cálculos e hipóteses, tentando-se ficar com uma análise cada vez mais próxima da realidade. Dentre esses trabalhos podem ser citados: BARBOSA, J.A. (1978), que estudou pela técnica do meio contínuo e pelo tratamento discreto, a determinação dos esforços em edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis, sob carga lateral. Através das técnicas do meio contínuo o comportamento da estrutura fica expresso através de uma equação ou sistema de equações diferenciais. Através do método discreto o autor analisou a estrutura pelo Processo dos Deslocamentos, utilizando as técnicas matriciais, juntamente com a teoria da flexo-torção. O autor também comparou os resultados obtidos entre as duas técnicas utilizadas e concluiu que há concordância entre os valores obtidos pelo processo contínuo e discreto.

PRUDENTE (1983), analisou as estruturas constituídas de painéis de contraventamento, formados por vigas e pilares rigidamente conectados entre si, e pilares individuais não sujeitos aos efeitos de flexo-torção.

As estruturas analisadas são formadas por subestruturas também tridimensionais, as quais compõem um determinado número de andares. Estas subestruturas por sua vez são formadas por pilares individuais e os painéis, sendo estes compostos de vigas e pilares rigidamente conectados entre si. A análise estática foi feita através do processo dos deslocamentos. Na análise do trabalho, o sistema estrutural considerado foi de uma estrutura tridimensional formada por subestruturas também tridimensionais, que por sua vez, eram formadas pelos painéis e pilares individuais travados horizontalmente pelas lajes.

BECKER, E.P. (1989), acrescentou os núcleos estruturais baseando-se na teoria de VLASSOV (1962), no estudo da interação tridimensional entre os diversos elementos estruturais. A experiência mostra que os núcleos estruturais (caixa para escadas ou elevadores) quando presentes nas estruturas de edifícios de andares múltiplos, são os grandes responsáveis pela absorção dos esforços decorrentes da carga lateral do vento. É levada em consideração a rigidez do núcleo estrutural às deformações por empenamento.

RIOS (1991), analisou as estruturas de edifícios de andares múltiplos sem observar a formação de painéis e núcleos, entretanto considerou as excentricidades entre os elementos, e calculou ainda as envoltórias dos esforços para diferentes combinações de carregamento, segundo a NBR-8681, que trata o estado limite último para verificação da segurança. Os edifícios tratados são constituídos por vigas e pilares interligados, ao nível de cada andar, pela laje, unidos monoliticamente, sem a consideração de rigidez de vigas e pilares à torção. As seções das vigas podem ser poligonais e são simétricas em relação ao eixo vertical, enquanto as seções dos pilares podem ser circulares ou poligonais. Os pavimentos podem ser diferentes entre si, no que diz respeito às seções diferentes de vigas ou pilares, arrumação das vigas, excentricidades, interrupção de pilares em determinado pavimento etc. Foi utilizado o processo dos deslocamentos, combinado a técnicas correntes de análise matricial de estruturas.

Como conclusões, o autor verificou que a associação de painéis desprezou esforços importantes, como o momento fletor em alguns pilares, justamente na base onde a força normal tem o valor elevado. É também evidente que a consideração de trechos rígidos nas vigas alteram significativamente os esforços e deslocamentos na estrutura. Isto ocorreu, devido ao fato de que no processo de associação de painéis não se considera a rigidez do pilar na direção ortogonal àquela do pórtico a que pertence, alguns desses responsáveis pela diminuição dos deslocamentos horizontais. Nesta situação, pode-se observar que a influência dessa rigidez é predominante na base, sendo que nos pavimentos superiores há diminuição desse efeito.

Finalmente o autor conclui que o modelo apresentado em seu trabalho traz algumas vantagens em relação à associação tridimensional de painéis planos, especialmente quando se analisa edifícios com alto grau de complexidade. No modelo adotado no



trabalho, a consideração da excentricidade é direta, as seções dos pilares e vigas podem ter formas quaisquer e as vigas têm direção qualquer no plano da laje. Nessas condições, é possível analisar com maior precisão essas estruturas.

MATIAS (1997) fez a análise não linear de estruturas tridimensionais de edifícios altos sob fundação flexível, sobretudo os núcleos resistentes. Para isso o autor desenvolveu um programa computacional, baseado no programa elaborado por BECKER (1989), e posteriormente modificado por MORI (1992) para a análise em segunda ordem.

O que se observa de comum nos trabalhos anteriormente citados, é que as lajes trabalham como diafragmas infinitamente rígidos em seu plano horizontal, e rigidez transversal desprezível na análise global da estrutura. Entretanto, é de se supor que devido ao seu comportamento de placa, essa rigidez à flexão terá influência no comportamento estrutural.

Utilizando-se o Método dos Elementos Finitos, BRUNELI, A.C. (1987), analisou diversas estruturas de edifícios andares múltiplos, sujeitas à ação do vento, considerando a rigidez à flexão das lajes. Para isto o autor empregou o método dos elementos finitos, através do processo dos deslocamentos. Na discretização da laje, para representar o efeito de membrana, empregou-se o elemento retangular ACM (*ADINI-CLOUGH-MELOSH*). Posteriormente, BALCAZAR, E.A.S.G. (1991), analisou estruturas tridimensionais, também considerando a rigidez à flexão das lajes, porém utilizou técnica e a inclusão do elemento de chapa modificado, para representar o comportamento dos pilares parede, melhorando a convergência dos resultados. Para a melhor implementação do programa computacional desenvolvido empregou-se as técnicas de subestruturação em série e paralelo. O elemento retangular de chapa utilizado também foi o ACM. No entanto, esses dois últimos trabalhos aplicam-se apenas aos edifícios em plantas retangulares.

Por último, BEZERRA (1995) utilizando, também, o Método dos Elementos Finitos, e a implementação de um elemento finito triangular DKT (*Discrete Kirchhoff Theory*), que através da condensação estática obteve facilmente um elemento quadrangular, pode analisar edifícios de planta qualquer, porém utilizando teoria de primeira ordem para os pilares. No sistema estrutural não considera a presença dos núcleos estruturais, pilares ou pilares-parede submetidos à flexo-torção.

O processo para obtenção da matriz de rigidez global da estrutura, através da contribuição de cada elemento estrutural, é análogo ao processo usado por PRUDENTE (1983) e RIOS (1991), já citados acima. A principal conclusão dessa análise foi que ao computar a rigidez à flexão das lajes na estrutura, os deslocamentos horizontais nos pavimentos são menores que os obtidos pelos modelos que as consideram como diafragmas rígidos, com uma diferença de até 17 % referente a translação do último pavimento. Com os deslocamentos reduzidos, verifica-se de uma forma geral uma redução dos esforços de flexão nos elementos estruturais e também do esforço cortante. Portanto, as lajes tiveram uma participação considerável na rigidez global da estrutura.

Finalmente pode-se concluir que no modelo estrutural adotado, as lajes têm participação mais efetiva na interação dos esforços e deslocamentos com os demais elementos (vigas e pilares), em comparação com os outros modelos que as consideram apenas como diafragmas rígidos. Com a utilização do Método dos Elementos Finitos, foi possível obter informações sobre os deslocamentos independentes em diversos pontos do pavimento, tornando-se uma grande vantagem em relação aos demais modelos.

### **1.3 Objetivos**

O trabalho proposto objetiva basicamente determinar, em teoria de segunda ordem, os esforços e deslocamentos em edifícios andares de múltiplos submetidos às ações laterais e verticais. As lajes, geralmente admitidas como diafragmas rígidos em seu plano, devido ao seu comportamento de placa também contribuirão com sua rigidez transversal à flexão na análise global da estrutura.

Na análise do comportamento tridimensional dos pilares, será levado em consideração a sua não linearidade geométrica, ou seja, análise em teoria de 2ª ordem. Será dada uma continuidade ao trabalho de BEZERRA (1995), que utilizou teoria de primeira ordem.

### **1.4 Metodologia**

Na análise da estrutura tridimensional serão utilizados elementos lineares para os pilares e vigas e elementos de placa para as lajes, ambos pelo processo dos deslocamentos. Neste caso os elementos de contraventamento horizontais deverão ser discretizados em elementos finitos de barra e a laje em elementos finitos de placa, possibilitando assim, a determinação da rigidez do sistema estrutural do pavimento.

O elemento finito de placa empregado na discretização do pavimento, responsável pela consideração da rigidez transversal das lajes na análise da estrutura, é o DKT (*Discrete Kirchhoff Theory*), que segundo BATOZ *et al* ( 1980 ), trata-se de um elemento eficiente para a análise de placas delgadas. Com este elemento finito são obtidos ótimos resultados em termos de rapidez computacional e principalmente convergência. Além disso BEZERRA (1995) utilizou em seu trabalho este elemento finito e obteve bons resultados.

Para os pilares, será realizada a verificação do equilíbrio de forças na sua posição deformada, ou como é conhecida da literatura técnica, análise em teoria de 2ª ordem. Para possibilitar esta análise serão adotados processos da estática clássica.

## **1.5 Resumo dos capítulos**

No próximo capítulo descrevem-se as características de todos os elementos estruturais que formam o edifício. São definidos também o sistema de referência local e as coordenadas deslocamentos de cada elemento estrutural

No terceiro capítulo descrevem-se as matrizes de rigidez de todos os elementos de barra ( viga e pilares ) e de placa ( DKT ), nas coordenadas locais e globais. São utilizadas as técnicas correntes de análise matricial.

No quarto capítulo é realizado a montagem da matriz de rigidez global da estrutura. Inicialmente é construída a matriz de rigidez condensada do pavimento através da subestruturação em paralelo. Em seguida, a estrutura é calculada através das técnicas de subestruturação em série.

No quinto capítulo apresenta-se a descrição do programa computacional que foi elaborado, para a determinação dos esforços e deslocamentos na estrutura. Estão

também listadas as janelas de diálogo do pré-processador elaborado em *Visual Basic 4.0* para ambiente *Windows*.

No sexto capítulo são analisados três exemplos numéricos e os resultados da análise são mostrados em gráficos.

No último capítulo apresentam-se as conclusões gerais do trabalho.

# 2 SISTEMA ESTRUTURAL

## 2.1 Introdução

Descreve-se a seguir o comportamento dos elementos que fazem parte das estruturas de contraventamento dos edifícios de andares múltiplos. O conjunto de vigas e pilares travados horizontalmente pelas lajes, constitui o sistema estrutural.

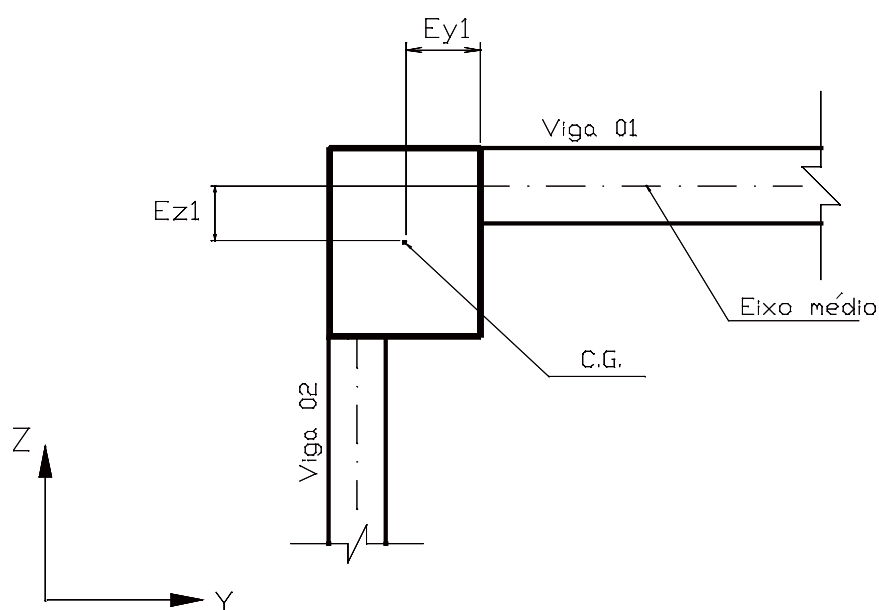
O modelo adotado permite uma análise tridimensional do sistema estrutural, onde a interação de esforços e deslocamentos é estudada nas três direções. As vigas e lajes são analisadas em teoria de primeira ordem e para os pilares é considerado a sua não linearidade geométrica. Para o material é adotado um comportamento elástico-linear.

## 2.2 Descrição dos elementos estruturais

### 2.2.1 Vigas

As vigas são compostas por elementos lineares contidos no plano horizontal, ao nível das lajes. Suas extremidades podem estar conectadas tanto nos pilares como em outras vigas. Para cada trecho de viga são admitidas seções quaisquer, permitindo ainda variação de seção entre os diversos elementos.

No caso da extremidade do trecho de viga se conectar com um pilar, uma excentricidade pode ser admitida em relação ao centro de gravidade do pilar, a fim de que se possa considerar um trecho rígido, como mostra a figura seguinte.



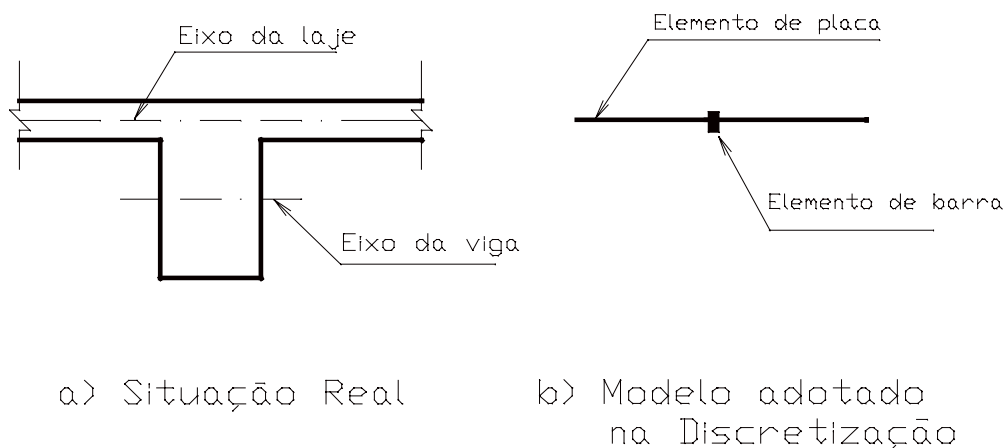
**Figura 01 :Consideração das excentricidades entre viga-pilar**

### 2.2.2 Lajes

Para as lajes admite-se que elas tenham comportamento de um corpo rígido em seu plano, compatibilizando as translações horizontais e funcionando como elemento transmissor de forças horizontais para os demais elementos horizontais do sistema de contraventamento. As cargas verticais atuantes nas lajes são transmitidas a todos os elementos conectados à mesma.

As lajes contribuem também com sua rigidez transversal à flexão na análise global da estrutura. Para considerar a rigidez transversal à flexão, utilizou-se o Método dos Elementos Finitos, onde as lajes são discretizadas em vários elementos finitos de placa.

No modelo adotado no trabalho o eixo do elemento de barra (viga) não coincide com o plano médio da placa, e ao discretizar o pavimento em elementos finitos esta excentricidade não é considerada, fazendo com que o eixo da laje coincida com o eixo médio da viga.



**Figura 02 : Excentricidade laje-viga**

### 2.2.3 Pilares

Os pilares que interpõem-se a dois pavimentos consecutivos devem apresentar trechos lineares verticais e ter seção transversal bi-simétrica. Não se considerou excentricidades entre pilares de uma mesma prumada.

Como na análise do sistema estrutural, o edifício é dividido em várias subestruturas independentes, não é preciso que um mesmo pilar esteja presente em todos andares, podendo então ocorrer sua interrupção em qualquer pavimento. Não se considerou o efeito do empenamento das seções transversais dos pilares na flexo-torção.

### 2.2.4 Subestruturas

Cada andar do sistema estrutural é representado pela subestrutura que compreende os elementos horizontais (vigas e lajes), contidos no pavimento superior, e os elementos verticais (pilares), que se ligam ao pavimento inferior.

Os pavimentos correspondentes a cada subestrutura podem ser diferentes entre si, ocasionados por alguma variação de seus elementos estruturais constituintes, tais como : interrupção de pilares, nova distribuição das vigas, mudanças de carregamentos, alteração nas seções transversais, etc.

## 2.3 Sistemas de referência

### 2.3.1 Sistema de referência global

Para a estrutura é adotado um sistema de eixos cartesianos X, Y e Z com origem  $O_G$  contida em um ponto arbitrário do plano da base do edifício. O sentido positivo dos eixos é adotado de acordo com a Figura 03, sendo que o eixo X tem direção vertical e seu sentido será considerado positivo da base para o topo.

A partir do sistema de eixos globais, definem-se todos os nós da subestruturas, dos elementos de placa discretizadores das lajes e ainda:

- **nós de vigas** : encontro de dois ou mais trechos de vigas ao nível da laje.
- **nós de pilares**: encontro do pilar com a laje, no centro de gravidade do pilar.

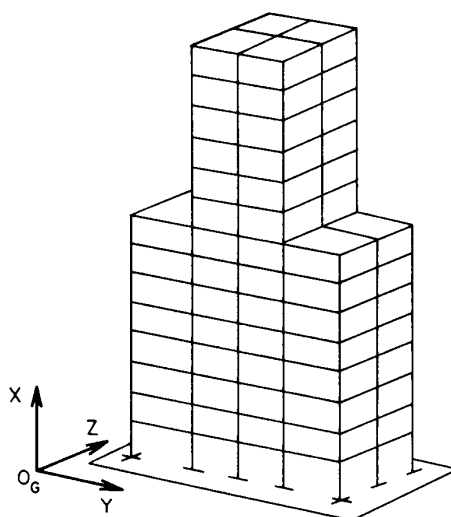
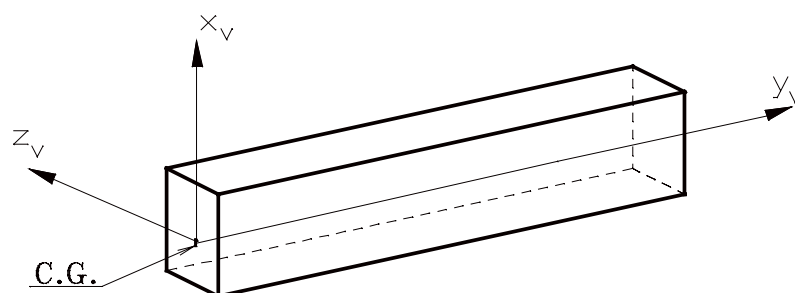


Figura 03 : Sistema de referência global do edifício - SMITH (1991)

### 2.3.2 Sistema de referência local das vigas



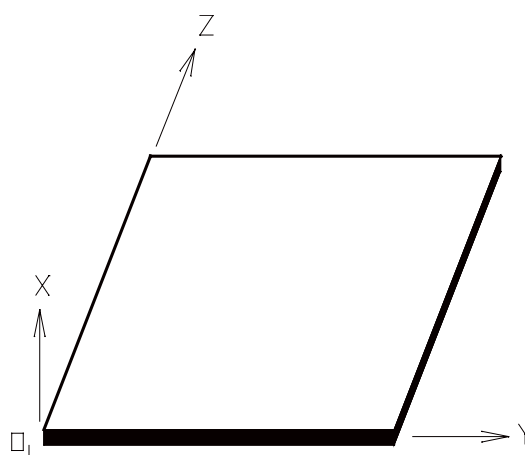
Para um trecho de viga, adota-se um sistema de referência local  $x_v$ ,  $y_v$  e  $z_v$ , dextrorso, com origem  $O_v$  no centro de gravidade da seção transversal, em uma de suas extremidades. O eixo  $y_v$  é o eixo longitudinal da peça e deve coincidir com a superfície média da laje, o eixo  $x_v$  é paralelo ao eixo X do sistema global, sempre orientado para cima.



**Figura 04 : Sistema de referência local das vigas**

### 2.3.3 Sistema de referência das lajes

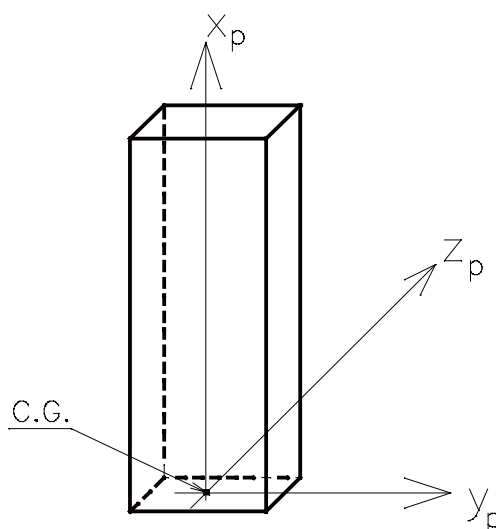
O sistema de referência para as lajes é definido por um sistema cartesiano de eixos X, Y e Z, sendo Y e Z os eixos horizontais e X o eixo vertical, positivo para cima, com origem  $O_L$  pertencente ao seu plano horizontal em um ponto arbitrário, como mostra Figura 05.



**Figura 05 : Sistema de referência das lajes**

### 2.3.4 Sistema de referência local dos pilares

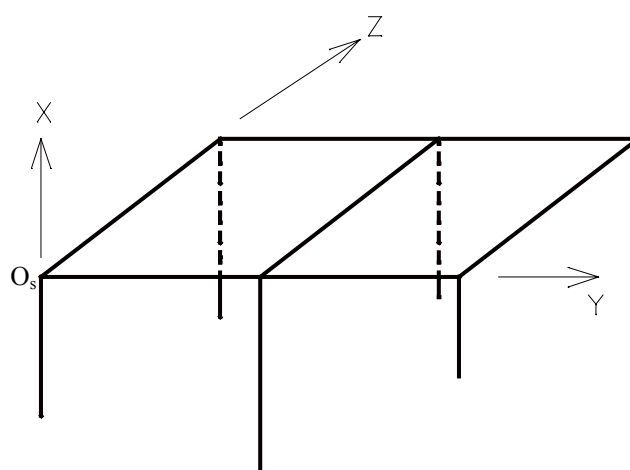
A barra elástica cujo comportamento tridimensional será estudado está referida a um sistema de eixos cartesianos  $x_p$ ,  $y_p$  e  $z_p$  como indicado na Figura 06, sendo  $y_p$  e  $z_p$  os eixos principais de inércia da seção e  $x_p$  é o eixo longitudinal passando pelo centro de gravidade da seção transversal do pilar.



**Figura 06 : Sistema de referência local dos pilares**

### 2.3.5 Sistema de referência da subestrutura

O sistema de referência da subestrutura é o mesmo das lajes, ou seja, com origem  $O_s$  no plano do pavimento correspondente.



**Figura 07 : Sistema de referência da subestrutura**

## 2.4 Coordenadas deslocamentos

As coordenadas deslocamentos são orientações na direção dos possíveis deslocamentos independentes, associados às extremidades de cada elemento estrutural. Sendo assim, as coordenadas deslocamentos são convencionadas de acordo com o sistema de referência local adotado para cada elemento.

### 2.4.1 Coordenadas deslocamentos das vigas

As coordenadas deslocamentos independentes nas extremidades das vigas são :

- rotação em torno dos eixos  $y_v$  e  $z_v$  do sistema local
- translação segundo o eixo  $x_v$  do sistema local.

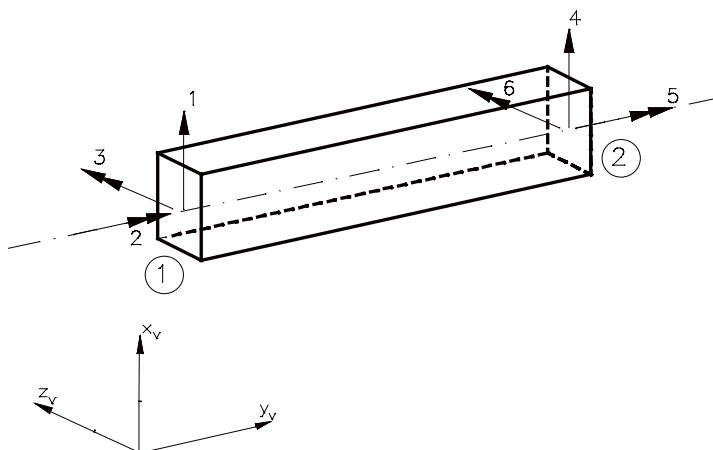
Então, para cada trecho de viga estão associados seis coordenadas deslocamentos, sendo três em cada extremidade. Não se considerou as deformações axiais, devido a hipótese das lajes trabalharem como diafragmas rígidos.

Dessa forma, a transposta do vetor de deslocamentos da viga,  $\{ u_v \}^t$ , em coordenadas locais fica :

$$\{ u_v \}^t = \{ \delta_{xv1} \ \phi_{yv1} \ \phi_{zv1} \ \delta_{xv2} \ \phi_{yv2} \ \phi_{zv2} \}$$

onde :

- os índices 1 e 2 representam cada uma das extremidades da viga e  $\delta_x$  a translação segundo  $x_v$  e as rotações  $\phi_y$  e  $\phi_z$  segundo  $y_v$  e  $z_v$ .



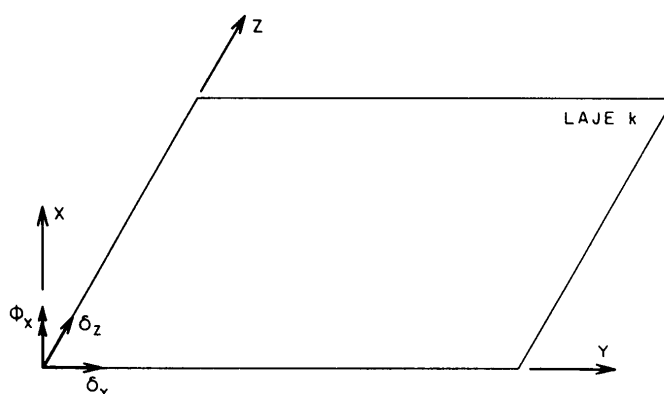
**Figura 08 : Coordenadas deslocamentos locais de um trecho de viga**

#### 2.4.2 Coordenadas deslocamentos das lajes

Cada laje é considerada como se fosse um diafragma infinitamente rígido em seu plano horizontal. As forças laterais do vento são aplicadas diretamente nas lajes e em direções contidas no seu plano.

Cada pavimento apresenta três coordenadas deslocamento associadas às lajes:

- translação segundo os eixos Y e Z do sistema de referência global ou da subestrutura;
- rotação em torno do eixo X do mesmo sistema



**Figura 09 : Coordenadas deslocamentos de corpo rígido da laje**

Então, a transposta do vetor de deslocamentos referente ao movimento do corpo rígido  $\{ u_L \}^T$ , fica :

$$\{ u_L \}^T = \{ \delta_Y \quad \delta_Z \quad \phi_X \}$$

Como também se está considerando a rigidez transversal à flexão da laje, têm-se ainda três coordenadas deslocamentos por nó, pertencentes a cada elemento de placa DKT, que compõe a laje discretizada, que são :

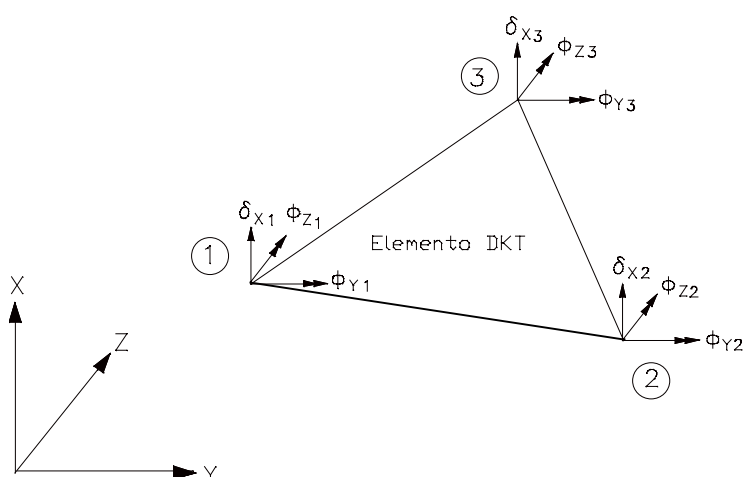
- translação segundo o eixo X do sistema global (  $\delta_X$  ).
- rotação em torno dos eixos Y e Z do sistema global (  $\phi_Y$  e  $\phi_Z$  )

Dessa forma a transposta do vetor de deslocamentos de cada elemento finito DKT de placa  $\{ u_{DKT} \}^T$ , fica definido como :

$$\{ u_{DKT} \}^T = \{ \delta_{X1} \quad \phi_{Y1} \quad \phi_{Z1} \quad \delta_{X2} \quad \phi_{Y2} \quad \phi_{Z2} \quad \delta_{X3} \quad \phi_{Y3} \quad \phi_{Z3} \}$$

onde:

- os índices 1 , 2 e 3 representam os nós dos vértices do elemento finito triangular, como mostra a figura seguinte .



**Figura 10 : Coordenadas deslocamentos do elemento finito DKT**

### 2.4.3 Coordenadas deslocamentos dos pilares

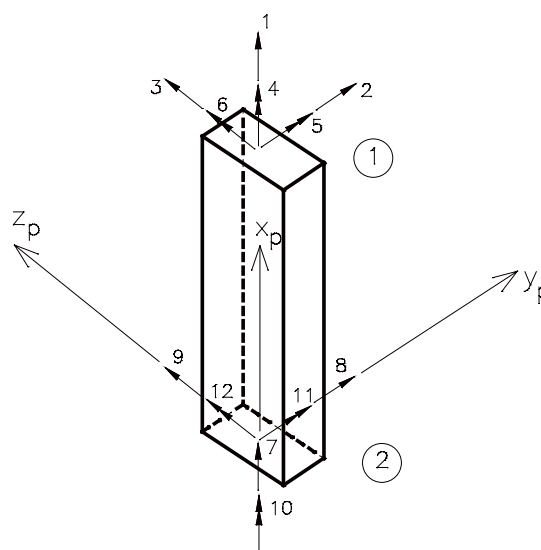
Os pilares têm suas coordenadas deslocamentos representadas na figura 11. São coordenadas de uma barra prismática vertical, de pórtico espacial, com três rotações e três translações em cada extremidade, referidas aos eixos centrais de inércia da seção transversal.

Dessa forma, a transposta dos deslocamentos dos pilares  $\{ u_p \}^t$ , em função de suas coordenadas locais fica :

$$\{ u_p \}^t = \{ \delta_{xp1} \ \delta_{yp1} \ \delta_{zp1} \ \phi_{xp1} \ \phi_{yp1} \ \phi_{zp1} \ \delta_{xp2} \ \delta_{yp2} \ \delta_{zp2} \ \phi_{xp2} \ \phi_{yp2} \ \phi_{zp2} \}$$

onde :

- os índices 1 e 2 indicam as extremidades superior e inferior, respectivamente.



**Figura 11 : Coordenadas deslocamentos de um trecho de pilar**

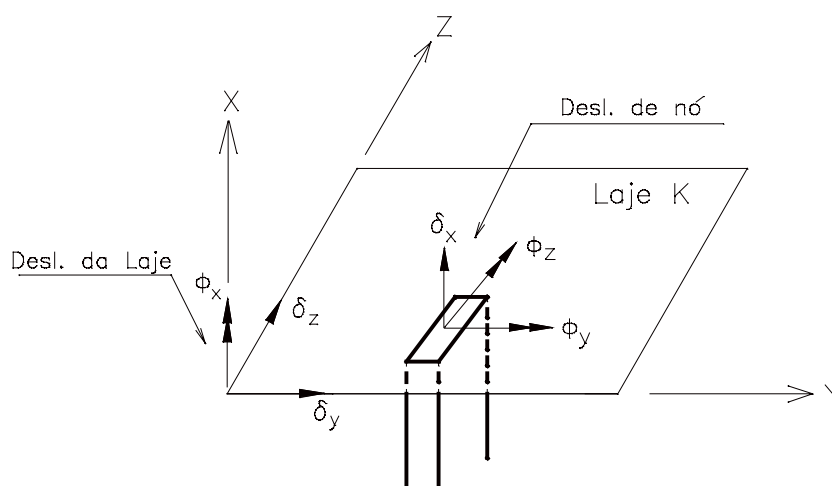
#### 2.4.4 Coordenadas deslocamentos da subestrutura

Como cada subestrutura é composta de diferentes elementos, suas coordenadas são estabelecidas em função de cada elemento constituinte. As coordenadas locais de todos os elementos horizontais (lajes e vigas), são colocadas em função das coordenadas independentes dos elementos verticais (pilares).

Os deslocamentos da estrutura estão divididos em dois grupos :

- **para cada nó de pilar** : para cada pilar tem-se os deslocamentos independentes que são : rotação em torno dos eixos Y e Z, e a translação segundo o eixo X do sistema de referência da subestrutura ( $\delta_x$ ,  $\phi_y$  e  $\phi_z$ ).

- **para cada laje** : para as lajes que formam o pavimento, têm-se as suas coordenadas deslocamentos referentes ao movimento de corpo rígido, que é único em cada pavimento. Estas coordenadas deslocamentos são : rotação em torno do eixo X e translação em torno de Y e Z ( $\phi_x$ ,  $\delta_y$  e  $\delta_z$ ). A figura seguinte representa estes dois tipos de coordenadas deslocamentos



**Figura 12 : Coordenadas deslocamentos da subestrutura**

Dessa forma, deve-se compatibilizar as três coordenadas que determinam o movimento de corpo rígido das lajes, e também as coordenadas dos elementos DKT que compõem as lajes discretizadas, devem ser condensadas para as coordenadas independentes dos pilares ( $\delta_x$ ,  $\phi_y$  e  $\phi_z$ ), através de uma subestruturação em paralelo, o qual será visto mais adiante.



# 3 MATRIZ DE RIGIDEZ DOS ELEMENTOS QUE FORMAM A SUBESTRUTURA

## 3.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se a matriz de rigidez de cada elemento linear (viga e pilar), referente ao sistema de coordenadas locais e globais (subestrutura), sendo desprezados os efeitos de deformações por força cortante. Além disso, determina-se também a matriz de rigidez do elemento finito DKT, responsável pela consideração da rigidez transversal da laje.

