

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS**

**UMA FORMULAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO
COM TRÊS PARÂMETROS NODAIS EM DESLOCAMENTOS PARA
PLACAS DELGADAS E SUAS APLICAÇÕES A PROBLEMAS DE
ENGENHARIA ESTRUTURAL**

LUTTGARDES DE OLIVEIRA NETO

Tese apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, da
Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para
obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Batista de Paiva

São Carlos

1998

Aos meus pais
Luttgardes e Thelma

AGRADECIMENTOS

Gostaria de primeiramente agradecer ao professor Dr. João Batista de Paiva pela paciente e dedicada orientação além da amizade e confiança mútuas aprofundadas neste dez anos de convívio. Tenho pleno conhecimento de que sem sua básica contribuição e incentivo este trabalho não seria concluído e gostaria de deixar aqui minha sincera gratidão. Meu desejo é ter a oportunidade de continuar este convívio que me acrescenta pessoal e profissionalmente.

Agradeço aos meus familiares, pais, irmãos, sobrinhos, avós pelo amor e carinho sempre demonstrados e pela compreensão às minhas ausências.

Agradeço à Patricia Karst Caminha, minha companheira e amiga, pela paixão companheirismo e carinho.

Aos amigos, sempre, uma agradável companhia, mesmo aqueles distantes, agradeço pela torcida e incentivo.

Aos colegas, professores e funcionários de São Carlos (Departamento de Engenharia de Estruturas), Guaratinguetá (Departamento de Projetos e Construção Civil) e de Bauru (Departamento de Engenharia Civil) meus agradecimentos pelo convívio sempre proveitoso e estimulante.

Agradeço à Sra. Maria Nadir Minatel pela colaboração na pesquisa bibliográfica e revisão da mesma.

Agradeço também a CAPES pela bolsa concedida que contribuiu para o bom encaminhamento do trabalho.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
2. FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS DELGADAS	8
2.1. Introdução	8
2.2. Hipóteses básicas	8
2.3. Relações básicas para placas isotrópicas	9
2.4. Equações de placas em coordenadas polares	17
2.5. Soluções fundamentais de placas	24
3. EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO DE PLACAS	35
3.1. Introdução	35
3.2. Equação integral para um ponto do domínio	35
3.3. Equação integral para um ponto do contorno	46
3.4. Integrais de domínio para o carregamento	60
4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO: IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	63
4.1. Introdução	63
4.2. Discretização das equações integrais	63
4.2.1. Aproximação das variáveis do problema	65
4.2.2. Transformação das equações integrais em equações algébricas	68
4.3. Deslocamentos para pontos internos	71
4.4. Esforços para pontos internos	72
4.5. Propriedades da matriz H	77
4.6. Avaliação numérica da formulação proposta	79

5. PLACAS EM ASSOCIAÇÃO COM OUTROS ELEMENTOS ESTRUTURAIIS	85
5.1. Introdução	85
5.2. Associação placa-pilar	85
5.3. Associação placa-grelha	90
5.4. Avaliação numérica da formulação proposta para análise das ligações com elementos lineares	93
6. CONCLUSÕES	116
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	118
8. BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR	128

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Elementos de placa com tensões e esforços atuantes devidos à flexão	10
Figura 2.2 - Resultante do momento volvente em um ponto do contorno da placa	14
Figura 2.3 - Tensões e esforços resultantes no elementos de placa 123	15
Figura 2.4 - Contorno da placa com direções r , n e s , em referência às coordenadas cartesianas (x, y) e polares (r, θ) , para um ponto genérico P	17
Figura 2.5 - Força cortante equivalente num círculo de raio r devido à carga unitária aplicada em s	26
Figura 2.6 - Sistemas de coordenadas (m, u) e (n, s)	27
Figura 3.1 - Coordenadas (n, s) no ponto Q do contorno	37
Figura 3.2 - Cantos da placa e momentos volventes resultantes	41
Figura 3.3 - Contorno circular acrescido a um canto da placa	47
Figura 3.4 - Sistema de coordenadas referentes aos pontos anterior e posterior aos cantos λ^- e λ^+	55
Figura 3.5 - Região de carregamento Ω_g	60
Figura 4.1 - Discretização do contorno Γ da placa	64
Figura 4.2 - Nó duplo em canto da placa	64
Figura 4.3 - Coordenada adimensional ξ no elemento de contorno linear	65
Figura 4.4 - Funções aproximadoras cúbicas $\varphi(\xi)$	67
Figura 4.5 - Placa com carregamento transversal nulo e deslocamento e giros de corpo rígido	77
Figura 4.6 - Placa quadrada e apoiada nos quatro cantos	80
Figura 4.7 - Placa com dois lados engastados e dois livres	83
Figura 5.1 - Conjunto placa-pilar nas posições inicial e deformada	86
Figura 5.2 - Esforços de interação placa-grelha	91

Figura 5.3 - Placa quadrada e apoiada nos quatro cantos e vigas ao longo das bordas	93
Figura 5.4 – Pavimento de edifício	100
Figuras 5.5 a 5.12 - Momentos fletores em seções A, B, C e D	101 a 104
Figura 5.13 - Placa apoiada em seu contorno e em quatro colunas em seu domínio	105
Figuras 5.14 a 5.19 - Deslocamentos e momentos fletores em seções	106 a 109
Figura 5.20 – Pavimento de edifício apoiado em quatro colunas	110
Figuras 5.21 a 5.28 - Deslocamentos e momentos fletores em seções	111 a 114

RESUMO

OLIVEIRA NETO, L. Uma formulação do método dos elementos de contorno com três parâmetros nodais em deslocamentos para placas delgadas e suas aplicações a problemas de engenharia estrutural. São Carlos.

Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma nova formulação direta do Método dos Elementos de Contorno (M.E.C.) para análise de placas, utilizando a teoria de Kirchhoff, admitindo três parâmetros nodais de deslocamentos para sua representação integral: deslocamento transversal e suas derivadas nas direções normal e tangencial ao contorno.

Dois valores nodais são usados para os esforços, momento fletor normal m_n e força cortante equivalente V_n . Desta forma são escritas três equações integrais de contorno por nó, obtidas a partir da discretização da placa, segundo a forma usual do método.

A vantagem mais perceptível desta formulação é a possibilidade de se fazer a ligação da placa analisada pelo M.E.C. com elementos lineares, representados por três valores nodais de deslocamentos que passam a ser compatibilizados diretamente, para a análise de edifícios.

São apresentados exemplos numéricos da formulação e das ligações para comprovação da formulação.

Palavras-chave: Método dos elementos de contorno; Placas delgadas; Análise de pavimentos.

ABSTRACT

OLIVEIRA NETO, L. A boundary element method formulation for plate bending analysis with three nodal displacement parameters and its application for structural problems. São Carlos.

Tese (doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.

The aim of this work is to present an alternative formulation for plate bending analysis, using Kirchhoff's theory, in which the boundary equation for displacements and its derivative in tangential and normal directions to the boundary for each boundary node are used. The efforts, according to Kirchhoff's theory, are the normal bending m_n and the equivalent shear force V_n .

This formulation is adequate for the analysis of plates coupled with flexible columns and beams because these structural elements have three nodal displacement values at its nodes.

Many examples of single plates and buildings slab are presented using the formulation proposed in this work.

Keywords: Boundary element method; Plate bending; Floor slab analysis.

1. INTRODUÇÃO

A Engenharia de Estruturas é a área da Engenharia Civil onde se faz a concepção e, posteriormente, a análise comportamental dos elementos estruturais, e suas interações, que compõem as diversas obras construídas pelo homem. O projeto estrutural visa, a partir desta análise, dimensionar estes elementos estruturais, quando solicitados por diversas ações externas.

As placas são um destes elementos estruturais e são identificadas como elementos planos, submetidos a ações externas na direção transversal ao seu plano médio.

Duas teorias principais foram desenvolvidas para a análise do comportamento das placas; a primeira, denominada Teoria Clássica, foi formulada por KIRCHHOFF (1850) cujas hipóteses simplificadoras, analisando apenas placas delgadas, admitem quatro variáveis no contorno do problema, resultando uma equação diferencial de 4ª ordem; REISSNER (1944) e MINDLIN (1951) formularam teorias que, considerando as deformações por cisalhamento, levam a equações diferenciais de 6ª ordem. Estas teorias apresentam, portanto, resultados mais completos que os da Teoria Clássica, inclusive permitindo a análise de placas espessas.

As soluções analíticas dessas equações são limitadas, conhecidas apenas em casos mais simples, porém, com a utilização de técnicas numéricas de solução de sistemas de equações diferenciais pôde-se ampliar os casos de análise. Com os computadores a análise numérica foi facilitada.

Atualmente dispõem-se de três métodos numéricos, dois denominados métodos de domínio - Método das Diferenças Finitas (M.D.F.) e Método dos Elementos Finitos (M.E.F.) - que associam pontos no domínio e no contorno do problema em suas formulações, e o mais recente, Método dos Elementos de Contorno (M.E.C.), formulado com equacionamento integral ao longo do contorno do problema, em contraposição aos anteriores.

O Método das Diferenças Finitas apareceu com o trabalho de SOUTHWELL (1946) e é ainda utilizado em diversos problemas de engenharia.

O Método dos Elementos Finitos, o mais difundido e utilizado, apareceu em trabalhos desenvolvidos por TURNER (1956) e ARGYRIS e KELSET (1960).

Já o Método dos Elementos de Contorno teve seu aparecimento a partir de estudos de problemas utilizando equações integrais, iniciados no século passado, aplicadas à teoria da elasticidade por BETTI (1872). Os trabalhos com equações integrais na elasticidade bidimensional continuaram sendo realizados pelos russos nos anos 50 através de MUSKELISHVILI (1953), MIKHLIN (1957) e posteriormente por KUPRADZE (1965), não utilizando-se ainda as variáveis reais do problema, por isso foram denominados métodos indiretos.

RIZZO (1967) apresentou, ainda para a elasticidade bidimensional, o método na sua forma direta, isto é, são envolvidas as variáveis reais do problema em seu equacionamento.

Os primeiros trabalhos em formulação indireta na análise de placas foram apresentados por ALTIERO e SIKARSKIE (1978) e por WU e ALTIERO (1979), onde analisaram placas reais contidas em um contorno auxiliar infinito, de solução conhecida. TOTTENHAM (1979) também apresentou uma comparação entre as formulações direta e indireta.

O método direto para análise de placas infinitas, com furos, de contorno não carregado foi proposto por HANSEN (1976) seguido de estudos de BEZINE (1978), BEZINE e GAMBY (1978) e STERN (1979) que desenvolveram formulações diretas baseadas na identidade de Green, considerando-se duas equações integrais relativas ao deslocamento transversal e à sua derivada na direção normal ao contorno.

VAN DER WEEËN (1982) propôs uma formulação para análise de placas espessas baseada na teoria de Reissner, escrevendo três equações integrais para as variáveis nodais, deslocamento transversal e as derivadas nas direções normal e tangencial ao contorno.

A partir dessas formulações básicas, formulações indireta e direta e usando-se as teorias de placas de Kirchhoff e de Reissner-Mindlin, diversas análises de placas se seguiram: estudos para aperfeiçoamento numérico do método como sobre quais equações integrais são utilizadas, do deslocamento transversal e de sua derivada direcional ou apenas de deslocamento transversal para pontos distintos; estudos sobre o melhor posicionamento do ponto-fonte, ao qual as equações correspondem; estudos sobre os tipos de integração mais adequados (analítica ou numérica) e sobre as funções aproximadoras das variáveis sobre os elementos; formas de cálculo de integrais singulares e quase singulares e de integrais de domínio; análise de placas sob diversos tipos de vinculação e de carregamento, apoiadas sobre base elástica e sobre estacas; análise da associação com vigas e colunas no contorno e no domínio; análise não-linear, física e geométrica; vibração (análise modal e transiente); placas com deslocamentos finitos; combinação do M.E.C. com o M.D.F. e com o M.E.F. para diversas análises aproveitando as vantagens apresentadas por cada método.

A formulação indireta, apesar de ser a menos utilizada, tem sido motivo de estudos como os de VABLE e ZHANG (1992), que utilizaram esquemas de integração analítica e funções fictícias aproximadas por polinômios para análise de placas, e o trabalho de VENTSEL (1997), com integrais singulares e hiper-singulares.

A teoria de Reissner-Mindlin, também menos utilizada que a Teoria Clássica de Kirchhoff, foi utilizada em diversos estudos como os de KARAM (1986), BARCELLOS e SILVA (1987), LONG et al. (1988), WESTPHAL E BARCELLOS (1989) e RIBEIRO e VENTURINI (1989). Alguns trabalhos analisando o comportamento não-linear geométrico de placas foram apresentados posteriormente como os de XIAO-YAN et al. (1990) e HE e QIN (1993). A análise não-linear física de placas foi realizada em trabalhos de KARAM e TELLES (1992)

e RIBEIRO (1992), ambos utilizando o método incremental-iterativo com momentos iniciais.

A formulação direta, fundamentada na Teoria Clássica de Kirchhoff, é a mais utilizada para análise de placas e diversos trabalhos importantes nas diversas aplicações foram surgindo desde o início dos anos 80.

Surgiram formulações alternativas para a solução de problemas de placas elásticas: utilizando-se integrais analíticas como a de CAMP e GIPSON (1990), com funções interpoladoras hermitianas para aproximação dos deslocamentos como os trabalhos de HARTMANN e ZOTEMANTEL (1986) e de GUO-SHU e MUKHERJEE (1986), utilizando-se funções lagrangianas e integrações analíticas para o cálculo das integrais singulares como a de ABDEL-AKHER e HARTLEY (1989), ou ainda com funções complexas para definição das soluções fundamentais, considerando-se as deformações por cisalhamento para placas finas, como apresentaram PILTNER e TAYLOR (1989).

Inicialmente, em alguns trabalhos analisaram-se placas com condições diversas de apoio no contorno e no domínio como os de BEZINE (1981), PARIS e LEÓN (1985), PAIVA (1987) (1991) e HARTLEY et al. (1992). Posteriormente, a possibilidade de associação de placas com vigas e colunas são também propostas por diversos autores como PAIVA e VENTURINI (1985)(1987), NG et al. (1989), HARTLEY e ABDEL-AKHER (1993), HU e HARTLEY (1994), PAIVA e OLIVEIRA NETO (1995), PAIVA (1996), HARTLEY (1996).

Os problemas considerando não-linearidade geométrica de placas foram inicialmente estudados por KAMIYA e SAWAKY (1982) e SAVAKI et al. (1989)(1990). A consideração da não-linearidade física do material foi inicialmente apresentada em estudos de MOSHAIOV e VORUS (1986), que utilizaram um modelo elasto-plástico através de um processo incremental-iterativo com momentos fletores iniciais e sendo o cálculo das integrais de domínio realizado em células obtidas da discretização do domínio da placa. Também foi utilizado este processo por KAMIYA et al. (1981) e por PARIS e LEÓN (1987) na análise de placas considerando-se a variação de temperatura ao longo da sua espessura e para análise de placas esbeltas por CHUEIRI (1994).

Já a análise dinâmica de placas teve seu início em trabalhos de VIVOLI e FILIPPI (1974) utilizando-se o método indireto sobre soluções fundamentais

derivadas das funções de Hankel e obtendo-se coeficientes da matriz de autovalores em função da frequência. BEZINE (1980) a seguir formulou o método determinando as frequências naturais através de um problema com matriz de autovalores onde os coeficientes não dependem da frequência, necessitando porém da discretização do domínio da placa.

NIWA et al. (1982) também apresentaram estudos utilizando o método indireto enquanto WONG e HUTCHINSON (1981) utilizaram o método direto. Trabalhos posteriores de NARDINI e BREBBIA (1982), NIWA et al. (1981)(1982), KITAHARA (1985), COSTA JR. (1985)(1988), TANAKA et al. (1987), KATSIKADELIS (1989), PROVIDAKIS e BESKOS (1989) e WEISS e MOSHAIOV (1993) também contribuíram de forma importante para a análise modal de vibração de placas.

A análise transiente teve como trabalhos iniciais o de CRUSE e RIZZO (1968), para problemas de elasto-dinâmica geral, e o de BEZINE e GAMBY (1982), que utilizou soluções fundamentais de dinâmica de placas esbeltas, em função do tempo. Outro trabalho a ser citado, baseado no anterior, é o de BARRETTO (1995).

A análise de placas sobre fundação elástica também foi realizada em diversos trabalhos, iniciada por KATSIKADELIS e ARMENAKAS (1984), COSTA e BREBBIA (1985), seguidos de estudos realizados por SILVA e VENTURINI (1988), TEJERINA CALDERÓN e VENTURINI (1997), PAIVA e BUTTERFIELD (1997), PAIVA e TRONDI (1996) e PAIVA e MENDONÇA (1997), estes três últimos analisando placas sobre estacas em associação com o solo.

O objetivo deste trabalho é apresentar uma formulação alternativa para o método dos elementos de contorno para análise de placas delgadas, onde as equações integrais do deslocamento transversal e de suas derivadas normal e tangencial ao contorno são usadas no sentido de possibilitar uma melhor análise de placas isoladas ou em associação com outros elementos estruturais, como vigas e pilares.

Esta formulação considera três valores nodais em deslocamentos: w , $\partial w/\partial n$ e $\partial w/\partial s$ para cada ponto do contorno e, de acordo com a teoria de Kirchhoff, apenas dois valores nodais para os esforços momento fletor normal ao contorno m_n e força cortante equivalente V_n .

A melhoria introduzida por esta formulação aparece nos casos de análise de placas com borda livre e em casos de ligação de placas com outros elementos estruturais, no caso vigas e pilares, que são também representados com três parâmetros em deslocamentos, modelados através de técnicas do método dos elementos finitos.

Neste trabalho, no capítulo 2 são apresentados um resumo da teoria de placas delgadas de Kirchhoff e a formulação teórica das expressões diferenciais das grandezas envolvidas na formulação de placas em função do deslocamento transversal w . Em seguida são determinadas as soluções fundamentais de placas utilizadas na formulação integral do método dos elementos de contorno.

No capítulo 3 são obtidas as equações integrais dos três parâmetros em deslocamento envolvidos na teoria de placas, deslocamento transversal w de suas derivadas $\partial w/\partial n$ e $\partial w/\partial s$ para pontos do contorno, segundo a formulação proposta neste trabalho, e do domínio, utilizando-se as soluções fundamentais obtidas no capítulo anterior. A integral do domínio devida ao carregamento transversal da placa é transformada em integral sobre o contorno da região do carregamento.

No capítulo 4 é introduzida a implementação numérica do método dos elementos de contorno, onde há a discretização do contorno da placa em elementos onde serão aproximadas as variáveis do problema, deslocamentos e esforços. Desta forma são obtidas equações algébricas a partir das equações integrais da formulação do método. Neste trabalho as variáveis de contorno são aproximadas por funções interpoladoras lineares ou cúbicas. As equações algébricas, definidas para todos os pontos de contorno obtidos da discretização, formam um sistema de equações que, após serem introduzidas todas as condições de contorno do problema, pode ser resolvido na forma $[A].\{X\} = \{B\}$. Alguns exemplos numéricos são apresentados para avaliação da formulação.

No capítulo 5 são apresentadas as associações da placa, analisada pelo método dos elementos de contorno pela formulação proposta, com elementos lineares como vigas (grelhas) e pilares, com a finalidade de se analisar pavimentos de edifícios. Alguns exemplos numéricos são apresentados para avaliação da formulação proposta. No capítulo 6 são apresentadas as conclusões do trabalho.

Por fim, no capítulo 7 são apresentadas as referências bibliográficas citadas neste capítulo e no capítulo 8 apresenta-se a bibliografia complementar, não citada, utilizada para a edificação deste trabalho.

2. FUNDAMENTOS DA TEORIA DE PLACAS DELGADAS

2.1. Introdução

Os elementos estruturais são classificados conforme a relação entre suas dimensões, e são denominados lineares (ou de barras), de superfícies (ou laminares) e tri-dimensionais (ou blocos) conforme apresentem, respectivamente, duas, uma ou nenhuma dimensão pequena, quando comparada com as demais.

Placas são, por definição, elementos estruturais de superfície, simétricos em relação a um plano médio, cuja dimensão menor está na direção normal a este plano e é denominada espessura, h , da placa. O carregamento é transversal ao plano médio. Aparecem na prática, por exemplo, como pisos de edifício, paredes de reservatórios, etc..

De acordo com o material do qual é constituída a placa ela pode ser classificada como: anisotrópica, com propriedades diferentes em qualquer direção, ortótropa, com propriedades diferentes em duas direções perpendiculares, ou isotrópica, com propriedades iguais em todas as direções. Ainda de acordo com a espessura, a placa pode se classificada como muito delgada (se, $h/a < 1/80$), delgada (se, $1/80 < h/a < 1/5$) ou espessa (se, $h/a > 1/5$). Neste trabalho serão consideradas apenas as placas delgadas e isotropas, submetidas a carregamento transversal e ortogonal ao plano médio, e será baseado na teoria de Kirchhoff, que interpreta bem o comportamento de placas com relação espessura/menor dimensão, h/a , entre $1/5$ e $1/80$.

2.2. Hipóteses básicas

As hipóteses da teoria de placas delgadas são:

- a placa é constituída de material elástico-linear e, portanto, segue a lei de Hooke;
- os deslocamentos transversais são pequenos em relação a espessura, h , da placa;
- não há deformação no plano médio da placa;
- as deformações na placa, devidas à flexão, variam linearmente com a distância ao plano médio desta placa, ao longo de sua espessura, o que equivale dizer que as tensões normais, paralelas ao plano médio, também variam linearmente com a espessura;
- as tensões normais na superfície da placa são desprezíveis em comparação com as tensões normais devidas à flexão.

2.3. Relações básicas para placas isotrópicas

Considere-se inicialmente o elemento de placa da figura 2.1.a onde estão indicadas as tensões solicitantes devidas a um carregamento transversal, g , distribuído. As resultantes destas tensões apresentadas na figura 2.1.b, momentos de flexão e volvente e força cortante, são obtidas das seguintes integrações sobre a espessura, h , do elemento:

$$m_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz \quad (2.1.a)$$

$$m_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz \quad (2.1.b)$$

$$m_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz \quad (2.1.c)$$

$$q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz \quad (2.1.d)$$

$$q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \quad (2.1.e)$$

Figura 2.1 – Elementos de placa com tensões e esforços atuantes devidos à flexão.

Das condições de equilíbrio de forças verticais e de momentos em torno dos eixos x e y, obtêm-se as seguintes expressões:

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + g = 0 \quad (2.2.a)$$

$$\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} = q_x \quad (2.2.b)$$

$$\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial x} = q_y \quad (2.2.c)$$

Agrupando-se as equações de equilíbrio (2.2) numa só equação e considerando-se $m_{xy} = m_{yx}$, obtém-se:

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -g \quad (2.3)$$

As deformações relativas ε_x e ε_y e a distorção γ_{xy} ao longo da espessura z da placa podem ser expressas em função das curvaturas da seguinte forma:

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.4.a)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.4.b)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.4.c)$$

Obtidas as deformações de um ponto da placa têm-se, através da lei de Hooke, as tensões correspondentes neste ponto:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) \quad (2.5.a)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) \quad (2.5.b)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xy} \quad (2.5.c)$$

onde,

E : módulo de elasticidade longitudinal;

ν : coeficiente de Poisson;

G : módulo de elasticidade transversal;

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.6)$$

Substituindo-se na equação (2.5) as expressões (2.4) obtêm-se também as tensões em função do deslocamento transversal w :

$$\sigma_x = \frac{-E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z \quad (2.7.a)$$

$$\sigma_y = \frac{-E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) z \quad (2.7.b)$$

$$\tau_{xy} = -2G \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z \quad (2.7.c)$$

Retornando-se às expressões (2.1) dos valores das resultantes das tensões no elemento de placa e introduzindo-se as expressões (2.7), resultam:

$$m_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.8.a)$$

$$m_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.8.b)$$

$$m_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2.8.c)$$

onde,

D : rigidez à flexão, é dado por:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.9)$$

A equação (2.3) pode ser reescrita em função do deslocamento transversal w a partir das equações (2.8), resultando na equação diferencial de placas:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{g}{D} \quad (2.10)$$

Utilizando-se o operador de Laplace:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.11)$$

a última equação (2.10) resulta:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{g}{D} \quad (2.12)$$

e ainda,

$$q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.13.a)$$

$$q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.13.b)$$

Para a resolução da equação diferencial de placas deve-se impor condições de contorno relativas ao deslocamento w , ao giro $\partial w/\partial m$ e aos esforços (momento fletor, momento volvente e força cortante, por unidade de comprimento). Porém, Kirchhoff demonstrou que podem-se escrever as condições de contorno relativas à força cortante e ao momento volvente numa única condição.

Para entender esta proposição, considera-se um ponto genérico, P , na borda da placa e dois elementos de comprimento ds , adjacentes a este ponto, conforme mostra a figura 2.2. Também pode-se observar que estes elementos apresentam momentos volventes resultantes de valores $m_{ns} ds$ e $(m_{ns} + \partial m_{ns}/\partial s)ds$. Interpretam-se estes momentos como resultantes de binários de forças atuando agora nas laterais dos elementos de contorno, de tal forma que surja uma resultante final no ponto P de valor $(\partial m_{ns}/\partial s) ds$.

Figura 2.2 – Resultante do momento volvente em um ponto do contorno da placa.

O esforço resultante da soma desta força com a força cortante q_x (ou q_y) é denominado força cortante equivalente, por unidade de comprimento, e vale:

$$V_x = q_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \quad (2.14.a)$$

$$V_y = q_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \quad (2.14.b)$$

Podem-se escrever agora as componentes de tensões e esforços para um sistema genérico de coordenadas (n,s), onde o eixo n forma um ângulo α com o semi-eixo positivo x.

Considere-se o elemento de placa 123 apresentado na figura 2.3, cujos lados 12 e 13 são paralelos aos eixos x e y, respectivamente.

Figura 2.3 – Tensões e esforços resultantes no elemento de placa 123.

Podem-se escrever as relações das tensões e dos esforços referentes ao lado 32 nas direções n e s:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos \alpha + \sigma_y \sin \alpha + 2 \tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.15.a)$$

$$\tau_{ns} = (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (2.15.b)$$

$$m_n = m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + 2 m_{xy} \sin \alpha \cos \alpha \quad (2.15.c)$$

$$m_{ns} = (m_y - m_x) \sin \alpha \cos \alpha + m_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (2.15.d)$$

Já as relações das cortantes q_n são obtidas pelo equilíbrio de forças verticais do elemento. Então:

$$q_n ds = q_x ds \cos \alpha + q_y ds \sin \alpha$$

ou

$$q_n = q_x \cos \alpha + q_y \sin \alpha \quad (2.16.a)$$

Retomando-se as expressões (2.14) pode-se escrever a força cortante equivalente, por unidade de comprimento, como:

$$V_n = q_n + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} \quad (2.17)$$

2.4. Equações de placas em coordenadas polares

Tendo em vista que neste trabalho a equação diferencial de placas é aplicada a um domínio infinito para a obtenção das soluções fundamentais, torna-se necessário escrever as equações das placas em coordenadas polares.

O sistema de coordenadas da Figura 2.4 mostra a relação entre as coordenadas cartesianas e polares e suas componentes.

Figura 2.4 – Contorno da placa com direções r , n e s , em referência às coordenadas cartesianas (x, y) e polares (r, θ) , para um ponto genérico P .

O ponto P de coordenadas cartesianas (x, y) passa a ter novas coordenadas (r, θ) , onde r é a distância de P à origem O do sistema de coordenadas e θ o ângulo formado pela direção de r e o semi-eixo positivo x . Assim as relações entre os dois sistemas ficam determinadas por:

$$x = r \cdot \cos\theta \quad (2.18.a)$$

$$y = r \cdot \text{sen}\theta \quad (2.18.b)$$

ou ainda,

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (2.19.a)$$

$$\theta = \text{arctg } y/x \quad (2.19.b)$$

Com estas relações pode-se obter suas respectivas derivadas em relação ao sistema cartesiano:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \cos \theta \quad (2.20.a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \text{sen } \theta \quad (2.20.b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-y}{r^2} = \frac{-\text{sen } \theta}{r} \quad (2.20.c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r} \quad (2.20.d)$$

Escrevendo-se agora as derivadas do deslocamento transversal w em coordenadas (x,y) para se obter a equação diferencial, tem-se, na direção x ::

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (2.21)$$

ou

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \left(\frac{-\text{sen } \theta}{r} \right) \quad (2.22.a)$$

Analogamente, na direção y , tem-se:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial r} \text{sen } \theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \left(\frac{\cos \theta}{r} \right) \quad (2.22.b)$$

As derivadas de segunda ordem resultam:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\text{sen } \theta}{r} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \cos^2 \theta + \\ &+ \text{sen}^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - 2 \text{sen } \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

(2.23.a)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \operatorname{sen} \theta + \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \operatorname{sen}^2 \theta +$$

$$+ \cos^2 \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

(2.23.b)

e

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\operatorname{sen} \theta}{r} \right) =$$

$$= -\operatorname{sen} \theta \cos \theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) +$$

$$+ (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)$$

(2.24)

Somando-se as duas equações (2.23) obtém-se a representação do operador diferencial de Laplace expresso em coordenadas polares:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) w = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w$$

(2.25)

Portanto, a equação diferencial de placas (2.12), expressa em coordenadas polares resulta:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \frac{g}{D}$$

(2.26)

Substituindo-se as equações (2.23) e (2.24) nas relações (2.8) e (2.13), têm-se:

$$m_x = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) - 2(1-\nu) \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.27.a)$$

$$m_y = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\sin^2 \theta + \nu \cos^2 \theta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\cos^2 \theta + \nu \sin^2 \theta) + 2(1-\nu) \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.27.b)$$

$$m_{xy} = -D(1-\nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \sin \theta \cos \theta + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.27.c)$$

$$q_x = -D \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (2.27.d)$$

$$q_y = -D \left[\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (2.27.e)$$

Com estas expressões deduzem-se, também em coordenadas polares, as expressões dos esforços m_n , m_{ns} e V_n em um ponto genérico P do contorno da placa. Estes esforços têm como referência um sistema local de coordenadas cartesianas (n,s), onde n é a direção normal e s a direção tangencial ao contorno neste ponto, como pode-se observar na Figura 2.4.

Ainda nessa figura estão o ângulo β , entre os versores r e n, e o raio de curvatura R do contorno da placa no ponto P.

Podem-se obter os esforços em P substituindo-se nas equações (2.15) o valor de $\alpha = \theta + \beta$ (Figura 2.4), resultando:

$$m_n = -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} (\cos^2 \beta + \nu \sin^2 \beta) + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) (\sin^2 \beta + \nu \cos^2 \beta) + 2(1 - \nu) \sin \beta \cos \beta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.28.a)$$

$$m_{ns} = -D(1 - \nu) \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \sin \beta \cos \beta + (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] \quad (2.28.b)$$

Para se chegar à expressão da força cortante equivalente V_n , em coordenadas polares, deve-se derivar m_{ns} , dado pela equação (2.28.c) em relação a s. Para a cortante tem-se:

$$q_n = q_x \cos(\theta + \beta) + q_y \sin(\theta + \beta) \quad (2.29)$$

Substituindo-se q_x e q_y pelas expressões (2.27), resulta:

$$q_n = -D \left[\cos \beta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\sin \beta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \quad (2.30)$$

A derivada de m_{ns} em relação à coordenada s vale:

$$\frac{\partial m_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial m_{ns}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial s} + \frac{\partial m_{ns}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial s} \quad (2.31)$$

O termo $\partial r / \partial s$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = \cos \theta (-\sin \alpha) + \sin \theta \cos \alpha$$

e, da Figura 2.4,

$$\alpha = \theta + \beta \quad \text{ou} \quad \beta = \alpha - \theta$$

Então,

$$\frac{\partial r}{\partial s} = -\sin \beta \quad (2.32)$$

e analogamente,

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} = -\frac{\sin \theta}{r} (-\sin \alpha) + \frac{\cos \theta}{r} \cos \alpha = \frac{1}{r} \cos \beta \quad (2.33)$$

Sabe-se ainda que:

$$\frac{\partial \beta}{\partial s} = \frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \quad (2.34)$$

onde,

R : raio de curvatura do contorno no ponto P.

