

**UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS  
ELEMENTOS FINITOS APLICADA À ANÁLISE  
ELASTOPLÁSTICA DE CASCAS**

Arthur Dias Mesquita

Dissertação apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas

ORIENTADOR: Prof. Dr. Humberto Breves Coda

São Carlos

1998




FOLHA DE APROVAÇÃO

Candidato: Engenheiro **ARTHUR DIAS MESQUITA**

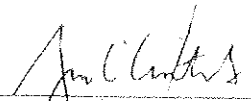
Dissertação defendida e aprovada em 27-04-1998  
pela Comissão Julgadora:

  
Prof. Associado **SÉRGIO PERSIVAL B. PROENÇA (Orientador Designado)**  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)

  
Prof. Titular **WALTER SAVASSI**  
(Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo)

  
Prof. Titular **MIGUEL LUIS BUCALEM**  
(Escola Politécnica - Universidade de São Paulo)

  
Prof. Titular **CARLITO CALIL JUNIOR**  
Coordenador da Área de Engenharia de Estruturas

  
**JOSÉ CARLOS A. CINTRA**  
Presidente da Comissão de Pós-Graduação da EESC

*“Propôs também esta parábola a alguns que confiavam em si mesmos por si considerarem justos, e desprezavam os outros:*

*Dois homens subiram ao templo com o propósito de orar: um fariseu e o outro publicano.*

*O fariseu, pôsto em pé, orava de si para si mesmo, desta forma. Ó Deus, graças te dou porque não sou como os demais homens, roubadores, injustos e adúlteros, nem ainda como este publicano; jejuo duas vezes por semana e dou o dízimo de tudo quanto ganho.*

*O publicano, estando em pé, longe, não ousava nem ainda levantar os olhos ao céu, mas batia no peito, dizendo. Ó Deus, sé propício a mim, pecador!*

*Digo-vos que este desceu justificado para sua casa, e não aquele; porque todo o que se exalta, será humilhado; mas o que se humilha será exaltado.”*

*Aos meus pais,  
que tanto amo, Nivaldo e Solange*

## AGRADECIMENTOS

---

Ao Prof. Humberto Breves Coda, pelo cuidadoso trabalho de orientação, incentivo e especialmente pela amizade demonstrada durante todo o desenvolvimento deste trabalho.

Aos Professores Sérgio Persival B. Proença e Wilson Sérgio Venturini, pela cooperação e apoio, necessários durante a ausência do orientador cumprindo as atividades do Pós-Doutorado no exterior.

Em especial, à Suzana Campana Peleteiro, por proporcionar uma agradável passagem por todo este período, incentivando, apoiando e dando sempre demonstrações de seu carinho.

Aos amigos, Luciano Jorge, Luciano Barbosa e José Júlio, pela agradável convivência, companheirismo e apoio durante todo o período de realização deste trabalho.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, pela bolsa de estudo concedida.

A todos os amigos do Departamento de Engenharia de Estruturas - EESC/USP pelo gratificante convívio e amizade.

Acima de tudo, a DEUS, companheiro fiel, presente em todos os momentos difíceis da minha vida.

## SUMÁRIO

---

LISTA DE FIGURAS.....	i
LISTA DE SÍMBOLOS.....	iv
RESUMO.....	vii
<i>ABSTRACT</i> .....	viii
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO	
1.1 Generalidades.....	1
1.2 Objetivo.....	6
1.3 Organização do trabalho.....	7
CAPÍTULO 2 - APROXIMAÇÃO DA CASCA POR LÂMINAS PLANAS	
2.1 Introdução.....	9
2.2 Campo de deslocamentos.....	12
2.3 Campo de deformações.....	14
2.4 Campo de tensões.....	14
2.5 Esforços.....	15
2.6 Formulação do método dos elementos finitos.....	16
2.7 Modelo estratificado.....	20
CAPÍTULO 3 - ELEMENTO FINITO DE MEMBRANA	
3.1 Introdução.....	23
3.2 Requerimento de convergência.....	24
3.2.1 Patch test.....	25
3.2.2 Teste do elemento individual.....	26
3.3 Formulação do MEF via energia potencial.....	30

3.4 Formulação livre.....	35
3.5 Formulação livre não-linear.....	40
3.6 Formulação do elemento de membrana.....	41
3.6.1 Rigidez básica.....	42
3.6.2 Rigidez de alta ordem.....	49

## CAPÍTULO 4 - ELEMENTO DE FLEXÃO DE PLACAS

4.1 Introdução.....	56
4.2 Teoria de Kirchhoff.....	56
4.2.1 Campo de deslocamentos.....	57
4.2.2 Campo de deformações, tensões e esforços.....	58
4.3 Teoria de Reissner-Mindlin.....	60
4.3.1 Campo de deslocamentos.....	61
4.3.2 Campo de deformações, tensões e esforços.....	61
4.4 Formulação do elemento de placa DKT.....	63
4.5 Forças nodais equivalentes.....	74

## CAPÍTULO 5 - MODELO ELASTOPLÁSTICO

5.1 Introdução.....	75
5.2 Introdução à teoria da plasticidade.....	75
5.2.1 Modelo elastoplástico perfeito (caso uniaxial).....	76
5.2.2 Modelo elastoplástico com encruamento (caso uniaxial).....	77
5.2.3 Superfície de plastificação.....	79
5.2.3.1 Superfície de von Mises.....	81
5.2.4 Relação constitutiva elastoplástica.....	82
5.3 Abordagem numérica do problema elastoplástico.....	90
5.3.1 Particularização do modelo.....	91
5.3.2 Algoritmo implícito ('backward euler').....	95
5.3.3 Estudo da condição de consistência.....	99
5.3.4 Matriz tangente elastoplástica consistente.....	104
5.3.5 Procedimento incremental-iterativo.....	106

CAPÍTULO 6 - EXEMPLOS NUMÉRICOS	
6.1 Introdução.....	111
6.2 Exemplos numéricos elástico-lineares.....	112
6.2.1 Exemplo 1: cobertura cilíndrica.....	113
6.2.2 Exemplo 2: cilindro com paredes rígidas.....	116
6.2.3 Exemplo 3: cúpula esférica vazada.....	118
6.3 Exemplos numéricos elastoplásticos.....	121
6.3.1 Exemplo 1: painel de Cook.....	122
6.3.2 Exemplo 2: placa quadrada.....	124
6.3.3 Exemplo 3: cobertura cilíndrica.....	127
6.3.4 Exemplo 4: casca quadrática engastada.....	130
CAPÍTULO 7 - CONCLUSÕES.....	134
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	139



## LISTA DE FIGURAS

---

FIGURA 2.1	- Tensões e esforços atuando em um elemento de casca.....	10
FIGURA 2.2	- Esforços atuando em um elemento de casca segundo a teoria de membrana.....	11
FIGURA 2.3	- Discretização da casca utilizando-se elementos planos.....	12
FIGURA 2.4	- Deslocamento de um ponto em um elemento plano.....	13
FIGURA 2.5	- Convenção de sinais para os esforços.....	15
FIGURA 2.6	- Modelo estratificado e distribuição de tensões.....	20
FIGURA 3.1	- Patch test.....	25
FIGURA 3.2	- Contribuição de uma face do elemento para o vetor de forças nodais.....	29
FIGURA 3.3	- Geometria e graus de liberdade do elemento de membrana.....	42
FIGURA 3.4a	- Esforços em um lado do elemento.....	44
FIGURA 3.4b	- Deslocamento dos lado i-j do elemento.....	44
FIGURA 3.5	- Sistemas de coordenadas.....	50
FIGURA 4.1	- Posição inicial e final de uma seção de placa.....	57
FIGURA 4.2	- Posição deformada de um elemento de placa.....	60
FIGURA 4.3a	- Desenvolvimento do DKT: elemento inicial.....	64
FIGURA 4.3b	- Desenvolvimento do DKT: elemento final.....	64
FIGURA 4.4	- Lado ij do elemento.....	67
FIGURA 5.1	- Comportamento uniaxial: modelo elastoplástico perfeito.....	77
FIGURA 5.2	- Comportamento uniaxial: modelo elastoplástico com encruamento.....	77
FIGURA 5.3	- Comportamento uniaxial: modelo elastoplástico com encruamento isotrópico.....	78
FIGURA 5.4	- Comportamento uniaxial: modelo elastoplástico com encruamento cinemático.....	78

FIGURA 5.5	- Superfície de plastificação.....	80
FIGURA 5.6a	- Superfície de plastificação: modelo isotropico.....	80
FIGURA 5.6b	- Superfície de plastificação: modelo cinemático.....	80
FIGURA 5.7a	- Superfície de von Mises: estado triaxial das tensões principais.....	81
FIGURA 5.7b	- Superfície de von Mises: estado biaxial das tensões principais.....	81
FIGURA 5.8	- Superfície de plastificação: princípio da normalidade.....	83
FIGURA 5.9	- Procedimento de integração implícito e explícito.....	95
FIGURA 5.10	- Algoritmo de integração implícito para estado plano de tensão.....	98
FIGURA 5.11	- Aspectos da função de consistência.....	99
FIGURA 5.12	- Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson.....	101
FIGURA 5.13	- Divergência do método de Newton-Raphson.....	102
FIGURA 5.14	- Algoritmo de Newton-Raphson específico para a equação de consistência.....	103
FIGURA 5.15	- Estratégia de solução incremental-iterativa (caso unidimensional)..	110
FIGURA 6.1a	- Geometria e malha da estrutura.....	113
FIGURA 6.1b	- Estrutura deformada.....	113
FIGURA 6.2	- Gráfico de convergência do deslocamento transversal do ponto A..	114
FIGURA 6.3	- Distribuição do esforço $M_y'$ sobre a linha A-B.....	115
FIGURA 6.4	- Distribuição do esforço $N_x'$ sobre a linha A-B.....	115
FIGURA 6.5a	- Geometria e malha da estrutura.....	116
FIGURA 6.5b	- Estrutura deformada.....	116
FIGURA 6.6	- Gráfico de convergência do deslocamento radial do ponto A.....	117
FIGURA 6.7	- Distribuição do esforço $M_y'$ sobre a linha B-A.....	117
FIGURA 6.8	- Distribuição do esforço $N_{xy}'$ sobre a linha D-C.....	118
FIGURA 6.9a	- Geometria e malha da estrutura.....	118
FIGURA 6.9b	- Estrutura deformada.....	118
FIGURA 6.10	- Gráfico de convergência do deslocamento radial do ponto A.....	119
FIGURA 6.11	- Distribuição do esforço $M_x'$ sobre a linha A-B.....	120
FIGURA 6.12	- Distribuição do esforço $M_x'$ sobre a linha C-D.....	120
FIGURA 6.13	- Geometria, malha e propriedades físicas da estrutura.....	122
FIGURA 6.14	- Diagrama %força x deslocamento vertical do ponto A.....	123
FIGURA 6.15	- Diagrama %força x $N_{máx}$ nas proximidades do ponto B.....	124
FIGURA 6.16	- Geometria, malha e propriedades físicas da estrutura.....	125

FIGURA 6.17	-	Curvas carga x deslocamento transversal do ponto A .....	126
FIGURA 6.18	-	Distribuição do esforço $M_x$ nas proximidades da linha B-A.....	127
FIGURA 6.19	-	Geometria, malha e propriedades físicas da estrutura.....	128
FIGURA 6.20	-	Curvas carga x deslocamento transversal do ponto A.....	128
FIGURA 6.21	-	Distribuição do esforço $M_{\min}$ nas proximidades da linha B-A.....	129
FIGURA 6.22	-	Distribuição do esforço $N_{\max}$ nas proximidades da linha B-A.....	130
FIGURA 6.23	-	Geometria, malha e propriedades físicas da estrutura.....	131
FIGURA 6.24	-	Curvas carga x deslocamento transversal do ponto A.....	131
FIGURA 6.25	-	Distribuição do esforço $M_x'$ nas proximidades da linha A-B.....	132
FIGURA 6.26	-	Distribuição do esforço $N_x'$ nas proximidades da linha A-B.....	132

## LISTA DE SÍMBOLOS

---



---

$\{U\}$	-	Vetor do campo de deslocamentos
$\{\delta\bar{U}\}_{ij}$	-	Vetor do campo de deslocamentos virtuais ao longo do lado $ij$
$x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \hat{x}, \hat{y}$	-	Coordenadas cartesianas
$x_c, y_c$	-	Coordenadas do centróide
$\xi, \eta, \zeta, \hat{\xi}, \hat{\eta}$	-	Coordenadas naturais
$\alpha, \beta$	-	Parâmetros livres
$\alpha_i, \beta_i, \bar{\alpha}_i, \bar{\beta}_i, c_i$	-	Parâmetros generalizados (sendo $i = 1, 2, \dots$ )
$\theta_x, \theta_y, \theta_z$	-	Rotações segundo as direções $x, y$ e $z$ , respectivamente
$u, v, w$	-	Deslocamentos ao longo dos eixos $x, y$ e $z$ , respectivamente
$\hat{u}, \hat{v}$	-	Deslocamentos ao longo dos eixos $\hat{x}$ e $\hat{y}$ , respectivamente
$\bar{u}, \bar{v}$	-	Deslocamentos ao longo dos eixos $\bar{x}$ e $\bar{y}$ , respectivamente
$\{\sigma\}, \bar{\sigma}_y$	-	Vetor de tensões e tensão de escoamento inicial, respectivamente
$\{\sigma\}_{(11)}$	-	Vetor de tensões de tentativa
$\{\sigma\}_m, \{\sigma\}_f, \{\sigma\}_c$	-	Vetor de tensões de membrana, flexão e cisalhamento, respectivamente
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	-	Tensões normais
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	-	Tensões cisalhantes
$\{\sigma\}_{re}$	-	Vetor de tensões provocadas por um estado-re
$\{\varepsilon\}$	-	Vetor de deformações
$\{\varepsilon\}_m, \{\varepsilon\}_f, \{\varepsilon\}_c$	-	Vetor de deformações de membrana, flexão e cisalhamento, respectivamente
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	-	Deformações normais
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}, \hat{\gamma}_{xy}$	-	Deformações cisalhantes

- $[D], [D]_c$  - Matriz constitutiva elástica e de cisalhamento, respectivamente
- $[D]_{ep}$  - Matriz tangente elastoplástica "clássica"
- $[D]_{epc}$  - Matriz tangente elastoplástica consistente
- $[E]$  - Matriz tangente elástica modificada (algorítmica)
- $[D]_m, [D]_f, [D]_{mf}$  - Matriz constitutiva de membrana, flexão e acoplamento entre as duas últimas, respectivamente
- $\{N\}, \{M\}$  - Vetor dos esforços de membrana e flexão, respectivamente
- $N_x, N_y, N_{xy}$  - Esforços de membrana
- $\bar{N}_x, \bar{N}_{xy}$  - Esforços de membrana devido a um estado-rc no sistema  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$
- $M_x, M_y, M_{xy}$  - Esforços de flexão
- $Q_x, Q_y$  - Esforços cortantes
- $\{K\}$  - Vetor de curvaturas
- $\{\delta\}, \{\delta\}_m, \{\delta\}_f$  - Vetor de deslocamentos nodais total, de membrana e de flexão, respectivamente
- $\{\delta\}_{rc}, \{\delta\}_a$  - Vetor de deslocamentos nodais devido a um estado-rc e um estado-a, respectivamente
- $\{\bar{\delta}_v\}_{i,j}$  - Vetor dos deslocamentos nodais virtuais do lado  $ij$  no sistema  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$
- $[\varphi], \varphi_i$  - Funções de forma
- $[\varphi]_m, [\varphi]_f$  - Funções de forma totais, de membrana e de flexão, respectivamente
- $[\varphi]_{rc}, [\varphi]_a$  - Modos-rc e modos-a, respectivamente
- $[\bar{\varphi}]_{i,j}$  - Funções de forma para os deslocamentos do lado  $ij$  no sistema  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$
- $[\nabla], [\nabla]_m, [\nabla]_f$  - Operadores de deformações
- $[B], [B]_m, [B]_f$  - Matriz de deformação (referente aos deslocamentos nodais) total, de membrana e de flexão, respectivamente
- $[\bar{B}], [\bar{B}]_{rc}, [\bar{B}]_a$  - Matriz de deformação (referente aos parâmetros generalizados) total, corpo rígido/def. constante e alta ordem, respectivamente
- $U$  - Energia de deformação
- $\pi_{rc}, U_{rc}, V_{rc}$  - Energia potencial, de deformação e energia potencial das cargas externas, respectivamente (devido a um estado-rc)
- $\delta W_{rc}^{i,j}$  - Trabalho virtual do lado  $ij$  devido a um estado-rc

$[\mathbf{R}]_{i,j}, [\bar{\mathbf{R}}]_{i,j}$	- Matrizes de transformação referentes ao lado $ij$
$[\mathbf{K}]$	- Matriz de rigidez (referente aos deslocamentos nodais)
$[\mathbf{K}]_m, [\mathbf{K}]_f, [\mathbf{K}]_{mf}$	- Matriz de rigidez (referente aos deslocamentos nodais) de membrana, flexão e acoplamento entre os dois anteriores, respectivamente
$[\mathbf{K}]_b, [\mathbf{K}]_a$	- Rigidez básica e alta ordem, respectivamente
$[\bar{\mathbf{K}}]$	- Matriz de rigidez (referente aos parâmetros generalizados)
$[\bar{\mathbf{K}}]_{re}, [\bar{\mathbf{K}}]_a, [\bar{\mathbf{K}}]_{rea}$	- Matrizes (em relação aos parâmetros generalizado) referentes aos modos-re, modos-a e acoplamento entre os dois anteriores
$[\mathbf{L}]$	- Matriz lumping
$\{\alpha\}, \{\alpha\}_{re}, \{\alpha\}_a$	- Parâmetros generalizados totais, corpo rígido/def. constante e alta ordem, respectivamente
$E, G, \nu$	- Módulo de elasticidade longitudinal, transversal e coeficiente de Poisson, respectivamente
$V, A, h$	- Volume, área e espessura do elemento finito, respectivamente
$J_{xx}, J_{yy}, J_{xy}$	- Momentos de inércia de área
$l_{ij}$	- Comprimento do lado $ij$ de um elemento finito
$ \mathbf{J} $	- Determinante da matriz jacobiana
$\{\mathbf{T}\}_{re}$	- Vetor de forças nodais devido ao estado de tensão $\{\sigma\}_{re}$
$\{\mathbf{F}\}_{re}$	- Vetor de forças nodais produzido pela matriz de rigidez $[\mathbf{K}]$ durante um estado-re
$\{\mathbf{F}\}_{int}, \{\mathbf{F}\}_{ext}$	- Vetor de forças internas e externas, respectivamente
$H, K$	- Módulo plástico isotrópico e cinemático, respectivamente
$F$	- Critério de plastificação
$Q$	- Potencial plástico
$J_2$	- Segundo invariante da parte deviatória do tensor de tensões
$\tau_{oct}$	- Tensão octaédrica
$f$	- Tensão efetiva
$\bar{\epsilon}^p$	- Deformação plástica efetiva
$d\lambda, \Delta\lambda$	- Multiplicador plástico
$\kappa, \{\alpha\}$	- Parâmetros de encruamento isotrópico e cinemático, respectivamente

## RESUMO

---

MESQUITA, A.D. *Uma formulação do método dos elementos finitos aplicada à análise elastoplástica de cascas*. São Carlos, 1998. 144p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

Um elemento finito para análises elastoplásticas de placas (em flexão ou não) e cascas é descrito. Este elemento apresenta geometria triangular e é o resultado do acoplamento entre um elemento de flexão de placas (DKT) e um elemento de tensão plana, baseado na formulação livre (FF). O elemento DKT é um elemento finito bem conhecido, considerado por muitos autores como um dos melhores de sua classe. O elemento FF apresenta o grau de liberdade rotacional normal, que é essencial quando se trabalha com cascas aproximadamente planas. Além disso, sua convergência é garantida devido à imposição do "Teste do Elemento Individual". O comportamento elastoplástico é aproximado por meio de técnicas de integração implícita. Plasticidade associativa é considerada com encruamento isotrópico e critério de von Mises. Afim de preservar a taxa assintótica de convergência quadrática do método de Newton-Raphson, a matriz tangente elastoplástica consistente é aplicada. Resultados demonstram a precisão e eficiência da formulação proposta.

Palavras-chave: Elemento finito, Formulação livre, Casca, Placa, Membrana, Elastoplástico, Implícito.

## ***ABSTRACT***

---

---

MESQUITA, A.D. *A formulation of the finite element method applied for elastoplastic analysis of shells*. São Carlos, 1998. 144p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

A finite element for elastoplastic analysis of plates (in bending or not) and shells is described. This element presents triangular geometry and is the result of a coupling between a plate in bending element (DKT) and a plane stress element, based on the free formulation (FF). The DKT element is a well-known finite element, considered by many authors as one of the best of its class. The FF element presents the normal rotation degree of freedom, what is essential when working with near planar shells. Beyond this, its convergence is guaranteed due to the imposition of the 'Individual Element Test'. The elastoplastic behaviour is approached by means of implicit integration techniques. Associative plasticity is considered with isotropic hardening and the von Mises criteria. In order to preserve the quadratic rate of asymptotic convergence of Newton-Raphson method, the consistent elastoplastic tangent matrix is applied. Results demonstrates the accuracy and efficiency of the proposed formulation

Keywords. Finite element; Free formulation; Shell; Plate; Membrane; Elastoplastic; Implicit.



# Capítulo I

## INTRODUÇÃO

---

### 1.1 GENERALIDADES

Devido a complexidade matemática dos modelos que representam a maioria dos problemas na engenharia, poucas são as soluções analíticas encontradas. As soluções exatas obtidas para casos específicos, são limitadas pela geometria do problema e por hipóteses bastante simplificadoras.

A automação através de computadores, viabiliza o emprego de métodos numéricos, que representam o comportamento do problema abordado de maneira mais precisa e eficiente. Um dos métodos numéricos mais difundido e aplicado em toda a engenharia, é o Método dos Elementos Finitos (MEF). Neste método, o contínuo é subdividido em pequenos subdomínios, denominados elementos finitos, sobre os quais se aproximam os campos incógnitos associados ao problema que se pretende analisar. O MEF, envolve procedimentos extensivos e, devido a natureza repetitiva, torna-se ideal para a implementação em microcomputadores.

Uma das várias aplicações do MEF é a análise de estruturas formadas por um ou mais elementos estruturais de superfície média não-plana, comumente denominados cascas. As estruturas em casca possuem um comportamento mecânico bastante eficiente devido a sua geometria e facilidade de vencer grandes vãos. Alguns exemplos deste tipo de estrutura podem ser citados, para demonstrar a importância da mesma, tais como: silos, tanques, túneis, vasos de pressão, cascos de embarcações e

aeronaves, tubulações, chaminés, coberturas, reservatórios enterrados, abrigos subterrâneos, etc.

O MEF pode ser aplicado basicamente de quatro maneiras no que diz respeito ao tratamento de cascas, conforme ZIENKIEWICZ & TAYLOR(1991) e BATHE(1982). A primeira consistiria na aplicação de elementos planos que incorporam o comportamento de flexão (elemento de flexão de placas) e membrana (elemento de membrana). Esta forma de abordar o problema de cascas é bastante simples, não deixando de ser eficiente, tendo-se em vista o objetivo de se tratar problemas não-lineares. A segunda partiria da adoção de elementos tridimensionais, abordando o problema de casca como o de um meio contínuo tridimensional. Tal procedimento, além de tornar a análise “antieconômica”, leva a um mal condicionamento das matrizes quando se trata de cascas delgadas. A terceira consistiria da aplicação de elementos bidimensionais curvos, fazendo uma aproximação das teorias clássicas de cascas. Tal tratamento é muito trabalhoso, de difícil compatibilização com elementos de barra e sua eficiência, comparado com o primeiro tipo descrito, só é significativa quando a ordem dos polinômios interpoladores cresce muito COWPER *et al.*(1970). A quarta forma de abordar o problema consiste na degeneração de um elemento sólido tridimensional em um elemento de casca através de hipóteses mecânicas e cinemáticas. Entretanto, elementos desenvolvidos com base no conceito de degeneração, apresentam problemas de travamento, tais como “shear locking” (travamento por cisalhamento) e “membrane locking” (travamento por membrana). O efeito de travamento (ou bloqueio) torna o elemento incapaz de reproduzir, no limite, a solução analítica, caracterizando uma sobrerigidez numérica, que toma maior importância a medida que se reduz a espessura. Uma forma de se evitar este fenômeno, consiste em reduzir a influência da rigidez fazendo-se uma má integração, ou seja, utilizando uma quantidade de pontos de integração inferior ao necessário para se integrar de forma exata. Entretanto, este procedimento, conhecido como integração reduzida, pode introduzir no elemento mecanismos internos indesejáveis, provocando problemas de singularidade na matriz de rigidez. Esses mecanismos, oriundos da incorreta

integração, geram um campo de deformação que se anula nos pontos de integração numérica. Daí a origem do nome de modos de energia nulos ou modos espúrios de energia para esses mecanismos.

Conforme YANG *et al.*(1990) a concepção de análises de cascas com elementos planos que superpõem os efeitos de flexão e membrana foi inicialmente sugerida por GREENE *et al.*(1961). Entretanto, o sucesso de tais análises foi adiado até o aperfeiçoamento dos elementos de flexão de placa. Entre as décadas de 1970 e 1980 surgiram alguns elementos de bom desempenho, entre eles, o elemento triangular com dezoito graus de liberdade apresentado em ARGYRIS *et al.*(1977). Porém, estes elementos não apresentavam o grau de liberdade rotacional. A falta desta liberdade conduz a problemas de singularidade na matriz de rigidez global em estruturas onde os elementos finitos são coplanares ou aproximadamente coplanares.

A dificuldade em se formular elementos finitos com o grau de liberdade rotacional decorre da não existência de uma única relação entre a rotação dos lados do elemento e o grau de liberdade rotacional. Além disso, a maioria das definições utilizadas para a liberdade rotacional não eram invariantes com relação ao sistema de referência. Entretanto, a partir da década de 1980, surgiram diversas publicações apresentando novas formulações e novos elementos com o intuito de sanar o problema da falta da liberdade rotacional. BERGAN & NYGARD(1986) e BERGAN *et al.*(1990) apresentam uma extensão da Formulação Livre de BERGAN & NYGARD(1984) para análise da não-linear física e geométrica de cascas modeladas por elementos planos. Alguns novos elementos planos para cascas delgadas com a liberdade rotacional são apresentados. BERGAN & FELIPPA(1985) demonstram que essas liberdades proporcionam um melhor desempenho para o elemento, quando comparado com elementos similares sem as mesmas.

As referências ALVIN *et al.*(1992), FELIPPA & MILITELLO(1992) e FELIPPA & ALEXANDER(1992) apresentam estudos de elementos de membrana com o grau de liberdade rotacional dentro do contexto dos princípios variacionais

parametrizados. Esses princípios fornecem base para diversas técnicas de construção de elementos avançados, como, a Formulação Livre, a Formulação Livre Estendida e a formulação ANDES ('Assumed Natural Deviatoric Strain').

DHATT *et al.*(1986) apresenta um novo elemento triangular discreto de Kirchhoff de placa/casca. O elemento de placa (DKTP) é similar ao elemento DKT ('Discrete Kirchhoff Triangle'), só que inclui um grau de liberdade ( $w$ ) no meio de cada lado. A precisão deste novo elemento é considerada da mesma ordem que o elemento DKT. O elemento de casca (DLTP) possui três nós nos vértices com seis graus de liberdades ( $u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z$ ) e três nós no meio dos lados com três graus de liberdades ( $u, v, w$ ). Este elemento de casca é formulado pelo acoplamento do elemento DKTP com o elemento de membrana LST ('Linear Strain Triangle'). O elemento possui variação linear do campo de deformação e utiliza rotações fictícias para evitar o problema de singularidade devido a falta do grau de liberdade rotacional. Nas análises de cascas com predominância dos efeitos de membrana, o elemento apresenta resultados relativamente precisos.

CHEN(1992) apresenta uma avaliação do elemento triangular plano de membrana com graus de liberdades rotacionais desenvolvido por ALLMAN(1984 e 1988). O elemento de membrana é analisado fazendo uso de integração normal e reduzida e na análise de cascas utiliza o elemento de placa DKT para simular os efeitos de flexão. Resultados numéricos obtidos demonstram que o uso de integração reduzida melhora o desempenho do elemento.

Com relação a análise elastoplástica, OWEN & HINTON(1980) apresentam aplicações do Método dos Elementos Finitos em problemas envolvendo plasticidade. Consideram-se em particular, estados planos de tensão utilizando-se vários critérios de plastificação, fazendo-se uso de um procedimento de integração explícito do modelo constitutivo, juntamente com uma técnica incremental de verificação do equilíbrio.

FIGUEIRAS(1983), aplica o método dos elementos finitos para análise não-linear de placas e cascas anisotrópicas e em concreto armado. Duas diferentes formulações de elementos finitos são apresentadas para a solução de problemas envolvendo materiais anisotrópicos, com especial ênfase para estruturas em compostos fibrosos e laminares.

SIMO & TAYLOR(1985), apresentam uma metodologia para o desenvolvimento do operador tangente consistente com algoritmos do tipo "Closest-Point-Projection" para aplicação em análises elastoplásticas. No ano seguinte, SIMO & TAYLOR(1986) apresentam o desenvolvimento de um algoritmo incondicionalmente estável para análises elastoplásticas em estados planos de tensão. Considerando-se a matriz tangente elastoplástica consistente da estrutura é obtida, para o critério de von Mises, pela linearização da condição de equilíbrio. O uso da matriz tangente consistente preserva a taxa de convergência quadrática do método iterativo de Newton.

JETTEUR(1986), apresenta um algoritmo de integração implícito para as equações constitutivas elastoplásticas em análises de estados planos de tensão. O algoritmo é implementado em um elemento quadrilateral de casca e, segundo o autor, o erro associado é da mesma ordem daqueles encontrados em análises tridimensionais com o algoritmo de retorno radial.

PROENÇA(1988), em tese de doutoramento, apresenta estudo sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear físico do concreto. Inicialmente, são abordados modelos cuja aplicação está baseada em procedimentos incrementais-iterativos do tipo Newton-Raphson sugeridos em FIGUEIRAS(1983) e posteriormente apresenta-se a aplicação da formulação variacional dos modelos elastoplásticos no estudo do comportamento do concreto

Algoritmos para análises numéricas elastoplásticas e elasto-viscoplásticas são apresentados em SIMO & HUGHES(1988). Estes expõem um tratamento algorítmico para a plasticidade, inspirado em métodos de programação matemática convexa.

ALFANO *et al.*(1996) apresentam um novo algoritmo implícito de integração das tensões. Basicamente, o algoritmo difere dos procedimentos clássicos na forma de atualizar as variáveis internas. O algoritmo é confrontado com o proposto por SIMO & TAYLOR(1985) e demonstra um melhor desempenho. Segundo os autores o novo algoritmo apresenta uma melhor taxa de convergência e uma acentuada estabilidade, demonstrando superioridade sobre as estratégias clássicas.

## 1.2 OBJETIVO

Este trabalho tem como finalidade apresentar uma formulação do Método dos Elementos Finitos aplicada à análise elastoplástica de cascas. A estrutura em casca é discretizada de forma aproximada através de elementos planos. Desse modo, quanto mais refinada for a rede melhor representada estará a geometria da estrutura. Além disso, estruturas formadas por superfícies planas podem ser discretizadas de forma exata. O elemento finito apresentado é construído através do acoplamento entre um elemento de flexão de placa e um elemento de membrana (com grau de liberdade rotacional). A liberdade rotacional proporciona uma modelagem mais coerente da estrutura, além de evitar os problemas de singularidade na matriz de rigidez em situações onde os elementos finitos que compõem a estrutura são coplanares ou aproximadamente coplanares. O elemento finito de casca possui parâmetros oriundos do elemento de membrana. Esses parâmetros devem ser equilibrados de forma a proporcionar um melhor desempenho ao elemento de casca. Dessa forma, uma análise sobre os valores ótimos desses parâmetros deve ser realizada.

O material é considerado como elastoplástico e o comportamento não-linear é modelado através da teoria da plasticidade. O modelo constitutivo faz uso do critério

de plastificação de von Mises, com consideração da associatividade e encruamento positivo isotrópico. Na análise elastoplástica, adota-se um processo incremental-iterativo, aplicando-se o método de Newton-Raphson com procedimento implícito de integração das tensões. Utilizar-se-á uma técnica de integração, baseado na quadratura de Gauss, que possibilitará a análise da plastificação através da espessura.

### 1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Neste item apresenta-se sucintamente o conteúdo referente a cada capítulo. Os capítulos estão organizados, o quanto possível, de forma clara e sequencial, objetivando-se facilitar a compreensão dos conceitos abordados.

No capítulo 2 apresenta-se inicialmente uma abordagem sobre a aproximação da casca através de lâminas planas, definindo, com base nas hipóteses de Kirchhoff-Love, campos de deslocamento, deformação e tensão. Posteriormente, a formulação do Método dos Elementos Finitos juntamente com um modelo estratificado são apresentados, fornecendo contribuições para a construção do elemento de casca através do acoplamento entre o elemento de flexão e o elemento de membrana.

A formulação do elemento de membrana é descrita no capítulo 3. Noções básicas a respeito da Formulação Livre são inicialmente apresentadas. Posteriormente são deduzidas as expressões para a matriz de rigidez e matriz de deformação, necessárias na aplicação do modelo elastoplástico e para o acoplamento com o elemento de flexão na construção do elemento de casca.

O elemento de placa que simulará os efeitos de flexão na casca é apresentado no capítulo 4. As teorias de Reissner-Mindlin e Kirchhoff, essenciais na formulação do elemento, são inicialmente abordadas. Analogamente ao elemento de membrana, a matriz de rigidez e a matriz de deformação do elemento são posteriormente desenvolvidas.

No capítulo 5 faz-se uma introdução à teoria da plasticidade, apresentando-se uma abordagem numérica do problema elastoplástico e definindo-se os algoritmos e procedimentos para a solução do problema não-linear.

Os resultados numéricos da implementação computacional são apresentados no capítulo 6. Inicialmente, são apresentados resultados numéricos do elemento de casca elástico linear, em seguida são apresentadas análises de estruturas em regime elastoplástico.

O capítulo 7 apresenta as conclusões e considerações finais dos estudos desenvolvidos e propõe sugestões para o prosseguimento dos trabalhos nessa mesma linha de pesquisa.



## Capítulo 2

### APROXIMAÇÃO DA CASCA POR LÂMINAS PLANAS

---

#### 2.1 INTRODUÇÃO

Uma das características das estruturas em casca, que decorre de sua geometria não-plana, é a presença combinada do “estado de flexão” com o “estado de membrana”. Tal comportamento proporciona uma grande capacidade portante, razão pela qual essas estruturas conseguem vencer grandes vãos com peças bastante delgadas. Essencialmente, uma estrutura em casca é um corpo limitado por duas superfícies curvas, possuindo uma das dimensões, a espessura, bastante inferior às outras. Já as estruturas de superfície definidas por vários segmentos planos, denominam-se “folhas poliédricas”. Entretanto, conforme será apresentado posteriormente, a superfície curva pode ser bem representada, utilizando-se a técnica dos elementos finitos, por uma superfície poliédrica.

Em geral, a casca é caracterizada pela superfície média, definida como a região formada pelos pontos equidistantes das superfícies limitantes, podendo apresentar uma espessura uniforme ou que varie de ponto a ponto. Assim, a geometria da casca pode ser totalmente definida pela sua superfície média e por sua espessura, analogamente às vigas, que são totalmente caracterizadas por um eixo e pela seção transversal. Esta definição geométrica independe das propriedades do material, de maneira que, até mesmo uma bolha de sabão pode ser nela enquadrada. Entretanto, em muitos casos, em virtude da espessura ser extremamente delgada conduzindo a distribuições de esforços de flexão desprezíveis, é mais usual empregar

a nomenclatura membrana. Enquadram-se nessa definição, além da bolha de sabão, estruturas constituídas por tecido, como um pára-quadras ou um balão.

Na realidade, a estrutura em casca é um corpo tridimensional, porém, devido a sua característica de possuir uma das dimensões muito inferior as outras, a maioria das teorias de cascas simplificam o problema, obtendo-se um modelo bidimensional menos complexo. De modo simplificado, pode-se dizer que o comportamento da casca resulta de um estado de flexão trabalhando em conjunto com um estado de membrana. O estado de flexão é consequência de uma distribuição de tensões não-uniforme através da espessura, de maneira que, integrando-se estas, é possível obter momentos que tendem a fletir ou torcer a estrutura e esforços cortantes que tentam cisalhar a mesma. Já o estado de membrana é caracterizado por uma distribuição uniforme de tensões através da espessura, resultando em esforços normais e tangenciais, provocando os efeitos de alongamento (ou encurtamento) e distorção na estrutura. Assim, em geral, as tensões e os esforços resultantes por unidade de comprimento, atuando na superfície média de uma casca, podem ser definidos conforme a figura 2.1.

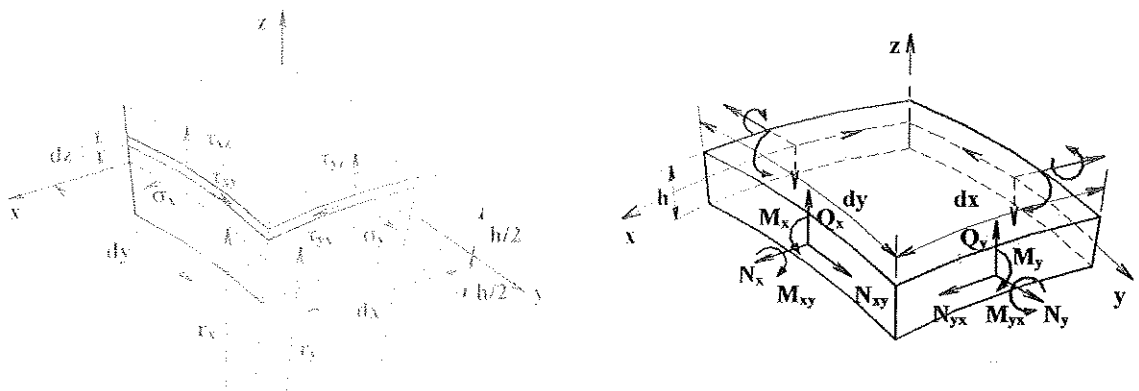


FIGURA 2.1 – Tensões e esforços atuando em um elemento de casca

Considere-se novamente o caso de estruturas que quase não possuem resistência a flexão e que no entanto são capazes de suportar a aplicação de grandes forças. Tome-se por exemplo a casca de um ovo, formada por um material

extremamente frágil, que porém, em função de sua geometria é capaz de resistir a elevadas cargas de compressão aplicadas em seus pólos sem romper ou causar grandes deformações. Nessas estruturas, as forças externas são transferidas primeiramente pelos esforços normais e tangenciais contidas em seu plano médio. Assim, pode-se dizer que os efeitos de flexão não existem ou são tão pequenos que podem ser desprezados. Essas considerações conduzem à teoria de membrana. Nesta teoria, supõe-se que a estrutura não possui rigidez apreciável à flexão e à torção, deformando-se de tal maneira que as forças externas são totalmente suportadas pelos esforços normais e tangenciais analogamente a uma membrana. Assim, com essas hipóteses é possível verificar que o equilíbrio é satisfeito apenas com a consideração dos esforços normais e tangenciais  $N_x$ ,  $N_y$  e  $N_{xy}$ , conforme apresentado na figura 2.2. A teoria de membrana pode descrever bem o comportamento das cascas em geral, desde que sejam satisfeitas determinadas condições geométricas, de apoio e de carregamento. Entretanto, essas restrições podem limitar demasiadamente sua aplicação.

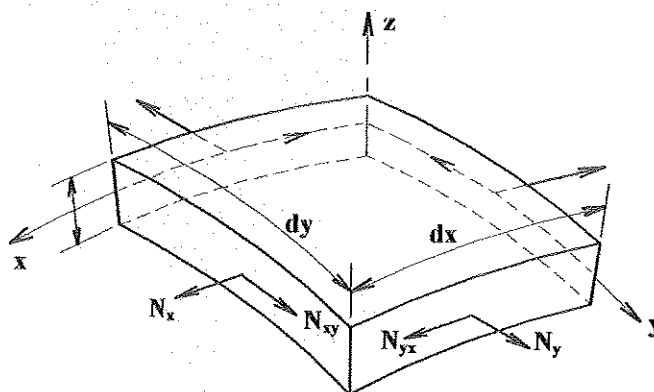
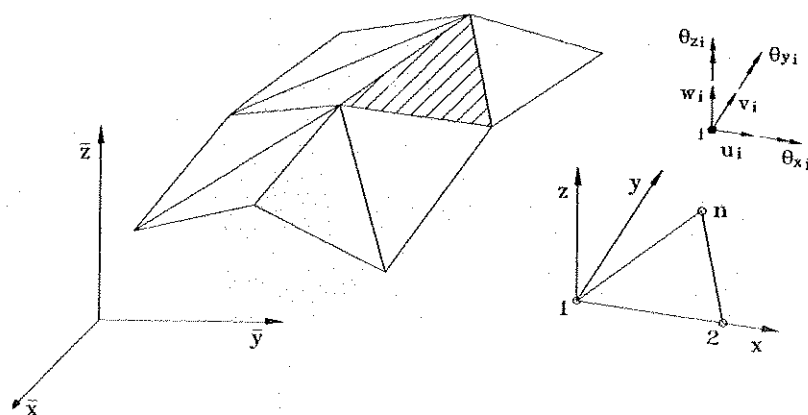


FIGURA 2.2 - Esforços atuando em um elemento de casca segundo a teoria de membrana

Em suma, pode-se concluir que, na maioria dos casos, a obtenção das equações que regem os problemas de casca é bastante difícil e dependendo das simplificações adotadas conduzem a diferentes formulações ZIENKIEWICZ & TAYLOR(1991). Porém, uma maneira simples e eficiente de se abordar este

problema, mediante o método dos elementos finitos, pode ser feita pela discretização da casca utilizando-se elementos planos fig. 2.3.