## 3.2 Matriz de rigidez de um elemento de viga

Através das técnicas de análise matricial, a matriz de rigidez de um elemento de viga, associada ao seu sistema de coordenadas locais,  $[K_{vl}]$ , segundo Figura 04, é dada por :

$$[K_{vl}] = \begin{bmatrix} \frac{12EI_{zv}}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_{zv}}{l^2} & -\frac{12EI_{zv}}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_{zv}}{l^2} \\ 0 & \frac{GJ_t}{l} & 0 & 0 & -\frac{GJ_t}{l} & 0 \\ -\frac{6EI_{zv}}{l^2} & 0 & \frac{4EI_{zv}}{l} & \frac{6EI_{zv}}{l^2} & 0 & \frac{2EI_{zv}}{l} \\ -\frac{12EI_{zv}}{l^3} & 0 & \frac{6EI_{zv}}{l^2} & \frac{12EI_{zv}}{l^3} & 0 & \frac{6EI_{zv}}{l^2} \\ 0 & -\frac{GJ_t}{l} & 0 & 0 & \frac{GJ_t}{l} & 0 \\ -\frac{6EI_{zv}}{l^2} & 0 & \frac{2EI_{zv}}{l} & \frac{6EI_{zv}}{l^2} & 0 & \frac{4EI_{zv}}{l} \end{bmatrix}$$

sendo :

E - módulo de elasticidade longitudinal do material

$G$  - módulo de elasticidade transversal do material

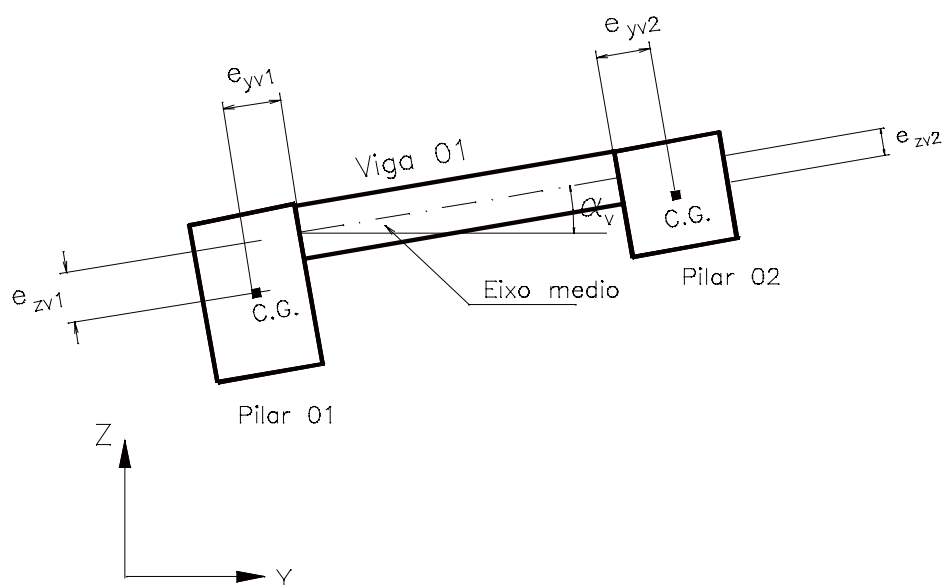
$I_{zv}$  - momento de inércia em relação ao seu eixo  $z_v$

$J_t$  - momento de inércia á torção.

$l$  - comprimento flexível do trecho

A matriz de rigidez do trecho de viga apresentada anteriormente refere-se ao sistema local. O que se deseja é que esta matriz seja referida em função das coordenadas deslocamentos da subestrutura. Para isso é necessário fazer uma transformação de coordenadas de rotação, através de uma matriz de incidência cinemática correspondente.

Considerando um trecho de viga entre nós de pilares, temos as excentricidades representadas pela figura seguinte.



**Figura 13 : Trecho de viga entre nós de pilares**

onde :

-  $e_{yv1}$  e  $e_{zv1}$  são as excentricidades da viga em relação ao pilar 01 em que se conecta.

-  $e_{yv2}$  e  $e_{zv2}$  são as excentricidades da viga em relação ao pilar 02 em que se conecta.

-  $\alpha_v$  é o ângulo formado entre o eixo Y da subestrutura e o próprio eixo da viga, no sentido anti-horário positivo.

Os deslocamentos  $\{u_v\}$ , do sistema local, são obtidos a partir dos deslocamentos  $\{U\}$ , do sistema global, através da matriz  $\{\beta_v\}$  de transformação de coordenadas, através da seguinte expressão :

$$\{u_v\} = [\beta_v] \cdot \{U\}$$

onde  $[\beta_v]$  é a matriz de incidência cinemática da estática clássica, que pode ser escrita da seguinte forma :

$$[\beta_v] = \begin{bmatrix} 1 & e_{zv1} & -e_{yv1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha_v) & \sin(\alpha_v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha_v) & \cos(\alpha_v) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & e_{zv2} & -e_{yv2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_v) & \sin(\alpha_v) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha_v) & \cos(\alpha_v) \end{bmatrix}$$

Agora, se um trecho de viga qualquer estiver compreendido entre nós de viga as excentricidades não existirão mais. Sendo assim, a matriz de incidência cinemática é análoga, porém com  $e_{zv1} = e_{zv2} = e_{yv1} = e_{yv2} = 0$ .

Com a matriz de incidência determinada, a matriz de rigidez das vigas, em função das coordenadas da subestrutura  $[K_{vg}]$ , é obtida através da seguinte expressão :

$$[K_{vg}] = [\beta_v]^T [K_v] [\beta_v]$$

sendo  $[\beta_v]^T$  a transposta da matriz  $[\beta_v]$

### 3.3 Matriz de rigidez dos pilares em teoria de segunda ordem

Para a obtenção da matriz de rigidez dos pilares em teoria de segunda ordem, serão feitas as seguintes hipóteses e simplificações de cálculo :

- as seções transversais são bi-simétricas
- o material é elástico-linear
- não há distorção da seção transversal no seu plano (empenamento).
- a carga axial está aplicada no centro de gravidade da peça não havendo portanto excentricidades.
- não é prevista a aplicação de cargas externas ao longo da barra.

Sendo assim, o sistema de equações diferenciais com as considerações acima, regente deste problema, o qual encontra-se deduzido em MORI (1992) , é dado pela expressão :

$$\begin{aligned}
 EI_{zp} v_c^{IV} + P \cdot v_c'' &= 0 \\
 EI_{yp} w_c^{IV} + P \cdot w_c'' &= 0 \\
 -(GI_{xp} - P \cdot i_c^2) \cdot \phi_c'' &= 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

onde :

- $w_c$  e  $v_c$  são dos deslocamentos do centro de gravidade da seção transversal.

Este sistema é formado por três equações independentes, sendo as duas primeiras relacionadas à flexão nos seus planos principais de inércia e a última à torção.

A solução geral dessas equações diferenciais em que o esforço axial é de compressão ou de tração , no caso da flexão nos planos xy e xz é dada por :

$$v_c = C_1 + C_2 x + C_3 \cos\left(\frac{2\mu_z}{L}x\right) + C_4 \operatorname{sen}\left(\frac{2\mu_z}{L}x\right) \tag{2}$$

$$w_c = C_5 + C_6 x + C_7 \cos\left(\frac{2\mu_y}{L}x\right) + C_8 \operatorname{sen}\left(\frac{2\mu_y}{L}x\right) \tag{3}$$

onde :

$$u_y = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{|P|}{EI_y}} \quad \text{e} \quad u_z = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{|P|}{EI_z}}$$

No caso da torção, temos que as constantes  $G$ ,  $I_{xp}$ ,  $P$  e  $i_c$  podem ser definidas como uma única constante  $k_t$ , dada por :

$$k_t = GI_{xp} - Pi_c^2 \quad (4)$$

onde :

$G$  - módulo de deformação transversal

$I_{xp}$  - momento de inércia á torção

$P$  - carregamento axial na barra

sendo ainda o raio de giração ( $i_c$ ) dado por :

$$i_c = \sqrt{\frac{I_{yp} + I_{zp}}{S}} \quad (5)$$

Dessa forma a equação para a torção fica :

$$-k_t \phi_c'' = 0$$

e

$$\phi_c = C_9 x + C_{10} \quad (6)$$

ANTUNES (1978) resolve o sistema de equações diferenciais para diversos tipos de seções transversais, inclusive as bi-simétricas. A solução exata deste sistema de equações diferenciais foi obtido supondo que os nós são suficientemente rígidos para impedirem os empenamentos das seções transversais. Essa hipótese resume-se

em adotar, como condição de contorno para o tramo da barra, nas duas extremidades que a derivada primeira do ângulo de rotação é nula ( $\phi_c' = 0$ ).

Com essa hipótese o sistema de equações diferenciais é resolvido para os casos de carga P de compressão ou tração. As expressões dos esforços ao longo das barras são determinadas e a matriz de rigidez do tramo da barra é então calculada.

Os esforços devido a deformação axial da barra, são idênticos aos de uma barra em teoria de 1ª. ordem, esteja ou não atuando o esforço axial P, pois a seção transversal do pilar não se altera.

Com os estes esforços obtém-se a matriz de rigidez de cada tramo de pilar, nas coordenadas locais, mostrada abaixo :

$$[K_{pl}] = \begin{bmatrix} [K_{pl}]_1 & [K_{pl}]_2 \\ [K_{pl}]_2^T & [K_{pl}]_3 \end{bmatrix}$$

com :

$$[K_{pl}]_1 = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{m_z L^3} & 0 & 0 & 0 & -s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{L^2} \\ 0 & 0 & 2s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{m_y L^3} & 0 & s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{L^2} & 0 & s_y\frac{EI_{yp}}{L} & 0 \\ 0 & -s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & s_z\frac{EI_{zp}}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_{pl}]_2 = \begin{bmatrix} -\frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{m_z L^3} & 0 & 0 & 0 & -s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{L^2} \\ 0 & 0 & -2s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{m_y L^3} & 0 & s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{L^2} & 0 & s_y c_y \frac{EI_{yp}}{L} & 0 \\ 0 & s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & s_z c_z \frac{EI_{zp}}{L} \end{bmatrix}$$

$$[K_{pl}]_3 = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{m_z L^3} & 0 & 0 & 0 & s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{L^2} \\ 0 & 0 & 2s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{m_y L^3} & 0 & -s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{k_t}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_y(1+c_y)\frac{EI_{yp}}{L^2} & 0 & s_y \frac{EI_{yp}}{L} & 0 \\ 0 & s_z(1+c_z)\frac{EI_{zp}}{L^2} & 0 & 0 & 0 & s_z \frac{EI_{zp}}{L} \end{bmatrix}$$

onde :

E - módulo de elasticidade longitudinal

L - altura do pilar

S - área da seção transversal

$I_{yp}$  = momentos de inércia em relação ao eixo principal  $y_p$

$I_{zp}$  = momento de inércia em relação ao eixo principal  $z_p$

$k_t$  - constante definida em ( 4 )

Temos que  $s_y$  ,  $c_y$  ,  $m_y$  e  $s_z$  ,  $c_z$  ,  $m_z$  são as funções de instabilidade mostradas na tabela seguinte :

**Tabela 01 : Expressões para as funções de instabilidade**

| Carga Axial (P)         | Flexão “xy”   | Flexão “xz”   |
|-------------------------|---|---|
| P > 0<br>( compressão ) | $s_y = \mu_y \frac{1 - 2\mu_y \cot g(2\mu_y)}{\operatorname{tg}(\mu_y) - \mu_y}$ $c_y = \frac{2\mu_y - \operatorname{sen}(2\mu_y)}{\operatorname{sen}(2\mu_y) - 2\mu_y \cos(2\mu_y)}$ $m_y = \frac{2s_y(1 + c_y)}{2s_y(1 + c_y) - 4\mu_y^2}$      | $s_z = \mu_z \frac{1 - 2\mu_z \cot g(2\mu_z)}{\operatorname{tg}(\mu_z) - \mu_z}$ $c_z = \frac{2\mu_z - \operatorname{sen}(2\mu_z)}{\operatorname{sen}(2\mu_z) - 2\mu_z \cos(2\mu_z)}$ $m_z = \frac{2s_z(1 + c_z)}{2s_z(1 + c_z) - 4\mu_z^2}$      |
| P < 0<br>( tração )     | $s_y = \mu_y \frac{1 - 2\mu_y \cot gh(2\mu_y)}{\operatorname{tgh}(\mu_y) - \mu_y}$ $c_y = \frac{2\mu_y - \operatorname{senh}(2\mu_y)}{\operatorname{senh}(2\mu_y) - 2\mu_y \cosh(2\mu_y)}$ $m_y = \frac{2s_y(1 + c_y)}{2s_y(1 + c_y) + 4\mu_y^2}$ | $s_z = \mu_z \frac{1 - 2\mu_z \cot gh(2\mu_z)}{\operatorname{tgh}(\mu_z) - \mu_z}$ $c_z = \frac{2\mu_z - \operatorname{senh}(2\mu_z)}{\operatorname{senh}(2\mu_z) - 2\mu_z \cosh(2\mu_z)}$ $m_z = \frac{2s_z(1 + c_z)}{2s_z(1 + c_z) + 4\mu_z^2}$ |

Essas funções de instabilidade são válidas tanto para P de compressão ( P > 0 ) ou de tração ( P < 0 ). Se ainda P for nulo ( P = 0 ) as funções de instabilidade continuam válidas, com valores que serão  $s_y = s_x = 4$ ,  $c_y = c_x = 0.5$  e  $m_y = m_x = 1$ , e a matriz de rigidez obtida será a da teoria clássica da estática de 1ª. ordem.

Para os pilares, também deve-se relacionar as coordenadas locais do pilar com suas coordenadas na subestrutura ( globais ). As translações segundo os eixos horizontais,  $\delta_y$  e  $\delta_z$ , e a rotação em torno do eixo vertical,  $\phi_x$ , que a princípio se poderia considerar para todos os pilares, são compatibilizados através de um único nó, devido a rigidez infinita admitida no plano horizontal das lajes, proporcionando portanto, os mesmos movimentos desses três graus de liberdade em cada pavimento.

Com isto, a matriz de rigidez do pilar associada às coordenadas da subestrutura, pode ser obtida a partir de [  $K_{pl}$  ], através de uma matriz de incidência



cinemática , mostrada abaixo , referente à rotação e translação dos eixos horizontais. Portanto, a matriz de incidência  $[\beta_p]$  , que relaciona os deslocamentos globais (subestrutura ) do pilar com seus deslocamentos locais, é dada por :

$$[\beta_p] = \begin{bmatrix} [\beta_{p1}] & [0] \\ [0] & [\beta_{p2}] \end{bmatrix}$$

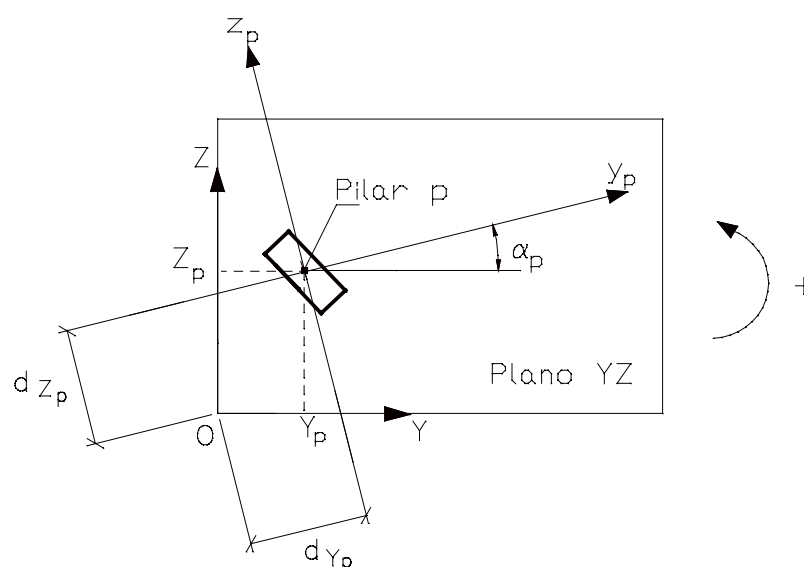
onde  $[\beta_{p1}]$  e  $[\beta_{p2}]$  são sub-matrizes referente as extremidades superior e inferior do pilar, respectivamente

No caso da extremidade superior do pilar tem-se :

$$[\beta_{p1}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha_p) & \sin(\alpha_p) & d_{y_p} \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha_p) & \cos(\alpha_p) & d_{z_p} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \cos(\alpha_p) & \sin(\alpha_p) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(\alpha_p) & \cos(\alpha_p) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

onde :

-  $d_{y_p}$  e  $d_{z_p}$  são as distâncias dos eixos  $y_p$  e  $z_p$  do pilar à origem do sistema de referência da subestrutura, dadas por :



**Figura 14 : Distância dos eixos do pilar à origem**

$$d_{Y_p} = Y_p \cdot \sin(\alpha_p) - Z_p \cdot \cos(\alpha_p)$$

$$d_{Z_p} = Y_p \cdot \cos(\alpha_p) + Z_p \cdot \sin(\alpha_p)$$

$\alpha_p$  - ângulo entre o eixo Y do sistema de referência da subestrutura e o eixo  $y_p$  do sistema local.

As distâncias  $Y_p$  e  $Z_p$  são as coordenadas cartesianas Y e Z do pilar p, associadas à origem do sistema de referência da estrutura.

O mesmo acontece para a extremidade inferior, já que não há variação da seção transversal do pilar.

Assim, a matriz de rigidez do pilar, em teoria de segunda ordem, em função das coordenadas da subestrutura,  $[K_{pg}]$ , é obtida por :

$$[K_{pg}] = [\beta_p]^T [K_{pl}] [\beta_p]$$

### **3.4 Matriz de rigidez do elemento de placa**

#### **3.4.1 Generalidades sobre o Método dos Elementos Finitos ( M.E.F. )**

São numerosos os problemas na área de engenharia de estruturas, envolvendo o elemento estrutural placa. Dentre os mais conhecidos, aparecem os pavimentos de edifícios, os tabuleiros de pontes e os reservatórios.

Tratar esses problemas matematicamente, só seria possível através da resolução de um sistema de equações diferenciais. Porém com o surgimento dos micro-computadores, foi possível uma solução mais adequada para os problemas envolvendo um meio contínuo (placa), através da discretização do mesmo.

É nesta situação que insere-se o Método dos Elementos Finitos, que consiste num método de implementação numérica, onde um meio contínuo ( placa ) é discretizado em vários elementos de dimensões finitas, interligados através de seus pontos nodais, onde são estabelecidas relações entre esforços e deslocamentos. Portanto, dessa forma, ao invés de resolver um sistema de equações diferenciais, a solução recai em um sistema de equações algébricas, mais simples de ser resolvido.

Portanto, é através de uma formulação através do método dos elementos finitos, para as lajes discretizadas em elementos de placa, que pretende-se analisar a contribuição da rigidez à flexão das lajes nas estruturas de edifícios andares de múltiplos, em teoria de segunda ordem para os pilares constituintes dos mesmos.

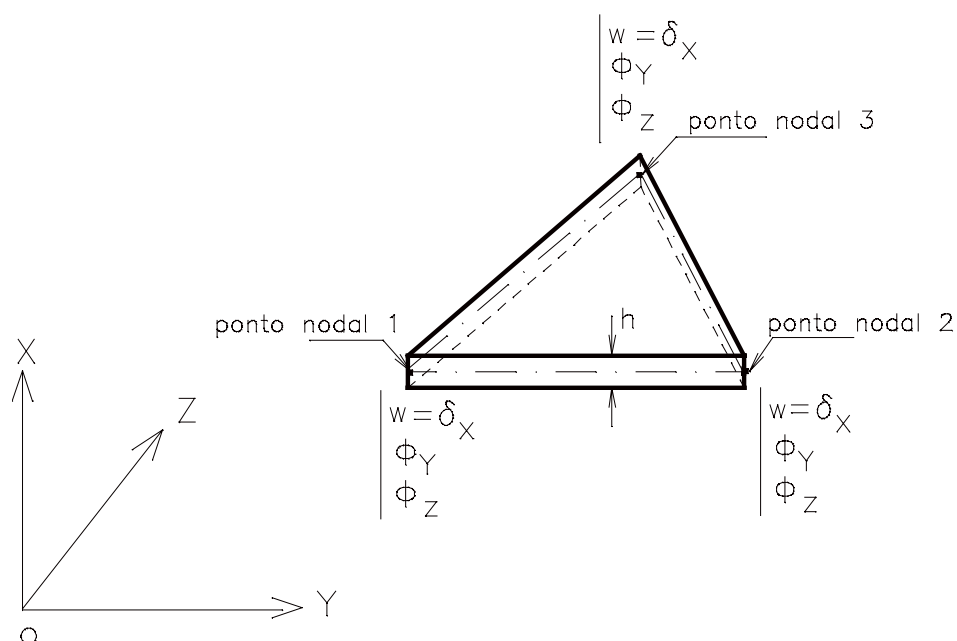
#### **3.4.2 O elemento finito adotado - DKT**

Como pode ser observado em BATOZ *et al* ( 1980 ), a análise de flexão de placas delgadas pode ser realizada genérica e eficientemente, utilizando-se elementos finitos triangulares com nove graus de liberdade ( deslocamento e rotações nos pontos nodais localizados nos vértices do triângulo ). Em sua análise comparativa dos elementos finitos ( com nove graus de liberdade ) disponíveis para análise de flexão de placas delgadas, este autor mostra em um pequeno histórico, os problemas apresentados pelos diversos elementos já desenvolvidos, quando se pensa em generalidade na aplicação do mesmo. As dificuldades vão desde a falta de

convergência para alguns tipos de malha, até a profunda variação de resultados com a mudança da orientação da malha.

Concluindo, BATOZ *et al* ( 1980 ), apresenta dentre este vários tipos de elementos, o elemento finito triangular DKT ( Discrete Kirchhoff Theory ), que se apresentou como sendo um elemento eficiente sob o ponto de vista teórico, numérico e computacional.

Os elementos finitos DKT, que comporão a laje discretizada, possuem três graus de liberdade por nó , sendo translação segundo o eixo X e rotação em torno dos eixos Y e Z , como mostra a figura 15.



**Figura 15 : Elemento finito DKT com nove graus de liberdade**

Portanto, com a formulação desse elemento, determina-se a contribuição da rigidez da lajes à flexão, possibilitando a implementação de um modelo mais representativo do comportamento real da estrutura.

### 3.4.3 Energia de deformação para o elemento finito

A formulação do elemento DKT, a ser detalhada neste trabalho, baseia-se em BATOZ *et al* ( 1980 ) e C.JEYACHANDRABOSE ( 1985 ), onde são inicialmente consideradas as deformações por esforço cortante, da teoria de Reissner-Mindlin.

Sabe-se porém, que na teoria clássica de placas delgadas , ou teoria de Kirchhoff , a parcela da energia de deformação relativa ao esforço cortante é desprezível quando comparada à energia de deformação por flexão.

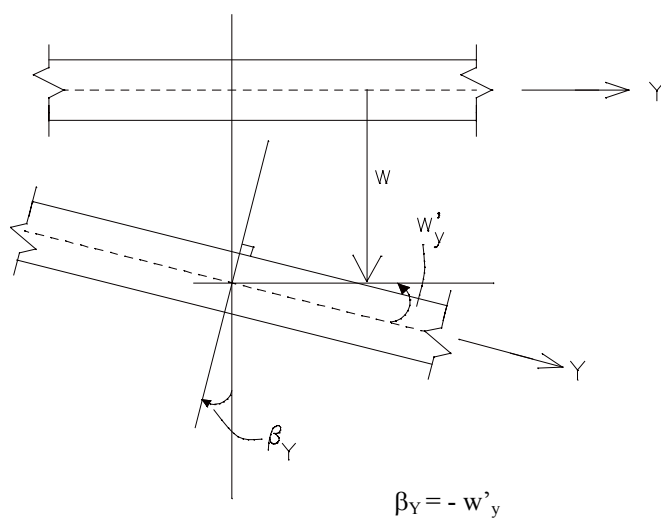
Sendo assim a hipótese clássica de Kirchhoff , onde “ *uma reta normal ao plano médio indeformado da placa, mantém-se normal à superfície média após a deformação*”, é imposta discretamente ao longo dos lados do elemento, discretamente nos seus pontos nodais, e dessa forma a energia de deformação relativa ao esforço cortante é finalmente desprezada.

Deve-se ressaltar, que define-se placa delgada quando a relação entre sua espessura (  $h$  ) e seu menor vão, estiver compreendido entre 1/5 e 1/100. As lajes de edifícios usuais de concreto armado, em sua grande maioria, estão neste intervalo.

Então, pela teoria clássica, as rotações  $\beta_Y$  e  $\beta_Z$  de uma reta normal à superfície média segundo os planos Y-X e Z-X, respectivamente, são diretamente relacionados com as derivadas parciais dos deslocamentos transversais  $w'_y$  e  $w'_z$  , segundo os eixos de referência Y e Z das lajes.

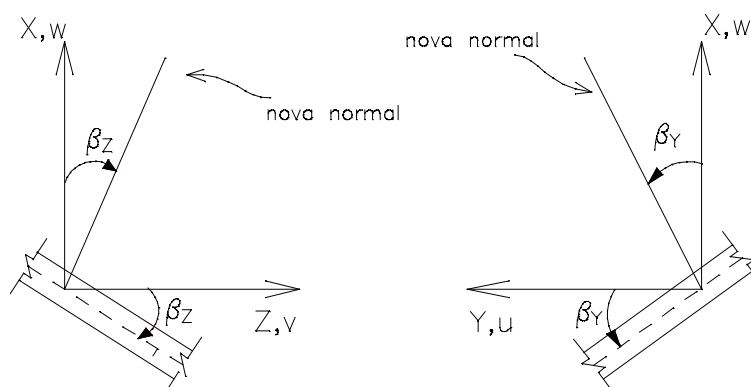
$$\beta_Y = -\frac{\partial w}{\partial y} = -w'_y \quad (7)$$

$$\beta_Z = -\frac{\partial w}{\partial z} = -w'_z \quad (8)$$



**Figura 16 : Deslocamento segundo a teoria de Kirchhoff**

As rotações  $\beta_Y$  e  $\beta_Z$  são convencionadas positivas de acordo com a figura abaixo :



**Figura 17 : Convenções positivas das rotações  $\beta_Y$  e  $\beta_Z$**

Considerando-se a hipótese de Kirchhoff e admitindo-se pequenos deslocamentos, as componentes de deslocamentos horizontais  $u$  e  $v$ , de um ponto genérico da placa de coordenadas  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , são :

$$u = X \cdot \beta_Y(Y, Z)$$

$$v = X \cdot \beta_Z(Y, Z)$$

$$w = w(Y, Z) \text{ , onde } w \text{ é o deslocamento transversal na direção de } X.$$

• **vetor de deformação por flexão  $\{ \varepsilon \}_f$**

O vetor de deformação por flexão  $\{ \varepsilon \}_f$  é dado por :

$$\{ \varepsilon \}_f = \begin{Bmatrix} \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{YZ} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Da teoria da elasticidade linear temos as seguintes relações entre deslocamentos e deformações :

$$\begin{aligned} \varepsilon_Y &= \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \varepsilon_Z &= \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \gamma_{YZ} &= \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial Y} \end{aligned} \quad (10)$$

Dessa forma , com as últimas expressões, tem-se :

$$\{ \varepsilon \}_f = \begin{Bmatrix} \varepsilon_Y \\ \varepsilon_Z \\ \gamma_{YZ} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial Z} \\ \frac{\partial u}{\partial Z} + \frac{\partial v}{\partial Y} \end{Bmatrix} = \mathbf{X} \cdot \begin{Bmatrix} \beta_{YY} \\ \beta_{ZZ} \\ \beta_{YZ} + \beta_{ZY} \end{Bmatrix} = \mathbf{X} \cdot \{ \mathbf{k} \} \quad (11)$$

onde  $\{ \mathbf{k} \}$  é o vetor curvatura.

Observa-se que as deformações por flexão variam linearmente ao longo da espessura da laje. A componente  $\sigma_x$  é desprezada por ser pequena em relação as componentes  $\sigma_Y$  e  $\sigma_Z$ .

A relação tensão-deformação na placa de material homogêneo e isotrópico, de comportamento elástico-linear e com espessura  $h$  constante, num ponto genérico é dado por :

$$\{\sigma\}_f = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \{\varepsilon\}_f \quad (12)$$

$$\text{Chamando } [D_p] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Teremos :

$$\{\sigma\}_f = [D_p] \cdot \{\varepsilon\}_f \quad (14)$$

Através de ( 11 ), em ( 14 ) chegaremos a :

$$\{\sigma\}_f = \begin{Bmatrix} \sigma_Y \\ \sigma_Z \\ \tau_{YZ} \end{Bmatrix} = X[D_p]\{k\} \quad (15)$$

A energia de deformação por flexão pode ser escrita de acordo com a seguinte expressão :

$$U_f = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}_f^t \{\sigma\}_f dV \quad (16)$$

Utilizando as expressões ( 11 ) e ( 15 ) temos :

$$U_f = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}_f^t \{\sigma\}_f dV = \frac{1}{2} \int_V [X\{k\}]^t [X[D_p]\{k\}] dXdYdZ$$



Rearranjando os termos desta expressão :

$$U_f = \frac{1}{2} \int_V \{k\}^t X^2 [D_p] \{k\} dXdYdZ$$

Finalmente :

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{k\}^t [D]_f \{k\} dA \quad (17)$$

Sendo :

$$[D]_f = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} X^2 [D] dX \quad (18)$$

Realizando a integração ao longo da espessura da placa ( h constante ) encontra-se :

$$[D]_f = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Da equação ( 11 ), observa-se que o vetor de curvatura { k }, relaciona-se com as rotações  $\beta_Y$  e  $\beta_Z$ . Substituindo esta equação em ( 17 ) :

$$U_f = \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)} \int_A \{ \beta_{Y'Y}^2 + \beta_{Z'Z}^2 + 2\nu\beta_{Y'Y}\beta_{Z'Z} + \frac{1-\nu}{2}(\beta_{Z'Y} + \beta_{Y'Z})^2 \} dA \quad (20)$$

Com a energia de deformação, é possível obter explicitamente a matriz de rigidez do elemento DKT , já em relação ao sistema de referência das lajes.

Deve-se salientar que a energia de deformação está escrita em função apenas das primeiras derivadas, que representam as rotações no caso da energia de deformação por flexão. Necessita-se portanto, apenas garantir a continuidade classe zero (  $C^0$  ), com vistas para a conformidade do elemento.

Para a obtenção da matriz de rigidez do elemento DKT a partir da energia de deformação, são assumidas quatro hipóteses :

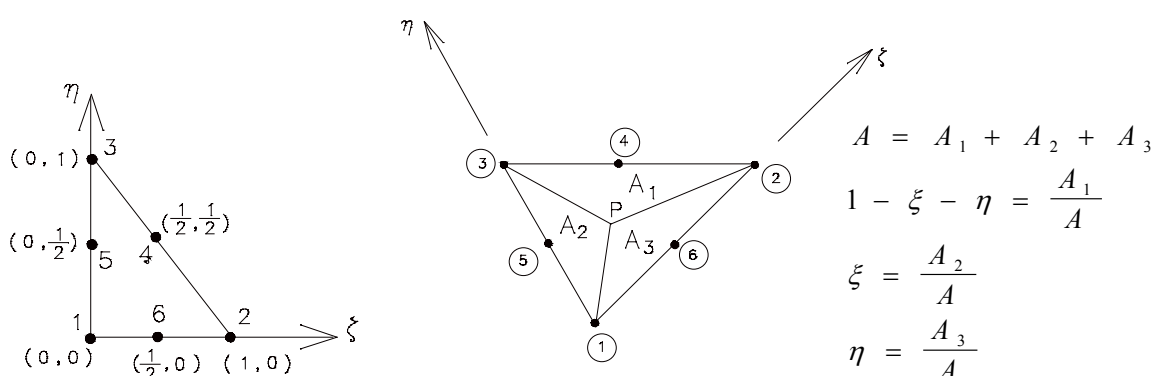
**(1) As rotações  $\beta_Y$  e  $\beta_Z$  variam quadraticamente no elemento.**

Considere então os seguintes polinômios:

$$\beta_Y(Y, Z) = \alpha_1 + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z + \alpha_4 Y^2 + \alpha_5 YZ + \alpha_6 Z^2 \quad (21)$$

$$\beta_Z(Y, Z) = \rho_1 + \rho_2 Y + \rho_3 Z + \rho_4 Y^2 + \rho_5 YZ + \rho_6 Z^2 \quad (22)$$

Observa-se então para que se tenha compatibilidade das rotações, o elemento deve possuir três nós por lado.



**Figura 18 : Disposição inicial dos pontos nodais no elemento DKT nas coordenadas homogêneas  $\xi$  e  $\eta$**

Escrevendo-se as equações (21) e (22) na forma matricial, em função das coordenadas homogêneas  $\xi$  e  $\eta$ , tem-se agora :

$$\beta_Y(\xi, \eta) = \left\{ 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \right\} \begin{Bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \\ \alpha'_4 \\ \alpha'_5 \\ \alpha'_6 \end{Bmatrix} = \underline{\psi}(\xi, \eta) \{\alpha'\} \quad (23)$$

$$\beta_z(\xi, \eta) = \left\{ 1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2 \right\} \begin{Bmatrix} \rho'_1 \\ \rho'_2 \\ \rho'_3 \\ \rho'_4 \\ \rho'_5 \\ \rho'_6 \end{Bmatrix} = \underline{\psi}(\xi, \eta) \{\rho'\} \quad (24)$$

Os parâmetros generalizados  $\{\alpha'\}$  e  $\{\rho'\}$  são transformados para os parâmetros nodais  $\{\beta_Y\}$  e  $\{\beta_Z\}$ , respectivamente, particularizando-se a função para cada nó do elemento, de acordo com os valores das coordenadas adimensionais  $\xi$  e  $\eta$ .

**( 2 ) A hipótese de Kirchhoff é imposta nos pontos nodais dos vértices e nos pontos médios dos lados.**

Esta hipótese possibilita relacionar as rotações com as primeiras derivadas dos deslocamentos transversais.