Substituindo-se as equações (2.32), (2.33) e (2.34) na equação (2.31), obtém-se:

$$\frac{\partial m_{ns}}{\partial s} = \frac{\partial m_{ns}}{\partial r} (-\sin \beta) + \frac{\partial m_{ns}}{\partial \theta} \frac{1}{r} \cos \beta + \frac{\partial m_{ns}}{\partial \beta} \left(\frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \right) \quad (2.35)$$

Agora escrevendo-se V_n com os valores obtidos de q_n e $\partial m_{ns}/\partial s$, obtém-se:

$$\begin{aligned} V_n = & \left[-D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial m_{ns}}{\partial \theta} \right] \cos \beta + \\ & - \left[\frac{D}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial m_{ns}}{\partial r} \right] \sin \beta + \left(\frac{1}{R} - \frac{\cos \beta}{r} \right) \frac{\partial m_{ns}}{\partial \beta} \end{aligned} \quad (2.36)$$

2.5. Soluções fundamentais de placas

A solução fundamental de placas é definida como o deslocamento transversal w^* , representando a resposta em um ponto, q , genérico de coordenadas $[x(q),y(q)]$ no domínio fundamental da placa, geralmente infinito, devida a uma carga unitária aplicada em um ponto s , ponto de carregamento, de coordenadas $[x(s),y(s)]$ deste mesmo domínio.

A solução fundamental w é obtida a partir da seguinte equação:

$$\nabla^2 \nabla^2 w^* = \delta(s,q)/D \quad (2.37)$$

onde,

$\delta(s,q)$: distribuição delta de Dirac.

Essa distribuição apresenta as seguintes propriedades:

$$\delta(s,q) = 0 \quad q \neq s \quad (2.38.a)$$

$$\delta(s,q) = \infty \quad q = s \quad (2.38.b)$$

e

$$\int \delta(s,q) d\Omega_\infty = 1 \quad (2.38.c)$$

mostrando-se que a distribuição delta de Dirac, integrada no domínio, representa uma carga unitária resultante do carregamento transversal aplicado à placa no ponto s .

Assim, pode-se escrever:

$$\int \phi(q) \delta(s,q) d\Omega_\infty = \phi(s) \quad (2.39)$$

onde,

$\phi(q)$: uma função contínua qualquer definida no domínio Ω .

A solução fundamental de placas é obtida, então, a partir da equação diferencial aplicada a todos os pontos do domínio da placa, exceto o ponto de carga s , resultando:

$$\nabla^2 \nabla^2 w^* = 0 \quad (2.40)$$

Para um sistema de coordenadas polares com origem em s e observando-se a simetria do problema em relação a este ponto, o que elimina a dependência em relação à coordenada θ , a equação (2.40) passa a ser escrita como:

$$\nabla^2 \nabla^2 w^* = \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right] \left[\frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw^*}{dr} \right] = 0 \quad (2.41)$$

Efetuada-se as derivações, pode-se reescrevê-la como:

$$\left[\frac{d^4 w^*}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w^*}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w^*}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw^*}{dr} \right] = 0 \quad (2.42)$$

cuja solução é:

$$w^* = A \ln r + B r^2 \ln r + C r^2 + E \quad (2.43)$$

Considerando-se a simetria do problema e o deslocamento finito pode-se afirmar que a derivada dw^*/dr para o ponto s é nula, resultando:

$$A = 0 \quad (2.44)$$

Para se obter a constante B admite-se um círculo de raio r com centro em s , sendo s o ponto de aplicação da carga unitária (figura 2.5), onde surgirá, em seus limites, uma força cortante equivalente V_n uniformemente distribuída para manter seu equilíbrio. Assim:

$$V_n = -\frac{1}{2\pi r} \quad (2.45)$$

Figura 2.5 – Força cortante equivalente num círculo de raio r devido à carga unitária aplicada em s .

Para este valor, portanto, a expressão (2.36) de V_n , agora escrita apenas em função de r (e para $\beta = 0$) resulta:

$$V_n = -D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w^*}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w^*}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w^*}{\partial \theta^2} \right) = \frac{-1}{2\pi r} \quad (2.46)$$

Substituindo-se a equação (2.43) na (2.46) obtém-se a constante B :

$$B = \frac{1}{8\pi D} \quad (2.47)$$

Assim a equação (2.43) de w^* passa a ter a forma:

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r + Cr^2 + E \quad (2.48)$$

As constantes C e E são obtidas a partir de condições de contorno da placa estudada; porm, para o caso da placa fundamental de raio infinito em questão, essas condições podem ser quaisquer.

STERN (1979)e BEZINE (1978) adotam:

$$C = E = 0 \quad (2.49)$$

resultando,

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \ln r \quad (2.50)$$

DANSON (1979) adota:

$$C = \frac{-1}{16\pi D} \quad e \quad E = 0 \quad (2.51)$$

obtendo,

$$w^* = \frac{1}{8\pi D} r^2 \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) \quad (2.52)$$

que será a expressão usada neste trabalho.

Podem-se obter ainda as expressões da sua derivada e dos esforços fundamentais. São determinadas também as derivadas destas soluções fundamentais em relação à coordenada m de um sistema de referência cartesiano (m,u) com origem em s , conforme mostra a figura 2.6.

Figura 2.6 – Sistemas de coordenadas (m,u) e (n,s) .

A derivada do deslocamento no ponto s é dada por:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{\partial w^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial n} \quad (2.53)$$

onde,

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\partial r}{\partial x(q)} \frac{\partial x(q)}{\partial n} + \frac{\partial r}{\partial y(q)} \frac{\partial y(q)}{\partial n} \quad (2.54)$$

As derivadas de r em relação às coordenadas x e y , admitindo-se que

$r(s,q) = [(x(q)-x(s))^2 + (y(q)-y(s))^2]^{1/2}$, são dadas por:

$$\frac{\partial r}{\partial x(q)} = r_{,x} = \frac{x(q) - x(s)}{r} = \cos \theta \quad (2.55.a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y(q)} = r_{,y} = \frac{y(q) - y(s)}{r} = \text{sen } \theta \quad (2.55.b)$$

As demais derivadas, de segunda ordem, são:

$$\frac{\partial r_{,x}}{\partial x(q)} = \frac{1 - r_{,x}^2}{r} \quad (2.56.a)$$

$$\frac{\partial r_{,y}}{\partial x(q)} = -\frac{r_{,x} r_{,y}}{r} \quad (2.56.b)$$

$$\frac{\partial r_{,x}}{\partial y(q)} = -\frac{r_{,x} r_{,y}}{r} \quad (2.56.c)$$

$$\frac{\partial r_{,y}}{\partial y(q)} = \frac{1 - r_{,y}^2}{r} \quad (2.56.d)$$

ou, se escritas na forma indicial,

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(q)} = r_{,i} = \frac{x_i(q) - x_i(s)}{r} \quad (2.57.a)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i(q) \partial y_i(q)} = r_{,ij} = \frac{\delta_{ji} - r_{,i} r_{,j}}{r} \quad (2.57.b)$$

onde,

δ_{ij} : delta de Kronecker, cujo valor é dado por:

$$\delta_{ij} = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad (2.58.a)$$

$$\delta_{ij} = 1 \quad \text{para } i = j \quad (2.58.b)$$

As derivadas em relação a n valem:

$$\frac{\partial x(s)}{\partial n} = \cos \alpha \quad (2.59.a)$$

$$\frac{\partial y(s)}{\partial n} = \sen \alpha \quad (2.59.b)$$

Combinando-se as equações (2.55), (2.56) e (2.59) na equação (2.54), tem-se:

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \cos \theta \cos \alpha + \sen \theta \sen \alpha = \cos \beta \quad (2.60)$$

portanto,

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r \cos \beta \quad (2.61)$$

Considerando-se \vec{r} o versor associado a r , tem-se:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r(\vec{n} \cdot \vec{r}) = \frac{r}{4\pi D} \ln r(n_{,x} r_{,x} + n_{,y} r_{,y}) \quad (2.62)$$

ou usando-se a notação indicial, tem-se:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r(n_i r_i) \quad (2.63)$$

As expressões (2.28), (2.30) e (2.36) dos esforços fundamentais m_n^* , m_{ns}^* , q_n^* , V_n^* são obtidas a partir da expressão (2.52) e são dadas por:

$$m_n^* = \frac{-1}{4\pi} [(1 + \nu) \ln r + (1 - \nu) \cos^2 \beta + \nu] \quad (2.64)$$

$$q_n^* = -\frac{1}{2\pi r} \cos \beta \quad (2.65)$$

$$m_{ns}^* = \frac{1 - \nu}{8\pi} \sin 2\beta \quad (2.66)$$

$$V_n^* = \frac{\cos \beta}{4\pi r} [2(1 - \nu) \sin^2 \beta - 3 + \nu] + \frac{1 - \nu}{4\pi R} \cos 2\beta \quad (2.67)$$

onde,

$$\cos \beta = \vec{n} \cdot \vec{r} = n_{,x} r_{,x} + n_{,y} r_{,y} = n_i r_i$$

$$\sin \beta = -\vec{s} \cdot \vec{r} = -s_{,x} r_{,x} - s_{,y} r_{,y} = -s_i r_i$$

e, portanto:

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} = \frac{r}{4\pi D} \ln r(\vec{n}\vec{r}) \quad (2.68.a)$$

$$q_n^* = -\frac{1}{2\pi r} (\vec{n}\vec{r}) \quad (2.68.b)$$

$$m_n^* = -\frac{1}{4\pi} \left[(1+\nu) \ln r + (1-\nu)(\vec{n}\vec{r})^2 + \nu \right] \quad (2.68.c)$$

$$m_{ns}^* = -\frac{1-\nu}{4\pi} (\vec{n}\vec{r})(\vec{s}\vec{r}) \quad (2.68.c)$$

$$V_n^* = \frac{(\vec{n}\vec{r})}{4\pi r} \left[2(1-\nu)(\vec{s}\vec{r})^2 - 3 + \nu \right] + \frac{1-\nu}{4\pi R} 2(\vec{s}\vec{r})(\vec{n}\vec{r}) \quad (2.68.d)$$

As derivadas dos deslocamentos e dos esforços fundamentais em relação à direção m no ponto s é feita de forma análoga à do ponto q , isto é:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{\partial w^*}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial m} \quad (2.69)$$

onde,

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial x(s)} \frac{\partial x(s)}{\partial m} + \frac{\partial r}{\partial y(s)} \frac{\partial y(s)}{\partial m} \quad (2.70)$$

As derivadas de r em relação às coordenadas x e y , são dadas por:

$$\frac{\partial r}{\partial x(s)} = -\mathbf{r}_{,x} = -\frac{x(q) - x(s)}{r} = -\cos \theta \quad (2.71.a)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y(s)} = -r_{,y} = -\frac{y(q) - y(s)}{r} = -\text{sen } \theta \quad (2.71.b)$$

As demais derivadas, de segunda ordem, são:

$$\frac{\partial r_{,x}}{\partial x(s)} = -\frac{1 - r_{,x}^2}{r} \quad (2.72.a)$$

$$\frac{\partial r_{,y}}{\partial x(s)} = \frac{r_{,x} r_{,y}}{r} \quad (2.72.b)$$

$$\frac{\partial r_{,x}}{\partial y(s)} = \frac{r_{,x} r_{,y}}{r} \quad (2.72.c)$$

$$\frac{\partial r_{,y}}{\partial y(s)} = -\frac{1 - r_{,y}^2}{r} \quad (2.72.d)$$

ou, usando-se a notação indicial, têm-se:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i(s)} = -r_{,i} = -\frac{x_i(q) - x_i(s)}{r} \quad (2.73.a)$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i(s) \partial y_j(s)} = -r_{,ij} = -\frac{\delta_{ji} - r_{,i} r_{,j}}{r} \quad (2.73.b)$$

As derivadas em relação a m valem:

$$\frac{\partial x(s)}{\partial m} = \cos \gamma = m_x \quad (2.74.a)$$

$$\frac{\partial y(s)}{\partial m} = \text{sen } \gamma = m_y \quad (2.74.b)$$

Agrupando-se as equações (2.71), (2.72) e (2.74) na equação (2.70), tem-se:

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \cos \gamma (-\cos \theta) + \text{sen } \gamma (-\text{sen } \theta) = -\cos \varphi \quad (2.75)$$

portanto,

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{r}{4\pi D} \ln r (-\cos \varphi) \quad (2.76)$$

Pode-se escrever:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{r}{4\pi D} \ln r (\vec{m} \cdot \vec{r}) = \frac{r}{4\pi D} \ln r (m_{,x} r_{,x} + m_{,y} r_{,y}) \quad (2.77)$$

ou ainda usando-se a notação indicial, tem-se:

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{r}{4\pi D} \ln r (m_i r_i) \quad (2.78)$$

As demais expressões são escritas na forma indicial para uma forma mais compacta:

$$\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \right) = \frac{-1}{4\pi D} [(m_i r_i)(n_i r_i) + (m_i n_i) \ln r] \quad (2.79)$$

onde se aplica $\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \right) \frac{\partial r}{\partial m}$ na equação (2.62).

Na sequência,

$$\frac{\partial q_n^*}{\partial m} = \frac{1}{2\pi r^2} [(m_i n_i) - 2(m_i r_i)(n_i r_i)] \quad (2.80)$$

$$\frac{\partial m_n^*}{\partial m} = \frac{-1}{4\pi r} \{(1 + \nu)(m_i r_i) + 2(1 - \nu)(n_i r_i)[(m_i n_i) - (m_i r_i)(n_i r_i)]\} \quad (2.81)$$

$$\frac{\partial m_{ns}^*}{\partial m} = \frac{-(1 - \nu)}{4\pi r} [(m_i n_i)(s_i r_i) + (m_i s_i)(n_i r_i) - 2(m_i r_i)(n_i r_i)(s_i r_i)] \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_n^*}{\partial m} = & \frac{-1}{4\pi r^2} \{2(1 - \nu)(s_i r_i)[4(s_i r_i)(m_i r_i)(n_i r_i) - 2(m_i s_i)(n_i r_i) + \\ & - (s_i r_i)(m_i n_i)] + (3 - \nu)[(m_i n_i) - 2(m_i r_i)(n_i r_i)]\} + \\ & \frac{(1 - \nu)}{\pi R r} (s_i r_i)[(m_i s_i) - (m_i r_i)(r_i s_i)] \end{aligned} \quad (2.83)$$

ou, vetorialmente,

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = \frac{r}{4\pi D} \ln r(\vec{m}\vec{r})$$

$$\frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \right) = -\frac{1}{4\pi D} [(\vec{m}\vec{r})(\vec{n}\vec{r}) + (\vec{m}\vec{n}) \ln r]$$

$$\frac{\partial q_n^*}{\partial m} = \frac{1}{2\pi r^2} [(\vec{m}\vec{n}) - 2(\vec{m}\vec{r})(\vec{n}\vec{r})]$$

$$\frac{\partial m_n^*}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r} \{(1 + \nu)(\vec{m}\vec{r}) \ln r - 2(1 - \nu)(\vec{n}\vec{r})[(\vec{m}\vec{n}) - (\vec{m}\vec{r})(\vec{n}\vec{r})]\}$$

$$\frac{\partial m_{ns}^*}{\partial m} = -\frac{1 - \nu}{4\pi r} [(\vec{m}\vec{n})(\vec{s}\vec{r}) + (\vec{m}\vec{s})(\vec{n}\vec{r}) - 2(\vec{m}\vec{r})(\vec{n}\vec{r})(\vec{s}\vec{r})]$$

3. EQUAÇÕES INTEGRAIS PARA FLEXÃO DE PLACAS

3.1. Introdução

Neste capítulo serão obtidas as equações integrais, utilizando-se as soluções fundamentais do capítulo anterior, da formulação do Método dos Elementos de Contorno para placas. Conforme já comentado, estas equações integrais são referentes ao deslocamento transversal $w(s)$ e às suas derivadas direcionais $\partial w(s)/\partial n$ e $\partial w(s)/\partial s$ de um ponto do contorno, relacionados aos esforços no contorno e ações de domínio.

Estas equações serão obtidas utilizando-se o primeiro teorema de Betti, ou teorema da reciprocidade, em uma placa sujeita a dois carregamentos distintos, g e g^* , que resultam em dois estados de tensão e de deslocamento correspondentes. A partir de integrações por partes sobre a expressão resultante da aplicação do teorema de Betti, obtêm-se as equações integrais desejadas.

3.2. Equação integral para um ponto do domínio

Seja uma placa isótropa qualquer, de contorno Γ e domínio Ω , contida em uma placa infinita de contorno Γ_∞ e domínio Ω_∞ .

Aplicando-se à placa infinita dois carregamentos distintos, g distribuído em uma região de área Ω_g , e g^* carregamento correspondente à solução fundamental, obtêm-se dois estados de tensão, σ_{ij} e σ_{ij}^* , e dois de deformação, ε_{ij} e ε_{ij}^* , correspondentes.

O teorema da reciprocidade de Betti fornece a seguinte igualdade:

$$\int_V \sigma_{ij}^* \varepsilon_{ij} dv = \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^* dv \quad (3.1)$$

O termo da direita, denominado aqui de U , pode ser escrito explicitando-se os índices do produto tensorial.

$$U = \int_V [\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + \sigma_z \varepsilon_z^* + 2(\tau_{xy} \varepsilon_{xy}^* + \tau_{xz} \varepsilon_{xz}^* + \tau_{yz} \varepsilon_{yz}^*)] dV \quad (3.2)$$

Desprezando-se as tensões relativas à direção z , normal ao plano da placa, tem-se:

$$U = \int_V (\sigma_x \varepsilon_x^* + \sigma_y \varepsilon_y^* + 2\tau_{xy} \varepsilon_{xy}^*) dV \quad (3.3)$$

Substituindo-se agora os valores de tensões e de deformações dados pelas equações (2.7) e (2.4), tem-se a integral do primeiro termo de U da seguinte forma:

$$\int_V \sigma_x \varepsilon_x^* dV = \int_V -\frac{E}{(1-\nu^2)} \left\{ -z^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} \right\} dV \quad (3.4)$$

Realizando-se a integração desta equação na espessura, a integral transforma-se em integral sobre o domínio Ω :

$$\int_V \sigma_x \varepsilon_x^* dV = \int_{\Omega} D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega \quad (3.5)$$

De forma análoga pode-se trabalhar com os dois termos restantes da equação (3.3), resultando:

$$\begin{aligned}
U = \int_{\Omega} D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} + D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} + \right. \\
\left. + 2D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right] d\Omega
\end{aligned} \quad (3.6)$$

Com as equações (2.8) em vista, pode-se reescrever:

$$U = \int_{\Omega} \left[-m_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} - m_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} - 2m_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} \right] d\Omega \quad (3.7)$$

que é a integral de volume representada na equação (3.3) transformada em integral sobre o domínio Ω . Pode-se agora transformá-la em integral sobre o contorno trabalhando-se com cada parcela individualmente. Integrando-se por partes a primeira parcela da equação (3.7), na direção x , obtém-se:

$$-\int_{\Omega} m_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega = -\int_{\Gamma} m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \eta_x d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial m_x}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial x} d\Omega \quad (3.8)$$

η_x : co-seno diretor do vetor normal ao contorno na direção x , conforme a Figura 3.1.

Figura 3.1 – Coordenadas (n, s) no ponto Q do contorno

Integrando-se por partes a integral de domínio da segunda parcela da equação (3.8), obtém-se:

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} m_x \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^2} d\Omega &= \int_{\Gamma} \left(-m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial m_x}{\partial x} w^* \cos \alpha \right) d\Gamma + \\
-\int_{\Omega} \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} w^* d\Omega &
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Integrando-se por partes agora a integral de domínio da segunda parcela da equação (3.7), de forma análoga, na direção y, tem-se:

$$-\int_{\Omega} m_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} d\Omega = -\int_{\Gamma} m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \eta_y d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial m_y}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial y} d\Omega \tag{3.10}$$

Integrando-se novamente por partes a segunda parcela da equação (3.10), obtém-se finalmente:

$$\begin{aligned}
-\int_{\Omega} m_y \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^2} d\Omega &= \int_{\Gamma} \left(-m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + \frac{\partial m_y}{\partial y} w^* \sin \alpha \right) d\Gamma + \\
-\int_{\Omega} \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} w^* d\Omega &
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Reescrevendo-se agora a terceira parcela da equação (3.7), tem-se:

$$-2 \int_{\Omega} m_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega = -\int_{\Omega} m_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega - \int_{\Omega} m_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega \tag{3.12}$$

Integrando-se por partes as duas parcelas, em relação às direções x e y, obtém-se:

$$\begin{aligned}
-2 \int_{\Omega} m_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega &= - \int_{\Gamma} m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w^*}{\partial y} d\Omega + \\
- \int_{\Gamma} m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha d\Gamma &+ \int_{\Omega} \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w^*}{\partial x} d\Omega
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Integrando-se por partes as integrais de domínio da equação (3.13), obtém-se:

$$\begin{aligned}
-2 \int_{\Omega} m_{xy} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x \partial y} d\Omega &= \int_{\Gamma} \left(-m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha - m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha + \right. \\
&+ \left. \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} w^* \sin \alpha + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} w^* \cos \alpha \right) d\Gamma - \int_{\Omega} 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} w^* d\Omega
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Com as equações (3.9), (3.11) e (3.14) pode-se reescrever U como:

$$\begin{aligned}
U &= - \int_{\Gamma} \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right) d\Gamma + \\
&+ \int_{\Gamma} \left[\left(\frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial m_y}{\partial y} + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} \right) \sin \alpha \right] w^* d\Gamma + \\
&- \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} \right) w^* d\Omega
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Retomando-se as relações (2.2) e (2.3) pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
U = & -\int_{\Gamma} \left(m_x \frac{\partial w^*}{\partial x} \cos \alpha + m_y \frac{\partial w^*}{\partial y} \sin \alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial y} \cos \alpha + m_{xy} \frac{\partial w^*}{\partial x} \sin \alpha \right) d\Gamma + \\
& + \int_{\Gamma} q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g
\end{aligned} \tag{3.16}$$

onde Ω_g é a região carregada da placa.

Tem-se que:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \cos \alpha - \frac{\partial w^*}{\partial s} \sin \alpha \tag{3.17.a}$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial y} = \frac{\partial w^*}{\partial n} \sin \alpha + \frac{\partial w^*}{\partial s} \cos \alpha \tag{3.17.b}$$

Substituindo-se as equações (3.17) na equação (3.16) e agrupando-se os termos $\partial w^*/\partial n$ e $\partial w^*/\partial s$, tem-se:

$$\begin{aligned}
U = & -\int_{\Gamma} \left\{ (m_x \cos^2 \alpha + m_y \sin^2 \alpha + 2m_{xy} \cos \alpha \sin \alpha) \frac{\partial w^*}{\partial n} + \right. \\
& \left. + [(m_y - m_x) \sin \alpha \cos \alpha + m_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \frac{\partial w^*}{\partial s} \right\} d\Gamma + \tag{3.18} \\
& + \int_{\Gamma} q_n w^* d\Gamma + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g
\end{aligned}$$

Assim, a partir das equações (2.15) pode-se simplificar U como:

$$U = -\int_{\Gamma} \left(m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} + m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} - q_n w^* \right) d\Gamma + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \tag{3.19}$$

Integrando-se por partes o termo de m_{ns} , obtém-se:

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = \sum m_{ns} w^* \Big|_{\Gamma_1}^{\Gamma_2} - \int_{\Gamma} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (3.20)$$

onde Γ_1 e Γ_2 são os limites do contorno onde se faz a integração. Para um contorno fechado e sem apresentar cantos, a primeira parcela se anula. Existindo cantos, surgirão as reações de canto, denominadas aqui de R.

Figura 3.2 – Cantos da placa e momentos volventes resultantes

Na Figura 3.2 pode-se observar uma placa com diversos cantos onde estão representados os respectivos momentos volventes resultantes.

Admitindo-se o primeiro termo da equação (3.20) como um somatório para todos os lados da placa, e tomando-se apenas dois lados desta para demonstração, tem-se:

$$\left(m_{ns_i}^- w_i^* - m_{ns_{i-1}}^+ w_{i-1}^* \right) + \left(m_{ns_{i+1}}^- w_{i+1}^* - m_{ns_i}^+ w_i^* \right) \quad (3.21)$$

Para o canto i tem-se:

$$-\left(m_{ns_i}^+ - m_{ns_i}^-\right)w_i^* = -R_{c_i} w_i^* \quad (3.22)$$

Com isto pode-se escrever o primeiro termo da equação (3.20), antes expresso em termos de somatório dos lados da placa, em somatório de seus cantos, a partir da equação (3.22) como segue:

$$\sum_{l=1}^{N_l} m_{ns_l} w_l^* \Big|_{\Gamma_{l1}}^{\Gamma_{l2}} = - \sum_{i=1}^{N_c} \left(m_{ns_i}^+ - m_{ns_i}^-\right) w_{c_i}^* = - \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* \quad (3.23)$$

onde,

N_l : número de lados da placa;

N_c : número de cantos da placa;

$w_{c_i}^*$: deslocamento fundamental no canto i ;

Γ_{l1} e Γ_{l2} : limites de cada lado da placa.

Portanto a expressão (3.20) pode ser escrita como:

$$\int_{\Gamma} m_{ns} \frac{\partial w^*}{\partial s} d\Gamma = - \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* - \int_{\Gamma} \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* d\Gamma \quad (3.24)$$

que, substituindo-se na equação (3.19), resulta:

$$U = \int_{\Gamma} \left(q_n w^* + \frac{\partial m_{ns}}{\partial s} w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad (3.25)$$

Utilizando-se a equação (2.17), obtém-se:

$$U = \int_{\Gamma} \left(V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right) d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \quad (3.26)$$

onde admite-se a carga g atuando em um domínio Ω_g .

Analogamente, obtém-se o termo da esquerda da equação (3.1) como:

$$U' = - \int_{\Gamma} \left(m_n^* \frac{\partial w}{\partial n} + m_{ns}^* \frac{\partial w}{\partial s} - q_n^* w \right) d\Gamma + \int_{\Omega} g^* w d\Omega \quad (3.27)$$

Assim, agrupando-se as equações (3.26) e (3.27) a expressão do teorema de Betti aplicado a placas resulta:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} \left[m_{ns}^* \frac{\partial w}{\partial s} + m_n^* \frac{\partial w}{\partial n} - q_n^* w \right] d\Gamma + \int_{\Omega} g^* w d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma} \left[V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \end{aligned} \quad (3.28)$$

Aqui pode-se notar a introdução, na formulação integral aqui apresentada, da derivada $\partial w / \partial s$ de pontos do contorno, que não aparece na formulação clássica do método.

A título de comparação, a mesma expressão (3.28), se apresentada pela formulação usual do método, resulta na seguinte forma:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Gamma} \left[m_n^* \frac{\partial w}{\partial n} - V_n^* w \right] d\Gamma + \int_{\Omega} g^* w d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma} \left[V_n w^* - m_n \frac{\partial w^*}{\partial n} \right] d\Gamma + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i} w_{c_i}^* + \int_{\Omega_g} g w^* d\Omega_g \end{aligned}$$

Ao reescrever a equação (3.28) de forma a relacionar cada variável como função dos pontos na placa, observa-se:

a) os esforços e os deslocamentos correspondentes ao carregamento g dependem apenas do ponto de campo Q ;

b) a carga unitária fundamental g^* aplicada no ponto s do domínio da placa é representada pela função delta de Dirac $\delta(s,q)$ e, portanto, é função dos pontos de colocação de carga s e de campo Q ;

c) os esforços e os deslocamentos correspondentes à carga g^* dependem dos pontos de carga s e de deslocamento Q .

Assim, reescrevendo-se a equação (3.28), resulta:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left[q_n^*(s, Q)w(Q) - m_n^*(s, Q)\frac{\partial w}{\partial n}(Q) - m_{ns}^*(s, Q)\frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma(Q) + \\ & + \int_{\Omega} g^*(s, q)w(q)d\Omega(q) = \int_{\Gamma} \left[V_n(Q)w^*(s, Q) - m_n(Q)\frac{\partial w^*}{\partial n}(s, Q) \right] d\Gamma(Q) + \\ & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(Q)w_{c_i}^*(s, Q) + \int_{\Omega_g} g(q)w^*(s, q)d\Omega_g(q) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Conforme já mencionado, a terceira propriedade da distribuição delta de Dirac (2.38.c) garante que:

$$\int_g \delta(s, q)w(q)d\Omega_g(q) = w(s) \quad (3.30)$$

Com isto a expressão do teorema de Betti aplicado a placas fica:

$$\begin{aligned}
& w(\mathbf{s}) + \\
& + \int_{\Gamma} \left[q_n^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) w(\mathbf{Q}) - m_n^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{Q}) - m_{ns}^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) \frac{\partial w}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{Q}) \right] d\Gamma(\mathbf{Q}) = \\
& = \int_{\Gamma} \left[V_n(\mathbf{Q}) w^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) - m_n(\mathbf{Q}) \frac{\partial w^*}{\partial n}(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) \right] d\Gamma(\mathbf{Q}) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(\mathbf{Q}) w_{c_i}^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) + \int_{\Omega_g} g(\mathbf{q}) w^*(\mathbf{s}, \mathbf{q}) d\Omega_g(\mathbf{q})
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Tem-se, portanto, a equação integral do deslocamento transversal w de um ponto \mathbf{s} do domínio da placa, expressa em função dos esforços $V_n(\mathbf{Q})$ e $m_n(\mathbf{Q})$ e dos deslocamentos $w(\mathbf{Q})$, $\partial w(\mathbf{Q})/\partial n$ e $\partial w(\mathbf{Q})/\partial \mathbf{s}$ de pontos do contorno, utilizando-se as soluções fundamentais obtidas no capítulo anterior.

Derivando-se a equação (3.31) em relação à direção m , obtém-se a equação integral da derivada direcional do deslocamento transversal $\partial w(\mathbf{s})/\partial m$ para um ponto \mathbf{s} do domínio da placa:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w(\mathbf{s})}{\partial m} + \\
& + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial q_n^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q})}{\partial m} w(\mathbf{Q}) - \frac{\partial m_n^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q})}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{Q}) - \frac{\partial m_{ns}^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q})}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial \mathbf{s}}(\mathbf{Q}) \right] \\
& d\Gamma(\mathbf{Q}) = \int_{\Gamma} \left[V_n(\mathbf{Q}) \frac{\partial w^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q})}{\partial m} - m_n(\mathbf{Q}) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(\mathbf{s}, \mathbf{Q}) \right) \right] d\Gamma(\mathbf{Q}) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(\mathbf{Q}) \frac{\partial w_{c_i}^*(\mathbf{s}, \mathbf{Q})}{\partial m} + \int_{\Omega_g} g(\mathbf{q}) \frac{\partial w^*(\mathbf{s}, \mathbf{q})}{\partial m} d\Omega_g(\mathbf{q})
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Nas equações (3.31) e (3.32) estão representadas, portanto, as interrelações dos deslocamento transversal e de suas derivadas direcionais nos pontos internos da placa com os deslocamentos w , $\partial w/\partial n$ e $\partial w/\partial \mathbf{s}$ de pontos do contorno.