**FIGURA 2.3 - Discretização da casca utilizando-se de elementos planos**

A geometria deste modelo se aproxima cada vez mais da forma real da estrutura, quanto mais refinada for a discretização adotada. Esta é a idéia básica para a formulação de elementos finitos de cascas pela teoria das “lâminas planas” OÑATE(1992). Além disso, esta teoria é adequada para tratar estruturas formadas por superfícies planas (cascas poliédricas, chapas dobradas, etc.), simplificando o problema da discretização da geometria. Nos próximos itens, esta formulação será melhor descrita, apresentando-se as hipóteses adotadas e todo o equacionamento envolvido na derivação da matriz de rigidez pelo MEF, juntamente com o modelo estratificado adotado.

## 2.2 CAMPO DE DESLOCAMENTOS

A formulação aqui proposta é desenvolvida admitindo-se as hipóteses de Kirchhoff-Love, consideradas fundamentais. Assim, tem-se:

- 1) *A espessura da casca é pequena em relação às dimensões e aos raios de curvatura da superfície média.*
- 2) *As tensões normais à superfície média são desprezíveis em relação às demais.*

3) Os pontos pertencentes a uma mesma reta normal à superfície média na situação indeformada, encontram-se em uma mesma reta normal à superfície média na situação deformada.

4) Os deslocamentos são muito pequenos em relação à espessura, sendo possível desprezar a influência dos mesmos no estudo das condições de equilíbrio do elemento de superfície.

Deve-se notar que a hipótese de Kirchhoff referente as propriedades do material não foi incluída, pois, neste trabalho, pretende-se tratar materiais com comportamento físico não-linear. Assim, os deslocamentos de um ponto genérico **B** (fig. 2.4), situado sobre a linha **AB** normal ao plano médio, sendo **A** o ponto onde a normal corta o plano médio, podem ser definidos como:

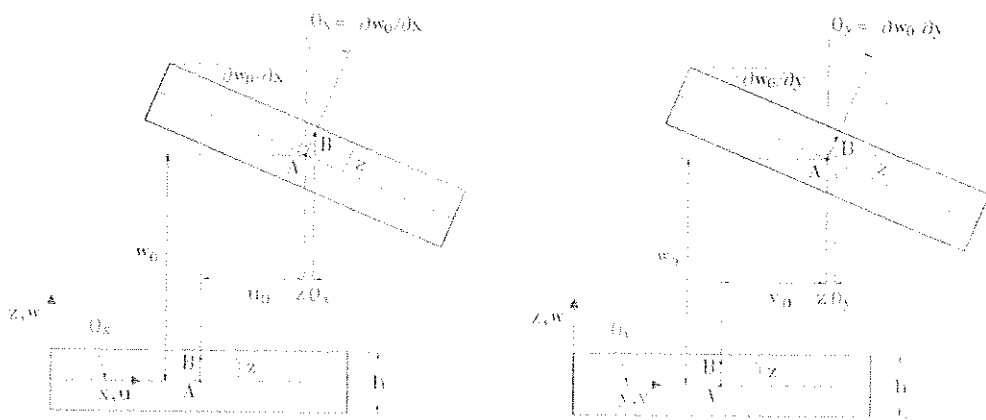


FIGURA 2.4 - Deslocamento de um ponto em um elemento plano

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v_0(x, y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w_0(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

onde  $u_0$ ,  $v_0$  e  $w_0$  representam os deslocamentos, em coordenadas locais, do ponto **A** (fig. 2.4) e as rotações  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são definidas como  $-\partial w_0/\partial x$  e  $-\partial w_0/\partial y$  respectivamente.

### 2.3 CAMPO DE DEFORMAÇÕES

As deformações podem ser decompostas em uma parcela oriunda dos efeitos de membrana e outra oriunda dos efeitos de flexão. Assim, aplicando-se as hipóteses de Kirchhoff e considerando-se pequenas deformações, pode-se escrever o vetor de deformações da seguinte forma:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}_m + \{\varepsilon\}_f = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

onde  $\{\varepsilon\}_m$  e  $\{\varepsilon\}_f$  são os vetores de deformação, em coordenadas locais, referentes aos efeitos de membrana e flexão, respectivamente.

### 2.4 CAMPO DE TENSÕES

O campo de tensões, expresso na forma vetorial, é obtido pela aplicação da relação constitutiva sobre o campo de deformações, como segue:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D]\{\varepsilon\} = [D](\{\varepsilon\}_m + \{\varepsilon\}_f) = \{\sigma\}_m + \{\sigma\}_f \quad (2.3)$$

onde  $[D]$  é a matriz constitutiva para estado plano de tensão,  $\{\sigma\}_m$  e  $\{\sigma\}_f$  são os vetores de tensão referentes aos estados de membrana e flexão, respectivamente. Considerando um modelo elástico linear e as hipóteses de Kirchhoff, observa-se que as tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  variam linearmente na espessura.

## 2.5 ESFORÇOS

Os esforços solicitantes são definidos pela integração das tensões através da espessura, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \dots \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ \dots \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \dots \\ z\sigma_x \\ z\sigma_y \\ z\tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \dots \\ z\{\sigma\} \end{Bmatrix} dz \quad (2.4)$$

onde  $\{N\}$  e  $\{M\}$  são os vetores que reúne os esforços de membrana e flexão, respectivamente. Observa-se que o esforço cortante não foi definido como o resultado da integração das tensões cisalhantes, pois, como consequência direta das hipóteses de Kirchhoff, este pode ser determinado por equilíbrio, através da diferenciação do campo de momentos fletores. Além disso, como as distorções devido ao esforço cortante são desprezadas, na formulação do MEF os valores das tensões cisalhantes não são utilizados. Os esforços apresentados na equação (2.4) podem ser visualizados na figura 2.5, onde está definida a convenção de sinais.

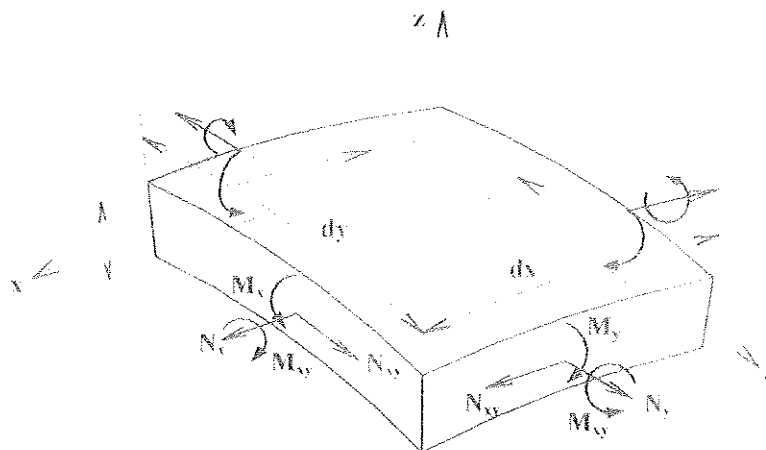


FIGURA 2.5 - Convenção de sinais para os esforços

## 2.6 FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Para se obter as expressões básicas da formulação do método dos elementos finitos para um elemento plano de casca, torna-se necessário definir um campo de deslocamentos aproximado. Dessa forma, supondo-se um elemento com  $n$  nós (fig. 2.3), o campo de deslocamentos<sup>1</sup> pode ser expresso como:

$$\{\mathbf{U}\} = [\boldsymbol{\varphi}]\{\boldsymbol{\delta}\} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\varphi}]_m & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\boldsymbol{\varphi}]_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\boldsymbol{\delta}\}_m \\ \{\boldsymbol{\delta}\}_f \end{Bmatrix} \quad (2.5)$$

onde  $\{\boldsymbol{\delta}\}_m$  e  $\{\boldsymbol{\delta}\}_f$  são os vetores de deslocamentos nodais do elemento, no sistema local, relacionados respectivamente com os estados de membrana e flexão. Estes podem ser visualizados na figura 2.3 e são expressos como:

$$\{\boldsymbol{\delta}\}_m^T = [\mathbf{u}_i \quad \mathbf{v}_i \quad \theta_{zi} \quad \mathbf{u}_j \quad \dots \quad \theta_{zn}] \text{ e } \{\boldsymbol{\delta}\}_f^T = [\mathbf{w}_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \mathbf{w}_j \quad \dots \quad \theta_{yn}] \quad (2.6)$$

Nota-se que o vetor de deslocamentos  $\{\boldsymbol{\delta}\}_m$  contém o grau de liberdade rotacional  $\theta_z$ , característica muito desejada para elementos de casca, pois a presença deste, permite uma modelagem mais coerente da estrutura além de evitar os problemas de mal condicionamento da matriz de rigidez. A submatriz  $[\boldsymbol{\varphi}]_m$  de ordem  $2 \times 3n$ , contém um conjunto de funções de forma referente ao estado de membrana. Semelhantemente, a submatriz  $[\boldsymbol{\varphi}]_f$  de ordem  $1 \times 3n$ , contém um conjunto de funções de forma referente ao estado de flexão.

As deformações podem ser obtidas de acordo com a equação (2.2), diferenciando-se apropriadamente o campo de deslocamentos apresentado em (2.5). Desta forma, tem-se:

<sup>1</sup> Pode-se desenvolver separadamente ambas as formulações (membrana e flexão) e fazendo-se uso de suas matrizes de deformação e de rigidez, pode-se construir o elemento de casca, como será apresentado posteriormente. Isto se deve à forma como esta escrito o campo de deslocamentos eq.(2.5), não existindo nenhuma ligação entre as funções de forma dos dois estados.



$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{V}]_m [\boldsymbol{\varphi}]_m \{\delta\}_m + z [\mathbf{V}]_r [\boldsymbol{\varphi}]_r \{\delta\}_r = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}]_m & z[\mathbf{B}]_r \end{bmatrix} \{\delta\} = [\mathbf{B}] \{\delta\} \quad (2.7)$$

onde  $[\mathbf{B}]_m$  e  $[\mathbf{B}]_r$  são as matrizes de deformação correspondentes aos estados de membrana e flexão respectivamente e as expressões  $[\mathbf{V}]_m$  e  $[\mathbf{V}]_r$  são definidas como:

$$[\mathbf{V}]_m^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & \partial/\partial y \\ 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \text{ e } [\mathbf{V}]_r^T = - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

A expressão da matriz de rigidez pode ser obtida utilizando-se a definição da energia de deformação  $U$ , da seguinte forma:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T [\mathbf{D}] \{\varepsilon\} dV \quad (2.9)$$

Substituindo-se a equação (2.7) na equação (2.9), encontra-se

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\delta\}^T [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{\delta\} dV = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [\mathbf{K}] \{\delta\} \quad (2.10)$$

onde  $[\mathbf{K}]$  é a matriz de rigidez definida pela expressão:

$$[\mathbf{K}] = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV = \int_V \begin{bmatrix} [\mathbf{B}]_m^T \\ z[\mathbf{B}]_r^T \end{bmatrix} [\mathbf{D}] \begin{bmatrix} [\mathbf{B}]_m & z[\mathbf{B}]_r \end{bmatrix} dV \quad (2.11)$$

Para visualizar melhor a expressão da matriz de rigidez, pode-se expandir a equação (2.11), resultando:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}]_m & [\mathbf{K}]_{mr} \\ [\mathbf{K}]_{mr}^T & [\mathbf{K}]_r \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

onde  $[\mathbf{K}]_m$ ,  $[\mathbf{K}]_r$  e  $[\mathbf{K}]_{mr}$  são respectivamente as matrizes de rigidez de membrana, flexão e acoplamento entre as duas anteriores<sup>2</sup>. Essas matrizes são expressas como

<sup>2</sup> Pode-se formular separadamente (como elementos distintos) as expressões das matrizes de deformação de membrana  $[\mathbf{B}]_m$  e flexão  $[\mathbf{B}]_r$  e aplica-las nas expressões (2.13) para construir a matriz de rigidez da casca. Para se efetuar as integrais indicadas faz-se uso de técnicas numéricas de integração.

$$\begin{aligned}
[\mathbf{K}]_r &= \int_V [\mathbf{B}]_r^T z^2 [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]_r dV = \int_A [\mathbf{B}]_r^T [\mathbf{D}]_r [\mathbf{B}]_r dA \\
[\mathbf{K}]_m &= \int_V [\mathbf{B}]_m^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]_m dV = \int_A [\mathbf{B}]_m^T [\mathbf{D}]_m [\mathbf{B}]_m dA \\
[\mathbf{K}]_{mr} &= \int_V [\mathbf{B}]_m^T z [\mathbf{D}] [\mathbf{B}]_r dV = \int_A [\mathbf{B}]_m^T [\mathbf{D}]_{mr} [\mathbf{B}]_r dA
\end{aligned} \tag{2.13}$$

sendo

$$[\mathbf{D}]_m = \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{D}] dz, \quad [\mathbf{D}]_r = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 [\mathbf{D}] dz \quad \text{e} \quad [\mathbf{D}]_{mr} = \int_{-h/2}^{h/2} z [\mathbf{D}] dz \tag{2.14}$$

Deve-se notar que as expressões (2.13) são válidas para o caso mais geral, onde as propriedades do material são heterogeneamente distribuídas através da espessura, ou mesmo em análises elastoplásticas. Entretanto, se em uma análise elástica linear com material homogêneo ou distribuído simetricamente com relação ao plano médio, a matriz  $[\mathbf{D}]_{mr}$  anula-se e conseqüentemente também a matriz de acoplamento  $[\mathbf{K}]_{mr}$ . Neste caso, a matriz de rigidez do elemento pode ser obtida pela soma direta das matrizes de rigidez de membrana e flexão que contribuem de forma desacoplada. Assim, nesse caso, a matriz de rigidez fica expressa como:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{K}]_m & [\mathbf{0}] \\ [\mathbf{0}] & [\mathbf{K}]_r \end{bmatrix} \tag{2.15}$$

Porém, em lâminas de materiais compostos com propriedades mecânicas diferentes e não simétricas com relação ao plano médio (por exemplo: uma lâmina de concreto armado com distribuição não simétrica de armadura) ou até mesmo em um modelo de lâmina elastoplástico estratificado, onde a matriz constitutiva varia através da espessura, a matriz de acoplamento  $[\mathbf{K}]_{mr}$  deve ser considerada.

Após a determinação dos deslocamentos, obtém-se as tensões utilizando-se a relação constitutiva definida em (2.3) e fazendo-se uso da equação (2.7), resultando:

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\delta\} = [D]\left[ [B]_{|m} \quad z[B]_{|r} \right]\{\delta\} \quad (2.16)$$

Os esforços podem ser obtidos da equação (2.4), integrando-se as tensões, expressas em (2.16), através da espessura, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \dots \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \dots \\ z\{\sigma\} \end{Bmatrix} dz = \begin{bmatrix} [D]_{|m}[B]_{|m} & [D]_{|mr}[B]_{|r} \\ \dots & \dots \\ [D]_{|mr}[B]_{|m} & [D]_{|r}[B]_{|r} \end{bmatrix} \{\delta\} \quad (2.17)$$

onde  $[D]_{|m}$ ,  $[D]_{|r}$  e  $[D]_{|mr}$  estão definidas em (2.14). Semelhantemente a expressão da matriz de rigidez, para o caso de um material elástico com propriedades físicas distribuídas através da espessura simetricamente, com relação ao plano médio, a matriz  $[D]_{|mr}$  é nula e os esforços de membrana e flexão podem ser calculados de forma desacoplada através de suas correspondentes matrizes de deformações.

Dois modelos de análise elastoplástica de cascas podem ser destacados, o modelo estratificado e o não estratificado. Em um modelo elastoplástico estratificado os esforços são obtidos diretamente pela integração numérica das tensões (oriundas de procedimentos elastoplásticos) através da espessura. Nos modelos elastoplásticos não estratificados os esforços são obtidos diretamente de procedimentos elastoplásticos. Este último modelo, mais simplificado, apresenta a vantagem de ter um custo computacional menor, principalmente quando se trata de estruturas em casca, entretanto, este não permite avaliar o processo de plastificação através da espessura, ao contrário do primeiro modelo. Neste trabalho, fez-se opção pelo modelo estratificado, pois este abre maiores horizontes para futuras pesquisas, tal como a consideração de materiais com propriedades mecânicas variáveis ao longo da espessura da casca.

## 2.7 MODELO ESTRATIFICADO

O modelo estratificado consiste na divisão da espessura do elemento finito em camadas ou lâminas. Este modelo é bastante útil em análises elastoplásticas, pois, como dito anteriormente, permite acompanhar a evolução da plastificação através da espessura. Além disso, sua aplicação possibilita modelar estruturas laminares compostas por materiais diferentes distribuídos ao longo de sua espessura. Na integração das tensões e das leis constitutivas através da espessura, é utilizada técnica de integração numérica baseada na quadratura de Gauss. Neste trabalho, a aplicação do modelo estratificado tem como única finalidade a análise do processo de plastificação através da espessura, dessa forma, serão consideradas apenas lâminas compostas por um mesmo material. O número de lâminas tem correspondência com o número de pontos de Gauss distribuídos através da espessura (fig. 2.6). Nos pontos de Gauss são computadas as tensões, as deformações e as relações constitutivas elastoplásticas.

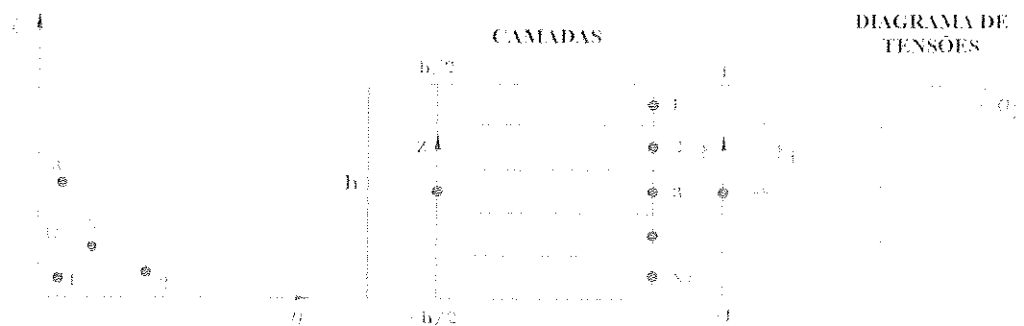


FIGURA 2.6 - Modelo estratificado e distribuição de tensões

Para definir as expressões referentes às integrações numéricas, através da espessura, das grandezas envolvidas é necessário adotar uma coordenada natural  $\xi = 2z/h$  que varia de  $-1$  até  $1$ , com origem na superfície média do elemento (fig.2.6). As expressões dos esforços eq. (2.17), que serão utilizadas no procedimento de integração numérica, são definidas como:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \dots \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \dots \\ z\{\sigma\} \end{Bmatrix} dz = \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \dots \\ \frac{h}{2}\xi\{\sigma\} \end{Bmatrix} \frac{h}{2} d\xi = \sum_{i=1}^{N\xi} \begin{Bmatrix} \{\sigma\}_i \\ \dots \\ \frac{h}{2}\xi_i\{\sigma\}_i \end{Bmatrix} \frac{h}{2} \bar{w}_i \quad (2.18)$$

onde  $N\xi$  refere-se ao número de pontos de Gauss distribuídos pela espessura,  $\xi_i$  é a coordenada do ponto de Gauss  $i$  e  $\bar{w}_i$  seu peso, ambos previamente definidos pela regra de quadratura. Observa-se que, para se aplicar as expressões da quadratura de Gauss é necessário reescrever a integral, de forma que ela seja definida em função da variável natural  $\xi$  e que seu limite varie de  $-1$  até  $1$ . É importante observar que, se o diagrama de tensões for representado por funções polinomiais de grau  $2N\xi-1$ , a integração é feita de modo exato. Entretanto, em uma análise elastoplástica de cascas, em geral, a distribuição das tensões na espessura não é previamente conhecida, dessa forma, quanto maior o número de pontos de Gauss utilizado, mais precisa será a integração e melhor representada será a plastificação através da espessura. Porém, deve-se ressaltar que a escolha de um grande número de pontos de Gauss provoca um excessivo custo computacional.

Para encontrar a expressão da matriz de rigidez eq.(2.12) por integração numérica, é necessário se definir as integrais em função das coordenadas naturais associadas à espessura ( $\xi$ ) e à área do elemento ( $\eta$  e  $\zeta$ ). Dessa forma, sabendo-se que  $[B]_r$  e  $[B]_m$  são constantes na espessura, as submatrizes apresentadas em (2.13), que definem a matriz de rigidez, podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} [K]_r &= \iint_{\Omega_{qc}} [B]_r^t \int_{-1}^1 \frac{h^3}{8} \xi^2 [D] d\xi [B]_r [J] d\eta d\zeta = \sum_{j=1}^{N\Omega} [B]_r^t \left( \sum_{i=1}^{N\xi} \frac{h^3}{8} \xi_i^2 [D]_i \bar{w}_i \right) [B]_r [J] \bar{w}_i \\ [K]_m &= \iint_{\Omega_{qc}} [B]_m^t \int_{-1}^1 \frac{h}{2} [D] d\xi [B]_m [J] d\eta d\zeta = \sum_{j=1}^{N\Omega} [B]_m^t \left( \sum_{i=1}^{N\xi} \frac{h}{2} [D]_i \bar{w}_i \right) [B]_m [J] \bar{w}_i \\ [K]_{mt} &= \iint_{\Omega_{qc}} [B]_m^t \int_{-1}^1 \frac{h^2}{4} \xi [D] d\xi [B]_r [J] d\eta d\zeta = \sum_{j=1}^{N\Omega} [B]_m^t \left( \sum_{i=1}^{N\xi} \frac{h^2}{4} \xi_i [D]_i \bar{w}_i \right) [B]_r [J] \bar{w}_i \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde  $N_\Omega$  e  $N_\xi$  são respectivamente o número de pontos de Gauss utilizado no domínio  $\Omega$  e na espessura. O determinante da matriz jacobiana  $|\mathbf{J}|$  relaciona o diferencial de área com as coordenadas naturais ( $dxdy = |\mathbf{J}|d\eta d\zeta$ ). Demonstra-se facilmente que, para o caso particular de um elemento finito triangular de lados retos  $|\mathbf{J}| = 2\mathbf{A}$ , sendo  $\mathbf{A}$  a área do elemento. O termo  $\bar{w}_j$  é o peso do ponto de Gauss  $j$  da área do elemento e  $\bar{w}_i$  é o peso referente ao ponto de Gauss  $i$  localizado na espessura do elemento.

Uma outra grandeza bastante utilizada em problemas não-lineares é o vetor de forças internas definido como:

$$\{\mathbf{F}\}_{int} = \int_V [\mathbf{B}]^T \{\sigma\} dV \quad (2.20)$$

Dessa forma, a expressão para a integração numérica fica:

$$\{\mathbf{F}\}_{int} = \iint_{\Omega_{nc}} \left[ [\mathbf{B}]_m^T \quad [\mathbf{B}]_i^T \right] \int_{-1}^1 \frac{b}{2} \begin{Bmatrix} \{\sigma\} \\ \frac{h}{2} \xi \{\sigma\} \end{Bmatrix} d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^{N_\Omega} \left[ [\mathbf{B}_i]_m^T \quad [\mathbf{B}_i]_i^T \right] \begin{Bmatrix} \{\mathbf{N}_i\} \\ \{\mathbf{M}_i\} \end{Bmatrix} |\mathbf{J}| \bar{w}_i \quad (2.21)$$

Fazendo uso destas expressões, pode-se integrar numericamente as grandezas envolvidas, caracterizado assim, o modelo estratificado.

## Capítulo 3

### ELEMENTO FINITO DE MEMBRANA

---

#### 3.1 INTRODUÇÃO

Para simular os efeitos de membrana na casca utilizar-se-á o elemento triangular com graus de liberdade rotacionais desenvolvido por BERGAN & FELIPPA(1985). Uma das vantagens desse elemento é a presença do grau de liberdade rotacional ('drilling'). A liberdade rotacional propicia uma melhor modelagem da estrutura, facilitando o acoplamento com elementos de placa na construção de elementos de casca, evitando que a matriz de rigidez global da mesma apresente singularidade nos casos onde os elementos da estrutura são coplanares ou aproximadamente coplanares. Nas situações onde se utilizam elementos que não possuem o 'drilling', tais como os elementos CST (Constant Strain Triangle) e o LST (Linear Strain Triangle), uma solução imediata para elementos coplanares é restringir o deslocamento referente ao grau de liberdade rotacional inexistente ou eliminar o grau de liberdade global. Uma forma de evitar as singularidades para elementos quase coplanares, seria através da imposição de coeficientes de mola, de forma a não interferir nos resultados obtidos, o que nem sempre ocorre PELETEIRO(1996). A utilização do elemento de membrana com graus de liberdade rotacionais não somente elimina tais singularidades, como também proporciona uma melhor interface dos elementos de casca (ou mesmo de membrana) com elementos de barra.

O elemento aqui estudado foi desenvolvido através da Formulação Livre proposta por BERGAN & NYGARD(1984). Estes autores demonstram que as propriedades de convergência de um elemento finito estão associadas à rigidez de acoplamento entre os modos básicos e de alta ordem. Esta formulação garante a convergência do elemento através da satisfação do “Teste do Elemento Individual” e consequentemente do “Patch Test”. Através desta formulação, mesmo que se utilize funções não-conformes de deslocamento, podem-se desenvolver elementos eficientes e com convergência garantida. Assim, torna-se imprescindível uma rápida introdução sobre a Formulação Livre e sobre as condições para garantia de convergência, antes do desenvolvimento específico do elemento de membrana.

### **3.2 REQUERIMENTO DE CONVERGÊNCIA**

Quando se pretende desenvolver um elemento finito qualquer, duas características principais devem ser alcançadas para possibilitar sua ampla aplicação em problemas da prática. A primeira, usualmente chamada de performance ou desempenho de um elemento finito, é a propriedade do mesmo apresentar resultados bastante próximos dos analíticos, mesmo se utilizando malhas pouco refinadas. Tal característica é muito importante, pois, permite que se façam análises simples com um número muito pequeno de elementos, reduzindo o esforço computacional e a quantidade de dados a serem gerados e analisados. Possibilita, também, que se tenha uma boa previsão do comportamento físico de problemas mais complexos através da utilização de malhas relativamente pobres.

Esta previsão, para problemas mais complexos, não pode ser entendida como resultado final, pois redes pouco refinadas não podem simular alguns fenômenos localizados e importantes como, por exemplo, concentrações de tensão. Por este motivo, a segunda característica, denominada convergência de um elemento finito, deve ser garantida na elaboração do mesmo. Convergência é definida como a



propriedade de um método numérico apresentar respostas cada vez mais próximas (precisas) da solução analítica, quanto mais se refinar a malha.

Pode-se dizer que um elemento finito é 'confiável', quando este apresentar simultaneamente boas características de desempenho e convergência, resultando em sua ampla utilização. As exigências para a garantia de convergência de um elemento finito, podem ser verificadas basicamente através do "Patch Test" e de uma versão melhorada do mesmo conhecida como "Teste do Elemento Individual" que serão descritos a seguir.

### 3.2.1 PATCH TEST

Uma maneira numérica de se verificar as propriedades de convergência de um elemento é através do 'Patch Test' apresentado em IRONS & RAZZAQUE(1972) e IRONS & AHMAD(1980). O teste é aplicado em uma rede de elementos (patch) e requer que o elemento permita reproduzir corretamente as condições limites<sup>1</sup> de movimento de corpo rígido e de deformação constante (fig.3.1).

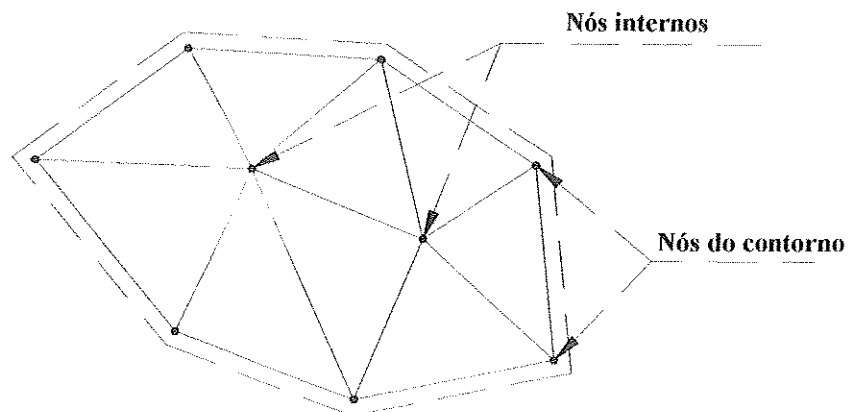


FIGURA 3.1 - Patch Test

<sup>1</sup> Refinando-se progressivamente a rede de maneira que o tamanho do elemento tenda a zero, ou seja, no limite, o estado de corpo rígido e de deformação constante, para qualquer problema analisado, é sempre alcançado FELIPPA & BERGAN(1987), por isso esse estado é conhecido como condição limite.

Segundo BERGAN *et al.*(1978) e BERGAN(1980), uma aplicação prática do 'Patch Test' requer vários elementos em conjunto (fig. 3.1) em diferentes arranjos, exigindo-se sempre que os nós internos satisfaçam o equilíbrio (a resultante de forças nos nós seja zero), quando são aplicados, em todos os nós pertencentes à rede, deslocamentos correspondentes a um campo arbitrário que inclui movimento de corpo rígido e deformação constante. Essa condição pode ser verificada por um caminho alternativo, aplicando-se deslocamentos nos nós do contorno e prescrevendo-se forças nulas nos nós internos, de forma que representem o mesmo estado anteriormente mencionado. Neste caso, para a satisfação do teste, exige-se que os deslocamentos dos nós internos apresentem valores iguais ao correspondente campo de deslocamentos aplicado.

### 3.2.2 TESTE DO ELEMENTO INDIVIDUAL

Devido a laboriosa aplicação do 'Patch Test', BERGAN & HANSSEN(1976) propuseram um procedimento equivalente para analisar as propriedades de convergência do elemento, denominado 'Teste do Elemento Individual'. O teste é expresso por um conjunto de equações algébricas lineares que representam as condições de movimento de corpo rígido e deformação constante impostas. O aspecto importante do Teste do Elemento Individual, além do fato de envolver um único elemento, é que suas equações podem ser aplicadas diretamente nas expressões que conduzem à matriz de rigidez do elemento. Dessa forma, um dos requerimentos de convergência<sup>2</sup> do elemento finito fica automaticamente garantido.

Para expressar as equações do teste é necessário expandir o campo de deslocamento conforme equação (3.1). Como exigência básica da presente formulação, o campo de deslocamentos deve ser expresso por um conjunto completo de modos básicos (corpo rígido e deformação constante) e os modos de alta ordem

---

<sup>2</sup>A satisfação do teste do elemento individual não é a única condição de convergência para um elemento finito. É necessário, também, garantir que a matriz de rigidez não possua autovalores negativos, conforme será apresentado posteriormente no item (3.3).

devem ser linearmente independentes entre si, de tal forma que, seja possível expressar os parâmetros generalizados em função dos parâmetros nodais.

$$\{\mathbf{U}\} = [\boldsymbol{\varphi}]\{\boldsymbol{\alpha}\} = \begin{bmatrix} [\boldsymbol{\varphi}]_{rc} & [\boldsymbol{\varphi}]_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\boldsymbol{\alpha}\}_{rc} \\ \{\boldsymbol{\alpha}\}_a \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

onde  $[\boldsymbol{\varphi}]_{rc}$  representa um conjunto completo de modos de corpo rígido e deformação constante (modos-rc) e  $\{\boldsymbol{\alpha}\}_{rc}$  são os respectivos parâmetros generalizados. Semelhantemente,  $[\boldsymbol{\varphi}]_a$  representa um conjunto de funções de alta ordem (modos-a) e  $\{\boldsymbol{\alpha}\}_a$  são seus respectivos parâmetros generalizados.

O vetor de deformações  $\{\boldsymbol{\varepsilon}\}$  é definido pela diferenciação apropriada dos modos de deslocamento apresentados na equação (3.1), fazendo uso de um operador de deformações específico  $[\mathbf{V}]$ , da seguinte forma:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{V}]\{\mathbf{U}\} = [\mathbf{V}][\boldsymbol{\varphi}]\{\boldsymbol{\alpha}\} = [\overline{\mathbf{B}}]\{\boldsymbol{\alpha}\} \quad (3.2)$$

onde  $[\overline{\mathbf{B}}]$  é a matriz dos modos de deformação correspondente aos parâmetros generalizados  $\{\boldsymbol{\alpha}\}$  definida da seguinte forma:

$$[\overline{\mathbf{B}}] = [[\mathbf{V}][\boldsymbol{\varphi}]_{rc} \quad [\mathbf{V}][\boldsymbol{\varphi}]_a] = [[\overline{\mathbf{B}}]_{rc} \quad [\overline{\mathbf{B}}]_a] \quad (3.3)$$

Pode-se explicitar os deslocamentos nodais  $\{\boldsymbol{\delta}\}$  em função dos parâmetros generalizados  $\{\boldsymbol{\alpha}\}$  aplicando-se a equação (3.1) nos nós do elemento, observando-se que o número de parâmetros generalizados deve ser igual ao número de graus de liberdade nodais.

$$\{\boldsymbol{\delta}\} = [\mathbf{A}]\{\boldsymbol{\alpha}\} = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}]_{rc} & [\mathbf{A}]_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\boldsymbol{\alpha}\}_{rc} \\ \{\boldsymbol{\alpha}\}_a \end{Bmatrix} \quad (3.4a)$$

$$\{\boldsymbol{\delta}\} = [\mathbf{A}]_{rc}\{\boldsymbol{\alpha}\}_{rc} + [\mathbf{A}]_a\{\boldsymbol{\alpha}\}_a = \{\boldsymbol{\delta}\}_{rc} + \{\boldsymbol{\delta}\}_a \quad (3.4b)$$

onde  $\{\boldsymbol{\delta}\}_{rc}$  são os graus de liberdade associados aos modos de movimento de corpo rígido e deformação constante e  $\{\boldsymbol{\delta}\}_a$  os graus de liberdade associados aos modos de

alta ordem. Sabendo-se que os modos são linearmente independentes, é possível inverter a matriz  $[A]$  e assim explicitar  $\{\alpha\}$  em função de  $\{\delta\}$ .

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\delta\} = [H] \{\delta\} = \begin{bmatrix} [H]_{rc} \\ [H]_a \end{bmatrix} \{\delta\} \quad (3.5)$$

É importante observar que as sub-matrizes em (3.4) e (3.5) possuem as seguintes características:

$$[H]_{rc} [A]_{rc} = [I] \quad (3.6a)$$

$$[H]_a [A]_a = [I] \quad (3.6b)$$

$$[H]_{rc} [A]_a = [0] \quad (3.6c)$$

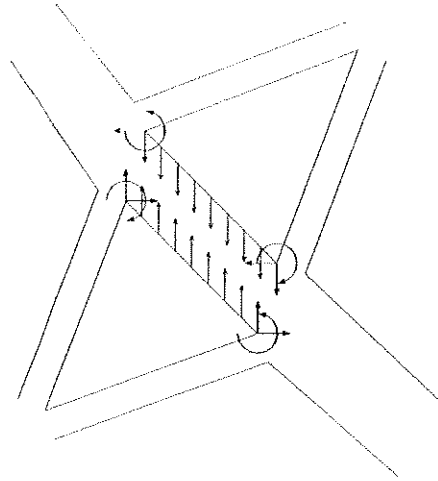
$$[H]_a [A]_{rc} = [0] \quad (3.6d)$$

$$[A][H] = [A]_{rc} [H]_{rc} + [A]_a [H]_a = [I] \quad (3.6e)$$

$$[H]^T [A]^T = [H]_{rc}^T [A]_{rc}^T + [H]_a^T [A]_a^T = [I] \quad (3.6f)$$

onde  $[I]$  representa a matriz identidade e  $[0]$  uma matriz com os coeficientes nulos, não necessariamente quadrada.

Segundo BERGAN & NYGARD(1984), o Teste do Elemento Individual tem por base a condição do elemento, quando interagindo com seus vizinhos, ser capaz de reproduzir identicamente um campo arbitrário de corpo rígido e de deformação constante. Nessa situação, as forças interelementaris transferidas consistentemente para os nós (fig. 3.2), devem se cancelar aos pares. Ao se imaginar uma rede qualquer de elementos, conclui-se que o 'Patch Test' será automaticamente satisfeito.



**FIGURA 3.2 - Contribuição de uma face do elemento para o vetor de forças nodais**

As tensões nas faces do elemento, provocadas por um estado arbitrário de corpo rígido e deformação constante, podem ser transferidas para os nós, gerando o vetor de forças nodais  $\{\mathbf{T}\}_{rc}$ , através de um caminho consistente, fazendo-se uso da matriz  $[\mathbf{L}]$  conhecida como matriz “Lumping”<sup>3</sup>,

$$\{\mathbf{T}\}_{rc} = [\mathbf{L}]\{\boldsymbol{\sigma}\}_{rc} \quad (3.7)$$

onde  $\{\boldsymbol{\sigma}\}_{rc}$  é um vetor cuja as componentes são tensões constantes em todo o elemento. É importante observar que, obviamente, o movimento de corpo rígido não produz nenhum estado de tensão e que as únicas contribuições para  $\{\boldsymbol{\sigma}\}_{rc}$  são proporcionadas pelo estado de deformação constante. Porém, é necessário, para a satisfação do teste, que o estado de movimento de corpo rígido também seja reproduzido identicamente. O vetor de tensões pode ser expresso em função da matriz constitutiva  $[\mathbf{D}]$  e da matriz dos modos de deformação  $[\bar{\mathbf{B}}]_{rc}$  correspondente aos parâmetros generalizados  $\{\boldsymbol{\alpha}\}_{rc}$ , definida em (3.3). Dessa forma, tem-se:

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}_{rc} = [\mathbf{D}][\bar{\mathbf{B}}]_{rc}\{\boldsymbol{\alpha}\}_{rc} \quad (3.8)$$

<sup>3</sup>A matriz Lumping  $[\mathbf{L}]$  é apresentada de forma mais detalhada para o caso específico do elemento de membrana no item (3.4.1).

Assim, substituindo-se (3.8) em (3.7), encontra-se:

$$\{\mathbf{T}\}_{rc} = [\mathbf{L}][\mathbf{D}][\bar{\mathbf{B}}]_{rc} \{\alpha\}_{rc} = [\mathbf{P}]_{rc} \{\alpha\}_{rc} \quad (3.9)$$

onde

$$[\mathbf{P}]_{rc} = [\mathbf{L}][\mathbf{D}][\bar{\mathbf{B}}]_{rc} \quad (3.10)$$

Por outro lado, denominando-se  $\{\mathbf{F}\}_{rc}$  o vetor de forças nodais produzidas pela matriz de rigidez  $[\mathbf{K}]$  (do elemento), durante um estado arbitrário de corpo rígido e deformação constante, e sabendo-se que os deslocamentos referentes a esse estado são os apresentados na expressão (3.4b), tem-se:

$$\{\mathbf{F}\}_{rc} = [\mathbf{K}]\{\delta\}_{rc} = [\mathbf{K}][\mathbf{A}]_{rc} \{\alpha\}_{rc} \quad (3.11)$$

Segundo BERGAN *et al.*(1978) a aplicação do teste estabelece que o vetor de forças nodais  $\{\mathbf{T}\}_{rc}$  na expressão (3.9) seja igual ao vetor de forças  $\{\mathbf{F}\}_{rc}$  da expressão (3.11) para qualquer campo de corpo rígido e deformação constante, ou seja, qualquer  $\{\alpha\}_{rc}$ . Dessa forma, tem-se:

$$[\mathbf{K}][\mathbf{A}]_{rc} = [\mathbf{P}]_{rc} \quad (3.12)$$

Portanto, a equação (3.12) representa o teste do elemento individual com a vantagem de se poder aplicá-la em um único elemento finito, o que não ocorre na aplicação do 'Patch Test'.

### 3.3 FORMULAÇÃO DO MEF VIA ENERGIA POTENCIAL

A formulação padrão via energia potencial é baseada no funcional de energia e quando se empregam funções de forma conformes<sup>4</sup> produz elementos que, segundo

<sup>4</sup> Elementos finitos conformes são aqueles compostos por funções de forma que garantem a continuidade interelemental das variáveis.

IRONS & AHMAD(1980), atendem ao 'Patch Test'. Entretanto, alguns elementos não conformes, desenvolvidos a partir desta mesma formulação, também satisfazem ao Patch Test e apresentam excelente desempenho. Assim, algumas condições que possam garantir a satisfação do Teste do Elemento Individual (e portanto o Patch Test) para elementos não conformes, oriundos da formulação padrão, devem ser analisadas. Deste estudo resultam condições importantes a serem impostas nos modos de deslocamento não conformes, para o desenvolvimento posterior da formulação livre.

A expressão de partida para se deduzir a matriz de rigidez de um elemento finito, baseado na Formulação da Energia Potencial, é a energia de deformação  $U$ , expressa pela seguinte integral no volume  $V$ :

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} dV \quad (3.13)$$

onde  $[D]$  é a matriz constitutiva,  $\{\sigma\}$  o vetor de tensões e  $\{\epsilon\}$  o vetor de deformações.