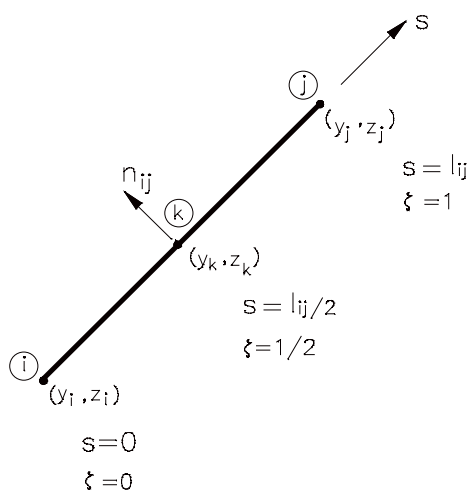
**a) Nós de vértice ( Nós 1,2 e 3 )**

$$\{\gamma\} = \begin{bmatrix} \beta_Y + w_{,Y} \\ \beta_Z + w_{,Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

**b) Nós de meio de lado ( Nós 4,5 e 6 )**

$$\beta_{sk} + w_{,sk} = 0 \quad (26)$$

onde o índice k representa os nós de meio de lado, e s uma coordenada que percorre cada lado, no sentido anti-horário em torno de cada lado, de acordo com a próxima figura.



**Figura 19 : Coordenadas dos nós do lado ij do elemento DKT**

**(3) A variação de w é cúbica ao longos dos lados do elemento.**

Em coordenadas genéricas, a função w num lado ij qualquer fica :

$$w_s = \alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \alpha_3 s^3 \quad (27)$$

Passando para coordenadas adimensionais, tem-se :

$$w_s = \alpha'_0 + \alpha'_1 \frac{s}{l_{ij}} + \alpha'_2 \frac{s^2}{l_{ij}^2} + \alpha'_3 \frac{s^3}{l_{ij}^3} \quad (28)$$

E calculando-se a derivada primeira desta expressão.

$$w'_s = \frac{1}{l_{ij}} \alpha'_1 + \frac{2}{l_{ij}^2} \alpha'_2 s + \frac{3}{l_{ij}^3} \alpha'_3 s^2 \quad (29)$$

A tabela abaixo fornece as expressões de  $w$  para os nós dos lados do elemento.

**Tabela 02 : Expressões de  $w$  para os nós dos lados do elemento DKT**

| no inicial i  | nó central k   | nó final j  |
|---|--|---|
| $\frac{s}{l_{ij}} = 0$                                      | $\frac{s}{l_{ij}} = \frac{1}{2}$   | $\frac{s}{l_{ij}} = 1$  |
| $w_i = \alpha'_0$<br>$w'_{si} = \frac{1}{l_{ij}} \alpha'_1$ | $w_k = \alpha'_0 + \frac{1}{2} \alpha'_1 + \frac{1}{4} \alpha'_2 + \frac{1}{8} \alpha'_3$<br>$w'_{sk} = \frac{1}{l_{ij}} \alpha'_1 + \frac{1}{l_{ij}} \alpha'_2 + \frac{3}{4l_{ij}} \alpha'_3$ | $w_j = \alpha'_0 + \alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3$<br>$w'_{sj} = \frac{1}{l_{ij}} \alpha'_1 + \frac{2}{l_{ij}} \alpha'_2 + \frac{3}{l_{ij}} \alpha'_3$ |

**(4) Impõem-se uma variação linear  $\beta_n$  ( rotação na direção normal ), ao longo dos lados.**

Dessa forma, a função  $\beta_n$  em coordenadas homogêneas fica :

$$\beta_n = \alpha_0 + \xi \alpha_1 \quad (30)$$

De forma matricial :

$$\beta_n = [1 \quad \xi] \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Os parâmetros nodais ficam :

$$\begin{Bmatrix} \beta_{ni} \\ \beta_{nj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

então :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{ni} \\ \beta_{nj} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

Substituindo-se ( 33 ) em ( 32 ) encontra-se :

$$\beta_n = [(1-\xi) \quad \xi] \begin{Bmatrix} \beta_{ni} \\ \beta_{nj} \end{Bmatrix}$$

Como o valor de  $\beta_n$  varia linearmente, de acordo com a hipóteses, o valor da função no ponto nodal médio dos lados, escreve-se como média aritmética dos  $\beta_n$  dos vértices do referido lado. Portanto, para se encontrar o valor da função no nó central

k, basta igualar  $\xi = \frac{1}{2}$ , e substituir na expressão acima :

$$\beta_{nk} = \frac{1}{2}(\beta_{ni} + \beta_{nj}) \quad (34)$$

Baseando-se nas quatro hipóteses anteriores e nas relações geométricas do triângulo, pode-se escrever  $\beta_Y$  e  $\beta_Z$  em cada ponto do triângulo em função dos parâmetros nodais  $\{ u_{DKT} \}$  :

$$\{ u_{DKT} \}^T = \{ \delta_{X1} \quad \phi_{Y1} \quad \phi_{Z1} \quad \delta_{X2} \quad \phi_{Y2} \quad \phi_{Z2} \quad \delta_{X3} \quad \phi_{Y3} \quad \phi_{Z3} \}$$

As rotações em função dos parâmetros nodais  $\{ u_{DKT} \}$ , já definidos nas coordenadas deslocamentos da laje, pode ser escrita como :

$$\beta_Y = [\overline{G}] \{ u_{DKT} \} \quad (35)$$

$$\beta_Z = [\overline{H}] \{ u_{DKT} \} \quad (36)$$

sendo  $[\overline{G}]$  e  $[\overline{H}]$ , matrizes de ordem  $1 \times 9$ . Pode-se ainda reescrevê-las da seguinte maneira :

$$[\overline{G}] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2][G]$$

$$[\overline{H}] = [1 \quad \xi \quad \eta \quad \xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2][H]$$

ambas as matrizes  $[G]$  e  $[H]$  são de ordem  $6 \times 9$ , dadas a seguir :

$$[G]^T = \begin{bmatrix} 0 & 6a_6 & -6a_5 & -6a_6 & 6(a_5 - a_6) & 6a_5 \\ 0 & 4b_6 & 4b_5 & -4b_6 & -4(b_5 + b_6) & -4b_5 \\ 1 & -3 - 4c_6 & -3 - 4c_5 & 2 + 4c_6 & 4(1 + c_5 + c_6) & 2 + 4c_5 \\ 0 & -6a_6 & 0 & 6a_6 & 6(a_4 + a_6) & 0 \\ 0 & 4b_6 & 0 & -4b_6 & 4(b_4 - b_6) & 0 \\ 0 & -1 - 4c_6 & 0 & 2 + 4c_6 & 4(c_6 - c_4) & 0 \\ 0 & 0 & 6a_5 & 0 & -6(a_4 + a_5) & -6a_5 \\ 0 & 0 & 4b_5 & 0 & 4(b_4 - b_5) & -4b_5 \\ 0 & 0 & -1 - 4c_5 & 0 & 4(c_5 - c_4) & 2 + 4c_5 \end{bmatrix}$$

$$[H]^T = \begin{bmatrix} 0 & 6d_6 & -6d_5 & -6d_6 & 6(d_5 - d_6) & 6d_5 \\ -1 & 3 + 4e_6 & 3 + 4e_5 & -2 - 4e_6 & -4(1 + e_5 + e_6) & -2 - 4e_5 \\ 0 & -4b_6 & -4b_5 & 4b_6 & 4(b_5 + b_6) & 4b_5 \\ 0 & -6d_6 & 0 & 6d_6 & 6(d_4 + d_6) & 0 \\ 0 & 1 + 4e_6 & 0 & -2 - 4e_6 & 4(e_4 - e_6) & 0 \\ 0 & -4b_6 & 0 & 4b_6 & 4(b_6 - b_4) & 0 \\ 0 & 0 & 6d_5 & 0 & -6(d_4 + d_6) & -6d_5 \\ 0 & 0 & 1 + 4e_5 & 0 & 4(e_4 - e_5) & -2 - 4e_5 \\ 0 & -4b_6 & -4b_5 & 0 & 4(b_5 - b_4) & 4b_5 \end{bmatrix}$$

onde :

$$\begin{aligned}
 a_k &= -\frac{Y_{ij}}{l_{ij}^2} & d_k &= -\frac{Z_{ij}}{l_{ij}^2} \\
 b_k &= \frac{3Y_{ij}Z_{ij}}{4l_{ij}^2} & e_k &= \frac{\frac{1}{4}Z_{ij}^2 - \frac{1}{2}Y_{ij}^2}{l_{ij}^2} \\
 c_k &= \frac{\frac{1}{4}Y_{ij}^2 - \frac{1}{2}Z_{ij}^2}{l_{ij}^2} & l_{ij}^2 &= Y_{ij}^2 + Z_{ij}^2
 \end{aligned}$$

sendo  $k = 4, 5$  e  $6$  para os lados  $ij = 23, 31, 12$ , respectivamente.

Pode-se então agora escrever o vetor curvatura  $\{k\}$ , em função dos graus liberdade do elemento finito da seguinte maneira :

$$\{k\} = [B]\{u_{DKT}\} \quad (37)$$

onde  $[B]$  é a matriz de ordem  $3 \times 9$  que relaciona o vetor curvatura com o vetor deslocamento do elemento, explicitada em BATOZ *et al* (1980)

Sabe-se da equação ( 17 ) que a energia de deformação do elemento DKT, é dada por :

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{k\}^t [D]_f \{k\} dYdZ$$

Substituindo-se a equação ( 37 ), na equação da energia de deformação acima obtém-se :

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{u_{DKT}\}^T [B]^T [D]_f [B] \{u_{DKT}\} dYdZ \quad (38)$$

Mudando as variáveis e os limites de integração, encontra-se :

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \{u_{DKT}\}^T [B]^T [D]_f [B] \{u_{DKT}\} 2Ad\xi d\eta \quad (39)$$



$$U_f = \frac{1}{2} \{u_{DKT}\}^T \int_0^1 \int_0^{1-\xi} 2A[B]^T [D]_f [B] d\xi d\eta \{u_{DKT}\} \quad (40)$$

Sabe-se que a energia de deformação, em função da matriz de rigidez [ K ] do elemento, pode ser escrita como :

$$U_f = \frac{1}{2} \{u_{DKT}\}^T [K] \{u_{DKT}\} \quad (41)$$

então :

$$[K] = \int_0^1 \int_0^{1-\xi} 2A[B]^T [D]_f [B] d\xi d\eta \quad (42)$$

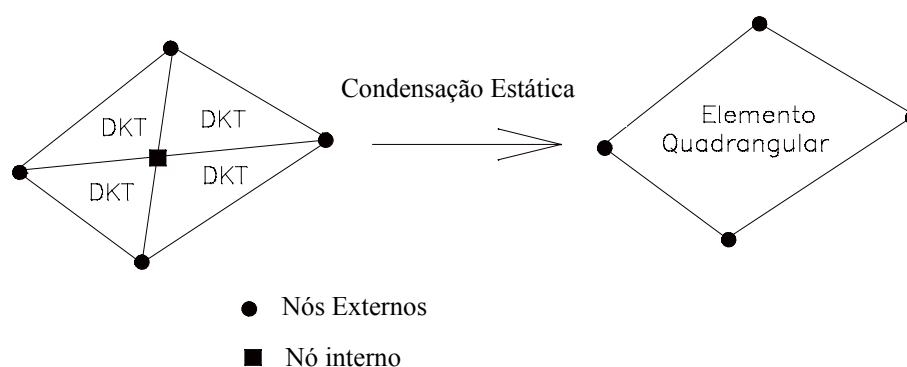
Efetuando-se as integrações da equação anterior, determina-se explicitamente a matriz de rigidez [ K ] do elemento DKT, já em relação ao sistema de referência das lajes ou da subestrutura.

#### 3.4.4 Elemento finito quadrangular

As lajes que compõem os pavimentos de edifícios apresentam geralmente geometria retangular. Nesse caso uma discretização do pavimento por malhas compostas de elementos quadrangulares, principalmente os retangulares, torna-se mais simples do que a por elementos triangulares. Além disso, a geração de pontos nodais para formar quadrângulos apresenta menor complexidade que a geração de pontos nodais para formar elementos triangulares.

O elemento quadrangular pode ser obtido facilmente pela composição de quatro elementos triangulares DKT, quando colocam-se os parâmetros internos, comum ao elementos, em função dos seus parâmetros externos, através da condensação estática, conforme a figura seguinte:

A obtenção do elemento quadrangular é feita através da condensação estática de quatro (4) elementos triangulares DKT, conforme figura a seguir:



**Figura 20 : Elemento quadrangular formado a partir de 4 elementos DKT**

A relação entre forças nodais  $\{f\}$  e deslocamentos  $\{\delta\}$ , do quadrilátero, pode ser escrito da seguinte forma :

$$[K]\{\delta\} = \{f\} \quad (43)$$

Esta expressão, pode ser reescrita, distinguindo-se os parâmetros externos localizados nos vértices do quadrilátero  $\{\delta_e\}$ , dos parâmetros internos do ponto médio  $\{\delta_i\}$  e , fazendo-se o mesmo para o vetor de cargas. Desta forma :

$$\begin{bmatrix} [K_{ee}]_{12 \times 12} & [K_{ei}]_{12 \times 3} \\ [K_{ie}]_{3 \times 12} & [K_{ii}]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta_e\}_{12 \times 1} \\ \{\delta_i\}_{3 \times 1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{f_e\}_{12 \times 1} \\ \{f_i\}_{3 \times 1} \end{Bmatrix} \quad (44)$$

onde :

- índice i indica parâmetro interno do elemento quadrangular
- índice e indica parâmetro externo do elemento quadrangular

Efetuada-se os produtos matriciais da equação anterior, obtém-se :

$$\{f_e\} = [K_{ee}]\{\delta_e\} + [K_{ei}]\{\delta_i\} \quad (45)$$

$$\{f_i\} = [K_{ie}]\{\delta_e\} + [K_{ii}]\{\delta_i\} \quad (46)$$

Da equação ( 46 ) pode-se obter  $\{\delta_i\}$  da seguinte maneira :

$$\{\delta_i\} = [K_{ii}]^{-1} \left\{ \{f_i\} - [K_{ie}] \{\delta_e\} \right\} \quad (47)$$

Substituindo-se agora a equação ( 47 ) em ( 45 ), obtém-se :

$$\{f_e\} - [K_{ie}] [K_{ii}]^{-1} \{f_i\} = \left\{ [K_{ee}] - [K_{ei}] [K_{ii}]^{-1} [K_{ie}] \right\} \{\delta_e\} \quad (48)$$

Definindo:

$$\{f\}_c = \{f_e\} - [K_{ei}] [K_{ii}]^{-1} \{f_i\} \quad (49)$$

$$[K]_c = [K_{ee}] - [K_{ei}] [K_{ii}]^{-1} [K_{ie}] \quad (50)$$

a equação ( 48 ) fica :

$$\{f\}_c = [K]_c \{\delta_e\} \quad (51)$$

onde  $[K]_c$  representa a matriz de rigidez condensada do quadrilátero de ordem 12x12, função apenas dos parâmetros externos. Deve-se observar que as forças nodais também foram modificadas, pois eliminou-se os parâmetros internos.

# 4

## MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL DA ESTRUTURA

### 4.1 Introdução

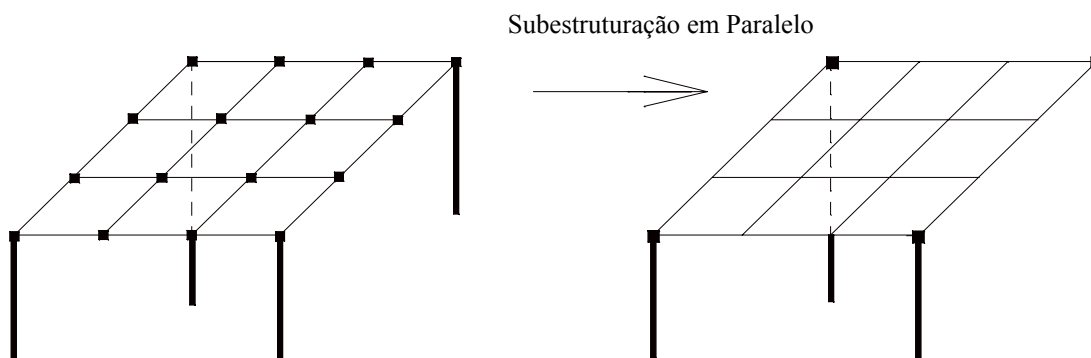
A matriz de rigidez global do edifício é obtida através da contribuição das rigidezes de todos os seus elementos estruturais componentes ( elementos de placas e barras). Seria portanto, trabalhosa a análise global da estrutura, considerando-se de uma só vez todas as coordenadas deslocamentos envolvidas, devido ao enorme número de incógnitas presentes no sistema de equações correspondente.

Para que se tenha um sistema computacional eficaz na resolução de estruturas de grande porte, como edifícios altos, utilizam-se as técnicas de subestruturação, que analisam a rigidez de cada andar independentemente, ao invés de resolver a estrutura como um todo. Dessa forma, com a divisão do edifício em várias subestruturas, teoricamente é possível analisar edifícios altos com um número qualquer de andares. As técnicas de subestruturação utilizadas são feitas em paralelo e série.

### 4.2 Subestruturação em Paralelo

A partir do sistema de referência de cada subestrutura, definem-se todos os nós que compõem o pavimento. Os pontos nodais dos elementos finitos que se conectam aos pilares são definidos como nós externos, e aqueles que não apresentam conectividade com os elementos verticais, são os nós internos.

A matriz de rigidez e o vetor de forças nodais do pavimento, devem ser condensados para as coordenadas das subestruturas. Nessa primeira fase de montagem da matriz de rigidez global do edifício, é utilizada a técnica de subestruturação em paralelo.



**Figura 21 : Subestruturação em paralelo**

Para se obter a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais do pavimento em função apenas dos nós externos, podem ser utilizados dois métodos de condensação estática, o método tradicional ou o método de “*Choleski Decomposition*” ROSEN (1970). O método tradicional utiliza a liberação total das coordenadas dos nós internos para se chegar à matriz de rigidez na forma condensada, com se fez por exemplo no item 3.4.4 na composição do elemento quadrangular, enquanto que o segundo método envolve apenas a liberação parcial das coordenadas internas.

#### 4.2.1 Método “Choleski Decomposition”

Seja a equação matricial de equilíbrio do pavimento :

$$\begin{bmatrix} [R_{II}] & [R_{IE}] \\ [R_{EI}] & [R_{EE}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_I\} \\ \{D_E\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_I\} \\ \{F_E\} \end{Bmatrix} \quad (52)$$

sendo :

I - índice que indica os parâmetros internos do pavimento

E - índice que indica os parâmetros externos do pavimento

Este método pode ser formulado a partir da decomposição da matriz de rigidez num triplo produto matricial.

$$\begin{bmatrix} [R_{II}] & [R_{IE}] \\ [R_{EI}] & [R_{EE}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [RT] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [R^*] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [L]^T & [RT]^T \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \quad (53)$$

sendo :

[L] - matriz triangular inferior com termos unitários na diagonal principal

[RT] - matriz retangular

[0] - matriz nula

[I] - matriz identidade

[D] - matriz diagonal

[R\*] - matriz simétrica condensada.

Da equação ( 53 ), obtém-se as seguintes expressões :

$$[R_{II}] = [L][D][L]^T \quad (54)$$

$$[R_{EI}] = [R_{IE}]^T = [RT][D][L]^T \quad (55)$$

$$[R_{EE}] = [R^*] + [RT][D][RT]^T \quad (56)$$

Relacionando-se a equação ( 53 ) em ( 52 ), encontram-se os seguintes sistemas desacoplados :

$$\begin{bmatrix} [D] & [0] \\ [0] & [R^*] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_I^*\} \\ \{D_E^*\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F_I^*\} \\ \{F_E^*\} \end{Bmatrix} \quad (57)$$

onde :

$$\begin{Bmatrix} \{D_I^*\} \\ \{D_E^*\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L]^T & [RT]^T \\ [0] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D_I\} \\ \{D_E\} \end{Bmatrix} \quad (58)$$

$$\begin{Bmatrix} \{F_I\} \\ \{F_E\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [L] & [0] \\ [RT] & [I] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{F_I^*\} \\ \{F_E^*\} \end{Bmatrix} \quad (59)$$

Da equação ( 55 ), encontra-se a expressão da submatriz [RT], como sendo :

$$[RT] = [R_{EI}] [ [D][L]^T ]^{-1} \quad (60)$$

Da equação ( 56 ), tira-se :

$$[R^*] = [R_{EE}] - [RT][D][RT]^T \quad (61)$$

Das equações ( 60 ) e ( 61 ), determinam-se as expressões genéricas dos termos da matriz [RT] e [R\*], respectivamente.

$$RT_{i,j} = \frac{1}{D_{j,j}} R_{i+NI,j} - \sum_{k=1}^{j-1} RT_{i,k} L_{j,k} D_{k,k} \quad (62)$$

e

$$R^*_{i,j} = R_{i+NI,j+NI} - \sum_{k=1}^{NI} L^2_{i,k} D_{k,k} \quad (63)$$

sendo :

$R_{i,j}$  - termo da matriz de rigidez original

NI - número de coordenadas internas.

Observa-se que a matriz [R\*], pode ser determinada a partir da triangularização de Gauss até a coluna referente a última coordenada interna.

$$\left[ \begin{array}{cc} [R_{II}] & [R_{IE}] \\ [R_{EI}] & [R_{EE}] \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Triangularizacao}} \left[ \begin{array}{cc} [L]^T & [RT] \\ [0] & [R^*] \end{array} \right] \quad (64)$$

Da equação ( 53 ) obtém-se :

$$[R^*]\{D_E^*\} = \{F_E^*\} \quad (65)$$

lembrando-se que  $[R^*]$  e  $\{F_E^*\}$  representam a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais, em função das coordenadas externas, respectivamente.

Da equação ( 58 ), conclui-se que :

$$\{D_E^*\} = \{D_E\} \quad (66)$$

e da equação ( 59 ), encontra-se :

$$\{F_I\} = [L]\{F_I^*\} \quad (67)$$

e

$$\{F_E^*\} = [RT]\{F_I^*\} + \{F_E^*\} \quad (68)$$

então :

$$\{F_E^*\} = \{F_E\} - [RT]\{F_I^*\} \quad (69)$$

Uma vez calculado  $\{F_I^*\}$  da equação ( 67 ), pode-se obter  $\{D_I^*\}$ , de acordo com a equação ( 57 ) :

$$[D]\{D_I^*\} = \{F_I^*\} \quad (70)$$

A partir da equação ( 58 ), encontra-se a expressão do vetor deslocamento das coordenadas internas  $\{D_I\}$ , como sendo :



$$\{D_I\} = \left[ [L]^T \right]^{-1} \left( \{D_I^*\} - [RT]^T \{D_E\} \right) \quad (71)$$

Analisando-se as equações ( 65 ) e ( 69 ), observa-se que não é necessário inversões de matrizes para se obter  $[R^*]$  e  $\{F_E^*\}$ , resultando assim, num método de menor número de operações numéricas e menor esforço computacional que o método tradicional.

### 4.3 Contribuição dos pilares à matriz de rigidez da estrutura

Devido a presença dos pilares, a matriz de rigidez de cada subestrutura relaciona-se com o pavimento superior e inferior. A contribuição da rigidez dos elementos horizontais à subestrutura fica restrita ao próprio pavimento em que estão contidos, assim, para um pavimento K , a matriz de rigidez dos elementos horizontais, já nas coordenadas da subestrutura, são espalhadas apenas nas matriz  $[R]_{K,K}$ .

Entretanto, os termos da matriz de rigidez dos pilares, são espalhadas nas matrizes  $[R]_{K,K}$ ,  $[R]_{K,K-1}$  e  $[R]_{K-1,K-1}$ , onde o índice K-1 representa o pavimento inferior ao K.

O endereçamento dos termos da matriz de rigidez condensada de cada elemento contido no pavimento, à matriz de rigidez  $[R]_{K,K}$  da subestrutura, depende de suas conectividades com os nós dos pilares. Sabe-se que as coordenadas envolvidas no espalhamento da matriz de rigidez do pilar são :

- coordenadas independentes nos eixos do próprio pilar, com os respectivos endereçamentos :

- $\delta_X = 3j-2$

- $\phi_Y = 3j-1$

- $\phi_Z = 3j$

- coordenadas dependentes, referente ao movimento de corpo rígido das lajes, que são :

$$- \delta_Y = N_T - 2$$

$$- \delta_Z = N_T - 1$$

$$- \phi_X = N_T$$

onde:

-j refere-se ao número do nó do pilar na discretização do pavimento

$-N_T$  o número total de coordenadas da subestrutura, sendo  $N_T = 3*(N_p + 1)$  com  $N_p$  sendo o número de pilares de cada pavimento

#### 4.4 Subestruturação em série

Como o sistema estrutural é dividido em várias subestruturas em série, a matriz de rigidez global será formada pela contribuição das matrizes de rigidez de todos os andares já na forma condensada, observando obviamente sua seqüência de numeração. Assim, o sistema de equilíbrio global fica expresso por :

$$\begin{bmatrix} [R]_{N,N} & [R]_{N,N-1} & & & & & [0] \\ [R]_{N-1,N} & [R]_{N-1,N-1} & [R]_{N-1,N-2} & & & & \\ & & \vdots & & & & \\ & & & [R]_{K,K+1} & [R]_{K,K} & [R]_{K,K-1} & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & & [R]_{1,2} & [R]_{1,1} & [R]_{1,0} \\ [0] & & & & & [R]_{0,1} & [R]_{0,0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [D]_N \\ [D]_{N-1} \\ \\ [D]_K \\ \\ [D]_1 \\ [D]_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [F]_N \\ [F]_{N-1} \\ \\ [F]_K \\ \\ [F]_1 \\ [F]_0 \end{Bmatrix} \quad (72)$$

Os índices das submatrizes indicam os pavimentos a que se referem, sendo  $[D]_K$  o vetor deslocamento e  $[F]_K$  o vetor de forças nodais de um pavimento genérico K, considerando-se já forças nodais equivalentes. A primeira linha da matriz corresponde ao último pavimento N do edifício, e a última linha refere-se a base do

edifício, representado pelo número 0. Respeitando essa numeração, observa-se que a matriz de rigidez global é uma matriz simétrica em faixa (banda).

Da primeira linha do sistema de equações ( 72 ) tem-se :

$$[R]_{N,N}[D]_N + [R]_{N,N-1}[D]_{N-1} = [F]_N \quad (73)$$

Da segunda linha resulta :

$$[R]_{N-1,N}[D]_N + [R]_{N-1,N-1}[D]_{N-1} + [R]_{N-1,N-2}[D]_{N-2} = [F]_{N-1} \quad (74)$$

Substituindo-se a expressão de  $[D]_N$  que se obtém em ( 73 ) na equação acima, encontra-se :

$$\begin{aligned} & \{ [R]_{N-1,N} - [R]_{N-1,N} [R]_{N,N}^{-1} [R]_{N,N-1} \} [D]_{N-1} + \\ & + [R]_{N-1,N-2} [D]_{N-2} = \{ [F]_{N-1} - [R]_{N-1,N} [R]_{N,N}^{-1} [F]_N \} \end{aligned} \quad (75)$$

Definindo :

$$[R]_{N-1,N-1}^* = [R]_{N-1,N-1} - [R]_{N-1,N} [R]_{N,N}^{-1} [R]_{N,N-1} \quad (76)$$

e

$$[F]_{N-1}^* = [F]_{N-1} - [R]_{N-1,N} [R]_{N,N}^{-1} [F]_N \quad (77)$$

temos:

$$[R]_{N-1,N-1}^* [D]_{N-1} + [R]_{N-1,N-2} [D]_{N-2} = [F]_{N-1}^* \quad (78)$$

Eliminando-se de maneira análoga os deslocamentos das equações de equilíbrio subseqüentes, num processo de substituição para frente (método da eliminação em série), num andar genérico K, encontra-se :

$$[R]_{K,K}^* [D]_K + [R]_{K,K-1} [D]_{K-1} = [F]_K^* \quad (79)$$

onde

$$[R]_{K,K}^* = [R]_{K,K} - [R]_{K,K-1} [R]_{K-1,K-1}^{*-1} [R]_{K-1,K} \quad (80)$$

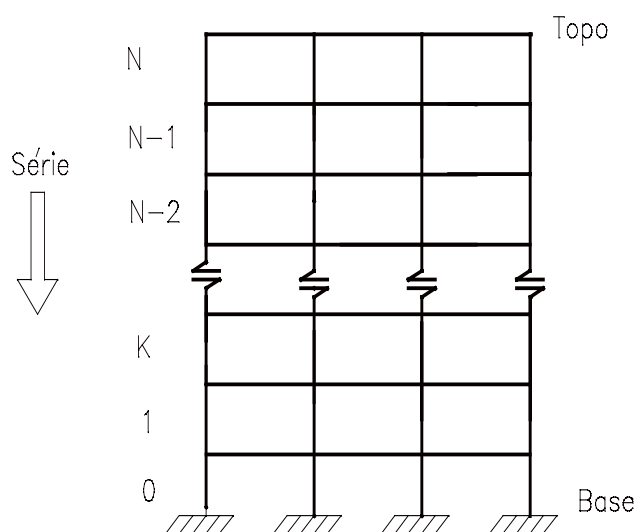
e

$$[F]_K^* = [F]_K - [R]_{K,K-1} [R]_{K-1,K-1}^{*-1} [F]_K^* \quad (81)$$

A última eliminação da série, fica então :

$$[R]_{1,1}^* [D]_1 + [R]_{1,0} [D]_0 = [F]_1^* \quad (82)$$

Como a vinculação na base é suposta engastada, temos que  $[D]_0 = [0]$ . Sendo assim, com os deslocamentos na ligação estrutura-fundação conhecidos, volta-se às equações anteriores, onde através do processo de retro-substituições, calculam-se os deslocamentos de todos os elementos em cada subestrutura, da base até o topo do edifício.



**Figura 22 : Subestruturação em série**

## 4.5 Deslocamentos locais nos elementos

### 4.5.1 Introdução

Os deslocamentos calculados anteriormente, são relacionados às coordenadas globais das subestruturas. A seguir, são descritas as técnicas de cálculo matricial empregadas na obtenção dos deslocamentos e esforços nas extremidades dos elementos existentes, segundo seus sistemas de referência locais.

### 4.5.2 Deslocamentos locais nos elementos de viga

Os deslocamentos locais nas extremidades de cada elemento de viga são obtidos através da seguinte expressão :

$$\{u\}_v = [\beta]_v \{U\}$$

onde :

$\{u\}_v$  : representa os deslocamentos nas extremidades de cada elemento de viga, em coordenadas locais

$\{U\}$  : representa os deslocamentos nodais determinados nas coordenadas da subestrutura.

$\{\beta\}_v$  : matriz de incidência cinemática correspondente a cada elemento de viga.

#### 4.5.3 Deslocamentos locais nos pilares

Os deslocamentos locais nos pilares, de forma análoga para os elementos de vigas, são obtidos através da seguinte expressão :

$$\{u\}_p = [\beta]_p \{U\}$$

onde :

$\{\beta\}_p$  : matriz de incidência cinemática de cada pilar

$\{u\}_p$  : representa os deslocamentos nas extremidades de cada pilar, em coordenadas locais

$\{U\}$  : representa os deslocamentos nodais determinados nas coordenadas da subestrutura.

#### 4.5.4 Deslocamentos nos elementos de placa

Os deslocamentos nodais nos elementos finitos são calculados diretamente pela equação ( 67 ), já mencionada no item 4.2.1.

### 4.6 Forças nodais

O vetor de forças nodais do sistema estrutural é obtido pela contribuição direta das forças concentradas nos nós, mais as possíveis forças nodais equivalentes, devido ao carregamento distribuído ao longo dos elementos.

$$\{F\} = \{F\}_{NO} + \{F\}_{EQV}$$

onde :

$\{F\}$  : vetor de forças nodais, em coordenadas locais

$\{F\}_{NO}$  : vetor de forças concentradas diretamente aplicadas nos nós, em coordenadas locais

$\{F\}_{EQV}$  : representa o vetor de forças nodais equivalentes, em coordenadas locais.

#### 4.6.1 Forças nodais equivalentes das vigas

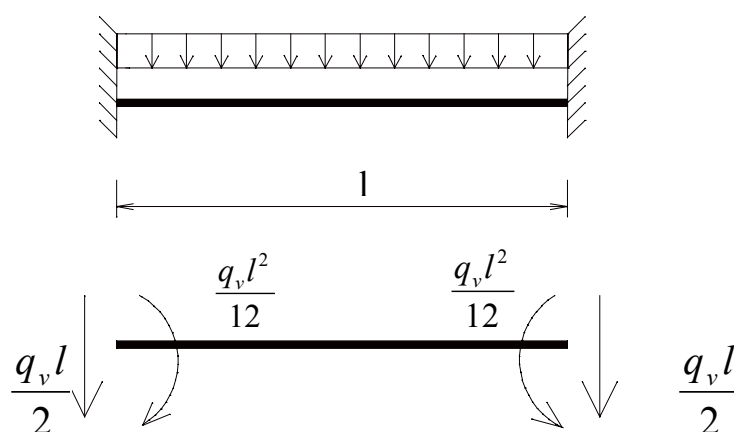
O vetor de forças nodais equivalentes  $\{f_v\}_{EQV}$  das vigas, segundo as coordenadas locais, corresponde às forças segundo estas coordenadas, sem que existam deslocamentos correspondentes. Por isso, a determinação das forças nodais equivalentes se resume nos esforços de engastamento perfeito em cada extremidade. E no caso de cargas uniformemente distribuídas no seu comprimento, de acordo com as coordenadas deslocamentos adotadas temos :

$$\{f_v\}_{EQV}^T = \left\{ \frac{-q_v l}{2} \quad 0 \quad \frac{q_v l^2}{12} \quad \frac{-q_v l}{2} \quad 0 \quad \frac{-q_v l^2}{12} \right\}$$

sendo :

l - comprimento de cada trecho

$q_v$  - carga uniformemente distribuída.