3.3. Equação integral para um ponto do contorno

As equações (3.31) e (3.32) são escritas para pontos s do domínio da placa, porém, para a aplicação do método aos problemas de flexão de placas, devem-se escrever as equações integrais para pontos S do contorno. Para isto, considere-se a Figura 3.3 onde um ponto S do contorno passa a pertencer ao domínio com o acréscimo Γ_ξ do contorno, de raio ξ e com novos cantos λ^+ e λ^- .

Com o acréscimo do contorno, a equação (3.31) escrita para o ponto S do contorno da placa resulta:

$$\begin{aligned}
& w(S) + \\
& + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[q_n^*(S, Q)w(Q) - m_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - m_{ns}^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma(Q) \\
& + \int_{\Gamma_\xi} \left[q_n^*(S, Q)w(Q) - m_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - m_{ns}^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma_\xi(Q) = \\
& = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n(Q)w^*(S, Q) - m_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) \right] d\Gamma(Q) + \\
& + \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(Q)w^*(S, Q) - m_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) \right] d\Gamma_\xi(Q) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(Q)w_{c_i}^*(S, Q) + R_{c_-}(Q)w_{c_-}^*(S, Q) + R_{c_+}(Q)w_{c_+}^*(S, Q) + \\
& + \int_{\Omega_g} g(q)w^*(S, q)d\Omega_g(q)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Na condição limite, quando ξ tende a zero, o ponto S pertencerá ao contorno. Assim:

$$\begin{aligned}
& w(S) + \\
& + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[q_n^*(S, Q)w(Q) - m_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - m_{ns}^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma(Q) \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[q_n^*(S, Q)w(Q) - m_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - m_{ns}^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma_\xi(Q) = \\
& = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n(Q)w^*(S, Q) - m_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) \right] d\Gamma(Q) + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(Q)w^*(S, Q) - m_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) \right] d\Gamma_\xi(Q) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_g} R_{c_i}(Q)w_{c_i}^*(S, Q) + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{c\lambda-}(Q)w_{c\lambda-}^*(S, Q) + R_{c\lambda+}(Q)w_{c\lambda+}^*(S, Q)] + \\
& + \int_{\Omega_g} g(q)w^*(S, q)d\Omega_g(q)
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Figura 3.3 – Contorno circular acrescido a um canto da placa

Os limites das integrais sobre $\Gamma - \bar{\Gamma}$ indicadas na equação (3.34), por definição, representam o valor principal de CAUCHY das mesmas, conforme PAIVA(1989). Assim,

$$\begin{aligned}
& \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[q_n^*(S, Q)w(Q) - m_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - m_{ns}^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma(Q) = \\
& = \int_{\Gamma} \left[q_n^*(S, Q)w(Q) - m_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - m_{ns}^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma(Q)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

e

$$\begin{aligned}
& \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n(Q)w^*(S, Q) - m_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) \right] d\Gamma(Q) = \\
& = \int_{\Gamma} \left[V_n(Q)w^*(S, Q) - m_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) \right] d\Gamma(Q)
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Considerando-se agora as integrais sobre o contorno acrescido Γ_ξ , pode-se escrever ainda:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[q_n^*(S, Q)w(Q) - m_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - m_{ns}^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma_\xi \tag{3.37}$$

Assume-se que as densidades $w(Q)$, $\partial w(Q)/\partial n$ e $\partial w(Q)/\partial s$ satisfazem à condição de Holder, com um expoente positivo, segundo PAIVA (1987) como segue:

$$|w(Q)-w(S)| \leq c_1 r^{\alpha_1}(S, Q)$$

$$|\partial w/\partial n(Q)-\partial w/\partial n(S)| \leq c_2 r^{\alpha_2}(S, Q)$$

$$|\partial w/\partial s(Q)-\partial w/\partial s(S)| \leq c_3 r^{\alpha_3}(S, Q)$$

$$0 < \alpha_i \leq 1 \quad , \quad i = 1, 2, 3$$

onde,

c_1 c_2 e c_3 são constantes

Pode-se então escrever a integral da equação (3.37) como:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[q_n^*(S, Q)[w(Q) - w(S)] - m_n^*(S, Q) \left[\frac{\partial w}{\partial n}(Q) - \frac{\partial w}{\partial n}(S) \right] + \right. \\ &- m_{ns}^*(S, Q) \left[\frac{\partial w}{\partial s}(Q) - \frac{\partial w}{\partial s}(S) \right] \left. \right] d\Gamma_\xi + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} q_n^*(S, Q) w(S) d\Gamma_\xi + \\ &+ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} m_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(S) d\Gamma_\xi + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} m_{ns}^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial s}(S) d\Gamma_\xi \end{aligned} \quad (3.38)$$

onde a primeira integral do lado direito desaparecerá quando $\xi \rightarrow 0$.

Então a integral sobre o contorno Γ_ξ passa a ser escrita como:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi = \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[q_n^*(S, Q) w(S) - m_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(S) - m_{ns}^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial s}(S) \right] d\Gamma_\xi \quad (3.39)$$

Pode-se escrever ainda, a partir da Figura 3.3:

$$\frac{\partial w}{\partial n}(S) = \frac{\partial w}{\partial m}(S) \text{sen}(\theta - \gamma) - \frac{\partial w}{\partial u}(S) \text{cos}(\theta - \gamma) \quad (3.40.a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}(S) = \frac{\partial w}{\partial m}(S) \text{cos}(\theta - \gamma) + \frac{\partial w}{\partial u}(S) \text{sen}(\theta - \gamma) \quad (3.40.b)$$

onde,

θ : ângulo entre os vetores \bar{n} e \bar{r} ;

γ : ângulo entre os vetores \bar{m} e \bar{n} ;

Aplicando-se as expressões (3.40) e (2.68) à equação (3.39) resulta:

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[-\frac{1}{2\pi\xi} (\vec{n} \cdot \vec{r}) \right] w(S) d\Gamma_\xi + \\
&+ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ -\frac{1}{4\pi} [(1+\nu) \ln \xi + (1-\nu)(\vec{n} \cdot \vec{r})^2 + \nu] \left[\frac{\partial w}{\partial m}(S) \sin(\theta - \gamma) - \frac{\partial w}{\partial u}(S) \cos(\theta - \gamma) \right] \right\} d\Gamma_\xi + \\
&+ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ -\frac{(1-\nu)}{4\pi} (\vec{n} \cdot \vec{r})(\vec{s} \cdot \vec{r}) \left[\frac{\partial w}{\partial m}(S) \cos(\theta - \gamma) + \frac{\partial w}{\partial u}(S) \sin(\theta - \gamma) \right] \right\} d\Gamma_\xi
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Da Figura 3.3 pode-se deduzir que:

$$(\vec{n} \cdot \vec{r}) = 1 \tag{3.42.a}$$

$$(\vec{s} \cdot \vec{r}) = 0 \tag{3.42.b}$$

$$d\Gamma_\xi = \xi d\theta \tag{3.42.c}$$

Desta forma, introduzindo-se as condições dadas nas expressões (3.42) à equação (3.41), tem-se:

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi &= \lim_{\xi \rightarrow 0} w(S) \int_0^{2\pi - \beta_c} \left[-\frac{1}{2\pi\xi} \right] \xi d\theta + \\
&+ \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi - \beta_c} \left\{ -\frac{1}{4\pi} [(1+\nu) \ln \xi + 1] \left[\frac{\partial w}{\partial m}(S) \sin(\theta - \gamma) - \frac{\partial w}{\partial u}(S) \cos(\theta - \gamma) \right] \right\} \xi d\theta
\end{aligned} \tag{3.43}$$

e ainda,

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[-\frac{1}{2\pi\xi} (\vec{n} \cdot \vec{r}) \right] w(S) d\Gamma_\xi = -\frac{(2\pi - \beta_c)}{2\pi} w(S) \tag{3.44}$$

Os demais limites sobre ξ , incluindo-se as parcelas correspondentes às reações de canto, se anulam, de onde a equação (3.34) resulta:

$$\begin{aligned}
 & K(S)w(S) + \\
 & + \int_{\Gamma} \left[q_n^*(S, Q)w(Q) - m_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - m_{ns}^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma(Q) = \\
 & = \int_{\Gamma} \left[V_n(Q)w^*(S, Q) - m_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) \right] d\Gamma(Q) + \\
 & + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(Q)w_{c_i}^*(S, Q) + \int_{\Omega_g} g(q)w^*(S, q)d\Omega_g(q)
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

onde,

$$K(S) = \frac{\beta_c}{2\pi} \tag{3.46}$$

Para um ponto S não pertencente a um canto da placa a constante $K(S)$ resulta:

$$K(S) = 1/2 \tag{3.47}$$

Escrevendo-se agora a equação integral (3.32) da derivada direcional $\partial w(S)/\partial m$ para o ponto S da Figura 3.3, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w(S)}{\partial m} + \\
& + \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[\frac{\partial q_n^*(S, Q)}{\partial m} w(Q) - \frac{\partial m_n^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - \frac{\partial m_{ns}^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma(Q) \\
& + \int_{\Gamma_\xi} \left[\frac{\partial q_n^*(S, Q)}{\partial m} w(Q) - \frac{\partial m_n^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - \frac{\partial m_{ns}^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma_\xi(Q) = \\
& = \int_{\Gamma-\bar{\Gamma}} \left[V_n(Q) \frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial m} - m_n(Q) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) \right) \right] d\Gamma(Q) + \\
& + \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(Q) \frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial m} - m_n(Q) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) \right) \right] d\Gamma_\xi(Q) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(Q) \frac{\partial w_{c_i}^*(S, Q)}{\partial m} + [R_{c_{\lambda-}}(Q) \frac{\partial w_{c_{\lambda-}}^*(S, Q)}{\partial m} + R_{c_{\lambda+}}(Q) \frac{\partial w_{c_{\lambda+}}^*(S, Q)}{\partial m}] + \\
& + \int_{\Omega_g} g(q) \frac{\partial w^*(S, q)}{\partial m} d\Omega_g(q)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

No limite, para ξ tendendo a zero, o ponto S pertence ao contorno. Assim, a equação (3.48) resulta:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w(S)}{\partial m} + \\
& + \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[\frac{\partial q_n^*(S, Q)}{\partial m} w(Q) - \frac{\partial m_n^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - \frac{\partial m_{ns}^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma(Q) \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[\frac{\partial q_n^*(S, Q)}{\partial m} w(Q) - \frac{\partial m_n^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - \frac{\partial m_{ns}^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma_\xi(Q) = \\
& = \lim_{\bar{\Gamma} \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \bar{\Gamma}} \left[V_n(Q) \frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial m} - m_n(Q) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) \right) \right] d\Gamma(Q) + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(Q) \frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial m} - m_n(Q) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) \right) \right] d\Gamma_\xi(Q) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(Q) \frac{\partial w_{c_i}^*(S, Q)}{\partial m} + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{c_{\lambda-}}(Q) \frac{\partial w_{c_{\lambda-}}^*(S, Q)}{\partial m} + R_{c_{\lambda+}}(Q) \frac{\partial w_{c_{\lambda+}}^*(S, Q)}{\partial m}] + \\
& + \int_{\Omega_g} g(q) \frac{\partial w^*(S, q)}{\partial m} d\Omega_g(q)
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Os limites das integrais sobre $\Gamma - \bar{\Gamma}$ são os valores principais das integrais sobre Γ . Realizando-se um deslocamento vertical de corpo rígido com a placa igual a $-w(S)$, pode-se eliminar as singularidades que aparecem na equação (3.49) quando $\xi \rightarrow 0$. Assim a equação (3.49) resulta:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial w(S)}{\partial m} + \\
& + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial q_n^*(S, Q)}{\partial m} [w(Q) - w(S)] - \frac{\partial m_n^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - \frac{\partial m_{ns}^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma(Q) \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[\frac{\partial q_n^*(S, Q)}{\partial m} [w(Q) - w(S)] - \frac{\partial m_n^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - \frac{\partial m_{ns}^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma_\xi(Q) = \\
& = \int_{\Gamma} \left[V_n(Q) \frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial m} - m_n(Q) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) \right) \right] d\Gamma(Q) + \\
& + \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[V_n(Q) \frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial m} - m_n(Q) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) \right) \right] d\Gamma_\xi(Q) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{c_i}(Q) \frac{\partial w_{c_i}^*(S, Q)}{\partial m} + \lim_{\xi \rightarrow 0} [R_{c_{\lambda-}}(Q) \frac{\partial w_{c_{\lambda-}}^*(S, Q)}{\partial m} + R_{c_{\lambda+}}(Q) \frac{\partial w_{c_{\lambda+}}^*(S, Q)}{\partial m}] + \\
& + \int_{\Omega_g} g(q) \frac{\partial w^*(S, q)}{\partial m} d\Omega_g(q)
\end{aligned} \tag{3.50}$$

A integral sobre Γ_ξ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[\frac{\partial q_n^*(S, Q)}{\partial m} [w(Q) - w(S)] - \frac{\partial m_n^*(S, Q)}{\partial m} \left[\frac{\partial w}{\partial n}(Q) - \frac{\partial w}{\partial n}(S) \right] + \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial m_{ns}^*(S, Q)}{\partial m} \left[\frac{\partial w}{\partial s}(Q) - \frac{\partial w}{\partial s}(S) \right] \right] d\Gamma_\xi + \\ &\quad - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \frac{\partial m_n^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial n}(S) d\Gamma_\xi - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \frac{\partial m_{ns}^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial s}(S) d\Gamma_\xi \end{aligned} \quad (3.51)$$

Assumindo-se que as densidades $\partial w(Q)/\partial n$ e $\partial w(Q)/\partial s$ satisfazem à condição de Holder, ainda segundo PAIVA (1987), com um expoente positivo, pode-se escrever a integral da equação (3.51) como:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \frac{\partial q_n^*(S, Q)}{\partial m} [w(Q) - w(S)] d\Gamma_\xi + \\ &\quad - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \frac{\partial m_n^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial n}(S) d\Gamma_\xi - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \frac{\partial m_{ns}^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial s}(S) d\Gamma_\xi \end{aligned} \quad (3.52)$$

Considerando-se a Figura 3.4 ,onde são mostrados os pontos S e Q e seus deslocamentos, quando $\xi \rightarrow 0$ pode-se escrever:

$$w(Q) - w(S) = \xi \frac{\partial w}{\partial n}(S) \quad (3.53)$$

Aplicando-se a expressão (3.53) à equação (3.52) tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \frac{\partial q_n^*(S, Q)}{\partial m} \xi \frac{\partial w}{\partial n}(S) d\Gamma_\xi + \\ &\quad - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \frac{\partial m_n^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial n}(S) d\Gamma_\xi - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \frac{\partial m_{ns}^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w}{\partial s}(S) d\Gamma_\xi \end{aligned} \quad (3.54)$$

Figura 3.4 – sistema de coordenadas referentes aos pontos anterior e posterior aos cantos λ^- e λ^+

Introduzindo-se à equação (3.54) as expressões das soluções fundamentais (2.80) a (2.82), obtém-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ \frac{1}{2\pi\xi^2} [(\bar{m} \cdot \bar{n}) - 2(\bar{m} \cdot \bar{r})] \right\} \xi \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{S}) d\Gamma_\xi + \\ &- \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[\frac{1}{4\pi\xi} (1+\nu)(\bar{m} \cdot \bar{r}) \right] \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{S}) d\Gamma_\xi - \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[-\frac{(1-\nu)}{4\pi\xi} (-\bar{m} \cdot \bar{s}) \right] \frac{\partial w}{\partial s}(\mathbf{S}) d\Gamma_\xi \end{aligned} \quad (3.55)$$

Agrupando-se os termos referentes a $\partial w(\mathbf{S})/\partial n$, considerando-se que $(\bar{m} \cdot \bar{n}) = (\bar{m} \cdot \bar{r})$, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left\{ \frac{1}{2\pi\xi} [-(\bar{m} \cdot \bar{r})] - \left[\frac{1}{4\pi\xi} (1+\nu)(\bar{m} \cdot \bar{r}) \right] \right\} \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{S}) d\Gamma_\xi + \\ &- \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[\frac{(1-\nu)}{4\pi\xi} (\bar{m} \cdot \bar{s}) \right] \frac{\partial w}{\partial s}(\mathbf{S}) d\Gamma_\xi \end{aligned} \quad (3.56)$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[-\frac{(3+\nu)}{4\pi\xi} (\vec{m} \cdot \vec{r}) \right] \frac{\partial w}{\partial n}(\mathbf{S}) d\Gamma_\xi + \\ &- \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \left[\frac{(1-\nu)}{4\pi\xi} (\vec{m} \cdot \vec{s}) \right] \frac{\partial w}{\partial s}(\mathbf{S}) d\Gamma_\xi \end{aligned} \quad (3.57)$$

Considerando-se as expressões (3.40), (3.42) e ainda:

$$\begin{aligned} (\vec{m} \cdot \vec{r}) &= \text{sen}(\theta - \gamma) \\ (\vec{m} \cdot \vec{s}) &= \text{cos}(\theta - \gamma) \end{aligned}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi &= \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta_c} \left[-\frac{(3+\nu)}{4\pi\xi} \right] \text{sen}(\theta - \gamma) \left[\frac{\partial w}{\partial m}(\mathbf{S}) \text{sen}(\theta - \gamma) - \frac{\partial w}{\partial u}(\mathbf{S}) \text{cos}(\theta - \gamma) \right] \xi d\theta + \\ &- \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_0^{2\pi-\beta_c} \left\{ \frac{(1-\nu)}{4\pi\xi} \text{cos}(\theta - \gamma) \left[\frac{\partial w}{\partial m}(\mathbf{S}) \text{cos}(\theta - \gamma) + \frac{\partial w}{\partial u}(\mathbf{S}) \text{sen}(\theta - \gamma) \right] \right\} \xi d\theta \end{aligned} \quad (3.58)$$

onde,

γ : ângulo entre os sistemas de coordenadas (n, s) e (m, u), conforme mostra a Figura 3.4.

Rearranjando-se os termos internos às integrais, resulta:

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi &= \\ &= \int_0^{2\pi-\beta_c} \left[-\frac{(3+\nu)}{4\pi} \right] \left[\frac{\partial w}{\partial m}(\mathbf{S}) \text{sen}^2(\theta - \gamma) - \frac{\partial w}{\partial u}(\mathbf{S}) \text{sen}(\theta - \gamma) \text{cos}(\theta - \gamma) \right] d\theta + \\ &- \int_0^{2\pi-\beta_c} \left\{ \frac{(1-\nu)}{4\pi} \left[\frac{\partial w}{\partial m}(\mathbf{S}) \text{cos}^2(\theta - \gamma) + \frac{\partial w}{\partial u}(\mathbf{S}) \text{sen}(\theta - \gamma) \text{cos}(\theta - \gamma) \right] \right\} d\theta \end{aligned}$$

(3.59)

ou ainda:

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi &= -\frac{(3+\nu)}{4\pi} \left\{ \frac{1}{4} [4\pi - 2\beta_c + \text{sen } 2(\gamma + \beta_c) - \text{sen } 2\gamma] \frac{\partial w}{\partial m}(\mathbf{S}) + \right. \\
&+ \frac{1}{4} [\cos 2(\gamma + \beta_c) - \cos 2\gamma] \frac{\partial w}{\partial u}(\mathbf{S}) \left. \right\} + \\
&- \frac{(1-\nu)}{4\pi} \left\{ \frac{1}{4} [4\pi - 2\beta_c - \text{sen } 2(\gamma + \beta_c) + \text{sen } 2\gamma] \frac{\partial w}{\partial m}(\mathbf{S}) + \right. \\
&- \frac{1}{4} [\cos 2(\gamma + \beta_c) - \cos 2\gamma] \frac{\partial w}{\partial u}(\mathbf{S}) \left. \right\}
\end{aligned}
\tag{3.60}$$

Reagrupando-se os termos referentes às derivadas dos deslocamentos transversais, resulta:

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\xi} \phi(\xi) d\Gamma_\xi &= \left\{ -\frac{(2\pi - \beta_c)}{2\pi} + \frac{(1+\nu)}{8\pi} [\text{sen } 2\gamma - \text{sen } 2(\gamma + \beta_c)] \frac{\partial w}{\partial m}(\mathbf{S}) + \right. \\
&+ \frac{(1+\nu)}{8\pi} [\cos 2\gamma - \cos 2(\gamma + \beta_c)] \frac{\partial w}{\partial u}(\mathbf{S}) \left. \right\}
\end{aligned}
\tag{3.61}$$

Os demais limites dependentes de ξ da equação (3.50) são nulos.

Após as substituições feitas na equação (3.50) obtém-se a expressão da derivada da equação integral em um canto do contorno:

$$\begin{aligned}
& K_1(S) \frac{\partial w}{\partial m_s}(S) + K_2(S) \frac{\partial w}{\partial u_s}(S) + \\
& + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial q_n^*(S, Q)}{\partial m_s} w(Q) - \frac{\partial m_n^*(S, Q)}{\partial m_s} \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - \frac{\partial m_{ns}^*(S, Q)}{\partial m_s} \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma(Q) = \\
& = \int_{\Gamma} \left\{ V_n(Q) \frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial m_s} - m_n(Q) \frac{\partial}{\partial m_s} \left[\frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial n} \right] \right\} d\Gamma(Q) + \\
& + \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(Q) \frac{\partial w_{ci}^*(S, Q)}{\partial m_s} + \int_{\Omega_g} g(q) \frac{\partial w^*(S, q)}{\partial m_s} d\Omega_g(q)
\end{aligned} \tag{3.62}$$

com,

$$K_1(S) = \frac{\beta}{2\pi} + \frac{1+\nu}{8\pi} [\text{sen } 2\gamma - \text{sen } 2(\gamma + \beta)] \tag{3.63}$$

$$K_2(S) = \frac{1+\nu}{8\pi} [\cos 2\gamma - \cos 2(\gamma + \beta)] \tag{3.64}$$

onde,

γ : ângulo entre os sistemas de coordenadas (n,s) e (m,u)

Indicando-se por $K(S)$ a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
& K(S) = \\
& = \left\{ \frac{\beta_c}{2\pi} + \frac{(1+\nu)}{8\pi} [\text{sen } 2\gamma - \text{sen } 2(\gamma + \beta_c)] \right\} \frac{\partial w}{\partial m}(S) + \frac{(1+\nu)}{8\pi} [\cos 2\gamma - \cos 2(\gamma + \beta_c)] \frac{\partial w}{\partial u}(S) = \\
& = K_1(S) \frac{\partial w}{\partial m}(S) + K_2(S) \frac{\partial w}{\partial u}(S)
\end{aligned} \tag{3.65}$$

Admitindo-se que a coordenada m coincida com a direção normal n_1 , anterior ao canto, e $\gamma=0$, conforme a figura 3.4, obtém-se:

$$K(S) = \left[\frac{\beta_c}{2\pi} - \frac{1+\nu}{8\pi} \text{sen } 2\beta_c \right] \frac{\partial w}{\partial n}(S) + \frac{1+\nu}{8\pi} [1 - \cos 2\beta_c] \frac{\partial w}{\partial s}(S)$$

(3.66.a)

e para $m = s_1$, anterior ao canto, e $\gamma = \pi/2$:

$$K(S) = \left[\frac{\beta_c}{2\pi} + \frac{1+\nu}{8\pi} \text{sen } 2\beta_c \right] \frac{\partial w}{\partial n}(S) - \frac{1+\nu}{8\pi} [1 - \cos 2\beta_c] \frac{\partial w}{\partial s}(S)$$

(3.66.b)

Admitindo-se agora que a coordenada m coincida com a direção normal n_2 , posterior ao canto, e $\gamma = \pi - \beta_c$, obtém-se:

$$K(S) = \left[\frac{\beta_c}{2\pi} - \frac{1+\nu}{8\pi} \text{sen } 2\beta_c \right] \frac{\partial w}{\partial n}(S) - \frac{1+\nu}{8\pi} [1 - \cos 2\beta_c] \frac{\partial w}{\partial s}(S)$$

(3.67.a)

e para $m = s_2$, posterior ao canto, e $\gamma = 3\pi/2 - \beta_c$:

$$K(S) = \left[\frac{\beta_c}{2\pi} - \frac{1+\nu}{8\pi} \text{sen } 2\beta_c \right] \frac{\partial w}{\partial n}(S) + \frac{1+\nu}{8\pi} [1 - \cos 2\beta_c] \frac{\partial w}{\partial s}(S)$$

(3.67.b)

3.4. Integrais de domínio para o carregamento

As integrais de domínio das equações 3.31, 3.32, 3.46 e 3.52 serão transformadas em integrais sobre o contorno da região carregada Ω_g . As integrais do domínio são:

$$\int_{\Omega_g} g(q)w^*(s,q)d\Omega_g(q) \quad (3.68.a)$$

$$\int_{\Omega_g} g(q)\frac{\partial w^*(s,q)}{\partial m}d\Omega_g(q) \quad (3.68.b)$$

onde,

$$w^* = \frac{r^2}{8\pi D}(\ln r - 1/2) \quad (3.69.a)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial m} = -\frac{r}{4\pi D} \ln r \cos \varphi \quad (3.69.b)$$

Figura 3.5 – Região de carregamento Ω_g

Considerando-se a Figura 3.5 que mostra a região carregada Ω_g com contorno Γ_g , onde admite-se a carga g variando linearmente em seu domínio. Com isto pode-se escrever, em relação ao sistema de coordenadas (x,y) :

$$g(q) = A x(q) + B y(q) + C \quad (3.70)$$

Em relação ao sistema de coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) , de origem em s (Figura 3.5), têm-se:

$$x(q) = x(s) + \bar{x}(q) \quad (3.71.a)$$

$$y(q) = y(s) + \bar{y}(q) \quad (3.71.b)$$

Reescrevendo-se a equação (3.70) tem-se:

$$\begin{aligned} g(q) &= Ax(s) + By(s) + C + A \bar{x}(q) + B \bar{y}(q) \\ &= g(s) + A \bar{x}(q) + B \bar{y}(q) \end{aligned} \quad (3.72)$$

onde,

$g(s)$: valor da carga g no ponto s .

Substituindo-se a equação 3.72, realizada a transformação para coordenadas polares, na equação 3.68.a, obtém-se:

$$\int_{\Omega_g} g(q) w^*(s, q) d\Omega_g(q) = \int_{\Omega_g} [g(s) + Ar \cos \theta + Br \sin \theta] w^*(s, q) d\Omega_g(q) \quad (3.73)$$

Substituindo-se a equação (3.69.a) na equação (3.73), lembrando-se que $g(s)$ é uma constante e $d\Omega_g = r dr d\theta$ (Figura 3.5), tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_g} g(q) w^*(s, q) d\Omega_g(q) &= \frac{g(s)}{8\pi D} \int_{\theta} \left[\int_0^R r^3 (\ln r - 1/2) dr \right] d\theta + \\ &= \frac{1}{8\pi D} \int_{\theta} \left[\int_0^R (A \cos \theta + B \sin \theta) r^4 (\ln r - 1/2) dr \right] d\theta \end{aligned} \quad (3.74)$$

Fazendo-se a integração em r , com o ângulo θ constante,

$$\int_{\Omega_g} g(q)w^*(s, q)d\Omega_g(q) = \frac{g(s)}{32\pi D} \int_{\theta} R^4 (\ln R - 3/4)d\theta + \frac{1}{40\pi D} \int_{\theta} R^5 (A \cos \theta + B \sin \theta)(\ln R - 0,7)d\theta \quad (3.75)$$

Da Figura 3.5 pode-se escrever:

$$d\Gamma_g \cos \beta = R d\theta \quad (3.76.a)$$

ou,
$$d\theta = \frac{d\Gamma_g \cos \beta}{R} \quad (3.76.b)$$

Substituindo-se a equação (3.76) na equação (3.75) obtém-se a integral de domínio, transformada numa integral sobre o contorno do carregamento Γ_g :

$$\int_{\Omega_g} g(q)w^*(s, q)d\Omega_g(q) = \frac{g(s)}{32\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 (\ln R - 3/4) \cos \beta d\Gamma_g + \frac{1}{40\pi D} \int_{\Gamma_g} R^4 (A \cos \theta + B \sin \theta)(\ln R - 0,7) \cos \beta d\Gamma_g \quad (3.77)$$

Analogamente, para a integral de domínio expressa na equação (3.68.b):

$$\int_{\Omega_g} g(q) \frac{\partial w^*}{\partial m}(s, q)d\Omega_g(q) = -\frac{g(s)}{12\pi D} \int_{\Gamma_g} R^2 (\ln R - 1/3) \cos \varphi \cos \beta d\Gamma_g + -\frac{1}{16\pi D} \int_{\Gamma_g} R^3 (A \cos \theta + B \sin \theta)(\ln R - 0,25) \cos \varphi \cos \beta d\Gamma_g \quad (3.78)$$

4. MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO : IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

4.1. Introdução

Neste capítulo será apresentada a solução numérica das equações integrais obtidas no capítulo anterior dos deslocamentos transversais e de suas derivadas direcionais, relacionados aos deslocamentos e esforços no contorno.

A transformação dessas equações integrais em equações algébricas para a solução numérica é feita utilizando-se o Método dos Elementos de Contorno. Neste método divide-se o contorno em segmentos, chamados elementos de contorno, onde as variáveis nodais correspondentes, os deslocamentos w , $\partial w/\partial n$ e $\partial w/\partial s$ e os esforços V_n e m_n , são aproximados por funções interpoladoras.

As equações algébricas resultantes dessa transformação, escritas para todos os pontos do contorno, formam um sistema de equações lineares. O sistema é resolvido após a imposição das condições de contorno para cada problema, podendo-se obter posteriormente valores de deslocamentos e esforços para pontos do domínio.

Ainda neste capítulo são apresentados os elementos utilizados no programa para aproximação da geometria, procedimentos utilizados em casos de descontinuidade da normal ou das condições de contorno e na aplicação da reação V_n pontual. São ainda comentadas as integrações numéricas utilizadas em cada elemento, lineares e cúbicas.

4.2. Discretização das equações integrais

A discretização do contorno de uma placa de forma qualquer deve ser feita de modo que o contorno real seja melhor representado. Para isto adotam-se elementos de geometria reta ou curva.

A Figura 4.1 mostra uma placa cujo contorno Γ é dividido em elementos de contorno Γ_j , cuja geometria é definida pelos pontos nodais correspondentes. As variáveis de contorno são aproximadas por funções polinomiais interpoladoras, também definidas para os pontos nodais correspondentes a cada elemento.

Figura 4.1 – Discretização do contorno Γ da placa.

Os elementos são ditos contínuos pela a continuidade das variáveis entre elementos adjacentes. Em casos de descontinuidade da normal ao contorno ou de esforços serão utilizados nós duplos, de iguais coordenadas, onde cada nó assumirá valores nodais diferentes na descontinuidade.

Esta situação ocorre, por exemplo, em um canto de placa, onde há uma mudança brusca da direção normal ao contorno, ou ainda condições de contorno de deslocamentos ou de esforços diferentes, como um lado da placa engastado e outro simplesmente apoiado, ou livre.