A energia de deformação pode ser representada em função dos parâmetros generalizados substituindo-se a equação (3.2) em (3.13).

$$U = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T \int_V [\bar{B}]^T [D] [\bar{B}] dV \{\alpha\} = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T [\bar{K}] \{\alpha\} \quad (3.14)$$

onde  $[\bar{K}]$  é a matriz de rigidez generalizada que pode ser particionada em relação aos modos-rc e modos-a da seguinte forma:

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} [\bar{K}]_{rc} & [\bar{K}]_{rca} \\ [\bar{K}]_{rca}^T & [\bar{K}]_a \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

sendo  $[\bar{K}]_{rc}$ ,  $[\bar{K}]_a$  e  $[\bar{K}]_{rca}$ , respectivamente, as sub-matrizes referentes aos modos corpo rígido/deformação constante, alta ordem e acoplamento entre os dois, definidas pelas relações:

$$[\bar{\mathbf{K}}]_{rc} = \int_V [\bar{\mathbf{B}}]_{rc}^T [\mathbf{D}] [\bar{\mathbf{B}}]_{rc} dV = \mathbf{V} [\bar{\mathbf{B}}]_{rc}^T [\mathbf{D}] [\bar{\mathbf{B}}]_{rc} \quad (3.16a)$$

$$[\bar{\mathbf{K}}]_a = \int_V [\bar{\mathbf{B}}]_a^T [\mathbf{D}] [\bar{\mathbf{B}}]_a dV \quad (3.16b)$$

$$[\bar{\mathbf{K}}]_{rea} = \int_V [\bar{\mathbf{B}}]_{rc}^T [\mathbf{D}] [\bar{\mathbf{B}}]_a dV \quad (3.16c)$$

Substituindo-se a equação (3.5) na expressão da energia de deformação (3.14), tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [\mathbf{H}]^T [\bar{\mathbf{K}}] [\mathbf{H}] \{\delta\} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [\mathbf{K}] \{\delta\} \quad (3.17)$$

onde  $[\mathbf{K}]$  representa a matriz de rigidez do elemento. Essa matriz pode ser expressa fazendo-se uso da matriz  $[\mathbf{H}]$  apresentada na equação (3.5), como:

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{H}]_{rc}^T [\bar{\mathbf{K}}]_{rc} [\mathbf{H}]_{rc} + [\mathbf{H}]_{rc}^T [\bar{\mathbf{K}}]_{rea} [\mathbf{H}]_a + [\mathbf{H}]_a^T [\bar{\mathbf{K}}]_{rea} [\mathbf{H}]_{rc} + [\mathbf{H}]_a^T [\bar{\mathbf{K}}]_a [\mathbf{H}]_a \quad (3.18)$$

É importante investigar o comportamento da matriz de rigidez  $[\mathbf{K}]$  em (3.18), quando submetida ao Teste do Elemento Individual eq.(3.12). Visando simplificações futuras, é interessante reescrever a sub-matriz  $[\bar{\mathbf{K}}]_{rc}$ . Assim, sendo  $\pi_{rc}$  a energia potencial referente a um estado de corpo rígido e deformação constante, composta pela energia de deformação  $U_{rc}$  e pela energia potencial das cargas externas  $V_{rc}$ , tal como:

$$\pi_{rc} = U_{rc} + V_{rc} = \frac{1}{2} \{\alpha\}_{rc}^T [\bar{\mathbf{K}}]_{rc} \{\alpha\}_{rc} - \{\delta\}_{rc}^T \{\mathbf{T}\}_{rc} \quad (3.19)$$

Substituindo-se a equação (3.9) e a parcela referente da equação (3.4b) em (3.19), tem-se:

$$\pi_{rc} = \frac{1}{2} \{\alpha\}_{rc}^T [\bar{\mathbf{K}}]_{rc} \{\alpha\}_{rc} - \{\alpha\}_{rc}^T [\mathbf{A}]_{rc}^T [\mathbf{P}]_{rc} \{\alpha\}_{rc} \quad (3.20)$$



Minimizando  $\pi_{rc}$  com relação aos parâmetros generalizados, obtém-se:

$$\left\{ \frac{\partial \pi}{\partial \alpha} \right\}_{rc} = [\bar{\mathbf{K}}]_{rc} \{\alpha\}_{rc} - [\mathbf{A}]_{rc}^T [\mathbf{P}]_{rc} \{\alpha\}_{rc} = \{\mathbf{0}\} \quad (3.21)$$

ou ainda,

$$[\bar{\mathbf{K}}]_{rc} = [\mathbf{A}]_{rc}^T [\mathbf{P}]_{rc} \quad (3.22)$$

Reescrita convenientemente a sub-matriz  $[\bar{\mathbf{K}}]_{rc}$ , inicia-se a aplicação do Teste do Elemento Individual. Multiplicando-se a equação (3.18) por  $[\mathbf{A}]_{rc}$  e fazendo-se uso das equações (3.6a) e (3.6d), resulta:

$$[\mathbf{K}][\mathbf{A}]_{rc} = [\mathbf{H}]_{rc}^T [\bar{\mathbf{K}}]_{rc} + [\mathbf{0}] + [\mathbf{H}]_a^T [\bar{\mathbf{K}}]_{rca}^T + [\mathbf{0}] \quad (3.23)$$

Substituindo-se a equação (3.22) em (3.23), obtém-se:

$$[\mathbf{K}][\mathbf{A}]_{rc} = [\mathbf{H}]_{rc}^T [\mathbf{A}]_{rc}^T [\mathbf{P}]_{rc} + [\mathbf{H}]_a^T [\bar{\mathbf{K}}]_{rca}^T \quad (3.24)$$

Por fim, pode-se escrever a equação (3.24), fazendo-se uso da equação (3.6f), como:

$$[\mathbf{K}][\mathbf{A}]_{rc} = ([\mathbf{I}] - [\mathbf{H}]_a^T [\mathbf{A}]_a^T) [\mathbf{P}]_{rc} + [\mathbf{H}]_a^T [\bar{\mathbf{K}}]_{rca}^T \quad (3.25)$$

Reordenando-se (3.25), tem-se:

$$[\mathbf{K}][\mathbf{A}]_{rc} = [\mathbf{P}]_{rc} + [\mathbf{H}]_a^T ([\bar{\mathbf{K}}]_{rca}^T - [\mathbf{A}]_a^T [\mathbf{P}]_{rc}) \quad (3.26)$$

Nesse ponto, é importante observar que para satisfazer o Teste do Elemento Individual, representado pela equação (3.12), é necessário que a expressão entre parênteses em (3.26) se anule, ou seja:

$$[\bar{\mathbf{K}}]_{\text{rea}}^T = [\mathbf{A}]_a^T [\mathbf{P}]_{\text{rc}} \quad (3.27)$$

Nesta equação estão contidas as condições que devem ser impostas à matriz de rigidez de modo a garantir a satisfação do Teste do Elemento Individual e indica a dependência das propriedades de convergência com a matriz de acoplamento  $[\bar{\mathbf{K}}]_{\text{rea}}$ . Entretanto, a escolha de modos de alta ordem que respeitem essas condições é bastante difícil. Uma solução simples, proposta por BERGAN & NYGARD(1984), seria anular separadamente os dois termos da equação (3.27), ou seja:

$$[\mathbf{A}]_a^T [\mathbf{P}]_{\text{rc}} = [\mathbf{0}] \quad (3.28a)$$

$$[\bar{\mathbf{K}}]_{\text{rea}} = \int_V [\bar{\mathbf{B}}]_{\text{rc}}^T [\mathbf{D}] [\bar{\mathbf{B}}]_a dV = [\mathbf{0}] \quad (3.28b)$$

Segundo BERGAN & NYGARD(1984)<sup>5</sup> a primeira das equações (3.28) pode ser traduzida como condição de *ortogonalidade em força* e requer a escolha de modos de alta ordem tais que  $[\mathbf{A}]_a$  seja ortogonal a  $[\mathbf{P}]_{\text{rc}}$ . Isto nem sempre é fácil e requer usualmente combinações de diferentes termos para se obter um modo-a (modo de alta ordem), dependendo as vezes, da geometria do elemento. A segunda equação expressa nitidamente uma condição de *ortogonalidade em energia* e deve ser interpretada como a inexistência de ligação em energia entre os modos-rc e os modos-a. Em particular, sendo  $[\bar{\mathbf{B}}]_{\text{rc}}$  constante em (3.28b), para se obter a condição de ortogonalidade em energia, basta que:

$$\int_V [\bar{\mathbf{B}}]_a dV = [\mathbf{0}] \quad (3.29)$$

<sup>5</sup> Pré-multiplicando-se a expressão (3.28a) por  $\{\alpha\}_a^T$  pós-multiplicando-a por  $\{\alpha\}_{\text{rc}}$  e utilizando-se as definições contidas nas expressões (3.1) e (3.9) escreve-se  $\{\alpha\}_a^T [\mathbf{A}]_a^T [\mathbf{P}]_{\text{rc}} \{\alpha\}_{\text{rc}} = \{\delta\}_a^T \{\mathbf{T}\}_{\text{rc}} = \mathbf{0}$ , onde fica imediato o conceito de ortogonalidade em força.

Conforme BERGAN(1980), a condição de ortogonalidade em energia pode ser satisfeita adotando-se a origem do sistema de coordenadas no centróide do elemento e orientado-se o sistema de eixos nas direções dos eixos das principais.

Assim, pode-se concluir que, um elemento finito, desenvolvido a partir da Formulação da Energia Potencial, baseado em um conjunto completo de modos-rc mais um conjunto linearmente independente de modos-a, satisfaz o 'Teste do Elemento Individual' e consequentemente o 'Patch Test', quando são escolhidos modos-a de tal forma que verifiquem as condições de ortogonalidade em força e em energia, BERGAN & NYGARD(1984).

### 3.4 FORMULAÇÃO LIVRE

Conforme demonstrado no item anterior, as propriedades de convergência de elementos finitos obtidos à partir da formulação da energia potencial estão ligadas à sub-matriz de acoplamento entre os modos-rc e os modos-a. Com base nisto, BERGAN & NYGARD(1984) propuseram, de forma a garantir a satisfação do Teste do Elemento Individual, uma modificação na matriz de rigidez generalizada eq.(3.15), aplicando-se a equação (3.27), resultando:

$$[\bar{\mathbf{K}}] = \begin{bmatrix} [\bar{\mathbf{K}}]_{rc} & [\mathbf{P}]_{rc}^T [\mathbf{A}]_a \\ [\mathbf{A}]_a^T [\mathbf{P}]_{rc} & [\bar{\mathbf{K}}]_a \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

É importante observar que as sub-matrizes  $[\bar{\mathbf{K}}]_{rc}$  e  $[\bar{\mathbf{K}}]_a$  são as mesmas da Formulação da Energia Potencial, ao contrário da sub-matriz de acoplamento  $[\bar{\mathbf{K}}]_{rca}$ . Pode-se facilmente verificar que a equação (3.30) satisfaz o teste do elemento individual eq.(3.12), da seguinte forma:

$$[\mathbf{K}][\mathbf{A}]_{rc} = \begin{bmatrix} [\mathbf{H}]_{rc}^T & [\mathbf{H}]_a^T \end{bmatrix} [\bar{\mathbf{K}}] \begin{bmatrix} [\mathbf{H}]_{rc} \\ [\mathbf{H}]_a \end{bmatrix} [\mathbf{A}]_{rc} \quad (3.31)$$

Aplicando-se as equações (3.6a) e (3.6d), tem-se:

$$[\mathbf{K}][\mathbf{A}]_{rc} = [\mathbf{H}]_{rc}^T [\overline{\mathbf{K}}]_{rc} + [\mathbf{0}] + [\mathbf{H}]_a^T [\mathbf{A}]_a^T [\mathbf{P}]_{rc} + [\mathbf{0}] \quad (3.32)$$

Fazendo-se uso equação (3.22) e da equação (3.6f), obtém-se:

$$[\mathbf{K}][\mathbf{A}]_{rc} = ([\mathbf{H}]_{rc}^T [\mathbf{A}]_{rc}^T + [\mathbf{H}]_a^T [\mathbf{A}]_a^T) [\mathbf{P}]_{rc} = [\mathbf{P}]_{rc} \quad (3.33)$$

Entretanto, apesar da satisfação do ‘Teste do Elemento Individual’, BERGAN & NYGARD(1984) observaram que alguns elementos obtidos através desta proposta não convergiam e que isto era provocado pelo aparecimento de pelo menos um autovalor negativo na matriz de rigidez. Este autovalor negativo é oriundo da preponderância do termo de acoplamento  $[\mathbf{P}]_{rc}^T [\mathbf{A}]_a$  sobre a sub-matriz  $[\overline{\mathbf{K}}]_a$ . Em uma situação normal de convergência, a influência dos modos de alta ordem deveria diminuir a medida em que a rede fosse sendo refinada, e nos casos referidos isto não ocorria. Assim, para garantir a convergência, é necessário, além da satisfação do ‘Teste do Elemento Individual’ ou ‘Patch Test’, garantir a inexistência de autovalores negativos na matriz de rigidez  $[\mathbf{K}]$ . Pode-se ‘enxergar’ mais facilmente uma solução para este problema explicitando-se os termos referentes aos modos-rc e de acoplamento da matriz  $[\overline{\mathbf{K}}]$  em (3.30). Assim, igualando-se a expressão (3.16a) à (3.22) e utilizando-se a igualdade (3.10), obtém-se:

$$[\overline{\mathbf{B}}]_{rc} = \frac{1}{V} [\mathbf{L}]^T [\mathbf{A}]_{rc} \quad (3.34)$$

Substituindo-se a igualdade (3.10) nas sub-matrizes da expressão (3.30), levando-se em consideração as expressões em (3.22) e (3.34), resultam:

$$[\mathbf{A}]_a^T [\mathbf{P}]_{rc} = [\mathbf{A}]_a^T [\mathbf{L}] [\mathbf{D}] [\overline{\mathbf{B}}]_{rc} = [\mathbf{A}]_a^T [\mathbf{K}]_b [\mathbf{A}]_{rc} \quad (3.35a)$$

$$[\mathbf{P}]_{rc}^T [\mathbf{A}]_a = [\overline{\mathbf{B}}]_{rc}^T [\mathbf{D}] [\mathbf{L}]^T [\mathbf{A}]_a = [\mathbf{A}]_{rc}^T [\mathbf{K}]_b [\mathbf{A}]_a \quad (3.35b)$$

$$[\overline{\mathbf{K}}]_{rc} = V [\overline{\mathbf{B}}]_{rc}^T [\mathbf{D}] [\overline{\mathbf{B}}]_{rc} = [\mathbf{A}]_{rc}^T [\mathbf{K}]_b [\mathbf{A}]_{rc} \quad (3.35c)$$

onde

$$[\mathbf{K}]_b = \frac{1}{V} [\mathbf{L}] [\mathbf{D}] [\mathbf{L}]^T \quad (3.36)$$

As equações (3.35) apresentam grande semelhança nas suas formas finais. Sendo assim, BERGAN & NYGARD(1984) propuseram, para eliminar a predominância do termo de acoplamento sobre a sub-matriz  $[\bar{\mathbf{K}}]_a$ , a adição, nesta última, de um termo que não altera a satisfação do teste do elemento individual e que possui a mesma analogia com as expressões finais de (3.35):

$$[\bar{\mathbf{K}}]_a^* = [\mathbf{A}]_a^T [\mathbf{K}]_b [\mathbf{A}]_a \quad (3.37)$$

Dessa forma, escreve-se a matriz de rigidez em relação aos parâmetros generalizados como:

$$[\bar{\mathbf{K}}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{A}]_{rc}^T [\mathbf{K}]_b [\mathbf{A}]_{rc} & [\mathbf{A}]_{rc}^T [\mathbf{K}]_b [\mathbf{A}]_a \\ [\mathbf{A}]_a^T [\mathbf{K}]_b [\mathbf{A}]_{rc} & [\bar{\mathbf{K}}]_a + [\mathbf{A}]_a^T [\mathbf{K}]_b [\mathbf{A}]_a \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

A matriz de rigidez do elemento, em relação aos graus de liberdade do problema, pode então ser facilmente obtida pela seguinte transformação:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} [\mathbf{H}]_{rc}^T & [\mathbf{H}]_a^T \end{bmatrix} [\bar{\mathbf{K}}] \begin{bmatrix} [\mathbf{H}]_{rc} \\ [\mathbf{H}]_a \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Fazendo-se uso das equações (3.6e) e (3.6f), pode-se expressar a matriz de rigidez como:

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}]_b + [\mathbf{K}]_a \quad (3.40)$$

onde  $[\mathbf{K}]_b$  representa a rigidez básica, idêntica para todos os elementos da mesma classe com os mesmos graus de liberdade, definida em (3.36). O termo  $[\mathbf{K}]_a$  é denominado rigidez de alta ordem sendo expresso da seguinte maneira:

$$[\mathbf{K}]_a = [\mathbf{H}]_a^T [\bar{\mathbf{K}}]_a [\mathbf{H}]_a \quad (3.41)$$

É importante observar que pelo fato de ser composta por formas quadráticas de  $[\mathbf{D}]$  e  $[\bar{\mathbf{K}}]_a$ , as quais são ambas definidas positivas, a matriz de rigidez em (3.40), além de ser simétrica, não possui auto valores negativos, ou seja, é também positiva definida. Pode-se demonstrar também que  $[\mathbf{K}]$  satisfaz o Teste do Elemento Individual, da seguinte forma:

$$[\mathbf{K}][\mathbf{A}]_{rc} = \frac{1}{V} [\mathbf{L}][\mathbf{D}][\mathbf{L}]^T [\mathbf{A}]_{rc} + [\mathbf{H}]_a^T [\bar{\mathbf{K}}]_a [\mathbf{H}]_a [\mathbf{A}]_{rc} \quad (3.42)$$

Fazendo-se uso das equações (3.6d) e (3.34), tem-se:

$$[\mathbf{K}][\mathbf{A}]_{rc} = [\mathbf{L}][\mathbf{D}][\bar{\mathbf{B}}]_{rc} + [\mathbf{0}] \quad (3.43)$$

Por fim, aplicando-se a equação (3.10), obtém-se:

$$[\mathbf{K}][\mathbf{A}]_{rc} = [\mathbf{P}]_{rc} \quad (3.44)$$

A equação (3.40) caracteriza o termo “Formulação Livre”, pois, não é necessário a imposição das condições de ortogonalidade em força e em energia nem a conformidade (compatibilidade interelemental) para a satisfação do Teste do Elemento Individual, exigindo-se apenas que os modos básicos sejam completos e os modos superiores sejam linearmente independentes. Uma outra característica da formulação é que, quando as condições de ortogonalidade em força e em energia são satisfeitas a matriz de rigidez coincide com a desenvolvida pela Formulação da Energia Potencial. Pode-se ainda, multiplicar a rigidez de alta ordem em (3.40), por um escalar positivo  $\beta$ , sem que as propriedades básicas de convergência sejam destruídas, ficando:

$$[\mathbf{K}] = \frac{1}{V} [\mathbf{L}][\mathbf{D}][\mathbf{L}]^T + \beta [\mathbf{H}]_a^T [\bar{\mathbf{K}}]_a [\mathbf{H}]_a \quad (3.45)$$

Resolvido o problema com relação aos deslocamentos, parte-se para a obtenção das deformações. A formulação Livre utiliza as mesmas expressões da formulação da energia potencial na definição das deformações eq.(3.2) e eq.(3.3).

$$\{\varepsilon\} = [\nabla]\{\mathbf{U}\} = [\nabla][\varphi]_{rc}\{\alpha\}_{rc} + [\nabla][\varphi]_{ra}\{\alpha\}_{ra} = \left[ [\bar{\mathbf{B}}]_{rc}[\mathbf{H}]_{rc} + [\bar{\mathbf{B}}]_{ra}[\mathbf{H}]_{ra} \right] \{\delta\} \quad (3.46)$$

Esta definição apresentada em BERGAN & NYGARD(1984) não é consistente<sup>6</sup> com a expressão da matriz de rigidez em (3.40), a não ser para o caso particular onde as funções de deslocamento são ortogonais em força e em energia. Uma forma alternativa para a expressão das deformações é apresentada em BERGAN & FELIPPA(1985), como:

$$\{\varepsilon\} = \left[ \frac{1}{V}[\mathbf{L}]^T + [\bar{\mathbf{B}}]_{ra}[\mathbf{H}]_{ra} \right] \{\delta\} \quad (3.47)$$

O uso desta expressão evita o cálculo de  $[\mathbf{H}]_{rc}$ . No caso de elementos finitos cujas funções de deslocamentos são ortogonais em energia, a equação (3.47) torna-se consistente com a expressão da matriz de rigidez em (3.40). Para tornar a expressão (3.47) consistente com a expressão mais geral da matriz de rigidez apresentada em (3.45), para o caso particular de elementos ortogonais em energia, BERGAN & FELIPPA(1986) aplicam o fator  $\sqrt{\beta}$ , de maneira que as deformações são escritas como:

$$\{\varepsilon\} = \left[ \frac{1}{V}[\mathbf{L}]^T + \sqrt{\beta}[\bar{\mathbf{B}}]_{ra}[\mathbf{H}]_{ra} \right] \{\delta\} \quad (3.48)$$

A partir das deformações, podem-se encontrar as tensões utilizando-se as relações constitutivas.

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}]\{\varepsilon\} \quad (3.49)$$

<sup>6</sup> A matriz de deformação  $[\mathbf{B}]$  será consistente com a expressão da matriz de rigidez definida pela Formulação Livre se quando aplicada na forma tradicional  $[\mathbf{K}] = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV$  reproduza a mesma expressão da Formulação Livre.

### 3.5 FORMULAÇÃO LIVRE NÃO-LINEAR

Nas formulações usuais do método dos elementos finitos para análise de não-linearidades físicas, a matriz de rigidez dos elementos deve ser obtida através de integração numérica da seguinte expressão:

$$[\mathbf{K}] = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \quad (3.50)$$

Isto é necessário, pois a matriz  $[\mathbf{D}]$ , que contém as leis constitutivas do material, varia ao longo do corpo e, conseqüentemente dos elementos. Dessa forma, torna-se necessário derivar uma expressão para a matriz de deformação  $[\mathbf{B}]$  (referente aos parâmetros nodais) que, quando aplicada na equação (3.50), reproduza uma expressão semelhante à matriz de rigidez em (3.45), satisfazendo o ‘Teste do Elemento Individual’ e sendo positiva definida. Dessa forma,  $[\mathbf{B}]$  pode ser expressa por:

$$[\mathbf{B}] = \frac{1}{V} [\mathbf{L}]^T + \sqrt{\beta} [\bar{\mathbf{B}}]_a^* [\mathbf{H}]_a \quad (3.51)$$

onde

$$[\bar{\mathbf{B}}]_a^* = [\bar{\mathbf{B}}]_a - \frac{1}{V} \int_V [\bar{\mathbf{B}}]_a dV \quad (3.52)$$

Pode-se observar que a equação (3.52) é “energeticamente ortogonal”, de maneira que:

$$\int_V [\bar{\mathbf{B}}]_a^* dV = [\mathbf{0}] \quad (3.53)$$

Entretanto, quando os modos de alta ordem satisfazem ortogonalidade em energia, pode-se aplicar a equação (3.29) em (3.52), anulando-se o último termo



desta, recaindo-se na expressão (3.48) que é consistente com a matriz de rigidez em (3.45).

Aplicando-se a matriz de deformação  $[\mathbf{B}]$ , apresentada na equação (3.51), na definição padrão da matriz de rigidez em (3.50), sabendo-se que  $[\mathbf{L}]$  é constante e  $[\mathbf{B}]_a^*$  é energeticamente ortogonal, obtém-se:

$$[\mathbf{K}] = \frac{1}{V} [\mathbf{L}][\mathbf{D}][\mathbf{L}]^T + \beta [\mathbf{H}]_a^T [\bar{\mathbf{K}}]_a^* [\mathbf{H}]_a \quad (3.54)$$

onde

$$[\bar{\mathbf{K}}]_a^* = \int_V [\bar{\mathbf{B}}]_a^{*T} [\mathbf{D}] [\bar{\mathbf{B}}]_a^* \quad (3.55)$$

É importante observar que a expressão da matriz de rigidez em (3.54) é semelhante à expressão em (3.45), com exceção apenas da substituição de  $[\bar{\mathbf{B}}]_a$  por  $[\bar{\mathbf{B}}]_a^*$ . Dessa forma, é fácil verificar que a expressão em (3.54) satisfaz o Teste do Elemento Individual, sendo positiva definida pelo fato de ser composta por formas quadráticas de  $[\mathbf{D}]$  e  $[\bar{\mathbf{K}}]_a^*$ . No caso particular de ortogonalidade em energia, como apresentado anteriormente,  $[\bar{\mathbf{B}}]_a^*$  se degenera em  $[\bar{\mathbf{B}}]_a$  e conseqüentemente a expressão da matriz de rigidez em (3.54) se degenera na matriz de rigidez em (3.45). Por fim, as deformações e as tensões são obtidas utilizando-se a expressão da matriz de deformação em (3.51).

### 3.6 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE MEMBRANA

O elemento finito de membrana de geometria triangular (fig.3.3) possui três nós nos cantos e um total de nove graus de liberdade. Cada nó apresenta deslocamentos  $u$  e  $v$  segundo as direções  $x$  e  $y$  do sistema de referência e a rotação

normal ao plano do elemento  $\theta_z$  (“drilling”). Dessa forma, o vetor de deslocamentos nodais fica expresso por:

$$\{\delta\} = [u_i \quad v_i \quad \theta_{zi} \quad u_j \quad v_j \quad \theta_{zj} \quad u_k \quad v_k \quad \theta_{zk}] \quad (3.56)$$

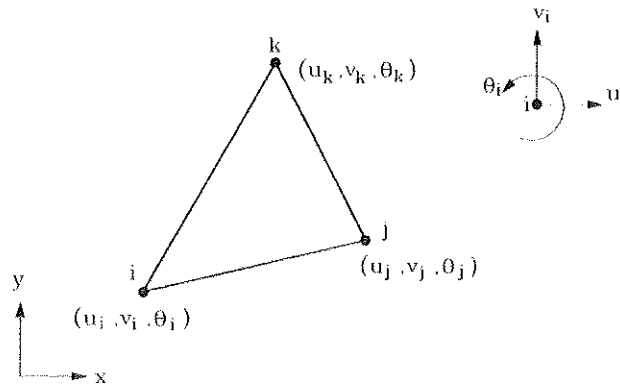


FIGURA 3.3 - Geometria e graus de liberdade do elemento de membrana

A matriz de rigidez do elemento de membrana, utilizada neste trabalho, foi desenvolvida através da Formulação Livre de BERGAN & NYGARD(1984), apresentada no item anterior. Seguindo tal procedimento desenvolveram-se separadamente a rigidez básica e a de alta ordem na construção da matriz de rigidez total. Deve-se ressaltar ainda, que o desenvolvimento do elemento aqui apresentado está baseado principalmente em BERGAN & FELIPPA(1985-1986) e PELETEIRO(1996).

### 3.6.1 RIGIDEZ BÁSICA

A rigidez básica expressa em (3.36), para um caso genérico, pode ser apresentada, para o caso plano, da seguinte forma:

$$[K]_b = \frac{1}{A} [L][D]_m [L]^T \quad (3.57)$$

onde  $[D]_m$  é a matriz que relaciona os esforços de membrana com as deformações. Deve-se notar que, na equação (3.57), o volume  $V$  foi substituído pela área  $A$ . A matriz ‘lumping’  $[L]$  apresentada em (3.7), no caso plano, relaciona os esforços de membrana devido a um estado arbitrário de corpo rígido e deformação constante  $\{N\}_{rc}$  (ao invés das tensões) com o vetor de forças nodais  $\{T\}_{rc}$ , consistente com (3.56). Dessa forma, tem-se:

$$\{T\}_{rc} = [L]\{N\}_{rc} \quad (3.58)$$

Deve-se notar que, para derivar a rigidez básica, basta conhecer a matriz ‘lumping’, que pode ser encontrada aplicando-se a expressão do trabalho virtual, das forças de membrana atuando nos lados do elemento devido a um estado-rc:

$$\delta W_{rc} = \delta W_{rc}^{i-j} + \delta W_{rc}^{j-k} + \delta W_{rc}^{k-i} \quad (3.59)$$

em (3.59)  $\delta W_{rc}^{i-j}$ ,  $\delta W_{rc}^{j-k}$  e  $\delta W_{rc}^{k-i}$  representam os trabalhos virtuais provocados pelos esforços de membrana, de um estado-rc, atuando respectivamente nos lados  $i-j$ ,  $j-k$  e  $k-i$ , definidos genericamente por:

$$\delta W_{rc}^{i-j} = \int_{i-j} \{\delta \bar{U}\}_{i-j}^T \{\bar{N}\}_{rc}^{i-j} d\bar{y} \quad (3.60)$$

sendo  $\{\delta \bar{U}\}_{i-j}$  o vetor das funções de deslocamentos virtuais ao longo do lado  $i-j$ . O vetor  $\{\bar{N}\}_{rc}^{i-j}$  reúne os esforços de membrana distribuídos ao longo do lado  $i-j$  do elemento, referentes a  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  (fig. 3.4a), que se relacionam com  $\{N\}_{rc}$ , no sistema  $x$  e  $y$ , da seguinte forma:

$$\{\bar{N}\}_{rc}^{i-j} = [R]_{i-j} \{N\}_{rc} \quad (3.61a)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{N}_x \\ \bar{N}_{xy} \end{Bmatrix}_{rc}^{i-j} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}_{i-j} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}_{rc} \quad (3.61b)$$

onde  $c$  e  $s$  referem-se respectivamente ao co-seno e seno do ângulo  $\psi$  que a normal ao lado faz com o eixo  $x$ , conforme figura 3.4.

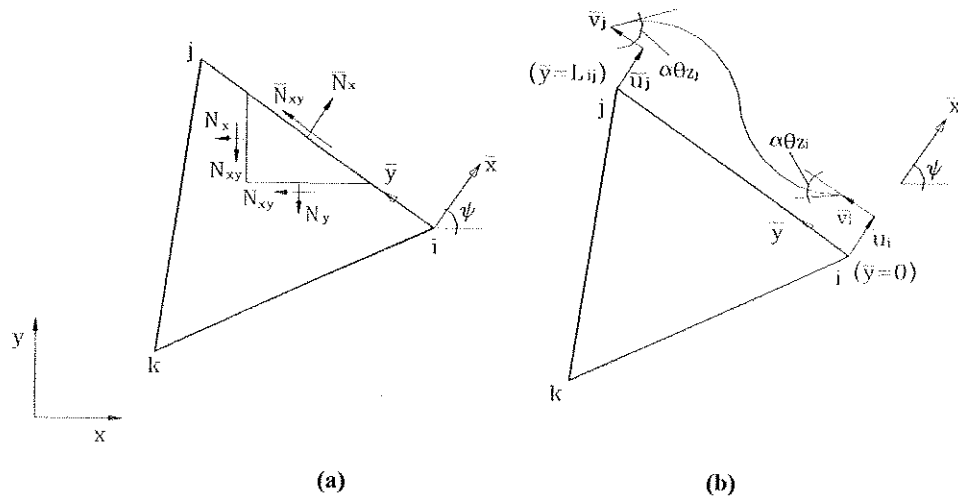


FIGURA 3.4 - (a) Esforços em um lado do elemento. (b) Deslocamentos do lado  $i-j$  do elemento

O vetor das funções de deslocamentos virtuais, ao longo do lado  $i-j$ , pode ser apresentado em função do vetor de deslocamentos nodais do mesmo, nas coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ ,

$$\{\bar{\delta U}\}_{i-j} = [\bar{\varphi}]_{i-j} \{\bar{\delta}_v\}_{i-j} \tag{3.62a}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\delta u} \\ \bar{\delta v} \end{Bmatrix}_{i-j} = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_{ui} & \mathbf{0} & \alpha \bar{\varphi}_{0zi} & \bar{\varphi}_{uj} & \mathbf{0} & \alpha \bar{\varphi}_{0zj} \\ \mathbf{0} & \bar{\varphi}_{vi} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{\varphi}_{vj} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{i-j} \begin{Bmatrix} \bar{\delta u}_i \\ \bar{\delta v}_i \\ \bar{\delta \theta}_{zi} \\ \bar{\delta u}_j \\ \bar{\delta v}_j \\ \bar{\delta \theta}_{zj} \end{Bmatrix}_{i-j} \tag{3.62b}$$

A transformação do vetor  $\{\bar{\delta}_v\}_{i-j}$  definido no sistema  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  para o vetor  $\{\delta_v\}_{i-j}$ , expresso nas coordenadas globais  $x$  e  $y$ , é definida como:

$$\{\bar{\delta}_v\}_{i-j} = [\bar{R}]_{i-j} \{\delta_v\}_{i-j} \tag{3.63}$$

onde

$$[\bar{\mathbf{R}}]_{i-j} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} & \mathbf{s} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{s} & \mathbf{c} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{s} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{s} & \mathbf{c} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}_{i-j} \quad (3.64a)$$

$$\{\delta_{\mathbf{v}}\}_{i-j}^T = [\delta \mathbf{u}_i \quad \delta \mathbf{v}_i \quad \delta \theta_{zi} \quad \delta \mathbf{u}_j \quad \delta \mathbf{v}_j \quad \delta \theta_{zj}]_{i-j} \quad (3.64b)$$

sendo que,  $\mathbf{c}$  e  $\mathbf{s}$  são definidos da mesma forma que em (3.61).

Segundo BERGAN & FELIPPA(1985), para compatibilizar a não existência de uma única relação entre as rotações do lado do elemento e a definição da mecânica do contínuo, é necessário introduzir o escalar  $\alpha$ , conforme apresentado na equação (3.62b). As funções de forma  $\bar{\varphi}_{ui}$ ,  $\bar{\varphi}_{uj}$ ,  $\bar{\varphi}_{\theta zi}$  e  $\bar{\varphi}_{\theta zj}$  definem o deslocamento  $\bar{\mathbf{u}}$  normal ao lado e são ambas funções cúbicas, enquanto que  $\bar{\varphi}_{vi}$  e  $\bar{\varphi}_{vj}$  são funções lineares e definem o deslocamento tangencial  $\bar{\mathbf{v}}$  do lado  $\mathbf{i-j}$  do elemento. As equações que seguem são apresentadas para ilustrar a construção destas funções de forma.

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2 \bar{y} + \bar{\alpha}_3 \bar{y}^2 + \bar{\alpha}_4 \bar{y}^3 = [\mathbf{1} \quad \bar{y} \quad \bar{y}^2 \quad \bar{y}^3] \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\alpha}_3 \\ \bar{\alpha}_4 \end{Bmatrix} \quad (3.65a)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 \bar{y} = [\mathbf{1} \quad \bar{y}] \begin{Bmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.65b)$$

onde  $\bar{\mathbf{u}}$  e  $\bar{\mathbf{v}}$  são os deslocamentos mencionados anteriormente referentes aos eixos  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  (fig. 3.4b). Assim, aplicando-se as funções apresentadas nas equações (3.65) nos nós  $\mathbf{i}$  e  $\mathbf{j}$  do lado do elemento e sabendo-se que  $\theta_z = -\partial \bar{\mathbf{u}} / \partial \bar{y}$ , tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \theta_{zi} \\ \bar{u}_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & L_{ij} & L_{ij}^2 & L_{ij}^3 \\ 0 & -1 & -2L_{ij} & -3L_{ij}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\alpha}_3 \\ \bar{\alpha}_4 \end{Bmatrix} \quad (3.66a)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \end{Bmatrix} \quad (3.66b)$$

Explicitando-se os coeficientes das equações (3.66a) e (3.66b), encontram-se:

$$\begin{Bmatrix} \bar{\alpha}_1 \\ \bar{\alpha}_2 \\ \bar{\alpha}_3 \\ \bar{\alpha}_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L_{ij}^2} & \frac{2}{L_{ij}} & \frac{3}{L_{ij}^2} & \frac{1}{L_{ij}} \\ \frac{2}{L_{ij}^3} & -\frac{1}{L_{ij}^2} & -\frac{2}{L_{ij}^3} & -\frac{1}{L_{ij}^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \theta_{zi} \\ \bar{u}_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (3.67a)$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L_{ij}} & \frac{1}{L_{ij}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} \quad (3.67b)$$

Substituindo-se as equações (3.67a) em (3.65a) e (3.67b) em (3.65b), obtém-se:

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{y} & \bar{y}^2 & \bar{y}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L_{ij}^2} & \frac{2}{L_{ij}} & \frac{3}{L_{ij}^2} & \frac{1}{L_{ij}} \\ \frac{2}{L_{ij}^3} & -\frac{1}{L_{ij}^2} & -\frac{2}{L_{ij}^3} & -\frac{1}{L_{ij}^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \theta_{zi} \\ \bar{u}_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (3.68a)$$

$$\bar{v} = \begin{bmatrix} 1 & \bar{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{L_{ij}} & \frac{1}{L_{ij}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} \quad (3.68b)$$

Manipulando-se as equações em (3.68a) e (3.68b), resultam:

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_{ui} & \bar{\varphi}_{\theta zi} & \bar{\varphi}_{uj} & \bar{\varphi}_{\theta zj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_i \\ \theta_{zi} \\ \bar{\mathbf{u}}_j \\ \theta_{zj} \end{Bmatrix} \quad (3.69a)$$

$$\bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_{vi} & \bar{\varphi}_{vj} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{v}}_i \\ \bar{\mathbf{v}}_j \end{Bmatrix} \quad (3.69b)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{ui} &= 1 - \frac{3}{L_{ij}^2} \bar{y}^2 + \frac{2}{L_{ij}^3} \bar{y}^3, & \bar{\varphi}_{uj} &= \frac{3}{L_{ij}^2} \bar{y}^2 - \frac{2}{L_{ij}^3} \bar{y}^3, \\ \bar{\varphi}_{\theta zi} &= -\bar{y} + \frac{2}{L_{ij}} \bar{y}^2 - \frac{1}{L_{ij}^2} \bar{y}^3, & \bar{\varphi}_{\theta zj} &= \frac{1}{L_{ij}} \bar{y}^2 - \frac{1}{L_{ij}^2} \bar{y}^3, \\ \bar{\varphi}_{vi} &= 1 - \frac{1}{L_{ij}} \bar{y}, & \bar{\varphi}_{vj} &= \frac{1}{L_{ij}} \bar{y}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Dessa forma, pode-se encontrar a expressão do trabalho virtual provocada pelas forças de membrana atuando no lado  $i$ - $j$ , aplicando-se as equações (3.61) e (3.62) em (3.60),

$$\delta W_{rc}^{i-j} = \int_{i-j} \{\bar{\delta}_v\}_{i-j}^T [\bar{\varphi}]_{i-j}^T [\mathbf{R}]_{i-j} \{\mathbf{N}\}_{rc} d\bar{y} \quad (3.71)$$

Transforma-se o vetor de deslocamentos nodais para as coordenadas globais  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$ , fazendo-se uso da transformação (3.63), ou seja:

$$\delta W_{rc}^{i-j} = \int_{i-j} \{\delta_v\}_{i-j}^T [\bar{\mathbf{R}}]_{i-j}^T [\bar{\varphi}]_{i-j}^T [\mathbf{R}]_{i-j} \{\mathbf{N}\}_{rc} d\bar{y} \quad (3.72)$$

A equação (3.72) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\delta W_{rc}^{i-j} = \{\delta_v\}_{i-j}^T \{\mathbf{T}\}_{rc}^{i-j} \quad (3.73)$$

onde  $\{\mathbf{T}\}_{rc}^{i-j}$  é o vetor de forças nodais consistentes, oriundo da contribuição das forças de membrana atuando no lado  $i-j$  devido a um estado-rc, expresso como:

$$\{\mathbf{T}\}_{rc}^{i-j} = [\bar{\mathbf{R}}]_{i-j}^T \int_{i-j} [\bar{\boldsymbol{\varphi}}]_{i-j}^T d\bar{\mathbf{y}} [\mathbf{R}]_{i-j} \{\mathbf{N}\}_{rc} \quad (3.74)$$

Efetuando-se as integrais remanescentes na expressão (3.74), resultam:

$$\begin{aligned} \int_{i-j} \bar{\varphi}_{ui} d\bar{\mathbf{y}} &= \frac{L_{ij}}{2}, & \int_{i-j} \bar{\varphi}_{uj} d\bar{\mathbf{y}} &= \frac{L_{ij}}{2}, \\ \int_{i-j} \bar{\varphi}_{\theta zi} d\bar{\mathbf{y}} &= -\frac{L_{ij}^2}{12}, & \int_{i-j} \bar{\varphi}_{\theta zj} d\bar{\mathbf{y}} &= \frac{L_{ij}}{12}, \\ \int_{i-j} \bar{\varphi}_{vi} d\bar{\mathbf{y}} &= \frac{L_{ij}}{2}, & \int_{i-j} \bar{\varphi}_{vj} d\bar{\mathbf{y}} &= \frac{L_{ij}}{2}. \end{aligned} \quad (3.75)$$

Manipulando-se a equação (3.74) e levando-se em consideração que  $L_{ij}\mathbf{c} = \mathbf{y}_j - \mathbf{y}_i = \mathbf{y}_{ji}$  e  $L_{ij}\mathbf{s} = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_{ij}$ , chega-se a seguinte expressão para  $\{\mathbf{T}\}_{rc}^{i-j}$ .

$$\{\mathbf{T}\}_{rc}^{i-j} = \begin{Bmatrix} \mathbf{T}_{ui} \\ \mathbf{T}_{vi} \\ \mathbf{T}_{\theta zi} \\ \mathbf{T}_{uj} \\ \mathbf{T}_{vj} \\ \mathbf{T}_{\theta zj} \end{Bmatrix}_{rc}^{i-j} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} y_{ji} & 0 & x_{ij} \\ 0 & x_{ij} & y_{ji} \\ -\alpha \frac{y_{ji}^2}{6} & -\alpha \frac{x_{ij}^2}{6} & -\alpha \frac{x_{ij}y_{ji}}{3} \\ y_{ji} & 0 & x_{ij} \\ 0 & x_{ij} & y_{ji} \\ \alpha \frac{y_{ji}^2}{6} & \alpha \frac{x_{ij}^2}{6} & \alpha \frac{x_{ij}y_{ji}}{3} \end{bmatrix}_{i,j} \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix}_{rc} \quad (3.76)$$

Semelhantemente, derivam-se as expressões  $\delta W_{rc}^{j-k}$  e  $\delta W_{rc}^{k-i}$  apresentadas na equação (3.59) e reordenando-as de forma que  $\delta W_{rc}$  seja igual a expressão do trabalho virtual total provocado por  $\{\mathbf{T}\}_{rc}$  na expressão (3.58), tem-se:

$$\delta W_{rc} = \{\delta_v\}^T \{\mathbf{T}\}_{rc} = \{\delta_v\}^T [\mathbf{L}] \{\mathbf{N}\}_{rc} \quad (3.77)$$

onde  $\{\delta_v\}$  é o vetor de deslocamentos virtuais nodais semelhante a  $\{\delta\}$  em (3.56).