**Figura 23 : Carga uniformemente distribuída no elemento de viga**

O vetor de forças nodais equivalentes da viga  $\{F_V\}_{EQV}$ , agora nas coordenadas da subestrutura, pode ser determinado através da seguinte expressão :

$$\{F_V\}_{EQV} = [\beta_V]^T \{f_V\}_{EQV}$$

onde  $[\beta_V]^T$  é a transposta da matriz de incidência  $[\beta_V]$  já mencionada em 3.2.

#### 4.6.2 Forças nodais equivalentes do elemento DKT

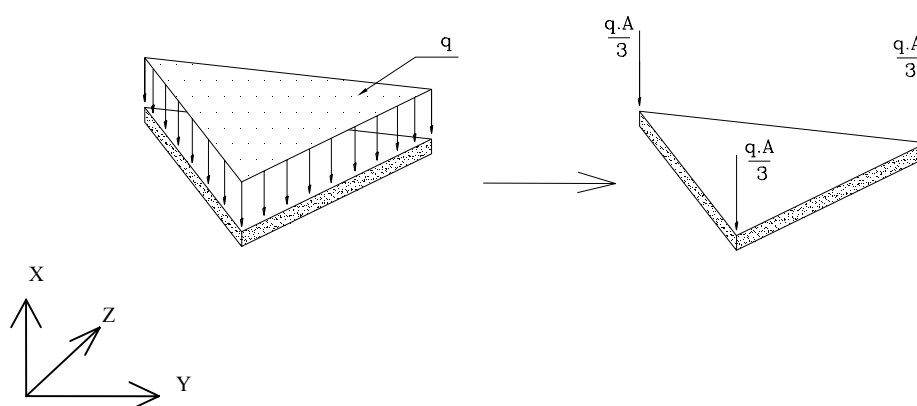
As forças nodais equivalentes no elemento triangular DKT para um carregamento uniformemente distribuído  $q$ , segundo BATOZ *et al* (1980), são dados por :

$$\{F_{DKT}\}^T = \frac{qA}{3} \{1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0\}$$

onde

A - área do elemento triangular.





**Figura 24 : Forças nodais equivalentes no elemento DKT**

Portanto, admite-se que as cargas uniformemente distribuída  $q$ , fiquem representadas apenas por cargas concentradas em cada nó do elemento.

#### 4.6.3 Forças nodais na lajes

As forças laterais do vento, são aplicadas no plano médio das lajes ao nível de cada pavimento, e têm a sua resultante decomposta nas direções Z, Y e momento nas coordenadas da subestrutura.

Sendo assim, a contribuição das forças laterais do vento já é feita diretamente no vetor de forças nodais da subestrutura.

#### 4.7 Esforços solicitantes nos elementos

Uma vez calculados os deslocamentos locais  $\{u_v\}$  dos elementos de viga e  $\{u_p\}$  dos pilares e o vetor de forças nodais equivalentes, é possível o cálculo dos esforços internos em cada elemento.

##### 4.7.1 Esforços solicitantes nos elementos de viga

Os esforços solicitantes em cada elemento de viga, são dados através da seguinte expressão , da análise matricial :

$$\{S\}_v = [K_{vl}]\{u\}_v - \{f_v\}_{eqv}$$

sendo :

$\{S\}_v$  : esforços nos extremos de cada elemento de viga

$[K_{vl}]$  : matriz de rigidez local de cada elemento de viga

$\{f_v\}_{eqv}$  : vetor de forças nodais equivalentes do elemento.

$\{u_v\}$  : deslocamentos nas extremidades de cada elemento de viga, em coordenadas locais.

#### 4.7.1 Esforços solicitantes nos pilares

Analogamente, para os pilares, os esforços solicitantes é calculado de acordo com a expressão abaixo :

$$\{S\}_p = [K_{pl}]\{u\}_p$$

sendo :

$\{u_p\}$  : deslocamentos nas extremidades de cada pilar, em coordenadas locais.

$\{S\}_p$  = esforços nas extremidades dos pilares

$[K_{pl}]$  = matriz de rigidez local de cada pilar

Observa-se portanto, que no caso dos pilares o vetor de forças nodais equivalentes é nulo.

Os esforços solicitantes que atuam em qualquer seção do pilar são : dois momentos fletores contidos nos planos principais de inércia, duas forças cortantes, um esforço axial e um momento torçor.

#### 4.7.3 Esforços internos no elemento DKT

Os esforços internos presentes no elemento DKT são os momentos fletores  $M_Y$  e  $M_Z$ , o momento volvente  $M_{YZ}$ , e também as forças cortantes  $Q_Y$  e  $Q_Z$ .

Os momentos fletores e volvente podem ser obtidos através da seguinte equação :

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_Y \\ M_Z \\ M_{YZ} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma\}_f X dX \quad (83)$$

Utilizando ( 15 ) e ( 18 ) . temos :

$$\{M\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [D] \{k\} X^2 dX = [D]_f \{k\} \quad (84)$$

onde :

$\{M\}$  - vetor dos momentos

$\{\sigma\}_f$  - vetor de tensões devido à flexão

$\{k\}$  - vetor de curvatura

$[D]$  - matriz que relaciona tensões com deformações.

$[D]_f$  - matriz já definida em na expressão ( 19 )

Substituindo-se a equação ( 37 ) em ( 84 ) , obtém-se a expressão dos momentos fletores  $\{ M \}$  para qualquer ponto no interior ou contorno do elemento, em função dos seus deslocamentos nodais .

$$\{M\} = [D]_f [B] \{u_{DKT}\} \quad (85)$$

ou então :

$$\begin{Bmatrix} M_Y \\ M_Z \\ M_{YZ} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [1 \ \xi \ \eta] \\ [1 \ \xi \ \eta] \\ [1 \ \xi \ \eta] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [X] \\ [Y] \\ [Z] \end{bmatrix} \{u_{DKT}\} \quad (86)$$

As forças cortantes ( $Q_Y$  e  $Q_Z$ ), são obtidas através das expressões da elasticidade que relacionam as mesmas, com os momentos fletores e volventes .

$$Q_Y = M_{Y'Y} + M_{YZ'Y}$$

$$Q_Z = M_{Z'Z} + M_{YZ'Z}$$

( 87 )

## **4.8 Metodologia para análise iterativa em 2ª ordem**

### **4.8.1 Introdução**

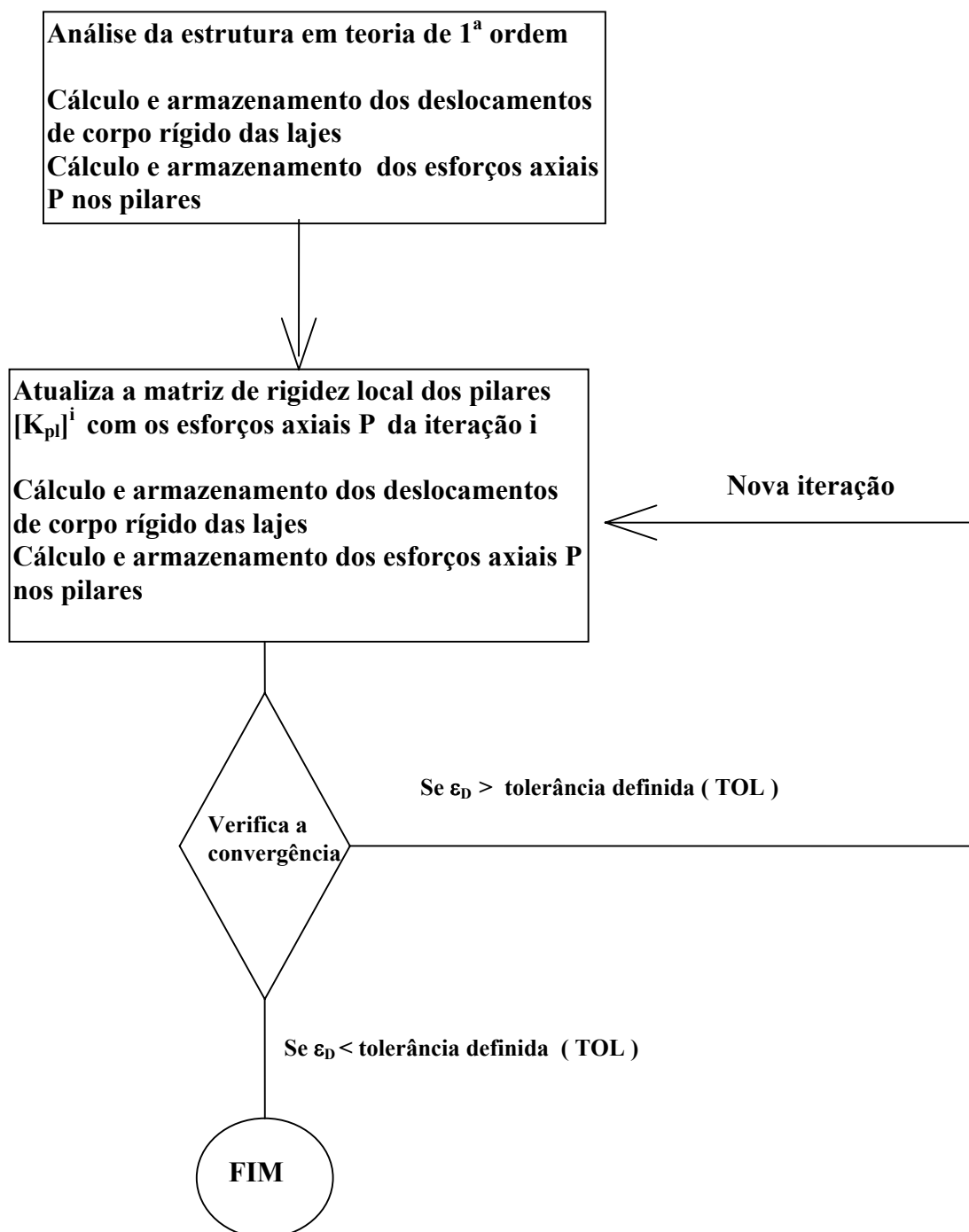
Para os pilares a matriz de rigidez é formulada em teoria de 2ª ordem na sua posição deformada.

O cálculo de uma estrutura em teoria de segunda ordem exige o conhecimento prévio dos esforços e deslocamentos, resultantes da sua análise em teoria de primeira ordem.

Após a análise linear, inicia-se o cálculo em teoria de segunda ordem, com base nos resultados obtidos anteriormente. Os esforços resultantes são novamente guardados, pois deverão ser utilizados na análise da próxima iteração. Este processo se repete várias vezes, sendo as ações aplicadas constantes e a matriz de rigidez da estrutura é atualizada em função dos esforços axiais dos pilares calculados na etapa anterior. Estes esforços contribuem para que ocorra uma degenerescência gradativa da rigidez da estrutura, aumentando conseqüentemente os deslocamentos dos seus nós.

Sendo assim esse processo iterativo prossegue para definir a posição final de equilíbrio da estrutura.

O processo adotado é a técnica de iteração direta, no qual os deslocamentos resultantes deverão convergir de acordo com um valor de tolerância pré-definido. A seguir apresenta-se um algoritmo simplificado deste processo iterativo de análise não linear.



**Figura 25 : Algoritmo da análise iterativa em teoria de 2ª ordem**

#### 4.8.2 Critério de convergência

O processo iterativo deverá ser encerrado quando o valor da tolerância TOL pré-definida, for igual ou superior ao valor “ $\varepsilon_d$ ” calculado por :

$$\varepsilon_d = \frac{\|\{\delta_f\} - \{\delta_{n-1}\}\|}{\|\delta_f\|} \quad (88)$$

onde :

$\| \|$  - representa a norma Euclidiana de um vetor

$\{\delta_f\}$  - vetor dos deslocamentos no equilíbrio.

$\{\delta_{n-1}\}$  - vetor dos deslocamentos na iteração anterior a n

A definição do fim de um processo iterativo deve ser feita através de um critério e segundo uma tolerância pré-definida. O critério adotado, será o critério de convergência dos deslocamentos.

Como o valor final dos deslocamentos  $\{\delta_f\}$  não é conhecido ao longo da resolução do sistema de equações, é usual utilizar como aproximação o último resultado obtido para o vetor dos deslocamentos  $\{\delta_n\}$ , ou seja o vetor dos deslocamentos obtidos na iteração n. Como neste problema, em teoria de segunda ordem, há uma tendência geral de crescimento dos deslocamentos, pois é um problema de degenerescência de rigidez, a norma  $\{\delta_n\}$  deverá ser menor que  $\{\delta_f\}$ . Então a aproximação de  $\{\delta_n\}$  no lugar de  $\{\delta_f\}$  atende ao critério de convergência, sendo até mais rigoroso.

Com o intuito de evitar inconsistências de dimensões separa-se o critério de deslocamentos em dois outros :

- um envolvendo as translação do corpo rígido da laje nas direções Y e Z.
- outro envolvendo a rotação do corpo rígido da laje na direção X.

# 5 PROGRAMA COMPUTACIONAL

## 5.1 Introdução

O principal objetivo deste trabalho é a determinação de esforços e deslocamentos na estrutura respeitando as hipóteses de cálculo feitas nos capítulos anteriores. Para cumprir este fim, elaborou-se um programa computacional em *Fortran Power Station 90*.

Além disso, elaborou-se também um programa interativo, em *Visual Basic 4.0*, para auxiliar a montagem do arquivo de leitura de dados. Sua estrutura é composta de caixas de diálogo que facilitam para o usuário a entrada de dados necessários ao processamento das estruturas. A comunicação entre as duas linguagens foi possível devido ao acesso de arquivos comuns de leitura.

O sistema de unidades de saída está sempre de acordo com o sistema de unidades de entrada, dispensando portanto as transformações entre unidades de mesma grandeza.

## 5.2 Modularização do programa computacional EDIFICIO.F90

A linguagem computacional *Fortran Power Station 90* permite que um programa computacional de maior porte seja dividido em vários módulos ou “*Workspaces*”, de modo a organizar melhor o seu entendimento e com a intenção também de aproveitar melhor a memória do computador.

Dessa forma, o programa computacional EDIFICIO.F90 encontra-se dividido em cinco “*Workspaces*” ou módulos descrito a seguir.

### 5.2.1 *Workspace* MATRIZ.F90

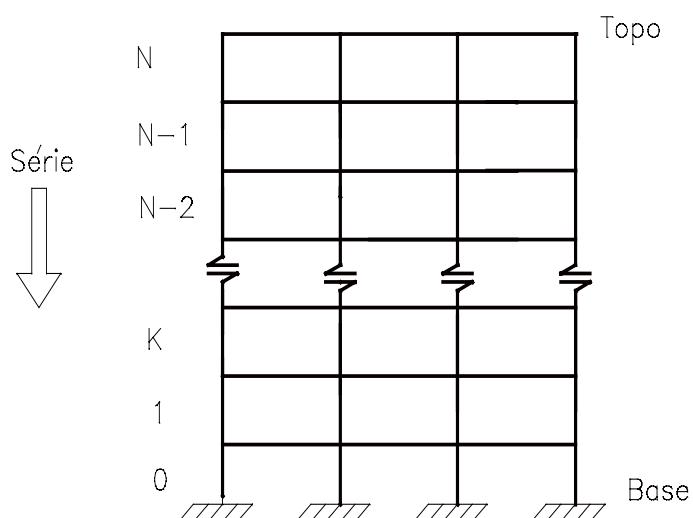
Este módulo do programa realiza a leitura de dados dos arquivos gerados pelo programa interativo EDIFICIO.VBP elaborado em *Visual Basic 4.0*. Faz ainda as seguintes etapas de programação :

- montagem da matriz de rigidez local de cada elemento
- condensação estática para a montagem da matriz de rigidez do elemento quadrangular, a partir de 4 elementos finitos DKT.
- montagem da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais de cada subestrutura.
- montagem da matriz de rigidez condensada do pavimento, através da subestruturação em paralelo.

### **5.2.2 *Workspace* MONTAGEM.F90**

Este módulo realiza a montagem da matriz de rigidez e do vetor de forças nodais, mas agora considerando todos os andares do edifício. Esta composição da matriz de rigidez global do edifício a partir da matriz de rigidez das subestruturas é realizada através da composição das rigidezes de todas as subestruturas a partir do último pavimento, adicionando-se sempre a parcela da rigidez das coordenadas de base da subestrutura anterior com as coordenadas de topo da subestrutura seguinte, até que se chegue ao primeiro andar do edifício. De acordo com a expressão ( 72 ), sabe-se que o sistema de equilíbrio global resultante apresenta a matriz de rigidez em banda, em consequência da numeração sequencial adotada para os andares.





**Figura 26 : Montagem da matriz de rigidez global da estrutura**

### 5.2.3 *Workspace* SERIE.F90

Este módulo, como o próprio nome diz, realiza a subestruturação em série do sistema construído pela *Workspace* MONTAGEM.F90. Com a resolução desse sistema são calculados os deslocamentos nos andares, isto é, deslocamentos nos pilares e de corpo rígido das lajes. O processo numérico adotado para o cálculo dos deslocamentos foi o método de eliminação de GAUSS.

### 5.2.4 *Workspace* DESLOCAMENTO.F90

Este módulo determina os deslocamentos dos nós internos do pavimento, representados pelos elementos de viga e placa.

### 5.2.5 *Workspace* ESFORCO.F90

Finalmente o último módulo, que realiza o cálculo dos esforços em todos os elementos de cada pavimento do edifício, referente às suas coordenadas locais.

### **5.3 Tipos de análises realizadas**

Com algumas simples alterações no programa computacional e/ou entrada de dados, é possível encontrar resultados através de até 8 modelos de análises, considerando-se três hipóteses de cálculo descritas a seguir.

#### **5.3.1 Análise tridimensional considerando ou não a rigidez transversal das lajes.**

É possível desprezar a influência da rigidez transversal das lajes na estrutura, anulando-se os termos da matriz de rigidez dos elementos de placa ( elemento DKT). Esta mudança é feita no sub-programa MATRIZ.F90.

#### **5.3.2 Análise tridimensional em teoria de primeira ordem ou segunda ordem para os pilares.**

Para a análise estrutural em teoria de segunda ordem, deve-se alterar a matriz de rigidez dos pilares com os esforços axiais, que foram previamente obtidos em teoria de primeira ordem.

Dessa forma, com os esforços e com a mudança da matriz de rigidez local dos pilares, a análise da estrutura em teoria de segunda ordem, é então realizada iterativamente.

A mudança é novamente realizada no sub-programa MATRIZ.F90.

#### **5.3.3 Análise tridimensional com trechos rígidos ou sem trechos rígidos**

Neste modelo, a simulação de trechos rígidos pode ser negligenciada desprezando-se as excentricidades entre viga-pilar. A mudança deve ser feita na entrada de dados, atribuindo-se valores nulos às excentricidades.

Temos portanto, que a análise estrutural pode ser feita considerando até 8 modelos estruturais diferentes, como é mostrado na tabela a seguir.

O sub-programa **EDIFICIO.VBP**, permite-se a escolha com qual modelo ou modelos o usuário deseja que a estrutura seja analisada.

**Tabela 03 : Tipos de modelos possíveis para análise**

| <b>Modelo</b> | <b>Consideração ou não da Rigidez Transversal da Laje</b> | <b>Consideração ou não de Trechos Rígidos</b> | <b>Teoria para os pilares</b> |
|---------------|---|---|-------------------------------|
| 1             | NÃO   | NÃO   | 1 <sup>a</sup> . ordem        |
| 2             | SIM   | NÃO   | 1 <sup>a</sup> . ordem        |
| 3             | NÃO   | NÃO   | 2 <sup>a</sup> . ordem        |
| 4             | SIM   | NÃO   | 2 <sup>a</sup> . ordem        |
| 5             | NÃO   | SIM   | 1 <sup>a</sup> . ordem        |
| 6             | SIM   | SIM   | 1 <sup>a</sup> . ordem        |
| 7             | NÃO   | SIM   | 2 <sup>a</sup> . ordem        |
| 8             | SIM   | SIM   | 2 <sup>a</sup> . ordem        |

#### **5.4 Programação em *Visual Basic 4.0***

*O VISUAL BASIC 4.0* é um software muito interessante, pois permite ao programador criar sofisticados programas para o ambiente *Windows 95*.

Como o nome sugere, grande parte do trabalho de programação com o *Visual Basic* é feito visualmente. Isso significa que na fase de elaboração, você pode verificar como o projeto irá comportar-se ao ser executado. Trata-se de uma grande vantagem sobre outras linguagens de programação, pois é possível alterar e testar os programas até o programador ficar satisfeito com as cores, tamanhos e imagens incluídas no programa.

Sabe-se que na grande maioria dos programas de análise estrutural, um dos grandes problemas é a entrada de dados, que é normalmente fornecida via teclado ou um arquivo com os dados da estrutura é construído em algum editor de texto ASCII e então o programa computacional executa este arquivo.

Porém, com as janelas criadas pelo *Visual Basic*, esse problema de erros criados na entrada de dados é extremamente diminuído, pois erros comuns de consistência de dados são imediatamente avisados ao usuário, através de caixas de diálogo. Além disso as janelas de diálogo facilitam a introdução dos dados necessários ao processamento da estrutura.

Por esses e outros motivos, adotou-se o *Visual Basic 4.0*, para a criação do pré-processador do programa Computacional para a análise estrutural.

É através do programa **EDÍFICIO.VBP** que é realizada entrada de dados, através de menus e janelas de extração de dados. Com isso a entrada de dados é facilitada para o usuário, fornecendo um maior profissionalismo ao trabalho.

## 5.6 Resultados

Para cada estrutura analisada são criados 04 arquivos de saída, contendo os resultados obtidos pelo programa computacional EDIFICIO.F90

As extensões dos arquivos criados são de acordo com o tipo de modelo de análise no qual a estrutura foi executada. Por exemplo, se a estrutura for executada com o Modelo 1, os arquivos de saída serão :

- **ANDAR.MD1** : contém os deslocamentos independentes de todos os pilares e também os deslocamentos de corpo rígido das lajes.

- **PAVIM.MD1** : contém os deslocamentos dos nós internos do pavimento, com as respectivas coordenadas. Os nós internos dos pavimento são os nós dos elementos de viga e placa que não possuem conectividade com os pilares.

- **PILAR.MD1** : contém os esforços nos pilares em todos os pavimentos do edifício. Os esforços nos pilares estão relacionados de acordo com o sistema de coordenadas locais.

- **VIGA.MD1** : contém os esforços nos elementos de viga, de acordo com o sistema de coordenadas locais. Os esforços solicitantes nas vigas sempre estão relacionados ao seu trecho flexível.

Deve-se salientar ainda, que poderão ser executados para a mesma estrutura até os 8 modelos fornecidos na tabela 03. Sendo assim os arquivos terão extensão MD1 para o Modelo 1, MD2 para o Modelo 2 ; e assim sucessivamente até MD8 para o Modelo 8.

## 5.7 Limitações do programa

Atualmente com o rápido avanço computacional é talvez obsoleto tratar o assunto de limites de processamentos para os microcomputadores e *softwares* existentes , já que esses possuem uma grande capacidade de memória para resolver problemas de grande porte.

O *software Fortran Power Station 90*, utilizado na elaboração do programa computacional, permite realizar a alocação dinâmica de memória para matrizes e vetores. Sendo assim, somente o espaço a ser realmente utilizado por determinada matriz ou vetor será ocupado. Sendo assim, não é necessário reservar no início do programa grandes áreas de memória para matrizes e vetores que poderão ao longo da execução do programa ter dimensões menores que as inicialmente reservadas.

Com o objetivo de obter ainda um melhor aproveitamento da memória do computador, as matrizes de rigidez referentes às coordenadas internas e externas do pavimento são armazenadas em vetores contendo apenas os elementos situados acima da diagonal principal. Isto é possível devido a simetria das matrizes.

Como se está usando o Método dos Elementos Finitos para a discretização do pavimento, o tempo de processamento será proporcional ao número de pontos nodais utilizados na referida discretização. Além disso, o tempo de processamento depende do número de andares da estrutura. Porém como está se utilizando técnicas de subestruturação, o número de andares não é um parâmetro limitante para o programa computacional, pois o sistema de equações do equilíbrio global da estrutura é função apenas do próprio andar e dos andares superior e inferior, como pode ser visto no item 4.4.

# 6 EXEMPLOS NUMÉRICOS

## 6.1 Introdução

Apresenta-se a seguir três exemplos numéricos, cujos resultados são analisados com o intuito de se obter conclusões a respeito do comportamento estrutural dos edifícios altos quando se considera a rigidez transversal à flexão das lajes e a não linearidade geométrica dos pilares.

Para cada estrutura analisada são feitas comparações dos resultados obtidos pelo programa computacional de acordo com os modelos de análise já apresentados, na TABELA 03.

Para facilitar a entrada de dados das forças do vento, o sistema de referência do edifício localiza-se no centro geométrico de cada pavimento, dispensando assim a inclusão de sua componente de momento. Além disso, as forças laterais do vento são concentradas ao nível de cada pavimento e a estrutura é suposta engastada na base.

Seria interessante a listagem dos arquivos de dados, porém, devido a grande quantidade de informações que se obtém para cada edifício quando se utiliza o Método dos Elementos Finitos, tornar-se inviável a impressão de todos os resultados. Dessa forma, optou-se por apresentar alguns dados na forma de gráficos que permitem uma melhor visualização dos resultados encontrados.

## 6.2 Exemplo 01

Neste exemplo estuda-se uma estrutura com todos os pavimentos iguais em planta conforme a Figura 58, tendo as seguintes características :

- Espessura constante da laje : 15 cm
- pé-direito dos andares : 290 cm
- número de andares : 15
- módulo elasticidade : 2000 kN/cm<sup>2</sup>
- coeficiente de Poisson : 0,25
- Carga uniformemente distribuída nas lajes : 8kN/m<sup>2</sup>
- Carga distribuída nas vigas : 10kN/m
- As dimensões do pilares e vigas encontram-se na planta do pavimento tipo, com suas medidas em centímetros.

As forças do vento foram determinadas respeitando-se a norma NBR 6123 , com :

- velocidade básica  $V_0 = 40$  m/s
- fator  $S_1 = 1,0$
- fator  $S_2 = 1,0$
- fator  $S_3$  - classificado na categoria V e classe B

Sendo assim apresenta-se a seguir as componentes das força do vento concentrada ao nível de cada laje



**Tabela 04 : Forças do vento para o exemplo 01**

| PAVIMENTO | FORÇA F (kN) |
|-----------|--------------|
| 15        | 30.84        |
| 14        | 61.13        |
| 13        | 60.54        |
| 12        | 59.92        |
| 11        | 59.24        |
| 10        | 58.51        |
| 09        | 57.71        |
| 08        | 56.84        |
| 07        | 55.86        |
| 06        | 54.75        |
| 05        | 53.47        |
| 04        | 51.94        |
| 03        | 50.04        |
| 02        | 47.47        |
| 01        | 43.38        |

A estrutura é analisada de acordo com 04 modelos descritos a seguir :

**MODELO 01** : Análise tridimensional sem a consideração de trechos rígidos e sem a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 1<sup>a</sup> ordem.

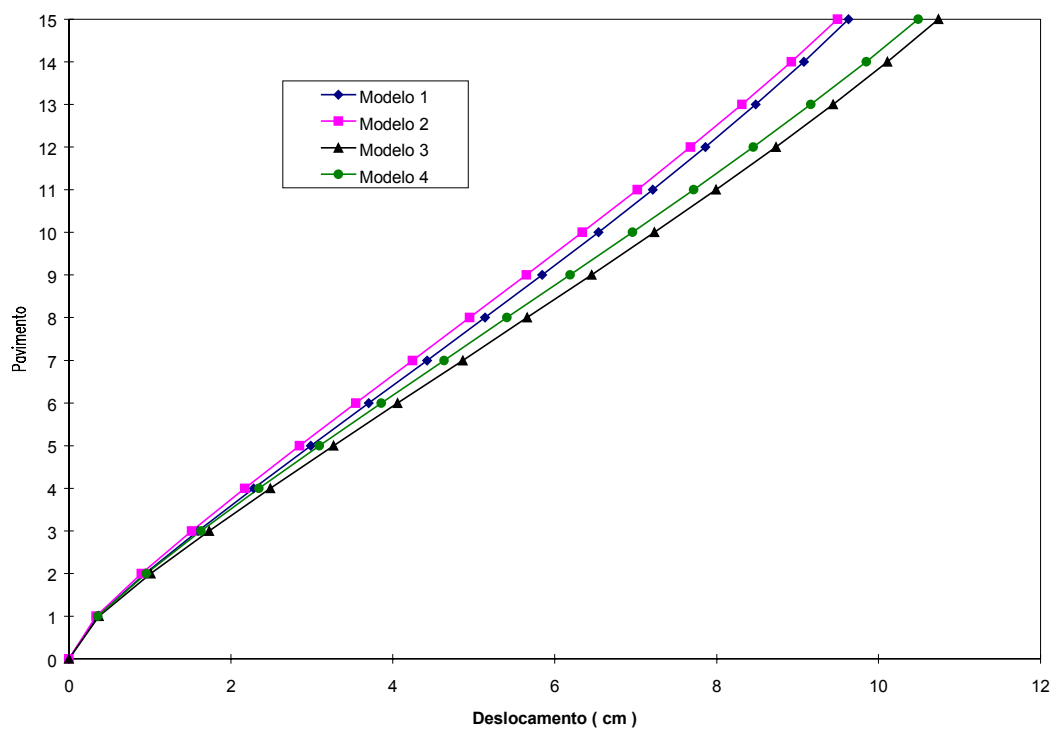
**MODELO 02** : Análise tridimensional sem a consideração de trechos rígidos e considerando a rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 1<sup>a</sup> ordem.

**MODELO 03** : Análise tridimensional sem a consideração de trechos rígidos e sem a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 2<sup>a</sup> ordem.

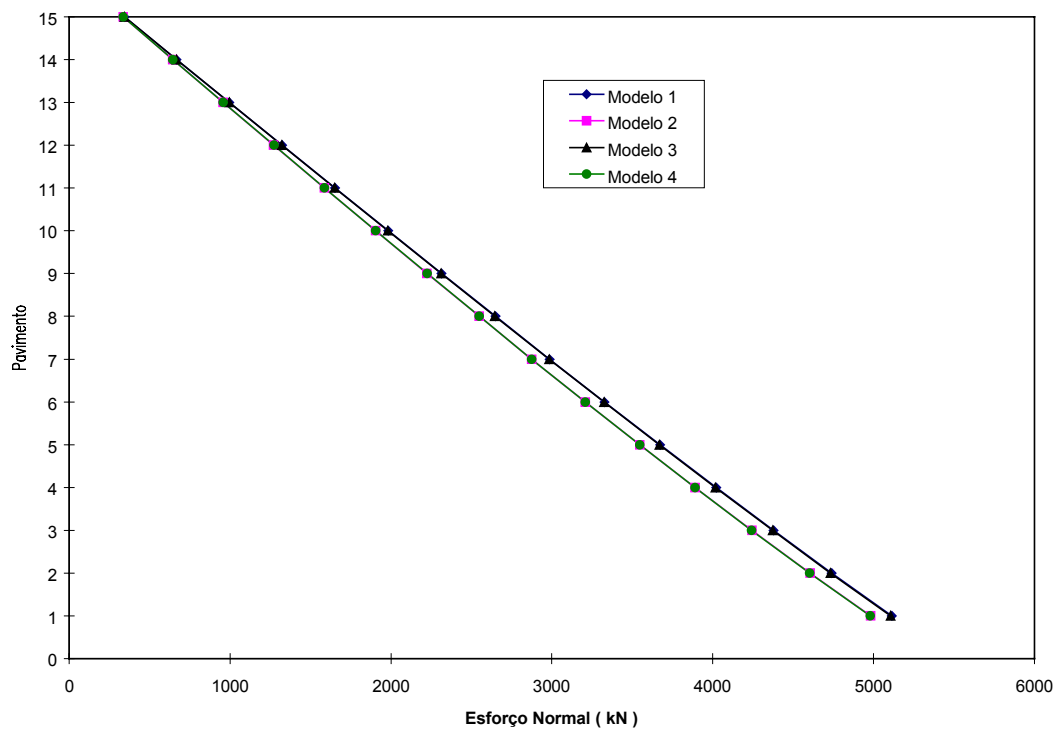
**MODELO 04** : Análise tridimensional sem a consideração de trechos rígidos e considerando a rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 2<sup>a</sup> ordem..

Nas páginas seguintes, parte dos resultados encontrados pelo programa neste exemplo são apresentados e dispostos em gráficos.