A Figura 4.2 mostra o nó duplo em um canto de placa, cada nó pertencendo a um elemento adjacente a este canto, com direções normais ao contorno distintas.

Figura 4.2 – Nó duplo em canto da placa.

4.2.1. Aproximação das variáveis do problema

Na aplicação numérica do M.E.C. utiliza-se a discretização do contorno da placa em segmentos, denominados elementos de contorno, em cujo domínio são utilizadas funções aproximadoras para as variáveis envolvidas, deslocamentos e esforços.

Um problema surge na formulação usual do M.E.C. na associação de placas delgadas analisadas pelo método com elementos estruturais lineares (vigas e pilares). Na formulação alternativa do M.E.C. para análise de placas delgadas utilizando-se três parâmetros nodais, o deslocamento transversal w e suas derivadas $\partial w/\partial n$ e $\partial w/\partial s$, permite a ligação compatível com os elementos estruturais lineares analisados por métodos numéricos diferentes.

Na formulação clássica do método, utilizam-se funções interpoladoras lineares ou quadráticas para aproximação das variáveis nos elementos de contorno.

Na formulação apresentada neste trabalho, os deslocamentos w serão aproximados por funções aproximadoras cúbicas $\varphi(\xi)$, as coordenadas dos pontos nodais x_i , o esforço m_n e a derivada na direção normal do deslocamento $\partial w/\partial n$ por funções aproximadoras lineares $\phi(\xi)$ e a força cortante equivalente V_n será admitida como concentrada nos pontos nodais, apresentando melhorias nas oscilações de seus resultados numéricos em alguns casos de vinculação, conforme demonstrado em PAIVA (1991) e em OLIVEIRA NETO (1991).

Figura 4.3 – Coordenada adimensional ξ no elemento de contorno linear.

Considerando-se dois pontos nodais por elemento de contorno, as funções aproximadoras lineares são as seguintes:

$$\phi_1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad (4.1)$$

$$\phi_2(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi) \quad (4.2)$$

onde,

$$d\xi = d\Gamma_j / (L/2)$$

ξ : coordenada adimensional com origem no centro do elemento de contorno linear de comprimento L.

Desta forma, as coordenadas dos pontos nodais x_i , a derivada direcional do deslocamento w na direção normal ao contorno $\partial w / \partial n$ e o momento fletor m_n serão representados como:

$$x_i(\xi) = \phi_1(\xi) x_{i1} + \phi_2(\xi) x_{i2} \quad (4.3)$$

$$\left(\frac{\partial w(\xi)}{\partial n} \right) = \phi_1(\xi) \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_1 + \phi_2(\xi) \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_2 \quad (4.4)$$

$$m_n(\xi) = \phi_1(\xi) m_{n1} + \phi_2(\xi) m_{n2} \quad (4.5)$$

Já as funções aproximadoras cúbicas $\varphi(\xi)$ são obtidas em função dos dois parâmetros nodais referentes aos dois nós de extremidade do elemento de contorno:

$$\varphi(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3 \quad (4.6)$$

Com isto, o deslocamento w e sua derivada direcional na direção tangencial ao contorno $\partial w / \partial s$ serão representados pelas expressões:

$$w(\xi) = \varphi_1(\xi) w_1 + \varphi_2(\xi) \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_1 + \varphi_3(\xi) w_2 + \varphi_4(\xi) \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_2 \quad (4.7)$$

$$\left(\frac{\partial w(\xi)}{\partial s}\right) = \varphi'_1(\xi) w_1 + \varphi'_2(\xi) \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_1 + \varphi'_3(\xi) w_2 + \varphi'_4(\xi) \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)_2 \quad (4.8)$$

Figura 4.4 – Funções aproximadoras cúbicas $\varphi(\xi)$

As expressões das funções $\varphi_i(\xi)$ e $\varphi'_i(\xi)$ são:

$$\varphi_1(\xi) = (2 - 3\xi + \xi^3)/4$$

$$\varphi'_1(\xi) = (-3 + 3\xi^2)/4$$

$$\varphi_2(\xi) = (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3)L/8$$

$$\varphi'_2(\xi) = (-1 - 2\xi + 3\xi^2)L/8$$

$$\varphi_3(\xi) = (2 + 3\xi - \xi^3)/4$$

$$\varphi'_3(\xi) = (3 - 3\xi^2)/4$$

$$\varphi_4(\xi) = (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3)L/8$$

$$\varphi'_4(\xi) = (-1 + 2\xi + 3\xi^2)L/8$$

4.2.2. Transformação das equações integrais em equações algébricas

As equações integrais de placas obtidas no capítulo anterior apresentam integrais sobre o contorno Γ e as aproximações da geometria e variáveis sobre os elementos que o discretizam são funções da variável adimensional ξ , cuja transformação de coordenadas é dada pelo determinante jacobiano J da equação (4.9).

$$J = L/2 \quad (4.9)$$

onde,

L : comprimento do elemento de contorno de geometria linear.

Reescrevendo-se as equações integrais (3.45) e (3.61), levando-se em conta a discretização do contorno da placa em elementos e as funções aproximadoras das variáveis apresentadas sobre os mesmos elementos, resulta na seguinte equação:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{S})\mathbf{U}(\mathbf{S}) + \sum_{l=1}^{N_e} \int_{-1}^1 [\mathbf{J}] \cdot \mathbf{P}^*(\mathbf{S}, \mathbf{Q}) \cdot \Phi^1(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{U}(\mathbf{Q}) \cdot d\Gamma_1 = \\ = \sum_{i=1}^{N_c} \mathbf{R}_{ci}(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{U}_{ci}^*(\mathbf{S}, \mathbf{Q}) + \sum_{l=1}^{N_e} \int_{-1}^1 [\mathbf{J}] \cdot \mathbf{U}^*(\mathbf{S}, \mathbf{Q}) \cdot \Phi^2(\mathbf{Q}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{Q}) \cdot d\Gamma_1 + \\ + \int_{\Omega_g} \mathbf{g}(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{U}^*(\mathbf{S}, \mathbf{q}) \cdot d\Omega_g(\mathbf{q}) \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde,

N_e : número de elementos de contorno;

N_c : número de cantos da placa;

$$\mathbf{K}(\mathbf{S}) = \begin{bmatrix} \beta_c / 2\pi & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_1(\mathbf{S}) & \mathbf{K}_2(\mathbf{S}) \\ 0 & -\mathbf{K}_2(\mathbf{S}) & \mathbf{K}_1(\mathbf{S}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}^T(\mathbf{S}) = \left\{ \mathbf{w}(\mathbf{S}) \left(\frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{m}} \right) \left(\frac{\partial \mathbf{w}(\mathbf{S})}{\partial \mathbf{u}} \right) \right\}$$

$$P^T(Q) = \{ m_{n1}(Q) \ m_{n2}(Q) \}$$

$$U^T(Q) = \left\{ w_1(Q) \left(\frac{\partial w(Q)}{\partial n} \right)_1 \left(\frac{\partial w(Q)}{\partial s} \right)_1 \ w_2(Q) \left(\frac{\partial w(Q)}{\partial n} \right)_2 \left(\frac{\partial w(Q)}{\partial s} \right)_2 \right\}$$

$$Rc(Q) = \{ V_n(Q) \}$$

$$\Phi^1(Q) = \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 & \varphi_2 & \varphi_3 & 0 & \varphi_4 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 \\ \varphi'_1 & 0 & \varphi'_2 & \varphi'_3 & 0 & \varphi'_4 \end{bmatrix}$$

$$\Phi^2(Q) = [\phi_1 \ \phi_2]$$

$$P^*(S, Q) = \begin{bmatrix} q^*(S, Q) & m_n^*(S, Q) & m_{ns}^*(S, Q) \\ \frac{\partial q^*(S, Q)}{\partial m} & \frac{\partial}{\partial m} (m_n^*(S, Q)) & \frac{\partial}{\partial m} (m_{ns}^*(S, Q)) \\ \frac{\partial q^*(S, Q)}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial u} (m_n^*(S, Q)) & \frac{\partial}{\partial u} (m_{ns}^*(S, Q)) \end{bmatrix}$$

$$U^{*T}(S, Q) = \left\{ \left(\frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial n} \right) \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial n} \right) \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial n} \right) \right\}$$

$$U^{*T}(S, q) = \left\{ w^*(S, q) \frac{\partial w^*(S, q)}{\partial m} \frac{\partial w^*(S, q)}{\partial u} \right\}$$

$$U_c^{*T}(S, Q) = \left\{ w^*(S, Q) \frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial m} \frac{\partial w^*(S, Q)}{\partial u} \right\}$$

Escrevendo-se as equações integrais dos deslocamentos (3.45) e de suas derivadas nas direções normal e tangencial (3.62), para todos os nós do contorno, obtém-se o seguinte sistema linear:

$$[H]w_{\Gamma} = [G]V_{\Gamma} + \{p\} \quad (4.11)$$

onde,

$$w_{\Gamma}^T = \left\{ (w)_1 \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_1 \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_1 (w)_2 \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_2 \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_2 \dots (w)_n \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_n \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)_n \right\}$$

$$V_{\Gamma}^T = \left\{ (V_n)_1 \cdot (m_n)_1 \cdot (V_n)_2 \cdot (m_n)_2 \dots (V_n)_n \cdot (m_n)_n \right\}$$

sendo,

$[H]$ e $[G]$: matrizes resultantes das integrações realizadas sobre os elementos de contorno, em cujos integrandos estão as soluções fundamentais de placas; ordem $3N_{pc} \times 3N_{pc}$ e $3N_{pc} \times 2N_{pc}$, respectivamente;

$\{p\}$: vetor de carregamentos conhecidos a que a placa está submetida, resultante da integração sobre a região carregada Ω_g ; ordem $3N_{pc}$.

N_{pc} : número de pontos nodais no contorno;

Com as condições de contorno impostas por um problema com uma placa em equilíbrio, serão conhecidas, para cada nó do contorno, no mínimo duas das cinco variáveis nodais enquanto as demais serão incógnitas. Levando-se as variáveis conhecidas para o segundo membro da equação (4.11), esta pode ser reescrita como:

$$[A]\{X\} = \{B\} \quad (4.12)$$

onde,

$\{X\}$: vetor de incógnitas do problema.

Após a resolução do sistema são conhecidos todos os valores nodais, podendo-se obter os deslocamentos e curvaturas dos pontos internos aplicando-se as equações integrais (3.31) e (3.32). A partir dos deslocamentos e curvaturas dos pontos internos podem-se calcular os momentos fletores e volventes e força cortante nestes pontos, como será visto posteriormente.

4.3. Deslocamentos para pontos internos

Calculadas as incógnitas do contorno após a resolução do sistema (4.11) podem-se obter os deslocamentos $w(s)$, as derivadas direcionais $\partial w/\partial m$ e as curvaturas em relação a uma direção m , qualquer, para pontos do domínio. Para isto utilizam-se as equações (3.45) e (3.61), respectivamente, aplicadas a todos os pontos internos.

Desta forma obtém-se a seguinte equação matricial, semelhante à já descrita para pontos do contorno (4.11):

$$\{U(s)\} + [H'] \{U\} = [G'] \{P\} + \{p'\} \quad (4.13)$$

onde,

$$\{U(s)\}^T = \{w_1 \ (\partial w/\partial m)_1 \ (\partial w/\partial u) \dots w_{N_{pi}} \ (\partial w/\partial m)_{N_{pi}} \ (\partial w/\partial u)_{N_{pi}}\} \quad (4.14)$$

sendo,

N_{pi} : número de pontos internos;

$[H']$ e $[G']$: matrizes semelhantes a $[H]$ e $[G]$, obtidas para pontos internos;

$\{U\}$ e $\{P\}$: vetores dos deslocamentos e dos esforços dos nós do contorno, respectivamente;

$\{p'\}$: vetor resultante da integração sobre a região carregada Ω_g para os pontos internos, semelhante ao vetor $\{p\}$ da equação (4.10).

4.4. Esforços para pontos internos

Os momentos fletores e volventes e a força cortante nos pontos internos são dados pelas equações (4.15), expressas na forma indicial:

$$M_{ij} = -D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 w}{\partial x_l \partial x_l} + (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} \right] \quad (4.15.a)$$

$$Q_i = -D \frac{\partial^3 w}{\partial x_i \partial x_l \partial x_l} \quad (4.15.b)$$

com, $i, j, l = 1, 2$

Substituindo-se a equação (3.31) da equação integral do deslocamento w de um ponto do domínio da placa nas equações (4.15), e realizando-se as integrações necessárias, obtêm-se as equações integrais para os momentos e força cortante dos pontos no domínio da placa:

$$\begin{aligned} M_{ij}(s) = & - \int_{\Gamma} \left[q_{n_{ij}}^*(s, Q) w(Q) - m_{n_{ij}}^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - m_{ns_{ij}}^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma(Q) + \\ & + \int_{\Gamma} \left[V_n(Q) w_{ij}^*(s, Q) - m_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n_{ij}}(s, Q) \right] d\Gamma(Q) + \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(Q) w_{c_{ij}}^*(S, Q) + \int_{\Omega_g} g(q) w_{ij}^*(S, q) d\Omega_g(q) \end{aligned} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} Q_i(s) = & - \int_{\Gamma} \left[q_{n_i}^*(s, Q) w(Q) - m_{n_i}^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - m_{ns_i}^*(s, Q) \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma(Q) + \\ & + \int_{\Gamma} \left[V_n(Q) w_i^*(s, Q) - m_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n_i}(s, Q) \right] d\Gamma(Q) + \\ & + \sum_{c=1}^{N_c} R_c(Q) w_{c_i}^*(S, Q) + \int_{\Omega_g} g(q) w_i^*(S, q) d\Omega_g(q) \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde,

$$q_{n_{ij}}^*(q, P) = -D \left[\nu \delta_{ij} \frac{\partial^2 q_n^*}{\partial x_l \partial x_l}(q, P) + (1 - \nu) \frac{\partial^2 q_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \quad (4.18.a)$$

$$m_{n_{ij}}^*(q, P) = -D \left[v \delta_{ij} \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) + (1-v) \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \quad (4.18.b)$$

$$m_{ns_{ij}}^*(q, P) = -D \left[v \delta_{ij} \frac{\partial^2 m_{ns}^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) + (1-v) \frac{\partial^2 m_{ns}^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \quad (4.18.c)$$

$$w_{ij}^*(q, P) = -D \left[v \delta_{ij} \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) + (1-v) \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \quad (4.18.d)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} ij(q, P) = -D \left[v \delta_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) + (1-v) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right] \quad (4.18.e)$$

$$R_{c_{ij}}^*(q, P) = -D \left[v \delta_{ij} \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) + (1-v) \frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) \right] \quad (4.18.f)$$

$$q_{n_i}^*(q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 q_n^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) \right] \quad (4.19.a)$$

$$m_{n_i}^*(q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) \right] \quad (4.19.b)$$

$$m_{ns_i}^*(q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 m_{ns}^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) \right] \quad (4.19.c)$$

$$w_i^*(q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) \right] \quad (4.19.d)$$

$$\frac{\partial w^*}{\partial n} i(q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right] \quad (4.19.e)$$

$$R_{c_i}^*(q, P) = -D \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 R_c^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) \right] \quad (4.19.f)$$

As derivadas parciais das soluções fundamentais (expressas no capítulo 2) envolvidas nas equações (4.18) e (4.19), obtidas em relação à uma direção x_i , com $x_i=1,2$, são as seguintes:

$$\frac{\partial w^*}{\partial x_i}(q, P) = \frac{r}{4\pi D} \ln r r_i \quad (4.20.a)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) = \frac{1}{4\pi D} (r_i r_j + \delta_{ij} \ln r) \quad (4.20.b)$$

$$\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) = \frac{1}{4\pi D} (1 + 2 \ln r) \quad (4.20.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) \right] = \frac{-1}{2\pi r D} r_i \quad (4.20.d)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) = \frac{-1}{4\pi D} [r_i (n_k r_k) + n_i \ln r] \quad (4.21.a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) = \frac{-1}{4\pi r D} [(2r_i r_j - \delta_{ij})(n_k r_k) - n_i r_j - n_j r_i] \quad (4.21.b)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) = \frac{1}{2\pi r D} (n_k r_k) \quad (4.21.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n}(q, P) \right) \right\} = \frac{-1}{2\pi r^2 D} [2r_i (n_k r_k) - n_i] \quad (4.21.d)$$

$$\frac{\partial q_n^*}{\partial x_i} = \frac{1}{2\pi r^2} [n_i - 2r_i (n_k r_k)] \quad (4.22.a)$$

$$\frac{\partial^2 q_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(q, P) = \frac{1}{4\pi r^3} [(-16r_i r_j + 4\delta_{ij})(n_k r_k) + 4(n_i r_j + n_j r_i)] \quad (4.22.b)$$

$$\frac{\partial^2 q_n^*}{\partial x_1 \partial x_1}(q, P) = 0 \quad (4.22.c)$$

$$\frac{\partial m_n^*}{\partial x_i}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \frac{1}{4\pi r} \left\{ (1+\nu)r_i + 2(1-\nu)(n_k r_k) [n_i - r_i(n_k r_k)] \right\} \quad (4.23.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) &= \frac{-1}{4\pi r^2} \left\{ (1+\nu)(\delta_{ij} - 2r_i r_j) + \right. \\ &+ \left. 2(1-\nu) [n_i n_j - 2n_i r_j (n_k r_k) - (\delta_{ij} - 2r_i r_j)(n_k r_k)^2 - 2r_i (n_k r_k) [n_j - r_j (n_k r_k)]] \right\} \end{aligned} \quad (4.23.b)$$

$$\frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \frac{-1}{4\pi r^2} \left\{ 2(1-\nu) [1 - 2(n_k r_k)^2] \right\} \quad (4.23.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 m_n^*}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \right] = \frac{-(1-\nu)}{\pi r^3} \left\{ r_i + 2n_i (n_k r_k) - 4r_i (n_k r_k)^2 \right\} \quad (4.23.d)$$

$$\frac{\partial m_n^*}{\partial x_i}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \frac{-(1-\nu)}{4\pi r} \left[(m_i n_i)(s_i r_i) + (m_i s_i)(n_i r_i) - 2(m_i r_i)(n_i r_i)(s_i r_i) \right] \quad (4.24.a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 m_{ns}^*}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) &= \frac{1-\nu}{4\pi r^2} \left\{ 2(n_k r_k)(s_i r_i)(\delta_{ij} - 4r_i r_j) - n_i s_j - n_j s_i + \right. \\ &+ \left. 2[(s_i r_i)(n_i r_j - n_j r_i) + (n_k r_k)(s_i r_j + s_j r_i)] \right\} \end{aligned} \quad (4.24.b)$$

$$\frac{\partial^2 m_{ns}^*}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) = \frac{1-\nu}{\pi r^2} (n_k r_k)(s_i r_i) \quad (4.24.c)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial^2 m_{ns}^*}{\partial x_1 \partial x_1}(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \right] = \frac{1-\nu}{\pi r^3} \left[4r_i (n_k r_k)(s_i r_i) - n_i (s_i r_i) - s_i (n_k r_k) \right] \quad (4.24.d)$$

com $i, j=1, 2$

e onde,

$$r_1 = r_x = \cos\theta$$

$$r_2 = r_y = \text{sen}\theta$$

$$n_1 = n_x = \text{cos}\alpha$$

$$n_2 = n_y = \text{sen}\alpha$$

$$s_1 = s_x = \text{cos}(\alpha+90^0) = -\text{sen}\alpha$$

$$s_2 = s_y = \text{sen}(\alpha+90^0) = \text{cos}\alpha$$

$$n_k r_k = n_x r_x + n_y r_y = \text{cos}\alpha \text{cos}\theta + \text{sen}\alpha \text{sen}\theta = \text{cos}\beta$$

$$s_l r_l = s_x r_x + s_y r_y = -\text{sen}\alpha \text{cos}\theta + \text{cos}\alpha \text{sen}\theta = -\text{sen}\beta$$

Com a discretização do contorno em elementos e a utilização das funções aproximadoras ϕ e φ , as equações (4.16) e (4.17) resultam em equações algébricas de forma semelhante à equação (4.13):

$$\{M(s)\} = - [H'''] \{U\} + [G'''] \{P\} + \{p'''\} \quad (4.25)$$

onde,

$$\{M(s)\}^T = \{ M_1 \ M_2 \ \dots \ M_{N_{pi}} \} \quad (4.26)$$

$$\{M_i\}^T = \{ M_x \ M_{xy} \ M_y \ Q_x \ Q_y \} \quad (4.27)$$

sendo,

N_{pi} : número de pontos internos;

$[H''']$ e $[G''']$: matrizes semelhantes a $[H']$ e $[G']$, obtidas para pontos internos;

$\{U\}$ e $\{P\}$: vetores dos deslocamentos e dos esforços dos nós do contorno, respectivamente;

$\{p'''\}$: vetor resultante da integração sobre a região carregada Ω_g para os pontos internos, semelhante ao vetor $\{p'\}$ da equação (4.13).

4.5. Propriedades da matriz H

Algumas propriedades apresentadas pela matriz $[H]$ são úteis para sua verificação e para a obtenção, se necessária, dos elementos de sua diagonal principal, correspondentes às integrais singulares. Essas propriedades correspondem aos movimentos de corpo rígido de uma placa, deslocamento transversal e rotação em torno de um eixo qualquer.

Figura 4.5 – Placa com carregamento transversal nulo e deslocamento e giros de corpo rígido.

Considerando-se a placa da Figura 4.5, já discretizada em elementos de contorno, com carregamento transversal admitido nulo, têm-se os vetores da integração sobre a região carregada $\{p\}$ e dos esforços nodais $\{P\}$ também nulos.

Desta forma o sistema (4.11) resulta em:

$$[H] \{U\} = \{0\} \quad (4.28)$$

que admite soluções não triviais correspondentes aos movimentos de corpo rígido.

Admitindo-se o deslocamento transversal de corpo rígido w_0 tem-se o vetor de deslocamentos $\{U\}$ na forma:

$$\{U\} = \{w_0 \ 0 \ 0 \ w_0 \ 0 \ 0 \ \dots \ w_0 \ 0 \ 0\} \quad (4.29)$$

de maneira que, substituindo-o na equação (4.11), pode-se escrever a primeira propriedade, referente às colunas **3j-2**, referentes ao deslocamento w , da matriz $[H]$, como:

$$\sum_{j=1}^{N_{pc}} (h_{i,3j-2}) = 0 \quad i = 1, 3N_{pc} \quad (4.30)$$

Considerando-se agora uma rotação, α , positiva, de corpo rígido em torno de um eixo t (figura 4.5), tem-se o vetor $\{U\}$ da seguinte forma:

$$\{U\} = \{ \alpha \cdot R_1 \quad \alpha \cdot \cos\beta_1 \quad \alpha \cdot \sin\beta_1 \quad \alpha \cdot R_2 \quad \alpha \cdot \cos\beta_2 \quad \alpha \cdot \sin\beta_2 \quad \dots \quad \alpha \cdot R_{N_{pc}} \quad \alpha \cdot \cos\beta_{N_{pc}} \quad \alpha \cdot \sin\beta_{N_{pc}} \}$$

(4.31)

onde,

R_k : distância do nó k ao eixo t ;

$\cos\beta_k = n_k \cdot r_k$;

$\sin\beta_k = s_k \cdot r_k$;

N_{pc} : número total de nós no contorno.

Levando-se a expressão (4.31) à equação (4.11) obtém-se a segunda propriedade para os elementos da matriz $[H]$, escrita para as duas direções n e s :

$$\sum_{j=1}^{N_{pc}} (h_{i,3j-2} \cdot R_j + h_{i,3j-1} \cdot \cos\beta_j + h_{i,3j} \cdot \sin\beta_j) = 0 \quad i = 1, 3N_{pc}$$

(4.32)

4.6. Avaliação numérica da formulação proposta

Aplicou-se a formulação do método, desenvolvida neste trabalho, em exemplos que visam mostrar sua utilização na análise de placas usuais. Esta formulação permite uma melhor análise de placas determinando-se as inclinações na direção tangencial de bordas livres da placa, possibilitando inclusive uma melhor ligação da placa com outros elementos estruturais como vigas e pilares. Os resultados são comparados com resultados analíticos, com soluções obtidas por outros processos numéricos como Método das Diferenças Finitas ou Método dos Elementos Finitos.

Os exemplos para as soluções analíticas de alguns problemas são encontrados em TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER (1970) e as obtidas através do Método das Diferenças Finitas são obtidas das tabelas organizadas por BARES (1972).

Utilizou-se o programa computacional do Método dos Elementos Finitos PAVIMENTO, DAVID (1995)*, para obtenção de resultados de alguns exemplos. O programa utiliza o elemento finito DKT e analisou-se placas discretizadas em 200 e 400 elementos.

Na análise de placas com todo o contorno apoiado ou engastado a formulação apresentada neste trabalho torna-se semelhante à formulação usual do método, ou seja, apenas as equações integrais referentes ao deslocamento transversal e à sua derivada na direção normal ao contorno são efetivamente utilizadas, enquanto a equação integral da derivada na direção tangencial é anulada no sistema global.

Neste trabalho também é utilizada a formulação proposta por PAIVA (1991) onde as forças cortantes equivalentes são admitidas concentradas nos pontos nodais, que melhora efetivamente a análise diminuindo as oscilações dos valores destas forças ao longo da borda apoiada na placa, estas oscilações são devidas à presença das reações de canto. Esta melhoria também foi obtida por OLIVEIRA NETO (1991).

* DAVID, R.A. (1995). Elaborado em programa de doutorado na EESC-USP. Professora assistente da Faculdade de Engenharia, UNESP, campus de Bauru, SP

Serão mostrados exemplos onde demonstra-se a efetiva contribuição da formulação proposta para o método.

Exemplo 4.1. Placa quadrada apoiada nos quatro cantos, com carregamento uniforme.

Neste exemplo analisa-se uma placa quadrada apoiada nos quatro cantos e submetida a um carregamento uniformemente distribuído, conforme mostra a Figura 4.6.

Figura 4.6 - Placa quadrada apoiada nos quatro cantos.

Os dados numéricos são $\nu=0,25$, dez elementos de contorno lineares em cada lado de comprimento a e carregamento uniformemente distribuído q . Foram também utilizados 16 e 24 elementos de contorno no total, sendo obtidos resultados satisfatórios, porém optou-se por padronizar este número em 40 elementos no total garantindo resultados de precisão aceitável.

A Tabela 4.1. mostra os resultados obtidos pela formulação proposta, comparada às soluções analíticas encontradas em TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER (1970) e aos obtidos pelo Método dos Elementos Finitos, estes valores

referem-se ao centro da placa.

Os valores obtidos pelo Método dos Elementos de Contorno que são apresentados na Tabela 4.1. em negrito referem-se à utilização de pontos fonte fora do contorno. Os valores obtidos com a utilização de pontos fonte no contorno, sendo necessária a utilização de integrais analíticas, são apresentados entre parênteses.

Tabela 4.1 - Deslocamento e esforços na placa apoiada nos quatro cantos

	elemento finito DKT M.E.F.	form. proposta M.E.C. aprox. linear	form. proposta M.E.C. aprox. cúbica	valor teórico	fator de multiplica- ção
desl. Vertical w	$2,52 \cdot 10^{-2}$	$2,28 \cdot 10^{-2}$ <i>$(2,35 \cdot 10^{-2})$</i>	$2,55 \cdot 10^{-2}$ <i>$(2,32 \cdot 10^{-2})$</i>	$2,57 \cdot 10^{-2}$	$f_w = q \cdot a^4 / D$
Momento m_x	$10,93 \cdot 10^{-2}$	$11,81 \cdot 10^{-2}$ <i>$(10,78 \cdot 10^{-2})$</i>	$11,06 \cdot 10^{-2}$ <i>$(10,70 \cdot 10^{-2})$</i>	$11,09 \cdot 10^{-2}$	$f_m = q \cdot a^2$
Momento m_y	$10,93 \cdot 10^{-2}$	$11,81 \cdot 10^{-2}$ <i>$(10,78 \cdot 10^{-2})$</i>	$11,06 \cdot 10^{-2}$ <i>$(10,70 \cdot 10^{-2})$</i>	$11,09 \cdot 10^{-2}$	$f_m = q \cdot a^2$

A Tabela 4.2 mostra os valores de deslocamentos e suas derivadas em pontos ao longo da borda obtidos pela formulação proposta, utilizando-se aproximações lineares e cúbicas para os deslocamentos transversais w no elemento de contorno.

Os valores obtidos pela formulação proposta do Método dos Elementos de Contorno apresentados em negrito na Tabela 4.2 referem-se à utilização de pontos fonte fora do contorno e os valores obtidos por esta formulação utilizando pontos fonte no contorno estão representados entre parênteses. Os valores obtidos utilizando-se o programa PAVIMENTO referem-se à utilização de 200 elementos para a discretização da placa.

Tabela 4.2 - Deslocamentos ao longo da borda da placa apoiada nos quatro cantos

x/a (para y = 0)		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
M.E.C		$4,84.10^{-3}$	$9,16.10^{-3}$	$12,53.10^{-3}$	$14,65.10^{-3}$	$15,38.10^{-3}$
	linear	<i>$(4,24.10^{-3})$</i>	<i>$(7,94.10^{-3})$</i>	<i>$(10,76.10^{-3})$</i>	<i>$(12,51.10^{-3})$</i>	<i>$(13,11.10^{-3})$</i>
w / fw	M.E.C	$5,61.10^{-3}$	$10,38.10^{-3}$	$14,28.10^{-3}$	$16,65.10^{-3}$	$17,46.10^{-3}$
	cúbica	<i>$(4,73.10^{-3})$</i>	<i>$(8,98.10^{-3})$</i>	<i>$(12,28.10^{-3})$</i>	<i>$(14,37.10^{-3})$</i>	<i>$(15,08.10^{-3})$</i>
M.E.F.		$5,50.10^{-3}$	$10,31.10^{-3}$	$14,02.10^{-3}$	$16,33.10^{-3}$	$17,10.10^{-3}$
M.E.C		$1,54.10^{-4}$	$1,57.10^{-4}$	$1,60.10^{-4}$	$1,66.10^{-4}$	$1,70.10^{-4}$
	linear	<i>$(2,02.10^{-4})$</i>	<i>$(1,69.10^{-4})$</i>	<i>$(1,45.10^{-4})$</i>	<i>$(1,30.10^{-4})$</i>	<i>$(1,25.10^{-4})$</i>
$\partial w / \partial n$ / fw	M.E.C	$2,18.10^{-4}$	$1,68.10^{-4}$	$1,35.10^{-4}$	$1,14.10^{-4}$	$1,08.10^{-4}$
	cúbica	<i>$(2,00.10^{-4})$</i>	<i>$(1,69.10^{-4})$</i>	<i>$(1,46.10^{-4})$</i>	<i>$(1,32.10^{-4})$</i>	<i>$(1,28.10^{-4})$</i>
M.E.F.		$2,15.10^{-4}$	$1,67.10^{-4}$	$1,33.10^{-4}$	$1,14.10^{-4}$	$1,08.10^{-4}$
M.E.C		$2,94.10^{-4}$	$2,77.10^{-4}$	$2,09.10^{-4}$	$1,11.10^{-4}$	0
	linear	<i>$(2,34.10^{-4})$</i>	<i>$(1,95.10^{-4})$</i>	<i>$(1,39.10^{-4})$</i>	<i>$(0,72.10^{-4})$</i>	<i>0</i>
$\partial w / \partial s$ / fw	M.E.C	$2,67.10^{-4}$	$2,20.10^{-4}$	$1,55.10^{-4}$	$0,80.10^{-4}$	0
	cúbica	<i>$(2,29.10^{-4})$</i>	<i>$(2,19.10^{-4})$</i>	<i>$(1,37.10^{-4})$</i>	<i>$(0,71.10^{-4})$</i>	<i>0</i>
M.E.F.		$2,61.10^{-4}$	$2,15.10^{-4}$	$1,51.10^{-4}$	$0,77.10^{-4}$	$0,21.10^{-6}$

Observa-se que os valores de deslocamentos e esforços nos pontos do centro e ao longo da borda da placa apresentam diferenças da ordem de 6,0% a 12,0% para a aproximação linear e menores que 2,0% para a aproximação cúbica.