Assim, a matriz lumping fica escrita em sua forma completa,

$$[\mathbf{L}] = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 6y_{jk} & 0 & 6x_{kj} \\ 0 & 6x_{kj} & 6y_{jk} \\ \alpha(y_{ik}^2 - y_{ji}^2) & \alpha(x_{ki}^2 - x_{ij}^2) & 2\alpha(x_{ki}y_{ik} - x_{ij}y_{ji}) \\ 6y_{ki} & 0 & 6x_{ik} \\ 0 & 6x_{ik} & 6y_{ki} \\ \alpha(y_{ji}^2 - y_{kj}^2) & \alpha(x_{ij}^2 - x_{jk}^2) & 2\alpha(x_{ij}y_{ji} - x_{jk}y_{kj}) \\ 6y_{ij} & 0 & 6x_{ji} \\ 0 & 6x_{ji} & 6y_{ij} \\ \alpha(y_{kj}^2 - y_{ik}^2) & \alpha(x_{jk}^2 - x_{ki}^2) & 2\alpha(x_{jk}y_{kj} - x_{ki}y_{ik}) \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

Sendo  $\alpha$  um parâmetro arbitrário, que pode ser manipulado para melhorar o desempenho do elemento, entretanto, o valor de  $\alpha$  adotado deve ser igual para todos os elementos da estrutura, de forma a não violar o Teste do Elemento Individual. É importante observar que o valor  $\alpha = 0$  resulta na matriz lumping do elemento CST (Constant Strain Triangle).

### 3.6.2 RIGIDEZ DE ALTA ORDEM

A construção da rigidez de alta ordem requer a consideração dos modos de deslocamento. Para se obtê-la, é necessário conhecer, além dos modos de alta ordem, os modos básicos. A exigência da Formulação Livre com relação aos modos básicos, é que eles sejam completos. Para o caso do elemento triangular de membrana, as funções de deslocamento básicas podem ser expressas da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{rc} \\ \mathbf{v}_{rc} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\eta & \xi & 0 & \eta \\ 0 & 1 & \xi & 0 & \eta & \xi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \quad (3.79)$$

onde  $\xi$  e  $\eta$  são as coordenadas adimensionais com a origem no centróide do elemento (fig.3.5), definidas da seguinte forma:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{A}}(x - x_c) = \lambda(x - x_c) \quad (3.80a)$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{A}}(y - y_c) = \lambda(y - y_c) \quad (3.80b)$$

sendo  $x_c$  e  $y_c$  as coordenadas do centróide e “A” a área do elemento, definida como:

$$A = \frac{1}{2}(x_j y_k - x_k y_j + x_k y_i - x_i y_k + x_i y_j - x_j y_i) \quad (3.81)$$

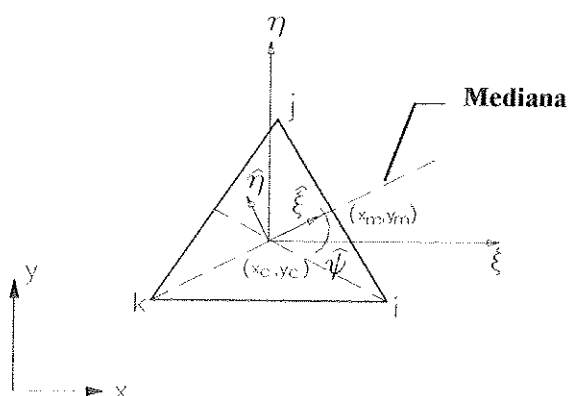


FIGURA 3.5 - Sistemas de coordenadas

Os modos superiores devem ser linearmente independentes e podem ser obtidos de forma que a condição de ortogonalidade em energia seja satisfeita, bastando para isso, conforme apresentado no item anterior, adotar a origem do sistema de coordenadas no centróide e escolher o sistema com a direção dos eixos das deformações principais. Dessa forma, BERGAN & FELIPPA(1985) sugerem os modos de flexão pura, de maneira a se conseguir uma melhor performance do elemento, expressos como:

$$\hat{u} = \xi \hat{\eta}, \quad \hat{v} = -\frac{1}{2} \hat{\xi}^2. \quad (3.82)$$

Observa-se que a deformação cisalhante nas coordenadas  $\hat{x}$  e  $\hat{y}$  (cujas versões adimensionais são  $\hat{\xi}$  e  $\hat{\eta}$ ) é nula, caracterizando as direções principais.

$$\hat{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} = 0 \quad (3.83)$$

Para expressar um modo de alta ordem definitivo é necessário fazer uso de coordenadas invariantes, para os modos de flexão pura na equação (3.82), aplicando-se as seguintes transformações:

$$\begin{Bmatrix} \hat{\xi} \\ \hat{\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c} & \hat{s} \\ -\hat{s} & \hat{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi \\ \eta \end{Bmatrix} \quad (3.84)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c} & -\hat{s} \\ \hat{s} & \hat{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{Bmatrix} \quad (3.85)$$

onde  $\hat{c}$  e  $\hat{s}$  são, respectivamente, o co-seno e o seno do ângulo  $\hat{\psi}$  formado pelos eixos  $\xi$  e  $\hat{\xi}$  (fig.3.5). Assim, substituindo-se as equações (3.84) e (3.85) em (3.82), encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\hat{s}\hat{c}^2 & \hat{c}^3 & \frac{1}{2}\hat{s}^3 + \hat{s}\hat{c}^2 \\ -\hat{s}^2\hat{c} - \frac{1}{2}\hat{c}^3 & -\hat{s}^3 & \frac{1}{2}\hat{s}^2\hat{c} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi^2 \\ \xi\eta \\ \eta^2 \end{Bmatrix} \quad (3.86)$$

Para se obter três modos definitivos de alta ordem, é necessário escolher três valores para o ângulo  $\hat{\psi}$ . BERGAN & FELIPPA(1985) propõem a escolha das direções das três medianas do triângulo como eixo local  $\hat{x}$ , obtendo-se os três ângulos  $\hat{\psi}_1$ ,  $\hat{\psi}_2$  e  $\hat{\psi}_3$ . Assim, as funções de deslocamento de alta ordem podem ser apresentadas como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{v}_a \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{11}\xi^2 + \mathbf{a}_{21}\xi\eta + \mathbf{a}_{31}\eta^2 & \mathbf{a}_{12}\xi^2 + \mathbf{a}_{22}\xi\eta + \mathbf{a}_{32}\eta^2 & \mathbf{a}_{13}\xi^2 + \mathbf{a}_{23}\xi\eta + \mathbf{a}_{33}\eta^2 \\ \mathbf{b}_{11}\xi^2 + \mathbf{b}_{21}\xi\eta + \mathbf{b}_{31}\eta^2 & \mathbf{b}_{12}\xi^2 + \mathbf{b}_{22}\xi\eta + \mathbf{b}_{32}\eta^2 & \mathbf{b}_{13}\xi^2 + \mathbf{b}_{23}\xi\eta + \mathbf{b}_{33}\eta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{Bmatrix} \quad (3.87)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}_{1i} &= -\frac{1}{2}\hat{s}_i\hat{c}_i^2, & \mathbf{a}_{2i} &= \hat{c}_i^3, & \mathbf{a}_{3i} &= \frac{1}{2}\hat{s}_i^3 + \hat{s}_i\hat{c}_i^2, \\
 \mathbf{b}_{1i} &= -\hat{s}_i^2\hat{c}_i - \frac{1}{2}\hat{c}_i^3, & \mathbf{b}_{2i} &= -\hat{s}_i^3, & \mathbf{b}_{3i} &= \frac{1}{2}\hat{s}_i^2\hat{c}_i, \\
 \hat{s}_i &= \text{sen } \hat{\psi}_i, & \hat{c}_i &= \text{cos } \hat{\psi}_i.
 \end{aligned}
 \tag{3.88}$$

Conseqüentemente, o conjunto total dos modos é expresso pela soma dos modos básicos da equação (3.79) e os modos de alta ordem da equação (3.87), ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{rc} \\ \mathbf{v}_{rc} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{v}_a \end{Bmatrix}
 \tag{3.89}$$

Pode-se agora, compor a matriz  $[\mathbf{A}]$ , que relaciona o vetor de deslocamentos nodais  $\{\delta\}$  com o vetor dos parâmetros generalizados  $\{\alpha\}$ , conforme apresentado na equação (3.4a), fazendo-se a substituição apropriada das coordenadas nodais na equação (3.89) e na definição da rotação  $\theta_z$  expressa pela Mecânica do Contínuo  $\theta_z = \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})$ . Desta forma, as sub-matrizes  $[\mathbf{A}]_{rc}$  e  $[\mathbf{A}]_a$ , são apresentadas como:

$$[\mathbf{A}]_{rc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\eta_i & \xi_i & 0 & \eta_i \\ 0 & 1 & \xi_i & 0 & \eta_i & \xi_i \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\eta_j & \xi_j & 0 & \eta_j \\ 0 & 1 & \xi_j & 0 & \eta_j & \xi_j \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\eta_k & \xi_k & 0 & \eta_k \\ 0 & 1 & \xi_k & 0 & \eta_k & \xi_k \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \tag{3.90}$$

$$[\mathbf{A}]_a = \begin{bmatrix} \{\mathbf{A}\}_{a11} & \{\mathbf{A}\}_{a12} & \{\mathbf{A}\}_{a13} \\ \{\mathbf{A}\}_{a21} & \{\mathbf{A}\}_{a22} & \{\mathbf{A}\}_{a23} \\ \{\mathbf{A}\}_{a31} & \{\mathbf{A}\}_{a32} & \{\mathbf{A}\}_{a33} \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

onde

$$\{\mathbf{A}\}_{a_{ij}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{1j}\xi_i^2 + \mathbf{a}_{2j}\xi_i\eta_i + \mathbf{a}_{3j}\eta_i^2 \\ \mathbf{b}_{1j}\xi_i^2 + \mathbf{b}_{2j}\xi_i\eta_i + \mathbf{b}_{3j}\eta_i^2 \\ -\lambda(\hat{\mathbf{c}}_j\xi_i + \hat{\mathbf{s}}_j\eta_i) \end{Bmatrix} \quad (3.92)$$

As sub-matrizes dos modos de deformação correspondentes aos modos generalizados  $[\bar{\mathbf{B}}]_{rc}$  e  $[\bar{\mathbf{B}}]_a$ , definidas na equação (3.3), são encontradas diferenciando-se apropriadamente os modos de deslocamento, equação (3.89), resultando:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = [\mathbf{V}]_m [\boldsymbol{\varphi}] \{\boldsymbol{\alpha}\} = [\bar{\mathbf{B}}]_{rc} \{\boldsymbol{\alpha}\}_{rc} + [\bar{\mathbf{B}}]_a \{\boldsymbol{\alpha}\}_a \quad (3.93)$$

onde

$$[\bar{\mathbf{B}}]_{rc} = [\mathbf{V}]_m [\boldsymbol{\varphi}]_{rc} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \end{bmatrix} \quad (3.94a)$$

$$[\bar{\mathbf{B}}]_a = [\mathbf{V}]_m [\boldsymbol{\varphi}]_a = \lambda \begin{bmatrix} 2\mathbf{a}_{11}\xi + \mathbf{a}_{21}\eta & 2\mathbf{a}_{12}\xi + \mathbf{a}_{22}\eta & 2\mathbf{a}_{13}\xi + \mathbf{a}_{23}\eta \\ \mathbf{b}_{21}\xi + 2\mathbf{b}_{31}\eta & \mathbf{b}_{22}\xi + 2\mathbf{b}_{32}\eta & \mathbf{b}_{23}\xi + 2\mathbf{b}_{33}\eta \\ -4\mathbf{b}_{31}\xi - 4\mathbf{a}_{11}\eta & -4\mathbf{b}_{32}\xi - 4\mathbf{a}_{12}\eta & -4\mathbf{b}_{33}\xi - 4\mathbf{a}_{13}\eta \end{bmatrix} \quad (3.94b)$$

Finalmente, deriva-se a rigidez generalizada de alta ordem, que para o caso bidimensional pode ser apresentada como:

$$[\bar{\mathbf{K}}]_a = \int_{\Lambda} [\bar{\mathbf{B}}]_a^T [\mathbf{D}]_m [\bar{\mathbf{B}}]_a dA \quad (3.95)$$

A equação (3.95) representa a mesma equação (3.16b), só que integrada através da espessura. Escreve-se a  $i$ -ésima coluna da matriz  $[\bar{\mathbf{B}}]_a$ , da seguinte maneira:

$$\{\bar{\mathbf{B}}\}_{ai} = \xi \{\bar{\mathbf{B}}\}_{\xi j} + \eta \{\bar{\mathbf{B}}\}_{\eta j} \quad (3.96)$$

onde  $\{\bar{\mathbf{B}}\}_{\xi j}$  e  $\{\bar{\mathbf{B}}\}_{\eta j}$  são vetores que contém os coeficientes da  $i$ -ésima coluna de  $[\bar{\mathbf{B}}]_a$  associados respectivamente com  $\xi$  e  $\eta$ . Assim, os termos  $(i,j)$ -ésimos da matriz  $[\bar{\mathbf{K}}]_a$ , apresentada em (3.95), são escritos como:

$$\bar{K}_a(i,j) = J_{\xi\xi} \{\bar{\mathbf{B}}\}_{\xi i}^T [\mathbf{D}]_m \{\bar{\mathbf{B}}\}_{\xi j} + J_{\xi\eta} \left( \{\bar{\mathbf{B}}\}_{\xi i}^T [\mathbf{D}]_m \{\bar{\mathbf{B}}\}_{\eta j} + \{\bar{\mathbf{B}}\}_{\eta i}^T [\mathbf{D}]_m \{\bar{\mathbf{B}}\}_{\xi j} \right) + J_{\eta\eta} \{\bar{\mathbf{B}}\}_{\eta i}^T [\mathbf{D}]_m \{\bar{\mathbf{B}}\}_{\eta j} \quad (3.97)$$

onde  $J_{\xi\xi}$ ,  $J_{\xi\eta}$  e  $J_{\eta\eta}$  são os momentos de inércia de área,

$$\begin{aligned} J_{\xi\xi} &= \int_A \xi^2 dA = -\frac{A}{6} (\xi_i \xi_j + \xi_j \xi_k + \xi_k \xi_i) \\ J_{\xi\eta} &= \int_A \xi \eta dA = \frac{A}{12} (\xi_i \eta_i + \xi_j \eta_j + \xi_k \eta_k) \\ J_{\eta\eta} &= \int_A \eta^2 dA = -\frac{A}{6} (\eta_i \eta_j + \eta_j \eta_k + \eta_k \eta_i) \end{aligned} \quad (3.98)$$

A rigidez de alta ordem é finalmente encontrada fazendo-se a inversão apropriada da matriz  $[\mathbf{A}]$ , que é composta pelas sub-matrizes definidas nas equações (3.90) e (3.91), ou seja:

$$[\mathbf{K}]_a = [\mathbf{H}]^T [\bar{\mathbf{K}}]_a [\mathbf{H}] \quad ; \quad [\mathbf{H}] = [\mathbf{A}]^{-1} \quad (3.99)$$

Com relação ao cálculo das deformações e conseqüentemente das tensões, a formulação livre é bastante flexível, no que diz respeito ao modelo elástico linear, apresentando diversas expressões para a matriz de deformação  $[\mathbf{B}]$  necessária para o

cálculo destes, conforme apresentado no final do item 3.3. Entretanto, para as finalidades deste trabalho, torna-se necessário a utilização de uma matriz de deformação que seja consistente com a expressão da matriz de rigidez. Assim, levando-se em consideração que os modos de deslocamento do elemento de membrana são energeticamente ortogonais, deve-se utilizar a expressão da matriz de deformação **[B]** definida na equação (3.48), que é consistente com a expressão da matriz de rigidez em (3.45).

## Capítulo 4

### ELEMENTO DE FLEXÃO DE PLACAS

---

---

#### 4.1 INTRODUÇÃO

O elemento finito de placa adotado neste trabalho para simular os efeitos de flexão na casca é o DKT ('Discrete Kirchhoff Triangle'). Este elemento foi inicialmente publicado em 1969, STRICLIN *et al.*(1969), e reexaminado por mais dez anos para atualmente encontrar-se entre os melhores elementos de sua classe para análise de flexão em placas, como já afirmou BATOZ(1982).

Segundo BATOZ(1982), o elemento DKT garante a continuidade de todas as variáveis essenciais ao longo dos lados do elemento e a convergência para a solução do problema das placas delgadas. Sua formulação é baseada inicialmente na teoria de *Reissner-Mindlin*, onde a deformação por esforço cortante é considerada. Posteriormente, as hipóteses da teoria de *Kirchhoff* são impostas discretamente ao longo dos lados do elemento. Assim, é necessário uma maior descrição das teorias clássicas anteriormente mencionadas, para uma melhor compreensão da formulação do elemento.

#### 4.2 TEORIA DE KIRCHHOFF

A teoria de Kirchhoff, específica para tratar placas delgadas, é caracterizada através das seguintes hipóteses:



- 1) Os deslocamentos horizontais dos pontos do plano médio da placa são desprezíveis.
- 2) As tensões normais ao plano médio da placa são desprezíveis.
- 3) Todos os pontos contidos em uma normal ao plano médio possuem o mesmo deslocamento vertical.
- 4) Os pontos sobre retas normais ao plano médio indeformado, permanecem sobre retas também ortogonais ao plano médio deformado.

A hipótese 2 afeta as relações constitutivas e as hipóteses 1, 3 e 4 permitem definir o campo de deslocamentos.

#### 4.2.1 CAMPO DE DESLOCAMENTOS

Assumindo-se a hipótese de pequenos deslocamentos, considere uma seção de placa paralela ao plano  $xz$  passando pelos pontos  $A$  e  $B$  juntamente com sua configuração deformada apresentada na figura 4.1.

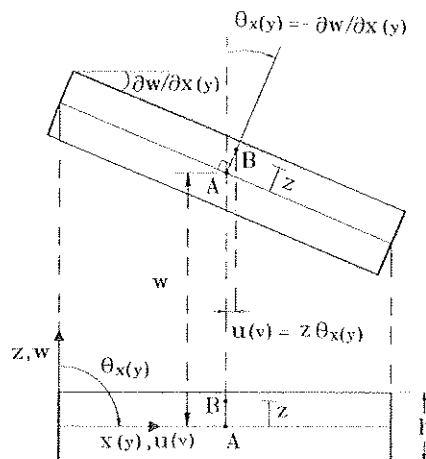


FIGURA 4.1 - Posição inicial e final de uma seção de placa

O segmento  $AB$ , inicialmente na vertical, sofre uma rotação de  $-\partial w/\partial x$ . Assim, o ponto  $B$ , situado a uma distância  $z$  da superfície média sofre um deslocamento na direção  $x$  expresso por:

$$\mathbf{u} = z\theta_x = -z \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.1)$$

Analogamente, pode-se demonstrar que o deslocamento na direção  $y$  é:

$$\mathbf{v} = z\theta_y = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.2)$$

Por conseguinte, o campo de deslocamentos da placa pode ser apresentado na seguinte forma:

$$\{\mathbf{U}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(x, y, z) \\ \mathbf{v}(x, y, z) \\ \mathbf{w}(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial w}{\partial x} \\ -z \frac{\partial w}{\partial y} \\ \mathbf{w}(x, y) \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

#### 4.2.2 CAMPO DE DEFORMAÇÕES, TENSÕES E ESFORÇOS

O campo de deformações é obtido pela substituição das expressões dos deslocamentos na definição das deformações no estado tridimensional.

$$\epsilon_x = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (4.4a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (4.4b)$$

$$\epsilon_z = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = 0 \quad (4.4c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4.4d)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = 0 \quad (4.4e)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = 0 \quad (4.4f)$$

Das relações anteriores conclui-se que a quarta hipótese de Kirchhoff conduz a nulidade das deformações cisalhantes  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$ . As deformações podem ser agrupadas em um vetor, tal como:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

Através das relações constitutivas é possível escrever o campo de tensões em função do campo de deformações. Assim, o vetor de tensões da placa pode ser associado com o vetor de deformações pela matriz  $[\mathbf{D}]$ , denominada matriz constitutiva.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\mathbf{D}]\{\varepsilon\} \quad (4.6)$$

O campo de esforços é definido da seguinte forma:

$$\{\mathbf{M}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{M}_x \\ \mathbf{M}_y \\ \mathbf{M}_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} z \{\sigma\} dz \quad (4.7)$$

onde  $\mathbf{M}_x$  e  $\mathbf{M}_y$  são os momentos fletores provocados respectivamente pelas tensões normais  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  em torno do plano médio e  $\mathbf{M}_{xy}$  o momento volvente produzido pela tensão cisalhante  $\tau_{xy}$ .

### 4.3 TEORIA DE REISSNER-MINDLIN

A hipótese da ortogonalidade da normal ao plano médio da placa, nada mais é que uma aproximação para simplificar o problema, pois na situação deformada a seção transversal se distorce como se mostra na figura 4.2 e o ângulo  $\theta_x$  (ou  $\theta_y$ ) varia na espessura.

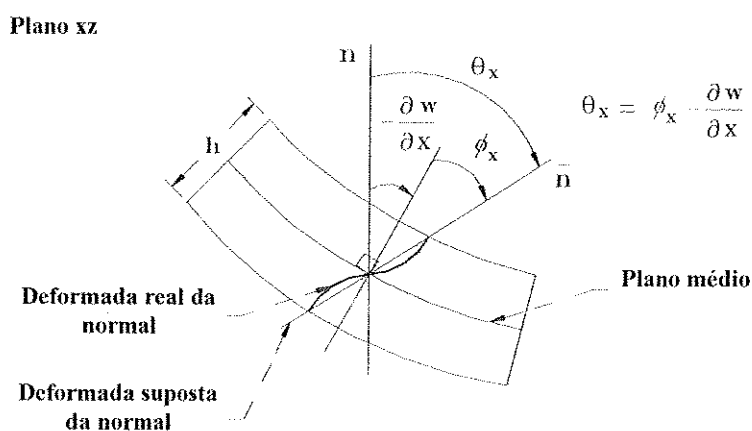


FIGURA. 4.2 - Posição deformada de um elemento de placa

Ressalta-se que, as hipóteses de ortogonalidade são aceitas apenas para placas delgadas. Para placas de moderada e grande espessura a distorção da seção é bastante acentuada, de maneira que, tal hipótese, se aplicada, torna-se uma aproximação grosseira. Nesses casos a teoria de Reissner-Mindlin proporciona uma melhor aproximação para o problema.

As hipóteses básicas da teoria de Reissner-Mindlin são as mesmas hipóteses citadas na teoria de Kirchhoff, item 4.2, diferenciando-se apenas na quarta hipótese, onde a ortogonalidade não é mais imposta. Assim, a quarta hipótese é reescrita da seguinte forma:

- 4) *Os pontos que antes da deformação estavam sobre a normal ao plano médio da placa, permanecem após a deformação sobre uma mesma reta, sem que esta tenha que ser necessariamente ortogonal à deformada do plano médio (fig. 4.2).*

### 4.3.1 CAMPO DE DESLOCAMENTOS

Devido a quarta hipótese da teoria de Reissner, os giros da normal em um ponto se compõem de duas parcelas (fig. 4.2) e não apenas de uma ( $-\partial w/\partial x$  ou  $-\partial w/\partial y$ ) como na teoria de Kirchhoff, então:

$$\theta_x = \phi_x - \frac{\partial w}{\partial x} \quad (4.8)$$

$$\theta_y = \phi_y - \frac{\partial w}{\partial y} \quad (4.9)$$

Considerando-se as hipóteses de Reissner o campo de deslocamentos pode ser expresso da seguinte forma:

$$\{\mathbf{U}\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(x, y, z) \\ \mathbf{v}(x, y, z) \\ \mathbf{w}(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\theta_x(x, y) \\ z\theta_y(x, y) \\ \mathbf{w}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z\left(\phi_x - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ z\left(\phi_y - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \mathbf{w}(x, y) \end{Bmatrix} \quad (4.10)$$

### 4.3.2 CAMPO DE DEFORMAÇÕES, TENSÕES E ESFORÇOS

Substituindo-se as equações do campo de deslocamentos na definição das deformações no estado tridimensional, obtém-se o campo de deformações como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \theta_x + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} = \phi_x \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = \theta_y + \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} = \phi_y \end{aligned} \quad (4.11)$$

Observando-se as equações (4.11), conclui-se que a hipótese da não ortogonalidade da normal afeta o campo de deformações, de tal forma, que as distorções  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  não são mais nulas e correspondem, respectivamente, aos ângulos  $\phi_x$  e  $\phi_y$ . Assim, o campo de deformações pode ser escrito na forma vetorial como:

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \{\epsilon\}_f \\ \dots \\ \{\epsilon\}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \dots \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \dots \\ \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.12)$$

onde  $\{\epsilon\}_f$  e  $\{\epsilon\}_c$  representam os vetores de deformações devido aos efeitos de flexão e cisalhamento, respectivamente. O campo de tensões é representado pelas componentes de tensão normal  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e as componentes de tensão cisalhante  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ . A tensão normal  $\sigma_z$ , é desprezada devido à consideração da segunda hipótese.

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \{\sigma\}_f \\ \dots \\ \{\sigma\}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \dots \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

onde  $\{\sigma\}_f$  e  $\{\sigma\}_c$  são os vetores de tensão referentes aos efeitos de flexão e cisalhamento respectivamente.

As tensões são relacionadas com as deformações através de relações constitutivas, de tal forma que:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \{\sigma\}_r \\ \dots \\ \{\sigma\}_c \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [D] & \cdot & \mathbf{0} \\ \dots & \cdot & \dots \\ \mathbf{0} & \cdot & [D]_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\epsilon\}_r \\ \dots \\ \{\epsilon\}_c \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

sendo  $[D]_c$  a matriz constitutiva de cisalhamento.

O campo de esforços obtido da teoria de Reissner é composto pelos momentos  $M_x$ ,  $M_y$  e  $M_{xy}$  provocados pelas respectivas tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  e pelos esforços cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$  que são as resultantes, na espessura, das tensões tangenciais transversais  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ . Assim, o campo dos esforços é definido como:

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ \dots \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} z\sigma_x \\ z\sigma_y \\ z\tau_{xy} \\ \dots \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} z\{\sigma\}_r \\ \dots \\ \{\sigma\}_c \end{Bmatrix} dz \quad (4.15)$$

#### 4.4 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE PLACA DKT.

O elemento de placa DKT apresenta geometria triangular (fig. 4.3b). Possui 9 graus de liberdade (deslocamento transversal  $w$  e as rotações  $\theta_x$  e  $\theta_y$  nos vértices). A formulação aqui descrita, tem como ponto de partida o elemento triangular com nós nos vértices e no meio dos lados (fig. 4.3a) e está baseada em BATOZ *et al.*(1980), COOK *et al.*(1989), JEYACHANDRABOSE *et al.*(1985) e ÕNATE(1992).

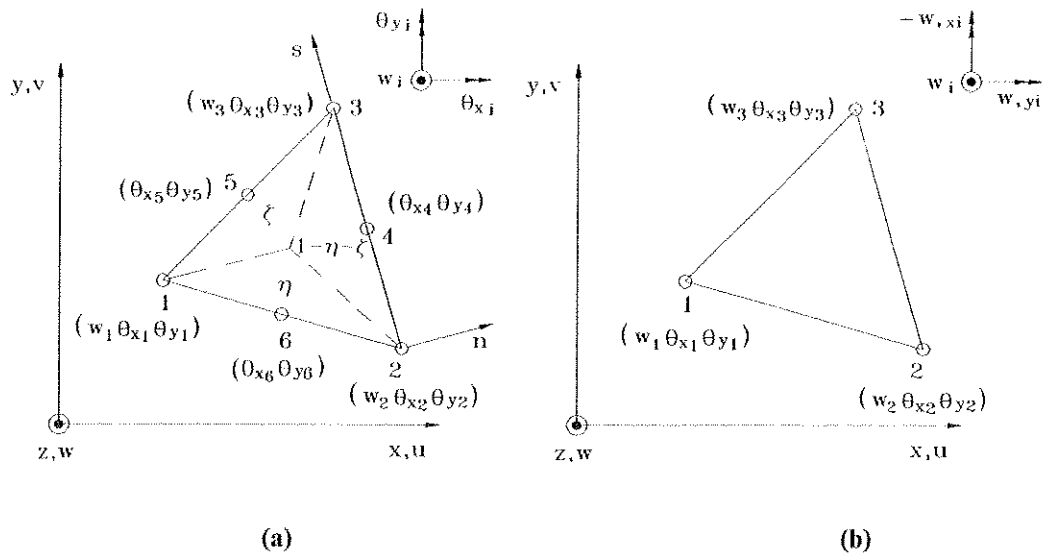


FIGURA 4.3 - Desenvolvimento do DKT. (a) Elemento inicial. (b) Elemento final.

Para a elaboração deste elemento, devem-se escrever funções de forma independentes para as variáveis  $\theta_x$  e  $\theta_y$ . Isto se deve a aplicação inicial das hipóteses de Reissner-Mindlin. Portanto, estas variáveis não dependem apenas das respectivas derivadas parciais  $\partial w / \partial x$  e  $\partial w / \partial y$ , como apresentado na teoria de Kirchhoff, mas também das parcelas oriundas da consideração da deformação por esforço cortante  $\phi_x$  e  $\phi_y$  eq. (4.8) e (4.9). Posteriormente, as hipóteses da teoria de Kirchhoff, juntamente com outras, são aplicadas discretamente ao longo dos lados do elemento, permitindo eliminar os graus de liberdade extras localizados no meio dos lados, resultando no elemento da figura 4.3(b) com nove graus de liberdade. Assim, para o desenvolvimento da matriz de rigidez do elemento DKT, os seguintes passos devem ser adotados:

1) As rotações equivalentes  $\theta_x$  e  $\theta_y$  variam quadraticamente sobre o elemento.

$$\theta_x = \left[ \mathbf{1} \quad \zeta \quad \eta \quad \zeta^2 \quad \zeta\eta \quad \eta^2 \right] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \{\Phi\}^T \{\alpha\} \quad (4.16)$$



$$\theta_y = \begin{bmatrix} 1 & \zeta & \eta & \zeta^2 & \zeta\eta & \eta^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \\ \beta_6 \end{Bmatrix} = \{\Phi\}^T \{\beta\} \quad (4.17)$$

onde  $\zeta$  e  $\eta$  são coordenadas área (fig. 4.3a) e  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  são os parâmetros generalizados (coeficientes desconhecidos).

Aplicando-se as equações (4.16) e (4.17) nos pontos nodais do elemento da figura 4.3(a), é possível expressar os parâmetros generalizados  $\{\alpha\}$  e  $\{\beta\}$  em função dos respectivos deslocamentos nodais  $\{\theta_x\}$  e  $\{\theta_y\}$ .

$$\{\theta_y\} = \begin{Bmatrix} \theta_{y1} \\ \theta_{y2} \\ \theta_{y3} \\ \theta_{y4} \\ \theta_{y5} \\ \theta_{y6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1/2 & 1/2 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = [A]\{\alpha\} \quad (4.18)$$

Explicitando-se o vetor de parâmetros generalizados  $\{\alpha\}$  na equação (4.18), obtém-se:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\theta_y\} \quad (4.19)$$

Analogamente para  $\{\beta\}$ , encontra-se:

$$\{\beta\} = -[A]^{-1} \{\theta_x\} \quad (4.20)$$

onde

$$[\mathbf{A}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & -4 & -4 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Substituindo-se as equações (4.19) e (4.20) nas equações (4.16) e (4.17) respectivamente obtém-se, as funções interpoladoras para  $\theta_x$  e  $\theta_y$  escritas em função dos respectivos parâmetros nodais  $\{\theta_x\}$  e  $\{\theta_y\}$ , como segue:

$$\theta_x = \{\Phi\}^T [\mathbf{A}]^{-1} \{\theta_y\} \quad (4.22)$$

$$\theta_y = -\{\Phi\}^T [\mathbf{A}]^{-1} \{\theta_x\} \quad (4.23)$$

Efetuando-se os produtos matriciais nas equações (4.22) e (4.23), tem-se:

$$\theta_x = \sum_{i=1}^6 \varphi_i \theta_{yi} \quad (4.24)$$

$$\theta_y = -\sum_{i=1}^6 \varphi_i \theta_{xi} \quad (4.25)$$

onde  $\varphi_i$  são as funções de forma expressas por:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 2(1 - \zeta - \eta)(1/2 - \zeta - \eta) \\ \varphi_2 &= \zeta(2\zeta - 1) \\ \varphi_3 &= \eta(2\eta - 1) \\ \varphi_4 &= 4\zeta\eta \\ \varphi_5 &= 4\eta(1 - \zeta - \eta) \\ \varphi_6 &= 4\zeta(1 - \zeta - \eta) \end{aligned} \quad (4.26)$$

2) A variação do deslocamento transversal  $w$  é cúbica ao longo dos lados do elemento.

$$w(s) = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

onde  $c_i$  são coeficientes desconhecidos e  $s$  é a variável independente definida nos lados do elemento (fig. 4.4).

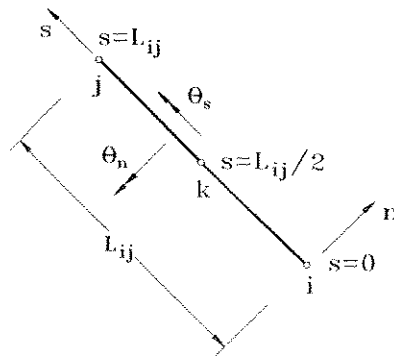


FIGURA 4.4 - Lado ij do elemento.

Aplicando-se a função  $w$  e sua derivada nos nós  $i$  e  $j$  do lado do elemento (fig. 4.4), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \\ w_{,s_i} \\ w_{,s_j} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & L_{ij} & L_{ij}^2 & L_{ij}^3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2L_{ij} & 3L_{ij}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

Explicitando-se os coeficientes  $c_i$  na equação (4.28), tem-se:

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3/L_{ij}^2 & 3/L_{ij}^2 & -2/L_{ij} & -1/L_{ij} \\ 2/L_{ij}^3 & -2/L_{ij}^3 & 1/L_{ij}^2 & 1/L_{ij}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ w_j \\ w_{,s_i} \\ w_{,s_j} \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

Substituindo-se (4.29) em (4.27), tem-se:

$$w = \left(1 - \frac{3s^2}{L_{ij}^2} + \frac{2s^3}{L_{ij}^3}\right)w_i + \left(s - \frac{2s^2}{L_{ij}} + \frac{s^3}{L_{ij}^2}\right)w_{,si} + \left(\frac{3s^2}{L_{ij}^2} - \frac{2s^3}{L_{ij}^3}\right)w_j + \left(\frac{-s^2}{L_{ij}} + \frac{s^3}{L_{ij}^2}\right)w_{,sj} \quad (4.30)$$

Derivando-se a equação (4.30) em relação a  $s$ , obtém-se:

$$w_{,s} = \left(\frac{-6s}{L_{ij}^2} + \frac{6s^2}{L_{ij}^3}\right)w_i + \left(1 - \frac{4s}{L_{ij}} + \frac{3s^2}{L_{ij}^2}\right)w_{,si} + \left(\frac{6s}{L_{ij}^2} - \frac{6s^2}{L_{ij}^3}\right)w_j + \left(\frac{-2s}{L_{ij}} + \frac{3s^2}{L_{ij}^2}\right)w_{,sj} \quad (4.31)$$

Aplicando-se a equação (4.31) no ponto médio  $k$  do lado  $ij$  do elemento, encontra-se a seguinte expressão:

$$w_{,sk} = -\frac{3}{2L_{ij}}w_i - \frac{1}{4}w_{,si} + \frac{3}{2L_{ij}}w_j - \frac{1}{4}w_{,sj} \quad (4.32)$$

3) Impondo-se variação linear da rotação  $\theta_s$  (fig. 4.4) ao longo do lado  $L_{ij}$ , pode-se escrever o valor da mesma no ponto médio dos lados como:

$$\theta_{sk} = \frac{1}{2}(\theta_{si} + \theta_{sj}) \quad (4.33)$$

4) As hipóteses de Kirchhoff são impostas discretamente:

a) Nos nós dos vértices.

$$\begin{cases} \theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} \end{cases}_i = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.34)$$

b) Nos nós intermediários (adotando-se sentido anti-horário ao longo do contorno do elemento).

$$\theta_{nk} + \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_k = 0 \quad ; \quad k = 4, 5, 6 \quad (4.35)$$

Manipulando-se as equações (4.24), (4.25), (4.32), (4.33), (4.34) e (4.35) anteriormente apresentadas, fazendo-se uso de relações geométricas (transformação de coordenadas), podem-se eliminar os graus de liberdade extras no meio dos lados do elemento e obter as rotações  $\theta_x$  e  $\theta_y$  em função apenas dos graus de liberdade dos vértices como:

$$\theta_x = [1 \quad \zeta \quad \eta \quad \zeta^2 \quad \zeta\eta \quad \eta^2][\mathbf{G}]\{\delta\} \quad (4.36)$$

$$\theta_y = [1 \quad \zeta \quad \eta \quad \zeta^2 \quad \zeta\eta \quad \eta^2][\mathbf{H}]\{\delta\} \quad (4.37)$$

onde

$$\{\delta\}^T = [w_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad w_2 \quad \theta_{x2} \quad \theta_{y2} \quad w_3 \quad \theta_{x3} \quad \theta_{y3}] \quad (4.38)$$

$$[\mathbf{G}]^T = \begin{bmatrix} 0 & -6a_6 & -6a_5 & 6a_6 & -6(a_5 - a_6) & -6a_5 \\ 0 & 4b_6 & 4b_5 & -4b_6 & -4(b_5 + b_6) & -4b_5 \\ 1 & (-3 - 4c_6) & (-3 - 4c_5) & (2 + 4c_6) & 4(1 + c_5 + c_6) & (2 + 4c_5) \\ 0 & 6a_6 & 0 & -6a_6 & -6(a_4 + a_6) & 0 \\ 0 & 4b_6 & 0 & -4b_6 & 3(b_4 + b_6) & 0 \\ 0 & (-1 - 4c_6) & 0 & (2 + 4c_6) & 4(-c_4 + c_6) & 0 \\ 0 & 0 & 6a_5 & 0 & 6(a_4 + a_5) & -6a_5 \\ 0 & 0 & 4b_5 & 0 & 3(b_4 - b_5) & -4b_5 \\ 0 & 0 & (-1 - 4c_5) & 0 & 4(-c_4 + c_5) & (2 + 4c_5) \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$[\mathbf{H}]^T = \begin{bmatrix} 0 & 6d_6 & -6d_5 & -6d_6 & 6(d_5 - d_6) & 6d_5 \\ -1 & (3 + 4c_6) & (3 + 4c_5) & (-2 - 4c_6) & -4(1 + c_5 + c_6) & (-2 - 4c_5) \\ 0 & -4b_6 & -4b_5 & 4b_6 & 4(b_5 + b_6) & 4b_5 \\ 0 & -6d_6 & 0 & 6d_6 & 6(d_4 + d_6) & 0 \\ 0 & (1 + 4c_6) & 0 & (-2 - 4c_6) & 4(c_4 - c_6) & 0 \\ 0 & -4b_6 & 0 & 4b_6 & 3(-b_4 + b_6) & 0 \\ 0 & 0 & 6d_5 & 0 & -6(d_4 + d_5) & -6d_5 \\ 0 & 0 & (1 + 4c_5) & 0 & 4(c_4 - c_5) & (-2 - 4c_5) \\ 0 & -4b_6 & -4b_5 & 0 & 3(-b_4 + b_5) & 4b_5 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

sendo

$$a_k = -\frac{x_{ij}}{L_{ij}^2}$$

$$b_k = \frac{3x_{ij}y_{ij}}{4L_{ij}^2}$$

$$c_k = \frac{x_{ij}^2}{4L_{ij}^2} - \frac{y_{ij}^2}{2L_{ij}^2}$$

$$d_k = -\frac{y_{ij}}{L_{ij}^2}$$

$$e_k = \frac{y_{ij}^2}{4L_{ij}^2} - \frac{x_{ij}^2}{2L_{ij}^2}$$

$$L_{ij} = (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)^{1/2}$$

É importante observar que  $k = 4, 5$  e  $6$  para os lados  $ij = 23, 31$  e  $12$  respectivamente. Ressalta-se que as expressões das matrizes  $[G]$  e  $[H]$  foram extraídas de REZENDE(1990).

A partir das equações (4.36) e (4.37), encontra-se o vetor de deformações referente a flexão  $\{\varepsilon\}_r$ , definido na equação (4.12), da seguinte forma:

$$\{\varepsilon\}_r = z\{\mathbf{K}\} = z \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (4.41)$$

onde  $\{\mathbf{K}\}$  é o vetor de curvaturas.

As componentes do vetor de curvatura são explicitadas da seguinte forma:

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial x} = \frac{1}{2A} [1 \quad \zeta \quad \eta] [X] \{\delta\}$$

$$\frac{\partial \theta_y}{\partial y} = \frac{1}{2A} [1 \quad \zeta \quad \eta] [Y] \{\delta\} \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} = \frac{1}{2A} [1 \quad \zeta \quad \eta] [Z] \{\delta\}$$

onde

$$[X] = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_2[G]_2 + \mathbf{b}_3[G]_3 \\ 2\mathbf{b}_2[G]_4 + \mathbf{b}_3[G]_5 \\ \mathbf{b}_2[G]_5 + 2\mathbf{b}_3[G]_6 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

$$[Y] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_2[H]_2 + \mathbf{c}_3[H]_3 \\ 2\mathbf{c}_2[H]_4 + \mathbf{c}_3[H]_5 \\ \mathbf{c}_2[H]_5 + 2\mathbf{c}_3[H]_6 \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_2[G]_2 + \mathbf{c}_3[G]_3 + \mathbf{b}_2[H]_2 + \mathbf{b}_3[H]_3 \\ 2\mathbf{c}_2[G]_4 + \mathbf{c}_3[G]_5 + 2\mathbf{b}_2[H]_4 + \mathbf{b}_3[H]_5 \\ \mathbf{c}_2[G]_5 + 2\mathbf{c}_3[G]_6 + \mathbf{b}_2[H]_5 + 2\mathbf{b}_3[H]_6 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

sendo  $[G]_i$  e  $[H]_i$  a  $i$ -ésima linha das respectivas matrizes  $[G]$  e  $[H]$  explicitadas em (4.39) e (4.40),  $A$  representa a área do triângulo,  $\mathbf{b}_i = (y_j - y_m)$  e  $\mathbf{c}_i = (x_m - x_j)$ , com  $i, j, m$  assumindo ciclicamente os valores 1, 2 e 3.