**Figura 60 : Translação em Z**



**Figura 61 : Esforço Normal no P13**

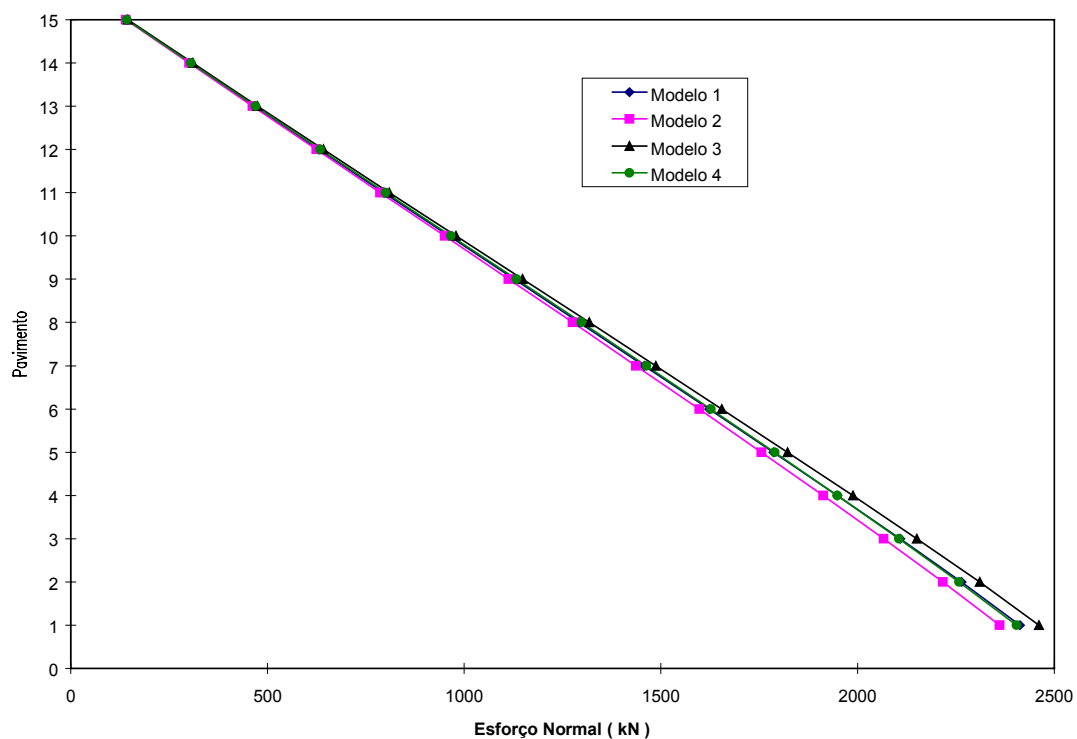


Figura 62 : Esforço Normal no P 22

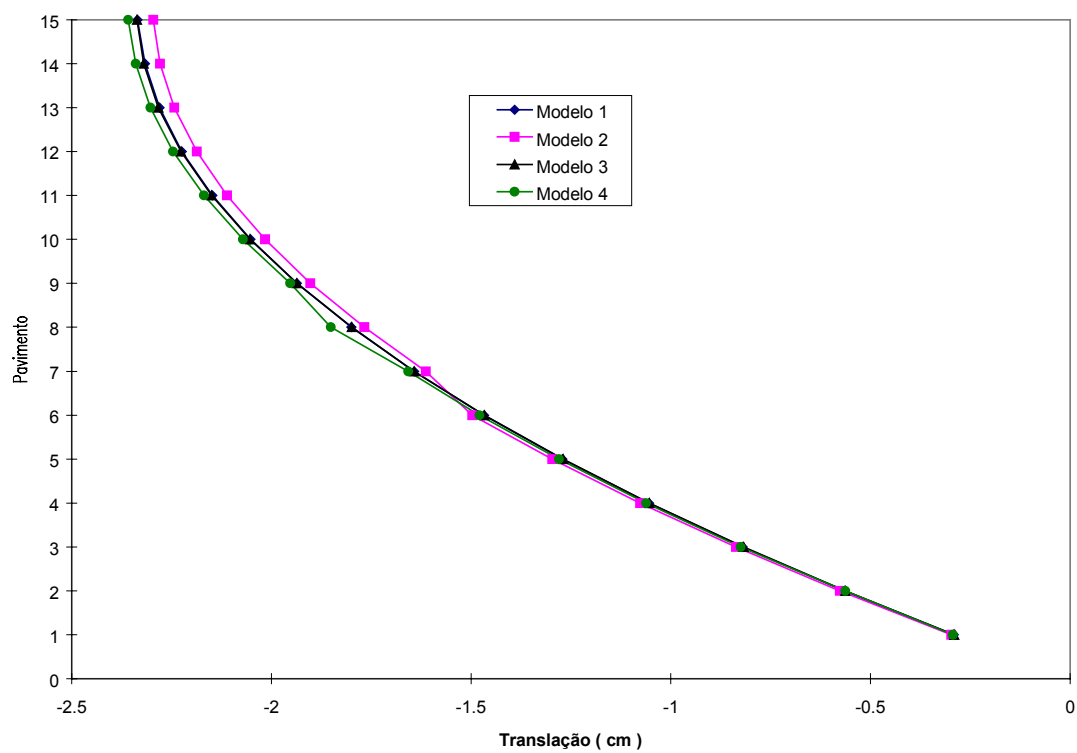
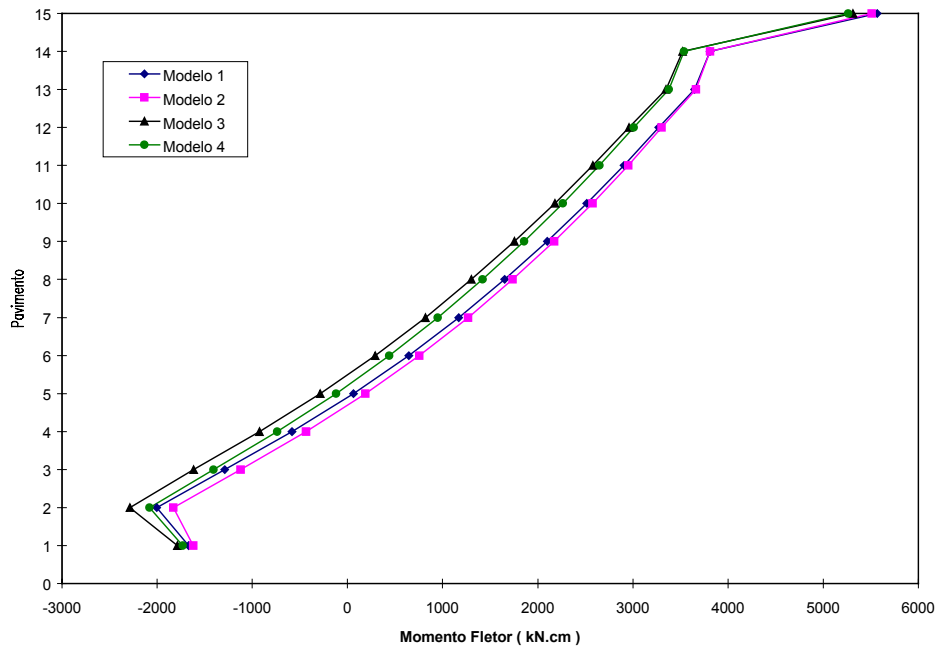
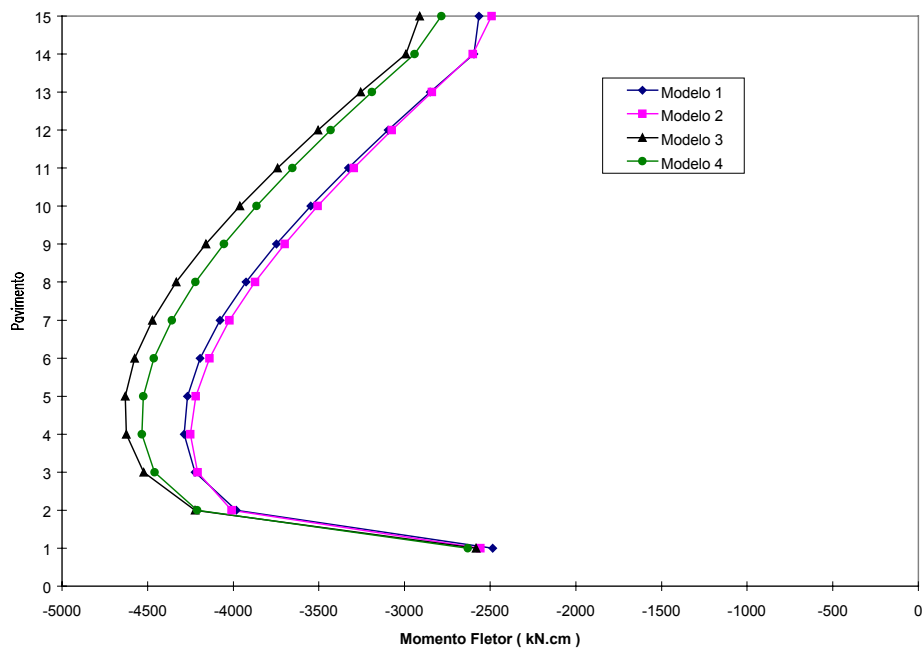


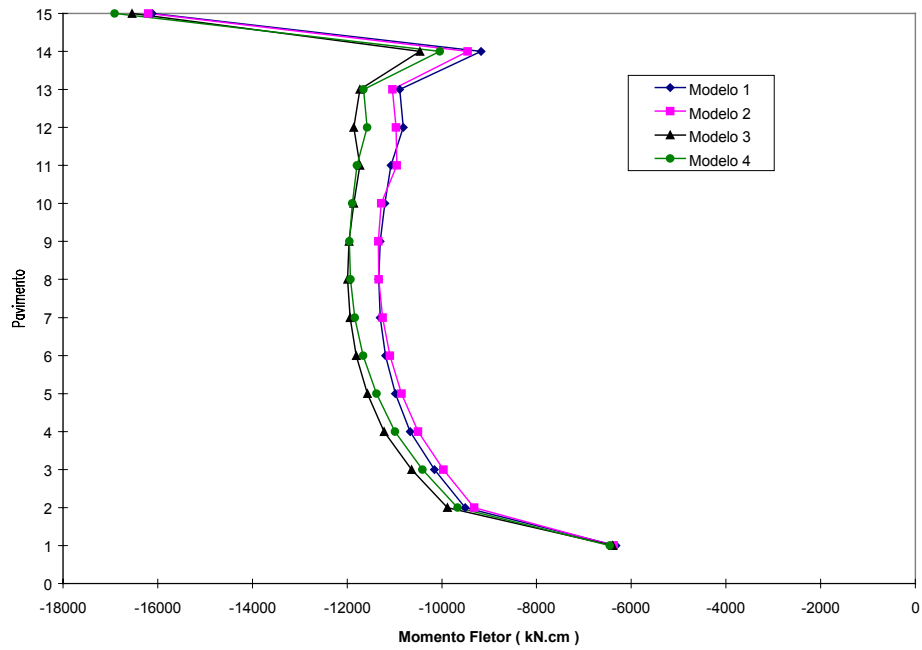
Figura 63 : Translação X no P17



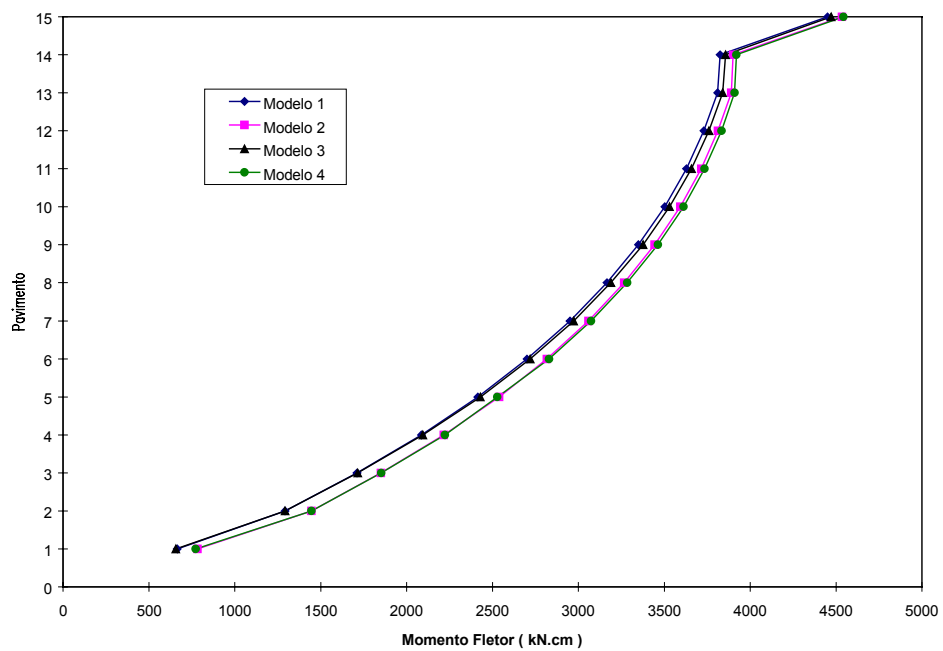
**Figura 64 : Momento Fletor Superior MY no P01**



**Figura 65 : Momento Fletor Superior MY no P16**



**Figura 66 : Momento Fletor Superior MY no P17**



**Figura 67 : Momento Fletor Superior MZ no P03**

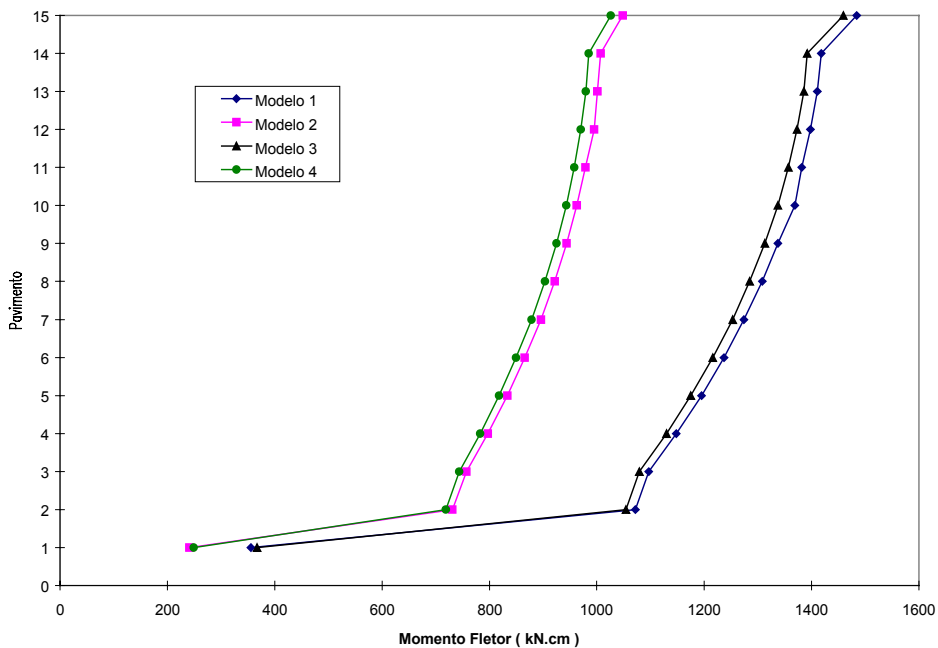


Figura 68 : Momento Fletor Inferior MZ no P06

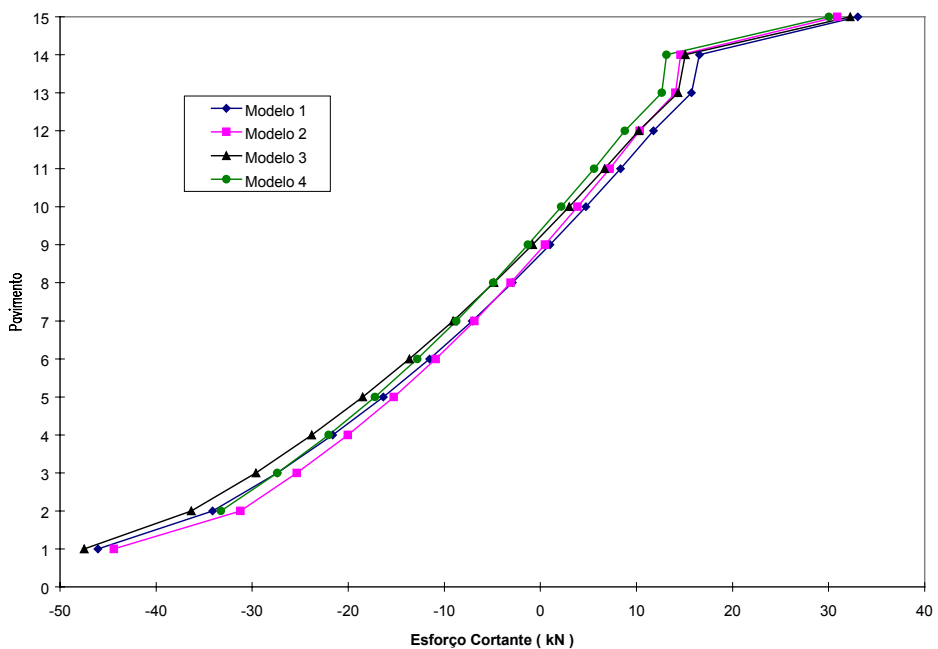
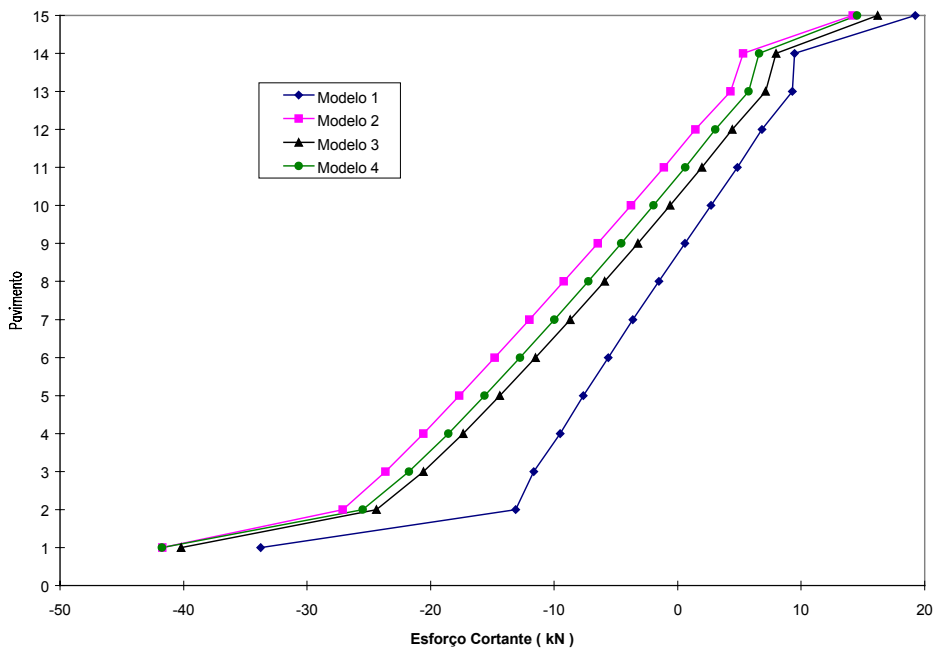
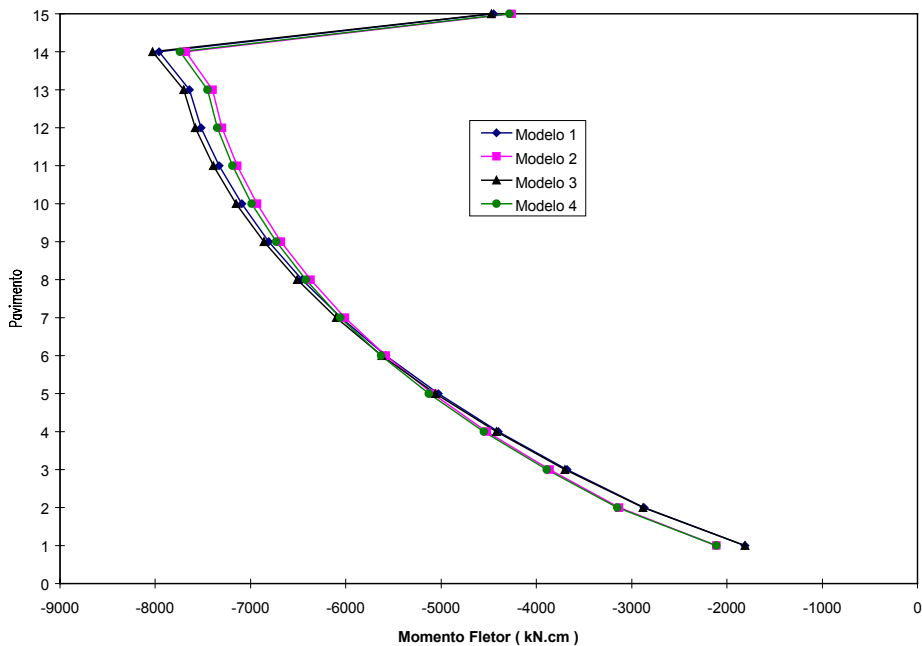


Figura 69 : Esforço Cortante Superior VZ no P08

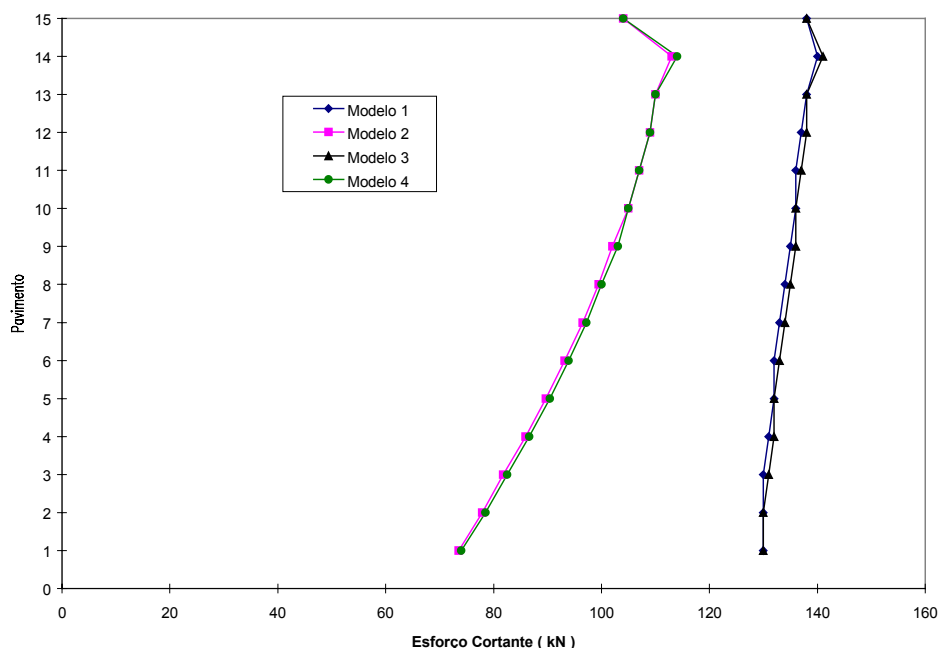




**Figura 70 : Esforço Cortante Superior VZ no P20**



**Figura 71 : Momento Fletor Esquerdo na V02**



**Figura 72 : Esforço Cortante Esquerdo na V07**

Analisando a Figura 60, observa-se que ao computar a rigidez à flexão das lajes na estrutura, os deslocamentos horizontais dos pavimentos são menores que os obtidos pelo modelo que as consideram como diafragmas totalmente flexíveis. A percentagem de redução dos deslocamentos foi em torno de 3 %, tanto na análise linear como em teoria de 2<sup>a</sup> ordem.

Com os deslocamentos reduzidos, verifica-se de uma forma geral uma redução dos esforços de flexão nos elementos estruturais, como pode ser verificado nos pilares e nas vigas.

Com a consideração da não linearidade geométrica para os pilares houve um aumento nos deslocamentos laterais em torno de 11,5 %, como pode ser visto na Figura 60. Com o aumento dos deslocamentos houve de maneira geral, uma redistribuição dos esforços nos elementos. Isto deve-se ao fato de que ao considerar o equilíbrio do pilar na posição deslocada, há o aparecimento de esforços adicionais na estrutura, os quais aumentam os deslocamentos.

Com a consideração da rigidez transversal da laje, em alguns casos, os esforços em teoria de 2<sup>a</sup> ordem, foram menores que os esforços em teoria de 1<sup>a</sup>

ordem onde não se considerou a rigidez transversal da laje. Isto pode ser visto através das Figuras 61, 62, 68 e 72.

Através dos gráficos é possível observar uma redistribuição dos esforços nos elementos estruturais. Em alguns casos também, com a consideração da rigidez transversal da laje alguns esforços aumentaram e/ou com a consideração da não-linearidade geométrica para os pilares alguns esforços também diminuíram. Isto ocorre devido ao fato que o equilíbrio de esforços na estrutura deve ser verificado, independente de qual hipótese de cálculo esteja sendo adotado.

A Figura 59 traz o malha de elementos finitos quadrangulares que foi utilizada no exemplo. Foram utilizados 262 elementos finitos quadrangulares, sendo que cada elemento finito quadrangular é formado a partir da condensação estática de 04 elementos finitos DKT. Foram testadas outras malhas mais refinadas, porém não se observou mudanças significativas nos deslocamentos e esforços, porém o tempo de processamento aumentou consideravelmente com o aumento do número de elementos finitos utilizados.

### **6.3 Exemplo 02**

Neste exemplo analisa-se um edifício com todos os pavimentos iguais em planta conforme a Figura 73, tendo os seguintes dados :

- Pé-direito : 300 cm
- Número de Andares : 20
- Carga uniformemente distribuída nas lajes :  $5,0 \text{ kN/m}^2$
- Carga distribuída nas vigas :  $12 \text{ kN/m}$
- Espessura das lajes : 15 cm
- Módulo de Elasticidade :  $3500 \text{ kN/cm}^2$
- Coeficiente de Poisson : 0,25

As dimensões dos pilares e das vigas encontram-se na planta do pavimento tipo, com suas medidas em centímetros ( cm )

As forças do vento foram determinadas respeitando-se a norma NBR 6123 , com :

- velocidade básica  $V_0 = 40$  m/s
- fator  $S_1 = 1,0$
- fator  $S_2 = 1,0$
- fator  $S_3$  - classificado na categoria V e classe B

Sendo assim apresenta-se a seguir as componentes das força do vento em cada pavimento

**Tabela 05 : Forças do vento para o exemplo 02**

| PAVIMENTO | FORÇA F ( kN ) | PAVIMENTO | FORÇA F (kN ) |
|-----------|----------------|-----------|---------------|
| 20        | 32.79          | 10        | 59.14         |
| 19        | 65.15          | 9         | 59.14         |
| 18        | 64.69          | 8         | 58.21         |
| 17        | 64.21          | 7         | 57.21         |
| 16        | 63.71          | 6         | 56.08         |
| 15        | 62.60          | 5         | 54.77         |
| 14        | 62.00          | 4         | 53.20         |
| 13        | 61.37          | 3         | 51.25         |
| 12        | 60.68          | 2         | 48.62         |
| 11        | 59.93          | 1         | 44.43         |

Novamente a estrutura foi analisada de acordo com os 04 modelos apresentados abaixo :

**MODELO 01** : Análise tridimensional sem a consideração de trechos rígidos e sem a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 1ª ordem.

**MODELO 02** : Análise tridimensional sem a consideração de trechos rígidos e considerando a rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 1ª ordem.

**MODELO 03** : Análise tridimensional sem a consideração de trechos rígidos e sem a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 2ª ordem.

**MODELO 04** : Análise tridimensional sem a consideração de trechos rígidos e considerando a rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 2ª ordem.

Nas páginas seguintes, parte dos resultados encontrados neste exemplo são apresentados e novamente dispostos em gráficos