É notadamente observada a melhoria introduzida com as aproximações cúbicas para os deslocamentos transversais w no elemento de contorno, quando comparados os valores com os obtidos pelo M.E.F.

Neste exemplo também aparece a vantagem da utilização da formulação que admite a força cortante equivalente como força concentrada nos pontos nodais, de maneira que os valores das reações nos apoios discretos são obtidos diretamente.

Exemplo 4.2. Placa quadrada com carregamento uniforme, com dois lados adjacentes engastados e dois lados livres.

Neste exemplo é analisada uma placa, conforme mostra a Figura 4.7, com bordas adjacentes engastadas e as outras livres, demonstrando a boa precisão obtida pelo método nos valores de deslocamentos e de momentos fletores nos pontos da placa para um número pequeno de pontos na sua discretização. Os dados numéricos são $\nu=0,20$ e dez elementos de contorno lineares são utilizados em cada lado de comprimento a e carregamento uniformemente distribuído q . Os resultados obtidos são comparados com os obtidos pelo método dos elementos finitos, onde uma divisão de 144 elementos triangulares de seis parâmetros por nó (T18) foi utilizada, e pela formulação usual do Método dos Elementos de Contorno com dois parâmetros de deslocamentos por nó utilizados por PAIVA (1987). Na Tabela 4.3 observam-se valores de deslocamento transversal w e de esforços com diferenças não ultrapassando 8,0% relativos, e uma maior proximidade de valores da formulação aqui proposta utilizando três parâmetros em deslocamento por ponto do contorno com os valores obtidos pelo método dos elementos finitos. Neste exemplos foram apresentados os valores obtidos com pontos fora de e no contorno, e aproximação cúbica para o deslocamento transversal w .

Figura 4.7 - Placa com dois lados engastados e dois livres

Tabela 4.3 - Resultados obtidos pela formulação apresentada e pelos Métodos dos Elementos Finitos e de Contorno para a placa da Figura 4.7

	M. E. C. PAIVA (1987)	M. E. C. FORM. PROPOSTA (pontos no contorno)	M. E. C. FORM. PROPOSTA (pontos fora do contorno)	M. E. F. PAIVA (1987)	fator de multi- plicação
w ₁₈	0,0458	0,03914	0,04063	0,0407	$q a^4 / D$
w ₁₁	0,0171	0,01522	0,01560	0,0156	$q a^4 / D$
w ₁₂	0,0131	0,01187	0,01210	0,0121	$q a^4 / D$
m _{x1}	-0,2630	-0,23625	-0,2445	-0,2409	$q a^2$
m _{x2}	-0,1944	-0,1750	-0,1800	-0,1824	$q a^2$
m _{x3}	-0,1318	-0,12395	-0,1271	-0,1268	$q a^2$
m _{x4}	-0,0707	-0,0650	-0,0700	-0,0700	$q a^2$
m _{x5}	-0,0170	-0,0200	-0,0185	-0,0196	$q a^2$
m _{y14}	-0,0229	-0,0173	-0,0189	-0,0191	$q a^2$
m _{y15}	-0,0652	-0,0583	-0,0607	-0,0608	$q a^2$
m _{y16}	-0,0318	-0,0249	-0,0267	-0,0269	$q a^2$
m _{y17}	-0,0418	-0,03136	-0,0337	-0,0337	$q a^2$

5. PLACAS EM ASSOCIAÇÃO COM OUTROS ELEMENTOS ESTRUTURAIS

5.1. Introdução

O objetivo deste capítulo visa apresentar uma formulação Método dos Elementos de Contorno para análise de pavimentos, onde a aplicação dos três parâmetros de deslocamento utilizados para cada ponto da placa pretende melhorar esta análise, possibilitando-se realizar as ligações da placa com outros elementos estruturais envolvidos, pilares e vigas (ou o conjunto delas, grelhas). Seguem-se os itens onde são apresentadas estas associações, dando-se enfoque às modificações nas equações integrais e as particularidades de cada associação, visando facilitar o entendimento e a utilização do programa computacional pelo usuário. Apresentam-se ainda os casos de haver pontos de associação no domínio da placa, onde surgem novas incógnitas tornando-se necessárias novas equações integrais para estes pontos para que possa ser resolvido o sistema global do problema. Segue-se o item de exemplos numéricos em que estas associações são testadas e comprovadas como possíveis de serem utilizadas para este tipo de análise estrutural.

5.2. Associação placa-pilar

Considera-se neste item o comportamento elástico-linear para as colunas (pilares) cuja seção transversal em contato com a placa permanece plana após o carregamento, conforme observa-se na Figura 5.1.

Desta forma, o deslocamento transversal w e suas derivadas $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$ serão os mesmos para a placa e coluna. As tensões normais na área de contato podem então ser representadas pela seguinte expressão:

$$\sigma = \left(\frac{M_{\bar{x}}}{I_{\bar{x}}} \right) \bar{y} + \left(\frac{M_{\bar{y}}}{I_{\bar{y}}} \right) \bar{x} + \left(\frac{N}{A_c} \right) \quad (5.1)$$

onde,

\bar{x}, \bar{y} : coordenadas em relação aos eixos principais de inércia da seção do pilar;

σ : tensão normal na seção do pilar na interface;

A_c : área da seção transversal do pilar;

$M_{\bar{x}}, M_{\bar{y}}$: momentos fletores no pilar;

N : força normal no pilar;

$I_{\bar{x}}, I_{\bar{y}}$: momentos principais de inércia do pilar;

Figura 5.1 – Conjunto placa-pilar nas posições inicial e deformada.

Podem-se relacionar os momentos fletores atuantes no pilar com as derivadas $\partial w / \partial \bar{x}$ e $\partial w / \partial \bar{y}$ através de:

$$M_{\bar{x}} = \frac{-K_{p\bar{x}} E_p I_{\bar{x}}}{l_p} \frac{\partial w}{\partial \bar{y}} \quad (5.2)$$

$$M_{\bar{y}} = \frac{-K_{p\bar{y}} E_p I_{\bar{y}}}{l_p} \frac{\partial w}{\partial \bar{x}} \quad (5.3)$$

onde,

E_p : módulo de elasticidade do pilar;

l_p : comprimento do pilar;

e

$K_p = 4$ para o pilar engastado na base;

$K_p = 3$ para o pilar articulado na base.

Tem-se a força normal em função do deslocamento transversal w_p no centro de gravidade da seção de contato placa-pilar como sendo:

$$N = \frac{-E_p A_c}{l_p} W_p \quad (5.4)$$

Levando-se estas expressões à equação (5.1), resulta:

$$\sigma_p = \frac{-E_p}{l_p} \left[K_{p\bar{x}} \bar{y} \frac{\partial w_p}{\partial \bar{y}} + K_{p\bar{y}} \bar{x} \frac{\partial w_p}{\partial \bar{x}} \right] - \frac{E_p}{l_p} W_p \quad (5.5)$$

Interpretando-se σ_p como um carregamento aplicado à placa, distribuído na área de contato placa-pilar, as equações integrais do deslocamento e de suas derivadas no ponto S do contorno passam a ser escritas como:

$$\begin{aligned} & K(S)w(S) + \\ & + \int_{\Gamma} \left[q_n^*(S, Q)w(Q) - m_n^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - m_{ns}^*(S, Q) \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma(Q) = \\ & = \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(Q)w_{ci}^*(S, Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n(Q)w^*(S, Q) - m_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial n}(S, Q) \right] d\Gamma(Q) + \\ & + \int_{\Omega_g} g(q)w^*(S, q)d\Omega_g(q) + \\ & + \sum_{j=1}^{N_l} \frac{E_p}{l_{pj}} \left[K_{p\bar{y}} \left(\frac{\partial w_p}{\partial \bar{x}} \right) \int_{\Omega_{lj}} w^*(S, l)\bar{x}(l)d\Omega_l + K_{p\bar{x}} \left(\frac{\partial w_p}{\partial \bar{y}} \right) \int_{\Omega_{lj}} w^*(S, l)\bar{y}(l)d\Omega_l + w_{pj} \int_{\Omega_{lj}} w^*(S, l)d\Omega_l \right] \end{aligned} \quad (5.6)$$

e,

$$\begin{aligned}
& K_1(S) \frac{\partial w}{\partial m_s}(S) + K_2(S) \frac{\partial w}{\partial u_s}(S) + \\
& + \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial q_n^*}{\partial m_s}(S, Q) w(Q) - \frac{\partial m_n^*}{\partial m_s}(S, Q) \frac{\partial w}{\partial n}(Q) - \frac{\partial m_{ns}^*}{\partial m_s}(S, Q) \frac{\partial w}{\partial s}(Q) \right] d\Gamma(Q) = \\
& = \sum_{i=1}^{N_c} R_{ci}(Q) \frac{\partial w_{ci}^*}{\partial m_s}(S, Q) + \int_{\Gamma} \left[V_n(Q) \frac{\partial w^*}{\partial m_s}(S, Q) - m_n(Q) \frac{\partial}{\partial m_s} \left(\frac{\partial w^*}{\partial n} \right) (S, Q) \right] d\Gamma(Q) + \\
& + \int_{\Omega_g} g(q) \frac{\partial w^*}{\partial m_s}(S, q) d\Omega_g(q) + \\
& + \sum_{j=1}^{N_l} \frac{E_p}{l_{pj}} \left[K_{p\bar{y}} \left(\frac{\partial w_p}{\partial \bar{x}} \right)_j \int_{\Omega_{lj}} \frac{\partial w^*}{\partial m_s}(S, l) \bar{x}(l) d\Omega_l + K_{p\bar{x}} \left(\frac{\partial w_p}{\partial \bar{y}} \right)_j \int_{\Omega_{lj}} \frac{\partial w^*}{\partial m_s}(S, l) \bar{y}(l) d\Omega_l + \right. \\
& \left. + w_{lj} \int_{\Omega_{lj}} \frac{\partial w^*}{\partial m_s}(S, l) d\Omega_l \right]
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Os valores de $\partial w_p / \partial \bar{x}$ e $\partial w_p / \partial \bar{y}$ e w_p são constantes para cada interface pois a seções transversais dos pilares permanecem planas após as deformações.

As integrais de domínio nos termos referentes às interfaces placa-pilar podem ser calculadas de maneira análoga à realizada para o cálculo das integrais de domínio devidas ao carregamento transversal distribuído, demonstrado no capítulo 4. As integrais podem ser transformadas em integrais sobre o contorno da interface placa-pilar admitindo-se as tensões atuantes como uma função linearmente distribuída $g(l)$ sobre a área da interface Ω_{lj} . Nas primeiras integrais de domínio dos últimos termos das equações (5.6) e (5.7) pode-se admitir um carregamento igual a:

$$g(l) = \bar{x} \tag{5.8}$$

Pode-se escrever as coordenadas do ponto l da interface placa-pilar para o sistema de coordenadas global (x, y) como:

$$x(l) = x(p) + \bar{x}(l) \tag{5.9.a}$$

$$y(l) = y(p) + \bar{y}(l) \tag{5.9.b}$$

onde p é o ponto do c. g. do pilar, origem do sistema de coordenadas locais (\bar{x} , \bar{y}).

Havendo alguma rotação dos eixos principais de inércia do pilar em relação ao sistema global de coordenadas (x , y), tem-se:

$$\begin{cases} x(l) \\ y(l) \end{cases} = \begin{cases} x(p) \\ y(p) \end{cases} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & \dots & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \dots & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{cases} \bar{x}(l) \\ \bar{y}(l) \end{cases} \quad (5.10)$$

Substituindo-se em (5.8), tem-se:

$$\begin{aligned} g(l) &= \cos \alpha \bar{x}(l) + \sin \alpha \bar{y}(l) = \cos \alpha [x(l) - x(p)] + \sin \alpha [y(l) - y(p)] = \\ &= [-\cos \alpha x(p) - \sin \alpha y(p)] + \cos \alpha x(l) + \sin \alpha y(l) = C_1 + A_1 \cdot x(l) + B_1 \cdot y(l) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Analogamente, para as segundas integrais de domínio dos últimos termos das equações (5.6) e (5.7), admitindo-se uma função $g(l)$ igual a:

$$g(l) = \bar{y} \quad (5.12)$$

resulta em:

$$\begin{aligned} g(l) &= -\sin \alpha \bar{x}(l) + \cos \alpha \bar{y}(l) = -\sin \alpha [x(l) - x(p)] + \cos \alpha [y(l) - y(p)] = \\ &= [\sin \alpha x(p) - \cos \alpha y(p)] - \sin \alpha x(l) + \cos \alpha y(l) = C_2 + A_2 \cdot x(l) + B_2 \cdot y(l) \end{aligned} \quad (5.13)$$

Já para as terceiras integrais de domínio dos últimos termos das equações (5.6) e (5.7), admite-se uma função $g(l)$ igual a:

$$g(l) = 1 \quad (5.14)$$

Após a discretização do contorno da placa, estas equações formam um sistema linear de

equações como segue:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H}_{\Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{\Gamma} \\ \mathbf{w}_{\Omega} \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}] \mathbf{V}_{\Gamma} + \mathbf{p} \quad (5.15)$$

onde,

\mathbf{w}_{Ω} : deslocamentos e suas derivadas nas interfaces placa-pilar, quando localizadas no domínio da placa, introduz incógnitas adicionais em cada equação.

Estendendo-se as equações (5.6) e (5.7) para todas os pontos de associação placa-pilar no domínio da placa, obtendo-se as equações do deslocamento transversal w e suas derivadas $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$ para estes pontos, chega-se ao seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}' & \mathbf{H}'_{\Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{\Gamma} \\ \mathbf{w}_{\Omega} \end{Bmatrix} = [\mathbf{G}'] \mathbf{V}_{\Gamma} + \mathbf{p}' \quad (5.16)$$

Agrupando-se os dois sistemas (5.15) e (5.16), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{H}_{\Omega} \\ \mathbf{H}' & \mathbf{H}'_{\Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{\Gamma} \\ \mathbf{w}_{\Omega} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}' \end{bmatrix} \mathbf{V}_{\Gamma} + \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{p}' \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

Com a solução deste sistema têm-se os valores nodais do contorno e os deslocamentos dos pontos das interfaces placa-pilar, através dos quais podem ser calculados os esforços nos pilares utilizando-se as equações (5.2), (5.3) e (5.4).

5.3. Associação placa-grelha

Em estruturas usuais de edifícios a placa, associada a elementos lineares que trabalham à flexão como vigas formando uma grelha, pode ser analisada de forma mais simples considerando-se sua interação por pontos discretos, onde os esforços de interação são forças verticais, como já apresentado por PAIVA (1987).

Estes esforços de interação podem ser considerados como carregamento

externo à placa e nas equações integrais os deslocamentos transversais e suas derivadas são incógnitas nestes pontos de interação, conforme mostrado na Figura 5.2.

Figura 5.2 – Esforços de interação placa-grelha.

De forma análoga ao já feito para o caso da interação placa-pilar, o sistema de equações obtido após a discretização do contorno da placa resulta:

$$[H]w_{\Gamma} = [G]V_{\Gamma} + [G_{\Omega}]P_{\Omega} + p \quad (5.18)$$

onde,

$$P_{\Omega}^T = \{P_1 \cdot 0 \cdot 0 \cdot P_2 \cdot 0 \cdot 0 \dots P_n \cdot 0 \cdot 0\}$$

sendo,

P_{Ω}^T : vetor de esforços em todos os pontos de interação placa-grelha.

Escrevendo-se as equações de $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ e w para todos os nós da grelha no domínio e no contorno da placa, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$[H' H'_{\Omega}] \begin{Bmatrix} w_{\Gamma} \\ w_{\Omega} \end{Bmatrix} = [G']V_{\Gamma} + [G'_{\Omega}]P_{\Omega} + p' \quad (5.19)$$

Combinando-se os sistemas dados pelas expressões (5.18) e (5.19), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}\mathbf{H}_{\Omega} \\ \mathbf{H}'\mathbf{H}'_{\Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{\Gamma} \\ \mathbf{w}_{\Omega} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}' \end{bmatrix} \mathbf{V}_{\Gamma} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\Omega} \\ \mathbf{G}'_{\Omega} \end{bmatrix} \mathbf{P}_{\Omega} + \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{p}' \end{Bmatrix} \quad (5.20)$$

Da análise matricial usual de grelha obtém-se o seguinte sistema linear de equações:

$$[\mathbf{R}] \mathbf{w}_g = \mathbf{P}_{\Omega} \quad (5.21)$$

onde,

\mathbf{w}_g : vetor de valores nodais $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ e w de todos os nós de grelha no domínio da placa e w , $\partial w/\partial n$, $\partial w/\partial s$ dos pontos no contorno da placa.

Explicitando-se as contribuições de domínio e de contorno, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\Gamma} & \mathbf{R}_{\Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{\Gamma} \\ \mathbf{w}_{\Omega} \end{Bmatrix} = \mathbf{P}_{\Omega} \quad (5.22)$$

Levando-se a equação (5.22) ao sistema global do conjunto placa-grelha dado pela expressão (5.20), resulta:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}\mathbf{H}_{\Omega} \\ \mathbf{H}'\mathbf{H}'_{\Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{\Gamma} \\ \mathbf{w}_{\Omega} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}' \end{bmatrix} \mathbf{V}_{\Gamma} + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{\Omega} \\ \mathbf{G}'_{\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{\Gamma} & \mathbf{R}_{\Omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{\Gamma} \\ \mathbf{w}_{\Omega} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{p}' \end{Bmatrix} \quad (5.23)$$

Agrupando-se os termos em deslocamentos, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_{\Gamma} \\ \mathbf{w}_{\Omega} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} \\ \mathbf{G}' \end{bmatrix} \mathbf{V}_{\Gamma} + \begin{Bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{p}' \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

Após a imposição das condições de contorno, o sistema pode ser resolvido para todas as incógnitas do problema. Os esforços dos elementos de grelha podem ser obtidos de forma usual ao da análise matricial de grelha.

Havendo grelha e colunas acopladas à placa, o sistema global de equações é similar à equação (5.17), onde o vetor w_{Ω} inclui os deslocamentos e suas derivadas para todos os nós do domínio conectados às colunas e à grelha.

5.4. Avaliação numérica da formulação proposta para análise das ligações da placa com elementos lineares.

Optou-se por mostrar mais exemplos numéricos após a introdução das formulações considerando-se ligações da placa com outros elementos estruturais, de maior interesse prático para o engenheiro civil.

Aplicou-se a formulação do método, desenvolvida neste trabalho, em exemplos que visam mostrar sua utilização na análise de placas usuais, inclusive de pavimentos de edifícios onde as ligações da placa com elementos lineares, grelhas e pilares, são realizadas. Os resultados são comparados com resultados analíticos, com soluções obtidas por outros processos numéricos como o Método dos Elementos Finitos.

Exemplo 5.4.1. Placa quadrada apoiada nos quatro cantos e vigas ao longo dos lados, com carregamento uniforme.

Neste exemplo analisa-se uma placa quadrada de lados de comprimento a , apoiada nos quatro cantos, Figura 5.3, com vigas ao longo dos lados com momentos de inércia $I_v = 5.a.D / E$ e submetida a um carregamento uniformemente distribuído q . Utilizou-se $\nu=0,25$ e dez elementos de contorno retos em cada lado da placa.

Tabela 5.1 - Deslocamento e esforços no centro da placa apoiada nos quatro cantos com vigas de borda

elemento finito	form. proposta	form. proposta	valor	fator de
-----------------	----------------	----------------	-------	----------

	DKT - M.E.F.	M.E.C. aprox. linear	M.E.C. aprox. cúbica	teórico	multiplicação o
desl. vertical w	$5,16 \cdot 10^{-3}$	$5,43 \cdot 10^{-3}$	$5,30 \cdot 10^{-3}$	$5,19 \cdot 10^{-3}$	$fw = q \cdot a^4/D$
momento m_x	$4,98 \cdot 10^{-2}$	$5,03 \cdot 10^{-2}$	$4,99 \cdot 10^{-2}$	$4,94 \cdot 10^{-2}$	$fm = q \cdot a^2$
momento m_y	$4,98 \cdot 10^{-2}$	$5,03 \cdot 10^{-2}$	$4,99 \cdot 10^{-2}$	$4,94 \cdot 10^{-2}$	$fm = q \cdot a^2$

A Tabela 5.1. mostra os resultados obtidos pela formulação proposta, em negrito, e foram comparados aos resultados analíticos encontrados em TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER (1970) e aos obtidos pelo Método dos Elementos Finitos utilizando-se 200 elementos de placa DKT do programa computacional PAVIMENTO, DAVID (1995), em sua discretização.

Observa-se que os valores de deslocamentos e esforços apresentam diferenças máximas da ordem de 4,0 % nos pontos do centro da placa entre os valores analíticos e os obtidos pelo Método dos Elementos Finitos.

Figura 5.3 - Placa quadrada apoiada nos quatro cantos e vigas ao longo dos lados.

A Tabela 5.2 mostra os valores de deslocamentos e suas derivadas nas direções normal e tangencial em pontos ao longo da borda obtidos pela formulação proposta, em negrito, com as duas opções de aproximação do deslocamento w ao

longo do elemento de contorno, linear e cúbica, comparados aos obtidos utilizando-se o programa PAVIMENTO.

Tabela 5.2 - Deslocamentos ao longo da borda da placa apoiada nos quatro cantos e com vigas de borda

x/a (para y = 0)		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
w / fw	M.E.C linear	$3,50.10^{-4}$	$6,56.10^{-4}$	$8,89.10^{-4}$	$10,34.10^{-4}$	$10,84.10^{-4}$
	M.E.C cúbica	$3,14.10^{-4}$	$5,90.10^{-4}$	$8,01.10^{-4}$	$9,33.10^{-4}$	$9,78.10^{-4}$
	M.E.F.	$2,85.10^{-4}$	$5,40.10^{-4}$	$7,42.10^{-4}$	$8,71.10^{-4}$	$9,15.10^{-4}$
$\partial w / \partial n$ / fw	M.E.C linear	$3,53.10^{-5}$	$5,05.10^{-5}$	$6,21.10^{-5}$	$6,92.10^{-5}$	$7,13.10^{-5}$
	M.E.C cúbica	$3,41.10^{-5}$	$4,97.10^{-5}$	$6,15.10^{-5}$	$6,89.10^{-5}$	$7,13.10^{-5}$
	M.E.F.	$3,23.10^{-5}$	$4,76.10^{-5}$	$5,91.10^{-5}$	$6,61.10^{-5}$	$6,84.10^{-5}$
$\partial w / \partial s$ / fw	M.E.C linear	$1,69.10^{-5}$	$1,37.10^{-5}$	$0,96.10^{-5}$	$0,49.10^{-5}$	$0,0$
	M.E.C cúbica	$1,51.10^{-5}$	$1,24.10^{-5}$	$0,87.10^{-5}$	$0,45.10^{-5}$	$0,0$
	M.E.F.	$1,37.10^{-5}$	$1,16.10^{-5}$	$0,84.10^{-5}$	$0,44.10^{-5}$	$0,0$

Na Tabela 5.3 mostram-se os deslocamentos transversais w e os momentos fletores nas direções x e y , m_x e m_y , para uma linha no eixo de simetria da placa ($y/a=0,5$), obtidos pelos dois métodos numéricos, apresentados seguindo-se a convenção até aqui adotada.

Tabela 5.3 - Deslocamento transversal e momentos fletores ao longo do eixo de simetria da placa apoiada nos quatro cantos e com vigas de borda ($y/a=0,5$)

x/a (para y/a=0,5)		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
w / fw	M.E.C linear	$24,72 \cdot 10^{-4}$	$37,00 \cdot 10^{-4}$	$46,42 \cdot 10^{-4}$	$52,33 \cdot 10^{-4}$	$54,33 \cdot 10^{-4}$
	M.E.C cúbica	$23,56 \cdot 10^{-4}$	$35,75 \cdot 10^{-4}$	$45,11 \cdot 10^{-4}$	$50,97 \cdot 10^{-4}$	$52,97 \cdot 10^{-4}$
	M.E.F.	$22,67 \cdot 10^{-4}$	$34,64 \cdot 10^{-4}$	$43,89 \cdot 10^{-4}$	$49,67 \cdot 10^{-4}$	$51,61 \cdot 10^{-4}$
m _x / fm	M.E.C linear	$2,18 \cdot 10^{-2}$	$3,57 \cdot 10^{-2}$	$4,43 \cdot 10^{-2}$	$4,89 \cdot 10^{-2}$	$5,03 \cdot 10^{-2}$
	M.E.C cúbica	$2,16 \cdot 10^{-2}$	$3,55 \cdot 10^{-2}$	$4,40 \cdot 10^{-2}$	$4,85 \cdot 10^{-2}$	$4,99 \cdot 10^{-2}$
	M.E.F.	$2,14 \cdot 10^{-2}$	$3,52 \cdot 10^{-2}$	$4,38 \cdot 10^{-2}$	$4,83 \cdot 10^{-2}$	$4,98 \cdot 10^{-2}$
m _y / fm	M.E.C linear	$2,36 \cdot 10^{-2}$	$3,51 \cdot 10^{-2}$	$4,35 \cdot 10^{-2}$	$4,86 \cdot 10^{-2}$	$5,03 \cdot 10^{-2}$
	M.E.C cúbica	$2,29 \cdot 10^{-2}$	$3,45 \cdot 10^{-2}$	$4,30 \cdot 10^{-2}$	$4,82 \cdot 10^{-2}$	$4,99 \cdot 10^{-2}$
	M.E.F.	$2,32 \cdot 10^{-2}$	$3,44 \cdot 10^{-2}$	$4,29 \cdot 10^{-2}$	$4,81 \cdot 10^{-2}$	$4,98 \cdot 10^{-2}$

Na Tabela 5.4 mostram-se os deslocamentos transversais w , os momentos fletores nas direções x e y , m_x e m_y , e os momentos volventes m_{xy} para uma linha paralela à borda da placa com coordenadas ($y/a=0,2$), obtidos pelos dois métodos numéricos.

Nota-se nas tabelas 5.2, 5.3 e 5.4 uma maior aproximação dos valores obtidos com a utilização da aproximação cúbica para os deslocamentos transversais w , comparados aos obtidos pelo Método dos Elementos Finitos, apesar da aproximação linear de w também apresentar valores perfeitamente aceitáveis.

Tabela 5.4 - Deslocamento transversal e momentos fletores e volventes ao longo de linha paralela à borda da placa apoiada nos quatro cantos e com vigas de borda ($y/a=0,2$)

x/a (para y/a=0,2)		0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
w / fw	M.E.C linear	$16,33.10^{-4}$	$24,72.10^{-4}$	$31,50.10^{-4}$	$35,61.10^{-4}$	$37,00.10^{-4}$
	M.E.C cúbica	$15,48.10^{-4}$	$23,56.10^{-4}$	$30,36.10^{-4}$	$34,36.10^{-4}$	$35,75.10^{-4}$
	M.E.F.	$14,77.10^{-4}$	$23,03.10^{-4}$	$29,36.10^{-4}$	$33,33.10^{-4}$	$34,64.10^{-4}$
m _x / fm	M.E.C linear	$1,60.10^{-2}$	$2,56.10^{-2}$	$3,12.10^{-2}$	$3,42.10^{-2}$	$3,51.10^{-2}$
	M.E.C cúbica	$1,57.10^{-2}$	$2,51.10^{-2}$	$3,07.10^{-2}$	$3,36.10^{-2}$	$3,45.10^{-2}$
	M.E.F.	$1,56.10^{-2}$	$2,48.10^{-2}$	$3,04.10^{-2}$	$3,34.10^{-2}$	$3,44.10^{-2}$
m _y / fm	M.E.C linear	$1,75.10^{-2}$	$2,56.10^{-2}$	$3,12.10^{-2}$	$3,46.10^{-2}$	$3,57.10^{-2}$
	M.E.C cúbica	$1,69.10^{-2}$	$2,51.10^{-2}$	$3,09.10^{-2}$	$3,43.10^{-2}$	$3,55.10^{-2}$
	M.E.F.	$1,65.10^{-2}$	$2,48.10^{-2}$	$3,07.10^{-2}$	$3,41.10^{-2}$	$3,52.10^{-2}$
m _{xy} / fm	M.E.C linear	$1,90.10^{-2}$	$1,58.10^{-2}$	$1,11.10^{-2}$	$0,57.10^{-2}$	$0,0$
	M.E.C cúbica	$1,94.10^{-2}$	$1,61.10^{-2}$	$1,13.10^{-2}$	$0,58.10^{-2}$	$0,0$
	M.E.F.	$1,93.10^{-2}$	$1,59.10^{-2}$	$1,12.10^{-2}$	$0,57.10^{-2}$	$0,95.10^{-4}$

Pode-se concluir neste exemplo que a aproximação cúbica proposta neste trabalho melhora a simulação das ligações da placa com vigas, com valores comparados aos obtidos pelo Método dos Elementos Finitos.

Exemplo 5.4.2. Placa quadrada simplesmente apoiada em dois lados opostos e com vigas flexíveis nos outros lados, com carregamento uniforme.

Neste exemplo analisa-se uma placa quadrada de lados com comprimento a , apoiada em dois lados opostos e com vigas com momentos de inércia $I_v = 6.a.D / E$ e submetida a um carregamento uniformemente distribuído q . Utilizou-se $\nu=0,25$ e dez elementos de contorno lineares em cada lado da placa.

A Tabela 5.5 mostra os resultados obtidos pela formulação proposta, apresentados em negrito, comparados às soluções analíticas (TIMOSHENKO e WOINOWSKY-KRIEGER (1970)) para o centro da placa e aos obtidos pelo Método dos Elementos.

Tabela 5.5 - Deslocamento transversal e momentos fletores na placa apoiada em dois lados opostos e com as demais bordas apoiadas em vigas flexíveis

	elemento finito DKT	form. proposta M.E.C. aprox. linear	form. proposta M.E.C. aprox. cúbica	valor teórico	fator de multiplicação
desl. vertical w	$4,49.10^{-3}$	$4,72.10^{-3}$	$4,73.10^{-3}$	$4,54.10^{-3}$	$fw = q.a^4/D$
momento m_x	$4,72.10^{-2}$	$4,64.10^{-2}$	$4,64.10^{-2}$	$4,55.10^{-2}$	$fm = q.a^2$
momento m_y	$5,20.10^{-2}$	$5,33.10^{-2}$	$5,34.10^{-2}$	$5,14.10^{-2}$	$fm = q.a^2$

Tabela 5.6 - Deslocamento transversal e momentos fletores ao longo do eixo de simetria ($y/a=0,5$) para placa simplesmente apoiada em dois lados opostos com vigas flexíveis

x/a (para y/a = 0,5)		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
w /fw	MEC	$1,074.10^{-3}$	$1,518.10^{-3}$	$2,862.10^{-3}$	$3,863.10^{-3}$	$4,493.10^{-3}$	$4,722.10^{-3}$
	MEF	$0,753.10^{-3}$	$1,949.10^{-3}$	$3,005.10^{-3}$	$3,815.10^{-3}$	$4,318.10^{-3}$	$4,490.10^{-3}$
m_x /fm	MEC	-	$1,630.10^{-2}$	$2,937.10^{-2}$	$3,883.10^{-2}$	$4,454.10^{-2}$	$4,644.10^{-2}$
	MEF	-	$2,068.10^{-2}$	$3,373.10^{-2}$	$4,172.10^{-2}$	$4,590.10^{-2}$	$4,719.10^{-2}$
m_y /fm	MEC	-	$2,255.10^{-2}$	$3,754.10^{-2}$	$4,680.10^{-2}$	$5,178.10^{-2}$	$5,334.10^{-2}$
	MEF	-	$2,303.10^{-2}$	$3,537.10^{-2}$	$4,458.10^{-2}$	$5,015.10^{-2}$	$5,200.10^{-2}$

Na Tabela 5.6 mostram-se os deslocamentos transversais w e os momentos fletores nas direções x e y , m_x e m_y , para uma linha no eixo de simetria da placa ($y/a=0,5$), paralela à borda apoiada, obtidos pelos dois métodos numéricos,

apresentados seguindo-se a convenção até aqui adotada.