Assim, é possível escrever o vetor de curvaturas, da seguinte forma:

$$\{K\} = [B] \{\delta\} \quad (4.46)$$

onde  $[B]$  é a matriz de ordem  $3 \times 9$  que relaciona o vetor de curvatura com o vetor de deslocamentos nodais, expressa como:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} [1 & \zeta & \eta][X] \\ [1 & \zeta & \eta][Y] \\ [1 & \zeta & \eta][Z] \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Na formulação deste elemento, a parcela da energia de deformação devida ao esforço cortante é desprezada, sendo considerada apenas a parcela devida a flexão. Assim, a expressão da energia total fica:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}_r^T \{\sigma\}_r dV \quad (4.48)$$

Aplicando-se a relação constitutiva apresentada em (4.14), tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}_r^T [D] \{\epsilon\}_r dV \quad (4.49)$$

Integrando-se (4.49) na espessura, obtém-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{K\} [D]_r \{K\} dA \quad (4.50)$$

onde

$$[D]_r = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 [D] dz \quad (4.51)$$

Substituindo-se (4.46) em (4.50), encontra-se:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{\delta\}^T [B]^T [D]_r [B] \{\delta\} dA \quad (4.52)$$



Modificando-se os limites da integral em (4.52), tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} 2A[\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}]_r [\mathbf{B}] d\zeta d\eta \{\delta\} \quad (4.53)$$

A expressão da energia potencial em (4.53) pode ser reescrita como:

$$U = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [\mathbf{K}] \{\delta\} \quad (4.54)$$

onde  $[\mathbf{K}]$  é a matriz de rigidez do elemento DKT dada por:

$$[\mathbf{K}] = \int_0^1 \int_0^{1-\zeta} 2A[\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}]_r [\mathbf{B}] d\zeta d\eta \quad (4.55)$$

A expressão explícita da matriz de rigidez  $[\mathbf{K}]$  do elemento pode ser determinada efetuando-se as integrações em (4.55).

$$[\mathbf{K}] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} [\mathbf{X}] \\ [\mathbf{Y}] \\ [\mathbf{Z}] \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}[\mathbf{R}] & \mathbf{D}_{12}[\mathbf{R}] & \mathbf{D}_{13}[\mathbf{R}] \\ & \mathbf{D}_{22}[\mathbf{R}] & \mathbf{D}_{23}[\mathbf{R}] \\ \text{sim.} & & \mathbf{D}_{33}[\mathbf{R}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{X}] \\ [\mathbf{Y}] \\ [\mathbf{Z}] \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

onde  $\mathbf{D}_{ij}$  são os termos da matriz  $[\mathbf{D}]_r$  definida em (4.51) e  $[\mathbf{R}]$  é uma matriz de ordem 3x3 dada por:

$$[\mathbf{R}] = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 12 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

#### 4.5 FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES

A aplicação das hipóteses de Kirchhoff de maneira discreta, ou seja, sobre pontos discretos no elemento, sem ter sido estendida para o interior do mesmo, faz com que se perca a possibilidade de se escrever, de maneira explícita, o campo de deslocamentos no interior do elemento. Tal característica, impossibilita a obtenção de um vetor de carregamento nodal equivalente consistente para a aplicação de forças distribuídas quaisquer sobre o elemento.

Segundo BATOZ *et al.*(1980), o carregamento uniformemente distribuído no elemento finito DKT é bem representado por cargas concentradas atuando nos nós do mesmo. Assim, o vetor de forças nodais do elemento, correspondente à carga uniformemente distribuída  $q$ , é apresentado como:

$$\{F\}^T = \frac{qA}{3} [1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0] \quad (4.58)$$

onde  $A$  é a área do elemento.

## **Capítulo 5**

### **MODELO ELASTOPLÁSTICO**

---

---

#### **5.1 INTRODUÇÃO**

Neste capítulo define-se o procedimento não-linear utilizado para modelar o comportamento elastoplástico das estruturas estudadas. Inicialmente, apresenta-se uma introdução à teoria da plasticidade, expondo-se os conceitos necessários para uma melhor compreensão do modelo adotado. Em seguida, definem-se as relações do procedimento implícito de integração das tensões, apresentando-se alguns estudos sobre a equação de consistência, bastante importante na atualização das variáveis internas. A matriz tangente elastoplástica consistente é derivada a partir da linearização do algoritmo implícito. A aplicação desta matriz no processo de solução do sistema não-linear preserva a taxa de convergência quadrática do método de Newton-Raphson. Por fim, apresenta-se, de forma simplificada, o procedimento incremental-iterativo utilizado na modelagem do comportamento elastoplástico.

#### **5.1 INTRODUÇÃO À TEORIA DA PLASTICIDADE**

Devido a complexidade do comportamento real dos materiais e da necessidade de obter uma melhor representação deste, diversos estudos dão bastante ênfase ao problema da modelagem das relações constitutivas (relação tensão-deformação). Entretanto, caracterizar e equacionar o comportamento dos materiais

de forma exata é uma meta extremamente difícil de se alcançar. Dessa forma, torna-se indispensável a adoção de modelos simplificados que proporcionem soluções suficientemente próximas do comportamento real da estrutura estudada.

O comportamento plástico dos sólidos se caracteriza por uma relação não linear entre tensões e deformações, ao contrário do caso da elasticidade linear. O regime de comportamento plástico de um material fica caracterizado pelo aparecimento de deformações irreversíveis, quando se anula a solicitação a que o corpo esteja sujeito. Essas deformações plásticas aparecem quando os níveis de tensão excedem o denominado limite de plastificação.

### 5.2.1 MODELO ELASTOPLÁSTICO PERFEITO (caso uniaxial)

Muitos materiais tem um comportamento próximo do modelo *elastoplástico perfeito*, figura 5.1, e possuem uma tensão limite (ou de escoamento)  $\sigma_y$ . Observa-se que, no material em estado virgem, enquanto  $\sigma < \sigma_y$ , ciclos completos de tensão não revelam o aparecimento de deformações permanentes; portanto o material se comporta em regime elástico. Entretanto, quando o corpo é solicitado por uma tensão  $\sigma = \sigma_y$ , durante um certo intervalo de tempo, ao se efetuar a descarga, no sentido de se completar o ciclo de tensão, observa-se que o caminho percorrido não é o mesmo inicial mas segundo uma reta aproximadamente paralela a reta inicial de carregamento. Ao se completar o ciclo de tensão, verifica-se o aparecimento de uma deformação residual. Portanto, nesse modelo a deformação total, é composta por uma parcela elástica mais uma plástica,

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (5.1)$$

Se a partir da situação atual, uma nova carga for efetuada, ela se dará segundo o caminho da descarga anterior e a deformação plástica somente sofrerá variação quando  $\sigma = \sigma_y$ . Constata-se ainda, que a variação da deformação plástica

deve ser sempre maior ou igual a zero para que caracterize um modelo termodinamicamente consistente, pois o processo é irreversível.

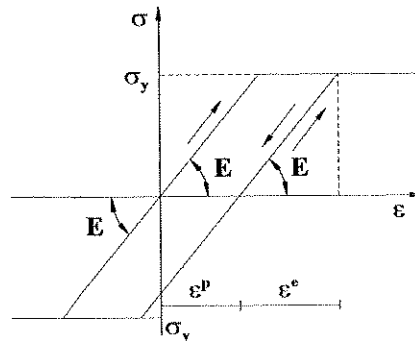


FIGURA 5.1 - Comportamento uniaxial: modelo elastoplástico perfeito.

### 5.2.2 MODELO ELASTOPLÁSTICO COM ENCRUAMENTO (caso uniaxial)

Em um caso mais geral, o material *elastoplástico com encruamento* fig. 5.2, possui a capacidade de admitir acréscimos de tensão com acréscimos de deformação plástica. Além disso, pode-se afirmar que o comportamento plástico implica na variação da região elástica, ou seja, quando a sollicitação  $\sigma$  ultrapassar o valor  $\sigma_y$ , em um processo de descarga fica caracterizado não só a deformação plástica, mas também, um novo intervalo que define a região elástica atual.

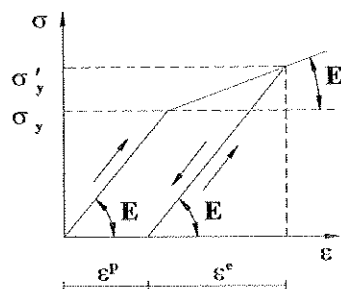


FIGURA 5.2 - Comportamento uniaxial: modelo elastoplástico com encruamento.

Neste modelo, semelhante ao que ocorre no modelo elastoplástico perfeito, o caminho percorrido no descarregamento de um estado de tensão localizado na região

plástica não é o mesmo inicial, mas segundo uma reta aproximadamente paralela à descrita no carregamento elástico. Dessa forma, efetuando-se um novo carregamento, observa-se que ele se dará segundo o caminho da descarga anterior e somente haverá variação da deformação plástica quando for atingido o novo limite de plastificação. A expansão da região elástica pode ser representada por dois modelos básicos de encruamento. O primeiro é caracterizado pela expansão simétrica da região elástica em relação ao centro do intervalo inicial, denominado de *modelo isotrópico*.

Módulo plástico isotrópico

$$H = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p}$$

$$H = \frac{EE_t}{E - E_t}$$

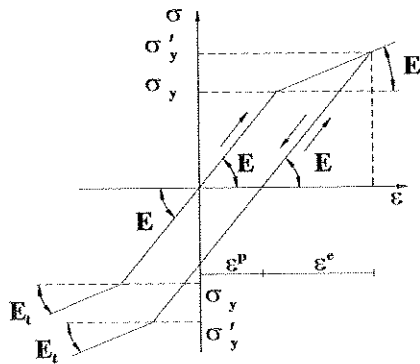


FIGURA 5.3 - Comportamento uniaxial: modelo elastoplástico com encruamento isotrópico.

O segundo é caracterizado pela translação do intervalo elástico inicial com a evolução do processo de plastificação, sem que seja alterado o seu tamanho, correspondendo ao chamado *modelo cinemático*.

Módulo plástico cinemático

$$K = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p}$$

$$K = \frac{EE_t}{E - E_t}$$

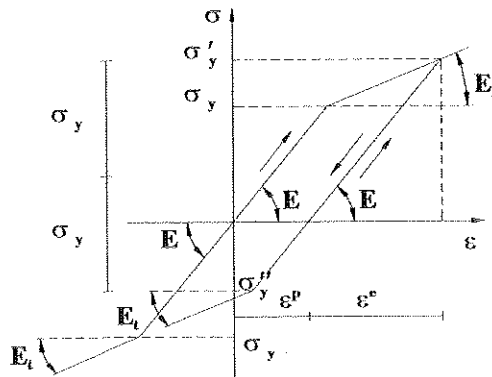


FIGURA 5.4 - Comportamento uniaxial: modelo elastoplástico com encruamento cinemático.

É possível ainda, combinar os modelos isotrópico e cinemático gerando outros modelos denominados de *modelos mistos*. As situações descritas para materiais elastoplástico perfeito e com encruamento, permitem concluir, que fixado um certo nível de tensão, para que se possa determinar a deformação correspondente, é necessário conhecer a história do carregamento.

### 5.2.3 SUPERFÍCIE DE PLASTIFICAÇÃO

Como descrito anteriormente, em estados uniaxiais, os limites de resposta elástica de um material, ficam definidos por um intervalo de valores de tensão. Já em estados multiaxiais a região elástica é limitada no espaço das tensões principais por uma superfície. Esta superfície, conhecida como *superfície de plastificação* fig. 5.5, separa os estados de tensão elásticos daqueles que geram deformações irreversíveis. Assim, a plastificação em um ponto fica caracterizada pela verificação da igualdade na relação matemática (5.2), que define a superfície,

$$F(\{\sigma\}, \kappa, \{\alpha\}) \leq 0 \quad (5.2)$$

onde  $\{\sigma\}$  representa o estado de tensão,  $\kappa$  e  $\{\alpha\}$  são variáveis internas responsáveis, respectivamente, pelos modos de encruamento isotrópico e cinemático.

Assume-se que as tensões limite só serão alcançadas se a relação matemática que representa a superfície for satisfeita ( $F = 0$ ). Partindo-se desta hipótese, um descarregamento (retorno à região elástica) fica evidenciado por variações no estado de tensão que conduzam a valores negativos de  $F$ . A situação limite de carregamento neutro é caracterizada por acréscimos no estado de tensão que conduzam a verificação da equação (5.2) com a igualdade. Alterações no estado de tensão que determinem valores positivos de  $F$  são inacessíveis, pois indicam o aparecimento de deformações irreversíveis, caracterizando uma situação de carregamento plástico. Nesta última situação, de acordo com o modelo de

encruamento do material, a superfície de plastificação tende a evoluir, de forma que o novo estado de tensão ainda resulte sobre a mesma.

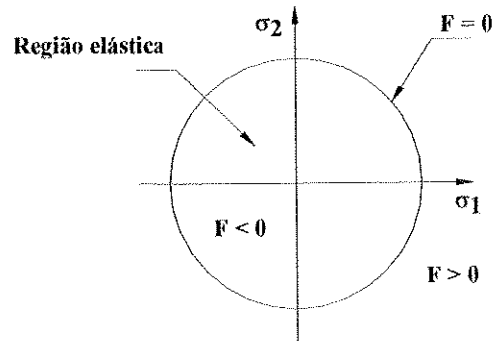


FIGURA 5.5 - Superfície de plastificação.

De forma análoga ao caso uniaxial, se com o processo de plastificação houver uma expansão uniforme da superfície de plastificação em torno da origem, com a superfície subsequente mantendo a forma e a orientação da inicial, o modelo é dito isotrópico fig. 5.6(a). Quando as superfícies subsequentes mantêm as dimensões e formas iniciais, mas transladam como corpo rígido no espaço das tensões, o modelo é dito cinemático fig. 5.6(b). Entretanto, se o modelo adotado for elastoplástico perfeito a superfície não evolui e ficará sempre fixa.

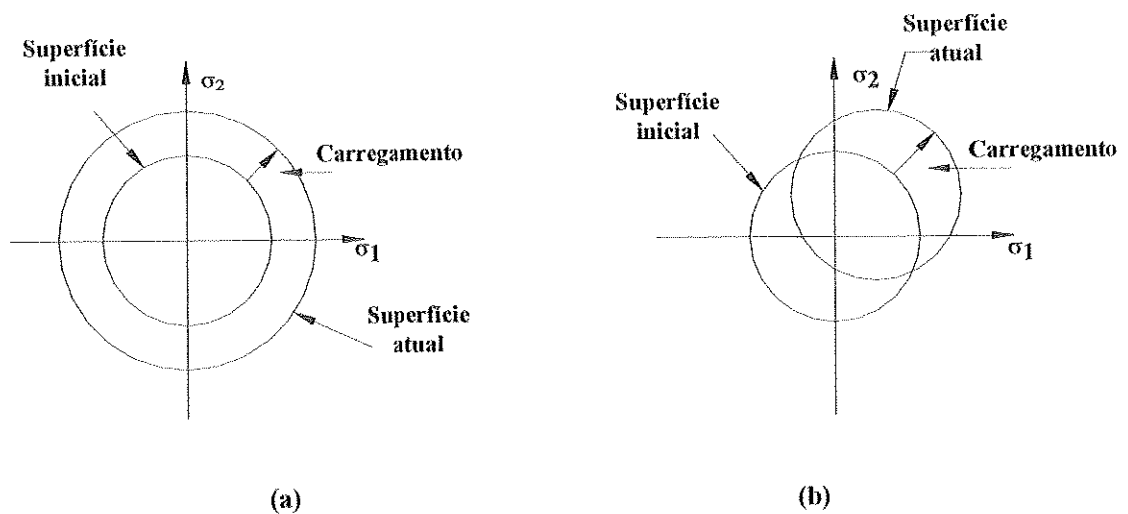


FIGURA 5.6 - Superfície de plastificação.(a)Modelo isotrópico. (b) Modelo cinemático



### 5.2.3.1 SUPERFÍCIE DE VON MISES

Este critério, inicialmente proposto para metais, foi formulado por von Mises em 1913 e admite que a plastificação inicia quando a tensão cisalhante octaédrica em um ponto atinge um valor crítico  $\bar{\kappa}$ . O valor inicial de  $\bar{\kappa}$  pode ser estabelecido por um ensaio de tração simples ou cisalhamento puro. O critério de von Mises pode ser apresentado pelas seguintes expressões matemáticas:

$$\tau_{\text{oct}} = \bar{\kappa} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{2}{3}} J_2 = \bar{\kappa} \quad (5.3)$$

onde  $\tau_{\text{oct}}$  é a tensão octaédrica e  $J_2$  o segundo invariante da parte deviatória do tensor de tensões. O critério é representado, no sistema triaxial das tensões principais, como um cilindro, cuja geratriz é paralela ao eixo hidrostático fig. 5.7(a). Uma análise geométrica permite concluir que acréscimos de tensões hidrostáticas não provocam plastificação.

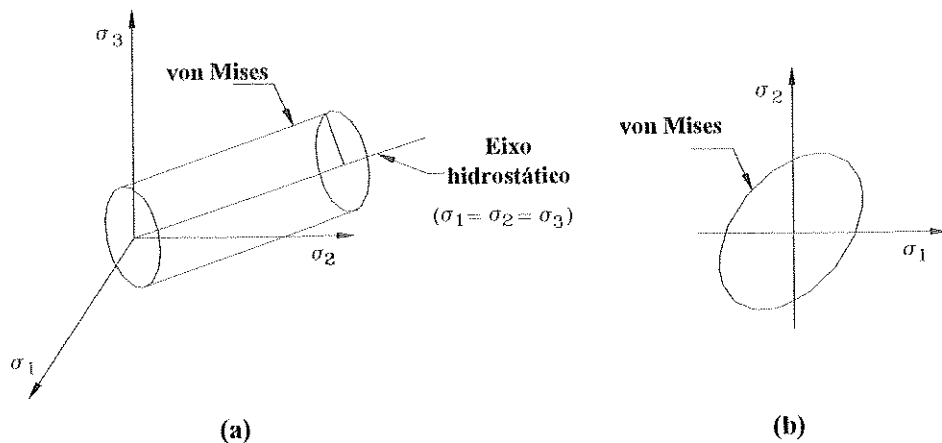


FIGURA 5.7 - Superfície de von Mises.

(a) Estado triaxial das tensões principais. (b) Estado biaxial das tensões principais.

Uma vantagem deste critério é a ausência de irregularidades na superfície. A continuidade da superfície facilita a definição das derivadas, necessárias para a dedução das relações constitutivas elastoplásticas incrementais.

### 5.2.4 RELAÇÃO CONSTITUTIVA ELASTOPLÁSTICA

O comportamento elastoplástico tem sua modelagem fundamentada nas seguintes definições:

- \* *Decomposição aditiva das deformações infinitesimais totais;*
- \* *Critério de plastificação;*
- \* *Lei de evolução das deformações plásticas;*
- \* *Lei de evolução do encruamento.*

#### *Decomposição aditiva das deformações infinitesimais totais*

Durante um acréscimo de tensão  $\{d\sigma\}$  o acréscimo de deformação total, para um material elastoplástico, pode ser expresso em termos dos incrementos infinitesimais de deformação elástica e plástica, como:

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\} \quad (5.4)$$

#### *Critério de plastificação*

O Critério de plastificação, para um caso mais geral, como apresentado no item 5.2.3, é uma função do estado de tensão e do encruamento, de tal modo que:

$$F(\{\sigma\}, \kappa, \{\alpha\}) \leq 0 \quad (5.5)$$

#### *Lei de evolução das deformações plásticas (Flow Rule)*

Segundo ZIENKIEWICZ & TAYLOR(1991), von Mises foi o primeiro a sugerir que a taxa de deformação plástica está relacionada com a superfície de plastificação. Muitos pesquisadores expõem diversos argumentos para demonstrar a

validade da relação proposta, entre eles estão DRUCKER(1951) e NAYAK & ZIENKIEWICZ(1972) . Hoje em dia, a hipótese mais aceita é a seguinte:

$$\{d\epsilon^p\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\} \quad (5.6)$$

onde  $d\lambda$  é uma constante de proporcionalidade denominada de *multiplicador plástico*, que deve ser determinada para se solucionar o problema não-linear. Esta relação é definida como *princípio da normalidade*, pois  $\{\partial F/\partial \sigma\}$  é um vetor de direção normal à superfície de escoamento no ponto referente ao estado de tensão considerado, no espaço das tensões principais, fig. (5.8).

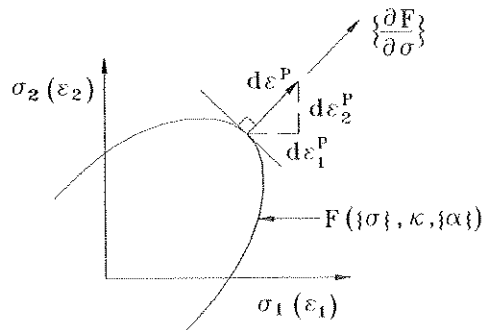


FIGURA 5.8 - Superfície de plastificação: princípio da normalidade.

Pode-se tornar menos rígida a restrição imposta à relação (5.6) anteriormente apresentada, tomando-se um *potencial plástico*  $Q$  com unidade de tensão, escrito em função do estado de tensão  $\{\sigma\}$  e das variáveis internas de encruamento  $\kappa, \{\alpha\}$ ,

$$Q = Q(\{\sigma\}, \kappa, \{\alpha\}) \quad (5.7)$$

que expresse o incremento infinitesimal de deformação plástica de maneira similar a equação (5.6), assim:

$$\{d\epsilon^p\} = d\lambda \left\{ \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right\} \quad (5.8)$$

Denomina-se *plasticidade associada* o caso particular onde  $\mathbf{Q} = \mathbf{F}$ . Se  $\mathbf{Q} \neq \mathbf{F}$  a plasticidade é dita *não associada*. Na dedução da matriz constitutiva elastoplástica adota-se a expressão mais geral ( $\mathbf{Q} \neq \mathbf{F}$ ). Desta forma, os incrementos infinitesimais de tensão  $\{\mathbf{d}\sigma\}$  e das deformações elásticas  $\{\mathbf{d}\varepsilon^e\}$  e plásticas  $\{\mathbf{d}\varepsilon^p\}$ , podem ser explicitados, utilizando-se uma notação vetorial, da seguinte maneira:

$$\{\mathbf{d}\sigma\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}\sigma_x \\ \mathbf{d}\sigma_y \\ \mathbf{d}\sigma_z \\ \mathbf{d}\tau_{xy} \\ \mathbf{d}\tau_{yz} \\ \mathbf{d}\tau_{xz} \end{Bmatrix}; \quad \{\mathbf{d}\varepsilon^e\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}\varepsilon_x^e \\ \mathbf{d}\varepsilon_y^e \\ \mathbf{d}\varepsilon_z^e \\ \mathbf{d}\gamma_{xy}^e \\ \mathbf{d}\gamma_{yz}^e \\ \mathbf{d}\gamma_{xz}^e \end{Bmatrix}; \quad \{\mathbf{d}\varepsilon^p\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{d}\varepsilon_x^p \\ \mathbf{d}\varepsilon_y^p \\ \mathbf{d}\varepsilon_z^p \\ \mathbf{d}\gamma_{xy}^p \\ \mathbf{d}\gamma_{yz}^p \\ \mathbf{d}\gamma_{xz}^p \end{Bmatrix} = \mathbf{d}\lambda \begin{Bmatrix} \partial\mathbf{Q}/\partial\sigma_x \\ \partial\mathbf{Q}/\partial\sigma_y \\ \partial\mathbf{Q}/\partial\sigma_z \\ \partial\mathbf{Q}/\partial\tau_{xy} \\ \partial\mathbf{Q}/\partial\tau_{yz} \\ \partial\mathbf{Q}/\partial\tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Os incrementos infinitesimais das deformações elásticas estão relacionados com os diferenciais de tensão por meio de uma matriz simétrica  $[\mathbf{D}]$  definida pela lei de Hooke a qual é independente do tempo e da história do carregamento, logo:

$$\{\mathbf{d}\varepsilon^e\} = [\mathbf{D}]^{-1}\{\mathbf{d}\sigma\} \quad (5.10)$$

Substituindo-se as relações (5.8) e (5.10) na expressão da deformação total (5.4), tem-se:

$$\{\mathbf{d}\varepsilon\} = [\mathbf{D}]^{-1}\{\mathbf{d}\sigma\} + \mathbf{d}\lambda \left\{ \frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\sigma} \right\} \quad (5.11)$$

Supondo-se que o estado de tensão atual verifique a função de plastificação, num processo de carga, o ponto representativo do novo estado de tensão deve estar sobre a superfície, logo  $\mathbf{F} = 0$  e  $\mathbf{d}\mathbf{F} = 0$ , que é a chamada *condição de consistência*. Assim, diferenciando-se a equação (5.5), resulta:

$$\mathbf{d}\mathbf{F} = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\sigma_x} \mathbf{d}\sigma_x + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\sigma_y} \mathbf{d}\sigma_y + \dots + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\tau_{xz}} \mathbf{d}\tau_{xz} + \left\{ \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\alpha} \right\}^T \{\mathbf{d}\alpha\} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\kappa} \mathbf{d}\kappa = 0 \quad (5.12)$$



deformação. Assim, levando-se adiante a determinação da constante  $d\lambda$ , multiplica-se a primeira das equações (5.15) por  $\{\partial\mathbf{F}/\partial\boldsymbol{\sigma}\}^T [\mathbf{D}]$ , obtendo-se:

$$\left\{\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^T \{\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}\} = \left\{\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^T [\mathbf{D}]\{\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\} - \left\{\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^T [\mathbf{D}]\left\{\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}d\lambda \quad (5.17)$$

Substituindo-se a igualdade (5.17) na segunda equação de (5.15), tem-se:

$$\left\{\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^T [\mathbf{D}]\{\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\} - \left[\left\{\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^T [\mathbf{D}]\left\{\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\} + \mathbf{A}\right]d\lambda = 0 \quad (5.18)$$

Explicitando-se  $d\lambda$ , encontra-se:

$$d\lambda = \frac{\left\{\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^T [\mathbf{D}]\{\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\}}{\left\{\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^T [\mathbf{D}]\left\{\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\} + \mathbf{A}} \quad (5.19)$$

De posse do valor de  $d\lambda$ , busca-se, nos passos seguintes, a relação constitutiva elastoplástica. Substituindo-se o valor explícito de  $d\lambda$  eq.(5.19) na primeira equação de (5.15), escreve-se:

$$\{\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{D}]^{-1}\{\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}\} + \left\{\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\} \frac{\left\{\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^T [\mathbf{D}]\{\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\}}{\left\{\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^T [\mathbf{D}]\left\{\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\} + \mathbf{A}} \quad (5.20)$$

Explicitando-se o valor de  $\{\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}\}$ , obtém-se:

$$\{\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]\{\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\} - \frac{[\mathbf{D}]\left\{\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}\left\{\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^T [\mathbf{D}]\{\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\}}{\left\{\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\}^T [\mathbf{D}]\left\{\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}\right\} + \mathbf{A}} \quad (5.21)$$

Colocando-se em evidência o valor de  $\{\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\}$ , resulta a relação constitutiva elastoplástica procurada:

$$\{\mathbf{d}\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}]_{ep} \{\mathbf{d}\boldsymbol{\varepsilon}\} \quad (5.22)$$

sendo  $[\mathbf{D}]_{ep}$  a matriz tangente elastoplástica “clássica” de um material com encruamento misto, expressa por:

$$[\mathbf{D}]_{ep} = [\mathbf{D}] - \frac{[\mathbf{D}] \left\{ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T [\mathbf{D}]}{\left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T [\mathbf{D}] \left\{ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} + A} \quad (5.23)$$

Para o caso particular da plasticidade associada ( $\mathbf{Q} = \mathbf{F}$ ), a matriz constitutiva elastoplástica  $[\mathbf{D}]_{ep}$  passa a ser:

$$[\mathbf{D}]_{ep} = [\mathbf{D}] - \frac{[\mathbf{D}] \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T [\mathbf{D}]}{\left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\}^T [\mathbf{D}] \left\{ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} + A} \quad (5.24)$$

A matriz tangente elastoplástica  $[\mathbf{D}]_{ep}$ , escrita em função da matriz constitutiva para elasticidade linear  $[\mathbf{D}]$ , relaciona incrementos infinitesimais de tensão com infinitésimos de deformação, daí a necessidade de uma análise por incrementos sucessivos.

Nos casos de plasticidade não associada, a matriz  $[\mathbf{D}]_{ep}$  pode não ser simétrica. Sendo assim, dificuldades serão encontradas quando for utilizado um dos métodos de Newton-Raphson, caracterizado pela atualização da matriz de rigidez. Neste caso, não é possível fazer uso de técnicas de armazenamento em banda, muito importantes na redução do custo computacional, principalmente quando se tratam de problemas não-lineares. Se a plasticidade é associada, pode-se garantir que a matriz

$[\mathbf{D}]_{ep}$  é simétrica, como se constata na expressão (5.24). Deve-se notar ainda, que para um material considerado elastoplástico perfeito o parâmetro “A” anula-se.

### *Lei de evolução do encruamento ('Hardening Rule')*

#### *A) Encruamento Isotrópico*

Este tipo de encruamento é caracterizado pelo aumento da superfície de plastificação sem qualquer translação ou rotação no espaço das tensões, sendo relacionado com o parâmetro  $\kappa$ . Assim, para um corpo plástico um infinitésimo  $d\kappa$  pode ser representado pelas seguintes hipóteses:

##### *A.1) Encruamento por trabalho ('Work-hardening')*

O incremento infinitesimal  $d\kappa$  é igual a quantidade de trabalho plástico que se dissipa durante a deformação plástica, assim:

$$d\kappa = dW^p = \{\sigma\}^T \{d\epsilon^p\} = \sigma_x d\epsilon_x^p + \sigma_y d\epsilon_y^p + \dots + \tau_{xz} d\gamma_{xz}^p \quad (5.25)$$

de maneira que:

$$\kappa = W^p = \int \{\sigma\}^T \{d\epsilon^p\} \quad (5.26)$$

##### *A.2) Encruamento por deformação ('Strain-hardening')*

O diferencial  $d\kappa$  é relacionado com a norma do tensor dos incrementos infinitesimais de deformação plástica, logo tem-se:

$$d\kappa = d\bar{\epsilon}^p = \bar{K} \|\{d\epsilon^p\}\| = \bar{K} (d\epsilon_x^{p^2} + d\epsilon_y^{p^2} + d\epsilon_z^{p^2} + \frac{1}{2} (d\gamma_{xy}^{p^2} + d\gamma_{xz}^{p^2} + d\gamma_{yz}^{p^2}))^{1/2} \quad (5.27)$$



dessa forma obtém-se:

$$\kappa = \bar{\varepsilon}^P = \int \bar{K} \|d\boldsymbol{\varepsilon}^P\| \quad (5.28)$$

onde  $[d\boldsymbol{\varepsilon}^P]$  é o tensor dos infinitésimos de deformações plásticas,  $\bar{\varepsilon}^P$  é conhecida como deformação plástica equivalente ou efetiva e  $\bar{K}$  é uma constante cujo valor deve ser escolhido de tal forma que a partir do modelo generalizado possa-se recuperar o caso unidimensional. Em particular, para um material que obedeça a condição de incompressibilidade, onde estados hidrostáticos não influenciam no processo de plastificação, verificando a seguinte expressão:

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_x^P + d\boldsymbol{\varepsilon}_y^P + d\boldsymbol{\varepsilon}_z^P = 0 \quad (5.29)$$

pode ser demonstrado que  $\bar{K} = \sqrt{2/3}$ . Deve-se notar que, para esses materiais incompressíveis, a equação (5.27) pode também ser escrita em função do tensor dos infinitésimos de deformações plásticas desviadoras. Assim:

$$d\kappa = d\bar{\varepsilon}^P = \sqrt{\frac{2}{3}} \|d\boldsymbol{\varepsilon}^P\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \|d\boldsymbol{\varepsilon}^P\| \quad (5.30)$$

onde  $[d\boldsymbol{\varepsilon}^P]$  é o tensor dos infinitésimos de deformações plásticas desviadoras. Pode-se ainda aplicar a equação (5.29), eliminando-se  $d\boldsymbol{\varepsilon}_z^P$  na relação (5.30), escrevendo-se  $d\kappa$  como:

$$d\kappa = d\bar{\varepsilon}^P = \frac{2}{\sqrt{3}} (d\boldsymbol{\varepsilon}_x^{P^2} + d\boldsymbol{\varepsilon}_y^{P^2} + d\boldsymbol{\varepsilon}_x^P d\boldsymbol{\varepsilon}_y^P + \frac{1}{4} (d\boldsymbol{\gamma}_{xy}^{P^2} + d\boldsymbol{\gamma}_{xz}^{P^2} + d\boldsymbol{\gamma}_{yz}^{P^2}))^{1/2} \quad (5.31)$$

Observa-se que, na determinação do parâmetro “A” definido na equação (5.14), para o caso específico da superfície de plastificação de von Mises, as formulações de encruamento por trabalho e por deformação coincidem, conforme demonstrado em CRISFIELD(1991).

### ***B) Encruamento Cinemático***

Neste modelo, admite-se que não ocorrem rotações nem alterações de tamanho na superfície de plastificação, esta é apenas transladada no espaço das tensões durante o fluxo plástico.

Assume-se como hipótese que a translação da superfície, com relação a origem, se dá segundo a direção do incremento infinitesimal de deformação plástica. Assim, sendo o vetor  $\{\alpha\}$  responsável pela localização do centro da superfície de plastificação no espaço das tensões, um infinitésimo  $\{d\alpha\}$  pode ser expresso como:

$$\{d\alpha\} = C\{d\epsilon^p\} \quad (5.32)$$

de forma que:

$$\{\alpha\} = \int C\{d\epsilon^p\} \quad (5.33)$$

onde  $C$  pode ser assumido como uma constante do material e para o encruamento puramente cinemático tem-se  $C = K$ , onde  $K$  é o módulo plástico para o caso uniaxial, definido na figura (5.4). É importante observar que a evolução da variáveis internas  $\kappa$  e  $\{\alpha\}$  é sempre proporcional a evolução da deformação plástica.

## **5.3 ABORDAGEM NUMÉRICA DO PROBLEMA ELASTOPLÁSTICO**

O comportamento plástico dos sólidos, descrito de forma sumária nos itens anteriores, é marcado por expressões baseadas em quantidades diferenciais de tensão e deformação. A solução do problema físico exige a integração dessas quantidades diferenciais. Integram-se numericamente as expressões da plasticidade, considerando-se os diferenciais de tensão e deformação como incrementos finitos.

Como a situação de equilíbrio não pode ser determinada de forma fechada, algoritmos iterativos devem ser empregados. Neste item, apresenta-se uma abordagem numérica do problema elastoplástico, com o objetivo de esclarecer os aspectos computacionais envolvidos na solução do problema não-linear. Assim, procurando-se enfatizar a forma incremental das relações, substituem-se os termos diferenciais por termos incrementais representados pelo símbolo “ $\Delta$ ”.

### 5.3.1 PARTICULARIZAÇÃO DO MODELO

As expressões para a atualização das variáveis internas, particularizadas para o modelo elastoplástico implementado no elemento finito de casca, são definidas neste item. Adota-se a superfície de escoamento de von Mises para estado plano de tensão. Esta superfície, como citado anteriormente, é bastante adequada para o estudo de materiais metálicos. No modelo se incorpora também, a lei de fluxo associativa, definindo-se a condição de normalidade. Por simplicidade, adota-se uma regra de encruamento do tipo isotrópica, bastante apropriada para situações onde o carregamento é monotonicamente crescente, utilizando-se uma lei de evolução linear.

#### *Critério de plastificação*

O critério de plastificação de von Mises pode ser escrito da seguinte forma:

$$F(\{\sigma\}, \kappa) = f(\{\sigma\}) - \bar{\sigma}(\kappa) \quad (5.34)$$

onde  $\bar{\sigma}$  é uma função dependente do parâmetro de encruamento isotrópico  $\kappa$ , podendo ser compreendida como um valor convencional da tensão de escoamento, analogamente ao descrito para o caso uniaxial. Adotando-se uma lei de evolução linear, a função  $\bar{\sigma}$  é definida como:

$$\bar{\sigma}(\kappa) = \frac{1}{3}(\sigma_y + H\kappa)^2 \quad (5.35)$$

sendo  $\sigma_y$  a tensão de escoamento inicial e  $H$  o módulo plástico de encruamento isotrópico definido na figura 5.3.

A função escalar  $f$  pode ser interpretada como uma tensão equivalente (ou efetiva) uniaxial, dependendo apenas do estado de tensão. Para o critério de von Mises e estado plano de tensão esta função é apresentada como:

$$f(\{\sigma\}) = \frac{1}{3}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y + 3\tau_{xy}^2) = \frac{1}{2}\{\sigma\}^T[\mathbf{P}]\{\sigma\} \quad (5.36)$$

onde  $[\mathbf{P}]$  é uma matriz simétrica,

$$[\mathbf{P}] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (5.37)$$

### *Deformações plásticas*

Os incrementos das deformações plásticas podem ser obtidos, adotando-se uma lei de fluxo associativa, como:

$$\{\Delta\varepsilon^p\} = \begin{Bmatrix} \Delta\varepsilon_x^p \\ \Delta\varepsilon_y^p \\ \Delta\gamma_{xy}^p \end{Bmatrix} = \Delta\lambda \begin{Bmatrix} \partial f / \partial \sigma_x \\ \partial f / \partial \sigma_y \\ \partial f / \partial \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \Delta\lambda \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y \\ 2\sigma_y - \sigma_x \\ 6\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \Delta\lambda[\mathbf{P}]\{\sigma\} \quad (5.38)$$

A expressão de atualização das deformações totais em um instante  $i+1$ , segundo um procedimento implícito, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\{\varepsilon^p\}_{i+1} = \{\varepsilon^p\}_i + \{\Delta\varepsilon^p\}_{i+1} = \{\varepsilon^p\}_i + \Delta\lambda[\mathbf{P}]\{\sigma\}_{i+1} \quad (5.39)$$

onde  $\{\varepsilon^p\}_i$  é a deformação plástica acumulada no instante anterior. O termo instante, aqui, refere-se ao processo iterativo.

### **Parâmetro de encruamento isotrópico**

Utilizando-se a definição de encruamento por deformação, definida para estados multiaxiais e material incompressível na equação (5.31), encontramos a seguinte expressão para estado plano de tensão:

$$\Delta\kappa = \Delta\bar{\varepsilon}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} (\Delta\varepsilon_x^{p2} + \Delta\varepsilon_y^{p2} + \Delta\varepsilon_x^p \Delta\varepsilon_y^p + \frac{1}{4} \Delta\gamma_{xy}^{p2})^{1/2} \quad (5.40)$$

Aplicando-se a definição de  $\{\Delta\varepsilon^p\}$  eq. (5.38), na expressão (5.40), obtém-se:

$$\Delta\kappa = \Delta\bar{\varepsilon}^p = \frac{2}{3} \Delta\lambda (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2)^{1/2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta\lambda f^{1/2} \quad (5.41)$$

De forma semelhante ao descrito para as deformações plásticas, a expressão de atualização do parâmetro de encruamento, segundo um procedimento implícito, é:

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\bar{\varepsilon}_{i+1}^p = \kappa_i + \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta\lambda f_{i+1}^{1/2} \quad (5.42)$$

### **Tensões**

A expressão para atualização das tensões, pode ser obtida facilmente para a superfície específica de von Mises. Utilizando-se as relações diferenciais (5.4) e (5.10), escreve-se a expressão de atualização incremental implícita para as tensões:

$$\{\sigma\}_{i+1} = \{\sigma\}_i + \{\Delta\sigma\}_{i+1} = \{\sigma\}_i + [\mathbf{D}](\{\Delta\epsilon\}_{i+1} - \{\Delta\epsilon^p\}_{i+1}) \quad (5.43)$$

onde  $[\mathbf{D}]$  é a matriz constitutiva para materiais isotrópicos em estado plano de tensão,

$$[\mathbf{D}] = \frac{\mathbf{E}}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (5.44)$$

Pode-se rescrever a expressão (5.43), definindo-se um estado de tensão de tentativa puramente elástico  $\{\sigma\}_{i+1}^{\text{ten}}$ , como:

$$\{\sigma\}_{i+1}^{\text{ten}} = \{\sigma\}_i + [\mathbf{D}]\{\Delta\epsilon\}_{i+1} \quad (5.45)$$

Aplicando-se as equações (5.45) e (5.38) na expressão de atualização das tensões eq.(5.43), tem-se:

$$\{\sigma\}_{i+1} = \{\sigma\}_{i+1}^{\text{ten}} - \Delta\lambda[\mathbf{D}][\mathbf{P}]\{\sigma\}_{i+1} \quad (5.46)$$

Explicitando-se  $\{\sigma\}_{i+1}$  na equação (5.46), obtém-se a expressão final de atualização implícita das tensões,

$$\{\sigma\}_{i+1} = [\mathbf{\Xi}][\mathbf{D}]^{-1}\{\sigma\}_{i+1}^{\text{ten}} \quad (5.47)$$

onde  $[\mathbf{\Xi}]$  é a matriz tangente elástica modificada (algorítmica) SIMO & TAYLOR(1986), expressa da seguinte forma:

$$[\mathbf{\Xi}] = \left[ [\mathbf{D}]^{-1} + \Delta\lambda[\mathbf{P}] \right]^{-1} \quad (5.48)$$

### 5.3.2 ALGORITMO IMPLÍCITO ('BACKWARD EULER')

O procedimento implícito por si só fornece suficiente precisão, evitando a aplicação de técnicas, tais como sub-incrementação, para melhorar o seu desempenho. Segundo JETTEUR(1986), o erro associado a este tipo de algoritmo, para análise em estado plano, é da mesma ordem daqueles encontrados em análises tridimensionais. O procedimento implícito é “*incondicionalmente estável*”<sup>1</sup> e caracteriza-se, através de uma interpretação geométrica, por proporcionar um retorno à superfície de plastificação segundo a direção normal à própria superfície na posição atual fig. 5.9.