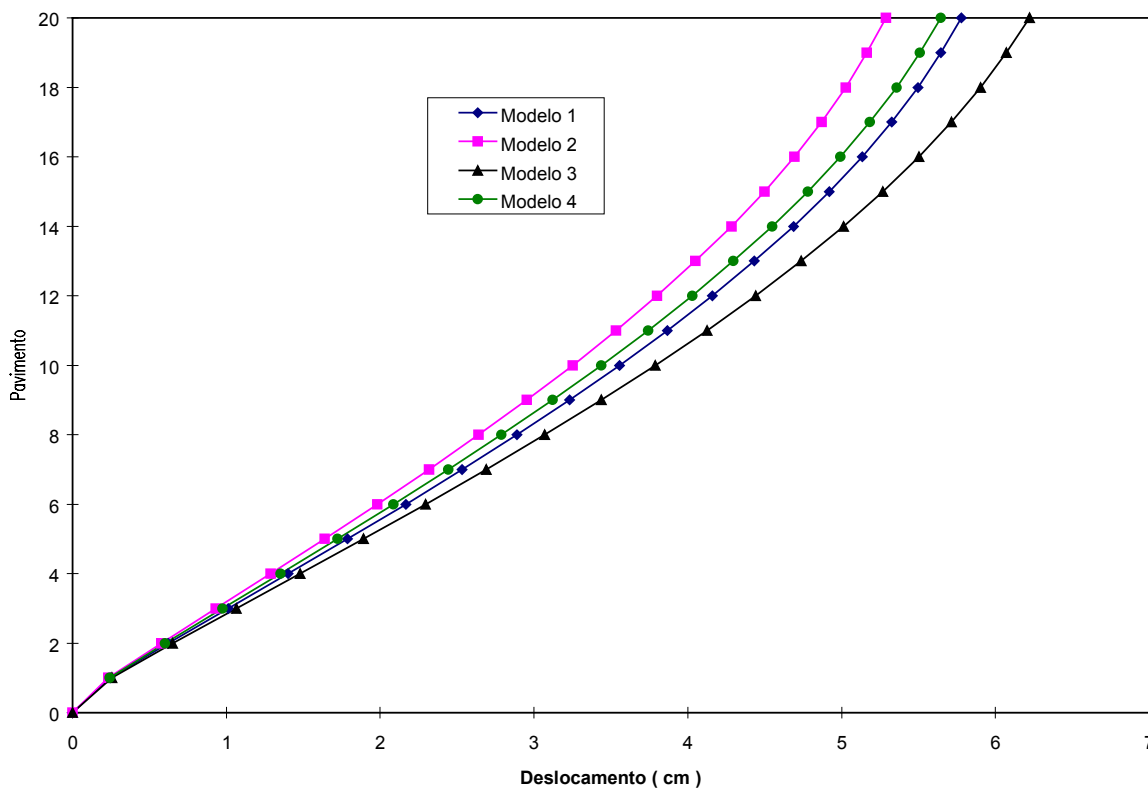


Figura 75 : Translação em Z

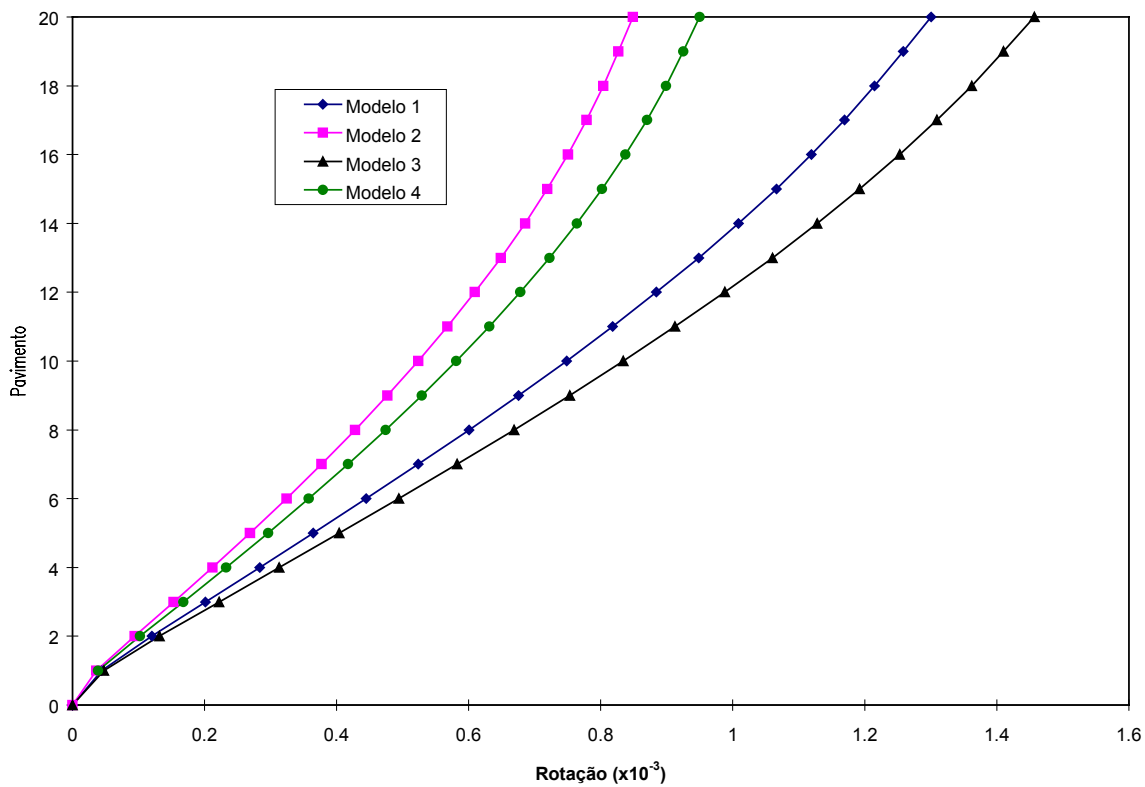


Figura 76 : Rotação em X



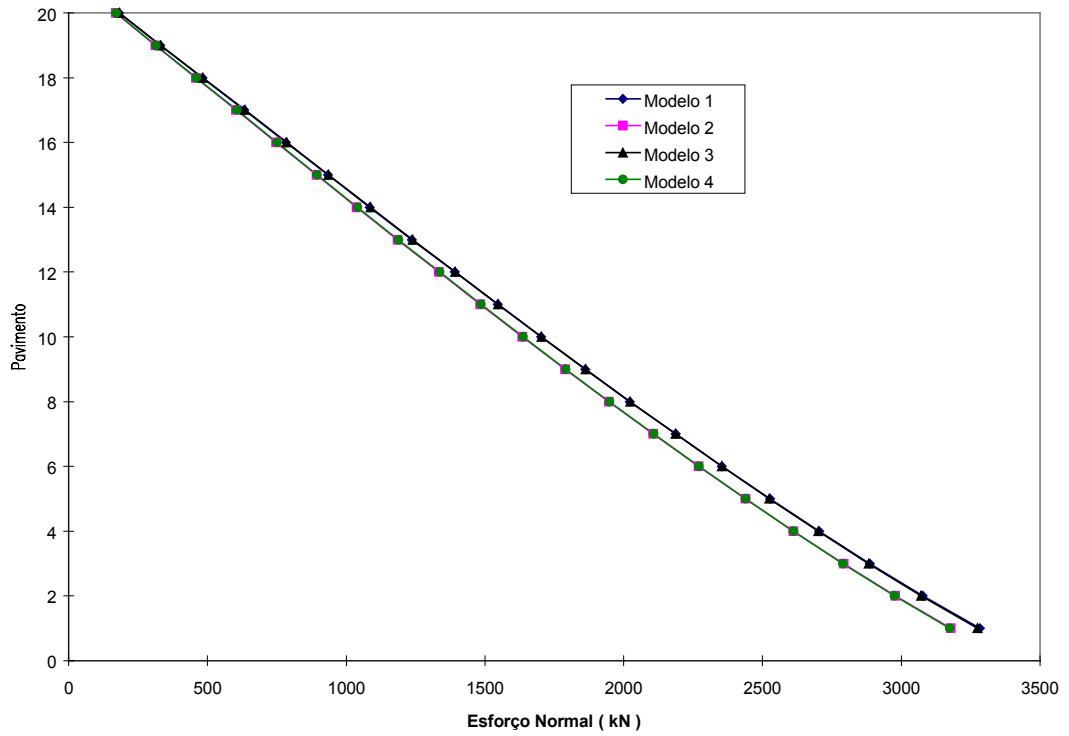


Figura 77 : Esforço Normal no P19

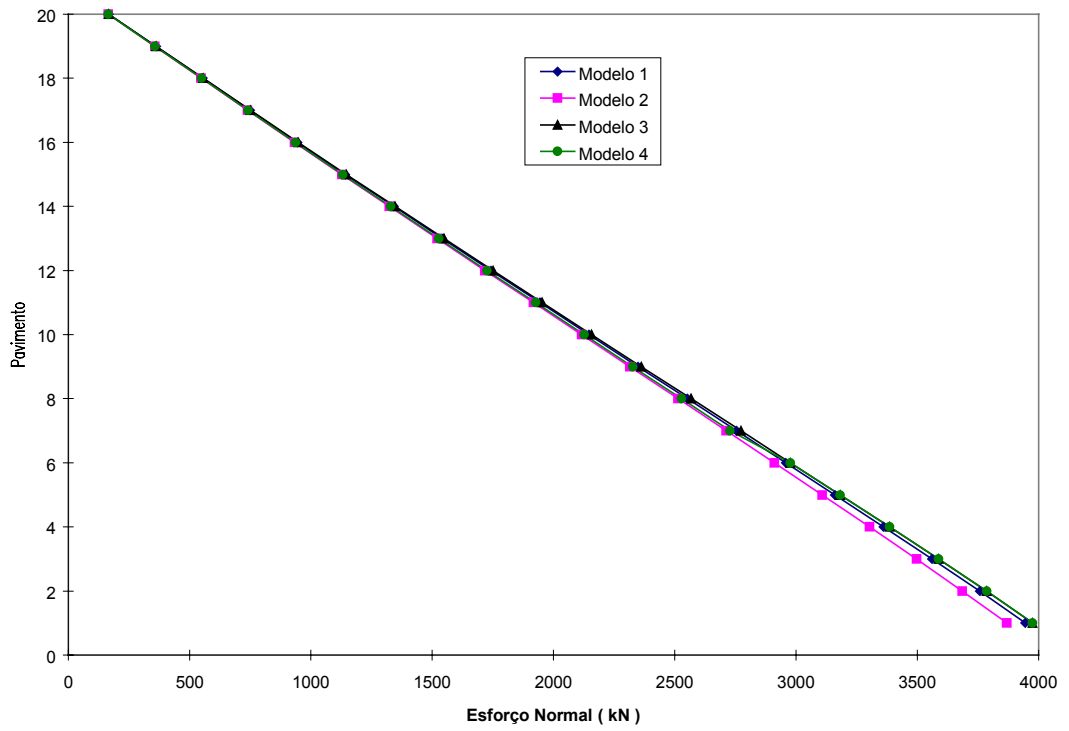
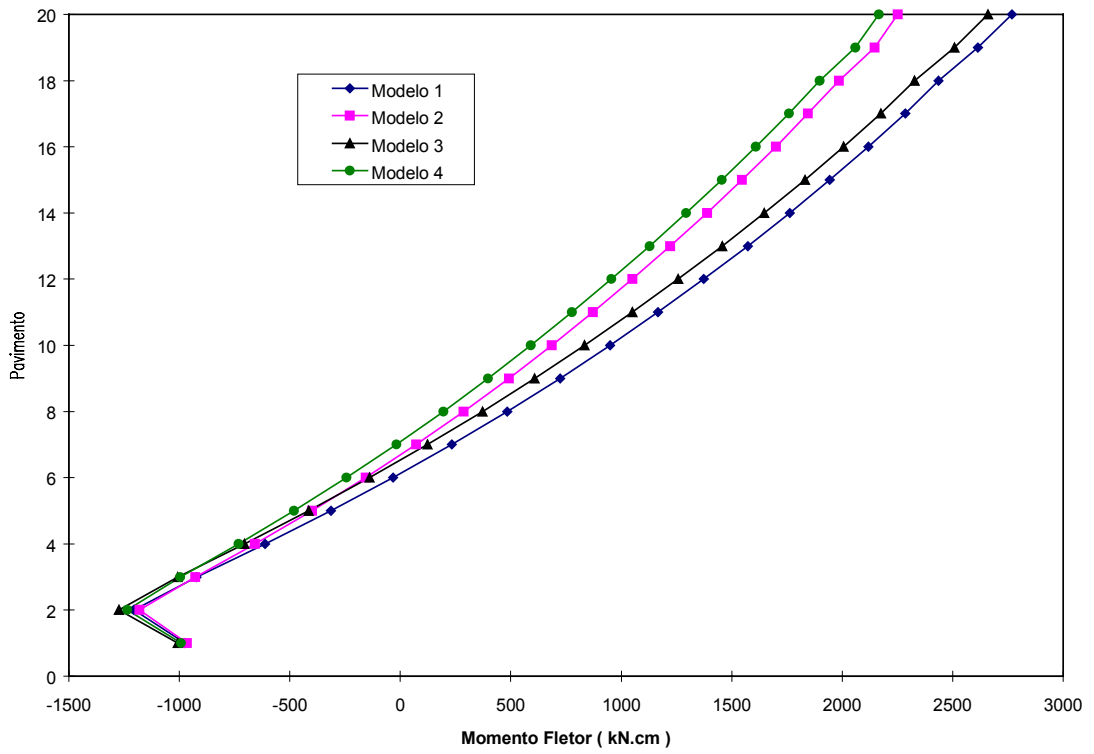
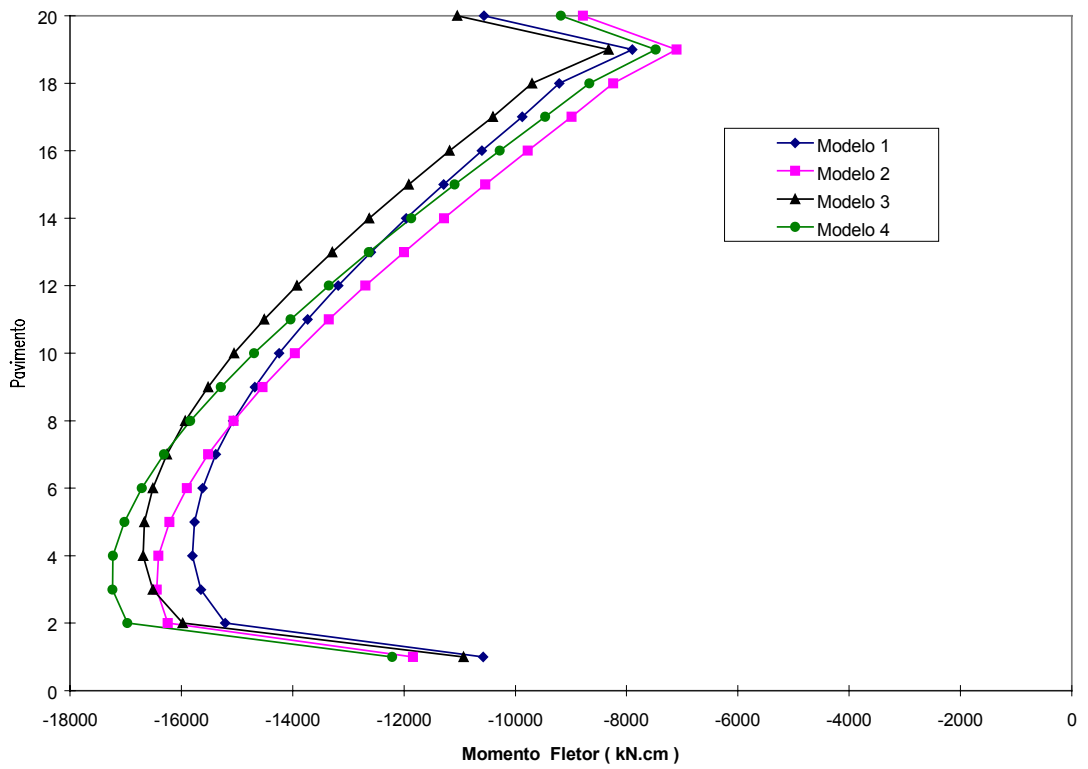


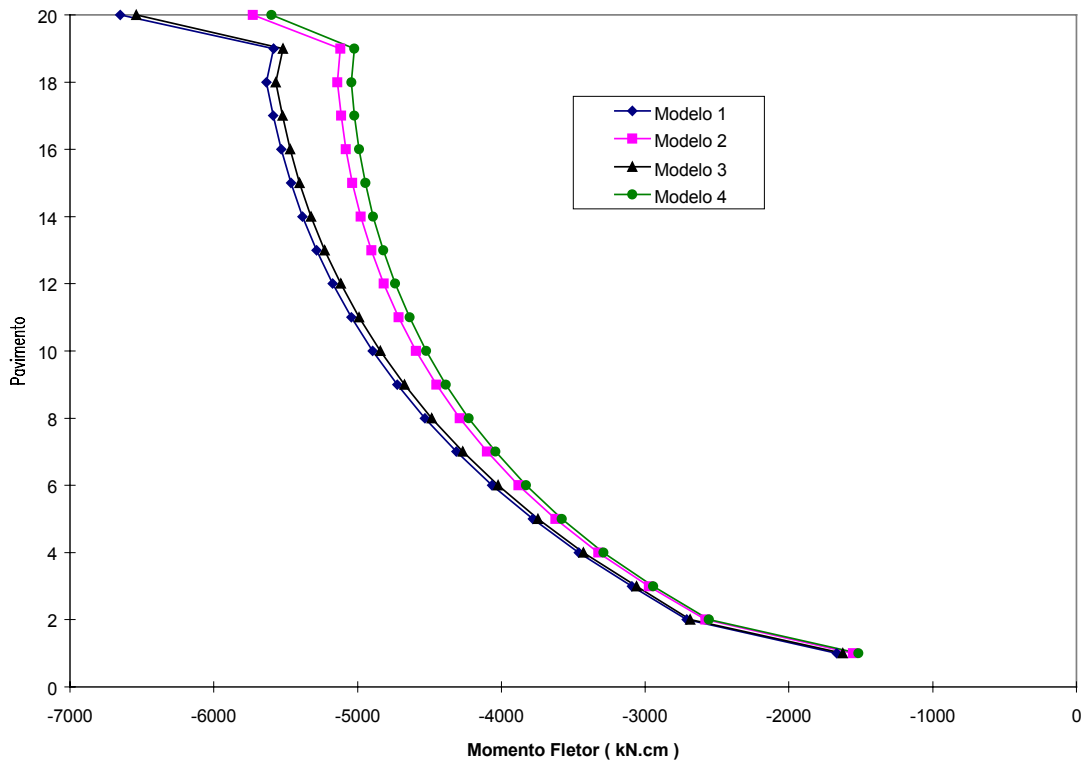
Figura 78 : Esforço Normal no P26



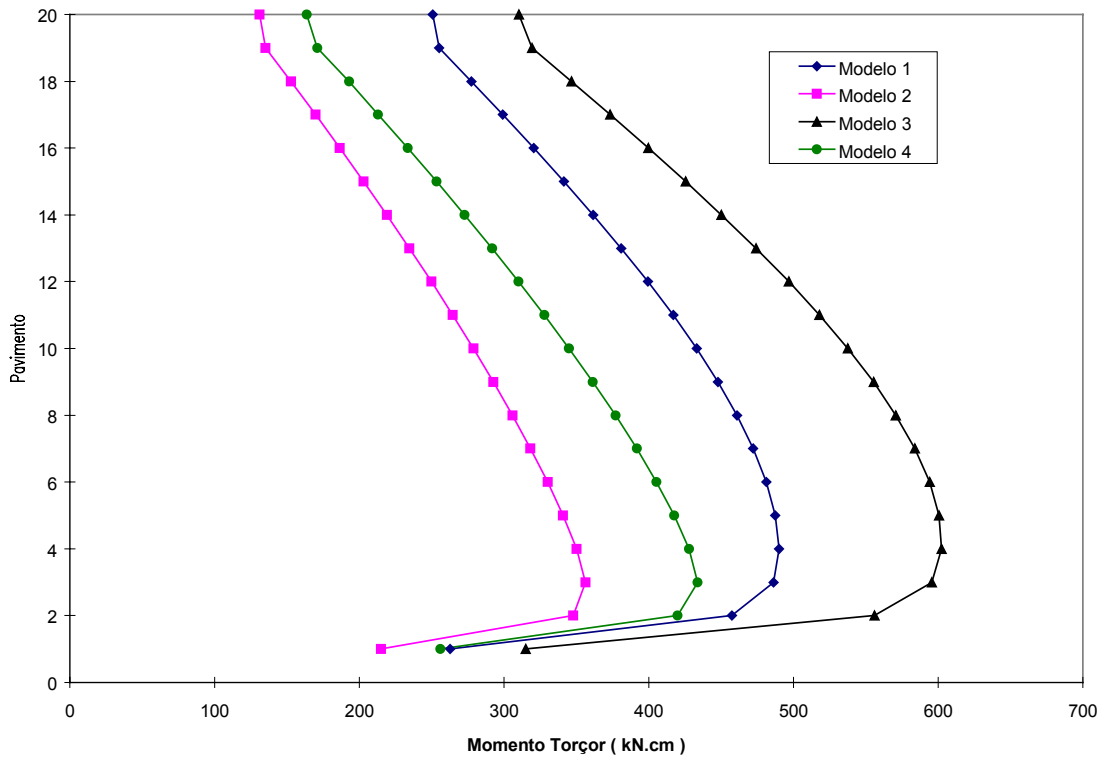
**Figura 79 : Momento Fletor Superior MY no P10**



**Figura 80 : Momento Fletor Superior MY no P20**



**Figura 81 : Momento Fletor Superior MZ no P13**



**Figura 82 : Momento Torçor Inferior MX no P23**

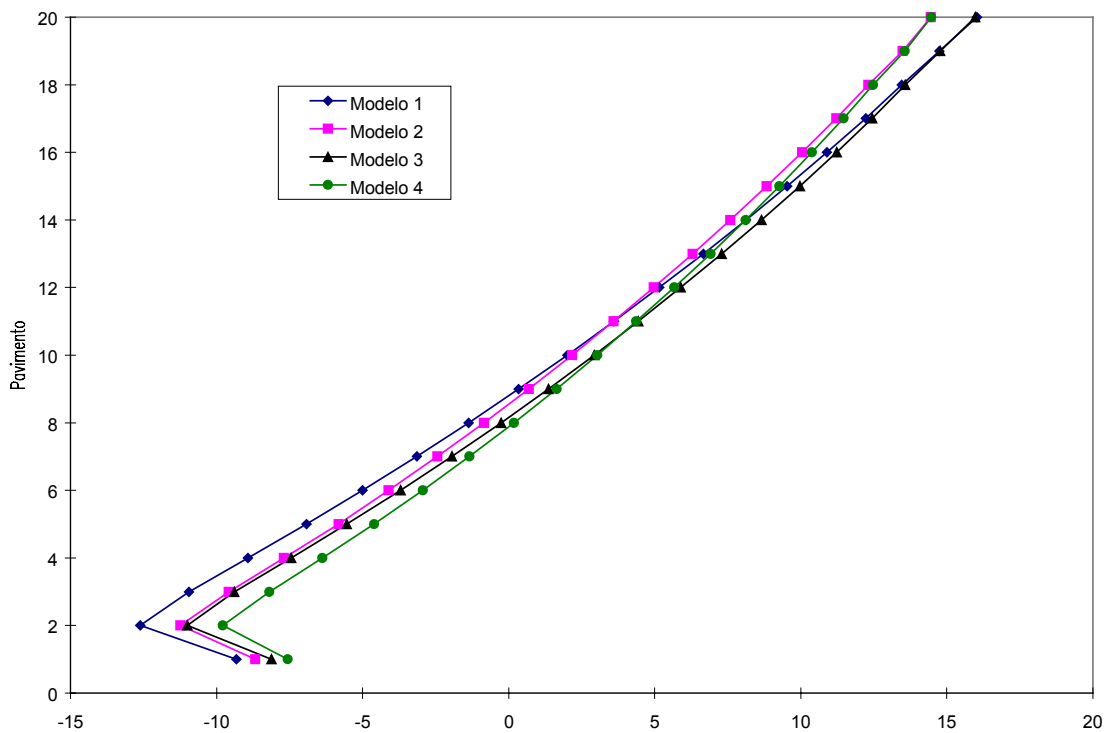


Figura 83 : Esforço Cortante Superior VZ no P12

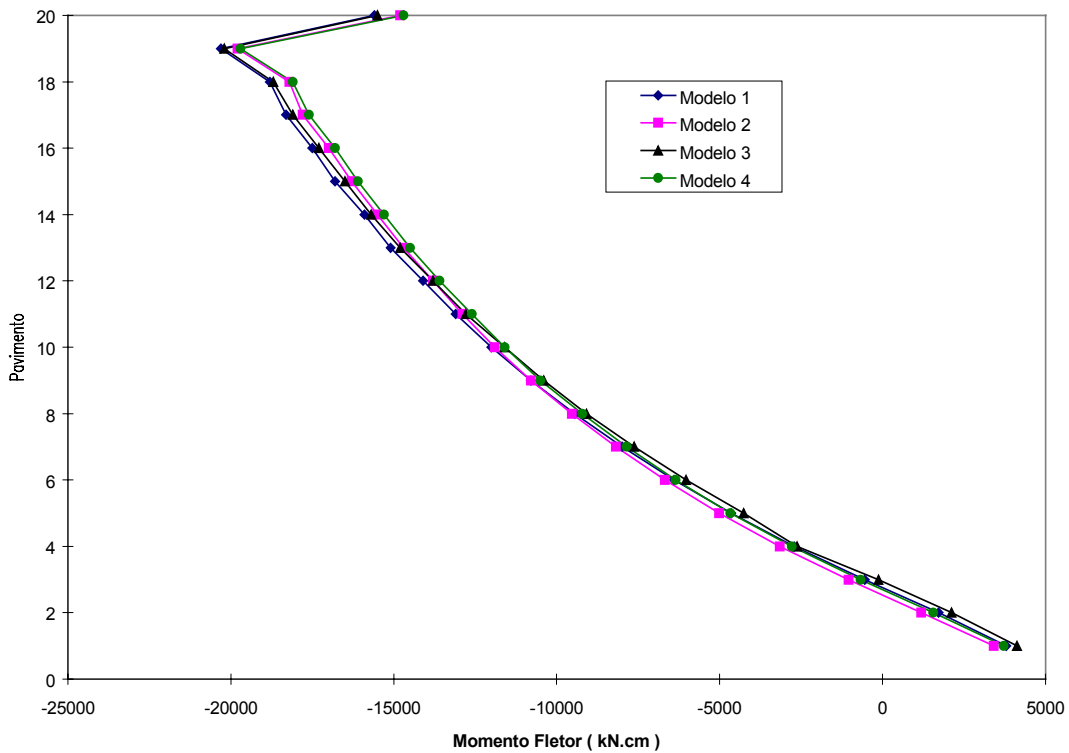


Figura 84 : Momento Fletor Esquerdo na V10

Verifica-se novamente que ao se levar em conta a rigidez transversal à flexão das lajes ocorre uma redução dos deslocamentos horizontais nos pavimentos (Figuras 74 e 75). Há uma diminuição da translação em Z de corpo rígido da laje (Figura 72) na ordem de 9%, devido a contribuição da rigidez da laje. Considerando teoria de 2ª ordem essa redução foi de 10 %.

A Figura 77 evidencia o aumento na força normal do Pilar 19, quando a estrutura é analisada em teoria de 2ª. ordem comparada à análise em 1ª. ordem.

Através das Figuras 81 a 83, verifica-se, em geral, que os esforços em teoria de 2ª ordem considerando a rigidez transversal da laje, foram menores que os esforços em teoria de 1ª ordem sem a consideração da rigidez de laje. Portanto, também neste caso a consideração da rigidez transversal da laje, foi importante na contribuição da rigidez global da estrutura.

Se calculada a translação do Pilar 06 na direção “Z”, que se encontra a 10,5 m da origem do sistema de referência adotado, devido à rotação do último pavimento do edifício obtido no Modelo 01 ( $0,1300 \times 10^{-2}$ ), o Pilar 06 neste nível desloca-se 1,36cm, o que representa 24 % da componente do deslocamento horizontal correspondente.

Sendo assim, daí vem a importância de se considerar a estrutura no espaço tridimensional para que tais efeitos não sejam desprezados.

Para a discretização do pavimento as conclusões foram análogas as do exemplo 01, com relação a número de elementos finitos utilizados. Neste exemplo utilizou-se 216 elementos finitos quadrangulares.

### 6.3 Exemplo 03

Neste exemplo analise-se um edifício com todos os pavimentos iguais em planta conforme a Figura 85, tendo os seguintes dados :

- Pé-direito : 270 cm
- Número de Andares : 30
- Carga uniformemente distribuída nas lajes :  $10,0 \text{ kN/m}^2$

- Carga distribuída nas vigas : 8 kN/m
- Espessura das lajes : 15 cm
- Módulo de Elasticidade : 2000 kN/cm<sup>2</sup>
- Coeficiente de Poisson :0,25

As dimensões dos pilares e das vigas encontram-se na planta do pavimento tipo, com suas medidas em centímetros ( cm )

As forças do vento foram determinadas respeitando-se a norma NBR 6123 , com :

- velocidade básica  $V_0 = 40$  m/s
- fator  $S_1 = 1,0$
- fator  $S_2 = 1,0$
- fator  $S_3$  - classificado na categoria V e classe B

Sendo assim apresenta-se a seguir as componentes das força do vento em cada pavimento

**Tabela 06 : Forças do vento para o exemplo 03**

| PAVIMENTO | FORÇA F1 ( kN) | PAVIMENTO | FORÇA F1 ( kN ) |
|-----------|----------------|-----------|-----------------|
| 30        | 25.90          | 15        | 47.34           |
| 29        | 51.57          | 14        | 46.91           |
| 28        | 51.34          | 13        | 46.46           |
| 27        | 51.10          | 12        | 45.98           |
| 26        | 50.85          | 11        | 45.47           |
| 25        | 50.59          | 10        | 44.91           |
| 24        | 50.32          | 09        | 44.03           |
| 23        | 50.04          | 08        | 43.62           |
| 22        | 49.75          | 07        | 42.87           |
| 21        | 49.45          | 06        | 42.02           |
| 20        | 49.14          | 05        | 41.04           |
| 19        | 48.81          | 04        | 39.86           |
| 18        | 48.47          | 03        | 38.40           |
| 17        | 48.11          | 02        | 36.43           |
| 16        | 47.74          | 01        | 33.29           |

Este exemplo foi analisado através dos 08 modelos possíveis de análise, apresentados na TABELA 03.

Porém para uma melhor visualização dos gráficos dos resultados, estes estão apresentados em dois casos separados :

**a) Análise sem a consideração dos trechos rígidos entre vigas e pilares**

**MODELO 01** : Análise tridimensional sem a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 1<sup>a</sup> ordem.

**MODELO 02** : Análise tridimensional com a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 1<sup>a</sup> ordem.

**MODELO 03** : Análise tridimensional sem a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 2<sup>a</sup> ordem.

**MODELO 04** : Análise tridimensional com a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 2<sup>a</sup> ordem.

**b) Análise com a consideração dos trechos rígidos entre vigas e pilares**

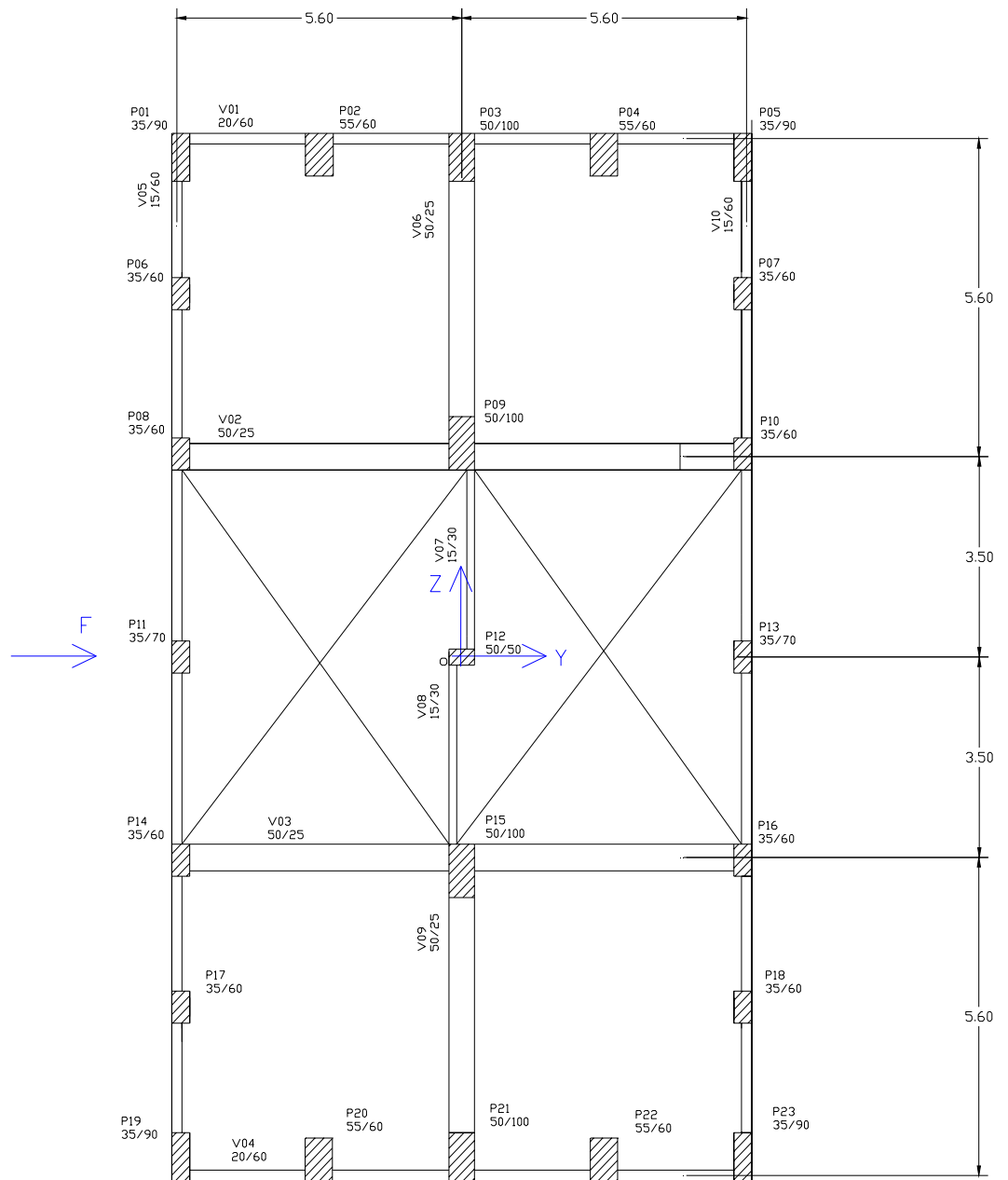
**MODELO 05** : Análise tridimensional sem a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 1<sup>a</sup> ordem.

**MODELO 06** : Análise tridimensional com a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 1<sup>a</sup> ordem.

**MODELO 07** : Análise tridimensional sem a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 2<sup>a</sup> ordem.

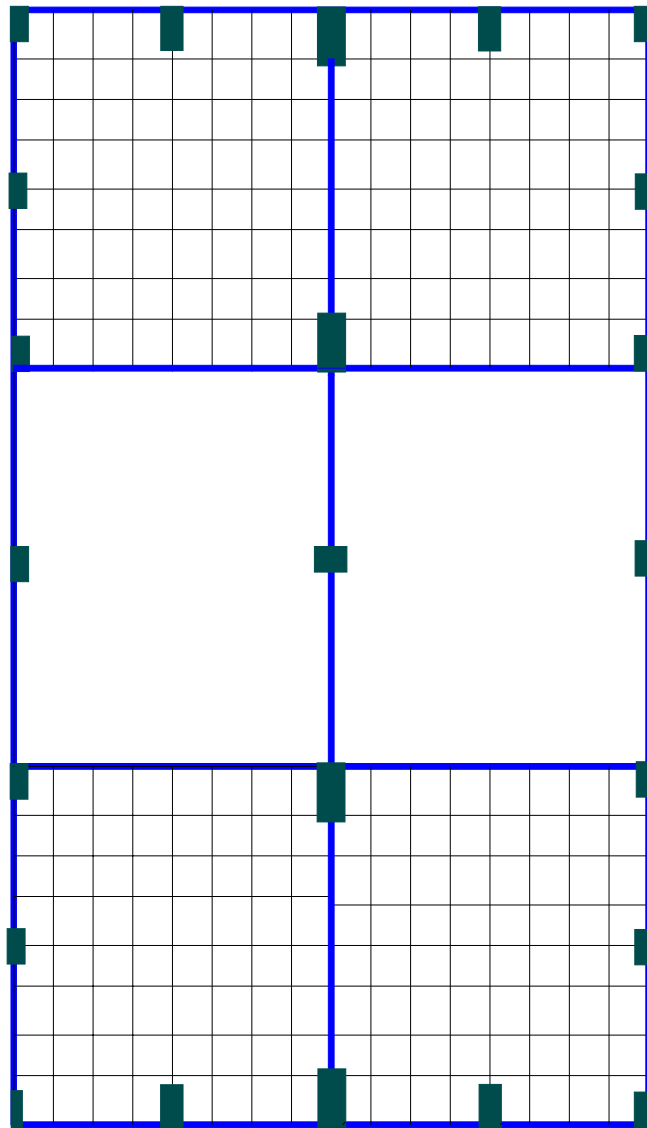
**MODELO 08** : Análise tridimensional com a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes, em teoria de 2<sup>a</sup> ordem.

Nas páginas seguintes, parte dos resultados encontrados pelo programa neste exemplo são apresentados e novamente dispostos em gráficos.