Na Tabela 5.7 mostra-se a pequena oscilação dos valores da força cortante equivalente V_n ao longo da borda apoiada, em valores pontuais, obtidos pela formulação proposta, apresentada em negrito, e os obtidos utilizando-se o elemento finito DKT. O cálculo destas forças da maneira padrão do método, ou seja, com os valores aproximados ao longo do elemento de contorno, apresenta oscilações maiores, afetando os resultados numéricos globais da placa.

Tabela 5.7 - Esforço V_n ao longo da borda apoiada para placa simplesmente apoiada em dois lados opostos com vigas flexíveis

x/a (para y/a = 0,0)		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$V_n/(q.a)$	MEC	-18,64	-4,545	-6,624	-7,685	-8,276	-8,458
	MEF	-19,12	-4,500	-6,483	-7,611	-8,225	-8,424

Exemplo 5.4.3. - Pavimento de edifício

Ampliando-se a aplicação da formulação proposta para a análise de placas ligadas a vigas, analisa-se neste exemplo um pavimento de edifício da Figura 5.4, utilizando também o programa computacional PAVIMENTO para comparação de resultados com a formulação proposta por este trabalho.

São utilizados os seguintes dados do pavimento: coeficiente de Poisson $\nu=0,2$, $E=32192,3900 \text{ kN/cm}^2$, carga distribuída uniformemente $q=0,00055 \text{ kN/cm}^2$, vigas com seção transversal de **11x50 cmxcm** e carga distribuída $q_v = 0,087 \text{ kN/cm}$. O programa computacional PAVIMENTO foi utilizado com uma malha de 364 elementos.

Os apoios são considerados discretos e rígidos com relação ao deslocamento transversal à placa. No caso da formulação apresentada neste trabalho, os apoios discretos são representados por colunas com rigidezes desprezíveis à flexão e infinita à deformação axial.

A formulação apresentada neste trabalho permite considerar a rigidez à torção das vigas flexíveis, porém nos exemplos apresentados até aqui não foi

considerada esta rigidez.

Figura 5.4 - Pavimento de edifício (medidas em cm)

Nas Figuras 5.5 a 5.12 mostram-se os momentos fletores (kNxcn) dos pontos da placa ao longo das linhas de coordenadas $y = 159,60$ cm (seção A-A), $y = 517,10$ cm (seção B-B), $x = 259,75$ cm (seção C-C) e $x = 634,50$ cm (seção D-D) obtidos a partir dos dois métodos numéricos.

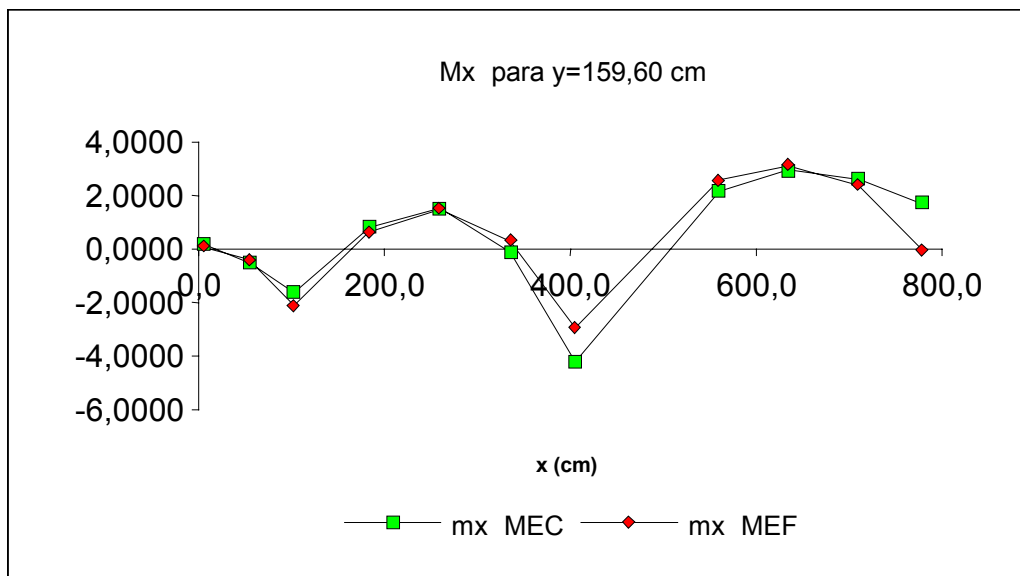


Figura 5.5 - Momentos fletores Mx , seção A-A, y=159,60 cm

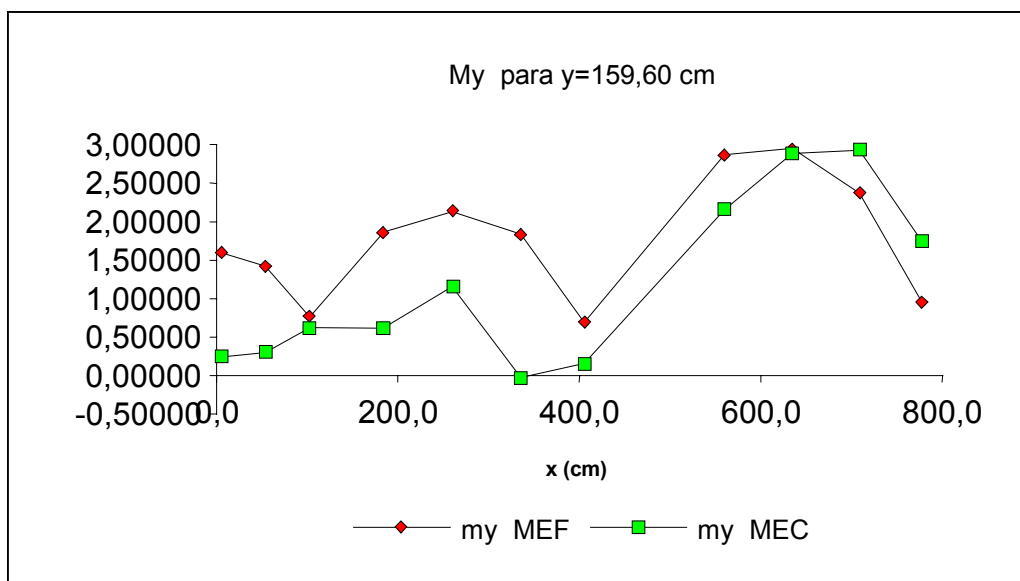


Figura 5.6 - Momentos fletores My , seção A-A, y=159,60 cm

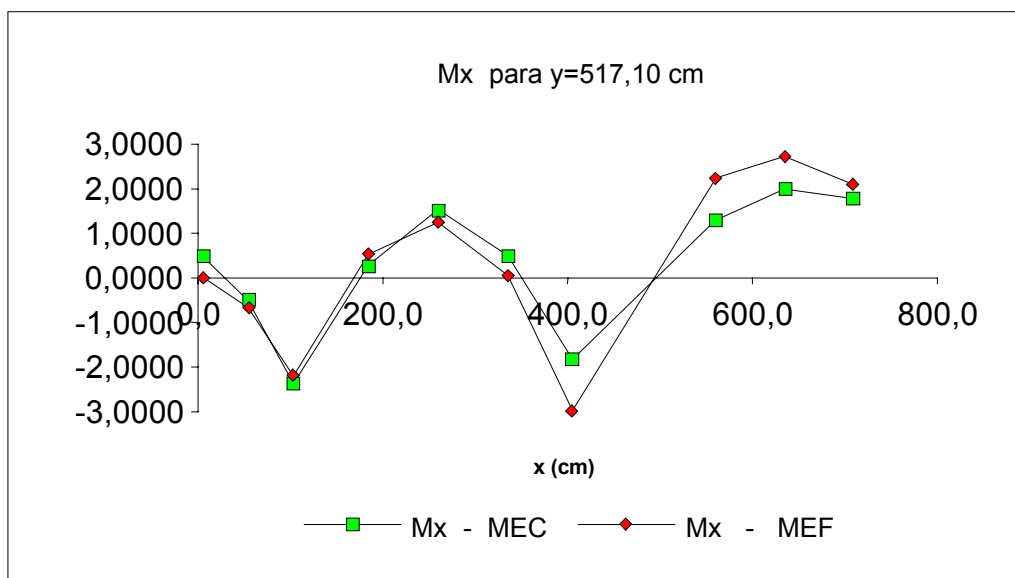


Figura 5.7 - Momentos fletores Mx , seção B-B, y=517,10 cm

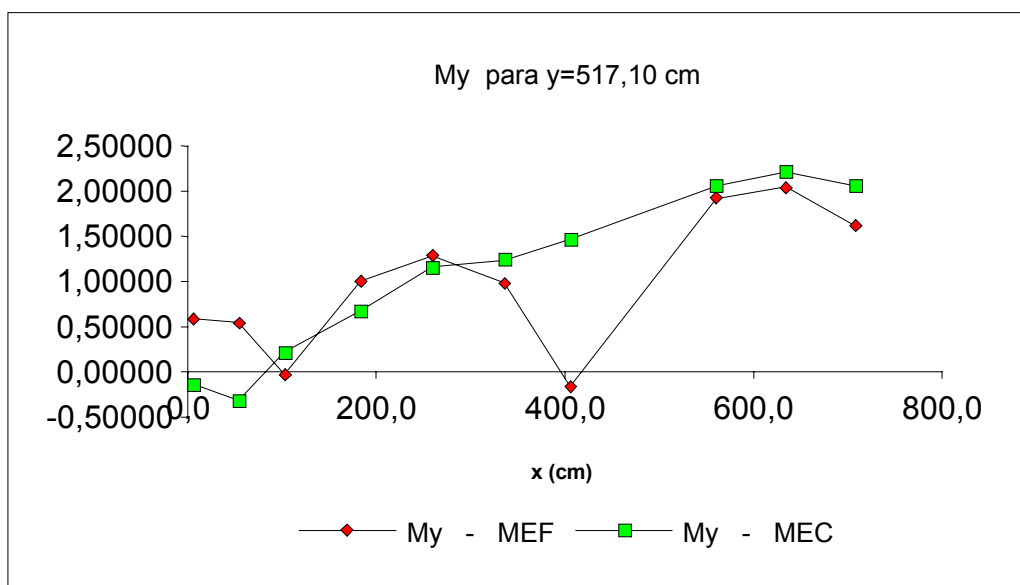


Figura 5.8 - Momentos fletores My , seção B-B, y=517,10 cm

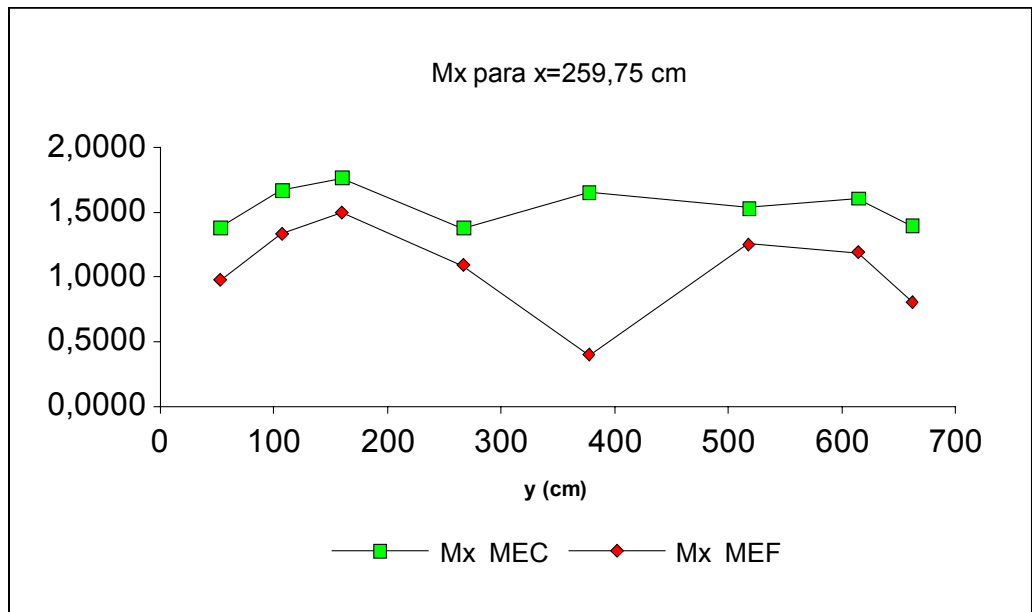


Figura 5.9 - Momentos fletores M_x , seção C-C, $x=259,75$ cm

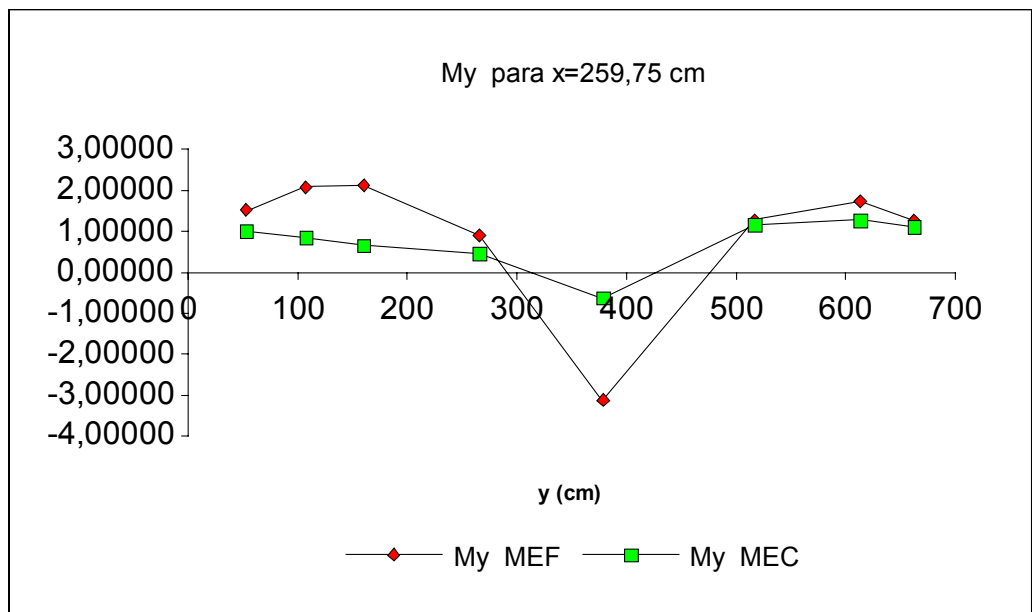


Figura 5.10 - Momentos fletores M_y , seção C-C, $x=259,75$ cm

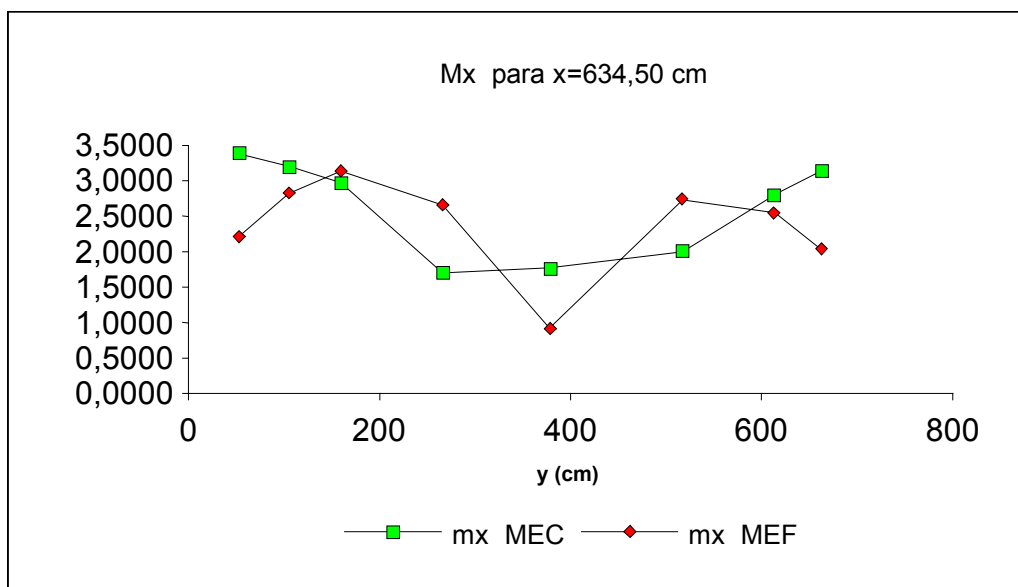


Figura 5.11 - Momentos fletores M_x , seção D-D, $x=634,50$ cm

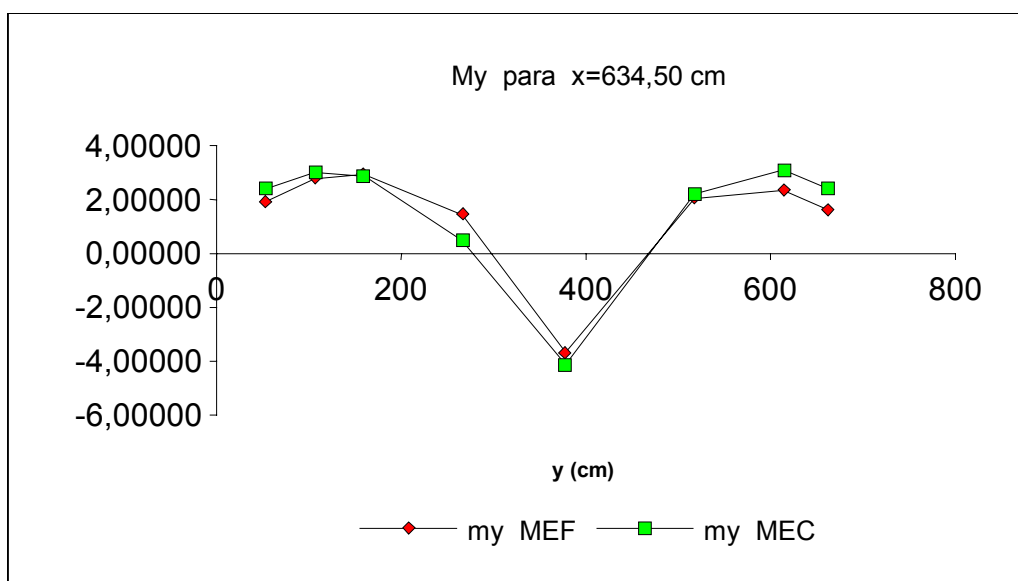


Figura 5.12 - Momentos fletores M_y , seção D-D, $x=634,50$ cm

Conforme observado nas Figuras 5.5 a 5.12, os resultados obtidos pela formulação do método proposta neste trabalho para os esforços apresentados podem ser considerados bons, quando comparados ao valores obtidos pelo Método dos Elementos Finitos, comprovando assim a validade e eficiência desta formulação.

Nota-se uma diferença no comportamento dos valores dos momentos fletores resultantes dos dois métodos numéricos. Nas Figuras 5.8, 5.9 e 5.10¹ podem-se observar picos dos valores dos momentos fletores, na direção das vigas, nas confluências destas vigas com as seções consideradas, para os resultados obtidos pelo Método dos Elementos Finitos. Estes picos não aparecem nos diagramas referentes aos resultados obtidos pela formulação proposta, que apresentam variações mais suaves ao longo de toda seção considerada. Em consideração aos momentos fletores nas direções perpendiculares às direções das vigas - Figuras 5.5, 5.6, 5.7, 5.10 e 5.12 - os diagramas resultantes dos dois métodos numéricos são semelhantes, ambos apresentando picos nas confluências entre os eixos das vigas com as seções consideradas, comportamentos já esperados.

Exemplo 5.4.4. Placa simplesmente apoiada nas bordas com quatro colunas em seu domínio

Neste exemplo analisa-se uma placa representada na Figura 5.13, simplesmente apoiada em seu contorno e em quatro colunas em seu domínio, submetida a um carregamento uniformemente distribuído.

Figura 5.13 – Placa apoiada em seu contorno e em quatro colunas em seu domínio.

A laje tem lados com comprimento $a=12\text{ m}$, espessura de $t=15\text{ cm}$, módulo de elasticidade $E=150,0\text{ kN/cm}^2$, coeficiente de Poisson $\nu=0,1667$ e carregamentos uniformemente distribuídos totais da laje de $q=11,25\text{ kN/m}^2$. Os pilares, de seção transversal $100\times 100\text{ cmxcm}$ e altura $3,00\text{ m}$, são engastados em suas bases. Os resultados são comparados com os obtidos pelo programa computacional PAVIMENTO utilizando uma malha de 288 elementos triangulares DKT.

Observam-se nas Figuras 5.14 a 5.19 os valores de deslocamentos transversais (cm) e os de momentos fletores (kNxc) ao longo de dois eixos da placa, eixo de simetria e o eixo que passa pelos pilares.

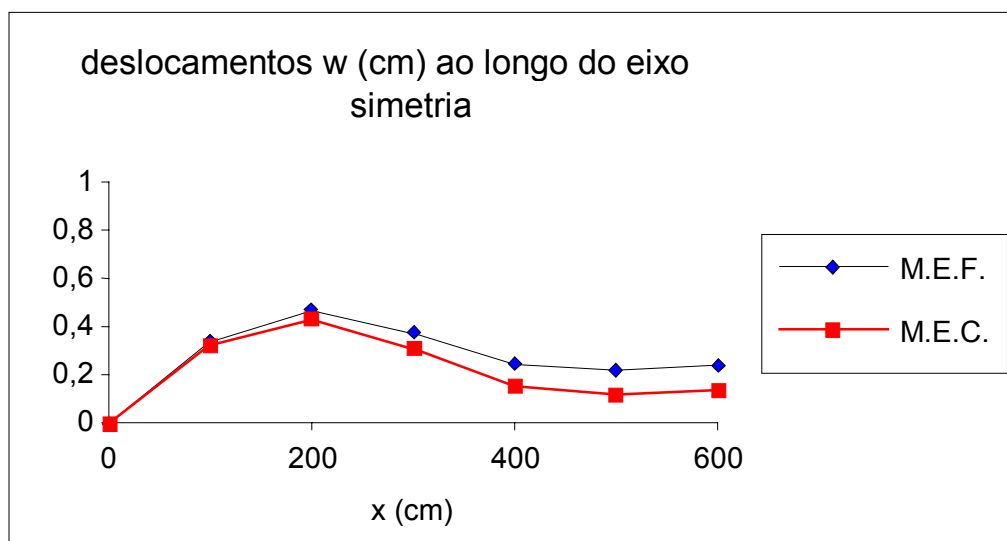


Figura 5.14 - Deslocamentos transversais w , eixo de simetria, $y=600,0\text{ cm}$

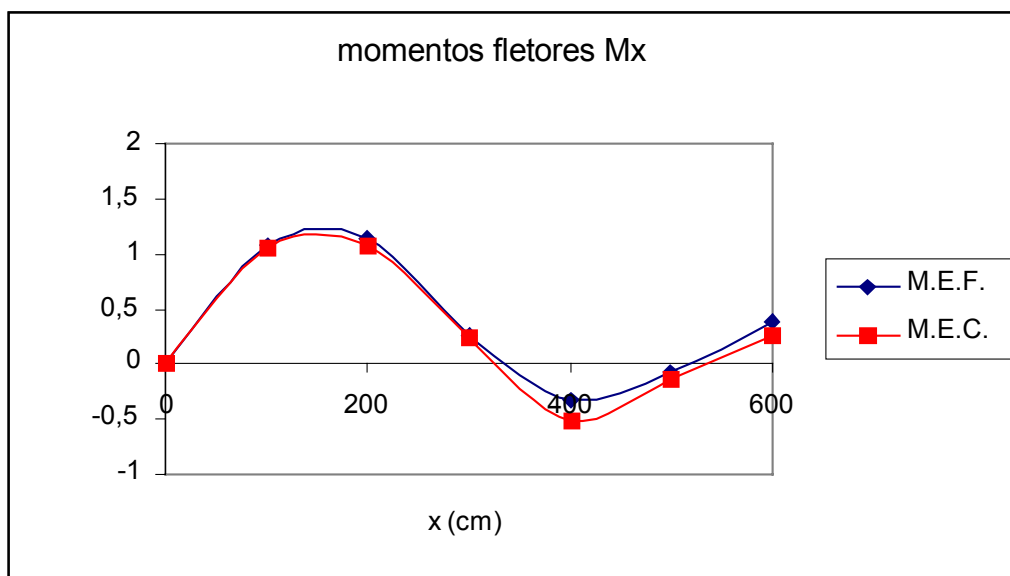


Figura 5.15 – Momentos fletores M_x , eixo de simetria, $y=600,0$ cm

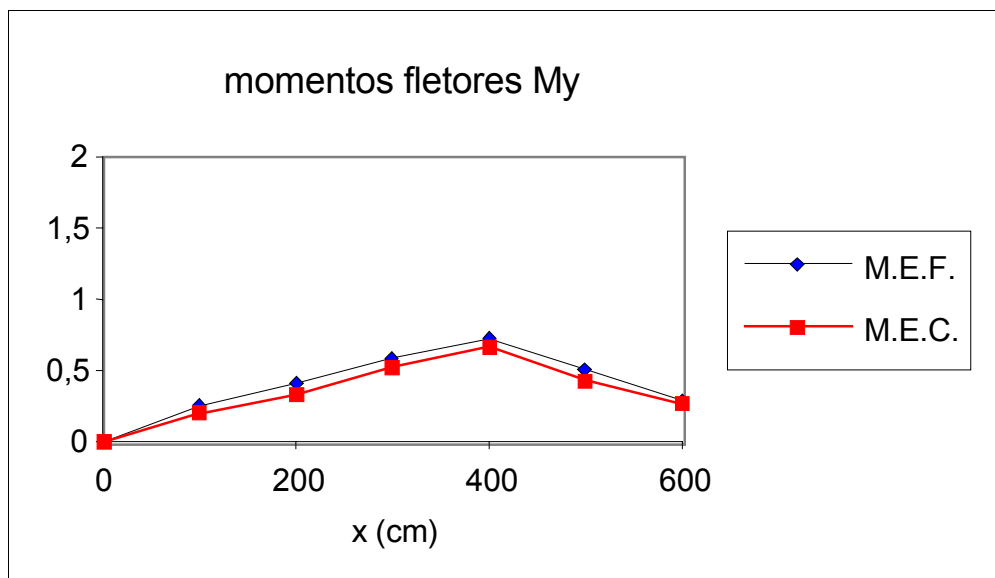


Figura 5.16 – Momentos fletores M_y , eixo de simetria, $y=600,0$ cm

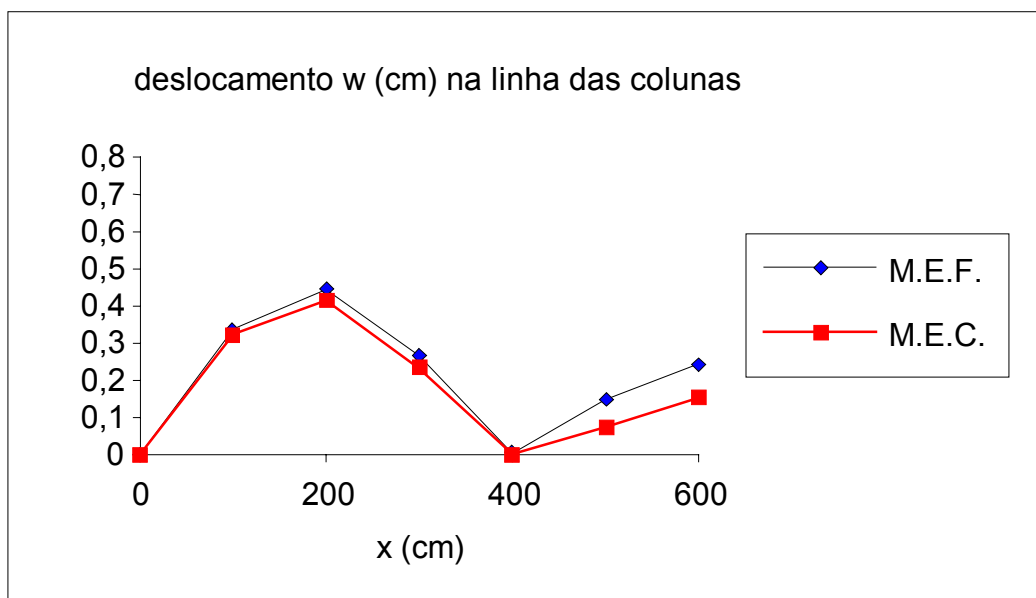


Figura 5.17 - Deslocamentos w , eixo dos pilares, $y=400,0$ cm

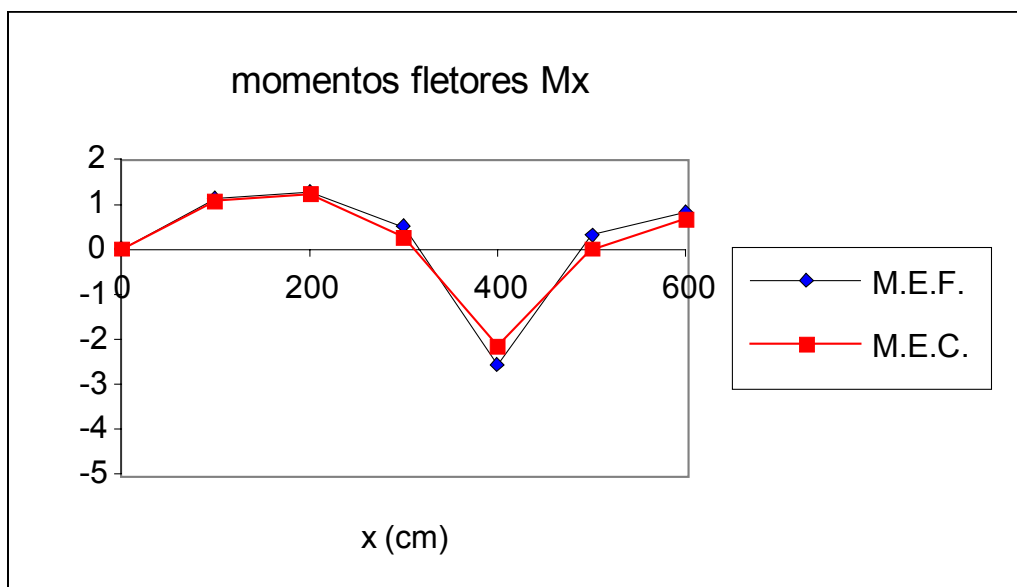


Figura 5.18 – Momentos fletores M_x , eixo dos pilares, $y=400,0$ cm

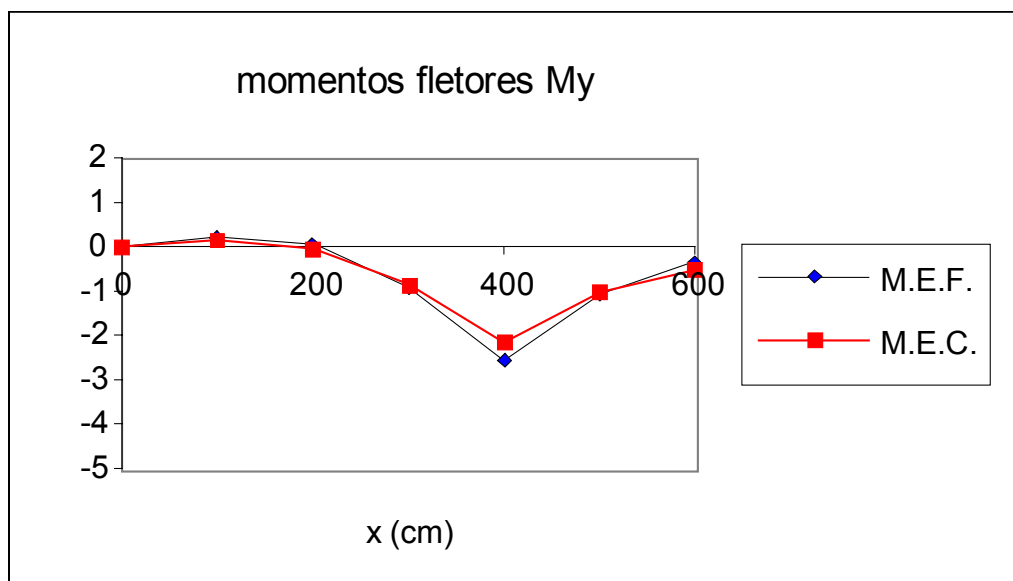


Figura 5.19 – Momentos fletores My, eixo dos pilares, $y=400,0$ cm

Observam-se também os resultados obtidos pela formulação proposta para o Método dos Elementos de Contorno, que podem ser considerados muito bons quando comparados aos obtidos Método dos Elementos Finitos. Optou-se por mostrar os valores de domínio, porém os valores de contorno, isto é, as reações ao longo da borda apoiada e os apoios nos pilares resultaram praticamente iguais pelos dois métodos numéricos.