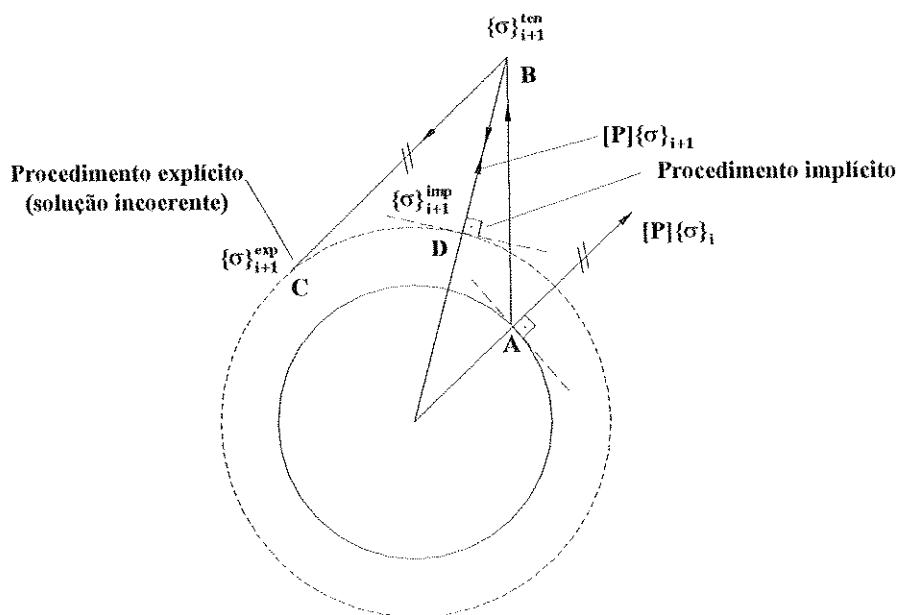


FIGURA 5.9 - Procedimento de integração implícito e explícito

Para o caso específico do critério de von Mises com lei de fluxo associativa e encruamento isotrópico, a projeção proporcionada pelo procedimento implícito ocorre sempre na direção radial, sendo por isso denominado “Radial Return Mapping” SIMO & TAYLOR(1985). Segundo SIMO & HUGHES(1988), este procedimento permite a definição de uma matriz tangente elastoplástica consistente

<sup>1</sup> Um procedimento numérico é “*condicionalmente estável*” se ele é estável apenas quando certas condições no passo de tempo são satisfeitas.

com o algoritmo de retorno<sup>2</sup>. Dessa forma, fazendo-se uso da matriz tangente elastoplástica consistente, a convergência quadrática do método de Newton-Raphson é garantida. As relações do algoritmo implícito, particularizadas para o modelo proposto, podem ser escritas, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Deformações totais} & \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{i+1} = \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_i + [\nabla]\{\mathbf{U}\} \\
 \text{Deformações plásticas} & \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}^p\}_{i+1} = \{\boldsymbol{\varepsilon}^p\}_i + \{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p\}_{i+1} = \{\boldsymbol{\varepsilon}^p\}_i + \Delta\lambda[\mathbf{P}]\{\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1} \\
 \text{Tensões} & \quad \{\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1} = [\mathbf{D}](\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{i+1} - \{\boldsymbol{\varepsilon}^p\}_{i+1}) \\
 \text{Parâmetro de encruamento} & \quad \kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_{i+1} \\
 \text{Deformação plástica efetiva} & \quad \Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^p_{i+1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^p\|_{i+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta\lambda \mathbf{f}_{i+1}^{1/2} \\
 \text{Lei de Encruamento} & \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\kappa_{i+1}) = (\sigma_y + \mathbf{H}\kappa_{i+1})^2 / 3 \\
 \text{Critério de plastificação} & \quad \mathbf{F}(\{\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1}, \kappa_{i+1}) = \mathbf{f}(\{\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1}) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\kappa_{i+1}) \leq 0
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

onde  $[\nabla]$  é o operador de deformações que atua sobre o campo de deslocamentos  $\{\mathbf{U}\}$  definido no passo de tempo  $[t, t + \Delta t]$ .

### *Integração das tensões*

No processo de integração das tensões pelo procedimento implícito, é necessário considerar um estado de tentativa (etapa de previsão), que é tomado como um passo puramente elástico, através das seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{i+1} & = \{\boldsymbol{\varepsilon}\}_i + [\nabla]\{\mathbf{U}\} \\
 \{\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1}^{\text{ten}} & = [\mathbf{D}](\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_{i+1} - \{\boldsymbol{\varepsilon}^p\}_i) \\
 \mathbf{F}(\{\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1}^{\text{ten}}, \kappa_i) & = \mathbf{f}(\{\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1}^{\text{ten}}) - \bar{\boldsymbol{\sigma}}(\kappa_i)
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

<sup>2</sup>No procedimento explícito a matriz tangente elastoplástica consistente não pode ser formulada sem a perda de sua simetria conforme apresentado em SIMO & TAYLOR(1986).



Se o estado de tensão obtido na previsão elástica não violar a condição de plastificação ( $\mathbf{F} \leq \mathbf{0}$ ), encontrando-se na superfície de plastificação ou em seu interior, significa que o estado obtido é admissível e compatível com o modelo adotado. Por outro lado, se as tensões obtidas estiverem fora da superfície de plastificação ( $\mathbf{F} > \mathbf{0}$ ) um outro estado de tensão deve ser procurado de modo a se tornar compatível com o modelo adotado. Dessa forma tem-se:

$$\begin{aligned} \{\sigma\}_{i+1} &= [\Xi(\Delta\lambda)][\mathbf{D}]^{-1} \{\sigma\}_{i+1}^{\text{ten}} \\ \kappa_{i+1} &= \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} = \kappa_i + \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta\lambda f_{i+1}^{1/2} \\ \{\varepsilon^p\}_{i+1} &= \{\varepsilon^p\}_i + \{\Delta\varepsilon^p\}_{i+1} = \{\varepsilon^p\}_i + \Delta\lambda[\mathbf{P}]\{\sigma\}_{i+1} \end{aligned} \quad (5.51)$$

onde  $[\Xi]$  é a matriz tangente elástica modificada (algorítmica) definida na equação (5.48). Deve-se observar que as expressões (5.51) dependem da determinação do parâmetro  $\Delta\lambda$  (multiplicador plástico). Segundo SIMO & TAYLOR(1986), o parâmetro  $\Delta\lambda$  pode ser obtido aplicando-se condição de consistência no instante  $i+1$ , ou seja:

$$\mathbf{F}(\{\sigma\}_{i+1}, \kappa_{i+1}) = \mathbf{f}(\{\sigma(\Delta\lambda)\}_{i+1}) - \bar{\sigma}(\kappa(\Delta\lambda)_{i+1}) = \mathbf{0} \quad (5.52)$$

Conforme apresentado em SIMO & TAYLOR(1986), JETTEUR(1986) e SIMO & HUGHES(1988), para estado plano de tensão com material isotrópico, fazendo uso do critério de von Mises, a expressão (5.52) possui uma forma particularmente simples, expressa como:

$$\mathbf{f}(\Delta\lambda) = \frac{1}{2} \left[ \frac{(\sigma_x^{\text{ten}} + \sigma_y^{\text{ten}})^2}{6 \left[ 1 + \Delta\lambda \left[ \frac{\mathbf{E}}{3(1-\nu)} \right] \right]^2} + \frac{(\sigma_x^{\text{ten}} - \sigma_y^{\text{ten}})^2 + 4(\tau_{xy}^{\text{ten}})^2}{2(1 + 2G\Delta\lambda)^2} \right] \quad (5.53)$$

$$\bar{\sigma}(\Delta\lambda) = \frac{1}{3} \left[ \sigma_y + \mathbf{H} \left[ \kappa_i + \Delta\lambda \frac{2}{\sqrt{3}} f^{1/2} \right] \right]^2 \quad (5.54)$$

onde  $\sigma_x^{\text{ten}}$ ,  $\sigma_y^{\text{ten}}$  e  $\tau_{xy}^{\text{ten}}$  são as tensões de tentativa elásticas definidas na equação (5.45) e (5.50<sup>2</sup>) e  $\mathbf{G}$  é o módulo de elasticidade transversal. As expressões (5.53) e (5.54) são encontradas aplicando-se a expressão de atualização das tensões definida em (5.47) ou (5.51<sup>1</sup>) na equação que expressa a condição de consistência eq.(5.52). Assim, pode-se resolver a equação (5.52), função apenas da parâmetro  $\Delta\lambda$ , utilizando-se métodos iterativos para encontrar os “zeros da função”, tais como: método secante, Newton-Raphson, etc.. O método utilizado no presente trabalho, bem como o estudo da equação de consistência serão apresentados no item 5.2.3. Para uma melhor compreensão de todo o procedimento implícito aqui discutido, apresenta-se, de forma resumida, os passos do algoritmo na figura 5.10.

1. Atualizar as deformações e calcular as tensões de tentativa

$$\{\varepsilon\}_{i+1} = \{\varepsilon\}_i + [\mathbf{V}]\{\mathbf{U}\}$$

$$\{\sigma\}_{i+1}^{\text{ten}} = [\mathbf{D}](\{\varepsilon\}_{i+1} - \{\varepsilon^p\}_i)$$

2. Verificar o critério de plastificação com as tensões de tentativa

$$\mathbf{F}(\{\sigma\}_{i+1}^{\text{ten}}, \kappa_i) = \mathbf{f}(\{\sigma\}_{i+1}^{\text{ten}}) - \bar{\sigma}(\kappa_i)$$

3. Se  $\mathbf{F}_{i+1}^{\text{ten}} \leq \mathbf{0}$

Então: finalizar

Se não: Resolver a equação de consistência e determinar  $\Delta\lambda$

$$\mathbf{F}(\{\sigma\}_{i+1}, \kappa_{i+1}) = \mathbf{f}(\{\sigma(\Delta\lambda)\}_{i+1}) - \bar{\sigma}(\kappa(\Delta\lambda)_{i+1}) = \mathbf{0}$$

4. Atualizar as variáveis internas com o valor de  $\Delta\lambda$

$$\{\sigma\}_{i+1} = [\mathbf{E}(\Delta\lambda)][\mathbf{D}]^{-1}\{\sigma\}_{i+1}^{\text{ten}}$$

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} = \kappa_i + \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta\lambda \mathbf{f}_{i+1}^{1/2}$$

$$\{\varepsilon^p\}_{i+1} = \{\varepsilon^p\}_i + \{\Delta\varepsilon^p\}_{i+1} = \{\varepsilon^p\}_i + \Delta\lambda[\mathbf{P}]\{\sigma\}_{i+1}$$

FIGURA 5.10 - Algoritmo de integração implícito para estado plano de tensão.

### 5.3.3 ESTUDO DA CONDIÇÃO DE CONSISTÊNCIA

A condição de consistência definida nas equações (5.52), (5.53) e (5.54), para o modelo descrito no item 5.2.1, possui um papel muito importante na atualização das variáveis internas. Através desta condição, obtém-se o valor do multiplicador plástico  $\Delta\lambda$ . Conhecido o valor de  $\Delta\lambda$ , encontra-se facilmente o novo estado de tensão compatível com o modelo adotado e conseqüentemente, as deformações plásticas e o parâmetro de encruamento. Para encontrar  $\Delta\lambda$ , deve-se resolver a equação de consistência obtendo os “zeros da função” (ou “raízes da equação”). Entretanto, essas raízes não podem ser obtidas analiticamente através de fórmulas explícitas. Assim, torna-se necessário aplicar métodos numéricos iterativos que fornecem soluções suficientemente aproximadas.

Para se adotar um método numérico, é imprescindível um estudo sobre a função de consistência. Na figura 5.11 apresentam-se gráficos da função de consistência referentes a estados de tentativa elásticos que conduzem a  $F_{i+1}^{ten} < 0$ , estados de tentativa que verifiquem a equação com a igualdade ( $F_{i+1}^{ten} = 0$ ) e estados de tentativa inadmissíveis ( $F_{i+1}^{ten} > 0$ ).

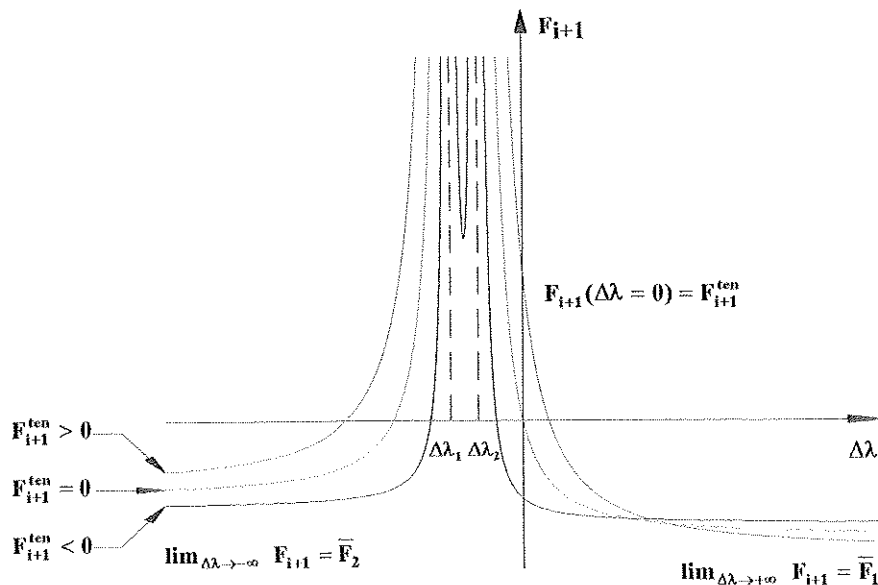


FIGURA 5.11 - Aspectos da função de consistência.

Observando-se a figura 5.11 é possível caracterizar alguns aspectos importantes da função de consistência. Esta função apresenta dois pontos de singularidade definidos como:

$$\Delta\lambda_1 = -\frac{3(1-\nu)}{E} \quad (5.55)$$

$$\Delta\lambda_2 = -\frac{1}{2G} \quad (5.56)$$

Nota-se que esses pontos de singularidade independem do estado de tensão de tentativa e são sempre valores negativos. Dessa forma, é possível garantir a inexistência de singularidades para o intervalo de interesse, ou seja, para valores de  $\Delta\lambda \geq 0$ . Um outro aspecto da função, é que esta pode possuir até quatro raízes reais. Entretanto, pela característica dos pontos de singularidades serem negativos, esta apresentará no máximo uma raiz positiva. A situação onde todas as raízes são negativas, refere-se apenas aos estados de tentativa elásticos que conduzem a  $F_{i+1}^{ten} < 0$ . Para estados de tentativa que conduzam a valores de  $F_{i+1}^{ten} = 0$ , existe apenas uma raiz real no intervalo  $[0, +\infty)$  que é exatamente  $\Delta\lambda = 0$ . Para estas duas situações, anteriormente descritas, não é necessário resolver a equação de consistência, pois o estado procurado é exatamente o estado de tentativa elástica independente do multiplicador plástico. Dessa forma, pode-se concluir que para o intervalo de interesse existe no máximo uma raiz real para a função de consistência. Esta raiz é definida nas situações onde as tensões de tentativa elásticas conduz à um estado de tensões inadmissível ( $F_{i+1}^{ten} > 0$ ). Pode-se ainda calcular os limites da função de consistência para  $\Delta\lambda \rightarrow +\infty$  e  $\Delta\lambda \rightarrow -\infty$ , expressos como:

$$\bar{F}_1 = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow +\infty} F_{i+1} = -\frac{1}{3} \left[ \sigma_y + H \left[ \kappa_i + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(\sigma_x^{ten} + \sigma_y^{ten})^2 + (\sigma_x^{ten} - \sigma_y^{ten})^2 + 4(\tau_{xy}^{ten})^2}{12 \left[ \frac{E}{3(1-\nu)} \right]^2 + 16G^2}} \right] \right]^2 \quad (5.57)$$

$$\bar{F}_2 = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow -\infty} F_{i+1} = -\frac{1}{3} \left[ \sigma_y + H \left[ \kappa_i - \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(\sigma_x^{ten} + \sigma_y^{ten})^2 + (\sigma_x^{ten} - \sigma_y^{ten})^2 + 4(\tau_{xy}^{ten})^2}{12 \left[ \frac{E}{3(1-\nu)} \right]^2 + 16G^2}} \right] \right]^2 \quad (5.58)$$

Observando-se as equações (5.57) e (5.58) e a figura 5.11, conclui-se que a função apresenta um comportamento assintótico para os valores negativos  $\bar{F}_1$  e  $\bar{F}_2$  quando  $\Delta\lambda$  tende a  $+\infty$  e  $-\infty$ , respectivamente. Analisando-se as características da função de consistência, ressaltando-se a inexistência de singularidades no intervalo de  $[0, +\infty)$ , propõe-se o método iterativo de Newton-Raphson para encontrar a raiz de interesse. Esse método possui uma taxa de convergência quadrática. Além disso, não é necessário definir um intervalo, apenas uma aproximação inicial para a raiz. A idéia básica para aplicação deste método, é partir de uma aproximação inicial  $\Delta\lambda_0$  para a raiz e, através de um processo iterativo, refinar essa aproximação. O refinamento consiste em calcular a interseção da tangente (no ponto  $\Delta\lambda_k$ ) com o eixo das abcissas encontrando uma nova aproximação  $\Delta\lambda_{k+1}$  para a raiz. Este processo é repetido até que a resposta atinja a precisão desejada. Na figura 5.12 é possível interpretar melhor o método descrito.

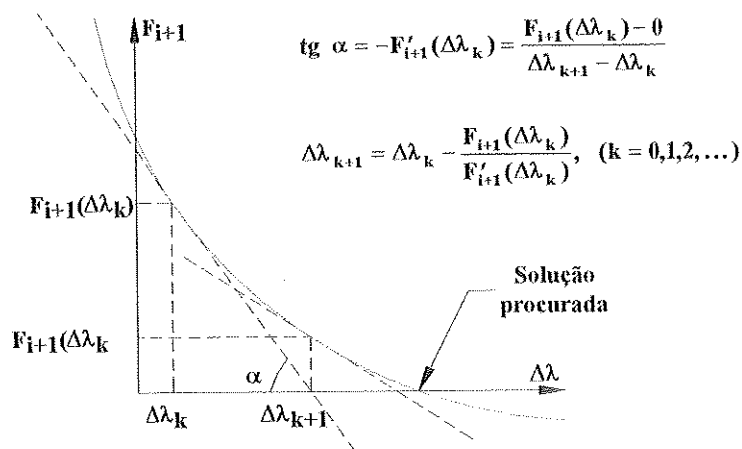


FIGURA 5.12 - Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson

A expressão para  $\Delta\lambda_{k+1}$  do método iterativo de Newton-Raphson é apresentada na figura 5.12. Deve-se ressaltar a importância da escolha da aproximação inicial  $\Delta\lambda_0$ . Se forem adotados valores iniciais maiores que a raiz procurada o método poderá fornecer uma das soluções negativas fig. 5.13(a) ou até



mesmo entrar em um processo de “looping” fig. 5.13(b). Dessa forma, como não se conhece a solução do problema, a aproximação inicial mais confiável é  $\Delta\lambda_0 = 0$ .

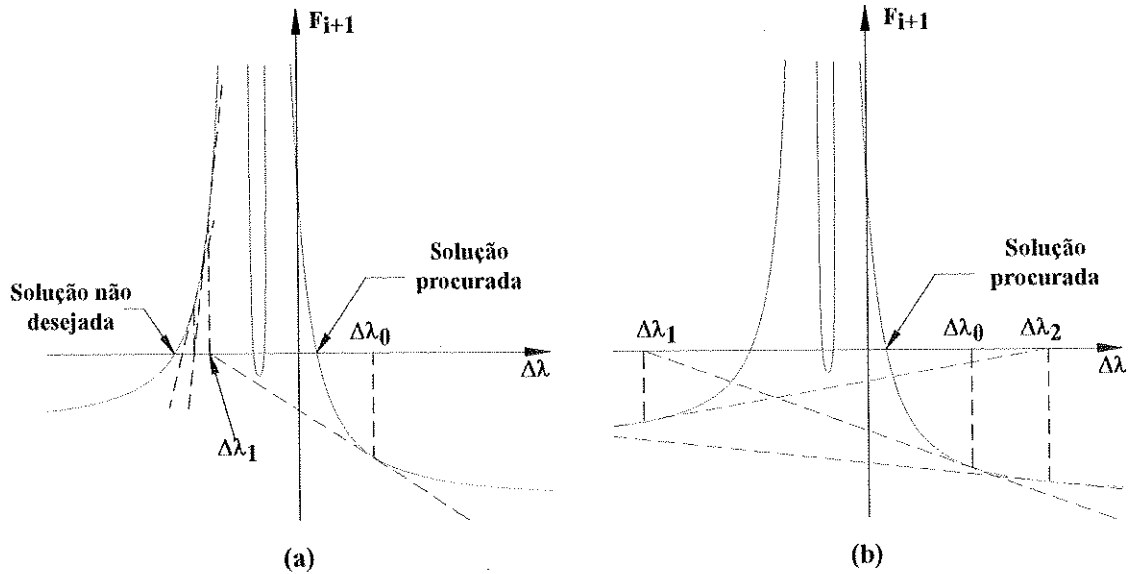


FIGURA 5.13 - Divergência do método de Newton-Raphson

Na figura 5.14 apresenta-se o algoritmo de Newton-Raphson para o caso específico da função de consistência utilizada neste trabalho.

1. Aproximação inicial e tolerância

$$\Delta\lambda_0 = 0 \quad , \quad \text{Tolerância} = \chi$$

2. Definir constantes

$$C_1 = (\sigma_x^{\text{ten}} + \sigma_y^{\text{ten}})^2 \quad , \quad C_4 = 2G,$$

$$C_2 = (\sigma_x^{\text{ten}} - \sigma_y^{\text{ten}})^2 + 4(\tau_{xy}^{\text{ten}})^2 \quad , \quad C_5 = \sigma_y + H\kappa_i,$$

$$C_3 = \frac{E}{3(1-\nu)} \quad , \quad C_6 = \frac{2}{\sqrt{3}}H.$$

3. Calcular  $\mathbf{F}$  no ponto  $\Delta\lambda_0$

$$\mathbf{f} = \frac{1}{2} \left[ \frac{C_1}{6(1 + \Delta\lambda_0 C_3)^2} + \frac{C_2}{2(1 + \Delta\lambda_0 C_4)^2} \right]$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} [C_5 + \Delta\lambda_0 f^{1/2} C_6]^2$$

$$F = f - \bar{\sigma}$$

4. Se  $|F(\Delta\lambda_0)| < \chi$

Então: finalizar ( $\Delta\lambda_0$  é a solução).

Se não: Faça

4.1. Calcular a derivada de  $F$  no ponto  $\Delta\lambda_0$

$$f' = -\frac{C_1 C_3}{6(1 + \Delta\lambda_0 C_3)^3} - \frac{C_2 C_4}{2(1 + \Delta\lambda_0 C_4)^3}$$

$$\bar{\sigma}' = \frac{1}{3} C_6 \left[ 2C_5 \sqrt{f} + \frac{1}{\sqrt{f}} C_5 f' \Delta\lambda_0 + 2C_6 f \Delta\lambda_0 + C_6 f' \Delta\lambda_0^2 \right]$$

$$F' = f' - \bar{\sigma}'$$

4.2. Calcular a nova aproximação  $\Delta\lambda_1$

$$\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_0 - \frac{F}{F'}$$

4.3. Calcular  $F$  no ponto  $\Delta\lambda_1$

$$f = \frac{1}{2} \left[ \frac{C_1}{6(1 + \Delta\lambda_1 C_3)^2} + \frac{C_2}{2(1 + \Delta\lambda_1 C_4)^2} \right]$$

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3} [C_5 + \Delta\lambda_1 f^{1/2} C_6]^2$$

$$F = f - \bar{\sigma}$$

4.4 Se  $|F(\Delta\lambda_1)| < \chi$  e  $|\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_0| < \chi$

Então: finalizar ( $\Delta\lambda_1$  é a solução).

Se não: Faça  $\Delta\lambda_0 = \Delta\lambda_1$  e volte ao passo 4.1

FIGURA 5.14 - Algoritmo de Newton-Raphson específico para a equação de consistência.

### 5.3.4 MATRIZ TANGENTE ELASTOPLÁSTICA CONSISTENTE

A derivação da matriz tangente elastoplástica consistente (ou algorítmica) pode ser encontrada em RUNESSON & SAMUELSSON(1985), SIMO & TAYLOR(1986), SIMO & HUGHES(1988) e CRISFIELD(1991). Esta matriz é consistente com o algoritmo de integração implícito (backward Euler) e, segundo SIMO & TAYLOR(1986), a aplicação desta preserva a característica de convergência quadrática do método de Newton-Raphson. Técnicas padrão podem utilizar a matriz tangente elastoplástica clássica em (5.24), que é inconsistente<sup>3</sup> com o procedimento de integração implícito, provocando a perda da característica de convergência quadrática do método de Newton-Raphson CRISFIELD(1991). A expressão da matriz tangente elastoplástica consistente pode ser obtida através da linearização do algoritmo implícito. As expressões de atualização das tensões e do encruamento podem ser escritas como:

$$\{\sigma\}_{i+1} = [\mathbf{D}](\{\varepsilon\}_{i+1} - \{\varepsilon^p\}_{i+1}) = [\mathbf{D}](\{\varepsilon\}_{i+1} - \{\varepsilon^p\}_i - \Delta\lambda[\mathbf{P}]\{\sigma\}_{i+1}) \quad (5.59)$$

$$\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\kappa_{i+1} = \kappa_i + \Delta\bar{\varepsilon}_{i+1}^p = \kappa_i + \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta\lambda f_{i+1}^{1/2} \quad (5.60)$$

Escrevendo-se os diferenciais das equações do algoritmo implícito (5.59) e (5.60), para um instante  $i+1$ , obtém-se:

$$\{\Delta\sigma\}_{i+1} = [\mathbf{D}]\{\Delta\varepsilon\}_{i+1} - d\lambda[\mathbf{D}][\mathbf{P}]\{\sigma\}_{i+1} - \Delta\lambda[\mathbf{D}][\mathbf{P}]\{\Delta\sigma\}_{i+1} \quad (5.61)$$

$$\Delta\kappa_{i+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} (d\lambda f_{i+1}^{1/2} + \Delta\lambda \left\{ \frac{\partial(f^{1/2})}{\partial\sigma} \right\}_{i+1}^T \{\Delta\sigma\}_{i+1}) \quad (5.62)$$

onde  $\Delta\lambda$  foi escrito como  $d\lambda$  e representa a variação do próprio multiplicador plástico na iteração estudada. Deve-se notar que o último termo em (5.61) é omitido

<sup>3</sup> A inconsistência é eliminada se o tamanho do incremento for infinitesimal



na obtenção da matriz tangente elastoplástica clássica eq.(5.11). O segundo termo diferencial da equação (5.62) pode ser expresso como:

$$\left\{ \frac{\partial(\mathbf{f}^{1/2})}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right\}_{i+1}^T \{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \frac{\partial\sqrt{\{\boldsymbol{\sigma}\}^T[\mathbf{P}]\{\boldsymbol{\sigma}\}}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right\}_{i+1}^T \{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1} = \frac{1}{2\mathbf{f}_{i+1}^{1/2}} \{\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1}^T [\mathbf{P}] \{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1} \quad (5.63)$$

Aplicando-se a equação (5.63) em (5.62) e explicitando-se o valor de  $\{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1}$  na expressão (5.61), obtém-se :

$$\{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1} = [\Xi](\{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\}_{i+1} - d\lambda[\mathbf{P}]\{\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1}) \quad (5.64)$$

$$\Delta\kappa_{i+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} (d\lambda\mathbf{f}_{i+1}^{1/2} + \Delta\lambda \frac{1}{2\mathbf{f}_{i+1}^{1/2}} \{\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1}^T [\mathbf{P}] \{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1}) \quad (5.65)$$

onde  $[\Xi]$  é a matriz tangente elástica modificada (algorítmica), definida em (5.48). Diferenciando-se a condição de consistência plástica expressa em (5.52), no instante  $i+1$ , tem-se:

$$\Delta\mathbf{F}_{i+1} = \left\{ \frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \right\}_{i+1}^T \{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1} - \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial\kappa} \Big|_{i+1} \Delta\kappa_{i+1} = 0 \quad (5.66)$$

$$\Delta\mathbf{F}_{i+1} = \{\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1}^T [\mathbf{P}] \{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{H}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{i+1}^{1/2} \Delta\kappa_{i+1} = \{\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1}^T [\mathbf{P}] \{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} \mathbf{H}\mathbf{f}_{i+1}^{1/2} \Delta\kappa_{i+1} = 0 \quad (5.67)$$

Pode-se explicitar o escalar  $d\lambda$  substituindo as expressões de  $\{\Delta\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1}$  e  $\Delta\kappa_{i+1}$  apresentadas respectivamente nas equações (5.64) e (5.65) na equação (5.67), de maneira que:

$$d\lambda = \frac{\{\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1}^T [\mathbf{P}] [\Xi] \{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}\}_{i+1}}{\{\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1}^T [\mathbf{P}] [\Xi] [\mathbf{P}] \{\boldsymbol{\sigma}\}_{i+1} + \mathbf{A}} \quad (5.68)$$

onde  $\mathbf{A}$  é definido como:

$$\mathbf{A} = \frac{4\mathbf{H}\mathbf{f}_{i+1}}{3 - 2\mathbf{H}\Delta\lambda} \quad (5.69)$$

Substituindo-se o valor de  $d\lambda$  eq.(5.68), na expressão (5.64), obtém-se a seguinte relação entre o incremento de tensão  $\{\Delta\sigma\}_{i+1}$  e o incremento de deformação  $\{\Delta\varepsilon\}_{i+1}$ ,

$$\{\Delta\sigma\}_{i+1} = [\mathbf{D}]_{\text{epc}} \{\Delta\varepsilon\}_{i+1} \quad (5.70)$$

onde  $[\mathbf{D}]_{\text{epc}}$  é a matriz tangente elastoplástica consistente expressa como:

$$[\mathbf{D}]_{\text{epc}} = [\mathbf{E}] - \frac{[\mathbf{E}][\mathbf{P}]\{\sigma\}_{i+1}\{\sigma\}_{i+1}^T[\mathbf{P}][\mathbf{E}]^T}{\{\sigma\}_{i+1}^T[\mathbf{P}][\mathbf{E}][\mathbf{P}]\{\sigma\}_{i+1} + \mathbf{A}} \quad (5.71)$$

Deve-se notar que, quando o incremento de carga tende a zero, o parâmetro  $\Delta\lambda$  também tende a zero, de maneira que a matriz algorítmica  $[\mathbf{E}]$  apresentada na equação (5.48) se degenera na matriz constitutiva elástica  $[\mathbf{D}]$ . Dessa forma, a matriz tangente elastoplástica consistente  $[\mathbf{D}]_{\text{epc}}$  definida na expressão (5.71) reduz-se à matriz tangente elastoplástica clássica  $[\mathbf{D}]_{\text{ep}}$  apresentada na equação (5.24). Segundo SIMO & HUGHES(1988) esta característica apresentada pela matriz  $[\mathbf{D}]_{\text{epc}}$  expressa o requerimento de consistência.

### 5.3.5 PROCEDIMENTO INCREMENTAL-ITERATIVO

Conforme comentado no início do item 5.2, em um material com comportamento elastoplástico, a relação constitutiva expressa em forma diferencial conduz à necessidade de uma análise por incrementos sucessivos. Entretanto, em uma simulação numérica, só é possível aplicar incrementos de carga finitos e não infinitesimais. Consequentemente, um erro de aproximação é cometido. Pode-se

reduzir este erro, reaplicando-se, através de um processo iterativo, o resíduo de forças sobre a estrutura, de maneira que o equilíbrio seja novamente estabelecido. Este procedimento, conhecido como incremental-iterativo, será aqui descrito de forma sucinta, nos passos a seguir.

Inicialmente, admitem-se conhecidas, no final de um instante (passo de carga)  $t$ , as componentes de tensão  $\{\sigma\}^t$ , as componentes de deformação  $\{\varepsilon\}^t$ , a variável interna  $\kappa^t$  responsável pelo encruamento e os deslocamentos nodais  $\{\delta\}^t$ . Ressalta-se que os índices  $i$  e  $t$  referem-se, respectivamente, ao processo iterativo e incremental.

**Passo 1** - Inicia-se um novo incremento de carga (instante  $t + \Delta t$ )

$$\{\mathbf{F}\}^{t+\Delta t} = \{\mathbf{F}\}^t + \{\Delta \mathbf{F}\}^{t+\Delta t} \quad (5.72)$$

**Passo 2** - Calculam-se os deslocamentos nodais

Em cada iteração assume-se um comportamento linear. Assim, os deslocamentos são obtidos pela aplicação da matriz de rigidez tangente, da seguinte forma:

$$\{\Delta \delta\}_i^{t+\Delta t} = [\mathbf{K}]_i^{-1(t+\Delta t)} \{\Delta \mathbf{F}\}^{t+\Delta t} \quad (5.73)$$

$$\{\delta\}_i^{t+\Delta t} = \{\delta\}^t + \{\Delta \delta\}_i^{t+\Delta t} \quad (5.74)$$

onde  $\{\Delta \mathbf{F}\}^{t+\Delta t}$  e  $\{\Delta \delta\}_i^{t+\Delta t}$  são os incrementos de força e os incrementos de deslocamentos nodais referentes ao instante  $t + \Delta t$ , respectivamente. Na primeira iteração, este incremento de força pode ser aplicado juntamente com o resíduo de forças final do incremento anterior, melhorando a precisão no equilíbrio de forças. A matriz de rigidez tangente  $[\mathbf{K}]_i^{t+\Delta t}$  é expressa como:

$$[\mathbf{K}]_i^{t+\Delta t} = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}]_{\text{epc}(i)}^{t+\Delta t} [\mathbf{B}] dV \quad (5.75)$$

onde  $[\mathbf{D}]_{\text{epc}(i)}^{t+\Delta t}$  é a matriz tangente elastoplástica consistente com o procedimento implícito de integração das tensões, apresentada em (5.71). Deve-se notar que a matriz de rigidez tangente é sempre atualizada, correspondendo ao método de Newton-Raphson clássico. Porém, a atualização poderia não ser frequente, caracterizando o método de Newton-Raphson modificado.

### Passo 3 - Calculam-se as deformações

As deformações são calculadas nos pontos de Gauss distribuídos ao longo da área e da espessura do elemento e são relacionadas com os deslocamentos através da matriz de deformação  $[\mathbf{B}]$ , da seguinte forma:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}_i^{t+\Delta t} = [\mathbf{B}]\{\boldsymbol{\delta}\}_i^{t+\Delta t} \quad (5.76)$$

### Passo 4 - Calculam-se as tensões

Semelhantemente as deformações, calculam-se as tensões nos pontos de Gauss, através do algoritmo de integração implícito, apresentado na figura 5.10.

$$\{\boldsymbol{\sigma}\}_i^{t+\Delta t} = \{\boldsymbol{\sigma}\}_i^t + \int_t^{t+\Delta t} \{d\boldsymbol{\sigma}\}_i \quad (5.77)$$

### Passo 5 - Calculam-se as forças internas

As forças internas de um elemento finito, são obtidas através da integração numérica das tensões em todo o volume do elemento. Posteriormente, estas forças são transformadas para as coordenadas globais e distribuídas em um vetor nas posições dos respectivos graus de liberdades.

$$\{\mathbf{R}\}_i^{t+\Delta t} = \int_V [\mathbf{B}]^T \{\sigma\}_i^{t+\Delta t} dV \quad (5.78)$$

onde  $\{\mathbf{R}\}_i^{t+\Delta t}$  é o vetor de forças nodais equivalentes (forças internas), geradas pelo estado de tensão interno.

**Passo 6** - Calcula-se o resíduo de forças

$$\{\Psi\}_i^{t+\Delta t} = \{\mathbf{F}\}_i^{t+\Delta t} - \{\mathbf{R}\}_i^{t+\Delta t} \quad (5.79)$$

**Passo 7** - Verificação da convergência

O critério de convergência verifica se a solução considerada é suficientemente precisa. Este pode ser expresso basicamente de duas maneiras:

$$\text{Convergência em força} \quad \frac{\|\{\Psi\}_i^{t+\Delta t}\|}{\|\{\Delta \mathbf{F}\}_i^{t+\Delta t}\|} \leq e_f \quad (5.80)$$

$$\text{Convergência em deslocamento} \quad \frac{\|\{\delta\}_i^{t+\Delta t} - \{\delta\}_{i-1}^{t+\Delta t}\|}{\|\{\delta\}_i^{t+\Delta t}\|} \leq e_d \quad (5.81)$$

onde  $\|\ \|$  representa a norma euclidiana e os termos  $e_f$  e  $e_d$  referem-se a tolerância em força e em deslocamento respectivamente.

Verificada a convergência, retorna-se ao **passo 1**, dando início a um novo incremento de carga. Caso contrário, retorna-se ao **passo 2**, substituindo-se apenas o incremento de forças  $\{\Delta \mathbf{F}\}_i^{t+\Delta t}$  em (5.73), pelo resíduo de forças  $\{\Psi\}_i^{t+\Delta t}$ , caracterizando assim, o processo iterativo.

A estratégia de solução anteriormente apresentada, pode ser melhor compreendida através dos diagramas carga-deslocamento e tensão-deformação (adotando-se uma lei qualquer) para o caso unidimensional, apresentados na figura 5.15.

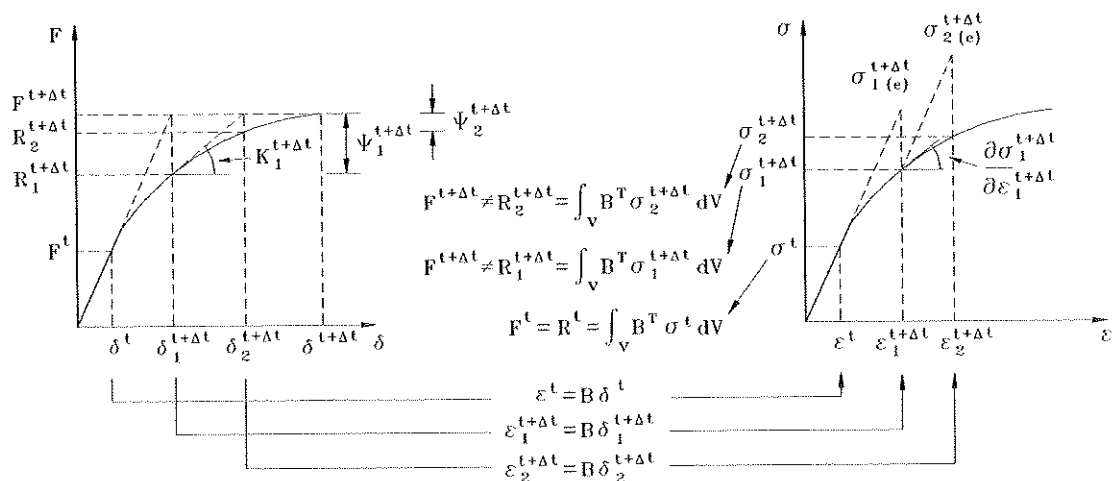


FIGURA 5.15 - Estratégia de solução incremental-iterativa (caso unidimensional)

## Capítulo 6

### EXEMPLOS NUMÉRICOS

---

---

#### 6.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo são apresentados os resultados numéricos da implementação computacional do elemento de casca com comportamento elástico-linear e elastoplástico. Inicialmente apresentam-se estudos de convergência do elemento de casca, considerando-se apenas o comportamento elástico-linear. A rede é refinada progressivamente, verificando sempre se o valor do deslocamento obtido converge para a solução teórica. Nos gráficos de convergência, com o objetivo de confrontar o desempenho do elemento, serão utilizados alguns elementos de casca considerados de bom desempenho, com geometria e graus de liberdade semelhantes ao elemento aqui proposto. Além disso, apresentam-se alguns resultados referentes ao estudo dos parâmetros livres  $\alpha$  e  $\beta$ , oriundos do elemento de membrana, com o objetivo de propor valores ótimos que melhorem o desempenho do elemento de casca. Resultados dos esforços são também apresentados com o intuito de demonstrar a validade da formulação proposta. No modelo elastoplástico implementado no elemento de casca, adota-se um procedimento implícito de integração das tensões juntamente com o método de Newton-Raphson clássico, onde a matriz de rigidez tangente é construída fazendo-se uso da matriz tangente elastoplástica consistente. O modelo incorpora o critério de plastificação de von Mises com encruamento isótropo linear considerando-se a lei associativa. Inicialmente, estuda-se o comportamento e o desempenho do elemento de membrana considerando-se os efeitos não-lineares físicos. Posteriormente, analisa-se o comportamento não-linear do elemento de flexão de

placas, verificando-se a quantidade de pontos de Gauss necessária para se obter a integração numérica, suficientemente precisa, das tensões e das relações constitutivas através da espessura. Por fim, nos itens 6.33 e 6.34, são apresentados os resultados da análise elastoplástica de estruturas em cascas.