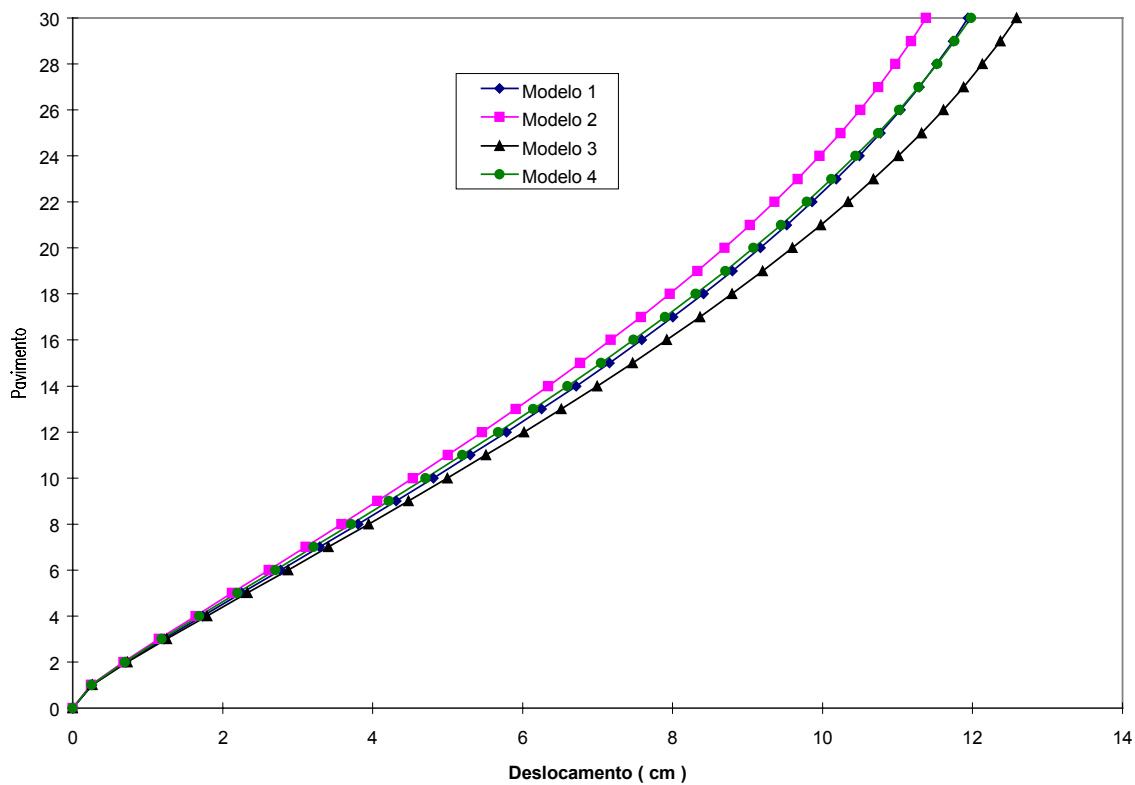


**Figura 85 : Planta baixa do pavimento tipo do exemplo 03**

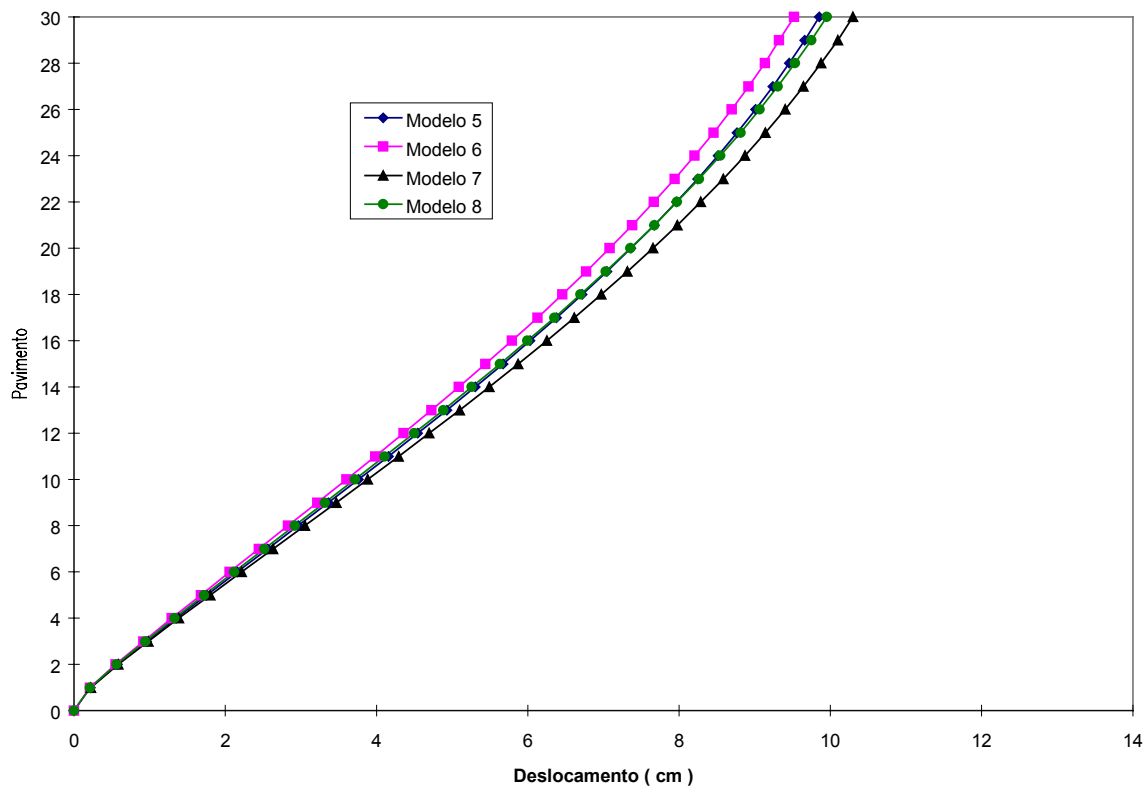




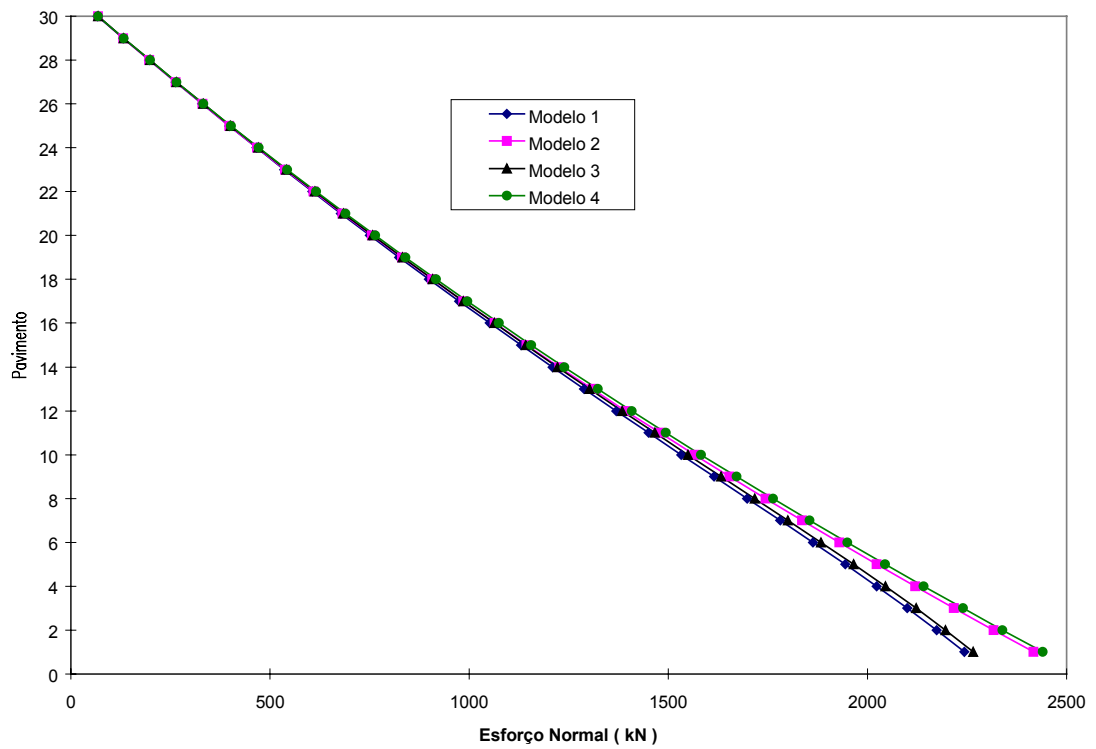
**Figura 86 : Discretização do pavimento tipo do exemplo 03**



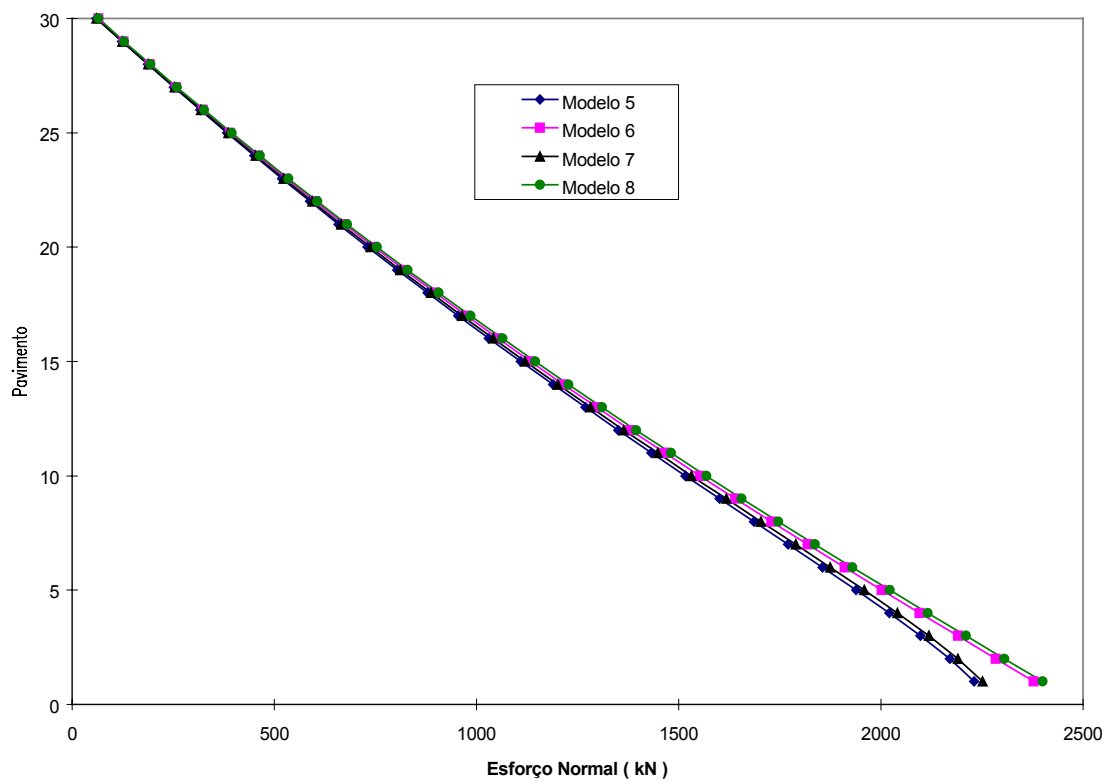
**Figura 87 : Translação em Z sem a consideração de trechos rígidos**



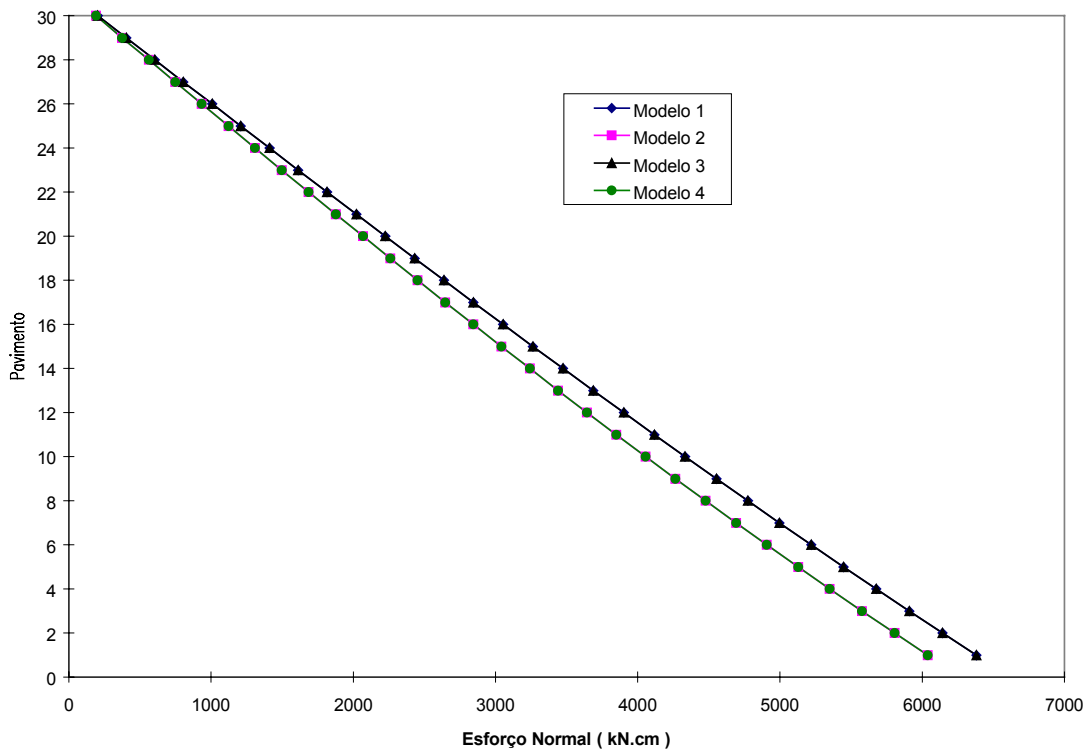
**Figura 88 : Translação em Z considerando trechos rígidos**



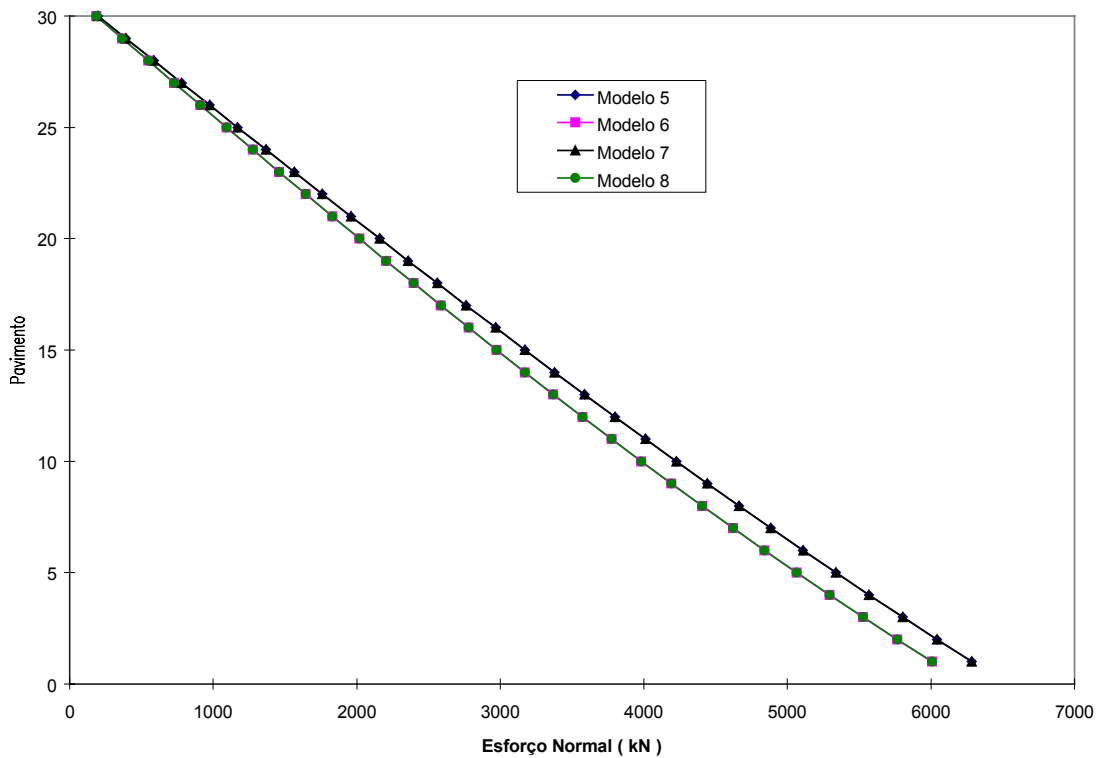
**Figura 89 : Esforço Normal no P07 sem a consideração de trechos rígidos**



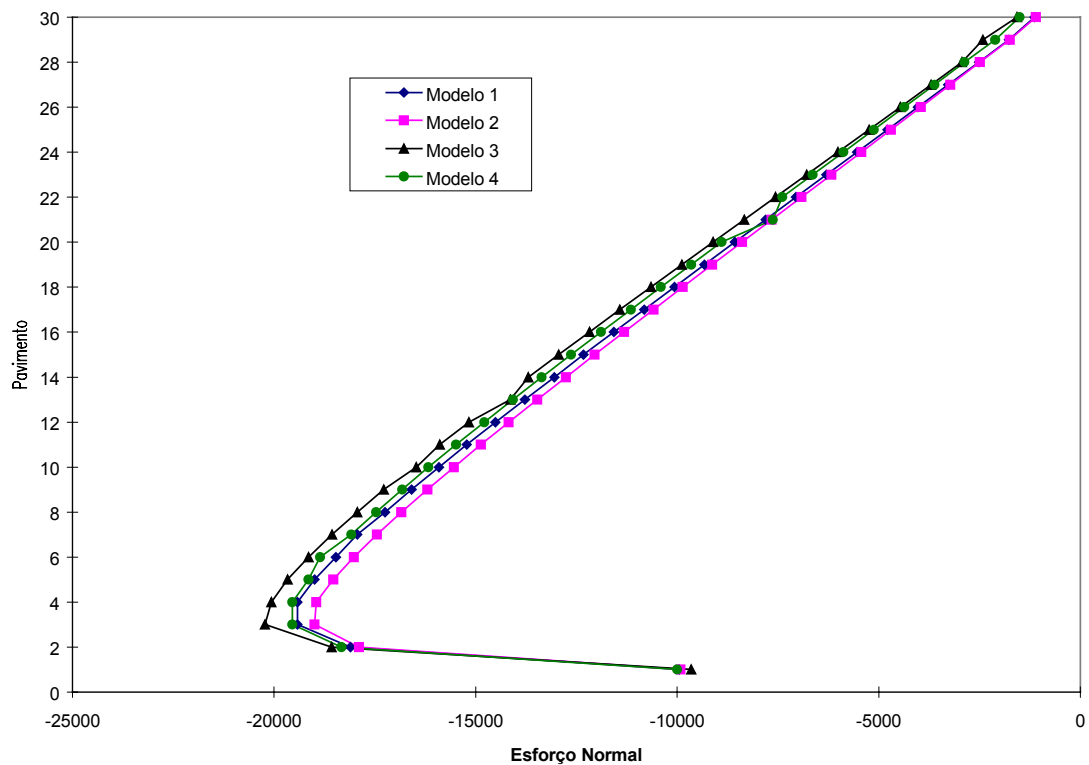
**Figura 90 : Esforço Normal no P07 considerando trechos rígidos**



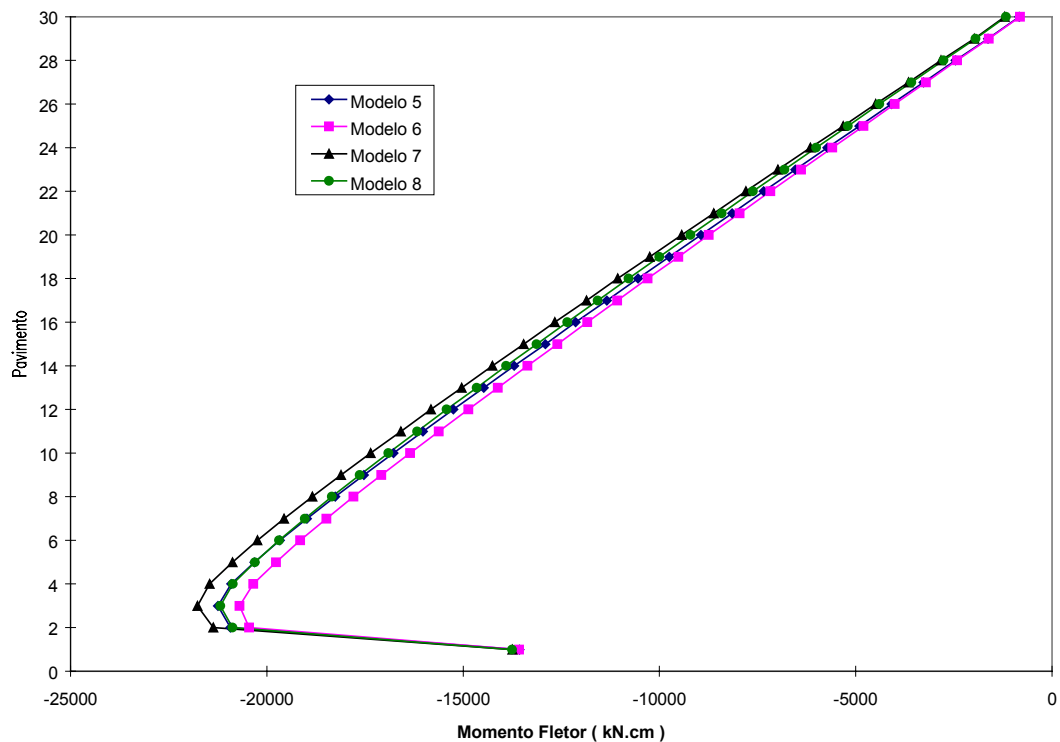
**Figura 91 : Esforço Normal no P09 sem a consideração de trechos rígidos**



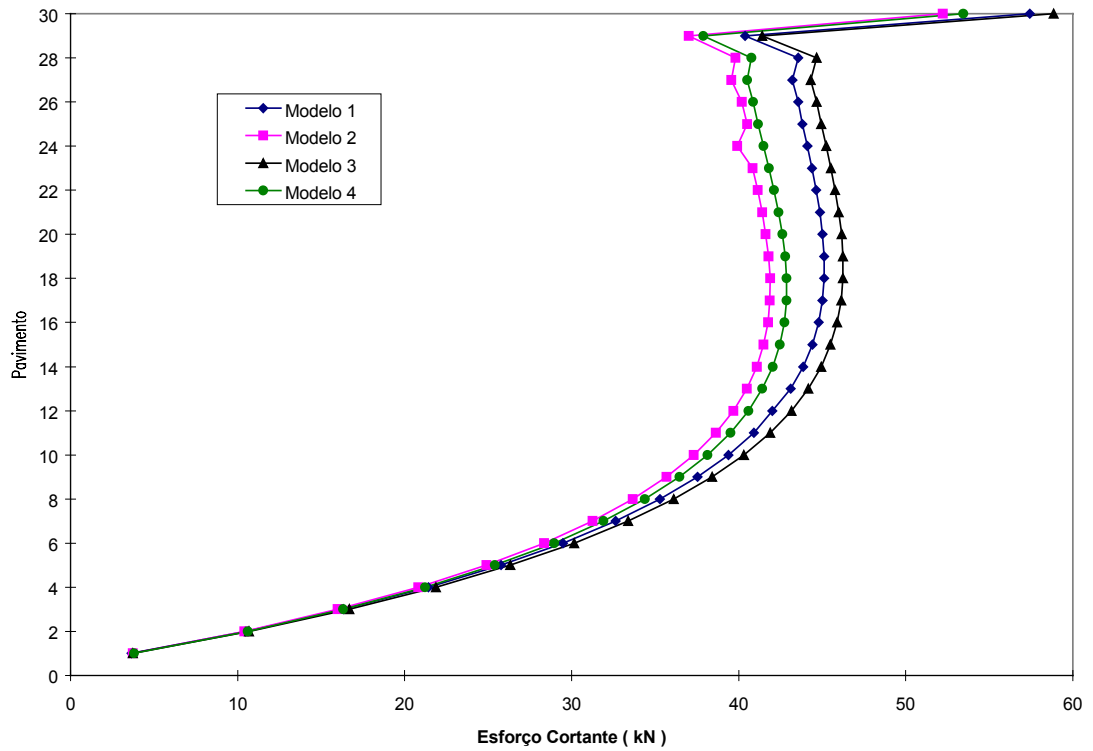
**Figura 92 : Esforço Normal no P09 considerando trechos rígidos**



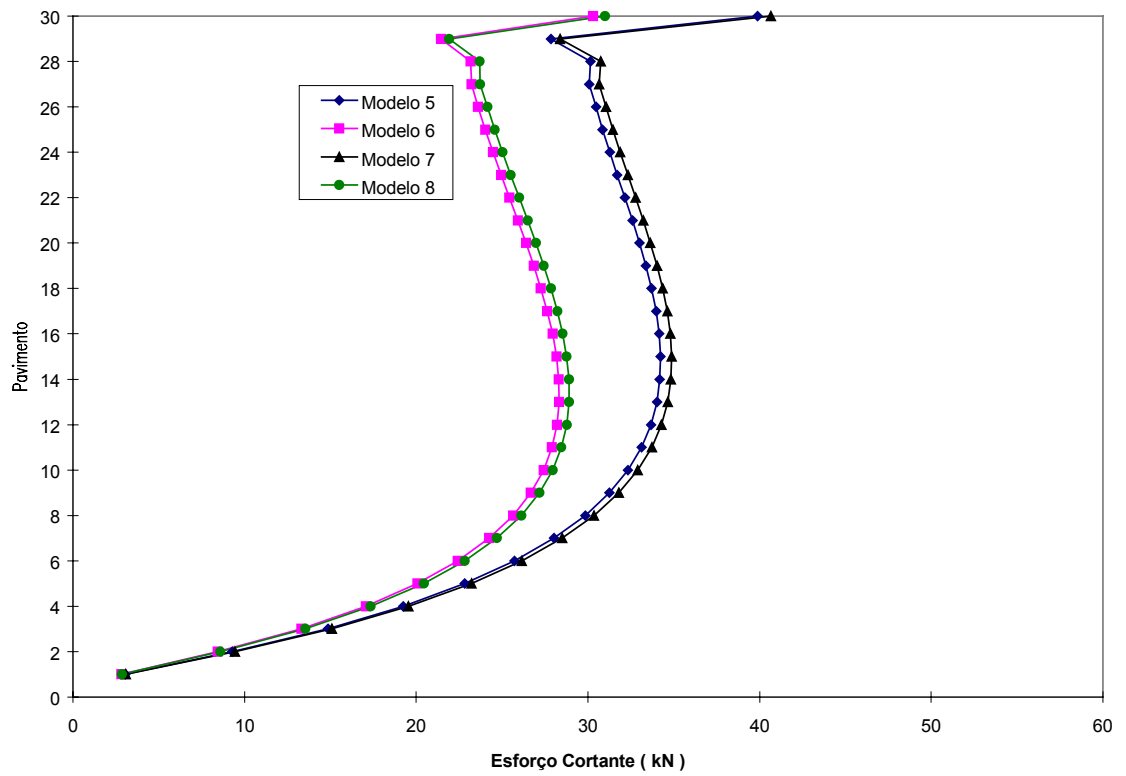
**Figura 93 : Momento Fletor Superior MZ no P03 sem a consideração de trechos rígidos**



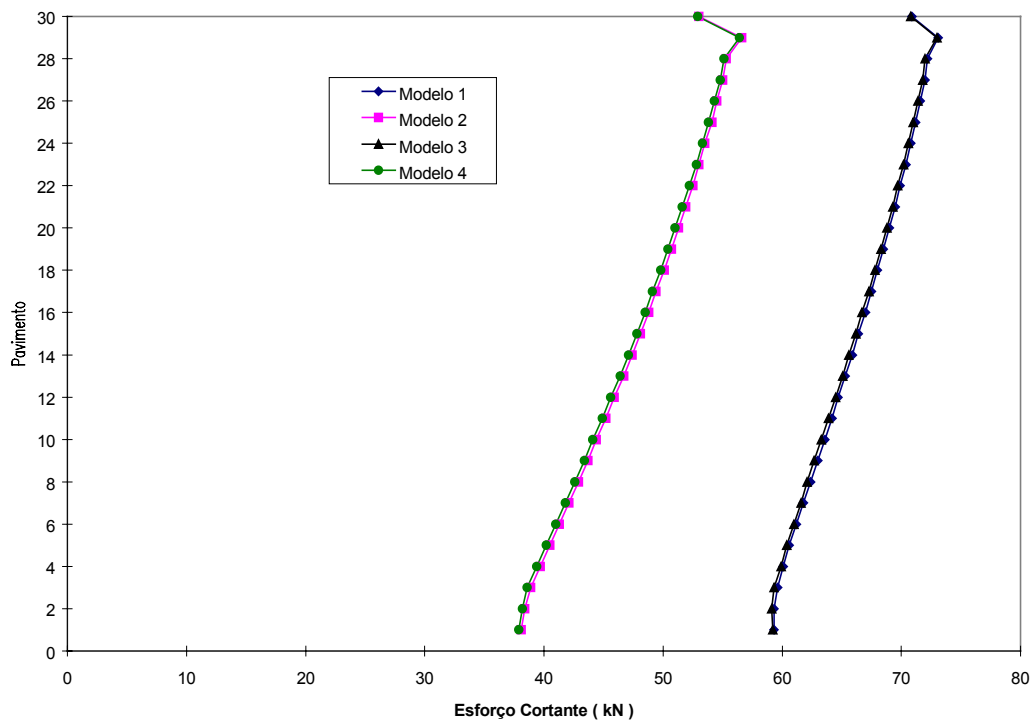
**Figura 94 : Momento Fletor Superior MZ no P03 considerando trechos rígidos**



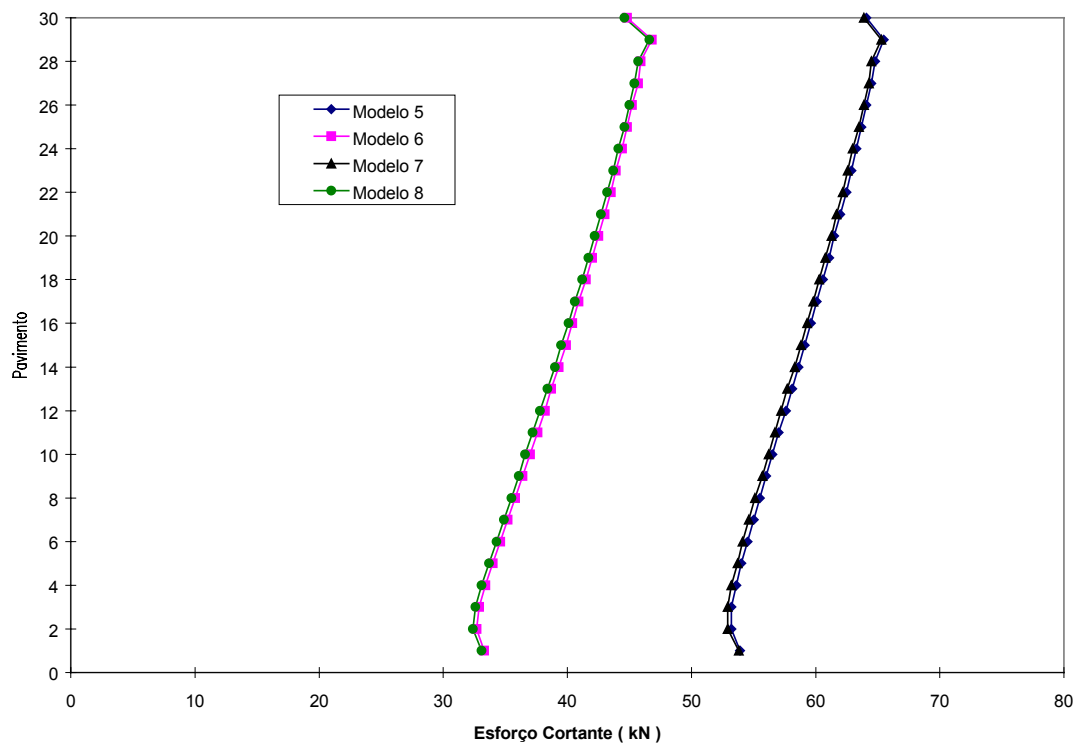
**Figura 95 : Esforço Cortante Superior no P06 sem a consideração de trechos rígidos**



**Figura 96 : Esforço Cortante Superior no P06 considerando trechos rígidos**



**Figura 97 : Esforço Cortante Direito na V02 sem a consideração de trechos rígidos**



**Figura 98 : Esforço Cortante Direito na V02 considerando trechos rígidos**

Através dos gráficos mostrados neste exemplo, verifica-se de forma geral que com a consideração dos trechos rígidos entre viga-pilar, ocorre uma redução dos deslocamentos e uma redistribuição dos esforços nos elementos estruturais. Porém o comportamento da estrutura com ou sem a consideração de trechos rígidos é semelhante, esteja sendo ou não considerada a rigidez transversal à flexão das lajes.

Para a discretização do pavimento foram utilizados 256 elementos finitos quadrangulares.

## 6.5 Parâmetros de instabilidade global

### 6.5.1 Parâmetro $\alpha$

O parâmetro de instabilidade, conhecido por “ $\alpha$ ” foi inicialmente proposto por BECH & KÖNIG (1966) , como uma grandeza capaz de avaliar a sensibilidade da estrutura em relação aos efeitos de 2ª ordem.

O modelo proposto considera um pilar engastado na base, com carga vertical distribuída ao longo de sua altura, supondo-se comportamento elástico-linear. O parâmetro fica, então, definido do seguinte modo :

$$\alpha = H \sqrt{\frac{F}{EI}} \quad (89)$$

onde :

H - altura total do pilar

F - carga vertical característica no pilar

EI - produto de rigidez do pilar



Segundo a teoria desenvolvida pelos autores, para  $\alpha$  superior a 0,60 , torna-se necessária a consideração do efeito de segunda ordem no pilar.

Posteriormente, FRANCO (1985) estendeu este conceito para o caso de estruturas de edifícios altos, uma vez que pode-se fazer analogia entre um edifício alto a uma coluna engastada na base, com os pavimentos tipo conferindo às cargas verticais o caráter de carregamento uniformemente distribuído.

Dessa forma o parâmetro “ $\alpha$ ” fica melhor representado no caso de estruturas de edifícios altos pela expressão :

$$\alpha_k = H \sqrt{\frac{F_k}{(EI)_{eqk}}} \quad (90)$$

onde :

$(EI)_{eqk}$  - rigidez equivalente dada por :

$$EI_{eqk} = \frac{q_k H^4}{8a_k} \quad (91)$$

onde :

$q_k$  - carga horizontal uniformemente distribuída ao longa da estrutura

$a_k$  - flecha no topo da estrutura

$H$  - altura total da edificação

$F_k$  - carga vertical total na edificação

Na análise de edifícios altos, o parâmetro  $\alpha$  serve como indicador da necessidade ou não de se levar em conta os efeitos de 2ª ordem. Assim, pode-se desprezar os efeitos de 2ª ordem quando o valor calculado de  $\alpha$  for menor que  $\alpha_{lim}$  . Isto equivale a dizer que os esforços devido as cargas laterais, em segunda ordem, não ultrapassam em 10 % os de 1ª ordem.

Alguns valores de  $\alpha_{lim}$  para edifícios de vários pavimentos, foram propostos de forma a viabilizar a sua utilização.

De acordo com o CEB (1977), para edifícios de vários pavimentos têm-se :

$$\alpha_{\text{lim}} \leq 0,2 + 0,1 \cdot n \quad ; \text{ para } n \leq 3 \quad (92)$$

$$\alpha_{\text{lim}} \leq 0,6 \quad ; \text{ para } n \geq 4$$

onde **n** indica o número de pavimentos do edifício.

De acordo com o CEB(1977), deveria ser realizada uma análise de 2ª ordem, pois o valor de  $\alpha_k > 0,60$ .

### 6.5.2 Parâmetro $\gamma_z$

Um outro parâmetro de instabilidade foi proposto por FRANCO & VASCONCELOS (1991) como um coeficiente majorador dos esforços em primeira ordem, para obtenção dos esforços finais, os quais já incluem os esforços de segunda ordem.

O parâmetro de instabilidade  $\gamma_z$  pode ser calculado pela expressão :

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_i \cdot z_i}{\sum F_i \cdot h_i}} \quad (93)$$

onde :

$P_i$  - carga vertical total no pavimento *i*

$F_i$  - carga horizontal aplicada ao nível do pavimento *i*

$z_i$  - deslocamento horizontal total do pavimento *i*

$h_i$  - altura correspondente ao pavimento *i* em relação à base do edifício

Desse modo, pode-se obter uma aproximação dos esforços em teoria de segunda ordem da estrutura, com uma análise simplificada em primeira ordem.