Exemplo 5.4.5. Pavimento de edifício apoiado em colunas, sem vigas

Neste exemplo analisa-se o pavimento de edifício representado na Figura 5.20, cujos dados são:

Laje plana e maciça com espessura de $t=16$ cm, módulo de elasticidade $E=1964,2$ kN/cm², coeficiente de Poisson $\nu=0,15$ e carregamentos totais da laje de $q=11,25$ kN/m². e Os pilares, de seção 45×45 cmxcm e altura de $h=5,50$ m, são engastados na base. O programa computacional PAVIMENTO foi utilizado com uma malha de 288 elementos triangulares DKT.

Figura 5.20 - Pavimento de edifício apoiado em colunas

Tabela 5.8 - Deslocamentos e reações de apoio nas colunas da placa

Colunas		P1	P2	P7	P8
w (cm)	MEC	0,02496	0,04285	0,02501	0,04322
	MEF	0,02319	0,039381	0,02349	0,03978
dw/dx	MEC	0,003850	0,002243	0,003808	0,0001002
	MEF	0,003890	0,004003	0,003873	0,0000201
dw/dy	MEC	0,008396	0,007163	0,008364	0,007144
	MEF	0,008582	0,007318	0,0085560	0,007185
R _{COLUNA} (kN)	MEC	167,34	287,26	167,64	289,70
	MEF	167,70	284,80	169,89	287,67
M _x (kNxcn)	MEC	-27,50	-64,72	-26,93	-64,78
	MEF	-31,39	-66,59	-31,58	-65,72
M _y (kNxcn)	MEC	-25,13	-51,02	-24,42	-50,66
	MEF	-30,93	-57,15	-31,98	-57,51

Mostram-se as reações e deslocamentos nas interfaces das colunas na Tabela 5.8.

Mostram-se nas Figuras 5.21 a 5.28 os valores de deslocamentos transversais w (cm) e de suas derivadas nas direções normal e tangencial ao contorno ao longo do eixo $y=0,0$ e de deslocamentos e momentos fletores e volventes ($\times 10^2$ kNxcn) da laje ao longo de dois eixos internos da placa obtidos pelos dois métodos numéricos.

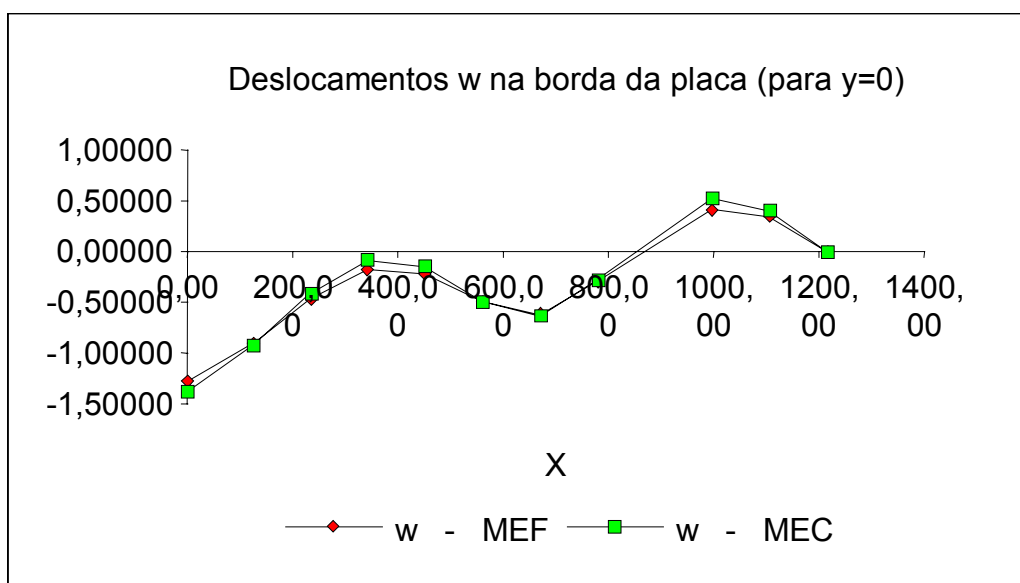


Figura 5.21 - Deslocamentos w , borda $y=0,0$ cm

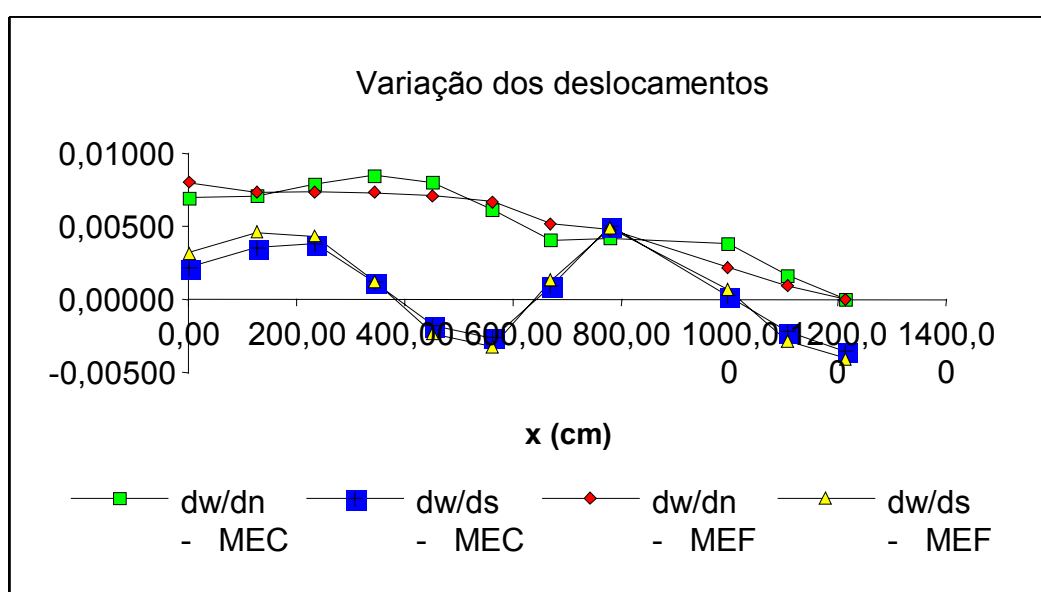


Figura 5.22 - Derivadas de deslocamentos dw/dn e dw/ds , borda $y=0,0$ cm

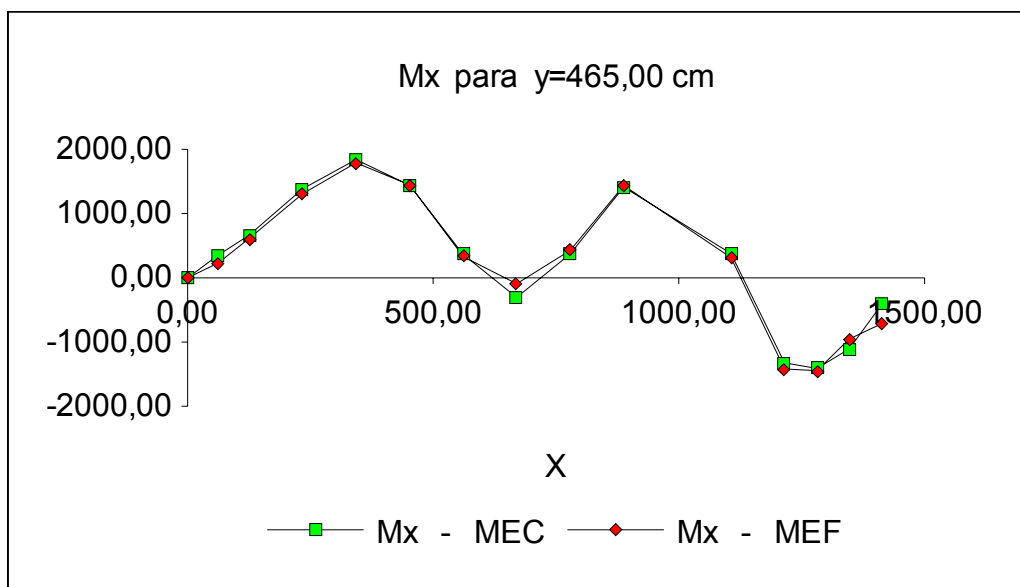


Figura 5.23 - Momentos fletores M_x , seção com $y=465,0$ cm

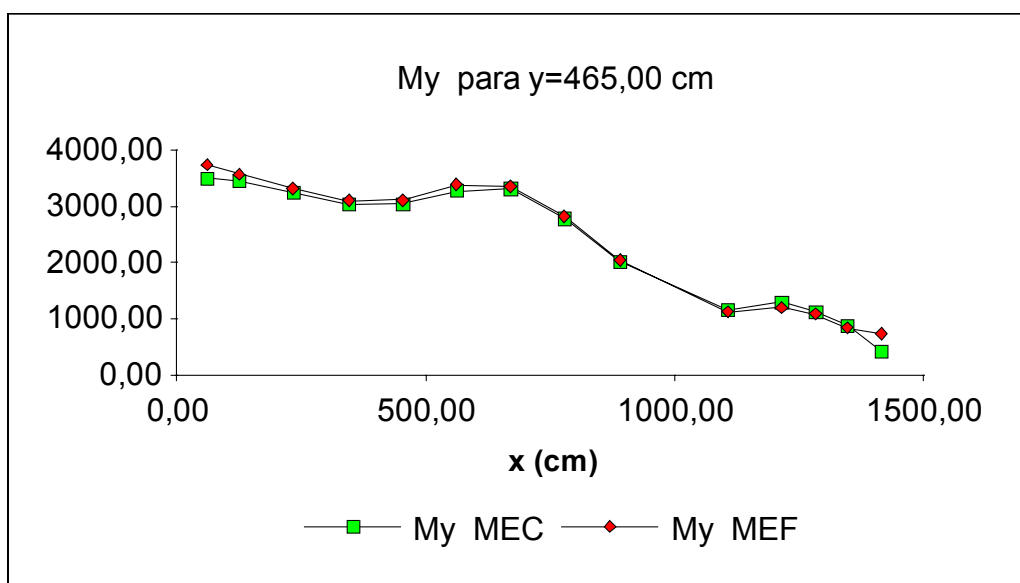


Figura 5.24 - Momentos fletores M_y , seção com $y=465,0$ cm

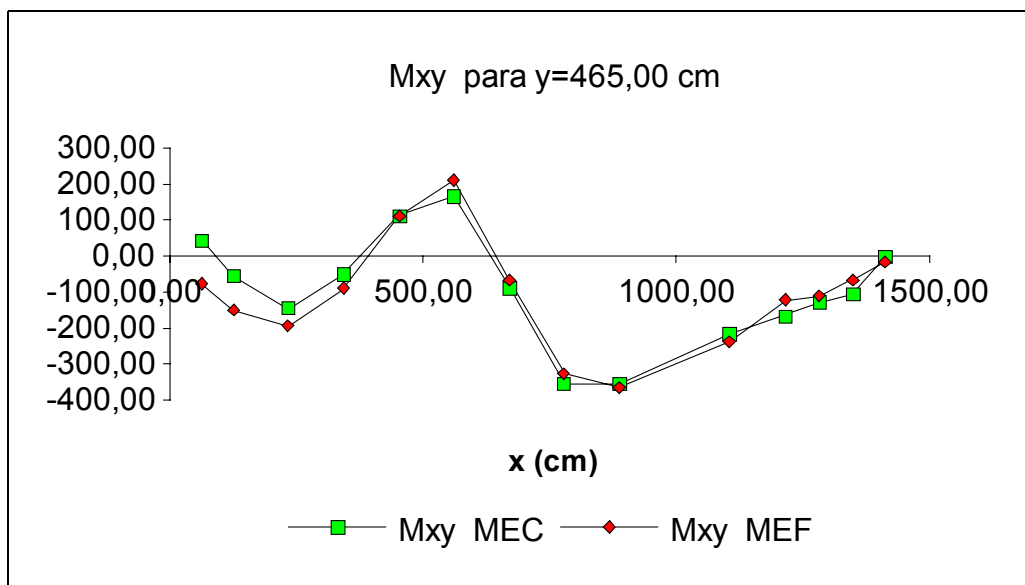


Figura 5.25 - Momentos fletores volventes M_{xy} , seção com $y=465,0$ cm

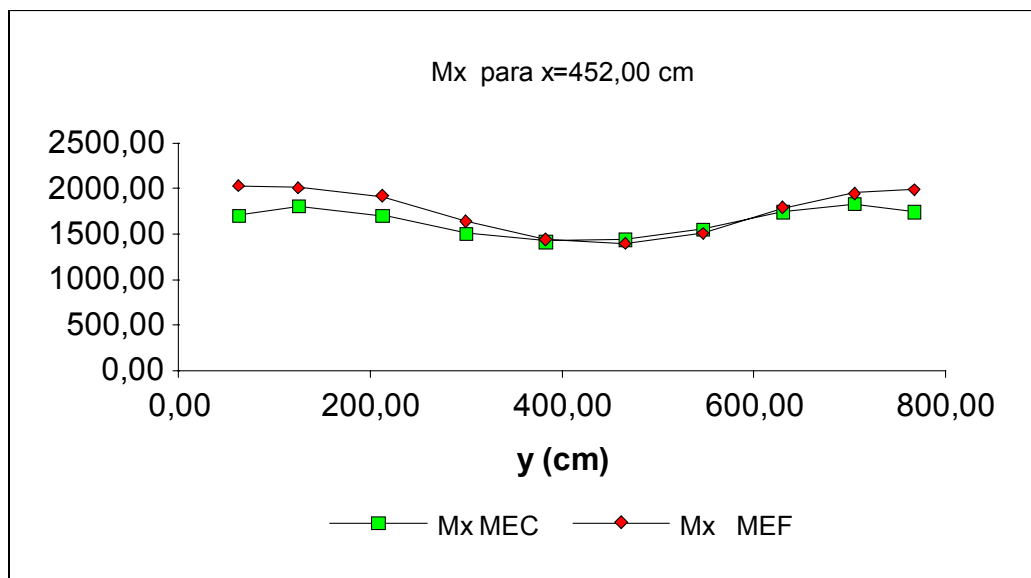


Figura 5.26 - Momentos fletores M_x , seção com $x=452,0$ cm

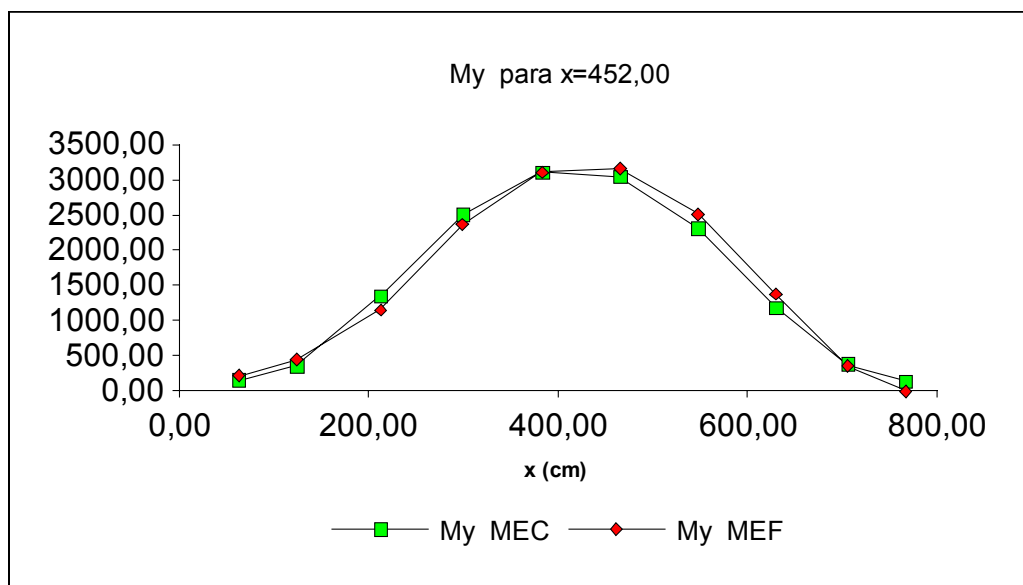


Figura 5.27 - Momentos fletores M_y , seção com $x=452,0$ cm

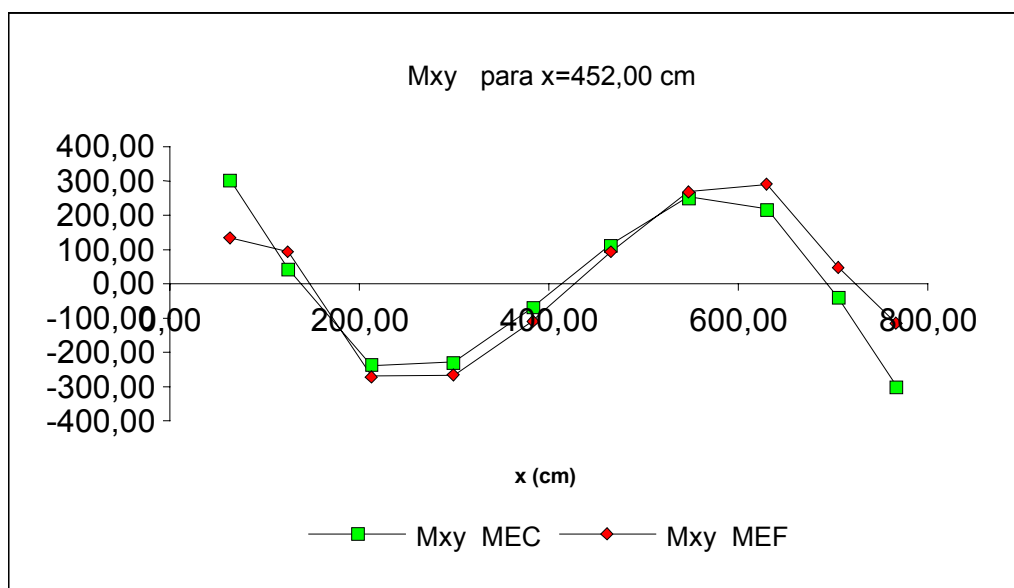


Figura 5.28 - Momentos fletores volventes M_{xy} , seção com $x=452,0$ cm

Das Figuras 5.21 a 5.28 confirma-se novamente os excelentes resultados obtidos pela formulação do Método dos Elementos de Contorno proposta; tem-se nesta formulação uma proposta de melhoria da análise de placas delgadas com

bordas livres, onde a introdução da outra variável de contorno que surge nestes casos, a derivada do deslocamento na direção tangencial $\partial w/\partial s$, traz nítidas melhorias nos resultados de deslocamentos e esforços, quando comparados com os resultados obtidos pela formulação usual do método. A utilização da aproximação cúbica, possibilitada pela introdução da variável $\partial w/\partial s$ ao equacionamento, e a relação conjunta desta variável com o deslocamento transversal w nos termos da matriz, tornaram as equações destes deslocamentos acopladas, deixando de ser independentes entre si, melhorando sensivelmente a consistência esta matriz e do sistema global de equações. A introdução da variável $\partial w/\partial s$ ao equacionamento traz também a possibilidade da ligação da placa com outros elementos estruturais lineares envolvidos na análise de pavimentos de edifício, como vigas e pilares, conforme pode ser observado nestes exemplos numéricos finais.

Conclui-se que a formulação é de grande valia para o Método dos Elementos de Contorno, principalmente para a sua utilização prática na análise de edifícios.

Ainda são necessários outros estudos para a real utilização prática desta formulação do método, como a implementação de pré e pós-processadores e uma melhoria nas ligações da placa com vigas elásticas.

6. CONCLUSÕES

O objetivo deste trabalho foi o de apresentar uma formulação alternativa do método dos elementos de contorno para a análise de placas delgadas visando possibilitar a sua utilização prática para análise de pavimentos de edifícios e sua associação com outros elementos estruturais envolvidos. É evidente a contribuição introduzida pela formulação utilizando três parâmetros nodais em deslocamentos à análise de placas isoladas, principalmente apresentando bordas livres, e obtendo bons resultados na análise de pavimentos, considerando-se a melhor modelagem que permite nas ligações placa-viga e placa-pilar, principalmente.

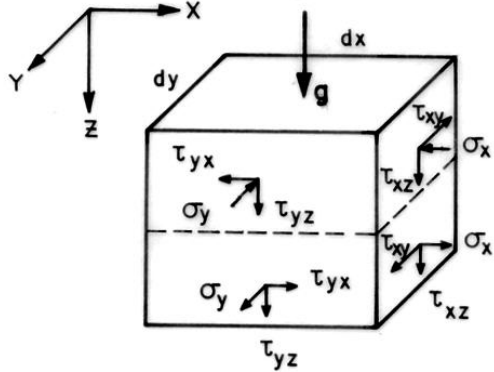
Na forma com que a formulação tradicional é equacionada, a derivada de deslocamento na direção tangencial ao contorno $\partial w/\partial s$ não aparece. Pela formulação apresentada neste trabalho, os três valores nodais de deslocamento utilizados são os mesmos definidos nos elementos lineares, vigas e pilares, nos outros métodos numéricos mais utilizados, em especial o método dos elementos finitos. Desta forma, a estrutura é melhor modelada para ser analisada como um conjunto, onde a compatibilidade entre os três parâmetros nodais em deslocamento é realizada diretamente. No caso da formulação tradicional do método dos elementos de contorno isto requer maiores esforços para se analisarem caso a caso os problemas, no sentido de contornar a não compatibilização das variáveis.

Outro ponto importante a ser comentado refere-se à aproximação cúbica dos deslocamentos transversais no elemento de contorno que, na forma como é realizada também no método dos elementos finitos, permite perfeita compatibilização dos deslocamentos da placa e da viga ao longo do elemento. Com isto a associação do elemento de contorno da placa com elementos lineares é realizada em níveis de interpolação compatíveis, melhorando com certeza a análise numérica dos problemas.

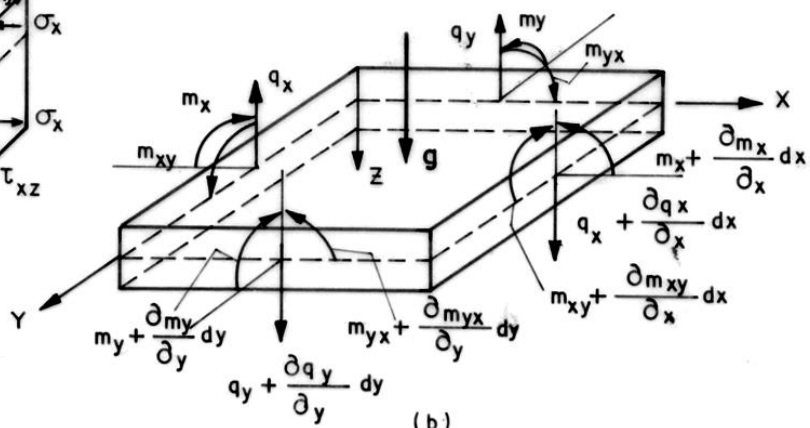
Pela forma como são ligadas placa e viga, cuja interação é feita por pontos

discretos, a proposta de se admitirem as forças cortantes equivalentes como forças concentradas traz também vantagens, simplificando sobremaneira a análise de placas delgadas.

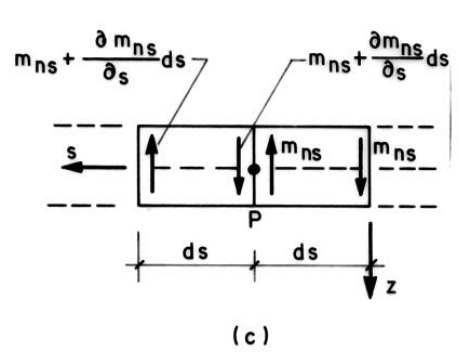
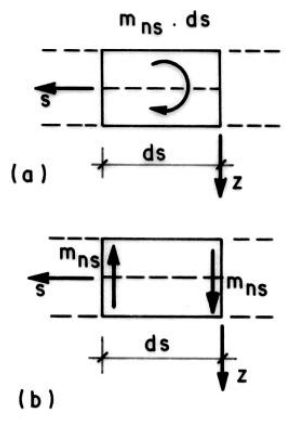
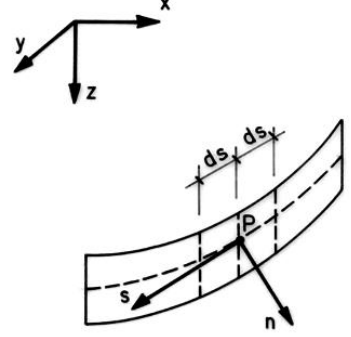
Esta formulação considerando as forças cortantes equivalentes como forças concentradas já vinha sendo utilizada para os casos de placas isoladas, melhorando a oscilação de valores em bordas apoiadas em proximidades de cantos. Estas oscilações ocorrem devido às reações de canto, inerente à formulação de placas delgadas, pois são forças concentradas que afetam os valores de esforços na sua proximidade. Para o caso de análise de placas com bordas livres, com apoios discretos ou ainda na associação com vigas e pilares, a consideração das forças cortantes equivalentes como forças concentradas traz melhorias à análise conforme observado nos exemplos numéricos.