## 6.2 EXEMPLOS NUMÉRICOS ELÁSTICO-LINEARES

Nos gráficos de convergência dos exemplos analisados o elemento de casca é confrontado com elementos considerados de boa performance. Dois elementos triangulares planos de casca com grau de liberdade rotacional CHEN(1992) serão utilizados na comparação. Estes elementos foram construídos pelo acoplamento entre o elemento de flexão de placas DKT e os elementos de membrana (com drilling) desenvolvido por Allman com integração reduzida (ALLMAN 1) e integração normal (ALLMAN 2). O elemento triangular plano de casca TLCL apresentados em OÑATE(1992), também será utilizado nas análises de convergência. Este elemento não possui o grau de liberdade rotacional, porém, o elemento de placa utilizado no acoplamento é formulado utilizando as hipóteses de Reissner-Mindlin onde a deformação por esforço cortante é considerada. Nas análises dos esforços utiliza-se também o elemento triangular plano de cascas TS3 da biblioteca do sistema LUSAS que inclui modos incompatíveis de alta performance, porém, não possui o grau de liberdade rotacional. Os resultados para os esforços foram obtidos nas coordenadas locais do elemento finito com uma rede 8x8x2 elementos e são comparados com os resultados do elemento de casca construído pelo acoplamento entre o elemento de membrana CST e o elemento de flexão de placas DKT (CSDKT) para uma rede de 40x40x2 elementos. É importante ressaltar que, com o intuito de evitar as singularidades, o elemento CSDKT faz uso de artifício, restringindo o grau de liberdade rotacional. Por conveniência, o elemento aqui apresentado é denominado FFDKT (Free Formulation Discrete Kirchoff Triangle). Nos gráficos apresentados, a abreviação FFDKT será sempre precedida dos valores respectivos de  $\alpha$  e  $\beta$  utilizados



na referente análise numérica. Ressalta-se ainda que as unidades das grandezas envolvidas foram omitidas assim como nas referências citadas.

### 6.2.1 EXEMPLO 1: COBERTURA CILÍNDRICA

A estrutura apresentada na figura 6.1(a) é solicitada por uma ação vertical 'q' por unidade de área, referente ao peso próprio. As extremidades da casca são consideradas como paredes rígidas e os lados longitudinais totalmente livres. Devido a sua simetria, discretiza-se apenas  $\frac{1}{4}$  da estrutura. A estrutura deformada (utilizando-se os valores de  $\alpha=1,2$  e  $\beta=0,001$ ) é apresentada na figura 6.1(b), ampliando-se os deslocamentos em dez vezes. Os resultados para o deslocamento transversal do ponto A, no meio do lado livre, são apresentados juntamente com os resultados de outros elementos de cascas, confrontados com a solução analítica do problema fig. 6.2.

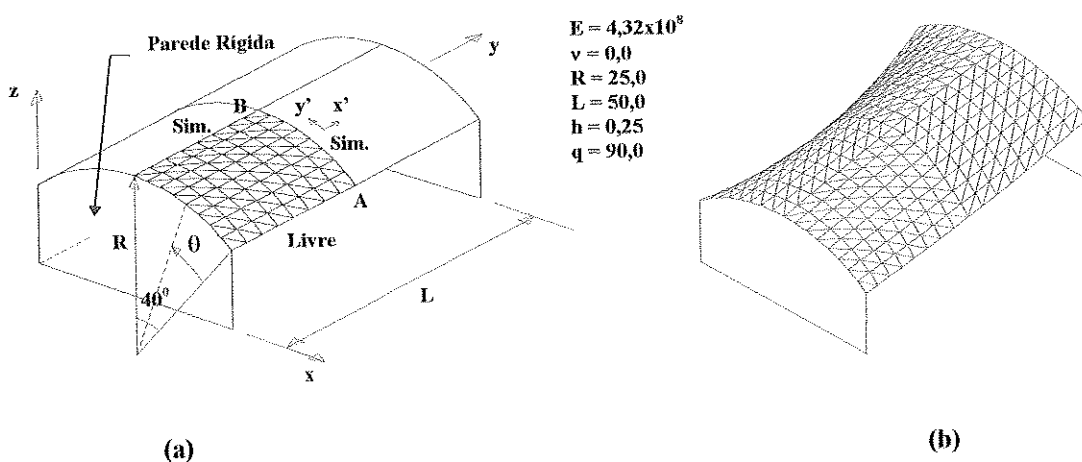


FIGURA 6.1-(a) Geometria e malha da estrutura. (b) Estrutura deformada.

A estrutura analisada é um problema teste clássico bastante utilizado na avaliação de elementos finitos de casca. A casca é bastante abatida, dessa forma, se forem utilizados elementos que não possuam o grau de liberdade rotacional e não for aplicado nenhum tipo de artifício para suprir a inexistência desse grau, provavelmente, na análise da estrutura, a matriz de rigidez apresentará problemas de singularidade, pois os elementos finitos são aproximadamente coplanares. Entretanto, por ser

bastante abatida e possuir curvatura única, o comportamento da estrutura pode ser bem representado com redes pouco refinadas. Isto pode ser verificado na figura 6.2 onde a maioria dos elementos apresentam bons resultados para uma rede de  $4 \times 4 \times 2$  elementos. Nesta mesma figura observa-se as boas características de convergência do elemento aqui proposto, convergindo de forma monotônica para os valores apresentados de  $\alpha$  e  $\beta$ . Note que é possível obter valores para os parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$  que melhoram a performance do elemento. Entretanto, os elementos de Allman com integração normal e reduzida apresentam um desempenho ligeiramente superior. O elemento TLCL possui uma convergência não monotônica e mais lenta que os demais elementos.

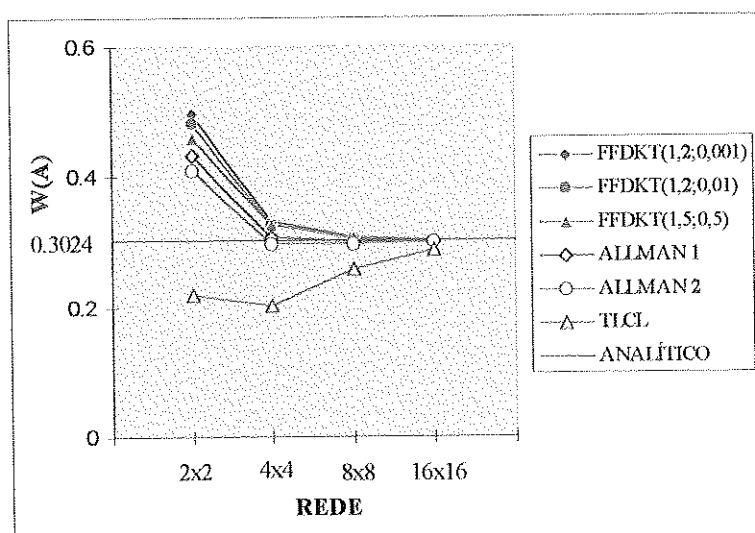


FIGURA 6.2-Gráfico de convergência do deslocamento transversal do ponto A.

Nas figuras 6.3 e 6.4 apresentam-se respectivamente a distribuição dos esforços  $M_y$  e  $N_x$  sobre a linha A-B fig. 6.1(a). A resposta tida como 'exata' para a distribuição dos esforços foi obtida através do elemento CSDKT para uma rede de  $40 \times 40 \times 2$  elementos. Este é um elemento simples, porém, tanto o elemento de membrana CST como o elemento de flexão DKT possuem convergência garantida e os resultados estão em concordância com aqueles apresentados em OÑATE(1992). Note, que as redes utilizadas pelos elementos confrontados possuem  $8 \times 8 \times 2$  elementos.

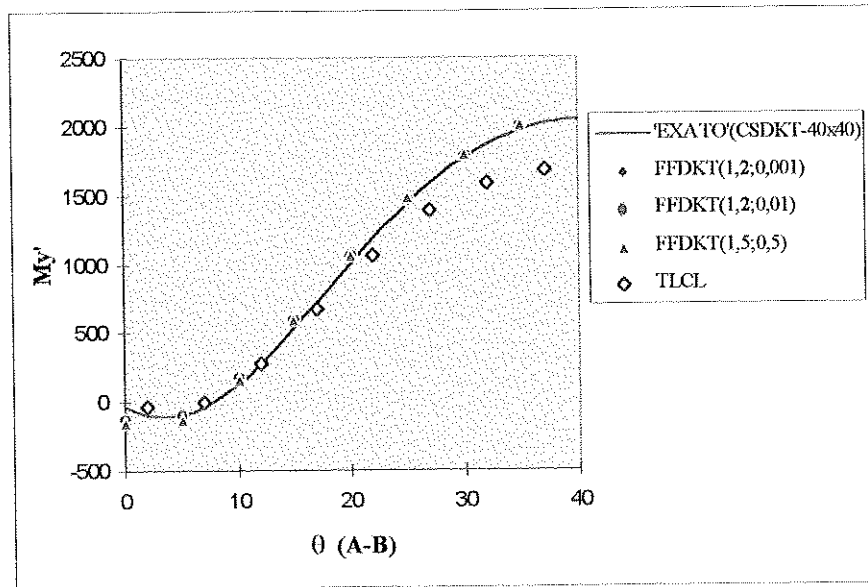


FIGURA 6.3- Distribuição do esforço  $M_{y'}$  sobre a linha A-B.

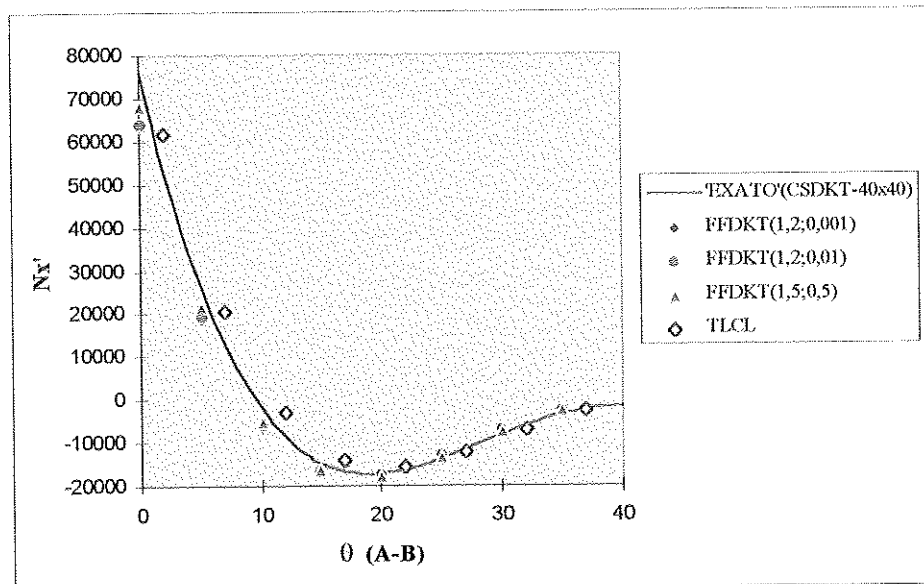


FIGURA 6.4- Distribuição do esforço  $N_{x'}$  sobre a linha A-B.

Observa-se um melhor desempenho na distribuição do esforço  $M_{x'}$  do elemento aqui proposto para todos os valores apresentados de  $\alpha$  e  $\beta$ . O elemento TLCL não apresenta bons resultados no final do trecho A-B. Porém, na distribuição dos esforços  $N_{x'}$  ambos elementos apresentam um bom comportamento.

### 6.2.2 EXEMPLO 2: CILINDRO COM PAREDES RÍGIDAS

O cilindro com paredes rígidas nas suas extremidades é solicitado por cargas concentradas radiais fig.6.5(a). Fazendo uso da simetria do problema, discretiza-se apenas  $\frac{1}{8}$  do mesmo. A estrutura deformada (utilizando-se os valores de  $\alpha=1,2$  e  $\beta=0,001$ ) é apresentada na figura 6.5(b) ampliando-se os deslocamentos em vinte vezes. O gráfico de convergência do deslocamento radial do ponto A (ponto de aplicação da carga) é apresentado na figura 6.6 juntamente com os resultados de outros elementos de casca, comparados com a solução analítica do problema.

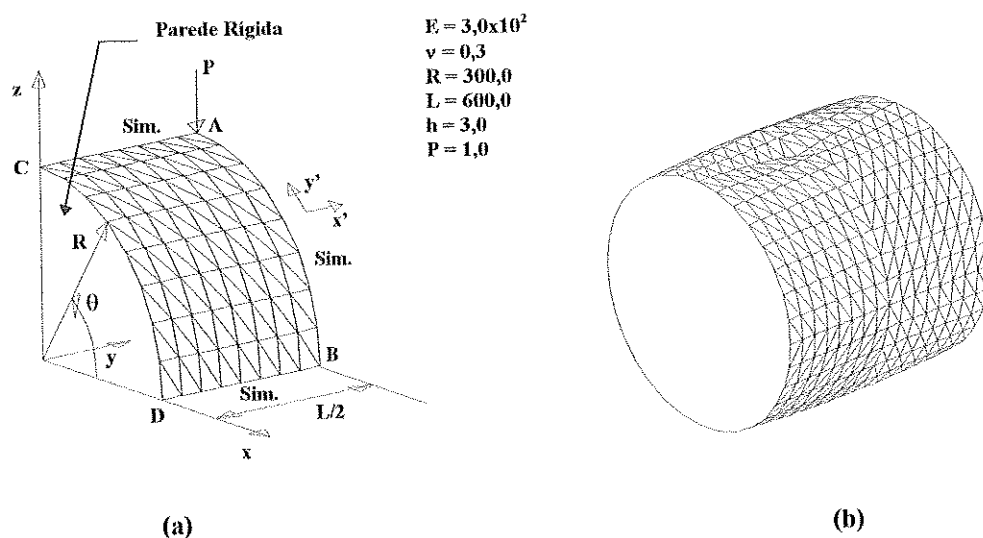


FIGURA 6.5-(a) Geometria e malha da estrutura. (b) Estrutura deformada.

Semelhantemente à cobertura cilíndrica, esta casca possui única curvatura. Entretanto, redes pouco refinadas não representam bem a geometria da casca, por esta não ser uma estrutura abatida. Dessa forma, é bastante compreensível obter resultados para as redes iniciais (pouco refinadas) tão distantes do valor teórico conforme apresentado na figura 6.6. Porém, observa-se no gráfico de convergência uma melhor performance do elemento aqui proposto utilizando valores para  $\alpha=1,2$  e  $\beta=0,001$ .

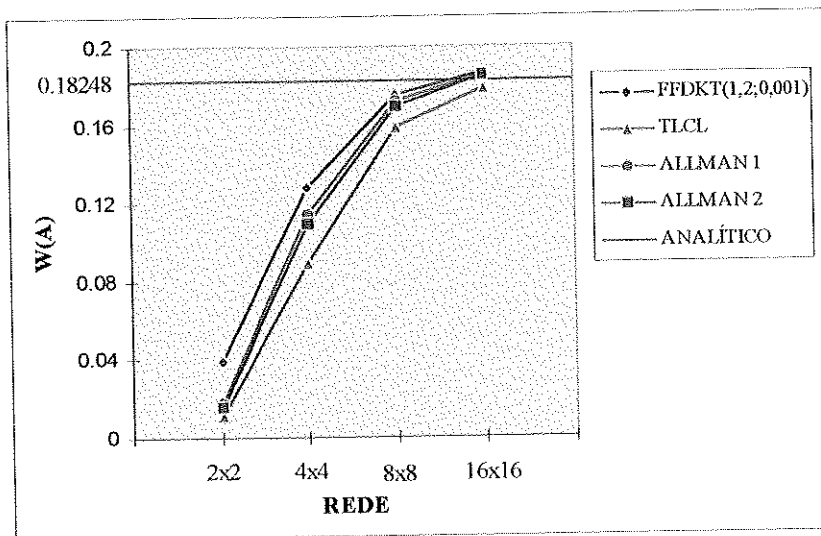


FIGURA 6.6-Gráfico de convergência do deslocamento radial do ponto A.

A distribuição dos esforços  $My'$  e  $Nxy'$  sobre a linha A-B fig. 6.1(a) são apresentadas nas figuras 6.7 e 6.8, respectivamente. Semelhantemente ao exemplo anterior, a resposta tida como 'exata' para a distribuição dos esforços foi obtida através do elemento CSDKT para uma rede de  $40 \times 40 \times 2$  elementos.

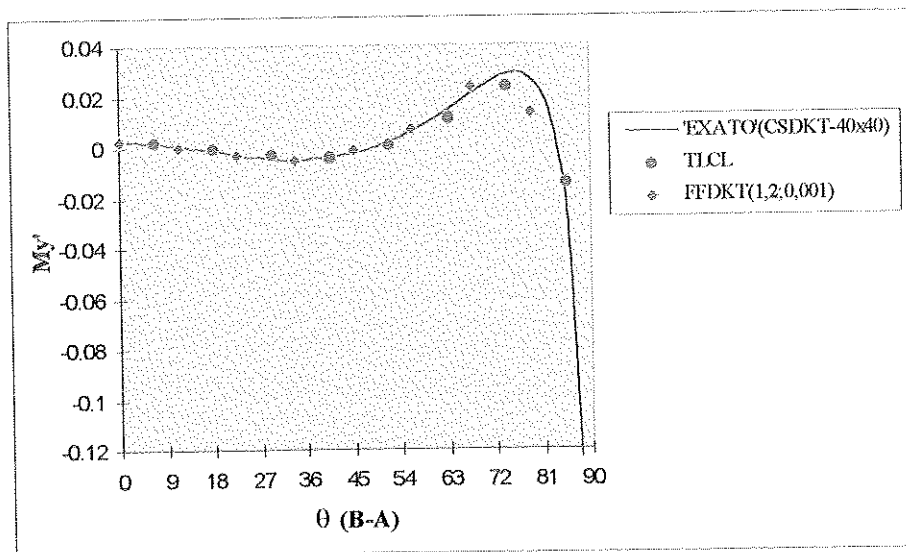


FIGURA 6.7-Distribuição do esforço  $My'$  sobre a linha B-A.

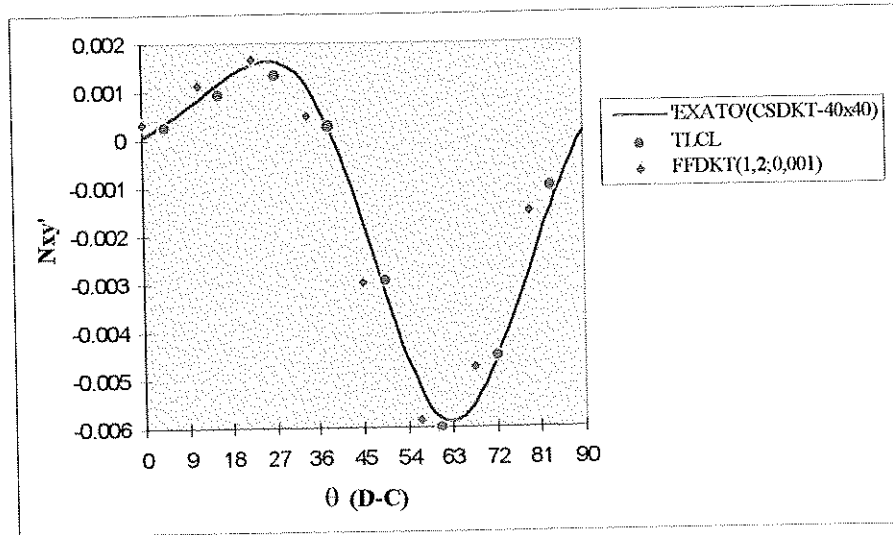


FIGURA 6.8-Distribuição do esforço  $N_{xy'}$  sobre a linha D-C.

Na distribuição do esforço  $M_{y'}$ , ambos os elementos representam bem o comportamento da estrutura. Nota-se também um bom comportamento dos elementos para a distribuição do esforço  $N_{xy'}$  ressaltando-se uma melhor precisão para os resultados obtidos com o elemento TLCL.

### 6.2.3 EXEMPLO 3: CÚPULA ESFÉRICA VAZADA

A estrutura é solicitada por cargas concentradas radiais fig.(6.9a) e devido a sua simetria discretiza-se apenas  $\frac{1}{4}$  da semi-esfera.

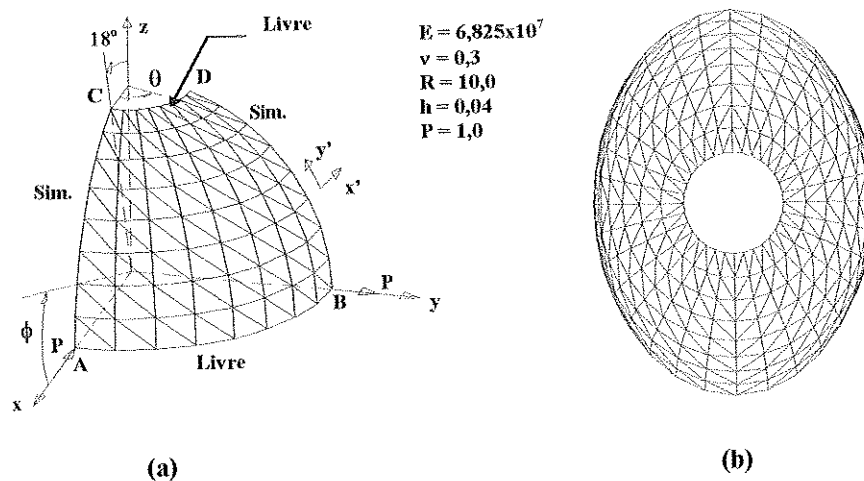


FIGURA 6.9-(a)Geometria e malha da estrutura. (b)Estrutura deformada.

A estrutura deformada (utilizando-se os valores de  $\alpha=1,2$  e  $\beta=0,001$ ) é apresentada na figura (6.9b) ampliando-se os deslocamentos em vinte vezes. Os resultados para o deslocamento radial do ponto A (ponto de aplicação da carga) apresentados pelos elementos são comparados com a solução do problema no gráfico de convergência da figura (6.10).

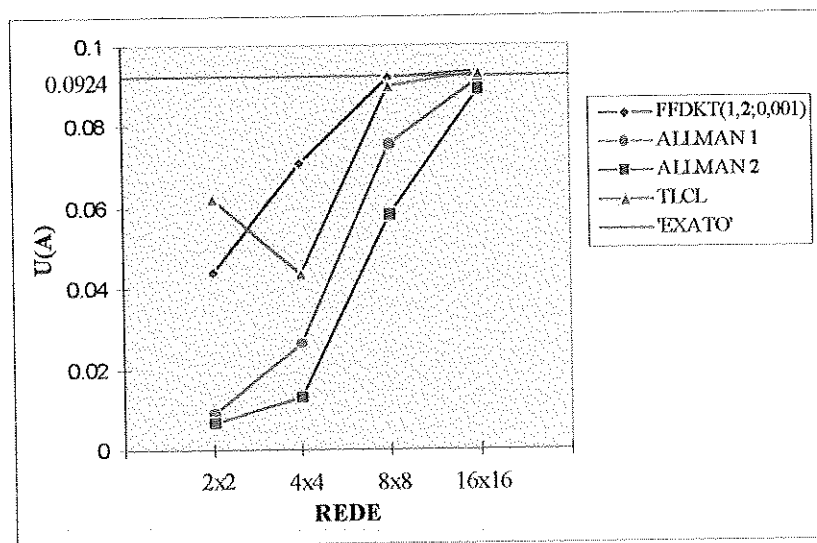


FIGURA 6.10-Gráfico de convergência do deslocamento radial do ponto A.

Das três estruturas analisadas, a cúpula esférica é a que apresenta o comportamento mais complexo. Esta casca, além de não ser abatida, possui dupla curvatura. Entretanto, o elemento aqui proposto apresenta um destacado desempenho, considerando o alto grau de complexidade da estrutura. O elemento TLCL, semelhantemente ao primeiro exemplo, apresenta uma convergência não monotônica, porém, superior aos elementos de Allman com integração normal e reduzida.

Nas figuras 6.11 e 6.12 são apresentados respectivamente os resultados para a distribuição do esforço  $M_x$  sobre as linhas A-B e C-D. A resposta tida como 'exata' para a distribuição dos esforços foi obtida de forma semelhante aos dois exemplos anteriores.

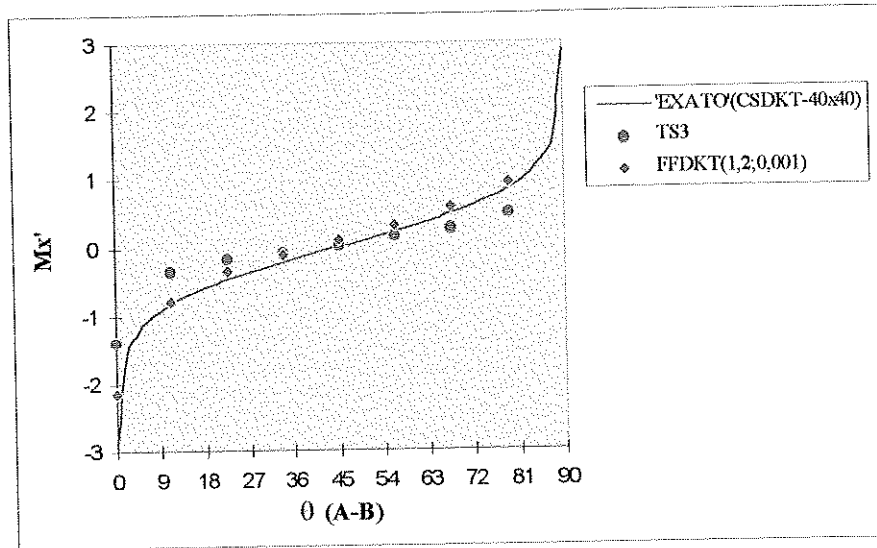


FIGURA 6.11-Distribuição do esforço  $M_{x'}$  sobre a linha A-B.

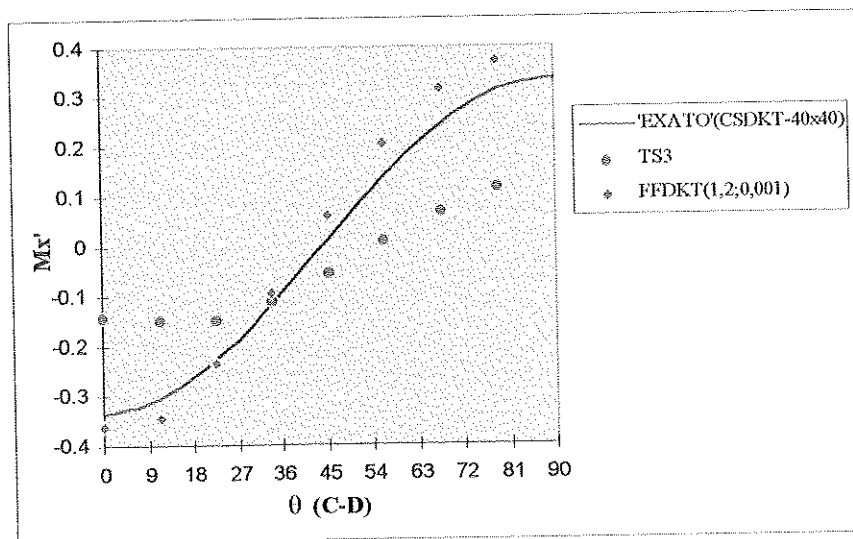


FIGURA 6.12-Distribuição do esforço  $M_{x'}$  sobre a linha C-D.

Em ambas distribuições nota-se o melhor desempenho do elemento aqui proposto. O elemento triangular plano de casca TS3 da biblioteca do sistema LUSAS que inclui modos incompatíveis de alta performance, porém, não possui o grau de liberdade rotacional, apresenta um desempenho inferior, principalmente para a distribuição do esforço  $M_{x'}$  sobre a linha C-D.

Deve-se ressaltar que os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  foram estudados em diversas análises para as três estruturas proposta neste item de exemplos elásticos-lineares.



BERGAN & FELIPPA(1985) apresentam um estudo dos parâmetros livres do elemento de membrana, onde os valores ótimos para o parâmetro livre  $\alpha$  são obtido através da minimização da energia de deformação e os valores ótimos para o parâmetro  $\beta$  são obtidos por uma técnica simplificada de balanço de energia. Estes verificam que os valores ótimos para o parâmetro  $\alpha$  estariam entre 1 e 2, e recomendam a utilização dos valores médios ótimos  $\alpha=1,5$  e  $\beta=0,5$  para o elemento triangular de membrana. Nas análises numéricas do elemento de cascas constatou-se, como esperado, que os valores ótimos para  $\alpha$  se encontram entre 1 e 1,5, dentro da faixa proposta por Bergan & Felippa. Os valores ótimos do parâmetro livre  $\beta$ , para as estruturas em casca aqui analisadas, variam bastante de estrutura para estrutura. Na cobertura cilíndrica observa-se que  $\beta=0,5$  proporciona um melhor desempenho ao elemento, porém, para a cúpula esférica vazada este valor de  $\beta$  prejudicava o desempenho do elemento à flexão. Entretanto, observou-se que valores  $\beta$  cada vez mais próximos de zero conduziam a uma melhor resposta do comportamento de flexão na casca. Porém, valores de  $\beta$  muito pequenos reduzem a influência dos modos de alta ordem do elemento de membrana, prejudicando o seu desempenho. Dessa forma, pode-se concluir que para estruturas onde o efeitos de membrana predominam, pode-se escolher valores de  $\beta$  próximos de 0,5 e para estruturas onde a influência dos efeitos de flexão são predominantes, pode-se adotar valores de  $\beta$  próximos de 0,001. Por fim, é importante destacar, que para todos os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  utilizados nas análises numéricas o elemento obteve convergência, apresentando-se como um elemento bastante confiável.

### 6.3 EXEMPLOS NUMÉRICOS ELASTOPLÁSTICOS

Nesse item apresentam-se aplicações do modelo elastoplástico implementado no elemento de casca. Com a finalidade de verificar o desempenho do elemento em análises elastoplásticas, na maioria dos exemplos, os resultados são comparados com o de outros elementos. Inicialmente, verifica-se o comportamento do elemento de membrana. Este elemento apresenta um excelente desempenho em análises elásticas

lineares conforme apresentado em BERGAN & FELIPPA(1985-1986) e PELETEIRO(1996), entretanto é necessário verificar o seu desempenho em análises elastoplásticas. No item 6.3.2, analisa-se o comportamento do elemento de flexão de placas DKT observando o seu desempenho com relação a diversas distribuições dos pontos de Gauss (na espessura) necessários para a integração numérica das tensões e das relações constitutivas. Nos itens 6.3.4 e 6.3.5, verifica-se o comportamento do elemento finito aplicando-se o modelo elastoplástico na análise de estruturas em cascas. Ressalta-se que em todas as análises foram utilizados 4 pontos de Gauss distribuídos na área do elemento.

### 6.3.1 EXEMPLO 1: PAINEL DE COOK

Este problema proposto por COOK(1974) é bastante utilizado na avaliação de elementos de membrana em análises elásticas lineares. A estrutura analisada é uma viga engastada solicitada por um carregamento parabolicamente distribuído aplicado em sua extremidade livre. A geometria e as grandezas envolvidas no problema são apresentadas na figura 6.13.

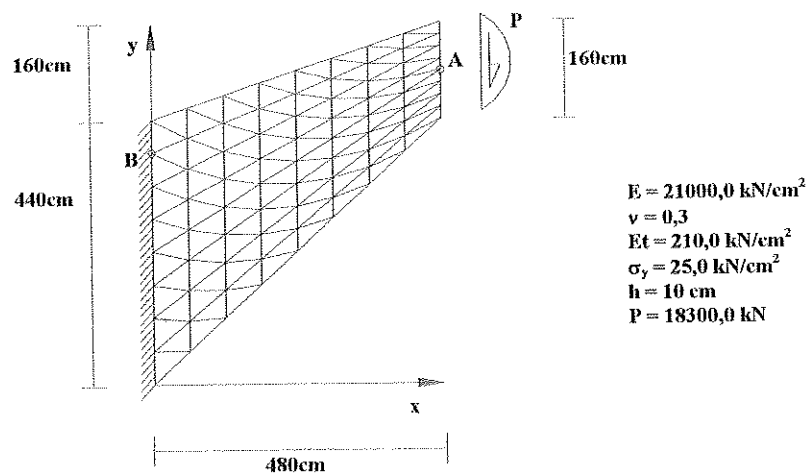


FIGURA 6.13-Geometria, malha e propriedades físicas da estrutura.

Na análise do problema elastoplástico foram utilizados 30 incrementos divididos em proporções iguais e admitidas tolerâncias em força e em deslocamento de 0,001%. Na figura 6.14 apresenta-se o diagrama %Carregamento x deslocamento transversal do ponto A (ponto no meio da extremidade livre). Os resultados do elemento de membrana da formulação livre foram obtidos com uma rede de 8x8x2 elementos utilizando os valores de  $\alpha=1,5$  e  $\beta=0,5$  e são confrontados com os resultados obtidos com o elemento CST para uma rede de 16x16x2 elementos.

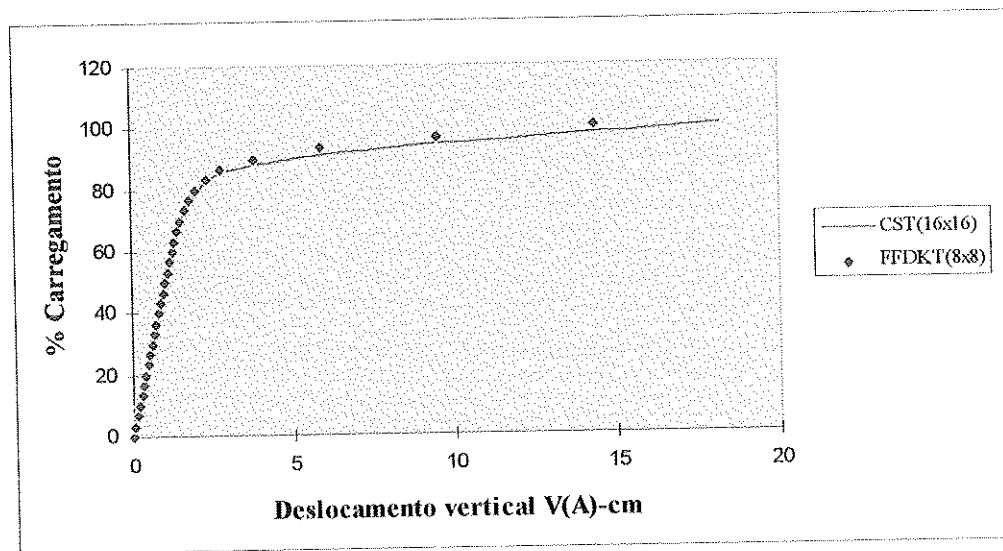


FIGURA 6.14-diagrama %força x deslocamento vertical do ponto A.

Nota-se que os resultados obtidos com o elemento da formulação livre utilizando um total de 128 elementos e 243 graus de liberdade estão em boa concordância com os resultados apresentados pelo elemento CST com 512 elementos e um total de 579 graus de liberdade.

Na figura 6.15 apresentam-se os resultados do máximo esforço normal obtido em um ponto de Gauss próximo do ponto B. A resposta do elemento de membrana com uma rede de 8x8x2 elementos é confrontado com os resultados obtidos com o elemento quadrilateral de 8 nós QPM8 da biblioteca do sistema LUSAS utilizando uma rede de 8x8 elementos.

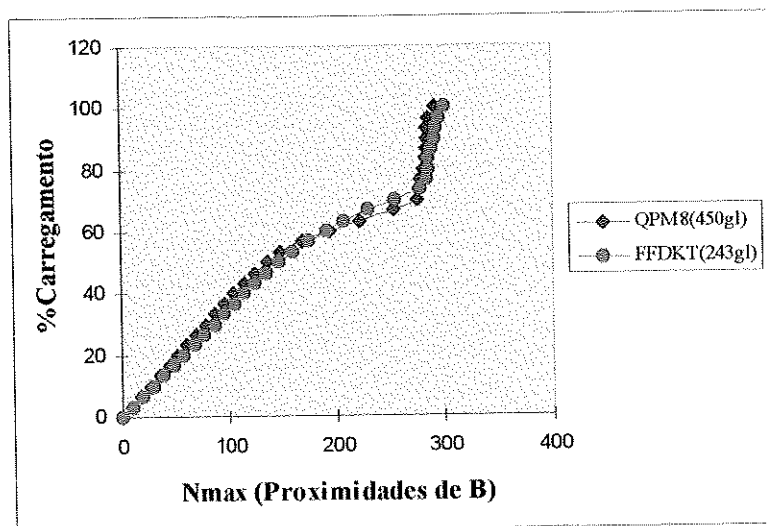


FIGURA 6.15-diagrama %força x  $N_{\max}$  nas proximidades do ponto B.

Levando-se em consideração que o ponto de Gauss onde foram extraídos os resultados para o elemento da formulação livre e o elemento QPM8 não possuem as mesmas coordenadas, nota-se o bom comportamento do elemento de membrana que utiliza uma quantidade de graus de liberdade bem inferior ao elemento QPM8.

### 6.3.2 EXEMPLO 2: PLACA QUADRADA

A placa apresentada na figura 6.16 é simplesmente apoiada e está solicitada por um carregamento distribuído 'q'. Devido a sua simetria analisa-se apenas  $\frac{1}{4}$  da estrutura. Esta mesma estrutura foi analisada por OWEN & HINTON(1980) utilizando elementos quadrilaterais heterosis de 9 nós. O elemento heterosis foi formulado utilizando as hipóteses de Reissner-Mindlin onde a deformação cisalhante transversal é considerada. Nas análises efetuadas pelos referidos autores utilizou-se uma rede de  $2 \times 2$  elementos finitos adotando-se um procedimento explícito com modelos estratificados e não estratificados. A quantidade de lâminas utilizada na análise com o elemento heterosis estratificado não foi divulgada, provavelmente foram utilizadas 26 lâminas que é o máximo que o programa permite. Na análise com o elemento heterosis não estratificado, foi adotado um total de 100 incrementos e

tolerâncias em força e em deslocamento de 10%, porém, para o elemento não estratificado estes dados não foram apresentados, provavelmente foram os mesmos.

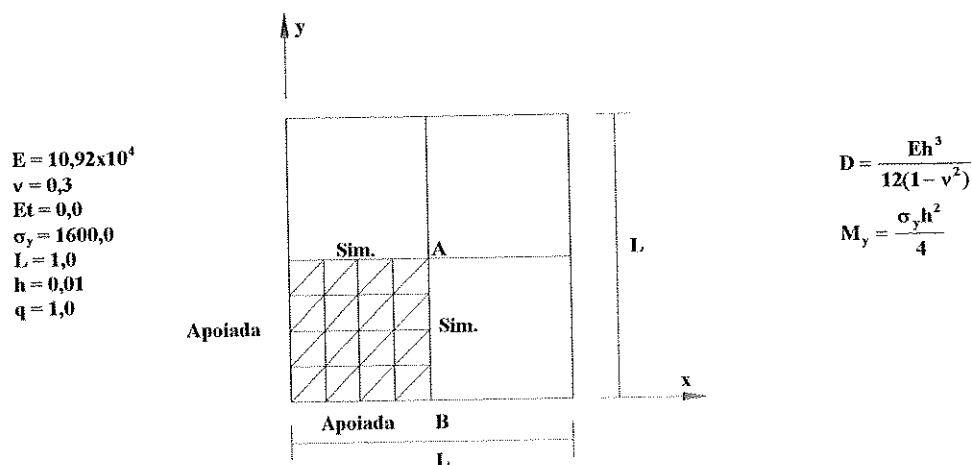


FIGURA 6.16-Geometria, malha e propriedades físicas da estrutura.

Como o objetivo neste exemplo é analisar o comportamento do elemento com relação a integração das tensões e das relações constitutivas para várias distribuições dos pontos de Gauss na espessura, optou-se por discretizar a estrutura com a mesma quantidade de graus de liberdade utilizada para o elemento heterosis. Dessa forma, adotou-se uma rede de 4x4x2 elementos DKT. Neste trabalho a análise foi desenvolvida utilizando 30 incrementos iguais e tolerâncias em força e deslocamento de 0,01%.

Na figura 6.17 são apresentadas as curvas carga x deslocamento transversal do ponto A (centro da placa). O elemento de flexão de placas DKT é analisado com 3, 5, 7 e 9 pontos de Gauss distribuídos na espessura e os seus resultados são comparados com a resposta do elemento heterosis utilizando os modelos estratificado e não estratificado.

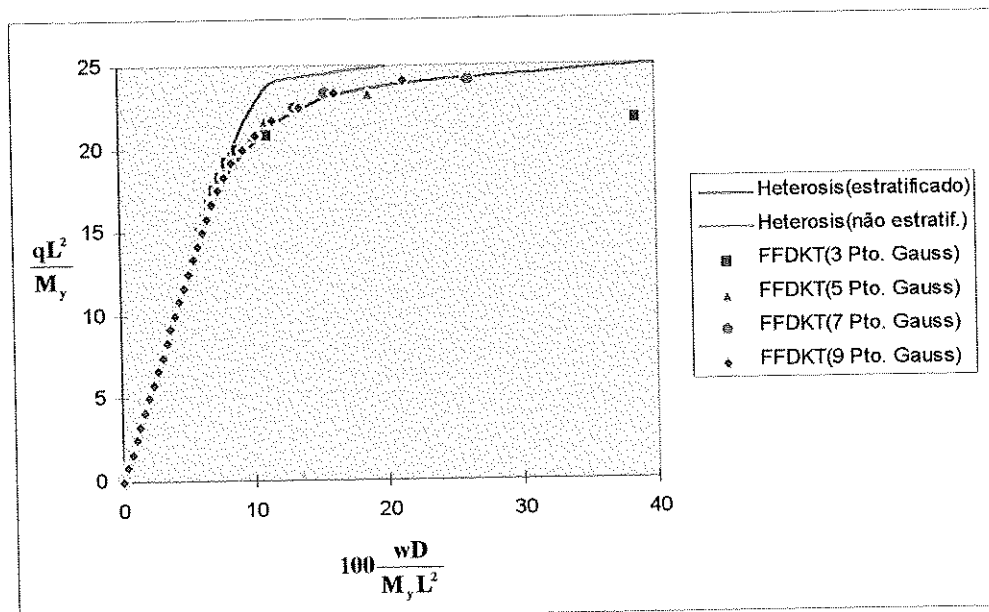


FIGURA 6.17-Curvas carga x deslocamento transversal do ponto A.