### 6.5.3 Parâmetro $\alpha_k$ e $\gamma_z$ para o EXEMPLO 01

No caso do Exemplo 01 temos :

$$- a_k = 9,626 \text{ cm}$$

$$- q_k = 19,14 \text{ kN/m}$$

$$- H = 15 \times 2,90 = 43,5 \text{ m}$$

$$- F_k = 3926 \times 15 = 58890 \text{ kN}$$

$$- EI_{eqk} = \frac{q_k H^4}{8a_k} = \frac{19,14 \cdot (43,5)^4}{8 \cdot 0,09626} = 88994489,66 \text{ kN.m}^2$$

$$\alpha_k = 43,5 \sqrt{\frac{58890}{88994489,66}} = 1,11 > 0,6$$

Com o auxílio da Tabela 07 .o parâmetro  $\gamma_z$  pode ser facilmente calculado

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\sum 2771,19}{\sum 18903,36}} = 1,17 > 1,10$$

**Tabela 07 : Tabela auxiliar no cálculo do parâmetro  $\gamma_z$**

| Andar     | $h_i$ | $F_i$ | $z_i$  | $P_i$ | $P_i * z_i$ | $F_i * h_i$ |
|-----------|-------|-------|--------|-------|-------------|-------------|
| -         | m     | kN    | cm     | kN    | kN.m        | kN.m        |
| 15        | 43.5  | 30.84 | 9.626  | 3926  | 377.91676   | 1341.54     |
| 14        | 40.6  | 61.13 | 9.076  | 3926  | 356.32376   | 2481.878    |
| 13        | 37.7  | 60.54 | 8.483  | 3926  | 333.04258   | 2282.358    |
| 12        | 34.8  | 59.92 | 7.861  | 3926  | 308.62286   | 2085.216    |
| 11        | 31.9  | 59.24 | 7.211  | 3926  | 283.10386   | 1889.756    |
| 10        | 29    | 58.51 | 6.538  | 3926  | 256.68188   | 1696.79     |
| 9         | 26.1  | 57.71 | 5.139  | 3926  | 201.75714   | 1506.231    |
| 8         | 23.2  | 56.84 | 4.423  | 3926  | 173.64698   | 1318.688    |
| 7         | 20.3  | 55.86 | 3.704  | 3926  | 145.41904   | 1133.958    |
| 6         | 17.4  | 54.75 | 2.989  | 3926  | 117.34814   | 952.65      |
| 5         | 14.5  | 53.47 | 2.283  | 3926  | 89.63058    | 775.315     |
| 4         | 11.6  | 51.94 | 1.597  | 3926  | 62.69822    | 602.504     |
| 3         | 8.7   | 50.04 | 0.9419 | 3926  | 36.978994   | 435.348     |
| 2         | 5.8   | 47.47 | 0.3504 | 3926  | 13.756704   | 275.326     |
| 1         | 2.9   | 43.38 | 0.3632 | 3926  | 14.259232   | 125.802     |
| somatório |       |       |        |       | 2771.187    | 18903.36    |

**Tabela 08 : Momento Fletor Superior MY no Pilar 16 ( kN.cm )**

| Andar | Modelo 01 | Modelo 02 | Modelo 03 | Modelo 04 |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 15    | -2565     | -2491     | -2911     | -2784     |
| 14    | -2596     | -2601     | -2992     | -2941     |
| 13    | -2851     | -2840     | -3255     | -3191     |
| 12    | -3096     | -3074     | -3506     | -3431     |
| 11    | -3328     | -3297     | -3742     | -3655     |
| 10    | -3547     | -3507     | -3962     | -3865     |
| 9     | -3748     | -3700     | -4160     | -4055     |
| 8     | -3926     | -3873     | -4332     | -4221     |
| 7     | -4077     | -4022     | -4473     | -4359     |
| 6     | -4193     | -4139     | -4575     | -4463     |
| 5     | -4267     | -4219     | -4630     | -4525     |
| 4     | -4287     | -4250     | -4624     | -4533     |
| 3     | -4223     | -4208     | -4523     | -4459     |
| 2     | -3982     | -4010     | -4223     | -4210     |
| 1     | -2485     | -2558     | -2582     | -2630     |

Através da Tabela 08, verifica-se que os momentos fletores aumentaram em média 10 % , comparando-se teoria de 1ª ordem com 2ª ordem, sem a consideração da rigidez transversal da laje.

Porém, com a consideração da rigidez da laje em teoria de 2ª ordem esta diferença diminui para 8 %, em relação a análise em teoria de 1ª ordem sem a consideração da rigidez transversal da laje.

#### 6.5.4 Parâmetro $\gamma_z$ e $\alpha_k$ para o EXEMPLO 02

No caso do exemplo 02 temos :

$$- a_k = 5,780 \text{ cm}$$

$$- q_k = 18,54 \text{ kN/m}$$

$$- H = 20 \times 3,00 = 60 \text{ m}$$

$$- F_k = 3871,5 \times 20 = 77430 \text{ kN}$$

$$- EI_{eqk} = \frac{q_k H^4}{8a_k} = \frac{18,54 \cdot (60,0)^4}{8 \cdot 0,05780} = 5190633218 \text{ kN.m}^2$$

$$\alpha_k = 60,0 \sqrt{\frac{77430}{5190633218}} = 0,73 > 0,60$$

Com o auxílio da Tabela 08 o parâmetro  $\gamma_z$  pode ser facilmente calculado

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - \frac{\sum 2667}{\sum 36957,39}} = 1,08 \cong 1,10$$

**Tabela 09 : Tabela auxiliar no cálculo do parâmetro  $\gamma_z$**

| Andar            | $h_i$ | $F_i$ | $z_i$  | $P_i$  | $P_i * z_i$       | $F_i * h_i$     |
|------------------|-------|-------|--------|--------|-------------------|-----------------|
| -                | m     | kN    | cm     | kN     | kN.m              | kN.m            |
| 20               | 60    | 32.79 | 5.78   | 3871.5 | 223.7727          | 1967.4          |
| 19               | 57    | 65.15 | 5.646  | 3871.5 | 218.58489         | 3713.55         |
| 18               | 54    | 64.69 | 5.496  | 3871.5 | 212.77764         | 3493.26         |
| 17               | 51    | 64.21 | 5.326  | 3871.5 | 206.19609         | 3274.71         |
| 16               | 48    | 63.71 | 5.134  | 3871.5 | 198.76281         | 3058.08         |
| 15               | 45    | 63.17 | 4.921  | 3871.5 | 190.516515        | 2842.65         |
| 14               | 42    | 62.6  | 4.687  | 3871.5 | 181.457205        | 2629.2          |
| 13               | 39    | 62    | 4.433  | 3871.5 | 171.623595        | 2418            |
| 12               | 36    | 61.37 | 4.159  | 3871.5 | 161.015685        | 2209.32         |
| 11               | 33    | 60.68 | 3.867  | 3871.5 | 149.710905        | 2002.44         |
| 10               | 30    | 59.93 | 3.557  | 3871.5 | 137.709255        | 1797.9          |
| 9                | 27    | 59.14 | 3.231  | 3871.5 | 125.088165        | 1596.78         |
| 8                | 24    | 58.21 | 2.889  | 3871.5 | 111.847635        | 1397.04         |
| 7                | 21    | 57.21 | 2.533  | 3871.5 | 98.065095         | 1201.41         |
| 6                | 18    | 56.08 | 2.166  | 3871.5 | 83.85669          | 1009.44         |
| 5                | 15    | 54.77 | 1.788  | 3871.5 | 69.22242          | 821.55          |
| 4                | 12    | 53.2  | 1.402  | 3871.5 | 54.27843          | 638.4           |
| 3                | 9     | 51.25 | 1.012  | 3871.5 | 39.17958          | 461.25          |
| 2                | 6     | 48.62 | 0.6212 | 3871.5 | 24.049758         | 291.72          |
| 1                | 3     | 44.43 | 0.245  | 3871.5 | 9.485175          | 133.29          |
| <b>Somatório</b> |       |       |        |        | <b>2667.20024</b> | <b>36957.39</b> |

**Tabela 10 : Momento Fletor Superior MY no Pilar 20 ( kN.cm )**

| Andar | Modelo 01 | Modelo 02 | Modelo 03 | Modelo 04 |
|-------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 20    | -10560    | -8783     | -11040    | -9182     |

|    |        |        |        |        |
|----|--------|--------|--------|--------|
| 19 | -7896  | -7100  | -8326  | -7480  |
| 18 | -9210  | -8240  | -9696  | -8667  |
| 17 | -9873  | -8992  | -10400 | -9460  |
| 16 | -10600 | -9774  | -11180 | -10280 |
| 15 | -11290 | -10540 | -11910 | -11090 |
| 14 | -11960 | -11280 | -12620 | -11870 |
| 13 | -12590 | -12000 | -13290 | -12630 |
| 12 | -13180 | -12690 | -13920 | -13350 |
| 11 | -13730 | -13350 | -14510 | -14040 |
| 10 | -14240 | -13960 | -15050 | -14690 |
| 9  | -14680 | -14540 | -15520 | -15290 |
| 8  | -15070 | -15060 | -15930 | -15840 |
| 7  | -15380 | -15520 | -16260 | -16310 |
| 6  | -15620 | -15900 | -16510 | -16710 |
| 5  | -15760 | -16210 | -16660 | -17020 |
| 4  | -15800 | -16410 | -16690 | -17230 |
| 3  | -15650 | -16440 | -16510 | -17240 |
| 2  | -15210 | -16240 | -15980 | -16970 |
| 1  | -10580 | -11840 | -10930 | -12210 |

A Tabela 10 mostra os valores do momento fletor MY na extremidade superior do Pilar 20 do exemplo 02. Verifica-se um aumento em torno de 5 % quando comparam-se os esforços em teoria de 1ª ordem com os em teoria de 2ª ordem.

De acordo com o CEB (1977) como o parâmetro  $\alpha > 0,60$ , deveria ser realizada uma análise em teoria de 2ª ordem. Porém o que se observa é que os esforços em teoria de 2ª ordem considerando a rigidez transversal à flexão das lajes são em geral menores que os esforços em teoria de 1ª ordem sem a consideração da rigidez transversal à flexão das lajes.

# 7 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Com a análise dos resultados obtidos nos três exemplos, observa-se que a rigidez transversal das lajes influencia sensivelmente o comportamento estrutural do edifício. Isto ocorre porque as lajes, com o modelo estrutural adotado, têm uma participação mais efetiva na interação dos esforços e deslocamentos com os demais elementos ( vigas e pilares ), em comparação a outros modelos que as consideram apenas como diafragmas totalmente flexíveis. Há portanto, uma análise conjunta mais realista proveniente da simulação relativa da rigidez entre os elementos estruturais.

Com a utilização do Método dos Elementos Finitos, foi possível obter informações sobre os deslocamentos independentes em diversos pontos do pavimento, tornando-se uma grande vantagem em relação aos modelos que tradicionalmente admitem as lajes sem qualquer rigidez transversal, onde tais deslocamentos não podem ser avaliados.

Através dos gráficos apresentados, notam-se diferenças significativas nos deslocamentos laterais quanto comparam-se os modelos analisados. Percebe-se que os deslocamentos diminuíram quando se considerou a rigidez transversal da laje. Verifica-se que até para alguns casos a influência da rigidez transversal da laje chegou a ser tão significativa, que em teoria de 2ª ordem considerando a rigidez transversal da laje, os deslocamentos foram menores do que no modelo em teoria de 1ª ordem sem a consideração da rigidez transversal á flexão das lajes.

Foram realizados testes variando-se o número de elementos finitos utilizados na discretização, e constatou-se que com poucas subdivisões das lajes os resultados já convergiram.

Como o objetivo principal do trabalho foi analisar a influência da rigidez transversal à flexão das lajes na estrutura global, e determinar seus deslocamentos e esforços correspondentes, não se ateve a discretizar o pavimento com diversas malhas de

elementos finitos. Além disso, uma discretização da laje com uma malha muito refinada de elementos finitos aumenta consideravelmente o tempo de processamento. Porém, deve-se salientar, que se o objetivo for conhecer a distribuição de tensões no pavimento, é conveniente utilizar malhas mais refinadas.

Apesar do modelo estrutural ter-se mostrado bastante eficiente, ele ainda pode ser aperfeiçoado mais ainda com a consideração de outras hipóteses de cálculo. Pode-se considerar trechos rígidos verticais nas ligações pilar-pilar ou até mesmo excentricidades nas ligações laje-viga.

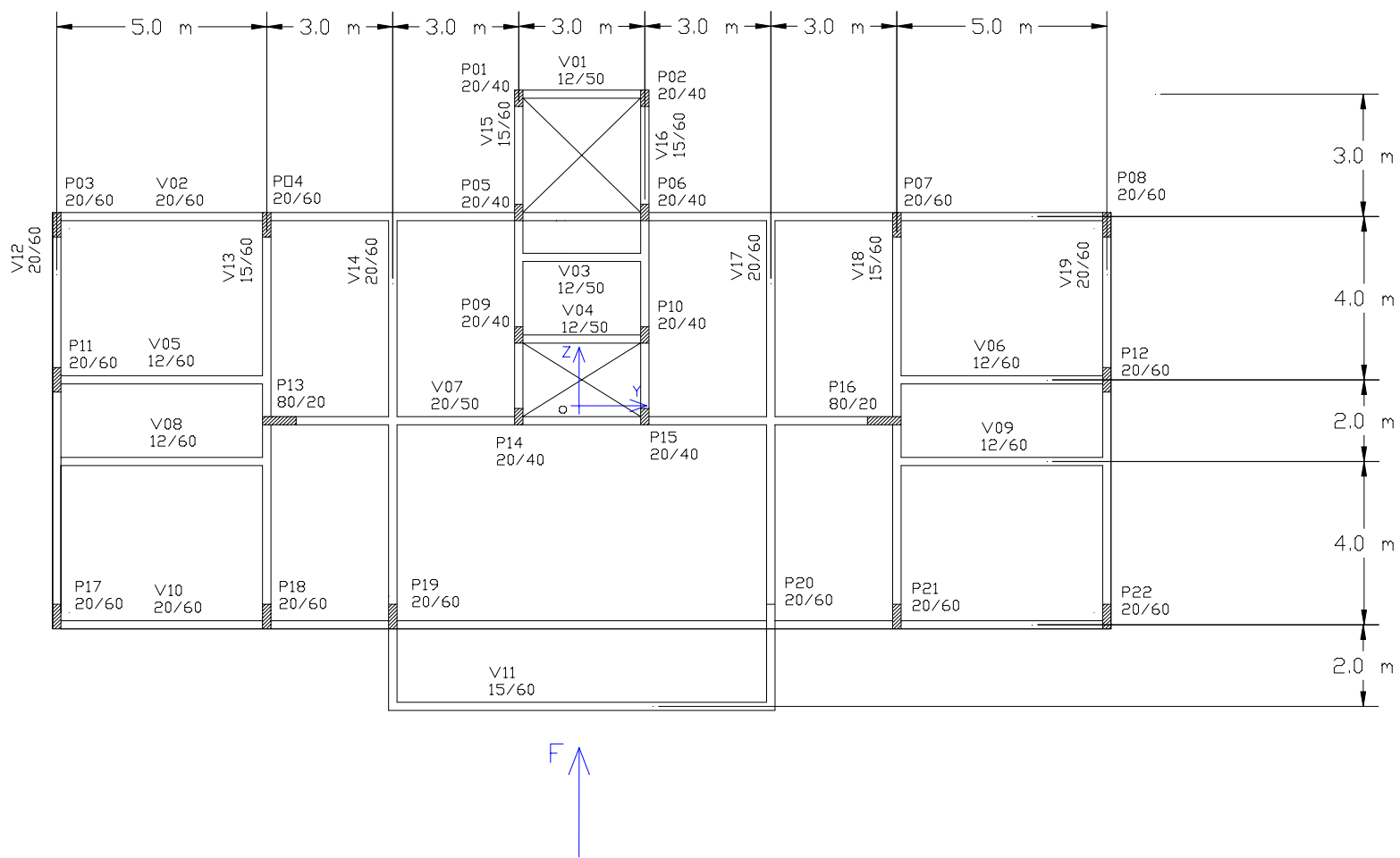
Com o elemento finito DKT utilizado na discretização da laje obteve-se bons resultados, porém é possível adotar outro tipo de elemento finito de placa para posterior comparação de resultados e ainda, diferentes discretizações da laje variando-se o número de elementos finitos utilizados.

A hipótese de diafragma rígido para as lajes pode ser substituída pela consideração da deformabilidade das lajes em seu plano, que poderá ser analisada através de sua discretização em elementos finitos de chapa; dessa forma é possível computar os esforços axiais nas vigas quando a estrutura estiver submetida ao carregamento lateral de vento.

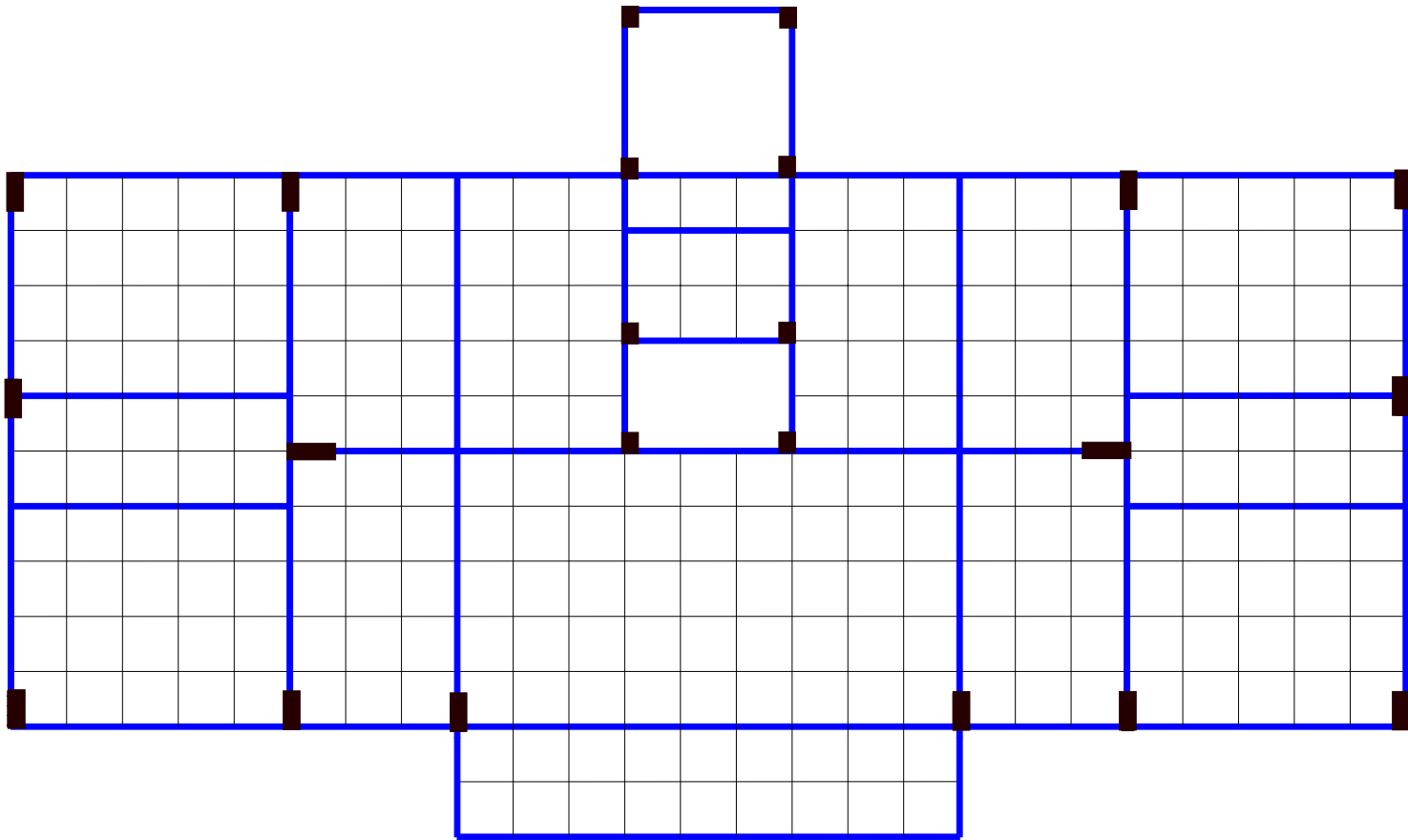
Além disso, outros trabalhos deveriam explorar mais exaustivamente a influência da rigidez transversal à flexão da laje quando se considera a não linearidade geométrica para os pilares, através da análise de outros exemplos e um estudo mais detalhado a cerca dos parâmetros de instabilidade global  $\alpha$  e  $\gamma_z$ .

Outras sugestões a trabalhos futuros dentro desta linha de pesquisa de edifícios altos, é a inclusão de núcleos estruturais ou resistentes com seus lintéis, na análise estrutural, avaliação da contribuição da rigidez das alvenarias de fechamento (paredes) na análise da estrutura, ou ainda fazer a análise global da estrutura considerando a não-linearidade física dos materiais dos elementos estruturais.

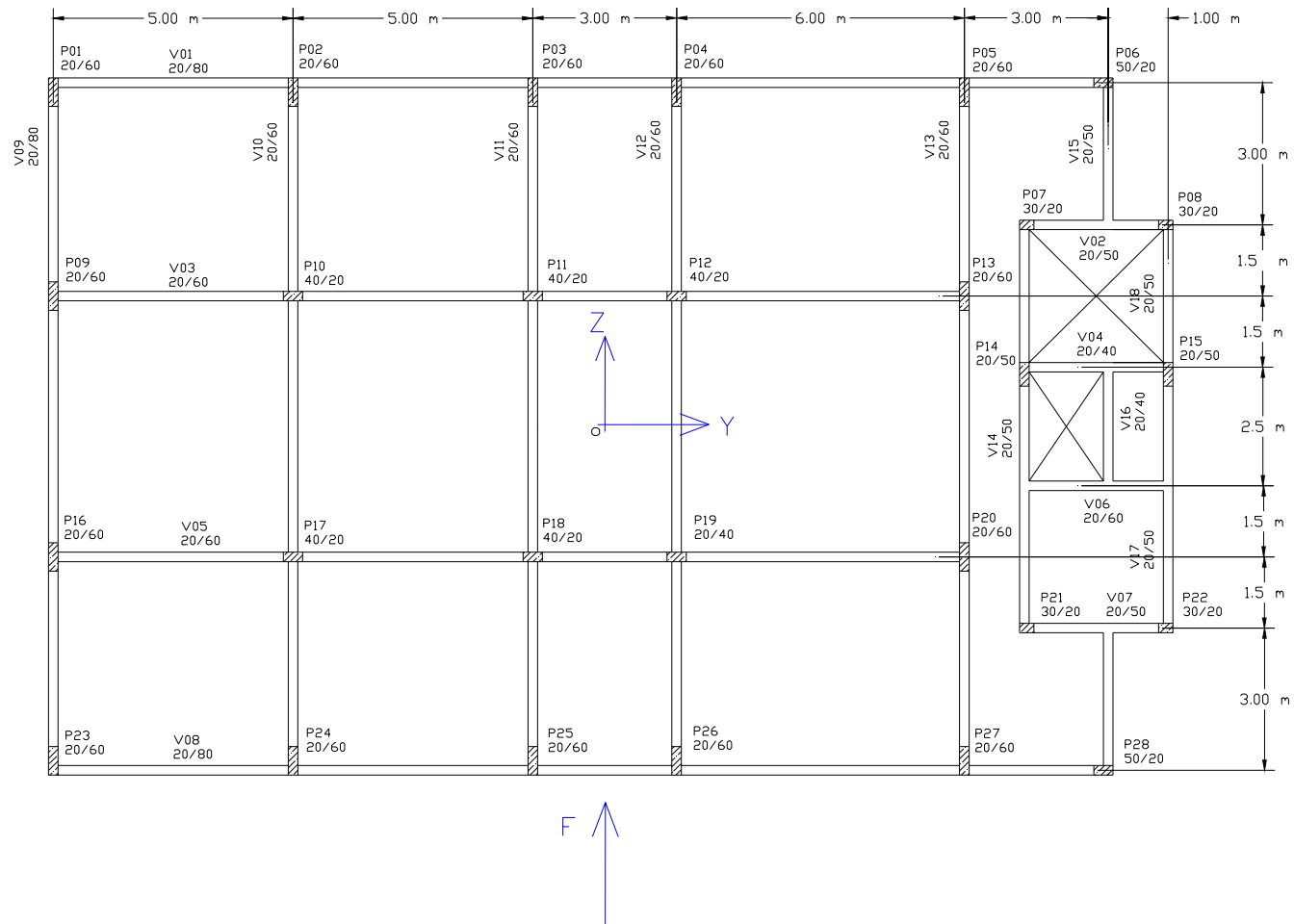




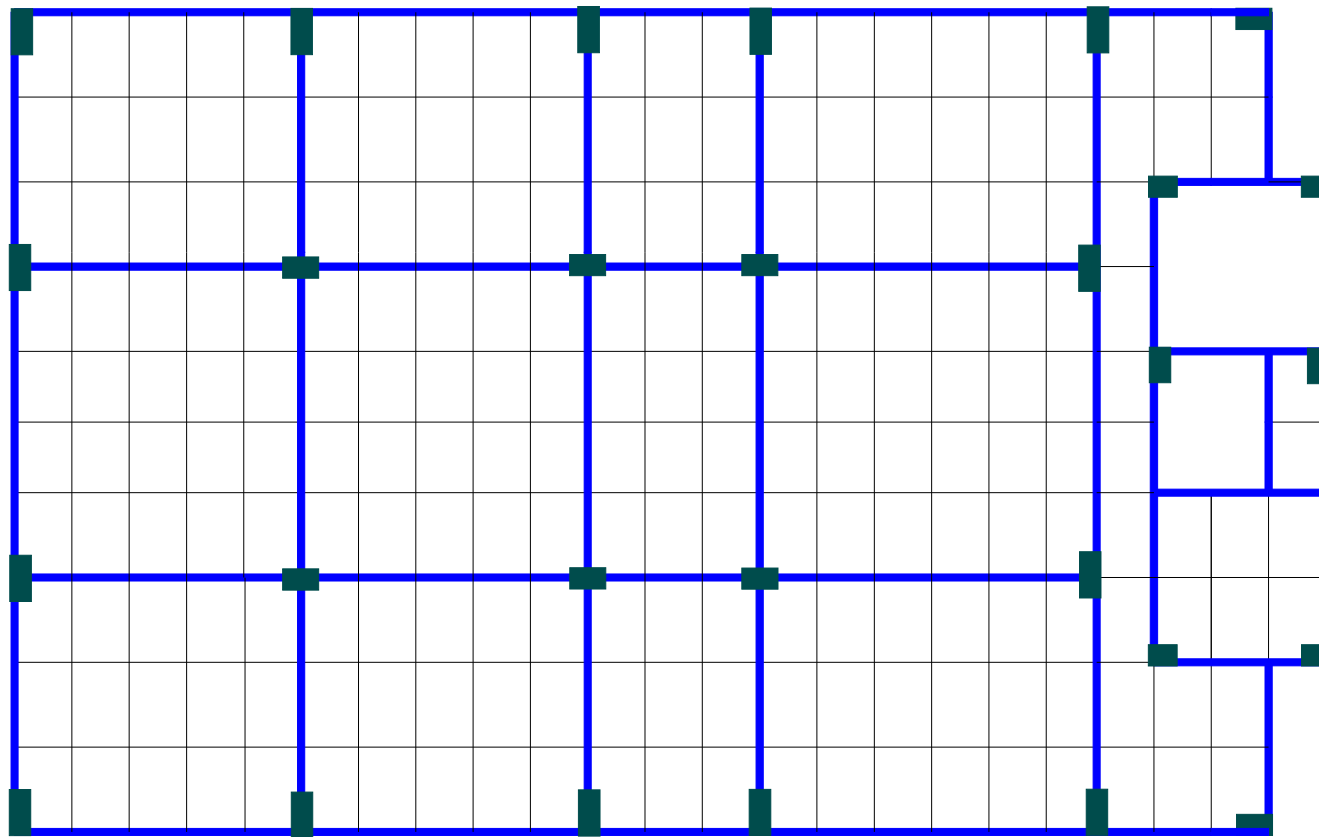
**Figura 58 : Planta baixa do pavimento tipo do exemplo 01**



**Figura 59 : Discretização do pavimento tipo do exemplo 01**



**Figura 73 : Planta baixa do pavimento tipo do exemplo 02**



**Figura 74 : Discretização do pavimento tipo do exemplo 02**

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANTUNES, H.M.C.C. (1978). *Carregamento crítico de instabilidade geral para estruturas tridimensionais de edifícios altos*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Paulo, Universidade de São Paulo.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1984). *NBR-8681 - Ações e segurança nas estruturas*. Rio de Janeiro, ABNT. 21p.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (1980). *NBR - 6123.Ações devidas ao vento em edificações*. Rio de Janeiro, ABNT. 52p.

BALCAZAR, E.A.S.G. (1991). *Análise linear de estruturas tridimensionais pelo método dos elementos finitos utilizando subestruturas*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

BARBOSA, J.A. (1978). *Edifícios com paredes de seção aberta contraventadas por lintéis, sob carga lateral*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

BATOZ, J.L.; BATHE, K.J. ; HO, L.W. ( 1980 ). A study of three-node triangular plate bending elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.15, p.1771-1812.

BECK, H.; KÖNIG, G. (1966). Restraining forces (Festhaltekräfte) in the analysis of tall buildings. In: SIMPOSIUM ON TALL BUILDINGS, Oxford. Proceedings. p. 513-536.

- BECKER, E.P. (1989). *Edifícios altos : interação tridimensional das peças de contraventamento*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BEZERRA, D.P. (1995). *Análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos considerando a rigidez transversal à flexão das lajes*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BRUNELI, A.C. (1987). *Análise estrutural de edifícios sujeitos ao carregamento horizontal, considerando a rigidez das lajes, com o método dos elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DU BÉTON (1977). Code modèle CEB-FIP pour les structures en béton. *CEB Bulletin D'Information*, N.124/125
- FRANCO, M. (1985). O parâmetro de estabilidade nos edifícios de concreto. In: REUNIÃO ANUAL DO IBRACON: Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado, São Paulo, 22-26 jul. *Anais*. 26p.
- FRANCO, M; VASCONCELOS, A.C. (1991) . Pratical assessment of second order effects in tall buildings. In: COLLOQUIUM ON THE CEB-FIP MC 90, Rio de Janeiro. *Proceedings*. P.307-324.
- JEYACHANDRABOSE, C.; KIKHOPE, J. (1985). An alternative explicit formulation for the DKT plate-bending element. *International Journal for Numerical Method in Engineering*, v.21, n.7, p.1289-1293.
- MATIAS JR., I.G. (1997). *Análise não-linear de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleos resistentes sobre fundações flexíveis*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

- MORI, D.D. (1992). *Os núcleos estruturais e a não-linearidade geométrica na análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PRUDENTE, M. (1983). *Análise de estruturas tridimensionais usuais de edifícios altos*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RIOS, B.M.C. (1991). *Análise tridimensional e envoltória de esforços em edifícios altos sujeitos à ações verticais e laterais*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- ROSEN, R.; RUBINSTEIN, M.F. (1970). Substructure analysis by matrix decomposition. *Journal of Structural Division, ASCE*, v.96, n.3, p.663-670, Mar.
- SMITH, B.S.; COULL, A. (1991). *Tall buildings structures: analysis and design*. New York, John Wiley & Sons..
- VLASSOV, B.Z. (1962). *Pièces longues en voiles minces*. Paris, Eyrolles.

# BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ANTUNES, H.M.C.C. (1979). *Análise em segunda ordem de estruturas tridimensionais de edifícios altos*. In: SIMPÓSIO SOBRE SISTEMAS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA CIVIL, 3., Porto Alegre. *Anais*. Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul. p.185-214.

BATOZ, J.L. (1982). An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.18, p.1077-1089.

CÂMARA JR., U.F. (1978). *Análise dos esforços em edifícios altos*. Rio de Janeiro. Dissertação (Mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

CARMO, R.M.S. (1995). *Efeitos de segunda ordem em edifícios usuais de concreto armado*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

CORRÊA, M.R.S. (1991). *Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

COUNCIL ON TALL BUILDINGS AND URBAN HABITAT (1988). *Second century of the skyscraper*. Edited by L.S. Beedle. New York, Van Nostrand Reinhold Company.

FONTE, A.O.C. (1972). *Análise tridimensional de estruturas de edifício*. Dissertação (Mestrado) - COPPE-UFRJ.



- FONTE, A.O.C. (1992). *Análise não-linear geométrica de edifícios altos*. Tese (Doutorado) - COPPE-UFRJ.
- FRANÇA, R.L.S. (1985). Exemplo de cálculo do esforço de segunda ordem global em um edifício de concreto armado. In: REUNIÃO ANUAL DO IBRACON: Colóquio sobre Estabilidade Global de Estruturas de Concreto Armado, São Paulo, 22-26 jul. *Anais*.
- GOLUB, G.H.; LOAN, C.F.V. ( 1989 ). *Matrix computations*. 2.ed. Baltimore, The Johns Hopkins University Press.
- LAIER, J.E. (1989). *Efeitos de segunda ordem em pórticos de edifícios altos*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP.
- LAVALL, A.C.C. (1988). *Análise elástica em segunda ordem de pórticos planos metálicos*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- MACGREGOR, J.G.; HAGE, S.E. (1977). Stability analysis and design of concrete frames. *Journal of Structural Division*, ASCE, v.103, n.10, p.1953-1970, Oct.
- MARTINELLI, D.A.O.; MONTANARI, I.; SAVASSI, W. (1986). *Placas elásticas: equações gerais e placas retangulares*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP.
- MORI, D.D. (1988). *Flexo-torção: barras com seção transversal aberta e paredes delgadas*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP.
- PINTO, R.S. (1997). *Não-linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

- RACHID, M.; MORI, D.D. (1988). *Instabilidade: conceitos - aplicação na flambagem por flexão*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP.
- RACHID, M.; MORI, D.D. (1993). *Instabilidade: flambagem de barras de seção delgada por torção e flexão*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP.
- REZENDE, M.N. (1990). *Análise de pavimentos de edifícios pelo método dos elementos finitos em microcomputadores*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RODRIGUES, M.R.P. ( 1992 ). *Cálculo de esforços em estruturas tridimensionais de edifícios altos utilizando microcomputadores*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SAVASSI, V. (1996). *Introdução ao método dos elementos finitos em análise linear de estrutura*. São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos-USP.
- SILVA, R.M. (1989). *Análise de estruturas tridimensionais de edifícios altos com núcleos resistentes, considerando o efeito P- $\Delta$* . Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SILVA, R.M. (1995). *Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado: modelagem numérica e avaliação dos métodos aproximados*. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SOUSA JR., E. (1996). *Um aplicativo para o ambiente Windows para a aquisição de dados para a análise de pavimentos de edifícios via métodos dos elementos finitos*. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

TARANATH, B.S. (1988). *Structures analysis and design of tall buildings*. New York, McGraw-Hill.

TIMOSHENKO, S.P.; GERE, J.M. (1961). *Theory of elastic stability*. 2.ed. New York, McGraw-Hill. 541p.

VASCONCELOS, A.C. (1985). Critérios para dispensa de consideração do efeito de segunda ordem. In: REUNIÃO ANUAL DO IBRACON: Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado, São Paulo, 22-26 jul. *Anais*. 26p.