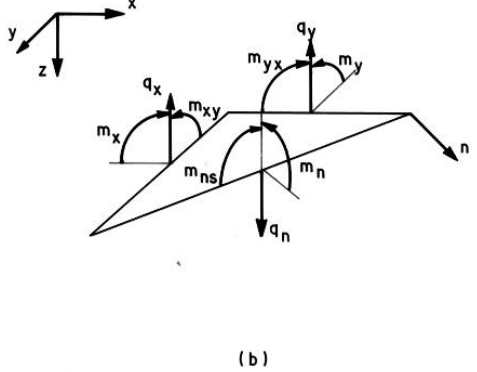
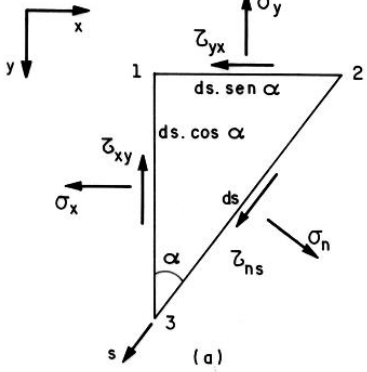


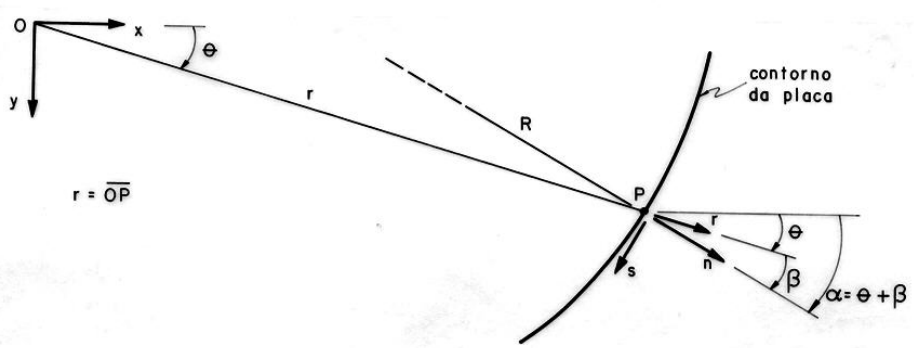
(a)

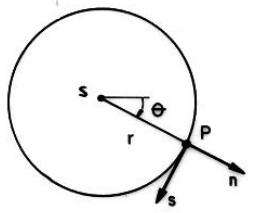
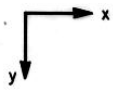


(b)

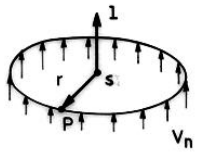




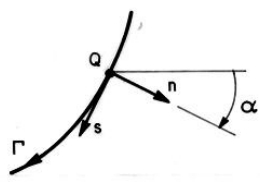
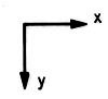




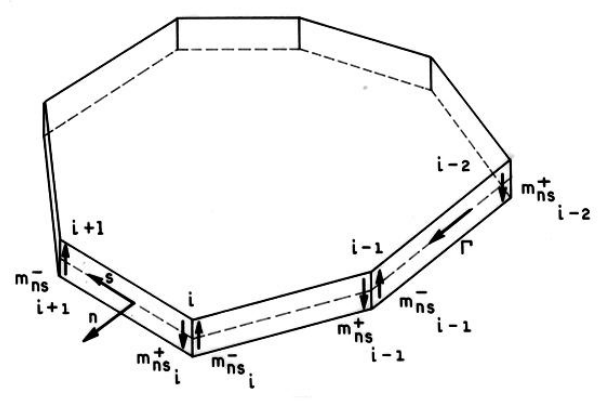
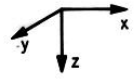
(a)

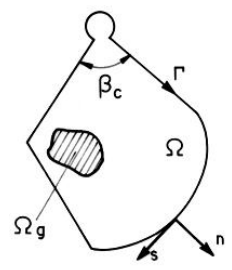
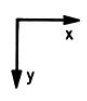


(b)



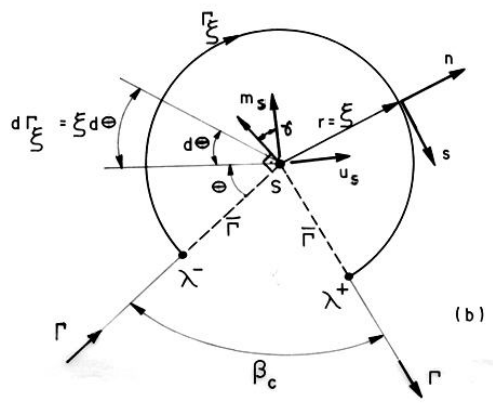
$$\eta_x = \cos \alpha$$
$$\eta_y = \text{sen } \alpha$$



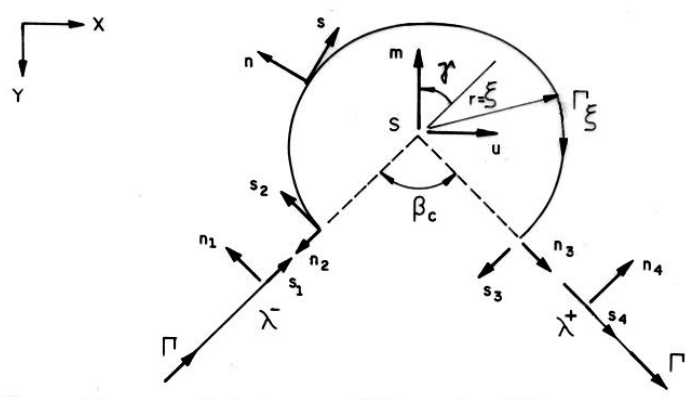


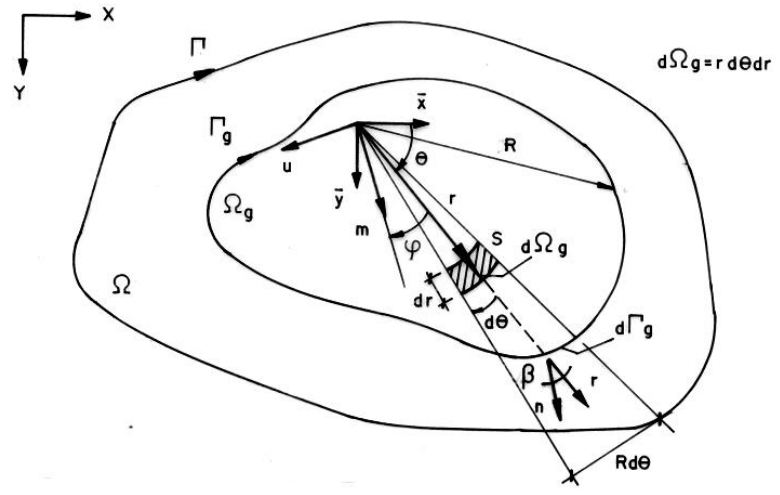
(a)

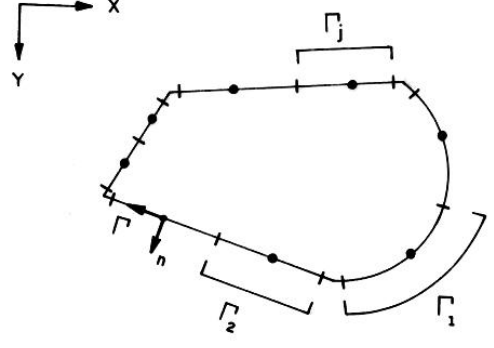
$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \cos \beta = 1$$

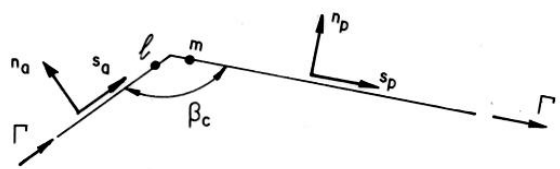


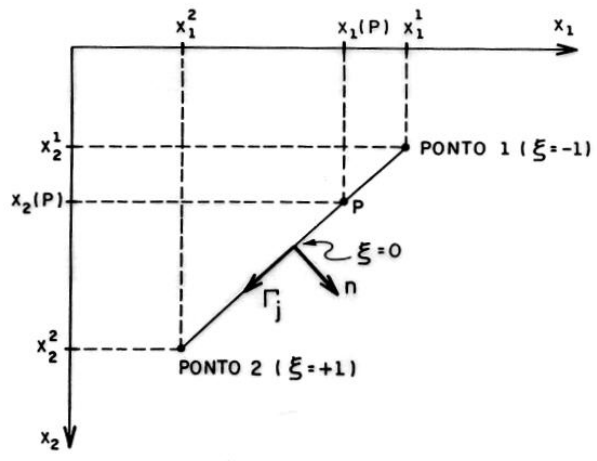
(b)

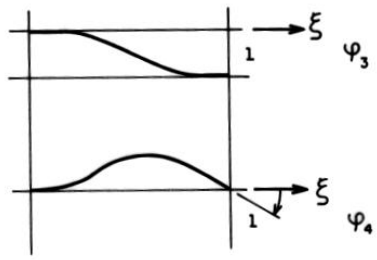
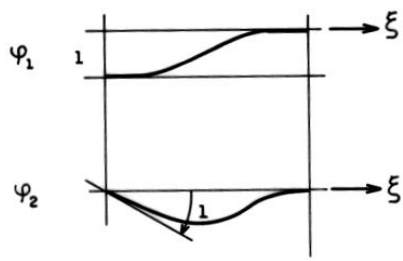


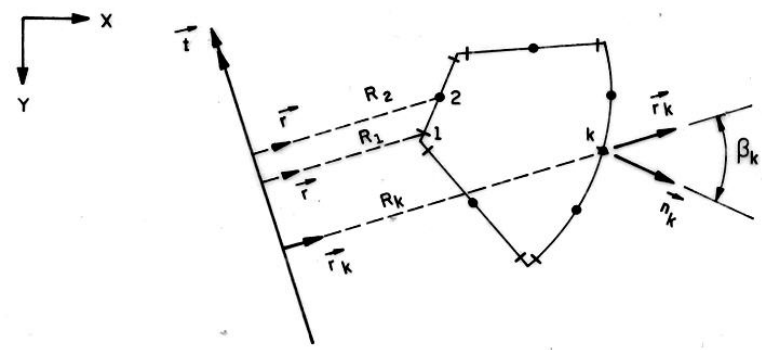


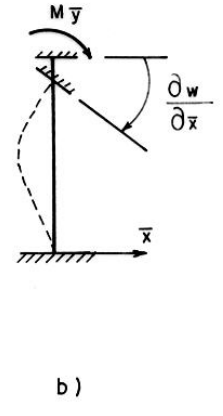
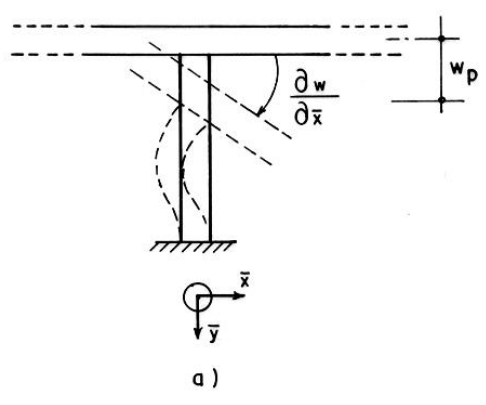


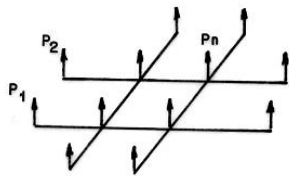
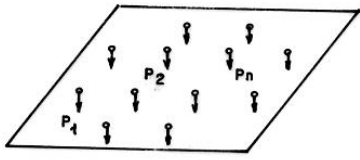


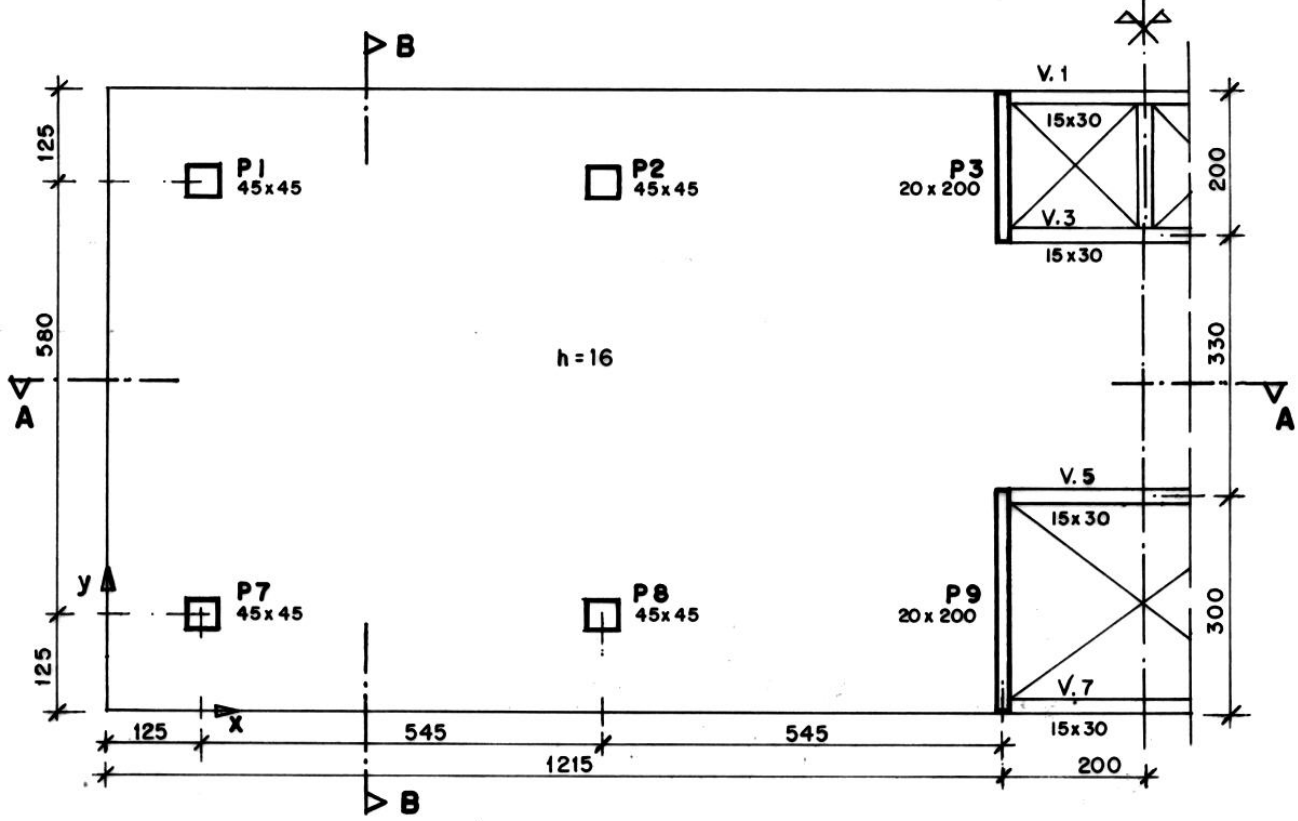


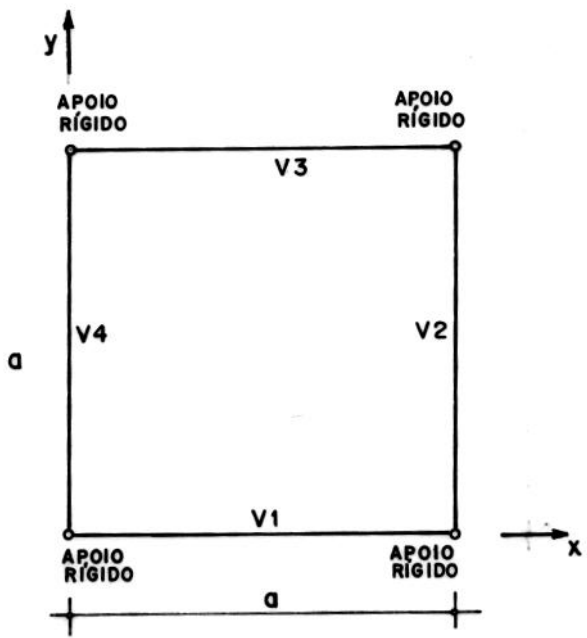


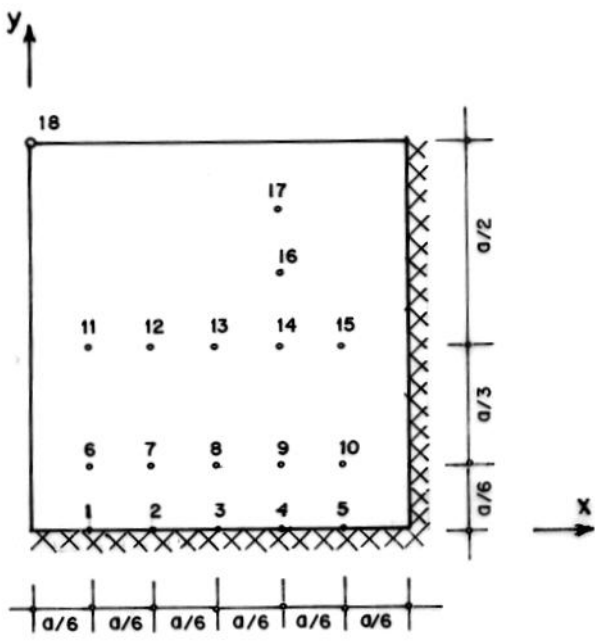


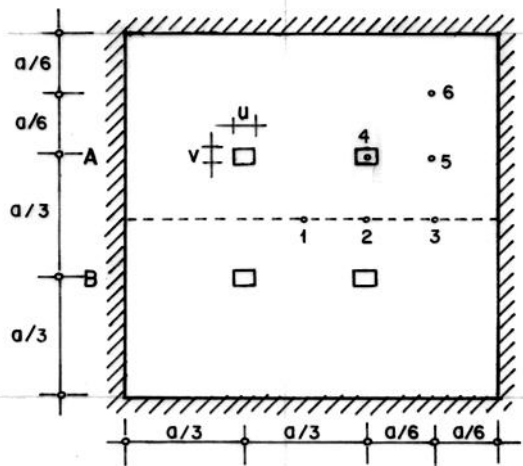


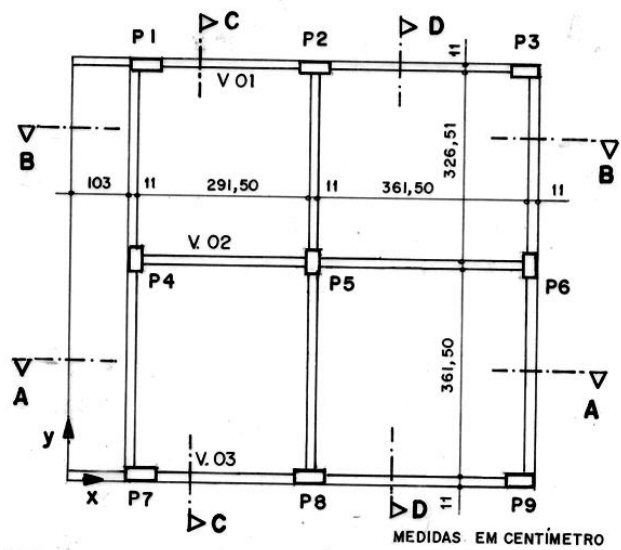












7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABDEL-AKHER, A.; HARTLEY, G.A. (1989). Evaluation of boundary integrals for plate bending. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.28, n.2, p.75-93.
- ALTIERO, N.J.; SIKARSKIE, D.L. (1978). A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form. *Comp. & Struct.*, n.9, p.163-168.
- ARGYRIS, J.H.; KELSET, S. (1960). *Energy theorems and structural analysis*. London, Butterworths.
- BARCELLOS, C.S.; SILVA, L.H.M. (1987). A boundary element formulation for the Mindlin's plate model. In: BREBBIA, C.A; VENTURINI, W.S., eds. *Boundary elements techniques: applications in stress analysis and heat transfer*. Southampton, CMP.
- BARES, R. (1972). *Tablas para el calculo de placas y vigas pared*. Barcelona, Gustavo Gili.
- BARRETTO, S.F.A. (1995). *Análise elasto-dinâmica de placas através do MEC. com interação solo-estrutura*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- BETTI, E. (1872). Teoria dell'elasticità. *Il Nuovo Cimento*, p.7-10.
- BEZINE, G.P. (1978). Boundary integral formulation for plate flexure with arbitrary boundary conditions. *Mech. Research Comm.*, v.5, n.4, p.197-206.

- BEZINE, G.P. (1980). A mixed boundary integral-finite element approach to plate vibration problems. *Mech. Res. Comm.*, v.7, p.141-150.
- BEZINE, G.P. (1981). A boundary integral equation method for plate flexure with conditions inside the domain. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.17, p.1647-1657.
- BEZINE, G.P.; GAMBY, D.A. (1978). A new integral equation formulation for plate bending problems. In: BREBBIA, C.A., ed. *Recent advances in B.E.M.* London, Pentech Press. p.327-342.
- BEZINE, G.; GAMBY, D. (1982). Étude des mouvements transitoires de flexion d'une plaque par la méthode des équations intégrales de frontière. *Journal de Mécanique Appliquée*, v.1, n.3, p.451-466.
- CAMP, C.V.; GIPSON, G.S. (1990). Biharmonic analysis of rectilinear plates by boundary element method. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, n.30, p.517-539.
- CHUEIRI, L.H.M. (1994). *Formulação do método dos elementos de contorno para análise elastoplástica de placas*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CORRÊA, M.R.S. (1991). *Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- COSTA JR., J.A. (1988). Plate vibrations using B.E.M. *Appl. Math. Modelling.*, v.12, p.78-85.
- COSTA JR., J.A. (1985). *The boundary element method applied to plate problems*. Southampton. Tese (Doutorado) - University of Southampton.

- COSTA JR., J.A.; BREBBIA, C.A. (1985). The boundary element method applied to plates on elastic foundations. *Engineering Analysis*, v.2, n.4, p.174-183.
- CRUSE, J.A.; RIZZO, F. (1968). A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problems. *Int. J. Math. Anal. Appl.*, v.22, p.244-259.
- DANSON, D.J. (1979) *Analysis of plate bending problems by direct boundary element method*. Southampton, University of Southampton. (M.Sc. Dissertation)
- GUO-SHU, S.; MUKHERJEE, S. (1986). Boundary element method analysis of bending of elastic plates of arbitrary shape with general boundary conditions. *Engineering Analysis*, v.3, n.1, p.36-44.
- HANSEN, E.B. (1976). numerical solution of integro-differential and singular integral equations for plate bending problems, *J. of Elasticity*, v.6, n.1, p.39-56.
- HARTLEY, G.A. (1996). Developments of plate bending elements for frame analysis. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.17, p.93-104.
- HARTLEY, G.A.; ABDEL-AKHER, A. (1993). Analysis of building frames. *J. Struct. Eng.*, ASCE, v.119, p.468-483.
- HARTLEY, G.A.; ABDEL-AKHER, A.; CHEN, P. (1992). Boundary element analysis of thin plates internally bounded by rigid patches. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.35, p.1771-1785.
- HARTMANN, F.; ZOTEMANTEL, R. (1986). The direct boundary element method in plate bending. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.23, n.11, p.2049-2069.
- HE, X.; QIN, Q. (1993). Nonlinear analysis of Reissner's plate by the variational approaches and boundary element methods. *Appl. Math. Modelling.*, v.17, n.3,

p.149-155.

HU, C.F.; HARTLEY, G.A. (1994). Elastic analysis of thin plates with beam supports. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.13, p.229-238.

KAMIYA, N.; SAWAKI, Y.; KAMAMURA, Y. (1981). Thermal bending analysis by boundary integral equation method. *Mech. Res. Comm.*, v.8, n.6, p.369.

KAMIYA, N.; SAWAKY, Y. (1982). An integral equation approach to finite deflections of elastic plates. *Int. J. Non-Linear Mech.*, v.17, n.3, p.187-194.

KARAM, V.J. (1986). *Aplicação do método dos elementos de contorno à teoria de Reissner para flexão de placas*. Rio de Janeiro. Dissertação (Mestrado) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro.

KARAM, V.J.; TELLES, J.C.F. (1992). B.E.M. applied to plate bending elastoplastic analysis using Reissner's theory. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.9, n.4, p.351-357.

KATSIKADELIS, J.T.; ARMENAKAS, A.E. (1984). Plates on elastic foundations by B.I.E. Method. *J. Eng. Mech.*, ASCE, v.110, n.7, p.1086-1104.

KATSIKADELIS, J.T. (1989). A boundary element solution to the vibration problem of plates. *J. Sound Vibr.*, v.141, p.313-322.

KIRCHHOFF, G. (1850). Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *J. Math.*, v.40, p.51-58.

KITAHARA, M. (1985). Boundary integral equation method in eigenvalue problems of elastodynamics and thin plates. In: BREBBIA, C.A., ed. *Topics in boundary element research*. Berlin, Springer-Verlag, v.2.

- KUPRADZE, V.D. (1965). *Potential methods in the theory of elasticity*. Israel Progr. Sci. Transl.
- LONG, S.Y.; BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F. (1988). Boundary element bending analysis of moderately thick plates. *Engineering Analysis*, v.5, n.2, p.64-74.
- MIKHLIN, S.G. (1957). *Integral equations*. London, Pergamon Press.
- MINDLIN, R.D. (1951). Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J. Appl. Mech.*, v.13, p.31-38.
- MOSHAIOV, A; VORUS, W.S. (1986). Elasto-plastic plate bending analysis by a boundary element method with initial plastic moments. *Int. J. Solids Structures*, v.22, n.11, p.1213-1229.
- MUSKHELISHVILI, N.I. (1953). *Some basic problems of the mathematical theory of elasticity*. Noordhoff, Gronigen Holand.
- NARDINI, D.; BREBBIA, C.A. (1982). A new approach of free vibration analysis using boundary elements. In: BREBBIA, C.A., ed. *Boundary element method in engineering*. Berlin, Springer-Verlag. p. 312-326.
- NG, S.F.; CHEUNG, M.S.; XU, T. (1989). Application of the combined boundary element and finite element method to slab and slab-on-grider bridges. In: TANAKA, M.; BREBBIA, C.A.; HONMA, T., eds. *Boundary elements XII*. Southampton, CMP. p.457-466.
- NIWA, Y.; KOBAYASHI, S.; KITAHARA, M. (1981). Eigenfrequency analysis of a plate by the integral equations method. *Theoretical and applied mechanics*. Univ. of Tokyo Press, v.29, p.287-307.

- NIWA, Y.; KOBAYASHI, S.; KITAHARA, M. (1982). Applications of the boundary integral equations method to eigenvalue problems of elastodynamics. In: BREBBIA, C.A., ed. *Boundary element method in engineering*. Berlin, Springer-Verlag. p. 297-311.
- NIWA, Y.; KOBAYASHI, S.; KITAHARA, M. (1982). Determination of eigenvalues by boundary element method. In: BANERJEE, P.K.; SHAW, R.P., eds. *Developments in boundary element method*. Applied Science.
- OLIVEIRA NETO, L. (1991). *Análise de placas de borda curva pelo método dos elementos de contorno*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PAIVA, J.B. (1987). *Formulação do método dos elementos de contorno para flexão de placas e suas aplicações em engenharia de estruturas*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- PAIVA, J.B. (1991). Boundary element formulation for plate analysis with special distribution of reactions along the boundary. *Adv. Eng. Soft. and Workst.*, v.13, p.162-168.
- PAIVA, J.B. (1996). Boundary elements formulation for building slabs. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.17, n.2, p.105-110.
- PAIVA, J.B.; BUTTERFIELD, R. (1997). Boundary elements analysis of plate-soil interaction. *Comp. & Struct.*, v.64, n.1, p.319-328.
- PAIVA, J.B.; MENDONÇA, A.V. (1997). Boundary element analysis of piled rafts. . In: MARCHETTI, M.; BREBBIA, C.A.; ALIABADI, M.H., eds. *Boundary elements XIX*. Southampton, CMP. p.799-808.

- PAIVA, J.B.; OLIVEIRA NETO, L. (1995). An alternative boundary element formulation for plate bending analysis. In: *BETECH 95: Proc., Adelaide, 1985*. Springer-Verlag.
- PAIVA, J.B.; TRONDI, R.R. (1996). A simplified boundary elements method analysis of pile groups. In: TOPPING, B.H.V., ed. *Adv. in B.E.M.: Proc., Budapest, 1996*. Civil-Comp Press, p.145-152.
- PAIVA, J.B.; VENTURINI, W.S. (1985). Boundary element algorithm for building floor slab analysis. In: BREBBIA, C.A.; NOYE, B.J., ed. *BETECH 85: Proc., Adelaide, 1985*. Springer-Verlag.
- PAIVA, J.B.; VENTURINI, W.S. (1987). Analysis of building structures considering plate-beam-column interactions. In: BREBBIA, C.A.; VENTURINI, W.S., eds, *Boundary element techniques*. Southampton, CMP.
- PARIS, F.; LEÓN, S. (1985). An alternative analysis of thin elastic plates with any boundary conditions, using B.E.M. In: *VII Int. Conf. on Boundary Element Methods, 7., 1985. Proc.* Springer Verlag, p.4-28.
- PARIS, F.; LEÓN, S. (1987). Analysis of thermal stress in plates with boundary element method. *Eng. Anal.*, v.4, p.199-203.
- PILTNER, R.; TAYLOR, R.L. (1989). The solution of plate bending problems with aid of a boundary element algorithm based on singular complex functions. In: TANAKA, M.; BREBBIA, C.A.; HONMA, T., eds. *Boundary elements XII*.
- PROVIDAKIS, C.P.; BESKOS, D.E. (1989). Free and forced vibrations of plates by boundary and interior elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.28, p.1977-1994.
- REISSNER, E. (1944). On bending of elastic plates. *J. Math. Physics.*, v.23, p.184-191.

- RIBEIRO, G.O. (1992). *Sobre a formulação do método dos elementos de contorno de placas usando as hipóteses de Reissner*. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- RIBEIRO, G.O. VENTURINI, W.S. (1989). Aplicação do método dos elementos de contorno no cálculo de placas através da teoria de Reissner. In: CONGRESSO IBERO-LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 10., Porto, Portugal, 1989. *Anais*. Porto, Faculdade de Engenharia do Porto. v.1, p.A389-398.
- RIZZO, F.J. (1967). An integral approach to boundary value problems of classical elastostatics. *Quartely of Applied Mathematics*, v.25, n.1, p.83-92.
- SAWAKI, Y.; TAKEUCHI, K.; KAMIYA, N. (1989). Finite deflection analysis of plates by dual reciprocity boundary elements. In: BREBBIA, C.A.; CONNOR, J.J., eds. *Adv. in B.E.*, Southampton, CMP. v.3, p.145-152.
- SAWAKI, Y.; TAKEUCHI, K.; KAMIYA, N. (1990). Nonlinear bending analysis of plates without domain-cell discretization. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, v.7, n.3, p.130-135.
- SILVA, N.A; VENTURINI, W.S. (1988). Dual reciprocity process applied to solve bending plates on elastic foundations. In: BREBBIA, C.A., ed. *Boundary elements X: stress analysis*. Southampton, CMP., v.3, p.95-105.
- SOARES, S.M. (1991). *Utilização do elemento finito HSM (hybrid stress model) na análise de pavimentos de edifícios*. São Carlos. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- SOUTHWELL, R.V. (1946). *Relaxation methods in theoretical physics*. London, Oxford University Press.

- STERN, M. (1979). A general boundary integral formulations for the numerical solution of plate bending problems. *Int. J. Sol. Struct.*, v.15, p. 769-782.
- TANAKA,M.; YAMAGIWA,K.; MIYAZAKI,K.; UEDA,T. (1987). Integral equation approach to free vibration problems of assembled plate structures. In: TANAKA,M.; DU,Q., eds. *Theory and applications of boundary element methods*. Oxford, Pergamon Press.
- TEJERINA CALDERÓN, E.; VENTURINI, W.S. (1997). Interação de placas com o meio contínuo através do método dos elementos de contorno. In: JORNADAS SUL AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 28., São Carlos,1997. *Estruturas e fundações*. São Carlos, EESC-USP/ASAEE. v.3, p.1005-1014.
- TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. (1970). *Teoria de placas y laminas*. Trad. F. J. Medina Salanova. Bilbao, España, Ediciones URMO.
- TOTTENHAM, H. (1979). The boundary element method for plates and shells. In: BANERJEE, P.K.; BUTTERFIELD, R., eds. *Developments boundary element methods I*. London, Applied Science Publ., p.173-205.
- TURNER, M.J. et al. (1956). Stiffness and deflection analysis of complex structures. *J. Aero. Science*, n.23, p.805-823.
- VABLE, M.; ZHANG, Y. (1992). A boundary element method for plate bending problems. *Int. J. Solids Structures*, v.29, n.3, p.345-361.
- VAN DER WEEEN, F. (1982). Application of the direct boundary element method to Reissner's plate model. In: BREBBIA, C.A., ed. In: *BETECH 82: Proc., Southampton, England, 1982*. Springer-Verlag.

- VENTSEL, E.S. (1997). An indirect boundary element method for plate bending analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.40, p.1597-1610.
- VIVOLI, J.; FILIPPI, P. (1974). Eigenfrequencies of thin plates and layer potentials. *J. Acoust. Soc. Am.*, v.55, p.562-567.
- WEISS, O.; MOSHAIOV, A. (1993). Vibration analysis of continuous plate structures using boundary integrals. *Comp. & Struct.*, v.47, n.6, p.971-976.
- WESTPHAL JR., T.; BARCELLOS, C.S. (1989). Applications of the boundary element method to Reissner's and Mindlin's plate models. In: TANAKA, M.; BREBBIA, C.A.; HONMA, T., eds. *Boundary elements XII*, Southampton, CMP. p.467-480.
- WONG, G.K.K.; HUTCHINSON, J.R. (1981). An improved boundary element method for plate vibrations. In: BREBBIA, C.A., ed. *Boundary element methods*. Berlin, Springer-Verlag. p.272-289.
- WU, B.C.; ALTIERO, N.J. (1979). A boundary integral method applied to plates of arbitrary plan form and arbitrary boundary conditions. *Comp. & Struct.*, v.10, p.703-707.
- XIAO-YAN, L.; KUANG-MAO, H.; XIUXI, W. (1990). Geometrically nonlinear analysis of Reissner type plate by the boundary element method. *Comp. & Struct.*, v.37, n.6, p.911-916.

8. BIBLIOGRAFIA COMPLEMENTAR

BARRETTO, S.F.A.; CODA, H.B.; VENTURINI, W.S. (1996). Plate bending elastodynamics analysis by boundary elements method using mass matrix approach. In: JOINT CONF. OF ITALIAN GROUP OF COMPUTATIONAL MECHANICS AND IBERO-LATINAMERICAN ASSOCIATION OF COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, Padova, Italia, 1996. *Proc., Padova, AIMETA/AMC.* p.369-372.

OLIVEIRA NETO, L., PAIVA, J.B. (1997). Análise de placas elásticas via MEC com aproximação cúbica para o deslocamento transversal no elemento de contorno. In: CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO DE MÉTODOS COMPUTACIONAIS PARA ENGENHARIA, 18^o, Brasília, 1997., *Anais. Brasília, Universidade de Brasília.* v.4, p. 1707-1716.

OLIVEIRA NETO, L., PAIVA, J.B. (1998). A three nodal parameters bem formulation for building floor slabs analysis. In: WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, 4th, Buenos Aires, Ar, 1998. *Proc.* (resumo publicado)