Observa-se uma boa concordância do elemento DKT utilizando 5, 7 e 9 pontos de Gauss (distribuídos na espessura) com a resposta do elemento heterosis estratificado. Os resultados com a distribuição de 3 pontos de Gauss não obtiveram bom resultado indicando uma má integração das tensões e das relações constitutivas. Deve-se notar que a resposta para o elemento heterosis não estratificado é bem diferente do modelo estratificado. Essa divergência é devido a capacidade que os modelos estratificados possuem de representar o processo de plastificação através da espessura, o que não ocorre com os modelos não estratificados.

A distribuição do esforço  $M_x$  obtido nos pontos de Gauss nas proximidades da linha B-A em coordenadas globais é apresentada na figura 6.18. Os resultados do elemento DKT utilizando 3, 5, 7, e 9 pontos de Gauss distribuídos na espessura, são confrontados com a resposta do elemento semiloof de cascas delgadas TSL6 da biblioteca do sistema LUSAS. Ambos os elementos utilizam uma rede de  $4 \times 4 \times 2$  elementos. O elemento triangular TSL6 possui 6 nós e um total de 12 graus de liberdade (considerando-se apenas os graus de liberdade de flexão). Na análise, o elemento TSL6 utiliza a regra de quadratura de Gauss com 3 pontos distribuídos na área, e na espessura é aplicada a regra de quadratura de Newton-Cotes com 5 pontos.

Ressalta-se que os resultados para o esforço  $M_x$  foram extraídos no 26º incremento referente a 86,667% da carga total aplicada.

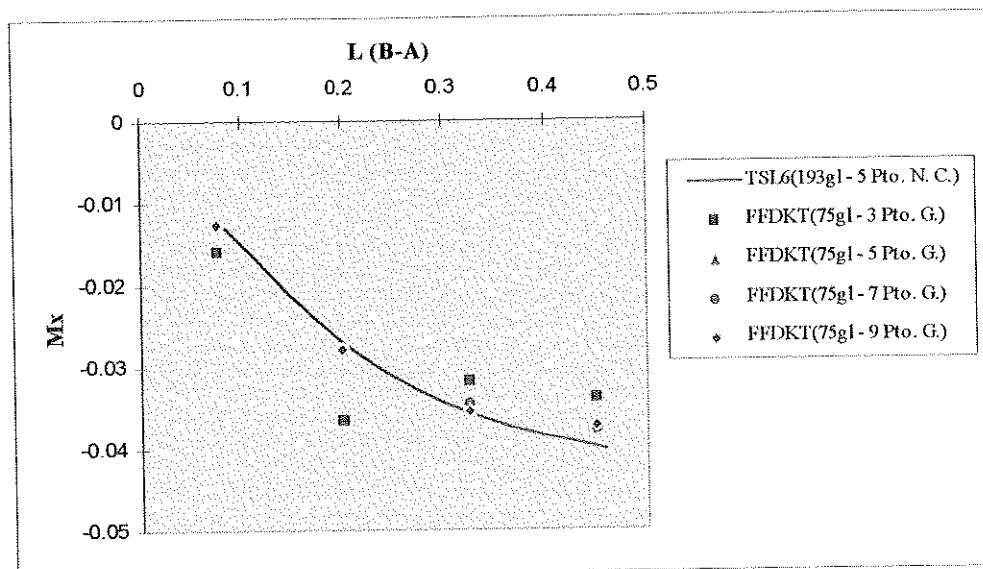


FIGURA 6.18-Distribuição do esforço  $M_x$  nas proximidades da linha B-A.

Observa-se novamente um bom comportamento do elemento para a distribuição de 5, 7 e 9 pontos de Gauss na espessura utilizando uma quantidade de graus de liberdades inferior ao elemento TSL6. Note que a integração das tensões utilizando 3 pontos prejudica o comportamento do elemento.

### 6.3.3 EXEMPLO 3: COBERTURA CILÍNDRICA

A estrutura analisada, uma casca cilíndrica semelhante àquela apresentada no item 6.2.1, é um “benchmark” bastante utilizado em análises com não linearidade física e geométrica. A casca apresentada na figura 6.19 é solicitada por um carregamento ‘ $q$ ’ por unidade de área, referente ao peso próprio. As extremidades da casca são consideradas como paredes rígidas e os lados longitudinais totalmente livres. Devido a sua simetria, discretiza-se apenas  $\frac{1}{4}$  da estrutura. Na análise do

problema elastoplástico foram utilizados 30 incrementos divididos em proporções iguais e admitidas tolerâncias em força e em deslocamento de 0,1%

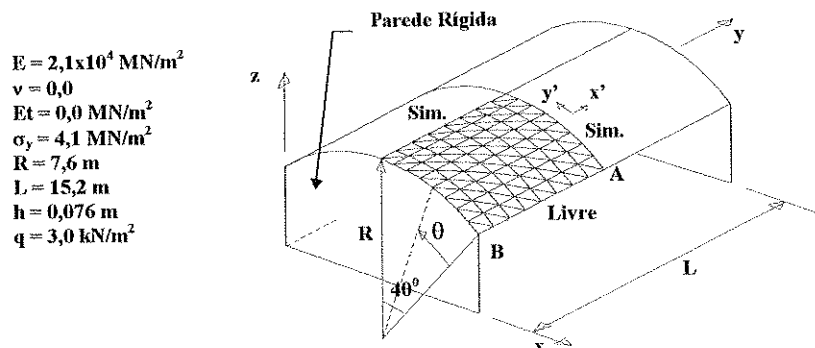


FIGURA 6.19-Geometria, malha e propriedades físicas da estrutura.

As curvas carga x deslocamento transversal do ponto A são apresentadas na figura 6.20. O elemento FFDKT é analisado utilizando 5, 7 e 9 pontos de Gauss na espessura com valores de  $\alpha=1,5$  e  $\beta=0,5$  e com 9 pontos de Gauss com os valores de  $\alpha=1,2$  e  $\beta=0,001$ .

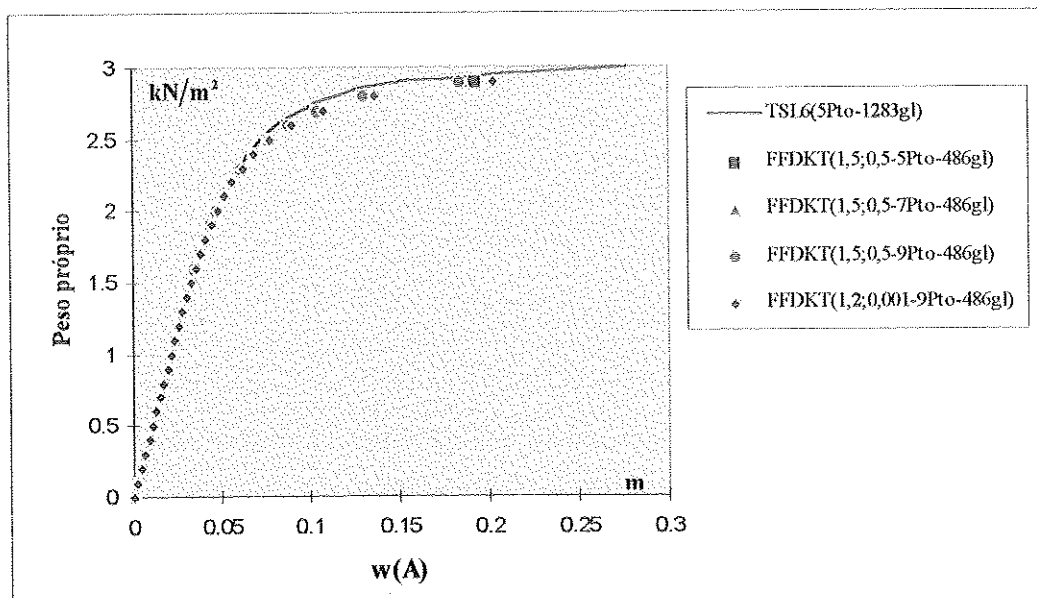


FIGURA 6.20-Curvas carga x deslocamento transversal do ponto A.



O elemento é comparado com o elemento de casca delgada TSL6 descrito no exemplo anterior. Na análise numérica, a estrutura é discretizada com uma rede de  $8 \times 8 \times 2$  para ambos os elementos. Porém, o elemento TSL6 utiliza um total de 1283 graus de liberdades enquanto o elemento aqui proposto utiliza 486 graus de liberdades.

Nota-se na figura 6.20 o bom comportamento em todas as análises com o elemento FFDKT quando confrontado com o elemento TSL6 que utiliza quase três vezes mais graus de liberdades que o elemento aqui proposto.

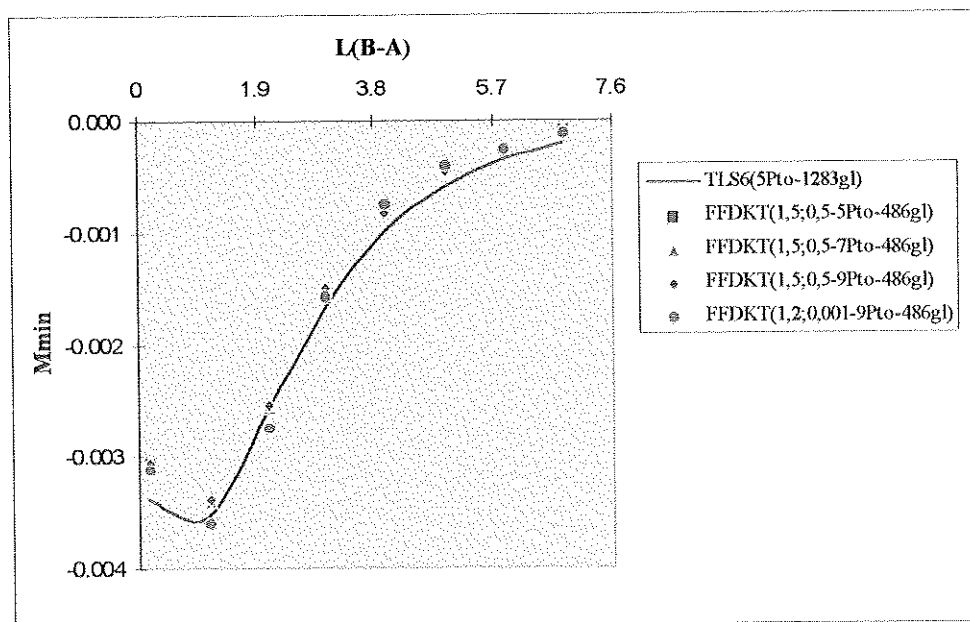


FIGURA 6.21-Distribuição do esforço  $M_{mín}$  nas proximidades da linha B-A.

A distribuição do momento fletor mínimo  $M_{mín}$  e do esforço normal máximo  $N_{máx}$  extraídos nos pontos de Gauss nas proximidades da linha B-A são apresentados nas figuras 6.21 e 6.22 respectivamente. Os resultados foram obtidos no 27º incremento referente a 90% da carga total. As respostas para a distribuição do momento mínimo  $M_{mín}$  e do esforço normal máximo  $N_{máx}$  estão em boa concordância com aqueles apresentados com o elemento TSL6, levando-se em consideração que este utiliza quase três vezes mais graus de liberdade.

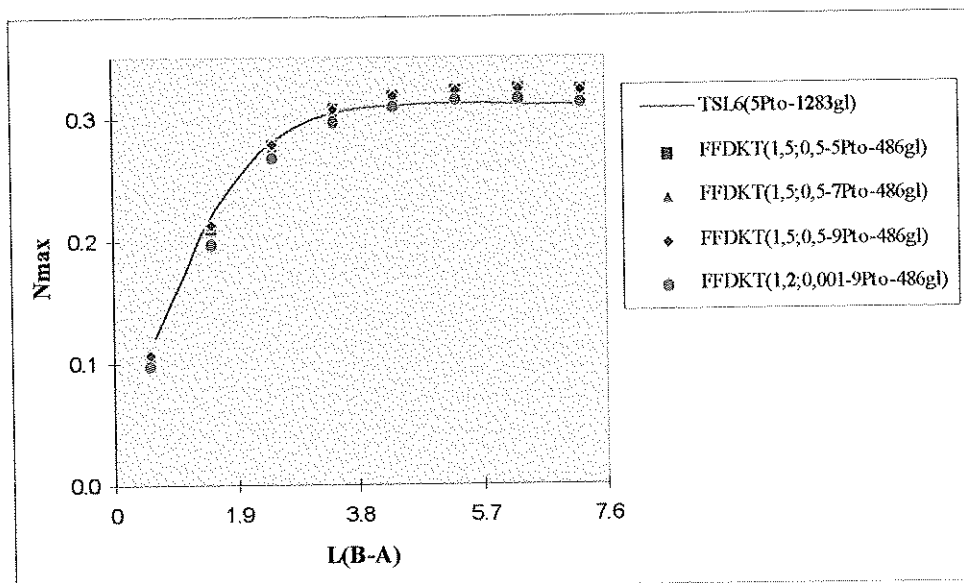


FIGURA 6.22-Distribuição do esforço Nmax nas proximidades da linha B-A.

### 6.3.4 EXEMPLO 4: CASCA QUADRÁTICA ENGASTADA

Neste exemplo analisa-se uma casca quadrática com seus lados totalmente engastados. A estrutura é solicitada por uma carga concentrada vertical aplicada em seu centro. Esta mesma estrutura foi analisada por FIGUEIRAS(1983) utilizando o critério de plastificação de Huber-Mises estendido por Hill para materiais anisotrópicos com as seguintes propriedades físicas:

#### Material isotrópico

$$\begin{aligned}
 E_x = E_y = 30000,0 & \quad , & \quad \nu = 0,30 \\
 G_{xy} = G_{xz} = G_{yz} = 11540,0 & \quad , & \quad \bar{\sigma} = \sigma_{x_0} = \sigma_{y_0} = \sigma_{45_0} = 30,0 \\
 \tau_{12_0} = \tau_{13_0} = \tau_{23_0} = 17,32 & \quad , & \quad E_p = 300,0 \quad , \quad G_p = 100,0
 \end{aligned}$$

Este discretizou apenas  $\frac{1}{4}$  da casca com uma rede de 3x3 elementos heterosis quadrilaterais de 9 nós, adotando um modelo estratificado com 8 lâminas iguais. Procurando representar o mesmo número de nós, no presente trabalho adotou-se uma rede de 6x6x2 elementos fig. 6.23. Na análise elastoplástica da casca foram utilizados

30 incrementos divididos em proporções iguais e admitidas tolerâncias em força e em deslocamento de 0,1%.

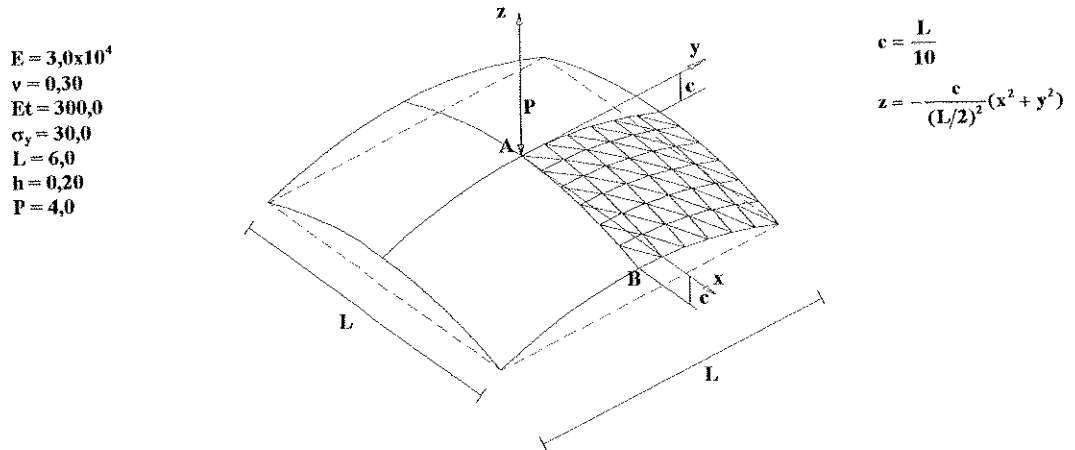


FIGURA 6.23-Geometria, malha e propriedades físicas da estrutura.

As curvas carga x deslocamento transversal do ponto A (centro da casca) são apresentadas na figura 6.24. O elemento aqui proposto é analisado de forma semelhante ao exemplo anterior, comparando seus resultados com o elemento heterosis.

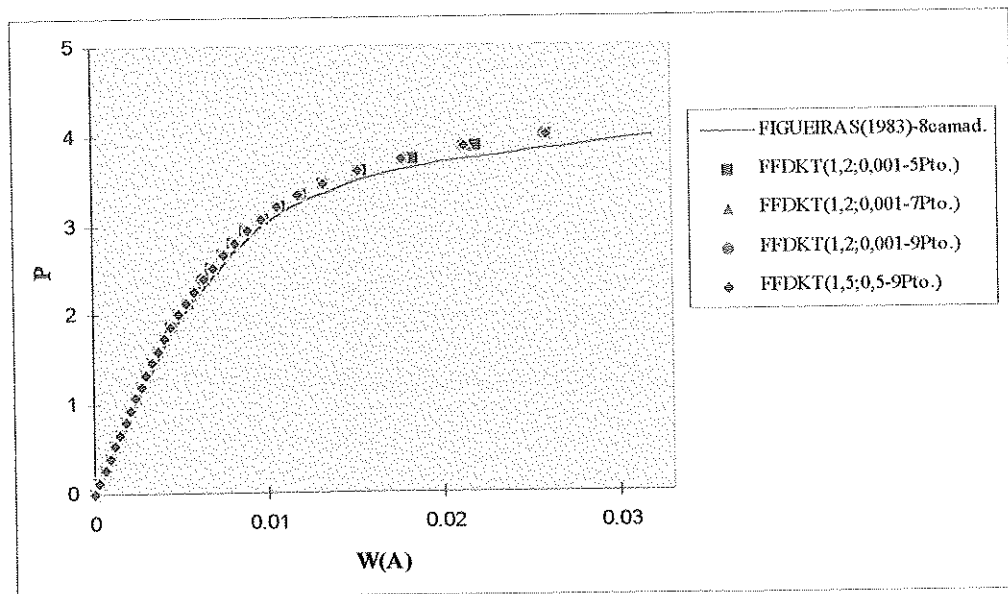


FIGURA 6.24-Curvas carga x deslocamento transversal do ponto A.

Observa-se uma boa concordância dos resultados apresentados pelo elemento FFDKT. Porém, se os modelos elastoplásticos de ambos os elementos utilizassem o mesmo critério de plastificação, provavelmente as respostas seriam mais coincidentes.

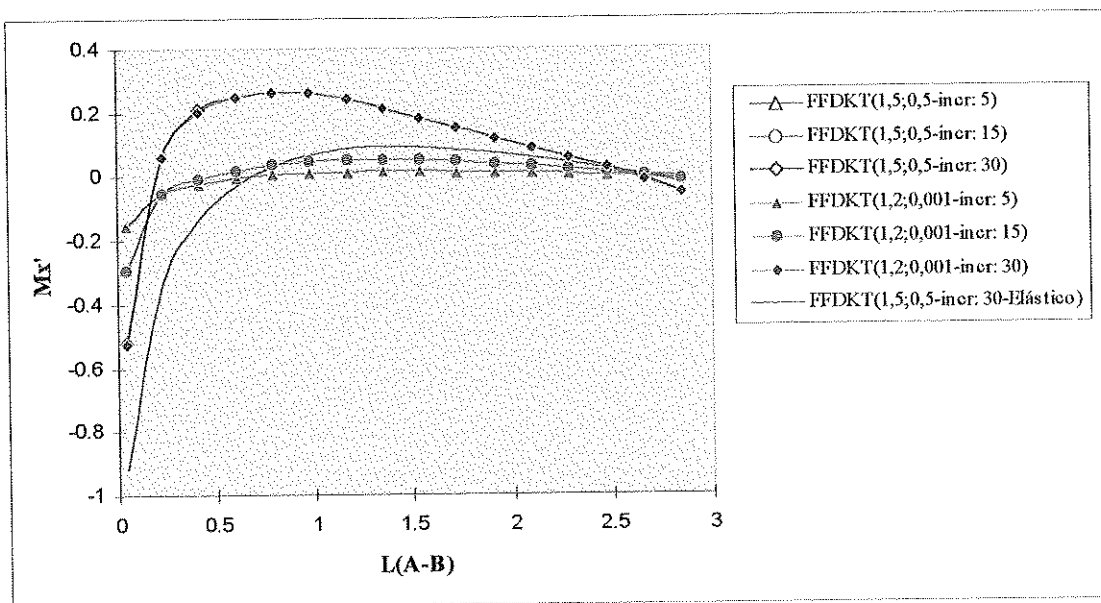


FIGURA 6.25-Distribuição do esforço  $M_{x'}$  nas proximidades da linha A-B.

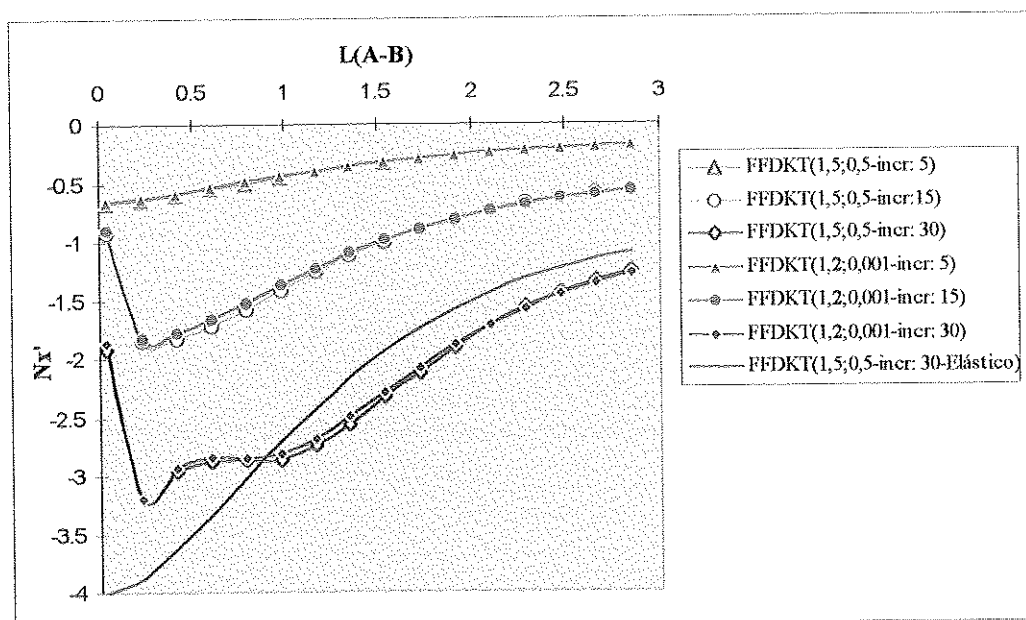


FIGURA 6.26-Distribuição do esforço  $N_{x'}$  nas proximidades da linha A-B.

Apresenta-se nas figuras 6.25 e 6.26 a distribuição dos esforços respectivos  $\mathbf{Mx}'$  e  $\mathbf{Nx}'$  nas coordenadas locais, extraídos nos pontos de Gauss nas proximidades da linha **A-B**. Os resultados foram obtidos para os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  (1,5;0,5) e (1,2;0,001) no 5<sup>o</sup>, 15<sup>o</sup> e 30<sup>o</sup> incremento de carga. A resposta linear referente ao ultimo incremento (30<sup>o</sup>) é também apresentada para os valores de  $\alpha=1,5$  e  $\beta=0,5$ .

Nas análises para os esforços a estrutura foi discretizada com uma rede de 16x16x2 elementos. Observa-se nas distribuições dos esforços  $\mathbf{Mx}'$  e  $\mathbf{Nx}'$  uma boa concordância entre as duas análises com os dois valores de  $\alpha$  e  $\beta$  propostos. Nota-se também, comparando os resultados elástico e elastoplástico para o 30<sup>o</sup> incremento, uma tentativa de uniformizar a distribuição dos esforços no modelo elastoplástico.

## Capítulo 7

### CONCLUSÃO

---

Neste trabalho apresentou-se uma formulação do Método dos Elementos Finitos (MEF) para a modelagem elastoplástica de cascas. A estrutura em casca é formada pela composição de elementos triangulares planos que incorporam o comportamento de flexão e membrana. Esta forma de abordar o problema é bastante simples e de fácil implementação, visto que, só é necessário a existência das matrizes de rigidez e deformação referentes aos estados de flexão (elemento de flexão de placas) e membrana (elemento de membrana). Entretanto, a discretização da superfície curva é feita de forma aproximada. Assim, a estrutura é representada por uma superfície poliédrica composta por uma rede de elementos planos triangulares, que quanto mais refinada, melhor representará a geometria. Porém, apesar da simplicidade, essa maneira de abordar o problema não deixa de ser eficiente, principalmente quando se trata de problemas não-lineares. Além do mais, em grande parte das situações práticas as estruturas são formadas por elementos planos, onde o problema da aproximação da geometria é eliminado e a estrutura é discretizada de forma exata.

Uma forma mais elegante para tratar o problema pelo MEF seria através da utilização de elementos de casca curvos. Entretanto, esta abordagem é bem mais complexa e trabalhosa. Além disso, a presença da curvatura torna mais difícil a representação dos modos de corpo rígido e a satisfação da compatibilidade interelemental de deslocamentos, pois os estados de flexão e membrana trabalham de forma acoplada BREBBIA & CONNOR(1975). Um outro ponto ressaltado por

ZIENKIEWICZ & TAYLOR(1991), é a dificuldade, em certos casos, de tratar a ligação da cascas com nervuras e vigas de borda, dificuldades que não são encontradas quando se utilizam elementos planos.

Pode-se ainda, abordar o problema das cascas como um meio contínuo tridimensional, utilizando-se elementos sólidos. Esta formulação conduz a matrizes de grandes dimensões, aumentando excessivamente o custo computacional. Além disso, quando a estrutura analisada é delgada (situação muito comum nas cascas) podem ocorrer problemas de mau condicionamento das matrizes.

Uma outra proposta para modelar as estruturas em casca, seria através da utilização de elementos de cascas desenvolvidos a partir da degeneração de um elemento sólido tridimensional. Porém, este tipo de abordagem em determinados problemas apresentam alguns fenômenos indesejáveis conhecidos como travamento (“locking”).

Neste trabalho, os efeitos de flexão no elemento de casca são simulados pelo elemento de flexão de placas DKT (Discrete Kirchhoff Triangle) e o estado de tensão plana é representado pelo elemento de membrana desenvolvido através da formulação livre. Conforme apresentado em MILITELLO & FELIPPA(1991), tanto o elemento de flexão quanto o elemento de membrana são considerados elementos de alta performance, ou seja, esses elementos conseguem obter resultados precisos com redes pouco refinadas e possuem baixa sensibilidade a distorções. Além disso, ambos os elementos satisfazem o Patch test, possuindo portanto, garantia de convergência.

Na formulação do elemento DKT, a contribuição da deformação por esforço cortante não é considerada, tornando-o específico para o estudo de placas delgadas. Conseqüentemente, na análise de cascas os modelos devem ser restritos a estruturas delgadas. Isto não chega a ser um problema, pois, como mencionado anteriormente, esta situação é muito comum nas estruturas em casca. Além disso, o elemento não apresenta o problema de travamento de cisalhamento (“shear locking”), muito

comum nos elementos formulados a partir das hipóteses de Reissner-Mindlin onde a deformação por esforço cortante é considerada.

Ao contrário do elemento de flexão de placas DKT, as funções de forma do elemento que simula o comportamento de membrana na casca são não conformes. Entretanto, este elemento possui garantia de convergência imposta pela formulação livre. Uma outra vantagem deste elemento, é a presença do grau de liberdade rotacional. A liberdade rotacional propicia uma modelagem mais coerente da estrutura em casca, além do mais, evita que a matriz de rigidez global apresente singularidades nos casos onde os elementos da estrutura são coplanares ou aproximadamente coplanares.

Nas situações onde se utilizam elementos de membrana que não possuem o grau de liberdade rotacional, esse problema pode ser contornado pela restrição ou eliminação deste grau, entretanto, isto nem sempre é simples. Uma outra forma de evitar tais problemas, bastante comum, porém de eficácia duvidosa, é a imposição de coeficientes de mola nas posições referentes ao grau de liberdade rotacional. Além disso, um outro ponto importante com relação ao grau de liberdade rotacional, é que este facilita a ligação da casca com elementos de viga, permitindo uma perfeita transmissão de momentos entre estes elementos.

Com relação ao modelo elastoplástico, utilizou-se um algoritmo implícito de integração das tensões. Este algoritmo, detalhado no capítulo 5, é incondicionalmente estável. Um algoritmo é dito condicionalmente estável, quando ele deve obedecer certas restrições com relação ao passo de carga para ser estável. Além disso, o algoritmo permite a definição da matriz tangente elastoplástica consistente que preserva a taxa de convergência quadrática do método de Newton-Raphson. Outros procedimentos, como o explícito, além de não serem incondicionalmente estáveis, não permitem a definição (de forma simétrica) do operador tangente elastoplástico consistente, inviabilizando sua aplicação na atualização da matriz de rigidez tangente. Para esses casos, utiliza-se a matriz tangente elastoplástica clássica, definida para



passos infinitesimais, provocando a perda da taxa de convergência quadrática do método de Newton.

A matriz tangente elastoplástica consistente é deduzida, para o modelo elastoplástico proposto, através da linearização do algoritmo implícito. Esta matriz é utilizada juntamente com o procedimento incremental-iterativo adotado para a solução do problema não-linear. Este procedimento é mais adequado para tratar o problema não-linear, pois, o erro provocado pela linearização do incremento é reduzido através do processo iterativo. No procedimento aqui adotado, a matriz de rigidez tangente é sempre atualizada, fazendo uso de um modelo estratificado. Este modelo consiste em dividir a espessura do elemento finito em camadas ou lâminas, sendo de grande importância em análises elastoplásticas, pois, permite acompanhar a evolução da plastificação através da espessura, além do mais, é possível modelar estruturas laminares compostas por materiais diferentes utilizando este modelo.

Nos exemplos elástico-lineares analisados, pode-se verificar o bom desempenho do elemento de casca. Os gráficos de convergência demonstram uma boa performance deste quando confrontado com outros elementos considerados de bom desempenho. Os resultados obtidos para os esforços confirmam o seu bom comportamento, representando bem a distribuição destes sobre linhas definidas nas estruturas. Com relação ao estudo dos parâmetros livres  $\alpha$  e  $\beta$ , foi possível propor valores ótimos para estes, permitindo melhorar de forma significativa o desempenho do elemento de casca. Entretanto, ressalta-se a necessidade de estudos mais aprofundados a respeito desses parâmetros, envolvendo um maior número de estruturas em casca. Deve-se destacar ainda que, em todas as análises de convergência, para as três estruturas estudadas, utilizando diversos valores dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta$ , o elemento obteve convergência, demonstrando ser bastante confiável.

Inicialmente, nos exemplos não-lineares, procurou-se analisar o comportamento isolado do elemento de membrana e do elemento de flexão de placas.

O elemento de membrana apresenta um bom desempenho, levando em consideração a quantidade inferior de graus de liberdade, utilizado tanto na análise do deslocamento quanto do esforço. Já na análise do comportamento do elemento de flexão, deu-se ênfase ao processo de integração numérica através da espessura, verificando a quantidade mínima de pontos de Gauss necessários para se obter uma integração precisa. Observou-se que a distribuição com três pontos de Gauss não proporciona uma boa integração das tensões e das relações constitutivas. Dessa forma, para se garantir uma boa modelagem da estratificação através da espessura, deve-se utilizar mais de três pontos de integração. Finalmente, nos exemplos não-lineares das estruturas em casca, pode-se observar a boa concordância dos resultados, verificando-se novamente que distribuições através da espessura a partir de cinco pontos de Gauss proporcionam uma boa integração. Entretanto, ressalta-se que, no caso de modelos estratificados com propriedades físicas diferentes para as camadas, é necessário um outro estudo sobre essa distribuição, pois, provavelmente será encontrada uma quantidade mínima de pontos de Gauss superior a cinco.

O modelo elastoplástico adotado, relativamente simples, serve de base para futuras modelagem de materiais mais complexos, tais como: concreto armado, compostos fibrosos, etc. A implantação de novos critérios de plastificação específicos para certos tipos de materiais, considerando-se uma distribuição anisotrópica (possibilitando caracterizar diferentes taxas de armaduras em diferentes direções, para o caso de estruturas de concreto armado, por exemplo), juntamente com um modelo estratificado, proporciona maiores aplicações na análise do comportamento elastoplástico das estruturas em casca. Além disso, pode-se sugerir ainda, como continuidade deste trabalho, a consideração dos efeitos não-lineares geométricos, muito importantes no comportamento das cascas.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

---

---

- ALFANO, G.; ROSATI, L.; VALOROSO, N. (1996). A step-consistent algorithm in finite-step elastoplasticity. In: JOINT CONFERENCE OF ITALIAN GROUP OF COMPUTATIONAL MECHANICS AND IBERO-LATIN AMERICAN ASSOCIATION OF COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING. Padova, Italy, 1996. *Proceedings*. Padova, AIMETA/AMC. p.305-308.
- ALLMAN, D.J. (1984). A compatible triangular element including vertex rotations for plane elasticity analysis. *Computer & Structures*, n.19, p.1-8.
- ALLMAN, D.J. (1988). The constant strain triangle with drilling rotations: a simple prospect for shell analysis. In: WHITEMAN, J.R. *Mathematics of Finite Elements and Applications VI*. Academic Press, New York, p.233-240.
- ALVIN, K.; DE LA FUENTE, H.M.; HAUGEN, B.; FELIPPA, C.A. (1992). Membrane triangles with corner drilling freedoms-I. The EFF element. *Finite Elements in Analysis and Design*, n.12, p.163-187.
- ARGYRIS, J.H.; DUNNE P.C.; MALEJANNAKIS, G.A.; SCHELKE, E. (1977). A simple triangular facet shell element with application to linear and nonlinear equilibrium and elastic stability problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, n.10, p.371-403, n.11, p.97-131.

- BATHE, K.J. (1982). *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood Cliffs, Prentice-Hall.
- BATOZ, J.L. (1982). An explicit formulation for an efficient triangular plate-bending element. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v.18, p.1077-1089.
- BATOZ, J.L.; BATHE, K.J.; HO, L.W. (1980). A study of three-node triangular plate bending elements. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v.15, p.1771-1812.
- BERGAN, P.G. (1980). Finite elements based on energy orthogonal functions. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v.15, p.1541-1555.
- BERGAN, P.G.; FELIPPA, C.A. (1985). A triangular membrane element with rotational degrees of freedom. *Comp. Meths. in Appl. Mech. Eng.*, v.50, p.25-69.
- BERGAN, P.G.; FELIPPA, C.A. (1986). Efficient implementation of a triangular membrane element with drilling freedoms. In: HUGHES, T.J.R.; HINTON, E. *Finite element methods for plate and shell structures*. 1.ed. Swansea,U.K., Cap.5, p.128-152.
- BERGAN, P.G.; HANSSEN, L. (1976). A new approach for deriving 'good' element stiffness matrices. In: WHITEMAN, J.R. *The mathematics of finite elements and applications II*. London, Academic Press, p.83-96.
- BERGAN, P.G.; HANSSEN, L.; SYVERTSEN, T.G. (1978). Stiffness derivation based on element convergence requirements. In: CONFERENCE ON MATHEMATICS OF FINITE ELEMENTS AND APPLICATIONS, Brunel University, 1978. *Proceedings*. p.83-96.
- BERGAN, P.G.; NYGARD, M.K. (1984). Finite elements with increased freedom in choosing shape functions. *Int. J. Numer. Methods Eng.* v.20, p.643-663.

- BERGAN, P.G.; NYGARD, M.K. (1986). Nonlinear shell analysis using free formulation finite elements. In: BERGAN, P.G. *et al. Finite elements methods for nonlinear problems*. Springer-Verlag, Berlim, p.317-338.
- BERGAN, P.G.; NYGARD, M.K.; BJAERUM, R.O. (1990). Free formulation elements with drilling freedoms for stability analysis of shells. In: KRATZIG, W.B.; OÑATE, E. *Computational mechanics of nonlinear response of shells*. Springer-Verlag, Berlim, p.164-182.
- BREBBIA, C.A., CONNOR, J.J. (1975). *Metodos de los elementos finitos en la ingenieria*. España, Colegio Oficial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.
- CHEN, H.C. (1992). Evaluation of Allman triangular membrane element used in general shell analysis. *Computer & Structures*, v.43, n.5, p.881-887.
- COOK, R.D. (1974). Improved two-dimensional finite element. *J. Structural Div. ASCE*, v.9, p.1851-1863.
- COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E. (1989). *Concepts and applications of finite element analysis*. 3.ed. Madison, John Wiley & Sons.
- COWPER, G.R.; LINDENBERG, G.M.; OLSON, M.D. (1970). A shallow shell finite element of triangular shape. *Int. J. Solid Struct*, v.6, p.1133-1156.
- CRISFIELD, M.A. (1991). *Non-linear finite element analysis of solids and structures*. v.1, England, John Wiley & Sons.
- DHATT, G.; MARCOTTE, L.; MATTE, Y. (1986). A new triangular discrete Kirchhoff plate/shell element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.23, p.453-470.

- DRUCKER, D.C. (1951). A more fundamental approach to plastic stress-strain solution. U. S. NAT. CONG. APPL. MECH., 1st. *Proceedings*. p.487-91.
- FELIPPA, C.A.; ALEXANDER, S. (1992). Membrane triangles with corner drilling freedoms-III. Implementation and performance evaluation. *Finite Elements in Analysis and Design*. n.12, p.203-239.
- FELIPPA, C.A.; BERGAN, P.G. (1987). A triangular bending element based on an energy-orthogonal free formulation. *Comp. Meths. in Appl. Mech. Eng.*, v.61, p.129-160.
- FELIPPA, C.A.; MILITELLO, C. (1992). Membrane triangles with corner drilling freedoms-II. The ANDES element. *Finite Elements in Analysis and Design*. n.12, p.189-201.
- FIGUEIRAS, J.A. (1983). *Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells*. Swansea. Thesis (Ph. D.) - Department of Civil Engineering, University College of Swansea.
- GREENE, B.E.; STROME, D.R.; WEIKEL, R.C. (1961). Application of the stiffness method to the analysis of shell structures. In: AVIATION CONFERENCE OF ASME, Los Angeles, 1961. *Proceedings*.
- IRONS, B.; AHMAD, S. (1980). *Techniques of finite elements*. Chichester, England, Ellis Horwood Ltd.
- IRONS, B.M; RAZZAQUE, A. (1972). Experiences with the patch test for convergence of finite elements. In: Aziz, K. *Mathematical foundations of the finite element method with application to partial differential equations*. New York, Academic Press, p.557-558.

- JETTEUR, P. (1986). Implicit integration algorithm for elastoplasticity in plane stress analysis. *Eng. Comput.*, v.3, p.251-253.
- JEYACHANDRABOSE, C.; KIRKHOPE, J.; BABU, C.R. (1985). An alternative explicit formulation for the DKT plate-bending element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v.21, p.1289-1293.
- MILITELLO, C.; FELIPPA, C.A. (1991). The first ANDES elements: 9-dof plate bending triangles. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, v.93, p.217-246.
- NAYAK, G.C.; ZIENKIEWICZ, O.C. (1972). Elasto-plastic stress analysis. Generalisation for various constitutive relations including strain softening. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.5, p.113-35.
- ÔNATE, E. (1992). *Calculo de estructuras por el metodo de elementos finitos: análisis elástico lineal*. Barcelona, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería.
- OWEN, D.R.J.; HINTON, E. (1980). *Finite elements in plasticity: theory and practice*. Swansea, Pineridge Press.
- PELETEIRO, S.C. (1996). *Utilização da formulação livre para desenvolvimento de um elemento de membrana com liberdades rotacionais*. São Carlos. 101p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PROENÇA, S.P.B. (1988). *Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: análise crítica e contribuições*. São Carlos. 330p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

- REZENDE, M.N. (1990). *Análise de pavimentos de edifícios pelo método dos elementos finitos em microcomputador*. São Carlos. 87p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RUNESSON, K.; SAMUELSSON, A. (1985). Aspects on numerical techniques in small deformation plasticity. In: MINDDLETON, J. *et al. Numerical methods in engineering: theory and applications*, NUMETA 85. A. A. Balkema, Rotterdam, v.1, p.337-348.
- SIMO, J.C.; HUGHES, T.J.R. (1988). *Elastoplasticity and viscoplasticity: computational aspects*, to be published.
- SIMO, J.C.; TAYLOR, R.L. (1985). Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, n.48, p.101-118.
- SIMO, J.C.; TAYLOR, R.L. (1986). A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v.22, p.649-670.
- STRICKLIN, J.A.; HAISLER, W.; TISDALE, P.; GUNDERSON, R. (1969). A rapidly converging triangular plate element. *AIAA J.*, v.7, n.1, p.180-181.
- YANG, H.T.Y.; SAIGAL, S.; LIAW, D.G. (1990). Advances of thin shell finite elements and some applications-version I. *Computer & Structures*, v.35, no.4, p.481-504.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. (1991). *The finite element method*. 4.ed. v.1 and v.2, London, McGraw-Hill.